

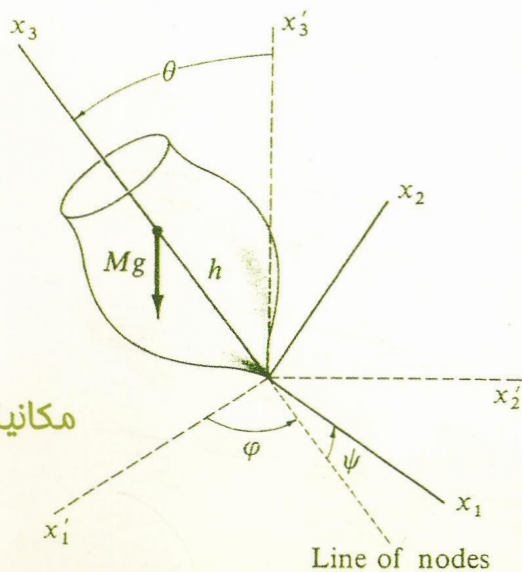
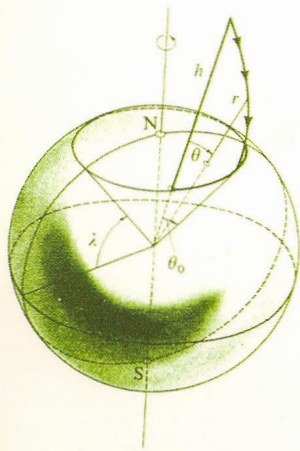


دانشگاه الزهراء

۱۸۴

نویسنده: دکتر محمد رضا سرکرده ای

مروری بر مبانی مکانیک کلاسیک



جلد دوم

مباحث برگزیده

مکانیک کلاسیک پیشرفته

Classical Mechanics

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مروری بر مبانی

مکانیک کلاسیک

جلد دوم

مباحث برگزیده مکانیک کلاسیک پیشرفته

مؤلف:

دکتر محمدرضا سرکرده‌ای

انتشارات دانشگاه الزهراء (س)

۱۳۸۹

فهرست مطالب جلد دوم

صفحه	عنوان
۵	فهرست مطالب جلد دوم
۱۳	فهرست مطالب جلد اول
۱۹	پیشگفتار جلد دوم
۲۷	پیشگفتار جلد اول
۳۳	فصل اول: مقدمه‌ای بر آنالیز برداری
۳۳	مقدمه
۳۴	۱-۱. فضای برداری
۳۵	۱-۲. بردار و اسکالر - جبر برداری
۳۶	۱-۲-۱. جبر برداری
۳۸	۲-۲-۱. برداریکه
۳۸	۳-۲-۱. بردارهای یکه متعامد
۳۹	۴-۲-۱. مؤلفه‌های یک بردار
۴۰	۳-۱. چرخش دستگاه مختصات - تعریف دیگر بردار
۴۲	۴-۱. حاصلضرب اسکالر، برداری، و مختلط
۴۷	۵-۱. تابع برداری - پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع برداری
۴۷	۱-۵-۱. تابع برداری
۴۷	۲-۵-۱. مشتق‌پذیری تابع برداری
۴۸	۳-۵-۱. میدان اسکالر و میدان برداری
۴۹	۴-۵-۱. مشتق راستایی
۵۰	۶-۱. گرادیان - دیورژانس - کرل
۵۰	۱-۶-۱. گرادیان میدان اسکالر
۵۲	۲-۶-۱. دیورژانس یا واگرایی میدان برداری
۵۳	۳-۶-۱. روتاسیونل یا کرل میدان برداری
۵۴	۷-۱. انتگرال برداری
۵۴	۱-۷-۱. انتگرال خط
۵۶	۲-۷-۱. انتگرال خط مستقل از مسیر
۵۶	۳-۷-۱. انتگرال سطح

۵۷ محاسبه انتگرال سطح ۴-۷-۱
۶۰ انتگرال حجم ۵-۷-۱
۶۰ قضیه دیورژانس گوس ۶-۷-۱
۶۱ قضیه استوکس ۷-۷-۱
۶۱ ۸-۱. دستگاه‌های مختصات منحنی‌الخط متعامد خاص
۶۵ ۹-۱. مسائل فصل اول
۶۹ فصل دوم: مقدمه‌ای بر جبر ماتریس‌ها
۶۹ مقدمه
۷۰ ۱-۱. تعریف ماتریس و عملیات اصلی جبر ماتریس‌ها
۷۳ ۱-۲-۲. جمع ماتریس‌ها
۷۳ ۲-۲-۲. ضرب ماتریس
۷۵ ۳-۲-۲. رد یا سرشت ماتریس
۷۵ ۳-۲. ماتریس‌های خاص
۸۱ ۴-۲. وابستگی خطی بردارها
۸۲ ۵-۲. پایه فضای برداری
۸۵ ۶-۲. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس
۸۵ ۱-۶-۲. تعاریف بنیادی
۸۹ ۲-۶-۲. مقادیر ویژه
۹۲ ۳-۶-۲. خواص ماتریس‌های هرمیتی
۹۴ ۷-۲. ماتریس‌های معادل
۱۰۰ ۸-۲. چند کاربرد جبر ماتریسی در فیزیک کلاسیک و کوانتومی
۱۰۰ ۱-۸-۲. ماتریس چرخش
۱۰۲ ۲-۸-۲. ماتریس‌های اسپینی پائولی
۱۰۵ ۹-۲. مسائل فصل دوم
۱۰۷ فصل سوم: پایه‌های مکانیک نیوتنی
۱۰۹ ۱-۳. قوانین حرکت (اصول موضوعه نیوتن)
۱۱۰ ۲-۳. اشکالات عمده در پیش نیوتنی
۱۱۲ ۳-۳. نظریه میدان و نظریه ذره‌ای
۱۱۵ پیوست فصل سوم

۱۱۵ فضا؛ اتر و میدان در فیزیک
۱۱۶ مفهوم فضا در تفکرات دوران کهن
۱۱۶ مفهوم فضا از دیدگاه دکارت و نیوتن
۱۱۸ اتر به عنوان یک واسطه
۱۱۸ تحول در ادراک مفهوم فضا
۱۲۳ فصل چهارم: حرکت ذره در یک بعد؛ نوسان
۱۲۴ ۱-۴. نیروی وابسته به زمان
۱۲۸ ۲-۴. نیروی میرای وابسته به سرعت
۱۳۰ ۳-۴. نیروی پایستار وابسته به مکان
۱۳۵ ۴-۴. مسئله سقوط اجسام در میدان گرانشی
۱۳۵ ۱-۴-۴. حالت اول - سقوط در نزدیکی زمین
۱۳۸ ۲-۴-۴. حالت دوم - سقوط از ارتفاع زیاد
۱۴۱ ۵-۴. مبحث نوسان - نوسان‌های خطی
۱۴۱ ۱-۵-۴. نوسانگر هارمونیک
۱۴۳ ۲-۵-۴. نوسانگر هارمونیک میرا
۱۴۸ ۳-۵-۴. ضریب کیفیت
۱۵۰ ۴-۵-۴. نوسانگر هارمونیک واداشته
۱۵۵ ۶-۴. فضای فاز
۱۵۹ ۷-۴. اصل برهم‌نهی - سری فوریه
۱۶۰ ۸-۴. پاسخ نوسانگرهای خطی به توابع نیروی ضربه‌ای - روش گرین
۱۶۲ ۱-۸-۴. پاسخ به تابع پله‌ای
۱۶۳ ۲-۸-۴. پاسخ به تابع ضربه‌ای - تابع گرین
۱۷۰ ۹-۴. مسائل برگزیده حل شده
۲۰۵ ۱۰-۴. مسائل برگزیده برای حل
۲۱۲ پیوست فصل چهارم - نوسان‌های غیرخطی
۲۲۱ فصل پنجم: حرکت ذره در دو و سه بعد - نیروی مرکزی و حرکت کپلری
۲۲۱ ۱-۵. مقدمه
۲۲۴ ۲-۵. نوسانگر هارمونیک در دو و سه بعد
۲۲۷ ۳-۵. حرکت در اثر نیروی مرکزی

۲۳۵ ۴-۵. قضیه ویربال
۲۳۷ ۵-۵. مسأله کپلر - نیروی مرکزی متناسب با مجذور فاصله
۲۳۸ ۱-۵-۵. معادلات حرکت
۲۴۴ ۲-۵-۵. قوانین حرکت کپلر
۲۴۷ ۳-۵-۵. استخراج فرمول بینه
۲۵۰ ۶-۵. وابستگی زمانی حرکت کپلر - معادله کپلر
۲۵۳ ۷-۵. پایداری مدارهای دایره‌ای
۲۵۹ ۸-۵. بردار لاپلاس - رانگ - لنز
۲۶۲ ۹-۵. مسائل برگزیده حل شده
۲۷۰ ۱۰-۵. مسائل برگزیده برای حل

فصل ششم: حرکت دستگاه ذرات ۳۰۵

۳۰۵ ۱-۶. مقدمه
۳۰۶ ۲-۶. مرکز جرم
۳۰۷ ۳-۶. بقای اندازه حرکت خطی
۳۱۱ ۴-۶. بقای اندازه حرکت زاویه‌ای
۳۱۴ ۵-۶. بقای انرژی
۳۱۶ ۶-۶. کاربرد قوانین بقا
۳۱۶ ۱-۶-۶. مسأله موشک
۳۱۸ ۲-۶-۶. مسأله بیلیچه
۳۲۱ ۷-۶. مسأله دو جسم
۳۲۶ ۸-۶. برخورد
۳۲۷ ۱-۸-۶. برخورد الاستیک
۳۳۱ ۲-۸-۶. برخورد غیرالاستیک
۳۳۴ ۳-۸-۶. برخورد از دید ناظر مرکز جرم
۳۳۹ ۹-۶. مسائل برگزیده حل شده
۳۵۷ ۱۰-۶. مسائل برگزیده برای حل

فصل هفتم: جسم صلب - دوران به دور محور ۳۶۱

۳۶۱ مقدمه
۳۶۲ ۱-۷. جسم صلب

- ۳۶۴ ۱-۷-۱. چرخش جسم صلب به دور محور ثابت
- ۳۶۶ ۱-۷-۲. مثال شاخص آونگ ساده و آونگ مرکب
- ۳۷۴ ۲-۷. مرکز جرم یک جسم صلب
- ۳۷۹ ۳-۷. قضیه محوره‌های متعامد
- ۳۸۲ ۴-۷. نیروی ضربه‌ای و حرکت اجسام صلب
- ۳۸۳ ۵-۷. استاتیک جسم صلب
- ۳۸۴ ۶-۷. مسائل برگزیده حل شده
- ۳۹۳ ۷-۷. مسائل برگزیده برای حل

فصل هشتم: درآمدی بر نظریه میدان کلاسیک - گرانش ۳۹۷

- ۳۹۸ ۱-۸. انتگرال انرژی
- ۳۹۸ ۲-۸. نیروی پایستار
- ۴۰۰ ۳-۸. میدان مگنتو استاتیک
- ۴۰۲ ۴-۸. میدان استاتیک گرانشی
- ۴۰۴ ۵-۸. قانون دیورژانس گوس
- ۴۰۸ ۶-۸. رسانش گرمایی
- ۴۱۰ ۷-۸. معادلات ماکسول
- ۴۱۳ ۸-۸. مسائل برگزیده حل شده
- ۴۲۸ ۹-۸. مسائل برگزیده برای حل

فصل نهم: دستگاه‌های مختصات متحرک - حرکت در دستگاه‌های غیراینرسی ۴۳۳

- ۴۳۳ ۱-۹. مقدمه
- ۴۳۴ ۲-۹. دستگاه‌های مختصات با حرکت انتقالی
- ۴۳۶ ۳-۹. دستگاه‌های مختصات چرخان
- ۴۳۹ ۴-۹. قانون دوم نیوتن در دستگاه‌های غیراینرسی (قضیه کوریولیس)
- ۴۴۴ ۵-۹. تأثیرات ایستایی چرخش زمین بر شتاب اجسام افتان
- ۴۴۷ ۶-۹. مسائل برگزیده حل شده
- ۴۶۲ ۷-۹. مسائل برگزیده برای حل
- ۴۶۵ پیوست فصل نهم: آونگ فوکو

فصل دهم: حساب تغییرات (وردشی) ۴۷۷

۴۷۷ ۱-۱۰. مقدمه
۴۷۸ ۲-۱۰. یک متغیر مستقل و یک متغیر تابع
۴۸۱ ۳-۱۰. چند مثال
۴۸۷ ۴-۱۰. سطح دوار می نیمم
۴۸۸ ۵-۱۰. یک متغیر مستقل و چند متغیر وابسته
۴۹۱ ۶-۱۰. چند متغیر مستقل و یک متغیر تابع
۴۹۵ ۷-۱۰. انتگرال استاسیونر با رعایت قیود - ضرایب نامعین لاگرانژ
۵۰۸ ۸-۱۰. مسائل برگزیده برای حل

فصل یازدهم: مکانیک نیوتنی به شیوه لاگرانژ - معادلات لاگرانژ ۵۱۳

۵۱۴ ۱-۱۱. مختصات تعمیم یافته
۵۱۸ ۲-۱۱. تعریف اندازه حرکت تعمیم یافته
۵۲۱ ۳-۱۱. دستگاه های مقید
۵۲۹ ۴-۱۱. استخراج معادلات لاگرانژ
۵۳۳ ۵-۱۱. هم ارزی قوانی نیوتن و روش لاگرانژ
۵۳۴ ۶-۱۱. مقایسه دو شیوه نیوتنی و لاگرانژی
۵۳۵ ۷-۱۱. نیروهای الکترومغناطیسی و پتانسیل های وابسته به سرعت
۵۳۹ ۱-۷-۱۱. ریسمان کشیده
۵۴۰ ۲-۷-۱۱. معادلات لاگرانژ برای ریسمان مرتعش
۵۴۴ ۸-۱۱. مسائل برگزیده حل شده
۵۷۸ ۹-۱۱. مسائل برگزیده برای حل

فصل دوازدهم: دینامیک هامیلتونی - قضیه نوتر ۵۸۵

۵۸۵ ۱-۱۲. مقدمه
۵۸۶ ۲-۱۲. معادلات کانونیکی حرکت - دینامیک هامیلتونی
۵۹۳ ۳-۱۲. تقارن و قوانین بقا در مکانیک کلاسیک
۵۹۷ ۴-۱۲. یک مثال ساده
۶۰۰ ۵-۱۲. اثبات معادلات کانونیکی هامیلتون براساس حساب وردشی
۶۰۱ ۶-۱۲. مختصات چشم پوشیدنی (حذف شدنی)
۶۰۲ ۷-۱۲. تقارن نوتری
۶۰۶ ۸-۱۲. مسائل برگزیده حل شده

۶۱۵	۹-۱۲. مسائل برگزیده برای حل
۶۱۹	پیوست فصل دوازدهم: مسأله تقارن و قوانین بقا
۶۳۱	فصل سیزدهم: مقدمه‌ای بر آنالیز تانسوری - دینامیک جسم صلب - معادلات حرکت اویلر
۶۳۱	مقدمه
۶۳۲	۱-۱۳. مقدمه‌ای بر آنالیز تانسوری - تانسورهای دکارتی
۶۳۲	۱-۱-۱۳. تبدیل مختصات
۶۳۳	۲-۱۳. تعریف تانسور
۶۳۵	۱-۲-۱۳. بردارهای محوری و قطبی
۶۳۶	۳-۱۳. فضای دوگان (همتا)
۶۴۱	۴-۱۳. دیادیک‌ها (دوتایی‌ها)
۶۴۱	۱-۴-۱۳. تعریف ریاضی دوتایی
۶۴۲	۲-۴-۱۳. مثالی از فیزیک
۶۴۳	۳-۴-۱۳. خواص دوتایی - تانسوریکه
۶۴۶	۵-۱۳. دینامیک جسم صلب
۶۵۱	۱-۵-۱۳. انرژی جنبشی جسم صلب
۶۵۲	۲-۵-۱۳. چرخش جسم صلب در فضا
۶۵۳	۶-۱۳. معادلات حرکت اویلر در فضا
۶۵۹	۷-۱۳. حل پوانسو برای جسم در چرخش آزادانه
۶۶۶	۸-۱۳. زوایای اویلر
۶۷۰	۹-۱۳. قرقره متقارن با یک نقطه ثابت
۶۷۲	۱۰-۱۳. مسائل برگزیده حل شده
۷۰۰	۱۱-۱۳. مسائل برگزیده برای حل
۷۰۳	فصل چهاردهم: از تبدیلات کانونیک تا معادلات هامیلتون - ژاکوبی
۷۰۳	۱-۱۴. تبدیلات کانونیک
۷۰۶	۲-۱۴. انواع مختلف تبدیلات کانونیک
۷۱۲	۳-۱۴. ویژگی‌های تبدیلات کانونیک
۷۱۸	۴-۱۴. فضای فاز و قضیه لیوویل
۷۱۹	۱-۴-۱۴. قضیه لیوویل
۷۲۲	۵-۱۴. معادله هامیلتون - ژاکوبی
۷۲۵	۶-۱۴. بررسی سیستم هنگامی که هامیلتون تابع صریح زمان نیست

۷۲۹ ۷-۱۴. تابع روت
۷۳۲ ۸-۱۴. مسائل برگزیده حل شده
۷۳۷ ۹-۱۴. مسائل برگزیده برای حل
۷۴۱ فصل پانزدهم: دینامیک آشوب و ساختارهای اتلافی
۷۴۱ ۱-۱۵. مقدمه
۷۴۳ ۲-۱۵. دینامیک آشوب
۷۴۳ ۱-۲-۱۵. تعریف آشوب
۷۴۴ ۲-۲-۱۵. حساس بودن به شرایط اولیه
۷۴۴ ۳-۲-۱۵. عدم امکان پیش‌بینی
۷۴۵ ۳-۱۵. شرایط ایجاد حرکت آشوبناک
۷۴۶ ۴-۱۵. چند مثال
۷۵۰ ۵-۱۵. شرط پایداری مساحت (حجم) در فضای فاز
۷۵۳ ۶-۱۵. آنالیز دینامیکی و سری‌های زمانی (طیف توان)
۷۵۴ ۷-۱۵. ساختار اتلافی و خودسازماندهی
۷۵۷ ۱-۷-۱۵. نتیجه‌گیری
۷۵۹ کتابنامه

فهرست مطالب جلد اول

صفحه

عنوان

پیشگفتار سه

فصل اول: اندازه‌گیری، خطاهای فیزیکی و حساب‌های تقریبی

- ۱-۱-۱. مقدمه ۱
- ۲-۱. خطاهای فیزیکی ۲
- ۱-۲-۱. علل خطا ۳
- ۲-۲-۱. خطای مطلق و نسبی ۵
- ۳-۲-۱. خطای مطلق و ماکزیمم و خطای مطلق میانگین ۶
- ۴-۲-۱. محاسبه خطا در اندازه‌گیری‌های غیرمستقیم ۷
- ۳-۱. حساب‌های تقریبی (ارقام بامعنی) ۹
- ۱-۳-۱. گرد کردن اعداد ۱۱
- ۲-۳-۱. جمع و تفریق ارقام بامعنی ۱۱
- ۳-۳-۱. ضرب و تقسیم ارقام بامعنی ۱۳
- ۴-۳-۱. بستگی میان ارقام بامعنی و خطای مطلق و نسبی ۱۵
- ۴-۱. معادله ابعادی ۱۷
- ۵-۱. دستگاه واحدها - ثابت‌های فیزیکی ۲۰
- ۶-۱. کمیت‌ها و واحدهای فیزیکی ۲۳
- ۷-۱. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها ۲۸
- ۸-۱. مسائل برگزیده حل شده ۳۰
- ۹-۱. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل ۳۶

فصل دوم: بردارها

- ۱-۲. مقدمه ۴۰
- ۲-۲. قوانین ترکیب در مجموعه‌ها ۴۱
- ۱-۲-۲. قانون ترکیب داخلی ۴۱
- ۲-۲-۲. قانون ترکیب خارجی ۴۱
- ۳-۲-۲. فضای برداری ۴۲
- ۳-۲. بردار و اسکالر ۴۳

۴۴ ۲-۳-۱. جبر برداری
۴۶ ۲-۳-۲. بردار واحد یا برداریکه
۴۸ ۲-۴. حاصلضرب اسکالر و برداری
۵۲ ۲-۵. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۵۳ ۲-۶. مسائل برگزیده حل شده
۵۶ ۲-۷. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل سوم: حرکت در یک بعد

۵۹ ۳-۱. تعاریف بنیادی
۶۴ ۳-۲. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۶۶ ۳-۳. مسائل برگزیده حل شده
۷۸ ۳-۴. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل چهارم: حرکت در یک صفحه

۸۲ ۴-۱. مسأله حرکت پرتابی
۸۸ ۴-۲. مسأله حرکت دورانی
۹۴ ۴-۳. مسأله حرکت نسبی
۹۶ ۴-۴. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۹۸ ۴-۵. مسائل برگزیده حل شده
۱۰۶ ۴-۶. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل پنجم: دینامیک ذره I

۱۱۱ ۵-۱. مقدمه
۱۱۱ ۵-۲. قانون اینرسی - دستگاه‌های مرجع اینرسی
۱۱۳ ۵-۲-۱. اینرسی
۱۱۴ ۵-۲-۲. دستگاه‌های مرجع اینرسی
۱۱۵ ۵-۲-۳. اصل نسبیت گالیله
۱۱۵ ۵-۳. نیرو و جرم - قانون دوم نیوتن
۱۱۶ ۵-۳-۱. رابطه بین نیرو و شتاب - جرم
۱۲۰ ۵-۳-۲. کاربرد قانون دوم نیوتن
۱۲۱ ۵-۴. قانون سوم نیوتن - عمل و عکس‌العمل

۱۲۳ ۵-۵. اندازه حرکت خطی جسم
۱۲۴ ۵-۵-۱. اصل بقای اندازه حرکت خطی
۱۲۵ ۵-۵-۲. سقوط آزاد اجسام
۱۲۶ ۵-۵-۳. وزن و جرم
۱۲۸ ۵-۶. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۱۳۱ ۵-۷. مسائل برگزیده حل شده
۱۴۰ ۵-۸. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل ششم: دینامیک ذره II

۱۴۷ ۶-۱. مقدمه
۱۴۷ ۶-۲. اصطکاک
۱۴۸ ۶-۲-۱. واکنش قیده‌های سخت - زاویه و ضریب اصطکاک
۱۵۲ ۶-۳. دینامیک حرکت دایره‌ای
۱۵۳ ۶-۴. طبقه‌بندی نیروها
۱۵۵ ۶-۴-۱. نیروهای اینرسی
۱۵۶ ۶-۴-۲. میدان نیرو
۱۵۷ ۶-۵. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۱۶۱ ۶-۶. مسائل برگزیده حل شده
۱۷۲ ۶-۷. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل هفتم: کار و انرژی

۱۷۹ ۷-۱. مقدمه
۱۸۰ ۷-۲. کار
۱۸۴ ۷-۳. انرژی جنبشی و قضیه کار - انرژی
۱۸۷ ۷-۴. توان
۱۸۸ ۷-۵. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۱۹۲ ۷-۶. مسائل برگزیده حل شده
۱۹۷ ۷-۷. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل هشتم: پایستگی (بقای) انرژی

۲۰۱ ۸-۱. نیروی پایستار
۲۰۲ ۸-۲. انرژی پتانسیل

۲۰۶ ۳-۸. بررسی حرکت با روش انرژی
۲۰۷ ۴-۸. جرم و انرژی
۲۰۹ ۵-۸. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۲۱۲ ۶-۸. مسائل برگزیده حل شده
۲۲۱ ۷-۸. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل نهم: مرکز جرم، بقای اندازه حرکت خطی

۲۲۵ ۱-۹. مقدمه
۲۲۶ ۲-۹. مسأله مرکز جرم
۲۲۷ ۳-۹. اندازه حرکت خطی سیستم ذرات
۲۲۸ ۴-۹. بقای اندازه حرکت خطی
۲۲۹ ۵-۹. بررسی سیستم‌هایی با جرم متغیر
۲۳۱ ۶-۹. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۲۳۴ ۷-۹. مسائل برگزیده حل شده
۲۴۳ ۸-۹. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل دهم: برخورد

۲۴۸ ۱-۱۰. مفهوم فیزیکی برخورد و نیروهای ضربه‌ای
۲۴۹ ۱-۱-۱۰. نیروی ضربه‌ای و تغییر مکانیکی در جسم
۲۵۰ ۲-۱۰. بقای اندازه حرکت خطی در برخورد
۲۵۱ ۳-۱۰. انواع برخورد
۲۵۳ ۴-۱۰. Q فعال و انفعال و معادله Q
۲۵۴ ۵-۱۰. سطح مقطع مؤثر و برخورد در فیزیک هسته‌ای
۲۵۶ ۶-۱۰. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۲۵۹ ۷-۱۰. مسائل برگزیده حل شده
۲۶۷ ۸-۱۰. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل یازدهم: سینماتیک دورانی

۲۷۱ ۱-۱۱. مقدمه
۲۷۲ ۲-۱۱. سینماتیک دورانی
۲۷۵ ۳-۱۱. دوران با شتاب زاویه‌ای ثابت
۲۷۷ ۴-۱۱. رابطه بین حرکت دورانی و انتقالی

- ۵-۱۱. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها ۲۸۰
- ۶-۱۱. مسائل برگزیده حل شده ۲۸۳
- ۷-۱۱. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل ۲۹۰

فصل دوازدهم: دینامیک دورانی (۱)

- ۱-۱۲. مقدمه ۲۹۴
- ۲-۱۲. گشتاور ۲۹۴
- ۳-۱۲. اندازه حرکت زاویه‌ای ۲۹۶
- ۴-۱۲. پایداری اندازه حرکت زاویه‌ای ۲۹۹
- ۵-۱۲. انرژی جنبشی دوران و گشتاور ماند ۳۰۰
- ۶-۱۲. حرکت غلتشی (ترکیب حرکت انتقالی و دورانی) ۳۰۲
- ۷-۱۲. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها ۳۰۳
- ۸-۱۲. مسائل برگزیده حل شده ۳۰۷
- ۹-۱۲. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل ۳۱۰

فصل سیزدهم: دینامیک دورانی (۲)

- ۱-۱۳. مقدمه ۳۱۵
- ۲-۱۳. فرفره و ژيروسکوپ ۳۱۵
- ۳-۱۳. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها ۳۱۹
- ۴-۱۳. مسائل برگزیده حل شده ۳۲۲
- ۵-۱۳. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل ۳۲۳

فصل چهاردهم: تعادل اجسام صلب

- ۱-۱۴. مقدمه ۳۲۶
- ۲-۱۴. شرایط تعادل ۳۲۷
- ۳-۱۴. مرکز گرانش ۳۲۹
- ۱-۱۴-۳. تغییرات ظاهری وزن ۳۳۰
- ۲-۱۴-۳. تعادل پایدار - ناپایدار و خنثی در میدان گرانشی ۳۳۱
- ۱-۱۴-۳. یک آزمایش ساده ۳۳۲
- ۴-۱۴. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها ۳۳۳
- ۵-۱۴. مسائل برگزیده حل شده ۳۳۸
- ۶-۱۴. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل ۳۴۶

فصل پانزدهم: نوسان

۳۵۰ ۱-۱۵. مقدمه
۳۵۳ ۲-۱۵. حرکت هارمونیک ساده
۳۵۴ ۱-۲-۱۵. معادلات حرکت هارمونیک ساده
۳۵۶ ۳-۱۵. کاربردهای حرکت هماهنگ ساده
۳۵۶ ۱-۳-۱۵. آونگ ساده
۳۵۸ ۲-۳-۱۵. آونگ فیزیکی
۳۵۹ ۴-۱۵. نوسان‌های میرا و واداشته
۳۶۱ ۵-۱۵. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۳۶۴ ۶-۱۵. مسائل برگزیده حل شده
۳۷۲ ۷-۱۵. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

فصل شانزدهم: گرانش

۳۷۶ ۱-۱۶. مقدمه
۳۷۸ ۲-۱۶. قانون جهانی گرانش نیوتن
۳۸۰ ۳-۱۶. تغییرات شتاب گرانشی
۳۸۳ ۴-۱۶. حرکت ماهواره‌ای
۳۸۴ ۵-۱۶. میدان گرانشی
۳۸۶ ۶-۱۶. بزرگی نیروی سیاره‌ای
۳۸۸ ۷-۱۶. انرژی پتانسیل گرانشی
۳۹۰ ۸-۱۶. جرم اینرسی و جرم گرانشی
۳۹۲ ۹-۱۶. راهنمای پاسخ به پرسش‌ها
۳۹۶ ۱۰-۱۶. مسائل برگزیده حل شده
۳۹۸ ۱۱-۱۶. پرسش‌ها و مسائل برگزیده برای حل

۴۰۲ پیوست فصل ۱۶
۴۱۵ فهرست راهنما
۴۳۰ کتابنامه

به نام خدا

پیشگفتار جلد دوم

«علم کوششی است برای تطبیق تجربه حسی نامنظم و متنوع با یک سیستم فکری که منطقاً متحدالشکل شود. در این سیستم تجربیات واحد باید طوری با جنبه تئوریک و نظری همبسته باشند که هماهنگی آنها متمایز و متقاعدکننده باشد»

«آلبرت اینشتین»

بی‌هیچ تردید بینش نیوتنی اگر نه تمامی جهان فیزیکی ما، که حداقل بخش عمده‌ای از آن را در بر گرفته است. از این رو تفهیم این جهان‌بینی، و لاقلاً آموزش محدود مکانیکی آن با نام خاص مکانیک، بر هر علاقمند به فیزیک ضروری به نظر می‌رسد و در راه پرفراز و نشیب آموزش فیزیک از آن گریزی نیست.

در پیشگفتار جلد اول اشاره شد که هدف نخستین و عمده این مجموعه، نمایش و عرضه ایده‌های مهم در مکانیک کلاسیک است آن طور که فراخور فیزیک امروزی باشد. به واقع اهمیت واقعی مکانیک کلاسیک برای فیزیک‌پیشگان، پیش از آن که گستره وسیع کاربردی آن باشد، در نقش آن به عنوان پایه‌ای است که مخروط فیزیک نوین بر روی آن بنا شده است.

از نظر تاریخی مکانیک نخستین شاخه فیزیک بود که به عنوان دانشی دقیق بسط یافت. وقتی می‌گوییم فیزیک علمی دقیق است یعنی قوانین آن با معادلاتی ریاضی نشان داده می‌شود که قادر

است نتایج سنجش‌های دقیق کمی را بیان و پیش‌بینی کند. قدمت این شاخه از علم تا فراسوی تاریخ مدون است. همین قدر اشاره می‌شود که دانشمندان یونانی قوانین اهرم‌ها و شاره‌های ترازمند را در سه قرن پیش از میلاد مسیح می‌شناختند.

گسترش فوق‌العاده فیزیک در سه قرن گذشته با کشف قوانین مکانیک توسط گالیله و نیوتن در نیمه سده هفدهم آغاز شد.

قوانین الکترومغناطیس حدود دویست سال بعد به وسیله جیمز کلارک ماکسول ارائه شد. این دو نظریه‌های اساسی فیزیک کلاسیک هستند.

فیزیک نسبیتی که با کار اینشتین در ۱۹۰۵ آغاز شد و فیزیک کوانتومی که با تلاش‌های هایزنبرگ و شرودینگر در ۱۹۲۶-۱۹۲۵ بنیاد شد، تعدیل و فرمول‌بندی مکانیک و الکترودینامیک را برپایه مفاهیم جدید فیزیکی در پی داشته‌اند. با این همه ستون‌های فیزیک جدید بر مبانی وضع شده توسط فیزیک کلاسیک قرار دارد و برای بررسی فیزیک نسبیت و فیزیک کوانتومی درک عمیق و درست از اصول مکانیک کلاسیک و الکترودینامیک کلاسیک ضروری است. همچنین در بیشتر کاربردهای علمی مکانیک در شاخه‌های گوناگون مهندسی، اخترشناسی، و دیگر کاربردهای آن هنوز قوانین مکانیک کلاسیک را می‌توان بی‌هیچ تغییر یا اندک تغییری به کار گرفت. در واقع یکی از اصول مهم و بنیادی، فرمول‌بندی نظریه‌های جدید فیزیکی و سازگاری آنها با نظریه‌های قدیمی‌تر است، آن هنگام که در مورد پدیده‌هایی به کار گرفته شوند که نظریه‌های قدیمی‌تر در باره آنها نتایج درست به دست می‌دهند (اصل هم‌ارزی).

در سال‌های اخیر اهمیت درس مکانیک به عنوان یکی از عمده‌ترین دروس دانشجویان فیزیک در سطح کارشناسی و کارشناسی ارشد بیش از پیش آشکار شده است. به ویژه از این درس به عنوان مقدمه‌ای بر روش‌های فیزیک نظری و پیش‌نیاز لازم برای مطالعه مکانیک کوانتومی یاد می‌گردد. با پیشرفت‌های چشمگیر در مقوله آشوب و پیچیدگی در سیستم‌های دینامیکی، حوزه مکانیک کلاسیک باز هم به عنوان موضوع پژوهشی مهم و برجسته مطرح شده است و واقعاً جای آن دارد که نقش آن در آموزش دانشجویان فیزیک مورد ارزیابی قرار گیرد.

باتوجه به نکات گفته شده کتاب‌های بسیاری در زمینه فیزیک کلاسیک و به ویژه مکانیک به رشته تحریر درآمده است و حتی بزرگان فیزیک که به نگارش دوره‌های به یادماندنی فیزیک همت

گماشتند همچون سمرفلد و لاندائو، دیباچه تلاش خود را به ارائه مکانیک بر پایه تفکر نیوتنی اختصاص داده‌اند، و سپس شیوه‌های جدیدتری را برای بررسی اصول مکانیک کلاسیک به کار گرفته‌اند که این خود صرفاً روش‌های متفاوت است نه نظریه‌های جدید فیزیک، همچون شیوه‌های لاگرانژ و هامیلتون.

در چند دهه گذشته نیز کتب بالارزشی در زمینه آموزش مکانیک نیوتنی نوشته شده است. از آن جمله کتاب‌های سایمون^۱ و ماریون^۲ در سطحی قابل مقایسه با هم؛ بارگر و اولسون^۳ نه هم‌تراز آنها؛ فاولز^۴ و آریا^۵ در مقطع پایین‌تر؛ فرنچ^۶ در سطحی متوسط پایین؛ گلدشتین^۷، هند و فینچ^۸، و آرنولد^۹ با ارزشی والاتر از آنها.

در این رهگذر حتی در مورد سایمون و ماریون و فاولز چند تجربه برگردان فارسی در سال‌های نه چندان دور صورت گرفته است و هنوز به جرأت می‌توان گفت که علیرغم پاره‌ای دشواری‌ها و ایرادهایی که گرفته می‌شود (از جمله این که مثال‌های مطرح‌شده در کتاب سایمون بیشتر به فیزیک اتمی و الکترومغناطیس می‌پردازد تا مکانیک) کتاب‌های ماریون و سایمون در ردیف یکی از بهترین متن‌های استاندارد قابل قبول در دوره کارشناسی و به قول خود سایمون در سطحی متوسط جای می‌گیرد.

آنچه به ویژه این کتاب‌ها را نسبت به همتاهای خود در استفاده کنونی ممتاز میکند بخشی مربوط به مسائل مطرح شده در این کتاب‌ها است و همانگونه که سایمون می‌گوید انتخاب موضوعات و مسائل برخورد با آنها در سراسر کتاب گرایش به تأکید بر رخساره‌های جدید دارد و در چارچوب مکانیک کلاسیک تا آنجا که امکان دارد به بررسی کاربردهای مکانیک در فیزیک می‌پردازد. ترتیب مسائل انتهایی هر فصل با مباحث مطرح‌شده متناسب است. کوشش شده است تا مسائل به اندازه

-
1. Symon
 2. Marion
 3. Barger and Olson
 4. Fowles
 5. Ariya
 6. Frevch
 7. Goldstein
 8. Hand and Finch
 9. Arnold

کافی متنوع باشند. حل مسائل نمایشگر این است که متن درس به خوبی تفهیم شده است. البته این مطلب لزوماً درست نیست چرا که در پاسخگویی به اغلب مسائل علاوه بر درک صحیح متن به بینش فیزیکی نیز نیاز داریم. ذکر این نکته ارزشمند است که در ویرایش جدید کتاب ماریون نگرشی عمیق در مباحث صورت گرفته و بعضی مطالب دینامیک آشوب به جهت فراگیر شدن موضوع به آن اضافه شده است.

براساس انگیزه‌های اصلی ارائه و انتخاب این کتاب و کتاب سایمون به عنوان مراجع مصوب و در دسترس دانشجویان فیزیک در دروس مکانیک تحلیلی I و II، در مجموعه پیش رو کوشش شده است تا با نگرش مختصر اما مستدل به مطالب بیان شده در فصول مختلف این مجموعه، ضمن گزینش شیوه مستقل، پاره‌ای مسائل ممتاز پایان فصل این مراجع و برخی دیگر انتخاب و حل شود یا راهنمایی لازم برای پاسخگویی ارائه گردد. جهت دستیابی به نتیجه مطلوب از کتاب فاولز و بارگر و کتب دیگری تقریباً همتای آنها مسائلی انتخاب و حل می‌شود. در پایان نیز تعدادی مسأله فراخور مطالب هر فصل برای حل برگزیده و ارائه می‌شود با این نیت که حتی‌الامکان پاسخ این مسائل نیز در دسترس دانشجویان قرار گیرد.

شیوه نگرش تعمیم همان دیدگاه پیشین به گونه‌ای تحلیلی‌تر است که در مجموعه نخست برگزیده شد و کوشش بر این است چنانچه در مباحثی با دشواری یا ابهام مواجه شدیم از منابع و مراجع مطمئن دیگر موضوع روشن‌تر و شفاف‌تر به خواننده منتقل گردد.

در مجموعه پیش رو که دومین جلد از تلاش نگارنده در بررسی منتقدانه دوره مکانیک کلاسیک است از مباحث زیر سخن می‌گوییم:

فصل اول و دوم مقدمه‌ای بر آنالیز برداری و جبر خطی در حد لازم را در بر می‌گیرد. گرچه دانشجو مطالب این فصل‌ها را به طور مختصر می‌بیند اما احتمالاً اولین بار است که از آن در یک درس نظری (پیش از درس ریاضی فیزیک و نظریه الکترومغناطیس) استفاده می‌کند. ترجیح می‌دهیم که این دوره با مرور ریاضیات آغاز شود و در این مورد شیوه ماریون منطقی‌تر از سایمون به نظر می‌رسد که کتاب اخیر فقط در بخشی از فصل سوم خود به بیان جبر برداری پرداخته است. در فصل سوم به مبانی بنیادی فیزیک نیوتنی نگاهی دوباره می‌اندازیم و از پیش‌فرض‌ها و محدودیت‌های این بینش سخن می‌گوییم. در فصل چهارم، به حرکت در یک بعد می‌پردازیم و بعضی شیوه‌های استوار

تحلیلی در حل مسائل ذکر می‌شود. در فصل پنجم مطالعه حرکت ذره در دو و سه بعد با تأکید عمده بر نیروهای مرکزی ادامه می‌یابد. در فصل ششم حرکت دستگاه ذرات مورد بررسی قرار می‌گیرد و بلافاصله در فصل هفتم از جسم صلب سخن می‌رود. در فصل هشتم به بررسی مجدد گرانش از دیدگاه تحلیلی می‌پردازیم و نظریه میدان کلاسیک مورد بحث قرار می‌گیرد. بالاخره در فصل نهم حرکت در دستگاههای مختصات متحرک مورد توجه واقع می‌شود. در فصل دهم عنوان مجزای «مباحثی در حساب وردشی» مطرح می‌شود که قبل از مطالب مربوط به اصل هامیلتون و مکانیک لاگرانژی است. این فصل این امکان را به ما می‌دهد که بر نقش مهمی که اصول اپتیمم در فیزیک دارند تأکید کنیم. ضمن آن که تمرین سودمندی برای دانشجو در یادگیری فرمول‌های اویلر- لاگرانژ است. جای چنین مبحثی در کتاب سایمون خالی است ولی ماریون به خوبی ارزش آن را دریافته است همانگونه که در بررسی مکانیک کلاسیک پیشرفته گلدشتین و نیز مرجع هند و فینچ این مطلب مرود بحث و بررسی قرار گرفته است. فصل یازدهم به مهمترین بحث مکانیک تحلیلی یعنی بررسی شیوه لاگرانژی و استخراج معادلات اویلر - لاگرانژ اختصاص یافته است و در ادامه آن در فصل دوازدهم معادلات هامیلتون استخراج می‌شود. همچنین در ادامه فصل سیزدهم از حرکت جسم صلب در فضا و معادلات اویلر سخن می‌گوییم. فصل چهاردهم به مقوله تبدیلات کانونیک می‌پردازد. در نهایت در فصل پانزدهم، به طور مختصر از نظریه آشوب، خود سازماندهی و ساختارهای اتلافی سخن می‌رود و مجموعه مورد بحث پایان می‌پذیرد.

نظر به اهمیت ویژه مبحث نوسان و بررسی خواص نوسانگرهای هارمونیک و نیز انگیزه طرح مسأله نوسان‌های غیرخطی، بخشی مستقل به این مقوله اختصاص می‌دهیم. جایگاه این مبحث به ویژه به طور مستقل در کتاب سایمون خالی است ولی در کتاب ماریون می‌توان این خلا را تا حدودی پر شده یافت. همچنین مسأله تقارن و بررسی قوانین بقا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که مجدداً در هر دو مرجع عمده جایگاهی مستقل برای آن نمی‌یابیم هرچند هر دو مأخذ به این مطلب، نه به عنوان فصلی مستقل بلکه به منزله بخشی از یک فصل می‌پردازند. در این مجموعه سعی می‌شود که به مقوله تقارن و قوانین بقا در فیزیک کلاسیک با تفصیل بیشتری بپردازیم و سپس از این ویژگی‌ها در سیستم‌های کوانتومی و فیزیک جدید سخن بگوییم.

ظهور پدیده‌هایی چون آشوب و سیستم‌های پیچیده، تغییر بنیادی در درک ما از عالم به وجود

آورده‌اند. این مباحث محقق می‌سازد که بسیاری از سیستم‌هایی که قرن‌ها با موفقیت مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، در واقع حالت‌هایی بسیار خاص از سیستم‌های دینامیکی‌اند. در این که در منظومه شمسی ما آشوب است یادآور این امر است که پیچیدگی امری عادی باید باشد. به موازات بررسی تحلیلی، استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی جدید و جامع (مانند متمتیکا، میپل، متکد، متلپ و غیره) هم امکان یافتن جواب‌های تحلیلی مسائل استاندارد با سرعت بیشتری را فراهم کرده است و هم امکان کاربرد روش‌های عددی در موقعیت‌های جدید را.

در ویرایش‌های جدید کتاب‌هایی چون ماریون (۱۹۹۵) و فاؤلز (۱۹۹۹) و نیز کتاب بارگر و اولسون (۱۹۹۸) سعی شده موضوعات جدید مانند آشوب به گونه‌ای کیفی وارد محتویات درس شود یا این که رهیافت‌های آموزشی به موضوعات استاندارد شده را به کمک رایانه‌ای بیان کنند.

کوشش می‌شود در فرصتی دیگر این نوآوری‌ها و بینش‌ها را به ترتیب مطرح و مورد بررسی قرار دهیم. از اینرو فصل عمده و شاخص دیگر به مبحث آشوب می‌پردازد که کوشش می‌شود به طور مختصر اما مستدل در این مجموعه از آن سخن بگوییم.

در اندیشه مباحث مکانیک کلاسیک پیشرفته و ادامه کار و پوشش مطالب جلد سوم این مجموعه بودم. کتب مرجع استاندارد چون گلدشتین را بالا و پایین کردم و فراز و فرود آن را به دقت نظاره کردم. شباهت امیدبخشی با گستره مطالب جلد دوم یافتم هرچند دقت فیزیکی و ریاضی آن افزونتر و وسواس علمی آن دقیق‌تر است. ولی معذک با کمی اغماض و چشم‌پوشی می‌توان به همین مطلب و در نهایت با افزودن بخش‌هایی به آن کار بررسی کتاب کلاسیک پیشرفته را در همین جلد به انجام رساند. مثلاً آن هنگام که در مورد نیروهای مرکزی و قوانین کپلر بحث می‌کنیم مسائل و مطالب کتب سایمون و ماریون را با تفصیل بیشتر گسترش می‌دهیم و مطالب اضافی در حد کتاب گلدشتین [همچون «قضیه برتران»] را با ستاره و به عنوان بخش‌های اختیاری نشانه‌گذاری می‌کنیم. همین ایده را در مورد مسایل پایان فصل‌ها انجام می‌دهیم. بدین ترتیب به طور قطع بر آن شدم که مجموعه بررسی تحلیلی را در همین جلد به پایان برسانم، ضمن آن که از دوباره‌کاری و طولانی کردن بیهوده زمان پرهیز کنم. جهت کامل شدن بحث درخور مکانیک کلاسیک پیشرفته فصلی مربوط به نظریه هامیلتون - ژاکوبی در پایان تبدیلات کانونیک و معادلات هامیلتون ارائه می‌شود آنچه که در کتب ماریون و سایمون یافت نمی‌شود.

در مورد مرجع اخیر، یعنی کتاب گلدشتین، چنانچه سیر کوتاهی در ویرایش سوم چاپ سال ۲۰۰۲ انجام دهیم درمی‌یابیم که در این ویرایش نسبت به ویرایش بیست سال پیش آن تغییر چندانی صورت نگرفته است جز آن که نام دو همکار جدید را با خود به دنبال دارد و فصل جدید «آشوب» و ضمیمه جدید «گروهها و جبر» به آن اضافه شده است. البته کوشش شده در جای‌جای کتاب بخش‌هایی جدید اضافه گردد مانند بخشی در مورد آونگ میرای رانده شده و یا اتصال جوزفسون در فصل ششم یا این که در بخش ۳-۷ مطالبی در مورد مدارهای کپلری افزوده شده است. اما به هر حال جای کتابنامه مفصل و سودمند ویرایش اول و دوم آن همچنان خالی می‌ماند.^۱

بدین ترتیب کتاب عمدتاً همچنان برای بررسی مکانیک علاقمندانی است که نیاز به فراگیری پس‌زمینه لازم جهت راهیابی به حوزه مکانیک کوانتومی دارند. همین جا اشاره می‌شود کسانی که علاقمند به مکانیک نظری جدید، در چارچوب هندسه دیفرانسیل و گروه‌های لی، هستند می‌توانند از کتاب ارزشمند آرنولد^۲ و یا فرانک سینگر^۳ استفاده کنند.

این بررسی‌ها و پژوهش‌ها، اگر نه آغاز، حداقل ادامه سفری رماتیک در درک و دریافت زیبایی و سادگی در طبیعت پیچیده است. در این سفر پرماجرا در نهایت این پرسش مطرح می‌شود که «چگونه می‌توان میان شکاف بودن و شدن پلی برقرار ساخت؟ تا چه حدی امروزه می‌توانیم توصیفی از نظر منطقی همدوس، اگر چه لزوماً ناکامل، از جهان فیزیکی ارائه دهیم؟»

مؤلف:

محمدرضا سرکرده‌ای

۱۳۸۸

۱. در این رابطه به مآخذ زیر مراجعه شود

Stephen R. Addisio: Am. J. Phys. Vol. 70, No, 9, September 2002, p. 782.

2. Arnold "Mathematical Methods of Classical Mechanics" Springer, 2nd edition, 2000

3. S. Frand Singer: "Symmetry in Mechanics; A Gentle Modern Introduction, Birkhause, 2004.

به نام خدا

پیشگفتار جلد اول

در این مجموعه از قدیمی‌ترین دانش بشر یعنی مکانیک سخن می‌گوییم و به ویژه به بینش نیوتنی می‌پردازیم و براساس قوانین جاافتاده آن در حرکت به حل مسائل مکانیک می‌پردازیم. هدف نخست این مجموعه، نمایش و عرضه ایده‌های مهم در مکانیک کلاسیک است آن طور که فراخور فیزیک امروزی باشد. به واقع اهمیت واقعی مکانیک کلاسیک برای فیزیک‌پیشگان، پیش از آن که در گستره وسیع کاربردهای آن باشد، در نقش آن به عنوان پایه‌ای است که مخروط فیزیک نوین بر روی آن بنا شده است. از اینرو در بررسی تحلیلی مکانیک کلاسیک می‌توان بیشتر بر جنبه‌هایی از فیزیک تأکید ورزید که در مکانیک کوانتومی و نسبیت حائر اهمیت هستند به ویژه قوانین بقا و رابطه بین تقارن و قوانین بقا که به نحوی در تمام نظریه‌های فیزیکی نقش اساسی دارند. این مهم در جلد دوم این مجموعه صورت تحقق به خود می‌گیرد.

یکی از نکات عمده و برجسته این است که چه چیزی و چگونه به دانشجوی فیزیک در سرآغاز تلاش خود بیاموزیم. شاید طبق اعتقاد فاینمن بهترین نحوه آموزش فیزیک موقعی است که رابطه‌ای انفرادی و مستقیم میان دانشجو و یک معلم خوب برقرار باشد - وضعیتی که در آن دانشجو در باره عقاید و ایده‌ها بحث می‌کند، راجع به اشیاء اندیشه می‌کند، و در باره آنها سخن می‌گوید. این غیرممکن است که صرفاً با نشستن در یک کلاس درس یا حتی فقط با حل مسائل و تصحیح آنها

بتوان چیزی آموخت. اما در دوران جدید ما تعداد زیادی دانشجو برای تعلیم داریم که ناگزیریم سعی در یافتن جانشین و جایگزین برای حالت ایده‌آل باشیم.

از آنجا که تمامی قوانین اساسی دنیای فیزیک را نمی‌دانیم و نیز بیان صحیح قوانین فیزیک درگیر ایده‌های بسیار نآشنایی است که برای توصیف آنها ریاضیات پیشرفته‌ای مورد نیاز است، بنابراین برای درک معنای حتی یک کلمه به آموزش مقدماتی مفصلی نیاز داریم، از این رو تنها می‌توانیم گام به گام جلو برویم. در واقع در هر گام نیز هرچه را که می‌دانیم تنها نوعی تقریب است چرا که «ما می‌دانیم که تمام قوانین را به واقع نمی‌شناسیم.»

در متن پیش رو، حرکت گام به گام، و پیگیری مطالب باتوجه به روند تکاملی مکانیک کلاسیک، از مفاهیم ساده به مفاهیم دشوار است.

لازم است یادآور شویم که در بعضی متون فیزیک کلاسیک مانند دوره لاندائو، رهیافت آنها عدم استفاده از روند تاریخی و تکاملی است. آنها از همان ابتدا بر پایه عمومی‌ترین اصول فیزیک کار کرده‌اند یعنی اصل نسبیت گالیله و اصل کمترین کنش هامیلتون. اعتقاد آنها بر این است که فقط با این رهیافت به راستی می‌توان یک روش منطقی درست بنا کرد و از تعاریف کمیت‌های بنیادی مکانیک پرهیز کرد. به نظر این روش زمانی مناسب است که شخص آگاهی اولیه را از مبانی ریاضیات و فیزیک داشته باشد و به هر حال در سطح پیشرفته‌تر می‌توان از آن سخن گفت. همچنین برخی را باور بر این است که در نخستین مرحله از دینامیک، یا کمی جلوتر، از انرژی و ماده، شروع کنیم. اما به سبب رعایت ترتیب متعارف و سنتی در متون شناخته شده و نیز اتخاذ شیوه گام به گام، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

عنوان فصل‌ها بر اساس مصوبه‌های ستاد انتخاب شده است. شیوه بررسی و نگرش هر فصل مشابه و یکسان بوده است. از مباحث اولیه مکانیک، سینماتیک و حرکت در یک و دو بعد آغاز و سپس به قانون بنیادی $\vec{F} = m\vec{a}$ می‌پردازیم. قوانین اساسی بقای انرژی و اندازه حرکت مطرح می‌شود و از دینامیک ذره راهی به دینامیک سیستم ذرات می‌گشاییم. از دینامیک دوران سخن می‌گوییم. مقدمات تعادل نیروها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و مبحث عمده نوسان را مطرح می‌کنیم و سرانجام با بحثی در باره قانون جهانی گرانش جلد اول مجموعه را به پایان می‌بریم.

کوشش بر این است که عمدتاً اگر نه همه، لاقلاً به پاره‌ای پرسش‌های مطرح شده در کتاب‌هایی

چون هالیدی پاسخ دهیم و برخی مسائل برگزیده هر فصل با ارائه حل توضیح داده شود بی آنکه در این رهگذر اشاره ای مستقیم به پرسشی ویژه شده باشد. یافتن پرسش خاص و پاسخ مربوط به آن از بخش راهنمای پرسش‌ها به دانشجو واگذار می‌شود تا بدین وسیله توانایی خود را در یافتن پرسش خاص و پاسخ متناسب با آن بیازماید.

بدیهی است که یافتن پرسش و پاسخ خاص مرتبط با هم با کمی وسواس و حوصله امکان‌پذیر است. این جستجوی علمی سبب تقویت ذهنی دانشجو می‌شود. شخصاً با تجربه روی تعدادی دانشجو و پس از بحث و گفتگو با آنها این شیوه را برگزیدم، چرا که جز این کاری همانند حل‌المسائل صورت می‌گرفت که البته از آن گریزان بودم. ذکر این نکته نیز بالارزش است که بسیاری از پرسش‌های کتاب‌هایی چون هالیدی را از چند جنبه می‌توان به آنها نگریست و پاسخگویی به یک سؤال به طور عام با در نظر گرفتن تمام جنبه‌ها می‌تواند بیشتر آموزنده باشد. هر چند احاطه به تمامی جهات یک پرسش و پاسخ عمومی شاید در بسیاری موارد از توان علمی نگارنده خارج باشد اما از سوی دیگر پرداختن به تمامی جنبه‌ها قصه‌ای طولانی می‌شود که خواننده جوان ما را ممکن است زود از مطالعه خسته کند.

این مجموعه در دو جلد ارائه می‌شود. در نخستین جلد آن به بررسی مسائلی در سطح کتاب‌هایی همچون هالیدی و فرنچ و اوهانیان می‌پردازیم. سپس در جلد دوم مسائل مکانیک کلاسیک (تحلیلی) براساس کتاب‌های سایمون و ماریون بررسی می‌شود. و در ادامه کار در همین جلد پاره‌ای از مسائل و مطالب برگزیده کتاب گلدشتین (مکانیک کلاسیک پیشرفته) تحلیل می‌گردد.^۱ جهت آشنایی کامل با مباحث فیزیکی، در ابتدای هر فصل مقدمه‌ای در ارتباط با موضوع فیزیکی آن فصل به تناسب اهمیت موضوع، بیان می‌شود و سپس مسائل مربوط به به متن‌های گفته شده و نیز مسائلی دیگر از کتاب‌های هم‌سطح آنها حل می‌شود و در پایان هر فصل تعدادی مسأله فراخور موضوع مورد بررسی برای حل ارائه می‌شود.

در آغاز کار عمدتاً کتاب هالیدی را مدنظر قرار داده‌ام چرا که باور بسیاری از منتقدان فیزیک پایه بر این است که علیرغم پاره‌ای انتقادات شاید بتوان گفت هنوز بهترین کتاب درسی است که تاکنون

۱. در این باره به پیشگفتار جلد دوم مراجعه کنید.

در فیزیک مقدماتی نوشته شده است.^۱ هرچند خود هالیدی و رزنیگ (۱۹۸۰) به نحوی اعتراف کرده‌اند که در ارائه آنها از قوانین حرکت - یعنی همان ارائه سنتی - آشفتگی‌هایی وجود دارد. این میبختی است که از دیرباز در تدریس فیزیک پایه مطرح بوده است. مثلاً در ارائه مفاهیم مناسبی برای نیرو، جرم و شتاب هنوز اتفاق نظر و توافق همه‌جانبه وجود ندارد و اغلب به درک و شهود می‌پردازیم تا بینش علمی آموزشی. چنانچه اولری^۲ در ۱۹۴۷ می‌نویسد:

«مبحث دینامیک در بیشتر کتب درسی فیزیک عمومی تقریباً به همان صورت مطرح می‌شود که نیوتن در دو قرن و نیم پیش مطرح کرد. کمیت‌های مهم به طور صریح تعریف نشده‌اند و بر شهود و تشبیه انسان‌انگارانه بیش از حد لازم تکیه کرده شده است. به طور خلاصه بیان این نظریه فاقد دقت و صراحت لازم است.»

یک بخش که بنا بر اعتقاد بعضی از اساتید و دانشجویان و در دوران شکوفایی فن‌آوری رایانه‌ای، طرح آن ضروری به نظر می‌رسد استفاده از رایانه در بررسی مسائل دینامیکی است. رهیافتی جامع بر دینامیک کلاسیکی به کمک رایانه مقوله‌ای است قابل تأمل. امیدواریم بتوانیم حداقل این باب را بگشاییم و پژوهش عمیق‌تر را به فرصتی دیگر موکول کنیم، یعنی در حل مسائل از طریق سنتز روش‌های عددی و نمودارهای رایانه‌ای از این فن‌آوری بهره بگیریم.

در مورد بررسی انتقادی اشاره می‌شود که انتخاب مطالب، نوع کار و شیوه نگارش در این مجموعه عمدتاً به منزله نوعی نقد و بررسی تلقی شده است. البته روند انتقادی شاید در مورد جلد اول کمتر مشاهده می‌شود چرا که باتوجه به مطالب گفته شده در بالا پذیرا شده‌ام که همچنان متن هالیدی هنوز از شایسته‌ترین متون مکانیک مقدماتی کلاسیک است و سعی شده که بافت و ساختار عمومی کتاب همچنان حفظ شود. فقط در جاهایی که احتمالاً نارسایی‌هایی وجود دارد به رهیافت‌های دیگری نیز متوسل شده‌ام. روند نقد و کنکاش موضوعات عمدتاً در جلد دوم بهتر به چشم می‌خورد چرا که اساساً آنچه در کل این مجموعه مشاهده می‌شود تلویحاً روش انتخابی و سلیقه نگارنده را به عنوان الگوی برگزیده نوشتاری برای تدریس و مطالعه مکانیک کلاسیک نشان می‌دهد: طرح و ارائه به گونه‌ای به خود وانهاده است که شیوه انتخاب و نقد و بررسی را در خود دارد.

1. Robert Weinstock: Am. J. Phys. 29,698 (1961).

2. A.J.O,Leary; Am. J. Phys. 15,336 (1947).

با این امید که مجموعه حاضر در ادامه سنگ پایه تجربه‌ای دیگر در بخشی عمده از فیزیک مقدماتی و پیشرفته دانشگاهی باشد آن را آغاز می‌کنیم اما بی‌هیچ تردید خالی از اشتباه نیست و امیدواریم در مسیر خود با یادآوری صحیح و انتقاد علمی دانشجویان و استادان عزیز فیزیک به راه تکامل افتد و جای واقعی خود را باز یابد. و باز امیدوارم که جز این باور خطایی دیگر و لغزشی عمده در ارائه کار نباشد و گرنه به روایت زنده‌یاد اخوان ثالث:

«... خطا نسلم اگر جز این خطایی دیگر دارم». یا

گر خطا گفتیم اصلاحش تو کن
مصلحی تو ای تو سلطان سخن

مؤلف

محمدرضا سرکرده‌ای

۱۳۸۶

فصل اول

مقدمه‌ای بر آنالیز برداری

مقدمه

آنالیز برداری، که کاربرد واقعی آن در فیزیک از میانه قرن نوزدهم بود، در سال‌های اخیر به عنوان بخش اساسی پس‌زمینه ریاضی مورد نیاز فیزیکدان‌ها، مهندسان، ریاضی‌دانها و دیگر علاقمندان علوم جای خود را باز کرده است. این نیاز تصادفی نبوده بلکه دلایلی داشته است. اول آنکه آنالیز برداری توجه دقیقی برای نمایش معادلات ریاضی ناشی از مسائل فیزیکی و هندسی دارد. دیگر آن که کمک طبیعی و مفیدی در تشکیل تصویر ذهنی ایده‌های فیزیکی و هندسی است. به طور خلاصه، از آن می‌توان به عنوان یکی از پیشرفته‌ترین زبان‌ها و گونه‌های تفکر در علوم فیزیکی نام برد.

در فیزیک، به ویژه با گسترش و تکامل نظریه الکترومغناطیس ماکسول و در ارتباط با ماهیت برداری کمیت‌هایی همچون میدان الکتریکی و مغناطیسی، نیاز به آنالیز برداری بیشتر محسوس شد. همچنین در مبحث مکانیک، از آنجا که برهمکنش بین محیط و جسم، یعنی نیرو، به عنوان یک تفکر و ایده بنیادی ماهیت برداری دارد، بنابراین حتی درک مختصر، اما دقیق، مفاهیم برداری به

یقین کمکی است در پیگیری مفاهیم فیزیک و کوششی است در جهت درک آسانتر آنها. در زیر به طور خلاصه به مفهوم بردار و برخی اعمال جبری و هندسی روی آنها می‌پردازیم. توابع برداری (ناشی از فضای برداری) و عملیات دیفرانسیل و انتگرال روی آنها بررسی می‌شود و به معرفی گرادیان، دیورژانس و کرل می‌پردازیم. در پایان انتگرال‌های خط، سطح و حجم بیان می‌شود. این فصل خود آغازی است بر فصل‌های کامل‌تر که مورد نیاز فیزیک‌پیشگان است. در رابطه با روابط برداری و ارتباط و نمایش آنها با جبر خطی و ماتریس‌ها می‌پذیریم که خواننده با مبانی جبر خطی و بردارها آشنایی دارد.

۱-۱ فضای برداری

یکی از ساختارهای بنیادی جبر خطی فضای برداری است.

تعریف ۱-۱: مجموعه E را فضای برداری روی میدان C می‌نامیم اگر این مجموعه مجهز به دو قانون ترکیب داخلی و خارجی باشد با شرایط و خواص زیر:

(الف) - روی E یک قانون ترکیب داخلی به نام جمع وجود دارد و اجزاء E نسبت به این قانون یک گروه اَبلی تشکیل می‌دهند (با خواص زیر):

$$a \in E, b \in E \Rightarrow a + b = b + a = c \in E \quad \text{۱- خاصیت جابجایی:}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{۲- خاصیت شرکت‌پذیری:}$$

$$0 + a = a + 0 = a \quad \text{۳- وجود عنصری بی‌اثر (یا صفر):}$$

$$a + a' = a' + a = 0 \quad \text{یا} \quad a + (-a) = 0 \quad \text{۴- وجود عنصر قرینه (یا معکوس):}$$

(ب) - روی E یک قانون ترکیب خارجی تعریف می‌شود:

$$\alpha \in C, a \in E \Rightarrow \alpha a \in E \quad \text{۵- توسعه نرده‌ای فضای برداری:}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow 1a = a \in E \quad \text{۶- وجود عنصر بی‌اثر (یا عنصر واحد):}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow 0a = 0 \quad \text{۷- وجود عنصر صفر:}$$

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a = \alpha\beta a; \forall \alpha, \beta \in C \quad \text{۸- خاصیت شرکت‌پذیری:}$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \text{۹- خاصیت توزیعی:}$$

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \text{۱۰- خاصیت توزیعی:}$$

عناصر مجموعه E را بردار و اجزای مجموعه C را اسکالر یا عدد می‌نامیم. اگر C میدان اعداد مختلط E باشد می‌گوییم فضای برداری روی میدان مختلط تعریف شده، و چنانچه C میدان اعداد حقیقی R باشد فضای برداری E را روی میدان حقیقی تعریف می‌کنیم. در این فصل با میدان اعداد حقیقی سر و کار داریم. ویژگی‌های ۱ تا ۱۰ به «اصول موضوعه میدان» معروف است. این شیوه تعریف ما را به فضای هیلبرت (مثلاً، فضای توابع مجذور انتگرال‌پذیر در مکانیک کوانتومی) می‌رساند. مثال ۱-۱: در درس مکانیک کوانتومی خواهید دید که مجموعه توابع موج پاسخ معادله شرودینگر یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱-۲: (بعد فضای برداری): بیشترین شماره بردارهای مستقل خطی موجود در یک فضای برداری بعد آن فضا نامیده می‌شود.

۱-۲. بردار و اسکالر - جبر برداری

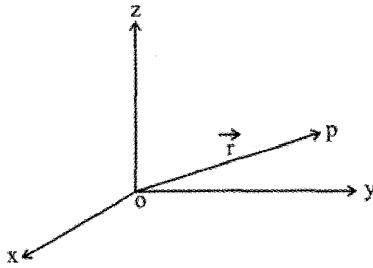
تعریف ۱-۳: رهیافت مقدماتی در تعریف بردار که از نظر تجسم هندسی نیز ساده‌تر می‌نماید چنین است: «بردار کمیتی است دارای جهت و مقدار»، به بیان دیگر «پاره‌خط جهت‌دار یک بردار است.» بردار با چهار مشخصه شناخته می‌شود: نقطه اثر (مبدأ) - راستا یا محل - جهت یا سو - طول یا مقدار. روش دیگر و پیشرفته در تعیین و تعریف بردارها استفاده از خواص چرخشی دستگاه‌های مختصات است که در پاره‌ای از کتاب‌های پیرامون روش‌های ریاضی بررسی شده است.^۱

این شیوه تعریف ما را به مفاهیمی چون تانسورها هدایت می‌کند. جابجایی، سرعت و شتاب کمیت‌های برداری شناخته شده هستند. برای نشان دادن بردار مطابق شکل ۱-۱، از یک پیکان استفاده می‌شود. پیکان OP جهت را نشان می‌دهد؛ اندازه پیکان نمایشگر طول بردار است. نقطه O مبدأ یا نقطه اثر بردار است و P انتهای بردار.

هنگام بررسی تحلیلی بردار A آن را به صورت A یا \vec{A} نمایش می‌دهیم و اندازه‌اش را با A یا

$$|\vec{A}| \text{ می‌توان بردار را با حرف اول و آخر پیکان نمایش داد مانند بردار } \vec{OP} \text{ با طول } OP \text{ یا } |\vec{OP}|.$$

۱. در این باره می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید.



شکل (۱-۱)

اسکالر یا عدد کمیتی است دارای مقدار، اما بدون جهت، مانند جرم، طول و زمان، دما و هر عدد حقیقی. همانند جبر مقدماتی، اسکالر تنها با یک عدد یا حرف مشخص می‌شود. در مقابل، کمیت‌هایی چون جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو، اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی کمیت‌های برداری هستند.

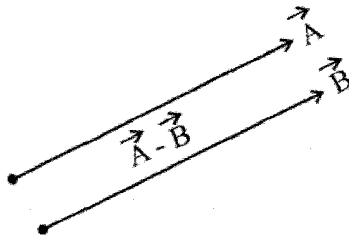
۱-۲-۱. جبر برداری:

همانطور که در آغاز فصل گفته شد، بردارها عناصر متعلق به فضایی هستند جدا و متمایز از اعداد. این فضا با ویژگی‌های خاص خود فضای برداری نامیده می‌شود. عملیات جبری بردارها نیز با قاعده‌های خاص خود جبر برداری را می‌سازد که البته برای درک بهتر آن می‌توان با تعریف‌های مناسب از گسترش عملیات جبری روی اعداد حقیقی به آن قاعده‌ها دست یافت.

تعریف ۱-۴: تعریف‌های زیر در جبر برداری بنیادی هستند:

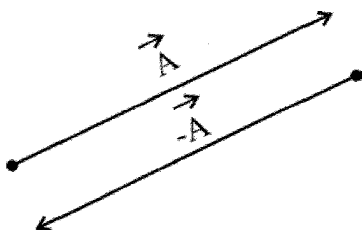
(I) - دو بردار \vec{A} , \vec{B} را برابر یا همسنگ می‌گوییم اگر مقدار و جهت آنها صرفنظر از جای

مبدأ بردارها یکی باشد و می‌نویسیم: $\vec{A} = \vec{B}$ (شکل ۱-۲).



شکل (۲-۱)

(II) - دو بردار \vec{A} , $-\vec{A}$ متقابل هستند چنانچه طولشان برابر و جهتشان مخالف هم باشد. در شکل (۳-۱) دو بردار \vec{A} , $-\vec{A}$ متقابلند.

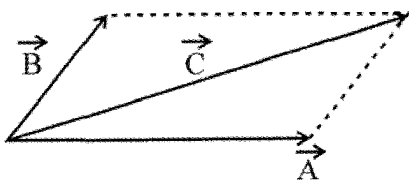


شکل (۳-۱)

(III) - مجموع یا برآیند دو بردار \vec{A} , \vec{B} برداری است مانند \vec{C} که مطابق شکل (۴-۱) تعریف می‌شود و می‌نویسیم:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad (۱-۱)$$

بردار \vec{C} به این روش تشکیل می‌شود. از انتهای بردار اول (بردار \vec{A}) بردار همسنگ بردار \vec{B} را رسم می‌کنیم؛ آنگاه مبدأ \vec{A} را به انتهای بردار جدید وصل می‌کنیم؛ نتیجه بردار \vec{C} خواهد بود. این تعریف را به هر تعداد بردار می‌توان تعمیم داد.



شکل (۴-۱)

(IV) - تفاضل دو بردار \vec{A} , \vec{B} که با $\vec{A} - \vec{B}$ نمایش می‌دهیم بلافاصله از تعریف جمع آشکار می‌شود. (چگونه؟) اگر $\vec{A} = \vec{B}$ باشد، آنگاه $\vec{A} - \vec{B}$ را بردار صفر تعریف می‌کنیم. طول این بردار صفر است و جهت خاصی ندارد.

(V) - حاصلضرب بردار \vec{A} در اسکالر m ، برداری است به صورت $m\vec{A}$ که طولش $|m|$ برابر طول بردار \vec{A} است. راستا و نقطه اثر جدید با بردار \vec{A} یکی است. جهت این بردار بر حسب

این که $m > 0$ یا $m < 0$ باشد هم‌جهت یا در خلاف جهت \vec{A} است. اگر $m = 0$ باشد، آنگاه $m\vec{A} = 0$ بردار صفر است.

۲-۲-۱. بردار یکه (بردار پایه)

معمولاً از سه روش به بررسی بردارها می‌پردازیم:

نخستن روش ترسیمی، دوم روش تحلیلی و روش سوم به کمک چرخش دستگاه مختصات و بررسی خواص این چرخش است. از آنجا که گسترش دادن و کار کردن با روش تحلیلی آسانتر است و انعطاف‌پذیری این روش بیشتر، از این رو اغلب از این دیدگاه به بردارها توجه می‌شود. روش ترسیمی به ویژه در مورد بیش از دو بردار مشکل و خسته‌کننده است و بالاخره در شیوه سوم باید از طریق نوشتن معادلات تبدیل هر کمیتی نشان داد که آیا آن کمیت بردار است یا اسکالر. چنین کاری عمدتاً کسل‌کننده است و جز در موارد خاص به آن نیز نمی‌پردازیم.

تعریف ۱-۵: برداری که طولش واحد است بردار واحد یا یکه نامیده می‌شود. اگر \vec{A} برداری با

طول غیرصفر باشد، $|\vec{A}| \neq 0$ ، آنگاه $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \neq 0$ بردار یکه (یا پایه) در جهت \vec{A} است. از این

تعریف به راحتی معلوم می‌شود که:

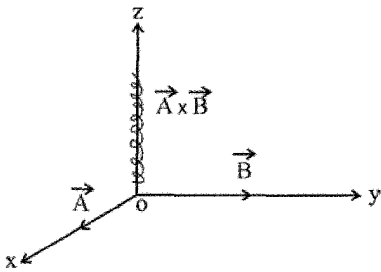
$$\vec{A} = |\vec{A}| \vec{e} \quad (۲-۱)$$

۳-۲-۱ بردارهای یکه متعامد

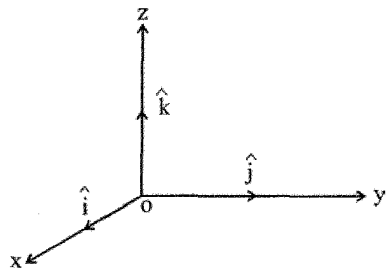
مجموعه بردارهای یکه مهم آنهایی هستند که در دستگاه محوره‌ای مختصات بنا می‌کنیم (شکل ۱-۵). بردارهای واحد سه محور Ox ، Oz ، Oy را به ترتیب \vec{i} ، \vec{j} ، \vec{k} می‌نامیم. در بخش بعد رابطه میان این سه بردار را بیان می‌کنیم. ما بیشتر دستگاه مختصات راستگرد را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم سه بردار \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} با مبدأ مشترک هم‌صفحه نباشند. آنگاه در این دستگاه بیچی که از سمت راست در زاویه‌ای کمتر از ۱۸۰ درجه از \vec{A} به \vec{B} می‌پیچد و پیشروی می‌کند، در جهت $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ جلو می‌رود (شکل ۱-۵). به بیان دقیقتر، سه‌تایی مرتب $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بردارهای پایه

در فضای برداری سه‌بعدی را تشکیل می‌دهند که معمولاً با: \vec{e}_i , ($i = 1, 2, 3$) نشان داده می‌شود.

در بخش بعد خواهیم دید که $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ که در آن $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$ نماد کرونکر است.



شکل (۶-۱)



شکل (۵-۱)

۴-۲-۱. مؤلفه‌های یک بردار

هر بردار \vec{A} را در سه بعد می‌توان با دستگاه مختصات متعامد نشان داد به طوری که نقطه اثر بردار در مبدأ مختصات باشد. فرض می‌کنیم (A_1, A_2, A_3) مختصات نقطه انتهایی بردار باشد. بردارهای $A_1\vec{k}$, $A_2\vec{j}$, $A_3\vec{i}$ را به ترتیب مؤلفه‌های عمودی بردار \vec{A} در سه راستای x , y , z تعریف می‌کنیم. در این صورت با توجه به شکل (۶-۱) به راحتی داریم:

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \quad (۳-۱)$$

طول یا اندازه \vec{A} از رابطه مقابل به دست می‌آید:

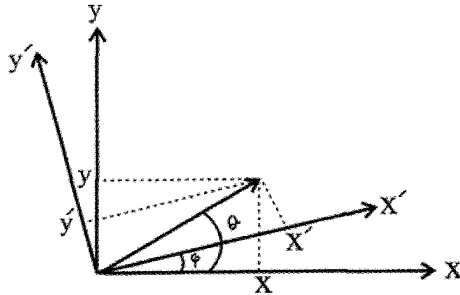
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad (۴-۱)$$

اگر α, β, γ به ترتیب زاویه میان بردار \vec{A} و محورهای مختصات باشد آنگاه $A_1 = |A| \cos \alpha$ و $A_2 = |A| \cos \beta$ و $A_3 = |A| \cos \gamma$. در حالت خاص بردار مکان با بردار شعاعی \vec{r} از نقطه O تا نقطه (x, y, z) به صورت زیر نمایان می‌شود:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad ; \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (۵-۱)$$

۳-۱ چرخش دستگاه مختصات - تعریف دیگر بردار

ساده‌ترین حالت چرخش دستگاه‌های مختصات، چرخش دوبعدی دگارتی است. بردار جابجایی $\vec{r}(X, y)$ در دستگاه جدید به صورت $\vec{r}(X', y')$ در می‌آید به طوری که:



شکل (۷-۱)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta - \phi) = r \cos \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = r \sin(\theta - \phi) = r \sin \theta \cos \phi - r \cos \theta \sin \phi = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (۶-۱)$$

در نماد نگاری فشرده‌تر با استفاده از علائم تانسوری داریم:

$$\begin{cases} x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow y_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' \rightarrow x'_1 \\ y' \rightarrow y'_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = \cos(x'_1, x_1) = \cos \phi \\ a_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin \phi \\ a_{22} = \cos(x'_2, x_2) = \cos \phi \end{cases}$$

a_{ij} را به عنوان کسینوس‌های هادی زاویه میان X_j و X'_i تعریف می‌کنیم. در نتیجه:

$$\begin{cases} X'_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ X'_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{cases} \Rightarrow X'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}X_j \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (7-1)$$

تعمیم این رابطه در n بعد چنین است:

$$V'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}V_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (8-1)$$

برای a_{ij} ها رابطه مهم زیر را ثابت می‌کنیم:

$$a_{ij} = \frac{\partial X'_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_j}{\partial X'_i} \quad (9-1)$$

برای اثبات فرض می‌کنیم X_i ها و X'_i ها کمیت‌های مستقل هستند که از طریق روابط تبدیل

به هم وابسته‌اند:

$$X'_i = \sum_j a_{ij}X_j = \sum_k a_{ik}X_k$$

$$\frac{\partial X'_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\sum_k a_{ik}X_k \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} (a_{i1}X_1 + \dots + a_{ij}X_j + \dots) = a_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial X_j} = a_{ij}$$

و به همین ترتیب

$$X_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}X'_i \Rightarrow \frac{\partial X_j}{\partial X'_i} = a_{ij}$$

یادآور می‌شویم که رابطه (۹-۱) فقط در دستگاه‌های دکارتی برقرار است. رابطه مهم دیگر شرط

تعامد در مورد a_{ij} هاست:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \sum_i \frac{\partial X_k}{\partial X'_i} \frac{\partial X'_i}{\partial X_j} = \sum_i \frac{\partial X_k}{\partial X_j} = \delta_{jk} \quad (10-1)$$

بدین ترتیب برای تبدیل بردارها خواهیم داشت:

$$V'_i = \sum_j a_{ij}V_j = \sum_j \frac{\partial X'_i}{\partial X_j} V_j = \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial X'_i} V_j$$

مثال ۱-۲: رابطه زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_j x_j'^2 = ?$$

حل: در واقع این رابطه پایداری یا ناوردا بودن اندازه بردار در اثر چرخش دستگاه مختصات را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} x_j'^2 &= \left(\sum_i a_{ji} x_i \right)^2 = \sum_i a_{ji} x_i \times \sum_i a_{ji} x_i \\ &= \sum_i a_{ji} x_i \times \sum_k a_{ji} x_k = \sum_i \sum_k a_{ji} a_{jk} x_i x_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_i x_j'^2 = \sum_j \sum_k \sum_i a_{ji} a_{jk} x_i x_k = \sum_i \sum_k \delta_{ik} x_i x_k$$

و بالاخره با $k = i$ داریم:

$$\sum_j x_j'^2 = \sum_i x_i'^2$$

که خود نمایشگر تبدیل متعامد است و همانگونه که گفته شد ناوردایی طول یک بردار را می‌رساند.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که بردار $\vec{A} = \sum_i^n A_i \cdot \vec{e}_i$ در اثر چرخش ناورداست.

۱-۴. حاصلضرب اسکالر، برداری و مختلط

تعریف ۱-۶: حاصلضرب اسکالر یا داخلی دو بردار \vec{A} ، \vec{B} که با $\vec{A} \cdot \vec{B}$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(A, B) \quad (11-1)$$

یعنی حاصلضرب اسکالر دو بردار = حاصلضرب طول دو بردار در کسینوس زاویه میانشان. این زاویه از صفر تا π تغییر می‌کند. توجه دارید که نتیجه حاصلضرب اسکالر یک عدد است نه یک بردار.

چنانچه دقت کنیم می‌توانیم $|\vec{B}| \cos(A, B)$ را تصویر یا مؤلفه بردار \vec{B} بر راستای \vec{A} تعریف

کنیم (یا برعکس) آنگاه حاصلضرب چنین تعریف می‌شود:

«حاصلضرب طول بردار اول در مؤلفه بردار دوم بر راستای بردار اول»

درباره حاصلضرب اسکالر، قوانین زیر به آسانی نتیجه می‌شوند:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad -1$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad -2$$

$$m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})m \quad -3$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad ; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad -4$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای پایه متعامد در راستاهای x, y, z هستند. شرط ۴ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

۵- اگر $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ و $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ باشند،

آنگاه:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad , \quad \vec{B} \cdot \vec{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

۶- اگر $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ، \vec{A} ، \vec{B} بردارهای غیرصفر باشند، در این صورت \vec{A} ، \vec{B} را عمود بر

هم تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۷: حاصلضرب برداری یا خارجی \vec{A} ، \vec{B} که با $\vec{A} \times \vec{B}$ یا $\vec{A} \wedge \vec{B}$ نشان داده

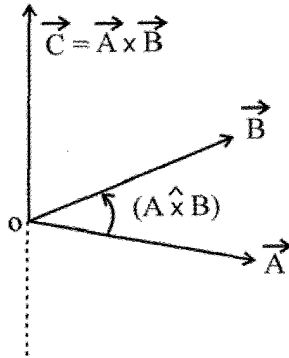
می‌شود، به صورت برداری مانند \vec{C} تعریف می‌شود با این ویژگی‌ها: بزرگی یا طول \vec{C} عبارت است

از حاصلضرب طول \vec{A} ، \vec{B} در سینوس زاویه میانشان:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(A, B) \quad (12-1)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(A, B) \vec{e}$$

که در آن \vec{e} بردار واحد نمایشگر جهت $\vec{A} \times \vec{B}$ است. جهت بردار \vec{C} عمود بر صفحه \vec{A} ، \vec{B} است، به طوری که A, B, C یک دستگاه راستگرد را تشکیل می‌دهند (شکل ۱-۸). در این دستگاه اگر ناظری در مبدا مختصات O طوری بایستد که جهت چرخش بردار اول برای منطبق شدن بر بردار دوم، در جهت چرخش دست راست به چپ (و در جهت دایره مثلثاتی) باشد، جهت از پا به طرف سر ناظر، جهت بردار حاصلضرب را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۸). نمایش حاصلضرب برداری دو بردار

قوانین زیر درباره حاصلضرب برداری به راحتی ثابت می‌شود:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}) \quad .1$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \quad .2$$

$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = (\vec{A} \times \vec{B})m \quad .3$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad .4$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

به طور کلی در مورد بردارهای پایه $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ داریم:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k ; i, j, k = 1, 2, 3$$

که در آن ε_{ijk} نماد جایگشت (تبدیل) یا چگالی لوی - چی ویتا (Levi - chivita density)

نامیده می‌شود و معنای آن چنین است:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{حداقل دو اندیس با هم برابر است} \\ +1 & \text{تبدیل‌های زوج ۱ و ۲ و ۳} \\ -1 & \text{تبدیل‌های فرد ۱ و ۲ و ۳} \end{cases} \quad (13-1)$$

و بنابراین:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{211} = 0$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = 1 \quad (13-1)'$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$$

۵- اگر $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ و $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ باشد، آنگاه:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (14-1)$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k}$$

و یا با توجه به رابطه (۱۳-۱)، داریم:

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (15-1)$$

۶- مقدار $|\vec{A} \times \vec{B}|$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی ضلع‌های \vec{A} ، \vec{B} بنا

می‌شود.

۷- اگر $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ و \vec{A} و \vec{B} بردارهای غیرصفر باشند، آنگاه \vec{A} و \vec{B} را موازی می‌گوییم.

تعریف ۱-۸: حاصلضرب مختلط یا سه گانه اسکالر - برداری \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{حاصلضرب مختلط} \quad (16-1)$$

نتیجه این ترکیب یک عدد است. چنانچه فرض کنیم:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$$

آنگاه:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (17-1)$$

علاوه بر این، به راحتی می‌توان نشان داد که قانون زیر درباره این حاصلضرب برقرار است:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (18-1)$$

نتیجه حاصلضرب بالا یک عدد است و برابر با حجم متوازی‌السطوحی که اضلاعش A ، B ، C است و معمولاً با $[ABC]$ نمایش داده می‌شود. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_i A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = \sum_i A_i \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} B_j C_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

$$= \sum_{ijk} C_k \epsilon_{ijk} A_i B_j = \sum_k C_k (\sum_{ij} \epsilon_{ijk} A_i B_j) = \sum_k C_k (A \times B)_k = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

همانند تعریف بالا، حاصلضرب سه‌گانه برداری $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ را تعریف می‌کنیم با خواص زیر:

(I) در این حاصل ضرب قانون شرکت‌پذیری معتبر نیست:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad \text{(II) قانون بک - کب}$$

حاصلضرب سه‌گانه برداری در واقع ترکیب خطی دو بردار \vec{C} ، \vec{B} است.

۵-۱. تابع برداری - پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع برداری

۱-۵-۱. تابع برداری

تابع $\vec{F} = \vec{F}(t)$ که به هر نقطه t در مجموعه اعداد حقیقی، برداری در فضای سه‌بعدی \mathbb{R}^3 نسبت می‌دهد، تابع برداری سه‌بعدی نامیده می‌شود. اگر میدان تعریف این تابع برداری فاصله $a \leq t \leq b$ و برد آن فضای سه‌بعدی باشد می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

که در آن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بردارهای یک‌محوره‌ای مختصات هستند. f, g, h توابع حقیقی‌اند که در فاصله $[a, b]$ تعریف شده‌اند. فرض می‌کنیم که بردار (محدود و معین) $\vec{\rho}$ چنان وجود دارد که:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{F}(t) - \vec{\rho}| = 0$$

در این صورت می‌گوییم $\vec{F}(t)$ هنگامی که $t \rightarrow t_0$ ، به سوی $\vec{\rho}$ میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{\rho}$$

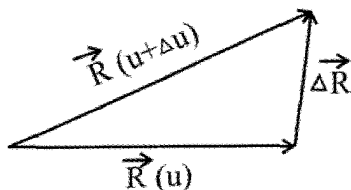
توجه داریم که $|\vec{F}(t) - \vec{\rho}|$ عدد است یعنی اندازه بردار $\vec{F}(t) - \vec{\rho}$.

۲-۵-۱. مشتق‌پذیری تابع برداری

در این قسمت به مفهوم مشتق توابع برداری می‌پردازیم. فرض کنید $\vec{R}(u)$ تابع یک متغیر اسکالر u باشد آنگاه مطابق شکل (۹-۱)

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u}$$

که در آن Δu نمو متغیر u را نشان می‌دهد.



شکل (۹-۱)

مشتق معمولی بردار $\vec{R}(u)$ نسبت به اسکالر u چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u} \quad (19-1)$$

اگر این حد وجود داشته باشد می‌گوییم تابع $\vec{R}(u)$ نسبت به u دارای مشتق است. یادآوری می‌کنیم که قضیه‌های مشتق توابع اسکالر در مورد مشتق برداری نیز همچنان معتبر است. از آنجا

که $\frac{d\vec{R}}{du}$ خود یک بردار است، به همین ترتیب می‌توان مشتق برداری مرتبه‌های بالاتر را تعریف کرد.

اگر $\vec{R}(u)$ در حالتی خاص بردار مکان $\vec{r}(u)$ باشد که مبدأ مختصات O را به هر نقطه (x, y, z) متصل سازد، در این صورت:

$$\vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$$

با تغییر u ، نقطه انتهایی \vec{r} یک منحنی فضایی (Space Curve) را می‌پیماید که معادلات پارامتری

آن عبارتند از $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$. به همین ترتیب، اگر $\frac{d\vec{r}}{du}$ وجود

داشته باشد، برداری است در جهت مماس بر منحنی فضایی در نقطه (x, y, z) . در حالتی که u

زمان t است، $\frac{d\vec{r}}{dt}$ نمایشگر سرعتی است که انتهایی بردار \vec{r} با آن سرعت منحنی را می‌پیماید و آن

را با \vec{V} نمایش می‌دهیم. همین‌طور $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ معرف شتاب در راستای منحنی است.

۱-۵-۳. میدان اسکالر و میدان برداری

در فیزیک معمولاً با کمیت‌هایی سروکار داریم که توابعی از جای یک نقطه (بامختصات (x, y, z)) هستند. در حالت کلی ممکن است کمیت مورد نظر، تابع متغیر دیگری مانند زمان نیز باشد. اگر این کمیت بردار باشد، با یک تابع برداری مشخص می‌شود. معمولاً می‌توان نمودار تابع

برداری را رسم کرد. در هر نقطه A از دامنه تعریف تابع برداری $\vec{f}(t)$ می‌توان برداری رسم کرد که مبدأ آن در نقطه A باشد. بدین ترتیب اگر به هر نقطه از فضا متعلق به دامنه تعریف، برداری نسبت دهیم دارای تابعی خواهیم شد و بنا به تعریف می‌گوییم در این دامنه یک میدان برداری وجود دارد مانند میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی، میدان گرانشی، میدان سرعت و ... مثلاً، اگر در زمانی معین سرعت شاره‌ای متحرک در هر نقطه (x, y, z) فضا شناخته باشد، آنگاه در این فضا یک میدان برداری تعریف شده است. میدان برداری مستقل از زمان را میدان برداری ایستاده یا پابرجا می‌گوییم. همین طور اگر به هر نقطه از دامنه تعریف تابع عادی $f(x, y, z)$ را نسبت دهیم در این قلمرو دارای یک میدان اسکالر خواهیم بود. مانند دمای یک محفظه، چگالی یک شاره، فشار یک شاره و ... دما در هر نقطه از سطح زمین و در زمانی معین یک میدان اسکالر است. میدان اسکالر مستقل از زمان را میدان عددی ایستا یا پابرجا می‌گویند.

۴-۵-۱. مشتق راستایی (Directional Derivative)

تعریف ۱-۹: میدان اسکالر f و نقطه p متعلق به میدان تعریف این تابع و بردار یکه \vec{e} را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف مشتق تابع f در راستای \vec{e} و در نقطه p عبارت است از:

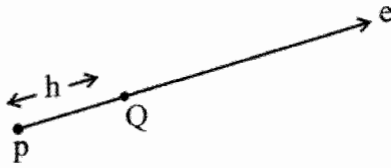
$$D_{\vec{e}}f(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{f(p + \Delta p) - f(p)}{\Delta p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

که در آن $\Delta p = h$ نمو متغیر در نقطه p و در راستای برداریکه \vec{e} است. این مشتق را با علامت $D_{\vec{e}}f(p)$ نمایش می‌دهیم. اگر \vec{e} و f ثابت، اما p تغییر کند $D_{\vec{e}}f(p)$ نمایش یک میدان اسکالر است. بدین ترتیب مشتق در راستایی داده شده، همانند مشتق جزئی است. در واقع، اگر محورهای (x, y, z) را در نظر بگیریم و $\vec{e} = \vec{i}$ بردار یکه در راستای محور x باشد، آنگاه

$$D_{\vec{e}} = \frac{\partial}{\partial x} \text{ است. به طور مشابه } \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \text{ به صورت مشتق } f \text{ به ترتیب در راستاهای } \vec{j}, \vec{k}$$

خواهند بود. به طور کلی ثابت می‌شود اگر:

$$\vec{e} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j} + \nu \vec{k} \quad , \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$



شکل (۱۰-۱) مشتق راستایی

برداریکه در مختصات دکارتی باشد، مشتق $D_{\vec{e}}f$ در راستای آن در مختصات (z, y, x) با عبارت زیر داده می‌شود.

$$D_{\vec{e}}f(x, y, z) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial f}{\partial z} \quad (۲۰-۱)$$

بنا بر تعریف، میدان اسکالر f در صورتی به طور پیوسته مشتق‌پذیر است که $D_{\vec{e}}f(x, y, z)$ برای هر مقدار ثابت، پیوسته باشد.

۶-۱. گرادیان - دیورژانس - کرل

۱-۶-۱. گرادیان میدان اسکالر (**Gradient**): بردار $\vec{g}(p)$ را که تصاویر آن مشتقات جزئی تابع $f(x, y, z)$ است در نظر می‌گیریم:

$$\vec{g}(p) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (۲۱-۱)$$

بنابر تعریف حاصلضرب اسکالر و با توجه به رابطه بالا، به راحتی می‌توان نشان داد که مشتق راستایی تابع f در راستای برداریکه داده شده \vec{e} چنین است:

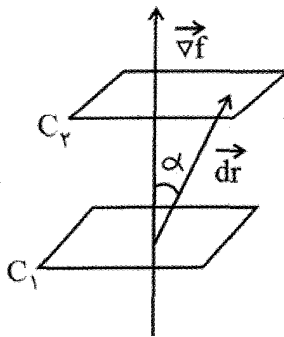
$$D_{\vec{e}}f(p) = \vec{g}(p) \cdot \vec{e}$$

بردار $\vec{g}(p)$ را که از طریق رابطه (۲۱-۱) تعریف کردیم گرادیان میدان اسکالر f در نقطه p نامیده و با $\vec{g}(p) = \overrightarrow{\text{grad}}(p)$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف گرادیان، تغییرات تابع f پیرامون نقطه p با شناسایی بردار گرادیان به طور کامل مشخص می‌شود. به خصوص بزرگترین تغییرات تابع f در راستای این بردار خواهد بود. در حقیقت این تغییر ماکزیمم و جهت آن با بردار گرادیان تعیین می‌شود. بدین منظور در مرحله نخست فرض می‌کنیم تغییرات جابجایی در سطح تراز

$f(x, y, z) = c$ صورت گیرد. آنگاه $df = \vec{\nabla}f \cdot \vec{dr} = 0$ و چون \vec{dr} اختیاری است بنابراین $\vec{\nabla}f$ بر سطح تراز عمود می‌شود. در مرحله بعد تغییرات را در فاصله دو سطح تراز $f = c_1$ و $f = c_2$ بررسی می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$df = \vec{\nabla}f \cdot \vec{dr} = |\vec{\nabla}f| |\vec{dr}| \cos \alpha \neq 0 \quad (22-1)$$

و هنگامی این تغییرات ماکزیمم می‌شود که $\alpha = 90^\circ$ باشد یعنی بیشترین تغییرات تابع f در راستای بردار $\vec{\nabla}f$ روی می‌دهد.



شکل (۱۱-۱)

چنانچه دیده شد، مشتق راستایی $D_{\vec{e}}f(p)$ و در نتیجه گرادیان را بدون کمک دستگاه مختصات تعریف کردیم. یعنی گرادیان یک میدان اسکالر کمیتی مستقل از محورهای مختصات است. تعریف ۱-۱۰: عملگر نابلا، $\vec{\nabla}$: عملگر برداری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (23-1)$$

این عملگر را نابلا (nabla) یا دل (Del) می‌نامیم. اگر $\vec{\nabla}$ را بر تابع اسکالر $f(x, y, z)$ اثر دهیم خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (23-1)'$$

بدین ترتیب از تأثیر عملگر برداری $\vec{\nabla}$ روی تابع اسکالر f بردار گرایان حاصل می‌شود. از این به بعد به جای $\overline{\text{grad}}$ علامت ساده $\vec{\nabla}$ را به کار می‌بریم. بعد می‌بینیم که می‌توان این علامت ساده را برای تعریف کمیت‌های اسکالر یا برداری دیگر نیز بکار گرفت.

قضیه ۱-۱: اگر توابع اسکالر f و g به طور پیوسته مشتق پذیر باشند:

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \quad \text{-(الف)}$$

$$\vec{\nabla}(f \cdot g) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g \quad \text{-(ب)}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g) ; g \neq 0 \quad \text{-(پ)}$$

$$\vec{\nabla}f(u) = f'(u)\vec{\nabla}u ; u = u(x, y, z) \quad \text{-(ت)}$$

به عنوان نمونه، رابطه (الف) را ثابت می‌کنیم. برای این کار دستگاه مختصات متعامد xyz را وارد کرده، تعریف عملگر $\vec{\nabla}$ را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f + g) &= \frac{\partial}{\partial x}(f + g)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f + g)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f + g)\vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \end{aligned}$$

۱-۶-۲. دیورژانس یا واگرایی میدان برداری

میدان برداری $\vec{V}(p)$ را در یک دستگاه مختصات در نظر می‌گیریم. برای سهولت مختصات z, y, x را با اندیس‌های $i = 1, 2, 3$ بیان می‌کنیم.

$$\vec{V}(p) = \sum_{i=1}^3 V_i(x, y, z)\vec{e}_i = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$$

آنگاه عامل نابلا به صورت زیر در می‌آید:

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3 \quad (۲۴-۱)$$

اکنون حاصلضرب اسکالر نابلا را در بردار \vec{V} تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\mathbf{p}) &= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i \right) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (25-1)$$

اگر $\vec{V}(\mathbf{p})$ میدان برداری به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، رابطه بالا را دیورژانس \vec{V} (Divergence) نامیده با عبارت $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ یا $\text{div} \vec{V}$ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که اثر عملگر دیورژانس روی بردار، یک اسکالر است.

به بیان دیگر، عملگر برداری $\vec{\nabla}$ یک میدان اسکالر را به میدان برداری تبدیل می‌کند و میدان برداری را به میدان اسکالر.

ثابت می‌شود که گرادینان و دیورژانس و نیرکرل که تعریفش را در بخشهای بعد می‌بینیم، مستقل از محورهای مختصات هستند. این مطلب حالتی است که از مسئله ناوردایی یا تغییر ناپذیری.

۱-۶-۳. روتاسیونال یا کرل (Curl) میدان برداری

عملگر برداری نابلا، $\vec{\nabla}$ را در بخش‌های پیش تعریف کردیم؛ اکنون حاصلضرب برداری $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم ($\vec{\nabla}$ باید بطور پیوسته مشتق پذیر باشد):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (26-1)$$

که در آن V_1, V_2, V_3 مولفه‌های میدان برداری \vec{V} است. چنین عبارتی را روتاسیونال یا کرل (Curl) بردار \vec{V} تعریف می‌کنیم و معمولاً با $\text{Curl} \vec{V}$ نشان می‌دهیم و گاه با $\text{rot} \vec{V}$ (یا با

نشانه ریاضی $(\vec{\nabla} \times \vec{V})$.

مشابه قضایای مربوط به گرادینان و دیورژانس، روابط زیر درباره کرل برقرار است.

قضیه ۱-۲: اگر دو میدان برداری \vec{U} و \vec{V} و میدان اسکالر f به طور پیوسته مشتق پذیر باشند، آنگاه

$$\vec{\nabla} \times (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{U} + \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad \text{(الف)}$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{U}) = f\vec{\nabla} \times \vec{U} + (\vec{\nabla}f) \times \vec{U} \quad \text{(ب)}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{U} \cdot \vec{V}) = \vec{U} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) + \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad \text{(پ)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \quad \text{(ت)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = 0 \quad \text{کرل گرادینان = صفر} \quad \text{(ث)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{U} = 0 \quad \text{دیورژانس کرل = صفر} \quad \text{(ج)}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{U} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad \text{(چ)}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad \text{(ح)}$$

۷-۱. انتگرال برداری

۱-۷-۱. انتگرال خط

در فاصله داده شده $[a, b]$ در فضای سه بعدی، یک کمان مکان هندسی نقاطی است با مختصات

(x, y, z) به طوری که:

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

t متغیری است در فاصله $[a, b]$. توابع f, g, h در این فاصله پیوسته‌اند. رابطه بالا را معادلات

پارامتری کمان می‌نامیم. منحنی مورد نظر را می‌توان مطابق شکل با بردار $\vec{V}(\mathbf{p}) = \vec{r}'(t)$ نمایش

داد. همانطور که در بخش‌های پیشین دیدیم:

$$\vec{V}(\mathbf{p}) = \vec{r}'(t)$$

که در آن $\vec{V}(p)$ میدان برداری و f, g, h تصاویر بردار شعاعی $\vec{r}(t)$ هستند:

$$\vec{r}_p(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

مبدأ بردار $\vec{r}_p(t)$ در مرکز مختصات و انتهای آن بر روی کمان \overline{AB} قرار دارد.

تعریف انتگرال خط: میدان برداری $\vec{V}(p)$ و کمان C را در ناحیه D در نظر می‌گیریم. کمان C را با نقاط $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_n = B$ ، به n زیر فاصله تقسیم می‌کنیم. در هر نقطه زیر فاصله $[P_{i-1}, P_i]$ نقطه Q_i را انتخاب می‌کنیم. اکنون جمع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^n \vec{V}(a_i) \cdot [\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n \vec{V}(a_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

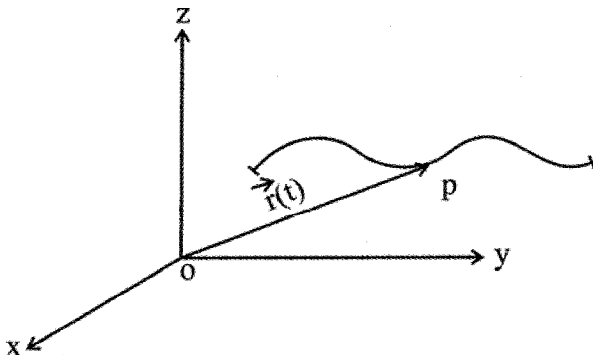
که در آن $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})$ است. بنابر تعریف، اگر برای هر مقدار $\varepsilon > 0$ ، مقدار $\delta > 0$

وجود داشته باشد به طوری که وقتی $|\Delta \vec{r}_i| < \delta$ ، نتیجه بگیریم: $|\sum_{i=1}^n \vec{V}(a_i) \cdot \Delta \vec{r}_i - L| < \varepsilon$ در

این صورت می‌گوییم \vec{V} در طول کمان C انتگرال پذیر است، و L را انتگرال خط V در طول کمان C می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{V}(a_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_C \vec{V}(p) \cdot d\vec{r} \quad (۲۷-۱)$$

که در آن $\lambda = \text{Max}\{\Delta \vec{r}_1, \Delta \vec{r}_2, \dots, \Delta \vec{r}_n\}$ است.



شکل (۱۲-۱)

اگر میدان برداری $\vec{V}(p)$ نمایشگر نیروی \vec{F} وارد بر نقطه‌ای مادی باشد که در طول منحنی C حرکت می‌کند، انتگرال خط حاصل را کار بردار \vec{F} در راستای کمان C می‌نامیم. هنگامی که C منحنی بسته است، انتگرال خط به شکل $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$ نوشته می‌شود. در این حالت مثلاً اگر \vec{V} سرعت یک شاره باشد، انتگرال خط را گردش بردار \vec{V} می‌نامیم.

۱-۷-۲. انتگرال خط مستقل از مسیر

در حالت کلی انتگرال خط به مسیر و نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. در بعضی حالت‌ها، مقدار انتگرال به شکل مسیر C بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدا و انتها وابسته است. چنین انتگرال‌هایی را مستقل از مسیر می‌گوییم. ویژگی این نوع انتگرال‌ها باقضیه کلی زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱-۳: شرط لازم و کافی برای این که انتگرال

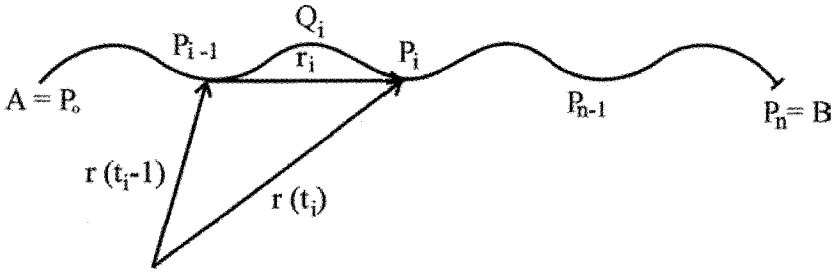
$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_C p(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (۱-۲۸)$$

مستقل از مسیر باشد، آن است که عبارت زیر انتگرال دیفرانسیل کامل باشد.

۱-۷-۳. انتگرال سطح

میدان برداری $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ و سطح S را که تصویرش بر صفحه xy ناحیه R است در نظر می‌گیریم (شکل ۱-۱۳). معادله سطح S را به صورت $Z = f(x, y)$ فرض می‌کنیم، که در آن f تابعی تک مقدار است و در تمامی ناحیه R پیوسته. R را به زیر ناحیه‌های کوچک با مساحت $n = 1, 2, 3, \dots$ تقسیم می‌کنیم؛ ستونی عمودی (موازی محور Z) روی هر زیر ناحیه بنا می‌کنیم تا سطح S را در زیر سطح‌های کوچک ΔS_i قطع کند. در هر بخش نقاط P_1, P_2, \dots, P_n را انتخاب کرده به هر نقطه بردار واحدی عمود بر سطح در آن نقطه رسم می‌کنیم؛ مانند بردار واحد \vec{n}_i که از نقطه دلخواه p_i بر سطح رسم شده است. عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^n \vec{V}(p_i) \cdot \Delta \vec{S}_i = \sum_{i=1}^n \vec{V}(p_i) \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$$



شکل (۱۳-۱)

که در آن برداری در راستای قائم بر سطح در نقطه P_i است. بنابر تعریف، حد مجموع بالا را وقتی $\text{Max} \Delta S_i \rightarrow 0$ ، اگر وجود داشته باشد، انتگرال سطح نامیده با نماد:

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

از سطح S نیز نامیده می‌شود. به بیان دیگر:

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{V}(P_i) \cdot \vec{n} \Delta S_i \quad (۲۹-۱)$$

۴-۷-۱. محاسبه انتگرال سطح

انتگرال سطح را به کمک یک انتگرال دو گانه می‌توان حساب کرد. اگر $\Delta A_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ تصویر جزء سطح ΔS_i بر ناحیه R (در صفحه xoy) باشد و γ_i زاویه دو جزء سطح (یا بهتر بگوییم، زاویه میان دو بردار واحد عمود بر راستای آنها یعنی (\vec{k}, \vec{n}_i) آنگاه رابطه زیر به راحتی پیدا می‌شود.

$$\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i = \Delta s_i \times |\cos \gamma_i|$$

$$\vec{n}_i \cdot \vec{k} = |\vec{n}_i| |\vec{k}| \cos \gamma_i = \cos \gamma_i \quad \text{اما،}$$

$$\Delta S_i = \frac{\Delta A_i}{|\cos \gamma_i|} = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{|\vec{n}_i \cdot \vec{k}|} \quad \text{پس:}$$

در نتیجه، انتگرال سطح به صورت زیر در می‌آید:

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_R \vec{V} \cdot \vec{n} \frac{dx dy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} \quad (30-1)$$

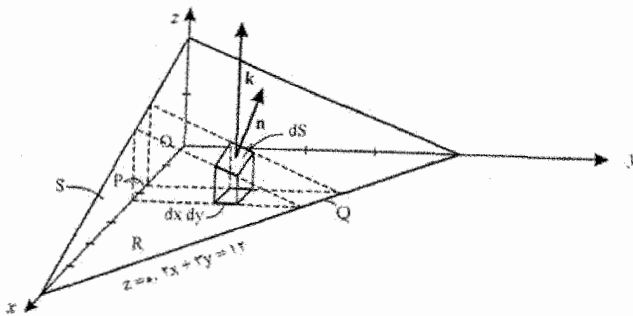
که در آن \vec{n} بردار واحد نمایشگر راستای قائم بر سطح S است. طرف راست رابطه بالا یک انتگرال دوگانه معمولی است که می‌توان آن را به روش معمول انتگرال دوگانه حل کرد. همینطور می‌توان با تصویر کردن S بر صفحه‌های YOZ , XOZ انتگرالهای دوگانه مشابهی پیدا کرد.

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_R \vec{V} \cdot \vec{n} \frac{dy dz}{|\vec{n} \cdot \vec{i}|} = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \frac{dx dz}{|\vec{n} \cdot \vec{j}|} \quad (31-1)$$

مثال ۳-۱: عبارت $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ را محاسبه کنید بطوریکه:

$$\vec{V} = 12z\vec{i} - 12z\vec{j} + 3y\vec{k}$$

و S قسمتی از صفحه $12 = 2x + 3y + 6z$ که در ناحیه اول دستگاه مختصات قضایی قرار دارد (شکل ۱۴-۱)



شکل (۱۴-۱)

حل: در شکل بالا، سطح S و تصویر آن R بر صفحه xy نشان داده شده است. از تعریف انتگرال سطح، رابطه (۳۱-۱)، داریم:

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{V} \cdot \vec{n} \frac{dx dz}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}$$

برای یافتن \vec{n} توجه داریم که بردار عمود بر سطح $2x + 3y + 6z = 12$ با عبارت گرادیان داده می‌شود. آنگاه خواهیم داشت:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}(2x + 3y + 6z)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}}{7} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = \left(\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k} \right) \cdot \vec{k} = \frac{6}{7} \quad \text{بنابراین،}$$

$$\frac{dx dy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = \frac{6}{7} dx dy \quad \text{و در نتیجه،}$$

همچنین با توجه به معادله S ، $Z = \frac{12 - 2x - 3y}{6}$ است و از آنجا:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = (18z\vec{i} - 12\vec{j} + 3y\vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k} \right) = \frac{36 - 12x}{7}$$

آنگاه،

$$\iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \frac{dx dy}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} = \iint_R \frac{36 - 12x}{7} \times \frac{7}{6} dx dy = \iint_R (6 - 2x) dx dy$$

برای محاسبه این انتگرال دوگانه روی R ، x را ثابت نگه می‌داریم و نسبت به y از $y = 0$ (نقطه

P در شکل) تا $y = \frac{12 - 2x}{3}$ (نقطه Q) انتگرال می‌گیریم. سپس انتگرال را نسبت به x از

$x = 0$ تا $x = 6$ برآورد می‌کنیم. بدین ترتیب انتگرال تمامی ناحیه R را در بر می‌گیرد.

$$\int_{x=0}^6 \int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} (6 - 2x) dx dy = \int_{x=0}^6 \left(24 - 12x + \frac{4}{3}x^2 \right) dx = 24$$

یادآور می‌شویم چنانچه بردار عمود \vec{n} را در جهت عکس انتخاب می‌کردیم، نتیجه -24 به دست می‌آمد.

۵-۷-۱. انتگرال حجم

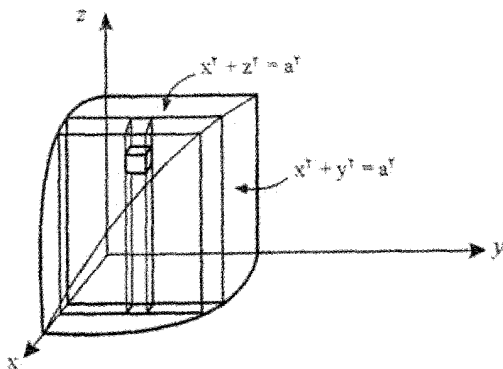
همانند انتگرالهای سه گانه، انتگرال حجم برداری را نیز به صورت $\iiint \vec{V}(\mathbf{p}) dV$ تعریف می‌کنیم. برای حل به روشی مشابه انتگرال سطح، این گونه انتگرالها را به انتگرال سه گانه معمولی تبدیل می‌کنیم. با مثالی در این زمینه موضوع روشنتر می‌شود.

مثال ۱-۴: حجم ناحیه مشترک میان دو استوانه متقاطع $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ را بیابید.

حل: حجم مورد سؤال هشت برابر حجم ناحیه‌ای است که در شکل (۱۵-۱) نشان داده شده است.

$$V = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy dx$$

$$V = 8 \int_{x=0}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3}$$



شکل (۱۵-۱)

۶-۷-۱. قضیه دیورژانس گوس^۱:

اگر V حجم محدود شده به وسیله سطح بسته S باشد و \vec{A} تابع برداری مکان با مشتق‌های پیوسته، آنگاه:

۱- برای بحث مفصلتر و اثبات این قضایا به مرجع زیر مراجعه کنید: روش‌های ریاضی در فیزیک (جلد اول) فصل نهم - محمدرضا سرکرده‌ای - انتشارات دانشگاه الزهراء - ۱۳۸۰.

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (۳۲-۱)$$

که در آن \vec{n} برداریکه عمود بر سطح S است (مثبت است اگر جهتش به سمت خارج سطح باشد).

۷-۷-۱. قضیه استوکس (Stokes theorem):

اگر S سطح باز دو طرفه‌ای باشد که به وسیله منحنی بسته ساده C محدود شود، و اگر A به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} ds = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \quad (۳۳-۱)$$

که در آن C در جهت مثبت پیموده می‌شود.

۸-۱. دستگاه‌های مختصات منحنی الخط متعامد خاص:

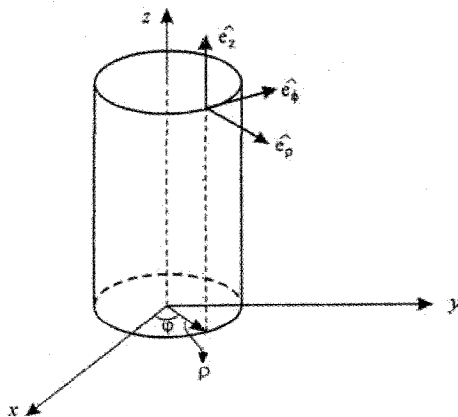
در اینجا تنها به بیان و معرفی دو دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد و خواص آنها می‌پردازیم.

(I) دستگاه مختصات استوانه‌ای (Cylindrical Coordinates): مختصات دکارتی نقطه P بر

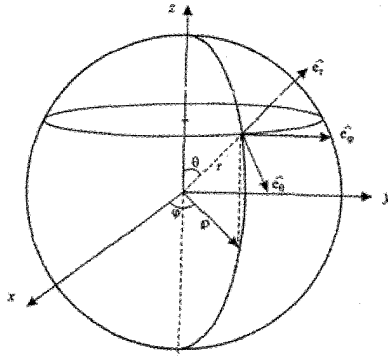
حسب مختصات (ρ, ϕ, Z) به صورت زیر در می‌آید (شکل ۱۶-۱):

$$x = \rho \cos \phi \quad , \quad y = \rho \sin \phi \quad , \quad z = Z \quad (۳۴-۱)$$

که در آن $-\infty < Z < \infty$ و $0 < \phi < 2\pi, \rho > 0$ است.



شکل (۱۶-۱)



شکل (۱۷-۱)

سطوح مختصات عبارتند از $\rho = c_\rho$ ، $\phi = c_\phi$ ، $Z = c_z$ که به ترتیب استوانه‌های هم محور با محور zها به عنوان محور مشترک، صفحه‌های شامل محور zها و صفحه‌های عمود بر محور z است. خط‌های مختصات به ترتیب محل برخورد $\rho = c_\rho$ ، $\phi = c_\phi$ ، (خط z) خط راست است؛ محل برخورد $Z = c_z$ ، $\rho = c_\rho$ (خط ϕ) دایره است؛ و سرانجام $Z = c_z$ ، $\phi = c_\phi$ (خط ρ) نیز خط مستقیم است. با توجه به روابط (۱-۳۴)، شعاع حامل نقطه P در مختصات دکارتی و مختصات استوانه‌ای چنین است:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \rho \cos \phi \vec{i} + \rho \sin \phi \vec{j} + z\vec{k}$$

از آنجا، بردار مماس بر خطوط مختصات Z, ϕ, ρ به ترتیب عبارتند از:

$$(۳۵-۱)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j} = \vec{h}_\rho, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \vec{i} + \rho \cos \phi \vec{j} = \rho \vec{m}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$$

و در نتیجه برای ضرایب مقیاس h داریم:

$$h_\rho = 1, \quad h_\phi = \rho, \quad h_z = 1 \quad (۳۶-۱)$$

می‌توان نشان داد که بردارهای یک دستگاه استوانه‌ای دو به دو بر هم عمودند. همچنین برای عملگرهای گرادیان، لاپلاسین، دیورژانس و کرل به ترتیب روابط زیر موجود است:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{e}_\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (۳۷-۱)$$

$$\nabla^r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (38-1)$$

دیورژانس بردار $\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z$ چنین است:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z) \right] \quad (39-1)$$

و کرل آن

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad (40-1)$$

(II). دستگاه مختصات کروی (Spherical Coordinates):

رابطه میان مختصات دکارتی و مختصات کروی (r, θ, ϕ) نقطه P چنین است (شکل ۱-۱۷):

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (41-1)$$

که در آن $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, r \geq 0$

سطوح مختصات، $r = C_1$ کره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات است؛ $\theta = C_2$ مخروط‌هایی با رأس

واقع در مبدأ مختصات و $\phi = C_3$ صفحه‌ای شامل محور z است. خطوط مختصات، محل برخورد

سطح، $r = C_1$ و $\theta = C_2$ (خط ϕ) یک دایره است؛ محل برخورد سطح $r = C_1$ با سطح

$\phi = C_3$ (خط θ) یک نیم دایره و محل برخورد سطوح $\phi = C_3$ و $\theta = C_2$ (خط r) یک خط

است. مشابه آنچه در مختصات استوانه‌ای دیده شد، در مختصات کروی شعاع حامل چنین است:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r \sin \theta \cos \phi \vec{i} + r \sin \theta \sin \phi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} = \vec{n}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \vec{i} + r \cos \theta \sin \phi \vec{j} + r \sin \theta \vec{k} = r \vec{l} \quad (42-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \vec{i} + r \sin \theta \cos \phi \vec{j} = r \sin \theta (\cos \phi \vec{j} - \sin \phi \vec{i}) \\ &= r \sin \theta \vec{m} \end{aligned}$$

است. از آنجا:

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta \quad (43-1)$$

عملگرهای دیفرانسیل در این دستگاه مختصات به ترتیب عبارتند از:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (44-1)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\gamma \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^\gamma \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^\gamma \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^\gamma \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^\gamma \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (45-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial}{\partial r} (r^\gamma A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (46-1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^\gamma \sin \theta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (47-1)$$

◆ مسائل فصل اول:

۱- قطاری با سرعت 10 m/sec در حرکت است و شخصی توپی را در کف قطار با سرعت 5 m/sec عمود بر راستای حرکت قطار می‌غلتاند. سرعت بزآیند توپ را پیدا کنید.

۲- اگر \vec{A} و \vec{B} دو بردار معلوم باشند، نشان دهید که:

$$|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}| \quad \text{الف-}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| \geq \left| |\vec{A}| - |\vec{B}| \right| \quad \text{ب-}$$

۳- نیروی \vec{P} را چنان بیابید که این نیرو با نیروهای $\vec{Q} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ و $\vec{U} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ در تعادل باشند.

۴- نشان دهید که هر یک از مجموعه‌های زیر یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. بعد این فضاها را بیابید و پایه‌ای برای هر کدام بنویسید:

(I) مجموعه تمام بردارهایی که نخستین مولفه آنها صفر است.

(II) مجموعه تمام بردارهای به شکل $b\vec{i} + c(\vec{j} + \vec{k})$

۵- میدان‌های برداری زیر را رسم کنید:

$$V(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{الف-}$$

$$V(x, y) = -x\vec{i} - y\vec{j} \quad \text{ب-}$$

۶- حجم متوازی السطوحی را بیابید که یال‌هایش با بردارهای زیر مشخص می‌شود:

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} ; \quad \vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} ; \quad \vec{C} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

۷- اگر نیروی وارد بر جسم m در نقطه‌ای به مختصات \vec{r} در راستای \vec{r} باشد، نشان دهید که:

$$\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$$

۸- نشان دهید که مشتق تابع برداری با طول ثابت و جهت متغیر، تابع برداری قائم بر آن است. مثالی فیزیکی بیاورید که مبین گفتار فوق باشد.

$$\vec{V}(\rho) = (x^2 - y + z)\vec{i} + (2y - 3z)\vec{j} + (x + z)\vec{k} \quad \text{۹- میدان برداری}$$

و بردار واحد $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ داده شده است. مشتق راستایی، $D_e \vec{V}(\rho)$ را حساب کنید.

$$\vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \frac{df \vec{r}}{dr} \quad \text{۱۰- (الف). نشان دهید که رابطه زیر همواره برقرار است:}$$

که در آن $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ است.

$$\vec{\nabla}(\mathbf{r}^2 e^{-2}) \quad \text{(ب). به کمک اتحاد بالا، عبارت زیر را محاسبه کنید:}$$

۱۱- تابع پتانسیل یک دو قطبی نقطه‌ای با گشتاور دو قطبی \vec{P} در مبدأ مختصات از رابطه زیر

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{بدست می‌آید:}$$

این تابع را در مختصات دکارتی بنویسید. آنگاه میدان الکتریکی آن را در نقطه‌ای به فاصله r از مبدأ به دست آورید.

۱۲- نیروی وارد بر یک دو قطبی در یک میدان متغیر \vec{E} به صورت زیر داده می‌شود.

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

که در آن \vec{P} بردار پلاریزاسیون است. به کمک اتحاد برداری زیر نیروی \vec{F} را بر حسب \vec{P} و \vec{E} محاسبه کنید:

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

۱۳- نشان دهید میدان نیروی $\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + x^2z\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$ پایستار است. تابع

پتانسیل ϕ را بیابید. کار انجام شده را از نقطه (۱، -۲، ۱) تا نقطه (۳، ۱، ۴) حساب کنید.

$$14- \vec{F} = x^2 \vec{y}i + (x-z)\vec{j} + xyz\vec{k} \quad I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{را محاسبه کنید که در آن}$$

است و C کمائی از سهمی $y = x^2$ در صفحه $z = 2$ از $A(0, 0, 2)$ تا $B(1, 1, 2)$ است. همین مسئله را وقتی C قطعه خط بین A تا B است حل کنید. پاسخ‌ها را مقایسه و نتیجه‌گیری کنید.

15- نشان دهید که اتحادهای برداری زیر برقرار است:

$$\nabla^2(\vec{r}\psi) = \vec{r}\nabla^2\psi + 2\nabla^2\psi$$

$$\vec{\nabla}(\nabla^2\psi) = \nabla^2(\vec{\nabla}\psi)$$

توضیح: این اتحادها را در مباحث مختلف فیزیک، مثلاً در اثبات قضیه اهرنفتست در مکانیک کوانتومی می‌بینید.

16- انتگرال $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$ را حساب کنید، که در آن $\vec{A} = 18z\vec{i} - 12z\vec{j} + 3yk\vec{k}$ است و S قسمتی از صفحه $2x + 3y + 6z = 12$ است که در ناحیه یک هشتم دستگاه مختصات فضایی قرار دارد.

17- تابع $V(x, y, z)$ یک تابع پتانسیل اسکالر تک مقداری است اگر و فقط اگر میدان برداری $\vec{F}(x, y, z)$ غیر چرخشی باشد. به بیان دیگر کار انجام شده توسط این نیرو روی هر مسیر بسته‌ای صفر باشد، یا هم ارز آن

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

18- دو بردار \vec{r} و \vec{r}' در مختصات کروی به ترتیب با (r, θ, ϕ) و (r', θ', ϕ') داده شده‌اند. نشان دهید که γ زاویه میان دو بردار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

19- نشان دهید که روابط زیر برقرار است:

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0 \quad \text{-(الف)}$$

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{1jk} \varepsilon_{1jk} = 2\delta_{11} \quad \text{-(ب)}$$

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad \text{-(پ)}$$

فصل دوم

مقدمه‌ای بر جبر ماتریس‌ها

مقدمه

ماتریس نخستین بار توسط کیلی (Cayley) و سپس هامیلتون (Hamilton) وارد دانش ریاضی شد. به عنوان پدیده‌ای تازه، فشرده، و انعطاف‌پذیر به ویژه در تبدیلات خطی جای خود را باز کرد. در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی به صورت روشی منظم و موثر به کار می‌رود. شاید علت اصلی همه‌گیر شدن این شاخه ریاضیات کاربرد گسترده و بسیار ساده ماتریس در ساده‌تر کردن دستگاه معادلات باشد. توجه فیزیکدان‌ها هنگامی به این بخش ریاضی جلب شد که در سال ۱۹۲۵ هایزنبرگ (W.Heisenberg)، بورن (M.Born)، و جوردن یا یوردان (P.Jordan) توانایی آن را در بررسی مکانیک کوانتومی دریافتند. کاربرد عمده ماتریس پس از مکانیک کوانتومی استفاده از آن در بسیاری از شاخه‌های فیزیک و مهندسی مثلاً جریان‌های برق، انتشار امواج، و نوسان‌های مکانیکی است. توسعه و تکامل رایانه‌های جدید به کاربرد ماتریس افزود، زیرا می‌توان عملیات ماتریس‌ها را به سهولت توسط این دستگاه‌های محاسباتی انجام داد.

در فیزیک به دو گونه اصلی با ماتریس‌ها سر و کار داریم: نخست در حل سیستم معادلات خطی،

دوم در حل مسائل مقدار ویژه در مکانیک کلاسیک و کوانتومی. هر دو مسئله به نوبه خود از تبدیلات بردارها توسط عملگرهای خطی در فضاهای برداری نتیجه می‌شوند و در بررسی چنین مسائلی نه تنها روش جبر ماتریسی مفید بلکه ضروری است. اغلب دانشجویان از این جهت در جذب اصول بنیادی مکانیک کوانتومی با ناکامی یا دشواری مواجه می‌شوند که درک صحیحی از فضاهای برداری به آنها داده نشده است. به بیان دیگر با حلقه ارتباطی بین ماتریس‌ها و مکانیک کوانتومی یعنی فضای برداری آشنایی کافی ندارند. از اینرو آگاهی از پایه‌های این اصول لازم است. فرض بر این است که خواننده در فصل پیش تا حدودی این آگاهی را یافته است.

در این فصل به طور خلاصه اصول جبر ماتریس‌ها تا آن حد که برای درک کاربرد آنها در فیزیک به طور عام و در مکانیک کلاسیک به طور خاص لازم است مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۲. تعریف ماتریس و عملیات اصلی جبر ماتریس‌ها:

آنالیز ماتریسی اساساً نظریه ریاضی در زمینه عملگرهای خطی است (جبر خطی). دستگاه m معادله خطی n مجهولی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \quad (1-2)$$

یا به شکل ساده‌تر

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_j \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2-2)$$

مجموعه معادلات (۱-۲) یا (۲-۲) را می‌توان نمایش تبدیل خطی مجموعه n عدد $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ به m عدد $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ دانست. در این صورت آرایه مستطیل شکل (در حالت خاص $m=n$ ، مربع شکل)

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (۳-۲)$$

تبدیل مورد نظر را مشخص می‌کند. A را ماتریس مرتبه (m,n) می‌نامیم. بدین ترتیب در شکل ساده، ماتریس یک آرایه مستطیل شکل یا مربعی از اعداد یا سایر اشیاء است. در زمینه اعداد از ماتریس اعداد حقیقی یا مختلط می‌توان سخن گفت. مثلاً جدول‌های زیر معرف ماتریس هستند:

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{pmatrix} +۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & \sqrt{۲} & ۰ \\ -۲ & -۱ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} \text{ یا } \begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix}$$

ماتریس سمت راست در مثال بالا دارای دو سطر و دو ستون است و اصطلاحاً می‌گوییم ۲×۲ است، و البته منظورمان ضرب نیست! دومین ماتریس ۳×۳ است و بالاخره ماتریس سوم، یک ماتریس ۳×۲ است. برای نشان دادن ماتریس از حروف بزرگ استفاده می‌کنیم. مثلاً A ، و حروف کوچک را برای نشان دادن عناصر ماتریس به کار می‌بریم، مثلاً a_{ij} یعنی عنصر واقع در سطر i ام و ستون j ام. بنا به قرارداد مجموعه n کمیت X_j و m کمیت Y_i را ماتریس‌های ستونی نامیده به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\vec{X} = [x_j] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{Y} = [y_j] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (۴-۲)$$

در اینصورت می‌توان دستگاه ۲-۱ را به صورت نمادین زیر نوشت:

$$A\vec{X} = \vec{Y} \quad (۵-۲)$$

در حالت $m=n$ روابط (۴-۲) را می‌توان به عنوان نمایش ماتریسی بردارهای \vec{X}, \vec{Y} در نظر گرفت.

یعنی دو بردار $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ و $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ را در فضای n بعدی در نظر می‌گیریم. فرض

می‌کنیم میان مولفه‌های این دو بردار دسته روابط خطی زیر برقرار باشد:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6-2)$$

اگر ماتریس تبدیل را A بنامیم، دستگاه بالا به صورت معادله ماتریسی زیر در می‌آید:

$$\vec{Y} = A\vec{X} \quad (7-2)$$

بنابراین روابط خطی (۶-۲) مجموعه روابطی است که بردار \vec{X} در فضای n بعدی را به بردار دیگر \vec{Y} در همین فضا تبدیل می‌کند. در اینصورت: "ماتریس A عملگری خطی در فضای برداری n بعدی است که اثرش بر روی بردار \vec{X} ، بردار \vec{Y} در همان فضاست". روابط (۶-۲) و (۷-۲) تبدیل خطی نیز نامیده می‌شوند.

مثال ۱-۲. تبدیل خطی $\vec{Y} = A\vec{X}$ را در فضای سه بعدی در نظر می‌گیریم که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

با کمک این ماتریس بردار $\vec{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ به بردار زیر تبدیل می‌شود:

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix}$$

دو ماتریس $[a_{ij}]$ و $[b_{ij}]$ را مساوی می‌گوییم اگر و فقط اگر هم مرتبه باشند و به ازای جمیع

مقادیر i و j داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij}$. همانگونه که اشاره شد ماتریس‌ها را برای ساده‌تر شدن اعمال ریاضی به کار می‌بندیم. مثلاً وقتی معادلات خطی را حل می‌کنیم یا تغییرات خطی محورهای مختصات را بررسی می‌کنیم استفاده از ماتریس‌ها مسئله را راحتتر می‌کند.

۲-۱. جمع ماتریس‌ها: مجموع دو ماتریس فقط برای ماتریس‌های هم مرتبه تعریف می‌شود. مجموع دو ماتریس، ماتریس جدیدی است که هر عنصر آن از مجموع عناصر نظیر به نظیر دو ماتریس حاصل می‌شود:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad (۸-۲)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که جمع ماتریس‌ها دارای خاصیت جابجایی و شرکت پذیری است.

مثال ۲-۲. مجموع دو ماتریس A, B را حساب کنید به طوری که

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-6) & 3 + 4 \\ 0 + 1 & -2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام عناصرش صفر باشد ماتریس صفر (Zero Matrix) نامیده

می‌شود و آن را با O نمایش می‌دهیم. واضح است که

$$A + O = O + A = A$$

ماتریس منفی یک ماتریس $A = [a_{ij}]$ به صورت $-A = [-a_{ij}]$ تعریف می‌شود. آشکار است که

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

همین جا تفریق ماتریس‌ها را تعریف می‌کنیم.

$$A - B = A + (-B)$$

۲-۲-۲. ضرب ماتریس‌ها

ضرب ماتریس‌ها را از ضرب بردارهای ستونی و سطری شروع می‌کنیم. تعداد عناصر هر دو

ماتریس برابر است. با توجه به تعریف بنیادی $\vec{X} \cdot \vec{Y}$ که اسکالر است، نمایش ماتریسی این حاصلضرب تنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XY = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n]$$

در حالت کلی حاصلضرب AB دو ماتریس فقط هنگامی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد. از تعریف حاصلضرب چنین می‌پنداریم که A ، B به ترتیب از بردارهای سطری و ستونی تشکیل شده‌اند. آنگاه عنصر سطر i ام و ستون j ام متعلق به ماتریس AB عبارتست از مجموع حاصلضرب عناصر سطر i ام ماتریس A در عناصر متناظر ستون j ام ماتریس B . اگر A ماتریس مرتبه $r \times s$ و B از مرتبه $s \times t$ باشد، آنگاه AB از مرتبه $r \times t$ است.

$$C = AB \Leftrightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (9-2)$$

مثال ۲-۳. دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. حاصلضرب‌های AB و BA را حساب کنید.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{حل:}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

چنانچه مشاهده می‌شود $AB \neq BA$ ؛ یعنی حاصلضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابجایی نیست. و این نخستین ویژگی متمایز ماتریس‌ها نسبت به اعداد است. بدین ترتیب عملگر $[A, B] = AB - BA \neq 0$ به نام جابجاگر یا کموتاتور (Commutator) تعریف می‌شود.

۲-۳. رد یا سرشت ماتریس (Trace):

مجموع عناصر قطر اصلی یک ماتریس را رد ماتریس می‌نامیم.

$$\text{Trace } A = \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (10-2)$$

در این مورد قضیه زیر را برای ماتریس‌های مربعی داریم:

قضیه ۲-۱: رابطه زیر همواره بین ماتریس‌ها برقرار است:

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad (11-2)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = \sum_k (BA)_{kk} = \text{Tr}(BA) \end{aligned}$$

که در آن از تعریف حاصلضرب دو ماتریس استفاده شده است:

$$\left(AB = C \Leftrightarrow C_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \right)$$

۲-۳. «ماتریس‌های خاص»

۱- بردار سطری (Row vector): مجموعه n کمیت را که در یک سطر تنظیم شده است ماتریس یا بردار سطری می‌نامیم. ماتریس سطری ماتریس مرتبه $(1, n)$ است.

۲- بردار ستونی (Column vector): ماتریس مرتبه $(n, 1)$ را که فقط دارای یک ستون است ماتریس یا بردار ستونی می‌نامیم. مثلاً نمایش ماتریسی بردارهای \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} به صورت زیر است:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12-2)$$

۳- اسکالر (Scalar): ماتریس مرتبه $(1, 1)$ و $(1, 1)$ را که فقط دارای یک عنصر است اسکالر یا عدد

۴- ماتریس مربعی (Square Matrix): ماتریسی که عده سطرها و ستون‌های آنها با هم برابر باشد، یعنی ماتریس مرتبه (n,n) را ماتریس مربعی می‌گوییم.

۵- ماتریس قطری (Diagonal Matrix): ماتریس مربعی D را که همه عناصرش جز عناصر قطر اصلی صفر باشد ماتریس قطری می‌نامیم. یعنی

$$D = [d_{ij}] \Rightarrow i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$$

۶- ماتریس یکه (Unit M.): ماتریس I را صرفنظر از مرتبه‌اش ماتریس یکه می‌نامیم چنانچه از تأثیرش بر هر ماتریس دلخواه A رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$IA=AI=A$$

به بیان دیگر ماتریس قطری که همه عناصر آن برابر واحد باشد ماتریس یکه نام دارد. آشکارا برای چنین ماتریسی داریم:

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} نماد کرونکر (Kroncker symbol) است. بدیهی است که تمام توان‌های ماتریس یکه برابر خودش است، یعنی:

$$I_n = I_n^2 = I_n^3 = \dots$$

۷- ماتریس وارون (inverse Matrix): ماتریس B را وارون یا معکوس یک ماتریس مربعی A می‌نامیم اگر

$$AB=BA=I$$

B لزوماً هم مرتبه A خواهد بود. معمولاً ماتریس وارون A با A^{-1} نشان داده می‌شود. بعداً می‌بینیم که هر ماتریس دارای ماتریس وارون نیست، ولی اگر ماتریس A^{-1} وجود داشته باشد یگانه است. بدین منظور می‌توان فرض کرد B ، C ، هر دو، ماتریس‌های وارون A هستند. آنگاه بنا به تعریف

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

در این استدلال از خاصیت انجمنی حاصلضرب ماتریس‌ها استفاده شده است.

مثال ۲-۴: به راحتی می‌توان نشان داد که تساوی $AB=BA=I$ در مورد ماتریس‌های زیر

برقرار است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۸- ماتریس ترانپوذه (Transpose Matrix): ماتریس \tilde{A} را ترانسپوز یا ترانپوذه A می‌نامیم اگر:

$$\tilde{A} = [a'_{ij}] = [a_{ji}]$$

که در آن $a'_{ij} = a_{ji}$ است؛ یعنی جای سطرها و ستون‌های A عوض می‌شود. بنابراین اگر ماتریس A از مرتبه $m \times n$ باشد، \tilde{A} از مرتبه $n \times m$ خواهد بود.

مثال ۲-۵:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x & 1 \\ -i & 3 & -3 \\ 0 & 6 & i \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ x & 3 & 6 \\ 1 & -3 & i \end{bmatrix}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که خواص زیر برقرار است:

I - ترانسپوز ماتریس ترانسپوز، همان ماتریس اولیه می‌شود:

$$\tilde{\tilde{A}} = A$$

II - ترانسپوز مجموع دو یا چند ماتریس = مجموع ترانسپوز آنها:

$$\widetilde{(A + B + \dots)} = \tilde{A} + \tilde{B}$$

III - ترانسپوز حاصلضرب یک اسکالر در ماتریس، برابر با حاصلضرب آن اسکالر در ماتریس

$$\widetilde{(kA)} = k\tilde{A} \quad \text{ترانسپوز است.}$$

IV - ترانسپوز حاصلضرب دو یا چند ماتریس = حاصلضرب ترانسپوز آنها با ترتیب معکوس

$$\widetilde{(AB \dots P)} = \tilde{P} \dots \tilde{B} \tilde{A}$$

۹- ماتریس متقارن (Symmetric Matrix): ماتریس مربعی A را متقارن می‌گوییم چنانچه

$\tilde{A} = A$ باشد، یعنی $a'_{ij} = a_{ij}$. در این حالت عناصر ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن هستند.

مثال ۲-۶. ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{bmatrix}$ یا B به شکل

$A = \begin{bmatrix} ۱ & x & -y \\ x & ۳ & ۴ \\ -y & ۴ & z \end{bmatrix}$ ماتریس‌های متقارن هستند. ماتریس A را شبه متقارن، یا پاد متقارن،

می‌نامیم چنانچه $a_{ij} = -a_{ji}$ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که عناصر قطری یک ماتریس پاد متقارن صفر است.

مثال ۲-۷. ماتریس زیر پاد متقارن است:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & x & -۳ & ۴ \\ -x & ۰ & -z & ۱ \\ ۳ & z & ۰ & xy \\ -۴ & -۱ & -xy & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۰- ماتریس مزدوج (Conjugate Matrix): مزدوج یک ماتریس ماتریسی است که عناصر آن

مزدوج مختلط عناصر ماتریس اصلی باشد. مزدوج ماتریس A را با A^* نشان می‌دهیم.

$$A = \begin{Bmatrix} ۱-i & ۴ & -i \\ ۵ & ۰ & ۱+i \\ ۳-۲i & -۳i & i \end{Bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{Bmatrix} ۱+i & ۴ & i \\ ۵ & ۰ & ۱-i \\ ۳+۲i & ۳i & -i \end{Bmatrix}$$

واضح است اگر A حقیقی باشد، $A^* = A$ است و چنانچه A موهومی باشد $A^* = -A$ می‌شود. به آسانی در می‌یابیم که:

الف). مزدوج یک ماتریس مزدوج، ماتریس اولیه می‌شود: $(A^*)^* = A$

ب). مزدوج حاصلضرب یک اسکالر در یک ماتریس = حاصلضرب مزدوج آن اسکالر در مزدوج

ماتریس:

$$(kA)^* = k^* A^*$$

ج. مزدوج مجموع دو یا چند ماتریس برابر است با مجموع مزدوج آن ماتریسها:

$$(A + B + \dots + P)^* = A^* + B^* + \dots + P^*$$

د. مزدوج حاصلضرب دو یا چند ماتریس = حاصلضرب مزدوج آنها

$$(AB \dots P)^* = A^* B^* \dots P^*$$

۱۱- ماتریس مزدوج هرمیتی (Hermitian conjugate): مزدوج ترانسپوز یک ماتریس را

ماتریس مزدوج هرمیتی آن نامیده و با A^\dagger نشان می‌دهیم (و می‌خوانیم آ-دگر dagger)

$$[a_{ij}]^\dagger = [a^*_{ji}] \quad \text{یا} \quad A^\dagger = \tilde{A}^* = (\tilde{A})^*$$

۱۲- ماتریس هرمیتی (خود الحاقی Hermitian M.): ماتریس هرمیتی ماتریسی است که با

ماتریس مزدوج هرمیتی خود برابر باشد.

$$a^*_{ji} = a_{ij} \quad \text{یا} \quad A^\dagger = A$$

به راحتی می‌توان نشان داد که عناصر قطر اصلی چنین ماتریسی حقیقی هستند (چگونه)?

مثال ۲-۹: ماتریس‌های پائولی به صورت زیر همگی هرمیتی هستند:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها را در بررسی اسپین الکترون خواهیم دید. همچنین ماتریس زیر هرمیتی است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس شبه هرمیتی، یا پادهرمیتی، قرینهٔ ماتریس مزدوج هرمیتی خود است:

$$a^*_{ji} = -a_{ij} \quad \text{یا} \quad A^\dagger = -A$$

عناصر قطر اصلی چنین ماتریسی صفر یا اعداد موهومی هستند (چرا؟). مثال در این مورد چنین است:

$$A = \begin{bmatrix} i & 4 & 2+i \\ -4 & 0 & 3 \\ -2+i & -3 & -i \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های هرمیتی خواص عمده‌ای دارند که به ویژه در فیزیک از آنها استفاده می‌شود. پاره‌ای از این خواص را در بخش‌های بعد و در مسائل پایان فصل خواهیم دید.

۱۳- ماتریس متعامد (Orthogonal Matrix): ماتریسی است که حاصلضربش در ماتریس ترانسپوز آن برابر ماتریس یکه باشد. به بیان دیگر، چنانچه ماتریس A متعامد باشد، آنگاه $A^{-1} = \tilde{A}$ ، که در آن \tilde{A} نمایشگر ماتریس ترانسپوز است. مثلاً ماتریس زیر متعامد است:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ماتریس R که چرخش محورهای مختصات را در یک صفحه به اندازه θ حول مبدأ مشخص می‌کند ماتریس متعامد است و در اثر عمل این ماتریس روی یک بردار، طول بردار ثابت باقی می‌ماند. این نکته برای تمام ماتریس‌های متعامد صدق می‌کند. عمده‌ترین بحث خواص این ماتریس را در مورد چرخش دستگاه‌های مختصات می‌بینیم.

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ یا } R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از ویژگی‌های عمده ماتریس‌های متعامد این است که مجموع مربعات عناصر واقع بر یک سطر یا ستون برابر واحد می‌شود. همچنین دترمینان این ماتریس $+1$ یا -1 است.

۱۴- ماتریس یکانی (Unitary Matrix): ماتریسی است که حاصلضربش در ماتریس مزدوج هرمیتی آن برابر ماتریس یکه شود:

$$A^+A=AA^+=1 \Rightarrow A^{-1}=A^+$$

به عنوان مثال می‌توان از ماتریس‌های یکانی زیر نام برد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -i & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

۲-۴. وابستگی خطی بردارها (Linear dependence):

قبلاً یادآور می‌شویم که خواص فضای سه بعدی را می‌توان در حالت کلی برای $n > 3$ نیز تعمیم داد. در فضای n بعدی نمی‌توان بردارها را به صورت هندسی نمایش داد، اما نمایش ماتریسی بسیار ساده و عملی است. می‌دانیم که هر بردار با یک ماتریس ستونی نشان داده می‌شود. مثلاً بردار \vec{X} را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

حاصلضرب اسکالر دو بردار به صورت زیر در می‌آید (در فضای حقیقی):

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \langle X, Y \rangle = \tilde{X}Y = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2-13)$$

اکنون m بردار را در فضای n بعدی در نظر می‌گیریم:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}, \quad X_m = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}$$

اگر بتوانیم m اسکالر k_1, k_2, \dots, k_m را که همه آنها لزوماً برابر صفر نیستند طوری بیابیم که:

$$\sum_{i=1}^m k_i \cdot \vec{X}_i = k_1 \vec{X}_1 + k_2 \vec{X}_2 + \dots + k_m \vec{X}_m = \vec{0} \quad (13-2)'$$

آنگاه m بردار بالا را به طور خطی وابسته می‌نامیم. در غیر اینصورت m بردار را به طور خطی مستقل از هم می‌نامیم.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \text{مثال 2-12}$$

به راحتی می‌توان دید که

$$2\vec{X}_1 - \vec{X}_2 - \vec{X}_3 + \vec{X}_4 = \vec{0}$$

یعنی این چهار بردار به‌طور خطی به هم وابسته‌اند و $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = +1$ است. اما بردارهای \vec{X}_2, \vec{X}_1 به طور خطی مستقل هستند زیرا برای برقراری رابطه $k_1 \vec{X}_1 + k_2 \vec{X}_2 = \vec{0}$ خواهیم داشت $k_1 = k_2 = 0$.

در مورد وابستگی خطی قضیه زیر موجود است که بدون اثبات آن را بیان می‌کنیم.
قضیه 2-2: اگر در یک مجموعه m عنصری از بردارهای n بعدی رتبه ماتریس وابسته به این مجموعه بردارها برابر $r < m$ باشد، دقیقاً r بردار وجود دارد که به طور خطی ناوابسته‌اند (مستقل هستند) و بقیه $m-r$ بردار دیگر را می‌توان به صورت ترکیب خطی این r بردار بیان کرد.

2-5. پایه فضای برداری:

در فضای برداری \vec{E} تمام دستگاه بردارهای مستقل خطی را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که تعداد ماکزیمم برداری‌های این دستگاه‌ها برابر n باشد (n بی‌نهایت نیست) در اینصورت حداقل یک دستگاه بردار مستقل خطی مرتبه n (مربک از n بردار) وجود دارد و دستگاه خطی مستقل، از مرتبه $n+1$ نمی‌تواند باشد. واضح است که هر بردار \vec{X} از این فضا را می‌توان به صورت ترکیب

خطی از این n بردار در نظر گرفت.

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{E}_i$$

N بردار \vec{E}_i که به طور خطی مستقل از هم هستند تشکیل یک پایه در فضای E می‌دهند. عدد n که تعداد ماکزیمم بردارهای مستقل خطی از یک فضا را می‌دهد بعد آن فضا نامیده و معمولاً با E_n نمایش می‌دهیم. در حالت خاص فضای سه و دو بعدی، چنانچه بردارهای پایه را $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ بنامیم داریم:

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

و در دو بعد داریم:

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^2 x_i \cdot \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$$

حاصلضرب اسکالر دو بردار \vec{X}_1, \vec{X}_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{X}_1 \cdot \vec{X}_2 = \sum_{i=1}^3 x_{1i} x_{2i} \quad (14-2)$$

با نمادنگاری ماتریسی، چنانچه بردارها را با ماتریس‌های ستونی نمایش دهیم رابطه فوق چنین نوشته می‌شود:

$$\vec{X}_1 \cdot \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_1^i x_2^i \quad (15-2)$$

حاصلضرب اسکالر دارای دو خاصیت جابجایی و توزیعی است. خواص فضای سه بعدی و تعریف حاصلضرب اسکالر را می‌توان به حالت عمومی $n > 3$ نیز تعمیم داد. واضح است که در اینصورت دیگر نمی‌توان بردارهای فضای n بعدی را به طور هندسی نمایش داد. حاصلضرب اسکالر به صورت

$$\langle X|Y \rangle = \tilde{X}Y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (16-2)$$

نشان داده می‌شود. اگر حاصلضرب اسکالر دو بردار صفر باشد دو بردار را متعامد می‌نامیم. در مورد اندازه یا نرم بردار رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \langle \mathbf{X} | \mathbf{X} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (17-2)$$

۲-۵-۱. تغییر پایه:

در فضای n بعدی بردارهای $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ را که به طور خطی مستقل از هم هستند در نظر می‌گیریم. این بردارها الزاماً متعامد نیستند. هر بردار \vec{X} از این فضا را به صورت ترکیب خطی از این n بردار نمایش می‌دهیم:

$$\vec{X} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{E}_j \quad (18-2)$$

N بردار خطی \vec{E}_n تشکیل یک پایه از فضای n بعدی می‌دهند.

اکنون n بردار دیگر مستقل از یکدیگر \vec{E}_i را در همین فضا در نظر می‌گیریم. هر یک از بردارهای پایه جدید را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه قدیم نوشت:

$$\vec{E}'_i = \sum_j q_{ij} \vec{E}_j \quad (19-2)$$

اگر مولفه‌های بردار \vec{X} را در سیستم جدید به صورت (x'_1, \dots, x'_n) فرض می‌کنیم واضح است که:

$$\vec{X} = \sum_i x'_i \cdot \vec{E}'_i = \sum_i x'_i (\sum_j q_{ij} \vec{E}_j) = \sum_i (\sum_j q_{ij} x'_i) \vec{E}_j = \sum_j x'_j \vec{E}_j$$

و از آنجا

$$x_j = \sum_i q_{ij} x'_i \quad (20-2)$$

اگر بردار \vec{X} در پایه جدید به صورت \vec{X}' نمایش داده شود، رابطه (۲۰-۲) هم ارزش معادله ماتریسی زیر است:

$$\vec{X} = Q \vec{X}' \quad (21-2)$$

که در آن Q ماتریس تبدیل نام دارد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (22-2)$$

آنگاه رابطه بین پایه قدیم و جدید به صورت معادله ماتریسی زیر در می‌آید.

$$\vec{E}' = Q\vec{E} \quad (23-2)$$

تبدیل خطی دو بردار \vec{X} و \vec{Y} را در فضای n بعدی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم \vec{X} و \vec{Y} در پایه \vec{E}_i نوشته شده‌اند.

$$\vec{Y} = A\vec{X} \quad (24-2)$$

در پایه جدید بنا به رابطه (۲۱-۲) خواهیم داشت:

$$QY' = AQX' \quad \text{یا}$$

اکنون اگر

$$Q^{-1}QY' = (Q^{-1}AQ)X' \quad (25-2)$$

بگیریم، خواهیم داشت

$$\vec{Y}' = A'\vec{X}' \quad (26-2)$$

بنابراین برای اینکه در تغییر پایه (۲۵-۲) رابطه ماتریسی (۲۶-۲) تغییر نکند، لازم است ماتریس A در این رابطه تغییر پایه طبق رابطه (۲۵-۲) تبدیل یابد. به عبارت دیگر، در یک تغییر پایه تبدیل بردار با دستور (۲۶-۲) و تبدیل یک ماتریس با دستور (۲۵-۲) انجام می‌پذیرد. همانگونه که بعداً می‌بینیم دو ماتریس A و A' را که به وسیله (۲۵-۲) به هم مربوط می‌شوند، ماتریس‌های مشابه می‌نامیم.

۶-۲. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس:

۶-۲-۱. تعاریف بنیادی:

A یک ماتریس مربعی معلوم است. در حالت کلی $A\vec{X}$ برداری است متمایز با \vec{X} . اما گاهی به

معادله‌ای به شکل:

$$A\vec{X} = \lambda\vec{X} \quad (27-2)$$

بر می‌خوریم که در آن \vec{X} یک بردار مجهول و λ عددی مجهول است. ابعاد \vec{X} با مرتبه A یکی است. معادله بالا یک پاسخ جزئی یا بدیهی به صورت $\vec{X} = 0$ به ازای تمام مقادیر λ دارد. اما ما لیست مقادیری از λ را چنان بیابیم که دستگاه بالا پاسخ‌های غیر بدیهی داشته باشد. در این رابطه عدد λ از این نوع را مقدار ویژه ماتریس A می‌نامیم، و بردار وابسته به آن، \vec{X} ، را بردار ویژه A می‌گوییم. در واقع در تبدیل خطی $\vec{Y} = A\vec{X}$ چنانچه \vec{Y} برداری در همان امتداد بردار \vec{X} باشد (یعنی $\vec{Y} = A\vec{X}$) آنگاه تبدیل خطی $\vec{Y} = A\vec{X}$ به صورت معادله مشخصه (27-2) در می‌آید. برای حل این معادله با توجه به رابطه $\vec{X} = I\vec{X}$ که در آن I ماتریس یکه است خواهیم داشت:

$$(A - \lambda I)\vec{X} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \quad (28-2)$$

رابطه بالا یک دستگاه معادلات خطی همگن است و در صورتی پاسخ غیر صفر دارد که دترمینان ضرایب آن صفر شود، یعنی:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (29-2)$$

از بسط دترمینان بالا به چند جمله‌ای درجه n به صورت $f(\lambda) = 0$ دست می‌یابیم که معادله مشخصه (Secular Equation) ماتریس A نام دارد، و پاسخ‌های این معادله مقادیر ویژه ماتریس A نام دارند. مجموعه مقادیر ویژه یک ماتریس را طیف آن ماتریس می‌گوییم. می‌توان نشان داد که دو خاصیت عمده زیر درباره طیف ماتریس برقرار است:

الف) - مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر است با رد آن ماتریس، یعنی:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Tr}(A) \quad (30-2)$$

(ب) - حاصلضرب مقادیر ویژه برابر است با دترمینان ماتریس، یعنی

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A| \quad (2-31)$$

بدین منظور به مسایل پایان فصل مراجعه کنید.

بعدها خواهیم دید که مقادیر ویژه و رد ماتریس از مشخصه‌های اصلی یک ماتریس است که تحت تبدیلات مختلف ناوردا هستند. یادآور می‌شویم که به ازای هر λ در حل معادله (2-27) فقط یک \vec{X} نداریم بلکه $h\vec{X}$ نیز پاسخ است (h عدد مثبت یا منفی است). در نتیجه یک امتداد داریم نه یک بردار خاص. با حل یک مسئله مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال 2-13. معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل - معادله مشخصه چنین است:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

ریشه‌های معادله $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ است. پس:

$$A\vec{X}^{(i)} = \lambda_i \vec{X}^{(i)}$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + y + z = 0 \\ 0x + 0y + 2z = 0 \end{cases}$$

یاد آور می‌شویم که در دستگاه n معادله و n مجهولی همگن با دترمینان صفر که در این بررسی به دست می‌آید یکی از معادلات زائد است. در اینجا معادله اول زائد است. بنابراین می‌توان نوشت: $z = 0, y = 0, x = 0$. می‌توان بردار دلخواه را چنان انتخاب کرد که طول بردار ویژه

واحد باشد، مثلاً $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. در این حالت امتداد مربوطه، محور x را مشخص می‌کند. در حالت $\lambda_2 = 2$ داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

در اینجا معادله سوم زائد است. جواب دستگاه چنین است:

$$\begin{cases} x = \text{دلبخواه} \\ y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و بالاخره به ازای $\lambda_3 = 3$ داریم:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

بدیهی است که معادله سوم زائد است. پاسخ دستگاه

$$\begin{cases} x = \text{دلبخواه} \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \vec{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

چنانچه مشاهده می‌شود هر ویژه مقدار λ نظیر یک امتداد معین است نه یک بردار معین، در نتیجه بردار \vec{X} فقط یک امتداد را مشخص می‌کند.

۲-۶-۲. مقادیر ویژه مکرر:

اگر یکی از جواب‌های معادله مشخصه $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

تکراری باشد می‌گوییم واگنی یا تبهگنی (degeneracy) وجود دارد. مرتبه واگنی مرتبه تکرار پاسخ معادله مشخصه است. اگر g مرتبه واگنی و λ_k مقدار ویژه باشد در مواردی می‌توان g بردار ویژه به طور خطی مستقل از یکدیگر به ازای یک مقدار ویژه λ_k به دست آورد.

مثال ۲-۱۴. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل - معادله مشخصه این ماتریس به صورت زیر است:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2(\lambda-5) = 0 \quad (1)$$

بنابراین: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

در این مسئله ریشه‌های مضاعف ۱- داریم. برای یافتن بردارهای ویژه، نخست ریشه ساده $\lambda_1 = 5$ را در نظر می‌گیریم و معادله ماتریسی را برای آن حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

ماتریس معادله (۲) دارای رتبه ۲ است، بنابراین فقط دو معادله از دستگاه فوق مستقل هستند. معادله سوم هر نوع قید یا محدودیت اضافی را می‌دهد. از حل دستگاه فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = \text{دلبخواه} \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \bar{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اکنون معادله (۱) را برای ریشه‌های مضاعف $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 0$$

رتبه ماتریس فوق واحد است و خود تأیید کننده این نکته است که فقط یک معادله مستقل خواهیم داشت. ریشه‌های این معادله عبارتست از:

$$\begin{cases} x = \text{دلبخواه} \\ y = \text{دلبخواه} \\ z = -x - y \end{cases}$$

در انتخاب x و y آزاد هستیم. نخست $x = 1$, $y = 0$ را بر می‌گزینیم. آنگاه با انتخاب اختیاری \vec{X}_2 و \vec{X}_3 بعدی بردارهای پایه چنین خواهند شد (در واقع بردار ویژه در این حالت ترکیب خطی \vec{X}_2 و \vec{X}_3 است نه خود این بردارها به تنهایی، یعنی یک صفحه ویژه داریم):

$$\vec{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نکته- توجه دارید که راستاهای ویژه ماتریس A در این مسئله عبارتند از $\vec{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و

ترکیب خطی \vec{X}_2 و \vec{X}_3 یعنی:

$$\vec{X} = a\vec{X}_2 + b\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$$

چنانچه مشاهده می‌شود $\vec{X}_1 \cdot \vec{X} = 0$ است. این ویژگی تصادفی نیست زیرا ماتریس A متقارن است و در بخش بعد خواهیم دید که یکی از ویژگی‌های عمده ماتریس‌های هرمیتی (و در حالت خاص متقارن) متعامد بودن بردارهای ویژه آن ماتریس است. در این مسئله امتداد ویژه به ازای $\lambda = -1$

بردارهای \vec{X}_2 و \vec{X}_3 به تنهایی نیستند، بلکه به دلیل واگنی ترکیب خطی آنها امتداد ویژه را نشان می‌دهد و از اینرو خاصیت تعامد درباره \vec{X}_1 و \vec{X} برقرار است. در روش کلی چنانچه ماتریس متقارن نباشد از روش اشمیت استفاده می‌شود.

مثال ۲-۱۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

حل -

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 10 & -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

معادله سوم از ترکیب دو معادله قبلی حاصل شده است: $\vec{X}_3 = \vec{X}_1 + 2\vec{X}_2$. بنابراین پاسخ

چنین است:

$$\begin{cases} x_1 = \text{دلبخواه} \\ x_2 = 5x_1 \\ x_3 = 3x_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 10 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 10x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

در اینجا معادله سوم اضافی است. پاسخ دستگاه چنین است:

$$\begin{cases} X_1 = \text{دلبخواه} \\ X_2 = (3/5)X_1 \\ X_3 = (2/5)X_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

چنانچه مشاهده می‌شود برخلاف مثال پیش برای مقدار ویژه تکراری $\lambda = 1$ فقط یک بردار ویژه وجود دارد. برای یافتن بردار ویژه سوم می‌توان از روش اشمیت استفاده کرد.

۲-۶-۳. خواص ماتریس‌های هرمیتی: در زیر به بیان چند قضیه مهم در ارتباط با ماتریس‌های هرمیتی (و حدر حالت حقیقی، ماتریس متقارن) می‌پردازیم:

قضیه ۲-۳.

الف) - طیف یک ماتریس هرمیتی، حقیقی است.

ب) - بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه مختلف یک ماتریس هرمیتی، متعامد هستند.

اثبات - این قضیه را در حالت ساده غیر تبهگن بررسی می‌کنیم. ماتریس هرمیتی A را در نظر می‌گیریم ($A^+ = A$) و بردارهای ویژه متناظر با دو مقدار ویژه λ_j, λ_i را به ترتیب \vec{X}_j, \vec{X}_i بر می‌گزینیم. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A\vec{X}_i = \lambda_i \vec{X}_i \\ A\vec{X}_j = \lambda_j \vec{X}_j \end{cases}$$

حاصلضرب اسکالر دو معادله دستگاه فوق را به ترتیب با \vec{X}_i و \vec{X}_j تشکیل می‌دهیم. نمایش

$$\begin{cases} X_i^+ A X_i = X_j^+ \lambda_i X_i = \lambda_j X_j^+ X_i \\ X_i^+ A X_j = X_i^+ \lambda_j X_j = \lambda_j X_i^+ X_j \end{cases} \quad \text{ماتریسی این حاصلضرب‌ها چنین می‌شود:}$$

مزدوج هرمیتی یکی از دو معادله مثلاً معادله دوم را حساب کرده، آنگاه تفاضل آن را از معادله اول تعیین می‌کنیم:

$$(X_i^+ A X_j)^+ = X_j^+ A^+ X_i = (\lambda_j X_j^+ X_i)^+ = \lambda_j^* X_i^+ X_j$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j^*) X_i^+ X_j = X_j^+ A X_i - X_j^+ A^+ X_i$$

و چون A هرمیتی است سمت راست صفر می‌شود، بنابراین:

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) X_i^+ X_j = 0 \quad (۳۲-۲)$$

دو حالت تشخیص می‌دهیم:

الف) - چنانچه $i=j$ باشد آنگاه $X_i^+ X_i$ نرم بردار را تشکیل می‌دهد که عموماً مخالف صفر است.

$$\lambda_i - \lambda_i^* = 0 \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{پس:}$$

یعنی λ_i عددی حقیقی است، و چون I و Z مقادیر اختیاری هستند این ویژگی برای تمام مقادیر برقرار است.

ب) - اگر $i \neq j$ باشد، آنگاه با توجه به حالت غیر واگن که به هر λ_i فقط یک بردار \vec{X}_i نسبت داده می‌شود، $\lambda_i \neq \lambda_j$ است (توجه دارید که بنابر قسمت الف، λ ها حقیقی هستند و $\lambda_i^* \neq \lambda_j$ قرار داده شده است). در نتیجه

$$X^+ \cdot X = 0$$

یعنی بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه متفاوت بر هم عمودند. بدین ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

از این قضیه که عمده‌ترین ویژگی ماتریس‌های هرمیتی را بیان می‌کند در بررسی اپراتورهای خطی در مکانیک کوانتومی استفاده خواهد شد. در حالت تبه‌گنی می‌توان به روش اشمیت مجموعه بردارهای ویژه راست هنجار را بنا کرد. یعنی اگر به ازای $\vec{X}_j \neq \vec{X}_i$ داشته باشیم $\lambda_j = \lambda_i$ ، در اینصورت از رابطه (۳۲-۲) نمی‌توان شرط تعامد دو بردار ویژه را نتیجه گرفت. اما روش اشمیت امکان برپایی بردارهایی پایه متعامد را به ما می‌دهد.

قضیه ۲-۴. شرط لازم و کافی برای اینکه دو ماتریس مربعی A و B جابجاپذیر باشند (به معنای $[A, B] = AB - BA = 0$)، آن است که دارای بردارهای ویژه مشترک باشند. صورت قضیه را بر عکس نیز می‌توان بیان داشت.

اثبات - لزوم شرط:

$$AB=BA$$

بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه λ_a ماتریس A را \vec{X} فرض می‌کنیم. آنگاه $A\vec{X} = \lambda_a \vec{X}$

اکنون به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$AB\vec{X} = BA\vec{X} \Rightarrow B\lambda_a\vec{X} = \lambda_a B\vec{X}$$

از مقایسه دو رابطه $A\vec{X} = \lambda_a\vec{X}$ و $A(B\vec{X}) = \lambda_a(B\vec{X})$ مشاهده می‌شود که دو بردار \vec{X} و $B\vec{X}$ دارای یک راستای ویژه هستند یعنی با هم موازیند: $B\vec{X} = \lambda_b\vec{X}$. پس بردار \vec{X} بردار ویژه ماتریس B با مقدار ویژه λ_b است. کفایت شرط: روابط زیر داده شده است.

$$\begin{cases} A\vec{X} = \lambda_a\vec{X} \\ B\vec{X} = \lambda_b\vec{X} \end{cases}$$

در اینصورت

$$AB\vec{X} = A\lambda_b\vec{X} = \lambda_b A\vec{X} = \lambda_b\lambda_a\vec{X}$$

$$BA\vec{X} = B\lambda_a\vec{X} = \lambda_a B\vec{X} = \lambda_a\lambda_b\vec{X}$$

تفاضل دو رابطه را به دست می‌آوریم. از آنجا که \vec{X} برداری اختیاری است نتیجه نهایی حاصل می‌شود.

$$(AB - BA)\vec{X} = 0 \Rightarrow AB - BA = [A, B] = 0$$

۷-۲. ماتریس‌های معادل (Equivalent Matrices):

دو ماتریس A, A' را معادل می‌گوییم چنانچه بتوان دو ماتریس غیر ویژه B و C را به طریقی یافت که رابطه $A' = CAB$ برقرار باشد. به بیان دیگر A, A' را معادل می‌نامیم اگر بتوانیم تحت تبدیلات مشخصی از یک ماتریس به ماتریس دیگر برسیم. ماتریس‌های معادل خواص مشترک زیادی دارند. اهمیتشان در این است که اغلب می‌توان به کمک یک تبدیل از نوع آنچه گفته شد ماتریس معادل ماتریس اول را چنان یافت که دارای خواص ساده و مخصوص باشد. چنانچه ماتریس حاصل دارای ساده‌ترین شکل خود یعنی قطری باشد ماتریس کانونی نام می‌گیرد و تبدیل مذکور را تبدیل کانونیک (تبدیل بندادی) می‌گوییم. مسئله یافتن ماتریس کانونی مانند یافتن

محورهای مختصات مناسب در هندسهٔ تحلیلی است. بعد خواهیم دید که بعضی تبدیلات ویژه تغییری در مقادیر ویژه ماتریس ایجاد نمی‌کند (به مسائل پایان فصل مراجعه کنید). بنابراین تحویل یک ماتریس به شکل قطری آن کاملاً با مسئله یافتن مقادیر ویژه آن مربوط است.

اکنون در زیر به برخی تبدیلات که کاربرد فیزیکی نیز دارند می‌پردازیم:

اگر $CB=1$ یا $C=B^{-1}$ باشد،

$$A' = B^{-1}AB \quad \text{یا} \quad A' = BAB^{-1}$$

در این حالت تبدیل را تبدیل تشابهی (یا مشابه) می‌نامیم. در چرخش‌های متوالی دستگاه‌های مختصات به این نوع تبدیل برمی‌خوریم. فرض می‌کنیم دستگاه مختصات را می‌چرخانیم یا فقط بردار را می‌چرخانیم. ماتریس A را به عنوان چرخش بردار \vec{r} به مکانی که توسط \vec{r}' نشان داده می‌شود تعبیر می‌کنیم:

$$\vec{r}' = A\vec{r}$$

اکنون چرخش دیگری را در نظر می‌گیریم که در پی چرخش اولی صورت می‌گیرد و با ماتریس B مشخص می‌شود. توجه داریم که ماتریس‌های A و B معمولاً متعامد هستند، اما می‌توان پذیرفت که اساساً لزومی ندارد که چنین باشد:

$$B\vec{r}' = B(A\vec{r}) = BA(B^{-1}B)\vec{r} = BAB^{-1}(B\vec{r})$$

$B\vec{r}'$ همان \vec{r} در دستگاه مختصات جدید است و با همان تعبیری که برای $B\vec{r}'$ موجود است. در نتیجه در این دستگاه جدید، $B\vec{r}$ توسط ماتریس BAB^{-1} به وضعیت $B\vec{r}'$ چرخیده است. به بیان دیگر در دستگاه جدید که پس از چرخش دستگاه مختصات توسط ماتریس B حاصل می‌گردد A دارای صورت A' است به طوری که

$$A' = BAB^{-1} \quad (۳۳-۲)$$

چنین تبدیلی را تبدیل تشابهی می‌نامیم و B می‌تواند هر نوع ماتریسی باشد.

تبدیل تشابهی، تبدیل محورهای اصلی نیز نام دارد زیرا این تبدیلات در تحویل مقاطع مخروطی به محورهای اصلی آنها و یافتن محورهای اصلی یک جسم دوار یا در تحویل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یک سیستم به مجموع عبارت‌های دو مجذوری به کار می‌رود. (معادله ۲-۳۳) را به صورت

مولفه‌ای می‌نویسیم:

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{kl} b_{lj}^{-1}$$

اگر B متعامد باشد ($B\tilde{B} = 1$) داریم:

$$b_{ij}^{-1} = \tilde{b}_{ij} = b_{ji} \quad (۲)$$

$$a'_{ij} = \sum_{k,l} b_{ik} a_{jl} b_{kl} \quad \text{و در نتیجه:}$$

با مقایسه رابطه (۲) و معادلات تانسوری خواهیم دید که این رابطه تعریف تانسور رتبه دو را نشان می‌دهد. در نتیجه ماتریسی که توسط تبدیل تشابهی متعامد تبدیل می‌یابد بنا به تعریف یک تانسور است. واضح است که در این صورت می‌توان هر ماتریس متعامد A را که به عنوان چرخش یک بردار تعبیر می‌شود تانسور نامید. اما اگر ماتریس متعامد را به عنوان مجموعه‌ای از کسینوس‌های هادی ثابت که سمتگیری جدید دستگاه مختصات را تعیین می‌کند در نظر بگیریم هیچ تبدیل تانسوری نخواهیم داشت.

از ویژگی‌های مهم تبدیل تشابهی متعامد بودن آن است که خاصیت تقارنی تحت تبدیل تشابهی متعامد حفظ می‌شود. به طور کلی این خاصیت تبدیل تشابهی نامتعامد محفوظ نمی‌ماند؛ فرض می‌کنیم A ماتریسی متقارن است یعنی $A = \tilde{A}$. آنگاه

$$A' = BAB^{-1} \Rightarrow \tilde{A}' = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}^{-1} = \tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}^{-1}$$

اگر $C = \tilde{B}$ و $CB=1$ باشد،

$$A' = CAB = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{B} = B^{-1}AB$$

در این حالت تبدیل را متعامد (Orthogonal Transformation) می‌نامیم. تبدیل متعامد، مشابه نیز هست. اگر عناصر ماتریس تبدیل مختلط باشند و نیز $C=B^\dagger = B^{-1}$ باشد (B ماتریس یکانی)، آنگاه

$$A' = CAB = B^\dagger AB = B^{-1}AB$$

است و تبدیل را تبدیل یکانی (Unitary Transformation) می‌نامیم. تبدیل یکانی، مشابه و مزدوجی است.

مثال ۲-۱۶. تبدیل محوره‌های اصلی: در بالا گفته شد که تبدیل مشابه، تبدیل محوره‌های اصلی نیز نام دارد. فرض می‌کنیم بردار \bar{X} و ماتریس A به صورت زیر داده شده‌اند:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}$$

که در آن a, b, h ضرایب حقیقی و x_1, x_2 متغیرهای حقیقی هستند. معادله

$$\tilde{X}AX = C \tag{۱}$$

را به صورت معادله دو مجزوری

$$ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2 = C \tag{۲}$$

می‌نویسیم. این معادله یک مقطع مخروطی را در فضای دو بعدی (x_1, x_2) نمایش می‌دهد. برای یافتن این مقطع و بحث دربارهٔ نوع آن، تبدیل مختصات زیر را به کار می‌بریم: از آنجا که A ماتریس متقارن حقیقی است، می‌توان آن را با یک ماتریس متعامد P قطری کرد، یعنی

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \Lambda \tag{۳}$$

که در آن λ_1, λ_2 مقادیر ویژه A هستند. آنگاه معادله (۱) چنین می‌شود:

$$\tilde{X}PP^{-1}APP^{-1}X = C \Rightarrow (P^{-1}X)\Lambda(P^{-1}X) = C \tag{۴}$$

اگر مختصات جدید

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P^{-1}X \tag{۵}$$

را وارد کنیم، در این صورت معادله (۴) چنین می‌شود:

$$\tilde{Y}\Lambda Y = C \Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = C \tag{۶}$$

و یا به شکل ساده‌تر

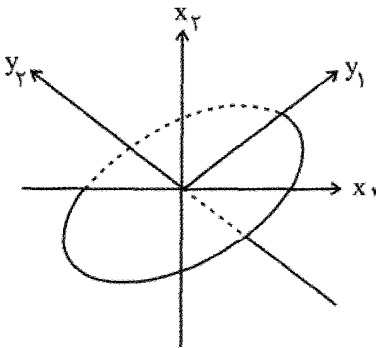
$$\frac{y_1^2}{\Lambda_1} + \frac{y_2^2}{\Lambda_2} = 1 \tag{۶}$$

واضح است که معادله فوق یک بیضی است اگر C و λ_1 و λ_2 هم علامت باشند، و یا هذلولی است اگر λ_1 و λ_2 علامت‌های مخالف داشته باشند و بالاخره یک منحنی موهومی است اگر λ_1 و λ_2 هم علامت باشند ولی C علامت مخالف داشته باشد. و یا یک جفت خط مستقیم، یک خط راست، یک نقطه و یا اصلاً منحنی حقیقی نخواهد بود اگر یکی از ضرایب λ_1 و λ_2 و C و یا بیش از آن صفر شود.

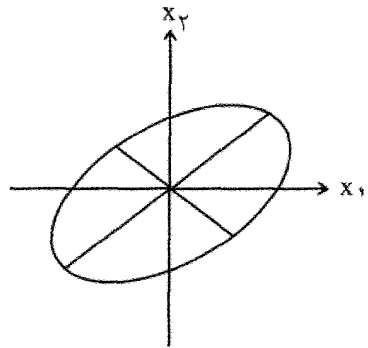
از این میان، دو حالت اول برای ما مهمتر است یعنی وقتی که معادله (۶) بیضی یا هذلولی است.

در حالت بیضی نیمه قطرهای اصلی بیضی $\left(\frac{C}{\lambda_1}\right)^{1/2}$ ، $\left(\frac{C}{\lambda_2}\right)^{1/2}$ است. به علاوه، محورهای

اصلی مقطع مخروطی در راستای مختصات جدید y_1 و y_2 است. وجود عبارت $x_1 x_2$ در معادله (۲) نشان می‌دهد که محورهای مختصات موازی محورهای اصلی مقطع مخروطی نیست. با یک تبدیل متعامد از (x_1, x_2) به (y_1, y_2) معادله مقطع مخروطی یک شکل استاندارد می‌گیرد و به ما اجازه می‌دهد که طول و جهت محورهای اصلی را تعیین کنیم. بنابراین این روش را تبدیل محور اصلی می‌نامیم و شکل آن را نشان می‌دهد. در این مورد یکی دو مثال مطرح می‌کنیم:



در این شکل محورهای اصلی بیضی بر محورهای مختصات منطبق است.



در این شکل محورهای اصلی بیضی بر محورهای مختصات منطبق نیست.

$$8x^2 + 2\sqrt{2}xy + 7y^2 = 3$$

مثال ۲-۱۷. نشان دهید که معادله

یک بیضی را نمایش می‌دهد. محورهای اصلی آن را بیابید.

حل: معادله بالا را به صورت $\tilde{X}AX = ۴$ می‌نویسیم، که در آن:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} ۸ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & ۷ \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متعامد A چنین است:

$$۹, \left\{ \frac{\sqrt{۲}}{۳}, \frac{۱}{\sqrt{۳}} \right\}, \quad ۶, \left\{ \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \sqrt{\frac{۲}{۳}} \right\}$$

بنابراین ماتریس قطری کننده P چنین است:

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{۲}{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & -\sqrt{\frac{۲}{۳}} \end{bmatrix}$$

و چنانچه مختصات جدید را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}X = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{۲}{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & -\sqrt{\frac{۲}{۳}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (I)$$

آنگاه معادله داده شده چنین می‌شود:

$$۹x'^2 + ۶y'^2 = ۳ \Rightarrow ۳x'^2 + ۲y'^2 = ۱$$

که معادله یک بیضی است. نصف طول محور بزرگ و کوچک این بیضی به ترتیب $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

است و محور اصلی آن در راستای y' است. از معادله (I) داریم:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{۳}} - \sqrt{\frac{۲}{۳}}y$$

و از آنجا زاویه محور اصلی با محور x برابر $\text{tg}^{-1}(-\sqrt{۲})$ به دست می‌آید.

اکنون اگر $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ برداری حقیقی سه بعدی باشد، معادله $\tilde{X}AX = C$ ، که در آن A ماتریس متقارن مرتبه ۳ است، در فضای سه بعدی یک مکان هندسی را نشان می‌دهد. اگر U ماتریس متعامدی باشد که A را قطری می‌کند، آنگاه $y \equiv U^{-1}X = \{y_1, y_2, y_3\}$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که معادله $\tilde{X}AX = C$ را به شکل قطری درآورد. Λ ماتریسی قطری است که عناصر قطرش مقادیر ویژه A است. اگر این مقادیر ویژه را با $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ نمایش دهیم، آنگاه معادله $\tilde{y}\Lambda y = C$ چنین می‌شود:

$$\frac{y_1^2}{C/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{C/\lambda_2} + \frac{y_3^2}{C/\lambda_3} = 1$$

اگر هر سه مخرج کسر، در معادله بالا مثبت باشند، معادله یک بیضی را نشان خواهد داد. اگر یکی منفی شود یک هذلولی یک شاخه می‌شود. و چنانچه دو ضریب منفی باشند، هذلولی دو شاخه می‌شود. در تمام حالت‌ها این معادله یک سطح، یک منحنی، یا یک نقطه را نشان می‌دهد یا اساساً معرف هیچ مکان حقیقی نیست. در سه حالت جالب اول، محورهای اصلی در راستای y_1, y_2, y_3 است. وقتی معادله یک بیضی را نشان می‌دهد. طول محورهای اصلی عبارتند از:

$$2 \left(\frac{C}{\lambda_i} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad i = 1, 2, 3$$

۸-۲. چند کاربرد جبر ماتریسی در فیزیک کلاسیک و کوانتومی

نام بردن تمام کاربردهای جبر ماتریس‌ها در فیزیک بسیار دشوار است. از این رو به چند مورد برگزیده آن اشاره می‌شود:

۸-۲-۱. ماتریس چرخش

در فصل اول (آنالیز برداری) به ماتریس چرخش اشاره شد. (x, y, z) را دستگاه مختصات دکارتی در فضای سه بعدی می‌گیریم و $\vec{u} = (u_1, u_2)$ را برداری در صفحه xy فرض می‌کنیم. دستگاه مختصات را پیرامون محور z به اندازه θ در جهت مثبت می‌چرخانیم و محورهای مختصات جدید را

با (x', y', z') نشان می‌دهیم. اگر مولفه بردار \vec{u} را نسبت به دستگاه جدید u'_1, u'_2 بگیریم، واضح است که رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} u'_1 = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta \\ u'_2 = -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

و یا به شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

اگر اپراتور چرخش را با $R_z(\theta)$ نشان دهیم، می‌توان تبدیل بردار \vec{u} به $\vec{u}' = (u'_1, u'_2)$ را به صورت

$$\vec{u} \rightarrow \vec{u}' = R_z(\theta)\vec{u} \quad (3)$$

نمایش داد. از مقایسه دو رابطه (۲) و (۳) در می‌یابیم که تأثیر اپراتور $R_z(\theta)$ عبارت است از ضرب بردار ستونی (u_1, u_2) در ماتریس 2×2 در سمت راست معادله (۲)، این ماتریس نمایشگر اپراتور $R_z(\theta)$ در فضای دو بعدی (x, y) است و می‌نویسیم:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (34-2)$$

که ماتریسی متعامد است.

چنانچه این عمل را به سه بعد تعمیم دهیم، معادلات تبدیل زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u'_1 = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta \\ u'_2 = -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \\ u'_3 = u_3 \end{cases}$$

و آنگاه $R_z(\theta)$ در سه بعد چنین می‌شود:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35-2)$$

به عنوان مثال از چرخش جسم صلب به دور محوری دلخواه که از مبدأ مختصات می‌گذرد می‌توان نام برد. این چرخش معادل سه چرخش متوالی حول محورهای مختصات به ترتیب زیر است:

(۱) دوران حول محور z به اندازه α که بلافاصله پس از آن؛ (۲) دوران β حول محور جدید y صورت می‌گیرد و در پی آن نیز (۳) دوران به اندازه γ حول محور جدید z انجام می‌گیرد. α و β و γ زاویه‌های اویلر نامیده می‌شوند و چرخش را با عملگر $R(\alpha, \beta, \gamma)$ نشان می‌دهیم:

$$\vec{u}' = R(\alpha, \beta, \gamma)\vec{u} = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha)\vec{u}; \quad \text{آنگاه:}$$

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \sin \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

(۳۶-۲)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

این ماتریس به ماتریس چرخش سه بعدی معروف است. عمومی‌ترین ماتریس متعامد 3×3 با دترمینان $+1$ است.

۲-۸-۲. ماتریس‌های اسپین پائولی:

در مسئله اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی الکترون (اسپین) در مکانیک کوانتومی، به عملگر اسپین \vec{S} به صورت زیر بر می‌خوریم:

$$S_x = \frac{1}{2} \hbar \sigma_x, \quad S_y = \frac{1}{2} \hbar \sigma_y, \quad S_z = \frac{1}{2} \hbar \sigma_z$$

که در آن $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ثابت پلانک و $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ماتریس‌های پائولی با خواص زیر هستند:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \quad (۳۷-۲)$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0; \quad \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0; \quad \sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x = 0 \quad (۳۸-۲)$$

رابطه‌های اخیر نشان می‌دهند که σ ها نسبت به یکدیگر جابجاناپذیر هستند، بنابراین اعداد معمولی نیستند. از آنجا که ماتریس‌ها نیز نسبت به یکدیگر می‌توانند جابه‌جا ناپذیر باشند، از این رو در مورد

الکترون با اسپین $\frac{1}{2}$ ماتریس‌های 2×2 را برای σ به کار می‌گیریم.

