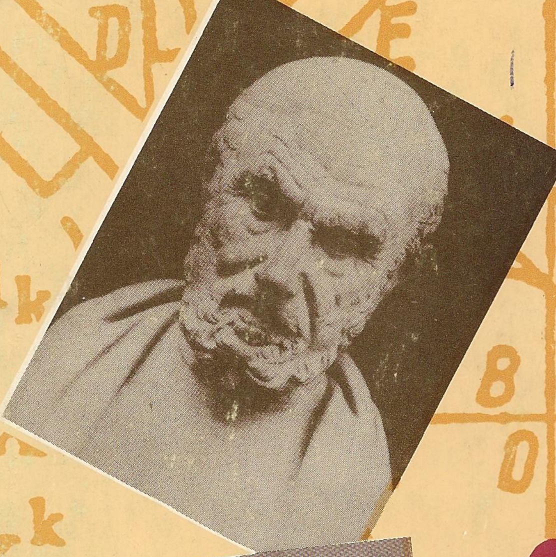
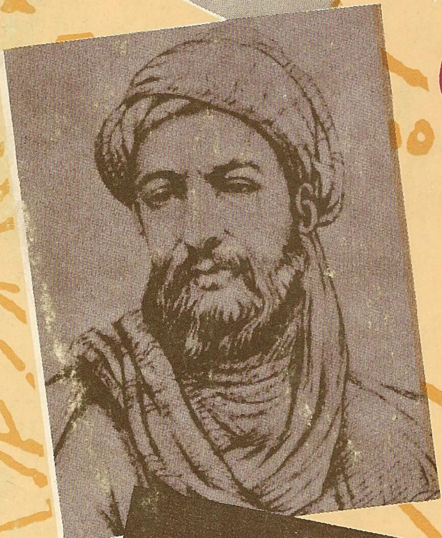
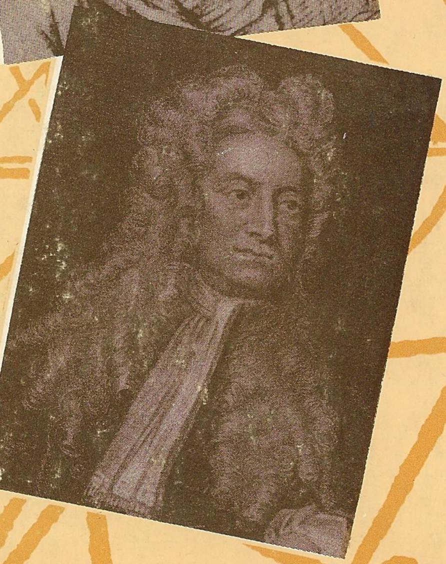






مسئله‌های تاریخی ریاضیات

واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف

ترجمهٔ پرویز شهریاری

واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف

مسأله‌های تاریخی ریاضیات

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشــر نی

نشر نی

تهران، صندوق پستی ۵۵۶ ــ ۱۳۱۴۵، نشر نی
(تلفن: ۶۴۶۸۲۰۳)

واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف

مسئله‌های تاریخی ریاضیات

ترجمهٔ پرویز شهریاری

چاپ سوم: ۱۳۷۴، تهران

تیراژ: ۳۳۰۰ جلد

چاپ: غزال

شابک ۴-۰۵۵-۳۱۲-۹۶۴

ISBN 964-312-055-4

Printed in Iran

شامل مسأله‌هایی از حساب، جبر و هندسه، که از کتاب‌های دانشمندان بزرگ سرزمین‌های بابل، مصر، یونان، چین، هند، ایران، روسیه و اروپای غربی استخراج شده است، همراه با یادداشت‌های تاریخی و زندگی‌نامهٔ کوتاه ریاضی دانان.

فهرست

فصل اول

متن مسأله‌ها

۱ • مساله‌های بابلی

۱. بابلی‌ها، برای پیداکردن محیط‌دایره، محیط شش‌ضلعی محاط‌در آن را به‌دست می‌آوردند. مقدار تقریبی π را، به‌نحوی که مورد استفادهٔ بابلی‌ها بود، پیدا کنید.

۲. زاویهٔ قائمه را به‌سه‌قسمت برابر تقسیم کنید.

۳. بابلی‌ها، برای محاسبهٔ مساحت یك چهار ضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دوضلع دیگر ضرب می‌کردند. روشن کنید، در چه‌نوع چهارضلعی‌هایی، این روش محاسبه، مساحت را به‌طور دقیق به‌دست می‌دهد.

بابلی‌ها، همچنین، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، اغلب، طول یك ساق را در نصف قاعدهٔ مثلث ضرب می‌کردند. روشن کنید، با چه فرضی، رابطهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، حالتی حدی (یا حالتی خاص) از رابطهٔ تعیین مساحت چهارضلعی می‌شود.

۲ • مساله‌های مصری

از پاپیروس ریند

۴. عددی را پیدا کنید که اگر $\frac{۲}{۳}$ آن‌را به‌خودش اضافه کنیم و، سپس،

از مجموعی که به‌دست می‌آید، ثلث آن را کم کنیم، عدد ۱۰ حاصل شود.

۵. هفت نفر هر کدام هفت گربه دارند. هر گربه می‌تواند هفت موش را بگیرد، هرموش می‌تواند هفت خوشهٔ جو را بجودو هر خوشه، هفت جو دارد. بزرگترین عدد این ردیف ومجموع آن‌ها کدام است؟

۶. مصری‌ها، به‌جای مساحت دایره، مساحت مربعی رادرنظر می‌گرفتند که ضلع آن برابر $\frac{۸}{۹}$ قطردایره باشد. ازاین‌جا، مقدارتقریبی عدد π را پیدا کنید.

۷. مصری‌ها، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصل‌ضرب قاعدهٔ آن را دریکی از ساق‌ها، به‌دست می‌آوردند. درصد اشتباه آن‌ها را، برای حالتی که قاعدهٔ مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

۸. مصری‌ها، برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، حاصل ضرب نصف مجموع دو قاعدهٔ آن را، در یکی از ساق‌ها به‌دست می‌آوردند. اگر ازاین راه، مساحت ذوزنقه‌ای را به‌دست‌آوریم که قاعدهٔ پایین آن برابر ۶، قاعدهٔ بالای آن برابر ۴ ویکی ازساق‌های آن برابر ۲۰ باشد، درصد اشتباه را پیدا کنید.

از پاپیروس مسکو

۹. حجم هرم ناقصی راپیداکنید که ارتفاع آن برابر ۶، ضلع مربع قاعدهٔ پایین آن برابر ۴ وضلع مربع قاعدهٔ بالای آن برابر ۲ باشد.

۱۰. اگر مساحت و نسبت ضلع‌های یک مستطیل معلوم باشد، طول ضلع‌های آن را پیدا کنید.

از پاپیروس آخمیم

۱۱. کسی $\frac{۱}{۱۳}$ خزانه را برداشت دیگری $\frac{۱}{۱۷}$ آن چه راکه باقی مانده بود برداشت. درخزانه ۱۵۰ باقی‌ماند. درابتدا، در خزانه چقدر بوده‌است؟

۳. مساله‌های یونانی

از فیثاغورث

۱۲. ثابت‌کنیـد، مربعی‌که روی وتـر یك مثلث قائم‌الزاویـه ساخته می‌شود، برابـراست با مجموع مربع‌هایی‌کـه روی دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، ساخته شده‌اند.

۱۳. همهٔ عددهای فیثاغوری راپیدا کنید، یعنی‌همهٔ سه‌تایی‌های درست ومثبت x و y و z، که درمعادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ صدق می‌کنند.

۱۴. مجموع جمله‌های هر رشته‌ای ازعددهـای فرد متوالی، که از ۱ آغاز شده باشد، مجذورکامل است.

۱۵. هرعدد فرد، به‌جز واحد، تفاضلی از دو مجذورکامل است.

درمکتب فیثاغوری، این حکم را، برای نمونه‌هایی خاص وبه طریق هندسی، ثابت‌کرده بودند. ولـی چگونه؟کوشش‌کنید، ایـن حکم را، بدون استفاده ازشکل‌های هندسی و درحالت‌کلی، ثابت‌کنید.

از بقراط خیوسی

۱۶. نیم دایره‌ای، به‌قطر وتـر مثلث قائم‌الزاویه رسم‌کـرده‌ایم. این نیم دایره، از راس زاویهٔ قائمه می‌گذرد. نیم دایره‌های دیگری، به قطر هر کدام از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ همان مثلث و دربیرون مثلث، رسم می‌کنیم. ثابت‌کنید، مجموع مساحت‌های دوهلالی‌که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، (هلال‌های بقراط)، برابراست با مساحت خود مثلث.

از اقلیدس

۱۷. روی پاره‌خط مفروض AB، مثلث متساوی الاضلاعی بنا کنید.

۱۸. زاویهٔ مفروضی را به دوبخش برابرتقسیم‌کنید.

۱۹. متوازی‌الاضلاعی بسازیدکه‌زاویهٔ بین‌دوضلع‌آن معلوم ومساحت

آن برابربا مساحت مثلث مفروضی باشد.

۲۰. در دایرهٔ مفروض، مثلثی محاط کنید که با مثلث مفروض متشابه باشد.

۲۱. پاره‌خطی را به دو قسمت چنان تقسیم کنیدکه مساحت مستطیلی که با خود پاره‌خط ویکی ازبخش‌های‌آن ساخته می‌شود، هم‌ارز مربعی باشد که با بخش دیگر پاره‌خط ساخته شده است (مسالهٔ تقسیم طلایی).

۲۲. ثابت‌کنید، عددهای‌اول، دنباله‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

ازآپولونیوس

۲۳. دایره‌ای رسم کنیدکه برسه دایرهٔ مفروض مماس باشد.

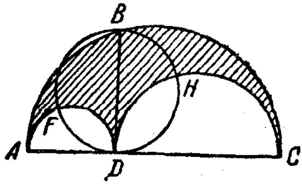
از ارشمیدس

۲۴. ثابت کنید، مساحت دایـرهٔ محیطی یك مربع، دو برابر مساحت دایرهٔ محاطی‌آن است.

۲۵. ارشمیدس ثابت کـرد: ۱) هر دایـره، هـم ارز است بـا مثلث قائم الزاویه‌ای‌که یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، برابر شعاع دایره، و ضلع دیگر مجاور به زاویه قائمه برابـرمحیط باز شدهٔ دایره باشد؛ ۲) نسبت مساحت دایره به‌مجذور قطرآن، برابر است با نسبت ۱۱ به ۱۴.

ثابت‌کنیدکه، طبق این دو گزارهٔ ارشمیدس، مساحت دایره برابر است بـا $\frac{22}{7}r^2$.

۲۶. نیم‌دایرهٔ ABC به قطر AC مفروض است. از نقطهٔ B واقع بر محیط‌آن، عمود BD را بـر AC فرودآورده‌ایـم ونیم دایره‌های AFD و DHC را، به‌ترتیب، به‌قطرهای AD و DC رسم کـرده‌ایـم (شکـل ۱). ثابت کنیـد، مساحـت AFDHCB، شکلی کـه بـه ایـن ترتیب بـه‌دست می‌آید، برابـر است با مساحت دایرهٔ به‌قطرBD



شکل۱

۲۷. مساحت قطاع کروی برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن برابر باشد با پاره‌خطی که راس قطـــاع را به‌یکی از نقطه‌های محیط قاعدهٔ آن وصل می‌کند.

۲۸. کره‌ای پیدا کنید که حجمی برابر با حجم یك مخروط یا یك استوانهٔ مفروض، داشته باشد.

۲۹. استوانه‌ای که قاعده‌اش، دایرهٔ عظمیهٔ یك کـره و ارتفاعش برابر قطر همین کـره باشد، حجمی برابر $\frac{۳}{۲}$ حجم کره و سطح کلی برابر $\frac{۳}{۲}$ سطـح کره خواهد داشت.

۳۰. مطلوب است، مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعد هندسی نزولی

$$۱+\frac{۱}{۴}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}+\dots$$

۳۱. مطلوب است مجموع مجذورهای n عدد طبیعی نخستین.

۳۲. عددی را نام ببرید که نه‌تنها از تعداد شن‌های داخل کره‌ای برابر کرهٔ زمین، بلکه از تعداد شن‌های به‌اندازهٔ تمامی جهان، بیشتر باشد. به‌شرطی که تمامی جهان را برابر کره‌ای بگیریم که مرکز آن درمرکز زمین و شعاع آن برابر فاصلهٔ بین مرکز زمین و مرکز خورشید باشد.

۳۳. به کمك خط‌کش و پرگار، یك هفت ضلعی منتظم را، به تقریب، رسم کنید.

۳۴. مسالهٔ گاوها (با جزئی تغییر در بیان مساله):

چند گاو درسرزمین آفتاب است، برای من حساب کن ای بیگانه
(اگر از خرد بیگانه نباشی، آن هارا با اندیشهٔ خود حساب کن).
آن‌ها در دشت‌های پرعلف جزیرهٔ سیسیل
زمانی، درچهار گلهٔ بزرگ، به‌چرا مشغول بودند.
گله‌ها را با رنگ می‌شد تمیز داد: یکی به‌رنگ سفید
همچون کهکشان می‌درخشید،
رنگ گلهٔ دیگر، به‌رنگ موج‌های تیرهٔ دریایی بود.
گلهٔ سوم کرند و آخری رنگارنگ

و در هرکدام
مجموعه‌ای ازگاوهای نر با نیرویی فوق‌العاده،
که‌بین‌آن‌ها، این تناسب حفظ می‌شود:
(وتو باید درنظر بگیری، ای بیگانه)،
تعدادگاوهای نرسفید، دقیقاً برابراست با
نصف و ثلث گاوهای نرتیره و تمام‌کرندها؛
تعدادگاوهای نرتیره، برابراست با یك چهارم
گاوهای نر چند رنگ به اضافهٔ یك پنجم‌آن‌ها وتمام‌کرندها،
گاوهای باپشم چند رنگ هم به‌این تعدادند:
به‌اندازهٔ یك ششم ویك هفتم‌گاوهای نقره‌ای
وتمامی‌گاوهای نرکرند.
وحالا می‌رسیم به‌گروه‌های‌گاوهای ماده: تعداد سفیدها
برابراست با تمامی‌گاوهای نر ومادهٔ تیره،
به‌شرطی‌که یك چهارم ویك سوم‌آن‌ها را روی هم بریزی.
تعدادگاوهای مادهٔ سیاه هم درست،
یك چهارم تمام‌گاوهای چند رنگ است، به‌شرطی‌که
دوباره یك پنجم‌آن‌ها را به‌آن اضافه‌کنی.
واگر، درآن جمله، ازتمام‌گاوهای‌کرند،
یك پنجم ویك ششم را بگیری و روی هم بریزی،
به‌اندازهٔ گاوهای مادهٔ چند رنگ می‌شود.
برای‌گاوهای مادهٔ کرند هم، باید
از تمامی‌گلهٔ سفید، یك ششم ویك هفتم را جدا کنی،
تو می‌گویی، چندگاو نر در سرزمین‌آفتاب وجود دارد؟
تعدادگاوهای نر را به‌طور جداگانه، نام ببر.
همین‌طور، تعدادگاوهای ماده را در رنگ‌های جداگانه.
دراین صورت، هیچ‌کس تو را ازجاهلان نخواهد دانست.
برای تعدادگاوهای نر از سرزمین‌آفتاب، بازهم حرف‌هایی داریم:
اگرگاوهای نر سفید وتیره را، دریك‌جا، جمع‌کنی،

طوری که هم درطول وهم درعرض، تنگ هم قرار گیرند،
آن وقت، سرزمین وسیعی از سیسیل را خواهند پوشاند،
که مربع کاملی، با مساحتی بزرگ، خواهد بود.
اگر هم گاوهای نر کرند وچند رنگ را
به‌صورت یك گله درآوری،
می‌توانی آن‌ها را در زمینی به‌شکل مثلث تنگ هم جا دهی.
لزومی ندارد، رنگ‌های دیگر را به‌هم اضافه کنیم.

مساله‌های مشهور و قدیمی هندسه

۳۵. مسالهٔ تضعیف (دو برابرکردن) مکعب. می‌خواهیم یال مکعبی‌را رسم کنیم که حجم آن دوبرابر حجم مکعب مفروض باشد.

۳۶. مسالهٔ تثلیث زاویه. مـی خواهیم زاویهٔ غیر مشخصی را، به سه قسمت برابر تقسیم کنیم.

۳۷. مسالهٔ تربیع دایره. مربعی‌رسم کنید که‌مساحت‌آن، برابربا مساحت دایرهٔ مفروض باشد.

از هیسیکلس اسکندرانی

۳۸. ثابت کنید، اگـر تعداد جمله‌های یك تصاعد حسابی زوج باشد، مجموع جمله‌های نیمهٔ دوم آن، بـه‌اندازهٔ مضربـی از مجذور نصف تعداد جمله‌ها، از مجموع نیمهٔ نخست‌آن بیشتر است.

از هرون

۳۹. مطلوب مساحت مثلثی که طول ضلعهای آن، چنین باشد:

$$a=۱۳,\ b=۱۴,\ c=۱۵$$

۴۰. مثلث‌هایی راپیدا کنیدکه مساحت‌هرکدام ازآن‌ها، باعددی‌درست بیان شود (مثلث‌هـای هرون) و، ضمناً، طـول ضلع‌های آن‌هـا، عددهایـی پشت سرهم باشند.

از نیکوماکوس

۴۱. ثابت کنید، اگر دنبالهٔ عددهای فرد را، به گروه‌هایی، چنان تقسیم کنیم که، تعداد جمله‌های این گروه‌ها، دنبالهٔ عددهای طبیعی را تشکیل دهند، [یعنی در گروه اول یك جمله، در گروه دوم دو جمله، ... و در گروه nام n جمله وجود داشته باشد]، مجموع جمله‌های هر گروه، برابر با مکعب تعداد جمله‌های آن است.

از بطلمیوس

۴۲. ثابت کنید، در هر چهارضلعی محاطی، حاصل‌ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های دو به‌دوی ضلع‌های روبه‌رو.

از دیوفانت (در «رسالهٔ حساب»)

۴۳. سه عدد طوری پیدا کنید که عدد بزرگتر به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ عدد کوچکتر، از عدد متوسط بیشتر باشد، همچنین، عدد متوسط به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ عدد بزرگتر، از عدد کوچکتر بیشتر باشد و، بالاخره، عدد کوچکتر، به‌اندازهٔ ۱۰ واحد از $\frac{۱}{۳}$ عدد متوسط بیشتر باشد.

۴۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y=۱۰ \\ x^{۲}+y^{۲}=۶۸ \end{cases}$$

۴۵. یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مکعب کامل است. ضلع دیگر پهلوی زاویهٔ قائمهٔ این مثلث، برابر است با تفاضل همان ضلع و کعب آن؛ و وتر مثلث برابر با مجموع آن ضلع و کعب آن است. ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

۴۶. می‌خواهیم عدد ۱۰۰ را دوبار طوری تقسیم کنیم که قسمت بزرگتر تقسیم اول، دو برابر قسمت کوچکتر تقسیم دوم و قسمت بزرگتر تقسیم دوم، سه برابر قسمت کوچکتر تقسیم اول باشد.

۴۷. دوعدد پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۲۰ وحاصل‌ضربشان ۹۶ باشد.

۴۸. دوعدد پیدا کنید که نسبت آن‌ها برابر ۳ و نسبت مجموع مجذورهای آن‌ها به‌مجموع آن‌ها برابر ۵ باشد.

۴۹. سه عدد پیدا کنید، به‌نحوی که حاصل‌ضرب مجموع دوعدد اول و دوم درعدد سوم برابر ۳۵، حاصل‌ضرب مجموع دوعدد اول وسوم در عدد دوم برابر ۲۷ و حاصل‌ضرب مجموع دوعدد دوم وسوم درعدد اول، برابر ۳۲ باشد.

۵۰. دوعدد پیدا کنید که، اگرحاصل‌ضرب آن‌ها را به‌هرکدام ازدوعدد اضافه کنیم، درهرحال، یك مکعب کامل به‌دست آید.

۵۱. سه عدد طوری پیدا کنید که هم مجموع آن‌ها و هم هرکدام از مجموع‌های دوبه‌دوی آن‌ها، مجذور کامل باشد.

از پاپوس اسکندرانی (در رسالهٔ «مجموعهٔ ریاضیات»)

۵۲. نقطهٔ P بر نیمساز زاویه‌ای داده شده است. از این نقطه، خط راستی چنان رسم کنید که پاره خطی ازآن، که محدود به‌دوضلع زاویه است، برابر طول مفروض باشد.

۵۳. ثابت کنید، نسبت مساحت‌های دوقطعهٔ متشابه در دو دایره، برابر است بانسبت مربع وترهایی که قاعدهٔ این دو قطعه را تشکیل می‌دهند.

۵۴. روی یکی از ضلع‌های یك مثلث غیرمشخص، متوازی‌الاضلاعی ساخته‌ایم، به‌نحوی که قسمتی ازآن درداخل مثلث قرار گیرد و دو رأس آن در دوطرف ضلع‌های دیگر مثلث و در بیرون آن‌ها واقع باشند. سپس، روی هرکدام از دوضلع دیگر متوازی‌الاضلاع‌هایی می‌سازیم که درخارج مثلث واقع شوند وضلع‌هایی از آن‌ها که موازی ضلع‌های مثلث‌اند، از رأس‌های متوازی الاضلاع قبلی بگذرند. ثابت کنید، مساحت متوازی‌الاضلاع اول، برابر است با مجموع مساحت‌های دومتوازی‌الاضلاع دیگر.

از «جُنگ یونانی»

۵۵. به‌من بگو، فیثاغورث نام‌دار، چند شاگرد به‌مکتب تو می‌آیدو

به‌بحث‌های تو گوش می‌دهد؟
وفیثاغورث پاسخ داد:
ـ تعداد آن‌ها چنان است که نیمی ازآن‌ها ریاضیات می‌خوانند، یك چهارم آن‌ها، نواهای دلنواز موسیقی را فرا می‌گیرند، یك هفتم آن‌ها در حال تفکرند و، به‌جز این‌ها، سه زن هم وجود دارد.

۵۶. الاغ وقاطر، با بارسنگینی که برپشت خودداشتند، پهلو به‌پهلوی هم راه می‌رفتند. الاغ ازبار بی‌اندازه سنگین خود شکوه می‌کرد. قاطر به‌او پاسخ داد: «تو چرا گله‌داری؟ اگر من یك کیسه ازتو بگیرم، بار من درست دوبرابر تو خواهد شد، درحالی‌که اگر تو یك کیسه ازمن بگیری، آن وقت، بارهایمان برابر خواهد شد». الاغ و قاطر، هرکدام، چندکیسه بار برپشت خود دارند؟

۵۷. ای الههٔ زمان، چه قسمتی از روزگذشته است؟
ـ دوبرابر دوسوم آن چه گذشته، هنوز باقی مانده است (در یونان باستان، روز را ۱۲ ساعت به‌حساب می‌آوردند).

از مترودور

۵۸. این‌جا دیوفانت آرمیده است واین، سنگ مزار اوست.
با حسابی هنرمندانه، برای ما حکایت می‌کند.
که زندگی او چقدر طول کشیده است.
به‌فرمان یزدان، کودکی او، یك ششم زندگی او بود،
جوانی او، دریك دوازدهم زندگی او بود.
یك هفتم زندگیش را درزناشویی بدون فرزندگذراند.
پنج سال که گذشت، پسراو به‌دنیا آمد.
ولی چه بدبختی! پسر به‌اندازهٔ نیمی از زندگی پدر عمرکرد.
دیوفانت، چهار سال آخر عمرش را، در غم از دست دادن فرزندش به‌سر برد.
و او که برای دانش زندگی می‌کرد، مرد.
به‌من بگو، دیوفانت چند سال زیسته است؟

۴. مساله‌های چینی

از رسالهٔ «نه فصل از هنر محاسبه»

۵۹. ۵ گاو و ۲ گوسفند، ۱۱ «تاول» می‌ارزند؛ ولی ۲ گاو و ۸ گوسفند، ۸ «تاول» قیمت دارند. قیمت هر گاو و هر گوسفند، چقدر است؟

۶۰. سه دزد ازسه‌بشکهٔ برنج‌یا گنجایش برابر، مقداری‌برنج دزدیدند. معلوم شد، در بشکهٔ اول ۱ «هو»، دربشکهٔ دوم ۱ «شینگک» و ۲ «هو»، و در بشکهٔ سوم ۱ «هو» برنج باقی مانده است. دزدها شهادت دادند: اولی از بشکهٔ اول و با بیلچه، دومی از بشکهٔ دوم و باکفش چوبی و سومی از بشکهٔ سوم و با کاسه، برنج برداشته‌اند. بیلچه ۱ «شینگک» و ۹ «هو»، کفش چوبی ۱ «شینگک» و ۷ «هو» و کاسه ۱ «شینگک» و ۲ «هو» گنجایش دارند.

هردزد چقدر برنج برده است، به‌شرطی‌که ۱۰ «هو» برابر ۱«شینگک»، ۱۰ «شینگک» برابر ۱ «تااو» و ۱۰ «تااو»، برابر ۱ «شی» باشد.

از رسالهٔ آغاز هنر محاسبه

۶۱. اگرمساحت ومحیط یك مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلع‌های آن را پیدا کنید.

از سون تزی

۶۲. عددی پیدا کنیدکه درتقسیم بر ۳، به باقی‌ماندهٔ ۲، در تقسیم‌بر ۵ به‌باقی ماندهٔ ۳ و، سرانجام، درتقسیم‌بر ۷ به‌باقی ماندهٔ ۲ برسد.

از رسالهٔ «ریاضیات درنه‌کتاب»

۶۳. انباری‌داریم به‌عرض ۳ «چژان» وطول ۴ «چژان» و ۵ «چی». این انبار را با ۱۰۰۰۰ «هو» نمك پر کرده‌ایم. ارتفاع انبار چقدر است؟

۶۴. خیزرانی داریم‌که از ۹ بند تشکیل شده است. حجم ۳ بند پایینی ۴ «شه‌نا» وحجم ۴ بند بالایی بالایی۳ «شه‌نا» است. می‌خواهیم حجم ۲ بند

دیگر را پیدا کنیم، به شرطی که تفاوت حجم هر دو بند متوالی، مقدار ثابتی باشد.

۶۵. ۹ شمش طلا و ۱۱ شمش نقره داریم. وزن شمش‌های طلا برابر است با وزن شمش‌های نقره. یکی از شمش‌های طلا را با یکی ازشمش‌های نقره عوض کرده‌ایم، وزن طلاها ۱۳ «لان» سبک‌تر شد. وزن هرشمش طلا و هر شمش نقره چقدر است؟

۶۶. اسبی راهوار و اسبی بی‌زور از «چایتانی» به‌طرف شاهزاده‌نشین «تسی»، که ۳۰۰۰ «لی»، با «چایتانی» فاصله داشت، حرکت‌کردند. اسب راه وار در روزاول ۱۹۳ «لی» وروزهای بعد، هرروز۱۳ «لی» بیشتر دوید. اسب بی‌زور روز اول ۹۷ «لی» و روزهای بعد، هر روز نیم «لی» کمتر حرکت‌کرد. اسب راهوار، که اول به‌شاه زاده‌نشین رسیده بود، بلافاصله برگشت و در نقطه‌ای به‌اسب بی‌زور رسید. می‌خواهیم بدانیم، بعداز چند روز به‌هم رسیده‌اند و، در این مدت، هرکدام چقدر راه رفته‌اند؟

۶۷. ۵ گاومیش و ۲ گوسفند، ۱۰ «لین» طلا و ۲ گاومیش و ۵ گوسفند، ۸ «لین» می‌ارزند. قیمت هرگاومیش و هرگوسفند چقدر است؟

۶۸. از ۳ خرمن خوب، ۲ خرمن متوسط و ۱ خرمن بد، ۳۹ «دواو» غله به‌دست آمده است. از ۲ خرمن خوب، ۳ خرمن متوسط و۱ خرمن بد، ۳۴ «دواو» و، بالاخره، از ۱ خرمن خوب، ۲ خرمن متوسط و۳ خرمن بد، ۲۶ «دواو». می‌خواهیم بدانیم، از هر نوع خرمن، چقدر محصول به‌دست می‌آید؟

۶۹. از ۲ خرمن خوب، ۳ خرمن متوسط و۴ خرمن بد، محصول‌هایی به‌دست آورده‌ایم‌که، به‌ترتیب، به‌اندازهٔ محصول ۱ خرمن متوسط، ۱خرمن بد و ۱ خرمن خوب، کمتر از ۱ «دواو» است ازهر نوع خرمن، چقدر غله می‌توان به‌دست آورد.

۷۰. وزن ۲ خرمن A، یک «دان» از وزن خرمن B بیشتر است و وزن ۳ خرمن B، یك «دان» از وزن خرمن C بیشتراست و، بالاخره، وزن ۴ خرمن C، یک «دان» از وزن خرمن A بیشتر است وزن هرکدام از خرمن‌های A، B و C چقدر است؟

۷۱. ۲ گاومیش و ۵ گوسفند فروختند؛ با پول آن ۱۳ خوك خریدند، ۱۰۰۰ «تسیان» باقی مانده. ۳۰ گاومیش و ۳ خوك فروختند، ۹ گوسفند خریدند، چیزی باقی‌نماند. ۶ گوسفند و ۸ خوك فروختند، ۵ گاومیش خریدند، ۶۰۰ «تسیان» کم آوردند. قیمت هر گاومیش، هر گوسفند و هر خوك چقدر است؟

۷۲. ۵ خانواده، یك چاه مشترك دارند. این خانواده‌ها، برای آوردن آب به‌سطح زمین، طناب‌های خودرا آزمایش کردند. برای این منظور، معلوم شد که ۲ طناب خانوادهٔ A به‌اندازهٔ ۱ طناب B ازعمق چاه کمتر است. همچنین ۳ طناب خانوادهٔ B به‌اندازهٔ یك طناب خانوادهٔ C کوتاه است؛ ۴ طناب خانوادهٔ C به‌اندازهٔ یك طناب خانوادهٔ D کوتاه است؛ ۵ طناب خانوادهٔ D به‌اندازهٔ ۱ طناب خانواده E و، بالاخره، ۶ طناب خانوادهٔ E به‌اندازهٔ یك طناب خانوادهٔ A کوتاه است. عمق چاه و طول هر طناب از هر خانواده چقدر است؟

۷۳. برکهٔ آبی به‌ضلع ۱ «چژان» وجود دارد. در مرکز آن، یك نی روییده است که درست ۱ «چی» از آب بیرون زده است. اگر نی را به‌طرف کنار برکه خم کنیم، سر نی به‌کنار برکه می‌رسد. عمق برکه وارتفاع نی را پیدا کنید (هر «چژان» برابر است با ۱۰ «چی»).

۷۴. دو نفر دریك جا ایستاده‌اند. معیار راه رفتن A برابر ۷ و معیار راه رفتن B برابر ۳ می‌باشد. B به طرف مشرق می‌رود. A ، ۱۰ «بو» به طرف جنوب می‌رود، بعد راه خود راکج می‌کند و به طرف شمال شرقی حرکت می‌کند، تا به B برسد، هرکدام از دو نفر A و B چقدر راه رفته‌اند؟

۷۵. دری وجود دارد که ارتفاع آن، به‌اندازهٔ ۶ «چی» و ۸ «تسون» ازعرض آن بیشتراست. بزرگترین فاصلهٔ بین رأس‌های آن (قطر)، ۱ «چژان» است. ارتفاع وعرض در را پیدا کنید.

۷۶. شهری‌است به‌شکل مربع، باطول ضلع مجهول. در وسط هرکدام ازضلع‌های آن یك دروازه قرار دارد. در فاصلهٔ ۲۰ «بو» از دروازهٔ شمالی یك ستون واقع‌است. اگر از دروازهٔ جنوبی به‌اندازهٔ ۱۴ «بو» به‌طرف جنوب برویم وبعد ۱۷۷۵ «بو» به‌طرف مغرب برگردیم، می‌توانیم ستون را ببینیم.

مطلوب است طول ضلع شهر.

۷۷. قطر یـک چاه برابر ۵ «چی» و عمق آن مجهـول است. درکنار محیط بالای‌چاه، دیرکی به‌ارتفاع ۵ «چی» قرار دارد. رأس دیرك باسطح‌آب درجایی‌که با دیوار چاه تماس دارد ونقطه‌ای ازقطردهانه چاه‌که باکنارهٔ آن ۴ «تسون» فـاصله دارد ، روی یـک خط راست قـرار دارند. عمق چـاه را پیدا کنید.

۷۸. مخروطی داریم‌که محیط قاعدهٔآن ۳ «چژان» و۵ «چی» وارتفاع آن ۵ «چژان» و ۱ «چی» می‌باشد. حجم مخروط چقدر است؟

۷۹. مخروط ناقص دواری داریم‌که قاعدهٔ پایین‌آن ۳ «چژان»، محیط قـاعدهٔ بـالای آن ۲ «چـژان» و ارتفاع آن ۱ «چـژان» است. حجم آن را پیدا کنید.

۸۰. ضلع افقی یـک مثلث ۱ «یو» و ضلع قـائم آن ۱۲ «یـو» است. مطلوب است طول ضلع مربع محاط دراین مثلث.

۸۱. ستون درفاصلهٔ مجهولی از یك شخص قرار دارد. ۴ سکو داریم که دو به‌دو به‌فاصلهٔ ۱ «چژان» ازیکدیگر قرار دارند. ناظری چنان ایستاده است‌که سکو درسمت چپ او واقع شده است وخودش درکنار سکـوی طرف راست و پایین ایستاده است. ایـن ناظر، ستون را در فـاصلهٔ ۳ «تسون» از سکوی بالا وسمت راست می‌بیند. فاصلهٔ شخص را تا ستون پیداکنید.

۸۲. کوه درغرب ستون قرار دارد و ارتفاع آن مجهول است. فاصلهٔ کوه تا ستون، بـرابـر ۵۳ «لی» است. ارتفاع ستون، برابر ۹ «چژان» و ۵ «لی» است. شخصی درفاصلهٔ ۳ «لی» درشرق ستون ایستاده است و قلهٔ‌کوه را با رأس ستون در یك امتداد می‌بیند. چشم این شخص درارتفاع ۷ «چی» واقع شده است. ارتفاع‌کوه را پیداکنید.

از لیو هوئه

۸۳. روی تپه‌ای، درخت‌کاجی باارتفاع مجهول روییده است. پایین، در جلگه، دو دیرك، هرکدام به ارتفاع ۲۰ پا (a)، طوری قرار دارندکه با درخت دریك خط راست و به فاصلهٔ ۵۰ گام (b) از یکدیگر واقـع شده‌اند.

رأس درخت و انتهای دیرك اول، خط راستی تشکیل می‌دهندکه درفاصلهٔ ۷ گام و ۴ پایی دیرك به‌زمین می‌رسد (c). رأس درخت و انتهای دیرك دوم، خط راستی تشکیل می‌دهندکـه درفاصلهٔ ۸ گام و ۵ پایی دیرك (d) به زمین می‌رسد. می‌خواهیم، ارتفاع‌درخت‌کاج (x) وفاصلهٔ دیرك اول‌را ازتپهٔ(y)، پیدا کنیم.

۵• مساله‌های هندی

از رسالهٔ باهشالی

۸۴• چهار نفر، هرکدام مقداری نیازکردند. سهم نیاز دومی دو برابر اولی، سومی سه برابردومی وچهارمی چهاربرابر سومی بود. آن‌ها روی‌هم ۱۳۲ ریال دادند. اولی چقدر داده است؟

۸۵• عددی پیداکنیدکه اگر ۵ واحد به‌آن‌اضافه یا ۱۱ واحد ازآن‌کم کنیم، درهرحال مجذورکامل به‌دست آید.

از سرید هاری

۸۶• یك پنجم ازگروه زنبورهای عسل روی یك درخت‌گل ویك‌سوم آن‌هاروی درخت‌گل دوم نشستند. سه‌برابرتفاوت این دودسته، روی‌درخت گل سوم جاگرفتند، و یك زنبور باقی‌مانده بین‌کندو و درخت درپرواز بود. تعداد همهٔ زنبورها چقدر است؟

از آریابهاتا

۸۷• دوستاره به‌فاصلهٔ‌معینی (d) ازیکدیگرواقع‌شده‌اند وباسرعت‌های مفروضی (v_1 و v_2) به طـرف یکدیگـر می‌روند. نقطهٔ برخـورد آن‌ها را پیدا کنید.

۸۸• تعداد هسته‌های یك تودهٔ مثلثی را پیدا کنید.

۸۹• سرمایـهٔ دو نفر باهم بـرابـر است. ضمناً هرکدام ازآن‌ها تعداد

معلومی کالا و مقدار معلومی پول نقد دارند. قیمت هر کالا مقدار ثابتی است. ولی هم تعداد کالای هر کدام و هم مقدار پول نقد هر کدام، با دیگری فرق دارد. قیمت هر کالا چند است؟

۹۰. یك قاعدهٔ قدیمی هندی می گوید: اگر قطر دایره را به ۱۵ بخش برابر تقسیم و ۱۳ بخش آن را به‌عنوان ضلع یك مربع انتخاب کنیم، مساحت مربع (به‌تقریب) برابر مساحت دایره می‌شود. معلوم کنید، مقدار تقریبی عدد π از این راه چقدر به‌دست می‌آید و درصد اشتباه آن چقدر است؟

از براهماگوپتا

۹۱. مطلوب است ارتفاع یك شمع، به شرطی که سایهٔ یك تکه چوب قائم را در دو ضلع متفاوت و، همچنین، فاصلهٔ بین دو تکه چوب را بدانیم.

۹۲. ثابت کنید که اگر حاصلضرب دو ضلع مثلث را برطول ارتفاعی که برضلع سوم وارد شده است، تقسیم کنیم قطر دایرهٔ محیطی مثلث به‌دست می‌آید.

۹۳. ثابت کنید ، اگر مجذور وتری را که برقطر دایره عمود است ، برچهار برابر یکی از دو بخش قطر تقسیم و خارج قسمت را با همان بخش قطر جمع کنیم، طول قطر دایره به‌دست می‌آید.

۹۴. ثابت کنید، بخش کوچکتر قطر دایره، که به وسیلهٔ وتری عمود بر آن تقسیم شده است، برابر است با نصف تفاضل قطر از جذر تفاضل مجذورهای قطر و وتر.

از بهاسکارا

۹۵. اگر عددی را در ۵ ضرب، از حاصلضرب یك سوم آن را کم، باقی‌مانده را بر ۱۰ تقسیم و، به نتیجهٔ به‌دست آمده، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ عدد اصلی را اضافه کنیم، عدد ۶۸ به‌دست می‌آید. عدد اصلی را پیدا کنید.

۹۶. ثابت کنید:

$$\sqrt{۱۰+\sqrt{۲۴}+\sqrt{۴۰}+\sqrt{۶۰}}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$$

۹۷. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که عدد معرف وتر آن با عدد معرف مساحت آن برابر باشد.

۹۸. دو چوب خیزران به طول‌های m و n را، به فاصله‌ای معلوم و به‌طورقائم روی زمین نگاه داشته‌ایم. مطلوب است طول عمودی که ازمحل برخوردخط‌های راستی که انتهای هرچوب را به‌پای دیگری وصل کرده‌است، برزمین فرود آید. همچنین، فاصلهٔ پای این عمود را تا پای هریک از دو خیزران پیدا کنید.

۹۹. کسی به‌دوستش گفت: «۱۰۰ روپیه به‌من بده، آن وقت، من دو برابر تو پول خواهم داشت». دومی پاسخ داد: «تو فقط ۱۰ روپیه به من بده، پول من شش برابر پول تو خواهد شد». هرکدام چقدر پول دارند؟

۱۰۰. معادلهٔ درجه دوم زیر را درحالت کلی حل کنید:

$$ax^{2}+bx=c$$

۱۰۱. عددی را پیداکن که اگر آن را در ۳ ضرب، حاصلضرب را با $\frac{2}{3}$ خودش جمع، نتیجه را بر ۷ تقسیم، $\frac{3}{10}$ خارج قسمت را از خودش کم، تفاضل را درخودش ضرب، از حاصلضرب ۵۲ واحدکم کنیم؛ بعد از تفاضل جذر بگیریم، ۸ واحد به آن اضافه و بعد بر ۱۰ تقسیم کنیم، عدد ۲ بدست آید.

۱۰۲. به‌اندازهٔ جذر نصف زنبورهای عسل، به طرف بوتهٔ گل یاسمن پروازکردند، هشت نهم آن‌ها درکندو ماندند. یکی از زنبورها هم به‌دنبال زنبور نری رفت که وزوزش او را ناراحت کرده بود. این زنبور نر، به‌سمت گل معطری جلب شده بود، ولی نمی‌توانست از آن جا بیرون بیاید، زیرا به‌محض نشستن زنبور، گل بسته شده بود. تعدادکل زنبورهای عسل را پیدا کنید.

۱۰۳. عددی را پیداکنیدکه‌اگرآن را در۱۲ ضرب ونتیجه‌را بامکعب خودش جمع کنیم، با شش برابر مجذورآن به‌اضافهٔ ۳۵، برابرشود.

۱۰۴. این معادله را حل کنید:

$$x^{4}-2x^{2}-400x=9999$$

۱۰۵. جواب‌های گویا را دراین معادله پیدا کنید:

$$ax+by+c=xy$$

۱۰۶. مطلوب است ارتفاع قطعه‌ای ازدایره، به‌شرطی که اندازهٔ قطر دایره‌وقاعدهٔ قطعه دایره، معلوم باشد.

۱۰۷. میمونها، در دو دسته، سرگرم بازی بودند. مجذوریك هشتم آن‌ها دربیشه به‌شادی جست وخیز می‌کردند. باد خنك هم فریاد ۱۲ نفر از آن‌ها را ازجای دیگری به‌گوش می‌رساند. می‌توانید بگویید روی هم، چند میمون در آن جا وجود دارد؟

۱۰۸. چند میمون در گله وجود دارد، به شرطی‌که بدانیم، مجذور تفاضل یك پنجم و سه نفرآن‌ها در غار باقی مانده‌اند وتنها یکی ازآن‌ها از درخت بالا می‌رود؟

۱۰۹. ضمن‌مجادله، پسرخشمگین «پریتها» چند تیر برای‌کشتن«کارنا» برداشت. نصف تیرها را برای دفاع از خودش مصرف‌کرد؛ چهار برابر جذر تیرها را، علیه اسب‌ها به‌کار برد؛ با ۶ تیر، «سالیو»ی عرابه‌چی را سوراخ سوراخ‌کرد؛ با ۳ تیر چترنگهدار «کارنا» را از پای درآورد وزین وپرچم را سرنگون‌کرد وتنها با یك تیرباقی‌مانده، سر«کارنا» را سوراخ کرد. «آرجونا» (فرزند «پریتها») چند تیرداشت؟

۱۱۰. ده برابر جذرگلهٔ قوها، به طرف دریاچه پریدند، زیرا متوجهٔ درهم رفتن ابرها شده بودند. یك هشتم تمام‌گله، خود را زیرگل وگیاه‌آبی مخفی‌کردند و تنها شش قو خود را به آرامی به امواج سپردند. تعداد کل قوها را به‌من بگویید.

۱۱۱. روی دریاچهٔ آرام، به‌اندازهٔ نیم‌پا
گل زیبائی ایستاده است.
اوتنهاست. وزش بادآغاز شد
وآن را به‌طرفی خم‌کرد. دیگر
هیچ بخشی ازگل روی‌آب نیست.
ماهی‌گیر، آن را در دوپائی
جائی‌که روئیده بود، پیداکرد.
حالا پرسشی دارم:
عمق دریاچه در این‌جا چقدر است؟

۱۱۲. سپیداری تنها، در کنار رودخانه روییده است.
ناگهان باد تندی وزید و تنهٔ آن را شکست.
تنهٔ بیچاره افتاد. باقی‌ماندهٔ تنه
با جریان رودخانه زاویه‌ای قائمه می‌سازد.
به‌یاد بیاوریم که، سرشاخهٔ سپیدار،
درچهارپائی این‌جا به‌زمین خورد
وسه پاهم، ازتنه، باقی مانده است.
اکنون ازشما خواهش می‌کنم، زود به‌من بگویید:
ارتفاع درخت سپیدار چقدر بوده است؟

از پاراما‌دیس‌وارا

۱۱۳. عددی را پیدا کنید که اگرآن را در۳ ضرب، سپس بر ۵ تقسیم وبعد با ۶ جمع کنیم،آن وقت ازآن جذر بگیریم، یك واحد از آن کم کنیم و نتیجه را مجذور کنیم، عدد ۴ به‌دست آید.

۱۱۴. معادلهٔ $y^۲=ax^۲+۱$ را حل کنید. این مساله بعدها، و در اروپا، به‌مسالهٔ «په‌لی» معروف شد.

۱۱۵. ثابت کنید، اگر در یك چهار ضلعی؛ قطرها برهم عمود باشند، جذر مجموع مربع‌های هردو ضلع روبه رو، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی.

۶. مساله‌های ایرانی

از خوارزمی

۱۱۶. این معادله‌های درجهٔ دوم را حل کنید:

۱) $۵x^۲=۴۰x$,

۲) $\frac{۲۵}{۹}x^۲=۱۰۰$,

$$۳)\ ۱۰x = x^۲ + ۲۱,$$

$$۴)\ x^۲ = ۱۲x + ۲۸۸,$$

$$۵)\ x^۲ + ۲۰\frac{۱}{۴} = ۱۱\frac{۱}{۴}x,$$

$$۶)\ \frac{۱}{۱۲}x^۲ + \frac{۷}{۱۲}x = ۱۹$$

۱۱۷. دریک مثلث متساوی‌الساقین، که طول هرساق آن برابر ۱۰ و طول قاعدهٔ آن برابر ۱۲ می‌باشد، یك مربع محاط کنید.

۱۱۸. عددی را پیدا کنید که اگر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ آن را از خودش کم کنیم، ۸ باقی بماند.

از ابن سینا

۱۱۹. اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقی‌ماندهٔ ۱ یا ۸ برسد، مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹، باقی مانده‌ای برابر ۱ خواهد داشت.

از کرجی

۱۲۰. عددی پیدا کنید که از ضرب آن در $۳+\sqrt{۵}$، عدد ۱ به‌دست آید.

۱۲۱. این دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = z^۲ \\ xz = y^۲ \\ xy = ۱۰ \end{cases}$$

۱۲۲. مطلوب است مساحت مستطیلی که قاعدهٔ آن دو برابر ارتفاع، وعدد مساحت آن برابر عدد محیط آن باشد.

از خیام

۱۲۳. این معادله را حل کنید.

$$\frac{۱}{x^۲} + \frac{۲}{x} = ۱\frac{۱}{۴}$$

از بهاءالدین عاملی

۱۲۴. عدد ۱۰ را به دوقسمت چنان تقسیم‌کنیدکه تفاوت آن‌ها برابر ۵ باشد.

۱۲۵. به‌زید قول دادندکه بـه اندازهٔ بزرگترین عدد از دو عددی‌که مجموعی برابر ۲۰ وحاصل‌ضربی برابر ۹۶ دارند، پاداش بدهند. مقدار این پاداش چقدر است؟

۱۲۶. h ارتفاع و r و R، شعاع‌های دو قاعدهٔ بالا وپائین یك‌مخروط ناقص است. ارتفاع مخروط کامل متناظر آن را پیداکنید.

۱۲۷. می‌خواهیم عددی را پیداکنیم‌که، اگرآن را درخودش ضرب، سپس دوواحد به‌آن اضافه، بعد دوبرابر، دوباره سه واحد به‌آن اضافه، بعد بر ۵ تقسیم و بالاخره، در ۱۰ ضرب‌کنیم، عدد ۵۰ به‌دست‌آید.

از غیاث‌الدین جمشید کاشانی

۱۲۸. نیزه‌ای به‌طور عمودی در آب قرارگرفته و بـه‌اندازهٔ ۳ ارش ازآب بیرون است. باد نیزه را منحرف‌کـرد وآن را درآب، به این ترتیب غرق‌کردکه راس آن برسطح‌آب قرارگرفت وپای‌آن برجای سابق خود باقی ماند. فاصلهٔ بین موقعیت ول وموقعیت دوم آن، برابـر ۵ ارش است. می‌خواهیم ارتفاع نیزه را پیداکنیم.

۱۲۹. ثابت‌کنیدکه برای هرعدد طبیعی n، برابری زیر برقرار است.

$$۱^۴+۲^۴+۳^۴+\dots+n^۴=\frac{۱}{۳۰}(۶n^۵+۱۵n^۴+۱۰n^۳-n)$$

(برابری کاشانی).

۷. مساله‌های روسی

از رساله‌ای مربوط به سدهٔ هفدهم

۱۳۰. چهار نجار، برای انجام کاری دریك‌کاخ اجیر شدند. نجاراول

گفت: «اگر قراربود تمام کار را من به‌تنهایی انجام دهم، می‌بایستی یک‌سال دراین‌جا بمانم». نجار دوم گفت: «اگر قرار بود تمام کاررا به‌تنهائی تمام کنم، دوسال وقت مرا می‌گرفت». سومی گفت: «اگر تمام کار را به‌من مراجعه می‌کردند، به‌تنهایی می‌توانستم درطول سه سال‌آن را تمام کنم». وچهارمی گفت: «اگر قرار بود تمامی کار تنها به‌عهدهٔ من باشد، می‌بایستی چهار سال دراین کاخ بمانم». به‌من بگوئید، حالاکه هرچهار نفرباهم کار می‌کنند، درچه مدتی کار را تمام خواهندکرد؟

۱۳۱. شیر، یك میش را در یك ساعت، گرگ‌آن را در دوساعت و سگ در سه ساعت می‌خورند. اگر هر سه، شیر و گرگ و سگ، برسر یك میش بنشینند، درچه مدت‌آن را می‌خورند؟

۱۳۲. مسیحی، سبد تخم‌مرغ‌های خودرا، برای فروش، به‌بازار برد. دکان‌دارها از او پرسیدند: «چند تخم‌مرغ در سبد داری؟» مسیحی پاسخ داد: «من تعداد تخم مرغ‌ها را به‌یاد ندارم، فقط می‌دانم، وقتی‌آن‌ها را دوتا دوتا درسبدگذاشتم، یك تخم‌مرغ روی زمین باقی ماند. بعد، سه تا سه‌تا در سبد گذاشتم، بازهم یکی باقی ماند، به‌همین ترتیب، وقتی‌که چهار تا چهار تا، یا پنج تا پنج‌تا ویا شش‌تا شش‌تا درسبدگذاشتم، بازهم هربار یك تخم مرغ اضافه می‌آمد. تنها وقتی‌که تخم‌مرغ‌ها را هفت تا هفت‌تا درسبد قرار دادم، چیزی‌کم یا زیاد نیامد». مسیحی درسبد خود چند تخم‌مرغ داشته است؟

ازکتاب «حساب» ل. ف. ماگینتسکی

۱۳۳. بازرگانی ۱۱۲ گوسفند پیر و جوان خرید و۴۹ روبل و ۲۰ آلتین پرداخت. او بابت هرگوسفند پیر ۱۵ «آلتین» و ۲ «دنگا» و بابت هر گوسفند جوان ۱۰ «آلتین» پرداخته بود. او چندگوسفند پیر وچندگوسفند جوان خریده است؟

۱۳۴. یکی از معلم پرسید، «شما در کلاس خود چند شاگرد دارید، زیرا می‌خواهم پسرم را، برای درس خواندن، پیش شما بفرستم». معلم پاسخ داد: «اگربه‌اندازه شاگردانم، به‌اضافه نصف‌آن ویك چهارم‌آن، بیشتر

شاگرد داشتم، آن وقت با پسر تو، روی‌هم ۱۰۰ نفرمی‌شدند»[۱]. این معلم، چند شاگرد دارد؟

۱۳۵. شخصی اسب خود را بـه ۱۵۶ روبل فروخت. ولـی خریدار پشیمان شد، به فروشنده مراجعه‌کرد و از گرانی قیمت گلـه‌کرد. فروشنده پیشنهاد دیگری به‌اوکرد و گفت: «در هرسُم اسب مـن ۶ میخ وجود دارد. تو اصلاً اسب راکناربگذار وفقط میخ‌ها را از من بخر. بابت میخ اول فقط $\frac{1}{4}$ کوپك بـده (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپك است)، بابت میخ دوم، دو برابر آن، یعنی $\frac{1}{2}$ کوپك، بابت میخ سوم، دو بـرابـر میخ قبلی، یعنی ۱ کوپك و همین طور تـا آخـر»، خریدارکه بـه نظرش رسید، قیمت اسب خیلی ارزان برایش تمام می‌شود، با پیشنهاد فروشنده موافقت‌کرد. آیا واقعاً خریدار پول کمتری خواهد پرداخت؟

۱۳۶. مردی دستور داد خیمه‌ای برای او درست‌کنندکه محیط‌آن در روی زمین برابر ۱۲۰ «استوپ» و بلندی آن (در روی لولـه) برابر ۱۲۰ «استوپ» باشد. برای ساختن خیمه از ماهوتی استفاده‌کردندکه عرض‌آن $2\frac{1}{2}$ «آرشین» بود وهر «آرشین» ۲روبل قیمت داشت. قیمت‌همهٔ ماهوتی‌که‌برای ساختن خیمه لازم است، چقدر می‌شود؟

۱۳۷. عددی را پیدا کنیدکه در تقسیم بر عددهای ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ ، به‌ترتیب، به باقی‌مانده‌های ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ برسد.

۱۳۸. عددهای هفته را از یکشنبه‌آغازمی‌کنیم و به‌ترتیب‌آن‌ها را با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ (بـرای شنبه) نشان می‌دهیم. کسی، عـدد یکی از روزهای هفته را پیش خود فکر می‌کنـد و ازشما می‌خواهدآن را پیداکنید.

---

۱. این مساله، به‌صورتی موزون، درکتاب‌های ریاضی قدیمی ایرانی و، بـه‌این صورت، وجـود دارد: گنجشکی از یك‌گروه گنجشك پرسید، شما چند نفرید؛ یکی ازآن‌ها پاسخ داد: «ما وما و نصف ما ونصف نصف ما، گرتو هم با ما شوی، جملگی ۱۰۰ می‌شویم». (مترجم)

او این عمل را انجام داده است: ۱) عدد روزی را که فکر کرده است در ۲ ضرب می‌کند؛ ۲) به حاصل ضرب، ۵ واحد اضافه می‌کند؛ ۳) مجموع را در ۵ ضرب می‌کند؛ ۴) حاصل‌ضرب را ۱۰ برابرمی‌کند ونتیجه را نام می‌برد.

۱۳۹. شخصی یك جعبهٔ نوشابه را در۱۴ روزتمام می‌کند؛ ولی‌همان جعبه را همراه با همسرش در۱۰ روز مصرف می‌کند. اگرهمسرش به تنهائی از نوشابه‌ها استفاده کند، درچه مدتی‌آن را تمام می‌کند؟

۱۴۰. شخصی کارگری را یکساله اجیرکرد و قرار گذاشت روی هم ۱۲ روبل و یك دست لباس به او بدهد. ولی وضعی پیش‌آمدکه کارگر تنها هفت ماه توانست کارکند و، برای این مدت کار خود، ۵ روبل ویك دست لباس گرفت. قیمت یك دست لباس چقدر است؟

ازگولد باخ

۱۴۱. ثابت کنید، هرعدد به‌صورت $4n^4+1$ (n، عددی است طبیعی)، تنها به‌ازای $n=1$ می‌تواند عددی اول باشد.

۱۴۲. مطلوب است مجموع همهٔ کسرهای به‌صورت

$$\frac{1}{(n+1)^{m+1}}$$

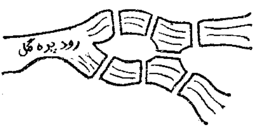
که درآن، m و n عبارتند از دنبالهٔ عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ...

۱۴۳. هرعدد فرد بزرگتر از۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. این حکم را در مورد چند عدد دو رقمی آزمایش کنید.

از اولر

۱۴۴. هرعدد زوج بزرگتر از۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد اول نوشت. این حکم را درمورد چند عدد دو رقمی نشان دهید.

۱۴۵. آیامی‌توان، به‌ترتیب، از روی هرهفت پل‌کینگسبرگ (حالا، کالنین‌گراد) ـ که منطقه‌های مختلف شهر را به جزیرهٔ رود پره گل مربوط می‌کنند ـ عبور کرد، به‌نحوی که ازهر



شکل۲

پل تنها یک‌بار بگذریم (شکل ۲)؟

۱۴۶. دودهقان، روی‌هم، ۱۰۰ تخم‌مرغ به بازار بردند. باوجودی که تعداد تخم مرغ‌های آن‌ها برابر نبود، هردو بابت فروش کالای خود، یک مبلغ دریافت کردند. اولی گفت: «اگرمن به‌اندازهٔ تو تخم‌مرغ داشتم، الان ۱۵ کوپك داشتم». دومی پاسخ داد: «ولی اگر من به اندازه تو، تخم مرغ داشتم، به $۶\frac{۲}{۳}$ کوپك می فروختم». هر کدام چند تخم‌مرغ داشته‌اند؟

۱۴۷. عبارت زیر را ساده کنید:

$$\frac{۸-۵\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}$$

۱۴۸. ثابت کنید، در هرمثلث، نقطهٔ برخوردمیانه‌ها، نقطه برخورد ارتفاع‌هاومرکزدایرهٔ‌محیطی، روی‌یك‌خط راست‌قراردارند(خط راست‌اولر).

۱۴۹. عدی پیداکنیدکه، اگرتوان چهارم‌آن را برنصف خودش تقسیم و، سپس، با $۱۴\frac{۱}{۴}$ جمع کنیم، عدد ۱۰۰ به‌دست‌آید.

۱۵۰. ثابت کنید، حاصل‌ضرب دو عددی‌که، هرکدام ازآن‌ها برابر مجموع چهارمربع کامل است، خود بامجموع چهار مربع کامل برابرمی‌شود.

۱۵۱. ثابت کنید ،در هر چهار ضلعی، مجموع مجذورهای ضلع‌ها، برابراست با مجموع مجذورهای دوقطر به‌اضافهٔ چهار برابرمجذور پاره‌خطی که وسط قطرها را به‌هم وصل می کند.

از ی. د. ووی دیاخوسکی (ازکتاب «دورهٔ ریاضیات خالص»)

۱۵۲. از فرمانده پرسیدند، چند نفر در گروه او خدمت می‌کنند. او پاسخ داد: $\frac{۲}{۵}$ گروه او به پاسداری مشغول‌اند، $\frac{۲}{۷}$ به مرخصی رفته‌اند، $\frac{۱}{۴}$ آن‌ها دربیمارستان کار می کنند و ۲۷ نفر هم حاضرند. تعداد افراد گروه اورا پیداکنید.

۱۵۳. سگ در ۱۵۰ متری خرگوشی است‌که هر دو دقیقه ۵۰۰ متر می‌دود. اگرسگ درهر۵ دقیقه ۱۳۰۰ متر بدود، بعد ازچه‌مدتی به‌خرگوش

می‌رسد؟

از م. یو. لرمونتوف

۱۵۴. یکی ازمعاصران میخائیل یوریه‌ویچ لرمونتوف، که شاعر را به خوبی‌می‌شناخت، می‌نویسد: «درآغازسال ۱۸۴۱، هنگ«تن گین» در«آناپ» توقف‌کرده بود. افسران هنگ، و ازآن جمله لرمونتوف، که دلتنگ بودند، دورهم‌جمع می‌شدند. یك‌بار، صحبت ازدانش‌اسقف بزرگی‌بودکه‌می‌توانست دشوارترین مساله‌های ریاضی را در ذهن خـود حل کند. یکی از سرگردهای افتخاری، که پیرمردی بود، روبه شاعرکرد و گفت:

ـ لرمونتوف، عقیدهٔشما دراین‌باره‌چیست؟ می گویند، شماهم‌ریاضی‌دان خوبی هستید.

وشاعر پاسخ داد:

ـ من چیز عجیبی دراین‌مورد نمی‌بینم. اگر بخواهید، من‌هم می‌توانم از تجربهٔ جالبی دربارهٔ محاسبه‌های ریاضی با شما صحبت‌کنم.

ـ بفرمائید.

ـ عددی پیش‌خودتان فکرکنید، من‌به‌کمك عمل‌های‌ساده‌ای ازحساب، آن را پیدا می‌کنم.

ـ عددی‌که باید درنظر بگیریم، تا چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟

ـ تفاوتی ندارد. ولی‌باراول، برای سرعت‌کارمحاسبه، عددی‌دورقمی درنظر بگیرید.

ـ بسیار خوب، عددی را درنظرگرفتم.

پیرمرد با بیان این جمله، به‌افسرانی‌که‌دوراو ایستاده بودند چشمکی زد وبه خانمی‌که پهلویش نشسته بـود، عدد مورد نظر خود را اطلاع داد. ولرمونتوف‌آغازکرد:

ـ لطفاً درذهن خود، یا روی‌کاغذ، عدد ۲۵ را به‌آن اضافه‌کنید.

پیرمرد مدادی‌گرفت و روی‌کاغذ یادداشت‌کرد.

ـ حالا لطفاً بازهم ۱۲۵ را به‌آن اضافه‌کنید.

پیرمرد اضافه‌کرد.

ـ اکنون، همان عددی راکه فکر کرده‌اید، ازآن کم کنید.
پیرمرد کم کرد.
ـ باقی مانده را در ۵ ضرب کنید.
سرگرد ضرب کرد.
ـ عددی راکه به‌دست‌آورده‌اید، نصف کنید.
پیرمرد تقسیم کرد.
ـ اکنون دوست من، اگر اشتباه نکرده باشید، باید به عدد $۲۸۲\frac{۱}{۲}$ رسیده باشید.
سرگرد ازجا پرید
ـ بله کاملاً درست است: $۲۸۲\frac{۱}{۲}$. من‌عدد ۵۰ را درنظر گرفته‌بودم، وسرگرد دوباره عمل‌ها را آزمایش کرد. ولی مگرشما جادوگرید؟
لرمونتوف لبخندی زد
ـ جادو بی‌جادو، این‌جا فقط ریاضیات است.
معلوم بودکه‌پیرمرد هنوز دودل است، شاید وقتی اومحاسبه می‌کرده است، لرمونتوف، نوشته روی کاغذ را دیده است.
ـ ولی اجازه بدهید... می‌شود یك بار دیگر تکرارکنیم؟
پیرمرد دربارهٔ عددی که‌فکرکرده بود، باکسی سخن نگفت، عمل‌ها را هم‌روی کاغذ ننوشت ودرذهن محاسبه کرد. ولی این‌بارهم، نتیجهٔ آخردرست حدس زده شده بود.
برای همه جالب بود. پیرمرد هاج و واج شده بود. صاحب منزل خواهش‌کرد یکباردیگرآزمایش را تکرارکنند. این‌بارهم عدد حاصل، درست حدس زده شده بود».

از و.گ. به‌نه دیکتوف

۱۵۵. زنی روستائی، که نود تخم‌مرغ برای فروش داشت، سه دختر خود را روانهٔ بازارکرد وبه بزرگترین و عاقل ترین‌آن ها ده تخم مرغ، به دیگری سی وبه‌سومی پنجاه تخم‌مرغ سپرد. ضمناً، به‌آن‌ها گفت:

ـ ازقبل، دربارهٔ قیمت‌فروش، بین خودتان‌قراربگذارید وازآن عقب‌ـ نشینی نکنید؛ همهٔ شما قیمت ثابتی‌برای خود تعیین کنید؛ ولی من امیدوارم که دختر بزرگ من، با توجه به درایتی‌که دارد، با وجود قرارکلی‌که برای قیمت فروش‌گذاشته‌اید، بتواند بابت ده تخم‌مرغ خود، همان‌قدر دریافت‌کند کــه دختر دوم من بابت ســی تخم‌مرغ خود می گیرد؛ و دختر دوم هم بابت سی تخم مرغ خود ، همان اندازه پول می‌آوردکه دخترکوچکم بابت پنجاه تخم‌مرغ خود در یافت می‌کند. ضمناً، امیدوارم همهٔ تخم مرغ‌ها را طوری بفروشیدکه هر ده تخم‌مرغ از ۱۰ کوپــك و همهٔ نود تخم مرغ از ۹۰ کوپك، یا ۳۰ آلتین، کمتر نشود.

دخترها، چگونه سفارش مادر خود را انجام دادند؟

از ل. ن. تولستوی

۱۵۶. تولستوی، درداستان خود «آیاآدمی‌به‌زمین زیادی‌نیازدارد؟»: به دهقان‌آن قدر زمین داده می‌شودکــه بتواند در یك روزآن را دور بزند. روی چگونه محیطی حرکت‌کند، به‌زمین بیشتری می‌رســد: روی محیط یك مربع، یا یك شش ضلعی منتظم ویا یك دایره؟

راهنمائی: ببینید، وقتی محیط‌این شکل‌ها برابرباشند، سطح‌کدام یك بیشتر است؟

۱۵۷. دوگروه دروگــر باید دو زمین را دروکنند،که یکی از آن‌ها، مساحتی دوبرابر دیگری دارد، تمام‌گروه، نصف روزرا روی زمین بزرگتر کارکردند. سپس، گروه به دوقسمت شــد: نصف‌گروه در همان زمین بزرگتر باقی ماند وکار درو آن را تا غروب تمام‌کرد: نیمهٔ دوم گــروه به دروکردن زمین‌کوچکتر پرداخت و، درپایان روز،آن‌قدر کارباقی‌مانده بودکه یك کارگر بتواند دریك روزآن را تمام‌کند. در این‌گروه، چندکارگر وجود دارد؟

۱۵۸. روی دودیوار روبه‌رو ازاطاقی‌که طول وعرض معلومی دارد، مگس و عنکبوتی ایستاده‌اند. مگس، یك ونیم‌آرشین ازکف اطاق وعنکبوت یك ونیم‌آرشین ازسقف فاصله دارند. کوتاه‌ترین راهی‌را پیداکنیدکه‌عنکبوت، ازطریق‌آن، بتواند خود را به مگس برساند.

۱۵۹. پنج برادر، ارثیهٔ پدر را به‌طور برابربین خود تقسیم‌کردند. ارثیه، سه‌خانه بود. ولی سه خانه را نمی‌شد به‌پنج قسمت تقسیم‌کرد. سه برادر بزرگتر، هرکدام یکی از خانه‌ها را برداشتند و در عوض نفری ۸۰۰ روبل دادندکه‌بین دوپسرکوچکترتقسیم شد و، درنتیجهٔ، هریك ازپنج برادر، سهمی برابر از ارثیه بردند، قیمت هرخانه را پیداکنید.

