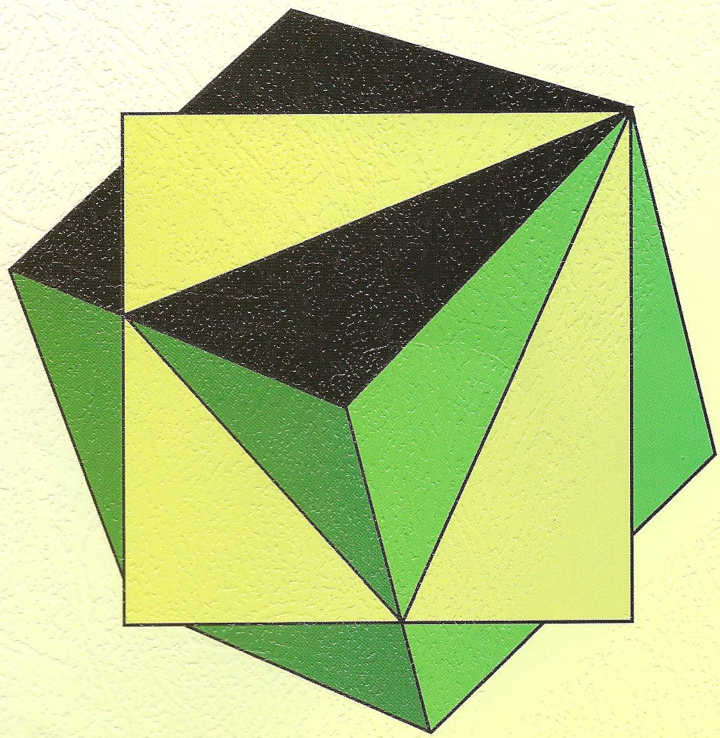
مبتکران

مسائلی در هندسه

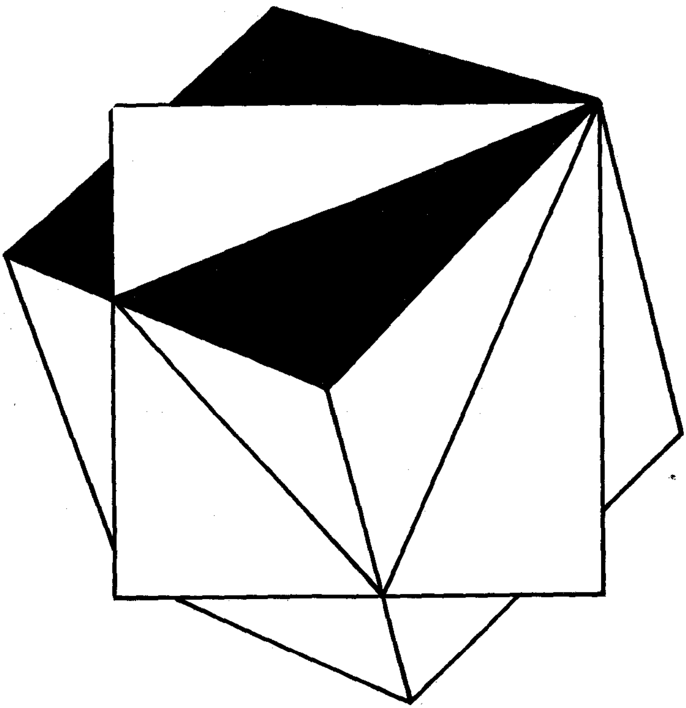
آی. اف. شاریگین



ترجمه: میرزا جلیلی - ابراهیم دارابی

مسائلی در هندسه

آی . اف . شاریگین



ترجمه : میرزا جلیلی - ابراهیم دارابی

سرشناسه	: شاریگین، ایگور فئودوروویچ Sharygin Igor fedoroich
عنوان و پدیدآور	: مسائلی در هندسه / آی . اف. شاریگین؛ ترجمه میرزا جلیلی، ابراهیم دارابی
مشخصات نشر	: تهران؛ مبتکران، پیشروان،۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری	: ۲۷۲ ص.
شابک	: ۹۷۸ - ۹۶۴ - ۰۷ - ۰۳۵۳ - ۳
یادداشت	: فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
یادداشت	: به زبان انگلیسی: Problems In solid geometry
یادداشت	: چاپ اول: ۱۳۷۰
موضوع	: هندسه فضایی - - مسائل، تمرینها و غیره.
موضوع	: هندسه - - مسائل، تمرینها وغیره.
شناسه افزوده	: جلیلی، میرزا، ۱۳۱۲ - ، مترجم
شناسه افزوده	: دارابی، ابراهیم، ۱۳۱۴ - ، مترجم
رده‌بندی کنگره	: QA ۴۷۵ / ش ۲ م ۵ ۱۳۸۸
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۶/۰۶۰۷۶
شماره کتابخانه ملی	: ۱۲۵۵۷ – ۸۸ م

ناشر: انتشارات مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲) **انتشارات پیشروان** (پروانه نشر: ۲۶۲۳)

تهران: میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۱۱۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

تلفن: ۹۳-۶۶۹۵۴۳۹۰ دورنگار ۶۶۹۵۴۳۹۲ www.mobtakeran.com

نام کتاب: مسائلی در هندسه

مؤلف: آی. اف. شاریگین

ترجمه: میرزا جلیلی – ابراهیم دارابی

چاپ دوم : ۱۳۸۸ (چاپ اول: تابستان ۱۳۷۰)

شمارگان: ۱۲۰۰ جلد

حروف‌نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: صبا

چاپ: امین

بها: ۴۰۰۰تومان

فهرست مندرجات

مقدمه

در سالهای اخیر در کشور ماکتابهای نسبتاً زیادی در رشته ریاضیات ترجمه و یا تألیف شده است. در این میان هندسه، و به‌خصوص نوع فضایی آن تا حدودی از نظرها دور مانده‌است. درحالیکه هندسه، به‌عنوان یك‌رکن‌اساسی درریاضیات همواره به‌یادگیری سایر دروس ریاضی کمك‌کرده است. بی‌تردید در این عرصه، تلاش پیگیر وگسترده‌ای‌لازم است تا هندسه، شأن و منزلت شایسته خود را دربین سایر دروس ریاضی پیدا کند.

در راستای چنین اهدافی، به‌ترجمه کتاب حاضر پرداخته‌ایم که به‌گمان ما، می‌تواند تاحدودی به‌تحقق آن کمك بکند و همچنین راه تفکر و اندیشیدن راکه هدف اصلی آموزش ریاضی است به دانش‌آموزان یاد دهد.

سیصد و چهل مسئله حاوی‌کتاب، نه‌تنها در ارتباط تنگاتنگ با هم، کلیتی را بوجود می‌آورند، بلکه بعضاً باگستردن دامنه‌خود تاعرصه‌های هندسه مسطحه، وآوردن ومطرح ساختن مسایل نظیر آنچه که درفضا مطرح است، وحل‌وتحلیل آنها، به‌تفهیم هردوهندسه کمك می‌کنند. تا جائیکه باحل آنها، قلمروی هندسه درنظرخواننده گسترده می‌شود، کاربرد وسیع قضایا که غالباً ازانظار دور مانده‌اندآشکار می‌گردد وخواننده احساس می‌کند به‌توانایی‌های جدیدی دست یافته است و می‌تواند با استفاده از ابزار هردو هندسه، بسیاری از مسایل مشکل را حل کند.

مؤلف‌کتاب که خود معلم مدارس‌ویژه درشوروی‌است و درآماده‌کردن دانش‌آموزان برای شرکت در المپیادهای ریاضی نقش‌مؤثری دارد، مطالعه‌کتابش‌را برای دانش‌آموزان علاقمند به‌هندسه وبرای داوطلبان المپیادها و سایر علاقمندان این‌رشته توصیه می‌کند. مانیز ترجمه‌آنرا در اختیار دانش‌آموزان و علاقمندان این رشته درکشورمان قرار می‌دهیم و امیدواریم سهمی ولوکوچك، در موفقیت‌های آنان در عرصه‌های گوناگون، در فراگیری هندسه، امتحانات و مسابقات ریاضی داشته باشیم.

مترجمین

بخش اول

مسائل محاسباتی

۱- مکعبی به‌یال a مفروض است. دورأس از یك چهاروجهی منتظم، برروی قطر آن، و دورأس دیگرش برروی قطر یکی از وجـوه آن قرار دارد. حجم چهار وجهی را پیدا کنید.

۲- قاعده هرم چهـاربری، یك مستطیل است. ارتفاع هرم h می‌باشد، حجم هرم را پیدا کنید. درصورتی که مساحت هرپنج وجه آن باهم برابرند.

۳- ازهمه هرمهایی که طول همه یالهای آنها برابرند، (طول هریال a) حجم هرمی را پیدا کنیدکه، ازنظر تعداد، بیشترین یالها را داشته باشد.

۴- دور یك کره، هرم ناقص چهاربرمنتظمی محیط شده‌است. سهم‌هرم، a می‌باشد. سطح جانبی آنرا پیدا کنید.

۵- زاویهٔ رأس‌مقطع محوری یك مخروط را پیداکنید. درصورتی که می‌دانیم حجم آن، سه‌برابرحجم کره محاطی آن است.

۶- سه کره مماس برهم، برصفحه یك مثلث دررئوس آن مماسند. شعاع این کره‌هارا پیدا کنید. درصورتی که اضلاع مثلث a و b و c باشند.

۷- فاصله بین دوقطرمتنافـراز دو وجه مجاور یك‌مکعب راکه طول یال آن a می‌باشد، پیداکنید. هریك ازاین اقطار، به‌وسیله عمود مشترك به‌چه‌نسبتی تقسیم می‌شوند؟

۸- ثابت کنید مساحت تصویر یك کثیرالاضلاع واقع برصفحه α ، بر روی صفحهٔ β برابراست با $S \cos \varphi$. که در آن S مساحت کثیرالاضلاع و φ زاویه بین صفحات α و β می‌باشد.

۹- سه‌خط راست، ازنقطهٔ A می‌گذرند. دونقطهٔ $B_۱$ و $B_۲$ را روی یکی‌از‌آنها، دونقطهٔ $C_۱$ و $C_۲$ را روی خط دیگر و $D_۱$ و $D_۲$ را روی خط سوم اختیار می‌کنیم ، ثابت کنید:

$$\frac{V_{AB_۱C_۱D_۱}}{V_{AB_۲C_۲D_۲}}=\frac{|AB_۱|\cdot|AC_۱|\cdot|AD_۱|}{|AB_۲|\cdot|AC_۲|\cdot|AD_۲|}$$

۱۰- اگر α و β و γ زوایای خط راست دلخواهی باسه خط دوبه‌دو عمود برهم باشند، ثابت کنید،

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$$

۱۱- اگر s و p مساحتهای دووجه ازیك چهاروجهی، a طول یال مشترك آنها، و α فرجه بین همان دووجه باشد، ثابت کنید حجم چهاروجهی ازفرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{۲s.p\sin\alpha}{۳a}$$

۱۲- ثابت کنید حجم یك چهاروجهی دلخواه را می‌توان ازفرمول زیر به‌دست‌آورد .

$$V=\frac{۱}{۶}abd\sin\varphi$$

که درآن a و b طولهای دویال متقابل چهاروجهی، d فاصله بین آنها و φ زاویه بین‌آنهاست.

۱۳- ثابت کنید صفحه نیمساز فرجه نظیر یك یال چهار وجهی، یال مقابل‌آنـرا به نسبت مساحتهای وجوه‌آن فرجه تقسیم می‌کند.

۱۴- ثابت کنید حجم چندوجهی محیط برکره‌ای به‌شعاع R ، از فرمول زیـر به دست می‌آید:

$$V=\frac{۱}{۳}S_n R$$

که درآن S_n مساحت سطح کل چندوجهی می‌باشد.

۱۵- چندوجهی محدبی که همهٔ رئوس آن، بر روی دوصفحهٔ متوازی قراردارند، مفـروض است. ثابت کنید حجم آنرا می‌توان، ازفرمول،

$$V=\frac{h}{6}(s_1+s_2+4s)$$

به‌دست آورد.

s_1 مساحت سطح وجه واقع دریکی از صفحات، و s_2 مساحت سطح وجه واقع در صفحهٔ دیگر، و s مساحت مقطعی‌ازچندوجهی می‌باشد که به‌یك‌فاصله‌ازدوصفحهٔ‌موازی قراردارد، و h فاصلهٔ بین دوصفحهٔ موازی است.

۱۶- ثابت کنید، نسبت حجمهای یك کره ومخروط ناقص محیط بر آن، برابراست با نسبت مساحتهای سطح کل آنها.

۱۷- ثابت کنید مساحت‌سطح آن‌قسمت‌ازیك کره، که بین‌دوصفحهٔ موازی وقاطع کره‌محصور شده‌است، ازفرمول،

$$S=2\pi Rh$$

به‌دست می‌آید. دراینجا، R شعاع کره و h فاصله بین دوصفحهٔ موازی است.

۱۸- ثابت کنید حجم حاصل از دوران کمانی ازیك دایره، حول قطری از آن‌که آنرا قطع نمی‌کند، ازفرمول زیر به‌دست می‌آید،

$$V=\frac{1}{6}\pi a^2h$$

که در آن a طول وتراین کمان، و h طول تصویر آن روی قطرمی‌باشد.

۱۹- ثابت کنید پاره خطهایی که رئوس یك چهاروجهی را به‌نقاط میانه‌ای[1] وجوه مقابل وصل می‌کنند، دریك نقطه متقاربند، (این نقطه را مرکز ثقل چندوجهی می‌گویند.) و به‌وسیلهٔ این‌نقطه، به‌نسبت ۳:۱ (از رأس سنجیده می‌شود.) تقسیم می‌شوند.

۲۰- ثابت کنید خطوط راستی که وسط ارتفاع یك‌چهاروجهی‌منتظم را، به‌رئوس وجهی‌از آن‌که ارتفاع بر آن وارد شده وصل می‌کنند، دوبه‌دو بریکدیگرعمودند.

۲۱- ثابت کنید مجموع مربعات طول یالهای یك چهـاروجهی برابراست با، چهاربرابر

۱ــ محل برخوردمیانه‌های هروجه را نقطه میانه‌ای نامگزاری‌کرده‌ایم. م.

مجموع مربعات فواصل بین اوساط یالهای متنافر آن.

۲۲- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ با طول یال a مفروض است. وسط یال DD_1 را با K نشان می‌دهیم. زاویه وفاصلهٔ بین خطوط CK وA_1D را پیدا کنید.

۲۳- زاویه وفاصلهٔ بین دومیانه متنافر از دووجه جانبی چهاروجهی منتظم را، که طول یال آن a می‌باشد، پیدا کنید.

۲۴- قاعدهٔ هرم SABCD، مربع ABCD می‌باشد. یال SD ارتفاع هرم است. حجم هرم را پیدا کنید، درصورتی که،

$$|AB|=|BC|=\sqrt{5}\ ,\ |AD|=|DC|=\sqrt{2}\ ,\ |AC|=2$$

$$|SA|+|SB|=2+\sqrt{5}$$

۲۵- قاعده هرمی، مثلث‌متساوی‌الاضلاع به‌ضلع a می‌باشد. طول یالهای جانبی آن b است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که برهمهٔ یالهای آن، ویا امتداد آنها مماس باشد.

۲۶- کره‌ای از رئوس یکی‌از وجوه مکعبی می‌گذرد وبه‌اضلاع وجه مقابل آن مماس است. نسبت حجم کره را به‌حجم مکعب پیدا کنید.

۲۷- طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر b است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که ازوسط یالهای AA_1 و BB_1 ورئوس A و C_1 می‌گذرد.

۲۸- قاعده متوازی‌السطوح قائمی، مربعی به‌ضلع a می‌باشد. ارتفاع متوازی‌السطوح b است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از دوسرضلع AB قاعده می‌گذرد و بروجوه موازی AB از متوازی‌السطوح، مماس است.

۲۹- منشور منتظم مثلث‌القاعده‌ای که هرضلع قاعدهٔ آن a می‌باشد، در داخل کره‌ای به‌شعاع R محاط شده‌است. مساحت مقطعی از آنرا تعیین کنید که صفحهٔ آن، از مرکز کره و ضلع قاعده منشور می‌گذرد.

۳۰- دوکره با شعاعهای مساوی، ودوکره باشعاعهای‌متمایز با آنها طوری قرارداده‌شده‌اند که هریك‌از کره‌ها، به‌سه‌کره دیگرویك صفحه مفروض مماسند. نسبت‌شعاع بزرگترین کره را، به‌شعاع کوچکترین کره پیدا کنید.

۳۱- چهاروجهی منتظم ABCD به‌یال a داده شده‌است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از رئوس C و D ووسط یالهای AB و AC بگذرد.

۳۲- یکی‌از وجوه مکعبی، درصفحه قاعده هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظمی قراردارد. دو رأس از

رئوس مکعب، روی یکی‌از وجوه جانبی هرم و دورأس دیگر آن روی دووجه دیگر آن قراردارد. (هرکدام دریکی از وجـوه). طول یال مکعب را حساب کنـید. در صورتیکه طول‌ضلع قاعده هرم برابر a وارتفاع آن h باشد.

۳۳- فرجه‌ای‌که با قاعدهٔ n برمنتظم ساخته می‌شود برابر α است. اندازهٔ فرجهٔ بین‌دووجه جانبی مجاوررا پیداکنید.

۳۴- دوصفحه ازداخل منشورمثلث‌القاعده $ABCA_1B_1C_1$ می‌گذرند:
یکی‌ازآنها از رئوس A و B و C_1 می‌گذرد. دیگری ازرئوس A_1 و B_1 و C . این دوصفحه، منشوررا به‌چهارقسمت‌تقسیم‌می‌کنند. حجم کوچکترین‌قسمت آن v است حجم منشوررا پیداکنید.

۳۵- ازنقطه‌ای‌که به‌فاصلهٔ a از مرکز کره‌ای به‌شعاع R قراردارد، $(R>a)$ سه‌وتر دو به‌دو عمود برهم رسم شده‌است. مجموع مربعات طولهای پاره‌خط‌هایی راکه توسط نقطهٔ مفروض روی وترها بوجودآمده پیداکنید.

۳۶- ABC قاعدهٔ منشورمنتظم مثلث‌القاعده‌ای است‌که طول ضلع‌آن a می‌باشد.
نقاط A_1 و B_1 و C_1 روی یالهای جانبی منشور و به‌ترتیب به‌فاصله‌های $\frac{a}{2}$ و a و $\frac{3a}{2}$ از صفحهٔ قاعده قراردارند. زاویهٔ بین صفحات ABC و $A_1B_1C_1$ را پیدا کنید.

۳۷- طول ضلع قاعدهٔ هرم منتظم چهاربری، با طول سهم یکی‌ازوجوه جانبی برابراست. ازیکی‌از اضلاع قاعده، صفحهٔ قاطعی‌گذشته وسطح جانبی هرم را به‌دوقسمت مساوی تقسیم‌کرده است. زاویه بین صفحهٔ قاطع وصفحهٔ قاعده‌هرم را پیداکنید.

۳۸- مرکز کره‌ای، روی صفحه قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظمی قرارگرفته است، و رئوس قاعده، روی سطح کره جاگرفته‌اند. طول‌خط l، فصل مشترك سطح‌کره وهرم را پیدا کنید. درصورتی‌که شعاع‌کره R وزاویهٔ رأس هرم برابر α می‌باشد.

۳۹- درهرم شش برمنتظم $SABCDEF$ (S رأس هرم است) وبرروی قطر AD ، سه نقطه را طوری اختیارمی‌کنیم‌که قطررا به‌چهارقسمت مساوی تقسیم‌کند. ازنقاط‌تقسیم صفحات قاطعی به‌موازات صفحهٔ SAB می‌گذرانیم. نسبت‌های مساحتهـای مقاطع حاصل را پیداکنید.

۴۰- درهرم چهاربرمنتظم زاویه‌ای رأس‌هرم، بازاویه بین‌یالهای جانبی و صفحه قاعده آن برابرمی‌باشد.فرجه بین وجوه جانبی مجاور هرم را پیداکنید.

۴۱- مساحت قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعـده‌ای، که همهٔ یالهای جانبی‌آن دوبه‌دو برهم عمودند،

مثلثی است با مساحتی برابر S. مساحت یکی‌از وجوه جانبی‌آن Q می‌باشد. مساحت تصویر این وجه را روی قاعده پیدا کنید.

۴۲- همهٔ یالهای منشورمثلث‌القاعدهٔ منتظم $ABCA_1B_1C_1$ باهم برابرند. نقطهٔ K را متمایز از A و B روی AB و M را روی B_1C_1 و L را روی وجه ACC_1A_1 اختیارمی‌کنیم. خط KL با صفحات ABC و ABB_1A_1 ، وخط LM با صفحات BCC_1B_1 و ACC_1A_1 و خط KM با صفحات BCC_1B_1 و ACC_1A_1 زوایای مساوی تشکیل داده‌اند. اگر

$$|KL| = |KM| = ۱$$

طول یال منشوررا پیداکنید.

۴۳- درهرم چهاربر منتظم، زاویهٔ بین یالهای جانبی و صفحهٔ قاعده، برابر با زاویه بین یال جانبی و صفحهٔ وجه جانبی‌ای است‌که شامل آن یال نمی‌باشد. این زاویه را پیداکنید.

۴۴- فرجه بین قاعده ووجهٔ جانبی هرم ناقص مثلث‌القاعدهٔ منتظمی را پیداکنیدکه، درآن کره‌ای قابل محاط است وعلاوه بر آن،کره‌ای هم وجود داردکه بر تمام یالهای‌آن مماس می‌شود.

۴۵- طول هریك ازسه یال هرم مثلث‌القاعده‌ای برابر ۱، وطول هریك ازسه‌یال دیگر آن، برابر a می‌باشد. هیچ‌یك از وجوه هرم ، متساوی‌الاضلاع نیستند. دامنهٔ تغییرات a را پیداکنید.

۴۶- وجوه جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، همه با هم معادل بوده و با صفحهٔ قاعده، زوایای برابر با α و β و γ تشکیل می‌دهند. نسبت شعاع‌کره محاط درهرم را، به شعاع کره‌ای‌که برقاعده وامتداد سه‌وجه جانبی هرم مماس است پیداکنید.

۴۷- طول همهٔ یالهای منشور شش‌بر منتظمی برابر a می‌باشد. (طول هر یال) مساحت مقطعی را پیداکنیدکه، از یکی از اضلاع قاعده بگذرد و با صفحهٔ قاعده زاویهٔ α بسازد.

۴۸- در متوازی‌السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، $|AB| = a$ و $|AD| = b$ و $|AA_1| = c$. زاویه بین‌صفحات AB_1D_1 و A_1C_1D را پیداکنید.

۴۹- قاعدهٔ هرم $ABCDM$ ، مربعی به‌ضلع a می‌باشد. یالهای جانبی AM و BM هم به‌طول a هستند. (هرکدام ازآنها) طول یالهای CM و DM برابر b است.

وجه CDM را به‌عنوان قاعده درنظر گرفته وهرم مثلث‌القاعده CDMN راطوری بنا می‌کنیم که طول هریک ازیالهای‌آن a ودربیرون هرم قبلی قرارگیرد. فاصلهٔ بین خطوط AD و MN را پیداکنید.

۵۰- دریك چهاروجهی، طول یك یال برابر a وطول یال‌مقابل‌آن b است. طول بقیه‌یالها را c بنامید. شعاع کره محیطی چهاروجهی را پیداکنید.

۵۱- قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای، مثلثی به‌اضلاع a و b و c وطول یالهـای جانبی مقابل آنها به‌ترتیب m و n و p می‌باشد. فاصلهٔ رأس هرم را از مرکز ثقل قاعده پیدا کنید.

۵۲- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. از یال AA_1 صفحه‌ای گذشته و با خطوط BC_1 و B_1D زوایای مساوی تشکیل داده‌است. این زاویه را پیداکنید.

۵۳- یالهای جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، دوبه‌دو برهم‌عمودند. طول‌یکی‌ازآنها، بامجموع طولهای دوتای دیگر برابر، ومساوی a می‌باشد. شعاع کره‌ای را پیداکنیدکه‌برقاعدهٔ هرم وامتداد وجوه جانبی‌آن مماس باشد.

۵۴- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a، قاعدهٔ هرم SABC را تشکیل می‌دهد، که طول یال SA درآن برابر b می‌باشد. حجم‌هرم را پیداکنید. درصورتیکه‌می‌دانیم وجوه جانبی‌هرم باهم معادل هستند.

۵۵- قاعدهٔ هـرم مثلث‌القاعدهٔ SABCD ، مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ می‌باشد. زوایای $\widehat{SAB}$ و $\widehat{SCA}$ و $\widehat{SAC}$ و $\widehat{SBA}$ تشکیل‌تصاعد عددی‌میدهند که قدرنسبت آن، مخالف صفراست. (به‌تـرتیبی‌که نوشته شده‌اند) علاوه بـرآن، مساحتهای وجوه SAB و ABC و SAC تشکیل تصاعد هندسی‌میدهند. زوایایی راکه تشکیل تصاعد عددی داده‌اند، پیداکنید.

۵۶- قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌باشدکه طول ضلع آن a است. حجم هرم را پیداکنید، درصورتی‌که،

$$\widehat{SAB}=\beta \quad \text{و} \quad \widehat{ASC}=\widehat{ASB}=\alpha$$

۵۷- درمکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، نقطهٔ K را وسط یال AA_1 درنظر گرفته‌ایم و نقطهٔ L روی BC قراردارد. پاره خط KL برکره محاط درمکعب مماس‌است. پیدا کنید پاره‌خط KL به‌چه نسبتی توسط نقطهٔ تماس تقسیم می‌شود.

۵۸- در چهـار وجهی $ABCD$ ، داریم $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=۹۰^\circ$ و $|AB|=a$ و $|DC|=b$ وزاویهٔ بین یالهای AD و BC برابر α می‌باشد. شعاع کـره محیطی چهاروجهی را پیداکنید.

۵۹- یك یال مکعب ویك یال چهـاروجهی منتظم، روی خط راستی قـراردارند. اوساط یالهای متقابل‌مکعب وچهاروجهی برهمدیگرمنطبق هستند. حجم مشترك مکعب و چهار وجهی راپیداکنید، درصورتی‌که طول یال‌مکعب a باشد .

۶۰- حجم هرم مثلث‌القاعده‌ای، بەوسیلهٔ صفحه‌ای‌که موازی بادویال متنافرآن‌رسم می‌شود ویکی‌از یالهای دیگررا به‌نسبت ۳:۱ قطع می‌کند، به‌چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۶۱- درهرم چهاربرمنتظم ناقص، دومقطع به‌ترتیب زیررسم می‌شوند:
یکی‌ازآنها، از اقطارقاعده‌ها می‌گذرد ودیگری ازضلع قاعدهٔ پایین وضلع مقابل‌آن ازقاعدهٔ بالا. زاویهٔ بین صفحات‌دومقطع را α درنظرمی‌گیریم. نسبت‌مساحتهای‌سطح دومقطع را پیداکنید.

۶۲- مخروطی، درداخل هرم شش‌برمنتظم محاط، ومخروط دیگری برآن محیط‌شده‌است. اختلاف حجم مخروط محاطی و مخروط محیطی را پیداکنید، درصورتی‌که ارتفاع هرم H وشعاع قاعدهٔ مخروط محیطی برابر R می‌باشد.

۶۳- کره‌ای، ونقطه‌ای‌درداخل‌آن‌مفروضند. سه‌صفحه‌دوبه‌دوعمودبرهم، بطور دلخواه‌ازاین نقطه می‌گذرند وکره را درسه دایره قطع می‌کنند. ثابت‌کنید مجموع مساحتهای این سه دایره مقدارثابتی‌است. این مجموع را حساب‌کنید. درصورتیکه شعاع‌کره‌برابر R وفاصلهٔ بین نقطهٔ برخورد صفحات ازمرکزکره برابر d می‌باشد.

۶۴- درکره‌ای به‌شعاع R، قطر AB رسم شده‌است. دوخط درنقاط A وB برکره مماس وباهم زاویهٔ α می‌سازند. $(\alpha<۹۰)$ روی این خطوط نقاط C و D طوری‌اختیار شده‌اندکه CD برکره مماس بوده‌وزاویهٔ بینAB وCDبرابرφ می‌باشد. $(\varphi<۹۰)$.
حجم چهاروجهی $ABCD$ را پیداکنید.

۶۵- دریك چهاروجهی، دویال متقابل بریکدیگرعمودند واندازهٔ طول‌آنها a و b وفاصلهٔ بین‌آنها c می‌باشد. درداخل این چهاروجهی، مکعبی‌محاط شده‌است‌که چهاریال‌آن براین دویال چهاروجهی عمودند ودورأس مکعب درست روی هریك‌ازوجوه چهار-وجهی قراردارند. اندازهٔ یال مکعب را پیداکنید.

۶۶- دومثلث KLM و KLN باهم مساوی ودرضلع KL مشترکند. و علاوه برآن،

$$|KL|=a \text{ و } |LM|=|KN|=۶a \text{ و } \widehat{KLM}=\widehat{KLN}=\frac{\pi}{۳}$$

صفحات KLM و KLN برهمدیگر عمودند. کره‌ای دروسط پارهٔ خطهای LM و KN بر آنها مماس است. شعاع این کره را پیدا کنید.

۶۷- کره‌ای به‌شعاع R، برهمهٔ وجوه جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای دروسط اضلاع قاعده‌هایشان مماس است. پاره خطی که رأس هرم را به‌مرکز کره وصل می‌کند، درمحل برخورد خود با قاعده نصف می‌گردد. حجم هرم را پیدا کنید.

۶۸- یك چهاروجهی، سه فرجه قائمه دارد. طول یکی‌از پاره‌خطهایی که‌وسط یالهای‌مقابل چهاروجهی را به‌هم وصل‌می‌کند برابر a ودیگری برابر b می‌باشد، $(b>a)$. طول بزرگترین یال‌چهاروجهی را حساب کنید.

۶۹- مخروط دوارقائمی به‌رأس S، درداخل هرم مثلث‌القاعده SPQR، طوری محاط شده‌است که دایرهٔ قاعده مخروط هم، درقاعدهٔ PQR هرم محاط شده‌است. می‌دانیم

$$\widehat{PSQ}=\frac{۷\pi}{۱۲} \text{ و } \widehat{SQR}=\frac{\pi}{۴} \text{ و } PSR=\frac{\pi}{۲}$$

نسبت سطح جانبی مخروط را به‌سطح قاعدهٔ PQR پیداکنید.

۷۰- قاعدهٔ هرم ABCDE متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشد. هیچ‌یك ازوجوه جانبی، مثلث منفرجه‌الزاویه نیستند. روی یال DC، نقطهٔ M طوری قراردارد که خط EM بر BC عموداست. علاوه بر آن، قطر AC ازقاعدهٔ هرم ویالهای جانبی ED وEB دررابطهٔ زیرصدق می‌کنند،

$$|AC|\geqslant\frac{۵}{۴}|EB|\geqslant\frac{۵}{۳}|ED|$$

مقطعی به‌شکل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ازرأس B ووسط یکی‌از یالهای جانبی‌گذشته است. نسبت مساحت سطح مقطع را به‌مساحت قاعدهٔ هرم پیداکنید.

۷۱- AB وتری به‌طول واحد، ازکره‌ای به‌شعاع واحد است‌که باقطر CD ازکره زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ می‌سازد. اگر $CA=\sqrt{۲}$ کوچکتر از CB باشد، طول پاره خط BD را تعیین کنید.

۷۲- درهرم مثلث‌القاعده ABCD. مساحتهای وجوه ABC و ABD به‌ترتیب p و q

است. زاویهٔ بین آنها α . مساحت مقطعی ازهرم را پیداکنیدکه، ازیال AB ومرکز کرهٔ محاطی هرم میگذرد.

۷۳- درهرم مثلث‌القاعدهٔ $ABCD$ ، مقطعی ازیال AD ونقطهٔ E ($|AD|=a$ و E وسط BC است) میگذرد. این مقطع با وجوه ACD و ADB به‌ترتیب زوایایی برابر با α و β تشکیل میدهد. حجم‌هرم‌را پیداکنید. درصورتیکه مساحت مقطع ADE برابر S میباشد.

۷۴- چهاروجهی $ABCD$ به‌یال a مفروض است. مرکزوجه ADC را نقطهٔ M ووسط یال BC را نقطهٔ N می‌نامیم. شعاع کره‌ای را پیداکنیدکه‌در کنج سه‌وجهی A محاط بوده وبرخط راست MN مماس باشد.

۷۵- قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعدهٔ $ABCD$ را ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تشکیل میدهد. وجه BCD باصفحهٔ قاعدهٔ هرم زاویهٔ $60°$ میسازد. مرکزدایره‌ای به‌شعاع واحدکه بریالهای AB و AC ووجه BCD مماس میباشد، برروی خطی‌قراردارد که‌ازنقطهٔ D برقاعده عمود میشود. طول ارتفاع DH ازهرم برابر بانصف طول ضلع قاعدهٔ هرم است. حجم هرم‌را پیداکنید.

۷۶- درهرم مثلث‌القاعدهٔ $SABC$ ، $|AC|=|AB|$ ویال SA با صفحات ABC و SBC زاویهٔ $45°$ میسازد. میدانیم رأس A و اوساط همهٔ یالهای هرم به جز SA، روی‌کره‌ای به‌شعاع ۱ قرار دارند. ثابت‌کنید مرکزکره روی یال SA قرار میگیرد. همچنین مساحت وجه ASC را حساب‌کنید.

۷۷- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به‌طول یال a داده شده است. شعاع کره‌ای را پیدا کنیدکه برپاره‌خطهای AC_1 و CC_1 وخطوط AB و BC مماس بوده‌وخطوط AC و A_1C_1 را قطع‌کند.

۷۸- کره‌ای برصفحهٔ قاعدهٔ $ABCD$ از هرم چهاربرمنتظم $SABCD$ درنقطهٔ A مماس است. علاوه براین، برکره محاط در داخل هرم هم مماس میباشد. صفحهٔ قاطعی از مرکزکرهٔ اول وضلع BC قاعده میگذرد. زاویهٔ شیب این صفحه را با صفحهٔ قاعدهٔ هرم پیداکنید. درصورتیکه اقطارمقطع، بریالهای SA و SD عمود میباشند.

۷۹- روی‌کره‌ای به‌شعاع ۲، سه‌دایره به‌شعاع ۱ طوری قرارگرفته‌اند وهریك‌ازآنها به‌دو دایرهٔ دیگرمماس است. شعاع دایره‌ای را برروی‌کره پیداکنیدکه‌کوچکتـر از ایـن دوایر بوده وبه‌هریك ازآنها مماس باشد.

۸۰- در متوازی‌السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ یالهای AB و BC و BB_1 بـه ترتیب $2a$ و a و a طول دارنـد. وسط BC را E می‌نـامیم. رئوس M و N از چهاروجهی $MNPQ$، روی خط C_1E، ورئوس P و Q برروی خط راستی قرار دارندکه ازنقطه B_1 می‌گذرد وخط AD را درنقطه F قطع می‌کند. مطلوبست:

a) طول پاره خط DF

b) فاصله بین اوساط MN و PQ .

۸۱- طول یـال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقاط M و N به ترتیب برروی پاره خطهای BD و CC_1 قراردارند وخط MN باصفحه $ABCD$ زاویه $\frac{\pi}{4}$ و با صفحه BB_1C_1C زاویه $\frac{\pi}{6}$ تشکیل می‌دهد. مطلوبست:

a) طولِ پاره خط MN.

b) شعاع کره‌ای‌که مرکز آن روی پاره‌خط MN قرارداشته وبرصفحات $ABCD$ و BB_1C_1C مماس باشد.

۸۲- رأس A ازمنشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ بررأس‌یك مخروط منطبق است و رئوس B و C آن، روی سطح جانبی مخروط ورئوس B_1 و C_1 آن بروی دایره قـاعده قرار دارنـد. نسبت حجم مخروط را بـه‌حجم هرم پیداکنید. درصورتیکه می‌دانیم $|AA_1| = 2{,}4|AB|$

۸۳- طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقاط P و K و L به‌ترتیب اوساط AA_1 و A_1D_1 و B_1C_1 درنظرگرفته‌شده‌اند ونقطه Q مرکزوجه CC_1D_1D می‌باشد. دوسر پاره خط MN برروی خطوط AD و KL قـرارگرفته، خط PQ را قطع وبرآن عمود شده است. طول این پاره خط را حساب‌کنید.

۸۴- درمنشورمنتظم $ABCA_1B_1C_1$ طول یالهای جانبی و ارتفاع قاعده با هم مساوی و برابر a می‌باشند. دوصفحه به‌این‌ترتیب از رأس A می‌گذرد: یکی عمود بر AB_1 ودیگری عمود بر AC_1 . از رأس A_1 هم دوصفحه می‌گذرد: یکی عمود بر A_1B ودیگری عمود بر A_1C.
حجم چند وجهی محصور بین این چهارصفحه وصفحه BB_1C_1C را پیداکنید.

۸۵- نقطه O رأس مشترك دومخروط برابر می‌باشدکه دریك طرف صفحه α قرار دارند؛ طوری‌که یك‌مولد ازهرمخروط (OA از اولی و OB از دومی) برروی صفحه α

قرارگرفته‌اند. زاویه بین ارتفاعات دومخروط برابر β و زاویه بین ارتفاع ومولد مخروط برابر φ است. $(۲\varphi<\beta)$ اندازه زاویه بین مولد OA وصفحه قاعده مخروط دیگر راکه نقطه B به‌آن تعلق دارد پیداکنید.

۸۶- درداخل چهار وجهی منتظم ABCD دوکره به شعاعهای ۲R و ۳R طوری قرار گرفته‌اندکه برهم مماس هستند. یکی ازآنها درکنج سه وجهی به رأس A ودیگری درکنج سه‌وجهی به‌رأس B محاط شده‌اند. طول یال‌این چهاروجهی را حساب کنید.

۸۷- درهرم چهار برمنتظم SABCD باقاعده ABCD، و به‌ضلع a، زاویه بین یالهای جانبی وصفحه قاعده برابر α است. صفحه‌ای‌که به موازات قطر AC قاعده، ویال جانبی BS رسم می‌شود، طوری هرم را قطع می‌کندکه درمقطع حاصل، می‌توان دایره‌ای را محاط کرد. شعاع این دایره را تعیین‌کنید.

۸۸- طول هریال چهاروجهی منتظمی برابر a است. صفحه P ازرأس B واوساط یالهای AC و AD می‌گذرد. کره‌ای برخطوط AB و AC و AD وآن بخش ازصفحه P که درداخل چهاروجهی قرارگرفته مماس است. شعاع کره را حساب کنید.

۸۹- درچهار وجهی منتظمی، M و N اوساط دویال متقابل هستند. تصویرچهاروجهی، برروی صفحه‌ای‌که موازی با MN می‌باشد، چهارضلعی‌ای‌است‌که مساحت آن‌برابر S ویکی از زوایای‌آن ۶۰° است. سطح جانبی چهاروجهی را پیداکنید.

۹۰- در مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ نقطه M روی AC و نقطه N روی قطر $BD_۱$ مکعب طوری اختیارشده‌اندکه، $\widehat{NMC}=۶۰^\circ$ و $\widehat{MNB}=۴۵^\circ$.
به‌چه نسبتی پاره خط AC و $BD_۱$ توسط M و N تقسیم می‌شوند؟

۹۱- قاعده منشور قائم $A_۱B_۱C_۱D_۱$ ABCD ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD می‌باشد که درآن، AD موازی BC و $|AD|/|BC|=n$ و $n>۱$. از یالهای $AA_۱$ و BC صفحاتی موازی باقطر $B_۱D$ وازیالهای $DD_۱$ و $B_۱C_۱$ صفحاتی به‌موازات قطر $A_۱C$ مرور داده شده‌است. نسبت حجم هرم مثلث‌القاعده‌محصوربین‌این‌صفحات به‌حجم منشور را پیداکنید.

۹۲- طول ضلع قاعده منشورمنتظم $A_۱B_۱C_۱$ ABC، برابر a می‌باشد. نقاط M و N را به‌ترتیب اوساط یالهای $A_۱B_۱$ و $AA_۱$ درنظرمی‌گیریم. تصویرپاره خط BM روی $C_۱N$ برابر $\frac{a}{۲\sqrt{۵}}$ شده است. ارتفاع منشور را پیداکنید.

۹۳- دوکره برهم وبروجوه فرجه‌ای‌که اندازه‌آن α است مماس شده‌اند. نقاط A و B،

نقاط تماس دو کره با وجوه فرجه درنظر گرفته شده‌اند. (A و B به‌کره‌های‌متفاوت ووجوه متفاوت تعلق دارند.) پاره خط AB، درنقاط برخوردش با سطوح دوکره، به‌چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۹۴- قاعده هرم $ABCD$ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۲ می‌باشد. یـال BD برصفحه‌قاعده عمود، واندازه آن $10\sqrt{3}$ است. همه رئوس‌هرم روی سطح استوانه دوارقائمی قرار دارندکه محورآن، یال BD وصفحه ABC را قطع می‌کند. شعاع استوانه را تعیین‌کنید.

۹۵- قاعده هرمی، مربع $ABCD$ به‌ضلع a می‌باشد. یال‌جانبی SC برصفحه قاعده هرم عمود وطول‌آن برابر b است. نقطه M روی یـال AS انتخاب شده است ونقاط M و B و D روی سطح جانبی مخروطی قرار دارندکه A رأس‌آن ونقطه C در صفحه قاعده‌آن قرار دارد. سطح جانبی مخروط را حساب‌کنید.

۹۶- درداخل مخروط دوار قـائمی، مکعبی طوری قرار داده شده‌که یکی از یالهای‌آن، روی قطرقـاعده قرار دارد، ورئوس مکعب‌که به‌این یـال تعلق ندارند، روی سطح جانبی مخروط قرارگرفته‌اند. مرکزمکعب هم روی ارتفاع مخروط قراردارد.نسبت حجم مخروط به‌حجم مکعب را پیداکنید.

۹۷- درمنشورمثلث‌القاعده $ABCA_1B_1C_1$، دو مقطع به‌این ترتیب مرور داده شده‌اند: یکی ازآنها بریال AB ووسط یال CC_1 می‌گذرد، ودیگری بریال A_1B_1 ووسط یال CB می‌گذرد. نسبت طول پـاره خطی ازفصل مشترك دوصفحه راکـه در داخل منشورمحصورشده، به‌طول یال AB پیداکنید.

۹۸- درچهار وجهی $ABCD$، یال AB بر یال CD عمود است و $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$ و مساحت مقطعی‌که بر یـال AB و وسط یـال DC می‌گذرد، برابر است بـا S و $|DC|=a$. حجم چهار وجهی $ABCD$ را پیداکنید.

۹۹- هرم منتظم $SABC$ مفروض است. (S رأس هرم است.) یال SC ازاین هرم، با یال جانبی منشورمنتظم $A_1B_1CA_2B_2S$ مشترك است.
(A_1A_2 و B_1B_2 و CS یالهای‌جانبی و A_1B_1C یکی ازقاعده‌های‌آن‌می‌باشد.) رئوس A_1 و B_1 برروی صفحه وجـه SAB هرم قرار دارند. چه قسمتی ازتمام حجم هرم،آن قسمت ازحجم آنرا تشکیل می‌دهدکه درداخل منشور واقع شده است؟ درصورتیکه می‌دانیم نسبت طول یال جانبی هرم به‌طول ضلع قاعده آن $\frac{2}{\sqrt{3}}$ است.

۱۰۰- درهرم چهار بر ناقص منتظم، AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 یالهای جانبی، $A_1B_1C_1D_1$ بهضلع ۱ قاعده بالا می باشد. طول ضلع قاعده پائین ۷ است. صفحهای از یال B_1C_1 گذشته، برصفحه AD_1C عمود شده وهرم را بهدوقسمت با حجمهای مساوی تقسیم کرده است. حجم هرم را پیداکنید.

۱۰۱- قاعده منشور $ABCA_1B_1C_1$ مثلث متساویالاضلاع به ضلع a میباشد. تصویر منشور برروی صفحه قاعده، ذوذنقهایباساق جانبیAB ومساحتی برابر بادوبرابر مساحت قاعده میباشد. اگرشعاع کرهایکه بررئوس A وB وA_1 و C_1 میگذرد برابر a باشد، حجم منشور را پیداکنید.

۱۰۲- درداخل صفحهای، مربع $ABCD$ بهضلع a قرار دارد. نقطه M بهفاصله d از مرکز آن واقع شده است. مجموع حجمهای اجسامی را پیداکنیدکه از دوران مثلثهای ABM و BCM و CDM و DAM به ترتیب حول AB و BC و CD و DA بدست میآیند.

۱۰۳- D وسط یال A_1C_1 از منشور مثلثالقاعده منتظم $ABCA_1B_1C_1$ است. هرم مثلثالقاعده $SMNP$ طوری قرارگرفتهاست که صفحهقاعده MNP آن، برصفحه ABC منطبق است و رأس M برامتداد AC قراردارد و $|CM|=\frac{1}{2}|AC|$.

ویال SN ازنقطه D میگذرد ویال SP پاره خط BB_1 را قطع میکند. پارهخط BB_1 درنقطه تقاطع بهچه نسبتی تقسیم میشود؟

۱۰۴- مراکز سهکره، بهشعاعهای ۳ و۴ و۶ برروی رئوس مثلث متساویالاضلاعی بهضلع ۱۱ قراردارند. چندصفحهیافت میشودکه توأما برهرسهکره مماس باشند؟

۱۰۵- زوایای رأسکنج سهوجهی $NKLM$ (Nرأسکنج است.) همه قائمهاند. روی وجه LNM ، نقطه P بفاصله ۲ از رأس N و بفاصله ۱ از یال MN اختیار شده است. ازنقطهای مانند S در داخلکنج $NKLM$، یك شعاع نورانی بهنقطه P تابانده میشود. شعاع تابش، SP، با صفحه MNK زاویه $\frac{\pi}{4}$ و با یالهای KN و MN زوایای مساوی تشکیل میدهد. شعاع نورانی روی وجوهکنج $NKLM$ ، مانند برخورد باآینه بازتاب پیدا میکند. ابتدا بهنقطه P برخورد میکند، سپس بهنقطه Q وازآنجا بهنقطهR برخورد میکند. مجموع طولهایپاره خطهای PQ و QR را پیداکنید.

۱۰۶- قاعده هرم مثلث‌القاعده $ABCD$، مثلث ABC است‌که درآن $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$ و $C=\frac{\pi}{6}$ و $|BC|=2\sqrt{2}$. یالهای AD و BD و CD ازنظرطول برابرند. کره‌ای به‌شعاع واحد بریالهای AD و BD وامتداد یال CD، ازطرف D، وصفحه ABC مماس است. طول خط مماس راکه ازنقطه A براین‌کره رسم شده است پیداکنید.

۱۰۷- سه‌کره‌که دوتـای‌آنها باهم مساوی‌اند، برصفحه P مماس شده‌انـد. علاوه براین، کره‌ها دوبه‌دونیز بریکدیگرمماس هستند. رأس مخروطی دوار وقائمی روی صفحه P قرارگرفته ومحورآن براین صفحه عمود شده‌است. هرسه‌کره درخارج مخروط قرار دارند وبرسطح جانبی‌آن مماس هستند.کوسینوس زاویه بین مولد مخروط و صفحه‌Pرا حساب‌کنید. درصورتیکه‌می‌دانیم مثلث حاصل ازنقاط تماس‌کره‌ها بـا صفحه مفروض، یك زاویهٔ 150° دارد.

۱۰۸- حجم چهار وجهی $ABCD$ برابر ۵ است. ازوسط یالهای AD و BC صفحه‌ای گذشته و یال CD را در نقطه M قطع‌کرده است. نسبت طولهای پاره خط‌هـای DM و CM برابر$\frac{2}{3}$ است. مساحت مقطع حاصل‌ازتقاطع این‌صفحه وچهاروجهی را پیداکنید. درصورتیکه فاصله‌آن از رأس A برابر است با ۱.

۱۰۹- کره‌ای به‌شعاع ۲ در داخل هرم منتظم $SABC$ محاط شده است. S رأس هرم، ABC قـاعده‌آن می‌بـاشد. طول ارتفاع SK هرم برابر است با ۶. ثابت‌کنید صفحه قاطع منحصربه‌فردی موجود است‌که یالهای AB و BC از قاعده هرم را درنقاط M و N به‌قسمی قطع می‌کندکه $MN=7$ ودرنقطه‌ای به‌یك فاصله از M و N، برکره مماس می‌شود وامتداد ارتفاع‌SK را ازطرف K، در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند. طول پاره خط SD را حساب‌کنید.

۱۱۰- همه یالهای هرم مثلث‌القاعده $ABCD$ بریك کره مماس هستند. سه پاره خط که اوساط یـالهای متنافر هـرم را بهم وصل می‌کنند، طولهای مساوی دارند . زاویه $\widehat{ABC}=100^\circ$. نسبت طولهای ارتفاعات هرم راکه از رئوس A و B اخراج می‌شوند حساب‌کنید.

۱۱۱- در هرم $SABC$، حاصلضرب طولهای یـالهای هریك ازچهار وجه هرم، با هم برابرند. طول ارتفاع وارد از رأس S برصفحه ABC برابر $2\sqrt{\frac{102}{55}}$ و

اندازه زاویه $\widehat{CAB}$ برابر $\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{۱}{۶}\sqrt{\frac{۱۷}{۲}}\right)$ است. حجم هرم SABC را حساب کنید،

درصورتیکه $|SA|^۲+|SB|^۲-۵|SC|^۲=۶۰$

۱۱۲- مثلث متساوی‌الساقین ABC در داخل صفحه P مفروض است. ($|AC|=۲a$ و $|AB|=|BC|=I$) کره‌ای به‌شعاع r درنقطه B برصفحه P مماس شده است. دوخط متنافر ازنقاط A و C گذشته و برکره مماس می‌شوند. زاویه هریك از این دوخط با صفحه P مساوی وبرابر α می‌باشد. فاصله بین دوخط را پیداکنید.

۱۱۳- قاعده هرم ABCEH، چهارضلعی محدب ABCE می‌باشدکه با قطر BE به‌دو مثلث معادل تقسیم می‌شود. طول یال AB برابر ۱ و طول یالهای BC و CE با هم برابرند. مجموع طول یالهای AH و EH برابر $\sqrt{۲}$ وحجم‌هرم برابراست با $\frac{۱}{۶}$ شعاع کره‌ای را پیدا کنید که بیشترین حجم را داشته باشد، و در داخل هرم جا بگیرد.

۱۱۴- درهرم SABC، خط راستی یالهای AC و BS را قطع می‌کند، برآنها عمود است و از وسط SB هم می‌گذرد. وجه ASB با وجه BSC معادلند ومساحت ASC دوبرابرمساحت BSC می‌باشد. علاوه براینها، درداخل هرم نقطه‌ای مانند M وجود داردکه مجموع فواصل‌آن، از رئوس B و S برابر بامجموع فواصل آن ازکلیهٔ وجوه هرم‌است. فاصله نقطه M را ازرأس B پیداکنید. درصورتیکه:
$|AC|=\sqrt{۶}$ و $|BS|=۱$

۱۱۵- قاعده یك‌هرم، مستطیلی است‌که زاویه حاده بین دوقطرآن α، ($\alpha<۶۰$) ویالهای جانبی آن مساوی و ارتفاع‌آن h می‌باشد. در داخل هرم، هرم مثلث القاعده‌ای طوری قرار داده شده‌که رأس آن، بررأس هرم اول منطبق است و رئوس قاعده آن،روی سه ضلع مستطیل‌قراردارند. حجم‌هرم چهار بررا پیدا کنید. درصورتیکه می‌دانیم همه یالهای جانبی هرم سه بر، با هم برابر و وجوه‌جانبی‌آن باهم‌معادل هستند.

۱۱۶- در هرم مثلث‌القاعده SABC، که قاعده‌آن ABC می‌باشد، همه یالهای جانبی برابرند. مجموع فرجه‌های نظیر یالهای SA و SC برابر ۱۸۰° است. اگر $|AB|=a$ و $|BC|=b$، طول یالهای جانبی هرم را پیداکنید.

۱۱۷- چهار وجهی منتظمی به‌یال a مفروض است. کره‌ای به‌سه یال آن‌که از یك رأس خارج می‌شوند، درنقطه انتهایی آنها مماس است. مساحت آن‌قسمت ازسطح کره را پیداکنیدکه درداخل چهار وجهی محصورشده است.

۱۱۸- سه دایره با شعاع $\sqrt{2}$ و دوبه‌دومماس برهم، روی‌کره‌ای به‌شعاع ۲ قرار دارند. آن قسمت ازسطح کره‌که درخارج دوایر قرار دارد، دومثلث منحنی‌الخط مشخص می‌سازند. مساحت این مثلث‌ها را پیداکنید.

۱۱۹- سه فرجه ازیك‌چهار وجهی‌که به‌یك رأس تعلق ندارند، باهم مساوی واندازه‌آنها $\frac{\pi}{2}$ است. سه‌فرجه باقیمانده‌هم بایکدیگر برابرند. اندازه این‌فرجه‌ها را پیداکنید.