بدین ترتیب رابطه‌های (۱) نیز به صورت ماتریس یکه (2×2) ظاهر می‌شوند. از آنجا که σ_z هرمیتی هستند این امکان وجود دارد که با انتخاب روشی مناسب حداقل بعضی از آنها را قطری کرد. در واقع چون با یکدیگر جابه‌جاپذیر نیستند، در یک زمان بیش از یکی را نمی‌توان قطری کرد. چرا که ماتریس‌های قطری باید با هم جابه‌جاپذیر باشند. فرض می‌کنیم σ_z را به صورت قطری نمایش دهیم. چون σ_z قطری است و $\sigma_z^2 = 1$ است. پس عناصر قطر آن ± 1 است؛ یعنی به صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ یا } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ است. انتخاب یکی از آنها فرق نمی‌کند زیرا ترتیب قرار گرفتن}$$

عناصر روی قطر اصلی تأثیری در ماتریس قطری ایجاد نمی‌کند از این رو شکل اول را بر می‌گزینیم:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

اکنون درصدد آنیم که σ_y, σ_x را حساب کنیم. آنها را به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ می‌گیریم. از

رابطه‌های (۳۷-۲) و (۳۸-۲) کمک می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $a = d = 0$. در مرحله بعد چنین عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow bc = 1$$

پس:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

با این خاصیت که $pq = 1$ و $rs = 1$ است. همچنین σ_x, σ_y با یکدیگر جابه جا ناپذیر هستند.

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0 \Rightarrow ps + qr = 0$$

از اینجا می‌توان ضرایب بالا را پیدا کرد. با انتخاب اختیاری $p = 1$ ، خواهیم داشت $q = 1$ ، $r = -i$ و $s = i$. بنابراین برای ماتریس‌های اسپین پائولی در نمایشی که σ_z قطری است چنین خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بعداً در بحث اسپین در مکانیک کوانتومی شیوه عمومی‌تر انتخاب ماتریس‌های پائولی را مشاهده خواهید کرد.

◆ مسائل فصل ۲

۱- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} q & p & p \\ p & q & p \\ p & p & q \end{bmatrix}; \quad p \neq 0$$

خواص (۲-۳۰) و (۲-۳۱) را در مورد این ماتریس تحقیق کنید (به متن درس مراجعه کنید).

۲- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید. رابطه‌ای میان بردارهای ویژه این ماتریس به دست آورید و نتیجه گیری کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳- نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس یکانی، خود ماتریس یکانی است.

۴- ماتریس عکس یک ماتریس یکانی، ماتریسی است یکانی.

۵- نشان دهید اگر ماتریس A دارای ماتریسی معکوس باشد منحصر به فرد است.

۶- نشان دهید که گزاره‌های زیر همگی درست هستند:

(الف)- اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ طیف ماتریس A باشند، طیف ماتریس A^k عبارتست از $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$. این گزاره در مورد طیف ماتریسی A^{-1} به چه صورتی در می‌آید؟

(ب)- مقادیر ویژه دو ماتریس A و \tilde{A} (و در نتیجه A^* ، A^+) برابر هستند.

(پ)- اگر λ_i یکی از مقادیر ویژه ماتریس غیر ویژه A باشد، $|A|/\lambda_i$ مقدار ویژه مربوط به

ماتریس $\text{adj}A$ است.

۷- نشان دهید که تبدیل تشابهی تغییری در طیف ماتریس به وجود نمی‌آورد (ماتریس‌های مشابه

مقادیر ویژه یکسانی دارند). در نتیجه رد یک ماتریس با اینگونه تبدیل تغییر ناپذیر می‌ماند.

۸- اگر A و B هرمیتی باشند، نشان دهید که $AB+BA$ هرمیتی است و $BA-AB$ پاد هرمیتی

۹- نشان دهید که هر ماتریس هرمیتی A را می‌توان به صورت $B+C$ نمایش داد که در آن B ماتریس حقیقی متقارن و C ماتریس پاد متقارن است.

۱۰- اگر A ماتریس مربعی مرتبه n باشد، نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$\text{odj}(\text{adj}A) = |A|^{n-2} A$$

۱۱- ثابت کنید که دوران $\begin{bmatrix} A & \circ \\ B & C \end{bmatrix}$ ماتریس $\begin{bmatrix} A^{-1} & \circ \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$ است که در آن

C, B, A سه ماتریس غیر ویژه هستند. آنگاه وارون ماتریس زیر را بیابید:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 1 & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۲- کلی‌ترین شکل ماتریس یکانی مرتبه دو را بنویسید.

۱۳- اگر H ماتریس مربعی باشد نشان دهید که $U=(H-i1)(H+i1)$ ماتریس یکانی است.

۱۴- نشان دهید اگر A ماتریس مربع باشد، ماتریس‌های $A + \tilde{A}$ ، $A - \tilde{A}$ به ترتیب متقارن و پادمقارن هستند. از آنجا نتیجه بگیرید که هر سه ماتریس مربعی را می‌توان به صورت مجموع دو ماتریس

مقارن و پاد متقارن نوشت. آیا این مطلب را می‌توان به ماتریس‌های هرمیتی و پاد هرمیتی تعمیم داد؟

۱۵- نشان دهید که ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

۱۶- ماتریس S را چنان بیابید که ماتریس پائولی σ_x را با یک تبدیل تشابهی به صورت قطری

درآورد. در این نمایش جدید، ماتریس‌های σ_x و σ_y و σ_z را بنویسید.

۱۷- اگر B, A ماتریس‌های مربعی مرتبه n باشند، آنگاه نشان دهید که شرط لازم و کافی برای

جابجایی این دو ماتریس آن است که $A - \lambda 1$ ، $B - \lambda 1$ برای هر مقدار اسکالر λ جابجایی باشند.

۱۸- اگر B, A هرمیتی باشند، آنگاه AB فقط و فقط هنگامی هرمیتی است که داشته باشیم.

$$[A, B] = 0$$

فصل سوم

پایه‌های مکانیک نیوتنی

«اگر من چیزهای تازه‌ای را دیده‌ام برای آن است که بر شانه‌ی غول‌ها ایستاده‌ام.»
«اسحاق نیوتن»

همانگونه که در پیشگفتار مطرح شد مکانیک دانشی دقیق است. در بیان پدیده‌ها تشریح کمی است که اهمیت واقعی دارد و چنانچه صرفاً به تبیین کیفی پدیده‌ها اکتفا شود اختلافات مشهودی در بعضی قسمت‌ها میان نظریه و اندازه‌گیری آشکار می‌شود. در نتیجه به مفاهیمی که سبب بسط و گسترش علمی دقیق می‌گردد باید معنای عددی دقیق داده شود. مثلاً، اگر بخواهیم کمیتی مانند جرم را تعریف کنیم باید تعریف چنان باشد که برای تمامی حالت‌های داده شده چگونگی تعیین مقدار کمیت دقیقاً مشخص شود.

در مکانیک نیوتنی سخن از واژه‌های مقدماتی یا اصطلاح‌های از پیش تعریف شده و یا اساساً اصطلاح‌های تعریف نشده است. تمام این اصطلاح‌های مقدماتی را می‌توان به کمک مشاهده و آزمایش تعریف کرد، مانند جرم و نیرو و غیره که از طریق مشخص کردن فرآیند سنجش این

کمیت‌ها تعریف می‌شوند. در این طرز تفکر زمان و فضا مطلق است و سرعت همچون نفس حرکت، امری نسبی است.

اساساً «مکانیک بررسی حرکات اجسام مادی است». به روش متعارف مکانیک به سه بخش دینامیک (پویایی) - سینماتیک (جنبش شناسی) - و استاتیک (ایست شناسی) تقسیم می‌گردد. نحوه دیگر بررسی مکانیک، تقسیم‌بندی آن براساس چگونگی ساختمان ذره و ذرات تشکیل دهنده سیستم‌هاست. از این رو ما نیز همین شیوه را دنبال می‌کنیم، و در فصل‌های بعد دینامیک ذره در ابعاد مختلف (یک بعد، دو و سه بعد) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بنا به گفته سمرفلد، مکانیک استخوان بندی فیزیک ریاضی است. بنا بر اعتقاد وی هر چند این گفته درست است که دیگر نیازی نیست، آنطور که در خلال قرن گذشته مرسوم بوده است، تمام پدیده‌های فیزیکی را بر حسب مدل‌های مکانیکی بیان کرد، معذالک متقاعد می‌شویم که مفاهیم و اصول مکانیک مانند اندازه حرکت، انرژی و اصل کمترین کنش، بیشترین اهمیت را در تمام شاخه‌های فیزیک دارا هستند.

مسئله عمده مکانیک کلاسیک یافتن شیوه‌هایی است، جهت تعیین توابعی که مکان جسم را برای هر حالت مکانیکی به صورت تابعی از زمان مشخص می‌کند؛ به عبارت دیگر مسئله اصلی، تعیین معادله مسیر حرکت است. حرکت دستگاه مکانیکی با توجه به نیروهای موثر بر اجسامی تعیین می‌گردد که دستگاه مذکور را می‌سازند. در اینجا لازم است که نیرو را به صورت رابطه و بر همکنش میان جسم و محیط اطرافش تعریف کنیم. بدین ترتیب نیرو انگیزه‌ای برای تغییر حالت طبیعی جسم می‌شود و به تعبیر دیگر نیرو عامل متحول کردن جسم در زمان و مکان است. رشد تدریجی و حتمی جسم در گستره زمان مطابق قانون کلی حرکت در پرتو قوانین حرکت نیوتن متجلی می‌شود. بد نیست همین جا نارسایی مکانیک را به زمینه‌هایی که منجر به پیدایش مکانیک کوانتومی و نسبیت می‌شود بیان کنیم. نخست حالتی که جرم یا فاصله‌ها فوق العاده بزرگ است، یا حالتی که جسم با سرعتی نزدیک به سرعت نور در حرکت است. این موارد در مقوله نسبیت جای می‌گیرد. دوم حالتی که در دستگاه‌های فیزیکی با اندازه‌های ملکولی یا کوچکتر به کار می‌رود، این بخش در حیطه کار مکانیک کوانتومی است. هر چند در پژوهش‌های کنونی تلفیق و احتمالاً سازگاری این دو بخش با هم نیز مد نظر است، مانند گرانش کوانتومی.

دو فرض بنیادی در سراسر فیزیک کلاسیک پایدار می‌ماند:

۱- طرز عمل ابزارهای اندازه‌گیری از چگونگی حرکتشان مستقل است به شرط اینکه به سرعت شتاب نگیرند.

۲- این امکان وجود دارد که حداقل به طور نظری ابزارهایی طرح‌ریزی کرد که با آنها بتوان هر کمیتی را با کمترین خطایی که می‌خواهیم اندازه بگیریم.

هر دو فرض در حالت‌های نهایی، در نسبیت و در مکانیک کوانتومی، با شکست روبه رو می‌شوند. با ورود این دو نظریه جدید به عرصه فیزیک، اعتبار نظریه کلاسیکی نیوتن نیز مانند دیگر نظریه‌ها مورد تردید قرار گرفت. نظریه‌ای که بیان می‌داشت:

الف- فضا و زمان مجزا از یکدیگرند و هر دو مطلق‌اند. حرکت، ذاتی اجسام است و بی‌بسته در جریان است.

ب- جهان یک ماشین عظیم است که توسط خداوند به حرکت در می‌آید (بینش مکانیک نیوتنی).
پ- وضعیت قبل و بعد جهان با توجه به وضعیت فعلی آن قابل پیش بینی و برآورد است و هر گونه تغییری در طبیعت به طور بی‌بسته صورت می‌گیرد. به بیان دیگر، تحول زمانی حالات هر سیستم طوری است که هر حالت آن از حالت پیشین به طور علی نتیجه می‌شود.

ت- رویدادهای جهان اجتناب ناپذیر است و اختیار در آن راه ندارد و وجود یا عدم وجود انسان هیچ تأثیری در عملکرد جهان ندارد.

۳-۱. قوانین حرکت (اصول موضوعه نیوتن)

۱- جسم به سکون یا حرکت یکنواخت خود بر خطی مستقیم ادامه می‌دهد، مگر هنگامی که در اثر نیروهایی ناگزیر از تغییر می‌گردد.

۲- میزان تغییر اندازه حرکت با نیروی موثر متناسب و در همان سویی است که نیرو وارد می‌شود.

۳- برای هر کنشی همیشه واکنشی برابر و با سوی مخالف وجود دارد.

آرنولد سمر فلد در کتاب معروف مکانیک خود از قانون چهارم حرکت سخن می‌گوید: «... قاعده متوازی الاضلاع نیروها را به عنوان قانون چهارم بیان می‌کنیم، هر چند در مکانیک نیوتنی همین قدر به عنوان نتیجه فرعی دیگر قوانین حرکت ظاهر می‌شود.» این قانون بیان می‌دارد که دو نیروی

وارد بر یک نقطه مادی با هم ترکیب شده و مانند قطر متوازی الاضلاع تشکیل شده توسط دو نیرو، عمل می‌کنند.

نیروها مانند بردارها جمع می‌شوند. این نتیجه بدیهی به نظر می‌رسد، چرا که ما در قانون دوم نیروی \vec{F} را برابر بردار \vec{P} قرار دادیم. اما، در واقع طبق گفته ارنست ماخ، قانون چهارم، این اصل را در بر می‌گیرد که هر نیروی وارد بر نقطه مادی سبب تغییر حرکتش می‌شود، گویی این نیرو تنها نیروی وارد بر جسم در آن نقطه است. در نتیجه متوازی الاضلاع نیروها به طور آکسیوماتیک بیان‌کننده استقلال اثرات نیروهای مختلف است که با یکدیگر در یک نقطه اثر می‌کنند یا عمومی‌تر، نتیجه‌ای از اصل بر هم نهی نیروهاست.

در بیان قوانین نیوتن، باید توجه کرد که دو قانون اول، به هیچ وجه قانون نیستند بلکه صرفاً تعاریفی هستند از مفهومی جدید که در این نظریه باید مطرح شود. کشف نیوتن به واقع این نبود که نیرو حاصلضرب جرم در شتاب است، چرا که این بیان صرفاً تعریف نیرو است. نیوتن کشف کرد که قوانین فیزیک بر حسب مفهوم نیرو با این شیوه تعریف، آسانتر نمایانده و بیان می‌شوند.

۲-۳. دشواری بینش نیوتنی

اکنون در زیر به سه اشکال عمده در بینش نیوتنی اشاره می‌کنیم:

۱- اشکال در روش تعریف نیرو: در این قانون تنها کل نیروی وارد بر جسم تعریف می‌شود. بدین ترتیب هر زمان که نوع جدیدی نیرو (مانند نیروی هسته‌ای) کشف شود، یا هر زمان که دگرگونی‌هایی در الکترومغناطیس یا در گرانش پدید آید، تعریف نیرو عوض می‌شود.

۲- واضح و روشن نبودن کامل مفاهیم مکانیک نیوتنی: مثلاً اینکه تشریح نشده است که شتاب‌های موجود در دو قانون نخست نسبت به کدام چارچوب و دستگاه مختصات باید سنجیده شود. آن دسته از حرکت‌های زمینی که از لحاظ گسترش فضایی و طول زمانی به اندازه کافی محدودند یک چارچوب لخت است، اما برای حرکت‌هایی که کمتر محدودند چارچوب لخت نیست. اساساً در تحلیل قوانین کلاسیک حرکت، طبق تعریف و انتخاب واینشتاک^۱، «قوانین کلاسیک حرکت طوری

1- Robert Weinstock; Am.J.Phys. ۲۹ و ۶۹۸ (۱۹۶۱).

بیان می‌شوند که تنها نسبت به یک چارچوب مرجع لخت معتبر باشند؛ این چارچوب مرجع، که آن را دستگاه مختصات S می‌نامیم، دارای خواص زیر است: هر گاه حرکت ذره تحت تأثیر هیچ عامل خارجی نباشد - دقیقتر بگوییم، هر گاه یک ذره متحرک از سایر اجسام بینهایت دور باشد - آن ذره نسبت به S با سرعت برداری ثابت حرکت می‌کند». باید در نظر داشت که قانون اول نیوتن ماهیتاً مستلزم وجود یک چارچوب لخت است. این چارچوب، برای نیوتن «فضای مطلق» و برای ارنست ماخ (۱۹۰۲) و بسیاری دیگر از جمله اولری^۱ (۱۹۴۷) دستگاه مختصات متصل به ستاره‌های به اصطلاح ثابت بود.

۳- اعتبار قانون سوم: این قانون در مورد نیروهای الکترومغناطیس با شکست مواجه می‌شود؛ مثلاً وقتی دو جسم در حال برهمکنش از هم بسیار دور می‌شوند یا به طور سریع شتاب می‌گیرند، بدین ترتیب قانون سوم یک قانون عمومی و فراگیر طبیعت نیست. قانون مذکور معمولاً فقط هنگامی به کار می‌رود که نیروی وارد بر یک جسم (نقطه مادی دیگر) در امتداد خطی اثر کند که دو جسم را به هم وصل می‌کند (نیروی مرکزی). این همان شکل به اصطلاح قوی قانون سوم است. به منظور بیان نقش عمده قانون سوم، از ماریون و سایمون مدد جسته و شکل دیگری از قانون سوم را به صورت زیر بیان می‌کنیم که در واقع تعریف مناسب جرم را در بر خواهد داشت:

۳'- اگر دو جسم، سیستمی ایده‌آل و منفرد را تشکیل دهند، آنگاه شتاب‌های ایجاد شده در دو جسم همیشه در جهت مخالف هم است و نسبت مقدار دو شتاب همیشه ثابت است. این نسبت ثابت برابر است با وارون نسبت جرم دو جسم مورد نظر:

$$\frac{a_1}{a_2} = - \frac{m_2}{m_1}$$

علامت منفی نشانه آن است که دو جسم در دو جهت مخالف هم شتاب می‌گیرند. یادآور می‌شویم که در ضمن، دستیابی به سیستم منفرد وضعیتی ایده‌آل و غیر ممکن است.

علاوه بر موارد فوق، به سه نکته مهم در زمینه دیدگاه‌های نیوتن می‌توان اشاره کرد که موجب محدودیت و ناتوانی این بینش شده است. هیچ یک از این سه نکته را نمی‌توان در ردیف ایرادی

منطقی به نظریه به شمار آورد (سایمون):

(I) نیوتن مفهوم زمان و مکان مطلق را مستقر ساخت و از این لحاظ در سال‌های بعد مورد انتقاد قرار گرفت.

(II) نیروهایی که بی‌واسطه و بی‌درنگ از دور عمل می‌کنند، نظیر نیرویی که برای بیان آثار گرانش ارائه شده، در بیشتر فرآیندهایی که در زندگی روزانه می‌شناسیم به طور مناسب مطرح نمی‌شوند. البته نیوتن خود به این ایراد چنین پاسخ می‌دهد که قانون کنش متقابل گرانشی وی تبیین نهایی نیست بلکه قاعده‌ای است که به طریق استقراء از تجربه استنتاج شده است.

(III) نظریه نیوتن این حقیقت شایان توجه را توضیح نمی‌دهد که وزن و ماند (اینرسی) یک جسم را کمیت واحدی به عنوان جرم به هم مربوط می‌کند. بعدها اینشتین از طریق بررسی میدان گرانشی و نظریه نسبیت این ارتباط را به منزله یکی از مهمترین کلیدهای درک گرانش تلقی کرد. او سپس این فکر را بسط می‌دهد و یکی از اصول بنیادی نظریه نسبیت عام (اصل هم ارزی) را نتیجه می‌گیرد؛ اصلی که تساوی دقیق جرم اینرسی و جرم گرانشی را بیان می‌دارد. نخستین ضربه بر پیکره نظریه حرکت نیوتن، به عنوان برنامه‌ای برای همه فیزیک نظری از سوی نظریه الکتروسیسته فاراده و ماکسول با مطرح کردن نظریه میدان وارد آمد. بدین ترتیب دیگر مفاهیم بنیادی مکانیک اجزای سازنده بنیادی جهان فیزیکی شمرده نمی‌شوند و سرانجام آخرین گام در تحول برنامه نظریه میدان یعنی نظریه نسبیت عمومی به میان آمد، که در نهایت سبب فرو ریختن و دگرگونی مفاهیم بنیادی بینش مکانیکی نیوتنی گردید. به این موضوع از دید فیزیک کلاسیک و کوانتومی کمی عمیقتر می‌نگریم.

۳-۳. نظریه میدان و نظریه ذره‌ای

اساساً یک نظریه میدان، نظریه‌ای است که به هر نقطه فضا و زمان خواص معین و ویژه‌ای را وابسته می‌کند. نظریه هیدرودینامیک اویلری به هر نقطه فضا و زمان یک بردار سرعت وابسته می‌کند که معرف سرعت عنصری از شاره است که در آن زمان نقطه مزبور را اشغال می‌کند. همین طور نظریه میدان الکترومغناطیس به هر نقطه فضا و زمان یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی نسبت می‌دهد.

نظریه ذره‌ای، نظریه‌ای است که به بعضی از هویت‌ها (ذرات) خواصی را نسبت می‌دهد که از آن جمله زمان و مکان را می‌توان نام برد. بنابراین تمایز این دو نظریه در این است که در نظریه میدان، فضا و زمان خود هویت‌های اولیه هستند که خواص معینی دارند، ولی در نظریه‌های ذره‌ای، زمان و مکان خواص هویت‌های اولیه به نام ذرات هستند. بد نیست یادآور شویم که در مکانیک نیوتنی وجود اشیاء نقطه‌وار (نقطه‌گون) جرم دار فرض گرفته می‌شود، و می‌پذیریم که ذرات به صورت واحدهای منفرد وجود دارند و در معرض خلق و فنا نیستند. ذرات هم‌نوع (یکسان) از یکدیگر تشخیص پذیرند، و هر ذره در هر لحظه دارای مکان و سرعت مشخصی است. بعداً دیده می‌شود که در مکانیک کوانتومی مفاهیم مکان و سرعت به صورت معمولی مطرح نمی‌شوند. ولی مفهوم ذره به عنوان یک حامل انرژی و اندازه حرکت همچنان حفظ می‌شود. دو اصل عمده در مکانیک کوانتومی وارد می‌شود: اصل عدم قطعیت - اصل مکملیت.

اولین نظریه میدان، نظریه ثقل نیوتنی است و خود نیوتن معتقد به تأثیر از راه دور بود. در قرن نوزدهم با تکوین نظریه الکترومغناطیس ماکسول میدان‌ها نقش اصلیشان را ایفا کردند. فارادی در ۱۸۴۹ اول بار سخن از واژه میدان کرد. بعد چنین متداول شد که میدان الکترومغناطیس را شرایطی در فضا در نظر بگیرند که از وجود بارها و جریان‌ها ناشی شده است. تعبیر میدانی نیرو وقتی مسجل و اجتناب ناپذیر شد که ماکسول ثابت کرد امواج الکترومغناطیس با سرعت نور حرکت می‌کنند. اما وی میدان را به عنوان یک واقعیت و هویت اصلی و مستقل در نظر نگرفت بلکه آن‌را به عنوان اغتشاشات اثر تعبیر کرد.^۱ کم کم به خاطر مسئله دار بودن اثر، ایده میدان به عنوان هویتی مستقل در نظریه فیزیکدانان تقویت شد تا آنجا که برخی فیزیکدانان چون وین (Wien) حتی خود ماده را تمرکز موضعی میدان الکترومغناطیسی دانستند.

نسبیت عام اینستین نیز نوع جدیدی از میدان را وارد فیزیک کرد: میدان تانسور متریک که نیروی ثقل را توضیح می‌دهد. بدین ترتیب اندیشه تجلی ماده به صورت تمرکزهای موضعی میدان قوت گرفت، و بالاخره اولین نظریه میدان کوانتومی در ۱۹۲۷ توسط دیراک عرضه شد. از دیدگاه دیراک جهان از دو عنصر متفاوت تشکیل شده است: ذرات و میدانها. ذرات ابدی فرض می‌شوند، ولی

فوتون‌ها به عنوان تجلی یک هویت زیرین که میدان الکترومغناطیسی کوانتومی است در نظر گرفته می‌شوند (و بدین ترتیب میدان الکترومغناطیسی را توسط یک میدان کوانتومی توصیف کرد). اما این خود دوگانگی نامطلوبی بود. برای رهایی از این مشکل یوردان و کلاین (Jordan – Kline)، ۱۹۲۷، یوردان و ویگز (Jordan – Wigner)، ۱۹۲۷، و هایزنبرگ و پائولی (Heisenberg – Pauli)، ۱۹۲۹، نشان دادند که ذرات مادی را می‌توان کوانتوم‌های میدان‌های مختلف در نظر گرفت، همانطور که فوتون کوانتوم میدان الکترومغناطیس است. در این دیدگاه برای هر ذره بنیادی یک میدان هست؛ یعنی آنها تا حد هویت‌های ثانوی تنزل داده می‌شوند. واقعیت‌های اصلی جهان یک عده میدان است، مانند میدان الکترونی – پروتونی – و غیره. ذرات صرفاً کوانتوم‌های انرژی و اندازه حرکت این میدان‌ها هستند. همین ایده امروز هم تا حدود زیادی ایده اصلی نظریه میدان‌های کوانتومی را تشکیل می‌دهد.

بدین ترتیب دیدگاه «ماده و انرژی» به صورت تجلی ماده در ذرات و انرژی در میدان محو می‌شود. این دوگانگی ماده و انرژی و ذره و میدان ناپدید می‌شود و تنها میدان‌های کوانتومی برهمکنش دار باقی می‌مانند. ایده ماده در مفهوم میدان محو می‌شود اما این بار احتمال یافتن کوانتوم‌ها را میدان‌ها می‌دهند.

بی‌مناسبت نیست با نقل گفتاری از دوبروی فعلاً این موضوع را به پایان ببریم: «ماده‌ای که روی حواس ما تأثیر می‌گذارد صرفاً تمرکز شدیدی در انرژی در یک ناحیه خیلی کوچک است. بنابراین ماده را متشکل از نواحی‌یی از فضا، که در آنها میدان خیلی متمرکز است، در نظر می‌گیریم. در اینجا دیگر، مسئله داشتن جایی در فیزیک جدید برای میدان و ماده توأم مطرح نیست، زیرا میدان تنها واقعیت است. پس نهایتاً مسئله این است که قوانین میدان را طوری تغییر بدهیم که حتی در نواحی‌یی از فضا که در آنها انرژی بسیار متمرکز است صادق باشند».

فضا؛ اتر؛ و میدان در فیزیک

مقدمه

در اینجا به طور خلاصه و گذرا و به عنوان مکملی بر مباحث فصل به مفاهیم فضا، اتر و میدان از دیدگاه اینشتین می‌پردازیم. چکیده‌ای از گفتارهای وی را انتخاب و با اندک تغییر و تلخیص بیان می‌کنیم.^۱ در دیدگاه تجربه‌گرا، مفاهیم و احکام از طریق تحلیل منطقی با یکدیگر مرتبط می‌شوند، اما این مفاهیم که زمینه محکمی برای قاطع بودن مکشوفات ایجاد می‌کنند زمانی محتوا می‌یابند که ولو به طور غیر مستقیم، با تجربیات حسی در ارتباط باشند. حتی تنها راه پی بردن به این ارتباط نیز خود تجربه است. وقتی تجربه صورت گرفت و چیزی قابل مشاهده و تجسم، متناظر و وابسته به آن مفاهیم کشف شد، آنگاه مفاهیم و تصورات ارزش معرفتی پیدا می‌کنند و اینجاست که می‌توان ماهیت حقایق را از لحاظ منطقی مورد بررسی و تحلیل قرار داد.

اساساً بنابر اعتقاد اینشتین، «علم کوششی است برای تطبیق تجربه حسی نامنظم و متنوع با یک سیستم فکری که منطقاً متحدالشکل باشد. در این سیستم تجربیات واحد باید طوری با جنبه نظری همبسته باشند که هماهنگی آنها متقاعد کننده باشد». در اینجا تجربه‌های نامنظم پیوند فکری می‌یابند و «تجربه» و «نظریه» همبسته می‌شوند. این همبستگی یک همبستگی دیالکتیکی است. در فرآیند تاریخ، هم علم، دیالکتیکی شده و هم دیالکتیک، علمی. نه عقل تنها و نه تجربه تنها، بلکه این هر دو در فرآیند درگیری نسبی اما مداوم نمایشگر دیالکتیک علمی هستند.^۲ به عنوان مثال، در قضایای هندسه استفاده از واژه‌های نقطه، خط مستقیم و سطح برای استنتاج قضایا و احکام از یکدیگر و یا طرح قضایای جدید وقتی ارزشمند است که این لغات و اصطلاحات بتوانند چیزی در ذهن ما مجسم سازند، یعنی ذهن ما متوجه آزمایش‌های حسی مستند به این اصطلاحات شود.

۱- به کتاب «مقالات علمی اینشتین» ترجمه دکتر محمود مصاحب مراجعه کنید.

۲- دکتر صدر رقابی، «فلسفه علم»، انتشارات شهید بهشتی، ص ۲۲۶. (۱۳۷۰)

I) مفهوم فضا در تفکرات دوران کهن:

سابقاً مفهوم فضا مترادف با تصور جسم صلب بود و پیدایش این مفهوم احتمالاً ناشی از ماهیت مجموعه پیچیده تجربیات حسی است که در مقدمه به آن اشاره شد. از جمله خصوصیات این مجموعه پیچیده عبارت است از متناظر بودن پاره ای تأثرات مرئی و ملموس با دوام آنها در زمان، و این واقعیت که تأثرات ممکن است در هر لحظه تکرار شوند. پس از آنکه مفهوم جسم صلب، بدون آنکه متضمن فضا یا ارتباط فضایی باشد، از تجربیات فوق الذکر به وجود آمد، میل به ادراک عقلی ارتباط چنین اجسام صلب، ناچار به پیدایش مفاهیمی منجر می‌شود که با ارتباط فضایی سروکار دارد. هر دو جسم صلب ممکن است با یکدیگر در تماس باشند، یا از هم فاصله داشته باشند. در حالت اخیر می‌توان جسم ثالثی را میان آن دو قرار داد بدون آنکه آن دو را دگرگون سازد، یا وضعشان را تغییر دهد؛ و حال آنکه در حالت اول چنین کاری غیر ممکن است. این روابط فضایی، مانند خود اجسام مورد نظر، موجودیت و واقعیت دارند. اگر دو جسم از لحاظ فرا گرفتن چنین فاصله‌ای هم ارز باشند، مسلماً برای هر فاصله دیگر نیز هم ارز خواهند بود. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که موجودیت این فاصله مستقل از انتخاب جسم خاصی است که باید آن را فرا گیرد؛ از جنبه تجربیات حسی، ظاهراً چنین به نظر می‌رسد که بسط و پیشرفت مفهوم فضا بر طبق جریان تسلسلی زیر انجام گرفته است: جسم صلب؛ روابط فضایی اجسام صلب، فاصله، و فضا. و اگر فضا بدین طریق، مورد مطالعه قرار گیرد هویتی واقعی به همان معنای واقعیت اجسام صلب پیدا می‌کند. پس مفهوم فضا به عنوان یک امر واقعی قبلاً هم در دوران کهن وجود داشته است. از نظر اصول ریاضی اقلیدسی فقط مفاهیم اشیاء و روابط فضایی بین آنها کافی بود، بطوریکه نقطه، سطح، خط مستقیم و پاره خط، اجسام صلب ذهنی بودند و هر گونه روابط فضایی به روابط تماس (فصل مشترک خطوط مستقیم و سطوح، نقاط واقع بر خط مستقیم و غیره) منجر می‌گردید.

II) مفهوم فضا از دیدگاه دکارت و نیوتن

نخست یادآور می‌شویم که واژه‌های فضا و زمان در علم و فلسفه دارای معانی متعددی است. چهار معنای مشخص برای هر یک متصور می‌شود، که در مورد فضا به طور خلاصه چنین است:^۱

۱- جی. اچ. جینز (G.H.Jeans): «فیزیک و فلسفه» - ترجمه علیقلی بیانی، مرکز انتشارات علمی و فرهنگی، (۱۳۶۱)

۱- فضای معقول (conceptual space)

۲- فضای مدرک یا فضای مشهود (perpetual space)

۳- فضای فیزیکی (physical space)

۴- فضای مطلق (absolute space)

دکارت برای اولین بار فضا را به عنوان یک واحد پیوسته در نظر گرفت و هر نقطه در فضا را به کمک مختصات (Coordinates) آن مشخص کرد و به این ترتیب اشکال هندسی برای اولین بار به صورت قسمتهایی از فضای نامتناهی در نظر گرفته شد. و این فضا خود، هویت پیوسته سه بعدی تلقی گردید. مزیت عمده تعبیر مکتب دکارت از فضا به هیچ وجه محدود به این واقعیت نیست که اصول تحلیلی را برای پیشرفت هندسه به کار برده است. نکته اصلی و اولویت عمده آن را می‌توان چنین بیان کرد: یونانیان قدیم، در توصیفات هندسی خود، بعضی اشکال (خط مستقیم و سطح) را ترجیحاً مورد توجه قرار می‌داند، و وارد شدن سایر اشکال هندسی (مثلاً بیضی) در این توصیفات از این لحاظ بود که این اشکال با کمک نقطه و خط مستقیم و سطح قابل شرح و بیان بوده است، ولی تعبیر دکارت کلیه سطوح را مقابل هم قرار می‌دهد، و در اصول اساسی هندسه هیچگونه اولیویتی برای اشکال خطی قابل نشده است. فضا به عنوان یک کل، بدان صورت که دکارت تصور می‌کرد، برای فیزیک نیوتنی الزام و ضرورت داشت و حرکت شناسی (دینامیک) نمی‌توانست تنها با مفاهیم نقطه‌ای جرم دار و فاصله بین نقاط جرم‌دار که تابعی از زمان است سرانجام یابد.

در معادلات حرکت نیوتن، تعریف مفهوم شتاب که نقش عمده و اصلی را بر عهده داشت، تنها با فواصل بین نقاط که بر حسب زمان تغییر می‌کرد امکان پذیر نبود. شتاب نیوتنی تنها در صورت وابستگی به فضایی که به عنوان یک کل در نظر گرفته شود قابل تصور است. بدین ترتیب به موجودیت هندسی مفهوم فضا، تابع جدیدی که جبر آن را تعیین می‌کرد، اضافه شد. وقتی که نیوتن فضا را به عنوان امری مطلق توصیف می‌کرد، بدون شک به این معنای واقعی فضا نظر داشت. از اینرو ضرورتاً حرکتی خاص به آن نسبت می‌دهد. معهداً این مطلب، ظاهراً در نمودهای مکانیکی کاملاً تعریف نشده بود. این فضا به معنای دیگری هم به عنوان مطلق تلقی گردید، و چنین استنباط شد که خاصیت جبر آن قائم بالذات است یعنی تحت تأثیر هیچ حادثه فیزیکی، از هر نوع که باشد، قرار نمی‌گیرد؛ خود بر اجرام موثر است، ولی هیچ چیز آن را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد.

III) اتر به عنوان یک واسطه

فیزیکدانها تا اواخر قرن نوزدهم، فضا را به صورت محمل کلیه حوادث، بدون هیچگونه دخالتی در آثار فیزیکی تصور می‌کردند. پس از پیدایش نظریه موجی نور و نظریه میدان الکترومغناطیس فاراده و ماکسول، رفته رفته، افکار تازه‌ای پدید آمد، و معلوم شد که در فضای آزاد کیفیاتی موجود است که به صورت امواج انتشار می‌یابند و در عین حال میدان‌های موضعی در کار است که بر اجرام الکتریکی یا قطب‌های مغناطیسی که در آنها وارد شوند نیروهایی اعمال می‌کنند. چون استناد عاملیت یا حالت فیزیکی به خود فضا، از نظر دانشمندان قرن نوزدهم، امری کاملاً نامعقول بود، ناچار واسطه‌ای ابداع کردند، و چنین قائل شدند که این واسطه به مثابه ماده‌ای وزن دار، تمامی فضا را در بر گرفته است. این واسطه همان اتر بود، و آن را محملی برای توجیه پدیده‌های الکترومغناطیسی و نور می‌پنداشتند. میدان‌های الکترومغناطیسی، نخست، حالات و صورتهایی از این واسطه تلقی می‌گردید، و چنین تصور می‌شد که این حالات پیرو همان قوانین مکانیک مربوط به تغییر شکل اجسام جامد قابل ارتجاع می‌باشند؛ لیکن نظریه مکانیکی بودن اتر هیچگاه کاملاً توفیق نیافت، و رفته رفته فکر تعبیر عمیق‌تر در باب ماهیت میدان‌های اتری از میان رفت و متروک ماند.

بدین ترتیب اتر به صورت نوعی از ماده درآمد که تنها عملش آن بود که زمینه و محملی برای میدان‌های الکتریکی قرار گیرد که از لحاظ نفس و ماهیت قابلیت تحلیل بیشتری نداشتند. نهایتاً مطلب به این صورت درآمد: فضا از اتر پر شده، و ذرات مادی یا اتم‌های ماده وزن دار در آن شناورند، نظریه تشکیل ماده از اتم در اواخر قرن نوزدهم محقق گشته بود. چون فرض می‌شد که عمل متقابل اجسام از طریق میدان‌ها انجام می‌گیرد، لاجرم می‌بایست یک میدان گرانشی هم در اتر موجود باشد، ولی قانون این میدان، در آن عصر، هنوز به صورتی دقیق و روشن در نیامده بود. اتر صرفاً جایگاهی برای کلیه نیروهایی فرض می‌شد که در فضا در کارند. بالاخره از آنجا که در آن موقع مسلم شده بود که اجرام الکتریکی متحرک، مولد میدانی مغناطیسی می‌شوند و انرژی این میدان به مثابه جرم جبری تلقی می‌شد، از این رو جرم جبری نیز به عنوان نوعی اثر میدان مستقر در اتر توجیه گردید.

IV) تحول در ادراک مفهوم فضا (نظریه نسبیت):

خواص مکانیکی اتر نخست جنبه معما و اسرارآمیز داشت، ولی لورنتس، با کشف بزرگ خود، این

معما را حل کرد و پرده از راز آن بر گرفت. از آن پس توجیه عمده پدیده‌های الکترومغناطیسی که تا آن عصر شناخته شده بود بر مبنای دو فرض قابل توجیه و تعبیر گردید: یکی آنکه اتر متصل به فضا یعنی حرکت ناپذیر است، و دیگر اینکه بار الکتریکی در ذرات سازنده ماده جای گرفته است. امروزه کشف لورنتس را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: فضای فیزیکی و اتر دو اصطلاح مختلف برای یک چیز واحد هستند، و میدان‌ها حالات فیزیکی فضا می‌باشند زیرا اگر حالت حرکت خاصی به اتر وابسته نباشد، هیچ الزامی در به حساب آوردن آن به عنوان یک امر واقعی در نظریه مربوط به فضا نخواهد بود. لیکن در آن عصر، دانشمندان فیزیک از این طرز تفکر دور بودند. برای آنان فضا هنوز چیزی بود سخت پا و متجانس که نه تغییر پذیر بود و نه می‌توانست حالات فیزیک مختلف داشته باشد. حل این مشکل به عهده ریمان بود که در اواسط قرن نوزدهم مفهوم تازه‌ای برای فضا عرضه داشت.

در نظریه وی خاصیت سخت پایی فضا از آن سلب شده، و لاجرم می‌توانست در حوادث و رویدادهای فیزیکی دخالت کند. این کار علمی فوق العاده بود، مخصوصاً از این جهت که بر نظریه میدان الکتریکی فاراده و ماکسول سبقت و پیشی داشت. متعاقباً نظریه نسبیت خاص که مشعر بر هم ارزی فیزیکی کلیه دستگاه‌های جبری بود عرضه گشت. اصل غیر قابل تفکیک بودن فضا و زمان از پژوهش‌های الکترودینامیک یا قانون انتشار نور سلب گردید. از این پس چنین تصور شد که پیوستار واحد چهاربعدی محمل حوادث، بطور ذهنی، به ابعاد سه گانه فضا و بعد زمان قابل تفکیک است، یعنی لحظه حال در دنیای حوادث معنای مطلق یافت. پس از آنکه معلوم شد همزمانی امری نسبی است، فضا و زمان همانطور که قبلاً ابعاد سه گانه فضایی به صورت یک پیوستار واحد درآمده بودند، در یک واحد پیوستار چهاربعدی بهم آمیخته گشتند. بدین ترتیب فضای فیزیکی جنبه فضای چهاربعدی (سه بعد فضا و یک بعد زمان) یافت. فضای چهاربعدی نظریه نسبیت خاص هم، به همان اندازه فضای نیوتنی، سخت پا و مطلق می‌باشد. اکنون گذری خواهیم داشت بر نظریه نسبیتی که از نظریه نسبت خاص به نظریه نسبیت عام گراییده و متعاقباً به آخرین سرمنزل خود، که نظریه میدان واحد است، منتهی گردیده است. نظریه نسبیت خاص مستقیماً بر مبنای یک قانون تجربی است که همان ثابت بودن سرعت نور باشد. فرض کنیم که p نقطه‌ای در فضای خالی و p' نقطه دیگری بینهایت نزدیک به آن و به فاصله ds از آن باشد. اگر پرتور نوری از p در زمان t خارج شده و در

لحظه $t+dt$ به p' برسد خواهیم داشت:

$$ds^2 = C^2 dt^2$$

و اگر dx_1, dx_2, dx_3 تصاویر قائم ds بر محورهای مختصات باشند، و مختصه زمانی موهومی ict ، $(i = \sqrt{-1})$ را نیز در نظر بگیریم، آنگاه قانون ثبات سرعت سیر نور به صورت زیر در می‌آید:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

و چون این فرمول مبین یک وضع واقعی است، از این رو می‌توان یک معنای واقعی هم برای کمیت ds (حتی اگر نقاط مجاور در واحد پیوستار چهاربعدی طوری اختیار شوند که ds نظیر آن از میان نرود) قائل شد. این مطلب را می‌توان چنین بیان کرد که فضای چهاربعدی (با مختصات سه گانه فضا و مختصه موهومی زمان) نظریه نسبیت خاص دارای یک متریک اقلیدسی است. تسمیه این متریک به اقلیدس مبتنی بر این واقعیت است که وضع چنین متریکی در یک واحد پیوستار سه بعدی کاملاً با وضعیت اصل موضوع‌های هندسه اقلیدسی هم‌ارز می‌باشد، و معادله معرف این متریک هم همان قضیه فیثاغورث است که برای دیفرانسیل‌های مختصات به کار می‌رود. در نظریه نسبیت خاص تنها آن دسته از تغییرات مختصات (بوسیله تبدیل) مجاز است که کمیت غیر متغیر اصلی ds^2 برای آنها در دستگاه‌های جدید مختصات نیز مساوی مجموع مربعات دیفرانسیل‌های مختصات باشد.

چنین تبدیلاتی را تبدیلات لورنتسی می‌نامند. در نظریه نسبیت خاص روش کار پیرو اصل زیر است: فقط معادلاتی برای بیان قوانین طبیعی قابل قبول هستند که در نتیجه تغییر مختصات، بر طبق تغییرات لورنتسی، تغییری در شکل آنها حادث نگردد. این روش به کشف ارتباط لازم بین اندازه حرکت و انرژی، شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی، نیروهای الکترواستاتیک و الکترودینامیک، جرم جبری و انرژی انجامید، و نهایتاً تعداد مفاهیم مستقل و معادلات اساسی فیزیک تقلیل یافت. این روش از حد خود فراتر رفت و این سوال پیش آمد که آیا حقیقت دارد که معادلاتی که مبین قوانین طبیعی هستند، منحصرأ نسبت به تبدیلات لورنتسی — و نه نسبت به سایر تبدیلات — شکل خود را حفظ می‌کنند؟ تازه طرح سؤال به این صورت هم بی‌معنی است، زیرا هر دستگاه معادلات را می‌توان بر حسب مختصات عمومی بیان کرد. بنابراین باید سؤال به این صورت طرح شود که آیا

اساس قوانین طبیعی چنان نیست که با انتخاب هر دستگاه مختصات مخصوص شکل ساده‌تری بگیرند؟ البته بر مبنای قانون اختباری (empirical) هم ارزی جرم اینرسی و جرم گرانشی، جواب این سؤال مثبت است.

اگر هم ارزی کلیه دستگاه‌های مختصات را برای صورت بندی قوانین طبیعت، به صورت اصل کلی قبول کنیم - به شرط قبول قانون ثبات سرعت سیر نور، و یا به عبارت دیگر قائل شدن یک متریک اقلیدس، لااقل برای قسمت‌های بی نهایت کوچک فضای کوچک چهاربعدی - به نظریه نسبیت عام خواهیم رسید. معنی این مطلب آن است که متریک عمومی ریمانی برای نواحی محدود فضا بر طبق این فرمول است.

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu, \nu} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

که در آن μ و ν ، مستقل از یکدیگر، جمیع مقادیر را از ۱ تا ۴ می‌گیرند. مبنای ساختمان چنین فضایی با ساختمان فضای اقلیدسی، از یک لحاظ، اختلافی مطلقاً اساسی دارد. ضرایب $g_{\mu\nu}$ فعلاً توابعی از مختصات X_1 تا X_4 می‌باشند، و تشخیص دقیق کیفیت فضا موکول به آن است که این توابع واقعاً معلوم باشند. ماهیت چنین فضایی، با این پایه تکامل، کاملاً نامشخص است و مشخص ساختن دقیق آن تنها بوسیله قوانین خاصی که با میدان متریکی $g_{\mu\nu}$ وفق دهد بهتر انجام می‌گیرد. از نظر فیزیکی چنین فرض می‌شد که میدان متریکی در عین حال همان میدان گرانشی است. نظر به آنکه وضع میدان گرانشی از چگونگی توزیع و ترکیب اجرام معلوم می‌گردد، و در صورت تغییر طرز توزیع اجرام، میدان جاذبه نیز تغییر می‌کند، بنابراین شکل هندسی فقط بستگی به عوامل فیزیکی دارد. بر طبق این نظریه فضا را - همان طور که ریمان صحیحاً حدس زده بود - دیگر نمی‌توان مطلق فرض کرد، بلکه تشکیل آن وابسته به عوامل فیزیکی می‌باشد. هندسه فیزیکی دیگر مانند هندسه اقلیدسی، علمی محدود به خود نخواهد بود.

بدین ترتیب مسئله گرانش به صورت ریاضی درآمد، و لازم شد که پیدا کردن بسیط‌ترین معادلات اساسی که نسبت به هر گونه تبدیل مختصات تغییر ناپذیر باشند مورد نظر قرار گیرد. درست است که گرانش نتیجه تشکل فضا است، ولی علاوه بر میدان گرانشی، میدان الکترومغناطیسی نیز در کار است که می‌بایست به عنوان یک مسئله مستقل از گرانش وارد نظریه نسبیت می‌شد. اما تصور دو

نوع تشکل فضایی مستقل از یکدیگر (گرانشی و الکترومغناطیسی) برای فیزیک نظری قابل قبول نیست، با وجود این باید معتقد باشیم که هر دو نوع میدان باید منبعث از ساختمان واحدی از فضا باشند. چیزی که در سرنوشت فیزیک امروزی به عنوان دورنمای فریبنده خودنمایی می‌کند و ذهن بسیاری از فیزیکدانان نظری را به خود مشغول داشته است (نظریه وحدت).

فصل چهارم

حرکت ذره در یک بعد؛ نوسان

« هر حرکت زوال تدریجی قوه است و حدوث تدریجی فعلیت. قوه تدریجاً و مستمراً به فعلیت می‌رسد. از حالت امکان به در می‌آید و به واقعیت می‌پیوندد.»

«ملاصدرا»

در این فصل بحث عمده درباره حرکت ذره‌ای به جرم m در طول خط مستقیم است که تحت اثر نیروی F واقع بر راستای محور X قرار دارد. این روش را در مورد حالتی به کار می‌بریم که حرکت دستگاه مکانیکی فقط به یک بعد وابسته است یا وقتی که از بقیه مختصات جز یکی بتوان صرف‌نظر کرد.

روابط اساسی و عمده در این بررسی‌ها به صورت زیر خلاصه می‌شود:

(الف). قضیه دیفرانسیل اندازه حرکت (قانون نیوتن)

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (۱-۴)$$

(ب). تکان نیرو یا ضربه

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (۲-۴)$$

(پ). قضیه کار و انرژی

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx = W \quad (3-4)$$

عمومی‌ترین نمونه معادله دیفرانسیل حرکت در یک بعد به صورت زیر است:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x, \dot{x}, t) \quad (4-4)$$

این معادله برای تمام حرکات ممکن ذره تحت اثر نیروی مشخص یک بعدی مصداق دارد. موضوع این فصل بررسی پاسخ‌ها و کاربردهای این معادله در مسائل مکانیکی است. تعداد این حرکات بسیار است چرا که معادله (۴-۴) فقط شتاب ذره را در هر لحظه بر حسب مکان و سرعت ذره در آن لحظه می‌دهد. البته با شناختن مکان و سرعت ذره در زمانی معین بر اساس دیدگاه نیوتنی می‌توانیم مکان آن (مسیر حرکت) را پس از زمانی کوتاه بعد یا پیش از آن تعیین کنیم و با شناختن شتاب ذره می‌توانیم سرعتش را پس از زمانی کوتاه بیابیم. با دانستن شرایط اولیه یعنی زوج (x, v) در لحظه اولیه t که البته می‌تواند هر لحظه‌ای از عمر ذره باشد همواره با معادله (۴-۱) مسئله‌ای کاملاً معین پدید می‌آید که پاسخش باید تابعی یگانه و پیوسته از t باشد.

برای حل تحلیلی معادله دیفرانسیل (۴-۱) لازم است فرضیهایی ساده و در عین حال فیزیکی در مورد ماهیت نیرو و نوع وابستگی آن به متغیرهای x, \dot{x}, t صورت گیرد. چنین فرضیهایی منجر به تقسیم‌بندی زیر در مورد نوع وابستگی نیرو می‌شود.

۴-۱. نیروی وابسته به زمان

هنگامی که منظور ما بررسی رفتار و طرز عمل دستگاه فیزیکی در طول زمان در اثر عامل خارجی است فرض می‌کنیم که نیرو را بتوان به صورت تابعی از زمان نمایش داد: در این صورت

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F(t) dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt \quad (۵-۴)$$

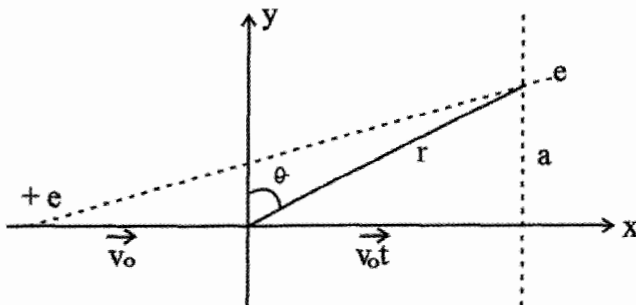
به عنوان مثال می‌توان از حرکت الکترونی آزاد با بار e تحت تاثیر میدان الکتریکی نوسانی واقع بر راستای محور x نام برد.

مثال ۴-۱. پروتونی سریع با بار e با سرعت ثابت v_0 بر خطی مستقیم حرکت می‌کند و از کنار الکترونی ساکن به جرم m و بار $-e$ می‌گذرد. فاصله الکترون از مسیر پروتون a است. (الف) - فرض کنید پروتون چنان به سرعت بگذرد که الکترون فرصت تغییر مکان محسوس، نسبت به مکان اولیه‌اش نداشته باشد تا اینکه پروتون خیلی دور شود. نشان دهید که مولفه نیرو در امتداد عمود بر خطی که پروتون حرکت می‌کند به صورت

$$F = \frac{e^2 a}{(a^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}$$

است، که a فاصله الکترون از مسیر پروتون است و $t=0$ وقتی است که پروتون از نزدیکترین فاصله الکترون می‌گذرد. (ب). فرض کنید الکترون تنها در امتداد خطی عمود بر مسیر پروتون حرکت می‌کند. انرژی جنبشی نهایی الکترون را بیابید. (پ). مولفه نیرو را بر راستای موازی سرعت پروتون بنویسید، و تکان وارد بر الکترون را در این راستا حساب کنید. آیا این مطلب فرض قسمت (ب) را تأیید می‌کند؟

حل:



شکل (۴-۱)

(الف). مطابق شکل، مولفه F_y را می‌نویسیم:

$$F = \frac{e^r}{r^r}; v^r = a^r + (v_0 t)^r$$

$$F_y = F \cos \theta = F \frac{a}{r}$$

$$F_y = \frac{a e^r}{r r^r} = \frac{e^r a}{r^r} = \frac{e^r a}{(a^r + v_0^r t^r)^{\frac{r}{r}}}$$

$$T = \frac{1}{r} m v^r; m \frac{dv}{dt} = F_y = \frac{e^r a}{(a^r + v_0^r t^r)^{\frac{r}{r}}} \quad (\text{ب})$$

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F_y dt = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0=0}^t \frac{e^r a}{(a^r + v_0^r t^r)^{\frac{r}{r}}} dt$$

$$v_0 t = atg\theta \Rightarrow dt = \frac{a}{v_0} (1 + tg^r \theta) d\theta$$

و با فرض $\begin{cases} t = t \\ t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta \\ \theta = 0 \end{cases}$ خواهیم داشت:

$$\int_0^t \frac{e^r a}{(a^r + v_0^r t^r)^{\frac{r}{r}}} dt = \int_0^\theta \frac{e^r a}{a^r (1 + tg^r \theta)^{\frac{r}{r}}} \times \frac{a}{v_0} (1 + tg^r \theta) d\theta$$

$$= \frac{e^r}{a v_0} \int_0^\theta \cos \theta d\theta = \frac{e^r}{a v_0} \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 t}{a} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \frac{v_0^2 t^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{a^2}{a^2 + v_0^2 t^2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{v_0 t}{(a^2 + v_0^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v = \frac{1}{m_0} \int \frac{e^{\gamma} a}{(a^2 + v_0^2 t^2)^{\frac{\gamma}{2}}} dt = \frac{1}{m} \frac{e^{\gamma}}{a v_0} \frac{v_0 t}{(a^2 + v_0^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

و برای انرژی جنبشی ذره خواهیم داشت؛

$$T = \frac{1}{\gamma} m_e v^{\gamma} = \frac{1}{\gamma} m \left[\frac{1}{m} \frac{e^{\gamma}}{a} \frac{t}{(a^2 + v_0^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\gamma}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \frac{e^{\gamma} t^{\gamma}}{m a^{\gamma} (a^2 + v_0^2 t^2)}$$

و در حد $t \rightarrow \infty$

$$T_{\text{terminal}} = \frac{1}{\gamma} \frac{e^{\gamma}}{m a^{\gamma} v_0^{\gamma}}$$

$$F = \frac{e^{\gamma}}{r^{\gamma}} = \frac{e^{\gamma}}{a^{\gamma} + v_0^2 t^{\gamma}} \quad .(پ)$$

$$F_x = F \sin \alpha = F \frac{v_0 t}{r} = \frac{v_0 t e^{\gamma}}{r^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{v_0 t e^{\gamma}}{(a^2 + v_0^2 t^2)^{\frac{\gamma}{2}}}$$

در مورد تکان نیروی تکان نیروی وارد بر ذره:

$$\Delta p_x = p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} F dt$$

$$\Delta p_x = \int_{t_0=0}^t F_x dt = \int_0^t \frac{v_0 t e^{\gamma}}{(a^{\gamma} + v_0^{\gamma} t^{\gamma})^{\frac{\gamma}{\gamma}}} dt$$

$$v_0 t = at \tan \alpha \Rightarrow dt = \frac{a}{v_0} (1 + \tan^{\gamma} \alpha) d\alpha ; \begin{cases} t = t \Rightarrow \alpha = \alpha_0 \\ t = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Delta p_x = \frac{e^{\gamma}}{av_0} \int_0^{\alpha} \frac{\tan \alpha}{(1 + \tan^{\gamma} \alpha)} d\alpha = \frac{e^{\gamma}}{av_0} (1 - \cos \alpha) \quad \text{در نتیجه:}$$

و با فرض $\frac{v_0 t}{a} = \tan \alpha$ ، نتیجه نهایی چنین می‌شود،

$$\Delta p_x = \frac{e^{\gamma}}{av_0} \left[1 - \frac{a}{(a^{\gamma} - v_0^{\gamma} t^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}} \right]$$

و در حالت حدی $t \rightarrow \infty$

$$\Delta p_{\text{terminal}} = \frac{e^{\gamma}}{av_0}, \quad T = \frac{(\Delta p)^{\gamma}}{\gamma m} \Rightarrow T_{\text{terminal}} = \frac{1}{\gamma} \frac{e^{\gamma}}{m a^{\gamma} v_0^{\gamma}}$$

و این نتیجه دقیقاً همان نتیجه‌ای است که قبلاً در بخش (ب) به دست آوردیم.

۲-۴. نیروی میرای وابسته به سرعت: بررسی نیروهایی که صرفاً تابعی از سرعت هستند. در حالت یک بعدی عمدتاً نیروی مهمی که وابسته به سرعت است نیروی اصطکاک است. در این زمینه داریم:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v), \quad m \frac{dv}{F(v)} = dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_0}{m}$$

در حالت‌هایی معین و برای سرعت‌های بالاتر از حدی معین نیروی اصطکاک چنین است:

$$F = (\pm)bv^n \quad (۴-۶)$$

که در آن n عددی درست است. با حفظ این قرارداد که در هر حال F باید مخالف جهت سرعت باشد، در می‌یابیم که برای مقادیر فرد عدد n علامت رابطه (۴-۶) منفی می‌شود، در غیر این صورت علامت طوری انتخاب می‌شود که نیرو و سرعت نهایتاً مخالف هم باشند. مثلاً حرکت قایقی که با سرعت اولیه v_0 در حرکت است و در لحظه‌ای موتورش خاموش می‌شود، و یا نیروی مقاوم از طرف یک شاره بر جسمی که در آن شاره در حال حرکت است.

مثال ۴-۲. حرکت قایقی با سرعت اولیه v_0 بوسیله نیروی اصطکاک $F = -be^{\alpha v}$ کند می‌شود؛

(الف) - حرکت را بیابید. (ب) - زمان و مسافت لازم برای باز ایستادن کامل قایق را بیابید.

$$F = -be^{\alpha v} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -be^{\alpha v} \quad \text{حل.}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{e^{\alpha v}} = -\frac{b}{m} dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{e^{\alpha v}} = -\int_0^t \frac{b}{m} dt = -\frac{b}{m} t$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha v} = \frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha v_0}$$

و پس از جابجایی اندک جمله‌ها، در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{m(e^{-\alpha v} - e^{-\alpha v_0})}{\alpha b} = t$$

قایق زمانی از حرکت باز می‌ایستد که $v = 0$ شود، آنگاه

$$v = 0 \Rightarrow t_s = \frac{m(1 - e^{-\alpha v_0})}{\alpha b}$$

برای یافتن مسافت پیموده شده تا توقف کامل، چنین عمل می‌کنیم:

$$\int_0^x dx = \int_0^t -\frac{1}{\alpha} \ln \left(e^{-\alpha v_0} + \frac{\alpha b}{m} t \right) dt$$

$$\text{و با انتخاب } e^{-\alpha v_0} + \frac{ab}{m}t = u$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\alpha} \int_{e^{-\alpha v_0}}^{e^{-\alpha v_0} + \frac{ab}{m}t} \ln u \times \frac{m}{\alpha b} du \\ &= -\frac{m}{\alpha^2 b} (u \ln u - u) \Bigg|_{e^{-\alpha v_0}}^{e^{-\alpha v_0} + \frac{ab}{m}t} \\ &= -\frac{m}{\alpha^2 b} \left\{ \left(e^{-\alpha v_0} + \frac{ab}{m}t \right) \left[\ln \left(e^{-\alpha v_0} + \frac{ab}{m}t \right) - 1 \right] - e^{-\alpha v_0} (\ln e^{-\alpha v_0} - 1) \right\} \end{aligned}$$

و برای X_S پس از جایگذاری t_S در رابطه فوق و انجام عملیات ساده به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$X_S = +\frac{m}{\alpha^2 b} (1 - e^{-\alpha v_0} - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0}) \quad (7-4)$$

۳-۴. نیروی وابسته به مکان: یکی از مهمترین انواع حرکت وقتی است که نیروی F فقط تابع

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) \quad \text{مختصات } x \text{ است.}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (8-4)$$

با تعریف انرژی پتانسیل $V(x)$ به صورت کار انجام شده بوسیله نیرو وقتی ذره از x به نقطه استاندارد برگزیده X_S می‌رود، خواهیم داشت:

$$V(x) = \int_x^{X_S} F(x) dx = - \int_{X_S}^x F(x) dx$$

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \rightarrow d(mv) \frac{dx}{dt} = F dx \rightarrow \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{x_0}^{X_S} F(x) dx + \int_{X_S}^x F(x) dx = v(x_0) - v(x)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0) = E \quad (10-4)$$

کمیت سمت راست فقط به شرایط اولیه بستگی دارد پس هنگام حرکت ثابت می‌ماند و انرژی کل مکانیکی E نامیده می‌شود. در نتیجه قانون بقای انرژی مکانیکی را خواهیم داشت که این قانون فقط وقتی نیرو تابع مکان است پایدار می‌ماند. در حالت کلی می‌توان نشان داد که برای حرکت ذره در ناحیه‌ای از فضا تحت تأثیر میدان نیروی F، تابع پتانسیل V در یک لحظه و در یک نقطه معین یا تابع زمان است و در آن نقطه ثابت، یا در نقطه‌های مختلف مسیر ذره تابع وضعیت است یعنی در حالت کلی پتانسیل به صورت $V(x, t)$ در یک بعد و یا $V(\vec{r}, t)$ در سه بعد است. همچنین می‌توان نشان داد (به فصل‌های بعدی مراجعه کنید) که شرط پایداری انرژی کل در یک سیستم با گذشت زمان عبارت است از:

$$\vec{F} = -\nabla V, \quad \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (11-4)$$

علامت منفی در عبارت نیرو را می‌توان به طور فیزیکی توجیه کرد (چگونه؟) معادله (10-4) را برای v حل می‌کنیم:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))} \quad (12-4)$$

اگر v مثبت باشد علامت + و چنانچه v منفی باشد علامت منفی را انتخاب می‌کنیم. بالاخره برای x خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0) \quad (13-4)$$

چنانچه فقط قسمتی از نیروی موثر بر ذره پایستار باشد، در این صورت با فرض F' به عنوان

$$F = -\frac{dv}{dx} + F' \quad \text{باقیمانده نیرو داریم:}$$

انرژی کل $T+V$ دیگر ثابت نیست. از رابطه فوق به راحتی در می یابیم که:

$$F'v = \frac{d}{dt}(T + V) \quad (14-4)$$

یعنی میزان تغییر زمانی انرژی جنبشی به اضافه انرژی پتانسیل برابر است با توان پدید آمده توسط نیروی اضافی F' . به عنوان تمرین این رابطه را به دست آورید.
مثال ۳-۴. بر ذره ای نیروی

$$F = -kx + \frac{a}{x^3}$$

وارد می شود. (الف). پتانسیل $V(x)$ را بیابید، ماهیت پاسخها را بیان کنید، و پاسخ $x(t)$ را به دست آورید.

(ب). آیا می توانید حرکت را، وقتی $E > ka$ است، به طور ساده تفسیر کنید؟

حل: (الف). در مکانیک کلاسیک می توان مکان ذره را به دقت مشخص کرد.

$$F(x) = -\frac{d}{dx} V(x) \Leftrightarrow V(x) = -\int_{x_s}^x F(x) dx$$

$$V(x) = -\int_{x_s}^x \left(-kx + \frac{a}{x^3} \right) dx = -\left(-\frac{1}{2} kx^2 - \frac{a}{2x^2} \right)_{x_s}^x$$

چون x_s اختیاری است پس می توان آن را چنان انتخاب کرد که ضرایب ثابت صفر شود. آنگاه

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{a}{2x^2}$$

به کمک این رابطه $x(t)$ را به دست می آوریم:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x [E - V(x)]^{\frac{1}{2}} dx = t$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{\sqrt{2} x dx}{(2Ex^2 - kx^4 - a)^{\frac{1}{2}}}$$

با انتخاب $x^r = y$ انتگرال را نسبت به y محاسبه می‌کنیم. سپس تغییر متغیر

$$y - \frac{E}{k} = \sqrt{\frac{E^r - ka}{k^r}} \cos \theta$$

را به کار می‌بریم. سرانجام انتگرال زیر بر حسب θ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{r} \sqrt{\frac{m}{r}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{\frac{E^r - ka}{k^r}} \sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{E^r - ka}{k^r} (-\cos^r \theta + 1)^{\frac{1}{r}}}} = t$$

$$\theta - \theta_0 = r \sqrt{\frac{k}{m}} t \Rightarrow \theta = \theta_0 + r \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

و از اینجا x مشخص می‌شود.

$$\left(y - \frac{E}{k}\right)^r = \frac{E - ka}{k^r} \cos^r \theta = \frac{E^r - ka}{k^r} \left[\cos^r r \left(\frac{\theta_0}{r} + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]$$

(ب). اگر $E^r \gg ka$ باشد،

$$\Rightarrow x^r = \frac{E}{k} + \sqrt{\frac{E^r - ka}{k^r}} \left[r \cos^r \left(\frac{\theta_0}{r} + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{E}{k}} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{ka}{E^r} \right)^{\frac{1}{r}} + r^{\frac{1}{r}} \cos \left(\frac{\theta_0}{r} + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]$$

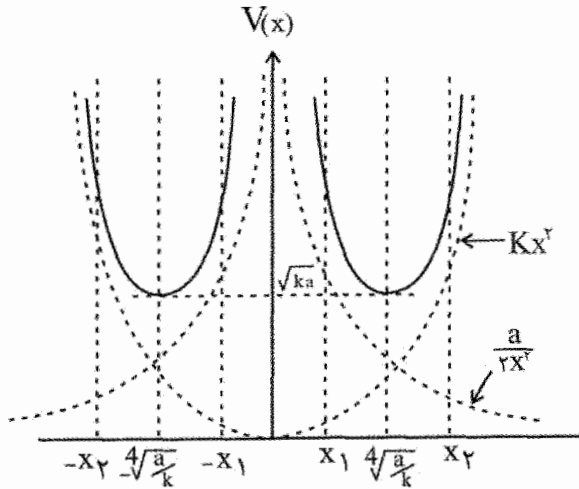
$$\approx \sqrt{\frac{a}{rE}} + \sqrt{\frac{rE}{k}} \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{r} + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]$$

$$E < V_{\min} \Rightarrow T < \infty$$

این نتیجه، معنای فیزیکی ندارد و حرکتی وجود ندارد. چنانچه $E > V_{\min}$ باشد، آنگاه حرکت رفت و برگشت در دو ناحیه بین $(\pm x_1, \pm x_2)$ وجود دارد. بالاخره در حالت

$$E \gg V_{\min} \Rightarrow E^{\frac{1}{2}} \gg ka$$

انرژی کل بسیار بیشتر از می نیمم انرژی پتانسیل است، و حرکت رفت و برگشت با دو نقطه بازگشت وجود دارد. شکل زیر مشخصات حرکت را نشان می دهد.



شکل (۲-۴)

مثال ۴-۴. تابع پتانسیل مورس: تابع مورس $V(x)$ تقریبی مناسب از انرژی پتانسیل ملکول های دو اتمی مرتعش و به صورت تابعی از فاصله اتم های تشکیل دهنده، x ، است:

$$V(x) = V_0 \left[1 - e^{-\frac{(x-x_0)}{\delta}} \right]^2 - V_0 \quad (۱۵-۴)$$

که در آن پارامترهای δ, x_0, V_0 طوری انتخاب می شوند که رفتار مشاهده شده زوج برگزیده مورد مطالعه را توصیف کند. نیرویی که هر اتم بر دیگر اتم ها وارد می کند با مشتق این تابع نسبت به x به دست می آید. نشان دهید که x_0 فاصله جدایی دو اتم وابسته به می نیمم انرژی پتانسیل است و مقدار انرژی برای x_0 معادل $V(x_0) = V_0$ است (وقتی ملکول در چنین پیکربندی است، می گوئیم در حال تعادل است).

حل:

برای یافتن می نیمم انرژی پتانسیل، مشتق آن را نسبت به x صفر می گذاریم:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = 0$$

$$2 \frac{V_0}{\delta} \left(1 - e^{-\frac{(x-x_0)}{\delta}} \right) \left(e^{-\frac{(x-x_0)}{\delta}} \right) = 0$$

$$1 - e^{-\frac{(x-x_0)}{\delta}} = 0$$

$$\ln(1) = -\frac{(x-x_0)}{\delta} = 0$$

$$x = x_0$$

مقدار پتانسیل در x_0 دقیقاً مقدار با $V(x_0) = -V_0$ را به دست می دهد.

۴-۴. مسئله سقوط اجسام در میدان گرانشی

سقوط اجسام یکی از ساده ترین و عمومی ترین نمونه های حرکت یک بعدی است. به دلیل اهمیت موضوع این حرکت را کمی دقیقتر و بطور تحلیلی در مراحل مختلف بررسی می کنیم:

۴-۴-۱. حالت اول - سقوط در نزدیکی زمین:

(الف) - مقاومت هوا را نادیده می گیریم. در این صورت مسئله به شکل ساده

$$F = -mg = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

برمی گردد که به دلیل ثابت بودن g پاسخ را می توان به یکی از

روش های متعارف به دست آورد و نتیجه به صورت $x = -\frac{1}{2}gt^2$ خواهد بود.

(ب) - مقاومت هوا را منظور می کنیم. در این صورت بر اساس رابطه تجربی مقاومت هوا

$F = \mp bv^n$ ، فقط در یکی دو حالت ساده می توان حل تحلیلی برای مسئله یافت. در هر حالت مسئله مانند وقتی است که فقط قسمتی از نیروی موثر بر ذره پایستار باشد. در اینجا حالتی را که در

آن نیروی مقاومت هوا متناسب با v^2 است بیشتر بررسی می‌کنیم (مسئله ۱۳ فصل دوم سایمون). توجه داریم که جسم به پایین سقوط می‌کند پس $v < 0$ است. بنابراین در عبارت F علامت مثبت را می‌گیریم تا F در هر حال مخالف v باشد:

$$F = bv^2$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + bv^2$$

$$\frac{dv}{-mg + bv^2} = \frac{1}{m} dt$$

$$\frac{dv}{-b \left(\frac{mg}{b} - v^2 \right)} = \frac{1}{m} dt \Rightarrow \frac{dv}{\frac{mg}{b} - v^2} = -\frac{b}{m} t$$

و با تغییر متغیر از نوع $\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh u$ و با فرض $v_0 = v_0 = 0$ ، خواهیم داشت:

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh \sqrt{\frac{bg}{m}} t$$

که در آن $v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$ سرعت نهایی (terminal speed) و $\tau = \frac{v_t}{g} = \sqrt{\frac{m}{bg}}$ زمان

مشخصه (characteristic time) نامیده می‌شود. در لحظاتی که هنوز زمان چندان از سقوط نگذشته

است (یعنی تقریباً شروع حرکت)، $t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}$ است. با بسط عبارت بالا چنین نتیجه می‌شود:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \approx \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \dots}{1 + \frac{x^2}{2!} + \dots} \approx x$$

$$v \approx -\sqrt{\frac{mg}{b}} \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) = -gt$$

و در انتهای حرکت، یعنی وقتی $t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}}$ است، $\tanh \approx 1$ و در نتیجه: $v \approx -\sqrt{\frac{mg}{b}}$

سرعت اخیر را سرعت نهایی جسم در حال سقوط (در حالتی که نیروی اصطکاک متناسب با v است) می‌نامیم. به همین ترتیب برای مسافت طی شده در این حرکت خواهیم داشت:

$$dx = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh \sqrt{\frac{bg}{m}} t dt$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh \sqrt{\frac{bg}{m}} t \quad (۱۶-۴)$$

با استفاده از بسط‌های زیر حالت‌های حدی مسافت پیموده شده به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ln \cosh u &= \ln \left(1 + \frac{u^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots - \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \dots \right)^2 + \dots \approx \frac{u^2}{2!}, u \ll 1 \end{aligned}$$

$$\cosh u = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u}) \approx \frac{1}{2} e^u$$

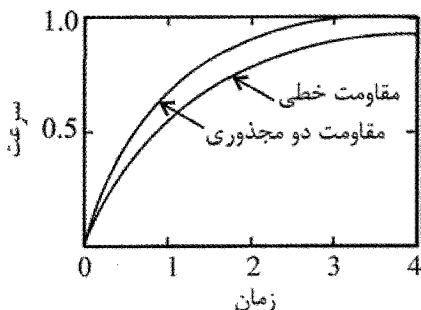
بنابراین:

$$\ln \cosh u \approx \ln \left(\frac{1}{2} e^u \right) = u - \ln 2, u \gg 1$$

$$x = -\frac{m}{b} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \approx \begin{cases} -\frac{1}{2} g t^2, & t \ll \sqrt{\frac{m}{bg}} \\ \frac{m}{b} \ln 2 - \sqrt{\frac{mg}{b}} t, & t \gg \sqrt{\frac{m}{bg}} \end{cases} \quad (۱۶-۴)'$$

سرعت نهایی را می‌توان از برابری نیروی اصطکاک با نیروی گرانشی نیز به دست آورد و هر زمان که نیروی اصطکاک در سرعت‌های بالا به اندازه کافی زیاد شود این سرعت وجود دارد. از مفهوم

سرعت نهایی می‌توان دریافت که چرا مثلاً قطرات باران پس از مسافت زیاد در حوالی زمین با سرعت یکنواخت سقوط می‌کند. سرعت حدی قطره باران در حدود ۳ تا ۶ متر بر ثانیه است. شکل زیر نمودار سرعت را بر حسب زمان برای جسم افتان نشان می‌دهد.



شکل (۳-۴)

۴-۲. حالت دوم- سقوط از ارتفاع زیاد:

در این حالت باید تغییر نیروی گرانشی را با ارتفاع به حساب بیاوریم. عمدتاً بدلیل کم بودن فشار هوا در ارتفاعات مقاومت هوا را نادیده می‌گیریم و در ضمن x را از مرکز زمین اندازه می‌گیریم. با

فرض M جرم زمین و m جرم جسم چون نیروی $F = -\frac{mMG}{x^2}$ پایستار است تابع پتانسیل به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(x) = -\int_0^x F(x) dx = -\frac{mMG}{x} \quad (۱۷-۴)$$

بنابراین:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{mMG}{x} \right)} \quad (۱۸-۴)$$

معمولاً جهت مثبت به حرکت صعودی، و علامت منفی به حرکت سقوطی اشاره دارد.

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \left(E + \frac{mMG}{x} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (۱۹-۴)$$

که x ارتفاع در $t = 0$ است. با مراجعه به شکل پتانسیل دو نوع حرکت وجود دارد بسته به اینکه $E > 0$ یا $E < 0$ باشد. در مورد اول چون در هیچ جا سرعت صفر نمی‌شود نقطه بازگشت وجود ندارد و اگر جسم در ابتدا به سمت بالا در حرکت باشد برای همیشه به حرکت خود ادامه می‌دهد و با سرعت کند شونده به سرعت حدی نزدیک می‌شود. سرعت حدی که در بینهایت روی می‌دهد با

$$\text{رابطه } v_\ell = \sqrt{\frac{2E}{m}} \text{ داده می‌شود.}$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V_0, \quad (v = 0)$$

$$v_\ell^2 = \frac{2E}{m} \rightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (20-4)$$

وقتی E منفی است، نقطه بازگشت در ارتفاع $x_T = \frac{mMG}{-E}$ است، یعنی اگر جسم از ابتدا به سمت بالا در حرکت باشد در x_T از حرکت باز می‌ایستد و به زمین سقوط می‌کند.

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{x} < 0, \quad (v = 0)$$

$$x_T = \frac{GmM}{-E} \quad (21-4)$$

حالت جدا کننده این دو نوع حرکت به ازای $E=0$ روی می‌دهد. آنگاه نقطه بازگشت در بینهایت است و جسم برای همیشه به سمت بالا حرکت می‌کند:

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GmM}{x}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{x}} \quad (22-4)$$

v_e را سرعت گریز جسم در فاصله x از مرکز زمین می‌نامیم، چرا که جسمی که در ارتفاع x با تندی v سوی بالا در حرکت است دقیقاً دارای انرژی پتانسیل کافی برای بالا رفتن تا بینهایت

است. (اگر مقاومت هوا وجود نداشته باشد).

پاسخ معادله مسیر از روش انرژی (رابطه ۴-۱۹) را برای حالت‌های E مثبت و صفر به دست می‌آوریم (مسائل ۱۶ و ۱۷ فصل دوم سایمون):
برای حالت $E > 0$:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{(E + \frac{mMG}{x})^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (۴-۲۳)$$

انتگرال فوق از نوع $I = \int \frac{dx}{(A + \frac{B}{x})^{1/2}}$ است که با تغییر متغیر $\frac{B}{x} = A \tan^2 \theta$ (چون $x > 0$) چنین حل می‌شود:

$$I = -\frac{B}{A^{3/2}} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \frac{B}{2A^{3/2}} [\cot x \cos ecx + \ln \cos ecx - \cot x]$$

در راه‌حل مناسبتر می‌توان چنین عمل کرد: با تغییر متغیر $\sinh \beta = (\frac{Ex}{mMG})^{1/2}$ خواهیم داشت:

$$dx = (\frac{mMG}{E})^{1/2} \sinh \beta \cosh \beta d\beta \quad ; \quad \frac{mMG}{x} = \frac{E}{\sinh^2 \beta}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{(E + \frac{mMG}{x})^{1/2}} = \int_{\beta_0}^{\beta} (\frac{mMG}{E})^{1/2} \frac{\sinh \beta \cosh \beta d\beta}{(E + \frac{E}{\sinh^2 \beta})^{1/2}} = \frac{2mMG}{E^{3/2}} \int_{\beta_0}^{\beta} \sin^2 h \beta d\beta$$

x ارتفاع جسم در زمان $t=0$ است. می‌توان این نقطه را روی زمین در نظر گرفت. بنابراین $x_0 = 0 \rightarrow \beta_0 = 0$ و در نتیجه:

$$\frac{mMG}{E^{3/2}} (\frac{1}{2} \sinh 2\beta - \beta) = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\frac{1}{2} \sinh 2\beta - \beta = \frac{E^{3/2} \sqrt{2}}{MGm^{3/2}} t \quad (24-4)$$

برای حالت $E=0$ ، به شیوه‌ای همانند، پاسخ را به دست می‌آوریم (مسئله ۱۷، فصل دوم سایمون).

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\left(\frac{mMG}{x}\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\int_{x_0}^x \frac{x^{1/2} dx}{(mMG)^{1/2}} = \frac{\frac{2}{3} x^{3/2}}{(mMG)^{1/2}} \Big|_{x_0}^x = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$x^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{m}} (mMG)^{1/2} t$$

$$x = \left(x^{3/2} + t \sqrt{\frac{9MG}{2}}\right)^{2/3} \quad (25-4)$$

۴-۵. مبحث نوسان - نوسان‌های خطی

۴-۵-۱. نوسانگر هارمونیک ساده

مهمترین مسئله حرکت یک بعدی نوسانگر هارمونیک یا نوسانگر خطی است، و ساده‌ترین مثال آن وقتی است که جرم m به فنری بسته شده که ثابت آن k است: $F = -kx$ نیروی بازگرداننده فنر به جسم است. معادله حرکت چنین است:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (26-4)$$

چنانچه علاوه بر نیروی $F = -kx$ نیروی اصطکاک نیز بر آن وارد شود در یک شکل ساده آن، که اصطکاک تابع خطی سرعت باشد، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (27-4)$$

معادله حرکت نوسانگر هارمونیک را به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

که در آن $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس حرکت نوسانی است. پاسخ معادله دیفرانسیل فوق به صورت

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (28-4)$$

و یا در شکل حقیقی آن

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \theta) \quad \text{یا} \quad A \sin(\omega_0 t - \delta) \quad (29-4)$$

ظاهر می‌شود. بدین ترتیب می‌توان کمیت‌های مهم در این حرکت را از معادله فوق استخراج کرد.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E = T + V = \dots = \frac{1}{2} kA^2$$

اهمیت مسئله نوسانگر هارمونیک در این واقعیت نهفته است که در بسیاری از مسایل فیزیک که در آن تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ یک یا چند می‌نیم یا کمینه دارد می‌توان نشان داد که صرفنظر از ماهیت پتانسیل حداقل در حول و حوش نقطه تعادل پایدار (نوسان‌های کوچک در دو سوی نقطه می‌نیم) تابع پتانسیل مانند پتانسیل یک نوسانگر هارمونیک است. بدین منظور فرض می‌کنیم $V(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای می‌نیم است. بسط تیلور این تابع را حول x_0 می‌نویسیم:

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (30-4)$$

مقدار ثابت $V(x_0)$ را حذف می‌کنیم بی‌آنکه بر نتایج فیزیکی اثر بگذارد. جمله دوم نیز صفر است چرا که x_0 نقطه می‌نیمم تابع است. $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_0}$ مقداری مثبت است و آن را k می‌نامیم.

بنابراین با انتخاب $X = x - x_0$ خواهیم داشت $V(X) = \frac{1}{2}kX^2$ و این پتانسیل یک نوسانگر

هارمونیک است. بنابراین برای نوسان‌های کوچک در دو سوی می‌نیمم انرژی پتانسیل، جز در حالت خاص $k = 0$ ، حرکت از نوع هارمونیک ساده است.

بر اساس قانون تجربی هوک، چنانچه جامدی تغییر شکل یابد با نیرویی متناسب با مقدار تغییر شکل مقاومت می‌کند. به شرطی که این تغییر خیلی بزرگ نباشد و نتیجه اینکه هر جامد تغییر شکل نیافته در کمترین انرژی پتانسیل است، و نیز انرژی پتانسیل را می‌توان به سری تیلور بسط داد. اگر جامد فراسوی نقطه‌ای معین به نام حد کشسانی تغییر شکل یابد، ساختارش چنان دگرگون می‌شود که شکل موجود در می‌نیمم پتانسیل را از دست می‌دهد. قانون هوک تقریباً تا حد کشسانی پایدار می‌ماند. وقتی حد کشسانی افزایش می‌یابد و شکل‌پذیری روی می‌دهد، نه تنها نیروها به شیوه‌ای پیچیده به شکل جسم وابسته می‌شوند، بلکه به سرعت تغییر شکل و حتی به وضع پیشین آن نیز بستگی خواهد داشت. بنابراین نیروها را دیگر نمی‌توان برحسب تابع انرژی مشخص کرد. نظریه نوسانگر هارمونیک ساده کاربرد عمده‌ای تقریباً در تمامی شاخه‌های فیزیک و مهندسی دارد و بسیاری از پدیده‌های نظری و عملی را می‌توان به مسئله نوسانگر هارمونیک ساده با دامنه کوچک تبدیل کرد مادام که ارتعاش جسم از حدهای کشسانی جسم مورد نظر بیشتر نشود. حتی نظریه کوانتومی اتم را می‌توان به شکلی ارائه کرد که از نظر ریاضی با نظریه دستگاهی از نوسانگرهای هارمونیک هم‌ارز باشد.

۴-۵-۲. نوسانگر هارمونیک میرا

در تمام حالت‌های فیزیکی نیروی اصطکاک وجود دارد، گرچه شاید اغلب خیلی کوچک باشد. در بسیاری از موارد با تقریب خوب، به ویژه وقتی اصطکاک کم است، می‌توانیم نیروی اصطکاک را متناسب با سرعت فرض کنیم. از آنجا که این تنها نوع نیروی اصطکاک است که برایش می‌توان

مسئله را به آسانی حل کرد، این حالت را مورد توجه قرار می‌دهیم. مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که نوسانگر میرا تحت تأثیر نیروی محرکی قرار نگیرد. اگر معادله (۴-۶) را برای حالت $n=1$ در نظر بگیریم آنگاه معادله حرکت چنین می‌شود:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۴-۲۷)$$

با انتخاب $x = e^{pt}$ و به کارگیری روش عمومی حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت خواهیم داشت:

$$p = -\frac{b}{2m} \pm \left[\left(\frac{b}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۳۱)$$

بر حسب مقادیر مختلف عبارت زیر رادیکال در معادله مشخصه سه حالت تشخیص داده می‌شود:

(الف). کمین میرا یا کند میرا: و آن وقتی است که $\frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m} \right)^2$ باشد. در این صورت

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (۴-۳۲)$$

که در آن $\gamma = \frac{b}{2m}$ ضریب میرایی و $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس نهادی یا طبیعی نوسانگر و

$\omega_1 = \left(\omega_0^2 - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ فرکانس حرکت میراست. این رابطه وابسته به نوسانی است میرا با دامنه $Ae^{-\gamma t}$ که به طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. ضرایب A و θ از شرایط اولیه به دست می‌آیند. به آسانی می‌توان نشان داد که انرژی کل نوسانگر، یعنی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

در یک دوره تناوب برابر است با $E = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}$ ، که به نسبت $e^{-2\gamma t}$ با گذشت زمان نسبت

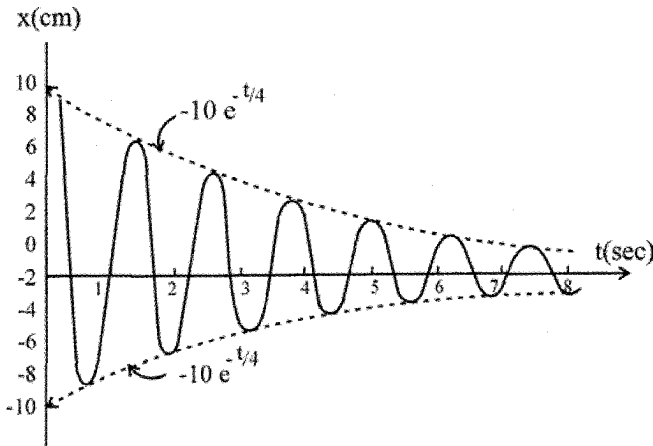
به ماکزیمم آن $\left(\frac{1}{2}kA^2 \right)$ کاهش می‌یابد. شکل زیر معادله حرکت را برای نوسانگری میرا با

مشخصات زیر نشان می‌دهد:

$$\frac{m}{b} = 2 \text{ sec} \quad , \quad k = 25 \cdot \frac{\text{dyne}}{\text{cm}} \quad , \quad m = 10 \text{ gr} \quad , \quad x_0 = 0 \quad (\text{شرایط اولیه})$$

$$x = 10 \cdot e^{-\frac{t}{4}} \cos \Delta t$$

در نتیجه



شکل (۴-۴)

در این حالت معمولاً کمیتی را مورد بررسی قرار می‌دهند که کاهش لگاریتمی انرژی نامیده می‌شود:

$$\frac{dE/dt}{E} = \frac{d \ln E}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{1}{2} k A^2 - 2\gamma t \right) = -2\gamma$$

(ب). حالت فزون میرا (یا تند میرا) - و آن هنگامی است که $\omega_0 < \gamma$ است (یا

$$\left. \left(\frac{k}{m} < \left(\frac{b}{2m} \right)^2 \right) \right\} \text{ در این حالت پاسخ عمومی به صورت}$$

(۳۳-۴)

$$x = c_1 e^{-\gamma_1 t} + c_2 e^{-\gamma_2 t} = e^{-\gamma t} \left[c_1 \exp(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t + c_2 \exp(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t \right]$$

است. هر دو جمله به طور نمایی با زمان کاهش می‌یابند، یکی سریعتر از دیگری. ضرایب c_2, c_1 طوری انتخاب می‌شوند که با شرایط اولیه سازگار باشند. دو حالت مهم وجود دارد: نخست وقتی که

دستگاه از ترازمندی دور می‌شود و رها می‌گردد ($v_0 = 0, x_0 \neq 0$). در حالت دوم در لحظه $t=0$ از وضع ترازمندی ضربه‌ای به دستگاه وارد می‌شود ($v_0 \neq 0, x_0 = 0$): (به مسائل ۲۵ و ۲۶ فصل دوم سایمون مراجعه شود).

اغلب مناسب است معادلات حرکت را در این حالت بر حسب توابع هذلولی نمایش دهیم (مسئله ۱۴- فصل چهارم - کتاب ماریون). در این صورت به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}] \quad (34-4)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} [-\gamma(c_1 e^{\omega_1 t} + c_2 e^{-\omega_1 t}) + (c_1 \omega_1 e^{\omega_1 t} - c_2 \omega_1 e^{-\omega_1 t})] \quad (35-4)$$

که در آن $\omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ انتخاب شده است. توابع هذلولی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad (36-4)$$

$$\begin{cases} e^y = \cosh y + \sinh y \\ e^{-y} = \cosh y - \sinh y \end{cases} \quad (37-4)$$

با استفاده از روابط (۳۷-۴) می‌توان روابط (۳۴-۴) و (۳۵-۴) را به صورت زیر نوشت:

$$x(t) = (\cosh \gamma t - \sinh \gamma t) [(c_1 + c_2) \cosh \omega_1 t + (c_1 - c_2) \sinh \omega_1 t] \quad (38-4)$$

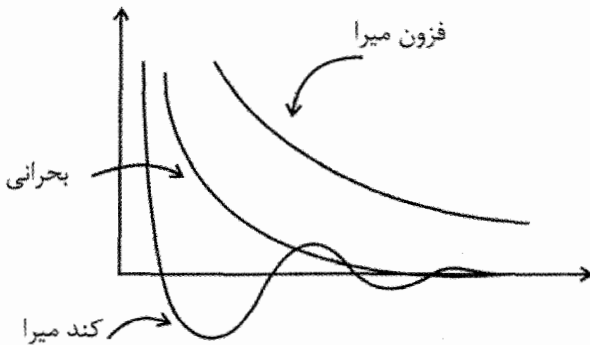
$$\dot{x}(t) = (\cosh \gamma t - \sinh \gamma t) [(c_1 \omega_1 - c_2 \gamma) (\cosh \omega_1 t + \sinh \omega_1 t) - (c_2 \gamma + c_1 \omega_1) (\cosh \omega_1 t - \sinh \omega_1 t)]$$

(پ). حالت میرایی بحرانی: که در آن $\omega_0 = \gamma$ (و یا $\frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2$). پاسخ عمومی حرکت

چنین است:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t} \quad (40-4)$$

این تابع نیز با زمان کاهش می‌یابد اما میزان این کاهش میان دو ضریب میرایی حالت (ب) قرار دارد، یعنی $\gamma_2 > \gamma > \gamma_1$. از این رو پاسخ حالت (ب) پس از زمانی که به اندازه کافی طولانی است سریعتر از پاسخ حالت (پ) به صفر می‌گراید. در شکل زیر سه حالت گفته شده با یکدیگر مقایسه شده است. یادآور می‌شویم که در میرایی بحرانی $\omega_1 = 0$ و بنابراین دوره نوسان بی‌نهایت می‌شود.



شکل (۴-۵)

بی‌مناسبت نیست که حرکت کمین میرا را با حالت بحرانی مقایسه کنیم (مسئله ۲۴ فصل دوم سایمون). در عبارت کمین میرا به صورت

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

جمله کسینوس را بسط می‌دهیم و با فرض $\omega_1 = \omega_0^2 - \gamma^2 < 1$ و نیز در فاصله‌های بسیار کوچک زمانی فقط جملات درجه اول را برحسب $\omega_1 t$ نگاه می‌داریم. در این صورت

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) = Ae^{-\gamma t} \left[1 - \frac{(\omega_1 t + \theta)^2}{2!} + \frac{(\omega_1 t + \theta)^4}{4!} + \dots \right]$$

$$= Ae^{-\gamma t} \left[1 - \frac{1}{2} \omega_1^2 t^2 - \frac{1}{2} \theta^2 - \omega_1 \theta t + \frac{56}{24} \omega_1^2 t^2 \theta^2 + \dots \right]$$

$$= Ae^{-\gamma t} \left[1 - \frac{1}{2} \theta^2 + t(-\omega_1 t + \frac{1}{6} \omega_1 \theta^3) + t^2 (-\frac{1}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{4} \omega_1^2 \theta^2) + \dots \right]$$

$$\approx Ae^{-\gamma t} \left[(1 - \frac{1}{2} \theta^2) + (\frac{1}{6} \omega_1 \theta^3 - \omega_1 \theta) t \right] \equiv (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$$

که نتیجه با پاسخ حالت بحرانی یکسان است، به شرطی که

$$\begin{cases} A(1 - \frac{1}{2}\theta^2) = c_1 \\ A(\frac{1}{6}\omega_1\theta^3 - \omega_1\theta) = c_2 \end{cases}$$

این نتیجه تأیید این مطلب است که در حالت بحرانی پاسخ دوم به صورت $te^{-\gamma t}$ است و جواب عمومی به صورت فوق در می‌آید. منحنی تغییرات $x(t)$ نیز موید این نکته است که در زمان‌های کوتاه حالت کمین میرا در عمل تقریباً بر حالت بحرانی منطبق است.

۳-۵-۴. ضریب کیفیت^۱: (Quality factor)

آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر هارمونیک کند میرا به بهترین نحو با پارامتر Q به نام ضریب کیفیت نوسانگر نمایانده می‌شود. این ضریب به صورت 2π برابر انرژی ذخیره شده در نوسانگر بر اتلاف انرژی در یک دوره نوسان T تعریف می‌شود. اگر میرایی ضعیف باشد، اتلاف انرژی در هر چرخه کوچک و آنگاه Q بزرگ است. این نکته را در محاسبه زیر نشان می‌دهیم: میزان متوسط انرژی هدر رفته در نوسانگر میرا از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\frac{dE}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = \dot{x}(-b\dot{x}) = -b\dot{x}^2$$

که در آن از معادله حرکت $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ استفاده کرده‌ایم. پس لازم است x محاسبه شود:

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t} [\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta) + \gamma \cos(\omega_1 t + \theta)]$$

(۱) در این رابطه به کتاب فاوولز، چاپ ششم (۱۹۹۹)، صفحه ۸۹، مراجعه کنید.

اتلاف انرژی در خلال یک چرخه با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ چنین است:

$$\Delta E = \int_0^T \dot{E} dt$$

با فرض میرایی ضعیف ($\gamma \ll \omega_1$)، پس از محاسبه خواهیم داشت:

$$\Delta E = -\gamma m \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} T$$

که در آن از رابطه $\omega_0^2 = \omega_1^2 + \gamma^2$ و $\gamma = \frac{b}{2m}$ استفاده کرده‌ایم. اکنون اگر توجه داشته باشیم

که زمان مشخصه τ با ضریب میرایی γ توسط رابطه $\gamma = \frac{1}{\tau}$ به هم مربوط می‌شوند، آنگاه برای

مقدار اتلاف انرژی در یک چرخه خواهیم داشت:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{1}{\tau}} \right) \frac{T}{\tau}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{T}{\tau} \quad (4-41)$$

که در آن $E(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ است. بدین ترتیب ضریب کیفیت به صورت زیر تعریف

می‌شود

$$a = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\frac{T}{\tau}} = \frac{2\pi}{2\pi/\omega_1 \tau} = \omega_1 \tau = \frac{\omega_1}{2\gamma} \quad (4-42)$$

در کتاب ماریون ضریب کیفیت Q به صورت رابطه فوق تعریف شده است. آنگاه نشان داده است که این تعریف با تعریف اولیه ما برحسب انرژی معادل است (تمرین ۳-۱۸ کتاب ماریون). برای میرایی ضعیف، دوره نوسان T کمتر از ثابت زمانی τ است که آهنگ اتلاف انرژی را مشخص می‌کند. در این شرایط Q بزرگ است. جدول زیر مقدار Q را برای چند نوع نوسانگر نشان می‌دهد.

مقادیر Q برای چند سیستم فیزیکی

زمین (برای زمین لرزه)	Earth (for earthquake)	250-1400
سیم پیانو	Piano string	3000
کریستال در ساعت خودکار	Crystal in digital Watch	10^4
کاواک ریز موج	Microwave cavity	10^4
اتم برانگیخته	Excited atom	10^7
ستاره نوترونی	Neutron star	10^{12}
هسته برانگیخته Fe^{57}	Excited Fe^{57} nucleus	3×10^{12}

پدیده تشدید یا رزونانس (به بخش بعد مراجعه کنید) با بیشترین مقدار Q شناخته شده در تابش لیزرهای گازی روی می‌دهد. اندازه‌گیری با چنین ابزارهایی مقدار Q را در حدود 10^{14} به دست می‌دهد (به کتاب ماریون، صفحه ۱۳۰ مراجعه کنید).

۴-۵-۴. نوسانگر هارمونیک واداشته

نوسانگری هارمونیک که تحت تأثیر نیروی خارجی $F(t)$ قرار دارد از معادله زیر پیروی می‌کند:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F(t) \quad (4-43)$$

یکی از مهمترین حالت‌ها هنگامی است که نیروی نوسانی سینوسی به جسم وارد می‌شود، یعنی $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \theta)$. بحث عمومی در این مورد و نحوه حل معادله فوق به تفصیل در فصل دوم کتاب سایمون آمده است. روش عمومی و مناسب در بررسی نوسان واداشته استفاده از متغیرهای مختلط است. در این روش چنین عمل می‌کنیم:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \quad (4-44)$$

F_0 در این رابطه عددی حقیق است. در جستجوی پاسخی به صورت $X = X_0 e^{i\omega t}$ بر می‌آییم.

$$\dot{x} = i\omega X_0 e^{i\omega t}, \quad \ddot{x} = -\omega^2 X_0 e^{i\omega t} \quad (4-45)$$

با قرار دادن این روابط در معادله (۴-۴۴) داریم:

$$-m\omega^2 X_0 e^{i\omega t} + i\omega b X_0 e^{i\omega t} + kX_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)}$$

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{m} - e^{i\theta_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (46-4)$$

که در آن $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ و $\gamma = \frac{b}{2m}$ به ترتیب فرکانس طبیعی یا ذاتی نوسانگر هارمونیک است و γ ضریب میرایی. بنابراین:

$$X = X_0 e^{i\omega t} = \frac{\frac{F_0}{m} e^{i(\omega t + \theta_0)}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (47-4)$$

اما

$$\omega_0 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2} e^{i\theta} \quad (48-4)$$

به طوریکه

$$\tan \theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (49-4)$$

و با انتخاب $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ خواهیم داشت:

$$\dot{x} = i\omega X = \frac{i\omega F_0}{m} \frac{e^{i(\omega t + \theta_0)}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (50-4)$$

$$= \frac{\omega F_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2}} e^{i(\omega t + \theta_0 + \beta)}$$

که در آن

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \right) \quad (51-4)$$

بنابراین معادله (۴-۵۰) داریم:

$$x = \text{Re}(X) = \text{Re}\left(\frac{\dot{X}}{i\omega}\right) = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \sin(\omega t + \theta_0 + \beta)$$

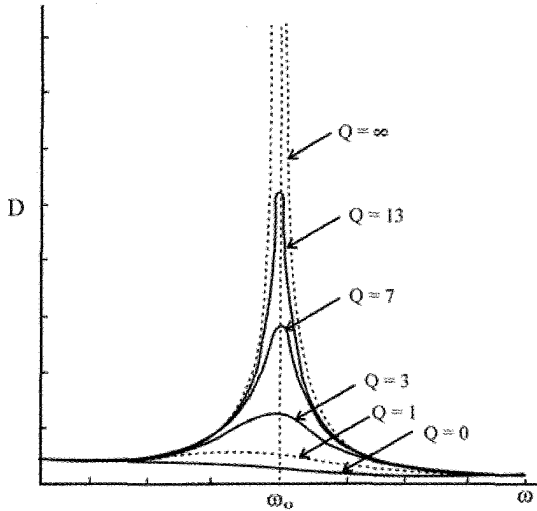
این یک پاسخ ویژه برای معادله ناهمگن (۴-۴۴) است و ضریب ثابت در آن وجود ندارد. برحسب شرایط مسئله، مثلاً در حالت نوسانگر کمین میرا برای پاسخ عمومی معادله ناهمگن خواهیم داشت:

(۴-۵۲)

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \sin(\omega t + \theta_0 + \beta)$$

دو ضریب ثابت A, θ از شرایط اولیه مسئله به دست می‌آیند. در عبارت (۴-۵۲) نخستین جمله به طور نمایی با زمان از بین می‌رود و جمله زودگذر نام دارد. به دومین جمله حالت پابرجا گفته می‌شود و با دامنه ثابت نوسان می‌کند. وجود آن به جمله واداشته $F_0 e^{i\omega t}$ بستگی دارد و تأثیر این جمله سبب ادامه نوسان نوسانگر اولیه می‌شود. حالت پابرجایی که پس از حالت زودگذر می‌ماند مستقل از شرایط اولیه است.

در همین جا از پدیده بازآوایی یا تشدید سخن می‌گوییم. در کتاب هالیدی بازآوایی چنین تعریف شده است: "بازآوایی در فرکانسی روی می‌دهد که نوسان‌های واداشته ماکزیمم دامنه را پیدا می‌کنند." در کتاب‌های ماریون و سایمون با دو شیوه متفاوت اما معادل، از تعریف زیر استفاده شده و نتیجه‌گیری کرده‌اند: "بازآوایی در فرکانسی روی می‌دهد که در آن فرکانس ماکزیمم توان از محیط تحریک کننده (driving unit) به دستگاه نوسانگر منتقل می‌شود؛" و یا در فرکانسی روی می‌دهد که سرعت جسم نوسانگر ماکزیمم می‌شود." در زیر نشان می‌دهیم که در واقع دو تعریف معادل هم نیستند (بدین منظور می‌توان به مسئله ۱۵-۵۵ کتاب هالیدی نیز مراجعه). شکل زیر منحنی‌های تشدید و فاز را برای مقادیر مختلف ضریب کیفیت Q نشان می‌دهد. این منحنی‌ها به خوبی کاهش فرکانس تشدید را با کم شدن Q (یعنی افزایش ضریب میرایی γ) مشخص می‌کند.



شکل (۴-۶)

برای یافتن فرکانسی که در آن فرکانس دامنه حرکت (۴-۵۲) ماکزیمم می‌شود (آنگاه تشدید یا بازآوایی روی می‌دهد)، قرار می‌دهیم

$$D = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right]^{1/2}} \Rightarrow \frac{dD}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

اکنون فرکانسی را محاسبه می‌کنیم که در آن فرکانس پدیده تشدید در انرژی جنبشی روی می‌دهد (و معادل میزان کاری است که توسط نیروی وارد آمده بر نوسانگر انجام می‌شود):

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \frac{A^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \sin^2(\omega t + \theta_0 + \beta)$$

مقدار متوسط $\langle T \rangle$ را در یک دوره کامل نوسان به دست می‌آوریم تا مقداری مستقل از زمان داشته باشیم. با اندکی محاسبه خواهیم داشت:

$$\langle T \rangle = \frac{m A^2}{4} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}$$

و در نتیجه

$$\left. \frac{d\langle T \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_E} = 0 \Rightarrow \omega_E = \omega_0$$

یعنی تشدید انرژی جنبشی در فرکانس طبیعی سیستم با نوسان‌های نامیرا روی می‌دهد.

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که تشدید دامنه در فرکانس $\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ روی می‌دهد، حال آنکه تشدید انرژی جنبشی در ω_0 اتفاق می‌افتد. چون انرژی پتانسیل متناسب با مجذور دامنه است، تشدید انرژی پتانسیل نیز باید در $\left(\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}\right)^2$ روی دهد. اینکه تشدید انرژی‌های پتانسیل و جنبشی در فرکانس‌های متفاوت روی می‌دهد نتیجه این واقعیت است که نوسانگر میرا یک سیستم پایستار نیست. انرژی بطور دائم و پیوسته با مکانیسم محرک مبادله (تعویض) می‌شود، و انرژی در حال انتقال به محیط میرا است. همانگونه که در شکل مشاهده می‌شود با کاهش γ ، یا افزایش Q ، فرکانس بازآوایی به فرکانس ω_0 نزدیکتر می‌شود.

به آسانی می‌توان نشان داد که در حالت پابرجا به طور متوسط همان مقدار توان در نوسانگر ذخیره می‌شود که از طریق نیروی اصطکاک هدر می‌رود. توان هدر رفته توسط اصطکاک از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{av} = \langle \dot{x}F_{fict} \rangle = \langle b\dot{x}^2 \rangle = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2}$$

(به بخش ۲-۱۰ کتاب سایمون مراجعه کنید).

نکته: نظریه ساده پاشندگی تابش الکترومغناطیسی در محیط مادی غیررسانا نیز براساس همین نظریه است که در بالا مورد بحث قرار گرفت. در آنجا نیز در یک مدل ساده می‌پذیریم که محیط مادی شامل الکترونهایی است که براساس قانون هوک با نیروهای بازگرداننده بین مولکول‌ها قرار گرفته‌اند. وقتی یک موج تخت الکترومغناطیس وارد محیط می‌شود، الکترون‌ها توسط نیروی محرکه ماده پروردیک رانده می‌شوند. آنگاه معادله حرکت الکترون‌ها چنین است:

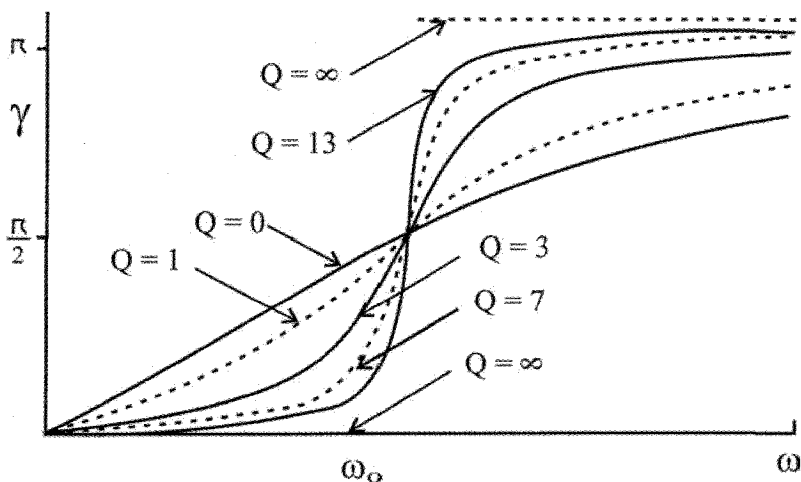
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = qE_0 \sin \omega t$$

در این رابطه از نیروهای مغناطیسی که نوعاً کوچک هستند صرفنظر کرده‌ایم و الکترون‌ها تحت نوسان‌های هارمونیک با همان فرکانس موج فرودی قرار می‌گیرند و در نتیجه شتاب می‌گیرند. الکترون‌های شتابدار انرژی الکترومغناطیس از خود تابش می‌کنند که فرکانس آن برابر است با

فرکانس تابش فرودی. این امر دلیل وجود میرایی $b\dot{x}$ در معادله فوق است. اگر فرکانس محرک نزدیک فرکانس طبیعی الکترون باشد، افزایشی سریع در جذب و پراکندگی موج بواسطه رویداد پدیده تشدید صورت می‌گیرد. اگر میرایی کوچک باشد، رزونانس به صورت خط طیف (Spectral Line) خیلی باریک و تیز خواهد بود که توسط رابطه

$$(\overline{b\dot{x}^2})_{\max} = \frac{F_0^2}{2b}$$

و شکل زیر نشان داده می‌شود.



شکل (۴-۷)

۴-۶. فضای فاز:

حالت حرکت نوسانگر یک بعدی، مانند نوسانگر هارمونیک یک بعدی که در بخش اول بحث کردیم کاملاً با یک نمودار ساختار فرضی دو بعدی شامل دو متغیر $\dot{x}(t), x(t)$ مشخص می‌شود. این دو کمیت مشخصه اصلی مورد نیاز برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. فضای ریاضی شامل این دو متغیر را «فضای فاز Phase-Space» می‌نامیم که کاربرد عمده آن در بررسی‌های آماری است، و نمودار تشکیل شده از دو محور مختصات که هر کدام یکی از مؤلفه‌های $\dot{x}(t), x(t)$ را نشان می‌دهد، نمودار فاز (Phase diagram) نامیده می‌شود. در دو بعد فضای فاز یک صفحه فاز است. به همین ترتیب می‌توان این ایده را برای N ذره در فضای ۳ بعدی به فضای

6N بعدی ریاضی فاز تعمیم داد. در مورد نوسانگر یک بعدی هارمونیک خواهیم داشت:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$$

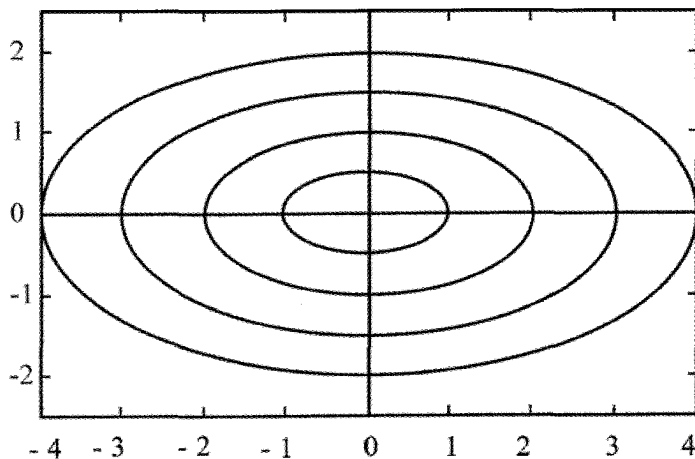
$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \delta)$$

چنانچه t را از دو معادله حذف کنیم، معادله مسیر در نمودار (x, y) چنین می شود:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \quad (53-4)$$

این معادله نمایشگر یک دسته بیضی است. گاه محور y ها را به جای \dot{x} به صورت $\frac{\dot{x}}{\omega_0}$ انتخاب

می کنند.



شکل (۴-۸)

می دانیم که انرژی E نوسانگر برابر $\frac{1}{2}kA^2$ است و چون $\omega_0 = \frac{k}{m}$ است، آنگاه:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (54-4)$$

و یا به شکل عمومی تر فضای فاز (x, p) :

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{p^2}{2E} = 1 \quad (55-4)$$

در این صورت هر مسیر فاز وابسته به انرژی کل معینی از نوسانگر است. این نتیجه نیز قابل انتظار است چرا که سیستم پایستار است (یعنی ثابت E). هیچ دو مسیر فاز نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند، دلالت بر این نکته دارد که برای مجموعه داده شده‌ای از شرایط اولیه $\dot{x}(t), x(t)$ (یعنی مختصات نقطه تلاقی)، حرکت ممکن است در امتداد مسیرهای فاز مختلف صورت گیرد (پیش رود). اما چنین چیزی غیرممکن است، زیرا معادله دیفرانسیل یگانه است.

اگر محورهای مختصات صفحه فاز مانند شکل فوق انتخاب شود، حرکت نقطه نمایشگر اگر همیشه در جهت ساعتگرد صورت می‌گیرد چرا که برای $x > 0$ سرعت \dot{x} همیشه نزولی و برای $x < 0$ سرعت همیشه افزایشی (صعودی) است. برای یافتن معادله مسیر فاز مشابه

آنچه برای معادله مسیر نوسانگر صورت داده‌ایم باید از معادله مشابه $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ انتگرال

بگیریم. در مورد فضای فاز دو دسته معادله درجه اول می‌نویسیم:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

بنابراین:

$$\frac{d\dot{x}/dt}{dx/dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{-x\omega_0^2}{\dot{x}} = -\omega_0^2 \frac{x}{\dot{x}}$$

این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای $\dot{x} = \dot{x}(t)$ است و حل آن درست معادله (۴-۵۳) است. در مورد پیچیده‌تر از حالت ساده نوسانگر هارمونیک مسئله یافتن مسیر فاز به شکل فوق آسان نیست و گاه ساده‌تر است که مستقیماً معادله مسیر فاز $\dot{x} = \dot{x}(t)$ را بدون نیاز به محاسبه $x(t)$ بیابیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴-۵. نمودار فاز را برای نوسانگر میرا بیابید:

حل - نخست عبارت جابجایی و سرعت را برای نوسانگر میرا (کمین میرا) می‌نویسیم:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-\gamma t} [\gamma \cos(\omega_0 t + \theta) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta)]$$

با تغییر متغیر زیر براساس تبدیل خطی بین متغیرها، معادلات فوق به شکل ساده‌تری در می‌آیند:

$$u = \omega_1 x, \quad w = \gamma x + \dot{x}$$

$$u = \omega_1 A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

$$w = -\omega_1 A e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \theta)$$

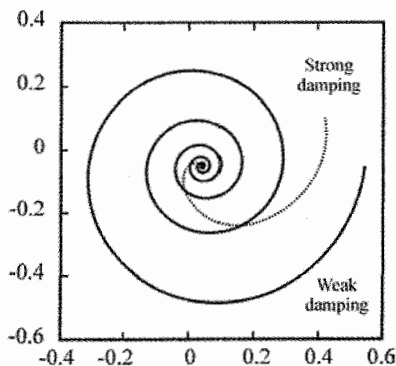
و چنانچه u و w را در مختصات قطبی نمایش دهیم، آنگاه:

$$\rho = \sqrt{u^2 + w^2}, \quad \phi = \omega_1 t$$

$$\rho = \omega_1 A e^{-(\gamma/\omega_1)\phi}$$

$$\frac{u^2}{\rho^2} + \frac{w^2}{\omega_1^2 \rho^2} = 1 \quad (۴-۵۶)$$

این معادله شبیه معادله (۴-۵۴) است. از آنجا که w ترکیب خطی \dot{x} , x است، مجموعه نقاط (x, w) یا (u, w) یک فضای فاز تغییر شکل یافته (modified) را نشان می‌دهد. معادله (۴-۵۵) یک پیچ لگاریتمی است. از آنجا که تبدیل از x به \dot{x} و u و ω خطی است، مسیر فاز اساساً در صفحه فاز به همان شکل در صفحه (u, w) خواهد بود. شکل زیر مسیر فاز ماریچ مربوط به نوسانگر کمین میرا را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۹)

مقدار به طور پیوسته کاهشی بردار شعاعی برای یک نقطه معرف (representative point)، در صفحه فاز همیشه حرکت میرای نوسانگر را نشان می‌دهد. همین مسئله را می‌توان برای نوسانگر فزون میرا و میرایی بحرانی حل کرد. به عنوان تمرین این قسمت را بررسی کنید. (به فصل سوم، کتاب فاولز مراجعه کنید).

۴-۷. اصل برهم نهی - سری فوریه

اساساً نوسان‌های مورد بررسی تاکنون از معادله دیفرانسیلی به شکل زیر تبعیت می‌کنند:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b\right)x(t) = A \cos \omega t \quad (۵۷-۴)$$

کمیت داخل پرانتز یک اپراتور خطی (Linear Operator) است که با \hat{L} نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب معادله حرکت فوق را می‌توان به صورت کلی:

$$\hat{L}x(t) = F(t) \quad (۵۸-۴)$$

نشان داد. ویژگی عمده اپراتورهای خطی آن است که از اصل برهم نهی یا انطباق (Principle of superposition) پیروی می‌کنند. بدین معنی که

$$\hat{L}(x_1 + x_2) = \hat{L}(x_1) + \hat{L}(x_2) = F_1(t) + F_2(t)$$

و یا با انتخاب ضرایب ثابت α_1, α_2 در میدان تعریف،

$$\hat{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$$

و در حالت کلی

$$\hat{L}\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n F_n(t) \quad (۵۸-۴)$$

توجه داریم که این معادله همان معادله (۵۷-۴) است چنانچه ترکیب‌های خطی زیر را تعریف کنیم:

$$x(t) = \sum \alpha_n x_n(t)$$

$$F(t) = \sum \alpha_n F_n(t) \quad (۵۹-۴)$$

اگر هر تابع انفرادی $F_n(t)$ وابستگی هارمونیک ساده را به زمان داشته باشد، آنگاه پاسخ وابسته به آن یعنی، $x_n(t)$ از معادله نوسانگر واداشته به دست می‌آید، از این رو، اگر

$$F(t) = \sum_n a_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (۶۰-۴)$$

باشد، پاسخ حالت پایرجا یا ایستا چنین است:

$$x(t) = \frac{1}{m} \sum_n \frac{\alpha_n}{\left[(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \gamma^2\right]^{1/2}} \cos(\omega_n t - \phi - \delta_n) \quad (۶۱-۴)$$

که در آن

$$\delta_n = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma \omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \right) \quad (۶۲-۴)$$

می‌توان پاسخ‌هایی مشابه نوشت وقتی $F(t)$ با یک سری از جملات مانند $\sin(\omega_n t - \phi_n)$ نمایش داده شود. بنابراین به این نتیجه مهم می‌رسیم که اگر نیروی دلخواه $F(t)$ را بتوان به شکل یک سری از جملات هارمونیک بیان کرد (محدود یا نامحدود)، پاسخ کامل را نیز می‌توان به یک سری مشابه از جملات هارمونیک نوشت. این نتیجه‌ای بسیار مهم است چرا که مطابق قضیه فوریه هر تابع دوره‌ای دلخواه را تحت شرایط معینی (که خیلی محدود کننده نیستند) می‌توان با جملات هارمونیک نمایش داد. بنابراین در حالت معمول فیزیکی که در آن $F(t)$ دوره‌ای با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega}$ است، خواهیم داشت:

$$F(t + T) = F(t)$$

$$F(t) = \frac{1}{T} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (۶۳-۴)$$

که در آن

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega t dt \quad (۶۴-۴)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega t dt \quad (۶۵-۴)$$

برای بررسی بیشتر سری فوریه به مراجع پایان کتاب مراجعه کنید.

۴-۸. پاسخ نوسانگرهای خطی به توابع نیروی پله‌ای و ضربه‌ای - روش گرین^۱:

در بخش پیش نوسان‌های حالت پابرجا را در نظر گرفتیم. برای بسیاری از مسایل فیزیکی (به‌ویژه آنهایی که شامل مدارهای نوسانی الکتریکی هستند)، اثرات گذرا فوق‌العاده مهم هستند. در واقع،

(۱) این بخش عمدتاً از کتاب ماریون استفاده شده است. بررسی دقیقتر را در این کتاب دنبال کنید.

پاسخ گذرا در این گونه موارد اغلب مورد توجه است. در اینجا رفتار گذرای یک نوسانگر خطی را مطالعه می‌کنیم که در معرض نیروی محرکی است که به طور ناپیوسته و مقطعی عمل می‌کند. البته نیروی ناپیوسته یک ایده‌آل‌سازی است. زیرا همیشه زمان معینی طول می‌کشد تا یک نیرو اثر کند. اما اگر زمان تأثیر در مقایسه با دوره طبیعی نوسانگر کوچک باشد، نتیجه حالت ایده‌آل تقریب خوبی برای وضعیت واقعی فیزیکی خواهد بود.

معادله دیفرانسیل مبین حرکت نوسانگر میرا چنین است:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

پاسخ عمومی ترکیبی از پاسخ‌های خاص و ممکن (پاسخ معادله همگن) است:

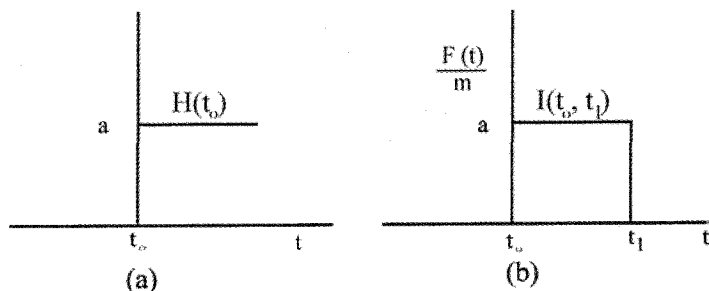
$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

به طوری که

$$x_c(t) = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t)$$

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

پاسخ خاص $x_p(t)$ به طبیعت نیروی $F(t)$ بستگی دارد. دو نوع تابع نیروی ناپیوسته ایده‌آل مورد توجه است: یکی تابع پله‌ای (تابع هویساید) و دیگری تابع ضربه‌ای (impulse function). این دو تابع در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



شکل (۴-۱۰)

تابع پله‌ای H با رابطه

$$H(t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ a & t > t_0 \end{cases} \quad (۴-۶۶)$$

تعریف می‌شود، که در آن a ضریب ثابت با ابعاد شتاب است و آرگومان t_0 نمایشگر آن است که نیرو در زمان $t = t_0$ اثر می‌کند. تابع ضربه‌ای I یک تابع پله‌ای مثبت است که در زمان $t = t_0$ اثر می‌کند و به دنبال آن یک تابع پله‌ای منفی است که در زمان بعد t_1 اثر می‌کند. از این رو

$$I(t_0, t_1) = H(t_0) - H(t_1)$$

$$I(t_0, t_1) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ a & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \quad (۴-۶۷)$$

۴-۸-۱. پاسخ به تابع پله‌ای

برای تابع پله‌ای، معادله دیفرانسیل مبین حرکت برای $t > t_0$ چنین است:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a, \quad t > t_0 \quad (۴-۶۸)$$

شرایط اولیه را مثلاً $x(t_0) = 0$ و $\dot{x}(t_0) = 0$ فرض می‌کنیم. پاسخ خاص یک مقدار ثابت است

و آزمون معادله فوق نشان می‌دهد که باید برابر $\frac{a}{\omega_0^2}$ باشد. آنگاه پاسخ عمومی برای $t > t_0$ چنین

است:

$$x(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} [A_1 \cos \omega_1(t-t_0) + A_2 \sin \omega_1(t-t_0)] + \frac{a}{\omega_0^2} \quad (۴-۶۹)$$

و با به کار بردن شرایط اولیه:

$$A_1 = -\frac{a}{\omega_0^2}, \quad A_2 = -\frac{\gamma a}{\omega_1 \omega_0^2}$$

بنابراین برای $t > t_0$ داریم:

$$(۴-۷۰)$$

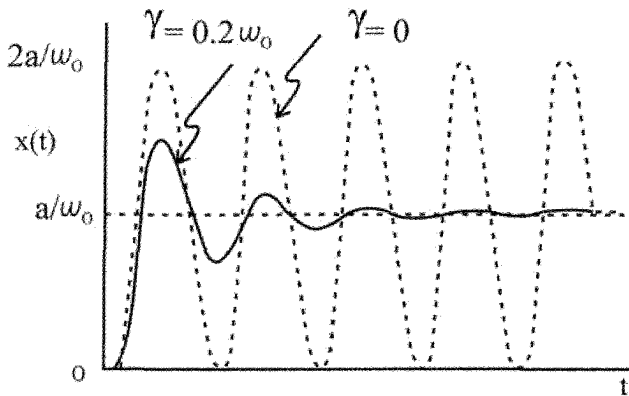
$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\gamma e^{-\gamma(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right]$$

و $x(t) = 0$ برای $t < t_0$. اگر برای راحتی $t_0 = 0$ انتخاب شود، خواهیم داشت:

$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t - \frac{\gamma e^{-\gamma t}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \quad (۷۱-۴)$$

این تابع پاسخ برای $y = 0.2\omega$ در شکل زیر نمایش داده شده است. واضح است که وضعیت

نهایی نوسانگر (یعنی حالت پایرجا) جابجایی به اندازه $\frac{a}{\omega_0}$ است.



شکل (۱۱-۴)

اگر هیچ میرایی صورت نگیرد، $\gamma = 0$ ، $\omega_1 = \omega_0$ است. آنگاه برای $t_0 = 0$ داریم:

$$x(t) = \frac{H(0)}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) ; \quad \gamma = 0 \quad (۷۲-۴)$$

یعنی نوسان سینوسی است با اکسترمم‌های دامنه $X = 0$ و $X = \frac{2a}{\omega_0^2}$.

۲-۸-۴. پاسخ به تابع ضربه‌ای- تابع گرین

اگر تابع ضربه‌ای را به صورت تفاضل بین دو تابع پله‌ای فرض کنیم که به اندازه فاصله زمانی

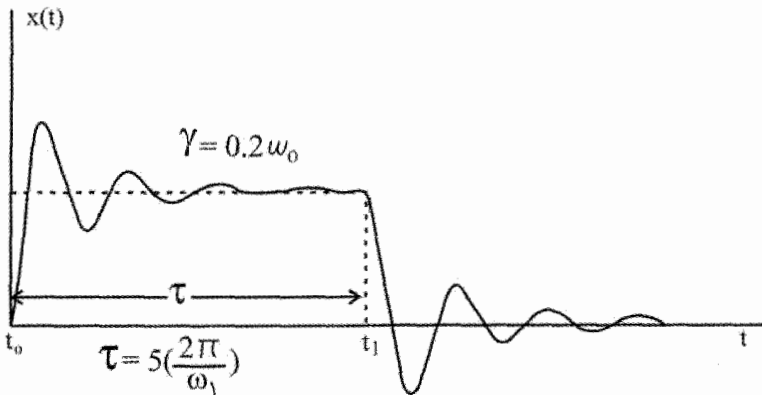
$t_1 - t_0 = \tau$ از هم جدا باشند، آنگاه چون سیستم خطی است، پاسخ عمومی $t > t_1$ با برهم‌نهی

پاسخ‌ها داده می‌شود (پاسخ ۷۰-۴):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a}{\omega_0^\gamma} \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0)} \cos \omega_1(t-t_0) - \frac{\gamma e^{-\gamma(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right] \\
 &- \frac{a}{\omega_0^\gamma} \left[1 - e^{-\gamma(t-t_0-\tau)} \cos \omega_1(t-t_0-\tau) - \frac{\gamma e^{-\gamma(t-t_0-\tau)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) \right] \\
 &= \frac{ae^{-\gamma(t-t_0)}}{\omega_0^\gamma} \left[e^{\gamma\tau} \cos \omega_1(t-t_0-\tau) - \cos \omega_1(t-t_0) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma e^{\gamma\tau}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0-\tau) - \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0) \right] ; t > t_1 \quad (۷۳-۴)
 \end{aligned}$$

شکل زیر پاسخ کلی (یعنی معادله (۷۰-۴) و (۷۳-۴) را به تابع ضربه‌ای با دوره $\tau = \delta \times \frac{2\pi}{\omega_1}$ که در

زمان $t = t_0$ اثر کرده است (برای $\gamma = 0.2\omega_0$) نشان می‌دهد.



شکل (۱۲-۴)

اگر $\tau \rightarrow 0$ ، تابع پاسخ به صفر میل می‌کند. اما اگر همراه $\tau \rightarrow 0$ ، a را به بینهایت میل دهیم، به طوری که حاصلضرب $a\tau$ ثابت بماند، آنگاه پاسخ معین می‌شود. این حالت حدی خاص مهم است، زیرا تقریبی است برای حالتی که نیروی محرک به صورت قلّه بلند در $t = t_0$ است (یعنی

این نوع تابع از نوع تابع دلتا $\delta(t - t_0)$ است. می‌خواهیم معادله (۷۳-۴) را برای $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega_1}$ (در حالتی که، $b = a\tau$ ثابت باشد) بسط دهیم. فرض می‌کنیم $B = \tau, A = t - t_0$ باشد، آنگاه:

$$x(t) = \frac{ae^{-\gamma(t-t_0)}}{\omega_0^2} \left\{ e^{\gamma t} [\cos \omega_1(t-t_0) \cos \omega_1 \tau + \sin \omega_1(t-t_0) \sin \omega_1 \tau] - \cos \omega_1(t-t_0) + \frac{\gamma e^{\gamma t}}{\omega_1} [\sin \omega_1(t-t_0) \cos \omega_1 \tau - \cos \omega_1(t-t_0) \sin \omega_1 \tau] - \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1(t > t_0) \right\} \quad (74-4)$$

چون τ کوچک است، عبارت‌های $\sin \omega_1 \tau, \cos \omega_1 \tau, e^{\gamma \tau}$ را بسط می‌دهیم و فقط دو جمله اول هر کدام را نگه می‌داریم. بدین ترتیب خواهیم داشت:

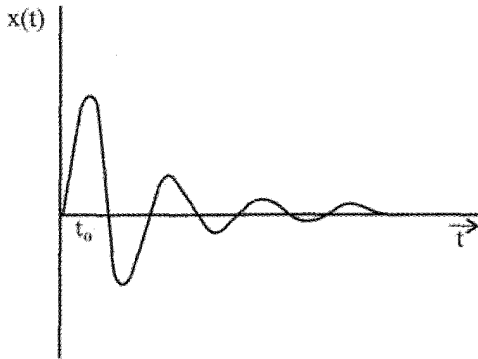
$$x(t) = \frac{ae^{-\gamma(t-t_0)}}{\omega_0^2} \sin \omega_1(t-t_0) \left[\omega_1 \tau + \frac{\gamma^2 \tau}{\omega_1} \right]; \quad t > t_0 \quad (75-4)$$

$$x(t) = \frac{ae^{-\gamma A}}{\omega_0^2} \sin \omega_1 A \left[\omega_1 B + \frac{\gamma^2 B}{\omega_1} \right]$$

و با به کار بردن $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ، $\tau = \frac{b}{a}$ سرانجام به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$x(t) = \frac{be^{-\gamma(t-t_0)}}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_0); \quad t > t_0 \quad (76-4)$$

این تابع پاسخ در شکل زیر برای $\gamma = 0.2\omega$ نمایش داده شده است. توجه کنید که با افزایش t ، نوسانگر به وضعیت اصلی تعادل خود بر می‌گردد.



شکل (۴-۱۳)

این واقعیت که پاسخ نوسانگر خطی به نیروی محرک ضربه‌ای را می‌توان به شیوه ساده معادله (۴-۷۶) نمایش داد، ما را به تکنیک توانمندی برای بررسی توابع نیروی عمومی رهنمون می‌شود که توسط گرین ابداع شد. روش گرین براساس نمایش یک تابع دلخواه به صورت یک سری پالس است که در زیر نشان داده شده است. اگر سیستم رانده شده و واداشته خطی باشد، برهم‌نهی معتبر است، و می‌توانیم بخش ناهمگن معادله دیفرانسیل را به صورت جمع توابع نیروی انفرادی $\frac{F_n(t)}{m}$ بیان

کنیم، که در روش گرین توابع ضربه‌ای هستند:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(t) \quad (۴-۷۷)$$

که در آن

$$I_n(t) = I(t_n, t_{n+1}) = \begin{cases} a_n(t_n) & t_n < t < t_{n+1} \\ 0 & \text{بقیه نقاط} \end{cases}$$

فاصله زمانی که I_n عمل می‌کند $\tau = t_{n+1} - t_n$ ، $\tau < \frac{2\pi}{\omega_1}$ است. پاسخ مناسب برای n امین

پالس طبق معادله (۴-۷۵) چنین است:

$$x_n(t) = \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n) ; t_n < t < t_n + \tau \quad (۴-۷۸)$$

و پاسخ برای تمام پالس‌ها تا پالس n ام خود این پالس،

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n(t_n)\tau}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n) ; t_n < t < t_{n+1} \quad (۷۹-۴)$$

اگر اجازه دهیم فاصله زمانی τ به صفر میل کند و t_n را با t' نمایش دهیم، آنگاه جمع به انتگرال زیر تبدیل می‌شود:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{a(t')}{\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt' \quad (۸۰-۴)$$

اکنون عبارت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_1(t-t') & t \geq t' \\ 0 & t < t' \end{cases} \quad (۸۱-۴)$$

آنگاه چون $ma(t') = F(t')$ است (a دارای بعد شتاب ثابت است)، داریم:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(t') G(t, t') dt' \quad (۸۲-۴)$$

تابع $G(t, t')$ به نام تابع (Green's function) برای معادله نوسانگر خطی معروف است. پاسخ فوق فقط برای نوسانگری معتبر است که در ابتدا در وضعیت تعادل خود ساکن است. زیرا پاسخی که برای یک پالس به کار بردیم دقیقاً برای چنین شرایط اولیه‌ای به دست آمده بود. برای شرایط نخستین دیگر، پاسخ عمومی را می‌توان به شیوه‌ای مشابه تعیین کرد. روش گرین عموماً برای حل معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن مفید است. مزیت اصلی این شیوه بر این واقعیت استوار است که تابع گرین $G(t, t')$ که پاسخ برای عنصر بینهایت کوچک بخش ناهمگن است، از قبل شرایط اولیه را در بردارد. بنابراین پاسخ عمومی، که با انتگرال $\int F(t') G(t, t') dt'$ بیان می‌شود، به طور خودکار شامل شرایط اولیه است.

مثال ۴-۶. $x(t)$ را برای یک تابع نیروی میرا با قانون نمایی بیابید که در $t = 0$ آغاز می‌شود و شکل زیر را خواهد داشت:

$$F(t) = F_0 e^{-at} \quad t > 0$$

حل: پاسخ $x(t)$ بر اساس روش گرین چنین است:

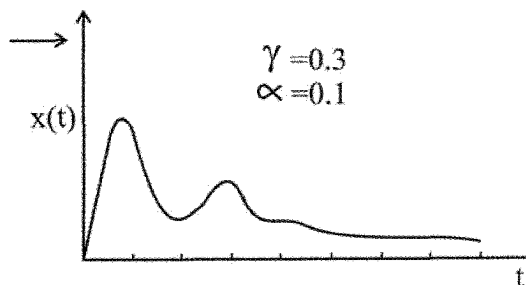
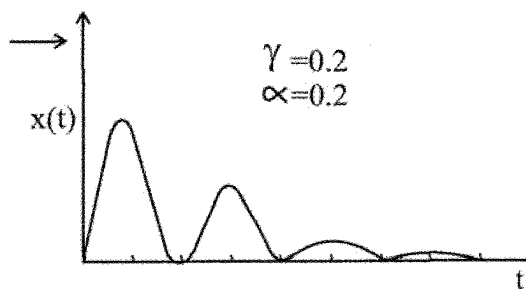
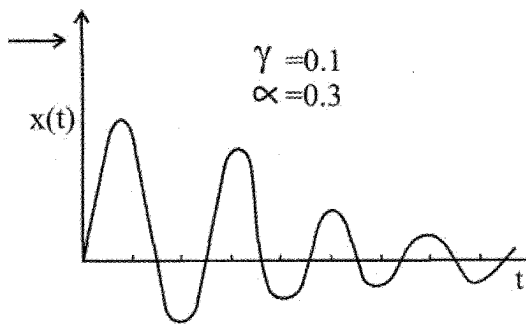
$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^t e^{-\alpha t'} e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_1(t-t') dt'$$

با تغییر متغیر $z = \omega_1(t-t')$ خواهیم داشت:

$$x(t) = -\frac{F_0}{m\omega_1^2} \int_{\omega_1 t}^0 e^{-\alpha t} e^{[(\alpha-\gamma)/\omega_1]z} \sin z dz \quad (1)$$

$$= \frac{F_0/M}{(\alpha-\gamma)^2 + \omega_1^2} \left[e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{\alpha-\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]$$

این تابع پاسخ را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. این شکل‌ها پاسخ را برای سه حالت مختلف α, γ نشان می‌دهند.



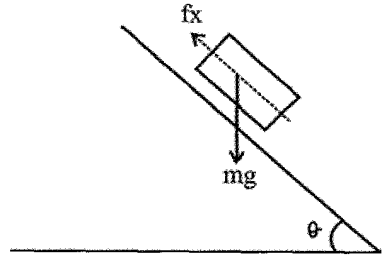
هنگامی که $\alpha = \gamma$ است معادله فوق چنین می شود،

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1 \gamma} e^{-\gamma t} (1 - \cos \omega_1 t) \quad , \quad \alpha = \gamma$$

از این رو پاسخ نوسانی است با دوره $\frac{2\pi}{\omega_1}$ اما با دامنه‌ای که به صورت نمایی میرا می شود. این نوع پاسخ را که با معادله (۱) به دست آورده‌ایم می توان در مدارهای الکتریکی یافت که ناگهان تحت تأثیر یک ولتاژ میرا روی یک خازن قرار می گیرند.

۹-۴. مسائل برگزیده حل شده

۱- جسم m بالای سطح شیب‌داری به طول l و زاویه شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک میان جسم و سطح μ_k است. جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. کار انجام شده برای جابجا کردن جسم را به اندازه l از دو راه محاسبه کنید:
 (الف)- از طریق محاسبه نیروهای وارد بر جسم؛
 (ب)- با به کار بردن قضیه کار و انرژی؛
 حل: (الف)-



(ب)-

$$W = \int F \cdot dx = \int_0^l dx = Fl$$

$$F = ma = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow w = F \cdot l = mg l (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

$$w = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$a = g \sin \theta - \mu g \cos \theta$$

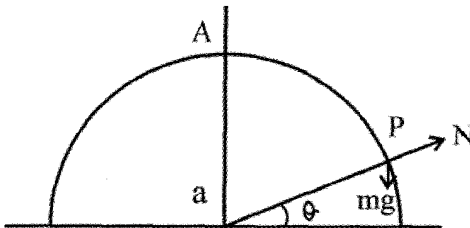
$$\Rightarrow v^2 = 2al = 2gl(\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = mgl(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

۲- ذره‌ای به جرم m در بالاترین نقطه روی نیمکره ثابت بدون اصطکاک با شعاع a قرار دارد. ذره با اندک انحراف بدون غلتش بر سطح کره می‌لغزد.

(الف)- در چه زاویه‌ای نسبت به وضع

افقی ذره نیمکره را ترک می‌کند؟



(ب)- سرعت ذره در این وضعیت چه مقدار است؟

(پ)- اگر اصطکاک وجود داشته باشد آیا ذره زودتر سطح را ترک می‌کند یا دیرتر. چرا؟

$$k_A + U_A = k_P + U_P$$

حل:

$$\circ + mga = \frac{1}{2}mv_p^2 + mg(a \sin \theta) = \frac{2}{3}ga(1 - \sin \theta)$$

$$mg \sin \theta - N = m \frac{v^2}{a}$$

در لحظه ترک کرده، $N = 0$ می‌شود. بنابراین:

$$mg \sin \theta = \frac{mv_p^2}{a} = \frac{m}{a} \times \frac{2}{3}ga(1 - \sin \theta)$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \sin \theta$$

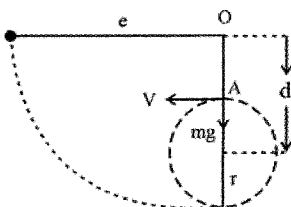
$$\sin \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{2}{3} \approx 42^\circ$$

$$v_p^2 \Big|_{\theta = \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}ga(1 - \sin \theta) \Big|_{\sin \theta = \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}ga(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}ga$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}ga}$$

با وجود اصطکاک جسم دیرتر کره را ترک می‌کند، زیرا سرعت هر لحظه کاهش می‌یابد و زمان بیشتری می‌خواهد تا به سرعت لازم برای ترک نیمکره برسد.

۳- گلوله‌ای به جرم m مطابق شکل از حالت افقی بدون سرعت اولیه رها می‌شود و مسیر خطچین را رد می‌کند. طول نخ l است و یک میخ به فاصله d در زیر نقطه آویز در دیوار کوبیده‌ایم. اگر قرار باشد گلوله به طور کامل بر دایره‌ای به مرکز میخ دوران کند نشان دهید حداقل $d = \frac{3}{5}l$ باشد.



$$\frac{mV_A^2}{r} = mg + T \quad \text{حل:}$$

در نقطه A هیچ کششی وجود ندارد، بنابراین $T \rightarrow 0$.

$$\begin{cases} mgl = 0 = mg \times \frac{1}{2}(l-d) + \frac{1}{2}mv_A^2 \\ \frac{mV^2}{l-d} = mg \Rightarrow v_A^2 = g(l-d) \end{cases}$$

$$mgl = \frac{1}{2}mg(l-d) + \frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mg(l-d) + \frac{1}{2}m(l-d)g$$

$$l = \frac{1}{2}(l-d) + \frac{1}{2}(l-d) = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}d$$

$$\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}l - l = -\frac{1}{2}l$$

$$d = \frac{1}{2}l = 0.5l$$

۴- جرم m با سرعت V_0 به فنری با ضریب سختی k برخورد می‌کند. در چه نقطه‌ای برای نخستین بار جسم متوقف می‌شود؟ از اصطکاک صرف‌نظر کنید.

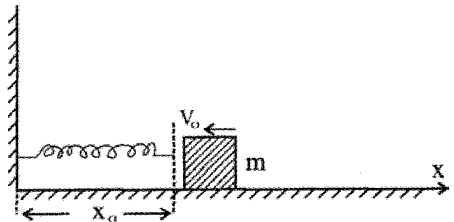
توضیح- شکل لحظه قبل از برخورد را نشان می‌دهد:

حل:

$$\frac{1}{2}kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{قضیه کار و انرژی:}$$

$$v_0^2 = \frac{k}{m}x^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}x, \quad x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

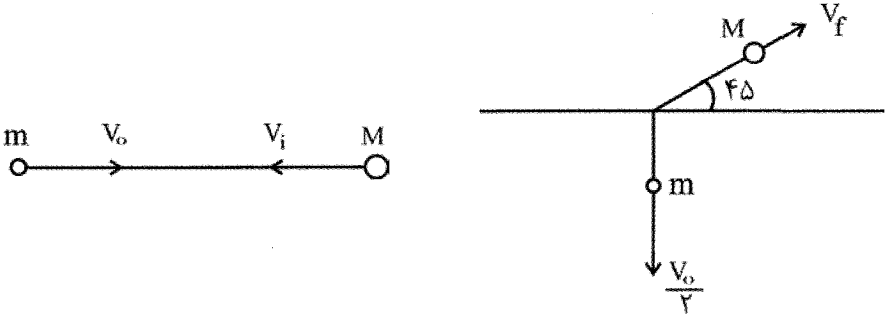


بنابراین، نقطه‌ای که جسم برای نخستین بار می‌ایستد چنین است:

$$x_0 - x = x_0 - v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

۵- ذره‌ای به جرم m و تندی V_0 به طور الاستیک با ذره دیگری به جرم M و سرعت V_i از

روبرو برخورد می‌کند. بعد از برخورد، m با تندی $\frac{V_0}{2}$ و در جهت عمود بر مسیر حرکت و M با زاویه 45° مطابق شکل پراکنده می‌شود. نسبت $\frac{m}{M}$ را حساب کنید.



$$\begin{cases} mV_0 - MV_i = MV_f \sin 45^\circ + 0 \\ 0 = MV_f \sin 45^\circ - \frac{mV_0}{2} \end{cases}$$

حل:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}MV_f^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2$$

$$\begin{cases} V_i = \frac{m}{M} \frac{V_0}{2} \\ V_f = \frac{m}{M} \frac{V_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$mV_0^2 + M\left(\frac{m}{M} \frac{V_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M} \frac{V_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{m}{M} = 3$$

۶- ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V = \frac{cx}{a^2 + x^2}$ حرکت می‌کند ($a, c > 0$). مکان

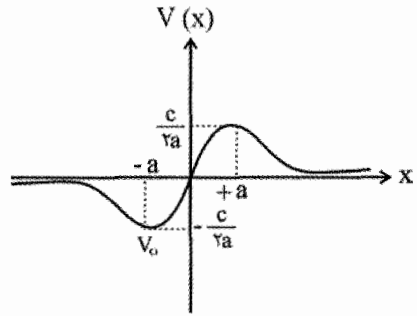
ترازندی پایدار ذره را با توجه به شکل بیابید. اگر ذره با سرعت V_0 از این نقطه حرکت کند، سرعت آن چقدر باشد تا نوسان نکند؟

حل:

$$V = \frac{cx}{a^\gamma + x^\gamma}; \quad \frac{dV}{dx} = \frac{c(a^\gamma - x^\gamma)}{(a^\gamma + x^\gamma)^\gamma}$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \rightarrow x = +a, x = -a$$

$$v(-a) = \frac{-ca}{a^\gamma + a^\gamma} = -\frac{c}{2a}$$



برای نوسان باید $-\frac{c}{2a} < E < 0$ باشد، در این صورت برای نوسان پیرامون نقطه ترازمندی پایدار

$x=-a$ داریم:

$$-\frac{c}{2a} < -\frac{c}{2a} + \frac{1}{2}mV^2 < 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}mV^2 < \frac{c}{2a} \Rightarrow mV^2 < \frac{c}{a} \Rightarrow V < \sqrt{\frac{c}{ma}}$$

$-V$ ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی $F_1 = -kx$ در محیطی که نیروی مقاومت به صورت $F_p = -bv$ است، حرکت می‌کند. معادله حرکت را بنویسید. این معادله را در حالت

حل کنید. اگر ذره در مبدأ زمان در $x=0$ دارای سرعت اولیه v_0 باشد، ضرایب $\sqrt{\frac{k}{m}} > \frac{b}{2m}$

جواب معادله حرکت را بر حسب v_0 به دست آورید.

حل:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$x = e^{rt} \rightarrow mr^2 + br + k = 0,$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \quad \frac{b}{2m} = \gamma, \quad r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} > \frac{b}{2m} \quad \omega_0 > \gamma \Rightarrow r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

$$x = e^{-\gamma t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [(c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \sin \omega t]:$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ c_1 - c_2 = \beta \end{cases}$$

$$x = e^{-\gamma t} (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{cases} x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{x} = v = -\gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) - \omega Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = A \cos \phi \\ v_0 = -\gamma A \cos \phi - \omega A \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = 0 \\ v_0 = \pm \omega A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = -\frac{\pi}{2} \\ A = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

۸- قایقی تحت اثر نیروی کنش موتور در دریاچه‌ای حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک از رابطه $F = -be^{av}$ ، $(a, b > 0)$ پیروی می‌کند. هنگامی که سرعت قایق v_0 است، موتور را خاموش می‌کنیم. معادله حرکت را بنویسید و سرعت قایق را بر حسب t به دست آورید. قایق بعد از گذشت چه زمانی خواهد ایستاد؟

حل:

$$m \ddot{x} = m \dot{v} = -be^{av}, \int_{v_0}^v e^{-av} dv = -\frac{b}{m} \int dt$$

$$-\frac{1}{a} (e^{-av} - e^{-av_0}) = -\frac{b}{m} t, e^{-av} = \frac{ab}{m} t + e^{-av_0}$$

$$v = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{ab}{m} t + e^{-av_0} \right)$$

$$v = 0 = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{ab}{m} t_s + e^{-av_0} \right), \frac{ab}{m} t_s + e^{-av_0} = 1, \Rightarrow t_s = \frac{m}{ab} (1 - e^{-av_0})$$

۹- ذره‌ای در $t=0$ با سرعت v_0 تحت اثر نیروی $F=kxV$ از مبدأ می‌گذرد. معادله حرکت را نوشته حل کنید و X را بر حسب زمان بیابید. صحت دیمانسیون ضرایب معادله x را بر حسب t بررسی کنید.

حل:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - kx \frac{dx}{dt} = 0, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{k}{2} \frac{d(x^2)}{dt} = 0$$

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{k}{2} \frac{d(x^2)}{dt}$$

$$v - v_0 = \frac{k}{2m} x^2, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{k}{2m} x^2 + v_0, \quad \frac{dx}{v_0 + \frac{k}{2m} x^2} = dt$$

$$\frac{dx}{v_0 \left(1 + \frac{k}{2mv_0} x^2 \right)} = dt, \quad u = \sqrt{\frac{k}{2mv_0}} x$$

$$\sqrt{\frac{2mv_0}{k}} \frac{du}{1+u^2} = dt \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m}{k}} \text{Arctg} \sqrt{\frac{k}{2mv_0}} x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mv_0}{k}} \text{tg} \sqrt{\frac{kv_0}{2m}} t$$

اگر معادله ابعادی دو طرف رابطه $F=kxv$ را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$MLT^{-2} = [K]LLT^{-1} \Rightarrow [K] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$\left[\sqrt{\frac{2mv_0}{k}} \right] = \sqrt{\frac{MLT^{-1}}{ML^{-1}T^{-1}}} = L, \quad \left[\sqrt{\frac{kv_0}{2m}} \right] = \sqrt{\frac{ML^{-1}T^{-1}LT^{-1}}{M}} = T^{-1}$$

چون عبارت tg بی‌بعد می‌باشد، لازم است دیمانسیون $\sqrt{\frac{kv}{2m}}$ عکس دیمانسیون t باشد و همچنین

ضریب tg باید دارای دیمانسیون x باشد.

۱۰- دو ذره همانند با فاصله زمانی t بدون سرعت اولیه در هوا رها می‌شود. اگر مقاومت هوا با v متناسب باشد؛ (الف) سرعت حد سقوط را به دست آورید. (ب) اگر این سرعت را v بنامیم، نشان دهید

که فاصله دو ذره به vt میل می‌کند.

$$m \frac{d^{\gamma} z}{dt^{\gamma}} = m \frac{dv}{dt} = mg - mgbv, \frac{d(1 - bv_1)}{g(1 - bv_1)} = -bdt, \quad \text{حل:}$$

$$\ln \frac{1 - bv_1}{1 - bv_0} = -bgt, (v_0 = 0) \Rightarrow 1 - bv_1 = e^{-bgt}, \quad v_1 = \frac{1}{b}(1 - e^{-bgt})$$

$$v_1 = \frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{b}(1 - e^{-bgt}), \quad z_1 = \frac{1}{b} \left(t + \frac{1}{bg} e^{-bgt} \right) + c$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b^{\gamma}g} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{b^{\gamma}g}, \quad z_1 = \frac{1}{b} \left(t + \frac{1}{bg} e^{-bgt} \right) - \frac{1}{b^{\gamma}g}$$

$$\frac{d(-bv_{\gamma})}{1 - bv_{\gamma}} = -bgdt, \ln \frac{1 - bv_{\gamma}}{1 - bv_0} = -bg(t - t_0), (v_0 = 0) \Rightarrow$$

$$v_{\gamma} = \frac{1}{b}(1 - e^{-bg(t-t_0)})$$

$$v_{\gamma} = \frac{dz_{\gamma}}{dt} = \frac{1}{b}(1 - e^{-bg(t-t_0)}), \quad z_{\gamma} = \frac{1}{b} \left(t + \frac{1}{bg} e^{-bg(t-t_0)} \right) + c$$

$$\begin{cases} t = t_0 \\ z_{\gamma} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} \left(t_0 + \frac{1}{bg} \right) + c = 0, c = -\frac{1}{b} t_0 - \frac{1}{b^{\gamma}g} \Rightarrow$$

$$z_{\gamma} = \frac{1}{b} \left(t + \frac{1}{bg} e^{-bg(t-t_0)} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{b} t_0 - \frac{1}{b^{\gamma}g} \quad v_{1,\gamma} = \frac{1}{b} = v_1, \quad t \rightarrow \infty$$

$$z_1 - z_{\gamma} = \frac{1}{bg} (e^{-bgt} - e^{-bg(t-t_0)}) + \frac{1}{b} t_0$$

$$\Rightarrow z_1 - z_{\gamma} = \frac{1}{b} t_0 = v_1 t_0; \quad t \rightarrow \infty$$

۱۱- جسمی به جرم m از حالت سکون در محیطی که نیروی اصطکاک $be^{\alpha|v|}$ را وارد می‌کند رها شده و سقوط می‌کند.

(الف)- سرعت $v(t)$ جسم را بیابید.

(ب)- سرعت نهایی چیست؟

(ج)- پاسخ خود را بر حسب t به سری توان بسط دهید و جمله‌های بالاتر از t را حذف کنید.

(د)- چرا پاسخ شما، حتی برای مدتی کوتاه، با معادله $v = v_0 - gt$ سازگار نیست؟

حل: در این مسئله علاوه بر نیروی وزن $-mg$ نیروی بازدارنده اصطکاک $be^{\alpha|v|}$ نیز اثر می‌کند.

$$be^{\alpha|v|} = 1 + \alpha|v| + \frac{\alpha^2|v|^2}{2!} + \dots$$

مطابق قرارداد موجود F باید دقیقاً در خلاف جهت تندی جسم باشد. F را باید به صورت $be^{-\alpha v}$

بنویسیم، زیرا v منفی است (جسم به پایین سقوط می‌کند). پس عبارت $e^{-\alpha v}$ را می‌نویسیم و علاوه بر آن $+b$ را وارد می‌کنیم. بهترین راه مقایسه متقابل بودن F و V در این است که مثلاً عبارت داده شده را بسط دهیم و جملات اولیه را بگیریم. اگر $V < 0$ باشد چون جمله بسط مثبت

می‌شود پس ضریب b مثبت می‌شود تا F دقیقاً در خلاف V باشد. اساساً $e^{-\alpha v} = \frac{1}{e^{\alpha v}}$ کاهشی

است پس نیروی اصطکاک را $F = +be^{-\alpha v}$ می‌نویسیم تا افزایشی باشد.

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + be^{-\alpha v}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{b}{m} e^{-\alpha v} - g} = \int_0^t dt = t \quad ; \quad \int_0^v \frac{\frac{(-g\alpha)}{b} e^{-\alpha v} dv}{\frac{b}{m} - ge^{\alpha v}} = t$$

$$-\frac{1}{g\alpha} \ln\left(\frac{b}{m} - ge^{\alpha v}\right) \Big|_0^v = t \quad ; \quad \ln \frac{\frac{b}{m} - ge^{\alpha v}}{\frac{b}{m} - g} = -g\alpha t$$

$$\frac{b}{m} - ge^{\alpha v} = \left(\frac{b}{m} - g\right) e^{-g\alpha t} \quad ; \quad ge^{\alpha v} = \frac{b}{m} - \left(\frac{b}{m} - g\right) e^{-g\alpha t}$$

برای سرعت حدی خواهیم داشت:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow ge^{\alpha v} = \frac{b}{m}$$

$$e^{\alpha v} = \frac{b}{mg}$$

$$v_\ell = \text{terminal Velocity} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{b}{mg}$$

توجه داریم که سرعت حدی موقعی به دست می‌آید که نیروی بازدارنده (مالشی) با نیروی وزن که در خلاف جهت هم هستند برابر گردد: یعنی:

$$mg = be^{-\alpha v} \Rightarrow -\alpha v_\ell = \ln \frac{mg}{b} \rightarrow v_\ell = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{b}{mg}$$

اکنون v را بسط می‌دهیم:

$$ge^{\alpha v} = \frac{b}{m} - \left(\frac{b}{m} - g\right) \left[1 - g\alpha t + \frac{(g\alpha t)^2}{2!} + \dots \right]$$

$$= \frac{b}{m} - \frac{b}{m} + g + \frac{b}{m} g\alpha t - g^2 \alpha t + \frac{g^2 \alpha^2 t^2}{2} - \frac{g^2 \alpha^2 t^2 b}{2m} + \dots$$

$$e^{\alpha v} = 1 + \frac{b}{m} \alpha t - g\alpha t + \frac{g^2 \alpha^2 t^2}{2} - \frac{g\alpha^2 b t^2}{2m} + \dots$$

به دلیل وجود مقاومت آنهم به صورت نمایی هیچگونه شباهتی با فرمول استاندارد بدون مقاومت $v = -gt$ وجود ندارد.

۱۲- ذره‌ای به جرم m توسط نیرویی دافعه که به طور معکوس با توان سوم فاصله ذره از مبدأ متناسب است، از مبدأ دور می‌شود. معادله حرکت را بنویسید و حل نمایید به شرطی که ذره در آغاز در فاصله x_0 از مبدأ ساکن باشد.

$$F(x) = \frac{k}{x^3} = m \ddot{x} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} \quad \text{حل:}$$

k ضریب مثبت است. چون نیرو دافعه است علامت مثبت داریم به طوری که با افزایش x مقدار F با توان دوم x کاهش می‌یابد.

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{k}{x^3} \Rightarrow m dv = F(x) dt \Rightarrow m v dv = F(x) v dt = F(x) dx$$

$$\int_{v_0}^v m v dv = \int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{k}{x^3} dx \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

$$v_0 = 0 ; \frac{1}{2} m v^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{k}{x^3} dx = k \left(-\frac{1}{2} x^{-2} + \frac{1}{2} x_0^{-2} \right)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{2} k \frac{x^2 - x_0^2}{x^2 x_0^2}$$

$$v^2 = \frac{k}{m x_0^2} \cdot \frac{x^2 - x_0^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m x_0^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^2 - x_0^2}{x^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2 - x_0^2}{x^2}}} = \sqrt{\frac{k}{m x_0^2}} dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2}} = \sqrt{\frac{k}{m x_0^2}} t$$

$$\left| \frac{x_0}{x} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x_0}{x} \right| = \sin \theta ; \begin{cases} x = x \rightarrow \theta = \theta \\ x = x_0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{تغییر متغیر می‌دهیم:}$$

$$-\frac{x_0}{x^r} dx = \cos \theta d\theta \Rightarrow$$

$$dx = -\frac{x^r \cos \theta}{x_0} d\theta = -\frac{x_0^r \cos \theta}{\sin^r \theta x_0} d\theta = -x_0 \frac{\cos \theta}{\sin^r \theta} d\theta$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^r}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^r \theta}} d\theta = -x_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^r \theta} = -x_0 (-\cot g \theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

$$= x_0 \cot g \theta$$

$$\sqrt{\frac{k}{mx_0^r}} t = x_0 \cot g \theta$$

$$\left(\frac{x_0}{x}\right) = \sin \theta \Rightarrow \cot g \theta = \frac{\cos^r \theta}{\sin^r \theta} = \frac{1}{\sin^r \theta} - 1 = \left(\frac{x}{x_0}\right)^r - 1$$

$$\cot g \theta = \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^r - 1 \right]^{1/r} ; \sqrt{\frac{k}{mx_0^r}} t = x_0 \cot g \theta = x_0 \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^r - 1 \right]^{1/r}$$

$$\frac{k}{mx_0^r} t^r = x_0^r \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^r - 1 \right] ; \frac{kt^r}{mx_0^r} + 1 = \left(\frac{x}{x_0}\right)^r$$

$$x^r = x_0^r + \frac{kt^r}{mx_0^r} ; x = \left[x_0^r + \frac{kt^r}{mx_0^r} \right]^{1/r}$$

۱۳- سرعت ذره‌ای در یک میدان نیرو به صورت $V = \frac{b}{x}$ ($b > 0$) است. نیروی وارد بر ذره و انرژی پتانسیل آن را به صورت توابعی از x به دست آورید. نوع نیرو را مشخص کنید و با رسم انرژی پتانسیل چگونگی حرکت ذره را بحث کنید. انرژی کل ذره را به دست آورید و از روش انرژی کمک گرفته و مسیر حرکت را بیابید. آیا روش ساده‌تری برای یافتن معادله مسیر پیشنهاد می‌کنید؟

حل: $V = +\frac{b}{x}$, $b > 0 \Rightarrow V = -\frac{b}{x^2} \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{x^2} V$

$$F = m\ddot{x} = m\dot{V} = -m \frac{b}{x^2} V = -m \frac{b}{x^2} \left(\frac{b}{x}\right) = -\frac{mb^2}{x^3}$$

$$V = -\int_{x_s}^x F dx = mb^2 \int_{x_s}^x \frac{dx}{x^3} = mb^2 \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{x_s}^x = -\frac{mb^2}{2x^2}$$

$$V(x_s) = 0$$

نیرو از نوع جاذبه است.

$$E = \frac{1}{2} mV^2 + V(x) = \frac{1}{2} m \left(\frac{b}{x}\right)^2 + \left(\frac{-mb^2}{2x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{b^2}{x^2} - \frac{mb^2}{2x^2} = 0$$

انرژی کل ذره $E = 0$ است. همانگونه که منحنی نشان می‌دهد پتانسیل در بینهایت صفر است و در صفر به بینهایت می‌رسد. پس بینهایت، نقطه بازگشت است و در صفر نیرو به بینهایت می‌رسد. معنای این نکات در این است که جسم اگر در بینهایت باشد به علت جاذبه برمی‌گردد. اما:

$$\int \frac{dx}{[E - V(x)]^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \Rightarrow \int \frac{dx}{\left[0 + \frac{mb^2}{2x^2}\right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$$\int \sqrt{\frac{2}{m} \frac{x}{b}} dx = \sqrt{\frac{2}{m}} t \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m} \frac{x^2}{2b}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t + c$$

و اگر در $t = 0$ جسم در مبدأ باشد ضریب $C = 0$ می شود پس:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \frac{x^2}{2b} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \Rightarrow x^2 = 2bt$$

در روش ساده تر خواهیم داشت:

$$V = \frac{b}{x} = \frac{dx}{dt}, \quad x dx = b dt \Rightarrow \frac{1}{2} x^2 = bt + c$$

با فرض $x = 0, t = 0$ خواهیم داشت $C = 0$ و بنابراین:

$$x^2 = 2bt$$

۱۴- ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی F قرار دارد که از پتانسیل $V = ax^2 - bx^3$ مشتق می شود ($a, b > 0$). (الف-) نیروی F را به دست آورید. (ب-) معادله حرکت را برای سرعت بنویسید و با شرایط اولیه $v = v_0, x = 0$ آن را به صورت تابعی از x حل کنید. (پ-) نشان دهید که تنها برای $|v_0| < v_c$ (که در آن v_c مقدار بحرانی معینی است)، ذره می تواند در ناحیه ای اطراف مبدأ حرکت کند. v_c را بیابید.

$$V = ax^2 - bx^3 \rightarrow V = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{a}{b} \quad \text{حل:}$$

$$F = -\frac{dV}{dx} = -2ax + 3bx^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{2a}{3b}$$

$$V\left(\frac{2a}{3b}\right) = a \frac{4a^2}{9b^2} - b \frac{8a^3}{27b^3} = \frac{12a^3 - 8a^3}{27b^2} = \frac{4a^3}{27b^2}$$

$$m\ddot{x} = m\dot{v} = -2ax + 3bx^2, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$mv \frac{dv}{dx} = -2ax + 3bx^2, \quad m \int_{v_0}^v v dv = \int_0^x (-2ax + 3bx^2) dx$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = ax^2 - bx^3, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + ax^2 - bx^3 = E; \quad ax^2 - bx^3 = V$$

اگر $E = \frac{4a^2}{2\gamma b^2}$ باشد، $v = 0$ و $v_c^2 = v_o^2 = \frac{\lambda a^3}{2\gamma m b^2}$ است. برای v_o بیش از این مقدار ذره می‌تواند به بینهایت برود و برای v_o کمتر از این مقدار ذره اطراف مبدأ دارای حرکت رفت و آمدی است.

$$v_c = \frac{2a\sqrt{2a}}{2b\sqrt{2m}}$$

۱۵- ذره‌ای که در ابتدا سرعت v_o داشت، تحت تأثیر نیروی وارد شده به وسیله معادله:

$$F(t) = \frac{p_o \delta t}{\pi} \frac{1}{(t - t_o)^2 + (\delta t)^2} ; \quad -\infty < t < \infty$$

قرار می‌گیرد: (الف) $x(t), v(t)$ را بیابید. (ب) نشان دهید که وقتی $\delta t \rightarrow 0$ ، حرکت ذره به

حرکتی یکنواخت که سرعت آن در لحظه $t = t_o$ به طور ناگهانی به میزان $\frac{p_o}{m}$ تغییر کرده است

میل می‌کند.

حل:

$$F(t) = \frac{p_o \delta t}{\pi} \frac{1}{(t - t_o)^2 + (\delta t)^2} ; \quad -\infty < t < \infty$$

$$v = v_o + \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t F(t) dt = v_o + \frac{1}{m} \frac{p_o \delta t}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{dt}{(t - t_o)^2 + (\delta t)^2}$$

$$t - t_o = \delta t \operatorname{tg} \theta \Rightarrow d\theta = \delta t (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta$$

$$\begin{cases} t = t \rightarrow \theta = \theta \\ t = -\infty \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\delta t (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta}{\delta t^2 \operatorname{tg}^2 \theta + \delta t^2} = \frac{1}{\delta t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta = \frac{1}{\delta t} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\delta t} \left[\operatorname{arctg} \frac{t - t_o}{\delta t} + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$v = v_o + \frac{p_o}{\pi m} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{t - t_o}{\delta t} \right]$$

$$\delta t \rightarrow 0 \Rightarrow v \approx v_0 + \frac{p_0}{m} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow x = \left(v_0 + \frac{p_0}{m} t \right) + x_0$$

حرکت با تندی ثابت است. تغییر تندی عبارت است از $\frac{p_0}{m}$ که به طور ناگهانی ظاهر می‌شود:

$$v - v_0 = \frac{p_0}{m}$$

در لحظه $(\delta t \rightarrow 0)$ $t = t_0$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{p_0}{\pi m t_0} \int_{t_0}^t \left[\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{t - t_0}{\delta t} \right] dt$$

$$= v_0(t - t_0) + \frac{p_0}{2m}(t - t_0) + \frac{p_0}{\pi m t_0} \int_{t_0}^t \text{arctg} \frac{t - t_0}{\delta t} dt$$

$$\frac{t - t_0}{\delta t} = \alpha \Rightarrow dt = \delta t d\alpha, \begin{cases} t = t_0 \\ t = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \alpha \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^t \text{arctg} \frac{t - t_0}{\delta t} dt = \int_0^\alpha \delta t \text{arctg} \alpha d\alpha = \delta t \int_0^\alpha \text{arctg} \alpha d\alpha$$

$$\begin{cases} \text{arctg} \alpha = u \\ d\alpha = du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha^2} d\alpha = du \\ \alpha = u \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^\alpha \text{arctg} \alpha d\alpha = \alpha \text{arctg} \alpha \Big|_0^\alpha = \alpha \text{arctg} \alpha - \int_0^\alpha \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} d\alpha$$

$$= \alpha \text{arctg} \alpha - \frac{1}{2} \ln(1 + \alpha^2) \Big|_0^\alpha = \alpha \text{arctg} \alpha - \frac{1}{2} \ln(1 + \alpha^2)$$

$$= \frac{t - t_0}{\delta t} \text{arctg} \frac{t - t_0}{\delta t} - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{t - t_0}{\delta t} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow x = \left(v_0 + \frac{p_0}{\gamma m} \right) (t - t_0) + \frac{p_0}{\pi m} \delta t \left\{ \frac{t - t_0}{\delta t} \operatorname{arctg} \frac{t - t_0}{\delta t} - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{t - t_0}{\delta t} \right)^2 \right] \right\}$$

$$= \left(v_0 + \frac{p_0}{\gamma m} \right) (t - t_0) + \frac{p_0}{\pi m} (t - t_0) \operatorname{arctg} \frac{t - t_0}{\delta t} - \frac{p_0 \delta t}{2 \pi m} \ln \left[1 + \left(\frac{t - t_0}{\delta t} \right)^2 \right]$$

در لحظه $X_0 = 0, t = t_0$ انتخاب شده است.

۱۶- حرکت قایقی با سرعت اولیه v تحت تأثیر نیروی اصطکاک $F = -be^{\alpha v}$ کند می‌شود.
(الف) - معادله حرکت آن را بیابید. (ب) - زمان و مسافت لازم برای توقف را پیدا کنید.

حل: در حل این مسئله مطالب بخش ۲-۴ کتاب سایمون در مورد نیروی میرای وابسته به سرعت به کار می‌آید.

$$F = -be^{\alpha v} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -be^{\alpha v}$$

$$dv = -\frac{b}{m} e^{\alpha v} dt \Rightarrow \frac{dv}{e^{\alpha v}} = -\frac{b}{m} dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{e^{\alpha v}} = -\frac{b}{m} \int_{t_0}^t dt \Rightarrow \int_{v_0}^v e^{-\alpha v} dv = -\frac{b}{m} t$$

$$-\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha v} - e^{-\alpha v_0}) = -\frac{b}{m} t \Rightarrow (e^{-\alpha v} - e^{-\alpha v_0}) = \frac{\alpha b t}{m}$$

$$e^{-\alpha v} = \frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha v_0}$$

$$-\alpha v = \ln \left(\frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha v_0} \right) \Rightarrow v = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha b t}{m} + e^{-\alpha v_0} \right)$$

$$e^{-\alpha v} - e^{-\alpha v_0} = \frac{\alpha b}{m} t \Rightarrow \frac{m(e^{\alpha v} - e^{-\alpha v_0})}{\alpha b} = t$$

$$v = 0 \Rightarrow t_s = \frac{m(1 - e^{-\alpha v_0})}{\alpha b}$$

$$v = -\frac{\gamma}{\alpha} \ln\left[\frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha V_0}\right] \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha V_0}\right)$$

$$\int_0^x dx = -\frac{\gamma}{\alpha} \int_0^t \ln\left(\frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha V_0}\right) dt ; e^{-\alpha V_0} + \frac{\alpha b}{m} t = u \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha b}{m} dt = du \Rightarrow dt = \frac{m}{\alpha b} du$$

$$x = -\frac{\gamma}{\alpha} \int_{-e^{-\alpha V_0}}^{\frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha V_0}} \ln u \times \frac{m}{\alpha b} du$$

$$x = -\frac{m}{\alpha \gamma b} \int \ln u du = -\frac{m}{\alpha \gamma b} \left[u \ln u - u \right]_{e^{-\alpha V_0}}^{\frac{\alpha b}{m} t + e^{-\alpha V_0}}$$

$$x = -\frac{m}{\alpha \gamma b} \left[\left(e^{-\alpha v_0} + \frac{\alpha b}{m} t \right) \ln \left(e^{-\alpha v_0} + \frac{\alpha b}{m} t \right) - 1 \right] - e^{-\alpha v_0} \left[\ln e^{-\alpha v_0} - 1 \right]$$

$$x_s = -\frac{m}{\alpha \gamma b} \left\{ \left[e^{-\alpha v_0} + \frac{\alpha b}{m} \left(\frac{m}{\alpha b} (1 - e^{-\alpha v_0}) \right) \right] \right. \\ \left. \left[\ln(e^{-\alpha v_0} [\ln e^{-\alpha v_0} - 1]) - e^{-\alpha v_0} [\ln e^{-\alpha v_0} - 1] \right] \right\}$$

$$x_s = \frac{m}{\alpha \gamma b} \left\{ \left[e^{-\alpha v_0} + (1 - e^{-\alpha v_0}) \right] \ln \left[e^{-\alpha v_0} + (1 - e^{-\alpha v_0}) - 1 \right] \right. \\ \left. - e^{-\alpha v_0} \left[\ln e^{-\alpha v_0} - 1 \right] \right\}$$

$$x_s = -\frac{m}{\alpha \gamma b} \left[1 - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0} + e^{-\alpha v_0} \right]$$

$$x_s = \frac{m}{\alpha^2 b} \left[1 - e^{-\alpha v_0} - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0} \right]$$

۱۷- موتور جتی با نیروی پیشران حداکثر ثابت F_0 می‌تواند به هواپیمایی قدرتی بدهد که موجب ایجاد اصطکاکای کششی متناسب با مربع سرعت بشود. اگر هواپیما در لحظه $t=0$ با سرعت ناچیزی شروع به حرکت کند و با حداکثر نیروی پیشران شتاب یابد، سرعت $v(t)$ آن را بیابید.

حل: از مطالب ۲-۴ کتاب سایمون کمک می‌گیریم. معادله دیفرانسیل با طرف ثانی است.

$$F_0 = \text{maximum force} \quad , \quad t = 0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$F(v) = -kv^2$$

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 - kv^2 \Rightarrow \frac{mdv}{F_0 - kv^2} = dt \Rightarrow \int_{v_0=0}^v \frac{dv}{\frac{F_0}{k} - v^2} = \frac{k}{m} (t - t_0)$$

بنابر مطالب بخش ۲-۶ کتاب سایمون:

$$\int \frac{dv}{\frac{F_0}{k} - v^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{F_0}{k}}} \operatorname{arctgh} \frac{v}{\sqrt{\frac{F_0}{k}}} \quad ; \quad \left(\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctgh} \frac{u}{a} + c \right)$$

$$\frac{k}{m} (t - t_0) = \sqrt{\frac{k}{F_0}} \operatorname{arctgh} \sqrt{\frac{k}{F_0}} v$$

$$\operatorname{arctgh} \sqrt{\frac{k}{F_0}} v = \sqrt{\frac{F_0}{k}} \frac{k}{m} t = \frac{\sqrt{F_0 k}}{m} t \rightarrow \sqrt{\frac{k}{F_0}} v = \operatorname{tgh} \frac{\sqrt{F_0 k}}{m} t$$

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{k}} \operatorname{tgh} \frac{\sqrt{F_0 k}}{m} t$$

۱۸- ذره‌ای به جرم m که در $x_0 = 0$ با سرعت v_0 شروع به حرکت می‌کند تحت تأثیر نیرویی

که به وسیله معادله $F = \pm bv^n$ با $n \neq 1$ داده می‌شود، قرار می‌گیرد. $v(t)$ ، $x(t)$ را پیدا کنید. زمان و مسافت لازم برای توقف را بیابید و صحت تذکرهاى بند آخر بخش (۲-۴) کتاب سایمون،

یعنی $p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$ را تحقیق کنید.

حل: $t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0, v = v_0$

$$F = \mp bv^n, n \neq 1$$

اگر n عدد فرد باشد علامت منفی انتخاب می‌شود و در صورت مثبت بودن n علامت طوری انتخاب می‌شود که علامت نیرو و تندی v مخالف هم باشد. نیروی مالش همیشه مخالف تندی است و بنابراین کار منفی انجام می‌دهد.

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) = \mp bv^n$$

$$\frac{dv}{v^n} = -\frac{b}{m} dt \Rightarrow \frac{1}{-n+1} v^{1-n} \Big|_{v_0}^v = -\frac{b}{m} (t - t_0), t_0 = 0$$

مسئله را با فرض n فرد حل می‌کنیم چرا که در هر حال F را مخالف جهت v فرض می‌کنیم.

$$\frac{1}{1-n} (v^{1-n} - v_0^{1-n}) = -\frac{b}{m} t \Rightarrow v = \left[v_0^{1-n} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

$$v = 0 \Rightarrow t_s = \frac{m}{b} \frac{1}{1-n} v_0^{(1-n)}, n < 1$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \left[v_0^{1-n} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow dx = \left[v_0^{(1-n)} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{1}{1-n}} dt$$

$$x = \left(-\frac{1}{(1-n) \frac{b}{m}} \right) \left(-\frac{1}{\frac{1}{1-n} + 1} \right) \left[v_0^{(1-n)} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{1}{1-n} + 1} + c$$

$$= -\frac{m}{b} \frac{1}{\gamma - n} \frac{1 - n}{\gamma n} \left[v_0^{(1-n)} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{\gamma-n}{1-n}} + c$$

$$x = -\frac{m}{b} \frac{1}{\gamma - n} \left[v_0^{1-n} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{\gamma-n}{1-n}} + c$$

$$t = 0 \Rightarrow x = x_0 = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{m}{b} \frac{1}{\gamma - n} v_0^{\gamma-n} + c \Rightarrow c = \frac{m}{b} \frac{1}{\gamma - n} v_0^{\gamma-n}$$

$$x = -\frac{m}{b} \frac{1}{\gamma - n} \left[v_0^{(1-n)} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{\gamma-n}{1-n}} + \frac{m}{b} \frac{1}{\gamma - n} v_0^{\gamma-n}$$

$$x = \frac{m}{(\gamma - n)b} \left\{ v_0^{\gamma-n} - \left[v_0^{(1-n)} - (1-n) \frac{b}{m} t \right]^{\frac{\gamma-n}{1-n}} \right\}$$

$$x_s = \frac{m}{(\gamma - n)b} \left\{ v_0^{\gamma-n} - \left[v_0^{(1-n)} - (1-n) \frac{b}{m} m v_0^{(1-n)} \frac{1}{(1-n)b} \right]^{\frac{\gamma-n}{1-n}} \right\}$$

$$x = \frac{m v_0^{\gamma-n}}{(\gamma - n)b} ; \quad n < \gamma$$

مطالب بخش (۲-۴) کتاب سایمون با حل این مسئله تأیید می‌شود. وقتی n بزرگ است نخست سرعت جسم سریعاً کاهش می‌یابد و در انتها این آهنگ کند می‌شود. برای مقادیر کوچک n ، سرعت در زمانی محدود به صفر می‌رسد، چنانچه در این مسئله مشاهده شد. اگر در رابطه t_s مقدار n خیلی بزرگ می‌شد عملاً زمان و مکان نامحدودی لازم بود تا جسم کاملاً متوقف شود.

۱۹- انرژی پتانسیل برای نیروی بین دو اتم در یک مولکول دو اتمی تقریباً به صورت زیر است:

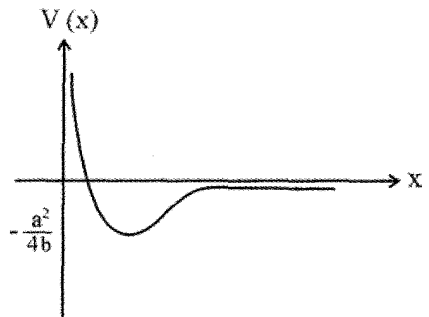
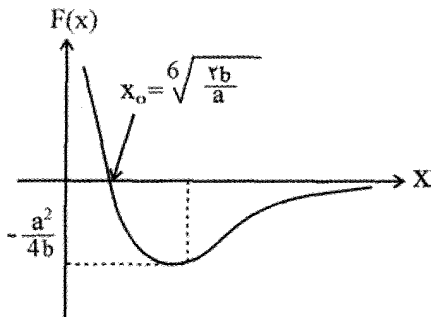
$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

که در آن x فاصله بین دو اتم و a, b ثابت‌هایی مثبت‌اند. (الف) - تابع نیرو را پیدا کنید. (ب) - با فرض آنکه یکی از اتم‌ها خیلی سنگین باشد و ساکن باقی بماند و اتم دیگر سبک باشد و در امتداد خطی مستقیم حرکت کند، حرکات ممکن را توصیف کنید. (پ) - اگر جرم اتم سبکتر m باشد، فاصله تعادل و زمان تناوب نوسان‌های کوچک حول نقطه تعادل را به دست آورید.

حل:

انرژی پتانسیل میان دو اتم یک مولکول دو اتمی همچون مولکول هیدروژن به شکل تقریبی زیر است:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$



قسمت اول این مسئله در فصل ۸ کتاب هالیدی آمده است این، فرمول Lenard-Jones است. x فاصله میان اتم‌ها و a, b ثابت‌های مثبت هستند. در شکل، $F(x), V(x)$ نشان داده شده است.

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}}$$

(ب) - با توجه به مطالب فصل دوم کتاب سایمون، ثابت می‌شود که هرگاه $V(x)$ دارای یک یا چند می‌نیم باشد حرکت ذره برای نوسان‌های کوچک در دو سوی نقطه می‌نیم از معادله نوسانگر هارمونیک ساده پیروی می‌کند. اساساً حرکت بالا نوعی نوسان ساده است زیرا با دقت در عبارت

$F(x)$ می‌بینیم وقتی $x \rightarrow 0$ داریم $\frac{12b}{x^{13}} \ll -\frac{6a}{x^7}$ و در نتیجه $F \approx 12bx^{-13}$ و با توجه به

ضریب مثبت $12b$ نیرو از نوع نیروی دافعه می‌شود و بالعکس در $x \rightarrow \infty$ داریم

$\frac{12b}{x^{13}} \ll -\frac{6a}{x^7}$ و $F \approx -6ax^{-7}$ و از ضریب منفی $-6a$ در می‌یابیم که نیرو در این حالت

جاذبه می‌شود. پس ذره سبکتر حول نقطه ترازمندی (یعنی نقطه‌ای که در آن $F(x) = 0$ است)

نوسان می‌کند. به طور خلاصه به مراجعه به شکل $F(x)$ ، از $x=0$ تا $x = \sqrt[6]{\frac{12b}{a}}$ یعنی ناحیه‌ای که

$F(x)$ مثبت است دو اتم یکدیگر را دفع می‌کنند. (نیرو در جهت افزایش دادن x است). وقتی نیرو

منفی است یعنی در ناحیه واقع بین $x = \sqrt[6]{\frac{12b}{a}}$ تا بی‌نهایت، اتم‌ها یکدیگر را جذب می‌کنند. (نیرو

در جهت کاهش دادن x است). در نقطه $x = \sqrt[6]{\frac{12b}{a}}$ نیرو صفر است و نقطه ترازمندی ناپایدار

است.