۱۶۰. دهقان، ساعت ۵صبح، پای پیاده ازتولا به‌راه افتاد تا به‌مسکو برود. ارباب هم ساعت ۱۲ با درشکهٔ خود ازتولا درهمان مسیر به راه‌افتاد دهقان در هرساعت ۵ ورست و ارباب در هرساعت ۱۱ ورست جلو می‌رود درچند ورستی تولا، به‌هم می‌رسند؟

۱۶۱. دهقانی ۷۰ دسیاتین زمین را اجاره‌کرد وبابت هر دسیاتین ۸ روبل به‌مالك پرداخت؛ وهمهٔ ۷۰ دسیاتین را گندم‌کاشت. برای هر دسیاتین زمین ۹ پوت بذر خرید، هرپوت به ۱ روبل و ۳۰کوپك. برای هر دسیاتین زمین، ۸روبل پول کارگر داد. هردسیاتین، ۱۳خرمن گندم دادکه ازهرخرمن ۶ پوت‌گندم به‌دست‌آمد. برای خرمن‌کوبی، هرپوت ۷کوپك پرداخت.بابت کرایه حمل‌گندم به‌شهر، هرپوت ۱۱کوپك پول داد.گندم را هرپوت۱روبل و۴۰کوپك فروخت.آیا دهقان بیشتر برده‌است یا مالك؟

۱۶۲. کسی‌که بازی شطرنج را اختراع‌کرده بود، مهره‌های زیبایی برای‌آن ساخت وبه شاه هدیه‌کرد. شاه ازبازی خوشش‌آمد و از مخترع‌آن خواست تا چیزی بخواهد. مردگفت: «در خانهٔ اول صفحهٔ شطرنج یك دانه گندم بگذارید، درخانهٔ دوم۲ دانه، درخانهٔ سوم ۴ دانه و، به‌همین‌ترتیب، در هرخانه، دوبرابر خانه قبلی؛ آن‌وقت، این گندمها را به‌من بدهید». شاه ازحقیر بودن چیزی که‌مرد خواسته بود خنده‌اش‌گرفت؛ ولی وقتی‌که گندم‌ها را حساب‌کردند، دیدند شاه از عهدهٔ تهیهٔ آن‌ها بر نمی‌آید. شاه چقدر گندم باید به‌مخترع شطرنج بدهد؟

۱۶۳. دو لوله بالای بشکه قرار داردکه از هردوی‌آن‌ها، آب وارد بشکه‌می‌شود. لولهٔ اول می‌تواند به‌تنهائی،بشکه‌رادر۲۴ دقیقه ولولهٔ دوم،

به‌تنهائی، در ۱۵ دقیقه پر کند. درپایین بشکه شیری وجود داردکه می‌تواند در ۲ ساعت آب بشکه را خالی‌کند. اگر آب از هردو لوله وارد بشکه شود و، ضمناً، شیر بشکه باز باشد، بعدازچه مدتی پر می‌شود؟

از ایوان پتروف

۱۶۴. اگر بلیت‌هایی بـه‌ارزش سه روبل و پنج روبل داشته باشیم، به‌چند طریق می‌توانیم ۷۸ روبل بدهی خود را بپردازیم؟

از س.آ. راچینسکی

۱۶۵. مقدار عبارت زیر را، به‌طور ذهنی و با سرعت بگویید:

$$\frac{۱۰^{۲}+۱۱^{۲}+۱۲^{۲}+۱۳^{۲}+۱۴^{۲}}{۳۶۵}$$

۱۶۶. در ذهن خود محاسبه‌کنیدکه، مجذور ۸۴ چقدر است؟

از آ.ن. سترانولیوبسکی (درکتاب «دورهٔ جبر»)

۱۶۷. بازرگانی‌که ۷۵۳ روبل بدهکار بـود، از طلبکار خود خواست ۳۰۳ روبل دیگرهم به‌او بدهد. طلبکار به‌انجام خواهش او رضایت داد، بـا این شرط‌که: قرض باید درمدت۸ ماه پرداخت شود، و،ضمناً، قسطهای خود را باید طوری تنظیم‌کندکـه هرماه بـه‌اندازهٔ نصف قسط ماه اول به‌قسط او اضافه شود، یعنی، درپایان ماه دوم یک‌برابرونیم ماه اول، درپایان ماه سوم دو برابرماه اول، در پایان ماه چهارم دوبرابرونیم ماه اول و غیره بپردازد. بدهکار هم با این‌شرط موافقت‌کرد می‌خواهیم مقدار پرداختی‌بدهکار را درماه اول وهریک ازماه‌های بعد پیداکنیم.

۱۶۸. دوکارگردرزمان‌معینی‌نزدیک‌صاحب‌کاربودند. یکی‌ازآن‌ها هفته‌ای ۱۵ روبل ودیگری هفته‌ای ۱۰ روبل می‌گرفت. در پایان‌کار، معلـوم شد، کارگر اول، درست به‌اندازه‌ای‌که درجریان‌کار مساعده‌گرفته بـود، بیش از کارگر دوم مزد گرفت. اگرکارگر اول، درسه نوبت وبه‌ترتیب، $۴\frac{۱}{۲}$ ، $۳\frac{۱}{۴}$ و ۷ روبل مساعده‌گرفته باشد، معلوم‌کنید کار چه مدتی طول‌کشیده است؟

۱۶۹. پدری $\frac{۱}{۳}$ سرمایهٔ خودرا به‌پسر و $\frac{۲}{۵}$ آن را به‌دخترش بخشید. از آن چه مانده بود، ۲۰۰۰ روبل بابت بدهی خودش پرداخت و ۳۰۰۰ روبل هم به‌همسرش داد. سرمایهٔ اصلی پدر وسهم پسر ودختر را پیداکنید.

۱۷۰. وقتی که ازکسی، دربارهٔ سن پسرهایش پرسیدند، پاسخ داد: «پسر اولم، دوبرابر پسردومم از سال‌های عمرش گذشته است وسن آن‌های، روی‌هم، برابر است با سن ۲۹ سال قبل من؛ ومن، اکنون ۴۵ سال دارم». هریك از پسرها چند سال دارند؟

۱۷۱. سرکه فروشی دونوع سرکه خرید، نوع اول را هر ۵ سطل ۱۵۰ روبل ونوع دوم را هر ۷ سطل ۱۴۰ روبل. اومی‌خواهد مخلوطی از این دونوع سرکه تهیه‌کند، به‌نحوی‌که اگر سطلی ۳۰ روبل بفروشد، درهر سطل ۳ روبل سودکند. از هرنوع سرکه چند سطل باید بردارد تا مخلوط موردنظر او به‌دست آید؟

۱۷۲. نقره‌کاری دونوع نقره دارد. نوع اول، ملقمه‌های سه فونتی به‌ارزش هرکدام ۲۸۸ روبل ونوع دوم، ملقمه‌های چهار فونتی به‌ارزش هرکدام ۲۲۸ روبل. او می‌خواهد ظرفی ۲۰ فونتی از این دونوع بسازد، به‌نحوی‌که اگرظرف را فونتی ۹۳ روبل بفروشد، درهرفونت ۳ روبل برای مزدکارخود به‌دست آورد. برای نقرهٔ این ظرف، ازهرنوع چند فونت باید انتخاب کند؟

۸. مسأله‌های اروپای غربی

از لئوناردوی پیزائی

۱۷۳. یکی به‌دیگری گفت: «۷ دینار به‌من بده تا ۵ برابر تو پول داشته باشم». دیگری گفت: «۵ دینار به‌من بده تا ۷ برابر تو پول داشته باشم». هرکدام چقدر پول دارند؟

۱۷۴. یك نفر ۳۰ پرنده خرید و ۳۰ سکه داد: بابت هر ۳ گنجشك

۱ سکه، بابت هردوقمری ۱ سکه و بابت هرکبوتر ۲ سکه تعداد هرنوع پرنده را پیدا کنید.

از رگیومونتان

۱۷۵. این معادله را حل کنید.

$$\frac{x}{۱۰-x}+\frac{۱۰-x}{x}=۲۵$$

۱۷۶. ثابت کنید، ارتفاع‌های مثلث، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

از لئوناردو داوینچی

۱۷۷. اگر دو دایرهٔ مساوی، یکدیگر را قطع کنند، هر نقطهٔ دلخواه ازخط راستی که‌از نقطه‌های برخورد گذشته‌است، ازدومرکز به‌یك فاصله‌است.

۱۷۸. به‌سه نفر، اسبی را به ۱۲ فلورین می‌فروختند، ولی هیچ‌کدام ازآن‌ها، به‌این اندازه، پول نداشت. اولی می گفت: «اگر هرکدام از شما، نصف پول خودرا به‌من می‌دادید، خودم اسب را می‌خریدم». دومی به‌دو نفر دیگر گفت: «اگر یک‌سوم پول خودتان را به‌من می‌دادید، می‌توانستم صاحب اسب‌بشوم». وبالاخره، سومی گفت: «فقط یك چهارم پولتان را به‌من بدهید، من اسب را خواهم خرید». می‌خواهیم بدانیم، هرکدام چقدر پول داشته‌اند؟

از تارتاگلیا

۱۷۹. به‌کمك پرگار ثابت (پرگاری‌که به‌اندازهٔ معینی بازشده است وقابل تغییرنیست) وخط‌کش، مثلث متساوی‌الاضلاعی‌روی پاره خط مفروض AB رسم‌کنید (شعاع پرگار، برابر طول پاره خط AB نیست).

از کاردان

۱۸۰. ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲+۶x=۹۱$ را پیدا کنید.

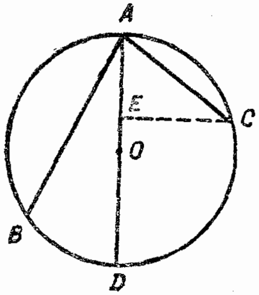
۱۸۱. عدد ۱۰ را به‌دوبخش چنان تقسیم‌کنید که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴۰ شود.

۱۸۲. مماس مشترك دو دایرهٔ مفروض را رسم کنید.

از ویت

۱۸۳. معادلهٔ $x^2+px+q=0$ را، با تبدیل $x=y+z$، حل کنید.

از گالیله



شکل ۳

۱۸۴. روی دیوار قائم، دایره‌ای رسم شده است (شکل ۳). از نقطهٔ فوقانی دایره، یعنی از نقطهٔ A، در طول وترهای AB و AC، دو ناودان قرارداده‌ایم. از نقطهٔ A، دریك لحظه، سه گلوله را رها کرده‌ایم که یکی به‌صورت سقوط آزاد پایین می‌آید و دوتای دیگر در ناودان‌های صیقلی‌شده، بدون اصطکاك می‌غلطند. کدامیك از این سه گلوله، زودتر به‌محیط دایره می‌رسند؟

از کپلر

۱۸۵. سه خط راست موازی l ، m و n مفروض‌اند. نیم خطهای راست SA ، SB و SC، خط راست l را درنقطه‌های A ، B و C و خط راست m رادرنقطه‌های E ، F و H قطع کرده‌اند. ازنقطه‌های E، F و H، سه خط راست به‌موازات نیم خط راست SP رسم می‌کنیم تا خط راست n را در نقطه‌های L ، M و N قطع کند. ثابت کنید، خطهای راست LA ، MB ، NC و SP، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

از دزارك

۱۸۶. دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$، روی دوصفحهٔ σ و σ_1 قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، اگر خطهای راستی که رأس‌های متناظر A و A_1 ، B و B_1 ، C و C_1 را به‌هم وصل می‌کنند، در یك نقطه به‌هم برسند (نقطهٔ

دزارك)، آن وقت، ضلع‌های متناظر AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1 ، AC و A_1C_1 ، به‌شرط این که موازی باشند، در سه نقطهٔ واقع بریك خط راست، یکدیگررا قطع می کنند (خط راست دزارك). برعکس، اگرنقطه‌های برخوردضلع‌های متناظر، روی یك خط راست واقع باشند،آن وقت، خطهای راستی که رأس‌های متناظر را به‌هم وصل می‌کنند، به شرط موازی نبودن آن‌ها، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

۱۸۷. دومثلث ABCو$A_1B_1C_1$، دریك صفحه واقع‌اند. ثابت کنید، اگر خطهای راستی که رأس‌های متناظر A و A_1 ، B و B_1 ، C و C_1 را به هم وصل می کنند، دریک نقطه به‌هم برسند (نقطهٔ دزارك)، آن وقت، ضلع‌های متناظر AB و A_1B_1،BC و B_1C_1، AC و A_1C_1، به‌شرطی که موازی نباشند، درسه نقطهٔ واقع بریك خط راست یکدیگررا قطع می کنند (خط راست دزارك). برعکس، اگر سه نقطهٔ برخورد ضلع‌های متناظر، بریك خط راست واقع باشند، آن وقت، خطهای راستی که رأس‌های متناظر را به‌هم وصل می‌کنند، به‌شرطی که بایکدیگر موازی نباشند، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

از دکارت

۱۸۸. این معادله را حل کنید:

$$x^۴-۴x^۳-۱۹x^۲+۱۳۶x-۱۲۰=۰$$

از فرما

۱۸۹. ثابت کنید، اگر مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی نزولی و نامتناهی a_1 ، a_2 ، a_3 ،... برابر S باشد، داریم: $\frac{S}{S-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$.

۱۹۰. روی قطر AB از نیم دایرهٔ AMB، مستطیلی دربیرون نیم‌دایره، ساخته‌ایم، به‌نحوی که ارتفاع AC آن، برابر باضلع مربع محاط در دایره باشد. اگر رأس‌های C و D را به‌نقطهٔ دلخواه M از محیط نیم دایره وصل کنیم، خطهای راست CM و DM، قطر نیم دایره را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید:

$$AF^2+BE^2=AB^2$$

۱۹۱. ثابت کنید، برای x، y و z نمی‌توان سه عدد درست پیدا کرد، به‌نحوی که درمعادلهٔ $x^4+y^4=z^4$ صدق کنند.

از فولگابر

۱۹۲. OA، OB و OC را سه‌یال دوبه‌دو عمود برهم ازیك چهار‌وجهی بـه‌رأس O می گیریم وفرض می‌کنیم، A، B و C سه نقطهٔ دلخواه ازاین یال‌ها باشند، ثابت کنید:

$$S^2_{ABC}=S^2_{OAB}+S^2_{OAC}+S^2_{OBC}$$

که درآن، منظور از S_{ABC}، S_{OAB}، S_{OAC} و S_{OBC}، بـه‌ترتیب، عبارت باشند ازمساحت مثلث‌های ABC، OAB، OAC و OBC.

از والیس

۱۹۳. ثابت کنید، ازمیان همهٔ مستطیل‌هـای بـا محیط برابر، حداکثر مساحت، متعلق به‌مربع است.

از پاسکال

۱۹۴. ثابت کنید، اگـر یك شش ضلعی قابل محیط بـر دایره باشد و، ضمناً ضلع‌هـای متقابل آن، بـا هـم موازی نباشند، سه نقطهٔ برخورد ایـن ضلع‌های متقابل، روی یك خط راست قرار می‌گیرند (خط راست پاسکال).

۱۹۵. حالت حدی مسألهٔ بـالا را تنظیم کنید و، از آن‌جا، قضیه‌های جـالبی دربـارهٔ پنج ضلعی محاطی و چهـار ضلعی محاطی و مثلث بـه‌دست آورید.

۱۹۶. نشانهٔ بخش‌پذیری بریك عدد دلخواه را پیدا کنید.

از اوزانام

۱۹۷. سه نفر می‌خواهند خانه‌ای را به ۲۶۰۰۰ لیور بخرند. قـرار گذاشتند، اولی یك دوم، دومی یك سوم وسومی یك چهارم پول راپپردازد. هر کدام چقدر پول داده‌اند؟

از نیوتون (در کتاب «حساب عمومی»)

۱۹۸. عبارت $y^4-3\frac{1}{2}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4$ را بر عبارت $y^2-2ay+a^2$ تقسیم کنید.

۱۹۹. پاره خط راست BC داده شده است. در دوانتهای آن، تحت زاویه‌های معلوم ABC و ACB ، خطهای راست BA و CA را رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد آن‌ها، یعنی A، را از خط مفروض BC پیدا کنید.

۲۰۰. ۱۲ گاو $3\frac{1}{3}$ آکر از چراگاه را در ۴ هفته خوردند؛ ۲۱ گاو ۱۰ آکر ازهمان چراگاه را در ۹ هفته خوردند. چندگاو ۲۴ آکر چراگاه را، در ۱۸ هفته، می‌خورند.

۲۰۱. تاجری، هرسال بـه‌سرمایه‌اش، به‌اندازهٔ یك سوم آن، اضافه می‌کند؛ ولی ۱۰۰ فونت ازآن را، برای مخارج خانواده برمی‌دارد. بعد از ۳ سال، معلوم شد، سرمایهٔ او دو برابر شده است. می‌خواهیم بدانیم، در ابتدا چقدر پول داشته است؟

از لایب‌نیتس

۲۰۲. ثابت کنید:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

از سه‌وا

۲۰۳. سه‌نقطهٔ L ، M و N را، به‌ترتیب، برضلع‌های BC، CA وAB از مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، شرط لازم و کافی، برای این که خطهای راست AL ، BM و CL مـوازی باهم و یـا دریك نقطـه متقاطع باشند، این است که داشته باشیم:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

۲۰۴. با استفاده‌ازنتیجه‌گیری مسألهٔ سه‌وا، ثابت‌کنید: ۱) میانه‌های مثلث دریك نقطه به‌هم می‌رسند؛ ۲) ارتفاع‌های مثلث در یك نقطه به‌هم می‌رسند؛ ۳) نیمسازهای مثلث در یك نقطه به‌هم می‌رسند.

از یاکوب برنولی

۲۰۵. اگر دوجملهٔ اول یك تصاعد حسابی، مثبت ونابرابر باشند و، ضمناً، به‌ترتیب برابربادوجملهٔ اول یك‌تصاعد هندسی بشوند، همهٔ جمله‌های تصاعد حسابی، از جملهٔ سوم به‌بعد، از جمله‌های متناظر خود در تصاعد هندسی، کوچکتر خواهند بود.

از به‌زو

۲۰۶. کسی اسبی خرید و، بعدازمدتی، آن‌را به ۲۴ پیستول‌فروخت دراین معامله ضررکرد. اگر مبلغ ضرر او برابر باشد با درصد ضرر او از خرید، قیمت خرید اسب را پیداکنید.

۲۰۷. ثابت‌کنید، باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای درجه nام

$$f_n(x)=a_\circ x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\ldots+a_{n-۱}x+a_n$$

بر $x-b$ ، برابر است با عددی که از قراردادن b به‌جای x ، در چند جمله‌ای، به‌دست می‌آید؛ یعنی

$$f_n(b)=a_\circ b^n+a_۱b^{n-۱}+a_۲b^{n-۲}+\ldots+a_{n-۱}b+a_n$$

از لژاندر

۲۰۸. ثابت‌کنید،درهرمثلث مستقیم‌الخط، مجموع زاویه‌های داخلی، نمی‌تواند از $۲d$ بیشترباشد ($d=۹۰^\circ$)؛ ضمناً، برای اثبات، ازاصل‌موضوع توازی یا نتیجه‌های آن (یعنی، معادل‌های اصل موضوع توازی)، استفاده نکنید.

از ناپلئون

۲۰۹. محیط دایرهٔ مفروضی را، که جای‌مرکزآن معلوم است، به‌کمك یك پرگار وبدون استفاده ازخط‌کش، به‌چهارقسمت برابر تقسیم‌کنید.

از سوفیا ژرمن

۲۱۰. ثابت کنید، هر عدد به‌صورت a^4+4، عددی است غیر اول ($a<1$).

از گوس

۲۱۱. ثابت کنید، حاصل ضرب دو عدد درست و مثبت، که هر کدام از آن‌ها، از عدد اول p کوچکترند، نمی‌توانند بر p بخش‌پذیر باشد.

۲۲۲. یك هفده ضلعی منتظم، به کمك خط‌کش و پرگار، رسم کنید.

از پواسون

۲۱۳. شخصی ۱۲ «پینت» شراب دارد و می‌خواهد نصف آن‌را بردارد؛ ولی ظرف ۶ پینتی ندارد. اگر دو ظرف، یکی به گنجایش ۸ پینت و دیگری به گنجایش ۵ پینت دراختیار داشته باشد، به‌چه ترتیب می‌تواند ۶ پینت شراب را در ظرف ۸ پینتی بریزد؟

از کوشی

۲۱۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$$

که در آن، x_1، x_2، ...، x_n، عددهایی مثبت‌اند و، ضمناً، حالت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $x_1=x_2=\dots=x_n$.

از بریانشون

۲۱۵. ثابت کنید، درهر شش ضلعی محیطی، خطهای راستی که راس‌های روبه رو را به‌هم وصل می‌کنند، ازیك نقطه می‌گذرند (نقطهٔ بریانشون).

۲۱۶. ثابت کنید: ۱) درهرپنج ضلعی محیطی، دوخط راستی که راس‌های غیر مجاور را به هم وصل می‌کنند، باخطی که از راس پنجم به نقطهٔ تماس ضلع مجاور وصل می‌شود، ازیك نقطه می‌گذرند؛ ۲) درهرچهارضلعی محیطی، دو قطر ودو خط راستی که نقطه‌های تماس ضلع‌های مقابل را به‌هم وصل

می‌کند، از یک نقطه می‌گذرند؛ ۳) در هر مثلث محیطی، سه خط راستی که هر راس مثلث را به نقطهٔ تماس ضلع مقابل وصل می‌کنند، ازیک نقطه می‌گذرند.

از شیتز

۲۱۷. ثابت کنید، اگر محل برخورد دوقطر یك ذوزنقه را به محل برخورد دوضلع ناموازی آن وصل کنیم، خط راستی به دست می‌آید که قاعدهٔ بزرگتر را نصف می‌کند.

۲۱۸. می‌خواهیم از نقطهٔ M، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم، به شرطی که نقطهٔ M برخط راست AB واقع نباشد و پاره خط راست AB، قطری از یك دایرهٔ ثابت باشد.

۲۱۹. ثابت کنید، مساحت هر مثلث متساوی الساقین، همیشه کوچکتر است ازمساحت مثلثی که همان قاعده را داشته باشد ومجموع دوضلع دیگرش، بامجموع دوساق مثلث متساوی‌الساقین، برابر باشد.

از شتورم

۲۲۰. پیك از نقطهٔ A حرکت کرد. روز اول ۱۰ «لیو» رفت و در روزهای بعد، هر روز $\frac{۱}{۴}$ «لیو» بیش ازروزپیش. بعد ازسه‌روز، پیك‌دیگری از شهر B، که در ۴۶ «لیوئی» A قرار دارد، درهمان جهت به‌راه افتاد. ضمناً، روز اول ۷ «لیو» وروزهای بعد هرروز $\frac{۲}{۳}$ «لیو» بیش ازروز پیش حرکت می‌کرد. چند روزبعد ازحرکت پیك اول، دو پیك به‌هم می‌رسند؟

از کاتالان

۲۲۱. ازنقطهٔ M، واقع دربیرون دایره، قاطعی نسبت به‌دایره چنان رسم کنیدکه، به‌وسیلهٔ دایره، به دوقسمت برابرتقسیم شود.

مسالهٔ پیشنهادی به هانری مونده

۲۲۲. درذهن خود، دو عدد طوری پیداکنیدکه تفاضل مجذورهای آن‌ها، برابر ۱۲۳ باشد.

از ستووارت

۲۲۳. نقطه‌ای روی قاعدهٔ مثلث انتخاب و، آن را، به‌راس مقابل وصل کرده‌ایم (که‌ازاین به بعد،آن را، پاره‌خط درونی می‌نامیم). ثابت کنید حاصل‌ضرب مجذور یك ضلع مثلث درقطعهٔ غیر مجاور خود روی قاعده، به‌اضافهٔ حاصل‌ضرب مجذور ضلع دیگر مثلث در قطعهٔ غیر مجاور خود روی قاعده، منهای حاصل‌ضرب مجذور پاره‌خط درونی درقاعده، برابراست با حاصل‌ضرب قاعده در دو قطعه‌ای از قاعده که به وسیلهٔ پاره‌خط درونی پدید آمده‌اند.

فصل دوم

حل مسأله‌ها

و

یادداشت‌های تاریخی

۱ • بابل قدیم

یادداشت تاریخی

پیدایش ریاضیات را، در بابل باستانی، باید مربوط به ده‌ها سده پیش از میلاد دانست. خاطرهٔ کار بابلی‌ها، به صورت لوح‌های پختهٔ گلی، با نوشته‌هایی به‌خط میخی، دربسیاری از موزه‌های معروف جهان، مثل موزهٔ بریتانیا درلندن، موزهٔ ارمیتاژ درلنین‌گراد، موزهٔ هنرها درمسکو وغیره، نگه‌داری شده است. ازفرهنگ ریاضی بابل قدیم، چهل وشش لوح پیدا شده است. دراین لوح‌ها، روش‌های کاملاً ساده‌ای برای حل مساله‌های عملی (مربوط به‌تقسیم زمین، ساختمان وبازرگانی) داده شده‌است.

موفقیت‌های علمی مردم‌باستانی سرزمین بابل رامی‌توان، به‌این‌ترتیب، خلاصه کرد:

الف) بابلی‌ها راباید پایه‌گذاراخترشناسی دانست. آن‌چه‌آن‌ها درمورد دستگاه سیاره‌ها به‌دست‌آورده‌بودند، بسیاردقیق بود. مثلاً، ماه‌قمری بابلی، با آن چه امروز در اخترشناسی معاصر محاسبه شده است، تنها ۰/۴ ثانیه اختلاف دارد.

ب) بابلی‌ها، دستگاه عدد نویسی شصت شصتی را ساختند. مبنای این این عدد نویسی، عدد ۶۰ بود (به‌جای ۱۰، که مبنای عدد شماری دهدهی است). دستگاه‌های اندازه‌گیری و توزین آن‌ها، به نحوی بودکه هر واحد بزرگتر ۶۰ برابرواحدکوچکتر درنظرگرفته می‌شد، واحدهای شصت شصتی امروز، در اندازه‌گیری زمان (ساعت = ۶۰ دقیقه، دقیقه = ۶۰ ثانیه،...)

و در اندازه‌گیری زاویه‌ها و کمان‌های دایـره (محیط دایـره = ۳۶۰ درجه، درجه = ۶۰ دقیقه وغیره)، براساس همین دستگاه عدد نویسی شصت شصتی بابلی‌ها است. بابلی‌ها، عـدد نویسی موضعی را بنیان‌گذاشتند (درست شبیه عددنویسی امروزی‌که، مقدار هررقم بسته به‌مرتبه یاموضعی‌که اشغال‌کرده است، معین می‌شود) ودرمرحله‌ای ازتاریخ خود، نماد صفر (یعنی، علامتی برای مرتبه‌های خالی) راکشف‌کردند.

پ) بابلی‌ها، معادلهٔ درجه‌دوم وبعضی ازحالت‌های معادلهٔ درجه‌سوم و، همچنین، رشته‌ها را، به‌کمك جدول‌های خاص، حل می‌کردند.

نشانه‌های زیادی دردست است‌که‌ریاضیات بابلی‌ها، درفرهنگ ریاضی ملت‌های ماوراءِ قفقاز، بـه خصوص در فرهنگ ریاضیات ارمنی تاثیر داشته موجب شکوفائی آن شده است.

حل مساله‌ها

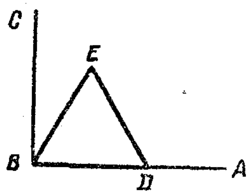
۰۱ طول ضلع شش ضلعی محاط دردایره، برابراست باطول شعاع‌دایره و، بنابراین

$$۲\pi R = ۶R$$

و ازآن‌جا

$$\pi = \frac{۶R}{۲R} = ۳$$

۰۲ بابلی ها مـی توانستند مثلـث متساوی الاضلاع را رسم کنند و، بـه کمك آن، زاویهٔ قائمه را بـه‌سه بخش برابـر تقسیم‌کنند. زاویهٔ قائمهٔ ABC را درنظـر بگیرید (شکل ۴).



شکل ۴

مثلـث متسـاوی الاضـلاع BED را روی پاره خط BD از ضلع BA رسم می‌کنیم. دراین‌صورت؛ زاویهٔCBE، برابر با یـك سوم زاویهٔ قائمه خواهد شد. تنها این می‌ماندکه زاویهٔ EBD را نصف‌کنیم، تا مساله بـه‌طورکامل حل شود.

۳. بنابرروش بابلی‌ها، مساحت یك چهارضلعی برابراست با

$$S=\frac{a+b}{۲}.\frac{c+d}{۲}$$

که درآن، a و b طول‌های دوضلع روبه‌رو، وc و d طول‌های دوضلع‌دیگر روبه‌رو، درچهار ضلعی‌اند. این رابطه، تنها در مــورد مستطیل دقیق است، زیرا درمورد مستطیل داریم:

$$a=b \ , \ c=d \ \text{و} \ S=a.c$$

دستوربابلی‌ها، برای محاسبهٔ مساحت مثلث‌متساوی‌الساقین، درواقع، همان دستور محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی است، منتهی در این‌جا، طول یکی از ضلع‌ها برابر صفراست.

۲ • مساله‌های مصری

یادداشت تاریخی

بعد از بابل، مصر را باید دومین مرکز فرهنگی دنیای کهن دانست. در این «کشور هرم‌ها»، ساختمان های عظیمی به صورت معبدها و هرم‌ها ساخته‌شده است که قدمت آن‌ها، به‌هزاران سال پیش ازمیلاد می‌رسد. بعضی ازاین یادگارها، تا روزگار ما هم باقی مانده‌اند. کارهای مختلف ساختمانی‌و پیشرفت کشاورزی، که‌براساس آبیاری مصنوعی بود، نیازبه‌آگاهی‌های ریاضی و به‌خصوص هندسه را، به‌وجودآورد.

مصری‌ها، قاعده‌های ریاضی را، که برای کشاورزی و اخترشناسی و کارهای ساختمانی لازم داشتند، بردیوارمعبدها ویابر«پاپیروس‌ها» نوشته‌اند. پاپیروس، به‌طوماری نوار مانندگویندکه ازگیاه خاصی به‌همین نام تهیه می‌شد وبرای نوشتن (به‌جای کاغذ) به‌کار می‌رفت.

درموزهٔ بریتانیا، پاپیروسی‌وجود داردکه‌آن‌را پاپیروس ریندنامیده‌اند ودر سال ۱۸۷۷، به وسیلهٔ پرفسور ایزنلورکشف رمز شد. این پاپیروس مربوط به‌حدود ۱۷۰۰ تا ۲۰۰۰ سال پیش ازمیلاد است و درآن ۸۴ مساله وجود داردکه بیشترخصلت حسابی دارند.

پاپیروس‌مسکو، مربوط به‌سال۱۸۵۰پیش‌ازمیلاد است. این‌پاپیروس، درسال ۱۸۹۳، به‌وسیلهٔ گوله نیشچو، کلکسیونر روسی خریداری شد و از سال ۱۹۱۲، به‌مالکیت موزهٔ هنرهای زیبای مسکو درآمد. این سند نادر و پرارزش دنیای کهن به وسیلهٔ «و.آ. توراپوف» و «و.و. ستروو» دانشمندان

شوروی مورد مطالعه قرار گرفت.

در این پاپیروس، مساله‌هایی درباره‌ٔ محاسبهٔ حجم هرم ناقص مربع‌القاعده، حل شده است. به‌کمک پاپیروس‌ها و مدرک‌های دیگری که به‌دست‌آمده است، روشن می‌شود که، مصری‌ها حتی در چهار هزار سال پیش می‌توانستند مساله‌های عملی دربارهٔ حساب، جبر و هندسه را حل کنند. ضمناً، درحساب، نه‌تنها از عددهای درست بلکه از عددهای کسری هم، استفاده می‌کردند.

حل مساله‌ها

۴. حل مساله، به‌حل این معادله منجر می‌شود:

$$x+\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳}\left(x+\frac{۲}{۳}x\right)=۱۰$$

و ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $x=۹$.

۵. در این جا، با پنج جمله از یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۷، سر و کار داریم:

$$۷\ ,\ ۴۹\ ,\ ۳۴۳\ ,\ ۲۴۰۱\ ,\ ۱۶۸۰۷$$

که مجموع آن‌ها، چنین می‌شود:

$$S_۵=\frac{a_۵\cdot q-a_۱}{q-۱}=\frac{۱۶۸۰۷\times ۷-۷}{۷-۱}=\frac{۷(۱۶۸۰۷-۱)}{۶}=$$

$$=\frac{۷\times ۱۶۸۰۶}{۶}=۷\times ۲۸۰۱=۱۹۶۰۷$$

۶. بنابر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{۸}{۹}d\right)^۲=\frac{\pi d^۲}{۴}$$

و ازآنجا

$$\pi=\frac{۸^۲.d^۲.۴}{۹^۲.d^۲}=\frac{۲۵۶}{۸۱}=۳/۱۶$$

۷. بنابر روش مصری داریم:

$$S_۱=\frac{۱}{۲}a\cdot b$$

که‌درآن، a طول قاعده و b طول ساق مثلث متساوی‌الساقین است. ارتفاع مثلث را h می گیریم، داریم:

$$h=\sqrt{b^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}}=b\sqrt{۱-\left(\frac{a}{۲b}\right)^{۲}}$$

در نتیجه، مقدار دقیق مساحت مثلث، چنین می‌شود:

$$S_{۲}=\frac{۱}{۲}a.b\sqrt{۱-\left(\frac{a}{۲b}\right)^{۲}}=S_{۱}\sqrt{۱-\left(\frac{a}{۲b}\right)^{۲}}$$

و ازآن‌جا

$$\frac{S_{۲}}{S_{۱}}=\sqrt{۱-\left(\frac{a}{۲b}\right)^{۲}}=\sqrt{۱-\left(\frac{۴}{۲\times ۱۰}\right)^{۲}}=۰/۹۸$$

یعنی، مقدار اشتباه، بیشتر از ۲٪ نیست.

۸. بنابرروش مصری داریم:

$$S_{۱}=\frac{a+b}{۲}.c$$

که درآن، a و b به‌ترتیب قاعده‌های پایین وبالای ذوزنقه، و c طول ساق آن است. اگرارتفاع ذوزنقه را با h نشان دهیم، به‌دست‌می‌آید:

$$h=c\sqrt{۱-\left(\frac{a-b}{۲c}\right)^{۲}}$$

ومقدار درست مساحت ذوزنقه، چنین می‌شود:

$$S_{۲}=S_{۱}\sqrt{۱-\left(\frac{a-b}{۲c}\right)^{۲}}$$

از آن‌جا

$$\frac{S_{۲}}{S_{۱}}=\sqrt{۱-\left(\frac{a-b}{۲c}\right)^{۲}}$$

اکنون باید مقدارهای عددی را قرار داد و، با محاسبه‌های مقدماتی، نتیجه را به‌دست‌آورد.

۹. اگرحجم هرم ناقص را V بگیریم، بااین دستورمحاسبه می‌شود:

$$V=\frac{h}{۳}(a^۲+ab+b^۲)$$

که در آن، h طول ارتفاع و a و b، بـه‌ترتیب، مقدار مساحت قاعده‌های پایین و بالا هستند.

۱۰. طول ضلع‌های مجهول را x و y می‌گیریم. حل مساله، منجربه حل دستگاه زیرمی‌شود:

$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n},\ x\,.\,y=S$$

که‌اگر دو معادله را درهم ضرب‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^۲=\frac{m}{n}.S \Rightarrow x=\sqrt{\frac{m}{n}.S}$$

وازآن‌جا

$$y=\frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}.S}=\sqrt{\frac{n}{m}.S}$$

۱۱. جواب عبارت است‌از $۱۷۲\frac{۲۱}{۳۲}$. در پـاپیـروس، قسمت‌کسـری جواب، یعنی $\frac{۲۱}{۳۲}$، به‌صورت مجموع‌کسرهایی داده شده است‌که صورت همهٔ آن‌ها واحد است، یعنی

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴۸}+\frac{۱}{۹۶}$$

۳ • مساله‌های یونانی

یادداشت تاریخی

نخستین معلمان یونانی‌های باستان، مصری‌ها بودند. درسدهٔ هفتم پیش‌ازمیلاد،راه ورودآزاد به‌مصر، برای‌مسافران خارجی‌بازشد. دانشمندان یونانی، ازاین امکان، به‌خوبی و با سفربه «سرزمین هرم‌ها» استفاده‌کردند. یونانی‌ها، تقریباً ازسدهٔ چهارم پیش ازمیلاد، جست‌وجوهای مستقل خود را درریاضیات‌آغازکردند و، دراین‌زمینه، وبه‌خصوص درهندسه، به‌موفقیت‌های زیادی دست یافتند. هندسهٔ یونان باستان، درسدهٔ سوم پیش ازمیلاد، به‌اوج خود رسید. دِراین‌سده بودکه‌اقلیدس، سیزده‌کتاب خودرا، زیرنام «مقدمات»، دربارهٔ هندسه نوشت.

در نوشته‌های اقلیدس، جنبهٔ منطقی هندسه، درچنان سطح بالائی‌قرار داشت‌که تنها در سده‌های نوزدهم و بیستم، درکارهای هیلبرت ریاضی‌دان آلمانی ومکتب او، تلاشی برای بهترکردن آن‌ها انجام گرفت.

یونانی‌ها، تنها به‌مساله‌های هندسهٔ مقدماتی علاقه‌مند نبودند (ضمناً، اصطلاح هندسهٔ مقدماتی، درآن زمان، وجودنداشت)، بلکه مبانی استواری هم، برای‌هندسهٔ‌عالی، پی‌ریختند (کارهای‌آپولونیوس، ارشمیدس‌ودیگران).

درنظریهٔ عددها، فیثاغورث وشاگردان او، موفقیت‌های جدی‌به‌دست آوردند.

در زمینهٔ جبر، وبه‌خصوص معادله‌های سیال، باید از «دیوفانت» نام

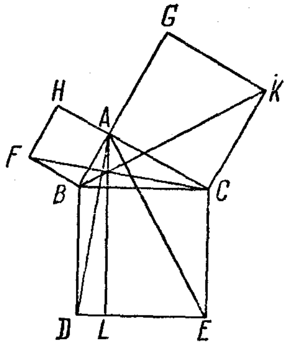
برد که درسده‌های دوم و سوم میلادی، دراسکندریـه می‌زیست و، به همین مناسبت، گاهی اورا دیوفانت اسکندرانی می‌نامند. او، برای نخستین‌بار، در روش‌های جبری خـود، نخستین نمادهای حـرفی را واردکرد و معادله‌های جبری را به‌کمك علامت‌ها نشان داد.

مهم‌تـرین تالیف دیـوفانت، «حساب» اوست، کـه درشش کتاب به ما رسیده است (و احتمال می‌دهندکه در اصل، ۱۳ کتاب بوده است). از روی همین کتاب‌دیوفانت، می‌توان دربارهٔموفقیت جبردریونان‌باستان داوری کرد.

حل مساله‌ها

۱۲. ایـن قضیه، بـه‌قضیهٔ فیثاغورث مشهور شده است و در هرکتاب هندسهٔ مقدماتی، به‌عنوان یکی از اساسی‌ترین قضیه‌ها، آمده است. تقریباً در همهٔ‌کتاب‌های درسی هندسه، کـه برای دبیرستان‌هـا نوشته شده است، قضیهٔ فیثاغورث با اثبات اقلیدسی داده شده‌است. با وجودی‌کـه اثبات اقلیدس، با بیان دقیق شوپنهاور، از نـوع «اثبات تله‌موشی» است، بـه‌کلی فاقد عینیت است و باید، با استدلال‌های پیچیده‌ای، کـورکـورانه به‌دنبال اقلیدس رفت. بنابه اعتقاد پرفسور و. لیتمان، اگر در چهار چـوب دستگاه هندسی مورد بررسی قرارگیرد، اثباتی راکه‌اقلیدس در«مقدمات» خود داده است، می‌توان به‌عنوان طرح ساده‌ای قبول‌کرد. در واقع، عینی‌بودن مطالب، هدف اصلی اقلیدس نیست وآن را در ردیـف اول اهمیت قـرار نمی‌دهد. برای اقلیدس، بهترین اثبات این است‌که حداقل استفاده را، از قضیه‌های قبلی، کرده باشد. ازاین دیدگاه، اثباتی‌که اقلیدس از قضیهٔ فیثاغورث داده اسـت، اثباتی ساده است. اقلیدس، برای اثبات این قضیه، یـك‌بار از قضیهٔ مربوط به‌حالت اول تساوی‌مثلث‌ها ودوبارازاین قضیه‌استفاده می‌کندکه: اگریك متوازی‌الاضلاع ویك‌مثلث، دارای قاعده‌ها وارتفاع‌های‌برابرباشند، مساحت متوازی‌الاضلاع دوبرابرمساحت مثلث است.

مادراین‌جا، اثبات قضیهٔ فیثاغورث را، آن‌طورکه‌اقلیدس در«مقدمات» خودداده‌است (حکم ۴۷)، می‌آوریم. ضمناً، این‌اثبات، به‌گواهی پروکلوس (۴۱۰ – ۴۸۵ میلادی)، متعلق به خود اقلیدس است.



شکل ۵

«فرض کنید، ABC مثلث قائم الزاویه‌ای با زاویهٔ قائمه BAC باشد. من حکم می‌کنم که مربع روی BC برابر است با مربع‌های روی BA و AC روی هم (شکل ۵).

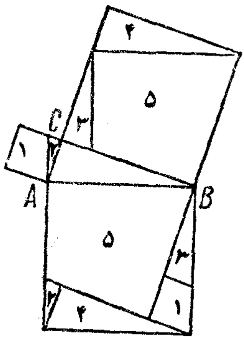
اثبات. مربع BDEC را روی BC و مربع‌های HB و GC را، به ترتیب، روی BA و AC می‌سازیم (حکم ۴۶). از نقطهٔ A، خط راست AL را موازی BD و CE می‌کشیم (حکم ۳۱)؛ AD و FC را وصل می‌کنیم. چون هر کدام اززاویه‌های ABC و BAH قائمه‌اند (تعریف ۱۰)، یعنی ازنقطهٔ A روی خطی مثل BA، دوخط راست AC و AH را در دو جهت طوری رسم کرده‌ایم که زاویه‌های مجانبی به مجموع دو قائمه تشکیل داده‌اند، درنتیجه، CA روی همان خط راست CH قرار دارد (حکم ۱۴). به‌همین ترتیب، AB هم درامتداد AG قرار می‌گیرد. وچون زاویهٔ DBC با زاویهٔ FBA برابراست (اصل ۱)، زیرا هر کدام از آن‌ها قائمه‌اند، اگر زاویهٔ مشترك ABC را اضافه کنیم، به‌معنای این می‌شود که زاویهٔ DBA با زاویهٔ FBC برابراست (اصل ۲)، زیرا اگر به دومقدار برابر، یك مقدار اضافه کنیم، دو مقدار برابربه‌دست می‌آید. چون DB برابرBC و FB برابر BA است (تعریف ۲۲)، پس دوضلع DB وBA، نظیر بـه‌نظیر، با دوضلع BC و FB برابرند، وزاویهٔ DBA با زاویهٔ FBC برابراست؛ یعنی قاعدهٔ AD با قاعدهٔ FC ومثلث ABD با مثلث FBC برابـرمی‌شود (حکم ۴). دوبرابرمثلث ABD، متوازی‌الاضلاع BL است (حکم ۴۱)، زیراآن‌ها در قاعدهٔ BD مشترك‌اند وبین دوخط موازی BD و AL قرارگرفته‌اند (حکم ۴۱). دوبرابر مثلث FBC هم (حکم ۴۱)، مربع HB می‌شود، زیرا قاعدهٔ هردوی‌آن‌ها FB است وبین دو خط موازی FB وHC قراردارند. ولی دو برابردومقداربرابر، باهم برابرند (اصل ۵)؛ یعنی مستطیل BL بامربع HB

برابرمی‌شود. به‌همین‌ترتیب، باوصل AE و BK، ثابت می‌شود که‌مستطیل CL برابر است با مربع GC؛ یعنی تمامی مربع BDEC برابر است بـا دو مربع HB و GC روی هم. اما BDEC، مربعی است که روی BC ساخته شده است و HB و GC، مربع‌هـای روی BA و AC. بـه ایـن ترتیب، مربـع روی ضلع BC برابـر است بـا مجموع مربع‌هـای روی ضلع‌هـای BA و AC.

یعنی، در مثلث قائم‌الزاویه، مربـع روی ضلع مقابل بـه‌زاویهٔ قائمهٔ (وتر)، برابر است با مجموع مربع‌های روی ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه. واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم».

اثبات ازاین نظر جالب است که به‌وسیلهٔ اقلیدس، ودر بیش‌از دوهزار سال پیش، داده شده است و با اثبات امروزی آن، تفاوت ناچیزی دارد.

در ادبیات درسی ریاضی، اثبات‌های فراوانی از قضیهٔ فیثاغوث وجود دارد، کـه براساس شکل‌های هـم‌ارز قراردارند. تفاوت اصلی این اثبات‌ها، با اثبات اقلیدس، در عینی بودن آن‌ها است، ولی ازلحاظ سادگی، به‌مفهومی کـه قبلاً گفتیـم، از اثبـات اقلیدس پایین‌ترند. مثلاً، درسدهٔ نهم‌میلادی، آناریتسی، اثبات خودش را بـراساس شکل ۶ قرارداد.



شکل ۶

قضیهٔ فیثاغورث، تاریخی غنی دارد. ضمنـاً روشن شـده است کـه مصری‌ها، بابلی‌ها، چینی‌هاو هندی‌ها، مدت‌هاپیش ازفیثاغورث، ازاین قضیه آگاهی داشته‌اند.

هندی‌ها، از سدهٔ هفتم پیش ازمیلاد، زیرنام «قاعدهٔ طناب‌ها»، باقضیهٔ فیثاغورث آشنا بودند وازآن، درساختن محراب‌های خود استفاده می‌کردند. بنابراحکام مقدس هندی‌ها، این محراب‌ها می‌بایستی شکل دقیق هندسی‌داشته باشند ونسبت به‌چهار جهت اصلی، توجیه شده باشند.

اثبات خود فیثاغورث به‌ما نرسیده است. درزمان ما، بیش‌ازصد اثبات مختلف، برای قضیهٔ فیثاغورث وجود دارد. چه بساکه یکی ازآن‌ها، متعلق به‌فیثاغورث ویا یکی ازشاگردان او باشد (بنابه‌عادت آن روزگار، هرچیزی راکه شاگردان کشف می‌کردند، به‌نام معلم خود ثبت می‌کردند).

*

فیثاغورث (حدود سال‌های ۵۸۰ تا ۵۰۰ پیش ازمیلاد)، ریاضی‌دان و فیلسوف یونان باستان، درساموس متولد شد. درجوانی، برای مطالعهٔ دانش کاهنان مصری، به‌آن سرزمین سفرکرد. او در بابل هم بود و، درآن‌جا، در جریان ۱۲ سال، توانست اخترشماری (تنجیم) واخترشناسی (نجوم) کاهنان بابلی را فراگیرد. بعداز بابل، به‌جنوب ایتالیا و، سپس، به‌سیسیل رفت ودر آن‌جا مکتب فیثاغوری رابنیان گذاشت که سهم پرارزشی درپیشرفت ریاضیات واخترشناسی داشت. فیثاغورث وشاگردان او، به‌هندسه، چهرهٔ علمی‌دادند. به‌جز قضیه‌ای که به‌نام او مشهور است، اثبات قضیهٔ مربوط به‌مجموع زاویه‌های مثلث، مسألهٔ مربوط به‌پوشش‌ها ـ یعنی تقسیم صفحه به‌چندضلعی‌های منتظم ـ، حل هندسی معادله درجهٔ دوم وطریق ساختن شکلی که با شکل مفروض متشابه وباشکل مفروض دیگرهم‌ارز باشد، نیزبه‌فیثاغورث منسوب است.

در مکتب فیثاغوری، عرفان عددی رشد زیادی کرد. قبول نسبت‌های کمی، به‌عنوان ماهیت همهٔ چیزها، وجداشدن از واقعیت‌های عینی ومادی، این‌مکتب را به‌سمت ذهن گرائی سوق داد. فیثاغورث می‌آموخت که، معیار هرچیز مادی و غیرمادی، عبارت است از عدد و بستگی‌هایی که بین عددها وجود دارد. به‌اعتقاد فیثاغورث، حتی مفهوم‌های به‌کلی دور ازریاضیات‌را، همچون «دوستی»، «درستی»، «شادی» وغیره، می‌توان به‌یاری بستگی‌های عددی روشن کرد. اومعتقد بودکه، این مفهوم‌ها، چیزی جزشکل ویا نمونهٔ این بستگی‌ها نیستند. به‌یاری عدد می‌توان همهٔ خصلت‌های پنهانی را روشن کرد: عددی نمایندهٔ نیکی، دیگری معرف بدی وسومی مظهرکامیابی است و غیره. فیثاغورث اعتقاد داشت که روح هم چیزی جز عدد نیست، جاودان

است و ازیك انسان به‌انسانی دیگر منتقل می‌شود.

عرفان عددی فیثاغورث و دنبال کنندگان راه او، لطمه‌های زیـادی به‌پیشرفت دانش ریاضی وارد آورد.

۱۳. قبلاً یادآوری می‌کنیم کـه، اگر x_1 ، y_1 و z_1 ، یـك سه‌تایی فیثاغوری باشد، عددهای kx_1 ، ky_1 و kz_1 هم، یك سه‌تایی فیثاغوری را تشکیل می‌دهند (k، عـددی است درست و مثبت). در واقع، اگـر دوطرف معادلهٔ

$$x_1^2+y_1^2=z_1^2$$

را در k^2 ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(kx_1)^2+(ky_1)^2=(kz_1)^2$$

بنابراین، اگریك سه‌تایی فیثاغوری دراختیارداشته باشیم، می‌توان بااستفاده از یادآوری بالا، مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تایی‌های فیثاغوری را بـه‌دست آورد. ولی‌البته، این مطلب به‌معنای‌آن نیست‌که، ازاین‌راه همهٔ‌سه‌تایی‌های فیثاغوری به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن این سه‌تایی‌ها، به‌استدلال بیشتری نیازداریم.

سه‌تایی‌های فیثاغوریx،yو z راوقتی ساده می‌نامیم، دو به‌دو نسبت به‌هـم اول باشند. درغیر ایـن صورت، بـه‌آن «سه‌تایی مرکب» می‌گوییم. به‌خودی‌خود روشن‌است‌که، برای‌به‌دست‌آوردن همهٔ سه‌تایی‌های‌فیثاغوری، بایـد مجموعهٔ همهٔ سه‌تایی‌های ساده را شناخت تـا از راه ضرب آن‌هـا در عددهای مثبت ۲،۳،... بتوان همهٔ سه‌تایی‌هـای دیگر را پیدا کرد. از ایـن به‌بعد، تنها باسه‌تایی‌های ساده سروکار خواهیم داشت.

سپس، توجه‌کنیم کـه، اگر ازسه عدد فیثاغوری x ، y و z ، دوتای آن‌ها نسبت به‌هم اول باشند، سه‌تایی (x, y, z) یك سه‌تایی ساده می‌شود، یعنی هردو عدد دلخواه آن، نسبت بـه‌هم، اول خواهند بود. ایـن حکم را ثابت می‌کنیم.

x و y را نسبت بـه‌هم اول می‌گیریم. ثابت می‌کنیم کـه x و z و، همچنین، y و z نسبت به‌هم اول‌اند. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض

می‌کنیم، x و z نسبت به‌هم اول نباشند (هر استدلالی که برای x و z به‌کار بریم، درمورد دوعدد y و z هم صادق است). دراین صورت داریم:

$$x = d.x_1, \quad z = d.z_1$$

که درآن، $d \neq 1$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد x و z است. هر سه‌تایی فیثاغوری دراین معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

بنابراین

$$(dx_1)^2 + y^2 = (dz_1)^2$$

که ازآن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$y^2 = d^2z_1^2 - d^2x_1^2 = (z_1^2 - x_1^2)d^2$$

از این‌جا دیده می‌شود که عدد y، به‌ناچار، باید بر d بخش‌پذیر باشد و، در این‌صورت، دوعدد x و y، برخلاف فرض، نسبت به‌هم اول نمی‌شوند. درنتیجه، x و z نسبت‌به‌هم اول‌اند. و به‌همین‌ترتیب، درمورد دوعدد y و z.

ازآن‌جاکه x و y نسبت‌به‌هم اول‌اند، هردوی آن‌ها نمی‌توانند زوج باشند. ولی این دوعدد، هردو، فردهم نمی‌توانند باشند. درواقع، اگر هردو عدد فرد باشند، می‌توانیم آن‌هارا به‌صورت $x = 2p + 1$ و $y = 2q + 1$ بنویسیم، که درآن‌ها، p و q عددهایی درست و مثبت‌اند. اگر مقدارهای x و y را درمعادلهٔ (1) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = z^2,$$

$$z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2$$

ازاین‌جا، z^2 عددی زوج می‌شود. واین ممکن نیست، مگر آن‌که z عددی زوج باشد. ولی اگر z عددی زوج باشد، z^2 باید بر ۴ بخش‌پذیر شود، درحالی که ازمقدار z^2 دیده می‌شود که درتقسیم‌بر۴، به‌باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد، واین، یك تناقض منطقی است.

به‌این ترتیب، x و y نمی‌توانند هردو زوج یا هردوفرد باشند، یعنی حتماً یکی ازآن‌ها زوج ودیگری فرد است. ازاین به‌بعد، x را فرد و y را زوج می‌گیریم. روشن است‌که z عددی فرد می‌شود. حالا، معادلهٔ (1) را،

به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$$

و فرض می‌کنیم:

$$z+y = m, \quad z-y = n$$

در این صورت

$$z = \frac{m+n}{2}, \quad y = \frac{m-n}{2}, \quad x^2 = m.n$$

وضمناً $m > n$.

چون x، ودرنتیجه x^2، عددی فرد است، بنابراین هردوعدد m و n باید فرد باشند. ثابت می‌کنیم که m و n نسبت به‌هم اول‌اند. استدلال را، با برهان خلف انجام دهیم. m و n را عددهایی می‌گیریم که نسبت به‌هم اول نیستند وبزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آن‌ها را $d \neq 1$ فرض می‌کنیم. دراین صورت

$$m = m_1 d, \quad n = n_1 d$$

وازآن‌جا

$$z = \frac{m+n}{2} = \frac{m_1+n_1}{2}d, \quad y = \frac{m-n}{2} = \frac{m_1-n_1}{2}d$$

یعنی y و z نسبت‌به‌هم اول نیستند، چیزی‌که مخالف فرض ما است. به‌این ترتیب، عددهای m و n، نسبت به‌هم اول‌اند.

از رابطهٔ $x^2 = mn$ واز این حکم‌که m و n نسبت به‌هم اول‌اند، نتیجه می‌شود:

$$m = u^2, \quad n = v^2$$

که درآن‌ها، u و v نسبت به‌هم اول‌اند و، ضمناً $u > v$.

به‌این ترتیب، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$x = u.v, \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

و این‌ها، همان رابطه‌هایی هستندکه سه‌تایی‌های سادهٔ فیثاغوری را به‌دست می‌دهند (مستقیماً تحقیق‌کنید و ببینیدکه این مقدارها، درمعادلهٔ (۱) صدق

می‌کنند).

برای این‌که مطلب روشن‌تر باشد، چند سه‌تایی سادهٔ فیثاغوری را، به‌یاری این رابطه‌ها، پیدا می‌کنیم:

u	v	x	y	z
۳	۱	۳	۴	۵
۵	۱	۵	۱۲	۱۳
۵	۳	۱۵	۸	۱۷
۷	۱	۷	۲۴	۲۵
۷	۳	۲۱	۲۰	۲۹
۷	۵	۳۵	۱۲	۳۷
۹	۱	۹	۴۰	۴۱
۹	۵	۴۵	۱۸	۵۳
۹	۷	۶۳	۱۶	۶۵

یادداشت ۱. سه‌تایی‌های فیثاغوری ۳، ۴و۵، خیلی‌پیش ازفیثاغورث، برای مصری‌ها شناخته بوده است وازآن، برای رسم خط‌های عمود برهم بر روی زمین، استفاده می‌کرده‌اند.به‌همین مناسبت است که مثلث باضلع‌های ۳، ۴ و۵ را مثلث مصری گویند.

یادداشت ۲. باعددهای فیثاغوری، می‌توانیم، هرقدرکه بخواهیم، مثلث هرونی بسازیم. مثلث هرونی، به‌مثلثی گویندکه سه ضلع ومساحت‌آن، با عددهای درست ومثبت بیان شده باشند. در واقع، هرسه‌تایی فیثاغوری، متناظر بایك مثلث قائم‌الزاویه است‌که وتر و ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمهٔ

آن، با این عددها، بیان شده‌اند. اگر دومثلث فیثاغوری درنظر بگیریم که دریکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه برابر باشند، وآن وقت، این دوضلع برابر را طوری روی هم قراردهیم که دوضلع دیگر پهلوی زاویهٔ قائمهٔ، از دومثلث، در امتداد هم قرار گیرند، یك مثلث هرونی به‌دست می‌آید. مثلاً، از دومثلث فیثاغوری با ضلع‌های ۱۳،۱۲،۵ و ۳۷،۱۲،۳۵، یك مثلث هرونی با ضلع‌های ۱۳،۴۰ و ۳۷ به‌دست می‌آید که ارتفاعی برابر ۱۲ دارد و، بنابراین، مساحتش برابر $\frac{۴۰\times۱۲}{۲}$، یعنی ۲۴۰ واحد مربع می‌شود.

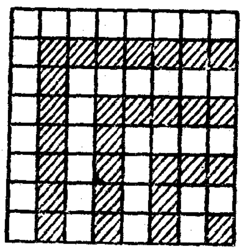
یادداشت ۳. وجود مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تایی‌های فیثاغوری، وسیله‌ای است برای درست کردن مسأله‌هایی بسیار جالب. ریاضی‌دانان، به‌خصوص به‌این سه مسأله علاقه‌مندند:

مسألهٔ اول. از میان سه‌تایی‌های فیثاغوری، همهٔ آن‌هایی را پیدا کنید که، درهر کدام ازآن‌ها، یك مجذور کامل وجود داشته باشد (مثل سه‌تایی ۵،۴،۳ یا ۲۵،۲۴،۷، یا ۴۱،۴۰،۹ وغیره).

مسألهٔ دوم. ازبین سه‌تایی‌های فیثاغوری، همهٔ آن‌هایی را پیدا کنید که، درهر کدام از آن‌ها، دوعدد متوالی وجود داشته باشد (مثل ۱۳،۱۲،۵ یا ۲۹،۲۱،۲۰ وغیره).

مسألهٔ سوم (مسألهٔ فرما). سه‌تایی‌های فیثاغوری (x, y, z) را طوری پیدا کنید که، درآن‌ها، $x+y$ و z مجذور کامل باشند.

معلوم شده‌است که‌این گونه سه‌تایی‌ها، یك‌مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دهند، ولی همهٔ آن‌ها، شامل عددهایی بسیار بزرگ‌اند.



شکل ۷

۱۴. ظاهراً، درمکتب‌فیثاغوری این مسأله را به‌طریق هندسی حل می‌کرده‌اند. درشکل۷، اثبات مسأله، به‌سادگی دیده می‌شود. ۱ رابه‌صورت مربعی نشان می‌دهیم و بعد، عددهای فرد متوالی، به‌شکل Γ درمی‌آیند، و

از روی شکل دیده می‌شود که

$$۱+۳=۴=۲^۲$$
$$۱+۳+۵=۹=۳^۲$$
$$۱+۳+۵+۷=۱۶=۴^۲$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

حل این مسأله، باروش جبری هم، خیلی ساده است. عددهای فرد متوالی، با شروع از ۱، یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند:

$$۱,۳,۵,۷,\ldots,(۲n+۱)$$

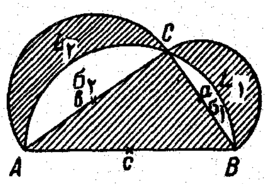
تعداد جمله‌های این تصاعد برابر است با $(n+۱)$. مجموع همهٔ جمله‌های این تصاعد چنین می‌شود:

$$S=\frac{(۱+۲n+۱)(n+۱)}{۲}=(n+۱)^۲$$

۱۵. فیثاغوریان، این مسأله را به‌طریق هندسی حل می‌کردند. اگر در شکل ۷ (که یك مربع است)، بزرگترین علامت Γ را (که یك عدد فرد است) برداریم، بازهم یك مربع باقی می‌ماند، یعنی

$$۲n+۱=(n+۱)^۲-n^۲$$

۱۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر می‌گیریم، که a و b، طول ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه و c، طول وتر آن باشد. نیم دایره‌هایی به‌قطر ضلع‌های مثلث رسم می‌کنیم (شکل ۸). برای روشن‌تربودن‌شکل، مثلث ABC وهلال‌های $L_۱$ و $L_۲$ را هاشور زده‌ایم. باید ثابت‌کرد که، مجموع مساحت‌های $L_۱$ و $L_۲$، برابر است با مساحت مثلث ABC.



شکل ۸

بنابرقضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$a^۲+b^۲=c^۲$$

یا

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

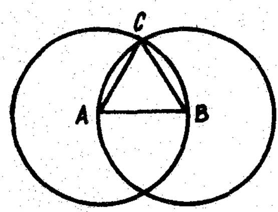
یعنی مجموع مساحت‌های دو نیم‌دایره‌ای که روی ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه ساخته شده‌اند، برابر است با مساحت نیم دایرهٔ روی وتر.

اکنون، اگر مساحت قطعه‌هایی را که بین نیم‌دایرهٔ بزرگ و ضلع‌های a و b قراردارند، به‌ترتیب، σ_1 و σ_2 بنامیم، ومجموع آن‌ها را ازدوطرف برابری بالاکم کنیم، به‌همان نتیجهٔ موردنظر می‌رسیم.

*

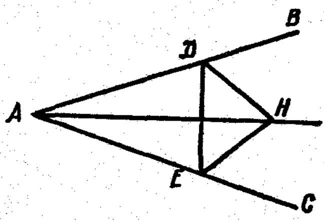
بقراط خیوسی (سدهٔ پنجم پیش از میلاد)، ریاضی دان یونان باستان، مؤلف کتابی است دربارهٔ هندسه که به‌ما نرسیده، ولی بنابه گمان تاریخ‌نویسان، شامل مطالبی بوده است که درچهارکتاب اول «مقدمات» اقلیدس وجوددارد. خیلی‌ها بودندکه روی مسأله‌های تضعیف مکعب و تربیع دایره کار می‌کردند و تلاش برای حل مسألهٔ دوم بود که بقراط را به‌بررسی مساحت هلال‌ها واداشت.

۱۷. به‌مرکز نقطهٔ A و به‌شعاع برابر طول پاره خط مفروض AB، دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل ۹). سپس به‌مرکز B وبا همان شعاع، دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. یکی ازنقطه‌های برخورد دودایره را C می‌نامیم وآن‌را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم تا مثلث، ABC به دست آید. به‌سادگی ثابت می‌شود که، این مثلث، متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۹

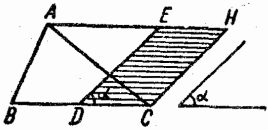
۱۸. BAC را زاویهٔ مفروض می‌گیریم. نقطهٔ D را، به‌دلخواه، روی ضلع AB انتخاب می‌کنیم(شکل ۱۰). بعد روی ضلع AC، پاره خط AE را برابر AD جداکنیم. D را به E وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌ـ



شکل ۱۰

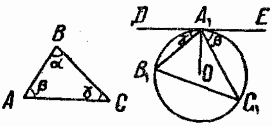
الساقین DEH را روی DE می‌سازیم. اگر A را به H وصل کنیم، خط راست AH زاویهٔ مفروض را، به‌دو بخش برابر تقسیم می‌کند، زیرا دو مثلث ADH و AEH برابرند.

۱۹. ABC را مثلث مفروض و α را زاویهٔ مفروض می گیریم. از نقطهٔ D وسط ضلع BC خط راستی می گذرانیم که با ضلع BC، زاویه‌ای برابر α بسازد (شکل ۱۱). بعد از نقطهٔ C، خط راستی موازی DE و از نقطهٔ A، خط راستی موازی BC رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند. چهارضلعی DEHC، که به این ترتیب به‌دست می آید، متوازی‌الاضلاع مورد نظر است (ثابت کنید).



شکل ۱۱

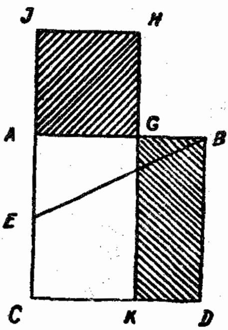
۲۰. از نقطهٔ دلخواه A_1، واقع بر محیط دایرهٔ مفروض، مماس DE را بر آن رسم می کنیم (شکل ۱۲). بعد، زاویهٔ EA_1C_1 را برابر زاویهٔ β و زاویهٔ DA_1B_1 را برابر زاویهٔ γ رسم می کنیم. اگر B_1 و C_1 را به هم وصل کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$، که همان مثلث مورد نظر است، به‌دست می آید.



شکل ۱۲

۲۱. استدلال اقلیدس. «پاره‌خط مفروض را AB فرض کنید (شکل ۱۳). باید AB را طوری تقسیم کنیم که مستطیل حاصل از تمامی پاره‌خط و یکی از قطعه‌های آن، با مربع روی قطعهٔ دیگر، برابر باشد.

مربع ABCD را روی AB می‌سازیم (حکم ۴۶ از کتاب اول). از نقطهٔ E وسط AC به B وصل می کنیم. CA را امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ J



شکل ۱۳

برسد، به‌نحوی که EJ برابربا BE باشد. روی AJ، مربع JG رامی‌سازیم و HGرا تا نقطهٔ K امتـداد می‌دهیم. من حکم می‌کنم کـه AB در نقطهٔ G، طوری تقسیم شده است کـه مستطیل حاصـل از AB و BG، برابراست با مربعی که روی ضلع AG ساخته می‌شود».

مسالهٔ اقلیدس، که‌نام «تقیسم‌طلائی» یا «تقسیم‌به‌ذات وسط وطرفین» را برخوددارد، درکتاب‌های درسی‌امروز، این‌طور تنظیم شده‌است: پاره‌خط مفروض را به دوقسمت نابرابرطوری تقیسم‌کنیدکه قسمت بزرگتر، واسطهٔ هندسی بین تمام پاره‌خط وقسمت کوچکتر باشد.

طول پاره‌خط را a وطول قسمت بـزرگتر را x می‌گیریم. درنتیجه، طول قسمت کوچکتربرابر$a-x$ می‌شود (روی شکل۱۳ داریم: $AB=a$، $AG=x$ و$GB=a-x$). دراین‌صورت، x ازاین‌معادله به‌دست می‌آید:

$$x^۲=a(a-x) \Rightarrow x^۲+ax-a^۲=۰$$

که‌با حل‌آن، مقدار x چنین می‌شود:

$$x_۱=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a \quad , \quad x_۲=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}a$$

شرط مساله، تنها درجواب اول صدق می‌کند. بنابراین

$$x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a$$

که درآن داریم: $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}=۰/۶۱۸۰۳...$(کسری‌نامتناهی ونامتناوب).

بنابراین: $x\simeq ۰/۶۲a$.

تقسیم طلائی، به‌طورآگاهانه، درساختمان‌های مذهبی و در مجسمه‌سازی، مورد استفادهٔ خود را پیداکـرده‌است. به‌خصوص، دریونان باستان، ضمن ساختن بناهای تاریخی، به «تقسیم طلائی» توجه بسیار داشتند.

۲۲. ابتدا ثابت می‌کنیم کـه، هر عدد درست مثبت، یـا واحد است یا عددی است اول ویا می‌تواند به‌صورت ضرب عددهای اول تجزیه شود.

حکم، بـرای عدد ۱ درست است. فـرض می‌کنیم، ایـن حکم، برای عددهای درست ومثبتی که‌ازn تجاوز نمی‌کنند، درست باشد، ثابت می‌کنیم،

دراین‌صورت، برای $n+1$ هم درست است.

اگر $n+1$ عددی اول باشد، خود به‌خود به‌معنای آن است که حکم، برای $n+1$ هم درست است. ولی، اگر $n+1$ عددی اول نباشد، به‌معنای آن است که عددی است مرکب و، بنابراین: $n+1=n_1 \cdot n_2$. ضمناً، n_1 و n_2 عددهای درست‌مثبتی هستند که، هر کدام از آن‌ها، از $n+1$ کوچکتراند. طبق فرض، از آن جا که n_1 و n_2 از n تجاوزنمی‌کنند، می‌توانند به ضرب عامل‌های اول تجزیه شوند، در نتیجه، $n+1$ هم قابل تجزیه به ضرب عامل‌های اول است.

به‌این‌ترتیب، هرعدد درست مثبت، غیر ازواحد، یا عددی‌است اول و یا قابل تجزیه به‌ضرب عامل‌های اول.