۱۲۰- دوکره در داخل یك مخروط محاط وبرهم مماسند. (کره‌ها برسطح جانبی مخروط مماسند). کره سومی وجود دارد، ازدودایره‌ای‌که درطول آنها دوکره اول برسطح جانبی مخروط تماس حاصل می‌کنند، می‌گذرد. ثابت‌کنید حجم آن قسمت ازکره سوم‌که درخارج مخروط واقع شده‌است، برابر است باحجم آن قسمت ازمخروط که بین دوکره اول در داخل مخروط محصور شده است.

۱۲۱- کره‌ای به‌شعاع R، بریکی‌ازقاعده‌های مخروط ناقص، وبرسطح جانبی‌آن درطول دایره‌ای‌که منطبق بردایره قاعده دیگرمخروط‌است مماس می‌باشد. جسم جسمی را پیداکنیدکه ازترکیب یك‌مخروط ویك‌کره ساخته شده است. درصورتیکه مساحت سطح‌کل این جسم برابر S می‌باشد.

۱۲۲- دومثلث، یکی منتظم و به‌ضلع a و دیگری قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به‌ساقهای b طوری درفضا قراردارندکه مرکزثقل آنها، بریکدیگرمنطبق‌اند. مطلوبست مجموع مربعات فواصل همه رئوس یکی‌از این مثلث‌ها، ازهمه رئوس مثلث دیگر.

۱۲۳- درهرم مثلث‌القاعده منتظم $SABC$ (S رأس هرم است.) نقطه E وسط سهم وجه SBC و نقاط F و L و M به‌ترتیب برروی AB و AC و SC قرار دارند. $|AL|=\frac{1}{10}|AC|$ علاوه برآن می‌دانیم $EFLM$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است وطول قاعده EF ازآن برابر $\sqrt{7}$ می‌باشد. حجم هرم را پیداکنید.

۱۲۴- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a مفروض است. قاعده‌های استوانه‌ای در وجوه $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ محاط شده‌اند. نقطه M روی یال AB طوری قرارگرفته‌که $|AM|=\frac{a}{3}$ و N روی B_1C_1 به‌قسمی قرار داردکه $|NC_1|=\frac{a}{4}$.

از نقاط C_1 و M صفحه‌ای گذشته ، برقاعده استوانه‌که در $ABCD$ محاط شده، مماس گردیده است. صفحه‌ای هم از A و N گذشته وبرقاعده استوانه‌که در $A_1B_1C_1D_1$ محاط شده مماس شده است. حجم آن قسمت از استوانه را پیداکنید که بین صفحات محصورشده است.

۱۲۵- مساحت سطح کل منشورمحیط برکره‌ای را پیداکنید. درصورتیکه مساحت قاعده آن S باشد.

۱۲۶- مرکز کره α، برسطح کره β واقع شده‌است. نسبت مساحت سطح کره β که درداخل کره α قراردارد، به‌تمام مساحت سطح کره α، برابر $\frac{۱}{۵}$ است. نسبت شعاعهای دو کره α و β را پیداکنید.

۱۲۷- مخروط ناقصی، برکره‌ای محیط شده است. مساحت سطح کل مخروط، S است. کره دیگری برسطح جانبی مخروط درطول دایره قاعده‌آن مماس است. حجم مخروط ناقص را پیداکنید. درصورتیکه بدانیم مساحت قسمتی ازسطح کره دوم که درداخل کره اول قرارگرفته برابر Q می‌باشد.

۱۲۸- برکره‌ای مخروط ناقصی محیط شده است که قاعده‌های آن دایره‌های عظیمه دوکره دیگر هستند. سطح کل مخروط ناقص را پیداکنید. درصورتیکه مجموع مساحتهای سطح جانبی سه‌کره برابر S می‌باشد.

۱۲۹- مقطعی با مساحت ماکزیمم از راس مخروط دوار قائمی می‌گذرد. می‌دانیم مساحت این مقطع، دوبرابر مساحت مقطع محوری مخروط می‌باشد. زاویه رأس مقطع محوری مخروط را پیداکنید.

۱۳۰- هرم مثلث‌القاعده $SABC$ درداخل مخروطی محاط شده است. (S رأس مخروط و A و B و C روی دایره قاعده مخروط قرار دارند.) فرجه‌های نظیر یالهای SA و SB و SC را به‌ترتیب α و β و γ درنظرمی‌گیریم. زاویه بین صفحه SBC وصفحه مماس برسطح مخروط درطول مولد SC را پیداکنید.

۱۳۱- سه نقطه A و B و C روی سطح جانبی کره‌ای‌به‌شعاع R قراردارند و بوسیله کمانهایی از دایره‌های عظیمه‌ای که کمانهایشان کمتر از نیمدایره می‌باشند، دوبه‌دو بهمدیگروصل شده‌اند. ازاوساط کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ دایره عظیمه دیگری‌می‌گذرد که امتدادکمان $\overset{\frown}{BC}$ را در نقطه K قطع می‌کند. طول‌کمان $\overset{\frown}{CK}$ را حساب کنید. درصورتیکه $|BC|=I$ ، $(I<\pi R)$.

۱۳۲- حجم حادث ازدوران مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع a را، حول خطی‌که باصفحه مثلث موازی باشد پیدا کنید. درصورتیکه تصویر این خط روی صفحه مثلث، یکی از ارتفاعات مثلث را شامل می‌شود.

۱۳۳- جسمی ازنقاطی تشکیل شده است‌که فواصل نقاط آن ازنقطه دلخواهی واقع در داخل ویا روی یك‌شکل مسطحه به‌پیرامون $2P$ ومساحت S، از d تجاوزنمی‌کنند. حجم این‌جسم را پیدا کنید.(نقطه مفروض واقع درداخل صفحه نقطه ثابتی‌نیست.م)

۱۳۴- هرم مثلث‌القاعده SABC مفروض است. کره‌ای به شعاع R، درنقطه C برصفحه ABC ودرنقطه S بر یـال SA مماس شده است. خط راست BS کره را برای بـار دوم درنقطه‌ای مقـابل C قطع می‌کند. حجم هرم SABC را پیدا کنید. در صورتیکه $|BC|=a$ و $|SA|=b$.

۱۳۵- درداخل هرم مثلث‌القاعده منتظمی، رأس یك‌کنج سه‌وجهی قراردارد. همه زوایای رأس کنج قـائمه‌اند و صفحات نیمساز زوایای رأس از رئوس قاعده می‌گذرند. حجم هرم بوسیله سطح جانبی‌کنج به‌چه نسبتی تقسیم می‌شود؟ درصورتیکه هر وجه هرم، بوسیله آن به‌دوقسمت معادل تقسیم می‌شود.

۱۳۶- حجم متـوازی السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر V است . حجم مشترك دو چهاروجهی AB_1CD_1 و A_1BC_1D را پیدا کنید.

۱۳۷- دوهرم مثلث‌القاعده باحجم‌های مساوی V درفضا نسبت به‌نقطه O قرینه یکدیگرند. حجم مشترك آنها را پیدا کنید، درصورتیکه نقطه O روی پاره خطی قراردارد کـه رأس هرم را بمرکز ثقل قاعده وصل وخود پاره خط را به‌نسبت ۱:۱ ، ۳:۱ ، ۲:۱ و ۴:۱ از رأس تقسیم می‌کند.

۱۳۸- چهاروجهی منتظمی به‌حجم V، حول خطی‌کـه اوساط یالهای متنافر را بهم وصل می‌کند، به‌اندازه α دوران می‌کند. حجم قسمت مشترك چهاروجهی مفروض باچهار وجهی دوران یافته را پیدا کنید. $(0<\alpha<\pi)$

۱۳۹- طول یال مکعبی برابر a است. مکعب را حول قطرش به‌اندازه α دوران‌می‌دهیم. حجم مشترك مکعب اصلی را با مکعب دوران یافته پیدا کنید.

۱۴۰- یك شعاع نورانی تحت زاویه α به صفحه آینه‌ای تابانده می‌شود. آینه به‌اندازه β حول تصویر شعاع نورانی برروی آینه چرخـانده می‌شود. زاویه انحراف شعاع بازتاب چقدر است؟

۱۴۱- چهار نقطه A و B و C و D درفضا داده‌شده‌اند. به‌طوری‌که $|AB|=|BC|=|CD|$ و $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{CDA}=\alpha$. زاویه بین خطوط AC و BD را پید اکنید.

۱۴۲- مساحت قاعده منشور n ضلعی منتظم، برابر S است. دوصفحه، تمام یالهای جانبی منشوررا طوری قطع می‌کنندکه بخشی‌ازمنشورکه بین این صفحات محصورمی‌شود حجمی برابر V دارد. مجموع طولهای پاره خطهایی از یالهای جانبی منشور را که بین صفحات‌قاطع قراردارند، حساب کنید. درصورتیکه دوصفحه نقطه مشترکی درداخل منشور ندارند.

۱۴۳- سه‌ضلع متوالی پنج ضلعی محدبی‌که دریك صفحه واقع شده، برابربا ۱ و ۲ و a می‌باشد. دوضلع دیگر پنج ضلعی را پیداکنید، درصورتیکه پنج‌ضلعی، تصویرقائم يك پنج ضلعی‌منتظم روی‌همان صفحه می‌باشد. به‌ازای‌چه مقادیری‌از a مسئله‌جواب دارد.

۱۴۴- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، نقطه M مرکز وجه ABB_1A_1 و N نقطه‌ای واقع برروی B_1C_1 و L وسط A_1B_1 و K پای عمود مرسوم از N بر BC_1 داده شده‌اند. یال B_1C_1 بوسیله نقطه N به‌چه نسبتی تقسیم می‌شود؟ درصورتیکه $\widehat{LMK}=\widehat{MKN}$.

۱۴۵- درهرم شش برمنتظم، مرکز کره محیطی روی سطح‌کره محاطی قراردارد. نسبت شعاع‌کره محیطی به‌شعاع‌کره محاطی را پیداکنید.

۱۴۶- درهرم چهاربر منتظم، مرکز کره محیطی روی سطح‌کره محاطی قراردارد، اندازه زاویه رأس هرم را پیداکنید.

۱۴۷- قاعده هرم چهاربر $SABCD$ مربع $ABCD$ به‌ضلع a می‌باشد. هردوزاویه بین وجوه جانبی متقابل هرم، برابر α است. حجم هرم را پیداکنید.

۱۴۸- صفحه‌ای با قطع وجوه جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، میانه‌های وجوهی را هم،که ازيك رأس خارج می‌شوند به‌نسبت‌های ۲:۱ و ۱:۲ و ۴:۱ تقسیم می‌کند. (اندازه‌ها از رأس سنجیده می‌شوند.) این صفحه حجم هرم را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟.

۱۴۹- n مخروط مساوی در رأس مشترکند. هریك ازآنها به‌دومخروط مجاور درطول يك‌مولد مماس می‌باشد وهمه مخروطها بيك صفحه مماس هستند. زاویه رأس‌مقطع

محوری مخروطها را پیدا کنید.

۱۵۰- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. صفحه‌ای از نقطه A گذشته و بر کره محاطی آن درداخل مکعب مماس و یالهای A_1B_1 و A_1D_1 را درنقاط K و N قطع می‌کند. اندازه فرجه بین صفحات AC_1K و AC_1N را تعیین کنید.

۱۵۱- چهاروجهی $ABCD$ مفروض‌است. چهاروجهی دیگر $A_1B_1C_1D_1$ طوری قرار داده شده‌است که رئوس A_1 و B_1 و C_1 و D_1 به‌ترتیب بر روی صفحات BCD و CDA و DAB و ABC قراردارند وصفحات وجوه $A_1B_1C_1$ و $B_1C_1D_1$ و $C_1D_1A_1$ و $D_1A_1B_1$ آن به‌ترتیب شامل رئوس D و A و B و C از چهار وجهی $ABCD$ می‌باشند. علاوه بر آن، نقطه A_1 بر مرکز ثقل مثلث BCD منطبق است وخطوط BD_1 و CB_1 و DC_1 به‌ترتیب پاره خطهای AC و AD و AB را نصف می‌کنند. حجم مشترك این دوچهار وجهی را پیدا کنید. درصورتیکه حجم چهاروجهی $ABCD$ برابر V است.

۱۵۲- درچهاروجهی $ABCD$ داریم، $|DA|=|CD|=|BC|$ و $|BD|=|AC|$ و $|BC|>|BD|$ وفرجه نظیر یال AB برابر $\frac{\pi}{3}$ است. مجموع بقیه فرجه‌ها را پیدا کنید.

۱۵۳- منشور مثلث‌القاعده $ABCA_1B_1C_1$ داده شده‌است. می‌دانیم هرم‌های $ABCC_1$ و ABB_1C_1 و $AA_1B_1C_1$ باهم برابرند. فرجه‌های بین‌صفحه قاعده و وجوه‌جانبی منشور را پیدا کنید. در صورتیکه قاعده منشور مثلث قائم‌الزاویه نامتساوی‌الساقین است.

۱۵۴- چهاروجهی منتظم $ABCD$ به‌یال a مفروض است. درصفحات BCD و CDA و DAB و ABC به‌ترتیب‌نقاط A_1 و B_1 و C_1 و D_1 طوری اختیارشده‌اند که خط A_1B_1 برصفحه BCD و خط B_1C_1 برصفحه CDA وخط C_1D_1 برصفحه DAB وسرانجام خط D_1A_1 برصفحه ABC عمود هستند. حجم چهار وجهی $A_1B_1C_1D_1$ را پیدا کنید.

۱۵۵- n کره مساوی به‌شعاع R برسطح جانبی وقاعده مخروط ازداخل آن مماسند. هر کره بردو کره مجاورهم مماس‌می‌باشد. n کره به‌شعاع $2R$ وبه‌همین‌طریق بطورخارجی برسطح جانبی مخروط مماس هستند. حجم مخروط را پیدا کنید.

۱۵۶- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. نقاط M و N برروی پاره‌خطهای

AA_1 و BC_1 طوری اختیار شده‌اندکه خط MN، خط B_1D را قطع می‌کند. مطلوبست

$$\frac{|BC_1|}{|BN|}-\frac{|AM|}{|AA_1|}$$

۱۵۷- همه‌وجوه یك چهار وجهی، مثلث‌های‌متشابه هستند. اما همه آنها مساوی‌نیستند. علاوه بر این هردو وجه لااقل یك زوج یالهای‌مساوی دارند، به‌جزء یال مشترك که درنظر گرفته نمی‌شود. حجم چهاروجهی را پیداکنید، درصورتیکه طول دو یال‌که دریك وجه قرارگرفته‌اند برابر ۳ و ۵ باشد.

۱۵۸- سه خط دوبه‌دوعمود برهم مفروضند. فاصله بین هردوتـا از این خطهـا برابر a می‌باشد. حجم متوازی‌السطوحی را پیداکنیدکـه قطر آن روی یکی از این خطوط قرارگیرد واقطار دووجه مجاورآن روی دوخط دیگر واقع شوند.

۱۵۹- مقطع هرم چهار برمنتظمی، پنج ضلعی منتظم به‌ضلع a شده است. حجم چهاروجهی را پیداکنید.

۱۶۰- مثلث ABC با مساحت S وشعاع دایـرمحیطی R داده شده است. درصفحه مثلث ازرئوس A و B و C، سه‌عمود اخراج می‌کنیم ونقاط A_1 و B_1 و C_1 را روی آنها طوری اختیارمی‌کنیم‌که پاره خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 ازنظرطول به ترتیب بـا طول ارتفاعات مثلث‌که از رئوس A و B و C رسم می‌شوند، برابر باشند حجم هرمی راکه بین صفحات A_1B_1C و A_1BC_1 و AB_1C_1 و ABC محصورشده پیداکنید.

بخش دوم

مسائل اثباتی

۱۶۱- آیا ارتفاعات هرچهاروجهی دریك نقطه متقاربند؟

۱۶۲- آیا هرم مثلث‌القاعده‌ای وجود دارد که همهٔ پاهای ارتفاعات آن خارج از وجوه نظیرشان قرار گیرند؟

۱۶۳- ثابت کنید اگر خط راستی با سه‌خط متقاطع یك‌صفحه، زوایای مساوی‌بسازد، بر آن صفحه عمود است.

۱۶۴- اگرمکعبی را با صفحه‌ای قطع کنیم‌چه نوع n ضلعی‌منتظم بوجود می‌آید؟

۱۶۵- ثابت کنید مجموع زوایای رأس هر کنج سه‌وجهی‌از 2π کمتر ومجموع فرجه‌های آن از π بیشتراست.

۱۶۶- زوایای رأس یك‌کنج سه‌وجهی α و β و γ و فرجه‌های مقابل آنها به‌ترتیب A و B و C می‌باشد. ثابت کنید تساوی زیر برقراراست،

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A}=\frac{\sin \beta}{\sin B}=\frac{\sin \gamma}{\sin C} \qquad (۱)$$

(قضیه سینوسها در کنج)

$$\cos \alpha=\cos \beta \cos \gamma+\sin \beta \sin \gamma \cos A \qquad (۲)$$

(قضیه اول کسینوسها در کنج)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha \qquad (۳)$$

(قضیه دوم کوسینوسها در کنج)

۱۶۷- ثابت کنید اگر همهٔ زوایای رأس یك کنج حاده باشند، درآن‌صورت همهٔ فرجه‌های کنج هم حاده خواهندبود.

۱۶۸- ثابت کنید اگر همهٔ فرجه‌های یك کنج سه‌وجهی حاده باشند، آنگاه همهٔ زوایای‌رأس آن‌هم حاده خواهندبود.

۱۶۹- ثابت کنید درهرچهاروجهی، کنجی پیدا می‌شودکه همهٔزوایای رأس آن‌حاده باشند.

۱۷۰- ثابت کنید درهرچندوجهی که همهٔ وجوه آن مثلث باشد، یالی پیدا می‌شودکه تمام زوایای مجاور آن حاده باشند.

۱۷۱- ثابت کنید سطح یك منشورمثلث‌القاعده را طوری می‌توان قطع کرد که مقطع حاصل یك مثلث متساوی‌الاضلاع شود.

۱۷۲- در هرم مثلث‌القاعده‌ای، همهٔ زوایای رأس A قائمه وطول یال AB با مجموع طولهای دویال دیگر که ازرأس A اخراج می‌شوند برابراست.

ثابت کنید مجموع زوایای رأس B برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۷۳- آیا می‌توان سطح هر کنج سه‌وجهی را با صفحه‌ای طوری قطع کرد که مقطع یك مثلث متساوی‌الاضلاع بشود؟

۱۷۴- زوایای رأس یك کنج سه‌وجهی را پیداکنید، درصورتیکه می‌دانیم مقطع آن با هر صفحه قاطعی یك مثلث حاده‌الزاویه می‌شود.

۱۷۵- ثابت کنید درهرچهاروجهی رأسی‌موجود است، به‌طوری‌که با پاره‌خطهای‌هم‌طول با یالهایی‌که ازآن رأس خارج می‌شوند، می‌توان مثلثی ساخت.

۱۷۶- ثابت کنید هرچهاروجهی را می‌توان بایك صفحهٔ قاطع به‌دوقسمت چنان برید که از پهلوی‌هم قراردادن قطعات حاصل از آن به‌شکلی دیگر، باز همان چهاروجهی را ساخت.

۱۷۷- زوایای رأس یك کنج سه‌وجهی را پیداکنید، درصورتیکه می‌دانیم کنج دیگری

موجود است به‌قسمی‌که رأس آن بر رأس کنج اول منطبق بوده و یالهـای آن در داخل صفحاتی‌که وجوه کنج مفروض را تشکیل می‌دهند، بـر یالهـای متقابل کنج مفروض عمودند.

۱۷۸- خط راست l، با سه‌خط دو به‌دو متعامد، زوایای α و β و γ می‌سازد. ثابت‌کنید

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi$$

۱۷۹- ثابت‌کنید مجموع زوایایی‌که یالهای یك‌کنج سه‌وجهی بـا وجوه مقابل می‌سازند، کمتر ازمجموع زوایای رأس است. همچنین ثابت‌کنید، اگرزوایای رأس یك‌کنج سه‌وجهی حاده باشند، درآن صورت مجموع زوایایی‌که یالهای‌آن با وجوه مقابل می‌سازند، از نصف مجموع زوایای رأس بیشتراست. آیا این حکم دربارهٔهر کنج سه‌وجهی صادق است؟

۱۸۰- ثابت‌کنید مجموع چهارفرجه از یك چهاروجهی (باکنارگذاشتن دو فرجه متقابل) از ۲π کمترومجموع همه فرجه‌ها چهاروجهی بین ۲π و ۳π می‌باشد.

۱۸۱- از نقطهٔ دلخواهی واقع بـر روی قاعدهٔ یك هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم، عمودی اخراج شده است. ثابت‌کنید مجموع طولهـای پـاره خطهـایی‌که پای عمود را به محل برخورد خط عمود با وجوه جانبی ویا امتدادآنها وصل می‌کنند، مقدارثابتی‌است.

۱۸۲- ثابت‌کنید اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ و $x_۴$ فواصل نقطهٔ دلخواهی واقـع در داخل یك چهاروجهی ازوجوه‌آن، و $h_۱$ و $h_۲$ و $h_۳$ و $h_۴$ ارتفاعات نظیرهمان وجوه‌ازچهار وجهی باشند، آنگاه،

$$\frac{x_۱}{h_۱}+\frac{x_۲}{h_۲}+\frac{x_۳}{h_۳}+\frac{x_۴}{h_۴}=۱$$

۱۸۳- ثابت‌کنید صفحه‌ای‌که ازوسط دویال متنافر یك چهاروجهی می‌گذرد، آنرا ازنظر حجم، به‌دوقسمت معادل تقسیم می‌کند.

۱۸۴- ثابت‌کنید اگر قاعدهٔ هـرم مثلث‌القاعده ABCD ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، و

$$\widehat{DAB}=\widehat{DBC}=\widehat{DCA}$$

آنگاه ABCD یك هرم منتظم است.

۱۸۵- اگر (a_1, a) و (b_1, b) و (c_1, c) زوج یالهای متقابل یك چهاروجهی، و α و β و γ به‌ترتیب زاویهٔ بین‌آنها باشد (α و β و γ از $90°$ تجاوز نمی‌کنند.) ثابت کنید یکی‌از سه عدد $aa_1\cos\alpha$ و $bb_1\cos\beta$ و $cc_1\cos\gamma$ برابر با مجموع دوعدد دیگراست.

۱۸۶- درچهاروجهی $ABCD$، یالهای DA و DB و DC با ارتفاعات نظیر خـود از مثلث ABC برابرند. (DA باارتفاع مـرسوم ازرأس A و... همین‌طور بقیه.) ثابت‌کنید ازسه رأس چهاروجهی‌کره‌ای می‌گذرد و یالهایی راکه از رأس چهارم اخراج می‌شوند درسه رأس یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع قطع می‌کند.

۱۸۷- هرم چهاربر $MABCD$،که قاعدهٔ آن $ABCD$ یك چهـارضلعی محدب می‌باشد مفروض است. صفحه‌ای، یالهای MA و MB و MC و MD را به ترتیب در نقاط K و L و P و N قطع می‌کند. ثابت‌کنید رابطهٔ زیر برقراراست،

$$S_{BCD}\cdot\frac{|MA|}{|MK|}+S_{ADB}\cdot\frac{|MC|}{|MP|}=S_{ABC}\cdot\frac{|MD|}{|MN|}+S_{ACD}\quad\frac{|MB|}{|ML|}$$

۱۸۸- از نقطهٔ دلخواهی درفضا، عمودهایی بروجوه یك مکعب وارد می‌کنیم شش‌پاره‌خط که به این ترتیب به‌دست می‌آید، اقطار شش‌مکعب را تشکیل می‌دهند. ثابت‌کنید شش‌کره،که هریك ازآنها به‌همهٔ یالهای مکعب نظیرخود مماس هستند، دریك خط مماس، مشترکند.

۱۸۹- سه‌خط متوازی وسه‌نقطهٔ ثابت AوBوC برروی‌آنها مفروضند. نقاط M و N و L به‌ترتیب روی همان خطها ودریك‌طرف صفحهٔ مثلث ABC اختیارشده‌اند. ثابت‌کنید اگر:

a) مجموع پاره‌خطهای AM و BN و CL مقدارثابتی باشد و یا ،

b) مجموع مساحتهای ذوزنقه‌های $AMNB$ و $BNLC$ و $CLMA$ مقدارثابتی باشدآنگاه صفحهٔ MNL ازنقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۹۰- مجموع طولهای دویال متنافر یك‌چهاروجهی، برابر بامجموع طولهای دویال‌متنافر دیگرآن است. ثابت‌کنید مجموع فرجه‌های نظیریالهای زوج‌اول،بامجموع فرجه‌های نظیر یالهای زوج دوم چهاروجهی باهم برابرند.

۱۹۱- نقطهٔ O مرکز چهاروجهی منتظمی است. ازنقطهٔ M، که روی یکی‌از وجـوه آن اختیار شده‌است سه‌عمود به سه وجه دیگرآن فرود می‌آوریم، K و L و N را

پاهای عمود در نظر می‌گیریم. ثابت کنید خط OM از مـرکز ثقل مثلث KLN می‌گذرد.

۱۹۲- درچهاروجهی $ABCD$، یال CD برصفحهٔ ABC عموداست. وسط BD را با M ووسط AB را با N نشان می‌دهیم. نقطهٔ K را هم روی CD طوری‌اختیار می‌کنیم که،

$$|CK| = \frac{۱}{۳}|CD|$$

ثابت کنید، فاصلهٔ بین خطوط BK و CN برابر بافاصلهٔ بین AM وCN است.

۱۹۳- دریکی‌از وجوه جانبی‌هرم چهار بر منتظمی، مثلث دلخواهی را درنظرمی‌گیریم. این مثلث را روی قاعدهٔ هرم تصویر می کنیم. مثلث تصویر را دوباره روی وجه جانبی مجاورتصویرمی‌کنیم. ثابت کنید تصویر نهایی، مثلثی خواهدبـودکه با مثلث اصلی متشابه است.

۱۹۴- درچهاروجهی $ABCD$، نقطهٔدلخواه A_1 را درداخل‌وجه BCD درنظرمی‌گیریم. از رأس A صفحهٔ دلخواهی مرور می‌دهیم. خطوط راستی‌که از رئوس B و C و D به موازات AA_1 رسم می‌شوند ، این صفحه را در نقـاط B_1 ، C_1 و D_1 قطع‌می‌کنند. ثابت کنید حجم چهاروجهی$A_1B_1C_1D_1$ باحجم چهاروجهی$ABCD$ برابر است.

۱۹۵- چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. در داخل صفحاتی کـه وجوه چهاروجهی را مشخص می‌کنند ، نقاط A_1 و B_1 و C_1 و D_1 را طوری اختیارمی‌کنیم که خطوط AA_1 و BB_1 و CC_1 و DD_1 با یکدیگر موازی باشند. نسبت حجم چهاروجهی $ABCD$ را به‌حجم چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ پیدا کنید.

۱۹۶- D یکی‌از رئوس چهاروجهی، M مرکز ثقل آن و O مرکز کرهٔ محیطی آن است. می‌دانیم نقاط D و M ونقطه‌های میانه‌ای وجوهی‌که D را شامل‌نمی‌شوند، روی یك‌کره قراردارند. ثابت‌کنید خطوط DM و OM برهم عمودند.

۱۹۷- ثابت کنید هیچ‌جسم فضایی‌نمی‌تواند از نظر تعداد، محورهای‌تقارن زوج داشته‌باشد.

۱۹۸- يك دایره ونقطهٔ A درفضا داده شده‌اند. فرض‌کنیم B تصویر نقطهٔ A برصفحهٔ این دایره باشد. D نقطهٔ دلخواهی ازدایره است. ثابت‌کنید تصاویر B برروی AD روی يك دایره قرارمی‌گیرد.

۱۹۹- قاعدهٔ هرم $ABCDE$، چهارضلعی $ABCD$ می‌باشدکه اقطار AC و BD آن بریکدیگرعمودند ودرنقطهٔ M همدیگررا قطع می‌کنند. EM ارتفاع هرم است. ثابت‌کنید تصاویر M روی وجوه جانبی هرم، برروی یك‌صفحه قراردارند.

۲۰۰- ثابت‌کنید اگرخطی‌ازمرکز ثقل‌چهاروجهی $ABCD$ ومرکز کره محیطی‌آن بگذرد ویالهای AB و CD آنرا قطع‌کند، آنگاه

$$|AC|=|BD| \quad \text{و} \quad |AD|=|BC|$$

۲۰۱- ثابت‌کنید اگرخطی‌ازمرکز ثقل چهاروجهی $ABCD$ ومرکزکرهٔ محاطی‌آن‌بگذرد ویالهای AB و CD را قطع‌کند، آنگاه،

$$|AD|=|BC| \quad \text{و} \quad |AC|=|BD|$$

۲۰۲- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. از رأس A صفحه‌ای‌گذشته و برکره محاط درآن مماس شده‌است. اگر M و N محل برخورد این صفحه با یالهای A_1B و A_1D باشند، ثابت‌کنید خط MN برکره محاط در داخل مکعب مماس است.

۲۰۳- ثابت کنید دربارهٔ چهاروجهی‌ای‌که همهٔ زوایای رأس آن قائمه باشد، حکم زیر صادق است: مجموع مربعات مساحتهای وجوه قائم برابراست بامربع مساحت‌وجه چهارم آن.
(قضیه فیثاغورث درچهاروجهی‌های قائم.)

۲۰۴- ثابت‌کنید مجموع مربعات تصاویر یالهای یك‌مکعب روی هرصفحهٔ دلخواه، مقدار ثابتی است.

۲۰۵- ثابت‌کنید مجموع مربعات تصاویر یالهای یك چهار وجهی منتظم روی هرصفحهٔ دلخواه، مقدارثابتی است.

۲۰۶- دوجسم درفضا، روی دوخط با سرعتهای ثابت، اما متمایز حرکت می‌کنند. ثابت کنید دایرهٔ ثابتی درفضا موجود است‌که‌نسبت‌فواصل هرنقطهٔ این دایره، تا دوجسم فضایی مقداری ثابت وبرابر با نسبت سرعتهای‌آنها باشد.

۲۰۷- یك‌کره ودونقطهٔ A و B درخارج آن مفروضند. ازنقاط A و B دومماس متقاطع برکره رسم شده‌است. ثابت‌کنید نقطهٔ تقاطع آنها روی یکی از دو صفحه ثابت قراردارد.

۲۰۸- سه‌کره مماس برهم، دررئوس یك مثلث برصفحه آن مماسند. ثابت‌کنید اگرمثلث مختلف‌الاضلاع باشد، درآن صورت دوکره وجود خواهد داشت که برسه‌کره و صفحه مثلث مماس باشند. اگر r و ρ $(\rho>r)$ شعاعهای این دوکره باشند، و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث درنظرگرفته شود، درآن صورت،

$$\frac{۱}{r}-\frac{۱}{\rho}=\frac{۲\sqrt{۳}}{R}$$

۲۰۹- چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. کره‌ای بریالهای AB و CD درنقاط A و C وکرهٔ دیگری درنقاط B و D برهمین دویال مماسند. ثابت‌کنیدتصاویر AC و BD روی خط راستی‌که ازمرکزاین دودایره می‌گذرد، باهم برابرند.

۲۱۰- آیا پنج ضلعی فضایی (پنج ضلعی‌که همهٔ رئوس آن دریك صفحه نباشند.م) وجود داردکه درآن، پاره‌خطی‌که هردورأس غیرمجاوررا بهم وصل می‌کند، صفحهٔمثلثی راکه از رئـوس باقیمانده ساختــه می‌شود، در نقطه‌ای واقع در داخل این مثلث قطع کند؟

۲۱۱- ثابت‌کنید اگر دریك پنج ضلعی، اضلاع وزوایا باهم برابـر باشند، پنج ضلعی در یك صفحه قراردارد.

۲۱۲- متوازی‌السطوح $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ که درآن $AC_۱$ بـرابر d وحجم‌آن v می‌باشد مفروض است. ثابت‌کنید با پاره خطهایی‌که طول‌آنها برابر با طول‌های فاصله‌های رئوس $A_۱$ و B و D ازقطر $AC_۱$ باشد، می‌توان یك‌مثلث ساخت. اگر مساحت این مثلث s باشد، آنگاه $v=۲ds$.

۲۱۳- نقاط $A_۱$ و $B_۱$ و $C_۱$ و $D_۱$ نقاط میانه‌ای وجوه BCD و CDA و DAB و ABC از چهـار وجهی $ABCD$ می‌باشند . ثابت کنید چهار وجهـی‌ای مـانند $A_۲B_۲C_۲D_۲$ یافت می‌شودکه‌یالهای $A_۲B_۲$ و $B_۲C_۲$ و $C_۲D_۲$ و $D_۲A_۲$ درآن به‌ترتیب با پاره خطهای $AA_۱$ و $BB_۱$ و $CC_۱$ و $DD_۱$ موازی باشند. اگرحجم چهاروجهی $ABCD$ برابر v باشد، حجم چهاروجهی $A_۲B_۲C_۲D_۲$ را حساب کنید .

۲۱۴- چهاروجهی‌ای داده شده‌است. ثابت‌کنید چهاروجهی دیگری‌مانند $KLMN$ وجود دارد به‌طوری‌که یالهای KL و LM و MN و NK آن به‌ترتیب بروجوه‌چهار وجهی مفروض عمود بوده وطولهای‌آنها ازنظراندازه با مساحتهای این‌وجوه‌برابر

باشند. حجم چهاروجهی KLMN را پیداکنید، در صورتیکه حجم چهار وجهی مفروض V باشد.

۲۱۵- سه کرهٔ متقاطع مفروضند. از نقطه‌ای واقع بر روی وترمشترك آنها سه‌وترمتعلق به‌این سه‌کره رسم شده است. ثابت کنید نقاط انتهایی این سه وتر برروی يك‌کره قرار دارند؟

۲۱۶- چهاروجهی ABCD، با صفحه‌ای‌عمود برشعاع کرهٔ محیطی‌آن‌که به‌نقطهٔ D وصل می‌شود، قطع گردیده است. ثابت‌کنید رئوس A و B و C ونقاط برخورد صفحه قاطع با یالهای DA و DB و DC برروی يك‌کره قراردارند.

۲۱۷- کره‌ای ودایره‌ای برروی‌آن ونقطه P که برروی‌کره قرار ندارد مفروضند. ثابت کنید نقاط دیگرمحل برخورد خطوطی‌که نقطه P را به‌نقاط دایـره مفروض وصل می‌کنند برروی‌کره، يك دایره تشکیل می‌دهند.

۲۱۸- ثابت‌کنید خط حاصل ازفصل مشترك دوسطح مخروطی‌که دارای محورهای موازی وزاویه مقطع محوری مساوی هستند، منحنی‌ای‌میشودکه برروی يك‌صفحه‌قراردارد.

۲۱۹- نقاط K و L و N و M واقع برروی یالهای AB و BC و DA وCD ازچهار وجهی ABCD برروی يك‌صفحه قراردارند. اگرP نقطه دلخواهی از فضا باشد و خطوط PK و PL و pM و PN دوباره دایـره‌های محیطی مثلثهای PAB و PBC و PCD و PDA را به‌ترتیب درنقاط Q و R و S و T قطع‌کنند، ثابت کنید نقاط P و Q و R و S و T برروی سطح يك‌کره قراردارند.

۲۲۰- ثابت‌کنید یالهای يك‌کنج چهاروجهی، مولدهای‌مخروط همرأس با آن‌کنج است، اگروتنها اگر، مجموع فرجه‌های متقابل‌کنج چهاروجهی با یکدیگرمساوی باشند.

۲۲۱- شش وجهی‌ای‌که همه وجوه‌آن چهارضلعی‌اند مفروض است. می‌دانیم‌ازهشت‌رأس آن هفت‌تای‌آن، روی يك‌کره قراردارند. ثابت‌کنید رأس هشتم‌آن‌هم روی همین کره واقع شده‌است.

۲۲۲- روی هريك ازيالهای يك چهاروجهی، نقطه دلخواهی را متمایزاز رأس‌آن اختیار می‌کنیم. ثابت‌کنید چهارکره،که هريك ازآنها از يك رأس چهاروجهی وسه‌نقطه اختیاری برروی یالهایی‌کـه از این رأس خارج می‌شوند می‌گذرند، در يك نقطه همدیگررا قطع می‌کنند.

بخش سوم

مسائل مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم- نامساویهای هندسی

۲۲۳- خط راست l، بر روی یکی از وجوه فرجه‌ای قرار دارد. ثابت کنید زاویه بین خط l و وجه دیگر فرجه، ماکزیمم خواهد بود، اگر خط l بر یال این فرجه عمود باشد.

۲۲۴- همه زوایای رأس یك کنج چهاروجهی محدب $60°$ است. ثابت کنید زوایای بین یالهای متقابل، نمی‌توانند همه حاده و یا همه منفرجه باشند.

۲۲۵- ارتفاع هرم ناقصی h و مساحت مقطع متوسط آن S است. دامنه تغییرات حجم هرم را تعیین کنید.

۲۲۶- بیشترین مقدار حجم چهاروجهی محاط درداخل استوانه‌ای که شعاع قاعده آن R و ارتفاع آن h باشد چقدر است.

۲۲۷- قاعده متوازی السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، مربع $ABCD$ است. بزرگترین اندازه ممکن زاویه بین خط BD_1 وصفحه BDC_1 را پیدا کنید.

۲۲۸- درمنشورچهاربرمنتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ طول ارتفاع نصف طول ضلع قاعده منشور است. حداکثر اندازه زاویه A_1MC_1 ، وقتی نقطه M برروی یال AB قرارداشته باشد چقدر است؟

۲۲۹- طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر ۱ است. روی امتداد یال AD ،

نقطه M را نسبت به D طوری اختیار می‌کنیم که $|AM| = ۲\sqrt{\frac{۲}{۵}}$. وسط یال $A_۱B_۱$ را با E و وسط یال $DD_۱$ را با F نشان می‌دهیم. حداکثر نسبت $|PQ| / |MP|$ را وقتی‌که نقطه P روی AE ونقطه Q روی CF قرار دارد، پیدا کنید.

-۲۳۰ طول یال مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ برابر a است. نقاط E و F را به‌ترتیب اوساط یالهای $BB_۱$ و $CC_۱$ درنظر می‌گیریم. مثلث‌هایی را درنظرمی‌گیریم که رئوس آنها محل برخورد صفحه‌ای موازی با صفحه $ABCD$ با خطوط $AC_۱$ و CE و DF باشند. کمترین مقدارمساحتی که این‌گونه مثلث‌ها می‌توانند داشته باشند چقدر است.

-۲۳۱ درداخل هرم چهاربرمنتظمی، که درآن طول ضلع قاعده وارتفاع باهم مساوی و برابر ۱ می‌باشد، متوازی‌السطوح قائمی را طوری محاط می‌کنیم که قاعده آن در صفحه قاعده هرم قرارگیرد ورئوس وجه مقابل آن برروی‌یالهای‌جانبی هرم واقع شوند. اگر مساحت سطح قاعده متوازی‌السطوح S باشد، دامنه تغییرات طول قطر متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

-۲۳۲ قاعده‌های هرم ناقصی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و $A_۱B_۱C_۱$ به اضلاع به‌ترتیب ۳ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر می‌باشند. پاره خطی‌که رأس $C_۱$ را به‌نقطه O مرکز قاعده ABC وصل می‌کند، برقاعده‌های هرم عمود است و $|C_۱O| = ۳$.
صفحه‌ای را از رأس B واوساط $A_۱B_۱$ و $B_۱C_۱$ می‌گذرانیم. استوانه‌هایی را درنظر بگیریدکه درداخل چند وجهی $ABCA_۱MNC_۱$ واقع شده وقاعده‌های آنها درداخل وجه $A_۱MNC_۱$ قرار دارند. مطلوبست:

a) بیشترین مقدارحجم، مربوط به‌این نوع استوانه‌ها که ارتفاع آنها h باشد.

b) بیشترین مقدارحجم دربین همه استوانه‌ها تحت شرایط بالا.

-۲۳۳ همه یالهای منشور منتظم $ABC\,A_۱B_۱C_۱$ باهم برابر وطولی برابر a دارند. پاره خطهایی را درنظر بگیریدکه دوسرشان برروی اقطار $BC_۱$ و $CA_۱$ قرار گرفته وباصفحه $ABB_۱A_۱$ موازی باشند. کدام یك از این پاره‌خطها کوتاهترین طول را دارد؟

-۲۳۴ کنج سه وجهی، نقطه‌ای درداخل آن وصفحه‌ای که از آن نقطه می‌گذرد مفروضند. ثابت کنید حجم چهاروجهی‌ای‌که با کنج مفروض وصفحه ساخته می‌شود، مینیمم خواهد بود، اگر نقطه مفروض مرکز ثقل مثلث حاصل ازتقاطع کنج وصفحه باشد.

۲۳۵- مساحت یك قطعهٔ کروی برابر است با S. ماکزیمم حجم آن چقدر است؟

۲۳۶- مکعبی به‌یال a برروی یك صفحه قرار دارد. منبع نوری بفاصله b ازصفحه واقع شده است. $(b>a)$ مینیمم مساحت سایه‌ای راکه مکعب روی صفحه می‌اندازد حساب کنید.

۲۳۷- چند وجهی محدبی که مرکز تقارن دارد مفروض است. مقاطعی از این چهاروجهی راکه موازی با صفحه مفروضی باشد، درنظر بگیرید و تحقیق کنیدآیا احکام زیر صحیح هستند؟

۱) مقطعی بیشترین مساحت را داردکه ازمرکز بگذرد.

۲) برای هر مقطع، دایره‌ای با کوچکترین شعاع درنظر بگیریدکه این مقطع را شامل شود. آیا درست است که بزرگترین شعاع دایره از این نوع، از آن دایره مربوط به‌مقطعی است که ازمرکزچند وجهی می‌گذرد.

۲۳۸- کوچکترین مقدارنسبت حجم‌های مخروط واستوانه محیط بریك کره راکه می‌توان بدست آورد چقدر است؟

۲۳۹- دومخروط درقاعده مشترك ودرطرفین آن قرار دارند. شعاع قاعده r وارتفاع آنها h و H می‌باشد$(h \leqslant H)$ ماکزیمم فاصله بین مولدهای این دومخروط راپیدا کنید.

۲۴۰- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a داده شده است. شعاع کوچکترین کره‌ای را پیداکنیدکه برخطوط AB_1 و B_1C و CD و DA مماس باشد.

۲۴۱- قطر مکعبی با طول ۱، برروی یال فرجه‌ای قراردارد کـه اندازه آن α می‌باشد. $(\alpha<۱۸۰)$ حدود تغییرات آن قسمت از حجم مکعب را پیدا کنیدکـه در داخل این فرجه محصور شده است.

۲۴۲- طول یالهای متوازی‌السطوح قائمی، a وb وc است. بیشترین مقدارمساحت‌تصویر قائم این متوازی‌السطوح برروی یك صفحه چقدر است؟

۲۴۳- طول هریك از پنج یـال یك چهار وجهی،کمتر از واحد است. ثـابت کنید حجم چهاروجهی کمتر از$\frac{۱}{۸}$ است.

۲۴۴- رأس E ازهرم $ABCE$ در داخل هرم $ABCD$ قرار دارد. تحقیق کنیدآیا حکم زیرصحیح است.

۱) مجموع یالهای AE و BE و CEکمتر ازمجموع یالهای AD وBD وCD

است.

۲) لااقل یکی از یالهای AE، BE، CE کوتاهتر از یالهای متناظر AD ، BD ویا CD است.

۲۴۵- اگر r و R به‌ترتیب شعاعهای کره‌های محاطی ومحیطی هرم چهار برمنتظمی باشند ثابت‌کنید

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1$$

۲۴۶- اگر r و R به ترتیب شعاعهای کره‌های محاطی و محیطی یك چهاروجهی باشند ، ثابت‌کنید $R \geqslant 3r$

۲۴۷- طول‌های دویال متقابل یك چهاروجهی b و c وطول بقیه یالهای آن هریك a می‌باشد. می‌نیمم مجموع فواصل یك‌نقطه دلخواه ازفضا، از رئوس این‌چهاروجهی چقدر است؟

۲۴۸- درمخروط ناقصی، زاویه بین مولد وصفحه قاعده بزرگترمخروط، 60° است. ثابت کنید طول‌کوتاهترین مسیر برروی سطح مخروط ما بین یك‌نقطه واقع برروی‌محیط قاعده، ونقطه قطراً متقابل ازقاعده دیگر، برابر $2R$ است. R شعاع قاعده بزرگتر مخروط می‌باشد.

۲۴۹- اگر a و b و c سه‌بردار دلخواه باشند، ثابت‌کنید،

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \geqslant |a+b|+|b+c|+|c+a|$$

۲۵۰- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a داده شده است. روی AA_1 نقطه M و روی BC نقطه N را طوری اختیارمی‌کنیم‌که MN یال C_1D_1 را قطع‌کند. کمترین مقدار $|MN|$ چقدر است؟

۲۵۱- قاعده هرم چهاربری ، مستطیلی است‌که طول یکی از اضلاع آن برابر a و طول هریك از یالهای جانبی‌آن برابر b می‌باشد. بیشترین مقدار حجم این هرم چقدر است؟

۲۵۲- مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به‌یال a داده شده‌است. طول کوتاهترین پاره‌خطی را پیداکنیدکه دوسرآن برروی AB_1 و BC_1 قرار داشته وبا صفحه $ABCD$ زاویه 60° بسازد.

۲۵۳- سه‌سطح استوانه‌ای مساوی، باشعاع R ومحورهای دوبه‌دو عمود برهم، بریکدیگر مماسند.

a) شعاع کوچکترین کره‌ای‌که براین سه‌سطح استوانه‌ای مماس باشد چقدر است؟

b) شعاع بزرگترین استوانه‌ای که براین سه‌سطح استوانه‌ای مماس بوده ومحور آن از داخل مثلثی‌که رئوس آن ازنقاط تماس سه استوانه بوجودآمده می‌گذرد، چقدر است؟

۲۵۴- دورأس از یک چهاروجهی، برروی سطح‌کره‌ای به‌شعاع $\sqrt{10}$ قراردارند ودو رأس دیگر آن، روی‌سطح‌کره دیگری به‌شعاع ۲ وهم مرکز باکره اول‌واقع‌شده‌اند بیشترین حجم چنین چهاروجهی‌هایی چقدر است؟

۲۵۵- دوکنج سه وجهی طوری قرارگرفته‌اندکه رأس یکی ازآنها از وجوه دیگری به یك فاصله قرار دارد وبالعکس. اگر فاصله بین رئوس‌آنها برابر a باشد،کمترین حجم شش وجهی‌ای‌که باوجوه این‌کنجها محصورمی‌شود چقدر است؟ درصورتیکه همه زوایای رأس یکی ازکنجها ۶۰° (هرکدام از آنها) وهمه زوایای رأس‌کنج دیگر ۹۰° است (هرکدام).

۲۵۶- بیشترین حجم چهار وجهی $ABCD$ چقدر است درصورتیکه تمام رئوس چهار وجهی برروی سطح‌کره‌ای به‌شعاع ۱ قرار داشته و یالهای AB و BC و CD و DA ازمرکزکره تحت زاویه ۶۰° دیده می‌شوند.

۲۵۷- چهاروجهی منتظمی به یال a مفروض است. شعاع‌کره‌ای را پیداکنیدکه مرکزآن برمرکزچهاروجهی منطبق بوده ومجموع حجم‌های قسمت‌هایی ازچهاروجهی‌که در خارج کره، و قسمت‌هایی از کره‌که در خارج چهاروجهی قرارگرفته‌اند، کمترین مقدار را داشته باشد.

۲۵۸- ثابت کنید در بین هرم‌های مثلث‌القاعـده با قاعده مفروض و ارتفاعات مساوی، کوچکترین مساحت سطح جـانبی، ازآن هرمی است‌کـه رأس‌آن برمرکز دایره محیطی قاعده تصویرمی‌شود.

۲۵۹- مکعبی به یال a داده شده است. نقطه N روی یکی از اقطار وجوه جانبی‌آن در نظرگرفته شده است وM برروی دایره‌ای قراردارد‌که درصفحه قاعده رسم‌می‌شود ومرکزآن برمرکزقاعده منطبق، وشعاع‌آن $\left(\frac{۵}{۱۲}a\right)$ است.کمترین‌مقدار $|MN|$

را پیدا کنید.

۲۶۰- a) قاعده‌هرم SABC، مثلث ABC می‌باشد که‌در آن $\widehat{BAC}=A$، $\widehat{CBA}=B$ و R شعاع دایره‌محیطی‌مثلث است. یال SC برصفحه ABC عمود‌است. مطلوبست $|SC|$ درصورتیکه می‌دانیم :

$$\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۱}{\sin\beta}-\frac{۱}{\sin\gamma}=۱$$

α و β و γ به‌ترتیب زاویه‌های بین یالهای SA و SB و SC با صفحات SBC و SAC و SAB می‌باشند.

b) اگر α و β و γ زوایایی باشندکه یالهای یك کنج سه وجهی با صفحات وجوه مقابلشان می‌سازند، ثابت کنید،

$$\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۱}{\sin\beta}-\frac{۱}{\sin\gamma}\geqslant ۱$$

۲۶۱- آیا یك چهاروجهی منتظم به‌طول یال واحد می‌تواند ازداخل حفره دایره‌ای شکلی به‌شعاع ۰/۴۵ یا ۰/۴۴ بگذرد؟ ازضخامت حفره صرفنظر می‌شود.

بخش چهارم

مکان هندسی نقاط

۲۶۲- ثابت کنید درهر کنج سه‌وجهی، نیمسازهای دوزاویهٔ رأس وزاویهٔ مجاور زاویهٔسوم راس، دریك صفحه قراردارند.

۲۶۳- ثابت کنید اگرسطح جانبی استوانه‌ای با صفحهٔ مایلی قطع شود وسپس درطول یك مولد قطع گردد و روی یك صفحه گسترده شود، خط حاصل از تقاطع، یك منحنی سینوسی خواهدبود.

۲۶۴- بر روی سطح یك مخروط، خطی‌متمایز ازمولد قراردارد، طوری‌که هردو نقطهٔ آن‌را می‌توان باکمانی از آن خط به‌هم وصل‌کرد و در گسترش، یك پاره‌خط را مشخص می‌کند. این خط درچندنقطه‌خودش را قطع‌می‌کند؟ درصورتیکه زاویهٔ‌مقطع‌محوری مخروط برابر a باشد.

۲۶۵- سه‌خط متقابلا عمود بریکدیگر، ازنقطهٔ O می‌گذرند. A وB و C روی این‌سه‌خط طوری قراردارندکه

$$|OA| = |OB| = |OC|$$

I خط دلخواهی‌است که‌ازنقطهٔ O می‌گذرد. نقاط A_1 و B_1 و C_1 به‌ترتیب‌قرینه‌های A و B و C نسبت به‌خط I می‌باشند. از A_1 و B_1 و C_1 به‌ترتیب سه‌صفحه

عمود بر خطوط OA و OB و OC رسم شده‌است. مکان هندسی نقاط برخورد این صفحات را پیداکنید.

۲۶۶- مکان هندسی اوساط پاره‌خطهای موازی باصفحهٔ مفروض را پیداکنیدکه دوسر آنها روی دوخط متنافر قرارداشته باشند.

۲۶۷- سه‌خط دوبه‌دو متنافرمفروضند. مطلوبست:

a) مکان هندسی مراکز ثقل مثلثهای ABC که رئوس آنها برروی این‌خطوط‌قرار داشته باشند.

b) مکان هندسی مراکز ثقل مثلثهای ABC که رئوس آنها برروی این‌خطوط قرار داشته وصفحات آنها موازی باصفحهٔ مفروضی باشند.

۲۶۸- سه‌خط دوبه‌دو متنافر l_1 و l_2 و l_3 خطِ راستی را قطع وبرآن عمود هستند. اگر N و M روی خطوط l_1 و l_2 طوری قرار داشته باشند که MN خط l_3 را قطع‌کند، مکان هندسی اوساط پاره‌خطهای MN را پیداکنید.

۲۶۹- چند خط دلخواه ونقطهٔ A درفضا مفروضند. ازنقطهٔ A خط راستی طوری‌رسم‌شده است‌که مجموع کسینوسهای زوایای حاده این‌خط باخطوط مفروض مقدارثابتی‌شده است. مکان هندسی چنین خطوطی را پیداکنید.

۲۷۰- مثلث ABC و خط راست l مفروضند. A_1 و B_1 و C_1 نقاط دلخواهی هستندکه روی l اختیارشده‌اند. مکان هندسی مراکز ثقل مثلثهایی را پیداکنیدکه رئوس آنهـا وسط پاره‌خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 باشند.

۲۷۱- خط راستِ l ونقطهٔ A داده شده‌اند. ازنقطهٔ A خط راستی طوری رسم‌شده‌که با l متنافر است. اگر MN عمود مشترك این دوخط باشد، (M روی خطی‌که از A گذشته قراردارد.)
مکان هندسی نقطهٔ M را پیداکنید.

۲۷۲- دو کرهٔ α و β بر کرهٔ ω درنقاط A و B مماسند، نقطه‌ای مانند M را روی‌کـرهٔ α اختیارکرده‌ایم. خط AM کرهٔ ω را درنقطهٔ N وخط NB کرهٔ β را در نقطهٔ K قطع می‌کنند. مکان هنـدسی نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که MK بر کره β مماس بشود.