(پ) - نقطه ترازمندی پایدار را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$F(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{12b}{x_0^{13}} - \frac{6a}{x_0^7} = 0 \Rightarrow x_0^{-13} (12b - 6ax_0^6) = 0 \Rightarrow x_0 = \left(\frac{12b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$$

با فرض جرم m برای ذره سبکتر و فرض نوسان‌های کوچک به دور نقطه ترازمندی می‌توان T دوره

تناوب را به دست آورد:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, k = \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}; V(x) = -ax^{-6} + bx^{-13}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = 6ax^{-7} - 13bx^{-14}$$

$$k = \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = -\gamma \gamma a x^{-\gamma} + (\gamma \gamma)(\gamma \gamma) b x^{-\gamma \gamma} \Big|_{x=x_0} = \left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{\gamma \gamma}$$

$$k = -\gamma \gamma a \left[\left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{\gamma \gamma} \right]^{-\gamma} + (\gamma \gamma)(\gamma \gamma) b \left[\left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{\gamma \gamma} \right]^{-\gamma \gamma}$$

$$= -\gamma \gamma a \left[\left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{\gamma \gamma} \right]^{-\gamma} + \gamma \gamma \gamma b \left[\left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{\gamma \gamma} \right]^{-\gamma \gamma}$$

$$= \gamma \left[\left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{\gamma \gamma} \right]^{-\gamma \gamma} \left[-\gamma \gamma a \left(\frac{\gamma b}{a} \right) + \gamma \gamma \gamma b \right] = \gamma \left(\frac{\gamma b}{a} \right)^{-\gamma \gamma} (\gamma \gamma b) = \gamma \gamma \left(\frac{\gamma a^\gamma}{b^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\gamma}{m^{\gamma \gamma}} \left(\frac{\gamma a^\gamma}{b^\gamma} \right)^{\gamma \gamma} = \gamma \left(\frac{\gamma a^\gamma}{m^\gamma b^\gamma} \right)^{\gamma \gamma}$$

$$T = \frac{\gamma \pi}{\omega} = \frac{\gamma \pi}{\gamma \left(\frac{\gamma a^\gamma}{m^\gamma b^\gamma} \right)^{\gamma \gamma}} = \frac{\gamma \pi}{\gamma} \left(\frac{m^\gamma b^\gamma}{\gamma a^\gamma} \right)^{\gamma \gamma}$$

۲۰- نیروی $F_0(1 - e^{-at})$ بر نوسانگر هارمونیک وارد می‌شود که در لحظه $t=0$ ساکن است.

جرم نوسانگر m و ضریب ثابت فنر $k = \gamma m a^\gamma$ و $b = m a$ است. معادله حرکت را بیابید و $x(t)$ را

رسم کنید.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0(1 - e^{-at})$$

حل:

$$\begin{cases} k = \gamma m^\gamma \\ b = m a \end{cases} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma m a^\gamma}{m}} = \gamma a$$

حالت کمین میرا است، زیرا:

$$\gamma = \frac{b}{\gamma m} = \frac{ma}{\gamma m} = \frac{a}{\gamma} ; \omega_0 > \gamma$$

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\gamma a^2 - \frac{a^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma \delta a^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\gamma} \sqrt{\gamma \delta}$$

$$x_1 = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

جواب عمومی بدون طرف ثانی

$$X = A + Be^{-at}$$

جواب خصوصی با طرف ثانی

$$\dot{X} = -aBe^{-at} \Rightarrow \ddot{X} = a^2 Be^{-at}$$

$$ma^2 Be^{-at} - baBe^{-at} + kA + kB e^{-at} = F_0(1 - e^{-at})$$

$$\left\{ \begin{aligned} F_0 = kA &\Rightarrow A = F_0 / K \\ -F_0 = ma^2 B - baB + kB &\Rightarrow B(ma^2 - ma^2 + \gamma ma^2) = -F_0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} F_0 = kA &\Rightarrow A = F_0 / K \\ -F_0 = ma^2 B - baB + kB &\Rightarrow B(ma^2 - ma^2 + \gamma ma^2) = -F_0 \end{aligned} \right.$$

$$B = -\frac{F_0}{\gamma ma^2}$$

$$X = \frac{F_0}{\gamma ma^2} - \frac{F_0}{\gamma ma^2} e^{-at}$$

جواب عمومی مسئله

$$x = x_1 + X = Ae^{-\frac{a}{\gamma} t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0}{\gamma ma^2} (1 - e^{-at})$$

$$v \approx -\frac{a}{\gamma} Ae^{-\frac{a}{\gamma} t} \cos(\omega_1 t + \theta) - \omega_1 Ae^{-\frac{a}{\gamma} t} \sin(\omega_1 t + \theta) + \frac{F_0}{\gamma ma} e^{-at}$$

$$t = 0 \left\{ \begin{aligned} x_0 = 0 = A \cos \theta &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ v_0 = 0 = -\frac{a}{\gamma} A \cos \theta - \omega_1 A \sin \theta + \frac{F_0}{\gamma ma} &\Rightarrow A = \frac{F_0}{\gamma ma \omega_1} \end{aligned} \right.$$

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{m a \omega_1}} e^{-\frac{a}{\gamma} t} \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{\gamma}\right) + \frac{F_0}{\sqrt{m a \gamma}} \left(1 - e^{-at}\right)$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{m a \gamma}} \left[1 - e^{-at} - \frac{a}{\omega_1} e^{-\frac{a}{\gamma} t} \sin \omega_1 t \right], \omega_1 = \frac{a}{\gamma} \sqrt{1 - \delta}$$

۲۱- نوسانگر هارمونیک نامیرایی به جرم m و فرکانس طبیعی ω_0 در ابتدا ساکن است و در لحظه $t=0$ ضربتی به آن وارد می‌شود چنان که از $x_0 = 0$ با سرعت اولیه V_0 شروع و به حرکت و تا $t = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ به آزادی نوسان می‌کند. از این لحظه به بعد، نیروی $F = B \cos \theta(\omega t + \theta)$ اثر می‌کند. معادله حرکت را بیابید.

حل:

نوسانگر هارمونیک نامیرا

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = v_0 \neq 0 \end{cases}$$

$$x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad \text{یا} \quad x = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t$$

این معادله حرکت در فاصله زمانی $\left[0, \frac{3\pi}{2\omega_0}\right]$ معتبر است و پس از آن نیروی

$F = B \cos(\omega t + \theta)$ بر ذره وارد می‌شود و حرکت بعدی ادامه حرکت نوسانگر است که به آن ضربه زده‌ایم و اکنون تحت تأثیر نیرویی جدید نیز قرار گرفته است. نخست حرکت مرحله اول را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = A \cos(\omega_0 t + \theta) \\ v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 = A \cos \theta \\ v_0 = v_0 = -A \omega_0 \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, A = -\frac{v_0}{\omega_0 \sin \theta} = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

پس حرکت در فاصله زمانی اول چنین است:

$$x_1 = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

در مرحله دوم معادله حرکت چنین است:

$$m\ddot{x} + kx = B \cos(\omega t + \theta)$$

$$m\ddot{x} + kx = B e^{i\omega t} = B e^{i\theta} e^{i\omega t} = B e^{i(\omega t + \theta)} \quad ; \quad t \geq \frac{3\pi}{2\omega_0} \quad (1)$$

پاسخ خصوصی معادله بالا را به صورت زیر فرض می‌کنیم،

$$x = x_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x} = x_0 i\omega e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{x} = -x_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$-m\omega_0^2 x_0 e^{i\omega t} + kx_0 e^{i\omega t} = B e^{i\theta} e^{i\omega t}$$

$$B = (-m\omega^2 + k)x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{B}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{B}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x = x_0 e^{i\omega t} = \frac{\frac{B}{m} e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{B}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i(\omega t + \theta)}$$

بنابراین پاسخ معادله اصلی قسمت حقیقی پاسخ بالا است.

$$x = \text{Re}(x) = \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta) \quad ; \quad \text{پاسخ خصوصی معادله با طرف ثانی؛}$$

اکنون پاسخ عمومی معادله $m\ddot{x} + kx = 0$ را در مرحله دوم (یعنی $t \geq \frac{3\pi}{2\omega_0}$) جستجو می‌کنیم.

این پاسخ چنین است:

$$x = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t$$

جمله اول از لحظه صفر تا $t = \frac{2\pi}{3\omega_0}$ نتیجه قسمت اول حرکت است که نوسان ساده نامیراست و

در مرحله دوم در حکم مسافت اولیه است. جمله دوم پاسخ عمومی معادله $m\ddot{x} + kx = 0$ است

که به هر حال از لحظه $t = \frac{2\pi}{3\omega_0}$ به بعد نیز همچنان وجود دارد و فرکانس آن نیز همان

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است. (به شکل معادله مراجعه شود). پس پاسخ عمومی معادله (۱) چنین است:

$$x_2 = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t + \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta)$$

اکنون به کمک شرایط اولیه ضرایب B_1, B_2 را به دست می‌آوریم. در لحظه $t = \frac{2\pi}{3\omega_0}$ سرعت

دو معادله حرکت یکسان است، زیرا در این لحظه معادله دوم، x_2 ادامه همان ضربه اولیه است که

از $V_0 = V_0, X_0 = 0$ شروع به حرکت کرده است. همچنین در این لحظه $x_1 = x_2$ است. به

طور کلی این دو شرط ناشی از شرط پیوستگی تابع و مشتق اول آن در نقطه مرزی $t = \frac{2\pi}{3\omega_0}$

است و این شرط از نظر فیزیکی بلامعارض است.

$$\begin{cases} v_1 = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = v_0 \cos \omega_0 t \\ v_2 = v_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

$$t = \frac{2\pi}{3\omega_0} \rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{v_0}{\omega_0} \sin \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + B_1 \cos \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + B_2 \sin \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \left(\frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + \theta \right)$$

$$\Rightarrow -B_2 + \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \alpha = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \alpha$$

که در آن فرض کرده‌ایم $\alpha = \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + \theta$. شرط پیوستگی سرعت‌ها چنین است:

$$t = \frac{\gamma \pi}{2\omega_0} \Rightarrow v_1 = v_2$$

$$v_0 \cos \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} = v_0 \cos \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} - \omega_0 B_1 \sin \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + B_2 \omega_0 \cos \frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} -$$

$$\frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \sin \left(\frac{\gamma \pi \omega_0}{2\omega_0} + \theta \right)$$

$$\omega B_1 - \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \sin \alpha = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \sin \alpha$$

بنابراین:

$$x_2 = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \alpha \sin \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \alpha \cos \omega_0 t +$$

$$\frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \theta)$$

$$x_2 = \frac{B/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[\cos(\omega t + \theta) + \cos \alpha \sin \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \alpha \cos \omega_0 t \right]$$

$$+ \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad ; \quad t \geq \frac{\gamma \pi}{2\omega_0}$$

۲۲- نوسانگر هارمونیک نامیرای ($\gamma = 0$) ساکنی تحت تأثیر نیرویی قرار می‌گیرد که به وسیله

معادله زیر داده شده است:

$$F(t) = \frac{p_0}{\delta t \sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{(\delta t)^2}\right], \quad -\infty < t < \infty$$

(الف) $x(t)$ را پیدا کنید. (ب) اگر p_0 ثابت باشد، برای چه مقدار δt دامنه نهایی نوسان بزرگترین مقدار را خواهد داشت؟ (پ) نشان دهید که اگر $\delta t \rightarrow 0$ میل کند، پاسخ شما به رابطه زیر میل می‌کند:

$$x = \begin{cases} 0 & t \leq t_0 \\ \frac{p_0}{m\omega} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\omega_0(t-t_0)] & t > t_0 \end{cases}$$

حل:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ p_0 / \delta t & t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t \\ 0 & t > t_0 + \delta t \end{cases}$$

$$t = t_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

نیروی بالا نمونه‌ای از نیروهای وابسته به زمان است که همگی شکل تابع دیراک را دارند یعنی تنها در فاصله زمانی کوتاه δt بسیار بزرگ است و در دیگر زمان‌ها یا صفر است یا نادیده انگاشتنی. از نوع نیروهای تکان impulse است و مربوط به ضربه‌ای ناگهانی است. اولاً می‌توان نشان داد که این تابع قابل چشم‌پوشی است مگر درون فاصله‌ای از مرتبه‌های δt در دو سوی t_0 و نیز کل تکان رساننده وسیله آن برابر p_0 است.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt &= \int_{-\infty}^{t_0} F(t) dt + \int_{t_0}^{t_0+\delta t} F(t) dt + \int_{t_0+\delta t}^{\infty} F(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \frac{p_0}{\delta t} dt \\ &= \frac{p_0}{\delta t} t \Big|_{t_0}^{t_0+\delta t} = p_0 \end{aligned}$$

t_0 زمانی است که تکان روی می‌دهد. قبل از زمان $t = t_0$ چون جسم ساکن است پس $x = 0, t \leq t_0$. در زمان $t > t_0$ به بررسی حرکت می‌پردازیم:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = \begin{cases} p_0 / \delta t & t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t \\ 0 & t > t_0 + \delta t \end{cases}$$

در اینجا از δt نمی‌توان صرفنظر کرد. بنابر نتیجه مسئله ۲-۳۳، کتاب سایمون پاسخ خصوصی معادله ناهمگن به صورت زیر است:

$$x = AF_0 \Rightarrow A = \frac{1}{k} \Rightarrow x_1 = \frac{F_0}{k} = \frac{p_0}{k\delta t}$$

و پاسخ عمومی معادله همگن در مورد نوسانگر نامیرا چنین است.

$$x_2 = A \cos(\omega_0 t + \theta), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین:

$$X = x_1 + x_2 = \frac{p_0}{k\delta t} + A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

شرط پیوستگی معادله حرکت (شرایط اولیه) چنین است،

$$t = t_0 \Rightarrow \begin{cases} x = X = 0 \\ \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_0}{k\delta t} + A \cos(\omega_0 t_0 + \theta) = 0 \\ -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0 + \theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_0 t_0 + \theta) = 0 \Rightarrow \omega_0 t_0 + \theta = 0 \Rightarrow \theta = -\omega_0 t_0$$

معادله اول:

$$\frac{p_0}{k\delta t} + A \cos(\omega_0 t_0 - \omega_0 t_0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{p_0}{k\delta t}$$

$$X = \frac{P_0}{k\delta t} - \frac{P}{k\delta t} \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0)$$

$$= \frac{P_0}{k\delta t} [1 - \cos \omega_0 (t - t_0)] \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \delta t$$

در مرحله $t > t_0 + \delta t$ تکان نیرو قطع می‌شود و جسم همچنان به نوسان خود ادامه می‌دهد. منتها مسافت اولیه دارد و آن همان مسافتی است که تا لحظه $t = t_0 + \delta t$ از مرحله نخست داشته است.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow x_{\psi} = B \cos(\omega_0 t + \beta) + \frac{P_0}{k\delta t} (1 - \cos \omega_0 t) \quad t > t_0 + \delta t$$

توجه داریم که فرکانس ω_0 تغییر نمی‌کند. شرط پیوستگی در این مرحله نیز چنین است:

$$t = t_0 + \delta t \rightarrow \begin{cases} x = x_{\psi} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{dx_{\psi}}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{P_0}{k\delta t} (1 - \cos \omega_0 \delta t) = B \cos(\omega_0 t_0 + \omega_0 \delta t + \beta) + \frac{P_0}{k\delta t} (1 - \cos \omega_0 \delta t)$$

$$\omega_0 \frac{P_0}{k\delta t} \sin \omega_0 \delta t = -\omega_0 B \sin(\omega_0 t_0 + \omega_0 \delta t + \beta)$$

$$B \cos(\omega_0 t_0 + \omega_0 \delta t + \beta) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \omega_0 (t_0 + \delta t) \quad \text{معادله اول:}$$

$$\frac{P_0}{k\delta t} \sin \omega_0 \delta t = -B \sin\left(\omega_0 t_0 + \omega_0 \delta t + \frac{\pi}{2} - \omega_0 t_0 - \omega_0 \delta t\right) = \quad \text{معادله دوم:}$$

$$-B \sin \frac{\pi}{2} = -B$$

$$B = -\frac{p_0}{k\delta t} \sin \omega_0 \delta t$$

$$x_{\gamma} = -\frac{p_0}{k\delta t} \sin \omega_0 \delta t \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \omega_0 t_0 - \omega_0 \delta t \right) + \frac{p_0}{k\delta t} (1 - \cos \omega_0 \delta t)$$

$$= -\frac{\gamma p_0}{k\delta t} \sin \frac{\omega_0 \delta t}{2} \cos \frac{\omega_0 \delta t}{2} \sin \omega_0 (t - t_0 - \delta t) + \frac{\gamma p_0}{k\delta t} \sin^2 \frac{\omega_0 \delta t}{2}$$

$$= \frac{\gamma p_0}{k\delta t} \sin \frac{\omega_0 \delta t}{2} \left[\sin \frac{\omega_0 \delta t}{2} + \cos \frac{\omega_0 \delta t}{2} \sin \omega_0 (t - t_0 - \delta t) \right]$$

۲۳- با استفاده از روش سری فوریه، جواب حالت پاینده یک نوسانگر هارمونیک میرا را پیدا کنید که تحت تأثیر نیروی زیر قرار گرفته است.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad nT < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)T \\ F_0 & , \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)T < t \leq (n+1)T \end{cases}$$

که در آن n هر عدد صحیح و $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ فرکانس طبیعی نوسانگر است. نشان دهید که اگر

$\omega_0 \ll \gamma$ باشد حرکت تقریباً سینوسی است و زمان تناوبش $\frac{T}{3}$ است.

$$F(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \quad \text{حل:}$$

$$x = \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{\sin(\omega_n t + \theta_n + \beta_n)}{\left[(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta_n = \text{tg}^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega_n^2}{2\gamma\omega_n}$$

$$F(t) = \frac{1}{\nu} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{\nu \pi n t}{T} + B_n \sin \frac{\nu \pi n t}{T} \right]$$

$$\begin{cases} A_n = \frac{\nu}{T} \int_0^T F(t) \cos \frac{\nu \pi n t}{T} dt & n = 0, 1, 2, \dots \\ B_n = \frac{\nu}{T} \int_0^T F(t) \sin \frac{\nu \pi n t}{T} dt & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & nT \leq t \leq \left(n + \frac{1}{\nu}\right)T & 0 \leq t \leq \frac{T}{\nu} \\ F_0 & \left(n + \frac{1}{\nu}\right)T < t \leq (n+1)T & \frac{T}{\nu} < t \leq T \end{cases}$$

$$A_n = \frac{\nu}{T} \int_{T/\nu}^T F_0 \cos \frac{\nu \pi n t}{T} dt = \frac{\nu F_0}{T} \frac{T}{\nu \pi n} \sin \frac{\nu \pi n t}{T} \Bigg|_{\frac{T}{\nu}}^T = 0$$

$$B_n = \frac{\nu}{T} \int_{T/\nu}^T F_0 \sin \frac{\nu \pi n t}{T} dt = -\frac{\nu F_0}{T} \frac{T}{\nu \pi n} \cos \frac{\nu \pi n t}{T} \Bigg|_{\frac{T}{\nu}}^T =$$

$$= \frac{F_0}{\pi n} (\cos \nu \pi n - \cos \pi n) = \begin{cases} 0 & n = \nu k \\ -\frac{\nu F_0}{\pi n} & n = \nu k + 1 \end{cases}$$

$$F(t) = \sum_n -\frac{\nu F_0}{\pi n} \sin \frac{\nu \pi n t}{T} = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

$$n = \nu k + 1, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$C_n = \frac{\gamma F_0}{\pi n} \quad , \quad \theta_n = \frac{\pi}{\gamma} \quad , \quad \omega_n = \frac{\gamma \pi n}{T} = \frac{\gamma \pi n}{\epsilon \pi} = \frac{n \omega_0}{\gamma}$$

$$x = \sum_{n=\gamma k+1} \frac{\gamma F_0}{\pi n m} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\gamma} \omega_0 t + \frac{\pi}{\gamma} + \beta_n\right)}{\left[\left(\omega_0^2 - \left(\frac{n}{\gamma} \omega_0\right)^2\right)^2 + \epsilon \delta^2 \omega_n^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m \omega_0} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_0(t-t')] dt'$$

۲۴- نوسانگر کند میرای ساکنی در لحظه $t=0$ تحت تأثیر نیروی $F = F_0 e^{-at}$ قرار می‌گیرد. با استفاده از روش گرین، یعنی رابطه زیر، حرکت نوسانگر را بیابید.

حل:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m \omega_0} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_0(t-t')] dt'$$

$$F(t) = e^{-at} \quad , \quad t = 0$$

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-at}}{m \omega_0} e^{-\gamma(t-t')} \sin \omega_0(t-t') dt'$$

$$= \frac{F_0 e^{-at}}{m \omega_0} \int_0^t e^{at-at'-\gamma(t-t_0)}$$

$$= \frac{F_0 e^{-at}}{m \omega_0} \int_0^t e^{(t-t')(a-\gamma)} \sin \omega_0(t-t') dt'$$

$$t - t' = u \rightarrow du = -dt' \rightarrow \begin{cases} t' = t \Rightarrow u = 0 \\ t' = 0 \Rightarrow u = t \end{cases}$$

$$x(t) = -\frac{F_0 e^{-at}}{m\omega_\gamma} \int_t^\infty e^{u(a-\gamma)} \sin \omega_\gamma u du = \frac{F_0 e^{-at}}{m\omega_\gamma} \int_0^t e^{u(a-\gamma)} \sin \omega_\gamma u du$$

$$x(t) = -\frac{F_0 e^{-at}}{m\omega_\gamma} \int_t^\infty e^{u(a-\gamma)} \sin \omega_\gamma u du = \frac{F_0 e^{-at}}{m\omega_\gamma} \int_0^t e^{u(a-\gamma)} \sin \omega_\gamma u du$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] \quad \text{می‌دانیم:}$$

بنابراین:

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-at}}{m\omega_\gamma} \left\{ \frac{e^{(a-\gamma)t}}{(a-\gamma)^2 + \omega_\gamma^2} [(a-\gamma) \sin \omega_\gamma t - \omega_\gamma \cos \omega_\gamma t] + \frac{\omega_\gamma}{(a-\gamma)^2 - \omega_\gamma^2} \right\}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_\gamma [(a-\gamma)^2 + \omega_\gamma^2]} \left\{ \omega_\gamma e^{-at} - \omega_\gamma e^{-\gamma t} \cos \omega_\gamma t - (\gamma - a) e^{-\gamma t} \sin \omega_\gamma t \right\}$$

۴-۱۰. مسائل برگزیده برای حل:

۱- راننده‌ای با سرعت v_0 به چراغ سبز نزدیک می‌شود، در این لحظه چراغ زرد می‌شود. (الف) - اگر زمان واکنش راننده τ باشد، که در طی آن تصمیم می‌گیرد بایستد و پایش را روی ترمز می‌گذارد - و اگر ماکزیمم شتاب کند شونده a باشد در لحظه روشن شدن چراغ زرد مینیمم فاصله از تقاطع، s_{\min} ، چقدر باشد تا راننده بتواند به موقع ماشین را نگاه دارد؟ (ب) - اگر زمان چراغ زرد t باشد، در لحظه روشن شدن چراغ زرد ماکزیمم فاصله از تقاطع، s_{\max} ، چقدر باشد تا راننده بتواند با سرعت v_0 از تقاطع بگذرد، بی‌آنکه چراغ قرمز شود؟ (پ) - نشان دهید اگر سرعت اولیه v_0 بزرگتر از $(v_0)_{\max} = \tau a(t - \tau)$ باشد، فاصله‌هایی از تقاطع وجود دارد که راننده نه می‌تواند به موقع بایستد و نه می‌تواند بدون قرمز شدن چراغ به راه خود ادامه دهد.

$$s_{\min} = v_0 \tau + \frac{v_0^2}{2a}$$

پاسخ:

$$S_{\max} = v_0 t$$

۲- بر ذره‌ای ساکن، در لحظه $t=0$ ، نیروی

$$F = F_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta)$$

وارد می‌شود. (الف) حرکت ذره را بیابید. (ب) سرعت نهایی چه بستگی به ω ، θ دارد؟

۳- بر ذره‌ای نیروی $F = -kx + \frac{a}{x^3}$ وارد می‌شود. (الف) پتانسیل $V(x)$ و معادله حرکت

$x(t)$ را بیابید. (ب) حرکت را در حالت $E^2 \gg ka$ بحث کنید.

پاسخ:

$$x^2 = \frac{E}{k} + \frac{\sqrt{E^2 - ka}}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0\right)$$

۴- پاسخ عمومی معادله زیر را بیابید:

$$m \ddot{x} - b \dot{x} + kx = 0$$

با مقادیر مختلف b در نوع حرکت بحث کنید.

۵- پتانسیل یک بعدی زیر را رسم کنید و در مورد حرکت بحث کنید:

$$u(x) = \frac{-wd^2(x^2 + d^2)}{x^4 + \lambda d^4}$$

آیا حرکت محدود یا نامحدود است؟ نقاط ترازمندی را تعیین کنید و بگویید آیا ترازمندی پایدار یا

ناپایدار است؟ نقاط بازگشت را برای $E = -\frac{W}{\lambda}$ بیابید ($w > 0$). این مسئله را از طریق انرژی و

نیز نیروها بررسی کنید.

$$x = 0, \pm\sqrt{2}d$$

پاسخ: نقاط ترازمند:

۶- گلوله‌ای به جرم m با سرعت v_0 به طرف بالا پرتاب می‌شود. اگر مقاومت محیط به صورت

$mk^2 v^2$ باشد، نشان دهید که گلوله هنگام بازگشت به نقطه پرتاب، دارای سرعتی است که از

$$\text{رابطه } v_1^2 = \frac{g v_0^2}{g + k^2 v_0^2} \text{ پیروی می کند.}$$

۷- جسمی به جرم m با سرعت اولیه v_0 در روی یک سطح افقی در محیطی که مقاومت آن با جذر سرعت متناسب است، $(mk\sqrt{v})$ ، از مبدأ می‌گذرد. مدتی را که طول می‌کشد تا جسم متوقف شود و فاصله پیموده شده را به دست آورید.

۸- جرم m به وسیله نخ‌ی بدون جرم به طول l از نقطه ثابت O آویخته شده است. جسم را به اندازه زاویه θ از وضع قائم منحرف و سپس رها می‌کنیم. حرکت چرخشی جسم را به دور محور Z بنویسید که از نقطه O می‌گذرد و عمود بر صفحه حرکت است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن انرژی کل جسم، E ، به دست آید و ثابت کنید که در این مسئله E ثابت است.

۹- (الف). معادله $v_0 = -3^{m/ses}$, $x_0 = 5^m$ را با شرایط اولیه $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \Delta x = 0$

در لحظه $t=0$ حل کنید. این معادله یک نوسانگر میراست. منحنی مسیر حرکت را رسم کنید.
(ب). نتایج به دست آمده را تغییر فیزیکی کنید.

۱۰- اگر دامنه نوسانگر میرا پس از n دوره تناوب به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش برسد، نشان دهید که

$$\text{فرکانس نوسانگر باید تقریباً } \left[1 - \left(\frac{8\pi^2}{n^2} \right)^{-1} \right] \text{ برابر فرکانس نوسانگر نامیرای وابسته باشد.}$$

۱۱- دو فنر که به ترتیب دارای ضریب سختی k_1, k_2 هستند در یک وضعیت عمودی برای نگهداری جسمی به جرم m مورد استفاده قرار می‌گیرند. نشان دهید که سرعت زاویه‌ای نوسان ω برای حالت موازی فنرها برابر $[(k_1 + k_2)/m]^{1/2}$ و برای حالت سری فنرها معادل $[(k_1 k_2)/m(k_1 + k_2)]^{1/2}$ است.

۱۲- بر ذره‌ای به جرم m نیروی دافعه kx ($k > 0$) وارد می‌شود. معادله حرکت را بنویسید و حل کنید و ضریب ثابت را برحسب v_0, x_0 (فاصله و سرعت در مبدأ زمان) بنویسید. اگر جسم در مبدأ زمان $t=0$ در مبدأ مختصات $x=0$ ساکن باشد، حرکت به چه صورتی خواهد بود؟ حرکت اخیر را

به کمک اصول مکانیک تعبیر کنید.

۱۳- گلوله‌ای با سرعت v_0 به طرف بالا شلیک می‌شود. مقاومت هوا به صورت $mgkv^2$ است. نشان دهید که گلوله در لحظه T به آخر مسیر خود می‌رسد که این زمان از رابطه $tg\sqrt{kgT} = \sqrt{kv_0}$ به دست می‌آید. همچنین نشان دهید که v_0 هرچه بیشتر باشد، t

نمی‌تواند بیش از $\frac{\pi}{2\sqrt{kg}}$ شود.

۱۴- نوسانگری هارمونیک و کمین میرا تحت اثر نیروی $F = F_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta)$ قرار دارد. از طریق نمایش F به صورت قسمت حقیقی تابع نمایی مختلط و جستجوی پاسخ x که همان وابستگی نمایی را نسبت به زمان داشته باشد، پاسخ خصوصی مسئله را بیابید.

۱۵- ذره‌ای با سرعت v_0 طوری پرتاب می‌شود که از دو نقطه عبور می‌کند که هر دو به ارتفاع h از سطح افقی قرار دارند. نشان دهید اگر تفنگ برای ماکزیمم برد تنظیم شده باشد، فاصله دو نقطه مورد بحث چنین می‌شد:

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$

۱۶- یک ذره در میدان گرانشی ثابت با سرعت اولیه v_0 به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود. نشان دهید اگر نیروی بازدارنده‌ای متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای وجود داشته باشد، آنگاه سرعت ذره هنگامی که به وضعیت اولیه‌اش بر می‌گردد از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$v = \frac{v_0 v_1}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}}$$

که در آن v_1 سرعت نهایی ذره است.

۱۷- دو جرم m_1, m_2 به طور آزاد بر سطح افقی بدون اصطکاک می‌لغزند و توسط فنری با ضریب سختی k به هم متصلند. فرکانس حرکت نوسانی این سیستم را بیابید.

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} k \quad \text{پاسخ:}$$

۱۸- انرژی پتانسیل ذره‌ای که در یک بعد حرکت می‌کند به صورت زیر است:

$$V(x) = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{k_2}{x}$$

$$k_1 > 0, k_2 > 0, x > 0$$

نشان دهید که حرکت دوره‌ای است. وضعیت ترازمندی کدام است؟ اگر دامنه ارتعاش‌ها بسیار کوچک باشد، فرکانس حرکت را بیابید.

۱۹- نشان دهید که برای نوسانگری تا حدی میرا، ضریب کیفیت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

که در آن $\Delta\omega$ نمایشگر بازه فرکانس بین نقاطی روی منحنی تشدید است که دامنه آنها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر دامنه ماکزیمم است.

۲۰- اتومبیلی در یک زمین گلی با سرعت v حرکت می‌کند و گل در همه نقاط چرخ‌های آن به

بالا پرتاب می‌شود. اگر $v^2 > ag$ باشد (a شعاع چرخ‌های اتومبیل)، نشان دهید حداکثر ارتفاع گل

$$\text{پرتاب شده از سطح زمین } a + \frac{v^2}{2g} + \frac{a^2 g}{2v^2} \text{ است.}$$

۲۱- سری فوریه وابسته به تابع زیر را بیابید:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{2\pi}{\omega} < t < 0 \\ \sin \omega t & 0 < t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

۲۲- پاسخ یک نوسانگر خطی را به تابع پله‌ای و تابع ضربه‌ای برای حالت تند میرا (در حد

$\tau \rightarrow 0$) بیابید. توابع پاسخ را رسم کنید.

۲۳- روش گرین را به کار بگیرید و پاسخ نوسانگر میرا را به تابع زیر بیابید:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t & t > 0 \end{cases}$$

۲۴- لرد رابلی در بحث خود در مورد اثرات غیرخطی در پدیده‌های آکوستیکی از معادله زیر

استفاده کرد^۱:

$$\ddot{x} - \left(a - b \dot{x}^2 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

نشان دهید که با مشتق‌گیری از این معادله نسبت به زمان و جایگزین کردن $y = y_0 \sqrt{\frac{rb}{a}} \dot{x}$

معادله معروف واندربیل (Vonder Pol) نتیجه می‌شود:

$$\ddot{y} - \frac{a}{y_0^2} (y_0^2 - y^2) \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

۲۵- حرکت ذره غیرمیرایی را بررسی کنید که تحت اثر نیروی

$$F(x) = \begin{cases} -kx & |x| < a \\ -(k + \delta)x + \delta a & |x| > a \end{cases}$$

قرار گرفته است. δ, k ثابت‌های مثبت هستند.

۲۶- فرض کنید که معادله حرکت ذره‌ای به صورت $\ddot{x} - \alpha x + \gamma^2 x = 0$ است، که در آن $\alpha > 0, \gamma > 0$ است. تابع پتانسیل را رسم کنید. پاسخ سری فوریه را برای حالتی بیابید که در آن انرژی مقدار مثبت کوچکی داشته باشد.

۲۷- نشان دهید که میانگین زمانی انرژی پتانسیل ذره‌ای با مدار بیضی شکل در میدان نیروی

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \text{ برابر است با } -\frac{k}{a}, \text{ که در آن } a \text{ نیم محور بزرگ بیضی است.}$$

۲۸- زاویه حضيض و اوج را برای مدارهای تقریباً دایره‌ای شکل در میدان نیروی مرکزی

$$F(r) = -k \frac{e^{-br}}{r^2} \text{ تعیین کنید.}$$

۲۹- ذره‌ای در یک میدان مرکزی طوری حرکت می‌کند که مدار مارپیچی آن به صورت

$r = r_0 e^{k\theta}$ است. نشان دهید که قانون نیرو عکس توان سوم است و تغییر θ برحسب زمان به صورت لگاریتمی است.

۳۰- (الف) - نشان دهید اگر r کوچکتر از b^{-1} باشد، مدار دایره شکل به شعاع r در مسئله ۲۷، پایدار است.

(ب). نشان دهید در میدان نیرو به صورت عکس توان سوم، مدارهای دایره‌ای شکل ناپایدار هستند.

۳۱- ذره‌ای در مدار بیضی شکل و در میدان نیروی عکس مجذور فاصله حرکت می‌کند. ثابت

کنید حاصلضرب سرعت‌های ماکزیمم و می‌نیمم آن برابر با $\left(\frac{2\pi a}{\tau}\right)^2$ است، که در آن a نیم محور بزرگ و τ دوره تناوب است.

۳۲- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی F قرار دارد که از پتانسیل $V = ax^2 - bx^3$ مشتق می‌شود: (الف) - نیروی F را به دست آورید.

(ب) - معادله حرکت را برای سرعت با شرایط اولیه $v = v_0, x_0 = 0$ بنویسید و آن را به صورت تابعی از x حل کنید.

(پ) - نشان دهید که فقط برای $v_0 < v_c$ (که در آن v_c مقدار بحرانی است) ذره می‌تواند در ناحیه‌ای اطراف مبدا حرکت کند. v_c را بیابید.

$$v_c = \frac{2a\sqrt{2a}}{3b\sqrt{3m}} \quad \text{پاسخ:}$$

۳۳- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = -kx\hat{i} - 4ky\hat{j}$ در صفحه xy حرکت می‌کند که در آن $k > 0$ است. مسیر حرکت ذره را در صفحه بیابید.

۳۴- نوسانگر هماهنگ یک بعدی از یک جسم m متصل به فنری با ثابت فنر k تشکیل شده است. فنر را در لحظه $t=0$ به اندازه A از وضعیت تعادل خو جابجا و جسم m را از حال سکون رها می‌کنیم. اگر نیروی اصطکاک $f = -bv$ بر جسم m اثر کند که b ضریب میرایی و v سرعت جسم است، در صورتی که شرایط میرایی بحرانی برقرار باشد، مقدار توان اتلافی توسط نیروی اصطکاک چقدر است؟

$$P_{av} = \frac{b^5}{16m^4} A^2 t^2 e^{-bt/m} \quad \text{پاسخ:}$$

پیوست فصل چهارم

نوسان‌های غیرخطی^۱

« ... اینها پدیده‌های مربوط به فنرها و اجسام فنری است، که تاکنون تا آنجا که من می‌دانم به قانون تبدیل نشده‌اند. آشکار است که قاعده یا قانون طبیعت در هر جسم فنر مانند، آن است که نیرو یا توانی که بدینوسیله جسم خودش را به وضعیت طبیعی‌اش بر می‌گرداند همیشه متناسب با فاصله‌ای است که از آن دور شده است.»

«رابرت هوک؛ ۱۶۷۸»

می‌دانیم که اکثر سیستم‌های فیزیکی غیرخطی‌اند. معادله حرکت یک بعدی از نوع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = h(t) \quad (\text{الف-۱})$$

اگر $f(x)$ یا $g(x)$ به ترتیب شامل توان‌های X یا x بالاتر از توان خطی باشند در این صورت سیستم فیزیکی غیر خطی است. جواب‌های کامل مربوط به معادله (الف-۱) برای توابع کلی $f(\dot{x})$ و $g(x)$ امکان‌پذیر نیستند. در اینجا پیرامون برخی عملیات خاص که برای حل معادلات غیرخطی لازم‌اند به بحث می‌پردازیم. نمودارهای فاز برای فهم حرکت سیستم مفیدند. اگر انرژی پتانسیل به شکل زیر باشد:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{الف-۲})$$

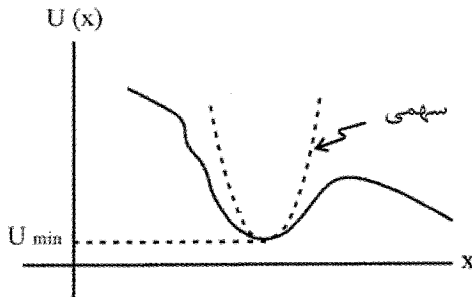
نیروی مربوطه عبارت است از:

$$F(x) = -kx \quad (\text{الف-۳})$$

۳- بحث مفصلتر و دقیقتر این موضوع را می‌توانید در کتابهای ماریون (فصل چهارم)- بارگرو اولسون (فصل یازدهم) و یا فاولز (فصل سوم) مطالعه کنید.

این عبارت همان حالت حرکت هارمونیک ساده است که قبلاً درباره‌اش بحث شد. حالا فرض کنید که ذره‌ای در یک چاه پتانسیل حرکت می‌کند که یک تابع دلخواه از فاصله است (مطابق شکل الف-۱). در این صورت در مجاورت می‌نیم چاه می‌توانیم پتانسیل را با یک سهمی تقریب بزنیم. بنابراین اگر انرژی ذره فقط اندکی بیشتر از U_{\min} باشد فقط دامنه‌های کوچک امکان وجود دارند و حرکت تقریباً هارمونیک ساده است. اگر انرژی بطور محسوسی بیشتر از U_{\min} باشد بطوری که دامنه حرکت را نتوان کوچک پنداشت در این صورت ممکن است این مقدار دیگر به اندازه کافی دقیق نباشد تا تقریب $U(x) \approx \frac{1}{2} kx^2$ را تأمین کند و ما باید با یک نیروی غیرخطی سروکار داشته باشیم. در بسیاری از وضعیت‌های فیزیکی انحراف نیرو از شکل خطی بودن حول وضعیت تعادل (که ما آنرا در $x=0$ می‌گیریم) متقارن است. در چنین مواردی مقدار نیروی وارد بر ذره در $-x$ و در x یکی است. راستای این نیرو در این دو حالت مخالف یکدیگرند. بنابراین در یک وضعیت متقارن نخستین تصحیح به یک نیروی خطی باید جمله‌ای متناسب با x^3 باشد. از این‌رو:

$$F(x) \approx -kx + \epsilon x^3 \quad (\text{الف-۴})$$

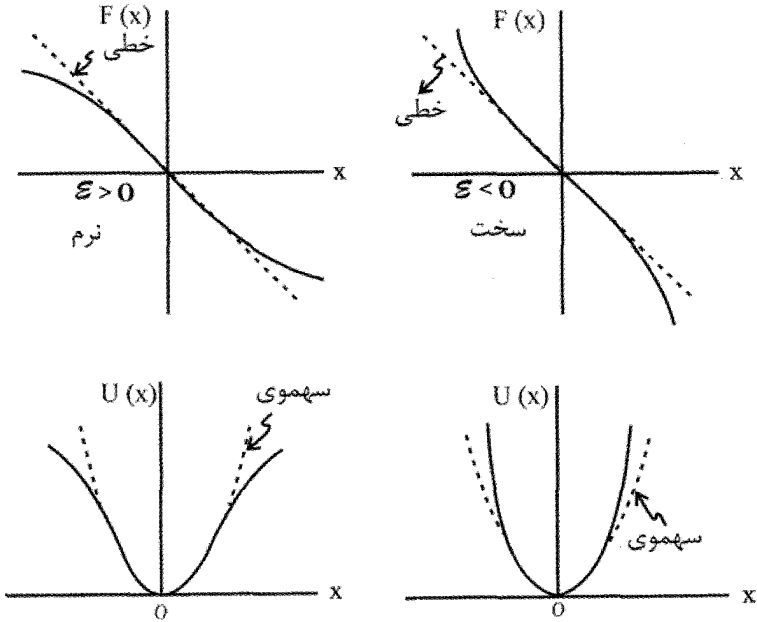


شکل (الف-۱)

که ϵ معمولاً کمیتی کوچک است. پتانسیل متناظر با چنین نیرویی عبارت است از:

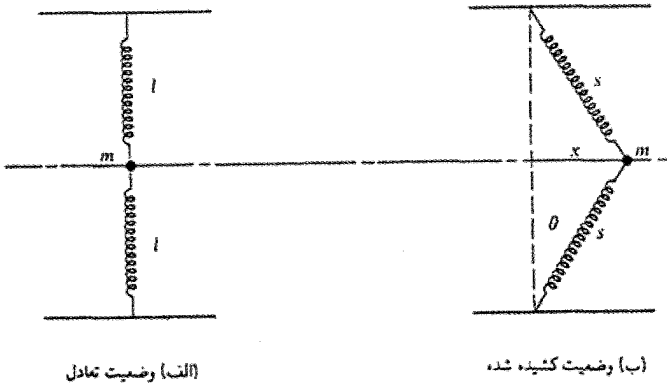
$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{4} \epsilon x^4 \quad (\text{الف-۵})$$

بسته به علامت کمیت ϵ این نیرو ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از تقریب خطی باشد. اگر $\epsilon > 0$ در این صورت نیرو از جمله خطی بتنهایی کوچکتر است و سیستم را نرم می‌گویند. اگر $\epsilon < 0$ آنگاه نیرو بزرگتر و سیستم را سخت می‌نامند. در شکل (الف-۲) شکل نیرو و پتانسیل را برای یک سیستم نرم و یک سیستم سخت مشاهده می‌کنید.



شکل (الف-۲)

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که بین دو فنر یکسان آویخته شده است (شکل الف-۳). نشان می‌دهیم که سیستم غیرخطی است. جواب حالت پایدار را برای نیروی محرک $F \cdot \cos \omega t$ به دست می‌آوریم.



شکل (الف-۳)

اگر وقتی ذره در موقعیت تعادل خود است هر دو فنر در شرائط غیر کشیدگی خود باشند (یعنی هیچگونه کششی و بنابراین هیچگونه انرژی پتانسیلی از هیچیک از آنها وجود نداشته باشد) - و اگر از نیروهای گرانشی چشم بیوشیم - در آن صورت هرگاه ذره از وضعیت تعادل جابجا شود (شکل الف-۳) هر فنر نیروی $-k(s-1)$ از ذره وارد می‌آورد (k عبارت است از ثابت نیروی هر فنر). نیروی (افقی) خالص وارد بر ذره عبارت است از:

$$F = -2k(s-1)\sin\theta \quad (\text{الف-۶})$$

که در آن

$$s = (\ell^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{الف-۷})$$

بنابراین

$$\sin\theta = x/s = x / (\ell^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{الف-۸})$$

از این رو،

$$F = \left[-2kx / (\ell^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \left[(\ell^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \ell \right]$$

$$= -2kx \left\{ 1 - \left[1 / (\ell + (x/\ell)^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (\text{الف-۹})$$

اگر $\frac{x}{\ell}$ را کمیت کوچکی بگیریم و رادیکال را بسط دهیم خواهیم داشت:

$$F(x) = -k\ell(x/\ell)^3 \left[1 - 3/4(x/\ell)^2 + \dots \right] \quad (\text{الف-۱۰})$$

هرگاه از همه جمله‌ها مگر جمله پیشرو چشم بیوشیم به طور تقریب خواهیم داشت:

$$F(x) \cong - (k / \ell^2) x^3 \quad (\text{الف-۱۱})$$

بنابراین حتی اگر دامنه حرکت به اندازه کافی محدود باشد به طوری که $\frac{x}{\ell}$ کمیت کوچکی شود این

نیرو هنوز هم با x^3 متناسب است. از این رو سیستم ذاتاً غیرخطی است. از شود دیگر اگر لازم باشد که هر فنر به اندازه d کشیده شود تا در وضعیت تعادل به جرم متصل شوند در این صورت برای نیرو خواهیم داشت:

$$F(x) \cong -2(kd/l)x - \left[k(l-d)/l^3 \right] x^3 \quad (\text{الف-۱۲})$$

و یک جمله خطی در عبارت وارد می‌شود. از معادله (الف-۱۲) مشخص می‌شود که:

$$\varepsilon = -k(l-d)/l^3 < 0 \quad (\text{الف-۱۳})$$

از این رو سیستم سخت است و در نوسان‌های کم دامنه حرکت تقریباً هارمونیک ساده است. اگر نیروی محرک $F \cdot \cos \omega t$ را داشته باشیم معادله حرکت برای فنر کشیده (نیروی معادله الف-۱۲) به این صورت می‌شود:

$$m\ddot{x} = (-2kd/l)x - (k(l-d)/l^3)x^3 + F \cdot \cos \omega t \quad (\text{الف-۱۴})$$

می‌گیریم:

$$G = F/m, \quad a = 2kd/ml \quad (\text{الف-۱۵})$$

از این رو

$$\ddot{x} = -ax + \varepsilon x^3 + G \cos \omega t \quad (\text{الف-۱۶})$$

حل معادله دیفرانسیل (الف-۱۶) دشوار است. می‌توانیم برای یافتن یک جواب حالت پایایی مناسب از یک روش اختلال بهره‌گیریم. ابتدا یک جواب را $x_1 = A \cos \omega t$ فرض می‌کنیم و آن را در سمت معادله (الف-۱۶) قرار می‌دهیم که می‌شود:

$$\ddot{x}_1 = -aA \cos \omega t + \varepsilon A^3 \cos^3 \omega t + G \cos \omega t \quad (\text{الف-۱۷})$$

که جواب آن $x = x_1$ است. این معادله را می‌توان بر حسب x_1 و با استفاده از اتحاد زیر حل کرد:

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \quad (\text{الف-۱۸})$$

با سود جستن از معادله (الف-۱۸) در معادله (الف-۱۷) خواهیم داشت:

$$\ddot{x}_1 = -\left(aA - \frac{3}{4}A - G \right) \cos \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \cos 3\omega t \quad (\text{الف-۱۹})$$

پس از دوبار انتگرال گیری (و صفر قرار دادن ثابت‌های انتگرال گیری) خواهیم داشت:

(الف-۲۰)

$$x = (1/\omega^2)(aA - \frac{3}{4}\varepsilon A^3 - G) \cos \omega t - (\frac{\varepsilon A^3}{36\omega^2}) \cos 3\omega t$$

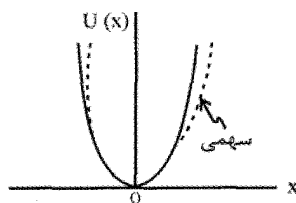
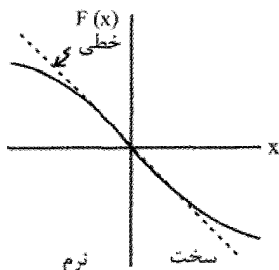
این عبارت به همین صورت یک جواب پیچیده است. کمیت‌های x, a, ε باید از چه شرایطی پیروی کنند تا کمیت x_2 یک جواب مناسب باشد؟ روش‌های عددی با کامپیوتر می‌توانند با استفاده از نظریه اختلال جوابی کاملاً دقیق را به دست دهند. دریافتیم که دامنه به بسامد محرک بستگی دارد اما در بسامد طبیعی سیستم هیچگونه تشدید رخ نمی‌دهد. اگر بخواهیم در خصوص جواب‌های حاصل از نظریه اختلال معادله (الف-۱۶) بحث کنیم از بحث کنونی خود بسیار دور خواهیم افتاد. نتیجه این است که به ازای برخی مقادیر بسامد محرک ω سه دامنه مختلف با «جهش‌هایی» بین این دامنه‌ها ممکن است به وجود آید. این دامنه به ازای مقدار معینی از ω می‌تواند مقادیر متفاوتی داشته باشد این مقدار بستگی به این دارد که آیا ω افزایش یافته است یا کاهش یافته. در وضعیت‌های فیزیکی واقعی غالباً به نیروها و پتانسیل‌های متقارن بر می‌خوریم. اما بعضی موردها هم شکل نامتقارن دارند. مثلاً:

$$F(x) = -kx + \lambda x^2 \quad \text{(الف-۲۱)}$$

پتانسیل برای آن عبارت است از:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\lambda x^3 \quad \text{(الف-۲۲)}$$

نمایش این حالت را در شکل (الف-۴۷) مشاهده می‌کنید. سیستم به ازای $x > 0$ سخت و به ازای $x < 0$ نرم است.



نمودار فاز برای سیستم‌های غیرخطی

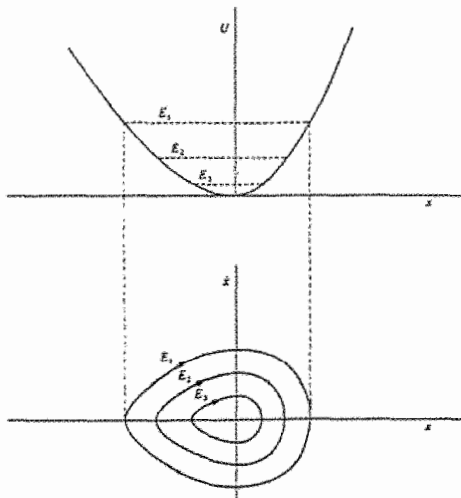
ترسیم نمودار فاز برای سیستم غیرخطی را می‌توان با بهره‌گیری از معادلات قبلی انجام داد

$$\dot{x}(x) \propto (E - U(x))^{1/2} \quad (\text{الف-۲۳})$$

از آنجا که $U(x)$ به طور کلی تابعی پیچیده است فقط در مواردی نادر می‌توانیم یک عبارت تحلیلی

برای $\dot{x}(x)$ به دست آوریم. معمولاً باید به شگردهای تقریبی گوناگون متوسل شویم. از سوی دیگر دستیابی به یک تصویر کیفی از نمودار فاز برای حرکت ذره‌ای در یک پتانسیل اختیاری نسبتاً آسانتر است. مثلاً پتانسیل نامتقارن نموده شده در قسمت بالایی شکل (الف-۵) را در نظر می‌گیریم. این شکل سیستمی را نشان می‌دهد که به ازای $x < 0$ نرم و به ازای $x > 0$ سخت است، اگر

هیچگونه میرایی پیش نیاید در این صورت چون x با $(E - U(x))^{1/2}$ متناسب است، نمودار فاز باید به شکل نمایش یافته در قسمت پایینی شکل (الف-۵) باشد. سه مسیر فاز بیضی سان (تخم‌مرغی) ترسیم شده‌اند که به سه مقدار انرژی کلی متناظرند که در نمودار پتانسیل با نقطه‌چین ترسیم شده‌اند. به ازای انرژی کلی که اندکی از انرژی حداقل پتانسیل بزرگتر باشد مسیرهای فاز تخم‌مرغی به بیضی می‌گرایند. اگر سیستم میرا باشد در این صورت ذره نوسانی ((با حرکت مارپیچی به ته چاه پتانسیل می‌رود)) و سرانجام در وضعیت تعادل $x = 0$ به سکون می‌رسد. در مورد حالت شکل



شکل (الف-۵)

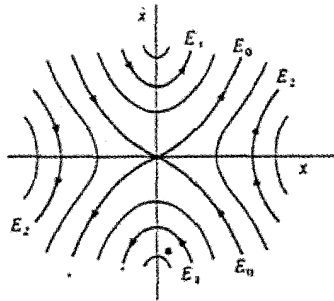
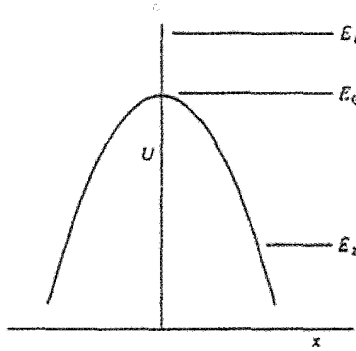
(الف-۵) اگر انرژی کل ذره E کمتر از ارتفاعی باشد که پتانسیل در دو طرف $X = 0$ تا این ارتفاع بالا می‌آید در این صورت ذره در چاه پتانسیل ((به دام)) می‌افتد. نقطه $X = 0$ وضعیت تعادل پایدار است زیرا $\left(\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right)_{x=0} > 0$ و در حرکتی که بطور موضعی مقیداست آشفتگی اندکی پیش می‌آید. در شکل (الف-۵) مجاورت بیشینه پتانسیل نوعی حرکت به وجود می‌آید که به طور کیفی متفاوت است (شکل الف-۶). در اینجا نقطه $x=0$ یک وضعیت تعادل ناپایدار است زیرا اگر ذره در این نقطه در حال سکون باشد در آن صورت اندکی آشفتگی سبب حرکتی می‌شود که بطور موضعی نامقید است. به همین ترتیب $\left(\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right)_{x=0} < 0$ به تعادل ناپایدار می‌انجامد. اگر پتانسیل در شکل

(الف-۶) سهموی می‌بود یعنی اگر $U(x) = -\frac{1}{2} kx^2$ در این صورت مسیره‌های فاز متناظر با

انرژی E خطوطی مستقیم بوده و آنها که با انرژی‌های E_1, E_2 متناظرند هذلولی هستند. بنابراین حالت اخیر حدی است که اگر اندازه جمله غیرخطی در عبارت مربوط به نیرو کاهش یابد مسیره‌های فاز شکل (الف-۶) به آن میل می‌کنند. با مراجعه به مسیره‌های فاز مربوط به پتانسیل‌های شکل‌های (الف-۵) و (الف-۶) به ازای هر پتانسیل دلخواه به سرعت می‌توانیم یک نمودار فاز ترسیم کنیم. یکی از انواع مهم معادله غیرخطی را وان در پول در پژوهش‌هایش پیرامون مدارهای لامپ خلا به تفصیل مورد مطالعه قرار داده است. شکل این معادله به قرار زیر است:

$$\ddot{x} - \mu(x_0^2 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{الف-۲۴})$$

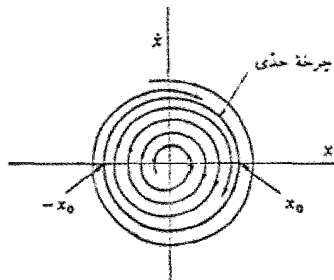
که در آن μ پارامتری کوچک و مثبت است. سیستمی را که معادله "وان در پول" توصیف می‌کند دارای خواص جالب زیر است. اگر دامنه $|x|$ از مقدار بحرانی $|x_0|$ بیشتر شود، آنگاه ضریب \dot{x} مثبت بوده و سیستم میرا است. اما اگر $|x| < |x_0|$ باشد، در این صورت میرایی منفی رخ می‌دهد، یعنی دامنه حرکت افزایش می‌یابد. نتیجه می‌شود که باید دامنه‌ای وجود داشته باشد که به ازای آن با گذشت زمان حرکت نه افزایش یابد و نه کاهش پذیرد. این نوع منحنی را در صفحه فاز چرخه حدی می‌گویند (شکل الف-۷). مسیره‌های فاز خارج از چرخه حدی مسیر مارپیچی به سمت داخل را می‌پیمایند و مسیره‌های داخل چرخه حدی حرکتی مارپیچی به سمت خارج را طی می‌کنند تا جایی که چرخه حدی یک حرکت موضعا مقید را تعریف می‌کند می‌توانیم این وضعیت را پایدار تلقی



شکل (الف-۶)

کنیم. سیستمی را که معادله "وان در پول" توصیف می‌کند خود محدود کن می‌گویند. یعنی همین که تحت شرایطی که به افزایش دامنه منجر می‌شود به حرکت درآید این معادله خود به خود از زیاد شدن بدون حد و مرز دامنه جلوگیری می‌کند. خاصیت این سیستم آن است که چه دامنه اولیه از

دامنه (محدود کن) بحرانی X بزرگتر باشد و چه کوچکتر قضیه فرق نمی‌کند.



شکل (الف-۷)

فصل پنجم

حرکت ذره در دو و سه بعد

نیروی مرکزی و حرکت کپلری

«جان‌ها با طبیعت به اوج می‌رسند و با رنج به حسیض در می‌غلتنند.»

«جورج-الیوت»

مقدمه

حرکت در دو و سه بعد با معرفی مفهوم بردار بسیار ساده‌تر و منطقی‌تر بررسی می‌شود. این مبحث را می‌توان در فصل سوم سایمون و فصل هفتم ماریون دنبال کرد. همچنین گلدشتین در فصل سوم و هند و فینچ در فصل چهارم به آن می‌پردازد. در بحث عمومی حرکت دو و سه بعدی، چنانچه نیروی \vec{F} در حالت کلی به صورت تابعی از مکان، سرعت، و زمان $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ داده شده باشد، معادلات حرکت

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

مجموعه‌ای از سه (یا در حالت دو بعدی، دو) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همزمان می‌شود:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \quad (1-5)$$

اگر سرعت و مکان در لحظه t_0 داده شود، معادلات (1-5) به ما $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ را می‌دهد و از $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ در

زمان t می‌توانیم $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ متعلق به زمان کوتاهی پیش یا پس از این زمان را در $t+dt$ تعیین کنیم و از این رو می‌توانیم توابع مذکور را به کمک معادلات (1-5) در گذشته و آینده بسط دهیم. استدلال ریاضی این مبحث بسیار دشوار است و برای هر مکان و سرعت داده شده در لحظه نخستین t_0 به قضیه‌ای منتهی می‌شود که وجود پاسخ یگانه این معادلات را تضمین می‌کند. معادلات فوق دارای شش ثابت (x_0, y_0, z_0) و $(V_{x_0}, V_{y_0}, V_{z_0})$ هستند. به طور کلی پاسخ سه معادله همزمان

(1-5) بسیار دشوارتر از پاسخ تک معادله $F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ حرکت یک بعدی است. علت دشواری

این است که اساساً هر سه معادله شامل تمامی متغیرهای x, y, z و مشتق‌های آنها است. در واقع می‌توان نشان داد که مجموعه معادلات (1-5) هم ارز یک معادله مرتبه شش است.

نکته دیگر اینکه وقتی می‌گوئیم انرژی پتانسیل را به دو یا سه بعد گسترش دهیم، درمی‌یابیم هنگامی که نیرو به صورت $\vec{F}(\mathbf{r})$ داده شده، تنها تابع \mathbf{r} بودن برای تضمین وجود تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ کافی نیست. اصلی که بیان می‌کند چه موقع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ وجود دارد آن است که میدان نیرو چنان باشد که رابطه

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (2-5)$$

برقرار باشد. وقتی $V(\mathbf{r})$ وجود دارد، قضیه بقای انرژی همیشه پایدار می‌ماند و کل انرژی $T+V$ ثابت حرکت است. به هر حال در یک بعد همیشه انتگرال انرژی کافی است تا به کمک آن بتوانیم

مسئله را حداقل به طور نظری حل کنیم. اما در دو و سه بعد دیگر چنین نیست و نیازمند روابط دیگری هستیم که اغلب چنین روابطی وجود ندارند. نیرویی که فقط تابع مکان و کرل آن صفر باشد، نیروی پایستار یا کنسرواتیو نامیده می‌شود، چرا که به قضیه بقای مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل منجر می‌شود:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{r_2}^{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(r_1) - V(r_2) \quad (۳-۵)$$

از طرفی قضیه کار و انرژی چنین تعریف می‌شود:

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot v dt = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (۴-۵)$$

$$T_1 + V_1(\vec{r}) = T_2 + V_2(\vec{r}) = E \quad (۵-۵)$$

گاه ممکن است نیرو تابع مکان و زمان هر دو باشد. اگر در زمان t ، $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$ باشد، تابع انرژی پتانسیل $V(\vec{r}, t)$ را می‌توان چنین تعریف کرد:

$$V(\vec{r}, t) = - \int_{r_s}^r \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \quad (۳-۵)'$$

و برای زمان t که $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0$ است،

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}, t) \quad (۳-۵)''$$

اما در این حالت دیگر نمی‌توان قانون بقای انرژی را ثابت کرد چرا که معادله (۳-۵) دیگر پایدار نیست، زیرا این مسئله که تغییر انرژی پتانسیل برابر منهای کار انجام شده بر روی ذره است درست نیست. دلیلش نیز چنین است که انتگرالی که انرژی پتانسیل را در زمان t تعریف می‌کند از تابع نیرو در آن زمان حساب می‌شود، حال آنکه انتگرال معرف کار از تابع نیرو در هر نقطه حساب می‌شود، هنگامی که ذره از آن نقطه می‌گذرد. در نتیجه انرژی E وقتی V, \vec{F} تابع زمان هستند ثابت نیست و چنین نیرویی نباید پایستار نامیده شود.

در بخش بعد به عنوان شاخص‌ترین نمونه‌های حرکت در فضا، به نوسانگر هارمونیک و سپس به

مسئله کپلر و نیروهای مرکزی می‌پردازیم. مبحث حرکت ذره در دو و سه بعد به ویژه حرکت کپلری را در فصل هشت کتاب ماریون - فصل سه سایمون - فصل شش فاولز - فصل سه گلدشتین - و فصل چهار کتاب هدوفینچ می‌توان یافت.

۲-۵. نوسانگر هارمونیک در دو و سه بعد

نخستین مسئله در مورد مسائل ساده در دو و سه بعد، مسئله نوسانگر هارمونیک سه بعدی نامیرا است که در این بخش به آن می‌پردازیم. معادلات حرکت آن چنین است:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x x \\ m\ddot{y} &= -k_y y \\ m\ddot{z} &= -k_z z \end{aligned} \quad (۶-۵)$$

مدل مناسب در این مورد مجموعه‌ای از سه فنر عمود بر هم است که جسمی به جرم m در میان آنها قرار می‌گیرد. پاسخ معادلات فوق چنین است:

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega_x t + \theta_x) , & \omega_x^2 &= \frac{k_x}{m} \\ y &= A_y \cos(\omega_y t + \theta_y) , & \omega_y^2 &= \frac{k_y}{m} \\ z &= A_z \cos(\omega_z t + \theta_z) , & \omega_z^2 &= \frac{k_z}{m} \end{aligned} \quad (۶-۵)'$$

شش ثابت $A_x, A_y, A_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ به مقادیر اولیه $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0$ بستگی دارند. حرکت کلی ذره به دور مبدأ درون مکعب مستطیلی با ابعاد $\sqrt{2}A_x \times \sqrt{2}A_y \times \sqrt{2}A_z$ انجام می‌گیرد. اگر فرکانس‌های زاویه‌ای $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ متناسب باشند، یعنی اگر برای مجموعه اعداد صحیح $\{n_1, n_2, n_3\}$ داشته باشیم:

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z} \quad (۷-۵)$$

آنگاه مسیر جرم m در فضا بسته و حرکت دوره‌ای است. چنانچه اعداد (n_x, n_y, n_z) هیچ

ضریب مشترک صحیحی نداشته باشند، در این صورت دوره حرکت چنین می‌شود:

$$T = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z} \quad (۸-۵)$$

در طی یک دوره، مختصات x, y, z به ترتیب n_x, n_y, n_z نوسان انجام می‌دهند، بنابراین در انتهای دوره ذره به مکان و سرعت نخستین خود باز می‌گردد. در دو بعد، اگر مسیر ذره نوسان کننده برای ترکیب‌های مختلف فرکانس‌های ω_x, ω_y و فازهای مختلف θ_x, θ_y رسم شود، طرح‌های زیبا و جالب به دست می‌آید. این طرح‌ها شکل‌های لیسازو نامیده می‌شود؛ و می‌توان آنها را به روش الکتریکی نیز روی اسیلوسکپ پرتو کاتودی نمایش داد.

اگر سه ثابت k_x, k_y, k_z برابر باشند، نوسانگر را همسانگرد (isotrope) می‌نامیم یعنی در تمام راستاها نوسان یکی است. در این حالت سه فرکانس $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ با هم برابر و حرکت دوره‌ای است و هر یک از مختصات در هر دوره یک چرخه نوسان انجام می‌دهد. می‌توان نشان داد که مسیر حرکت در دو بعد بسته به دامنه‌ها و فازها بیضی، خط راست، یا دایره است. در بخش بعد نشان می‌دهیم که نیرو به صورت $\vec{F} = -k\vec{r}$ است که نیرویی مرکزی است.

در دو بعد معادلات حرکت چنین است:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases} \quad (۹-۵)$$

و پاسخ آن به صورت زیر است که

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ y(t) = B \cos(\omega_0 t - \beta) \end{cases} \quad (۱۰-۵)$$

از این رو همانطور که گفته شد حرکت یکی از نوسان‌های هارمونیک ساده در هر دو بعد است. فرکانس حرکت در هر دو راستا ω_0 است ولی دامنه و فاز حرکت ممکن است متفاوت باشد. معادله مسیر ذره با حذف t از دو معادله به دست می‌آید:

$$y(t) = B \cos[\omega_0 t - \alpha + (\alpha - \beta)] =$$

$$B \cos(\omega_0 t - \alpha) \cos(\alpha - \beta) - B \sin(\omega_0 t - \alpha) \sin(\alpha - \beta)$$

با تعریف $\delta = \alpha - \beta$ و توجه به اینکه $\cos(\omega_0 t - \alpha) = \frac{x}{A}$ داریم:

$$y = \frac{B}{A} x \cos \delta - B \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \sin \delta \quad \text{یا}$$

$$Ay - Bx \cos \delta = -B \sqrt{A^2 - x^2} \sin \delta$$

از مجذور کردن این رابطه

$$A^2 y^2 - 2ABxy \cos \delta + B^2 x^2 \cos^2 \delta = A^2 B^2 \sin^2 \delta - B^2 x^2 \sin^2 \delta$$

$$\Rightarrow B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \delta$$

اگر $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ باشد، معادله حرکت به معادله آشنای بیضی تبدیل می‌شود:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad \delta = \pm \frac{\pi}{2}$$

و چنانچه در این حالت $A=B$ باشد، حرکت دایره‌ای خواهیم داشت.

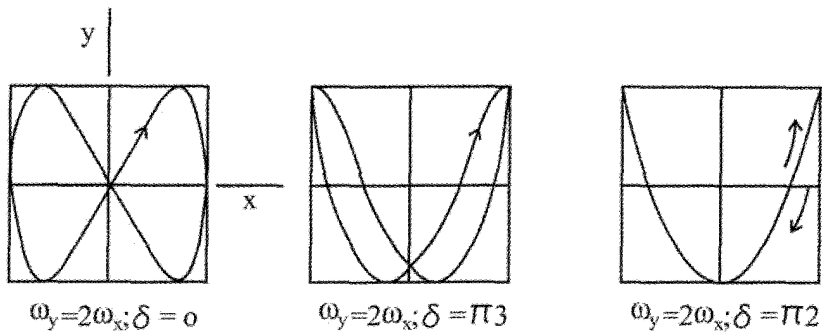
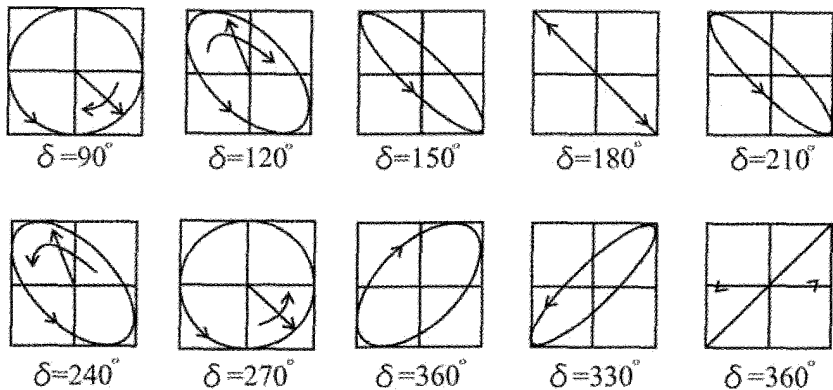
نتیجه جالب دیگر هنگامی است که $\delta = 0$ باشد (و یا $\delta = \pm \pi$): آنگاه:

$$Bx^2 - 2ABxy + A^2 y^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A} x, \quad \delta = 0$$

$$y = -\frac{B}{A} x, \quad \delta = \pm \pi$$

در شکل زیر معادله حرکت برای مقادیر مختلف δ رسم شده است. در حالت کلی طرح‌های حاصل،

اشکال لیسازو نامیده می‌شوند.



شکل (۱-۵)

۳-۵. حرکت در اثر نیروی مرکزی

نیروی مرکزی نیرویی است که به شکل برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{n}F(r) \quad (۱۱-۵)$$

که در آن \hat{n} بردار یکه در راستای \vec{r} است. از نظر فیزیکی چنین نیرویی نمایانگر جذب (اگر $F(r) < 0$ باشد) یا دفع است (چنانچه $F(r) > 0$ باشد). بدین ترتیب طبق این تعریف هیچ جهت متمایزی در فضا وجود ندارد و سیستم از نظر دورانی ناورد است. در اغلب حالت‌ها نیروی بر همکنش دو ذره از نوع نیروی مرکزی است، یعنی وقتی یکی از دو ذره در مبدأ قرار می‌گیرد، نیروی وارد بر دیگری با معادله (۷-۵) داده می‌شود. نیروی گرانشی وارد بر سیاره‌های منظومه شمسی از سوی خورشید، یا جاذبه الکتریکی وارد بر الکترون توسط هسته اتم از نوع نیروی جاذبه مرکزی است.

نیروی میان پروتن یا ذره آلفا و یک هسته دیگر نیروی دافعه مرکزی است. نوع بسیار مهم نیروی مرکزی، نیروی $F(\mathbf{r})$ بطور معکوس با r^2 متناسب است. در این قسمت نخست به بیان روش کلی حل مسئله ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی مرکزی است می‌پردازیم. آنگاه در بخش بعد مهمترین نوع این نیروها یعنی $\frac{1}{r^2}$ و حرکت کپلری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این بحث را با استناد به قوانین بنیادی نیوتن انجام می‌دهیم. از آنجا که در تمام مثال‌های مطرح شده هر دو ذره در حال برهمکنش در حال حرکت هستند مسئله‌ای که حل می‌کنیم حالت ایده‌آل مسئله واقعی است و هنگامی معتبر است که بتوان یکی از دو ذره را عملاً در مبدأ ساکن گرفت. این حالت وقتی است که یکی از ذره‌ها بسیار سنگین‌تر از دیگری است. از آنجا که مقدار نیروی وارد بر دو ذره بنابر قانون سوم نیوتن برابر است، شتاب ذره سنگین بسیار کوچکتر از شتاب دیگری است، و از حرکت ذره سنگین در مقایسه با حرکت ذره سبک‌تر می‌توان صرف‌نظر کرد. در فصل‌های بعد در می‌یابیم که با اندکی جرح و تعدیل می‌توان پاسخ را چنان سازگار کرد که پاسخ دقیق مسئله حرکت دو ذره حتی با جرم برابر نیز به دست آید.

در مورد نیروی مرکزی، گشتاور آن صفر است و در نتیجه بردار اندازه حرکت زاویه‌ای به دور هر محوری که از مرکز نیرو می‌گذرد ثابت است. چنانچه بردار اندازه حرکت زاویه‌ای را با \vec{L} و گشتاور نیرو را با \vec{N} نمایش دهیم، آنگاه

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \hat{n}F(r) = 0 \quad (12-5)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{ثابت}$$

نتیجه مهم دیگر در مورد نیروهای مرکزی اینکه تابع پتانسیل $V(\mathbf{r})$ در واقع تابع فاصله بین جسم مورد بررسی و مرکز نیرو است، یعنی؛

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{r_s}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_s}^r \hat{n}F \cdot d\vec{r} = - \int_{r_s}^r F dr = V(r) \quad (12-5)'$$

در ادامه بحث آگاهی از آنالیز برداری و آنچه در فصل اول این مجموعه آمده است مفید و در عین حال ضروری است و مطالعه آن توصیه می‌شود. چون بسیاری از نیروهای فیزیکی نیروهای مرکزی هستند مفهوم اندازه حرکت زاویه‌ای و پایدار بودن آن اهمیت خاص دارد. از این خاصیت بلافاصله

نتیجه می‌گیریم که حرکت به تمامی در یک صفحه صورت می‌گیرد، یعنی همیشه \vec{V}, \vec{r} هر دو باید در صفحه‌ای ثابت که عمود بر \vec{L} است قرار گیرند.

بدین ترتیب موضوع به مسئله حرکت در صفحه با دو معادله دیفرانسیل و چهار شرط اولیه تبدیل می‌شود. اگر مختصات قطبی (r, θ) را در صفحه حرکت انتخاب کنیم معادلات حرکت بر راستای θ, r چنین است:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \quad (۱۳-۵)$$

$$mr\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} = 0 \quad (۱۴-۵)$$

معادله (۱۴-۵) را در r ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta} = \frac{dl}{dt} = 0 \quad (۱۵-۵)$$

این معادله بقای اندازه حرکت زاویه‌ای را نسبت به مبدأ بیان می‌کند و نتیجه‌ای از معادله (۱۲-۵) است. انتگرال گیری آن شکل کلی \vec{L} را می‌دهد.

$$mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{ثابت} \quad (۱۶-۵)$$

مقدار ثابت ℓ (که بزرگی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای را نشان می‌دهد) از شرایط اولیه مسئله تعیین می‌شود. انتگرال دیگر از معادلات (۱۳-۵) و (۱۴-۵) با توجه به پایستگی نیروی مرکزی چنین می‌شود:

$$T + V = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) = E \quad (۱۷-۵)$$

که $V(r)$ از رابطه زیر برای نیروی مرکزی به دست می‌آید:

$$\vec{V}(\vec{r}) = V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F}(\vec{r}) dr \quad (۱۸-۵)$$

و E ثابت انرژی است که این نیز از شرایط اولیه به دست می‌آید. اگر θ را از معادله (۱۶-۵) استخراج کنیم، انرژی چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2}mr^{\dot{r}^2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E \quad (۱۹-۵)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)} \quad (۲۰-۵)$$

بنابراین

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (۲۱-۵)$$

از این معادله $r(t)$ حاصل می‌شود. سپس $\theta(t)$ را از معادله (۱۶-۵) به دست می‌آوریم:

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{\ell}{mr^2} dt \quad (۲۲-۵)$$

و یا با تغییر متغیر مناسب $\theta(t)$ را به جای رابطه (۲۲-۵) از رابطه زیر استخراج می‌کنیم:

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$$

و از رابطه (۱۶-۵) و (۲۰-۵) خواهیم داشت:

$$\theta(r) = \theta_0 + \int \frac{\pm \left(\frac{\ell}{r^2} \right) dr}{\sqrt{2m(E - V - \ell^2 / 2mr^2)}} \quad (۲۲-۵)$$

بدین ترتیب پاسخ معادلات (۱۳-۵) و (۱۴-۵) برحسب چهار پارامتر ثابت E, ℓ, r_0, θ_0 به دست می‌آید. این ثابت‌ها همگی با معلوم بودن مکان و سرعت اولیه تعیین می‌شوند.

این روش شبیه عملی است که در مورد حرکت یک بعدی صورت گرفت و برحسب انتگرال انرژی

بنیان شده بود. در اینجا r نقش x را داراست. جمله $\dot{\theta}$ در انرژی جنبشی نقش جمله اضافی انرژی پتانسیل را دارد. از قرار دادن معادله (۱۶-۵) در معادله (۱۳-۵) این تشابه بیشتر آشکار می‌شود:

$$m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3} = F(r) \quad (۲۳-۵)$$

و یا

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{\ell^2}{mr^3} \quad (۲۴-۵)$$

این معادله دقیقاً شکل معادله حرکت یک بعدی ذره‌ای را دارد که علاوه بر نیروی واقعی $F(r)$ بر آن نیروی گریز از مرکز $\frac{\ell^2}{mr^3}$ وارد می‌شود. این جمله یک عبارت موهومی و مجازی است با بعد نیرو. اگر معادله اخیر را به صورت مسئله حرکت یک بعدی تلقی کنیم انرژی پتانسیل مؤثر وابسته به نیروی سمت راست چنین می‌شود.

$$'V'(r) = -\int F(r)dr - \int \frac{\ell^2}{mr^3}dr = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad (۲۵-۵)$$

جمله دوم در معادله (۲۵-۵) مربوط به نیروی گریز از مرکز است. بدین ترتیب $'V'(r)$ پتانسیلی مجازی است که تابع انرژی پتانسیل حقیقی $V(r)$ را با جمله انرژی وابسته به حرکت زاویه‌ای به دور مرکز نیرو ترکیب می‌کند. علت اینکه توانسته‌ایم پاسخ کامل مسئله را براساس فقط دو انتگرال یا ثابت حرکت (بدون 1 و E) به دست آوریم این است که معادلات حرکت فاقد مختصات θ است. بنابراین ثابت بودن 1 کافی است تا کمک کند θ را به تمامی از معادله (۱۳-۵) حذف کنیم و مسئله را به صورت مسئله معادل و هم ارز حرکت یک بعدی در آوریم. بررسی مسئله حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی از طریق شیوه لاگرانژی را در فصل یازدهم ملاحظه کنید.

در عمل گاهی اوقات محاسبه انتگرال معادله (۲۱-۵) دشوار است و حل معادله برای $r(t)$ مشکل می‌شود. گاه یافتن مسیر ذره به صورت $r(\theta)$ ساده‌تر از یافتن حرکت به صورت تابعی از زمان است. با معلوم بودن $r(\theta)$ می‌توان مسیر ذره را مشخص کرد. بدین منظور از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \frac{1}{r}, r = \frac{1}{u}$$

$$\dot{r} = -\frac{\gamma}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -\frac{\ell}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (26-5)$$

$$\ddot{r} = -\frac{\ell}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{\ell^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (27-5)$$

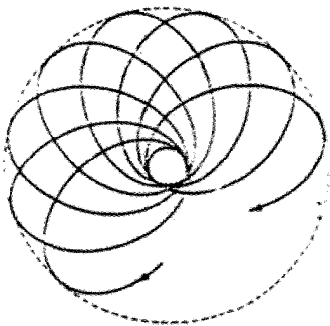
از قرار دادن \ddot{r} ، \dot{r} در معادله (۲۴-۵)، و انجام عملیات ساده معادله دیفرانسیلی برای مسیر یا مدار ذره برحسب $u(\theta)$ به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{\gamma}{u}\right) \quad (28-5)$$

در حالت $\ell = 0$ ، معادله (۲۸-۵) مفهوم ندارد، اما از معادله (۱۶-۵) می‌بینیم که در این حالت θ ثابت است، و مسیر خطی مستقیم است که از مبدأ می‌گذرد. یادآور می‌شویم که از طریق رسم می‌توانیم تعیین کنیم که برای کل انرژی E حرکت r دوره‌ای است یا غیر دوره‌ای و نیز می‌توانیم جای نقاط بازگشت را تعیین و چگونگی تغییر سرعت \dot{r} را در طی حرکت با تقریب محاسبه کنیم. اگر $V'(r)$ در نقطه r_0 دارای می‌نیم باشد، آنگاه وقتی انرژی E کمی بزرگتر از $V'(r_0)$ باشد، r تقریباً نوسان‌های هارمونیک کم‌دامنه‌ای در دو سوی r_0 با فرکانس زاویه‌ای

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} \left. \frac{d^2 V'}{dr^2} \right|_{r=r_0} \quad (29-5)$$

انجام می‌دهد. البته در همین زمان ذره با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$ به دور مرکز نیرو می‌چرخد. میزان گردش با افزایش r کاهش می‌یابد. وقتی حرکت r دوره‌ای است، دوره حرکت نوسانی به طور کلی با دوره گردش یکسان نیست. بنابراین ممکن است مدار بسته نباشد، حتی اگر در ناحیه‌ای معین از فضا باشد و حرکت هم دوره‌ای باشد.



شکل (۵-۲)

نوع ارتباط و وابستگی فرکانس نوسان‌های کوچک به دور ترازمندی پایدار و فرکانس حرکت مداری ذره به دور مرکز جاذبه را می‌توان به راحتی به دست آورد. در زیر به یک نمونه از این وابستگی‌ها اشاره می‌کنیم:

مثال ۵-۱. فرکانس نوسان‌های کوچک را به دور حرکت دایره‌ای پابرجا برای پتانسیل وابسته به نیروی عکس مجذور فاصله بیابید و نشان دهید که برابر با فرکانس گردش است (مسئله ۳۰- فصل سوم سایمون).

$$F(r) = \frac{k}{r^2}, \quad k < 0 \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow V'(r) = \frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

مشتق اول و دوم پتانسیل مؤثر را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \frac{dV'}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{k}{r_0^2} - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0 \Rightarrow r_0 = -\frac{l^2}{mk}$$

$$\left. \frac{d^2V'}{dr^2} \right|_{r=r_0} = \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3l^2}{mr_0^4} = \frac{1}{r_0^3} \left(\frac{2k}{r_0} + \frac{3l^2}{mr_0} \right) = \frac{m^2 k^2}{l^4} \left[\frac{2k(mk)}{-l^2} + \frac{3l^2}{m} \frac{m^2 k^2}{l^4} \right]$$

$$= \frac{m^{\nu} k^{\nu}}{l^{\nu}} \left(-\frac{\nu m k^{\nu}}{l^{\nu}} + \frac{\nu m k^{\nu}}{l^{\nu}} \right) = \frac{m^{\nu} k^{\nu}}{l^{\nu}} = k'$$

اکنون فرکانس گردش و فرکانس نوسان‌های کوچک به دور ترازندی را محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k'}{m}}, \quad k' = \left. \frac{d^2 V}{dr^2} \right|_{r=r_0} \quad (30-5)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{m^{\nu} k^{\nu}}{m l^{\nu}}} = \frac{m k^{\nu}}{l^{\nu}}$$

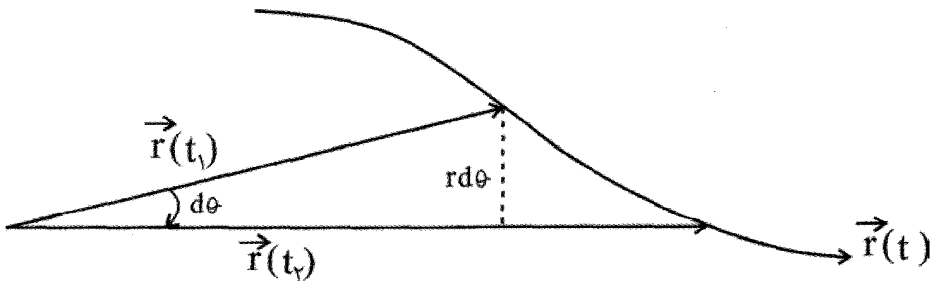
$$\omega_{\theta} = \frac{l}{m r_0^{\nu}} = \frac{l}{m} \left(\frac{m k}{l^{\nu}} \right)^{\nu} = \frac{m k^{\nu}}{l^{\nu}}$$

چنانچه مشاهده می‌شود دوره گردش با دوره نوسان‌های کوچک در r با یکدیگر مساوی هستند.

می‌توان نشان داد که در این حالت برای E نزدیک به می‌نیم پتانسیل (یعنی $-\frac{1}{2} k^{\nu} m / l^{\nu}$)

مدار منحنی بسته‌ای است که مبدأ آن تا اندازه‌ای از مرکز دور است. به واقع، برای تمام مقادیر منفی E مدار بیضی است.

چنانچه حرکت دوره‌ای و بسته باشد، دوره حرکت مداری متناسب با مساحت مدار است. این موضوع را می‌توان از بحث زیر و شکل وابسته به آن دریافت:



شکل (۳-۵)

وقتی ذره به اندازه زاویه کوچک $d\theta$ حرکت می‌کند، سطح جارو شده توسط شعاعی که مبدأ را به ذره می‌پیوندد چنین می‌شود:

$$ds = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (۳۱-۵)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{2m}$$

این نتیجه برای هر ذره‌ای که تحت تأثیر کنش نیروی مرکزی حرکت می‌کند صحیح است. اگر حرکت دوره‌ای باشد، آنگاه از انتگرال‌گیری در دوره کامل حرکت τ برای سطح مدار داریم:

$$S = \frac{\ell}{2m} \tau \quad (۳۲-۵)$$

اگر مدار شناخته شده دوره گردش τ را می‌توان از رابطه فوق حساب کرد.

۴-۵. قضیه ویریال (Virial theorem)

یکی از نتایج ماهیت آماری، قضیه ویریال است که در زیر به اثبات آن می‌پردازیم. تفاوت این قضیه با بقیه قضایایی که تاکنون مطرح کرده‌ایم ماهیت آماری آن است، یعنی با متوسط زمانی کمیت‌های مختلف مکانیکی سروکار دارد. مجموعه‌ای از ذرات را در نظر می‌گیریم که بردارهای مکان \vec{r}_α و اندازه حرکت‌های \vec{p}_α آنها هر دو محدود هستند (یعنی، در تمام زمان‌ها معین باقی می‌مانند). کمیت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$G = \sum_{\alpha} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha \quad (۳۳-۵)$$

جمع روی تمام ذرات صورت می‌گیرد. مشتق زمانی G چنین است:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\vec{\dot{p}}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha + \vec{p}_\alpha \cdot \vec{\dot{r}}_\alpha \right)$$

اما در مورد جملات فوق داریم:

$$\sum_{\alpha} \vec{\dot{r}}_\alpha \cdot \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha \vec{\dot{r}}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha v_\alpha^2 = 2T$$

همچنین،

$$\sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}$$

و در نهایت

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} = \tau T + \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}$$

اگر مقدار متوسط $\frac{dG}{dt}$ را در فاصله زمانی τ محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$\left\langle -\frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\circ}^{\tau} \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(\circ)}{\tau} \quad (34-5)$$

چنانچه حرکت سیستم دوره‌ای باشد و τ مضرب درست این دوره باشد، آنگاه $G(\tau) = G(\circ)$

است و $\left\langle \dot{G} \right\rangle = 0$ می‌شود. این خاصیت از ویژگی‌های اصلی حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی

است که یک جسم در حرکت محدود و مقید دائماً به دور مرکز نیرو در گردش است. اما حتی اگر سیستم هیچ ویژگی دوره‌ای از خود نشان ندهد، آنگاه به دلیل اینکه G بنا به فرض تابعی محدود

است، می‌توان $\left\langle \dot{G} \right\rangle$ را با بزرگ اختیار کردن τ ، به اندازه مطلوب کوچک گرفت. بنابراین متوسط

زمانی سمت راست معادله (34-5) را همیشه می‌توان صفر گرفت (یا حداقل نزدیک صفر اختیار کرد).

از اینرو در حد داریم:

$$\left\langle \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle$$

در سمت چپ این رابطه $\vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}$ دو برابر انرژی جنبشی است. در سمت راست، \vec{P}_{α} برابر نیروی

\vec{F}_{α} وارد بر ذره α است. در نتیجه

$$\left\langle \tau \sum_{\alpha} T_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle$$

جمع روی T_α برابر است با T انرژی جنبشی کل سیستم. بدین ترتیب نتیجه کلی زیر را خواهیم داشت:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle = +\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \vec{\nabla} V \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle \quad (35-5)$$

سمت راست این معادله توسط کلوژیوس (۱۸۲۲-۱۸۸۸)، ویریال (Virial) سیستم نامیده شد و قضیه ویریال چنین بیان می‌دارد که: «متوسط انرژی جنبشی سیستم ذرات برابر است با ویریال آن». از کاربردهای این قضیه، استنتاج معادله حالت برای گازهای کامل است. بدین منظور به کتاب ماریون (فصل هفتم - صفحه ۲۸۴)، و یا گلدستین (فصل سوم) مراجعه کنید. برای یک ذره در پتانسیل مرکزی خواهیم داشت:

$$\langle T \rangle = +\frac{1}{2} \left\langle \mathbf{r} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle$$

چنانچه معادله پتانسیل را به صورت $V = ar^{n+1}$ فرض کنیم، آنگاه:

$$\langle T \rangle = +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(r^{n+1} \right) \mathbf{r} = +\frac{1}{2} (n+1) r^{n+1} = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle \quad (36-5)$$

و بالاخره با انتخاب $n = -2$ برای نیروی مرکزی متناسب با عکس مجذور فاصله، خواهیم داشت:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle \quad (37-5)$$

۵-۵. مسئله کپلر- نیروی مرکزی متناسب با عکس مجذور فاصله

مهمترین مسئله سه بعدی حرکت تحت تأثیر نیرویی مرکزی است که به طور معکوس با مجذور فاصله آن از مرکز نیرو متناسب است:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{n} \quad (38-5)$$

و انرژی پتانسیل

$$V(\mathbf{r}) = \frac{k}{r} \quad (39-5)$$

فاصله مبدأ پتانسیل (تراز پتانسیل)، r_g را بینهایت می‌گیریم تا ثابت اضافی در $V(r)$ حذف شود. به‌عنوان مثال، نیروی گرانشی میان دو جرم m_1, m_2 به فاصله r از یکدیگر با معادله (۳۸-۵) داده می‌شود، که در آن

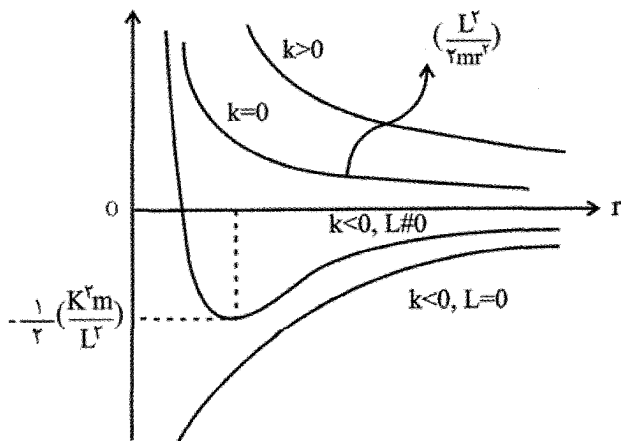
$$k = -Gm_1m_2 \quad ; \quad G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (40-5)$$

است. k منفی است زیرا نیروی گرانشی از نوع جاذبه است. مثال دیگری نیروی دافعه الکترواستاتیکی بین دو بار همنام q_1, q_2 است، که باز با معادله (۳۸-۵) داده می‌شود و در آن $k = q_1q_2$ است. از نظر تاریخی اولین مسائلی که در مورد آنها مکانیک نیوتنی به کار گرفته شد حرکت سیارات در اثر جاذبه گرانشی خورشید و حرکت قمرها به دور سیارات بود. موفقیت این نظریه در محاسبه چنین حرکتاتی سبب پذیرش اولیه آن شد.

۵-۵-۱. معادلات حرکت

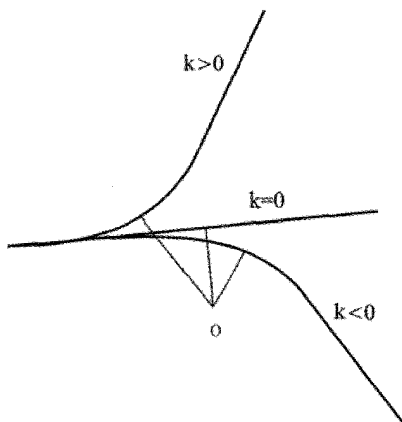
در اینجا نخست ماهیت مدارهایی را تعیین می‌کنیم که بوسیله قانون عکس مجذور فاصله داده شده است. در شکل زیر پتانسیل موثر $V'(r)$ رسم شده است:

$$V'(r) = \frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad (41-5)$$



شکل (۴-۵)

برای نیروی دافعه ($k > 0$) حرکت دوره‌ای برای ذره وجود ندارد. فقط انرژی کل مثبت E ممکن است و ذره از بینهایت به نقطه بازگشت می‌آید و دوباره به بینهایت بر می‌گردد. برای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای داده شده، r نقطه بازگشت بیش از r متعلق به $k = 0$ (حالت بدون نیرو) است؛ در حالت اخیر مدار خط مستقیم است. برای نیرو جاذبه ($k < 0$) یا $k = 0$ ، نیز حرکت نامحدود است چنانچه $E > 0$ باشد؛ اما در این حالت r نقطه بازگشت کوچکتر از r متعلق به $k = 0$ باشد؛ اما در این حالت r نقطه بازگشت کوچکتر از r متعلق به $k = 0$ است. در نتیجه مدارها همانند شکل زیر خواهند بود.



شکل (۵-۵)

در این شکل خطوط نازک شعاع نقطه بازگشت یا فاصله حضيض را نشان می‌دهند، یعنی

$$r_{\text{نزدیکترین فاصله ذره از مرکز جذب یا دفع، برای } k < 0 \text{ و } 0 < E < \frac{1}{2} \frac{k^2 m}{\ell^2} \text{، مختصات } r$$

$$\text{میان دو نقطه بازگشت نوسان می‌کند. برای } E = -\frac{1}{2} \frac{mk^2}{\ell^2} \text{ ذره بر دایره‌ای به شعاع}$$

$$r_0 = \frac{\ell^2}{-km} \text{ حرکت می‌کند } (k < 0) \text{، محاسبه نشان می‌دهد (مثال ۵-۱) که دوره نوسان‌های}$$

$$\text{کوچک در } r \text{ با دوره گردش یکسان است، و بنابراین برای } E \text{ نزدیک به } -\frac{1}{2} \frac{k^2 m}{\ell^2} \text{ مدار یک}$$

منحنی بسته است که مبدأ آن تا اندازه‌ای از مرکز دور است.

می‌توان نشان داد که مدار برای تمامی مقادیر منفی E بیضی است، اگر $\ell \neq 0$ باشد. چنانچه $\ell = 0$ باشد مسئله به حرکت یک بعدی جسم در حال سقوط تبدیل می‌شود. در مورد بررسی حرکت و تعیین معادلات حرکت از معادله (۵-۲۸) شروع می‌کنیم و در مورد نیروی جاذبه متناسب با عکس مجذور فاصله خواهیم داشت.

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{\ell^2} \quad (۴۲-۵)$$

که کاملاً مشابه معادله نوسانگر هارمونیک با فرکانس واحد است وقتی تحت تأثیر نیروی ثابت قرار می‌گیرد. در اینجا θ نقش r را دارد. پاسخ عمومی معادله همگن چنین است:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = 0$$

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) \quad (۴۳-۵)$$

A, θ_0 ثابت‌های دلخواه هستند. پاسخ بدیهی و خاص معادله ناهمگن چنین است:

$$u = -\frac{mk}{\ell^2} \quad (۴۴-۵)$$

در نتیجه پاسخ عمومی معادله (۴۲-۵) چنین می‌شود:

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mk}{\ell^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \equiv B + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (۴۵-۵)$$

که معادله یک مقطع مخروطی است که کانون آن در $r = 0$ است. ثابت θ_0 موقعیت مدار را در صفحه تعیین می‌کند و زاویه میان محور X و خطی است که مبدأ را به حضيض (نزدیکترین فاصله منحنی از مبدأ) وصل می‌کند. ثابت A که ممکن است مثبت گرفته شود، نقاط بازگشت حرکت r را تعیین می‌کند. این نقاط به ازای $\theta - \theta_0 = 0$ یا $\theta - \theta_0 = \pi$ حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mk}{\ell^2} + A, \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{mk}{\ell^2} = -A \quad (۴۶-۵)$$

اگر $A > -\frac{mk}{\ell^2}$ باشد، که الزاماً برای $k > 0$ چنین است، آنگاه فقط یک نقطه بازگشت r_1

وجود دارد، چرا که r_2 نمی‌تواند منفی باشد. همچنین $A < \frac{mk}{\ell^2}$ امکان‌پذیر نیست زیرا در این صورت r_1 نمی‌تواند مثبت باشد. برای E داده شده، نقاط بازگشت پاسخ معادله زیر است:

$$V'(r) = \frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} = E \quad (47-5)$$

با پاسخ‌های،

$$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2} = -\frac{mk}{\ell^2} \pm \left[\left(\frac{mk}{\ell^2} \right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (48-5)$$

از مقایسه (۴۶-۵) با معادله (۴۸-۵) می‌بینیم که A بر حسب انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای چنین است:

$$A^2 = \frac{m^2 k^2}{\ell^4} + \frac{2mE}{\ell^2} \quad (49-5)$$

اکنون می‌توان برحسب شرایط اولیه در مورد نوع مدار بحث کرد: در مورد بیضی، طبق تعریف خواهیم داشت:

$$r + r' = 2a$$

$$r'^2 = r^2 + c^2 + 2cr \cos \theta$$

$$r' = 2a - r$$

$$(2a - r)^2 = r^2 + c^2 + 2cr \cos \theta$$

$$\Rightarrow 4r(a + c \cos \theta) = 4(a^2 - c^2) = 4b^2$$

با انتخاب $\varepsilon = \frac{c}{a}$ و $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} = u = \frac{a + c \cos \theta}{b^2} = \frac{a + a\varepsilon \cos \theta}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \cos \theta = B + A \cos \theta$$

و یا

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad (50-5)$$

که در آن،

$$B = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad (51-5)$$

مشاهده می‌شود که در حالت بیضی $B > A$ است (چرا که $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ است). به همین ترتیب می‌توان شکل‌های هذلولی و سهمی را نیز تحقیق کرد.

معادله (۴۵-۵) برای مدار ذره‌ای که نیروی وارد بر آن از قانون عکس مجذور فاصله پیروی

می‌کند، برای مقطع مخروطی دارای شکل عمومی $\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta - \theta_0)$ است. با به

کارگیری معادله

$$A^2 = \frac{m^2 k^2}{\ell^4} + \frac{2mE}{\ell^2} \quad (49-5)$$

$$B = -\frac{mk}{\ell^2} \quad (52-5)$$

$$A = \left(B^2 + \frac{2mE}{\ell^2} \right)^{1/2} \quad (53-5)$$

خروج از مرکز در تمام حالت‌ها از جمله بیضی، $\varepsilon = \frac{A}{|B|}$ است، پس

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2} \right)^{1/2} \quad (54-5)$$

بدین ترتیب، برای نیروی جاذبه ($k < 0$)، مدار بیضی، سهمی یا هذلولی است بسته به اینکه $E < 0$ ، $E = 0$ یا $E > 0$ باشد؛ چنانچه هذلولی باشد شاخه مثبت است.

بنابر رابطه (۵-۵۴) در حالت بیضی باید E منفی باشد تا $1 < \epsilon$ شود. در توجیه دیگر، می‌دانیم یکی از خواص بیضی این است که هیچ یک از نقاط آن در بینهایت قرار نمی‌گیرد (منحنی بسته است). برای اینکه نقطه‌ای از مسیر در بینهایت قرار گیرد (حالت سهمی یا هذلولی) انرژی پتانسیل در آن نقطه صفر تعریف می‌شود و مطابق رابطه $E = \frac{1}{2}mv^2 + V$ باید E مثبت یا حداقل صفر باشد تا شرایط هذلولی و سهمی را نتیجه دهد. بدین ترتیب در مورد بیضی باید E منفی شود. برای نیروی دافعه ($k > 0$)، باید $E > 0$ باشد و مدار تنها می‌تواند شاخه منفی هذلولی باشد. برای مدارهای بیضی و هذلولی نصف قطر بزرگ a از رابطه

$$a = \left| \frac{k}{2E} \right| \quad (5-55)$$

به دست می‌آید. علت این امر را در زیر جستجو می‌کنیم: نقاط بازگشت در مدار بیضی از روابط (۵-۴۶) یا (۵-۴۷) و (۵-۴۸) به دست می‌آیند. در ضمن مجموع دو ریشه (۵-۴۸) مقدار $2a$ را می‌دهد:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

اما

$$r_1 = \frac{1}{\frac{-mk}{\ell^2} + A}, \quad r_2 = \frac{1}{\frac{-mk}{\ell^2} - A} \quad (5-56)$$

بنابراین

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{1}{\frac{-mk}{\ell^2} + A} + \frac{1}{\frac{-mk}{\ell^2} - A} = \frac{k}{E}$$

و در نهایت رابطه (۵-۵۵) نتیجه می‌شود.

جدول زیر انواع مختلف حرکت ناشی از نیروی جاذبه گرانشی را نشان می‌دهد. در این جدول نوع

مدار بر حسب مقدار انرژی از روی معادله (۵-۵۴) در واحد $\frac{mk^2}{2\ell^2}$ تقسیم‌بندی شده است.

انواع مختلف حرکت ممکن در اثر جاذبه گرانشی

انرژی E برحسب		نوع مدار
$\frac{mk^2}{2\ell^2}$ واحد		
$E < -1$		غیر ممکن
$E = -1$	$\varepsilon = 0$	مدار دایره‌ای
$-1 < E < 0$	$\varepsilon < 1$	مدار بیضی
$E = 0$	$\varepsilon = 1$	سهمی، نامحدود
$E > 0$	$\varepsilon > 1$	هذلولی، نامحدود

در حالتی که مدار بیضی است دوره گردش را می‌توان از معادله زیر به دست آورد:

$$\tau = \frac{\gamma m}{\ell} \pi ab = \frac{\gamma m}{\ell} \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2 k^2 m}{2|E|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (57-5)$$

یا از طریق رابطه (55-5).

$$\tau^2 = 4\pi^2 a^3 \left| \frac{m}{k} \right| \quad (58-5)$$

در مورد جسمی کوچک به جرم m که تحت اثر نیروی جاذبه گرانشی جسمی بزرگ به جرم M در حرکت است دوره گردش چنین است:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3 \quad (59-5)$$

یعنی مجذور گردش سیاره با توان سوم نصف قطر بزرگ مدار متناسب است.

۲-۵-۵. قوانین حرکت کپلر:

در مورد نیروی جاذبه گرانشی از معادله (45-5) با انتخاب $(k < 0)$ به $p = \frac{-\ell^2}{mk}$

عنوان ضریب مقیاس (scale factor)، و $\varepsilon = PA$ ، خواهیم داشت:

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{-mk}{\ell^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (60-5)$$

$$pu = \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0) \quad (61-5)$$

A ضریبی است که به انرژی کل وابسته است. ثابت P دارای بعد طول است و اندازه واقعی مدار را تعیین می‌کند. با نوشتن (61-5) بر حسب مختصات دکارتی

$$P = r + \varepsilon r \cos(\theta - \theta_0) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x$$

یا

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon px + y^2 - p^2 = 0$$

در مورد بیضی، $0 < \varepsilon < 1$ ، خواهیم داشت:

$$(1 - \varepsilon^2) \left(x + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

که به شکل استاندارد زیر در می‌آید:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (62-5)$$

معادله فوق شکل استاندارد یک بیضی است با مرکز واقع در $x_c = \frac{-\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}$ و نیمه محورهای

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

در آن نقاط

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

باشد. برای حرکت به دور خورشید، r_{\max} به نام اوج (aphelion) و r_{\min} به نام حضیض (perihelion) خوانده می‌شود. بدین ترتیب توانستیم براساس معادلات حرکت نیوتن، قوانین

کیپلر^۱ را برای حرکت سیارات به صورت زیر اثبات کنیم. یادآور می‌شویم که قوانین سه گانه کیپلر در حوالی سال ۱۶۱۰ منتشر شد و در پایه‌ریزی و پیشرفت کارهای ارزشمند نیوتن سهم بسیار بزرگی داشت.

- ۱- سیارات بر بیضی‌هایی حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از دو کانون آن قرار دارد.
 - ۲- در زمان‌های برابر، مساحت‌های جارو شده توسط شعاع حامل از خورشید به سیاره برابر است.
 - ۳- توان سوم نصف قطر بزرگ حرکت مداری با مجذور دوره گردش سیاره متناسب است.
- در جدول زیر بعضی ویژگی‌های مربوط به اجرام و عناصر اصلی در منظومه شمسی را مشاهده می‌کنید.^۲

بعضی ویژگی‌های اجرام اصلی در منظومه شمسی

نام	نیمه محور بزرگ مدار (بر حسب واحد نجومی) ^۴	دوره حرکت (سال)	خروج از مرکز	جرم (بر حسب جرم زمین) ^۳
Sun	-	-	-	۳۳۳/۴۸۰
Mercury	۰/۳۸۷۱	۰/۲۴۰۸	۰/۲۰۵۶	۰/۰۵۵۳
Venus	۰/۷۲۳۳	۰/۶۱۵۲	۰/۰۰۶۸	۰/۸۱۵۰
Earth	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۱۶۷	۱/۰۰۰
Eros (Asteroid)	۱/۴۵۵۳	۱/۷۶۱۰	۰/۲۲۳۰	۲×10^{-9} (۵)
Mars	۱/۵۲۳۷	۱/۸۸۰۹	۰/۰۹۳۴	۰/۱۰۷۴
Ceres (Asteroid)	C	۴/۶۰۳۵	۰/۰۷۶۵	۱/۸۰۰۰ (۵)
Jupiter	۵/۲۰۲۸	C	۰/۰۴۸۳	۳۱۷/۸۹
Saturn	۹/۵۳۸۸	۲۹/۴۵۶	۰/۰۵۶۰	?
Uranus	۱۹/۱۹۱	۸۴/۰۷	۰/۰۴۶۱	۱۴/۵۶
Neptune	۳۰/۰۶۱	۱۶۴/۸۱	۰/۰۱۰۰	۱۷/۱۵
Pluto	۳۹/۵۲۹	۲۴۸/۵۳	۰/۲۴۸۴	۰/۰۰۲
Halley (comet)	۱۸	۷۶	۰/۹۶۷	$\approx 10^{-10}$

۱- این قوانین نخستین بار توسط یوهانس کیپلر (۱۶۲۰-۱۵۷۱) در سال ۱۶۰۹ منتشر شد، کسی که به طور گسترده‌ای کارهای تیکوبراهه (۱۶۰۱-۱۵۴۶) را درباره سیاره مریخ مورد بازنگری قرار داد. قانون مدارهای بیضی در ۱۶۰۶ کشف شد و در ۱۶۰۹ به چاپ رسید. قانون سوم کیپلر در ۱۶۱۹ به چاپ رسید.

۲- به کتاب ماریون، چاپ چهارم ۱۹۹۵، صفحه ۳۰۸ مراجعه کنید.

۳- جرم زمین تقریباً برابر $10^{24} \times 5/976$ کیلوگرم است.

۴- واحد نجومی (A.U.) طول نصف محور بزرگ مدار زمین است. یک (A.U.) معادل $10^{11} \times 1/459$ متر یا $10^6 \times 93$ مایل است.

۵-۳-۵. استخراج فرمول بینه

عکس مطلب گفته شده در بخش پیش، یعنی نتیجه‌گیری قانون نیروی نیوتن از قوانین کپلر مسئله‌ای ساده‌تر و از نظر تاریخی بسیار مهم است، چرا که به این شیوه بود که نیوتن قانون گرانش را نتیجه گرفت. ما این کار را در زیر انجام می‌دهیم؛ این بررسی به استخراج فرمول بینه منجر می‌شود: سه قانون کپلر را دانسته فرض می‌کنیم. چون مسیر بسته تکرار می‌شود و کار نیروی موجود روی مسیر بسته صفر است، پس نیروی موجود باید پایستار باشد.

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 + V = A(\text{ثابت}) \quad (۶۳-۵)$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{n} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{l} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{اما،}$$

بنابراین،

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] + V = A \quad (۶۴-۵)$$

قانون مساحت به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{ثابت} \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = B \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2} B \quad (۶۵-۵)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{B}{r^2}$$

بنابراین

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{B^2}{r^4} + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] + V = A \quad (۶۶-۵)$$

و یا

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{B^2}{r^4} + \frac{B^2}{r^2} \right] + V = A \quad (۶۶-۵)'$$

برای سهولت فرض می‌کنیم $\frac{\lambda}{r} = u$. آنگاه

$$\frac{du}{d\theta} = -u^{\gamma} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{m}{\gamma} \left[B^{\gamma} u^{\gamma} \left(-\frac{\lambda}{u^{\gamma}} \frac{du}{d\theta} \right)^{\gamma} + u^{\gamma} B^{\gamma} \right] + V = A$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\gamma} \left[u^{\gamma} B^{\gamma} + B^{\gamma} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^{\gamma} + u^{\gamma} B^{\gamma} \right] + V = A \quad (۶۷-۵)$$

از رابطه فوق نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{m}{\gamma} B^{\gamma} \left[\gamma u \frac{du}{d\theta} + B^{\gamma} \frac{d^{\gamma} u}{d\theta^{\gamma}} \frac{du}{d\theta} \right] + \frac{dV}{d\theta} = 0$$

و با فرض

$$F = -\frac{dV}{dr}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = \frac{F}{u^{\gamma}} \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{F}{u^{\gamma}} \frac{du}{d\theta} + m B^{\gamma} \left[u \frac{du}{d\theta} + \frac{d^{\gamma} u}{d\theta^{\gamma}} \frac{du}{d\theta} \right] = 0 \quad \text{آنگاه}$$

و در نهایت، فرمول بینه به شکل زیر به دست می‌آید:

$$F = -\frac{m}{r^{\gamma}} B^{\gamma} \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{d^{\gamma} \left(\frac{\lambda}{r} \right)}{d\theta^{\gamma}} \right) \quad (۶۸-۵)$$

این رابطه می‌گوید اگر معادله مسیر مشخص باشد می‌توان مقدار نیرو را حساب کرد. مثلاً در حرکت سیارات به دور خورشید داریم:

$$\frac{\iota}{r} = \frac{\iota + \varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad (50-5)$$

و در مورد مشتق‌های اول و دوم آن،

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\iota}{r} \right) = \frac{-\varepsilon \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\iota}{r} \right) = \frac{-\varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

بنابراین:

$$F = -\frac{mB^2}{r^2} \left[\frac{\iota + \varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} + \frac{-\varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \right] = -\frac{mB^2}{r^2} \frac{\iota}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

و یا با فرض $\varepsilon^2 = \left(\frac{c}{a} \right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ خواهیم داشت:

$$F = -\frac{mB^2}{r^2} \frac{\iota}{a \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)} = -\frac{mB^2}{r^2} \frac{a}{b^2} \quad (59-5)$$

اما در مورد ضریب B خواهیم داشت:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = B \Rightarrow ds = \frac{\iota}{r} r^2 d\theta = \frac{B}{r} dt$$

$$s = \pi ab = \int_0^T \frac{B}{r} dt = \frac{B}{r} T \Rightarrow B = \frac{r\pi ab}{T} \quad (70-5)$$

و در نتیجه

$$F = -m \frac{\left(\frac{r\pi ab}{T} \right)^2}{r^2} \times \frac{a}{b^2} = -\frac{r\pi^2 m a^3}{r^2 T^2} \quad (71-5)$$

و می‌دانیم، طبق قانون سوم کپلر، $\frac{a^3}{T^2}$ مقدار ثابتی است. پس با فرض $k = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = MG$

نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$F = -\frac{km}{r^2} = -\frac{MmG}{r^2} \quad (۷۲-۵)$$

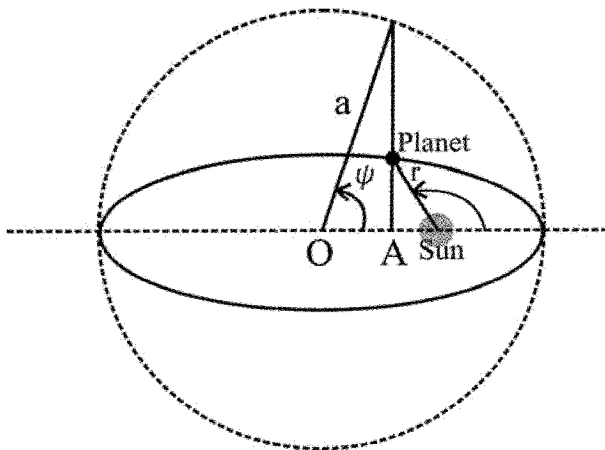
یعنی هر سیاره تحت تأثیر نیرویی که به سمت خورشید متوجه است حرکت می‌کند بطوری که اندازه آن نیرو متناسب با جرم سیاره و عکس مجذور فاصله سیاره تا خورشید است. توجه داشته باشید که قانون مساحت قضیه‌ای عمومی برای حرکت در میدان نیروی مرکزی است، در حالیکه قانون اول (یعنی حرکت سیارات در مدارهای بیضی شکل به دور خورشید در یک کانون) و همچنین قانون سوم به خصوص منحصرأ در مورد نیروی عکس مجذور فاصله به کار می‌رود.

۵-۶. وابستگی زمانی حرکت کپلر - معادله کپلر

درصدیدیم به این پرسش و مشابه آن پاسخ دهیم که چگونه می‌توان مدار یک دنباله‌دار را با به کار بردن فقط مشاهده چند نقطه از وضعیت آن به صورت تابعی از زمان پیدا کرد؟ وقتی سر ادموند هالی در سال ۱۶۸۲ مشاهداتی انجام داد که بعدها منجر به پیدایش دنباله‌دار هالی شد، ۷۶ سال انتظار برای مشاهده و تعیین دوره تناوب حرکت آن امکان‌پذیر نبود. در عوض در ۱۷۰۵ به دنبال یک روش ترسیمی که توسط نیوتن قبلاً طراحی شده بود، هالی مدار کامل این دنباله‌دار را از داده‌های محدودی مشخص کرد که از دوره زمانی کوتاه حرکت آن گرفته بود. دنباله‌دار هالی دقیقاً روز کریسمس ۱۷۵۸، روزی که وی پیش‌بینی کرده بود ظاهر شد. بعداً در ۱۸۰۱، گوس مدار سیارک گمشده سرس (Ceres) را فقط از روی سه مشاهده پیش‌بینی کرد و مشهور شد. سرس فقط یک ماه قبل از اینکه در پشت خورشید ناپدید شود مشاهده شده بود. این سیارک در روز سال نو ۱۸۰۱ دقیقاً در جایی که گوس پیش‌بینی کرده بود دوباره ظاهر شد. حتی پس از حل مسئله تبدیل اندازه‌گیری‌های زمینی از وضعیت دنباله‌دار و سیارک نسبت به ستاره‌های ثابت به صورت \mathbf{r} و ϕ که در چارچوب اینرسی مرکز جرم مطرح شده بود، آنگاه شخص باید داده‌ها را با معادلات $\mathbf{r}(t)$ و $\phi(t)$ برحسب زمان تطبیق دهد. معمولاً از حل مستقیم معادله حرکت

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \quad (۷۳-۵)$$

به صورت $\Gamma(t)$ پرهیز می‌شود، هرچند این کار در یک بعد صورت گرفته است، و T زمان عبور را نیز یافته‌ایم. این مسئله را در مدار بیضی برای حالت جاذبه کپلری بررسی می‌کنیم. مطابق شکل زیر جسم را در مدار بیضی به دور خورشید در نظر می‌گیریم. خورشید را در یکی از کانون‌ها قرار می‌دهیم، و دایره محیط بر این مدار بیضی را رسم می‌کنیم. شعاع دایره محیطی a ، برابر با نصف قطر بزرگ بیضی است. زاویه ψ مطابق شکل ناهنجاری خروج از مرکز (eccentric anomaly) نامیده می‌شود. زاویه سمتی θ نیز ناهنجاری واقعی نام دارد. از شکل چنین بر می‌آید:



شکل (۶-۵)

$$OA = a \cos \psi \quad (۷۴-۵)$$

فاصله A پای عمودی است که از سیاره به محور افقی که از خورشید می‌گذرد رسم شده است. فاصله $|x_c|$ از مرکز O بیضی به خورشید برابر است با $a\varepsilon$ که ε خروج از مرکز بیضی است بنابراین فاصله نقطه A تا خورشید چنین است:

$$a(\varepsilon - \cos \psi) = r \cos(\pi - \theta) = -r \cos \theta \quad (۷۵-۵)$$

این معادله را برای $\cos \theta$ حل می‌کنیم و آن را در معادله مدار قرار می‌دهیم (با انتخاب

$$p = \frac{l^2}{mk} \quad (\text{برای } k > 0) \text{ به عنوان ضریب مقیاس و } \left(\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + \varepsilon \cos \theta)\right)$$

$$\frac{p}{r} = \frac{l^2}{mk} \frac{1}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0) \quad (۷۶-۵)$$

نتیجه چنین می‌شود

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad (۷۷-۵)$$

و نیز مطابق شکل روابط زیر به راحتی به دست می‌آید:

$$x = r \cos \theta = a(\cos \psi - \varepsilon)$$

$$y(\psi) = \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \psi$$

اکنون عبارت زمان را برحسب انتگرال زیر از معادله زمانی حرکت می‌نویسیم (معادله ۵-۲۱)

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}}}, \quad k > 0 \quad (۷۸-۵)$$

برای ساده‌تر کردن شکل انتگرال توجه داریم که برای مدار بیضی و $E = -\frac{k}{2a}$

$$p = \frac{l^2}{mk} = a(1 - \varepsilon^2) \text{ است (به رابطه ۵-۶۲ مراجعه شود). آنگاه}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{1}{2}a(1 - \varepsilon^2)}}, \quad k > 0$$

و پس از اندکی محاسبه نتیجه چنین می‌شود:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^\psi d\psi (1 - \varepsilon \cos \psi) \quad k > 0 \quad (۷۹-۵)$$

این انتگرال زمان عبور را به دست می‌دهد. معمول این است که در $t=0$ سیاره را در وضعیت حضیض فرض می‌کنند. بنابراین $\psi_0 = 0$ است. اگر T را زمان لازم برای رسیدن به هر نقطه دیگری روی

مدار بگیریم، نتیجه نهایی حاصل می‌شود:

$$T(\psi) = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\psi - \varepsilon \sin \psi) \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}} \quad (۸۰-۵)$$

این معادله به نام معادله کپلر (Kepler's equation) معروف است. از معادله (۷۷-۵) با تعیین فاصله زمانی T که از حضيض اندازه‌گیری می‌شود، فاصله $r(\psi(t))$ به دست می‌آید، و سرانجام $\theta(\psi(t))$ از معادله اصلی مدار (۷۶-۵) تعیین می‌شود. اگر دوره مدار و خروج از مرکز نامعلوم باشد، می‌توان آنها را از مشاهده وضعیت و زمان عبور نسبت به هر نقطه حضيض تعیین کرد. از حداقل دو مشاهده با دانستن $r(t_1)$ و $r(t_2)$ ، از معادلات (۷۷-۵) و (۸۰-۵) می‌توان کمک گرفت و دو ثابت مجهول یعنی a و ε را به دست آورد. بدین ترتیب همه چیز در مورد مدار معلوم می‌شود. ψ و ϕ هر کدام در یک دوره کامل مسیر بیضی به اندازه 2π افزایش می‌یابند.

از طریق دو رابطه $r = a(1 - \varepsilon \cos \psi)$ و $r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ می‌توان θ را برحسب ψ به دست آورد:

$$a(1 - \varepsilon \cos \psi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

و در نتیجه

$$\cos \theta = \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi}$$

یا

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \tan \frac{\psi}{2} \quad (۸۱-۵)$$

(*) ۷-۵. پایداری مرهای دایره‌ای (شرط ایجاد مدارهای بسته- قضیه برتران)
در بخش‌های قبل دیدیم که اگر انرژی کل برابر با می‌نیمم انرژی پتانسیل مؤثر شود ($E = V'_{\min}$)، آنگاه مسیر حرکت دایره می‌شود. در حالت کلی مدار دایره‌ای برای یک پتانسیل جاذبه مجاز است زیرا نیروی جاذبه همواره با انتخاب مناسب سرعت شعاعی می‌تواند با یک نیروی مرکز

گریز تعادل کند. بنابراین هر چند مدارهای دایره‌ای در میدان نیروی مرکزی جاذبه امکان‌پذیر است، اما لزوماً این مدارها پایدار نیستند. در بحث زیر شرط پایداری مدارهای دایره‌ای را جستجو می‌کنیم.

برای مدارهای دایره‌ای باید $\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$ شود. اما فقط هنگامی که پتانسیل مؤثر دارای

می‌نیمم واقعی است تعادل پایدار نتیجه می‌شود. در دیگر مدارهای دایره‌ای تعادل ناپایدار خواهد بود.

فرض می‌کنیم نیروی جاذبه مرکزی به شکل

$$F(r) = -\frac{k}{r^n} \quad (۸۲-۵)$$

باشد^۱. آنگاه پتانسیل برای این نیرو به صورت

$$U(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} \quad (۸۳-۵)$$

خواهد بود و تابع پتانسیل مؤثر چنین می‌شود:

$$'V'(r) = -\frac{k}{n-1} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad (۸۴-۵)$$

شرایط برای می‌نیمم $V(r)$ و در نتیجه برای مدار دایره‌ای پایدار با شعاع r_0 عبارت است از

$$\left. \frac{\partial 'V'}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 'V'}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} > 0 \quad (۸۵-۵)$$

با به کار بردن این شرایط در معادله (۸۴-۵) خواهیم داشت:

$$\left. \frac{\partial 'V'}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{k}{r_0^n} - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0 \quad (۸۶-۵)$$

یا

$$r_0^{n-3} = \frac{mk}{\ell^2} \quad (۸۷-۵)$$

۱. همین مسئله را گلدشتین بررسی کرده است، منتها نیرو را به صورت $F = -\frac{k}{r^{n+1}}$ فرض کرده است (ویرایش دوم). در ویرایش سوم کتاب (سال ۲۰۰۲) $F = -kr^n$ انتخاب شده و در نتیجه شرط پایداری مدارهای دایره‌ای به صورت $n > -3$ به دست می‌آید.

$$\left. \frac{\partial^{\nu} V}{\partial r^{\nu}} \right|_{r=r_0} = \frac{-nk}{r_0^{n+1}} + \frac{\nu \ell^{\nu}}{m r_0^{\nu}} > 0 \quad (88-5)$$

و در نتیجه

$$\frac{-nk}{r_0^{n-\nu}} + \frac{\nu \ell^{\nu}}{m} > 0 \Rightarrow (\nu - n) \frac{\ell^{\nu}}{m} > 0 \quad (89-5)$$

بنابراین شرط پایداری مدار دایره‌ای به ازای $n < 3$ است.

اکنون، روشن عمومی‌تری را به کار می‌بریم و در مورد فرکانس نوسان در اطراف مدار دایره‌ای در یک میدان نیروی کلی بحث می‌کنیم.

$$F(r) = -mg(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (90-5)$$

و معادله نیروی مرکزی در صفحه به صورت زیر در می‌آید (معادله ۵-۱۳):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g(r) \quad (91-5)$$

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3} = -g(r) \quad (92-5)$$

اکنون فرض می‌کنیم ذره از ابتدا در مدار دایره‌ای به شعاع r_0 قرار داشته و یک اختلال به صورت $r = r_0 + x$ که x کوچک است، به آن وارد می‌شود. چون r_0 ثابت است، $\ddot{r} \rightarrow \ddot{x}$ است.

بنابراین

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{m^2 r_0^3 \left[1 + \left(\frac{x}{r_0} \right) \right]^3} = -g(r_0 + x) \quad (93-5)$$

اما بنا به فرض $\frac{x}{r_0} \ll 1$ است، بنابراین

$$\left[1 + \left(\frac{x}{r_0} \right) \right]^{-3} \approx 1 - 3 \left(\frac{x}{r_0} \right) + \dots \quad (94-5)$$

همچنین $g(r) = g(r_0 + x)$ را به سری تیلور حول $r = r_0$ بسط می‌دهیم:

$$g(r_0 + x) = g(r_0) + xg'(r_0) + \dots \quad (۹۵-۵)$$

که در آن

$$g'(r_0) = \left. \frac{dg}{dr} \right|_{r=r_0} \dots \quad (۹۶-۵)$$

اگر از جمله x^2 و توان‌های بالاتر صرف‌نظر کنیم، آنگاه

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{m^2 r_0^3} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{r_0} \right) \right] \approx -[g(r_0) + xg'(r_0)] \quad (۹۷-۵)$$

یادآور می‌شویم که فرض کردیم ذره در ابتدا در مدار دایره‌ای $r = r_0$ حرکت می‌کند. تحت چنین

وضعیتی هیچ حرکت شعاعی اتفاق نمی‌افتد، یعنی $\dot{r} \Big|_{r=r_0} = 0$ و نیز $\dot{r} \Big|_{r_0} = 0$. آنگاه محاسبه

(۹۲-۵) در $r = r_0$ چنین نتیجه می‌دهد:

$$g(r_0) = \frac{l^2}{m^2 r_0^3} \quad (۹۸-۵)$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۹۰-۵)، تقریباً داریم

$$\ddot{x} - g(r_0) \left[1 - 3 \left(\frac{x}{r_0} \right) \right] \approx -[g(r_0) + xg'(r_0)] \quad (۹۹-۵)$$

یا

$$\ddot{x} + \left[\frac{3g(r_0)}{r_0} - g'(r_0) \right] x \approx 0 \quad (۱۰۰-۵)$$

اگر فرض کنیم

$$\omega_0^2 = \frac{3g(r_0)}{r_0} + g'(r_0) \quad (۱۰۱-۵)$$

آنگاه معادله (۱۰۰-۵) به شکل معادله آشنای نوسانگر نامیرا می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

و پاسخ آن چنین است

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{i\omega_0 t} + \mathbf{B}e^{-i\omega_0 t}$$

اگر $\omega_0^2 < 0$ باشد، یعنی ω_0 موهومی شود، آنگاه جمله دوم به صورت $\mathbf{B} \exp|\omega_0|t$ در می‌آید که آشکارا بدون حد با افزایش زمان زیاد می‌شود. بنابراین شرط نوسان $\omega_0^2 > 0$ می‌شود؛ یعنی

$$\frac{\nabla g(\mathbf{r}_0)}{r_0} + g'(\mathbf{r}_0) > 0$$

چون $g(\mathbf{r}_0) > 0$ است، می‌توانیم به $g(\mathbf{r}_0)$ تقسیم کنیم و این نامساوی را به صورت

$$\frac{g'(\mathbf{r}_0)}{g(\mathbf{r}_0)} + \frac{\nabla}{r_0} > 0 \quad (102-5)$$

بنویسیم؛ یا اینکه چون $g(r)$ و $F(r)$ با ضریب ثابت به هم مربوطند، شرط پایداری چنین می‌شود؛

$$\frac{F'(\mathbf{r}_0)}{F(\mathbf{r}_0)} + \frac{\nabla}{r_0} > 0 \quad (103-5)$$

اکنون این شرط را در مورد نیروی $F = -\frac{k}{r^n}$ به کار می‌بریم، نتیجه چنین می‌شود:

$$\frac{nkr_0^{-(n+1)}}{-kr_0^{-n}} + \frac{\nabla}{r_0} > 0$$

یا

$$(3-n) \frac{\ell}{r_0} > 0 \quad (104-5)$$

و به همان شرط قبلی یعنی $3 < n$ رهنمون می‌شویم. باید توجه کرد که حالت $n=3$ نیاز به بررسی بیشتر دارد. مشابه این بررسی نخستین بار توسط برتران در سال ۱۸۷۳ صورت گرفته است و اغلب به نام قضیه برتران معروف است.

نکته: در هر نقطه‌ای که نامساوی (۵-۸۸) برقرار باشد، از طریق نسبت دادن انرژی و اندازه

حرکت زاویه‌ای اولیه، که از روابط $E = V(r_0) + \frac{\ell^2}{2mr_0^2}$ و $F(r_0) = -\frac{\ell^2}{mr_0^3}$ تأمین می‌شود،

این امکان هست که مدار دایره‌ای پایداری بنا کنیم. چنانچه ω_0 (و یا $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$) در معادله

(۳-۴۶) کتاب گلدشتین) عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد، آنگاه پس از q دوران بردار شعاعی، مدار شروع به

تکرار خودش می‌کند، یعنی مدار بسته می‌شود. همین قدر که بردار شعاعی ذره به طور کامل صفحه را دور می‌زند (چارو می‌کند)، u یا r به اندازه β چرخه نوسان خود را انجام می‌دهد.

مثال ۵-۲. پایداری مدارهای دایره‌ای را در میدان نیروی داده شده توسط تابع پتانسیل زیر

جستجو کنید:

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-\frac{r}{a}} \quad (105-5)$$

که در آن $a > 0$, $k > 0$ است.

حل: این پتانسیل به نام پتانسیل پوششی کولن خوانده می‌شود (که در آن $k = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ است؛ z

عدد اتمی و e بار الکترون)، زیرا با سرعتی بیش از $\frac{1}{r}$ کاهش می‌یابد و در نتیجه با توجه به پوشش

بار هسته‌ای توسط الکترون‌های اتمی تقریبی است برای پتانسیل الکتروستاتیک هسته اتمی در مجاورت هسته. نیرو از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -k \left(\frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\frac{r}{a}} \quad (106-5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = k \left(\frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{ar^2} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-\frac{r}{a}}$$

شرط پایداری چنین است:

$$\frac{F'(r_0)}{F(r_0)} + \frac{\nu}{r_0} > 0$$

یا

$$\nu + r_0 \frac{F'(r_0)}{F(r_0)} > 0$$

بنابراین

$$\nu + \frac{r_0 k \left(\frac{1}{a^\nu r_0} + \frac{\nu}{a r_0^\nu} + \frac{\nu}{r_0^\nu} \right)}{-k \left(\frac{1}{a r_0} + \frac{\nu}{r_0^\nu} \right)} > 0 \Rightarrow a^\nu - a r_0 - r_0^\nu > 0$$

و یا

$$\frac{a^\nu}{r_0^\nu} + \frac{a}{r_0} - 1 > 0$$

پایداری برای تمام مقادیر $q = \frac{a}{r_0}$ که از ریشه‌های معادله زیر به دست می‌آید تأمین می‌شود:

$$q^\nu + q - 1 = 0$$

ریشه مثبت (و تنها پاسخ فیزیکی معنادار) چنین است:

$$\frac{a}{r_0} = q = \frac{1}{\nu} (\sqrt{\nu} - 1) \approx 0.62 \Rightarrow r_0 \leq 1.629a$$

(*) ۵-۸. اثبات قضیه برتران (به روایت گلدشتین)

معادله حرکت مداری ذره تحت تأثیر نیروی مرکزی یعنی

$$\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = - \frac{m}{l^2 u^2} F \left(\frac{1}{u} \right) \quad (28-5)$$

را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = J(u) \quad (107-5)$$

که در آن

$$J(u) = -\frac{m}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{m}{\ell^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) \quad (108-5)$$

شرط مدار دایره‌ای به شعاع $r_0 = u_0^{-1}$ اکنون از رابطه (107-5) به صورت

$$u_0 = J(u_0) \quad (109-5)$$

در می‌آید. علاوه بر این، انرژی باید در شرط

$$E = V(r_0) + \frac{\ell^2}{2mr_0^2} = V'(r_0) \quad (110-5)$$

صدق کند (r_0 شعاع مدار دایره‌ای می‌نیمم پتانسیل را نشان می‌دهد و جایی است که یک نقطه بازگشت حاصل می‌شود). اگر انرژی اندکی از مقدار فوق منحرف شود، و پتانسیل می‌نیمم شود (یعنی حرکت پایدار باشد)، آنگاه u محدود باقی می‌ماند و فقط اندکی از u_0 منحرف می‌شود و $J(u_0)$ را می‌توان بر حسب نخستین جمله در بسط سری تیلور حول $J(u_0)$ بیان کرد.

$$J(u) = J(u_0) + (u - u_0) \left. \frac{dJ}{du} \right|_{u_0} + o\left[(u - u_0)^2\right] \dots \quad (111-5)$$

اگر $u - u_0 = x$ انتخاب شود، معادله مداری حرکت در مجاورت شرایط دایره‌ای چنین می‌شود (یعنی معادله (107-5)):

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x = x \left. \frac{dJ}{dx} \right|_{x_0} \quad (112-5)$$

یا

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \beta^2 x = 0 \quad (113-5)$$

که در آن

$$\beta^r = 1 - \frac{dJ}{du} \Big|_{u_0} = 1 - \frac{dJ}{dx} \Big|_{x_0} \quad (114-5)$$

برای اینکه x نوسان پایدار محدود را توصیف کند، β^r باید مثبت و معین باشد. در تعریف رابطه (۱۰۸-۵)،

$$\frac{dJ}{du} \Big|_{u_0} = \frac{\gamma m}{\ell^{\gamma} u^{\gamma}} F\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{m}{\ell^{\gamma} u^{\gamma}} \frac{d}{du} F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\gamma J}{u} - \frac{m}{\ell^{\gamma} u^{\gamma}} \frac{d}{du} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

و در پرتو شرایط حرکت دایره‌ای یعنی معادله $F(r_0) = -\frac{\ell^{\gamma}}{m r_0^{\gamma}}$ یا رابطه (۱۰۹-۵)، نتیجه می‌شود

که

$$u_0 = J(u_0) = -\frac{m}{\ell^{\gamma} u_0^{\gamma}} F_0 \Rightarrow F_0 = -\frac{\ell^{\gamma}}{m r_0^{\gamma}}$$

$$\frac{dJ}{du} \Big|_{u_0} = -\gamma + \frac{u_0}{F_0} \frac{dF}{du_0}$$

که در آن علاوه بر شرطی که برای مناسب بودن مشتق بکار گرفته‌ایم، F_0 به منزله $F\left(\frac{1}{u_0}\right)$

است. در نتیجه β^r چنین می‌شود:

$$\beta^r = \gamma - \frac{u_0}{F_0} \frac{dF}{du_0} = \gamma + \frac{r}{F} \frac{dJ}{dr} \Big|_{r=r_0} \quad (115-5)$$

که همان رابطه (۳-۴۶) کتاب گلدستین است و شرط پایداری $\beta^r > 0$ منجر به رابطه

$$\frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r_0} > -\frac{\gamma F(r_0)}{r_0}$$

می‌شود. برای اینکه با اندک انحراف از مدار دایره‌ای (بدین منظور انرژی و

اندازه حرکت زاویه‌ای اندکی از حالت دایره‌ای منحرف می‌شوند)، مدار همچنان بسته بماند، باید β

عدد گویا باشد. با جستجوی حل به نتیجه نهایی زیر می‌رسیم:

«تنها نیروهای مرکزی که منجر به مدارهای بسته برای تمام ذرات مقید می‌شود، قانون عکس مجذور فاصله و قانون هوک است - قضیه برتران». بررسی این انحراف‌های کوچک از مدار بسته از طریق ایجاد اختلال در اثر وجود اجسام دیگر امکان‌پذیر است.

چنانچه از دیدگاهی دیگر به این مسئله توجه کنیم، حرکت مداری در صفحه را می‌توان به صورت ترکیب دو حرکت نوسانی، یکی برای r و دیگری برای θ ، در نظر گرفت. بسته بودن مدار به این معنا است که بگوییم دوره حرکت این دو نوسان متناسب هستند - یعنی دو حرکت تبهگن هستند (با یک انرژی ثابت). سرشت تبهگنی مدارها در یک میدان گرانشی شکل قانون نیرو را تعیین می‌کند، که بواسطه آن فقط قانون عکس مجذور فاصله، و قانون هوک را نتیجه می‌دهد.

بررسی موضوع فوق از طریق بحث انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای و انحراف آنها از حرکت دایره‌ای اندکی طولانی اما جالب است که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم.

۹-۵. بررسی تحلیلی مدارهای مقید (شیوه انرژی)

برای مدارهای مقید (که ذره در آن مدارها تا بی‌نهایت نمی‌رود)، r دارای ماکزیمم و می‌نیمم

است. به بیان دیگر برای مدارهای مقید بر حسب $u = \frac{1}{r}$ ، $u_{\min} < u < u_{\max}$ داریم:

$$\ell = mr^2 \dot{\theta} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mr^2 \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = mr^2 \dot{\theta} v$$

$$\Rightarrow d\theta = \pm \frac{\ell dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}$$

و یا، بدون در نظر گرفتن علامت،

$$\Rightarrow d\theta = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV}{\ell^2} - \frac{1}{r^2}}} = \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV}{\ell^2} - u^2}} \quad (۱۱۶-۵)$$

و در نهایت

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{\gamma m E}{l^2} - \frac{\gamma m V}{l^2} - u^2}} \quad (۱۱۶-۵)'$$

چنانچه $\Delta\theta$ مضربی گویایی از 2π باشد، مدار بسته است. برای مدارهای دایره‌ای و نزدیک دایره‌ای،

$$u = u(\theta) \Rightarrow u(\theta + \Phi) = u(\theta)$$

که در آن $\frac{\Phi}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ (مجموعه اعداد گویا است)؛ Φ دوره تناوب است. E انرژی سیستم ثابت است:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{l^2}{2m} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{2m} u^2 + V\left(\frac{1}{u}\right)$$

مشتق رابطه بالا نسبت به θ چنین نتیجه می‌دهد:

$$\frac{l^2}{2m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{2m} \times 2u \frac{du}{d\theta} + \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{du}{d\theta} = 0$$

رابطه فوق را مرتب می‌کنیم:

$$\left[\frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{du} + \frac{l^2}{2m} \times 2 \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \right] \frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{du} + \frac{l^2}{m} \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) \quad (۱۱۷-۵)$$

برای مدارهای دایره‌ای داریم:

$$r = r_0 \quad \text{یا} \quad u = u_0 \Rightarrow \left. \frac{du}{d\theta} \right|_{u_0} = 0 \quad \text{و} \quad \left. \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right|_{u_0} = 0$$

بنابراین

$$\frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{du} + \frac{\ell^2}{m} u = 0 \quad (117-5)'$$

اما
$$-\frac{1}{u^2} \frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = -\frac{1}{u^2} \frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)}$$
 پس:

$$-\frac{1}{u^2} \frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} + \frac{\ell^2}{m} u = 0 \Rightarrow \frac{1}{u^2} \frac{dV\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{\ell^2}{m} \quad (118-5)$$

رابطه فوق، شرط وجود مدار دایره‌ای را نشان می‌دهد. اکنون با انتخاب

$$v = \frac{\gamma m}{\ell^2} V, e_0 = \frac{\gamma m E_0}{\ell^2}, e = \frac{\gamma m E}{\ell^2}$$

و از رابطه (117-5) برای $u = u_0$ ، نتیجه زیر

حاصل می‌شود:

$$E = E_0 = \frac{\ell^2}{\gamma m} u^2 + V\left(\frac{1}{u}\right) \Big|_{u = u_0} \Rightarrow$$

$$e_0 = v\left(\frac{1}{u_0}\right) + u_0^2 \Rightarrow \left. \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du} \right|_{u_0} + \gamma u_0 = 0$$

$$e = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 + v\left(\frac{1}{u}\right) \quad (118-5)'$$

حال فرض می‌کنیم انرژی ذره کمی بیش از E_0 (و یا با مقیاس جدید e_0) باشد:

$$e = e_0 + \Delta \Rightarrow \Delta = e - e_0 = v(u) + u^{\prime 2} + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^{\prime 2} - e_0$$

u را حول u_0 بسط می‌دهیم $(u = u_0 + \delta u)$:

$$\Rightarrow \Delta = v(u_0) + \left. \frac{dv}{du} \right|_{u_0} (u - u_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 v}{du^2} \right|_{u_0} (u - u_0)^2 + \dots$$

$$+ u_0^{\prime 2} + 2u_0 (u - u_0) + \frac{2}{\prime!} \times \frac{1}{2} (u - u_0)^2 + \dots + \left[\frac{d(u - u_0)}{d\theta} \right]^{\prime 2} + \dots - e_0$$

و با توجه به رابطه $e_0 = v(u_0) + u_0^{\prime 2}$ داریم:

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{du^2} \int_{u_0} (u - u_0)^2 + (u - u_0)^2 + \left[\frac{d(u - u_0)}{d\theta} \right]^2 \quad (119-5)$$

$$= k(u - u_0)^2 + \left[\frac{d(u - u_0)}{d\theta} \right]^2$$

این یک حرکت نوسانی است با $k = 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{du^2} \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_{u_0}$ زیرا

$$\Delta = ku^{\prime 2} + \dot{u} \Rightarrow \frac{d\Delta}{d\theta} = 2ku \frac{du}{d\theta} \Big|_{u_0} + 2\dot{u}\ddot{u} = 0 \Rightarrow \ddot{u} + ku = 0 \quad (120-5)$$

برای اینکه حرکت نوسانی پایدار باشد باید k مثبت باشد:

$$u - u_0 = \sqrt{\frac{\Delta}{k}} \cos \sqrt{k}\theta \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{du^2} \left(\frac{1}{u} \right) + 1 > 0 \quad (121-5)$$

و چون در جستجوی مدارهای بسته هستیم، \sqrt{k} باید عدد گویا باشد، یعنی $\sqrt{k} \in Q$.

\sqrt{k} تابعی از u است. از طرفی می‌خواهیم \sqrt{k} همیشه گویا باشد، پس \sqrt{k} باید ثابت باشد. از

قسمت‌های بالا داریم:

$$\frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du} = -\frac{1}{u^r} \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = -\frac{1}{u^r} v'$$

و همچنین به کمک رابطه (۵-۱۱۷)،

$$\Rightarrow \frac{1}{u^r} \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} \times \frac{1^r}{r m} = \frac{1^r}{m} \Rightarrow \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = r u^r$$

پس:

$$\frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r} = \frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r} \times \frac{r u^r}{\frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)}} = \frac{r u^r}{\frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du} \times \frac{du}{d\left(\frac{1}{u}\right)}} \times \frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r}$$

$$= \frac{r u^r}{(-u^r) \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du}} \times \frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r} = (-ru) \frac{\frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r}}{\frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du}}$$

$$\Rightarrow k = 1 + \frac{1}{r} \frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r} = 1 - \frac{u}{\frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du}} \cdot \frac{d^r v\left(\frac{1}{u}\right)}{du^r}$$

$$\Rightarrow u \frac{d}{du} \left(\ln \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du} \right) = 1 - k \Rightarrow$$

$$\ln \left(\frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du} \right) = (1 - k) \int \frac{du}{u} = (1 - k) \ln u + \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{dv\left(\frac{1}{u}\right)}{du} = cu^{1-k} \Rightarrow \quad (122-5)$$

$$v\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{c}{2-k} u^{2-k} + c_1$$

بنابراین فقط پتانسیل‌هایی می‌توانند مدارهای بسته داشته باشند که به صورت توانهایی از u باشند. در مورد $k = 2$ که مخرج کسر را صفر می‌کند مشکلی وجود ندارد زیرا k اصلاً نمی‌تواند مقدار ۲ را بگیرد زیرا $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$ است در حالیکه $\sqrt{2}$ عددی اصم است.

دلیل: اگر $\sqrt{2}$ اصم نباشد پس گویا است. یعنی

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

که در آن q و p هیچ ضریب مشترک ندارند. یعنی p^2 عددی زوج است و در نتیجه p زوج است (زیرا مربع یک عدد فرد حتماً فرد می‌شود). پس

$$p = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

یعنی این بار q^2 و در نتیجه q زوج می‌شود پس p, q ضریب مشترک دارند و این خلاف فرض است. بدین ترتیب شرط لازم برای مدارهای دایره‌ای یا نزدیک دایره (که مدارهای بسته را تشکیل

دهند) عبارت است از:

$$v(r) = \frac{c}{r-k} u^{r-k} = Dr^{k-2}, \quad D = \frac{c}{r-k} \quad (123-5)$$

سیستم‌های مقید پتانسیل جاذبه دارند بنابراین برای $k > 2$ ، D باید مثبت باشد و برای $k < 2$ ، D منفی می‌شود. می‌توان نشان داد که به ازای $K=1, K=4$ به ترتیب نوسانگر هارمونیک و گرانش نیوتنی را خواهیم داشت:

برای بررسی اینکه آیا همه مدارهای مقید پتانسیلی، مدارهای بسته هستند یا نه، یک راه این است که در محاسبه Δ تقریب را یک مرتبه دیگر جلو ببریم (دقت را بیشتر کنیم). راه منطقی‌تر دیگر این است که حالت خیلی دور از دایره را بررسی کنیم. در مورد مدار دور از مدار دایره‌ای، برای $K > 2$ ، انرژی‌های به سمت بینهایت را بررسی می‌کنیم و برای $k < 2$ حد $E \rightarrow 0$ را می‌گیریم. اگر $\Delta\theta$ فاصله اوج تا حضیض باشد، Φ برابر با $2\Delta\theta$ می‌شود:

$$\Phi = 2\Delta\theta = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{e - Du^{r-k} - u^2}}, \quad \begin{cases} \frac{u}{\sqrt{e}} = x \\ \frac{du}{\sqrt{e}} = dx \end{cases}$$

$$= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{D}{e} x^{\frac{r-k}{r}} - x^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - De^{-\frac{k}{r}} x^{\frac{r-k}{r}} - x^2}} \quad (124-5)$$

در حد $e \rightarrow \infty$ (یا $E \rightarrow \infty$)، جمله $e^{-\frac{k}{r}}$ به سمت صفر می‌رود. در مورد حد x ، خواهیم داشت: در نقاط اوج و حضیض سرعت صفر است و به عبارت دیگر انرژی کل و پتانسیل با هم برابرند (نقاط بازگشت). بنابراین در این نقاط مخرج کسر صفر می‌شود زیرا مخرج کسر معرف سرعت است. با شرط $e \rightarrow \infty$ جمله دوم از بین می‌رود و در نتیجه $x = \pm 1$ ؛ و چون x باید مثبت باشد، $x = +1$ انتخاب می‌شود. پس حد بالا برای x مقدار $+1$ و حد پایین صفر است (چون در هر حال x یعنی r یا u مثبت است).

$$\phi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \pi \Rightarrow k = 4$$

$$\text{دوره تناوب} = \Phi = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

که $k=4$ معادل نوسانگر هارمونیک است.

در مورد دوم وقتی $0 < k < 2$ است، در این حالت انرژی‌های $e \rightarrow 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Phi = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{e - Du^{2-k} - u^2}} \quad ; \quad 0 < k < 2 \quad (125-5)$$

و برای $0 < k < 2$ ، D منفی است. دوباره برای یافتن حد انتگرال مخرج را صفر می‌کنیم:

$$e \rightarrow 0 \Rightarrow u^2(-Du^{-k} - 1) = 0 \Rightarrow u = 0, u = \left(-\frac{1}{D}\right)^{\frac{1}{k}} = (-D)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \Phi = 2 \int_0^{(-D)^{\frac{1}{k}}} \frac{du}{\sqrt{-Du^{2-k} - u^2}} \quad ; \quad u = (-D)^{\frac{1}{k}} y = (-D)^{\frac{1}{k}} e^s \quad ; \quad y = e^s$$

$$\Phi = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{e^s ds}{\sqrt{e^{s(2-k)} - e^{2s}}} = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{ds}{\sqrt{e^{-ks} - 1}} = \frac{2}{k} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{e^{-x} - 1}}$$

$$ks = x$$

$$\Phi = \Phi(k) = \frac{2}{k} \varphi(k)$$

$$k = 2 \Rightarrow \Phi(2) = \frac{2}{k} \varphi(2) = \varphi(2) \Rightarrow \varphi(2) = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi$$

$$\Rightarrow \Phi(k) = \frac{2}{k} \pi$$

(۱۲۶-۵)

از طرفی $\Phi = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{\omega}$ پس:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k}} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \sqrt{k} = k \Rightarrow k = 1$$

این مورد مربوط به نیروی جاذبه $\frac{1}{r^2}$ است.

۵-۱۰. بردار لاپلاس - رانگ - لنز

مسئله کپلر از دیدگاه دیگری نیز مورد توجه قرار می‌گیرد. برای نیروی مرکزی در حالت عمومی، قانون دوم نیوتن را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{p} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (5-127)$$

ضرب برداری \vec{p} با بردار ثابت اندازه حرکت زاویه‌ای \vec{L} چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{L} &= \frac{mf(r)}{r} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r} [\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2 \dot{\vec{r}}] \end{aligned} \quad (5-128)$$

این معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = r \dot{r} \quad (5-129)$$

$$\Rightarrow \vec{p} \times \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = -mf(r)r^2 \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \right)$$

یا

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (5-130)$$

بدون مشخص کردن شکل $f(r)$ نمی‌توان عملیات بیشتری انجام داد. اما معادله (۵-۱۳۰) را می‌توان فوراً انتگرال گرفت اگر $f(r)$ بطور معکوس متناسب با r^2 باشد (مسئله کپلر). بنابراین با نوشتن $f(r)$

$$\text{به شکل } F = -\frac{k}{r^2} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = \frac{d}{dt}\left(mk \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

که می‌گوید برای مسئله کپلر یک بردار ثابت \vec{A} وجود دارد که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A} = \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \quad (۵-۱۳۱)$$

در سال‌های اخیر این بردار در میان فیزیکدان‌ها به نام بردار رانگ-لنز معروف است، در حالیکه این بردار قبلاً منتسب به لاپلاس بوده است. از تعریف \vec{A} را به راحتی می‌توان دریافت که

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0 \quad (۵-۱۳۲)$$

زیرا \vec{L} عمود بر $\vec{P} \times \vec{L}$ و \vec{r} عمود بر $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ است. از این خاصیت نتیجه می‌شود که \vec{A} باید بردار ثابتی در صفحه مدار باشد. اگر θ برای نمایش دادن زاویه بین \vec{r} و جهت ثابت \vec{A} به کار رود، آنگاه حاصلضرب اسکالر $\vec{A} \cdot \vec{r}$ چنین می‌شود:

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta = \vec{r} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) - mkr$$

اکنون بنا بر خاصیت جایگشت جملات در حاصلضرب اسکالر سه گانه خواهیم داشت:

$$\vec{r} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) = \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = L^2$$

بنابراین معادله فوق چنین می‌شود:

$$Ar \cos \theta = L^2 - mkr$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + \frac{A}{mk} \cos \theta \right)$$

بنابراین بردار لنز راه دیگری برای استخراج معادله مدار در مسئله کپلر ارائه می‌کند! از مقایسه معادله بالا با معادله:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

در می‌یابیم که \vec{A} در جهت شعاع حامل به نقطه حضیض مدار است با مقدار

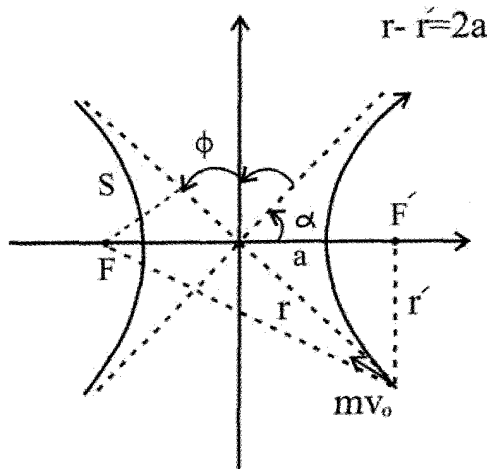
$$A = m k \varepsilon \quad (۱۳۳-۵)$$

بنابراین برای مسئله کپلر دو بردار ثابت حرکت \vec{A}, \vec{L} تعیین کرده‌ایم و یک کمیت اسکالر E . از آنجا که بردار باید سه مؤلفه مستقل داشته باشد، بدین ترتیب هفت کمیت پایستار در مسئله نیروی مرکزی وجود دارد.

۵-۱۱. مدارهای هذلولی - فرمول پراکندگی رادرفورد.

در بخش‌های پیش معادله مقاطع مخروطی از جمله هذلولی را یافتیم. در مورد هذلولی در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (۱۳۴-۵)$$



شکل (۵-۷)

علامت + به شاخه مثبت، و علامت - به شاخه منفی اشاره دارد. مجانب‌های هذلولی (خطچین‌های موجود در شکل) با محور افقی که از کانون‌ها می‌گذرد زاویه α می‌سازند. در این رابطه در فرمول (۱۳۴-۵) قرار می‌دهیم $r = \infty$. در نتیجه،

$$\pm 1 + \varepsilon \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad (135-5)$$

در حرکت به دور خورشید وقتی جسم از فضای خارج می‌آید و یا به خارج می‌رود، مدارهای هذلولی ظاهر می‌شود؛ و نیز در برخورد دو ذره باردار با بار هم علامت، با این مدارها مواجه می‌شویم. اگر ذره‌ای سبک با بار q_1 با ذره سنگین و ساکن با بار q_2 روبرو شود، طبق نتایج بخش‌های پیش، ذره سبک از طریق مسیرهای هذلولی شکل از کنار ذره سنگین می‌گذرد. فرض می‌کنیم ذره با سرعت اولیه v_0 مطابق شکل در جهتی حرکت می‌کند که اگر منحرف نشود از فاصله s نسبت به مرکز نیروی دافعه واقع در F عبور می‌کند. فاصله s پارامتر اصابت (impact parameter) نامیده می‌شود. از رابطه (۱۳۵-۵) و (۵۴-۵) یعنی

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\gamma E I^2}{m k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (54-5)$$

و مطابق شکل برای زاویه انحراف با پراکندگی $\phi = \pi - 2\alpha$ داریم ϕ مقداری از θ است که برای آن r به بینهایت می‌رود:

$$\tan \frac{\phi}{2} = \cot \alpha = (\varepsilon^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{m k^2}{\gamma E I^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (136-5)$$

به راحتی می‌توانیم قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای را برحسب سرعت و پارامتر اصابت حساب کنیم:

$$\theta \text{ یا } \phi = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \int_{r=\pi-\alpha}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{\gamma m E}{l^2} - \frac{\gamma m V}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (۱۳۷-۵)$$

$$l = m v_0 s \quad (۱۳۸-۵)$$

از قرار دادن در معادله (۱۳۶-۵) برای زاویه پراکندگی داریم

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{|k|}{m s v_0^2} \quad (۱۳۹-۵)$$

اگر ذره‌ای سبک با بار q_1 با ذره‌ای سنگین به بار q_2 برخورد کند، آنگاه $k = q_1 q_2$ است و

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{|q_1 q_2|}{m s v_0^2} \quad (۱۴۰-۵)$$

در آزمایش پراکندگی، باریکه‌ای از ذرات باردار در راستای معین از میان ورقه‌ای نازک پرتاب می‌شود. بسیاری از ذرات پس از انحراف و بیرون آمدن از ورقه در راستاهای گوناگون در زاویه θ پراکنده می‌شوند. برای اینکه رابطه (۱۴۰-۵) را به صورتی قابل مقایسه با داده‌های آزمایش درآوریم پارامتر s را باید حذف کرد چرا که نمی‌توان از طریق آزمایش آن را تعیین کرد. در عمل کسری از ذرات فرودی را می‌بینیم که میان زاویه‌های گوناگون ϕ پراکنده می‌شوند. مفهوم متداول، سطح مقطع پراکندگی (Scattering Cross Section) است، که چنین تعریف می‌شود: اگر N ذره فرودی به واحد سطح ورقه‌ای نازک برخورد کند که شامل n مرکز پراکندگی در واحد سطح است، میانگین تعداد dN ذرات پراکنده شده میان زاویه $\phi + d\phi, \phi$ برحسب سطح مقطع $d\sigma$ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{dN}{N} = n d\sigma \quad (۱۴۱-۵)$$

یا

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\text{تعداد ذرات پراکنده شده درون فلز}}{\text{شدت ذرات فرودی}}$$

$d\sigma$ به عنوان سطح مقطع مؤثری تصور می‌شود که مرکز پراکندگی را احاطه می‌کند و ذره فرودی باید به آن سطح برخورد کند تا میان زاویه $\phi + d\phi, \phi$ پراکنده شود. به بیان دیگر $\sigma(\phi)$ سطح مقطع مؤثر پراکندگی، به صورتی کسری تعریف می‌شود که نسبت تعداد بر همکنش‌ها (برخوردها) بی

که به پراکندگی در زاویه θ منجر می‌شود، را به تعداد ذرات فرودی در واحد سطح به دست می‌دهد. اکنون ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که به مرکز پراکندگی F نزدیک می‌شود. اگر پارامتر اصابت میان ds و $s+ds$ باشد، ذره میان زاویه $\theta, \theta + d\theta$ پراکنده می‌شود. آنگاه

$$\frac{1}{r \cos^2 \frac{\phi}{2}} d\phi = -\frac{|q_1 q_2|}{ms^2 v_o^2} ds \quad (142-5)$$

سطح حلقه دور F با شعاع داخلی s و شعاع خارجی $s+ds$ که ذره فرودی باید درون آن قرار گیرد تا به اندازه $d\theta$ پراکنده شود چنین است:

$$d\sigma = 2\pi s ds \quad (143-5)$$

بنابراین

$$d\sigma = \left(\frac{q_1 q_2}{2mv_o^2} \right) \frac{2\pi \sin \phi}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} d\phi$$

$$\Rightarrow \sigma_T = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma(\phi) \sin \phi d\phi \quad (144-5)$$

این رابطه توسط رادرفورد به دست آمد و در تعبیر آزمایش‌های پراکندگی ذرات آلفا توسط ورقه‌های نازک فلزی به کار گرفته شد. رادرفورد توانست نشان دهد که این رابطه با آزمایش‌هایش وقتی $q_1 = 2e$ (بار ذره آلفا)، و $q_2 = Ze$ (بار هسته اتم) است، تا زمانی که فاصله حوض $(a + a\varepsilon)$ در شکل فوق) بیش از 10^{-12} سانتیمتر باشد، سازگار است. نخستین اندازه‌گیری‌های شعاع هسته توسط رادرفورد حدود 10^{-12} سانتیمتر بود. به کمک رابطه (۴۸-۵)، فاصله حوض را از رابطه زیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$r_1 = a + a\varepsilon = \frac{q_1 q_2}{2E} \left[1 + \left(1 + \frac{2EI^2}{mq_1 q_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (145-5)$$

که کمترین فاصله حضيض برای ذرات فرودی به ازای $l=0$ (یا $s=0$) روی می‌دهد:

$$(r_1)_{\min} = \frac{q_1 q_2}{E} \quad (5-146)$$

بدین ترتیب، وقتی ذره آلفا هسته را می‌خراشد یا به آن نفوذ می‌کند، اگر انحرافی از قانون نیروی کولن $\frac{1}{r^2}$ وجود داشته باشد، نخست باید به صورت انحرافی از قانون رادرفورد ظاهر شود. محاسبه سطح مقطع به صورتی که بیان شد دقیقاً هنگامی صحیح است که ذره آلفا با هسته‌ای سنگین‌تر از خودش برخورد کند، چرا که در بررسی فوق فرض کردیم مرکز پراکندگی ثابت است. برخورد ذره آلفا با هسته در واقع باید از طریق مبانی مکانیک کوانتومی بررسی شود. مفهوم مسیر معین با پارامتر اصابت معین s دیگر در مکانیک کوانتومی معتبر نیست. اما مفهوم سطح مقطع در مکانیک کوانتومی اعتبار دارد و برحسب کمتهایی تعریف می‌شود که از طریق آزمایش به دست می‌آید. نتیجه نهایی برای سطح مقطع پراکندگی به همان صورت رابطه (5-144) است. در تاریخ فیزیک استخراج این رابطه رویدادی مساعد بود مبنی بر اینکه مکانیک کلاسیک توانایی پاسخ صحیح این مسئله را داشته است.

۵-۱۲. مسائل برگزیده حل شده

۱- (الف). قانون نیرو را برای میدان مرکزی برای ذره‌ای بیابید که در مدار مارپیچ لگاریتمی

$r = ke^{\alpha\theta}$ در حرکت است. α و k ثابت هستند.

(ب). توابع $r(t)$ و $\theta(t)$ را برای این ذره بیابید.

(پ). انرژی کل مدار حرکت این ذره چقدر است؟

حل:

(الف) - معادله حرکت

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{l^2} F(r)$$

را به کار می‌بریم و قانون $F(r)$ را می‌یابیم.

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\dot{\lambda}}{r} \right) = \frac{-\alpha e^{-\alpha\theta}}{k} \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\dot{\lambda}}{r} \right) = \frac{\alpha^2}{r}$$

و در نتیجه

$$F(r) = \frac{-\ell^2}{mr^2} \left(\frac{\alpha^2}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{-\ell^2}{mr^3} (\alpha^2 + 1)$$

از اینرو، قانون نیرو، جاذبه متناسب با عکس مکعب فاصله است.
(ب) برای یافتن $\theta(t)$ و $r(t)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{1}{mk^2 e^{2\alpha\theta}}$$

این رابطه را مرتب می‌کنیم و سپس انتگرال می‌گیریم،

$$e^{2\alpha\theta} d\theta = \frac{1}{mk^2} dt \Rightarrow \frac{e^{2\alpha\theta}}{2\alpha} = \frac{t}{mk^2} + c_1$$

و یا با انتخاب ثابت $c = 2\alpha c_1$ خواهیم داشت

$$e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha t}{mk^2} + c$$

چنانچه معادله فوق را برای θ حل کنیم، نتیجه چنین می‌شود

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{2\alpha t}{mk^2} + c \right)$$

به همین ترتیب برای $r(t)$ چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{r^2}{k^2} = e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha t}{mk^2} + c$$

$$r(t) = \left[\frac{2\alpha}{m} t + k^2 c \right]^{\frac{1}{2}}$$

و

ثابت‌های انتگرال l و c از شرایط اولیه مسئله به دست می‌آیند.

(پ) - برای یافتن انرژی کل مدار در این مسئله نخست به محاسبه انرژی پتانسیل می‌پردازیم:

$$U(r) = -\int F dr = \frac{\ell^2}{m} (\alpha^2 + 1) \int r^{-3} dr = \frac{-\ell^2 (\alpha^2 + 1)}{2m} \frac{1}{r^2}$$

با این فرض که $U(\infty) = 0$ انتخاب شده است. در مورد انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = \alpha k e^{\alpha\theta} \frac{\ell}{mr^2} = \frac{\alpha\ell}{mr}$$

و در نتیجه

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\alpha\ell}{mr} \right)^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

و در نهایت

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \left(\frac{\alpha\ell}{mr} \right)^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\ell^2 (\alpha^2 + 1)}{2mr^2} = 0$$

انرژی کل مدار برابر صفر است اگر $U(r = \infty) = 0$ انتخاب شود.

۲- مدار ذره‌ای که در یک میدان مرکزی حرکت می‌کند دایره‌ای است با معادله $r = r_0 \cos \theta$ که از مبدأ می‌گذرد. نشان دهید که قانون نیرو عکس توان پنجم r است و انرژی کل ذره در این حرکت صفر است.

حل:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 \cos \theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{\cos^2 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \right) = \frac{1}{r_0 \cos \theta} \left(1 + \frac{r \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= \frac{1}{r_0 \cos \theta} \left(\frac{r}{\cos^2 \theta} - 1 \right) = r r_0^{-2} u^3 - u \end{aligned}$$

مقدار $\frac{d^2 u}{d\theta^2}$ را در معادله مداری حرکت قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{-m}{l^2 u^2} f(u^{-1}) \\ r r_0^{-2} u^3 - u + u &= r r_0^{-2} u^3 = -\frac{m}{l^2 u^2} f(u^{-1}) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$f(u^{-1}) = \frac{r r_0^{-2} l^2 u^{\Delta}}{-m} \Rightarrow f(r) = -\frac{r r_0^{-2} l^2}{m} \frac{1}{r^{\Delta}}$$

$$E = T + U$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(r_0^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + r_0^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m r_0^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = -\int_{r_0}^r f(r) dr = \frac{r r_0^{-2} l^2}{m} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^{\Delta}} = -\frac{r_0^{-2} l^2}{2 m r^{\frac{\Delta-1}{2}}} = -\frac{r_0^2 \left(m r^2 \dot{\theta} \right)^2}{2 m r^{\frac{\Delta-1}{2}}} = -\frac{1}{2} m r_0^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E = T + U = 0$$

۳- ذره‌ای در میدان مارپیچی به معادله $r = a\theta$ حرکت می‌کند. اگر θ با t به طور خطی افزایش یابد، آیا نیرو یک میدان مرکزی است. چنانچه اینطور نیست تحقیق کنید θ با t چگونه تغییر کند تا نیرو مرکزی باشد.

حل: در نیروی مرکزی نیرو باید تابعی از r باشد و $f(\theta) = 0$. از اینرو لازم است $f(\theta)$ را بررسی کنیم.

$$f(\theta) = m \left(r \ddot{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \right)$$

$$r = a\theta, \theta = bt \Rightarrow r = abt, \dot{r} = ab$$

$$f(\theta) = m(\dot{r} \dot{\theta}) = 2mab \neq 0$$

پس چنین حرکتی نمی‌تواند تحت تأثیر نیروی مرکزی باشد. اما اگر θ تابع خطی از t نباشد یعنی $\theta = bt^\alpha$ ، آنگاه

$$f(\theta) = m(\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})$$

$$= m \left[(ab\alpha t^{\alpha-1}) (b\alpha t^{\alpha-1}) + (abt^\alpha) (b\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}) \right] = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

با این مقدار α ، میدان فوق یک نیروی مرکزی است.

می‌توان از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای در مورد نیروی مرکزی نیز به این نتیجه دست یافت:

$$\ell = m r^2 \dot{\theta} = m a^2 \theta^2 \dot{\theta} \Rightarrow \theta^2 d\theta = \frac{\ell}{m a^2} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \theta^3 = \frac{\ell}{m a^2} t \Rightarrow \theta \sim t^{\frac{1}{3}}$$

۴- $r(t)$ و $\theta(t)$ را برای مدار نوسانگر هماهنگ همسانگرد به دست آورید.

$$\text{حل: } V(r) = \frac{1}{2} k r^2, T = \frac{1}{2} m v^2, E = T + V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} k r^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\ell^2}{m^2 r^4} \right) + \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2 m r^2} + \frac{1}{2} k r^2$$

$$E = -\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2, \quad \dot{r} = \left[\frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{m}}t &= \int \frac{dr}{\left[E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{2mr^2} (2mr^2 E - l^2 - mkr^2)}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{mk}{2mr^2} \left(r^4 - \frac{2E}{k}r^2 + \frac{l^2}{mk} \right)}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{k}} \int \frac{rdr}{\left[\left(r^2 - \frac{E}{k} \right)^2 + \frac{E^2}{k^2} + \frac{l^2}{mk} \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

با انتخاب $A = \frac{E^2}{k^2} + \frac{l^2}{mk}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \sqrt{\frac{2}{k}} \int \frac{rdr}{\left[\left(r^2 - \frac{E}{k} \right)^2 + A \right]^{\frac{1}{2}}}$$

با تغییر متغیر $u = r^2 - \frac{E}{k}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{2}{m}}t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{k}} \int \frac{du}{(A + u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(A + u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

یادآوری:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\omega^2 t = \frac{1}{r} \ln \left(\sqrt{A + u^2} + u \right) ; u + \sqrt{A + u^2} = e^{r\omega^2 t}$$

$$\omega^2 t = \frac{1}{r} \sinh^{-1} \frac{u}{\sqrt{A}} ; \sinh \omega^2 t = \frac{u}{\sqrt{A}} ; u = \sqrt{A} \sinh r\omega^2 t$$

$$r^2 - \frac{E}{k} = \sqrt{A} \sinh r\omega^2 t ; r(t) = \left[\left(\frac{E^2}{k^2} + \frac{l^2}{mk} \right) \sinh^2 r\omega^2 t + \frac{E}{k} \right]^{\frac{1}{2}}$$

برای یافتن $\theta(t)$ از اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$l = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\int d\theta = \int \frac{l dt}{mr^2} = \int \frac{l dt}{m \left[\left(\frac{E^2}{k^2} + \frac{l^2}{km} \right) \sinh^2 r\omega^2 t + \frac{E}{k} \right]}$$

با حل انتگرال بالا جواب مربوط به $\theta(t)$ به دست می‌آید.

۵- نیروی وارد بر یک جسم و شتاب برآیند آن را در نقطه‌ای بر روی سطح زمین بررسی کنید. ناظر را روی زمین انتخاب کنید. \hat{v} برداریکه در امتداد نیروی گریز از مرکز، $\hat{\Delta}$ بردار یکه در امتداد نیروی مرکز گرای گرانس می‌باشد.

$$r = R \cos \lambda , \quad \vec{F}_G = \frac{GMm}{R^2} \hat{\Delta} \quad \text{حل:}$$

نیروی گریز از مرکز $\vec{F} = \frac{mv^2}{r} \hat{v}$ است.

$$\vec{mg} = m\omega^2 R \cos \lambda \hat{v} + G \frac{Mm}{R^2} \hat{\Delta}$$

مؤلفه‌ای از نیروی گریز از مرکز را در نظر می‌گیریم که در امتداد $\hat{\Delta}$ باشد،

$$-\vec{m}\vec{g} + G \frac{Mm}{R^2} \hat{\Delta} = -\frac{mv^2}{r} \hat{v}$$

نیروی گریز از مرکز $F = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = m\omega^2 R \cos \lambda$

$$F_{\hat{\Delta}} = mR\omega^2 \cos \lambda \cos \lambda = mR\omega^2 \cos^2 \lambda$$

زاویه بین دو نیرو خیلی کوچک است. در نتیجه می‌توان mg را نیز در امتداد $\hat{\Delta}$ در نظر گرفت.

$$mg\hat{\Delta} = \frac{GmM}{R^2} \hat{\Delta} - mR\omega^2 \cos^2 \lambda \hat{\Delta}, \quad g = \frac{GM}{R^2} - R\omega^2 \cos^2 \lambda$$

۶- ذره‌ای در صفحه xy به وسیله نیروی $F = \frac{k}{y}$ (متناسب با عکس فاصله از ذره تا محور x)

به طرف مبدأ جذب می‌شود. مطلوبست محاسبه کار انجام شده بوسیله نیرو، وقتی که ذره از نقطه $y = a$ و $x = 0$ به نقطه $y = 0$ و $x = 2a$ در امتداد مسیری حرکت می‌کند که از دو ضلع مربع مستطیل تشکیل شده است که یکی پاره‌خطی است موازی محور x از نقطه $y = a$ و $x = 0$ به نقطه $y = a$ و $x = 2a$ و دیگری پاره‌خطی قائم از نقطه $y = a$ تا محور x است.

$$\vec{F} = \frac{k}{y} \hat{n}; \quad \hat{n} = \frac{-x\hat{i} - y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{حل:}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int f dx \hat{i} + \int f dy \hat{j} = -\frac{k}{y} \int_{y=a}^0 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{k}{y} \int_{x=2a}^0 \frac{ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= -\frac{k}{a} \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + k \int \frac{dy}{\sqrt{4a^2 + y^2}}$$

$$= -\frac{k}{a} \sqrt{x^2 + a^2} \Big|_0^{2a} + k \ln(y + \sqrt{y^2 + 4a^2}) \Big|_0^a$$

$$= -\frac{k}{a}(\sqrt{\delta}a - a) + k[\ln(a + \sqrt{\delta}a) - \ln \nu a]$$

$$W = -k[-\nu + \sqrt{\delta} + \ln(\nu + \sqrt{\delta})a - \ln \nu a]$$

$$= -k[-\nu + \sqrt{\delta} + \ln(\nu + \sqrt{\delta}) + \ln a - \ln \nu - \ln a]$$

$$W = k\left[\nu - \sqrt{\delta} - \ln\left(\frac{\nu + \sqrt{\delta}}{\nu}\right)\right]$$

۷- بنابر نظریه هسته‌ای یوکاوا نیروی جاذبه بین یک نوترون و یک پروتون دارای پتانسیل زیر است:

$$V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r} \quad ; \quad k < 0$$

(الف). نیرو را پیدا کنید و آن را با قانون نیروی $\frac{1}{r^2}$ مقایسه کنید.

(ب). بحث کنید که چگونه حرکات از انواع حرکت متناظر برای قانون نیروی متناسب با $\frac{1}{r^2}$ فرق

خواهند داشت.

(پ). E و L را برای حرکت روی دایره‌ای به شعاع a بیابید.

(ت). زمان تناوب حرکت دایره‌ای و نوسان‌های شعاعی کوچک را پیدا کنید.

(ث). نشان دهید که وقتی a خیلی کوچک است مدارهای نسبتاً دایره‌ای شکل، تقریباً بسته‌اند.

$$'V'(r) = \frac{ke^{-ar}}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow \frac{d'V'}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} + \frac{ke^{-ar}}{r^2}(\nu + ar) = 0 \quad \text{حل:}$$

$$L^2 = -mke^{-ar}r(\nu + ar)$$

$$F = -\frac{dV(r)}{dt} = \frac{ke^{-ar}}{r^2}(\nu + ar)$$

$$F = m \frac{v^{\prime 2}}{r} = \frac{ke^{-ar}}{r^{\prime 2}} (\nu + ar) \quad , \quad v^{\prime 2} = \frac{mke^{-ar}}{r} (\nu + ar)$$

$$T = \frac{1}{2} mv^{\prime 2} = \frac{1}{2} m^{\prime} ke^{-ar} (\nu + ar)$$

$$E = T + V'(r) = \frac{1}{2} m^{\prime} ke^{-ar} (\nu + ar) + \frac{L^{\prime 2}}{2mr^{\prime 2}} + \frac{k}{r} e^{-ar} = (\nu - ar) \frac{ke^{-ar}}{r}$$

نیروی یوکاوا در هسته‌ها وجود دارد. از آنجائیکه هسته از پروتون تشکیل شده است، باید همدیگر را دفع کنند ولی نیروی یوکاوا آنها را به هم جمع می‌کند. نیروی یوکاوا بین یک پروتون و یک نوترون است. برای E های مثبت ذره تنها یک نقطه بازگشت دارد. برای $E < E(r_0) < 0$ دارای دو نقطه بازگشت r_1, r_2 است و ذره حرکت نوسانی دارد. برای $E < E(r_0)$ ذره حرکت ندارد. در $\Gamma = \Gamma_0$ سرعت کمینه است و در دایره‌ای به شعاع r_0 حرکت می‌کند. زمان تناوب حرکت

نوسانی در دایره‌ای به شعاع r_0 برابر است با $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}}$ که در آن $k' = \frac{d^{\prime 2} V'(r)}{dr^{\prime 2}}$ می‌باشد.

$$k' = \frac{d^{\prime 2} V'(r)}{dr^{\prime 2}} = \frac{\nu ke^{-ar}}{r^{\prime 3}} \left(\nu + ar + \frac{a^{\prime} r^{\prime 2}}{2} \right)$$

$$T' = 2\pi \left[\frac{\nu ke^{-ar_0}}{mr_0^{\prime 3}} \left(\nu + ar_0 + \frac{r_0^{\prime 2}}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

زمان تناوب لازم یک دور کامل T_0 :

$$T_{\theta} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi \left[-\frac{kr_0 e^{-ar_0}}{m} (\nu + ar_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{T_r}{T_\theta} = \left[\frac{-r_0 k e^{-ar_0} (\gamma + ar_0)}{r_0^{-\gamma} k e^{-ar_0} \left(\gamma + ar_0 + \frac{a^2 r_0^2}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{T_r}{T_\theta} \approx 1$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad L = r_0 m v_\theta = r_0 \sqrt{\frac{e^{-ar_0} k}{m} \left(\frac{\gamma + ar_0}{r_0^\gamma} \right)}$$

$$L = \sqrt{\frac{e^{-ar_0} k}{m} \left(\frac{ar_0 + \gamma}{r_0} \right)}$$

۸- ذره‌ای به جرم m در میدان نیروی مرکزی $\vec{F} = -k\vec{r}$ در حرکت است:

(الف). انرژی پتانسیل موثر را بنویسید و آن را رسم کنید و در انواع حرکت بر حسب انرژی کل ذره بحث کنید.

(ب). برای اینکه ذره حرکت دایره‌ای داشته باشد چه شرطی برای انرژی پتانسیل باید وجود داشته باشد؟ شعاع دایره حرکت و سرعت زاویه‌ای حرکت بر این مدار دایره‌ای را بیابید. از طریق بررسی نیرو چگونه می‌توانید سرعت زاویه‌ای را به دست آورید.
(پ). انرژی کل و اندازه حرکت زاویه‌ای ذره را که به ازای آنها مسیر دایره‌ای به شعاع a می‌شود محاسبه کنید.

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \quad \text{حل:}$$

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{2} k r^2 + \frac{1}{2} k r_0^2 = \frac{1}{2} k r^2$$

$$'V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad 'V'(r) = \frac{1}{2} k r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

پتانسیل موثر حاصل جمع تابع $V(r) = \frac{1}{2} k r^2$ و جمله پتانسیل مجازی به صورت $\frac{L^2}{2mr^2}$ است.

از انرژی‌های $E < 0$ که اساساً در فیزیک کلاسیک مفهومی ندارد صحبتی به میان نمی‌آید. در

مورد $E < V'_{\min}$ انرژي جنبشی منفی می‌شود و چنین چیزی نیز وجود ندارد. در $E = V'_{\min}$ حرکت دایره‌ای شروع می‌شود و یک نقطه بازگشت داریم. در $E > V'_{\min}$ نقاط بازگشت دو نقطه خواهد شد و چون نیرو جاذبه است چنین ذره‌ای در مسیر بیضی حرکت خواهد کرد، که تصویر این مسیر در راستای حرکت (r) یک مسیر رفت و برگشت است.

(ب). شرط اینکه حرکت دایره‌ای داشته باشیم این است که انرژي کل برابر می‌نیم مقدار انرژي پتانسیل موثر شود. برای یافتن این شرط به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$E = V'_{\min}$$

$$\frac{d'V'}{dr} = 0, \quad kr - \frac{L^2(\gamma r)}{2mr^3} = kr - \frac{L^2}{mr^3} \Big|_{r=r_0} = 0$$

$$mkr_0^3 - L^2 = 0 \rightarrow r_0 = \left(\frac{L^2}{mk} \right)^{\frac{1}{3}}$$

همین شرط را می‌توان از طریق بررسی نیروها و تعادل آنها به دست آورد.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = 0, \quad -kr_0 + \frac{L^2}{mr_0^3} = 0$$

$$\Rightarrow r_0^3 = \frac{L^2}{mk}, \quad r_0 = \left(\frac{L^2}{mk} \right)^{\frac{1}{3}}$$

اگر بخواهیم V'_{\min} را نیز به دست آوریم، چنین عمل می‌کنیم:

$$V'_{\min} = V'(r_0) = \frac{1}{2}kr_0^2 + \frac{L^2}{2mr_0^2} = \frac{1}{2}k \left(\frac{L^2}{mk} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{L^2}{2m \left(\frac{L^2}{mk} \right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{kL^2}{m}}$$

برای یافتن ω_0 (سرعت زاویه‌ای حرکت دایره‌ای) داریم:

$$L = mr^2 \dot{\theta} \Big|_{r=r_0} \quad mr_0^2 \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{L^2}{mr_0^2} = \frac{L}{m \left(\frac{L^2}{mk} \right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$L = mr^2 \dot{\theta} \quad ; \quad r = a \Rightarrow L = ma^2 \dot{\theta} = ma^2 \omega_0 \quad .(پ)$$

که در آن ω_0 سرعت زاویه‌ای حرکت دایره‌ای است و قبلاً حساب کردیم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$L = ma^2 \omega_0 = ma^2 \sqrt{\frac{k}{m}} = a^2 \sqrt{mk}$$

و برای انرژی خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + V(r) = \frac{1}{2} m(r\omega_0)^2 + \frac{1}{2} kr^2 \Big|_{r=a}$$

$$= \frac{1}{2} ma^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} ma^2 \left(\frac{k}{m} \right) + \frac{1}{2} ka^2 = ka^2$$

$$E = 'V' \Big|_{r=r_0=a} = \sqrt{\frac{k}{m}} L = \sqrt{\frac{k}{m}} L = \sqrt{\frac{k}{m}} (a^2 \sqrt{mk}) = a^2 k$$

۹- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی جاذبه وارد بر واحد جرم $\frac{\mu}{r^2}$ قرار دارد. آن را از نقطه p

با سرعت \vec{v}_0 که با راستای op زاویه α می‌سازد پرتاب می‌کنیم؛ O مرکز جاذبه است. نشان

دهید اگر $op = r_0 < \frac{2\mu}{v_0^2}$ باشد، آنگاه مسیر یک بیضی است. خروج از مرکز بیضی را برحسب

μ, v_0, α, r_0 بیابید. در چه شرایطی مسیر دایره است. در این رابطه α, v_0 را به دست آورید.