حالا، به‌حل مسالهٔ اقلیدس می‌پردازیم. اثبات را به‌طریق برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم، عددهای اول، مجموعه‌ای متناهی را تشکیل دهند ومثلاً، شامل n عدد باشد:

$$p_1 , p_2 , \dots , p_n$$

این‌عددهای اول‌رادرهم ضرب ویك واحدبه‌حاصل‌ضرب اضافه‌می‌کنیم، به‌این عدد می‌رسیم:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n+1$$

این عدد ازهرکدام ازعددهای p_1 ، p_2 ،...، p_n بزرگتراست و، بنابراین، عددی است غیراول. ولی، بنابرآن‌چه گفتیم، هرعدد غیر اول، قابل تجزیه به‌عامل‌های اول است، یعنی

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n+1=q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$$

که در آن q_1 ، q_2 ،...، q_n ، عددهایی اول‌اند.

هیچ کدام از عددهای q_1 ، q_2 ،...، q_n ، نمی‌توانند با یکی از عددهای‌اول p_1 ، p_2 ،...، p_n برابرباشند، درواقع، اگرمثلاً داشته‌باشیم: $q_l=p_k$، باید سمت چپ برابری

$$q_1 q_2 \cdots q_n-p_1 p_2 \cdots p_n=1$$

بر q_l بخش‌پذیر باشد و، در نتیجه، سمت راست برابری هم باید بر این عدد بخش‌پذیر شود، چیزی که‌ممکن نیست، زیراواحد بر q_l $(p_k \neq 1)$ بخش‌پذیر

نیست، به‌این ترتیب، به‌جزعددهای اول p_1 ، p_2 ،...، p_n؛ عددهای اول دیگری هم پیدا شد (q_1 ، q_2 ،...، q_n). این تناقض، درستی حکم اقلیدس راثابت می‌کند،یعنی عددهای‌اول، یك مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل‌می‌دهند.

اولر، راه حل بکر وجالبی از مسالـهٔ اقلیدس دارد. مـا ماهیت این استدلال را دراین‌جا می‌آوریم(اثبات بازهم، با استفاده ازبرهان خلف‌است).

فرض‌کنیم، مجموعهٔ عددهای اول، مجموعـه‌ای متناهی باشد. تعداد عددهای اول را n می‌گیریم و آن‌ها را p_1، p_2، ...، p_n فرض می‌کنیم. این تصاعدهای هندسی را تشکیل می‌دهیم:

$$1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\ldots+\frac{1}{p_1^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}},$$

$$1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_2^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^m}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$$

این رشته‌ها را در هـم ضرب می‌کنیم (مثل مـورد ضرب رشته‌های متقارب، می‌توان تعداد محدودی ازجمله‌ها را درنظر گرفت)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_3}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}}$$

درمجموع سمت‌راست این برابری، همهٔ‌ترکیب‌های مختلف وممکن نمادهای α_1 ، α_2 ،...، α_n وجـود دارد. روشن است که هـرعدد درست ومثبت m به‌ضرب توان‌هایی ازعددهای اول قابل تجزیه است: $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$، وضمناً تنها به‌یك طریق (ثابت کنید). ازآن‌جا

$$\sum\frac{1}{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}}=\sum\frac{1}{m}$$

یعنی، مجموعی که درسمت چپ قرار دارد، شامل همهٔ کسرهای به صورت $\frac{1}{m}$، به‌ازای هرعدد درست و مثبت m است، مجموعی راکه درسمت راست برابری قرار دارد، می‌توان برحسب ردیف تصاعدی مخرج‌ها نوشت:

$$\sum\frac{۱}{m}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots$$

به‌این‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots=\frac{p_۱}{p_۱-۱}\cdot\frac{p_۲}{p_۲-۱}\cdots\frac{p_n}{p_n-۱}$$

حاصل‌ضربی که درسمت راست این برابری قرار دارد، بی‌نهایت‌نیست، زیرا عددهای $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n، مجموعه‌ای متناهی را تشکیل می‌دهند. ولی

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots$$

رشتهٔ توافقی است و، همان طورکه می‌دانیم، رشته‌ای متباعد است. این تناقض منطقی، به معنای‌آن است‌که فرض نخستین ما، دربارهٔ محدود بودن تعداد عددهای اول، درست نیست و عددهای اول، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

۲۳. راه حل خود آپولونیوس، برای این مساله، به‌ما نرسیده است، باوجود این، برخی ازمؤلفان باستانی ازآن یادکرده‌اند. ظاهراً، برای‌این‌که آپولونیوس مساله را درحالت‌کلی حل‌کند، ابتدا حالت‌های خاص وحدی‌آن را، مورد بررسی قرار داده است:

۱) دایره‌ای رسم‌کنیدکه ازسه نقطهٔ مفروض بگذرد؛

۲) دایره‌ای رسم‌کنیدکه برسه خط راست مفروض مماس باشد؛

۳) دایره‌ای رسم‌کنیدکه‌ازنقطهٔ مفروض‌بگذرد وبردوخط راست‌موازی مفروض مماس باشد؛

۴) دایره‌ای رسم‌کنیدکه ازنقطهٔ مفروض بگذرد و بردو خط راست مفروض متقاطع مماس باشد؛

۵) دایره‌ای رسم‌کنیدکه ازدو نقطهٔ مفروض بگذرد و برخط راست

مفروضی مماس باشد؛

۶) دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد و از دو نقطهٔ مفروض بگذرد؛

۷) دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروضی که از یك نقطه می گذرند، مماس باشد.

بررسی نشان می‌دهد که، اگر مسالهٔ آپولونیوس، دارای تعداد محدودی جواب باشد، این تعداد از ۸ تجاوز نمی کند.

*

مولف این مساله، آپولونیوس برغه‌ای، یکی از مشهورترین دانشمندان یونانی درسدهٔ سوم پیش از میلاد است. کتاب او، شامل قسمت عمده‌ای از ادبیات ریاضی آن زمان است. با همهٔ این‌ها، شهرت آپولونیوس به‌خاطر رساله‌ای است که در ۸ مقاله دربارهٔ مقطع‌های مخروطی نوشته است (یکی از این ۸ مقاله گم شده است).

۲۴. اگر ضلع مربع را برابر a بگیریم، شعاع دایرهٔ محاطی $r=\frac{a}{۲}$ و دایرهٔ محیطی $R=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ می‌شود. ازآن‌جا، اگر مساحت دایرهٔ محاطی را s ومساحت دایرهٔ محیطی را S بگیریم، داریم:

$$s=\pi r^۲=\frac{۱}{۴}\pi a^۲ \quad , \qquad S=\pi R^۲=\frac{۱}{۲}\pi a^۲$$

وبنابراین: $S=۲s$.

*

مولف این مساله، ارشمیدس سیراکوزی (۲۸۸-۲۱۲ پیش ازمیلاد)، بزرگترین ریاضی‌دان و فیزیك‌دان همهٔ زمان‌هاست. زندگی او، آمیخته به افسانه‌هاست. طبق این افسانه‌ها، او در جریان دوسال، به‌کمك ماشین‌هایی که اختراع کرده بود، قلب دفاع از سیراکوز را در برابرارتش بزرگ روم ــ که از خشکی و دریا شهر را محاصره‌کرده بود ــ تشکیل می‌داد. او «پیچ ارشمیدس» و «اهرم‌های ارشمیدس» را اختراع وقانون هیدروستاتیك را ــ که

به «قانون ارشمیدس» مشهور است ـ کشف کرد.

ارشمیدس، درمحاسبه‌های خود، از روشهایی استفاده می‌کرد که به روش‌های ریاضیات عالی امروزی ـ که براساس نظریهٔ حدها، بنیان گذاری شده است ـ بسیار نزدیک است.

(مساله، ازرسالهٔ «پیش قضیه‌ها» نوشتهٔ ارشمیدس، برداشته‌شده‌است.)

۳۵. ۱) $\frac{۱}{۲}\cdot ۲\pi r \cdot r=\pi r^{۲}$.

۲) $\frac{\pi r^{۲}}{۴r^{۲}}=\frac{۱۱}{۱۴}$، ازآن جا

$$\frac{\pi}{۴}=\frac{۱۱}{۱۴}\Rightarrow \pi=\frac{۴۴}{۱۴}=\frac{۲۲}{۷}$$

به‌این‌ترتیب، مساحت دایره طبق‌محاسبهٔ ارشمیدس،وشبیه‌محاسبهٔ امروزی، برابر است با $\frac{۲۲}{۷}r^{۲}$.

(این‌مساله، ازرسالهٔ«اندازه گیری دایره»، متعلق‌به‌ارشمیدس، برداشته شده است).

۳۶. باتوجه به‌شکل ۱، داریم:

$$S_{AFDHCB}=\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{AC}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{AD}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{DC}{۲}\right)^{۲}=$$

$$=\frac{\pi}{۸}(AC^{۲}-AD^{۲}-DC^{۲})=\frac{\pi}{۸}[(AD+DC)^{۲}-AD^{۲}-DC^{۲}]=$$

$$=\frac{\pi}{۸}\times ۲AD\cdot DC=\frac{\pi}{۴}BD^{۲}=\pi\left(\frac{BD}{۲}\right)^{۲}$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳۷. مساحت قطاع کروی، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S=۲\pi Rh$$

که درآن، R شعاع کره و h ارتفاع قطاع است.

اگر l، طول خط راستی باشدکه‌راس قطاع را به‌یکی ازنقطه‌های‌محیط دایرهٔ قاعده وصل می‌کند، داریم: $l^{۲}=۲Rh$ وازآنجا

$$S = \pi l^2$$

(مساله، از رسالهٔ ارشمیدس، به نام «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است.)

۲۸. حجم کره برابر است با $\frac{4}{3}\pi R^3$ وحجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

برای برابربودن این دوحجم، باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{r^2 h}{4}}$$

حجم استوانه، برابراست با $\pi r^2 h$. بنابراین، برای این که حجم کره برابربا حجم استوانه باشد، داریم:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} r^2 h}$$

(مساله، ازرسالهٔ «دربارهٔ کره واستوانه» برداشته شده است.)

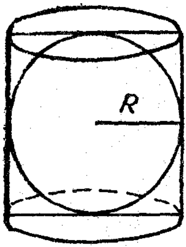
۲۹. باتوجه به‌شرطهای‌مساله، برای حجم‌استوانه داریم (شکل۱۴):

$$V_1 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{3}{2} V_2$$

V_1 را حجم استوانه و V_2 را حجم کره گرفته‌ایم.

به همین ترتیب، اگر سطح کل استوانه‌ای را S_1 و سطح کره را S_2 بگیریم، خواهیم داشت:

$$S_1 = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 = \frac{3}{2}(4\pi R^2) = \frac{3}{2} S_2$$



شکل ۱۴

مساله، از رسالهٔ «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است. خود ارشمیدس، علاقهٔ خاصی به این مساله داشت. بنابر افسانه‌ای، ارشمیدس وصیت کرده بود که بر سنگ مزار او، کره‌ای که محاط دراستوانه‌ای باشد، حك کنند واین وصیت هم، به وسیلهٔ

نزدیکان او اجرا شد.)

۳۰. راه‌حل ارشمیدس را، از روی رسالهٔ «دربارهٔ تربیع سهمی»، به‌زبان نشانه‌های امروزی، می‌آوریم.

مساله این است: مطلوب است مجموع جمله‌های تصاعد نامتناهی نزولی

$$a+b+c+d+\dots$$

با قدر نسبت برابر $\frac{۱}{۴}$، بنابه تعریف تصاعد باقدرنسبت $q=\frac{۱}{۴}$ داریم:

$$b=\frac{a}{۴},\quad c=\frac{b}{۴},\quad d=\frac{c}{۴},\dots$$

و یا

$$a=۴b,\ b=۴c,\ c=۴d,\dots$$

سپس

$$b+c+d+\dots+\frac{۱}{۳}(b+c+d+\dots)=$$

$$=\left(b+\frac{b}{۳}\right)+\left(c+\frac{c}{۳}\right)+\left(d+\frac{d}{۳}\right)+\dots=$$

$$=\frac{۴}{۳}b+\frac{۴}{۳}c+\frac{۴}{۳}d+\dots=\frac{۱}{۳}(۴b+۴c+۴d+\dots)=$$

$$=\frac{۱}{۳}(a+b+c+\dots)$$

از آن‌جا

$$b+c+d+\dots=\frac{۱}{۳}a$$

که اگر به دوطرف برابری، a را اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a+b+c+d+\dots=\frac{۴}{۳}a$$

و درنتیجه

$$۱+\frac{۱}{۴}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}+\dots=\frac{۴}{۳}$$

(این مساله را، باروش عادی، یعنی استفاده از رابطهٔ حاصل‌جمع در تصاعد هندسی نزولی، حل کنید.)

۳۱. نتیجه‌ای را که ارشمیدس به دست آورده است، با نشانه‌های امروزی، می‌توان این‌طور نشان داد:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

این رابطه، از اتحاد واضح زیر به‌دست می‌آید:

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

درواقع، اگر به‌جای n، پشت سرهم، مقدارهای ۱، ۲، ۳،...، n را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
1^3-0^3&=3\times 1^2-3\times 1+1\\
2^3-1^3&=3\times 2^2-3\times 2+1\\
3^3-2^3&=3\times 3^2-3\times 3+1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
n^3-(n-1)^3&=3n^2-3n+1
\end{aligned}$$

که ازجمع آن‌ها، نتیجه می‌شود:

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-3(1+2+3+\ldots+n)+$$

$$+n=3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

و یا

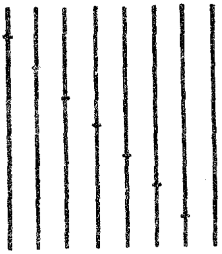
$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=n^3-n+\frac{3n(n+2)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ارشمیدس، با بیانی هندسی وبه طریق زیر، نتیجه را به‌دست می‌آورد (شکل ۱۵): «اگر طول‌هایی را، به‌تعداد دلخواه، درنظربگیریم، به‌نحوی

که هرکدام ازآن‌ها، نسبت به‌قبلی، به اندازهٔ کوچکترین این طول‌ها، بزرگتر باشد. و اگر طول‌های دیگری را به‌همین تعداد در نظر بگیریم، به نحوی که هر کدام ازآن‌ها، برابر بزرگترین طول رشتهٔ اول باشد، دراین صورت، مجموع همهٔ مربع‌هایی که روی طول‌های



شکل ۱۵

برابر بزرگترین طول ساخته می‌شود، به‌اضافهٔ مربعی که روی طول بزرگتر ساخته می‌شود به‌اضافهٔ مساحتی که بین کوچکترین طول، و طولی که برابر با مجموع همهٔ طول‌های نابرابر است، قرار دارد، برابر می‌شود با سه برابر مجموع مربع‌هایی که روی همهٔ طول‌های نابرابرساخته می‌شود».

با نشانه‌های امروزی، بیان ارشمیدس را می‌توان چنین نوشت:

$$n \cdot n^{۲}+n^{۲}+(۱+۲+۳+\ldots+n)=$$
$$=۳(۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\ldots+n^{۲})$$

که ازآن‌ها، بعد ازانجام عمل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$n^{۲}(n+۱)+\frac{n(n+۱)}{۲}=۳(۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\ldots+n^{۲})$$

و یا سرانجام

$$۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\ldots+n^{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

(مساله، ازرسالهٔ ارشمیدس، به نام «دربارهٔ مارپیچ» گرفته‌شده‌است.)

۰۳۲ حل ارشمیدس. ارشمیدس خطاب به‌پادشاه هه‌لونا می‌گوید: «تو می‌دانی که بسیاری ازاخترشناسان گمان می‌کنند که، همهٔ دنیا کره‌ای است که، مرکزآن درمرکززمین وشعاع‌آن برابر فاصلهٔ ازمرکز زمین تا خورشیداست. برخلاف اخترشناسان، آریستارک ساموسی، در نوشته‌های خود می‌کوشد این نظررا ردکند وثابت کند، همهٔ دنیا مضربی ازاین مقدار است. اوبه‌این نتیجه می‌رسدکه ستارگان و خورشید بی‌حرکت‌اند، زمین روی دایره‌ای به دور خورشید می‌چرخد و خورشید درمرکز این دایره قراردارد. قبول می‌کنیم که

قطر کرهٔ ستارگان بی‌حرکت نسبت بـه قطر همهٔ دنیا ـ به معنایی که بیشتر اخترشناسان می‌فهمند (یعنی منظومهٔ شمسی)ـ مثل نسبت‌آخری باشد به‌قطر زمین. من ادعا می‌کنم، اگـر توده‌ای از شن، حتی به بزرگی کرهٔ ستاره‌ای آریستارك، داشته‌باشیم، بازهم می‌توانم‌عددی رانام ببرم‌که ازتعدادشن‌های چنین کرهٔ فرضی هم بیشتر باشد. پیشنهاد من این است:

۱) محیط‌کرهٔ زمین، کمتراز۳ ملیون «ستادی» است [هر«ستادی» برابر ۱۸۵ متر است].

همان‌طورکه‌می‌دانی، کوشش شده است ثابت‌کنندکه محیط دایرهٔ زمین قریب ۳۰۰۰۰۰ ستادی است، ولی من رای گذشتگان را ترجیح می‌دهم و آن را ده برابر بزرگتر می‌گیرم.

۲) خورشید از زمین و زمین ازماه بزرگتر است. دراین مورد، من با اکثریت اخترشناسان موافقم.

۳) قطر خورشید از ۳۰ برابر قطر ماه بزرگتر نیست [در واقـع، قطر خورشید، قریب ۴۰۰ برابر قطر ماه است].

۴) قطر خورشید بیشتر از ضلع هزار ضلعی محاط در دایرهٔ عظیمهٔ‌کرهٔ سماوی است.

من، این اعتقاد آریستارك را قبول دارم‌که اندازهٔ ظاهری خورشید را $\frac{۱}{۷۲۰}$ اندازهٔ دایرهٔ منطقةالبروج می‌داند. من‌خودم زاویه‌ای را، که خورشید تحت‌آن دیده‌می‌شود، اندازه‌گرفته‌ام، ولی اندازهٔ دقیق این زاویه، به‌سادگی به دست نمی‌آید، زیرا، نه چشم‌ها، نه دست‌ها ونـه وسیله‌های اندازه‌گیری، قابل اطمینان نیستند. ولی، این‌جا، جای بازکردن این مطلب نیست. همین قدرکافی است بدانیم‌که، این زاویه، از $\frac{۱}{۱۶۴}$ زاویـهٔ قائمه کوچکتـر و از $\frac{۱}{۳۰۰}$ آن بزرگتر است.

براساس فرض ۲) و ۳)، قطر خورشید از ۳۰ برابر قطر زمین‌کوچکتر است. بنابراین، (طبق فرض۴)، محیط هزارضلعی محاط در یکی از دایره‌های

عظیمهٔ کرهٔ سماوی، کمتر از ۳۰۰۰۰۰ برابر قطرزمین است. ولی، اگر این مطلب درست باشد، آن وقت، قطر همهٔ جهان (یعنی بـه اعتقاد آریستارك، قطر منظومهٔ شمسی)، کمتراز ۱۰۰۰۰ برابرقطر زمین است، زیرا تنها برای شش‌ضلعی منتظم، قطر برابر است با $\frac{۱}{۳}$ محیط، برای هرچندضلعی دیگر، قطر از $\frac{۱}{۳}$ محیط کمتر است.

بنابرفرض نخست، محیط دایرهٔ زمین، از ۳ملیون «ستادی» کمتراست؛ درنتیجه، قطر آن، کمترازیك ملیون «ستادی» می‌شود، زیرا طول قطر دایره، از $\frac{۱}{۳}$ محیط آن کمتر است. بنابـراین، قطر همهٔ دنیا هم، از ۱۰۰۰۰ ملیون «ستادی» کمتر می‌شود.

اکنون، فرض می‌کنیم که، دانهٔ شن، چنان کوچك باشد که ۱۰۰۰۰ از آن، به‌اندازهٔ یك دانهٔ خشخاش بشود. من قطر دانهٔ خشخاش را $\frac{۱}{۴۰}$ اینـچ می‌گیرم. در یکی از آزمایش‌ها ، وقتی ۲۵ دانهٔ خشخاش را در امتداد هم، روی خط راست قرار دادم، یك اینچ شد. ولی من می‌خواهم، استدلالی را داشته باشم که در برابرهر اعتراضی، تضمین شده باشد.

برای ما [یونانی‌ها]، تنها نام عددها تا «میریاد» $(۱۰۰۰۰=۱۰^{۴})$ وجود دارد با وجود ایـن، مـا تـا ۱۰۰۰۰ میریادهم $(۱۰^{۸}=۱۰^{۴}.۱۰^{۴})$ حساب می‌کنیم. برای ایـن کـه جلوتر برویم، ۱۰۰۰۰ میریاد $(۱۰^{۸})$ را، به‌عنوان واحد مرتبهٔ دوم، می گیریم ودوباره ۱۰۰۰۰ برابر آن را انتخاب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۱۰^{۸}\times ۱۰^{۸}=۱۰^{۸\times ۲}$$

که آن را، واحد مرتبهٔ سوم می گیریم. بـه‌همین ترتیب، می‌توان ۱۰۰۰۰ میریاد بار از واحد مرتبهٔ سوم را انتخاب کرد وواحد مرتبهٔ چهارم رابه‌دست آورد، $(۱۰^{۸\times ۳})$ وغیره. مثلاً، $۱۰^{۵۶}=۱۰^{۸\times ۷}$، واحدمرتبهٔهشتم می‌شود؛ ضمناً، عدد ۱، واحد مرتبهٔ اول است.

حالا حساب می‌کنیم که چند دانهٔ شن، که یك میریاد آن حجم یك دانهٔ خشخاش را پر می‌کند، در کره‌ای به‌قطر یك اینچ جا می‌گیرد. بنابرفرض ما، هردانهٔ خشخاش، برابر $\frac{۱}{۴۰}$ اینچ است، ولی بنابرحکم معلوم هندسی، حجم کره‌ها برنسبت مکعب قطرهای آن‌هاست، یعنی برنسبت

$$۱^{۳}:۴۰^{۳}=۱:۶۴۰۰۰$$

به‌این‌ترتیب، کرهٔ به‌قطریك اینچ، حاوی ۶۴۰۰۰ دانهٔ خشخاش، یا ۶۴۰۰۰ میریاد، یعنی ۶۴×۱۰^{۷}، یا کمتر از $۱۰^{۹}$ دانهٔ شن می‌باشد. نسبت حجم کرهٔ به‌قطر ۱۰۰ اینچ به کرهٔ به‌قطر یك اینچ، مثل $۱۰۰^{۳}:۱$ یا $۱۰^{۶}:۱$ است. به‌این ترتیب، روشن است که، در کرهٔ به‌قطر ۱۰۰ اینچ، کمتر از $۱۰^{۶}\times۱۰^{۹}$ دانهٔ شن است.

کرهٔ به‌قطر ۱۰۰۰۰ اینچ، دارای کمتر از $۱۰^{۲۱}=۱۰\times۱۰^{۴}\times۱۰^{۱۶}$ یعنی ده میریاد واحد مرتبهٔ سوم ما، دانه شن می‌باشد.

ولی چون «ستادی» از ۱۰۰۰۰ «اینچ» کمتر است، روشن است که در کرهٔ به‌قطر یك ستادی، کمتر از ۱۰ میریاد واحد مرتبهٔ سوم، از دانه‌های شن وجود دارد، به‌همین ترتیب، پیدا می‌کنیم که در کرهٔ

به‌قطر $۱۰^{۲}$ ستادی، کمتر از $۱۰۰۰\times۱۰^{۸\times۳}$ دانهٔ شن؛

به‌قطر $۱۰^{۴}$ ستادی، کمتر از $۱۰\times۱۰^{۸\times۴}$ دانهٔ شن؛

به‌قطر $۱۰^{۶}$ ستادی، کمتر از $۱۰^{۶}\times۱۰\times۱۰^{۸\times۴}$ دانهٔ شن؛

به‌قطر $۱۰^{۸}$ ستادی، کمتر از $۱۰\times۱۰^{۴}\times۱۰^{۸\times۵}$ دانهٔ شن؛

به‌قطر $۱۰^{۱۰}$ ستادی، کمتر از $۱۰۰۰\times۱۰^{۸\times۶}$ دانهٔ شن، جامی گیرد.

ولی $۱۰^{۱۰}$، یعنی ۱۰۰۰۰ ملیون ستادی. و چون قطر همهٔ دنیا، از ۱۰۰۰۰ ملیون ستادی کمتر است، پس درهمهٔ دنیا، کمتر از $۱۰۰۰\times۱۰^{۸\times۶}$ دانهٔ شن جا می‌گیرد. سپس، قطرکرهٔ آریستارك ازستارگان بی‌حرکت، آن‌قدر برابر قطر همهٔ دنیا (یعنی ۱۰۰۰۰ ملیون ستادی) است؛ که همهٔ دنیا همان قدر برابر قطر زمین (یعنی ۱ ملیون ستادی) است. بنابراین، معلوم می‌شود که کرهٔ آریستارك (ستارگان بی‌حرکت)، به کرهٔ همهٔ جهان، نسبتی برابر $۱۰^{۱۲}:۱$ دارد. درنتیجه، می‌تواند کمتر از ۱۰۰۰ میریاد واحد مرتبهٔ هشتم

$(10^{63} = 10^{8\times7} \times 10^{4} \times 100)$ دانهٔ شن درخود جا بدهد.

و پادشاه هه‌لونا می‌تواند آن را به‌همه نشان بدهد: لزومی ندارد که این‌ها خبرگان ریاضیات باشند، بلکه کافی است درك ریاضی داشته باشند و بتوانند دربارهٔ فاصله‌ها و اندازه‌های زمین، خورشید، ماه و تمامی جهان بیندیشند. آن‌وقت، خواهی دیدکه‌همهٔ‌آن‌ها، آن‌چه راکه گفته‌ام، می‌پذیرند، به‌همین جهت است که این بررسی را نامناسب نمی‌دانم»[1].

---

۱. هر کسی که، در زمان ما، دورهٔ دبستان را به‌پایان رسانده باشد و یا، بهتر بگوییم، با عدد نویسی (دهدهی)، بـه‌خوبی آشنا باشد، می‌تواند چنین محاسبه‌ای را انجام دهد و، حتی، عددهای بسیاربزرگتراز آن را هم بنویسد. پس چرا ارشمیدس بزرگ، بـه‌این محاسبهٔ خـود افتخار می‌کند و رساله‌ای مستقل را به‌آن اختصاص داده است.

واقعیت این است که، حتی‌درمتن ترجمهٔ نوشتهٔ ارشمیدس، تا حد زیادی دست‌کاری شده است: چرا که همهٔ عددها رابا شکل عددنویسی امروزی نشان داده‌ایم، درحالی‌که، درزمان ارشمیدس، این‌شکل‌عددنویسی وجود نداشته‌است عددنویسی معمول امروزی، کمتر از ۲۰۰۰ سال است کـه معمول شده (یعنی چند سده بعداز ارشمیدس). شکل امروزی عدد نویسی، که بـه‌وسیلهٔ هندی‌ها کشف و وارد درفرهنگ بشری شده است، درواقع، انقلابی درحساب، و به‌طور کلی ریاضیات، به‌وجودآورد و کار پیشرفت را، به‌صورت جهشی، تأمین کرد. تمـام عمل‌های امروزی درحساب (جمـع، ضرب، تقسیم، ریشه‌گرفتن، نشان دادن‌عدد به صورت توان و غیره) براساس «موضعی» بودن عدد نویسی است. وقتی‌که مثلاً می‌نویسید ۴۴۴۴، تنها از یك علامت۴ استفاده کرده‌اید، ولی ارزش‌این۴، بسته به«موضع»و«مرتبهٔ» آن‌فرق‌می‌کند (ازسمت‌راست و به‌ترتیب، ارزش‌این‌علامت، برابراست با۴، ۴۰، ۴۰۰و۴۰۰۰). دریونان‌باستان، ازعدد‌نویسی‌موضعی اطلاعی‌نداشتند وعددهارا به‌کمك حرف‌های‌الفبا نشان می‌دادند (شبیه‌عدد نویسی‌به‌کمك‌حرف‌های «ابجد») و به‌همین مناسبت، هم‌نوشتن‌عددها وهم انجام‌عمل‌روی‌آن‌ها، بسیاردشواربود. یونانیان، که‌در جامعه‌ای برده‌داری زندگی‌میکردندو کارهای‌عملی‌به‌عهدهٔ برده‌ها بود، ازکارمحاسبه‌وعمل‌های‌حساب اکراه داشتند، چراکه به‌درد عمل وزندگی می‌خورد وکسرشأن «آزادها» بود که به‌کارهای‌عملی-که‌خاص برده‌ها بود-بپردازند. به‌این دلیل است که، هندسهٔ یونانی تا مرز هندسهٔ عالی پیش رفت، ولی حساب وجبر تکان زیادی نخورد.

←

(ایـن مسأله، از رسالـهٔ ارشمیدس، بـه‌نام محاسبهٔ «دانه‌های شن»، برداشته شده است.)

۳۳. این مسألهٔارشمیدس، یعنی رسم یك هفت ضلعی منتظم، درواقع، چهارمین مسألهٔ مشهور دنیای قدیم است. بـه‌جز ایـن، سه مسألهٔ مشهور دیگرهم‌وجوددارد: تضعیف مکعب (مسألهٔ ۳۵)، تثلیث زاویه (مسألهٔ۳۶) و تربیع دایره (مسألهٔ ۳۷).

ارشمیدس، توانست هفت ضلعی منتظم را، به‌کمك خط‌کش و پرگار، رسم کند. او ازپیش قضیه‌ای استفاده‌کردکه، برای حل‌آن، باید ازحل معادلهٔ درجهٔ سومی‌استفاده کردکه، درمحدودهٔ رادیکال‌های بافرجهٔ ۲ قابل حل‌نیست و، بنابراین، نمی‌توان ریشه‌های آن‌را، به‌کمك خط‌کش وپرگار، رسم کرد.

به‌این ترتیب، ارشمیدس هـم می‌دانست کـه مسألهٔ رسم هفت ضلعی منتظم را، نمی‌توان به‌طورکامل ودقیق، تنها به‌کمك خط‌کش وپرگاروبدون استفاده ازوسیله‌های دیگر، حل‌کرد.

به‌این حکم، کـه هفت‌ضلعی منتظم را نمی‌تـوان بـه‌یاری خط‌کش و پرگار رسم‌کرد، می‌توان به‌کمك سنگ محك‌گوس، قانع شد. طبق این‌معیار (باسنگ محك)، اگر n عددی اول باشد، برای این‌که بتوان n ضلعی‌منتظم را به‌یاری خط‌کش وپرگار رسم‌کرد، لازم وکافی است‌کـه عدد n بـه‌صورت $۲^{۲^k}+۱$ باشد.

عدد ۷را نمی‌توان‌به صورت $۲^{۲^k}+۱$ نوشت و، بنابراین، رسم هفت‌ضلعی منتظم، تنها به‌یاری خط‌کش وپرگار، ممکن نیست.

در واقع، هفت ضلعی منتظم را می‌توان به‌تقریب و با هراندازه دقت

→

ارشمیدس را، باید از این جهت هم، استثنائی و نادر بـه‌حساب‌آورد، زیـرا برخلاف دیگر فیلسوفان و دانشمندان یونان باستان، هم در زمینهٔ «حساب» وهم درزمینهٔ دیگردانش‌های عملی، مثل فیزیك ومکانیك، به‌سختی وبه‌صورتی حیرت‌آور کار کرده است. با دستگاه عدد نویسی‌آن‌زمان یونانی‌ها، ارشمیدس حق داشت، برای محاسبهٔ عددی به‌این بزرگی ونوشتن ونام بردن‌آن، به‌خود ببالد. [یادداشت مترجم]

لازم، رسم کرد (به‌کمك خط‌کش و پرگار) و اگـر بخواهیم، رسم هفت ضلعی منتظم به‌طور دقیق انجام شود، باید به‌جـز خط‌کش و پرگار، از وسیله‌های دیگری هم (مثل گونیای دوقائمه) استفاده‌کرد.

برای رسم تقریبی هفت ضلعی منتظم، مثلاً، می‌توان بـه‌این ترتیب عمل‌کرد: ضلع هفت‌ضلعی منتظم محاط دردایره، به‌تقریب برابراست با نصف ضلع سه ضلعی منتظم محاط در همین دایره. در واقع، به‌ازای $r = ۱$ داریم:

$$a_{۷} = ۲ \sin \frac{۳۶۰^{\circ}}{۱۴} \approx ۰/۸۶۸,$$

ازطرف دیگر

$$\frac{a_{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \approx ۰/۸۶۷$$

وهمان‌طورکه دیده می‌شود، خطای این تقریب از ۰/۳٪ تجاوز نمی‌کند.

مَسألهٔ رسم هفت ضلعی منتظم، منجر به‌حلِ این معادله می‌شود:

$$x^{۷} - ۱ = ۰$$

در زیر نشان می‌دهیم‌که، این معادله، به‌کمك رادیکال‌های بـا فرجهٔ ۲ قابل حل نیست.

ریشه‌های هفتم واحد (به‌جز ۱)، درمعادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x^{۶} + x^{۵} + x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + x = -۱ \qquad (۱)$$

که درآن $x = \cos \frac{۲\pi}{۷} + i \sin \frac{۲\pi}{۷}$.

چون $x^{۷-k} = x^{-k}$، بنابراین، معادلهٔ را می‌توان چنین نوشت:

$$x + x^{-۱} + x^{۲} + x^{-۲} + x^{۳} + x^{-۳} = -۱ \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم:

$$x + x^{-۱} = y \qquad (۳)$$

آن وقت

$$x^{۲} + x^{-۲} = y^{۲} - ۲ \qquad (۴)$$

$$x^{۳} + x^{-۳} = y^{۳} - ۳y \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۲)، به‌کمك رابطه‌های (۳)،(۴) و (۵)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$y^3+y^2-2y-1=0 \qquad (6)$$

به‌این ترتیب، مسأله منجر به‌حل معادلهٔ درجهٔ سوم (۶) می‌شود که می‌دانیم به‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲، قابل حل نیست. در نتیجه، مسألهٔ مربوط به‌رسم هفت‌ضلعی منتظم رانمی‌توان به‌یاری خط‌کش وپرگارحل‌کرد.

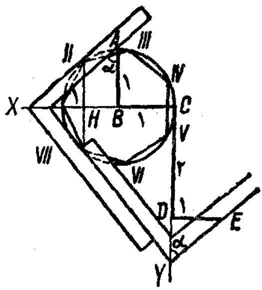
باوجود این، معادلهٔ (۶)، و بنابراین مسألهٔ رسم هفت ضلعی منتظم، به‌کمك گونیای دوقائمه قابل حل است. یادآوری می‌کنیم که

$$y=x+x^{-1}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}\right)+$$

$$+\left(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}\right)=2\cos\frac{2\pi}{7}$$

بنابراین، اگردورأس‌هفت‌ضلعی‌منتظم‌را، یك‌درمیان، به‌هم‌وصل‌کنیم، وتری به‌دست می‌آیدکه فاصلهٔ مرکز دایره از آن، برابر $\frac{y}{2}=\cos\frac{2\pi}{7}$ می‌شود.

اکنون، معادلهٔ (۶) را به‌کمك رسم حل می‌کنیم. برای این منظور، خط شکستهٔ ABCDE را می‌کشیم (شکل ۱۶)، به‌نحوی که $AB\perp BC$، $BC\perp CD$ و $CD\perp DE$، و ضمناً، $AB=1$، $BC=1$، $CD=2$ و $DE=1$ باشد(۱، ۲، ۱، ۱، قدر مطلق ضریب‌ها درمعادلهٔ (۶) هستند).



شکل ۱۶

حالا، گونیای‌دوقائمه را،آن‌طور که درشکل ۱۶ می‌بینید، قرارمی‌دهیم و، به‌اصطلاح، خط شکستهٔ مقعر AXYE را رسم می‌کنیم. با محاسبه معلوم می‌شودکه $XB=y$ (جواب‌موردنظر).این محاسبه‌را انجام می‌دهیم. زاویهٔ XAB را α می‌نامیم، دراین صورت داریم:

$$XB=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$CY=XC\operatorname{tg}\alpha=(XB+1)\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=(\operatorname{tg}\alpha+1)\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha,$$

$$CY=۲+DY=۲+\cot g\,\alpha=۲+\frac{۱}{tg\,\alpha}=\frac{۲tg\,\alpha+۱}{tg\,\alpha}$$

ازبرابر قراردادن دومقداری که برای CY به‌دست آمد، نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲tg\,\alpha+۱}{tg\,\alpha}=tg^۲\alpha+tg\,\alpha,$$

$$tg^۳\alpha+tg^۲\alpha-۲tg\,\alpha-۱=۰$$

و دیده می‌شود که $tg\,\alpha=XB$، درمعادلهٔ (۶) صدق می‌کند.

بنابراین، پاره خط XB را می‌توان به‌جای y درنظر گرفت. می‌دانیم $\frac{XB}{۲}=\frac{y}{۲}$ عبارت است از فاصلهٔ مرکز B تا وتری که دو رأس هفت ضلعی منتظم را، یك درمیان، به‌هم وصل کرده باشد. نقطهٔ H وسط XB را پیدا می‌کنیم واز آن‌جا، عمودی بز XB اخراج می‌کنیم تا دایره را درنقطه‌های II و VII قطع کند. به‌این ترتیب، دو رأس از رأس‌های هفت ضلعی منتظم به‌دست می‌آید و، به کمك آن‌ها، بقیهٔ رأس‌ها هم، به‌سادگی، پیدا می‌شوند.

۳۴. تعداد گاوهای نر سفید، سیاه، کرند و چند رنگ را، به‌ترتیب، X، Y، Z و T و تعداد گاوهای ماده از همین رنگ‌ها را، به‌ترتیب، x، y، z و t می‌گیریم. مسأله، منجربه‌حل دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$X=\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)Y+Z,$$

$$Y=\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\right)T+Z,$$

$$T=\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}\right)X+Z,$$

$$x=\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)(Y+y)$$

$$y=\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\right)(T+t),$$

$$t=\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}\right)(Z+z),$$

$$z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(X+x)$$

به‌این معادله‌ها، باید دوشرط دیگررا هم اضافه کرد:

$X+Y$، برابر یك عدد مربعی است،

$T+Z$، برابر یك عدد مثلثی است.

به‌زبان دیگر

$$X+Y=p^2$$

$$T+Z=\frac{q(q+1)}{2}$$

ارشمیدس، حل این مسأله را به‌تفصیل داده است. درآن‌جا، برای X، تعداد گاوهای نر سفید، این جواب به‌دست آمده است:

$$X=1598\times 10^{206541}$$

وتعداد کل گاوهای نر

$$7766\times 10^{2065410}$$

ای. ن. وسه‌لوسکی، درتفسیراین‌مساله‌می‌نویسد: برای‌نوشتن‌جواب «به‌کتابی ۶۰۰ صفحه‌ای نیاز داریم، به شرطی‌که، درهرصفحه، ۲۵۰۰ رقم جا بدهیم».

۳۵. سرچشمهٔ مسالهٔ دوبرابرکردن (تضعیف) مکعب را باید، ظاهراً، درتمایل‌دانشمندان باستانی، به‌تعمیم مسالهٔ‌سادهٔ دوبرابرکردن مربع‌دانست. دوبرابرکردن مربع، یعنی رسم مربعی‌که مساحت‌آن، دوبرابر مساحت مربع مفروض باشد.

دشواری‌هایی‌که در مسیر حل مسالهٔ تضعیف مکعب وجود داشت، موجب پیدایش افسانه‌هایی دربارهٔ سرچشمهٔ این مساله بوده است. برای نمونه، یکی از این افسانه‌ها را می‌آوریم. این افسانه، به اراتوستن (۲۷۶ تا ۱۹۴ پیش از میلاد)، ریاضی‌دان، اخترشناس وفیلسوف مشهور یونانی، منسوب است. او دربارهٔ علت‌هایی‌که دانشمندان باستانی را، وادار به بررسی‌مسالهٔ مربوط به تضعیف مکعب کرده‌است، این‌طور حکایت‌می‌کند.

زمانی در جزیرهٔ دیلوس، واقع دردریای اژه، بیماری طاعون شیوع پیدا کرد. اهالی این جزیره، برای کمك ومشورت، به کاهن بزرگ دلفی، که در معبدآپولون دردلفی زندگی می کرد، مراجعه کردند (دلفی ـ مرکزعام مذهبی یونانیان در فوکید، در دامنهٔ کوه پارناس).

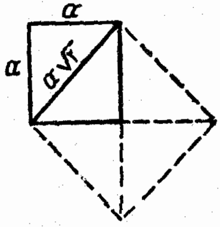
کاهن بزرگ، برای تسکین درد واندوه مردم، پاسخ داد که باید لطف خدایان را جلب کرد و، برای این منظور باید محراب طلائی آپولون را، که به شکل مکعب است، دوبرابر کرد.

اهالی دیلوس، با عجله، دو محراب طلائی، به اندازه‌ای که در معبد آپولون بود، ساختند وآن‌ها را روی هم گذاشتند. به این امید که مسالهٔ دو برابر کردن قربان گاه مکعبی را حل کرده‌اند.

ولی طاعون تمام نشد. مردم دوباره به کاهن بزرگ مراجعه کردند و با حیرت پرسیدند: «چراباوجودی که محراب طلائی آپولون بزرگ را دو برابر کرده‌ایم، طاعون ازبین نمی‌رود؟» ولی کاهن بزرگ پاسخ داد: «نه، شما مسالهٔ مورد نظررا حل نکرده‌اید؛ شماباید قربان گاه را طوری دوبرابر کنید، که شکل مکعبی آن تغییر نکند».

وچون از حل مساله، آن طور که کاهن دیلوس خواسته بود، عاجز ماندند، از افلاطون، فیلسوف و ریاضی‌دان، تقاضای کمك کردند. ولی او، به‌طور مبهم پاسخ داد: «احتمالاً، خدایان به‌این مناسبت از شما ناراضی‌اند که به هندسه، کم می‌پردازید». باوجود این، خود افلاطون هم نتوانست این مسأله را به کمك خط کش وپرگار، حل کند. از همان زمان‌ها، این مساله را مسالهٔ «دیلوسی» هم گفته‌اند.

یونانیان باستان، مسالهٔ مربوط به دو برابرکردن مربع را، نسبتاً ساده حل می‌کردند. برای این منظور، باید بتوان ریشهٔ دوم ۲ را، به کمك پرگار و خط کش، رسم کرد. درواقع، اگر طول ضلع مربع مفروض را a بگیریم، ضلع مورد نظر ـ که آن را x می‌نامیم ـ



شکل ۱۷

باید دراین شرط صدق کند.

$$x^۲ = ۲a^۲$$

واز آن‌جا

$$x = a\sqrt{۲}$$

بنابراین، x را باید برابرقطر مربع مفروض گرفت که، بنابرقضیهٔ فیثاغورث، برابر با $a\sqrt{۲}$ می‌شود (شکل ۱۷).

یونانیان، باتعمیم مسالهٔ مربوط به دو برابر کردن مربع، می‌خواستند مسالهٔ مربوط به دو برابر کردن مکعب را هم، به‌کمك خط کش وپرگار، حل کنند. حل مسالهٔ مربوط به دوبرابرکردن مکعب، منجربه‌رسم ریشهٔ سوم ۲، به‌کمك خط کش وپرگار، می‌شود. در واقع، اگر طول یال مکعب مفروض را a فرض‌کنیم‌وطول یال مکعب دوبرابرآن را xبگیریم، بایدداشته‌باشیم:

$$x^۳ = ۲a^۳$$

واز آن‌جا

$$x = a\sqrt[۳]{۲}$$

ولی تمام تلاش‌ها، برای رسم $\sqrt[۳]{۲}$، بـه‌کمك خط کش وپـرگار، بدون نتیجه ماند. این تلاش‌های بی‌ثمر، همچنان ادامـه داشت تا اینکه، در نیمهٔ اول‌سدهٔ‌نوزدهم، ثابت شدکه‌رسم $\sqrt[۳]{۲}$ به‌کمك خط کش وپرگار، ممکن‌نیست.

برای این‌کـه تصوری دربارهٔ قابل حـل بودن یا غیر قابل حل بودن مساله‌های مربوط بـه ساختمان‌های هندسی داشته باشیم، به یادآوری کوتاه زیر، اکتفا می‌کنیم.

قبل‌ازهرچیز، به‌یاد می‌آوریم که عبارت‌های زیررا می‌توان، به‌سادگی و به‌کمك خط کش وپرگار، رسم کرد:

$$a+b \text{ ، } a-b \text{ ، } \frac{a \cdot b}{c} \text{ ، } \sqrt{a \cdot b} \text{ ، } \sqrt{a^۲+b^۲} \text{ ، } \sqrt{a^۲-b^۲}$$

که درآنها، a، b، و c، پاره‌خط‌هایی مفروض‌اند.

اگرحل مساله‌ای، منجربه‌انجام تعداد محدودی عمل‌های پشت‌سرهم، ازاین نوع‌ها باشد،آن وقت، مساله به‌کمك پرگار وخط کش، قابل حل‌است. ولی اگر حل مساله، محدود به‌انجام متوالی تعدادی متناهی از این عمل‌ها

نشود، آن وقت نمی‌توان چنین مساله‌ای را، به‌کمك خط‌کش و پرگار، حل کرد. مسالهٔ مربوط به‌تضعیف مکعب‌هم، نمونه‌ای از همین مساله‌هاست، و نمی‌توان آن را، تنها به‌یاری خط‌کش و پرگار، یعنی تنها با رسم خط راست ودایره، حل کرد.

گفتیم که مسالهٔ مربوط به‌تضعیف مکعب، منجر به‌حل این معادلهٔ درجهٔ سوم می‌شود:

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

که در آن، a و x به ترتیب عبارتند از طول یال‌های مکعب مفروض و مکعب مجهول.

اگر برای سادگی کار، یال مکعب مفروض را برابر ۱ بگیریم، به‌معادلهٔ $x^3 - 2 = 0$ می‌رسیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که این معادله باضریب‌های گویا، دارای ریشهٔ گویا ویا ریشه‌ای که به‌صورت جذر یك عدد گویا باشد، نیست. بنابراین، طبق آن‌چه گفتیم، نمی‌توان آن را، به‌کمك خط‌کش وپرگار، رسم کرد.

نخستین دانشمندی که، به‌روشنی، اعتقاد خود را مبنی بر ناممکن بودن رسم پاره‌خطی برای $\sqrt[3]{2}$، به‌کمك خط‌کش وپرگار، اظهار کرد، رنه دکارت، دانشمند فرانسوی بود. او درسال ۱۶۳۷، این حکم را ارائه داد که: ریشهٔ سوم عددی که کعب درست ندارد، عددی گنگ است ومحاسبهٔ آن را نمی‌توان منجر به تعداد محدودی عمل جذر گرفتن کرد.

اثبات دقیق مسالهٔ قابل حل نبودن مسالهٔ تضعیف مکعب را، به‌کمك خط‌کش وپرگار، پ. ونتل، ریاضی‌دان فرانسوی، درسال ۱۸۳۷ به‌دست داد.

یکی از نخستین هندسه‌دانان یونان قدیم، که با استفاده از وسیله‌های دیگری، علاوه برخط‌کش وپرگار، گام مهمی برای حل مسالهٔ تضعیف مکعب برداشت، بقراط خیوسی (سدهٔ پنجم پیش ازمیلاد) بود.

بقراط خیوسی، حل مسالهٔ فضایی تضعیف مکعب را، منجربه بررسی یك مسالهٔ مسطحه کرد. این مساله عبارت بود از جست وجوی دو واسطهٔ هندسی، بین دوپاره خطی که یکی دوبرابر دیگری باشد به زبان دیگر، او

می‌خواست، دو پاره‌خط x و y را طوری پیداکندکه اگرآن‌ها را بین دوعدد مفروض a و ۲a قرار دهند، یك تصاعد هندسی به‌دست‌آید:

$$a , x , y , ۲a$$

برای این که، این چهارمقداربه‌تصاعد هندسی‌باشند، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{۲a}$$

ازآن‌جا: $x^۲=ay$ و $y^۲=۲ax$. بنابراین

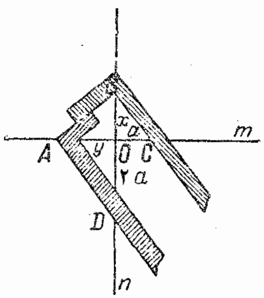
$$x^۴=a^۲y^۲=۲a^۳x \Rightarrow x^۳=۲a^۳$$

روشن‌است‌که x عبارت است ازضلع مکعبی که‌حجم‌آن، دوبرابرحجم مکعب مفروض به‌ضلع a باشد.

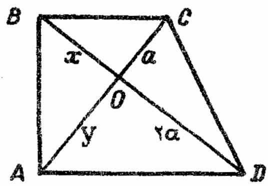
معلوم است‌که«درج» واسطه‌های x و y را نمی‌توان به‌کمك خط‌کش وپرگارانجام داد؛ زیرا این عمل منجربه‌پیداکردن $x=\sqrt[۳]{۲}$ به‌کمك خط‌کش وپرگار می‌شودکه، البته، ممکن نیست.

به‌نظرمی‌رسدکه «درج» واسطه‌هایx و y رامی‌توان به‌انجام رسانید، به‌شرطی‌که از وسیله‌های اضافی وتکمیلی،که به همین منظورآماده می‌شود، استفاده‌کنیم. افلاطون واراتوستن، برای پیداکردن واسطه‌های x و y (وقتی که بین پاره‌خط‌های معلوم a و ۲a قرارگیرند وبا آن‌ها، یك تصاعد هندسی بسازند)، وسیله‌های ساده وبکری پیشنهادکردند.

وسیلهٔ افلاطون، از دو گونیای معمولی نجاری تشکیل می‌شد. خود



شکل ۱۹



شکل ۱۸

ساختمان هندسی، برمبنای این پیش قضیه بود: در هرذوزنقه قائم‌الزاویه (شکل ۱۸)، که قطرهای عمود بر هم داشته باشد، قطعه‌های قطرها، تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند:

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OD}$$

(ثابت کنید!)

رسم واسطه‌های x و y، که برای حل مسالهٔ تضعیف مکعب لازم است، منجربه عمل‌های زیرمی‌شود. دوخط راست m و n را درنظرمی گیریم که برهم عمود ودرنقطهٔ O متقاطع باشند (شکل ۱۹). روی m ودر طرف راست O، پاره خط $OC=a$ را جدا می‌کنیم (a، ضلع مکعبی است که می‌خواهیم دوبرابرآن را پیداکنیم). روی خط راست n ودر پایین O، پاره‌خط $OD=۲a$ را جدا می‌کنیم. اکنون، دوگونیا بر می‌داریم (گونیاها را هاشور زده‌ایم) وآن‌ها را طوری قرار می‌دهیم (شکل ۱۹ را ببینید) که یك ضلع گونیای اول از نقطهٔ C ـ که نقطه‌ای معلوم است ـ بگذرد و راس‌آن برخط راست n واقع باشد. همین‌طور، یك‌ضلع گونیای دوم از نقطهٔ D ـ که معلوم است ـ بگذرد و رأس‌آن برخط راست m قرار گیرد. دو ضلع دیگر گونیاها، باید درامتداد هم باشند.

وقتی‌که دوگونیا را به این ترتیب قرار دهیم، روی خطهای راست m و n، نقطه‌های A و B به‌دست‌می‌آید. درنتیجه، اگرفرض‌کنیم $OB=x$ و $OA=y$، طبق پیش قضیه داریم:

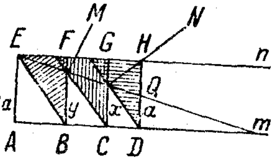
$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{۲a}$$

وازآن‌جا

$$x^۳=۲a^۳$$

$x=OB$، همان یال مکعب مورد نظر ماست.

وسیلهٔ اراتوستن را «مه‌زولاب» (mesolabe) می‌نامند که به‌معنای «دام» است، یعنی وسیله‌ای که، دو مقدار واسطه را، که یکی از آن‌ها ضلع مکعب مجهول است، به‌دام می‌اندازد.



شکل ۲۰

دام اراتوستن، از دو میلهٔ موازی m و n تشکیل شده است که فاصلهٔ بین آن‌ها، دوبرابر ضلع مکعب مفروض، یعنی ۲a، می‌باشد. بین این دومیله، سه مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی قرار گرفته است، به‌نحوی که یکی از ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آن‌ها، بر میلهٔ بالایی وراس مقابل این ضلع، برمیلهٔ پایینی واقع باشد: ضمناً، نخستین مثلث سمت‌چپ، ثابت است ودومثلث دیگر، می‌توانند درطول میله‌هاحرکت کنند (شکل ۲۰ را ببینید).

روی ضلع‌پهلوی زاویهٔ قائمهٔ HD، ازمثلث متحرك سمت راست، پاره‌خط $DQ=a$ را جدا می‌کنیم. اکنون، مثلث‌های متحرك را آن قدر جا به‌جا می‌کنیم تا نقطه‌های برخورد وتر هر مثلث با ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه مثلث دیگر (M و N)، با نقطه‌های E و Q، در امتداد یك خط راست‌قرار گیرند. دراین‌صورت، ازمثلث‌های متشابه‌متناظر، به‌دست می‌آید:

$$NC\frac{a}{NC}=\frac{NC}{MB}=\frac{MB}{2a}$$

که‌اگر NC را به x و MB را به y نشان دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

بنابراین، $x=NC$، عبارت‌است ازهمان مقدار مجهول‌یال‌مکعب دوبرابر. مسالهٔ دیلوسی، حل‌شد.

۳۶. دانشمندان یونانی باستان؛ بدون هیچ اشکالی می‌توانستند، به کمك وسیله‌های خاصی، هرزاویهٔ دلخواه را به‌سه قسمت برابرتقسیم‌کنند. ولی این مساله، همیشه در برابرآن‌ها قرار داشت که، چرا تثلیث زاویه ـ که این‌طوربه‌آسانی و به‌یاری مکانیسم‌های خاص قابل اجراست، به‌کمك خط‌کش وپرگار تن به‌حل نمی‌دهد. آیا درواقع، می‌توان این مساله رابه‌کمك این ابزارهای رسمی ساختمان‌های هندسی، درحالت‌کلی حل‌کرد؟

برای این‌که به‌این پرسش پاسخ بدهیم، ذکربعضی مطلب‌ها لازم‌است.

زاویه‌ای را که می‌خواهیم به‌سه‌قسمت برابر تقسیم کنیم، با 3α نشان می‌دهیم و $\cos 3\alpha$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به‌رابطه‌های مثلثاتی، معلوم است که

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

دوطرف این رابطه‌را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha$$

اگر $2\cos 3\alpha = a$ و $2\cos\alpha = x$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$a = x^3 - 3x$$

یا

$$x^3 - 3x - a = 0 \qquad (1)$$

برای این‌که ثابت کنیم، مسألهٔ تثلیث زاویه، به‌کمک خط‌کش و پرگار، در حالت کلی قابل حل نیست، کافی است نشان‌دهیم که ، دست‌کم، یک‌زاویه وجود داردکه نمی‌شود آن‌را ، به‌کمک خط‌کش و پرگار، به‌سه‌قسمت‌برابر، تقسیم‌کرد. با استدلال ساده‌ای می‌توان نتیجه گرفت‌که زاویهٔ ۶۰ درجه ، در چنین وضعی‌است. درواقع‌اگرفرض‌کنیم : $3\alpha = 60^\circ$ ، به‌دست‌می‌آید :

$\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$ و معادلهٔ (۱) چنین می‌شود: $\qquad x^3 - 3x - 1 = 0$

در جبر ثابت می‌شودکه، چنین معادله‌ای، یا ریشهٔ گویا ندارد ویا ، اگر ریشهٔ گویایی داشته باشد ، تنها می‌تواند ۱+ یا ۱ — باشد . ولی هیچ‌کدام از این دو عدد، در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کنند، یعنی معادلهٔ (۲) ، ریشهٔ گویا ندارد. بنابراین، طبق «قضیهٔ غیرقابل حل» ، نمی‌توان زاویهٔ ۶۰ درجه را ، به‌کمک خط‌کش و پرگار، به‌سه قسمت برابر تقسیم‌کرد. از این مطلب، که زاویهٔ ۶۰ درجه را نمی‌توان به‌کمک خط‌کش و پرگار به‌سه قسمت برابرتقسیم‌کرد، نتیجه می‌شودکه، زاویهٔ ۲۰ درجه وزاویهٔ ۴۰درجه، هیچ‌کدام ، به‌کمک خط‌کش و پرگار، قابل‌رسم نیستند . از این‌جا ، نتیجهٔ مهمی حاصل می‌شود: ۹ ضلعی منتظم، ۱۸ ضلعی‌منتظم وغیره را نمی‌توان به‌کمک خط‌کش و پرگار رسم‌کرد.

برای زاویهٔ α از معادلهٔ (۱)، می‌توان بی‌نهایت مقدار پیداکردکه، به‌ازای‌هرکدام ازآن‌ها، معادلهٔ (۱) درمحدودهٔ رادیکال‌های با فرجهٔ۲، قابل

حل نباشند و، بنابراین، مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها وجود دارد که ثلث کردن آن‌ها، به‌کمك خط‌کش و پرگار، ممکن نیست.

به‌این ترتیب ، اگر بخواهیم تنها از خط‌کش و پرگار استفاده کنیم، مسألهٔ تثلیث زاویه قابل‌حل نیست .

دانشمندان باستانی می‌توانستند، زاویهٔ قائمه را به‌کمك خط‌کش و پرگار، به‌سه‌قسمت برابر تقسیم‌کنند. این امکان را می‌توان به‌صورت نظری ثابت کرد . وقتی‌که داشته‌باشیم $3\alpha = 90^\circ$، به‌دست می‌آید: $a = 0$ و معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$x^3 - 3x = 0 \qquad (3)$$

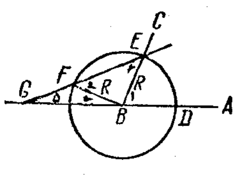
ریشه‌های معادلهٔ (۳)، عبارتند از ۰، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$. به‌این‌ترتیب، ریشه‌های غیرصفر این‌معادله، باریشهٔ دوم بیان می‌شوند. این نتیجه‌گیری، به‌معنای آن است‌که زاویهٔ ۹۰ درجه را می‌توان، به‌کمك پرگار وخط‌کش، به‌سه قسمت برابر تقسیم‌کرد.

با استدلال مشابهی: می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ ۴۵ درجه هم، به‌کمك خط‌کش و پرگار، قابل‌تقسیم به‌سه‌بخش برابر است.

باید یادآوری‌کنیم‌که، تثلیث زاویه، به‌کمك خط‌کش و پرگار ، برای مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها ، ممکن است . مثلاً ، همهٔ زاویه‌های به صورت $\frac{\pi}{2^n}$ (n، عددی است درست ومثبت)را می‌توان، باهمین‌وسیله‌ها، به‌سه‌قسمت برابر تقسیم‌کرد (خودتان، این حکم را ثابت‌کنید).

ارشمیدس، راه‌حل بسیارساده و بکری برای حل مسألهٔ تثلیث زاویه، به‌کمك پرگار و خط‌کشی‌که دو نشانهٔ متحرك داشته‌باشد، ارائه داده‌است . روش‌کار را روی نمونه‌ای مشخص نشان می‌دهیم .

فرض‌کنید ، بخواهیم زاویهٔ حاده‌و دلخواه‌ABC را به سه‌قسمت برابر تقسیم‌کنیم. برای این‌منظور به مرکزB وشعاع دلخواهR، دایره‌ای رسم‌می‌کنیم (شکل۲۱) . نقطه‌های



شکل ۲۱

برخورد این دایره را با ضلع‌های زاویه، به D و E نشان می‌دهیم. حال، خط‌کش بادونشانهٔ متحرك F وG را برمی‌داریم وFG را برابر R می‌گیریم. خط‌کش را در نقطهٔ E طوری قرار می‌دهیم که F و G با نقطهٔ E در یك امتداد قرارگیرندو، ضمناً، F برمحیط دایره و G برامتداد ضلع BA واقع شود. در این صورت، زاویهٔ EGD، برابر یك‌سوم زاویهٔ مفروض ABC خواهد شد. این حکم را ثابت می‌کنیم.

برای سادگی کار، زاویه‌ها را روی شکل با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نشان داده‌ایم. باید ثابت‌کنیم که زاویهٔ ۵، برابر یك‌سوم زاویهٔ ۱ می‌باشد.

داریم: $\hat{۱} = \hat{۵} + \hat{۲}$ (خاصیت زاویهٔ بیرونی مثلث)، و $\hat{۳} = \hat{۵} + \hat{۴}$ (همان خاصیت). از طرف دیگر، $\hat{۵} = \hat{۴}$ (خاصیت مثلث متساوی‌الساقین). بنابراین: $\hat{۳} = ۲ \times \hat{۵}$. در مثلث متساوی‌الساقین BEF داریم: $\hat{۳} = \hat{۲}$، در نتیجه

$$\hat{۱} = \hat{۵} + \hat{۲} = \hat{۵} + \hat{۳} = \hat{۵} + ۲ \times \hat{۵} = ۳ \times \hat{۵}$$

یعنی زاویهٔ ۵، برابر است با یك‌سوم زاویهٔ ۱.

هرچه راه‌حل‌های بیشتر و تازه‌تری، برای مسألهٔ تثلیث زاویه پیدا می‌شد، بیشتر روشن می‌شدکه، این مسأله، به‌طور جدی با مسأله‌های جبر و مثلثات بستگی دارد. مثلاً غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در سدهٔ پانزدهم، از تثلیث زاویه، برای تنظیم جدول‌های مثلثاتی بسیار دقیق، که برای محاسبه‌های ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده‌کرد. او با استفاده از روش تقریبی حل عددی معادلهٔ درجهٔ سوم، با معلوم‌بودن $\sin ۳^\circ$، توانست $\sin ۱^\circ$ را به‌دست‌آورد. سپس، ویت، ریاضی‌دان فرانسوی، درسدهٔشانزدهم، براساس تثلیث زاویه، توانست راه‌حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔسوم‌را پیداکند.

دکارت، نیوتون، کلرو، شال و بسیاری از دانشمندان دیگر هم، راه‌حل‌های تازه و بکری، برای تثلیث زاویه داده‌اند، که البته، نسبت به‌راه‌حل ارشمیدس، بغرنج‌ترند. همهٔ این راه‌حل‌ها، معمولاً براساس جست وجوی نقطه‌های برخورد یك مقطع مخروطی با دایره قرار دارند.

تلاش، برای پیدا کردن راه‌حل‌های تازه‌ای در مورد مسألهٔ تثلیث زاویه، حتی در زمان ما هم ادامه دارد (مثلاً، به‌کمك مونوگرافی).

۳۷. تلاش دانشمندان یونان باستان، برای حل مسألهٔ تربیع دایره، از راه رسم خط راست و دایره، مثل دو مسألهٔ قبل، با عدم موفقیت روبرو شد. در واقع مسألهٔ تربیع دایره هم، همچون مسأله‌های تضعیف مکعب و تثلیث زاویهٔ، به‌کمك خط‌کش و پرگار، قابل‌حل نیست.

حتی درسال ۱۷۵۵، فرهنگستان علوم‌پاریس، به‌خاطر تلاش‌بیهوده‌ای که ریاضی‌دانان ـ و حتی بسیاری از ناآشنایان به ریاضیات ـ در راه حل مسألهٔ تربیع دایره به‌کار می‌بردند، تصمیم گرفت‌که دیگر، هیچ اثری راکه مربوط به بررسی تربیع دایره (و همچنین، تضعیف مکعب و تثلیث زاویه) باشد، قبول نکند. و این، تا حدی، حرارت «تربیع‌کنندگان دایره» را فرونشاند.

در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم بودکه، سرانجام، ف. لیندمان، ریاضی‌دان آلمانی، ثابت‌کردکه مسألهٔ تربیع دایره، به‌کمك خط‌کش وپرگار، غیرقابل حل است. اثبات لیندمان دشوار است و از محدودهٔ درس‌های دبیرستانی ریاضیات، بیرون می‌رود. با توجه به‌استدلال‌های لیندمان، به‌یادآوری‌های کوتاه زیر قناعت می‌کنیم.

دایره‌ای با شعاع R در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مربعی بسازیم که هم‌ارز بااین دایره باشد (یعنی‌مساحتی برابر مساحت دایره داشته‌باشد). ضلع مربع موردنظر را x می‌گیریم، در این صورت، باید داشته‌باشیم:

$$x^{2}=\pi R^{2}$$

و از آن‌جا

$$x=R\sqrt{\pi}$$

به‌این ترتیب، مسألهٔ ساختن مربعی هم‌ارز دایرهٔ مفروض، منجر به‌رسم پاره‌خطی می‌شودکه برابر باحاصل‌ضرب پاره‌خط‌مفروض R در عدد مفروض $\sqrt{\pi}$ باشد. ضمناً، این ترسیم را باید به کمك خط‌کش و پرگار انجام داد، یعنی از راه رسم تعداد محدودی خط راست ودایره.

به کمك خط‌کش و پرگار ، همیشه می‌توان حاصل‌ضرب پاره‌خط مفروض R را ، در عدد مفروض گویا (درست یا کسری) رسم کرد. ولی ، همیشه نمی‌توان ، به‌کمك این‌وسیله‌ها ، حاصل‌ضرب پاره‌خط مفروض را در عددی گنگ، رسم کرد . این امکان، در بعضی حالت‌ها، مثلاً وقتی‌که عدد گنگ برابر $\sqrt{۲}$ یا $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ باشد، میسر است. $R\sqrt{۲}$ را می‌توان ، به عنوان ضلع مربع محاط در دایرهٔ به‌شعاع R و $R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ را ، به‌عنوان ضلع دوازده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع R، در نظر گرفت. ضمناً می‌دانیم‌که، دوازده‌ضلعی منتظم را می‌توان ، به‌صورتی کاملاً دقیق ، و به‌کمك شش‌ضلعی منتظم محاطی، رسم کرد.

در نظریهٔ ساختمان‌های هندسی ثابت شده است که پاره‌خط مفروض R را وقتی می‌توان، به‌کمك خط‌کش و پرگار، در یك‌عدد حقیقی ضرب کرد که این عدد حقیقی بتواند ریشهٔ یك‌معادلهٔ جبری با ضریب‌های درست و قابل حل به‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ باشد. عددی‌که نتواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری باضریب‌های درست‌باشد، عدد غیرجبری (ترانساندان) نامیده می‌شود. بنابراین، به‌کمك خط‌کش وپرگار ، نمی‌توان حاصل‌ضرب پاره‌خط مفروض R را در یك‌عدد غیرجبری رسم کرد.

بنابراین ، برای اثبات قابل‌حل نبودن مسألهٔ تربیع دایره، به‌کمك خط‌کش و پرگار ، باید عدم‌امکان رسم حاصل‌ضرب پاره‌خط مفروض R در عدد $\sqrt{\pi}$ را، به‌کمك این وسیله‌ها، ثابت‌کرد و، برای این‌منظور، باید ثابت‌کرد‌که $\sqrt{\pi}$ یا π ، عددی‌است غیرجبری.

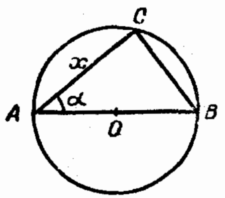
خدمت لیندمان هم همین‌بود‌که ، برای نخستین‌بار در جهان دانش ، ثابت‌کرد‌که π ، عددی است غیرجبری و، از این راه، به‌طور قطع نتیجه گرفت‌که حل مسألهٔ تربیع دایره، به‌کمك خط‌کش و پرگار، ممکن نیست. به‌این جهت است‌که لیندمان را «فاتح عدد π» نامیده‌اند[1].

---

۱. برای آشنائی با اثبات کامل غیرجبری بودن عدد π ، به‌شمارهٔ ۱۳ مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» (اسفند ۱۳۵۸)، صفحه‌های ۶۱ تا ۱۲۸ مراجعه کنید.

به‌این ترتیب ، ثابت می‌شود که مسألهٔ تربیع دایره ، تنها به‌یاری خط‌کش و پرگار،قابل‌حل نیست. با وجوداین، این‌مسأله رامی‌توان بااستفاده ازابزارهای اضافی وبااستفاده از بعضی منحنی‌های خاص (مثل کوادراتریس) با دقت حل‌کرد. با استفاده از خط‌کش و پرگار، مسألهٔ تربیع دایره را، تنها به‌تقریب می‌توان حل‌کرد.