۲۷۳- صفحه‌ای ودونقطه دریك‌طرف‌آن داده شده‌اند. مکان هندسی مراکز کره‌هایی‌را پیدا کنیدکه ازاین دونقطه بگذرند وبرصفحه مماس باشند.

۲۷۴- مکان هندسی اوساط مماسهای مشترك دوکرهٔ مفروض را پیداکنید.

۲۷۵- دو خط l_1 و l_2 برکره‌ای مماسند. نقاط M و N بر روی l_1 و l_2 طوری قرار گرفته‌اندکه MN هم برکره مماس شده است. مکان هندسی‌نقاط تماس MN را با کره پیداکنید.

۲۷۶- نقطهٔ O ودوخط راست درفضا داده شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری‌تعیین کنیدکه مجموع تصاویر پاره‌خط OM برروی خطوط مفروض مقدارثابتی باشد.

۲۷۷- دوخط ونقطهٔ A واقع برروی یکی از این دوخط درفضا داده شده‌اند. از دوخط مفروض دو صفحه طوری مرور داده شده‌است‌که یك فرجهٔ قائمه ساخته شده است. مکان هندسی تصاویرنقطهٔ A را برروی یال فرجه پیداکنید.

۲۷۸- سه‌صفحهٔ متقاطع‌که دریك خط مشترك نیستند، مفروضند. مکان هندسی نقاطی‌را پیدا کنیدکه مجموع فواصل آنها ازاین صفحات مقدارثابتی باشد.

۲۷۹- مثلث ABC مفروض است. برروی خطی‌که درنقطهٔ A برصفحهٔ ABC عمود می‌شود، نقطهٔ دلخواه D را اختیارکرده‌ایم. مکان هندسی محل تقاطع ارتفاعات مثلثهای DBC را پیداکنید.

۲۸۰- سه‌صفحهٔ متقاطع وخط راست l مفروضند. از نقطهٔ M درفضا، خطی به‌موازات l رسم می‌کنیم تا صفحات مفروض را درنقاط A و B و C قطع‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری تعیین‌کنیدکه مجموع

$$|AM|+|BM|+|CM|$$

مقدارثابتی باشد.

۲۸۱- مثلث ABC داده شده‌است. مکان‌هندسی‌نقطهٔ M را طوری تعیین‌کنیدتاخط‌راستی که مرکز ثقل هرم ABCM را به‌مرکز کرهٔ محیطی‌آن وصل‌می‌کند، یالهای AC و BM را قطع‌کند.

۲۸۲- کنج سه‌وجهی را با دو صفحهٔ متوازی قطع‌کرده‌اند. صفحهٔ اول یالهای‌کنج را در نقاط A وB وC وصفحهٔ دوم‌آنهارا درنقاط A_1 وB_1 وC_1قطع‌کرده‌اند. (حروف همانند برروی یك یال قراردارند.) مکان هندسی‌نقاط برخورد صفحات ABC_1 و AB_1C و A_1BC را پیداکنید.

۲۸۳- چهارضلعی ABCD دریك صفحه قراردارد. مکان هندسی‌نقطهٔ M را طوری‌تعیین

کنیدکه سطح جانبی هرم ABCDM را بتوان باصفحه‌ای‌طوری قطع کرد که:

a) مقطع مستطیل باشد.

b) مقطع لوزی باشد.

c) مقطع مربع باشد.

d) درحالت قبل مکان هندسی مرکزمربع را تعیین کنید.

۲۸۴- صفحهٔ مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M را در فضا طوری تعیین کنید تاخط راستی‌که مرکز کرهٔ محیطی ABCM را به‌نقطهٔ G مرکز ثقل چهار-وجهی ABCM وصل می‌کند، برصفحهٔ AMG عمود باشد.

۲۸۵- دایره‌ای به‌شعاع ثابت درحال مماس بروجوه یك‌کنج سه‌وجهی،که زوایای رأس آن $90°$ است، جابه‌جا می‌شود. مکان هندسی مراکزاین دوایررا پیدا کنید.

۲۸۶- عنکبوتی روی یکی‌از رئوس مکعبی به‌یال ۱ می‌نشیند سپس با سرعت ۱ cm/s روی سطح مکعب می‌خزد. مکان هندسی‌نقاطی ازسطح مکعب را پیدا کنیدکه‌درمدت ۲ ثانیه بوسیلهٔ عنکبوت پیموده می‌شود.

۲۸۷- یك‌کنج سه وجهی‌که همهٔ زوایای رأس آن $90°$ می‌باشد مفروض است. نقطهٔ O راس‌کنج می‌باشد تمام‌خطوط شکستهٔ‌ممکن به‌طول a وشروع ازنقطهٔ O را به‌قسمی درنظر بگیریدکه هرصفحه موازی با یك وجه‌کنج این خط شکسته را تنها در یك نقطه قطع‌کند. مکان هندسی‌نقاط انتهایی این‌خط شکسته را پیدا کنید.

۲۸۸- کره‌ای به‌مرکز O داده شده‌است. هرم ABCD طوری بر آن محیط شده‌است که نامساوی زیر برای‌آن برقرار است،

$$|OA| \geqslant |OB| \geqslant |OC| \geqslant |OD|$$

مکان هندسی نقاط A و B و C را پیدا کنید.

۲۸۹- مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ فضایی M را طوری تعیین‌کنیدکه از پاره خطها MA و MB و MC بتوان مثلث قائم‌الزاویه‌ای ساخت.

۲۹۰- برروی سطح زمین نقاطی وجود دارندکه طول‌وعرض‌جغرافیایی‌آنها باهم برابرند. مکان هندسی‌تصاویراین نقاط را روی صفحهٔ استوا پیدا کنید.

۲۹۱- مخروط دوارقائم ونقطهٔ A به‌فاصلهٔ ثابت ومساوی باارتفاع ازصفحهٔ قاعده‌مخروط،

درخارج آن داده شده است. نقطهٔ M برروی مخروط طوری قرارگرفته‌که شعاع نورانی‌که از نقطهٔ A خارج و به‌طرف M تابانده می‌شود روی سطح مخروط مانند سطح آینه، به‌موازات صفحهٔ قاعده بازتاب پیدا می‌کند. مکان هندسی‌تصاویر M را روی صفحهٔ قاعدهٔ مخروط پیداکنید.

۲۹۲- ازنقطهٔ ثابت P واقع درداخل یك‌کره، سه اشعهٔ دوبه‌دو برهم عمود را به دلخواه رسم می‌کنیم تا سطح کره را در نقاط A و B و C قطع‌کنند. ثابت‌کنید مرکز ثقل مثلث ABC و تصویر نقطهٔ P برروی صفحهٔ ABC برروی سطح جانبی یك‌کره قرار دارند.

۲۹۳- کنجی سه‌وجهی، به‌رأس O ونقطهٔ N مفروضند. کرهٔ دلخواهی ازنقطهٔ O و N می‌گذرد ویالهای‌کنج را درنقاط A و B و C قطع می‌کند. مکان هندسی‌مراکز ثقل مثلثهای ABC را تعیین‌کنید.

چهاروجهی‌های غیر مشخص

۲۹۴- چهاروجهی دلخواه و نقطهٔ N مفروضند. ثابت کنید شش صفحه‌ای که هر یك از آنها بر یك یال چهاروجهی گذشته و به‌موازات خط واصل نقطهٔ N به‌وسط یال مقابل آن رسم می‌شوند، دریك نقطه متقاربند.

۲۹۵- ثابت کنید شش صفحه‌ای که هریك از آنها ازوسط یکی‌از یالهای چهاروجهی بر یال مقابل عمود رسم می‌شوند. دریك‌نقطه متقاربند. (نقطهٔ مونژ.)

۲۹۶- ثابت کنید اگر نقطهٔ مونژ، روی یکی‌ازصفحات وجوه چهاروجهی قرارداشته باشد، در آن صورت پای ارتفاع وارد بر آن وجه برروی دایـره‌ای قرارمی‌گیرد (مسئلهٔ قبلی را نگاه کنید.) که دور آن رسم می‌شود.

۲۹۷- ثابت کنید مجموع مربعات فواصل نقطهٔ دلخواهی ازفضا تا رئوس یك چهاروجهی با مجموع مربعات فواصل بین اوساط یالهای مقابل بعلاوه چهاربرابرمربع فاصلهٔ نقطه ازمرکز ثقل چهاروجهی برابراست.

۲۹۸- ثابت کنید حداقل پنج وحداکثرهشت کره پیدامی‌شودکه‌هریك از آنها برهمهٔ‌صفحات وجوه یك چهاروجهی درداخل آن مماس بشوند.

۲۹۹- چهارضلعی معوج ABCD مفروض است (A وB و C و D دریك صفحه قـرار ندارند) ثابت کنید لااقل هشت کره پیدا می‌شودکه برخطوط AB وBC و CD و DA مماس بشوند. همچنین ثابت کنید اگرمجموع هردوضلع ازچهارضلعی‌مفروض برابر با مجموع دوضلع دیگر آن باشد، درآن‌صورت‌تعداد چنین‌کره‌هایی، بیشمار

خواهد بود.

۳۰۰- ثابت کنید حاصلضرب طولهای دویال متقابل هرچهاروجهی بر روی سینوسهای فرجه‌های نظیر همان دویال مقدار ثابتی است. (قضیهٔ سینوسها).

۳۰۱- اگر S_i و R_i و l_i ، $(i=۱,۲,۳,۴)$ به‌ترتیب نمایش مساحتهای وجوه، شعاعهای دوایر محیطی این وجوه، وفواصل مراکز این دوایر تا رأس مقابل چهاروجهی باشند، ثابت کنید فرمول زیر برقرار است.

$$V=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۴} S_i^۲\,(l_i^۲-R_i^۲)}$$

۳۰۲- چهاروجهی غیرمشخصی داده شده‌است. ثابت کنید مثلثی موجود است به طوری که طول اضلاع آن ثابت وبرابر با حاصلضرب طولهای اضلاع مقابل چهاروجهی می‌باشد. فرض می‌کنیم مساحت این مثلث S باشد، اگرحجم چهاروجهی را با V و شعاع کرهٔ محیطی آنرا با R نشان دهیم، ثابت کنید تساوی زیر برقراراست،

$$S=۶VR \qquad \text{(فرمول کرل)}$$

۳۰۳- اگر a و b طولهای یالهای متنافر یك چهاروجهی و α و β اندازه‌های فرجه‌های نظیر آنها باشند، ثابت کنید

$$a^۲+b^۲+۲ab\cot g\,\alpha\cot g\,\beta$$

مستقل ازانتخاب یالها است. (قضیهٔ برتشنیدر)

چهار وجهی‌های متساوی‌الوجوه

۳۰۴- چهاروجهی متساوی‌الوجوه، به‌چهار وجهی‌هایی گفته می‌شود که تمام وجوه آنها از مثلث‌های متساوی تشکیل شده باشند، و یا یالهای مقابل آن دو به‌دو مساوی باشند.
ثابت کنید برای اینکه یك چهاروجهی متساوی‌الوجوه باشد، لازم و کافی است که شرایط زیر در آن برقرار باشد:

a) مجموع زوایای هر یك از سه رأس چهاروجهی، برابر $180°$ باشد.

b) مجموع زوایای دو رأس، از راسهای چهار وجهی برابر $180°$ وعلاوه بر آن دو یال متقابل از آن باهم برابر باشند.

c) مجموع زوایای یکی از رئوس چهاروجهی برابر $180°$ وعلاوه بر آن چهار وجهی دو جفت یال متقابل مساوی داشته باشد.

d) تساوی $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$ برقرار باشد. که در آن ABCD چهاروجهی مفروض درنظر گرفته شده است.

e) تمام وجوه با هم برابر باشند.

f) مراکز کره‌های محاطی ومحیطی برروی‌هم منطبق باشند.

g) پاره خطهایی که اوساط یالهای مقابل را بهم وصل می‌کنند بریکدیگر عمود باشند.

h) مرکز ثقل برمرکز کره محیطی منطبق باشد.

i) مرکز ثقل برمرکز کره محاطی منطبق باشد.

۳۰۵- ثابت کنید مجموع کوسینوسهای فرجه‌های یك چهاروجهی مقدارمثبتی بوده و از ۲ تجاوز نمی کند و درصورتی مقدارآن برابر با ۲ می‌شودکه، چهاروجهی متساوی‌الوجوه باشد.

۳۰۶- مجموع زوایای یك کنج سه وجهی برابر 180° است. مجموع کوسینوسهای فرجه‌های این کنج را حساب کنید.

۳۰۷- ثابت کنید دریك چهاروجهی متساوی‌الوجوه ،

a) شعاع کره محاطی نصف شعاع کره‌ای است که بریکی از وجوه چهاروجهی و امتداد سه وجه دیگر آن مماس باشد. (این کره راکره محاطی خارجی می‌نامند).

b) مراکز کره‌های محاطی خارجی، رئوس یك چهاروجهی را تشکیل می‌دهندکه با چهاروجهی مفروض برابر است. (قابل انطباق هستند).

۳۰۸- h ارتفاع یك‌چهاروجهی متساوی‌الوجوه، h_1 و h_2 قطعات حاصل ازتقسیم ارتفاع یکی از وجوه می‌باشد. (بوسیله محل برخورد ارتفاعات همان وجه.) ثابت کنید

$$h^2 = 4h_1h_2$$

همچنین ثابت کنید پای ارتفاع چهاروجهی و نقطه تقاطع ارتفاعات وجهی که این ارتفاع بر آن وارد شده‌است، نسبت به‌مرکز دایره محیطی این وجه‌قرینه‌یکدیگرند.

۳۰۹- ثابت کنید در چهاروجهی متساوی‌الوجوه، پاهای ارتفاعات چهاروجهی، وسط ارتفاعات، ونقاط تقاطع ارتفاعات وجوه، برروی سطح یك کره قراردارند. (۱۲ نقطه درکره.)

۳۱۰- یك دایره ونقطه‌ای مانند M درداخل یك صفحه داده شده‌اند. نقطه درداخل دایره وبه‌فاصله کمتر از یك سوم شعاع ازمرکز آن قرار دارد. ABC مثلث دلخواهی است که درداخل دایره محاط شده است و M مرکز ثقل آن می‌باشد. ثابت کنید دو نقطه ثابت مانند D و D' درفضا وقرینه نسبت به‌صفحه مفروض موجودند به‌قسمی که چهاروجهی‌های ABCD و $ABCD'$ چهاروجهی‌های متساوی‌الوجوه باشند.

۳۱۱- مربع ABCD درداخل صفحه‌ای مفروض است. دونقطه P و Q روی اضلاع BC و CD طوری اختیارشده‌اندکه $|CP|+|CQ|=|AB|$ و M نقطه‌ای از فضا طوری درنظرگرفته شده است که درچهاروجهی APQM همه وجوه، مثلث‌های‌مساوی‌هستند. مکان هندسی‌تصاویر M را روی صفحه‌ای که ازقطر AC می‌گذرد وبرصفحه مربع عمود است پیداکنید.

چهاروجهی‌هایی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند

۳۱۲- برای اینکه ارتفاعات یك چهاروجهی در یك نقطه همدیگر را قطع کنند (اینگونه چهاروجهی‌ها را چهاروجهی‌هایی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارند می‌گویند) لازم وکافی است که،

a) یالهای مقابل چهاروجهی دوبه‌دو برهم عمود باشند.

b) یکی از ارتفاعات چهاروجهی ازمحل برخورد ارتفاعات قاعده بگذرد.

c) مجموع مربعات یالهای متنافر برابر باشند.

d) پاره خطهایی که اوساط یالهای متنافر را بهم وصل می‌کنند، ازنظر طول مساوی باشند.

e) حاصلضرب کوسینوسهای فرجه‌های متقابل برابر باشند.

f) زوایای بین یالهای متقابل برابر باشند.

۳۱۳- ثابت کنید درچهاروجهی‌ای که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، مرکز ثقل، وسط پاره خطی است که مرکز کره محیطی را به‌محل برخورد ارتفاعات وصل می‌کند.

۳۱۴- ثابت کنید در چهار وجهی‌ای که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، رابطه زیر برقرار است،

$$|OH|^{۲}=۴R^{۲}-۳l^{۲}$$

که درآن O مرکز کره محیطی، H محل برخورد ارتفاعات، R شعاع کره محیطی I فاصله بین اوساط یالهای متنافرچهاروجهی است.

۳۱۵- ثابت کنید در چهاروجهی‌ای که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، زوایای مجاور یك

رأس یاهمه حاده‌اند، یا همه منفرجه.

۳۱۶- ثابت کنید درچهاروجهی‌ای که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، دایره‌های نه‌نقطه هر وجه، بیك کره تعلق دارند. (بیست وچهارنقطه کره).

۳۱۷- ثابت کنید درچهاروجهی‌هایی که خاصیت مرکز ارتفاعی[1] دارند، مرکز ثقل، محل برخورد ارتفاعات وجوه، ونقاطی که‌ارتفاعات چهاروجهی را به‌نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کنند بر روی یك کره قراردارند. (دوازده نقطه کره.)

۳۱۸- اگر H محل برخورد ارتفاعات چهار وجهی‌ای باشد که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، و M مرکز ثقل یکی از وجوه آن و N یکی از نقاط تقاطع خط HM با کره محیطی چهاروجهی، (M بین H و N قراردارد.) ثابت کنید

$$|MN| = ۲|HM|$$

۳۱۹- G مرکز ثقل چهاروجهی‌ای است که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد. F پای یکی‌از ارتفاعات و K یکی از نقاط تقاطع خط FG با کره محیطی چهاروجهی می‌باشد. (G بین K و F قراردارد). ثابت کنید

$$|KG| = ۳|FG|$$

۱- اگر در یك چهاروجهی ارتفاعات همدیگر را دریك نقطه قطع کنند می‌گویند چهاروجهی خاصیت مرکز ارتفاعی دارد.

چند وجهیهای غیر مشخص ـ کره

۳۲۰- ثابت کنید روی یك کره ممکن نیست سه کمان از دایره‌های عظیمه را که هریك از آنها 300° باشد طوری قرارداد که هیچ دوتای آنها نقاط مشترك داشته باشند.

۳۲۱- ثابت کنید کوتاهترین خطی که دو نقطه از سطح کره‌را بهم‌وصل می‌کند، کمانی از یك دایره عظیمه است که از این دو نقطه می‌گذرد (دراینجا خطوطی موردنظر هستند که از روی (سطح کره می‌گذرند).

۳۲۲- چند وجهی‌ای که با یالهای مساوی بریك کره مماس است، مفروض‌است. تحقیق کنید آیا همواره کره‌ای موجود است که براین چند وجهی محیط بشود؟

۳۲۳- مساحت مثلثی را پیداکنید که از برخورد کره‌ای به‌شعاع R با یك کنج سه وجهی بوجود آمده باشد. اندازه‌های فرجه‌های کنج α و β و γ ورأس آن برمرکز کره منطبق است.

۳۲۴- اگر M تعداد وجوه، K تعداد یالها و N تعداد رئوس یك چند وجهی محدب باشد ثابت کنید:

$$M-K+N=2$$

(اولر اولین‌بار این رابطه را بدست‌آورد. این رابطه نه‌تنها درباره چند وجهیهای محدب بلکه درمورد دسته‌های وسیعی از اجسامی که به‌چند وجهی ساده موسومند نیز صادق است.)

۳۲۵- برروی کره‌ای، دایره‌ای داده شده است. ثابت کنید از همه n وجهی‌های کروی که

دایره مفروض را در درون خود دارند، یك n وجهی کروی منتظم کمترین مساحت را دارد.

۳۲۶- ثابت کنید درهر چند وجهی محدب، وجهی موجود است که کمتر از شش ضلع دارد.

۳۲۷- ثابت کنید درهرچند وجهی محدب، یا یك وجه مثلث شکل وجود دارد و یا رأسی که سه یال درآنجا برخورد می‌کنند.

۳۲۸- ثابت کنید یك چند وجهی محدب نمی‌تواند هفت یال داشته باشد. همچنین ثابت کنید برای هر $n \geqslant ۶$ و $n \neq ۷$ یك چند وجهی با n یال موجود است.

۳۲۹- ثابت کنید درهر چندوجهی‌محدب، دووجه با اضلاع از نظر تعداد مساوی، وجوددارد.

۳۳۰- درداخل کره‌ای به‌شعاع ۱ چند وجهی محدبی جاگرفته است که همه فرجه‌های آن کمتر از $\frac{۲\pi}{۳}$ است. ثابت کنید مجموع طولهای یالهای این چند وجهی از ۲۴ کمتر است.

۳۳۱- مرکز کره‌ای‌به‌شعاع R، درخارج‌فرجه، روی یکی‌ازوجوه‌آن وبفاصله a $(a<R)$ از یال‌آن قراردارد. اندازه فرجه α می‌باشد. مساحت آن بخش‌ازکره را پیداکنید که درداخل فرجه محصورشده است.

۳۳۲- کره‌ای به‌شعاع R بر یالهای یك کنج چهاروجهی که اندازه هریك از زوایای رأس آن ۶۰° می‌باشد، مماس است. سطح جانبی کره که درداخل کنج قرار دارد، شامل دوچهارضلعی منحنی‌الخط می‌باشد. مساحت چهارضلعی‌ها را پیداکنید.

۳۳۳- مکعبی به‌یال a مفروض است. مساحتهای آن قسمتهایی‌ازکره محیطی آنرا پیداکنید که بوسیله صفحات وجوه مکعب جدا شده‌اند.

۳۳۴- چند وجهی محدبی داده شده است. بعضی از وجوه آنرا، سیاه رنگ کرده‌اند. هیچ دو وجه رنگ شده، یال مشترك ندارند وتعدادآنها بیش ازنصف تمام وجوه چهار وجهی‌می‌باشد. ثابت کنید امکان محاط کردن یك کره درداخل‌چنین چند وجهی وجود ندارد.

۳۳۵- مطلوبست تعیین بیشترین تعدادکره‌هایی با شعاع ۷ که همگی باهم وبدون تقاطع با یکدیگر بر کره‌ای به‌شعاع ۳ مماس باشند.

خروج از فضا

۳۳۶- بر روی اضلاع BC و CD از مربع $ABCD$، نقاط M و N طوری قرار گرفته‌اند که

$$|CM|+|CN|=|AB|$$

خطوط AM و AN خط BD را به‌سه پاره خط تقسیم می‌کنند. ثابت‌کنید همواره می‌توان با این سه‌پاره خط مثلثی ساخت که یکی از زوایای آن $60°$ باشد.

۳۳۷- در داخل یک صفحه، مثلث ABC و نقطهٔ P داده شده‌اند. خط راست l خطوط AB و BC و CA را به ترتیب در نقاط C_1 و A_1 و B_1 قطع می‌کند. خطوط PC_1 و PA_1 و PB_1 به‌ترتیب دایره‌های محیطی مثلثهای PAB و PBC و PAC را درنقاط C_2 و A_2 و B_2 متمایز از P قطع می‌کنند. ثابت‌کنید نقاط P و A_2 و B_2 و C_2 روی یك دایره قرار دارند.

۳۳۸- ثابت‌کنید اقطار شش ضلعی محیطی یك دایره‌که رئوس مقابل را بهم وصل می‌کنند دریك نقطه متقاربند. (قضیهٔ بریانشن)

۳۳۹- دومثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ بر روی یك صفحه طوری قرار گرفته‌اند که‌خطوط A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 دریك نقطه متقاربند. ثابت‌کنید سه‌نقطهٔ حاصل‌از برخورد سه زوج خطوط:

$$A_1B_1 \text{ و } A_2B_2 \quad ، \quad B_1C_1 \text{ و } B_2C_2 \quad ، \quad C_1A_1 \text{ و } C_2A_2$$

بریك استقامت قراردارند. (روی یك خط راست هستند.)

۳۴۰- سه صفحهٔ فضایی دریك خط مشترکند. سه کنج سه‌وجهی، طوری قـرارگرفته‌اندکه رئوس آنها برروی این خط و یالهایشان برروی این سه صفحه قراردارند. (فرض این است که یالهای متناظر، یعنی یالهائی‌که در یك صفحه قرار دارند در یك نقطه متقارب نیستند.) ثابت‌کنید سه‌نقطهٔ‌حاصل‌از برخورد وجوه متناظر این‌کنج‌ها بر یك استقامت قراردارند.

جوابها، راهنمایی‌ها، وحل‌ها

بخش اول

۱- $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ ۲- $\frac{4h^3}{45}$

۳- $\frac{5+\sqrt{5}}{24}a^3$ ۴- $4a^3$

۵- $\pi - 2\,\mathrm{Arccos}\frac{5 \pm 2\sqrt{3}}{13}$ ۶- $\frac{ab}{2c}$ ، $\frac{bc}{2a}$ ، $\frac{ca}{2b}$

۷- $\frac{1}{2}$ ، $a\sqrt{\frac{1}{3}}$

۸- صحت حکم مسئله ، درباره مثلثی کــه یك ضلع آن، روی فصل مشترك صفحات α و β قرارداشته باشد، واضح است. پس‌می‌توان آنرا درباره هرمثلث دلخواهی وسپس برای هرچند ضلعی به‌اثبات رساند.

۹- مثلث‌های AB_1C_1 و AB_2C_2 را بــه عنوان قاعده‌هــای هرمهــای $AB_1C_1D_1$ و $AB_2C_2B_2$ درنظر بگیرید.

۱۰- زوایای مورد نظر ، برابر است با زوایایی‌که قطرمکعب مستطیل با سه یالی‌کــه از انتهای‌آن خارج می‌شوند، تشکیل می‌دهد.

۱۲- متوازی‌السطوحی را درنظر بگیریدکه، ازصفحاتی‌که بریالهای چهاروجهی‌می‌گذرند وبه‌موازات یالهای مقابل رسم می‌شوند، بدست‌آمده باشد. (از این‌کار، یعنی تکامل دادن چهاروجهی به‌متوازی‌السطوح، بطورمکرر درمسائل آینده استفاده خواهیم کرد). حجم چهاروجهی برابر است بایك‌سوم حجم متوازی‌السطوح. (صفحات وجوه چهار وجهی، متوازی‌السطوح‌را به‌چهار هرم مثلث‌القاعده تقسیم می‌کنندکه حجم هریك از آنها بایك ششم حجم متوازی‌السطوح برابر است.)
حجم متوازی‌السطوح بـه‌آسانی برحسب اندازه‌هـای مفروض مسئله محاسبه می‌شود. زیرا اقطار وجوه‌آن مساوی وموازی (یا بطورساده منطبق) با یالهای متناظر ازچهار وجهی‌اند وارتفـاع متوازی‌السطوح با فاصله بین یـالهای متنافر چهاروجهی برابر می‌باشد.

۱۳- به‌آسانی دیده می‌شود این روابط (بین مساحتهای وجوه ویالها) برابر است بانسبت حجم‌های دوچهاروجهی‌که ازچهار وجهی مفرض، به‌کمك صفحه نیمساز جدا شده‌اند.

۱۴- مرکزکره را به‌رئوس چند وجهی وصل می‌کنیم تاآنرا به هرمهائیکه قاعده‌هـایشان وجوه چند وجهی می‌باشند، تقسیم‌کند. ارتفاعات این هرمها، با شعاع‌کره برابرند.

۱۵- صحت فرمول داده شده در چهاروجهی را می‌توان به‌آسانی بررسی کرد. در اینجا دوحالت اتفاق می‌افتد:

(۱). سه رأس چهاروجهی دریك صفحه ورأس چهارم درصفحه دیگرقراردارند.

(۲). دو رأس چهاروجهی دریك صفحه، ودورأس دیگر آن، درصفحه دیگر قـرار داشته باشند.

درحـالت دوم، فرمول مسئله (۱۲) را برای حجم چهاروجهی به‌کار ببریـد. درآن صورت به‌این‌موضوع توجه داشته باشیدکه هرچند وجهی محدب دلخواه را می‌توان به‌چهار وجهی‌هایی تجزیه‌کردکه رئوس آنها بررئوس‌آن چند وجهی منطبق باشند. این‌حکم به‌اندازه‌کافی بدیهی‌است، هرچند ظاهراً برهان‌آن‌نسبتاً دشوار بنظرمی‌رسد. بعلاوه فرمول پیشنهادی، درمورد چند وجهی‌ها غیرمحدب نیز به‌همان‌گونه‌که اشاره شد، صادق است.

همچنین برای اجسامی‌که بین دوصفحه موازی محصورشده باشند، مساحت مقطعی از آن‌که با صفحه‌ای موازی بـا صفحات مفروض ایجاد می‌شود بوسیله یك تابع درجه دوم ازفاصله تـا یکی ازآن صفحات، بیان می‌شود. این فرمول بـه‌فرمول **سمپسون** Simpson مشهور است.

۱۶- زیرا مخروط ناقص نامبرده را می‌توان حدهرم ناقص محیط برهمان کره، درنظر گرفت. درآن صورت فرمول مسئله (۱۴) درباره حجم مخروط ناقص صدق می‌کند.

۱۷- ابتدا لم زیر را ثابت کنید:
اگر پاره‌خط AB حول خط l (l پاره خط AB را قطع نمی‌کند) دوران کند، عمود منصف AB (وسط AB را C بنامید.) خط l را در O قطع کند، و تصویر AB بر روی l، MN باشد، درآن صورت سطح حاصل از دوران AB حول خط l برابر می‌شود با،

$$۲\pi|CO|\cdot|MN|$$

سطح ایجاد شده از دوران AB، سطح جانبی مخروط ناقصی را نشان میدهدکه شعاعهای قاعده‌های آن، BN وAM وارتفاع آن، |MN| ومولدش، AB می‌باشد. ازنقطه A خطی بموازات l رسم کنید ومحل برخوردآنرا با خط عمود بر BN، نقطه L بنامید. $|MN|=|AL|$.
تصویر نقطه C را برروی‌خط l، K بنامید. دیده می‌شودکه‌مثلث‌های ABL وCOK باهم متشابه‌اند. ازشرط مسئله معلوم می‌شود سطح جانبی مخروط ناقص برابراست‌با

$$۲\pi\frac{|BN|+|AM|}{۲}\cdot|AB|=۲\pi|CO|\cdot|MN|$$

اکنون بااستفاده ازحد، به‌آسانی می‌توان حکم مسئله را به‌اثبات رساند.
(اگر تحت شرایط مسئله) منطقه‌ای کروی، از دوران کمان AB از یك دایره، حول قطر، بدست‌آمده باشد، مساحت حاصل ازآن، برابراست با، حد مساحت سطح‌ایجاد شده ازدوران چندضلعی $AL_۱L_۲...L_nB$ حول همان قطر که همه رئوس آن برروی AB قراردارند وطول اضلاع آن به‌سمت صفرمیل می‌کنند.

۱۸- اگر AB وترکمانی از دایره مفروض، O مرکز دایره، x فاصله O ازوتر AB و R شعاع دایره باشد، حجم حاصل از دوران قطاع AOB حول قطر، برابر است‌با حاصلضرب مساحت سطح حاصل از دوران‌کمان AB، در $\frac{R}{۳}$. (مسئله ۱۷ را نگاه کنید) بنابراین حجم حادث برابرمی‌شود با،

$$\frac{۲}{۳}\pi R^۲h=\frac{۲}{۳}\pi\left(x^۲+\frac{a^۲}{۴}\right)h=\frac{۱}{۶}\pi a^۲h+\frac{۲}{۳}\pi x^۲h$$

اما جمله دوم، برابر بـا حجم جسم حاصل از دوران مثلث AOC حول قطر است. (مسئله ۱۷ را نگاه کنید) بنابراین جمله اول، درست برابر با حجم حادث از دوران کمان مفروض خواهد بود.

۱۹- بار(جرم) رئوس یك‌هرم را مساوی درنظرمی‌گیریم وبرای تعیین مرکز ثقل دستگاه، به‌این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا مرکز ثقل سه رأس باردار را پیدا می‌کنیم وسپس با قراردادن یك‌بارسه‌گانه درنقطه‌ای‌که بدست‌آمده، مرکز ثقل کل دستگاه را به‌دست می‌آوریم. همچنین می‌توان بـه‌طریق دیگرهم عمل کرد: مرکز ثقل دوبار را بدست آورد وسپس مرکز ثقل دوبار دیگر را پیداکرد وسرانجام مرکز ثقل کل دستگاه پیدا نمود. به‌چنین تعبیری درمکانیك نمی‌توان توسل جهت، اما می‌توان به‌سادگی مثلثی را درنظرگرفت‌که از دورأس چهاروجهی ووسط یال مقابل بدست می‌آید. (مرکز ثقل این مثلث مرکز ثقل چهاروجهی می‌شود. م.)

۲۱- ازهریك از یالهای چهاروجهی، یك صفحه به‌موازات یال متقابل مرور دهید. (مسئله ۱۲ را نگاه‌کنید.) این‌صفحات متوازی‌السطوحی می‌سازندکه، طول یالهای‌آن،برابر فاصله بین اوساط متنافر چهاروجهی می‌باشد، وخود یالهای چهاروجهی، اقطاروجوه متوازی‌السطوح‌می‌گردند. سپس ازاین‌موضوع استفاده‌کنیدکه درهرمتوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات اقطار برابر است با مجموع مربعات اضلاع آن.

۲۲- اگر M وسط $BB_۱$ باشد، $A_۱M$ موازی‌با CK خواهد بود. درنتیجه زاویه مطلوب برابر با زاویه $MA_۱D$ می‌شود. از طرفی، چون صفحه $A_۱DM$ موازی بـا CK است، پس‌فاصله بین CK و $A_۱D$ برابراست با فاصله نقطه K تا صفحه $A_۱DM$. این فاصله را با x وزاویه مسطحه را با φ نشان میدهیم داریم،

$$V_{A_۱MDK}=\frac{۱}{۳}S_{A_۱MD}\cdot x=\frac{۱}{۳}S_{A_۱KD}\cdot a=\frac{a^۳}{۱۲}$$

پس،

$$x=\frac{a^۳}{۴S_{A_۱MD}}$$

اکنون اضلاع $A_۱MD$ را پیدا می‌کنیم،

$$|A_۱D|=a\sqrt{۲}\ ،\ |A_۱M|=\frac{a\sqrt{۵}}{۲}\ ،\ |DM|=\frac{۳}{۲}a$$

با استفاده از قضیه کوسینوسها نتیجه می‌گیریم $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$ بنابراین،

$$S_{A_1MD}=\frac{3}{4}a^2 \quad , \quad x=\frac{a}{3}$$

جواب: $\frac{a}{3}$ ، $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{\sqrt{10}}$

۲۳- مسئله را می‌توان به طریق مسئله ۲۲ حل کرد. اما دراینجا ازروش دیگری، برای تعیین‌فاصله بین میانه‌های متنافر استفاده می‌کنیم. اگر $ABCD$ چهاروجهی مفروض باشد، وسط AB را K، وسط AC را M، می‌نامیم. تصویرچهاروجهی را، روی صفحه‌ای که از AB می‌گذرد وبر CK عمود است بدست می‌آوریم. تصویر چهار وجهی، برروی این صفحه، مثلثی مانند ABD_1 خواهد بودکه درآن، D_1 تصویر D می‌باشد. اگر M_1 تصویر M باشد، (M_1 وسط AK است) درآن صورت فاصله بین CK و DM برابر با فاصله K ازخط D_1M_1 می‌شود واین فاصله، به‌آسانی قابل محاسبه است. زیرا مثلث D_1KM_1 قائم‌الزاویه می‌باشد و D_1K و KM_1 در آن، به‌ترتیب طولهایی برابر با $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ارتفاع چهار وجهی) و $\frac{a}{4}$ دارند. مسئله دو جواب دارد.

برای پیداکردن جواب دوم، میانه‌های CK و BN را درنظر بگیرید. N وسط DC است. جواب مسئله عبارت است از،

$$a\frac{\sqrt{10}}{10} \ ، \ \operatorname{Arc}\cos\frac{2}{3} \ ، \ a\sqrt{\frac{2}{35}} \ ، \ \operatorname{Arc}\cos\frac{1}{6}$$

۲۴- ازفرض مسئله نتیجه می‌شودکه چهارضلعی $ABCD$ محدب است.

جواب: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۵- $\dfrac{(2b\pm a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$

۲۶- $\dfrac{41\pi\sqrt{41}}{384}$

-۲۷ $a\sqrt{\frac{۷}{۸}}$

-۲۸ $a+b\pm\sqrt{۲ab-\frac{a^۲}{۴}}$

-۲۹ $\frac{۲a}{۳}\sqrt{۴R^۲-a^۲}$

-۳۰ $۲+\sqrt{۳}$

-۳۱ $\frac{a\sqrt{۲۲}}{۸}$

-۳۲ $\frac{۳ah}{۳a+h(۳+۲\sqrt{۳})}$

-۳۳ $۲\,\mathrm{Arc}\cos\left(\sin\alpha\sin\frac{\pi}{n}\right)$

-۳۴ ۱۲۷

-۳۵ $۶R^۲-۲a^۲$

-۳۶ $\frac{\pi}{۴}$

-۳۷ $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}(۲-\sqrt{۳})$

-۳۸ $l=R\sqrt{۲۷+۳\,\mathrm{tg}^۲\frac{\alpha}{۲}}\left[\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\left(۳\cot\mathrm{g}\frac{\alpha}{۲}\right)-\alpha\right]$

اگر $۰<\alpha<\mathrm{Arccos}\frac{۱}{۴}$

$l=۰$

اگر $\alpha\geqslant\mathrm{Arc}\cos\frac{۱}{۴}$

-۳۹ ۲۵:۲۰:۹

۴۰- $\mathrm{Arc}\cos(2-\sqrt{5})$

۴۱- $\frac{Q^2}{S}$

۴۲- ضلع قاعده وارتفاع منشور را با a نشان دهید و $|KB|=x$.
ازفرض‌مسئله نتیجه می‌شود تصویر KM روی صفحه قاعده، موازی با نیمساز زاویه C ازمثلث ABC است. داریم،

$$|MC_1|=a-2x \quad ، \quad |B_1M|=2x$$

اگر L_1 تصویر L برروی AC باشد باتوجه به‌فرض داریم،

$$|L_1C|=a-2x \quad ، \quad |LL_1|=|AL_1|\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین مقادیری‌که $|AL_1|$ قبول می‌کند، چنین است،

$$|AL_1|=a-|MC_1|=a-(a-2x)=2x \qquad (1)$$

$$|AL_1|=a+(a-2x)=2(a-x) \qquad (2)$$

درحالت اول،

$$|KL|^2=|KL_1|^2+|LL_1|^2=a^2+10x^2-4ax$$

درحالت دوم

$$|KL|^2=6(a-x)^2$$

درهردوحالت $\quad |KM|^2=3x^2+a^2$

با حل دستگاه معادلات دومقدار برای a بدست می‌آید

$$a_1=\frac{7}{\sqrt{97}} \quad ، \quad a_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{8}$$

جواب: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{8}$ و $\frac{7}{\sqrt{97}}$

۴۳- $\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{3}{2}}$

۴۴- وجوه جانبی را امتداد دهید تا یکدیگر را قطع کنند. به‌این ترتیب‌دوهرم‌متشابه بدست می‌آیدکه قاعده‌های آنها، قاعده‌های‌هرم ناقص‌اند. اگر a طول‌ضلع قاعده بزرگترهرم ناقص، و α زاویهٔ فرجه نظیر این‌قاعده باشند، می‌توان ارتفاع هرم بزرگتررا حساب کرد که می‌شود:

$$h=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\operatorname{tg}\alpha$$

شعاع‌کره محاطی برابرمی‌شود با:

$$r=a\frac{\sqrt{۳}}{۲}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}$$

وارتفاع هرم‌کوچکتر برابراست با

$$h_۱=h-۲r=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\left(\operatorname{tg}\alpha-۲\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}\right)$$

ضلع قاعدهٔ‌کوچکتر برابرمی‌شود با.

$$a_۱=\frac{h_۱}{h}\ a=\frac{\operatorname{tg}\alpha-۲\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

طول یال جانبی‌هرم بزرگتر برابراست با

$$l=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\sqrt{\operatorname{tg}^{۲}\alpha+۴}$$

وطول یال جانبی هرم‌کوچکتر برابر است با،

$$l_۱=l\frac{h_۱}{h}$$

شرط مسئله، مبنی بر اینکه کره‌ای وجود داردکه بریالهای‌جانبی‌هرم ناقص‌مماس‌است، هم‌ارز این موضوع می‌شودکه، دایره‌ای موجود است تا دریکی‌از وجوه جانبی هرم ناقص قابل محاط باشد.

بااستفاده ازاین موضوع، تساوی‌های زیرنوشته می‌شوند،

$$۲(l-l_۱)=a+a_۱$$

اگر l، l_1 و a_1 را برحسب a و α بنویسیم خواهیم داشت،

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳}\sqrt{tg^۲\alpha+۴}\ tg\frac{\alpha}{۲}=tg\alpha-tg\frac{\alpha}{۲}$$

از آنجا

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

جواب : $۲\ Arc\ tg(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$

-۴۵ $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}<a<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ، $a\neq ۱$

$$V=\frac{۱}{۱۲}\sqrt{(a^۲+۱)(۳a^۲-۱-a^۴)}$$

-۴۶ $$\frac{۳-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma}{۳+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}$$

-۴۷ اگر $۰<\alpha<\frac{\pi}{۶}$ آنگاه

$$S=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲\cos\alpha}$$

اگر $\frac{\pi}{۶}\leqslant\alpha<Arc\ tg\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ آنگاه

$$S=\frac{a^۲}{۶\cos\alpha}(۱۸\cot g\alpha-۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}\cot g^۲\alpha)$$

اگر $Atc\ tg\frac{۲}{\sqrt{۳}}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{۲}$ ، آنگاه

$$S=\frac{a^۲}{\sqrt{۳}\sin\alpha}(\sqrt{۳}+\cot g\alpha)$$

-۴۸ $$Arc\cos\left(\frac{a^۲b^۲+b^۲c^۲-c^۲a^۲}{a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲}\right)$$

۴۹- چندوجهی ABMDCN ، منشور مثلث القاعده‌ای است که ABM قاعدهٔ آن، AD، BC و MN یالهای جانبی آن می‌باشند.

جواب : $\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$

۵۰- $$R=\frac{\sqrt{4c^2-a^2b^2}}{2\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}$$

۵۱- $$\frac{1}{3}\sqrt{3m^2+3n^2+3p^2-a^2-b^2-c^2}$$

۵۲- روی امتداد یال CC_1، نقطهٔ K را طوری اختیار کنید که B_1K موازی BC_1 باشد. از یال BB_1 صفحه‌ای به‌موازات صفحهٔ مفروض بگذرانید. (شکل ۱) این صفحه باید ازیکی از نیمسازهای داخلی ویا خارجی زاویهٔ DB_1K بگذرد. چون صفحه‌ای که بر BB_1 می‌گذرد، DK_1 را با نسبتی قطع می‌کند که با همان نسبت DC را نیز قطع می‌کند، پس دوحالت اتفاق می‌افتد:

(۱) صفحه از نقطه‌ای مانند N واقع بر روی یال DC طوری می‌گذرد که

$$|DN|/|NC|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

(۲) صفحه از نقطه‌ای مانند M برروی امتداد آن طوری می‌گذرد که باز

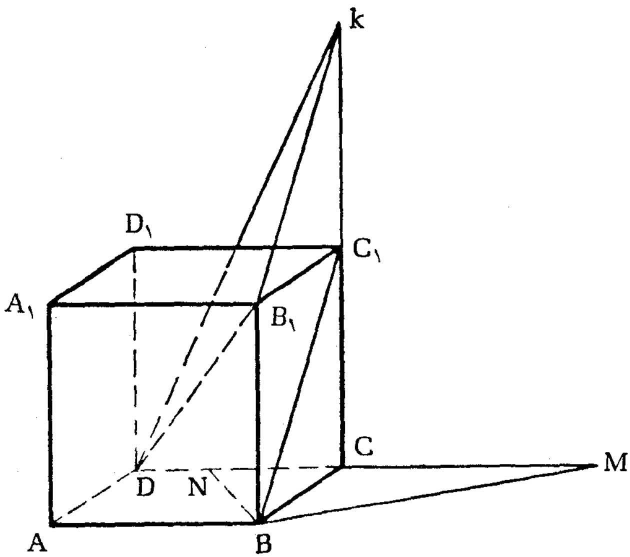
$$|DM|/|MC|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ K را ازصفحه پیداکنید. این فاصله برابراست با فاصله نقطهٔ C از خط BN . اگر این فاصله را x فرض کنیم در آن صورت،

$$x=\frac{2S_{BNC}}{|BN|}=\frac{a\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{11-4\sqrt{6}}}=\frac{a(\sqrt{6}-1)\sqrt{2}}{5}$$

$$\sin\varphi=\frac{x}{|B_1K|}=\frac{\sqrt{6}-1}{5}$$

که درآن φ زاویه بین صفحهٔ BB_1N وخطوط B_1D و B_1K می‌باشد.



شکل ۱

زاویهٔ دیگر به‌همین طریق پیدا می‌شود.

جواب : $\operatorname{Arc\,sin} \frac{\sqrt{6}\pm 1}{5}$

۵۳- اگر ABCD هرم مفروض باشد که یالهای جانبی‌آن، $|DA|=a$ و $x=|DB|$ و $|DC|=y$ ، باتوجه به‌فرض مسئله که این یالها دوبه‌دو برهم عمودند و

$$x+y=a$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2(x^2+y^2)+x^2y^2} \quad ، \quad V_{ABCD}=\frac{1}{6}axy$$

ازطرف دیگراگر R شعاع کرهٔ مطلوب درنظرگرفته شود، خواهیم داشت،

$$V_{ABCD}=\frac{R}{3}(S_{DAB}+S_{DBC}+S_{DCA}-S_{ABC})=$$

$$=\frac{R}{6}\left[ax+by+xy-\sqrt{a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}\right]$$

$$=\frac{R}{6}\left(a^2+xy-\sqrt{a^4-2xya^2+x^2y^2}\right)$$

$$=\frac{R}{3}xy$$

از مساوی قراردادن دوعبارت V_{ABCD} نتیجه می‌شود:

$$R=\frac{a}{2}$$

۵۴- از فرض مسئله معلوم می‌شودکه رأس S، یا برروی مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC تصویرمی‌شود، ویا روی مرکزدایرهٔ محاطی‌خارجی‌آن(دایرهٔمحاطی‌خارجی بریك ضلع وامتداد دوضلع دیگر مثلث مماس است.)

جواب: اگر $\frac{a}{\sqrt{3}}<b\leqslant a$ آنگاه

$$V=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$$

اگر $a<b\leqslant a\sqrt{3}$ دوجواب،

$$V_1=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}\ ,\quad V_2=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-a^2}$$

اگر $b>a\sqrt{3}$ ، سه‌جواب،

$$V_1=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}\ ,\quad V_2=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-a^2}$$

$$V_3=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-3a^2}$$

۵۵- زوایای $\widehat{SAB}$ ، $\widehat{SCA}$ ، $\widehat{SAC}$ و $\widehat{SBA}$ را به‌ترتیب با $\alpha-2\varphi$ و $\alpha-\varphi$ و α و $\alpha+\varphi$ نشان دهید. بنابرقضیه سینوسها، ازمثلث SAB نتیجه می‌شود،

$$|SA|=|AB|\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(2\alpha-\varphi)}$$

واز مثلث SAC داریم،

$$|SA|=|CA|\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(۲\alpha-\varphi)}$$

اما بنا به‌فرض، $|AB|=|AC|$ پس،

$$\sin(\alpha+\varphi)=\sin(\alpha-\varphi)$$

از آنجا $\alpha=\frac{\pi}{۲}$

از شرط مربوط به‌مساحتهای مثلث‌های SAB ، ABC و SAC معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود،

$$\cot g^{۲}\varphi\cos ۲\varphi=۱$$

از آنجا $\varphi=\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)$

بنابراین جواب مسئله چنین خواهد بود،

$$\frac{\pi}{۲}-\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)\quad،\quad\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)$$

$$\frac{\pi}{۲}\quad،\quad\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)$$

۵۶- اگر $|SA|=l$ ، l را به‌آسانی برحسب a و α و β می‌توان نوشت. درصورتی‌که $l\leqslant a$ ، آنگاه

$$\triangle_{ASC}=\triangle_{ASB}$$

(مثلث ASC را بسازید: زاویه‌ای برابر α وبه‌رأس S اختیارکنید. روی یك ضلع آن $|SA|=l$ را جداکنید ودایره‌ای به‌مرکز A وشعاع a رسم‌کنید. چون $l\leqslant a$ این دایره ضلع دوم زاویه را دریك نقطه قطع می‌کند).

اگر $l>a$ ، دوحالت اتفاق می‌افتد:

$$\triangle_{ASC}=\triangle_{ASB}$$

و $$\widehat{ACS}=\alpha+\beta$$

برحسب آنکه $۲\alpha+\beta$ بزرگتر، مساوی ویا کوچکتر از π باشد، پاره‌خط l کوچکتر،

مساوی ویا بزرگتر π خواهد شد.
علاوه براین درهردوحالت زوایای مجاور A، میبایست در شرایط کنج سه وجهی صدق کند.

جواب: اگر

$$\beta>\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad 2\alpha+\beta\geqslant\pi$$

آنگاه

$$V=\frac{a^3\sin(\alpha+\beta)}{12\sin\alpha}\sqrt{1-2\cos 2\beta}$$

اگر $\alpha+\beta>\frac{\pi}{3}$ و $\alpha<\frac{\pi}{3}$ و $\beta\leqslant\frac{\pi}{6}$ آنگاه

$$V=\frac{a^3\sin(\alpha+\beta)}{12\sin\alpha}\sqrt{3\sin^2\beta-[2\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta]^2}$$

اگر $\frac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\frac{2\pi}{3}$ و $\alpha<\frac{\pi}{3}$ و $\beta>\frac{\pi}{6}$ آنگاه هردو جواب امکانپذیر است.

۵۷- به اندازه $\frac{4}{5}$ ازنقطهٔ K.

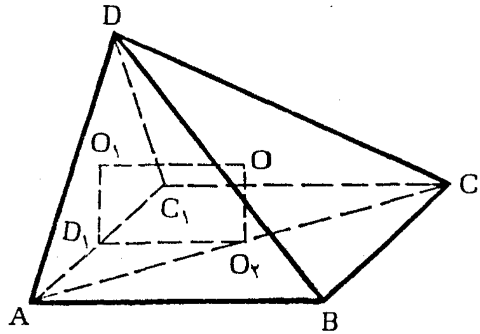
۵۸- نقطهٔ C_1 را طوری اختیار کنیدکه، $ABCC_1$ مستطیل باشد. (شکل ۲)
D_1، وسط AC_1، O_1 و O_2 بهترتیب مرکز دایرههای محیطی مثلثهای AC_1D و ABC و O مرکز کرهٔ محیطی $ABCD$ درنظر گرفته شدهاند.
دیده میشود O_2 وسط AC، و AB و CC_1 بهترتیب بر AD و AC_1 عمودند.
در نتیجهصفحات ADC_1 و $ABCC_1$ هممتقابلا بریکدیگرعمودند و $O_1D_1O_2O$ مستطیلمیباشد. پس،

$$|DC_1|=\sqrt{|DC|^2-|C_1C|^2}=\sqrt{b^2-a^2}$$

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث DC_1A برابراست با

$$R_1=\frac{|DC_1|}{2\sin(\widehat{DAC_1})}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2\sin\alpha}$$

$R=|OA|$ شعاع کره را می‌توان ازمثلث AO_1O بدست‌آورد. (این مثلث دز شکل نشان داده نشده‌است).



شکل ۲

$$R=\sqrt{|OA_1|^2+|O_1O|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{\sin^2\alpha}+a^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{b^2-a^2\cos^2\alpha}$$

۵۹- وسط یال AB ازمکعب $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ را K و وسط D_1C_1 را با M نشان دهید. K و M درعین‌حال اوساط یالهای PQ و RS ازچهاروجهی $PQRS$ هم می‌شوند. D_1C_1 بر روی RS قراردارد. اگر یال چهاروجهی برابر b باشد، در آن صورت.

$$|MK|=\frac{b\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$$

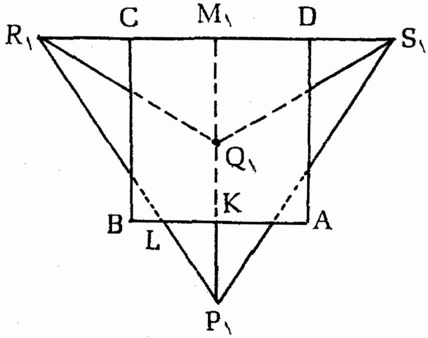
و بنابراین $b=2a$

اکنون تصویر چهاروجهی را روی $ABCD$ پیداکنید (شکل ۳): P_1، Q_1، R_1، و S_1 را بدترتیب تصاویر P، Q، R، و S بنامید. چون PQ با این صفحه، زاویهٔ 45° می‌سازد. پس طول P_1Q_1 برابر با $a\sqrt{2}$ می‌شود.

محل برخورد خطوط AB و P_1R_1 را با L نشان دهید. از تشابه مثلث‌های P_1LK و $P_1R_1M_1$ نتیجه می‌شود،

$$|LK|=\frac{|R_۱M_۱|\cdot|P_۱K|}{|P_۱M_۱|}=\frac{a}{۱+\sqrt{۲}}<\frac{a}{۲}$$

ازآنجا یال PR (ودرنتیجه سایر یالها: PS ، QR و QS) ازچهاروجهی، مکعب را قطع می‌کند.