حل: با توجه به صورت مسئله باید شکل نیروی جاذبه وارد بر جرم m را بنویسیم:

$$F = \frac{-m\mu}{r^2} = \frac{k}{r^2} \Rightarrow k = -m\mu < 0$$

$$V = - \int_{r_s}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_s}^r F dr = + \int_{r_s=\infty}^r \frac{m\mu}{r^2} dr = - \frac{m\mu}{r}$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + \left(- \frac{m\mu}{r} \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{m\mu}{r}$$

در عبارت بالا \vec{V} بردار کلی سرعت است که پس از شکل‌گیری مسیر بیضی به دو مؤلفه شعاعی و مماسی تجزیه می‌شود. (r_0, v_0) مختصات نقطه p است که حرکت از آن آغاز می‌شود. توجه داریم که چون نیرو کنسرواتیو است (نیرو مرکزی است) پس بقای انرژی E داریم:

برای اینکه مسیر بیضی باشد در مورد چنین نیرویی باید $E < 0$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{m\mu}{r_0} < 0, \quad \frac{m\mu}{r_0} > \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \frac{\mu}{r_0} > \frac{v_0^2}{2}, \quad r_0 < \frac{2\mu}{v_0^2}$$

می‌توانستیم فرض مسئله را به کار ببریم و نتیجه بگیریم که $E < 0$ است. برای یافتن خروج از مرکز بیضی از رابطه کلی زیر کمک می‌گیریم:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{rEL^2}{mk^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

در این مسئله $k = -m\mu$ است و برای یافتن E و L داریم: چون \vec{L} در نیروی مرکزی ثابت است پس مقدارش در لحظه شروع و تمام لحظات دیگر مانند انرژی باید یکی باشد. یعنی

$$L = \left| m\vec{r} \times \vec{v} \right|_{r=r_0} = mr_0 v_0 \sin \alpha$$

v_0, r_0, α مختصات شروع حرکت هستند. در مورد E داریم:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{m\mu}{r_0}$$

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{m\mu}{r_o} \right) (m r_o v_o \sin \alpha)^2}{m(-m\mu)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{r_o^2 v_o^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2} - \frac{2 r_o v_o \sin^2 \alpha}{\mu} \right]^{\frac{1}{2}}$$

در مورد مسیر دایره‌ای، باید شعاع حامل op ثابت و همیشه بر سرعت عمود باشد: یعنی

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ r = r_o \end{cases}$$

این صورت:

$$L = m r_o v_o \sin \alpha \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = m r_o v_o$$

$$F = \frac{-m\mu}{r^2} \Big|_{r=r_o} = \frac{-m\mu}{r_o^2}$$

برای یافتن v_o در حرکت دایره‌ای یعنی $r = r_o = \text{const}$ داریم:

$$\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$$

مقادیر بالا را در معادله حرکت نیوتن قرار می‌دهیم:

$$m\ddot{r} = \sum F = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$$

$$\sum F = m\ddot{r} = -\frac{m\mu}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \Big|_{r=r_o} = -\frac{m\mu}{r_o^2} + \frac{L^2}{mr_o^3} = 0$$

$$-\frac{m\mu}{r_o^2} + \frac{(m r_o v_o)^2}{m r_o^3} = 0 \Rightarrow \frac{m\mu}{r_o^2} - \frac{m v_o^2}{r_o} = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{r_o} - v_o^2 = 0 \Rightarrow v_o^2 = \frac{\mu}{r_o}$$

$$\Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{\mu}{r_o}}$$

۱۰- ذره‌ای به جرم m در صفحه xy چنان حرکت می‌کند که بردار جابجایی آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

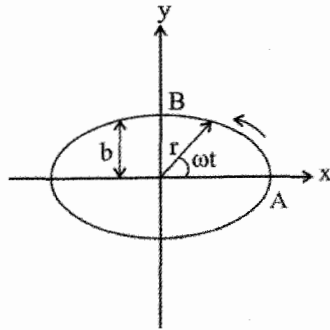
$$\vec{r} = a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j}$$

که در آن ω, b, a ثابتهای مثبت هستند و $a > b$ است.

(الف)- نشان دهید که مسیر حرکت بیضی است.

(ب)- نشان دهید که نیروی وارد بر ذره یک نیروی مرکزی است.

(پ)- اگر مسیر ذره به شکل زیر باشد، انرژی جنبشی ذره را در نقاط A و B پیدا کنید. با محاسبه، کار میدان نیروی وارد بر ذره را از A تا B بیابید و نشان دهید که کار انجام شده در یک دور کامل بیضی صفر است. از اینجا چه نتیجه فیزیکی می‌گیرید؟



حل:

$$\vec{r} = a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j} = x \hat{i} + y \hat{j} \quad \text{(الف)-}$$

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = b \sin \omega t \end{cases}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d}{dt} (-a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j}) \quad \text{(ب)-}$$

$$= m(-a\omega^2 \cos \omega t \hat{i} - b\omega^2 \sin \omega t \hat{j})$$

این رابطه نشان می‌دهد که \vec{F} همواره در سوی \vec{r} است، از این رو طبق تعریف نیرو، اصطلاحاً

مرکزی است. نقطه A معادل $\omega t = 0$ و نقطه B هم ارز $\omega t = \frac{\pi}{2}$ است.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m (-a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j})^2 \quad \text{-(پ)}$$

$$= \frac{1}{2} m (a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)$$

این رابطه انرژی جنبشی را در هر لحظه نشان می‌دهد. در نقطه A و B به ترتیب خواهیم داشت:

$$(\omega t)_A = 0 \rightarrow k_A = \frac{1}{2} m \omega^2 b^2$$

$$(\omega t)_B = \pi \rightarrow k_B = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -m\omega^2 \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{-m\omega^2}{2} \int_A^B d(\vec{r} \cdot \vec{r})$$

$$= \frac{-m\omega^2}{2} \int_A^B d(r^2) = -\frac{m\omega^2}{2} r^2 \Big|_A^B = \frac{m\omega^2}{2} (a^2 - b^2)$$

راه حل دوم:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m\omega^2 \int_A^B \vec{r} \cdot d\vec{r} = -m\omega^2 \int (x dx + y dy)$$

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -a\omega \sin \omega t dt \\ dy = b\omega \cos \omega t dt \end{cases}$$

$$x dx + y dy = a \cos \omega t (-a\omega \sin \omega t dt) + b \sin \omega t (b\omega \cos \omega t dt)$$

$$= -a^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t dt + b^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t dt$$

$$= \omega (b^2 - a^2) \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \omega (b^2 - a^2) \sin 2\omega t dt$$

$$W_{A \rightarrow B} = -m\omega^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \omega (b^2 - a^2) \sin 2\omega t dt$$

$$= \frac{1}{4} m \omega^2 (b^2 - a^2) \cos 2\omega t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} m \omega^2 (b^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - b^2) = k_B - k_A > 0$$

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که قضیه کار-انرژی در مورد این مسیر صدق می‌کند. در مورد کار در تمام مسیر خواهیم داشت:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -m\omega^2 \int_0^{2\pi} (x dx + y dy) = \frac{m\omega^2}{4} (b^2 - a^2) \cos 2\omega t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

و این همان خاصیت نیروی پایستار است که کار این نیرو در مسیر بسته صفر می‌شود.

۱۱- دو سیاره با جرم‌های برابر M ، شعاع R ، و فاصله a از یکدیگر در دایره‌هایی به دور هم می‌چرخند. سرعت نسبی آن دو را بیابید. اگر از یکی از این دو سیاره موشکی به طرف سیاره دیگر شلیک شود، حداقل سرعت آن چه مقدار باید باشد تا به سیاره دوم برسد. (از تأثیر نیروی جاذبه سیاره دوم بر روی موشک صرف‌نظر می‌کنیم).

حل:

بنابر حرکت دو جسم، در حرکت نسبی سیاره به دور خورشید باید به جای سیاره، جرم کاهش

$$\mu = \frac{MM}{M+M} = \frac{M}{2}$$

یافته دستگاه سیاره-خورشید را به کار برد. در اینجا جرم کاهش یافته

است. از آنجا رابطه میان شعاع a و سرعت نسبی را می‌توان از رابطه نیرو به دست آورد:

$$\vec{F} = \mu \vec{a} \Rightarrow \frac{GM^2}{a^2} = \frac{M}{2} \frac{v^2}{a}, \quad v = \sqrt{2GM/a}$$

هنگام پرتاب موشک برای آنکه به سیاره بازنگردد باید سرعت آن (نسبت به سیاره) حداقل برابر سرعت فرار موشک باشد. از فصل دوم، برای سرعت فرار روی سطح سیاره داریم:

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{R}}$$

از نظر سیاره دوم، باید سرعت کل موشک به طرف آن باشد. اگر سرعت موشک

نسبت به سیاره اول را \vec{V} بگیریم، باید $|\vec{V} + \vec{v}| \geq v_c$. بنابراین برای V_{\min} که در راستای خط
 واصل دو سیاره نیست داریم:

$$V_{\min} = \sqrt{v^2 + v_e^2} = \sqrt{\frac{2GM}{a} + \frac{2MG}{R}} = \sqrt{\frac{2MG}{R} \left(1 + \left(\frac{R}{a} \right) \right)} \cong \left(1 + \frac{R}{2a} \right) v_e$$

تقریب به سبب بزرگ بودن فاصله دو سیاره نسبت به شعاع هر یک است.

۱۲- سیاره‌ای به جرم M و شعاع a در روی مداری به شعاع r_0 حرکت می‌کند و ضمناً با سرعت
 زاویه‌ای ω_0 به دور محوری که از مرکز آن گذشته و بر صفحه مدار قائم است، می‌چرخد. به سبب
 جزر و مد (اثر اجرام دیگر سماوی) از سرعت زاویه‌ای ω_0 کاسته می‌شود و در نتیجه شعاع مدار نیز
 تغییر می‌یابد. رابطه‌ای بر حسب سرعت زاویه‌ای ω و شعاع مسیر r به دست آورید. (سرعت زاویه‌ای
 $\dot{\theta}$ را بر روی مدار ثابت فرض کنید و مبدأ زمان را لحظه‌ای در نظر بگیرید که شعاع مدار سیاره، r_0
 و سرعت زاویه‌ای آن به دور محورش ω_0 است.

حل:

چون حرکت در صفحه است و دوران سیاره نیز حول محور عمود بر این صفحه است، گشتاورهای
 \vec{L}_R (دوران) و \vec{L}_D (جابجایی روی مدار) و $\vec{L} = \vec{L}_D + \vec{L}_R$ همه عمود بر سطح مدار
 هستند. یعنی می‌توان نوشت $\vec{L} = \vec{L}_D + \vec{L}_R$. می‌دانیم:

$$\vec{L}_D = \vec{r} \times m\vec{v} \quad , \quad L_R = I\omega = \frac{2}{5} Ma^2 \omega$$

از طرفی چون مدار را دایره‌ای گرفته‌ایم، $\vec{r} \perp \vec{v}$ است. پس

$$\vec{L}_D = rMv = Mr r \dot{\theta} = M \dot{\theta} r^2 = \frac{2\pi M}{T} r^2$$

نیروی وارد بر سیاره مرکزی است و مرکز نیرو در صفحه حرکت است. گشتاور آن $N=0$ است.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = L_R + L_D = \frac{2}{5} Ma^2 \omega + \frac{2\pi M}{T} r^2 = \text{const}$$

$$\frac{a^2}{5} \omega + \frac{\pi}{T} r^2 = \frac{a^2}{5} \omega_0 + \frac{\pi}{T} r_0^2 \Rightarrow \frac{\pi}{T} (r^2 - r_0^2) = \frac{a^2}{5} (\omega_0 - \omega)$$

$$\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{Ta^2}{r_0^2 \Delta\pi} (\omega_0 - \omega) + 1 \Rightarrow r = r_0 \left[1 + \frac{Ta^2}{\Delta\pi r_0^2} (\omega_0 - \omega) \right]^{\frac{1}{2}}$$

۱۳- فرض کنید خورشید با ابری از غبار پوشیده شده است. خورشید پتانسیل $u(r) = -\frac{GmM}{r}$

را ایجاد می کند و غبار یک پتانسیل کوچک $u'(r) = \frac{kr^2}{r}$ را به آن اضافه می کند. زمین در یک مدار

بیضی نزدیک به دایره با شعاع متوسط r_0 به دور خورشید می گردد. این پتانسیل باعث می شود که محور بیضی حرکت تقدیمی داشته باشد، آهنگ حرکت تقدیمی محور بیضی را تا مرتبه اول k محاسبه کنید.

حل:

پتانسیل مؤثر در حرکت زمین به دور خورشید عبارتست از:

$$V'(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{kr^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (1)$$

شعاع r_0 از رابطه زیر به دست می آید:

$$\left. \frac{dV'}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow \frac{GmM}{r_0^2} + kr_0 - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0 \quad (2)$$

و فرکانس نوسان های شعاعی از رابطه زیر:

$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \left. \frac{d^2V'}{dr^2} \right|_{r=r_0} = \frac{1}{m} \left(-2 \frac{GmM}{r_0^3} + k + \frac{3L^2}{mr_0^4} \right) \quad (3)$$

از ترکیب دو رابطه (۲) و (۳) داریم:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m} \left(3k + \frac{L^2}{mr_0^4} \right)$$

برای حرکت دایره ای داریم $L = mr_0^2 \omega_0$ ، که ω_0 فرکانس زاویه ای گردش زمین به دور خورشید است. بنابراین آهنگ حرکت تقدیمی محور بیضی چنین است:

$$\omega_r = \left(\frac{\gamma k}{m} + \omega_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cong \omega_0 + \frac{\gamma k}{2m\omega_0}$$

$$\omega_p = \omega_r - \omega_0 = \frac{\gamma k}{2m\omega_0}$$

چون $\omega_r > \omega_0$ است، زمان تناوب نوسان‌های شعاعی کوچکتر از زمان دوران در مدار دایره‌ای است. بنابراین جهت حرکت تقدیمی محور بیضی در خلاف دوران است، و تقدیم محور بیضی در یک

دوره تناوب $\left(T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} \right)$ چنین است:

$$\Delta\theta = \omega_p T_r = \frac{\gamma k}{2m\omega_0} \times \frac{2\pi}{\omega_0 + \frac{\gamma k}{2m\omega_0}} \cong \frac{\gamma \pi k}{m\omega_0^2}$$

۱۴- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر دو نیروی مرکزی \vec{f}_1 و نیروی اصطکاک \vec{f}_2 است، بطوریکه

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{r}}{r} f(r) \quad , \quad \vec{f}_2 = -\lambda \vec{v} \quad , \quad \lambda > 0$$

\vec{v} سرعت ذره است. اگر ذره در ابتدا دارای اندازه حرکت زاویه ای \vec{J}_0 نسبت به $r=0$ باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای آن را در زمان‌های بعدی محاسبه کنید.

حل-

معادلات حرکت ذره را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) - \lambda\dot{r} \\ m(\gamma\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -\lambda r\dot{\theta} \end{cases}$$

و یا

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = -\lambda r\dot{\theta}$$

با قرار دادن $J = mr^2\dot{\theta}$ ، معادله آخر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\lambda J}{m}$$

با انتگرال گیری از معادله فوق و قرار دادن J_0 به عنوان اندازه حرکت زاویه‌ای اولیه ذره، خواهیم داشت:

$$J = J_0 e^{-\lambda/m t}$$

۱۵- نیروی $\hat{r} f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ داده شده است. \vec{r} بردار مکان، \vec{v} بردار سرعت، و t زمان است.

کدام گزینه صحیح است:

(الف) - بطور کلی می‌توان برای این نیرو، یک تابع انرژی پتانسیل تعریف کرد.

(ب). حرکت ذره محدود به یک صفحه است و قانون دوم کپلر در مورد آن صادق است.

(پ). حرکت ذره محدود به یک صفحه است ولی قانون دوم کپلر در مورد آن صادق نیست.

(ت). حرکت ذره در یک صفحه نیست و انرژی مکانیکی جسم پایستار نیست.

حل:

پاسخ صحیح (ب) است. گشتاور هر نیروی مرکزی نسبت به مرکز آن صفر است. بنابراین اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره که تحت تأثیر این نیرو حرکت می‌کند ثابت است و حرکت ذره محدود به یک صفحه می‌شود. چون قانون دوم کپلر از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای نتیجه می‌شود، از اینرو گزینه (ب) صحیح است.

۵-۱۳- مسائل برگزیده برای حل

۱- ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی \vec{F} در فضا حرکت می‌کند. نشان دهید که برای این ذره

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

است، که در آن \vec{L} بردار اندازه حرکت زاویه‌ای و \vec{N} گشتاور نیروی \vec{F} است و هر دو

گشتاور نسبت به مبدأ مختصات محاسبه می‌شوند. چنانچه \vec{F} نیروی مرکزی باشد، رابطه بالا به چه صورتی در می‌آید؟ و از آنجا به طور تحلیلی نشان دهید که مسیر ذره حتماً یک منحنی تخت (دو بعدی) است.

۲- ذره‌ای به جرم m در پتانسیل مرکزی $V = kr^4$ در حرکت است:

(الف) - انرژی پتانسیل مؤثر را بنویسید و آن را رسم کنید؛

(ب) - برای اینکه ذره حرکت دایره‌ای داشته باشد چه شرطی بر حسب انرژی پتانسیل باید وجود داشته باشد؟ شعاع این حرکت و سرعت زاویه‌ای حرکت بر این مدار دایره‌ای را به دست آورید؟ چگونه می‌توان این حرکت را عملاً به وجود آورد؟ انرژی کل و اندازه حرکت زاویه‌ای ذره را که به ازاء آنها مسیر ذره دایره‌ای به شعاع a است، به دست آورید.

۳- ذره‌ای تحت تأثیر نیروی مرکزی $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k(1 - e^{-\theta})}{r^2} \hat{r}$ قرار دارد که r, θ مختصات

قطبی ذره‌اند. مسیرهای ممکن حرکت را برای ذره بحث کنید. فرض کنید k منفی و $\theta_0 = 0$ است.

۴- نشان دهید که اگر نیروهای مرکزی به صورت $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ باشد در این صورت اولاً

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

ثانیاً، در مورد گرانش که نیرو بوسیله رابطه $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$ داده می‌شود نشان دهید که کمیت

بردار $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mkr \hat{r}$ که به بردار لنز معروف است بقا دارد.

۵- دوره نوسان جرم m را به صورت تابعی از انرژی بیابید بطوری که جرم مذکور در میدان‌های

پتانسیل زیر حرکت می‌کند:

$u = A|x|^n$ (الف) -

$u = u_0 \cosh^2 \alpha x$, $-u < E < 0$ (ب) -

$u = u_0 \tanh^2 \alpha x$ (ج) -

$T = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}$ پاسخ: (الف) -

$$T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \quad \text{(ب)}$$

$$T = \frac{\pi}{a} \sqrt{[2m/(E + u_0)]} \quad \text{(ج)}$$

۶- الف- وابستگی زمانی مختصات یک ذره با انرژی $E=0$ را بیابید به طوری که در میدان $u = \frac{-\alpha}{r}$ بر یک سهمی حرکت می‌کند.

(ب)- وقتی تصحیح کوچک $\delta u(r)$ به انرژی پتانسیل $u = -\frac{\alpha}{r}$ افزوده می‌شود، مسیر محدود حرکت دیگر بسته نیست و در هر دوره گردش نقطه حضيض (Perihelion) به اندازه زاویه کوچک $\delta\theta$ جابجا می‌شود. مقدار $\delta\theta$ را در مورد $u = \frac{\beta}{r^2}$ بیابید.

۷- کار انجام شده بر ذره‌ای را حساب کنید که بر نیمدایره‌ای به شعاع a ، در صفحه xy در حرکت است، و در اثر نیرویی متناسب با فاصله ذره از نقطه $(x = a, y = 0)$ به سوی این نقطه کشیده می‌شود.

پاسخ: k ضریب تناسب نیرو است. $W = 2ka^2$

۸- ذره‌ای بر راستای سهمی $y^2 = 4f_0^2 - 4f_0x$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، به طوری که f_0 ضریب ثابت است. مؤلفه‌های سرعت و شتاب را در مختصات دکارتی و قطبی به دست آورید. نشان دهید که معادله سهمی در مختصات قطبی چنین است: $r \cos^2 \frac{\theta}{2} = f_0$

۹- تعیین کنید کدام یک از نیروهای زیر پایستار است، و انرژی پتانسیل وابسته به نیروهای پایستار را پیدا کنید:

$$F_x = 6abz^2y - 2 \cdot bx^3y^2 \quad \text{(الف)}$$

$$F_y = 6abxz^2 - 1 \cdot bx^4y$$

$$F_z = 18abxyz^2$$

$$\vec{F} = F_x(x)\hat{i} + F_y(y)\hat{j} + F_z(z)\hat{k} \quad \text{-(ب)}$$

$$F_r = -\gamma ar \sin \theta \cos \varphi \quad \text{-(ج)}$$

$$F_\theta = -ar \cos \theta \cos \varphi$$

$$F_\varphi = ar \sin \theta \sin \varphi$$

۱۰- الف- در انواع ممکن حرکت نیروی مرکزی $F(r) = -\frac{k}{r^\gamma} + \frac{k'}{r^\beta}$ بحث کنید، با این فرض که $k > 0$ است، و برای k' هر دو علامت را در نظر بگیرید.

(ب)- معادله مدار را حل کنید، و نشان دهید که مدارهای محدود دارای شکل زیر است (اگر $L^2 > mk'$ باشد):

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos a\theta}$$

(پ)- نشان دهید که این رابطه یک بیضی را با حرکت تقدیمی نشان می‌دهد. سرعت زاویه‌ای این حرکت را تعیین کنید، و بیان کنید آیا در راستای سرعت زاویه‌ای مداری است یا در جهت مخالف آن.

پاسخ قسمت (پ): حرکت فرفره‌ای بیضی $\frac{\gamma\pi(1-\alpha)}{\alpha}$ رادیان در هر گردش است، که در آن

$$\alpha^2 = 1 + \frac{mk'}{L^2} \text{ است.}$$

۱۱- دو جرم m_1, m_2 با نیروی گرانشی $(m_1 + m_2 = M)$ در فاصله r_0 از یکدیگر قرار گرفته‌اند و از حال سکون رها می‌شوند. نشان دهید وقتی فاصله جدایی آنها r است $(r < r_0)$ ، سرعت دو ذره چنین است:

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{\gamma G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}, v_2 = m_1 \sqrt{\frac{\gamma G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

۱۲- ذره‌ای در مدار بیضی شکل در یک میدان نیروی مرکزی با قانون عکس مجذور فاصله در حرکت است. اگر نسبت سرعت زاویه‌ای ماکزیمم به سرعت زاویه‌ای می‌نیمم ذره در مدار خود n

باشد، آنگاه نشان دهید که خروج از مرکز مدار چنین است:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$$

۱۳- اگر η را به عنوان زاویه‌ای میان جهت حرکت سیاره‌ای (در مدار بیضی شکل) و راستای عمود بر بردار شعاعی سیاره در نظر بگیریم، نشان دهید

$$\tan \eta = \frac{\varepsilon \sin \Phi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

که در آن Φ ناهنجاری خروج از مرکز است.

۱۴- یک ماهواره زمینی در مداری بیضی شکل با دوره تناوب τ ، خروج از مرکز ε ، و نیمه محور بزرگ a در حرکت است. نشان دهید که ماکزیمم سرعت شعاعی ماهواره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(v_r)_{\max} = \frac{2\pi a \varepsilon}{\tau \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

۱۵- قانون نیروی را به صورت $F(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^4}$ در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $k' > k$

باشد، آنگاه یک ذره می‌تواند در مدار دایره‌ای پایدار در $r = \rho$ حرکت کند.

۱۶- فرض کنید که ذره‌ای به جرم m مقید است که بر سطح یک سهموی حرکت کند که معادله‌اش

در مختصات استوانه‌ای $r^2 = 4az$ است. اگر ذره تحت تأثیر نیروی گرانشی قرار گیرد، نشان دهید

که فرکانس نوسان‌های کم دامنه حول مدار دایره‌ای با شعاع $\rho = \sqrt{4az_0}$ عبارت است از

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a + z_0}}$$

۱۷- ذره‌ای در یک مدار دو بعدی با معادلات پارامتری زیر در حرکت است:

$$x(t) = A(\nu at - \sin \alpha at)$$

$$y(t) = A(1 - \cos \alpha t)$$

(الف) - شتاب مماسی a_t و شتاب نرمال a_n را به صورت تابعی از زمان بیابید.

(ب) - تعیین کنید در چه زمان‌هایی a_n در مدار دارای ماکزیمم مقدار است.

$$t = \frac{1}{\alpha} \left[\gamma \frac{(4n+1)\pi}{2} - \phi \right], n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{پاسخ (ب):}$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left[\frac{y(t)}{x(t)} \right]$$

۱۸- معادله حرکت ذره‌ای چنین است:

$$\ddot{x} - c + ax - \beta x^2 = 0$$

که در آن c, α, β ثابت‌های مثبت هستند. تحت چه شرایطی می‌توان جمله c را با جایگزینی $x = y - b$ حذف کرد به طوری که b ضریب ثابت است؟ تابع پتانسیل را برای دو حالت رسم کنید که در آن حالت‌ها می‌توان و نمی‌توان جمله ثابت را حذف کرد.

۱۹- یک ستاره دنباله‌دار در مداری سهمی در همان صفحه مدار زمین در حرکت است. فرض کنید مدار زمین دایره‌ای به شعاع r_e است. نشان دهید که زمانی را که دنباله‌دار درون مدار زمین صرف می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$t = \frac{p}{3\pi} \sqrt{2 \left(1 - \frac{r_p}{r_e} \right) \left(1 + 2 \frac{r_p}{r_e} \right)}$$

که در آن p دوره حرکت زمین به دور خورشید و r_p فاصله نزدیکترین مسیر دنباله‌دار به خورشید است.

۲۰- در حل مقطع مخروطی (روابط ۵-۴۲ تا ۵-۵۴)، شکل استاندارد معادله $r(\theta)$ چنین نوشته می‌شود:

$$r(\theta) = \frac{\lambda(1+\epsilon)}{1+\epsilon \cos(\theta-\theta_0)}$$

که در آن $\lambda = \frac{L^2}{mk} \frac{1}{1+\epsilon}$ است.

الف- در حالت مدارهای هذلولی ($\epsilon > 1$)، نشان دهید که فاصله نزدیکترین مسیر چنین

است:

$$r_{\min} = \begin{cases} \lambda & \text{نیروی جاذبه} \\ -\frac{k}{2E}(\varepsilon + 1) & \text{نیروی دافعه} \end{cases}$$

با بکار بردن عبارت λ و نیز $\varepsilon^2 = 1 - \frac{2EL^2}{mk^2}$ ، نتیجه بگیرید که:

$$r_{\min} = \begin{cases} \frac{k}{2E}(\varepsilon - 1) & \text{نیروی جاذبه} \\ -\frac{k}{2E}(\varepsilon + 1) & \text{نیروی دافعه} \end{cases}$$

(ب) - برای مدار هذلولی با انرژی جانبی E و پارامتر برخورد b ، نشان دهید که $L^2 = 2mb^2E$

و $\varepsilon = 1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2$ است. آنگاه با استفاده از بقای انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای نشان دهید که

فاصله نزدیکترین مسیر (وقتی $r=0$ است) همان است که از قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

۲۱- ذره‌ای به جرم m در میدان نیرویی که پتانسیل آن به صورت $V(r) = kr^4$ با $k > 0$

است، در مدار دایره‌ای به شعاع a حرکت می‌کند. مقادیر E انرژی کل و L اندازه حرکت زاویه‌ای ذره را بیابید.

پاسخ:

$$L = 2a^3 \sqrt{km} \quad \text{و} \quad E = 3ka^4$$

۲۲- ستاره دنباله‌داری در مدار سهمی شکلی حرکت می‌کند که در صفحه مدار زمین واقع شده

است. مدار زمین را دایره‌ای به شعاع a فرض کنید. اگر r_{\min} فاصله حضيض خورشیدی ستاره باشد

که در $\theta = 0$ تعریف شده است، نشان دهید که نقطه تقاطع ستاره با مدار زمین از رابطه

$$\cos \theta = \frac{2r_{\min} - a}{r_{\min} - a} \quad \text{به دست می‌آید.}$$

۲۳- ماهواره‌ای در فاصله $2R_e$ از مرکز زمین به دور زمین در مداری دایره‌ای گردش می‌کند. R_e شعاع زمین است. دوره تناوب این ماهواره کدام است؟ g شتاب جاذبه در سطح زمین فرض می‌شود.

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{2R_e}{g}}$$

پاسخ:

۲۴- ماهواره‌ای به دور زمین در حرکت است. سرعت ماهواره در نقطه حضیض مدارش v_p و سرعت آن در نقطه اوج $v_a = \frac{1}{3}v_p$ است. اگر a نصف قطر بزرگ مدار و r_a, r_p به ترتیب فاصله نقطه حضیض و نقطه اوج مدار تا زمین باشد، نشان دهید که $a = 2r_p$ است.

فصل ششم

حرکت دستگاه ذرات

«دو جسم مساوی که در برخورد مستقیم با یکدیگر هستند و پیش از برخورد سرعت‌های مساوی و مخالف هم دارند، با سرعت‌هایی دوباره به هم می‌پیوندند که جدا از جهت با هم برابرند.» جمع حاصلضرب اندازه هر جسم سخت، ضربدر مربع سرعتها، همیشه پیش و پس از برخورد با هم برابرند»

«کریستین هوگنس»

۶-۱- مقدمه

پیش از این به بحث درباره رفتار یک ذره در یک بعد، در صفحه و در فضا پرداختیم و چند قضیه مربوط به اندازه حرکت و انرژی را بررسی کرده، شرایط بقای آنها را متذکر شدیم. در این فصل در نظر داریم رفتار سیستمی مکانیکی شامل چند ذره را مورد بررسی قرار دهیم و مفاهیم و قضایایی که در مورد یک ذره اثبات شد، به سیستمی شامل چند ذره تعمیم دهیم. به عبارت دیگر قضایای اندازه

حرکت و انرژی و شرایط پایستگی آنها را در مورد دستگاه ذرات بررسی می‌کنیم و پس از آن به بیان کاربرد آنها در حل مسائل می‌پردازیم. بحث خود را با تعریف مفهوم مرکز جرم یک سیستم چند ذره‌ای آغاز می‌کنیم. موضوع این فصل را در فصل چهارم کتاب سایمون، و نیز بارگر و اولسون می‌یابیم. ماریون در فصل هشتم، و هند و فینچ با شیوه لاگرانژی در فصل چهارم و هشتم به آن پرداخته است.

۲-۶. مرکز جرم

در سیستم‌های چند ذره‌ای، اغلب تعریف نقطه‌ای به نام مرکز جرم سیستم و بررسی حرکت آن ساده‌تر و مناسب‌تر از بررسی حرکت تک تک ذرات یک دستگاه است. بنابراین در ابتدای فصل با تعریف مرکز جرم آشنا می‌شویم. سیستمی شامل n ذره به جرم‌های m_1, m_2, \dots, m_n در مکان‌های $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ نسبت به مبدأ O مفروض است. مکان جرم چنین دستگاهی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \vec{R}_{cm} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M} \quad (۱-۶)$$

مختصات مرکز جرم عبارتند از:

$$(۲-۶)$$

$$X_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k ; \quad y_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k ; \quad z_{cm} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k$$

چنانچه توزیع جرم پیوسته باشد، علامت جمع در روابط فوق به انتگرال تبدیل می‌شود؛ در اینصورت خواهیم داشت:

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm \quad (۲-۶)'$$

به عنوان مثال مرکز جرم نیمکره توپیر با چگالی ثابت ρ را می‌یابیم. جرم نیمکره را M و شعاع آن را a فرض می‌کنیم. در این صورت

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \rho \Rightarrow \rho = \frac{M}{\frac{2}{3} \pi a^3} \quad ; \quad \bar{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

به دلیل تقارن در توزیع جرم، مرکز جرم بر محور Z قرار دارد. بنابراین

$$Z = \frac{1}{M} \int z dm = \frac{1}{M} \int z \rho dV = \frac{1}{M} \int_0^a \rho z \pi (a^2 - z^2) dz$$

$$= \frac{1}{M} \frac{\pi \rho a^4}{4} = \frac{\pi \rho a^4}{4 \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \right)} = \frac{3a}{8}$$

پس جای مرکز جرم در نقطه $\left(0, 0, \frac{3a}{8} \right)$ قرار دارد.

۳-۶. بقای اندازه حرکت خطی

در فصل‌های گذشته دیدیم اندازه حرکت خطی ذره‌ای به جرم m که با سرعت \vec{v} حرکت می‌کند، از رابطه $\vec{p} = m\vec{v}$ به دست می‌آید و با توجه به این تعریف، قانون دوم نیوتن به شکل زیر بیان شد:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (۳-۶)$$

بدین ترتیب طبق رابطه بالا هر گاه برآیند نیروهای خارجی وارد بر ذره صفر باشد، اندازه حرکت خطی ذره بقا دارد. تعمیم مطالب فوق به سیستمی شامل n ذره، ما را به قانون بقای اندازه حرکت دستگاه ذرات هدایت می‌کند. برای این منظور، سیستمی شامل n ذره به جرم‌های m_1, m_2, \dots, m_n واقع در مکان‌های $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ نسبت به مبدأ O ، در نظر می‌گیریم. به هریک از ذرات دستگاه، دو نیرو وارد می‌شود؛ یک نیروی خارجی و یک نیروی داخلی که ذرات به هم وارد می‌کنند. نیروهای خارجی را با نماد \vec{F}^e (external force) و نیروهای داخلی را با \vec{F}^i (internal force) نمایش می‌دهیم. معادله حرکت ذره k عبارت است از:

$$m_k \vec{\ddot{r}}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۴-۶)$$

بدین ترتیب n معادله به ازای مقادیر مختلف k خواهیم داشت و از آنجا که هر یک از این معادلات یک معادله برداری است، بنابراین حل $3n$ معادله دیفرانسیل، به طور همزمان، حرکت دستگاه را مشخص می‌کند. جواب‌ها به $6n$ ضریب ثابت بستگی دارد که $3n$ مربوط به مکان اولیه و $3n$ مربوط به سرعت اولیه ذرات است. معادله حرکت ذره k را هم چنین می‌توان به شکل زیر بر حسب اندازه حرکت خطی آن نوشت.

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e \quad (۴-۶)$$

از جمع دو طرف تساوی روی n ذره خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \sum_{k=1}^n \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (۵-۶)$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \vec{p} \quad \text{که در آن}$$

برای دستیابی به قضیه اندازه حرکت خطی در مورد دستگاهی از ذرات، یعنی معادله:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^e$$

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0 \quad \text{کافی است نشان دهیم:}$$

برای توجیه معادله بالا به دو روش بیان می‌کنیم:

در روش اول از صورت ضعیف قانون سون نیوتن استفاده می‌کنیم. طبق این قانون، نیروی وارد بر ذره K از طرف ذره l ، با نیروی وارد ذره l از طرف ذره K مساوی و مختلف‌الجهت است. صورت ضعیف این قانون بیان می‌کند این نیروها علاوه بر مساوی و مختلف‌الجهت بودن، لزوماً در امتداد خط واصل دو ذره عمل نمی‌کنند و علیرغم اینکه جمع برداری نیروها صفر می‌شود ولی ممکن است گشتاور ایجاد کنند. به عبارت دیگر

$$\vec{F}_{l \rightarrow k}^i = -\vec{F}_{k \rightarrow l}^i \quad (۶-۶)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l \neq k} \vec{F}_{l \rightarrow k}^i \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l < k} (\vec{F}_{l \rightarrow k}^i + \vec{F}_{k \rightarrow l}^i) \right)$$

که حاصل عبارت فوق با توجه به رابطه (۶-۶)، صفر خواهد بود. در نتیجه،

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0 \quad (7-6)$$

بنابراین معادله (۵-۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \quad (3-6)$$

که در آن :

$$\bar{F}^e = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e$$

و این عبارت است از قضیه اندازه حرکت خطی برای دستگاهی از ذرات. نتیجه ای که می‌توان از این قضیه گرفت این است که در نبود نیروی خارجی، اندازه حرکت خطی کل، \bar{P} ، ثابت می‌ماند.

روش دوم برای توجیه صفر بودن برآیند نیروهای داخلی، استفاده از اصل کار مجازی است.^۱ یک دستگاه شامل چند ذره، هر چند از دید ناظر خارج از سیستم در حال سکون باشد و کار انجام ندهد، از دید ناظر درون سیستم، در حال تکاپو و فعالیت است و این تحرک ناشی از وجود نیروهای داخلی است. اما این تحرک داخلی، باعث حرکت ظاهری دستگاه نمی‌شود. از این رو کار انجام شده توسط دستگاه صفر است. به بیان دیگر کار مجازی کاری است که در زمان ثابت صورت می‌گیرد. اگر فرض کنیم به هر ذره درون سیستم، جابه‌جایی برابر $\delta\vec{r}$ داده شود (که این جا به جایی را نیروهای داخلی به ذرات می‌دهند) و هم چنین فرض کنیم این جابه‌جایی‌ها به قدری کوچک باشند که بتوان همه آنها را یکسان در نظر گرفت، کار انجام شده به وسیله نیروی داخلی در انتقال مجازی $\delta\vec{r}$ عبارت است از:

$$\delta w_k = \bar{F}_k^i \cdot \delta\vec{r} \quad (8-6)$$

کل کارانجام شده توسط تمام نیروهای داخلی چنین است:

$$\delta w = \sum_{k=1}^n \delta w_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot \delta\vec{r}_k = \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \right) \cdot \delta\vec{r}$$

از آنجا که $\delta W = 0$ ، خواهیم داشت:

$$\delta \vec{r} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \right) = 0 \quad (9-6)$$

تساوی فوق به ازای $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$ همواره برقرار است؛ چون $\delta \vec{r} \neq 0$ است.^۱ بنابراین با در

نظر گرفتن $\sum_k \vec{F}_k^i = 0$ می توان همچنان قضیه اندازه حرکت خطی (یعنی رابطه ۳-۶) را برای سیستم ذرات نتیجه گرفت:

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (10-6)$$

که در آن \vec{F}^e برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم و \vec{p} اندازه حرکت خطی کل ذرات است و فوراً می توان قانون پایستگی اندازه حرکت خطی را از آن نتیجه گرفت: «هر گاه برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستمی صفر باشد، اندازه حرکت خطی کل سیستم ثابت می ماند». مفهوم اندازه حرکت خطی را می توان با توجه به تعریف مرکز جرم که در ابتدای بخش با آن آشنا شدیم، به شکل زیر نوشت:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = M \vec{V}_{cm} \quad (11-6)$$

و با توجه به قضیه اندازه حرکت خطی

$$M \vec{R}_{cm} = \vec{F}^e = \vec{p} \quad (12-6)$$

بنابراین هر گاه برآیند نیروهای داخلی وارد بر دستگاهی از ذرات صفر باشد، در مرکز جرم دستگاه می توان تک ذره ای فرض کرد که جرمش برابر جرم کل دستگاه است و تحت تأثیر نیرویی برابر با برآیند نیروهای خارجی وارد بر دستگاه قرار گرفته است. بدین ترتیب حرکت سیستم چند ذره ای به

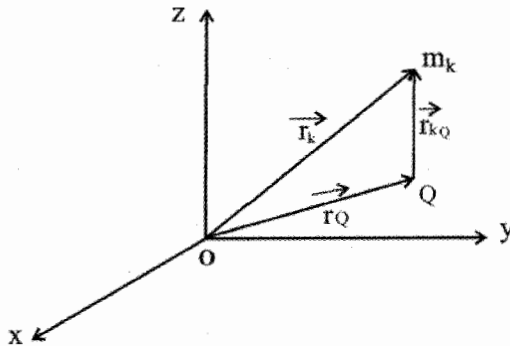
۲- عبارت δW وقتی $\delta \vec{r} \perp \sum_k \vec{F}_k^i$ باشد نیز صفر می شود. اما از آنجا که این حالت عمومیت ندارد و از طرفی معادله باید همواره برقرار باشد، بنابراین شرط $\sum_k \vec{F}_k^i = 0$ نتیجه می شود.

حرکت تک ذره فرضی واقع در مرکز جرم و تحت تأثیر برآیند نیروهای خارجی تبدیل می‌شود. یادآور می‌شویم که تمام اندازه‌گیری‌ها در دستگاه مختصات اینرسی صورت می‌گیرد. مثال گویا در این مورد، انفجار گلوله‌های توپ یا خمپاره در هواست. چون انفجار در اثر نیروهای داخلی است، و تنها نیروی خارجی مؤثر نیروی وزن است، سرعت مرکز جرم قطعات گلوله درست پس از انفجار با سرعت آن قبل از انفجار برابر است.

۴-۶. بقای اندازه حرکت زاویه ای

همان‌طور که در فصول گذشته دیدیم، اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره منفرد از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



شکل (۱-۶)

در این بخش اندازه حرکت دستگاهی از ذرات نسبت به نقطه Q و میزان تغییر آن نسبت به زمان را حساب می‌کنیم. طبق تعریف، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای ذره K حول نقطه Q که می‌تواند ثابت یا متحرک باشد، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{L}_{kQ} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{p}_k \quad (۱۳-۶)$$

که در آن بردار مکان نقطه Q، \vec{r}_Q بردار مکان ذره K، \vec{r}_k و $\vec{r}_{kQ} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q)$ بردار مکان ذره نسبت به نقطه Q است. با توجه به تعریف اندازه حرکت خطی برای ذره K رابطه (۱۳-۶) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\vec{L}_{kQ} = m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_Q) \quad (۱۴-۶)$$

$(\vec{r}_k - \vec{r}_Q)$ سرعت ذره K نسبت به نقطه Q است. از این معادله نسبت به زمان مشتق می گیریم.

$$\frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = m_k [(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{\dot{r}}_k - \vec{\dot{r}}_Q) + (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{\ddot{r}}_k - \vec{\ddot{r}}_Q)]$$

عبارت اول داخل کروشه صفر می شود. بنابراین

$$\frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{\ddot{r}}_k - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{\ddot{r}}_Q \quad (۱۵-۶)$$

از طرفی معادله حرکت ذره k عبارت است از

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = m_k \vec{\ddot{r}}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (۱۶-۶)$$

رابطه فوق را در معادله (۱۵-۶) جایگزین می کنیم:

$$\frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i) - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{\ddot{r}}_Q$$

$$\frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^e + (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{\ddot{r}}_Q \quad (۱۷-۶)$$

اگر رابطه بالا را روی تمام ذرات دستگاه جمع کنیم، اندازه حرکت زاویه ای کل نسبت به نقطه Q به دست خواهد آمد:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{L}_{kQ} = \frac{d}{dt} \vec{L}_Q \quad (۱۸-۶)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_Q = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i - \sum_{k=1}^n m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{\ddot{r}}_Q \quad (۱۹-۶)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_Q = \vec{N}_Q + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i - \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \right) \times \vec{\ddot{r}}_Q + \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \vec{r}_Q \times \vec{\ddot{r}}_Q$$

که در آن $N_Q = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_K - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^e$ گشتاور کل نیروهای خارجی حول نقطه Q است . با

جایگزینی تعریف مرکز جرم $\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = M\vec{R}$ ، $\sum_{k=1}^n m_k = M$ در تساوی بالا خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_Q = \vec{N}_Q + \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i - M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \vec{\ddot{r}}_Q \quad (۲۰-۶)$$

با استفاده از شکل قوی قانون سوم نیوتن می توان ثابت کرد:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i &= \sum_{k=1}^n \sum_{l \neq k} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{l \rightarrow k}^i \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l \langle k} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{l \rightarrow k}^i + \sum_{k=1}^n \sum_{k \langle l} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{l \rightarrow k}^i \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{k \langle l} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{l \rightarrow k}^i + \sum_{k=1}^n \sum_{k \langle l} (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{k \rightarrow l}^i \end{aligned}$$

بنابر قانون سوم نیوتن

$$\vec{F}_{k \rightarrow l}^i = -\vec{F}_{l \rightarrow k}^i$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^i &= \sum_{k=1}^n \sum_{k \langle l} [(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) - (\vec{r}_l - \vec{r}_Q)] \times \vec{F}_{l \rightarrow k}^i \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{k \langle l} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \times \vec{F}_{l \rightarrow k}^i = 0 \end{aligned} \quad (۲۱-۶)$$

۳- شکل قوی قانون سوم بیان می کند نیروهای داخلی $\vec{F}_{k \rightarrow l}^i = -\vec{F}_{l \rightarrow k}^i$ علاوه بر این که مساوی و مختلف الجهتند در امتداد خط واصل دو ذره عمل می کنند.

عبارت فوق متحد با صفر است. چون بردار $(\vec{r}_k - \vec{r}_1)$ در امتداد خط واصل ذره I به k است و اگر بنا به بیان قانون سوم، نیروی $\vec{F}_{\ell \rightarrow k}^i$ در امتداد این خط عمل کند، حاصلضرب خارجی در معادله فوق صفر می‌شود. از طرفی جمله سوم راست تساوی (۶-۲۰) در دو صورت صفر می‌شود:

۱- اگر \vec{r}_Q صفر باشد، یعنی ذره Q ساکن باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند.

۲- عبارت $(\vec{R} - \vec{r}_Q)$ صفر باشد، یعنی $\vec{R} = \vec{r}_Q$ شود. به عبارت دیگر Q مرکز جرم سیستم باشد.

بنابراین در صورت وجود یکی از شرایط بالا می‌توان معادله (۶-۲۰) را به شکل جدید زیر نوشت:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q \quad (۶-۲۲)$$

و این قضیه اندازه حرکت زاویه‌ای برای دستگاهی از ذرات است. نتیجه‌ای که می‌توان از این قضیه گرفت این است که اگر گشتاور نیروی خارجی وارد بر دستگاه صفر باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای کل دستگاه ثابت خواهد ماند که این، بیان قضیه پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای است. از کاربردهای رابطه (۶-۲۲) حرکت و رفتار ژيروسکوپ یا فرفره است که در فصل‌های بعد از آنها سخن می‌گوییم.

۵-۶. بقای انرژی

قبلاً دیدیم انرژی کل یک ذره را می‌توان به صورت مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل آن نوشت و انرژی کل، کمیتی ثابت است اگر نیروی وارد بر ذره فقط تابعی از مکان ذره باشد. چنانچه گفته شد در یک دستگاه ذرات، عموماً دو نوع نیرو به ذرات وارد می‌شود: یکی نیروی خارجی که به هر ذره وارد می‌شود، \vec{F}_k^e و دیگری نیروی داخلی وارد بر ذرات، \vec{F}_k^i ، بنابراین برآیند نیروی وارد بر یک ذره مثل k عبارت است از:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e$$

نیروی خارجی ممکن است تابع مکان ذره k باشد و نیروی داخلی به مکان نسبی سایر ذرات نسبت به ذره k بستگی داشته باشد. به طور کلی نیروی برآیند وارد بر هر ذره اغلب وابسته به مکان ذره است، بنابراین می‌توان تابع پتانسیل V را برای سیستم تعریف کرد به طوری که:

$$F_{kx} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, F_{ky} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, F_{kz} = -\frac{\partial V}{\partial z_k} \quad (۲۳-۶)$$

از طرفی معادله حرکت ذره k عبارت است از

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = m_k \dot{\vec{v}}_k = m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k \quad (۲۴-۶)$$

از ترکیب دو معادله (۲۳-۶) و (۲۴-۶) داریم:

$$m_k \frac{dv_{kx}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_k} \quad v_{kx} = \frac{dx_k}{dt}$$

$$m_k \frac{dv_{ky}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y_k} \quad v_{ky} = \frac{dy_k}{dt}$$

$$m_k \frac{dv_{kz}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z_k} \quad v_{kz} = \frac{dz_k}{dt}$$

اگر معادلات فوق را به ترتیب در v_{kz}, v_{ky}, v_{kx} ضرب کرده، سپس با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k m_k v_k^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} = 0$$

که در آن از تساوی $v_k^2 = v_{kx}^2 + v_{ky}^2 + v_{kz}^2$ استفاده کرده‌ایم. تساوی فوق برای تمام ذرات عبارت است از:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right) = 0 \quad (۲۶-۶)$$

جمله اول تغییرات انرژی جنبشی نسبت به زمان است و عبارت دوم، $\frac{dV}{dt}$ ، تغییرات انرژی پتانسیل

است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

$$T + V = E = \text{const}$$

همانند شرایط بقای انرژی ذره، انرژی سیستم در صورتی بقا دارد که انرژی پتانسیل آن فقط تابع مکان باشد. در حالتی که نیروی داخلی را بتوان از یک تابع پتانسیل به دست آورد ولی نیروهای خارجی را نتوانیم از این راه پیدا کنیم، انرژی کل $T + v$ دیگر ثابت نیست. در این صورت نیروی برآیند وارد بر ذره k سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla} V_k^i + \vec{F}_k^e \quad (۲۸-۶)$$

و قضیه انرژی چنین خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}(T + V^i) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot \vec{v}_k \quad (۲۹-۶)$$

۶-۶. کاربرد قوانین بقا

استفاده از قوانین بقا در حل بسیاری از مسائل روشی سودمند و در برخی بهترین و حتی تنها روش است. به عنوان مثال، در مسائلی که دارای سیستم با جرم متغیر است، تعیین نیروهای وارد بر سیستم و تحلیل مسئله به وسیله قوانین نیوتن کاری بس دشوار است و با کوچکترین اشتباه در تشخیص نیرو، با نتایجی به شدت گمراه کننده روبه‌رو خواهیم شد. از این رو استفاده از قوانینی که همواره برای دستگاه معینی از ذرات صادق است، بسیار مفید خواهد بود. این قوانین که در بخش‌های گذشته به تفصیل در مورد آنها صحبت کردیم عبارتند از قوانین بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای و قانون بقای انرژی. اولین و مهمترین گام در حل اینگونه مسائل پاسخ به این پرسش است که کدام یک از قوانین بقا برای حل مسئله مناسب است؟

قوانین بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای را می‌توان برای هر دستگاهی به کار برد؛ با این شرط که تمام نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم را در نظر بگیریم. هم چنین قانون بقای انرژی را برای سیستمی که در آن تبدیل انرژی مکانیکی به سایر صورت‌های انرژی وجود ندارد و به عبارت دیگر نیروهای وارد بر سیستم از نوع نیروهای اتلاف کننده انرژی (نظیر اصطکاک) نیستند، می‌توان به کار برد. در فصل‌های بعد از موضوع تقارن و قوانین بقا به طور مفصلتر سخن خواهیم گفت.

۶-۶-۱. مسئله موشک

موشک‌ها بر اساس قانون بقای اندازه حرکت خطی طرح ریزی می‌شوند. هنگامی که موشک در

حال پیشروی است، گاز ناشی از احتراق سوخت در خلاف جهت حرکت موشک از آن خارج می‌شود. در واقع نیرویی که باعث حرکت موشک می‌شود، عکس‌العمل نیروی ناشی از خروج گاز است. با توجه به این مطلب سرعت موشک را در هر لحظه می‌توان از قضیه اندازه حرکت خطی به دست آورد.

فرض می‌کنیم موشکی با سرعت \vec{V} (نسبت به زمین) در حال حرکت است. جرم موشک و سرعت خروج گاز نسبت به موشک \vec{u} است. حرکت موشک را در حالت t و $t + \Delta t$ بررسی می‌کنیم؛ در لحظه t موشک دارای جرم M و سرعت \vec{V} است. در لحظه $t + \Delta t$ جرم ΔM با سرعت \vec{u} نسبت به موشک، از آن خارج می‌شود و سرعت موشک $\vec{V} + \Delta\vec{V}$ است. بنابراین:

$$\vec{p}_i = M\vec{V}$$

$$\vec{p}_f = (M - \Delta M)(\vec{V} + \Delta\vec{V}) + \Delta M(\vec{u} + \vec{V})$$

$$\Delta\vec{p}_i = \vec{p}_f - \vec{p}_i = M\Delta\vec{V} - \Delta M\Delta\vec{V} + \Delta M\vec{u} \quad (۳۰-۶)$$

که می‌توان از عبارت $\Delta M\Delta\vec{V}$ به علت کوچکی صرف نظر کرد؛ بنابراین:

$$\Delta\vec{p} = M\Delta\vec{V} + \vec{u}\Delta M$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = M \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (۳۱-۶)$$

از طرفی قانون دوم نیوتن عبارت است از $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. از ترکیب دو رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\vec{F} = M \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (۳۲-۶)$$

از آنجا که جرم موشک با آهنگ $\frac{dM}{dt}$ در حال کاهش است؛ یعنی $\frac{dM}{dt}$ یک مقدار منفی است،

آنگاه

$$\vec{F} = M \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (۳۳-۶)$$

جمله $\vec{F}_{\text{reac}} = \vec{u} \frac{dM}{dt}$ عبارت است از میزان انتقال اندازه حرکت به سیستم توسط جرم رانده شده (و یا میزان انتقال حرکت از سیستم توسط جرم افزوده شده به آن). این جمله ضربه موتور موشک نامیده می‌شود (یا نیروی پیشران برای موشک، thrust). چون $\frac{dM}{dt}$ منفی است، ضربه در خلاف سرعت تخلیه است. در طراحی موشک هدف این است که این جمله بزرگتر شود. اگر هیچ نیرویی به موشک وارد نشود، $F = 0$ است. بنابراین:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} = 0 \quad (34-6)$$

از تبدیل معادله برداری (۳۴-۶) به معادله اسکالر خواهیم داشت:

$$M \frac{dV}{dt} + u \frac{dM}{dt} = 0 \quad (35-6)$$

چون \vec{u} و \vec{V} در خلاف جهت یکدیگرند؛ بنابراین با انتخاب جهت مثبت برای \vec{V} ، جهت \vec{u} باید منفی باشد.

$$M \frac{dV}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \Rightarrow -u \frac{dM}{M} = dV$$

$$\Rightarrow V - V_0 = -u \ln \frac{M}{M_0} \quad (36-6)$$

که در آن M_0 جرم اولیه و M جرم لحظه‌ای موشک است. اگر در لحظه $t = 0$ سرعت موشک صفر باشد داریم:

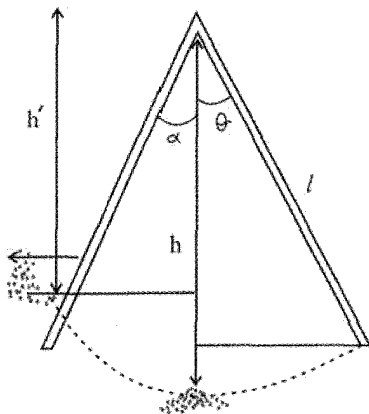
$$V = u \ln \frac{M_0}{M} \quad (37-6)$$

بررسی بیشتر این مسئله را به مسائل پایان فصل واگذار می‌کنیم.

۲-۶-۶. مسئله بیلچه

اینک به مسئله‌ای می‌پردازیم که در حل آن از بقای اندازه حرکت خطی سود جست‌ه‌ایم. بیلچه‌ای

به جرم m_1 به بازوی بی وزنی به طول l وصل شده است. انتهای بازو در نقطه‌ای لولا شده است، به طوری که بیلچه می‌تواند آزادانه روی کمانی به شعاع l واقع در صفحه قائم نوسان کند. در فاصله l زیر لولاً، توده‌ای از شن قرار دارد. بیلچه را آنقدر بلند می‌کنیم تا با امتداد قائم زاویه θ بسازد و سپس آن را رها می‌کنیم. بیلچه، آنگوار فرو می‌آید و مقداری شن به جرم m_2 از زمین بر می‌دارد. حساب کنید که بازو پس از برداشتن شن تا چه زاویه‌ای نسبت به قائم بالا می‌رود؟



شکل (۲-۶)

$$mgh = \frac{1}{2} mV^2$$

از بقای انرژی داریم:

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}$$

(۳۸-۶)

از بقای اندازه حرکت خطی داریم:

$$V' = \frac{m_1 \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}}{m_1 + m_2}$$

V' سرعت بیلچه درست پس از برداشتن جرم m_2 است. با استفاده مجدد از قانون پایستگی انرژی

داریم:

$$(m_1 + m_2)gh' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V'^2$$

و h' ارتفاع صعود بیلچه خواهد بود.

$$h' = \frac{V'^2}{2g} = \frac{[m_1 \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta)}]^2}{2g(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 \ell(1 - \cos\theta)}{(m_1 + m_2)^2}$$

از طرفی $h' = \ell(1 - \cos\alpha)$ ، که در آن α زاویه‌ای است که بیلچه پس از برداشتن شن تا آن زاویه بالا می‌رود.

$$\ell(1 - \cos\alpha) = \frac{\ell m_1^2 (1 - \cos\theta)}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m_1^2 (1 - \cos\theta)}{(m_1 + m_2)^2} \quad (39-6)$$

۳-۶-۶. بقای اندازه حرکت زاویه‌ای

در مکانیک سماوی و سپهرشناسی به مسائلی برمی‌خوریم که در آنها قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای مصداق می‌یابد. اندازه حرکت زاویه‌ای کهکشانه‌ها، یا منظومه شمسی، در طی دوره تکامل آنها ثابت می‌ماند، به شرطی که ماده از دستگاه خارج نشود. اثر جزر و مد ماه چرخش زمین را به تدریج کند می‌کند (هر صد سال حدود $10^{-3} \times 1.86$ ثانیه دوره تناوب افزایش می‌یابد). با کاهش اندازه حرکت زاویه‌ای زمین، اندازه حرکت زاویه‌ای ماه افزایش می‌یابد. مقدار اندازه حرکت زاویه‌ای (مداری) ماه چنین است:

$$L = mr^2\omega$$

m جرم، سرعت زاویه‌ای، و r شعاع مدار ماه است. از طرف دیگر

$$m \frac{V^2}{r} = mr\omega^2 = G \frac{mM}{r^2}$$

که M جرم زمین است. از حل این معادله برای ω و قرار دادن در معادله پیش خواهیم داشت:

$$L = (GMm^2r)^{\frac{1}{2}} \quad (40-6)$$

بنابراین، با افزایش اندازه حرکت زاویه‌ای ماه، از زمین دورتر می‌شود.

۶-۷. مسئله دو جسم

اغلب اوقات استفاده از مختصات مرکز جرم برای حل مسائل سیستم‌های چند ذره‌ای مناسب‌تر است. از این رو در این بخش مسئله دو جسم را در مختصات مرکز جرم بررسی می‌کنیم. استفاده از مختصات مرکز جرم به ما این امکان را می‌دهد که مسئله دو جسم را به دو مسئله تک ذره تبدیل کنیم: حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی ذرات یعنی حرکت هر یک از ذرات نسبت به ذره دیگر. از این تغییر مختصات در بخش بعد استفاده خواهیم کرد. بدین منظور سیستمی شامل دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 در نظر می‌گیریم که مکان آنها نسبت به مبدأ O به ترتیب \vec{r}_1 و \vec{r}_2 است. نیروهای وارد بر هر ذره عبارتند از نیروهای خارجی \vec{F}_1^e و \vec{F}_2^e و نیروهای داخلی \vec{F}_1^i و \vec{F}_2^i که از قانون سوم نیوتن تبعیت می‌کنند. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

معادلات حرکت هر یک از ذرات نسبت به مبدأ O عبارت است از

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \end{aligned} \quad (۴۱-۶)$$

مختصات \vec{r}_1 و \vec{r}_2 را به مختصات \vec{R} و \vec{r} تبدیل می‌کنیم. مختصات مرکز جرم و \vec{r} موضع نسبی ذره m_2 و m_1 است. به عبارت دیگر

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (۴۲-۶)$$

معادلات تبدیل را می‌توان به شکل زیر به دست آورد.

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2$$

با جایگزینی رابطه $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}$ در رابطه فوق داریم:

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (۴۳-۶)$$

از رابطه $\vec{r}_\gamma = \vec{r}_1 - \vec{r}$ نیز می‌توان \vec{r}_γ را محاسبه کرد:

$$\vec{r}_\gamma = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_\gamma} \vec{r} \quad (۴۴-۶)$$

بنابراین، در حالت کلی داریم:

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_\gamma \vec{r}_\gamma}{m_1 + m_\gamma} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_\gamma}{m_1 + m_\gamma} \vec{r} \\ \vec{r}_\gamma = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_\gamma} \vec{r} \end{cases} \quad (۴۵-۶)$$

از جمع کردن معادله حرکت دو ذره می‌توان معادله حرکت \vec{R} را به دست آورد:

$$m_1 \vec{\ddot{r}}_1 + m_\gamma \vec{\ddot{r}} = \vec{F}_1^i + \vec{F}_1^e + \vec{F}_\gamma^e + \vec{F}_\gamma^i$$

با توجه به تعریف مرکز جرم و استفاده از قانون سوم نیوتن، معادله بالا را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$M \vec{\ddot{R}} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_\gamma^e \quad (۴۶-۶)$$

$$M = m_1 + m_\gamma \quad \text{که در آن:}$$

برای نوشتن معادله حرکت مختصه \vec{r} کافی است معادله حرکت ذره اول را در مقدار m_γ و معادله حرکت ذره دوم را در m_1 ضرب کرده و آنها را از هم کم کنیم:

$$m_1 m_\gamma (\vec{\ddot{r}}_1 - \vec{\ddot{r}}_\gamma) = m_\gamma \vec{F}_1^e + m_\gamma \vec{F}_1^i - m_1 \vec{F}_\gamma^e - m_\gamma \vec{F}_\gamma^i$$

$$\vec{\ddot{r}} = (\vec{\ddot{r}}_1 - \vec{\ddot{r}}_\gamma) = \left(\frac{\vec{F}_1^e}{m_1} - \frac{\vec{F}_\gamma^e}{m_\gamma} \right) + \left(\frac{\vec{F}_1^i}{m_1} - \frac{\vec{F}_\gamma^i}{m_\gamma} \right)$$

طبق فرض مسئله نیروهای داخلی تابع قانون سوم هستند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{\ddot{r}} = \left(\frac{\vec{F}_1^e}{m_1} - \frac{\vec{F}_\gamma^e}{m_\gamma} \right) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_\gamma} \right) \vec{F}_1^i \quad (۴۷-۶)$$

اگر نیروهای خارجی صفر یا متناسب با جرم ذرات باشند می‌توان نوشت:

$$\frac{\vec{F}_1^e}{m_1} = \frac{\vec{F}_\gamma^e}{m_\gamma} \quad (۴۸-۶)$$

بنابراین

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_1^i = \frac{m_1 + m_2}{m_2 m_1} \vec{F}_1^i \quad (۴۹-۶)$$

عبارت

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (۵۰-۶)$$

را جرم کاهش یافته می‌نامیم. بنابراین می‌توان معادله فوق را بر حسب جرم کاهش یافته μ بازنویسی کرد:

$$\vec{r} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_1^i \Rightarrow \mu \vec{r} = \vec{F}_1^i \quad (۵۱-۶)$$

معادله (۴۶-۶) معادله حرکت مرکز جرم است و معادله (۴۷-۶) یا (۵۱-۶) معادله حرکت ذره‌ای به جرم μ است که تحت تأثیر نیروی \vec{F}_1^i (نیروی وارد بر ذره ۱ از سوی ذره ۲) قرار گرفته است. معادله اخیر همچنین، معادله حرکت ذره‌ای به جرم μ است که در مکان ذره m_1 قرار دارد و توسط ناظر واقع در مکان ذره m_2 با فرض ثابت بودن ناظر، مشاهده می‌شود.

در مورد برقراری رابطه (۴۷-۶)، چنانچه نیروهای خارجی، از نوع گرانشی باشند که از طریق اجرام سماوی وارد می‌شود که فاصله هر جسم از مرکز نیرو نسبت به فاصله خود اجسام تا یکدیگر بسیار بزرگتر باشد، این رابطه درست است. اما در مورد نیروی گرانشی از آن نوع که بین الکترون‌ها و هسته ایجاد می‌شود شرط برقراری این رابطه آن است که خود نیز صفر باشد. البته یادآور می‌شویم که روابط کلاسیک (۴۱-۶) در مورد ذرات اتمی درست نیست و باید از قوانین مکانیک کوانتومی استفاده کرد. اما در این مورد نیز باز روش به کار رفته در این بخش نیز عیناً درباره این ذرات کوانتومی به کار می‌رود و معادلات حرکت سیستم دو ذره به دو معادله تک ذره تبدیل می‌شود.

بدین ترتیب مسئله دو جسم با وارد کردن دستگاه مختصات مرکز جرم و حرکت نسبی دو جسم نسبت به یکدیگر، به دو معادله حرکت تک ذره تبدیل می‌شود.

به همین ترتیب می‌توان انرژی جنبشی سیستم دو جسم را بر حسب سرعت مرکز جرم و سرعت نسبی ذرات نوشت. به عبارت دیگر انرژی جنبشی دستگاه دو جسم را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم

که هر یک از قسمت‌ها مربوط به یک مسئله یک جسم (حاصل از تقسیم مسئله دو جسم) است. معادلات تبدیل سرعت عبارتند از:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V}_1 = \vec{V}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V} \quad (۵۲-۶)$$

بنابراین انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{V}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{V}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M} V^2$$

$$T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \mu V^2 \quad (۵۳-۶)$$

اندازه حرکت خطی کل سیستم عبارت است از:

$$\vec{p} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 \quad (۵۴-۶)$$

$$\vec{p} = m_1 \left(\vec{V}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V} \right) + m_2 \left(\vec{V}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V} \right) = M \vec{V}_{cm}$$

مشاهده می‌شود که عبارت اندازه حرکت خطی مستقل از μ است.

$$\vec{p} = M \vec{V}_{cm} \quad (۵۵-۶)$$

اندازه حرکت زاویه‌ای کل را نیز می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \quad (۵۶-۶)$$

$$\vec{L} = \left(\vec{R} + \frac{m_\gamma}{m_\gamma + m_\nu} \vec{r} \right) \times m_\nu \left(\vec{V}_{cm} - \frac{m_\nu}{m_\gamma + m_\nu} \vec{V} \right) +$$

$$\left(\vec{R} - \frac{m_\nu}{m_\gamma + m_\nu} \vec{r} \right) \times m_\gamma \left(\vec{V}_{cm} - \frac{m_\nu}{m_\gamma + m_\nu} \vec{V} \right)$$

$$\vec{L} = M(\vec{R} \times \vec{V}_{cm}) + \mu(\vec{r} \times \vec{V}) = \vec{R} \times \vec{p} + \vec{r} \times \mu \vec{V} \quad (۵۷-۶)$$

در حالت کلی می‌توان اندازه حرکت زاویه‌ای سیستم چند ذره را با معرفی مرکز جرم به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\vec{L}_O = \sum_k m_k \vec{r}_k \quad ; \quad \vec{r}_k = \vec{r}'_k + \vec{R} \quad (۵۸-۶)$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = \sum_k m_k (\vec{R} + \vec{r}'_k) \times (\vec{R} + \vec{r}'_k)$$

$$= \left(\sum_k m_k \right) \vec{R} \times \vec{R} + \sum_k m_k \vec{R} \times \vec{r}'_k + \sum_k m_k \vec{r}'_k \times \vec{R} + \sum_k m_k \vec{r}'_k \times \vec{r}'_k$$

$$= \vec{R} \times M\vec{R} + \vec{R} \times \left(\sum_k m_k \vec{r}'_k \right) + \left(\sum_k m_k \vec{r}'_k \right) \times \vec{R} + \sum_k \vec{r}'_k \times \vec{p}'_k \quad (۵۹-۶)$$

جمله اول و آخر به ترتیب اندازه حرکت زاویه ای مرکز جرم نسبت به مبدأ، و اندازه حرکت زاویه‌ای ذرات نسبت به مرکز جرم است. دو جمله باقیمانده به دلیل زیر صفر می‌شوند (بردارهای صفر هستند):

$$M\vec{R} = \sum_k m_k \vec{r}_k = \sum_k m_k (\vec{R} + \vec{r}'_k) = \sum_k m_k \vec{R} + \sum_k m_k \vec{r}'_k = M\vec{R} + \sum_k m_k \vec{r}'_k$$

$$\Rightarrow \sum_k m_k \vec{r}'_k = \vec{0} \quad (۶۰-۶)$$

معنای این رابطه چنین است: اگر مبنا را مرکز جرم قرار دهیم، ذرات نسبت به این مرکز با تقارن ظاهر می‌شوند، یعنی اگر ذره‌ای با بردار \vec{r} نسبت به مرکز جرم قرار گیرد، حتماً ذره دیگری با بردار $-\vec{r}$ وجود خواهد داشت.

به همین ترتیب می‌توان به شیوه‌ای مشابه، انرژی جنبشی ذرات را با وارد کردن مرکز جرم

محاسبه کرد:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\vec{V} + \vec{V}'_k) \cdot (\vec{V} + \vec{V}'_k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k m_k V^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \vec{V}'_k{}^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_k m_k \vec{r}_k \right)$$

دوباره جمله آخر به دلیل گفته شده در بالا صفر است. بنابراین

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k V_k'^2 \quad (۶-۶۱)$$

یعنی، انرژی جنبشی نیز مانند اندازه حرکت زاویه ای شامل دو قسمت است: انرژی جنبشی اگر تمام جرم سیستم در مرکز جرم جمع شود، به اضافه انرژی جنبشی حرکت سیستم نسبت به مرکز جرم.

۶-۸. برخورد

یکی از مهمترین کاربردهای قوانین بقا، حل مسایل برخورد است. ذرات ممکن است هنگام برخورد تحت تأثیر یک نیروی خارجی قرار داشته باشند. در این صورت برای تحلیل حرکت ذرات قبل و بعد از برخورد، علاوه بر استفاده از قوانین پایستگی، شناخت نیروی وارد بر ذرات نیز لازم است. با این حال با دانستن حالت اولیه سیستم (مثلاً بردار سرعت هر یک ذرات) و استفاده از قوانین پایستگی می‌توان اطلاعاتی راجع به حرکت ذرات به دست آورد. در اینجا به بررسی مسایل برخورد ذرات، بدون در نظر گرفتن نیروی خارجی وارد بر آنها می‌پردازیم. به طور کلی برخورد بین ذرات بر دو نوع است: برخورد الاستیک (کشسان) و برخورد غیر الاستیک (ناکشسان). هنگامی که اندازه حرکت خطی و انرژی جنبشی هر دو پایسته هستند برخورد الاستیک و هنگامی که انرژی پایسته نباشد برخورد غیر الاستیک نامیده می‌شود. بنابراین برای برخورد الاستیک

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f, \quad k_i = k_f \quad (۶-۶۲)$$

و برای برخورد غیر الاستیک

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f, \quad k_i \neq k_f \quad (۶-۶۳)$$

خواهد بود که در آن نماد \vec{a} و \vec{f} به ترتیب نشان دهنده حالت اولیه و نهایی است؛ و \vec{p} و K به ترتیب اندازه حرکت خطی و انرژی جنبشی هستند.

۶-۸-۱. برخورد الاستیک

دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را در نظر می‌گیریم. جرم m_1 با سرعت ثابت \vec{V}_{1i} در حال حرکت است و جرم m_2 ساکن است. توجه داشته باشید که صفر بودن سرعت جرم دوم از عمومیت مسئله کم نمی‌کند. چرا که قوانین نیوتن در دستگاه‌های مرجع لخت (دستگاه‌های بدون شتاب) ثابت هستند. حتی اگر جرم m_2 دارای سرعت \vec{V}_{2i} باشد می‌توان مسئله را در دستگاهی بررسی کرد که در آن جرم m_2 ساکن باشد. بنابراین برای سادگی، از ابتدا جرم m_2 را در حال سکون در نظر می‌گیریم. راستای حرکت ذره اول را محور x فرض می‌کنیم. پس از برخورد، جرم m_1 با سرعت \vec{V}_{1F} در راستایی که با محور x زاویه θ_1 می‌سازد به حرکت خود ادامه می‌دهد و جرم m_2 با سرعت \vec{V}_{2F} و با زاویه θ_2 نسبت به امتداد اولیه سرعت (محور x) حرکت خود را آغاز می‌کند. عبارت برداری پایستگی اندازه حرکت خطی و عبارت پایستگی انرژی جنبشی برای این سیستم عبارت است از

$$(۶-۶۴)$$

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1F} + \vec{p}_{2F} \quad ; \quad K_{1i} = K_{1F} + K_{2F}$$

که در آن اندازه حرکت خطی و انرژی جنبشی اولیه ذره دوم صفر است (چون $\vec{V}_{2i} = 0$). معادله پایستگی اندازه حرکت خطی یک معادله برداری است و می‌توان آن را به دو مؤلفه تجزیه کرد. یکی در راستای سرعت اولیه (محور x) و دیگری در راستای عمود بر آن (محور y ها)؛ چراکه فرآیند برخورد را در دو بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$p_{1i} = p_{1F} \cos \theta_1 + p_{2F} \cos \theta_2$$

$$0 = p_{1F} \sin \theta_1 - p_{2F} \sin \theta_2 \quad (۶-۶۵)$$

اندازه حرکت نهایی، هیچ مؤلفه‌ای در راستای عمود بر صفحه برخورد (صفحه xy) نخواهد داشت، چون قبل از برخورد نیز هیچ مؤلفه اندازه حرکت عمود بر این صفحه وجود نداشت. با توجه به مطالب فوق سه معادله اسکالر خواهیم داشت: معادلات را به شکل زیر مرتب می‌کنیم:

$$p_{1i} - p_{1F} \cos \theta_1 = p_{2F} \cos \theta_2 \quad (۶-۶۶)$$

$$p_{2F} \sin \theta_2 = p_{1F} \sin \theta_1 \quad (۶-۶۷)$$

$$k_{\gamma i} = k_{\gamma F} + k_{\gamma F} \quad (۶۸-۶)$$

معادلات (۶۶-۶) و (۶۷-۶) را مجذور کرده، سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(p_{\gamma i} - p_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma})^2 + p_{\gamma F}^2 \sin^2 \theta_{\gamma} = p_{\gamma F}^2 \cos^2 \theta_{\gamma} + p_{\gamma F}^2 \sin^2 \theta_{\gamma}$$

$$\Rightarrow p_{\gamma i}^2 + p_{\gamma F}^2 - 2p_{\gamma i}p_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma} = p_{\gamma F}^2 \quad (۶۹-۶)$$

$$v_{\gamma i}^2 + v_{\gamma F}^2 - 2v_{\gamma i}v_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma} = \left(\frac{m_{\gamma}}{m_{\gamma}}\right)^2 v_{\gamma F}^2$$

از معادله پایستگی انرژی جنبشی (معادله ۶۸-۶) داریم:

$$V_{\gamma F}^2 = \frac{m_{\gamma}}{m_{\gamma}} (V_{\gamma i}^2 - V_{\gamma F}^2) \quad (۷۰-۶)$$

با جایگزینی مقدار $V_{\gamma F}^2$ از معادله (۷۰-۶) در معادله (۶۹-۶) داریم:

$$V_{\gamma i}^2 + V_{\gamma F}^2 - 2V_{\gamma i}V_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma} = \frac{m_{\gamma}}{m_{\gamma}} (V_{\gamma i}^2 - V_{\gamma F}^2)$$

با تقسیم معادله بر $V_{\gamma i}^2$ داریم:

$$1 + \frac{V_{\gamma F}^2}{V_{\gamma i}^2} - 2 \frac{V_{\gamma F}}{V_{\gamma i}} \cos \theta_{\gamma} = \frac{m_{\gamma}}{m_{\gamma}} \left(1 - \frac{V_{\gamma F}^2}{V_{\gamma i}^2}\right)$$

با مرتب کردن معادله بالا، یک معادله درجه ۲ بر حسب $\frac{V_{\gamma F}}{V_{\gamma i}}$ به دست می‌آید و با حل این معادله،

مقدار $\frac{V_{\gamma F}}{V_{\gamma i}}$ نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{V_{\gamma F}}{V_{\gamma i}}\right) \left(1 + \frac{m_{\gamma}}{m_{\gamma}}\right) - 2 \frac{V_{\gamma F}}{V_{\gamma i}} \cos \theta_{\gamma} + 1 - \frac{m_{\gamma}}{m_{\gamma}} = 0$$

$$\frac{V_{1F}}{V_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[\cos \theta_1 \pm \sqrt{\cos^2 \theta_1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)} \right] \quad (۷۱-۶)$$

معادله فوق یک معادله عمومی است که می‌توان با اعمال شرایط مسئله، نتایج مناسب را از آن به دست آورد. اگر $m_1 > m_2$ باشد، با توجه به اینکه عبارت زیر رادیکال معادله (۶-۶۶) نباید منفی باشد، می‌توانیم محدوده پراکندگی جرم m_1 را به دست آوریم. بدین ترتیب که

$$\cos^2 \theta_1 \geq 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \quad \text{به ازای } \theta_1 = \theta_m \text{ عبارت زیر رادیکال صفر می‌شود:}$$

$$\cos^2 \theta_m = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad 0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$$

θ_m ماکزیمم زاویه پراکندگی جرم m_1 است. به ازای $\theta_1 > \theta_m$ عبارت زیر رادیکال منفی خواهد شد. اگر $m_1 < m_2$ شود، محدوده‌ای برای پراکندگی جرم m_1 نمی‌توان تعیین کرد. به عبارت دیگر $0 < \theta_1 < \pi$. در این صورت $\theta_1 = 0$ بیانگر حالتی است که هیچ برخوردی روی نداده است؛ آنگاه $V_{1i} = V_{1F}$. همچنین به ازای $\theta_1 = \pi$ که برخورد رویاروی را نشان می‌دهد:

$$\frac{V_{1F}}{V_{1i}} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{و با توجه به معادله (۶-۶۳) عبارت قابل محاسبه دیگر در برخوردهای}$$

رویاری نسبت جرمها بر حسب انرژی جنبشی آنهاست. از رابطه (۶-۶۶) به ازای $\theta_1 = 0$ داریم:

$$\frac{V_{1F}}{V_{1i}} = \begin{cases} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

با توجه به $m_1 < m_2$ ، عبارت $\frac{V_{1F}}{V_{1i}}$ به ازای علامت منفی معادله، منفی خواهد شد که غیر قابل

قبول است. به ازای $\theta_1 = \pi$ رابطه (۷۱-۶) عبارت است از $\frac{V_{1F}}{V_{1i}} = \begin{cases} \frac{m_2 - m_1}{-1} \end{cases}$ که برای

علامت منفی معادله، همان نتیجه غیر قابل قبول پیشین حاصل می‌شود.

می‌دانیم عبارت انرژی جنبشی بر حسب اندازه حرکت عبارت است از $T = \frac{p^2}{2m}$. بنابراین برای

دو جرم m_1 و m_2 می‌توان نوشت:

$$T_{1i} = \frac{p_{1i}^2}{2m_1} ; \quad T_{2F} = \frac{p_{2F}^2}{2m_2}$$

هم چنین از رابطه (۶-۷۰) خواهیم داشت:

$$\frac{p_{2F}^2}{p_{1i}^2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

این رابطه بر حسب انرژی جنبشی عبارتست از:

$$\frac{p_{2F}^2}{p_{1i}^2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_2 T_{2F}}{m_1 T_{1i}}}$$

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = 4 \frac{T_{1i}}{T_{2F}} m_1 m_2$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \left(2 - 4 \frac{T_{1i}}{T_{2F}}\right) \frac{m_1}{m_2} + 1 = 0 \quad \text{طرفین معادله را بر } m_2^2 \text{ تقسیم می‌کنیم:}$$

از حل معادله فوق، رابطه مورد نظر نتیجه می‌شود:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{2T_{1i}}{T_{2F}} - 1\right) \pm \left[\left(\frac{2T_{1i}}{T_{2F}} - 1\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۶-۷۲)$$

اگر $m_1 = m_2$ باشد، با ضرب معادله اول (۶-۶۵) و معادله دوم آن در $\sin \theta_1$ داریم:

$$V_{1i} \cos \theta_1 = V_{1F} \cos^2 \theta_1 + V_{2F} \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$0 = V_{1F} \sin^2 \theta_1 - V_{2F} \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

که جرم‌ها با فرض $m_1 = m_2$ از طرفین حذف شده‌اند. از جمع دو تساوی فوق داریم،

$$V_{1i} \cos \theta_1 = V_{1F} + V_{2F} \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

از طرفی با اعمال شرط $m_1 = m_2$ در رابطه (۶-۷۱).

$$V_{1F} = V_{1i} \cos \theta_1$$

بنابراین از ترکیب دو معادله فوق رابطه بین زوایای پراکندگی حاصل می‌شود:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (۶-۷۳)$$

۶-۸-۲. برخورد غیر الاستیک

همانطور که در ابتدای این بخش گفتیم در برخوردهای غیر الاستیک، انرژی جنبشی پایستار نمی‌ماند. به عبارت دیگر انرژی جنبشی قبل از برخورد با انرژی جنبشی پس از برخورد برابر نیست و ممکن است انرژی سیستم قبل از برخورد بیشتر از انرژی جنبشی آن پس از برخورد باشد و بالعکس. از این رو برخورد غیر الاستیک را بر حسب نوع تغییر انرژی جنبشی به دو دسته تقسیم می‌کنند. این دسته‌بندی در کتب مختلف بطور متفاوت صورت گرفته است. مثلاً دو مرجع ماریون و فاوولز این نوع تقسیم بندی را کاملاً وارون یکدیگر تعریف کرده اند. ما از کتاب فاوولز (فصل هفتم، صفحه ۲۸۳ چاپ ۱۹۹۹) استفاده کرده و دسته بندی را انجام می‌دهیم:

اگر انرژی جنبشی سیستم پس از برخورد افزایش یابد، به عبارت دیگر سیستم انرژی Q را جذب کند، برخورد را نوع اول می‌نامیم و اگر انرژی Q آزاد شود و انرژی جنبشی پس از برخورد کاهش یابد، برخورد را نوع دوم می‌نامیم. با توجه به مطالب بالا برای برخورد نوع دوم یا انرژی ده ($exoergic\ collision$)، $Q > 0$ است، و برای برخورد نوع اول یا انرژی گیر ($endoergic\ collision$) $Q < 0$ است. این در حالی است که در هر دو نوع برخورد، اندازه حرکت خطی بقا دارد. مانند گذشته می‌توان جملات پایستگی اندازه حرکت خطی را به شکل برداری و یا به شکل دو معادله اسکالر نوشت. هنگام نوشتن معادله انرژی باید جمله Q را با در نظر گرفتن علامت آن منظور کنیم. تفاوت عمده دیگر در میان برخورد الاستیک و غیر الاستیک این است که همان طور که در برخورد الاستیک دیدیم، ذرات بعد از برخورد همان ذرات قبل از برخورد بودند و جرم‌ها تغییر نمی‌کردند. اما در مورد برخورد غیر الاستیک همیشه این طور نیست. یعنی ممکن است دو ذره با دو جرم معین با هم برخورد کنند و پس از برخورد، دو ذره متفاوت با جرم‌های متفاوت نسبت به حالت اول، به وجود

آید. این حالت اغلب در برخوردهای اتمی و هسته‌ای پیش می‌آید. به عنوان مثال ممکن است پروتونی با هسته برخورد کند و جذب آن شود و نوترونی رها شده و دور گردد. در تمام این حالات، اندازه حرکت خطی پایسته است و با در نظر گرفتن انرژی‌های جذب یا آزاد شده می‌توان معادله بقای انرژی را نیز نوشت.

فرض کنیم ذره‌ای به جرم m_1 با سرعت \vec{V}_1 به ذره‌ای با جرم m_3 که در حال سکون است برخورد می‌کند. پس از برخورد ذراتی به جرم m_3 و m_4 و با سرعت‌های \vec{V}_3 و \vec{V}_4 تحت زوایای θ_3 و θ_4 نسبت به امتداد اولیه جرم m_1 حرکت خود را آغاز می‌کند. فرض می‌کنیم انرژی جنبشی Q در این فرآیند آزاد شود. با به کار بردن قوانین بقا داریم:

$$p_1 = p_3 \cos \theta_3 + p_4 \cos \theta_4$$

$$0 = p_3 \sin \theta_3 - p_4 \sin \theta_4$$

$$T_1 = T_3 + T_4 - Q \quad (74-6)$$

$$p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta_3 = p_4^2$$

با نوشتن انرژی جنبشی بر حسب اندازه حرکت خطی داریم:

$$Q = T_3 + T_4 - T_1 = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_4^2}{2m_4} - \frac{p_1^2}{2m_1} \quad (75-6)$$

با جایگزینی از معادله (74-6) در معادله (75-6) داریم:

$$Q = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta_3}{2m_4} - \frac{p_1^2}{2m_1}$$

$$Q = \frac{p_3^2}{2m_3} \left(1 + \frac{m_3}{m_4} \right) + \frac{p_1^2}{2m_1} \left(\frac{m_1}{m_4} - 1 \right) - 2 \frac{p_1 p_3 \cos \theta_3}{2m_4}$$

$$Q = T_3 \left(1 + \frac{m_3}{m_4} \right) - T_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_4} \right) - 2 \left(\frac{m_1 m_3 T_1 T_3}{m_4^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta_3$$

بدین ترتیب تنها با دانستن زاویه θ_3 ، سرعت V_3 و جرم m_4 ، می‌توان انرژی جنبشی Q را به دست آورد. اینک به بررسی برخوردهای کاملاً ناکشسان می‌پردازیم. در این برخورد، دو جسم بعد از برخورد کاملاً به هم می‌چسبند و با یک سرعت به حرکت ادامه می‌دهند. بدین منظور فرض می‌کنیم گلوله‌ای به جرم m_1 و با سرعت V_1 به جسمی به جرم m_2 در حال سکون برخورد می‌کند و در آن فرو می‌رود و پس از برخورد هر دو با سرعت V_3 به حرکت ادامه می‌دهند. از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم:

$$m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2} \quad (76-6)$$

معادله انرژی در چنین برخوردی ثابت نیست و مقداری از انرژی به گرما تبدیل می‌شود. یعنی

$$(77-6)$$

$$T_1 = T_3 + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_3^2$$

با جایگزینی V_3 از معادله (76-6) در معادله (77-6) داریم:

$$Q = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{V_1^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= T_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = T_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (78-6)$$

هنگامی که دو جسم برخورد رویاروی با هم داشته باشند که در آن هیچ گونه چرخشی وجود نداشته باشد، نسبت سرعت نسبی اولیه به سرعت نسبی نهایی دو جسم، تقریباً ثابت است. فرض کنید دو جسم m_1 و m_2 با سرعت \vec{V}_{1i} ، \vec{V}_{2i} در امتداد محور x برخورد می‌کنند. سپس در امتداد همین محور با سرعت \vec{V}_{1F} ، \vec{V}_{2F} بر می‌گردند. در این صورت:

$$e = \frac{|V_{2F} - V_{1F}|}{|V_{2i} - V_{1i}|} \quad (79-6)$$

این نسبت که در نتیجه آزمایش‌های نیوتن به دست آمد گاهی اوقات قاعده نیوتن نامیده می‌شود. ضریب e را «ضریب بازگشت» می‌نامند. دامنه تغییرات این نسبت بین ۰ و ۱ است

($0 \leq e \leq 1$). در مورد برخورد کاملاً کشسان ($e = 1$)، و برای برخورد کاملاً ناکشسان ($e = 0$) است. نکته مهم در استفاده از این نسبت که یکی از معیارهای ناکشسانی برخورد بین دو جسم است، این است که این قاعده فقط در مورد مؤلفه‌های سرعت در امتداد خط واصل بین دو جسم برقرار است. در هر حال بقای اندازه حرکت چنین نتیجه می‌دهد:

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_1 V_{1F} + m_2 V_{2F} \quad (80-6)$$

به کمک معادلات اخیر می‌توان سرعت‌های نهایی V_{1F} و V_{2F} را بر حسب سرعت‌های اولیه V_{1i} ، V_{2i} در برخورد مستقیم به دست آورد.

۳-۸-۶. برخورد از دید ناظر مرکز جرم

پیش از این، مسئله برخورد را در دستگاه آزمایشگاه مورد بحث قرار دادیم. اینک مسئله را از دید ناظر واقع در مرکز جرم سیستم بررسی می‌کنیم. مزیت استفاده از دستگاه مرکز جرم این است که اندازه حرکت کل در این سیستم صفر خواهد بود. یعنی حرکت ذرات همواره در یک راستا و در خلاف جهت یکدیگر است. مانند گذشته یک برخورد کشسان در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم جرم m_1 با سرعت V_{1i} در حرکت است و جرم m_2 ساکن است. سرعت مرکز جرم سیستم، همان طور که در قسمت پیش گفته شده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_{2i} \quad (81-6)$$

از آنجا که جرم دوم ساکن است، $\vec{V}_{2i} = 0$ می‌شود و عبارت سرعت مرکز جرم را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} \quad (82-6)$$

مشاهده برخورد توسط ناظر مرکز جرم عبارت است از بررسی در دستگاه متحرکی که با سرعت معادل V_{cm} نسبت به زمین (آزمایشگاه) در حرکت است. از این رو با انتقال دستگاه مرجع از دستگاه آزمایشگاه به دستگاه مرکز جرم، باید سرعت‌ها را نسبت به دستگاه جدید محاسبه کرد. از آنجا که سرعت‌ها ثابت هستند، از جمع گالیله ای سرعت‌ها داریم:

$$\vec{V}'_{1i} = \vec{V}_{1i} - \vec{V}_{cm} \quad , \quad \vec{V}'_{2i} = \vec{V}_{2i} - \vec{V}_{cm} \quad (83-6)$$

که در آن $\vec{V}'_{1i}, \vec{V}'_{2i}$ به ترتیب سرعت اولیه جرم m_1, m_2 نسبت به مرکز جرم است. با جایگزینی مقدار \vec{V}_{cm} از معادله (۶-۷۹) داریم:

$$\vec{V}'_{1i} = \vec{V}_{1i} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i}$$

$$\vec{V}'_{2i} = 0 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} = -\vec{V}_{cm} \quad (۶-۸۴)$$

با توجه به روابط فوق، اندازه حرکت خطی هر یک از ذرات عبارتند از:

$$p'_{1i} = m_1 \vec{V}'_{1i} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} = \mu \vec{V}_{1i}$$

$$p'_{2i} = m_2 \vec{V}'_{2i} = \frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_{1i} = -\mu \vec{V}_{1i} \quad (۶-۸۵)$$

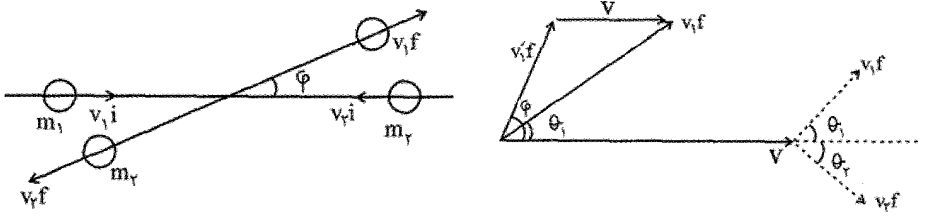
مجموع اندازه حرکت سیستم قبل از برخورد عبارت است از:

$$p'_i = p'_{1i} + p'_{2i} = \mu V_{1i} - \mu V_{1i} = 0 \quad (۶-۸۶)$$

اندازه حرکت کل سیستم قبل از برخورد صفر است و همان طور که گفته شد این برتری دستگاه مرکز جرم نسبت به سایر دستگاه‌هاست. به واسطه پایستگی اندازه حرکت خطی فوراً می‌توان نتیجه گرفت که اندازه حرکت خطی پس از برخورد نیز صفر است. بنابراین پس از برخورد دو جرم در یک راستا از یکدیگر دور می‌شوند. این راستا با امتداد اولیه سرعت، زاویه ϕ می‌سازد. از این رو تنها با محاسبه زاویه ϕ می‌توانیم راستای حرکت پس از برخورد ذرات به دست آوریم و این در حالی است که در مورد برخورد در دستگاه مرجع آزمایشگاه، باید دو زاویه پراکندگی θ_1, θ_2 را محاسبه کنیم. با توجه به نمودار سرعت ذرات در دو دستگاه می‌توان رابطه ای بین زوایای پراکندگی در دو دستگاه نوشت. روابط بین سرعت‌های نهایی ذرات در دو دستگاه به صورت زیر است:

$$\vec{V}_{1F} = \vec{V}'_{1F} + \vec{V}_{cm}$$

$$\vec{V}_{2F} = \vec{V}'_{2F} + \vec{V}_{cm} \quad (۶-۸۷)$$



شکل (۳-۶)

با بکارگیری معادله اول می‌توان رابطه بین زاویه θ_1 (زاویه پراکندگی جرم m_1 در دستگاه آزمایشگاه) و زاویه ϕ (زاویه پراکندگی جرم m_1 در دستگاه مرکز جرم) را به دست آورد:

$$\begin{cases} V_{1F} \cos \theta_1 = V_{cm} + V'_{1F} \cos \phi \\ V_{1F} \sin \theta_1 = V'_{1F} \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \quad (۸۸-۶)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{V'_{1F} \sin \phi}{V_{cm} + V'_{1F} \cos \phi} = \frac{\sin \phi}{\frac{V_{cm}}{V'_{1F}} + \cos \phi}$$

در روابط فوق توجه داریم که بنابر رابطه (۸۰-۶) مرکز جرم فقط در راستای حرکت جسم اول دارای سرعت است. به همین ترتیب زاویه پراکندگی جرم m_2 در دستگاه آزمایشگاه یعنی θ_2 به صورت زیر به زاویه ϕ مربوط می‌شود.

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{V'_{2F} \sin \phi}{V_{cm} - V'_{2F} \cos \phi} = \frac{-\sin \phi}{\frac{V_{cm}}{V'_{2F}} - \cos \phi} \quad (۸۹-۶)$$

از آنجا که برخورد کشسان در نظر گرفته شده است جرمها پس از برخورد تغییری نمی‌کنند و از پایستگی اندازه حرکت خطی و پایستگی انرژی جنبشی می‌توان نتیجه گرفت که در سیستم مرکز جرم، سرعت‌های قبل از برخورد با سرعت‌های بعد از برخورد برابرند. از آنجا که مرکز جرم در دستگاه مرکز جرم ساکن است، بنابراین طبق معادلات (۸۵-۶) داریم:

$$m_1 \vec{V}'_{1i} + m_2 \vec{V}'_{2i} = 0$$

$$m_1 \vec{V}'_{1F} + m_2 \vec{V}'_{2F} = 0$$

$$\frac{1}{2} m_1 V_{1i}'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}'^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1F}'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2F}'^2 \quad (۹۰-۶)$$

با جایگزینی مقدار \vec{V}_{2F}' , \vec{V}_{2i}' از معادلات پایستگی اندازه حرکت در معادله انرژی داریم:

$$V_{1F}' = V_{1i}' \quad , \quad V_{2F}' = V_{2i}' \quad (۹۱-۶)$$

بدین ترتیب از روابط (۸۰-۶) و (۸۴-۶) می‌توان نوشت:

$$\frac{V_{cm}}{V_{1F}'} = \frac{\frac{m_1}{m_1 + m_2} V_{1i}'}{\frac{m_2}{m_1 + m_2} V_{1i}'} = \frac{m_1}{m_2} \quad (۹۲-۶)$$

و معادله (۸۸-۶) به شکل زیر در می‌آید:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \varphi}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \varphi} \quad (۹۳-۶)$$

اگر $m_1 \gg m_2$ باشد، θ_1 مستقل از φ است؛ یعنی بدون در نظر گرفتن مقدار φ اندازه θ_1 خیلی کوچک می‌شود؛ مانند آنچه در برخورد الاستیک دو ذره دیدیم. اگر $m_1 > m_2$ باشد و θ_1 همواره از زاویه θ_m کوچکتر است. بالاخره، اگر $m_1 = m_2$ شود،

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\varphi}{2} \quad (۹۴-۶)$$

در این حالت طبق رابطه (۸۹-۶) خواهیم داشت: $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ و در نتیجه

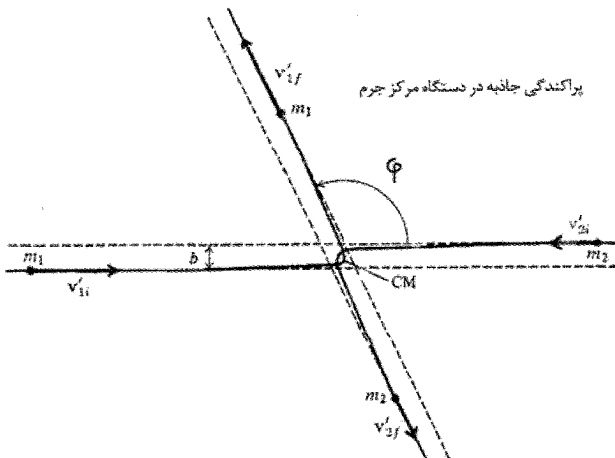
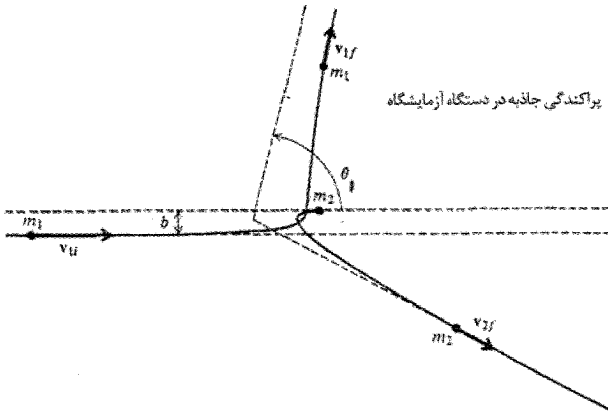
$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (۹۵-۶)$$

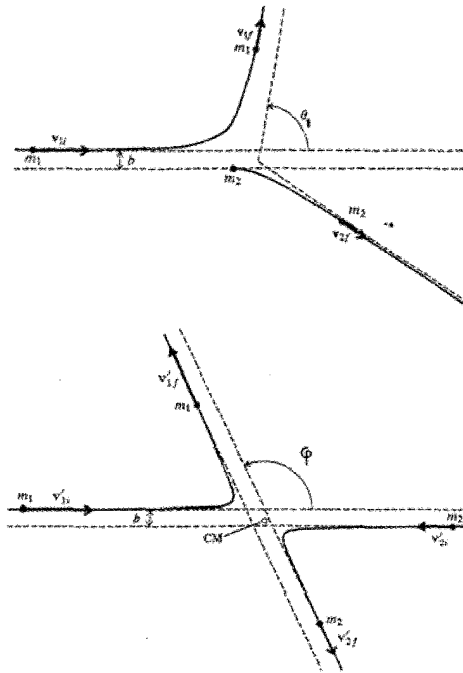
از آنجا که φ می‌تواند تمام مقادیر بین 0 تا π را بپذیرد، بزرگترین مقدار θ_1 در این حالت برابر $\frac{\pi}{2}$

خواهد بود (این نتیجه را قبلاً در بخش ۶-۸-۱ نیز به دست آوردیم). اگر $m_1 \gg m_2$ باشد،

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \varphi \quad (۶-۹۶)$$

انگاه این مطلب کاربرد معادله پراکندگی را در فورده در فصل پنجم را توجیه می‌کند. برای درک بیشتر مسئله و نوع ارتباط بین دو دستگاه، در شکل‌های زیر پراکندگی دافعه و جاذبه را از دید ناظرهای واقع در دستگاه مختصات آزمایشگاه و دستگاه مختصات مرکز جرم، نشان می‌دهیم.



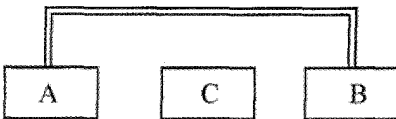


شکل (۴-۶)

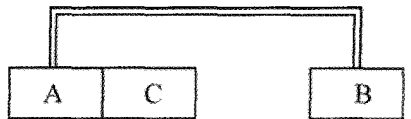
۹-۶. مسائل برگزیده حل شده

۱- دو ماشین مشابه A و B، به جرم 4 kg به وسیله میله سختی به هم وصل شده‌اند. جرم ماشین C، که در میان دو ماشین A و B قرار دارد، 1 kg است. در ابتدا، سرعت A و B برابر ۵ و در حال سکون است.

الف) فرض کنید برخورد بین A و C کاملاً غیر الاستیک. سرعت نهایی سیستم چیست؟
 ب) فرض کنید برخورد بین A و C کاملاً الاستیک و برخورد بین B و C کاملاً غیر الاستیک است. سرعت نهایی سیستم را به دست آورید.



$v_i = 5 \text{ m/s}$ $U_i = 0$
 \rightarrow



v_F
 \rightarrow

حل:

الف) در برخورد کاملاً ناکشسان، دو جسم پس از برخورد به هم می‌چسبند و با سرعت V_F به حرکت ادامه می‌دهند. بر اساس پایستگی اندازه حرکت خطی داریم (شکل ۲):
مجموع اندازه حرکت بعد از برخورد = مجموع اندازه حرکت قبل از برخورد

$$m_A V_{iA} = (m_A + m_C) V_F \Rightarrow V_F = \frac{4}{5} V_{iA} \Rightarrow V_F = 4 \frac{m}{s}$$

ب) اگر برخورد A و B الاستیک باشد، انرژی جنبشی نیز (علاوه بر اندازه حرکت خطی) پایسته می‌ماند:

$$m_A V_{iA} = m_A V_{FA} + m_C V_{FC} \Rightarrow V_{FC} = m_A (V_{iA} - V_{FA}) / m_C$$

$$V_{FC} = \varepsilon (V_{iA} - V_{FA})$$

$$\text{بقای انرژی} = \frac{1}{2} m_A V_{iA}^2 = \frac{1}{2} m_A V_{FA}^2 + \frac{1}{2} m_C V_{FC}^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon V_{iA}^2 = 4 V_{FA}^2 \quad (۳)$$

$$۱,۲ \Rightarrow 5 V_{FA}^2 - 8 V_{iA} V_{FA} + 3 V_{iA}^2 = 0$$

$$(\varepsilon V_{FA} - 3 V_{iA})(V_{FA} - V_{iA}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_{FA} = V_{iA} = 5 \frac{m}{s} \\ V_{FA} = \frac{3}{5} V_{iA} = 3 \frac{m}{s} \end{cases} \quad (۳)$$

$$۱,۳ \Rightarrow \begin{cases} V_{FC} = 0 \\ V_{FC} = 8 \frac{m}{s} \end{cases}$$

سرعت $V_{FC} = 0$ یک جواب نامعقول غیر فیزیکی است. چون به ازای $V_{FC} = 0$ مثل اینکه ماشین A از ماشین C عبور کرده است که چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین جواب‌های مسئله عبارتند از

$$V_{FC} = 3 \frac{m}{s} \quad , \quad V_{FC} = 8 \frac{m}{s}$$

برخورد بین C و B کاملاً غیر الاستیک است، بنابراین داریم:

$$m_B V_{iB} + m_C V_{FC} = (m_B + m_C) V$$

$$(12 + 8) = 5V = \frac{20}{5} = 4 \frac{m}{s}$$

این جواب معادل با جواب قسمت الف است که قابل پیش‌بینی بود. چون در قسمت الف، انرژی جنبشی به ازای یک برخورد غیر الاستیک تغییر می‌کرد و در اینجا نیز انرژی جنبشی در یک برخورد غیر الاستیک مشابه تغییر می‌کند و برخورد الاستیک موجب تغییر انرژی جنبشی سیستم نمی‌شود. بنابراین، سرعت نهایی سیستم در هر دو حالت یکسان خواهد بود.

۲- ذره‌ای را به جرم m_0 در نظر بگیرید که در جهت X در حرکت است. وقتی ذره به $X = 0$ می‌رسد به علت مواجهه با یک توده غبار، جرمش افزایش می‌یابد، این افزایش جرم با فاصله طی شده از $X = 0$ متناسب است. معادله مسیر ذره بر حسب جرم اولیه و سرعت اولیه را به دست آورید. آنگاه تغییرات انرژی جنبشی را محاسبه کنید.

حل:

جرم ذره به وسیله معادلات زیر داده می‌شود:

$$m = \begin{cases} m_0 = \text{const} & x < 0 \\ kx + m_0 & x > 0 \end{cases}$$

از آنجا که نیروی خارجی به ذره وارد نمی‌شود، اندازه حرکت خطی پایسته است. بنابراین:

$$\frac{d}{dt}(mV) = 0 \Rightarrow V \frac{dm}{dt} + m \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dm}{m} \Rightarrow \ln \left| \frac{V}{V_0} \right| = -\ln m \left| \frac{m}{m_0} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V_0} + \frac{m_0}{m} \Rightarrow mV = +m_0 V_0$$

با قرار دادن مقدار از معادله جرم داریم:

$$(kx + m_0) \frac{dx}{dt} = m_0 V_0 \Rightarrow (kx + m_0) dx = m_0 V_0 dt$$

$$\frac{1}{2} kx^2 + m_0 x = m_0 V_0 t$$

$$x = -\frac{m_0}{k} + \sqrt{\frac{m_0^2}{k^2} + \frac{2m_0 V_0 t}{k}}$$

تغییر انرژی جنبشی عبارت است از:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_0 V_0^2 - \frac{1}{2} m V^2$$

$$m\dot{x} = m_0 V_0 \Rightarrow V = \frac{m_0 V_0}{m}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{2} m_0 V_0^2 - \frac{1}{2} m_0 V_0 \frac{m_0 V_0}{m}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_0 V_0^2 \left(1 - \frac{m_0}{m}\right)$$

۳- پرتابه‌ای به جرم M در خلال پرواز منفجر می‌شود و به سه پاره تقسیم می‌شود. یکی از این

پاره‌ها به جرم $m_1 = \frac{M}{2}$ در راستای اولیه حرکت پرتابه، به حرکت در می‌آید و دیگری به جرم

$m_2 = \frac{M}{6}$ در راستای عکس، حرکت می‌کند و سومی هم به جرم $m_3 = \frac{M}{3}$ به حال سکون در

می‌آید. انرژی آزاد شده در انفجار، E ، پنج برابر انرژی جنبشی پرتابه در هنگام انفجار است. سرعت هر

یک از این پاره‌ها چقدر است؟

حل:

فرض کنیم سرعت پرتابه به جرم M ، برابر V باشد. جرم و سرعت هر یک از سه پاره عبارت است

از: $\vec{V}_1 = k_1 \vec{V}$ و $m_1 = \frac{N}{2}$ در جهت سرعت اولیه، $\vec{V}^2 = -k_2 \vec{V}$ و $m_2 = \frac{M}{6}$ در خلاف

جهت سرعت اولیه. بالاخره در مورد قسمت سوم $\vec{V} = 0$ ، $m_3 = \frac{M}{3}$ است (ضرایب k_1 و k_2

مثبت هستند). از پایداری اندازه حرکت و انرژی (با در نظر گرفتن انرژی آزاد شده E) داریم:

$$M\vec{V} = \frac{M}{\gamma} k_1 \vec{V} - \frac{M}{\epsilon} k_2 \vec{V} \Rightarrow k_2 = 3k_1 - \epsilon \quad (1)$$

$$E + \frac{1}{\gamma} MV^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\gamma} (k_1 V)^2 + \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\epsilon} (k_2 V)^2 \quad (2)$$

$$E = \frac{5}{\gamma} MV^2$$

$$\Rightarrow k_2^2 = 36 - 3k_1^2 \quad (3)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = -6 \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

شرط $k_2 = -6$ با فرض مثبت بودن k_2 در تناقض است. بنابراین جواب‌های قابل قبول عبارتند از:

$$\vec{V}_1 = 3\vec{V} \quad , \quad \vec{V}_2 = -3\vec{V} \quad , \quad \vec{V}_3 = 0$$

۴- یک توپ پلاستیکی از ارتفاع h_1 از حال سکون بر روی زمین می‌افتد. توپ پس از برخورد با زمین، تا ارتفاع h_2 بالا می‌رود. ضریب بازگشت چقدر است؟

حل:

$$\vec{V}_{1i} = -\sqrt{2gh_1} \quad \text{سرعت توپ قبل از برخورد با زمین:}$$

$$V_{1F} = \sqrt{2gh_2} \quad \text{سرعت اولیه توپ هنگام جهش عبارت است از:}$$

(چون سرعت توپ در h_2 باید صفر شود)، و نیز زمین ساکن است:

$$e = \frac{|V_{2F} - V_{1F}|}{|V_{1i} - V_{2i}|} \rightarrow \begin{cases} V_{2F} = 0 \\ V_{2i} = 0 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

۵- آب به میزان ۱۲۰ پوند در دقیقه از ارتفاع ۱۶ فوتی به داخل بشکه‌ای ریخته می‌شود. وزن بشکه ۲۵ پوند است و بر ترازویی قرار گرفته است. پس از آنکه آب به مدت یک دقیقه به درون

بشکه بریزد، ترازو چه وزنی را نشان می‌دهد؟ ($g = 32 \text{ ft/s}^2$)

حل:

سرعت آب وقتی به درون بشکه می‌رسد با فرض صفر بودن سرعت اولیه عبارت است از

$$V = \sqrt{2gh} = 32 \frac{\text{ft}}{\text{s}}, \frac{d}{dt}(mg) = 120 \frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mV) = V \frac{dm}{dt} + m \frac{dV}{dt}$$

از آنجا که سرعت هر جرم dm از آب وقتی به درون بشکه می‌رسد ثابت است داریم:

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow F = V \frac{dm}{dt} = V \frac{d}{dt} \left(\frac{mg}{g} \right) = \frac{V}{g} \frac{d}{dt} (mg)$$

$$\Rightarrow F = \frac{32}{32} \left(120 \times \frac{1 \text{ lb}}{60 \text{ s}} \right) = 2 \text{ lb}$$

وزنی که ترازو نشان می‌دهد برابر است با وزن بشکه + وزن مقدار آب درون بشکه + نیروی F . در نتیجه

$$\Rightarrow W = 25 + 2 + 120 = 147 \text{ lb}$$

۶- ماهواره‌ای کروی به جرم m و شعاع a با سرعت \vec{V} از داخل جو رقیقی با چگالی p حرکت می‌کند.

با فرض اینکه بتوان از تندی مولکول‌های هوا در مقایسه با \vec{V} صرف نظر کرد و هر مولکولی که با ماهواره برخورد می‌کند، بر جدار آن می‌نشیند نیروی اصطکاک وارد بر ماهواره را پیدا کنید. اگر مدار ماهواره دایره‌ای در 400 کیلومتری سطح زمین باشد (شعاع زمین 6360 کیلومتر)، که در آن $p = 10^{-11} \text{ kg/cm}^3$ است و اگر $a = 1 \text{ m}$ ، $m = 100 \text{ kg}$ باشد، تغییر ارتفاع و تغییر زمان

تناوب چرخشی در یک هفته را حساب کنید.

حل:

چون ماهواره کروی است، مولکول‌های موجود در استوانه‌ای به شعاع a و طول vdt در زمان dt با ماهواره برخورد می‌کنند و بر جدار آن می‌نشینند. بنابراین مقدار جرمی که در زمان dt روی ماهواره

می‌نشیند، dm ، عبارت است از:

$$dm = \rho dv = \rho v dt \pi a^2$$

از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

که با توجه به عبارت مربوط به dm می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$F = \rho v^2 \pi a^2 + m \frac{dv}{dt}$$

از آنجا که به سیستم نیروی خارجی وارد نمی‌شود، اندازه حرکت خطی پایسته است:

$$m_0 v_0 = mv, \quad F = 0$$

$$\Rightarrow \rho v^2 \pi a^2 + m \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow m = \frac{m_0 v_0}{v} \Rightarrow \rho a^2 v^2 \pi + \frac{m_0 v_0}{v} \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{\rho \pi a^2}{m_0 v_0} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2v^2} \Big|_{v_0}^v = \frac{\rho \pi a^2}{m_0 v_0} t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} = \frac{2\rho \pi a^2}{m_0 v_0} t \Rightarrow v = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{m_0^2 + 2\rho \pi a^2 v_0 m_0 t}}$$

$$m = \sqrt{m_0^2 + 2\rho \pi a^2 v_0 m_0 t}$$

برای اینکه ماهواره در مسیر دایره‌ای شکل حرکت کند

$$G = \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2} \quad (1)$$

ارتفاع اولیه را I_0 می‌گیریم. با استفاده از پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای (چون نیروی گرانشی یک

نیروی مرکزی است و بنابراین بقای اندازه حرکت زاویه‌ای داریم)

$$L = L_0 \Rightarrow m_0 r_0 v_0 = mrv \Rightarrow V = \frac{m_0 r_0 v_0}{mr} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow r = \frac{GMm^{\prime} r^{\prime}}{m_0^{\prime} v_0^{\prime} r_0^{\prime}} \Rightarrow r = \frac{m_0^{\prime} v_0^{\prime} r_0^{\prime}}{GMm^{\prime}}$$

$$r = \frac{m_0^{\prime} v_0^{\prime} r_0^{\prime}}{GM(m_0^{\prime} + \nu \pi \rho a^{\prime} m_0 v_0 t)} = \frac{m_0^{\prime} v_0^{\prime} r_0^{\prime}}{g(R^{\prime})(m_0^{\prime} + \nu \pi \rho a^{\prime} m_0 v_0 t)}$$

r ارتفاع در لحظه است.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{V}$$

$$T = \frac{2\pi m_0 v_0 r_0^{\prime}}{gR^{\prime} (m_0^{\prime} + \nu \pi \rho a^{\prime} m_0 v_0 t)^{\frac{1}{2}}}$$

ν - دو ذره m_1, m_2 طوری حرکت می‌کنند که سرعت نسبی آنها \vec{V} و سرعت مرکز جرم آنها

\vec{V} است. اگر جرم کل دستگاه $M = m_1 + m_2$ و جرم کاهش یافته $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ باشد،

ثابت کنید که انرژی جنبشی کل عبارتست از:

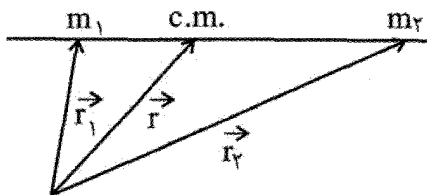
$$K = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \mu V^2$$

این نتیجه را توضیح دهید.

حل:

$$\vec{V} = \frac{\vec{r}}{t} = \frac{m\vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

سرعت نسبی جسم اول نسبت به جسم دوم چنین است:



$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_2$$

$$\vec{\bar{V}} = \frac{m_1(\vec{V} + \vec{v}_2) + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M}\vec{V} + \vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{\bar{V}} - \frac{m_1}{M}\vec{V} = \vec{\bar{V}} - \frac{\mu}{m_2}\vec{V}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{\bar{V}} - \frac{\mu}{m_1}\vec{V} = \vec{\bar{V}} + \frac{m_2}{M}\vec{V} = \vec{\bar{V}} + \frac{\mu}{m_1}\vec{V}$$

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{\bar{V}} + \frac{\mu}{m_1}\vec{V}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{\bar{V}} - \frac{\mu}{m_2}\vec{V}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1(\bar{V}^2 + \frac{\mu^2}{m_1^2}V^2 + 2\frac{\mu}{m_1}\vec{\bar{V}} \cdot \vec{V}) + \frac{1}{2}m_2(\bar{V}^2 + \frac{\mu^2}{m_2^2}V^2 - 2\frac{\mu}{m_2}\vec{\bar{V}} \cdot \vec{V})$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_1}V^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_2}V^2 = \frac{1}{2}M\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)V^2$$

$$= \frac{1}{2}M\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\mu V^2$$

یعنی انرژی جنبشی کل دستگاه = انرژی جنبشی مربوط به حرکت مرکز جرم، با جرم کل دستگاه واقع در مرکز جرم + انرژی جنبشی مربوط به حرکت نسبی یک ذره نسبت به ذره دیگر به شرطی که جرم کاهش یافته به جای جرم مورد بررسی قرار گیرد.

۸- موشکی به جرم M لحظه‌ای با سرعت V در راستای قائم به بالا در حرکت است و گاز با سرعت ثابت Mkv نسبت به موشک از عقب آن خارج می‌شود. نیروی وارد بر موشک عبارتست از نیروی وزن و نیروی مقاومت mkv که در آن K ضریب ثابت و مثبت است. با شروع از قانون دوم نیوتن، نشان دهید که معادله حرکت موشک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dV}{dt} + u \frac{d}{dt}(\ln M) = -g - kV$$

چنانچه جرم موشک از رابطه $M = M_0 e^{-bt}$ به دست آید که در آن $(\frac{g}{u}, b)$ ضریب مثبت است، و اگر در زمان $t = 0$ ، $X = 0$ ، $V = 0$ باشد، آنگاه ارتفاع موشک را پس از زمان t به دست آورید:

حل:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} = \vec{F}$$

$$M \frac{dV}{dt} + u \frac{dM}{dt} = -Mg - MKV$$

$$\frac{dV}{dt} + u \frac{dM/dt}{M} = -g - KV \Rightarrow \frac{dV}{dt} + u \frac{d}{dt}(\ln M) = -g - KV$$

$$M = M_0 e^{-bt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} + u \frac{d}{dt} \ln(M_0 e^{-bt}) = -g - KV$$

$$\frac{dV}{dt} + u \frac{d}{dt}(\ln M_0 - bt) = \frac{dV}{dt} - ub = -g - KV$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{-g + bu - KV} = dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k} \ln(-g + bu - KV) = t + c : \begin{cases} t = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{k} \ln(-g + ub) = c$$

$$-\frac{1}{k} \ln(-g + ub - kV) = t - \frac{1}{k} \ln(-g + ub)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k} \ln \frac{-g + ub - kV}{-g + ub} = t$$

$$-g + ub - kV = (-g + ub)e^{-kt} \Rightarrow -kV = (-g + ub)[-1 + e^{-kt}]$$

$$V = -\frac{1}{k}(-g + ub)[-1 + e^{-kt}] = \frac{1}{k}(ub - g)(1 - e^{-kt})$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}(ub - g)(1 - e^{-kt})$$

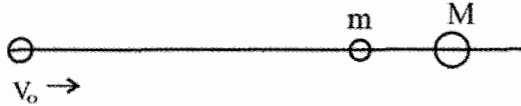
$$\Rightarrow x = \frac{1}{k}(-g + ub) \int (1 - e^{-kt}) dt + D = \frac{1}{k}(-g + ub) \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) + D$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{k}(-g + ub) \left(\frac{1}{k} \right) + D \Rightarrow D = -\frac{1}{k^2} \\ V = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{k}(-g + ub) \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) - \frac{1}{k^2}(-g + ub)$$

$$= \frac{1}{k}(ub - g) \left[t - \frac{1}{k}(1 - e^{-kt}) \right]$$

۹- ذره‌ای به جرم m مطابق شکل با سرعت V_0 به سمت دو جرم ساکن m و M که از هم کمی فاصله دارند حرکت می‌کند و برخورد مستقیم و الاستیک روی می‌دهد.



(الف) نشان دهید که برای $M \leq m$ دو برخورد روی می‌دهد، تمام سرعت‌های نهایی را پیدا کنید.

(ب) چنانچه $M > m$ باشد، چند برخورد روی می‌دهد؛ توضیح دهید.

حل:

در برخورد جسم سمت چپ (v_0, v') با جسم وسطی $(0, u)$ داریم:

$$\begin{cases} mv_0 + 0 = mv' + mu \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow v' = v_0 - u \end{cases}$$

برخورد الاستیک

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_0 - u)^2 + \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow v_0^2 = v_0^2 + u^2 - 2uv_0 + u^2$$

$$2u^2 - 2v_0u = 0 \Rightarrow 2u(u - v_0) = 0 \Rightarrow u = v_0$$

$$v' = v_0 - u = 0$$

یعنی جسم اول پس از برخورد اول ساکن می‌ماند و جیم وسطی با سرعت v_0 به جلو می‌رود. در این صورت برای برخورد این جسم و جسم ساکن سمت راست $M : (0, v)$ خواهیم داشت (با برخورد الاستیک) با $m : (u - v_0, u')$

$$\begin{cases} mu + 0 = mu' + MV \\ \frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2}mu'^2 + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow mu' = mv_0 - MV \Rightarrow u' = v_0 - \frac{M}{m}V \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}m(u^2 - u'^2) = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow m \left[u^2 - \left(v_0 - \frac{M}{m}V \right)^2 \right] = MV^2$$

$$m \left[v_0^2 - v_0^2 + 2\frac{M}{m}v_0V - \frac{M^2}{m^2}V^2 \right] = MV^2$$

$$\gamma M m v_0 v - M^{\gamma} V^{\gamma} = M m v^{\gamma} \Rightarrow \gamma M m v_0 - M^{\gamma} v = M m v$$

$$V = \frac{\gamma M m v_0}{M^{\gamma} + M m} = \frac{\gamma m v_0}{M + m} \Rightarrow u' = v_0 - \frac{M}{m} v = v_0 - \frac{\gamma M v_0}{M + m} = \frac{m - \gamma M}{m + \frac{\gamma}{\gamma} M} v_0$$

الف- اگر $M \leq m$ باشد در این صورت $u' \geq 0$ است و جسم وسطی با سرعت $u' < V$ به سمت راست حرکتش ادامه می‌دهد و در این صورت دو نقطه برخورد خواهیم داشت.

ب- اگر $M > m$ باشد، آنگاه $u' < 0$ می‌شود یعنی جسم وسطی پس از برخورد دوم به سمت چپ حرکت می‌کند و با سرعت $-u' = \frac{M - m}{M + m} v_0$ حرکت می‌کند و معنایش این است که با جسم اول که بعداً ساکن مانده است برخورد می‌کند (برخورد سوم) و سرعت‌های خود را مبادله می‌کنند. می‌توان مجدداً معادلات بقای اندازه حرکت و انرژی را برای آنها نوشت و سرعت‌های دو جسم را پس از برخورد نیز به دست آورد. چون جرم دو جسم با هم برابر است و برخورد الاستیک است در اینجا نیز جسم ساکن با همان سرعت u' به چپ حرکت می‌کند و جسم وسطی ساکن می‌ماند.

۱۰- موشکی باید به طور قائم به سمت بالا پرتاب شود. جرم اولیه M_0 است و سرعت خروجی

$$\text{گاز } -u \text{ و میزان خروج گاز } A = -\frac{dM}{dt} \text{ ثابت است. پس از خروج تمام گاز به جرم } \Delta M \text{ موتور}$$

موشک بدون سوخت می‌ماند. از اصطکاک صرف‌نظر کنید و شتاب ثقل g را ثابت فرض کنید. معادله حرکت را به دست آورید و آن را حل کنید و نشان دهید که اگر $M_0, u, \Delta M$ ثابت باشند، هر چه A میزان خارج شدن گاز از موشک بیشتر باشد یعنی هر قدر سوخت خود را زودتر مصرف کند حداکثر ارتفاعی که موشک بدان می‌رسد، بزرگتر خواهد شد.

حل:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = -A \Rightarrow M = M_0 - At$$

$$\vec{F} = -(M_0 - At)g\hat{k}$$

$$(M_0 - At) \frac{dv}{dt} = -(M_0 - At)g + (-u)(-A) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g + \frac{uA}{M_0 - At}$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(-g + \frac{uA}{M_0 - At} \right) dt \Rightarrow v = \frac{dz}{dt} = -u \left[\ln \left(\frac{M_0}{A} - t \right) - \ln \frac{M_0}{A} \right] - gt$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$z = ut - u \left(\frac{M_0}{A} - t \right) \ln \frac{M_0}{M_0 - At} - \frac{1}{2} gt^2$$

$$z = z_0 + v(t - t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2$$

بعد از تمام شدن سوخت موشک حرکت با سرعت اولیه کند می‌شود. t_0 زمانی است که جرم ΔM

$$\Delta M = t_0 A \Rightarrow t_0 = \frac{\Delta M}{A} \quad \text{مصرف می‌شود. و عبارت است از:}$$

در این رابطه $t > t_0$ است. اینک مشاهده می‌شود هر چه A بزرگتر شود یعنی t_0 کوچکتر شود، z افزایش می‌یابد یعنی پس از مسافت بیشتری می‌ایستد.

$$z(t = t_0) = z_0$$

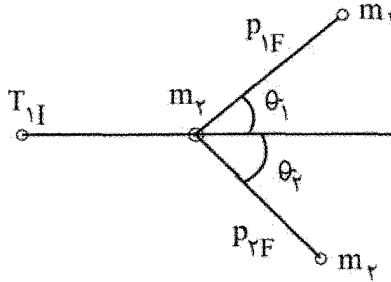
$$v(t_0) = v_0$$

$$z = \frac{v\Delta M}{A} - u \frac{M_0}{A} \ln \frac{M_0}{M_0 - \Delta M} + ut \ln \frac{M_0}{M_0 - \Delta M} - \frac{1}{2} gt^2$$

در این رابطه هر چه A زیادتر شود تأثیر در جمله منفی کمتر می‌شود، در نتیجه Z بزرگتر می‌شود یعنی ارتفاع ماکزیمم بیشتر می‌شود.

۱۱- ذره‌ای به جرم m_1 و انرژی T_{1I} به طور الاستیک با ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. اگر ذره m_2 پس از برخورد تحت زاویه θ_2 نسبت به جهت اولیه حرکت ذره m_1 از آن دور شود، انرژی داده شده به آن را حساب کنید. نشان دهید که T_{2F} برای برخورد رویاروی بزرگترین مقدار را دارد، و در این حالت انرژی از دست رفته بوسیله ذره وارد عبارتست از

$$T_{1I} - T_{2F} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)} T_{1I}$$



حل :

$$\text{در راستای } x \text{ و در راستای } y \begin{cases} p_{1I} = p_{1F} \cos \theta_1 + p_{2F} \cos \theta_2 \\ 0 = p_{1F} \sin \theta_1 + p_{2F} \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$T_{1I} = T_{1F} + T_{2F} \Rightarrow \frac{p_{1I}^2}{2m_1} = \frac{p_{1F}^2}{2m_1} + \frac{p_{2F}^2}{2m_2}$$

$$\Rightarrow \frac{p_{2F}^2}{m_2} = \frac{p_{1I}^2 - p_{1F}^2}{m_1} \quad (1)$$

$$p_{1I} + p_{1F} \cos^2 \theta_1 - 2p_{1I}p_{1F} \cos \theta_2 = p_{2F}^2 \cos^2 \theta_2$$

$$p_{1F}^2 \sin^2 \theta_1 = p_{2F}^2 \sin^2 \theta_2$$

$$\Rightarrow p_{\gamma I}^{\gamma} + p_{\gamma F}^{\gamma} - \gamma p_{\gamma I} p_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma} = p_{\gamma F}^{\gamma}$$

$$T_{\gamma F} = \frac{p_{\gamma F}^{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}} = \frac{p_{\gamma I}^{\gamma} + p_{\gamma F}^{\gamma} - \gamma p_{\gamma I} p_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}}$$

ماکزیمم وقتی است که $p_{\gamma I} p_{\gamma F} \cos \theta_{\gamma}$ و به عبارتی $\cos \theta_{\gamma}$ کمترین مقدار را داشته باشد و آن مورد برخورد رویاروی $\theta_{\gamma} = \pi$ است. در برخورد رویاروی $\cos \theta_{\gamma} = -1$ یا $\theta_{\gamma} = \pi$ است.

$$\text{از رابطه (۱)} \Rightarrow \frac{p_{\gamma I}^{\gamma} - p_{\gamma F}^{\gamma}}{m_{\gamma}} = T_{\gamma F} - \frac{(p_{\gamma I} + p_{\gamma F})^{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \frac{p_{\gamma I}^{\gamma} + p_{\gamma F}^{\gamma} + \gamma p_{\gamma F} p_{\gamma I}}{p_{\gamma I}^{\gamma} - p_{\gamma F}^{\gamma}} = \frac{\gamma m_{\gamma}}{m_{\gamma}}$$

$$\frac{p_{\gamma F}}{p_{\gamma I}} = \frac{m_{\gamma} - m_{\gamma}}{m_{\gamma} + m_{\gamma}} \Rightarrow \frac{p_{\gamma F}^{\gamma}}{p_{\gamma I}^{\gamma}} = \frac{(m_{\gamma} - m_{\gamma})^{\gamma}}{(m_{\gamma} + m_{\gamma})^{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma m_{\gamma} m_{\gamma}}{(m_{\gamma} + m_{\gamma})^{\gamma}}$$

و از آنجا

$$\frac{\gamma m_{\gamma} m_{\gamma}}{(m_{\gamma} + m_{\gamma})^{\gamma}} p_{\gamma I}^{\gamma} = p_{\gamma I}^{\gamma} - p_{\gamma F}^{\gamma} \Rightarrow \frac{p_{\gamma I}^{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}} - \frac{p_{\gamma F}^{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}} = \frac{\gamma m_{\gamma} m_{\gamma}}{(m_{\gamma} + m_{\gamma})^{\gamma}} \frac{p_{\gamma I}^{\gamma}}{\gamma m_{\gamma}}$$

$$\Rightarrow T_{\gamma I} - T_{\gamma F} = \frac{\gamma m_{\gamma} m_{\gamma}}{(m_{\gamma} + m_{\gamma})^{\gamma}} T_{\gamma I}$$

۱۲- اگر ضریب برگشت e باشد، انرژی Q از دست رفته را در یک برخورد رویاروی بین ذره‌ای به جرم m_1 با سرعت v_1 و ذره ساکنی به جرم m_2 حساب کنید.

$$V_{\gamma F} - V_{\gamma I} = e(V_{\gamma I})$$

-حل

$$m_{\gamma} V_{\gamma I} = m_{\gamma} V_{\gamma F} + m_{\gamma} V_{\gamma F}$$

$$T_{\gamma I} = T_{\gamma F} + T_{\gamma F} + Q \Rightarrow m_{\gamma} V_{\gamma I}^{\gamma} = m_{\gamma} V_{\gamma F}^{\gamma} + m_{\gamma} V_{\gamma F}^{\gamma} + \gamma Q$$

$$V_{\gamma F} = V_{\gamma I} + eV_{\gamma I}$$

$$m_{\gamma} V_{\gamma I} = m V_{\gamma F} + m_{\gamma} (eV_{\gamma I} + V_{\gamma F}) \Rightarrow$$

$$m_{\gamma} V_{\gamma I} - m_{\gamma} V_{\gamma I} e = m_{\gamma} V_{\gamma F} + m_{\gamma} V_{\gamma F}$$

$$V_{\gamma F} = eV_{\gamma I} + V_{\gamma F} \Rightarrow V_{\gamma F} = \frac{m_{\gamma} V_{\gamma I} (1 + e)}{m_{\gamma} + m_{\gamma}} = \frac{\mu(1 + e)}{m_{\gamma}} V_{\gamma I}$$

$$V_{\gamma F} = V_{\gamma I} - \frac{m_{\gamma} m_{\gamma}}{m_{\gamma} + m_{\gamma}} V_{\gamma I} (1 + e) = V_{\gamma I} \frac{1 - \mu(1 + e)}{m_{\gamma}}$$

$$Q = \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma I}^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma I}^{\gamma} - \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma F}^{\gamma} - \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma F}^{\gamma} \quad , \quad (V_{\gamma I} = 0)$$

$$m_{\gamma} V_{\gamma I} + m_{\gamma} V_{\gamma I} = m_{\gamma} V_{\gamma F} + m_{\gamma} V_{\gamma F}$$

$$V_{\gamma F} - V_{\gamma F} = e(V_{\gamma I} - V_{\gamma I}) \Rightarrow V_{\gamma I} = \frac{1}{e} (V_{\gamma F} - V_{\gamma F})$$

$$Q = \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma I}^{\gamma} - \frac{1}{\gamma} V_{\gamma F}^{\gamma} m_{\gamma} - \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma F}^{\gamma}$$

$$= \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma I}^{\gamma} - \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma I}^{\gamma} \left(1 - \frac{\mu(1 + e)}{m_{\gamma}} \right)^{\gamma} - \frac{1}{\gamma} m_{\gamma} \frac{\mu(1 + e)^{\gamma}}{m_{\gamma}^{\gamma}} V_{\gamma I}^{\gamma}$$

۱۳- دو وجه طبیعی ارتعاش یک جفت نوسانگر هارمونیک میرای یکسان جفت شده (معادلات ۱۸۰-۴) و (۱۸۱-۴) در کتاب مکانیک سایمون) را به دست آورید. $m_{\gamma} = m_{\gamma}$ و $b_{\gamma} = b_{\gamma}$ و $k_{\gamma} = k_{\gamma}$. (راهنمایی: اگر $k_{\gamma} = 0$ باشد جواب را می‌توانید به طور دقیق استخراج کنید. خواهید دید که این نکته در فاکتورگیری معادله ذره‌ای که برای تعیین ریشه‌های به دست می‌آورید مفید واقع می‌شود)

حل -

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + k'_1 x_1 + k_\gamma x_\gamma = 0, \quad k'_1 = k_1 + k_\gamma$$

$$m_\gamma \ddot{x}_\gamma + b_\gamma \dot{x}_\gamma + k'_\gamma x_\gamma + k_\gamma x_\gamma = 0, \quad k'_\gamma = k_\gamma + k_\gamma$$

$$b_1 = b_\gamma, m_1 = m_\gamma, k_1 = k_\gamma \Rightarrow k'_1 = k_1 + k_\gamma = k'_\gamma$$

$$m_1 m_\gamma p^{\prime\prime} + (m_\gamma b_1 + m_1 b_\gamma) p^{\prime} + (m_\gamma k'_1 + m_1 k'_\gamma + b_1 b_\gamma) p^{\prime\prime} + (b_1 k'_\gamma + b_\gamma k'_1) p + (k'_1 k'_\gamma - k_\gamma^{\prime\prime}) = 0$$

$$m^{\prime} p^{\prime\prime} + \gamma m b p^{\prime} + (\gamma m k' + b^{\prime}) p^{\prime} + \gamma b k' p + (k^{\prime\prime} - k_\gamma^{\prime\prime}) = 0$$

$$(m^{\prime} p^{\prime\prime} + \gamma m k' p^{\prime} + k^{\prime\prime}) + \gamma m b p^{\prime} + b^{\prime} p^{\prime} + \gamma b k' p - k_\gamma^{\prime\prime} = 0$$

$$(m p^{\prime\prime} + k')^{\prime} + \gamma p b (m p^{\prime} + k') + b^{\prime} p^{\prime} - k_\gamma^{\prime\prime} = 0$$

اگر $k_\gamma = 0$ ، مسئله راحت حل می‌شود:

$$(m p^{\prime} + k' + b p)^{\prime} - k_\gamma^{\prime\prime} = 0 \Rightarrow m p^{\prime} + k' + b p = \pm k_\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m p^{\prime} + b p + k' - k_\gamma = 0 \\ m p^{\prime} + b p + k' + k_\gamma = 0 \end{cases}$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^{\prime} - \gamma m (k' - k_\gamma)}}{\gamma m} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^{\prime} - \frac{(k' - k_\gamma)}{m}} = -\gamma \pm i \omega_1$$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^{\prime} - \gamma m (k' + k_\gamma)}}{\gamma m} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^{\prime} - \frac{(k' + k_\gamma)}{m}} = -\gamma \pm i \omega_\gamma$$

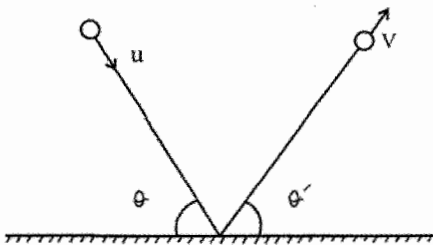
$$x_1 = c_1 e^{-\gamma t + i \omega_1 t} + c_\gamma e^{-\gamma t - i \omega_\gamma t} \Rightarrow x_1 = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

۶-۱۰. مسائل برگزیده برای حل

۱- ذره‌ای به جرم m_1 و اندازه حرکت p_{1i} با ذره دیگری به جرم m_2 و اندازه حرکت p_{2i} که در جهت مخالف حرکت می‌کند، به طور الاستیک برخورد می‌کند. اگر ذره m_1 بعد از برخورد تحت زاویه θ_2 نسبت به مسیر اصلی خود حرکت کند، اندازه حرکت نهایی آن را پیدا کنید.

۲- ذره‌ای به جرم m_1 و اندازه حرکت p_1 با ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد می‌کند. واکنشی رخ می‌دهد که دو ذره به جرمهای m_3, m_4 از آن نتیجه می‌شوند که بعد از برخورد تحت زوایای θ_3, θ_4 نسبت به مسیر اولیه m_1 حرکت می‌کنند. انرژی جذب شده در واکنش را بر حسب جرم ذرات و زوایای پراکندگی و اندازه حرکت p_1 پیدا کنید.

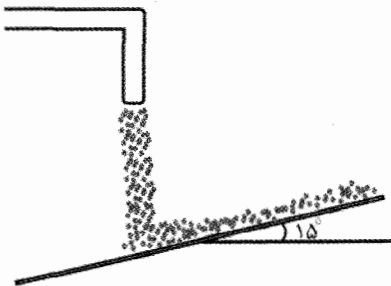
۳- توپی به جرم m با سرعت \vec{u} مطابق شکل در راستایی که با افق زاویه θ می‌سازد، حرکت



می‌کند. توپ پس از برخورد با صفحه صافی با سرعت \vec{v} در جهتی که با افق زاویه θ' می‌سازد باز می‌چهد. اگر ضریب بازگشت e باشد، سرعت توپ بعد از برخورد، v ، را بر حسب u, θ, e بدست آورید. پاسخ:

$$v = u \sqrt{e^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

۴- مطابق شکل از دستگاهی با آهنگ 1000 lb/min بر روی تسمه انتقالی که با سرعت 8 ft/s



حرکت می‌کند (به طور پیوسته) سنگریزه و شن ریخته می‌شود. سنگریزه‌ها با سرعت 12 ft/s بر روی تسمه می‌ریزند. نیروی لازم برای ثابت نگه داشتن سرعت تسمه وقتی 500 lb شن روی آن است چقدر است؟

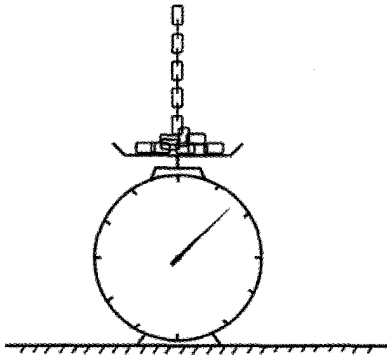
پاسخ: 135.25 lbs

۵- موشکی با جرم اولیه $2 \times 10^4 \text{ kg}$ به طور عمودی بر سطح زمین قرار دارد. گاز با آهنگ 100 kg/s و با سرعت 980 m/s از آن خارج می‌شود. پس از روشن شدن موتورها چقدر

طول می‌کشد تا موشک زمین را ترک کند؟

پاسخ:

$$t = 100s$$



۶- زنجیری به جرم m و به طول l مطابق شکل به طور قائم معلق است، به نحوی که انتهای پایینی آن با کفه ترازو در تماس است. زنجیر را رها می‌کنیم تا بر روی ترازو بیفتد. وقتی که طول x زنجیر روی ترازو می‌افتد، درجه ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟ (از اندازه حلقه‌های اتصال صرف‌نظر کنید.)

۷- موشکی در اولین ثانیه پرواز خود، $\frac{1}{6}$ خود را با سرعت 680 ft/s به صورت گاز خارج

می‌کند. شتاب موشک چقدر است؟

$$\frac{dV}{dt} = 83.2 \text{ ft/s}^2$$

پاسخ:

۸- فضانوردی برای تعمیر یک ماهواره مخابراتی خراب، از شاتل فضایی دوار خیلی دور می‌شود. او می‌فهمد که شاتل با سرعت 3 m/s از او دور می‌شود. جرم این فضانورد و واحد مانور دهنده او شامل یک کپسول تحت فشار به جرم 10 kg ، برابر است با 100 kg . کپسول فقط محتوی 2 kg گاز است که صرف پیش راندن او در فضا می‌شود. گاز با سرعت ثابت 100 m/s خارج می‌شود.

(الف) آیا گاز قبل از رسیدن فضانورد به شاتل تمام می‌شود؟

(ب) فضانورد برای رسیدن به شاتل، کپسول خالی را باید با چه سرعتی از خود دور کند؟

۹- توپیی در یک قلعه مشرف بر اقیانوس گلوله ای به جرم M را با سرعت دهانه‌ای v_0 تحت

زاویه 45° شلیک می‌کند. این گلوله در بالاترین نقطه مسیر منفجر می‌شود و دوپاره می‌شود (جرمشان عبارت است از: $m_1 + m_2 = M$). بر اثر انفجار انرژی اضافی E به دوپاره می‌شود، و آنها در راستای افقی اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهند. این دوپاره هنگام فرود در اقیانوس از یکدیگر چه

فاصله‌ای دارند؟

۱۰- ذره‌ای به جرم m_1 با ذره ساکنی به جرم m_2 برخوردی کشسان می‌کند. بیشترین کسر انرژی جنبشی تلف شده برای m_1 چقدر است؟ این واکنش را توصیف کنید.

۱۱- جرم m که به طور افقی با سرعت v_0 در حرکت است به آونگی به جرم m برخورد می‌کند.
 (الف)- اگر دو جرم به هم بچسبند، ماکزیمم ارتفاعی را که آونگ بدان می‌رسد پیدا کنید.
 (ب)- اگر جرمها به طور کشسان در امتداد حرکت اولیه پراکنده شوند، ماکزیمم ارتفاع حاصل را به دست آورید.

$$\text{پاسخ:} \quad h = \frac{v_0^2}{Rg} \quad \text{(الف)} \quad h = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{(ب)}$$

۱۲- جرم m که با سرعت v به طور افقی در حرکت است به سیستمی برخورد می‌کند و به آن می‌چسبند. سیستم شامل دو جرم m در دو انتهایش است و دو جرم m با فنری به طول l و ضریب سختی k به هم مربوط هستند. در خلال حرکت بعدی ماکزیمم فشردگی یا انقباض فنر چقدر است؟

$$\text{پاسخ:} \quad \max x = v \sqrt{\frac{m}{6k}}$$

۱۳- دو ذره به جرمهای m_1, m_2 با سرعت نسبی v_i به طور غیر الاستیک و یک بعدی برخورد مستقیم می‌کنند. اگر نسبت سرعت نسبی دو ذره بعد از برخورد به سرعت نسبی آنها قبل از برخورد e باشد، مقدار گرمای تولید شده در این برخورد را محاسبه کنید (فرمول ۷-۵-۷؛ کتاب فاولز).

$$\text{پاسخ:} \quad \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) v_i^2$$

۱۴- گلوله کوچکی به جرم m با سرعت اولیه v_0 با جسمی به جرم $M = 2m$ برخورد می‌کند و پس از سوراخ کردن آن با سرعت نهایی $\frac{v_0}{2}$ از آن خارج می‌شود. حرارت ایجاد شده در این پدیده چقدر است؟

$$\text{پاسخ:} \quad Q = \frac{5}{16} m v_0^2$$

فصل هفتم

جسم صلب - دوران به دور محور

مقدمه

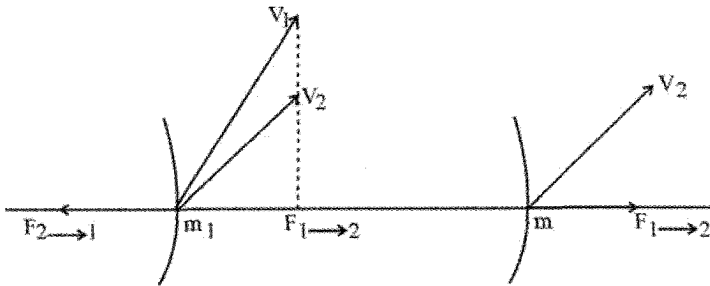
این مبحث را نخست می‌توان در فصل پنجم کتاب سایمون مطالعه کرد. ادامه آن دینامیک جسم صلب (چرخش جسم صلب، و زوایای اویلر) در فصل یازدهم این کتاب می‌آید. معادل آن در فصل یازدهم کتاب ماریون (چاپ چهارم - ۱۹۹۵) و نیز فصل هشتم فاولز (چاپ ششم - ۱۹۹۹) نیز از این موضوع صحبت می‌شود. در بحث پیشرفته‌تر در فصل چهارم کتاب گلدشتین از آن سخن می‌رود و عمدتاً به مبانی ریاضی تبدیلات متعامد می‌پردازد و سپس در ادامه و در فصل پنجم درباره زوایای اویلر و معادلات حرکت جسم صلب در فضا به بحث می‌پردازد. در ویرایش جدید کتاب ماریون، جسم صلب عمدتاً پس از معادلات لاگرانژ مطرح می‌شود. حال آنکه سایمون و فاولز بدون نگاه به شیوه لاگرانژ و اساساً بر پایه روشهای نیوتنی بدین مبحث می‌پردازد. در کتاب گلدشتین، در فصل چهارم ضمن آنکه به بررسی ماتریس دوران و تبدیلهای مربوطه می‌پردازد، مطالب فصل هفت سایمون و دهم ماریون را درباره دستگاههای مختصات متحرک در همین فصل ملاحظه می‌کنیم. همچنین از زوایای اویلر و معادلات حرکت اویلر سخن می‌گوید که همین بحث را در فصل‌های یازدهم سایمون، یازدهم ماریون و نیز نهم فاولز می‌یابیم.

۷-۱. جسم صلب

در این فصل، ما بدون مراجعه به معادلات لاگرانژ، به بررسی خواص عمومی جسم صلب می‌پردازیم و عمدتاً حرکت دورانی آن را به دور محور ثابت در فضا مورد بحث قرار می‌دهیم. آنگاه در فصل‌های بعد با معرفی زوایای اویلر و تانسور مانند، بررسی دقیقتر خود را ادامه می‌دهیم.

دستگاهی شامل تعداد زیادی ذره را که جای ذرات نسبت به هم ثابت می‌ماند جسم صلب می‌نامیم. به عبارت دیگر فاصله نسبی ذرات (فاصله متقابل آنها) همگی ثابت است. پس نیروهای موجود بین ذرات سازنده سیستم همگی از نیروهای داخلی هستند و به صورت زوج نیرو ظاهر می‌شوند. این نیروها را نیروهای قید نیز می‌نامیم. به تعبیر دیگر دستگاه شامل نقاط مادی را که تحت قیدهای هولونومیک^۱ است و فاصله نقاط آن در سراسر حرکت ثابت است جسم صلب می‌نامیم. قانون سوم نیوتن به شکل کامل (یا قوی) در مورد آنها برقرار است، چرا که مانند دمبل می‌مانند. پس قانون‌های بقای اندازه حرکت خطی و اندازه حرکت زاویه‌ای در مورد جسم صلب به کار می‌رود. همچنین بقای انرژی داریم چرا که کار نیروهای داخلی (از جمله نیروهای قید) نیز صفر است (رابطه ۷-۱).

در مورد تعریف جسم صلب می‌توان گفت که هنگام اثر نیروهای خارجی بردارهای سرعت تمام ذرات همسنگ هستند و جسم یکپارچه حرکت می‌کند.



شکل (۷-۱)

(۷-۱)

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_2 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \perp \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

۱- عوامل بازدارنده و مقاوم در مقابل حرکت تحت عنوان عمومی قید مطرح می‌شود. چنانچه وضعیت قید را بتوان به صورت توابعی از مختصات ذرات (و احتمالاً زمان) بیان کرد که دارای شکل $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0$ باشد، قید را هولونومیک (Holonomic) می‌نامیم.

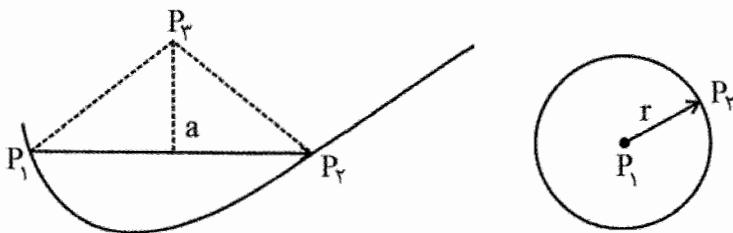
یعنی مولفه سرعت هر دو ذره در راستای خط واصل دو ذره (مپله صلب) یکسان است. به عبارت دیگر، سرعت نسبی هر دو ذره بر زوج نیروی بین دو ذره عمود است (شکل ۷-۱). جسم صلب واقعی نداریم. در تقریب خوب می‌توان پذیرفت که جسم صلب مجموعه‌ای از ذرات آرمانی و ایده‌آل است. چون تعداد زیادی ذره داریم از توزیع جرم (چگالی) استفاده می‌کنیم:

$$\rho = \frac{dM}{dV} \quad (۲-۷)$$

dM باید آنقدر بزرگ باشد تا شامل تعداد زیادی ذره شود، اما باید به اندازه کافی کوچک باشد تا خواص ماده درون حجم dV یکنواخت باقی بماند.

$$M = \sum_i m_i \quad \text{و یا} \quad M = \iiint \rho dv \quad (۳-۷)$$

برای بیان جای جسم صلب و توصیف حرکت آن به شش مختصه در فضا نیاز است (سه نقطه p_1 و p_2 و p_3 غیر واقع در خط راست و به فاصله ثابت از یکدیگر می‌توانند نمایشگر جسم صلب باشند). سه مختصه برای تعیین جای p_1 ، بعد دو مؤلفه (θ, φ) برای تعیین p_2 (قید فاصله $p_1 p_2 = r_1$ ، یک درجه آزادی را کم می‌کند). بعد یک مولفه به عنوان فاصله p_3 از خط $p_1 p_2$ ($a \neq 0$) کافی است. بقیه نقاط جسم صلب به همین ترتیب معلوم می‌شوند.



شکل (۲-۷)

وقتی جسمی تکیه‌گاه ندارد آزادانه می‌توان هر مولفه‌ای را انتخاب کرد؛ مثلاً مرکز جرم $R=(X,Y,Z)$.

بعد روابط $M\ddot{R} = \vec{F}_{ext}$ و سپس $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ را حل کرد، که در آن \vec{N} نسبت به مرکز جرم

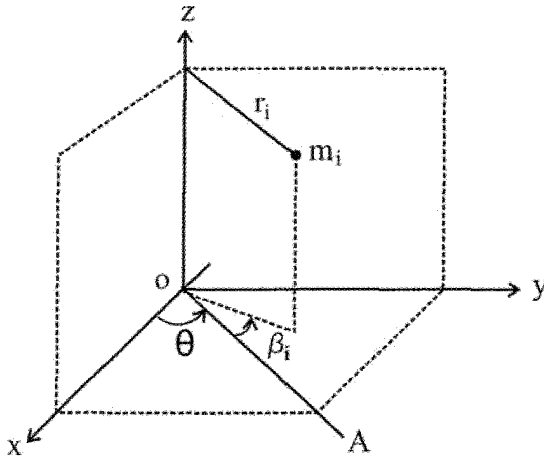
سنجیده می‌شود. انتخاب مجموعه‌ای از مختصات متقارن ساده برای تعیین موقعیت جسم صلب، به خصوص در مورد چرخش به دور یک نقطه، کاری دشوار است. در اینجا فعلاً چرخش به دور یک

محور ثابت را بررسی می‌کنیم. بدین ترتیب جسم صلب در فضا به شش مختصه تعمیم یافته نیاز دارد تا همپیکری آن مشخص شود؛ صرفنظر از اینکه تعداد ذرات سازنده آن چقدر باشد، حتی در مورد جسم پیوسته نیز همین تعداد مختصات کفایت می‌کند (گلدستین).

۱-۱-۷. چرخش جسم صلب به دور محور ثابت

جسمی صلب را طوری در نظر می‌گیریم که مقید باشد به دور محوری ثابت مثلاً محور ثابت OZ دوران کند (شکل ۳-۷). در این نوع حرکت جسم، یک مولفه برای تعیین جای جسم کافی است:

$$\varphi_i = \theta + \beta_i \quad ; \quad \beta_i = \text{برای جسم صلب ثابت است}$$



شکل (۳-۷)

OA خطی ثابت است که دوران جسم صلب، و تغییرات هر جرم m_i عملاً نسبت به این محور تعیین می‌شود. OA در صفحه xoy است و از محور دوران OZ می‌گذرد (آن را در O قطع می‌کند).

$$\dot{\varphi}_i = \dot{\theta}$$

$$|\vec{L}| = \sum m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i = \sum m_i r_i^2 \dot{\theta} = (\sum m_i r_i^2) \dot{\theta} = I_z \dot{\theta} \quad (۴-۷)$$

I_z گشتاور ماند یا همان ممان اینرسی جسم نسبت به محور Z است:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \iiint \rho r^2 dv \quad (۵-۷)$$

با تعریف عبارت ریاضی و فرضی شعاع زیراسیون K_z به صورت $MK_z^2 = I_z$ مسئله راحت‌تر بررسی می‌شود. K_z یعنی شعاعی که اگر تمام جرم جسم در فاصله K_z از محور z قرار داشته باشد گشتاور ماندش برابر I_z می‌شود. معادله حرکت در چرخش به دور محور ثابت از تصویر معادله برداری حرکت یعنی $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ روی محور دوران به دست می‌آید.

$$\frac{dL}{dt} = N_z = I_z \ddot{\theta} \quad (۶-۷)$$

در مقایسه حرکت چرخشی با حرکت انتقالی، m به I تبدیل می‌شود. البته شباهت جنبه ریاضی دارد مثلاً $\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}$ بردارهایی هستند که در یک امتداد قرار دارند ولی $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ در یک امتداد نیستند. تفاوت دیگر اینکه m ثابت است ولی I به جای محور در جسم بستگی دارد و تغییر می‌کند. همچنین روابط زیر بین کمیت‌های فیزیکی در حرکت چرخشی و انتقالی وجود دارد:

$$V(x) = -\int_{x_s}^x F(x) dx \leftrightarrow V(\theta) = -\int_{\theta_s}^{\theta} N_z(\theta) d\theta \quad (۷-۷)$$

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \leftrightarrow N(\theta) = -\frac{dV(\theta)}{d\theta}$$

و انرژی جنبشی کل دستگاه:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 \quad (۸-۷)$$

که در آن $\dot{\theta} = \omega$ سرعت چرخش به دور محور دوران است. این رابطه مشابه رابطه انرژی جنبشی $\frac{1}{2} m v^2$ است.

به طور خلاصه روابط بین متغیرهای زاویه‌ای و خطی چنین است:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_R = \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (۹-۷)$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

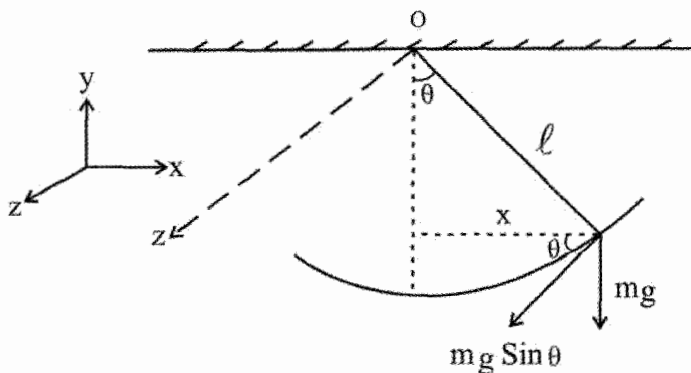
$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

\vec{V} سرعت خطی، \vec{a}_R شتاب جانب مرکز، \vec{a}_T شتاب مماسی است. همچنین $\vec{\omega}$ سرعت زاویه‌ای، $\vec{\alpha}$ شتاب زاویه‌ای است. توجه داریم که بردارهای $\vec{\omega}$ و $\vec{\alpha}$ بردارهای محوری هستند. یعنی تحت عمل پاریته ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) تغییر نمی‌کنند؛ در حالیکه بردارهای \vec{a} ، \vec{V} ، \vec{r} بردارهای قطبی هستند و با عمل پاریته، وارونه می‌شوند. نمی‌توان یک بردار محوری را با بردار قطبی جمع برداری کرد زیرا این عمل تقارن پاریته را به هم می‌زند.

در همین جا یادآور می‌شویم که حرکت یک جسم صلب در حالت کلی ترکیبی از حرکت انتقالی مرکز جرم و حرکت چرخشی حول مرکز جرم آن است. چنانچه جسم صلب بدون لغزش بر یک سطح فقط حرکت غلتشی داشته باشد، آنگاه محل تماس جسم با سطح به طور لحظه‌ای ساکن است و شرط غلتش کامل به صورت $V_{cm} = R\omega$ بیان می‌شود که R شعاع جسم (شعاع دایره دوران)، ω سرعت زاویه‌ای به دور مرکز جرم است (به فصل سیزدهم مراجعه کنید). در حرکت غلتشی کامل، شرط اساسی وجود اصطکاک است و چون نقاط تماس در هر لحظه ساکن است، نیروی اصطکاک به صورت ایستایی است و بنابراین کاری بر روی جسم انجام نمی‌دهد.

۷-۱-۲. مثال شاخص آونگ ساده و آونگ مرکب

مثال ۷-۱. آونگ ساده: جرم m به نخ‌ی بدون جرم و طول اولیه l بسته شده و از نقطه O آویزان و در صفحه قائم نوسان می‌کند. تنها نیروی موثر، وقتی از اصطکاک صرف‌نظر می‌شود، نیروی وزن است. بنابراین مطابق شکل (۷-۴) داریم:



شکل (۷-۴)

$$F = -mg \sin \theta \approx -mg\theta = -mg \frac{x}{\ell} = -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

به طوری که $k = \frac{g}{\ell}$ است؛ آنگاه با انتخاب $\frac{k}{m} = \omega^2$ ، خواهیم داشت:

$$x = A \cos(\omega t + \theta) \quad (10-7)$$

نیروی $mg \sin \theta$ و یا گشتاور N_z در جهت کاهش θ عمل می‌کند از اینرو علامت منها وارد می‌شود:

$$I_z = ml^2, N_z = -mgl \sin \theta \quad (11-7)$$

$$L = I_z \dot{\theta} = ml^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = N_z = I \ddot{\theta} \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta \cong 0$$

$$\theta = A \cos(\omega t + \beta) \quad (12-7)$$

$$V(\theta) = - \int_{\theta_s}^{\theta} -mgl \sin \theta d\theta = -mgl \cos \theta + mgl \cos \theta_s \quad (13-7)$$

اگر تراز پتانسیل را در صفحه افقی که از 0 می‌گذرد انتخاب کنیم، آنگاه $\theta_s = \frac{\pi}{2}$ و جمله ثابت حذف می‌شود.

$$T + V = E \Rightarrow \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E = \text{ثابت} \quad (14-7)$$

همین نتیجه را از طریق شیوه اعمال شده در مسئله ۲ پایان فصل پنجم سایمون نیز می‌توان به دست آورد:

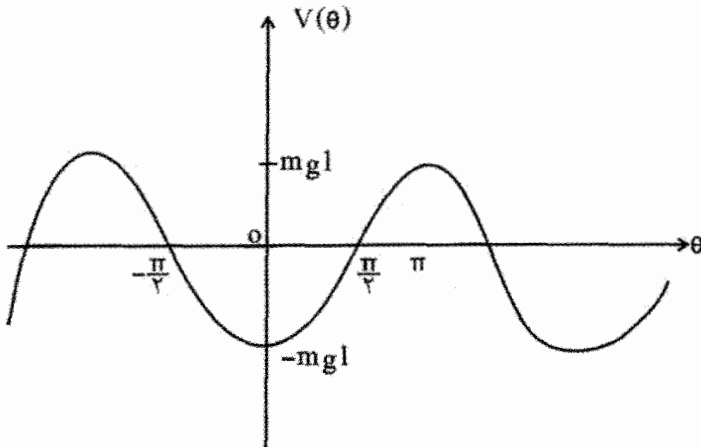
$$N_z = \frac{dL}{dt} = I_z \ddot{\theta} = - \frac{dV}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} - N_z = \frac{dL}{dt} + \frac{dV}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow ml^{\frac{r}{2}}\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow ml^{\frac{r}{2}}\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta = 0$$

(۱۵-۷)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^{\frac{r}{2}} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} ml^{\frac{r}{2}} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E = \text{ثابت}$$



شکل (۵-۷)

به ازای $E > mgl$ حرکت دایره ای است یعنی جسم انرژی کافی برای این کار دارد به شرطی که جسم به جای نخ انعطاف پذیر به میله ای صلب وصل شده باشد. در فاصله $-mgl < E < mgl$ حرکت نوسانی است. برای بررسی حرکت آونگ از رابطه (۷-۱۴) چنین عمل می کنیم:

$$\frac{1}{2} ml^{\frac{r}{2}} \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^{\frac{r}{2}} = \frac{2E}{ml^{\frac{r}{2}}} + \frac{2g \cos \theta}{l} = \frac{2g}{l} \left(\frac{E}{mgl} + \cos \theta \right)$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left(\frac{E}{mgl} + \cos \theta \right)^{\frac{1}{r}}} = \left(\frac{2g}{l} \right)^{\frac{1}{r}} t \quad (۱۶-۷)$$

انتگرال‌های فوق از نوع انتگرال‌های بیضوی است. برای حرکت نوسانی، یعنی $|E| < mg\ell$ ، با ماکزیمم مقدار θ برابر با η ، داریم:

$$\theta_{\max} = \eta \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = 0 \Rightarrow E = E_{\max} = -mg\ell \cos \eta \quad (۱۷-۷)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{(\cos \theta - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{rg}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{\left(\sin^2 \frac{\eta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} = r \left(\frac{g}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

$$-\eta \leq \theta \leq \eta \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\eta}{2}} \leq 1$$

با فرض $a = \sin \frac{\eta}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - a^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} t \quad (۱۸-۷)$$

انتگرال فوق از نوع انتگرال‌های بیضوی ناکامل نوع اول محسوب می‌شود. چنانچه $\varphi = \frac{\pi}{2}$ یا

2π باشد، انتگرال را کامل نوع اول می‌نامیم^۱. برای a کوچک محاسبه را انجام می‌دهیم؛ یعنی وقتی دامنه نوسان کوچک است زیرا a به واقع معرف ماکزیمم انحراف θ است.

۱- برای بررسی دقیقتر انتگرال‌های بیضوی به کتاب زیر مراجعه کنید:

$$\frac{1}{\left(1 - a^r \sin^r \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} = \left(1 - a^r \sin^r \frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{r}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} a^r \sin^r \varphi + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{2} a^r \sin^r \varphi + \dots$$

بنابراین:

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\varphi} \left[1 + \frac{1}{2} a^r \sin^r \varphi + \frac{3}{8} a^r \sin^r \varphi + \dots \right] d\varphi = \left[\varphi + \frac{1}{8} a^r (2\varphi - \sin 2\varphi) \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} a^r (1 - \cos 2\varphi) + \dots \right] = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{r}} t \quad (19-7)$$

اگر $\varphi = 2\pi$ شود، آنگاه $t = \tau$ ، دوره حرکت، به دست می‌آید:

$$\tau = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{a^r}{4} + \dots\right) \quad (20-7)$$

اگر $a \ll 1$ باشد، آنگاه زمان تناوب آونگ ساده به صورت $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ به دست می‌آید.

چنانچه تقریب بعدی را نیز در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\tau = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{r}} \left(1 + \frac{a^r}{4} + \frac{1}{4} \frac{3^r}{4^{\frac{r-1}{2}}} a^r + \dots\right) \quad (21-7)$$

اگر معادله (19-7) را با تقریب‌های متوالی بر حسب φ حل کنیم و سپس نتیجه را در رابطه (17-7) قرار دهیم، نتیجه تا تقریب دوم چنین خواهد شد:

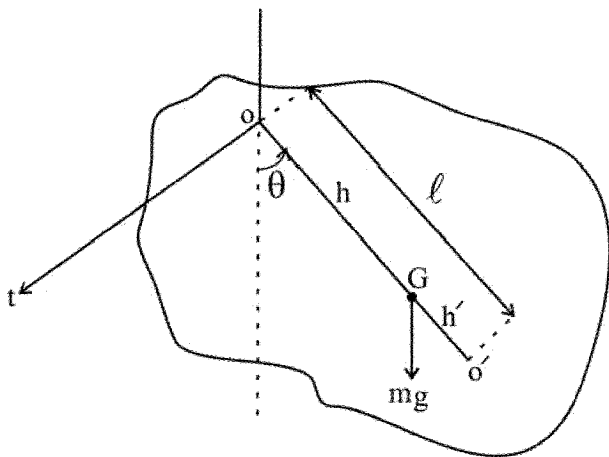
$$\theta \cong \left(\eta + \frac{\eta^r}{192}\right) \sin \omega' t + \frac{\eta^r}{192} \sin 3\omega' t \quad (22-7)$$

که در آن

$$\omega' = \frac{2\pi}{\tau} = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\eta^2}{16} + \dots\right) \quad (۲۳-۷)$$

مثال ۷-۲. آونگ مرکب یا آونگ فیزیکی

جسم صلب آویخته با نوسان حول یک محور، آونگ مرکب نامیده می‌شود. نیروی وارد بر جسم فقط نیروی وزن است. ثابت می‌شود که کل گشتاور طوری است که انگار نیروی گرانشی کل در مرکز جرم G وارد می‌آید.



شکل (۶-۷)

$$MK_z^{\gamma} = I_z \quad \frac{dL}{dt} = I_z \ddot{\theta} = N_z$$

$$I_z = MK_z^{\gamma} = MK_o^{\gamma} = \frac{N_z}{\ddot{\theta}} \Rightarrow N_z = -Mgh \sin \theta = MK_o^{\gamma} \ddot{\theta}$$

این معادله مانند معادله $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$ برای آونگی ساده به طول ℓ است که در آن:

$$\ell = \frac{k_o^{\gamma}}{h} = \frac{MK_o^{\gamma}}{Mh} = \frac{I_o}{Mh} \quad (۲۴-۷)$$

است. یعنی l اصطلاحاً "طول آونگ ساده همزمان با آونگ مرکب" است. اگر طول l را از O به پایین محاسبه کنیم به نقطه O' می‌رسیم که مرکز نوسان (Center of oscillation) نامیده می‌شود. جای مرکز نوسان برای هر جسمی به محل نقطه آویز بستگی دارد. اگر تمام جرم در O' باشد آنگاه حرکت آونگ مرکب با آونگ ساده فرضی یکسان می‌شود. با فرض $O'G = h'$ داریم:

$$l = h + h' \Rightarrow hh' = h(l - h) = hl - h^2 = K_o^2 - h^2 \quad (25-7)$$

از قضیه محورهای موازی (بخش ۷-۳ را ببینید)

$$I_z = I_o = I_G + Mh^2 \quad (26-7)$$

و با فرض K_G به عنوان شعاع چرخش نسبت به G داریم:

بنابراین

$$I_o = I_G + Mh^2 \Rightarrow MK_G^2 + Mh^2 \Rightarrow K_o^2 = K_G^2 + h^2$$

$$hh' = K_o^2 - h^2 = K_G^2 \quad (27-7)$$

چون این معادله با تغییر جای h به h' و برعکس متقارن است، پس اگر جسم از محوری که از O' می‌گذرد آویخته شود مرکز نوسان در O می‌شود. آونگ کاتر وسیله ای است که در آزمایشگاه به کار می‌رود و از این طریق با دقت نسبتاً زیاد مقدار g را می‌توان اندازه گرفت.

مثال ۷-۳. آونگ کاتر را بررسی کنید و روشی را بیان کنید که به کمک آن در آزمایشگاه g را محاسبه می‌کنند.

حل: چنانچه زمان تناوب آونگ فیزیکی یا آونگ مرکب را اندازه گیری کنیم می‌توانیم g را محاسبه کنیم.

$$l = \frac{k_o^2}{h} = \frac{I_o}{Mh} \quad \text{طول آونگ ساده همزمان با آونگ مرکب عبارت است از:}$$

و با استفاده از قضیه محورهای موازی خواهیم داشت:

$$l = \frac{I_o}{Mh} = \frac{I_G + Mh^2}{Mh} \quad (28-7)$$

و این طول آونگ ساده است که می‌دانیم حرکتش نوسانی است با فرکانس ω و زمان تناوب T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \left(\frac{I_G + Mh^2}{Mgh} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29-7)$$

برای محاسبه g باید T دقیقاً اندازه گیری شود و شعاع چرخش حول مرکز جرم و جای مرکز جرم نیز دقیقاً مشخص شود. انجام این کارها همگی دشوار است. در آونگ کاتر روش ساده تری برای اندازه گیری g وجود دارد بدون اینکه نیازی باشد از جای مرکز جرم و مقدار شعاع چرخش اطلاعی داشته باشیم. این آونگ دارای دو کاردک متحرک B, A است و می‌توان آونگ را از هر یک از کاردکها آویزان کرد. بنابراین مطابق رابطه بالا خواهیم داشت:

$$T_A = 2\pi \left(\frac{I_G + Mh_A^2}{gl_A} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left(\frac{k_G^2 + \ell_A^2}{gl_A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T_B = 2\pi \left(\frac{k_G^2 + \ell_B^2}{gl_B} \right)^{\frac{1}{2}}$$

وقتی شرایط طوری انتخاب شود که $T_A = T_B = T$ باشد (این کار با تغییر جرم آونگها عملی می‌شود)، آنگاه

$$T_A = 2\pi \left(\frac{k_G^2 + \ell_A^2}{gl_A} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left(\frac{k_G^2 + \ell_B^2}{gl_B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30-7)$$

$$K_G^2 = \frac{\ell_A \ell_B^2 - \ell_B \ell_A^2}{\ell_B - \ell_A} = \ell_A \ell_B$$

$$T = 2\pi \left(\frac{\ell_A + \ell_B}{g} \right) = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (31-7)$$

که در آن $\ell = \ell_A + \ell_B$ فاصله بین دو کاردک است که قابل اندازه گیری است.

۲-۷. مرکز جرم یک جسم صلب

چگالی موضعی یا به بیان ساده چگالی به صورت $\rho = \frac{dM}{dV}$ تعریف می‌شود، که در آن dM جرم وابسته به حجم dV است. چون اغلب فرض می‌شود که چگالی جسم در تمام حجم پیوسته و یکنواخت است جرم کل M که با جمع بندی روی جرم ذرات نقطه ای m_k به دست می‌آید، اکنون جای خود را به انتگرال حجمی می‌دهد:

$$M = \sum_k m_k = \iiint dm = \iiint \rho dV \quad (۳۲-۷)$$

مرکز جرم یک سیستم شامل تعداد زیادی ذرات گسسته به جرمهای m_k که در فواصل \vec{r}_k از مبدأ قرار دارند، به صورت

$$\vec{R} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k} \quad (۳۳-۷)$$

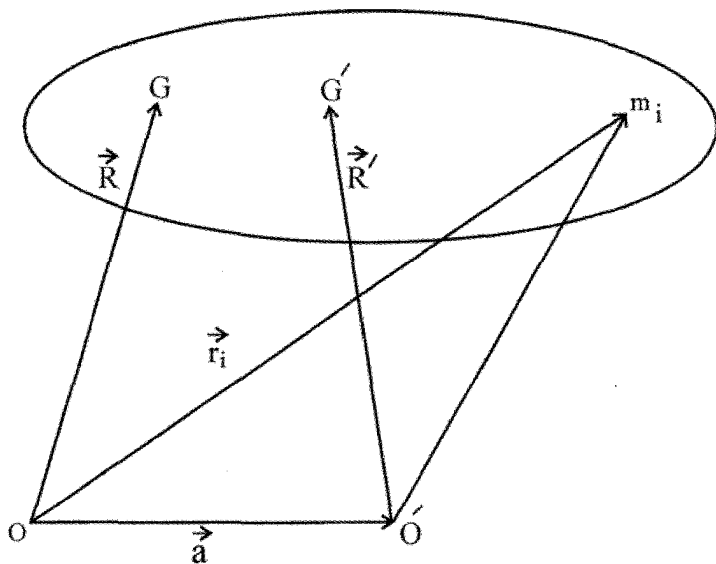
تعریف می‌شود. برای توزیع پیوسته جرم خواهیم داشت:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\iiint \vec{r} \rho dV}{\iiint \rho dV} \quad (۳۴-۷) \quad \text{مرکز جرم توزیع حجمی جرم}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\iiint \vec{r} \sigma dA}{\iiint \sigma dA} \quad (۳۵-۷) \quad \text{مرکز جرم توزیع سطحی جرم}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\iiint \vec{r} \lambda dl}{\iiint \lambda dl} \quad (۳۶-۷) \quad \text{مرکز جرم توزیع خطی جرم}$$

در واقع انتگرال یا گشتاور اول را مرکز جرم گویند و گشتاور دوم نیز مربوط به گشتاور ماند می‌شود. از طریق تعریف مرکز جرم معمولاً مختصات مرکز جرم، G ، به دست می‌آید و می‌توان نشان داد که جای G مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است. این ویژگی را در شکل (۷-۷) نشان می‌دهیم:



شکل (۷-۷)

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{a}$$

$$\vec{R}' = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}'_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{a})$$

$$\vec{R}' = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i - \frac{1}{M} \vec{a} \sum_i m_i = \vec{R} - \vec{a} \quad (۳۷-۷)$$

رابطه $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$ را در مورد هر نقطه غیرمشخص می‌توان نوشت، و اکنون مشاهده می‌شود که در مورد G و G' به ظاهر متفاوت نیز رابطه مذکور صدق می‌کند. پس این دو نقطه به واقع یک نقطه واحد باید باشند. به عبارت دیگر \vec{R}' و \vec{R} در یک نقطه واحد به هم می‌رسند که همان مرکز جرم است.

در زیر به بیان چند قضیه ساده در مورد مرکز جرم اکتفا می‌کنیم که معمولاً در یافتن جای مرکز جرم از آنها بهره می‌گیریم:

قضیه ۷-۱. وقتی جسمی نسبت به صفحه ای (محوری) متقارن باشد، مرکز جرمش در آن صفحه (روی آن محور) قرار می‌گیرد.

قضیه ۷-۲. وقتی جسمی نسبت به دو صفحه متقارن است، مرکز جرمش روی خط مشترک دو صفحه قرار دارد.

قضیه ۷-۳. وقتی جسمی نسبت به سه صفحه با یک نقطه مشترک متقارن است، نقطه مشترک مرکز جرم جسم است.

قضیه ۷-۴. در تقارن کروی (یعنی وقتی چگالی به فاصله تا یک نقطه وابسته است)، مرکز جرم در همین نقطه (مرکز کره) قرار دارد.

قضیه ۷-۵. اگر جسمی از چند جزء با جرمهای M_k تشکیل شده باشد؛ $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ، و هر جزء دارای مرکز جرم با مختصات \vec{R}_k باشد، آنگاه

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n M_k \vec{R}_k$$

اثبات آن راحت است. در واقع هر جزء M_k از N_k ذره با جرم m_{kl} در نقاط \vec{r}_{kl} درست شده است. بنابراین

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m M_k \vec{R}_k \quad (38-7)$$

$$M = \sum_{k=1}^m M_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} \quad ; \quad M_k = \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} \quad \text{است که در آن}$$

9

$$\vec{R}_k = \frac{1}{M_k} \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} \vec{r}_{kl} \quad \text{و در نتیجه}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{N_k} m_{kl} \vec{r}_{kl} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n M_k \vec{R}_k \quad (39-7)$$

قضیه ۷-۶. اگر از جسمی با جرم M قسمتی را حذف و جدا کنیم (با جرم m)، آنگاه برای مرکز جرم قسمت باقیمانده (به عنوان قسمت اصلی) خواهیم داشت:

$$M\vec{R} = m\vec{r} + (M - m)\vec{R}_{cm}$$

که در آن $m\bar{r}$ قسمت حذف شده است. آنگاه

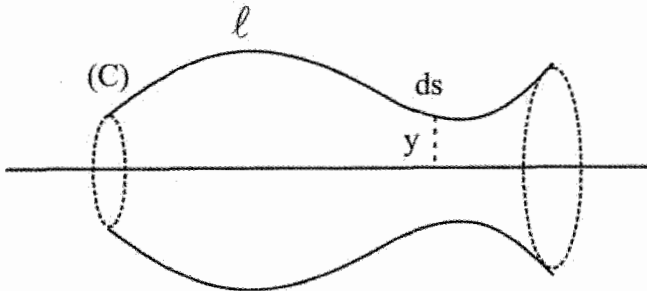
$$\bar{R}_{cm} = \frac{1}{M-m} (M\bar{R} - m\bar{r}) \quad (۴۰-۷)$$

دو قضیه نیز منسوب به پاپوس (Pappus) به صورت زیر مطرح می‌شود:

قضیه ۷-۷ (I) - وقتی یک منحنی به دور محوری در صفحه خودش می‌چرخد - به طوری که محور منحنی را قطع نمی‌کند - آنگاه رویه دوار ایجاد می‌شود که مساحتش برابر است با طول منحنی ضربدر طول مسیر نقطه مرکزی

$$A = \int_C 2\pi y ds = 2\pi \int y ds = 2\pi YS \quad (۴۱-۷)$$

که در آن $2\pi Y$ طول مسیر نقطه مرکزی و S طول منحنی است. Y جایگاه نقطه مرکزی منحنی را نشان می‌دهد.



شکل (۸-۷)

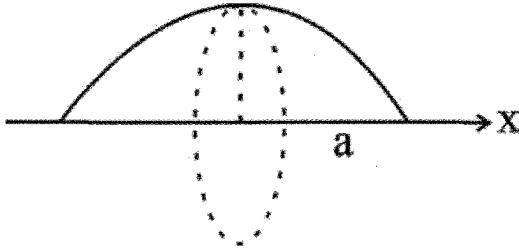
قضیه ۷-۷ (II). وقتی رویه ای مسطح به دور محوری واقع در صفحه اش دوران کند - به طوری که صفحه رویه را قطع نکند - حجم پدید آمده برابر است با سطح ضربدر طول مسیر نقطه مرکزی

$$V = \int_S \pi y^2 dx = 2\pi Y.S \quad (۴۲-۷)$$

که $2\pi Y$ طول مسیر نقطه مرکزی و S سطح رویه مورد نظر است.

مثال ۷-۴. قرض نیمدایره را حول محور x می‌چرخانیم. آنگاه

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 = \left(\frac{\pi a^2}{2}\right) 2\pi Y \Rightarrow Y = \frac{4a}{3\pi}$$



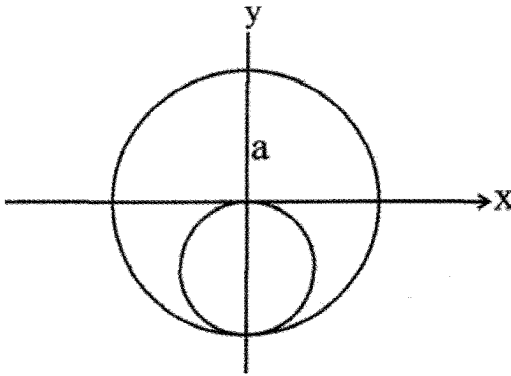
شکل مثال (۴-۷)

مثال ۷-۵. در کره ای به شعاع a ، با توزیع یکنواخت جرم، یک حفره کروی مطابق شکل به شعاع

$\frac{a}{۲}$ ایجاد می‌کنیم. مرکز جرم باقیمانده کره را حساب کنید.

$$\vec{R}_{cm}(M - m) = M\vec{R} - m\vec{r}$$

حل:



شکل مثال (۵-۷)

که در آن R_{cm} مرکز جرم جسم حاصل، M جرم جسم اصلی و m جرم حفره کروی جدا شده است.