در این‌جا، یکی از راه‌حل‌های تقریبی مسألهٔ تربیع دایره را، براساس استفاده از مثلث بینك، می‌آوریم . این‌روش را ، بینك ، یك مهندس روسی در سال ۱۸۳۶ پیشنهاد کردکه، برای استفاده در موارد عملی، روش بسیار ساده‌ای است.



شکل ۲۲

مثلث ABC را در دایره‌ای که باید تربیع‌کنیم ، چنان محاط می‌کنیم‌که ضلع بزرگترآن، منطبق برقطر دایره باشد (شکل ۲۲) . زاویهٔ CAB را α و وتر AC را x می‌نامیم. زاویهٔ α را طوری انتخاب می‌کنیم که پاره‌خط x ، برابر ضلع مربع هم‌ارز دایرهٔ مفروض باشد. برای این‌منظور، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{۲R}$$

که در آن، R برابر با شعاع دایره است.

چون مساحت مربع به‌ضلع x، باید با مساحت دایره برابر باشد ، داریم:

$$x^۲ = \pi R^۲ \Longrightarrow ۴R^۲\cos^۲\alpha = \pi R^۲ \Longrightarrow \cos^۲\alpha = \frac{\pi}{۴}$$

که در نتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi} \approx ۰/۸۸۶$$

و از روی جدول معلوم می‌شود:

$$\alpha = ۲۷^\circ ۳۶'$$

بنابراین، بارسم وتری در دایره که باقطر آن، زاویه‌ای برابر ۲۷ درجه و ۳۶ دقیقه بسازد، ضلع مجهول مربع موردنظر به‌دست می‌آید، یعنی مربعی که هم‌ارز با دایره است.

مثلث ABC همان مثلث بینک است.

۳۸. وقتی که تعداد جمله‌های تصاعد حسابی زوج باشد، می‌توان آن‌را چنین نوشت:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n, a_{n+۱}, a_{n+۲}, \ldots, a_{۲n}$$

ابتدا مجموع نیمهٔ اول همهٔ جمله‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$S_۱ = \frac{a_۱ + a_n}{۲} . n$$

و سپس، مجموع نیمهٔ دوم:

$$S_۲ = \frac{a_{n+۱} + a_{۲n}}{۲} . n$$

اکنون، تفاضل این‌دو مجموع را، به‌دست می‌آوریم.

$$S_۲ - S_۱ = \frac{a_{n+۱} + a_{۲n} - a_۱ - a_n}{۲} . n$$

از طرف دیگر داریم:

$$a_n = a_۱ + dn - d, \; a_{n+۱} = a_۱ + dn, \; a_{۲n} = a_۱ + ۲dn - d$$

که در آن، d عبارت است از قدرنسبت تصاعد حسابی. در نتیجه

$$S_۲ - S_۱ = \frac{a_۱ + dn + a_۱ + ۲dn - d - a_۱ - a_۱ - dn + d}{۲} . n =$$

$$= \frac{۲dn}{۲} . n = dn^۲$$

به‌این ترتیب: $S_۲ - S_۱ = dn^۲$. و این همان‌چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

*

این مسأله، متعلق به هیپسیکلس‌اسکندرانی‌است که درسدهٔ دوم پیش‌از

میلاد می‌زیسته است. کتـاب چهاردهم «مقدمـات» اقلیدس هم، منسوب به‌اوست. از این دانشمند، مسأله‌های جالب زیادی باقی‌مانده است.

۳۹. هرون این مسأله، و مسأله‌های مشابه آن‌را، به‌کمك رابطه‌ای حل می‌کرد، که به‌نام خود او مشهور شده است.

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{۲}\cdot\frac{b+c-a}{۲}\cdot\frac{a+c-b}{۲}\cdot\frac{a+c-b}{۲}},$$

$S=۸۴$ (واحد مربع)

*

هرون اسکندرانی، دانشمند یونان باستان، در نزدیکی‌های سدهٔ اول زندگی می‌کرد. دربارهٔ زندگی او، تنها آگاهی‌های پراکنده‌ای به‌ما رسیده است. او یکی از دانشمندان ومهندسان مشهور زمان خود بود و در زمینهٔ مسأله‌های نقشه‌برداری (ژئودزی) کار می‌کرد. یك‌رسالهٔ ریـاضی، به‌نـام «متریك» به‌هرون منسوب است کـه، درآن، قاعده‌هـایی برای حل عددی معادله‌های درجهٔ دوم وروش‌هایی برای محاسبهٔ تقریبی جذر وکعب وجود دارد. در بخش هندسی این رساله، رابطه‌هـایی برای محـاسبهٔ شکل‌های مختلف هندسی (سطح وحجم) داده شده است و در همان‌جا است که رابطهٔ مشهور مربوط به‌محاسبهٔ مساحت مثلث، از روی سه‌ضلع آن، آمده است.

۴۰. ضلع‌هـای چنین مثلثی را $x-۱$، x و $x+۱$ می‌گیریم. برای چنین مثلثی، اگـر p نصف محیط و a و b و c طول ضلع‌هـای آن باشد، داریم:

$$p=\frac{۳x}{۲},\ \ p-a=\frac{x}{۲}+۱,\ \ p-b=\frac{x}{۲},\ \ p-c=\frac{x}{۲}-۱$$

و بنابراین، اگر مساحت مثلث را S بنامیم:

$$S=\sqrt{\frac{۳x}{۲}\left(\frac{x}{۲}+۱\right)\frac{x}{۲}\left(\frac{x}{۲}-۱\right)}=\frac{x}{۲}\sqrt{۳\left(\frac{x^۲}{۴}-۱\right)}$$

کـه اگر $\frac{x}{۲}=m$ و m را عددی درست فرض کنیم:

$$S=m\sqrt{۳(m^۲-۱)}$$

$m^۲-۱$ را برابر $۳n^۲$ و n را عددی درست می‌گیریم، در این صورت $S=۳mn$، عددی درست می‌شود. ولی، با توجه به‌این فرض، باید داشته باشیم:

$$m^۲-۳n^۲=۱ \Longrightarrow (m+n\sqrt{۳})(m-n\sqrt{۳})=۱ \qquad (۱)$$

برابری (۱)، به‌ازای $m=۲$ و $n=۱$ برقرار است:

$$(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=۱$$

از آن‌جا

$$(۲+\sqrt{۳})^p.(۲-\sqrt{۳})^p=۱ \quad (p=۱,۲,\ldots) \qquad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$m_p+n_p\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^p$$
$$m_p-n_p\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^p$$

واز آن‌جا

$$x_p=۲m_p=(۲+\sqrt{۳})^p+(۲-\sqrt{۳})^p$$

وازاین رابطه، می‌توان مثلث‌های هرونی را به‌دست آورد:

$$p=۱ \Longrightarrow x_۱=۴, \quad S_۱=۶;$$
$$p=۲ \Longrightarrow x_۲=۱۴, \quad S_۲=۸۴;$$
$$p=۳ \Longrightarrow x_۳=۵۲, \quad S_۳=۱۱۷۰;$$
$$p=۴ \Longrightarrow x_۴=۱۹۴, \quad S_۴=۱۶۲۹۶;$$

وغیره.

۴۱. مستقیماً می‌توان تحقیق کرد که، اگر رشتهٔ عددهای فرد را، به‌همان نحوی که درصورت مسأله خواسته است، به گروه‌هایی تقسیم کنیم، یعنی

$$۱,\ ۳+۵,\ ۷+۹+۱۱,\ ۱۳+۱۵+۱۷+۱۹,\ \ldots$$

درآن صورت داریم:

$$۱=۱^۳$$
$$۳+۵=۸=۲^۳$$
$$۷+۹+۱۱=۲۷=۳^۳$$
$$۱۳+۱۵+۱۷+۱۹=۶۴=۴^۳$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

اکنون، حکم مسأله را، درحالت‌کلی ثابت می‌کنیم.

تعداد جمله‌ها، در$(n-۱)$ گروه نخست، چنین است:

$$۱+۲+۳+\dots+(n-۱)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

آخرین جمله درگروه $(n-۱)$ام برابراست‌با: $n(n-۱)-۱$. بنابراین، نخستین جمله ازگروه nام، چنین می‌شود:

$$n(n-۱)-۱+۲=n(n-۱)+۱=n^۲-n+۱$$

وآخرین جمله ازگروه nام:

$$n^۲-n+۱+۲(n-۱)=n^۲+n-۱$$

بنابراین، مجموع جمله‌ها درگروه nام، برابراست با

$$\frac{(n^۲-n+۱)+(n^۲+n-۱)}{۲}.n=n^۳$$

*

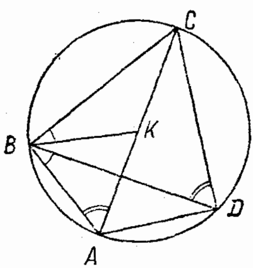
مؤلف این مسأله، نیکوماکوس جیراسی، از دانشمندان سدهٔ اول یونان باستان‌است. رسالهٔ «ورودی به‌حساب»، منسوب به‌اوست. این‌کتاب، مدتها به‌عنوان‌کتاب درسی ریاضیات مقدماتی، مورد استفاده قرارمی‌گرفت.

۴۲. باید ثابت‌کرد (شکل ۲۳)

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD$$

زاویهٔ KBC را برابر زاویهٔ ABD می‌سازیم. دو مثلث ABK و BCD متشابه‌اند، زیرا دو زاویهٔ ABK و DBC باهم و دو زاویهٔ BAC وBDC باهم برابرند. درنتیجه

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AK}{CD}$$



شکل ۲۳

و یا

$$AB.CD=AK.BD \qquad (۱)$$

دومثلث ABD و KBC هم متشابه‌اند(دوزاویهٔ ABD و KBC با هم و دو زاویهٔ ADB و BCK باهم برابرند). بنابراین

$$\frac{AD}{KC}=\frac{BD}{BC}$$

و یا

$$AD.BC=KC.BD \qquad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$AB.CD+AD.BC=(AK+KC)BD$$

و یا

$$AB.CD+AD.BC=AC.BD$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

*

کلود بطلمیوس (مرگ درحدود سال ۱۶۸ میلادی)، یکی‌ازدانشمندان یونان باستان است‌که بررسی‌های او، اهمیت زیادی برای پیشرفت رشته‌های مختلف دانش (ریاضیات، فیزیك، هندسه و، به خصوص، اخترشناسی) داشته است. بطلمیوس، در تألیف اساسی خود «ساختمان بزرگ ریاضی اخترشناسی درسیزده‌کتاب» (المجسطی)، کوشیده است تا برای‌دستگاه زمین مرکزی، که طبق آن زمین درمرکز وبدون حرکت قرار گرفته است و خورشید و سیاره‌ها به‌دور آن می‌چرخند، مبانی ریاضی محکمی بریزد. دستگاه بطلمیوسی، در طول نزدیك به ۱۲ سده، بر جهان دانش حکومت می‌کرد، تا این‌که نیکلای کوپرنیك (۱۴۷۳-۱۵۴۳)، اخترشناس لهستانی، دستگاه خورشید مرکزی، که منعکس‌کنندهٔ واقعیت جهان بود، پایه‌گذاری‌کرد. در دستگاه کوپرنیکی، زمین، نه‌تنها به‌دور محور خود، بلکه ضمناً در فضا و به‌دور خورشید هم می‌چرخد.

در «المجسطی»، دستگاه ریاضی اخترشناسی (مثلثات‌خطی وکروی، جدول سینوس‌ها) داده شده است.

۴۳. باتوجه به‌شرطهای مسأله، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x-y=\frac{۱}{۳}z \\ y-z=\frac{۱}{۳}x \\ z-۱۰=\frac{۱}{۳}y \end{cases}$$

که با حل‌آن، به‌دست می‌آید:

$$x=۴۵,\ \ y=۳۷\frac{۱}{۲}\ ,\ \ z=۲۲\frac{۱}{۲}$$

(همهٔ مسأله‌های دیوفانت را، باعلامت‌گذاری‌های امروزی حل کرده‌ایم).

۴۴. ازمعادلهٔ $x+y=۱۰$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+y}{۲}=۵$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$\frac{x+y}{۲}=z$$

باجمع این دو رابطه، به‌دست می‌آید:

$$x=۵+z$$

واز تفاضل دو رابطه

$$y=۵-z$$

در این صورت، داریم:

$$x^۲+y^۲=(۵+z)^۲+(۵-z)^۲=۵۰+۲z^۲$$

که باتوجه به‌معادلهٔ دوم دستگاه

$$۲z^۲=۱۸\Longrightarrow z=۳$$

و دیگر به‌سادگی مقدارهای x و y به‌دست می‌آید:

$$x=۵+z=۸,\quad y=۵-z=۲$$

۴۵. اگرضلع پهلوی زاویهٔ قائمه راکه مکعب‌کامل است $x^۳$ بگیریم، ضلع دوم پهلوی زاویهٔ قائمه برابر $x^۳-x$ و وتر مثلث برابر $x^۳+x$ می‌شود و، درنتیجه، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{(x^3+x)^2-(x^3-x)^2}=x^3$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$4x^2=x^3$$

درنتیجه، $x=4$، یعنی وتر برابر ۱۰ ودوضلع پهلوی‌زاویهٔ قائمه، به‌ترتیب، برابر ۶ و ۸ می‌شود.

۴۶. بخش کوچکتر تقسیم دوم را x می گیریم، در این صورت، بخش بزرگتر تقسیم اول برابر x ۲ می‌شود. بخش کوچکتر تقسیم اول، برابر $2x - 100$ و، درنتیجه، بخش بزرگتر تقسیم دوم $6x - 300$ خواهدشد. ولی، مجموع دوبخش تقسیم دوم، برابر است با ۱۰۰:

$$x+(300-6x)=100$$

وازآن‌جا: $x=40$.

پاسخ: درتقسیم اول: بخش کوچکتر برابر ۲۰ وبخش بزرگتربرابر ۸۰ است، ودرتقسیم دوم: بخش کوچکتربرابر ۴۰ وبخش بزرگتر برابر ۶۰است.

۴۷. اگر تفاضل دو عددرا $2x$ بگیریم، عدد بزرگتر برابر $10+x$ و عدد کوچکتر برابر $10-x$ می‌شود. از طرف دیگر، بنابرفرض، باید داشته باشیم:

$$(10+x)(10-x)=96,$$

$$100-x^2=96,$$

$$x^2=4$$

زآن‌جا $x=2$ و دوعدد برابر ۱۲ و ۸ می‌شود.

۴۸. مسأله، منجر به‌حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=3 \\ \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=5 \end{cases}$$

گر دوطرف معادلهٔ اول را مجذور و، سپس، به‌دوطرف برابری حاصل، یك احد اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^2+y^2}{y^2}=10 \Longrightarrow x^2+y^2=10y^2$$

درنتیجه: معادلهٔ دوم دستگاه، چنین می‌شود:

$$\frac{10y^2}{x+y}=5 \Longrightarrow 10y^2=5(x+y)$$

که اگر به‌جای x، مقدارآن، یعنی $3y$ را قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$10y^2=5(3y+y) \Longrightarrow 10y^2=20y$$

ازآن‌جا $y=2$ و، بنابراین، $x=6$ می‌شود.

۴۹. مسأله، منجربه‌حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases}(x+y)z=35\\(x+z)y=27\\(y+z)x=32\end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$xz-xy=8$$

برابری اخیر را با معادلهٔ سوم، جمع می‌کنیم:

$$xy=20$$

که ازآن‌جا، به‌سادگی پیدا می‌شود:

$$xy=12, \quad yz=15$$

از ضرب $xz=20$ و $yz=15$ دریکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$xyz^2=300 \Longrightarrow 12z^2=300$$

ازآن‌جا: $z=5$ وبنابراین: $x=4$ و $y=3$.

۵۰. عدد نخست را به‌صورت حاصل ضرب x در مکعب یک عدد، مثلاً ۲، در نظر می‌گیریم. به‌این ترتیب، عدد نخست برابر $8x$ می‌شود. عدد دوم را برابر x^2-1 فرض می‌کنیم. روشن است که، به‌این ترتیب، یکی ازشرطهای مسأله برقراراست: حاصل‌ضرب دوعدد به‌اضافهٔ عددنخست، یك مکعب کامل می‌شود. درواقع، داریم:

$$8x(x^2-1)+8x=8x^3$$

سپس، بنابرشرط دوم، باید حاصل ضرب دوعدد به‌اضافهٔ عدد دوم، برابر مکعب یك عدد باشد. یعنی باید عدد

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)$$

برابر بامکعب یك عدد باشد.

فرض می‌کنیم که، این عدد، برابر $(2x-1)^3$ باشد، آن وقت، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$8x(x^2-1)+(x^2-1)=(2x-1)^3$$

از آن‌جا: $x=\frac{14}{13}$.

به‌این ترتیب، عدد نخست برابر $8\times\frac{14}{13}$، یعنی $\frac{112}{13}$ و عدد دوم

برابر $\left(\frac{14}{13}\right)^2-1$ یعنی $\frac{27}{169}$ خواهد شد.

یادآوری می‌کنیم که، این مسأله، از جملهٔ معادل‌های سیال به‌حساب می‌آید وجواب‌های زیادی دارد. باوجوداین، دیوفانت، برای رسیدن به‌یکی ازجواب‌ها، معادلهٔ دوم را طوری درنظر می‌گیردکه جمله‌های درجهٔ سوم آن حذف شوند.

۵۱. فرض می‌کنیم، مجموع سه عدد، چنین باشد:

$$x+y+z=u^2+2u+1=(u+1)^2$$

سپس، فرض می‌کنیم: $x+y=u^2$ ، ازآن‌جا $z=2u+1$ اکنون فرض می‌کنیم $y+z=u^2-2u+1=(u-1)^2$

ازاین‌جا به دست می‌آید: $x=4u$ و $y=u^2-4u$، $x+z=6u+10$ هم باید مجذورکامل باشد. مثلاً آن را برابر $121=11^2$ می‌گیریم. بنابراین، برای پیداکردن u ، به‌این معادله می‌رسیم:

$$6u+1=121$$

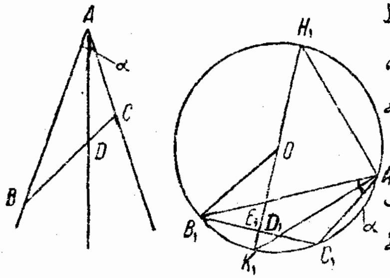
واز آن‌جا، $u=20$.

سه عدد موردنظر، چنین‌اند:

$$x=80,\ \ y=320,\ \ z=41$$

۵۲. بنابرفرض مسأله، یك زاویه، نیمساز آن و نقطه‌ای واقع براین

نیمساز داده شده است. باید پاره خط BC را طوری رسم کنیم (شکل ۲۴)، که طولی به اندازهٔ مقدار مفروض داشته باشد.



شکل ۲۴

برای ایـن منظور، ابتدا مثلث ABC رامی‌سازیم، به نحوی که زاویهٔ A، قاعدهٔ BC و نیمساز AD ازآن، به‌ترتیب، برابر زاویه وطول‌های مفروض باشند. برای این منظور، پاره‌خط B_1C_1 را برابر با پاره خط BC رسم می‌کنیم. سپس، از دونقطهٔ B_1 و C_1 دایره‌ای می‌گذرانیم کـه کمان B_1C_1 آن، کمان درخور α (برابر زاویهٔ A) باشد. اگر ازنقطهٔ E_1 وسط وتـر B_1C_1، عمودی براین وتـر اخراج کنیم، قطر K_1H_1 ازدایره به‌دست می‌آید. مسأله، به‌این‌جا منجر می‌شود که‌بتوانیم وتر K_1A_1 را (که ضمناً نیمساز زاویهٔ A_1 می‌شود)، طوری رسم‌کنیم کـه D_1A_1 بـرابـر بـا DA بشود. دومثلث $E_1K_1D_1$ و $A_1K_1H_1$ را درنظر می‌گیریم. به‌سادگی معلوم می‌شود کـه این دومثلث متشابه‌اند و، بنابراین، داریم:

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1}=\frac{K_1E_1}{K_1A_1}$$

یا

$$K_1D_1 \cdot K_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1$$

که اگر به‌برابری $K_1A_1 = K_1D_1 + D_1A_1$ توجه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = H_1K_1 \cdot E_1K_1$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ $H_1C_1K_1$ می‌توان نوشت:

$$H_1K_1 \cdot E_1K_1 = (C_1K_1)^2$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$(K_1D_1)^2 + K_1D_1 \cdot D_1A_1 = (C_1K_1)^2$$

که اگر فرض‌کنیم: $K_1D_1 = x$ ، $A_1D_1 = p$ و $C_1K_1 = q$ ، خواهیم

داشت:

$$x^2+px=q^2$$

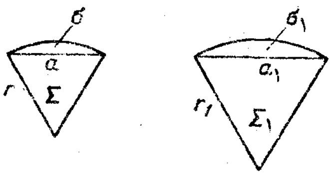
اگر x را از روی این معادله بسازیم؛ مثلث $A_1B_1C_1$، بدون هیچ زحمتی، باهمان نیمساز خود، A_1D_1، به‌دست می‌آید. در واقع، به کمك پرگاری که به‌اندازهٔ $K_1D_1=x$ بازشده‌باشد، نقطهٔ D_1 رابه‌دست‌می‌آوریم. آن وقت، K_1D_1 را وصل می‌کنیم وادامه می‌دهیم تا دایره را درنقطهٔ A_1 قطع کند. به‌این‌ترتیب، مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید. اکنون کافی است، روی ضلع زاویهٔ مفروض A ، طول AB را برابر A_1B_1 جدا و BD را وصل کنیم.

*

پاپوس اسکندرانی، هندسه دان یونان قدیم، درنیمهٔ دوم سدهٔ سوم میلادی‌می‌زیست. پاپوس، مؤلف اثر مشهور «مجموعهٔ ریاضیات» در۸کتاب است؛ که ازآن‌ها، ۶کتاب‌آخر وقسمتی ازکتاب دوم به‌ما رسیده است.

در«مجموعهٔ‌ریاضیات»،مجموعهٔ جالب‌وبکری ازکشف‌های‌ریاضی‌دانان یونان باستان، دربارهٔ هندسه وحساب گردآمده است. دراین اثر، ازبسیاری رساله‌های ریاضی‌دانان یونان باستان نام برده شده است که اصل آن‌ها، به‌ما نرسیده است.

۵۳. مساحت قطعه‌ها را σ و σ_1، مساحت قطاع‌ها را S و S_1 و مساحت مثلث‌ها را Σ و Σ_1 می‌گیریم (شکل ۲۵) و a و a_1 را قاعده‌های دو قطعه و r و r_1 را شعاع‌های دو دایره فرض می‌کنیم. در این‌صورت، داریم:



شکل ۲۵

$$\sigma=S-\Sigma \ , \ \sigma_1=S_1-\Sigma_1$$

باتوجه به‌تشابه مثلث‌ها، خواهیم داشت:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1}=\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{r^2}{r_1^2}$$

سپس

$$\frac{S}{S_1}=\frac{r^2}{r_1^2}$$

از آن جا

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1}=\frac{S}{S_1}$$

یا

$$\frac{\Sigma}{S}=\frac{\Sigma_1}{S_1}, \quad \frac{S}{\Sigma}=\frac{S_1}{\Sigma_1}$$

بنابراین

$$\frac{S-\Sigma}{\Sigma}=\frac{S_1-\Sigma_1}{\Sigma_1}$$

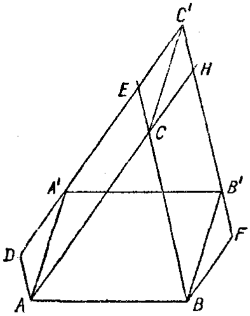
یا

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\sigma_1}{\Sigma_1}\Rightarrow\frac{\sigma}{\sigma_1}=\frac{\Sigma}{\Sigma_1}$$

و براساس همهٔ این‌ها، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sigma}{\sigma_1}=\frac{a^2}{a_1^2}$$

۵۴. مثلث دلخواه ABC را درنظر می‌گیریم وروی ضلع AB و در سمت درون مثلث، متوازی الاضلاع $ABB'A'$ را می‌سازیم، به‌نحوی‌که راس‌های A' و B' آن دربیرون مثلث واقع شوند (شکل ۲۶). سپس، روی دوضلع دیگرمثلث، دومتوازی‌الاضلاع $ACED$ و $BFHC$ را طوری می‌سازیم که‌ضلع‌های آن‌ها، ازراس‌های متوازی الاضلاع اول بگذرند. باید ثابت کنیم که مساحت متوازی الاضلاع $ABB'A'$، برابر است با مجموع مساحت‌های دو متوازی الاضلاع $ACED$ و $BFHC$. برای‌این منظور،



شکل ۲۶

ضلع‌های DE و FH را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C' قطع کنند، بعد C' را به C وصل می‌کنیم. قبلاً یاد آوری می‌کنیم که دو مثلث $A'B'C'$ و ABC برابرند، زیرا یک ضلع و دو زاویهٔ برابر دارند ($AB = A'B'$ ، $\widehat{CAB} = C'\widehat{A'}B'$ و $\widehat{CBA} = C'\widehat{B'}A'$). مساحت متوازی‌الاضلاع $ACC'A'$ با مساحت متوازی‌الاضلاع ACED و مساحت متوازی‌الاضلاع $BB'C'C$ با مساحت متوازی‌الاضلاع BFHC برابر است، زیرا در هردو مورد، قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر دارند.

اکنون اگر از شکل $ABB'C'A'A$، مثلث $A'B'C'$ را برداریم، متوازی الاضلاع $ABB'A'$ باقی می‌ماند. همین‌طور، اگر از همان شکل $ABB'C'A'A$، مثلث ABC را، که با مثلث $A'B'C'$ برابر است برداریم، مجموع متوازی‌الاضلاع‌های $ACC'A'$ و $BB'C'C$، و یا هم‌ارز آن‌ها، مجموع متوازی‌الاضلاع‌های ACED و AFHC باقی می‌ماند. مساله حل شد.

(این مساله در «نیکوماکوس» ارشمیدس وجود ندارد و آن را، برای نخستین بار، در «مجموعهٔ ریاضیات» پاپوس اسکندرانی پیدا کردند. مسالهٔ پاپوس، تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورث است. در واقع اگر درمسالهٔ پاپوس، مثلث اصلی را، یک مثلث قائم‌الزاویه بگیریم، به‌حالت خاص قضیهٔ فیثاغورث می‌رسیم.)

۵۵. مساله، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}x + \frac{۱}{۷}x + ۳ = x$$

که با حل آن به‌دست می‌آید: $x = ۲۸$ بنابراین، در مکتب فیثاغورث، ۲۸ شاگرد درس می‌خوانده‌اند.

«جنگ یونانی»، مجموعه‌ای از مساله‌ها است که به‌صورت شعر و، عموماً، همچون «ایلیاد» و «اودیسهٔ» هومر، شش بخشی است.

۵۶. فرض می کنیم، الاغ x کیسه و قاطر y کیسه بار بر پشت خود داشته باشند. به‌این دستگاه، شامل دومعادلهٔ دومجهولی، می‌رسیم:

$$\begin{cases} y+۱=۲(x-۱) \\ y-۱=x+۱ \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} ۲x-y=۳ \\ y-x=۲ \end{cases}$$

باحل این دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x=۵ \quad , \quad y=۷$$

۵۷. مساله، منجربه حل این معادله می‌شود:

$$\frac{۴}{۳}x+x=۱۲$$

و ازآن‌جا

$$x=۵\frac{۱}{۷}$$

یعنـی $۵\frac{۱}{۷}$ ساعت از روزگذشته است.

۵۸. شرطهای مساله، منجر به‌این معادله می‌شود:

$$\frac{۱}{۶}x+\frac{۱}{۱۲}x+\frac{۱}{۷}x+۵+\frac{۱}{۲}x+۴=x$$

که‌با حل‌آن به‌دست می‌آید: $x=۸۴$. دیوفانت در۸۴ سالگی جهان راترك گفته‌است.

*

دربارهٔ زندگی «مترودور» چیزی نمی‌دانیم حتی نمی‌دانیم کـی به‌دنیا آمده وکی ازدنیا رفته‌است. او درتاریخ ریاضی، به‌عنوان مولف مساله‌هایی که به‌شعرتنظیم‌شده، شناخته‌شده‌است. مساله‌های مترودور، درمجموعه‌های دست‌نویس‌وارد شده‌است و درزمان‌خود، صاحب شهرت فراوانی بوده‌است.

۴ • مسأله‌های چینی

یادداشت تاریخی

ریاضیات، زمینه وسابقه‌ای طولانی در فرهنگ چین دارد. بسیاری از کشف‌ها، چه‌درزمینهٔ دانش وچه درزمینهٔ صنعت، خیلی قبل ازسایرکشورها، درچین و به‌وسیلهٔ دانشمندان چینی، انجام گرفته است.

دانشمندان چینی، برای نخستین‌بار درتاریخ صنعت جهان، قطب‌نما (سدهٔ سوم پیش ازمیلاد)، زلزله‌نگار (سدهٔ دوم پیش از میلاد) و سرعت‌سنج راکشف‌کردند. مردم چین، خیلی پیش از اروپائی‌ها طرز تهیه شوره را، برای به‌دست‌آوردن باروت، می‌دانستند (سدهٔ دهم). استادکاران چینی، حتی در سدهٔ هفتم پیش از میلاد، از راه تهیهٔ ظرف‌های چینی با خبر بودند. همه‌می‌دانندکه چین زادگاه ابریشم وانواع رنگها و روغن‌های رنگی است. درسدهٔ یازدهم «بی‌شن» آهنگر، وسیله‌ای برای چاپ درست‌کردکه، باآنچه‌ما امروز داریم، تفاوت‌کمی دارد.

اخترشناسی توضیحی، یعنی دانش جسم‌های آسمانی، وتقویم، درچین به‌وجودآمد. دانشمندان چینی، درژرفای تاریخ، کار مشاهدهٔ منظم‌آسمان را آغازکردند و به ثبت موقعیت‌ها و حرکت ستاره‌ها پرداختند. «شی‌شن»، اخترشناس چینی، در سدهٔ چهارم پیش ازمیلاد، نخستین سیاههٔ ستارگان را تنظیم‌کرد. درجدول «شی‌شن»، شرح ۸۰۰ ستاره داده شده است. دراروپا، چنین سیاهه‌ای، تنها درسدهٔ دوم میلادی تنظیم شد (کاتالوگ هیپارك).

اخترشناسان‌چینی، برای انجام مشاهده‌های‌خود، ساختمان‌های‌مجهزی

داشتندکه‌آن‌ها را رصدخانه می‌گفتند. بنائی‌که بـه‌نام رصدخانهٔ پکن درحال حاضر وجود دارد، با ابزارهای قدیمی‌آن، درسال ۱۲۷۹ میلادی، درحومهٔ پکن، ساخته شده‌است.

(مساله‌ها وحل‌آن‌ها را،که در این‌جا آمده است، از رساله‌های چینی برداشته‌ایم، منتهی بیان آن‌ها را با علامت‌های امروزی داده‌ایم).

حل مساله‌ها

۵۹. حل مساله، منجربه دستگاه معادله‌های زیرمی‌شود:

$$\begin{cases} ۵x+۲y=۱۱ \\ ۲x+۸y=۸ \end{cases}$$

که با حل‌آن، به‌دست می‌آید.

$$x=۲ \quad , \quad y=\frac{۱}{۲}$$

یعنی، هرگاو ۲ «تاول» و هرگوسفند $\frac{۱}{۲}$ «تاول» می‌ارزند.

*

رساله «نه‌فصل از هنر محاسبه» (کیوچانـك)، رساله‌ای خیلی قدیمی است. این رساله، شامل قانون‌هایی از ریاضیات و مساله‌های گوناگونی در کاربرد این‌قانون‌هاست. دراین‌رساله، مساله‌هایی‌آمده است‌که خصلت عملی دارند و بیشتر مربوط به‌کشاورزی ومحاسبهٔ حجم‌ها هستند.

۶۰. این مساله، منجر بـه‌معادله‌ای سیال می‌شودکه باید جواب‌های درست‌آن را به‌دست‌آورد. به‌زبان ریاضیات امروزی، مساله به این ترتیب حل می‌شود: فرض می‌کنیم، x بار با بیلچه، y بار باکفش چوبی و z بار با کاسه، برنج برداشته باشند. دراین‌صورت، شرط‌های مساله، منجربه دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$۱۹x+۱=۱۷y+۱۴=۱۲z+۱$$

که ازآن‌جا، به‌این معادلهٔ سیال می‌رسیم:

$$۱۹x=۱۲z \Rightarrow x=\frac{۱۲z}{۱۹}$$

چون x و y و z، عددهایی درست هستند، می‌توان فرض کرد:

$$z = ۱۹t$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$۱۷y + ۱۳ = ۲۲۸t$$

کوچکترین عدد درستی که می‌توان برای t انتخاب کرد تا y هم عدد درست بشود، برابراست با ۱۴ که، درنتیجه، خواهیم داشت:

$$x = ۱۶۸ \quad , \quad y = ۱۸۷ \quad , \quad z = ۲۶۵$$

بنابراین، اولی ۳ «شی»، ۱ «تاا‌و»، ۹ «شینگک» و ۲ «هو»؛ دومی ۳ «شی»، ۱ «تاا‌و»، ۷ «شینگک» و ۹ «هـو»؛ و سومی ۳ «شی»، ۱ «تاا‌و»، ۹ «شینگک» و ۲ «هو» برنج برداشته‌اند.

۶۱. مساله، منجربه‌حل دستگاهی از سه‌معادلهٔ سه مجهولی می‌شود:

$$\begin{cases} a + b + c = p \quad , \\ a^۲ + b^۲ = c^۲ \quad , \\ a . b = ۲s \end{cases}$$

که‌درآن، a، b و c طول‌ضلع‌ها، p اندازهٔ محیط و S اندازهٔ مساحت‌مثلث مفروض‌اند.

ازمعادله‌های دوم وسوم به‌دست می‌آید:

$$(a + b)^۲ = ۴s + c^۲ \Rightarrow (p - c)^۲ = ۴s + c^۲$$

که اگرآن را نسبت به c حل‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$c = \frac{p^۲ - ۴s}{۲p}$$

درنتیجه، باتوجه به‌معادلهٔ اول، خواهیم داشت:

$$a + b = \frac{p^۲ + ۴s}{۲p}$$

اگر این معادله را بـا معادلهٔ سوم در نظر بگیریم، به معادلهٔ درجهٔ دومی می‌رسیم‌که a و b ریشه‌های‌آن خواهند بود:

$$x^۲ - \frac{p^۲ + ۴s}{۲p} x + ۲s = ۰$$

*

رسالهٔ «آغاز هنر محاسبه»، درسال ۱۵۹۳ چاپ شد. دراین رساله، قاعده‌های مهمی وجود داردکه، احتمالاً برای این که بهتر به خاطر بماند، به‌صورت‌شعرتنظیم شده‌است. ظاهراً، ازاین کتاب، درزمان خودش، به‌عنوان یک کتاب درسی، در مدرسه‌های ریاضیات مقدماتی، استفاده می کرده‌اند. محتوی این کتاب، طرح‌خوبی ازوضع ریاضیات چین، دراواخرسدهٔ شانزدهم، به‌دست می‌دهد.

۶۲. «سون‌تزی» مسالهٔ خود را به‌این ترتیب حل می کند: «درتقسیم بر۳ به‌باقی‌ماندهٔ ۲ رسیده‌ایم، بنابراین،آن را ۱۴۰ بگیرید. در تقسیم بر۵ به باقی‌ماندهٔ ۳ رسیده‌اید، بنابراین،آن را ۶۳ بگیرید. درتقسیم بر۷ به‌باقی ماندهٔ ۲ رسیده‌اید، بنابراین،آن را ۳۰ بگیرید. از جمع این‌ها، عدد ۲۳۳ پیدا می‌شود. ازاین عدد ۲۱۰ راکم کنید، جواب‌به‌دست می‌آید».

مسالهٔ «سون‌تزی» را می‌توان باروش ساده‌ای حل کرد. حل آن،منجر به دستگاه زیرمی‌شود:

$$\begin{cases} x=۳y+۲ \\ x=۵z+۳ \\ x=۷u+۲ \end{cases}$$

ویا

$$۳y+۲=۵z+۳=۷u+۲$$

و ازآن‌جا

$$۳y=۷u \Rightarrow y=\frac{۷u}{۳}$$

اگر t را عددی درست و $u=۳t$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$y=۷t$$

و ازآن‌جا

$$x=۲۱t+۲$$

بنابراین

$$۲۱t+۲=۵z+۳ \Rightarrow ۲۱t-۵z=۱$$

با روش جست و جو می‌توان یکی از جواب‌های t و z را در معادلهٔ سیال اخیر پیداکرد: $t=۱$، $z=۴$ دراین‌صورت، شکل کلی جواب‌های این‌معادله، چنین است:

$$t=۱+۵q \ , \ z=۴+۲۱q$$

که درآن، $q=۰, ۱, ۲, \ldots$.

چون‌داریم: $x=۲۱t+۲$، خواهیم‌داشت: $x=۲۳+۱۰۵q$، که درآن، q می‌تواند برابرصفر یا هر عدد درست مثبت باشد. کوچکترین مقدار x، به‌ازای $q=۰$، به‌دست‌می‌آید: $x=۲۳$. اگر $q=۱$ باشد $x=۱۲۸$ و اگر $q=۲$ باشد، $x=۲۳۳$ و اگر $q=۳$ باشد، $x=۳۳۸$ می‌شود و غیره.

۶۳. خود رساله، مساله را این‌طور حل‌کرده است: «معلوم کنید، ۱۰۰۰۰ «هو» نمك، چند«چی» می‌شود. این را مقسوم بگیرید. باضرب‌طول و عرض در یکدیگر، مقسوم علیه را پیداکنید. با دردست داشتن مقسوم و مقسوم‌علیه، ارتفاع انبار برحسب «چی» به‌دست می‌آید».

برای حل مساله، باید توجه داشت:

۱ «چژان» = ۱۰ «چی»

۱ «هو» = ۵۱/۷۷۵ «لیتر»

۲۷ «چژان مکعب» = ۱۰۰۰۰ «هو»

۶۴. تنظیم‌کنندهٔ رساله، برای حل مسأله به ذکر قاعده اکتفا می‌کند؛ ۴ «شه‌نا» را بربند پایینی تقسیم می‌کنیم؛ ۳ «شه‌نا» را بر۲بند بالایی تقسیم می‌کنیم. عددکوچکتر را ازعدد بزرگتر کم می‌کنیم، مقسوم به‌دست می‌آید. مجموع نصف ۴ بند و ۳ بند را از کل ۶ بندکم می‌کنیم، مقسوم علیه پیدا می‌شود. تقسیم را انجام می‌دهیم. مقدار مجهول پیدا می‌شود، یعنی معلوم می‌شود که هربند با بند مجاور خود، چقدر اختلاف دارد. حد متوسط حجم سه‌بند پایینی، همان‌حجم بنددوم است.

بنابراین قاعده، باید این محاسبه‌ها را انجام داد:

۱. $\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۱۲}$، این مقسوم؛

۲. $\frac{۱۱}{۲}=\frac{۳}{۲}-\frac{۴}{۲}-۹$، این مقسوم‌علیه؛

۳. $d=\frac{۷}{۶۶}=\frac{۱۱}{۲}:\frac{۷}{۱۲}$، یعنی مقداری که هربند با بند مجاور خود اختلاف دارد؛

۴. حجم بند دوم از پایین برابر $\frac{۴}{۳}=۱\frac{۱}{۲}$ «شه‌نا» است. اکنون دیگر، بدون هیچ اشکالی، می‌توان حجم هر کدام ازهشت قسمت دیگر را پیدا کرد.

۶۵. نویسندهٔ رساله راهنمائی می‌کندکه مساله را باید به‌این ترتیب حل کرد: «فرض می‌کنیم وزن هرشمش طلا، برابر ۳ «تسه‌زین» باشد، دراین صورت، وزن هر شمش نقره برابر $۲\frac{۵}{۱۱}$ «تسه‌زین» می‌شود. کمبود نسبت به واقعیت برابراست با۴۹ (درسطرراست). حالا فرض می‌کنیم، وزن یك شمش طلا برابر ۲ «تسه‌زین» باشد، در این صورت، وزن یك شمش نقره، برابر $۱\frac{۱}{۱۱}$ «تسه‌زین» می‌شود. باواقعیت، اضافه‌ای‌به‌اندازهٔ ۱۵ پیدا می‌شود (در سطرچپ). هرمخرج را درمقدار مربوطهٔ خودش‌دراین سطرها ضرب‌می‌کنیم. اضافی و کمبود را به‌طورطبیعی درمقدارهای فرضی ضرب می‌کنیم. جمع‌آن‌ها، مقسوم را تشکیل می‌دهد. اضافی و کمبود را جمع می‌کنیم، مقسوم علیه به‌دست‌می‌آید. تقسیم را انجام می‌دهیم، وزن شمش طلاپیدا می‌شود. مخرج را درمقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم، مقسوم را به‌آن تقسیم می‌کنیم، وزن‌شمش نقره پیدا می‌شود. ساده کنید، کسر موردنظر را پیدا می‌کنید».

در رساله خود جواب داده نشده است. ولی ما، با دنبال‌کردن همین قاعده‌ای‌که دررساله ذکر شده است، جواب را پیدا می‌کنیم. قبلاً یادآوری می‌کنیم که

۱ «تسه‌زین» = ۱۶ «لان»

۱ «لان» = ۲۴ «چژو»

وزن شمش طلا را x ووزن شمش نقره را z می‌گیریم. مساله منجر

به‌حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} 9x = 11z \\ 13 + 8x + z = 10z + x \end{cases}$$

این دستگاه را با «قاعدهٔ دوفرضی» حل می‌کنیم.

فرض اول: $x_1 = 3$ «تسه‌زین». دراین‌صورت

$$z_1 = \frac{9x_1}{11} = \frac{9 \times 3}{11} = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11} \text{ «تسه‌زین»}$$

اکنون «کمبود سطر راست» را پیدا می‌کنیم [یعنی، ببینیم درمعادلهٔ دوم دستگاه، مقدار سمت راست تساوی، چقدر نسبت بـه مقدار سمت چپ، اختلاف پیدا می‌کند؛ ضمناً، همهٔ وزن‌ها را بـرحسب «تسه‌زین» می‌نویسیم (مترجم)]. این مقداررا y_1 می‌نامیم:

$$y_1 = \left(\frac{13}{16} + 8 \times 3 + 2\frac{5}{11}\right) - \left(10 \times 2\frac{5}{11} + 3\right) =$$

$$= 27\frac{47}{11 \times 16} - 27\frac{96}{11 \times 16} = \frac{49}{11 \times 16}$$

فرض دوم: $x_2 = 2$ «تسه‌زین». دراین حالت $z = 1\frac{7}{11}$ «تسه‌زین»و «اضافی سطرچپ» برابراست با

$$y_2 = \left(\frac{13}{16} + 1\frac{7}{11} + 8 \times 2\right) - \left(10 \times 1\frac{7}{11} + 2\right) =$$

$$= 18\frac{79}{11 \times 16} - 18\frac{64}{11 \times 16} = \frac{15}{11 \times 16}$$

اکنون، y_1 و y_2 را، همراه با x_1 و x_2، باروش چینی می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

ستون سمت چپ، همان «سطرچپ» وستون سمت راست، همان «سطرراست» است. ازاین جدول، بنابر قاعده، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{۲\times\frac{۴۹}{۱۱\times۱۶}+۳\times\frac{۱۵}{۱۱\times۱۶}}{\frac{۴۹}{۱۱\times۱۶}+\frac{۱۵}{۱۱\times۱۶}}=\frac{۲\times۴۹+۳\times۱۵}{۴۹+۱۵}=$$

$$=\frac{۱۴۳}{۶۴}=۲\frac{۱۵}{۶۴}$$ «تسه‌زین»

بنابراین، مقدار x برابراست با ۲ «تسه‌زین»، ۳ «لان» و ۸ «چژو».

وزن‌شمش نقره، خیلی ساده به‌دست می‌آید. برای این منظور، مقسوم ۱۴۳ بـرحاصل‌ضرب مقسوم علیه ۶۴ ومخرج $\frac{۱۱}{۹}$ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$z=\frac{x}{\frac{۱۱}{۹}}=\frac{۱۴۳}{\frac{۱۱}{۹}\times۶۴}=\frac{۱۳\times۹}{۶۴}=\frac{۱۱۷}{۶۴}=۱\frac{۵۳}{۶۴}$$ «تسه‌زین»

بنابراین، مقدار z برابراست با ۱ «تسه‌زین»، ۱۳ «لان» و ۶ «چژو».

۶۶. نویسندهٔ رساله، برای‌حل مساله، این قاعده را پیشنهاد می‌کند: «فرض می‌کنیم بعد از ۱۵ روز به هم رسیده باشند. در این صورت، کمبودی برابر۳۳۷ و نیم «لی» خواهیم داشت. ولی اگـر فرض‌کنیم بعد از ۱۶ روز به‌هم رسیده باشند، دراین‌صورت، اضافه‌ای برابر ۱۴۰ «لی» به‌دست می‌آید. اضافه وکمبود را به‌طور طبیعی درمقدارهای فرضـی ضرب‌کن، ازجمع‌آن‌ها مقسوم‌راپیدا می‌کنی. اضافه‌وکمبودرا باهم جمع‌کن، مقسوم‌علیه را خواهی داشت. عمل تقسیم را انجام بده، تعداد روزها را به‌دست می‌آوری».

راهی‌که اسب راه وار در n روزطی می‌کند، عبارت است از

$$۱۹۳+(۱۹۳+۱۳)+(۱۹۳+۲\times۱۳)+\ldots+$$
$$+[۱۹۳+(n-۱)۱۳]=۱۹۳n+[۱۳+۲\times۱۳+\ldots+$$
$$+(n-۱)۱۳]=۱۹۳n+۱۳[۱+۲+\ldots+(n-۱)]=$$
$$=۱۹۳n+۱۳\times\frac{n(n-۱)}{۲}$$ «لی»

و راهی‌که اسب‌کم زور درهمین مدت می‌رود، چنین است:

$$۹۷+\left(۹۷-\frac{۱}{۲}\right)+\left(۹۷-۲\times\frac{۱}{۲}\right)+\ldots+\left[۹۷-(n-۱)\frac{۱}{۲}\right]=$$

$$=۹۷n-\frac{۱}{۲}[۱+۲+\ldots+(n-۱)]=۹۷n-\frac{۱}{۲}\times\frac{n(n-۱)}{۲}$$ «لی»

مجموع راهی که دواسب رفته‌اند، چنین است:

$$۱۹۳n+۱۳\times\frac{n(n-۱)}{۲}+۹۷n-\frac{۱}{۲}\times\frac{n(n-۱)}{۲}=$$

$$=۲۹۰n+\left(۱۳-\frac{۱}{۲}\right)\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۹۰n+۶\frac{۱}{۴}(n^۲-n)$$

که باید برابر ۶۰۰۰ «لی» باشد.

برای ادامهٔ حل مساله، با توجه به‌قاعده‌ای که در بالا دیدم، از روش «دو فرضی» استفاده می کنیم.

به‌ازای $n=۱۵$، کمبود برابر است با

$$۶۰۰۰-۵۶۶۲\frac{۱}{۲}=۳۳۷\frac{۱}{۲}$$ «لی»

و به ازای $n=۱۶$ اضافه‌ای خواهیم داشت برابر با

$$۶۱۴۰-۶۰۰۰=۱۴۰$$ «لی»

اگر فاصلهٔ زمانی لازم، برای رسیدن دو اسب به‌هم، را برابر x بگیریم وفرض کنیم که، درجریان روز، سرعت‌های آن‌ها ثابت می‌ماند، داریم:

$$x=\frac{۱۵\times۱۴۰+۱۶\times۳۳۷\frac{۱}{۲}}{۱۴۰+۳۳۷\frac{۱}{۲}}=۱۵\frac{۱۳۵}{۱۹۱}$$

حالا دیگر، بدون هیچ اشکالی، می‌توان محاسبه کرد که هر کدام از اسب‌ها، درمدت $۱۵\frac{۱۳۵}{۱۹۱}$ روز، چقدر راه رفته‌اند؟

از حل این مساله معلوم می‌شود که، مولف آن، از رابطهٔ مربوط به مجموع جمله‌های تصاعد حسابی

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

آگاهی داشته است، اگرچه درخود مسأله، یادی ازآن نکرده است.

۶۷. در رساله، این مساله، به کمك روش «فان‌چن» حل شده است که ما، کمی بعد، با آن‌آشنا خواهیم شد.

روشن است که حل مساله، منجربه حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases}5x+2y=10\\2x+5y=8\end{cases}$$

۶۸. مساله‌را ازرسالۀهشتم‌کتاب برداشته‌ایم. برای‌حل‌آن (دررساله، جواب مساله داده نشده است)، مولف توصیه می‌کندکه از قاعدۀ «فان چن» استفاده شود: «۳ خرمن خوب، ۲ خرمن بامحصول متوسط و ۱ خرمن با محصول‌بد را با ۳۹ «دواو» درطرف راست قراربده، درسمت چپ‌آن، مقدار محصول‌ها ووزن آن‌ها را به‌همان ردیف سمت راست بگذار وهمین طور ستون بعدی را. عددهای ستون‌وسط را درتعداد خرمن خوب درستون سمت راست ضرب‌کن وباقی مانده‌ها را تشکیل بده. دوباره‌باقی‌مانده‌ها را تشکیل بده و، این عمل را،آن قدرادامه بده تا چیزی ازخرمن خوب درستون وسط باقی نماند. دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده تا چیزی جز تعداد خرمن‌بد در ستون سمت چپ باقی نماند. عدد بالا مقسوم علیه و عدد پایین مقسوم، برای خرمن بامحصول‌بد است. برای این‌که‌مقسوم را برای محصول‌متوسط به دست آوریم، عدد پایین ستون وسط را در مقسوم علیه ضرب ومقسوم محصول بد را ازآن‌کم می‌کنیم. باقی‌مانده را برای محصول متوسط در نظر می‌گیریم. این‌می‌شود مقسوم برای محصول متوسط. برای پیداکردن‌مقسوم محصول خوب، عدد پایین ستون سمت راست را در مقسوم علیه ضرب و مقسوم‌های مربوط به محصول بد ومحصول متوسط را از آن‌کم می‌کنیم، باقی‌مانده را برای مقدارمحصول خوب درنظر می‌گیریم، این می‌شودمقسوم برای محصول خوب. همۀ مقسوم‌ها را با مقسوم‌علیه عمل می‌کنیم، مقدار محصول برحسب «دواو» به‌دست می‌آید».

مساله، منجربه حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases} ۳x+۲y+z=۳۹ \\ ۲x+۳y+z=۳۴ \\ x+۲y+۳z=۲۶ \end{cases}$$

دررسالهٔ چینی، این دستگاه را این طور نشان داده است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲۶ & ۳۴ & ۳۹ \end{pmatrix}$$

بنابر قاعده‌ای که در رساله آمده است، باید جدول را به این ترتیب، عمل کرد:

۱) عددهای ستون وسط را درتعداد خرمن‌های با محصول خوب در ستون سمت راست ضرب کن:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۶ & ۳ \\ ۲ & ۹ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۲۶ & ۱۰۲ & ۳۹ \end{pmatrix}$$

۲) باقی مانده را تشکیل بده، دوباره باقی‌مانده را تشکیل بده و این عمل را، تا آن جا ادامه بده‌که چیزی از خرمن‌های خوب در ستون وسط باقی نماند

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۷ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲۶ & ۶۳ & ۳۹ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲۶ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix}$$

۳) دوباره باقی مانده‌ها را تشکیل بده، تا چیزی جز محصول بد در ستون‌چپ باقی‌نماند [دراین‌جا، ابتداعددهای ستون چپ، درتعدادخرمن‌های

با محصول خوب ازستون سمت راست ضرب شده‌اند، سپس، درهر سطر عدد ستون راست ازعدد نظیر ستون چپ کم شده است وباقی‌مانده‌ها درستون چپ قرار گرفته‌اند. بعد، عددهای ستون چپ درعدد خرمن‌های بامحصول متوسط از ستون وسط ضرب شده‌اند وپشت سر هم، عددهای ستون وسط از آن‌هاکم شده‌اند]:

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۲۰ & ۵ & ۲ \\ ۴۰ & ۱ & ۱ \\ ۱۹۵ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۸ & ۱ & ۱ \\ ۳۹ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۳ \\ ۶ & ۵ & ۲ \\ ۹ & ۱ & ۱ \\ ۷۸ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۵ & ۵ & ۲ \\ ۳۷ & ۱ & ۱ \\ ۱۳۳ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱۰ & ۵ & ۲ \\ ۳۸ & ۱ & ۱ \\ ۱۴۷ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱۵ & ۵ & ۲ \\ ۳۹ & ۱ & ۱ \\ ۱۷۱ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۲ \\ ۳۶ & ۱ & ۱ \\ ۹۹ & ۲۴ & ۳۹ \end{pmatrix}$$

۴) عدد بالا [۳۶] مقسوم‌علیه وعدد پایین [۹۹] مقسوم، برای‌تعداد خرمن‌های با محصول بد است

۵) برای این‌که مقسوم را برای محصول متوسط به‌دست‌آوریم، عدد پایین ستون وسط را در مقسوم علیه ضرب ومقسوم محصول بد را از آن‌کم می‌کنیم، باقی‌مانده را برای مقدار محصول متوسط در نظـر می گیریم. این می‌شود مقسوم برای‌محصول متوسط.

بنابراین، «مقسوم» برای y می‌شود:

$$\frac{۲۴ \times ۳۶ - ۹۹}{۵} = A$$

۶) برای پیدا کردن «مقسوم» محصول خوب، عدد پایین ستون سمت

راست را در مقسوم‌علیه ضرب ومقسوم‌های مربوط به محصول بد ومحصول متوسط را از آن کم می کنیم. باقی‌مانده را برای مقدار محصول خوب درنظر می گیریم. این می‌شود مقسوم برای محصول خوب

$$\frac{۳۹ \times ۳۶ - ۹۹ - ۲A}{۳} = B$$

۷) همهٔ مقسوم‌ها را بامقسوم علیه عمل می‌کنیم، مقدارهای محصول برحسب «دواو» به‌دست می‌آید.

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$z = \frac{۹۹}{۳۶} = \frac{۱۱}{۴} = ۲\frac{۳}{۴} \text{ «دواو»}$$

$$y = \frac{A}{۳۶} = ۴\frac{۱}{۴} \text{ «دواو»}$$

$$x = \frac{B}{۳۶} = ۹\frac{۱}{۴} \text{ «دواو»}$$

۶۹. مولف رساله، برای حل مساله، دوقاعده ذکر می کند.

قاعدهٔ اول : جدول «فان چن» راتشکیل بده و با روش «چژن فو » محاسبه کن.

مساله، منجربه حل این دستگاه معادله‌ها می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x = ۱ - y \\ ۳y = ۱ - z \\ ۴z = ۱ - x \end{cases}$$

که قابل تبدیل به‌این‌صورت است:

$$\begin{cases} ۲x + y = ۱ \\ ۳y + z = ۱ \\ ۴z + x = ۱ \end{cases}$$

وجدول متناظر «فان‌چن» برای‌آن، چنین است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

درهمان آغاز جدول، گلوله‌هایی (جاهای خالی) وجود دارد.

قاعدهٔ دوم: «چژن‌فو»، یعنی جمع وتفریق عددهای منفی: «اگر علامت یکی باشد، از هم کم می‌شوند؛ اگر علامت یکی نباشد، جمع می‌شوند. اگر مثبت بدون زوج خود باشد، منفی می‌شود؛ اگرمنفی بدون زوج خود باشد، مثبت می‌شود».

این قاعده را با علامت‌های امروزی، می‌توان این‌طورنوشت:

$$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b),$$
$$(\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b),$$
$$0-(+b)=-b,$$
$$0-(-b)=+b$$

قاعدهٔ جمع، دررساله، این‌طورشرح‌داده شده است: «اگر باعلامت‌های مختلف باشند، از هم کم می‌شوند؛ اگر با یك علامت باشند، باهم جمع می‌شوند. اگرعددمثبت بدون زوج باشد، مثبت می‌شود؛ اگرعدد منفی‌بدون زوج باشد، منفی می‌شود».

با علامت گذاری‌های جبری امروز، این قاعده چنین می‌شود:

$$(\mp a)+(\mp b)=\pm(a-b),$$
$$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b),$$
$$0+(+b)=+b,$$
$$0+(-b)=-b$$

«چژن‌فو» از دوواژه ترکیب شده است: «چژن» یعنی قابل جمع، و «فو» یعنی‌قابل تفریق. این گونه‌عددها راابا رنگ‌های مختلف نشان‌می‌دادند: «چژن» ـ قرمز و «فو» ـ سیاه.

بابه کاربردن‌قاعدهٔ«فان‌چن»درمورد این‌مساله، باید ازماتریس‌مفروض،

به‌طرف ماتریسی شامل صفرها، حرکت‌کرد. دراین مساله، عددهای منفی‌هم ظاهر می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۸ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ ۸ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷۰. در رساله، این قاعده داده شده است: «جدول فان‌چن را تشکیل بده. توجـه‌کن، چیزهایی‌که وزن آن‌ها بـه یك «دان» اضافه می‌شود (وزن خرمن‌های مفروض)، منفی است. بعد با روش چژن‌فو محاسبه‌کن».

مساله، منجربه حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x = ۱ + y \\ ۳y = ۱ + z \\ ۴z = ۱ + x \end{cases}$$

که به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} ۲x - y = ۱ \\ ۳y - z = ۱ \\ ۴z - x = ۱ \end{cases}$$

وجدول متناظرآن چنین است:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷۱. در رساله، این قاعده برای حل مسالـه داده شده است: «جدول فان‌چن را تشکیل بده. توجـه داشته باش: ۲ گاومیش و ۵ گوسفند مثبت، ۱۳خوك منفی وباقی‌ماندهٔ «تسیان‌ها» مثبت است. همین‌طوربعد، ۳ گاومیش مثبت، ۹ گوسفند منفی و۳ خوك مثبت است. بالاخره، ۵ گاومیش منفی؛ ۶

گوسفند مثبت، ۸ خوک مثبت و کمبود «تسیان‌ها» منفی است. بنابرقاعدهٔ چژن‌فو محاسبه کن».

اگر قیمت گاومیش، گوسفندوخوک‌را، به‌ترتیب، x ، y و z بگیریم، حل مسألهٔ منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x+۵y-۱۳z=۱۰۰۰ \\ ۳x-۹y+۳z=۰ \\ -۵x+۶y+۸z=-۶۰۰ \end{cases}$$

۷۴. دررساله، برای حل‌مساله، این‌طور راهنمائی شده‌است: «جدول فان‌چن را تشکیل بده وبا روش چژن‌فومحاسبه‌کن». راهنمائی دیگری برای بحث وبررسی مساله داده نشده است.

به‌سادگی دیده می‌شودکه، این مساله، منجربه دستگاه خطـی از پنج معادله با شش مجهول می‌شود. این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} ۲x+y=m \\ ۳y+z=m \\ ۴z+u=m \\ ۵u+v=m \\ ۶v+x=m \end{cases}$$

مجهول‌ها عبارتند از x، y، z، u، v و m. ضمناً جواب m را باید طوری گرفت‌که برای مقدارهای درست و مثبت x، y، z، u و v، حداقل ممکن باشد.

ماتریس اصلی دستگاه مفروض، چنین است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۶ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

و بعد از تبدیل

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۷۲۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۷۶m & m & m & m & m \end{pmatrix}$$

و از آن‌جا

$$v=\frac{۷۶}{۷۲۱}m \quad , \quad u=\frac{۱}{۷۲۱}\cdot\frac{۷۲۱m-۷۶m}{۵}=\frac{۱۲۹}{۷۲۱}m,$$

$$z=\frac{۱۴۸}{۷۲۱}m \quad , \quad y=\frac{۱۹۱}{۷۲۱}m \quad , \quad x=\frac{۲۶۵}{۷۲۱}m$$

و بنابراین، باید m را برابر ۷۲۱ گرفت.

۷۳. به‌سختی می‌توان زمانی را پیدا کرد که چینی‌ها، برای نخستین بار، ازقانون مربوط به‌ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه، یعنی قضیهٔ فیثاغورث، استفاده کرده‌اند. ولی این مطلب روشن است کـه، آن‌ها، از زمان‌هایی بسیار دور، با این قضیه آشنا بوده‌اند. آن‌طور که سندها گواهی می‌دهند، چینی‌ها درحدود ۲۲۰۰ سال پیش ازمیلاد، ازقضیهٔ فیثاغورث، درمورد مثلثی که ضلع‌های آن ۳ و ۴ و ۵ باشد، آگاهی داشتند.

در «ریاضیات در نه کتاب»، از قضیهٔ فیثاغورث ، به‌نام «هواوهو» نام برده شده است. طبق این قاعده، می‌توان بامعلوم‌بودن وتر و یك ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه، ضلع دیگر مثلث قائم‌الزاویه را به‌دست‌آورد. همچنین، می‌توان وتر را ، با معلوم‌بودن دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه محاسبه کرد.

قاعدهٔ «هواوهو»، این‌طور بیان می‌شود: «هرکدام از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه را در خودش ضرب کن ، جمع کن ، از این‌مجموع جذر بگیر. حاصل برابر وتر می‌شود. به همین ترتیب، ضلع افقی مجاور به‌زاویهٔ قائمه را در خودش ضرب کن، آن‌را از ضرب وتر در خودش کم کن، از بـاقی‌مانده

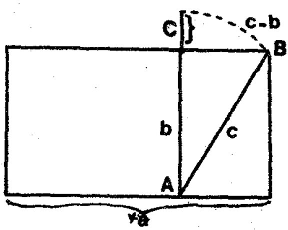
جذر بگیر. ضلع قائم مجاور به‌زاویهٔ قائمه به‌دست می‌آید».

اصطلاح‌های «هواو» و «هو» به‌معنای ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ‌قائمه از مثلث قائم‌الزاویه هستند. ضمناً «هواو» به‌ضلع قائم و معمولاً کوچکتر، و «هو» به‌ضلع افقی و معمولاً بزرگتر، اطلاق می‌شده است. معنای تحت‌اللفظی «هواو» ـ قلاب و «هو» ـ دنده یا رابط است.

از قاعدهٔ «هواوهو»، درتمام ۲۴ مسألهٔ‌کتاب نهم رسالهٔ «ریاضیات در نه‌کتاب» استفاده شده است و، به‌همین مناسبت، کتاب نهم را «هواوهو» می‌نامند.

*

در رساله، برای‌حل‌مسأله، این طور گفته شده است: «نصف‌ضلع برکه را در خودش ضرب‌کن، قسمت بالای‌آب، یعنی ۱ «چی» را در خودش ضرب کن؛ ازاولی کم‌کن، باقی‌مانده‌رابر۲ برابرقسمت روی‌آب‌نی تقسیم‌کن، عمق آب را به‌دست‌آور. قسمت‌بالای‌آب رابه‌آن‌اضافه‌کن، طول‌نی‌پیدا می‌شود».



شکل ۲۷

رساله، جواب‌را نداده است، ولی بااین راهنمایی، می‌توان‌جواب را به‌سادگی به‌دست‌آورد.

طول برکه را $۲a$، ارتفاع نی را c و عمق برکه را b می‌گیریم (شکل ۲۷). باید b و c را پیدا کنیم. با استفاده از قاعدهٔ چینی، می‌توان رابطه‌های زیر را، برای این دو مجهول، نوشت:

$$b=\frac{a^{۲}-(c-b)^{۲}}{۲(c-b)}$$

$$c=b+(c-b)=\frac{a^{۲}+(c-b)^{۲}}{۲(c-b)}$$

در رساله، نتیجهٔ این قاعده داده نشده است، بنابراین به‌سختی می‌توان فهمیدکه، ریاضی‌دانان چین باستان، از چه راهی، این رابطه‌ها را به‌دست می‌آوردند.

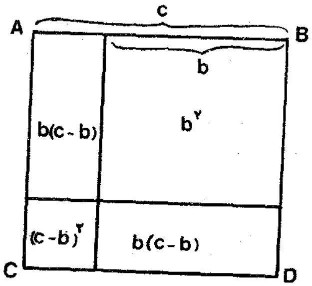
باوجود این، بااستدلال‌های عادی می‌توان، به‌راحتی، به‌این رابطه‌ها رسید. با شروع از شرطهای مسأله و به‌کار بردن قاعدهٔ «هواو هو»، یعنی قضیهٔ فیثاغورث، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} b=c-k \\ b^2=c^2-a^2 \end{cases}$$

که در آن، برای سادگی کار، قسمت بالای آب‌را، که برای ما معلوم است، یعنی $c-b$ را، به k نشان داده‌ایم. با حل این دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$\left| \begin{aligned} b&=\frac{a^2-k^2}{2k} \\ c&=\frac{a^2+k^2}{2k} \end{aligned} \right. \qquad (k=c-b)$$

«لیوهوای» ضمن بحث دربارهٔ «ریاضیات در نه‌کتاب»، به طور قانع‌کننده‌ای روشن‌می‌کندکه چینی‌ها قاعده‌ای به‌دست‌آورده‌بودندکه می‌شد، ازآن، دو رابطهٔ اخیر را نتیجه‌گرفت.



شکل ۲۸

او معتقد است، این‌رابطه‌ها را، که به‌طور شفاهی داده شده است، براساس تصورهای هندسی به‌دست‌آورده‌اند. ظاهراً، دانشمندان چین باستان، در این مورد، از شکلی شبیه شکل ۲۸ استفاده می‌کرده‌اند.

قبل از همه، بنا برقاعدهٔ «هواو هو» داریم:

$$a^2=c^2-b^2$$

سپس، از روی شکل معلوم است:

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)^2+2b(c-b)$$

و ازآن‌جا

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$$

۷۴. ریاضی‌دان چین باستان، برای حل این مسأله، قاعدهٔ زیر را، در رسالهٔ خود، ذکر می‌کند: «۷ را در خودش ضرب کن، ۳ را هم درخودش ضرب کن، با هم جمع و بعد نصف کن. این را به‌عنوان معیار A درجهت کج بگیر. از ۷ که در خودش ضرب کرده‌ای، معیار حرکت در جهت کج را کم کن، باقی‌مانده، معیار همان حرکت به‌طرف جنوب می‌شود. ۳ را در ۷ ضرب کن، این معیار حرکت B به‌طرف شرق است، ۱۰ «بو» حرکت به‌طرف جنوب را در معیار حرکت A در جهت کج ضرب کن؛ ۱۰ «بو» را در معیار حرکت B به‌طرف شرق ضرب کن. هرکدام ازاین‌ها مقسوم است. مقسوم‌ها را با معیار حرکت به‌طرف جنوب در نظر بگیر ومقدارها را پیدا کن».