شکل ۳

برای محاسبهٔ حجم جسم حاصل، به‌آسانی می‌توان آن‌را به‌عنوان یك چهاروجهی که گوشهٔ آن بریده شده درنظر گرفت.

جواب: $$\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}(۱۶\sqrt{۲}-۱۷)$$

۶۰- طول یالهای متنافررا با a و b وفاصلهٔ آنها را d بنامید. زاویهٔ بین‌آنهــا را هم φ فرض‌کنید. با بکار بردن فرمول مسئلهٔ ۱۵ حجم‌های قسمتهای مطلوب را پیدا کنید.

$$V_۱=\frac{۱۰}{۸۱}\,abd\sin\varphi$$

$$V_۲=\frac{۷}{۱۶۲}\,abd\sin\varphi$$

جواب: $$\frac{۲۰}{۷}$$

۶۱- مساحت تصویر دومین مقطع روی صفحهٔ اول، نصف مساحت مقطع اول است. (مسئلهٔ ۸ را نگاه‌کنید). ازطرف دیگر، نسبت مساحت تصویرمقطع دوم به‌مساحت‌خودمقطع

برابراست با $\cos\alpha$.

جواب: $2\cos\alpha$

۶۲- $$\frac{1}{12}\pi R^2 H$$

۶۳- اگر x و y و z به‌ترتیب فواصل مرکز کره ازصفحات مفروض باشند، آنگاه

$$z^2+y^2+x^2=d^2$$

مجموع مساحتهای این سه‌دایره برابراست با

$$\pi[(R^2-x^2)+(R^2-y^2)+(R^2-z^2)]=\pi(3R^2-d^2)$$

۶۴- باقراردادن $|AC|=x$ ، $|BD|=y$ ، (AC و BD بر کره مماسند.) D_1 را تصویر D برروی صفحه‌ای درنظر بگیریدکه از AC گـذشته و به‌موازات BD رسم شده‌است. داریم،

$$|CD|=x+y=\frac{2R}{\cos\varphi} \quad ، \quad |CD_1|=2R\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

درمثلث CAD_1 زاویهٔ $\widehat{CAD_1}$ برابراست با α ویا $(180-\alpha)$. با توجه به‌این موضوع، x و y باید دریکی‌از دستگاه معادلات زیرصدق کند

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2R}{\cos\varphi} \\ x^2+y^2-2xy\cos\alpha=4R^2\mathrm{tg}^2\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

یا

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2R}{\cos\varphi} \\ x^2+y^2+2xy\cos\alpha=4R^2\mathrm{tg}^2\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

از دستگاه (۱) داریم

$$x+y=\frac{2R}{\cos\varphi} \quad ، \quad xy=\frac{R^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

واز دستگاه (۲)

$$x+y=\frac{2R}{\cos\varphi} \quad ، \quad xy=\frac{R^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

باتوجهٔ به‌نامساوی $(x+y)^2 \geqslant 4xy$ معلوم می‌شود که دستگاه (۱) یك‌جواب

$$\varphi \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

دارد. وجواب دستگاه (۲) عبارت است از،

$$\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

چون حجم چهاروجهی ABCD برابراست با،

$$\frac{1}{3}xyR\sin\alpha$$

بنابراین اگر

$$\frac{\alpha}{2}<\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

آنگاه حجم چهاروجهی برابراست با،

$$\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

اگر

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$$

آنگاه دوجواب برای حجم چهاروجهی پیدا می‌شود:

$$V_1=\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad ، \quad V_2=\frac{2}{3}R^3 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

۶۵- عمود مشترك یالهای‌مفروض، بوسیله مکعب، به‌پاره‌خط‌های x و y و z تجزیه‌می‌شود که درآن $x+y+z=c$ (x یال مکعب، y یال مجاور به‌یال a می‌باشد.)
وجوه مکعب که موازی یالهای مفروضند، چهاروجهی را دردومستطیل قطع می‌کنند که

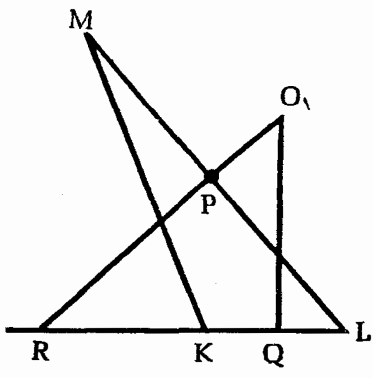
اضلاع اولی برابر $\frac{x+z}{c}a$ و $\frac{yb}{c}$ واضلاع دومی $\frac{z}{c}a$ و $\frac{x+y}{c}b$ می‌باشند.

اضلاع کوچکتر این مستطیل‌ها ، برابر با یالهای مکعب است، یعنی $x=\frac{yb}{c}$ و

$x=\frac{z}{c}a$ وازآنجا $z=\frac{cx}{a}$ و $y=\frac{cx}{b}$ و $x=\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

-۶۶ $O_۱$ و $O_۲$ را تصاویر O، مرکز کره بر روی صفحات KLM و KLN درنظر بگیرید ووسط ML را P بنامید. تصاویر $O_۱$ و $O_۲$ روی KL، بر روی هم منطبق می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که این تصاویر، بروسط KL یعنی نقطه Q هم تصویر می‌شوند. (شکل ۴).

چون فرجه بین صفحات KLM و KLN برابر یك قائمه است، شعاع کره مطلوب برابر می‌شود با، $\sqrt{|PO_۱|^۲+|O_۱Q|^۲}$. اگر $O_۱P$ را امتداد دهیم تا KL را درنقطه R قطع کند، از مثلث قائمه‌الزاویه PLR نتیجه می‌شود $|RL|=۶a$ و $|RP|=۳a\sqrt{۳}$ بنابراین داریم،



شکل ۴

$$|RO_۱|=\frac{۱۱a\sqrt{۳}}{۳} \quad ، \quad |O_۱Q|=\frac{۱۱a\sqrt{۳}}{۶} \quad ، \quad |RQ|=\frac{۱۱a}{۲}$$

$$|PO_۱|=\frac{۱۱a\sqrt{۳}}{۳}-۳a\sqrt{۳}=\frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$$

ازآنجا شعاع کره برابرمی‌شود با،

$$\sqrt{\frac{۴a^۲}{۳}+\frac{۱۲۱a^۲}{۱۲}}=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{۱۳۷}{۳}}$$

۶۷- ازمساوی بودن خطوط مماسی که از یك نقطه بر کره رسم می‌شوند، ثابت کنید قاعده، یك مثلث قائم الزاویه است ومیانه‌های وجوه جانبی که بر اضلاع قاعده رسم می‌شوند، باهم برابرند. واین ثابت می کندکه هرم منتظم است.

جواب: $\frac{R^۲\sqrt{۶}}{۴}$

۶۸- سه فرجه مفروض نمی‌توانند مجاور یك وجه باشند. علاوه براین نمی‌توانند متصل به یك رأس باشند. زیرا دراین صورت تمام پاره خطهایی که وسط یالهای مقابل را بهم وصل می‌کنند، برابر خواهند شد. تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که سه یال متناظر با فرجه‌های قائمه یك خط شکسته باز بوجودآورند.
اگر $|AB|=x$ ، $|BC|=y$ و $|CD|=z$ ، فاصله بین اوساط AB و CD برابر می‌شود با $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{x^۲}{۴}+y^۲+\frac{z^۲}{۴}}$.

وفاصله بین AC و BD (یا AD و BC) برابرمی‌شود با $\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+z^۲}$.

و AD بزرگترین یال وبرابر است با $AD=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{b^۲+۳a^۲}$

۶۹- جواب: $\pi\frac{۴\sqrt{۳}-۳}{۱۳}$

۷۰- ابتدا ثابت کنید ABCD مستطیل است و صفحه DEC برصفحه ABCD عمود می‌باشد. برای این منظور از نقطه E صفحه قاطعی بگذرانیدکه بر BC عمود باشد. این مقطع می‌بایست ضمن قطع قاعده دریك خط راست، که از M می‌گذرد، BC و AD را هم قطع کند. (تنها درانتهای آنها امکان‌پذیر است). سپس با رسم مقطع ذوزنقه متساوی‌الساقینی که از B می‌گذرد واین وقتی امکان‌پذیر است که مقطع شامل AB و $|DE|=|EC|$ و $|AE|=|EB|$ بشود نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{۳}{۵}|AC|\geqslant|ED|=|EC| \quad , \quad \frac{۴}{۵}|AC|\geqslant|EB|=AE$$

یعنی،

$$|AC|^۲ \geqslant |CE|^۲ + |AE|^۲$$

مثلث $\triangle_{AEC}$ حاده‌الزاویه نیست، اما زاویه $\widehat{AEC}$ منفرجه هم نمی‌تواند باشد زیرا دراین‌صورت $\widehat{DEC}$ باید حاده بشود. پس

$$|AC| = \frac{۵}{۴}|AE| = \frac{۵}{۳}|EC|$$

جواب: $\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{۶۵}{۱۴}}$

۷۱- ازنقطه C خطی به‌موازات AB رسم‌کنید. نقطه E را روی‌آن طوری اختیارکنید که $|AB| = |CE|$، ABEC متوازی‌الاضلاع خواهدبود. اگرO مرکزکره باشد، آنگاه مثلث OCE متساوی‌الاضلاع می‌شود. زیرا $\widehat{OCE} = \frac{\pi}{۳}$ و $|CE| = ۱$. (ازفرض‌مسئله هم‌ثابت می‌شود.) پس‌نقطهO ازهمه رئوس متوازی‌الاضلاع ABEC بیك‌فاصله‌است، بنابراین ABEC مستطیل‌است وتصویر O برروی صفحه ABEC که‌آنرا با K نشان میدهیم برمرکز ABEC منطبق‌می‌شود.

$$|BD| = ۲|OK| = ۲\sqrt{|OC|^۲ - \frac{۱}{۴}|BC|^۲} = ۱$$

۷۲- اگرمساحت مقطع‌مفروض را x بنامیم و $|AB| = a$، بااستفاده ازفرمول مسئله(۱۱) درحجم هرم ABCD، وقطعات آن، نتیجه می‌شود،

$$\frac{۲}{۳}\ \frac{Px\sin\frac{\alpha}{۲}}{a} + \frac{۲}{۳}\ \frac{qx\sin\frac{\alpha}{۲}}{a} = \frac{۲}{۳}\ \frac{Pq\sin\alpha}{a}$$

وازآنجا،

$$x = \frac{۲pq\cos\frac{\alpha}{۲}}{p+q}$$

۷۳- $\frac{۸S^۲\sin\alpha\sin\beta}{۳a\sin(\alpha+\beta)}$

۷۴- وقتی‌کره، باصفحه AMN قطع می‌شود، دایره‌ای حاصل‌می‌شودکه درمثلث AMN

محاط شده است. دراین مثلث $|AN|=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ ، $|AM|=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ و $|MN|=\frac{a}{۲}$. (ازمثلث CMN پیدا می‌شوند.) بنابراین اگرمحل برخوردکره مذکور و AM، L باشد، درآن صورت

$$|AL|=\frac{|AN|+|AM|-|MN|}{۲}=\left(\frac{۵}{۱۲}\sqrt{۳}-\frac{۱}{۴}\right)a$$

شعاع‌کره محاط در ABCD برابر است با $r=\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\,a$، که برصفحه ACD درنقطه M مماس است. پس اگر x شعاع‌کره مطلوب باشد، خواهیم داشت،

$$\frac{x}{r}=\frac{|AL|}{|AM|}=\frac{۵-\sqrt{۳}}{۴}$$

وازآنجا،

$$x=\frac{۵\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۴۸}\,a$$

۷۵- $\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}$

۷۶- $\sqrt{۳}$

۷۷- $a\sqrt{۲}$

۷۸- $\mathrm{Arc\ tg}\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

۷۹- مرکزکره را با O، مراکز دوایرمفروض را با $O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ ومرکز دایره مطلوب‌را با $O_۴$ نشان دهید. دیده می‌شودکه‌مثلث $O_۱O_۲O_۳$ متساوی‌الاضلاع‌است. اضلاع آنرا پیداکنید (M محل برخورد دوایر $O_۱$ و $O_۲$ می‌باشد.)

$$|O_۱M|=|O_۲M|=۱ \quad ، \quad |OM|=۲$$

پس،

$$\widehat{MOO_۱}=\widehat{MOO_۲}=۳۰^\circ$$

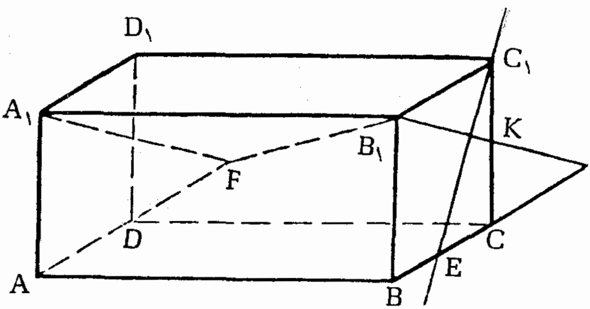
$$|OO_1| = |OO_2| = \sqrt{3} \qquad |O_1O_2| = \sqrt{3}$$

OO_4 برصفحهٔ $O_1O_2O_3$ عمود و ازمرکز مثلث $O_1O_2O_3$ می‌گذرد. فواصل O_1، O_2 و O_3 تا OO_4 برابراست با ۱. اگر K محل برخورد دایره‌های O_1 و O_4، L پای ارتفاع وارد از O_1 برروی OO_4 باشد، KN بر LO_1 عمود است و $|O_1L| = |O_1k| = 1$ و $|OO_1| = \sqrt{3}$

ازتشابه مثلثهای O_1KN و OO_1L نتیجه می‌شود $|O_1N| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ پس شعاع مطلوب برابر است با،
$$|O_4K| = |LN| = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۸۰- (a.

چون یالهای متقابل درچهاروجهی منتظم بریکدیگرعمودند، C_1E و BF برهم عمود می‌شوند. (شکل ۵)



شکل ۵

اگر K را وسط C_1C درنظر بگیریم، درآن صورت چون خطوط B_1K و B_1A_1 بر C_1E عمودند،خط B_1F باید درصفحه‌ای قرارگیرد که از B_1K و B_1A_1 می‌گذرد. بنابراین، A_1F موازی B_1K خواهد بود وازآنجا $|DF| = a$. (جواب اول)

(b). فاصله بین اوساط MN و PQ برابر است با فاصله بین B_1F و C_1E. که می‌توان آنرا ازمساوی قراردادن عبارات حجم چهاروجهی FB_1C_1E بدست آورد.

$$\frac{1}{3} S_{B_1C_1E} \cdot 2a = \frac{1}{6}|FB_1| \cdot |C_1E| \cdot x$$

یا

$$x=\frac{۴a}{۳\sqrt{۵}}$$

۸۱- (a $\qquad$ a

(b $\qquad$ $\frac{a(۲-\sqrt{۲})}{۲}$

۸۲- اگر $|AB|=a$، آنگاه $|AB_۱|=|AC_۱|=۲/۶a$
روی خطوط AB و AC نقاط K و L را طوری اختیار کنید که

$$|AK|=|AL|=|AB_۱|=|AC_۱|=۲/۶a$$

اضلاع ذوزنقه متساوی‌الساقین $KLC_۱B_۱$، که در داخل دایره قاعده مخروط محاط شده است، به‌آسانی قابل محاسبه است. ازآنجا شعاع دایره محیطی هم، محاسبه می‌شود که مقدار آن برابر می‌شود با $\frac{۱۳}{۲۰}\sqrt{۷}\,a$
اکنون حجم مخروط ومنشور را هم می‌توان به‌دست‌آورد.

جواب: $\frac{۱۵۳۷۹\pi}{۴۸۰۰\sqrt{۳}}$

۸۳- باید توجه داشت که پاره‌خط MN، درمحل برخوردش با PQ، به‌دوپاره‌خط مساوی تقسیم می‌شود. این پاره‌خط‌ها را روی صفحه $ABCD$ تصویر کنید. اگر $N_۱$ تصویر N، $K_۱$ وسط AD، $Q_۱$ وسط DC باشند ($K_۱$ و $Q_۱$ به ترتیب تصاویر K و Q هستند) درآن‌صورت، $N_۱M$ بر $AQ_۱$ عمود ودرنقطه تقاطع باآن نصف می‌گردد. پس،

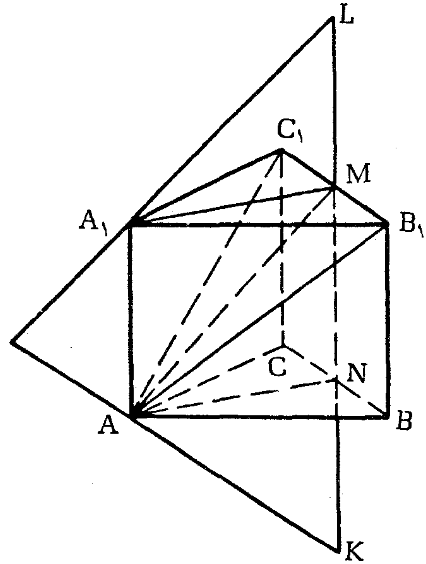
$$\widehat{N_۱AD}=۲\,\widehat{Q_۱AD}$$

ازآنجا $|N_۱K_۱|$ و $|NM|$ را می‌توان بدست‌آورد.

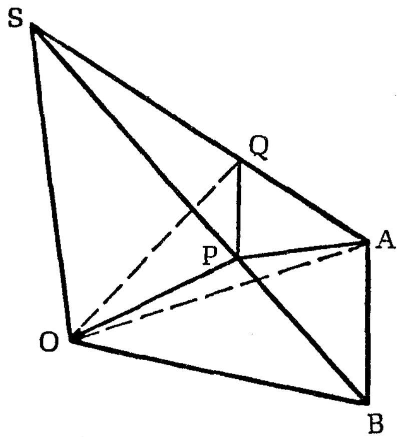
جواب: $\frac{a}{۳}\sqrt{۱۴}$

۸۴- از یال $AA_۱$ صفحه‌ای را عمود برصفحه $BCC_۱B_۱$ مرور دهید. (شکل ۶)
اگر M و N محل برخورد این صفحات با $C_۱B_۱$ و CB باشند، روی MN نقطه K را طوری اختیار کنید که $|NK|=|MN|$. پس $AA_۱MN$ مربع می‌شود واز

آنجا AK بر AM عمود است. پس AK برصفحه AC_1B_1 عمود می‌شود، یعنی AK خط راستی است که درطول آن، صفحاتی که از رأس A می‌گذرند، همدیگر را قطع می‌کنند.



شکل ۶



شکل ۷

به‌طریق مشابه نقطه L برای رأس A_1 تعیین می‌شود. خطوط AK و A_1L همدیگر را در S قطع می‌کنند. بنابراین چند وجهی ما، عبارت ازهرم چهاربر $SKPLQ$ خواهد بود که رأس‌آن S وقاعده‌آن درصفحه BB_1C_1C قراردارد. علاوه برآن B_1N تصویر AB_1 می‌شود. بنابراین صفحه‌ای‌که از A گذشته وبر AB_1 عمود می‌شود، صفحه BB_1C_1C را درخط راستی عمود بر B_1N قطع می‌کند. ازفرض مسئله نتیجه می‌شود که مثلث B_1NC_1 متساوی‌الاضلاع است پس چهارضلعی $PLQK$ که‌قاعده هرم $SPLQK$ را تشکیل‌میدهد، لوزی می‌شود که‌ازدومثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $|KL| = ۳a$ ساخته شده است.

جواب: $\frac{۹a^۳\sqrt{۳}}{۴}$

۸۵- زاویه مطلوب مسئله، متمم زاویه‌ای‌است که مولد OA بامحورمخروط دوم می‌سازد. مراکز قاعده‌های‌مخروط را با P و Q نشان دهید. S نقطه‌ای‌است که در آن، صفحات قاعده‌های دومخروط، خط عمودی راکه از O برصفحه OAB اخراج می‌شود قطع می‌کنند. (شکل ۷) درهرم SOAB داریم،

$$|OA|=|OB|$$

SO برصفحه OAB عموداست وOP وOQ هم به‌ترتیب بر SB و SA عمودند،

$$\widehat{POB}=\widehat{QOA}=\varphi$$

$$\widehat{POQ}=\beta$$

$\widehat{PAO}$ را پیداکنید.

اگر $|OA|=|OB|=l$ و $|AB|=a$ ، آنگاه،

$$|OP|=|OQ|=l\cos\varphi \quad ، \quad |SA|=|SB|=\frac{l}{\sin\varphi}$$

$$|SP|=|SQ|=|OP|\operatorname{cotg}\varphi=l\,\frac{\cos^۲\varphi}{\sin\varphi}$$

$$|PQ|=|AB|\frac{|SP|}{|SB|}=a\cos^۲\varphi.$$

ازطرف دیگر،

$$|PQ|=۲|OP|\,\sin\frac{\beta}{۲}=۲l\,\cos\varphi\sin\frac{\beta}{۲}$$

بنابراین،

$$a\cos\varphi=۲l\,\sin\frac{\beta}{۲} \qquad (۱)$$

اکنون $|PA|$ را حساب‌کنید:

$$|PA|^۲=|PB|^۲+|AB|^۲-۲|PB|\cdot|AB|\cos(\widehat{PBA})=$$

$$=l^۲\sin^۲\varphi+a^۲-۲l\sin\varphi\cdot a\frac{a\sin\varphi}{۲l}=l^۲\sin^۲\varphi+a^۲\cos^۲\varphi$$

اگر $\gamma=\widehat{POA}$ درآن صورت ازمثلث POA نتیجه می‌شود،

$$|PA|^{۲}=l^{۲}\cos^{۲}\varphi+l^{۲}-۲l^{۲}\cos\varphi\cos\gamma$$

با مساوی قراردادن دوعبارتی‌که $|PA|^{۲}$ را بیان می‌کنند و با درنظرگرفتن شرط (۱) خواهیم داشت.

$$\cos\gamma=\cos\varphi-\frac{۲\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}}{\cos\varphi}$$

جواب: $$\frac{\pi}{۲}-\operatorname{Arc}\cos\left(\cos\varphi-\frac{۲\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}}{\cos\varphi}\right)$$

۸۶- $(۵\sqrt{۶}+\sqrt{۲۲})R$

۸۷- اگرصفحه یالهای AD و CD را قطع کند، مقطع، مثلثی خواهدبودکه شعاع دایـرهٔ محاطی‌آن بین صفـرو $\dfrac{a}{\sqrt{۲}(۲\cos\alpha+\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha+۱})}$ تغییرمی‌کند.

اگرصفحه، یالهای AB ، BC را درنقاط P ، N و SA ، SC را درنقاط Q، R و SD را درنقطهٔ K و امتـداد AD و CD را در L و M قطـع‌کند، (شکل ۸) . چون PQ و NR موازی و بردایرهٔ محاط درمقطع مماسند، PN قطراین دایره خواهد بود. با قراردادن $|PN|=۲r$ داریم،

$$|ML|=۲a\sqrt{۲}-۲r$$

$$|KL|=\frac{a\sqrt{۲}-r}{۲\cos\alpha}\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha+۱}$$

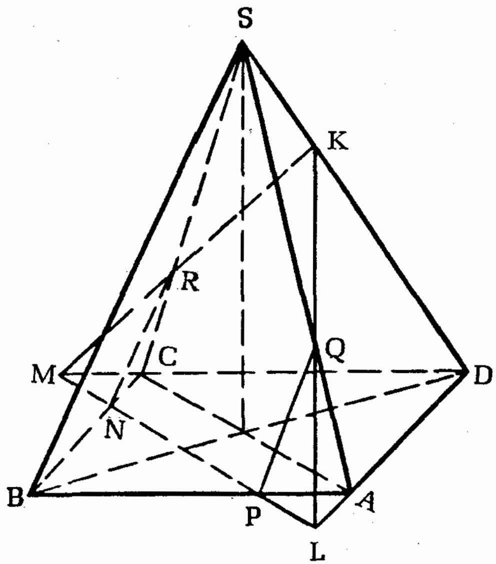
$$S_{MKL}=\frac{(a\sqrt{۲}-r)^{۲}}{۲\cos\alpha}$$

پس

$$r=\frac{a\sqrt{۲}-r}{۲\cos\alpha+\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha+۱}}$$

ازآنجا

$$r=\frac{a\sqrt{۲}}{۱+۲\cos\alpha+\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha+۱}}$$



شکل ۸

جواب:
$$۰<r\leqslant\frac{a}{\sqrt{۲}\,(۲\cos\alpha+\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha+۱})}$$

$$r=\frac{a\sqrt{۲}}{۱+۲\cos\alpha+\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha+۱}}$$

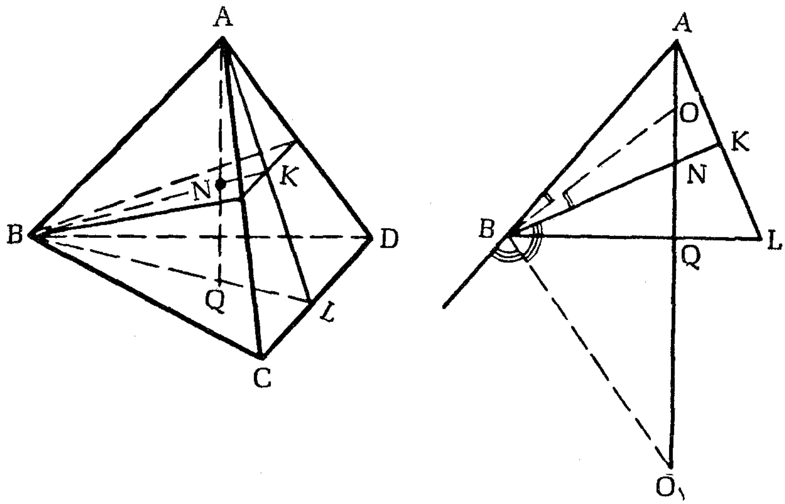
۸۸- صفحهٔ مقطعی مرور دهید که از یال AB و وسط CD بگذرد. محل برخورد صفحهٔ P را باخط AL ، K بنامید. ارتفاع وارد از A بر BL ، خط BK را درنقطهٔ N و BL را درنقطهٔ Q قطع می‌کند (شکل ۹). به‌آسانی ثابت می‌شود مرکز کره، بر روی AQ قراردارد.

دراینجا مرکز کره، می‌تواند هم‌روی AN (نقطهٔ O) وهم درامتداد AQ (نقطهٔ O_1) قرارگیرد.

شعاع کرهٔ اول برابراست با شعاع دایره‌ای‌که بر AB وBK مماس بوده ومرکز آن برروی AN قراردارد. اگرطول آن x باشد، می‌توان آنرا از تساوی‌های زیر

بدست آورد،

$$S_{BAN}=\frac{۱}{۲}(|AB|+|BN|)\,x$$



شکل ۹

$$|BN|=\frac{۴}{۵}|BK|=\frac{۲}{۵}\sqrt{۲|AB|^{۲}+۲|BL|^{۲}-|AL|^{۲}}=\frac{\sqrt{۱۱}}{۵}a$$

$$S_{BAN}=\frac{۲}{۵}S_{BAL}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}a^{۲}$$

پس $x=\dfrac{\sqrt{۲}\,a}{۵+\sqrt{۱۱}}$

شعاع کرهٔ دوم به‌طریق مشابه محاسبه می‌شود.

جواب : $\dfrac{\sqrt{۲}\,a}{۵\pm\sqrt{۱۱}}$

۸۹- طول یال چهاروجهی را با x نشان دهید،

$$|MN|=\frac{x}{\sqrt{۲}}$$

اگر یالی که M وسط آن است، با صفحهٔ مفروض زاویهٔ α بسازد، یال مقابل آن، $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ با آن خواهد ساخت.

تصویر چهاروجهی روی این صفحه، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی خواهد بود که قاعده‌های آن $x\cos\alpha$ و $x\sin\alpha$ وفاصلهٔ بین‌آنها برابر با $\frac{x}{\sqrt{۲}}$ خواهد بود. از آنجا

$$S=\frac{x^{۲}}{۲\sqrt{۲}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

علاوه براین، بنا به‌فرض، زاویهٔ مجاورقاعدهٔ بزرگ، برابراست با ۶۰°، پس،

$$|\cos\alpha-\sin\alpha|=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

جواب: $۳S\sqrt{۲}$

۹۰- طول یال مکعب را واحد فرض کنید و مرکزوجه ABCD را O بنامید. ازاینکه $\widehat{NMC}=۶۰^\circ$ و $\widehat{NOC}=۹۰^\circ$ نتیجه می‌شود که، O بین M و C قراردارد. با قراردادن $|OM|=x$ و $|NB|=y$ خواهیم داشت:

$$|MN|=۲x \quad , \quad |NO|=x\sqrt{۳}$$

$$|MB|=\sqrt{\frac{۱}{۲}+x^{۲}}$$

با بکاربردن قضیهٔ کسینوسها درمثلث‌های MNB و ONB نتیجه می‌شود،

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}+x^{۲}=۴x^{۲}+y^{۲}-۲xy\sqrt{۲} \\ ۳x^{۲}=\frac{۱}{۲}+y^{۲}-\frac{۲}{\sqrt{۳}}y \end{cases}$$

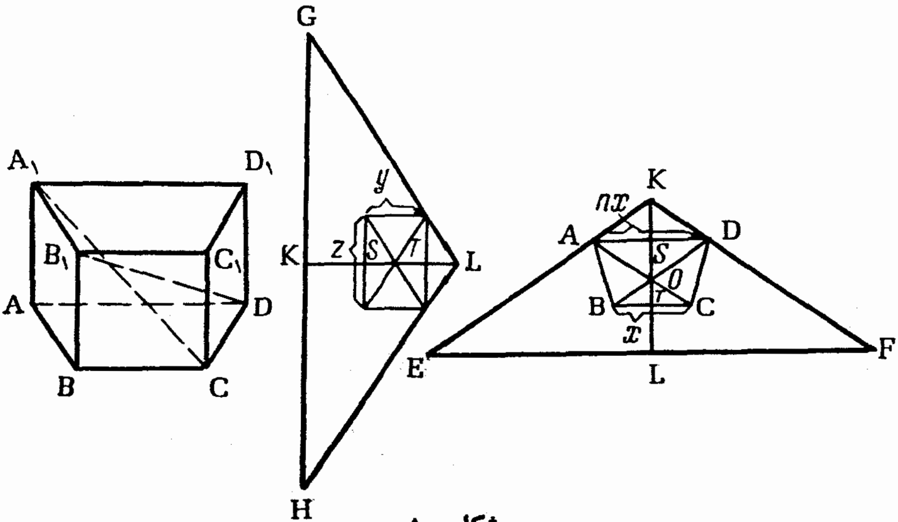
بنابراین،

$$y=\frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad , \quad x=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

جواب: $|AM|:|MC|=۲-\sqrt{۳}$ و $|BN|:|ND_۱|=۲$

۹۱- صفحه‌ای که بر AA_1 می‌گذرد (خود AA_1 باخط B_1D موازی است) بـا صفحهٔ DD_1BB_1 موازی می‌شود. به‌همین طـریق صفحه‌ای که از DD_1 می‌گذرد (خـود DD_1 باخط AC_1 موازی است) با صفحهٔ AA_1C_1C موازی می‌گردد.

ازطرف دیگر، صفحاتی که از یالهای BC و B_1C_1 می‌گذرند، به‌ترتیب، باصفحات AB_1C_1D و A_1BCD_1 موازی می‌شوند (شکل ۱۰). بادرنظرداشتن‌این‌موضوع، مقطع چند وجهی را با صفحه‌ای که موازی قاعده‌ها رسم می‌شود و از اوساط یالهای جانبی می‌گذرد و صفحه‌ای که از اوساط اضلاع موازی قـاعده‌های منشور می‌گذرد، بسازید.



شکل ۱۰

درشکلهای‌کنار شکل ۱۰، L و K اوساط یالهای EF و HG از هـرم مثلث‌القاعدهٔ $EFGH$ بوده و یالهای EF و HG متقابلا بریکدیگرعمودند. با قراردادن

$$|BC|=x \quad , \quad |AD|=nx$$

وارتفاع ذوزنقهٔ $ABCD$ با y وارتفاع منشور با z خواهیم داشت:

$$|KS|=|SO|=\frac{yn}{n+1} \quad ، \quad |TL|=\frac{y}{2}$$

$$|KL|=y\left(\frac{3}{2}+\frac{n}{n+1}\right) \qquad |EF|=\frac{5n+3}{2}x$$

$$|GH|=\frac{5n+3}{n+1}z$$

حجم منشور برابر می‌شود با،

$$\frac{(n+1)xyz}{2}$$

وحجم هرم مثلث‌القاعده برابراست با

$$\frac{1}{6}|BF|\cdot|GH|\cdot|KL|=\frac{(5n+3)^3}{24(n+1)^2}xyz$$

جواب : $\frac{(5n+3)^3}{12(n+1)^3}$

۹۳- ارتفاع منشوررا با x نشان‌دهید. برامتداد یال BB_1 نقطهٔ K راطوری‌اختیارکنیدکه

$$|BK|=\frac{3}{2}x \quad , \quad |B_1K|=\frac{5}{2}x$$

چون KN موازی با BM و $|KN|=2|BM|$ ، پس طول تصویر KN برروی CN دو بسرابر طول تصویر BM روی CN خواهد بود، یعنی برابر با

$$\frac{a}{\sqrt{5}}$$

درمثلث CNK داریم،

$$|CN|=\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}} \text{ ، } |NK|=\sqrt{a^2+4x^2} \text{ ، } |CK|=\sqrt{a^2+\frac{25}{4}x^2}$$

برحسب آنکه C_1NK حاده یا منفرجه باشد، دومعادلهٔ زیررا خواهیم داشت:

$$a^2+\frac{25}{4}x^2=(a^2+\frac{x^2}{4})+(a^2+4x^2)-2\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}$$

و یا

$$a^2+\frac{25}{4}x^2=(a^2+\frac{x^2}{4})+(a^2+4x^2)+2\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}$$

جواب: a و یا $\frac{a}{2\sqrt{5}}$

۹۳- دونقطهٔ تماس دیگررا با A_1 و B_1 وشعاعهای کره‌ها را هم با R و r نشان دهید. در ذوزنقهٔ AA_1BB_1 ، طول قاعده برابراست با،

$$|AA_1|=2R\cos\frac{\alpha}{2} \quad , \quad BB_1=2r\cos\frac{\alpha}{2}$$

وطول اضلاع جانبی برابراست با،

$$|AB_1|=|A_1B|=2\sqrt{Rr}$$

پس اقطارآن برابر می‌شود با،

$$AB=|A_1B_1|=2\sqrt{Rr\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

اگرکره ضمن‌گذشتن از A و A_1 ، AB را درنقطهٔ K قطع‌کند، درآن صورت،

$$|A_1B|^2=|BK|\cdot|BA|$$

وازآنجا:

$$|BK|=\frac{2\sqrt{Rr}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{|AB|}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$|AK|=\frac{|AB|\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

قسمت‌های دیگر،که درآن پاره خط AB تقسیم می‌شود، به‌طریق‌مشابه پیدا می‌شود.
جواب: پاره خط AB به‌نسبت زیر تقسیم می‌شود:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} \;:\; \sin^2\frac{\alpha}{2} \;:\; \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

۹۴- می‌توان ثابت‌کردکه محور استوانه باید، از وسط یال BD بگذرد وبه‌صفحه BDL تعلق داشته باشد. در اینجا L، وسط AC است. زاویه حاده‌ای راکه محور استوانه

با BD می‌سازد، با α نشان می‌دهیم. هرم را روی صفحه‌ای عمود برمحور استوانه، تصویرمی‌کنیم وچهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ را بدست می‌آوریم که در آن،

$$|A_1C_1|=|AC|=12$$

اقطار A_1C_1 و B_1D_1 برهم‌عمودند و A_1C_1 درنقطه F محل برخورد اقطار،نصف می‌گردد و D_1B_1 بوسیله نقطه F به‌پاره خطهایی به‌طولهای $6\sqrt{3}\cos\alpha$ و $10\sqrt{3}\sin\alpha-6\sqrt{3}\cos\alpha$ تقسیم می‌شود.

ازشرط ، $|A_1F|\cdot|FC_1|=|B_1F|\cdot|FD_1|$
معادله برحسب α بدست می‌آیدکه عبارت است از،

$$\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=0$$

از آنجا $\operatorname{tg}\alpha_1=1$ ، $\operatorname{tg}\alpha_2=4$
اما $|B_1D_1|=10\sqrt{3}\sin\alpha$ و برابر قطرقاعده استوانه است. بنابراین دومقدار برای قطر استوانه پیدا می‌شود:

$$\frac{5\sqrt{6}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$$

۹۵- روی یال AS، نقطه K را طوری اختیار کنید که $|AK|=a$. پس نقاط B و D و K متعلق به مقطعی از مخروط می‌شوندکه با قاعده مخروط موازی‌اند. $(|AB|=|AD|=|AK|)$ چون C در صفحه قاعده قرار گرفته است ، معلوم می‌شودکه صفحه BDK ارتفاع مخروط را نصف می‌کند. پس مساحت سطح جانبی مخروط مورد نظرما، چهار برابرمساحت سطح جانبی مخروطی خواهد بود که، شعاع قاعده‌آن، با شعاع دایره محیطی مثلث BDK برابر ومولدآن a می‌باشد.

جواب:
$$\frac{4\pi\sqrt{2}\,a^2(\sqrt{b^2+2a^2}-a)}{\sqrt[4]{b^2+2a^2}\cdot\sqrt{3\sqrt{b^2+2a^2}-4a}}$$

۹۶- شعاع قاعده مخروط را با R و ارتفاع‌آنرا با h ویال مکعب را با a نشان دهید. مقطع مخروط، باصفحه‌ای که به‌موازات‌قاعده رسم می‌شود وازمرکزمکعب می‌گذرد، دایره‌ای خواهدبود به‌شعاع $\frac{2h-a\sqrt{2}}{2h}\cdot R$، که در آن مستطیلی بدابعاد a و $a\sqrt{2}$ قابل محاط است.

یعنی

$$۳a^۲=R^۲\frac{(۲h-a\sqrt{۲})^۲}{h^۲} \qquad (۱)$$

مقطع موازی با قاعده مخروط ومار بر یالی ازمکعب که متقابل به یال واقع درقاعده می‌باشد نیز، دایره‌ای است به شعاع $R\frac{h-a\sqrt{۲}}{h}$. ازطرف دیگر قطر این دایره، برابر با a می‌باشد، یعنی

$$a=۲R\frac{h-a\sqrt{۲}}{h} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$h=\frac{\sqrt{۲}(۵+\sqrt{۳})}{۴}\cdot a \quad ، \quad R=\frac{۲\sqrt{۳}-۱}{۲}\cdot a$$

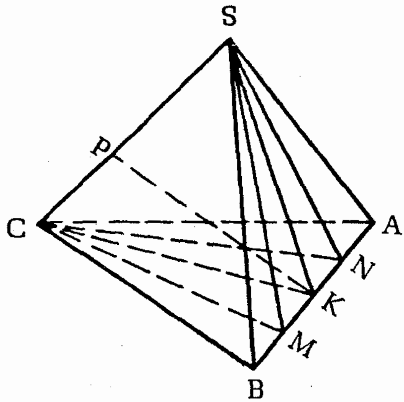
جواب: $\frac{\pi(۵۳-۷\sqrt{۳})\sqrt{۲}}{۴۸}$

-۹۷ $\frac{۳}{۵}$

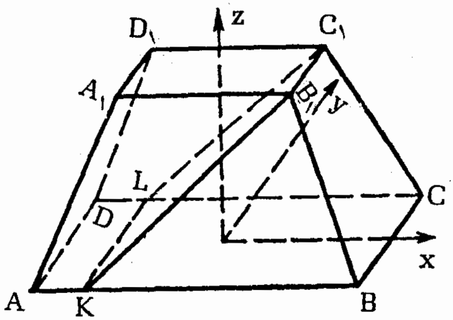
-۹۸ ازتساوی $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$ وعمود بودن AB و DC بریکدیگر نتیجه می‌گیریم که نقاط C و D نسبت به صفحه‌ای که از AB می‌گذرد، و بر CD عمود می‌شود، قرینه هستند.

جواب: $\frac{aS}{۳}$

-۹۹ وسط AB را K، پای عمود مرسوم از K بر CS را، P بنامید. روی AB نقاط M و N را طوری اختیار کنید که PMN مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. (شکل ۱۱). ازتکمیل هرم SPMN، به‌منشورمنتظم $PMNSM_۱N_۱$، طوری‌که PMN و $SM_۱N_۱$ قاعده‌های آن و PS و $MN_۱$ و $NN_۱$ یالهای جانبی‌آن باشند، منشور $A_۱B_۱CA_۲B_۲S$ بدست می‌آید که مجانس‌منشور $PMNSM_۱N_۱$ بامرکز تجانس S ونسبت‌تجانس $|CS|/|PS|$ می‌باشد. به‌آسانی دیده می‌شود، آن بخش‌مطلوب ازحجم هرم SABC که درداخل منشور $A_۱B_۱CA_۲B_۲S$ قرار دارد، به‌نسبت $|MN|/|AB|$ است. باقراردادن $AB=a\sqrt{۳}$ و $|CS|=۲a$ خواهیم‌داشت،



شکل ۱۱



شکل ۱۲

$$|SK| = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}a \quad ، \quad |CK| = \frac{۳}{۲}a \quad ، \quad |PS| = \frac{۵}{۴}a$$

$$|PK| = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a \quad ، \quad |MN| = |PK| = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۲}a$$

$$|MN| / |AB| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

جواب: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰۰- صفحه‌ای را از $B_۱C_۱$ می‌گذرانیم تا AB و DC را درنقاط K و L قطع کند. (شکل ۱۲). به‌فرض چند وجهی‌های $AKLDA_۱B_۱C_۱D_۱$ و $KBCLB_۱C_۱$ دارای حجمهای مساوی‌اند. با بکاربردن فرمول سیمسون (مسئله ۱۵) و قراردادن

$$|AK| = |DL| = a$$

و ازآنجائیکه ارتفاع این دوچند وجهی باهم برابرند، معادله زیر بدست می‌آید،

$$۷a + ۱ = ۴\frac{(a+۱)}{۲} \cdot \frac{(۷+۱)}{۲} = (۷-a)\,۷ + ۴\,\frac{(۷-a)}{۲} \cdot \frac{(۷+۱)}{۲}$$

ویا

$$a=\frac{۱۶}{۵}$$

ارتفاع هرم را با h نشان دهید. محورهای مختصاتی انتخاب کنید که مبدأ آن مرکز ABCD، ومحور xها و yهـا درآن، به ترتیب بموازات AB و BC بـاشند. مختصات A و C و $D_۱$ به ترتیب چنین خواهند بود،

$$\left(-\frac{۷}{۲}\,,\,-\frac{۷}{۲}\;;\circ\right)\text{،}\ \left(\frac{۷}{۲}\text{،}\ \frac{۷}{۲}\text{،}\circ\right)\text{،}\ \left(-\frac{۱}{۲}\text{،}\ \frac{۱}{۲}\,,\ h\right)$$

به آسانی می‌توان معادله صفحه $ACD_۱$ را نوشت، که چنین است،

$$hx-hy+z=\circ$$

معادله صفحه $KLC_۱B_۱$ هم، به‌صورت زیر نوشته می‌شود،

$$۱\circ hx-۸z+۳h=\circ$$

بردارهای نرمال صفحات عبارتنداز $n(h,-h,۱)$ و $m(۱\circ h,\circ,-۸)$ شرط عمود بودن آنها را می‌نویسیم،

$$h=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\quad \text{یا}\quad ۱\circ h^۲-۸=\circ$$

پس حجم هرم برابر است با

$$V=\frac{۳۸\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۰۱- دوحالت اتفاق می‌افتد:

(۱). اضلاع جانبی ذوزنقه، تصاویر یالهای AB و $B_۱C_۱$ هستند. می‌توان ثابت کرد که دراین حالت، مرکز کره، نقطه C می‌شود. وحجم هرم برابر است با $\frac{۳a^۳}{۸}$.

(۲). اضلاع جانبی ذوزنقه(ساقها) تصاویر یالهای AB و $A_۱C_۱$ هستند. دراین حالت، مرکز کره برمرکز دایـره محیطی ذوزنقـه $ABC_۱'A_۱'$ تصویرمی‌شود. ارتفاع ذوزنقه برابر است با $\frac{a\sqrt{۵}}{۳}$. وحجم منشور برابر می‌شود با، $\frac{a^۳\sqrt{۵}}{۴}$

جواب: $\frac{۳a^۳}{۸}$ یا $\frac{a^۳\sqrt{۵}}{۴}$

۱۰۲- $\frac{\pi}{۳}a(a^۲+۲b^۲)$

۱۰۳- چند وجهی مفروض را روی صفحه ABC تصویر کنید (شکل۱۳). تصاویر $A_۱$ و $B_۱$ و $C_۱$ روی شکل نشان داده نشده‌اند، زیرا بر نقاط A و B و C منطبقند. $S_۱$ و $D_۱$ را به‌ترتیب تصاویر S و D درنظر بگیرید. اگر نقطه K را روی $PS_۱$ طوری‌اختیار کنیدکه $|PK|=|ND_۱|$، آنگاه نقطه K، درنقطه $K_۱$ تصویر خواهد شد ودر آن نقطه، PS صفحه $A_۱B_۱C_۱$ را قطع می‌کند. پس نسبت مطلوب برابر است با،

$$\frac{|KB|}{|BP|}=\frac{|ND_۱|-|PB|}{|PB|}=\frac{(|S_۱N|-|D_۱S_۱|)-(|PS_۱|-|BS_۱|)}{|PS_۱|-|BS_۱|}=$$

$$=\frac{|BS_۱|-|D_۱S_۱|}{|S_۱M|-|BS_۱|} \qquad (۱)$$

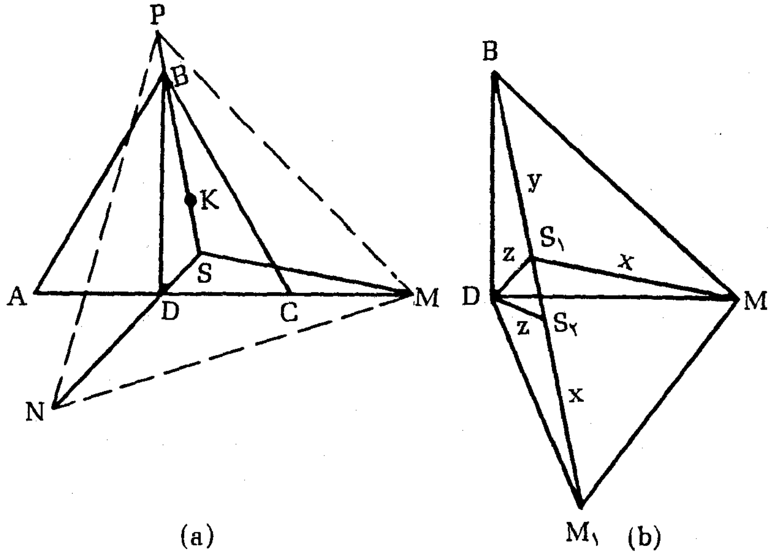
درنتیجه مسئله‌منجرمی‌شود به‌پیداکردن پاره‌خطهای $|S_۱M|$، $|BS_۱|$ و $|D_۱S_۱|$. دراینجا $S_۱$ نقطه‌ای است‌کـه ازآن نقطه، اضلاع مثلث $BD_۱M$ بیك زاویه دیده می‌شوند. $BD_۱M$مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌به‌اضلاع $|D_۱M|=۲a$ و $|BD_۱|=a\sqrt{۳}$ می‌باشد. اگر $|S_۱M|=x$ و $|S_۱B|=y$ و $|S_۱D_۱|=z$، مثلث $D_۱S_۱M$ را بـه‌انـدازه ۶۰° حول نقطه $D_۱$ دوران دهید. (شکل $۱۳, b$) مثلث $D_۱S_۱S_۲$ متساوی‌الاضلاع و به‌ضلع Z می‌بـاشد. نقاط B و $S_۱$ و $S_۲$ و $M_۱$ بریك استقامت قراردارند و $\widehat{BD_۱M_۱}=۱۵۰^\circ$. ازمثلث $BD_۱M_۱$ نتیجه می‌شود،

$$x+y+z=a\sqrt{۱۳}$$

طول ارتفاع وارد برضلع $BM_۱$ از مثلث $BD_۱M_۱$ برابر است با، $a\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}$.

پس $z=\frac{۲a}{\sqrt{۱۳}}$ و $y+\frac{z}{۲}=\sqrt{۳a^۲-\frac{۳a^۲}{۱۳}}=\frac{۶a}{۱۳}$.

ازآنجا به‌آسانی نتیجه می‌شود، $y=\frac{۵a}{\sqrt{۱۳}}$ و $x=\frac{۶a}{\sqrt{۱۳}}$.



شکل ۱۳

با قرار دادن حاصل در (۱)، نسبت مطلوب پیدا می‌شود، که برابر است با ۳. (اندازه‌گیری از رأس B انجام می‌گیرد.)

۱۰۴- هرصفحه مماس، فضا را به‌دوقسمت تقسیم می‌کند. دراین‌صورت‌دوحالت‌ممکن‌است اتفاق‌افتد: یا هر سه کره، دریك طرف نیم‌فضا قرارمی‌گیرند. یادوتا از کره‌ها، دریك طرف نیم فضا، ودیگری درطرف دیگر قرارمی‌گیرد.

به‌آسانی دیده می‌شودکه اگرصفحه‌ای بریك‌کره مماس باشد، صفحه دیگری که نسبت به‌صفحه مارازمرکزکره،قرینه آن باشد، برهمان‌کره مماس‌می‌شود. نشان‌می‌دهیم صفحه‌ای موجود نیست که، بر کره‌های داده شده مماس باشد، به‌قسمی که‌کره‌های به‌شعاع ۳ و ۴ دریك طرف‌آن، وکره به‌شعاع ۶ درطرف دیگرآن قرار داشته باشد. فرض‌کنیم مراکز کره‌های به شعاع‌های ۳ و ۴ و ۶ به‌ترتیب A و B و C باشند. صفحه‌مماس برکره‌ها به‌قسمی‌که دربالا به‌آن اشاره شد،اضلاع AB وBC را به‌ترتیب به نسبت‌های ۱:۲ و ۲:۳ تقسیم می‌کند. یعنی ازنقاط K و L برروی AC و BC طوری می‌گذرندکه

$$|CK|=\frac{۲۲}{۳} \quad \text{،} \quad \text{و} \quad |CL|=\frac{۳۳}{۵}$$

فاصله C از KL هم، به‌آسانی محاسبه می‌شود، که برابراست با $۶<۳۳\sqrt{\frac{۳}{۹۱}}$.
بنابراین بلافاصله،معلوم می‌شود که‌از KL، نمی‌توان صفحه‌ای‌مماس برکره به‌شعاع ۶ ومرکزC مرور داد.
می‌توان نشان داد همه صفحات مماس دیگر، وجود دارند. وتعدادآنها کلا شش تا است.