بنابر تقارن، مرکز جرم روی محور y هاست. پس

$$y_{cm} = \frac{MY - my}{M - m} = \frac{0 - \left(\frac{a}{2}\right) \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 \rho \right]}{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 \rho} = \frac{\frac{4}{3} \pi a^4 \rho \frac{1}{16}}{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho \left(1 - \frac{1}{8}\right)} = \frac{a}{14}$$

اکنون به بیان دو قضیه مهم درباره گشتاور ماند می‌پردازیم:

۳-۷ (الف). قضیه محورهای متعامد

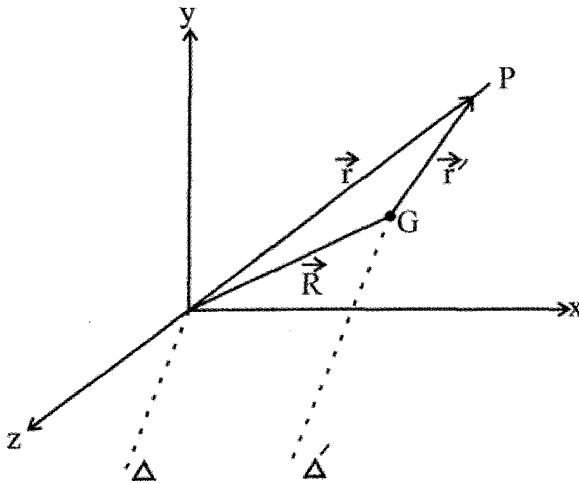
مجموع گشتاور ماند یک لایه مسطح به دور هر دو محور متعامد، واقع در صفحه لایه، مساوی است با گشتاور ماند حول محوری که از نقطه تقاطع دو محور می‌گذرد و بر سطح لایه عمود است:

$$I_z = I_x + I_y$$

اثبات قضیه به راحتی از طریق قضیه فیثاغورث در مثلث قائم الزاویه صورت می‌گیرد.

۳-۷ (ب). قضیه محورهای موازی:

گشتاور ماند جسم نسبت به هر محور داده شده برابر است با گشتاور ماند جسم نسبت به محورهای موازی که از مرکز جرم می‌گذرد، به اضافه گشتاور ماند جسم نسبت به محور داده شده وقتی تمام جرم جسم در مرکز جرم باشد.



شکل (۹-۷)

اثبات: $\vec{r} \Big|_{x,y} \quad ; \quad \vec{R} \Big|_{X,Y} \quad ; \quad \vec{r}' \Big|_{x',y'}$

$$I_o = I_G + M(X^2 + Y^2) \quad ; \quad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

$$x^2 + y^2 = (x' + X)^2 + (y' + Y)^2 = x'^2 + y'^2 + X^2 + Y^2 + 2x'X + 2y'Y$$

آنگاه:

$$I_o = \iiint (x^2 + y^2) \rho dV = \iiint (x'^2 + y'^2) \rho dV + \iiint (X^2 + Y^2) \rho dV + 2X \iiint x' \rho dV + 2Y \iiint y' \rho dV = I_G + M(X^2 + Y^2)$$

به طوری که:

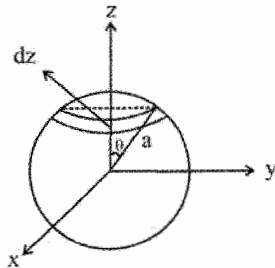
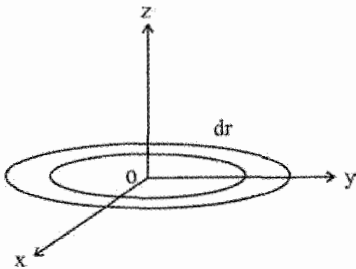
$$\begin{cases} X = \frac{1}{M} \iiint \rho x' dV \\ Y = \frac{1}{M} \iiint \rho y' dV \end{cases}$$

در اینجا (X, Y) و (x, y) هر دو دسته نسبت به دستگاه مختصات خارجی سنجیده می‌شوند. حال اگر آن دستگاه خود روی مرکز جرم قرار داشته باشد، آنگاه $X' = 0$ و $Y' = 0$ می‌شود، و رابطه مطلوب به دست می‌آید.

مثال ۶-۷. گشتاور ماند قرص و کره توپر را حساب کنید.

حل: (الف).

$$I_z = \int_0^a r^2 dm = \int_0^a r^2 \rho ds \\ = \int_0^a r^2 \rho (\pi r dr) = \frac{\pi a^3 \rho}{2} = \frac{1}{2} M a^2$$



که در آن $M = \pi a^2 \rho$ جرم کل قرص است. در مورد استوانه ای به شعاع a همین نتیجه را برای I به دست می‌آوریم (نسبت به محور استوانه):

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} (a \sin \theta)^2 dm \quad (ب)$$

$$dm = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi (a \sin \theta)^2 d(a \cos \theta)$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a \sin \theta)^2 \rho \pi (a \sin \theta)^2 d(a \cos \theta)$$

بنابراین

$$= \frac{\pi \rho}{2} a^5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 \theta d(\cos \theta)$$

با تغییر متغیر $\cos \theta = u$ ، خواهیم داشت:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 \theta d(\cos \theta) = \int_{-1}^1 (1+u^4 - 2u^2) du = \frac{16}{15}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi \rho}{2} a^5 \times \frac{16}{15} = \frac{8\pi \rho a^5}{15} = \frac{2}{5} Ma^2$$

قضیه ۷-۸. انرژی جنبشی کل یک سیستم ذرات برابر است با مجموع انرژی جنبشی انتقالی

مرکز جرم + انرژی جنبشی مجموعه ذرات نسبت به مرکز جرم سیستم.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i) \cdot (\vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\bar{r}}}_i^2 + \sum m_i \dot{\vec{r}}_{cm} \cdot \dot{\vec{\bar{r}}}_i \quad (۴۳-۷)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\bar{r}}}_i^2$$

جمله آخر یعنی $\sum_i (m_i \dot{\vec{r}}_{cm} \cdot \dot{\vec{\bar{r}}}_i)$ صفر است. این نتیجه گیری به راحتی از رابطه اصلی مرکز جرم

و $\vec{\bar{r}}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{\bar{r}}_i$ به دست می‌آید:

$$\sum_i m_i \cdot \dot{\vec{\bar{r}}}_i = M \dot{\vec{r}}_{cm} \Rightarrow M \dot{\vec{r}}_{cm} = \sum m_i (\dot{\vec{r}}_{cm} + \dot{\vec{\bar{r}}}_i) = \sum m_i \dot{\vec{r}}_{cm} + \sum m_i \dot{\vec{\bar{r}}}_i$$

$$= \dot{\vec{r}}_{cm} \sum m_i + \sum m_i \dot{\vec{\bar{r}}}_i = M \dot{\vec{r}}_{cm} + \sum m_i \dot{\vec{\bar{r}}}_i$$

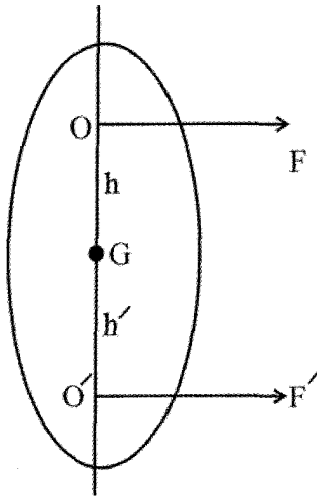
در نتیجه:

$$\sum m_i \dot{\vec{\bar{r}}}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i \ddot{\vec{\bar{r}}}_i = 0$$

$$\sum (m_i \vec{r}_{cm} \cdot \vec{\ddot{r}}_i) = \vec{r}_{cm} \cdot (\sum m_i \cdot \vec{\ddot{r}}_i) = 0 \quad (۴۴-۷)$$

۴-۷. نیروی ضربه ای و حرکت اجسام صلب

فرض می‌کنیم جسمی صلب از محوری آویخته شده و به طور آزاد به دور آن محور حرکت می‌کند. در نقطه O' به فاصله $l = h + h'$ ضربه ای به جسم وارد می‌کنیم.



شکل (۱۰-۷)

این ضربه را می‌توان به طور افقی و در صفحه نوسان وارد کرد (یعنی عمود بر OO' ؛ خط OO' از مرکز جرم می‌گذرد. در طی ضربه تکان منتقل شده در نقطه O' توسط نیروی F' چنین است

$$J' = \int F' dt \quad (۴۵-۷)$$

برای اینکه نقطه O ثابت بماند باید ضربه ای از طرف محور یا تکیه گاه بر جسم وارد می‌شود؛ پس

$$J = \int F dt \quad J = \text{تکان } J \text{ از سوی جسم بر تکیه گاه واقع در نقطه } O \text{ وارد می‌شود. قضیه اندازه حرکت}$$

برای مولفه اندازه حرکت خطی جسم یعنی P در جهت ضربه چنین است:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(MV) = \frac{d}{dt}(Mh\dot{\theta}) = \sum F = F + F' \quad (۴۶-۷)$$

$\dot{\theta}$ سرعت زاویه ای جسم در حرکت به دور O است. محاسبات از نقطه G مرکز جرم سنجیده

می‌شود؛ پس طول h وارد محاسبه می‌شود. درست پس از ضربه

$$Mh\dot{\theta} = \int (F + F')dt = J + J' \quad (۴۷-۷)$$

و از حال سکون به بعد

$$\frac{dL}{dt} = N_o = \frac{d}{dt}(MK_o\dot{\theta}) = F'l + Fl = F'l \quad (۴۸-۷)$$

جمله $Fl = 0$ است، چرا که F از O می‌گذرد و گشتاورش صفر می‌شود. درست پس از ضربه با انتگرال گیری داریم:

$$L = MK_o\dot{\theta} = J'\ell \quad (۴۹-۷)$$

θ را از دو معادله (۴۷-۷) و (۴۹-۷) حذف می‌کنیم:

$$M = \frac{hJ'\ell}{MK_o} = J + J' \Rightarrow h\ell = K_o\dot{\theta} \frac{J + J'}{J'} = K_o\dot{\theta} \left(1 + \frac{J}{J'}\right) \quad (۵۰-۷)$$

می‌خواهیم هنگام ضربه نیروی تکان در O وارد نشود، یعنی $J = 0$ باشد تا نقطه O ثابت بماند. پس $h\ell = K_o^2$ و این همان شرطی است که قبلاً به دست آوردیم: $h\ell = K_G^2$. نقطه O' مرکز ضربه یا مرکز تصادم نامیده می‌شود (Center of percussion). مرکز ضربه با مرکز نوسان یکی است. اگر تکیه گاه نباشد و در O' به آن ضربه بزنیم مانند توپ بیسبال یا تنیس، حرکت ابتدایی آن چرخش به دور O است. اگر ضربه در مرکز ضربه نباشد و خیلی از آن دور باشد، ضربه از طریق چوب بیسبال یا راکت تنیس به دستهای شخص منتقل می‌شود و دردناک است.

۷-۵. استاتیک جسم صلب

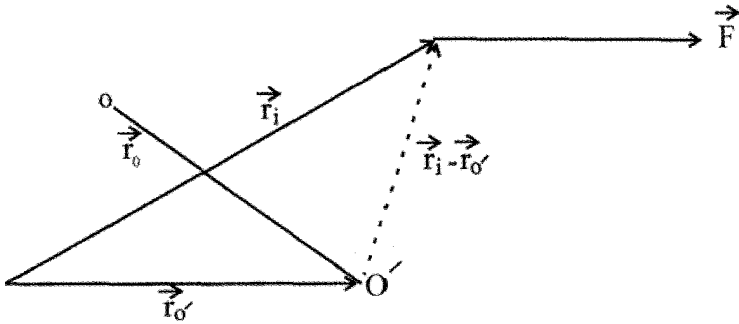
با دانستن نیروهای خارجی و گشتاور نیروهای خارجی از طریق روابط $M\ddot{R} = \sum \vec{F}_i^e$ و

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{N}_{io}^e$$

می‌توان حرکت جسم را معین کرد. این روابط فقط در مورد جسم صلب صدق

می‌کند چرا که اگر جسم صلب نباشد نیروهای خارجی سبب تغییر شکل جسم می‌شوند. در مورد جسم صلب بردار نیرو می‌تواند بردار لغزنده باشد، و در این صورت نشان داده می‌شود که گشتاور

مستقل از جای نیرو در طول خط اثر نیرو است.



شکل (۷-۱۱)

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{N}_{O'} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'}) \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'} + \vec{r}_0 - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i + (\vec{r}_0 - \vec{r}_{O'}) \times \sum_i \vec{F}_i \\ &= \sum_i \vec{N}_{i0} + (\vec{r}_0 - \vec{r}_{O'}) \times \sum_i \vec{F}_i \end{aligned} \quad (۷-۵۱)$$

در بررسی استاتیک جسم صلب، در حالت کلی می‌توان نشان داد که دستگاه نیروهایی که مجموعشان صفر می‌شود زوج نیرو هستند. همچنین یک دستگاه نیرو هم ارز تک نیرویی است که از نقطه ای دلخواه می‌گذرد، به اضافه یک زوج نیرو (که یکی یا هر دوی آنها ممکن است صفر باشد). این مطلب گاه به عنوان قضیه جسم صلب نامیده می‌شود.

۷-۶. مسائل برگزیده حل شده

۱- رقاصک ساعتی شامل حلقه ای به جرم M و شعاع a و پره هایی است که از وزنشان صرف نظر می‌کنیم. فنر گشتاور بازگرداننده $N_z = -K\theta$ را وارد می‌کند. چنانچه رقاصک را به اندازه زاویه θ_0 بچرخانیم و رها کنیم، معادله حرکت را بیابید و آن را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} N_z = -k\theta \\ N_z = I\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow I_z\ddot{\theta} + k\theta = 0 \quad (I)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I_z}\theta = 0 \Rightarrow \theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I_z}}t + \varphi\right)$$

در لحظه $t = 0$ ، $\theta = \theta_0$ است. بنابراین $\theta_0 = A \cos \varphi$ و در نتیجه $\dot{\theta}_0 = 0$. از طرفی طبق رابطه (I)

$$\dot{\theta} = -A \sqrt{\frac{k}{I_z}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{I_z}}t + \varphi\right) \xrightarrow{t=0} \dot{\theta}_0 = -A \sqrt{\frac{k}{I_z}} \sin \varphi \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow -A \sqrt{\frac{k}{I_z}} \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ یا } \pi$$

و در نهایت

$$\varphi = 0 \Rightarrow \theta_0 = A \Rightarrow \theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{k}{I_z}}t$$

۲- ملخ هواپیمایی با گشتاور ماند I زیر اثر گشتاور موثر $N = N_0(1 + \alpha \cos \omega_0 t)$ و گشتاور مالشی وابسته به مقاومت هوای $N_f = -b\dot{\theta}$ قرار دارد. حرکت پابرجا را بیابید.
حل:

$$\begin{cases} N = N_0(1 + \alpha \cos \omega_0 t) \\ N_f = -b\dot{\theta} \end{cases}$$

$$N + N_f = I\ddot{\theta}$$

$$N_0(1 + \alpha \cos \omega_0 t) - b\dot{\theta} = I\ddot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = N_0 + N_0\alpha \cos \omega_0 t$$

$$1) \quad I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = 0$$

معادله مفسر

$$\Rightarrow ID^{\ddot{\theta}} + bD\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = -\frac{b}{I} \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{جواب عمومی } \theta_g = Ae^{-\frac{b}{I}t} + \dot{\theta}$$

$$2) I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = N_o + N_o\alpha \cos \omega_o t$$

$$\text{الف-۲) } I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = N_o \Rightarrow \theta_p = \beta t \quad , \quad \dot{\theta}_p = \beta \quad , \quad \ddot{\theta}_p = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{p1} = \frac{N_o}{b} t$$

$$\text{ب-۲) } I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = N_o\alpha \cos \omega_o t \Rightarrow \theta_{p\ddot{r}} = C \sin \omega_o t + D \cos \omega_o t$$

$$\dot{\theta}_{p\ddot{r}} = C\omega_o \cos \omega_o t - D\omega_o \sin \omega_o t; \ddot{\theta}_{p\ddot{r}} = -C\omega_o^{\ddot{r}} \sin \omega_o t - D\omega_o^{\ddot{r}} \cos \omega_o t$$

$$I(-C\omega_o^{\ddot{r}} \sin \omega_o t - D\omega_o^{\ddot{r}} \cos \omega_o t) + b(C\omega_o \cos \omega_o t - D\omega_o \sin \omega_o t) = N_o\alpha \cos \omega_o t$$

$$\begin{cases} (-CI\omega_o^{\ddot{r}} - bD\omega_o) \sin \omega_o t = 0 \rightarrow \\ (-DI\omega_o^{\ddot{r}} + bC\omega_o) \cos \omega_o t = N_o\alpha \cos \omega_o t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} CI\omega_o^{\ddot{r}} + bD\omega_o = 0 \\ Cb\omega_o - DI\omega_o^{\ddot{r}} = N_o\alpha \end{cases}$$

$$C = \frac{bN_o\alpha}{I^{\ddot{r}}\omega_o^{\ddot{r}} + b^{\ddot{r}}\omega_o} \quad , \quad D = -\frac{N_o\alpha}{I\omega_o^{\ddot{r}} + \frac{b^{\ddot{r}}}{I}}$$

$$\dot{\theta}_{p\ddot{r}} = \frac{bN_o\alpha}{I^{\ddot{r}}\omega_o^{\ddot{r}} + b^{\ddot{r}}\omega_o} \sin \omega_o t + \frac{-N_o\alpha}{I\omega_o^{\ddot{r}} + \frac{b^{\ddot{r}}}{I}} \cos \omega_o t$$

سرانجام برای پاسخ عمومی معادله ناهمگن،

$$\theta = \theta_g + \theta_{p1} + \theta_{p2} \Rightarrow \theta = Ae^{-\frac{b}{I}t} + \frac{N_o}{b}t + \frac{bN_o\alpha}{I^2\omega_o^2 + b^2\omega_o} \sin \omega_o t - \frac{N_o\alpha}{I\omega_o^2 + \frac{b^2}{I}} \cos \omega_o t + \theta_o$$

حرکت پایدار یا پابرجا هنگامی است که $t \rightarrow \infty$ برود. یعنی در این حالت جمله اول صفر می‌شود و بقیه جملات پاسخ مورد نظر را تشکیل می‌دهد.

۳- میله ای همگن به طول $2a$ به طور عمودی روی سطح کاملاً صاف قرار گرفته است. اگر ضربه بی نهایت کوچکی به انتهای آزاد آن وارد کنیم، با چه سرعتی زاویه ای به زمین می‌رسد؟ چنانچه میله فوق بوسیله دو طناب که به دو انتهای آن بسته شده در صفحه قائم آویزان باشد، و در یک لحظه یکی از ریسمانها بریده شود، بلافاصله پس از آن کشش در طناب دیگر چقدر است؟
حل:

با استفاده از قضیه محورهای موازی، در دوران حول محوری که از نقطه p می‌گذرد، خواهیم داشت

$$I_p = ma^2 + \frac{m(2a)^2}{12} = \frac{4}{3}ma^2$$

بنابر اصل بقای انرژی و با توجه به اینکه انرژی در حالت اول صفر است،

$$E_p = E_{cm}$$

$$mga - \frac{1}{2}I_p\omega^2 = 0 \Rightarrow mga = \frac{1}{2}I_p\omega^2$$

$$mga = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ma^2\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

در حالت دوم داریم:

$$N_p = mga = I_p\alpha$$

$$I_p = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}ma^2$$

$$\Rightarrow mga = \left(\frac{4}{3} ma^2\right)\alpha \Rightarrow \alpha a = \frac{3}{4}g$$

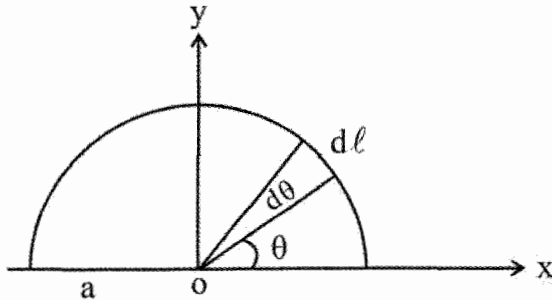
$$\alpha = \frac{\ddot{x}_{cm}}{a} \Rightarrow \ddot{x}_{cm} = \alpha a = \frac{3}{4}g$$

$$mg - T = m\ddot{x}_{cm} = \frac{3}{4}mg \Rightarrow T = \frac{1}{4}mg$$

۴- مرکز جرم جسم باریکی به شکل نیمدایره با شعاع a را بیابید.

حل:

برای تعیین مرکز جرم سیم از محورهای مختصات شکل زیر استفاده می‌کنیم،



$$dl = a d\theta$$

$$y = a \sin \theta$$

بنابراین، با توجه به تقارن و توزیع یکنواخت جرم، $x_{c.m}$ صفر می‌شود. آنگاه،

$$y_{c.m} = \frac{\int_0^\pi \rho(a \sin \theta) a b \theta}{\int_0^\pi \rho a d\theta} = \frac{2}{\pi} a$$

اگر از قضیه پاپوس استفاده کنیم، با توجه به اینکه جسم دوار حاصل کره توخالی می‌شود و سطح آن $4\pi a^2$ است، به همین نتیجه می‌رسیم. چنانچه جرم مرکز جرم صفحه ای به شکل نیمدایره مورد

نظر باشد به پاسخ $\frac{4a}{3\pi}$ می‌رسیم.

۵- استوانه ای توپر به جرم m بر روی یک سطح شیبدار به زاویه شیب θ بدون لغزش می‌غلتد.

نیروی اصطکاک ایستایی را بیابید (بخش ۸-۶ کتاب فاولز، ویرایش ششم - ۱۹۹۹).

حل:

معادلات حرکت استوانه به صورت زیر است:

$$mg \sin \theta - f = ma \quad (۱)$$

$$fR = I_{cm} \alpha = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \quad (۲)$$

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad (۳)$$

از معادلات (۲) و (۳) داریم:

$$f = \frac{1}{2} ma \quad (۴)$$

و از (۴) و (۱) نیز نتیجه می‌شود:

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

بنابراین،

$$f = \frac{mg \sin \theta}{3}$$

چنانچه در این مسئله به جای استوانه از کره توپر به جرم m استفاده کنیم، با توجه به اینکه شتاب

$$a = \frac{5}{7} g \sin \theta \quad \text{و گشتاور ماند } I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2 \text{ است، اصطکاک چنین می‌شود:}$$

$$f = \frac{2}{7} mg \sin \theta$$

بدین ترتیب کره زودتر و بهتر می‌غلتد.

۶- مثال ۷-۵ این فصل را تکرار کنید، و این بار گشتاور ماند قرص را نسبت به محوری بیابید که از مرکز قرص می‌گذرد و بر آن عمود است.

حل- جرم قرصی را که خالی کرده ایم $\frac{M}{4}$ است. گشتاور ماند قرص باقیمانده را نسبت به

محوری که از مرکز می‌گذرد و عمود بر صفحه قرص است I'_0 فرض می‌کنیم و I_0 را گشتاور ماند قرص یکنواخت حول این محور و I''_0 را گشتاور ماند قرص جدا شده نسبت به این محور می‌گیریم. آنگاه از قضیه محورهای موازی برای محاسبه I''_0 استفاده کرده و در نهایت خواهیم داشت:

$$I'_0 = I_0 - I''_0 = \frac{1}{2}MR^2 - \left[\frac{1}{2} \times \frac{M}{4} \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{M}{4} \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right] = \frac{13}{32}MR^2$$

۷- حلقه یکنواختی به شعاع R و جرم M روی سطح شیب‌داری از حالت سکون به پایین سطح می‌غلتد. اندازه حرکت زاویه ای این حلقه را نسبت به مرکز آن در پایین سطح شیب‌دار پیدا کنید.
حل -

اگر حلقه فاصله عمودی h را تا پایین سطح ببیم، از قانون بقای انرژی خواهیم داشت:

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}MR^2 \times \frac{V^2}{R^2} = MV^2$$

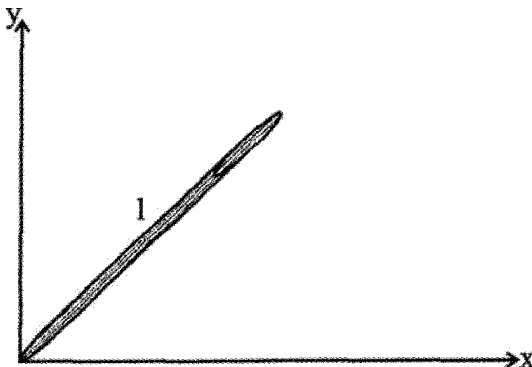
$$\Rightarrow V = \sqrt{gh}$$

V سرعت مرکز حلقه در پایین سطح است. آنگاه اندازه حرکت زاویه ای حلقه برابر است با

$$L = I\omega = MR^2 \frac{V}{R} = MR\sqrt{gh}$$

۸- گشتاور ماند میله ای به طول l و جرم M را مطابق شکل نسبت به محور oy بر حسب M و l

حساب کنید. جرم واحد طول میله از رابطه $\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ به دست می‌آید.



حل - نخست جرم میله را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \int dm = \int_0^l \lambda dx = \lambda_0 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \frac{3\lambda_0 l}{4}$$

آنگاه برای گشتاور ماند میله نسبت به محور y خواهیم داشت:

$$I = \int x^2 dm = \lambda_0 \int_0^l x^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = \lambda_0 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4l} \right]_0^l$$

$$\lambda_0 \left(\frac{1}{3} l^3 - \frac{l^4}{4l} \right) = \lambda_0 \frac{5}{24} l^3 = \frac{5}{18} M l^2$$

۹- الف). کره ای به جرم m بر روی سطح افقی بدون لغزش با سرعت ثابت می‌غلتد. نسبت

انرژی جنبشی دورانی به انرژی جنبشی کل آن چقدر است؟

ب). همین پرسش را برای استوانه توپری به جرم M و شعاع R به دست آورید.

حل - الف).

$$T = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m R^2 \omega^2 = \frac{7}{10} m R^2 \omega^2$$

(انرژی جنبشی کل)

$$T_1 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{5} m R^2 \omega^2$$

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\frac{1}{5} m R^2 \omega^2}{\frac{7}{10} m R^2 \omega^2} = \frac{2}{7}$$

ب). در مورد استوانه داریم:

$$T_{\text{کل}} = \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{3}{4} M V_{cm}^2$$

$$T_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{4} M V_{cm}^2$$

در نتیجه:

$$\frac{T_{\text{دوران}}}{T_{\text{کل}}} = \frac{\frac{1}{4}MV_{\text{cm}}^2}{\frac{3}{4}MV_{\text{cm}}^2} = \frac{1}{3}$$

۱۰- با تکرار مسئله ۵، در حالت کلی فرض کنید که نقطه تماس با صفحه شیبدار کاملاً هموار نیست و دارای اصطکاک لغزشی با ضریب μ_k است. حرکت را در این حالت بررسی کنید. حل-

چنانچه لغزش روی دهد، آنگاه اصطکاک f_k چنین است:

$$f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \cos \theta \quad (۱)$$

معادله حرکت انتقالی چنین می شود:

$$m\ddot{x}_{\text{cm}} = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta \quad (۲)$$

و معادله حرکت چرخشی چنین است:

$$I_{\text{cm}}\ddot{\theta} = \mu_k mga \cos \theta \quad (۳)$$

از معادله (۲) می بینیم که مجدداً مرکز جرم دارای شتاب ثابت می شوند:

$$\ddot{x}_{\text{cm}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (۴)$$

و همزمان شتاب زاویه ای عبارت است از

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{\mu_k mga \cos \theta}{I_{\text{cm}}} = \frac{\mu_k ga \cos \theta}{k_{\text{cm}}^2} \quad (۵)$$

از این دو معادله نسبت به t انتگرال می گیریم، و به عنوان شرایط اولیه فرض می کنیم:

$$\dot{x}_{\text{cm}} = 0, \quad \dot{\theta} = 0$$

آنگاه

$$\dot{x}_{\text{cm}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t \quad (۶)$$

$$\omega = \dot{\theta} = g(\mu_k a \cos \theta)t \quad (۷)$$

در نتیجه سرعت خطی و زاویه ای دارای نسبت ثابتی هستند و می‌توانیم بنویسیم:

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a \alpha \quad (۸)$$

که در آن

$$(۹)$$

$$\gamma = \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}{\mu_k a^\gamma \cos \theta / k_{cm}^\gamma} = \frac{k_{cm}^\gamma}{a^\gamma} \left(\frac{\tan \theta}{\mu_k} - 1 \right)$$

اکنون مشاهده می‌شود که چون $a\omega$ نمی‌تواند از \dot{x}_{cm} بزرگتر شود، بنابراین γ نمی‌تواند

کوچکتر از یک باشد. حالت حدی که برای آن غلتش خالص را داریم از رابطه $\dot{x}_{cm} = a\omega$ مشخص می‌شود، یعنی

$$\gamma = 1$$

چنانچه رابطه (۹) را برای μ_k حل کنیم، درمی‌یابیم که مقدار بحرانی ضریب اصطکاک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu_{cm} = \frac{\tan \theta}{1 + \left(\frac{a}{k_{cm}} \right)^\gamma} \quad (۱۰)$$

و در واقع این مقدار بحرانی برای ضریب اصطکاک ایستایی μ_s است. اگر μ_s بزرگتر از مقدار داده شده در رابطه (۱۰) باشد، آنگاه جسم بدون لغزش، می‌غلتد. مثلاً، اگر تویی در صفحه ای با زاویه ۴۵

درجه قرار داشته باشد، بدون لغزش در صورتی می‌غلتد که μ_s بزرگتر از $\frac{\tan 45^\circ}{1 + \frac{5}{2}}$ باشد.

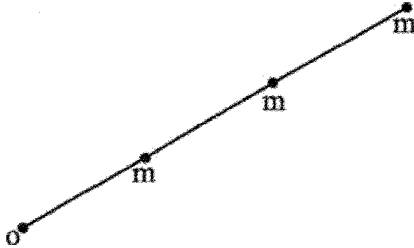
۷-۷. مسائل برگزیده برای حل

۱- سه ذره که جرم هر یک m است با سه میله یکنواخت با جرم مساوی M به طول l به یکدیگر و به یک محور دوران متصل شده‌اند. این مجموعه با سرعت زاویه ای ω طوری حول محور دوران

می‌چرخند که هر سه ذره روی یک خط مستقیم باقی می‌مانند.

الف) اینرسی دورانی I این مجموعه حول نقطه O است؟

ب) انرژی دورانی دستگاه چقدر است؟



۲- مرکز جرم یک پوسته به شکل نیمکره را پیدا کنید.

۳- یک قرص یکنواخت به شعاع R و جرم M روی محور نصب شده است که خود روی

یاتاقان‌های بدون اصطکاک قرار دارد. یک ریسمان سبک دور لبه چرخ پیچیده شده است و یک

کشش یکنواخت T به طرف پایین بر ریسمان وارد می‌شود:

الف) شتاب زاویه ای چرخ و شتاب مماسی یک نقطه واقع بر لبه آن را پیدا کنید. شتاب شعاعی در

این مسئله چگونه است؟

ب) اگر جسمی به جرم m را از ریسمان بیاویزیم، شتاب زاویه ای چرخ و شتاب مماسی نقطه واقع

بر لبه آن چقدر است؟

پ) اگر قرص از حال سکون شروع به حرکت کند کار انجام شده توسط گشتاور وارد بر آن پس از

t ثانیه چقدر است؟ این کار چه تغییری در سیستم ایجاد می‌کند؟

ت) نشان دهید که بقای انرژی مکانیکی در این مسئله برقرار است.

۴- جرم ورقه نازکی به شکل مستطیل به اضلاع a و b به صورت $\sigma = \sigma_0 \frac{xy}{ab}$ توزیع شده

است. σ_0 مقدار ثابت است. بردار \vec{R} ، معرف محل مرکز جرم را پیدا کنید.

۵- گلوله ای به شکل کره توپر و جرم M و شعاع a بدون لغزش بر سطحی شیبدار می‌غلتد.

زاویه سطح با افق δ است.

الف) شتاب مرکز کره را محاسبه کنید.

ب) اگر گلوله با سرعت اولیه U_0 مستقیم به طرف بالا حرکت کند، چه مدت بعد گلوله به وضع نخستین خود در سطح شیبدار می‌رسد؟

۶- مرکز جرم و نیز گشتاور ماند نسبت به محور تقارن را برای هر یک از اجسام زیر محاسبه کنید:
الف) یک چهارم از پوسته دایره شکل یکنواخت به شعاع a .

ب) مساحت محصور بین سهمی $y = \frac{x^2}{a}$ و خط $y = a$.

ج) حجم محصور بین سهمی گون (سهموی) $az = (x^2 + y^2)$ و صفحه $z = a$.

د) مخروط دایره ای قائم یکنواخت توپر به ارتفاع h .

پاسخ:

$$x_{cm} = 0, \quad y_{cm} = \frac{3a}{5} \quad \text{ب)} \quad x_{cm} = y_{cm} = \frac{4a}{3\pi} \quad \text{الف)}$$

$$y_{cm} = \frac{h}{4} \quad \text{د)} \quad x_{cm} = y_{cm} = 0, \quad z_{cm} = \frac{2a}{3} \quad \text{ج)}$$

۷- در مثال ۷-۵، گشتاور ماند کره را حول محوری که از مرکز جرم کره و مرکز حفره می‌گذرد حساب کنید.

$$\frac{31}{70} ma^2 \quad \text{پاسخ:}$$

۸- نشان دهید که گشتاور ماند یک هشتم کره ای توپر و یکنواخت به شعاع a حول محوری که

در طول یکی از یالهای مستقیم آن قرار دارد عبارت است از $\frac{2}{5} ma^2$. همین پاسخ در مورد کره

توپر به شعاع a صادق است.

۹- حلقه دایره ای شکل به شعاع a مانند یک آونگ فیزیکی حول نقطه ای از محیط آن نوسان

می‌کند. دوره تناوب با دامنه کوچک این آونگ را چنان بیابید به طوری که:

الف) محور دوران عمود بر صفحه حلقه باشد؛ ب) محور دوران در صفحه حلقه باشد.

$$2\pi\left(\frac{2a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 2\pi\left(\frac{3a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{پاسخ:}$$

۱۰- در مرکز توپ توپر یکنواختی حفره ای کروی و توخالی وجود دارد و شعاع این حفره $1/2$

شعاع توپ است. ثابت کنید اگر این توپ روی سطح شیبدار بغلتد. شتاب $\frac{98}{101}$ شتاب همین توپ

خواهد بود وقتی که توپ بدون حفره باشد.

۱۱- نردبان یکنواختی به دیوار قائم همواری تکیه کرده است. اگر کف زمین نیز هموار و زاویه

اولیه بین آن و نردبان برابر θ_0 باشد، نشان دهید که این نردبان اگر رو به پایین بلغزد، وقتی از دیوار

جدا می‌شود که زاویه بین کف زمین و نردبان برابر $\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$ باشد.

فصل هشتم

درآمدی بر نظریه میدان کلاسیک - گرانش

"ما پدیده‌های آسمان و دریاها را بوسیله قدرت گرانش توضیح داده‌ایم، اما هنوز علت این قدرت و توانمندی را نمی‌دانیم... من قادر نشده‌ام علت ویژگی‌های گرانش را از این پدیده‌ها کشف کنم، و هیچ فرضیه‌ای نیز تدوین نمی‌کنم."

سرآیزاک نیوتن؛ پرنسیپیا (اصول) ۱۶۸۷، از ترجمه انتشارات دانشگاه برکلی، ۱۹۶۶

همانگونه که در بررسی مکانیک ذرات در دو و سه بعد دیدیم، مطالعه ماهیت و منشأ نیروهایی که بر ذره وارد می‌شود مهم است. به بیان دیگر آشنایی با میدانهای نیرو امری ضروری به نظر می‌رسد. از اینرو در این فصل به طور مختصر نظری کوتاه بر نظریه میدان کلاسیک می‌اندازیم، و به ویژه از میدان گرانشی سخن می‌گوییم. نخست بعضی از تعاریف بنیادی را که عمدتاً در فصل چهارم و پنجم دیدیم بازگو می‌کنیم.

۸-۱. انتگرال انرژی (قضیه کار-انرژی)

فرض می‌کنیم a و b دو نقطه از مسیر ذره باشند که می‌پذیریم این مسیر یک منحنی فضایی سه بعدی است. کار انجام شده روی ذره بین این دو نقطه توسط نیروی خالص وارد بر آن چنین است:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \int_a^b m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \quad (1-8)$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = T_b - T_a$$

$d\vec{s} = \vec{v} dt$ طول قوس پیموده روی منحنی فضایی است. این دقیقاً همان نتیجه‌ای است که قبلاً در مورد حرکت ذره در یک بعد به دست آوردیم (به فصل چهارم مراجعه کنید). کار انجام شده روی ذره، بین دو نقطه واقع بر مسیر حرکت ذره، توسط نیروی خالص وارده همیشه برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره صرفنظر از ماهیت نیرو. لازم است تأکید شود که نیروی خالص جمع برداری تمام نیروهایی است که بر ذره وارد می‌شود.

۸-۲. نیروهای پایستار

فرض می‌کنیم \vec{F} نیرویی باشد که بر ذره اثر می‌کند. اگر ذره در مسیری بسته حرکت کند، کار خالص روی آن توسط نیرو چنین است:

$$W = \oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (2-8)$$

که در آن \oint انتگرال به دور مسیر بسته را نشان می‌دهد. ناحیه Σ فضا را همبند ساده (Simply connected) می‌نامیم اگر هر مسیر بسته در Σ را بتوان به طور پیوسته به یک نقطه تغییر شکل داد (متراکم کرد) بدون آنکه بخشی از آن مسیر خارج از Σ برود. به بیان ریاضی، ناحیه Σ را همبند ساده می‌نامیم چنانچه هر مسیر بسته درون آن فقط نقاط داخل ناحیه را شامل شود (و نه حتی نقاط روی مرز را).

بدین ترتیب چنانچه در یک ناحیه همبند ساده Σ رابطه

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3-8)$$

برای هر مسیر بسته درون Σ برقرار باشد، و اگر \vec{F} هیچ وابستگی صریح به زمان نداشته باشد، آنگاه \vec{F} را در ناحیه Σ پایستار می‌نامیم. به عنوان مثالی از نیروی غیرپایستار، نیروی وابسته به سرعت

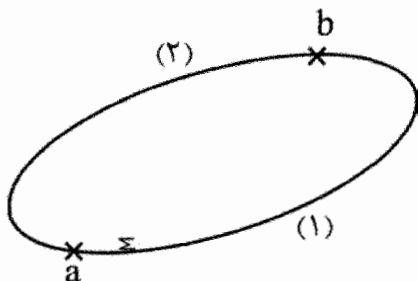
$$\vec{F} = b\vec{v}, \quad b > 0 \quad (۴-۸)$$

را در نظر می‌گیریم. توجه داریم که

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint b\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \oint bv^2 dt > 0$$

فرض کنیم که a و b دو نقطه واقع بر مسیری بسته در ناحیه Σ باشند. انتگرال (۳-۸) را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد:

$$\int_{a(1)}^b \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_a^{b(2)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (۵-۸)$$



شکل (۱-۸)

حدود انتگرال در بخش (۲) را عوض می‌کنیم. یعنی

$$\int_{b(2)}^a \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_a^{b(2)} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

در نتیجه،

$$\int_{a(1)}^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^{b(2)} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (۶-۸)$$

چون a و b و مسیرهای بین آن دو اختیاری هستند پس رابطه (۶-۸) دلالت بر این نکته دارد که انتگرال \vec{F} بین a و b مستقل از مسیر انتگرال گیری است. چون استدلال عکس نیز امکان پذیر است پس رابطه (۶-۸) شرط لازم و کافی برای پایستگی میدان نیرو است.

اگر قضیه استوکس را در معادله (۸-۳) به کار ببریم، نتیجه چنین می‌شود:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma \quad (7-8)$$

که در آن s هر سطحی است که تماماً در حجم v قرار دارد (با جزء سطح $d\sigma$) و مرز آن منحنی بسته c است. از رابطه فوق وقتی مسیر بسته انتگرال گیری را کوچک می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\sigma = 0 \quad (8-8)$$

و یا

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (9-8)$$

رابطه (۹-۸) شرط لازم و کافی برای پایداری \vec{F} است.^۱

بدین ترتیب اگر شرط (۹-۸) برقرار باشد (یا معادل آن رابطه (۸-۳)) می‌توان به \vec{F} یک تابع اسکالر $V(x,y,z)$ نسبت داد که در سرتاسر ناحیه مورد بررسی با تقریب یک ثابت اضافی تعریف شده باشد و $\vec{\nabla} V = \vec{F}$ باشد. چون مقدار انتگرال خط \vec{F} بین دو نقطه a و b مستقل از مسیر پیموده شده بین این دو نقطه است، پس می‌توان توسط رابطه زیر یک مقدار یگانه در نقطه b به V نسبت داد:

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} - (V_b - V_a) \quad (10-8)$$

از ترکیب معادله (۸-۱) با (۱۰-۸) خواهیم داشت:

$$T_a + V_a = T_b + V_b = E \quad (11-8)$$

این رابطه مبین آن است که $E = T + V$ در تمام نقاط مسیر ذره در سراسر ناحیه s که \vec{F} پایستار است دارای یک مقدار معین است. E را به عنوان انرژی کل ذره می‌نامیم. بقای انرژی که بدین ترتیب استخراج شد منشأ نیروی پایستار است.

۸-۳. میدان مگنتواستاتیک

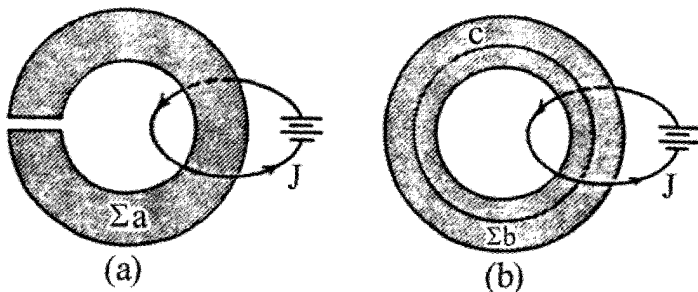
فرض می‌کنیم که جریان پایدار \vec{J} (با شرط $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$) در حلقه شکل زیر وجود دارد. در تمام

۱- بحث دقیقتر را در کتاب زیر خواهید یافت: «روشهای ریاضی در فیزیک»، تألیف نگارنده، انتشارات دانشگاه الزهراء، (۱۳۸۱)، جلد اول، فصل نهم.

نقاط فضا میدانی مغناطیسی وجود دارد که از معادلات زیر تبعیت می‌کند (قانون آمپر - به کتاب الکترومغناطیس Reitz، فصل هشتم مراجعه شود):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (۱۲-۸)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (۱۳-۸)$$



شکل (۲-۸)

که در آن \vec{J} چگالی جریان است. میدان مگنتو استاتیکی مثالی از میدان برداری سولونوئیدی است. جز در سیم که حامل جریان است خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (۱۴-۸)$$

در شکل (۲-۸) Σ_a ناحیه همبند ساده است و جریان \vec{J} تماماً خارج ناحیه مذکور است، و چون رابطه (۱۲-۸) در سراسر این ناحیه برقرار است پس \vec{B} پایستار است. اما Σ_b در شکل (۲-۸) همبند ساده نیست و با وجودی که رابطه (۱۴-۸) در هر نقطه Σ_b برقرار است، \vec{B} پایستار نیست. در واقع

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (۱۵-۸)$$

که $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$ جریان کل است که از مسیر c می‌گذرد. منحنی c را نمی‌توان به یک نقطه تبدیل

کرد بدون اینکه از Σ_b خارج شود. به بیان دیگر در این شکل c نقاط خارج Σ_b را نیز در بر می‌گیرد.

۴-۸. میدان استاتیک گرانشی

از طریق تجربه می‌دانیم که میدان گرانشی یک ذره به جرم M از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (۱۶-۸)$$

که در آن برداریکه است که از ذره در راستای \vec{r} به سوی خارج کشیده می‌شود. مقدار تجربی G چنین است:

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gm}^{-1} \text{ sec}^{-2} \quad (۱۷-۸)$$

همچنین از تجربه می‌دانیم که میدان گرانشی دارای ویژگیهای برداری است. مثلاً اگر \vec{g}_1, \vec{g}_2 به ترتیب میدانهای گرانشی ناشی از جرمهای M_1, M_2 در نقطه p باشند، آنگاه میدان گرانشی برآیند در این نقطه چنین است:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G \frac{M_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - G \frac{M_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (۱۸-۸)$$

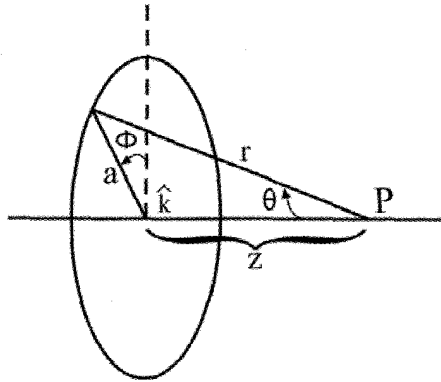
در مورد n نقطه مادی داریم:

$$\vec{g} = - \sum_{\alpha=1}^n G \frac{M_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{r_{\alpha}^3} \quad (۱۹-۸)$$

و اگر به جای جرمهای M_{α} در فضا، توزیع پیوسته جرم با چگالی حجمی $\rho(\vec{r})$ داشته باشیم:

$$\vec{g}(\vec{r}) = - \iiint G \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}') dv' \quad (۲۰-۸)$$

محاسبه میدان گرانشی $\vec{g}(\vec{r})$ به کمک معادله (۱۹-۸) یا (۲۰-۸) جز در چند حالت ساده دشوار است. به عنوان مثال، میدان گرانشی را در نقطه P واقع بر محور یک حلقه نازک به شعاع a و جرم M محاسبه می‌کنیم (شکل ۳-۸).



شکل (۸-۳)

$$\mu = \frac{M}{2\pi a}$$

جرم واحد طول سیم چنین است:

$$dm = \mu ds = \mu a d\phi$$

و جرم عنصر طول ds:

به علت تقارن، هیچ مؤلفه \vec{g} عمود بر محور در نقطه P وجود ندارد. از آنجا که مؤلفه $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ در

راستای z مقدار $\hat{k} \cos \theta$ است، عبارت \vec{g} در نقطه P چنین می‌شود:

$$\vec{g} = -G \int_{\phi=0}^{\pi} \hat{k} \cos \theta \frac{\mu a d\phi}{r^2} = -2\pi G \mu a \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{k}$$

$$= -GM \frac{z}{r^3} \hat{k} = -\frac{GMz\hat{k}}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

که در آن z فاصله از مرکز حلقه تا نقطه P است. یادآور می‌شویم که

$$\vec{\nabla} \left| \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right| = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{r^3}; r = |\vec{r} - \vec{r}'|; r \neq r' \quad (8-21)$$

در نتیجه میدان گرانشی (۸-۲۰) ناشی از توزیع پیوسته ماده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{g} = \int G \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) \rho(\vec{r}') dV' = \vec{\nabla} \int \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

که در آن \vec{V} از انتگرال بیرون آمده است چرا که بر \vec{r}' اثری ندارد. \vec{g} مشتق از پتانسیل است، بنابراین،

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \phi = -\int \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (22-8)$$

و این ثابت می‌کند که میدان گرانشی استاتیکی میدان برداری پایستار است. محاسبه پتانسیل گرانشی از رابطه فوق بسیار ساده‌تر از محاسبه مستقیم \vec{g} از رابطه (۲۰-۸) است. اگر ذره به جرم m در یک میدان گرانشی قرار گیرد، نیروی $\vec{F} = m\vec{g}$ را تجربه می‌کند. آنگاه انرژی پتانسیل آن به صورت $V = m\phi$ تعریف می‌شود.

۵-۸. قانون دیورژانس گوس

فرض می‌کنیم σ سطح بسته‌ای باشد که حجم Σ فضا را مطابق شکل (۴-۸) در بر می‌گیرد. جرم M را در حجم Σ قرار می‌دهیم. شار خالص میدان گرانشی در سطح σ ناشی از این جرم نقطه‌ای چنین است:

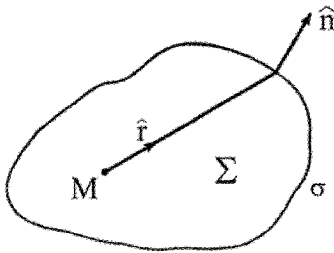
$$\int_{\sigma} \vec{g} \cdot \hat{n} d\sigma = -GM \int \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} d\sigma = -GM \int d\Omega = -4\pi GM \quad (23-8)$$

که در آن $d\Omega$ زاویه حجمی یا فضایی به دور M در عنصر $d\sigma$ است. اگر M خارج سطح باشد $\int d\Omega = 0$ است و

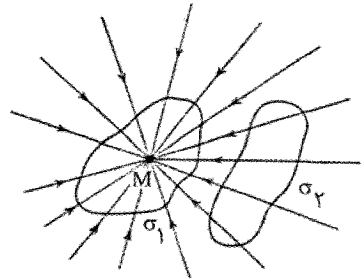
$$\int_{\sigma} \vec{g} \cdot \hat{n} d\sigma = 0 \quad (24-8)$$

دو حالت فوق در شکل (۵-۸) نشان داده شده است. دو سطح σ_1, σ_2 طوری قرار گرفته‌اند که M داخل σ_1 و خارج از σ_2 است. M به صورت چاهک برای خطوط میدان گرانشی کار می‌کند به طوری که تعداد کل $4\pi GM$ از داخل σ_1 می‌گذرد. از طرف دیگر همان تعداد خطوط که σ_2 را ترک می‌کنند همان تعداد وارد سطح می‌شوند، پس شار کل \vec{g} در سطح σ_2 صفر است. اگر تعدادی جرم نقطه‌ای درون سطح σ باشند آنگاه

$$\int_{\sigma} \vec{g} \cdot \hat{n} d\sigma = \int_{\sigma} (\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots) \cdot \hat{n} d\sigma = -4\pi G \sum_{i=1}^n m_i \quad (25-8)$$



شکل (۴-۸)



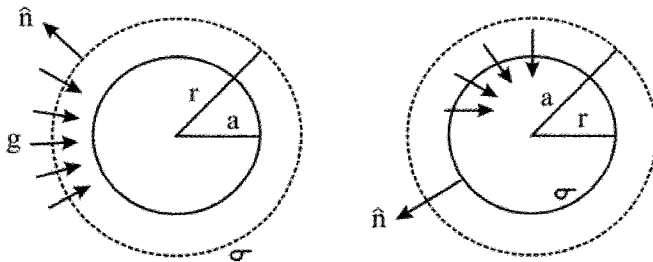
شکل (۵-۸)

و در صورتیکه توزیع پیوسته جرم در فضا داشته باشیم:

$$\int_{\sigma} \vec{g} \cdot \hat{n} d\sigma = -4\pi G \int_{\Sigma} \rho d\Sigma \quad (۲۶-۸)$$

که در آن انتگرال حجم فقط روی ناحیه Σ گرفته می‌شود. جرم خارج این ناحیه در شار کل از میان سطح تأثیری ندارد. معادله (۲۶-۸) به نام قانون گوس نامیده می‌شود.

قانون گوس را می‌توان مستقیماً برای محاسبه میدان گرانشی توزیع جرم با تقارن کروی به کار برد. مثلاً فرض کنید که جرم کره به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. شکل زیر سطح گوسی σ را برای شعاع $r > a$ به دور جسم نشان می‌دهد. بواسطه تقارن کروی، میدان گرانشی همه جا به یک اندازه و عمود بر σ است. بنابراین:



شکل (۶-۸)

$$g_r = \vec{g} \cdot \hat{n} = \text{ثابت}$$

$$g_r \int_{\sigma} d\sigma = -4\pi G \int_{\Sigma} \rho d\Sigma = -4\pi G M$$

$$\Rightarrow g_r \times 4\pi r^2 = -4\pi G M \Rightarrow g_r = -G \frac{M}{r^2}$$

که در آن M جرم کل کره است. عملاً این نتیجه هنگامی درست است که p در سراسر کره ثابت نباشد و تابعی از r باشد. در هر حال p به مختصات قطبی θ, ϕ بستگی ندارد. از اینرو میدان در نقاط خارج یک توزیع متقارن کروی ماده، با میدان یک جرم نقطه‌ای برابر است. در تقریب نخست توزیع ماده در زمین دارای تقارن کروی است. در بررسی مکانیک ماهواره‌ها به عنوان اولین تقریب مجاز هستیم که نیروی وارد بر ماهواره را با نیروی ایجاد شده توسط یک جرم نقطه‌ای واقع در مرکز زمین برابر بگیریم.

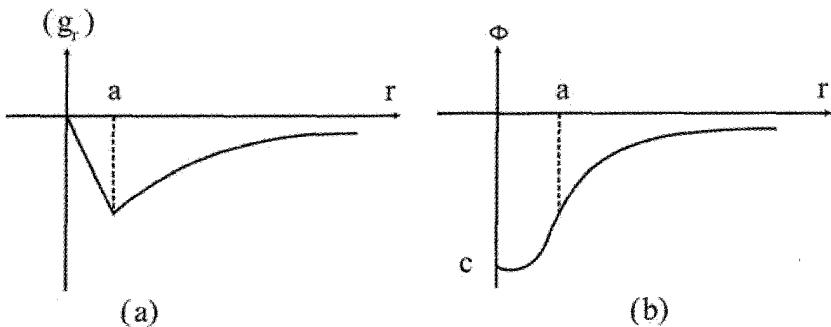
برای یافتن میدان گرانشی در نقاط داخل کره، شار \vec{g} را از سطح کروی با شعاع $r < a$ حساب می‌کنیم (شکل ۸-۶). با فرض چگالی ثابت جرم کل درون سطح انتگرال گیری چنین است:

$$\rho \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{M \times \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi a^3} = M \frac{r^3}{a^3}$$

قانون گوس می‌دهد:

$$g_r \times 4\pi r^2 = -4\pi GM \frac{r^3}{a^3} \Rightarrow g_r = -G \frac{M}{a^3} r$$

میدان داخل کره متناسب با r تغییر می‌کند (تابع نزولی) و بنابراین در مرکز صفر می‌شود. شکل زیر تغییرات میدان را برحسب r نشان می‌دهد.



شکل (۸-۷)

پتانسیل اسکالر گرانشی کره را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{g}_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

با انتخاب شرط مرزی $\phi = 0$ در $r = \infty$,

$$\phi(r) = -G \frac{M}{r}, \quad r > a \quad (27-8)$$

$$\phi(r) = G \frac{Mr^2}{2a^3} + c, \quad r < a$$

که در آن c ثابت است. میدان گرانشی در هر نقطه فضا معین است و به شکل تابع δ نخواهد بود. بنابراین مشتق ϕ باید همه جا معین باشد، و در نتیجه ثابت c را از شرط $\phi_{r>a} = \phi_{r<a}$ در $r = a$ به دست می‌آوریم:

$$-G \frac{M}{a} = G \frac{M}{2a} + c \Rightarrow c = -\frac{3}{2} G \frac{M}{a}$$

بنابراین

$$\phi(r) = -G \frac{M}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right) \quad (28-8)$$

پتانسیل در شکل (۷b-۸) رسم شده است.

بنابر قضیه دیورژانس گوس، خواهیم داشت:

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} d\Sigma = -4\pi G \int_{\Sigma} \rho d\Sigma \quad (29-8)$$

این رابطه، یک اتحاد عمومی است و بنابراین در ناحیه انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (30-8)$$

یعنی چگالی جرمی ρ یک تابع چشمه برای میدان گرانشی است. آن را تابع چاهک می‌نامند، چرا که خطوط \vec{g} همیشه به داخل ماده همگرا می‌شود. چون \vec{g} پایستار است، آنگاه

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad (31-8)$$

و یا

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho \quad (۳۲-۸)$$

که معادله پواسن برای تابع پتانسیل اسکالر گرانشی نامیده می‌شود. مشابه این روابط در الکتروستاتیک وجود دارد:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & (\text{در دستگاه گوس}); \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (۳۳-۸)$$

که در آن ρ چگالی بار الکتریکی است؛ منتها برخلاف چگالی جرم، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. از اینرو برای خطوط میدان \vec{E} ، بار مثبت را چشمه و بار منفی را چاهک می‌نامند.

۸-۶. رسانش گرمایی:

گسترش معادلات اساسی رسانش گرمایی مثال بارزی از میدان برداری است. فرض می‌کنیم که گرما در محیط مادی جریان دارد. \vec{h} را بردار جریان گرمایی با واحد ژول بر ثانیه بر متر مربع می‌نامیم. با توجه به مفهوم دیورژانس، عبارت $\vec{\nabla} \cdot \vec{h} d\Sigma$ نمایشگر آهنگ جریان گرمایی به خارج از عنصر حجمی $d\Sigma$ است.

فرض می‌کنیم انرژی به شکل گرما عملاً در محیط ایجاد می‌شود. این عمل هنگامی روی می‌دهد که یک واکنش شیمیایی ادامه می‌یابد یا آنکه جریانی الکتریکی از محیط بگذرد. q را چگالی گرما در محیط می‌گیریم (ژول بر متر مکعب) و f را چگالی چشمه یعنی میزان گرمای ایجاد شده در واحد حجم در محیط ($\text{Joule} - \text{sec}^{-1} - \text{m}^{-3}$). بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q_1 d\Sigma) &= \text{کل میزان تغییر گرما در حجم } d\Sigma \\ fd\Sigma &= \text{میزان گرمای ایجاد شده در } d\Sigma \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{h} d\Sigma &= \text{میزان جریان گرمایی به خارج از } d\Sigma \\ &= \text{اصل بقای انرژی ایجاد می‌کند که:} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(qd\Sigma) = fd\Sigma - \vec{\nabla} \cdot \vec{h} d\Sigma$$

چگالی گرمایی q تابعی اسکالر از وضعیت و زمان در محیط است: $q = q(x, y, z, t)$. بدین

ترتیب، در معادله فوق در مورد عنصر حجمی در یک نقطه ثابت در محیط صحبت می‌کنیم. یعنی

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t}$$

در نتیجه،

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h} + \frac{\partial q}{\partial t} = f \quad (8-34)$$

این معادله پیوستگی است و باید با معادلات پیوستگی در بحث میدان‌های برداری مقایسه شود (مانند معادله پیوستگی در الکتروستاتیک). در معادله فوق توجه داریم که ما با وضعیتی سر و کار داریم که در

آن انرژی به شکل گرما حفظ نمی‌شود و در نتیجه یک تابع چشمه‌ای f باید در رابطه ظاهر شود.

دمای محیط را می‌توان با توجه به این نکته مطرح کرد که اگر جسمی دمایش به اندازه $-dT$ بالا رود، مقدار dq گرما در واحد حجم جذب می‌کند که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$dq = \rho C dT \quad (8-35)$$

که در آن ρ چگالی جرمی و C گرمای ویژه محیط است. (البته این نظریه در جامدها به کار می‌رود که در آنها اختلاف بین گرمای ویژه در حجم ثابت و فشار ثابت اندک است.) در نقطه‌ای معین از محیط می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

چنانچه این نتیجه را در معادله پیوستگی قرار دهیم.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = f \quad (8-36)$$

در حالت کلی چگالی ρ تابعی از وضعیت در محیط است.

از طریق تجربه معلوم شده که جریان گرمایی در محیط متناسب با گرادیان دماست:

$$\vec{h} = -k \vec{\nabla} T \quad (8-37)$$

که در آن k رسانش گرمایی محیط است. اگر در سراسر محیط k ثابت باشد، آنگاه

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = 0 \quad (8-38)$$

از آنجا که \vec{h} وابسته به زمان است، در اینجا نمونه‌ای از میدان برداری غیرچرخشی ولی غیر پایستار

داریم. اگر k ثابت نباشد بلکه تابعی از مکان باشد، همچنان داریم:

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{k} \vec{h} = 0 \quad (39-8)$$

که این بار بردار $\frac{1}{k} \vec{h}$ غیر چرخشی است. تابع $\frac{1}{k}$ یک فاکتور انتگران برای $\vec{h} \cdot d\vec{s}$ است بدین معنا

که، در حالی که $\vec{h} \cdot d\vec{s}$ دیفرانسیل کامل نیست، عبارت $\frac{1}{k} \vec{h} \cdot d\vec{s}$ چنین خاصیتی دارد.

ترکیب (۳۶-۸) و (۳۷-۸) منجر به یک معادله دیفرانسیل برای دما می‌شود:

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - f$$

و چنانچه k ثابت باشد،

$$\nabla^2 T = \frac{\rho C}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{f}{k} \quad (40-8)$$

در حالت‌های پایدار که در آنها هیچ وابستگی زمانی دما وجود ندارد، معادله پواسن ظاهر می‌شود:

$$\nabla^2 T = -\frac{f}{k} \quad (41-8)$$

دما نقش تابع پتانسیل را در نظریه رسانش گرمایی خواهد داشت.

۷-۸. معادلات ماکسول:

در این بخش معادلات ماکسول، که معادلات اساسی حاکم بر میدانهای الکترومغناطیس وابسته به زمان است، به طور مختصر معرفی می‌شود. بررسی دقیقتر موضوع را می‌توان در کتابهای الکترومغناطیس یافت.

اگر بارها و جریانها که منابع میدان الکترومغناطیس هستند به زمان وابسته باشند میدان الکتریکی دیگر پایستار نیست. مطابق با قانون فاراده انتگرال خط \vec{E} به دور مسیری بسته (گردش بردار (\vec{E})) برابر است با آهنگ تغییر زمانی شار میدان مغناطیسی که بر سطح باز محدوده شده توسط مسیر انتگرال گیری محاسبه می‌شود:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} ds$$

اگر سطح انتگرال گیری در فضا ثابت باشد، تنها وابستگی زمانی ناشی از تغییر زمانی خود \vec{B} است، و بنابراین مجاز هستیم بنویسیم:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} ds$$

انتگرال خط \vec{E} را می توان بوسیله قضیه استوکس به انتگرال سطح تبدیل کرد:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} ds = 0$$

چون سطح s اختیاری است، پس:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (۴۲-۸)$$

که تعمیم مناسب رابطه $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ و با ویژگی $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 4\pi\rho$ برای میدانهای وابسته به زمان است. معادله واگرایی

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (۴۳-۸)$$

همچنان معتبر باقی می ماند.

میدان مغناطیسی استاتیک از رابطه

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (۴۴-۸)$$

تبعیت می کند، اما این معادله نمی تواند برای میدانهای وابسته به زمان معتبر باشد. اگر از رابطه بالا دیورژانس بگیریم، خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

که یک معادله معتبر پیوستگی برای بار الکتریکی است اگر فقط چگالیهای بار و جریان از زمان

مستقل باشند. تعمیم صحیح معادله (۸-۴۴) برای حالت وابسته به زمان چنین است.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (۸-۴۵)$$

جمله اضافه شده جریان جابجایی ماکسول نامیده می‌شود. دیورژانس رابطه (۸-۴۵) عبارتست از:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

که بنابر رابطه $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ چنین می‌شود

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (۸-۴۶)$$

که معادله صحیح پیوستگی بار است. سرانجام دیورژانس معادله

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (۸-۴۷)$$

همچنان برای میدانهای وابسته به زمان برقرار است. چهار معادله (۸-۴۲)، (۸-۴۳)، (۸-۴۵) و (۸-۴۷)

(۴۷) کمیت‌های \vec{B} , \vec{E} را برحسب منابع \vec{j} , ρ تعیین می‌کنند و به نام معادلات ماکسول معروفند. در درس الکترومغناطیس می‌بینید که لازم است یک پتانسیل برداری تعریف کرد که برحسب میدان مغناطیسی \vec{B} چنین تعریف می‌شود:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (۸-۴۸)$$

توجه داریم که این تعریف در معادله ماکسول صدق می‌کند. جایگزین کردن این رابطه در معادله (۸-۴۲) می‌دهد:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

بنابراین معادله (۸-۴۲) وقتی برقرار است که

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad (۸-۴۹)$$

باشد، که در آن ϕ پتانسیل اسکالر است. معادلات (۸-۴۸) و (۸-۴۹) میدانهای بردار \vec{B} , \vec{E} را

برحسب پتانسیل برداری \vec{A} و پتانسیل اسکالر ϕ می‌دهد. این پتانسیلها یگانه نیستند و با

تقریب‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}f, \quad \phi = \phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (50-8)$$

که f تابعی اسکالر و اختیاری است. بنابراین می‌توان همان نتایج میدان الکترومغناطیس را از پتانسیل‌های جدید گرفت یعنی:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad (51-8)$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi' \quad (52-8)$$

عموماً پتانسیلها را با این شرط بیشتر محدوده کننده تعریف می‌کنند، بدین ترتیب که از رابطه زیر به نام شرط پیمانانه لورنتس (Lorentz gauge condition) پیروی کنند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0 \quad (53-8)$$

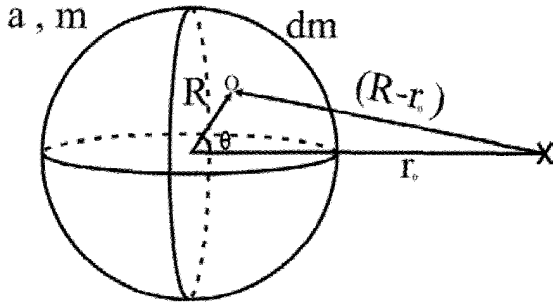
در حالت خاص الکتریسیته ساکن (با شرط $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$)، فقط شرط $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ کفایت می‌کند، که

به نام پیمانانه کولن معروف است. در بخش بعد به حل تعدادی مسئله برگزیده می‌پردازیم.

۸-۸. مسائل برگزیده حل شده:

۱- فرض می‌کنیم زمین کره‌ای است با چگالی یکنواخت، شعاع a و جرم M . شدت میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی را در داخل و خارج زمین حساب کنید. پتانسیل گرانشی ϕ را در بی‌نهایت صفر بگیرید:

$$g = G \int \frac{dm}{|R - r_o|} = \rho G \int \frac{R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi}{\sqrt{r_o^2 + R^2 - 2Rr_o \cos \theta}} \quad \text{حل:}$$



$$= G\gamma\pi \int_0^a R^\gamma dR \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r_0^\gamma + R^\gamma - 2Rr_0 \cos\theta}} = \gamma\pi\rho G \int_0^a \frac{R^\gamma dR}{Rr_0}$$

$$\left[\sqrt{R^\gamma + r_0^\gamma - 2Rr_0 \cos\theta} \right]_0^\pi$$

$$= (\gamma\pi\rho G) / r_0 \int_0^a R dR \left[\sqrt{R^\gamma + r_0^\gamma + 2Rr_0} - \sqrt{R^\gamma + r_0^\gamma - 2Rr_0} \right]$$

$$= (\gamma\pi\rho G) / r_0 \int_0^a R dR [R + r_0 - |R - r_0|]$$

خارج کره $r_0 > a$:

$$\phi = (\gamma\pi\rho G) / r_0 \int_0^a R dR [R + r_0 - r_0 + R] = (\gamma\pi\rho G) / r_0 \times \frac{a^\gamma}{\gamma} = \frac{GM}{r_0}$$

داخل کره $r_0 < a$:

$$\phi = (\gamma\pi\rho G) / r_0 \int_0^{r_0} \gamma R^\gamma dR + (\gamma\pi\rho G) / r_0 \int_{r_0}^a [R + r_0 + r_0 - R] R dR$$

$$= \frac{\gamma\pi r_0^\gamma \rho G}{\gamma r_0} + \frac{\gamma\pi\rho G}{r_0} r_0 \left(\frac{a^\gamma - r_0^\gamma}{\gamma} \right) = MG \frac{r_0^\gamma}{a^\gamma} + \frac{\gamma MG}{a^\gamma} \left(\frac{a^\gamma - r_0^\gamma}{\gamma} \right)$$

$$= -\frac{MG r_0^\gamma}{\gamma a^\gamma} + \frac{\gamma MG}{\gamma a} = \frac{MG}{\gamma a^\gamma} (\gamma a^\gamma - r_0^\gamma)$$

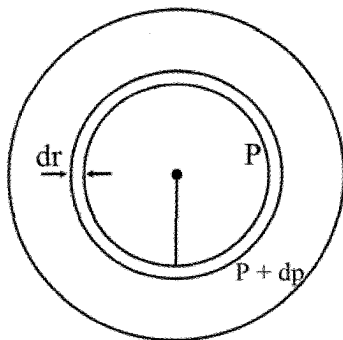
$$r_0 \succ a \Rightarrow \vec{g} = \frac{\partial \phi}{\partial r_0} = -\frac{GM}{r_0^2}$$

$$r_0 \prec a \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM r_0}{a^3}$$

در حالت کلی اگر $f(r)$ تابعی اسکالر از r باشد، آنگاه:

$$\vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$$

۲- درون زمین را به صورت شاره‌ای تراکم ناپذیر و ترازمند فرض کنید. (الف) فشار درون زمین را به صورت تابعی از فاصله نسبت به مرکز زمین حساب کنید. (ب) از طریق به کار گرفتن مقادیر مناسب برای جرم و شعاع زمین، فشار مرکز زمین را محاسبه کنید.



$$dp = \vec{f} \cdot \vec{dr} = \rho \vec{g}(r) \cdot \vec{dr} = -\rho g dr = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho dr \quad \text{حل:}$$

با توجه به رابطه $M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ ، خواهیم داشت:

$$dp = -G \times \frac{4}{3} \pi r dr \rho^2$$

$$\Rightarrow p = -\frac{4}{3} \pi \rho^2 G \frac{r^2}{2} + c$$

$$p(r = a) = 0 \Rightarrow c = \frac{4}{3} \pi \rho^2 G \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (a^2 - r^2)$$

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \Rightarrow p = \frac{2\pi}{3} G \left(\frac{9M^2}{16\pi^2 a^6} \right) (a^2 - r^2)$$

$$p(r = 0) = \frac{3}{8} \frac{G M^2}{\pi a^4}$$

۳- نشان دهید که اگر غباری به چگالی یکنواخت ρ گرداگرد خورشید را فرا گیرد، میدان

$$\vec{g} = - \left(\frac{MG}{r^2} + \frac{4\pi}{3} \rho G r \right) \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{گراشی درون غبار چنین می‌شود:}$$

بطوریکه M جرم خورشید، و \vec{r} برداری است از خورشید به سوی نقطه‌ای واقع در این غبار.

حل:

می‌خواهیم در نقطه p میدان ثقل را به دست آوریم. بنابراین بهترین روش استفاده از قانون گوس

است:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{\sigma} = \varphi$$

$$\oint \vec{g} d\sigma = g \oint d\sigma = g(4\pi r^2) = \varphi$$

از طرفی اگر جرمی در داخل یک سطح بسته باشد شار عبوری از سطح عبارت است از (جرم) $-4\pi G$:

$$\varphi = -4\pi(M + \int \rho dv)G = -4\pi MG - 4\pi r \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) G$$

$$g(4\pi r^2) = -4\pi \left(MG + \frac{4}{3} \pi r^3 G \right)$$

$$\vec{g} = - \left(\frac{MG}{r^2} + \frac{4}{3} \pi \rho G r \right) \frac{\vec{r}}{r}$$

۴- فرض می‌کنیم که چگالی ستاره‌ای تنها تابع شعاع r است، که از مرکز ستاره سنجیده می‌شود.

و با عبارت

$$\rho = \frac{Ma^\gamma}{2\pi r(r^\gamma + a^\gamma)^\gamma}$$

داده می‌شود. M جرم ستاره و a ضریب ثابتی است که اندازه ستاره را تعیین می‌کند. شدت میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی را به صورت تابعی از r بیابید.

حل:

$$\phi = G \int \frac{-dm'}{|r' - r|} = 2\pi G \int_0^a r'^\gamma dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r'^\gamma + r^\gamma - 2rr' \cos \theta}}$$

$$\phi = 2\pi G \int_0^a \frac{\rho(r')r'^\gamma dr'}{rr'} \left[\sqrt{r'^\gamma + r^\gamma - 2rr' \cos \theta} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2\pi G}{r} \int_0^a \rho(r')r' dr' (r + r' - |r' - r|)$$

$$r > a \Rightarrow \phi = \frac{2\pi G}{r} \int_0^a \rho(r')r' dr' (r + r' - r + r') = \frac{2\pi G}{r} \int_0^a \frac{Ma^\gamma (2r'^\gamma dr')}{2\pi r' (r'^\gamma + a^\gamma)^\gamma}$$

$$= \frac{2\pi GMa^\gamma}{r} \int_0^a \frac{r' dr'}{(r'^\gamma + a^\gamma)^\gamma} = \frac{2\pi GMa^\gamma}{r} \left(\frac{-1}{\gamma a^\gamma} + \frac{1}{\gamma a^\gamma} \right)$$

$$= \frac{GM}{r} \Rightarrow \vec{g}(r) = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{GM}{r^\gamma}$$

$$r < a \Rightarrow \phi = \frac{2\pi G}{r} \int_0^r \rho(r')r' dr' (r' + r - r + r') + \frac{2\pi G}{r}$$

$$\int_r^a \rho(r')r' dr' (r' + r - r' + r)$$

$$= \frac{2\pi GMa^\gamma}{r} \left(\frac{-1}{\gamma (r'^\gamma + a^\gamma)} \right)_0^r + \frac{2\pi GMa^\gamma (2r)}{2\pi r} \int_r^a \frac{r' dr'}{(r'^\gamma + a^\gamma)^\gamma}$$

$$= \frac{\gamma GMa^{\gamma}}{r} \left(\frac{-1}{\gamma(r^{\gamma} + a^{\gamma})} + \frac{1}{\gamma a^{\gamma}} \right) + \gamma GMa^{\gamma} \left[\frac{-1}{\gamma(r^{\gamma} + a^{\gamma})} \right]_r^a$$

$$\phi = \frac{\gamma GMa^{\gamma}}{r} \left(\frac{1}{\gamma a^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma(r^{\gamma} + a^{\gamma})} \right) + \gamma GMa^{\gamma} \left[\frac{-1}{\gamma a^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma(r^{\gamma} + a^{\gamma})} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{\nabla} \phi(r) = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = \left[-\frac{GM}{r^{\gamma}} + \frac{GMa^{\gamma}(\gamma r^{\gamma} + a^{\gamma})}{(r^{\gamma} + a^{\gamma})^{\gamma}} - \frac{GMa^{\gamma}(\gamma r)}{(r^{\gamma} + a^{\gamma})^{\gamma}} \right] \frac{\vec{r}}{r}$$

۵- معادلاتی بنویسید که نمایشگر فشار در یک گاز با جرم M باشد: گاز به صورت تقارن کروی توزیع شده است، و از قانون گازهای کامل پیروی می‌کند و دما تابعی از شعاع است.

حل:

قانون گازهای کامل: $Pv = nRT$ و $T(r)$ معلوم است. $\vec{g}(\vec{r})$ به سمت داخل کره و \vec{dr} به سمت بیرون کره است. بنابراین:

$$\begin{aligned} dp &= \vec{f} \cdot \vec{dr} = \rho \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{dr} = -\rho(r)g(r)dr \\ &= -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^{\gamma}} dr \end{aligned}$$

$$pV = RT \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

$$dp = -\frac{\rho M}{RT} \frac{GM(r)}{r^{\gamma}} dr \Rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho \mu}{RT} \frac{GM(r)}{r^{\gamma}}$$

μ جرم یک مولکول است و رابطه را برای یک مولکول نوشتیم.

$$M(r) = -\frac{RT r^{\gamma}}{\rho \mu G} \frac{dp}{dr} \Rightarrow \frac{dM(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{-RT r^{\gamma}}{\rho \mu G} \frac{dp}{dr} \right)$$

$$M(r) = \rho(r)V = \frac{4}{3} \pi r^{\gamma} \rho(r)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{-RT r^2}{P\mu G} \frac{dp}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 \frac{p\mu}{RT} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{RT r^2}{p\mu G} \frac{dp}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow T \frac{d}{dr} \left(\frac{R^2 Tr^2}{\mu^2 p} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G r^2 p$$

۶- فشار و دما را به صورت تابعی از شعاع برای ستاره مسئله ۴ پیدا کنید، اگر ستاره از گازی کامل به وزن اتمی A درست شده باشد.

حل: $M = ?$ و $p(r) = ?$, $T(r) = ?$ و حجم ستاره

$$\rho(r) = \frac{Ma^3}{4\pi r(r^3 + a^3)^2}$$

$$dp = \vec{f} \cdot \vec{dr} = \rho \vec{g}(r) \cdot \vec{dr} = -\rho(r)g(r)dr = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2} dr$$

$$M(r) = \int \rho(r) dv = \int_0^r 4\pi R^2 \rho(R) dR = 4\pi \int_0^r \frac{Ma^3 R^2 dR}{4\pi R(R^3 + a^3)^2}$$

$$= 4\pi Ma^3 \int_0^r \frac{R dR}{(R^3 + a^3)^2} = -4\pi Ma^3 \frac{1}{R^3 + a^3} \Big|_0^r$$

$$= -4\pi Ma^3 \left(\frac{1}{r^3 + a^3} \right) + M = \frac{Mr^3}{r^3 + a^3}$$

از طرفی داریم:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{Ma^2}{2\pi r(r^2+a^2)^2} \frac{GMr^2}{(r^2+a^2)r^2}$$

$$= -\frac{GM^2 a^2 r^2}{2\pi (r^2+a^2)^2 r^2} = -\frac{GM^2 a^2}{2\pi (r^2+a^2)^2}$$

$$\Rightarrow p = -\frac{GM^2 a^2}{2\pi} \int_0^r \frac{dr}{(r^2+a^2)^2}$$

$$p = -\frac{GMa^2}{2\pi a^6} \left[\frac{1}{2(1+(\frac{r}{a})^2)} + \frac{1}{2(1+(\frac{r}{a})^2)} + \log \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} \right] + c$$

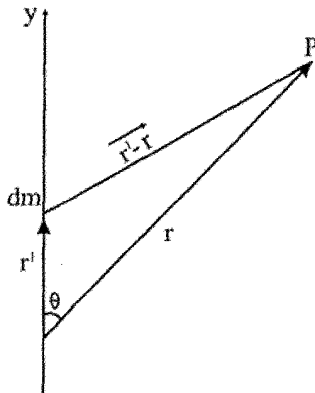
$$pV = RT \Rightarrow T = \frac{pV}{R} = \frac{\rho\mu}{R\rho(r)} \Rightarrow \rho(r), P \text{ معلوم} \Rightarrow T(r) \text{ معلوم}$$

۷-الف. پتانسیل گرانشی و شدت میدان وابسته به میله‌ای نازک به طول ℓ و جرم M را در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز میله و در راستایی که با میله زاویه θ می‌سازد، بیابید. فرض کنید

$\ell \gg r$ و حسابها را تنها تا مرتبه دوم $\frac{\ell}{r}$ انجام دهید.

ب- گرانیگاه میله را نسبت به نقطه مشخص شده تعیین کنید.

حل:



$$\begin{aligned} \phi &= G \int \frac{dm'}{|r' - r|} = G \int \frac{\lambda dy}{(y^2 + r^2 - 2yr \cos \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{GM}{\ell} \int \frac{dy}{r \left(1 + \frac{y^2}{r^2} - \frac{2y \cos \theta}{r} \right)^{3/2}} = \frac{GM}{\ell r} \int \left(1 + \frac{y^2}{r^2} - \frac{2y \cos \theta}{r} \right)^{-3/2} dy \\ &= \frac{GM}{\ell r} \int \frac{1}{r^{3/2}} dy \left\{ \left[1 - \frac{1}{r} \left(\frac{y^2}{r^2} - \frac{2y \cos \theta}{r} \right) \right] + \frac{3}{2} \left(\frac{y^2}{r^2} - \frac{2y \cos \theta}{r} \right)^2 + \dots \right\} \\ &= \frac{GM}{\ell r} \int \left(1 - \frac{y^2}{r^2} + \frac{2y \cos \theta}{r} + \frac{3}{2} \frac{y^4}{r^4} - \frac{3}{r^2} \frac{y^2}{r^2} \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{y^2}{r^2} \cos^2 \theta + \dots \right) dy \\ &= \frac{GM}{\ell r} \left[\int \frac{1}{r^{3/2}} dy - \frac{1}{r} \int \frac{y^2}{r^2} (1 - \cos^2 \theta) + \dots \right] = \frac{GM}{\ell r} \left(\ell - \frac{1}{r} (1 - \cos^2 \theta) \right) \frac{\ell^2}{r^2} + \dots \\ \Rightarrow \phi &= \frac{GM}{\ell} - \frac{GM \ell^2}{2r^3} (1 - \cos^2 \theta) + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow g_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{GM \ell^2}{\lambda r^4} (1 - \cos^2 \theta) + \dots$$

$$g_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{GM \ell^2}{\lambda r^4} (-2 \cos \theta \sin \theta) \right) + \dots \right]$$

$$\vec{g} = g_r \hat{a}_r + g_\theta \hat{a}_\theta + g_\phi \hat{a}_\phi$$

$$= \left(-\frac{GM}{r^2} + \frac{GM \ell^2}{\lambda r^4} (1 - \cos^2 \theta) \right) \hat{a}_r + \frac{GM \ell^2}{\lambda r^4} (-\sin 2\theta) \hat{a}_\theta$$

می‌توانیم از قسمت (۱) به بعد را به صورت زیر حل کنیم:

$$\phi = \frac{GM}{\ell r} \int_{\frac{r}{\ell}}^{\frac{1}{r}} dy \left(1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y \cos \theta}{r} + \frac{3}{2} \frac{y^2}{r^2} \cos^2 \theta \right)$$

$$= \frac{GM}{\ell r} \left[\frac{\ell}{2} - \frac{\ell^3}{4\ell r^2} + \frac{\ell^2 \cos \theta}{\ell r} + \frac{\ell^3 \cos^2 \theta}{16r^2} - \frac{1}{2} + \frac{\ell^3}{4\ell r^2} + \frac{\ell^2 \cos \theta}{\ell r} - \frac{\ell^3 \cos^2 \theta}{16r^2} \right]$$

$$\Rightarrow g(r, \theta) = \frac{GM \frac{\ell^2 \cos^2 \theta}{16r^2} \cos \theta}{\frac{1}{4} r^2} \Rightarrow g_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{GM \frac{\ell^2 \cos^2 \theta}{16r^2} \cos \theta}{\frac{1}{2} r^3}$$

$$g_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \frac{GM \frac{\ell^2 \cos^2 \theta}{16r^2} \sin \theta}{\frac{1}{4} r^3}$$

$$\Rightarrow |\vec{g}| = \frac{\sqrt{3} GM \frac{\ell^2 \cos^2 \theta}{16r^2}}{\frac{1}{4} r^3} \sqrt{1 + \cos^2 \theta}$$

برای به دست آوردن جای مرکز ثقل، فرض می‌کنیم جرم M میله در نقطه‌ای به فاصله k جمع شده است:

$$g = \frac{GM}{k^2} \Rightarrow k = \frac{\frac{1}{2} r^3}{\sqrt{3} \ell \sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$$

۸- الف- پتانسیل گرانشی وابسته به حلقه‌ای یکنواخت، به شعاع a و جرم M را در فاصله r از مرکز حلقه بر راستایی که با محور حلقه زاویه θ می‌سازد حساب کنید. فرض می‌کنیم $r \gg a$ و پتانسیل را فقط تا مرتبه دوم $\frac{g}{r}$ حساب کنید. (ب)- با همان تقریب مولفه‌های میدان گرانشی حلقه را در نقطه مشخص شده حساب کنید.

$$d\phi = G \frac{dm}{|\vec{s}|} \quad \text{حل:}$$

اگر فرض کنیم که نقطه مورد نظر در صفحه YOZ قرار دارد و حلقه در صفحه xOy باشد، آنگاه

$$\vec{s} = o\vec{B} - o\vec{A} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi - r \sin \theta, -r \cos \theta)$$

$$|\vec{s}| = (a^2 + r^2 - 2ar \sin \varphi \sin \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\phi = \frac{G\lambda a d\varphi}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \varphi \sin \theta)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\phi = G\lambda \int_0^{2\pi} \frac{a d\varphi}{r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \sin \varphi \sin \theta}{r} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \phi \approx \frac{GM}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a \sin \varphi \sin \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \dots \right) d\varphi + \dots$$

و برای دقیقتر شدن حل،

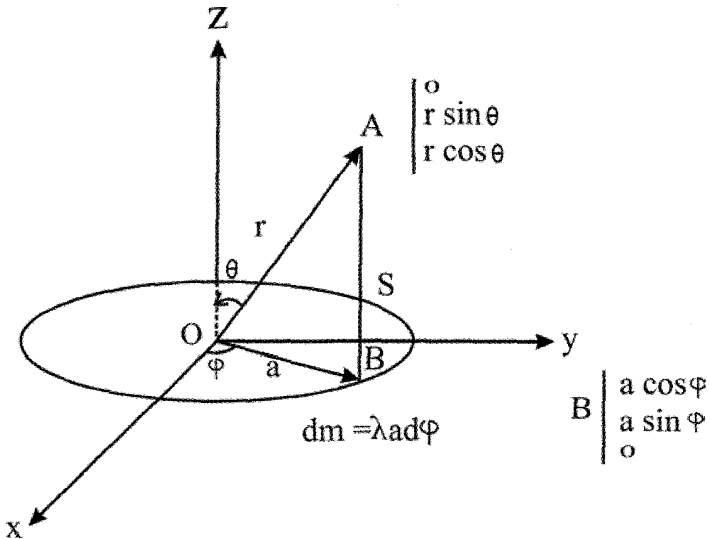
$$\phi \approx \frac{MG}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{a \sin \varphi \sin \theta}{r} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a^2 \sin \varphi \sin \theta}{r^2} + \frac{2a^2 \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \theta)}{r^2} \right) \right] d\varphi$$

$$\approx \frac{MG}{r} - \frac{MGa^2}{2r^2} + \frac{2MGa^2}{2r^2} (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \phi(r, \theta) \approx \frac{MG}{r} + \frac{MGa^2}{2r^2} (1 - 2 \cos^2 \theta)$$

$$\vec{g} = \vec{\nabla}\phi \Rightarrow g_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{MG}{r^2} - \frac{\gamma M G a^{\gamma}}{\gamma r^{\gamma}} (1 - \gamma \cos^{\gamma} \theta)$$

$$g_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\gamma M G a^{\gamma}}{\gamma r^{\gamma}} \times \gamma \cos \theta \sin \theta \right) = \frac{\gamma M G a^{\gamma}}{\gamma r^{\gamma}} \sin \gamma \theta$$



۹-الف- با استفاده از قضیه گوس، میدان گرانشی درون و بیرون پوسته‌ای کروی به شعاع a و جرم M با چگالی یکنواخت را تعیین کنید. (ب) پتانسیل گرانشی حاصل را حساب کنید.

حل:

$$\Rightarrow \int \vec{g} \cdot \hat{n} da = -4\pi m G$$

$$r < a \Rightarrow \int \vec{g} \cdot \hat{n} da = 0 \Rightarrow \int g da = 0 \Rightarrow g = 0$$

$$r > a \Rightarrow \int \vec{g} \cdot \hat{n} da = -4\pi MG$$

$$-\int |\vec{g}| da = -4\pi MG \Rightarrow -g(4\pi r^2) = -4\pi MG$$

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi MG}{4\pi r^2} \Rightarrow g = \frac{MG}{r^2}$$

$$\phi(r) = \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int \frac{MG}{r^2} dr = \frac{MG}{r}$$

۱۰- سیاره کروی دواری را در نظر می‌گیریم. سرعت نقطه‌ای از استوای آن V_e است. اثر دوران

سیاره سبب می‌شود که شدت میدان ظاهری گرانشی در استوای سیاره $\frac{1}{2}$ شدت میدان گرانشی آن

در قطب باشد. سرعت فرار V_p برای یک ذره در قطب سیاره را بیابید.

حل:

شتاب گرانش ظاهری در استوا برابر است با

$$g_e = g - |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = g - R_e \omega^2 = g - \frac{V_e^2}{R_e} = \frac{1}{2}g$$

R_e شعاع سیاره است. بنابراین $g = \frac{2V_e^2}{R_e} = \frac{GmM}{R_e^2}$. سرعت فرار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{-GmM}{R_e} + \frac{1}{2}mV_p^2 = 0 \Rightarrow V_p^2 = 2 \frac{GM}{R_e} = 4V_e^2 \Rightarrow V_p = 2V_e$$

۱۱- جسمی به جرم m با سرعت نصف سرعت فرار از سطح زمین در راستای قائم به هوا پرتاب

می‌شود. با چشم پوشی از مقاومت این جسم حداکثر از سطح زمین تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

حل:

وقتی جسم دارای سرعت فرار است انرژی کل آن صفر است؛ یعنی

$$\frac{1}{2}mV_e^2 - \frac{GmM}{R_e} = 0 \Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_e}}$$

R_e شعاع زمین است. چنانچه r ماکزیمم فاصله جسم تا مرکز زمین و h ماکزیمم فاصله جسم تا سطح زمین باشد، آنگاه

$$V = \frac{1}{2} V_e \Rightarrow \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GmM}{R_e} = -\frac{GmM}{R_e} = -\frac{3}{4} \frac{GmM}{R_e} \Rightarrow$$

$$r = \frac{4}{3} R_e, h = r - R_e = \frac{1}{3} R_e$$

۱۲- خود انرژی گرانشی یک کره یکنواخت به جرم M و شعاع R را حساب کنید.

حل:

خود انرژی (self-energy) یک جسم برابر است با انرژی لازم برای کنار هم چیدن اجزای یک جسم (اجزاء را از بی‌نهایت به وضعیت اصلی و کنونی آورده و انرژی را محاسبه می‌کنیم). این انرژی عبارت است از:

$$u = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \phi(r) dv \quad (1)$$

که انتگرال‌گیری روی حجم جسم انجام می‌گیرد. برای کره داریم:

$$\phi(r) = \frac{GM}{2R^3} (r^2 - 3R^2), r \leq R \quad (2)$$

بی‌نهایت را مبدأ پتانسیل فرض کرده‌ایم. بنابراین

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \int_0^R \rho \frac{GM}{2R^3} (r^2 - 3R^2) \times 4\pi r^2 dr = \frac{\pi \rho GM}{R^3} \int_0^R (r^2 - 3R^2) r^2 dr \\ &= -\frac{4}{5} \frac{\pi \rho GM}{R^3} R^5 \end{aligned} \quad (3)$$

اکنون با قرار دادن $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$u = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

۱۳- یک ایستگاه فضایی همواره بطور قائم در بالای یک نقطه مشخص روی زمین مشاهده می‌شود. ناظر روی زمین کجا قرار دارد؟ شعاع مدار حرکت ایستگاه را تا آنجا که می‌توانید به دقت محاسبه کنید.

حل:

ناظر باید در استوای زمین مستقر باشد. مدار ایستگاه دایره بزرگی است در صفحه استوایی که مرکز آن در مرکز زمین واقع است. شعاع مدار را می‌توان با بکار بردن دوره حرکت مدار که ۲۴ ساعت است به طرق زیر محاسبه کرد: شعاع زمین را R_0 و شعاع مدار را r می‌گیریم.

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

m جرم ایستگاه فضایی و M جرم زمین است؛ G ثابت جهانی گرانش، و v سرعت حرکت ایستگاه است.

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

$$mg = G \frac{mM}{r_0^2} \Rightarrow GM = gR_0^2 \Rightarrow v^2 = \frac{R_0^2 g}{r}$$

اما $T = \frac{2\pi r}{v}$ است پس:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{R_0^2 g}{r} \Rightarrow r = \left(\frac{R_0^2 T^2 g}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 4.2 \times 10^4 \text{ km.}$$

۱۴- ماهواره‌ای به دور زمین در حرکت است. سرعت ماهواره در نقطه حضيض مدارش V_p و

سرعت آن در نقطه اوج $V_a = \frac{1}{3} V_p$ است. اگر a نصف قطر بزرگ مدار و r_p ، r_a به ترتیب

فاصله نقطه حضيض و نقطه اوج مدار تا زمین باشد، نشان دهید که $a = 2r_p$ است.

حل:

$$\begin{cases} mV_a r_a = mV_p r_p \\ r_a + r_p = r_a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_a r_a = r_p V_p \\ r_a = r_p + r_a = r_p + r_p = 2r_p \end{cases} \Rightarrow r_a = 2r_p, a = 2r_p$$

۸-۹. مسائل برگزیده برای حل:

۱- یک قرص یکنواخت نازک به جرم M و شعاع a را در نظر بگیرید. نیروی وارد بر جرم m را که در امتداد محور قرص و در فاصله z از آن قرار دارد محاسبه کنید.

$$F_z = 2\pi m \rho G \left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \quad \text{پاسخ}$$

۲- اگر بردار میدان گرانشی مستقل از فاصله شعاعی درون یک کره باشد، تابعی را بیابید که معرف چگالی $\rho = \rho(r)$ کره باشد.

$$\rho = \frac{C}{2\pi r} \quad \text{پاسخ}$$

۳- ذره‌ای از حال سکون از ارتفاع زیادی به سمت زمین سقوط می‌کند. از مقاومت هوا چشم‌پوشی

کنید و نشان دهید که تقریباً $\frac{9}{11}$ زمان کل سقوط وقت لازم دارد تا نیمی از مسیر سقوط را بپیماید.

۴- پتانسیل گرانشی ناشی از حلقه نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را در نقاط خارج محور حلقه بیابید. فرض کنید R فاصله میان مرکز حلقه تا نقطه میدان است، و θ زاویه بین خط واصل مرکز حلقه با نقطه میدان و محور حلقه بگیرید. تقریب $R \gg a$ را بکار برید و از جملات

$$\left(\frac{a}{R} \right)^3 \quad \text{به بالا صرف‌نظر کنید.}$$

$$\phi(R) \approx -\frac{\gamma M}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \right] \quad \text{پاسخ،}$$

۵- یک کره توپر یکنواخت با جرم M و شعاع R در فاصله h بالای یک ورقه نازک بینهایت با چگالی جرمی ρ (جرم بر مساحت) به طور ثابت قرار گرفته است. با چه نیرویی کره جذب ورقه می شود؟

$$F_Z = 2\pi\rho_s GM \quad \text{پاسخ،}$$

۶- فرض کنید که چگالی توزیع جرم با رابطه

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a} \right), r < a$$

$$\rho(r) = 0, r > a$$

داده می شود که در آن ρ_C مقداری ثابت است. میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی را در نقطه ای اختیاری از فضا به دست آورید.

۷- از طریق جایگزینی مستقیم تحقیق کنید که پتانسیل گرانشی یک جرم نقطه ای، یعنی

$$\psi = -G \frac{M}{r} \quad \text{پاسخ معادله لاپلاس است: } \nabla^2 \psi = 0 \quad \text{(برای } r \neq 0 \text{). محاسبات را در}$$

مختصات کروی انجام دهید.

۸- یک رسانای الکتریکی به شکل میله ای استوانه به طول S و مساحت سطح مقطع σ را از نظر گرمایی ایزوله می کنیم و فقط دو انتهای آن را در دمای T_C قرار می دهیم. مقاومت ویژه رسانا ρ برحسب اهم بر سانتیمتر و چگالی Z (آمپر بر سانتیمتر مربع) است. دمای حالت پایدار را به صورت تابعی از وضعیت (مکان) در میله بیابید.

۹- چگالی یک سیاره کروی شکل به شعاع R با یک مغزی به شعاع $R/2$ به ترتیب برابر ρ برای $R/2 < r < R$ و برابر 5ρ برای $r < R/2$ است، که در آن ρ مقداری ثابت است.

الف- جرم کل M را برحسب ρ و R بیابید.

ب- جرم موجود در داخل کره $M(r)$ را برحسب R و M بیابید.

ج- نیروی گرانشی موجود در واحد جرم داخل یا خارج سیاره را تعیین کنید.

د- پتانسیل گرانشی را برای هر فاصله ای از مرکز سیاره به دست آورید. چرا باید پتانسیل در مرزها

با تغییرات چگالی مطابقت داشته باشد؟

پاسخ: الف:

$$M_{\text{core}} = \frac{4\pi R^3}{3} \left(\frac{5}{8} \rho \right)$$

$$M_{\text{tot}} = \frac{4\pi R^3}{3} \left(\frac{7}{2} \rho \right)$$

$$M(r) = \begin{cases} \frac{10}{3} M \left(\frac{r}{R} \right)^3, & r < \frac{1}{2} R \\ \frac{7}{2} M \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right], & \frac{1}{2} R < r < R \\ M, & r > R \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{F}{m} = -GM \begin{cases} \frac{10}{3} R^{-3}, & 0 < r < \frac{1}{2} R \\ \frac{1}{2} r^{-2} + \frac{7}{3} r R^{-3}, & \frac{1}{2} R < r < R \\ r^{-2}, & r > R \end{cases} \quad \text{(ج)}$$

$$\phi = GM \begin{cases} \frac{5}{2} r^2 R^{-3} - 2R^{-1}, & 0 < r < \frac{1}{2} R \\ -\frac{1}{3} r^{-1} + \frac{1}{3} r^2 R^{-3} - R^{-1}, & \frac{1}{2} R < r < R \\ -r^{-1}, & r > R \end{cases} \quad \text{(د)}$$

۱۰- نشان دهید که گشتاور ناشی از هر نیروی گرانشی وارد بر یک جسم با تقارن کروی صفر

می‌شود.

نکته: یک میدان گرانشی دلخواه از برهم نهی چشمه‌های نقطه‌ای شکل تولید می‌شود.

۱۱- نشان دهید که انرژی گرانشی U که در فرو ریختن (Collapse) یک توده ابر بزرگ به جرم M به درون کره‌ای به شعاع R و چگالی یکنواخت آزاد می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$U = -\frac{3}{5}G \frac{M^2}{R}$$

که در آن U انرژی پتانسیل گرانشی برآیند است.

راهنمایی- پوسته‌ای به جرم dm را از بینهایت حرکت دهید، و آن را به طور یکنواخت بر سطح کره به شعاع r توزیع کنید که در آن $dm = \rho(4\pi r^2 dr)$ است. به بخش (۸-۸) مراجعه کنید.

۱۲- فاصله پاریس و لندن از طریق تونل زیرزمینی ۳۰۰ کیلومتر است (مطابق شکل). یک قطار فقط با استفاده از نیروی گرانش زمین بین این دو شهر حرکت می‌کند. ماکزیمم سرعت قطار و زمان مسافرت از لندن به پاریس را محاسبه کنید. شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است. از اصطکاک صرفنظر کنید.

پاسخ: $V_{\max} = 185.5 \text{ m/s}$ و ثانیه $42/3$. $t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$

۱۳- ذره‌ای به جرم m ، بر روی محور میله نازک یکنواختی به طول a و چگالی جرمی λ و در خارج آن قرار دارد. اگر فاصله ذره تا انتهای نزدیک به میله b باشد، نیروی گرانش وارد بر ذره از طرف میله چقدر است؟

پاسخ: $\frac{-Gm\lambda a}{b(b+a)} \hat{i}$

فصل نهم

دستگاه‌های مختصات متحرک -

حرکت در دستگاه‌های غیراینرسی

«... من در یک صندلی در اداره ثبت اختراعات در برن نشسته بودم که ناگهان آن اندیشه تمام وجود مرا در بر گرفت: «اگر شخصی به طور آزاد سقوط کند، وزن خود را احساس نمی‌کند.» من به یکباره از جا پریدم. این تفکر ساده تأثیری ژرف بر من گذاشت. مرا به سوی یک نظریه گرانس سوق داد.»

آلبرت اینشتین، «شادترین اندیشه عمر من»؛

A. Pais: *Inward Bound*, New York, Oxford, Univ. press, 1986

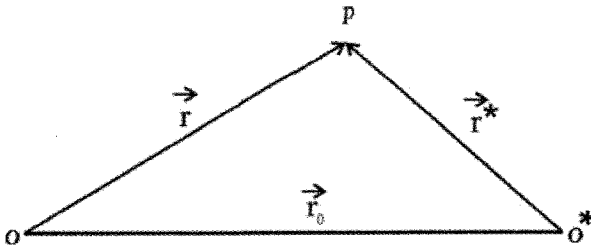
مقدمه

تاکنون قوانین حرکت نیوتن را از دید ناظری در یک دستگاه لخت یا اینرسی بررسی کردیم. می‌دانیم دستگاه لخت که نیوتن قوانین خود را برای چنین دستگاهی نوشت، مطابق تعریف وی دستگاهی است که نسبت به ستارگان ثابت در فضا، حرکت ندارد. اما می‌دانیم که بیشتر وضعیت‌های

طبیعی آنهایی هستند که دستگاه‌های مختصات در آنها شتابدار هستند. در اینصورت چارچوب مرجع متصل به این دستگاه یک چارچوب غیرلخت یا غیراینرسی خواهد بود. یک مورد مناسب زمین است که ضمن حرکت انتقالی به دور خود نیز می‌چرخد. به این ترتیب چارچوب زمین غیراینرسی است. در این فصل به بررسی حرکت ذره در یک دستگاه غیرلخت می‌پردازیم. مطالب این فصل را می‌توان در فصل‌های هفت کتاب سایمون، پنج فاولز، و ده ماریون نیز مطالعه کرد.

۹-۲. دستگاه‌های مختصات با حرکت انتقالی

یک دستگاه ستاره دار S^* در نظر می‌گیریم که نسبت به دستگاهی بی ستاره S ، آنطور که در شکل (۹-۱) نشان داده شده، در حرکت است. در هر لحظه t مکان یک نقطه از فضا مانند p نسبت به مبدأهای O و O^* را با بردارهای \vec{r} ، \vec{r}^* ، \vec{r}_0 نشان می‌دهیم. مبدأ O^* نسبت به مبدأ O دارای بردار مکان \vec{r}_0 است.



شکل (۹-۱)

$$r = \vec{r}^* + \vec{r}_0 \Rightarrow \begin{cases} x = x^* + x_0 \\ y = y^* + y_0 \\ z = z^* + z_0 \end{cases} \quad (1-9)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} \quad (2-9)$$

$$\vec{V} = \vec{V}^* + \vec{V}_0$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{V}^*}{dt} + \frac{d\vec{V}_0}{dt} \quad (۳-۹)$$

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}_0.$$

اگر ذره‌ای به جرم m در نقطه p تحت تأثیر نیروی \vec{F} قرار داشته باشد می‌توانیم قانون دوم نیوتن را در دستگاه بدون ستاره S به صورت

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (۴-۹)$$

بنویسیم و قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات ستاره S^* مطابق معادله (۳-۹) به صورت

$$m \frac{d^2 \vec{r}^*}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}. \quad (۵-۹)$$

نوشته می‌شود.

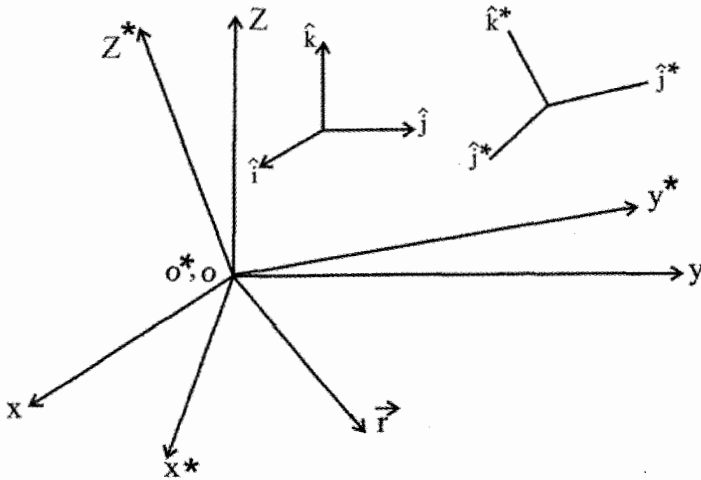
۹-۲-۱. اصل نسبیت نیوتنی در مکانیک

اگر دستگاه S^* نسبت به S با سرعت ثابت حرکت کند، رابطه (۵-۹) به صورت $\frac{m d^2 \vec{r}^*}{dt^2} = \vec{F}$

در می‌آید. پس نتیجه می‌گیریم که شکل قانون دوم نیوتن در تمام دستگاه‌های مرجعی که با سرعت نسبی یکنواخت حرکت می‌کنند یکسان است. این اصل نسبیت نیوتن نام دارد و بیان می‌دارد که چارچوب مرجع یگانه‌ای وجود ندارد؛ یعنی تمام چارچوب‌های مرجعی که با سرعت‌های یکنواخت حرکت می‌کنند هم ارزند. تمام این چارچوب‌های مرجع دستگاه‌های لخت نام دارند. در رابطه $m\vec{a}^* = \vec{F} - m\vec{a}$ ، جمله $-m\vec{a}$ نیروی غیرلختی یا نیروی ظاهری نام دارد که در نتیجه رفتن از دستگاه S به دستگاه S^* ظاهر شده است. این جمله اصلاً نیرو نیست بلکه بخشی از حاصلضرب جرم در شتاب است که به سمت راست منتقل شده است و به آن نیروی اینرسی نیز می‌گویند. ولی برعکس، نیروی \vec{F} یک نیروی حقیقی است. در مورد نیروهای اینرسی قانون سوم، عمل و عکس‌العمل، برقرار نیست چرا که این نیروها صرفاً با تغییر مکان ناظر ظاهر و محو می‌شوند.

۹-۳. دستگاه‌های مختصات چرخان

یک چارچوب مرجع S^* با محورهای x^*, y^*, z^* که نسبت به چارچوب ثابت S می‌چرخد در نظر می‌گیریم. بدیهی است که S^* یک دستگاه غیرلخت است. برای سهولت مبدأ دو دستگاه را بر هم منطبق می‌گیریم، مکان هر نقطه p در فضا را با \vec{r} نمایش می‌دهیم (برای هر دو دستگاه S و S^*):



شکل (۹-۲)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (۹-۶)$$

$$\vec{r} = x^*\hat{i}^* + y^*\hat{j}^* + z^*\hat{k}^* \quad (۹-۷)$$

توجه کنید که در مورد مولفه‌های بردار \vec{r} در دو دستگاه، مثلاً مولفه x ، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$x = \vec{r} \cdot \hat{i} = (x\hat{i} + y^*\hat{j}^* + z^*\hat{k}^*) \cdot \hat{i} = x^*(\hat{i}^* \cdot \hat{i}) + y^*(\hat{j}^* \cdot \hat{i}) + z^*(\hat{k}^* \cdot \hat{i})$$

روابطی مشابه برای دیگر مولفه‌ها به دست می‌آید. حاصلضرب‌های اسکالر $(\hat{i}^* \cdot \hat{i})$ و غیره کسینوس‌های هادی (کسینوس‌های زوایای) بین محورهای مربوطه است.

اکنون برای کلیت دادن به بحث یک بردار \vec{A} در فضا در نظر می‌گیریم. چون یکی از محورها می‌چرخد، اگر \vec{A} در یکی از دستگاه‌های مختصات با گذشت زمان ثابت باشد در دستگاه مختصات

دیگر ثابت خواهد بود، یعنی مشتقات زمانی یک بردار در دو دستگاه مختصات S و S^* متفاوت است.

اگر (A_x, A_y, A_z) مولفه‌های بردار \vec{A} در دستگاه S و (A_x^*, A_y^*, A_z^*) مولفه‌های \vec{A}

در دستگاه S^* باشند و $\frac{d}{dt}$ مشتق نسبت به دستگاه S و $\frac{d^*}{dt}$ مشتق نسبت به دستگاه چرخان S^*

باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = A_x^* \hat{i}^* + A_y^* \hat{j}^* + A_z^* \hat{k}^* \quad (۸-۹)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x \hat{i} + \dot{A}_y \hat{j} + \dot{A}_z \hat{k} \quad (۹-۹)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} (A_x^* \hat{i}^* + A_y^* \hat{j}^* + A_z^* \hat{k}^*) \quad (۱۰-۹)$$

$$= \dot{A}_x^* \hat{i}^* + \dot{A}_y^* \hat{j}^* + \dot{A}_z^* \hat{k}^* + A_x^* \frac{d\hat{i}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{j}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{k}^*}{dt}$$

$$= \frac{d^* \vec{A}}{dt} + A_x^* \frac{d\hat{i}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{j}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{k}^*}{dt} \quad (۱۱-۹)$$

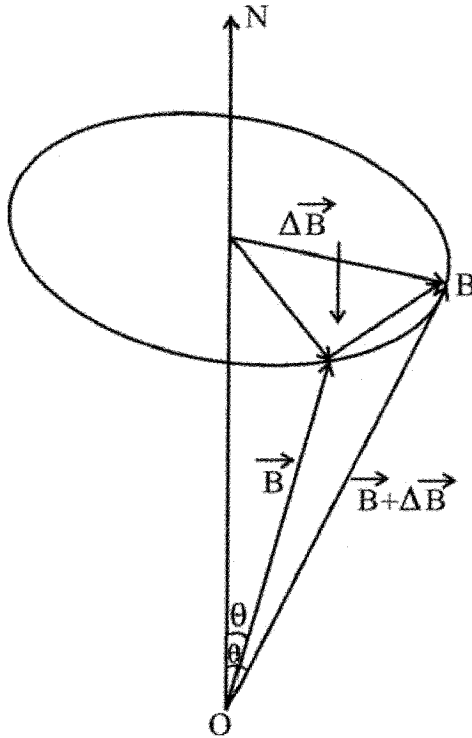
برای محاسبه سه جمله آخر رابطه (۹-۱۱) فرض می‌کنیم که در دستگاه بی ستاره (در اینجا \vec{ON})

بردار \vec{B} حول \vec{ON} با سرعت زاویه‌ای ثابت ω بچرخد. بردار \vec{B} را در دستگاه ستاره دار بی

حرکت انتخاب می‌کنیم. اگر این بردار زاویه θ با محور بسازد، چون \vec{B} در دستگاه ستاره دار ثابت

است $\frac{d^* \vec{B}}{dt} = 0$ می‌شود. حال مشتق آن را در دستگاه S یا ON (بدون ستاره) بررسی می‌کنیم.

ابتدا به روابط زیر توجه می‌کنیم:



شکل (۳-۹)

$$|\Delta \vec{B}| = B \sin \theta (\Delta \theta) = B \sin \theta (\omega \Delta t) \quad (۱۲-۹)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t} \right| = \omega B \sin \theta \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}$$

با توجه به کلیت رابطه (۲-۹) می‌توان گفت که در هر دستگاه مختصات چرخان عبارت

یک عملگر مشتق است، از اینرو برای دستگاه ستاره دار S^* و در مورد بردارهای پایه $\frac{d}{dt} = \vec{\omega} \times$

(که در دستگاه ستاره دار ثابت هستند) داریم:

$$\frac{d\hat{i}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}^*, \quad \frac{d\hat{j}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}^*, \quad \frac{d\hat{k}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}^* \quad (۱۳-۹)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱۱-۹) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d^* \vec{A}}{dt} + A^*_x (\vec{\omega} \times \hat{i}^*) + A^*_y (\vec{\omega} \times \hat{j}^*) + A^*_z (\vec{\omega} \times \hat{k}^*) \\ &= \frac{d^* \vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A} \end{aligned} \quad (۱۴-۹)$$

همچنین از رابطه (۱۴-۹) می‌توان نتیجه گرفت که عبارت $\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times \dots$ یک عملگر است.

در مورد مشتق دوم $\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2}$ به روشی مشابه و با استفاده از رابطه $\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times \dots$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d^* \vec{A}}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \vec{A} \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^* \vec{A}}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A} \\ &= \left(\frac{d^* \vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \left(\frac{d^* \vec{A}}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \left(\frac{d^* \vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A} \right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A} \\ &= \frac{d^{*2} \vec{A}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A} \end{aligned} \quad (۱۵-۹)$$

۴-۹. قانون دوم نیوتن در دستگاه‌های غیراینرسی (قضیه کوریولیس)

رابطه (۱۴-۹) برای یک ذره با بردار مکان \vec{r} به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (۱۶-۹)$$

و یا

$$\vec{V} = \vec{V}^* + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (۱۷-۹)$$

\vec{V} سرعت در دستگاه S و \vec{V}^* سرعت در دستگاه S^* است. یک بار دیگر از رابطه فوق مشتق می‌گیریم (می‌توانیم در رابطه (۹-۱۵) مستقیماً به جای بردار \vec{A} بردار \vec{r} را قرار داد):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \\ &= \frac{d^*}{dt} \left(\frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) + \vec{\omega} \times \left(\frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + \frac{d^* \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (9-18)$$

با توجه به عملگر (۹-۱۴) داریم،

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^* \vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d^* \vec{\omega}}{dt} \quad (9-19)$$

و با جایگذاری در (۹-۱۸)،

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + \gamma \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (9-20)$$

چنانچه فرض کنیم قانون دوم نیوتن در دستگاه S برقرار باشد، آنگاه:

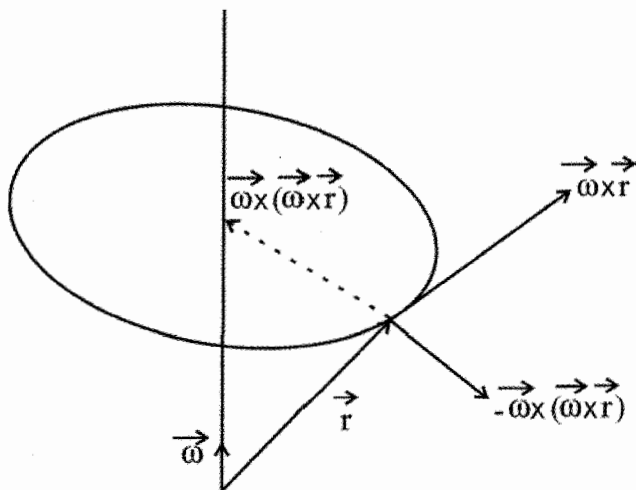
$$(9-21)$$

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + \gamma m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

و یا

$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - \gamma m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \quad (9-22)$$

رابطه (۹-۱۹) و یا صورت کاملتر آن یعنی رابطه (۹-۲۲) به نام قضیه کوریولیس (کوریولی) معروف است. این نتیجه توسط جی.جی کوریولیس در سال ۱۸۳۵ به عنوان حاصل مطالعه وی بر روی چرخ‌های آبی به دست آمد. جمله $\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ نیروی گریز از مرکز است و سبب کاهش $m\vec{r}\omega^2$ برای حالتی می‌شود که $\vec{\omega}$ عمود بر بردار شعاع حامل است. توجه داریم که علامت منفی نشانه آن است که نیروی گریز از مرکز دوران به سمت خارج است (شکل ۹-۴).



شکل (۹-۴)

کمیت $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$ در معادله (۹-۲۱) کمیتی جدید است که از حرکت ذره در

دستگاه مختصات چرخان به وجود می‌آید. این عبارت نیروی کوریولیس نامیده می‌شود. توجه کنید

که این جمله واقعاً از حرکت ذره پدید می‌آید، زیرا نیرو با $\vec{V}_r = \frac{d^* \vec{r}}{dt}$ متناسب است و در نتیجه

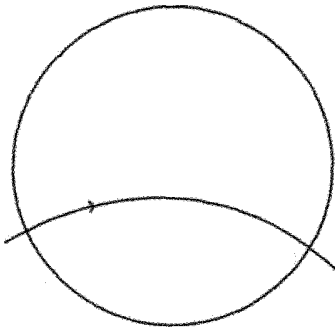
وقتی حرکتی وجود ندارد صفر می‌شود. مثلاً اگر ذره نسبت به زمین ساکن باشد نیروی

کوریولیس نداریم (توجه داریم که زمین یک دستگاه ستاره دار است). جمله آخر در رابطه (۹-۲۲) نام

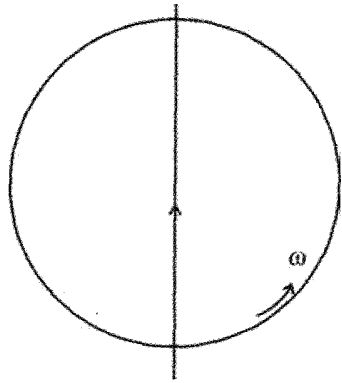
خاصی ندارد و فقط در حالت چرخش غیریکنواخت پدید می‌آید و مثلاً در مورد حرکت وضعی زمین

چون ω ثابت است این جمله صفر می‌شود. بعضی مراجع مانند فاولز این جمله را نیروی عرضی (transverse force) نامیده‌اند.

نیروی کوریولیس یک نیروی ظاهری وابسته به سرعت است که از چرخش زمین ناشی می‌شود. برای درک منشأ فیزیکی این نیرو، در نظر گرفتن یک قرص تخت چرخان می‌تواند مفید باشد. فرض می‌کنیم ذره‌ای که تحت تأثیر هیچ نیرویی نیست، از وسط این قرص عبور می‌کند، در نتیجه یک ناظر لخت آن را روی یک خط مستقیم قطری در حرکت می‌بیند (شکل ۹-۵الف). اما از آنجا که قرص می‌چرخد ناظری که بر روی قرص قرار دارد مشاهده می‌کند که ذره شعاع‌های پی در پی را قطع می‌کند و یک مسیر منحنی مانند شکل (۹-۵ب) را می‌بیند. اگر او از چرخش قرص آگاه نباشد این انحنای آن را به نیرویی نسبت می‌دهد که عمود بر سرعت ذره بر آن وارد می‌شود. این، نیروی کوریولیس است (در مثال ۹-۱ این موضوع بهتر مشخص می‌شود).



شکل (۹-۵ب)



شکل (۹-۵الف)

شکل فوق را می‌توان نمایشگر کره زمین دانست که از قطب شمال به آن نگاه می‌شود. بنابراین می‌بینیم که اثر نیروی کوریولیس آن است که یک ذره را در نیمکره شمالی به راست و در نیمکره جنوبی به طرف چپ منحرف می‌کند. این نیرو علت بعضی پدیده‌های معروف جوی است که در ادامه بحث به آنها اشاره می‌شود.

چنانچه دو دستگاه مختصات S و S^* نسبت به هم به طور هم زمان در انتقال و چرخش باشند، آنگاه برای بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره متحرک نسبت به دستگاه‌های مذکور چنین خواهیم داشت:

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{r}_0^* \quad , \quad \frac{d\vec{r}^*}{dt} = \frac{d^* \vec{r}^*}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \quad (۲۳-۹)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d^* \vec{r}^*}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* + \frac{d\vec{r}_0}{dt} \quad (۲۴-۹)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2} \vec{r}^*}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + 2\vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^* + \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} \quad (۲۵-۹)$$

مثال ۹-۱. حشره‌ای با سرعت ثابت $\frac{d^* \vec{r}}{dt} = v^*$ در امتداد پره‌های یک چرخ دوار به خارج

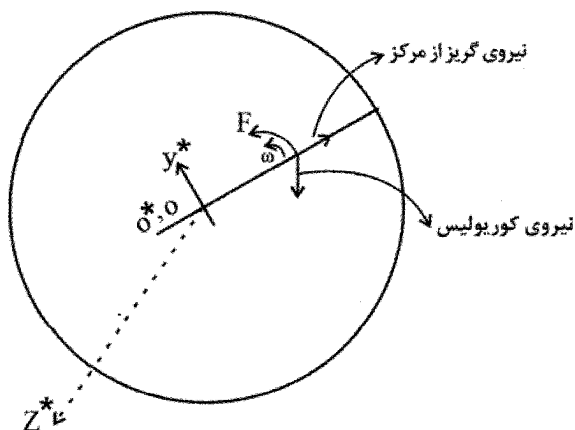
دایره در حرکت است. این چرخ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\vec{\omega}$ حول محور قائم می‌چرخد. تمام نیروهای ظاهر شده وارد بر حشره را محاسبه کنید.

حل: مطابق شکل دستگاه مختصات ستاره دار را انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم حشره در

راستای x^* حرکت کند:

$$\frac{d^* \vec{r}}{dt} = \vec{r}^* = \hat{i}^* \dot{x}^* = \hat{i}^* v^*$$

$$\frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}^* = 0$$



شکل (۹-۶)

محور z^* را در راستای قائم (عمود بر صفحه کاغذ) می‌گیریم. آنگاه:

$$\vec{\omega} = \hat{k} * \omega$$

بدین ترتیب نیروهای مختلف ظاهر شده در این حرکت چنین است:

$$\text{نیروی کوریولیس} : -\nu m \vec{\omega} \times \vec{r}^* = -\nu m \omega v^* (\hat{k}^* \times \hat{i}^*) = -\nu m \omega v^* \hat{j}^*$$

$$\text{نیروی انتقال عرضی} : -\nu m \vec{\omega} \times \vec{r}^* = 0$$

$$\begin{aligned} \text{نیروی گریز از مرکز} : -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) &= -m \omega^2 [\hat{k}^* \times (\hat{k}^* \times \hat{i}^* x^*)] \\ &= -m \omega^2 (\hat{k}^* \times \hat{j}^* x^*) = m \omega^2 x^* \hat{i}^* \end{aligned}$$

از اینرو معادله حرکت چنین است:

$$\vec{F} - \nu m \omega v^* \hat{j}^* + m \omega^2 x^* \hat{i}^* = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nu m \omega v^* \hat{j}^* - m \omega^2 x^* \hat{i}^*$$

۹-۵. تأثیرات ایستایی چرخش زمین بر شتاب اجسام افتان

می‌خواهیم بادر نظر گرفتن نیروی گرانشی وارد بر جسمی به جرم m از طرف زمین، معادله حرکت جسم را از دید ناظر زمینی که یک ناظر غیرلخت است به دست آوریم. می‌دانیم معادله حرکت این جسم، هنگامی که نیروی خارجی \vec{F} بر آن اثر می‌کند، در دستگاهی که نسبت به ستارگان ساکن است (دستگاه لخت) به صورت زیر است:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{F} \quad (۹-۲۶)$$

که با توجه به رابطه (۹-۲۲) و اینکه سرعت زاویه‌ای زمین ثابت است $\left(\frac{d\omega}{dt} = 0\right)$ می‌توان نوشت:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \nu m \omega \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} = \vec{F} + m \vec{g} \quad (۹-۲۷)$$

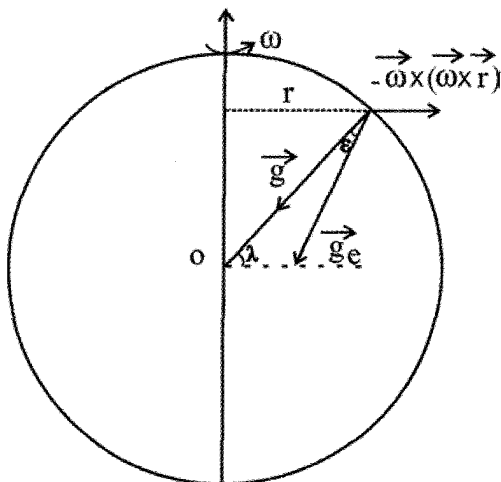
$$m \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + m \vec{g} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \nu m \omega \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} \quad (۹-۲۸)$$

با توجه به شکل زیر جهت شتاب گریز از مرکز رو به بیرون است و بنابراین بر آیند این شتاب و

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

شتاب \vec{g} را شتاب ثقل موثر \vec{g}_e می‌نامیم، یعنی

بدین ترتیب وزن ظاهری اجسام در اثر نیروی گریز از مرکز کاهش می‌یابد.



شکل (۷-۹)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + m[\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] - \gamma m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

$$= \vec{F} + m \vec{g}_e - \gamma m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} \quad (۲۹-۹)$$

نیروی $-\gamma m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$ نیروی کوریولیس وارد بر جسم است که جهت آن با توجه به موقعیت

ذره در روی کره زمین در شکل فوق به سمت شرق است. اگر ذره نسبت به زمین ساکن باشد نیروی

کوریولیس صفر است و برای سرعت‌های معمولی $\frac{d^* \vec{r}}{dt}$ این نیرو نسبتاً کوچک است. بزرگی

نیروی مرکز گریز نیز با توجه به شکل مذکور و λ عرض جغرافیایی چنین است:

$$F_{cent} = m r \omega^2 \cos \lambda = m (r \cos \lambda) \omega^2 \quad (۳۰-۹)$$

برای محاسبه زاویه ε بین \vec{g}_e, \vec{g} با توجه به شکل (۷-۹) و قانون سینوس‌ها

$$\frac{\sin \varepsilon}{F_{\text{cent}}} = \frac{\sin \lambda}{mg_e} \Rightarrow \sin \varepsilon = \frac{r\omega^2 \sin 2\lambda}{2g_e} \quad (۳۱-۹)$$

به نکات زیر توجه می‌کنیم:

- ۱- زاویه ε ، زاویه انحراف شاقولی است یعنی جسمی که از یک شاقول آویزان است در امتداد \vec{g}_e قرار می‌گیرد.
- ۲- عرض جغرافیایی λ است که در استوا صفر و در قطب‌ها ۹۰ است.
- ۳- به خاطر شتاب \vec{g}_e است که زمین به شکل یک بیضی تخت است که در قطب‌ها تخت شده است (فرورفتگی قطبها). یعنی شعاع استوایی زمین بزرگتر از شعاع قطبی آن است و این اختلاف در حدود ۲۱ کیلومتر است.

شتاب جغرافیایی g_λ

شتاب موثر جانب مرکز را بر راستای \vec{g} در راستای شعاع زمین R تصویر می‌کنیم و آن را g_λ می‌نامیم:

$$\begin{aligned} \vec{g}_e &= \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \Rightarrow g_\lambda &= g + \text{proj}[-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) / \vec{g}] = g - |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| \cos \lambda \\ &= g - r\omega^2 \cos \lambda = g - R\omega^2 \cos^2 \lambda \end{aligned}$$

که در آن $r = R \cos \lambda$ است، در نتیجه

$$g_\lambda = g \left(1 - \frac{R\omega^2 \cos^2 \lambda}{g} \right)$$

g_λ در عرض جغرافیایی λ است. بدین ترتیب g_λ در قطب‌ها ($\lambda = \frac{\pi}{2}$) بیشترین مقدار و در

استوا ($\lambda = 0$) کمترین مقدار را داراست.

نکات مهم:

- ۱- چرخش زمین است که باعث برآمدگی استوایی و فرورفتگی قطب‌ها شده است.
- ۲- این نیروی کوریولیس وارد به اجسام متحرک است که باعث گردش پاد ساعتگرد بادها در نیمکره شمالی و ساعتگرد در نیمکره جنوبی شده است و روی جریان بادهای دریایی و گلف استریم تأثیر می‌گذارد. بادهای بسامان خاوری (trade winds) در منطقه استوا مربوط به این واقعیت است که توده هوایی که سوی استوا در حرکت است بواسطه نیروی کوریولیس در جهت مغرب سرعتی وابسته به این سرعت به دست می‌آورد. بادهای بسامان بوسیله ناحیه‌های با فشار زیاد در دو سوی منطقه استوا به وجود می‌آیند. یکی از اثرات نیروی کوریولیس، چرخش صفحه نوسان آونگ فوکو حول محوری قائم است که از نقطه آویز می‌گذرد. در این حالت مولفه افقی نیروی کوریولیس بر سرعت گلوله عمود است و چون هیچ نیروی دیگری در این جهت وجود ندارد تا نیروی کوریولیس را خنثی کند، صفحه نوسان آونگ حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای $\Omega = \omega \cos \theta$ دوران می‌کند (ω سرعت زاویه‌ای زمین و θ متمم عرض جغرافیایی است). جهت Ω در نیمکره شمالی، چنانچه به سمت پایین به صفحه دوران نگاه کنیم ساعتگرد، و در نیمکره جنوبی پاد ساعتگرد است (برای بررسی بیشتر به پیوست همین فصل مراجعه کنید).

۹-۶. مسائل برگزیده حل شده:

۱- الف- مسئله جسمی افتان را به وسیله وارد کردن دستگاه مختصاتی در حرکت انتقالی با شتاب g حل کنید. معادلات حرکت در دستگاه مختصات شتابدار را به دست آورید و حل کنید و نتیجه را به دستگاه مختصاتی که نسبت به زمین ثابت است تبدیل کنید (از دوران زمین صرفنظر کنید)

ب- در همان دستگاه مختصات شتابدار، معادلات حرکت جسمی افتان را به دست آورید که تحت تأثیر نیروی مقاوم هوا که با سرعت جسم نسبت به هوای ساکن متناسب است، قرار می‌گیرد.

حل:

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}_0, \quad \vec{g} = \vec{a}^* + \vec{g}, \quad \vec{a}^* = 0$$

الف-

معادله حرکت ذره در دستگاه مختصات شتابدار چنین است:

$$\frac{d\vec{V}^*}{dt} = 0, \quad \vec{V}^* = \vec{V}_0^* \rightarrow \frac{d\vec{r}^*}{dt} = \vec{V}_0^* \rightarrow \vec{r}^* = \vec{V}_0^* t + \vec{r}_0^*$$

برای تبدیل معادله به دستگاه ثابت با توجه به معادله زیر می‌نویسیم:

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{h}, \quad \vec{V} = \vec{V}^* + \vec{V}_h, \quad \vec{r} - \vec{h} = (\vec{V}_0 - \vec{V}_0 h)t + (\vec{r}_0 - \vec{h}_0) \\ \vec{r} - \vec{r}_0 = (\vec{V}_0 - \vec{V}_{\lambda_0})t + \vec{h} - \vec{h}_0.$$

از طرفی $\vec{h} = \frac{1}{\gamma} \vec{g}t^2 + \vec{V}_h t + \vec{h}_0$. با نشان دادن در رابطه فوق، برای دستگاه مختصات ثابت

چنین به دست می‌آید:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (\vec{V}_0 - \vec{V}_{ho})t + \frac{1}{\gamma} \vec{g}t^2 + \vec{V}_{ho}t + \vec{h} - \vec{h}_0 = \vec{V}_0 t + \frac{1}{\gamma} \vec{g}t^2 = 0$$

$$\vec{r} = \frac{1}{\gamma} \vec{g}t^2 + \vec{V}_0 t + \vec{r}_0$$

معادله حرکت ذره در دستگاه ثابت

$$\vec{V}_h = \vec{g}t, \quad m\vec{a} = m\vec{g} - b\vec{V}, \quad \vec{a}_h = \vec{g}$$

ب: در این حالت چون

$$m\vec{a}^* = m\vec{a} - m\vec{a}_h$$

$$\text{معادله} \quad m\vec{a}^* = m\vec{a} - b\vec{V} - m\vec{g} = -b\vec{V} \rightarrow m\vec{a}^* = -b\vec{V} = -b(\vec{V}^* + \vec{V}_h)$$

حرکت در دستگاه شتابدار

$$m\vec{a}^* = -b\vec{V}^* - b\vec{V}_h = -b\vec{V}^* - b\vec{g}t$$

۲- یک سطل حاوی مقداری آب (یا هر مایع دیگر) با سرعت زاویه‌ای ω حول یک محور قائم

می‌چرخد، نشان دهید که آب داخل سطل شکل یک سهموی دوار به خود می‌گیرد.

حل -

F_N نیروی واکنش ظرف، F_c نیروی مرکز گریز، و W نیروی وزن است. آنگاه

$$F_c = m r \omega^2$$

$$\sum F \rightarrow = F_c - F_N \sin \theta = 0 \quad (1) \text{ نیروی افقی}$$

$$\sum F \uparrow = F_N \cos \theta - W = 0 \quad (2) \text{ نیروی قائم}$$

از تقسیم دو رابطه فوق به دست می‌آوریم: $\text{Tan}\theta = \frac{r\omega^2}{g}$. از طرفی مطابق شکل زیر

$$\text{Tan}\theta = \frac{dz}{dr} \text{ است. بنابراین:}$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}, dz = \frac{r\omega^2}{g} dr \Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

که این معادله یک سهموی دوار را نشان می‌دهد.

۳- جرم m به وسیله فنری (با ضریب ثابت k) به نقطه آویزی که در امتداد محور x با سرعت زاویه‌ای ω و دامنه a به جلو و عقب در حرکت نوسانی ساده است، متصل است. به فرض اینکه جرم فقط در امتداد محور x و در صفحه افقی حرکت کند، معادله حرکت را در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن نقطه آویز است به دست آورید و حل کنید.

$$|\vec{a}_h| = a\omega^2, x_h = a \cos \omega t$$

$$F = -kx = -k(x^* + x_h) = -kx^* - ka \cos \omega t$$

حل -

$$ma^* = F + ma_h = -kx^* - ka \cos \omega t + ma\omega^2$$

$$m\ddot{x}^* + kx^* = k\alpha \cos \omega t - m\omega^2$$

معادله دیفرانسیل غیرهمگن

$$m\ddot{x}^* + kx^* = 0 \rightarrow x_r^* = \cos \omega' t, x_v^* = \sin \omega' t$$

$$\omega(x_v^*, x_r^*) = \omega'$$

$$x^* = x_r^* \int \frac{x_v^* f(t) dt}{\omega(x_v^*, x_r^*)} + x_v^* \int \frac{x_r^* f(t) dt}{\omega(x_v^*, x_r^*)}$$

$$= -\cos \omega' t \int \frac{\sin \omega' t (a\omega^2 - a\omega \cos \omega t)}{\omega'} dt$$

$$+ t \sin \omega' t \int \frac{\cos \omega' t (a\omega^2 - a\omega \cos \omega t)}{\omega'} dt$$

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{-a\omega'^2}{\omega'} \cos \omega't \int \sin \omega't dt + a \cos \omega't \int \sin \omega't \cos \omega't dt \\
&+ \frac{a\omega'^2}{\omega'} \sin \omega't \int \cos \omega't dt \\
&- a \sin \omega't \int \cos \omega't \cos \omega t dt = \frac{a\omega'^2}{\omega'^2} \cos^2 \omega't + \frac{a\omega'^2}{\omega'^2} \sin^2 \omega't \\
&+ a \cos \omega't \left[\frac{1}{2} \int \sin(\omega t + \omega't) dt \right] \\
x^* &= \frac{a\omega'^2}{\omega'^2} - \frac{a}{2(\omega + \omega')} \cos \omega't \cos(\omega't + \omega t) \\
&- \frac{a}{2(\omega' - \omega)} \cos \omega't \cos(\omega' - \omega)t \\
&- \frac{a}{2(\omega' + \omega)} \sin \omega't \sin(\omega t + \omega't) \\
x^* &= \frac{a\omega'^2}{\omega'^2} - \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\omega + \omega'} - \frac{1}{\omega' + \omega} \right) \cos \omega t
\end{aligned}$$

معادله حرکت در دستگاه شتابدار

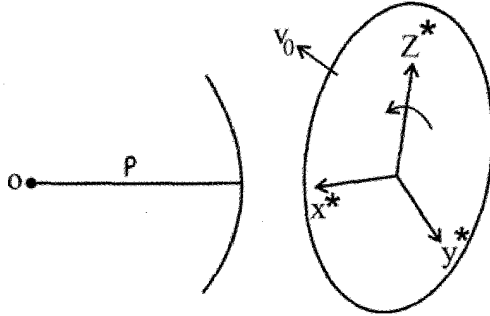
$$x^* = \frac{a\omega'^2}{\omega'^2} - \frac{a}{2} \left(\frac{2\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \right) \cos \omega t$$

۴- دوچرخه‌ای با سرعت ثابت، مسیری دایره‌ای به شعاع p را می‌پیماید. شتاب بالاترین نقطه روی یکی از چرخ‌هایش چقدر است؟
حل:

سرعت دوچرخه را با v_0 و شعاع چرخ آن را با b نشان می‌دهیم. یک دستگاه مختصات $x^*y^*z^*$ طوری انتخاب می‌کنیم که مبدأ آن بر مرکز چرخ منطبق باشد و محور x^* آن به سوی مرکز انحنای مسیر و محور z^* آن ثابت باقی بماند، مطابق شکل زیر این دستگاه با سرعت زاویه‌ای

شتاب \vec{a}^* را برابر است است:

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$



شتاب مرکز گرا برابر است با:

$$\vec{a}^* = -\frac{v_0^r}{b} \hat{k}^*$$

شتاب عرضی برابر است و چون $\omega = \cos pt$ است، $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = 0$ می‌شود و در نتیجه

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{v_0^r}{p} \hat{k}^* \times \left(\frac{v_0}{p} \hat{k}^* \times v \hat{k}^* \right) = \frac{v_0^r}{p^r} \hat{k}^* \times (\hat{k}^* \times \hat{k}^*) = 0$$

شتاب کل در دستگاه لخت xyz برابر مجموع شتاب‌های فوق است.

$$\vec{a} = -\frac{v_0^r}{b} \hat{k}^* + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

شتاب کوریولیس عبارت است از:

شتاب بالاترین نقطه چرخ نسبت به زمین

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \dot{\omega} \left(\frac{v_0}{p} \hat{k}^* \right) \times (-j^* v_0) = \dot{\omega} \frac{v_0^r}{p} \hat{i}^*$$

۵- جسم ساکنی از ارتفاعی h بالای سطح زمین در عرض جغرافیایی λ رها می‌شود. الف) نیروی کوریولی را با فرض اینکه اثر ناچیزی بر حرکت دارد، به صورت تابعی از زمان حساب کنید. از نیروی مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و فرض کنید که h آنقدر کوچک است که \vec{g}_e را می‌توان ثابت در نظر گرفت.

ب) تغییر مکان خالص نقطه اصابت ناشی از نیروی کوریولی محاسبه شده را به دست آورید.

حل:

فرض مسئله چنین است:

$$\omega_y^* = 0, v_y^* = \dot{y}^* = 0 \quad (1)$$

$$\omega_z^* = \omega \sin \lambda$$

$$\vec{g}_e = -g_e \hat{k}^*, v_z^* = \dot{z}^* = -g_e t$$

از معادله (۹-۲۸) داریم:

$$m\vec{a}^* = \vec{F} + m\vec{g}_e - 2m\vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

ابتدا در نیروی کوریولیس عبارت $\vec{\omega} \times \vec{r}^*$ را محاسبه می‌کنیم.

(۲)

$$\vec{\omega} \times \vec{r}^* = \begin{vmatrix} \hat{i}^* & \hat{j}^* & \hat{k}^* \\ \omega_x^* & \omega_y^* & \omega_z^* \\ \dot{x}^* & \dot{y}^* & \dot{z}^* \end{vmatrix} = \hat{i}^*(\omega_y^* \dot{z}^* - \omega_z^* \dot{y}^*) + \hat{j}^*(\omega_z^* \dot{x}^* - \omega_x^* \dot{z}^*)$$

$$+ \hat{k}^*(\omega_x^* \dot{y}^* - \omega_y^* \dot{x}^*) = \hat{i}^*(-\omega \dot{y}^* \sin \lambda) + \hat{j}^*(\omega \dot{x} \sin \lambda + \omega \dot{z}^* \cos \lambda)$$

$$+ \hat{k}^*(-\omega \dot{y}^* \cos \lambda)$$

با جایگذاری روابط ۱ و ۲ در معادله (۹-۲۸) و تجزیه مولفه‌ای این معادله به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \ddot{x}^* = -\omega^2 (-\dot{y}^* \sin \lambda) \\ \ddot{y}^* = -\omega^2 (-\dot{x}^* \sin \lambda + \dot{z}^* \cos \lambda) \\ \ddot{z}^* = -g_e + \omega^2 \dot{y}^* \cos \lambda \end{cases} \quad \text{معادلات شتاب}$$

$$\dot{x}_0^* = \dot{y}_0^* = \dot{z}_0^* = 0 \quad \text{از شرایط اولیه داریم:}$$

مقادیر سرعت را در معادلات شتاب قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^* &= 0 \\ \ddot{y}^* &= \omega^2 g_e t \cos \lambda \rightarrow \begin{cases} \dot{x}^* = 0 \\ \dot{y}^* = \omega g_e t^\tau \cos \lambda \\ \dot{z}^* = -g_e t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x^* & \text{ثابت} \\ y^* = \frac{1}{3} \omega g_e t^\tau \cos \lambda \\ z^* = -\frac{1}{2} g_e t^\tau + h \end{cases} \quad (3) \\ \ddot{z}^* &= -g_e \end{aligned}$$

زمان کل حرکت جسم (یعنی زمان سقوط) را از رابطه $-\frac{1}{2} g_e t^\tau + h = z = 0$ به دست می‌آوریم. البته این زمان در صورتی است که ما از چرخش زمین صرف‌نظر کرده باشیم که همان زمان حرکت کل سقوط آزاد یک جسم است. به دلیل کوچکی ω از ω^τ صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین با

$$t = \left(\frac{2h}{g_e} \right)^{\frac{1}{\tau}} \quad \text{یک تقریب مقدار انحراف ناشی از نیروی کوریولی به دست می‌آید. در ازای}$$

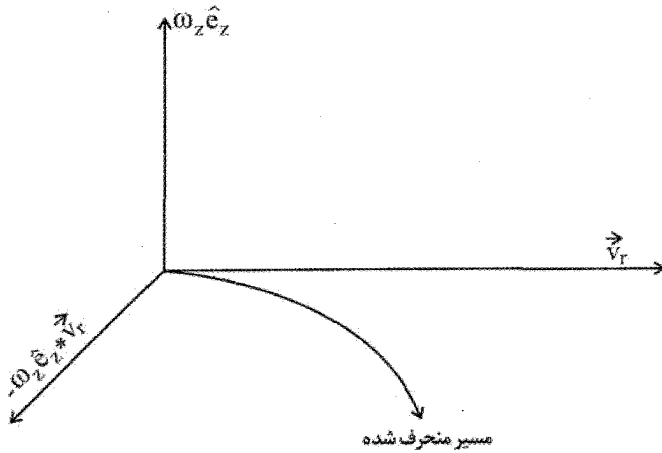
$$y^* = \frac{1}{3} \omega g_e t^\tau \cos \lambda = \frac{1}{3} \omega g_e \left(\frac{2h}{g_e} \right)^{\frac{\tau}{2}} \cos \lambda = \left(\frac{8\omega^2}{9g_e} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \lambda$$

مقدار انحراف ناشی از نیروی کوریولی با تقریب چنین است^۱:

۱- انحراف به سمت مشرق توسط نیوتن پیش بینی شد (۱۶۷۹) و تجربیات گوناگون از جمله کارهای هوک آن را تأیید کرد. دقیقترین اندازه گیریها توسط Reich در (۱۸۳۱) صورت گرفت که Pellets را از میله معدن به عمق ۱۸۸ متر رها کرد و انحراف متوسط ۲۸ میلیمتر را مشاهده کرد. البته این مقدار به دلیل مقاومت هوا کمی کمتر از مقدار پیش بینی شده توسط رابطه (۹-۳۰) است.

$$y^* = \left(\frac{\lambda \omega^2}{g_e} h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos \lambda \quad (۳۳-۹)$$

جسمی که در عرض جغرافیایی ۴۵ درجه از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط می‌کند، تقریباً ۱/۵۵ سانتیمتر منحرف می‌شود (از اثر مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود).



شکل

می‌توان محاسبه را تا مرتبه دوم ω^2 ادامه داد و انحراف را با تقریب مرتبه دوم به دست آورد. بدین منظور سرعت ذره را باید تا مرتبه اول ω به دست آورد. با مشتق‌گیری از روابط (۳) داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}^* = 0 \\ \dot{y}^* = \omega g_e t^2 \cos \lambda \\ \dot{z}^* = -g_e t \end{cases}$$

بنابراین نیروی کوریولیس تا مرتبه دوم ω برابر است با:

$$-\gamma \vec{\omega} \times \vec{v}^* = -\gamma \begin{vmatrix} \hat{i}^* & \hat{j}^* & \hat{k}^* \\ \omega \cos \lambda & 0 & -\omega \sin \lambda \\ 0 & \omega g t^2 \cos \lambda & -g_e t \end{vmatrix}$$

$$= (\gamma \omega^2 g t^2 \sin \lambda \cos \lambda) \hat{i}^* + (\gamma \omega g t^2 \cos \lambda) \hat{j}^* + (\gamma \omega^2 g t^2 \cos^2 \lambda) \hat{k}^*$$

همچنین در مرتبه دوم ω ، نیروی گریز از مرکز نیز مهم است. بردار مکان ذره در مرتبه صفرم

برابر است با $\vec{r} = z^* \hat{k}^*$. بنابراین برای نیروی گریز از مرکز داریم:

$$-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i}^* & \hat{j}^* & \hat{k}^* \\ -\omega \cos \lambda & 0 & -\omega \sin \lambda \\ 0 & \omega z^* \cos \lambda & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}^* (\omega^2 z^* \sin \lambda \cos \lambda) + \hat{k}^* (\omega^2 z^* \cos^2 \lambda)$$

که در آن از رابطه $\vec{\omega} \times \vec{r} = \hat{j}^* (\omega z^* \cos \lambda)$ استفاده کرده‌ایم. معادلات حرکت تا مرتبه دوم عبارتند از:

$$\begin{cases} \ddot{x}^* = \omega^2 z^* \sin \lambda \cos \lambda + \gamma \omega^2 g t^2 \sin \lambda \cos \lambda \\ \ddot{y}^* = \gamma \omega g t \cos \lambda \\ \ddot{z}^* = -g_e + \omega^2 z^* \cos^2 \lambda + \gamma \omega^2 g t^2 \cos^2 \lambda \end{cases}$$

برای یافتن انحراف در راستای x تا مرتبه دوم ω ، باید در طرف راست معادله به جای z^* مرتبه صفرم آن را قرار دهیم. یعنی:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^* &= \omega^2 \left(\frac{-1}{\gamma} g_e t^2 + h \right) \sin \lambda \cos \lambda + \gamma \omega^2 g t^2 \sin \lambda \cos \lambda \\ &= \frac{\gamma}{\gamma} \omega^2 g t^2 \sin \lambda \cos \lambda + h \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned}$$

که با انتگرال از آن داریم:

$$x^* = \frac{1}{\lambda} \omega^2 g t^3 \sin \lambda \cos \lambda + \frac{1}{\gamma} h \omega^2 t^2 \sin \lambda \cos \lambda$$

حال با قرار دادن زمان سقوط $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ در رابطه فوق انحراف به سمت جنوب تا مرتبه ω^2

برابر است با:

$$x^* = \frac{r}{2} \frac{h^2 \omega^2}{g} \sin \lambda \cos \lambda$$

تصحیح مرتبه بالاتر در راستای y از مرتبه سوم ω است.

توضیح: همین مسئله را می‌توان مستقیماً از طریق بقای اندازه حرکت زاویه‌ای جسم نسبت به مرکز زمین محاسبه کرد. نتیجه دقیقاً با رابطه فوق یکسان است، اما روش ساده‌تری بکار گرفته می‌شود.^۱

۶- مثال قبل را دوباره تکرار کنید و این بار فقط نظریه حرکت نیروی مرکزی را به کار ببرید.

حل: اگر ذره‌ای با جرم کوچک را از برجی به ارتفاع h بالای سطح زمین رها کنیم، مسیری که ذره طی می‌کند یک مقطع مخروطی است - یک بیضی با $\varepsilon \approx 1$ و یک کانون خیلی نزدیک مرکز زمین. اگر R شعاع زمین و λ عرض جغرافیایی (شمالی) باشد، آنگاه در لحظه رها شدن ذره در جهت شرق دارای سرعت افقی زیر خواهد بود:

$$V_{\text{hor}} = r\omega \cos \lambda = (R + h)\omega \cos \lambda$$

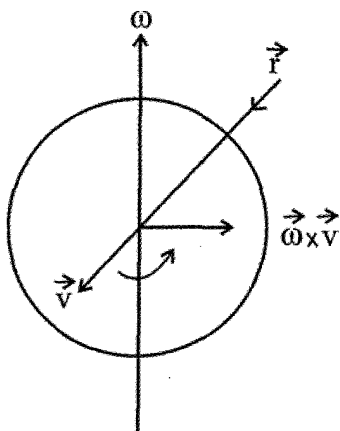
اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به محور قطبی چنین است:

$$\ell = mrv_{\text{hor}} = m(R + h)^2 \omega \cos \lambda \quad (1)$$

معادله مسیر (با توجه به انتخاب θ که از وضعیت اولیه ذره در ارتفاع h بالای زمین سنجیده می‌شود) عبارتست از:

$$\frac{a}{r} = 1 - \varepsilon \cos \theta, \quad \alpha = \frac{\ell^2}{mk}$$

۱- در این مورد می‌توانید به مقاله زیر مراجعه کنید:



$$\frac{\alpha}{R+h} = 1 - \varepsilon$$

در زمان $t = 0$ ، داریم:

در نتیجه

$$r = \frac{(1 - \varepsilon)(R + h)}{1 - \varepsilon \cos \theta} \quad (2)$$

از معادلات سرعت سطحی می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{r} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{r m} \quad (3)$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{\ell} \int_{\theta}^{\theta_0} r^2 d\theta = \frac{m}{\ell} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{(1 - \varepsilon)^2 (R + h)^2}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta$$

اگر فرض کنیم برای موقعی که ذره به سطح زمین می‌رسد (یعنی $r=R$)، $\theta = \theta_0$ باشد، آنگاه

معادله (۳) چنین می‌شود:

$$\frac{R}{R+h} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \theta_0} \Rightarrow 1 + \frac{h}{R} = \frac{1 - \varepsilon \cos \theta_0}{1 - \varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (4)$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{h}{R} = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

چون مسیر طی شده توسط ذره تقریباً قائم است، تغییری کوچک در زاویه θ بین وضعیت‌ها شدن و نقطه تماس ذره با سطح زمین وجود خواهد داشت؛ بنابراین θ_0 کوچک است و $\sin \frac{\theta_0}{2}$ تقریباً

با $\frac{\theta_0}{2}$ تقریب گرفته می‌شود.

$$\frac{h}{R} \cong \frac{\varepsilon \theta_0^2}{2(1-\varepsilon)}$$

اگر عبارت زیر انتگرال را در معادله (۳) به همان شیوه معادله (۴) بسط دهیم، خواهیم داشت،

$$t = \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\left\{ 1 + \left[\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}} \cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\left[1 + \varepsilon \theta^2 / 2(1-\varepsilon) \right]^2}$$

با قرار دادن $t(\theta = \theta_0) = T$ برای کل زمان سقوط، خواهیم داشت:

$$T \cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\left[1 + \left(\frac{h\theta^2}{R\theta_0^2} \right) \right]^2} \cong \frac{1}{\omega \cos \lambda} \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{2h}{R\theta_0^2} \theta^2 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{\omega \cos \lambda} \left(1 - \frac{2h}{3R} \right) \theta_0.$$

$$\theta_0 \cong \frac{\omega T \cos \lambda}{1 - 2h/3R} \cong \omega T \cos \lambda \left(1 + \frac{2h}{3R} \right)$$

در خلال زمان سقوط T ، زمین به اندازه زاویه ωT می‌چرخد، بنابراین نقطه واقع بر زمین درست زیر وضعیت اولیه ذره به اندازه $R\omega T \cos \lambda$ به سمت شرق حرکت می‌کند. در همان زمان، ذره به اندازه $R\theta_0$ به سمت شرق منحرف می‌شود. از اینرو، انحراف خالص d به سمت شرق چنین است:

$$d = R\theta_0 - R\omega T \cos \lambda = \frac{2}{3} h \omega T \cos \lambda$$

و با بکار بردن $T \cong \sqrt{\frac{r h}{g}}$ (که در مسئله قبلی بدان رسیدیم)، سرانجام خواهیم داشت:

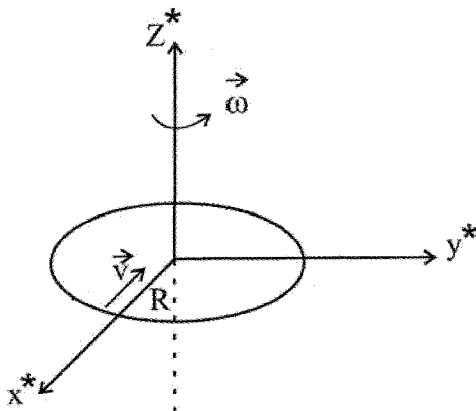
$$d \cong \frac{1}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{\lambda h^3}{g}}$$

که با نتیجه مسئله پیش یکسان است.

۷- یک قرص کاملاً صاف حول محوری که از مرکز قرص می‌گذرد و بر صفحه قرص عمود است با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ دوران می‌کند. شخصی که بر روی قرص در فاصله R از مرکز ایستاده است، یک سکه صاف را روی قرص به سمت مرکز می‌فرستد. سرعت اولیه سکه نسبت به قرص V است. نشان دهید که مسیر حرکت سکه نسبت به شخص روی قرص تا مرتبه اول ωt یک سهمی است. معادله سهمی را به دست آورید.

حل:

دستگاه مختصات دکارتی $x^*y^*z^*$ را مطابق شکل متصل به قرص اختیار می‌کنیم به طوری که محور z^* در راستای محور دوران و در جهت $\vec{\omega}$ باشد و سرعت اولیه سکه در راستای x و در جهت منفی آن. معادله حرکت سکه در این دستگاه چرخان عبارت است از



$$m \frac{d^* \mathbf{V}}{dt} = \vec{F} - m \vec{\omega} \times \vec{r} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} \quad (1)$$

چون اصطکاک وجود ندارد $\vec{F} = 0$ است. همچنین $\vec{\omega} = \omega \hat{k}^*$ ثابت است از اینرو $\dot{\vec{\omega}} = 0$ است. با در نظر گرفتن $\vec{r} = x\hat{i}^* + y\hat{j}^*$ معادله به دو معادله جفت شده تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega \dot{y} & (۲) \\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega \dot{x} & (۳) \end{cases}$$

برای حل این دستگاه متغیر مختلط $Z = x + iy$ را وارد می‌کنیم. رابطه (۳) را در i ضرب کرده و با (۲) جمع می‌کنیم:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z = 0$$

با قرار دادن $z = e^{\gamma t}$ خواهیم داشت:

$$\gamma^2 e^{\gamma t} + 2i\omega\gamma e^{\gamma t} - \omega^2 e^{\gamma t} = 0 \Rightarrow$$

بنابراین

$$\gamma^2 + 2i\omega\gamma - \omega^2 = (\gamma + i\omega)^2 = 0 \Rightarrow \gamma = -i\omega$$

$$z(t) = (A + iB)e^{-i\omega t} + (C + iD)te^{-i\omega t}$$

شرایط اولیه چنین است:

$$x_0 = R, y_0 = 0, \dot{x}_0 = -V, \dot{y}_0 = 0, z_0 = R, \dot{z}_0 = -V$$

بنابراین

$$\begin{cases} R = A + iB \\ -V = \omega B + C + i(D - \omega A) \end{cases}$$

$$A = R, B = 0, C = -V, D = \omega R$$

در نتیجه:

$$z(t) = [(R - Vt) + iR\omega t]e^{-i\omega t}$$

با نوشتن z بر حسب x, y و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی داریم:

$$\begin{cases} x(t) = (R - Vt) \cos \omega t + R\omega t \sin \omega t \\ y(t) = -(R - Vt) \sin \omega t + R\omega t \cos \omega t \end{cases}$$

معادلات فوق را تا توان اول ωt بسط می‌دهیم، سپس t را از دو معادله حاصل حذف می‌کنیم، معادله سهمی حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} x \approx R - Vt \\ y \approx -(R - Vt)\omega t + R\omega t = \omega Vt^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\omega}{V}(R - x)^2$$

چنانچه مشاهده می‌شود در این مسئله نیروها چنان عمل می‌کنند که مسیر باز سهمی ایجاد می‌شود و جسم از مسیر اولیه خود منحرف می‌شود؛ مشابه با انحراف در سقوط آزاد جسمی که در زمین دوار در نظر می‌گیریم منتها در آنجا نیروی جاذبه سبب ادامه مسیر حرکت روی بیضی خواهد شد.

۸- نشان دهید که شتاب ثقل اندازه گیری شده از طریق آزمایش برروی جسم ساکن به جرم m بر سطح زمین برابر است با $\vec{g}_e = \vec{g}(\vec{r}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ، آنگاه \vec{g}_e را روی \vec{g} تصویر کنید و آن را g_λ بنامید. سپس نشان دهید که اگر R شعاع زمین باشد،

$$g_\lambda = g \left(1 - \frac{\omega^2 R \cos^2 \lambda}{g} \right)$$

که در آن λ عرض جغرافیایی نقطه مورد نظر است. از آنجا g_λ را در استوا و در قطب‌ها به دست آورید.

حل:

از رابطه کلی قضیه کوریولی کمک می‌گیریم:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

برای جسم ساکن بر سطح زمین $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ است. برای زمین $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ است و $\vec{F} = m\vec{g}$

بنابراین برای جسم ساکن روی زمین خواهیم داشت:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m[\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] = m\vec{g}_e$$

$$\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

پس:

\vec{g}_e را روی \vec{g} تصویر می‌کنیم و آن را g_λ می‌نامیم. آنگاه

$$g_\lambda = g + \text{proj}[-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] / \vec{g} = g - |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| \cos \lambda$$

$$= g - |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| \cos \lambda = g - r\omega^2 \cos \lambda = g - R\omega^2 \cos^2 \lambda$$

که در آن $r = R \cos \lambda$ است (R شعاع زمین است). در نتیجه

$$g_\lambda = g \left(1 - \frac{\omega^2 R \cos^2 \lambda}{g} \right)$$

در استوا $\lambda = 0$ است و g_λ کمترین مقدار را دارد:

$$(g_\lambda)_{\text{استوا}} = g \left(1 - \frac{R\omega^2}{g} \right) = g - R\omega^2$$

و در قطبها $\lambda = \frac{\pi}{2}$ است و g_λ بیشترین مقدار $g_\lambda = g$ را خواهد داشت.

۷-۹. مسائل برگزیده برای حل

۱- اگر ذره‌ای به طور قائم تا ارتفاع h بالای سطح زمین در نیمکره شمالی با عرض جغرافیایی

$$\lambda \text{ پرتاب شود، نشان دهید که نقطه برخورد ذره با زمین در فاصله } \frac{4}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{\lambda h^3}{g}}$$

غرب خواهد بود (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید، و فقط ارتفاع‌های قائم کوچک را در نظر بگیرید).

۲- مثال ۵ همین فصل را تکرار کنید و این بار محاسبات را تا تقریب مرتبه دوم ادامه دهید (یعنی

جملات شامل ω^2 را نگهدارید) و نشان دهید که یک انحراف به سمت جنوب به صورت زیر وجود دارد:

$$ds \approx \frac{2}{3} \frac{h^2 \omega^2}{g} \sin \lambda \cos \lambda$$

۳- الف: مسئله سقوط آزاد را از طریق طرح دستگاه مختصات انتقالی با شتاب g حل کنید.

معادلات حرکت را در این دستگاه مختصات شتابدار بنویسید و حل کنید، و نتیجه را به دستگاه

مختصاتی که نسبت به زمین ثابت است انتقال دهید.

(ب): در همان دستگاه مختصات شتابدار، معادلات حرکت سقوط جسمی را بنویسید که بر آن نیروی مقاومت هوا که متناسب سرعت است وارد می‌شود.

۴- جرم m توسط فنری با ثابت k به نقطه‌ای از تکیه گاهی بسته شده است که در طول محور x با فرکانس ω و دامنه a حرکت هارمونیک ساده انجام می‌دهد. با این فرض که جرم فقط در طول محور x حرکت می‌کند، معادله حرکت را بنویسید و آن را در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در این نقطه تکیه گاه است، حل کنید.

۵- ژيروسکوپ از چرخه به شعاع r که تمام جرمش در لبه آن قرار گرفته است، تشکیل شده است. ژيروسکوپ با سرعت زاویه‌ای θ حول محور خود که نسبت به سطح زمین ساکن است می‌چرخد. دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که نسبت به زمین ساکن است و محور z آن منطبق بر محور ژيروسکوپ و مبدأ آن در مرکز چرخ باشد. سرعت زاویه‌ای زمین $\vec{\omega}$ در صفحه xz قرار دارد و با محور ژيروسکوپ زاویه α می‌سازد. نشان دهید اگر جرم چرخ M باشد، گشتاور نیروی کل

$$\vec{N} = \frac{Mr^2}{2\pi} \omega \dot{\theta} \sin \alpha \hat{j}$$

کوریولی وارد بر ژيروسکوپ به صورت زیر است:

۶- گلوله آونگی طوری شروع به نوسان می‌کند که مسیر آن دایره‌ای باشد. سرعت زاویه‌ای آن را بیابید (روش کار مثل آونگ فوکو است).

۷- بردار \vec{A} نمایشگر یک کمیت فیزیکی متغیر در دستگاه مختصات $ox^*y^*z^*$ است، و این دستگاه خود با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ نسبت به دستگاه مطلق $oxyz$ در چرخش است. نشان دهید رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d^* \vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

این رابطه چه می‌گوید؟ و در حالت‌های خاص $\vec{A} = \vec{r}$, $\vec{A} = \vec{\omega}$ (بردار جابجایی) چه نتایجی به دست می‌آید؟

۸- از نقطه‌ای در ارتفاع ۸۰ متری از سطح زمین در عرض جغرافیایی ۶۰ درجه شمالی گلوله‌ای کوچک از حال سکون رها می‌شود. با چشم پوشی از مقاومت هوا، مقدار انحراف جانبی پرتابه هنگام

برخورد با زمین به کدام سمت و تقریباً چند میلی متر است؟ $(g = 10 \text{ m/s}^2)$ - پاسخ: به سمت شرق و به مقدار تقریبی $7/7$ میلی متر.

۹- جسمی به جرم m تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = -k\vec{r}$ در صفحه xy بر روی یک بیضی که مرکز آن در مبدأ مختصات است حرکت می کند. سرعت زاویه‌ای غیریکنواخت جسم $\dot{\theta}$ است. از دید ناظر $o^*x^*y^*z^*$ که حول محور z با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$ می چرخد نیروهای اینرسی وارد بر جسم m کدام است؟

پاسخ: از رابطه کوریولیس با نیروهای گریز از مرکز، کوریولیس، و نیروهای عرضی.

۱۰- راننده‌ای اتومبیلی را با شتاب a و سرعت لحظه‌ای v می راند. لاستیک‌ها (با شعاع r_0) حرکت لغزشی ندارند. کدام نقطه روی لاستیک دارای بیشترین شتاب نسبت به زمین است، و مقدار آن چقدر است؟

پیوست فصل نهم

آونگ فوکو

می‌دانیم که آب برای پایین رفتن از دستشویی یک حرکت چرخشی انجام می‌دهد! چرا؟ دانشمندان برای توضیح این پدیده و پدیده‌های مشابه به این نتیجه رسیدند که زمین دستگاه غیر اینرسی است که دارای حرکت چرخشی به دور خودش است؛ در اثر این خاصیت نیروی کوریولی نیز پدیدار می‌شود.

اولین فردی که توانست به صورت علمی حرکت وضعی زمین را ثابت کند فیزیکدان فرانسوی ژان برنارد لئون فوکو^۱ (۱۸۶۸-۱۸۱۹ م) بود. وی در سال ۱۸۵۱ از امکانات موجود آن زمان استفاده کرد و این پدیده را به اثبات رسانید. او برای اجرای این برنامه از سقف گنبد پانتئون Panteon در پاریس وزنه‌ای معادل ۲۸kg را به نخ‌ی به ارتفاع ۶۷m آویزان کرد و زمان نوسان را ۱۶ ثانیه به دست آورد. چهار سال بعد یعنی در سال ۱۸۵۵ او به لحاظ این کار علمی و دیگر کارهایش مدال کاپلی (Copley) دریافت کرد. حرکت آونگ فوکو براساس قانون اول نیوتن می‌باشد. آونگ فوکو به شکلی آویزان می‌شود که در محل اتصال امکان چرخش آزادانه در یک نقطه ثابت را دارد و در نتیجه منحصر به یک صفحه نمی‌شود.

1. Jean – Bernard – Le'on Foucault..

طولانی بودن ریسمان، وزین و سنگین بودن جسم و به حداقل رساندن اصطکاک نقطه اتصال از شرایط ویژه آونگ فوکو است. همه اینها سبب می‌شود که آونگ بتواند آزادانه و به مدت طولانی به نوسان خود ادامه دهد.

آونگ فوکو دارای گلوله‌ای است که از ریسمان آویزان شده و طوری قرار داده شده است که بتواند آزادانه در هر صفحه قائمی نوسان کند. آونگ در صفحه قائم مشخصی شروع به نوسان می‌کند. مشاهده می‌شود که پس از چندین ساعت صفحه نوسان به تدریج حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام می‌دهد (در واقع این زمین است که زیر آونگ حرکت می‌کند و جهت حرکت آونگ در فضا ثابت مانده است).

آونگ فوکو علاوه بر آشکار ساختن واضح دوران زمین راز بزرگی را مطرح ساخت. برای مثال آونگ فوکو را در قطب شمال در نظر بگیرید. واضح است حرکت تقدیمی ظاهری است. صفحه در حالیکه زمین در زیر آن دوران می‌کند. صفحه آونگ نسبت به ستاره‌های ثابت، چرا باید این چنین باشد؟ چگونه آونگ می‌داند که باید در صفحه‌ای ثابت نسبت به ستاره‌های ثابت، ثابت می‌ماند نوسان کند تا در صفحه‌ای که مثلاً با آهنگی یکنواخت دوران کند؟ شبیه این سؤال نیز قبلاً حیرت نیوتن را برانگیخته بود و او آن را با آزمایش زیر توصیف کرد:

اگر سطلی در حال سکون محتوی آب باشد، سطح آب تخت است. اگر سطل با آهنگ ثابت به چرخش وادار شود، ابتدا آب عقب می‌ماند، ولی سرانجام، با افزایش سرعت دورانی سطح آب به شکل سهمی دواری در می‌آید. اگر سطل ناگهان متوقف شود، گودی سطح آب برای مدتی حفظ می‌شود. از قرار معلوم در تعیین شکل سطح آب حرکت نسبی آن با سطل اهمیت ندارد. تا زمانی که آب در دوران است سطح گود است. نیوتن نتیجه گرفت که حرکت دورانی مطلق است، زیرا با مشاهده سطح آب، بدون مراجعه به اجسام خارج، تشخیص دوران امکان‌پذیر است.

با وجود این، یک معما باقی است. سطل دوران‌کننده و آونگ فوکو هر دو حرکت‌های خود را نسبت به ستاره‌های ثابت حفظ می‌کنند. چگونه است که ستاره‌های ثابت معرف یک دستگاه لخت هستند، چه چیزی از دوران صفحه آونگ نسبت به ستاره‌های ثابت جلوگیری می‌کند؟ چرا سطح آب درون سطل دوار فقط هنگامی تخت است که نسبت به ستاره‌های ثابت ساکن باشد؟ ارنست ماخ که در سال ۱۸۸۳ اولین نقد بر فیزیک نیوتنی را نوشت، موضوع را بدین گونه مطرح کرد:

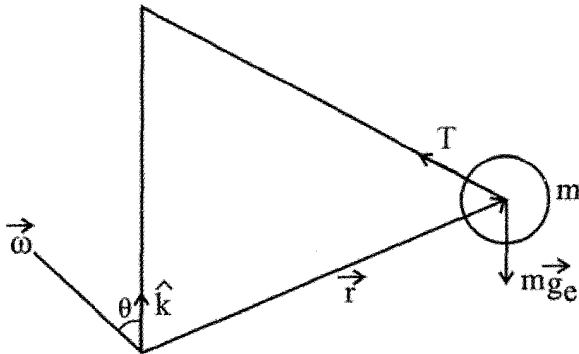
فرض کنید سطل آب را ثابت نگه داشته و ستاره‌ها را دوران دهیم. از نظر فیزیکی هیچ راهی برای تشخیص این حالت از حالت اصلی که سطل دوران یابد وجود ندارد، و انتظار داریم که سطح آب باز هم به شکل سهمی درآید. ظاهراً حرکت آب در داخل سطل بستگی به حرکت مواد دور دست جهان دارد. برای مشخص کردن مسئله فرض کنید که ستاره‌ها را یکی پس از دیگری حذف کنیم، تا وقتی که فقط سطل بماند. حال اگر سطل را دوران دهیم چه اتفاقی خواهد افتاد؟ از نظر ما هیچ راهی برای پیش بینی حرکت آب داخل سطل وجود ندارد - خواص لختی فضا باید کاملاً متفاوت باشد. با وضعیت ویژه‌ای مواجه هستیم. خواص موضعی فضا بستگی به مواد دور دست دارد. در این حال اگر آب را دوران دهیم، سطح بلافاصله شروع به تغییر می‌کند. سیگنال‌ها برای رفتن به ستاره‌ها و بازگشت از آنها فرصتی ندارند. از کجا آب درون سطل می‌داند که مابقی جهان چه می‌کنند؟

این اصل که خواص لختی فضا بستگی به وجود مواد دور دست دارد، اصل ماخ نامیده می‌شود. این اصل بوسیله بسیاری از فیزیکدانان پذیرفته شد، ولی به نتایجی عجیب منتهی می‌شود. برای مثال، هیچ دلیلی وجود ندارد که قبول کنیم مواد جهان در اطراف زمین بصورت یکنواخت توزیع شده باشد؛ منظومه شمسی تقریباً در خارج بدنه کهکشان ما قرار گرفته و ماده در کهکشان ما کاملاً روی صفحه نازکی متمرکز شده است. اگر لختی ناشی از مواد دور دست باشد، آن گاه باید انتظار داشته باشیم که در جهت‌های مختلف، متفاوت باشد، به طوری که مقدار جرم موجود باید به جهت شتاب وابسته باشد. چنین پدیده‌ای هرگز مشاهده نشده است. مسئله لختی همچنان بصورت یک راز ناگشوده باقی می‌ماند.

اگر مبدأ مختصات را درست در زیر نقطه آویز یعنی در نقطه تعادل گلوله آونگ به جرم m اختیار کنیم. بردار \vec{T} برای دامنه کوچک نوسان آونگ تقریباً افقی خواهد بود.

در نیمکره شمالی، $\vec{\omega}$ نسبت به قائم در جهتی است که در شکل نشان داده شده است. اگر T نیروی کشش ریسمان باشد، معادلات حرکت گلوله طبق معادلات زیر خواهد بود:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt} \quad (1)$$



چنانچه نیروی کوریولیس وجود نمی‌داشت معادله یک آونگ ساده در زمین ساکن بود. اگر سرعت تقریباً ۸ کیلومتر در ساعت یا کمتر باشد، نیروی کوریولیس کمتر از ۰/۱٪ نیروی ثقل خواهد بود، بنابراین مولفه قائم آن در مقایسه با نیروی ثقل قابل اغماض است. (نیروی قائم است که اندازه کشش ریسمان را معلوم می‌کند). لکن مولفه افقی نیروی کوریولیس بر سرعت $\frac{d^* \vec{r}}{dt}$ عمود است و چون وقتی آونگ نوسان می‌کند هیچ نیروی دیگری در این جهت وجود ندارد، می‌تواند طبیعت حرکت را تغییر دهد.

هر نیرویی که دارای یک مولفه افقی عمود بر سرعت $\frac{d^* \vec{r}}{dt}$ باشد، مانع ادامه حرکت آونگ در یک صفحه قائم می‌شود. برای حل مسئله‌ای که شامل نیروی کوریولیس باشد، از نتیجه تجربی استفاده می‌کنیم، و می‌کشیم دستگاه مختصات جدیدی پیدا کنیم که حول محور قائم مار بر نقطه آویز با چنان سرعت زاویه‌ای دوران کند که جمله‌های حاوی نیروی کوریولیس یا لاقط مولفه‌های افقی آن در این دستگاه ظاهر نشوند. دستگاه مختصات جدیدی در نظر می‌گیریم که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega \hat{k}$ ، که در آن \hat{k} برداریکه قائم است. حول محور قائم دوران می‌کند. این دستگاه مختصات تقدیمی را با پریم نشان می‌دهیم، مثلاً مشتق نسبت به زمان در این دستگاه به صورت $\frac{d'}{dt}$ است. در این صورت داریم:

$$\frac{d^* \vec{r}}{dt} = \frac{d' \vec{r}}{dt} + \Omega \hat{k} \times \vec{r}$$

$$\frac{d^{*\prime} \vec{r}}{dt^{\prime}} = \frac{d^{\prime\prime} \vec{r}}{dt^{\prime}} + \Omega^{\prime} \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r}) + \nu \Omega \hat{k} \times \frac{d' \vec{r}}{dt}$$

معادله (۱) چنین می‌شود:

$$m \frac{d^{\prime\prime} \vec{r}}{dt^{\prime}} = \vec{T} + m \vec{g}_e - \nu m \vec{\omega} \times \left(\frac{d' \vec{r}}{dt} + \Omega \hat{k} \times \vec{r} \right) - m \Omega^{\prime} \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r})$$

$$- \nu m \Omega \hat{k} \times \frac{d' \vec{r}}{dt} = \vec{T} + m \vec{g}_e - \nu \Omega \vec{\omega} \times (\hat{k} \times \vec{r}) - m \Omega^{\prime} \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{r})$$

$$- \nu m (\vec{\omega} + \hat{k} \Omega) \times \frac{d' \vec{r}}{dt}$$

به کمک قاعدهٔ بک - کسب خواهیم داشت:

$$m \frac{d^{\prime\prime} \vec{r}}{dt^{\prime}} = \vec{T} + m \vec{g}_e - m (\nu \Omega \vec{\omega} \cdot \vec{r} + \Omega^{\prime} \hat{k} \cdot \vec{r}) \hat{k}$$

$$+ m (\nu \Omega \hat{k} \cdot \vec{\omega} + \Omega^{\prime}) \vec{r} - \nu m (\vec{\omega} + \hat{k} \Omega) \times \frac{d' \vec{r}}{dt}$$

بردارهای طرف راست معادله، به جز آخرین بردار در صفحه قائمی که شامل آونگ است قرار دارند

چون برای نوسان‌های کوچک، عملاً افقی است، می‌توان جمله آخر را نیز با افقی ساختن:

$(\vec{\omega} + \hat{k} \Omega)$ در این صفحه قائم گنجانند. بنابراین لازم است که:

$$\hat{k} \cdot (\vec{\omega} + \hat{k} \Omega) = 0$$

$$\Omega = -\omega \cos \theta$$

این معادله Ω را تعیین می‌کند:

که در آن Ω سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات تقدیمی یا دستگاه گردان نسبت به زمین و θ

زاویه بین محور قائم و محور زمین است و ω سرعت زاویه‌ای زمین است. امتداد قائم با $-\vec{g}_e$

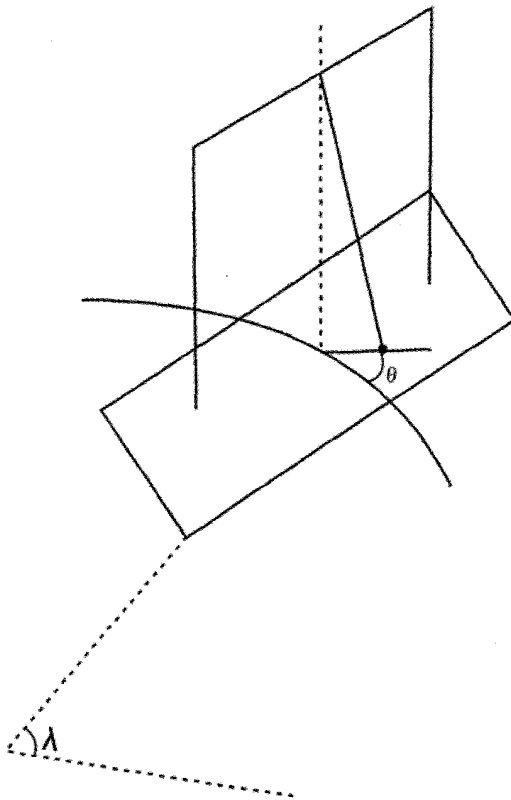
موازی است چون این امتداد تقریباً همان امتداد $-\vec{g}$ است، θ عملاً برابر زاویه متمم عرض، یعنی

زاویه بین \vec{T} و $\vec{\omega}$ خواهد شد.

حرکت ظاهری آونگ فوکو بستگی به عرض جغرافیایی نقطه مورد نظر دارد و در قطب‌ها سریعتر می‌چرخد و هر چه به استوا نزدیکتر شویم سرعت آن کمتر می‌شود. زمان یک دور گردش در تهران ۴۱ ساعت و ۲۶ دقیقه و ۳۶ ثانیه خواهد بود. و زمان یک دور در قطبین ۲۴ ساعت و در استوا بی‌نهایت است.