با استفاده از این قاعده، مسأله به‌این ترتیب حل می‌شود:

۱) ابتدا، معیار حرکت A را «درجهت کج» به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۷^۲+۳^۲}{۲}=۲۹$$

۲) معیار حرکت A به‌طرف جنوب را به دست می‌آوریم:

$$۷^۲-\frac{۷^۲+۳^۲}{۲}=۲۰$$

۳) مقدار حرکت به‌طرف شرق، چنین می‌شود:

$$۷\times۳=۲۱$$

۴) «مقسوم» ها را پیدا می‌کنیم:

$$۱۰\times۲۹;\quad ۱۰\times۲۱$$

۵) A «در جهت کج»، این‌مقدار راه رفته است:

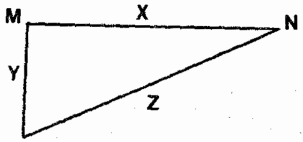
$$\frac{۱۰\times۲۹}{۲۰}=\frac{۲۹}{۲}=۱۴\frac{۱}{۲}\quad \text{«بو»}$$

۶) B به‌طرف شرق، این مقدار راه رفته است:

$$\frac{۱۰\times۲۱}{۲۰}=\frac{۲۱}{۲}=۱۰\frac{۱}{۲}\quad \text{«بو»}$$

راه حل عادی این مسأله، چنین‌است: x را راهی‌می‌گیریم‌که B به‌طرف شرق رفته است؛ y مسافتی که A به‌طرف جنوب طی‌کرده است (ضمناً،

بنا بر شرط مسأله می‌دانیم : $y = 10$)
و بالاخره ، z را مقدار «راه کج» به‌طرف شمال شرقی می گیریم ، که همان‌وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌شود (شکل ۲۹). دراین‌صورت، داریم:



شکل ۲۹

$$x^2 + 10^2 = z^2,$$

$$\frac{x}{z+10} = \frac{3}{7}$$

ازآن‌جا

$$z = \frac{7}{3}x - 10$$

سپس

$$x^2 + 10^2 = \left(\frac{7}{3}x - 10\right)^2$$

یا

$$x^2 + 100 = \frac{49}{9}x^2 - \frac{2 \times 7 \times 10}{3}x + 100,$$

$$40x^2 - 3 \times 2 \times 7 \times 10x = 0,$$

$$2x^2 - 21x = 0,$$

$$x(2x - 21) = 0 \implies x = 10\frac{1}{2} \quad \text{«بو»}$$

حالا، z را پیدا می کنیم :

$$z = \frac{7}{3} \times \frac{21}{2} - 10 = \frac{49}{2} - 10 = \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2} \quad \text{«بو»}$$

۷۵. برای این‌مسأله هم، مثل همهٔ موردهای دیگر، تنها قاعدهٔ عمل داده شده است : «۱ چژان را در خودش ضرب کن ، می‌شود «شی» ، نصف اضافی را در خودش ضرب کن، دوبرابر کن و از «شی» کم کن.نصف‌باقی‌مانده را بردار ، ازآن جذر بگیر، از آن‌چه به‌دست‌آمد، نصف اضافی را کم کن ، این عرض در می‌شود. و اگر نصف اضافی را با آن جمع کنی، ارتفاع در پیدا می‌شود».

اگرعرض دررا x وطول آن‌را y بگیریم و فرض‌کنیم $y-x=m$ (اضافی). بعدقطررا به d نشان‌دهیم، مسأله، منجربه‌حل‌دستگاه زیرمی‌شود:

$$\begin{cases} d^2=x^2+y^2 \\ m=x-y \end{cases}$$

برای پیداکردن x، به‌این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$2x^2+2mx+m^2-d^2=0$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$x_{1,2}=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{m^2-d^2}{2}}=$$

$$=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{2d^2-m^2}{4}}=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2-2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}$$

ازآن‌جاکه دانشمندان‌چینی، به‌جواب‌های منفی توجهی‌نداشتند، برای‌عرض در، باید نتیجه گرفت

$$x=\sqrt{\frac{d^2-2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}-\frac{m}{2}$$

و این، همان چیزی‌است‌که‌درقاعدهٔ رساله، برای تعیین مقدار x آمده است.

روشن است‌که ، با در دست داشتن x، می‌توان y را از رابطهٔ زیر پیداکرد:

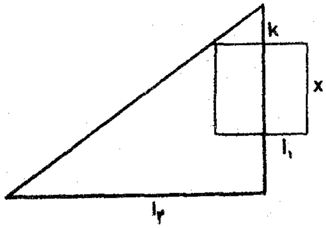
$$y=x+m$$

ولی در رساله، برای پیداکردن مقدار y ، این‌رابطه داده شده است.

$$y=\sqrt{\frac{d^2-2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}+\frac{m}{2}$$

که ریشهٔ مثبت این معادله است:

$$2y^2-2my+m^2-d^2=0$$



شکل ۳۰

۷۶. قاعدهٔ چینی، برای حل این مسأله می‌گوید: «مقدار «بو»، فاصلهٔ تا دروازهٔ شمالی را در دو برابر مقدار «بو» که به‌غرب می‌رویم ضرب کن، این می‌شود مقسوم. با مقدار «بو» که از دروازهٔ جنوبی رفته‌ایم، جمع کن، این هم می‌شود مقسوم علیه. جذر بگیر، ضلع مربع را خواهی داشت».

این‌مسأله را می‌توان به‌کمك شکل روشن‌کرد (شکل ۳۰). بااستفاده از علامت‌گذاری‌های شکل، می‌توان مسأله را، به‌حل معادلهٔ درجهٔ دوم زیر منجرکرد:

$$x^2+(k+l_1)x-2kl_2=0$$

۷۷. باید توجه داشت که

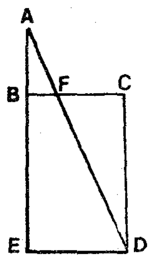
۱۰۰ «تسون» = ۱۰ «چی» = ۱ «چژان»

ریاضی‌دانان چینی، به‌احتمال زیاد، ضمن تنظیم قاعدهٔ لازم برای حل مسأله، از مثلث‌های متشابه ABF و FCD استفاده‌کرده‌اند (شکل ۳۱). با توجه به‌این دومثلث، خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{BF}=\frac{x}{FC};$$

$$x=FC.\frac{AB}{BF}=$$

$$=\frac{AB(BC-BF)}{BF}$$



شکل ۳۱

قاعده‌ای‌که در رساله داده شده است، برمبنای همین رابطهٔ اخیراست: «از ۵ «چی» قطر چاه، ۴ «تسون» راکه از قطر جداشده است، کم‌کن. باقی‌مانده را در ۵ «چی» ارتفاع دیرك ضرب‌کن. این مقسوم است. ۴ «تسون»، بخش

جداشدهٔ قطر، مقسوم‌علیه است. مقسوم ومقسوم‌علیه‌را با هم در نظربگیر، مقدار مجهول، برحسب «تسون» به‌دست می‌آید».

۷۸. در رساله، برای حل این مسأله، قاعدهٔ زیر داده شده است: «محیط قاعده را در خودش ضرب‌کن، بعد در ارتفاع ضرب‌کن. بر ۳۶ تقسیم کن».

به‌این ترتیب، چینی‌ها، حجم مخروط را، از این رابطه به‌دست می‌آورده‌اند:

$$V=\frac{h}{۳}\cdot\frac{c}{۴\pi}$$

که در آن، c عبارت است از محیط قاعدهٔ مخروط. ضمناً چینی‌ها، عدد π را برابر ۳ می‌گرفته‌اند.

۷۹. چینی‌ها، این مسأله را با این قاعده حل می‌کردند: «محیط قاعده‌های بالا و پایین را درهم ضرب‌کن، هرکدام را در خودش ضرب‌کن، همهٔ این‌ها را جمع‌کن و ضرب‌کن در ارتفاع. بر ۳۶ تقسیم‌کن».

بنابراین، حجم مخروط ناقص، در چین باستان، از روی این رابطه پیدا می‌شد:

$$V=\frac{(Cc+C^{۲}+c^{۲})h}{۳۶}$$

که اگر π را برابر ۳ بگیریم، می‌توان آن‌را به‌این‌صورت نوشت:

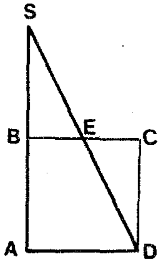
$$V=\frac{h}{۳}\cdot\frac{Cc+C^{۲}+c^{۲}}{۴\pi}$$

که در آن، C و c، به‌ترتیب، محیط قاعده‌های پایین وبالای مخروط‌ناقص و h ارتفاع‌آن است.

۸۰. قاعدهٔ چینی، در مورد این مسأله، چنین است: «ضلع‌های افقی و قائم مجاور به زاویهٔ قائمه را جمع‌کن، این می‌شود مقسوم‌علیه. همین ضلع‌هارا درهم‌ضرب‌کن، می‌شود مقسوم. باعمل روی مقسوم ومقسوم‌علیه، ضلع مربع، برحسب «بو»، به‌دست می‌آید».

۸۱. مسأله را می‌توان به‌کمک شکل روشن کرد (شکل ۳۲).

دانشمندان چینی، ظاهراً برای حل این مسأله، از تشابه دو مثلث SAD و ECD استفاده کرده‌اند. از این دو مثلث، می‌توان نتیجه گرفت:



شکل ۳۲

$$\frac{AS}{CD}=\frac{AD}{EC}$$

یا

$$x=AS=\frac{AD.DC}{EC}$$

که با قراردادن مقدارهای مفروض، به‌دست می‌آید:

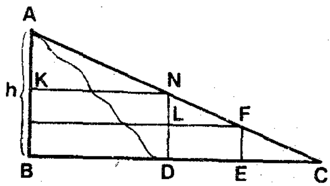
$$x=\frac{\text{۱ «چژان»} \times \text{۱ «چژان»}}{\text{۳ «تسون»}}$$

در رسالهٔ باستانی چین، این قاعده برای حل مسأله داده شده است: «۱ «چژان» را درخودش ضرب‌کن، این‌مقسوم‌است. ۳ «تسون» مقسوم‌علیه است. مقسوم و مقسوم‌علیه را با هم درنظر بگیر».

۸۲. ظاهراً چینی‌ها، برای حل این مسأله، از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AKN و NLF استفاده‌کرده‌اند (شکل ۳۳). از این‌دومثلث، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AK}{KN}=\frac{NL}{LF}$$

و یا



شکل ۳۳

$$\frac{x-ND}{BD}=\frac{ND-FE}{DE}.$$

وبنابراین

$$x=ND+\frac{(ND-FE)BD}{DE}$$

همین رابطه است که در رسالهٔ چینی «ریاضیات در نه کتاب»، به‌عنوان حل مسأله، داده شده است: «از ارتفاع ستون، ارتفاع سطح دید (۷«چی») را کم کن، تفاضل را در ۵۳ «لی» ضرب کن، این می‌شود مقسوم. فاصلهٔ شخص تا ستون، یعنی ۳ «لی»، مقسوم‌علیه است. مقسوم و مقسوم‌علیه

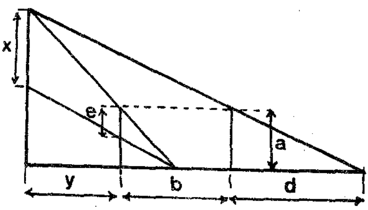
را با هم در نظر بگیر. آن‌چه‌را به‌دست آوردی، با ارتفاع ستون جمع کن، این می‌شود ارتفاع کوه».

۸۳. لیوهوئه، ریاضی‌دان سدهٔ سوم، چینی و مؤلف آثار زیادی در ریاضیات، کارهای بسیاری در زمینهٔ پیشبرد هندسهٔ کاربردی دارد. تمامی رسالهٔ او، به‌نام «ریاضیات جزیرهٔ دریایی»، به‌کاربرد عملی هندسه اختصاص دارد. او این رساله را، ابتدا به‌عنوان فصل دهم تفسیر خود برکتاب‌قدیمی «ریاضیات در نه‌کتاب» نوشت، ولی بعدها به‌صورت کتاب مستقلی عرضه‌شد. خود نام رساله نشان می‌دهد که، درآن، مسأله‌های گوناگونی دربارهٔ تعیین فاصلهٔ تااشیاءِ غیرقابل دسترس، که در جزیره قراردارند و ناظر هم درخارج آن‌جزیره واقع‌است، حل شده است. علاوه برآن، دراین رساله، مسأله‌هایی هم دربارهٔ محاسبهٔ ارتفاع‌های غیر قابل دسترس داده شده است، که ناظر در همان جزیره وجود دارد.

*

لیوهوئه، مسأله را باقاعده‌ای حل می‌کندکه می‌توان‌آن‌را بادورابطهٔ زیر بیان‌کرد:

$$x=\frac{be}{d+c}+e;\quad y=\frac{bc}{d-c}$$



شکل ۳۴

که درآن‌ها، x ارتفاع درخت کاج؛ y فاصلهٔ دیرک اول از تپه، a ارتفاع‌هردیرک؛ b فاصلهٔ بین‌دیرک‌ها؛ c فاصلهٔ نقطه‌ای‌که عقب دیرک قرار دارد و با انتهای دیرک اول و رأس درخت روی یک خط راست است، تا پای دیرک؛ d فاصله‌ای از عقب دیرک دوم که با انتهای دیرک دوم و رأس درخت روی یک خط راست قرار دارد، تا پای دیرک؛ e عددی است که «قاعدهٔ درخت» را از رأس دیرک دوم «اندازه می‌گیرد» (شکل ۳۴).

باید توجه داشت که اغلب مسأله‌های «لیوهوئه» دشوار است . خود او ، راه‌حل مسأله‌ها را ، طبق معمول ، به‌صورت قاعده و براساس مثلث‌های متشابه می‌دهد . این مسأله‌ها ، به‌علت اهمیتی‌که از نظر عملی دارند، بعدها، چه درچین و چه در بیرون از مرزهای چین به‌طور گسترده‌ای شهرت پیدا کردند.

۵• مسأله‌های هندی

یادداشت تاریخی

هند فرهنگی بزرگ، غنی و بکر دارد، که سرچشمهٔ آن را باید در ژرفای تاریخ جست‌وجو کرد. هزاران سال پیش ازاین، وحتی پیش ازمیلاد، درهند، کانال‌های آبیاری و دستگاه آب‌رسانی شهری به‌وجود آمده بود و ساختمان‌های چند طبقه با آجر پخته وجود داشت. هندی‌ها، از زمان‌های بسیار دور، با هنرسرامیك سازی آشنا بودند و چیزهای زیادی را ازگل‌پخته به‌دست می‌آوردند، از چرخ کوزه‌گری استفاده می‌کردند و هنر جواهرسازی را (بااستفاده از فلزها و سنگ‌های قیمتی)، به حدکمال خود رسانده بودند.

حتی در دورترین دوران‌های تاریخی، آگاهی‌های بسیاری در زمینهٔ دستور زبان، اخترشناسی و بعضی از دانش‌های دیگر، در سرزمین هند وجود داشت.

بیشترین موفقیت دانشمندان هندی، در زمینهٔ ریاضیات بود. آن‌ها پایه‌های اصلی حساب و جبر را بنا نهادند و یونانی‌ها، در واقع، کارهای آن‌ها را دنبال کردند.

بزرگترین موفقیت ریاضی دانان هندوستان را باید، قبل از همه، کشف دستگاه موضعی عددنویسی دانست که از ده رقم هندی تشکیل می‌شد وشامل صفر هم بود. هندی‌ها، صفر را «سونیا» می‌نامیدندکه به‌معنای «هیچ» بود. یادآوری این مطلب جالب است که، درابتدا، صفر را با یك نقطه نشان

می‌دادند و، تنها بعد از گذشت چند سده، دایرهٔ توخالی کوچك را به‌جای آن انتخاب کردند. از این که، کدام دانشمند هندی، دستگاه دهدهی را برای نخستین بار به‌کار برده است، اطلاعی نداریم. با وجود این، دلیل‌هایی وجود دارد که می‌توان حکم کرد که، این دستگاه در ابتدای سدهٔ اول میلادی کشف شده است. ولی، به‌کاربردن علامت صفر را، باید به‌سدهٔ دوم میلادی مربوط دانست.

به عنوان مشهورترین ریاضی‌دانان هندی، می‌توان از آریابهاتا (اواخر سدهٔ اول)، براهماگوپتا (سدهٔ هفتم) و بهاسکارا (سدهٔ دوازدهم) نام برد.

ریاضی دانان هندی دوران کهن، دوست داشتند، دراجتماع‌های عمومی مردم، باهم مسابقه دهند. یکی از نویسندگان هندی سدهٔ هفتم، درپایان کتاب خود می‌نویسد: «همان طور که خورشید، با پرتوهای درخشان خود، ستارگان را محو می‌کند، یك حکیم هم، وقتی که دراجتماع‌های مردم، مساله‌های ریاضی را طرح و حل می‌کند، برافتخارهای دیگران، خط بطلان می‌کشد».

یادآوری می‌کنیم که، تمام راهنمایی‌ها و حل‌هایی که در این جا از مسأله‌های هندی داده شده است، با علامت‌گذاری‌های امروزی است.

حل مسأله‌ها

۸۴. این مسأله، از رسالهٔ باهشالی برداشته شده است، که درسال ۱۸۸۱ میلادی درحفاری‌های شهر باهشالی، درشمال غربی هند، پیدا شده است. رساله، برپوست درخت نوشته شده و متعلق به سدهٔ سوم یا چهارم میلادی است. دانشمندان اعتقاد دارندکه، این رساله، دست‌نویس ناقصی از یك رسالهٔ کهن‌تر است.

*

مؤلف رساله پیشنهاد می‌کندکه مسأله را با «قاعدهٔ فرضی» و درحالت خاص خودش، یعنی وقتی که عدد مجهول را واحد بگیریم (روش تبدیل به واحد)، حل کنیم. استدلال به این ترتیب، انجام می‌گیرد: عدد مجهول را

واحد می‌گیریم، دراین صورت سهم نیاز اولی ۱ ، دومی ۲ ، سومی ۶ و چهارمی ۲۴ می‌شود. به این ترتیب، مجموع نیازها برابر می‌شود با ۳۳. حالا ۱۳۲ را بر ۳۳ تقسیم می‌کنیم. حاصل، پاسخ مورد نظرما، یعنی مقدار نیاز اولی را می‌دهد.

۸۵. طبق شرطهای مساله، باید داشته باشیم:

$$n+5=x^2$$

$$n-11=y^2$$

معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$16=x^2-y^2,$$

و یا

$$16=(x+y)(x-y)$$

از آن جا، به‌یکی از دو حالت زیر می‌رسیم:

$$\left|\begin{array}{l} x+y=16 \\ x-y=1 \end{array}\right. \quad \text{یا} \quad \left|\begin{array}{l} x+y=8 \\ x-y=2 \end{array}\right.$$

با حل دستگاه اول به‌دست می‌آید:

$$x=5, \qquad y=3$$

بنابراین، عدد مجهول برابراست با ۲۰.

با حل دستگاه دوم به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{17}{2}, \qquad y=\frac{15}{2}$$

و بنابراین : $n=67\frac{1}{4}$.[1]

---

۱. البته خواننده توجه دارد که، اگر قرار باشد جواب‌های کسری را قبول کنیم، ضرورتی ندارد $x+y$ و $x-y$ را، عددهایی درست درنظر بگیریم. مثلاً، با فرض $x+y=6$ و $x-y=\frac{8}{3}$ ، به‌دست می‌آید: $x=\frac{13}{3}$ و $y=\frac{5}{3}$، و، از آن‌جا، به‌یکی ازجواب‌های دیگر برای عدد n می‌رسیم: $n=\frac{124}{9}$ یا $n=13\frac{7}{9}$.

۸۶. مسأله، منجر به‌حل این معادله می‌شود:

$$\frac{۱}{۵}x+\frac{۱}{۳}x+۳\left(\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۵}x\right)+۱=x$$

که با حل آن $x=۱۵$ به‌دست می‌آید. یعنی ، تعداد زنبورهای عسل، ۱۵ عدد بوده است.

*

این مسأله از رسالهٔ «ماهیت محاسبهٔ» (هائی تاسارا) سرید هاری ، ریاضی‌دان‌هندی، برداشته شده‌است که درفاصلهٔ‌سده‌های ششم تا دهم میلادی می‌زیسته‌است (زمان‌دقیق زندگی اومعلوم‌نشده‌است). سریدهاری مسأله‌های زیادی‌دارد که‌بیشترآن‌ها، بارها مورداستفادهٔ ریاضی‌دانان هندی در زمان‌های بعد قرارگرفته است.

۸۷. فرض می‌کنیم، ستارهٔ اول، بعد از آن‌که راهی به‌اندازهٔ x طی کند، به ستارهٔ دوم برسد. درایـن صورت، زمانی‌کـه برای طی این راه لازم دارد، برابر است با $\frac{x}{v_۱}$.

درهمین‌مدت، ستارهٔ دوم، راهی به‌اندازهٔ $d-x$ رفته است و به‌اندازهٔ $\frac{d-x}{v_۲}$ وقت صرف کرده است. به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{x}{v_۱}=\frac{d-x}{v_۲}$$

و از آن جا، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{dv_۱}{v_۱+v_۲}$$

این مسألـه، از رسالـهٔ «آریابهاتانامه»، متعلق به ریاضی‌دان مشهور هند آریابهاتا برداشته شده است،که در اواخر سدهٔ پنجم و اوایل سدهٔ ششم می‌زیسته است. ایـن رساله ، شامل مساله‌هایـی از اخترشناسی و ریاضیات است. آریـابهاتا، دربخش ریاضی این رساله، قانون‌هایـی از حساب، جبر، هندسه و مثلثات راکـه در اخترشناسی ـ و به‌خصوص، درتنظیم جدول‌های

نجومی ـ لازم‌دارد، می‌آورد. آریابهاتا مسأله‌های زیادی در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی دارد، که بعضی از آن‌ها را در این‌جا آورده‌ایم.

۸۸. این مسأله، عبارت است از محاسبهٔ مجموع عددهای به اصطلاح مثلثی که به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ هستند. اگر در این عبارت، مقدار n را به‌ترتیب برابر ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... بگیریم، عددهای مثلثی به‌دست می‌آید:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,\ \ldots$$

توجه کنیم که، مجموع هردو عدد مجاور مثلثی، یک مجذور کامل است. اکنون، اگر عدد مثلثی را به T نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$T_n+T_{n-1}=n^2$$
$$T_{n-1}+T_{n-2}=(n-1)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_3+T_2=3^2$$
$$T_2+T_1=2^2$$

اگر این برابری‌ها را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$T_n+2(T_{n-1}+T_{n-2}+\ldots+T_2)+T_1=$$
$$=n^2+(n-1)^2+\ldots+3^2+2^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\,;$$
$$2(T_n+T_{n-1}+\ldots+T_2+T_1)=$$
$$=T_1+T_n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1$$

اکنون، اگر توجه کنیم که $T_1=1$ و $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$، به‌دست می‌آید:

$$T_n+T_{n-1}+\ldots+T_2+T_1=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

که بعد از ساده‌تر کردن، خواهیم داشت:

$$T_1+T_2+\ldots+T_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۸۹. فرض می‌کنیم، اولی a کالا و m سکه و دومی b کالا و n سکه داشته باشند، اگر قیمت هر کالا را x بگیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$ax+m=bx+n$$

که با حل آن، مقدار x به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{n-m}{a-b}$$

۹۰. قطر دایره را d می‌گیریم، دراین صورت داریم:

$$\frac{\pi d^۲}{۴}=\left(\frac{۱۳}{۱۵}d\right)^۲$$

و از آن‌جا

$$\pi=\frac{۶۷۶}{۲۲۵}$$

و یا $\pi=۳/۰۰(۴)$. اشتباه درحدود ۴/۳٪ است.

*

این مساله، از یك مجموعهٔ قدیمی هندی به‌نام «سولوا ـ سوترا» (قانون طناب) برداشته شده است، و یکی از قدیمی‌ترین یادبودهای هندسهٔ هندی است که به ما رسیده است. در «سولوا ـ سوترا» دستورهای خاصی برای ساختن قربان‌گاه‌ها داده شده است؛ و ضمن آن، مطلب‌های پرارزشی از هندسه و کاربرد آن آمده است. این موضوع‌ها مربوط می‌شود به شکل قربان‌گاه‌ها، اندازه‌های مختلف آن‌ها و جهت‌گیری نسبت به‌نور.

تاکنون، سه تا از این مجموعه‌ها شناخته شده است. مؤلفان این مجموعه‌ها عبارتند از «بدهایانا» (سدهٔ ششم یا هفتم پیش از میلاد)، «کاتیایانا» و «آناستامبا» (سدهٔ چهارم یا پنجم پیش از میلاد).

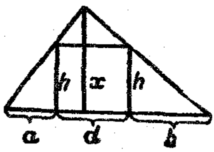
براساس این مجموعه‌ها می‌توان به‌این نتیجه رسید که، دست‌کم درسدهٔ هشتم پیش ازمیلاد، دانشمندان هندی ازقضیهٔ مربوطبه‌وتر(قضیهٔ فیثاغورث) اطلاع داشتند و این مدت‌ها پیش از فیثاغورث است. در «سولوا ـ سوترا»، این قضیه، این‌طور تنظیم شده است: «اگر طنابی را به‌طور اریب، درامتداد مربع (مستطیل) قرار دهیم، همان می‌شود که طناب را به‌طور جداگانه روی

هر بعد آن بگذاریم و باهم به‌حساب آوریم».

اگر دانشمندان قدیم یونانی می‌کوشیدند تا مسألهٔ تبدیل یك دایرهٔ مفروض را به‌مربع حل کنند (مسألهٔ تربیع دایره)، ریاضی دانان هندی می‌کوشیدند تا مسألهٔ عکس را حل کنند (البته به‌تقریب)، یعنی مربع را به دایرهٔ هم‌ارز آن تبدیل کنند.

در «سولوا ـ سوترا»، قاعدهٔ «کاتیایانا» داده شده است: «باید قطر را به ۱۵ بخش مساوی تقسیم کرد و ۱۳ بخش از آن را، برای ساختن مربعی که بادایره (تقریباً) برابر است، برداشت». وهمین قاعدهٔ «کاتیایانا» مضمون مسألهٔ فوق را تشکیل می‌دهد.

۹۱. h را ارتفاع تکه چوب، a و b را طول سایهٔ آن در دو حالت مختلف و d را فاصلهٔ بین پای تکه چوب درحالت اول و پای آن درحالت دوم می‌گیریم (شکل ۳۵).



شکل ۳۵

اگرارتفاع‌شمع‌را x بگیریم. با توجه به مثلث‌های متشابهی‌که روی شکل دیده می‌شود، داریم:

$$\frac{x}{x-h}=\frac{a+b+d}{d}$$

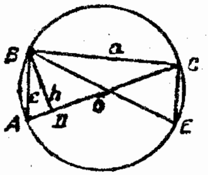
و از آن جا

$$x=\frac{h(a+b+d)}{a+b}=h\left(۱+\frac{d}{a+b}\right)$$

مؤلف این مسأله، براهماگوپتا (متولد ۵۹۸ میلادی)، بزرگترین ریاضی دان واخترشناس هندی است. تنها یکی از رساله‌های نجومی او به‌ما رسیده است که درسال ۶۲۸ میلادی نوشته شده و شامل ۲۰ کتاب است و، از آن‌ها، کتاب دوازدهم (حساب) و کتاب هیجدهم (جبر) به ریاضیات مربوط می‌شود. درکتاب حساب او، فصل‌هایی هم به موضوع‌های هندسی اختصاص دارد و مسأله‌ای را هم، که دربالا حل کردیم، از آن‌جا برداشته‌ایم.

۹۲. باید ثابت‌کنیم: $BE=\frac{a.c}{h}$ ، که در آن، BE عبارت است

از قطر دایرهٔ محیطی مثلث (شکل۳۶).



شکل ۳۶

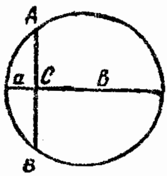
مثلث‌های ADB و BCE را درنظرمی گیریم؛ این‌مثلث‌ها متشابه‌اند و داریم:

$$c : h = BE : a$$

و از آن‌جا

$$BE = \frac{a.c}{h}$$

۹۳. باید ثابت کنیم: $\frac{AB^{۲}}{۴a} + a = D$ ، که درآن، D عبارت است از قطر دایره (شکل ۳۷) . در واقع ، داریم:



شکل ۳۷

$$AC^{۲} = a.b \qquad (۱)$$

$$Ac = \frac{AB}{۲} \qquad (۲)$$

$$b = D - a \qquad (۳)$$

برابری (۱) ، با توجه به‌برابرهای (۲) و (۳) به‌این شکل درمی‌آید:

$$\frac{AB^{۲}}{۴} = a(D-a)$$

و یا

$$\frac{AB^{۲}}{۴} + a^{۲} = Da \qquad (۴)$$

اگر دو طرف برابری (۴) را بر a تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AB^{۲}}{۴a} + a = D$$

۹۴. باید ثابت کنیم (شکل ۳۷) :

$$a = \frac{۱}{۲}(D - \sqrt{D^{۲} - AB^{۲}})$$

با توجه به‌مسالهٔ قبل داریم:

$$AB^2 = 4aD - 4a^2$$

اکنون به‌سادگی دیده می‌شود:

$$D^2 - AB^2 = D^2 - 4aD + 4a^2 = (D - 2a)^2;$$

$$\frac{1}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - AB^2}\right) = \frac{1}{2}[D - (D - 2a)] = a$$

۹۵. این مسأله، از رسالهٔ «آموزش اخترشناسی» بهاسکارا ـ آکاریا، ریـاضی‌دان مشهور هندی سدهٔ دوازدهم (تولد او در سال ۱۱۱۴ میلادی است، ولی‌تاریخ مرگ اومعلوم‌نیست)، برداشته شده است. صفت «آکاریا» به‌معنـای حکیم و دانشمند است . قسمت مقدمه‌ای رساله ، شامل حساب («لیلاواتی»، که ترجمهٔ تحت‌اللفظی‌آن «زیبا» است) وجبر («ویجاهانیتا»)، به‌معنی «محـاسبهٔ ریشه») می‌شد . به‌اعتقاد بسیاری از مورخـان ریاضی، لیلاواتی، دختر بهاسکارا بوده است‌که بخش مربوط به‌حساب از اثر خودرا به‌نام اوکرده است.

*

بهاسکارا، این مسأله را با روش فرضی حل‌کرده است.

فرض می‌کنیم ، عدد مفروض برابر ۳ باشد. در این‌صورت، بنابرفرض مسأله، $3 \times 5 = 15$، یک‌سوم ۱۵ می‌شود ۵ ، چون $15 - 5 = 10$، با تقسیم ۱۰ بر ۱۰ به‌عدد ۱ می‌رسیم. حالا اگر $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ عـــدد ۳ را به‌واحد اضافه‌کنیم، به‌دست می‌آید :

$$1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}$$

که ۱۶ بار از ۶۸ کوچکتر است.

بنابراین، عدد مجهول برابر است با: $3 \times 16 = 48$.

۹۶. داریم:

$$\sqrt{10 + + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} =$$

$$= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}} =$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

این‌مسأله‌را، ازرسالهٔدیگربهاسکا رابه‌نام«سیدهانتا ـ سیرومانی»برداشته‌ایم.

۹۷. اتحاد زیر را در نظر می گیریم:

$$[(m^2+n^2)x]^2=[(m^2-n^2)x]^2+(2mnx)^2$$

$(m^2+n^2)x$ را وتر مثلث و $(m^2-n^2)x$ و$2mnx$ را ضلع‌های پهلوی زاویهٔ قائمه می گیریم

با توجه به‌شرط مسأله، داریم:

$$(m^2+n^2)x=mnx^2(m^2-n^2)$$

ویا

$$m^2+n^2=mn(m^2-n^2)x$$

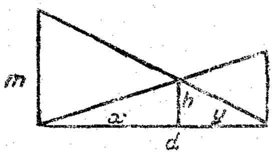
و از آن‌جا

$$x=\frac{m^2+n^2}{mn(m^2-n^2)}$$

اکنون بدون هیچ زحمتی، می‌توان ضلع‌های مثلث و ؛ بنابراین، خود مثلث را به‌دست آورد.

این مسأله را از رسالهٔ «آموزش اخترشناسی» بهاسکارا برداشته‌ایم.

۹۸. طول عمود را h ، فاصلهٔ بین پـای دو چوب خیـزران را d و پاره‌خط‌های‌روی d را x و y می‌نامیم (شکل۳۸). قاعدهٔ بهاسکارارا می‌توان این‌طور نوشت:



شکل ۳۸

$$h=\frac{m.n}{m+n};x=\frac{dm}{m+n};\ y=\frac{dn}{m+n}$$

در واقع داریم:

$$\frac{m}{h}=\frac{d}{y};\ \frac{n}{h}=\frac{d}{x};\ \ x+y=d$$

که باحل این‌دستگاه،نسبت به‌مجهول‌های h، x و y، مقدارهای موردنظر به‌دست می‌آید.

۹۹. فرض‌می‌کنیم، اولی $۲x-۱۰۰$ روپیه‌ودومی $x+۱۰۰$ روپیه داشته‌باشند. روشن است که، در این‌صورت، شرط اول مسأله، برقراراست. با توجه به‌شرط دوم باید داشته‌باشیم:

$$۶(۲x-۱۱۰)=x+۱۱۰$$

وبا حل این معادله، به‌دست می‌آید: $x=۷۰$.

در نتیجه، اولی $۱۴۰-۱۰۰$، یعنی ۴۰ روپیه ودومی $۷۰+۱۰۰$ یعنی ۱۷۰ روپیه داشته است.

۱۰۰. دو طرف معادلهٔ $ax^۲+bx=c$ را در $۴a$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۴a^۲x^۲+۴abx=۴ac$$

بعد، به‌دوطرف برابری اخیر، $b^۲$ را اضافه می‌کنیم:

$$۴a^۲x^۲+۴abx+b^۲=b^۲+۴ac$$

چون سمت‌چپ برابری، قابل‌تبدیل به‌مجذورکامل است، بنابراین:

$$۲ax+b=\sqrt{b^۲+۴ac}$$

وازآن‌جا

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^۲+۴ac}}{۲a}$$

و اما، دربارهٔ جواب دوم، که به‌علامت منفی در جلو رادیکال مربوط است، بهاسکارامتذکرمی‌شودکه «مردم، عددهای منفی‌انتزاعی‌رانمی‌پسندند».

۱۰۱. ریاضی‌دانان هندی، برای‌حل مسأله‌های حساب، به‌طوروسیع، از روشی به نام «قاعدهٔ برگشت» یا «قاعدهٔ معکوس» استفاده می‌کردند. ماهیت این‌روش چنین بود: وقتی‌که می‌خواهیم عددی را پیداکنیم که یك ردیف عمل روی‌آن انجام شده است تا به‌عدد مفروضی رسیده‌ایم، بایدروی این‌عددآخر، عکس همان عمل‌ها را و در ردیف عکس، انجام‌داد.

درمورد این‌مسأله‌هم، بایدباآغاز ازعدد ۲، عکس عمل‌هارا، به‌ردیف عکس، انجام داد.

$$(۲\times ۱۰-۸)^۲+۵۲=۱۹۶;\quad \sqrt{۱۹۶}=۱۴;$$

$$۱۴\times\frac{۱۰}{۷}\times ۷\times\frac{۳}{۵}=۸۴;\quad ۸۴:۳=۲۸$$

عدد مجهول، برابر است با ۲۸.

۱۰۲. اگر تعداد زنبورها را $۲x^۲$ بگیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$۲x^۲=x+\frac{۱۶}{۹}x^۲+۲$$

یا

$$۲x^۲-۹x=۱۸$$

که ازآن $x=۶$ و $۲x^۲=۷۲$ به‌دست می‌آید.

۱۰۳. مسأله، منجر به‌حل این‌معادله می‌شود:

$$x^۳+۱۲x=۶x^۲+۳۵$$

یا

$$x^۳+۱۲x-۶x^۲=۳۵$$

که اگر از دو طرف برابری، ۸ واحدکم‌کنیم، به‌ترتیب، خواهیم‌داشت:

$$x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸=۲۷,$$
$$(x-۲)^۳=۲۷,$$
$$x-۲=۳,\quad x=۵$$

بهاسکارا جواب‌های دیگررا نمی‌دهد (به جواب‌های موهومی توجهی ندارد).

این معادلهٔ درجهٔ سوم را، با روش مقدماتی دیگری هم می‌توان حل کرد. این‌روش حل، در زیر داده شده است:

$$x^۳-۶x^۲+۱۲x-۳۵=۰,$$
$$x^۳-۵x^۲-x^۲+۵x+۷x-۳۵=۰,$$
$$x^۲(x-۵)-x(x-۵)+۷(x-۵)=۰,$$
$$(x-۵)(x^۲-x+۷)=۰$$

و در نتیجه، معادلهٔ درجهٔ دوم مفروض، به‌مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$x-۵=۰,\quad x^۲-x+۷=۰$$

ریشهٔ معادلهٔ اول عبارت است از $x_1=5$ و x_2 و x_3، ریشه‌های معادلهٔ دوم، موهومی هستند.

۱۰۴. به‌ترتیب داریم:

$$x^4-2x^2-400x=9999,$$
$$x^4-11x^3+11x^3-121x^2+119x^2-1309x+$$
$$+909x-9999=0,$$
$$x^3(x-11)+11x^2(x-11)+119x(x-11)+$$
$$+909x(x-11)=0,$$
$$(x-11)(x^3+11x^2+119x+909)=0$$

به‌مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$x-11=0,\quad x^3+11x^2+119x+909=0$$

با حل معادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $x_1=11$ (و این همان جوابی است که بهاسکارا می‌دهد). با حل معادلهٔ دوم هم، سه جواب دیگر به‌دست می‌آید که بهاسکارا به‌آن‌ها توجه نکرده است. این جواب‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$x^3+11x^2+119x+909=0,$$
$$x^3+9x^2+2x^2+18x+101x+909=0,$$
$$x^2(x+9)+2x(x+9)+101(x+9)=0,$$
$$(x+9)(x^2+2x+101)=0$$

بازهم به‌مجموعهٔ دو معادله می‌رسیم:

$$x+9=0,\quad x^2+2x+101=0$$

که با حل معادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $x_2=-9$. ریشه‌های x_3 و x_4 معادلهٔ دوم موهومی هستند.

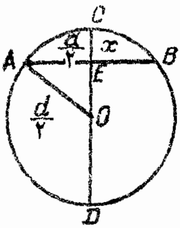
۱۰۵. به‌ترتیب داریم:

$$ax+by+c=xy,$$
$$c=xy-ax-by,$$
$$ab+c=xy-ax-by+ab,$$
$$ab+c=y(x-b)-a(x-b)=(x-b)(y-a)$$

برای این‌که جواب‌های گویارا برای x و y به‌دست‌آوریم، باید فرض‌کنیم: $x=b+n$. در این‌صورت خواهیم‌داشت:

$$y=a+\frac{ab+c}{n}$$

۱۰۶. اگر طول قطر CD را به d و قاعدهٔ AB از قطعه دایره را به a و طول مجهول CE را به x نشان دهیم (شکل ۳۹). داریم:



شکل ۳۹

$$\frac{a^{۲}}{۴}=x(d-x)=dx-x^{۲}$$

یا

$$x^{۲}-dx+\frac{a^{۲}}{۴}=۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{d}{۲}\pm\sqrt{\frac{d^{۲}}{۴}-\frac{a^{۲}}{۴}}=\frac{d\pm\sqrt{d^{۲}-a^{۲}}}{۲}$$

$$x_{۱}=\frac{d+\sqrt{d^{۲}-a^{۲}}}{۲},\quad x_{۲}=\frac{d-\sqrt{d^{۲}-a^{۲}}}{۲}$$

۱۰۷. اگرتعداد همهٔ میمون‌ها را x بگیریم، مسأله منجر به‌حل‌این معادله می‌شود:

$$\frac{x^{۲}}{۶۴}+۱۲=x \Longrightarrow x^{۲}-۶۴x=-۷۶۸$$

به‌دوطرف برابری، مجذور ۳۲ را اضافه می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{۲}-۶۴x+۳۲^{۲}=-۷۶۸+۱۰۲۴$$

که اگر ازدوطرف برابری، جذر بگیریم، می‌شود:

$$x-۳۲=\pm۱۶$$

بهاسکارا می‌گوید: در این‌حالت، واحدهای منفی طرف اول چنانندکه واحدهای طرف دوم ازآن‌ها کمتر است. به‌همین مناسبت، می‌توان هم‌جواب

مثبت و هم جـواب منفی را به‌حساب آورد و دومقدار را برای مجهول ، قبول کرد: ۴۸ و ۱۶.

۱۰۸. مسأله، منجر به‌حل این‌معادله می‌شود:

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$$

که ریشه‌های آن عبارتند از: $x_1=50$، $x_2=5$. بهاسکارا، در نتیجه‌گیری خود، یادآوری می‌کند: «از آن‌جاکه $5\times\frac{1}{5}-3$ ، عـددی منفی است ، بنابراین، تنها ریشهٔ اول را درنظر می‌گیریم».

ولی کریشنابهاتـا ، مفسر بهاسکارا می‌گویدکه : اگر در شرط مسأله گفته می‌شد ، یك‌پنجم میمون‌هـا را از ۳ کم‌کنیم ، آن‌وقت، ریشهٔ دوم بـا شرطهای مسأله سازگار بود، نه‌ریشهٔ اول.

۱۰۹. معادله‌ای‌که با شرطهای مسأله می‌سازد؛ چنین است:

$$\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+6+3+1=x$$

این معادله، بعد از ساده‌کردن، چنین می‌شود:

$$x^2-104x+400=0$$

و ازآن‌جا

$$x=52\pm\sqrt{52^2-400}=52\pm48$$

به‌این ترتیب، دوجواب به‌دست می‌آید: $x_1=100$ و $x_2=4$. ولی ، با کمی دقت، روشن می‌شودکه تنها جواب اول‌باشرطهای مسأله سازگاراست.

۱۱۰. مسأله، منجر به‌حل این معادله می‌شود:

$$x=10\sqrt{x}+\frac{1}{8}x+6$$

که از آن‌جا، اگر $\sqrt{x}=u$ بگیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$7u^2-80u-48=0$$

با استفاده از رابطهٔ بهاسکارا، به‌دست می‌آید:

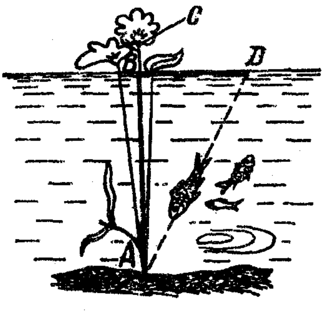
$$u=\frac{۸۰+\sqrt{۶۴۰۰+۱۳۴۴}}{۱۴}$$

و ازآن‌جا

$$u=\frac{۸۰+۸۸}{۱۴}=\frac{۱۶۸}{۱۴}=۱۲$$

وبنابراین: $x_1=u^2=۱۴۴$.

بهاسکارا، جواب دوم را نمی‌دهد، زیرا متناظر با مقدار منفی برای u است. ضمناً، برای x هم، مقدارکسری به‌دست می‌آید که با واقعیت نمی‌سازد. (تعداد قوها، نمی‌تواند عددی کسری باشد).



شکل ۴۰

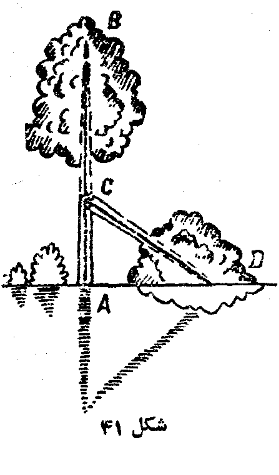
۱۱۱. با توجه به‌شکل ۴۰، می‌توان مسأله را، به این ترتیب، تنظیم کرد: «گلی $\frac{1}{2}$ پا از آب بیرون است. اگرآن‌را خم‌کنیم، تا به‌نقطهٔ D، در ۲ پایی جای اول‌آن برسد، در زیرآب قرار می‌گیرد عمق دریاچه، یعنی طول‌پاره‌خط AB را پیدا کنید».

با توجه به‌شکل داریم:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+2^2$$

که به‌سادگی قابل حل است و به‌دست می‌آید:

$$x=3\frac{3}{4}\ (\text{پا})$$



شکل ۴۱

۱۱۲. با توجه به شکل ۴۱ و شرطهای مسأله، تنهٔ AB از نقطهٔ C به‌ارتفاع ۴ پا شکسته و رأس آن، در نقطهٔ D، ۴ پایی نقطهٔ A به زمین افتاده است. باید ارتفاع تنه را پیدا کنیم.

مسأله، به‌سادگی حل می‌شود:

$$AB = AC + CD = AC + \sqrt{AC^۲ + AD^۲} =$$
$$= ۳ + \sqrt{۹ + ۱۶} = ۳ + ۵ = ۸ \text{ (پا)}$$

۱۱۳. با استفاده از «قاعدهٔ معکوس» به‌دست می‌آید.

$$\sqrt{۴} = ۲; \quad ۲ + ۱ = ۳; \quad ۳^۲ = ۹; \quad ۹ - ۶ = ۳;$$
$$۳ \times ۵ = ۱۵; \quad ۱۵ : ۳ = ۵$$

«قاعدهٔ معکوس»، که به‌طور گسترهای مورد استفادهٔ هندی‌ها بوده است، بعدها به‌سایر کشورها هم سرایت کرده است: ابتدا در سرزمین «خلفا» و سپس از آن‌جا به کشورهای اروپایی.

۱۱۴. با استفاده از علامت گذاری‌های امروزی، نشان می‌دهیم که، ریاضی‌دانان‌هندی، چگونه معادلهٔ «په‌لی» را حل می‌کرده‌اند. ابتدا، عددهای دلخواه $x_۱$، $y_۱$ و $x_۲$، $y_۲$ را در نظر می‌گیریم. سپس، عددهای $b_۱$ و $b_۲$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برابری‌های زیر برقرار باشند:

$$ax_۱^۲ + b_۱ = y_۱^۲$$
$$ax_۲^۲ + b_۲ = y_۲^۲$$

و یا

$$y_۱^۲ - ax_۱^۲ = b_۱$$
$$y_۲^۲ - ax_۲^۲ = b_۲$$

اگر دومعادلهٔ اخیر را درهم ضرب‌کنیم، سرآخر به‌دست می‌آید:

$$(ax_۱x_۲ + y_۱y_۲)^۲ - a(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)^۲ = b_۱b_۲$$

اکنون اگر $x_۱ = x_۲$، $y_۱ = y_۲$ و در نتیجه $b_۱ = b_۲$ بگیریم، معادلهٔ اخیر چنین می‌شود:

$$a(۲x_۱y_۱)^۲ + b_۱^۲ = (ax_۱^۲ + y_۱^۲)$$

دوطرف را بر $b_۱^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$a\left(\frac{۲x_۱y_۱}{b_۱}\right)^۲ + ۱ = \left(\frac{ax_۱^۲ + y_۱^۲}{b_۱}\right)^۲$$

وبنابراین

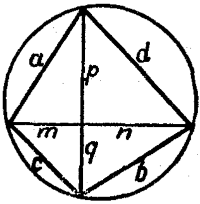
$$x=\frac{2x_1y_1}{b_1}, \quad y=\frac{ax_1^2+y_1^2}{b_1}$$

به‌این ترتیب است که دانشمندان هندی، جواب‌های گویای معادله را پیدا می‌کردند. در بعضی موردها هم، ریاضی‌دانان هندی، x_1 و y_1 را طوری می‌گرفتند که جواب‌ها، عددهایی درست باشند.

۱۱۵. باید ثابت کنیم:

$$a^2+b^2=D^2, \quad C^2+d^2=D^2$$

D را قطر چهارضلعی محیطی در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۴۲

حتی در قدیم، ارشمیدس هم، از این رابطه آگاه بود:

$$m^2+n^2+p^2+q^2=D^2$$

(این رابطه را، خودتان ثابت کنید).

از طرف دیگر، بنابه‌قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$m^2+p^2=a^2, \quad n^2+q^2=b^2$$

بنابراین

$$a^2+b^2=D^2$$

به همین ترتیب:

$$m^2+q^2=c^2, \quad a^2+p^2=d^2$$

و بنابراین

$$c^2d^2=D^2$$

۶

• مساله‌های ایرانی

یادداشت تاریخی

قبلاً به این نکته اشاره‌کنیم‌که در بیشتر کتابهای تاریخی، وقتی از «فرهنگ عربی» صحبت می‌شود، به معنای فرهنگی است‌که در سرزمین‌های گوناگون تحت سلطهٔ‌عرب‌ها پا گرفته‌است. به‌همین علت، فرهنگ ایرانی‌هم، دردوران بعد ازتسلط عرب‌ها، غالباً به‌همین نام ذکر شده است. فرهنگ این ملت‌ها، یعنی ملت‌های‌آسیای میانه، ماوراء قفقاز ـ وبه‌خصوص ایرانی‌ها ـ دردوره‌ای‌که نزدیك به‌پنج سده را دربرمی گیرد ـ ازسدهٔ نهم تاسدهٔ‌شانزدهم میلادی ـ درخششی فوق‌العاده داشته است.

دانشمندان‌آسیای میانه درزمینهٔ حساب، دستگاه موضعی عدد نویسی شصت‌شصتی را تکامل دادند، دستگاهی‌که درآن، عدد ۶۰، به‌عنوان‌مبنای عدد شماری وعددنویسی قراردارد؛کسرهای دهدهی راکشف کردند ودستگاه موضعی عددنویسی دهدهی را، به‌صورت‌گسترده‌ای، معمول‌کردند.

ازمیان بزرگترین دانشمندان ایـن دوره، می‌توان از محمدابن موسی خوارزمی (سدهٔ نهم)، ابوالوفا (سدهٔ دهم)، ابن سینا (سده یازدهم)، بیرونی (سدهٔ یازدهم)، حکیم عمر خیام (سدهٔ دوازدهم)، خواجه نصیرالدین طوسی (سدهٔ سیزدهم)، غیاث‌الدین جمشیدکاشانی (سدهٔ چهاردهم) وغیرآن نام‌برد.

(ضمن‌حل‌مساله‌ها، همه‌جا، ازنشانه‌های امروزی استفاده شده است.)

۱۱۶. اگرمعادله‌های درجه دوم را، با روش عادی حل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$1)\ x_1 = 0, \qquad x_2 = 8;$$

$$2)\ x_1 = 6, \qquad x_2 = -6;$$

$$3)\ x_1 = 7, \qquad x_2 = 3;$$

$$4)\ x_1 = 24, \qquad x_2 = -12;$$

$$5)\ x_1 = 9, \qquad x_2 = \frac{9}{4}$$

$$6)\ x_1 = 12, \qquad x_2 = -19$$

*

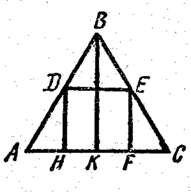
این‌مساله، از کتاب «حساب الجبروالمقابله» محمدبن موسی خوارزمی، ریاضی‌دان مشهور دهه‌های اول سدهٔ نهم، برداشته شده است. موطن او خوارزم بود؛ که امروز در جمهوری ازبکستان شوروی ودرقسمت سفلای رودخانهٔ آمورقراردارد.

خوارزمی، رساله‌های زیادی‌نوشته‌است که، ازمیان آن‌ها، دو رساله، یکی دربارهٔ جبر ودیگری دربارهٔ حساب، اهمیت بیشتری دارد.

رسالهٔ مشهور «الجبروالمقابله» را درحدود سال ۸۳۰ میلادی نوشته است که، به‌نظرمی‌رسد، یك کتاب درسی برای جوانان باشد.

باید یادآوری کردکه اصطلاح «جبر»، که امروز درهمهٔ زبان‌ها و اکثر به‌صورت «الجبر» باقی‌مانده است، ازنام همین کتاب خوارزمـــی گرفته شده است.

ذکراین مطلب هم ضروری است که واژهٔ «آلگوریتم»، که امروزبه معنای پیداکردن روش‌های کلی حل مساله‌های ریاضی به‌کار می‌رود، شکل لاتینی شدهٔ نام «الخوارزمی» است.



شکل ۴۳

۱۱۷. ابتدا طول ارتفاع مثلث مفروض ABC را پیدا می‌کنیم (شکل ۴۳):

$$BK=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸$$

سپس، از تشابه دومثلث ABC و DBE به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{۸-x}=\frac{۱۲}{۸}$$

کـه در آن، x عبارت است از طول ضلع مربع مـورد نظر. از این معادله به دست می‌آید:

$$x=۴\frac{۴}{۵}$$

۱۱۸. خوارزمی، این مساله را با «روش فرضی» وبه‌این ترتیب حل می‌کند: فرض می‌کنیم، عدد مجهول ۱۲ باشد، در ایـن صورت، باقی‌مانده، به‌جای ۸، برابر ۵ می‌شود، یعنی ۳ واحد کمتر. اگرعدد مجهول‌را ۲۴ بگیریم، باقی‌مانده، به‌جای ۸، برابر ۱۰ می‌شود، یعنی ۲ واحد بیشتر. بنابراین

$$\frac{۳\times۲۴+۱۲\times۲}{۳+۲}=۱۹\frac{۱}{۵}$$

۱۱۹. مساله، به‌این ترتیب، حل می‌شود:

فرض کنیم $M=۹n+۱$، آن وقت داریم:

$$M^۲=۸۱n^۲+۱۸n+۱=(\text{مضرب ۹})+۱$$

اکنون فرض می‌کنیم $M=۹n+۸$. داریم:

$$M^۲=۸۱n^۲+۱۴۴n+۶۴=۹(۹n^۲+۱۶n+۷)+۱=$$
$$=(\text{مضرب ۹})+۱$$

قبل از حل مساله، از این اتحاد آگاهی داده می‌شود:

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$$

*

مولف این مساله، بوعلی سینا، دانشمند ایرانی است که‌آثار فراوانی در زمینه‌های گوناگون دانش دارد. بوعلی سینا، درحدود سال ۹۸۰ میلادی متولد شد و در سال ۱۰۳۷ میلادی از جهان رفت. از همان دوران جوانی،

دانشمندی مشهوربود وبه‌حرفه‌های مختلفی‌دست زد. اواخترشناسی بزرگ، ریاضی‌دانی برجسته، شیمی‌دانی‌مشهور، ضمناً، پزشکی بااستعداد وپژوهشگر بود. ابن‌سینا موفقیت‌های هم‌عصران‌وپیشینیان خودرا تکامل‌داد ومساله‌های تازه‌ای درزمینهٔ ریاضیات، طرح و حل‌کرد. بحث و تفسیر ابن‌سینا از تالیف هندسی اقلیدس ـ که به نام عمومی «مقدمات» مشهور شده است ـ نقش عمده‌ای در پیشرفت دانش ریاضی داشته است.

ابن‌سینا، دربسیاری‌از زمینه‌های دانش‌نوآوربود و، به‌همین مناسبت، اغلب موردآزار قرارمی‌گرفت خود او را به‌زندان انداختند و کتاب‌هایش را آتش زدند.

تاریخ‌نویسان، از ابن‌سینا به‌عنوان انسانی یاد می‌کنندکه به‌نیروی مغلوب‌نشدنی عقل اعتقاد داشت و درتمامی دوران زندگی خود، علیه‌جهل و باورهای غیرعلمی و غیرعقلانی مبارزه می‌کرد. تنها یکی از نوشته‌های ریاضیِ ابن‌سینا به‌ما رسیده است‌که‌به‌حساب مربوط می‌شود، این‌رساله، جزو کتاب پزشکی ابن‌سینا به نام «شفا» وجود داردکه درکتاب‌خانهٔ لیدن در انگلستان، نگهداری می‌شود.

۱۲۰. کرجی به‌این ترتیب استدلال می‌کند. طبق فرض مساله داریم:

$$x(۳+\sqrt{۵})=۱$$

یا

$$۳x+x\sqrt{۵}=۱$$

ازآن جا

$$۳x+\sqrt{۵x^۲}=۱$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان این‌طورنوشت:

$$\sqrt{۵x^۲}=۱-۳x$$

اگر دوطرف را مجذورکنیم، به‌دست می‌آید:

$$۵x^۲=۱-۶x+۹x^۲$$

از آن‌جا

$$۴x^۲-۶x+۱=۰$$

باحل این معادلهٔ درجهٔ دوم، خواهیم داشت:

$$x=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۴}$$

و کرجی، به عنوان عدد مورد نظر، ریشهٔ

$$x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$$

را انتخاب می‌کند.

راه حل عادی مسالهٔ کرجی، بسیار ساده است. درواقع، ازمعادلهٔ

$$x(۳+\sqrt{۵})=۱$$

به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{۱}{۳+\sqrt{۵}}=\frac{۳-\sqrt{۵}}{(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})}=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$$

*

کرجی (ابوبکر محمد بن حسن کرجی)، ریاضی‌دان ایرانی سدهٔ یازدهم میلادی است. اوصاحب نوشته‌های زیادی درریاضیات است که‌تنها دو تا از آن‌ها به‌ما رسیده است. اولی «کافی فی‌الحساب» ودومی «الفخری» که‌تالیف بزرگی در جبر و دنبالهٔ کتاب اول است. کرجی کتاب دوم خود را به افتخار «فخرالملك» ـ که تا حد زیادی هوادار دانش و دانشمندان بود و در سال ۱۰۱۷ میلادی درگذشت ـ نامیده است.

۱۲۱. استدلال کرجی را می‌آوریم. ازمعادلهٔ آخر داریم:

$$y=\frac{۱۰}{x}$$

با درنظرگرفتن این مقدار y، معادلهٔ دوم چنین می‌شود:

$$z=\frac{۱۰۰}{x^۳}$$

دراین‌صورت، معادلهٔ اول این دستگاه، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$x^۲+\frac{۱۰۰}{x^۲}=\frac{۱۰۰۰۰}{x^۶}$$

یا

$$x^۸+۱۰۰x^۴-۱۰۰۰۰=۰$$

اگر این معادله را، همچون معادلهٔ درجهٔ دومی، نسبت به $x^۴$، حل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^۴ = -۵۰ + \sqrt{۱۲۵۰۰}$$

و بنابراین

$$x = \sqrt[۴]{\sqrt{۱۲۵۰۰} - ۵۰}$$

۱۲۲. اگرعرض مستطیل را x بگیریم، طول آن برابر $۲x$، مساحت آن برابر $۲x^۲$ و محیط آن برابر $۶x$ می‌شود. و بنابر فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$۲x^۲ = ۶x$$

بنابراین، $x = ۳$ ومساحت مستطیل موردنظر برابر۱۸ واحدمربع می‌شود.

۱۲۳. $z = \frac{۱}{x}$ می گیریم. دراین‌صورت،معادلهٔمفروض، چنین می‌شود:

$$z^۲ + ۲z = \frac{۵}{۴}$$

اگر یك واحد به دوطرف معادله اضافه‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$z^۲ + ۲z + ۱ = \frac{۹}{۴}$$

یا

$$(z+۱)^۲ = \frac{۹}{۴}$$

ازآن‌جا

$$z + ۱ = \pm \frac{۳}{۲}$$

یا

$$z_۱ = \frac{۱}{۲}, \quad z_۲ = -\frac{۵}{۲}$$

وبنابراین

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{2}{5}$$

*

مولف ایـن مساله، حکیم عمـر خیام، دانشمند، ریاضی‌دان، شاعر و فیلسوف ایرانی است (۱۰۴۰-۱۱۲۳)، که ازهمان دوران جوانی نسبت به دانش ریاضی عـلاقه نشان می‌داد. خیام درکتاب «جبر و مقابلهٔ» خـود، به تفصیل دربارهٔ معادله‌های درجه اول و درجه دوم بحث می کند و راه ساختن ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم را، به‌طریق هندسی، داده است. خیام نخستین کسی است کـه روش حل معادله‌های درجه سوم را می‌دهد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه را طرح می‌ریزد.

خیام به‌خاطر رباعی‌های خود هم شهرت داردکـه بسیار زیبا و شامل مفهوم‌های اجتماعی و فلسفی عمیقی است.

۱۲۴. مسأله، به سادگـی قابل حل است. اگـر قسمت کوچکتر را x بگیریم، قسمت بـزرگتر برابر $x+5$ می‌شود و، بنا برفـرض مساله، باید داشته باشیم:

$$2x+5=10$$

ازآن‌جا، $2x=5$. بنابراین، قسمت کوچکتر برابر $2\frac{1}{2}$ وقسمت بزرگتربرابر $7\frac{1}{2}$ می‌شود.

*

بهاءالدین عاملی، معرف به «شیخ بهائی» مؤلف این مسأله، یکی از ریاضی‌دانان ایرانی سدهٔ شانزدهم است. بهاءالدین، رسالهٔ جالبی دارد به‌نام «خلاصة‌الحساب» این مسأله از همان جا برداشته شده است.

۱۲۵. بهاءالدین، برای حل ایـن مسأله، چنین استدلال می کند: یکی از عددها را $10-x$ می گیریم، درایـن صورت، عـدد دوم برابر $10+x$ می‌شود، بنا به‌فرض مسأله، باید داشته باشیم:

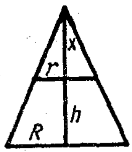
$$100-x^2=96$$

از آن جا

$$x^۲ = ۴ \Longrightarrow x = ۲$$

بنابراین، قسمت بزرگتر برابر ۱۲ می‌شود که سهم زید است.

۱۲۶. باتوجه به‌مثلث‌ها (شکل ۴۴) داریم:



شکل ۴۴

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R},$$

$$x(R-r) = rh,$$

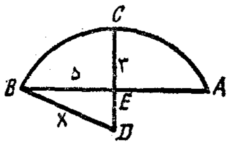
$$x = \frac{rh}{R-r}$$

۱۲۷. حل مسأله با «روش معکوس»

$۲۵ - ۳ = ۲۲;$ $\quad ۵ \times ۵ = ۲۵;$ $\quad ۵۰ : ۱۰ = ۵;$

$\sqrt{۹} = ۳$ $\quad ۱۱ - ۲ = ۹;$ $\quad ۲۲ : ۲ = ۱۱;$

۱۲۸. از مثلث قائم‌الزاویهٔ BED (شکل ۴۵)، به‌دست می‌آید:



شکل ۴۵

$$(x-۳)^۲ + ۵^۲ = x^۲;$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ + ۲۵ = x^۲;$$

$$۶x = ۳۴; \qquad ۳x = ۱۷;$$

$$x = \frac{۱۷}{۳} = ۵\frac{۲}{۳} \quad \text{(ارش)}$$

*

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، معروف به کاشی، ریاضی‌دان ایرانی، دو رسالهٔ مهم دارد: «مفتاح‌الحساب» و «رسالةالمحیطیه». تاریخ تولد و مرگ کاشی، دقیقاً معلوم نیست. گمان می‌رود که در ثلث آخر یا ابتدای ربع آخر سدهٔ چهاردهم متولد شده باشد. کاشی نه‌تنها ریاضی دان، بلکه پزشك هم بود. او راهنمای ساختمان رصدخانهٔ بزرگ سمرقند بود که به‌دستور الغ بیگ اخترشناس ساخته شد. کاشی در «رسالةالمحیطیه»، مقدار عدد π را تا ۱۷ رقم درست اعشار محاسبه کرده است که دقیق‌ترین مقدار π تاآن زمان است. کاشی، همچنین واضع کسرهای دهدهی است و با حل معادلهٔ درجه سوم

مربوط، مقدار سینوس یك درجه را به‌دست آورد.

۱۲۹. اثبات را با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

۱) ثابت می‌کنیم، تساوی کاشی، برای $n=1$ درست است. در واقع

$$1=\frac{1}{30}(6+15+10-1)=1$$

۲) فرض می‌کنیم، برابری برای $n=k$ درست باشد، یعنی داشته باشیم:

$$1^4+2^4+\ldots+k^4=\frac{1}{30}(6k^5+15k^4+10k^3-k)$$

۳) ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برابری برای $n=k+1$ هم درست است:

$$1^4+2^4+\ldots+k^4+(k+1)^4=$$

$$=\frac{1}{30}[6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)] \quad (1)$$

با توجه به برابری قبل، سمت چپ رابطهٔ (۱) را می‌توان این طور نوشت:

$$1^4+2^4+\ldots+k^4+(k+1)^4=$$

$$=\frac{1}{30}(6k^5+15k^4+10k^3-k)+(k+1)^4 \quad (2)$$

اکنون کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{1}{30}(6k^5+15k^4+10k^3-k)+(k+1)^4=$$

$$=\frac{1}{30}[6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)]$$

یعنی باید، به‌ترتیب، ثابت کنیم:

$$6k^5+15k^4+10k^3-k+30(k+1)^4=$$

$$=6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1);$$

یا

$$6k^5+15k^4+10k^3+1=$$
$$=6(k+1)^5-15(k+1)^4+10(k+1)^3;$$

یا

$$6k^5+15k^4+10k^3+1=6k^5+15k^4+10k^3+1$$

درستی برابری اخیر روشن است. بنابراین، درستی برابری کاشی هم ثابت می‌شود.

۰۷ مسأله‌های روسی

۰۱۳۰ مؤلف رساله، مسأله را این‌طور حل کرده‌است: نجار اول در ۱۲ سال کار ۱۲ کاخ را انجام می‌دهد؛ درهمین مدت، نجار دوم کار ۶ کاخ، نجار سوم کار ۴ کاخ ونجار چهارم کار ۳ کاخ را انجام می‌دهد. بنابراین، این چهارنفر، در ۱۲ سال، کارنجاری ۲۵ کاخ را تمام می‌کنند؛ یعنی چهارنفری کار یك کاخ را در $۱۷۵\frac{۱}{۵}$روز انجام می‌دهند:

$$\frac{۳۶۵ \times ۱۲}{۲۵} = ۱۷۵\frac{۱}{۵}\ (\text{روز})$$

*

نخستین آگاهی‌ها، دربارهٔ پیشرفت ریاضیات درروسیه، به‌سده‌های نهم تا دوازدهم برمی‌گردد. سندهای ریاضی (دست نویس‌ها)، که به‌دوره‌های بعد مربوط می‌شود، مربوط به‌سده‌های پانزدهم تا هفدهم است.

این مسأله، از یك رسالهٔ قدیمی مربوط به‌سدهٔ هفدهم برداشته شده است که شامل قانون‌هایی از حساب، همراه با مثال‌ها و مسأله‌های بسیاری است. رساله، دارای‌این مقاله‌هاست: ۱) «مقالهٔ بازرگانی» که‌شامل‌مثال‌های زیادی درمورد محاسبهٔ قیمت کالاها، سود، زیان وامثال آن است؛ ۲) «مقاله دربارهٔ ناخالصی درهر کالایی»، که درآن دربارهٔ قانون‌های اختلاط وامتزاج صحبت شده است و مسأله‌های زیادی دربارهٔ محاسبهٔ ارزش مخلوطها و آلیاژهای طلا، نقره ومس دارد؛ ۳) «مقالهٔ مبادله کالا» که دربارهٔ مبادلهٔ

کالاهایی که ارزش آن‌ها معلوم است، صحبت می‌کند؛ ۴) «مقالهٔ سرمایه‌گذاری»، که در آن، از به‌اصطلاح اشتراك سرمایه صحبت می‌کند.

۱۳۱. شیر و گرگ و سگ، دریك ساعت $۱\frac{۵}{۶}$ میش را مـی خورنـد. در واقع:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=۱\frac{۵}{۶}$$

بنابراین، یك میش را در $\frac{۶}{۱۱}$ ساعت خواهند خورد.

نویسندهٔ رساله، مسألـه را این‌طـور حل‌کرده است: در ۱۲ ساعت، شیر ۱۲ میش، گرگ ۶ میش وسگ ۴ میش را می‌خورند؛ بنابراین، در ۱۲ ساعت، ۲۲ میش راخواهند خورد. پس دریك ساعت $\frac{۱۱}{۶}$ میش ویك میش را در $\frac{۶}{۱۱}$ ساعت می‌خورند.

۱۳۲. نویسنده رساله، تنهـا جواب را داده است: ۷۲۱ تخم مرغ. ظاهراً، او با مفهوم کوچکترین مضرب مشترك آشنا نبوده است و، بـه‌همین مناسبت، کوچکترین جواب ممکن را نداده است. کوچکترین جـواب ممکن، عبارت است از ۴۹ تخم مرغ.

۱۳۳. این مسأله را از کتاب «حساب» آ.ف ماگینتسکی برداشته‌ایم، کـه برای نخستین بـار، درسال ۱۷۰۳ میلادی چاپ شده است. برای حل مسأله باید توجه داشت کـه هر «آلتین» برابر ۳ کوپك وهـر «دنگا» برابر $\frac{۱}{۲}$ کوپك است.