۱۰۵- حل این مسئله براین پایه استوار است‌که، امتداد شعاع تابش وشعاع انعکاس‌نسبت به‌وجهی‌که شعاع منعکس ازآن بازتاب پیدا می‌کند، قرینه یکدیگرند. محورهای مختصات را به‌مبدأ N اختیارکنید ویالهای NK وNL و NM را به‌عنوان‌محور-های xها و yها و zها درنظر بگیرید. نقاط برخورد متوالی خط SP با صفحات محورهای مختصات راکه متمایزازLNM باشند، با Q' وR' نشان دهید. داریم،

$$|QR|=|Q'R'| \quad \text{،} \quad |pQ|=|PQ'|$$

مختصات P عبارت خواهد بود از، $(\circ,۱,\sqrt{۳})$. زوایای شعاع SP با محورهای مختصات را αوβ وγ بنامید. ازفرض‌مسئله معلوم می‌شود که $\beta=\frac{\pi}{۴}$. پس $\cos\alpha$ ازمعادله $۲\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta=۱$ بدست می‌آیدکه برابراست با $\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ (α زاویه حاده است) درنتیجه، بردار $a\left(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}\right)$ موازی‌با SPخواهد بود. اگر $A(x,y,z)$، نقطه دلخواهی واقع برروی این خط باشد،آنگاه،

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+t\ a$$

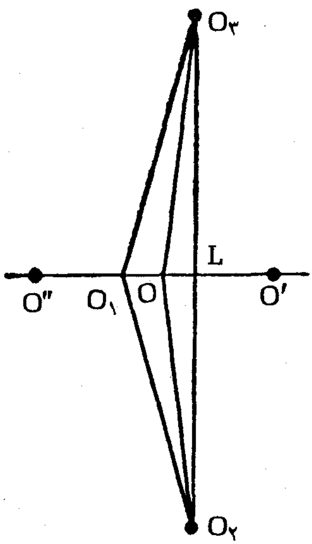
یا درفرم مختصاتی، $x=\frac{t}{۲}$ و $y=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}t$ و $z=\sqrt{۳}+\frac{t}{۲}$ به ازای $t_۱=-\sqrt{۲}$ نقطه Q' وبه‌ازای $t_۲=-۲\sqrt{۳}$ نقطه R' بدست می‌آید.
پس $Q'\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \circ ,\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$ و $R'(-\sqrt{۳}\ ,\ ۱-\sqrt{۶}\ ,\ \circ)$

$$|PQ'|=\sqrt{۲} \quad \text{،} \quad |Q'R'|=۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

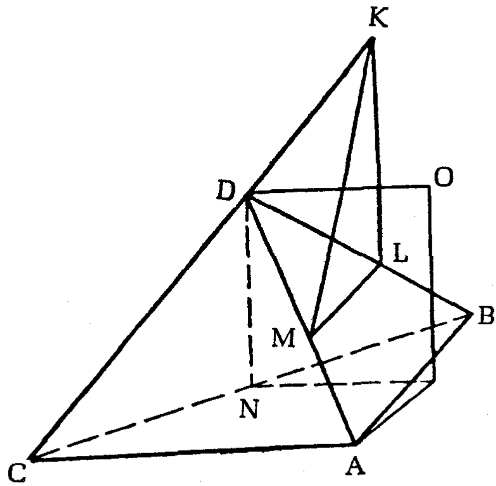
جواب: $2\sqrt{3}$

۱۰۶- نقطه تماس کره را با امتداد CD، با K نشان دهید. نقاط تماس با یالهای AD و BD را نیز، با M و L ووسط BC را با N نشان دهید. (شکل ۱۴) چون،

$$|CD| = |DB| = |DA|$$



شکل ۱۵



شکل ۱۴

و DN برصفحه ABC عمود است و $|DL| = |DM| = |DK|$ و KL موازی با DN وML موازی با AB، پس‌صفحه KLM برصفحه ABC عمود می‌شود. و $\widehat{KLM} = 90^\circ$. اگر O مرکز کره‌باشد، درآن‌صورت خط DO برصفحه KLM عمود می‌شود. یعنی DO بـا صفحه ABC مـوازی است ودرنتیجه $|DN| = 1$ (شعاع کره) علاوه براین DC ازمرکز دایره محیطی مثلث KLM، می‌گذرد، یعنی از وسط KM. پس $\widehat{ODM} = \frac{1}{2}\widehat{KDM}$ علاوه براین،

$$|DA| = |DC|$$

$$\sqrt{|CN|^{۲}+|DN|^{۲}}=\sqrt{۳}$$

$$|CA|=|CB|\cos ۳۰=\sqrt{۶}$$

وازآنجا نتیجه می‌شود مثلث CDA قائم‌الزاویه: $\hat{CDA}=۹۰^\circ$، $\hat{ODM}=۴۵^\circ$
و

$$|DM|=|OM|=۱$$

وطول پاره خط مماس مطلوب، برابرمی‌شود با

$$|AM|=|AD|-|DM|=\sqrt{۳}-۱$$

۱۰۷- نقاط تماس کره‌ها را با صفحه P، $O_۱$ و $O_۲$ و $O_۳$ بنامید: $O_۱$ برای کره به‌شعاع r، $O_۲$ و $O_۳$ برای کره‌های به‌شعاع R.
O رأس مخروط، (شکل ۱۵) و φ زاویه بین مولد مخروط وصفحه P است.
می‌توان نوشت،

$$|O_۱O|=r\cot g\frac{\varphi}{۲} \quad ، \quad |OO_۲|=|OO_۳|=R\cot g\frac{\varphi}{۲}$$

$$|O_۱O_۲|=|O_۱O_۳|=۲\sqrt{Rr} \quad ، \quad |O_۲O_۳|=۲R.$$

چون $|O_۱O_۲|=|O_۱O_۳|$، تنها زاویه $O_۲O_۱O_۳$ می‌تواند ۱۵۰° بشود. بنا براین، $\frac{R}{r}=۴\sin^{۲}۷۵=۲+\sqrt{۳}$. علاوه براین، اگر L وسط $O_۲O_۳$ باشد، آنگاه

$$|OL|=\sqrt{|OO_۳|^{۲}-|O_۳L|^{۲}}=R\sqrt{\cot g^{۲}\frac{\varphi}{۲}-۱}$$

$$|O_۱L|=\sqrt{|O_۱O_۳|^{۲}-|O_۳L|^{۲}}=\sqrt{۴Rr-R^{۲}}$$

نقطه O روی $O_۱L$ قرارمی‌گیرد ومی‌تواند روی خود $O_۱L$، ویا درامتدادآن، از طرف L ویا $O_۱$ قرارگیرد (O' و O'' درشکل) به‌این ترتیب، می‌توانیم سه‌رابطه زیر را بدست‌آوریم،

$$|O_۱L|=|OO_۱|+|OL|$$

$$|O_۱L|=|O_۱O'|-|O'L|$$

$$|O_۱L|=|O''L-|O''O_۱|$$

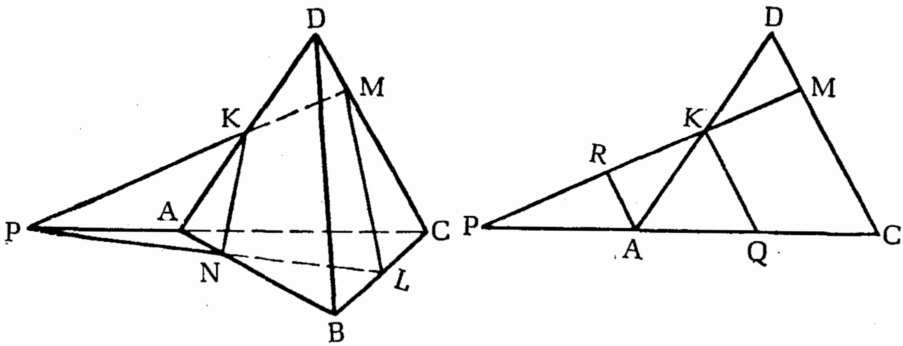
با جاگذاری $R=(۲+\sqrt{۳})r$ و $\cot g \frac{\varphi}{۲}=x$ درهر یك از این روابط،

دردوحالت‌اول $x=-۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، $x=۱$، که به‌تناقض می‌رسیم.

درحالت سوم، $x=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

جواب: $\cos\varphi=\frac{۱}{۷}$

۱۰۸- اوساط یالهای AD و BC را با K و L ، ومحل برخورد صفحه مفروض را بـا AB و AC، به‌ترتیب N و P بنامید. (شکل ۱۶)



شکل ۱۶

نسبت‌های $|PC|/|PA|$ و $|PM|/|PK|$ را پیدا کنید.
KQ و AR را هم بموازات DC رسم کنید. Q وسط AC است.

$$|AR|=|DM| \quad ، \quad \frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|AR|}{|MC|}=\frac{|DM|}{|MC|}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{|PK|}{|PM|}=\frac{|KQ|}{|MC|}=\frac{|DC|}{۲|MC|}=\frac{۵}{۶}$$

پس

$$\frac{|AN|}{|NB|}=\frac{۲}{۳} \quad ، \quad \frac{|PN|}{|PL|}=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{V_{PAKN}}{V_{ACBD}}=\left|\frac{PA}{AC}\right|\cdot\left|\frac{AK}{AD}\right|\cdot\left|\frac{AN}{AB}\right|=\frac{۲}{۳}$$

یعنی $V_{PAKN}=۲$. چون طول ارتفاع وارد از A بر PNK برابر ۱ است،
$S_{PNK}=۶$

$$\frac{S_{PML}}{S_{PNK}}=\frac{|PK|\cdot|PN|}{|PM|\cdot|PL|}=\frac{۳}{۲}$$

$$S_{PML}=۹$$

پس مساحت مقطع برابرمی‌شود با،

$$S_{PML}-S_{PMK}=۳$$

۱۰۹- با دردست داشتن شعاع کره محاطی و هرم مثلث‌القاعده منتظم، وارتفاع هرم، به آسانی اضلاع قاعده پیدا می‌شوندکه برابر ۱۲ است و $|MK|=|KN|$. (به‌فرض مماس بر کره از نقاط M و N ازنظر طول برابرند). با قراردادن $|BM|=x$ و $|BN|=y$ وپیداکردن $|MN|$، با استفاده ازقضیه کوسینوسها درمثلث BMN، و پیداکردن $|MK|$ و $|NK|$ به‌ترتیب ازمثلثهای BMK و BNK، می‌توانیم دستگاه زیر را تشکیل دهیم،

$$\begin{cases}x^۲+y^۲-xy=۴۹\\ x^۲-۱۲x=y^۲-۱۲y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^۲+y^۲-xy=۴۹\\ (x-y)(x+y-۱۲)=۰\end{cases}$$

جوابهای دستگاه عبارتند از $x_۱=y_۱=۷$. دراین حالت فاصله K از MN برابر است با $۲>\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}-۴\sqrt{۳}$. یعنی صفحه‌ای که از MN می‌گذرد وبر کره مماس می‌شود درواقع امتداد SK را درآن طرف K قطع می‌کند.

$$|KD|=\frac{۱۲}{۱۳}\quad،\quad|SD|=۶\frac{۱۲}{۱۳}$$

ریشه‌های دیگر این دستگاه درشرط $x+y=۲۲$ صدق می‌کنند. ازمعادله اول نتیجه می‌شود

$$(x+y)^۲-۳xy=۴۹$$

$$xy=\frac{۹۵}{۳}$$

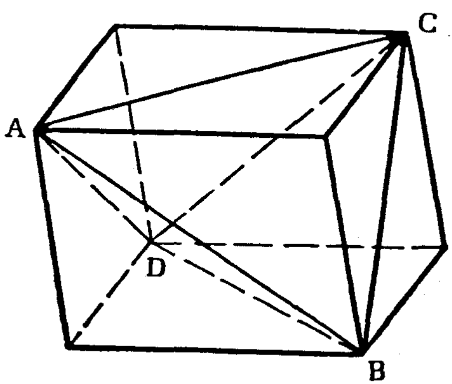
بنا بر این خواهیم داشت،

$$S_{MKN}=|S_{BMK}+S_{BNK}-S_{BMN}|=$$
$$=|x\sqrt{۳}+y\sqrt{۳}-xy\frac{\sqrt{۳}}{۴}|=\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۱۲}$$

درنتیجه ارتفاع مرسوم از K بر MN برابرمی‌شود با ، $\frac{۷}{۶}\sqrt{۳}>۲$. یعنـی در این حالت صفحه‌ای‌که بر MN می‌گذرد وبر کره مماس می‌شود، درشرایط مسئله صدق نمی‌کند.

جواب: $۶\frac{۱۲}{۱۳}$

۱۱۰- از اینکه یـالهای هرم ABCD، بر کره مماسند، معلوم می‌شودکه مجموع یالهای متقابل هرم، باهم برابرند. هرم ABCD را طوری تکمیل می‌کنیم تا یك متوازی السطوح بدست آید. برای این منظور، از هر یال هرم، یك صفحه بموازات یـال متقابل آن مروردمیدهیم. یالهای هرم، اقطاروجوه متوازی‌السطوح ویالهای‌متوازی‌السطوح، با فواصل بین اوساط یالهای متقابل هرم برابرمی‌شوند. (شکل ۱۷)



شکل ۱۷

اگر $|AD|=a$ و $|BC|=b$ ، آنگاه، هـر دو یال متقابل هم‌طولهای a و b

خواهند داشت. این موضوع را ثابت می‌کنیم.

اگر $|AB|=x$ و $|DC|=y$ ، آنگاه

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

$$x+y=a+b$$

(تساوی اخیر از آنجا ناشی می‌شود که تمام وجوه متوازی‌السطوح، لوزی می‌باشند و اضلاعشان برابرند) بنابراین نتیجه می‌شود،

$$x=a \text{ ، } y=b \qquad \text{یا} \qquad x=b \text{ ، } y=a$$

پس درمثلث ABC لااقل دوضلع از نظرطول باهم برابر وجود دارند. اما

$$\widehat{ABC}=100^\circ$$

از آنجا

$$|AB|=x = |BC|=b \text{ ، } |AC|=a$$

و

$$|DB|=b \text{ ، } |DC|=a$$

ازمثلث ABC نتیجه می‌شود،

$$a=2b\sin 50^\circ$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ADC}\cdot h_B=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h_B=$$

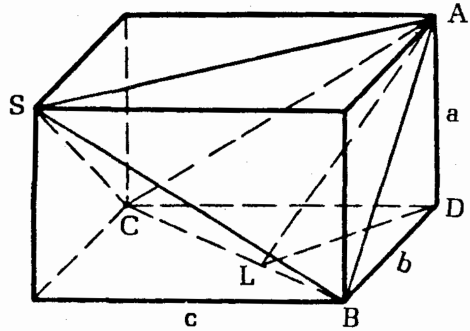
$$=\frac{1}{3}S_{DBC}\cdot h_A=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sin 100^\circ}{2}h_A$$

وازآنجا،

$$\frac{h_A}{h_B}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2b^2\sin 100}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,50^\circ$$

۱۱۱- از مساوی بودن حاصلضربهای طولهای یالهای هـر وجه، معلوم می‌شودکه یالهای متقابل هرم ازنظر طول برابرند. هـرم $SABC$ را طبق معمول، با مـرور دادن صفحه‌ای برهر یال‌آن به موازات یال متقابل، به‌متوازی‌السطوح تبدیل کنید. چـون یالهای متقابل هرم $SABC$، ازنظرطول بـرابرند، متوازی‌السطوح حاصل، یـك

مکعب مستطیل خواهدشد. یالهای آنرا با a و b و c نشان دهیدکه در (شکل ۱۸) دیده می‌شود.



شکل ۱۸

درمثلث BCD ، ارتفاع DL را رسم‌کنید. ازاین مثلث نتیجه می‌شود،

$$|DL|=\frac{bc}{\sqrt{b^{۲}+c^{۲}}}$$

$$|AL|=\sqrt{a^{۲}+|DL|^{۲}}=\frac{\sqrt{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}}}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}}$$

حجم هرم SABC برابر است با $\frac{۱}{۳}$ حجم‌متوازی‌السطوح، وارتفاع وارد بروجه ABC هم داده شده‌است، پس خواهیم داشت،

$$\sqrt{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}}\cdot\sqrt{\frac{۱۰۲}{۵۵}}=abc \qquad (۱)$$

با استفاده ازقضیهٔ کسینوسها درمثلث ABC داریم،

$$۶a^{۲}=\sqrt{a^{۲}+c^{۲}}\cdot\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\cdot\sqrt{\frac{۱۷}{۲}} \qquad (۲)$$

سرانجام ازآخرین شرط مسئله نتیجه می‌شود،

$$c^2-2a^2-2b^2=30 \qquad (3)$$

با حل دستگاه (۱) ـ (۳) خواهیم داشت

$$a^2=34 \quad ، \quad b^2=2 \quad ، \quad c^2=102$$

جواب: $\frac{34\sqrt{6}}{3}$

۱۱۲- نقاطی را که درآنها خطوط مرسوم از A و B بر کره مماس می‌شوند، M و N بنامید.

M_1 و N_1 را هم، تصاویر M و N بر روی صفحهٔ ABC درنظر بگیرید. (شکل ۱۹,a، شکل یکی‌از دوحالت هم‌ارز راکه مربوط به‌آرایش‌مماسها می‌باشد، نشان می‌دهد، این مماسها، با هم متنافرند. در دوحالت دیگر، این مماسها در یك صفحه قراردارند.)

به‌آسانی می‌توان تساویهای زیررا نوشت،

$$|MM_1|=|NN_1|=l\sin\alpha \quad ، \quad |AM|=|CN|=l$$

$$|AM_1|=|CN_1|=l\cos\alpha$$

$|BM_1|$ و $|BN_1|$ را پیداکنید. (شکل ۱۹,b ، O مرکز کره و $OL\|BM_1$)

$$|BN_1|=|BM_1|=|OL|=\sqrt{r^2-(l\sin\alpha-r)^2}$$

$$=\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}$$

وقتی حول نقطهٔ B به‌اندازهٔ $\varphi=\widehat{ABC}$ دوران حاصل شود. نقطهٔ A بر C و M_1 بر N_1 تبدیل می‌شود، پس مثلثهای BM_1N_1 و BAC متشابه‌اند،

$$|MN|=|M_1N_1|=|BM_1|\frac{|AC|}{|AB|}=$$

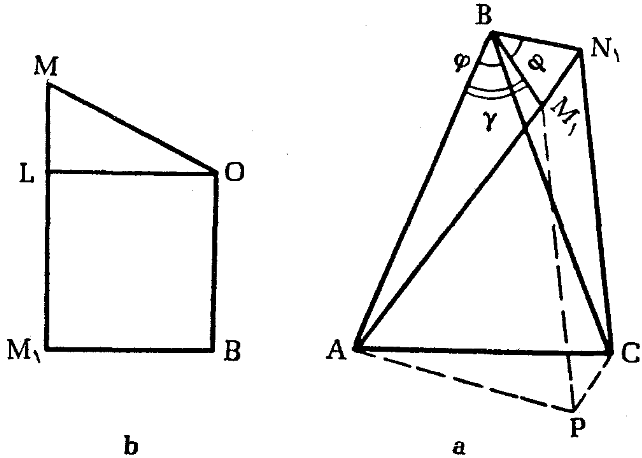
$$=\frac{2a}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}$$

مثلث M_1BN_1 ، از دوران مثلث ABC حول‌نقطهٔB، تحت‌زوایهٔ $\gamma=\widehat{ABM_1}$ حاصل شده‌است وتبدیلی است تجانسی، درنتیجه زاویهٔ بین M_1N_1 وAC برابر γ می‌باشد. چون M_1N_1 موازی MN است. زاویهٔ بین MN وAC نیزمساوی

γ می‌شود.

ازمثلث BM_1A نتیجه می‌شود،

$$\cos\gamma=\frac{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha+l^2-l^2\cos^2\alpha}{2l\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}}=\frac{r\sin\alpha}{\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}}$$



شکل ۱۹

پس،

$$\sin\gamma=\frac{\sqrt{2rl\sin\alpha-(l^2+r^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}}$$

با استفاده از مقادیـر حاصل بـرای $|MN|$ و $|MM_1|$ و $\sin\gamma$ ، حجم هـرم $ACMN$ را بدست آورید.

$$V_{ACMN}=\frac{1}{6}|AC|\cdot|MN|\cdot|MM_1|\sin\gamma$$

$$=\frac{2a^2\sin\alpha}{3}\sqrt{2rl\,\mathrm{rin}\,\alpha-(l^2+r^2)\sin^2\alpha}\qquad(1)$$

اکنون نقطهٔ P را طوری اختیار کنید که، M_1N_1CP متوازی‌الاضلاع باشد. پس $MNCP$ هم متوازی‌الاضلاع می‌شود . اگر β زاویهٔ بین AM و CN باشد پس،

$$\beta=\widehat{AMP}$$

اما مثلث ABM_1 ازدوران مثلث CBN_1 حول‌نقطهٔ B، تحت زاویهٔ $\widehat{ABC}=\varphi$ بدست‌آمده است. درنتیجه زاویهٔ بین AM_1 و CN_1 بـرابر φ می‌شود. از آنجا $\widehat{AM_1P}$ هم با φ مساوی می‌شود. یعنی مثلث‌هـای AM_1P و ABC متشابه‌اند. ازتشابه این دومثلث نتیجه می‌شود،

$$|AP|=2a\cos\alpha$$

زاویهٔ β بازاویهٔ $\widehat{AMP}$ برابراست وAMP مثلث متساوی‌الساقینی‌است که‌در آن

$$|AM|=|MP|=l \qquad , \qquad |AP|=2a\cos$$

درنتیجه،

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{a\cos\alpha}{l}$$

$$\sin\beta=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{2a\cdot\cos\alpha\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}{l^2}$$

از بیان حجم هرم $ACMN$ با دوعبارت نتیجه می‌شود،

$$V_{ACMN}=\frac{1}{6}|AM|\cdot|CN|x\sin B=$$

$$=\frac{1}{3}ax\cos\alpha\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}$$

که در آن x فاصلهٔ مطلوب را نشان می‌دهد. از مقایسهٔ این فرمول با فرمول (۱) خواهیم داشت:

$$x=\frac{2a\,tg\,\alpha\sqrt{2rl\sin\alpha-(l^2+r^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}$$

۱۱۳- اگر $|EA|=x$ ، مساحت مثلث EMA بیشترین مقداررا خواهدداشت، اگر

$$|EH|=|HA|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

که برابراست با

$$\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}}$$

فاصلهٔ B تا صفحهٔ EAH بیشتر از $|AB|=۱$ نمی‌باشد.

چون $S_{AEB}=S_{EBC}$ ،

$$\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۲}V_{ABCEH}=V_{ABEH}\leqslant\frac{x}{۱۲}\sqrt{۲-x^۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲(۲-x^۲)}\leqslant\frac{۱}{۲۴}[x^۲+(۲-x^۲)]=\frac{۱}{۱۲}$$

پس $x=۱$ ویال AB برصفحهٔ EAN عمود است و ABCE مربعی به‌ضلع ۱ سانتیمتر می‌باشد.

سطح جانبی دومنشور مثلث‌القاعده را درنظر بگیرید که یکی ازآنها با صفحات ABCE و AHE و BCH ایجاد شده و دیگری با صفحات ABCE و ECH و ABH به‌وجود آمده است.

واضح است که شعاع بزرگترین کره‌ای که در داخل هرم ABCEH جا می‌گیرد، با شعاع کوچکترین کره‌هایی که دراین منشورها محاط می‌شوند، برابراست و شعاع کره محاط درهریك ازاین منشورها برابر باشعاع دایرهٔ محاط درمقطع قائم می‌باشد.

مقطع قائم منشور اول، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و شعاع دایرهٔ محاط درآن برابر با $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$ است. مقطع قائم منشوردوم مثلث AHE است که شعاع دایرهٔ محاط درآن برابراست با

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}>\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$$

جواب : $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$

۱۱۴- ازاینکه خط راست عمود بریال AC و BS ازوسط BS می‌گذرد، نتیجه می‌شود که وجوه ACB و ACS معادل هستند. اگر

$$S_{ASB}=S_{BSC}=Q$$

آنگاه،

$$S_{ABC}=S_{ACS}=۲Q$$

تصاویر نقطهٔ M را روی وجوه BCS ، ACS ، ABS وABC به‌ترتیب A_1، B_1 ، C_1 و S_1 بنامید. ارتفاعات وارد براین وجوه را با h_A ، h_B ، h_C و h_S وحجم هرم را با V نشان دهید. دراین‌صورت خواهیم داشت،

$$|MA_1|+2|MB_1|+|MC_1|+2|MS_1|=\frac{3V}{Q}$$

اما بنا به‌فرض داریم،

$$|MB|+|MS|=|MA_1|+|MB_1|+|MC_1|+|MS_2|$$

ازاین دوتساوی نتیجه می‌شود،

$$|MB|+|MB_1|+|MS|+|MS_1|=\frac{3V}{Q}$$

اما

$$V=\frac{1}{3}h_S \cdot 2Q=\frac{1}{3}h_B \cdot 2Q=\frac{Q}{3}(h_B+h_S)$$

درنتیجه.

$$|MB|+|MB_1|+|MS|+|MS_1|=h_B+h_S$$

ازطرف دیگر:

$$|MB|+|MB_2|\geqslant h_B$$

$$|MS|+|MS_1|\geqslant h_S$$

بنابراین

$$|MB|+|MB_1|=h_B$$

$$|MS|+|MS_1|=h_S$$

وارتفاعات مرسوم از B و S همدیگر را درنقطهٔ M قطع خواهندکرد و یالهـای AC و BS متقابلا برهم عمود خواهند بود.

ازشرایط مسئله همچنین نتیجه می‌شودکه عمود مشترك AC و BS ، AC را نصف می‌کند.

اگر F وسط AC و E وسط BS باشد باقراردادن $|EF|=x$ خواهیم داشت،

$$Q=S_{ASB}=\frac{۱}{۲}|SB|\cdot|AE|=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+\frac{۳}{۲}}$$

$$۲Q=S_{ACB}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\sqrt{x^۲+\frac{۱}{۴}}$$

از آنجا معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{۶}}{۲}\sqrt{x^۲+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{x^۲+\frac{۳}{۲}}$$

در نتیجه
$$x=\frac{۳}{۲}$$

با درنظر گرفتن مثلث متساوی‌الساقین BFS که در آن

$$|BS|=۱ \quad : \quad |BF|=|FS|$$

و $|FE|=\frac{۳}{۲}$ به‌عنوان ارتفاع و M محل برخورد ارتفاعات آن خواهیم داشت:

$$|BM|=|SM|=\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$$

۱۱۵- چون یالهای جانبی هرم چهاربر، با یکدیگر برابرند، رأس آن درنقطهٔ O تصویر خواهد شد که مرکز مستطیل ABCD است. ازطرف دیگر، از تساوی یالهای هرم سه‌بر معلوم می‌شود که تمام رئوس قاعدهٔ آن برروی دایره‌ای به‌مرکز O قرار دارند. دایره‌ای که رئوس قاعدهٔ هرم سه‌بر روی آن واقع شده است اضلاع مستطیل ABCD را درنقاطی که درشکل (۲۰,a) مشخص‌شده قطع می‌کند. ازاینکه وجوه جانبی هرم سه‌بر، مثلث‌های متساوی‌الساقین معادل هستند، معلوم می‌شود که زوایای رأس این مثلث‌ها یا برابرند ویا مجموعشان ۱۸۰° است. بنابراین قاعد، یك مثلث متساوی‌الساقین می‌شود. (ثابت کنید نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.) علاوه براین، دوتا از رأسهای این مثلث نمی‌توانند روی اضلاع کوچکتر مستطیل ABCD قرار داشته باشند. اگر قاعده را بامثلث LNS نشان دهیم، درآن صورت،

$$|SL|=|LN| \quad , \quad \widehat{SLN}=۹۰^\circ$$

وازآنجا نتیجه می‌شود که ABCD مربع است. اما اگرچنین شود که‌مثلث LNR قاعده بشود، درآن صورت ازشرط $\alpha<۶۰^\circ$ معلوم می‌گردد که

$$|BN|>|NR|$$

بنابراین اضلاع RL و LN برابر خواهند شد، اگر، K و L بر وسط AB منطبق بشوند. با استدلال مشابه، به‌امکانات دیگری دست می‌یابیم:
رئوس قاعدهٔ هرم سه‌بر، در نقاط R و N و P قرار بگیرند و P وسط CD بشود.
حالت اول را درنظر بگیرید (شکل ۲۰,b).

اگر
$$|LO|=|ON|=|OR|=r$$
آنگاه

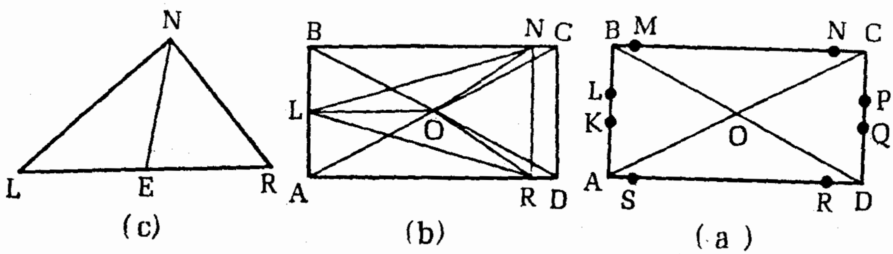
$$|NR|=|CD|=۲r\,tg\frac{\alpha}{۲}$$

اما چون

$$\widehat{LEN}+\widehat{NER}=۱۸۰^\circ$$

از مثلث‌های LNE و NER مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ LNR به‌دست می‌آید (شکل ۲۰,c). بنابراین،

$$|LN|=\sqrt{۴|LE|^۲-|NR|^۲}=\sqrt{۴h^۲+۴r^۲-۴r^۲tg^۲\frac{\alpha}{۲}}$$



شکل ۲۰

ازطرف دیگر،

$$|LN|^۲=\left(r+r\sqrt{۱-tg^۲\frac{\alpha}{۲}}\right)^۲+r^۲tg^۲\frac{\alpha}{۲}$$

به‌این‌ترتیب،

$$r^۲=\frac{۲h^۲}{۲tg^۲\frac{\alpha}{۲}+\sqrt{۱-tg^۲\frac{\alpha}{۲}}-۱}$$

با درنظرگرفتن مثلث NRP به‌طریق مشابه، خواهیم داشت:

$$r^۲<۰$$

جواب :

$$\frac{۸h^۳tg\frac{\alpha}{۲}}{۳\left(۲tg^۲\frac{\alpha}{۲}+\sqrt{۱-tg^۲\frac{\alpha}{۲}}-۱\right)}$$

۱۱۶- یال SA را ازطرف S امتداد دهید ودرامتدادآن نقطهٔ $A_۱$ را طوری اختیارکنید که $|SA_۱|=|SA|$. در $SA_۱BC$ فرجه‌های‌نظیر یالهای $SA_۱$ و SC برابر می‌شوند، و چون

$$|A_۱B|=|CB|=b \qquad و \qquad |SA_۱|=|SC|$$

مثلث $ABA_۱$ قائم‌الزاویه خواهد بود واضلاع آن a و b می‌شود. درنتیجه وتر آن برابراست با:

$$|AA_۱|=۲|AS|=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

جواب:

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲}$$

۱۱۷- چهاروجهی به‌یال ۲a را درنظر بگیرید. سطح جانبی کره‌ای‌که برهمهٔ یالهای آن مماس باشد، با سطح جانبی چهاروجهی، به‌چهارقطعه، وچهارمثلث منحنی‌الخط که هریك ازآنها قابل انطباق برمثلث مطلوب مسئله هستند تجزیه می‌شود.

شعاع‌کره برابراست با $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ وارتفاع هرقطعه برابرمی‌شود با،

$$a\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)$$

درنتیجه، مساحت مثلث منحنی‌الخط مطلوب برابراست با،

$$\frac{۱}{۴}\left[۴\pi a^۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲-۴\times ۲\pi a^۲\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi a^۲}{۶}(۲\sqrt{۳}-۳)$$

۱۱۸- مکعبی به‌یال $\sqrt{۲}$ را درنظر بگیرید. کره‌ای‌که مرکز آن، مرکزمکعب بوده و بر یالهای‌آن مماس باشد، شعاعی برابر با ۲ خواهد داشت. سطح جانبی کره، بوسیله سطح مکعب به‌شش قطعهٔ‌کروی وهشت مثلث منحنی‌الخط برابر باکوچکترین مثلث مطلوب مسئله تجزیه می‌شود.

جواب: $\pi(۳\sqrt{۲}-۴)$ و $\pi(۹\sqrt{۲}-۴)$

۱۱۹- $\text{Arc}\cos\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۱۲۰- مقطعی ازمحورمخروط بگذرانید. ذوزنقهٔ ABCD حاصل را درنظربگیریدکه در آن A و B نقاط تماس سطح جانبی یك‌کره و C وD نقاط تماس کره دیگراست. به‌آسانی ثابت می‌شودکه اگر F نقاط برخوردکره‌ها باشد، آنگاه F مرکز دایره محاط در ABCD است.

در مسائل بعدی، وقتی مسائل به‌تعیین حجم اجسام حادث از دوران قطعه‌ها مربوط می‌شود، از فرمولهایی‌که درمسئلهٔ ۱۸ بدست‌آمده است. استفاده‌کنید.

۱۲۱- $\frac{۱}{۳}SR$

۱۲۲- ازفرمول لایب نیزاستفاده‌کنید (مسئلهٔ ۱۵۳ (۱) را نگاه‌کنید.)

$$۳|MG|^۲=MA|^۲+|MB|^۲+|MB|^۲-\frac{۱}{۳}$$

$$(|AB|^۲+|BC|^۲+|CA|^۲)$$

که درآن G مرکز ثقل مثلث ABC می‌باشد.

اکنون اگر ABC مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض باشد و $A_۱B_۱C_۱$ مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض، و G مرکز ثقل مشترك آنها، درآن‌صورت داریم،

$$|A_۱A|^۲+|A_۱B|^۲+|A_۱C|^۲|=۳|A_۱G|^۲+\frac{۴}{۳}b^۲=a^۲+\frac{۴}{۳}b^۲$$

با نوشتن تساوی‌های نظیر، برای B_1 و C_1 وجمع آنهـا، مجموع مربعات مطلوب برابرمی‌شود با،

$$۳a^۲+۴b^۲$$

۱۲۳- ضلع قاعدهٔ هرم را a درنظرمی‌گیریم وطول یال جانبی آنرا b. از EF صفحه‌ای به‌موازات ASC بگذرانید ونقاط برخورد آنرا با BC و SB، K و N بنامید. چون E وسط سهم وجه SCB است، پس داریم،

$$|AF|=|CK|=\frac{a}{۴}$$

$$|SN|=\frac{b}{۴} \quad و \quad |KE|=۲|EN|$$

از L خط راستی به‌موازات AS رسم کنید ومحل برخوردآنرا با SC، P بنامید. داریم،

$$|SP|=\frac{۱}{۱۰}b$$

مثلث‌های LPC و FNK متشابه‌اند. اضلاع متناظر آنهـا موازی وعلاوه بـراین، LM و FE نیز موازی‌اند. یعنی،

$$|PM|/|MC|=|NE|/|EK|=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه

$$|SM|=\frac{۴}{۱۰}b$$

از آنجا

$$|LF|^۲=\frac{۱۹}{۴۰۰}a^۲ \quad , \quad |ME|^۲=|ME|^۲=\frac{۱۵}{۴۰۰}a^۲+\frac{۱}{۱۰۰}b^۲$$

ازشرط $|LF|=|ME|$ نتیجه می‌شود، $a=b$.

FNK مثلث متساوی‌الاضلاع است وطول ضلع آن برابراست با $\frac{۳}{۴}a$.

$$|FE|^۲=\frac{۷}{۱۶}a^۲=۷$$

در نتیجه، $a=b=۴$

جواب: $\frac{۱۶}{۳}\sqrt{۲}$

۱۲۴- ثابت کنید صفحه‌ای که سطح جانبی استوانه را قطع می‌کند، حجم و محور آنرا به‌یك نسبت قطع می‌کند.

جواب: $\frac{\pi a^{۳}}{۲۴}$

۱۲۵- هروجه منشور، یك متوازی‌الاضلاع می‌باشد. اگر نقطهٔ برخورد این وجه‌وکرهٔ محاطی را به‌همهٔ رئوس این متوازی‌الاضلاع وصل کنیم، درآن‌صورت این وجه، به‌چهار مثلث تجزیه خواهد شد. مجموع مساحتهای دوتا از آنها که مجاور به‌اضلاع قاعده هستند، برابر بامجموع مساحتهای دوتای دیگراست. مقدار مساحتهای مثلثهای نوع اول، برای همهٔ وجوه جانبی برابر ۲S می‌شود. بنابراین مساحت جانبی برابر ۴S وسطح کل منشور برابر ۶S خواهدبود.

۱۲۶- اگر کره‌های α و β متقاطع باشند، در آن صورت مساحت سطح آن قسمت از کرهٔ β که درداخل کرهٔ α محصور شده، برابر با یك‌چهارم تمام مساحت سطح کرهٔ α می‌شود. (این قسمت یك قطعهٔ کروی است به ارتفاع $\frac{r^{۲}}{۲R}$ که در آن r شعاع کرهٔ α ، R شعاع کرهٔ β می‌باشد. درنتیجه مساحت سطح آن $۲\pi R\times\frac{r^{۲}}{۲R}=\pi r^{۲}$ می‌شود). از اینجا کره α، کرهٔ β را درخود شامل می‌شود و نسبت شعاعها برابر $\sqrt{۵}$ است.

۱۲۷- درحل این مسئله، عوامل زیررا درنظر بگیرید:

(۱) مرکز کرهٔ محاط در داخل مخروط، بر روی سطح کرهٔ دوم قرار می‌گیرد. (قضیه نظیر آنرا درهندسهٔ مسطحه ملاحظه کنید).

(۲) ازاینکه مرکز کره محاطی، برروی سطح کرهٔ دوم قراردارد، معلوم می‌شودکه مساحت سطح جانبی کرهٔ محاطی، برابر با ۴Q و شعاع آن برابر است با

$$\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

(۳) حجم مخروط ناقص، که در آن کره محاط شده نیز برحسب مساحت کل مخروط

ناقص وشعاع کره بیان می‌شود. یعنی $V=\frac{۱}{۳}S\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

۱۲۸- ثابت کنید اگر R و r شعاعهای دوایر قاعده‌های مخروط ناقصی باشند، آنگاه شعاع کره محاط درآن، برابر است با $\sqrt{Rr}$.

جواب: $\frac{S}{۲}$

۱۲۹- هرمقطعی، با شرط مسئله، یك مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌کندکه ساقهای جانبی آن، برابر با مولد مخروط است. بنابراین، بیشترین مساحت، ازآن مقطعی خواهد بودکه، بیشترین مقدار سینوس زاویه رأس را داشته باشد. اگر زاویه رأس مقطع محوری مخروط حاده باشد، درآن صورت مقطع محوری بیشترین مساحت را دارا خواهد بود. و اگر این زاویه منفرجه باشد، درآن صورت بیشترین مساحت ازآن مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود:

جواب: $\frac{۵\pi}{۶}$

۱۳۰- SO ارتفاع مخروط را رسم کنید، تا سه هرم بوجود بیاید: SBCO ، SABO ، SCAO. درهریك از این هرم‌ها، فرجه‌های نظیر یالهای جانبی SA و SB ، SB و SC ، SC و SA، باهم برابرند. این فرجه‌ها را با x و y و z نشان دهید. دستگاه زیرحاصل می‌شود،

$$\begin{cases} x+y=\beta \\ y+z=\gamma \\ z+x=\alpha \end{cases}$$

ازآنجا $z=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{۲}$ و زاویه مطلوب برابر است با، $\frac{\pi-\alpha+\beta-\gamma}{۲}$

۱۳۱- وتر BC، موازی با هرصفحه‌ای است که از اوساط وترهای AB و AC بگذرد. بنابراین وتر BC، موازی باصفحه‌ای خواهد بودکه ازمرکز کره واوساط کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ می‌گذرد. از آنجا معلوم می‌شودکه دایره عظیمه‌ای که از B و C می‌گذرد، با دایره عظیمه‌ای که از اوساط کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ می‌گذرد، در دو نقطه K و $K_۱$ طوری همدیگر را قطع می‌کنندکه قطر $KK_۱$ با وتر BC موازی

می‌شود.

جواب: $\frac{\pi R}{۲} \pm \frac{l}{۲}$

۱۳۲- به‌آسانی دیده می‌شود که مقطع جسم مفروض با صفحه‌ای عمود بر محور دوران، یك تاج دایره بوجود می‌آورد که، مساحت آن مستقل ازفاصله بین محور دوران و صفحه مثلث است.

جواب: $\frac{\pi a^۳ \sqrt{۳}}{۲۴}$

۱۳۳- اگر شکل مسطحه مفروض معرف یك چند ضلعی محدب باشد، درآن صورت جسم مورد نظر، ازیك منشور بـه حجم $۲dS$. نیمه استوانه‌هایی بـه‌حجم کل $\pi Pd^۲$ و مجموعه‌ای از قطاعهای کروی کـه حجم آنها جمعاً بـا حجم کره‌ای به‌حجم $\frac{۴}{۳}\pi d^۳$ برابراست، تشکیل خواهد شد. بنابراین دراین‌حالت، حجم برابراست با

$$۲dS + \pi Pd^۲ + \frac{۴}{۳}\pi d^۳$$

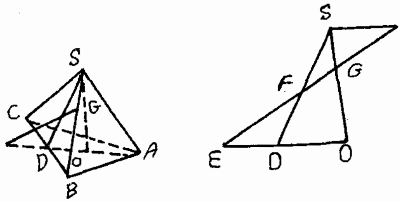
واضح است که این فرمول، درمورد هرشکل دلخواه محدب دیگرهم صادق است.

۱۳۴- O را مرکـز کـره، CD را قطر آن، M را وسط BC بگیریـد وثـابت‌کنید، $|AB|=|AC|$. دراینجا کافیست ثابت‌کنید که AM بر BC عمود است. بنابه فرض، SA بر OS عمود است و علاوه برآن، SM بر OS عمود است (مثلث‌های CSD و CSB و BCD قائم‌الزاویه هستند و O و M به‌ترتیب وسط CD و CB هستند.) درنتیجه AMS بـر OS عمود می‌شود و AM بـر OS عمود خواهد بود. اما AM بر CD عمود است، درنتیجه AM برصفحه BCD عمود می‌شود. به‌این ترتیب AM بر BC عمود خواهد بود.

جواب: $\frac{Ra^۳\sqrt{۴b^۲-a^۲}}{۶(۴R^۲+a^۲)}$

۱۳۵- درشکل (۲۱,a)، SABC هـرم مفروض و SO ارتفاع آن و G رأس‌کنج سه وجهی‌است. ازفرض‌مسئله نتیجه می‌شود که G برروی SO قراردارد. علاوه براین صفحه قاعده ABC، وجوه‌کنج سه وجهی را درمثلث متساوی‌الاضلاعی‌قطع می‌کند که اضلاع آن موازی با اضلاع مثلث ABC است و از رئوس آن می‌گذرد. در

نتیجه، اگر یکی از یـالهای کنج سه وجهی، صفحـه ABC را در نقطه E و وجـه CSB را در F قطع کند، در آن صورت F بر روی سهم SD از وجه CSB قرار می‌گیرد و $|ED|=|DA|$. بـه‌فرض $|SF|=|FD|$. از S خط راستی بـه موازات EO رسم کنید ومحل برخورد آنرا با EF، نقطه K بنامید.(شکل ۲۱,b) داریم،



$$|SK|=|ED|$$

و بنا بر این،

$$\frac{|SG|}{|CO|}=\frac{|SK|}{|EO|}=\frac{|ED|}{|EO|}=\frac{۳}{۴}$$

به‌این ترتیب حجم هرم GABC ، $\frac{۴}{۷}$ حجم‌هرم SABC می‌شود.ازطرف‌دیگر، کنج سه وجهی ساخته شده، آن بخش ازهرم راکه بالای GABC قرار دارد، به دوقسمت مساوی تقسیم می‌کند.

جواب: نسبت حجم آن قسمت‌ازهرم که درخارج کنج سه وجهی قراردارد، به‌حجم آن قسمت که درداخل واقع شده برابر است با ۳:۱۱

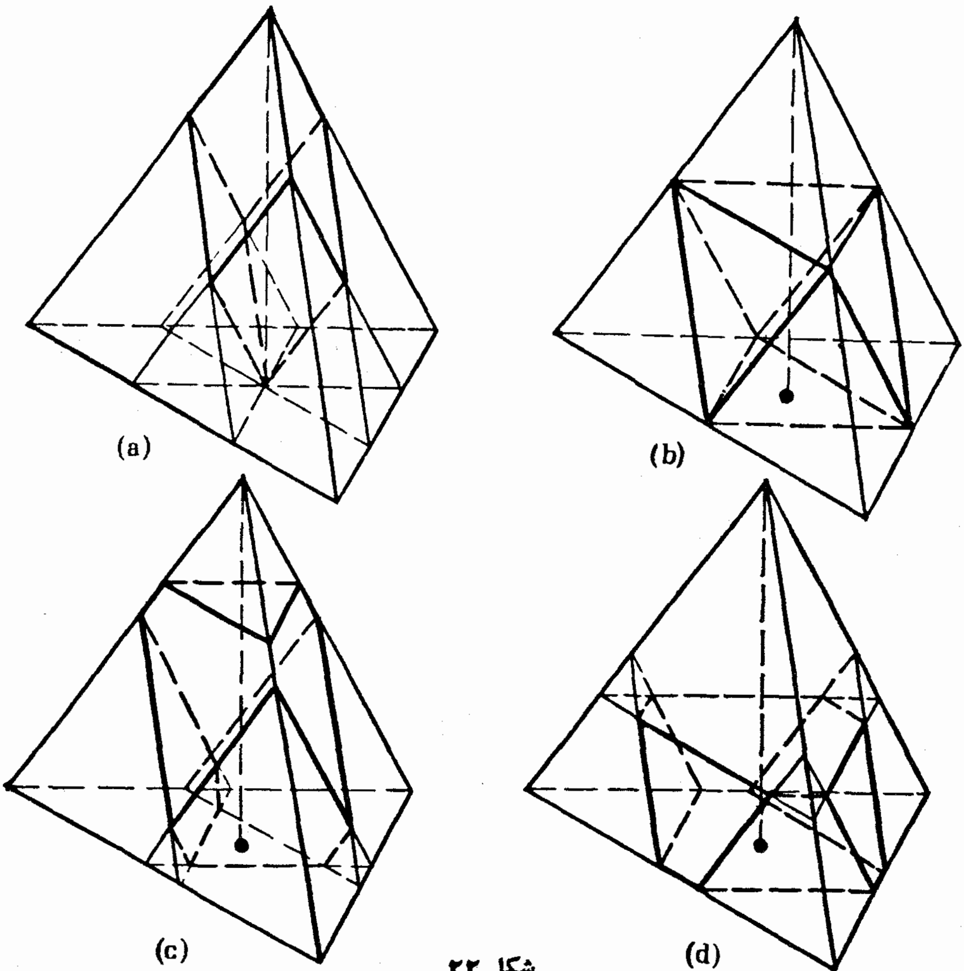
-۱۳۶ $\frac{V}{۶}$

-۱۳۷ شکل ۲۲,a تا ۲۲,d ،قسمت مشترك این دوهرم را درتمام چهارحالت نشان‌می‌دهد. (۱). قسمت مشترك يك‌متوازی‌السطوح تشکیل می‌دهد. (شکل ۲۲,a). برای‌تعیین حجم آن لازم است از حجم هرم اصلی، حجم سه هرم متشابه را با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$ کم کنیم وحجم‌های سه هرم متشابه با هرم اصلی را با نسبت $\frac{۱}{۳}$ به‌آن اضافه‌کنیم. به‌این ترتیب حجم برابرمی‌شود با،

$$V\left[۱-۳\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}+۳\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳}\right]=\frac{۲}{۹}V$$

(۲). قسمت مشترك هشت وجهی است. (شکل ۲۲,b) حجم آن برابراست با:

$$V\left[۱-۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\right]=\frac{V}{۲}$$



شکل ۲۲

(۳). قسمت مشترك درشکل ۲۲,c نشان داده شده است. برای تعیین حجم آن، لازم است ازحجم هرم اصلی، حجم هرم متشابه‌آنرا بانسبت $\frac{۱}{۳}$ کم کنیم (درشکل این هرم دررأس قراردارد.) سپس حجم سه هرم بازهم متشابه با هرم اصلی را با نسبت $\frac{۵}{۹}$ از آن کم کنیم وحجم سه‌هرم با نسبت تشابه $\frac{۱}{۹}$ را به‌آن اضافه کنیم. به این ترتیب حجم قسمت مشترك برابرمی‌شود با،

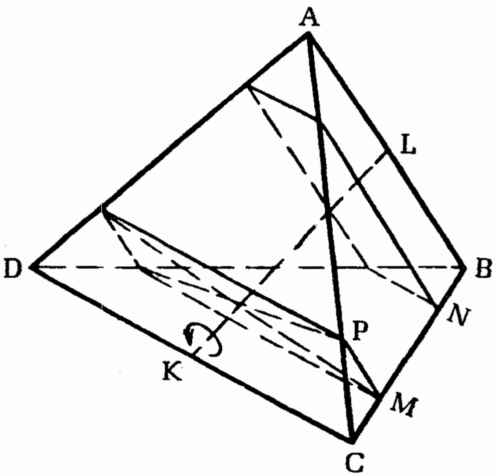
$$V\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\left(\frac{5}{9}\right)^3+3\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]=\frac{110}{243}V$$

(۴). قسمت مشترك درشکل ۲۲,d نشان داده شده است. حجم آن برابر است با،

$$V\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^3-3\left(\frac{7}{15}\right)^3+3\left(\frac{1}{15}\right)^3\right]=\frac{12}{25}V$$

۱۳۸- طول یال چهاروجهی ABCD را با a نشان دهید و L و K را هم اوساط یالهای CD و AB بنامید. (شکل ۲۳) روی یال CB نقطه‌ای مانند M را اختیار واز این نقطه مقطعی عمود بر KL رسم کنید. با قراردادن $|CM|=x$ مقدار x را طوری تعیین کنید که درمستطیل حاصل درمقطع، زاویه بین اقطار برابر α گردد. چون اضلاع مستطیل حاصل x و $a-x$ است مقدار x را می‌توان ازمعادله زیر بدست آورد.

$$\frac{x}{a-x}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\quad,\quad x=\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$



شکل ۲۳

اگر روی یال BC نقطه دیگری مانند N را طوری اختیار کنیم که $|BN|=|CM|=x$، وازاین نقطه مقطعی عمود بر KL رسم کنیم، دراین‌صورت مستطیل دیگری‌خواهیم داشت‌که زاویه بین اقطارآن α خواهد بود. ازآنجا معلوم می‌شود که دردورانی‌که حول KL به‌اندازه زاویه α ودرخلاف چرخش عقربه‌های

ساعت انجام می‌گیرد، صفحه BCD از نقاط K و P و N می‌گذرد. بنابراین در این دوران صفحه BCD از چهاروجهی ABCD، هرم KPNC را جدا خواهد کرد که حجم آن برابر است با

$$\frac{|KC|}{|CD|}\cdot\frac{|CP|}{|CA|}\cdot\frac{|CN|}{|CB|}V_{ABCD}=\frac{x(a-x)V}{۲a^۲}=\frac{tg\frac{\alpha}{۲}}{۲(۱+tg\frac{\alpha}{۲})^۲}V$$

عین همان استدلال برای تك تك وجوه چهاروجهی، بـه‌کاربرده می‌شود. درنتیجه حجم مشترك برابر است با،

$$\frac{۱+tg^۲\frac{\alpha}{۲}}{(۱+tg\frac{\alpha}{۲})^۲}V$$

۱۳۹- فرض‌کنیم $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ مکعبی باشدکه حول $AC_۱$ به‌اندازه α دوران می‌کند. (شکل۲۴) روی یالهای $A B_۱$ و $A_۱D_۱$ نقاط K و L را طوری‌اختیار کنیدکـه $|A_۱K|=|A_۱L|=x$. از K و L برقطر $AC_۱$ عمودکنید. چـون مکعب نسبت به‌صفحه $ACC_۱A_۱$ تقارن دارد. این عمودهـا ازیك نقطه مانند M واقع برروی $AC_۱$ می‌گذرند. x را طوری انتخاب‌کنیدکه $\widehat{KML}=\alpha$.آنگاه، با دوران مکعب، حول $AC_۱$ بـه‌اندازه α، ودرخلاف جهت چرخش عقربه‌هـای ساعت (وقتی امتداد از A به $C_۱$ درنظرگرفته شود) نقطه K به‌نقطه L میل‌خواهد کرد. روی‌یالهای $B_۱A_۱$ و $B_۱B$ نقاط P و Q را بفاصله‌مساوی x از رأس $B_۱$، اختیارکنید. پس از همان دوران، نقطه Q بر نقطه P میل می‌کند. درنتیجه پس از دوران، وجه $ABB_۱A_۱$ ازنقاط A و L و P خواهدگذشت ومکعب را درهرم $AA_۱PL$ به‌حجم برابر با $\frac{۱}{۶}ax(a-x)$ قطع خواهدکـرد. این استدلال در موردتمام وجوه صدق‌می‌کند. بنابراین‌حجم‌مشترك برابراست‌با $a^۳-ax(a-x)$

اکنون باید مقدار x را ازشرط $\widehat{KML}=\alpha$ پیدا کنیم. برای این منظور، نقطـه M را به R، وسط پاره خط LK وصل می‌کنیم. داریم،

$$|MR|=x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cot g\frac{\alpha}{۲}$$

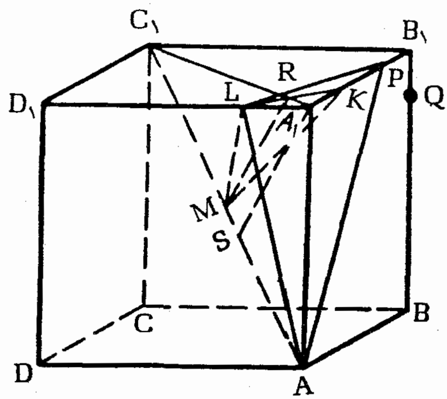
$$|C_۱R| = a\sqrt{۲} - x\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از تشابه مثلث‌های $C_۱RM$ و $C_۱A_۱A$ مقدار x پیدا می‌شود،

$$x = \frac{۲a}{۱ + \sqrt{۳}\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{۲}}$$

به‌این ترتیب حجم قسمت مشترك برابرمی‌شود با،

$$\frac{۳a^۲(۱ + \mathrm{cotg}^۲\frac{\alpha}{۲})}{(۱\sqrt{۳}\ \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{۲})^۲}$$



شکل ۲۴

۱۴۰- اگر A یك نقطه برروی شعاع، و B نقطه برخورد شعاع باآینه باشد، K و L را تصاویر A برروی‌آینه وآینه دوران یافته و $A_۱$ و $A_۲$ را بـه ترتیب قرینه A نسبت به‌این‌آینه‌هـا درنظر بگیرید. زاویـه مورد نظر برابر است با $\widehat{A_۱BA_۲}$. اگر $|AB| = a$، آنگاه،

$$|A_۱B| = |A_۲B| = a$$

$$|AK| = a\sin\alpha$$

چون $\widehat{KAL} = \beta$، خواهیم داشت:

$$|KL| = a \sin\alpha \sin\beta$$

به‌این ترتیب اگر φ زاویه مطلوب باشد آنگاه، $\sin\frac{\varphi}{۲} = \sin\alpha \sin\beta$.