جهت گردش آونگ در نیمکره شمالی موافق عقربه ساعت است و در قطب جنوب خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد. بسامد آونگ را $\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}$ در نظر بگیرید که l طول آونگ است. اگر مکان گلوله آونگ را در صفحه افقی با مختصات r و θ توصیف کنیم داریم:

$$r = r_0 \sin \nu t$$



که Γ_o دامنه حرکت است. در غیاب نیروی کوریولیس هیچ گونه نیروی مماسی وجود نداشته و θ ثابت است. نیروی افقی کوریولیس چنین است:

$$F_{cor} = -2m\Omega \sin \lambda \dot{r}\hat{\theta}$$

بنابراین معادله حرکت مماس $F_{cor} = ma_\theta$ چنین می‌شود:

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -2m\Omega\dot{r} \sin \lambda$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -2\Omega\dot{r} \sin \lambda$$

$$\dot{\theta} = cte \Rightarrow r\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = -\Omega \sin \lambda$$

آونگ به طور یکنواخت در جهت ساعتگرد حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. زمان برای یک دور دوران کامل صفحه نوسان عبارتست از:

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda}$$

در عرض جغرافیایی ۴۵ درجه آونگ فوکو در ۳۴ ساعت یکبار دوران می‌کند. آونگ در یک صفحه قائم ثابت در فضا نوسان می‌کند و زمین هم در زیر آن می‌چرخد.

$$\lambda = 90^\circ \longrightarrow \text{قطب شمال}$$

$$T = 24h$$

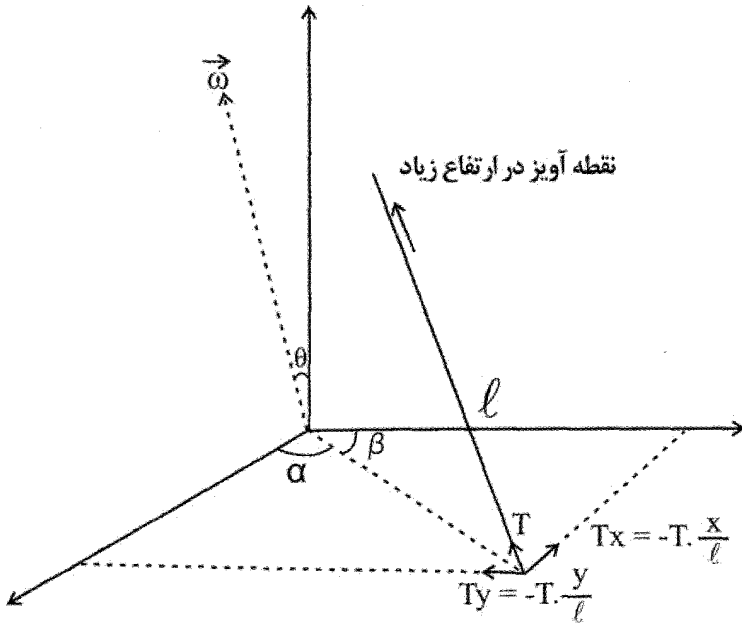
$$\lambda = 0 \longrightarrow \text{در استوا} \quad T = \infty$$

$$\Omega = 0 \text{ یعنی صفحه آونگ نمی‌چرخد}$$

روش دیگر بررسی آونگ فوکو:

برای توصیف این اثر، دستگاه مختصاتی را اختیار می‌کنیم که مبدأ آن در نقطه تعادل آونگ و محور Z آن در امتداد خط قائم واقع باشد. فقط چرخش صفحه نوسان مورد نظر ماست- یعنی می‌خواهیم حرکت گلوله آونگ را در صفحه x-y و صفحه افق بررسی کنیم. بنابراین بررسی خود را به حرکت‌های کم دامنه محدود می‌کنیم، که در آنها گردش افقی در مقایسه با طول آونگ کوچک باشد. تحت چنین شرایط، \dot{Z} در مقایسه با \dot{X} و \dot{Y} کوچک است، و می‌توان از آن چشم پوشید. معادله حرکت را به این ترتیب می‌نویسیم:

$$\vec{a}_r = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$$



در این جا $\frac{\vec{T}}{m}$ ، عبارت است از شتابی که نیروی کشش T ، در سیستم آویز آونگ ایجاد می کند. بنابراین، به طور تقریب داریم:

$$\begin{cases} T_x = -T \times \frac{x}{l} \\ T_y = -T \times \frac{y}{l} \\ T_z \approx T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = 0 \end{cases}$$

$$\omega_x = -\omega \cos \lambda$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_z = \omega \sin \lambda$$

و نیز

$$(\vec{V}_r)_x = \dot{x}$$

$$(\vec{V}_r)_y = \dot{y}$$

$$(\vec{V}_r)_z = \dot{z} \approx 0$$

بنابراین:

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_r \approx \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix}$$

به طوری که:

$$\begin{cases} (\vec{\omega} \times \vec{V}_r)_x \approx -\dot{y}\omega \sin \lambda \\ (\vec{\omega} \times \vec{V}_r)_y \approx \dot{x}\omega \sin \lambda \\ (\vec{\omega} \times \vec{V}_r)_z \approx -\dot{y}\omega \cos \lambda \end{cases}$$

به این ترتیب، معادلات مورد نظر ما عبارتند از:

$$(\vec{a}_r)_x = \ddot{x} \approx -\frac{T}{m} \times \frac{x}{l} + \dot{y}\omega \sin \lambda$$

$$(\vec{a}_r)_y = \ddot{y} \approx -\frac{T}{m} \times \frac{y}{l} - \dot{x}\omega \sin \lambda$$

به ازای جابجای‌های کوچک، $T \approx mg$ می‌گیریم $\alpha^r = \frac{T}{ml} \approx \frac{g}{l}$ و قرار می‌دهیم:

$$\omega_z = \omega \sin \lambda$$

$$\ddot{x} + \alpha^r x \approx \dot{y}\omega_z$$

$$\ddot{y} + \alpha^r y \approx -\dot{x}\omega_z$$

توجه داریم که معادله مربوط به \ddot{x} دارای جمله‌ای شامل \dot{y} است، و معادله مربوط به \ddot{y} یک جمله شامل \dot{x} دارد. چنین معادلاتی را معادلات جفت شده می‌گوییم. یکی از جواب‌های این زوج معادلات

جفت شده را می‌توان از طریق اضافه کردن معادله اولی به i برابر معادله دومی پیدا کرد:

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \alpha^2(x + iy) \approx -2\omega_z(i\dot{x} - \dot{y}) = -2i\omega_z(\dot{x} + i\dot{y})$$

اگر بنویسیم: $q = x + iy$ ، در این صورت داریم:

$$\ddot{q} + 2i\omega_z\dot{q} + \alpha^2q = 0$$

این معادله با معادله‌ای که نوسان‌های میرا را توصیف می‌کند یکسان است، جز اینکه جمله متناظر با عامل میرایی موهومی محض است. جواب این معادله عبارتست از:

$$q(t) \approx \exp[-i\omega_z t] \left[A \exp(\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2} t) + B \exp(-\sqrt{-\omega_z^2 - \alpha^2} t) \right]$$

اگر زمین نمی‌چرخید، به طوری که $\omega_z = 0$ ، آنگاه معادله مربوط به q بصورت زیر در می‌آید:

$$\ddot{q}' + \alpha^2 q' \approx 0, \quad \omega_z = 0$$

که از این معادله مشاهده می‌شود، α با بسامد نوسان آونگ متناظر است. این بسامد آشکارا خیلی بزرگتر از بسامد زاویه‌ای مربوط به چرخش زمین است. بنابراین $\alpha \gg \omega_z$ ، و معادله مربوط به $q(t)$ را می‌توان بصورت زیر در آورد:

$$q(t) \approx e^{-i\omega_z t} \left[A e^{i\alpha t} + B e^{-i\alpha t} \right]$$

با توجه به این که معادله مربوط به q' دارای جوابی بصورت زیر است:

$$q'(t) \approx x'(t) + iy'(t) = A e^{i\alpha t} + B e^{-i\alpha t}$$

می‌توانیم تعبیر ساده‌تری از معادله مربوط به q را ارائه دهیم. به این ترتیب:

$$q(t) = q'(t) \times e^{-i\omega_z t}$$

یا

$$x(t) + iy(t) = [x'(t) + iy'(t)] \times e^{-i\omega_z t}$$

$$= [x' + iy'] [\cos \omega_z t - i \sin \omega_z t]$$

$$= [x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t] + i[-x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t]$$

از برابر قرار دادن اجزای حقیقی و موهومی معادله بالا داریم:

$$\begin{cases} x(t) = x' \cos \omega_z t + y' \sin \omega_z t \\ y(t) = -x' \sin \omega_z t + y' \cos \omega_z t \end{cases} \quad (I)$$

که می‌توانیم آن را به شکل ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_z t & \sin \omega_z t \\ -\sin \omega_z t & \cos \omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

می‌توان (x, y) را در معادله (I) از (x', y') به‌دست آورد. بدین‌سان زاویه چرخش عبارتست از $\theta = \omega_z t$ ، بنابراین صفحه نوسان آونگ با بسامد $\omega_z = \omega \sin \lambda$ می‌چرخد. مشاهده این چرخش جلوه روشنی از چرخش زمین به شمار می‌آید. با اختراع ژيروسکوپ توسط فوکو، در سال بعد از نمایش مربوط به آونگ فوکو، دلیل عینی‌تری برای چرخش زمین ارائه گردید. برای مطالعه بیشتر پدیده فوکو، به کتاب‌های شاخص مکانیک کلاسیک از جمله: سایمون؛ کلینر-کلنکو؛ آریا؛ ماریون-تورنتون؛ و سری شومز، می‌توانید مراجعه کنید.

فصل دهم

حساب تغییرات (وردشی) (calculus of variation)

۱۰-۱. مقدمه- محاسبه تغییرات:

اطلاعات قبلی ما از اکسترمم کردن تابع $y(x)$ به مفهوم ماکزیمم و می‌نیمم کردن آن است. به طوریکه می‌دانیم شرط لازم برای اینکه تابعی به ازای $x=a$ اکسترمم شود چنین است:

$$y'(a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y''(a) > 0 & \text{می‌نیمم} \\ y''(a) < 0 & \text{ماکزیمم} \end{cases}$$

اکنون این پرسش مطرح می‌شود: یک تابع انتگرالی که عبارت زیر انتگرال تابعی از y, X, y' است داده شده است. y چگونه تابعی از x باشد، یا اینکه شکل $y(x)$ چگونه باشد، تا انتگرال مذکور ماکزیمم و یا می‌نیمم شود؟ (اصطلاحاً می‌گوییم انتگرال اکسترمم یا پایدار (ایستا) شود - Stationary). یافتن تابع $y(x)$ به گونه‌ای که شرط فوق را برآورده کند موضوع کلی حساب تغییرات است. در فیزیک بیشتر مقدار می‌نیمم به عنوان شرط پایداری مورد توجه است.^۱

۱- این نکته که آیا اصولاً باید همواره سیستم فیزیکی به گونه‌ای عمل کند که در گذر زمان کمیتی ویژه فیزیکی در آن می‌نیمم شود، مورد چالش است. برای بررسی دقیقتر موضوع به مقاله زیر می‌توان مراجعه کرد:

C.G.Gray and E.F.Taylor: When action is not least, Am.J.phys. 75(5)May 2007.

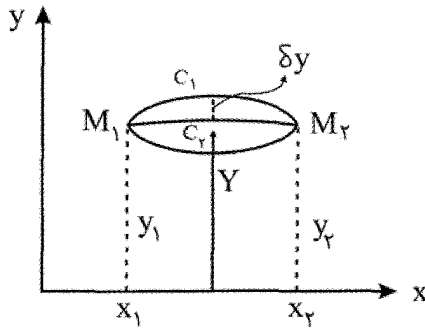
این بخش از ریاضیات کاربرد عمده‌ای به ویژه در فیزیک نظری دارد چرا که بسیاری از قوانین موجود در فیزیک، در هر حال، به دنبال این طرز تفکر به وجود می‌آید که در مطالعه رفتار یک ذره یا سیستم فیزیکی کمیت ویژه‌ای وابسته به سیستم در گذر زمان پایدار می‌شود. به طور خلاصه می‌توان این بخش از ریاضیات جدید و تا حدودی متفاوت با شاخه‌های دیگر را در مباحث زیر به کار گرفت: در زمینه فیزیک به کارگیری مفهوم کلیدی انرژی به طور محسوس وحدتی میان مفاهیم گسترده فیزیک ایجاد می‌کند. همچنین تجزیه و تحلیل مسائل فیزیکی را آسانتر می‌کند، مانند روش معادلات لاگرانژ، و نیز قیود در مکانیک لاگرانژی. در نسبت عام ژئودزیک به عنوان مسیر می‌نیم پالس نوری در فضای خمیده ریمانی مطرح می‌شود. اصول وردشی در نظریه کوانتومی میدان ظاهر می‌شود. همچنین در نظریه کنترل به طور عمده از حساب وردشی استفاده می‌شود.

در زمینه نظریه‌های ریاضی، این روش استدلال مناسبی برای قضیه کامل بودن توابع ویژه اشتورم-لیوویل تدارک می‌بیند، و کران پایین مقادیر ویژه را مشخص می‌کند. همچنین نتایج مشابهی برای مقادیر ویژه معادله انتگرالی هیلبرت-اشمیت ایجاد می‌کند. و سرانجام تکنیک‌های محاسباتی براساس حساب تغییرات در محاسبه مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله انتگرالی کاربرد عمده دارد.

حساب تغییرات را در این فصل برحسب نوع وابستگی تابع $y(x)$ در چند مرحله مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱۰-۲. یک متغیر مستقل و یک متغیر تابع

ساده‌ترین صورت همان عبارت $y(x)$ است؛ یعنی y فقط تابعی از x است. منظور محاسبه $y(x)$ است، به گونه‌ای که عبارت $\int_{x_1}^{x_2} I(x, y, y') dx$ ایستا یا پایدار شود. تابع $I(x, y, y')$ را عبارت تابعی (فونکسیونل؛ functional) می‌نامیم. واضح است که $y(x)$ باید در فاصله (x_1, x_2) معین و پیوسته باشد. همچنین x_1, x_2 و در نتیجه $y(x_1), y(x_2)$ مشخص هستند.



شکل (۱-۱۰)

نمایش هندسی $y(x)$ خمهایی است که از نقطه‌های M_1, M_2 می‌گذرند. انتگرال بالا معمولاً در مسیره‌های مختلف متفاوت است و می‌خواهیم مسیری را بیابیم که این انتگرال روی آن مسیر پایدار باشد. فرض می‌کنیم C_1 چنین مسیری باشد. $Y(x)$ را مسیر دیگری می‌گیریم که به C_1 خیلی نزدیک است. عبارت $\delta y(x) = Y(x) - y(x)$ را تشکیل می‌دهیم. این مقدار برای تمام مقادیر x در فاصله (x_1, x_2) بی‌نهایت کوچک است. δ را مظهر و نشانه تغییرات می‌نامیم و نمایش افزایش (یا کاهش) هر عبارت تابعی است که از اندازه پایدار آن فراتر (فروتر) رود، وقتی هر دو متعلق به یک x هستند. پس:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Y - y) = \frac{d}{dx} \delta y(x) \quad (1-10)$$

یعنی علامت‌های d و δ جابجاپذیر هستند. از طرف دیگر، با فرص x یکسان در دو تغییر وضعیت متفاوت y, y' خواهیم داشت:

$$\delta I = I(x, y + \delta y, y' + \delta y') - I(x, y, y') = \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial y'} \delta y'$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = 0$$

بنابر آنچه برای ماکزیمم و می‌نیمم کردن تابع می‌دانیم

یعنی برای اینکه $\int I(x, y, y') dx$ پایدار باشد باید:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} I(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta I dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (2-10)$$

اما

$$\frac{\partial I}{\partial y'} \delta y' = \frac{\partial I}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y$$

بنابراین:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right] dx = 0$$

با محاسبه انتگرال به روش جزء به جزء داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial y} \delta y dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y'} \right) \delta y dx + \left[\frac{\partial I}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} = 0$$

عبارت آخر به ازای $x = x_2, x = x_1$ صفر است زیرا مسیریها مختلفانندی ولی آغاز و پایان مسیریها یکی است و $\delta y_1 = \delta y_2 = 0$. بنابراین شرط لازم پایداری انتگرال عبارت است از:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial I}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0$$

و در نتیجه

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial I}{\partial y'} = 0 \quad (3-10)$$

چنانچه عبارت بالا در تمام فاصله (x_1, x_2) صفر نشود ناگزیر در قسمتی از آن مثبت و در قسمت دیگر منفی است و δy را که یک بی‌نهایت کوچک و در عین حال اختیاری است چنان می‌توانیم اختیار کرد که عبارت زیر انتگرال همه جا مثبت (یا منفی) شود و در نتیجه انتگرال صفر نشود. از این رو رابطه (۳-۱۰) شرط لازم و اساسی برای پایدار بودن I است. تابع $y(x)$ را که در معادله دیفرانسیل (۳-۱۰) صدق می‌کند اکستریمال می‌نامیم. مسیریهایی که شرط وجود (۳-۱۰) را برآورده می‌کنند در

بین این اکستریمال‌ها خواهند بود. $\frac{\delta I}{\delta y}$ را مشتق واریاسیونل یا تابعی I نسبت به y می‌نامیم

(functional derivative)

رابطه (۳-۱۰) معادله اویلر- لاگرانژ، نامیده می‌شود و هنگامی که تابع $I(x, y, y')$ صریحاً به y بستگی ندارد بهتر است از این رابطه استفاده شود. معادله (۳-۱۰) را به روش اندکی متفاوت با آنچه در بالا گفته شد نیز می‌توان پیدا کرد. در این باره مثال (۸-۱۰) را مطالعه کنید. این معادله در سال ۱۷۴۴ م توسط اویلر به دست آمد. از آنجا که این رابطه پایه فرمول‌بندی لاگرانژ در مکانیک کلاسیک نیز هست، به نام معادله اویلر- لاگرانژ خوانده می‌شود.

در مواقعی که I تابع صریح x نیست مناسبتر این است که از رابطه معادل زیر بهره گیریم:

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(I - y' \frac{\partial I}{\partial y'} \right) = 0 \quad (۴-۱۰)$$

عبارت فوق نیز معادله رابطه (۳-۱۰) است و از یک معادله، معادله دیگر نتیجه می‌شود (چگونه؟) توجه داشته باشید که رابطه (۳-۱۰) شرط لازم برای استاسیونر شدن I است، و نشانه‌ای از کفایت شرط در آن نیست.^۱ از اینرو به خصوص در مسایل فیزیکی این مهم است که ویژگیهای پاسخ معادله (۳-۱۰) وارسی شود تا مطمئن شویم که آیا شرایط فیزیکی مسئله داده شده برآورده می‌شود یا نه. در فیزیک مثال‌های مختلفی می‌توان یافت که مفهوم و روش حساب وردشی در آنها نهفته است، مانند

- ۱- پیمودن نور در کمترین مسیر ممکن؛ اصل فرما.
- ۲- کمترین کار انجام شده به وسیله سیستم فیزیکی؛ و یا اصل کمترین عمل (کنش) هامیلتون.
- ۳- و بالاخره اکسترمم کردن هر تابع حالت فیزیکی که بارها با آن مواجه هستیم.

۳-۱۰. چند مثال:

ژئودزیکها- واژه ژئودزی از ترکیب لغت یونانی geo به معنای زمین و desia به مفهوم تقسیم و افراز کردن است.

مثال ۱-۱۰. ژئودزی در صفحه: کوتاهترین فاصله دو نقطه در صفحه در هندسه اقلیدسی خط راستی است که دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

۱- بحث کامل و جالب شرط کافی برای برقراری رابطه (۲-۱۰) را می‌توانید در کتاب زیر جستجو کنید.
G.M.Ewing: calculus of variations with applications, Norton, New York 1969.

اثبات- در دستگاه مختصات دکارتی داریم:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dx \quad (5-10)$$

در این مسئله $I = (1 + y')^{\frac{1}{2}}$ انتخاب می‌شود. برای می‌نیم شدن S ، چون I صریحاً به x بستگی ندارد، معادله دوم اویلر چنین می‌دهد:

$$\begin{aligned} I - y' \frac{dI}{dy'} &= \text{const} \Rightarrow (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - y'^2 (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{const} \\ \Rightarrow \frac{1 + y'^2 - y'^2}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} &= \text{const} \Rightarrow 1 + y'^2 = \text{const} \Rightarrow y' = c \Rightarrow t = cx + b \end{aligned}$$

که c, b ضرایب ثابت هستند و از شرایط اولیه مسئله تعیین می‌شوند. بدین ترتیب خم می‌نیم کننده S خط مستقیمی است که بر دو نقطه مورد نظر می‌گذرند.
در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad (6-10)$$

و با انتخاب $I = (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}$ ، معادله (۳-۱۰) چنین می‌شود:

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{r}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial I}{\partial r'} = \frac{r'}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial r} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial I}{\partial r'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{d}{d\theta} \frac{r'}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow \frac{rr'' - 2r'r'^2 - r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (7-10)$$

این رابطه خمیدگی منحنی در مختصات قطبی است و برای آنکه خمیدگی صفر باشد باید مسیر خط راست باشد.

مثال ۱۰-۲. ژئودزی روی کره: عنصر فاصله روی کره به شعاع a عبارت است از:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \quad (۸-۱۰)$$

اگر φ را تابعی از θ بگیریم، $I = (1 + \sin^2 \theta \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}$ خواهد بود و معادله اویلر چنین می‌شود:

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial I}{\partial \varphi'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\varphi' \sin^2 \theta}{(1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\varphi' \sin^2 \theta}{(1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = C$$

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{C}{\sin^2 \theta (1 - C^2 - C^2 \cot^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

و از آنجا $\varphi = \varphi_0 - \text{Arcsin}(K \cot g\theta)$ که در آن $K = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}}$ دو مقدار ثابت

هستند. (در پایین این رابطه را به دست می‌آوریم). در مختصات دکارتی داریم

$$x = a \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = a \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = a \cos \theta$$

و در نتیجه

$$Kz = x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0 \quad (۹-۱۰)$$

که نمایش یک صفحه است که از مبدأ مختصات می‌گذرد و سطح مقطع آن با کره، دایره عظیمه است. بنابراین کوتاهترین فاصله و نیز بلندترین فاصله بین دو نقطه روی کره قوسی از دایره عظیمه خواهد بود که بر این دو نقطه بگذرد.

$$\varphi' = \frac{C}{\sin^{\gamma} \theta} (1 + \varphi'^{\gamma} \sin^{\gamma} \theta)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\varphi'^{\gamma} = \frac{C^{\gamma}}{\sin^{\gamma} \theta} (1 + \varphi'^{\gamma} \sin^{\gamma} \theta) = \frac{C^{\gamma}}{\sin^{\gamma} \theta} + \frac{C^{\gamma}}{\sin^{\gamma} \theta} \varphi'^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{C}{\sin \theta (\sin^{\gamma} \theta - C^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{C}{\sin^{\gamma} \theta (1 - C^{\gamma} - C^{\gamma} \cot^{\gamma} \theta)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\sqrt{\frac{C^{\gamma}}{1 - C^{\gamma}}} \cot g \theta = u \Rightarrow \frac{-C}{\sqrt{1 - C^{\gamma}}} (1 + \cot^{\gamma} \theta) d\theta = du$$

$$d\varphi = \frac{Cd\theta}{(1 - C^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} \sin^{\gamma} \theta (1 - u^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{-du}{(1 - u^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}} \Rightarrow \varphi = \int_{u_0}^u \frac{-du}{(1 - u^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\varphi = \varphi_0 - \text{Arcsin } u = \varphi_0 - \text{Ar sin}(K \cot g \theta) \quad ; \quad K = \frac{C}{\sqrt{1 - C^{\gamma}}}$$

$$\Rightarrow \varphi_0 - \varphi = \text{Arcsin}(\varphi_0 - \varphi) = K \cot g \theta$$

با انتخاب معادلات تبدیل بین دستگاه‌های کروی و دکارتی خواهیم داشت:

$$\frac{z}{x} = \frac{a \cos \theta}{a \sin \theta \cos \varphi} = \frac{\cot g \theta}{\cos \varphi} \Rightarrow Kz = Kx \frac{\cot g \theta}{\cos \varphi} = \frac{x}{\cos \varphi} \sin(\varphi_0 - \varphi)$$

$$\Rightarrow Kz = \frac{x}{\cos \varphi} (\sin \varphi_0 \cos \varphi - \cos \varphi_0 \sin \varphi) = x \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \frac{x \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\Rightarrow Kz = x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0$$

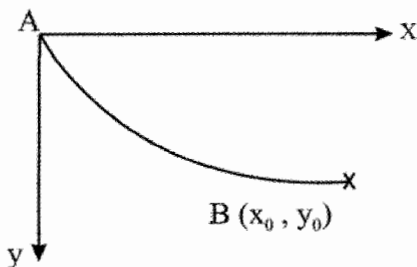
φ_0 مقدار ثابتی است و معادله به دست آمده یک صفحه را نشان می‌دهد.

مثال ۱۰-۳. کوتاهترین زمان یا حداقل زمان "مسئله برایشیستو کران" (Brachistochrone):

این مسئله را نخستین بار برنولی در ۱۶۹۶ مطرح کرد؛ نقطه مادی در مبدأ زمان از نقطه A از حال سکون (مطابق شکل) شروع به حرکت می‌کند و پایان حرکت نقطه با مختصات (x_0, y_0) است. منظور محاسبه مسیری است که حرکت در کوتاهترین زمان ممکن انجام گیرد. طرح این

مسئله و کوشش برای حل آن توسط کسانی چون برنولی، لایب نیتز، هویتال، و بالاخره نیوتن، عملاً انگیزه‌های اساسی برای ظهور مبحث «حساب وردشی» شد.

اصطکاک کره را صفر می‌گیریم و جسم بدون مالش از A به B بر مسیری نامشخص می‌لغزد. (مطابق شکل ۱۰-۲). محور افقی را x و محور قائم از بالا به پایین را y فرض می‌کنیم. بقای انرژی چنین است:



شکل (۱۰-۲)

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

$$\Rightarrow t = \int_0^{x_0} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx$$

شکل دوم معادله اویلر چنین می‌دهد:

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(I - y' \frac{\partial I}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow I - y' \frac{\partial I}{\partial y'} = a$$

که در آن $I = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$ و a مقداری ثابت است. پس

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - y' \frac{\frac{y'}{y}}{\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}} = a \Rightarrow y(1 + y'^2) = \frac{1}{a^2} = c$$

با تغییر متغیر $y' = \cot g \theta$ داریم:

$$y = \frac{c}{1 + y'^2} = \frac{c}{1 + \cot^2 \theta} = c \sin^2 \theta = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

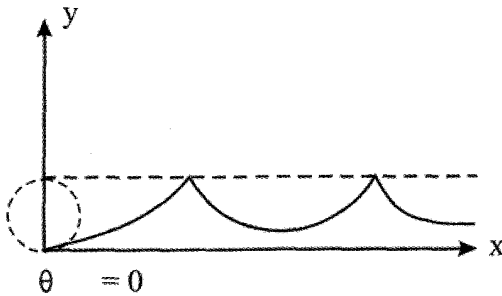
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = y' \frac{dx}{d\theta} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{y'} \frac{dy}{d\theta} = c(1 - \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow x = \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta)$$

به طوری که در مبدأ $x = y = 0$ داریم $\theta = 0$. با قرار دادن $c = 2A$ ، $2\theta = \phi$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = A(\phi - \sin \phi) \\ y = A(1 - \cos \phi) \end{cases} \quad (10-10)$$

و این مانند معادله پارامتری یک سیکلوئید (چرخ وار) است: منحنی‌ای که مکان هندسی یک نقطه روی محیط یک چرخ را نشان می‌دهد که روی محور x می‌غلتد.



مثال (۱۰-۴). مسئله براشیتو کران را در دستگاه مختصات دکارتی حل کنید (تغییر متغیر

مثلثاتی ندهید).

$$dt = \frac{ds}{v}, ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

$$I = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(I - y' \frac{\partial I}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = \frac{1}{a} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-ay}}{\sqrt{ay}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{1-ay}} dy = dx$$

با انتخاب $ay = u^2$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{2}{a} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} = x + b \Rightarrow u = \sin \theta \quad ; \quad du = \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta = \frac{1}{a} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{a} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) = x + b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \left(\sin^{-1} \sqrt{ay} - \sqrt{ay} \sqrt{1-ay} \right) = x + b$$

از شرایط اولیه $x_0 = y_0 = 0$ ، مقدار ضریب $b = 0$ به دست می‌آید. بنابراین

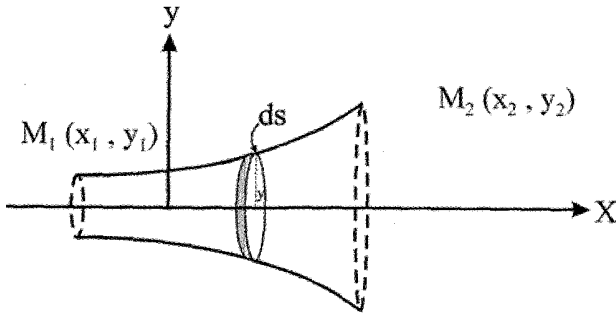
$$ax = \sin^{-1} \sqrt{ay} - \sqrt{ay} \sqrt{1-ay} \quad (11-10)$$

این معادله یک سیکلوئید است^۱ که قطر دایره مولد آن است. ضریب a از این شرط به دست می‌آید که منحنی باید از نقطه $B(x_0, y_0)$ بگذرد.

مثال ۱۰-۴. سطح دوار می‌نیمم:

منظور تعیین خم راستی است که بر دو نقطه $M_1(x_1, y_1)$ ، $M_2(x_2, y_2)$ می‌گذرد و

سطح حاصل از دوران قوس $\widehat{M_1 M_2}$ پیرامون محور OX می‌نیمم باشد.



$$S = 2\pi \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} y ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

از معادله اوایلر کمک می‌گیریم:

$$I - y' \frac{\partial I}{\partial y'} = a$$

$$\Rightarrow y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - yy'^2(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} = a$$

که در آن a ضریب ثابت انتگرال گیری است.

$$\frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = a \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$$

$$\Rightarrow y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \quad (12-10)$$

a, b چنان تعیین می‌شوند که منحنی مسیر از نقطه‌های M_1, M_2 بگذرد. منحنی به دست آمده منحنی زنجیر نامیده می‌شود (catenary: از لغت لاتین catena به معنای زنجیر است). سطحی که از این طریق ایجاد می‌شود سطح زنجیروار (catenoid) نامیده می‌شود.

۱۰-۵. یک متغیر مستقل و چند متغیر وابسته

این حالت بیشتر هنگامی به کار می‌رود که متغیر مستقل زمان است و متغیرهای وابسته مختصات مکان هستند و مستقیماً در فیزیک به کار برده می‌شود. در مختصات دکارتی و در حالت سه بعدی داریم:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

$$I = I(x, y, z, x', y', z')$$

و شرط اویلر عبارت است از $\int_{t_1}^{t_2} \delta I dt = 0$ ، که در آن

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial z} \delta z + \frac{\partial I}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial I}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial I}{\partial z'} \delta z'$$

و در نتیجه شرط اویلر به صورت سه انتگرال در می‌آید. یکی از این دسته انتگرالها چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial x'} \delta x' \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial I}{\partial x} \delta x dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial I}{\partial x'} \delta x' dt$$

اما داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial I}{\partial x'} \delta x' dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial I}{\partial x'} \frac{d}{dt} (\delta x) dt = \frac{\partial I}{\partial x'} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial I}{\partial x'} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \delta x dt$$

و در نتیجه:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta I dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial x'} \right] \delta x + \left(\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial y'} \right) \delta y + \dots dt$$

برای اینکه این انتگرال صفر شود با توجه به بی‌نهایت کوچکیهای δy , δx ... باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial x'} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial z'} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \\ z_1 = z_1(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t) \\ z_2 = z_2(t) \end{cases} \quad (10-13)$$

جواب این دستگاه که در شرایط بالا صدق کند مسیر اکسترمال است.

مثال ۱۰-۶. اصل هامیلتون در مکانیک: اگر T انرژی جنبشی دستگاه و V انرژی پتانسیل باشد، T تابعی از مختصات و مشتق‌های آن نسبت به زمان است و V تابعی از مختصات و احتمالاً زمان. به موجب اصل هامیلتون $\int (T - V) dt$ باید استاسیونر باشد. $L = T - V$ تابع لاگرانژ نام دارد و آن را

لاگرانژین دستگاه مکانیکی می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم که $A = \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{q_1}^{q_2} p dq$ را عمل یا کنش (action) یا آکسیون می‌نامیم و $\delta A = 0$ به عنوان اصل کمترین کنش (Principle of least action) نامیده می‌شود. این اصل نخستین بار در سال ۱۷۴۷ توسط De Maupertuis بیان شد.

در سال ۱۸۳۴، هامیلتون با استفاده از تعریف کنش دستگاه فیزیکی به صورت $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ ، که در آن $L = T - V$ لاگرانژی سیستم است، اصل کمترین کنش را به این صورت بیان کرد: «دستگاه فیزیکی چنان رفتاری را در گذر زمان از خود نشان می‌دهد که همواره $\delta S = 0$ می‌شود». عبارت S با وارد شدن در فضای فاز همان شکل A را در اصل موپرتوئی می‌گیرد. اصل فوق را برای یک نقطه مادی با پتانسیل فقط تابع مختصات به کار می‌بریم:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = V(x, y, z)$$

$$I = L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = \frac{dp'_x}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

برای دو مولفه دیگر نیز همین رابطه را خواهیم داشت. این معادلات همان معادلات حرکت نیوتن است که با فرض $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ به دست می‌آید.

در فیزیک به ترتیب نشانه‌های زیر را به کار می‌بریم:

$$x \rightarrow q_i$$

$$\dot{x} \rightarrow \dot{q}_i$$

$$I \rightarrow L$$

بنابراین معادله اوایلر به معادلات لاگرانژ تبدیل می‌شود.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, 2, \dots, 3N \quad (10-14)$$

که برای دستگاهی با N ذره $3N$ درجه آزادی داریم. اصل هامیلتون به نام اصل کمترین کنش شناخته می‌شود. یادآوری می‌کنیم که یکی از با ارزشترین مزیت‌های اصل هامیلتون - یا فرمولبندی معادله لاگرانژ - سهولت مشاهده رابطه بین تقارن و قانون پایستگی است. مثلاً X_i را برابر Φ_i ، زاویه سمتی، می‌گیریم. اگر لاگرانژی مستقل از Φ باشد یعنی Φ مختصه‌ای چشم پوشیدنی یا چرخه‌ای باشد، دو پیامد خواهد داشت: (۱) - یک تقارن محوری (چرخشی) داریم؛ (۲) - از معادله لاگرانژ خواهیم داشت. $\frac{\partial L}{\partial \Phi} = \text{const}$. از نظر فیزیکی، این تعبیر متناظر است با پایستگی یا ناوردایی یک مولفه اندازه حرکت زاویه‌ای. به همین صورت ناوردایی تحت انتقال به پایستگی اندازه حرکت خطی می‌انجامد. «قضیه نوتر» تعمیم این ناوردایی «تقارن» یا رابطه قانون پایستگی است. بحث بیشتر این قضیه را به فصل دوازدهم واگذار می‌کنیم.

۱۰-۶. چند متغیر مستقل و یک متغیر تابع

در این حالت تابع I شامل چند متغیر مستقل است و مسئله عبارت است از یافتن تابعی نظیر

$$\int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} I(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z) dx dy dz \quad \text{که } u(x, y, z) \text{ به گونه‌ای که}$$

پایدار باشد. در اینجا تابع سه متغیری را در نظر گرفتیم. بنا بر این شرط فوق چنین است:

$$\iiint \delta I dx dy dz = 0$$

که در آن

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial u} \delta u + \frac{\partial I}{\partial u'_x} \delta u'_x + \frac{\partial I}{\partial u'_y} \delta u'_y + \frac{\partial I}{\partial u'_z} \delta u'_z$$

ابتدا انتگرال گیری را نسبت به x انجام می‌دهیم و توجه داریم که

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial u'_x} \delta u'_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial u'_x} \frac{\partial}{\partial x} \delta u dx = 0 - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial I}{\partial u'_x} \right) \delta u dx$$

بنابراین:

$$\iiint \delta I dx dy dz = \iiint \left(\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial u'_z} \right) \delta u dx dy dz$$

برای اینکه انتگرال بالا برای هر مقدار δu صفر شود باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial I}{\partial u'_z} = 0 \quad (15-10)$$

این معادله اویلر برای حالتی است که I تابعی از چند متغیر مستقل و یک متغیر وابسته u باشد. اکنون اگر به جای یک متغیر وابسته چند متغیر مانند w, v, u ... داشته باشیم عیناً این رابطه برای بقیه متغیرهای وابسته نیز تکرار می‌شود و یک دستگاه معادلات با مشتقات جزئی داریم که از حل آنها مسیره‌های اکسترمال به دست می‌آید.

مثال ۱۰-۷. تابع (x, y, z) را چنان تعیین کنید که $(\vec{\nabla} u)^2$ آن به طور میانگین در یک ناحیه از فضا می‌نیمم باشد، یعنی انتگرال $\iiint (\vec{\nabla} u)^2 dx dy dz$ استاسیونر شود.

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

$$I = (\vec{\nabla} u)^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$$

و از معادله اویلر (۱۰-۱۵) خواهیم داشت:

$$u_x'' + u_y'' + u_z'' = \nabla^2 u = 0 \quad (16-10)$$

که همان معادله لاپلاس است و حل آن را پیشتر در بخش‌های قبلی دیده‌ایم. پاسخ آن، مسیر اکسترمال (یا تابع u) لازم را به دست می‌دهد.

در الکتروستاتیک، انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی متناسب با $\iiint E^2 dv$ است، که در آن E میدان الکتریکی و $dv = dx dy dz$ عنصر حجم است (فرض می‌کنیم که هیچ بار آزاد در حجم موجود نیست). با حل مسئله فوق مشاهده می‌کنیم که اگر $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ باشد و انرژی ذخیره شده می‌نیمم شود، در حالیکه u (پتانسیل الکتروستاتیک) روی مرزها ثابت بماند، u باید از معادله لاپلاس

تبعیت کند.

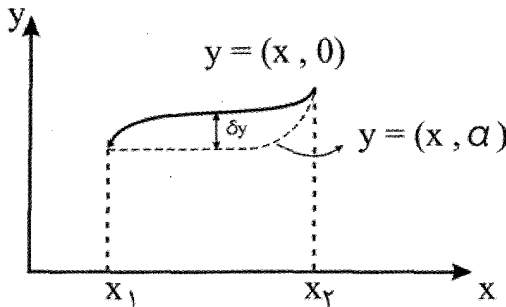
مثال ۱۰-۸. اگر $f = f(y, y_x, y_{xx}, x)$ داده شده باشد، نشان دهید که معادله اویلر به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y_{xx}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (10-17)$$

که در آن $y_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ، $y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ است.

حل -

باید عبارت $I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, y_{xx}, x) dx$ می نیمم یا ماکزیمم شود. مسیر مطلوب و مسیر نزدیک به آن را مطابق شکل انتخاب می کنیم.



مسیرهای مختلف را به کمک پارامتر متغیر α مشخص می کنیم به گونه ای که

$$y(x, \alpha) \approx y(x, 0) + \delta y = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$$

که در آن $\eta = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ است و $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. روشن است که

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} y_x$$

و در نتیجه $\frac{d\eta(x_1)}{dx} = \frac{d\eta(x_2)}{dx} = 0$ است. به طور مشابه $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial y_{xx}}{\partial \alpha}$ است. برای

منحنی غیر مشخص (X, α) داریم:

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y_{xx}(x, \alpha), y_x(x, \alpha), y(x, \alpha), x] dx \quad ; \quad \left. \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \frac{\partial y_{xx}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \eta \right] dx = 0$$

با استفاده از روش جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \left. \frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \frac{d\eta}{dx} \right|_{x_1}^{x_2} + \left. \frac{\partial f}{\partial y_x} \eta \right|_{x_1}^{x_2} -$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \right) \frac{d\eta}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \eta - \frac{\partial f}{\partial y} \eta \right] dx = 0$$

دو جمله اول صفر هستند. یکبار دیگر روش مذکور را برای بخش اول انتگرال به کار می‌بریم:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = - \left. \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \eta \right|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \right) \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) \eta - \frac{\partial f}{\partial y} \eta \right] dx = 0$$

چون $\eta(x)$ دلخواه است، در هر نقطه می‌توان آن را هم علامت عبارت زیر انتگرال گرفت، در

نتیجه صفر شدن عبارت فوق صفر شدن تابع انتگرال را سبب می‌شود:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{xx}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

نکته- همین روش را برای استخراج معادله اویلر- لاگرانژ در حالت یک متغیری نیز می‌توان به

کار برد. (۱۰-۳). همچنین اگر f تابع صریحی از y_{xx} ، یعنی مشتق دوم تابع y نسبت به x نباشد

آنگاه شکل استاندارد معادله اویلر که در فرازهای پیشین یافته‌ایم نتیجه می‌شود.

۱۰-۷. انتگرال استاسیونر با رعایت قیود- ضرایب نامعین لاگرانژ

در بعضی مسائل منظور محاسبه یک انتگرال پایدار است به شرط این که یک یا چند انتگرال دیگر که آنها نیز تابعی از همین متغیرها هستند ثابت بمانند. مثلاً می‌خواهیم سطح بسته می‌نیممی را محاسبه کنیم که بر منحنی بسته داده شده‌ای بگذرد. به بیان دیگر منظور محاسبه سطح می‌نیممی است که محیطش ثابت باشد. در حالت کلی $\int I \delta z$ باید پایدار باشد به شرط این که

$$\int I_i dz_i = C_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

روشی که به کار می‌رود همان روشی است که برای یافتن ماکزیمم و می‌نیمم توابع چند متغیری، هنگامی که قیودی مشخص در کار باشد، استفاده می‌شود. مجموعه ضرایب $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ یعنی n پارامتر ثابت را که از پیش مشخص نیستند در نظر می‌گیریم. اگر $\int I \delta \tau$ استاسیونر باشد، انتگرال $\int k d\tau$ نیز چنین است، که در آن $k = I + \lambda_1 I_1 + \dots + \lambda_n I_n$ است. بنابراین باید $\int \delta K d\tau = 0$ شود. نتیجه همان معادله یا دستگاه اویلر است فقط به جای I تابع k قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} = 0 \quad (10-18)$$

به نظر می‌رسد که در رابطه $\int \left(\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial K}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0$ دیگر δy مقدار دلخواهی نیست که برای صفر کردن انتگرال (۱۰-۱۳) الزامی باشد. یا به بیان دیگر δy دارای n قید است (n درجه آزادی از دست رفته است)، چرا که باید داشته باشیم:

$$\int I_i d\tau = c_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10-19)$$

اما چون ضرایب λ دلخواه هستند این اشکال مرتفع می‌شود و اکسترمالها از حل معادله (۱۰-۱۳) حاصل می‌شوند. در این صورت گذشته از ثابتهای انتگرال گیری، n پارامتر دیگر λ_i نیز ظاهر می‌شود که این ضرایب، با توجه به قیدها مشخص می‌شوند. اساساً این روش به روش ضرایب نامعین لاگرانژ موسوم است.

در حالت n بعدی تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در نظر می‌گیریم. شرایط جانبی بین $N < n$ متغیر به ترتیب زیر وجود دارد:

$$\phi_i(x_1, \dots, x_N) = C, \text{ یا } 0 \quad N < n \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20-10)$$

بنابراین به کمک روش صریح یا روش ضمنی (Explicit or implicit method) می‌توان N را حذف کرد و اکستریم f را برحسب تابع $(n-N)$ متغیر باقیمانده به دست آورد.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (21-10)$$

با حل N معادله ϕ_i و حذف N متغیر در رابطه بالا شرط اکستریم شدن را می‌نویسیم (ضرایب dx_i برای این $n-N$ متغیر صفر می‌شود).

روش مناسب دیگر چنانچه گفته شد، روش ضرایب نامعین لاگرانژ است. بدین منظور تابع کمکی زیر را وارد می‌کنیم.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_n \phi_N \quad (22-10)$$

λ_i ضرایب لاگرانژ نام دارند و پارامترهای ناشناخته‌ای هستند که باید معین شوند. بنابراین شرط اکستریم را می‌نویسیم:

$$dF = df + \sum_{i=1}^N \lambda_i d\phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j \quad (23-10)$$

برای اینکه این روش را بهتر بشناسیم آن را در مورد تابع سه متغیری $f(x_1, x_2, x_3)$ با دو شرط قیدی ϕ_1, ϕ_2 به کار می‌بندیم. تابع کمکی لاگرانژ چنین است:

$$F = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$$

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \right) dx_3 = 0$$

در نتیجه هر پراتز در عبارت بالا برابر صفر می‌شود، یعنی دستگاه سه معادله خطی همگن با ضریبهای $\lambda_2, \lambda_1, 1$ خواهیم داشت. چنانچه این ضرایب را به عنوان متغیرهای مجهول دستگاه به کار ببریم دترمینان ضرایب مجهول باید صفر شود تا پاسخهای غیربدیهی مخالف صفر داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (10-24)$$

با این دستگاه معادله و معادلات $\phi_1 = \phi_2 = 0$ سه معادله خواهیم داشت که (x_1, x_2, x_3) مربوط به نقطه اکسترمم را به دست می‌دهد.

مثال ۱۰-۹. بر منحنی $y^2 = 4x$ نقطه‌ای را بیابید که نزدیکترین نقطه به $(0, 1)$ باشد.

حل:

اگر نقطه مجهول را (x, y) بگیریم، تابع زیر را می‌نیم:

$$f = (x - 1)^2 + y^2$$

با شرط جانبی $\phi = y^2 - 4x = 0$ ، روش صریح چنین می‌دهد:

$$y^2 = 4x \Rightarrow f = (x - 1)^2 + y^2 = (x - 1)^2 + 4x$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 2(x - 1) + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$$

که پاسخ قابل قبولی نیست زیرا چنین نقطه‌ای روی منحنی $\phi = y^2 - 4x = 0$ قرار ندارد. عیب این روش فعلاً این است که در انتخاب x به عنوان متغیر مناسب اشتباه کرده‌ایم. چنانچه x را از معادله حذف می‌کردیم نتیجه درست به دست می‌آمد.

اکنون روش ضرایب نامعین لاگرانژ را به کار می‌بریم:

$$F = f + \lambda \phi = (x - 1)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - 4x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2(x - 1) - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

اگر $\lambda = -1$ را انتخاب کنیم نتیجه $x = -1$ حاصل می‌شود که قابل قبول نیست. چنانچه

$y = 0$ باشد، از $\phi = y^2 - 4x = 0$ خواهیم داشت: $x = 0$ بنابراین پاسخ درست نقطه

$$(0, 0) \text{ است. در ضمن از معادله اول } \frac{\partial F}{\partial X} = 0 \text{ داریم: } 2(-1) - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2}$$

چنانچه مستقیماً معادله اوایلر را حل کنیم (با انتخاب x به عنوان متغیر مستقل)، همان پاسخ

$\lambda = -1, y = 0$ نتیجه می‌شود و بقیه مسئله مانند روش فوق ادامه می‌یابد.

مثال ۱۰-۱۰. خم راست بسته‌ای را بیابید که با معلوم بودن محیطش سطح درون آن ماکزیمم

باشد (مسئله isoperimetric).

حل -

الف- دستگاه مختصات دکارتی: طول منحنی دو بعدی را a می‌گیریم.

$$\phi = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = a \quad (25-10)$$

$$A = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx) = \frac{1}{2} (xy' - y) dx \quad (26-10)$$

شرط لازم برای صفر شدن عبارت تابعی $K = I + \lambda \phi$ را از روی معادله اوایلر می‌نویسیم:

$$K = \frac{1}{2} (xy' - y) + \lambda (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(K - y' \frac{\partial K}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} y' - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (xy' - y) + \lambda (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \right] - y' \left[\frac{1}{2} x + \frac{\lambda y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y' - \frac{d}{dx} \left[\frac{-1}{2} y + \lambda \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

$$\Rightarrow -y + c_1 = \frac{\lambda}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow (y - c_1)^2 = \frac{\lambda^2}{1 + y'^2}$$

$$\Rightarrow +y'^2 = \frac{\lambda^2 - (y - c_1)^2}{(y - c_1)^2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - c_1)^2}}{y - c_1}$$

$$\Rightarrow (x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2 \quad (27-10)$$

c_2, c_1 ثابتهای انتگرال گیری هستند. این معادله یک دایره است با شعاع λ و با شرط عبور دایره از دو نقطه معلوم یا یک یا نقطه و مماس بر خط داده شده ضرایب c_2, c_1 تعیین می‌شوند. همچنین از اینکه طول دایره مقدار مشخصی است (یعنی محیط $a = 2\pi\lambda$ است) پارامتر λ به دست می‌آید. این مسئله را از معادله اول اویلر (۱۰-۳) نیز می‌توان حل کرد:

ب- دستگاه مختصات قطبی:

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \text{مساحت}$$

$$P = \int_0^{2\pi} (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} d\theta = \text{const} = \text{محیط}$$

$$K = \frac{1}{2} r^2 + \lambda (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}$$

و از معادله اویلر چنین نتیجه می‌شود.

$$\frac{\partial K}{\partial r} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial K}{\partial r'} \right) = 0$$

$$r + \lambda r (r^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{d}{d\theta} [\lambda r' (r^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}}] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{rr'' - 2r'r'^2 + r'^4}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda} \quad (28-10)$$

طرف چپ این رابطه نمایش خمیدگی خم مسیر است و چون λ ثابت است پس اکستریمال خمی است با انحنای ثابت $\rho = \lambda$. یعنی مسیر دایره‌ای است با محیط داده شده.

مثال ۱۰-۱۱. ثابت کنید بین رویه‌های دواری که سطح آنها ثابت است کره دارای بیشترین حجم است.

حل -

$$S = 2\pi \int y ds = 2\pi \int_a^b y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \text{const.}$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad ; \quad K = y^2 + \lambda y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

و از معادله اویلر چنین نتیجه می‌شود:

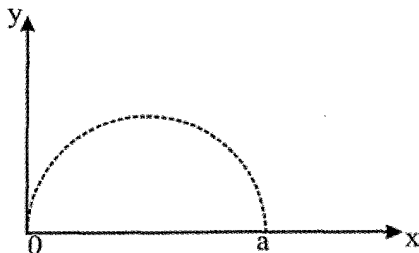
$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(K - y' \frac{\partial K}{\partial y'} \right) = 0$$

$$K - y' \frac{\partial K}{\partial y'} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y^2 + \lambda y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda y y' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y^2 + \lambda y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

اگر مسیر اکستریمال را مطابق شکل بگیریم ثابت انتگرال‌گیری صفر می‌شود، زیرا $y(0) = y(a) = 0$ ، بنابراین چه y' محدود باشد و چه نامحدود، با فرض $y = 0$ ، مقدار جمله دوم عبارت فوق و در نتیجه مقدار ثابت صفر می‌شود.



$$\forall y' \Rightarrow x = 0, y = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$y^{\prime 2} + \lambda y(1 + y^{\prime 2})^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + y^{\prime 2}}} \Rightarrow y' = \frac{1}{y} \sqrt{\lambda^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = -\sqrt{\lambda^2 - y^2} \Rightarrow (x - x_0)^2 + y^2 = \lambda^2$$

یعنی خم مولد رویه دوار، دایره‌ای است که مرکز آن روی محور x ها و شعاع آن λ است (یعنی شعاع کره‌ای که سطح آن داده شده است).

مثال ۱۰-۱۲. ریسمانی یکنواخت به جرم واحد طول m بین دو نقطه تکیه‌گاه از $X = 0$ تا $X = S$ تحت اثر کشش ثابت k کشیده می‌شود. حرکت ریسمان را بررسی کنید.

حل -

اگر ریسمان در یک صفحه با دامنه $u(x,t)$ نوسانهای کوچک انجام دهد می‌توان نشان داد، چنانچه انحراف u کوچک باشد، انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل V به شکل زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^S \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad ; \quad V = \frac{A}{2} \int_0^S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (10-29)$$

اصل هامیلتون می‌گوید:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^S \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{k}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt = 0$$

$$I = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{k}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

طبق رابطه (۱۰-۱۵) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial u'_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial I}{\partial u'_x} \right) = 0$$

که در آن $u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u'_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ است. آنگاه،

$$-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۳۰-۱۰)$$

بطوری که $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است. این معادله انتشار موج در یک بعد است که حل آن را قبلاً شناخته‌ایم و استخراج این معادله را در مورد ریسمان کشیده در درس موج یا آکوستیک به طریقی دشوارتر یافته بودیم.

مثال ۱۰-۱۳. حجم بزرگترین مکعب مستطیلی را بیابید که بتوانیم درون بیضوی زیر جای دهیم، به طوری که یالهایش موازی محورهای مختصات باشد.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حل -

روش ضریب‌های نامعین لاگرانژ را به کار می‌بندیم. منظور ماکزیمم کردن حجم جعبه

$$V(x, y, z) = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz$$

است به طوری که در شرط زیر صدق کند:

$$\phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

این شرط معرف این نکته است که گوشه‌های جعبه بر بیضوی قرار می‌گیرند. در ضمن با به کار بردن معادله بیضوی به صورت بالا شرط موازی بودن یالهای مکعب با محورهای مختصات تأمین می‌شود.

$$F = V + \lambda \phi = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

معادله $dF = 0$ را می‌نویسیم. نتیجه آن به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda yz + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda xz + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda xy + \lambda \frac{2z}{c^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = -2\lambda \frac{x^2}{a^2} \\ V = -2\lambda \frac{y^2}{b^2} \\ V = -2\lambda \frac{z^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

و به همین ترتیب

$$V_{\max} = \lambda xyz = \frac{\lambda \sqrt{3}}{9} abc$$

و در نتیجه

مثال ۱۰-۱۴. منحنی‌ای را بیابید که دارای طول $2L$ باشد و نقاط $(a,b), (-a,b)$ را به هم متصل می‌کند، در ضمن مرکز ثقل آن در پایین‌ترین وضعیت ممکن قرار داشته باشد.

حل -

مختصه y مرکز ثقل منحنی مورد نظر به کمک رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{\int_{x=-a}^{x=a} y dx}{\int_{x=-a}^{x=a} ds} = \frac{1}{2L} \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx$$

معادله قید $\int_{x=-a}^{x=a} ds = 2L$ است. بنابراین با وارد کردن ضریب لاگرانژ به شکل $\frac{\rho}{2L} = \lambda$

انتگرال زیر را می‌نیمیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2L} \int_{-a}^a \left[y \sqrt{1+y'^2} + \rho \sqrt{1+y'^2} \right] dx$$

در این مورد، از آنجا که I شامل x نیست، از شکل دوم معادله اویلر استفاده می‌کنیم:

$$(y + \rho) \sqrt{1 + y'^2} - \frac{(y + \rho) y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

$$\frac{y + \rho}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{(y + \rho)^2 - c^2}}{c}$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری داریم:

$$\frac{dy}{\sqrt{(y + \rho)^2 - c^2}} = \frac{dx}{c}$$

$$\cosh^{-1} \frac{y + \rho}{c} = \frac{x}{c} + k \Rightarrow y + \rho = c \cosh \left(\frac{x}{c} + k \right)$$

روشن است که منحنی مورد نظر، باید نسبت به محور y متقارن باشد بنابراین $k = 0$ می‌شود.

$$y + \rho = c \cosh \frac{x}{c}$$

علاوه بر این، از آنجا که منحنی از نقطه (a,b) می‌گذرد، باید داشته باشیم:

$$\rho = c \cosh \frac{a}{c} - b$$

و منحنی باید دارای طول $2L$ نیز باشد. پس:

$$\int_{x=-a}^{x=a} ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{c}} dx = \int_{-a}^a \cosh \frac{x}{c} dx = 2L$$

$$c \sinh \frac{x}{c} \Big|_{-a}^a = 2c \sinh \frac{a}{c} = 2L$$

وقتی c از این معادله پیدا شود (به کمک عملیات محاسباتی تقریبی)، اندازه ρ را می‌توان یافت و

معادله منحنی خواسته شده به دست خواهد آمد. بویژه:

$$\rho = c \cosh \frac{a}{c} - b = c \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{a}{c}} - b = \sqrt{c^2 + L^2} - b$$

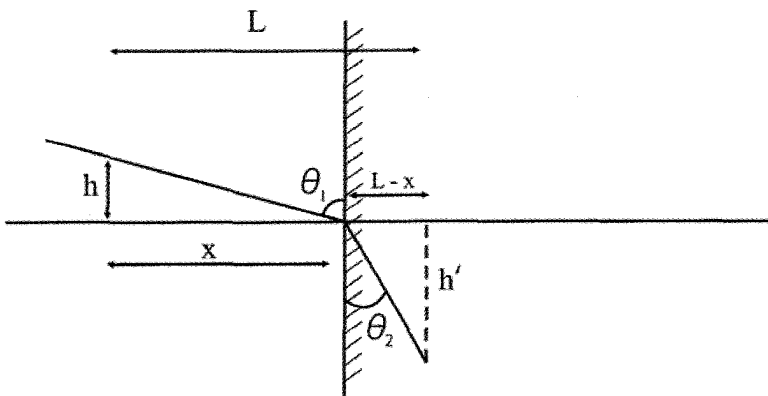
و نهایتاً،

$$y = c \cosh \frac{x}{a} + b - \sqrt{c^2 + L^2} \quad (۳۱-۱۰)$$

مثال ۱۰-۱۵. پرتو نور در یک محیط همگن مسیر خط راست را می‌پیماید، سپس در فصل مشترک با یک محیط دیگر شکسته می‌شود و مسیر مستقیم‌الخط دیگری را در این محیط طی می‌کند. با استفاده از اصل فرما در اپتیک، قانون شکست اسنل (Snell) را استخراج کنید:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (۳۲-۱۰)$$

حل -



$$\frac{n_1 \sqrt{h^2 + x^2}}{c} + \frac{n_2 \sqrt{h'^2 + (L-x)^2}}{c} = T(x)$$

که در عبارت فوق $T(x)$ زمان پیمودن مسافت لازم است.

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{n_1 x}{\sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{n_2 (L-x)}{\sqrt{h'^2 + (L-x)^2}} = 0$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

و در نتیجه مطابق شکل،

مثال ۱۰-۱۶. آونگ کروی شامل جرمی است که به انتهای سیمی به طور ℓ بسته شده و می‌تواند آزادانه زاویه قطبی θ و زاویه سمتی ϕ خود را تغییر دهد.

الف- لاگرانژی این سیستم فیزیکی را بنویسید؟

ب- معادله‌های لاگرانژ حرکت را پیدا کنید؟

حل-

الف-

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

$$V = -mg\ell \cos \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + mg\ell \cos \theta \quad (10-33)$$

ب-

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

$$-mg\ell \sin \theta + m \ell^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt} (m \ell^2 \dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0$$

$$0 - \frac{d}{dt} (m \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0$$

$$m \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{const.}$$

مثال ۱۰-۱۷. معادله موج شرودینگر:

به عنوان نمونه‌ای از کمپتهای مقید، معادله اویلر را برای مسئله مکانیک کوانتومی زیر بکار

می‌بریم:

$$\delta \langle H \rangle = \delta \iiint \psi^* (x, y, z) H \psi (x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (33-10)$$

با این قید که:

$$\iiint \psi^* \psi dx dy dz = 1 \quad (34-10)$$

معادله (۳۳-۱۰) گزاره پایا بودن انرژی سیستم به شمار می‌آید، که در آن H یعنی هامیلتونی کوانتومی برای ذره‌ای به جرم m عملگری دیفرانسیلی است.

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \quad (35-10)$$

معادله (۳۴-۱۰) یعنی معادله قید، عبارت است از شرطی که بنابر آن تنها باید یک ذره داشته باشیم، ψ ویژه تابع متداول، یک متغیر وابسته و ψ^* همیوگ (مزدوج) مختلط آن است که با آن به صورت متغیر وابسته دوم رفتار می‌کنیم. عبارت زیر انتگرال معادله (۳۳-۱۰) شامل مشتق‌های دوم است، که می‌توان آنها را با مشتق‌گیری جزء به جزء به مشتق اول تبدیل کرد:

$$\int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big| - \int \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \quad (36-10)$$

می‌توان یا شرایط مرزی دوره‌ای را در نظر گرفت (مانند نظریه اشتورم-لیوویل) و یا آنکه حجم انتگرال‌گیری را چندان بزرگ گرفت که ψ^* , ψ در مرز قویاً صفر شوند. آنگاه جزء انتگرال‌گیری شده صفر می‌شود و می‌توان معادله (۳۳-۱۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta \iiint \left[\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi + V \psi^* \psi \right] dx dy dz = 0$$

بدین ترتیب می‌توان تابع جدید K را با رعایت قید به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (\psi_x^* \psi_x + \psi_y^* \psi_y + \psi_z^* \psi_z) + V \psi^* \psi - \lambda \psi^* \psi \end{aligned} \quad (37-10)$$

در اینجا نیز شاخص پایین x برای مشخص کردن $\frac{\partial}{\partial x}$ است. معادله اوپلر را بکار می‌بریم: متغیر وابسته در اینجا $\psi^* = y_1$ است. در اینجا حالت یک تابع وابسته و چند متغیر مستقل را به کار می‌گیریم (معادله ۱۰-۱۵):

$$\frac{\partial K}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial \psi_x^*} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial \psi_y^*} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial K}{\partial \psi_z^*} = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$V\psi - \lambda\psi - \frac{\hbar^2}{2m} (\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}) = 0$$

یا

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = \lambda\psi \quad (38-10)$$

با مراجعه به معادله (۱۰-۳۵) می‌توانیم تشخیص دهیم که از نظر فیزیکی، انرژی سیستم کوانتومی است و λ معرف مقادیر ویژه انرژی سیستم است. با این تعبیر، معادله (۱۰-۳۸) همان معادله موج شرودینگر است.

۱۰-۸. مسائل برگزیده برای حل.

۱- نشان دهید که رابطه (۱۷-۳) معادل رابطه (۱۷-۲) است. زمینه کاربرد مناسب هر کدام را بیان کنید.

۲- نشان دهید که شرط پایدار شدن $\int_{x_1}^{x_2} I(x, y) dx$ یعنی معادله اوپلر-لاگرانژ، الف- به این نتیجه منجر می‌شود که $I(x, y)$ مستقل از y است.

ب- این شرط هیچ اطلاعاتی از وابستگی $I(x, y)$ به x به دست نمی‌دهد.

۳- معادله اوپلر را برای تابع زیر بنویسید:

$$f(x, y, y') = f_1(x, y) + f_2(x, y)y'$$

۴- معادله اوپلر را برای رابطه زیر بنویسید و نتیجه‌گیری فیزیکی کنید:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - V(\vec{r})$$

عبارت فوق تابع لاگرانژی برای نقطه مادی در مکانیک نسبیتی است.

۵- اگر $f=y(x)$ باشد، اکسترممی وجود ندارد.

۶- اصل فرما در اپتیک می‌گوید مسیر نور $y(x)$ چنان است که انتگرال راه نوری می‌نیمم

است:

$$\delta \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} n(x, y) ds = 0$$

که در آن n ضریب شکست محیط، و nds راه نوری است. در مسیری رابطه‌های زیر را داریم:

$$x_1 = -x_2 = -1$$

$$y_1 = -y_2 = 1, n = e^y$$

الف- مسیر پیموده شده مطلوب را بیابید.

ب- چنانچه $y > y_0; n = a(y - y_0)$ باشد، با شرایط فرض الف مسیر مطلوب را پیدا کنید.

۷- ذره‌ای به جرم m در محیطی بدون اصطکاک تحت تأثیر نیروی وزنش بر مسیر سیکلوئیدی

قائم پایین می‌آید. معادله سیکلوئید عبارت است از

$$\begin{cases} x = c(\theta + \sin \theta) \\ y = c(1 - \cos \theta) \end{cases} \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

نشان دهید که زمان سقوط مستقل از مختصات نقطه مبدأ حرکت است (به بیان دیگر، دوره نوسان

نوسانگری که تحت اثر نیروی وزنش بر سیکلوئیدی قائم نوسان می‌کند مستقل از دامنه حرکت

است). این مسئله را نخستین بار هویگنس اندکی پیش از آنکه برنولی کار اساسی خود را درباره

موضوع برایشیستو کران به چاپ برساند (۱۶۹۷ میلادی) کشف کرد. از اینرو سیکلوئید را تاتو کران

(tautochrone) نام نهادند.

۸- ماکزیمم مقدار $A=xy$ را چنان بیابید که همواره داشته باشیم $x + y = 1$. مفهوم دیگر

مسئله این است:

در میان تمام منحنی‌های دو بعدی با محیط معلوم کدام شکل بیشترین مساحت ممکن را

داراست؟

۹- حجم $V=xyz$ را در ناحیه $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ چنان ماکزیمم کنید که دو معادله قید به صورت زیر درباره آن برقرار باشد:

$$xy + yz + zx = 1; x + y + z = 3$$

۱۰- اکسترمم عبارتهای زیر را با در نظر گرفتن قیدهای مربوطه حساب کنید:

الف- ماکزیمم عبارت $I = x^2 + y^2$ تحت قید $x + y = 1$.

ب- بزرگترین مکعب مستطیل محصور در کره داده شده؛ مثلاً $V=XYZ$ را چنان ماکزیمم کنید که مختصات (x,y,z) در معادله کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ صدق کند.

پ- ماکزیمم عبارت $I = x^2 + 2y^2 - z^2$ را با در نظر گرفتن قید $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ محاسبه کنید.

۱۱- منحنی $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ را چنان بیابید که $\int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2gy) dt$ می نیمم شود. g

ضریب ثابت است و $x(1) = a, y(1) = 0, x(0) = y(0) = 0$. این مسئله یک پرتابی است که با زمان پرواز معلوم به هدف معینی برخورد می کند.

۱۲- در مختصات قطبی، لاگرانژین حرکت سیاره‌ای از عبارت زیر به دست می آید:

$$T - V = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{r}$$

که در آن k ثابت است. معادلات دیفرانسیل مسیر را بیابید.

۱۳- کوتاهترین فاصله از نقطه $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ را تا کره زیر را بیابید.

$$\phi = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 - 1 = 0$$

۱۴- ریسمان کاملاً انعطاف پذیر و یکنواخت به طول $2a$ و جرم ثابت واحد طول ρ بین دو نقطه ثابت $(x, y) = (0, 0)$ و $(2b, 0)$ آویزان است $(b < a)$. y به طور عمودی به سمت بالا اندازه گیری می شود. منحنی $y=y(x)$ را چنان بیابید که انرژی پتانسیل

$$V = \rho g \int_0^b (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} y dx \quad \text{تحت قید } \int_0^b (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = 0 \text{ می نیمم شود.}$$

۱۵- ذره‌ای به جرم m درون جعبه‌ای مکعب مستطیل شکل به ابعاد a, b, c قرار دارد از مکانیک

$$\text{کوانتومی می دانیم که انرژی حالت زمینه ذره از رابطه } E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

دست می آید. شکل جعبه را طوری بیابید که انرژی E می نیمم باشد به شرطی که حجم جعبه همچنان ثابت بماند.

۱۶- چگالی لاگرانژی برای یک ذره در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی بدین صورت است:

$$L = \frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla} \psi \cdot \bar{\nabla} \psi^* + V \psi \psi^* - \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*)$$

که در آن $\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ است. نشان دهید اگر ψ و ψ^* را مستقل از یکدیگر بگیریم، معادله

شروdingر وابسته به زمان و معادله مزدوج آن به دست می آید، یعنی:

$$H\psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

بخش (۱۰-۱۸)، انتگرال ایستا و با رعایت قیود، حل کنید. همچنین مسئله را برای حالت مستقل از زمان بررسی کرده و معادله شروdingر مستقل از زمان را نتیجه بگیرید.

$$17- \text{ برای یک عدسی نازک به فاصله کانونی } f \text{ داریم } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \text{ که در آن } q, p \text{ به ترتیب}$$

فاصله‌های جسم و تصویر تا عدسی است. می نیمم فاصله جسم تا تصویر $(p+q)$ را در یک عدسی f ثابت) بیابید. q, p را مثبت بگیرید.

۱۸- نقطه‌ای در صفحه چنان حرکت می کند که پتانسیل فقط تابع فاصله r نقطه از مبدأ

مختصات است $[V(\vec{r}) = V(r)]$. انرژی جنبشی و لاگرانژین را در مختصات قطبی بنویسید و

سپس به کمک معادلات اولر لاگرانژ، دو معادله حرکت را بیابید.

۱۹- تابع لاگرانژین برای ذره‌ای به جرم m و بار q در میدان الکترومغناطیسی، که با پتانسیل

اسکالر ϕ و پتانسیل برداری \vec{A} تعریف می‌شود، عبارت است از

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v}$$

v سرعت حرکت ذره در میدان است. معادله حرکت را برای این ذره بیابید.

$$\frac{dA_j}{dt} = \frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

راهنمایی:

۲۰- می‌نیمم انتگرال زیر را پیدا کنید:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x(1-x)} dx, x(0) = 1, \dot{x}(0) = \frac{1}{2}$$

۲۱- ذره‌ای به جرم m بر بالای نیمکره‌ای هموار قرار گرفته است و از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. نیروی قید را بیابید و زاویه‌ای را تعیین کنید که در آن زاویه جسم، سطح را ترک می‌کند. مسئله را از روش ضرایب نامعین لاگرانژ حل کنید.

۲۲- اصل وردشی مناسبی را در مکانیک کوانتومی به کار برید بطوریکه با در نظر گرفتن یک قید و محدودیت فیزیکی در سیستم کوانتومی مورد مطالعه در باب کار بردن معادله اوپلر- لاگرانژ بتوانید معادله شرودینگر مستقل از زمان را نتیجه بگیرید.

فصل یازدهم

مکانیک نیوتنی به شیوه لاگرانژ – معادلات لاگرانژ

«... در تبدیل نظریه مکانیک به فرمول عمومی، و هنر حل کردن مسائل وابسته به آن، و شیوه‌هایی که در آن توضیح می‌دهم، هیچ استدلال ساختاری یا هندسی یا مکانیکی نیاز ندارد، بلکه فقط به عملیاتی نیاز هست که جزء جدا نشدنی فرآیندی منظم و یکنواخت است. آنهایی که با لذت به آنالیز عشق می‌ورزند، می‌بینند که مکانیک شاخه جدیدی از آن می‌شود و از من به خاطر گسترش این حوزه سپاسگزار می‌شوند.»

«ژوزف لوئی لاگرانژ، ۱۷۸۸»

در این فصل به بررسی و استخراج معادلات لاگرانژ می‌پردازیم. در این رابطه می‌توان مباحث این فصل را در فصل‌های پنجم و ششم کتاب ماریون و یا فصل دهم کتاب فاولز مشاهده کرد. کتاب سایمون در فصل نهم به معادلات لاگرانژ و معادلات هامیلتون پرداخته است. کتاب گلدشتین در فصل‌های دوم و هشتم مجموعه مباحث مربوط به معادلات لاگرانژ و هامیلتون را مطرح می‌کند.

۱-۱۱. مختصات تعمیم یافته

برای مشخص کردن پیکربندی سیستم N ذره‌ای به طور کامل به $3N$ مختصه نیاز داریم. اما اگر سیستم دستخوش محدودیت‌هایی باشد، تعداد مختصات سیستم از $3N$ ذره کمتر می‌شود. به توابعی مانند q_j ؛ $j = 1, 2, 3, \dots, N$ که مختصات یک سیستم هستند مختصات تعمیم یافته می‌گوییم. چنانچه هر مختصه از سایر مختصات مستقل باشد و بتواند مستقل از آنها تغییر کند به آن سیستم هولونومیک می‌گوییم. در این مورد تعداد مختصات n همان تعداد درجات آزادی است. در مورد سیستم تک ذره می‌توان مختصات دکارتی را به صورت توابعی از مختصات تعمیم یافته بیان کرد:

یک درجه آزادی - حرکت روی منحنی $x = x(q)$

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases} \quad \text{دو درجه آزادی - حرکت در صفحه}$$

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad \text{سه درجه آزادی - حرکت در فضا}$$

در حالت کلی معادلات تبدیل بین دو دسته مختصات دکارتی و تعمیم یافته عمومی چنین است:

$$x_i = x_i(q_j, t) \quad i, j = 1, 2, \dots, 3N \quad (1-11)$$

$$q_i = q_i(x_j, y_j, z_j, t) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2-11)$$

فرض می‌کنیم q ها از مقادیر اولیه (q_1, q_2, \dots) به مقادیر نزدیک یعنی

$(q_1 + \delta q_1, q_2, \delta q_2, \dots)$ تغییر کنند. تغییرات مختصات دکارتی را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots \\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots \end{cases} \quad (3-11)$$

گاه برای آسان بودن کار، توابع دکارتی X, Y, Z, \dots را با X_1, X_2, X_3, \dots نمایش می‌دهیم. در این صورت روابط فوق چنین می‌شوند:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad (4-11)$$

و در نهایت به شکل برداری

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (5-11)$$

مثال ۱۱-۱. در دستگاه مختصات متحرک دو بعدی داریم:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta + \omega t) \\ y = r \sin(\theta + \omega t) \end{cases}$$

شرط لازم برای پایداری روابط تبدیل این است که ژاکوبین تبدیل بین مختصات مخالف صفر باشد:

$$J = \begin{vmatrix} x_1 & q_1 & q_2 & \dots & q_{3N} \\ y_1 & & & & \\ z_1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ x_N & & & & \\ y_N & & & & \\ z_N & & & & \end{vmatrix} = \frac{\partial(q_1, q_2, \dots, q_{3N})}{\partial(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)} \neq 0 \quad (6-11)$$

$$x_1 = x_1(q_1, \dots, q_{3N}, t)$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} dq_k$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_1}{\partial t}$$

مثلا در مثال (۱-۱۱) داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos(\omega t + \theta) - r\dot{\theta} \sin(\omega t + \theta) - r\omega \sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y} = \dot{r} \sin(\omega t + \theta) + r\dot{\theta} \cos(\omega t + \theta) + r\omega \cos(\omega t + \theta) \end{cases} \quad (7-11)$$

انرژی جنبشی سیستم چنین است:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{k=1}^{rN} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right]^2 + \\ &\left[\sum_{k=1}^{rN} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{rN} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right]^2 \end{aligned} \quad (8-11)$$

$$= \sum_{k=1}^{rN} \sum_{l=1}^{rN} \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{rN} B_k \dot{q}_k + T_0$$

که در آن،

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right) \quad (9-11)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) \quad (10-11)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (11-11)$$

در مورد دستگاه‌های متعامد فقط A_{kk} ($k=1$) وجود دارد. همچنین در مورد دستگاه‌های ثابت، دو جمله T_0 و B_k صفر می‌شوند؛ یعنی وقتی دستگاه مختصات تعمیم یافته با زمان تغییر نکند. به عبارت دیگر وقتی سیستم از نوع Scleronomic است، به طوری که زمان به طور صریح در معادلات تبدیل وارد نمی‌شود، آنگاه مشتقات جزئی نسبت به زمان حذف می‌شوند. در این صورت انرژی جنبشی به صورت دو مجذوری ظاهر می‌شود:

$$T = \sum_{l,k} \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l = \sum_{k,l} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (12-11)$$

با توجه به ویژگی $\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{ij}$ ، اکنون از معادله فوق نسبت به \dot{q}_j مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k a_{jk} \dot{q}_k + \sum_l a_{lj} \dot{q}_l$$

نتیجه را در \dot{q}_j ضرب کرده و روی j جمع می‌بندیم:

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k,j} a_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j,l} a_{lj} \dot{q}_l \dot{q}_j$$

در این حالت تمام اندیس‌ها گنگ هستند و در نتیجه جملات سمت راست هر دو با هم برابرند. بنابراین

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2 \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_j = 2T \quad (11-13)$$

این نتیجه مهم حالت خاصی از قضیه اوپلر است که بیان می‌دارد: اگر تابعی همگن از y_k از مرتبه n باشد، آنگاه

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = nf \quad (11-14)$$

در قضیه ویریال از این نتیجه استفاده می‌شود.^۱ در مثال (۱۱-۱)، معمولاً دستگاه (r, θ) ، خود در زمان ثابت است و جسم است که نسبت به این دستگاه در حرکت است. یعنی در هر لحظه از زمان $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ برقرار است. یا مثلاً در مورد حرکت دورانی زمین که با ω ثابت صورت می‌گیرد.

۱- فرض می‌کنیم $f(x, y)$ تابعی همگن از مرتبه n از متغیرهای x و y به صورت زیر باشد (یعنی $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$):
 $f(x, y) = x^n + x^m y^{n-m} + y^n$

آنگاه

$$\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x[nx^{n-1} + mx^{m-1}y^{n-m}] + y[(n-m)x^m y^{n-m-1} + ny^{n-1}] = nf(x, y)$$

در شیوه دیگر اثبات قضیه همگنی چنین عمل می‌کنیم: با انتخاب $\lambda z = w, \lambda y = v, \lambda x = u$ خواهیم داشت:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} y + \frac{\partial f}{\partial w} z = n\lambda^{n-1} f(x, y, z)$$

اکنون $\lambda = 1$ می‌گیریم، آنگاه

$$x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$$

مثال (۲-۱۱). در حرکت دو بعدی، انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (۱۵-۱۱)$$

برای اثبات از معادلات تبدیل در دستگاه مختصات دکارتی و قطبی (ثابت در زمان) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial y} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

در نتیجه

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

در مورد دستگاه‌های غیرمتعامد خواهیم داشت:

$$\vec{V} = \dot{u}\vec{a} + \dot{w}\vec{b}$$

$$T = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} m[\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{u}\dot{w}\vec{a}\cdot\vec{b} \cos(a, b)]$$

و در مورد دستگاه مرکز جرم و حرکت نسبی، داریم:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = \frac{1}{2} M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (۱۶-۱۱)$$

که در آن M جرم کل دستگاه و μ جرم کاهش یافته است.

۲-۱۱. تعریف اندازه حرکت تعمیم یافته

اکنون به روابط بالا کمی دقیق می‌شویم. در مورد هر مولفه می‌توان روابطی شبیه رابطه زیر نوشت:

$$P_{x_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad P_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad P_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \quad \dots$$

پس به نظر می‌رسد که بتوان در حالت کلی به عنوان تعریف اندازه حرکت تعمیم یافته P را چنین نوشت:

$$P_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (11-17)$$

این رابطه را از نگاهی دقیقتر، با تعریف متریک فضا، به دست می‌آوریم: در فضای اقلیدسی با متریک g_{ij} و بردارهای پایه ثابت \hat{e}_i (با ویژگی $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = g_{ij}$)، معادله نیوتن چنین نوشته می‌شود:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \quad ; \quad g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

و برای انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2} m V^i V^j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \frac{1}{2} m V^i V^j g_{ij} \quad (11-18)$$

که در آن از تعریف $\vec{V} = V^i \hat{e}_i$ استفاده می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial V^k} = \frac{1}{2} m g_{ij} (\delta_k^i V^j + \delta_k^j V^i) = \frac{1}{2} m g_{kj} V^j + \frac{1}{2} m g_{ik} V^j$$

از طرفی می‌دانیم $g_{kj} = g_{jk}$. بنابراین

$$\frac{\partial T}{\partial V^k} = \frac{1}{2} m g_{kj} V^j + \frac{1}{2} m g_{jk} V^j = m g_{jk} V^j \quad (11-19)$$

چنانچه از تعریف $V^j g_{jk} = V^j \delta_{jk} = V_k$ استفاده کنیم، آنگاه

$$\frac{\partial T}{\partial V^k} = m V_k \quad \text{یا} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = P_k$$

اکنون به رابطه انرژی جنبشی باز می‌گردیم:

$$T = \sum_{k=1}^{rN} \sum_{l=1}^{rN} \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{rN} B_k \dot{q}_k + T_0 \quad (11-20)$$

و در دستگاه متعامد،

$$T = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \frac{1}{2} A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (21-11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^r A_{kl} \dot{q}_l \quad \text{و} \quad (22-11)$$

حال به تعریف نیروی تعمیم یافته می پردازیم. از تعریف کار کمک می گیریم:

$$\delta w = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) \quad (23-11)$$

که در آن

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k, \dots$$

q_i ها می توانند جابجایی های مجازی باشند چرا که تغییر واقعی و حرکت واقعی دستگاه را لزوماً نشان نمی دهند. در مورد دستگاه های مختصات متحرک نیز زمان را ثابت فرض می کنیم و کار را محاسبه می کنیم (اساساً کار مجازی عبارت است از کاری که نیرو در زمان ثابت t انجام می دهد؛ به عبارت دیگر کار نیرو در یک فاصله مجازی است که لزوماً این فاصله نماینده حرکت واقعی دستگاه نیست).

$$\delta w = \sum_{i=1}^N (F_{xi} \delta x_i + \dots) = \sum_{k=1}^r Q_k \delta q_k \quad (24-11)$$

$$\Rightarrow Q_k = \sum_{i=1}^N (F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}) = -\delta V \quad (25-11)$$

بنابراین نیروی تعمیم یافته Q_k به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\delta V = \sum_{i=1}^N (\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^r (\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + \dots)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N \left(F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = -Q_k \end{aligned} \quad (۲۶-۱۱)$$

و یا برحسب نیرو،

$$\Rightarrow Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k} \quad (۲۷-۱۱)$$

به عنوان مثال، دستگاه مختصات قطبی در صفحه را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \equiv F_r \hat{n} + F_\theta \hat{l}$$

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = F_r \quad (۲۸-۱۱) \text{ نیرو}$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r F_x \sin \theta + r F_y \cos \theta = r F_\theta \quad (۲۹-۱۱) \text{ گشتاور}$$

توجه کنید لزومی ندارد که q ها حتماً بعد طول داشته باشند، از اینرو Q ها نیز لزوماً بعد نیرو ندارند، اما در هر حال $Q_k \delta q_k$ باید همواره بعد کار داشته باشد.

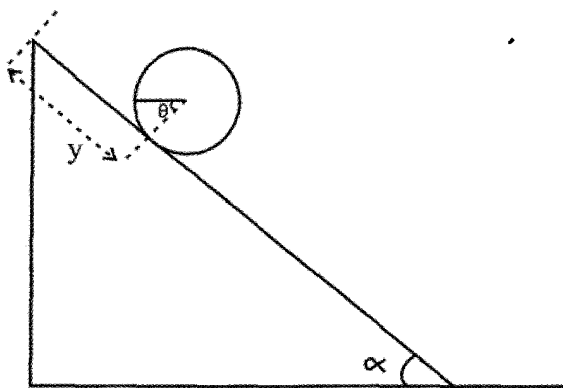
۱۱-۳. دستگاه‌های مقید

دسته مهمی از مسائل مکانیکی که در آنها معادلات لاگرانژ بسیار به کار می‌آیند دستگاه‌های مقید هستند. جسم صلب مثال مناسبی از دستگاه‌های شامل ذرات مقید است. قید محدودیتی برای آزادی حرکت دستگاه ذرات است به صورت شرطی که باید توسط مختصات آنها یا بوسیله جابجائی‌های مجازی در مختصات آنها برقرار شود. مثلاً اصطکاک محدودیتی در حرکت است که به سرعت بستگی دارد.

حرکت دانه تسبیح بر روی سیم، مثال دیگری از دستگاه‌های مقید است. سیم در امتداد منحنی معین در فضا قرار گرفته است و قید ایجاب می‌کند که مکان دانه تسبیح همواره روی این منحنی

قرار گیرد. چون مختصات نقاط واقع بر یک منحنی فضایی در دو معادله (مثلاً معادلات دو سطحی که همدیگر را در امتداد منحنی قطع می‌کنند) صدق می‌کند، دو قید موجود است و ما می‌توانیم مکان دانه تسبیح را به وسیله تنها یک مختصه مشخص کنیم. اگر سیم حرکت کند، قیدی متحرک داریم و تک مختصه ما نسبت به یک دستگاه مقایسه متحرک است.

قیودی که ممکن است به صورت معادله‌ای بیان شوند که مختصات را به هم مربوط کند (و احتمالاً زمان)، و در ضمن کار مجازی آن نیروهای قیدی صفر باشد، قیود هولونومیک نامیده می‌شوند. مثال بالا شامل قید هولونومیک است. به عبارت دیگر قیدهای وابسته به مکان و احتمالاً زمان از نوع قیدهای هولونومیک است. مثلاً برای دیسکی که به شعاع a روی سطح شیب داری با شیب α می‌غلتد و می‌لغزد، وضعیت سیستم با دو مختصه y, θ مشخص می‌شود.



شکل (۱-۱۱)

در مثال عمومی‌تر، دیسکی را با شعاع a در نظر می‌گیریم که در صفحه افقی چنان می‌غلتد که صفحه دیسک همواره قائم باقی بماند. مختصات تعمیم یافته را می‌توان مختصات (x, y) مرکز جرم دیسک و زاویه دوران φ به دور محور دیسک و زاویه θ بین محور دیسک و مثلاً محور x انتخاب کرد. آنگاه، قید موجود در این مسئله چنین است:

$$r = a\varphi \Rightarrow V = a\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = V \sin \theta$$

$$\dot{y} = -V \cos \theta$$

و یا

$$\begin{cases} dx - a \sin \theta d\phi = 0 \\ dy + a \cos \theta d\phi = 0 \end{cases} \quad (30-11)$$

دستگاه فوق انتگرال پذیر نیست و قید مذکور از نوع غیر هولونومیک است.

در حالت کلی، به تعداد راه‌های مستقل که معمولاً برابر با تعداد مختصات مستقل از هم است، درجه آزادی گفته می‌شود. این تعداد از میان تعداد ابعاد فضا با توجه به معادلات قید در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$3n - m = s$$

که در آن n تعداد ذرات در سیستم و 3 بعد فضا (و در نتیجه $3n$ تعداد کل مختصات در فضای سه بعدی) است. m تعداد قیود موجود در سیستم است؛ s نیز درجه آزادی را نشان می‌دهد. در تعریف دیگر درجه آزادی گفته می‌شود که: تعداد شیوه‌های مستقلی که دستگاه مکانیکی می‌تواند بدان شیوه‌ها حرکت کند، بی آنکه هیچ قید تحمیلی از بین برود. به عبارت دیگر درجه آزادی تعداد کمیت‌هایی است که باید مشخص شود تا سرعت تمام ذرات دستگاه برای هر حرکت که قیدها را از بین ببرد تعیین شود. معمولاً برای سیستم‌های هولونومیک تعداد درجات آزادی برابر است با کمترین تعداد مختصات لازم برای مشخص کردن همپیکری دستگاه وقتی مختصاتی حذف شوند که بوسیله قیدها ثابت نگه داشته می‌شوند. مثلاً در غلتش، قیدهای غیر هولونومیک ظاهر می‌شوند. یعنی قیدهایی که تابع صریح زمان نیستند و انتگرال پذیر نیستند. جسم صلب شش درجه آزادی دارد (سه تا انتقالی و سه تا چرخشی). جسم صلب مقید به چرخش به دور یک محور ثابت، یک درجه آزادی دارد.

اکنون به مسئله حرکت دیسک غلتان بر سطح شیبدار بر می‌گردیم و آن را حل می‌کنیم.

لاگرانژین K را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$K = L + \lambda \phi(q) \quad (31-11)$$

λ ضریبی است که قید را به ما می‌دهد و ϕ معرف معادله قید است. معادله لاگرانژ را برای عبارت

تابعی K می‌نویسیم (به بخش ۱۱-۴ مراجعه کنید):

$$\frac{\partial K}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q} (L + \lambda \phi) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (L + \lambda \phi) \right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q}$$

λ در حرکت شیبدار باید اصطکاک را بدهد، زیرا اصطکاک است که در مقابل حرکت مقاومت می‌کند.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgh = mg(1 - y) \sin \alpha$$

$$\begin{cases} L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 - mg(1 - y) \sin \alpha \\ \phi = y - R\theta = 0 \end{cases} \quad (32-11)$$

اگر $q_k = y$ باشد، آنگاه

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

$$mg \sin \alpha + \lambda - \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = 0$$

$$\Rightarrow mg \sin \alpha + \lambda - m\ddot{y} = 0 \quad (33-11)$$

و چنانچه $q_k = \theta$ باشد، در این صورت

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

$$0 + \lambda(-R) - \frac{d}{dt} \left(\frac{mR^2}{2} \dot{\theta} \right) = 0 \Rightarrow -\lambda R = \frac{mR^2}{2} \ddot{\theta} \quad (34-11)$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = mg \sin \theta + \lambda \\ mR\ddot{\theta} + 2\lambda = 0 \\ \ddot{y} - R\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \alpha \\ \ddot{y} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \\ \lambda = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha \end{cases}$$

λ در این مثال از جنس نیرو است. علامت منفی به این علت است که در جهت اصطکاک و مخالف جهت حرکت است. جمله $\frac{1}{3} I \omega^2$ مربوط به غلتش و جمله $\frac{1}{2} m \dot{y}^2$ مربوط به لغزش است. در این مسئله به دلیل وجود جمله غلتش، اصطکاک کمتر از حالت لغزش می‌شود. اگر دیسک بر روی سطح شیبدار فقط بلغزد و غلتش نباشد ($\dot{\theta} = \theta$)، نیروی اصطکاک برابر $\lambda = -mg \sin \alpha$ می‌شود. در کتاب گلدستین (فصل دوم) این مسئله برای حلقه دایره‌ای شکل حل شده است و

$$\lambda = \frac{mg \sin \theta}{2}$$

در می‌آید.

عموماً به سیستم‌هایی که هولونومیک هستند، انتگرال پذیر نیز می‌گویند. دستگاه‌های مکانیکی را بر حسب نوع قیودی که دارا هستند نیز دسته بندی می‌کنند. مثلاً کره‌ای که از بالای یک کره دیگر به پایین می‌غلتد، معرف دستگاهی غیرهولونومیک است. همچنین دستگاهی اسکرونومیک است چرا که زمان به طور صریح در معادلات آن وارد نمی‌شود. اما این سیستمی پایستار است زیرا نیروی موثر، نیروی گرانشی است که مشتق از یک پتانسیل است. در دستگاه‌های غیر هولونومیک، قیدها عموماً تابع سرعت هستند و عملاً نمی‌توان از آنها انتگرال گرفت.

ذره‌ای که بر یک سیم بلند بدون اصطکاک حرکت می‌کند و سیم نیز با سرعت زاویه‌ای ثابت به دور محور افقی می‌چرخد، یک سیستم رئونومیک است زیرا قید به طور صریح شامل زمان است. همچنین سیستمی هولونومیک است زیرا معادله قید از نوع قیدی است که صریحاً شامل زمان است. در ضمن این سیستم نیز یک سیستم پایستار است. در زبان یونانی، دو واژه اسکرونومیک به معنای rigid law (قانون صلب)، و واژه رئونومیک به معنای running law (قانون دوان) و جاری است.

به طور خلاصه انواع قیدهایی که در اینجا مورد بحث قرار گرفت در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

تعداد درجه آزادی	مثال	نوع قید
۲	آونگ کروی	قید هولونومیک (Holonomic)
۱	تسبیح متحرک روی سیم دوار	شامل اسکلرونومیک Scleronomic و رئونومیک Rheonomic
۲	حرکت ذره‌ای که بر یک توپ بولینگ می‌لغزد $r \geq R$	قید غیرهولونومیک nonholonomic از نوع قید نامساوی inequality
۲	سکه‌ای که بر یک سطح شیبدار می‌غلند	حرکت غلتشی rolling motion
؟	مسائل شامل نیروی اصطکاک	اغلب نیروهای وابسته به سرعت

این نکته که بین نیروهای قید و ضریب نامعین لاگرانژ ارتباط برقرار است، تصادفی نیست. برای اثبات وجود این ارتباط در حالت کلی به کتاب مکانیک تحلیلی هند و فینچ (۱۹۹۸)، صفحه ۵۹ مراجعه کنید.

مثال ۱۱-۳. مسئله جسمی را حل می‌کنیم که بدون غلتش بر سطحی شیبدار می‌لغزد.

$$y - x \tan \theta = \phi = 0 \quad \text{حل: قید}$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$K = L + \lambda \phi = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - x \tan \theta)$$

$$q = x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m\ddot{x} - \lambda \tan \theta = 0 \\ -mg + \lambda \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda \tan \theta \\ \lambda = mg + m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\ddot{y} = \ddot{x} \tan \theta \Rightarrow \ddot{x} - \tan \theta (g + \ddot{y}) = -\tan \theta (g + \ddot{x} \tan \theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -g \sin \theta \cos \theta$$

$$\lambda = mg + m\ddot{x} \tan \theta = mg - mg \sin \theta \cos \theta \tan \theta$$

$$= mg - mg \sin^2 \theta = mg \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \lambda = F_y = mg \cos^2 \theta, \quad F_x = -\left(\frac{\lambda}{\cos \theta}\right) \sin \theta = -\lambda \tan \theta$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\lambda^2 \tan^2 \theta + \lambda^2} = \frac{\lambda}{\cos \theta} \quad \text{نیروی قید عمودی}$$

$$= \frac{mg \cos^2 \theta}{\cos \theta} = mg \cos \theta = N$$

مثال ۱۱-۴. به عنوان مثالی از کاربرد ضرایب لاگرانژ در مسائل شامل ترازمندی استاتیک مسئله زیر را مطرح می‌کنیم. فرض می‌کنیم در عرض یک رودخانه به پهنای $2a$ یک زنجیر به عرض $2a < D$ کشیده شده است. (x, y) را به ترتیب مختصات افقی و قائم در نظر می‌گیریم. زنجیر شکل چه منحنی‌یی را باید به خود بگیرد تا انرژی پتانسیل (ناشی از نیروی وزن) می‌نیم شود؟
 حل: اگر زنجیر ساکن باشد، انرژی جنبشی وجود ندارد، از اینرو ماکزیمم لاگرانژین معادل می‌نیم انرژی پتانسیل است. چگالی جرمی زنجیر را ρ فرض می‌کنیم. آنگاه انرژی پتانسیل چنین می‌شود:

$$V = \rho g \int_a^a y ds$$

که در آن $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ طول قوس است. یا به کارگیری ضرایب نامعین لاگرانژ برای بیان این واقعیت که طول زنجیر ثابت است: $D = \int_a^a \sqrt{1 + y'^2} dx$ ، عبارت زیر را اکستریم می‌کنیم:

$$\int_a^a [y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}] dx$$

با استفاده از معادله اوپلر، پس از کمی اعمال جبری و ساده سازی، به معادله دیفرانسیل زیر می‌ریسیم:

$$1 + y'^2 = (y + \lambda)y''$$

و یا

$$\frac{2y'y''}{1 + y'^2} = 2 \frac{y'}{y + \lambda}$$

پس از انتگرال گیری،

$$1 + y'^2 = c(y + \lambda)^2$$

که در آن c ثابت انتگرال گیری است. با انتخاب $c = \frac{1}{\lambda^2}$ ، پس از حل برای y' ، معادله x برحسب

$$y \text{ چنین است } (u = \frac{y}{\lambda})$$

$$x = \lambda \int_0^{\frac{y}{\lambda}} \frac{du}{\sqrt{(u+1)^2 - 1}}$$

در نوشتن معادله فوق فرض کرده ایم که در مرکز رودخانه $x = y = 0$ است. انتگرال گیری چنین نتیجه می‌دهد:

$$\frac{x}{\lambda} = \ln \left\{ 1 + \frac{y}{\lambda} + \sqrt{\frac{y}{\lambda} \left(2 + \frac{y}{\lambda} \right)} \right\}$$

و در نهایت

$$\frac{y}{\lambda} = \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - 1$$

که یک منحنی زنجیروار (catenary) است. ضریب λ یک مقیاس فاصله است که با محاسبه طول زنجیر به دست می‌آید:

$$D = \lambda \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}} \cosh u \, du = 2\lambda \sinh \frac{a}{\lambda}$$

۴-۱۱. استخراج معادلات لاگرانژ

در بخش ۲-۱۱ دیدیم که رابطه زیر می‌تواند به عنوان تعریف p_k مطرح شود:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (۱۷-۱۱)$$

تغییرات زمانی این رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

اما

$$x = x(q_1, \dots, q_{rN}, t)$$

نسبت به q_k مشتق می‌گیریم

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{rN} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (۳۵-۱۱)$$

این رابطه به نام «حذف نقطه‌ها» (cancellation of dots) معروف است. بنابراین

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (۳۶-۱۱)$$

$$+ \sum_{i=1}^N m_i \left[\dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right]$$

اما، از طرفی برای نیروی تعمیم یافته تعریف زیر را داریم:

$$\sum_{i=1}^N \left(F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{zi} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = Q_k$$

و از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) &= \sum_{l=1}^{rN} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^{rN} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \end{aligned}$$

بنابراین، جمله دوم در جمع (۱۱-۳۶) چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] = \frac{\partial T}{\partial q_k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots, rN \quad (11-37)$$

چنانچه جسم مورد مطالعه درون میدان نیرویی با پتانسیل $V(q_k, t)$ قرار داشته باشد، آنگاه عبارت L را به نام لاگرانژین سیستم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k, t) - V(q_k, t) \quad (11-38)$$

و چنانچه قبلاً نیز گفته شد، در مورد سیستم‌های متعامد و پایدار انرژی جنبشی فقط تابع \dot{q}_k و پتانسیل نیز فقط تابع موضع ذرات سیستم است، نه زمان. در هر حال رابطه (۱۱-۳۷) را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] = \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

و یا

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (۳۹-۱۱)$$

این معادله اوایلر- لاگرانژ است که مشابه رابطه معروف اوایلر در حساب وردشی است. در فصل بعد خواهیم دید که استخراج این معادله براساس یک اصل بنیادی (اکسترمم شدن لاگرانژین سیستم متحرک در گذر زمان) - یعنی اصل هامیلتون - نیز به دست می‌آید.

اگر $L(q, \dot{q}, t)$ یک لاگرانژی مناسب و $F(q, t)$ هر تابع مشتق پذیری از مختصات تعمیم یافته و زمان باشد، آنگاه

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt} \quad (۴۰-۱۱)$$

نیز یک لاگرانژی مناسب است که در معادله اوایلر- لاگرانژ صدق می‌کند (تمرین ۸، فصل اول گذشتین ویرایش سوم، ۲۰۰۲):

$$\frac{\partial L'}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial \dot{F}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}^k}$$

بنابراین $\frac{\partial \dot{F}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}^k} = 0$ باشد تا شکل معادله تغییر نکند.

$$\frac{dF}{dt} = \dot{F} \frac{\partial F}{\partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{F}}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial t}$$

اما حذف نقطه‌ها می‌گویید: $\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial F}{\partial q^1} \delta_{kl} = \frac{\partial F}{\partial q^k}$ ، بنابراین

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial t} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial q^1 \partial q^k} \dot{q}^1 - \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial t} = 0$$

مثال ۱۱-۵. در مورد نوسانگر هارمونیک یک بعدی داریم:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mx$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

که همان معادله حرکت نوسانگر هارمونیک است که از طریق معادله نیوتن بطور مستقیم استخراج شد.

مثال ۱۱-۶. اکنون مسئله آونگ ساده را بررسی می‌کنیم:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

مختصه تعمیم یافته در این مسئله θ است.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

مثال ۱۱-۷. حرکت پرتابی را در نظر می‌گیریم. این نمونه‌ای از حرکت دو بعدی است. مختصات

تعمیم یافته y, x انتخاب می‌شوند.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{و} \quad V = mgy$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$\text{مختصه تعمیم یافته} = x \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = a \Rightarrow x = at + b$$

$$\text{مختصه تعمیم یافته} = y \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{y}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -mg - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \Rightarrow \dot{y} = -g \Rightarrow y = -gt + c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$$

۵-۱۱. هم ارزی قوانین نیوتن و روش لاگرانژ

تاکنون اعتبار قانون نیوتن را مبنای بحث قرار دادیم و معادله حرکت لاگرانژ را استخراج کردیم. اکنون پایه بحث را بر اعتبار معادله لاگرانژ بنا می‌نهمیم، و معادله حرکت نیوتن را نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (T - V) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (T - V) \right] = 0 \quad \text{که در آن}$$

$$T = T(\dot{x}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 0 \end{cases} \quad \text{به طوری که}$$

$$\Rightarrow \frac{-\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \Rightarrow \frac{-\partial V}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right)$$

$$\Rightarrow F_{xi} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \right) \right] - \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{p}_i$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i - F_{xi}$$

این نتیجه را به ابعاد دیگر نیز می‌توان تعمیم داد.

۱۱-۶. مقایسه دو شیوه نیوتنی و لاگرانژی

در این بخش ضمن مقایسه دو شیوه نیوتنی و لاگرانژی، ضرورت و مزیت به کارگیری دینامیک لاگرانژی را بازگو می‌کنیم. از نظر تاریخی معادلات لاگرانژ که برحسب مختصات تعمیم یافته بیان می‌گردد، قبل از بیان اصل هامیلتون بوده است (۱۷۸۸ در مقابل ۱۸۳۴، که سال ارائه اصل هامیلتون بوده است). در واقع براساس اصل هامیلتون معادلات لاگرانژ استخراج می‌شود که مستقیم ترین رویکرد در بررسی مسئله است و در ضمن روشی رسمی برای مطالعه دینامیک کلاسیک است.

دینامیک لاگرانژی نظریه‌ای جدید نیست بلکه نسبت به شیوه سنتی نیوتنی، رهیافتی مستقل و نو است. در حالیکه روش نیوتن بر عامل خارجی وارد بر جسم (یعنی نیرو) تکیه می‌کند، روش لاگرانژی فقط به کمیتی وابسته به جسم و پیکربندی خود سیستم می‌پردازد (یعنی انرژی‌های پتانسیل و جنبشی). در واقع در فرمولبندی لاگرانژ هیچگاه مفهوم نیرو وارد نمی‌شود. از آنجا که انرژی کمیته اسکالر است، تابع لاگرانژی برای سیستم در اثر تبدیل مختصات ناورد است. در واقع چنین تبدیل‌هایی محدود به این نمی‌شود که فقط بین سیستم مختصات متعامد در فضای معمولی برقرار باشد؛ این ویژگی همچنین در تبدیل‌های بین مختصات معمولی و تعمیم یافته نیز برقرار است. در نتیجه این امکان هست که از فضای معمولی که کمیت‌ها اغلب بردار هستند و معادلات پیچیده تر می‌شوند به فضای همپیکری برویم با کمیت‌های به خصوص اسکالر که عمدتاً معادلات شکل ساده تری به خود می‌گیرند.

جنبه دیگر تمایز بین روش لاگرانژی و نیوتنی این است که هرگز امکان ندارد تمام نیروهای وارد بر جسم به طور صریح مشخص و آنها را در معادلات وارد کرد، حال آنکه هنوز این امکان وجود دارد که انرژی جنبشی و پتانسیل را مشخص کرد. همچنین نکته بسیار مهم اینکه اصل هامیلتون برای سیستم‌های مکانیک کوانتومی که در آنها معمولاً انرژی‌ها را می‌شناسیم، نه نیروها، بسیار سودمند و مفید است.

به طور خلاصه معادلات لاگرانژ با دو شرط معتبر هستند:

شرط اول - اینکه نیروهای وارد بر دستگاه (به غیر از نیروهای قیدی) باید از یک یا چند پتانسیل حاصل شوند.

شرط دوم - معادلات قیدی باید روابطی باشند که مختصات ذرات را به یکدیگر ارتباط دهند و

ممکن است تابعی از زمان باشند. چنانچه قبلاً بیان شد، این قیدها را قیدهای هولونومیک می‌گویند و اگر صریحاً تابع زمان نباشند، قیدها را ثابت یا اسکالرو نومیک می‌نامند. چنانچه قیدها به طور صریح وابسته به زمان باشند آنها را رئونومیک می‌نامند.

در بخش قبل نشان دادیم که شکل دیفرانسیلی مکانیک موجود در معادلات نیوتن و مفهوم موجود در اصل هامیلتون و در نتیجه معادلات لاگرانژی کاملاً هم ارز هستند. شکل دیفرانسیلی براساس قضیه کارهای مجازی به دست آمده است. مفهوم جابجایی مجازی را نخستین بار در اوایل قرن هیجدهم بر نولی برای درک معنای تعادل استاتیکی مطرح کرد. بعدها در آغاز ۱۷۴۳، دالامبر برای بررسی حرکت از این مفهوم استفاده کرد. بین دو دیدگاه نیوتنی و لاگرانژی، چنانچه اساس توصیف رفتار سیستم فیزیکی اثرات فیزیکی باشد، هیچ تمایزی وجود ندارد. اما از نقطه نظر فلسفی، می‌توانیم تمایزی را مشاهده کنیم. در فرمولبندی نیوتنی، نیروی معینی بر جسم وارد می‌شود و تولید حرکت معینی می‌کند؛ یعنی همیشه یک معلول (effect) معین را به یک علت (cause) معین مربوط و وابسته می‌کنیم. در حالیکه بر طبق اصل هامیلتون حرکت جسم از کوشش طبیعت در بدست آوردن و حصول یک هدف (Purpose) معین نتیجه می‌شود؛ یعنی می‌نیمم کردن انتگرال زمانی اختلاف بین انرژی جنبشی و پتانسیل. حل عملیاتی یا نحوه عمل حل مسایل در مکانیک به قبول یا رد یک نقطه نظر یا نقطه نظر دیگر بستگی ندارد. اما از نظر تاریخی چنین ملاحظاتی تأثیر برجسته بر تکامل دینامیک داشته است. (مثلاً در اصل موپرتوئی Maupertuis و نحوه تکامل آن تا بیان صریح اصل هامیلتون).

۷-۱۱. نیروهای الکترومغناطیسی و پتانسیل‌های وابسته به سرعت

اگر نیروهای وارد بر دستگاهی دینامیکی به سرعت بستگی داشته باشد؛ ممکن است بتوان تابعی

مانند $u(q_1, \dots, q_f, \dots, \dot{q}_f, t)$ چنان یافت که

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} ; \quad k = 1, 2, \dots, f \quad (41-11)$$

در این صورت می‌توان تابع لاگرانژی را به شکل زیر تعریف کرد:

$$L = T - U$$

به طوری که معادلات حرکت به صورت زیر درآیند:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

و یا

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, f$$

تابع U را می‌توان پتانسیل وابسته به سرعت و یا پتانسیل تعمیم یافته نامید. کاربرد عمده این پتانسیل در مسایل آکادمیک و آموزشی اندک است. اگر نیروهایی نیز وجود داشته باشند که بتوان آنها را از طریق یک تابع انرژی پتانسیل معمولی $V(q_1, \dots, q_f)$ به دست آورد، در این صورت ممکن است V را در عبارت U منظور کرد، زیرا برای جملاتی که شامل سرعت نیستند معادله (۱۱-۴۱) به

$$\text{معادله } Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \text{ تبدیل می‌شود.}$$

تابع U ممکن است بطور صریح به t بستگی داشته باشد. اگر چنین نباشد، و اگر دستگاه مختصات دستگاهی ثابت باشد، در این صورت L از t مستقل و کمیت:

$$H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \quad (۱۱-۴۲)$$

یک ثابت حرکت خواهد بود. در این حالت گرچه نیروها به سرعت بستگی دارند، می‌توانیم بگوییم که پایستار هستند. از این نتیجه آشکار می‌شود که امکان ندارد بتوان نیروهای اصطکاک را به شکل متعارف نیروهای Q_k نوشت، زیرا وقتی اصطکاک وجود دارد انرژی کل ثابت نخواهد بود مگر آنکه انرژی گرمایی را هم منظور کنیم. ولی این انرژی را نمی‌توان برحسب مختصات و سرعت‌های $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, q_1, \dots, q_f$ تعریف کرد و در نتیجه نمی‌توان آن را در معادله انرژی که در بالا نوشتیم منظور کرد. می‌توان نشان داد که اگر قسمت‌های وابسته به سرعت تابع U مانند اغلب مثال‌های مهم فیزیکی برحسب سرعت، خطی باشد انرژی E دقیقاً برابر $T+V$ است که در آن V انرژی پتانسیل معمولی است و عبارتی شامل U را در بردارد که مستقل از سرعت هستند. در مورد نیروهای

اتلافی مانند اصطکاک می‌توان تصور کرد که از یک تابع مانند F مشتق می‌شوند. در اغلب موارد اصطکاک را متناسب با سرعت می‌توان فرض کرد ($F_{\vec{v}} = -k_x V_x$)، از اینرو تابع اتلاف رایلی^۱ که نیروی اصطکاک از آن مشتق می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = \frac{1}{2} \sum_i (k_x V_{ix}^2 + k_y V_{iy}^2 + k_z V_{iz}^2) \quad (۴۳-۱۱)$$

بدین ترتیب معادله لاگرانژ چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (۴۴-۱۱)$$

پتانسیل وابسته به سرعت، عمدتاً در نوع مهمی از میدان نیرو یعنی نیروی الکترومغناطیس کاربرد دارد. در سیستم گونس، معادلات ماکسول را می‌نویسیم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \rho \quad (۴۵-۱۱)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

با توجه به تعریف نیروی الکترواستاتیک به صورت $\vec{F}_{el} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi$ که در آن ϕ پتانسیل اسکالر الکتروستاتیک است، نیروی کل لورنتس وارد بر ذره باردار q به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{total} = q \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \quad (۴۶-۱۱)$$

آنگاه، با تعریف پتانسیل برداری \vec{A} به صورت $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

در نتیجه،

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = q \left\{ -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] \right\} \quad (۴۷-۱۱)$$

جمله آخر را در زیر حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{B})_x &= \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_x = v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) - \left(\frac{dA_y}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \end{aligned}$$

بدین ترتیب برای مولفه F_x خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_x &= q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) + \frac{1}{c} \left[-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] \right\} \\ &= q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_x}{dt} \right\} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه پتانسیل اسکالر ϕ مستقل از سرعت است، بنابراین

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_x} \quad (۴۸-۱۱)$$

که در آن

$$U = q\phi - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (۴۹-۱۱)$$

و در نهایت با تعریف لاگرانژین به صورت

$$L = T - U = T - q\phi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

معادله لاگرانژ نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

این رابطه شبیه رابطه (۱-۶۳) کتاب گلدشتین ویرایش دوم است جز آنکه در آنجا روابط در دستگاه MKS (بدون ضریب c) نوشته شده است. در این صورت چنانچه تبدیل $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{V}\Psi$ انجام گیرد، که در آن $\Psi(\vec{r}, t)$ تابعی دلخواه است، آنگاه $V = L + \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \Psi(\vec{r}, t)$.
 $L' = T - q\phi + \frac{q}{c} (\vec{A} + \vec{V}\Psi)$ می‌شود و تغییری در معادله لاگرانژ حاصل نمی‌شود.

۱۱-۷-۱. ریسمان کشیده

به عنوان کاربرد دیگر روش لاگرانژ، مسئله نسبتاً متفاوتی را در نظر می‌گیریم. این مسئله مثالی از یک دستگاه با تعداد بینهایت درجه آزادی است. ریسمان به طول l و جرم واحد طول μ که دو انتهایش ثابت شده اند و با کشش F کشیده شده است. ما نوسان‌های عرضی کوچک ریسمان را در نظر می‌گیریم. در اینجا، به جای یک مجموعه متناهی از مختصات تعمیم یافته تابع پیوسته‌ای داریم که جابجایی $y(x,t)$ ریسمان از مکان تعادلش است. انرژی جنبشی یک عنصر کوچک با طول dx برابر $\frac{1}{2}(\mu dx)\dot{y}^2$ است، که در آن $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$ است. بنابراین انرژی جنبشی کل برابر است با:

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 dx \quad (۵۰-۱۱)$$

هنگامی که ریسمان در ترازمندی است طول آن l است، اما وقتی ریسمان جابجا می‌شود طول آن چنین می‌شود:

$$l + \Delta l = \int_0^l (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

که در آن $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ است. کاری که در افزایش طول به اندازه Δl در مقابل کشش انجام می‌شود برابر با $F\Delta l$ است. این انرژی پتانسیل ریسمان است. برای جابجایی‌های کوچک می‌توان $\left(1 + \frac{1}{2}y'^2\right)$ را به جای $(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$ قرار داد. در نتیجه

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} F y'^2 dx \quad (۵۱-۱۱)$$

بنابراین تابع لاگرانژی L برابر است با

$$L = \int_0^{\ell} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 - \frac{1}{2} F y'^2 \right) dx \quad (۵۲-۱۱)$$

این تابع دارای شکل زیر است

$$L = \int_0^{\ell} L(y, \dot{y}, y') dx \quad (۵۳-۱۱)$$

که در آن L را (که در مورد کنونی مستقل از y است) می‌توان چگالی لاگرانژی نامید. مانند قبل می‌توانیم برای یافتن معادلات حرکت متناظر با لاگرانژ از اصل هامیلتون استفاده کرد. انتگرال کنش عبارت است از:

$$I = \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} L(y, \dot{y}, y') dx dt \quad (۵۴-۱۱)$$

در یک بررسی با وارد کردن اصل هامیلتون، لاگرانژین مستقیماً از معادلات حرکت به دست آمد.

۱۱-۷-۲. معادلات لاگرانژ برای ریسمان مرتعش

روش لاگرانژ را می‌توان بر محیط‌های پیوسته نیز گسترش داد. ما فقط ساده ترین مثال، یعنی ریسمان مرتعش را در نظر می‌گیریم. با استفاده از علائمی که قبلاً به کار گرفته شده $u(x)$ را به عنوان مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته مشابه q_k اختیار می‌کنیم. به جای اندیس k که نمایشگر درجات آزادی مختلف است، مختصه مکانی x را داریم که نقاط مختلف ریسمان را نشان می‌دهد. تعداد درجات آزادی برای یک ریسمان پیوسته آرمانی بی نهایت زیاد است. تعمیم روش لاگرانژ برای کار با یک اندیس پیوسته x که نمایشگر درجات مختلف آزادی است باعث بروز دشواری‌های ریاضی می‌شود که سعی می‌کنیم در اینجا از آن پرهیز کنیم. بنابراین از نمایش تابع $u(x)$ به صورت سری فوریه استفاده می‌کنیم. بنابر سری فوریه اگر ریسمان در نقاط انتهایی 0 و ℓ بسته شده باشد، می‌توان مکان $u(x)$ را بوسیله سری نمایش داد:

$$u(x) = \sum_{k \neq 0}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (۵۵-۱۱)$$

ضرائب q_k بوسیله معادله زیر مشخص می‌شوند:

$$q_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (56-11)$$

چون ضرائب q_k مکان ریسمان را به طور کامل توصیف می‌کند به منزله مجموعه مناسبی از مختصات تعمیم یافته منظور می‌شوند. وقتی ریسمان مرتعش می‌شود، مختصات q_k به صورت توابعی از t در می‌آیند:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (57-11)$$

اما هنوز بی نهایت مختصه q_k باقی است که به اندیس ناپیوسته k بستگی دارند و می‌توان با آنها درست مانند مختصات تعمیم یافته‌ای رفتار کرد که در بخش‌های قبلی این فصل در نظر گرفته شد. چون ریسمان را در اصل می‌توان دستگاهی در نظر گرفت که دارای تعداد بسیار زیادی ذره است و چون مجازیم که دستگاه با هر مجموعه مناسبی از مختصات تعمیم یافته توصیف کنیم، پس برای نوشتن معادلات حرکت فقط کافی است تابع لاگرانژ را برحسب مختصات q_k بیان کرد. ابتدا باید انرژی جنبشی را حساب کرد، که عبارت است از

$$T = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (58-11)$$

اگر از معادله (۵۷-۱۱) نسبت به زمان مشتق بگیریم و به توان دو برسانیم، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_k \dot{q}_j \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{j\pi x}{\ell}$$

انکون معادله فوق را در $\mu \frac{dx}{2}$ ضرب کرده و از صفر تا ℓ انتگرال می‌گیریم:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \ell \mu \dot{q}_k^2 \quad (59-11)$$

که در آن از خاصیت زیر کمک گرفته‌ایم:

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{j\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ell, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

حال نیروی تعمیم یافته Q_k را حساب می‌کنیم. اگر مختصه q_k به اندازه δq_k افزایش یابد در حالی که بقیه ثابت نگاه داشته شده اند، نقطه‌ای مانند x روی ریسمان به اندازه فاصله داده شده به وسیله معادله (۱۱-۵۵) حرکت می‌کند.

$$\delta u = \delta q_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (۱۱-۶۰)$$

نیروی رو به بالای وارد بر جزء dx ریسمان به وسیله معادله (۱۱-۳۴) داده می‌شود. بنابراین کار

$$W = Q_k \delta q_k = \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{du}{dx} \right) \delta u dx$$

انجام شده عبارت است از

مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را از معادله (۱۱-۵۵) و مقدار δu را از معادله (۱۱-۶۰) جایگزین می‌کنیم و جمله به جمله انتگرال می‌گیریم:

$$Q_k = -\frac{1}{2} \tau \left(\frac{\pi k}{\ell} \right)^2 q_k \quad (۱۱-۶۱)$$

واضح است که نیروهای Q_k را می‌توان از تابع انرژی پتانسیل به دست آورد:

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\pi k}{\ell} \right)^2 q_k^2 \quad (۱۱-۶۲)$$

از نظر آموزش بد نیست که V را مستقیماً به وسیله محاسبه کار انجام شده در مقابل نیروی کشش T ، وقتی ریسمان از وضع تعادل خود به وضع $u(x)$ می‌رسد، به دست آوریم. در عین حال باید تحقیق کرد که این کار مستقل از چگونگی انتقال ریسمان به وضع $u(x)$ است. فرض کنید $u(x, t)$ وضع ریسمان در هر لحظه t باشد هنگامی که ریسمان به وضع $u(x)$ منتقل می‌شود [تابع $u(x, t)$ به الزام جواب معادله حرکت نیست، زیرا ما می‌خواهیم که روشی دلخواه برای انتقال ریسمان از $u=0$ به $u=u(x)$ را در نظر بگیریم]. در $t=0$ ریسمان در حالت تعادل است؛ $u(x, t) = 0$.

فرض کنید $t = t_1$ زمانی باشد که ریسمان به وضع نهایی خود می‌رسد: $u(x,t)=u(x)$ کار انجام شده در مقابل مولفه‌های قائم‌کشی در طول فاصله dt عبارت است از:

$$dV = - \int_{x=0}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx$$

با در نظر گرفتن u و $\frac{\partial u}{\partial t}$ که به ترتیب در $x = 0$ و $x = \ell$ برابر صفر است، به روش انتگرال

گیری جزء به جزء نتیجه چنین می‌شود:

$$dV = - \int_{x=0}^{\ell} \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dt dx = dt \frac{\partial}{\partial t} \int_{x=0}^{\ell} \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

کل کار انجام شده عبارت است از:

$$V = - \int_{t=0}^{t_1} dV = \left[\int_0^{\ell} \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t_1} = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (۶۳-۱۱)$$

که در آن آخرین عبارت $u=u(x)$ به وضع نهایی ریسمان مربوط می‌شود. نتیجه فقط به وضع نهایی ریسمان بستگی دارد. این اثبات مستقل از پایداری نیروی کشش است.

کار انجام شده در مقابل کشش به صورت انرژی پتانسیل در ریسمان کشیده شده ذخیره می‌شود.

اگر مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ را از معادله (۱۱-۵۵) به دست آوریم و در معادله بالا قرار دهیم دوباره می‌توان معادله

پتانسیل را نوشت. اکنون تابع لاگرانژ برای ریسمان مرتعش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \ell \mu \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2} \ell \tau \left(\frac{\pi k}{\ell} \right)^2 q_k^2 \right]$$

تابع لاگرانژ حاصل برای q_k عبارت است از

$$\frac{1}{2} \ell \mu \dot{q}_k + \frac{1}{2} \ell z \left(\frac{\pi k}{\ell} \right)^2 q_k = 0 \quad (۶۴-۱۱)$$

که جواب عمومی آن چنین است

$$q_k = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t$$

که در آن

$$\omega_k = \frac{\pi k}{\ell} \left(\frac{\tau}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi k c}{\ell}$$

این نتیجه را می‌توان در عبارت $u(x,t)$ جایگزین کرد و پاسخ زیر را به دست آورد:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \omega_k t + B_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \omega_k t \right] \quad (۶۵-۱۱)$$

که با معادله قبل سازگار است. اگر $u = u_0$ و $\frac{\partial u}{\partial t} = u_0$ در $t = 0$ داده شده باشد، می‌توان از

معادلات q_k و پاسخ عمومی q_k برای یافتن ثابت‌های A_k و B_k استفاده کرد:

$$A_k = q_k(0) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \quad (۶۶-۱۱)$$

و

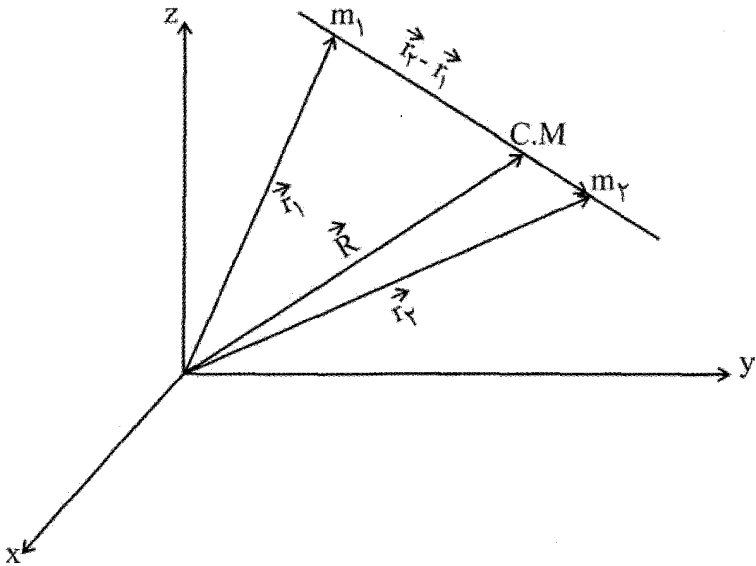
$$B_k = \frac{\dot{q}_k(0)}{\omega_k} = \frac{2}{\omega_k \ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \quad (۶۷-۱۱)$$

۱۱-۸- مسائل برگزیده حل شده.

۱- دو جرم m_1 و m_2 تحت جاذبه گرانشی متقابلشان، در یک میدان گرانشی یکنواخت خارجی با شتاب g حرکت می‌کنند. مختصات دکارتی X, Y, Z مرکز جسم Z را در راستای g می‌گیریم، فاصله r میان m_1 و m_2 ، و زوایای قطبی θ, φ را که راستای خط از m_1 به m_2 را مشخص می‌کند به عنوان مختصات انتخاب می‌کنیم. عبارت انرژی جنبشی، شش نیروی تعمیم یافته $Q_X, Q_Y, \dots, Q_\varphi$ و شش اندازه حرکت تعمیم یافته را بنویسید. شش معادله حرکت لاگرانژ را بنویسید.

حل:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^1 + \vec{F}_e^1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^2 + \vec{F}_e^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_1^1 = -\vec{F}_1^2$$



شکل (۲-۱۱)

دو حرکت خواهیم داشت: یکی حرکت مرکز جرم گویى تمام جرم در آن نقطه جمع شده و نیروهای خارجی بر آن عمل می‌کنند. حرکت دوم، اینکه یکی از ذرات را از دید ناظر واقع بر جرم دوم با جرم کاهش یافته μ مشاهده می‌کنیم. بنابراین مسئله دو جسم به دو مسئله یک جسم تبدیل می‌شود. در مورد انرژی‌های جنبشی و پتانسیل داریم:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + \dot{r}^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$V = (m_1 + m_2)gz \quad ; \quad \vec{F} = \vec{F}(0, 0, -(m_1 + m_2)g)$$

نیروی تعمیم یافته طبق تعریف چنین است:

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

در جهت x, y نیرو وارد نمی‌شود. پس $Q_X = Q_Y = 0$ و $Q_Z = (m_1 + m_2)g$. در مختصات کروی، در این مسئله مختصات r را از راستای $m_1 \rightarrow m_2$ انتخاب می‌کنیم، از اینرو مختصات مربوط به یکی از دو ذره صفر می‌شود. در نهایت

$$Q_r = F_r = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\mu g$$

$$Q_\theta = Q_\varphi = 0$$

بنابراین معادلات حرکت چنین خواهد شد:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{z} = Mg \\ M\ddot{X} = 0 \\ M\ddot{Y} = 0 \end{cases}$$

یا از طریق رابطه $Q_j = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} (M\dot{X}) - 0 = Q_x = 0 \Rightarrow M\ddot{X} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (M\dot{Y}) - 0 = Q_y = 0 \Rightarrow M\ddot{Y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (M\dot{Z}) - 0 = Q_z = Mg \Rightarrow M\ddot{Z} = Mg$$

و در مورد سه معادله دیگر، $q_j = r, \theta, \varphi$ ، به ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) - \mu (r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = Mg = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\mu \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - \mu r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \Rightarrow \mu \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = 0$$

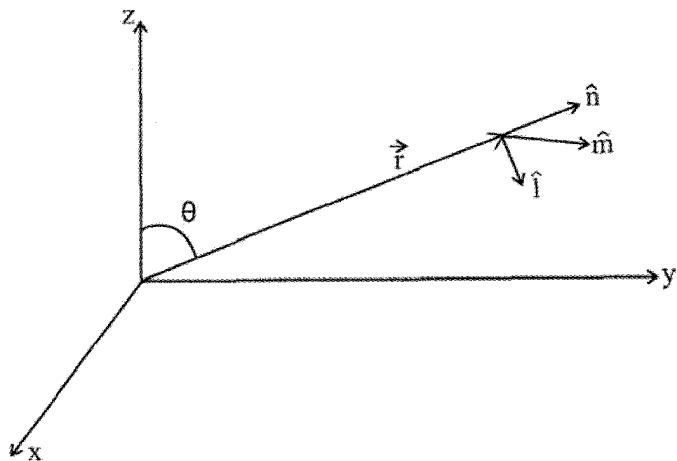
۲- الف) - معادلات حرکت لاگرانژ را در مختصات کروی برای ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر

نیروی $(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ بنویسید.

ب) - برای همین ذره معادلات حرکت را در دستگاه مختصات کروی بنویسید که با سرعت زاویه‌ای Ω به دور محور Z می‌چرخد.

پ) - نیروهای تعمیم یافته گریز از مرکز و کوریولیس را تعیین کنید، که به کمک آنها می‌توان معادلات دستگاه دوار را به معادلات دستگاه ثابت درآورد. مولفه‌های کروی نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس را حساب کنید.

حل - الف)



شکل (۱۱-۳)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$q_j = r \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m(r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = Q_r = F_r \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = Q_\theta = rF_\theta \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) - 0 = Q_\phi = r \sin \theta F_\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_r = F_r \\ Q_\theta = rF_\theta \\ Q_\phi = r \sin \theta F_\phi \end{cases} ; \vec{F} = F_r \hat{n} + F_\theta \hat{l} + F_\phi \hat{m}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

ب) در حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای ω به دور محور z خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos(\omega t + \phi) & \delta \omega_j = q_j \delta q_j \\ y = r \sin \theta \sin(\omega t + \phi) & T' = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

اما

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos(\omega t + \phi) + \dot{\theta} r \cos \theta \cos(\omega t + \phi) - r \sin \theta (\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin(\omega t + \phi) + \dot{\theta} r \cos \theta \sin(\omega t + \phi) + r \sin \theta (\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

پس از جایگزینی مقادیر فوق در عبارت T' ، عبارت‌های انرژی جنبشی چنین می‌شود:

$$T' = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \omega^2 \sin^2 \theta + 2r^2 \omega \dot{\phi} \sin^2 \theta) \quad \text{همچنین،}$$

$$q_j = r \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - m r \dot{\theta}^2 - m r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - m r \omega^2 \sin^2 \theta - 2 m r \omega \dot{\phi} \sin^2 \theta = 'Q'_r$$

$$q_j = \theta \Rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) - m r^2 \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta - m r^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta - 2 m r^2 \omega \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = 'Q'_\theta$$

و نیز

$$q_j = \phi \Rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta + m r^2 \omega \sin^2 \theta) - 0 = 'Q'_\phi$$

بنابراین پس از مقایسه با قسمت (الف) خواهیم داشت:

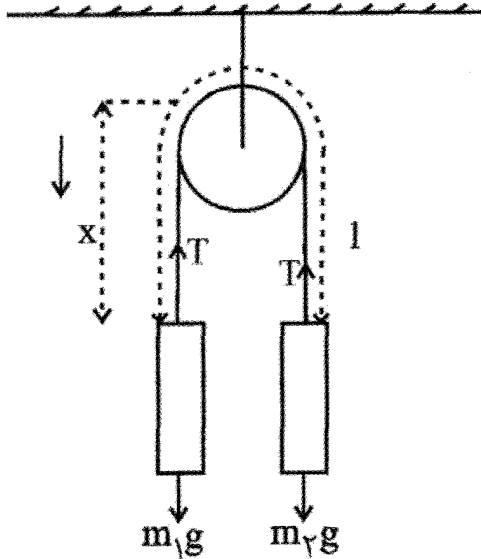
$$\begin{cases} Q'_r = Q_r - mr\omega^2 \sin^2 \theta - 2mr\omega\dot{\phi} \sin^2 \theta \\ Q'_\theta = Q_\theta - mr^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta - 2mr^2\omega\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \\ Q'_\phi = Q_\phi + 2mr\dot{\omega} \sin^2 \theta + 2mr^2\omega\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

پ)- در اینجا جملاتی اضافی در سمت راست عبارت فوق با علامت منفی معرف نیروهای تعمیم گرفته گریز از مرکز و کوریولیس هستند. پس

$$\begin{cases} Q'_r = F'_r - mr\omega^2 \sin^2 \theta + 2mr\omega\dot{\phi} \sin^2 \theta \\ Q'_\theta = rF'_\theta = mr^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta + 2mr^2\omega\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \\ Q'_\phi = r \sin \theta F'_\phi = -2mr\dot{\omega} \sin^2 \theta - 2mr^2\omega\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

۳- به عنوان مثال ساده و در عین حال استاندارد از دستگاه‌های مقید حرکت ماشین آتوود را مورد بررسی قرار دهید و شتاب دستگاه و کشش نخ را بیابید.

حل-



شکل (۱۱-۴)

از طریق قوانین نیوتن و روش نیرو، پاسخ مسئله چنین است:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases} \Rightarrow (m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

و در نتیجه

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad , \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

در حل مسئله با روش لاگرانژ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\ell} - \dot{x})^2$$

برای تعیین قید T باید نیرویی وارد کرد که قید به حرکت درآید و از آنجا بتوانیم قید را به دست آوریم. در مورد تغییر x وقتی l ثابت است:

$$\begin{aligned} \delta w &= (m_1 g - T) \delta x - (m_2 g - T) \delta x = (m_1 - m_2) g \delta x \\ &= Q_x \delta x \Rightarrow Q_x = (m_1 - m_2) g \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که Q_x به T بستگی دارد. اکنون اگر به ترتیب x و l را به عنوان مختصات تعمیم یافته:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial K}{\partial x} = Q_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \ell} = Q_\ell \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} [m_1 \dot{x} - m_2 (-1)(\dot{\ell} - \dot{x})] - 0 = (m_1 + m_2) \ddot{x} \\ = Q_x = (m_1 - m_2) g \\ \frac{d}{dt} (m_2 (\dot{\ell} - \dot{x})) - 0 = -m_2 \ddot{x} = m_2 g - T \end{cases}$$

در نهایت x و \dot{x} متغیر و $\dot{\ell} = 0$ است. از اینجا T, \ddot{x} به دست می‌آیند که با پاسخ قسمت اول مطابقت دارند. اکنون مستقیماً از رابطه لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\ell} - \dot{x})^2 + (m_1 g - T)x + (m_2 g - T)(\ell - x)$$

مختصه تعمیم یافته x

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 0 \end{cases}$$

مختصه تعمیم یافته ℓ

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} [m_1 \dot{x} + m_2 (-1)(\dot{\ell} - \dot{x})] - (m_1 g - T) + (m_2 g - T) = 0 \\ \frac{d}{dt} [m_2 (\dot{\ell} - \dot{x})] - (m_2 g - T) = 0 \end{cases}$$

و در نهایت

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} = (m_1 - m_2) g \\ -m_2 \ddot{x} = m_2 g - T \end{cases}$$

۴- جرم‌های $m_1 = m$ و $m_2 = 2m$ از ریسمانی به طول ℓ_1 که از روی قرقره‌ای می‌گذرد آویخته است. جرم‌های $m_3 = 3m$ و $m_4 = 4m$ به طور همانند، به وسیله ریسمانی به طول ℓ_2 از روی قرقره‌ای دیگر آویخته است. این دو قرقره از دو انتهای ریسمانی به طول ℓ_3 که از روی قرقره‌ای ثابت می‌گذرد آویخته شده‌اند. معادلات لاگرانژ را بنویسید، و شتاب‌ها و کشش‌های ریسمان‌ها را بیابید.

حل: انرژی جنبشی را برای سیستم چهار ذره می‌نویسیم. ℓ_i را می‌توان تمام ریسمان گرفت یا بخشی از ریسمان که باید در هر حال محیط نصف دایره را در هر بار دربرگیرد. البته این مقدار در عبارت سرعت وارد نمی‌شود.

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{y}_1 + \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\ell} - \dot{y}_1 + \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{y}_2 + \dot{\ell}_3 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{\ell}_2 - \dot{y}_2 + \dot{\ell}_3 - \dot{y}_3)^2$$

$$V = -m_1 g(y_1 + y_3) - m_2 g(\ell_1 - y_1 + y_3) - m_3 g(y_2 + \ell_2 - y_3) - m_4 g(\ell_2 - y_2 + \ell_3 - y_3)$$

فعالاً ℓ_1 را صفر نمی‌گذاریم و اجازه می‌دهیم که قیدها شکسته شوند، چون می‌خواهیم نیروی کشش ریسمان‌ها را هم حساب کنیم. بعد در عبارت لاگرانژی آنها را صفر می‌کنیم:

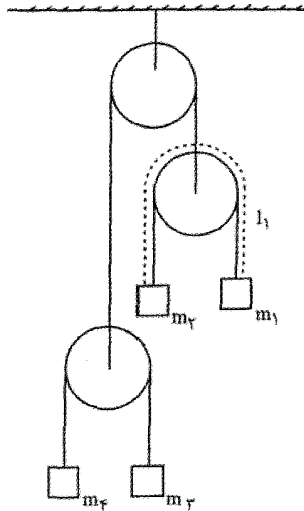
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$q_j = y_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} [m_1 (\dot{y}_1 + \dot{y}_3) - m_2 (-\dot{y}_1 + \dot{y}_3)] = -m_1 g + m_2 g = 0$$

و یا

$$m_1 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_3) - m_2 (-\ddot{y}_1 + \ddot{y}_3) - m_1 g + m_2 g = 0$$

در مورد کشش طناب‌ها باید معادلاتی بیابیم که درگیر قید T_i باشد، یعنی حرکتی در نظر بگیریم که سبب تغییر قید شود. بدین منظور حرکت کوچکی در جهت نیرو به جسم می‌دهیم.



شکل (۵-۱۱)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\delta w = (m_1 g - T_1) \delta x - (m_2 g - T_1) \delta x = (m_1 - m_2) g \delta x$$

$$\Rightarrow Q_0 = (m_1 - m_2) g$$

$$\delta w_{\ell_1} = (m_2 g - T_1) \delta \ell_1 = Q_{\ell_1} \delta \ell_1 \Rightarrow Q_{\ell_1} = m_2 g - T_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \ell_1} = Q_{\ell_1}$$

$$\frac{d}{dt} m_2 (\dot{\ell}_1 - \dot{y}_1 + y_2) = Q_{\ell_1} = m_2 g - T_1$$

$$\Rightarrow m_2 (\ddot{\ell}_1 - \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = m_2 g - T_1$$

$$\delta w_{\ell_2} = (m_2 g - T_2) \delta \ell_2 = Q_{\ell_2} \delta \ell_2 \Rightarrow Q_{\ell_2} = m_2 g - T_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \ell_2} = Q_{\ell_2}$$

$$\frac{d}{dt} [m_2 (\dot{\ell}_2 - \dot{y}_2 + \dot{\ell}_1 - y_2)] - 0 = Q_{\ell_2} = m_2 g - T_2$$

$$\Rightarrow m_2 (\ddot{\ell}_2 - \ddot{y}_2 + \ddot{\ell}_1 - \ddot{y}_2) = m_2 g - T_2$$

$$\delta w_{\ell_3} = [(m_2 + m_1) g - T_3] \delta \ell_3 = Q_{\ell_3} \delta \ell_3 \Rightarrow Q_{\ell_3} = (m_2 + m_1) g - T_3$$

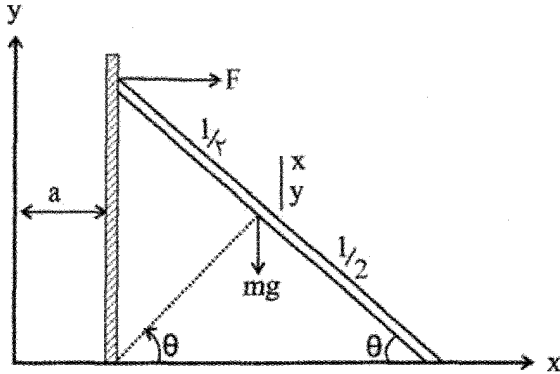
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial \ell_3} = Q_{\ell_3}$$

$$\frac{d}{dt} [m_1 (\dot{\ell}_3 - \dot{y}_3 - \dot{y}_2) + m_2 (\dot{\ell}_3 - \dot{y}_2 + \dot{\ell}_1 - \dot{y}_2)] = (m_2 + m_1) g - T_3$$

$$\Rightarrow m_1 (\ddot{\ell}_3 + \ddot{y}_2 - \ddot{y}_3) + m_2 (\ddot{\ell}_3 - \ddot{y}_2 + \ddot{\ell}_1 - \ddot{y}_2) = (m_2 + m_1) g - T_3$$

۵- نردبانی که به دیواری هموار تکیه دارد، بدون اصطکاک بر دیوار و کف زمین می‌لغزد. معادله حرکت را بنویسید، با این فرض که نردبان همیشه با دیوار در تماس است. اگر در ابتدا زاویه‌ای که نردبان با زمین می‌سازد α باشد، موقع جدا شدن نردبان از دیوار، اگر اصولاً چنین اتفاقی بیفتد، چقدر است؟

حل:



شکل (۶-۱۱)

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

$$x = \frac{l}{2} \cos \theta + a \quad y = \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\dot{x} = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta} \quad \dot{y} = \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}$$

$$T = \frac{l}{2} m \left(\frac{l^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m l^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{m l^2}{8} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad , \quad V = mgy = \frac{1}{2} mgl \sin \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 - mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta} \right) + mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \ddot{\theta} + mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta = 0 \quad (1)$$

می‌خواهیم بدانیم چه وقت میله از دیوار جدا می‌شود. هنگام جدایی میله از دیوار $F = 0$ است. پس ابتدا نیروی قیدی F را حساب می‌کنیم.

$$\dot{x} = -\frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{a}$$

$$\dot{y} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{a}^2 - l \dot{\theta} \dot{a} \sin \theta + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \right)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + \dot{a}^2 - l \dot{\theta} \dot{a} \sin \theta \right) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial T}{\partial a} = Q_a = F$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} = (2\dot{a} - l \dot{\theta} \sin \theta) \frac{m}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial a} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} (2\ddot{a} - l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta) = F$$

$$\begin{cases} m\ddot{a} - \frac{m}{2} l \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{m}{2} l \dot{\theta}^2 \cos \theta = F \\ \ddot{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow m l \dot{\theta}^2 \cos \theta - m l \ddot{\theta} \sin \theta = F$$

که این رابطه با $F = m\ddot{x}$ نیز به دست می‌آید.

$$-\frac{m l}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) = F \quad (2)$$

از رابطه (۱) داریم:

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{rg}{2l} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{rg}{2l} \cos \theta \Rightarrow \dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{rg}{2l} \cos \theta d\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{rg}{l} \sin \theta \Big|_{\alpha}^{\theta} = -\frac{rg}{l} (\sin \theta - \sin \alpha)$$

$$F = -m \frac{l}{2} \left[-\frac{rg}{2l} \cos \theta \sin \theta - \frac{rg}{l} (\sin \theta - \sin \alpha) \cos \theta \right]$$

$$= -m \frac{l}{2} \left[-\frac{rg}{2l} \cos \theta \sin \theta + \frac{rg}{l} \sin \alpha \cos \theta \right]$$

در زاویه جدایی $F = 0$ می‌شود. آنگاه

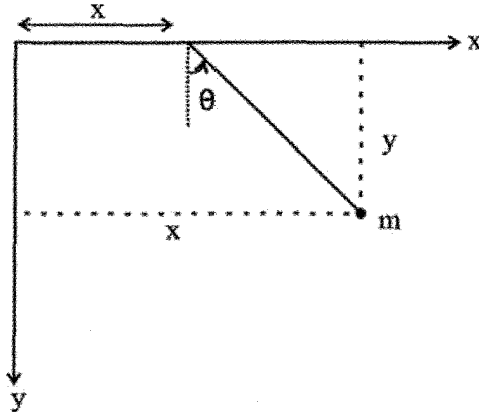
$$-\frac{rg}{2l} \cos \theta \sin \theta = \frac{rg}{l} \sin \alpha \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3} \sin \alpha \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \sin \alpha \right)$$

۶- لنگر آونگی به جرم m بوسیله ریسمانی به طول l از تکیه گاهی آویخته است. تکیه گاه بر راستای محور افقی x طبق معادله $x = a \cos \omega t$ به جلو و عقب حرکت می‌کند. فرض کنید آونگ تنها در صفحه‌ای قائم که شامل محور x است نوسان می‌کند. مکان آونگ با زاویه θ بیان می‌شود که ریسمان با خط قائم می‌سازد.

(الف) - تابع لاگرانژ را بیابید و معادله لاگرانژ را بنویسید.

(ب) - نشان دهید که برای مقادیر کوچک θ ، معادله به معادله نوسانگر هارمونیک واداشته تبدیل می‌شود، و حرکت حالت پایدار وابسته را پیدا کنید. چگونگی وابستگی دامنه نوسان حالت پایدار را به m, l, a و ω به دست آورید.



شکل (۷-۱۱)

حل:

$$x = a \cos \omega t, L = ?$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l \dot{\theta} \sin \theta)^2 + (l \dot{\theta} \cos \theta)^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}^2 + 2 l \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) \right]$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 l \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta + l^2 \dot{\theta}^2) \quad , \quad x = a \cos \omega t, \dot{x} = -a \omega \sin \omega t$$

$$T = \frac{1}{2} m (a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + 2 l \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta + l^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = -mgl \cos \theta$$

$$L = T - V = \frac{m}{2} (a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + 2 l \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \rightarrow (q_k = \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m (r l^2 \dot{\theta} - r a \omega l \cos \theta \sin \omega t) = m l \dot{\theta} - a m \omega l \cos \theta \sin \omega t$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m (r a \omega l \sin \theta \dot{\theta} \sin \omega t) - m g l \sin \theta$$

$$m l^2 \ddot{\theta} - a m \omega^2 l \cos \omega t \cos \theta + a m \omega l \sin \theta \dot{\theta} \sin \omega t - a m \omega l \sin \theta \dot{\theta} \sin \omega t + m g l \sin \theta - m l^2 \ddot{\theta} - a m \omega^2 l a \omega t \cos \theta + m g l \sin \theta = 0$$

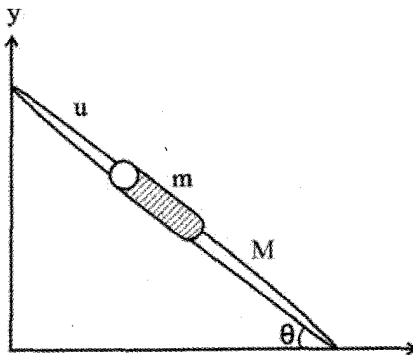
برای زوایای کوچک خواهیم داشت:

$$\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1$$

در نتیجه،

$$m l^2 \ddot{\theta} - a m \omega^2 l \cos \omega t + m g l \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \frac{a \omega^2}{l} \cos \omega t$$

۷- یک انتهای میله یکنواختی به جرم M و طول l با دیواری قائم و هموار در تماس است، و انتهای دیگر میله به زمین افقی و هموار تکیه دارد. مهره‌ای به جرم m و اندازه ناچیز بر میله می‌لغزد. مجموعه‌ای مناسب از مختصات انتخاب کنید، تابع لاگرانژ را بنا کنید. و معادلات لاگرانژ را بنویسید. میله در صفحه‌ای قائم، عمود بر دیوار، حرکت می‌کند.



شکل (۱۱-۸)

حل:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2$$

$$x = u \cos \theta \quad \dot{x} = \dot{u} \cos \theta - u \sin \theta \dot{\theta}$$

$$y = (\ell - u) \sin \theta \quad \dot{y} = (\ell - u) \cos \theta \dot{\theta} - \dot{u} \sin \theta$$

$$\dot{x}^2 = \dot{u}^2 \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2u \dot{u} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y}^2 = (\ell - u)^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \dot{u}^2 \sin^2 \theta - 2(\ell - u) \dot{u} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}$$

$$V_c^2 = \dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2 \quad X_c = \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad Y_c = \frac{\ell}{2} \sin \theta$$

$$\dot{X}_c = -\frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta} \quad \dot{Y}_c = \frac{\ell}{2} \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2 = \frac{\ell^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 = \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 \quad I_c = M \frac{\ell^2}{12}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{u}^2 + u^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2u \dot{u} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - 2\ell \dot{u} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta)$$

$$+ M \frac{\ell^2}{12} \dot{\theta}^2 - M \frac{\ell^2}{12} \dot{\theta}^2$$

$$V = mgy + MgY_c = mg(\ell - u) \sin \theta + Mg \frac{\ell}{2} \sin \theta$$

$$L = T - V$$

در نتیجه:

$$\delta W_u = mg \sin \theta \delta u \rightarrow Q_u = mg \sin \theta$$

$$\delta W_\theta = -Mg \cos \theta \left(\frac{\ell}{2}\right) \delta\theta \rightarrow mg \cos \theta (\ell - u) \delta\theta$$

$$\delta W_\theta = \left[-\frac{\ell}{2} Mg \cos \theta - mg(\ell - u) \cos \theta\right] \delta\theta = Q_\theta \delta\theta$$

$$Q_\theta = -\frac{\ell}{2} Mg \cos \theta - mg(\ell - u) \cos \theta$$

۸- کشش ریسمان را برای آونگ کروی به صورت تابعی از E, P_θ و θ بیابید. برای E, P_ϕ

داده شده، زاویه θ_1 را تعیین کنید؛ θ_1 زاویه‌ای است که مکان افتادن ریسمان را مشخص می‌کند.
حل:

$$x = r \cos \phi \sin \theta \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \phi \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi} \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \phi \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi$$

$$z = r \cos \theta \quad \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

چون می‌خواهیم نیروی کشش نخ را به دست آوریم پس:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r = -mg \cos \theta - T$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta = -mgr \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q_\phi = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

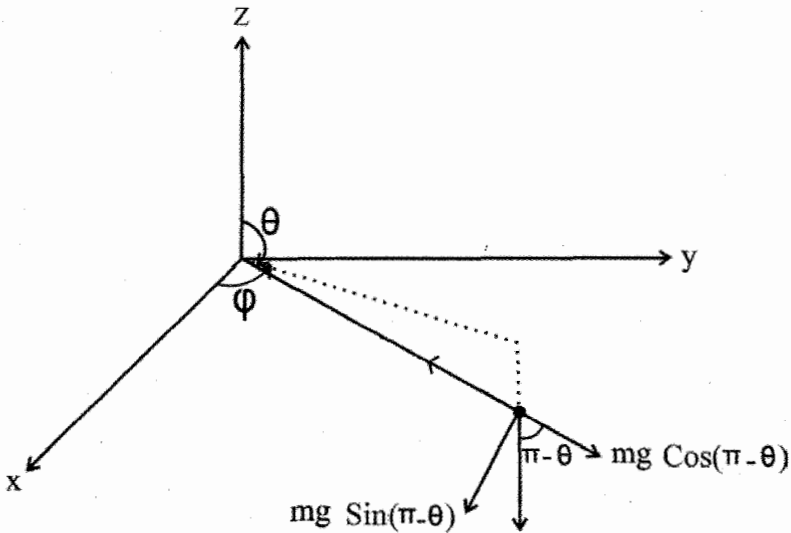
$$r = \text{cte} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0 \Rightarrow \tau = mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mg \cos \theta$$

از طرفی:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgr \cos \theta \quad (۱)$$

$$\tau = mr(\ddot{\theta} + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mg \cos \theta = \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (mgr \cos \theta) - mg \cos \theta$$

$$\tau = \frac{\partial E}{\partial r} - 2mg \cos \theta$$



شکل (۹-۱۱)

$$\tau \geq 0 \Rightarrow \cos \theta \leq \frac{\partial E}{2rmg} \quad ; \quad \cos \theta_1 = \frac{\partial E}{2rmg}$$

از رابطه (۱) داریم:

$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} = E - \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - mgr \cos \theta$$

$$= E - \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta \frac{P_{\phi}^2}{m^2 r^4 \sin^2 \theta} - mgr \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \geq 0 \Rightarrow E - \frac{P_{\phi}^2}{2 m r^2 \sin^2 \theta} - mgr \cos \theta \geq 0$$

$$P_{\phi}^2 < 2 m r^2 \sin^2 \theta (E - mgr \cos \theta)$$

در موقع پاره شدن:

$$P_{\phi}^2 < 2 m r^2 \left(1 - \frac{v E^2}{9 r^2 m^2 g^2}\right) \left(E - \frac{2E}{3}\right) = \frac{2 m E r^2}{3} - \frac{8}{27} \frac{E^3}{m g^2}$$

در فصل بعد آونگ کروی را از طریق معادلات هامیلتون بررسی می‌کنیم.

۹- گلوله‌ای کوچک به جرم m به انتهای فنری بدون جرم و طول آزاد l_0 بسته شده است و

انتهای دیگر فنر از نقطه‌ای آویزان است. حرکت فقط در صفحه قائم صورت می‌گیرد.

(الف) - لاگرانژی دستگاه را نوشته و معادلات حرکت لاگرانژ را با به کاربردن متغیرهای

$$\lambda = \frac{r - r_0}{r_0}, \theta$$

پیدا کنید (r_0 طول در حال سکون فنر با جرم آویزان m است).

(ب) - در تقریب مرتبه اول وقتی θ, λ کوچک هستند، با شرایط اولیه

$$\dot{\theta}_0 = B, \lambda_0 = A, \dot{\lambda}_0 = 0, \theta_0 = 0$$

حل:

(الف). با به کار بردن مختصات قطبی، انرژی جنبشی و پتانسیل دستگاه عبارتند از:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$V = -mgr \cos \theta + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 \quad (2)$$

مبدأ پتانسیل را در نقطه آویز انتخاب کرده ایم. آنگاه لاگرانژی سیستم چنین خواهد شد:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta - \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 \quad (3)$$

و معادلات حرکت برای متغیرهای θ, r :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + k(r - l_0) = 0 \quad (۴)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \sin \theta = 0 \quad (۵)$$

همچنین،

$$k(r_0 - l_0) = mg \quad (۶)$$

$$r - l_0 = \lambda r_0 + \frac{mg}{k} \quad (۷)$$

$$r - l_0 = (r - r_0) + (r_0 - l_0) = \lambda r_0 + \frac{mg}{k}$$

اکنون با تعریف $\lambda = \frac{r - r_0}{r_0}$ خواهیم داشت:

$$r = r_0(1 + \lambda) \Rightarrow \dot{r} = r_0\dot{\lambda} \Rightarrow \ddot{r} = r_0\ddot{\lambda} \quad (۸)$$

با جایگزینی از روابط (۷) و (۸) در معادلات (۴) و (۵)، معادلات زیر نتیجه می‌شوند:

$$\ddot{\lambda} + \frac{k}{m}\lambda - (1 + \lambda)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r_0}(1 - \cos \theta) = 0 \quad (۹)$$

$$(1 + \lambda)\ddot{\theta} + 2\dot{\lambda}\dot{\theta} + \frac{g}{r_0}\sin \theta = 0 \quad (۱۰)$$

(ب) - در تقریب مرتبه اول از جملات مرتبه دوم نسبت به $\theta, \lambda, \dot{\theta}, \dot{\lambda}$ صرفنظر می‌کنیم. آنگاه

$$\ddot{\lambda} + \frac{k}{m}\lambda = 0 \quad (۱۱)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r_0}\sin \theta = 0 \quad (۱۲)$$

که با شرایط اولیه منظور شده در صورت مسئله، جواب‌های این معادله چنین خواهند شد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = A \cos \omega_s t \\ \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} \right. \quad (۱۳)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{B}{\omega_p} \sin \omega_p t \\ \omega_p = \sqrt{\frac{g}{r_0}} \end{array} \right. \quad (۱۴)$$

یعنی در تقریب مرتبه اول، θ, λ نوسان‌های تناوبی کوچکی با اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ نسبت به یکدیگر انجام می‌دهند.

۱۰- یک ذره تحت تأثیر گرانش در داخل یک سهمی گون دوار هموار با محور قائم می‌لغزد. با انتخاب ρ فاصله تا محور قائم، و زاویه سمتی ϕ به عنوان مختصات تعمیم یافته، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

(الف) - لاگرانژی سیستم را بیابید.

(ب) - اندازه حرکت‌های تعمیم یافته و هامیلتونی وابسته را محاسبه کنید.

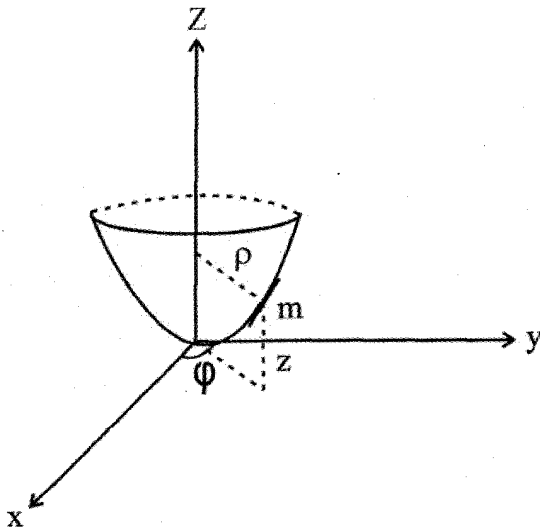
(ج) - معادلات حرکت را برای مختصات ρ, ϕ به صورت تابعی از زمان بنویسید. در صورتی که

$$\frac{d\phi}{dt} = 0$$

باشد، فرکانس نوسان‌های شعاعی حول پایین‌ترین نقطه سهمی گون را به دست آورید.

(د) - با افزودن قید به لاگرانژی، یکبار دیگر معادلات حرکت را بنویسید، و معادله نیروی وارد از طرف سطح بر ذره را به دست آورید (از ضرایب نامعین لاگرانژ استفاده کنید).

حل:



شکل (۱۱-۱۰)

با بکار بردن دستگاه مختصات استوانه ای، معادله عمومی سهمی گون چنین می‌شود:

$$z = A\rho^2 = A(x^2 + y^2) \quad (۱)$$

که A ضریب ثابت مثبت است.

(الف) - لاگرانژی ذره به جرم m عبارت است از:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (۲)$$

با قرار دادن مقدار z برحسب ρ در لاگرانژی خواهیم داشت:

$$L = \frac{1}{2} m(1 + 4A^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\rho^2 \dot{\phi}^2 - Amg\rho^2 \quad (۳)$$

(ب) -

بنابراین اندازه حرکت‌های تعمیم یافته عبارتند از:

$$P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m(1 + 4A^2 \rho^2) \dot{\rho} \quad (۴)$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2 \dot{\phi} \quad (۵)$$

با به دست آوردن $\dot{\rho}$ و $\dot{\phi}$ از این معادلات، هامیلتونی سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = \dot{\rho} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = \frac{1}{2} m(1 + 4A^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\rho^2 \dot{\phi}^2 \quad (۶)$$

$$+ 4mg\rho^2 = \frac{P_\rho^2}{2m(1 + 4A^2 \rho^2)} + \frac{P_\phi^2}{2m\rho^2} + Amg\rho^2$$

(ج) - معادلات حرکت لاگرانژ چنین است (برای متغیرهای (ϕ, ρ)):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow m(1 + 4A^2 \rho^2) \ddot{\rho} + 4mA^2 \rho \dot{\rho}^2 - m\rho \dot{\phi}^2 \quad (۷)$$

$$+ 2Amg\rho = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow m\rho^2 \dot{\phi} = \text{const} = \ell \quad (۸)$$

با قرار دادن $\dot{\phi} = \frac{\ell}{m\rho^2}$ در معادله (۷) به معادله شعاعی می‌رسیم:

$$(1 + 2A^2\rho^2)\rho^3\ddot{\rho} + 4A^2\rho^4\dot{\rho}^2 + 2Ag\rho^4 = \frac{\ell^2}{m^2} \quad (9)$$

با فرض $\dot{\phi} = 0$ معادله (۷) چنین می‌شود:

$$(1 + 4A^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4A^2\rho\dot{\rho}^2 + 2Ag\rho = 0 \quad (10)$$

برای نوسان‌های کوچک حول پایین‌ترین نقطه سهمی گون، از آنجا که ρ بینهایت کوچک است، تا تقریب مرتبه اول خواهیم داشت:

$$\ddot{\rho} + 2Ag\rho = 0 \quad (11)$$

که معادله نوسانگر هارمونیک با فرکانس $\omega = \sqrt{2Ag}$ است.

(د) - با افزودن قید (۱)، با ضریب لاگرانژ λ ، به لاگرانژی زیر خواهیم رسید:

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda(z - A\rho^2) \quad (12)$$

معادلات حرکت با لاگرانژی L' چنین است:

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + 2\lambda A\rho = 0 & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{z} + mg - \lambda = 0 & (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\rho^2\dot{\phi} = \ell & (15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = A\rho^2 & (16) \end{cases}$$

از معادله (۱۴) مشاهده می‌شود که λ مولفه قائم نیروی عمودی سطح است. با استفاده از (۱۶) و (۱۴) خواهیم داشت:

$$F_z = \lambda(t) = m(2A\rho\dot{\rho}^2 + 2A\rho\ddot{\rho} + g) \quad (17)$$

و از رابطه (۱۳)

$$F_\rho = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = -2\lambda A\rho \quad (18)$$

از مجموعه روابط (۱۷) و (۱۸) نیروی عمودی سطح به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N = \sqrt{F_z^r + F_\rho^r} = \lambda(t) \sqrt{1 + r A^r \rho^r} \quad (19)$$

۱۱- نشان دهید که معادلات لاگرانژ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} - r \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

این معادلات به عنوان شکل نیلسن (Nielsen) معادلات لاگرانژ شناخته شده‌اند.

حل:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

در این مورد می‌توان مثلاً به فصل اول کتاب گلدشتین مراجعه کرد. آنگاه از روابط اپراتوری مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \sum_d \dot{q}_d \frac{\partial}{\partial q_d} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

از طرفی،

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^r T}{\partial \dot{q}_k \partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^r T}{\partial \dot{q}_k \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

این عبارت را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

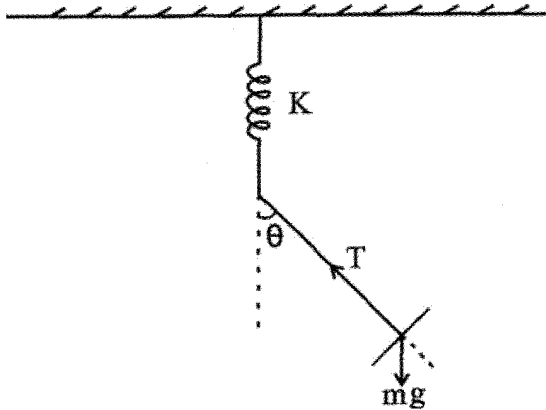
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \Rightarrow \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad \text{و در نهایت:}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

۱۲- انتهای فنری با ثابت نیروی k به نقطه‌ای محکم شده است. انتهای دیگر مقید است که در امتداد محور قائم حرکت کند. به انتهای آزاد فنر آونگ ساده‌ای به طول l و جرم m که در صفحه قائم ثابتی نوسان می‌کند آویزان است.
الف- لاگرانژی آونگ را بنویسید.
ب- انرژی جنبشی را بیابید.



شکل (۱۱-۱۱)

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \\ y = -l \cos \theta - y' \Rightarrow \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta - \dot{y}' \end{cases}$$

حل-

که در آن، y' میزان تغییر کشش فنر در راستای y است.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{y}'^2 - 2\ell \dot{\theta} \dot{y}' \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{\theta}^2 \ell^2 + \dot{y}'^2 - 2\ell \dot{\theta} \dot{y}' \sin \theta)$$

$$V = mg(-\ell \cos \theta - y') + \frac{1}{2} k(y' - a)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\ell^2 \dot{\theta}^2 + \dot{y}'^2 - 2\ell \dot{\theta} \dot{y}' \sin \theta) + mg(\ell \cos \theta + y') - \frac{1}{2} k(y' - a)^2$$

$$Q_\ell = mg \cos \theta - T \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \ell} = Q_\ell$$

$$\dot{x} = \dot{\ell} \sin \theta + \ell \dot{\theta} \cos \theta \Rightarrow \dot{y} = -\dot{\ell} \cos \theta + \ell \dot{\theta} \sin \theta - \dot{y}'$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \dot{\ell}^2 \sin^2 \theta + \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\ell \dot{\ell} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 = \dot{\ell}^2 \cos^2 \theta + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{y}'^2 + 2\dot{y}' \ell \cos \theta - 2\dot{y}' \ell \dot{\theta} \sin \theta - 2\ell \dot{\ell} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{y}' (\dot{\ell} \cos \theta - \ell \dot{\theta} \sin \theta) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} = m(\dot{\ell} \dot{\theta}^2 - \dot{y}' \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} = m(\dot{\ell} + \dot{y}' \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\ell}} \right) = m(\ddot{\ell} + \ddot{y}' \cos \theta - \dot{y}' \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\Rightarrow m(\ddot{\ell} + \ddot{y}' \cos \theta - \dot{y}' \dot{\theta} \sin \theta) - m(\dot{\ell} \dot{\theta}^2 - \dot{y}' \dot{\theta} \sin \theta) = mg \cos \theta - T$$

$$\dot{\ell} = \ddot{\ell} = 0 \Rightarrow \ddot{y}' \cos \theta - \dot{y}' \dot{\theta} \sin \theta - \dot{\ell} \dot{\theta}^2 + \dot{y}' \dot{\theta} \sin \theta = g \cos \theta - \frac{T}{m}$$

$$\Rightarrow T = mg \cos \theta - m\ddot{y}' \cos \theta + m\dot{\ell} \dot{\theta}^2 = m \left[(g - \ddot{y}') \cos \theta + \dot{\ell} \dot{\theta}^2 \right]$$

۱۳- ذره‌ای به جرم m مقید شده است که روی سطح داخلی حلقه‌ای به جرم M و شعاع r حرکت کند (بدون اصطکاک)؛ حلقه هم در صفحه xy حرکت می‌کند. حرکت حلقه به صورت غلتشی و بدون لغزش است. فرض کنید در $t = 0$ حلقه ساکن بوده و ذره در بالای حلقه با سرعت v_0 در راستای محور x رها می‌شود. سرعت نهایی ذره وقتی که به پایین حلقه می‌رسد چقدر است؟
حل:

$$\begin{cases} x' = x + r \sin \theta \Rightarrow \dot{x}' = \dot{x} + r\dot{\theta} \cos \theta \\ y' = r + r \cos \theta \Rightarrow \dot{y}' = -r\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + r^2 \dot{\theta}'^2 + 2xr\dot{\theta}' \cos \theta + r^2 \dot{\theta}'^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + r^2 \dot{\theta}'^2 + 2xr\dot{\theta}' \cos \theta) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2$$

$$V = mg(r + r \cos \theta)$$

$$L = M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + r^2 \dot{\theta}'^2 + 2xr\dot{\theta}' \cos \theta) - mgr(1 + \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2M\dot{x} + m\dot{x}' + r\dot{\theta}' \cos \theta$$

$$\Rightarrow (2M + m)\dot{x}' + mr\dot{\theta}' \cos \theta = \text{const.}$$

در $t = 0$ ؛ $\theta = 0$ و $\dot{x} = 0$ و $r\dot{\theta} = v_0$ است. آنگاه

$$0 + mv_0 \cos 0 = k \Rightarrow k = mv_0$$

همچنین در پایین حلقه $\theta = \pi$ است. بنابراین:

$$\dot{y}' = 0 \Rightarrow \dot{x}' = v_f = \dot{x} + r\dot{\theta} \cos \pi = \dot{x} - r\dot{\theta}$$

$$2M\dot{x} + m(\dot{x} - r\dot{\theta}) = mv_0 \Rightarrow 2M\dot{x} + mv_f = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{m(v_0 - v_f)}{2M}$$

که در آن $v = \dot{x} - r\dot{\theta}$

$$\text{بقای انرژی: } M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + \tau mgr$$

$$M \times \frac{m^2(v_o - v_f)^2}{4M^2} + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + \tau mgr$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4M}(v_o - v_f)^2 + \frac{1}{2}v_f^2 = \frac{1}{2}v_o^2 + \tau gr$$

$$\Rightarrow \frac{m}{M}(v_o^2 + v_f^2 - 2v_o v_f) + 2v_f^2 - 2v_o^2 - 4gr = 0$$

$$mv_o^2 + mv_f^2 - 2mv_o v_f + 2Mv_f^2 - 2Mv_o^2 - 4Mgr = 0$$

$$(\tau M + m)v_f^2 - 2mv_o v_f + (m - \tau M)v_o^2 - 4Mgr = 0$$

$$(\tau M + m)v_f^2 - 2mv_o v_f - [(\tau M - m)v_o^2 + 4Mgr] = 0$$

$$v_f = \frac{mv_o \pm \sqrt{m^2 v_o^2 + (\tau M + m)(\tau M - m)v_o^2 + (\tau M + m)4mgr}}{\tau M + m}$$

$$v_f = \frac{1}{\tau M + m} (mv_o \pm (m^2 v_o^2 + 4M^2 v_o^2 - m^2 v_o^2 + 4\tau M^2 gr + 4mMgr)^{\frac{1}{2}})$$

$$v_f = \frac{1}{\tau M + m} (mv_o \pm \tau(M^2 v_o^2 + 4M^2 gr + \tau mMgr)^{\frac{1}{2}})$$

$$v_f = \frac{1}{M(\tau + \frac{m}{M})} (mv_o \pm \tau M^{\tau \times \frac{1}{\tau}} (v_o^2 + \tau gr + \frac{\tau m}{M} gr)^{\frac{1}{\tau}})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} v_f = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{M(\tau + \frac{m}{M})} \times \tau M (\frac{m}{\tau M} v_o^2 + (v_o^2 + \tau gr + \frac{\tau m}{M} gr)^{\frac{1}{\tau}})$$

$$\alpha = \frac{m}{M} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad v_f \approx \sqrt{v_o^2 + \tau gr}$$

۱۴- میله‌ای به شکل زیر به دیوار تکیه داده شده است. سطوح بدون اصطکاک هستند. معادله حرکت میله را بیابید. اگر زاویه اولیه میله با سطح α باشد زاویه و ارتفاع جدایی میله از دیوار را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم مرکز جرم روی دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}l$ حرکت می‌کند.

$$x_{cm} = \frac{l}{2} \cos \theta, y_{cm} = \frac{l}{2} \sin \theta \Rightarrow \dot{x}_{cm} = -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta},$$

$$\dot{y}_{cm} = \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta}, x_M^2 + y_M^2 = \frac{l^2}{4} \quad \text{معادله دایره}$$

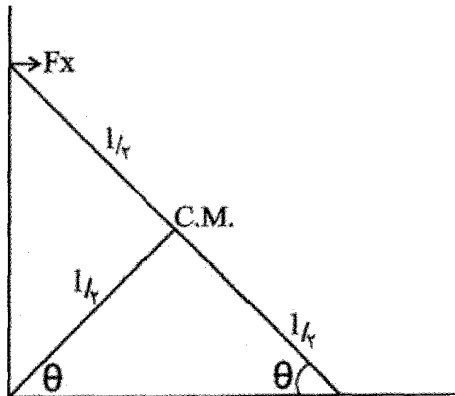
$$T = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} M l^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = Mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$L = T - V = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 - Mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -Mg \frac{l}{2} \cos \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} M l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow M \frac{l^2}{3} \ddot{\theta} + Mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \cos \theta = 0$$



شکل (۱۲-۱۱)

برای یافتن محل جدا شدن F_x را صفر می‌کنیم.

$$x_{cM} = \frac{\ell}{2} \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = -\frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\ell}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} F_x &= M\ddot{x} = -\frac{M\ell}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ &= -\frac{M\ell}{2} \left(\frac{-3g}{2\ell} \cos \theta \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

$$Mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha = \frac{1}{6} M \ell^2 \dot{\theta}^2 + Mg \frac{\ell}{2} \sin \theta \Rightarrow$$

$$Mg \frac{\ell}{2} (\sin \alpha - \sin \theta) = \frac{1}{6} M \ell^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow g(\sin \alpha - \sin \theta) = \frac{\ell}{3} \dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell} (\sin \alpha - \sin \theta)$$

$$F_x = -\frac{M\ell}{2} \left(\frac{-3g}{2\ell} \cos \theta \sin \theta + \frac{3g}{\ell} (\sin \alpha - \sin \theta \cos \theta) \right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3g}{2\ell} \sin \theta + \frac{3g}{\ell} (\sin \alpha - \sin \theta) = 0 \Rightarrow \sin \alpha - \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

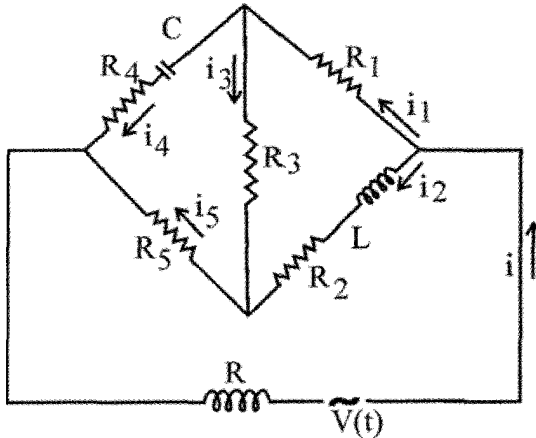
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{3} \sin \alpha \Rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \sin \alpha \right), y_M = \frac{\ell}{2} \sin \theta = \frac{\ell}{2} \times \frac{2}{3} \sin \alpha$$

$$y_{cM} = \frac{2}{3} h(t=0)$$

۱۵- یک نوع پل وتستون، علاوه بر چهار مقاومت معمول، دارای اندوکتانس L در یک بازو و یک خازن C در بازوی مقابل است. با انتخاب جریان‌های موجود از میان اجزاء به عنوان مختصات، F و L را برای پل نامتعادل تشکیل دهید. شرایط اتصال کیرشف را به عنوان قید برروی جریان‌ها بکار ببرید،

معادله‌های لاگرانژ حرکت را بیابید، و نشان دهید که از حذف ضرایب λ به معادله‌های معمول شبکه می‌رسیم.

حل: در مدار شکل زیر R_3 مشخص کننده گالوانومتر حساس است.



شکل (۱۱-۱۳)

انرژی در سلف را به عنوان انرژی جنبشی و انرژی در خازن را به صورت انرژی پتانسیل و اتلاف انرژی در R ها را به منزله تابع اتلاف در نظر می‌گیریم.

$$\dot{q}_j = i_j \rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2} L \dot{q}_1^2 \\ U = \frac{1}{2c} q_1^2 \\ F = \frac{1}{2} (R \dot{q}_1^2 + R_1 \dot{q}_1^2 + R_2 \dot{q}_2^2 + R_3 \dot{q}_3^2 + R_4 \dot{q}_4^2 + R_5 \dot{q}_5^2) \end{cases}$$

$$L = T - U$$

مولد نقش نیروی تعمیم یافته را دارد.

$$L = \frac{1}{2} L \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2c} q_1^2 + v(t) q_1$$

$$\begin{cases} q - q_1 - q_2 = 0 \\ q_1 - q_3 - q_4 = 0 \\ q_2 + q_3 - q_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 = \dot{q}_3 + \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{cases} \quad \text{معادلات قیود:}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

با حذف q_5, q_3, q_2 توسط معادلات قیدی

$$L = \frac{1}{2} L (\dot{q} - \dot{q}_1)^2 - \frac{1}{2} q_1^2 + v(t)q$$

$$F = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 + \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} R_3 (\dot{q} - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} R_4 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

$$+ \frac{1}{2} R_5 (\dot{q} - \dot{q}_2)^2$$

معادلات تحول برای q, q_1, q_2 به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

$$L(\ddot{q} - \ddot{q}_1) + R_1 \dot{q}_1 - R_2 (\dot{q} - \dot{q}_1) + R_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) = 0$$

$$L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 - R_2 (i - i_1) + R_3 (i_1 - i_2) - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2} = 0$$

$$\frac{1}{2} q_2 + R_2 \dot{q}_2 - R_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - R_5 (\dot{q} - \dot{q}_2) = 0$$

$$\frac{1}{2} \int i_2 dt + R_2 i_2 - R_3 (i_1 - i_2) - R_5 (i - i_2) \quad (II)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$L(\ddot{q} - \ddot{q}_1) - v(t) + R\dot{q} + R_r(\dot{q} - \dot{q}_1) + R_\delta(\dot{q} - \dot{q}_r) = 0$$

$$L \frac{di}{dt} - L \frac{di_1}{dt} + Ri + R_r(i - i_1) + R_\delta(i - i_r) = v(t) \quad (III)$$

که I و II و III همان معادلات مداری هستند. با اعمال ضرایب لاگرانژ می‌توان چنین نوشت:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} dg_j = 0$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dot{q}_r + \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 = \dot{q}_r + \dot{q}_r \\ \dot{q}_\delta = \dot{q}_r + \dot{q}_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dq_1 + dq_r - dq = 0 \\ dq_1 - dq_r - dq_r = 0 \\ dq_r + dq_r - dq_\delta = 0 \end{cases} \quad \text{سه معادله قیدی}$$

بنابراین معادلات حرکت به صورت زیر است:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{r=1}^3 \lambda_r a_{rj} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}$$

که λ_r ها ضرایب نامعین لاگرانژ می‌باشد.

$$v(t) - \lambda_1 = R\dot{q} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_r = R_1\dot{q}_1$$

$$-L\ddot{q}_r + \lambda_1 + \lambda_r = R_r\dot{q}_r \quad , \quad -\lambda_r + \lambda_r = R_r\dot{q}_r$$

$$-\frac{1}{c}q_r - \lambda_r = R_r\dot{q}_r \quad , \quad -\lambda_r = R_\delta\dot{q}_\delta$$

با حذف $\lambda_r, \lambda_r, \lambda_1$ داریم:

$$R\dot{q} + R_r\dot{q}_r + R_\delta\dot{q}_\delta + L\ddot{q}_r = v(t)$$

$$R_r\dot{q}_r - R_r\dot{q}_r + L\ddot{q}_r - R_1\dot{q}_1 = 0$$

$$-\frac{1}{c}q_r + R_\delta\dot{q}_\delta + R_r\dot{q}_r - R_r\dot{q}_a = 0$$

با استفاده از معادلات قید داریم:

$$R\dot{q} + R_\nu(\dot{q} - \dot{q}_\nu) + R_\delta(\dot{q} - \dot{q}_\nu) + L(\ddot{q} - \ddot{q}_\nu) = v(t)$$

$$R_\nu(\dot{q}_\nu - \dot{q}_\nu) - R_\nu(\dot{q} - \dot{q}_\nu) - L(\ddot{q} - \ddot{q}_\nu) + R_\nu\dot{q}_\nu = 0$$

$$\frac{1}{c}q_\nu - R_\delta(\dot{q} - \dot{q}_\nu) - R_\nu(\dot{q}_\nu - \dot{q}_\nu) + R_\nu\dot{q}_\nu = 0$$

که همان معادلات مدار هستند.

۱۶- نشان دهید اگر پتانسیل موجود در لاگرانژین شامل جمله‌های وابسته به تندى باشد، اندازه حرکت کانونیک مربوط به مختصات چرخش θ تمامی سیستم دیگر اندازه حرکت زاویه‌ای مکانیکی L_θ نیست بلکه با رابطه $P_\theta = L_\theta - \sum_i \hat{n}_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{\nabla}_{v_i} U$ داده می‌شود، که در آن ∇_s عامل گرادیان است که در آن مشتق‌ها نسبت به مولفه‌های سرعت است و \vec{n} بردار واحد در جهت چرخش است. اگر نیرو، از نوع الکترومغناطیس باشد آنگاه اندازه حرکت کانونیک از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$P_\theta = L_\theta + \sum_i \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times \frac{-q_i}{c} \vec{A}_i$$

حل:

$$L = T - U$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}} \quad (I)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{\theta}}$$

و می‌دانیم: $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q}$ است. با جایگزینی در رابطه بالا:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{\theta}} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i = \hat{n} \cdot \vec{L} \quad (II)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = L_\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}} &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{V}_i} \cdot \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{\theta}} \\ \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{V}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} &= \sum_i \vec{V}_i \cdot \nabla_{\vec{r}_i} U \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) \\ \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}} &= \sum_i \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times \vec{V}_i U \end{aligned} \quad (III)$$

با جایگزینی روابط II و III در رابطه I خواهیم داشت:

$$P_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = L_{\theta} - \sum_i \hat{n} \cdot \vec{r}_i \times \vec{V}_i U$$

۹-۱۱. مسائل برگزیده برای حل

۱- لاگرانژی سیستم‌های زیر را که در میدان گرانشی \vec{g} قرار گرفته اند به دست آورید:

(الف) - آونگ ساده m_2 با جرم m_1 واقع در نقطه اتکاء آن که می‌تواند بر صفحه حرکت m_2 بر خطی مستقیم حرکت کند.

پاسخ:
$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta) + m_2 g \ell \cos \theta$$

(ب) - آونگ ساده به جرم m که نقطه اتکاء آن:

I- به طور یکنواخت بر دایره‌ای قائم با فرکانس ثابت γ حرکت می‌کند.

II- به طور افقی در صفحه حرکت آونگ مطابق قانون $x = a \cos \gamma t$ نوسان می‌کند.

III- به طور قائم با قانون $y = a \cos \gamma t$ نوسان می‌کند.

I.
$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m \ell a \gamma^2 \sin(\theta - \gamma t) + m g \ell \cos \theta$$

II.
$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m \ell a \gamma^2 \cos \gamma t \sin \theta + m g \ell \cos \theta$$
 پاسخ:

III.
$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m \ell a \gamma^2 \cos \gamma t \cos \theta + m g \ell \cos \theta$$

۲- دو جرم m_1, m_2 توسط دو تکه ریسمان بدون جرم به طولهای l_1, l_2 مطابق شکل، یک آونگ دو گانه تشکیل می دهند که در صفحه XOY حرکت می کند:

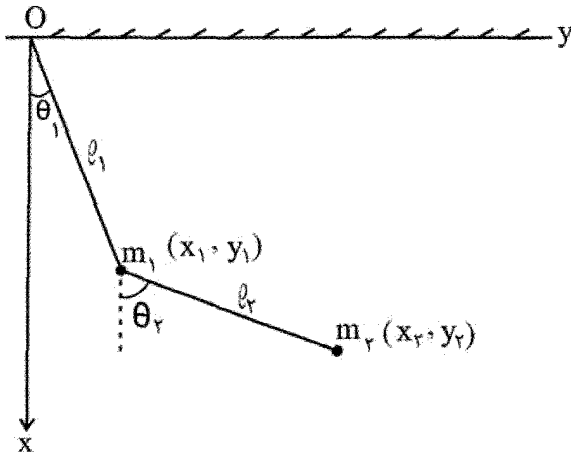
الف- مختصات تعمیم یافته و معادلات تبدیل را برای این سیستم فیزیکی بنویسید.

ب- لاگرانژی مربوط به این سیستم را بنویسید. و سپس معادلات حرکت را بیابید.

پ- چنانچه $m_1 = m_2 = m, l_1 - l_2 = l$ باشد، با فرض نوسانهای کم دامنه، معادلات

$$\begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 = -2g\theta_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2 \end{cases}$$

حرکت را بیابید. پاسخ قسمت ب:



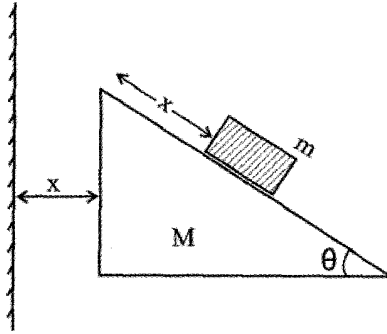
شکل (۱۱-۱۴)

۳- ذره‌ای به جرم m در سطح داخلی مخروطی وارون به نیم زاویه رأس α حرکت می کند. نوک مخروط در مبدأ مختصات قرار دارد و محور مخروط قائم و به سمت بالا است. نیروی گرانشی تنها نیرویی است که به جز نیروی قیدی بر ذره وارد می شود. با به کار بردن ρ ، فاصله افقی ذره از محور و Φ زاویه‌ای از دایره افقی حول مخروط به عنوان مختصات تعمیم یافته، معادلات حرکت را به دست آورید.

پاسخ:
$$m\ddot{\rho} \cos^2 \alpha - \frac{c}{m} \rho^{-3} - mg \cot \alpha = 0, \quad \dot{\Phi} = \frac{c_1}{m\rho^2}$$

۴- یک ذره لغزان را بر یک سطح شیبدار صاف مطابق شکل در نظر می‌گیریم. خود سطح نیز می‌تواند حرکت کند. معادلات حرکت را بیابید.

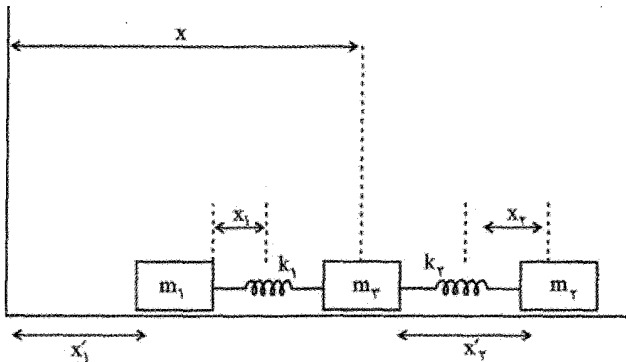
پاسخ:



$$\ddot{x} = \frac{g \sin \theta}{1 - \frac{m \cos^2 \theta}{m + M}}$$

شکل (۱۱-۱۵)

۵- تابع لاگرانژی دستگاه مکانیکی شکل زیر را با بکار بردن مختصات X, X_1, X_2 به صورتی که نشان داده شده پیدا کنید. معادلات حرکت را پیدا کنید و نشان دهید که این معادلات با معادلاتی که از بکار بردن مستقیم حرکت نیوتن به دست می‌آیند، معادل هستند.



شکل (۱۱-۱۶)

۶- حرکت ذره‌ای به جرم m را توصیف کنید به طوری که مقید به حرکت روی سطح یک استوانه به شعاع a است و توسط نیروی متناسب با فاصله ذره از مبدأ به طرف مبدأ جذب می‌شود.

پاسخ:

$$m\ddot{z} + kz = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{\text{ثابت}}{ma^2}$$

۷- فنر لاستیکی با سختی و چگالی یکنواخت به تخته‌ای به جرم m وصل شده است. اگر m' جرم فنر و k سختی آن باشد، نشان دهید که دوره تناوب حرکت در امتداد قائم برابر است با

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m'}{3}}{k}}$$

۸- حلقه‌ای به جرم M و با شعاع R روی سطح افقی از نقطه‌ای روی محیط خود به زمین کوبیده شده است، به طوری که می‌تواند حول محور قائمی که از نقطه مذکور می‌گذرد دوران کند. حشره‌ای به جرم m روی محیط آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند. معادلات حرکت را بیابید.

۹- ذره‌ای با جرم m که در یک بعد حرکت می‌کند دارای لاگرانژی زیر است:

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x)$$

که در آن V تابع مشتق پذیری از متغیر x است. معادله حرکت را برای $x(t)$ بیابید و طبیعت فیزیکی دستگاه را براساس این معادله تعیین کنید. حالت $V(x)$ ثابت را تحقیق کنید.