راه حل خود ماگینتسکی را می‌دهیم: ۱۰۰ گوسفند پیر و۱۲ گوسفند جوان خریده شده است. به‌این دلیل

$$\begin{array}{rl} -\;۴۶ & \text{کوپك برای هر گوسفند پیر} \\ ۳۰ & \text{کوپك برای هر گوسفند جوان} \\ \hline ۱۶ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۱۱۲\times \\ ۳۰ \\ \hline ۳۳۶۰ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۴۹۶۰- \\ ۳۳۶۰ \\ \hline ۱۶۰۰ \end{array}$$

$$۱۶۰۰:۱۶=۱۰۰$$

*

لئونتی‌فیلیپوویچ ماگینتسکی (۱۶۶۹-۱۷۳۹)، معلم ریاضیات در مدرسهٔ دانش‌های دریایی در مسکو که به وسیلهٔ «پطر اول» در سال ۱۷۰۱ بنیان‌گذاری شده بود. ماگینتسکی، درسال ۱۷۰۳، کتاب «حساب» خودرا،که نخستین‌کتاب درسی ازنوع خود در روسیه بود، چاپ کرد.درکتاب، از عددنویسی هندی ـکه به‌غلط به‌عددنویسی عربی شهرت یافته استـ استفاده شده است وشامل مسأله‌ها و مثال‌های زیادی است که، ضمناً، معماها ومطالب سرگرم‌کننده‌ای، همراه باتصویرهای جالبی هم به‌آن اضافه شده است.

این‌کتاب، گرچه نام «حساب» را برخود دارد، درواقع، مجموعه‌ای‌از ریاضیات مقدماتی است ودرآن، علاوه برحساب، مسأله‌هایی ازجبرو هندسه وکشتی‌رانی هم وجود دارد.

«حساب» ماگینتسکی، تا میانه‌های سدهٔ هیجدهم، یک‌کتاب درسی همگانی بود.

۱۳۴. این مسأله را ماگینتسکی با «روش خطاها» حل‌کرده است، روشی‌که درکتاب او، اهمیت زیادی دارد.

ابتدا تعداد شاگردان را ۲۴می‌گیریم (فرض اول). آن وقت‌شرط‌های مسأله را دنبال می‌کنیم: همان تعداد، نصف آن‌ها، یك چهارم آن‌ها و سر آخر یك نفر، اضافه می‌کنیم:

$$۲۴+۲۴+۱۲+۶+۱=۶۷$$

طبق فرض، باید این مجموع برابر ۱۰۰ باشد؛ به‌اندازه ۶۷ — ۱۰۰ یعنی ۳۳ نفرکم آورده‌ایم (خطای اول).

اکنون تعداد شاگردان را ۳۲ نفر می‌گیریم (فرض دوم)، آن وقت به‌دست می‌آید

$$۳۲+۳۲+۱۶+۸+۱=۸۹$$

که نسبت به ۱۰۰، به‌اندازهٔ ۱۱ نفر کم دارد (خطای دوم)

اکنون طبق رابطه داریم:

$$\frac{۳۳\times ۳۲-۲۴\times ۱۱}{۳۳-۱۱}=۳۶ \quad \text{(شاگرد)}$$

۱۳۵. خریدار باید مبلغ بیشتری وخیلی بیشتر، بپردازد، اوباید بابت ۲۴میخ نعل‌ها به‌اندازهٔ

$$۱+۲+۲^۲+۲^۳+\ldots+۲^{۲۳}$$

واحد $\frac{۱}{۴}$کوپکی بپردازدکه برابر۴۱۹۴۳ روبل و$\frac{۳}{۴}$کوپك است.

۱۳۶. توجه‌کنیم‌که: ۱ «ستوپ» برابراست با$\frac{۱}{۲}$آرشین. درقاعدهٔ خیمه ۶۰ آرشین ودر مولد آن ۱۶ آرشین داریم.

چون خیمه به‌شکل مخروط است، سطح جانبی آن چنین می‌شود:

$$\frac{۶۰\times ۱۶}{۲}=۴۸۰ \quad \text{(آرشین مربع)}$$

حالا، می‌توان معلوم‌کردکه چند آرشین ماهوت لازم داریم:

$$۴۸۰:۲\frac{۱}{۲}=۴۸۰:\frac{۵}{۲}=۱۹۲ \text{(آرشین)}$$

که برای آن‌ها، باید ۲ × ۱۹۲، یعنی ۳۸۴ روبل بپردازد.

۱۳۷. عدد مجهول را x می گیریم، بنابرشرط مسأله‌باید داشته‌باشیم:

$$x=۲q_۱+۱;\qquad x=۴q_۳+۳;$$
$$x=۳q_۲+۲;\qquad x=۵q_۴+۴$$

ازآن‌جا

$$x+۱=۲q_۱+۲=۲(q_۱+۱);$$
$$x+۱=۳q_۲+۳=۳(q_۲+۳);$$
$$x+۱=۴q_۳+۴=۴(q_۳+۱);$$
$$x+۱=۶q_۴+۵=۵(q_۴+۱)$$

از چهار برابری اخیر، معلوم می‌شودکه ۱+x باید بر ۲، ۳، ۴، ۵

بخش‌پذیـر باشد. بنابراین، کمترین مقدار $x+۱$ عبارت است از کوچکترین مضرب مشترك این‌چهارعدد؛ یعنی ۶۰. بنابراین، کوچکترین جواب مسأله، عدد ۵۹ می‌شود.

۱۳۸. فرض کنیم، به‌روزی از هفته فکر کرده است که با عدد x نشان داده می‌شود، بنابراین، این عمل‌ها روی آن انجام شده است:

۱) این عدد را در ۲ ضرب کرده است:

$$x \times ۲ = ۲x$$

۲) به‌حاصل ضرب، ۵ واحد اضافه کرده است:

$$۲x \times ۵$$

۳) مجموع را ۵ برابر کرده است:

$$(۲x+۵) \times ۵ = ۱۰x+۲۵$$

۴) حاصل‌ضرب را در ۱۰ ضرب کرده‌است و نتیجه را به‌شما گفته‌است:

$$۱۰۰x+۲۵۰$$

اگر از این عدد ۲۵۰ واحد کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$۱۰۰x$$

که به کمك‌آن، به‌سادگی، مقدار x معلوم می‌شود.

ماگنیتسکی، نتیجه را روی مثال عـددی آزمایش می کند: فـرض کنیم، به‌جمعه (یعنی عدد ۶) فکر کرده است: $x=۶$

$$۱)\ ۲x=۱۲;$$

$$۲)\ ۲x+۵=۱۷;$$

$$۳)\ (۲x+۵) \times ۵ = ۱۷ \times ۵ = ۸۵;$$

$$۴)\ ۱۰۰x+۲۵۰ = ۸۵ \times ۱۰ = ۸۵۰;$$

$$۵)\ ۱۰۰x+۲۵۰-۲۵۰ = ۸۵۰-۲۵۰ = ۶۰۰;$$

$$۱۰۰x = ۶۰۰$$

$$x = ۶ \quad (\text{جمعه})$$

۱۳۹. راه حل ایـن مسأله، بسیار ساده است. شخص در هر روز $\frac{۱}{۱۴}$ جعبه نوشابه را مصرف می کند؛ ولی اگر او را با همسرش در نظر بگیریم ،

درهرروز $\frac{۱}{۱۰}$ جعبهٔ نوشابه مصرف می‌شود. بنابراین، همسرش درهرروز به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۱۴}-\frac{۱}{۱۰}$، یعنی $\frac{۱}{۳۵}$ جعبه را مصرف می‌کند. درنتیجه، همسر او برای مصرف تمامی جعبه به ۳۵ روز نیاز دارد.

۱۴۰. کارگر باید برای کار سالانهٔ خود ۱۲ روبل و یك دست لباس بگیرد، یعنی برای هرماه ۱ روبل و $\frac{۱}{۱۲}$ لباس. مزد او در ۷ ماه، برابر ۷ روبل و $\frac{۷}{۱۲}$ لباس می‌شود. ولی او فقط ۵ روبل گرفته است. بنابراین ۲روبل قیمت $\frac{۵}{۱۲}$ لباس‌است. حالا دیگر قیمت لباس به‌سادگی به‌دست‌می‌آید:

$$۲ : \frac{۵}{۱۲}=\frac{۲۴}{۵}=۴\frac{۴}{۵} \quad (\text{روبل})$$

۱۴۱. این مسأله را، گولد باخ درسال ۱۷۴۲ درنامهٔ خود به اولر مطرح‌کرده است. اولر، برای اثبات حکم مسأله، ازاتحاد زیراستفاده‌می‌کند:

$$۴n^۴+۱=(۲n^۲+۲n+۱)(۲n^۲-۲n+۱)$$

از این اتحاد معلوم می‌شودکه $۴n^۴+۱$؛ به‌ازای هرعددی به جز۱، برابر با حاصلضرب دو عدد می‌شود، یعنی عددی است مرکب. به‌ازای $n=۱$ برابر ۵ می‌شودکه عددی است اول.

*

کریستیان گولدباخ (۱۶۹۰-۱۷۶۴)، ریاضی دان وعضو فرهنگستان علوم‌پترزبورگ (ازسال۱۷۲۵) متولد «که‌نیکسبرگ» (کالینین گرادامروز)، سال‌های آخر عمر را درمسکو گذرانید و درهمان جا درگذشت. در طول سی سال،نامه نگاری جالب و پرمضمونی با اولر داشت.کارهای ریاضی او، به معادله‌های دیفرانسیلی و نظریهٔ رشته‌ها مربوط است.

۱۴۲. مجموع S را، برای همهٔ انواع‌کسرهای مورد نظر (که برای آن‌ها، m و n از ۱ تا ∞ تغییر می‌کنند) تشکیل می‌دهیم:

$$S=\left(\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۲^۴}+\dots\right)+\left(\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۳^۳}+\frac{۱}{۳^۴}+\dots\right)+$$
$$+\left(\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۴^۳}+\frac{۱}{۴^۴}+\dots\right)+\dots;$$

$$\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۲^۴}+\dots=\frac{\frac{۱}{۲^۲}}{۲-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱\times۲};$$

$$\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۳^۳}+\frac{۱}{۳^۴}+\dots=\frac{\frac{۱}{۳^۲}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲\times۳};$$

$$\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۴^۳}+\frac{۱}{۴^۴}+\dots=\frac{\frac{۱}{۴^۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۳\times۴};$$

. . . .

$$S=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\dots+\frac{۱}{n(n+۱)}+\dots$$

n جملهٔ اول مجموع S را با S_n نشان می‌دهیم:

$$S_n=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\dots+\frac{۱}{n(n+۱)};$$

$$S_n=\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\dots+\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right);$$

$$S_n=۱-\frac{۱}{n+۱}$$

و از آن جا

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=۱$$

۱۴۳ و ۱۴۴. در نیمهٔ اول سدهٔ هیجدهم، گولدباخ در نامه‌ای به‌دوست دانشمندخود، این‌حکم را ــ که به‌مسألهٔ گولدباخ معروف شده است ــ مطرح

می‌کند: ثابت کنیدکه هرعدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموعی از سه عدد اول نوشت.

خود گولدباخ، به‌این مناسبت، چنین نوشته است: «ایـن هم، یکی از مسأله‌های من است. یك عدد فرد دلخواه، و مثلاً ۷۷ را، درنظرمی گیریم. آن را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد نوشت:

$$۷۷ = ۵۳ + ۱۷ + ۷$$

به‌نحوی کـه هرسه جملهٔ جمع، عددهایی اول هستند. عدد دیگـری، کاملاً دلخواه درنظرمی گیریم؛ مثلاً ۴۶۱. داریم:

$$۴۶۱ = ۴۴۹ + ۷ + ۵$$

این سه جمله جمع، بازهم، عددهایی اول‌اند. همین عدد را به نحو دیگـری هم، می‌توان به‌مجموع سه عدد اول تبدیل کرد:

$$۴۶۱ = ۲۵۷ + ۱۹۹ + ۵$$

وغیره. اکنون، برای من کاملاً روشن است که: هرعدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت. ولی، ایـن حکم را چگونه می‌توان ثابت کرد؟ هرآزمایشی، درستی حکم را تأیید می‌کند، ولی زندگـی هیچ انسانی، امکان آزمایش روی همهٔ عددهای فرد را نمی‌دهد. در این جا، به‌استدلالی کلی نیاز داریم، نه به‌آزمایش».

اولر پاسخ دادکه، این حکم، کاملاً درست است، ولی اوهم نتوانسته است اثبات دقیقی بـرای آن پیداکند. اولـر، ضمناً ، حکم دیگـری را هـم پیشنهاد می‌کند (مسألهٔ اولـر) : هر عدد زوج بـزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت ولی ، اولـر توضیح دادکه این حکم را هم نتوانسته است ثابت کند.

یادآوری می‌کنیم‌کـه ، اگـر مسأله اولر حـل شود، می‌توان مسألهٔ گولدباخ را، به‌عنوان نتیجهٔ روشنی ازآن، به‌دست آورد. در واقع، هرعدد فرد بزرگتر از ۵ را می‌توان این طور نوشت:

$$۲N + ۱ = ۳ + ۲(N - ۱)$$

که درآن داریم: $۲(N - ۱) \geqslant ۴$. اگر مسألهٔ اولر درست باشد، به معنای

آن است که عدد زوج $۲(N-۱)$ را می‌توان به‌صورت مجموع دوعدد اول نوشت. آن وقت، روشن است که عدد فرد $۲N+۱$ به‌صورت مجموع سه عدد اول درمی‌آید و مسألهٔ گولد باخ، برای هرعدد فرد مساوی یا بزرگتر از ۷ درست است.

ولی، به نظر می‌رسد که قضیهٔ عکس درست نیست، یعنی از درستی مسألهٔ گولد باخ، نمی‌توان درستی مسألهٔ اولر را نتیجه گرفت. بنابراین، مسألهٔ اولر دشوارتر از مسألهٔ گولد باخ است و در عمل هم، دیرتر از آن ثابت شد.

تنها در سال ۱۹۳۰ بود که ل. گ. شین رلمان، دانشمند جوان شوروی (۱۹۰۵-۱۹۳۸) توانست مسیر درستی برای حل مسألهٔ گولد باخ پیدا کند. او این قضیه را (که به قضیهٔ شین رلمان معروف است) ثابت کرد: عدد ثابت k وجود دارد، به نحوی که هرعدد طبیعی بزرگتر از واحد را بتوان به صورت مجموعی از عددهای اول، که تعداد آن‌ها از k تجاوز نمی‌کند، نوشت. یعنی برای هرعدد طبیعی N $(N>۱)$ داریم:

$$N=p_۱+p_۲+\ldots+p_k$$

که درآن، p_i، یا عددی است اول و یا صفر.

اگر بتوانیم ثابت کنیم که $k=۳$، آن وقت، قضیهٔ گولد باخ ثابت شده است. با تلاش بسیاری از ریاضی دانان، عدد ثابت k تا مرز ۶۷ رسید و در زمان ما تا ۲۰ پایین آمده است. ولی، هنوز تا عدد ۳، راه درازی باقی مانده است.

درسال ۱۹۳۷، حادثه‌ای بسیار مهم، و غیرقابل انتظار برای ریاضی‌دانان، در جهان دانش اتفاق افتاد. ای. م. وینوگرادوف (متولد ۱۸۹۱)، دانشمند شوروی وعضوفرهنگستان علوم، مسألهٔ گولد باخ را برای عددهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ فرد ثابت کرد: هرعدد فرد، ازهرعدد به‌دلخواه بزرگی که آغاز کنیم، برابر است بامجموع سه عدد اول. به‌زبان دیگر، بین‌عددهای طبیعی، چنان عدد به‌اندازهٔ کافی بزرگ وجود دارد، که هرعدد اول بعد از آن، برابر با مجموع سه عدد اول می‌شود.

وینوگرادوف، مسألهٔ گولد باخ را، به‌مفهومی که دراین‌جا آوردیم،

به‌طریقی پیچیده ثابت کرد و، ضمن آن ، روش‌های ظریف ریاضیات معاصر را مورد استفاده قرار داد.

وینوگرادوف ، قضیهٔ گولدباخ را ، برای عـددهای فرد به‌اندازهٔ کافی بزرگ، یعنی برای عددهای فردی که بزرگتر ازعدد بزرگی مثل N_0 باشند، ثابت کـرد. ولی مقدار N_0 چقدر است؟ به‌این پرسش هم، ریاضی دان دیگر شوروی، لـ.گـ. بوروزدکین، پاسخ داد. او ثابت کرد:

$$N_0 \geqslant e^{۱۶/۰۳۸}$$

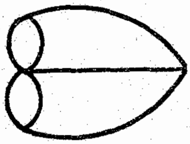
که درآن e عبارت است از مبنای لگاریتم طبیعی، یعنی $e = ۲/۷۱۸۲...$.

برای این که مسألهٔ گولدباخ به‌طور کامل حل‌شود، باید برای عددهای فرد کـوچکتر از N_0 مورد آزمایش قـرار گیرد. کانتور ، آبری ، هالسینر و دیگران ، مسألهٔ گـولد باخ را مستقیماً مورد آزمـایش قـرار داده بودند. و آزمایش نشان داده بود که ، مسألهٔ گولدباخ ، برای عددهای فرد و زوج تا ۹۰۰۰۰۰۰ درست است.

روش وینوگرادوف که، به‌کمك آن، مسألهٔ گولد باخ حل شد، بـرای حل مسألهٔ اولر، مبنی براین که هـرعدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت، نتوانست کاری انجام دهد.

مسألهٔ اولر، هنوز حل نشده باقی مانده است. مسألهٔ گـولد باخ هم، برای عددهای طبیعی زوج ، حل نشده است (خود گولد باخ، ایـن حالت را تنظیم نکرده بود). اگرچه ، از قضیهٔ وینوگرادوف، می‌توان نتیجه گرفت که هرعدد زوج به‌اندازهٔ کافی بـزرگ را می‌توان به‌صورت مجموع چهار عـدد اول نوشت (خودتان می‌توانید این حکم را ثابت کنید).

۱۴۵. این‌مسأله، درسال ۱۷۵۰ تنظیم شده‌است خود لئونارد اولر، در همان سال ، آن را حل کرد و ثابت کرد که عبور ازهمهٔ پل‌ها، و ضمناً ازهرپل یك‌بار، ممکن نیست. شرطهای مسألهٔ اولر دربارهٔ پل‌های کینگسبرك ، معادل بااین شرط است که بخواهیم شکل ۴۶ را رسم کنیم ، بدون این که قلم را ازکاغذ برداریم و بدون این که بخشی از



شکل ۴۶

آن را دوبار رسم کنیم، توصیه می‌کنیم، خودتان این مسأله را حل کنید.

*

لئونارد اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی دانی بزرگ و دوست نزدیک م. و. لومونوسوف بود.

اولر در شهر بال سویس متولد شد. آموزش‌های اولیهٔ خود را، در منزل و نزد پدرش، به دست آورد. آموزش ریاضی خود را، تحت راهنمایی یوهان برنولی، ریاضی دان بزرگ سویسی تکمیل کرد.

در ۱۹ سالگی، رسالهٔ علمی خود را دربارهٔ تجهیز کشتی نوشت که، به خاطر آن، جایزهٔ فرهنگستان علوم پاریس را به او دادند. در ۲۰ سالگی به فرهنگستان علوم پترزبورگ راه یافت و در ۲۳ سالگی، استاد کرسی فیزیک شد و در ۲۶ سالگی به عضویت رسمی فرهنگستان علوم پترزبورگ درآمد.

اولر استعداد فوق‌العاده‌ای در کار داشت. او روی هم ۸۶۵ اثر بکر دارد که چند ده جلد را تشکیل می‌دهند. علاقه‌های علمی اُولر، بسیار متنوع بود. او تقریباً در همهٔ زمینه‌های ریاضیات مقدماتی و ریاضیات عالی، در زمینهٔ مکانیک و اخترشناسی، کشف‌های پرارزشی دارد. اولر، کتابی دربارهٔ جبر نوشت به‌نام «ورود کامل به‌جبر» (۱۷۷۰)، که می‌توان آن را نمونهٔ کتاب‌های درسی امروزی در این رشته دانست.

اولر، بیش از ۳۰ سال از زندگی خود را در روسیه گذراند و روز ۷ سپتامبر سال ۱۷۸۳ در پترزبورگ درگذشت.

۱۴۶. بهترین روش حل این مسأله، چنین است: فرض می‌کنیم، تعداد تخم‌مرغ‌های دهقان دوم m برابر تعداد تخم‌مرغ‌های دهقان اول باشد. چون پول فروش دو دهقان باهم برابر است، دهقان اول باید هر تخم مرغ را m برابر فروش هر تخم‌مرغ دهقان دوم فروخته باشد. اگر این دو دهقان، تعداد تخم‌مرغ‌های خود را باهم عوض کنند، آن وقت، دهقان اول m برابر دهقان دوم تخم مرغ خواهد داشت و چون هر تخم مرغ را به m برابر گران‌تر از دومی می‌فروشد، بنابراین، m^2 برابر دومی پول دریافت می‌کند. از آن جا

$$m^۲=۱۵:۶\frac{۲}{۳}=\frac{۴۵}{۲۰}=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین

$$m=\frac{۳}{۲}$$

اگر ۱۰۰ را به‌نسبت ۲:۳ تقسیم کنیم، معلوم می‌شود که دهقان اول ۴۰ ودهقان دوم ۶۰ تخم‌مرغ داشته‌اند.

این مساله را، به‌طریق جبری هم می‌توان حل کرد. اگر تعداد تخم‌مرغ‌های دهقان اول را x بگیریم، تخم‌مرغ‌های دهقان دوم برابر $۱۰۰-x$ می‌شود و، از آن‌جا، قیمت فروش همهٔ تخم‌مرغ‌های دهقان اول برابر

$$\frac{۱۵}{۱۰۰-x}$$

وقیمت فروش هرتخم‌مرغ دهقان دوم برابر

$$۶\frac{۲}{۳}:x=\frac{۲۰}{۳x}$$

می‌شود. چون پول فروش دودهقان، یکی است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۵x}{۱۰۰-x}=\frac{۲۰(۱۰۰-x)}{۳x}$$

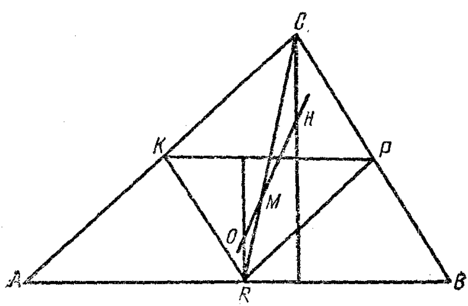
یا

$$x^۲+۱۶۰x-۸۰۰۰=۰$$

از آن‌جا: $x_۱=۴۰$ ، $x_۲=-۲۰۰$. یعنی، دهقان اول ۴۰ و دهقان دوم ۶۰ تخم‌مرغ داشته‌اند.

۱۴۷. پاسخ: $۴+\sqrt{۲}$.

۱۴۸. ABC را مثلث دلخواه مفروضی درنظر بگیرید (شکل ۴۷). مثلث PKR را ـ که وسط ضلع‌های مثلث ABC را به‌هم وصل کرده است ـ می‌سازیم. مثلث PKR با مثلث ABC متشابه وضریب تشابه آن $k=\frac{۱}{۲}$ است. با توجه به‌این مطلب، معلوم می‌شود که نقطهٔ M، محل برخورد



شکل ۴۷

میانه‌های مثلث PKR است، زیرا میانه‌های مثلث اخیر، بخش‌هایی از میانه‌های مثلث ABC هستند، سپس، توجه می‌کنیم که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC (نقطهٔ O) برمحل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC منطبق است.

H را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC می‌گیریم. از M به O و H وصل می‌کنیم. دومثلث ROM و CHM متشابه‌اند و ضریب تشابه آن‌ها برابر است با $k=\frac{۱}{۲}$ (زیرا، این مثلث‌ها ازخطهای متناظر مثلث‌های PKR و ABC تشکیل شده‌اند و ضریب تشابه دو مثلث KPR و ABC هم برابر $\frac{۱}{۲}$ بود)، ازآن‌جا

$$\widehat{RMO}=\widehat{CMH}$$

با توجه به‌این برابری و این‌که CMR یك خط راست است، به‌این نتیجه می‌رسیم که زاویه‌های RMO و CMH را می‌توان همچون دوزاویه متقابل به‌راس در نظر گرفت، وبنابراین، OMH خطی راست است؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این مساله را اولر، برای نخستین بار، درسال ۱۷۶۵ حل کرد، که آغازی بود برای به‌اصطلاح «هندسهٔ مثلث».

۱۴۹. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{x^{۴}}{\frac{۱}{۲}x}+۱۴\frac{۱}{۴}=۱۰۰;$$

$$2x^3 = 100 - 14\frac{1}{4} = \frac{343}{4};$$

$$x^3 = \frac{343}{8} \;;\; x = \frac{7}{2}$$

۱۵۴. هیچ رمزی درکار وجود ندارد. به رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$[(x + 25 + 125 - 37 - x)5] : 2 = 282\frac{1}{2}$$

*

معاصر لرمونتوف می‌نویسد: گفت و گو در قلعه پیش آمد. هر جا که شاعر می‌رفت، از او می‌خواستند تایك معمای عـددی طرح کند. شاعر، که از ایـن مزاحمت‌ها خسته بود، راز معما را برای همه گفت و روشن کرد که ضمن عمل‌ها، خود عـدد را ازمجموع خارج می‌کنم و، بنابـراین، پیش‌بینی عددی که به‌دست می‌آید، مشکل نیست، مثلاً

$$[(x + 100 + 206 + 310 - 500 - x) : 2]3 = 174$$

مساله را، ازکتاب ای. یـا. دیمان به‌نام «داستان‌هایی از ریاضیات» (چاپ ۱۹۵۴) برداشته‌ایم.

۱۵۵. راه حل به‌نه دیکتوف: «مساله، به‌کمی فکر نیازدارد. دخترها به‌بازار رفتند، با هـم مشورت‌کردند، ضمناً دومی و سومی، بـه توصیه‌های خواهر بزرگتر خود عمل‌کردند. دختر بزرگتر، کمی فکر کرد و گفت:

ـ خواهران مـن، ما تخم‌مـرغ‌های خود را، مثل سابق، ده‌تـا ده‌تـا نمی‌فروشیم، بلکه آن‌ها را هفت‌تا هفت‌تا خواهیم فروخت، ضمناً، برای هر هفت تخم مرغ هـم قیمت ثابتی معلوم می‌کنیم و هر سه نفر به همان قیمت عرضه می‌کنیم تا سفارش مادر را رعایت‌کرده باشیم. از این قیمت، حتی یك کوپك هم‌پایین نخواهیم‌آمد. هرهفت‌تخم‌مرغ یك‌آلتین (۳ کوپك)، موافقید؟

دومی با تعجب گفت:

ـ این خیلی ارزان است.

ولی خواهر بزرگتر مخالفت‌کرد:

ـ نگران نباشید، بعد ازفروش تخم‌مرغ‌هایی که به‌گروه‌های هفت‌تایی

تقسیم‌کرده‌ایم، بقیهٔ تخم مرغ‌ها را گران‌تـر خواهیم فروخت. مـن از قبل تحقیق‌کرده‌ام که، به جز ما،کس دیگری در بازار تخم‌مرغ عرضه نمی‌کند تا قیمت را بشکنند؛ وقتی‌کـه تقاضا وجود داشته باشد وکالا هـم منحصرباشد، قیمت بالا می‌رود، ما هم با فروش بقیهٔ تخم مرغ‌ها، کمبود خود را جبران می‌کنیم.

دخترکوچك پرسید:

ـ بقیه را به‌چه قیمتی باید بفروشیم؟

ـ هرتخم‌مرغ به ۳آلیتن. همین، حرف دیگری ندارم. حالا، باهمهٔآن چه باید بدانیم آشنا شده‌ایم.

دختردوم دوباره یادآوری‌کرد:

ـ خیلی گران است.

دختر بزرگتر با اوهم صدا شد:

ـ درست است، ولی درعوض، تخم‌مرغ‌های هفت‌تایی خود را ارزان فروخته‌ایم، این به جای‌آن.

همه موافقت‌کردند.

به‌بازار رسیدند. هریك ازآن‌ها، درجای خود نشست وهرکدام، برای خود،آغاز به فروش‌کردند. خریداران به‌طرف دخترکوچکتر که ۵۰تخم‌مرغ داشت، بـه‌علت ارزانی‌آن‌ها، هجوم بردنـد و هفت‌گروه ۷ تایی تخم‌مرغ، روی‌هم به ۷ آلیتن، از اوخریدند ویك تخم‌مرغ درسبد اوباقی ماند. دومی هم‌که سی تخم‌مرغ داشت، به‌چهار خریدار و هر خریدار۷ تخم‌مرغ فروخت و۴ آلیتن دریافت‌کـرد. در سبد او ۲ تخم‌مرغ باقی ماند. دختر بزرگتر هم هفت تخم‌مرغ خودرا به یك‌آلیتن فروخت و۳ تخم‌مرغ درسبد اوباقی ماند.

ناگهان سروکلهٔ آشپزخان در بازار پیدا شدکه برای آشپزی خود به تخم‌مرغ احتیاج داشت. پسرخان به دیدن پدرش می‌آمد وکوکوی تخم‌مرغ دوست داشت. آشپزتمام بازار را جست‌وجوکرد، فقط ۶ تخم‌مرغ باقی‌مانده بودکه آن هم نزد سه نفر بود: یکی ازآن‌ها ۱ تخم‌مرغ داشت، دیگری ۲ تخم‌مرغ وسومی ۳ تخم‌مرغ.آشپز به‌طرف‌آن‌ها رفت.

روشن است که‌آشپز، ابتدا به طرف دختر بزرگتر رفت‌که ۳ تخم‌مرغ

داشت و بقیهٔ تخم‌مرغ‌های خود را به‌یك‌آلیتن فروخته بود. آشپز پرسید:

ـ بابت ۳ تخم‌مرغ خود چند می‌خواهی؟

ـ هر تخم‌مرغ ۳ آلیتن.

آشپز، با ناراحتی گفت:

ـ چقدر؟ مگر عقل از سرت پریده است؟

ولی دختر پاسخ داد:

ـ هرطور میل شماست، ارزان‌تر نمی‌دهم. این قیمت‌آخراست.

آشپز به‌طرف دختری رفت‌که ۲ تخم‌مرغ درسبد داشت:

ـ چند؟

ـ هرعدد ۳ آلتین. همین ۲ تا مانده، بقیه را فروخته‌ام.

آشپز از دخترکوچك پرسید:

ـ تو تخم‌مرغ خود را چند می‌دهی؟

ـ ۳ آلتین.

چاره‌ای نبود. آشپز با قیمت باور نکردنی موافقت کرد:

ـ همهٔ تخم‌مرغ‌های خود را بدهید.

آشپز بابت ۳ تخم‌مرغ دختربزرگتر ۹ آلتین پرداخت‌که بایك‌آلتین فروش قبلی او، روی هم ۱۰ آلتین شد. به دختر دوم، بابت ۲ تخم‌مرغ باقی‌مانده ۶ آلتین داد که با ۴ آلتین قبلی، روی هم صاحب ۱۰ آلتین شد. دخترکوچکتر هم۳آلتین بابت یك تخم‌مرغ خودگرفت وروی ۷ آلتین قبلی گذاشت، بازهم روی هم ۱۰ آلتین.

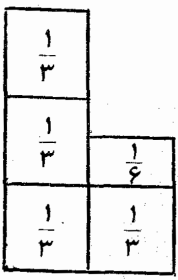
دخترها به خانه برگشتند، هرکدام ۱۰ آلتین به مادر دادند وحکایت کردندکه، به‌چه ترتیب، توانسته‌اند سفارش مادر را انجام دهند».

*

و. گ. به‌نه دیکتوف (۱۸۰۷ ـ ۱۸۷۳)، شاعر روسی است. او شعرهای غنائی می‌سرودکه در سال‌های ۳۰ سدهٔ نوزدهم، شهرت بسیاری یافت وبعد، یکباره، فراموش شد. ظاهراً، علت این امر را باید درپیچیدگی زبان و شور وهیجان مصنوعی او دانست. درحکومت شوروی، شعرهای این شاعر، بارها چاپ شده است.

به‌نه‌دیکتوف، به‌ریاضیات، بی‌اندازه علاقه‌مند بود. بعد از مرگ او، رسالهٔ دست نویسی ازاو پیداکردندکه به سرگرمی‌های حساب مربوط می‌شد (۱۸۶۰) که‌ماهم، این مساله را، از آن جا برداشته‌ایم. مسالهٔ به‌نه‌دیکتوف را، اولین‌بار، یا. ای. پرلمان چاپ‌کرد.

۱۵۷. بنابه‌گواهی پرفسورآ.و.زینگر، تولستوی‌مساله‌رابه‌این ترتیب، حل‌کرده است: «از آن جاکه ابتدا تمام گروه در نصف روز وبعد نصف گروه درنصف‌روزکاردروکردن‌زمین‌بزرگتررا تمام‌کرده‌اند، روشن‌است که‌نصف گروه در نصف روز $\frac{۱}{۳}$ از زمین بزرگتـر را درو می‌کنـد. بنابراین، بعد از کار نصف گروه در زمین‌کوچکتر، ازآن، به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۱}{۶}$ زمین‌بزرگتر، باقی می‌ماند. اگـریك دروگـر می‌توانـد $\frac{۱}{۶}$ زمین بزرگتر رادریك روز درو کند، بنابراین، برای دروکردن $\frac{۶}{۶}+\frac{۲}{۳}$، یعنی $\frac{۸}{۶}$ زمین‌بزرگتر، ۸ دروگرلازم‌است. تعداد دروگرها، ۸ نفر بوده‌اند».



شکل ۴۸

زینگـر بـه یاد می‌آورد کـه: «تولستوی، درتمام زندگی خود، بـه مساله‌های معمائی‌ـ ونه‌خیلی‌حیله‌گرانه ـ علاقه مند بـود وایـن مساله را در سال‌های جوانی خود، از پدر من یاد گرفته بود. وقتی‌که دربارهٔ این مساله با تولستوی صحبت می‌کردم، اودیگر پیر شده بود، ولی با خوشحالی می‌گفت، اگر برای حل مساله، ازیك شکل کاملاً مقدماتی (شکل ۴۸) استفاده کنیم، مساله بی‌اندازه ساده و روشن می‌شود».

راه‌حل جبری مساله را می‌دهیم. تعداد دروگران گروه را x می‌گیریم وفرض می‌کنیم هردروگر بتواند در هرروز y واحد مساحت اززمین را درو

کند (یادآوری می‌کنیم که، y یك مجهول کمکی است وتنهابرای ساده‌ترشدن حل‌مساله وارد شده‌است. همان طورکه خواهیددید، این‌مجهول کمکی، ضمن عمل حذف می‌شود). اکنون، مساحت هریك از دو زمین را برحسب x و y بیان می‌کنیم. مساحت زمین بزرگتر، برابراست با

$$\frac{xy}{۲}+\frac{xy}{۴}=\frac{۳xy}{۴}$$

ومساحت زمین کوچکتر

$$\frac{xy}{۴}+y=\frac{xy+۴y}{۴}$$

طبق فرض مساله، مساحت زمین بزرگتر، دو برابر مساحت زمین کوچکتر است، بنابراین

$$\frac{۳xy}{۴}:\frac{xy+۴y}{۴}=۲$$

ویا

$$\frac{۳xy}{xy+۴y}=۲$$

که بعد از ساده کردن، به‌این صورت در می‌آید:

$$\frac{۳x}{x+۴}=۲$$

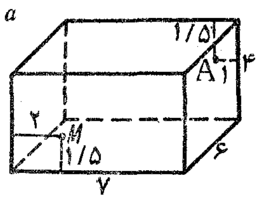
واز آن‌جا: $x=۸$.

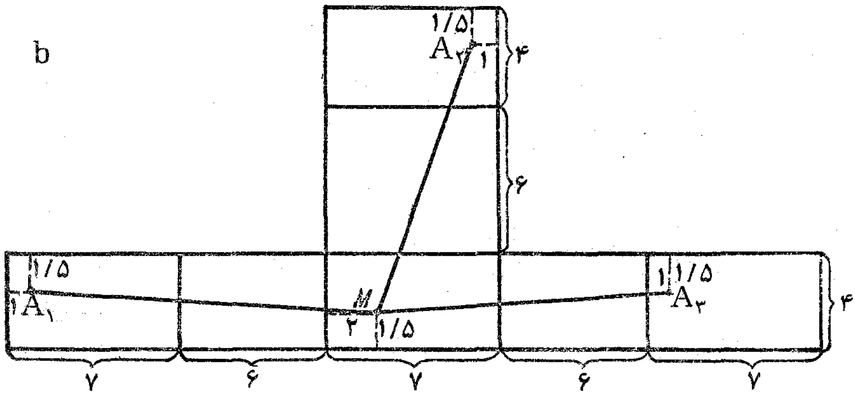
۱۵۸. این مساله را از خاطرات روزانهٔ و. بولگاکووا (ل. ن. تولستوی درسال‌های آخر زندگی) ـ که منشی تولستوی بود ـ برداشته‌ایم. او می‌نویسد: «امروز، خیلی به مسالهٔ «عنکبوت و مگس» علاقه‌مندمی‌شود ... بایدگفت که این مساله، نه بلافاصله حل می‌شود و نه ساده».

*

طول اطاق را ۷، عرض‌آن را ۶ وارتفاع‌آن را ۴ آرشین می‌گیریم. فرض می‌کنیم، مگس روی دیواربزرگتر ودرفاصلهٔ دوآرشین ازگوشه، و عنکبوت، روی دیوار مقابل و به‌فاصلهٔ یك‌آرشین ازنزدیك‌ترین گوشه ایستاده باشند (شکل ۴۹ ـ a). مساله را به‌صورت رسم، بهترمی‌توان حل کرد. گسترده شدهٔ اطاق را در نظرمی‌گیریم (شکل ۴۹ ـb) ونقطهٔ محل

عنکبوت را با پاره‌خط راستی به نقطهٔ محل مگس وصل‌می‌کنیم. روشن است که ، برحسب این که اطاق را چگونه بگسترانیم، سه‌جواب به‌دست می‌آید. در واقع ، عنکبوت می‌تواند یا فقط از طریق دیوار، یا ازطریق دیوار وسقف





شکل ۴۹

و یا از طریق دیوار و کف، خود را به‌مگس برساند.چون فاصلهٔ‌کف تامگس برابر است با فاصلهٔ عنکبوت تا سقف، بنابراین، مسیرهای از طریق سقف و کف اطاق، هم‌ارزند.

با استفاده از گستردهٔ شکل وقضیهٔ فیثاغورث، به‌دست می‌آید:

$$MA_{۱}=\sqrt{۱۹۷}\approx ۱۴/۰۴$$
$$MA_{۲}=\sqrt{۱۱۶}\approx ۱۰/۷۷$$
$$MA_{۳}=\sqrt{۱۴۵}\approx ۱۲/۰۴$$

بنابراین، ازسه جواب ممکن، کوتاه‌ترین مسیر، فاصلهٔ ۱۰/۷۷ آرشینی است،که جواب مسأله است.

۱۵۹. راه حل تولستوی: «سه برادر بزرگتر، به‌اندازهٔ ۸۰۰ × ۳، یعنی ۲۴۰۰ روبل به‌دو برادرکوچکتر داده‌اند. بنابراین، سهم هریك از دو برادرکوچکتر، ودرنتیجه سهم هریك از ۵ برادر، برابر ۱۲۰۰ روبل است.

به‌این ترتیب، ارزش هر خانه ۲۰۰۰ روبل و تمام ارثیه ۶۰۰۰ روبل بوده است».

۱۶۰. راهنمائی تولستوی: «تا لحظه‌ای‌که ارباب از تولا به راه می‌افتد، دهقان چقدر راه رفته است؟ وقتی‌که ارباب به‌راه افتاد، درهرساعت چقدر به‌دهقان نزدیك می‌شود؟ بعداز چند ساعت به‌دهقان می‌رسد؟ وقتی‌که دانستید بعداز چند ساعت به‌هم رسیده‌اند، آن وقت حساب‌کنید، دراین‌مدت، ارباب چند ورست از تولا دور شده است» (ورست = ۱/۰۶۶۸ کیلومتر).

۱۶۱. راه حل تولستوی: دهقان بابت اجارهٔ زمین ۸ × ۷۰، یعنی ۵۶۰ روبل‌داد. برای۷۰دسیاتین۹ × ۷۰، یعنی ۶۳۰ پوت بذرمصرف‌کرد. بذررا هرپوت ۱ روبل و۳۰ کوپك خرید وبرای ۶۳۰ پوت

$$۶۳۰ \times ۱/۳۰ = ۸۱۹ \text{ (روبل)}$$

تا این‌جا، دهقان ۱۳۷۹ روبل پرداخته است.

دهقان درهر دسیاتین، ۱۳ خرمن‌گندم دارد، ۷۰ دسیاتین ۱۳ × ۷۰، یعنی ۹۱۰ خرمن. ازهر خرمن ۶ پوت‌گندم و از ۹۱۰ خرمن ۶ × ۹۱۰، یعنی ۵۴۶۰ پوت‌گندم به‌دست آورده است. گندم را هرپوت ۱ روبل و۴۰ کوپك فروخته است، پس روی هم ۱/۴۰ × ۵۴۶۰ ، یعنی ۷۶۴۴ روبل گرفته است.

برای خرمن‌کوبی، هر پوت ۷کوپك داده است و برای ۵۴۶۰ پوت ۵۴۶۰ × ۰/۷، یعنی ۳۸۲/۲۰ روبل.

برای حمل‌گندم‌ها به‌شهر، برای هرپوت ۱۱کوپك داده است، پس برای ۵۴۶۰ پوت

$$۵۴۶۰ \times ۱۱ = ۶۰۰/۶۰$$

بنابراین، بازهم روی هم ۹۸۲/۲۰ روبل پرداخته است. کل پرداخت او ۲۳۶۱/۸۰ روبل می‌شود

دریافتی:	۷۶۴۴/۰۰
پرداختی:	۲۳۶۱/۸۰
مانده:	۵۲۸۲/۲۰

(هردسیاتین = ۱/۰۹۲۵ هکتار؛ پوت ≈ ۱۶/۳۸ کیلوگرم).

۱۶۲. راه حل تولستوی: «صفحهٔ شطرنج ۸ در ۸ است، یعنی ۶۴ خانه دارد. (بعد تولستوی درجدول کاملی، تعداد گندم‌های هرخانهٔ صفحهٔ شطرنج را داده‌است). درخانهٔ شصت وچهارم، این تعداد گندم وجود دارد:

۹ ۹۲۳ ۳۷۲ ۰۳۶ ۸۵۴ ۷۷۵ ۸۰۸

اگر هر ۴۰۰۰۰ دانهٔ گندم را یك‌پوت بگیریم، تنها درخانهٔ آخرجدول

۲۳۰ ۵۸۴ ۳۰۰ ۹۲۱ ۳۶۹

پوت گندم قرار دارد».

۱۶۳. راه حل تولستوی: «اگر هردو لوله را بازکرده باشیم، بعداز یك دقیقه چه‌پیش می‌آید؟ چقدرآب وارد بشکه می‌شود؟

یکی از لوله‌ها (آن‌که در ۱۵ دقیقه بشکه را پرمی‌کند) دریك دقیقه $\frac{۱}{۱۵}$ و لولهٔ دیگر دریك دقیقه $\frac{۱}{۲۴}$ بشکه‌را پرمی‌کند. ازراه شیر پایین بشکه هم، هر دقیقه $\frac{۱}{۱۲۰}$ بشکه خالی می‌شود:

$$\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۸+۵}{۱۲۰}=\frac{۱۳}{۱۲۰},$$

$$\frac{۱۳}{۱۲۰}-\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{۱۲}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

یعنی بعد ازیك دقیقه $\frac{۱}{۱۰}$ بشکه‌آب‌دارد. بعدازچند دقیقه پرمی‌شود:

$$۱:\frac{۱}{۱۰}=۱۰$$

بشکه در ۱۰ دقیقه پرمی‌شود».

۱۶۴. این یکی از دوازده مساله‌ای است‌که به ایوان پتروف، برای پیداکردن جواب، پیشنهادکردند، ایوان‌پتروف خواندن‌ونوشتن نمی‌دانست، ولی می‌توانست درذهن خود محاسبه‌کند. او پسر یك دهقان بود. آزمایشی که از او به عمل‌آمد در ماه مه سال ۱۸۳۴ بود. پتروف بـه همهٔ پرسش‌ها پاسخ درست داد وبرای حل آن‌ها کمتراز یك ساعت وقت صرف‌کرد. به‌پسرك بی‌سواد، این مساله‌ها داده شده بود:

۱) عددهای ۱۴۳، ۲۷، ۳۸ و ۲۹ را جمع کنید.
۲) عددهای ۴۲۷، ۲۸، ۷، ۲۰ و ۶۵۲ را جمع کنید.
۳) بعد از ۱۵ سال، سن من برابر با سن کنونی برادرم می‌شود. اگر من ۱۴ ساله باشم، برادرم چندسال دارد؟
۴) تاجری کالایی را به ۴۵۴۸ روبل فروخت. ۴۵۲ روبل برای او باقی‌ماند. کالا را چند خریده‌بود؟
۵) از ۱۶۰۰، عدد ۱۲۴۸ راکم کنید.
۶) عدد ۳۰۰۵۵ را از عدد ۴۰۰۰۴ کم کنید.
۷) عددی‌را پیداکنیدکه اگر۳۴۵۶را به‌آن اضافه‌کنیم، عدد۱۰۰۰۰ به‌دست‌آید.
۸) از عدد ۱۲۴۲۵، چندبار عدد ۲۵ به‌دست می‌آید؟
۹) ۵ کیسه که در هرکدام ۸۷۵ عدد پنج‌کوپکی بود، دادیم و کرباس خریدیم. اگرکرباس هرآرشین ۳۵ کوپك ارزش داشته باشد، چند آرشین کرباس خریده‌ایم.
۱۰) بین دوآبادی ۱۶۵۸ درخت به‌فاصله‌های برابرکاشته‌ایم. فاصلهٔ بین دو آبادی را پیدا کنید، به‌شرطی که فاصلهٔ هردو درخت متوالی ۸ آرشین باشد.
۱۱) در یك فاصلهٔ زمانی مشخص، ۱۲نفر ۱۳۶ روبل خرج‌کردند. ۶۹ نفر درهمین‌مدت، چقدر خرج می‌کنند؟
۱۲) همان مسأله‌ای که در این‌جا آورده‌ایم. ایران‌پتروف هرشش جواب این مسأله را پیداکرد. (چگونه؟ سعی‌کنید خودتان، جواب‌ها را جست وجو کنید.)

ولی، داستان جوان حسابگر، به‌این‌جا تمام نمی‌شود. او در اوت ۱۸۳۴ دوبار مورد آزمایش قرار گرفت و این‌بار هم، به‌صورتی درخشان، از عهدهٔ آزمایش برآمد. یکی از مسأله‌هایی‌که، این‌بار، به‌او داده بودند، چنین بود: در یك‌سال چندثانیه وجود دارد؟ پسرك پاسخ را در ۳ دقیقه پیداکرد. اوگفت‌که در هرسال ۳۲۶۶۰۰۰۰ ثانیه وجود دارد. به‌او گفته شد که جواب درست نیست. آن‌وقت خواهش‌کرد به او اجازه بدهند که

محاسبه را به‌ردیف انجام‌دهد . بعد دیکته کرد که هرسال از ۸۷۶۰ ساعت یا ۵۲۵۶۰۰ دقیقه یا ۳۱۵۳۶۰۰۰ ثانیه تشکیل شده است، به‌شرطی که سال را ۳۶۵ شبانه‌روز، شبانه‌روز را ۲۴ ساعت، ساعت را ۶۰ دقیقه و دقیقه‌را ۶۰ ثانیه بگیریم.

*

پاسخ. ۱) ۲۶ × ۳؛ ۲) ۳ × ۵ + ۲۱ × ۳؛ ۳) ۶ × ۵ + ۱۶ × ۳؛ ۴) ۹ × ۵ + ۱۱ × ۳؛ ۵) ۱۲ × ۵ + ۶ × ۳؛ ۶) ۱۵ × ۵ + ۱ × ۳.

۱۶۵. صورت این‌مسأله («مسأله راچینسکی»)، موضوع تابلو نقاشی ن. پ. بوگدانف به‌نام «محاسبهٔ شفاهی»را تشکیل می‌دهد. تابلو، تخته‌سیاه را نشان می‌دهد که این عبارت کسری روی‌آن نوشته شده است ؛ خود راچینسکی وشاگردان هم درآن نقاشی شده‌اند.

*

حل شفاهی مسأله، براساس رابطهٔ زیر است:

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۳^۲+۱۴^۲$$

و چون

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۰۰+۱۲۱+۱۴۴=۳۶۵$$

بنابراین

$$\frac{۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲+۱۳^۲+۱۴^۲}{۳۶۵}=\frac{۲\times ۳۶۵}{۳۶۵}=۲$$

*

جالب این‌است که س. آ. راچینسکی (۱۸۳۶-۱۹۰۲)، زمانی در دانشگاه ، به‌عنوان استاد دانش‌های طبیعی کار می‌کرد. ولی بعد ، کرسی دانشگاه را ترك کرد و به‌کار معلمی در مدرسهٔ کشاورزی پرداخت. او بیش از هرچیز به‌مسأله‌های نامتعارف و محاسبه‌های شفاهی علاقه‌مند بود.

۱۶۶. راچینسکی، در«یادداشت‌های مربوط به‌مدرسه‌های کشاورزی» خود، می‌نویسد: «وقتی از دانش‌آموزان پرسیدم ۸۴ × ۸۴ چقدر می‌شود، یکی ازپسران بلافاصله گفت: ۷۰۵۶. من ازاو پرسیدم:

ـ چطور حساب کردی؟

ـ حاصل برابر با مربع یك‌عدد کوچکتری است (او می‌خواست بگوید که، این‌عدد، برابراست باحاصل‌ضرب دومجذور کوچکتر)؛ من ۵۰×۱۴۴ را حساب و ۱۴۴ را ازآن‌کم کردم. در واقع

$$۵۰ \times ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۷۲۰۰ - ۱۴۴ = ۷۰۵۶$$

او بلافاصله این‌طور فکر کرده بود:

$$۸۴ \times ۸۴ = ۷ \times ۱۲ \times ۷ \times ۱۲ = ۷^{۲} \times ۱۲^{۲} = ۴۹ \times ۱۴۴ =$$
$$= ۵۰ \times ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۷۰۵۶$$

ساده‌تر و بهتر ازاین، نمی‌شد فکر کرد».

۱۶۷. فرض کنید، بدهکار در پایان ماه اول، باید x روبل بپردازد. آن‌وقت

$$\left(۱ + ۱\frac{۱}{۲} + ۲ + ۲\frac{۱}{۲} + ۳ + ۳\frac{۱}{۲} + ۴ + ۴\frac{۱}{۲}\right)x = ۷۵۳ + ۳۰۳;$$

$$۲۲x = ۱۰۵۶;\ x = \frac{۱۰۵۶}{۲۲} = ۴۸ \text{ (روبل)}$$

مبلغ پرداختی ماه‌های بعد را خودتان محاسبه کنید.

*

آ. ن. سترانولیوبسکی(۱۸۳۹-۱۹۰۳)، مربی و ریاضی‌دان مشهور روس و مؤلف‌کتاب «دورهٔ جبر ، براساس تعمیم تدریجی مسأله‌های حساب» (۱۸۶۸). او در کتاب خود، مبحث‌های جبررا طوری تنظیم کرده است که، بتوان‌به‌سادگی، آن‌هارا به‌عنوان تعمیمی ازحساب یادگرفت. او دردورانی، معلم خانگی سوفیاکووالوسکی بوده است.

۱۶۸. فرض می‌کنیم، کار در x هفته انجام‌شده است. در این‌صورت، داریم:

$$(۱۵ - ۱۰)x = ۴\frac{۱}{۲} + ۳\frac{۱}{۲} + ۷;$$

$$x = \frac{۴\frac{۱}{۲} + ۳\frac{۱}{۲} + ۷}{۱۵ - ۱۰} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \text{ (هفته)}$$

۱۶۹. اگر سرمایهٔ پدر را x بگیریم، باید داشته‌باشیم:

$$\left(۱-\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۵}\right)x=۲۵۰۰+۳۰۰۰;$$

$$x=\frac{۲۵۰۰+۳۰۰۰}{۱-\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۵}}=\frac{۵۵۰۰}{\frac{۴}{۱۵}}=\frac{۵۵۰۰\times ۱۵}{۴}=\frac{۵۵۰۰\times ۱۵}{۴}=$$

$$=۲۰۶۲۵\ (\text{روبل})$$

۱۷۰. سن پسر دوم را x می‌گیریم، آن‌وقت

$$(x+۳x)=۴۵-۲۹;$$

$$(۱+۳)x=۴۵-۲۹;$$

$$x=\frac{۴۵-۲۹}{۱+۳}=۴$$

۱۷۱. مؤلف مسأله، برای حل، راهنمائی می‌کند

$$\frac{۱۵۰}{۵}x+(۵۰-x)\frac{۱۴۰}{۷}=۵۰(۳۰-۳)$$

ازآن، x، یعنی تعداد سطل‌های سرکهٔ نوع اول به‌دست می‌آید.

$$x=\frac{۵۰(۳۰-۳)-\frac{۵۰\times ۱۴۰}{۷}}{\frac{۱۵۰}{۵}-\frac{۱۴۰}{۷}}$$

۱۷۲. اگر x فونت از نقرهٔ نوع اول انتخاب کرده باشیم؛ باید داشته‌باشیم:

$$\frac{۲۸۸}{۳}x+\frac{۳۲۸}{۴}(۲۰-x)=۲۰(۹۳-۳)$$

وازآن‌جا

$$x=\frac{۲۰(۹۳-۳)-\frac{۳۲۸\times ۲۰}{۴}}{\frac{۲۸۸}{۳}-\frac{۳۲۸}{۴}}$$

۸• مسأله‌های اروپای غربی

۱۷۳• بنابرشرطهای مسأله داریم:

$$\begin{cases} x+۷=۵(y-۷) \\ y+۵=۷(x-۵) \end{cases}$$

با حل این‌دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x=۷\frac{۲}{۱۷}\,; \quad y=۹\frac{۱۴}{۱۷}$$

*

این‌مسأله، از کتاب‌ریاضی‌دان ایتالیائی، فیبوناچی، که اورالئوناردوی پیزائی هم می‌گویند، برداشته شده است. او درحدود سال ۱۱۷۰ میلادی در پیزا متولد شد (و به‌همین دلیل، اورا پیزائی می‌گویند). «کتاب حساب» او به‌نام «لیبرآباکوس» معروف است . آموزش ریاضی خود را در الجزایر دید . ضمن مسافرت به شرق، با ریاضی‌دانان آن‌جا آشنا شد و موفقیت‌های آن‌ها را در نوشته‌های خود منعکس کرد و از همین‌راه بودکه پیشرفت‌های ریاضی شرق، در دسترس غرب قرار گرفت. «کتاب حساب»، مهم‌ترین‌تألیف این دانشمند است.

او درمقدمهٔ کتابش می‌نویسد: «پدرم اهل پیزا بود و در ادارهٔ گمرك بوکیا در افریقا کار می‌کرد. او مرا باخود به‌آن‌جا برد تا هنر حساب‌کردن را یاد بگیرم. هنرعجیب حساب‌کردن ، تنها به‌کمك نه‌علامت هندی، مرا چنان به‌شوق‌آوردکه، به‌طور قطع، تصمیم گرفتم، آن چه‌را در مصر، یونان،

سوریه، سیسیل و پرووانس در این‌باره می‌دانستند، بیاموزم. از همهٔ این کشورها دیدن کردم و قانع‌شدم که، دستگاه عددنویسی هندی از همه کامل‌تر است و برروش فیثاغورث برتری دارد. این‌دستگاه را، و همهٔ آن‌چه به‌آن مربوط می‌شد، یادگرفتم، وبررسی‌های شخصی خودم راکه از «مقدمات» اقلیدس به‌دست آورده بودم، به‌آن اضافه‌کردم وتصمیم گرفتم این‌کتاب را بنویسم».

«کتاب حساب» رساله‌ای است در بارهٔ حساب و جبر که شامل ۱۵ فصل است و آگاهی‌هایی از دانش حساب و جبر آن زمان را، در اختیار خواننده می‌گذارد.

لئوناردوی پیزائی، با طرح وحل مسأله‌ای دربارهٔ سرمایهٔ چند نفر، برای نخستین‌بار، اندیشهٔ عدد منفی را، به‌نام «قرض»، در اروپا طرح‌کرد.

خدمت بزرگ لئوناردوی پیزائی به‌دانش، در این‌بود که، برای نخستین‌بار، دانشمندان اروپایی‌را باجبرودستگاه عددنویسی هندی‌آشنا کرد.

۱۷۴. تعداد گنجشک‌هارا x، قمری‌هارا y وکبوترهارا z می‌گیریم. این دستگاه به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x+y+z=۳۰ \\ \frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۲}y+۲z=۳۰ \end{cases}$$

اگر z را بین این‌دومعادله حذف‌کنیم، خواهیم داشت:

$$۱۰x+۹y=۱۸۰$$

یا

$$y=۲۰-\frac{۱۰}{۹}x$$

وبا فرض $x=۹$، به‌دست می‌آید: $y=۱۰$، $z=۱۱$.

۱۷۵. رگیومونتان، این مسأله را با دو روش حل‌کرده است.

روش اول: معادله را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$۱۰x=x^۲+\frac{۱۰۰}{۲۷}$$

ازآن‌جا

$$x=5-\sqrt{21\frac{8}{27}}$$

روش دوم: $y=\frac{x}{10-x}$ می‌گیریم. به‌دست می‌آید:

$$y+\frac{1}{y}=25$$

و ازآن‌جا

$$y=\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{621}{4}}$$

که ازآن، بدون هیچ‌زحمتی، مقدار x به‌دست می‌آید.

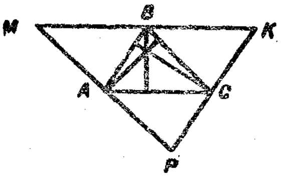
بایدیادآوری کرد که، رگیومونتان، درهردرمورد، رادیکال‌را باعلامت منفی انتخاب می‌کند.

*

رگیومونتان(۱۴۳۶-۱۴۷۶)، ریاضی‌دان مشهورآلمانی (نام‌وشهرت واقعی او، یوهان مولر است).

شهرت رگیومونتان ، به‌خاطر کارهای او در زمینهٔ مثلثات و ترجمهٔ رساله‌های کلاسیك دانشمندان یونان باستان است. مشهورترین اثر او ، رسالهٔ «دربارهٔ همه‌نوع مثلث‌ها» است که بعد از مرگ او، در سال ۱۵۳۳، چاپ شد. در این رساله، رگیومونتان، برای نخستین‌بار در اروپا، مثلثات را به‌عنوان یك‌دانش مستقل وجدا از اخترشناسی ، مورد مطالعه قرار داده است.

۱۷۶. ABC را مثلث مفروض می‌گیریم (شکل ۵۰) . از هر رأس برضلع روبه‌روی آن ، عمودی رسم می‌کنیم و ، سپس ، مثلث MKP را طوری رسم می‌کنیم که نقطه‌های A، B و C، وسط ضلع‌های آن باشند [برای‌این‌منظور، کافی‌است، ازرأس‌های A، B وC، خط‌های‌راستی به‌موازات ضلع‌های روبه‌رو بکشیم]. ارتفاع‌های مثلث ABC، به‌صورت عمودمنصف‌های ضلع‌های‌مثلث MKP درمی‌آیند. می‌دانیم که، عمودمنصف‌های هرمثلث،



شکل ۵۰

از یک نقطه می‌گذرند (چرا؟)
بنابراین، ارتفاع‌های مثلث مفروض هم،
از یك نقطه می‌گذرند.

۱۷۷. حل این مسأله ساده است؛ آن‌را خودتان حل کنید.

*

این مسأله را از رسالهٔ «دربارهٔ تبدیل‌ها» تألیف لئوناردوداوینچی (۱۴۵۲ - ۱۵۱۹) انتخاب کرده‌ایم. در این رساله، در بارهٔ موضوع‌های مربوط به‌تبدیل یك‌جسم ـ بدون کم یا زیادکردن مقدار مادهٔ آن ـ بحث شده است.

به‌اعتقاد این‌دانشمند، «هیچ زمینه‌ای وجود ندارد که، در آن‌جا، نشود از یکی از شاخه‌های ریاضی استفاده کرد». او عمیقاً باورداشت که هر بحثی را، تنها ریاضی‌دان می‌تواند خاتمه دهد، زیرا تنها اوست که «قادر است مهر سکوت برلب پرخاشگر بزند».

۱۷۸. پول اولی را x، دومی را y و سومی را z می‌گیریم. مسأله، منجر به‌حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x+\frac{۱}{۲}(y+z)=۱۲ \\ y+\frac{۱}{۳}(x+z)=۱۲ \\ z+\frac{۱}{۴}(x+y)=۱۲ \end{cases}$$

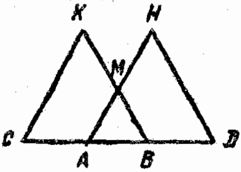
و از آن‌جا

$$x=۳\frac{۹}{۱۷},\quad y=۷\frac{۱۳}{۱۷},\quad z=۹\frac{۳}{۱۷}$$

*

آدام‌ریز (۱۴۹۲-۱۵۵۹)، ریاضی‌دان آلمانی ومؤلف رسالهٔ معروفی دربارهٔ جبر به‌نام «Die Coss» (۱۵۲۴).

۱۷۹. به‌مرکز نقطهٔ A وبه‌شعاع مفروض پرگار ثابت، کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ D به‌دست‌آید (شکل ۵۱). سپس، به‌مرکز نقطهٔ B و با همین شعاع، روی خط راست AB، نقطهٔ C را پیدا می‌کنیم. بعد روی پاره‌خط CB، مثلث متساوی‌الاضلاع CKB و روی پاره‌خط AD، مثلث متساوی‌الاضلاع ADH را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد ضلع‌های BK و AH را M می‌نامیم. مثلث AMB مثلث موردنظر است.



شکل ۵۱

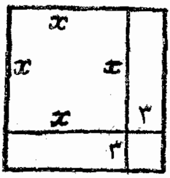
*

این‌مسأله‌را، برای نخستین بار، نیکلاتارتاگلیا(حدود ۱۴۹۹-۱۵۵۷) ریاضی‌دان برجستهٔ ایتالیائی طرح‌کرد. تارتاگلیا، ریاضیات را پیش خود آموخت. او زبان‌های یونانی ولاتینی را هم، پیش خود یادگرفت. درزمینهٔ ریاضیات، روش حل معادلهٔ درجهٔ سوم به‌صورت

$$x^۳+px=q$$

راکشف‌کرد (p و q، عددهایی ثابت‌اند).

۱۸۰. کاردان، این مسأله را با روش هندسی حل کرده است. در این‌جا، راه‌حل او را، با علامت‌گذاری‌های امروزی می‌آوریم. با استفاده ازشکل (شکل ۵۲ را ببینید)، داریم:



شکل ۵۲

$$x^۲+۲\times۳x+۹=x^۲+۶x+۹=(x+۳)^۲$$

بنابرفرض داریم:

$$x^۲+۶x=۹۱$$

از این‌دومعادله، نتیجه می‌شود:

$$(x+۳)^۲=۹۱+۹=۱۰۰$$

از آن‌جا: $10 = 3 + x$ و بنابراین $x = 7$.

*

جیرولاموکاردان (۱۵۷۶-۱۵۰۱) ، ریاضی‌دان معروف ایتالیائی، صاحب رساله‌ای علمی است به‌نام «هنربزرگ، یا قانون‌های جبر»، که در سال ۱۵۴۵ چاپ شد . در این‌رساله، برای نخستین‌بار ، راه‌حل معادلهٔ درجه سوم داده شده است، اگر چه فرمول مربوط به‌جواب معادله را از تارتاگلیا اقتباس کرده است. درهمین‌رساله، راه‌حل معادلهٔ درجهٔ چهارم هم چاپ شده است‌که، برای نخستین‌بار، ل. فررازی (۱۵۶۵-۱۵۲۲)آن‌را حل‌کرده بود.

کاردان، به‌جز ریاضیات، در زمینهٔ پزشکی هم‌کار می‌کرد و فلسفه هم درس می‌داد. او در نوشته‌های فلسفی خود، معتقد است، تنها به‌دانش‌هایی باید تکیه‌کرد که براساس تجربه بنانهاده شده‌باشند.

۱۸۱. اگر ازعلامت‌گذاری‌های امروزی استفاده کنیم، مسأله منجر به‌این معادله می‌شود:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

و از آن‌جا

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15}\ ,\quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

*

درزمان‌کاردان، مسألهٔ پیداکردن دوعدد ، که مجموعی برابر ۱۰ و حاصل‌ضربی برابر ۴۰ داشته‌باشند، مسأله‌ای بدون‌جواب به‌حساب می‌آمد؛ زیرا درآن‌زمان، هنوز مفهوم عددهای موهومی شناخته نشده‌بود و در بارهٔ عمل‌هایی که می‌توان روی عددهای موهومی انجام‌داد، اطلاعی نداشتند. خودکاردان هم، در این‌مسأله ومسأله‌های مشابه دیگر ، باعددهای مختلط برخورد می‌کردکه نمی‌توانست آن‌ها راتفسیرکند و، به‌همین مناسبت ،آن‌ها را، «عددهای غیرواقعی» ویا «عددهای موهومی» می‌دانست . او بی‌اندازه شگفت‌زده بود که این «عددهای غیرواقعی» دارای مجموع و حاصل‌ضربی هستندکه باشرطهای مسأله سازگار است.

یکی از کارهای کاردان این بود که به‌عددهای مختلط توجه کرد و، برای نخستین‌بار، برخی عمل‌ها را روی آن‌ها انجام‌داد. در واقع، کاسپر وسل (۱۷۴۵-۱۸۱۸) ریاضی‌دان دانمارکی بود که، برای نخستین‌بار، از سال ۱۷۹۹، در نشریهٔ فرهنگستان علوم دانمارك، عددهای مختلط و عمل‌های مربوط به‌آن‌هارا، به‌طور اساسی، طرح کرد. نظریهٔ امروزی عددهای‌مختلط، درسدهٔ نوزدهم و، به‌خصوص، به‌وسیلهٔ گوس ریاضی‌دان‌آلمانی، پایه گذاری شد. تلاش ریاضی‌دانان سدهٔ نوزدهم، براساس نظریهٔ دقیق عددهای مختلط، موجب پیدایش نظریهٔ تابع‌های بامتغیر مختلط شدکه‌کاربرد زیادی دردانش وصنعت پیداکرد.

۱۸۲. حل‌را می‌توانید درهر کتاب درسی پیدا کنید. کاردان بود که، برای نخستین‌بار، حل این‌مسأله را داد.

۱۸۳. راه‌حل ویت، به‌این ترتیب است. با تبدیل $x=y+z$، معادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$y^۲+y(۲z+p)+z^۲+pz+q=۰$$

z را طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب جملهٔ درجهٔ اول y، برابرصفرشود:

$$۲z+p=۰ \Longrightarrow z=-\frac{p}{۲}$$

دراین‌صورت، خواهیم‌داشت:

$$z^۲+pz+q=\frac{p^۲}{۴}-\frac{p^۲}{۲}+q=q-\frac{p^۲}{۴}$$

ومعادلهٔ ما به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$y^۲+q-\frac{p^۲}{۴}=۰$$

و یا

$$y^۲=\frac{p^۲}{۴}-q \Longrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{p^۲}{۴}-q}$$

ودرنتیجه

$$x=y+z=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{\frac{p^۲}{۴}-q}$$

*

فرانسوا ویت (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، ریاضی‌دان فرانسوی، وکیل دادگستری ویکی از رجال مشهور دولتی بود. درجنگ اسپانیا علیه‌فرانسه [در آن‌زمان، دستگاه‌های تفتیش عقاید (انگیزیسیون) براسپانیا حکومت می‌کرد]، ویت توانست استعداد فوق‌العاده خودرا درکشف رمز ازرمزهای بغرنج مورداستفادهٔ دشمن نشان‌دهد. اسپانیائی‌ها، به‌کمك رمز پیچیده‌ای، با مخالفان شاه فرانسه، حتی درداخل فرانسه، ارتباط برقرار می‌کردند و هیچ‌کس نتوانسته بود آن را کشف کند.