جواب: $۲\mathrm{Arc}\sin(\sin\alpha\sin\beta)$

۱۴۱- مثلث ABC را ثابت نگهدارید سپس، مثلث ADC با اضلاع $|AC|$ و $|DC|$ و $\widehat{ADC}=\alpha$ را مورد شناسایی قرار دهید. درصفحه ADC دایره‌ای به‌مرکز C و شعاع $|AC|$ رسم‌کنید (شکل ۲۵,a) اگر $\alpha \geqslant ۶۰^\circ$، آنگـاه تنها یك مثلث بـا اضلاع و زوایای داده شده وجود خواهد داشت. (نقطه دوم، $A_۱$ چنان می‌شود که درطرف دیگرنقطه D قرارگیرد.) این مثلث، با مثلث ABC مساوی است. دراین حالت AC و BD متقابلا بریکدیگرعمود می‌شوند.

اگر $\alpha < ۶۰^\circ$، آنگاه امکان دیگری پدید می‌آید (شکل ۲۵,a. این مثلث $A_۱DC$ است.)

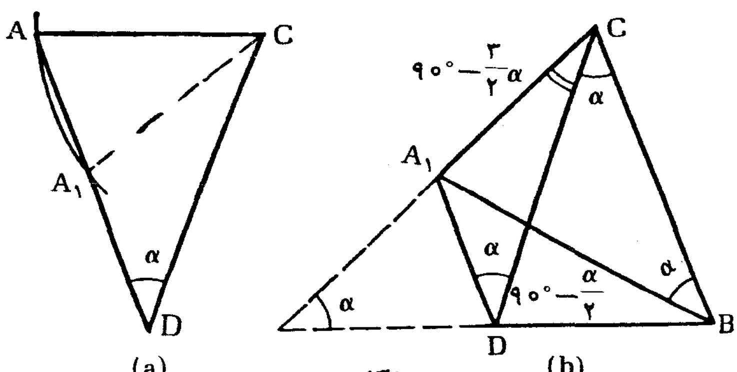
دراین‌مثلث $\widehat{CA_۱D} = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$ و $\widehat{A_۱CD} = ۹۰^\circ - \frac{۳\alpha}{۲}$. اما در این حالت

رأس C (شکل ۲۵,b) در زوایای $\widehat{BCA_۱} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$ و $\widehat{BCD} = \alpha$ و

$\widehat{A_۱CD} = ۹۰^\circ - \frac{۳\alpha}{۲}$ مشترك‌است. وچون $\alpha + (۹۰^\circ - \frac{۳\alpha}{۲}) = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$، نقاط $A_۱$، B

C و D دریك صفحه قرارمی‌گیرند و زاویه بین $A_۱C$ و BD برابر α می‌گردد.

جواب:
اگر $\alpha \geqslant ۶۰^\circ$، آنگاه زاویه بین AC و BD برابر است با ۹۰°.
اگر $\alpha < ۶۰^\circ$، آنگاه زاویه بین AC و BD برابراست‌با ۹۰°یا α.



شکل ۲۵

۱۴۲- فرض کنیم قاعده منشور n ضلعی $A_1A_2\dots A_n$ و مرکز دایره محیطی آن O باشد. اگر صفحه معینی یالهای منشور را در نقاط $B_1B_2\dots B_n$ قطع کند، و M در این صفحه طوری قرار داشته باشد که، MO برصفحه قاعده منشور عمود بشود، در آن صورت تساوی‌های زیر برقرار می‌شود،

$$\sum_{k=1}^{n} A_kB_k = n|MO| \qquad (1)$$

$$V = S\cdot|MO| \qquad (2)$$

که در آن V حجم آن قسمت ازمنشور است که، بین قاعده وصفحه‌ای که مرور داده شده محصور می‌باشد.

اثبات تساوی (۱) به ازای مقادیر زوج n ، بدیهی است. اگر n فرد باشد، مثلث $A_kA_{k+1}A_l$ را درنظر بگیرید که درآن A_l بیشترین فاصله را از A_k و A_{k+1} دارامی‌باشد. اگر C_k و C'_k به‌ترتیب اوساط A_kA_{k+1} و B_kB_{k+1} باشند، آنگاه،

$$\frac{|C_kO|}{|OA_l|} = \cos\frac{\pi}{n} = \lambda$$

اکنون به‌آسانی ثابت می‌شود که

$$|MO| = \frac{|C_kC'_k| + |A_lB_l|\lambda}{1+\lambda} = \frac{\frac{1}{2}(|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}|) + |A_lB_l|\lambda}{1+\lambda}$$

با جمع کردن این تساوی‌ها به‌ازای تمام مقادیر Kها (به‌ازای $K=n$ وبه‌جای $n+1$، ۱، اختیار کنید)
حکم (۱) نتیجه می‌شود.

برای اثبات تساوی (۲) چند وجهی $A_kA_{k+1}OB_kB_{k+1}M$ را درنظر بگیرید. اگر V_k حجم این چند وجهی باشد، آنگاه بااستفاده ازفرمول سیمسون خواهیم داشت، (مسئله ۱۵ را نگاه کنید)

$$V_k = \frac{b_n}{6}\Bigg(\frac{|A_kB_k| + A_{k+1}B_{k+1}|}{2}a_n + 4\frac{|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}| + 2|MO|}{2}\cdot\frac{a_n}{2}\Bigg)$$

$$= a_nb_n(|A_kB_k| + |A_{k+1}B_{k+1}| + |MO|) =$$

$$=\frac{S}{۳n}(|A_kB_k|+|A_{k+۱}B_{k+۱}|+|MO|)$$

که در آن a_n و b_n ضلع وسهم چند وجهی $A_۱A_۲...A_n$ می‌باشند.
ازجمع کردن این تساوی‌ها به‌ازای‌همه مقادیر Kها وبا توجه به (۱)، تساوی(۲) را نتیجه می‌گیریم. اکنون به‌آسانی‌می‌توان جواب‌مسئله را به‌دست‌آوردکه برابر است با، $\frac{nV}{S}$.

۱۴۲- پنج ضلعی ABCDE را ، تصویر پنج ضلعی منتظـم درنظر می‌گیریم کـه درآن، $|AB|=۱$ ، $|BC|=۲$ ، $|CD|=a$ ، . ABCD ذوزنقه‌ای است‌که درآن $\frac{|AD|}{|BC|}=\lambda=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و F ، محل برخورد اقطارآن می‌باشد. AFDE هم متوازی‌الاضلاع می‌شود. CK را بموازات AB رسم‌می‌کنیم(شکل ۲۶) درمثلث CKD داریم،

$$|CK|=۱ \quad ، \quad |KD|=۲(\lambda-۱) \quad ، \quad |CD|=a$$

$\widehat{CDK}=a$.

اگر $\widehat{CDK}=\varphi$ ، قضیه‌کوسینوسها را درمثلث‌های CKD و ACD می‌نویسیم:

$$۱=a^۲+۴(\lambda-۱)^۲-۴(\lambda-۱)a\cos\varphi$$
$$|AC|^۲=a^۲+۴\lambda^۲-۴a\lambda\cos\varphi$$

ازاین دورابطه نتیجه می‌شود،

$$|AC|=\sqrt{\frac{۴\lambda^۲-۳\lambda-a^۲}{\lambda-۱}}$$

$$|ED|=|AF|=\frac{\lambda}{\lambda+۱}\sqrt{\frac{۴\lambda^۲-۳\lambda-a^۲}{\lambda-۱}}$$

به‌طریق مشابه داریم،

$$|AE|=|FD|=\frac{\lambda}{\lambda+۱}\sqrt{\frac{a^۲\lambda-۱+۴\lambda^۲-۴\lambda}{\lambda-۱}}$$

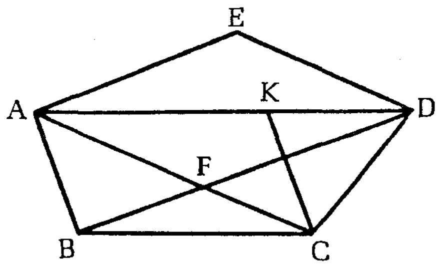
جواب دوضلع دیگر برابر است با،

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{14+10\sqrt{5}-2(\sqrt{5}+1)a^2}$$

و

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{a^2(6+2\sqrt{5})+6(\sqrt{5}+1)}$$

مسئله به‌ازای $\sqrt{5}-2<a<\sqrt{5}$ یك جواب دارد.



شکل ۲۶

۱۴۴- اگر طول یال مکعب a، $|NC_1|=x$ ، داریم،

$$|LM|=\frac{a}{2} \quad ، \quad |NK|=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$|LN|^2=|LB_1|^2+|B_1N|^2=\frac{a^2}{4}+(a-x)^2=\frac{5}{4}a^2-2ax+x^2$$

$$|LK|^2=|LB_1|^2+|B_1K|^2=|LB_1|^2+|B_1N|^2+|NK|^2+$$
$$2|B_1N|\cdot|NK|\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{a^2}{4}+(a-x)^2+\frac{x^2}{2}+(a-x)x=\frac{5}{4}a^2-ax+\frac{x^2}{2}$$

$$|MN|^2=|MB_1|^2+|B_1N|^2=\frac{3a^2}{2}-2ax+x^2$$

$$|MK|^2=|MB|^2+|BK|^2-|MB|\cdot|BK|=\frac{3a^2}{2}-\frac{3}{2}ax+\frac{x^2}{2}$$

اگر $\widehat{LMK}=\widehat{MKN}=\varphi$ ، با استفاده از قضیه کوسینوسها درمثلث‌های LMK

و MKN خواهیم داشت،

$$|LK|^۲=|LM|^۲+|MK|^۲-۲|LM|\cdot|MK|\cos\varphi$$

$$|MN|^۲=|MK|^۲+|KN|^۲-۲|MK|\cdot|KN|\cos\varphi$$

با حذف $\cos\varphi$ بین این تساوی‌ها نتیجه می‌شود،

$$|LK|^۲\cdot|KN|-|MN|^۲\cdot|LM|=(|LM|-|KN|)(|LM|\cdot|KN|-|MK|^۲)$$

با قراردادن مقادیر این پاره خط درفرمولهای حاصل، خواهیم داشت

$$\left(\frac{۵a^۲}{۴}-ax+\frac{x^۲}{۲}\right)\frac{x}{\sqrt{۲}}-\left(\frac{۳a^۲}{۲}-۲ax+x^۲\right)\frac{a}{۲}=$$

$$=\left(\frac{a}{۲}-\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{ax}{۲\sqrt{۲}}-\frac{۳a^۲}{۲}+\frac{۳ax}{۲}-\frac{x^۲}{۲}\right)$$

از این معادله نتیجه می‌شود $x=(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

جواب: $\frac{|B_۱N|}{|NC_۱|}=\sqrt{۲}+۱$

۱۴۵- دوحالت اتفاق می‌افتد:

(۱). مرکزکره محیطی، برمرکز قاعده منطبق است.

(۲). مرکزکره محیطی، برنقطه‌ای واقع برروی سطح کره محاطی و قطراً قرینه نسبت به‌مرکز قاعده قراردارد.

درحالت دوم شعاعهای کره‌های محاطی ومحیطی را به‌ترتیب R و r بنامید. ارتفاع هرم پیدا می‌شودکه برابراست با $R+۲r$ وطول ضلع قاعده هم برابرمی‌شود با $\sqrt{R^۲-۴r^۲}$. مقطعی‌که ازارتفاع ووسط ضلع قاعده می‌گذرد، یك مثلث‌متساوی‌الساقین به‌ارتفاع $R+۲r$ وقاعده $\sqrt{۳(R^۲-۴r^۲)}$ ودایره محاطی به‌شعاع r خواهدبود. بااستفاده ازاین‌موضوع، می‌توان رابطه $۳R^۲-۶Rr-۴r^۲=۰$ را برحسب R و r نوشت.

جواب: $\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۳}$ (در هردوحالت.)

۱۴۶- دوحالت اتفاق می‌افتد:

(۱). مرکز کره محیطی، برمرکز قاعده منطبق است.

(۲). مرکز کره محیطی، برروی سطح کره محاطی‌قرار دارد که‌قطراً نسبت به‌مرکز قاعده قرینه است.

درحالت اول زاویه رأس برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

حالت دوم را مورد بررسی قرار دهید. ضلع قاعده، یال جانبی وسهم وجه جانبی را به‌ترتیب a و b و l بنامید. پس،

$$b^۲=l^۲+\frac{a^۲}{۴} \qquad (۱)$$

r شعاع کره محاطی، برابر با شعاع دایره محاط درمثلث متساوی‌الساقین به‌قاعده a، وساق l می‌شود:

$$r=\frac{a\sqrt{۲l-a}}{۲\sqrt{۲l+a}} \qquad (۲)$$

R شعاع کره محیطی هم، برابر شعاع دایره محیطی مثلث متساوی‌الساقین به‌قاعده $a\sqrt{۲}$، وساق b می‌شود.

$$R=\frac{b^۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲b^۲-a^۲}} \qquad (۳)$$

دراینجا، مرکز دایره باید درداخل مثلث باشد، یعنی $b>a$. چون فاصله ازمرکز دایره کره تا قاعده برابر است با $۲r$، پس خواهیم داشت

$$R^۲-\frac{a^۲}{۲}=۴r^۲$$

با قراردادن مقادیر R و r درفرمول (۲) و(۳) وپس‌ازساده‌کردن خواهیم داشت،

$$\frac{(b^۲-a^۲)^۲}{۲(۲b^۲-a^۲)}=\frac{a^۲(۲l-a)}{۲l+a}$$

با نوشتن b برحسب a و l ازفرمول (۱) خواهیم داشت،

$$\left(l^۲-\frac{۳a^۲}{۴}\right)^۲=a^۲(۲l-a)^۲$$

بادرنظرگرفتن $b>a$ یا $l>a\frac{\sqrt{3}}{2}$ نتیجه می‌شود کــه a و l درتساوی زیرصدق می‌کنند،

$$l^{2}-\frac{3a^{2}}{4}=a(2l-a)$$

بنابراین $\frac{l}{a}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (برای ریشه دوم $\frac{l}{a}<\frac{\sqrt{3}}{2}$)

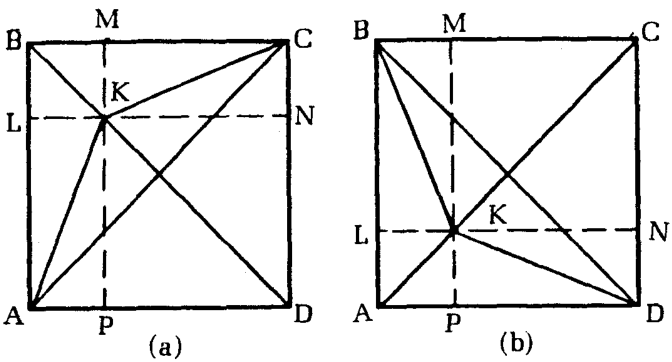
جواب: $\frac{\pi}{2}$ و یا $\frac{\pi}{6}$

۱۴۷- نقطه K را تصویر رأس S، برروی صفحه $ABCD$، ونقاط L، M، N و P را هم تصویر S بــه‌ترتیب برروی اضلاع AB، BC، CD و DA درنظر بگیرید. ازفرض مسئله معلوم می‌شود کــه مثلث‌های LSN و MSP دررأس S قائمه‌اند. درنتیجه

$$|LK|\cdot|KN|=|MK|\cdot|KP|=|KS|^{2}$$

وچون $|LK|+|KN|=|MK|+|KP|=a$

دوحالت اتفاق می‌افتد.



شکل ۲۷

یا

$$|LK|=|KM| \quad , \quad |KP|=|KN|$$

و یا

$$|LK|=|KP| \quad ، \quad |KM|=|KN|$$

یعنی نقطهٔ K یا روی قطر AC و یا BD قراردارد. هردوحالت را درنظر بگیرید.

۱. K برروی قطر BD قراردارد.(شکل ۲۷,a) تصویر هرم برروی صفحه‌شکل، ABCD خواهد بود. نقطهٔ S «بالای» K قراردارد. باقراردادن

$$|LK|=|KM|=x$$

خواهیم داشت،

$$|KS|=\sqrt{|LK|\cdot|KN|}=\sqrt{x(a-x)}$$

$$|SL|=\sqrt{|LK|^{۲}+|KS|^{۲}}=\sqrt{ax}$$

$$S_{ABS}=\frac{a\sqrt{ax}}{۲}$$

به‌طریق مشابه،

$$S_{ADS}=\frac{a\sqrt{a(a-x)}}{۲}$$

و بالاخره،

$$V_{ABDS}=\frac{۱}{۶}a^{۲}\sqrt{x(a-x)}$$

ازطرف دیگر با استفاده ازفرمول مسئلهٔ (۱۱) خواهیم داشت،

$$V_{ABDS}=\frac{۲}{۳}\,\frac{S_{ABS}\cdot S_{BDS}\sin\alpha}{|AK|}=\frac{a^{۳}\sqrt{x(a-x)}\sin\alpha}{۶\sqrt{(a-x)^{۲}+x^{۲}+x(a-x)}}$$

با مساوی قراردادن دوعبارت V_{ABDS}، داریم،

$$x^{۲}-ax+a^{۲}\cos^{۲}\alpha=۰$$

و یا

$$x(a-x)=a^{۲}\cos^{۲}\alpha$$

$$V_{ABCDS}=\frac{a^{۳}|\cos\alpha|}{۳}$$

اگر
$$|\cos\alpha|\leqslant\frac{۱}{۲}$$

مسئله یك جواب دارد. علاوه براین، فرجه نظیر یال AS حاده است، زیرا صفحهٔ ASM، بروجه ASD عمود است واین صفحه ازداخل فرجه بین صفحات ASB و ASD میگذرد. پس درحالت اول، اگر،

$$\frac{\pi}{۲}<\alpha\leqslant\frac{۲\pi}{۳}$$

مسئله یك جواب دارد.

۲. نقطهٔ K برروی قطر AC قرار دارد. (شکل ۲۷,b). با استدلال مشابه حالت اول، (مانند قبل $|LK|=x$ قراردهید). خواهیم داشت:

$$V_{ABDS}=\frac{a^۲\sqrt{x(a-x)}}{۶}=\frac{a^۳x\sin\alpha}{۶\sqrt{x(x+a)}}$$

ازآنجا بهآسانی نتیجه میشود

$$x=a|\cos\alpha|$$

$$V=\frac{a^۳\sqrt{|\cos\alpha|(۱-|\cos\alpha|)}}{۶}$$

مانند حالت اول،
$$\alpha>\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین جواب را پیدا میکنیم:

اگر $\frac{\pi}{۲}<\alpha\leqslant\frac{۲\pi}{۳}$ دوجواب،

$$V_۲=\frac{a^۳\sqrt{-\cos\alpha\,(۱+\cos\alpha)}}{۶}\quad,\quad V_۱=-\frac{a^۳\cos\alpha}{۶}$$

اگر $\alpha>\frac{۲\pi}{۳}$ ، آنگاه

$$V=\frac{a^۳\sqrt{-\cos\alpha\,(۱+\cos\alpha)}}{۶}$$

۱۴۸- ابتدا مسئلهٔ زیر را حل می‌کنیم:

درمثلث ABC نقاط L و K برروی AB و AC طوری قرار دارندکه

$$\frac{|AL|}{|BL|}=m \quad , \quad \frac{|AK|}{|KC|}=n$$

به‌چه نسبتی KL میانهٔ AM را تقسیم می‌کند؟

محل تقاطع KL و AM را با N، محل برخورد KL و BC را با Q و محل برخورد KL باخط موازی BC راکه از A رسم می‌شود، با P نشان دهید. اگر

$$|BC|=۲a \text{ ، } |QC|=b \text{ و } |AP|=c \text{ و } n>m$$

آنگاه ازتشابه مثلث‌های متناظر خواهیم داشت،

$$\frac{c}{b}=n \quad , \quad \frac{c}{b+۲a}=m$$

و ازآنجا

$$\frac{|AN|}{|NM|}=\frac{c}{b+a}=\frac{۲mn}{m+n}$$

m و n و p را نسبت‌هایی درنظرمی‌گیریم که یالهای AB و AC و AD به‌وسیله صفحه به‌آن نسبتها تقسیم شده‌اند.

برای تعیین‌آنها، دستگاه زیررا خواهیم داشت:

$$\frac{۲mn}{m+n}=۲ \quad ، \quad \frac{۲np}{n+p}=\frac{۱}{۲} \quad ، \quad \frac{۲pm}{p+m}=۴$$

ازآنجا،

$$m=-\frac{۴}{۵} \quad ، \quad n=\frac{۴}{۹} \quad ، \quad p=\frac{۴}{۷}$$

ازنامساوی $-۱<m<۰$ ، معلوم می‌شود نقطهٔ L برامتداد AB از طرف A قرار دارد، یعنی صفحهٔ مفروض یالهای AC و AD و BC و BD را قطع‌می‌کند.

بالاخره با تعیین نسبتی‌که یالهای BC و BD باآن تقسیم شده‌اند($\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۹}$) را

بدست خواهیم آورد). جواب مسئله پیدا می‌شود:

$$\frac{۷۱۲۳}{۱۶۹۰۱}$$

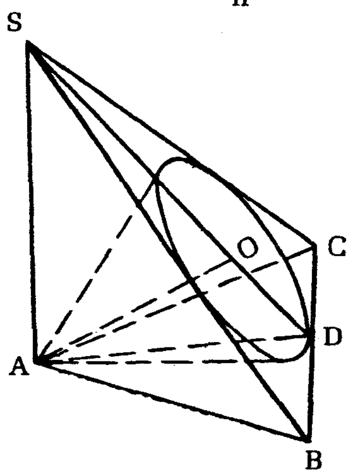
۱۴۹- هرم SABC را درنظر بگیرید که (شکل ۲۸) در آن،

$$|CA|=|AB| \text{ ، } \widehat{BAC}=\frac{2\pi}{n} \text{ و}$$

SA برصفحه ABC عموداست وعلاوه بر آن، تصویر رأس A برروی صفحهٔ SBC، نقطهٔ O مرکز دایره محاطی SBC می‌باشد. مخروطی را دراین هرم طوری محاط می‌کنیم که رأس آن بر A منطبق شود ودایره قاعدهٔ آن، دایرهٔ محاطی SBC گردد. واضح است که اگر n را طوری اختیارکنیم تا هرم‌هائی‌که قاعده‌هایشان درصفحهٔ ABC قراردارند، طوری‌قاعده‌هایشان برABC منطبق‌شوندکه تشکیل یك n ضلعی منتظم به‌مرکز A بدهند، درآن‌صورت مخروطهایی‌که دراین‌هرم‌ها محاط می‌شوند یك دستگاه ازمخروطهای مطلوب را به‌وجود خواهندآورد.

پس اگر D وسط BC و $|OD|=r$ ، $|AD|=l$ ، آنگاه

$$|BD|=l\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \quad , \quad |SD|=\frac{l^2}{r}$$



شکل ۲۸

$$\widehat{SBD}=2\widehat{OBD} \qquad \text{چون}$$

و

$$\operatorname{tg}\widehat{SBD}=\frac{|SD|}{|BD|}=\frac{l}{r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{OBD}=\frac{r}{l\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$$

می‌توان تساوی زیررا نوشت،

$$\frac{l}{r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}=\frac{۲\frac{r}{l\operatorname{ta}\frac{\pi}{n}}}{۱-\frac{r_۲}{l^۲\operatorname{tg}^۲\frac{\pi}{n}}}$$

وازآنجا،

$$\frac{r}{l}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{۱+۲\operatorname{tg}^۲\frac{\pi}{n}}}$$

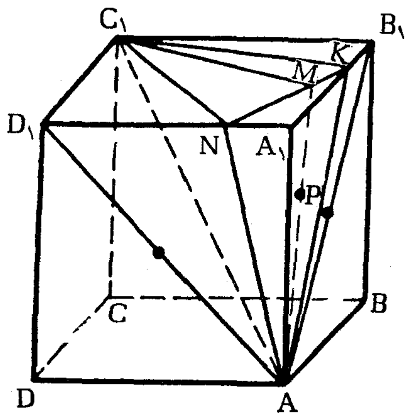
جواب:

$$۲\,\operatorname{Arc}\sin\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{۱+۲\operatorname{tg}^۲\frac{\pi}{n}}$$

۱۵۰- اگرصفحهٔ AKN درنقطهٔ P، بـرکره مماس وخط AP خط NK را درنقطهٔ M قطع کند، (شکل ۲۹) درآن صورت صفحهٔ $C_۱NA$، صفحهٔ نیمساز فـرجه بـین صفحات $D_۱C_۱A$ و $C_۱MA$ خواهدبود. (صفحات $D_۱AN$ و ANM برکره مماسند وصفحات $D_۱C_۱A$ و $C_۱MA$ ازمرکزآن می‌گذرند.)

به‌همین طریق صفحهٔ $C_۱KA$، صفحهٔ نیمسازفرجه بین‌صفحات $MC_۱A$و$C_۱B_۱A$ خواهدبود. بنابراین فرجه بین صفحات $AC_۱K$ و$AC_۱N$ نصف‌فرجه‌بین‌صفحات $AB_۱C_۱$ و $AD_۱C_۱$ بوده وبرابر $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌شود.

جواب: $\frac{\pi}{3}$



شکل ۲۹

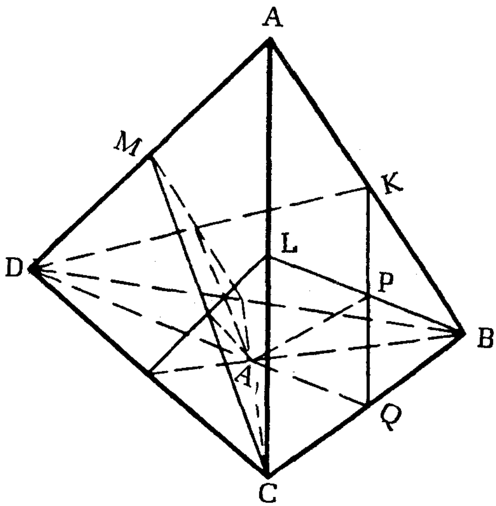
۱۵۱- نقاط K و L و M را اوساط یالهای AB و AC و AD درنظر بگیرید. (شکل ۳۰). ازفرض مسئله نتیجه میشود چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$، باصفحات DKA_1 و BLA_1 و CMA وصفحه‌ای‌که از A می‌گذرد وموازی BCD است، محصور شده‌است. رئوس B_1 و C_1 و D_1 طوری قرار دارندکه نقاط M و K و L، اوساط CB_1 و DC_1 و BD_1 میشوند. (نقاط B_1 و C_1 و D_1 درشکل نشان داده نشده‌اند).

اکنون وسط BC را Q ومحل برخورد BL و KQ را P بنامید.

برای پیداکردن حجم قسمت مشترك دوهرم ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ ، باید از حجم هرم ABCD، حجم سههرم معادل DKBQ راکم‌کنیم. (هریك ازآنها حجمی برابر $\frac{1}{4}V$)دارند وحجم سههرم معادل A_1BQP را به‌آن اضافه‌کنیم.

حجم هرم‌های اخیر برابر $\frac{1}{24}V$ است.

به‌این‌ترتیب حجم قسمت مشترك برابر میشود با $\frac{3}{8}V$.



شکل ۳۰

۱۵۲- ابتدا ثابت کنید فرجه‌های نظیر یالهای DB و AC، برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. (هریك از آنها). فرض کنیم،

$$|AD|=|CD|=|BC|=a \quad , \quad |BD|=|AC|=b \quad ,$$

$$|AB|=c \quad , \quad b>a$$

ازنقاط D و C، عمودهای DK و CL را بریال AB فـرود می‌آوریم. (شکل ۳۱,a).

فرض می‌کنیم،

$$|AK|=|BL|=x \text{ ، } |KL|=|c-۲x| \text{ ، } |DK|=|CL|=h$$

چون فرجه نظیریال AB برابر $\frac{\pi}{۳}$ است پس داریم،

$$|DC|^۲=|DK|^۲+|CL|^۲-|DK|\,.\,|CL|+|KL|^۲$$

یعنی،

$$a^۲=h^۲+(c-۲x)^۲$$

با تعویض $h^۲$ با $a^۲-x^۲$، خواهیم داشت:

$$۳x^۲-۴cx+c^۲=۰$$

از آنجا

$$x_۲=c \quad , \quad x_۱=\frac{c}{۳}$$

از شرط $b>a$ نتیجه می‌شود،

$$x<\frac{c}{۲}$$

بنابراین

$$x=\frac{c}{۳}$$

به‌این‌ترتیب بین a و b و c رابطهٔ $c^۲=۳(b^۲-a^۲)$ برقرار است.

مساحت مثلث‌های ABD و ACD را پیدا می‌کنیم:

$$S_{ABD}=S_{ABC}=\frac{۱}{۲}c\sqrt{a^۲-\frac{c^۲}{۹}}=\frac{۱}{۲}c\sqrt{\frac{۴a^۲-b^۲}{۳}}$$

$$S_{ACD}=T_{BDC}=\frac{۱}{۴}b\sqrt{۴a^۲-b^۲}$$

با بیان حجم چهاروجهی ABCD با فرمول مسئله (۱۱) برحسب فرجه یال AB ومساحت وجوه ABD و ABC، وسپس برحسب φ فرجه نظیر یال AC، (که همچنین برابر است با فرجه نظیر یال BD) ومساحتهای وجوه ABC و ACD خواهیم داشت،

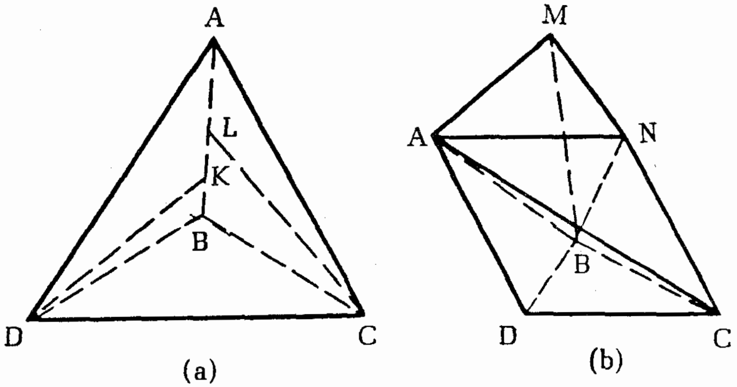
$$V_{ABCD}=\frac{۱}{۳}\frac{S_{ABD}\,S_{ABC}}{|AB|}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۳}\frac{S_{ACD}\,S_{ABC}}{|AC|}\sin\varphi$$

واز آنجا،

$$\sin\varphi=\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}\frac{|AC|}{|AB|}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲c\sqrt{\frac{۴a^۲-b^۲}{۳}}}{b\sqrt{۴a^۲-b^۲}}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱$$

پس

$$\varphi=\frac{\pi}{۲}$$



شکل ۳۱

برای تعیین مجموع سه‌فرجه باقیمانده ، منشور BCDMNA را درنظر بگیرید. (شکل ۳۱,b) چهاروجهی ABCN قابل انطباق برچهاروجهی ABCD است، چون صفحه ABC بـرصفحه ADCN عمود است. اما ADCN یك‌لوزی می‌باشد، بنابراین چهاروجهی ABCD و ABCN نسبت بـه صفحـه BCA قرینه یکدیگرخواهندبود. به‌طریق مشابه چهاروجهی ABMN و ABCN نسبت به‌صفحه ABN قرینه هم می‌شوند.

(فرجه نظیر یال BN درچهاروجهی ABCN قابل انطباق برفرجه‌نظیر یال BD ازچهاروجهی ABCD است یعنی برابر $\frac{\pi}{2}$ است.) در نتیجه، چهـار وجهـی ABMN قابل انطباق برچهاروجهی ABCN وقابل انطباق برچهاروجهی‌اصلی ABCD است.

فرجه‌های نظیر یالهای CN و BM ازمنشور، به‌ترتیب قابل انطباق بـرفرجه‌های نظیر یالهای DC و BC ازچهاروجهی ABCD هستند. وچون مجموع‌فرجه‌های نظیر یالهای جانبی منشور مثلث‌القاعـده برابر π و مجموع فرجه‌های نظیر یالهای AD و DC و CB ازچهاروجهی ABCD هم برابر π است، پس‌مجموع همهٔ

فرجه‌های چهاروجهی باکنارگذاشتن فرجه مفروض نظیر یال AB، برابر 2π می‌شود.

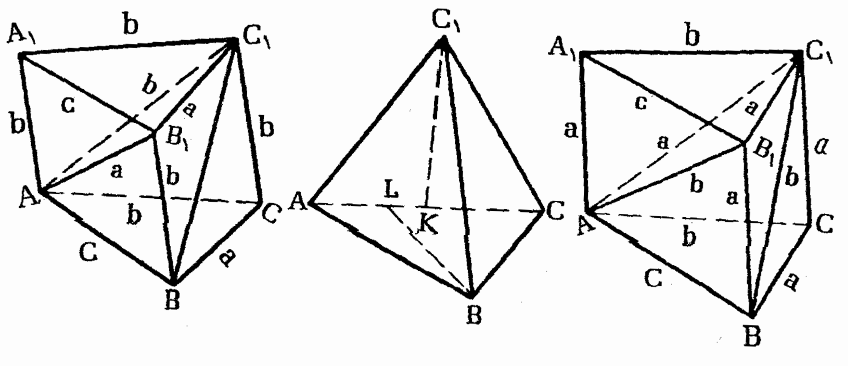
۱۵۳- درمثلث ABC طول اضلاع BC و CA و AB را به‌ترتیب a و b و c درنظر بگیرید. چون هرم‌های $ABCC_1$ و ABB_1C_1 و $AA_1B_1C_1$ قابل انطباق بر‌یکدیگر ند، از آنجا نتیجه‌می‌شودکه هریك‌از آنها دووجه‌قابل‌انطباق برمثلث ABC دارند. درواقع اگر هر هرم یك‌وجه، از چنین وجوهی داشته باشد، در‌آن‌صورت بین رئوس هرم‌های $ABCC_1$ و $A_1B_1C_1A$ تناظری به صورت $A\to A_1$ و $B\to B_1$ و $C\to C_1$ وجود می‌داشت. یعنی،

$$|BC_1|=|B_1A| \quad , \quad |CC_1|=|AC_1|$$

واین یعنی هیچ‌یك از وجوه درهرم ABC_1B_1 ، برابرمثلث ABC نیستند.
اکنون به‌آسانی نتیجه می‌شود یال‌جانبی‌منشور یا برابرa، یا برابر b ویا c است.
(به‌عنوان مثال اگرمثلث AC_1B برمثلث ABC منطبق باشد، درآن صورت وجه A_1B_1A درهرم $A_1B_1C_1A$ متناظر باوجه AC_1B ازهرم $ABCC_1$ و مثلث A_1B_1A قابل‌انطباق برمثلث ABC خواهدبود.)
همه حالات را در نظر بگیریم:

$$|AA_1|=|BB_1|=|CC_1|=a \qquad (1)$$

(شکل ۳۲,a).



(c) (b) (a)

شکل ۳۲

دراین‌صورت از رأس C هرم $ABCC_1$، دویال به‌طول a ویك یـال به‌طول b اخراج‌می‌شود، ویك‌یال به‌طول c متقابل با یال CC_1 قرارمی‌گیرد. بنا براین نتیجه می‌شود برای رأس C از هـرم $ABCC_1$، می‌بایست C_1 از هـرم $A_1B_1C_1A$ متناظر بشود و $|AC_1|=a$.

اکنون می‌توان ثابت‌کرد

$$|AB_1|=|BC_1|=b$$

در هر سه‌هرم، فرجه‌های نظیر یالهای به‌طول b قابل انطباق برهم هستند ومجموع دوتا ازچنین فرجه‌ها برابر π می‌باشد. (برای مثال دوفرجه‌نظیریال C_1B درهرم‌های $ABCC_1$ و ABB_1C_1) یعنی هر یك ازآنها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

عمودهای BL و C_1K را بر یال AC فرودآورید. (شکل ۳۲,b) چون فـرجه نظیر یال AC برابر 90° است داریم،

$$b^2=|C_1B|^2=|C_1K|^2+|KL|^2+|LB|^2=|C_1C|^2-|KC|^2+$$
$$+(|KC|-|LC|)^2+|BC|^2-|LC|^2=2a^2-bx$$

که درآن $\qquad x=|LC|$

وازمعادله نتیجه می‌شود،

$$a^2-x^2=c^2-(b-x)^2$$

$$x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

به‌این ترتیب

$$3a^2-3b^2+c^2=0$$

اما بنا به‌فرض مثلث ABC قائم‌الزاویه است واین وقتی امکان‌پذیراست‌که داشته باشیم،

$$c^2=a^2+b^2$$

درنتیجه،

$$b=a\sqrt{2} \qquad , \qquad c=a\sqrt{3}$$

اکنون می‌توان فرجه نظیر یال BC ازمنشور موردنظر را پیدا کرد.

$\widehat{ACC_1}=\frac{\pi}{4}$ زاویه‌مسطه فرجه‌است. (ABC و C_1CB مثلث‌های قائم‌الزاویه‌اند که زاویه C درآنها 90° است).

فرجه نظیر AB ازهرم $ABCC_1$، برابر $\frac{\pi}{3}$ است واین‌موضوع راثابت‌می‌کنیم. این زاویه را φ فرض می‌کنیم. فرجه نظیر یال AB در منشور $ABCA_1B_1C_1$ برابراست با 2φ وفرجه نظیر A_1B_1 برابر φ. به‌این‌ترتیب

$$\varphi=\frac{\pi}{3} \quad \text{ویا} \quad 3\varphi=\pi$$

$$|AA_1|=|BB_1|=|CC_1|=b \qquad (2)$$

(شکل ۳۲,c).

دراین حالت درهرم $ABCC_1$، دویال به‌طول b ویك یال به‌طول a از رأس C اخراج می‌شوند. بنابراین هرم $A_1B_1C_1A$ نیز، یك‌چنین رأسی خواهد داشت که آن رأس A ویا C_1 خواهدبود. درهردوحالت داریم،

$$|AC_1|=b \quad \text{و} \quad |AB_1|=a$$

(یادآوری می‌کنیم دووجه به‌اضلاع a و b و c باید پیدا شود). بنابراین، هریك ازهرم‌های $ABCC_1$ و $A_1B_1C_1A$، یك‌وجه‌دارند که مثلثی‌است‌متساوی‌الاضلاع به‌ضلع b. درحالیکه در هرم ABB_1C_1 طول یال BC_1 هرچه باشد، دارای چنین وجهی نیست. بنابراین چنین حالتی پیش نمی‌آید.

$$|AA_1|=|BB_1|=|CC_1|=c \qquad (3)$$

این‌حالت درواقع‌منطبق برهمان حالت‌اول‌است، تنها قاعده‌های ABC و $A_1B_1C_1$ جابه‌جا شده‌اند.

جواب: $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$ (یا $\frac{3\pi}{4}$) ، $\frac{\pi}{3}$ (یا $\frac{2\pi}{3}$).

۱۵۴- عمودهای A_1M و B_1M را بر CD، B_1N و C_1N را بر AD ، C_1K و D_1K را بر AB ، D_1L و A_1L را بر CB فرود بیاورید.

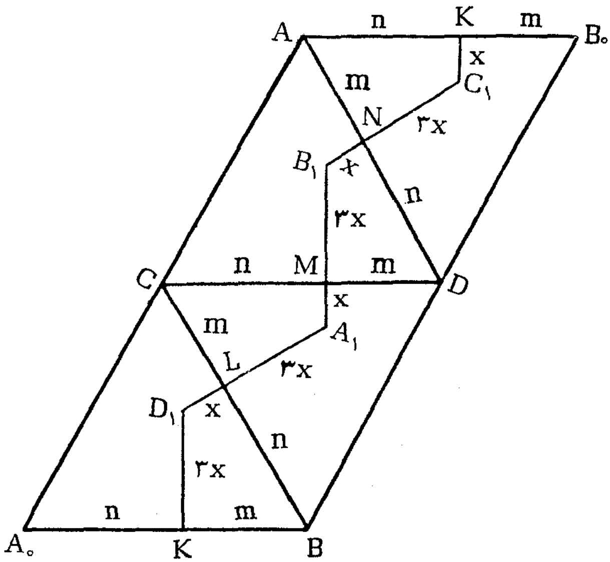
چون،

$$\frac{|A_1M|}{|B_1M|}=\frac{|B_1N|}{|NC_1|}=\frac{|C_1K|}{|KD_1|}=\frac{|D_1L|}{|A_1L|}=\frac{1}{3}$$

(این نسبتها برابر کسینوس فرجه نظیر یالهای چهاروجهی‌اند.) و

$$|A_1B_1|=|B_1C_1|=|C_1D_1|=|D_1A_1|$$

تساویهای زیر باید برقرار باشد،



شکل ۳۳

$$|A_1M|=|B_1N|=|C_1K|=|D_1L|=x$$

$$|B_1M|=|NC_1|=|KD_1|=|A_1L|=3x$$

(شکل ۳۳ گسترش چهاروجهی را نشان می‌دهد). هریك ازیالهای CD و DA و AB و BC همان‌طورکه در شکل دیده می‌شود، به پاره خطهای m و n تقسیم می‌شوند. باتوجه به‌اینکه $m+n=a$ خواهیم داشت:

$$n=\frac{۷a}{۱۲} \quad و \quad m=\frac{۵a}{۱۲} \quad و \quad x=\frac{a\sqrt{۳}}{۱۲}$$

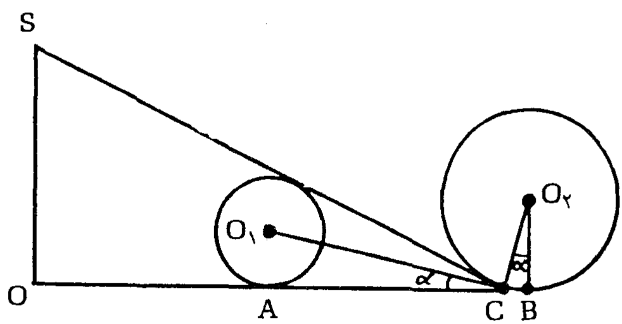
اکنون حجم چهاروجهی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ را پیدا کنید.

جواب : $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۶۲}$

۱۵۵- بدون اینکه به کلیت مسئله خدشه‌ای وارد آید ملاحظه‌می کنیم که همه مولدهای مخروط بر کره‌هایی که به‌طور همزمان با دو کرهٔ دیگر درتماسند، مماس می‌باشند: داخلی و خارجی.

مقطعی‌را از رأس S مخروط ومراکز دوکره‌ای‌که بریك مولدمماسند، می‌گذرانیم. (شکل ۳۴. مشخصات، بطور واضح درشکل نشان داده شده‌است،) از فرض مسئله مبنی بر اینکه n کره به‌شعاع R بریکدیگرمماسند نتیجه می‌شود،

$$|OA|=\frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$$



شکل ۳۴

و به‌طریق مشابه

$$|OB|=\frac{۲R}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

درنتیجه ،

$$|AB|=a=\frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

اگر $|AC|=x$ آنگاه،

$$\cot g\,\alpha=\frac{۲R}{a-x} \quad و \quad tg\,\alpha=\frac{R}{x}$$

ازضرب این تساویها درهم معادلهٔ زیررا خواهیم داشت،

$$x^{۲}-ax+۲R^{۲}=۰$$

ازآنجا

$$x_{۱}=\frac{a-\sqrt{a^{۲}-۸R^{۲}}}{۲}$$

و

$$x_{۲}=\frac{a+\sqrt{a^{۲}-۸R^{۲}}}{۲}$$

که درآن،

$$a=\frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

از شرط $a^{۲}-۸R^{۲}\geqslant ۰$ نامساوی

$$\sin\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

نتیجه می‌شود. علاوه براین، نامساوی

$$tg\,\alpha=\frac{R}{x}<۱$$

هم باید برقرار باشد.

اکنون به‌آسانی می‌توان ریشه مناسب $x_{۲}$ را به‌ازای

$$\frac{۱}{۳} < \sin\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

به‌دست آورد.

برای $x_۲$ یك محدودیت باقی می‌ماند:

$$\sin\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

می‌توان ثابت کرد تنها به‌ازای $n=۹$ ،

$$\frac{۱}{۳} < \sin\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

حجم مخروط برابرخواهد بود با،

$$\frac{۱}{۳}\pi(a+x)^۳ \operatorname{tg} ۲\alpha$$

باقراردادن a و x و $\operatorname{tg} ۲\alpha$ برحسب R و n با استفاده از فرمولهای مناسب، جواب مسئله را بدست می‌آوریم.

$$V=\frac{\pi R^۳\left(۳+\sqrt{۱-۸\sin^۲\frac{\pi}{n}}\right)^۳\left(۱+\sqrt{۱-۸\sin^۲\frac{\pi}{n}}\right)}{۱۲\sin^۲\frac{\pi}{n}\left(۱-۶\sin^۲\frac{\pi}{n}+\sqrt{۱-۸\sin^۲\frac{\pi}{n}}\right)}$$

$$n \geqslant ۹$$

علاوه براین به‌ازای $n=۹$ یك جواب اضافی امکان‌پذیر است:

$$\frac{\pi R^۳\left(۳-\sqrt{۱-۸\sin^۲\frac{\pi}{۹}}\right)^۳\left(۱-\sqrt{۱-۸\sin^۲\frac{\pi}{۹}}\right)}{۱۲\sin^۲\frac{\pi}{۹}\left(۱-۶\sin^۲\frac{\pi}{۹}-\sqrt{۱-۸\sin^۲\frac{\pi}{۹}}\right)}$$

۱۵۶- با تصویرمکعب برروی صفحهٔ عمود بر $B_۱D$ ، شش‌ضلعی‌منتظم $ABCC_۱D_۱A_۱$ به ضلع $b=\sqrt{\frac{۲}{۳}}a$ بدست می‌آید. (شکل ۳۵) که درآن a یال مکعب است.

(تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع BC_1A_1 مثلثی برابرآن خواهد بود، چون صفحه BC_1A_1 بر B_1D عمود است).

مثلث KAC_1 را درنظر بگیرید که درآن

$$|KA|=|AC_1|=2b$$

وخط NM ازوسط AC_1 می‌گذرد.

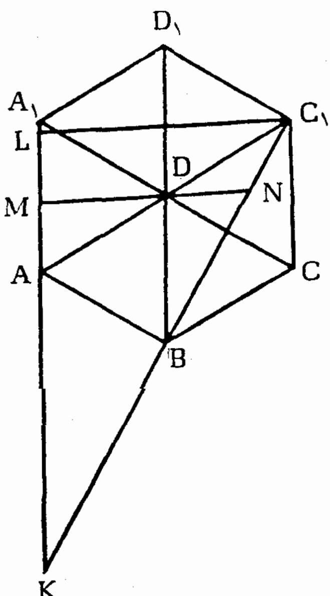
اگر $\frac{|AM|}{|AA_1|}=x$ ، C_1L را به‌موازات MN رسم کنید، داریم،

$$|ML|=|AM|$$

$$\frac{|KN|}{|KC_1|}=\frac{|KM|}{|KL|}=\frac{2+x}{2+2x}$$

ازآنجا،

$$\frac{|BN|}{|BC_1|}=\frac{2(|KN|-|BC|)}{|KC_1|}=2\quad\frac{|KN|}{|KC_1|}-1=\frac{2+x}{1+x}-1=\frac{1}{1+x}$$



شکل ۳۵

به‌این‌ترتیب،

$$\frac{|BC_1|}{|BN|}-\frac{|AM|}{|AA_1|}=1+x-x=1$$

۱۵۷- اگر دو مثلث نامساوی متشابه، دوضلع مساوی داشته باشند، به‌آسانی معلوم می‌شود که اضلاع هریك از آنها تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند. اضلاع یکی‌از آنها را می‌توان با a و $a\lambda$ و $a\lambda^2$ ودیگری را با λa و $\lambda^2 a$ و $\lambda^3 a$ نشان داد. بالاخره اگر اضلاع یك مثلث تشکیل یك تصاعد هندسی بدهند و دوضلع آن برابر با ۳ و ۵ باشند، درآن‌صورت ضلع‌سوم برابر $\sqrt{15}$ خواهدبود. (درحالات دیگر، مجموع دوضلع ازضلع سوم کمترمی‌شود). اکنون به‌آسانی ثابت می‌شود در چهاروجهی مفروض ما، دووجه، مثلثهای به‌اضلاع ۳ و $\sqrt{15}$ و ۵ و دووجه دیگر به‌اضلاع $\sqrt{15}$ و ۵ و $5\sqrt{\frac{5}{3}}$ یا $3\sqrt{\frac{3}{5}}$ و ۳ و $\sqrt{15}$ دارند. مسئله دو جواب دارد:

$$\frac{11}{10}\sqrt{10} \quad \text{و} \quad \frac{55\sqrt{6}}{18}$$

۱۵۸- دستگاه مختصات قائمی را درنظر بگیرید که خط اول، برمحور xها منطبق بشود، خط دوم موازی محور yها باشد واز نقطهٔ $(a,0,0)$ بگذرد وخط سوم موازی‌محور zها واز نقطهٔ $(a,a,0)$ بگذرد.