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{-2V}{m}}, \text{ پاسخ: قسمت آخر,}$$

۱۰- میدان الکترومغناطیس، تحت یک تبدیل پیمانه‌ای پتانسیل برداری و اسکالر داده شده در زیر

تغییر ناپذیر است:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{t}, t) \\ \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

بطوریکه ψ یک تابع اختیاری و مشتق پذیر است. این تبدیل چه اثری بر لاگرانژی یک ذره متحرک در میدان الکترومغناطیس دارد؟ آیا حرکت تأثیر می‌پذیرد؟ (مسئله ۸ و ۹ فصل اول کتاب گلدشتین و در متن از آن سخن گفته ایم).

۱۱- معادله حرکت ذره‌ای را بنویسید که تحت تأثیر گرانش بطور قائم سقوط می‌کند. در صورتیکه

نیروهای اصطکاکی وجود دارند و از تابع اتلاف $\frac{1}{2}kv^2$ به دست می‌آیند. با انتگرال گیری از معادله، سرعت را برحسب تابعی از زمان تعیین کنید و نشان دهید که ماکزیمم سرعت ممکن برای سقوط از حالت سکون عبارتست از $v = \frac{mg}{k}$.

۱۲- معادله لاگرانژی را برای عبارت لاگرانژی $L = -\sqrt{1-\dot{q}^2} + q\dot{q}$ بنویسید و آن را حل کنید.

۱۳- نقطه‌ای مادی به جرم m در یک میدان گرانشی بر سیکلوئیدی به معادله زیر حرکت می‌کند. در ماهیت حرکت این نقطه بحث کنید.

$$\begin{cases} x = R\theta + R \sin \theta \\ z = -R \cos \theta \end{cases}$$

۱۴- توپی به جرم m روی گوه متحرکی به جرم M رو به پایین می‌غلتد. زاویه گوه θ فرض می‌شود و گوه می‌تواند آزادانه روی سطح افقی همواری بلغزد. اگر تماس بین توپ و گوه به شکل کاملاً ناهموار انجام گیرد شتاب گوه چقدر است؟

$$\ddot{x} = -\frac{mg \sin \theta \cos \theta}{\frac{7}{5}(m+M) - m \cos^2 \theta} \quad \text{پاسخ:}$$

۱۵- مدلی از یک مولکول حلقه‌ای شامل سه جرم مساوی m است که بدون اصطکاک بر سیمی دایره‌ای ثابت به شعاع R می‌غزند. جرم‌ها با فنرهای همانندی با ضریب سختی $m\omega_0^2$ به متصلند. موقعیت زاویه‌ای سه جرم $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ از یک وضعیت ساکن اندازه گیری می‌شوند. الف- لاگرانژی سیستم را بنویسید و نشان دهید که معادلات حرکت چنین است:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_0^2(\nu\theta_j - \theta_{j+1} - \theta_{j-2}) = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\theta_4 = \theta_1, \theta_5 = \theta_2$$

ب- نشان دهید که مد مربوط به $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ وابسته به اندازه حرکت زاویه‌ای کل ثابت

$$L = \sum_{i=1}^3 P_{\theta_i} \text{ است.}$$

پ- فرض کنید که اندازه حرکت زاویه‌ای کل صفر است و نیز $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$. دو مد نوسانی تبهگن و فرکانس آنها را بیابید.

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\Omega t + \theta_0 \\ P_1 + P_2 + P_3 = mR^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = 3mR^2\Omega \end{cases} \text{ پاسخ (ب):}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + 3\omega_0^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + 3\omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases} \text{-(پ)}$$

۱۶- یک مهره بدون اصطکاک بر سیمی سهمی شکل با معادله $y = ax^2$ می‌لغزد. نیروی گرانشی در جهت منفی y در این مسئله موجود است. لاگرانژی را بر حسب مختصات x و y بنویسید. آنگاه معادله قید را بکار برید و لاگرانژی را فقط بر حسب x بنویسید. معادله حرکت را بیابید و سپس آن را برای حالت نوسان‌های کم دامنه ساده کنید.

پاسخ:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) - mgax^2$$

$$\ddot{x}(1 + 4ax^2) + 4ax^2\dot{x} + 2gax = 0$$

$$\ddot{x} + 2gax \approx 0$$

فصل دوازدهم

دینامیک هامیلتونی - قضیه نوتر

«... گسترش نوین فیزیک همواره با نام هامیلتون مترادف است. تطابق و همانندی معروف وی بین مکانیک و اپتیک سرانجام به پیش بینی مکانیک موجی منتهی شد، که چیز زیادی افزون بر ایده‌های وی نبود، بلکه فقط آن ایده‌ها بطور جدی گرفته شد - کمی جدی تر از آنچه وی با دانش تجربی یک قرن پیش قادر به این کار بوده باشد. مفهوم مرکزی تمامی نظریه مدرن در فیزیک، «هامیلتونی» است. اگر بخواهید نظریه مدرن را در هر مسئله ویژه بکار برید، باید مسئله را به «شکل هامیلتونی» در آورید. از اینرو هامیلتون یکی از بزرگترین مردان علم است که جهان به خود دیده است.»

اروین شرودینگر؛ مجموعه مقالات در یادبود سرویلیام راون هامیلتون - شماره ۲، نیویورک، ۱۹۴۵

۱-۱۲. مقدمه

در دو فصل قبل معادلات لاگرانژ را عمدتاً براساس ملاحظه حالت لحظه‌ای سیستم و جایجایی‌های مجازی کوچک نسبت به حالت خاص لحظه‌ای آن استخراج کردیم. به عبارت دیگر

معادلات نیوتن را مبنا قرار دادیم و از حالت لحظه‌ای یعنی از یک اصل دیفرانسیلی^۱ مانند اصل دالامبر استفاده کردیم. این امکان وجود دارد که معادلات مذکور را از بررسی رفتار عمومی سیستم و حرکت آن در فاصله زمانی t_1 و t_2 و انحراف‌های مجازی کوچک نسبت به حرکت واقعی سیستم نتیجه گیری کنیم. اصلی که این شیوه بر آن استوار است اصل انتگرالی^۲ گفته می‌شود. در فصل هشتم کتاب گلدشتین این مبحث از دیدگاه تحلیلی و آکسیوماتیک بررسی شده است.

یادآور می‌شویم چنانچه به جای استفاده از قوانین نیوتن در استخراج معادلات لاگرانژ و هامیلتون، اصل کمترین کنش را به عنوان اصل و مبنا قرار دهیم، آنگاه اصل هامیلتون فقط ریاضیات مسئله است نه قانون فیزیکی. فیزیک مسئله در شکل لاگرانژی است که ما بر می‌گزینیم. این عبارت باید از اصولی تبعیت کند که معتقدیم از نظر فیزیکی درست هستند. اصل کمترین کنش به عنوان یک پلکان ریاضی ایده آل برای بیان این اصول عمل می‌کند. برتری فرمولبندی هامیلتونی نسبت به معادله لاگرانژ ارائه مفاهیم جدید فیزیکی نیست بلکه بویژه به خاطر گسترش و ارائه چارچوب نظری مناسبی است که در شاخه‌های مختلف فیزیک از جمله مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی کاربرد دارد.

از نظر تاریخی، اصل فرما به عنوان اولین اصل وردشی است که در فیزیک به کار رفته است. موپرتویی^۳ کوشش کرد که این ایده را به مکانیک تعمیم دهد (سال ۱۷۴۷)، با این استدلال که «اصل کمترین کنش گواه وجود عقلانیت خداوند است!» اما صرفنظر از دیدگاه مذهبی وی، این دیدگاه انگیزه‌ای برای پیگیری ایده حساب وردشی به عنوان ابزاری در فیزیک نظری شد. هامیلتون فرمول خود را در سال ۱۸۳۴ منتشر کرد. در فصل‌های بعد و در رابطه با دیدگاه هامیلتونی، می‌پذیریم که سیستم‌های مکانیکی مورد بررسی از نوع هولونومیک هستند و نیز نیروهای مطرح شده Monogenic هستند؛ یعنی یا مشتق از پتانسیل‌های فقط تابع مکان هستند، یا از پتانسیل‌های تعمیم یافته و ابسته به سرعت از نوع بحث شده در فصل یازدهم مشتق می‌شوند.

۱۲-۲. معادلات کانونیکی حرکت - دینامیک هامیلتونی:

قبلاً دریافتیم که اگر انرژی پتانسیل سیستم مستقل از سرعت باشد، آنگاه مولفه‌های اندازه حرکت

1- Differential principle

2- Integral principle

3- Maupertuis

خطی در مختصات دکارتی از رابطه

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \quad (۱-۱۲)$$

به دست می‌آید. یادآور می‌شویم که P_j را اندازه حرکت کانونیکی یا اندازه حرکت مزدوج نیز می‌نامند. از طریق مقایسه، این نتیجه را به حالتی بسط می‌دهیم که در آن لاگرانژین در مختصات تعمیم یافته بیان می‌شود.

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (۲-۱۲)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} (p_j) = \dot{p}_j$$

اکنون برحسب مختصات تعمیم یافته، هامیلتونی را تعریف می‌کنیم:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (۳-۱۲)$$

در فصل تبدیلات کانونیک این انتخاب رابطه فوق به عنوان تعریف هامیلتونی توضیح داده می‌شود. اساساً در مکانیک، تبدیل یافته (یا مبدل) لاگرانژی L تحت تبدیل لژاندر روی \dot{q} ، هامیلتونی سیستم نامیده می‌شود و به صورت فوق تعریف می‌شود. برای سرعت‌های تعمیم یافته معادله (۱-۱۲) را حل می‌کنیم و آنها را به صورت

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t) \quad (۴-۱۲)$$

بیان می‌کنیم. احتمالاً وجود t در این رابطه یا به دلیل وابستگی زمانی قیدهاست، یا اینکه معادلات تبدیل تابع صریح زمان هستند.

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (۵-۱۲)$$

در این تعریف تأکید بر این است که هامیلتونی همیشه به صورت تابعی از مجموعه (q_k, p_k, t) تعریف می‌شود، در حالیکه لاگرانژین تابعی از مجموعه (q_k, \dot{q}_k, t) است:

$$H = H(q_k, p_k, t) \quad ; \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

استفاده از (q, p) به جای (q, \dot{q}) منجر به معادلاتی می‌شود که برحسب دو متغیر شکل متفاوتی خواهد داشت. اکنون تغییرات هامیلتونی را به طور مستقیم و نیز با توجه به رابطه (۱۲-۳) یا (۱۲-۵) می‌نویسیم:

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (۱۲-۶)$$

مطابق با معادله (۱۲-۵) داریم،

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

با استفاده از روابط (۱۲-۱) و (۱۲-۲) داریم:

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

و از مقایسه با رابطه (۱۲-۶) معادلات حرکت هامیلتون نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (۱۲-۷)$$

و از روابط (۱۲-۶) و (۱۲-۷)،

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (۱۲-۸)$$

(۱ + ۲n) معادله فوق، معادلات حرکت هامیلتون است. به علت ظاهر متقارن آنها، به نام معادلات کانونیکی حرکت معروف هستند، و توصیف حرکت با این معادلات، دینامیک هامیلتونی نامیده می‌شود. نخستین بار ژاکوبی واژه تبدیلات کانونیک و در پی آن کانونیکی را مطرح کرد، بدون آنکه انگیزه و دلیل خاصی بر این نامگذاری داشته باشد.

معادله $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ می‌گوید اگر H صریحاً تابع زمان نباشد، آنگاه هامیلتونی کمیتی پایستار

است. در فصل قبل دیدیم چنانچه پتانسیل مستقل از سرعت باشد و معادلات تبدیل بین q_j, X_j صریحاً شامل زمان نباشد، هامیلتونی برابر انرژی کل $T+U$ می‌شود (این نکته را در بخش ۱۲-۳

مشاهده کنید). تحت این شرایط اگر $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ باشد، آنگاه $H=E$ مقداری ثابت است. در استخراج

معادلات هامیلتون و مقایسه با معادلات لاگرانژ مشاهده می‌شود که معادلات لاگرانژ به تعداد $S = 3n - m$ معادله درجه دوم است که در آن n بعد فضا، m تعداد قیود، و s درجه آزادی است. در حالیکه تعداد معادلات هامیلتون $2S$ معادله درجه اول است. البته این امر تصادفی نیست و در نظریه معادلات دیفرانسیل نشان داده می‌شود که همواره می‌توان مجموعه s معادله مرتبه دوم را به تعداد $2S$ معادله مرتبه اول تبدیل کرد. برای حل این معادلات کانونیک لازم است اول هامیلتونی سیستم را نوشت. گاه می‌توان این کار را مستقیماً انجام داد و گاه لازم است اول لاگرانژی را نوشت و

اندازه حرکت‌های تعمیم یافته را از معادلات لاگرانژ استخراج کرد (طبق رابطه $P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$). بعد

معادلات حرکت توسط معادلات کانونیکی داده می‌شود. معادلات کانونیکی را می‌توان از طریق حساب وردشی نیز نتیجه گرفت. این کار را در همین فصل انجام می‌دهیم.

مثال ۱۲-۱. به عنوان مثال در مورد معادلات حرکت هامیلتون به حرکت آونگ کروی می‌پردازیم. مختصات تعمیم یافته را در این مسئله θ, ϕ می‌گیریم (طول $r=b$ ثابت است):

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \quad (9-12)$$

$$= \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

این مثالی از حرکت فضایی یک جسم یا ذره در میدان نیروی مرکزی است. تنهای نیروی وارد بر آونگ، نیروی جاذبه وزن است و پتانسیل صفر را در نقطه آویز انتخاب می‌کنیم.

$$U = -mgb \cos \theta$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mgb \cos \theta \quad (10-12)$$

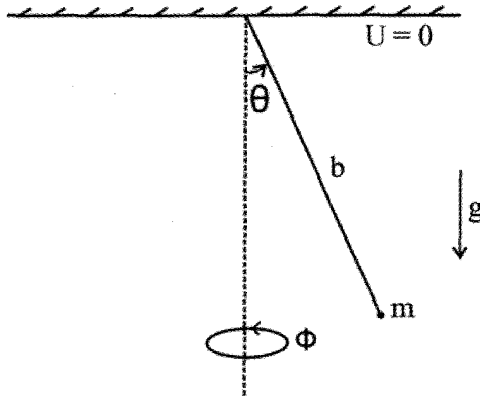
اندازه حرکت تعمیم یافته عبارت است از

$$\begin{cases} p_r = 0 \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2 \dot{\theta} \\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mb^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{cases} \quad (11-12)$$

دو معادله فوق را می‌توان برحسب p_ϕ, p_θ حل کرد. هامیلتونی را از رابطه

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_i p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

تعیین می‌کنیم (در این مسئله می‌توان از طریق $H=T+U$ ، رابطه را نوشت چرا که شرایط لازم در این مورد صدق می‌کند؛ نیروی جاذبه گرانشی پایستار است).



$$\begin{aligned} H = T + U &= \frac{1}{2} mb^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mb^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - mgb \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} mb^2 \frac{p_\theta^2}{(mb^2)} + \frac{1}{2} \frac{mb^2 \sin^2 \theta p_\phi^2}{(mb^2 \sin^2 \theta)} - mgb \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2 \sin^2 \theta} - mgb \cos \theta \end{aligned} \quad (12-12)$$

معادلات حرکت چنین است:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{mb^{\nu}} \quad (12-13)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{mb^{\nu} \sin^{\nu} \theta}$$

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{-p_{\phi}^{\nu} \cos \theta}{mb^{\nu} \sin^{\nu} \theta} + mgb \sin \theta$$

$$\dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

چون ϕ کمیتی چرخه‌ای (Cyclic) است، اندازه حرکت p_{ϕ} وابسته به آن، نسبت به محور تقارن، ثابت است.

۱۲-۲-۱. تبدیل لژاندر

همانطور که می‌دانیم در بررسی یک مسئله دینامیکی، انتقال از لاگرانژی به فرمولبندی هامیلتونی مربوط به تغییر در توابع مکانیکی از (q, \dot{q}, t) به (q, p, t) است، که در آن (\dot{q}, q, p) با رابطه (۱-۱۲) یا (۲-۱۲) به یکدیگر مربوط می‌شوند. فرآیندی که برای تبدیل متغیرها به شیوه مذکور ارائه می‌شود، تبدیل لژاندر (Legendre transformation) نامیده می‌شود.

از نظر ریاضی تابع دو متغیری $f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم، آنگاه

$$df = udx + vdy \quad (12-14)$$

که در آن

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (12-15)$$

اکنون مبنای توصیف سیستم را از متغیرهای (x, y) به مجموعه متغیرهای جدید (u, y) تغییر می‌دهیم. فرض می‌کنیم $g(u, y)$ چنین شود:

$$g = f - ux \quad (۱۶-۱۲)$$

$$dg = df - udx - xdu = vdy - xdu \quad \text{آنگاه}$$

به طوری که،

$$(۱۷-۱۲)$$

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}$$

که در واقع وارون معادلات (۱۲-۱۵) است. تبدیل تعریف شده را تبدیل لژاندر می‌نامیم. این شیوه اغلب در ترمودینامیک کاربرد دارد.

تبدیل سیستم مکانیکی از (q, \dot{q}, t) به (q, p, t) نسبت به نوع تبدیلی که در معادلات (۱۲-۱۴) تا (۱۲-۱۶) در نظر گرفته شد فقط در این نکته تفاوت دارد که در تبدیل مکانیکی بیش از یک متغیر تبدیل می‌یابد. به جای لاگرانژی، با تابع هامیلتونی (۱۲-۳) سر و کار داریم که شبیه معادله (۱۲-۱۶) است، مگر یک علامت منفی:

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

دیدیم که در واقع با اعمال شیوه لژاندر، به معادلات هامیلتونی (۱۲-۷) می‌رسیم. به طور کلی در مکانیک، تبدیل یافته لاگرانژی، L ، تحت تبدیل لژاندر روی \dot{q} را هامیلتونی می‌نامیم. انتخاب $H = \sum p\dot{q} - L$ منطقی است چرا که با فرض $L=T-V$ خواهیم داشت:

$$H = \sum p\dot{q} - L = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} - (T - V) = 2T - T + V = T + V = E$$

یعنی H در یک انتخاب مناسب می‌تواند به صورت انرژی کل مکانیکی سیستم ظاهر شود. اما چنانچه $H = L - \sum p\dot{q}$ انتخاب گردد، آنگاه

$$H = L - \sum p\dot{q} = (T - V) - 2T = -V - T = -E$$

یعنی H برابر انرژی منفی می‌شود و این معنای فیزیکی به H نمی‌دهد.

۱۲-۳. تقارن و قوانین بقا در مکانیک کلاسیک

همسانی یا تقارن در جهان هستی همواره ذهن متفکران را به خود مشغول داشته است. اصولاً طبیعت تمایل تقارن دارد، و به سخنی بسیار نزدیک به وضعی متقارن است. این یک اصل مهم طبیعی و فیزیکی است که دو نمود بنیادی انرژی و ماده با تقارنی متقابل متجلی می‌گردند. وجود الکترون-پوزیترون، یا پروتون-ضد پروتون، و به طور کلی ذره-ضد ذره، و به احتمالی گسترده تر ماده-ضد ماده، نمونه‌های کامل تقارن در طبیعت هستند و این پرسش را در پی خود دارند که: «آیا جهان هستی متقارن است؟».

در این بخش به طور خلاصه قضایای مربوط به قوانین بقا را که پی آمد مستقیم تقارن و ناوردایی در طبیعت است، در مورد مکانیک کلاسیک بیان می‌کنیم. در پیوست همین فصل، بحث مفصلتر را می‌توان مطالعه کرد.

۱- هر عملی که روی یک سیستم انجام شود و معادله سیستم را تغییر ندهد، می‌گوییم تقارن وجود دارد. بطور کلی به مجموعه‌ای از ناوردائی‌ها در فیزیک، تقارن می‌گوییم. از نظر تطبیق با الگوی ریاضی، تعریف تقارن به صورت زیر مطرح می‌شود:

«عملی مانند S به طوری که $q(t)$ را به $Sq(t)$ تبدیل کند و دارای دو خاصیت عمده زیر باشد، آن را تقارن روی سیستم مورد نظر می‌نامیم:

۱- این عمل وارون پذیر باشد؛
 ۲- اگر $q(t)$ معادله مسیر باشد $Sq(t)$ نیز پاسخ معادله حرکت باشد و برعکس. مثلاً در حرکت ذره آزاد داریم:

$$q = at + b \implies \dot{q} = a$$

$$Sq(t) = q(t) + c = at + b'$$

$$Sq(t) = q(t + \tau) = a(t + \tau) + b = at + a\tau + b = at + b'$$

تجانس نیز تقارن سیستم است،

$$Sq(t) = \lambda q(t) = \lambda at + \lambda b = a't + b'$$

وارونی زمان تقارن سیستم است،

$$Sq(t) = q(-t) = -at + b = a't + b$$

خیز گالیله تقارن است،

$$Sq(t) = q(t) + vt = (a + v)t + b$$

اگر تبدیلی، لاگرانژی سیستم را تغییر ندهد حتماً از نوع تقارن است.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

$$L \rightarrow L' = L$$

انتقال در مکان:

$$L \rightarrow L' = L|_{t+\tau}$$

انتقال در زمان:

$$L \rightarrow L' = \lambda L$$

تجانس:

$$L \rightarrow L' = L|_{-t}$$

وارونی زمان:

$$L \rightarrow L' = L + m\dot{q}v + \frac{1}{2}mv^2$$

خیز گالیله:

۱- بقای انرژی (همگنی زمان)

می‌دانیم در دستگاه مختصات اینرسی زمان همگن است؛ یعنی "هیچ لحظه‌ای بر لحظه دیگر متمایز و متفاوت نیست، و رویداد حوادث در تمامی لحظات باید به طور یکسان حادث شود". بنابراین لاگرانژین مبین یک سیستم بسته، یعنی سیستمی که با هیچ چیز خارج از سیستم برهمکنش ندارد، نمی‌تواند به طور صریح به زمان بستگی داشته باشد. پس

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (12-18)$$

که در آن دیگر ظاهر نمی‌شود. اما معادلات لاگرانژ چنین است:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

بنابراین:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{p}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

یعنی عبارت داخل پرانتز یک ثابت حرکت است. این عبارت را با H نشان می‌دهیم و H را هامیلتونی سیستم می‌نامیم.

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L(q_j, \dot{q}_j) = \text{ثابت} \quad (12-19)$$

اگر انرژی پتانسیل V تابع صریح سرعت و زمان نباشد، آنگاه $V=V(x_i)$ است و رابطه بین مختصات دکارتی و مختصات تعمیم یافته چنین می‌شود:

$$x_i = x_i(q_j) \Leftrightarrow q_j = q_j(x_i)$$

که امکان وابستگی به زمان را به طور صریح در معادلات تبدیل برداشته ایم. بنابراین $V=V(q_j)$ و

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \text{ است. آنگاه}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

بنابر معادله (۱۲-۱۹)

$$(T - V) - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H$$

و با استفاده از رابطه $\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$ ، که در حالت کلی برای حالتی که T فقط تابع دو

مجذوری از سرعت است برقرار است و به نام اویلر خوانده می‌شود، داریم

$$(T - V) - 2T = -H \Rightarrow H = T + V = E = \text{کل} \quad (۱۲-۲۰)$$

بدین ترتیب هامیلتونی سیستم برابر با انرژی کل سیستم می‌شود چنانچه:

الف- معادلات تبدیل بین مختصات دکارتی و تعمیم یافته مستقل از زمان باشد، از اینرو به ما

اطمینان می‌دهد که انرژی جنبشی تابع همگن دو مجذوری کامل از \dot{q}_j است.

ب- انرژی پتانسیل مستقل از سرعت باشد، از اینرو به ما اجازه می‌دهد که جمله $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}$ را از

معادله H حذف کنیم. بدین ترتیب به این نکته می‌رسیم که پرسش «آیا $H=E$ برای سیستم فیزیکی

برقرار است یا نه؟» و «آیا انرژی سیستم پایستار است؟» دو جنبه متفاوت مسئله است و هر سؤال

باید به طور جداگانه مورد بررسی و آزمون قرار گیرد. مثلاً حالتی وجود است که در آنها هامیلتونی

برابر انرژی کل نیست، اما معادلات انرژی کل بقا دارد. در سیستم مختصات در حال حرکت،

هامیلتونی دیگر مساوی انرژی کل نیست. اتمی که تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی متغیر قرار

دارد مثالی است در این مورد که L تابع صریح زمان می‌شود.

۲- بقای اندازه حرکت خطی (همگنی فضا):

همگنی فضا بدین مفهوم است که "هیچ نقطه‌ای در فضا بر نقطه دیگر متمایز نیست، و رویداد حوادث در نقاط مختلف فضا باید به طور یکسان حادث شود". از اینرو، براساس همگن بودن فضا در دستگاه مختصات اینرسی، لاگرانژی سیستم بسته در اثر انتقال سیستم در فضا تغییر نمی‌کند:

$$\delta \vec{r} = \sum_i \delta x_i \hat{e}_i \Rightarrow \delta L = \sum_i \frac{dL}{dx_i} \delta x_i + \sum_i \frac{dL}{d\dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0$$

$$L = L(x_i, \dot{x}_i)$$

چرا که تغییر مکان بینهایت کوچک تغییری در L نمی‌دهد. همچنین δx_i تابع صریح یا ضمنی t نیست. چون فقط جابجایی بسیار کوچک در داخل سیستم صورت می‌گیرد و به خاطر همگن بودن فضا و تغییرناپذیری L در اثر انتقال، خواهیم داشت:

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i = 0$$

و چون δx_i ها جابجایی مستقل هستند،

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{ثابت}$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \sum_1 \dot{x}_i^2 \right) = m \dot{x}_i = p_i = \text{ثابت}$$

۳- بقای اندازه حرکت زاویه‌ای (همسانگردی فضا)

یکی دیگر از مشخصه‌های چارچوب سخت، همسانگردی فضایی است. "به عبارت دیگر، خواص مکانیکی یک سیستم به سمت گیری آن در فضا بستگی ندارد". در مورد دوران داریم:

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\theta} \times \vec{r} \Rightarrow \delta \vec{r} = \delta \vec{\theta} \times \vec{r} + (\delta \vec{\theta}) \times \vec{r} = \delta \vec{\theta} \times \vec{r}$$

تغییر لاگرانژی نسبت به دوران بینهایت کوچک صرفنظر کردنی است. همچنین $\delta \theta$ را بسیار

کوچک و ثابت انتخاب می‌کنیم پس تغییر زمانی ندارد.

$$\delta L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial x_j} \delta x_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j = 0$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_j} - \dot{p}_j = 0 \Rightarrow \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial x_j}$$

اکنون روی تمام مولفه‌ها جمع می‌بندیم:

$$\delta L = \sum_j \dot{p}_j \cdot \delta x_j + \sum_j \dot{p}_j \cdot \delta \dot{x}_j = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot \delta \vec{x} + \vec{p} \cdot \delta \vec{\dot{x}} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot (\delta \vec{\theta} \times \vec{r}) + \vec{p} \cdot (\delta \vec{\theta} \times \vec{\dot{r}}) = 0$$

$$\Rightarrow \delta \vec{\theta} \cdot (\vec{p} \times \vec{r}) + \delta \vec{\theta} \cdot (\vec{p} \times \vec{\dot{r}}) = \delta \vec{\theta} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$$

و چون $\delta \vec{\theta}$ اختیاری است، آنگاه

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{ثابت} \quad (۱۲-۲۱)$$

در مجموع بررسی‌های بالا، هفت ثابت (یا انتگرال) حرکت برای سیستم بسته و منفرد وجود دارد: انرژی کل - اندازه حرکت خطی (سه مولفه) - و اندازه حرکت زاویه‌ای (سه مولفه). در حالت کلی سه مورد بقای کمیت‌های پایستار در فیزیک را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد:

کمیت پایستار	ویژگی لاگرانژی L	مشخصات دستگاه اینرسی
انرژی کل	مستقل از زمان	همگنی زمان
اندازه حرکت خطی	ناوردا نسبت به انتقال	همگنی فضا
اندازه حرکت زاویه‌ای	ناوردا نسبت به چرخش	همسانگردی فضا

۱۲-۴. یک مثال ساده: یادآوری می‌کنیم که یکی از با ارزشترین مزیت‌های اصل هامیلتون - یا فرمولبندی لاگرانژ - سهولت مشاهده رابطه بین تقارن و قانون پایستگی است. مثلاً X_i را برابر Φ ، زاویه سمتی، می‌گیریم. اگر لاگرانژی مستقل از Φ باشد یعنی Φ مختصه‌ای چشم پوشیدنی باشد،

دو پیامد خواهد شد: (۱) - یک تقارن محوری (چرخشی) داریم؛ (۲) از معادله لاگرانژ خواهیم داشت

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \text{const}$$

از نظر فیزیکی، این تعبیر متناظر با پایستگی یا ناوردایی یک مولفه اندازه حرکت

زاویه ای. به همین صورت ناوردایی تحت انتقال به پایستگی حرکت خطی می‌انجامد.

«قضیه نوتر»^۱ (Noethers theorem)، تعمیم این ناوردایی (تقارن) یا رابطه قانون پایستگی

است. در حالتی ساده نشان می‌دهیم که به عنوان نتیجه تقارن و ناوردایی چرخشی، اندازه حرکت

زاویه‌ای به عنوان تابعی از سرعت و مکان در سیستم باید بقا داشته باشد: چرخش را به دور محور Z

در نظر می‌گیریم. تقارن چرخشی لاگرانژین به ما اجازه می‌دهد که مختصات را دوران دهیم (تغییر

وضعیت دهیم) به طوری که محوری را که بخواهیم، محور Z بنامیم. اگر نیرو مرکزی نباشد، جهات

مختلف از نظر فیزیکی از یکدیگر متمایزند، و دیگر این شیوه نامگذاری و تغییر وضعیت مجاز نیست.

برای هر مقدار θ ، نقطه (x, y) به نقطه (x', y') توسط رابطه زیر تبدیل می‌یابد:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = y \cos \theta + x \sin \theta \end{cases} \quad (12-22)$$

اگر $\theta = 0$ باشد، تبدیل را تبدیل بی اثر یا همانی (Identity) می‌نامیم. این نکته مهم است که

سرعت‌ها نیز به همان شیوه مختصات فضایی تبدیل می‌یابند. اکنون θ را به اندازه بسیار کوچک

$\delta\theta$ انتخاب می‌کنیم و از $\delta\theta^2$ به بالا صرف‌نظر می‌کنیم. به عنوان حالت حدی روابط فوق به شکل

زیر در می‌آیند،

$$\begin{cases} x' = x - y\delta\theta \\ y' = y + x\delta\theta \end{cases} \quad (12-23)$$

قبل از دوران بینهایت کوچک لاگرانژی، L شکل عمومی زیر را داشت:

$$L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (12-24)$$

۱- این قضیه منتسب به امی نوتر (Emmy Noether) ریاضیدان (۱۸۸۲-۱۹۳۵) است و می‌گوید «چنانچه تقارن در یک سیستم وجود داشته باشد، حتماً یک ثابت حرکت وابسته به این تقارن وجود خواهد داشت». برای بحث بیشتر به کتاب زیر مراجعه کنید:

پس از دوران، لاگرانژی به L' تبدیل می‌شود:

$$L = L(x - y\delta\theta, y + x\delta\theta, z, \dot{x} - \dot{y}\delta\theta, \dot{y} + \dot{x}\delta\theta, \dot{z}, t) \quad (۱۲-۲۵)$$

از بسط تیلور کمک می‌گیریم و فقط دو جمله اول بسط را نگاه می‌داریم:

$$\begin{cases} x' = x - y\delta\theta \\ y' = y + x\delta\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - \dot{y}\delta\theta \\ \dot{y}' = \dot{y} - \dot{x}\delta\theta \end{cases}$$

$$L' = L'(x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', t) = L + \frac{\partial L}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial L}{\partial y}(y' - y)$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\dot{x}' - \dot{x}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(\dot{y}' - \dot{y}) + \dots$$

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial x}(-y\delta\theta) + \frac{\partial L}{\partial y}(x\delta\theta) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-\dot{y}\delta\theta) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(\dot{x}\delta\theta) + \dots$$

در نهایت:

$$L' = L + \delta\theta \left[x \frac{\partial L}{\partial y} - y \frac{\partial L}{\partial x} + (\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) \right] + O(\delta\theta^2) \quad (۱۲-۲۶)$$

بنا به تعریف، ناوردایی لاگرانژی در این تبدیلات ایجاب می‌کند که

$$L' = L \quad (۱۲-۲۷)$$

از معادلات (۱۲-۱۵) و (۱۲-۲۰) چنین بر می‌آید که ضریب $\delta\theta$ باید صفر شود. از معادلات اوپلر -

لاگرانژ کمک می‌گیریم و جایگزینی‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{dp_y}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{dp_x}{dt}$$

$$x \frac{dL}{dy} - y \frac{dL}{dx} + \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = x \frac{dp_y}{dt} + \dot{x} p_y - (y \frac{dp_x}{dt} + \dot{y} p_x)$$

$$= \frac{d}{dt} (x p_y - y p_x) = 0$$

و با انتخاب $L_z = xp_y - yp_x$ خواهیم داشت: $\frac{dL_z}{dt} = 0$

که در آن L_z مولفه z اندازه حرکت زاویه‌ای است. چنانچه همین شیوه را در مورد مولفه‌های دیگر به کار بندیم به نتیجه مهم زیر می‌رسیم: ناوردایی چرخشی L ، اندازه حرکت زاویه‌ای سیستم:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{ثابت} \quad (12-28)$$

۱۲-۵. استخراج معادلات کانونیکی هامیلتون براساس حساب وردشی:

اصل وردشی هامیلتون بر شالوده فرضی استوار است که ثابت شده تغییرات مکانیکی در کوتاهترین مسیر ممکن رخ می‌دهد. بنابر اصل هامیلتون که در سال ۱۸۳۴ مطرح شد، حرکت هر سیستم طوری صورت می‌گیرد که همیشه انتگرال کنش سیستم یعنی $\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$ اکستریم (ماکزیمم یا می‌نیمم) می‌شود و عمدتاً در سیستم‌های

فیزیکی پایستگی به سمتی است که این عبارت می‌نیمم می‌شود.

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$\Rightarrow L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_j p_j \dot{q}_j - H) dt = 0$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum_j p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t) dt = 0$$

آخرین جمله صفر می‌شود، چرا که تغییرات در یک زمان مشخص صورت می‌گیرد ($\delta t = 0$). از طرف دیگر داریم:

$$\delta \dot{q}_j = \delta \left(\frac{dq_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_j$$

$$\Rightarrow \int \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = \sum_j \int p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt = \sum_j p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{p}_j \delta q_j dt$$

و در نهایت با صفر شدن جمله اول سمت راست، خواهیم داشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int \sum \left\{ \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (29-12)$$

δp_j و δq_j تغییرات مستقل هستند با این ویژگی که در حدود زمانی t_1 و t_2 هر دو صفر هستند. بنابراین معادلات هامیلتونی، یا معادلات کانونیکی حرکت از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad (30-12)$$

اگر اصل هامیلتونی را برحسب متغیرهای q_k و p_k مبنا قرار دهیم، دلیل انتخاب p_k به جای \dot{q}_k را در تبدیل از لاگرانژی به هامیلتونی در می‌یابیم. تغییرات δq و δp به واقع در هر زمان مستقل از یکدیگر هستند، در حالیکه δq و $\delta \dot{q}$ چنین نیست. از رابطه $dH = \dot{q}dp - p\dot{d}q$ تقارن بین p, q مشخص است.

۱۲-۶. مختصات چشم پوشیدنی (حذف شدنی)

اگر یکی از مختصات تعمیم یافته به طور صریح در عبارت L ظاهر نشود، آنگاه بنابر معادله لاگرانژ

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} p_k = 0 \Rightarrow p_k = \text{ثابت}$$

یعنی اندازه حرکت تعمیم یافته وابسته به این مختصه همواره ثابت می‌ماند و بقا دارد. چنین مختصه‌ای (q_k) را مختصه تعمیم یافته چشم پوشیدنی یا چرخه‌ای می‌نامیم. البته این تعریفی فراگیر نیست، اما در اغلب متن‌های کلاسیک متداول است. مطابق فرمول بالا، و منطبق بر قضیه‌ای عمومی می‌توان گفت که اندازه حرکت تعمیم یافته وابسته به یک مختصه چرخه‌ای همواره ثابت است. به واقع این اولین انتگرال حرکت برای معادلات حرکت است، و به کمک آن می‌توان مختصه تعمیم یافته چرخه‌ای مورد نظر را از مسئله حذف کرد و بدین وسیله مسئله را برحسب دیگر

مختصات تعمیم یافته حل کرد.

اهمیت مختصات انتقالی یا دورانی چرخه‌ای در رابطه با ویژگی‌های سیستم جای بحث بیشتری را می‌دهد: «اگر مختصه‌ای وابسته به یک جابجایی از نوع چرخه‌ای باشد، این بدان معناست که انتقال سیستم هیچ اثری بر سیستم ندارد. به بیان دیگر اگر سیستم تحت انتقال در راستایی معین ناوردا باشد، اندازه حرکت خطی وابسته به آن بقا دارد. مشابه آن در مورد چرخش جسم مطرح می‌شود و در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای به دور محوری داده شده بقا دارد. از اینرو قضایای بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای دقیقاً به ویژگی‌های تقارنی سیستم مربوط می‌شود. اگر سیستم دارای تقارن کروی باشد، می‌توان بدون تأمل بیشتر گفت که تمام مولفه‌های اندازه حرکت زاویه‌ای آن بقا دارد. یا اگر سیستم فقط نسبت به محوری مانند محور Z متقارن است، آنگاه فقط L_z بقا دارد. این ملاحظات تقارنی اغلب در مسایل نسبتاً دشوار برای تعیین این مطلب به کار می‌رود که با جستجو دریابیم که آیا ثابت‌های معین حرکت وجود دارد یا نه» (گلدشتین - فصل دوم).

در مورد مختصات چشم پوشیدنی، چنانچه در بالا گفته شد، این امکان هست که آنها را از لاگرانژی حذف کنیم. اما خود عبارت لاگرانژی نیز باید تغییر کند. یک راه، تعریف لاگرانژی جدید به نام روتین (Routhian) است که به صورت $R = L - pq$ تعریف می‌شود. خیلی واضح نیست ولی گفته می‌شود که R می‌تواند درست مانند یک لاگرانژی، با $N - 1$ درجه آزادی، عمل کند.

۱۲-۷. تقارن نوتری^۱

با تعریف کنش سیستم به صورت $S = \int L dt$ و پذیرش اصل کمترین کنش خواهیم داشت،

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (۱۲-۳۱)$$

تقارن O_S را که نسبت به کنش S مشتق پذیر است، در نظر می‌گیریم:

$$O_S O_{S'} = O_{S+S'} \quad ; \quad O_0 = 1 \quad (۱۲-۳۲)$$

$$O_S(q) = O_0(q) + SG + O(S)$$

عبارت G به عنوان مولد عمل تقارن است. قضیه نوتر چنین است: وجود تقارن نوتری به معنای وجود

۱- این بخش را می‌توان حذف کرد، بی آنکه به پیوستگی مطالب لطمه‌ای بخورد.

ثابت حرکت است.

$$q \rightarrow q + SG$$

$$L(O_S(q)) = L(t, q + SG, \dot{q} + S\dot{G})$$

$$= L(t, q, \dot{q}) + SG \frac{\partial L}{\partial q} + S\dot{G} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + O(S)L = Lq(t) + S \frac{d\mu}{dt} + O(S)$$

$$; \frac{d\mu}{dt} = G \frac{dL}{dt} + \dot{G} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{با انتخاب}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = G \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{G} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = G \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{G} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \pm G \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

$$= G \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} + G \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \dot{G} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = G \frac{\delta S}{\delta q(t)} + \frac{d}{dt} \left(G \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

برای اینکه عمل O_S یک تقارن باشد باید $L(O_S(q)) = L(q)$ باشد یعنی $\frac{d\mu}{dt} = 0$ باشد. در نتیجه،

$$G \frac{\delta S}{\delta q(t)} + \frac{d}{dt} \left(G \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \mu \right) = 0 \quad (۳۳-۱۲)$$

برای معادله مسیر بر اساس اصل کمترین کنش داریم $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$. آنگاه

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(G \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \mu \right) = 0 ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \quad (۳۴-۱۲)$$

$\Rightarrow I = GP - \mu =$ ثابت حرکت به طور کلی

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{G}^i = \frac{d\mu}{dt} \quad (۳۵-۱۲)$$

$$I = G^i p_i - \mu ; \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

بدین ترتیب از روابط فوق می‌توان ویژگی‌های تقارنی و بقای کمیت‌های متناظر را نشان داد (بخش

I- در مورد دوران به عنوان مثال، داریم:

$$q \rightarrow Rq \quad \text{II- (۱۲-۳۶)}$$

$$q \rightarrow R(\theta \hat{n})q \Rightarrow \vec{q}' = \vec{q} + \theta \hat{n} \times \vec{q}$$

$$q^i \rightarrow q^i + \theta \varepsilon_{ijk} n^j q^k$$

$$\Rightarrow G^i = \varepsilon_{ijk} n^j q^k$$

$$\Rightarrow I = G^i p_i - \mu \quad ; \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{G}'$$

اگر قرار باشد که لاگرانژی عوض نشود پس $\mu = 0$ می‌شود.

$$L(\vec{q}) = L(q) \Rightarrow \mu = 0$$

در مورد دوران نیز $q^i \rightarrow q^i + S \delta_j^i$ یا اساساً در دوران q تغییر نمی‌کند بردار شعاع دوران یکسان باقی می‌ماند. پس:

$$I = G^i p_i = \varepsilon_{ijk} n^j q^k p_i = \hat{n} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) = \hat{n} \cdot \vec{I} = cte \quad \text{(۱۲-۳۷)}$$

که در آن $\vec{I} = \vec{q} \times \vec{p}$ اندازه حرکت زاویه‌ای است. پس \vec{I} ثابت می‌ماند چون \hat{n} نیز ثابت است.

III- برای انتقال گالیله‌ای (تبدیل گالیله یا خیز گالیله) داریم:

$$\vec{v} = cte$$

$$\vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_i + \vec{v}t \quad \text{(۱۲-۳۸)}$$

$$L \rightarrow L + \sum_i (m_i \cdot \vec{q}_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m_i \vec{v} \cdot \vec{v})$$

اگر L به شکل $L = \frac{1}{2} m_i \vec{q}_i \cdot \vec{q}_i - V(q)$ و پتانسیل تابع تفاضلی q^i ها باشد (پتانسیل

مرکزی)، تحت این تبدیل قسمت پتانسیل عوض نمی‌شود ولی انرژی جنبشی عوض می‌شود.

$$T \rightarrow T' = T + \frac{1}{2} \sum_i (m_i \vec{v} \cdot \vec{v} + m_i \vec{q}_i \cdot \vec{v})$$

جمله دوم و سوم به صورت مشتق کامل زمانی نوشته می‌شود:

$$T' = T + \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i (m_i \vec{q}_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m_i \vec{v} \cdot \vec{v}t) \right\}$$

$$\Rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i (m_i \vec{q}_i \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m_i \vec{v} \cdot \vec{v}t) \right\}$$

از این جمله پس از مشتق گیری صرفنظر می‌شود چون جزء جملات $O(S)$ است.

$$L' = L + v \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \vec{q}_i \cdot \vec{v}) \quad ; \quad \frac{d\mu}{dt} = G \quad (۳۹-۱۳)$$

عبارت $G = \hat{v}t$ می‌تواند به عنوان مولد خیز انتخاب شود.

$$\Rightarrow \mu = \sum_i m_i \vec{q}_i \cdot \vec{v} \quad (۴۰-۱۲)$$

$$I = \sum_i \vec{v}t \cdot p_i - \sum_i m_i \vec{q}_i \cdot \hat{v}$$

این عبارت با اینکه ظاهراً تابع t است، ولی ثابت حرکت است! در $t = 0$ داریم،

$$I = \sum_i (-m_i \cdot \vec{q}_i \cdot \hat{v}) = -\hat{v} \cdot \sum_i m_i \vec{q}_i = -M \hat{v} \cdot \vec{R}_{c.m} \quad (۴۱-۱۴)$$

پس ثابت حرکت، تصویر مرکز جرم در جهت سرعت است.

IV- برای انتقال زمان خواهیم داشت:

$$q(t) \rightarrow q(t - \tau) = q(t) - \tau \dot{q}(t) + \dots$$

در نتیجه:

$$L(q(t - \tau)) = L(t, q(t - \tau), \dot{q}(t - \tau))$$

$$= L(t, q(t) - \tau \dot{q}(t), \dot{q}(t) - \tau \ddot{q}(t))$$

$$= L - \tau \dot{q}(t) \frac{\partial L}{\partial q} - \tau \ddot{q}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L(t, q, \dot{q}) - \tau \left\{ \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\}$$

از طرفی $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ است، بنابراین

$$L(O(q)) = L(q(t)) - \tau \left\{ \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \right\} = L(q) - \tau \frac{dL}{dt} + \tau \frac{\partial L}{\partial t} \quad (۴۲-۱۲)$$

اگر $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ باشد، انتقال زمان تقارن را نشان می‌دهد. از طرفی با مقایسه روابط به دست آمده،

$$G = -\dot{q}(t) \text{ است. بنابراین}$$

$$\mu = -L \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = G \frac{\partial \mu}{\partial q} + G \frac{\partial \mu}{\partial \dot{q}} = -G \frac{\partial L}{\partial q} - \dot{G} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}$$

اگر $\tau \rightarrow -\tau$ شود آنگاه $G = \dot{q}(t)$ می‌شود. در نتیجه،

$$I = -\dot{q}p + L = -H \quad (۴۳-۱۲)$$

بنابراین اگر لاگرانژین تابع صریح زمان نباشد، H ثابت حرکت است:

$$H = \dot{q}p_i - L$$

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q} \frac{dp_i}{dt} + \ddot{q}^i p_i - \frac{\partial L}{\partial t} - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (۴۴-۱۲)$$

۸-۱۲. مسائل برگزیده حل شده

۱- لاگرانژی و هامیلتونی یک آونگ به طول l را بیابید که در صفحه قائم حرکت می‌کند.

حل-

در این مسئله پیکربندی دستگاه را با زاویه θ بین آونگ و راستای قائم به سمت پایین تعیین

می‌کنیم. سرعت تعمیم یافته $\dot{q} = \dot{\theta} = \omega$ است. انرژی جنبشی جرم m عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = -mgl \cos \theta$$

و انرژی پتانسیل،

آنگاه، تابع لاگرانژی،

$$L = L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

اندازه حرکت مزدوج θ چنین است:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

در اینجا p_θ اندازه حرکت زاویه‌ای است. بدین ترتیب برای تابع هامیلتونی داریم:

$$H(\theta, p) = p_\theta \dot{\theta} - \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \right) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$$

۲- (الف) تبدیل لژاندر را وارون کنید و ویژگی‌های $L(q, \dot{q}, t)$ را از $H(q_i, p_i, t)$ استخراج

کنید، با توجه به اینکه \dot{q}_i را کمیت‌های مستقل می‌گیرید. نشان دهید که این عمل منجر به معادلات لاگرانژی حرکت می‌شود.

(ب) با همان روش معادلات حرکت را برحسب تابع زیر بنویسید:

$$L'(p, \dot{p}, t) = -\dot{p}_i q_i - H(q, p, t)$$

حل - در این مسئله فرض می‌شود که معادلات هامیلتون برقرار است. آنگاه معادله اولر - لاگرانژ

را به دست می‌آوریم.

$$H = p\dot{q} - L \Rightarrow L = p\dot{q} - H$$

$$L(q, \dot{q}, t) = p\dot{q} - H(q, p, t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dL = p d\dot{q} + \dot{q} dp - \frac{\partial H}{\partial q} dq - \frac{\partial H}{\partial p} dp - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

$$\left\{ \begin{aligned} dL &= pd\dot{q} + \dot{q}dp + \dot{p}dq - \dot{q}dp - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dL &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{q} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$L'(p, \dot{p}, t) = -\dot{p}q - H(q, p, t) \quad \text{-(ب)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} dL' &= -\dot{p}dq - qd\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial p} dp - \frac{\partial H}{\partial q} dq - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ dL' &= \frac{\partial L'}{\partial p} dp + \frac{\partial L'}{\partial \dot{p}} d\dot{p} + \frac{\partial L'}{\partial t} dt \end{aligned} \right. \quad (۱)$$

با استفاده از معادلات هامیلتون خواهیم داشت:

$$dL' = -\dot{p}dq - qd\dot{p} - \dot{q}dp + \dot{p}dq - \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \dot{p}} &= -q \\ \frac{\partial L'}{\partial p} &= \dot{q} \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{p}} \right) = -\dot{q} = \frac{\partial L'}{\partial p}$$

۳- ذره‌ای در یک میدان نیرو با تقارن کروی $U(r) = -\frac{k}{r}$ در حرکت است. تابع هامیلتونی را

در مختصات کروی حساب کنید، و معادلات کانونیکی حرکت را بیابید. مسیر حرکت نقطه معرف را برای سیستمی که بر سطح H ثابت در حرکت است رسم کنید. از اینجا شروع کنید که حرکت باید بر صفحه‌ای صورت گیرد که فضای چهاربعدی باشد $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ اما نقطه سه مختصه اول مورد توجه است. تصویر مسیر فاز را بر صفحه $(r-p)$ نشان دهید، آنگاه تغییرات را برحسب θ منظور کنید.

حل -

تابع لاگرانژی در این مسئله چنین است:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{k}{r}$$

که بنا به تقارن کروی در شکل U از مختصات کروی استفاده کرده ایم. مختصات تعمیم یافته r, θ, ϕ هستند و اندازه حرکت‌های تعمیم یافته عبارتند از:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

تابع هامیلتونی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2 \sin^2 \theta} \right] - \frac{k}{r}$$

معادلات کانونیکی حرکت چنین است:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cot \theta}{mr^2 \sin^3 \theta}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

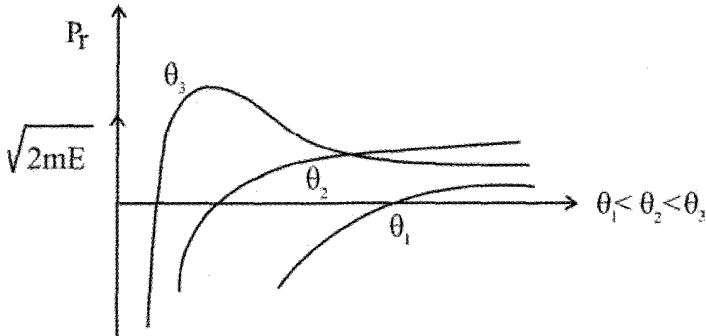
در معادله آخر داریم: ثابت P_ϕ ، که بدینوسیله تعداد مختصاتی را که H به آنها وابسته است به چهار می‌رساند: p_θ, p_r, θ, r .

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{\text{const}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] - \frac{k}{r}$$

برای حرکت با هامیلتونی ثابت، معادله فوق هر یک از چهار متغیر را مشخص می‌کند به شرطی که سه متغیر دیگر داده شده باشد. از این رو معادله برای مقدار ثابت $H=E$ خواهیم داشت:

$$p_r = \left[2mE - \frac{p_\theta^2 \sin^2 \theta + \text{const}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2mk}{r} \right]^{1/2}$$

و بنابراین تصویر مسیر فاز بر صفحه $(r-p)$ به صورت زیر در می‌آید:



۴- تابع هامیلتونی برای ذره‌ای به جرم m و بار q در یک میدان مغناطیسی با تقارن محوری که توسط تک مولفه $A_\phi(\rho, Z)$ توصیف می‌شود چنین است:

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + p_Z^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(P_\phi - \frac{q}{c} \rho A_\phi \right)^2 \right]$$

در این صورت پایستگی اندازه حرکت‌های تعمیم یافته را در این مسئله تحقیق کنید.

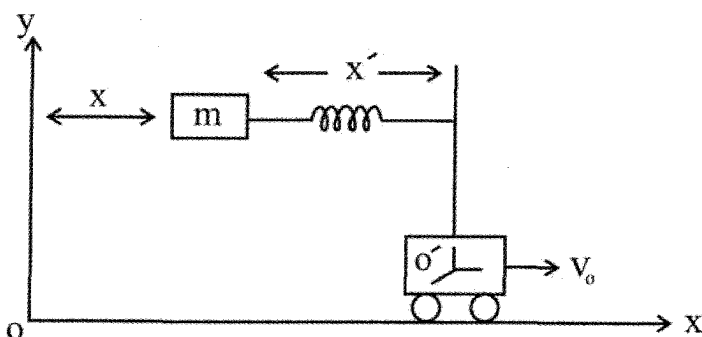
حل-

چون ϕ, Z به طور صریح در هامیلتونی ظاهر نشده‌اند، از اینرو مختصات چشم پوشیدنی هستند و

اندازه حرکت‌های تعمیم یافته وابسته به آنها یعنی p_ϕ , p_z پایسته است. اما اندازه حرکت وابسته به ρ یعنی p_ρ پایستار نیست.

۵- یک گاری (یا ماشین) بدون جرم به سرفنری وصل است و از بیرون با تزریق انرژی با سرعت ثابت v_0 حرکت می‌کند. فنر به جرم m وصل است. بقای هامیلتونی را از دید دو ناظر O, O' در شکل زیر تحقیق کنید.

حل -



$$L_0 = O \text{ از دید ناظر } = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k(x - v_0 t)^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - v_0 t)$$

تغییر متغیر زیر را به کار می‌بریم (یا از جمع بردارهای جابجایی در دو دستگاه O, O' برای ذره m):

$$x' = x - v_0 t \Rightarrow m\ddot{x}' = -kx'$$

واضح است که x' تغییر مکان ذره نسبت به گاری است (جسم مورد بررسی جرم m است)؛ یعنی ناظر O' . معادله فوق نشان می‌دهد که نسبت به ناظر O' ذره حرکت هارمونیک ساده را نشان می‌دهد همانگونه که از اصل هم ارزی در نسبیت گالیله انتظار می‌رود. از دید ناظر O ,

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k(x - v_0 t)^2$$

$$\left. \frac{dH}{dt} \right|_0 = \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_0 \neq 0$$

چون H تابع صریحی از زمان است، پس هامیلتونی از دید ناظر O بقا ندارد. البته برای اینکه v_0 ثابت بماند، باید از خارج روی گاری یا ماشین کار انجام گیرد و انرژی تزریق شود. پس انرژی از دید ناظر O نیز نباید ثابت بماند. اما از دید ناظر O' ،

$$\begin{aligned} L(x', \dot{x}') &= \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - \frac{1}{2} k(x - v_0 t)^2 \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{1}{2} kx'^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + m \dot{x}' v_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} kx'^2 \\ \Rightarrow H(x', p') &= \frac{(p' - m v_0)^2}{2m} + \frac{kx'^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \end{aligned}$$

از دید ناظر O' هامیلتونی بقا دارد.

$$\Rightarrow \left. \frac{dH}{dt} \right|_{O'} = \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{O'} \neq 0$$

۶- برهمکنش کلاسیک بین دو اتم گاز خنثی، هر یک به جرم m با پتانسیل زیر داده می‌شود:

$$V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}} \quad ; \quad A, B > 0 \quad ; \quad r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

الف) هامیلتونی سیستم دو اتمی فوق را بنویسید.

ب) به طور کامل پایین ترین انرژی حالت کلاسیکی این سیستم را بیان کنید.

ج) اگر انرژی اندکی بالاتر از مقدار انرژی در حالت (ب) باشد، فرکانس‌های ممکن حرکت سیستم

را به دست آورید.

حل -

الف) مرکز جرم سیستم عبارت است از:

$$M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = m(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = 2m\vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \equiv (x, y, z)$$

جرم کاهش یافته $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$ است. فرض می‌کنیم $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ باشد. آنگاه

انرژی جنبشی سیستم چنین می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

و لاگرانژی

$$L = T - V = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\gamma A}{r^6} - \frac{B}{r^{12}}$$

که در آن (r, θ, ϕ) مختصات کروی دستگاه ساکن در مرکز جرم است. اندازه حرکت‌های تعمیم یافته عبارتند از:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \dot{y} \quad , \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M \dot{z}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \quad , \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$$

و هامیلتونی سیستم:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2\mu} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2) - \frac{\gamma A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

(ب) حالت با کمترین انرژی وابسته به $p_x = p_y = p_z = p_r = p_\theta = p_\phi = 0$ و مقدار

I_0 می‌شود به طوری که عبارت $-\frac{\gamma A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$ را می‌نیمد کند:

$$\frac{d}{dr} \left(-\frac{\gamma A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}} \right) = 0$$

$$-\gamma A \frac{-6}{r^7} + B \frac{-12}{r^{13}} = 0 \Rightarrow 12 A r_0^6 - 12 B = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{6}}$$

این فاصله بین دو اتم است بطوریکه کمترین انرژی حالت را نتیجه می‌دهد. برای این حالت و برای هامیلتونی خواهیم داشت:

$$H = -\nu A \left(\frac{A}{B}\right) + B \left(\frac{A^2}{B^2}\right) = -\frac{\nu A}{B} + \frac{A^2}{B} = -\frac{A^2}{B}$$

ج) اگر انرژی اندکی بالاتر از مقدار می‌نیم باشد و درجات آزادی وابسته به φ, θ, z, y, x هنوز تحریک نشده باشد ($p_x = p_y = p_z = p_r = p_\theta = p_\varphi = 0$) خواهیم داشت:

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} - \frac{\nu A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

از طرفی فرکانس نوسان‌های کم دامنه حول نقطه می‌نیم عبارت است از:

$$K = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \left[12A \frac{-\nu}{r^7} - 12 \times \frac{-12}{r^{14}} \right]_{r=r_0} = -12A \left(\frac{A}{B}\right)^{1/6}$$

$$+ 156B \left(\frac{A}{B}\right)^{13/6} = -12A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} + 156A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} = 72A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3}$$

$$V(r) \approx \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \times 72A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} (r - r_0)^2 \quad \text{بنابراین:}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - 36A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} (r - r_0)^2 \quad \text{و در نهایت}$$

با انتخاب $\rho = r - r_0 \ll r_0$ ، از معادله لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = 0$$

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 - 36A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} \rho^2$$

$$\Rightarrow -72A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} \rho - \frac{d}{dt} (\mu \dot{\rho}) = 0 \Rightarrow \mu \ddot{\rho} + 72A \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3} \rho = 0$$

در نتیجه:

$$\omega = \sqrt{72 \frac{A}{\mu} \left(\frac{A}{B}\right)^{4/3}} = 12 \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{A}{B}\right)^{2/3}$$

۱۲-۹- مسائل برگزیده برای حل

۱- کدام یک از مولفه‌های اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای در میدان‌های زیر پایستار هستند؟

(الف) میدان یک صفحه همگن بینهایت

(ب) میدان یک استوانه همگن بینهایت

(ج) میدان یک منشور همگن بینهایت

(د) میدان وابسته به دو نقطه

(ه) - میدان یک نیم صفحه همگن بینهایت

(و) - میدان یک مخروط همگن

۲- در مسئله اول فصل یازدهم، قسمت الف، معادله حرکت را بیابید. مختصه x یک مختصه چشم پوشیدنی است. بقای کمیت وابسته به آن را تحقیق کنید. نشان دهید که مرکز جرم سیستم دارای حرکت بر محور افقی نیست.

۳- ذره‌ای به جرم m در یک بعد تحت تأثیر نیروی $F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-t/\tau}$ حرکت می‌کند، به طوری که k, τ ثابت‌های مثبت هستند. توابع لاگرانژی و هامیلتونی را حساب کنید. هامیلتونی و انرژی کل ذره را با هم مقایسه کنید. و در بقای انرژی بحث کنید.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{x} e^{-t/\tau} \quad ; \quad H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{x} e^{-t/\tau} \quad \text{پاسخ:}$$

۴- تابع هامیلتونی و معادلات حرکت هامیلتون را برای ذره‌ای بنویسید که در یک میدان مرکزی حرکت می‌کند.

۵- معادلات حرکت هامیلتون را برای ذره‌ای بیابید که روی سطح شیبدار همواری روی به پایین می‌لغزد.

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad ; \quad \dot{p}_x = mg \sin \theta \quad \text{پاسخ:}$$

۶- تابع هامیلتونی و معادلات حرکت را برای حرکت سه بعدی پرتابه‌ای بنویسید که در میدان گرانشی یکنواخت و بدون مقاومت هوا قرار دارد.

۷- در فضای فاز $2N$ بعدی با مختصات (q_j, p_j) نشان دهید که «سرعت شارش»

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = 0$$

در این فضا از معادله (flow velocity) (q_j, p_j) تبعیت می‌کند. فرض

کنید که نیروهای عمومی فقط در هامیلتونی H ظاهر می‌شوند. این فرض خاطر نشان می‌سازد که شماره در این فضا تراکم ناپذیر است. این نتیجه مفهومی بنیادی در مکانیک آماری است.

۸- ذره‌ای به جرم m به طور قائم در یک میدان گرانشی ثابت g سقوط می‌کند. فرض کنید که مکان ذره به صورت تابعی از زمان چنین است:

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

که در آن y به سمت بالا، افزایش می‌یابد و مجموعه $\{c_k\}$ ضرایب ثابت هستند که باید مشخص شوند.

الف) کنش S را بین دو لحظه $t=0$ که در آن $y(0)=0$ است، و $t=T$ که در آن $y(T)=\ell$ است، برآورد کنید. نشان دهید که برحسب ℓ, T, c_2, c_3 خواهیم داشت:

$$\frac{S}{mT^3} = \frac{\ell}{2T^4} (\ell - gT)^2 + \left(\frac{g}{6}\right)c_2 + \left(\frac{1}{6}\right)c_2^2 + \left(\frac{T}{2}\right)c_2 c_3 + \left(\frac{gT}{4}\right)c_3 + \left(\frac{2T}{5}\right)c_3^2$$

ب) برای T, ℓ معین، نشان دهید که کنش به ازای $c_2 = -\frac{g}{2}, c_3 = 0$ اکسترمم است.

پ) نوع اکسترمم کنش S را در این نقطه مشخص کنید.

۹- ذره‌ای با جرم m مقید است بر سطح کره‌ای به شعاع R حرکت کند. هیچ نیروی خارجی از هر نوع بر ذره وارد نمی‌شود.

الف) تعداد مختصات تعمیم یافته لازم برای بیان مسئله را مشخص کنید (پاسخ: ۲)

ب) مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته انتخاب کنید و لاگرانژی سیستم را بنویسید.

$$L = T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

پاسخ:

پ) هامیلتونی سیستم کدام است؟ آیا هامیلتونی بقا دارد؟

ت) ثابت کنید که حرکت ذره در راستای دایره عظیمه کره خواهد بود.

۱۰- به شیوه هامیلتونی معادلات حرکت ذره‌ای به جرم m را بیابید که مقید است بر سطح استوانه

$x^2 + y^2 = R^2$ تحت تأثیر نیرویی به سوی مبدأ با فاصله ذره از مبدأ $(\vec{F} = -k\vec{r})$ حرکت کند.

پاسخ:

$$H(z, P_\theta, P_z) = \frac{P_\theta^2}{2mR^2} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2$$

پیوست فصل دوازدهم

مسئله تقارن و قوانین بقا

مقدمه

دستاوردهای بزرگ علمی گاه از چنان مسائل پیش پا افتاده‌ای حاصل می‌شوند که وقتی نهایتاً اکتشافی صورت می‌گیرد موجب تعجب همگان می‌شود. یکی از این موارد، پدیده تقارن است که پس از سال‌های متمادی باعث حل معماهای پیچیده و کشفیات مهمی شده است. تقارن، ترجمه واژه symmetry است که به معنای تناسب، تقارن، سازگاری، انطباق و توافق در فرهنگ لغت آمده است. در فیزیک به مجموعه ناوردایی‌ها در سیستم فیزیکی تقارن گفته می‌شود. در جهان اطراف ما پدیده‌های متقارن بسیار به چشم می‌خورند و شاید یکی از دلایل زیبا بودن جهان وجود تقارن در پدیده‌های آن است؛ مثلاً در بلور، دانه برف، بال‌های پروانه و... اما توانایی این مسئله زمانی آشکار می‌شود که با جستجو در تاریخ علم مشاهده می‌کنیم که عملاً تاریخ علم فیزیک را کسانی ساخته‌اند که در پی یافتن هماهنگی بین طبیعت و تعمق بیشتر در مفهوم تقارن بوده‌اند. در طول پنجاه سال اخیر برای یافتن یک تقارن کلی که فراگیر تمام ذرات شناخته شده و در نتیجه مبین ساختار ماده باشد کوشش‌های فراوانی به عمل آمده است. این هدف، بازتاب برداشت فلسفی بی است که از

حکمت باستان به ما رسیده است. پس اگر بررسی دقیق تری به عمل آوریم خواهیم دید که تقارن در جهان، گستره وسیعی را شامل می‌شود.

در این نوشتار ما فقط با ذکر گوشه‌هایی از اثر تقارن، در فیزیک، تصویری کلی از این خاصیت اعجاب برانگیز را نشان خواهیم داد. در واقع ما می‌خواهیم ردپای تقارن را در فیزیک تا بدانجا دنبال کنیم که بتوانیم به نوعی پایداری و بقای مبتنی بر مفهوم تقارن دست یابیم و از طریق برقراری رابطه‌ای یک به یک بین پدیده‌های فیزیکی و فرمالیسم ریاضی، دیدگاهی هر چه دقیقتر و کاملتر از آنچه هم اکنون داریم، نسبت به جهان و طبیعت ذاتی آن بیابیم. کشف الگوهای متقارن در جهان بسیاری از فیزیکدانان را معتقد ساخته است که این الگوها بازتاب قوانین بنیادی طبیعت هستند.

تقارن توسط شاخه‌ای از ریاضیات به نام نظریه گروه توصیف می‌شود. یک گروه صرفاً مجموعه‌ای از عناصر و روابط بینابینی خاص است که با تبدیلات گروه تعریف و مشخص می‌شود. وقتی یک گروه متقارن بر پدیده‌های فیزیکی خاص حاکم است بدین معناست که یک کمیت پایستار وجود دارد. این ارتباط ناشی از یک دلیل ریاضی است که قضیه نوتر (Noether's theorem) خوانده می‌شود، و بیان می‌کند که به هر تقارن پیوسته مولد گروه داده می‌شود. به عبارت دیگر وقتی لاگرانژی حاکم بر پدیده تحت تبدیلات گروه تغییر نکند بدین معناست که کمیت پایستار وجود دارد. این قضیه کاربردهای بسیاری در مکانیک دارد و قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت و بار بوسیله آن توصیف می‌شود.

در این پیوست کوتاه، تقارن را به طور خلاصه در دو دنیای ماکروسکوپی و میکروسکوپی بررسی می‌کنیم. دنیای ماکروسکوپی شامل تقارن‌های پیوسته فضا-زمان و دنیای میکروسکوپی شامل تقارن‌های گسسته دینامیکی و داخلی است. سپس نشان می‌دهیم که چگونه حتی تقارن‌های شکسته نیز می‌توانند یک راهنمای مفید برای فرمولبندی قوانین فیزیک باشند.

۱- تقارن‌های موجود در طبیعت:

(I) تقارن زمانی:

می‌دانیم که زمان در محدوده یک چارچوب مرجع لخت همگن است، بدین مفهوم که هیچ لحظه‌ای بر لحظه دیگر برتری ندارد. به علت همگن بودن زمان تابع لاگرانژی L در یک سیستم

بسته، که با هیچ چیز در خارج از خود برهمکنش ندارد، تابع صریحی از زمان نیست. به عبارت دیگر

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

از این مطلب بلافاصله نتیجه می‌گیریم که انرژی یک ثابت حرکت است و بقا دارد [۱].

(II) تقارن فضایی:

با توجه به همگنی فضا در یک چارچوب مرجع لخت، تابع لاگرانژی یک سیستم بسته نسبت به انتقال ناوردا است. منظور از همگنی فضایی این است که هیچ نقطه‌ای بر نقطه دیگر ارجح نیست. در این نوع تقارن لاگرانژین سیستم مستقل از مکان است و در نتیجه اندازه حرکت خطی یک سیستم بسته در طول زمان ثابت خواهد ماند [۱]. همچنین می‌دانیم که یکی از مشخصه‌های چارچوب مرجع لخت، همسانگردی فضایی است. به عبارت دیگر خواص مکانیکی یک سیستم به سمت گیری آن در فضا بستگی نخواهد داشت. به ویژه لاگرانژی یک سیستم بسته، با دوران آن به اندازه زاویه بینهایت کوچک تغییر نمی‌کند. از این خاصیت نتیجه می‌شود که اندازه حرکت زاویه‌ای در یک سیستم بسته در طول زمان ثابت می‌ماند.

بدین ترتیب می‌بینیم که برای یک سیستم بسته تعداد هفت ثابت حرکت وجود دارد: انرژی کل، اندازه حرکت خطی (سه مولفه)، و اندازه حرکت زاویه‌ای (سه مولفه).

(III) تقارن وارونی زمان:

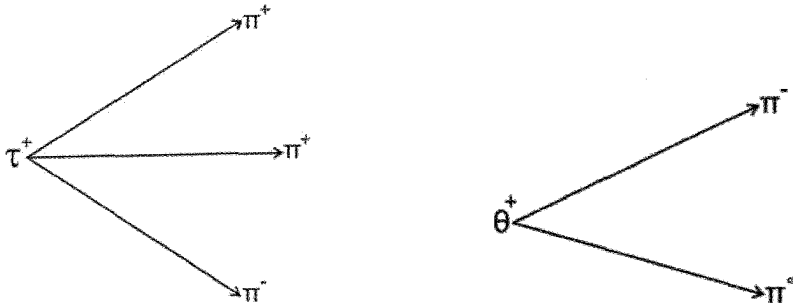
بسیاری از سیستم‌های فیزیکی در اثر وارون کردن زمان ($t \rightarrow -t$) تغییر ناپذیر می‌مانند. این امر به ویژه در مورد سیستم‌های کلاسیکی صادق است، و در مورد سیستم‌های کوانتومی لازم است که برای مسئله زمان و اپراتور زمان توضیح روشنی ارائه گردد. بنابراین در مکانیک کلاسیک یک سیستم که در آن فقط نیروهای پایستار (مستقل از سرعت) وجود دارد، تحت عمل وارونی زمان تغییر ناپذیر است. تقارن تحت وارون شدن زمان یعنی اینکه اگر سیستم بتواند از یک حالت اولیه به حالت نهایی تحول یابد ممکن است که با وارون کردن جهت حرکت، تمام اجزاء سیستم از حالت نهایی تحول یابند و به حالت اولیه برگردند. در اینجا متذکر می‌شویم که مقوله زمان همچنان بحث برانگیز است. اساساً دوگانگی میان دیدگاه فیلسوفان و فیزیکدانان در مورد زمان به تعارض بین فلسفه و فیزیک انجامیده است. در سخنرانی افتتاحیه کارگاه «عالم آشوبناک» (Chaotic Universe) که در

تاریخ اول فوریه ۱۹۹۹ در ایتالیا برگزار گردید، ایلیا پریگوزین (Ilya Prigoging) تحت عنوان پیکان زمان به این نتیجه می‌رسد که «... یک نیم گروه با تقارن زمانی شکسته بر عالم، حکمفرمایی می‌کند. دنیا باز است و سوی زمان (پیکان زمان) در آن نقشی مرکزی دارد [۲].

اکنون به آن دسته از تقارن‌های گسسته می‌پردازیم که در فیزیک ذرات بنیادی به چشم می‌خورند و یکی از مهمترین آنها مقوله پاریده است. البته تقارن در بلورها نیز از انواع تقارن‌های گسسته می‌باشد که در اینجا از بحث در مورد آنها صرفنظر می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر می‌توان به کتاب‌های بلورشناسی و یا حالت جامد مراجعه کرد [۳، ۴].

(IV) پاریده یا وارون سازی فضایی:

در فیزیک کوانتومی پاریده اساساً یک ویژگی عمومی است. اگر پتانسیل موجود در معادله شرودینگر تابعی زوج باشد، آنگاه هامیلتونی تحت تبدیل x به $-x$ تغییر نمی‌کند و در نتیجه معادله شرودینگر در این تبدیل همچنان پایدار می‌ماند. عملگر پاریده را با π نشان می‌دهیم که عمل تقارن آینه‌ای کمیت فیزیکی q را نشان می‌دهد. همانطور که گفتیم H اغلب در اثر جایگزینی $q \rightarrow -q$ ناورداست؛ در این صورت $[P, H] = 0$ است. تحت این شرایط اگر تابع موج $\psi(q)$ پاریده معینی در یک لحظه از زمان داشته باشد این ویژگی را در طول زمان حفظ خواهد کرد. این اصل را اصل بقای پاریده می‌نامیم. در واقع وقتی سیستمی دارای پاریده معینی است، یعنی از تصویر آینه‌ای خود متمایز نیست. خاطر نشان می‌کنیم که پاریده مفهومی کاملاً کوانتومی است و همتای فیزیک کلاسیک ندارد. در سال ۱۹۲۷ ویگنر توانست نشان دهد که بقای پاریده بر این واقعیت قرار دارد که تمام نیروهای درگیر در برهم کنش‌های ذره‌ای از هرگونه تمایل چپ و راست آزاد هستند؛ یعنی در واقع هر چه طبیعت به شیوه چپ دستی انجام دهد می‌تواند درست به همان کفایت به شیوه راست دستی انجام دهد. اما با انجام آزمایشاتی نشان داده شد که کاملاً هم اینطور نیست؛ یعنی در بعضی از فرآیندها نقض پاریده وجود دارد که معمای τ, θ از آن جمله است [۵]. این معما در رابطه با برهم کنش ذره‌ای بنام مزون مطرح شد. دانشمندان به دو نوع مزون k به نام‌های τ, θ برخورد کردند که جرم و بار و عمر هر دو یکسان است ولی واپاشی‌های جداگانه به صورت زیر دارند.



مزون θ دارای پارितه زوج است و مزون τ پارितه فرد دارد. به این ترتیب بقای پارितه در تجزیه مزون θ برقرار است، اما در تجزیه مزون τ برقرار نیست. برای حل این معما دانشمندان دو راه حل داشتند: بیان نقض بقای پارितه یا بیان اینکه مزون θ, τ دو ذره متفاوتند. بعدها آزمایش مادام وو (Wu) انجام شد یعنی واپاشی β در کبالت ^{60}Co که ایزوتوپ بسیار پرتوزای کبالت است و همواره الکترون گسیل می‌دارد. و در حالت عادی الکترون‌ها از همه سو خارج می‌شوند. اما اگر برای کاهش دادن جنبش مولکول‌ها ناشی از گرما کبالت ^{60}Co تا نزدیکی صفر مطلق سرد شود با به بکار بردن یک میدان الکترومغناطیس قوی می‌توان بیش از نیمی از هسته‌ها را وادار کرد که انتهای شمالی خود را در یک راستا متوجه سازند. هسته‌ها به گسیل الکترون ادامه می‌دهند ولی این بار در دو راستای شمال و جنوب که مشاهده می‌شود گسیل الکترون از انتهای جنوبی بیشتر از انتهای شمالی است پس پارितه نقض می‌شود و به این ترتیب معمای θ, τ نیز حل شد. تنها یک مزون هست و پارितه پایدار نیست پس بقای پاریته تنها در پدیده‌های واپاشی β از بین می‌رود.

(V) تقارن مزدوج بار:

تقارن مفید دیگر در فیزیک ذرات بنیادی تقارن بین تعویض ذرات با پاد ذرات است که با C نشان داده می‌شود. معنی این تقارن این است که اگر قوانین فیزیکی رفتار یک مجموعه از ذرات را پیش بینی کند دقیقاً همان رفتار را نیز برای مجموعه پادذرات متناظر پیش بینی خواهند کرد. تقارن مزدوج بار در برهم کنش‌های ضعیف از بین خواهد رفت [۶].

قضیه CPT:

CPT یکی از جالبترین کاربردهای تقارن در نظریه کنش‌های متقابل ضعیف است. قبل از سال ۱۹۵۶ تصور می‌شد که فرآیندهای فیزیکی نسبت به هر یک از عملیات سه گانه زیر ناوردا هستند. انعکاس فضا یا پاریته، تزویج بار، و وارونی زمان. در سال ۱۹۵۶ آزمایش‌های گیچ کننده در رابطه با تلاشی مزون‌های k به مزون‌های π لی و یانگ را بر آن داشت که قوانین مربوط به تغییر ناپذیری فرآیندهای گوناگون را نسبت به T و C و P تحلیل کنند [۷]. آنها دیدند که اگر چه شواهدی بر تغییر ناپذیری فرآیندهای قوی نسبت به عمل عملیات T و C و P وجود دارد هیچ قرینه‌ای بر تغییر ناپذیری فرآیندهای ضعیف، تغییر ناپذیری نسبت به T و C و P در دست نیست، مانند آزمایش وو که در آن معلوم شد کنش‌های متقابل ضعیف، تغییر ناپذیری نسبت به C و P را رعایت نمی‌کنند. اما در آزمایش‌هایی که همزمان با آزمایش وو انجام شد ظاهراً نشان می‌داد که تغییر ناپذیری T و CP کنش‌های متقابل ضعیف رعایت می‌شود. حال لازم است به نتیجه کلی که به قضیه CPT معروف است اشاره شود. بنابراین قضیه هر نظریه‌ای از ذرات بنیادی که با اصول نسبیت خاص و چند شرط ساده دیگر سازگار باشد الزاماً تغییر ناپذیری نسبت به حاصل ضرب این سه تقارن CPT را ایجاب می‌کند.

جدول زیر خلاصه‌ای از مطالب فوق را در برهم کنش‌های موجود در طبیعت نشان می‌دهد.

P	C	CP	T	CPT	تقارن
+	+	+	+	+	برهم کنش قوی
+	+	+	+	+	برهم‌کنش الکترومغناطیس
×	×	+	+	+	برهم کنش ضعیف
×	×	×	×	+	برهم کنش فوق ضعیف

۲- تقارن‌های دینامیکی:

همانطور که گفته شد تقارن‌های فضا- زمان به قوانین بقای جهان مثل بقای انرژی، اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای می‌انجامد. ما در بررسی این مقوله در فیزیک دنیای خرد ابتدا باید ببینیم که چه تبدیلاتی امکان پذیر است. برهم کنش‌های الکترومغناطیس و ضعیف فقط می‌توانند موجب

تبدیلاتی شوند که قوانین بقا مجاز می‌داند. در واقع تقارن‌های دینامیکی باعث بوجود آمدن قوانین بقا در دنیای خرد هستند و قوانین بقا در دنیای ماکروسکوپی و میکروسکوپی تفاوتی ندارند یعنی در دنیای خرد نیز همان قوانین بقای انرژی، اندازه حرکت خطی و اندازه حرکت زاویه‌ای وجود خواهد داشت. البته در دنیای خرد علاوه بر قوانین بقای فوق قوانین بقای بار یونی، لپتونی و اسپین ایزوتوپی نیز وجود دارند که از توضیح آن صرف نظر می‌شود [۸].

۲-۱. تقارن‌های خطی

گروهی از تقارن‌ها وجود دارند که می‌توانند در دسته بندی ذرات بر حسب ویژگی‌های ذاتی شان به ما کمک کنند. چون ذرات بنیادی علاوه بر بار، حامل اعداد کوانتومی دیگری نیز هستند که به ما اجازه می‌دهند آنها را در الگوهای ثابت یا در چندتائی‌ها طبقه بندی کنیم. در این مرحله کفایت بگوییم که نقش سنتی تقارن در جهان خرد نظم دادن عناصر متفرقه در الگوهای منظم (دقیقاً مانند جدول تناوبی عناصر) است.

۲-۲. نظریه پیمانه‌ای (Gauge theory):

پیمانه ترجمه اصطلاح Gauge می‌باشد. پیمانه کردن چیزی به جز اندازه گیری نیست. بنابراین برقرار کردن پیمانه به معنی مشخص کردن میله اندازه گیری است که باید طولش ثابت باقی بماند در غیر این صورت کل ایده اندازه گیری بی معنی خواهد شد. البته وایل این امکان را در نظر گرفت که طول معیار وقتی آن را از نقطه‌ای به نقطه دیگر ببریم تغییر نکند و آن را تغییر موضعی پیمانه نامید و تغییراتی را که در همه جا یکسان باشد تغییرات عمومی پیمانه معرفی کرد [۹]. در تعریف نظریه پیمانه‌ای گفته می‌شود، هر یک از نظریه‌های میدان کوانتومی است که به توضیح برهمکنش‌های بنیادی می‌پردازد، و در آنها لاگرانژی سیستم همچنان پایدار می‌ماند. یک نظریه پیمانه‌ای شامل یک گروه تقارن برای میدانهاست (گروه پیمانه‌ای). در مورد الکترو دینامیک، گروه آبلی است در حالیکه نظریه‌های پیمانه‌ای برای برهمکنش‌های قوی و ضعیف از نوع غیر آبلی است. نظریه‌های پیمانه‌ای غیر آبلی به نام نظریه‌های یانگ-میلز (Yang-Mills theories) خوانده می‌شود.

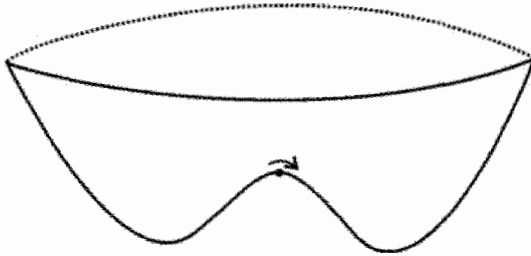
در نگاه اول چنین به نظر می‌رسد که تغییر موضعی پیمانه اهمیت چندانی در فیزیک ندارد اما نظریه الکترومغناطیس ماکسول دارای چنین خاصیتی است. اگر برهمکنش‌های ضعیف را بررسی

کنیم مشکلی بوجود می‌آید؛ اینکه این میدان کوتاهبرد است در نتیجه باید ذره تبادلی پر جرمی داشته باشد. از طرفی در نظریه یانگ میلز اثبات شده بود که ذرات تبادلی بی جرم هستند که برای رفع آنها یا باید عملاً جرمی اضافه می‌کردند یا به طور خلاصه یک جمله وابسته به جرم به معادلات اضافه می‌شد ولی در آن صورت ناوردایی پیمانه‌ای نظریه از بین می‌رفت. سرانجام گلاشو و سلام هر دو به این نتیجه رسیدند که تحول اساسی مورد نیاز است و باید راهی جستجو شود که بدون درهم ریختن ناوردایی پیمانه‌ای ذرات پیمانه‌ای را دارای جرم کرد. این تحول اساسی شکست تقارن بود، که موضعی بودن آن باعث بوجود آمدن ذره تبادلی پر جرم (به وزن هیگز) شد [۹].

۲-۳. تقارن شکسته (Broken Symmetry):

به طور کلی می‌توان گفت که تقارن آنقدر ارزشمند است که حتی در هنگام شکسته بودن نیز می‌تواند مفید باشد. در تعریف تقارن شکسته می‌توان گفت وضعیتی است که در آن، حالت زمینه یک سیستم بس ذره ای، یا «حالت خلاء» یک نظریه میدان کوانتومی نسبیته دارای تقارنی با درجه پایین‌تری از هامیلتونی یا لاگرانژی معرف خود سیستم باشد. مثلاً در فیزیک حالت جامد، آنتی فرومغناطیس، و یا ابررسانایی در فیزیک ذرات، مدل واینبرگ-سلام (نظریه الکترو ضعیف) مثال مهمی از نظریه میدان کوانتومی نسبیته با تقارن شکسته است.

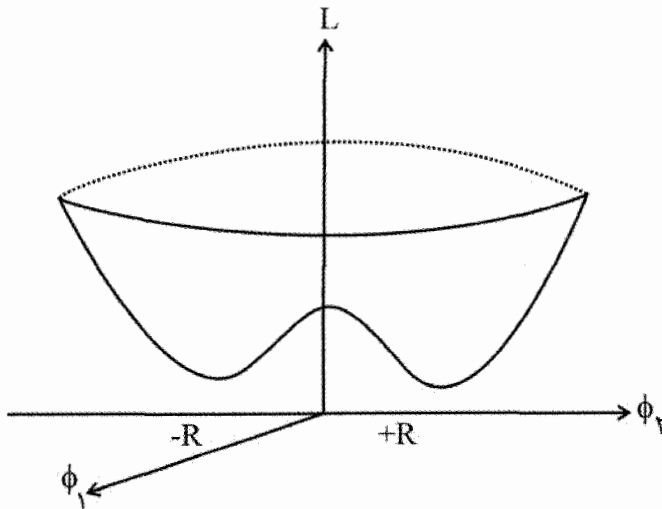
بدست آوردن پاسخ‌های نامتقارن از یک نظریه (یعنی نظریه ناوردایی پیمانه ای) در بسیاری از شاخه‌های فیزیک معمول است. مثلاً میدان مغناطیسی یک آهنربا به وضوح جهت ارجحی را در فضا تعریف و مشخص می‌کند یعنی دارای تقارن دورانی شکسته است. چگونه چنین اتفاقی افتاده است؟ پاسخ در این حقیقت نهفته است که حالت متقارن حالتی با حداقل انرژی نیست و سیستم در فرآیند تحول به سوی حداقل انرژی داخلی خود شکسته است. مثلاً شکل زیر را در نظر بگیرید؛ حالت متقارن در وسط بالای قسمت برآمده است اما این حالت حداقل انرژی را ندارد. یک اغتشاش کوچک گلوله را به درون گوی خواهد فرستاد که در آنجا سیستم حداقل انرژی را دارد و در عین حال از نظر دورانی نامتقارن است.



اکنون می‌خواهیم این عقاید را در مورد نظریه ذره‌ای بکار ببریم و ببینیم که یک تقارن پیمانه‌ای شکسته چه ربطی به جرم پیدا می‌کند. نخست به بررسی تقارن شکسته همه جایی (global) می‌پردازیم [۸]. تابع موج ذره‌ای فرضی متشکل از دو مولفه را در نظر می‌گیریم، همانطور که تابع موج نوکلئون را متشکل از اجزاء پروتون و نوترون در نظر می‌گیریم.

$$\phi = (\phi_1, \phi_2)$$

حال شکل ته ظرف مثال قبلی خود را انتخاب می‌کنیم. مطابق مدل زیر محورهای ϕ_1, ϕ_2 مقادیر توابع موج ذره هستند. می‌بینیم که انرژی روی دایره $\phi_1^2 + \phi_2^2 = R^2$ حداقل است. منظور از L لاگرانژی است که انرژی برهم کنش بین ϕ_1, ϕ_2 را به شیوه فرضی یکسان مشخص می‌کند.



در اینجا فعلاً با تبدیلات همه جایی و فراگیر سر و کار داریم.

$$GL(\phi_1, \phi_2) \rightarrow L(\phi'_1, \phi'_2)$$

حالت حداقل انرژی با توابع موج صفر را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت:

$$\phi'_1 = \phi_1, \quad \phi'_2 = \phi_2 + R$$

اگر لاگرانژی را بر حسب توابع موج جدید بنویسیم می‌بینیم که تحت گروه G ناوردا نیست، چون پتانسیل حول R متقارن نیست و در ضمن ϕ'_2 ذره‌ای با جرم مربوط به R و ϕ'_1 ذره‌ای بی جرم است در نتیجه ناوردایی پیمانه‌ای لاگرانژی شکسته شده به یکی از ذرات جرم نسبت داده می‌شود در حالی که دیگر ذرات بی جرمند. متأسفانه آنچه بدین شکل در مدل توصیف شده بدست می‌آید استفاده چندانی ندارد. حال به بررسی شکست تقارن موضعی می‌پردازیم و می‌بینیم که پاسخی بسیار زیبا خواهد داد. لاگرانژی اصلی معرف انرژی برهمکنش را در نظر می‌گیریم با این الزام که در تبدیلات پیمانه‌ای موضعی تغییر ناپذیر باشد یعنی

$$G(x)L(\phi_1, \phi_2, A) \rightarrow L(\phi'_1, \phi'_2, A')$$

در اینجا A ذره پیمانه ایست که عامل برقراری ارتباط بین ϕ_1, ϕ_2 است. مانند حالت قبل توابع موج را طوری انتخاب می‌کنیم که محورهایی که تابع موج آنها صفر است از نقطه حداقل انرژی عبور کنند. در این گام نهایی، حادثه درخور توجهی رخ می‌دهد. عبارت توصیف کننده ذره پیمانه‌ای بی جرم اصلی با عدد R چنان در می‌آمیزد که یک جمله جرمی بوجود می‌آورد در حالیکه بوزون ϕ'_1 گلداستن چنان در ذره پیمانه‌ای جذب می‌شود که مفهوم فیزیکی خود را از دست می‌دهد. در واقع با استفاده از تقارن‌های پیمانه‌ای موضعی از بوزون‌های گلداستن پرهیز شده است. اولین قدم در این راه توسط هیگز در سال ۱۹۶۴ برداشته شد و بوزون‌های W از یک نظریه تغییرناپذیری پیمانه‌ای اصلی صاحب جرم شدند. تنها بهایی که برای این موفقیت باید پرداخت حضور ذرات پر جرم ϕ (ذره هیگز) است که مشاهده آن تأیید بزرگی بر عقیده شکسته شدن تقارن خواهد بود.

۲-۴. ابرتقارن

تمام برهمکنش‌های میان لپتون‌ها و کوارک‌ها را می‌توان در اثر چهار نیروی دانست: گرانش، الکترومغناطیس، نیروی قوی، و ضعیف. نظریه‌ای که کوارک‌ها و لپتون‌ها و برهم کنش آنها را توصیف می‌کند مدل استاندارد نامیده شده است. یکی از عناصر مهم وحدت در مدل استاندارد مفهوم تقارن است [۱۰]. برهم کنش‌های میان ذرات مختلف در قبال تعدادی مبادلات ظریف متقارن اند.

علیرغم موفقیت مدل استاندارد، اگر فیزیکی‌دان‌ها بخواهند امیدوار به درک خواص ماده به طور کامل باشند باید به ماوراء این مدل بنگرند. به نظر بسیاری از فیزیکی‌دان‌ها ابرتقارن احتمالاً همان جهتی است که باید به آن توجه کرد. ابرتقارن بیان می‌کند که برای هر ذره معمولی یک ابر همراه وجود دارد که جز در مورد کمیتی به نام اسپین، با ذره معمولی خواص مشابهی دارد.

برطبق نظریه موجود دو نوع ذره معمولی وجود دارد: آنها که سازنده‌های اصلی ماده اند، یعنی فرمیون‌ها و آنها که نیروها یا برهم کنش‌ها را در میان سازنده‌ها مبادله می‌کنند یعنی بوزون‌ها. برطبق نظریه ابرتقارن هر فرمیون معمولی باید یک ابر همراه، که یک بوزون است داشته باشد و برعکس. در واقع بوزون‌ها توسط یک تبدیل ابرمتقارن به فرمیون‌ها وابسته‌اند. نظریه ابرتقارن سازوکاری را میسر می‌کند که توسط آن یک نظریه واحد را می‌توان برای توضیح دو جرم مهم که چندین مرتبه با هم تفاوت دارند به کار برد: جرم‌های ذرات W^+ و W^- و Z^0 که تقریباً 10^{11} الکترون ولت است و جرم پلانک که 10^{28} الکترون ولت است. در نظریه ابرتقارن حذف شدن‌های ظریفی پیش می‌آید که دلیل این تفاوت جرم را توضیح می‌دهد. همچنین فیزیکی‌دان‌ها بر این باورند که نظریه کوانتومی گرانش که گرانش را با مکانیک کوانتومی وحدت می‌بخشد یک نظریه ابرتقارنی است و این دومین جنبه ابرتقارن است. باید متذکر شویم که ابرتقارن باید یک تقارن شکسته باشد یعنی تقارنی که به طور تقریبی و یا فقط در بخش‌هایی از نظریه برقرار بماند. در واقع تقارن شکسته در ابر تقارن بیان می‌کند که جرم ابرهمراه‌ها خیلی بیشتر از جرم ذرات متناظر آنهاست. برای آشکارسازی ابرتقارن در آزمایشگاه وجود کم جرم ترین ذره ابرتقارنی پیام‌های مهمی دارد، متأسفانه احتمال آشکارسازی مستقیم این ذره خیلی کم است چون این ذره به صورت خیلی ضعیف با ماده معمولی برهم کنش می‌کند، که امیدواریم در آینده بسیار نزدیک دستگاه‌هایی با انرژی و شدت بیشتر در دسترس قرار گیرند تا بتوانیم ذره ابرتقارنی را آشکار کنیم و بیان کنیم که آیا در مقیاس نیروی الکتروضعیف طبیعت ابرمتقارن است یا نه.

مراجع:

- ۱- ماریون، جری «دینامیک کلاسیک ذره سیستمها»، ترجمه جلال الدین پاشایی راد و بهرام معلمی - چاپ اول ۱۳۷۴ - انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.
- ۲- پریگوژین، ایلینا؛ «پیکان زمان». مجله فیزیک شماره ۱ و ۲ سال ۱۳۷۹.
- ۳- جوشی، الف. و؛ «مبانی نظریه گروه‌ها برای فیزیکدانها»، ترجمه محسن سریشی ای - چاپ اول ۱۳۷۲ - انتشارات آستان قدس رضوی.
- ۴- دلپین؛ «درآمدی به بلورشناسی»، ترجمه دکتر محمد تقی گوهر نشان - چاپ اول ۱۳۶۶ - مرکز نشر دانشگاهی.
- ۵- سرکرده ای، محمدرضا؛ «تقارن در قوانین فیزیک و ماجرای پاریتته»، سال ۱۳۷۰ - مجله علوم پایه دانشگاه الزهراء.
- ۶- فاینبرگ، جرالدا؛ «کوارک‌ها و لپتونها»، ترجمه حیدری خواجه پور - چاپ اول پاییز ۱۳۶۲ - انتشارات نشر گستر.
- ۷- تاسی، ال جی؛ «فیزیک ذرات بنیادی»، ترجمه مهدی بارزی و حسین بقایی - چاپ اول ۱۳۶۷ - مرکز نشر دانشگاهی.
- ۸- دود، جی.ای؛ «دیدگاهی پیرامون ذرات بنیادی»، ترجمه بهزاد قهرمان - چاپ اول ۱۳۷۰ - انتشارات آستان قدس.
- ۹- پارکر، باری؛ «نظریه جهان شمول فیزیک»، ترجمه پاشایی راد و غفوری فرد و مدرس - چاپ اول ۱۳۷۴ - انتشارات نشر مرکز.
- ۱۰- هابر - هوارد و گوردون کین؛ «آیا طبیعت ابرمتقارن است؟» مجله فیزیک بهار ۱۳۶۶.

فصل سیزدهم

مقدمه‌ای بر آنالیز تانسوری -

دینامیک جسم صلب معادلات حرکت اویلر

«... قانون فیزیکی باید زیبایی ریاضیاتی داشته باشد.»

«آدرین موریس دیراک»

مقدمه

در این فصل دینامیک جسم صلب را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم. از چرخش جسم حول محور در فضا سخن می‌گوییم. مطالب این قسمت را می‌توان در فصل ۸ و ۱۰ ماریون، فصل ۱۰ و ۱۱ سایمون، و فصل ۹ فاولز و یا فصل ۷ بارگر و اولسون یافت. فصل ۴ و ۵ کتاب گلدشتین نیز به سینماتیک و دینامیک حرکت جسم صلب می‌پردازد. در فصل هفت این مجموعه از چرخش جسم صلب به دور محور ثابت سخن گفتیم. در اینجا دوران نسبت به محور متحرک یا اساساً یک نقطه مدنظر است.

از آنجا که در مطالعه حرکت عمومی جسم صلب و در رابطه پردازی مفهوم استرس در جامد، یا در

شماره چسبناک، و در بررسی اندازه حرکت زاویه‌ای به ابزار ریاضی تانسور نیازمندیم، نخست به معرفی این بخش از ریاضیات می‌پردازیم. عمدتاً به تانسورهای دکارتی و معرفی دیدیکها اکتفا می‌کنیم. چنانچه خواننده با مبانی تانسورها آشنایی داشته باشد، می‌تواند مستقیماً به بخش پنجم این فصل مراجعه و از همانجا موضوع این فصل را پیگیری کند.

۱۳-۱. مقدمه‌ای بر آنالیز تانسوری - تانسورهای دکارتی

قوانین فیزیکی باید از هرگونه دستگاه مختصات ویژه که برای توصیف ریاضی گونه این قوانین به کار می‌رود مستقل باشند. بررسی نتایج این استقلال و شرایط لازم برای تحقق آن منجر به آنالیز تانسوری می‌شود. آنالیز تانسوری آن بخش از قوانین فیزیکی و فرمولبندی ریاضی آنها را بیان می‌کند که نسبت به دستگاه‌های مختلف تغییر ناپذیر می‌مانند. به عنوان مثال، از درک اینکه قوانین فیزیکی نسبت به تغییرات چارچوب‌های مرجع باید ناوردا باشند به فرمول بندی نظریه نسبیت رهنمون می‌شویم. به طور خلاصه تانسور کمیتی است که از قوانین تبدیل خاصی پیروی می‌کند. فرمول بندی تانسور نخستین بار توسط ریچی (ریچی) (G. Ricci) صورت گرفت و هنگامی که آلبرت اینشتین آن را به عنوان وسیله‌ای موثر و طبیعی برای توصیف نظریه نسبیت عام به کار گرفت خیلی زود جایگاه اصلی خود را در ریاضیات و فیزیک باز یافت. در عمل، آنالیز تانسوری تعمیم آنالیز برداری است. این شاخه از ریاضیات در نظریه نسبیت عام، هندسه دیفرانسیل، مکانیک، الاستیسیته، هیدرودینامیک، نظریه الکترومغناطیس، و بسیاری شاخه‌های علوم و مهندسی کاربرد دارد. جسم جامد ناهمسانگرد یکی از مثالهای شاخص درباره کمیت تانسوری است و خواص الاستیکی آن از طریق تانسورها بیان و بررسی می‌شود.

۱۳-۱-۱. تبدیل مختصات

فرض می‌کنیم x^k و x'^k ($K = 1, 2, \dots, N$) مختصات نقطه‌ای در دو دستگاه مختصات متفاوت باشند. N رابطه مستقل میان مختصات دو دستگاه به صورت

$$x'^k = x'^k(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad (1-13)$$

و یا برعکس به صورت

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{X}^k(\mathbf{x}'^1, \mathbf{x}'^2, \dots, \mathbf{x}'^N) \quad (2-13)$$

در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که توابع مذکور تک مقداری، پیوسته با مشتق‌های پیوسته باشند. در این صورت روابط فوق را تبدیل مختصات از یک مرجع به مرجع دیگر تعریف می‌کنیم.

در همین جا قرار داد زیر را برای نوشتن روابطی چون روابط بالا مطرح می‌کنیم. در نوشتن

عبارتهایی مانند $a_1x^1 + \dots + a_Nx^N$ علامت مختصر $\sum_{j=1}^N a_jx^j$ را به کار می‌بریم و در

قرارداد مختصر تر به صورت a_jx^j می‌نویسیم. بدین ترتیب هرگاه اندیسی (پایین یا بالا) در یک عبارت تکرار شود منظور این است که روی آن اندیس جمع ببندیم. این عمل را ادغام اندیس‌ها می‌نامیم و نخستین بار توسط اینشتین مطرح شد. هر اندیسی را که به طریقی تکرار می‌شود، به طوری که قرارداد جمع در مورد آن به کار می‌رود اندیس کنگ (Dummy index) می‌نامیم. و برعکس هر اندیسی که فقط یک بار به کار می‌رود اندیس آزاد (Free index) نامیده می‌شود. به عنوان یک لم، می‌توان نشان داد که اندیس‌های کنگ در تبدیل تانسور شرکت نمی‌کنند. در ریاضیات مقدماتی در عبارت $\int f(x)dx$ ، متغیر یا اندیس x به عنوان یک اندیس گنگ تلقی می‌شود.

۲-۱۳. تعریف تانسور

یک دستگاه با مرتبه معین در نظر می‌گیریم؛ مثلاً اسکالر، بردار، و ماتریس به ترتیب دستگاه‌های با مرتبه‌های صفر، یک، و دو را تشکیل می‌دهند. تا دستگاه مرتبه سوم و در سه بعد به ترتیب نمایش هندسی نقطه، خط، صفحه، و مکعب را خواهیم داشت و برای دستگاه مرتبه چهارم به بالا فوق مکعب (hyper cube) به عنوان نمایش و تجسم آنها مطرح می‌شود. وقتی متغیرها را با تبدیل خطی به متغیرهای جدید تبدیل می‌کنیم سؤال این است: دستگاه‌های مذکور چگونه تبدیل می‌شوند؟ این سؤال ما را به تعریف تانسور هدایت می‌کند.

«یک تانسور عبارت است از یک دستگاه اعداد یا توابع که وقتی یک تبدیل خطی به متغیرها

تحویل می‌کنیم، مولفه‌های آن از قانون تبدیل خاصی پیروی می‌کنند.» مثلاً اگر تبدیل خطی T_S^T

را در نظر بگیریم داریم $X'^T = \sum_s T_s^T X^S$ و یا به طور ساده $X'^T = T_S^T X^S$. این رابطه یک راه

رسیدن از X^T و X'^T را نشان می‌دهد، به بیان دیگر، تانسور کمیتی است مستقل از دستگاه مختصاتی که مولفه‌هایش نسبت به آن دستگاه بیان می‌شود. در واقع می‌توان نشان داد که اگر کمیتی به صورت تانسور تعریف شود، و در یک دستگاه مختصات وجود داشته باشد، در تمام دستگاه‌های مختصات دیگر نیز وجود خواهد داشت و این فقط نتیجه انتخاب دستگاه مختصات نیست (چنانچه در مورد نیروهای گریز از مرکز و کوریولی در مکانیک چنین امری ناشی از انتخاب دستگاه یا ناظر حساس است). به عنوان مثال، می‌توان ثابت کرد که اگر مولفه‌های یک تانسور در یک دستگاه مختصات صفر باشد، آنگاه این مولفه‌ها در تمام دستگاه‌های مختصات صفر است. فقط مولفه‌های تانسور است که تحت تبدیلات از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر قرار می‌گیرد. بعد خواهیم دید که جبر توابع برداری خطی تحت عنوان تانسور بیان می‌شود.

مثال ۱۳-۱. اگر فضای چهار بعدی مینکوفسکی را در نظر بگیریم و تبدیل از یک دستگاه (X_1, X_2, X_3, X_4) به دستگاه (X'_1, X'_2, X'_3, X'_4) را مورد بررسی قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$X'_1 = f_1(X_1, X_2, X_3, X_4), \dots$$

آنگاه می‌توانیم تبدیل وارون را نیز بنویسیم:

$$X_1 = \phi_1(X'_1, X'_2, X'_3, X'_4), \dots$$

در این صورت دیفرانسیل‌های dx_1, \dots, dx_4 چنین تبدیل می‌شوند:

$$dx'_1 = \frac{\partial X'_1}{\partial X_1} dx_1 + \frac{\partial X'_1}{\partial X_2} dx_2 + \frac{\partial X'_1}{\partial X_3} dx_3 + \frac{\partial X'_1}{\partial X_4} dx_4$$

این مجموعه روابط را می‌توان به صورت زیر به شکل فشرده نوشت:

$$dx'_\mu = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial X'_\mu}{\partial X_\alpha} dx_\alpha \quad ; \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

در اینجا خود به خود مفاهیم یادوردا و هم وردا مطرح می‌شود که فعلاً به آن نمی‌پردازیم.

۱۳-۲-۱. بردارهای محوری و قطبی

اگر هر برداری با تبدیل دستگاه مختصات از راستگرد به چپ گرد به منفی خودش تبدیل شود آن را «بردار قطبی» می‌گوییم (یا در کل می‌گوییم بردار است)، در غیر این صورت بردار را بردار محوری می‌نامیم. به عبارت دیگر برداری که جهتش مستقل از دستگاه مختصات است بردار قطبی نامیده می‌شود. بردارهای جابجایی \vec{r} ، و اندازه حرکت خطی \vec{p} چنین خاصیتی دارند. همچنین دو قطبی مغناطیسی یک بردار قطبی است. اما $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ یک «بردار محوری» یا «شبه بردار» است. همچنین $\vec{\omega}$ و نیز هر بردار دیگری که جهتش با قاعده دست راست مشخص می‌شود شبه بردار است. در مورد اسکالر، اگر دستگاه راستگرد به چپ گرد تغییر یابد و علامت کمیت عوض نشود یعنی $A=A$ ، آنگاه کمیت را «اسکالر» می‌گوییم؛ و در غیر اینطور آن را «شبه اسکالر» می‌نامیم.

$$\phi = A_i \cdot B_i \quad ; \quad \psi = A_i \cdot C_i$$

در اینجا، A_i, B_i مولفه‌های بردار هستند و C_i شبه بردار؛ ϕ اسکالر و ψ شبه اسکالر است. مثلاً $\vec{r} \cdot \vec{L}$ یک کمیت شبه اسکالر است. حاصلضرب برداری یک بردار محوری با بردار قطبی خود برداری قطبی می‌شود.

اختلاف میان بردار محوری و قطبی وقتی پدید می‌آید که بخواهیم هر دو دستگاه مختصات راستگرد و چپ گرد را در نظر بگیریم. در دوران این دو بردار تفاوتی ندارند. تفاوت دو بردار محوری و قطبی از طریق بازتاب نیز مشخص می‌شود. تفاوت این است که در وارونی (inversion)، دستگاه مختصات وارون می‌شود و جهان فیزیکی ثابت می‌ماند. ولی در بازتاب، دستگاه مختصات ثابت می‌ماند و جهان واقعی بازتابیده می‌شود (مانند آینه در یک صفحه مختصات).

چنانچه بپذیریم که جهان طبیعی تفاوتی میان راستگرد و چپ گرد بودن دستگاه مختصات قائل نمی‌شود و قوانین مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است، آنگاه در می‌یابیم که نمی‌توان دو بردار محوری و قطبی را با هم جمع کرد. در معادله $\vec{A} = \vec{B}$ هر دو بردار یا قطبی باید باشند یا محوری. همین اندیشه در مورد اسکالر و شبه اسکالر و نیز تانسور و شبه تانسور به کار می‌رود. تفاوت فقط در برهمکنش ضعیف (مقوله پارتیه) است. همین جا اشاره می‌کنیم که ذرات با اسپین صفر (مانند ذره آلفا، مزون π) با اسکالر؛ ذرات با اسپین یک (دوترون) با بردار؛ و ذرات با اسپین دو (گراویتون

فرضی) با تانسور نمایانده می‌شوند. ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ (مانند الکترون، پروتون، و نوترون) با اسپینور بیان می‌شود که نه اسکالر است، نه بردار، و نه تانسور.

۱۳-۳. فضای دوگان (همتا)

در مورد محاسبات برداری بیشتر علاقمندیم که این محاسبات را بدون کاربرد محورهای بر روی خود بردارها انجام دهیم. استفاده از این روش درباره موجودات هندسی که بیش از سه مولفه دارند- تانسورها- دشوار است. تانسورها هنگامی به آسانی تعریف پذیر هستند که خصوصیات آنها را در یک دستگاه مختصات بشناسیم و بعد ویژگیهای مستقل از دستگاه مختصات را پیدا کنیم که دارای مفهوم هندسی و در بسیاری موارد مفهوم فیزیکی باشند.

در بخش آنالیز برداری فضای برداری را با ویژگی زیر تحت چرخش دستگاه مختصات چنین تعریف کردیم:

$$V^i = a_j^i V^j \quad \text{یا} \quad V'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j \quad (3-13)$$

در این تعریف نوعی دوگانگی وجود دارد که منجر به تبدیلات هم وردا و پادوردا می‌شود. a_{ij} کسینوس زاویه بین دو محور، مثلاً، X'_1 و X'_j است. در مختصات دکارتی داریم:

$$a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (4-13)$$

در اینجا هیچ اختلافی بین تبدیلات پادوردا و هم وردا وجود ندارد چرا که سخن از دستگاه متعامد دکارتی است. اما رابطه فوق در دستگاههای دیگر در حالت کلی برقرار نیست و تمایز آنها مسئله‌ای واقعی و مهم است. کسینوسهای هادی a_{ij} از شرایط تعامد زیر پیروی می‌کنند (این رابطه را اثبات کنید):

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \sum_i a_{ji} a_{ik} = \delta_{jk} \quad (5-13)$$

بدین ترتیب اگر $A(i)$ عبارتی شامل j باشد رابطه زیر به راحتی به دست می‌آید:

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A(j) = A(j) \delta_{jk} = A(k) \quad (6-13)$$

برای بررسی دقیق‌تر مسئله در فضای برداری دستگاه پایه $(i = 1, 2, \dots, N)$ را در نظر می‌گیریم و بردار \vec{V} را در این دستگاه به صورت $\vec{V} = V^i \vec{e}_i$ می‌نویسیم. اکنون دستگاه مختصات دیگری را در همین فضا با پایه \vec{e}'_j در نظر می‌گیریم (مثلاً همان دستگاه قبلی را که چرخانده باشیم). بردار \vec{V} در این دستگاه چنین می‌شود:

$$\vec{V} = V'^j \hat{e}'_j = \sum_j V'_j \hat{e}'_j \quad (7-13)$$

رابطه بین دستگاه پایه جدید و قدیم در این فضا چنین تعریف می‌شود:

$$\hat{e}'_j = a_{ij}^i \hat{e}_i = a_{ij} \hat{e}_i \quad (8-13)$$

و یا

$$a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j \quad (9-13)$$

یعنی دستگاه پایه جدید به وسیله ماتریس $A = [a_{ij}]$ از دستگاه پایه قدیم به دست می‌آید. همچنین رابطه (۱۳-۳) ارتباط میان مولفه‌های قدیم و جدید بردار \vec{V} را نشان می‌دهد. ضرایب a_{ij} که از دو رابطه (۱۳-۴) یا (۱۳-۹) به دست می‌آیند کسینوس زاویه میان محورهای پایه \hat{e}'_i و \hat{e}'_j است.

رابطه (۱۳-۵) خاصیت متعامد بودن ضرایب a_{ij} را نشان می‌دهد و تبدیلی که توسط (۱۳-۳) صورت می‌گیرد دارای چنین خاصیتی است و آن را تبدیل متعامد می‌نامیم. همان گونه که از نامش پیداست تبدیل متعامد به ما این توانایی را می‌دهد که مجموعه‌ای از بردارهای پایه (بردارهای یکه) را به مجموعه متعامد دیگری تبدیل کنیم. ویژگی عمده این نوع تبدیل در این است که فاصله بین دو نقطه صرفنظر از دستگاه دکارتی تغییر ناپذیر است:

$$\sum_i V_i'^r = \sum_i V_i^r \quad (10-13)$$

در نمایش ماتریسی داریم:

$$V_i' = \sum_j a_{ij} V_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \vdots \\ \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \quad (11-13)$$

و یا ساده‌تر $\vec{V}' = A\vec{V}$. با وارد کردن ماتریس ترانزاده و توجه به خاصیت زیر که معرف فاصله بین دو نقطه یا به عبارت دیگر معرف طول بردار است؛

$$\tilde{V}V = (V_1 \dots V_n) \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \sum_i V_i^r$$

برای برقراری تساوی (۱۱-۱۳) باید رابطه ماتریسی زیر وجود داشته باشد

$$\tilde{V}V = \tilde{V}'V' = (\tilde{A}V)AV = \tilde{V}\tilde{A}AV \Rightarrow \tilde{A}A = 1 \quad (12-13)$$

یا $A^{-1} = \tilde{A}$ ؛ یعنی تبدیل حتماً باید متعامد باشد. (در فضای مختلط این تبدیل باید از نوع یکانی باشد).

یادآوری مهم- باید توجه داشت که آنچه معمولاً به عنوان تانسور مورد بررسی قرار می‌گیرد آنالیز تانسوری به معنای عام آن نیست. بلکه سخن از تانسور دکارتی (Cartesian Tensor) است. منظور نوع خاصی تانسور در فضای اقلیدسی است که تحت رده‌بندی بسیار خاصی از تبدیلات مختصات، یعنی تبدیلات متعامد، تعریف می‌شود. تعریف بنیادی و عمومی تانسور در فضای ریمانی با تبدیل منحنی الخط صورت می‌گیرد که لزوماً متعامد و خطی نیز نیست. اکنون در فضای برداری مورد بحث موجودات دیگری مانند F در نظر می‌گیریم به طوریکه زمانی مفهوم داشته باشند که به صورت $F(\vec{V})$ عمل کنند. این موجودات را توابع برداری خطی می‌نامیم. می‌پذیریم که بنا بر خاصیت فضای برداری این توابع پیوسته و مشتق‌پذیری و خطی هستند. به عبارت دیگر، روابط زیر در مورد عناصر این مجموعه برقرار است:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} F(\vec{r}) = F(\vec{r}_0) \quad (۱۳-۱۳)$$

$$F(\lambda \vec{r} + \mu \vec{s}) = \lambda F(\vec{r}) + \mu F(\vec{s}) \quad (۱۴-۱۳)$$

برای سهولت کار فضا را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. یکی فضای برداری \vec{V} که فضای اصلی E_n می‌گوییم و دیگری فضای توابع $F(\vec{V})$ که فضای دوگان یا همتا E_n^* (Dual space) نامیده می‌شود. همچنین با تعریف ضرب یک عدد در عناصر E_n^* به صورت $(\alpha F)\vec{V} = \alpha F(\vec{V})$ و تعریف عنصر صفر $o(\vec{V}) = o$ ، آنگاه E_n^* نیز تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که به آن فضای دوگان می‌گوییم و عناصر آن فرم خطی نام دارند. بدیهی است که بعد فضای برداری E_n^* برابر با بعد فضای برداری E_n است. در فضای همتا توابع F را برحسب دستگاه پایه \vec{e}^i آن بسط می‌دهیم:

$$F = f_i \hat{e}^i \quad (۱۵-۱۳)$$

و برحسب دستگاه پایه جدید \hat{e}'^j در فضای همتا، که مثلاً پس از چرخش حاصل شده، خواهیم داشت:

$$F = f'_j \hat{e}'^j \quad (۱۶-۱۳)$$

بنابراین رابطه میان دو دستگاه پایه جدید و قدیم، $\hat{e}'^j = a_j^i \hat{e}^i$ می‌شود و رابطه میان مولفه‌های قدیم و جدید چنین می‌شود:

$$f'_j = a_j^i f^i \quad (۱۷-۱۳)$$

به عناصر فضای اصلی پادوردا، و به عناصر فضای دوگان هم وردا می‌گوییم. به کمک روابط (۱۳-۵) و (۱۳-۸) رابطه میان دستگاه پایه اصلی و دوگان چنین است.

$$\hat{e}^i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \delta_j^i \quad (۱۸-۱۳)$$

در مورد عملیات برداری روی تانسورها مانند جمع، ضرب، تعریف تانسور یکه و تانسور قطری مانند ماتریس‌ها عمل می‌کنیم. فقط باید به تفاوت عمده میان ماتریس و تانسور توجه داشت:

«در مورد ماتریس‌ها آنها را به عنوان یک عملگر خطی در نظر می‌گیریم که روی عناصر یک فضای برداری اثر می‌کنند، حال آنکه تانسورها خود عناصر یک فضای برداری خطی هستند نه یک عملگر». در صفحات بعد نشان می‌دهیم که تانسور یک عملگر برداری خطی (در حالت خاص مجموع دو تایی) است. به بیان دیگر «مفهوم ماتریس کاملاً ریاضی است؛ ماتریس آرایشی است از اعداد که می‌توان آن را طبق قواعد خاص خود جمع و ضرب کرد. مفهوم تانسور هندسی است؛ در هر دستگاه مختصات ویژه، تانسور را می‌توان به کمک یک ماتریس نمایش داد. اما اگر دستگاه مختصات تغییر کند، تبدیل ماتریس نمایشگر تانسور باید طبق قاعده‌ای معین انجام گیرد.»^۱

مثال ۱۳-۲. برای اینکه مثالی عملی از تانسور داشته باشیم به تعریف چگالی جریان در الکتریسیته برمی‌گردیم. در محیط همسانگرد بردار چگالی جریان \vec{J} و رسانایی σ و میدان الکتریکی \vec{E} که از طریق رابطه $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ تعریف می‌شود به صورت ساده مثلاً در راستای x با $J_1 = \sigma E_1$ بیان می‌شود که σ یک اسکالر است. اما اگر محیط ناهمسانگرد باشد (مانند بسیاری از بلورها، یا پلاسما) میدان در جهت x به y و z هم بستگی دارد، همین طور در مورد راستاهای دیگر

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \\ J_2 = \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \\ J_3 = \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \end{cases} \Rightarrow J_i = \sum_j \sigma_{ij}E_j$$

در نتیجه نمایش ماتریسی تانسور رسانایی چنین می‌شود:

$$\vec{\sigma} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

همچنین یکی از کاربردهای فضای همتا را در فیزیک در زمینه بلورشناسی می‌توان دید. در اینجا محورهای مختصات کریستالوگرافی را سه یال یک سلول بنیادی $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ در نظر می‌گیریم. فضای وارون یا متقابل شبکه بلوری را به نام فضای همتا یا دوگان تعریف می‌کنیم که دستگاه پایه

آن یعنی $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (عملاً این مثالی از فضای غیرمتعامد یا oblique است):

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)}, \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)} \quad (13-19)$$

موضع الکترون در فضای اصلی است، اما انرژی آن وابسته به عدد موج k است که متعلق به فضای متقابل یا وارون است. عمده بحث انرژی در این فضاست که منجر به یافتن مناطق بریلوئن می‌شود و باند ممنوع را در نیمه رساناها از این استدلال به دست می‌آوریم.

۴-۱۳. دیادیک‌ها (دوتایی‌ها - Dyadics)

همانگونه که دیدیم جبر توابع برداری خطی تحت عنوان تانسور بیان شد. این بحث به دو روش قدیم و جدید در کتاب‌ها تدریس می‌شود. در روش قدیم سخن از دوتایی‌هاست. اکنون به این مبحث می‌پردازیم.

۴-۱۳-۱. تعریف ریاضی دوتایی.

آنالیز تانسوری در واقع تعمیم آنالیز برداری است. تابع برداری خطی و پیوسته $f(\vec{r})$ را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \quad (1) \text{ خاصیت پیوستگی}$$

$$f(\vec{r} + \vec{s}) = f(\vec{r}) + f(\vec{s}) \quad (2) \text{ خاصیت خطی}$$

$$f(\lambda \vec{r}) = \lambda f(\vec{r}) \quad (3) \text{ خاصیت خطی}$$

اینک می‌دانیم که تابع برداری خطی $f(\vec{r})$ موقعی کاملاً تعریف می‌شود که $f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), f(\vec{a}_3)$ برای هر سه بردار غیر واقع بر یک صفحه $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ معلوم باشند. با فرض $\vec{r} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$ و به کمک خواص (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$f(\vec{r}) = x_1 f(\vec{a}_1) + x_2 f(\vec{a}_2) + x_3 f(\vec{a}_3)$$

و همچنین از رابطه $x_\alpha = \vec{r} \cdot \vec{a}_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ نتیجه می‌شود

$$f(\vec{r}) = (\vec{a}_1 \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \vec{b}_3) \cdot \vec{r} = \phi \cdot \vec{r}$$

که در آن $f(\vec{a}_\alpha) = \vec{b}_\alpha$ فرض شده و عملگر

$$\phi = \vec{a}_\gamma \vec{b}_\gamma + \vec{a}_\gamma \vec{b}_\gamma + \vec{a}_\gamma \vec{b}_\gamma \quad (20-13)$$

در فضای سه بعدی شامل ۹ مولفه است و در نتیجه نه اسکالر است نه کمیت برداری، بلکه یک نماد جدید ریاضی است که دوتایی یا dyadic نامیده می‌شود.

۱۳-۴-۲. مثالی از فیزیک. اکنون به فیزیک بر می‌گردیم و با مثالی از مکانیک تحلیلی لزوم این گونه تعریف را یادآور می‌شویم: در حرکت دورانی جسم صلب به طور کلی و دوران حول یک محور ثابت در حالت خاص با انتخاب دستگاه oxyz روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}_i &= M\vec{R} & ; & \quad \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} & ; & \quad \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ \vec{v}_i &= \vec{\omega} \times \vec{r}_i \\ \Rightarrow \vec{L}(\vec{\omega}) &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \end{aligned} \quad (21-13)$$

\vec{L} یک تابع برداری خطی از $\vec{\omega}$ است، بدین معنا که

$$\vec{L}(c\vec{\omega}) = c\vec{L}(\vec{\omega}) \quad (22-13)$$

$$\vec{L}(\vec{\omega}_\gamma + \vec{\omega}_\gamma) = \vec{L}(\vec{\omega}_\gamma) + \vec{L}(\vec{\omega}_\gamma)$$

رابطه \vec{L} را به کمک قاعده بک-کب بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{\omega}) &= \sum_i m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \\ &= \sum_i m_i [\vec{r}_i \vec{r}_i^T \vec{\omega} - \vec{r}_i \vec{r}_i^T \vec{\omega}] \end{aligned} \quad (23-13)$$

حاصلضرب $\vec{r}_i \vec{r}_i^T$ تاکنون تعریف نشده است و لازم است این تعریف صورت بگیرد. در اینجا عملگر برداری \vec{T} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{T} = \vec{A}\vec{B} \Leftrightarrow \vec{T} \cdot \vec{C} = (\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (24-13)$$

این عبارت را یک ضرب دوتایی (Dyadic multiplication) می‌نامیم. \vec{T} نیز عامل برداری خطی است. یعنی نمایشگر عملی است که می‌توان بر بردار \vec{C} انجام داد تا بردار جدید

که گفته شد، تانسور نیز نامیده می‌شود (در واقع تانسور مرتبه دوم است تا از تانسورهای مرتبه‌های دیگر متمایز گردد). بدین ترتیب در مورد \vec{L} داریم (با انتخاب $\vec{\omega} = \vec{I}\vec{\omega}$):

$$\vec{L}(\vec{\omega}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i \vec{I} - m_i \vec{r}_i \vec{r}_i) \cdot \vec{\omega} \quad (۱۳-۲۵)$$

\vec{I} تانسوریکه است که در زیر نمایش خواهیم داد. جمله $m_i \vec{r}_i \vec{I} - m_i \vec{r}_i \vec{r}_i$ معرف یک تانسور است. گشتاور ماند نسبت به محوری که از O می‌گذرد در جهت برداری که با برداریکه \hat{n} مشخص می‌شود چنین به دست می‌آید:

$$I_n = \hat{n} \cdot \vec{I} \cdot \hat{n} \quad (۱۳-۲۶)$$

۱۳-۴-۳. خواص دوتایی - تانسور یکه

همانگونه که اشاره شد \vec{I} فقط از طریق ضرب اسکالر با بردار \vec{C} تعریف می‌شود. خاصیت خطی بودن \vec{I} در پایین تحقیق می‌شود:

$$\begin{aligned} \vec{T} \cdot a\vec{C} &= \vec{A}\vec{B} \cdot (a\vec{C}) = \vec{A}(\vec{B} \cdot a\vec{C}) = a[\vec{A}\vec{B} \cdot \vec{C}] = a\vec{T} \cdot \vec{C} \\ \vec{T} \cdot (\vec{C} + \vec{D}) &= \vec{A}\vec{B} \cdot (\vec{C} + \vec{D}) = (\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} + (\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{D} \\ (\vec{A}\vec{B} + \vec{D}\vec{E}) \cdot \vec{C} &= \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) + \vec{D}(\vec{E} \cdot \vec{C}) \end{aligned} \quad (۱۳-۲۷)$$

همچنین می‌توان به شیوه‌ای مشابه ضرب عددی یک دوتایی را با برداری واقع در سمت چپ آن تعریف کرد:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} \quad (۱۳-۲۸)$$

در جمع دوتایی‌های خاص تانسوری ساده به نام تانسور یکه تعریف می‌شود:

$$\vec{I} = \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k} \quad (۱۳-۲۹)$$

$$\begin{aligned} \vec{I} \cdot \vec{A} &= (\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \\ &= \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z = \vec{A} \end{aligned} \quad (۱۳-۳۰)$$

و همینطور $\vec{A} \cdot \vec{I} = \vec{A}$ نتیجه می‌شود. پس این تانسور یکه است.

جمع و ضرب تانسورها از تمامی قواعد معمولی جبر پیروی می‌کند مگر اینکه ضرب عددی در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.

$$\vec{T} \cdot \vec{C} \neq \vec{C} \cdot \vec{T} \quad (۳۱-۱۳)$$

اگر بردارها را به صورت تحلیلی بنویسیم $\vec{C} = e_x \hat{i} + e_y \hat{j} + e_z \hat{k}$ ، آنگاه روشن است که مجموع دوتایی نیز چنین نوشته می‌شود. بدین ترتیب مثلاً در رابطه (۲۵-۱۳) عبارت داخل پرانتز نیز در نهایت به شکل تحلیلی فوق در می‌آید که آن را تانسور لخت یا تانسور ماند (Inertia Tensor) می‌نامیم و با \vec{I} نشان می‌دهیم:

$$\vec{L}(\vec{\omega}) = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (۳۲-۱۳)$$

که در آن

$$\vec{I} = \sum_k \left[m_k r_k^2 \vec{I} - m_k \vec{r}_k \vec{r}_k \right] \quad (۳۳-۱۳)$$

در حالت کلی \vec{L} و $\vec{\omega}$ در یک جهت نیستند و همانگونه که در مبحث چرخش جسم صلب می‌بینیم چنانچه محورهای دوران منطبق بر محورهای اصلی جسم باشند این دو بردار هم راستا می‌شوند و تانسور I به صورت یک ماتریس قطری نمایش داده می‌شود (محورهای اصلی در فرازهای بعد تعریف می‌شود). به عنوان مثال می‌توان تحقیق کرد که مولفه‌های تانسور ماند

$$\vec{I} = \sum (m_k r_k^2 \vec{I} - m_k \vec{r}_k \vec{r}_k) \quad (۳۴-۱۳)$$

$$\vec{I} = \sum_i m_i (r_i^2 \vec{I} - \vec{r}_i \vec{r}_i) = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix}$$

مسئله (۳-۴-۶) کتاب آرفکن در رابطه با این تانسور است. برای ذره‌ای به جرم m واقع در (X_1, X_2, X_3) خواهیم داشت:

$$I_{ij} = m(x_i x_j \delta_{ij} - x_i x_j) \quad (۱۳-۳۵)$$

در شکل پیوسته (توزیع پیوسته) داریم

$$\vec{I} = \iiint \rho (r^2 \vec{I} - \vec{r}\vec{r}) dv \quad (۱۳-۳۶)$$

در این محاسبه تانسور مانند نسبت به مجموعه محورهایی با مبدأ O حساب می‌شود. در مورد مولفه‌های قطری داریم:

$$I_{xx} = \iiint \rho (y^2 + z^2) dv, I_{yy} = \iiint \rho (z^2 + x^2) dv, \quad (۱۳-۳۷)$$

$$I_{zz} = \iiint \rho (x^2 + y^2) dv$$

و مولفه‌های غیرقطری،

$$I_{xy} = I_{yx} = -\iiint \rho xy dv$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\iiint \rho yz dv \quad (۱۳-۳۸)$$

$$I_{zx} = I_{xz} = -\iiint \rho zx dv$$

و \vec{T} چنین می‌شود:

$$\vec{T} = \sum_{ij} T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = T_{xx} \hat{i} \hat{i} + T_{xy} \hat{i} \hat{j} + T_{xz} \hat{i} \hat{k}$$

$$+ T_{yx} \hat{j} \hat{i} + T_{yy} \hat{j} \hat{j} + T_{yz} \hat{j} \hat{k} \quad (۱۳-۳۹)$$

$$+ T_{zx} \hat{k} \hat{i} + T_{zy} \hat{k} \hat{j} + T_{zz} \hat{k} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \quad (۱۳-۴۰)$$

اکنون نشان می‌دهیم که هر تابع برداری خطی را می‌توان با یک مجموع دوتایی نمایش داد. فرض می‌کنیم $\vec{F}(\vec{c})$ تابعی خطی از \vec{c} باشد. نخست حالتی را بررسی می‌کنیم که \vec{c} برداریکه \hat{e}_j است

و T_{ij} را مولفه‌های \vec{F} در این حالت می‌گیریم. از تعریف بردار \vec{F} در حالت \hat{e}_j و تصویر گرفتن آن

$$\vec{c} = \sum_j c_j \hat{e}_j \quad \vec{F}(\hat{e}_j) = \sum_{i=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i$$

در مرحله بعد بردار \vec{c} را به صورت

می‌نویسیم. بنابراین با خاصیت خطی بودن $\vec{F}(\vec{c})$ داریم:

$$\vec{F}(\vec{c}) = \vec{F}\left(\sum_j c_j \hat{e}_j\right) = \sum_j \vec{F}(c_j \hat{e}_j) = \sum_j c_j \vec{F}(\hat{e}_j) = \sum_{i,j=1}^3 c_j T_{ij} \hat{e}_i \quad (۴۱-۱۳)$$

از این رو مولفه‌های $\vec{F}(\vec{c})$ را می‌توان برحسب T_{ij} بیان کرد:

$$[\vec{F}(\vec{c})]_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} c_j$$

اگر مجموع دوتایی را به صورت $\vec{T} = \sum_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$ تعریف کنیم، به کمک روابط بالا خواهیم داشت:

$$\vec{F}(\vec{c}) = \vec{T} \cdot \vec{c} \quad (۴۲-۱۳)$$

از این جهت مفهوم دوتایی و عملگر برداری خطی یا تانسور یکی است، و با مفهوم تابع برداری خطی هم ارز است، بدین معنا که هر تابع برداری خطی نوعی تانسور یا مجموع دوتایی را تعریف می‌کند و برعکس.

معمولاً کار با دوتایی‌ها به ویژه برای تانسورهای مرتبه سه به بالا دشوار و کسل کننده است. از این رو اغلب به آنالیز تانسوری به مفهوم جدید آن توجه می‌شود و یک بار که مفهوم تبدیل در اثر چرخش مختصات فهمیده شود کار با آن آسانتر خواهد بود.

۱۳-۵. دینامیک جسم صلب

پیش از هر چیز، یکبار دیگر به تعریف جسم صلب می‌پردازیم. جسم صلب مجموعه نقاط مادی است که تحت قیود هولونومیک قرار می‌گیرد، بدین مضمون که فاصله بین هر زوج نقطه در جسم ثابت است:

$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} = \text{ثابت} \quad (۴۳-۱۳)$$

برای N ذره در فضای ۳ بعدی، تعداد درجه آزادی $3N$ است و می‌توان به تعداد

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{(N-2)!2!} = \frac{1}{2} N(N-1) \quad (۱۳-۴۴)$$

معادله از نوع قید فوق نوشت. این تعداد برای N های بزرگ از $3N$ بیشتر است. این بدان معناست که تمام روابط از نوع رابطه (۱۳-۴۳) مستقل از هم نیستند و تعدادی از آنها کم می‌شود.

برای تعیین وضعیت جسم صلب در فضا، کافی است که جای سه نقطه غیرواقع در یک صفحه را تعیین کرد. پس در مجموع ۶ درجه آزادی کفایت می‌کند (۳ رابطه قید وجود دارد، و از نه مولفه، سه مولفه کم می‌شود).

بحث عمده در بررسی دینامیک جسم صلب، چرخش جسم همراه با انتقال است. این فرآیند با بررسی تبدیلات متعامد صورت می‌گیرد. مثلاً در چرخش به دور محور Z به اندازه زاویه θ داریم:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \Leftrightarrow x'_i = \sum_j a_{ij} \cdot x_j$$

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس متعامد تبدیل است یعنی $(A^{-1} = \tilde{A})$ ویژگی این تبدیل این است که مقادیر ویژه ماتریسهای تبدیلیهای تشابهی (یا حالت خاص آن تبدیل متعامد) تغییر نمی‌کند. همچنین دترمینان ماتریس متعامد ± 1 است. در مورد علامت مثبت تبدیل متعامد را مناسب یا سره (Proper) می‌گوییم. و در مورد علامت منفی، آن را (improper) می‌نامیم. یک خاصیت عمده تبدیل، پیوستگی آن است. یعنی همواره باید دترمینان تبدیل یکسان بماند و چنانچه از ابتدا $+1$ است، باید همواره $+1$ بماند و نمی‌تواند به -1 تغییر یابد. (این ویژگی از این خاصیت ناشی می‌شود که حاصلضرب مقادیر ویژه مقدار دترمینان را می‌دهد، و مقادیر ویژه در تبدیل متعامد تغییر نمی‌کنند). در مورد ماتریس تبدیل، نه عنصر ماتریس مستقل نیستند. شش رابطه تعامد از نوع

داریم. در نتیجه تعداد عناصر مستقل a_{ij} به سه عنصر کاهش می‌یابد.

ماتریس با دترمینان (-1) نمی‌تواند هیچگونه جابجایی فیزیکی در جسم صلب ایجاد کند. این نوع تبدیل ماتریس (-1) معرف یک عمل وارونی (inversion) است؛ زیرا

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

یعنی عمل چرخش 180° درجه به دور محور Z به اضافه بازتاب در صفحه XY مجموعاً یک وارونی می‌دهد نه چرخش کلی جسم صلب.

بدین ترتیب برای توصیف حرکت جسم صلب به شیوه لاگرانژی، لازم است که سه پارامتر مستقل داشته باشیم که موقعیت جسم را در فضا به چنان شیوه‌ای مشخص کند که ماتریس متعامد تبدیل دارای دترمینان $+1$ باشد. فقط هنگامی که چنین مختصات تعمیم یافته‌ای پیدا شود می‌توان لاگرانژی را نوشت و از آنجا معادلات حرکت لاگرانژ را بررسی کرد. به شیوه‌های مختلف می‌توان مجموعه‌ای از این پارامتر را یافت، که مهمترین و مناسبترین آنها زوایای اوپلر است. این سه پارامتر از طریق چرخش‌های متوالی سه گانه حاصل می‌شود که در فرازهای بعدی به معرفی آنها می‌پردازیم. حدود ۱۲ قرارداد مختلف در تعیین زوایای اوپلر متداول است که دو نوع آنها از همه مهمتر است و عمدتاً در مکانیک کلاسیک، و کوانتومی و فیزیک هسته‌ای و ذرات کاربرد دارند.^۱

در اینجا بی‌مناسبت نیست که به قضیه مهم اوپلر درباره جسم صلب بپردازیم:

قضیه اوپلر:

« جابجایی عمومی جسم صلب با یک نقطه ثابت عبارت است از چرخش به دور یک محور معین. به عبارت دیگر، ماتریس متعامد حقیقی که حرکت فیزیکی یک جسم صلب را با یک نقطه ثابت مشخص می‌کند همواره دارای مقدار ویژه $(+1)$ است.»

اثبات -

از ویژگیهای چرخش این است که محور دوران بدون تغییر می‌ماند. لازمه دیگر دوران این است که اندازه بردارها ثابت می‌مانند. یعنی

$$\vec{R}' = A\vec{R} = \vec{R} \Rightarrow \|\vec{R}'\| = \|A\vec{R}\| = \|\vec{R}\|$$

برای اثبات قضیه، از خاصیت تعامد A (و یا \tilde{A}) استفاده می‌کنیم:

$$A\tilde{A} = I \Rightarrow (A - I)\tilde{A} = A\tilde{A} - \tilde{A} = I - \tilde{A} \quad (۴۵-۱۳)$$

و در نتیجه با توجه به $+1 = |A| = |\tilde{A}|$ خواهیم داشت:

$$|I - A| = |A - I|(-1)^n \quad (۴۶-۱۳)$$

اما فضای مورد بحث $n=3$ (سه بعدی) است. بدین ترتیب روابط $(۴۵-۱۳)$ و $(۴۶-۱۳)$ توأمآ در صورتی برقرار است که $|A - I| = 0$ باشد. از مقایسه این رابطه با معادله ویژه مقدار یک ماتریس، یعنی $|A - \lambda I| = 0$ ، خواهیم داشت $\lambda = +1$ و این نتیجه معقول قضیه اوپلر است و قضیه ثابت می‌گردد.

در استدلال قضیه اوپلر توجه داشته باشید که در فضاهای با ابعاد زوج معادله $(۴۶-۱۳)$ برای تمام ماتریس‌ها به صورت یک اتحاد برقرار است و قضیه اوپلر محقق نمی‌گردد، زیرا

$$|A - I| = (-1)^n |I - A| = |I - A|$$

یعنی مثلاً برای دو بعد، هیچ برداری در فضا وجود ندارد که سمت چپ را با یک دوران بدون تغییر بگذارد: محور دوران عمود بر صفحه است و در نتیجه خارج از فضای مورد بحث است.

اکنون موضوع ساده تعیین ویژگیهای مقادیر ویژه دیگر در سه بعد است. فرض می‌کنیم $\lambda_3 = 1$ باشد. درمیان هر ماتریس با تبدیل تشابه تغییر نمی‌کند (به فصل دوم مراجعه کنید). در نتیجه بنابر

$$\text{معادله } AX = \lambda X^{-1} \text{ و}$$

$$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

داریم،

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

به علاوه چون A ماتریس حقیقی است، اگر λ پاسخ معادله $|A - \lambda I| = 0$ باشد، λ^* نیز پاسخ خواهد بود.

اگر مقدار ویژه λ_i مختلط باشد، آنگاه بردار ویژه \vec{R}_i که باید از معادله $|A - \lambda_i I| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ به دست آید، در حالت کلی مختلط می‌شود. قبلاً با ویژگیهای بردارهای مختلط تحت تبدیلات حقیقی متعامد بحث نکرده بودیم، و تغییراتی باید در تعاریف قبلی به عمل آورد. مجذور طول یا اندازه بردار مختلط \vec{R} عبارت است از $\vec{R} \cdot \vec{R}^*$ یا با نمایش ماتریسی به صورت $\vec{R} \vec{R}^*$ ، که در آن علامت ترانسپوز در سمت چپ نشان می‌دهد که با ماتریس سطری باید نمایش داده شود. تحت تبدیل متعامد، مجذور طول ناورد است:

$$\vec{R}' \vec{R}'^* = (\vec{A} \vec{R}) \vec{A} \vec{R}^* = \vec{R} \vec{A} \vec{A} \vec{R}^* = \vec{R} \vec{R}^*$$

اکنون فرض کنید که \vec{R} بردار ویژه مختلط وابسته به مقدار ویژه مختلط λ باشد. از معادله $\vec{R}' = \vec{A} \vec{R} = \lambda \vec{R}$ داریم:

$$\vec{R}' \vec{R}'^* = \lambda \lambda^* \vec{R} \vec{R}^* \Rightarrow \lambda \lambda^* = 1$$

از اینجا می‌توان دریافت که سه امکان متمایز برای مقادیر ویژه وجود دارد. اگر تمام مقادیر ویژه حقیقی باشند، آنگاه فقط دو حالت ممکن وجود دارد:

- ۱- تمام مقادیر ویژه +۱ باشند. ماتریس تبدیل ۱ می‌شود یعنی تبدیلی که بدیهی است.
- ۲- یک مقدار ویژه +۱ است و دو تای دیگر -۱ هستند. چنین تبدیلی یک وارونی در دو محور مختصات است بطوریکه محور سوم بدون تغییر بماند. بطور مساوی عبارتست از دوران به اندازه π به دور محور تغییر نیافته.

اگر تمام مقادیر ویژه حقیقی نباشند، فقط یک امکان اضافی وجود دارد:

- ۳- یک مقدار ویژه +۱ است، و دو مقدار دیگر مزدوجهای مختلط یکدیگر که معمولاً به شکل $e^{-i\phi}$ ، $e^{i\phi}$ نوشته می‌شود.

۱۳-۵-۱. انرژی جنبشی جسم صلب. انرژی جنبشی جسم صلب در حال چرخش را به آسانی می‌توان بر حسب تانسور ماند نمایش داد. بدین منظور از قواعد جبر تانسوری که در بخش‌های پیشین مطرح شد و نیز تعریف انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} K &= E_{\text{kin}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \end{aligned} \quad (۴۷-۱۳)$$

که در آن از تعریف اندازه حرکت زاویه‌ای \vec{L} استفاده شده است (رابطه ۱۳-۲۵) را ببینید). بنابراین K را می‌توان به شکل

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (۴۸-۱۳)$$

نمایش داد (به رابطه ۱۳-۲۶) مراجعه کنید). آنگاه معادله (۴۸-۱۳) بر حسب مولفه‌ها در راستای مجموعه‌ای از محورها چنین است.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 + \frac{1}{2} I_{xy} \omega_x \omega_y \\ &+ I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x \end{aligned} \quad (۴۹-۱۳)$$

و چنانچه این رابطه بر حسب مولفه‌ها در راستای محورهای اصلی (x', y', z') جسم صلب نوشته شود:

$$K = \frac{1}{2} I'_x \omega'^2_x + \frac{1}{2} I'_y \omega'^2_y + \frac{1}{2} I'_z \omega'^2_z \quad (۵۰-۱۳)$$

از آنجا که گشتاورهای مانند I'_α الزاماً مثبت هستند. این رویه‌ها یک بیضوی را نشان می‌دهند. این بیضوی مکان هندسی سرعت‌های زاویه‌ای $\vec{\omega}$ است که به ازای آنها انرژی جنبشی مقدار ثابت

$k=T$ را دارد. اکنون بردار $\vec{r} = \frac{a}{\sqrt{2T}} \vec{\omega}$ را انتخاب می‌کنیم که در آن a مقداری ثابت است.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2T}}{a} \vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \frac{\sqrt{2T}}{a} \vec{r} = \frac{T}{a^2} \vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r} \quad (۵۱-۱۳)$$

و از مقایسه با سمت چپ رابطه، خواهیم داشت،

$$\vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r} = a^2 \quad (۵۲-۱۳)$$

این معادله «بیضوی ماند» است و ثابت a اندازه بیضوی را تعیین می‌کند. معمول چنین است که بدون توجه به واحدهای بکار رفته، قرار دهیم $a = 1$. همچنین از مقایسه $I_n = \vec{n} \cdot \vec{I} \cdot \vec{n}$ نتیجه می‌شود.

$$|\vec{r}| = \frac{a}{\sqrt{I_r}} \quad (۵۳-۱۳)$$

$|\vec{r}|$ مکان هندسی نقاطی مانند p را نشان می‌دهد که یک بیضوی را با ویژگیهای گفته شده در بالا طی می‌کند. I_r گشتاور ماند نسبت به محوری موازی \vec{r} است. بدین ترتیب تانسور ماند به طور یگانه توسط بیضوی ماند وابسته به آن شناخته می‌شود. این مطلب شیوه هندسی مناسبی برای تجسم تانسور ماند به ما می‌دهد.

۱۳-۵-۲. چرخش جسم صلب در فضا

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad , \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad , \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad , \quad \vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

از مقایسه روابط بالا می‌توان گفت که سه اختلاف عمده بین روابط حرکت و چرخشی وجود دارد:

۱- m عدد است در حالیکه \vec{I} تانسور است. از اینرو \vec{p} همیشه موازی \vec{V} است، حال آنکه \vec{L} همیشه موازی $\vec{\omega}$ نیست.

۲- اختلاف مهمتر اینکه تانسور \vec{I} در مراجعه به محورهای ثابت در فضا ثابت نمی‌ماند، بلکه با چرخش جسم تغییر می‌کند. حال آنکه m همواره کمیتی ثابت است.

۳- مهمترین تفاوت اینکه مجموعه‌ای از سه مختصه متقارن مانند x, y, z وجود ندارد که به کمک آنها موقعیت جسم را در فضا بیان کنیم. از اینرو مطالب فصل ۳ و ۴ و ۷ در مورد چرخش به دور محور ثابت در اینجا به کار نمی‌آید.

۱۳-۶. معادلات حرکت اویلر در فضا:

از مطالب فصل نهم، حرکت در دستگاه‌های مختصات متحرک، رابطه زیر در مورد بردار گشتاور \vec{N} نوشته می‌شود:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (۱۳-۵۴)$$

$\frac{d'}{dt}$ نمایشگر اپراتوری خطی است نسبت به محورهای ثابت در خود جسم که این محورها با چرخش جسم و همراه با آن تغییر می‌کند و در خود جسم یک دستگاه محورهای ثابت است. در این صورت دیگر \vec{I} متغیر نیست و نسبت به محورهای جسم ثابت می‌ماند.

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \frac{d'}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega})$$

$$= \vec{I} \cdot \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{N}$$

محورهای اصلی را $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ انتخاب می‌کنیم:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (۱۳-۵۵)$$

بنابراین

$$\vec{N} = \vec{L}' + \vec{\omega} \times \vec{L} \Rightarrow N_x = L_x' + (\vec{\omega} \times \vec{L})_x \quad (۱۳-۵۶)$$

در واقع جمله \vec{L}' باید به صورت \vec{L}' نوشته شود یعنی مشتق نسبت به دستگاه پیریم دار (ستاره دار)، ولی چون محورهای اصلی به عنوان محورهای مختصات انتخاب شده و \vec{I} در حکم ماتریس قطری است، پس

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} = \frac{d'}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{I} \cdot \frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (۱۳-۵۷)$$

اما اگر محورهای مختصات همان محورهای اصلی جسم باشند،

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} = I_{xx} \omega_x \hat{e}_x + I_{yy} \omega_y \hat{e}_y + I_{zz} \omega_z \hat{e}_z$$

$$N_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y (I_{zz} \omega_z) - \omega_z (I_{yy} \omega_y)$$

$$= I_{xx} \dot{\omega}_x + I_{zz} \omega_y \omega_z - I_{yy} \omega_z \omega_y$$

$$= I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$

معادلات حرکت اویلر

$$\Rightarrow \begin{cases} N_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \\ N_y = I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) \\ N_z = I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) \end{cases} \quad (58-13)$$

اکنون از معادلات اویلر قضیه کار و انرژی را استخراج می‌کنیم:

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (59-13)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{N} = \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

و چون \vec{I} متقارن است (زیرا نسبت به محورهای اصلی گرفته می‌شود)،

$$\vec{\omega} \cdot \vec{N} = \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{d'}{dt} (\vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \frac{dT}{dt} \quad (60-13)$$

از خاصیت $\frac{d'\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$ استفاده کرده ایم و اینکه این خاصیت برای هر ترکیبی از $\vec{\omega}$ نیز برقرار

است، یعنی

$$\frac{df(\vec{\omega})}{dt} = \frac{d'}{dt} f(\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times f(\vec{\omega}) = \frac{d'f(\vec{\omega})}{dt}$$

منظور از $\frac{d'}{dt}$ مشتق نسبت به محورهای ثابت در جسم است که در اینجا می‌توان همان محورهای

اصلی را در نظر گرفت. در نتیجه:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} \quad (۱۳-۶۱)$$

که شبیه رابطه $\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$ است. همچنین یادآور می‌شویم که وقتی $\frac{d}{dt}$ را بر یک عدد اثر

می‌دهیم $\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt}$ برقرار است. (و این در مورد \vec{I} قطری صدق می‌کند).

اکنون رابطه زیر را یک بار دیگر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{N} = \vec{I} \cdot \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (۱۳-۶۲)$$

از معادلات اویلر نتیجه می‌شود چنانچه گشتاور خارجی اعمال نشود یعنی $\vec{N} = 0$ باشد، آنگاه جسم نمی‌تواند با سرعت زاویه‌ای ثابت $\vec{\omega}$ به دور خود بچرخد مگر اینکه محور چرخش محور اصلی باشد.

چرا که لازمه $\dot{\omega} = 0$ این است که $I_1 = I_2 = I_3$ باشد، در غیر این صورت

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ می‌شود. یعنی چرخشی در کار نخواهد بود. همچنین اگر

$$\vec{\omega} = cte \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

$$\vec{N} = \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (۱۳-۶۳)$$

حال چنانچه $\vec{N} = 0$ باشد، باید $\vec{I} \cdot \vec{\omega}, \vec{\omega}$ موازی هم باشند یعنی $\vec{\omega}$ در راستای محور اصلی قرار

گیرد (یادآور می‌شویم $\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ است). پس هر گاه چرخشی آزادانه بچرخد بدون آنکه نیرو و

گشتاوری بر یاتاقان آن اثر کند، در این صورت نه فقط از نظر ایستی $\sum F = 0$ باید باشد (در تعادل

باشد)، بلکه از نظر دینامیکی نیز باید در تعادل باشد، یعنی محور چرخش باید محور اصلی تانسور ماند

باشد.

اکنون سعی می‌کنیم معادلات اویلر را حل کنیم. در حل باید مولفه‌های \vec{N} را بدانیم و این، حل

معادله را مشکل می‌سازد و غیر معمول است. در حالت خاص $\vec{N} = 0$ است یعنی چرخش آزادانه

جسم متقارن بدون آنکه گشتاوری بر آن اثر کند. فرض می‌کنیم در حالت اول، محور تقارن مثلاً

محور \vec{e}_3 باشد. در این صورت $I_1 = I_2$ می‌شود، یعنی معادله ویژه تانسور ماند تبه‌گن مرتبه دوم

است. پس:

$$N_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_x \omega_y (I_x - I_y) \Rightarrow \dot{\omega}_x = 0 \Rightarrow \omega_x = cte$$

برای دو معادله دیگر داریم:

$$\begin{cases} N_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_x \omega_y (I_x - I_y) \\ N_y = I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_y (I_x - I_y) \end{cases} \quad (۱۳-۶۴)$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \omega_x \omega_y \frac{I_x - I_y}{I_x} = 0 \\ \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_y \frac{I_x - I_y}{I_y} = 0 \end{cases} \quad (۱۳-۶۵)$$

با انتخاب $\beta = \frac{I_x - I_y}{I_x}$ داریم:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \omega_x \omega_y \beta = 0 \\ \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_y \beta = 0 \end{cases}$$

همچنین، با توجه به اینکه دو معادله باید همزمان حل شوند p را در عبارت زیر مشترک می‌گیریم:

$$\begin{cases} \omega_x = A_x e^{pt} \\ \omega_y = A_y e^{pt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x p e^{pt} + A_y e^{pt} \omega_x \beta = 0 \\ A_y p e^{pt} - \omega_x \beta A_x e^{pt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x p + A_y \omega_x \beta = 0 \\ A_y p - \omega_x A_x \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = -\frac{A_y}{A_x} \omega_x \beta \Rightarrow \frac{A_y}{A_x} \omega_x \beta - \omega_x \beta A_x = 0 \Rightarrow A_y = \pm c A_x, A_x = 1$$

بنابراین

$$P = \mp i \omega_x \beta \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = e^{\pm i \omega_x \beta t} \\ \omega_y = \mp e^{\pm i \beta \omega_x t} \end{cases} \quad (۱۳-۶۶)$$

یا پاسخ حقیقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \omega_1 = A \cos(\omega_p \beta t + \theta) \\ \omega_2 = A \sin(\omega_p \beta t + \theta) \end{cases} \quad (۶۷-۱۳)$$

چون ω_1, ω_2 به اندازه i (یا $\frac{\pi}{2}$) اختلاف فاز دارند، بنابراین $\vec{\omega}$ بر دایره‌ای به شعاع A به دور

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2$$

محور \vec{e}_3 حرکت فرره‌ای انجام می‌دهد:

سرعت این حرکت $\beta \omega_p$ است. اگر $I_3 > I_1$ باشد حرکت در همان جهت ω_p است و در غیر

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = A^2 + \omega_3^2 = \text{ثابت}$$

این صورت در خلاف جهت است.

سه ثابت ω_p, A, θ از شرایط اولیه به دست می‌آیند. چون جسم صلب است و در چرخش بدون قید دارای سه درجه آزادی است، یعنی باید ۶ ثابت دلخواه داشته باشیم. پس سه ثابت دیگر کدام است؟

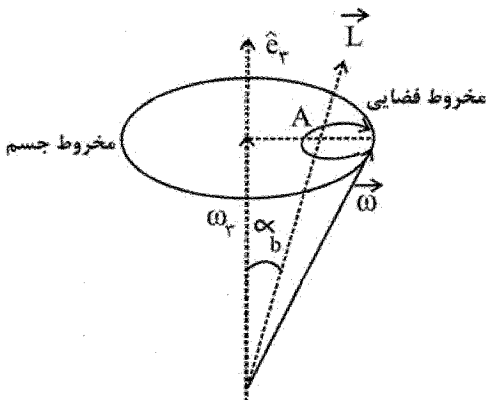
مشاهده می‌شود که در چرخش آزادانه جسم به دور محور \vec{e}_3 (در اینجا) یک محور آنی چرخش داریم که با بردار $\vec{\omega}$ تعیین می‌شود و در حرکت فرره‌ای‌اش به دور محور تقارن جسم مخروطی را در

جسم رسم می‌کند که مخروط جسم (body cone) نامیده می‌شود. نصف زاویه رأس مخروط از رابطه

$$\tan \alpha_b = \frac{A}{\omega_p}$$

به دست می‌آید. به عبارت دیگر، اگر جسم از ابتدا با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ به دور

محور بچرخد که با محور تقارن زاویه α_b بسازد، آنگاه ثابت‌های A, ω_p از رابطه زیر به دست می‌آیند:



شکل (۱۳-۱)

$$A = \omega \sin \alpha_b$$

$$\omega_\varphi = \omega \cos \alpha_b \Rightarrow \frac{A}{\omega_\varphi} = \tan \alpha_b \quad (۶۸-۱۳)$$

برای مشخص کردن حرکت در فضا لازم است جای محور ω نسبت به راستایی معین و ثابت در فضا تعیین شود. می‌توان این عمل را از طریق رسم مرحله به مرحله حرکت اولیه جسم نسبت به محورهای فضایی انجام داد. یعنی بگذاریم جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت به دور محوری در مخروط جسم بچرخد که خود مخروط نیز با سرعت زاویه‌ای $\beta\omega_\varphi$ حرکت فرفره‌ای انجام می‌دهد.

اساتر این است که جای $\vec{\omega}$ را نسبت به \vec{L} تعیین کنیم چرا که \vec{L} در این حالت ثابت است.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{ثابت}$$

پس زاویه بین $\vec{\omega}$ و \vec{L} (یعنی α_s) از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \omega L \cos \alpha_s \Rightarrow \cos \alpha_s = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{\omega L} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}}{\omega L} = \frac{\tau T}{\omega L} \quad (۶۹-۱۳)$$

از طرف دیگر T ثابت است. (ثابت $T = \frac{d\tau}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow T = \text{ثابت}$) پس α_s ثابت است.

بنابراین محور چرخش در فضا مخروطی رسم می‌کند (مخروط فضایی؛ space cone) که نصف زاویه رأس آن α_s است و محورش در راستای بردار اندازه حرکت زاویه‌ای \vec{L} است. خط تماس میان مخروط فضایی و مخروط جسم در هر لحظه محور آنی چرخش است. یعنی به طور لحظه‌ای ساکن است پس مخروط جسم بدون لغزش به دور محور فضایی می‌غلتد. این بیان کامل حرکت در این حالت است.

اکنون α_s را بر حسب ثابتهای ω و α_s بیان می‌کنیم ($I_1 = I_\varphi$):

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_\psi \end{pmatrix} = I_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + I_\varphi \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi + I_\psi \vec{e}_\psi \vec{e}_\psi = I_1 (\vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$+ I_\psi \vec{e}_\psi \vec{e}_\psi = I_1 \vec{I} + (I_\psi - I_1) \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi = I_1 (\vec{I} + \beta \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\beta = \frac{I_\nu - I_\lambda}{I_\lambda}, \cos \alpha_s = \frac{\nu T}{\omega L}, T = \frac{1}{\nu} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}, \vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$$

و $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$. آنگاه خواهیم داشت:

$$\nu T = \omega^2 I_\lambda (1 + \beta \cos^2 \alpha_b) \quad (70-13)$$

$$\vec{L} = \omega I_\lambda [\hat{n} + \beta \cos \alpha_b \vec{e}_\nu]$$

$$\cos \alpha_s = \frac{1 + \beta \cos^2 \alpha_b}{[1 + (\nu\beta + \beta^2) \cos^2 \alpha_b]^{\frac{1}{2}}} \quad (71-13)$$

معادله $\vec{L} = \omega I_\lambda [\hat{n} + \beta \cos \alpha_b \vec{e}_\nu]$ بیان می‌کند که اگر $\beta > 0$ باشد مخروط فضایی داخل مخروط جسم است و اگر $\beta < 0$ باشد مخروط فضایی بیرون آن است.

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \omega I_\lambda [\hat{n} + \beta \cos \alpha_b \vec{e}_\nu] \quad (72-13)$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n} + \beta \omega_\nu \vec{e}_\nu$$

که در آن $\omega \hat{n}$ دوران جسم نسبت به ω است و $\beta \omega_\nu \vec{e}_\nu$ دوران جسم نسبت به \vec{e}_ν را نشان می‌دهد.

۷-۱۳. حل پوانسو برای جسم در چرخش آزادانه

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \quad \text{اگر } \vec{N} = 0 \text{ باشد، آنگاه داریم:}$$

$$\text{و همچنین } \frac{dT}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow T = \text{const} \text{ بنابراین}$$

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \text{const}$$

$$T = \frac{1}{\nu} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \text{const} \quad (73-13)$$

پوانسو ر روابط فوق را براساس بیضوی ماند و دو ثابت فوق از حرکت نمایش هندسی به دست آورد. فرض می‌کنیم بیضوی ماند با روابط زیر به سختی به جسم بسته شده و با آن می‌چرخد.

$$\vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r} = a^2, \vec{r} = \frac{a}{\sqrt{I}} \vec{\omega}$$

\vec{I} را برداری در نظر می‌گیریم که از مبدأ به نقطه‌ای رسم شده که در آن نقطه محور چرخش بیضوی ماند را در هر لحظه قطع می‌کند.

$$\vec{r} = \frac{a}{\sqrt{I}} \vec{\omega} = \frac{a}{\sqrt{I \left(\frac{1}{I} \omega^2 \right)}} \vec{\omega} = \frac{a}{\sqrt{I}} \vec{\omega}$$

$$I r^2 = I(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{I}} \Rightarrow a = r\sqrt{I}$$

$$\vec{r} = \frac{r}{\omega} \vec{\omega}$$

انگاه از مقایسه دو رابطه $\vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r} = a^2$, $T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ داریم:

$$\frac{r}{\omega} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \frac{r}{\omega} \vec{\omega} = \frac{r^2}{\omega^2} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{r^2 T}{\omega^2} = a^2$$

(۷۴-۱۳)

$$\Rightarrow T = \frac{\omega^2 a^2}{2r^2}$$

عمود بر بیضوی در نقطه r موازی بردار زیر است (گرادیان راستای عمود بر سطح را نشان می‌دهد):

$$\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r}) = ?$$

$$\vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} I_1 x_1 \\ I_2 x_2 \\ I_3 x_3 \end{pmatrix}$$

$$= I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2$$

$$\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{I} \cdot \vec{r}) = 2x_1 I_1 \hat{e}_1 + 2x_2 I_2 \hat{e}_2 + 2x_3 I_3 \hat{e}_3 \quad (75-13)$$

اما

$$\vec{r} = \frac{\mathbf{r}}{\omega} \vec{\omega} \Rightarrow X_1 = \frac{\mathbf{r}}{\omega} \omega_1, X_2 = \frac{\mathbf{r}}{\omega} \omega_2, X_3 = \frac{\mathbf{r}}{\omega} \omega_3 \quad (۷۶-۱۳)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{L} \cdot \vec{r}) = (\nu I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + \nu I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + \nu I_3 \omega_3 \hat{e}_3) \frac{\mathbf{r}}{\omega} = \frac{\nu \mathbf{r}}{\omega} \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{\nu \mathbf{r}}{\omega} \vec{L}$$

توجه داریم که (X_1, X_2, X_3) مولفه‌های بردار \vec{r} در طول محورهای اصلی است. بنابراین صفحه مماس بر بیضوی در نقطه \mathbf{r} عمود بر بردار ثابت \vec{L} است. l را فاصله عمودی از مبدأ تا صفحه مماس می‌گیریم:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = rL \cos(\hat{r}, \hat{L}) = Ll; \quad l = r \cos(\hat{r}, \hat{L})$$

$$l = r \cos(\hat{r}, \hat{L}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{L}}{L} = \frac{\mathbf{r}}{\omega} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L} \cdot \vec{\omega}}{L} = \frac{a(\nu T)^{\frac{1}{2}}}{L} = \text{const} \quad (۷۷-۱۳)$$

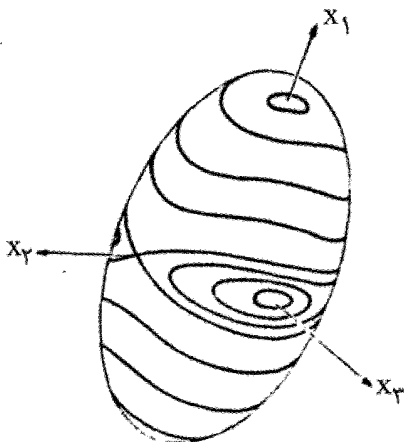
بنابراین صفحه مماس در فضا ثابت است (نسبت به مبدأ 0) و صفحه تغییر ناپذیر نامیده می‌شود. مکان آن از شرایط اولیه به دست می‌آید. علاوه بر این، از آنجا که نقطه تماس بیضوی و صفحه بر محور چرخش قرار دارد بیضوی بدون لغزش بر صفحه می‌غلتد. مقدار سرعت زاویه‌ای در هر لحظه از

$$\text{رابطه } \omega = \frac{(\nu T)^{\frac{1}{2}}}{a} \text{ به دست می‌آید که بیان کامل حرکت است.}$$

در مورد اجسام متقارن پلراها دایره‌ای است به دور محور تقارن و پلراهاها دایره‌هایی در صفحه تغییر ناپذیر است. در این حالت \mathbf{r} و بنابراین طبق رابطه بالا ω (نه $\vec{\omega}$) ثابت است. پلراها و پلراهاها به ترتیب فصل مشترک‌های جسم و مخروط‌های فضایی یا بیضوی ماند و صفحه تغییر ناپذیر است.

در مورد پلراه و پلراهها باید بگوییم که وقتی بیضوی ماند بر صفحه تغییر ناپذیر می‌غلتد، به طوریکه مرکزش در مبدأ ثابت می‌ماند، نقطه تماس بر بیضوی ماند منحنی‌یی رسم می‌کند که پلراه (Pol hode) نامیده می‌شود، و بر صفحه تغییر ناپذیر منحنی‌یی رسم می‌کند که پلراه نامیده

می‌شود.



شکل (۱۳-۲)

۱۳-۷-۱. پارامترهای کیلی - کلاین و کمیت‌های وابسته

پیشتر گفتیم فقط سه پارامتر مستقل لازم است تا موقعیت جسم صلب را مشخص کند. معذالک موقعیت‌هایی وجود دارند که مطلوب است مجموعه‌ای از متغیرها را بکار ببریم که شامل بیش از سه کمیت گفته شده است که دوران را مشخص می‌کنند، هر چند به عنوان مختصات تعمیم یافته مناسب نباشند. از اینرو، کلاین مجموعه‌ای از چهار پارامتر را تعریف می‌کند که به نام خود وی و بعد پارامترهای کیلی - کلاین نامیده می‌شود و بیشتر در مسائل ژيروسکوپی عنوان می‌شود. در محاسبات عددی استفاده از مزایای اویلر دشوار است زیرا با تعداد زیادی تابع مثلثاتی درگیر می‌شود. چهار پارامتر برای کار روی کامپیوتر مناسب است. بحث عمده این پارامترها خارج از مجال این کتاب است. اما ارزش دارد که بحث مختصری در این باره صورت دهیم. فضای حقیقی دو بعدی با محورهای x_1, x_2 برای نمایش ویژگی‌های تبدیلات متعامد بکار می‌رود. اکنون فضای دو بعدی مختلفی در نظر می‌گیریم که این بار مختلط باشد و با u, v نمایش می‌دهیم. یک تبدیل خطی عمومی در این فضا چنین است:

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = \gamma u + \delta v \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

عناصر ماتریس Q مختلط است پس دارای ۸ عنصر است. برای کاهش تبدیل به سه کمیت مستقل، شرایط اضافی باید بر Q تحمیل شود. برای هر یک از بحث‌های زیرین، کافی است توجه شود که

Q باید یکانی باشد.

$$QQ^\dagger = 1 = Q^\dagger Q$$

شرط یکانی همچنین اشاره بر این دارد که مقدار دترمینان Q باید واحد باشد:

$$QQ^\dagger = 1 \Rightarrow |QQ^\dagger| = |Q| |Q^\dagger| = |Q| |\tilde{Q}| = 1 \Rightarrow |Q| = 1 \Rightarrow$$

$$QQ^\dagger = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* & \alpha\gamma^* + \beta\delta^* \\ \alpha^*\gamma + \beta^*\delta & \gamma\gamma^* + \delta\delta^* \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \\ \gamma\gamma^* + \delta\delta^* = 1 \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* = 0 \\ \alpha^*\gamma + \beta^*\delta = 0 \end{cases} \quad (78-13)$$

برای اینکه Q شامل فقط سه کمیت مستقل باشد، یک شرط اضافی دیگر باید تحمیل کرد و آن دترمینان Q است: یعنی

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (79-13)$$

معادله فوق مختلط است، از این رو ممکن است تصور کرد که شامل دو شرط باشد، اما خاصیت یکانی از طریق معادلات فوق مقدار دترمینان را تثبیت کرده است. ماتریس‌های با دترمینان +1 به نام unimodular نامیده می‌شود. تبدیل‌های در فضای مختلط دو بعدی با ماتریس‌های تبدیل تک مدوله یکانی بنابراین شامل فقط سه کمیت مستقل است، که همان تعداد برای تعیین موقعیت جسم صلب لازم است. ماتریس Q را به شکل ساده تر نیز می‌توان نوشت چنانچه از روابط (78-13) استفاده کنیم:

$$\delta = -\frac{\alpha^*\gamma}{\beta^*}$$

$$\alpha \left(\frac{-\alpha^*\gamma}{\beta^*} \right) - \beta\gamma = 1 \Rightarrow -\frac{\gamma}{\beta^*} (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\gamma}{\beta^*} = 1 \Rightarrow \gamma = -\beta^*$$

$$\delta = -\frac{\alpha^* \gamma}{\beta^*} = -\alpha^* \frac{(-\beta^*)}{\beta^*} = \alpha^* \Rightarrow \delta = \alpha^*$$

همچنین:

$$\alpha \gamma^* + \beta \delta^* = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\alpha \gamma^*}{\delta^*}$$

$$\alpha \delta - \left(\frac{-\alpha \gamma^*}{\delta^*} \right) \gamma = 1 \Rightarrow +\frac{\alpha}{\delta^*} (\delta \delta^* + \gamma \gamma^*) = 1 \Rightarrow \alpha = +\delta^*$$

$$\alpha \beta = -\frac{\alpha \gamma^*}{\delta^*} = -\frac{(+\delta^*) \gamma^*}{\delta^*} = -\gamma^* \Rightarrow \beta = -\gamma^* \Rightarrow \gamma = -\beta^*$$

در نتیجه:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1 \quad (۸۰-۱۳)$$

اکنون علاوه بر Q با خصوصیات گفته شده، P را به صورت اپراتوری در فضای دو بعدی مختلط Q به شکل خاص زیر در نظر می‌گیریم:

$$P = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (۸۱-۱۳)$$

از نظر ریاضی (x, y, z) را به صورت سه عدد حقیقی می‌توان گرفت؛ از نظر فیزیکی به عنوان مختصات یک نقطه در فضا فرض می‌کنیم. ماتریس p بوسیله ماتریس Q به شکل زیر تبدیل یابد:

$$P' = QPQ^\dagger$$

از خاصیت یکانی Q، می‌دانیم Q^\dagger برابر است با Q^{-1} و معادله فوق خیلی ساده تبدیل تشابهی p را نشان می‌دهد وقتی فضای uv تحت تبدیل یکانی Q صورت گیرد. یادآور می‌شویم که p ماتریسی هرمیتی است به علاوه spur یا trace آن صفر است. اکنون می‌توان نشان داد که هر دو خاصیت هرمیتی بودن و رد ماتریس تحت تبدیل تشابه ناوردا هستند.

$$P'^{\dagger} = (QPQ^{\dagger})^{\dagger} = QP^{\dagger}Q^{\dagger} = QPQ^{\dagger} = P'$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \text{Trace} P' &= (QPQ^{\dagger})_{ii} = Q_{ij}P_{jk}(Q^{\dagger})_{ki} = (Q^{\dagger})_{ki}P_{jk}Q_{ij} \\ &= (Q^{\dagger})_{ki}Q_{ij}P_{jk} = (Q^{\dagger}Q)_{kj}P_{jk} = \delta_{jk} = P_{kk} = \text{Trace}(P) \end{aligned}$$

در نتیجه P' نیز باید هرمیتی باشد و رد آن نیز صفر باشد و فقط اگر به شکل زیر باشد این نتایج درست است:

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad (۱۳-۸۲)$$

که دو مرتبه (x', y', z') کمیت‌های حقیقی هستند. دترمینان p نیز تحت تبدیل تشابه فوق ناورداست، بنابراین می‌توان نوشت:

$$|P| = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |P'|$$

این بیان بعنوان شرط تعامد نامیده می‌شود؛ لازم است که طول بردار $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ تحت تبدیل تغییر نکند. بنابراین به هر ماتریس یکانی Q در فضای مختلط دو بعدی یک تبدیل متعامد حقیقی سه بعدی معمولی وابسته می‌شود. بنابراین وابستگی بین ماتریس‌های یکانی مختلط 2×2 و ماتریس‌های متعامد حقیقی 3×3 چنان است که هر رابطه میان ماتریس‌های یک مجموعه همچنین بوسیله ماتریس‌های وابسته مجموعه دیگر نیز برقرار است. دو مجموعه ماتریس‌ها را هم شکل (homomorphic) می‌نامند.

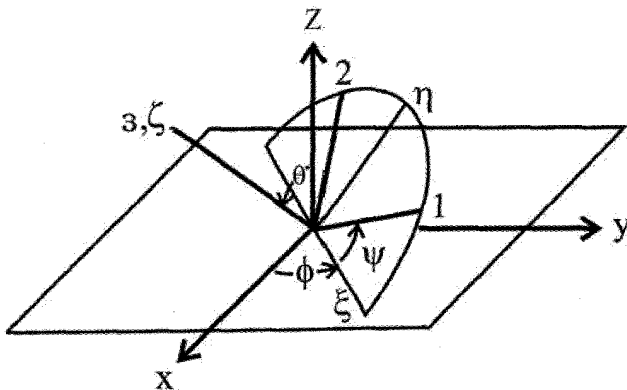
می‌توان نشان داد که ماتریس‌های متعامد (proper) حقیقی، و ماتریس‌های تک مدوله مختلط دارای خاصیت گروه هستند. گروه ماتریس‌های 3×3 حقیقی متعامد را با $O^+(3)$ نشان می‌دهند که علامت (+) بخاطر این است که دترمینان آن +۱ است. گروه ماتریس‌های تک مدوله یکانی مختلط 2×2 بنابراین با $SU(2)$ (یکانی خاص) نامیده می‌شود. از این رو وابستگی به دست آمده در بالا بین گروه $O^+(3)$ و $SU(2)$ صورت گرفته است. بدین ترتیب یک رابطه ۲ به ۱ بین آنها موجود است نه یک به یک.

۱۳-۸. زوایای اویلر

آنچه درباره حرکت جسم صلب گفته شد در واقع بدون استفاده از دستگاه مختصاتی بود که موقعیت جسم را مشخص می‌کند. برای بررسی کلی لازم است که مجموعه مناسبی از دستگاه‌های مختصات معرفی کنیم. در روی جسم مجموعه محورهای ثابت را در مناسبترین شکل محورهای اصلی می‌گیریم که مبدأ آن بر مرکز جرم منطبق باشد یا اینکه در صورت امکان بر نقطه ای ثابت روی جسم قرار گیرد. آنها را با شماره های ۱ و ۲ و ۳ نشان می‌دهیم و در صورتی که محور تقارن داشته باشد آن را با شماره ۳ به دلخواه نامگذاری می‌کنیم. آنچه نیاز است سه محور مناسب است تا موقعیت جسم را نسبت به محورهای ثابت فضایی x, y, z مشخص کند.

رابطه میان دو مجموعه از محورهای مختصات با نه ضریب معلوم می‌شود اما دیدیم در واقع در مورد محورهای اصلی سه ضریب مستقل وجود دارد و مجموعه ای متقارن از مختصات نیز وجود ندارد که مشابه x, y, z باشد و با آن بتوان موقعیت جسم را بیان کرد. از میان دستگاههای مختصات گوناگون بدین منظور، مفیدترین آنها به اویلر نسبت داده شده است.

زوایای اویلر در شکل (۱۳-۳) نمایش داده شده است. این زوایا برای مشخص کردن وضعیت محورهای (۱، ۲، ۳) نسبت به (x, y, z) به کار می‌روند. دو دستگاه را راستگرد می‌گیریم. مجموعه سوم را به صورت (ξ, η, ζ) می‌گیریم که ξ خط یا محور گره هاست و ζ بر محور ۳ منطبق است. خط گره محل تلافی صفحه (۱ و ۲) با صفحه افقی xy است.



شکل (۱۳-۳)

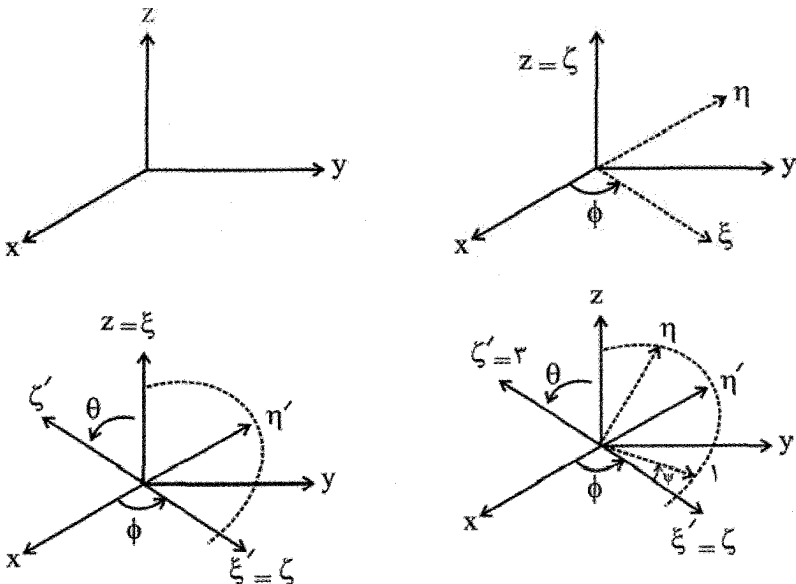
سه پارامتر مستقل به عنوان زوایای اویلر از طریق سه چرخش متوالی حاصل می‌شود. در یک قرارداد که اغلب در فیزیک به کار می‌رود مراحل ایجاد این زوایا به صورت زیر است:

۱- نخست سیستم محورهای xyz را به اندازه زاویه ϕ در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به دور محور z می‌چرخانیم. محورهای جدید را $\xi\eta\zeta$ می‌نامیم.

۲- در مرحله دوم، محورهای میانی $\xi\eta\zeta$ را به دور محور ξ در خلاف چرخش ساعت به اندازه زاویه θ می‌چرخانیم تا مجموعه میانی دیگری به نام $\xi'\eta'\zeta'$ حاصل شود. محور ξ' که همان محور قبلی ξ است، در محل تقاطع صفحات xy و $\xi'\eta'$ قرار دارد و به نام خط گره‌ها (line of nodes) شناخته می‌شود.

۳- سرانجام محورهای $\xi'\eta'\zeta'$ را در خلاف حرکت ساعت به اندازه زاویه ψ حول محور ξ' می‌چرخانیم تا سیستم مطلوب (۳ و ۲ و ۱) حاصل شود.

A را به عنوان ماتریس چرخش کل انتخاب می‌کنیم: $A=BCD$ ، که هر یک از سه ماتریس B ، C و D یک چرخش از مراحل سه گانه را به طریق زیر نشان می‌دهد؛ اولین چرخش حول محور z به اندازه ϕ است که با ماتریس D نشان می‌دهیم:



شکل (۴-۱۳)

$$\vec{\xi} = D\vec{x} \quad \text{دوران حول محور } z$$

دو بردار $\vec{\xi}$ و \vec{x} ماتریسهای ستونی هستند. تبدیل از محورهای $\xi\eta\zeta$ به محورهای $\xi'\eta'\zeta'$ را با ماتریس C نمایش می‌دهیم:

$$\vec{\xi}' = C\vec{\xi} \quad \text{دوران حول محور جدید } x$$

و در آخرین مرحله چرخش به دور محور ζ' در (۳ و ۲ و ۱) را با ماتریس B نشان می‌دهیم:

$$\vec{\gamma} = B\vec{\xi}' \quad \text{دوران حول محور } z \text{ جدید}$$

بدین ترتیب سه ماتریس چرخش را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$B = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ و}$$

$$D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = BCD \quad (۸۳-۱۳)$$

به همین ترتیب، تبدیل وارون از مختصات جسم به محورهای فضایی عبارت است از

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{x}'$$

که بوسیله ماتریس ترانهاد $\tilde{A} = A^{-1}$ حاصل می‌شود. می‌توان تحقیق کرد که این تبدیل proper است یعنی دترمینان (+۱) دارد.

برای بررسی رفتار جسم صلب بر حسب زوایای اوایلر، نخست می‌گوییم چنانچه دو دستگاه نسبت به هم و نسبت به دستگاه مطلق ساکن در حرکت باشند می‌توان سرعت‌های زاویه ای را مانند بردارها با هم جمع کرد: بردار \vec{A} را در دستگاه ستاره دار ساکن می‌گیریم. در این صورت،

$$\frac{d * \vec{A}}{dt} = 0$$

می‌پذیریم که ستاره دار نسبت به پریم‌دار با سرعت $\vec{\omega}_p$ در حرکت است. پس:

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}_p \times \vec{A} = \vec{\omega}_p \times \vec{A} \quad (۱۳-۸۴)$$

و فرض می‌کنیم دستگاه پریم‌دار نسبت به بدون پریم با $\vec{\omega}_1$ حرکت می‌کند پس

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{A} = \vec{\omega}_p \times \vec{A} + \vec{\omega}_1 \times \vec{A} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_p) \times \vec{A}$$

یعنی سرعت زاویه‌ای دستگاه ستاره‌دار نسبت به بدون ستاره $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_p$ است. اکنون شکل (۱۳-۳) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم جسم طوری حرکت کند که (θ, ϕ, ψ) با زمان تغییر کند. اگر فقط θ تغییر کند جسم با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}\hat{e}_\xi$ به دور خط گره می‌چرخد. اگر تنها ϕ متغیر باشد، جسم با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}\hat{k}$ به دور محور Z می‌گردد. و چنانچه فقط ψ تغییر کند. جسم با سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}\hat{e}_p$ به دور محور ۳ می‌چرخد. اکنون دستگاه مختصات پریم داری فرض می‌کنیم که با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}\hat{k}$ به دور محور Z بچرخد و دستگاه (ξ, η, ζ) نیز با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}\hat{e}_\xi$ نسبت به دستگاه پریم دار در گردش باشد. آنگاه طبق قضیه قبل، سرعت زاویه‌ای دستگاه (ξ, η, ζ) برابر $\dot{\theta}\hat{e}_\xi + \dot{\phi}\hat{k}$ است نسبت به محور Z خواهد بود. محورهای (۱ و ۲ و ۳) با سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}\hat{e}_p$ نسبت به (ξ, η, ζ) می‌چرخد. پس سرعت زاویه‌ای جسم چنین است (نسبت به دستگاه (ξ, η, ζ)):

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_\xi + \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\psi}\hat{e}_p \quad (۱۳-۸۵)$$

اما از روی شکل داریم:

$$\hat{e}_\xi = \hat{e}_1 \cos \psi - \hat{e}_p \sin \psi$$

$$\hat{e}_\eta = \hat{e}_1 \sin \psi + \hat{e}_p \cos \psi \quad (۱۳-۸۶)$$

$$\hat{e}_\zeta = \hat{e}_p$$

$$\hat{k} = \hat{e}_\zeta \cos \theta + \hat{e}_\eta \sin \theta = \hat{e}_1 \sin \theta \sin \psi + \hat{e}_p \sin \theta \cos \psi$$

$$+ \hat{e}_p \cos \theta$$

پس $\vec{\omega}$ برحسب مولفه هایش در راستای محورهای اصلی (۱ و ۲ و ۳) چنین می‌شود:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

(۸۷-۱۳)

اینک انرژی جنبشی از طریق معادله $T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ چنین خواهد شد:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

این عبارت تقریباً پیچیده است. توجه داریم که (θ, ϕ, ψ) مختصات متعامد نیست یعنی در عبارت

T جملات شامل $\dot{\theta}\dot{\phi}$ و $\dot{\psi}\dot{\phi}$ را خواهیم داشت. در مورد جسم متقارن ($I_1 = I_2$) عبارت T

ساده تر می‌شود:

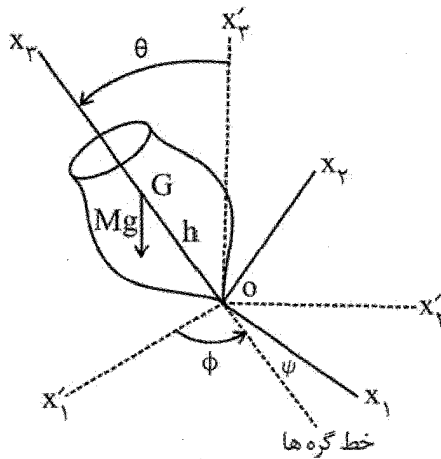
$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (۸۸-۱۳)$$

در حالت‌های ساده با نوشتن معادلات لاگرانژ می‌توان مسئله را برای چرخش جسم صلب در اثر گشتاورهایی که مستقل از پتانسیل $V(\theta, \phi, \psi)$ باشند نوشت و حل کرد. مسئله عمومی حرکت جسم نامتقارن تحت گشتاورهای خارجی مثل مسئله چند جسم، پدیده ای انتگرال ناپذیر است و فقط از روش‌های عددی می‌توان حل عددی یافت. به عنوان مثال می‌توان مسئله فرفره متقارن را بررسی کرد.