تلاش‌های بیهودهٔ زیادی برای پیداکردن کلید این‌رمز انجام‌گرفت و، سرانجام، هانری چهارم، برای حل این‌مشکل، به‌ویت مراجعه‌کرد. ویت، بعد ازکاری پرشدت وخسته‌کننده، موفق شدکلید رمز را پیداکند. او بااین عمل میهن‌دوستانهٔ خود، در واقع، جان خود را به‌خطرانداخت. دستگاه تفتیش‌عقاید اسپانیا، ویت‌را ملحد اعلام، ومحکوم به‌سوختن درآتش‌کرد، ولی دراَجرای حکم توفیق نیافت.

خدمت بزرگ ویت، به تکامل جبر علامتی مربوط می‌شود. بی‌جهت نیست‌که او را پدر علم جبر می‌خوانند. پیش از او، مجهول‌هارا با حرف نشان می‌دادند، ولی او، علاوه برمجهول‌ها، ضریب‌های معادله را هم با حرف نشان‌داد، وچهرهٔ امروزی جبررا به‌آن‌داد. قضیهٔ مربوط به‌پیداکردن رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله (قضیهٔ ویت)، روش واحد حل معادله‌های درجهٔ دوم، سوم وچهارم وتبدیل‌های مختلف ریشه‌ها، ازجمله کارهای ویت است. کارهای‌ویت، منحصربه‌جبر نمی‌شود و در زمینهٔ هندسه‌و مثلثات هم،اثرهایی دارد. مثلاً درمثلثات، مسألهٔمربوطبه‌تعیین همهٔ جزءهای مثلث مسطحه وکروی را، بامعلوم بودن سه جزءآن، حل‌کرد. ویت، روش‌های ریاضی خود را، در سال ۱۵۷۹، در کتاب «قانون‌های ریاضی» خود، منتشر کرد.

۱۸۴. فرض می‌کنیم، گلوله درزمان t، مسیر قائم AD - سقوط آزاد - را طی‌کند، ضمناً، ازمقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم (شکل ۳). در این‌صورت داریم:

$$AD=\frac{1}{2}gt^2$$

که درآن، g، شتاب سقوط آزاد است. درنتیجه

$$t=\sqrt{\frac{2AD}{g}}$$

t_1 را برابر زمانی می‌گیریم که برای حرکت گلوله در طول وتر AC لازم است (ازمقاومت هوا واصطکاك صرف‌نظر می‌کنیم)، باید داشته باشیم:

$$AC=\frac{1}{2}at_1^2$$

که درآن، a عبارت است از شتاب حرکت درطول خط مایل AC. ازآن‌جا

$$t_1=\sqrt{\frac{2AC}{a}}$$

از نقطهٔ C، عمود CE را بر AD فرود می‌آوریم (روی شکل ۳، با خط‌چین نشان داده شده است). ازمکانیك می‌دانیم که باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{g}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow a=\frac{AE\cdot g}{AC}$$

بعد، داریم (شکل ۳ را ببینید):

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$$

و بنابراین

$$a=\frac{AC}{AD}\cdot g$$

وسرانجام خواهیم داشت:

$$t_1=\sqrt{\frac{2AC}{a}}=\sqrt{\frac{3AD\cdot AD}{AC\cdot g}}=\sqrt{\frac{2AD}{g}}=t$$

یعنی، زمان حرکت درطول هروتر، برابراست با زمان حرکت درطول‌قطرآن.

*

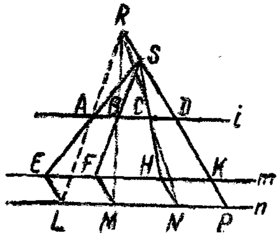
گالیله‌ئو گالیله (۱۶۴۲-۱۵۶۴)،ریاضی‌دان، مکانیك‌دان،فیزیك‌دان‌و

اخترشناس ایتالیایی. اومخترع تلسکوپی است که تا ۳۲ باربزرگ می‌کرد (قبل از او، بهترین دوربین هلندی، می‌توانست تا سه بار بزرگ کند). به کمك این تلسکوپ، صورت‌های زهره، لکه‌های خورشید وچرخش خورشیدرا کشف کرد، به مطالعهٔ قمرهای مشتری پرداخت وزحل‌را مشاهده کرد. پایهٔ اصلی شناخت طبیعت‌رامشاهده می‌دانست ومعتقد بود که «درك احساسی»، چیزی جزبازتاب جهان خارج نیست. به مبارزه‌ای پرشور علیه کهنه‌پرستی و رخوت دردانش و، به‌خصوص، علیه خمود ارسطوئی برخاست.

کلیسای کاتولیك، به‌شدت گالیله‌را مورد تعقیب قرارداد. او را دوبار به محکمهٔ «انگزیسیون مقدس» فرا خواندند. بار اول، به‌خاطر انتشار کشف‌هایی که ازطریق تلسکوپ کرده بود و، درآن‌ها، بردرستی نظرهای کوپرنیك درمورد گردش زمین به‌دور محورخورشید تاکید شده بود؛ باردوم، گالیله را به‌خاطر چاپ کتاب بزرگ اوبه‌نام «بحثی دربارهٔ دو دستگاه بزرگ جهانی، یعنی دستگاه بطلمیوسی ودستگاه کوپرنیکی»، درسال ۱۶۳۳، به‌محکمهٔ تفتیش عقاید جلب کردند. دراین کتاب، دانشمند نابغه، ضمن مقایسهٔ دستگاه زمین مرکزی (نظریهٔ بطلمیوسی) ودستگاه خورشیدمرکزی (نظریهٔ کوپرنیکی)، برتری دومی را بر اولی نشان می‌دهد. دستگاه انگیزیسیون موفق شد، با حیله و تقلب، گالیله را به‌انکار ساختگی دیدگاه‌های خود وادارد و «توبه‌نامهٔ» شرم‌آوری را از زبان او جاری کند. گالیلهٔ هفتاد ساله، برای این که به‌سرنوشت «جیوردانو برونو» گرفتار نشود (برونو را در ۱۷ فوریهٔ سال ۱۶۰۰ میلادی، در رم، درآتش سوختند)، ناچارشد پیراهن گناه وتوبه به‌تن کند، روی زانوهای خود بایستد و در برابر «کتاب مقدس»، هواداری خود را از دستگاه کوپرنیك انکار کند، آن را دروغ بخواند وهواداری واستفاده‌از آن را ناسازگار با نوشته‌های مقدس، و باورهای مذهبی بداند. ولی مردم، صداقت گالیله را، دراین انکار، باور نکردند وافسانه‌ای ساختند که، طبق آن، وقتی تشریفات توبهٔ دانشمند به‌پایان رسید، گالیله زیرلب زمزمه می‌کرد: «با همهٔ این‌ها، زمین به گردش خود ادامه می‌دهد».

هیچ چیزدیگری، بهترازهمین افسانه، علاقهٔ‌مردم را نسبت به‌دانشمند بزرگ وخشم تندآن‌ها را، نسبت به‌تعقیب کنندگان او، نمی‌تواند نشان‌دهد.

کاملاً روشن است که گالیله، زیر فشار شدیدی که بر او تحمیل شده بود، ناچار شد نظرگاه‌های علمی خود را انکار کند. با وجود این، حتی بعد از «توبه» هم، مصون از تعقیب نبود. دستگاه تفتیش عقاید، به‌طور دایمی او را زیر نظرداشت و به گوشه‌نشینی همیشگی محکومش کرده بود و سرانجام، در زندان خود، ویلای محل زندگیش درنزدیکی فلورانس، به پایان زندگی خود رسید.



شکل ۵۳

۱۸۵. فرض می‌کنیم خطهای راست PS و NC، یکدیگر را در نقطهٔ R قطع کنند (شکل ۵۳). دراین صورت، داریم:

$$DC:PN = DR:PR$$

باتوجه به خطهای راست SAE، SBF، SCH و SDK، به دست می‌آید:

$$DA:KE = DB:KF = DC:KH$$

و با درنظر گرفتن

$$EL \| FM \| HN \| KP$$

خواهیم داشت:

$$KE:PL = KF:PM = KH:PN$$

از آن‌جا

$$DA:PL = DB:PM = DC:PN = RD:KP$$

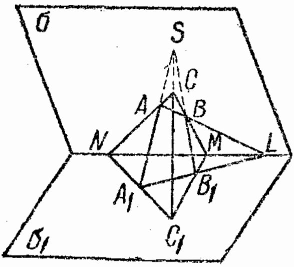
و به‌این‌ترتیب، خطهای‌راست AL، BM، CN و SP از نقطهٔ R می‌گذرند.

*

یوهان‌کپلر (۱۵۷۱ - ۱۶۳۰)، ریاضی‌دان و اخترشناس آلمانی، مولف رسالهٔ مشهور «هندسهٔ فضائی جدید دربارهٔ بشکه‌های شراب» (۱۶۱۵)، که درآن، مبانی آنالیزبی‌نهایت کوچك‌ها را طرح ریخته است، دانشی که بعدها، درکارهای لایب نیتس و نیوتون، بـه‌کمال خود رسید. او بودکه بورگی را

به‌تنظیم جدول لگاریتم‌ها ترغیب کرد و، همراه با او، «جدول هزارلگاریتم» را درسال ۱۶۲۴ چاپ کرد. درزمینهٔ اخترشناسی، قانون‌های حرکت سیاره‌ها راکشف کرد وتمامی زندگی خود را وقف تکامل نظریهٔ خورشید مرکزی کوپرنیك کرد. آموزش کپلر، بااعتقادهای کلیسا نمی‌ساخت و کاملاً طبیعی بود که کلیسا به مبارزه علیه او برخیزد و، به طور دائم، او را مورد تعقیب قرار دهد.

۱۸۶. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ روی دوصفحهٔ متفاوت σ و σ_1 قرار گرفته‌اند(شکل ۵۴). علاوه‌برآن، می‌دانیم خطهای راست AA_1 و BB_1 و CC_1، درنقطهٔ S به‌هم رسیده‌اند. باید ثابت کنیم، خطهای راست AB و A_1B_1، BC و B_1C_1، AC و A_1C_1 یکدیگر را قطع می کنند ونقطه‌های برخوردآن‌ها بریك خط راست قراردارد. دوضلع متناظر AB و A_1B_1 را درنظر می گیریم، این دوضلع، در نقطه‌ای مثل L یکدیگر را قطع می‌کنند، زیرا اولاً موازی نیستند (بنابر فرض)، ثانیاً روی یك صفحه ـ صفحهٔ مثلث SA_1B_1 ـ قرار دارند. چون صفحه‌های σ و σ_1 متفاوتند و موازی هم نیستند، یکدیگر را روی خطی مثل l قطع می‌کنند. روشن است که نقطهٔ L روی خط l قرار دارد، زیرا AB و A_1B_1، به‌ترتیب، روی صفحه‌های σ و σ_1 واقع شده‌اند وتنها روی فصل مشترك این دو صفحه، می‌توانند به‌هم برسند.



شکل ۵۴

به‌همین ترتیب ثابت می‌شودکه ضلع‌های متناظر BC و B_1C_1، AC و A_1C_1، به‌ترتیب، درنقطه‌های M و N یکدیگررا قطع می‌کنند و،ضمناً، این نقطه‌ها روی خط راست l ـ فصل مشترك دوصفحه ـ قرار دارند. بخش اول مساله، حل‌شد.

اکنون فرض می‌کنیم L، M و Nـ نقطه‌های برخورد ضلع‌های‌متناظر AB و A_1B_1، BC و B_1C_1، AC و A_1C_1 ـ روی خط راست l واقع باشند و ضمناً، خطهای راست AA_1، BB_1 و CC_1 با هم موازی نباشند.

ثابت می‌کنیم، با این شرطها، خطهای راست AA_1، BB_1 و CC_1 در نقطه‌ای مثل S به‌هم می‌رسند.

برای این منظور، خطهای راست AA_1 و BB_1 را درنظر می‌گیریم. این دوخط راست درنقطه‌ای مثل S_1 به‌هم می‌رسند، زیرا بنابرشرط، موازی نیستند و، ضمناً، بریك صفحه ـ صفحهٔ مثلث ALA_1 ـ قرار دارند. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود، خطهای راست BB_1 و CC_1، AA_1 و CC_1 هم، به‌ترتیب، در نقطه‌هایی مثل S_2 و S_3 یکدیگر را قطع می‌کنند. حالا ثابت می‌کنیم، نقطه‌های S_1 و S_2 و S_3 برهم منطبق‌اند (روی شکل، این سه‌نقطه را، بایك نقطهٔ S نشان داده‌ایم). اگراین سه‌نقطه برهم منطبق نباشند، باید مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ بریك صفحه‌قرارگیرند (صفحهٔ مثلث $S_1S_2S_3$)، که بافرض مساله ناسازگار است. مساله به‌طورکامل حل شد.

*

ژیرار دزارك (۱۵۹۳ - ۱۶۶۲)، وبنابه‌قولی (۱۵۹۱ - ۱۶۶۱)، ریاضی‌دان و مهندس نظامی فرانسوی، کـه مبانی هندسهٔ تصویری و هندسهٔ ترسیمی را طرح ریخت.

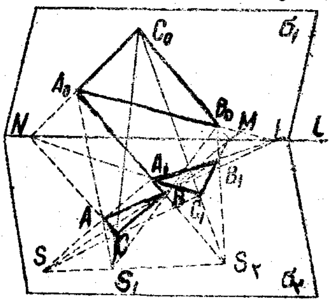
مساله‌ای راکه دراین‌جاآورده‌ایم، حالت‌خاصی‌است ازمسالهٔ‌کلی‌تری که‌به‌نام قضیهٔ دزارك مشهور است، ویکی‌ازقضیه‌های اصلی هندسهٔ‌تصویری به‌شمارمی‌رود. قضیهٔ کلی دزارك چنین‌است:«اگردردومثلث، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر، بر یك خط راست قرارگیرند، آن وقت، خطهای راستی‌که راس‌های متناظر دومثلث را بـه هم وصل می‌کنند، ازیك نقطه می‌گذرند». عکس این حکم هم درست است.

درایـن تنظیم‌بنـدی، نقطه‌هـای S، L، M و N، نقطه‌های ناویژه (improper) نامیده‌می‌شوند.

اندیشه‌های دزارك، تکامل بعدی خود را، درابتدای سدهٔ نوزدهم‌ودر کارهای مونژ وپونسله(ریاضی‌دانان فرانسوی) وشیتز (ریاضی‌دان‌آلمانی) و دیگران به‌دست‌آورد.

۱۸۷. فرض‌کنید مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ (شکـل ۵۵)، روی صفحهٔ σ، واقع‌باشند و، ضمناً، فرض‌کنید خطهای راستی‌که راس‌های‌متناظر

A و A_1، B و B_1، C و C_1 را به‌هم‌وصل می‌کنند، درنقطهٔ S به‌هم‌رسیده باشند. نقطه‌های برخورد ضلع‌های AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1، AC و A_1C_1 را، به‌ترتیب، L،M وN می گیریم (طبق‌فرض، این خط‌های‌راست، روی یك صفحه قـرار دارند و، ضمناً، باهم موازی نیستند). ثابت می‌کنیم، سه نقطهٔ L، M و N روی یك خط راست قراردارند.



شکل ۵۵

از نقطهٔ S، خـط راستـی رسم می‌کنیم کـه در صفحهٔ σ واقع باشد و روی آن، دو نقطهٔ دلخواه S_1 و S_2 را در نظـر می‌گیریم. نقطهٔ S_1 را به نقطه‌های A ، B ، C ونقطهٔ S_2 را به نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1وصل‌می‌کنیم. خط‌های راست S_1A وS_2A_1یکدیگر را قطع می‌کنند، زیرا روی یك صفحه قرار دارند (صفحهٔ مثلث AS_1S_2) و موازی نیستند (حالت تـوازی مورد نظر ما نیست). نقطهٔ برخورد آن‌ها را A_0 می‌نامیم. به‌همین ترتیب، محل‌برخورد S_1B و S_2B_1، S_1C و S_2C_1 را، به ترتیب، B_0 و C_0 می‌نامیم. مثلث $A_0B_0C_0$ به‌دست می‌آیـدکه در صفحه‌ای مثل σ_1 قرار گـرفته است. فصل مشترك دو صفحهٔ σ و σ_1 را، l می‌نامیم.

مثلث $A_0B_0C_0$، با هـر یـك از مثلث‌هـای ABC و $A_1B_1C_1$، با شرط‌های قضیهٔ دزارك درفضا سازگارند و، بنابراین، نقطه‌های L، M و N ـ محل برخورد ضلع‌های متناظر مثلث‌ها ـ روی خط راست l قرارمی‌گیرند. از طرف دیگر، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر مثلث‌های مفروض ABC و $A_1B_1C_1$، همین سه نقطهٔ L، M و N خواهدبود که، همان‌طور که گفتیم، روی یك خط راست ـ خط راست l ـ قرار دارند.

اکنون، عکس قضیه را ثابـت می کنیم. فرض‌کنید، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظـرمثلث‌هـای ABC و $A_1B_1C_1$، روی خـط راستی مثل l واقع‌باشند. ثابت می‌کنیم، خط‌راست‌ناموازی که، به‌ترتیب، راس‌های‌متناظر دومثلث‌را به‌هم‌وصل‌می‌کنند، ازنقطه‌ای مثل S می گذرند. برای این‌منظور،

صفحهٔ دلخواه σ_1 را از خط l عبور می‌دهیم، به نحوی که غیر از صفحهٔ σ باشد. از نقطه‌های L ، M و N ، سه خط راست دلخواه در صفحهٔ σ_1 عبور می‌دهیم، به‌نحوی که از یك نقطه عبور نکنند و با هم موازی نباشند. در صفحه σ_1 ، مثلث $A_0B_0C_0$ به‌دست می‌آید، که درآن، A_0 عبارت است از نقطهٔ برخورد خطهای راستی که از L و N عبورکرده‌اند؛ به‌همین ترتیب، B_0 محل تلاقی خطهای راستی است که از L و M عبورکرده‌اند و C_0 محل برخورد خطهای راستی است که از نقطه‌های M و N گذشته‌اند.

مثلث $A_0B_0C_0$، نسبت به هرکدام از دو مثلث مفروض ABC و $A_1B_1C_1$ درشرطهای عکس مسألهٔ دزارك درحالت فضا صدق می‌کند و، بنابراین، خطهای راست A_0A ، B_0B و C_0C درنقطه‌ای مثل S_1 و خطهای راست A_0A_1 ، B_0B_1 ، C_0C_1، درنقطه‌ای مثل S_2 ـ غیر از S_1 ـ به‌هم‌می‌رسند.

خط راست S_1S_2 را درنظرمی گیریم. محل برخورد این خط راست را با صفحهٔ σ به S نشان می‌دهیم. اکنون، خطهای راست AA_1 و S_1S_2 را مورد توجه قرار می‌دهیم. این دو خط راست متقاطع‌اند ، زیرا دریك صفحه قرار دارند (صفحهٔ مثلث $S_1A_0S_2$)، ولی این دو خط راست تنها درنقطهٔ S می‌توانند یکدیگر را قطع کنند ، یعنی خط راست AA_1 ازنقطهٔ S عبور می‌کند. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شودکه، خطهای راست BB_1 و CC_1 هم ازنقطهٔ S می‌گذرند. از این‌جا نتیجه می‌گیریم، خطهای راستی که رأس‌های متناظر دو مثلث مفروض را به‌هم وصل می‌کنند، ازیك نقطه می‌گذرند.

یادداشت. تجزیه وتحلیل دقیق‌تر مسألهٔ دزارك، منجر به‌نتیجه گیری کلی‌تر زیر می‌شود: «اگر خطهای راستی که رأس‌های متناظردومثلث‌مفروض را به‌هم وصل می‌کنند، دریك نقطه به هم برسند یا باهم موازی باشند، یکی از سه حالت پیش می‌آید : ۱) سه نقطهٔ برخورد ضلع‌های متناظر، بریك خط راست واقع‌اند؛ ۲) یك جفت ازضلع‌های متناظر، دو خط موازی را تشکیل می‌دهندکه با خط راستی که از محل برخورد دوجفت ضلع‌های متناظر دیگر می‌گذرد، موازی‌اند؛ ۳) هرجفت ضلع‌های متناظر از دو خط راست متوازی تشکیل شده است. دراین مورد باید اضافه کردکه حکم قضیه، درحالت عکس هم درست است.

به‌این نکته هم توجه کنیم که، مسألهٔ دزارك درحالت مسطحه، به کمك يك شکل فضایی و از راهٔ وارد کردن مثلث سوم $A_0B_0C_0$ حل شد ـ که صفحهٔ آن σ_1، برصفحه σ یعنی صفحهٔ مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ ، منطبق نیست. خیلی‌ها کوشیدند تا، این مسأله را، بدون وارد شدن به‌فضای سه بعدی، حل کنند، ولی همهٔ تلاش‌ها با بن‌بست رو به رو می‌شد. سرانجام، هیلبرت (۱۸۶۲-۱۹۴۳)، ریاضی دان آلمانی، ثابت کرد که، حل این مسأله ، بدون یاری گرفتن ازفضای سه بعدی، ممکن نیست.

۱۸۸. معادلهٔ مفروض را ، می‌توان چنین نوشت:

$$x^4-4x^3-19x^2+76x+30x-120=0$$

یا

$$x^3(x-4)-19x(x-4)+30(x-4)=0$$

ازآن‌جا: $x_1=4$.

بقیهٔ ریشه‌ها را باید ازمعادلهٔ $x^3-19x+30=0$ به‌دست آورد. معادلهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$x^3-3x^2+3x^2-9x-10x+30=0$$

و یا

$$x^2(x-3)+3x(x-3)-10(x-3)=0$$

ازآن‌جا $x_2=3$. بقیهٔ ریشه‌ها ، از معادلهٔ درجه دوم زیر به‌دست می‌آیند:

$$x^2+3x-10=0$$

که با حل آن نتیجه می‌شود:

$$x_3=2, \qquad x_4=5$$

*

رنه دکارت (۱۵۹۶ ـ ۱۶۵۰) ، ریاضی دان وفیلسوف فرانسوی، مؤلف رسالهٔ مشهور «هندسه» (۱۶۳۷) که درآن، برای نخستین‌بار درتاریخ دانش، روش مختصاتی را پیشنهاد کرده است.

روش مختصاتی ، به دکارت و فرما امکان داد تا هندسهٔ تحلیلی را به وجودآورند. درهندسهٔ تحلیلی، می‌توان هندسه را، ازنظرمعادله‌های جبری، مورد بررسی قرار داد.

دکارت ، نظریهٔ معادله‌ها را، با واردکردن نشانه‌های تازه‌ای، غنی‌تر وساده‌تر کرد. او نخستین کسی بودکه نشانه‌های x و y و z را برای مجهول انتخاب‌کرد (او، برای z، ارجحیت قایل بود). همچنین، روش ضریب‌های نامعین راکشف‌کرد که امروز، کاربردی فراوان دارد. دکارت، درفلسفه و ریاضیات، از روش تحلیلی پیروی می‌کردکه، طبق آن ، باید هرمسأله را به اجزاء ترکیب دهندهٔ خود تجزیه‌کرد و، سپس، باآغاز از ساده‌ترین جزءها، به‌طرف موردهای بغرنج‌تر حرکت‌کرد.

۱۸۹. داریم : $S=\frac{a_1}{1-q}$ ، که درآن، q عبارت است از قدر نسبت تصاعد. چون $q=\frac{a_2}{a_1}$ ، پس

$$S=\frac{a_1}{1-\frac{a_2}{a_1}}=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}$$

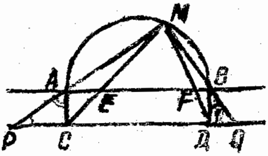
از آن جا

$$\frac{S}{S-a_1}=\frac{\frac{a_1^2}{a_1-a_2}}{\frac{a_1^2}{a_1-a_2}-a_1}=\frac{a_1^2}{a_1^2-a_1^2+a_1a_2}=\frac{a_1}{a_2}$$

*

پیر فرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵) ، ریاضی دان فرانسوی است، درجوانی تحصیل حقوق می‌کرد و وکیل مدافع شد. به‌ریاضیات تنها به‌خاطر علاقه‌ای که به‌آن داشت، می‌پرداخت. و همین‌کار ذوقی، او را به یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان (تقریباً‌درتمام‌شاخه‌های این‌دانش) تبدیل‌کرد. فرما، بابزرگترین دانشمندان‌زمان خود مکاتبه‌داشت و درنامه‌های خود، اساسی‌ترین‌نظریه‌های ریاضی را ، مورد بحث و انتقاد قرار می‌داد و، ضمناً، بررسی‌های خودش را هم به اطلاع آن‌ها را می‌رساند. فرما را باید یکی از بنیان‌گذاران و ادامه‌دهندگان راه ریاضیات عالی (حساب دیفرانسیلی و هندسهٔ تحلیلی) دانست. نام او، برروی چند قضیه ازحساب (نظریهٔ عددها) باقی مانده است.

۱۹۰. قبل از هرچیز، توجه می‌کنیم که (شکل ۵۶ را ببینید):



شکل ۵۶

$$\widehat{P} = D\widehat{B}Q, \qquad P\widehat{A}C = \widehat{Q}$$

زیرا ضلع‌های آن برهم عمودند ($P\widehat{M}Q = ۹۰^\circ$). از تشابه دو مثلث ACP و BDQ داریم:

$$\frac{PC}{DB} = \frac{AC}{DQ}$$

و چون داریم $DB = AC$، بنابراین

$$PC.DQ = AC^۲$$

از آن جا که طول AC برابر طول ضلع مربع محاطی و AB برابر قطر دایره است:

$$AB^۲ = ۲AC^۲$$

و بنابراین

$$۲PC.DQ = ۲AC^۲ = AB^۲$$

یا

$$۲PC.DQ = CD^۲ \qquad (۱)$$

سپس، به‌سادگی دیده می‌شود:

$$\frac{PC}{AE} = \frac{CD}{EF} = \frac{DQ}{FB} \qquad (۲)$$

برابری (۱) را، براساس برابری‌های (۲)، می‌توان این طور نوشت:

$$۲AE.FB = EF^۲ \qquad (۳)$$

اگر برابری $AF + EB = AB + EF$ را مجذور کنیم، به‌دست می‌آید:

$$AF^۲ + EB^۲ + ۲AF.EB = AB^۲ + EF^۲ + ۲AB.EF$$

که از آن جا، با درنظر گرفتن (۳)، خواهیم داشت:

$$AF^۲ + EB^۲ + ۲AF.EB = AB^۲ + ۲AE.FB + ۲AB.EF$$

و یا

$$AF^۲ + EB^۲ + ۲AF.EB = AB^۲ + ۲(AE.FB + AB.EF) \qquad (۴)$$

این اتحاد را درنظر می‌گیریم:

$$(AE+EF)(EF+FB)=AE.FB+(AE+EF+FB)EF$$

یا

$$AF.EB=AE.FB+AB.EF \qquad (۵)$$

و بالاخره، از (۴) ، با توجه به (۵) ، نتیجه می‌شود:

$$AF^۲+EB^۲=AB^۲$$

۱۹۱. این مسأله، حالت خاص مسألهٔ کلی‌تری است که به‌قضیهٔ بزرگ فرما مشهور شده است: معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ ، که درآن، n عددی درست و مثبت است، برای عددهای $n>۲$ ، دارای جواب درست برای x و y و z نیست.

فرما ، معمولاً ضمن خواندن کتاب، درحاشیه‌های آن یادداشت‌هایی می‌کرد. مثلاً ، وقتی که کتاب «حساب» دیوفانت را می‌خواند، درحاشیهٔ صفحه‌ای که معادلهٔ سیال $x^۲+y^۲=z^۲$ موردبحث قرارگرفته بود، نوشت: «به هیچ وجه نمی‌توان یک توان سوم را به‌مجموع دو توان سوم، یا یک توان چهارم را به‌مجموع دو توان چهارم و، به‌طورکلی، یك توان با نمای بزرگتر از ۲ را به‌مجموع دو توان با همان نما تبدیل کرد. من‌اثبات عجیبی برای این حکم پیدا کرده‌ام، ولی دراین‌جا، به‌دلیل کمبود جا ، نمی‌توانم آن را بیان کنم».

هنوز این معما حل نشده است که فرما، چگونه استدلال کرده است و آیا واقعاً، به‌چنین اثباتی رسیده است؟ در واقع، با همهٔ تلاش‌های بزرگترین ریاضی‌دانان، هنوز قضیهٔ بزرگ فرما، به‌صورت‌کلی خود، نه‌ثابت شده‌است و نه رد. البته، برای مقدارهای جداگانه‌ای از n ، توانسته‌اند قضیهٔ فرما را با دقت ثابت‌کنند. مثلاً ، اولر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ، عضو فرهنگستان پترزبورگ ، قضیهٔ فرما را ، برای $n=۳$ و $n=۴$ ، ثابت‌کرد. دیریکله (۱۸۰۵-۱۸۵۹) ، ریاضی‌دان اهل گوتینگن آلمان ، حالت $n=۵$ را ثابت کرد وکومر (۱۸۱۰-۱۸۹۳)، استاد دانشگاه برلن، به‌کمك‌روش‌های جدید توانست ، درستی حکم قضیهٔ بزرگ فرما را ، تا $n=۱۰۰$ ثابت کند. سرانجام، ریاضی‌دانان معاصر امریکایی، بااستفاده از نتیجه‌گیری‌های کومر و

به‌کمك کامپیوتر، ثابت‌کردند، حکم فرما برای همهٔ عددهای از $n=3$ تا $n=4002$ درست است.

همان طور که گفتیم، حالت $n=4$ را اولر ثابت کرد. او ثابت‌کرد معادلهٔ

$$x^4+y^4=z^4 \qquad (1)$$

برای مقدارهای درست x و y و z، جواب ندارد. برای این منظور، کافی است ثابت‌کنیم معادلهٔ

$$x^4+y^4=z^2 \qquad (2)$$

برای‌مقدارهای‌درست، جواب‌ندارد. اگربتوانیم‌ثابت‌کنیم، معادلهٔ (۲) برای عددهای درست، بدون جواب است، درآن صورت، معادلهٔ (۱) هم، جواب درست نخواهد داشت.

در واقع، اگر عددهای درست x_1، y_1 و z_1، جوابی ازمعادلهٔ (۱) باشند، باید داشته باشیم:

$$x_1^4+y_1^4=z_1^4$$

و دراین صورت، سه عدد x_1، y_1 و z_1^2 جوابی ازمعادلهٔ (۲) خواهد بود. و اگر معادلهٔ اخیر جواب درست نداشته باشد، معادلهٔ (۱) هم بدون جواب می‌ماند.

بنابراین، برای این‌که مسألهٔ فرما (قضیهٔ بزرگ فرما، برای حالت $n=4$) حل‌شود، باید ثابت‌کنیم، معادلهٔ (۲) دارای جواب درست نیست. اثبات را با برهان خلف می‌دهیم.

فرض می‌کنیم x_1، y_1 و z_1 عددهای درستی باشند که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند. ضمناً، بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان این عددها را مثبت به حساب آورد، زیرا روشن است که اگر x_1، y_1 و z_1 درمعادلهٔ (۲) صدق‌کنند، $|x_1|$، $|y_1|$ و $|z_1|$ هم در این معادلهٔ صدق خواهندکرد. معادلهٔ (۲) را، بعد از قرار دادن این سه عدد، می‌توان این طورنوشت:

$$(x_1^2)^2+(y_1^2)^2=z_1^2$$

یعنی عددهای x_1^2، y_1^2 و z_1 عددهای فیثاغوری هستند و، همان طورکه

می‌دانیم، چنین سه عددی را می‌توان، نسبت به‌دوعدد فرد u و v که نسبت به‌هم اول‌اند، بیان کرد (ضمناً $u>v$):

$$x_1^2=u\cdot v \qquad (۳)$$

$$y_1^2=\frac{u^2-v^2}{2} \qquad (۴)$$

$$z_1=\frac{u^2+v^2}{2} \qquad (۵)$$

چون در برابری (۳)، حاصل‌ضرب دو عدد u و v، که نسبت به‌هم اول‌اند، مجذور کامل شده است، باید u و v، هرکدام مجذور کامل باشند (چرا؟)، یعنی

$$u=u_1^2 \qquad (۶)$$

$$v=v_1^2 \qquad (۷)$$

ضمناً عددهای u_1 و v_1 هم باید عددهایی فرد و نسبت به‌هم اول باشند و $u_1>v_1$. برابری‌های ۳، ۴ و ۵، با توجه به برابری‌های (۶) و (۷)، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$x_1^2=u_1^2v_1^2 \qquad (۸)$$

$$y_1^2=\frac{u_1^4-v_1^4}{2} \qquad (۹)$$

$$z_1=\frac{u_1^4+v_1^4}{2} \qquad (۱۰)$$

از برابری (۹) نتیجه می‌شود:

$$y_1^2=\frac{u_1^4-v_1^4}{2}=\frac{(u_1^2+v_1^2)(u_1^2-v_1^2)}{2} \qquad (۱۱)$$

ازآن‌جاکه مجموع وتفاضل دو عدد فرد، همیشه عددی است زوج، بنابراین

$$u_1+v_1=2u_2 \qquad (۱۲)$$

$$u_1-v_1=2v_2 \qquad (۱۳)$$

از آن جا

$$u_1=u_2+v_2 \qquad (۱۴)$$

$$v_1=u_2-v_2 \qquad (۱۵)$$

دراین‌جا هم u_2 و v_2 نسبت به‌هم اول‌اند، زیرا درغیراین‌صورت، با توجه به‌رابطه‌های (۱۴) و (۱۵)، نتیجه می‌شود که u_1 و v_1 نسبت به‌هم اول نیستند. و این، مخالف فرض است.

یادآوری می‌کنیم که، چون u_2 و v_2 نسبت به‌هم اول‌اند، مجموع مجذورهای آن‌ها هم نسبت به هر کدام از این عددها اول است، یعنی $u_2^2+v_2^2$، به‌جز واحد، هیچ‌مقسوم‌علیه‌مشترکی با u_2 و v_2 ندارد (چرا؟).

اکنون y_1^2 را از رابطه (۱۱)، برحسب u_2 و v_2، طبق رابطه‌های (۱۴) و (۱۵)، به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا u_1^2 و v_1^2 را از رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) پیدا می‌کنیم:

$$u_1^2=u_2^2+v_2^2+2u_2v_2$$
$$v_1^2=u_2^2+v_2^2-2u_2v_2$$

و از آن‌جا

$$u_1^2+v_1^2=2(u_2^2+v_2^2) \tag{۱۶}$$
$$u_1^2-v_1^2=4u_2v_2 \tag{۱۷}$$

حالا، بااستفاده از رابطه‌های (۱۱)، (۱۶) و (۱۷)، به‌دست می‌آید:

$$y_1^2=4u_2v_2(u_2^2+v_2^2)$$

که با تقسیم دو طرف این برابری بر ۴، خواهیم داشت:

$$\frac{y_1^2}{4}=u_2v_2(u_2^2+v_2^2) \tag{۱۸}$$

توجه کنیم که درمیان سه‌عددفیثاغوری x_1^2، y_1^2، z_1، دوعددنخست نمی‌توانند باهم فرد باشند، بنابراین، همیشه می‌توان x_1^2 را فرد، y_1^2 را زوج و، درنتیجه، z_1 را فرد به‌حساب آورد. به‌این ترتیب، y_1^2، عددی زوج است. ولی هرعدد زوج مجذورکامل بر ۴ بخش‌پذیر است و بنابراین، $\frac{y_1^2}{4}$ عددی است درست.

درسمت‌راست رابطهٔ (۱۸) به‌حاصل‌ضرب‌سه‌عدد u_2، v_2 و $u_2^2+v_2^2$ را داریم‌که دو به‌دو نسبت به‌هم اول‌اند و، ضمناً، این حاصل‌ضرب مجذور

کامل است (زیرا، برابر است با مجذور $\frac{y_1}{2}$). بنابراین، به‌ناچار بایدهر کدام از این سه عدد خود مجذور کامل باشند، یعنی باشیم:

$$u_2 = x_2^2, \qquad v_2 = y_2^2, \qquad u_2^2 + v_2^2 = z_2^2$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$$

به این ترتیب، اگر (x_1, y_1, z_1) ، جواب درستی از معادلهٔ $x^4 + y^4 = z^2$ باشد، ناچار جواب درست دیگری مثل (x_2, y_2, z_2) هم وجود دارد که در این معادله صدق می‌کند و، ضمناً، باید داشته باشیم: $z_1 > z_2$.

نابرابری $z_1 > z_2$ را می‌توان، بااین استدلال، ثابت‌کرد.

$$z_2^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u + v}{2}$$

از طرف دیگر

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

از آن‌جا

$$z_1 > z_2^2 \implies z_1 > z_2$$

اکنون، اگر از جواب درست (x_2 , y_2 , z_2) آغازکنیم، می‌توانیم بااستدلالی شبیه استدلال بالا، ثابت‌کنیم که جواب درست سه‌گانهٔ دیگری هم، مثل (x_3, y_3, z_3) وجود دارد که درمعادلهٔ (۲) صدق می‌کند. و از این عددهای درست سه‌گانه، تاهرجاکه بخواهیم پیدا می‌شود. این‌جواب‌ها، دنباله‌ای نامتناهی را به‌وجود می‌آورند:

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3), \quad \ldots$$

و درمیان آن‌ها، عددهای درست و مثبت

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهندکه، به‌صورتی یکنوا (مونوتون)، نزولی است:

$$z_1 > z_2 > z_3 > \dots$$

و منجر به‌تضادی منطقی می‌شود.

در واقع، این دنباله، نمی‌تواند بیش از z_1 جمله داشته باشد و، بنابراین، نمی‌تواند نامتناهی باشد. به این ترتیب، فرض وجود جوابی با عددهای درست برای معادلهٔ (۲)، منجر به‌تناقص منطقی می‌شود. بنابراین، معادلهٔ (۲) و، همراه باآن، معادلهٔ (۱)، نمی‌تواند جوابی شامل عددهای درست داشته باشد.

یادداشت: روشی که برای حل این مسأله به‌کار رفته است، روش نزول نامحدود نامیده می‌شود. دراین روش، با مبنا قرار دادن یك جواب دنبالهٔ بی‌پایانی از جواب‌ها پیدا می‌شودکه از عددهای درست و مثبتی‌که به طور یکنوا نزولی‌اند، تشکیل شده است:

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

از این روش، برای حل حالت‌های خاص قضیهٔ بزرگ فرما، می‌توان استفاده‌کرد، ولی به‌کار گرفتن آن، برای حالت کلی

$$x^n + y^n = z^n$$

(که درآن، n عددی است طبیعی)، عملی نیست.

۱۹۲. $OABC$ را، کنج سه‌وجهی مفروض می‌گیریم، که در آن، $OA = a$، $OB = b$ و $OC = c$. دراین صورت داریم:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}ab, \; S_{OAC} = \frac{1}{2}ac, \; S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$$

از آن‌جا

$$S^2_{OAB} + S^2_{OAC} + S^2_{OBC} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \qquad (1)$$

بنابه‌قضیهٔ فیثاغورث، به‌دست می‌آید:

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}, \; BC = \sqrt{b^2 + c^2}, \; AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

بااستفاده ازرابطهٔ هرون داریم:

$$S^2_{ABC} = \frac{AC + BC + AB}{2} \cdot \frac{AC + BC - AB}{2} \times$$

$$\times \frac{AC-BC+AB}{2} \cdot \frac{-AC+BC+AB}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}(AC^2+2AB \cdot BC+BC^2-AB^2) \times$$

$$\times (AB^2+2AC \cdot BC-AC^2-BC^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2) = \frac{1}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2);$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \qquad (2)$$

اکنون، باتوجه به‌برابری‌های (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$S_{ABC}^2 = S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OAC}^2$$

*

این‌مسأله، یکی ازمعادل‌های فضائی قضیهٔ فیثاغورث‌است. پروفسور و. لیتمان‌معتقدا ست که‌این‌شباهت‌را، برای نخستین‌بار، یوهان‌فولگابر، اهل اولم آلمان، درسال ۱۶۲۲ پیداکرده است.

۱۹۳. راه حل جبری. یکی ازضلع‌های مستطیل را x ونصف محیط آن‌را p می‌گیریم. در این‌صورت، مساحت مستطیل S چنین خواهد بود:

$$S = x(p-x)$$

یا

$$x^2 - px + S = 0$$

باحل این معادله به‌دست می‌آید:

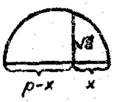
$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}$$

روشن است‌که x، تنها باشرط $S \leqslant \frac{p^2}{4}$ یک‌عدد حقیقی است؛ ضمناً حداکثر مقدار S برابر است با $\frac{p^2}{4}$، یعنی

$$S_{max} = \frac{p^2}{4} \Longrightarrow x = \frac{p}{2}$$

به‌این ترتیب، ازمیان مستطیل‌هایی که محیط برابر دارند، مساحت مربع، حداکثر مقدار ممکن است.

راه حل هندسی. نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم که قطر آن برابر با p ، یعنی نصف محیط مستطیل، باشد (شکل ۵۷). قطر نیم‌دایره را به‌دوقسمت x و $p-x$ تقسیم و ازنقطهٔ تقسیم، عمودی برقطر رسم می‌کنیم. طول این‌عمود، از نظر عددی برابر است با $\sqrt{S}$، زیرا باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:



شکل ۵۷

$$(p-x).x=S$$

روشن‌است که مساحت S، وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسدکه‌طول این عمود برابر با شعاع دایره باشد، یعنی وقتی‌که داشته باشیم:

$$S=\frac{p^{۲}}{۴}$$

و این، تنها وقتی ممکن است‌که داشته‌باشیم:

$$p-x=x \implies x=\frac{p}{۲}$$

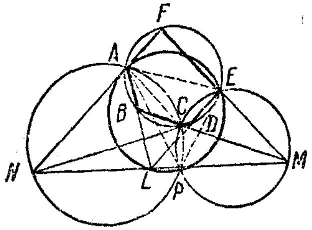
یعنی، وقتی‌که مستطیل به‌صورت مربع درآید.

*

مؤلف این‌مسأله، جرج‌والیس (۱۶۱۶-۱۷۰۳)، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی و استاد دانشگاه‌آکسفورد است‌که رساله‌های زیادی در زمینهٔ ریاضیات دارد. والیس، در زمینهٔ پایه‌گذاری علمی هندسه، به عنوان یك دانش قیاسی و براساس اصول ازقبل تعیین شده، کار می‌کرد. او توانست اصل توازی را ثابت‌کند و در ردیف قضیه‌ها قرار دهد. البته، این اثبات، با واردکردن اصل دیگری انجام گرفته است، که به«اصل والیس» معروف است: برای‌هرشکلی، شکلی متشابه به‌آن وبااندازه‌های دلخواه وجوددارد.

۱۹۴. نقطه‌های برخورد ضلع‌های روبه‌روی AB و DE ، BC و EF ، CD و FA را، به‌ترتیب، L ، M و N می‌نامیم. باید ثابت کنیم، نقطه‌های L ، M و N روی یك‌خط راست (خط راست پاسکال) قراردارند.

نقطهٔ A را بـه C و A را به E وصل می‌کنیم (روی شکل ۵۸ ، این خطها را به‌صورت خط‌چین نشان‌داده‌ایم) دایره‌های محیطی مثلث‌های ACN، ECM و AEL را رسـم می‌کنیم . دو دایرهٔ اول ، به‌جز C، در نقطهٔ P هم یکدیگر را قطع می‌کنند . ثـابت



شکل ۵۸

می‌کنیم، دایرهٔ سوم هم از P می‌گذرد. برای این منظور کافی است ثـابت کنیم: $A\hat{P}E = A\hat{L}E$. داریم:

$$A\hat{P}E = A\hat{P}C + C\hat{P}E = \frac{\overset{\frown}{DEF} - \overset{\frown}{ABC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{FAB} - \overset{\frown}{CDE}}{2} =$$

$$= \frac{\overset{\frown}{EF} - \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{FA} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{EFA} - \overset{\frown}{BCD}}{2} = A\hat{L}E$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، نقطه‌های M و N و P روی یك‌خط راست قرار دارند. برای این‌منظور ثابت می‌کنیم:

$$C\hat{P}M + C\hat{P}N = 180^\circ$$

به‌ترتیب داریم:

$$C\hat{P}M = 180^\circ - C\hat{E}M = C\hat{E}F = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FABC},$$

$$C\hat{P}N = 180^\circ - C\hat{A}N = C\hat{A}F = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CEF},$$

$$C\hat{P}M + C\hat{P}N = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FABC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CEF} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FABCEF} = 180^\circ$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌کنیم، نقطه‌هـای L، P و M هم، روی یك‌خط راست قراردارند. برای این‌منظور، ثابت می‌کنیم:

$$E\hat{P}M + E\hat{P}L = 180^\circ$$

به‌ترتیب داریم:

$$\widehat{EPM}=\widehat{ECM}=۱۸۰^\circ-\widehat{BCE}=۱۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}\widehat{EFAB},$$

$$\widehat{EPL}=۱۸۰^\circ-\widehat{BAE}=۱۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}\widehat{BCDE},$$

$$\widehat{EPM}+\widehat{EPL}=۱۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}\widehat{EFAB}+۱۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}\widehat{BCDE}=$$

$$=۳۶۰^\circ-\frac{۱}{۲}\widehat{BCDEFAB}=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

به‌این ترتیب، هم سه‌نقطهٔ M و P و N وهم سه‌نقطهٔ LوPوM، بریك خط راست واقع‌اند. بنابراین، نقطه‌های M و L و N روی یك‌خط راست قرار می‌گیرند.

*

بلز پاسکال (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲)، ریاضی‌دان ، فیزیك‌دان و فیلسوف فرانسوی، ازهمان‌زمان‌کودکی‌استعداد ریاضی خودرا آشکار کرد. درنوجوانی، نخستین قضیه‌های هندسهٔ مسطحه را پیش خودکشف کرد. بین شکل‌های ابداعی او، مثلث، دایره، متوازی‌الاضلاع، هرم وغیره دیده می‌شد.

مسألهٔ پاسکال، که راه‌حل‌آن‌را در این‌جا آوردیم، حالت خاصی است ازمسألهٔ کلی‌تری که به«قضیهٔ پاسکال» معروف است و می‌توان آن را، به‌این صورت تنظیم کرد : «در هرشش‌ضلعی‌که قابل‌محاط در یك‌مقطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی ، سهمی ، دوخط راست) باشد ، نقطه‌های برخورد ضلع‌های روبه‌رو، روی یك خط راست قرار دارند». پاسکال، این قضیه را، در ۱۶ سالگی ثابت‌کرد، ابتدا برای دایره (همان مسأله‌ای‌که دراین‌جا حل آن را آوردیم) و سپس، برای هر مقطع مخروطی دلخواه. او اثبات را ، در حالت‌کلی و از این‌راه به‌دست‌آوردکه می‌توان هرمقطع مخروطی‌را از دایره واز طریق تصویر و مقطع به‌دست آورد. پاسکال ، آن‌چه را تا سال ۱۶۳۹ کشف‌کرده‌بود، درسال ۱۶۴۰، درنخستین‌رسالهٔ خود به‌نام «نظریهٔ‌مقطع‌های مخروطی» چاپ‌کرد.

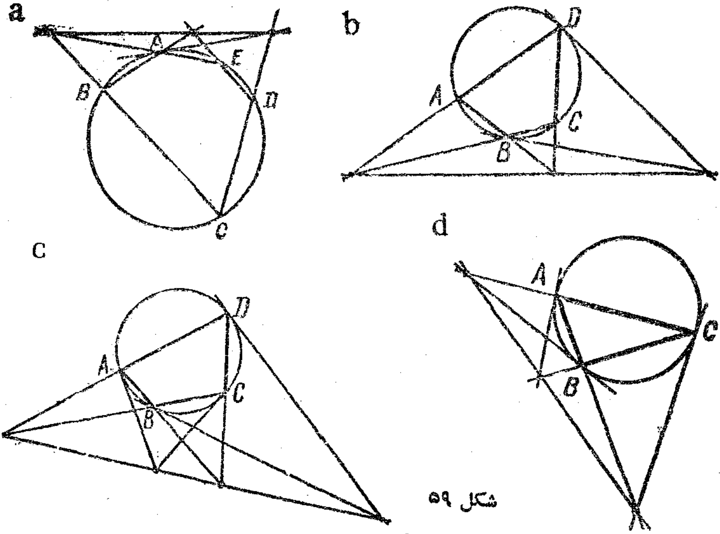
قضیهٔ پاسکال، یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های هندسهٔ تصویری معاصر است، دانشی که کلی‌ترین ویژگی‌های شکل‌را، که ضمن هرگونه مقطع و تصویر مرکزی ثابت‌می‌ماند، موردمطالعه قرار می‌دهد. زندگی‌نامه‌نویسان پاسکال، به‌حق، معتقدندکه تنها یکی ازاین قضیه‌ها کافی بود تا نام‌پاسکال‌را، در ردیف دانشمندان ریاضی درجهٔ اول قرار دهد.

پاسکال، هم در ریاضیات وهم درسایر زمینه‌ها، کشف‌های مهمی دارد. مثلاً، در رسالهٔ «ویژگی‌بخش‌پذیری عددها»، قاعده‌ای کلی، برای‌بخش‌پذیر-بودن یك‌عدد درست برعدد درست دیگر، پیداکرده است‌که براساس محاسبهٔ مجموع رقم‌های مقسوم قرار دارد. در رسالهٔ «مثلث حسابی»، روش محاسبهٔ ضریب‌های بسط دوجمله‌ای ویك رشته از قانون‌های حساب احتمال را تنظیم‌کرده است. ضمناً، استدلال‌ها را باروش استقرای ریاضی داده است و، در حقیقت، پاسکال بودکه روش استقرای ریاضی را تنظیم‌کرد و برای‌اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها به‌کار برد. محاسبه‌های مربوط به‌مساحت‌ها و حجم‌ها، بهانه‌ای بود تاپاسکال به‌کشف حساب دیفرانسیلی وانتگرالی‌برسد.

۱۹۵. حالت‌های‌حدی‌زیررا، ازمسألهٔ‌پاسکال، موردبررسی‌قرارمی‌دهیم:

حالت اول. فرض‌کنید، دو رأس شش‌ضلعی محاطی برهم منطبق‌شوند، در این‌صورت، ضلعی‌که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کرد، به‌مماس تبدیل می‌شود (شکل ۵۹-a). در این حالت، حکم مسأله چنین می‌شود: در هر پنج‌ضلعی قابل‌محاط دردایره، نقطه‌های برخورد دوجفت ضلع‌های غیرمجاور و نقطهٔ برخورد ضلع پنجم با مماس در رأس روبه‌رو (بردایرهٔ محیطی)، روی یك‌خط راست واقع‌اند.

حالت دوم. به‌همین ترتیب، چهارضلعی محاطی را می‌توان همچون یك‌شش‌ضلعی درنظرگرفت‌که، درآن، دوجفت رأس برهم منطبق شده باشند. در این‌حالت، این‌حکم به‌دست می‌آید: در هرچهارضلعی محاطی، دوجفت ضلع‌های روبه‌رو و یك‌جفت مماس‌های دو رأس روبه‌رو (بردایرهٔ محیطی چهارضلعی)، در نقطه‌هایی یکدیگر را قطع می‌کنند که روی یك خط‌راست قرار دارند (شکل ۵۹-b).



شکل ۵۹

بارسم مماس‌ها، درهمهٔ رأس‌های چهارضلعی، به‌سادگی ثابت می‌شود: در هرچهارضلعی محاطی، دوجفت ضلع‌های روبه‌رو و دو جفت مماس‌های در رأس‌های روبه‌رو، در چهارنقطه یکدیگررا قطع می‌کنندکه روی یك‌خط راست قرار دارند (شکل ۵۹-c).

حالت سوم. سرانجام مثلث را می‌توان یك‌شش‌ضلعی محاطی دانست که درآن همهٔ رأس‌ها مضاعف‌اند (یعنی، رأس‌ها دوبه‌دو برهم منطبق‌اند). دراین حالت، این‌حکم درست است: درهر مثلثی که دریك دایره محاط باشد، سه‌نقطهٔ برخورد هرضلع با مماس در رأس روبه‌رو، بریك خط راست قرار دارند (شکل ۵۹-d).

۱۹۶. این مسأله‌را، ازرسالهٔ«ویژگی‌بخش‌پذیری عددها»برداشته‌ایم.

پاسکال، مسأله را، این‌طور حل می‌کند: فرض‌کنید، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۰ بر A برابر $r_۱$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰r_۱$ بر A برابر $r_۲$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰r_۲$ بر A برابر $r_۳$ باشد وغیره. اگرعددمفروض، مثلاً، چهاررقمی وبه‌صورت $\overline{MCDU}$ باشد (که درآن، U،D،C،M، به‌ترتیب، رقم‌های

هزارگان، صدگان، دهگـان ویکان عدد است)، نشانه بخش‌پذیری این عدد بر A چنین است:

اگر $U+Dr_1+Cr_2+Mr_3$ بر A بخش‌پذیر باشد (یعنی‌مضربی از A باشد) ؛ عدد $\overline{MCDU}$ هم بر A بخش‌پذیر است.

در واقع، فرض‌کنید:

$$10=Aq_1+r_1,$$
$$10r_1=Aq_2+r_2,$$
$$10r_2=Aq_3+r_3$$

درآن‌صورت، داریم:

$$\begin{aligned}U+Dr_1+Cr_2+Mr_3&=U+D(10-Aq_1)+\\&+C(10r_1-Aq_2)+M(10r_2-Aq_3)=U+10D+\\&+10C(10-Aq_1)+10M(10r_1-Aq_2)-(A\text{مضرب})=\\&=U+10D+100C+100M(10-Aq_1)-(A\text{مضرب})=\\&=U+10D+100C+1000M-(A\text{ مضرب})\end{aligned}$$

وبنابراین، حکم ثابت می‌شود.

۱۹۷. مسأله، با این‌استدلال حل می‌شود: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ ، یعنی $\frac{13}{12}$ می‌شود ۲۶۰۰۰ لیور ، از آن‌جا $\frac{1}{12}$ برابر ۳۰۰۰ لیور می‌شود. بنابراین، سهم اولی ۱۲۰۰۰، سهم دومی ۸۰۰۰ وسهم سومی ۶۰۰۰ لیور می‌شود.

*

این‌مسأله، از مجموعهٔ مسأله‌هـای ژاك اوزانـام (۱۶۴۰-۱۷۱۷)، ریـاضی‌دان فرانسوی برداشته شده است . اوزانـام ، مولف کتاب درسی چهارجلدی، به‌نام «دورهٔ ریاضیات» است.

$$
\begin{array}{l|l}
y^4-\frac{1}{3}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 & y^2-2ay+a^2 \\ \cline{2-2}
y^4-2y^3+a^2y^2 & y^2+2ay-\frac{a^2}{2} \\ \hline
2ay^3-4\frac{1}{2}a^2y^2+3a^3y & \\
2ay^3-4a^2y^2+2a^3y & \\ \hline
-\frac{1}{2}a^2y^2+a^3y-\frac{1}{2}a^4 & \\
-\frac{1}{2}a^2y^2+a^3y-\frac{1}{2}a^4 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

*

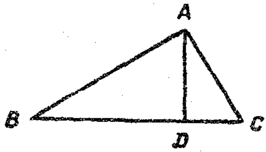
این مسأله ، از کتاب «حساب عمومی» نیوتون (۱۶۴۲-۱۷۲۷)، ریاضی‌دان وفیزیك‌دان انگلیسی برداشته شده‌است.

نیوتون کشاورززاده بود وپدرش قبل از تولد پسر خود ازدنیا رفت. دانشمندآینده، ازهمان دوران کودکی، گرایش خودرا به‌کار مستقل وآموزش جدی نشان‌داد. در دانشگاه کمبریج تحصیل کرد و درآن‌جا بودکه معلمان را ازاستعداد ریاضی خود، دچار حیرت کرد . بعدها استاد همین دانشگاه شد. از سال ۱۷۰۳، رئیس‌جامعهٔ سلطنتی (فرهنگستان علوم) لندن‌شدکه‌بسیاری از دانشمندان طراز اول آن زمان را، درخود جمع کرده بود.

ایزاك‌نیوتون، مؤلف کتاب مشهور «مبانی ریاضی فلسفهٔ‌طبیعی» است (۱۶۸۷)؛ که درآن، قانون‌های مشهور نیوتون در زمینهٔ مکانیك ویك‌رشته کشف‌های دیگررا، مطرح کرده است. درسال ۱۷۸۷، کتاب «حساب عمومی» را نوشت‌که ، درآن ، ازروش جبری با نشانه‌ها و طرح‌ریزی امروزی، صحبت کرده است.

برکتیبه‌ای که درآرامگاه او درلندن نگه‌داری می‌شود، نوشته شده

است: «این‌جـا ، ایزاك نیوتون آرمیده است که بـا نیروی شبه‌خدائی خود توانست حرکت و شکل سیاره‌هـا وجزر و مد اقیانوس‌ها را ، به‌یاری روش ریاضی خودش روشن‌کند. او، برای نخستین‌بار، پرتوهای نورانی را مورد مطالعه‌قرارداد و،از آن‌جا، ویژ گی رنگ‌هارا کشف‌کرد، چیزی که تاآن‌زمان، هیچ‌کس در بـارهٔ آن حدس هم‌نزده بود... خوشا به‌حـال از دنیارفتگان، که چنین انسان باشکوهی، درمیان‌آن‌هاست».



شکل ۶۰

۱۹۹. نیوتـون مسأله را این طور حل‌می‌کند: فرض‌کنیم $BC=a$ و $AD=y$ (شکل ۶۰). چون زاویهٔ ABD معلـوم است ، نسبت بیـن پـاره‌خط‌های AD و BD هم معلوم خواهد بود . (از روی جدول سینوس‌ها یـا تانژانت‌هـا) ، این نسبت را $\frac{d}{l}$ می‌نامیم. به‌این ترتیب

$$\frac{d}{l}=\frac{y}{BD} \implies BD=\frac{l.y}{d}$$

به‌همین ترتیب، با معلوم‌بودن زاویهٔ ACD، نسبت AC به CD معلوم است که‌آن‌را برابر $\frac{d}{f}$ می‌گیریم. ازآن‌جا

$$DC=\frac{f.y}{d}$$

ولی می‌دانیم: $BD+DC=BC$، بنابراین

$$\frac{l.y}{d}+\frac{f.y}{d}=a$$

با حل این‌معادله، نسبت به‌مجهول y، به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{ad}{l+f}$$

این‌مسأله هم، ازکتاب «حساب عمومی» نیوتون برداشته‌شده‌است.

۲۰۰. حل نیوتون. اگر ۱۲ گاو در ۴ هفته $۳\frac{۱}{۳}$ آکر از چراگاه را می‌خورند، باتوجه به‌تناسب ۳۶ گاو در ۴ هفته یا ۱۶ گاو در ۹ هفته یا ۸ گاو در ۱۸ هفته، ۱۰ آکر از چراگاه را می‌خورند. این وضع، به‌فرض آن است که علف‌ها رشد نکنند. ولی علف رشد می‌کند و، به‌همین جهت، ۲۱ گاو می‌توانند در ۹ هفته روی ۱۰ آکر چراگاه، غذا بخورند. یعنی علفی که در ۱۰ آکر در ۵ هفتهٔ آخر روییده است، می‌تواند درجریان ۹ هفته ۲۱ گاو را نسبت به ۱۶ گاو، یعنی ۵ گاو را خوراك بدهد یا، درواقع، $\frac{۵}{۲}$ گاو را در ۱۸ هفته سیر کند، به‌همین ترتیب، رشد علف در ۱۴ هفته (اضافهٔ ۱۸ نسبت به ۴)، می‌تواند برای چریدن ۷ گاو در ۱۸ هفته کافی باشد. به این ترتیب، داریم:

$$(\text{۷ گاو}):\left(\frac{۵}{۲}\text{ گاو}\right)=(\text{۱۴ هفته}):(\text{۵ هفته})$$

به‌این ترتیب، اگر این ۷ گاو را، که می‌توانند تنها از رشد علف‌ها استفاده کنند، به ۸ گاوی که علف بدون رشد را می‌خورند، اضافه‌کنیم، ۱۵ گاو در جریان ۴ هفته به دست می‌آید. سرانجام، اگر ۱۰ آکر می‌تواند ۱۵ گاو را درجریان ۱۸ هفته تغذیه کند، بنابراین، باتناسب معلوم می‌شود که، ۲۴ آکر می‌تواند درهمین مدت ۳۶ گاو را تغذیه کند.

اکنون، به حل جبری این مساله می‌پردازیم. فرض می‌کنیم، y سهم ذخیره‌ای علفی باشد که در آکر، در جریان ۱ هفته، از رشد علف‌ها به‌دست می‌آید. دراین‌صورت، علف‌چراگاه اول، درجریان یك هفته به‌اندازهٔ $۳\frac{۱}{۳}y$ و در جریان ۴ هفته به اندازهٔ $\frac{۴۰}{۳}y$ مقدار اولیهٔ علفی که درآن بوده است، ذخیره می‌کند. بنابراین، ۱۲ گاو درجریان ۴ هفته، همان قدرعلف می‌خورند که درچراگاهی به وسعت $\left(۳\frac{۱}{۳}+\frac{۴۰}{۳}y\right)$ آکر وجود دارد. سپس، به‌سادگی

محاسبه می‌شود که سطح لازم چراگاه برای خوراك ۱ گاو در ۱ هفته عبارت است از

$$\frac{۳\frac{۱}{۳}+\frac{۴۰}{۳}y}{۴۸}=\frac{۱۰+۴۰y}{۱۴۴}\ (\text{آکر})$$

اکنون، به محاسبهٔ مساحتی از چراگاه می‌پردازیم که ذخیرهٔ علف آن، برای تغذیهٔ ۲۱ گاو در جریان ۹ هفته کافی باشد. این مساحت برابر است با $۱۰+۹۰y$، زیرا رشد هفتگی در ۱ آکر برابر است با y که در ۹ هفته برای ۱ آکر برابر $۹y$ و برای ۹ هفته در ۱۰ آکر برابر $۹۰y$ می‌شود. بنابراین، مساحتی از چراگاه که برای تغذیهٔ ۱ گاو در جریان ۱ هفته لازم است، عبارت است از

$$\frac{۱۰+۹۰y}{۹\times ۲۱}=\frac{۱۰+۹۰y}{۱۸۹}\ (\text{آکر})$$

چون میزان تغذیه باید یکی باشد، داریم:

$$\frac{۱۰+۴۰y}{۱۴۴}=\frac{۱۰+۹۰y}{۱۸۹}$$

از آن‌جا

$$y=\frac{۱}{۱۲}$$

اکنون، به‌سادگی می‌توانیم مساحتی از چراگاه را که برای چریدن یك گاو درجریان یك هفته لازم است، به‌دست‌آوریم. این مساحت، چنین است:

$$\frac{۱۰+۴۰y}{۱۴۴}=\frac{۱۰+۴۰\times\frac{۱}{۱۲}}{۱۴۴}=\frac{۵}{۵۴}\ (\text{آکر})$$

تعداد گاوهایی را که می‌توانند درچراگاه سوم درجریان ۱۸ هفته تغذیه شوند، با x نشان می‌دهیم. به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۲۴+۲۴\times ۱۸\times\frac{۱}{۱۲}}{۱۸x}=\frac{۵}{۵۴}$$

که با حل آن، به‌دست می‌آید: $x = ۳۶$.

بنابراین، چراگاه سوم، درجریان ۱۸ هفته، می‌تواند ۳۶ گاو را تغذیه کند.

۲۰۱. پاسخ: ۱۸۴۰ فونت.

راه حل نیوتون: «برای حل این مساله، باید به بعضی ملاحظه‌ها که به‌طور پنهانی در آن وجود دارد، توجه کنیم.

بازبان عادی	با زبان جبری
تاجر سرمایه‌ای دارد	x
که درسال، ۱۰۰ فونت آن را خرج می‌کند	$x - ۱۰۰$
به باقی‌ماندهٔ پولش، $\frac{۱}{۳}$ آن اضافه می‌شود.	$x - ۱۰۰ + \frac{x - ۱۰۰}{۳}$ یا $\frac{۴x - ۴۰۰}{۳}$
درسال دوم، دوباره، ۱۰۰ فونت خرج می‌کند.	$\frac{۴x - ۴۰۰}{۳} - ۱۰۰$ یا $\frac{۴x - ۷۰۰}{۳}$
و به‌باقی‌مانده، یک‌سوم آن، اضافه می‌شود.	$\frac{۴x - ۷۰۰}{۳} + \frac{۴x - ۷۰۰}{۹}$ یا $\frac{۱۶x - ۲۸۰۰}{۹}$
در سال سوم، بازهم، ۱۰۰ فونت خرج می‌کند	$\frac{۱۶x - ۲۸۰۰}{۹} - ۱۰۰$ یا $\frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۹}$
و به‌باقی‌مانده، یک‌سوم آن اضافه می‌شود.	$\frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۹} + \frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۲۷}$ یا $\frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷}$

بنابراین، حل مساله، منجربه حل این معادله می‌شود:

$$\frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷} = ۲x$$

دو طرف معادله را در ۲۷ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۶۴x - ۱۴۸۰۰ = ۵۴x$$

از هردو طرف $۵۴x$ راکم می‌کنیم: $۱۰x - ۱۴۸۰۰ = ۰$. دوطرف را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم، بـه دست می‌آوریـم: $x = ۱۴۸۰$. بنابراین، سرمایهٔ نخستین این تاجر، برابر ۱۴۸۰ فونت بوده است.

۲۰۲. هردو جملهٔ سمت چپ برابری را به‌صورت $a + ib$ درمی‌آوریم. برای جملهٔ اول داریم:

$$\sqrt{۱+\sqrt{-۳}} = \sqrt{۱+i\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}+۲i\frac{\sqrt{۳}}{۲}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}}+i\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}+i\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

به‌همین ترتیب، برای جملهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{۱-\sqrt{-۳}} = \sqrt{\frac{۳}{۲}} - i\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

وازآن‌جا

$$\sqrt{۱+\sqrt{-۳}} + \sqrt{۱-\sqrt{-۳}} = ۲\sqrt{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{۶}$$

*

مولف این مسالـه، گوتفرید ویلهلم لایب نیتس (۱۶۶۶ - ۱۷۱۶)، ریاضی‌دان و فیلسوف آلمانی، در لایبزیك متولدشد. پدرش محضردار و استاد اخلاق بود. در شهر زاد وبومی خود وارد دانشگاه شد وبه تحصیل حقوق پرداخت. به‌خاطرمنطقی بودن ریاضیات به‌این دانش علاقه‌مندشد. ازهمان کودکی به‌مطالعهٔ کتاب‌های علمی شوق داشت و نوشته‌های ارسطو و دکارت رامطالعه‌کرد.

کار علمی لایب نیتس، با فعالیت دولتی او، به‌عنوان فرستادهٔ سیاسی

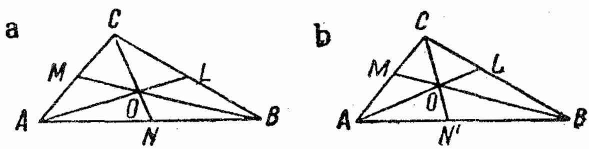
به پاریس، مخلوط شده بود. درسال ۱۶۷۳ درانگلستان بود و، درآن‌جا، ماشین حسابی راکه خود او ـ بعد ازآشنایی با ماشین حساب پاسکال ـ ساخته بود، در جامعهٔ سلطنتی، بـه معرض نمایش گذاشت. بعد از آن‌که به پاریس بازگشت، به‌عضویت جامعهٔ سلطنتی انتخاب‌شد.

لایب‌نیتس، هم زمان با نیوتون وبدون رابطه با او، به‌آنالیز ریاضی معاصر ـ حساب دیفرانسیلی وانتگرالی ـ دست یافت.

او مقدمات نظریهٔ دترمینان‌ها را، که ضمن حل دستگاه‌های درجهٔ اول چند مجهولی پدیدآمده بود، طرح ریخت. لایب‌نیتس، به‌جز این‌ها، کارهای زیادی دربارهٔ ویژگی‌های منحنی‌ها وتجزیهٔ تابع‌ها به رشته داردکه منجربه نتیجه‌گیری‌های مهمی شد.