اگر $ABCDA_1B_1C_1D_1$ متوازی السطوحی باشدکه درآن، نقاط A و C بر روی خط اول وبه‌مختصات به‌ترتیب $(x_1,0,0)$ ، $(x_2,0,0)$ ، نقاط B و C_1 روی خط دوم، وبه‌مختصات $(0,y_1,a)$ ، $(0,y_2,a)$ ونقاط D و B_1 روی خط سوم وبه‌ترتیب به‌مختصات (a,a,z_1) ، (a,a,z_2) باشند، ازشرط تساوی بردارهای $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ نتیجه می‌شود،

$$a-x_1=x_2=-a$$

$$a=-y_1=y_2-a$$

$$z_1=-a=a-z_2$$

ازآنجا،

$$x_1=2a \quad , \quad x_2=-a \quad , \quad y_1=-a \quad , \quad y_2=2a \quad ,$$

$$z_1=-a \quad , \quad z_2=2a$$

از آنجا داریم:

$$A(۲a,۰,۰) \quad ، \quad B(۰,-a,a) \quad ، \quad C(-a,۰,۰) \quad ،$$
$$D(a,a,-a) \quad ، \quad B_۱(a,a,۲a) \quad ، \quad C_۱(۰,۲a,a)$$

می‌توان امتحان کرد که

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

بالاخره داریم،

$$|AC|=۳a \quad , \quad |AB|=a\sqrt{۶} \quad , \quad |BC|=a\sqrt{۳}$$

یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌باشد و بنابراین مساحت ABCD برابراست با

$$|AB|\cdot|BC|=۳a^۲\sqrt{۲}$$

معادله صفحهٔ ABCD عبارت است از: $y+z=۰$ پس فاصلهٔ $B_۱$ ازاین‌صفحه برابر می‌شود با:

$$\frac{۳a}{\sqrt{۲}}$$

جواب : $۹a^۳$

۱۵۹- هرم منتظم ABCDS را درنظر بگیریدکه درآن، مقطع KLMNP یك پنج‌ضلعی منتظم، وبه‌ضلع a می‌باشد (شکل ۳۶). قطرقاعده هرم را، b ویال جانبی آنرا l و $|SM|=xl$ و $|SN|=yl$ بنامید. چون پنج ضلعی KLMNP منتظم است، داریم،

$$|LM|=۲a\cos\frac{\pi}{۵}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}a=\mu a$$

$$\frac{|MF|}{|FG|}=\frac{۱-\cos\frac{۲\pi}{۵}}{\cos\frac{\pi}{۵}+\cos\frac{۲\pi}{۵}}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}=\lambda$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$|KP|=a \quad , \quad |GO|=\frac{b-a}{۲}$$

ازطرف دیگر ،

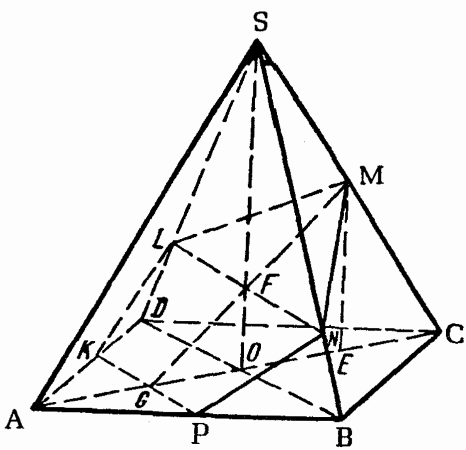
$$|OE|=|OC|\ \frac{SM}{SC}=\frac{b}{۲}\,x$$

$$|ME|=|SO|\frac{|MC|}{|SC|}=h(۱-x)$$

$$|FO|=h(۱-y)$$

که درآن h ارتفاع هرم است، بنابراین،

$$\frac{|GO|}{|FO|}=\frac{|OE|}{|ME|-|FO|}\quad,\quad |GO|=\frac{(۱-y)xb}{۲(y-x)}$$



شکل ۳۶

با مساوی قراردادن عباراتی‌که برای $|GO|$ پیدا شده، معادلهٔ زیر بدست می‌آید،

$$\frac{(۱-y)\,xb}{y-x}=b-a \qquad (۱)$$

و بالاخره،

$$\frac{|OE|}{|GO|}=\frac{|MF|}{|FG|}=\lambda$$

از آنجا

$$\frac{y-x}{1-y}=\lambda \qquad (2)$$

چون $|LN|=\mu a$ و $|LN|=y|DB|$ خواهیم داشت:

$$yb=\mu a \qquad (3)$$

سرانجام مثلث PNB را درنظر بگیریدکه درآن،

$$|PN|=a \text{ ، } |NB|=(1-y)l \text{ ، } |PB|=\frac{b-a}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\widehat{PBN}=\cos\widehat{ABS}=\frac{b}{2\sqrt{2}\,l}$$

با استفاده ازقضیه کسینوسها خواهیم داشت ،

$$a^2=(1-y)^2l^2+\frac{(b-a)^2}{2}-\frac{(1-y)(b-a)b}{2} \qquad (4)$$

باتوجه به‌اینکه

$$\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad , \quad \mu=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ازمعادلات (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$b=\frac{\sqrt{5}+3}{2}a \quad , \quad y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

واز (۴) نتیجه می‌شود:

$$l^2=\frac{a^2(7+3\sqrt{5})}{4}=\frac{b^2}{2}$$

به‌این‌ترتیب حجم هرم برابراست با

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2}{2}\sqrt{l^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{b^3}{12}=\frac{(9+4\sqrt{5})}{12}a^3$$

۱۶۰- اضلاع مثلث مفروض را با a و b و c ، وارتفاعات آنرا با h_a و h_b و h_c و

نصف محیط آنرا با p وشعاع دایره محاطی آنرا با r نشان می‌دهیم.
محل برخورد صفحات A_1B_1C و A_1BC_1 و AB_1C_1 را با M، و مراکز دوایر محاطی خارجی مثلث را با O_a و O_b و O_c نشان می‌دهیم. (O_a مرکز دایره‌ای‌است که برضلع BC وامتداد AB و AC مماس‌شده‌است‌و بهمین ترتیب...)
ثابت کنید $O_aO_bO_cM$ هرم مطلوب است، ارتفاع مرسوم ازنقطهٔ M از مرکز دایرهٔ محاطی (O) می‌گذرد و $|MO|=2r$.
برای مثال، صفحهٔ A_1B_1C را درنظر بگیرید. اگر K محل برخورد این صفحه با خط AB باشد،

$$\frac{|KA|}{|KB|}=\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{|AC|}{|BC|}$$

یعنی K محل برخورد خط AB و نیمساز زاویهٔ خارجی C است. بنابراین معلوم می‌شود قاعدهٔ هرم مورد نظرما، درواقع مثلث $O_aO_bO_c$ و M درنقطهٔ O تصویر می‌گردد.
$|MO|$ را پیدا می‌کنیم

$$\frac{|MO|}{h_a}=\frac{|OO_a|}{|AO_a|}=\frac{r_a-r}{r_a}$$

که درآن r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی وبه‌مرکز O_a می‌باشد.

$$r_a=\frac{S}{p-a}\quad،\quad r=\frac{S}{p}\quad،\quad h_a=\frac{2S}{a}$$

درنتیجه

$$|MO|=h_a\frac{r_a-r}{r_a}=\frac{2S}{a}\,\frac{\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p-a}}=\frac{2S}{p}=2r$$

حالا مساحت مثلث $O_aO_bO_c$ را حساب می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که O_aA و O_bB و O_cC ارتفاعات مثلث‌اند. زوایای مثلث $C_aO_bO_c$ قابل محاسبه‌اند.
برای مثال،

$$\widehat{O_cO_aO_b}=\widehat{BO_aC}=180^\circ-(90^\circ-\frac{\hat{B}}{2})-(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2})=90^\circ-\frac{A}{2}$$

سایر زوایا هم به‌طریق مشابه پیدا می‌شوند. دایره به‌قطر O_bO_c از B و C می‌گذرد. درنتیجه،

$$|O_bO_c| = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BO_bC}} = \frac{a}{\sin \frac{\hat{A}}{۲}}$$

درست به‌همین‌طریق خواهیم داشت،

$$|O_bO_a| = \frac{C}{\sin \frac{\hat{C}}{۲}}$$

بنابراین،

$$|O_aA| = |O_aO_b| \sin \widehat{O_aO_b}A = \frac{C}{\sin \frac{\hat{C}}{۲}} \cos \frac{\hat{B}}{۲}$$

به‌این‌ترتیب مساحت مثلث $O_aO_bO_c$ (که‌آنرا با Q نشان می‌دهیم) برابراست با،

$$Q = \frac{۱}{۲} \frac{ac}{\sin\frac{\hat{A}}{۲} \sin\frac{\hat{C}}{۲}} \cos \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{ac \sin\hat{B}}{۴} \cdot \frac{۱}{\sin \frac{\hat{A}}{۲} \sin\frac{\hat{B}}{۲} \sin\frac{\hat{C}}{۲}} \quad (۱)$$

$\sin\frac{A}{۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos A}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc})} =$$

$$= \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}$$

به‌طریق مشابه $\sin \frac{\hat{B}}{۲}$ و $\frac{\hat{C}}{۲}$ را پیداکرده درفرمول (۱) قرارمی‌دهیم. خواهیم داشت،

$$Q = S\frac{abc}{۲(P-a)(P-b)(P-c)}$$

وحجم هرم $MO_aO_bO_c$ برابرخواهد بود،

$$V = \frac{S\,abcr}{۳(P-a)(P-b)(P-c)} = \frac{۱}{۳}abc = \frac{۴}{۳}SR$$

جوابها، راهنمایی‌ها، وحل‌ها

بخش دوم

۱۶۱- نه خیر، نه درهرچهار وجهی.

۱۶۲- ویژگی مورد اشاره را هرمی دارا می‌باشدکه، دوفرجه متقابل آن منفرجه باشد.

۱۶۳- ثابت‌کنید اگرخط برصفحه عمود نباشد و زوایای مساوی با دو خط متقاطع دراین صفحه بسازد، درآن صورت، تصویر این خط روی صفحه نیز بـا همـان خطوط، زوایای مساوی می‌سازد. یعنی موازی بـا نیمساز هریك از دوزاویه‌ای می‌گرددکه بوسیله آنها ساخته می‌شود.

۱۶۴- یك مثلث، یك چهارضلعی ویك شش ضلعی. یك مکعب را نمی‌توان دریك پنج‌ضلعی منتظم قطع‌نمود، زیرا درمقطعی‌که بیش‌ازسه ضلع داشته باشد، لااقل یك‌جفت ضلع موازی موجود است. اما درپنج ضلعی منتظم اضلاع موازی وجود ندارد.

۱۶۵- روی یالهای‌کنج سه وجهی، پاره خطهای مساوی SA و SB و SC را ازرأس S جداکنید. تصویررأس S را برروی‌صفحه ABC، O بنامید. ASB و AOB مثلث‌های‌متساوی‌الساقینی‌هستندکه AB درآنها مشترك است وساقهای‌مثلث AOB کوتاهتر از اضلاع مثلث ASB می‌بـاشد. درنتیجه $\widehat{AOB}>\widehat{ASB}$. بـه‌طریق مشابه برای سایر زوایا هم می‌توان نامساوی‌های مشابه نوشت. بنابراین،

$$\widehat{ASB}+\widehat{BSC}+\widehat{CSA}<\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}\leqslant ۲\pi$$

(آخرین مجموع برابر 2π خواهد بود، اگر O درداخل مثلث ABC قرارگیرد وکمتر از 2π خواهد بود اگر، O درخارج این مثلث قرارگیرد.)
برای اثبات حکم دوم، نقطه دلخواهی را در داخل کنج در نظر بگیرید و از این نقطه عمودهایی بروجوه کنج فرودآورید. این عمودها یالهای یك کنج سه وجهی دیگر را تشکیل خواهند داد. (کنج حاصل را مکمل کنج مفروض می‌نامند. این تکنیك یك روش استاندارد درعرصه فرجه‌ها محسوب می‌شود.) فرجه‌های کنج سه وجهی مفروض، با زوایای رأس کنج مکمل، بهزاویه π مکملند وبالعکس.
اگر α و β و γ فرجه‌های کنج مفروض باشند، آنگاه با بکاربردن نامساوی که در بالا درارتباط با زوایای رأس به‌اثبات رسید، خواهیم داشت،

$$(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi$$

ازآنجا نتیجه می‌شود ، $\alpha+\beta+\gamma>\pi$

-۱۶۶

(۱). نقطه S را رأس کنج و M را نقطه‌ای بر روی یال آن و M_1 و M_2 را تصاویر نقطه M روی دویال دیگر آن و N را تصویر M بر روی وجه مقابل در نظر بگیرید. فرض کنید که یال SM نظیرفرجه C باشد. اگر $|SM|=a$، آنگاه بلافاصله $|SM_1|$ وسپس $|MN|$ ازمثلث MM_1N ویا به‌طریق دیگر، ابتدا $|SM_2|$ ، وسپس $|MN|$ ازمثلث MM_2N ، را حساب می‌کنیم وبه‌تساوی زیر می‌رسیم:

$$|MN|=a\sin\alpha\sin B=a\sin\beta\sin A$$

یعنی

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}$$

(۲). بردارهای یکه امتداد یالهای کنج سه وجهی را با a و b و c نشان دهید. (a مقابل به زاویه رأس α، b مقابل به‌زاویه رأس β و C مقابل γ است.) بردار b را می‌توان چنین نوشت،

$$b=a\cos\gamma+\eta$$

که درآن $|\eta|=\sin\gamma$ و η بردارعمود بر a می‌باشد. به‌طریق مشابه

$$c = a\cos\beta + \xi$$

که در آن $|\xi| = \sin\beta$ و ξ بردار عمود بر a می‌باشد.
زاویه بین بردارهای η و ξ برابر A می‌باشد. با ضرب اسکالر بردارهای b و c خواهیم داشت،

$$bc = \cos\alpha = (a\cos\gamma + \eta)(a\cos\beta + \xi) =$$
$$= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(۳). از یك نقطه واقع دردرون کنج، عمودهایی را بروجوه آن فرودبیاورید. همان طورکه می‌دانیم (مسئله ۱۶۵ را نگاه کنید.) یك کنج مکمل نسبت به کنج مفروض بدست می‌آید که بافرجه‌های کنج اخیرمکمل به π هستند. با بکاربردن قضیه اول کوسینوسها درباره کنج مکمل‌حکم مطلوب حاصل‌می‌شود. (منظور ازمکمل به π یعنی‌مجموعشان π است. م.)

-۱۶۷ ازقضیه اول کوسینوسها استفاده کنید. (مسئله ۱۶۶ را نگاه کنید.)

-۱۶۸ ازقضیه دوم کوسینوسها استفاده کنید. (مسئله ۱۶۶ را نگاه کنید.)

-۱۶۹ مجموع همه زوایای رئوس چهاروجهی، برابر 4π است. بنابراین رأسی وجود داردکه مجموع زوایای آن از π تجاوز نمی‌کند. تمام زوایای این رأس حاده‌اند وگرنه، یکی از زوایا بزرگتر ازمجموع دوتای دیگرمی‌شود.

-۱۷۰ این ویژگی ازآن یالی است که، بیشترین طول را داشته باشد.

-۱۷۱ ABC را مقطع‌قائم، $|BC| = a$ ، $|CA| = b$ ، $|AB| = c$ درنظرمی‌گیریم. ازنقطه A مقطع AB_1C_1 (B و B_1 ، C و C_1 روی یالهای‌متناظرشان‌قراردارند.) را مروردهید. $|BB_1| = |x|$، $|CC_1| = |y|$ بنامید. (اگر B_1 و C_1 روی یکی‌از اضلاع مثلث ABC باشند، آنگاه x و y یك علامت خواهند داشت و اگر روی اضلاع متمایز باشند، x و y مختلف‌العلامه خواهند بود.) برای اینکه مثلث AB_1C_1 متساوی‌الاضلاع باشد، لازم وکافی است که تساوی‌های زیررا داشته باشیم،

$$c^2 + x^2 = b^2 + y^2$$
$$b^2 + y^2 = a^2 + (x - y)^2$$

نشان می‌دهیم که این دستگاه همواره دارای یك جواب است. اگر $a \geqslant b$ و

$c \geqslant b$، به‌آسانی نشان داده می‌شود که مجموعه نقاطی‌ازصفحه xoy، که درمعادله اول صدق می‌کنند، ودر ربع اول قراردارند، خط راستی است که بدون‌محدودیت به‌سمت $y=x$ میل می‌کند و به‌ازای مقادیر صعودی x و برای $x=o$، $y=\sqrt{c^2-b^2}$ می‌گردد. (واضح است که معادله $y^2-x^2=k$ یك هذلولی متساوی‌الساقین را مشخص می‌کند.) به‌طریق مشابه، معادله دوم، معادله خطی است که به سمت $y=\frac{1}{2}x$ نزدیك می‌شود وبا مقادیر صعودی x ووقتی x به‌سمت صفرمیل می‌کند، y به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. (نقاطی هم که درمعادله صدق می‌کنند، روی یك‌هذلولی‌قراردارند.) بنابراین‌معلوم می‌شود که این دوخط همدیگر را قطع می‌کنند. یعنی دستگاه همواره دارای یك جواب است.

۱۷۲- دورأس باقیمانده ازچهاروجهی را با C و D نشان دهید. بنابه‌فرض،

$$|AC|+|AD|=|AB|$$

مربع $KLMN$ را درنظر بگیرید که ضلع آن برابر است با $|AB|$. روی‌اضلاع LM و MNآن، نقاط P و Q را چنان اختیارکنید که،

$$|PM|=|AD| \quad ، \quad |QM|=|AC|$$

پس،

$$|LP|=|AC| \;،\; |NQ|=|AD| \;،\; |PQ|=|DC|$$

ودرنتیجه

$$\Delta_{KLP}=\Delta_{ABC} \quad ، \quad \Delta_{KNQ}=\Delta_{BAD} \quad ، \quad \Delta_{BDC}=\Delta_{KPQ}$$

از این تساوی‌ها درستی حکم مسئله نتیجه می‌شود.

۱۷۳- نه، نه سطح هرکنجی را. برای مثال، اگر یکی از زوایای رأس کنج سه وجهی، به‌اندازه‌کافی کوچك ودوتای دیگر قائمه باشند، درآن صورت به‌آسانی می‌توان بررسی‌کردکه هیچ مقطعی، از این‌کنج ، مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌تواند باشد.

۱۷۴- نشان دهید اگر،لااقل یك زاویه رأس ازکنج سه‌وجهی‌مفروض قائمه نباشد، درآن صورت‌می‌توان آنرا با یك‌صفحه، طوری قطع کردکه،مقطع‌حاصل، مثلث‌حاده‌الزاویه باشد. واگرهمه زوایای رأس‌کنج سه وجهی قائمه باشند، درآن صورت هرمقطعی

از آن، یك‌مثلث حاده‌الزاویه خواهد بود. برای این‌منظور کافیست، اضلاع یك‌مقطع دلخواه را، بااستفاده ازقضیه فیثا غورث، برحسب یالها نوشت وتحقیق کرد که مجموع مربعات هردوضلع، بزرگتر ازمربع ضلع سوم است.

۱۷۵- اگر a طول بزرگترین یال، b و c طولهای یالهایی باشندکه به‌یکی ازدوسر یال به‌طول a ، و e و f به‌سر دیگر آن مجاورند، آنگاه خواهیم داشت،

$$(b+c-a)+(e+f-a)=b+c+e+f-2a>0$$

ازآنجا معلوم می‌شودکه، لااقل یکی از دونامساوی زیر برقرار است:

$$b+c-a>0 \quad \text{یا} \quad e+f-a>0$$

پس یکی ازسه‌تایی‌های c و b و a یا f و e و a می‌توانند تشکیل یك مثلث بدهند.

۱۷۶- درهرچهاروجهی، رأسی یافت می‌شودکه، مجموع دوزاویه معین ازآن رأس، کمتر از 180° باشد. (در واقع حکم قوی‌تر چنین است: رأسی وجود دارد که مجموع زوایای آن از 180° تجاوزنمی‌کند.) A را رأسی درنظرمی‌گیریم که‌ازچنین ویژگی برخوردار باشد. روی یالی که‌ازA خارج می‌شود، نقاط K و L و M را طوری اختیارکنیدکه $\widehat{ALM}=\widehat{KAL}=\alpha$ و $\widehat{ALK}=\widehat{LAM}=\beta$ اگر

$$\alpha+\beta<180^\circ$$

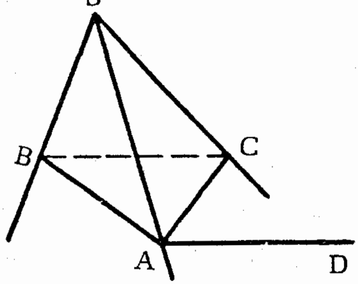
واین امکان‌پذیر است، آنگاه،

$$\Delta_{KLM}=\Delta_{KAM} \quad , \quad \Delta_{KAL}=\Delta_{LAM}$$

درهرم AKLM، فرجه نظیریال AK، برابربا فرجه نظیر یال LM، فرجه‌نظیر یال AM برابر است با فرجه نظیر KL. به‌آسانی می‌توان اطمینان پیداکردکه چهاروجهی KLMA به‌انطباق برخودش میل خواهدکرد، اگر KA به‌انطباق بر LM و AL به KL میل کند.

۱۷۷- فرض‌کنید هیچ یك از زوایای رأس کنج سه‌وجهی مفروض، برابر 90° نباشند. رأس کنج مفروض را S بنامید. کنج سه وجهی دیگری را طوری انتقال دهیدکه رأس آن، برنقطه A واقع برروی یال معینی ازکنج مفروض منطبق بشود. (شکل ۳۷.) AB و AC وAD موازی با یالهای کنج دیگرشوند. نقاط B و C برروی

یالهای کنج مفروض، یا روی امتدادآنها قرار می‌گیرند. اما AB بر SC ، AC بر SB عمودند، درنتیجه، تصاویر BS و CS روی صفحه ABC ، به‌ترتیب بر AC و SB عمود خواهند بود. یعنی S برمحل برخورد ارتفاعات مثلث ABC تصویرمی‌شود. پس AS بر BC عمود است. به‌این ترتیب یال AD، موازی با BC می‌شود واین، یعنی همه یالهای کنج سه وجهی دیگر، به‌یك صفحه تعلق دارند. اگر یکی‌از زوایای رأس کنج مفروض قائمه باشد، درآن صورت همه یالهای کنج سه وجهی دیگر، باید برروی یکی از وجوه کنج مفروض قرارگیرد. (درآن یکی که نظیر زاویه قائمه است.)



شکل ۳۷

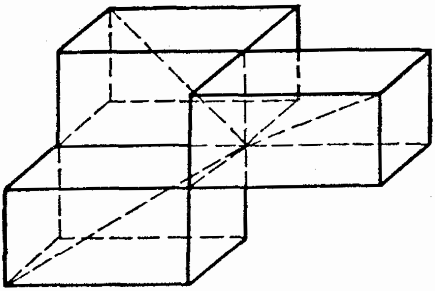
اگر دوزاویه رأس کنج سه‌وجهی قائمه باشند، درآن صورت دویال ازکنج دیگر، باید بریکی از یالهای کنج منطبق بشود. ازآنجا کنج سه وجهی دیگر، وقتی وجود پیدا می‌کند[1] که همه زوایای رأس کنج مفروض قائمه باشند.

۱۷۸- خطراست l را می‌توان قطر متوازی‌السطوح قائم در نظر گرفت‌که، با یالهای‌آن زوایای α و β و γ می‌سازد. سپس باآرایش سه‌متوازی‌السطوح قابل انطباق برهم مانند آنچه‌که درشکل ۳۸ دیده می‌شود، زوایای بین سه‌قطر این متوازی‌السطوحها راکه از رأس مشترك خارج می‌شوند بدست می‌آوریم. این زوایا ۲α و ۲β و ۲γ می‌شوند. درنتیجه،

$$۲\alpha+۲\beta+۲\gamma<۲\pi$$

۱۷۹- S رأس‌کنج، A و B وC نقاط معینی روی یالهای‌آن هستند. ثابت می‌کنیم زاویه

1– nondegentate



شکل ۳۸

بین هر یال وصفحه وجه مقابل آن، همواره کمتر ازهریك ازدو زاویه رئوسی است که آن یال را شامل می‌شوند. چون زاویه بین یك‌خط ویك‌صفحه، نمی‌تواند منفرجه باشد،کافیست حالتی را درنظر بگیریم که زوایـای رأس مجاور یال حاده می‌باشد. A_1 را تصویر A برروی وجه SBC و A_2 را تصویر A برروی یال SB در نظرمی‌گیریم چون $|SA_2|\geqslant|SA_1|$ پس، $\widehat{ASA_1}\leqslant\widehat{ASA_2}=\widehat{ASB}$. (به خاطر داشته باشیدکه همه زوایای رأس S حاده‌اند.)

ازآنجا قسمت اول مسئله نتیجه می‌شود.

اکنون قسمت دوم را اثبات می‌کنیم.

داریم،

$$\widehat{ASB}-\widehat{BSA}\leqslant\widehat{ASA_1}$$

$$\widehat{ASC}-\widehat{CSA_1}\leqslant\widehat{ASA_1}$$

(لااقل یکی ازنامساوی اکیدا ست.) باجمع‌کردن این دونامساوی خواهیم داشت،

$$\widehat{ASB}+\widehat{ASC}-\widehat{CSB}<2\widehat{ASA_1}$$

با نوشتن نامساوی‌های مشابه برای هر یـال، وجمع‌کردن آنها حکم مورد نظر را بدست می‌آوریم. با انتخاب کنج سه وجهی‌ای که همه زوایـای رأس آن منفرجه و مجموع آنها نزدیك به 2π باشد، نتیجه می‌گیریم دراین حـالت حکم قسمت دوم نمی‌تواند درست باشد.

۱۸۰- اگر α و α_1، β و β_1، γ و γ_1 فرجه‌های چهار وجهی بـاشند، (فرجه‌هـای

متناظر با یالهای‌متقابل بایك حرف نشان داده‌شده‌اند.) چهاربردار a و b و c و d را عمود بروجوه چهاروجهی طوری درنظر بگیرید که، جهت آنها به‌طرف خارج چهاروجهی، وطول آنها ازنظر عــددی برابر بــا مساحت وجه نظیرخود می‌باشند. مجموع این بردارها برابرصفر است. (می‌توانیم از این حکم، تعبیر زیررا به‌عمل آوریم: یك کشتی پرازگاز وبــه‌شکل چهاروجهی مفروض مسئله را درنظر بگیرید. نیروی فشار برروی هروجــه، یك بردار را نشان خواهد دادکه براین وجه عمود است وازنظرطول، متناسب بــا مساحت آن می‌بــاشد. واضح است‌که مجموع این بردارها برابرصفر است.) زاویــه بین هردوبردار، با فرجه نظیر از چهاروجهی، مکمل به π هستند. بــا استفاده از این بردارها به‌طروق مختلف می‌توان سه، چهار ضلعی غیرمسطحه متمایز بدست‌آورد. زوایای هریك از چهارضلعی‌هــا، برابر بــا فرجه‌هــای نظیر ازچهاروجهی هستند. (دوفرجه متقابل‌کنارگذاشته شده‌اند.) امــا مجموع زوایای یك چهارضلعی فضایی، کمتر از 2π است. در واقع باکشیدن یك قطر از این چهارضلعی، می‌توان آنرا به‌دومثلث تجزیه‌کردکه، مجموع زوایای این مثلث‌ها برابر 2π می‌شود، درصورتیکه‌مجموع زوایای این چهارضلعی، ازمجموع زوایای این مثلث‌هــا کمتر است. زیــرا درهرکنج سه‌وجهی، هرزاویه‌کوچکتر از مجموع دوزاویه دیگر می‌باشد. به‌این ترتیب باید سه نامساوی زیررا ثابت‌کنیم،

$$\alpha+\alpha_1+\beta+\beta_1<2\pi$$

$$\beta+\beta_1+\gamma+\gamma_1<2\pi$$

$$\gamma+\gamma_1+\alpha+\alpha_1<2\pi$$

(پس قسمت اول مسئله را اثبات‌کرده‌ایم.)

با جمع‌کردن این نامساوی‌ها، خواهیم داشت

$$\alpha+\alpha_1+\beta+\beta_1+\gamma+\gamma_1<3\pi$$

برای‌تکمیل اثبات خود، خاطرنشان می‌کنیم‌که مجموع فرجه‌های هرکنج سه‌وجهی از π بیشتر است. (مسئله ۱۶۵ را نگاه‌کنید.)
با افزودن نامساوی‌های متناظر به‌هررأس چهاروجهی برهان تکمیل می‌شود.

تذکر: درحل این مسئله، از روشی استفاده‌کرده‌ایم‌که درآن، به‌جای‌کنج مفروض، کنج دیگری مورد مطــالعه قرارگرفته‌که، یالهایش عمود بر یــالهای‌کنج مفروض

می‌باشند. هر دو کنج حاصل از این طریق از ویژگی زیر برخوردارند: زوایای رأس یکی از آنها، مکمل فرجه‌های کنج دیگر است. به‌چنین کنجهایی مکمل یاقطبی یکدیگر می‌گویند. این روش بطور گسترده‌ای در هندسه کروی مورد استفاده قرار می‌گیرد و درحل مسئله ۱۶۵ نیز مورد استفاده قرارگرفته است.

۱۸۱- حکم مسئله ازآنجا نتیجه می‌شود که، دریك چند ضلعی منتظم، مجموع فواصل یك نقطه دلخواه واقع درداخل آن، از اضلاع چند ضلعی مقدار ثابتی است.

۱۸۲- اگر $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ و $S_۴$ به ترتیب مساحتهای وجوه چهاروجهی باشند وحجم آنرا هم با V نشان دهیم خواهیم داشت.

$$\frac{x_۱}{h_۱}+\frac{x_۲}{h_۲}+\frac{x_۳}{h_۳}+\frac{x_۴}{h_۴}=\frac{S_۱x_۱}{S_۱h_۱}+\frac{S_۲x_۲}{S_۲h_۲}+\frac{S_۳x_۳}{S_۳h_۳}+\frac{S_۴x_۴}{S_۴h_۴}=$$

$$=\frac{S_۱x_۱+S_۲x_۲+S_۳x_۳+S_۴x_۴}{۳V}=۱$$

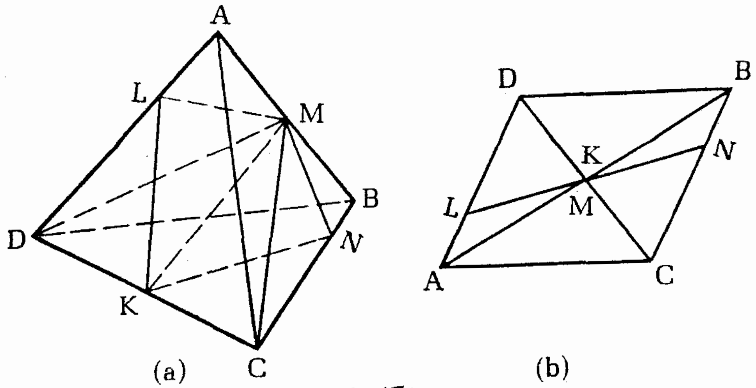
۱۸۳- اوساط یالهای AB و DC چهاروجهی $ABCD$ را، با M و K نشان دهید. صفحه‌ای که از M و K می‌گذرد، یالهای AD و BC را درنقاط L و N قطع می‌کند. (شکل ۳۹،a) چون صفحه DMC حجم چهاروجهی را به‌دوقسمت مساوی تقسیم می‌کند،کافیست ثابت‌کنیم هرمهای $DLKM$ و $KCMN$ قابل انطباق بر یکدیگرند. نسبت حجم هرم $KCMN$، به‌حجم تمام چهاروجهی $ABCD$، برابر است با $\frac{|CN|}{|CB|}\frac{۱}{۴}$.

به‌طریق مشابه، این نسبت برای هرم $DLKM$ برابرمی‌شود با $\frac{|DL|}{|DA|}\frac{۱}{۴}$.

بنابراین ثابت می‌شود

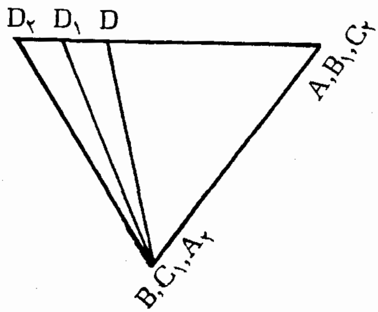
$$\frac{|DL|}{|DA|}=\frac{|CN|}{|CB|}$$

اکنون چهاروجهی را، روی صفحه‌ای عمود برخط KM تصویرمی‌کنیم. تصویر چهاروجهی $ABCD$، متوازی‌الاضلاعی به‌اقطار AB و CD خواهد بود. (شکل ۳۹,b) خط LN از نقطه محل تقاطع اقطار آن خواهد گذشت. پس حکم مسئله درست است.



شکل ۳۹

۱۸۴- فرض کنید قطعیت نامساوی‌های $DC \leqslant |DB| \leqslant |DA|$ ، واکید بودن لااقل یکی ازآنها وجود داشته باشد. همچنین فرض کنیم مثلث‌های DAB و DBC و DCA را به‌قسمی می‌خواهیم بر روی هم منطبق کنیم که زوایا واضلاع مساوی آنها بر رویهم قرارگیرنــد. درشکل رئوس مثلث دوم اندیس ۱ ومثلث سوم انـدیس ۲ دارند. (شکل ۴۰)اما اگر $|D_2A_2|=|DA|<|D_1C_1|$ (بنا به‌فرض.) آنگاه، $\widehat{D_2D_1B}$ حاده و $\widehat{BD_1D}$ منفرجه و $|DB|>|D_1C_1|$. که این یك تناقض است.



شکل ۴۰

۱۸۵- ازهریال چهاروجهی، صفحه‌ای بموازات یــال مقابل مرور دهید. سه‌جفت صفحه، به‌این ترتیب بدست می‌آیدکه تشکیل یك متوازی‌السطوح می‌دهند. یالهای متقابل چهاروجهی، نقش اقطار یك زوج ازوجوه مقابل متوازی‌السطوح را ایفــا خواهند

کرد. برای مثال a و a_1 اقطار دووجـه متقابل متوازی‌السطوح، m و n اضلاع آن $(m \geqslant n)$ خواهند بود. پس

$$a_1 a_2 \cos\alpha = m^2 - n^2$$

با نوشتن چنین تساوی‌هایی برای هرزوج از یالهای متقابل، حکم مسئله بـه‌اثبات می‌رسد.

۱۸۶- اگر کره ازرئوس A و B و C بگذرد ویالهای DA و DB و DC را درنقاط K و L و M قطع‌کند، ازتشابه مثلث‌های DKL و ABD خواهیم داشت،

$$|LK| = |AB|\frac{|DL|}{|DA|}$$

و ازتشابه مثلث‌های DML و DBC نتیجه می‌شود،

$$|ML| = |BC|\frac{|DL|}{|CD|}$$

اما،

$$|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |BD| = 2S_{ABC}$$

اکنون به‌آسانی نتیجه می‌شودکه، $|LK| = |ML|$.

یادآوری ـ حکم مسئله درمورد تمام چهاروجهی‌هایی‌که حاصاضرب یالهای‌متقابل آنها برابر باشند، صادق است.

۱۸۷- ازاینکه نقاط K وL و P وN به‌یك صفحه تعلق دارند، (کمپلدنر) معلوم می‌شود،

$$V_{MKLP} + V_{MPNK} = V_{MNKL} + V_{MLPN} \qquad (1)$$

ازمسئله (۹) نتیجه می‌شود،

$$V_{MKLP} = \frac{|MK| \cdot |ML| \cdot |MP|}{|MA| \cdot |MB| \cdot |MC|} V_{MABC}$$

$$V_{MPNK} = \frac{|MP| \cdot |MN| \cdot |MK|}{|MC| \cdot |MD| \cdot |MA|} V_{MADC}$$

$$V_{MNLK} = \frac{|MN| \cdot |ML| \cdot |MK|}{|MD| \cdot |MA| \cdot |MB|} V_{MABD}$$

$$V_{MLPN} = \frac{|ML| \cdot |MP| \cdot |MN|}{|MB| \cdot |MC| \cdot |MD|} V_{MBCD}$$

این عبارات را درکمیت‌های متناظر (۱) جایگزین کنید و با تقسیم کردن بر

$$|MK| \cdot |ML| \cdot |MP| \cdot |MN|$$

وضرب در

$$|MA| \cdot |MB| \cdot |MC| \cdot |MD|$$

ونوشتن حجم هریك ازهرم‌های باقیمانده برحسب مساحت قاعدهٔ وارتفاع h، وپس از ساده‌کردن به $\frac{h}{۳}$ حکم مسئله بدست می‌آید.

۱۸۸- ثابت کنید خطی‌که ازنقطه مفروض می‌گذرد و به‌موازات قطرمکعب رسم می‌شود، برهریك ازکره‌ها مماس است.

۱۸۹- هردوقسمت، از این حکم کلی نتیجه می‌شود که: اگرمجموع $\alpha|AM|+\beta|BN|+\gamma|CL|$ ثابت باشد، که درآن α و β و γ ضرایب مفروضی هستند، آنگاه صفحه MNL ازنقطه ثابتی می‌گذرد. این حکم بنوبه‌خود ازتساوی زیرحاصل می‌شود،

$$\alpha|AM|+\beta|BN|=(\alpha+\beta)|PQ|$$

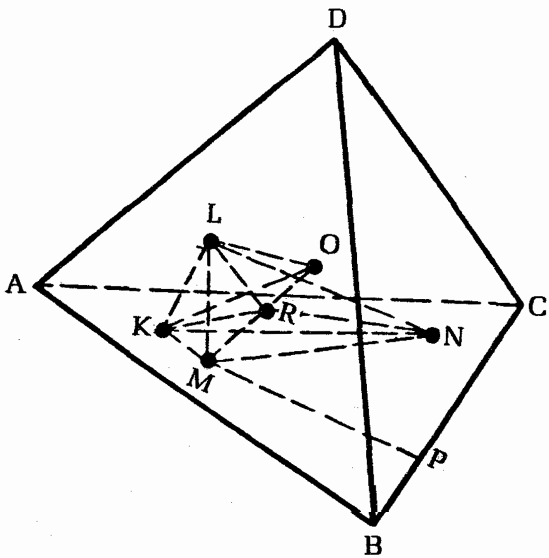
که درآن P وسط AB و Q روی MN قراردارد،

$$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|MQ|}{|QN|}=\frac{\beta}{\alpha}$$

۱۹۰- اگردرچهاروجهی ABCD تساوی $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$ برقرار باشد، درآن صورت مانندآنچه‌که درمسطحه انجام می‌شود، می‌توان ثابت کرد، کره‌ای موجود است که بریالهای AB و BC و CD و DA مماس بوده، وهمه نقاط تماس بین دوسر پاره خطهای AB و BC و CD و DA قرار دارند.
اگر از مرکز کره ویك یال، صفحه‌ای بگذرد، درآن صورت هریك ازفرجه‌های مورد اشاره درشرط مسئله، به دوقسمت تقسیم خواهد شد وبرای هرقسمت فرجه، قسمتی از زاویه مجاور وجود خواهد داشت که با آن برابر باشد.

برای مثال فرجه بین صفحات OAB و ABC برابر است با فرجه بین صفحات OBC و ABC .

۱۹۱- محل برخورد OM وصفحه KLN را با R نشان دهید. (شکل ۴۱) حکم R مرکز ثقل‌مثلث KLM است هم‌ارز این حکم می‌شودکه: حجم‌های چهاروجهی‌های MKLO و MLNO و MNKO باهم برابرند.فاصله M را از اضلاع‌متناظر ABC به ترتیب با x و y و z نشان دهید. چون صفحه KLM، بریال AD عمود است، فاصله O تا KLM برابرمی‌شود با تصویر OM برروی AD، که خود مساوی است با تصویر MP برروی AD . دراینجا، P، پای عمودی است که‌ازنقطه M برBC فرود می‌آید. به‌آسانی دیده می‌شودکه تصویر MP برروی AD برابر است با $\frac{z}{\sqrt{3}}$.که درآن Z فاصله M تا BC می‌باشد.



شکل ۴۱

اگر α فرجه بین وجوه چهاروجهی ABCD باشد، آنگاه

$$V_{KLMO}=\frac{۱}{۶}|KM|\cdot|ML|\sin\alpha\cdot\frac{z}{\sqrt{۳}}=\frac{xyz\sqrt{۲}}{۲۷}$$

هریك از دوچهاروجهی MLNO و MNKO هم، چنین حجمی خواهند داشت.

۱۹۲- چهاروجهی را برروی صفحه‌ای که از N می‌گذرد، و بر CN عمود است، تصویر کنید.

تصاویر A، B، D، K و M را با $A_۱$، $B_۱$، $D_۱$، $K_۱$ و $M_۱$ نشان دهید. فاصله بین BK و CN برابرخواهدبود با فاصله نقطه N از $B_۱K_۱$. بهمین طریق فاصله بین AM و CN برابراست با فاصله نقطه N از $A_۱M_۱$.
اما $A_۱D_۱B_۱$ مثلث متساوی‌الساقین است. خط $A_۱M_۱$ هم ازنقطه $K_۱$ می‌گذرد. ($K_۱$ محل برخورد میانه‌هاست) وچون مثلث $A_۱K_۱B_۱$ نیز متساوی‌الساقین است N به‌یك فاصله از $A_۱K_۱$ و $B_۱K_۱$ قرارخواهد داشت.

۱۹۳- یك رأس قاعدهٔ هرم را با A نشان می‌دهیم و نقطه B را درصفحه وجه جانبی آن اختیار می‌کنیم،

$$|AB|=a$$

تصویرB روی یکی‌از اضلاع قاعده را با $B_۱$، وتصویر B برروی صفحه قاعده را با $B_۲$، وتصویر $B_۲$ برروی یال قاعده‌که مجاور $AB_۱$ می‌باشد با $B_۳$، و تصویر $B_۲$ روی وجه‌جانبی مجاور وجهی که شامل AB است را با $B_۴$ نشان می‌دهیم. (شکل ۴۲).

اگر α فرجه نظیرقاعده هرم باشد،

$$\widehat{BAB_۱}=\varphi$$

خواهیم داشت:

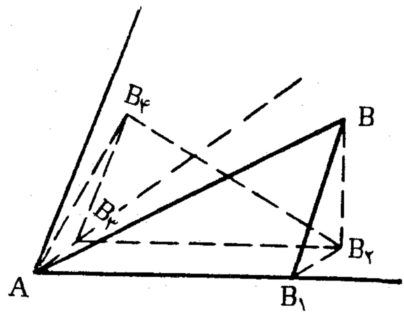
$$|B_۲B_۳|=|AB_۱|=a\cos\varphi$$

$$|AB_۳|=B_۱B_۲|=|B_۱B|\cos\alpha=a\sin\varphi\cos\alpha$$

$$|B_۳B_۴|=|B_۳B_۲|\cos\alpha=a\cos\varphi\cos\alpha$$

وبالاخره

$$|AB_4|=\sqrt{|AB_3|^2+|B_3B_4|^2}=$$
$$=a\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\alpha+\cos^2\varphi\cos^2\alpha}=a\cos\alpha$$



شکل ۴۲

بنابراین نتیجه می‌شود که طول هریك از پاره‌خطهایی که درصفحه جانبی قرار دارند، پس از دوبار تصویرکردن که درمسئله به‌آن اشاره شده در $\cos\alpha$ ضرب می‌شود. (به‌کمك انتقال، یکی‌از دوسر پاره‌خط مفروض را به‌رأس A می‌آوریم.) درنتیجه درچنین تصویرنگاری، هرشکل، به‌شکلی متشابه‌آن بانسبت تشابه‌ای برابر $\cos\alpha$ تبدیل خواهدشد.

۱۹۴- حکم مسئله ازتساوی زیرحاصل می‌شود:

$$V_{AA_1BC}=V_{AA_1B_1C}=V_{AA_1B_1C_1}$$

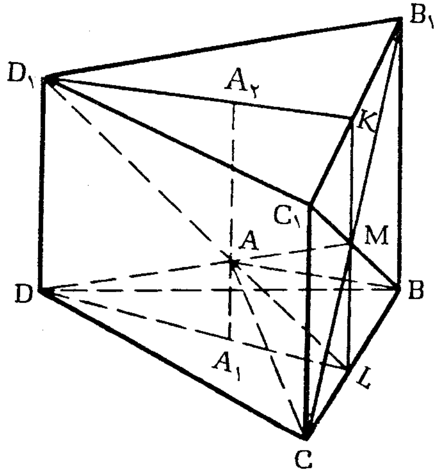
و تساوی‌های مشابه برای حجم هرمهای AA_1CD و AA_1DB هم نوشته می‌شود.

۱۹۵- محل برخورد CB_1 و C_1B را با M نشان می‌دهیم. رأس A ، روی DM قراردارد.

ازنقاط D و D_1 و A یك‌صفحه مروردهید ومحل برخوردآنرا با C_1B_1 و CB، K و L بنامید. محل برخورد خطوط AA_1 و D_1K را هم با A_2 نشان دهید. (شکل ۴۳).

ازاینکه CC_1B_1B ذوزنقه است و KL از محل برخورد اقطار آن می‌گذرد، معلوم می‌شود که،

$$|KM|=|ML|$$



شکل ۴۳

سرانجام با درنظر گرفتن ذوزنقه D_1KLD ثابت می‌کنیم:

$$|AA_1|=\frac{1}{2}|AA_2|$$

درنتیجه،

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{A_2BCD}$$

اما ازمسئله قبل معلوم می‌شود،

$$V_{A_2BCD}=V_{A_1B_1C_1D_1}$$

پس نسبت حجم هرم $A_1B_1C_1D_1$ و $ABCD$ برابر ۳ می‌شود.

۱۹۶- اگر $ABCD$ چهاروجهی مفروض باشد و $|BC|=a$ ، $|CA|=b$ ،

$|AB|=c$ ، $|DA|=m$ ، $|DB|=n$ ، $|DC|=p$، مرکز ثقل‌مثلث ABC را با G ومحل برخورد DM باکره محیطی را با N ومحل برخورد AG بادایره محیطی ABC را با K نشان می‌دهیم. (شکل ۴۴).
از تساوی زیر که قبلا آنرا ثابت‌کرده‌ایم، استفاده می‌کنیم:

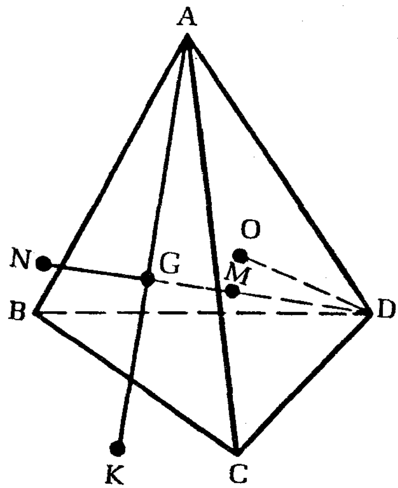
$$|AG| \cdot |GK| = \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

پس،

$$|DG| \cdot |GN| = |AG| \cdot |GK| = \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

درنتیجه،

$$|GN| = \frac{a^2+b^2+c^2}{9t}$$



شکل ۴۴

که درآن،

$$t=|DG|=\frac{1}{3}\sqrt{3m^2+3n^2+3p^2-a^2-b^2-c^2} \quad (1)$$

(مسئله ۵۱ را نگاه‌کنید).

$$|DN|=|DG|+|GN|=t+\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۹t}=\frac{m^{۲}+n^{۲}+p^{۲}}{۳t}$$

حکم OM بر DM عمود است، هم‌ارزاست با

$$|DN|=۲|DM|=۲\times\frac{۳}{۴}|DG|=\frac{۳}{۲}t$$

یعنی،

$$\frac{m^{۲}+n^{۲}+p^{۲}}{۳t}=\frac{۳}{۲}t$$

از آنجا با قراردادن عبارت (۱) به‌جای t خواهیم داشت،

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=m^{۲}+n^{۲}+p^{۲} \qquad (۲)$$

اگر $A_۱$ و $B_۱$ و $C_۱$ به‌ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های DBC و DCA و DAB باشند، درآن‌صورت درچهاروجهی $A_۱B_۱C_۱D$ خواهیم‌داشت،

$$|B_۱C_۱|=\frac{a}{۳} \text{ ، } |A_۱C_۱|=\frac{b}{۳} \text{ ، } |A_۱B_۱|=\frac{c}{۳}$$

$$|DA_۱|=\frac{۲}{۳}m_a \quad \text{،} \quad |DB_۱|\frac{۲}{۳}n_b \quad \text{،} \quad |DC_۱|=\frac{۲}{۳}p_c$$

که درآن m_a و n_b و p_c به‌ترتیب میانه‌های اضلاع BC و CA و AB در مثلث‌های DBC و DCA و DAB هستند.

اگر $t_۱$ فاصله رأس D ازنقطه M باشد، درآن‌صورت، چون بنابه‌فرض M بر روی سطح کره محیط برچهاروجهی $A_۱B_۱C_۱D$ قراردارد و DM از مرکز ثقل مثلث $A_۱B_۱C_۱$ می‌گذرد، پس برای تعیین اندازه $|DM|$ می‌توانیم‌ازفرمول‌زیر استفاده‌کنیم که دربالا برای محاسبه $|DN|$ به‌دست‌آورده‌ایم. یعنی

$$|DM|=\frac{۴m_a^{۲}+۴n_b^{۲}+۴p_c^{۲}}{۲۷t_۱}$$

که درآن

$$t_1=\frac{1}{9}\sqrt{12(m_a^2+n_b^2+p_c^2)-a^2-b^2-c^2}$$

با استفاده از فرمول، برای طول میانه مثلث خواهیم‌داشت:

$$|DM|=\frac{4m^2+4n^2+4p^2-a^2-b^2-c^2}{27t_1}$$

که درآن،

$$t_1=\frac{2}{9}\sqrt{3m^2+3n^2+3p^2-a^2-b^2-c^2}=\frac{2}{3}t$$

ازطرف دیگر،

$$|DM|=\frac{3}{4}t$$

یعنی،

$$\frac{4m^2+4n^2+4p^2-a^2-b^2-c^2}{18t}=\frac{3}{4}t$$

با قراردادن (۱) به‌جای t (۲) را بدست می‌آوریم که اثبات آن مورد نظر بود.

۱۹۷- محورتقارن ثابت l را درنظر می‌گیریم.

اگر l' هم محورتقارن باشد و محورتقارن l را قطع نکند، یا بەزاویه قائمه آنرا قطع نکند، درآن صورت l'' هم‌که قرینه l' نسبت به l است محور تقارن خواهد بود. واضح است‌که اگرخطی مانند l_1 محورتقارن باشد، l را قطع و برآن عمود بشود، درآن‌صورت l_2 ازمحل برخورد l و l' می‌گذرد وبر آنها عمود می‌شودکه خود یك محورتقارن است.

این بررسی را می‌توان بەطریق زیرهم انجام داد.

l و l_1 و l_2 را محورهای مختصات درنظرمی‌گیریم. بطورمتوالی‌قرینه $M(x,y,z)$ را نسبت به l و l_1 بەدست می‌آوریم، ابتدا نقطهٔ M را به

$$M_1(x\,,\,-y\,,\,-z)$$

وسپس M_1 را به

$$M_2(-x\,,\,-y\,,\,-z)$$

می‌بریم به‌این‌ترتیب عمل تقارن متوالی نسبت به I و I_1 هم‌ارز باانجام عمل‌تقارن نسبت به I_2 صورت می‌گیرد.
استدلال ما نشان میدهدکه همه محورهای تقارن به‌جز I می‌تواند به دسته‌های زوج تقسیم شود، یعنی تعداد محورهای تقارن اگرمتناهی باشند، فردند.

۱۹۸- تصویرB را برروی AD، نقطه M بنامید. واضح است‌که M به‌سطح کره‌ای تعلق داردکه به‌قطر AB رسم می‌شود.
از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$|AM|\times|AD|=|AB|^2$$

ازآنجا معلوم می‌شودکه تمام نقاط M باید به‌یك‌کره معین‌تعلق داشته‌باشندکه‌دایره مفروض را شامل می‌شود. پس‌نقاط M به‌یك دایره تعلق دارندکه در طول‌آن، این دوسطح کروی یکدیگررا قطع می‌کنند.

۱۹۹- ثابت‌کنید تصاویرM برروی اضلاع چهارضلعی ABCD ، برروی یك‌کره قرار دارند.
(اگر K و L تصویرنقطهٔ M برروی AB و BC باشند،آنگاه B و K وM و L روی یك دایره قرارمی‌گیرند و بنابراین،

$$\widehat{MLK}=\widehat{MBK} \text{ ، } \widehat{MKL}=\widehat{MBL}$$

به‌همین‌ترتیب برای اضلاع دیگر). سپس ازنتیجه مسئله ۱۹۸ کمك بگیرید.

۲۰۰- چون مرکز ثقل، روی خطوطی قراردارد‌که اوساط یالهـای AB و CD را به‌هم وصل می‌کنند، ازفرض مسئله نتیجه می‌شودکه این خط بریالهای AB و CD عمود است.

۲۰۱- اوساط یالهای AB و CD را K وM بنامید. ازفرض مسئله معلوم می‌شودکه خط KM، ازنقطه O مرکز کرهٔ محاطی‌می‌گذرد ونقطهٔ O به‌یك‌فاصله ازوجوه ACD و BCD قراردارد. درنتیجه، نقطهٔ K نیز به‌یك‌فاصله از این وجوه قرار خـواهد داشت. ازآنجا معلوم می‌شودکه این وجوه ، معادل هستند. به‌طریق مشابه، وجـوه ABC و ABD هم معادل می‌شوند. اکنون اگر چهاروجهی را برروی صفحه‌ای، موازی با یالهای AB وCD تصویرکنیم، تصویرآن یك‌متوازی‌الاضلاع به‌اقطار AB و CD خواهدشد. ازآنجا حکم مسئله به‌اثبات می‌رسد.

۲۰۲- مکعب را حول قطر AC_1 به‌اندازهٔ زاویه‌ای، دوران دهید. چون‌صفحه‌مثلث A_1BD بر AC_1 عمود است واضلاع آن برکره محاط درمکعب مماس هستند، اضلاع مثلث که پس‌از دوران از A_1BD بدست می‌آیند، همچنان برکرهٔ محاطی‌مماس خواهند بود. باانتخاب مناسب زاویه دوران، وجه AA_1B_1B برصفحه مفروض برده می‌شود وپاره‌خط MN پاره‌خطی ازوجه دوران یافته می‌گردد.

۲۰۳- زوایایی راکه وجوه قائم، با وجه چهارم می‌سازند α و β و γ بنامید. اگر S_1 و S_2 و S_3 و S_4 به‌ترتیب مساحتهای وجوه باشند. آنگاه،

$$S_1=S_4\cos\alpha \quad ، \quad S_2=S_4\cos\beta \quad ، \quad S_3=S_4\cos\gamma$$

علاوه براین می‌توانیم از فرمول،

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

هم استفاده‌کنیم. واین به‌خاطر آن است‌که مثلا زوایایی‌که ارتفاع وارد بروجه چهارم، با یالهای جانبی هرم می‌سازد، برابر α و β و γ می‌شوند. (مسئله ۱۰ را نگاه‌کنید.)

۲۰۴- خط راستی را عمود برصفحهٔ مفروض درنظر بگیرید وزوایایی راکه این خط با یالهای مکعب می‌سازد، α و β و γ بنامید. اندازه‌های تصاویر یالها روی صفحه، $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ و $\sin\gamma$ می‌شوند. وچون

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

پس مجموع مربعات تصاویر برابرخواهدبود با

$$4a^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=8a^2$$

که درآن a طول یال مکعب است.

۲۰۵- ازهر یال چهاروجهی، صفحه‌ای به‌موازات یال مقابل آن مرور دهید. مکعبی‌خواهیم داشت‌که یك چهاروجهی در داخل آن محاط شده‌است. اگر یالهای چهاروجهی را b درنظر بگیریم، یال مکعب برابر $b/\sqrt{2}$ خواهدبود. تصویر هریك از وجوه مکعب، یك متوازی‌الاضلاع می‌شودکه اقطار آن، برابر با تصاویر یالهای چهار وجهی می‌باشد. مجموع مربعات همهٔ اقطار برابراست با دوبرابر مجموع مربعات تصاویر یالهای چهاروجهی، وبرابراست با دوبرابرمجموع مربعات‌تصاویریالهای مکعب. با استفاده ازنتیجه مسئلهٔ قبل، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع مربعات

تصاویر یالهای یك چهاروجهی منتظم، روی هرصفحه دلخواه، برابر است با

$$\frac{۸b^۲}{۲}=۴b^۲$$

۲۰۶- ابتدا حالتی را درنظر بگیرید که خطوط داده شده با هم متنافر باشند. موقعیت‌های نقاط را دریك لحظه زمانی با A و B نشان می‌دهیم ونسبت شتابهای آنها را K می‌نامیم. (شتاب جسم واقع درنقطهٔ A، K برابرشتاب جسم دیگر است.) روی خط AB، دونقطه M و N به‌قسمی یافت می‌شوند که

$$|AM| : |MB|=|AN| : |NB|=K$$

(نقطه M روی پاره خط AB قرار دارد)، وسط MN را با O نشان می‌دهیم.