۱۳-۹. فرفره متقارن با یک نقطه ثابت

فرفره متقارن مطابق شکل (۵-۱۳) عمل می‌کند. بنا به تقارن $I_1 = I_2$ است. این فرفره به دور

نقطه ای ثابت مانند O می‌چرخد که بر محور تقارن به فاصله l از مرکز جرم قرار دارد.



شکل (۱۳-۵)

G . ($l = OG$) نیز خود بر محور تقارن قرار دارد. تنها نیروی خارجی نیروی اصطکاک در O است و نیروی وزن در G . بنابراین طبق معادله قبل که برای T بدست آوردیم، تابع لاگرانژی چنین است:

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \quad (۱۳-۸۹)$$

مختصات ϕ, ψ نادیده انگاشتنی هستند و بنابراین سه انتگرال حرکت داریم (علاوه بر انرژی که دو تاست).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} (P_\psi) = 0 \quad (۱۳-۹۰)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (P_\phi) = 0 \quad (۱۳-۹۱)$$

اما

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (۱۳-۹۲)$$

$$P_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (۹۳-۱۳)$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta \quad (۹۴-۱۳)$$

از معادلات (۹۲-۱۳) و (۹۳-۱۳) برای حذف $\dot{\psi}$ و $\dot{\phi}$ کمک می‌گیریم و در معادله (۹۴-۱۳) قرار می‌دهیم:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(P_{\phi} - P_{\psi} \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{P_{\psi}^2}{2 I_3} + mgl \cos \theta \quad (۹۵-۱۳)$$

روش انرژی را در عمل برای θ به کار می‌بریم:

$$E' = E - \frac{P_{\psi}^2}{2 I_3} \quad (۹۶-۱۳)$$

$$V' = \frac{(P_{\phi} - P_{\psi} \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad (۹۷-۱۳)$$

$$\dot{\theta} = \left\{ \frac{2}{I_1} (E' - V'(\theta)) \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(E' - V')^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{I_1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} t \quad (۹۸-۱۳)$$

بدین ترتیب $\theta(t)$ به دست می‌آید. با دانستن $\theta(t)$ و استفاده از معادلات (۹۲-۱۳) و (۹۳-۱۳) مقادیر $\dot{\psi}$ ، $\dot{\phi}$ و از آنجا $\psi(t)$ ، $\phi(t)$ به دست می‌آید. بحث کامل این مسئله را می‌توان در کتاب سایمون فصل یازدهم دنبال کرد.

۱۳-۱۰. مسائل برگزیده حل شده:

۱- قطری کردن تانسورها

هر تانسور متقارن را می‌توان با تبدیل متعامد به شکل قطری درآورد. آنگاه عناصر قطر و نیز محورهای متناظر یگانه هستند مگر برای تبهگنی. در حالت قطری، عناصر قطر را مقادیر ویژه و

بردارهای ویژه را محورهای اصلی می‌نامیم. در مورد تانسور متقارن، مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه بر هم عمود هستند.

به عنوان مثال، تانسور $\vec{T} = \vec{A}\vec{A} + \vec{B}\vec{D} + \vec{D}\vec{B}$ را قطری می‌کنیم، به طوری که

$$\vec{A} = \epsilon a \vec{e}_1, \vec{B} = \epsilon a \vec{e}_\gamma + a \vec{e}_\gamma, \vec{D} = a \vec{e}_\gamma - a \vec{e}_\gamma$$

حل -

ماتریس T به صورت داده شده متقارن است، یعنی $T_{ij} = T_{ji}$

$$\vec{A}\vec{A} = \left(\sum_i A_i \vec{e}_i \right) \left(\sum_j A_j \vec{e}_j \right) = \sum_{ij} A_i A_j \vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب برای بقیه اجزای تانسور عمل می‌کنیم. در نتیجه نمایش ماتریسی تانسور T چنین می‌شود.

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 \end{pmatrix}$$

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 16a^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 - \lambda & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 16a^2 \\ \lambda_\gamma = 16a^2 \\ \lambda_\gamma = -4a^2 \end{cases}$$

برای یافتن محورهای اصلی، داریم:

$$\lambda_1 = \lambda_\gamma = 16a^2 \Rightarrow (T - \lambda I) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_\gamma \\ c_\gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_\gamma = -3 \\ c_\gamma = 1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{X}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} (3\hat{e}_\gamma - \hat{e}_\gamma)$$

و بردار دیگر که عمود بر \vec{X}_1 باید باشد به صورت $\vec{X}_2 = \hat{e}_1$ انتخاب می‌شود. در مورد $\vec{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{e}_1 + 3\hat{e}_3)$ به دست می‌آید. چنانچه مشاهده می‌شود این بردار نیز بر دو بردار دیگر عمود است و باید چنین باشد چرا که تانسور متقارن است. پس ماتریسی که بتواند ماتریس اولیه را قطری کند چنین است:

$$S = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \hat{e}'_i = \sum_j a_{ij} \hat{e}_j$$

علامت‌های مثبت طوری انتخاب می‌شوند که بردارهای $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ دستگاهی راستگرد بسازند.
۲- یک هرم با قاعده مثلث شکل را در نظر می‌گیریم. مولفه‌های تانسور ماند را نسبت به

$$M = \frac{1}{4} \rho a^3 \quad \vec{I} = \iiint \rho (\vec{r} \vec{I} - \vec{r} \vec{r}) dv$$

محورهای x,y,z از رابطه

حل-

$$\vec{I} = \iiint \rho (\vec{r} \vec{I} - \vec{r} \vec{r}) dv =$$

$$\int_{z=0}^a dz \int_{y=0}^{a-\frac{1}{2}z} dy \int_{x=0}^{a-y-\frac{1}{2}z} dx \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

به علت تقارن میان y,x فقط لازم است چهار انتگرال محاسبه شود.

$$I_1 = \iiint \rho x^2 dx dy dz = \iiint \rho y^2 dx dy dz = \frac{1}{10} M a^2$$

$$I_2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz = \frac{9}{40} M a^2$$

$$I_{\gamma} = \iiint \rho x y d z d y d z = \frac{1}{20} M a^2$$

$$I_{\varphi} = \iiint \rho x z d x d y d z = \iiint \rho y z d x d y d z = \frac{30}{40} M a^2$$

پس تانسور ماند چنین می‌شود:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 + I_{\gamma} & -I_{\gamma} & -I_{\varphi} \\ -I_{\gamma} & I_1 + I_{\gamma} & -I_{\varphi} \\ -I_{\varphi} & -I_{\varphi} & 2I_1 \end{pmatrix} = \frac{M a^2}{40} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

اکنون برآنیم که محورهای اصلی را بیابیم. یعنی محورهایی که تانسور فوق در راستای آنها قطری می‌شود. به دلیل تقارن X'' محور اصلی است. پس (X'', Y'', Z) یک دسته شاخص خواهد بود و ضریب تبدیل چنین است:

$$\vec{e}'_i = \sum a_{ij} \hat{a}_j$$

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \vdots & & \\ a_{31} & a_{32} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}''_x = \hat{e}_x \cos 45 - \hat{e}_y \sin 45 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right)$$

$$\hat{e}''_y = \hat{e}_x \cos 45 + \hat{e}_y \sin 45 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right)$$

$$\hat{e}''_z = \hat{e}_z \equiv (0 \ 0 \ 1)$$

\vec{I} در راستای محورهای (x'', y'', z'') :

$$I'_{ik} = \vec{e}'_i \cdot \vec{I} \cdot \vec{e}'_k = \sum_{jil} a_{ij} a_{kl} I_{jl}$$

و با انتخاب $\frac{Ma^2}{40}$ به عنوان واحد،

$$I'_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 15$$

$$I'_{12} = \hat{e}'_i \cdot \bar{I} \cdot \hat{e}'_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

به همین ترتیب می‌توان ادامه داد و \bar{I} را در شکل جدید به صورت زیر نوشت:

$$\bar{I} = \frac{Ma^2}{40} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -3\sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$$

یا در حالت کلی $\bar{I}' = A \cdot \bar{I} \cdot A^t$ که همان ماتریس $[a_{ij}]$ است. مشاهده می‌شود که محور

X'' واقعاً محور اصلی است چرا که در ماتریس بالا فقط در سطر و ستون I'_{11} عدد ۱۵ ظاهر شده

است. اکنون این تانسور را قطری می‌کنیم. مقادیر ویژه چنین هستند:

$$\lambda_{X'} = 15, \lambda_{Y'} = 5, \lambda_{Z'} = 14$$

$$I_{X'} = 15 \times \frac{Ma^2}{40} = \frac{3}{8} Ma^2, I_{Y'} = \frac{1}{8} Ma^2, I_{Z'} = \frac{7}{20} Ma^2$$

برای هر مقدار ویژه می‌توان بردار (محور اصلی) خاص را پیدا کرد: $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ بر حسب $(\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}'')$ که همان محوره‌های (x'', y'', z) هستند. نتیجه کلی چنین است:

$$\hat{e}'_1 = \hat{i}' = \hat{i}''$$

$$\hat{e}'_2 = \hat{j}' = \hat{j}'' + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{k}$$

$$\hat{e}'_3 = \hat{k}' = -\sqrt{2} \hat{j}'' + \hat{k}$$

۳- تانسور داده شده زیر را با چرخش ۴۵ درجه به دور محور z به دستگاه محور جدید ببرید. بعد

تبدیل \vec{A}, \vec{B} را نیز بنویسید و نتیجه را مقایسه کنید.

حل -

چون تانسور متقارن است تبدیل توسط ماتریس متعامد صورت می‌گیرد.

$$\vec{T}' = \vec{A} \vec{T} \vec{A}^t$$

$$\vec{c}' = \vec{A} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow c'_i = \sum_j a_{ij} c_j$$

$$\hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_i = \sum_j a_{ij} \hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_j = \sum_j a_{ij} \delta_{kj} = a_{ik}$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{13} = 0$$

$$a_{21} = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{23} = 0$$

$$a_{31} = 0, a_{32} = 0, a_{33} = 1$$

$$\Rightarrow \vec{A} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\vec{B} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})(\hat{i} + 1\hat{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 50 \\ 0 & -15 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}\vec{A} = (\vec{A}\vec{B})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & -15 & 10 \\ 50 & -30 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 50 \\ 25 & -30 & -20 \\ 50 & -20 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}' = \mathbf{A} \cdot \vec{T} \cdot \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -15 & 15\sqrt{2} \\ -15 & -40 & -35\sqrt{2} \\ 15\sqrt{2} & -35\sqrt{2} & 40 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}^t = \mathbf{A}\vec{c}, \vec{A}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \sqrt{2}\hat{e}_1 - 4\sqrt{2}\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$$

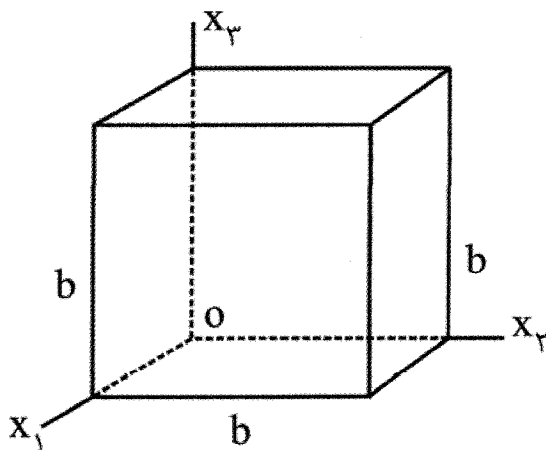
$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 10 \end{pmatrix} \equiv \frac{5}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 + 10 \hat{e}_3$$

$$\vec{T}' = \vec{A}' \vec{B}' + \vec{B}' \vec{A}' = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 15\sqrt{2} \\ -15 & -40 & -35\sqrt{2} \\ 15\sqrt{2} & -35\sqrt{2} & 40 \end{pmatrix}$$

۴- الف- تانسور ماند یک مکعب همگن را با چگالی ρ ، جرم M ، و طول یال b حساب کنید. مکعب را مطابق شکل زیر قرار می‌دهیم.

ب- گشتاورهای ماند اصلی و محورهای اصلی را برای این مکعب بیابید.

پ- تانسور ماند این جسم را در قسمت الف با چرخاندن محورهای مختصات قطری کنید.



شکل (۱۳-۶)

حل -

(الف). مطابق با رابطه (۱۳-۲۹) یا (۱۳-۳۱)،

$$I_{11} = \rho \int_0^b dx_3 \int_0^b dx_2 (x_2^2 + x_3^2) \int_0^b dx_1 = \frac{2}{3} Mb^2$$

$$I_{12} = -\rho \int_0^b x_1 dx_1 \int_0^b x_2 dx_2 \int_0^b dx_3 = -\frac{1}{4} Mb^2$$

به راحتی می‌توان دید که تمام عناصر قطر با یکدیگر برابرند. همین موضوع در مورد عناصر غیرقطر برقرار است. اگر تعریف کنیم $a = Mb^2$ ، خواهیم داشت:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3} a, \quad I_{12} = I_{13} = I_{23} = \frac{1}{4} a$$

آنگاه تانسور ماند چنین می‌شود:

$$\vec{I} = a \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(ب). در قسمت الف دریافتیم که با انتخاب مبدأ در یک گوشه مکعب (شکل الف) تانسور ماند دارای عنصر غیرصفر در خارج قطر است. بدین ترتیب آشکاراست که محورهای انتخاب شده محورهای اصلی نبوده‌اند. اکنون اگر شکل مکعب را حول محور x_3 بچرخانیم، آنگاه $\vec{\omega} = \omega_3 \hat{e}_3$ و بردار اندازه حرکت زاویه‌ای \vec{L} دارای مولفه‌های زیر می‌شود:

$$L_1 = -\frac{1}{4} a \omega_3, \quad L_2 = -\frac{1}{4} a \omega_3, \quad L_3 = \frac{2}{3} a \omega_3$$

$$\vec{L} = Mb^2 \omega_3 \left(-\frac{1}{4} \hat{e}_1 - \frac{1}{4} \hat{e}_2 + \frac{2}{3} \hat{e}_3 \right) \quad \text{از اینرو،}$$

که همان راستای بردار $\vec{\omega}$ نخواهد بود. برای یافتن گشتاور ماند اصلی باید معادله مشخصه (secular equation) زیر را حل کنیم:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}a - \lambda & -\frac{1}{4}a & -\frac{1}{4}a \\ -\frac{1}{4}a & \frac{2}{3}a - \lambda & -\frac{1}{4}a \\ -\frac{1}{4}a & -\frac{1}{4}a & \frac{2}{3}a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

با اندکی محاسبه دترمینان به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{11}{12}a - \lambda \right) \left[\left(\frac{2}{3}a - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a \left(\frac{2}{3}a - \lambda \right) \right] = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{6}a, \lambda_2 = \frac{11}{12}a, \lambda_3 = \frac{11}{12}a \quad \text{و در نتیجه،}$$

و تانسور گشتاور ماند قطری شده چنین می‌شود:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}a \end{pmatrix}$$

چون دو ریشه یکسان هستند ($\lambda_2 = \lambda_3$)، پس محور اصلی وابسته به λ_1 باید یک محور تقارن باشد. برای یافتن جهت محور اصلی وابسته به λ_1 در معادله

$$\begin{cases} (I_{11} - \lambda)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = 0 \\ I_{21}\omega_1 + (I_{22} - \lambda)\omega_2 + I_{23}\omega_3 = 0 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - \lambda)\omega_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{قرار می‌دهیم } \lambda = \lambda_1 = \frac{1}{6}a$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}a \right) \omega_{11} - \frac{1}{4}a\omega_{21} - \frac{1}{4}a\omega_{31} = 0 \\ -\frac{1}{4}a\omega_{11} + \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}a \right) \omega_{21} - \frac{1}{4}a\omega_{31} = 0 \\ -\frac{1}{4}a\omega_{11} - \frac{1}{4}a\omega_{21} + \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}a \right) \omega_{31} = 0 \end{cases}$$

و در نتیجه دو معادله مستقل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2\omega_{11} - \omega_{21} - \omega_{31} = 0 \\ -\omega_{11} + 2\omega_{21} - \omega_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_{11} = \omega_{21} = \omega_{31}$$

بنابراین، وقتی مکعب حول محوری که وابسته به گشتاور ماند است، تصویر $\vec{\omega}$ روی هر سه محور مختصات برابر می‌شود. در نتیجه محور اصلی منطبق بر قطر مکعب می‌شود. چون λ_3, λ_4 برابرند، موقعیت محورهای اصلی وابسته به این گشتاورها اختیاری است؛ فقط لازم است در صفحه عمود بر قطر مکعب قرار داشته باشند.

(پ) - اکنون تانسور ماند قسمت الف را با دوران محورهای مختصات قطری می‌کنیم. نتیجه باید با قسمت (ب) یکسان باشد. با مراجعه به شکل، دوران را چنان انجام می‌دهیم که محور X_1 منطبق بر قطر مکعب شود. چنین دورانی اساساً در دو مرحله صورت می‌گیرد:

نخست دوران به اندازه زاویه 45° درجه حول محور X را انجام می‌دهیم؛ سپس در مرحله دوم حول محور X'_1 به اندازه زاویه $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ جسم را دوران می‌دهیم. ماتریس‌های دوران به ترتیب

چنین هستند:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

و در نتیجه ماتریس دوران کامل چنین می‌شود:

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

شکل ماتریسی تانسور ماند تبدیل یافته چنین است:

$$\bar{I}' = \lambda \bar{I} \lambda'$$

$$\bar{I}' = \frac{a}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}a \end{pmatrix}$$

۵- دو کره با قطر و جرم یکسان در دست است. یکی از کره‌ها صلب (توپر) و دیگری پوسته‌ای توخالی است. آزمایشی عملی و دقیق بیان کنید که مشخص می‌کند کدام جسم توپر و کدام توخالی است؟

حل-

گشتاورهای ماند دو جسم را با هم مقایسه می‌کنیم. برای کره توپر داریم:

$$I_s = \frac{2}{5} MR^2$$

$$I_h = \sigma \int_0^{\sqrt{y}} d\varphi \int_0^{\pi} (R \sin \theta)^2 R^2 \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \pi \sigma R^4$$

و برای کره توخالی،
و یا با توجه به رابطه $\frac{8}{3} \pi \sigma R^3 = M$

$$I_h = \frac{2}{3} MR^2$$

اکنون کره‌ها را از یک سطح شیبدار به پایین می‌غلطانیم. انرژی جنبشی چنین است:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

که در آن y فاصله طی شده روی سطح شیبدار است. برای انرژی پتانسیل خواهیم داشت:

$$U = Mg(\ell - y) \sin \alpha$$

که ℓ طول سطح شیبدار و α زاویه شیب سطح است. اکنون $y = R\theta$ است، بنابراین لاگرانژی را می‌توان اینطور نوشت:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} \dot{y}^2 + Mgy \sin \alpha$$

که در آن جمله ثابت در انرژی پتانسیل حذف شده است. معادله حرکت برای y به شیوه معمول پیدا می‌شود:

$$\ddot{y} = \frac{gMR^2 \sin \alpha}{MR^2 + I}$$

بنابراین، کره توپر با گشتاور ماند کوچکتر در حرکت به پایین سطح شتاب بیشتری دارد.

۶- یک مکعب همگن به طول یال ℓ ، نخست در وضعیتی قرار دارد که یک یال آن با صفحه افقی در تماس و در تعادل ناپایدار است. سپس مکعب را اندکی جابجا می‌کنیم و می‌گذاریم تا سقوط کند. نشان دهید که سرعت زاویه ای مکعب وقتی یک وجه آن با صفحه برخورد می‌کند از رابطه

$$\omega^2 = A \frac{g}{\ell} (\sqrt{2} - 1)$$

که در آن $A = \frac{3}{2}$ است. چنانچه یال مکعب نتواند در

صفحه بلغزد، و $A = \frac{12}{5}$ است اگر لغزش بدون اصطکاک روی دهد.

حل -

الف - غلتش بدون لغزش: از بقای انرژی داریم:

$$mg \frac{\ell}{\sqrt{2}} = mg \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} m V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1)$$

V_{cm} سرعت مرکز جرم است وقتی یک وجه به صفحه افقی برخورد می‌کند، و با ω ارتباط دارد:

$$V_{cm} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \omega$$

I گشتاور ماند مکعب نسبت به محوری عمود بر یک وجه است و از مرکز می‌گذرد:

$$I = \frac{1}{6} m \ell^2$$

بنابراین رابطه (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{mg\ell}{2} (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell\omega}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m\ell^2}{6} \right) \omega^2 = \frac{1}{3} m \ell^2 \omega^2$$

و از آنجا:

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} (\sqrt{2} - 1)$$

(ب) لغزش بدون غلتش:

در این حالت در امتداد افق هیچ نیروی خارجی وجود ندارد؛ بنابراین مکعب طوری می‌لغزد که مرکز جرم مستقیماً در امتداد خط قائم به پایین می‌آید. در حالیکه مکعب سقوط می‌کند، فاصله بین مرکز جرم و صفحه چنین است.

$$y = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

بنابراین سرعت مرکز جرم وقتی یک وجه با صفحه برخورد می‌کند عبارتست از:

$$\dot{y} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ell}{\sqrt{2}} \sin \theta \dot{\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \ell \omega$$

از بقای انرژی داریم:

$$mg \frac{\ell}{\sqrt{2}} = mg \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} m \left(-\frac{1}{2} \ell \omega \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} m \ell^2 \right) \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{12g}{5\ell} (\sqrt{2} - 1)$$

۷- محورهای اصلی و گشتاورهای ماند یک نیم کره یکنواخت توپر به شعاع b و جرم m را نسبت به مرکز جرمش بیابید.

حل-

فرض می‌کنیم قاعده نیم کره در صفحه $x-y$ واقع باشد. چگالی جرمی با رابطه

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{2}{3} \pi b^3} = \frac{3M}{2\pi b^3}$$

داده می‌شود. نخست مرکز جرم نیمکره را حساب می‌کنیم. بنا به تقارن

$$x_{cm} = y_{cm} = 0, z_{cm} = \frac{1}{M} \int_V \rho z dv$$

با استفاده از مختصات کروی ($z = r \cos \theta, dv = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$) داریم:

$$z_{cm} = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_{r=0}^b dr = \frac{3}{8} b$$

اکنون تانسور ماند را نسبت به محوری که از مرکز جرم می‌گذرد محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم چنانچه دستگاههای مختصات xyz و $x'y'z'$ به ترتیب از O, O' عبور کنند که O مرکز جرم سیستم و O' نقطه ای دلخواه درون یا بیرون جسم باشد، آنگاه طبق قضیه ای خواهیم داشت (به فصل دهم

کتاب ماریون مراجعه کنید):

$$I_{ij} = J_{ij} - M [a^i a^j - a_i a_j] \quad (1)$$

\vec{I}, \vec{J} تانسورهای ماند جسم نسبت به محورهایی است که به ترتیب از O, O' می‌گذرند. \vec{a} بردار فاصله بین دو نقطه O, O' است. در این مسئله بنا به تقارن داریم:

$$I_{12} = I_{21} = I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$$

از اینرو محورهای نشان داده شده محورهای اصلی هستند. همچنین بنا به تقارن $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ اکنون I_{11} را از رابطه (۱) محاسبه می‌کنیم

$$I_{11} = J_{11} - M \left(\frac{3}{8} b \right)^2 \quad (2)$$

که در آن J_{11} گشتاور ماند نسبت به محورهای اصلی است.

$$J_{11} = \rho \int_V (y^2 + z^2) dv = \rho \int_V (r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3Mb^2}{10\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (\pi \sin^3 \theta + 2\pi \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = \frac{2}{5} Mb^2$$

از اینرو طبق رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$I_{11} = I_{22} = \frac{2}{5} Mb^2 - \frac{9}{64} Mb^2 = \frac{83}{320} Mb^2$$

$$I_{33} = J_{33} - M(0) = J_{33} \quad \text{همچنین از رابطه (۱)،}$$

این تساوی باید از نظر فیزیکی برقرار باشد. چون

$$I_{33} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dv = \rho \int_V (r^2 \sin^2 \theta) dr d\theta d\varphi = \frac{2}{5} Mb^2$$

بنابراین محورهای اصلی همان پریم دار هستند. گشتاورهای ماند اصلی عبارتند از:

$$I_{11} = I_{22} = \frac{83}{320} Mb^2, I_{33} = \frac{2}{5} Mb^2$$

۸- یک قرص نازک از دو نیمه مساوی همگن تشکیل شده است که در امتداد یک قطر به هم متصل هستند. اگر یک نیمه دارای چگالی ρ و نیمه دیگر چگالی 2ρ داشته باشد، عبارتی برای لاگرانژی قرص به دست آورید هنگامی که قرص بدون لغزش بر یک سطح افقی می‌غلتد (چرخش

در صفحه قرص صورت می‌گیرد).

حل -

مرکز جرم قرص $(0, \bar{x}_y)$ است، که در آن

$$\begin{aligned} \bar{x}_y &= \frac{\rho}{M} \left[r \int x_y dx_x dx_y + \int x_y dx_x dx_y \right] \\ &= \frac{\rho}{M} \left[\int_0^R \int_0^\pi (r \sin \theta) r dr d\theta + r \int_0^R \int_\pi^{2\pi} (r \sin \theta) r dr d\theta \right] = -\frac{2}{3} \frac{\rho R^3}{M} \end{aligned}$$

اما جرم قرص چنین است:

$$M = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 + 2\rho \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{3}{2} \rho \pi R^2$$

$$\bar{x}_y = -\frac{4}{9\pi} R$$

بنابراین

محاسبه گشتاور ماند نسبت به محوری که از مرکز جرم می‌گذرد خسته کننده است، از اینرو، نخست I را نسبت به محور X_3 محاسبه می‌کنیم و سپس قضیه اشتاینر (Steiner's theorem) را بکار می‌بریم: به فصل دهم کتاب ماریون، ویرایش چهارم، ۱۹۹۵ مراجعه کنید.

$$I_y = \rho \left[\int_0^R \int_0^\pi r^2 \cdot r dr d\theta + 2 \int_0^R \int_\pi^{2\pi} r^2 \cdot r dr d\theta \right] = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I_o = I_y - M\bar{x}_y^2 = \frac{1}{2} MR^2 - M \frac{16}{81\pi^2} R^2 = \frac{1}{2} MR^2 \left[1 - \frac{32}{81\pi^2} \right] \quad \text{آنگاه}$$

وقتی قرص بدون لغزش می‌غلتد، سرعت مرکز جرم را می‌توان به صورت زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} x_{cm} = R\theta - |\bar{x}_y| \sin \theta \\ y_{cm} = R - |\bar{x}_y| \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{cm} = R\dot{\theta} - |\bar{x}_y| \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y}_{cm} = |\bar{x}_y| \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2) = V^2 = R^2 \dot{\theta}^2 + \bar{x}_y^2 \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}R|\bar{x}_y| \cos \theta = a^2 \dot{\theta}^2$$

$$a = \sqrt{R^2 + \bar{x}_y^2 - 2R|\bar{x}_y| \cos \theta}$$

که در آن

$$\text{و یا با بکار بردن مقدار } \bar{x}_y = -\frac{4}{9\pi}R$$

$$a = R \sqrt{1 + \frac{16}{81\pi^2} - \frac{8}{9\pi} \cos \theta}$$

انرژی جنبشی چنین است:

$$T = T_{\text{انتقال}} + T_{\text{چرخش}} = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$$

پس از قرار دادن جملات و ساده کردن،

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \left[\frac{3}{2} - \frac{8}{9\pi} \cos \theta \right]$$

و پتانسیل انرژی

$$U = Mg \left[\frac{1}{2}R + \bar{x}_y \cos \theta \right] = \frac{1}{2}MgR \left[1 - \frac{8}{9\pi} \cos \theta \right]$$

و سرانجام تابع لاگرانژی چنین می‌شود:

$$L = \frac{1}{2}MR^2 \left\{ R\dot{\theta}^2 \left[\frac{3}{2} - \frac{8}{9\pi} \cos \theta \right] - g \left[1 - \frac{8}{9\pi} \cos \theta \right] \right\}$$

۹- یک بشقاب همگن نازک با گشتاورهای اصلی ماند به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I_1 = x_1 \text{ در امتداد محور اصلی}$$

$$I_2 > I_1 = x_2 \text{ در امتداد محور اصلی}$$

$$I_3 > I_1 + I_2 = x_3 \text{ در امتداد محور اصلی}$$

فرض می‌کنیم که مبدأ دستگاه‌های X_1, X_2, X_3 بر هم منطبق است و در مرکز جرم O بشقاب قرار دارد. در زمان $t = 0$ بشقاب را در حالت بدون نیرو با سرعت زاویه ای Ω حول محوری می‌چرخانیم که با صفحه بشقاب زاویه α می‌سازد و عمود بر محور X_2 است. اگر

$$\frac{I_1}{I_2} \equiv \cos^2 \alpha \text{ باشد، نشان دهید که در زمان } t \text{ سرعت زاویه ای حول محور } X_2 \text{ چنین است:}$$

$$\omega_{\gamma}(t) = \Omega \cos \alpha \tanh(\Omega t \sin \alpha)$$

حل -

گشتاورهای ماند بشقاب چنین است:

$$\begin{cases} I_1 = I_{\gamma} \cos^2 \alpha \\ I_{\gamma} = I_{\gamma} \\ I_{\gamma} = I_1 + I_{\gamma} = 2I_{\gamma} \cos^2 \alpha \end{cases} \quad (1)$$

همچنین

$$I_1 - I_{\gamma} = -I_{\gamma}(1 - \cos^2 \alpha) = -2I_{\gamma} \sin^2 \alpha \quad (2)$$

از آنجا که بشقاب بدون نیرو در حرکت است، معادلات اوپلر چنین می‌شود:

$$\begin{cases} (I_1 - I_{\gamma})\omega_1\omega_{\gamma} - I_{\gamma}\dot{\omega}_{\gamma} = 0 \\ (I_{\gamma} - I_{\gamma})\omega_{\gamma}\omega_{\gamma} - I_1\dot{\omega}_1 = 0 \\ (I_{\gamma} - I_1)\omega_{\gamma}\omega_1 - I_{\gamma}\dot{\omega}_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن مقادیر (۱) و (۲) در روابط (۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (-2I_{\gamma} \sin^2 \alpha)\omega_1\omega_{\gamma} - (2I_{\gamma} \cos^2 \alpha)\dot{\omega}_{\gamma} = 0 \\ (-I_{\gamma} \cos^2 \alpha)\omega_{\gamma}\omega_{\gamma} - (I_{\gamma} \cos^2 \alpha)\dot{\omega}_{\gamma} = 0 \\ I_{\gamma}\omega_{\gamma}\omega_1 - I_{\gamma}\dot{\omega}_{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

و یا پس از ساده کردن.

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{\gamma} = -\omega_1\omega_{\gamma} \tan^2 \alpha \\ \dot{\omega}_1 = -\omega_{\gamma}\omega_{\gamma} \\ \dot{\omega}_{\gamma} = -\omega_{\gamma}\omega_1 \end{cases} \quad (5)$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\omega_1\omega_{\gamma}\omega_{\gamma} = \omega_1\dot{\omega}_{\gamma} = -\omega_1\dot{\omega}_1 = -\omega_{\gamma}\dot{\omega}_{\gamma} \cot^2 \alpha \quad (6)$$

پس از انتگرال گیری،

$$\omega_{\gamma}^{\vee} - \omega_{\gamma}^{\vee}(\circ) = -\omega_{\lambda}^{\vee} + \omega_{\lambda}^{\vee}(\circ) = -\omega_{\gamma}^{\vee} \cot \alpha + \omega_{\gamma}^{\vee}(\circ) \cot \alpha \quad (7)$$

اکنون شرایط اولیه را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \omega_{\lambda}(\circ) = \Omega \cos \alpha \\ \omega_{\gamma}(\circ) = 0 \\ \omega_{\gamma}(\circ) = \Omega \sin \alpha \end{cases} \quad (8)$$

بنابراین، معادلات (7) چنین می‌شوند:

$$\omega_{\gamma}^{\vee} = -\omega_{\lambda}^{\vee} + \Omega^{\vee} \cos^{\vee} \alpha = -\omega_{\gamma}^{\vee} \cot \alpha + \Omega^{\vee} \cos^{\vee} \alpha \quad (9)$$

از رابطه (5)، می‌توان نوشت

$$\dot{\omega}_{\gamma}^{\vee} = \omega_{\gamma}^{\vee} \omega_{\lambda}^{\vee} \quad (10)$$

و از (9)، داریم $\dot{\omega}_{\lambda}^{\vee} = \omega_{\gamma}^{\vee} \cot \alpha$. بنابراین رابطه (10) چنین می‌شود.

$$\omega_{\gamma} = \omega_{\gamma}^{\vee} \cot \alpha \quad (11)$$

و با بکار بردن $\omega_{\lambda}^{\vee} = \sin^{\vee} \alpha - \omega_{\gamma}^{\vee} \tan^{\vee} \alpha$ از رابطه (9)، می‌توان (11) را به صورت

$$\frac{\dot{\omega}_{\gamma}}{\omega_{\gamma}^{\vee} \tan \alpha - \Omega^{\vee} \sin^{\vee} \alpha} = -\cot \alpha \quad (12)$$

نوشت. چون $\dot{\omega}_{\lambda} = \frac{d\omega_{\gamma}}{dt}$ است، می‌توان این معادله را چنین نوشت:

$$\int \frac{d\omega_{\gamma}}{\omega_{\gamma}^{\vee} \tan^{\vee} \alpha - \Omega^{\vee} \sin^{\vee} \alpha} = -\cot \alpha \int dt \quad (13)$$

و یا

$$-\frac{1}{(\tan \alpha)(\Omega \sin \alpha)} \tanh^{-1} \left[\frac{\omega_{\gamma} \tan \alpha}{\Omega \sin \alpha} \right] = -t \cot \alpha \quad (14)$$

و چنانچه این رابطه را برای ω_{γ} حل کنیم،

$$\omega_{\gamma}(t) = \Omega \cos \alpha \tanh(\Omega t \sin \alpha)$$

۱۰- یک بشقاب همگن نازک را در صفحه X_1, X_2 قرار دهید. نشان دهید که تانسور ماند به

شکل زیر است:

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

حل-

فرض می‌کنیم ضخامت بشقاب ناچیز باشد و جرم واحد سطح آن را $\rho_s dx_1 dx_2$ می‌گیریم. آنگاه عناصر تانسور ماند چنین است:

$$I_{11} = \rho_s \int (r^2 - x_1^2) dx_1 dx_2 = \rho_s \int (x_2^2 + x_1^2) dx_1 dx_2 \\ = \rho_s \int x_2^2 dx_1 dx_2 \equiv A$$

$$I_{22} = \rho_s \int (r^2 - x_2^2) dx_1 dx_2 = \rho_s \int x_1^2 dx_1 dx_2 \equiv B$$

$$I_{33} = \rho_s \int (r^2 - x_3^2) dx_1 dx_2 = \rho_s \int (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \equiv A + B$$

همچنین،

$$I_{12} = \rho_s \int -x_1 x_2 dx_1 dx_2 \equiv -C$$

$$I_{21} = \rho_s \int -x_2 x_1 dx_1 dx_2 \equiv -C$$

$$I_{13} = \rho_s \int -x_1 x_3 dx_1 dx_2 = 0 = I_{31}$$

$$I_{23} = \rho_s \int -x_2 x_3 dx_1 dx_2 = 0 = I_{32}$$

بنابراین، تانسور ماند به شکل زیر در می‌آید:

$$I = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

۱۱- یک قرص نازک به شعاع R و جرم M مطابق شکل داده شده است. جرم $m = \frac{5}{4}M$ به

لبه آن متصل شده است. تانسور مانند قرص را نسبت به مرکز جرم آن (با محور Z به سمت خارج صفحه کاغذ) به دست آورید. آنگاه،

الف- تانسور مانند مجموعه حاصل از افزودن m به قرص را نسبت به نقطه A بیابید.

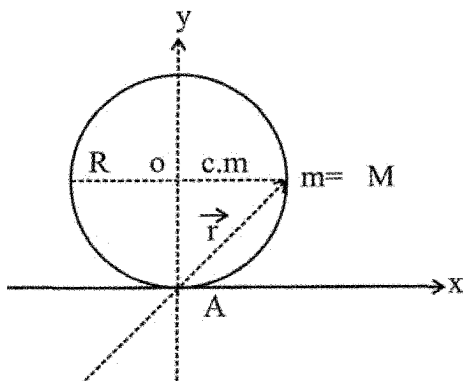
ب- گشتاورهای ماند، اصلی و محورهای دوران را حول نقطه A پیدا کنید.

پ- اگر قرص مقید باشد که با سرعت زاویه ای ω حول محور Y دوران کند، اندازه حرکت زاویه

ای را حول نقطه A برحسب زمان پیدا کنید. همچنین نیروی وارد بر نقطه B را از طرف محور به دست آورید. (از جاذبه صرف نظر کنید).

$$I = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{پاسخ قسمت اول مسئله:}$$

حل:



به دلیل تقارن موجود، I نسبت به مرکز جرم به راحتی و به کمک قضیه محورهای متعامد به

صورت زیر به دست می‌آید

$$I_{cm} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

گشتاور ماند جرم m نسبت به نقطه A چنین است:

$$I'_{ij} = m(r^{\nu} \delta_{ij} - x_i x_j)$$

بردار \vec{r} از A به m وصل می‌شود. بنابراین $\vec{r} \equiv (x, y, z) = (R, R, 0)$

$$I' = \frac{\delta}{\epsilon} M \begin{pmatrix} y^{\nu} + z^{\nu} & -xy & -xz \\ -yx & x^{\nu} + z^{\nu} & -yz \\ -xz & -yz & x^{\nu} + y^{\nu} \end{pmatrix} = \frac{\delta}{\epsilon} M \begin{pmatrix} R^{\nu} & -R^{\nu} & 0 \\ -R^{\nu} & R^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 2R^{\nu} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\delta}{\epsilon} MR^{\nu} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تانسور ماند قرص نسبت به A چنین است:

$$I_A = I_o + M(R^{\nu} \delta_{ij} - R_i R_j)$$

که بردار $\vec{R} \equiv (0, R, 0)$ نقطه A را به مرکز جرم قرص وصل می‌کند؛ یعنی

$$\Rightarrow I_A = \frac{MR^{\nu}}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} R^{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{\nu} \end{pmatrix} = \frac{MR^{\nu}}{\epsilon} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

بنابراین تانسور ماند مجموعه برابر است با:

$$I_{\text{total}} = I_A + I' = \frac{MR^{\nu}}{\epsilon} \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

ب- برای یافتن محورهای اصلی باید تانسور ماند را قطری کنیم و برای این کار باید معادله

مشخصه زیر را حل کرد:

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & -5 & 0 \\ -5 & 6 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (16 - \lambda)(\lambda^{\nu} - 16\lambda + 35) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 16, \lambda_2 = 8 - \sqrt{29}, \lambda_3 = -8 + \sqrt{29}$$

بنابراین

$$I_1 = 4MR^2$$

$$I_2 = \left(2 - \frac{\sqrt{29}}{4} \right) MR^2$$

$$I_3 = \left(2 + \frac{\sqrt{29}}{4} \right) MR^2$$

حال محورهای اصلی را برای I_1, I_2, I_3 به دست می‌آوریم.

$$\lambda_1 = 16 \Rightarrow I_1 = 4MR^2$$

$$\frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6a - 5b = 0 \\ -5a - 10b = 0 \\ 0c = 0 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = (0, 0, 1)$$

برای محورهای I_2, I_3 نیز داریم:

$$\begin{pmatrix} 2 \pm \sqrt{29}, -5, 0 \\ -5, 2 \pm \sqrt{29}, 0 \\ 0, 0, 8 \pm \sqrt{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2 \pm \sqrt{29})\lambda - 5\mu = 0 \\ -5\lambda + (2 \pm \sqrt{29})\mu = 0 \\ (8 \pm \sqrt{29})\nu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 : (0, 0, 1) \\ I_2 : (0.561, 0.828, 0) \\ I_3 : (0.561, 0.828, 0) \end{cases}$$

ج- با استفاده از تانسور ماند در دستگاه متصل به جسم، اندازه حرکت زاویه ای در این دستگاه

چنین نوشته می شود:

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 10, -5, 0 \\ -5, 6, 0 \\ 0, 0, 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4} \omega \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اگر بخواهیم \vec{L} را نسبت به دستگاه مختصات ثابت در فضا به دست آوریم خواهیم دید که دستگاه متصل به جسم (x, y, z) نسبت به دستگاه مختصات در فضا (x', y', z') با سرعت زاویه ای ω می چرخد (حول محور y'). بنابراین تبدیلات مختصات در زمان t به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x' = x \cos \omega t + z \sin \omega t \\ y' = y \\ z' = -x \sin \omega t + z \cos \omega t \end{cases}$$

بنابراین ماتریس تبدیل عبارتست از

$$S = \begin{pmatrix} \cos \omega t & 0 & \sin \omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega t & 0 & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L}' = S \vec{L} = \frac{MR^2}{4} \omega \begin{pmatrix} -5 \cos \omega t \\ 6 \\ 5 \sin \omega t \end{pmatrix}$$

بنابراین گشتاور نیروی وارد بر دستگاه از محور دوران نسبت به A برابر است با

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{MR^2}{4} \omega \begin{pmatrix} 5\omega \sin \omega t \\ 0 \\ 5\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = rR\hat{y} \times \vec{F}$$

$$= \begin{pmatrix} rRF_{z'} \\ 0 \\ -rRF_{x'} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = \frac{5MR\omega^2}{\lambda} \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ 0 \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{F}| = \frac{5MR\omega^2}{\lambda}$$

۱۲- یک ورقه نازک مستطیل شکل به ابعاد a, b و به جرم m به دور محوری که از یکی از قطرهایش می‌گذرد با سرعت زاویه ای ثابت $\vec{\omega}$ دوران می‌کند.

الف- دستگاه مختصات را در مرکز ورقه منطبق بر محورهای اصلی جسم انتخاب کنید. گشتاورهای ماند اصلی را بنویسید و تانسور ماند را مشخص کنید.

ب- جهت و مقدار اندازه حرکت زاویه ای را بیابید و نتیجه گیری کنید.

پ- جهت و بزرگی گشتاور لازم برای ایجاد چنین حرکتی را به دست آورید.

ت- قسمت (پ) را از طریق حل معادلات اوپلر پاسخ دهید.

ث- انرژی جنبشی دورانی جسم را پیدا کنید.

محاسبات خود را بر حسب m, ω, b, a انجام دهید. در حالت خاص $b = 2a$ ، مقادیر \vec{N}, \vec{L} را

بیابید. چنانچه $\delta = 0$ و یا $\delta = \frac{\pi}{2}$ و $a = b$ شود، نتایج را بررسی و نتیجه گیری کنید.

حل-

محورهای اصلی که همان محورهای تقارن هستند با محورهای x, y, z در شکل مشخص شده‌اند.

$$I_{xx} = I_x = \frac{1}{12} mb^2, I_{yy} = I_y = \frac{1}{12} ma^2$$

طبق قضیه محورهای متعامد در صفحه xoy ، خواهیم داشت:

$$I_{zz} = I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

$$I_{\alpha\beta} = 0, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = x, y, z$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

چون دستگاه مختصات را همان محورهاى اصلی انتخاب کرده ایم و گشتاورهای ماند نسبت به این محورها سنجیده می‌شوند، بنابراین جملات مربوط به حاصلضربهای گشتاور ماند یعنی $I_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) صفر می‌شوند. $\vec{\omega}$ در راستای محورهاى اصلی نیست ولی در صفحه xoy قرار دارد. در نتیجه:

$$\vec{\omega} = -\omega \sin \delta \hat{i} + \omega \cos \delta \hat{j}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x, 0, 0 \\ 0, I_y, 0 \\ 0, 0, I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \sin \delta \hat{i} \\ \omega \cos \delta \hat{j} \\ 0 \hat{k} \end{pmatrix} = -\omega \sin \delta \times \frac{1}{12} m b^2 \hat{i} + \omega \cos \delta \times \frac{1}{12} m a^2 \hat{j}$$

δ زاویه بین محور $\vec{\omega}$ و محور y فرض شده است.

$$\operatorname{tg} \delta \frac{\frac{a}{12}}{\frac{b}{12}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow \cos \delta = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

علامت منفی از این جهت انتخاب شده که $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$ است.

$$\sin^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta = 1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow \sin \delta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\vec{L} = -\frac{1}{12} \omega \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} m b^2 \hat{i} - \frac{1}{12} \omega \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} m a^2 \hat{j} =$$

$$-\frac{1}{12} \frac{m \omega a b}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \hat{i} + a \hat{j})$$

$$\vec{N} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_O = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

منظور از $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_0$ ، تغییرات زمانی \vec{L} نسبت به دستگاه اینرسی است. نسبت به دستگاه

محوره‌های اصلی است که همراه با جسم حرکت می‌کند ولی چون \vec{L} طبق فرض (ب) برداری ثابت است، پس خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{N} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_0 = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

$$\vec{N} = \vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\omega \sin \delta & \omega \cos \delta & 0 \\ -\frac{1}{12} m\omega \frac{ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\frac{1}{12} m\omega \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12} m\omega^2 \frac{ab}{a^2 + b^2} (a^2 - b^2) \hat{k} \Rightarrow \vec{N} = N_z \hat{k}$$

اکنون همین نتیجه را از طریق حل معادلات اوپلر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} N_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \\ N_y = I_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) \\ N_z = I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) \end{cases}$$

$\dot{\omega} = 0$ است چون $\vec{\omega}$ برداری ثابت است. همچنین $\omega_y = 0$ است. پس:

$$N_x = 0, N_y = 0$$

$$N_z = -\omega \sin \delta (\omega \cos \delta) \left[\frac{1}{12} m a^2 - \frac{1}{12} m b^2 \right] = \frac{1}{12} m \omega^2 ab \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{12} m \omega^2 ab \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \hat{k}$$

و این همان نتیجه‌ای است که از طریق دیگری به دست آوردیم.
در حالت پایانی، فرض می‌کنیم $b = 2a$ باشد. آنگاه:

$$\vec{L} = \frac{-1}{12} m \frac{\omega ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b\hat{i} + a\hat{j}) = -\frac{m\omega a^2}{6\sqrt{5}} (2\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{N} = \frac{1}{12} m \frac{\omega^2 ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a^2 + b^2)\hat{k} = -\frac{1}{10} m\omega^2 a^2 \hat{k}$$

۱۱-۱۳. مسائل برگزیده برای حل

۱- نشان دهید که نیروی گریز از مرکز در فصل نهم تابعی است خطی از بردار مکان \vec{T} ذره و عبارتی برای تانسور متناظر به صورت مجموع دوتایی بیابید. ماتریس ضرایب آن را بنویسید.

۲- مشتق‌های زمانی $\frac{d'\vec{T}}{dt}$, $\frac{d\vec{T}}{dt}$ را نسبت به دستگاه‌های مختصات ثابت و دوار تعریف کنید،

آن چنان که در فصل ۹ برای مشتق بردارها تعریف شد. ثابت کنید که:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d'\vec{T}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{T} - \vec{T} + \vec{\omega}$$

که در آن حاصلضرب برداری یک بردار و تانسور به شیوه‌ای روشن تعریف می‌شود.

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} \text{ تانسور ۳} \quad \text{را قطری کنید.}$$

۴- محورهای اصلی و مقادیر ویژه وابسته تانسور مسئله ۱ را بیابید. به طور فیزیکی آن را تعبیر کنید.

۵- الف- کره‌ای یکنواخت به جرم M ، شعاع a دارای دو جرم نقطه‌ای $M/4$ ، $M/8$ است که بر سطح آن و به فاصله زاویه‌ای 45° درجه از یکدیگر قرار گرفته‌اند. محورهای اصلی و گشتاورهای ماند اصلی را نسبت به مرکز کره بیابید. (ب)- تانسور ماند را نسبت به محورهایی موازی

که از مرکز جرم می‌گذرد بیابید. آیا این محورها محور اصلی هستند؟

۶- تانسور ماند را برای مکعب در مسئله ۴ بخش ۱۰-۱۳ بیابید، وقتی که دستگاه مختصات را چنان انتخاب کنیم که مبدأ آن در مرکز جرم مکعب قرار داشته باشد.

$$\vec{I} = \frac{1}{6} M b^2 \vec{I} \quad \text{پاسخ:}$$

که \vec{I} تانسوریکه مرتبه دوم است.

۷- گشتاورهای ماند I_1, I_2, I_3 را برای یک بیضوی همگن به جرم M و با محورهای $2a > 2b > 2c$ پیدا کنید.

۸- یک میله نازک به طول l و جرم m را در نظر بگیرید که در یک انتها لولا شده است. گشتاور ماند را حساب کنید. نقطه ای را بیابید که اگر تمام جرم در آن نقطه متمرکز می‌شد، گشتاور ماند به دور محور لولا برابر با مقدار گشتاور ماند واقعی می‌شد. فاصله این نقطه را تا لولا شعاع چرخش (radius of gyration) می‌نامند.

$$I = \frac{1}{3} m l^2, a = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{پاسخ:}$$

۹- سیستم سه جسمه شامل جرم‌های m_i و مختصات (X_1, X_2, X_3) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$m_1 = 3m, (a, 0, a)$$

$$m_2 = 4m, (a, a, -a)$$

$$m_3 = 2m, (-a, a, 0)$$

تانسور ماند، محورهای اصلی، گشتاورهای اصلی ماند این سیستم را بیابید.

۱۰- کره صلب به جرم M و شعاع R به طور آزاد با سرعت زاویه ای ω به دور یک قطر ثابت خود دوران می‌کند. ذره ای به جرم m که نخست در یک قطب کره قرار دارد، با سرعت ثابت V در امتداد یک دایره عظیمه کره حرکت می‌کند. نشان دهید وقتی ذره به قطب دیگر می‌رسد، چرخش

کره به اندازه زاویه $\alpha = \omega T \left(1 - \sqrt{\frac{2M}{2M + 5m}} \right)$ کند می‌شود، که در آن T زمان کل لازم

برای حرکت ذره از یک قطب به قطب دیگر است.

۱۱- تانسور ماند زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A+B) & \frac{-1}{2}(A-B) & 0 \\ \frac{1}{2}(A-B) & \frac{1}{2}(A+B) & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

دستگاه مختصات را به اندازه θ حول محور X_3 بچرخانید، عناصر تانسور تبدیل یافته را تعیین کنید و نشان دهید که انتخاب $\theta = \frac{\pi}{4}$ تانسور ماند را به صورت یک تانسور قطری با عناصر C, B, A تبدیل می‌کند.

۱۲- تانسور ماند یک جسم به صورت زیر است، اگر جسم حول محور \vec{J} ؛ با سرعت زاویه ای ω بچرخد، انرژی جنبشی آن را بیابید.

$$I = k \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k\omega^2$$

پاسخ:

فصل چهاردهم

از تبدیلات کانونیک تا معادلات هامیلتون - ژاکوبی

«... نظریه‌ای را که می‌نماید قوانین اساسی طبیعت باشد، می‌توان تنها بر مبنای تقریب ساخت. راهنمای ما در این کار بیشتر شهود است تا معرفت دقیق واقعیت‌ها. واقعیت پیچیده‌تر از آن است که بشود آن را دقیقاً بیان کرد. فیزیکدان باید به معرفت نسبی خود از واقعیت، و پرداختن به آنها بر همین مبنای قانع باشد.»

« دیراک »

۱-۱۴. تبدیلات کانونیک

در فصل دوازدهم دیدیم که چنانچه مختصه‌ای چرخه‌ای (چشم پوشیدنی) باشد، این مختصه با زمان به طور خطی تغییر می‌کند؛ بدین منظور فرض می‌کنیم:

$$H = H(q_1, \dots, q_s, \dots, t) \quad (1-14)$$

به طوری که مثلاً q_s مختصه چرخه‌ای باشد. در این صورت

$$\dot{p}_s = \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0 \quad (۲-۱۴)$$

$$\Rightarrow p_s = \omega_s = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow m \frac{dq_s}{dt} = \omega_s$$

$$\Rightarrow q_s = \frac{\omega_s}{m} t + \alpha \quad (۳-۱۴)$$

که در آن ω_s فقط تابعی از p_s است و بنابراین در طی زمان ثابت است چرا که p_s ثابت است. تعداد مختصات چرخه‌ای به انتخاب مختصات تعمیم یافته بستگی دارد، و برای هر مسئله یک انتخاب ویژه وجود دارد که برای آن تمام مختصات، از نوع چرخه‌ای باشند. به عبارت دیگر، ما در جستجوی تبدیلاتی هستیم که بیشترین تعداد ممکن مختصه چرخه‌ای را ایجاد کند. در نگرش دیگر، در جستجوی تبدیل کانونیک از مختصات و اندازه حرکت‌های وابسته (q, p) به مجموعه کمیت‌های (Q, P) برمی‌آییم که همواره ثابت بمانند. روش هامیلتون-ژاکوبی از این نوع دوم است:

چنانچه تبدیلاتی از نوع

$$Q_j = Q_j(q, t) \quad (۴-۱۴)$$

را انتخاب کنیم که آنها را تبدیلات نقطه‌ای (Point transformation) نیز می‌گوییم، زیرا فقط شامل مختصات است، آنگاه فضای جدید را فضای همپیکری (Configuration space) می‌نامیم. در حالیکه اگر تبدیل طوری باشد که q, p با هم تبدیل شوند یا

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q, p, t) \\ P_j = P_j(q, p, t) \end{cases} \quad (۵-۱۴)$$

در این صورت فضای حاصل، فضای فاز (phase space) نام می‌گیرد و تبدیلات مربوطه به ترتیب به نام تبدیل فضای همپیکری و تبدیل فضای فاز خوانده می‌شوند. دو نوع تبدیل بالا، تبدیلات تماس (Contact transformation) نامیده می‌شود. اصطلاح به کار رفته ریشه در هندسه تصویری دارد.

در بررسی‌های نظری مکانیک آن دسته تبدیلاتی از اهمیت ویژه برخوردارند که برای آنها (Q,P) جدید مختصات کانونیک باشند (یعنی پس از تبدیل نیز از معادلات هامیلتون تبعیت کنند). این نظر هنگامی تأمین می‌شود که تابعی مانند $K(Q,P,t)$ وجود داشته باشد بطوری که معادلات حرکت در مجموعه جدید به شکل هامیلتونی نوشته شود:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} \quad ; \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \quad (۶-۱۴)$$

K نقش تابع H را در مجموعه مختصات جدید دارد و مشابه آن، کامیلتونی خوانده می‌شود (به جای واژه طولانی هامیلتونی تبدیل یافته). مجموعه (Q,P) نه فقط باید برای بعضی سیستم‌های مکانیکی خاص کانونیک باشد، بلکه برای سیستم‌های با تعداد درجات آزادی معین نیز چنین باید باشد. در فصل‌های پیشین دیدیم اگر Q_i و P_i مختصات کانونیک باشند، در اصل هامیلتون به صورت هامیلتونی تغییر شکل یافته صدق می‌کنند؛ یعنی

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)] dt = 0 \quad (۷-۱۴)$$

همانگونه که در مورد مختصات اولیه نیز چنین داریم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0 \quad (۸-۱۴)$$

این تساوی همزمان دلیل بر این نیست که عبارت‌های زیر انتگرال با هم برابر باشند. بنابراین بهترین نوع ارتباط بین آنها چنین است:

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (۹-۱۴)$$

و یا برحسب لاگرانژی سیستم قبل و بعد از اعمال تبدیل لازم

$$\bar{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t) = \lambda L(q_i, \dot{q}_i, t) - \frac{dF}{dt} \quad (۱۰-۱۴)$$

(به نظر می‌آید همین $\frac{dF}{dt}$ که در معادله لاگرانژ نیز صدق می‌کند در این تبدیل نیز وارد می‌شود). F

تابعی از مختصات فضای فاز یا مشتق‌های مرتبه دوم است و λ پارامتر ثابتی مستقل از زمان و

مختصات کانونیکی است. ضریب λ وابسته به نوع ساده تبدیل مختصات کانونیک است که تبدیل مقیاس (Scale transformation) نامیده می‌شود. شاید ساده ترین نوع تبدیل به ازای $\lambda = 1$ حاصل می‌شود. از اینرو این مورد را معمولاً تبدیل کانونیک می‌نامیم و موارد $\lambda \neq 1$ را تبدیل کانونیک بسط داده شده^۱ می‌نامیم. پس بحث اصلی را بر رابطه زیر قرار می‌دهیم:

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i Q_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (۱۱-۴)$$

۱۴-۲. انواع مختلف تبدیلات کانونیک

در مجموع چهار نوع تبدیل بین مختصات (q_i, p_i) و (Q_i, P_i) وجود دارد. F را تابع مولد تبدیل می‌نامیم.

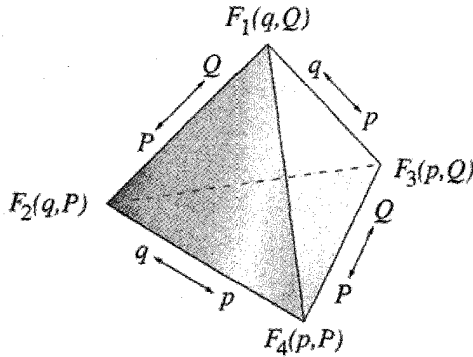
در اینجا بی‌مناسبت نیست که از سیستم‌های انتگرال پذیر، و جداپذیر سخن بگوییم. سیستم‌های پایستار (یعنی سیستم‌های بدون میرائی) دو گونه هستند: انتگرال پذیر، و انتگرال ناپذیر. فقط دسته اخیر است که می‌تواند آشوب را نشان دهد. سیستم‌های جداپذیر (Separable systems) زیر مجموعه‌ای از سیستم‌های انتگرال پذیر هستند. تمام مسائل مکانیکی که از نظر تحلیلی قابل حل هستند مربوط به این دسته سیستم‌هاست. معادله هامیلتون-ژاکوبی قویترین تکنیک برای حل سیستم‌های جداپذیر است.

در حالت کلی F باید به صورت $F = F(q, p, Q, P, t)$ باشد. در این صورت چهار شکل برای F استاندارد داریم که توسط تبدیلات لژاندر به هم مربوط می‌شوند:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(q, Q, t) \\ F_2 &= F_2(q, P, t) \\ F_3 &= F_3(q, Q, t) \\ F_4 &= F_4(p, P, t) \end{aligned} \quad (۱۲-۱۴)$$

به نظر F_3 کاربرد بیشتری دارد. زیرا تبدیل از نوع فضای فاز را نشان می‌دهد. هر چهار شکل توابع مولد که با تبدیلات متوالی لژاندر مشخص می‌شوند. به یک نوع تبدیل کانونیک منجر می‌شوند.

شکل زیر که از مرجع هند و فینچ گرفته شده است (صفحه ۲۱۴)، رابطه بین این توابع را به طور تصویری نمایش می‌دهد:



شکل (۱۴-۱)

اکنون مراحل مختلف چهارگانه را بررسی می‌کنیم:

$$F = F_1(q, Q, t) \quad -۱$$

$$\Rightarrow p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1(q, Q, t)}{dt}$$

$$= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

$$= \left(-K + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) + \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right) \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

در نتیجه،

$$\begin{cases} p_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \quad (۱۴-۱۳)$$

محدودیت‌هایی برای استفاده از نوع $F(q, Q, t)$ وجود دارد. شرط لازم و کافی برای اینکه F قابل

قبول باشد آن است که $\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0$ باشد، زیرا

$$P_i = \frac{\partial F_\lambda}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial}{\partial Q_j} \frac{\partial F_\lambda}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial q_i}$$

چنانچه مشتق آمیخته مرتبه دوم صفر شود، می‌توان نشان داد که تبدیل وارون پذیر (Invertible) نیست.

۲- گاه اتفاق می‌افتد که مناسب نیست تبدیل کانونیک با تابع مولد به صورت F_λ مطرح شود. مثلاً ممکن است بخواهیم P_i را تابع q ، p ، t بگیریم. پس لازم است که شکل تابع طوری باشد که در عبارت هامیلتونی به جای $P_i \dot{Q}_i - K$ شامل \dot{Q} است عبارتی گنجانده شود که در بردارنده \dot{P} باشد. از اینرو F را چنین می‌نویسیم:

$$F = F_\gamma(q, P, t) - Q_i P_i$$

که در آن F همان عبارت $F(q, Q, t)$ است. آنگاه

$$p_i \dot{q}_i - H = -K + \frac{dF_\gamma}{dt}(q, P, t) + p_i \dot{Q}_i - (Q_i \dot{P}_i + P_i \dot{Q}_i)$$

$$= -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{\partial F_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_\gamma}{\partial P_i} \dot{P}_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_i = \frac{\partial F_\gamma}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_\gamma}{\partial P_i} \\ K = H + \frac{\partial F_\gamma}{\partial t} \end{cases} \quad (۱۴-۱۴)$$

۳- در مورد سوم داریم:

$$F = q_i p_i + F_\nu(p, Q, t)$$

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_\nu}{dt} = P_i \dot{Q}_i - K + q_i \dot{p}_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$+ \frac{\partial F_\nu}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = (P_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial Q_i}) \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_\nu}{\partial t} + (q_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial p_i}) \dot{q}_i + \dot{q}_i q_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_i = -\frac{\partial F_\nu}{\partial p_i} \\ P_i = -\frac{\partial F_\nu}{\partial Q_i} \\ K = H + \frac{\partial F_\nu}{\partial t} \end{cases} \quad (15-14)$$

۴- در این مورد داریم:

$$F = q_i p_i - Q_i P_i + F_\nu(p, P, t)$$

$$\Rightarrow p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_\nu}{dt} = p_i \dot{q}_i - K + q_i \dot{q}_i - \dot{Q}_i P_i$$

$$- Q_i \dot{P}_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial P_i} \dot{P}_i$$

$$= (-K + \frac{\partial F_\nu}{\partial t}) + \dot{q}_i p_i + (q_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial p_i}) \dot{p}_i + (-Q_i + \frac{\partial F_\nu}{\partial P_i}) \dot{P}_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_i = -\frac{\partial F_\nu}{\partial p_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_\nu}{\partial P_i} \\ K = H + \frac{\partial F_\nu}{\partial t} \end{cases} \quad (16-14)$$

مثال ۱۴-۱. تابع مولد $F_1 = q_i \cdot P_i$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین طبق روابط تبدیل قسمت دوم (روابط ۱۴-۱۴)، معادلات تبدیل چنین می‌شود:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = P_i \\ Q_i = \frac{\partial F_1}{\partial P_i} = q_i \\ K = H \end{cases} \quad (14-17)$$

یعنی مختصات قدیم و جدید با هم برابرند؛ در نتیجه F_1 خیلی ساده تبدیل همانی (Identity transformation) را نشان می‌دهد. از چهار تبدیل فوق، فقط F_1 و F_3 دارای تبدیل همانی هستند.

مثال ۱۴-۲. اکنون فرض می‌کنیم $F_1 = qQ$ باشد. آنگاه مطابق با معادلات تبدیل دسته اول،

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q$$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q$$

این تابع مولد ویژه نقش مختصات مکان و اندازه حرکت را با هم تعویض می‌کند. بدین ترتیب برای هامیلتونی جدید داریم

$$K(Q, P) = H(-P, Q)$$

به شرطی که $H(P, Q)$ هامیلتونی اصلی باشد. می‌توان مشاهده کرد که

$$\frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q} \quad ; \quad \frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P}$$

یعنی معادلات هامیلتونی همواره برقرار است، چرا که تابع مولد به طور خودکار یک تبدیل کانونیک ایجاد می‌کند.

مثال ۱۴-۳. به عنوان مثال دیگر^۱، تبدیل کانونیک به کار رفته در حل مسئله نوسانگر هارمونیک ساده در یک بعد را مطرح می‌کنیم.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$$

این شکل هامیلتونی به صورت جمع دو مربع، تبدیلی را نشان می‌دهد که در آن H می‌تواند برحسب یک مختصه جدید چرخه‌ای باشد. تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} p = f(P) \cos Q \\ q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \end{cases} \quad (14-18)$$

$$\Rightarrow K = H = \frac{f^2(P)}{2m} (\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m} \quad (14-19)$$

بنابراین Q چرخه‌ای است. مسئله عبارت است از یافتن شکل تابع مجهول $f(P)$ به چنان شیوه‌ای که تبدیل از نوع کانونیک باشد. حاصل تقسیم دو معادله (۱۴-۱۸) رابطه زیر را می‌دهد که مستقل از $f(P)$ است. معادله فوق از نوع F_1 است.

$$P = m\omega q \cot gQ$$

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q}$$

و ساده‌ترین شکل F_1 چنین است:

$$F_1 = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot gQ$$

$$\Rightarrow P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

و مقایسه با رابطه (۱۴-۱۸) نشان می‌دهد که فقط شکل $f(P)$ به صورت زیر به تبدیل کانونیک منجر می‌شود:

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P} \Rightarrow H = \omega P$$

چون H برحسب Q چرخه‌ای است، اندازه حرکت P ثابت است. در نتیجه از رابطه فوق می‌بینیم که P در واقع برابر است با ثابت انرژی تقسیم بر ω :
معادله حرکت برای Q به شکل ساده زیر تبدیل می‌شود

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$

$$\Rightarrow Q = \omega t + \alpha \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

که پاسخ معمول برای نوسانگر است.

۱۴-۳. ویژگی‌های تبدیلات کانونیک

تبدیلات کانونیک دارای ویژگی‌هایی است که به کمک آنها در واقع می‌توان تشخیص داد که یک تبدیل واقعاً کانونیک است یا نه. دو خاصیت عمده این تبدیلات عبارتند از:
ویژگی ۱- می‌توان نشان داد که تبدیلات کانونیک، حجم فضای فاز را تغییر نمی‌دهند. یعنی هر عنصری را بگیریم (در مختصات جدید و قدیم) شکل عنصر عوض می‌شود ولی خود حجم تغییر نمی‌کند:

$$\prod_{i=1}^N dp_i dq_i = \prod_{i=1}^N dP_i dQ_i \quad (۱۴-۲۰)$$

ویژگی ۲- می‌توان نشان داد که

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right)_{Q,p}, \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right)_{q,r} = - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P} \quad (۱۴-۲۱)$$

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,p}, \quad \left(\frac{\partial P_j}{\partial P_i} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,p}$$

این روابط رهیافت سیمپلکتیک (Symplectic) را در تبدیلات کانونیک نشان می‌دهد. در این روش، تبدیلات کانونیک را که به نظر با فرمالیسم مولد بی ارتباط می‌نماید، برحسب فرمول بندی ماتریسی یا سیمپلکتیک معادلات هامیلتون نشان می‌دهیم. این واژه اولین بار توسط هرمان وایل (H.Weyl) در سال ۱۹۳۹ در کتاب معروفش به نام گروه‌های کلاسیک (Classical groups) بکار گرفته شده است. از واژه یونانی (Intertwined) گرفته شده است. معمولاً معادلات هامیلتون به شکل ماتریسی را معادلات با نشانه‌های Symplectic می‌گویند.

در زیر به دیگر خواص بنیادی تبدیلات کانونیک اشاره می‌شود. این ویژگی‌ها خود شیوه و روش تحقیق کانونیکی بودن تبدیلات مختلف را به ما ارائه می‌دهند.

ویژگی (روش) ۳- استفاده از گروه پواسن است. گروه پواسن در فضای فاز چنین تعریف می‌شود:

$$\{A(q, p), B(q, p)\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (۲۲-۱۴)$$

$$A = q, B = p$$

$$\Rightarrow \{A, B\} = \{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 1 \quad \text{مثلاً.}$$

$$\{(q_j, q_k)\} = \{p_j, p_k\} = 0, \quad (q_j, p_k) = \delta_{jk} \quad \text{و همچنین،}$$

در مکانیک کوانتومی داریم $[q, p] = i\hbar$. بنابراین در کوانتومی کردن سیستم کلاسیک داریم:

$$i\hbar \{A, B\}_{p,B} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}]_{q,M} \quad (۲۳-۱۴)$$

شرط بنیادی سوم در تشخیص تبدیلات کانونیک، ناوردایی گروه پواسن است. یعنی:

$$\{A(q, p), B(q, p)\}_{q,p} = \{A(Q, P), B(Q, P)\}_{Q,P} \quad (۲۴-۱۴)$$

مثال ۱۴-۴.

$$\begin{cases} Q = p + q \\ P = p - q \end{cases} \Rightarrow \{Q, P\}_{Q,P} = \frac{\partial Q}{\partial Q} \frac{\partial P}{\partial P} - \frac{\partial Q}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial Q} = 1$$

همچنین

$$\{Q(q, p), P(q, p)\}_{q, p} = \{p + q, p - q\}_{q, p} = \frac{\partial}{\partial q}(p + q) \frac{\partial}{\partial p}(p - q) - \frac{\partial}{\partial p}(p + q) \frac{\partial}{\partial q}(p - q) = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 \neq 1$$

پس این تبدیل از نوع کانونیک نیست.

ویژگی (روش) ۴- روش ماتریسی شکل‌های Symplectic است. نشان داده می‌شود که رابطه کانونیک بین مختصات و اندازه حرکت‌های قدیم و جدید معادل است با این شرط که ژاکوبین

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)}$$

یک ماتریس Symplectic باشد. مفهوم عبارت گفته شده در یک بعد آن است که

تبدیل مختصات در مورد گروه پواسن سه خاصیت عمده وجود دارد:

حجم فاز را ثابت نگه می‌دارد (یعنی، $dqdp = dQdP$).

۱. $\{A, B\} = -\{B, A\}$ خاصیت پاد جابجایی (۱۴-۲۵)

۲. $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$ خاصیت شرکت پذیری (۱۴-۲۶)

۳. $\{A\{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C\{A, B\}\} = 0$ اتحاد ژاکوبی (۱۴-۲۷)

به اپراتورها یا توابعی که با عمل $\{ \}$ خواص بالا را نشان دهند، جبر لی می‌گوییم. بطور کلی برای اینکه جریان در هر نمایشی هامیلتونی باشد یعنی حافظ مساحت باشد، لازم است که مقادیر عددی همه مساحت‌ها مستقل از نمایش باشد. این شرط ایجاب می‌کند که دترمینان ژاکوبی مقدار ثابت باشد. این مقدار ثابت را واحد می‌توان انتخاب کرد، بی آنکه از عمومیت تبدیل کم کند.

همچنین تحول زمانی کمیت‌های را بر حسب گروه پواسن مطرح می‌کنیم:

$$u = u(q, p, t)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (14-28)$$

مشابه این رابطه تحول زمانی را می‌توان در مکانیک کوانتومی از تعویض گروه پواسن با براکت اپراتورها مشاهده کرد.

اکنون در زیر به منظور آشنایی بیشتر با شیوه ماتریسی، به نحوه محاسبه هامیلتونی از عبارت لاگرانژی می‌پردازیم: حرکت سیستم ذرات با جرم m تحت پتانسیل $V(\vec{r})$ در سه بعد، با لاگرانژی L به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_i, y_i, z_i)$$

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_N) \quad (29-14)$$

$$\vdots$$

همانطور که قبلاً گفته شد (به فصل اول گلدشتین، یا فصل نهم سایمون مراجعه شود)، برای عبارت انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$T = T_\gamma + T_\lambda + T_o$$

که اندیس‌های فوق به مرتبه جملات انرژی جنبشی بر حسب سرعت اشاره دارد. بدین منظور فرض می‌کنیم:

$$T_\gamma = \frac{1}{2} \tilde{q} T \dot{q} \quad (30-14)$$

$$T_\lambda = \tilde{B} \dot{q} \quad ; \quad T_o = C$$

$$T_{ij} = \sum m_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} \quad (31-14)$$

$$B_j = \sum_i m_i \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j}$$

$$C = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \tilde{q} T \dot{q} + \tilde{q} B + C - V(q_1, \dots, q_N) \quad (32-14)$$

و یا کلی ترین شکل لاگرانژی

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j + \sum_i B_i \dot{q}_i + C - V(q_i) \quad (۱۴-۳۳)$$

برای اندازه حرکت‌های تعمیم یافته، خواهیم داشت

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_j T_{ij} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i T_{ii} + B_i = \sum T_{ii} \dot{q}_i + B_i$$

با توجه به اینکه در جمع فوق یکبار $i = 1$ و i از اندیس آزاد است و بار دیگر ترتیب آنها عوض می‌شود. پس در مورد کلی برای اندیس l :

$$p_l = \sum_i T_{il} \dot{q}_i + B_l \Rightarrow P = T\dot{q} + B \quad \text{شکل ماتریسی}$$

$$T\dot{q} = P - B \Rightarrow \dot{q} = T^{-1}(P - B) \Rightarrow \tilde{q} = [T^{-1}(P - B)] = (\tilde{P} - \tilde{B})T^{-1}$$

چون ماتریس عبارت انرژی جنبشی متقارن است، پس $\tilde{T} = T$. بنابراین برای هامیلتونی داریم:

$$\begin{aligned} H = \tilde{q}P - L &= \tilde{q}P - \left(\frac{1}{2} \tilde{q}T\dot{q} + \tilde{q}B + C - V(q_i) \right) \\ &= \tilde{q}(T\dot{q} + B) - \frac{1}{2} \tilde{q}T\dot{q} - \tilde{q}B - C + V \\ &= \frac{1}{2} \tilde{q}T\dot{q} + \tilde{q}B - \tilde{q}B - C + V = \frac{1}{2} \tilde{q}T\dot{q} - C + V(q_i) \end{aligned}$$

و در نهایت

$$H = \frac{1}{2} (\tilde{P} - \tilde{B})T^{-1}(P - B) - L_0 \quad (۱۴-۳۴)$$

که در آن $L_0 = C - V$ انتخاب شده است. حال به مثال زیر توجه کنید:

ذره آزاد را در مختصات دکارتی در نظر می‌گیریم. لاگرانژین آن چنین است:

$$\begin{aligned} L = T &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (۱۴-۳۵) \end{aligned}$$

برای یافتن هامیلتونی باید T^{-1} را حساب کنیم.

$$T^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36-14)$$

همچنین چون جمله درجه اول انرژی جنبشی نداریم، $B = 0$ است. آنگاه

(37-14)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \tilde{P} T^{-1} P = \frac{1}{2m} (P_x P_y P_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) \end{aligned}$$

در دستگاه مختصات منحنی الخط داریم:

$$L = \frac{1}{2} m (h_1^2 \dot{q}_1^2 + h_r^2 \dot{q}_r^2 + h_\theta^2 \dot{q}_\theta^2)$$

$$T = L = m \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_\theta^2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_\theta^2} \end{pmatrix} \quad (38-14)$$

مثلاً در مختصات کروی داریم:

$$h_1 = 1, h_r = r, h_\theta = r \sin \theta$$

آنگاه

$$T^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (۳۹-۱۴)$$

معمولاً، معادلات هامیلتون به شکل ماتریسی را معادلات با نشانه‌های پیچیده (symplectic) می‌گویند.

۴-۱۴. فضای فاز و قضیه لیوویل

در همین فصل اشاره کردیم که مختصات تعمیم یافته q_j را می‌توان برای تعریف همپیکری s بعدی به کار برد که هر نقطه نمایشگر حالت معینی از سیستم باشد. بطور مشابه، اندازه حرکت‌های تعمیم یافته p_j را می‌توان برای تعریف فضای اندازه حرکت s بعدی به کاربرد بطوری که هر نقطه نمایشگر وضعیت معینی از حرکت سیستم باشد. یک نقطه داده شده در فضای همپیکری فقط وضعیت ذره را در سیستم تعیین می‌کند؛ چیزی درباره حرکت ذرات نمی‌گوید. عکس این مطلب برای فضای اندازه حرکت صادق است. نمودار فاز، نمایش هندسی مناسبی برای بررسی دینامیک سیستم‌های نوسانی است که قبلاً بیان شده است. اگر این مفهوم را برای سیستم‌های دینامیکی پیچیده تر به کار ببریم، آنگاه یک فضای $2s$ بعدی شامل Q_j و P_i خواهیم داشت که به ما اجازه می‌دهد هم وضعیت و هم اندازه حرکت تمام ذرات در نمایش دهیم. این سیستم را فضای فاز هامیلتونی یا به طور ساده فضای فاز می‌نامیم.

اگر در لحظه‌ای از زمان مکان و اندازه حرکت تمام ذرات یک سیستم معلوم باشد (شرایط اولیه)، حرکت یک بعدی سیستم کاملاً مشخص می‌شود؛ یعنی با شروع از $Q_i(0)$ و $P_i(0)$ در فضای فاز نقطه معرف و توصیف کننده سیستم در مسیری یگانه به نام مسیر فاز حرکت می‌کند. اما اگر تعداد درجات آزادی سیستم زیاد باشد، مجموعه معادلات حرکت آنقدر پیچیده می‌شود که نمی‌توانیم در زمان معقول آن را حل کنیم. به علاوه برای سیستم‌های پیچیده مانند گازها، عملاً غیرممکن

است که شرایط اولیه را برای تمام ملکول‌های تشکیل دهنده گاز بدانیم. از اینرو باید رهیافت دیگری برای مطالعه چنین سیستمی برگزینیم. بنابراین وارد مکانیک آماری می‌شویم. فرمولبندی هامیلتونی برای مطالعه آماری سیستم‌های پیچیده ایده آل است. اکنون همین شیوه را در اثبات قضیه‌ای بنیادی پی می‌گیریم:

مجموعه‌ای بزرگ از ذرات - مانند ملکول‌های گاز - در نظر می‌گیریم. نمی‌توانیم نقطه ویژه‌ای در فضای فاز تعیین کنیم که به دقت نمایشگر حرکت سیستم باشد. اما می‌توانیم فضای فاز را با مجموعه‌ای (کلکسیون) از ذرات پر کنیم، هر یک نمایشگر یک وضعیت ممکن سیستم باشد. چون قادر به توصیف مفصل حرکت ذرات در سیستم واقعی نیستیم، به جای آن مجموعه (ensemble)‌ای از سیستم‌های معادل تشکیل می‌دهیم. هر نقطه معرف در فضای فاز وابسته به سیستم منفردی از آنسامبل است، و حرکت هر نقطه نمایشگر حرکت مستقل آن سیستم است. از اینرو هیچ دو مسیر فازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۱۴-۱. قضیه لیوویل

اکنون فرض می‌کنیم نقاط معرف به قدر کافی زیاد باشند بطوریکه بتوانیم چگالی حالت ρ را تعریف کنیم. اجزاء حجم فضای فاز که چگالی را تعریف می‌کنند باید آنقدر بزرگ باشند که شامل تعداد زیادی نقاط معرف باشند، اما همچنین باید آنقدر کوچک باشند که چگالی بطور پیوسته تغییر کند. شماره N سیستم‌ها که نقاط معرف آنها در درون حجم dv فضای فاز قرار دارند چنین است:

$$N = \rho dv$$

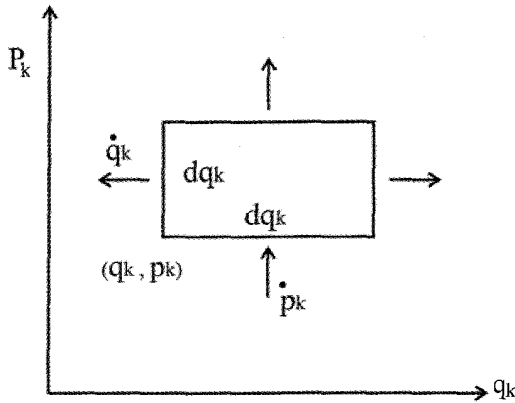
که در آن

$$dv = dp_1 dp_2 \dots dp_s dp_1 dp_2 \dots dp_s$$

مانند گذشته s تعداد درجات آزادی هر سیستم در مجموعه است.

یک عنصر سطح در صفحه (q_k و p_k) در فضای فاز در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴-۲). تعداد نقاطی که در عرض لبه سمت چپ در واحد زمان به داخل سطح وارد می‌شود چنین است:

$$\rho \frac{dq_k}{dt} dp_k = \rho \dot{q}_k dp_k$$



شکل (۱۴-۲)

و تعداد آنهایی که در عرض لبه پایینی در واحد زمان به داخل سطح وارد می‌شود عبارت است از:

$$\rho \frac{dp_k}{dt} dq_k = \rho \dot{p}_k dq_k$$

بطوری که تعداد کل نقاطی که در واحد زمان وارد سطح $dq_k dp_k$ می‌شوند مجموع این دو جمله است:

$$\rho(\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k)$$

بنا به سری تیلور، تعداد نقاطی که در واحد زمان خارج سطح حرکت می‌کنند تقریباً چنین است:

$$\left[\rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) dq_k \right] dp_k + \left[\rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) dp_k \right] dq_k \quad (۱۴-۴۰)$$

از اینرو افزایش کامل در چگالی $dq_k dp_k$ در واحد زمان برابر است با اختلاف بین دو رابطه اخیر:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dq_k dp_k = - \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right] dq_k dp_k \quad (۱۴-۴۱)$$

همین جا یاد آور می‌شویم که می‌توان از عبارت بالا نتیجه زیر را گرفت.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) = 0 \quad (۱۴-۴۲)$$

این معادله را معادله پیوستگی می‌نامیم. این معادله در شاخه‌های مختلف فیزیک کاربرد دارد.

پس از تقسیم دو طرف رابطه (۱۴-۴۱) بر $dq_k dp_k$ و جمع کردن این عبارت روی تمام مقادیر ممکن k در می‌یابیم که

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) = 0 \quad (۱۴-۴۳)$$

از معادلات هامیلتون داریم

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0$$

از اینرو معادله (۱۴-۴۳) چنین می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = 0 \quad (۱۴-۴۴)$$

اما این رابطه درست برابر است با مشتق زمانی کل ρ ، در نتیجه

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (۱۴-۴۵)$$

این نتیجه مهم به نام قضیه لیوویل معروف است که در سال ۱۸۳۸ توسط ژوزف لیوویل (۱۸۸۲-۱۸۰۹) چاپ شده است. این قضیه می‌گوید که: «چگالی نقاط معرف در فضای فاز وابسته به حرکت یک سیستم ذرات در طی حرکت ثابت می‌ماند». باید تأکید کرد که ناوردایی چگالی ρ را فقط به این علت که در فضای فاز فرمولبندی شده است می‌توانیم بنا کنیم؛ قضیه‌ای معادل برای فضای همپیکری وجود ندارد. از اینرو باید دینامیک هامیلتونی را به جای دینامیک لاگرانژی به کار ببریم تا بتوانیم آنسامبل‌ها را در مکانیک آماری مورد بحث قرار دهیم.

قضیه لیوویل نه فقط برای انباشتگی ذرات میکروسکوپی به کار می‌رود مانند مکانیک آماری سیستم‌های گازی و ویژگی‌های مربوط به شتاب دهنده‌های ذرات باردار، بلکه در سیستم‌های ماکروسکوپی نیز به کار می‌رود. مثلاً در دینامیک ستاره‌ها، مسئله وارون می‌شود و با مطالعه تابع توزیع ρ ستاره‌ها در کهکشان، می‌توان به وجود پتانسیل U میدان گرانشی کهکشانی پی برد.

۱۴-۵. معادله هامیلتون - ژاکوبی

تاکنون، حل مسئله با N درجه آزادی شامل حل معادلات حرکت هامیلتون بوده است؛ مجموعه‌ای از $2N$ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول (ODE) با $2N$ متغیر وابسته و یک متغیر مستقل زمان. اکنون نشان خواهیم داد که همان مسئله مکانیکی را می‌توان با یافتن یک پاسخ $S(q_1, \dots, q_N, t)$ برای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای (جزئی) مرتبه اول (PDE) شامل فقط $N+1$ مشتق جزئی مرتبه اول نسبت به q_s ها و زمان یافت. تابع S تابع مولد خاصی است که یک تبدیل کانونیک قابل توجه ایجاد می‌کند که آن را توضیح خواهیم داد. معادله حاصل را معادله هامیلتون - ژاکوبی می‌نامیم.

جدول زیر معادلات هامیلتون را با معادله هامیلتون - ژاکوبی مقایسه می‌کند:

معادله هامیلتون - ژاکوبی	معادلات هامیلتون	
$(\{q_k\}, t) : N + 1$	۱: (زمان)	تعداد متغیرهای مستقل
۱: (کنش S)	$2N : (q_k, p_k)$	تعداد متغیرهای وابسته

فرض کنید یک تبدیل کانونیک وجود دارد که برای آن هامیلتون تبدیل یافته صفر می‌شود. بنابراین دستورالعمل عمومی هامیلتون با اعمال تابع مولد عمومی $F(q, Q, t)$ (به روابط ۱۴-۱۳ مراجعه شود):

$$K(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N; t) = H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N; t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (14-46)$$

تمام P ها و Q ها ثابت می‌مانند چرا که معادله هامیلتون برای K چنین نتیجه‌ای را می‌دهد:

$$\dot{P}_k = \dot{Q}_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, N$$

از آنجا که متغیرهای جدید ثابت هستند، اطلاعات درباره تکامل زمانی حرکت سیستم در تبدیل کانونیک گنجانده می‌شود. به علاوه، فرض می‌کنیم یک تابع مولد به صورت $S \equiv F_\psi(q_1, \dots, q_N, P_1, \dots, P_N; t)$ وجود دارد که یک تبدیل کانونیک با ویژگی مطلوب

$$K = 0 \quad \text{ایجاد می‌کند. آنگاه} \quad P_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad , \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \quad , \quad \text{همانگونه که از معادلات}$$

(۱۴-۱۴) نتیجه می‌شود. در این صورت معادله (۱۴-۴۶) برای S به صورت زیر در می‌آید:

$$H(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۴۷-۱۴)$$

این معادله را معادله هامیلتون - ژاکوبی؛ شکل اول می‌گوییم. پاسخ S در معادله اخیر به نام تابع اصلی هامیلتون (Hamilton's Principal Function) خوانده می‌شود. معادله فوق یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول با $N+1$ متغیر مستقل است و از اینرو دارای $N+1$ ثابت اختیاری است. اگر S پاسخ معادله باشد، (مقدار ثابت $+ S$) نیز پاسخ معادله خواهد بود. آنگاه N ثابت دیگر به صورت $k = 1, 2, \dots, N; P_k$ تعریف می‌شود. این ثابت‌ها از شرایط اولیه تعیین می‌شوند، درک این نکته مهم است که معادله هامیلتون - ژاکوبی بیشتر یک چارچوب نظری است تا الگوریتمی خاص برای حل مسائل. در واقع چنانچه بخواهیم یک مسئله داده شده را حل کنیم هنر در این است که چگونه بتوانیم اندازه حرکت‌های جدید را تعریف کنیم.

یادآور می‌شویم که P_k ها در $S(q_1, \dots, q_N, P_1, \dots, P_N, t)$ ثابت هستند. از اینرو از گذشته - لاندائو و یا هند پیروی می‌کنیم و قرارداد عمومی آنها را به کار می‌بندیم؛ یعنی P_k ها را با

$$\alpha_k \text{ نمایش می‌دهیم. همچنین از } Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \text{ تعداد } N \text{ ثابت دیگر به دست می‌آید که با } \beta_k$$

نشان می‌دهیم.

$$Q_k \equiv \beta_k = \frac{\partial S(q_1, \dots, q_N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, t)}{\partial \alpha_k} = \text{ثابت} \quad (۴۸-۱۴)$$

اگر این معادله را برای q_k حل کنیم، $(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N, t)$ q_k به دست می‌آید. مقادیر واقعی α_k و β_k از شرایط اولیه تعیین می‌شوند. حل معادله هامیلتون - ژاکوبی معادل حل مسئله اصلی مکانیکی است، زیرا اگر بتوانیم معادله را برای S حل کنیم، آنگاه بطور اصولی تبدیلی کانونیک خواهیم داشت که پاسخ کامل را برحسب شرایط اولیه به دست می‌دهد. برای مشاهده فرض می‌کنیم که $q_k(0)$ و $p(0)$ را در لحظه $t = 0$ می‌شناسیم. با حل $2N$ معادله ضمنی

$$p_k(0) = \frac{\partial S}{\partial q_k} \Big|_{t=0} ; \quad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \Big|_{t=0} \quad (۴۹-۱۴)$$

ثابت‌های حرکت α_k و β_k پیدا می‌شوند. در عمل حل معادلات (۱۴-۴۷) | (۱۴-۴۹) برای هر مسئله داده شده‌ای ممکن نیست.

اکنون مشتق کامل زمانی S را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (۱۴-۵۰)$$

از معادلات (۱۴-۴۷) و (۱۴-۵۰) نتیجه می‌شود که

$$\frac{dS}{dt} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L \quad (۱۴-۵۱)$$

که در آن L لاگرانژی سیستم است. تابع مولد S انتگرال زمانی لاگرانژی است، که آن را به عنوان کنش (action) سیستم تعریف کرده ایم:

$$S = \int L dt \quad (۱۴-۵۲)$$

این یک نتیجه‌گیری فوق‌العاده است. اما توجه داریم که تمامی مسئله نخست باید برای $q_1(t), \dots$ بر حسب S حل شود تا $L(q_1(t), \dots, \dot{q}_1(t), \dots, t)$ معلوم شود. اما، نتیجه اخیر نشان می‌دهد که «کمترین کنش» (اصل هامیلتون) اصلی است که می‌تواند منجر به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شود.

مثال ۱۴-۵. ذره با جرم m در میدان گرانشی:

هامیلتونی سه بعدی برای ذره‌ای به جرم m در میدان گرانشی در راستای z چنین است:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz \quad (۱۴-۵۳)$$

که در آن اندازه حرکت مزدوج برای ذره در راستای k است. از معادله (۱۴-۴۷)، معادله هامیلتون-ژاکوبی برای تابع مولد S چنین است:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (۱۴-۵۴)$$

می‌توانیم این معادله را جدا کنیم، یعنی S را به صورت مجموع جملات جداگانه بنویسیم که هر کدام به یک مختصه یا به زمان بستگی داشته باشد:

$$S = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z) - Et \quad (۵۵-۱۴)$$

که در آن E ثابت است. این نحوه نوشتن S را جداسازی متغیرها (Separation of variables) می‌نامیم. اگر هامیلتونی بطور صریح شامل زمان باشد نمی‌توانیم وابستگی زمانی S را بدین طریق جدا کنیم. با قرار دادن (۵۵-۴۱) در رابطه (۵۴-۱۴) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW_2(y)}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW_3(z)}{dz} \right)^2 \right] + mgz = E \quad (۵۶-۱۴)$$

از آنجا که ثابت E جمع جملاتی است که هر کدام به یک متغیر مستقل وابسته است تک تک جملات نیز باید خودشان ثابت باشند.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = E$$

توجه داریم که معنای اندازه حرکت‌های جدید $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را به عنوان ثابت‌های جداسازی تعریف کرده‌ایم. از این استدلال، مجموعه‌ای از سه معادله دیفرانسیل معمولی به دست می‌آوریم که باید حل شوند:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 = \alpha_1 \quad ; \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_2(y)}{dy} \right)^2 = \alpha_2$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_3(z)}{dz} \right)^2 + mgz = \alpha_3 \quad (۵۷-۱۳)$$

پاسخ‌ها چنین هستند:

$$W_1(x) = \pm x \sqrt{2m\alpha_1} \quad ; \quad W_2(y) = \pm y \sqrt{2m\alpha_2}$$

$$W_3(z) = \pm \sqrt{\frac{\hbar}{9mg^2}} (\alpha_3 - mgz)^{\frac{3}{2}} \quad (۵۸-۱۴)$$

بدین ترتیب پاسخ را برحسب ثابت لازم به دست آورده‌ایم.

۱۴-۶. بررسی سیستم هنگامی که هامیلتونی تابع صریح زمان نیست

هنگامی که هامیلتونی تابع صریح زمان نباشد، به عنوان ثابت حرکت مطرح می‌شود، در این حالت

معمولاً به عنوان انرژی کل E سیستم ظاهر می‌شود. اکنون S را با وابستگی زمانی خاص زیر در نظر می‌گیریم:

$$(۱۴-۵۹)$$

$$S(q_1, \dots, q_r, \alpha_1, \dots, \alpha_N, t) = W(q_1, \dots, q_r, \alpha_1, \dots, \alpha_N, t) - Et$$

از آنجا که بنا بر فرض این تابع جدید W صریحاً تابع زمان نیست، معادله هامیلتون-ژاکوبی (۱۴-۴۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_N}) = E \quad (۱۴-۶۰)$$

(شکل دوم معادله هامیلتون-ژاکوبی)

هر پاسخ معادله فوق، تابع جدید W را تعریف می‌کند. چون N متغیر وابسته وجود دارد، بنابراین N ثابت مستقل در پاسخ W وجود خواهد داشت. عبارت W را تابع مشخصه هامیلتون (Hamilton's characteristic Function) می‌نامیم. تعبیر بیشتر فیزیکی W با توجه به عبارت زیر آشکار می‌شود:

$$W = S + Et = \int (L + H) dt = \int \left(\sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k \right) dt = \sum_{k=1}^N \int p_k dq_k \quad (۱۴-۶۱)$$

تابع W را می‌توان به عنوان تابع مولد از نوع F_1 تصور کرد. تبدیل کانونیک ایجاد شده توسط W از آنچه توسط S ایجاد می‌شود متفاوت است زیرا $\bar{H} = E \neq 0$ است. مجموعه معادلاتی به دست می‌آید که در آنها زمان فقط یک بار ظاهر شده است. این روش برای یافتن ثابت‌های حرکت و برای تعیین معادلات مدار که برای آنها زمان حذف شده ارزشمند است. در مورد S ، تمام اندازه حرکت‌ها و مختصات جدید ثابت بودند. با W ، وضعیت قدری فرق می‌کند. مختصات جدید

Q_k همگی در هامیلتونی جدید (۱۴-۶۱) از نوع چرخه‌ای هستند، که بدین ترتیب دلالت بر اندازه حرکت جدید ثابت P_k خواهد بود زیرا:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 \quad (۱۴-۶۲)$$

امکان وسیعی از انتخاب‌های ممکن موجود است. ساده‌ترین انتخاب این است که تعریف کنیم $P_1 = E$. با این انتخاب،

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} = \frac{\partial E}{\partial P_k} = 1$$

و بنابراین

$$Q_k = t + \text{ثابت} = \frac{\partial W}{\partial E} \quad (۱۴-۶۳)$$

Q_k دیگر ثابت نیست، آنطور که در مورد S چنین بود. این مختصه از نوع کمیت زمان به دست می‌آید. زمان مختصه‌ای است که بطور کانونیکی، مزدوج انرژی است. ثابت دلخواه را به عنوان صفر زمان در نظر می‌گیریم. این یک ثابت انتگرال‌گیری است و حدود پایین انتگرال‌های معرف W را مشخص می‌کند. تعداد $N-1$ اندازه حرکت P_2, \dots, P_N مستقل از P_k هستند. از اینرو مشتق‌گیری هامیلتونی نسبت به بقیه اندازه حرکت‌ها صفر می‌شود و از آنجا $N-1$ مختصه جدید Q_2, \dots, Q_N نیز ثابت خواهند بود. تعریف پیشین ثابت‌های α, β را تغییر دهید تا اندیس i وارد شود که از یک تا $N-1$ تغییر می‌کند:

$$\beta_i = Q_{i+1} \quad ; \quad \alpha_i \equiv P_{i+1} \quad (۱۴-۶۴)$$

حل معادله هامیلتون - ژاکوبی (۱۴-۶۰) را به صورت تابع زیر می‌توان نوشت:

$$W(q_1, \dots, q_N, E, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \quad (۱۴-۶۵)$$

$N-1$ معادله وجود دارد که شامل زمان نیستند:

$$\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (۱۴-۶۶)$$

N معادل $P_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}$ را می‌توان در زمان $t = 0$ برآورد کرد تا (E, α_i) و $(0, \beta_i)$ را برای

$i = 1, \dots, N-1$ بر حسب $2N$ مقدار اولیه $q_k(0), p_k(0)$ نتیجه دهد. آنگاه $q_i(t)$ را می‌توان در زمان‌های دیگر $t \neq 0$ با وارد کردن (۱۴-۶۵) و (۱۴-۶۶) یافت. این تقریباً همان روشی

است که با تابع مولد S می‌گیریم، جز آنکه یکی از ثابتها، انرژی است، و زمان به عنوان یکی از مختصات جدید در معادلات تفکیک شده است.

چون $N-1$ معادله برای $\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$ شامل زمان نیست، می‌توان هر یک از N مقدار q_k را به عنوان متغیر مستقل انتخاب کرد و برای $N-1$ تعداد q_k دیگر به عنوان متغیرهای وابسته حل کرد. چنین روشی در مورد مسئله کپلر نیز صورت گرفته است.^۱

در عمل فقط موقعی می‌توان به طور صریح برای S یا W پاسخی یافت که متغیرها را بتوان جدا کرد؛ روش عمومی این کار در زیر توضیح داده می‌شود. در هر حال، این روش ارزش مجرد نظری S و W را کاهش نمی‌دهد. ارزش والای آنها در این است که شیوه‌ای سازنده برای یافتن تمام ثابت‌های حرکت است، به شرط آنکه پاسخی برای معادله هامیلتون-ژاکوبی وجود داشته باشد. البته، چنانچه خواهیم دید، دلیلی نیست که همیشه این فرض درست باشد. بحث پیشین درباره استفاده از W به جای S تا حدودی مجرد است. می‌توانیم با استفاده از همان مثال قبل مسئله را دقیقتر بیان کرد.

مثال ۱۴-۶. یافتن مسیر سهمی در سقوط آزاد به کمک W

مسئله قبلی جسم افتان را در نظر می‌گیریم. برای انجام شیوه مذکور، باید معنای α ها و β ها را تغییر دهیم. فلسفه کار تغییر کرده است، چرا که K دیگر برابر صفر نیست. معادلات واقعی تقریباً با آنچه که قبلاً با این مثال حل کردیم یکی است. نخستین اندازه حرکت جدید P_1 را با هامیلتونی مساوی می‌گیریم، که بدین معناست که $Q_1 = t$ است به اضافه یک ثابت انتگرال‌گیری دلخواه. زمان از بقیه مسئله در آغاز جدا می‌شود. اکنون تعداد $N-1=2$ متغیر Q, P باقی می‌ماند که باید از حل برای تابع مولد W آنها را یافت. پس از جدا کردن متغیرها، تابع مشخصه W شکل زیر را می‌گیرد.

$$W(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(x, \alpha_1) + W_2(y, \alpha_2) + W_3(z, E - \alpha_1 - \alpha_2) \quad (۱۴-۶۷)$$

شکل دوم معادله هامیلتون - ژاکوبی چنین است:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_3}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = E \quad (68-14)$$

همان پاسخی را که برای S یافته بودیم برای W نیز بکار می‌آید. اندازه حرکت‌های جدید

$P_x = \alpha_1, P_y = \alpha_2$ را تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 \quad (69-14)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_2}{\partial y} \right)^2$$

$$E = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_3}{\partial z} \right)^2 + mgz$$

پاسخ این دسته از معادلات چنین است:

$$W_1(x, \alpha_1) = \pm x \sqrt{2m\alpha_1} \quad (70-14)$$

$$W_2(y, \alpha_2) = \pm y \sqrt{2m\alpha_2}$$

$$W_3(z, \alpha_3) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2mg}} (E - \alpha_1 - \alpha_2 - mgz)^{\frac{3}{2}}$$

۷-۱۴. تابع روت (Routh)

در آنچه بیان شد از یک تبدیل به معادلات هامیلتون رفتیم. حال چنانچه یک مختصه مانند q_s

چرخه‌ای یا چشم پوشیدن باشد، آنگاه

$$L = L(q_1, \dots, q_{s-1}, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{s-1}, \dot{q}_{s+1}, \dots, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) = 0 \Rightarrow P_s = \text{ثابت}$$

اگر مختصه‌ای در عبارت لاگرانژی از نوع چرخه‌ای باشد، در شکل هامیلتونی نیز چرخه‌ای است. در مورد مختصه چرخه‌ای، هر مختصه از این نوع با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند و ضریب

$$\text{تغییر } \omega_s = \frac{p_s}{m} \text{ است:}$$

$$q_s = \omega_s t + q_{os}$$

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \dots + \frac{p_s^2}{2m} + \dots \quad \text{که } q_{os} \text{ مقدار } q_s \text{ در زمان ثابت } t = 0 \text{ است. مثلاً}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{p_s}{m} = \omega_s$$

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} = \omega_s \Rightarrow q_s = \omega_s t + \dot{q}_s$$

تابع روت یا روتین ترکیبی از لاگرانژی و هامیلتونی است. این تابع، R ، برای مختصات چرخه‌ای مثل هامیلتونی H رفتار می‌کند، و برای مختصات غیرچرخه‌ای مثل لاگرانژی عمل می‌کند. یک لاگرانژی به صورت زیر داریم:

$$L = L(q_1, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, \dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_N; t) \quad (۷۱-۱۴)$$

در نتیجه $\dot{q}_j = 0$ زیرا $\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$ می‌شود پس $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ وجود ندارد (به ازای $j = s+1, \dots, N$).

از L به تابعی به صورت زیر می‌رویم به نام R که روتین (Routhian) خوانده می‌شود:

$$R = \sum_{i=s+1}^N (\dot{q}_i p_i) - L \equiv R(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, p_{s+1}, \dots, p_N; t) \quad (۷۲-۱۴)$$

$$\Rightarrow dR = \sum_{i=s+1}^N \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} & ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & i = 1, 2, \dots, s \\ \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i & ; \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i & i = s+1, \dots, n \end{cases} \quad (۷۳-۱۴)$$

پس همانطور که گفته شد R برای مختصات چرخه‌ای مثل هامیلتونی عمل می‌کند و برای مختصات غیر چرخه‌ای مثل لاگرانژی است. به طوری که از معادلات (۱۴-۷۳) چنین نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (14-74)$$

در این مورد به ذکر یک مثال اکتفا می‌شود:

مثال ۱۴-۷. در پتانسیل مرکزی حرکت یک ذره را بررسی می‌کنیم:

حل - در دستگاه مختصات قطبی و برای پتانسیل مرکزی، لاگرانژی ذره چنین است:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$R = \dot{\theta} R_{\theta} - L = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L \quad (14-75)$$

θ مختصه چرخه‌ای است. بنابراین

$$R = m \dot{\theta}^2 r^2 - L = \frac{p_{\theta}^2}{2mr^2} + V(r) - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (14-76)$$

که در آن p_{θ} مولفه θ اندازه حرکت زاویه‌ای است.

یکی از کاربردهای R ، بررسی حرکت شبه دایره‌ای حول یک مرکز نیرو است.

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

و در مورد R .

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

در مورد هامیلتونی نمی‌توان چنین کاری را انجام داد چرا که \dot{r} نداریم.

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

اکنون در مورد روتین عمل می‌کنیم:

$$R = \frac{p_{\theta}^2}{2m} + V(r) - \frac{1}{2}mr^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \quad (77-14)$$

$$\frac{d}{dt}(-m\dot{r}) - \left[\frac{p_{\theta}^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} \right] = -m\ddot{r} + \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (78-14)$$

۸-۱۴. مسائل برگزیده حل شده

۱- آیا تبدیل $Q_0 = p$ ، $p = -q$ کانونیک است؟ این پرسش را در مورد تبدیل زیر نیز پاسخ دهید؟

$$\begin{cases} q = P \cos Q \\ p = P \sin Q \end{cases}$$

حل-

دترمینان ژاکوبی $\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}$ را در این مسئله محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p}(p) - \frac{\partial}{\partial q}(-q) = 1$$

چون دترمینان ژاکوبی مقدار ثابتی است لذا تبدیل کانونیک است، یعنی جریان حافظ مساحت است یا به عبارتی هامیلتونی ثابت است. در مورد تبدیل دوم، این بار دترمینان ژاکوبی زیر را محاسبه می‌کنیم،

$$\frac{\partial(q,Q)}{\partial(Q,P)} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}(P \cos Q) \frac{\partial}{\partial P}(P \sin Q)$$

$$- \frac{\partial}{\partial P}(P \cos Q) \frac{\partial}{\partial Q}(P \sin Q) = -P \sin^2 Q - P \cos^2 Q = -P \neq 0$$

پس این تبدیل کانونیک نیست.

۲- یکی از تلاش‌ها در ترکیب دو مجموعه معادلات هامیلتون به یک مجموعه آن است که p, q را به صورت کمیت مختلط در نظر بگیریم. به طور مستقیم از معادلات حرکت هامیلتون نشان دهید که برای سیستمی با یک درجه آزادی تبدیل

$$Q = q + ip \quad ; \quad P = Q^*$$

چنانچه هامیلتونی بدون تغییر بماند کانونیک نیست. آیا مجموعه دیگری از مختصات P', Q' می‌توانید بیابید که فقط با تغییر مقیاس به P, Q وابسته شوند و در ضمن کانونیک نیز باشند؟

حل -

شرط لازم و کافی برای اینکه تبدیلات $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ کانونیک باشد، این است که

$$\sum_{i=1}^N dq_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^N dQ_i \wedge dP_i$$

به طوری که

$$\begin{cases} dq_i \wedge dq_i = 0 \\ dq_i \wedge dp_i = -dp_i \wedge dq_i \end{cases}$$

$$Q = q + iP \Rightarrow P = Q^* = q - ip$$

$$dQ \wedge dP = (dq + idp) \wedge (dq - idp) = 2idq \wedge dp \neq dq \wedge dp$$

بنابراین تبدیل کانونیک نیست. اکنون فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} Q' = \alpha Q \Rightarrow dQ' = \alpha dQ = \alpha dq + i\alpha dp \\ P' = \beta P = 0 \Rightarrow dP' = \beta dP = \beta dq - i\beta dp \end{cases}$$

آنگاه

$$dQ' \wedge dP' = (\alpha dq + i\alpha dp) \wedge (\beta dq - i\beta dp) = -2i\alpha\beta dq \wedge dp$$

برای اینکه این تبدیل کانونیک باشد باید:

$$-2i\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2} \Rightarrow \beta = \frac{i}{2\alpha}$$

یعنی

$$Q' = \alpha(q + ip) \quad ; \quad P' = \frac{i}{2\alpha}(q - ip)$$

در روش دوم، می‌توان از این ویژگی تبدیلات کانونیک استفاده کرد که در تبدیل کانونیک پس از اتمام تبدیل، همچنان معادلات هامیلتون برقرار است.

$$\begin{cases} Q = q + ip \\ P = q - ip \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2}(Q + P) \\ p = \frac{1}{2i}(Q - P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{1}{2i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q}$$

اما معادلات هامیلتون قبل از تبدیل چنین است:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = -\frac{1}{2i}(\dot{Q} - \dot{P})$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = \frac{1}{2}(\dot{Q} + \dot{P})$$

بنابراین:

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{1}{2i}(\dot{Q} - \dot{P})\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\dot{Q} + \dot{P})\frac{1}{2i} = \frac{\dot{P}}{2i} \neq -\dot{P}$$

پس تبدیل کانونیک نیست. همین استدلال را در مورد $\frac{\partial H}{\partial P}$ نیز می‌توان تکرار کرد.

۳- مقادیر β, α را چنان بیابید که تبدیل زیر از نوع کانونیک باشد:

$$\begin{cases} Q = q + \alpha p \\ P = p + \beta q \end{cases}$$

حل - دترمینان ژاکوبی این تبدیل چنین است:

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha\beta$$

این مقدار را مساوی واحد قرار می‌دهیم. در نتیجه یا α و یا β صفر می‌شود. به ازای $\alpha = 0$ یک

برش در جهت p به دست می‌آید، و هنگامی که $\beta = 0$ است، $P = p$, $Q = q + \alpha p$ می‌شود یعنی یک برش در جهت q به دست می‌آید. برای $\alpha = \beta = 0$ تبدیل همانی (یا همسانی) ایجاد می‌شود.

۴- مستقیماً نشان دهید که تبدیل

$$Q = \log\left(\frac{1}{q} \sin p\right) ; P = q \cot gp$$

کانونیک است.

حل -

$$e^Q = \frac{1}{q} \sin p, \quad P = \frac{q \cos p}{\sin p} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{\sin p}{q \cos p} = \frac{1}{\cos p} e^Q$$

$$\Rightarrow \cos p = P e^Q$$

در نتیجه:

$$\sin p = \sqrt{1 - P^2 e^{2Q}} \Rightarrow q = e^{-Q} \sqrt{1 - P^2 e^{2Q}}$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{\sqrt{1 - P^2 e^{2Q}}} (\dot{P} + \dot{Q}P) e^Q$$

$$\dot{q} = -\dot{Q} e^{-Q} \sqrt{1 - P^2 e^{2Q}} + e^{-Q} \left(\frac{-2P e^{2Q}}{2\sqrt{1 - P^2 e^{2Q}}} \dot{P} + \frac{-P^2 (2) e^{2Q}}{2\sqrt{1 - P^2 e^{2Q}}} \dot{Q} \right)$$

$$= \frac{-\dot{Q} e^{-Q} + P^2 e^Q \dot{Q} - P e^Q \dot{P} - P^2 e^Q \dot{Q}}{\sqrt{1 - P^2 e^{2Q}}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} = -\dot{p} \frac{\partial q}{\partial Q} + \dot{q} \frac{\partial p}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial p}{\partial \cos q} \frac{\partial \cos p}{\partial Q} = -\frac{1}{\sin P} P e^Q = -\frac{P e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = -e^{-Q} \sqrt{1 - P^r e^{rQ}} + e^{-Q} \frac{-r P^r e^{rQ}}{r \sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} = \frac{-e^{-Q}}{r \sqrt{1 - P^r e^{rQ}}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{-\dot{Q} e^{-Q} - P e^Q \dot{P}}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} \cdot \frac{-r P e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} + \frac{(\dot{P} + \dot{Q} P) e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} \cdot \frac{-e^{-Q}}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{-\dot{P}(1 - P^r e^{rQ})}{-P^r e^{rQ}} = -\dot{P}$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} = -\dot{p} \frac{\partial q}{\partial P} + \dot{q} \frac{\partial p}{\partial P}$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = -e^{-Q} \frac{-r P e^{rQ}}{r \sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} = -\frac{P e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial p}{\partial \cos q} \frac{\partial \cos p}{\partial P} = -\frac{1}{\sin q} e^Q = \frac{-e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P e^Q + \dot{Q} P e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} \frac{-P e^Q}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} + \frac{-\dot{Q} e^{-Q} - P e^Q \dot{P}}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}} \cdot \frac{-e^{+Q}}{\sqrt{1 - P^r e^{rQ}}}$$

$$= \dot{Q} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial P} = \dot{Q}$$

پس تبدیل فوق یک تبدیل کانونیک است.

۹-۱۴. مسائل برگزیده برای حل

۱- دستورالعمل تبدیل کانونیک را در مورد تابع مولد $F=q+Q$ به کار برید. خواهید دید که معادلات هامیلتون برحسب متغیرهای جدید به دست نمی آید. چرا چنین روی می دهد؟ چه اشکالی در تابع مولد وجود دارد؟

۲- تابع مولد $F_1(q, Q)$ را برای مسئله نوسانگر هارمونیک در نظر بگیرید، با هامیلتونی $H = \frac{1}{2m}(q^2 + k^2 q^2)$ تبدیل به متغیرهای جدید Q و P را تعریف می کند، و با عبارت زیر داده می شود:

$$F_1(q, Q) = \frac{1}{\gamma} m \omega q^2 \cot gQ$$

(الف) - عبارتهای q, p را برحسب P, Q بیابید.

(ب) - هامیلتونی جدید K را بیابید و معادلات حرکت هامیلتون را حل کنید.

(پ) - متغیرهای جدید کانونیکی Q و P را بطور هندسی در فضای فاز p و q تعبیر کنید.

(ت) - تحقیق کنید که شرط $\delta F_1 = 0$ در نقاط انتهایی انتگرال زمانی کنش آیا معادل با

$$p\delta q - P\delta Q = 0$$

(ث) - توابع مولد سه نوع دیگر را بیابید که همین تبدیل کانونیکی را ایجاد می کنند.

۳- تابع مولد $F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p$ داده شده است. ثابت کنید که این تابع

تبدیل کانونیکی زیر را تولید می کند:

$$Q = \log(1 + \sqrt{q} \cos p)$$

$$P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p$$

۴- به ازای چه مقادیری از α, β تبدیل زیر یک تبدیل کانونیک است،

$$\varphi = P^\alpha \cos \beta Q ; p = P^\alpha \sin \beta Q ; P \geq 0$$

آنگاه دستگاه مختصات (Q, P) را در نمودار فاز (q, p) رسم کنید.

۵- از رابطه زیر مختصه جدید Q به دست می‌آید:

$$Q = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda q}{p} \right)$$

که در آن λ مقداری ثابت است. نشان دهید که اندازه حرکت مزدوج Q به صورت

$$P = (p^2 + \lambda^2 q^2)^{1/2} \lambda + f \left(\frac{\lambda q}{p}, t \right)$$

است که در آن f یک تابع دلخواه است. این تبدیل را در نوسانگر خطی با هامیلتونی

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

به کار برید، و λ و f را چنان انتخاب کنید که مسئله ساده شود. برای (Q, P) و نیز برای (q, p) مسئله را بر حسب زمان حل کنید.

۶- اگر $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot gQ$ باشد، $F_2(P, q)$ را بیابید و به طور صریح نشان دهید

$$\text{که } \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \text{ است.}$$

۷- تبدیل کانونیک ایجاد شده توسط $F_1(Q, q, t) = \frac{1}{2} m \omega(t) q^2 \cot gQ$ را بیابید، که

در آن $\omega(t)$ تابع معلومی از زمان است. معادلات حرکت را در نمایش (Q, P) برای نوسانگر خطی با هامیلتونی زیر به دست آورید (به مثال ۱۴-۳ مراجعه کنید).

$$F_1(Q, q, t) = \frac{1}{2} m \omega(t) q^2 \cot gQ$$

۸- نشان دهید اگر تبدیل مستقل از زمان $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ دارای ژاکوبی

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \lambda \neq 0$$

مقدار ثابت λ

باشد، در نمایش (Q, P) چون حافظ مساحت است هامیلتونی‌ای به صورت زیر خواهد داشت:

$$K(Q, P) = \lambda H[q(Q, P), q(Q, P)]$$

که در آن $H(q,p)$ هامیلتونی مستقل از زمان جریان در نمایش (q,p) است. اگر $\bar{Q} = \frac{Q}{\lambda}$ و $\bar{P} = P$ باشد، نشان دهید که تبدیل $(q,p) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$ کانونیک است.

۹- گروه پواسن را در فضای فاز بنویسید. یکی از شرایط بنیادی در تشخیص تبدیلات کانونیک، ناوردائی گروه پواسن است. این شرط را در مورد تبدیل زیر بکار برید و نتیجه گیری کنید:

$$\begin{cases} Q = q + p \\ P = p - q \end{cases}$$

۱۰- فرض کنید لاگرانژین یک حرکت یک بعدی چنین باشد:

$$L = e^{\gamma t} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right)$$

که در آن γ ، m و k مقادیر ثابت مثبت هستند. معادلات لاگرانژ چگونه خواهد بود؟ آیا ثابت‌های حرکت وجود دارند؟ حرکت را چگونه توصیف می‌کنید؟ فرض کنید یک انتقال (تبدیل) نقطه‌ای به مختصات تعمیم یافته S به صورت زیر صورت بگیرد:

$$S = \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right) q$$

لاگرانژین برحسب S چیست؟ معادلات لاگرانژ و ثابت‌های حرکت را بیابید. چگونگی ارتباط بین دو پاسخ را توضیح دهید.

فصل پانزدهم

دینامیک آشوب و ساختارهای اتلافی

"در آغاز.... چگونه آسمان و زمین از درون آشوب برخاسته است."

«جان میلتون»

۱-۱۵. مقدمه

فیزیک دستگاه‌های غیرخطی اغلب شگفت‌انگیز و غیرقابل پیش‌بینی است. نظریه وابسته به این دستگاه‌ها دیدگاه‌های تازه‌ای درباره پدیده‌ها فراروی ما گشوده است. آشوب و دینامیک غیرخطی مفاهیم نظری نوینی برای درک و ارتباط رفتار پیچیده و شگفت‌انگیز دستگاه‌های ساده در تمام زمینه‌های علوم معاصر شده است. منظور از دستگاه دینامیکی، دستگاهی است که رشد تدریجی و تغییرات آن در گستره زمان مورد بررسی قرار می‌گیرد. به بیان دیگر، دستگاه دینامیکی را می‌توان به صورت نسخه ریاضی جبر گرایانه‌ای (deterministic) برای تکامل حالت سیستم در زمان تعریف کرد. پارامتر زمان می‌تواند پیوسته یا گسسته در نظر گرفته شود. همچنین منظور از دستگاه غیرخطی دستگاهی است که معادلات بیانگر رشد زمانی آن غیرخطی است؛ یعنی متغیرهای دینامیکی توصیف

کننده ویژگی‌های دستگاه (مانند مکان، سرعت، شتاب و غیره) به صورت غیرخطی در معادلات ظاهر می‌شوند. مثال‌های بنیادی از دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی با رفتار آشفتنه و آشوبناک عبارت است از: نوسانگر ساده مکانیکی در محیط میرا با اصطکاک غیرخطی؛ مدل دینامیکی جمعیت زیستی؛ مدل ساده فنر - قطعه یا مدل زمین لرزه؛ و مجموعه معادلات دیفرانسیلی که الگویی برای جابجایی شاره است. شگفت اینکه این دستگاه‌های ساده رفتار فوق العاده پیچیده از خود نشان می‌دهند. چنین می‌نماید که "سادگی ساختار، ضامن سادگی رفتار نیست".

قوانین جا افتاده فیزیکی مانند معادله شرودینگر یا معادله نیوتن بسیاری از پدیده‌های ساده (مسئله دو جسم)، از ترازهای کوانتیده انرژی در اتم هیدروژن تا حرکت سیارات به دور خورشید را توضیح می‌دهند. دستگاه‌های پیچیده مانند گاز اتم‌ها را با این تصور که به صورت مجموعه‌ای از بخش‌های با برهمکنش ضعیف و در عین حال خود ساده اند و هر کدام تابع معادله شرودینگر هستند می‌توان مورد مطالعه قرار داد. این دستگاه‌ها را نیز می‌توان به کمک این معادله به نحو نسبتاً دقیقی توصیف کرد.

اما، بسیاری از پدیده‌های طبیعی علیرغم سادگی ظاهری آنقدر پیچیده اند که این رهیافت‌ها در بررسی آنها به کار نمی‌آید. رفتار آنها را در مقیاس بزرگ نمی‌توان از بررسی منشأ میکروسکوپی و از قوانین در مقیاس کوچک آنها پیش بینی کرد. چنین دستگاه‌هایی را سیستم‌های پیچیده می‌نامیم. در واقع با بررسی سیستم‌های با تعداد بسیار زیاد درجه آزادی انواع رفتار جمعی ظاهر می‌شود.

اساساً وضعیت از مسئله دو جسم به N -جسم به طور عمده تغییر می‌کند. مسئله اخیر نه تنها انتگرال پذیر نیست، بلکه رفتار کلی اجسام می‌تواند نامنظم و به طور آشکار غیرقابل پیش بینی باشد. معادلاتی که باعث چنین حرکتی می‌شوند بررسی‌های دینامیکی منظومه شمسی را متحول و بازنگری معادلات جاافتاده پیشین را ایجاب کرد. رد پای این تحول را باید در پایان قرن نوزدهم و سال‌های آغازین قرن بیستم در کارهای هانری پوانکاره روی مسئله سه جسم جستجو کرد. هر چند انگیزه اصلی پوانکاره مسایل عملی مکانیک سماوی بود، اما مطالعات وی به استقرار "نظریه دینامیکی" به عنوان شاخه‌ای متمایز از ریاضیات منجر شد. ترکیب نتایج تحلیلی تازه و سپس امکان دسترسی به کامپیوترهای جدید نهایتاً به ظهور "نظریه آشوب" انجامید.

در این فصل بعضی ویژگی‌های سیستم‌های دینامیکی بیان می‌شود. بدین منظور برای بررسی

توضیح رفتار سیستم‌های پیچیده، ساختارهای آشوبناک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در واقع، آنچه در اینجا می‌آید معرفی این نظریه‌ها و ترسیم خطوط اصلی آنهاست و بررسی دقیقتر و جامعتر نیاز به فرصت مناسب دیگر دارد. مراجع ذکر شده در پایان این فصل می‌تواند نقش کمک‌کننده‌ای داشته باشد.

۱۵-۲. بررسی دینامیک آشوب

۱۵-۲-۱. تعریف آشوب

مفهوم آشوب در فلسفه باستان، به ویژه در مکتب افلاطونی، نقش اساسی داشته است. این واژه ابتدا توسط یونانی‌ها در توصیف فضای بی‌انتها به کار می‌رفته است، چیزی که بعدها در بررسی و جایگزینی اثر از آن سخن رفته است. اکنون برای بیان ساختارهای غیرقابل پیش‌بینی و تصادفی از آن استفاده می‌شود.

در فیزیک مفاهیم آشوب، بی‌نظمی، و نظم مفاهیم بنیادی هستند که همچنان تعاریف روشنی از آنها در دسترس نیست. به واقع با کارهای کلاسیک ماکسول، بولتزمن، و گیسیس حرکت اتمها در حالت ترازمندی گرمایی به نام آشوب خوانده می‌شود، چنانچه رفتار سیستم دور از حالت ترازمندی نیز اصطلاحاً نشانه‌ای از حالت آشوبناک است. در یک تعبیر، رشد زمانی نامنظم و غیرقابل پیش‌بینی بسیاری از سیستم‌های غیرخطی تحت عنوان آشوب مطرح شده است. این پدیده در نوسانگرهای مکانیکی همچون آونگ یا محیط‌های ارتعاشی، در شاره گرم شده یا دوار، در کاواک‌های لیزری، و در بعضی واکنش‌های شیمیایی دیده می‌شود.

معادلات ناویر-استوکس (Navier-Stokes) در مکانیک شاره‌ها غیرخطی هستند و از اینرو بررسی حرکات در هیدرودینامیک را بسیار دشوار می‌سازد. همچنین شکل نامنظم ابرها، خطوط ساحل دریا، دیگر چشم‌اندازها که نمایش فراکتالی دارند و شارش متلاطم شاره‌ها، ریختن قطرات آب، و... همگی از ساده‌ترین سیستم‌های با رفتار آشوبناک هستند.

حرکات آشوبناک نه آرام هستند و نه دوره‌ای. در عوض بسیار پیچیده می‌نمایند و وقتی به بیان چنین حرکاتی می‌پردازیم واژه‌هایی چون آشفتگی، در هم برهمی، و کتره‌ای به ذهن می‌آید. اما علیرغم پیچیدگی این حرکات این رفتار در سیستم‌هایی روی می‌دهد که اغلب ساده هستند.

کشف آشوب درک ما را از بنیان‌های فیزیک تغییر داده است و کاربردهای عملی فوق العاده نیز پیدا کرده است. کار در زمینه لیزر، شار هه، ساختارهای مکانیکی و الکتریکی، و واکنش‌های شیمیایی و غیره گونه‌هایی از کاربرد آن هستند.

علاقه و توجه به آشوب (یا عمومی تر، دینامیک غیرخطی) در زمانی رشد سریعتر گرفت که در ۱۹۶۳ لورنز کار عددی خود را بر روی یک مدل ساده همرفتی (جابجایی) منتشر کرد و نشانه‌هایی را برای پیش بینی وضع هوا مورد بررسی قرار داد.

۱۵-۲-۲. حساس بودن به شرایط اولیه

مشخصه‌های یگانه دینامیک آشوب را اغلب به طور آشکار اینطور می‌توان بیان کرد: سیستمی را تصور کنید که دوباره رفتارش را بررسی می‌کنید منتها شرایط اولیه آن را اندکی تغییر می‌دهید. این تغییرات کوچک ممکن است مثلاً از خطاهای اندازه گیری سرچشمه گیرد، و معمولاً سبب تغییرات خطی و آرام سیستم می‌شود، ولی برای سیستم آشوبناک خطا به طور نمایی رشد می‌کند. بنابراین حالت سیستم پس از زمان بسیار کوتاه اساساً ناشناخته می‌ماند. این پدیده که فقط زمانی روی می‌دهد که معادلات تعیین کننده رفتار سیستم غیرخطی هستند به عنوان حساس بودن شدید سیستم آشوبناک در مقابل شرایط اولیه گفته می‌شود. حتی از پوانکاره نقل می‌شود (سال ۱۹۱۲) که می‌گوید: " ... این اتفاق می‌افتد که اختلاف بسیار کوچک در شرایط اولیه، اختلاف‌های بسیار بزرگ در پدیده‌های نهایی ایجاد می‌کند. خطای کوچک در مقایر اولیه، خطای فوق العاده در مقادیر نهایی ایجاد می‌کند، پیش‌بینی امکان پذیر نمی شود، و ما پدیده‌ای اتفاقی و مجازی خواهیم داشت."

۱۵-۲-۳. عدم امکان پیش بینی

می دانیم بعضی سیستم‌ها تحت شرایطی رفتار قابل پیش بینی دارند و تحت شرایط دیگر رفتارشان غیر قابل پیش بینی است. به عنوان مثال حرکت شاره تحت شرایطی پایدار و منظم است و به راحتی می‌توان از معادلات حرکت رفتار سیستم را پیش بینی کرد. اما در شرایط دیگر حرکت آشفته، ناپایدار، و آشوبناک است و پیش بینی رفتار سیستم در لحظات بعدی دشوار و یا ناممکن است. انتقال از حرکت آرام لایه‌ای به رفتار آشوبناک را به خوبی می‌توان هنگامی که در هواپیما نشسته ایم در تغییر هوای آرام به هوای آشفته مشاهده کرد.

اگر پیش بینی ناممکن شود، بدیهی است که سیستم را می‌توان شبیه سیستم آماری و تصادفی در نظر گرفت (سیستمی که تحت تأثیر نیروهای خارجی کنتره‌ای است)، اما منبع بی‌نظمی کاملاً متفاوت است. در مورد آشوب، این رفتار نامنظم جزئی از دینامیک ذاتی سیستم است، هیچ اثر خارجی پیش بینی نشده‌ای وجود ندارد.

در کاربرد آشوب به بحث در مورد دینامیک (حرکت شاره) - لیزر - کوانتوم - مکانیک آماری اشاره می‌شود. اساساً غیرقابل پیش بینی بودن در سه طریق عمده ظاهر می‌شود: غیرخطی بودن (لیزر) - اصل نایقینی (کوانتوم) - و از طریق رفتار آماری تعداد زیادی ذره. در واقع فرض اخیر به نحوی نتیجه‌ای از قسمت اول یعنی غیرخطی بودن است.

۱۵-۳. شرایط ایجاد حرکت آشوبناک

دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در نظر بگیرید. شرایط لازم برای حرکت آشوبناک عبارتست از:

(a) - سیستم حداقل سه متغیر دینامیکی مستقل داشته باشد.

(b) - معادلات حرکت شامل یک یا چند جمله غیرخطی باشد، که دو یا چند متغیر از متغیرهای دینامیکی را به هم ملحق و جفت می‌کند:

$$\frac{dx_i}{dt} = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-15)$$

n حداقل باید ۳ باشد ($n \gg 3$). مثلاً

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_1 x_2 + \dots \quad (2-15)$$

وجود $n \geq 3$ شگفت‌انگیز جلوه می‌کند. وجود سه متغیر لازم و در عین حال کافی است تا این که:

- ۱- مسیره‌ها واگرا شوند، ۲- حرکت در ناحیه‌ای از فضای فاز حبس و محدود شود، ۳- مسیره‌ها یگانه و واحد باشند، یعنی در فضای فاز مسیره‌ها نباید یکدیگر را قطع کنند وگرنه بدین معناست که مسیره‌ها در هر نقطه تلافی دارای انتخاب هستند و این خود بر خلاف فرض جبرگرایانه آنهاست. یادآور می‌شویم که البته معادلات مبین حرکت، جبرگرایانه است، یعنی قوانین جاافتاده‌ای حاکم بر عملکرد آنهاست.

غیرخطی بودن کمتر شگفتی دارد و بیشتر از نظر تاریخی و سابقه تکوین نظریه آشوب مهم است. می‌دانیم به جز چند مورد معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی اغلب حل کردن آنها دشوار یا غیرممکن است.

۱۵-۴. چند مثال

I. مثال استاندارد و شناخته شده آونگ است که از زمان گالیله تاکنون مرجع بررسی حرکات مختلف و تحقیق پدیده‌های عمده است. آونگ نامیرا در فضای فاز مسیر ثابت و همیشگی بیضی وار را دارد. یعنی:

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \Rightarrow \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{P^2}{2mE} = 1 \quad (3-15)$$

در این مورد فقط حرکت دوره‌ای و نقاط ترازمندی وجود دارد. در مورد آونگ میرای واداشته:

$$m\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + mg \sin \theta = R \cos(\omega_D t) \quad (4-15)$$

یا بدون بعد

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = P \cos(\omega_D t) \quad (5-15)$$

در نتیجه شکل خطی شده این معادله چنین است:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{q} \omega + P \cos \phi - \sin \theta \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega_D \end{cases} \quad (6-15)$$

آونگ میرای واداشته مثال بارزی از حرکت آشوبناک است. همانطور که اشاره شد مسیرها در فضای فاز نباید یکدیگر را قطع کنند چرا که این برخلاف فرض بنیادی سیستم دینامیکی جبر گرایانه است.

در اینجا با چند شکل ساده توضیح می‌دهیم که آشوب چیست.

II. هنگامی که زمان به صورت پارامتری مجزا و صحیح با $(n = 0, 1, 2, \dots)$ وارد می‌شود، مثال مربوط به تکامل زمانی سیستم دینامیکی را با نگاشت (map) نشان می‌دهیم که شکل برداری نمایش آن $X_{n+1} = f(X_n)$ است، که در آن

$$X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(N)})$$

نگاشت یک بعدی $(N = 1)$ به صورت

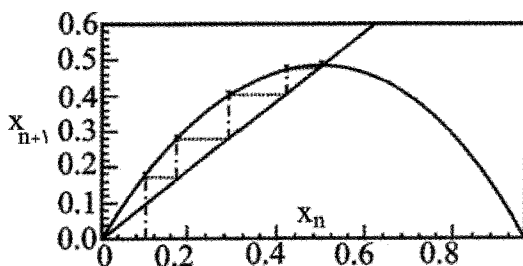
$$f(x) = \mu x(1-x) \quad (7-15)$$

و یا شکل معادله تکرار آن،

$$x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n) \quad ; \quad x_n \in [0, 1] \quad ; \quad 1 < \mu < 4 \quad (8-15)$$

را نگاشت لجستیکی (logistic map) می‌نامند. این نگاشت را می‌توان به عنوان مدل ساده و ایده آل برای تغییرات جمعیت انواع حشرات بکار برد. جمله خطی نماینده آهنگ تولد در محیط ثابت است

که با پارامتر μ کنترل می‌شود (شکل ۱-۱۵). ماکزیمم $f(x)$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ است، که



شکل (۱-۱۵)

برای آن $f(1/2) = \mu/4$ است. از اینرو، برای $0 \leq \mu \leq 4$ و نیز x_n و x_{n+1} در فاصله $[0, 1]$ قرار می‌گیرد. از آنجا که $f'(0) = \mu > 1$ است، مبدأ $x = 0$ یک نقطه ثابت ناپایدار

است. در نقطه ثابت x ، یا نقطه جاذب (attractor)، پدیده تکرار متوقف می‌شود بطوریکه

$$f_\mu(x^*) = \mu x^* (1-x^*) = x^* \quad (9-15)$$

یا $x^* = 1 - 1/\mu$. نقطه جاذب x^* پایدار است به شرطی که $|f'_\mu(x^*)| < 1$ یا $1 < \mu < 3$

باشد. وقتی $\mu = 3$ ، یعنی $f'_\mu(x^*) = \mu(1 - 2x^*) = 2 - \mu = -1$ است، دو نقطه ثابت وجود می‌آید. از اینرو، برای $\mu > 3$ نقطه جاذب ثابت به دو نقطه ثابت تقسیم می‌شود. این عمل را دوشاخگی (Bifurcation) می‌گویند. نقطه x_0 را به عنوان نقطه دوره‌ای با دوره n برای f_μ می‌نامیم چنانچه

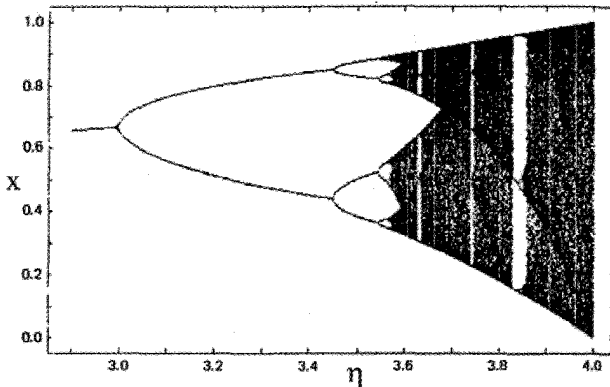
$$f^{(n)}(x_0) = x_0$$

اما

$$f^{(j)}(x_0) \neq x_0 \quad ; \quad 0 < j < n$$

در اینجا $f^{(1)}(x) = f_\mu(x)$ ، $f^{(2)}(x) = f_\mu(f_\mu(x))$ و غیره...

بخشی از طرح دو شاخگی برای نگاشت لجستیکی (نقطه ثابت x بر حسب μ) در شکل (۲-۱۵) رسم شده است.

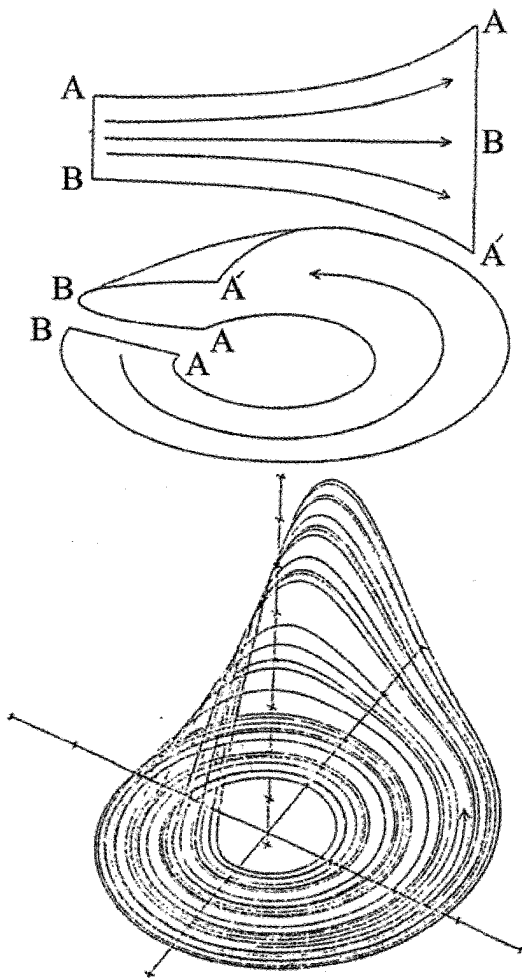


شکل (۲-۱۵)

II. مثال عمده دیگر جاذب راسلر (Rossler attractor) است:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (۱۰-۱۵)$$

این طرح در شکل (۳-۱۵) رسم شده است، که در آن مراحل تشکیل نقطه جاذب آشوبناک برای این مورد ساده نشان داده شده است. سیستم راسلر مدل مناسبی برای بسیاری از سیستم‌ها از شارش شاره تا واکنش شیمیایی را شامل می‌شود.



جای شکل (۳-۱۵)

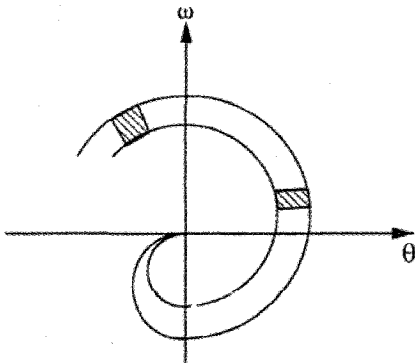
۱۵-۵. شرط پایداری مساحت (یا حجم) در فضای فاز

در مورد نوسانگر نامیرا، ویژگی عمده حفظ و پایداری مساحت در نمودار فضای فاز است (در سیستم پایستار):

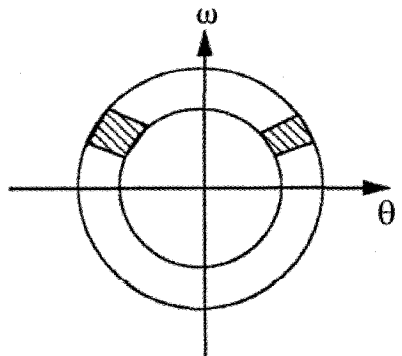
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\theta \end{cases} \quad (11-15)$$

مسئله پایستگی مساحت (یا حجم در فضاهای بالاتر) جنبه عمومی سیستم‌های پایستار است. با توجه به این ویژگی سیستم‌های دینامیکی را معمولاً به دو رده پایستار و اتلافی تقسیم می‌کنیم، بسته به اینکه حجم فاز در فضای ثابت است یا منقبض (متراکم) می‌شود. مثلاً در حالیکه آونگ ساده نامیرا پاینده است (شکل ۱۵-۴)، در مورد آونگ خطی شده داریم:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\omega - \theta \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\phi}{dt} = 0 \end{cases} \quad (12-15)$$



شکل (۵-۱۵)



شکل (۴-۱۵)

مسیرها به نقطه $(\omega, \theta) = (0, 0)$ میل می‌کنند و مدارها فرو می‌ریزند (شکل ۱۵-۵). چنین نقطه‌ای را رابینده یا نقطه جاذب (attractor) می‌گوییم، چرا که مجموعه متناهی (ω, θ) به این نقطه همگرا می‌شوند. بدیهی است مساحت فاز ثابت نمی‌ماند و اصطلاحاً سیستم را اتلافی (Dissipative) می‌نامیم. اکنون حجم v و سطح در برگیرنده آن s و یک شارش خالص نقاط از v را در نظر می‌گیریم. برای ناحیه کوچک Δs ، شارش در این ناحیه مولفه بردار سرعت فاز v عمود بر سطح است، ضربدر عنصر سطح Δs :

$$\vec{V} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) \quad (15-13)$$

$$\Rightarrow \text{Flux} = \int_s (\vec{V} \cdot \hat{n}) ds$$

چنانچه δt زمان بررسی این فرایند باشد بنا بر قضیه دیورژانس داریم:

$$\delta t \times \text{flux} = \delta t \int_s (\vec{V} \cdot \hat{n}) ds = \delta t \int_v (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) dv$$

حال بسته به اینکه مساحت فاز پایدار باشد یا نباشد، این انتگرال یا باید صفر شود یا منفی. چون s و t اختیاری است و این خاصیت کلی برای هر حجمی برقرار است، پس کافی است که $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}$ بررسی شود. یادآور می‌شویم که سینماتیک ویژگی‌های شار در فضای فاز برای سیستم پایستار مشابه شارش یک شاره تراکم ناپذیر در هیدرولیک است. گاه واژه هامیلتونی در ارتباط با سیستم‌های دینامیکی از معادلات حرکت هامیلتون تبعیت می‌کنند و از اینرو آنها را سیستم‌های هامیلتونی می‌نامیم. این سیستم‌ها مطابق با قضیه لیوویل دارای بقای حجم در فضای فاز هستند، و بنابراین زیر مجموعه‌ای از مجموعه سیستم‌های پایستار هستند. در این مورد دوباره به ذکر مثال آونگ نامیرا می‌پردازیم (رابطه ۱۵-۱۱)، آنگاه

$$\vec{V} = (\omega, -\theta) \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial(-\theta)}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \omega} = 0$$

چرا که ω و θ تابع صریح یکدیگر نیستند و

مثال بعدی آونگ میرا است (رابطه ۱۵-۱۲).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega - \theta \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = (\omega, -\omega - \theta)$$

$$\Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \omega}(-\omega - \theta) = 0 - 1 - 0 = -1 < 0$$

یعنی این سیستم اتلافی است.

مثال دیگر آونگ میرای واداشته است.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = p \cos(\omega_D t) \quad (14-15)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega_D \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{q} \omega - \sin \theta + p \cos \phi \end{cases} \quad (15-15)$$

$$\vec{V} = (\omega, -\frac{\omega}{q} - \sin \theta + p \cos \phi, \omega_D)$$

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \vec{V} &= \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \omega}(-\frac{1}{q} \omega - \sin \theta + p \cos \phi) + \frac{\partial \omega_D}{\partial \phi} \\ \Rightarrow &= -\frac{1}{q} - \frac{\partial}{\partial \omega} \sin \theta + P \frac{\partial}{\partial \omega} \cos \phi = -\frac{1}{q} < 0 \end{aligned}$$

پس سیستم اتلافی است.

۱۵-۶. آنالیز دینامیکی و سری‌های زمانی (طیف توان)

طیف توان روش استوار و محکمی برای نمایش رفتار مختلف سیستم دینامیکی است. به ویژه رفتارهای آشوبناک و منظم از این طریق قابل تشخیص هستند. این شیوه با به کار گرفتن آنالیز فوریه برای نمایش دادن ترکیب بندی تغییرات زمانی فرکانس (یعنی سری‌های زمانی) متغیرهای دینامیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تبدیل فوریه در حالت کلی تابعی مختلط است، از اینرو برای بررسی ویژگی‌های فیزیکی که باید حقیقی باشند از مجذور قدر مطلق این تبدیل که طیف توان نامیده می‌شود استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب آشوب را با یک نوفه با باند پهن و گسترده که آشکارا پیوسته نیز است تعریف می‌کنیم. در حرکت دوره‌ای و منظم، در منحنی تبدیل فوریه (برحسب فرکانس) در فرکانس معینی منطبق بر حرکت دوره‌ای و هارمونیک‌های آن، ماکزیمم‌های تیز و بلند ظاهر می‌شود (شبه تابع دلتا).

تبدیل فوریه دو تابع $h(t)$ و $H(\omega)$ متقابلاً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (15-16)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (15-17)$$

در این صورت تابع حقیقی $S(\omega)$ ، به نام طیف توان چنین تعریف می‌شود:

$$S(\omega) = |H(\omega)|^2 \quad (15-18)$$

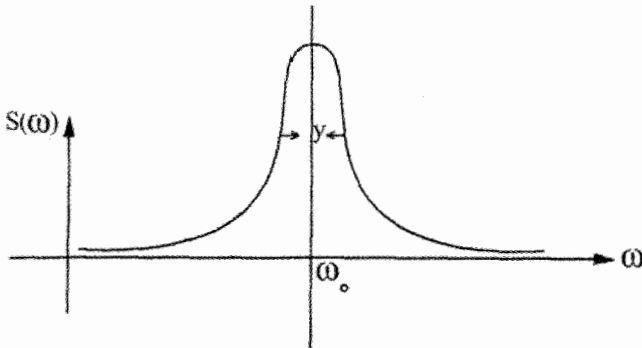
می‌توان این تعریف را با رابطه میان دامنه موج و انرژی موج مقایسه کرد. طیف توان کمیتی است که نوعاً در کارهای تجربی یا عددی به کار می‌رود. مثلاً در مورد نوسان کمین میرا

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t} e^{i\omega_0 t} & t \in [0, \infty) \\ 0 & t \in (-\infty, 0] \end{cases} \quad (15-19)$$

تابع دارای نوسان طبیعی ω_0 است. این تابع یک مدار مکانیکی یا الکتریکی اتلافی و میزان شده را نشان می‌دهد. در این صورت می‌توان نشان داد که

$$S(\omega) \approx \frac{1}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (15-20)$$

این رابطه تابع (Lorentzian) نامیده می‌شود (شکل ۱۵-۶)



شکل (۱۵-۶)

چنانچه $\gamma \rightarrow 0$ یعنی حرکت به نوسان نامیرا تبدیل شود آنگاه $S(\omega)$ دارای قله خیلی تیزی می‌شود (به تابع دلتا میل می‌کند) که تمام توان در این صورت در همان فرکانس ω_0 متمرکز می‌شود. بدین ترتیب یک تعریف آشوب چنین است که طیف توان کمیت مورد بررسی گسترده و پهن و پیوسته است. در مقابل، ناحیه با حرکت منظم و دوره ای، در فرکانس خاص وابسته به یک پریود یا هارمونیک‌های وابسته به این فرکانس، ماکزیمم‌های باریک و نیز (شبهه تابع دلتا) در فواصل منظم ظاهر می‌شوند.

۱۵-۷. ساختارهای اتلافی و خود سازماندهی

در بخش پیش از ساختارهای اتلافی در مقابل ساختارهای پایستار سخن گفتیم. نظریه خود سازماندهی تمایل سیستم‌های دینامیکی پیچیده به حالتی منظم بدون انتخاب هیچ پارامتری از هر نوع است. به بیان دیگر، این ظهور نظم خود به خودی موقعی به وجود می‌آید که پارامترهای معینی در سیستم به مقادیر بحرانی می‌رسند. در واقع تکامل این پدیده در دهه ۱۹۶۰ به منظور پاسخگویی به یک پارادوکس قدیمی آغاز شد. از یک طرف بنابر قانون دوم ترمودینامیک اتم‌ها و مولکول‌ها همیشه در جهتی عمل می‌کنند که خود را به حالت ماکزیمم بی نظمی می‌کشاند. به عبارت دیگر، قانون دوم به عنوان تکامل از نظم به بی نظمی فهمیده می‌شود. اما از سوی دیگر بسیاری از پدیده‌های طبیعی وجود دارند که نمایشگر نظم و سازماندهی هستند، یعنی به نظر می‌رسد که این

ویژگی همه جا در طبیعت علی‌رغم قانون دوم وجود دارد.

فیزیک ماکروسکوپی در واقع گرفتار بازگشت ناپذیری است که این همان معنای قانون دوم ترمودینامیک است. فرآیندهای بازگشت ناپذیری حتی در بنیادی ترین سطح در دسترس روی می‌دهند و هیچ نوع زمینه آماری با سرشت ماندگار در هر سو وجود ندارد. گذر از الگوهای ساده در مکانیک کلاسیک یا کوانتومی با درجات آزادی محدود به وضعیت‌های تازه با تعداد زیاد درجه آزادی از طریق شکست تقارن روی می‌دهد. براساس نظریه تقارن شکسته از سیستم پیچیده خواصی بروز می‌کند که در زیر سیستم ساده تری که این سیستم پیچیده از آن ساخته می‌شود موجود نیست. مثلاً در سیستم‌های تعادلی شامل تعداد زیادی اتم خواص جدید پدیدار شده مانند ابر رسانایی یا ساختارهای جدید مانند خطوط گردابی کوانتیده در سطح اتمی اصولاً بی معنی هستند. همچنین ناپایداری‌های دینامیکی مانند تلاطم و همرفت در طبیعت فراوان یافت می‌شوند. در وقوع چنین پدیده‌هایی آثار شکست تقارن دیده می‌شود که خیلی شبیه ساختارهای تعادلی موجود در سیستم‌های ماده چگال است. این اثر ساختارهای اتلافی نام دارد.

در سیستم‌های اتلافی شارش انرژی از خارج به درون سیستم جریان دارد. الگوهای سامان یافته فضایی و زمانی را می‌توان برحسب ساختارهای اتلافی بیان کرد که در شرایط دور از ترازمندی ناشی می‌شوند. ساختارهای اتلافی مثال برجسته‌ای از عدم تعادل به منزله سرچشمه نظم هستند. در دمای بالاتر از مقدار بحرانی معین (آستانه) بعضی افت و خیزها تقویت می‌شوند و سبب بروز حالتی ماکروسکوپی شده و نظم جدید پدیدار می‌گردد. این نظم به دور از ترازمندی است و اساساً به ساختارهای اتلافی وابسته است. این را نظم از طریق افت و خیزها می‌نامیم، در مقابل اصل نظم بولتزمن که برای درک ساختارهای متعادل امری اساسی است، و مسئول ظهور ساختارهایی مانند بلورها و گذارهای فاز است، انحراف از تعادل (شارش انرژی به داخل سیستم) به نظم تبدیل می‌شود و یک ساختار اتلافی پدیدار می‌شود.

البته به نظر می‌رسد که شارش انرژی براساس رابطه علیت، علت پدید آمدن ساختار اتلافی می‌باشد، اما این بدان معنا نیست که یک نظریه جبرگرایانه داریم. عموماً یک نقطه دو شاخه‌ای وجود دارد و برای انتخاب یکی از پاسخ‌های ممکن به نظریه افت و خیز احتیاج داریم. این مدل‌ها هم عنصر توصیف جبری را (به ویژه در فاصله میان ناپایداریها) و هم توصیف آماری و استوکاستیک

(تصادفی) را (در نزدیکی ناپایداری‌ها) در خود دارند.

آشکار شدن ساختارهای اتلافی و نظم از طریق افت و خیزها، با نوعی رفتار همدوس در زمان و یا در فضا صورت می‌گیرد. این نوع رفتار می‌تواند در یک فاصله بحرانی از تعادل پدیدار شود. می‌شود گفت که ناپایداری تعیین کننده ساختار فضا- زمانی است که فرآیندهای شیمیایی عامل ناپایداری در آن جریان دارند. برعکس بعداً این فرآیندها هستند که به رفتار کل سیستم بستگی پیدا می‌کنند، و به این ترتیب به مفاهیمی مثل "تمامیت" سیستم و تکامل آن از طریق ناپایداری‌های متوالی می‌رسیم. منتها در نزدیکی تعادل است که سیستم به حالت آنتروپی ماکزیمم و بی سامانی گرایش پیدا می‌کند. دور از تعادل می‌توانیم فرآیندهای خودسازماندهی داشته باشیم از همان نوعی که در ساختارهای اتلافی متجلی می‌شوند.

خودسازماندهی وقتی نمودار می‌شود که سیستم آماده داشتن آن است. یعنی آنقدر سیستم از حالت تعادل دور است که توصیف آن تلویحاً به غیر خطی بودن و دو شاخه شدگی مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در این بررسی‌ها نشان داده‌ایم که تحت شرایط معینی، در حالی که انتظار پاسخ‌های آشوبناک را داشته‌ایم، پاسخ‌های منظم و دوره‌ای در سیستم ظاهر می‌شود. دلیل اساسی ظهور این گونه رفتار در نوسانهایی است که در دو انتهای زنجیره به شکل امواج انقباض و انبساط سالی تونی ایجاد می‌شود و به سمت مرکز سیستم به حرکت در می‌آیند. این امواج وقتی با هم تلاقی می‌کنند از بین رفته و پاسخ پایدار و منظم پدیدار می‌شود. وقتی شرایط مناسب طوری فراهم می‌شود که فرکانس‌های واداشته انتها با فرکانس انتشار امواج نوسانی به داخل با یکدیگر مطابقت می‌یابند، این پدیده روی می‌دهد. محدوده مورد توجه فضای پارامتری که در آن رفتار کاملاً منظم و همبسته مشاهده می‌شود در ناحیه سرعت متوسط است که سیستم با آن سرعت به حرکت در می‌آید. در این ناحیه سرعت، افت و خیزهای موجود در نیروی کل وارد بر سیستم ضعیفتر می‌شود و سری زمانی رفتاری دوره‌ای و پایدار از خود نشان می‌دهد.^۱

اخیراً نیز گروهی مدل‌هایی را عرضه کرده‌اند که رفتار جمعی غیر آشوبناک را نشان می‌دهد، که بررسی‌های ما را در این زمینه نیز تأیید می‌کند [۱۶].

۱- نتایج محاسبات انجام شده را در مرجع [۱۳] یا کتاب «روش‌های ریاضی در فیزیک» تألیف نگارنده: جلد دوم، انتشارات دانشگاه الزهراء (۱۳۸۲)، می‌توانید ببینید.

۱۵-۷-۱. نتیجه گیری

با بررسی‌های انجام شده اکنون به گونه‌ای در می‌یابیم که ناترازمندی و عدم تعادل، یعنی شارش ماده و انرژی، می‌تواند منبع نظم و سازماندهی در سیستم‌های اتلافی باشد.

آشوب و مفاهیم وابسته به آن مانند "بحرانی شدن خودسازمان یافته" ممکن است اساس برون یابش و درون یابش مشاهدات عینی در سیستم‌های پیچیده باشد. اما کار زیادی باقی مانده که باید در این باره صورت گیرد. راهی طولانی در پیش است تا مشخص شود آیا مفاهیم گفته شده بارورتر خواهد شد یا اساساً از بین می‌روند. باور ما بر این است که ما در مرز میان نظم و آشوب قرار گرفته‌ایم. مشاهده می‌شود که بعضی سیستم‌های بسیار ساده می‌توانند چنان سازمان یابند که نهایتاً رفتاری منظم از درون رژیم آشوبناک پدیدار شود.

این بررسی، اگر نه آغاز، حداقل ادامه سفری رمانتیک در درک و دریافت زیبایی و سادگی در طبیعت پیچیده است. به طرح این پرسش می‌پردازیم که چگونه می‌توان میان شکاف بودن و شدن پلی برقرار کرد؟ تا چه حدی امروزه می‌توانیم توصیفی از نظر منطقی همدوس، اگر چه لزوماً ناکامل، از جهان فیزیکی ارائه دهیم؟

با گفتاری از پاسکال به بحث خود خاتمه می‌دهیم: ".... در دنیای مملو از بی سامانی، در دنیای اتم‌های بی شعوری که در هرسو سرگردان هستند، می‌ترسیم از اینکه ببینیم تنها موجودات اندیشمند و سازمان یافته خود ما هستیم." به عبارت دیگر با یافتن دیدگاه متوازن تر نسبت به تحولات جهانی در می‌یابیم که دنیا چندان هم کتره‌ای نیست. جهانی می‌یابیم که در آن ساختار وجود دارد، و در آن نه تنها دنیای خارج را می‌توانیم درک کنیم، بلکه این را هم می‌توانیم احساس کنیم که چگونه ما از این دنیای خارج نشأت گرفته‌ایم.

References:

- 1- G.L. Baker and J.P Gollub' "Chaotic dynamics; an introduction" Cambridge Univ. Press, second edition (1994).
- 2- J. P. Crutchfield, J.D.Farmer, N.H. Packard, and R.S. Shaw; "Chaos", Sci. Am. 245, 461 (1986).
- 3- M.J. Feigenbaum; "Quantitative universality for a class of non-linear transformations", J. stat. Phys. 19, 25 (1978).
- 4- M. Henon; "A two-dimensional mapping with a strang attractor", Commun. Math. Phys, 50, 69 (1978).
- 5- R. C. Hilborn; "Chaos and Nonlinear dynamics", Oxford Univ Press (1994).
- 6- R.V. Jensen; "Classical chaos", Am. Scientist 75, 168 (1987).
- 7- Yu. L. Klimontovich; "Criteria of self- organization", chaos, solitions and fractals, vols, No. 10, 1985-2002 (1995).
- 8- B.B. Mandelbort; "The fractal geometry of Nature", W.H. Freeman, San Francisco (1982).
- 9- R. May; "Simple mathematical models with very complicated dynamics", Nature 261, 459 (1979).
- 10- G.H. Nicolis and I. Prigogine; "Self-organization in nonequilibrium systems", John Wiley and Sons. (1977).
- 11- E. Ott, "Chaos in Dynamical systems"; Cambridge Univ. Press (1993).
- 12- I. Prigonine; "From being to becoming": Time and complexity in the physical sciences", W.H. Freeman and company (1980).
- 13- M.R. Sarkerdei and R.L. Jacobs:" Dynamical origin of spatial order", Phys, Rev. E51, 1929-1935 (1995).
- 14- R. Seydel, "From equilibrium to chaos", Elsevier Science Publisling Co. Inc. (1988).
- 15- D.L. Turcotte; "Fractals and chaos in geology and geophysics", Cambridge Univ. Press (1992).
- 16- P.Y.Wang, P.Xie; "Eliminating spatiotemporal chaos and spiral waves by weak spatial perturbation", Phys, Rev. E61, 5120-5120 (2000).

کتابنامه

I. معرفی چند کتاب به زبان فارسی (ترجمه و تألیف) درباره مکانیک کلاسیک به ترتیب سال انتشار

- ۱- نام کتاب: مکانیک نظری و عملی
نویسنده: عبدالله ریاضی
مترجم: -
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۱۹
- ۲- نام کتاب: مکانیک سینماتیک
نویسنده: احمد وزیری
مترجم: -
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۳۵
- ۳- نام کتاب: فیزیک عمومی (جلد اول)
نویسنده: حبیب اله ایزدیان
مترجم: -
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۴۲
- ۴- نام کتاب: مکانیک ریاضیات عمومی
نویسنده: احمد وزیری
مترجم: -
ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۴۲

- ۵- نام کتاب: فیزیک استاتیک (جلد ۲)
 نویسنده: ح. شمسی
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات دانشگاه تهران
- ۶- نام کتاب: مکانیک مقدماتی (قسمت اول)
 نویسنده: مهدی برکشلی
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۴۵
- ۷- نام کتاب: مکانیک فیزیک
 نویسنده: کمال‌الدین جناب
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات چهر - چاپ پنجم ۱۳۴۹
- ۸- نام کتاب: مکانیک برداری، دینامیک
 نویسنده: جلیل فامیلی - کاظم ابهری
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات امیرکبیر - بهمن ماه ۱۳۴۹
- ۹- نام کتاب: روش حل مسائل فیزیک
 نویسنده: ن. م. اسپرانسکی
 مترجم: غضنفر بازرگان
 ناشر: انتشارات خوارزمی - فروردین ۱۳۴۹
- ۱۰- نام کتاب: دوره مختصر مکانیک استدلالی و الفبایی از مکانیک موج و نسبیّت
 نویسنده: نصراله حاجسید جوادی
 مترجم: -
 ناشر: ؟ - ۱۳۴۹

- ۱۱- نام کتاب: مکانیک عمومی (جلد اول و دوم)
 نویسنده: مجتبی ریاضی
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۴۹
- ۱۲- نام کتاب: مکانیک کلاسیک
 نویسنده: ل. د. لانائو - ا. م. لیفشیتز
 مترجم: کایار نیکپور - مهیار نیکپور
 ناشر: انتشارات امیرکبیر - بهمن ۱۳۵۰
- ۱۳- نام کتاب: نیروها در طبیعت
 نویسنده: گری گوریف - میاکشیف
 مترجم: غلامرضا جلالی نائینی
 ناشر: انتشارات رُز - چاپ اول، ۱۳۵۰
- ۱۴- نام کتاب: قوانین حرکت
 نویسنده: عبدالجلیل مستشاری
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات دانشگاه آزاد ایران - ۱۳۵۳
- ۱۵- نام کتاب: فیزیک دانشگاهی
 نویسنده: سیرز - فرانسیس وستون
 مترجم: فضل اله فروتن
 ناشر: دانشکده علم و صنعت ایران - چاپ سوم، آذر ۱۳۵۳
- ۱۶- نام کتاب: مبانی فیزیک (جلد اول)
 نویسنده: ژان بریکار - هانری بنوا
 مترجم: علی خلیلی - محمود رهبر
 ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - ۱۳۵۳

- ۱۷- نام کتاب: انتقال انرژی
 نویسنده: ابوالقاسم جمشیدی
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات دانشگاه آزاد ایران، ۱۳۵۴
- ۱۸- نام کتاب: دینامیک تحلیلی سیستم‌های گسسته
 نویسنده: راین هارد - ام. روزنبرگ
 مترجم: محسن بهرامی - مهرداد صباغی
 ناشر: ؟ - ۱۳۵۷
- ۱۹- نام کتاب: مکانیک (در دو جلد)
 نویسنده: کیث، ر. سایمون
 مترجم: محمدرضا سرکرده‌ای
 ناشر: انتشارات دهخدا، مرداد ماه ۱۳۵۸
- ۲۰- نام کتاب: مکانیک سیستم‌ها، مکانیک تحلیلی نسبیت خاص
 نویسنده: ژان میشل رکار
 مترجم: صمد سبحانیان
 ناشر: ؟ - ۱۳۵۹
- ۲۱- نام کتاب: مکانیک کلاسیک
 نویسنده: ت. و. کیبل
 مترجم: اعظم پورقازی - محمدعلی شاه‌زمانیان
 ناشر: مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۶۲
- ۲۲- نام کتاب: دوره مکانیک (جلد دوم) دینامیک برداری
 نویسنده: بیر - جانسون
 مترجم: ابراهیم واحدیان
 ناشر: ابوالفضل حسینیان - چاپ چهارم، اردیبهشت ۱۳۶۲

- ۲۳- نام کتاب: نگاهی به فیزیک
 نویسنده: ل. تاراسو. آ. تاراسو
 مترجم: علی معصومی
 ناشر: شرکت ایران چاپ - چاپ دوم، زمستان ۱۳۶۵
- ۲۴- نام کتاب: فیزیک برای سرگرمی
 نویسنده: ی. ا. پرلمان
 مترجم: احسان قوامزاده
 ناشر: انتشارات نیلوفر - چاپ چهارم، ۱۳۶۶
- ۲۵- نام کتاب: فیزیک (جلد اول)
 نویسنده: دیوید هالیدی - رابرت رزنیک
 مترجم: نعمت اله گلستانیان - محمود بهار [گلمبلی - مقبلی]
 ناشر: مرکز نشر دانشگاهی - ۱۳۶۶
- ۲۶- نام کتاب: آزمون‌های فیزیک
 نویسنده: سوزان لی
 مترجم: ناصر مقبلی
 ناشر: انتشارات دانا - چاپ اول، ۱۳۶۶
- ۲۷- نام کتاب: مبانی دینامیک اقیانوس‌ها
 نویسنده: و. ام. کامینکوویچ
 مترجم: پرویز مؤدب
 ناشر: چاپ مؤسسه اطلاعات - چاپ اول، ۱۳۶۶
- ۲۸- نام کتاب: پدیده‌های ارتعاش و انتشار
 نویسنده: ه. و. دراون
 مترجم: محمود مصلحی فرد - مصطفی علی شیرین‌پور
 ناشر: انتشارات دانشگاه تبریز - ۱۳۶۷

- ۲۹- نام کتاب: فیزیک دانشگاهی
 نویسنده: فرانسیس سیرز - مارک زیمانسکی
 مترجم: فضل اله فروتن
 ناشر: نشر علوم دانشگاهی - چاپ اول ۱۳۶۸
- ۳۰- نام کتاب: مکانیک برکلی
 نویسنده: شارل کتیل - والتر. د. نایت
 مترجم: صمد فرخی - ابوالقاسم قلم سیاه - منصور بینا
 ناشر: ؟
- ۳۱- نام کتاب: سرگذشت حرکت
 نویسنده: ف. نومان. دمیتری - ویج. ب. نیکوف
 مترجم: پرویز شهریاری
 ناشر: نشر گستره - چاپ اول، پاییز ۱۳۶۸
- ۳۲- نام کتاب: سرگرمی‌های فیزیک (جلد اول)
 نویسنده: ای. پرلمان
 مترجم: احمد تمدن
 ناشر: کتاب‌های سیمرغ وابسته به انتشارات امیرکبیر - چاپ دوم، ۱۳۶۸
- ۳۳- نام کتاب: فیزیک
 نویسنده: استفن پاپل
 مترجم: محمود بهار - اصغر لطفی
 ناشر: انتشارات علوی - چاپ اول، پاییز ۱۳۶۹
- ۳۴- نام کتاب: مرزهای فیزیک - ستاره‌شناسی
 نویسنده: فرد هویل - جایانت نارلیکا
 مترجم: بهزاد قهرمان
 ناشر: انتشارات آستان قدس رضوی - چاپ اول ۱۳۶۹

- ۳۵- نام کتاب: راهنمای آزمایش فیزیک
 نویسنده: محمد حسن ریاضی هدی
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات جهاد دانشگاهی صنعتی شریف - چاپ دوم، ۱۳۶۹
- ۳۶- نام کتاب: ماجراهایی با فیزیک
 نویسنده: تام دانکن
 مترجم: اختر رجبی
 ناشر: نشر مرکز - چاپ اول، ۱۳۷۰
- ۳۷- نام کتاب: مکانیک، مسائل فیزیک دانشگاهی
 نویسنده: س. پ. سترلکوف - آی. آ. یاکوولف
 مترجم: جهانشاه میرزابیگی
 ناشر: مرکز نشر دانشگاهی - چاپ اول، ۱۳۷۰
- ۳۸- نام کتاب: دوره فشرده فیزیک نظری (جلد اول: مکانیک و الکتروپدینامیک)
 نویسنده: لاندائو - لیف شیتز
 مترجم: رضا منصوری
 ناشر: مرکز نشر دانشگاهی -؟
- ۳۹- نام کتاب: فیزیک عمومی (جلد اول: مکانیک)
 نویسنده: آلونسو-فین
 مترجم: لطیف کاشیگر
 ناشر: مرکز نشری دانشگاهی -؟
- ۴۰- نام کتاب: پاسخنامه لرزش‌های مکانیکی
 نویسنده: تامسون
 مترجم: مهرداد خواجوی - رضا نخعی
 ناشر: نشر صدوق - چاپ اول، ۱۳۷۱

- ۴۱- نام کتاب: ۳۰۰۰ مسئله حل شده در فیزیک (۱) از سری کتاب‌های شومز
 نویسنده: الوین هالپرن
 مترجم: سوسن جاویدی
 ناشر: نشر بشری - چاپ اول، ۱۳۷۱
- ۴۲- نام کتاب: تشریح مسائل فیزیک دانشگاهی
 نویسنده: فرانسیس سیرز - مارک زیمانسکی
 مترجم: هادی عربشاهی - رضا یزدی
 ناشر: انتشارات استاد - چاپ اول، ۱۳۷۱
- ۴۳- نام کتاب: مکانیک
 نویسنده: کیث. ر. سایمون
 مترجم: اعظم نیرومندراد - غلامحسین همدانی
 ناشر: انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ سوم ۱۳۷۱
- ۴۴- نام کتاب: آشنایی با مکانیک کلاسیک
 نویسنده: آ. پ. آریا
 مترجم: جعفر گودرزی
 ناشر: ؟
- ۴۵- نام کتاب: فیزیک اوهانیان (جلد ۲)
 نویسنده: هانس اوهانیان
 مترجم: ناهید ملکی جیرسرای
 ناشر: انتشارات پوریا و نقش جهان - چاپ اول ۱۳۷۱ و ۱۳۷۲
- ۴۶- نام کتاب: راهنمای یادگیری فیزیک اوهانیان (جلد ۱ و ۲)
 نویسنده: ون. نی - پیترا رایلی
 مترجم: ناهید ملکی جیرسرای
 ناشر: انتشار ماد وابسته به نشر مرکز - ۱۳۷۱ و ۱۳۷۲

- ۴۷- نام کتاب: فیزیک
 نویسنده: م. فرانسوی
 مترجم: مختار تبریزی - لطیف کاشیگر
 ناشر: انتشارات دانشگاه تهران - مهر ۱۳۷۱
- ۴۸- نام کتاب: دستوره‌های فیزیک
 نویسنده: مازیار کاظمی - صفا برهانی
 مترجم: -
 ناشر: نشر اعتماد - چاپ اول، ۱۳۷۲
- ۴۹- نام کتاب: فیزیک دانشگاهی (جلد اول)
 نویسنده: هیویانگ - ویرایش هفتم، ۱۹۹۲
 مترجم: فضل اله فروتن
 ناشر: نشر علوم دانشگاهی
- ۵۰- نام کتاب: چگونه فیزیک را درک کنیم؟
 نویسنده: لوئیز اسپشتین
 مترجم: جهانشاه میرزابیگی
 ناشر: مترجم - چاپ اول، تابستان ۱۳۷۲
- ۵۱- نام کتاب: فیزیک در خدمت علوم بهداشت
 نویسنده: کارل. آر. نیو - برنداسی. نیو
 مترجم: علی اصغر تکالو
 ناشر: انتشارات آستان قدس رضوی - چاپ اول، ۱۳۷۲
- ۵۲- نام کتاب: تجزیه و تحلیل مسائل ایستایی
 نویسنده: جی. ال. مریام
 مترجم: اکبر فدایی ایام
 ناشر: انتشارات تلاش - چاپ دوم، ۱۳۷۲

- ۵۳- نام کتاب: تشریح کامل مسائل مکانیک تحلیلی
 نویسنده: گرونت فولز
 مترجم: علیرضا بینش
 ناشر: نشر کهن - چاپ اول، ۱۳۷۲
- ۵۴- نام کتاب: آزمون فیزیک و مکانیک
 نویسنده: چارلز رابرتسون - ج. پ. سون
 مترجم: جلال‌الدین پاشایی راد - فیروز آرش
 ناشر: کتاب ماد وابسته به نشر مرکز - چاپ اول، ۱۳۷۲
- ۵۵- نام کتاب: مکانیک تحلیلی
 نویسنده: گ. ر. فاولز
 مترجم: جعفر قیصری
 ناشر: مرکز نشر دانشگاهی -؟
- ۵۶- نام کتاب: فیزیک
 نویسنده: ویرا، هرولدس - اسلوشر
 مترجم: جلال‌الدین پاشایی راد
 ناشر: شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، چاپ اول، اسفند ۱۳۷۳
- ۵۷- نام کتاب: موفقیت در فیزیک
 نویسنده: تام دانکن
 مترجم: بهرام معلمی
 ناشر: کتاب ماد وابسته به نشر مرکز - چاپ اول، ۱۳۷۳
- ۵۸- نام کتاب: تجزیه و تحلیل مسائل مکانیک
 نویسنده: هالیدی
 مترجم: اکبر فدایی ایام - شهرام نوروزی حقیقی
 ناشر: انتشارات فتح دانش - چاپ اول، ۱۳۷۳

- ۵۹- نام کتاب: فیزیک مکانیک
 نویسنده: محمود قرآن نویس - حسین جوادی
 مترجم: -
 ناشر: مؤلفین - چاپ اول، اسفند ۱۳۷۳
- ۶۰- نام کتاب: فیزیک پیش‌دانشگاهی
 نویسنده: فردریک بیوکی
 مترجم: محمدرضا خواجه پور - احمد شایگان
 ناشر: انتشارات خوارزمی - چاپ اول، ۱۳۷۳
- ۶۱- نام کتاب: فیزیک زنده
 نویسنده: پیتر وارن
 مترجم: اسفندیار معتمدی
 ناشر: انتشارات مدرسه - چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴
- ۶۲- نام کتاب: راهنمای مسائل استاتیک
 نویسنده: فردیناند. بیبر - راسل جانسون
 مترجم: آرش ضیایی - بابک نظرزاده
 ناشر: انتشارات صفار - چاپ اول، ۱۳۷۴
- ۶۳- نام کتاب: دوره کامل مسائل فیزیک پایه - جلد اول مکانیک
 نویسنده: الوین هالپرن
 مترجم: محمد عابدینی - حسین بیدادی
 ناشر: انتشارات جزیل - چاپ دوم، تابستان ۱۳۷۴
- ۶۴- نام کتاب: ژيروسکوپ
 نویسنده: علی امام جمعه - رامز نجف تومرایی
 مترجم: -
 ناشر: چاپ اول ۱۳۷۴

- ۶۵- نام کتاب: فیزیک برای علوم زیستی
 نویسنده: آلن، اچ، کرومر
 مترجم: محمود بهار
 ناشر: نشر مبتکران - چاپ دوم، تابستان ۱۳۷۴
- ۶۶- نام کتاب: حل مسائل استاتیک
 نویسنده: سری شومز
 مترجم: ابراهیم دارابی
 ناشر: نشر دنیای نو - چاپ اول، تابستان ۱۳۷۴
- ۶۷- نام کتاب: فیزیک پیش دانشگاهی
 نویسنده: محمد قرآن نویس - حسین جوادی
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات ققنوس - چاپ اول، زمستان ۱۳۷۴
- ۶۸- نام کتاب: در قلمرو مکانیک (جلد اول و دوم)
 نویسنده: هامفری - دوپینگ
 مترجم: هوشنگ شریفزاده
 ناشر: ؟ - ۱۳۷۴
- ۶۹- نام کتاب: دینامیک کلاسیک، ذرات، و سیستم‌ها
 نویسنده: جری ماریون - استیفن تورنتون
 مترجم: جلال‌الدین پاشایی راد - بهرام معلمی
 ناشر: مرکز نشر دانشگاهی - چاپ اول، ۱۳۷۴
- ۷۰- نام کتاب: مبانی فیزیک
 نویسنده: ب. م. یاور سکی - ا. ا. پنیسکی
 مترجم: محمدتقی توسلی - مهرانگیز طالبزاده - ناصر مقبلی
 ناشر: نشر دانشگاهی - چاپ اول، ۱۳۷۴

- ۷۱- نام کتاب: راهنمای فیزیک دانشگاهی
 نویسنده: جیمز گانیز - ویلیام. ف. پالمر
 مترجم: فضل اله فروتن
 ناشر: انتشارات علوم دانشگاهی - چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴
- ۷۲- نام کتاب: آشنایی با دینامیک
 نویسنده: ا. پرسیوال - د. ریچاردز
 مترجم: نادر رابط
 ناشر: نشر دانشگاهی - چاپ اول، ۱۳۷۴
- ۷۳- نام کتاب: استاتیک
 نویسنده: ف. پیر - ا. راسل. جانسون
 مترجم: حمید لعل
 ناشر: انتشارت پرهام - چاپ اول، پاییز ۱۳۷۴
- ۷۴- نام کتاب: متمم دینامیک (جلد اول و دوم)
 نویسنده: سیدمحجوب مقدس
 مترجم: -
 ناشر: انتشارات دانشگاه امام حسین - چاپ اول، ۱۳۷۵
- ۷۵- نام کتاب: فیزیک عمومی (جلد اول)
 نویسنده: ریموند سروی
 مترجم: عزیز بهکامی - نعمت اله گلستانیان
 ناشر: انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی - چاپ چهارم، پاییز ۱۳۷۵
- ۷۶- نام کتاب: ۳۰۰۰ مسئله حل شده در فیزیک (۲) از سری کتابهای شومز
 نویسنده: ایون هالپرن
 مترجم: سوسن جاویدی
 ناشر: نشر اشاره - چاپ اول، زمستان ۱۳۷۵

- ۷۷- نام کتاب: دینامیک (جلد اول)
 نویسنده: جیمز مریام - گلن کریگ
 مترجم: سیدمحبوب مقدس
 ناشر: انتشارات دانشگاه امام حسین - چاپ اول، ۱۳۷۵
- ۷۸- نام کتاب: آشنایی با مکانیک
 نویسنده: دانیل کلپنر - رابرت. جی. کلنکو
 مترجم: هوشنگ سپهری - محمدعلی مقیمی - ولی اله ناصری
 ناشر: ؟ - ۱۳۷۶
- ۷۹- نام کتاب: فیزیک برای علوم حیاتی (جلد اول)
 نویسنده: آلن. اچ. کرومر
 مترجم: جمیل آریایی
 ناشر: انتشارات فانوس کرمان - چاپ دوم، ۱۳۷۶

II. انتشارات به زبان انگلیسی درباره مکانیک کلاسیک، و ریاضیات مورد نیاز در فیزیک، به ترتیب حروف الفبای نام نویسنده.

1. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th e. Academic Press, Orlando, Florida, 1995.
2. V. I., Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
3. A. Arya, *Introduction to classical Mechanics*, Upper Saddle River, 1998.
4. G. L. Baker and J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics*. Cambridge, New York, 1990.
5. V. Barger and M. Olsson, *Classical Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1995.
6. R. A. Becker, *Introduction to Theoretical Mechanics*. Mc Graw-Hill, New York, 1954.
7. T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics*. Wiley, New York, 1968 (reprinted by Krieger, Melbourne, Florida, 1981)

8. F. Byron and R. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
9. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1. Wiley (Interscience), New York, 1953.
10. A. D. Davis, *Classical Mechanics*. Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
11. H. F. Davis, *Introduction to Vector Analysis*. Allyn & Bacon, Boston, 1961.
12. H. F. Davis. *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Allyn & Bacon, Boston, 1963.
13. P. Dennery and A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*. Harper & Row, New York, 1967.
14. A. Einstein, *Relativity*, 15th ed. Crown, New York, 1961.
15. A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*, Mcgraw-Hill. 1980.
16. G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, Harcourt Brace College Publishers, Sixth edition, 1999.
17. A. P. French, *Newtonian Mechanics*. W. W. Norton, New York, 1971.
18. J. Gleick, *Chaos, Making a New Science*, Penguin Books, 1988.
19. H. Goldstein, *Classical Mechanics*. 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2002.
20. L. N. Hand and J. D. Finch, *Analytical Mechanics*, Cambridge Univ. Press, 1998.
21. R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford, New York, 1994.
22. W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
23. S. A. Kauffman, *the origins of order*, New York, Oxford University Press, 1993.
24. C. Kittel, Knight, W. D., and Ruderman, M. A. *Mechanics*, Berkeley Physics Course, vol. 1, McGraw-Hill, 1965.
25. C. Kleppner, and Kolenkow, R. J., *An Introduction to Mechanics*, McGraw-Hill, 1973.

26. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*. University of Toronto Press, Toronto, 1949.
27. L. D. Landau, and Lifshitz, E. M., *Mechanics*, third edition, Pergamon Press, reprinted 1986.
28. J. B. Marion, *Principles of vector Analysis*. Academic Press, New York, 1965.
29. J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Harcourt College Publishers. 4th edition, 1995.
30. J. Matthews and R. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 1977.
31. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, 2 vols. McGraw-Hill, New York, 1953.
32. E. Ott, *chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1993.
33. I. Prigogine, and Stengers, I., *Introduction to Dynamics*, Cambridge Univ. Press. 1982.
34. S. N. Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. Wiley, New York, 1990.
35. W. Rindler, *Introduction to Special Relativity*. Charendon, Oxford, 1982.
36. F. W. Sears, *Mechanics, Wave Motion, and Heat*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1958.
37. A. Sommerfeld, *Mechanics*. Academic Press, New York, 1964.
38. K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.
39. J. M. T. Thompson, and Stewart, H. B., *Nonlinear Dynamics and chaos*, John Wiley & Sons, 1986.
40. E. T. Whittaker, *A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4th ed. Cambridge University Press, London and New York, 1937 (reprinted by Dover, New York 1959).