۲۰۳. ۱) شرط لازم است. فرض می‌کنیم خطهای راست AL، BM و CN (شکل ۶۱ ـ a)، در نقطهٔ O بـه هـم رسیده باشند (حالت توازی خطهای‌راست رابه‌عهدهٔ‌خواننده‌می‌گذاریم). ثابت‌می‌کنیم، دراین‌حالت،این رابطه برقراراست:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$



شکل ۶۱

با توجه به‌شکل داریم:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{S_{ACN}}{S_{NCB}}=\frac{S_{AON}}{S_{NOB}}=$$

$$=\frac{S_{ACN}-S_{AON}}{S_{NCB}-S_{NOB}}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$\frac{BL}{LC}=\frac{S_{BOA}}{S_{COA}};\qquad \frac{CM}{MA}=\frac{S_{COB}}{S_{AOB}}$$

ازاین‌جا، بعد ازضرب وساده‌کردن، به‌دست می‌آید.

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}\cdot\frac{S_{BOA}}{S_{COA}}\cdot\frac{S_{COB}}{S_{AOB}}=۱$$

۲) شرط کافی است. اکنون فرض می‌کنیم، این رابطه برقرارباشد:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=۱ \qquad (۱)$$

ثابت می‌کنیم که، در چنین صورتی، خطهـای راست AL، BM و CN از یك نقطه می گذرند.

نقطهٔ برخورد خطهای راست AL وBM را O می‌گیریم (شکل ۶۱ ـ b) وآن را به‌نقطهٔ C وصل می‌کنیم. خطهای راست AL، BM وCN′ درنقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند، بنابراین در موردآن‌ها، بنابرقسمت اول مساله، (لازم بودن شرط)، باید داشته باشیم:

$$\frac{AN'}{N'B}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=۱ \qquad (۲)$$

از برابرقرار دادن سمت چپ برابری‌های (۱) و (۲)، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$\frac{AN'}{N'B}=\frac{AN}{NB}\Rightarrow\frac{AN'+N'B}{N'B}=\frac{AN+NB}{NB}$$

ویا

$$\frac{AB}{N'B}=\frac{AB}{NB}\Rightarrow N'B=NB$$

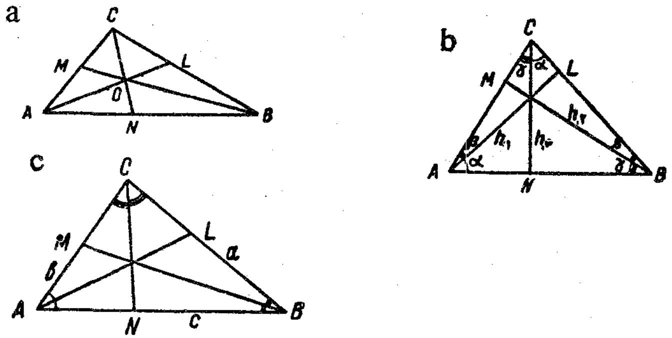
یعنی N′ برN منطبق است. بنابراین، خط راست CN بر خط راست CN′ قرار می گیرد و ازنقطهٔ O می‌گذرد، یعنی سه‌خط راست AL، BM وCN درنقطهٔ O به‌هم می‌رسند.

*

جـی‌یـووانوسه‌وا (۱۶۴۸ ـ ۱۷۳۴)، هندسه‌دان ایتالیایی، به‌حرفهٔ مهندسی‌هیدرولیك‌اشتغال‌داشت. مسالهٔ‌سه‌وارا‌ازرسالهٔ‌اوبه‌نام«دربارهٔ‌خطهای راست» (۱۶۷۸) برداشته‌ایم. خود سـه‌وا، مساله را باروش خالص هندسی

و با تکیه بر قانون‌های استاتیك، یعنی بر مبنای ملاحظه‌های مکانیکی، حل کرده است.

۰۲۰۴ ۱) مثلث دلخواه ABC را در نظرمی گیریم ومیانه‌های AL، BM و CN آن را رسم می‌کنیم (شکل ۶۲-a).



شکل ۶۲

برای میانه‌ها داریم:

$$AN=NB\ ,\ BL=LC\ ,\ CM=MA$$

وبنابراین، رابطهٔ

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

خود بــه خود برقراراست و، درنتیجه، میانه‌های AL، BM و CN ازیك نقطه می‌گذارند.

۲) AL، BM و CN را ارتفاع‌های مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۶۲ - b).

زاویهٔ بین ارتفاع‌هاوضلع‌های مثلث‌را α، βو γ می‌گیریم. دراین‌صورت

$$\frac{AN}{NB}=\frac{h_3 \cdot tg\gamma}{h_3 \cdot tg\alpha}=\frac{tg\gamma}{tg\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{BL}{LC}=\frac{h_1 \cdot tg\alpha}{h_1 \cdot tg\beta}=\frac{tg\alpha}{tg\beta} \qquad (2)$$

$$\frac{CM}{MA}=\frac{h_2 \cdot tg\beta}{h_2 \cdot tg\gamma}=\frac{tg\beta}{tg\gamma} \qquad (3)$$

که بعد از ضرب رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{tg\gamma}{tg\alpha}\cdot\frac{tg\alpha}{tg\beta}\cdot\frac{tg\beta}{tg\gamma}=۱$$

ورابطهٔ اخیر، به‌معنای‌آن است که ارتفاع‌های AL، BM و CN مثلث، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

۳) حالا، AL و BM و CN را نیمسازهای زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۶۲-c). برای سادگی‌کار، ضلع‌های مثلث را با a، b و c نشان می‌دهیم. بنابر ویژگی نیمساز در مثلث، این رابطه‌ها را داریم

$$\frac{AN}{NB}=\frac{b}{a},\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b},\frac{CM}{MA}=\frac{a}{c}$$

که با ضرب‌آن‌ها دریکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=۱$$

بنابراین، نیمسازهـای AL ، BM و CN، در مثلث ABC، از یك نقطه می‌گذرند.

۲۰۵. برای جمله‌های $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n از تصاعد هندسی داریم:

$$u_۱:u_۲=u_n:u_{n+۱}\qquad (n=۲,\ ۳,\ ۴,\ldots)$$

فرض می‌کنیم، تصاعد هندسی مفروض، صعودی باشد، دراین‌صورت، $u_۱$ کوچکترین و $u_{n+۱}$ بزرگترین جملهٔ‌آن خواهد بود. بنابرنابرابری‌مشهور اقلیدس، داریم:

$$u_{n+۱}+u_۱>u_۲=n_n\ ,$$
$$u_{n+۱}>u_n+(u_۲-u_۱)$$

و درنتیجه، برای $n=۲,\ ۳,\ ۴,\ldots$ خواهیم داشت:

$$u_۳>u_۲+(u_۲-u_۱)$$
$$u_۴>u_۳+(u_۲-u_۱)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n+۱}>u_n+(u_۲-u_۱)$$

ازمجموع این نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$u_{n+1} > u_2 + (n-1)(u_2 - u_1) \qquad (1)$$

که اگر شرط مساله را به‌حساب‌آوریم، داریم:

$$u_2 + (n-1)(u_2 - u_1) = a_2 + (n-1)(a_2 - a_1) = a_{n+1} \quad (2)$$

وسرانجام، از رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$u_{n+1} > a_{n+1} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

*

یاکوب برنولی (۱۶۵۴ - ۱۷۰۵)، دانشمند سویسی واستاددانشگاه بال بود. کارهای‌او در زمینهٔ هندسه دیفرانسیلی، محاسبهٔ واریاسیونی (که خود بنیان‌گذارآن بود) وفیزیك ریاضی‌مشهوراست.

۲۰۶. فرض‌می‌کنیم، اسب رابه x پیستول خریده‌باشد. دراین‌صورت، با فروش آن، به‌اندازهٔ $\frac{x^2}{100}$ پیستول‌ضررکرده است. بنابرشرط مساله، باید داشته باشیم:

$$x - \frac{x^2}{100} = 24$$

باحل‌این‌معادلهٔ درجه دوم، دوجواب به‌دست می‌آید: $x_1 = 40$، $x_2 = 60$.

بنابراین، اسب را به ۴۰ یا ۶۰ پیستول خریده است.

*

این مساله را، ایتن بـه‌زو (۱۷۳۰ - ۱۷۸۳)، ریاضی‌دان فرانسوی تنظیم‌کرده است. بررسی نظریهٔ عمومی معادله‌ها، (۱۷۷۹) وقضیهٔ مشهور مربوط به‌بخش‌پذیری چند جمله‌ای جبری بردو جمله‌ای $x-a$ ـ که در آن a ریشه‌ای ازچند جمله‌ای است ـ (قضیهٔ بـه‌زو)، متعلق بـه‌اوست. به‌زو، همچنین، کتاب‌های درسی‌زیادی تالیف‌کردکه، درزمان‌او، به‌طور گسترده‌ای، مورد استفاده قرارمی‌گرفت.

۲۰۷. اثبات را باروش استقرای ریاضی می‌دهیم.

۱) حکم، برای $n = 1$ درست است، زیرا دراین حالت داریم:

$$f_1(x) = a_0 x + a_1 \,,$$

$$f_1(x)=a_0(x-b)+a_0b+a\ ,$$
$$f_1(x)=a_0(x-b)+f_1(b)$$

از رابطهٔ اخیر دیده می‌شودکه باقی ماندهٔ تقسیم $f_1(x)$ بر $x-b$، برابر است با $f_1(b)$.

۲) اکنون فرض می‌کنیم، حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد، ثابت می‌کنیم، دراین‌صورت، به‌ازای $n=k+1$ هم درست است.

بنابرفرض داریم:

$$f_k(x)=(x-b).\varphi(x)+f_k(b)$$

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=a_0x^{k+1}+a_1x^k+\ldots+a_kx+a_{k+1}=\\&=x(a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k)+a_{k+1}=\\&=xf_k(x)+a_{k+1}=x[(x-b).\varphi(x)+f_k(b)]+a_{k+1}=\\&=x(x-b)\varphi(x)+xf_k(b)+a_{k+1}\end{aligned}$$

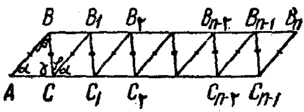
باقی ماندهٔ تقسیم $f_{k+1}(x)$ بر $x-b$ برابراست با باقی ماندهٔ تقسیم $xf_k(a)+a_{k+1}$ (که یك دو جمله‌ای درجه اول است) بر $x-b$. ولی، در ۱)، باقی‌ماندهٔ تقسیم دو جمله‌ای درجه اول را بر $x-b$ پیداکردیم، که برابرمی‌شود با

$$bf_k(b)+a_{k+1}=a_0a^{k+1}+a_1b^k+\ldots+a_kb+a_{k+1}=f_{k+1}(b)$$

به‌این‌ترتیب، حکم برای $u=k+1$ ثابت شدکه، درنتیجه، برای هرمقدار n ثابت است.

۲۰۸. اثبات‌را با برهان‌خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم زاویه‌های‌مثلثی مثل ABC، بزرگتر از $2d$ باشد.

ضلع AC را ادامه می‌دهیم (شکل ۶۳) واز نقطهٔ C ودرسمت راست‌آن، $n-1$ پاره خط CC_1، C_1C_2، C_2C_3، ...، $C_{n-2}C_{n-1}$ را برابربا ضلع AC جدا می‌کنیم:



شکل ۶۳

$$CC_1=C_1C_2=\ldots=C_{n-2}C_{n-1}=AC$$

حالا، روی این پاره‌خطها، مثلث‌های

$$CB_1C_1,\ C_1B_2C_2,\ \ldots,\ C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$$

را برابرمثلث مفروض، می‌سازیم، یعنی

$$\triangle_{ABC}=\triangle_{CB_1C_1}=\dots=\triangle_{C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}}$$

اکنون، نقطه‌های B و B_1، B_1 و B_2، ...، B_{n-2} و B_{n-1} را به‌وسیلهٔ پاره‌خطهای راستی به‌هم وصل می‌کنیم (این که، این نقطه‌ها روی یك خط راست واقع باشند، هنوز برای ما معلوم نیست). مثلث‌های برابر BCB_1، $B_1C_1B_2$، $B_2C_2B_3$، ...، $B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$ به‌دست می‌آیند.

روی پاره‌خط $B_{n-1}C_{n-1}$ هم، مثلث $B_{n-1}C_{n-1}B_n$ رابرابرمثلث‌هایی که هم‌اکنون به‌وجودآوردیم، می‌سازیم.

روشن است که اگر دوضلع یك مثلث با دوضلع از مثلث دیگر برابر و زاویهٔ بین این دوضلع، دریك مثلث، بزرگتر اززاویهٔ نظیرآن درمثلث دیگر باشد، ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر خواهد بود. این حکم را درمورد مثلث‌های ABC و BCB_1 به‌کار می‌بریم، نتیجه می‌شود: $BB_1<AC$ و، از آن جا، $AC-BB_1>0$، یعنی $AC-BB_1$ یك پاره‌خط است.

ازآن جاکه خط شکسته، همیشه بزرگتراست ازپاره‌خطی که دوسرخط شکسته را به‌هم وصل می‌کند، داریم:

$$AB+BB_1\times B_1B_2+\dots+B_{n-1}B_n+B_nC_{n-1}>$$
$$>AC+CC_1+C_1C_2+\dots+C_{n-2}C_{n-1}$$

از آن جا

$$AB+n.BB_1+B_nC_{n-1}>n.AC$$

که باتوجه به‌این‌که $B_nC_{n-1}=AB$، برای هرعدد طبیعی n داریم:

$$2AB+n.BB_1>n.AC\Rightarrow n(AC-BB_1)<2AB$$

نابرابری اخیر، با اصل ارشمیدس متناقض است که می‌گوید: «برای هردو پاره‌خط دلخواه، می‌توانیم پاره‌خط کوچکتررا به‌تعداد محدودی تکرار کنیم، به‌نحوی‌که، نتیجه، از پار ه‌خط دیگر، بزرگتر شود»، بنابراین اصل، برای پاره‌خطهای $AC-BB_1$ و $2AB$ می‌توان عددطبیعی n را به‌اندازهٔ کافی، طوری بزرگ انتخاب‌کردکه نابرابری زیر برقرارباشد:

$$n(AC-BB_1)>2AB$$

تضادمنطقی پیش می‌آید. ازاین‌جا نتیجه‌می‌شود، دردستگاه هندسی که، اصل ارشمیدس در موردآن صادق باشد، مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، نمی‌تواند از $2d$ بیشتر شود.

*

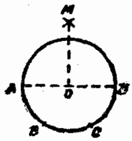
آدریان ماری‌لژاندر (۱۷۵۲ - ۱۸۳۳)، یکی ازریاضی‌دانان برجستهٔ فرانسوی است. شهرت او، به خاطر کارهایی است که درزمینهٔ آنالیز ریاضی و محاسبهٔ واریاسیونی انجام داده است. نخستین دانشمندی بودکه روش حداقل مربع‌ها راکشف‌کرد (۱۸۰۵) ودرمحاسبه‌های زمین سنجی خود به‌کار برد. تالیف «مقدمات هندسه» چه در فرانسه و چه بیرون از مرزهای آن، انتشارگسترده‌ای یافت. مثلاً، باید گفت‌که لباچوسکی (۱۷۹۲-۱۸۵۶)، ریاضیات را با مطالعهٔ همین‌کتاب آغاز کرد.

مساله‌ای راکه دراین‌جا حل‌کردیم، ازرسالهٔ لژاندر به‌نام «اندیشه‌ای دربارهٔ خط‌های موازی» (۱۸۳۳)، گرفته شده است. همین‌مساله، به‌صورت یك قضیه، در «مقدمات هندسهٔ» اوهم‌آمده است.

۲۰۹. این‌مساله به‌ناپلئون منسوب است. برای حل‌آن ابتدا به‌کمك پرگار، ازنقطهٔ دلخواهی واقع برمحیط دایره، سه‌نقطهٔ B، C وD راطوری جدا می‌کنیم‌که داشته باشیم:

$$AB = BC = CD = r$$

که درآن، r عبارت‌است ازشعاع‌دایرهٔ مفروض (شکل ۶۴).



شکل ۶۴

AC ضلع مثلث‌متساوی‌الاضلاع محاط دردایره و برابراست با $r\sqrt{3}$. از نقطه‌های A و D، که دردو انتهای قطر AD قراردارند، با شعاع برابر AC، دوکمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع‌کنند. حالا باید دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ OM بازکنیم تا، به کمك‌آن، بتوانیم‌محیط دایره‌را به‌چهاربخش‌برابرتقسیم‌کنیم. درواقع داریم:

$$OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

یعنی OM برابراست‌باضلع مربع محاط دردایره‌که راس‌های‌آن، محیط دایره

را به‌چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنند.

۲۱۰. اثبات این حکم، با استدلال زیر به‌دست می‌آید:

$$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=$$
$$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$$

که درآن داریم:

$$a^2+2a+2=(a+1)^2+1\neq 1\ ,$$
$$a^2-2a+2=(a-1)^2+1\neq 1$$

به‌این ترتیب، a^4+4 دارای دومقسوم علیه است‌که هیچ‌کدام از آن‌ها برابرخود عددویا واحد نیستند. درنتیجه، این‌عدد، عددی اول‌نیست.

*

این مساله به سوفیا ژرمن (۱۸۳۱-۱۷۷۶)، زن ریاضی‌دانی تعلق داردکه، اصل او، فرانسوی است. به‌خاطر رساله‌ای‌که به‌خاطر نوسان‌های صفحه‌های کشسان نوشت، جایزهٔ فرهنگستان علوم پاریس را به‌او دادند.

۲۱۱. فرض‌کنید: $a<p$ و $b<p$، که در آن، p عددی است اول. ثابت می‌کنیم، $a.b$ برم p بخش‌پذیر نیست.

ازبرهان خلف استفاده وفرض می‌کنیم $a.b$ برم p بخش‌پذیر باشد. در این‌صورت، کوچکترین عدد مثبت $b_1\geqslant b$ وجود داردکه از p بزرگتر است واگردر a ضرب شود، حاصل ضربی می‌دهدکه برم p بخش‌پذیر است. باتقسیم b_1 برم p به‌دست می‌آید:

$$b_1=pm+n$$

که درآن $n<p<b_1$. ازآن‌جا

$$n=b_1-pm$$

دوطرف این‌رابطه را در a ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$an=ab_1-apm$$

an باید بر p بخش‌پذیر باشد، زیرا هم ab_1 وهم apm مضربی از p هستند.

معلوم‌شدکه an باید بر p بخش‌پذیرباشد،ولی $n<b_1$ و، بنابراین،

b_1 کوچکترین عدد مثبتی نیست کـه ، به‌ازای آن، ab_1 بر p بخش‌پذیر است.

*

کارل فردریك‌گوس(۱۸۵۵-۱۷۷۷)، دانشمندآلمانی که معاصرانش، او را «سلطان‌ریاضی‌دانان» می‌نامیدند . استعداد ریـاضی گوس ، از دوران کودکی ظاهرشد. خود او، وقتی دوران‌کودکیش‌را به‌یادمی‌آورد، به‌شوخی می‌گفت: «من شمردن را، پیش ازحرف‌زدن یادگرفتم».

گوس، در برانشویك ، در خـانوادهٔ یك‌استاد لوله‌کش به‌دنیـا آمد. آموزش‌های اولیه را در مدرسهٔ محل تولد خود، به‌مدت ۷ سال ادامه داد. در آن‌جا بودکه به‌خـاطر استعداد درخشان ریـاضی خود ، همیشه موجب شگفتی معلم و دوستان خود می‌شد. اوآموزش عـالی خود را در دانشگاه گوتینگن‌دید. بعدها (۱۸۰۷)، تقریباً به‌مدت‌۵۰سال، کرسی استادی‌ریاضیات واخترشناسی همین دانشگاه را به‌عهده داشت . در ۱۹ سالگی ، وقتی‌کـه هنوز روی نیمکت دانشجوئی نشسته‌بود، کشفی مهم‌ارائه‌کرد: به‌طورکامل روشن‌کردکه در چه‌حالت‌هایی می‌توان n ضلعی منتظم را، به‌کمك پرگار و خط‌کش،رسم‌کرد. به‌ویژه، باحل معادلهٔ $x^{۱۷} - ۱ = ۰$ توانست هفده‌ضلعی منتظم‌را، به‌کمك پرگار وخط‌کش، رسم‌کند.

به اعتراف خـودگوس ، کارهـای بغرنج و طولانی محـاسبه‌ای (که به‌محاسبه‌های اخترشناسی مربوط می‌شد)، نه‌تنها او را خسته نمی‌کرد،بلکه موجب شادی ورضایت درونی اوهم می‌شد.

گوس، به‌کمك محاسبه ، توانست بـا چنان دقتی جای سیارك پیرس را پیداکندکه اخترشناسان موفق شدند،آن‌را در همان‌جایی‌که او معین‌کرده بود، پیداکنند.

گوس، ضمن‌کار در زمینهٔ ریاضیات، توانست نظریهٔ رشته‌ها و نظریهٔ معادله‌هـای دیفرانسیلی را پیش ببرد و تکامل ببخشد . قضیهٔ اصلی جبر، متعلق به‌اوست‌که ، بنـابرآن، هرمعادلهٔ درجهٔ n ام ، دست‌کم دارای یك ریشه است‌کـه ، ضمناً ، می‌تواند ریشه‌ای موهومی هم‌بـاشد . در رسالهٔ «بررسی‌هایی در بارهٔ حساب» خود، پایه‌های «نظریهٔ عددها» را، به‌صورت

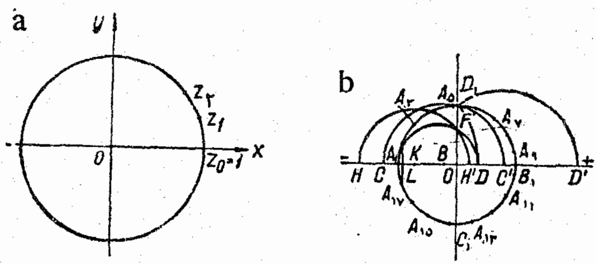
امروزی آن، طرح ریخت. کارهای اساسی زیادی در زمینهٔ نظریهٔ دیفرانسیلی عددها انجام داد . در زمینهٔ فیزیك ، روی نظریهٔ مغناطیس و بعضی از مسأله‌های اپتیك کار کرد .

در سال ۱۸۱۸، در نامه‌هایی که به بعضی از دوستانش نوشته است، دربارهٔ امکان وجود هندسهٔ نااقلیدسی در کنار هندسهٔ اقلیدسی، صحبت می‌کند. ولی، با کمال تأسف، هرگز هیچ مقاله یا رساله‌ای، در این باره ، منتشر نکرد.

۲۱۲. حل این مسأله، به این‌جا منجر می‌شود که محیط دایرهٔ به شعاع واحد را، به ۱۷ بخش برابر تقسیم کنیم. برای این منظور ، باید بتوانیم نقطه‌های

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

را بسازیم (شکل ۶۵-a)، که درآن، $i=\sqrt{-1}$ و $k=0,1,2,\ldots,16$ و z_k عبارت است از ریشه‌های معادلهٔ $z^n-1=0$.



شکل ۶۵

فرض می‌کنیم:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$$

از آن‌جا، بنابر قانون مشهور مواور، خواهیم داشت:

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}$$

که درآن $k=0,1,2,\ldots,16$. ریشه‌های معادلهٔ

$$z^{17}-1=0$$

عبارتند از عددهای

$$1,\varepsilon,\varepsilon^{2},\varepsilon^{3},\dots,\varepsilon^{16}$$

همهٔ این ریشه‌ها ، همان‌طور کـه از عبارت‌های مربوط به‌آن‌هـا دیده می‌شود ، بـاهم اختلاف دارند و رأس‌هـای یك ۱۷ ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع واحد را تشکیل می‌دهند. اکنون توجه می‌کنیم که

$$\varepsilon^{17-k}=\varepsilon^{17}.\varepsilon^{-k}=1\times\varepsilon^{-k}=\varepsilon^{-k}$$

بنابراین، ریشه‌های هفدهم واحدرا، می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$1,\varepsilon,\varepsilon^{2},\dots,\varepsilon^{8},\varepsilon^{-8},\dots,\varepsilon^{-2},\varepsilon^{-1}$$

می‌دانیم

$$z^{17}-1=(z-1)(z^{16}+z^{15}+\dots+z^{2}+z+1)$$

بنابراین، همهٔ‌ریشه‌های‌هفدهم واحد، به‌جز۱ ، باید درمعادلهٔ زیرصدق کنند.

$$z^{16}+z^{15}+\dots+z^{2}+z+1=0$$

یعنی

$$\varepsilon^{16}+\varepsilon^{15}+\dots+\varepsilon^{2}+\varepsilon+1=0$$

یا

$$\varepsilon^{16}+\varepsilon^{15}+\dots+\varepsilon^{2}+\varepsilon=-1$$

و یا معادل‌آن

$$\varepsilon+\varepsilon^{2}+\dots+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{-8}+\varepsilon^{-7}+\dots+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-1}=-1$$

که می‌توان‌آن‌را چنین نوشت:

$$(\varepsilon+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-8})+$$
$$+(\varepsilon^{3}+\varepsilon^{6}+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{7}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{5}+\varepsilon^{-7})=-1$$

جمله‌ها طوری تنظیم شده‌اندکه، درهرپرانتز، هرجمله، ازمجذور جملهٔ‌قبلی به‌دست‌آیدمجموع داخل پرانتزهارا، به‌ترتیب، با η و η_1 نشان می‌دهیم. در این‌صورت

$$\eta+\eta_1=-1$$

حالا، اگر η و η_1 را درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\eta\eta_1=-4$$

زیرا، ضمن عمل ضرب، از هرتوان ε، چهاربار پیدا می‌شود.

ازدو رابطهٔ اخیر، معلوم می‌شودکه η و η، ریشه‌های معادلهٔدرجهٔ دوم زیر هستند:

$$x^{2}+x-4=0 \qquad (1)$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\eta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}, \qquad \eta_{1}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$$

ضمناً، $\eta>0$ و $\eta_{1}<0$.

اکنون، همهٔ ریشه‌های هفدهم موهومی واحد را، به‌چهار گروه‌تقسیم می‌کنیم، به‌نحوی که در هرکدام ازآن‌ها، هرجمله، برابر با توان چهارم جملهٔ قبل باشد.

اگر مجموع جمله‌های گروه‌ها را، به‌ترتیب، z، z_{1}، z_{2} و z_{3} بنامیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \varepsilon+\varepsilon^{4}+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}=z \\ \varepsilon^{2}+\varepsilon^{8}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-8}=z_{1} \\ \varepsilon^{3}+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{5}=z_{2} \\ \varepsilon^{6}+\varepsilon^{7}+^{-6}+\varepsilon^{-7}=z_{3} \end{cases} \qquad (*)$$

از این‌جا، به‌سادگی معلوم می‌شود:

$$\begin{cases} z+z_{1}=\eta \\ z\cdot z_{1}=-1 \end{cases}$$

بنابراین، z و z_{1}، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم زیر هستند:

$$x^{2}-\eta x-1=0 \qquad (2)$$

وازآن‌جا

$$z=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2}+1}, \quad z_{1}=\frac{\eta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2}+1}$$

ضمناً $z>0$ و $z_{1}<0$.

از همان دستگاه برابری‌های (*) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} z_2 + z_3 = \eta_1 \\ z_2 \cdot z_3 = -1 \end{cases}$$

در این جا هم، z_2 و z_3، ریشه‌های این معادله‌اند:

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0 \qquad (۳)$$

از آن جا

$$z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}, \quad z_3 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1}$$

ضمناً $z_2 > 0$ و $z_3 < 0$.

فرض می‌کنیم

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$$
$$\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = y_1$$

به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y + y_1 = z \\ y \cdot y_1 = z_2 \end{cases}$$

که درآن‌ها، z عبارت است از ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۲) و z_2 برابر است با ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۳). y و y_1، ریشه‌های این معادله‌اند:

$$x^2 - zx + z_2 = 0 \qquad (۴)$$

از آن جا

$$y = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}, \quad y_1 = \frac{z}{2}\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - z_2}$$

ضمناً $y > y_1$، زیرا داریم:

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17}$$

اکنون، مقدار ε را، ازمعادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y \implies \varepsilon^2 - y\varepsilon + 1 = 0$$

از آن جا

$$\varepsilon=\frac{y}{۲}+\sqrt{\left(\frac{y}{۲}\right)^{۲}-۱} \qquad (۵)$$

علامت جلو رادیکال را، به‌این جهت ، مثبت گرفته‌ایم که $y=۲\cos\frac{۲\pi}{۱۷}$ و بنابراین

$$\varepsilon=\frac{y}{۲}+\sqrt{\left(\frac{y}{۲}\right)^{۲}-۱}=\frac{y}{۲}+i\sqrt{۱-\left(\frac{y}{۲}\right)^{۲}}=$$

$$=\cos\frac{۲\pi}{۱۷}+i\sin\frac{۲\pi}{۱۷}=\varepsilon$$

رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که ریشهٔ هفدهم واحد را می‌توان به‌کمك رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ نشان‌داد و، بنابراین، می‌توان آن‌را به‌کمك خط‌کش وپرگار رسم کرد. به‌این ترتیب، به‌پرسش مربوط به‌رسم هفده‌ضلعی منتظم، به‌کمك خط‌کش وپرگار، پاسخ مثبت داده می‌شود. حالا ، طریقهٔ رسم را نشان می‌دهیم. برای این‌منظور، این پاره‌خط‌ها را می‌سازیم:

۱) $\quad \eta=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}-\frac{۱}{۲},$

۲) $\quad \eta_{۱}=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}-\frac{۱}{۲},$

۳) $\quad z=\frac{n}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^{۲}+۱},$

۴) $\quad z_{۲}=\frac{\eta_{۱}}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta_{۱}}{۲}\right)^{۲}+۱},$

۵) $\quad y=\frac{z}{۲}+\sqrt{\left(\frac{z}{۲}\right)^{۲}-z_{۲}}$

با رسم y، دیگر محیط دایره ، به‌سادگی ، به ۱۷ بخش برابر تقسیم می‌شود. در واقع، همان‌طورکه قبلاً دیدیم، $y=۲\cos\frac{۲\pi}{۱۷}$ ، بنابراین ، $\frac{y}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۱۷}$، وتری از دایره است‌که دورأس متوالی هفده‌ضلعی منتظم را،

به‌هم وصل می‌کند. خود رسم، به‌این ترتیب انجام‌می‌شود (شکل ۶۵-b):

۱) دایرهٔ به‌شعاع واحد را در نظر می‌گیریم و قطرهای افقی و قائم A_1B_1 و D_1C_1 را رسم می‌کنیم؛

۲) روی‌محوری‌که برقطر A_1B_1 منطبق‌است، جهت ازچپ‌به‌راست، یعنی از A_1 به B_1 را، جهت مثبت، وجهت عکس‌آن، یعنی از B_1 به A_1 (از راست به‌چپ) را ، جهت منفی می گیریم ، به‌نحوی که در سمت راست صفر، پاره‌خطهای مثبت ودر سمت چپ‌آن، پاره‌خطهای منفی واقع باشند؛

۳) پاره‌خط $OB=-\frac{۱}{۴}$ را می‌سازیم؛

۴) در این‌صورت داریم:

$$BD_1=\sqrt{OB_1^2+OD_1^2}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

۵) به مرکز B و شعاع برابـر BD_1 دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل برخوردآن‌را با محور افقی، C و C' می‌گیریم. دراین‌صورت داریم :

$$BC'=\frac{\sqrt{۱۷}}{۴},\ \ BC=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

۶) به‌مرکزهای C' و C و، به‌ترتیب، باشعاع‌های CD_1 و CD، دایره‌هایی رسم می‌کنیم تا محور افقی‌را، درنقطه‌های D' و D قطع‌کنند؛

۷) با توجه به‌شکل ۶۵-b، به‌دست می‌آید:

$$OC=OB+BC=-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}=\frac{\eta_1}{۲},$$

$$OC'=OB+BC'=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷}=\frac{\eta}{۲},$$

$$OD'=OC'+C'D'=\frac{\eta}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{۲}\right)^2+۱}=z,$$

$$OD=OC+CD=\frac{\eta_1}{۲}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{۲}\right)^2+۱}=z_2;$$

۸) نیم‌دایره‌ای به‌قطر A_1D رسم می‌کنیم، به‌نحوی‌که شعاع OD_1 را، در نقطهٔ F، قطع‌کند؛

۹) به‌مرکز F وشعاع $FK=\frac{1}{2}OD'$، نقطهٔ Kرا علامت‌می گذاریم؛

۱۰) به‌مرکز K وشعاع KF دایره‌ای رسم می کنیم تا محورافقی‌را در H و H' قطع کند؛

۱۱) در این‌صورت، داریم:

$$-OH+OH'=HH'=2KH'=OD'=z_1$$

$$-OH.OH'=OF^2=-OA_1.OD=OD=z_2$$

$(-OA_1=1)$. بنابراین، پاره خطهای $-OH$ و OH'، ریشه‌های این معادله‌اند:
$$x^2-zx+z_2=0$$

و این، همان‌معادلهٔ (۴) است‌که ریشه‌های‌آن عبارتنداز y و y_1. به‌این‌ترتیب

$$y=-OH, \qquad y_1=OH' \qquad (y>y_1);$$

۱۲) y، یعنی‌ریشهٔ‌بزرگتررا، درنظرمی گیریم‌واین‌پاره‌خط‌رامی‌سازیم:

$$OL=\frac{y}{2}=\frac{-OH}{2}$$

۱۳) عمودی از نقطهٔ L ، بر محور افقی، اخراج می‌کنیم تا دایره را درنقطه‌های A_2 و A_{17} قطع‌کند ؛ ضمناً ، کمان A_1A_2 برابر $\frac{2\pi}{17}$ و وترآن، ضلع ۱۷ ضلعی مورد نظر است؛

۱۴) برای رسم ۱۷ ضلعی منتظم ،کافی است‌کمان A_1A_2 را ، پشت سرهم، روی محیط دایره جداکنیم و نقطه‌هایی راکه به‌دست می‌آید، به‌طور متوالی، به‌هم وصل کنیم.

همان طورکه قبلاً هم یادآوری‌کردیم، گوس مسألهٔ مربوط به‌رسم ۱۷ ضلعی منتظم را در ۱۹ سالگـی حل‌کـرد. مسألهٔ کلـی امکان رسم n ضلعی منتظم، او را به‌اثبات ایـن قضیهٔ مهم‌کشانید: «وقتی و تنها وقتی می‌تـوان n ضلعی منتظم را، به‌کمك خط‌کش و پـرگار، رسم‌کردکه عدد n بتواند به این صورت درآید:

$$2^m p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$$

که درآن، p_1، p_2، ...، p_s، عددهای‌اول مختلفی‌به‌صورت $2^{2^k}+1$ هستند».

درحالت خاصی‌که n عددی اول باشد ، شرط لازم برای این‌که بتوان

n ضلعی منتظم را رسم‌کرد، این است که n به‌صورت $۲^{۲^k}+۱$ باشد.

عدد ۱۷، به همین صورت است (به‌ازای $k=۲$) و، بنابرایـن، ۱۷ ضلعی منتظم، به‌کمك خط‌کش و پرگار، قابـل رسم است. با همین استدلال، معلوم می‌شود که n ضلعی‌های منتظم زیر را می‌توان رسم‌کرد:

- مثلث ($۲^{۲^k}+۱=۳$ به‌ازای $k=۰$)؛
- پنج ضلعی ($۲^{۲^k}+۱=۵$ به‌ازای $k=۱$)؛ و غیره.

بنابرقضیهٔ گوس نمی‌توان، مثلاً، هفت ضلعی منتظم را به‌کمك خط‌کش و پرگار رسم‌کرد، زیرا عدد ۷ را نمی‌توان به‌صورت $۲^{۲^k}+۱$ نوشت.

۲۱۳. مسأله، دو راه حل دارد:

راه حل اول

۱۲	۸	۵
۱۲	۰	۰
۴	۸	۰
۴	۳	۵
۹	۳	۰
۹	۰	۳
۱	۸	۳
۱	۶	۵
۶	۶	۰

راه حل دوم

۱۲	۸	۵
۱۲	۰	۰
۷	۰	۵
۰	۷	۵
۰	۸	۴
۸	۰	۴
۸	۴	۰
۳	۴	۵
۳	۸	۱
۱۱	۰	۱
۱۱	۱	۰
۶	۱	۵
۶	۶	۰

*

این مسأله را، سیمون دنیس پواسون (۱۷۸۱-۱۸۴۰) ، ریاضی دان فرانسوی درجوانی حل کرد. همین مسأله بودکه، به‌قول خود پواسون، سرنوشت او را تعیین کرد: او تصمیم گرفت، دنبال ریاضیات را بگیرد.

پواسون به‌قول خود وفا کرد. او ریاضیات را ادامه داد و ریاضی دانی با شهرت جهانی شد. او به‌عضویت بسیاری از فرهنگستان‌های اروپایی درآمد و ، منجمله، عضو افتخاری فرهنگستان پترزبورگ شد.

۲۱۴. باید ثابت کرد ، واسطهٔ عددی n عدد مثبت، از واسطهٔ هندسی آن‌ها کوچکتر نیست. این حکم را به طریقه‌های مختلفی می‌توان ثابت کرد ، دراین‌جا، راه حل خود کوشی را می‌آوریم.

باید ثابت کنیم:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

درستی نابرابری، به‌ازای $n=1$ درست است. ثابت می‌کنیم، این نابرابری $n=2$ هم صادق است، یعنی

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}$$

در واقع داریم:

$$\frac{x_1+x^2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2})=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، اگر نابرابری به‌ازای $n=m$ برقرار باشد، به‌ازای $n=2m$ هم برقرار است. در واقع داریم:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2m-1}+x_{2m}}{2m}=$$

$$=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\ldots+\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[m]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\ldots\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[m]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}\ldots\sqrt{x_{2m-1}\cdot x_{2m}}}=$$

$$=\sqrt[2m]{x_1x_2\ldots x_{2m-1}x_{2m}}$$

معلوم‌شد، وقتی نابرابری برای $n=m$ صادق‌باشد، برای $n=2m$ هم صادق است. بنابراین، طبق آن چه ثابت‌کردیم، این نابرابری برای $n=4,8,16,\ldots$ ، یعنی برای هرتوان طبیعی ۲ ، برقرار است.

اکنون‌ثابت‌می‌کنیم، نابرابری‌کوشی، به‌ازای هرعدد طبیعی n برقرار است. n را عدد طبیعی دلخواهی می‌گیریم. اگر n برابر توانی از ۲ باشد، بنابراستدلال فوق، نابرابری برقرار است. درحالتی‌که n برابر توانی از ۲ نباشد، عدد طبیعی q را طوری پیدا می‌کنیم‌که $n+q$ برابر توانی از ۲ بشود، یعنی $n+q=2^m$.

درستی نابرابری زیر را ثابت کرده‌ایم:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+x_{n+1}+\ldots x_{n+q}}{n+q}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n+q]{x_1x_2x_3\ldots x_nx_{n+1}\ldots x_{n+q}}$$

این نابرابری، بی‌تردید، برای حالت خاص زیرهم، برقرار است:

$$x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{n+q}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

دراین حالت داریم:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+q\cdot\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}{n+q}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{n}\right)^q}$$

از آن، بعد از ساده‌کردن سمت چپ نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n+q]{x_1x_2\ldots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^q}$$

یا

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{n+q} \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

که بعد از ساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n \geqslant x_1 x_2 \ldots x_n$$

و بنابراین

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

علامت برابری ، تنها وقتی برقرار است‌که x_i ها $(i=1,2,\ldots,n)$ باهم برابر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

درواقع، اگر x_i هارا برابربگیریم، بلافاصله، برابری دوطرف تأیید می‌شود. و اگر، دست‌کم، دو مقدار x_i را نابرابر بگیریم، رابطه باعلامت نابرابری به‌دست می‌آید، یعنی سمت چپ، بزرگتر از سمت راست خواهد شد. این حکم را ثابت می‌کنیم. مثلاً ، فرض‌کنید $x_1 \neq x_2$ و بقیهٔ x_iها ، عددهای مثبت دلخواهی باشند؛ دراین صورت داریم:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} =$$

$$= \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3+\ldots+x_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 . x_3 \ldots x_n}$$

ولی می‌دانیم

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

از آن‌جا

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3 \dots x_n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

وسرانجام

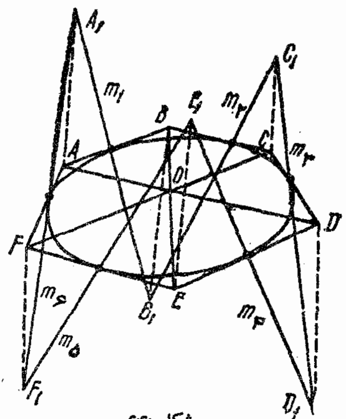
$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

*

اگوستن لوئی‌کوشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹)، ریاضی‌دان فرانسوی، به‌طور عمده ، در زمینهٔ آنالیز ریاضی (معادله‌های دیفرانسیلی و نظریهٔ رشته‌ها) و نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، کار می‌کرد. کوشی ، عضو فرهنگستان علوم پاریس بود.

۲۱۵. مسألهٔ را با روش‌های مختلفی می‌توان حل کرد. ما دراین جا، راه حلی را انتخاب کرده‌ایم، که براساس استفاده از شکل فضائی قرار دارد.

شش ضلعی فضایی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را می‌سازیم، به‌نحوی که تصویر آن ، شش ضلعی مفروض ABCDEF باشد (شکل ۶۶) . برای این منظور، هریك از خطهای راست m_1، m_2، m_3، m_4، m_5، m_6 را، که برضلع‌های شش ضلعی مفروض قرار دارند، به‌اندازهٔ ۴۵درجه، دورشعاعی که از نقطهٔ تماس گذشته است ، می‌چرخانیم؛ ضمناً ، خطهای راست با اندیس فرد (m_1، m_3، m_5) را دریك جهت، و خطهای راست بااندیس زوج


شکل ۶۶

(m_2، m_4، m_6) را درجهت دیگر. متذکر می‌شویم که هرخط راست بااندیس فرد ، هرخط راست بااندیس زوج را قطع می‌کند و، بنابراین، باآن دریك صفحه قرار می‌گیرد ، زیرا این خطهای راست، نسبت به‌صفحه عمود برصفحهٔ شکل، که برشش ضلعی ABCDEF قرار دارد و ازنیمساز زاویه‌ای که با تصویر تشکیل داده است ، می‌گذرد، قرینهٔ یکدیگرند. نقطه‌های

برخورد m_1وm_2 ، m_2وm_3 ، m_3وm_4 ، m_4وm_5 ، m_5وm_6 ، m_6وm_1 را، به‌ترتیب، B_1 ، C_1 ، D_1 ، E_1 ، F_1 و A_1 می‌نامیم. به‌این‌ترتیب، شش ضلعی فضایی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ به‌دست‌می‌آید که، تصویرآن برصفحهٔ‌شکل، همان شش ضلعی $ABCDEF$ است.

حالا، رأس‌های رو به رو را در شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ، به وسیلهٔ خط‌های راست A_1D_1 ، B_1E_1 و C_1F_1 ، به‌هم وصل می‌کنیم. این خط‌های راست، دو به دو یکدیگر را قطع می‌کنند ، زیرا بریك صفحه قرار دارند. مثلاً ، دو خط راست A_1D_1 و B_1E_1 را در نظر می‌گیریم. آن‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند، زیرا باهم موازی نیستند و، ضمناً، بریك صفحه ـ صفحه خط‌های متقاطع $m_1=A_1B_1$ و $m_4=E_1D_1$ ـ قرار دارند.

سه خط راست A_1D_1، B_1E_1 و C_1F_1، باهم روی یك صفحه نیستند و، بنابراین، ضمن این‌که دو به دو یکدیگر را قطع می‌کنند، ازیك نقطهٔ O_1 می‌گذرند (این نقطه را ، روی شکل، نشان نداده‌ایم). تصویر O_1 برصفحه (یعنی نقطهٔ O)، همان محل برخورد خط‌های راست AD، BE، CF است و این، همان چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

*

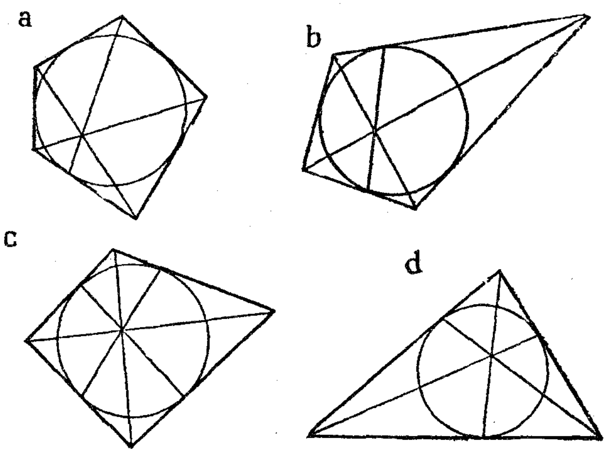
شارلزژولیان بریانشون (۱۷۸۵–۱۸۶۴)، ریاضی‌دان فرانسوی‌است. خود او، مسألهٔ مربوط به‌شش‌ضلعی محیط بردایره را، به‌کمك قطب وقطبی، حل‌کردکه به‌وسیلهٔ پونسله، ریاضی‌دان فرانسوی، پایه‌گذاری شده بود.

بریانشون، مسألهٔ خود را، به‌کمك تصویر مرکزی، تعمیم داد وبرای هرمقطع مخروطی ثابت‌کردکه، به‌همین مناسبت، مثل قضیهٔ پاسکال، یکی از قضیه‌های اساسی هندسهٔ تصویری وکاربردهای آن، به شمار می‌رود. قضیهٔ کلی بریانشون را، می‌توان این طور بیان‌کرد: در هرشش ضلعی‌که قابل محیط بریکی ازمقطع‌های مخروطی (دایره، بیضی، سهمی، هذلولی، دو خط راست) باشد، خط‌های راستی‌که رأس‌های رو به‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، از یك نقطه (نقطهٔ بریانشون) می‌گذرند.

جالب است‌که دو قضیهٔ پاسکال و بریانشون را، می‌توان، درهندسهٔ تصویری ، در ردیف هم قرار داد و یکی را از دیگری نتیجه گرفت. این

نتیجه‌گیری، از راه «تبدیل نقطه به‌خط راست یا برعکس» ، به‌دست می‌آید. ولی از نظر تاریخی، قضیهٔ بریانشون ، خیلی دیرتر از قضیهٔ پاسکال ـ قریب ۱۵۰ سال بعد ـ ثابت شد.

۲۱۶. یک شش ضلعی محیط بردایره را درنظر می‌گیریم. بنابه‌قضیه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم، دراین شش ضلعی، خطهای راستی که رأس‌های رو به رو را به‌هم وصل می‌کنند، ازیک نقطه می‌گذرند (نقطه بریانشون). اگر دراین شش ضلعی، دو نقطهٔ تماس دو ضلع مجاور را روی محیط دایره به‌هم نزدیک کنیم تابرهم منطبق‌شوند، شش‌ضلعی به‌یک‌پنج‌ضلعی تبدیل‌می‌شود (یکی ازضلع‌های‌آن مضاعف است ونقطهٔ تماس آن با دایره را می‌توان یک رأس‌به‌حساب‌آورد). بنابراین، حکم مسألهٔ بریانشون درمورد این شکل هم درست‌است، یعنی، درهرپنج‌ضلعی محیط بردایره، خطهای راستی‌که دو زوج رأس‌های غیرمجاور را به‌هم وصل می‌کنند، با خط راستی‌که از رأس پنجم ونقطهٔ تماس ضلع روبه‌رومی گذرد، دریک‌نقطه‌به‌هم می‌رسند (شکل۶۷-a).



شکل ۶۷

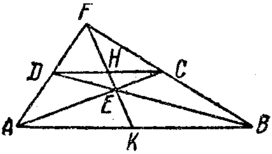
اکنون، چهارضلعی محیط بریک دایره را، به‌عنوان یک شش ضلعی در نظر می‌گیریم، که درآن، دوضلع مضاعف وجود دارد و نقطه‌های تماس آن‌ها با دایره را می‌توان رأس بـه حساب آورد. در نتیجه، این حکـم را خواهیم

داشت: درهرچهارضلعی قابل محیط بردایره، دوقطر وخط راستی که نقطه‌های تماس دو ضلع رو بـه رو را به‌هم وصل می‌کنند، از یـك نقطهٔ می‌گـذرند (شکل ۶۷-b).

با توجـه به‌همین حکم، می‌توان، به‌سادگـی، حکم کلی زیر را نتیجه گرفت (دلیل‌آن را خودتان پیدا کنید) : درهرچهارضلعی قابل محیط بردایره، دو قطر و دو خط راستی‌که نقطه‌های تماس ضلع‌های رو به‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، از یك نقطه می‌گذرند (شکل ۶۷-c).

اگر مثلث محیط بردایره را، به عنوان یك شش ضلعی درنظر بگیریم، هرسه ضلع آن مضاعف می‌شوند. رأس‌های این شش ضلعی عبارتند ازسه‌رأس مثلث وسه نقطهٔ تماس ضلع‌های‌آن بادایره (روی هم، شش رأس). بنابراین، حکم زیـر درست است: در هـرمثلث، خط‌های راستی‌که هـررأس را به‌نقطهٔ تماس ضلع رو به رو با دایـرهٔ محاطی وصل می‌کنند، از یك نقطه می‌گذرند (شکل ۶۷-d).

۲۱۷. بنابرمسالهٔ سه وا (شکل ۶۸) داریم:



شکل ۶۸

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=۱ \quad (۱)$$

از طرف دیگر

$$\frac{FD}{DA}=\frac{FC}{CB} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AK}{KB}=۱ \Rightarrow AK=KB$$

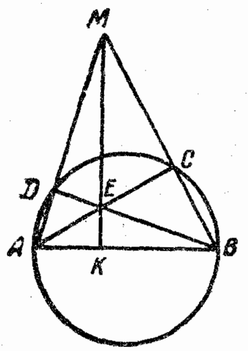
البته‌این مساله‌را، بدون استفاده ازمساله‌سه‌وا هم، می‌توان حل‌کرد.

*

یاکوب شیتنز(۱۷۹۶-۱۸۶۳)، ریاضی دان سویسی و یکی از بنیان‌گذاران هندسهٔ تصویری، عضو فرهنگستان علوم بـرلن و، ازسال ۱۸۳۵، استاد دانشگاه برلن بود. اوتوجه زیادی به‌مساله‌های ساختمانی هندسه، به

کمك خط‌کش و پرگار ثابت، داشت.

۲۱۸. دوانتهای قطر AB را به نقطهٔ M وصل می‌کنیم (شکل ۶۹) ونقطه‌های برخورد AM و BM را با دایره، به‌ترتیب، C و D می‌نامیم. E را نقطهٔ برخورد خطهای راست AC و BD می‌گیریم. دراین‌صورت، خط راست ME، خط‌راست AB را درنقطه‌ای مثل K قطع می‌کند و برآن عمود است (چرا؟ خودتان دلیل‌آن‌را پیدا کنید).

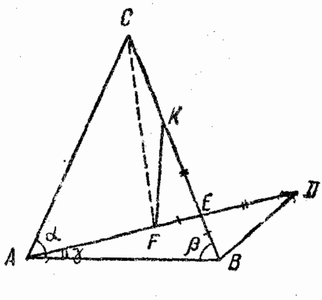


شکل ۶۹

۲۱۹. مثلث متساوی الساقین ABC و مثلث دلخواه و غیر متساوی‌الساقین ABD را درنظرمی گیریم (شکل ۷۰). قاعدهٔ دومثلث یکی هستند؛ فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$AD+DB=AC+CB$$

مثلث ABE قسمت مشترك دو مثلث ABC و ABD را تشکیل می‌دهد. برای این که مساله را حل کنیم، کافی است ثابت‌کنیم، مثلث BDE، بخشی‌ازمثلث ACE راتشکیل می‌دهد. برای این منظور، روی پاره خطهای EA و EC، به ترتیب، $EF=EB$ و $EK=EC$ را جدا می‌کنیم. روشن است که مثلث FKE با مثلث BDE برابراست. حالا باید ثابت‌کنیم، نقطهٔ F بین نقطه‌های A و E ونقطهٔ K بین نقطه‌های C و E قرار دارد.



شکل ۷۰

به مثلث AEB توجه می‌کنیم. دراین مثلث داریم: $\alpha<\beta$، زیرا $\gamma<\alpha$ و $\alpha=\beta$ (طبق فرض، مثلث ABC متساوی‌الساقین است). ازآن‌جا $AE>BE$ و $AE>EF$، زیرا $BE=FE$. بنابراین نقطهٔ F بین‌نقطه‌های

A و E قرار دارد.

اکنون، فرض می‌کنیم، نقطهٔ K بین C و E واقع باشد، دراین صورت داریم:

$$AF+FK+KE+EF<AF+FC+CE+EF,$$
$$EF=EB,\qquad KE=ED,\qquad FK=BD,$$
$$AF+DB+ED+EF<AF+FC+CE+EB,$$
$$AF+FE+ED+DB<nF+FC+CB,$$
$$AD+DB<AF+FC+CB$$

و بنابرشرط

$$AD+DB=AC+CB$$

بنابراین

$$AC+CB<AF+FC+CB$$

یا

$$AC<AF+FC$$

به‌نابرابری درستی رسیدیم. بنابراین، حکم نخستین هم دراین‌باره که نقطهٔ K بین نقطه‌های C و E قرار دارد، درست است.

۲۲۰. راه حل شتورم. فرض می‌کنیم، x روزبعد ازحرکت پیك اول، دوپیك به‌هم برسند. راهی که‌پیك اول، دراین مدت، پیموده است، برابراست با مجموع جمله‌های یك تصاعد عددی که جمله‌های اول وآخرآن برابراست با ۱۰ و $\frac{x-۱}{۴}+۱۰$ ،یعنی، این‌راه برابراست با

$$\left(۲۰+\frac{x-۱}{۴}\right)\times\frac{x}{۲}=\frac{(۷۹+x)x}{۸}$$

پیك دوم، اززمان حرکت، تالحظهٔ برخورد با پیك اول $x-۳$ روز راه رفته است وروی هم به‌اندازهٔ

$$\left[۱۴+\frac{(x-۴)۲}{۳}\right]\frac{x-۳}{۲}=\frac{(۱۷+x)(x-۳)}{۳}$$

بنابرشرط، باید داشته باشیم:

$$\frac{(۷۹+x)x}{۸}-\frac{(۱۷+x)(x-۳)}{۳}-۴۰=۰ \qquad (۱)$$

و یا

$$۵x^۲-۱۲۶x+۵۵۲=۰ \qquad (۲)$$

وازآن‌جا

$$x_۱=۵/۷۲... , x_۲=۱۹/۲۷...$$

x، عددی درست درنظر گرفته شده بود، بنابراین، ریشه‌های معادله، باشرط مساله‌نمی‌سازند. ولی، می‌توان روشن‌کرد که‌قسمت‌های درست‌ریشه‌ها (یعنی۵ و ۱۹)، به‌این معناست‌که دوبرخورد وجود دارد: یکی بعد ازخاتمهٔ روز پنجم ودیگری بعد از خاتمهٔ روز نوزدهم.

اگرa، راه پیك اول و b راه‌پیك دوم به‌اضافهٔ ۴۰ لیو باشد، بافرض این‌که اولی به تعداد درست x روز ودومی به تعداد درست ۳ — x روز در راه بوده است، خواهیم داشت:

$$۵x^۲-۱۲۵x+۵۵۲=۲۴(b-a) \qquad (۳)$$

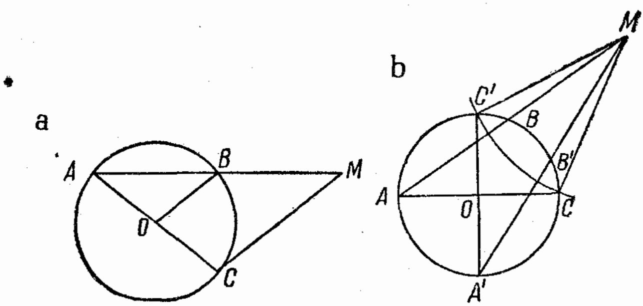
این‌رابطه روشن است، زیرا معادلهٔ (۲) ازمعادلهٔ (۱)، باتغییر علامت همهٔ جمله‌ها وضمن ضرب در۲۴ به‌دست‌آمده است. اکنون در معادلهٔ (۲)، ابتدا عدد ۵ و سپس عدد ۶ را قرار می‌دهیم؛ چون جواب معادله‌که از ۵/۷۲ کوچکتر است، بین این دو عدد قرار دارد، بنابراین، با قرار دادن ۵ عددی بزرگتر ازصفر وبا قرار دادن ۶ عددکوچکتر ازصفر به‌دست می‌آید. ولی به اعتبار اتحاد (۳)، تفاضل b — a همیشه همان علامت سه جمله‌ای $۵x^۲-۱۲۵x+۵۵۲$ را دارد؛ درنتیجه، درانتهای روز پنجم $a<b$ ودر انتهای روز ششم $a>b$ می‌شود؛ به این‌ترتیب، برخورد اول، جایی بین روزهای پنجم وششم است. به همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کرد که، برخورد دوم، بعد از۱۹ روزپیش می‌آید. امکان این برخورد را، به‌سادگی می‌توان فهمید، زیرا پیك دوم، باتوجه به‌این‌که شتابی بیش از پیك اول دارد، بعداز آن‌که ازپیك اول عقب افتاد، فاصله را جبران می‌کند و به او می‌رسد. اگر این مطلب را بررسی‌کنیم‌که، بعد از چند روز، سرعت دوپیك برابرمی‌شود، به‌این نکته پی‌خواهیم برد: بعداز۱۳ روز، سرعت‌ها برابرمی‌شوند و۱۳ هم

بین ۵ و ۱۹ قرار گرفته است (راه حل شتورم را، از کتاب پوپوف به نام «مساله‌های تاریخی، باحل مقدماتی»، چاپ ۱۹۳۸، صفحه‌های ۲۱۰-۲۱۱ برداشته‌ایم).

*

ژاك شارل فرانسوا شتورم (۱۸۰۳-۱۸۵۵)، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی (متولد درسویس) وعضو فرهنگستان علوم‌پاریس، ازسال ۱۸۱۰، استاد مدرسهٔ پلی تکنیك درپاریس بود. قضیه‌ای داردکه، بنا برآن، می‌توان تعداد ریشه‌های یك معادله را، درفاصلهٔ معینی، پیدا کرد. کتابی دردو جلد، به‌عنوان راهنمای‌آنالیزریاضی تالیف‌کرد ومقاله‌های‌زیادی دربارهٔ‌معادله‌های دیفرانسیلی، اوپتیك و مکانیك نوشت.

۲۲۱. مساله را حل شده فرض می‌کنیم. AM را قاطع مورد نظر (شکل ۷۱-a) و A و B را نقطه‌های برخورد آن با دایره می‌گیریم. طبق شرط داریم: $AB = BM$؛ A را به‌مرکز O وصل می‌کنیم وادامه می‌دهیم تا محیط دایره را درC قطع‌کند. نقطهٔ B را به O ونقطهٔ M را به C وصل می‌کنیم.



شکل ۷۱

به‌این ترتیب، مثلث ACM به‌دست می‌آیدکه پاره‌خط OB، وسط دوضلع آن را به‌هم وصل می‌کند ولی می‌دانیم، چنین پاره خطی، همیشه موازی‌باقاعده وبرابربانصف‌آن است، یعنی $OB \parallel CM$ و $OB = \frac{۱}{۲}CM$ یا

$$CM = ۲OB = ۲R$$

که درآن، R عبارت است از شعاع دایرهٔ مفروض.

اکنون دیگر، با استفاده ازایـن تجزیه وتحلیل، می‌توان قاطع مورد نظر را به‌سادگی رسم کرد. M را مرکز قـرار می‌دهیم و به‌شعاع قطردایرهٔ مفروض، دایـره‌ای رسـم می‌کنیم (شکل ۷۱-b) تا دایـرهٔ مفروض را در نقطه‌های C و C' قطع کند. هریك از این نقطه‌ها را به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایرهٔ مفروض را در A و A' قطع کنند. قاطع‌های MA و MA' همان قاطع‌های مورد نظرند. ازخود راه‌حل معلوم می‌شودکه مساله دوجواب دارد.

*

این‌مساله راازکتاب «قضیه‌ها ومساله‌های‌مقدماتی» تالیف اژن کاتالان (۱۸۱۴-۱۸۹۱)، ریاضی‌دان‌بلژیکی برداشته‌ایم. این ریاضی‌دان نوشته‌های زیادی درزمینهٔ ریاضیات مقدماتی وعالی دارد.

۲۲۲. هانری مونده، حسابگری اعجوبه،که تباری فرانسوی داشت. در خانواده‌ای روستایی ودر روستائی نزدیك شهر نور به دنیا آمد. پسرك، استعداد خارق‌العاده‌ای در انجام محاسبه‌های بغرنج، درذهـن خود، داشت. برای نخستین‌بار، درسال ۱۸۴۰، توجه صاحب شبانه‌روزی شهربه اوجلب شد واو را پیش پونسله، دانشمند هندسه‌دان ورئیس وقت فرهنگستان علوم پاریس فرستاد. درآزمایش مقدماتی‌که در حضور عضوهای فرهنگستان انجام شد، دو پرسش از اوکـردند: مجذور ۷۵۶ چیست؟ در ۵۲ سال چند دقیقه وجود دارد؟ ومونده، بلافاصله، پاسخ‌های درست را داد.

پونسله پیشنهادکردکمیسیونی ازریاضی‌دانان عضو فرهنگستان، برای مطالعهٔ اساسی استعداد ریاضی پسرك تشکیل شود.کوشی، لیوویل،شتورم و آرگو، در این‌کمیسیون شرکـت داشتند. دسامبر ۱۸۴۰، جلسهٔ آزمایش تشکیل شد وپسرك در برابرپرسش‌های دشواری قرارگرفت‌که می‌بایستی در ذهن‌خود، آن‌ها را حل‌کند. پرسش دوازدهم، همین مساله‌ای است‌که ما در این‌کتاب آورده‌ایم.

هانری‌موندهٔ جوان، دربرابربغرنج‌ترین‌محاسبه‌ها درنماند و،به‌درستی، پاسخ‌ها را پیدا کرد ونشان دادکه، واقعاً، حسابگراعجوبه‌ای است. مثلاً در

برابراین پرسش که، تفاوت مجذورهای کدام دوعدد، برابر ۱۳۳ است، بلافاصله پاسخ داد ۶۶ و ۶۷. وقتی که از او پرسیده شد جواب ساده‌تر کدام است، بعد از ثانیه‌ای فکر، پاسخ داد: ۱۳ و ۶. او تقریباً بدون فکر و بلافاصله، به این پرسش که مجذور ۲۲۰۴ یا مکعب ۱۰۰۶ چه عددی است، پاسخ داد. مونده، در برابراین مساله هم، خیلی زود خود را تطبیق داد که: عددی پیدا کنید که مکعب آن به‌اضافهٔ ۸۴، برابر حاصل‌ضرب همان عدد ۳۷ شود. او، به‌عنوان جواب، از دوعدد ۳ و ۴ نام برد و به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این دو عدد، با شرطهای مساله می‌سازند. درواقع

$$۳^۳=۲۷;\qquad ۲۷+۸۴=۱۱۱=۳\times۳۷,$$
$$۴^۳=۶۴;\qquad ۶۴+۸۴=۱۴۸=۴\times۳۷$$

راه حل عادی مسالهٔ دوازدهم مونده چنین است:

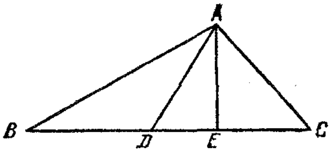
$$x^۲-y^۲=۱۳۳,$$
$$(x+y)(x-y)=۱۳۳\times۱=۱۹\times۷,$$
$$\begin{cases} x+y=۱۹ \\ x-y=۷ \end{cases} \Rightarrow x=۱۳,\ \ y=۶$$

سپس

$$\begin{cases} x+y=۱۳۳ \\ x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۶۷,\ \ y=۶۶$$

۲۲۳. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. روی ضلع BC و بین دو نقطهٔ B و C، نقطهٔ D را انتخاب وآن را به راس A وصل می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$AB^۲.DC+AC^۲.BD-AD^۲.BC=BC.DC.BD$$



شکل ۷۲

عمود AE را از راس A بر قاعدهٔ BC فرود می‌آوریم. برای مشخص بودن وضع، E را بین D و C فرض می‌کنیم (شکل ۷۲). در این صورت، زاویهٔ ADC حاده و زاویهٔ

ADB منفرجه خواهد بود. با استفاده از دوقضیه‌ای که، یکی مربوط به‌ضلع روبه روی زاویهٔ منفرجه ودیگری مربوط به‌ضلع روبه روی زاویهٔ حاده در مثلث است، به‌دست می‌آید:

$$AB^{۲}=BD^{۲}+AD^{۲}+۲BD.DE \qquad (۱)$$

$$AC^{۲}=DC^{۲}+AD^{۲}-۲DC.DE \qquad (۲)$$

دوطرف رابطهٔ (۱) را درDC ودوطرف‌رابطهٔ (۲) را درBD ضرب‌می‌کنیم:

$$AB^{۲}.DC=BD^{۲}.DC+AD^{۲}.DC+۲BD.DE.DC \qquad (۳)$$

$$AC^{۲}.BD=DC^{۲}.BD+AD^{۲}.BD-۲DC.DE.BD \qquad (۴)$$

ازجمع رابطه‌های (۳) و (۴) به‌دست می‌آید:

$$AB^{۲}.DC+AC^{۲}.BD=$$
$$=AD^{۲}(BD+DC)+BD.DC(BD+DC)$$

و بالاخره

$$AB^{۲}.DC+AC^{۲}.BD-AD^{۲}.BC=BC.DC.BD$$

درکتاب‌های درسی، معمولاً این قضیه را، قضیه ستوارت می‌گویندو، ازآن، برای‌محاسبهٔ بعضی خطاها دومثلث استفاده می‌کنند. ازقضیهٔ‌ستوارت، می‌توان برای محاسبه طول نیمسازها یا میانه‌ها درمثلث، استفاده‌کرد.

برخی از کتاب‌های مترجم

تألیف:

۱. روش‌های جبر ـ جلد اول
۲. روش‌های جبر ـ جلد دوم
۳. جنبش مزدك و مزدکیان
۴. یان هوس و جنبش انقلابی دهقانان چك

ترجمه:

۵. بازی با بی‌نهایت
۶. آفرینندگان ریاضیات عالی
۷. سرگرمی‌های توپولوژی (توپولوژی تجربی)
۸. داستانهای علمی
۹. مسائل ریاضی کنکورها
۱۰. ریاضیات، محتوی، روش و هدف آن ـ جلد اول
۱۱. ریاضیات، محتوی، روش و هدف آن ـ جلد دوم
۱۲. علم، جامعه، انسان ـ جلد اول
۱۳. علم، جامعه، انسان ـ جلد دوم
۱۴. علم، جامعه، انسان ـ جلد سوم
۱۵. ریاضیات کار بسته
۱۶. پویائی ریاضیات
۱۷. ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها
۱۸. نظریهٔ مجموعه‌ها

۴۶. مسائل مسابقات ریاضی (از کنکورهای اتحاد شوروی)
۴۷. مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی
۴۸. دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی
۴۹. مثلثات مستقیم‌الخط و کروی
۵۰. عددهای اول
۵۱. هندسه در گذشته و حال
۵۲. اخلاق و انسان

زیر چاپ:

۵۳. خلاقیت ریاضی
۵۴. مسیر ریاضیات جدید
۵۵. هندسهٔ پرگار
۵۶. نظریهٔ نسبیت در تمرین‌ها و مساله‌ها
۵۷. سرگذشت حرکت