برهان حکم مسئله به حالتهای زیرتقسیم می‌شود:

(۱) نقاط O و M و N برروی خطوط راست حرکت می‌کنند وخطوط راستی که نقاط O و A و B و M و N برروی آنها حرکت می‌کنند با یك‌صفحه موازی‌اند.

(۲) خطوطی‌که نقاط M و N برروی آنها حرکت می‌کنند متقابلا برهم‌عمودند.

(۳) اگردوخط برهم عمود ومتنافر باشند، آنگاه هرکره‌ای که برروی پاره خطهایی بنا شود که انتهایشان براین‌خطوط متکی‌اند وقطرکره را تشکیل‌میدهند، ازنقاط P و Q می‌گذرد. در اینجا، PQ عمود مشترك این خطوط است. (P و Q روی خطوط قرار دارند.)

(۴) مکان هندسی‌نقاط L به‌قسمی‌که $|AL| : |LB|=K$ عبارت ازسطح‌کره‌ای است‌که به‌قطر MN وبرروی MN ساخته می‌شود.

از احکام (۱) و(۴) نتیجه می‌شود دایره‌ای‌که وجودآن درمسئله قید شده، دایره‌ای است‌که از دوران نقطه P (یا Q) حول خط راستی‌که نقطه O روی‌آن حرکت می‌کند، بدست می‌آید. در اینجا، P و Q انتهای عمود مشترك خطوطی است‌که M و N روی‌آن حرکت می‌کنند.

قسمت‌های (۱) و (۲) را می‌توان ثابت‌کرد. مثلا اینطور:

فرض‌کنیم $A_۰$ و $B_۰$ مکان نقاط دریك زمان ثابت ومعینی باشند. فرض می‌کنیم تصاویرنقاط مورد نظر ما بر روی صفحه‌ای که موازی خط مفروض است، موازی با $A_۰B_۰$ باشد. نقاط $A_۰$ و $B_۰$ بر روی نقطه C تصویر خواهند شد. نقاط A، B، و M و N و O هم بر نقاط نظیر خود A' و B' و M' و N' و O'

تصویر می‌شوند. پس نقاط M' و N' انتهای نیمسازهای داخلی وخارجی زاویه C از مثلث $A'B'C'$ خواهد بود. ازآنجا M' و N' و O' برروی یك خط راست حرکت خواهندکرد و $\widehat{M'CN'}=90^\circ$. از اینجا نتیجه می‌شود که نقاط M و N و O هم روی یك خط راست حرکت می‌کنند، زیرا واضح است که هریك از این نقاط روی صفحه ثابتی به‌موازات خطوط داده شده قراردارند.

بند (۳) واضح است. بند (۴) ازبحث متناظر باآن درهندسه مسطحه پیدا می‌شود. درحالتی‌که نقاط A و B روی دوخط متقاطع حرکت‌کنند، برهان مربوطه قدری تغییرمی‌کند. وحل مسئله کاهش می‌یابد به‌برهانی درداخل صفحه، که خطوط مفروض مسئله را شامل می‌شود. دونقطه ثابت P و Q وجود دارند به‌قسمی‌که:

$$|AP| : |PB| = |AQ| : |QB| = K$$

۲۰۷- مرکزکره را با O، وشعاع آنرا با r نشان دهید. AP و BQ مماس‌های مرسوم برکره‌اند. (P و Q نقاط تماس هستند) و M محل برخورد AP و BQ. با قراردادن،

$$|OA|=a \quad \text{و} \quad |OB|=b \quad \text{و} \quad |PM|=|QM|=x$$

داریم،

$$|AM|^2=(\sqrt{a^2-r^2}\pm x)^2 \quad , \quad |OM|^2=r^2+x^2$$

$$|BM|^2=(\sqrt{b^2-r^2}\pm x)^2$$

اگرعلائم را یکسان درنظر بگیریم، روابط زیررا خواهیم داشت،

$$\sqrt{b^2-r^2}\,|AM|^2-\sqrt{a^2-r^2}\,|BM|^2+(\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2})|OM|^2=l_1 \qquad (1)$$

اگرعلائم مختلف درنظر بگیریم آنگاه،

$$\sqrt{b^2-r^2}\,|AM|^2+\sqrt{a^2-r^2}\,|BM|^2-(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2})\,|OM|^2=l_2 \qquad (2)$$

که درآن l_1 و l_2 ثابت‌های وابسته به r و a و b هستند.

چون مجموع ضرایب $|AM|^2$ و $|BM|^2$ و $|OM|^2$ در(۱) و(۲) برابرصفر است مکان نقطه M برای هریك از این روابط، یك صفحه خواهد بود. درهردو حالت این صفحه، برصفحه OAB عمود است.

۲۰۸- ABC را مثلث مفروض درنظر می‌گیریم. اضلاع آن را a و b و c می‌نامیم. شعاعهای سه کره‌ای که بریکدیگر مماس و برصفحه مثلث هم درنقاط A و B و C مماسند، به‌ترتیب برابر است با $\frac{bc}{2a}$ و $\frac{ca}{2b}$ و $\frac{ab}{2c}$. شعاع کره‌ای راکه به سه کره مفروض وصفحه مثلث مماس است x درنظرمی‌گیریم ونقطه تماس این کره را هم با صفحه، M می‌نامیم. داریم،

$$|MA|=2\sqrt{\frac{bcx}{2a}} \quad ، \quad |MB|=2\sqrt{\frac{acx}{2b}} \quad ، \quad |MC|=2\sqrt{\frac{abx}{4c}}$$

درنتیجه،

$$|MA| : |MB| = b : a \quad ، \quad |MB| : |MC| = c : b$$

یا

$$|MA| : |MB| : |MC| = bc : ac : ab$$

برای هرمثلث غیرمتساوی‌الاضلاع، دونقطه M_1 و M_2 موجوداست که این رابطه درباره‌آن صادق باشد: دراینجا ازقضیه برتشنیدیر استفاده می‌کنیم. اگر $ABCD$ یك چهارضلعی مسطحه باشدکه در آن $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ و $DA=d$ و $AC=m$ و $BD=n$، مجموع زوایای $\widehat{A}+\widehat{C}=\varphi$، آنگاه تساوی زیر برقرار خواهد بود،

$$m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos\varphi$$

سپس نتیجه می‌گیریم که اگر $\widehat{A}=\alpha$ کوچکترین زاویه‌مثلث باشد، آنگاه زوایای $\widehat{BM_1C}$ و $\widehat{BM_2C}$ برابر $60^\circ+\alpha$ و $60^\circ-\alpha$ خواهند بود.

اگر $\widehat{BM_1C}=60^\circ+\alpha$، قضیه کوسینوسها را درمثلث BM_1C می‌نویسیم و شعاع کره مماس برصفحه را درنقطه M_1، $r(x=r)$ می‌نامیم.

$$a^2=\frac{2acr}{b}+\frac{2abr}{c}-4ar\cos(60^\circ+\alpha) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r}=2\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}-\frac{2\cos(60^\circ+\alpha)}{a}\right) \qquad (1)$$

به‌طریق مشابه اگرشعاع کره مماس برصفحه، درنقطه M_2 را با ρ نشان دهیم،

خواهیم داشت،

$$\frac{1}{\rho}=2\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}-\frac{2\cos(60^\circ-\alpha)}{a}\right) \qquad (2)$$

با کم کردن (۲) از (۱) نتیجه می‌شود،

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}=\frac{4[\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)]}{a}=\frac{8\sin 60^\circ \sin\beta}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{R}$$

و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۰۹- وسط AB را با M، ومراکز کره‌ها را با O_1 و O_2 وشعاعهای آنها را با R_1 و R_2 نشان دهید. داریم،

$$|MO_1|^2-|MO_2|^2=\left(R_1^2+\frac{|AB|^2}{4}\right)-\left(R_2^2+\frac{|AB|^2}{4}\right)=R_1^2-R_2^2$$

واین بدان معنی است که اوساط همه پاره خطهایی که بر کره‌های مفروض مماسند، بر روی صفحه‌ای قرار دارند، که بر O_1O_2 عمود است واز آنجا درستی حکم مسئله به‌اثبات می‌رسد.

۲۱۰- چنین پنج ضلعی‌ای وجود ندارد.

۲۱۱- $A_1A_2A_3A_4A_5$ را پنج ضلعی مفروض درنظرمی‌گیریم. ازفرض مسئله معلوم می‌شود که همه قطرهای پنج ضلعی، باهم برابرند. سه رأس پنج ضلعی را طوری انتخاب کنید که دورأس باقیمانده آن، دریك طرف صفحه‌ای قرارگیرد که سه‌رأس انتخاب شده را معین‌می‌کند. این رئوس را A_2 و A_3 و A_5 بنامید. پس رئوس A_1 و A_4 نسبت به‌صفحه‌ای که ازوسط A_2A_3 می‌گذرد وبر A_2A_3 عمود است قرینه یکدیگر می‌شوند. این موضوع ازآنجا نتیجه می‌شود که مثلث $A_2A_3A_5$ متساوی‌الساقین است،

$$|A_2A_5|=|A_3A_5|$$

A_1 و A_4 دریك‌طرف صفحه $A_2A_3A_5$ قراردارد و $|A_1A_2|=|A_4A_3|$ و $|A_1A_3|=|A_4A_2|$ و $|A_1A_5|=|A_4A_5|$.

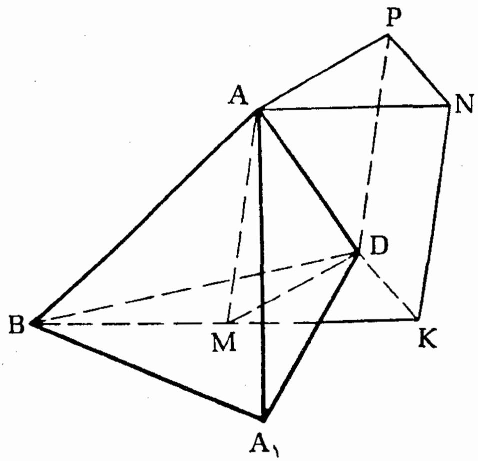
بنابراین‌نقاط A_1 و A_2 و A_3 و A_4 برروی یك صفحه قراردارند. بقیه برهان بدیهی است. حالاتی که صفحه مطلوب ازسایر رئوس می‌گذرد نیز، به‌طریق مشابه

بررسی می‌شود.

۲۱۲- نقطه M را محل برخورد قطر AC_1، با صفحه A_1BD درنظر بگیرید. پس M محل برخورد میانه‌های مثلث A_1BD می‌شود (این نقطه را نقطه میانه‌ای مثلث می‌نامند) علاوه براین، M قطر AC_1 را به‌نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند، یعنی

$$|AM|=\frac{1}{3}d$$

هرم ABA_1D را درنظر بگیرید. (شکل ۴۵)



شکل ۴۵

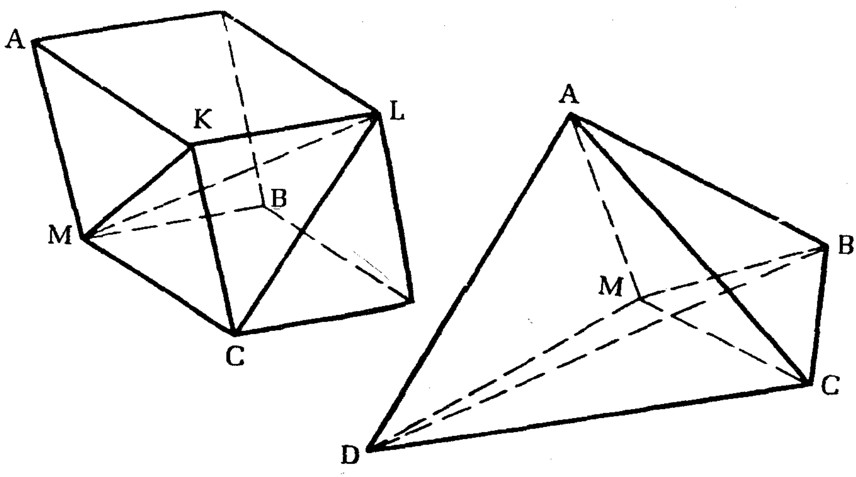
روی BM نقطه K را طوری اختیارکنیدکه $|MK|=|BM|$ و سپس منشور $MKDANP$ را بسازید. به‌آسانی‌متوجه خواهید شدکه فواصل بین‌یالهای‌جانبی این منشور، به‌ترتیب برابر است با فواصل نقاط A_1 و B و D از AM. در نتیجه اضلاع مقطع که عمود بر یالهای جانبی منشور $MKDANP$ هستند، برابر این‌فواصل می‌شوند. علاوه براین، حجم هرم ABA_1D، باحجم منشورساخته شده برابر است و مقدارش یك ششم حجم متوازی‌السطوح می‌شود یعنی،

$$\frac{1}{6}V=\frac{1}{3}dS$$

$$V=2dS$$

۲۱۳- نقطه M را مرکز ثقل چهاروجهی ABCD درنظر بگیرید. حجم چهاروجهی MABC برابر $\frac{1}{4}$ حجم چهاروجهی مفروض است. چهاروجهی MABC را تکمیل کنید تا درمتوازیالسطوح حاصل،پارهخطهای MA و MB و MC یالهای آن گردند. درشکل ۴۶ اینمتوازیالسطوح بطورجداگانه نشان داده شدهاست. واضح است که یالهای MC و CK و KL وقطر ML از این متوازیالسطوح بهترتیب، مساوی وموازی است با MC و MA و MB و MD. اما حجم هرمهای MABC و MCKL باهم برابرند. یعنی حجم هریك ازآنها برابر است با $\frac{1}{4}V_{ABCD}$. درنتیجه حجم چهاروجهیمورد سئوال درمسئله برابراستبا

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} V_{ABCD} = \frac{16}{27} V$$



شکل ۴۶

۲۱۴- وقتی مسئلهٔ ۱۸۰ را حل میکردیم، ثابت کردیم که ، مجموع بردارهای عمود بسر وجوه چهاروجهی،که جهتآنها بطرف خارج وجوه باشند، وطولهایآنها ازنظر اندازه، برابر با مساحت وجوه نظیرآنهاگردند، برابرصفر است. بنابراین معلوم میشود چهاروجهی KLMN وجود دارد. برای پیداکردن حجم چهاروجهی از فرمول زیر کمك میگیریم،

$$V=\frac{1}{6}abc\sin\alpha\sin\beta\sin C$$

که درآن a و b وc به‌ترتیب طولهای یالهایی هستندکه ازیك رأس چهاروجهی خارج می‌شوند. α وβ را دوزاویه از این رأس و C را فرجه بین صفحات وجوه متناظر با زوایای α و β بنامید. اگر α و β و γ همه، زوایای رأس، و A و B و C فرجه‌ها باشند، آنگاه

$$V^3=\left(\frac{1}{6}\right)^3a^3b^3c^3\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin A\sin B\sin C \qquad (1)$$

اکنون نقطه‌ای را در داخل چهاروجهی اختیارکنید وازآن نقطه، عمودهایی را بر سه وجه نظیرفرجه‌هایی‌که درشرط مسئله قید شده فرودآورید. روی هریك ازآنها پاره خطی را جداکنیدکه طول‌آن، از نظر اندازه با مساحت‌آن وجه برابر باشد. واضح است‌که حجم چهاروجهی‌ای‌که بااین پاره خطها ساخته می‌شود، برابراست با حجم چهاروجهی KLMN.

زوایای رأس‌کنج سه‌وجهی‌ای‌که بااین پاره خطها ساخته می‌شود، برابر است با $180^\circ-A$، $180^\circ-B$ و $180^\circ-C$ و فرجه‌ها برابرند با $180^\circ-\alpha$، $180^\circ-\beta$ و $180^\circ-\gamma$. درنتیجه بااستفاده ازتساوی (۱)، W، حجم این‌چهار وجهی را پیدا می‌کنیم

$$W^3=\left(\frac{1}{6}\right)^3S_1^3S_2^3S_3^3\sin^2A\sin^2B\sin^2C\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad (2)$$

که درآن S_1 و S_2 و S_3 به‌ترتیب مساحت‌هـای وجوه ایجاد شده با یالهای a و b و c می‌باشند یعنی

$$S_1=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad ، \quad S_2=\frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad ، \quad S_3=\frac{1}{2}ca\sin\beta$$

با قراردادن S_1 و S_2 و S_3 در (۲) خواهیم داشت،

$$W^3=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9a^6b^6c^6\sin^4\alpha\sin^4\beta\sin^4\gamma\sin^2A\sin^2B\sin^2C \qquad (3)$$

ازمقایسه تساوی‌های (۱) و (۳) خواهیم داشت،

$$W=\frac{3}{4}V^2$$

۲۱۵- حکم مسئله از این عامل نتیجه میشود که حاصلضرب پاره خطهایی از هر وتر، که وسیله نقطه تقاطعشان بوجود آمده، باهم برابرند.

۲۱۷- حکم مسئله از یك موضوع هندسه مسطحه نتیجه میشود که، اگر از نقطهای مانند P درخارج دایره، دوخط رسم کنیم که به ترتیب دایره را درنقاط A و A_1 و B و B_1 قطع کنند، آنگاه خط A_1B_1 موازی با خط مماس بردایره محیطی PAB است که از نقطه P میگذرد.

بهاین ترتیب، مجموعه نقاط تحت شرایط مسئله، متعلق است، بهصفحهای موازی با صفحهای که بر کرهٔ (درنقطه P) مماس بوده واز دایره مفروض ونقطه P میگذرد.

۲۱۸- معادلهٔ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=K(x-c)^2$$

معادله یك سطح مخروطی است که راس آن، $S(a,b,c)$ ومحور آن، موازیمحور z ها و $K=\operatorname{tg}\alpha$ میباشد. دراینجا α زاویه بین محور ومولد مخروط است. با کم کردنمعادلات دوسطح مخروطی بامحورهای موازیبا محور z ها، وپارامتر K وراسهای متمایز، یك رابطه خطی بین x و y و z بدست میآوریم.

۲۱۹- محل برخورد KL و MN را با F ، ومحل برخورد PE وکرهای راکه ازنقاط P و A و B و C میگذرد، با E نشان دهید. (با فرض اینکه نقطه P بر روی صفحه وجه ABC قرارندارد). نقاط P، Q، R و E بهدایرهای تعلق دارندکه ازتقاطع کره مار بر P، A، B، C وصفحه مار بر نقاط P، K، L بوجودآمده است. اما چون F محل برخورد خطوط KL و MNاست، نقاط P، S، T و E باید بهدایرهای تعلق داشته باشندکه، مقطع کره ماربرنقاط P، A، C، D وصفحه مار برنقاط P، M و N است. پس نقاط P، Q، R، S و R روی دودایرهای قرار میگیرندکه، درنقاط P و E مشترکند وبهیك کره تعلق دارند.

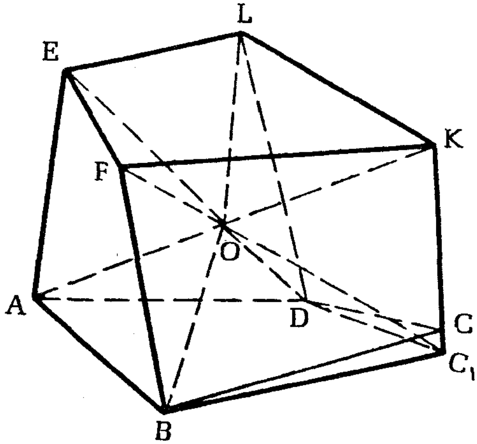
یادآوری- درحالت کلی، ازنظرمکان هندسی، مسئله را بررسی کردیم. برای اینکه حل کامل باشد، حالتهای خاص را هم باید در مدنظر قرارداد. ازجمله P درداخل وجه قرارگیرد، KL و MN موازی باشند وغیره.

۲۲۰- یالهای SA، SB ، SC و SD ازکنج چهاروجهی را، مولدهای مخروطی در نظرمیگیریم که محور آن SO باشد. درکنج سه وجهیکه با SO و SB و SC ایجاد میشود، فرجههای نظیر SA وSB برابرند. با درنظرگرفتن سه کنج دیگر

از این نوع، به‌آسانی مجموع فرجه‌های متقابل کنج چهاروجهی را پیدا می‌کنیم که باهم برابر می‌شوند.

برعکس، اگرمجموع فرجه‌های متقابل برابر باشند، مخروطی را درنظر بگیرید که SA و SB و SC مولدهای آن باشند. فرض‌کنید SD مولد نباشد، SD_1 را خطی درنظر بگیریدکه درطول آن، سطح مخروط وصفحه ASD همدیگر را قطع‌کرده باشند. به‌این ترتیب دوکنج چهاروجهی $SABCD$ و $SABCD_1$ بدست می‌آیندکه در هریك ازآنها، مجموع فرجه‌های متقابل باهم برابرند. واین دلالت برآن داردکه، درکنج سه‌وجهی که مکمل‌کنج $SCDD_1$ است، (حل‌مسائل ۱۶۵ و ۱۶۶ را نگاه‌کنید) یك زاویه رأس برابر است با مجموع دوتای دیگر واین ممکن نیست.

۲۲۱- اگرهمه رئوس شش وجهی $ABCDEFKL$، به‌جز C روی سطح کره‌ای به‌مرکز O باشند، (شکل ۴۷) محل برخورد KC را با سطح‌کره، C_1 بنامید. ازنظر



شکل ۴۷

خلاصه‌نویسی، فرجه بین صفحات FEO و FLO را با علامت $\sphericalangle FEL$ نشان دهید (بقیه فرجه‌ها را هم بهمین طریق مشخص می‌کنیم.) بااستفاده مستقیم ازمسئله ۲۲۰ می‌توان نوشت،

$$\sphericalangle FEL + \sphericalangle FKL = \sphericalangle EFK + \sphericalangle ELK$$

$$\sphericalangle AEF + \sphericalangle ABF = \sphericalangle EAB + \sphericalangle EFB$$

$$\sphericalangle AEL+\sphericalangle ADL=\sphericalangle ELD+\sphericalangle EAD$$

$$\sphericalangle FKC_1+\sphericalangle FBC_1=\sphericalangle KFB+\sphericalangle KC_1B$$

$$\sphericalangle LKC_1+\sphericalangle LDC_1=\sphericalangle KLD+\sphericalangle KC_1D$$

با جمع کردن همه این تساویها ودرنظر داشتن اینکه، مجموع هرسه فرجه که یك یال مشترك دارند، (OE بنامید) برابر 2π است، خواهیم داشت،

$$\sphericalangle ABC_1+\sphericalangle ADC_1=\sphericalangle BAD+\sphericalangle BC_1D$$

و این بدان معنی است (عکس مسئله ۲۲۰ را نگاه کنید)که یالهای OA و OB و OC_1 و OD مولدهای یك مخروط هستند. بنابراین نتیجه میشود که C_1 در صفحه ABD قرار دارد، یعنی C_1 بر C منطبق است.

حالتیکه O درخارج چند وجهی باشد، ملاحظات جداگانهای را لازم دارد.

۲۲۲- $ABCD$ را چهاروجهی مفروض ونقاط، K و L و M و N و P و Q را به ترتیب نقاط مفروض برروی یالهای AB و AC و CD و AD و BC وCD و DB درنظر بگیرید. محل برخورد دایرههایی راکه از K، B، N، C، L و N میگذرند، با D_1 نشان دهید. بهآسانی ثابت میشودکه D_1 بهدایرهای تعلق داردکه ازنقاط A و K و L میگذرد. بهطریق مشابه، نقاط A_1 و B_1 و C_1 را هم درصفحات BCD و ACD و ADB تعیینکنید.

و بالاخره، محل برخورد سهکره محیطی چهاروجهیهای $KBNQ$ و $LCNP$ و $NDPQ$ را F بنامید. ازنتیجه مسئله ۲۲۱ استفادهکنید. درچند وجهیکه راسهای آن B، N، A_1، Q، K، D_1، F و C_1 میباشند، همه رئوس برروی سطح یك کره قرار دارند. پنج وجه BKD_1N، BKC_1Q، BNA_1Q، D_1NA_1F و A_1QC_1Fچهارضلعیهای مسطحه هستند، درنتیجهKD_1FC_1 نیزچهارضلعیمسطحه است. بههمین طریق ثابتکنید LD_1FB_1 وMB_1FC_1 نیز چهارضلعیهایمسطحه هستند. وبالاخره، درشش وجهی $AKD_1LMB_1FC_1$ هفت راس، A، K، D_1، L، M، B_1 و C_1 برروی سطحکرهای قرار دارندکه از نقاط A، K، L و M میگذرد. بنابراین نقطه F برروی همینکره قرار دارد.

جوابها، راهنمایی‌ها، وحل‌ها

بخش سوم

۲۲۴- رأس کنج را با S نشان می‌دهیم. کنج را با صفحه‌ای قطع کنید به‌قسمی‌که درهرم حاصل SABCD ، ABCD قاعده و یالهای متقابل جانبی برابر باشند:

$$|SA|=|SC| \quad ، \quad |SB|=|SD|$$

(ثابت‌کنید این‌کار همیشه امکان‌پذیراست). چون زوایای رأس برابرند، ABCD یك لوزی خواهدبود. محل برخورد AC و BD را O بنامید.

$$|AC|=۲x \quad ، \quad |BD|=۲y \quad ، \quad |SO|=z$$

درنظر بگیرید وفرض‌کنید:

$$x\leqslant y$$

اگر $\widehat{ASC}$ و $\widehat{BSD}$ حاده باشند، آنگاه $z>y$ یعنی درمثلث ASB،

$$|AB|<|AS|<|BS|$$

وازآنجا، $\widehat{ASB}$ کوچکترین زاویه دراین مثلث و

$$\widehat{ASB}<۶۰^\circ \ .$$

فرض اینکه هردو زاویه منفرجه باشد هم، به‌همین طریق بررسی می‌شود.

۲۲۵- از Sh تا $\frac{۴}{۳}Sh$

۲۲۶- بزرگترین‌حجم، از آن چهاروجهی‌ای است‌که دویال متقابل درآن دوبه‌دو متناظراً بریکدیگرعمود، واقطارقاعده‌ها بشوند. حجم آن برابرمی‌شود با،

$$\frac{۲}{۳}R^{۲}h$$

۲۲۷- اگر

$$|AB|=|BC|=۱ \quad ، \quad |AA_{۱}|=x$$

$$V_{DD_{۱}BC_{۱}}=\frac{۱}{۳}S_{DBD_{۱}} \cdot \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۶}x$$

از طرف دیگر،

$$V_{DD_{۱}BC_{۱}}=\frac{۱}{۳}S_{DBC_{۱}}|D_{۱}B| \sin\varphi=$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۶}\cdot\sqrt{\frac{۱}{۲}+x^{۲}}\cdot\sqrt{۲+x^{۲}}\sin\varphi$$

که درآن φ زاویهٔ بین $D_{۱}B$ وصفحهٔ $DBC_{۱}$ است. پس،

$$\sin\varphi=\frac{x}{\sqrt{(۲+x^{۲})(۱+۲x^{۲})}} \;,$$

$$\frac{۱}{\sin^{۲}\varphi}=۲x^{۲}+\frac{۲}{x^{۲}}+۵\geqslant ۹$$

ازآنجا نتیجه می‌شودکه بیشترین مقدار φ برابر $\operatorname{Arc}\sin\frac{۱}{۳}$ است.

۲۲۸- ارتفاع منشوررا واحد درنظر می‌گیریم و

$$|AM|=x$$

دایره محیطی مثلث $A_{۱}MC_{۱}$ را رسم‌کنید. جسمی را درنظر بگیریدکه ازدوران

کمان A_1MC_1 از این دایره، حول وتر A_1C_1 به‌وجود آمده باشد. زاویهٔ A_1MC_1، بیشترین مقداررا خواهند داشت اگر، خط AB برسطح جسم به‌عنوان مولد مماس بشود. واین وقتی اتفاق می‌افتد که MO و AB که درآن O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، متقابلا برهم عمود بشوند. بنابراین خط MO ، A_1C_1 را به‌نسبت زیر تقسیم می‌کند،

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{x}{۲-x}$$

ازطرف دیگر، می‌توان نشان دادکه MO، A_1C_1 را به‌نسبت زیرتقسیم می‌کند،

$$\frac{|A_1M|\cos \widehat{A_1C_1M}}{|C_1M|\cos \widehat{C_1A_1M}}$$

با بیان اضلاع و کسینوس زوایای مثلث A_1MC_1 برحسب x ، معادله زیر به‌دست می‌آید،

$$\frac{(۱+x^۲)(۴-x)}{x(۹-۴x+x^۲)}=\frac{x}{۲-x} \Longleftrightarrow x^۳+۳x-۴=۰$$

ازآنجا،
$$x=۱$$

بیشترین مقدار زاویهٔ A_1MC_1 برابر می‌شود با، $\frac{\pi}{۲}$.

۲۲۹- خطوط AE و CF متقابلا برهم عمودند. اگر Q_1 تصویر Q روی صفحه ABB_1A_1 باشد، Q_1 روی پاره خط BL قرار خواهدگرفت. ازآنجا L وسط AA_1 می‌شود.

محل برخورد AE و LB را N می‌نامیم. به‌آسانی می‌توان محاسبه‌کردکه

$$|AN|=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

با قراردادن

$$|AP|=\frac{۱}{\sqrt{۵}}+x \quad , \quad |NQ_1|=y$$

خواهیم داشت،

$$|PM|^{2}=\frac{8}{5}+(\frac{1}{\sqrt{5}}+x)^{2} \quad ، \quad |PQ|^{2}=x^{2}+y^{2}+1$$

$\frac{|PM|^{2}}{|PQ|^{2}}$ بزرگترین مقداری است‌که بدازای $y=0$ به‌دست می‌آید.

باقی می‌ماندکه بزرگترین مقدار تابع

$$\frac{\frac{9}{5}+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)x+x^{2}}{x^{2}+1}$$

را پیداکنیم. این مقدار بدازای

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

به‌دست می‌آید.

جواب : $\sqrt{2}$

۲۳۰- مثلث KLM را درنظر بگیریدکه تصویر مثلث مفروض روی صفحهٔ $ABCD$ است. L برروی CB، L روی CD و M روی CA قراردارد.

اگر، $|CK|=x$

آنگاه،

$$|CL|=|a-x| \quad ، \quad |CM|=\sqrt{2}\,|a-\frac{x}{2}|$$

به‌آسانی نتیجه می‌شود،

$$S_{KLM}=\frac{1}{2}|x(a-x)-a(a-\frac{x}{2})| =\frac{1}{4}(2x^{2}-3ax+2a^{2})$$

کمترین مقدار برابر $\frac{7a^{2}}{32}$ می‌شود.

۲۳۱- اگرارتفاع متوازی‌السطوح x باشد، مقطعی ازهرم را درنظر بگیریدکه باصفحه‌ای به‌فاصلهٔ x ازقاعده ایجاد شده‌باشد. این مقطع مربعی به‌ضلع $(1-x)$ ؛ مستطیلی

بهمساحت S میشود که وجهی از متوازیالسطوح بوده و در داخل مربع محاط شده است.

دوحالت اتفاق میافتد:

(۱) قاعدهٔ متوازیالسطوح مربعی است بهضلع $\sqrt{S}$ ، قطرمتوازیالسطوح،

$$d=\sqrt{x^۲+۲S}$$

$$(۱-x)\frac{\sqrt{۲}}{۲}\leqslant\sqrt{S}\leqslant(۱-x)$$

یا

$$۱-\sqrt{۲S}\leqslant x\leqslant ۱-\sqrt{S}$$

پس دراین حالت، اگر

$$S<\frac{۱}{۲}$$

آنگاه ،

$$۱-۲\sqrt{۲S}+۴S\leqslant d^۲\leqslant ۱-۲\sqrt{S}+۳S$$

اگر ، $$S\geqslant\frac{۱}{۲}$$

آنگاه ،

$$۲S<d^۲\leqslant ۱-۲\sqrt{S}+۳S$$

(۲) اضلاع وجه متوازیالسطوح که در داخل مقطع محاط میشود، موازی با اقطار مقطعاند. آنها را با y و z نشان میدهیم. مسئله، منجر بهجستجو در باره تغییرات تابع

$$d^۲=x^۲+y^۲+z^۲$$

با شرایط زیر میشود،

$$\begin{cases}yz=S\\ y+z=(۱-x)\sqrt{۲}\end{cases}$$

(دستگاه اخیر شامل، $0<x\leqslant 1-\sqrt{2S}$ است اگر $\sqrt{2S}\geqslant 1-x$).

داریم،

$$d^2=x^2+(y+z)^2-2yz=x^2+2(1-x)^2-2S=$$
$$=3x^2-4x+2-2S$$

اگر
$$S\leqslant\frac{1}{18}$$

آنگاه کمترین مقدار d^2 به‌ازای،

$$x=\frac{2}{3}$$

به‌دست می‌آید.

اگر
$$S>\frac{1}{18}$$

آنگاه کمترین مقدار d^2 به‌ازای

$$x=1-\sqrt{2S}$$

به‌دست می‌آید.

علاوه بر این،
$$d^2<2-2S$$

با ترکیب نتایج (۱) و (۲) جواب مسئله به‌دست می‌آید.

جواب :

اگر ، $0<S\leqslant\frac{1}{18}$ آنگاه،

$$\sqrt{\frac{2}{3}-2S}\leqslant d<\sqrt{2-2S}$$

اگر ، $\frac{1}{18}<S<\frac{7+2\sqrt{6}}{25}$ آنگاه،

$$\sqrt{1-2\sqrt{2S}+4S}\leqslant d<\sqrt{2-2S}$$

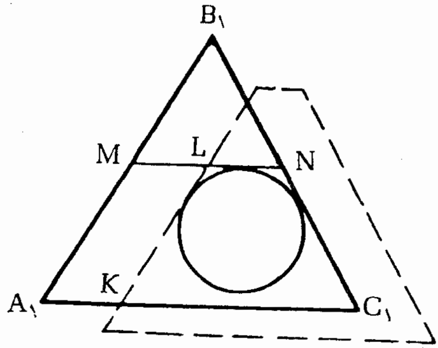
اگر، $\frac{7+2\sqrt{6}}{25} \leqslant S < \frac{1}{2}$ آنگاه،

$$\sqrt{1-2\sqrt{2S}+4S} \leqslant d \leqslant \sqrt{1-2\sqrt{S}+3S}$$

اگر، $\frac{1}{2} \leqslant S < 1$ آنگاه،

$$\sqrt{2S} \leqslant d \leqslant \sqrt{1-2\sqrt{S}+3S}$$

۲۳۲- چندوجهی $ABCA_1MNC_1$ را با صفحه‌ای به‌فاصلهٔ h از صفحهٔ $A_1B_1C_1$، قطع کنید. نقطهٔ حاصل را که به این طریق به‌دست می‌آید، روی صفحهٔ $A_1B_1C_1$ تصویر کنید (شکل ۴۸).



شکل ۴۸

در شکل، تصویر این مقطع، با خط نقطه چین نشان داده شده است. واضح است که دایره قاعده استوانه، باید درداخل ذوزنقهٔ $KLNC_1$ جا بگیرد. (K و L به‌ترتیب نقاط تقاطع A_1C_1 و MN با تصویر این مقطع است).

اگر $h=3$، آنگاه صفحهٔ مقطع، برصفحهٔ ABC منطبق می‌شود و نقاط K و L براوساط B_1C_1 و A_1C_1.

اگر $h<3$،

$$|ML| = |A_1K| = \frac{h}{3} \quad ,$$

$$|LN| = 1 - \frac{h}{3} \quad , \quad |KC_1| = 2 - \frac{h}{3}$$

می‌توان به‌آسانی بررسی کرد که، به‌ازای $h \leqslant ۳$ شعاع بزرگترین دایره در داخل ذوزنقهٔ $KLNC_۱$، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ می‌شود و به‌ازای $h > \frac{۳}{۲}$ این شعاع برابـر بـا شعاع دایره محاط درمثلث متساوی‌الاضلاع، به‌ضلع

$$|KC| = ۲ - \frac{h}{۳}$$

می‌گردد. یعنی برابر می‌شود با:

$$\left(۲ - \frac{h}{۳}\right)\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

جواب :

a) اگر $\circ < h \leqslant \frac{۳}{۲}$ آنگاه،

$$V = \frac{۳}{۱۶}\pi h$$

اگر، $\frac{۳}{۲} < h \leqslant ۳$ آنگاه،

$$V = \frac{\pi}{۱۲} h \left(۲ - \frac{h}{۳}\right)^۲$$

b) بیشترین مقدارحجم به‌ازای $h = ۳$ حاصل می‌شود،

$$V = \frac{۸\pi}{۲۷}$$

۲۳۳- اگرصفحه‌ای را از پاره‌خط مورد اشارهٔ مسئله، به‌موازات $ABB_۱A_۱$ مروردهید، CB را درنقطهٔ K طوری قطع می‌کندکه،

$$|CK| = x$$

پس تصویراین پاره‌خط برروی وجه ABC، طولی برابر x دارد و تصویر آن برروی یال $CC_۱$، برابـر با $|a - ۲x|$ خـواهد بود. ازآنجا طول پاره خط برابرمی‌شود با،

$$\sqrt{x^۲ + (a - ۲x)^۲} = \sqrt{۵x^۲ - ۴ax + a^۲}$$

کمترین مقدار طول مساوی است با

$$\frac{a}{\sqrt{5}}$$

۲۳۴- حکم مسئله شبیه یك مسئله درهندسه مسطحه است: زاویـه‌ای داده شده است ونقطه N درداخل آن قراردارد. همه مثلث‌هایی را درنظربگیریدکه با اضلاع این زاویه وخط راستی‌کـه ازنقطه N می‌گذرد تشکیل می‌شونـد. دربین این‌گونه مثلث‌ها کمترین مقدارمساحت، به‌مثلثی تعلق داردکه، وقتی یك‌ضلعش ازنقطه N می‌گذارد، درآن نقطه نصف‌گردد.

حالا به‌مسئله خودمان برمی‌گردیم. اگر M نقطه مفروض باشدکه درداخل کنج سه وجهی قرارگرفته است، صفحه‌ای‌کـه از M می‌گذرد، یالهای‌کنج را درنقاط A و B و C قطع می‌کند. محل بـرخورد AM و BC را با N نشان می‌دهیم. پس اگرقرار باشد، صفحه ماربریك چهاروجهی،کمترین حجم را از آن جداکند، نقطه N باید در وسط BC قرارگیرد. به‌عبارت دیگر، با دوران دادن صفحه حول خط AN، می‌توانیم حجم چهاروجهی راکاهش دهیم.

۲۳۵- اگر h ارتفاع قطعه باشد، حجم آن برابر است با $\frac{1}{2}Sh-\frac{1}{3}\pi h^3$.

بیشترین مقدار به‌ازای $h=\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ ممکن می‌شود ومقـدارآن بـرابـر است بـا،

$$\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

۲۳۶- توجه داشته باشیدکه سایه تابیده شده تنها بوسیله وجه‌فوقانی مکعب ایجاد می‌شود (بـا فرض اینکه همه وجود بـاقیمانده شفاف هستند) وخود مربعی است بـه‌ضلع $\frac{ab}{b-a}$. بنابراین معلوم می‌شودکه مساحت سایه‌ای‌که توسط مکعب بوجودمی‌آید، کمترین مقدار را خواهد داشت، اگرمنبع نور بالای وجه فوقانی قرارگیرد. (تنها وجه فوقانی مکعب روشن شده است.) ومقدارآن با به‌حساب آوردن مساحت وجه پائین مکعب برابراست با $\left(\frac{ab}{b-a}\right)^2$.

۲۳۷- حکم اول درست است. آنرا ثـابت می‌کنیم. چند ضلعی حاصل ازقطع چند وجهی را با صفحه‌ای‌که از مرکزتقارن آن نمی‌گذرد، با P_1 نشان دهید ومساحت آنرا S

بنامید. چند ضلعی‌ای راکه قرینه چند ضلعی P_1، نسبت بـه‌مرکز تقارن چند وجهی است، با P_2 نشان دهید. کوچکترین چندوجهی محدبی راکه شامل P_1 و P_2 باشد، با π نشان میدهیم. واضح است کـه چند وجهی π، مرکز تقارن دارد ومرکز تقارن آن برمرکز تقارن چندوجهی اصلی‌منطبق‌است. همه رئوس π، یا رئوس P_1 هستند، و یا رئوس P_2. چند ضلعی حاصل از قطع π را، با صفحه‌ای که از مرکز تقارن می‌گذرد وموازی باوجوه P_1 و P_2 می‌باشد، P ومساحت آنرا q می‌نامیم. یکی‌از وجوه چند وجهی π را، که متمایز از P_1 و P_2 باشد، با N نشان میدهیم. واضح است‌که هرمقطع از π، موازی با صفحه N، یا تواماً هرسه چند ضلعی P_1 و P_2 و P را قطع‌می‌کند ویا هیچ‌کدام را قطع نمی‌کند. چون چند وجهی π، محدب است، خطوط l_1 و l_2 و l که درطول آنها این صفحه، صفحات P_1 و P_2 و P را قطع می‌کند در روابط زیرصدق می‌کند،

$$l \geqslant \frac{1}{2}(l_1+l_2)$$

ازآنجا نتیجه می‌شود $q \geqslant S$. (نامساوی $l \geqslant \frac{1}{2}(l_1+l_2)$ را نسبت بـه‌تمـام صفحات موازی ممکن با N بدست‌آورده‌ایم.)

حکم دوم درست‌نیست. مثالی را ارائه‌می‌دهیم. درمحورهای‌مختصات‌قائم دکارتی، چند وجهی‌ای را درنظر بگیریدکـه نقاط‌آن درنامعادله $|x|+|y|+|z| \leqslant 1$ صدق می‌کند. (این چند وجهی، یـك هشت وجهی منتظم را مشخص می‌کند.) تمام وجوه این چند وجهی، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع وبه‌ضلع $\sqrt{2}$ و بـا شعاع دایره محیطی $\sqrt{\frac{2}{3}}$ می‌باشند. مقطع این چند وجهی، بـا صفحه‌ای‌کـه ازمبدأ مختصات گذشته وموازی باهروجه باشد، یك شش ضلعی منتظم، به‌ضلع $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و شعاع دایـره محیطی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ خواهد بود. اما $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}}$

یادآوری ــ درهرجسم دلخواه‌که دارای مرکز تقارن باشد، حکم زیرصادق است: اگر R و R_0 شعاعهای کوچکترین دایره‌هایی باشندکه مقاطع ایجاد شده ازجسم را با دو صفحه موازی، دربرمی‌گیرند وصفحه دوم ازمرکز تقارن‌گذشته باشد، در آن صورت

$$R_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

همانطور که قبلا دیدیم، تساوی برای حالت هشت وجهی منظم قابل حصول است.

۲۳۸- جواب : $\frac{۴}{۳}$

۲۳۹- A و B را رئوس مخروطها درنظرمی‌گیریم و M و N هم، دونقطه‌ای هستندکه، روی دایره قاعده‌ها اختیارشده‌اند. L نقطه قطراً متقابل نسبت به M است. ($BM=\sqrt{r^۲+h^۲}$ و $AM=\sqrt{r^۲+H^۲}$). از نقطه M صفحه‌ای بر AM عمودکنید وتصاویر B و N و L را برروی این صفحه، $B_۱$ و $N_۱$ و $L_۱$ بنامید. فاصله بین AM و AN برابر است با فاصله بین M و $B_۱N_۱$ واز $|MB_۱|$ تجاوز نمی‌کند.

از شرط $H\leqslant h$ معلوم می‌شودکه $|MB_۱|\leqslant|ML_۱|$ یعنی نقطه $B_۱$ درداخل و یا روی مرزتصویر قاعده هرمها، برروی صفحه مار قراردارد. وفاصله بین M و $B_۱N_۱$ برابر است با $MB_۱$، اگر $MB_۱$ و $B_۱N_۱$ متقابلا برهم عمود باشند.

جواب : $\frac{(h+H)r}{\sqrt{r^۲+H^۲}}$

۲۴۰- یال $B_۱B$ را ازطرف B امتداد دهید وروی امتدادآن نقطه K را طوری اختیار کنیدکه $BK=a$.

همانطورکه قبلا مشاهده شد، K بیك فاصله از تمام اضلاع چهارضلعی $AB_۱CD$ قرار دارد. روی قطر $B_۱D$، نقطه L را طوری اختیارکنیدکه، $\frac{|B_۱L|}{|LD|}=\sqrt{۲}$.

L نقطه انتهایی نیمسازهای مثلث‌های $B_۱AD$ و $B_۱CD$ است وبنابراین، L بیك فاصله از اضلاع چهارضلعی $AB_۱CD$ قراردارد. اکنون می‌توان ثابت‌کردکه همه نقاط خط KL، از اضلاع این چهارضلعی بیك فاصله است. بنابراین شعاع مطلوب مسئله، برابر است باکوتاهترین فاصله بین خط KL وهریك ازخطوطی‌که چهارضلعی $AB_۱CD$ را می‌سازند.

فاصله بین مثلا KL و AD را پیدا کنید. با تصویرکردن K و L روی صفحه $CDD_۱C_۱$، نقاط $K_۱$ و $L_۱$ بدست می‌آیند. فاصله مطلوب، برابر است با فاصله D تا خط $K_۱L_۱$.

جواب : $a\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

۲۴۱- اگر قطر AC_1، روی یال فرجه قرار داشته باشد، وجوه فرجه، یالهای مکعب را درنقاط M و N قطع می‌کنند. به‌آسانی دیده می‌شودکه اگر ، حجم آن قسمت از مکعب،که درداخل فـرجه محورشده، بیشترین ویاکمترین مقدار را بگیرد، آنگاه، مساحتهای مثلث‌هـای AC_1M و AC_1N باید برابر باشند. (به‌عبارت دیگر بـا دوران فرجه درجهت مناسب خواهیم توانست این‌حجم‌را افزایش ویاکاهش‌دهیم) اگر $0 < \alpha \leqslant 60^\circ$ آن‌قسمت ازمکعب،که درشرایط مسئله مطرح شده، حجمی بین

$$\frac{1}{2\sqrt{3}\cos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad \text{و} \quad \frac{1}{3\left(1+\sqrt{3}\cot g\frac{\alpha}{2}\right)}$$

خواهدداشت. بازای $\alpha = 60^\circ$ این حجم ثابت وبرابر $\frac{1}{6}$ می‌شود . بـه‌ازای $60^\circ < \alpha \leqslant 120^\circ$ بیشترین مقادیر بازه‌ها باید به اندازه $\frac{1}{6}$ افزایش پیداکنید و a بـا $a - 60^\circ$ جـایگزین‌گردد و برای $120^\circ < \alpha < 180^\circ$ بازه‌ها باید به‌اندازه $\frac{1}{3}$ افـزایش پیـداکنند و α بـا $\alpha - 120^\circ$ جایگزین شود.

۲۴۲- توجه داشته باشیدکـه مساحت تصویر هرمتوازی‌السطوح، همیشه دوبرابرمساحت تصویر مثلثی است‌که رئوس‌آن انتهای سه یال ازمتوازی‌السطوح باشندکه، ازیك رأس خارج می‌شوند. درمتوازی‌السطوح قائم، همه این نوع مثلث‌ها، قابل انطباق بریکدیگرند. بیشترین مساحت تصویرمتوازی‌السطوح‌قائم، وقتی حاصل می‌شودکه، یکی از این نوع مثلث‌ها، موازی با صفحه‌ای باشدکـه متوازی‌السطوح برروی‌آن تصویرمی‌شود. بنابراین بیشترین مساحت تصویر برابرخواهد بود با،

$$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

۲۴۳- ثابت‌کنید حجم چنین چهاروجهی،کمتر ازحجم چهاروجهی‌ای است‌که، دو وجـه آن، مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع واحد، وبرهم عمود شده باشند.

۲۴۴- (۱). این حکم غلط است. برای مثال، در داخل مثلث ABC، دونقطه D_1 و E_1 را طوری اختیارکنیدکه، مجموع فواصل، از D_1 تا رئوس مثلث،کمتر ازمجموع فواصل از E_1 تـا رئوس بـاشد. اکنون نقطه D را به‌اندازه‌کافی، نزدیك به D_1 طوری درنظر بگیریدکه، مجموع فواصل از D تـا رئوس A و B و C،کمتر از

مجموع‌فواصل E_1 از آنها باقی بماند. نقطه E را درداخل $ABCD$ روی عمود بر صفحه ABC که از E_1 اخراج می‌شود اختیار کنید.

(۲). این حکم درست است. محل برخورد DE وصفحه ABC را با M نشان دهید. واضح است که M، درداخل مثلث ABC قرار می‌گیرد. خطوط AM و BM و CM، صفحه ABC را به‌شش قسمت تجزیه می‌کند. تصویر نقطه D روی صفحه ABC، نقطه D_1 درداخل یکی از این شش قسمت قرارمی‌گیرد. برحسب موقعیت D_1، یکی از زوایای $D_1\widehat{MA}$ ، $D_1\widehat{MB}$ و $D_1\widehat{MC}$ منفرجه می‌شود. اگر $D_1\widehat{MA}$ منفرجه‌باشد، آنگاه $\widehat{DAM}$ هم‌منفرجه خواهد بود و بنابراین، زاویه $\widehat{DEA}$ نیزمنفرجه می‌شود. پس، $|DE|<|DA|$.

۲۴۵- طول یکی از اضلاع قاعده را $2a$، ارتفاع هرم را h بنامید. درآن صورت، R برابر است با شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌الساقینی که قاعده‌آن $2a\sqrt{2}$ و ارتفاع آن h باشد.

$R=\dfrac{2a^2+h^2}{2h}$ و r برابر می‌شود با شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌الساقین به قاعده $2a$ وارتفاع h، $(\sqrt{a^2+h^2}-a)$ $r=\dfrac{a}{h}$. اگر

$$\frac{R}{r}=\frac{2a^2+h^2}{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)}=K,$$

$$h^2=xa^2$$

خواهیم داشت،

$$2+x=2K(\sqrt{1+x}-1)$$

ازآنجا،

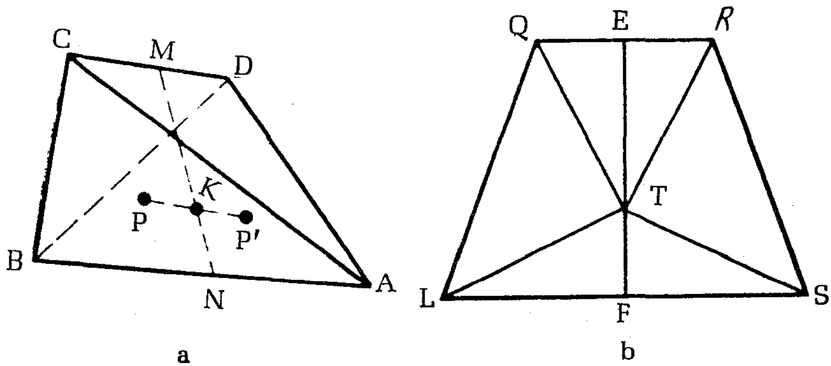
$$x^2+4(1+K-K^2)x+4+8K=0$$

مبین این‌معادله برابراست‌با، $16K^2(K^2-2K-1)$ بنابراین، $K\geqslant\sqrt{2}+1$ واین مطلوب مسئله است.

۲۴۶- مراکز ثقل وجوه چهاروجهی، رئوس چهاروجهی متشابه با چهاروجهی مفروض می‌باشدکه، نسبت تشابه‌آنها $\frac{1}{3}$ است. درنتیجه، شعاع‌کره ماربر مراکز ثقل وجوه

چهاروجهی مفروض، برابرمی‌شود با $\frac{R}{۳}$. واضح است که این‌شعاع، نمی‌تواند کمتر ازشعاع کره محاط درچهاروجهی مفروض باشد.

۲۴۷- اگر درچهاروجهی ABCD، $|AB|=b$ و $|CD|=c$، آنگاه‌بقیه یالها بطول a خواهند بود. اگر وسط AB را N ووسط CD را M بنامید، آنگاه MN محور تقارن چهاروجهیABCD خواهد بود. (شکل ۴۹,a) اکنون به‌آسانی ثابت



شکل ۴۹

می‌شود، نقطه‌ای‌که مجموع فواصلش ازرئوس چهاروجهی، کمترین مقدار را دارد، بایدبرروی MN باشد. نقطه دلخواهی‌مانند P را اختیار وقرینه‌آنرا نسبت‌به MN، P' می‌نامیم. دراین‌صورت مجموع فواصل P و P' ازرئوس چهاروجهی‌برابرند. اگـر K وسط PP' باشد، (K برروی MN قـرارمی‌گیرد.) درآن صورت در مثلث‌های PAP' و PBP' و PCP' و PDP'، به‌ترتیب، AK، BK، CK، و DK میانــه هستند وطول میانه درهرمثلث، کمتر ازنصف مجموع اضلاع دربر-گیرنده‌آن می‌باشد. اندازه $|MN|$ برابر است با

$$|MN|=\sqrt{a^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴}-\frac{c^{۲}}{۴}}=d$$

ذوزنقه LQRS را درنظر بگیریـد، (شکل ۴۹,b) که درآن، $|LS|$ و $|QR|$ به‌ترتیب، برابر با b و c وارتفاع برابر d می‌باشد. F و E را به‌ترتیب، اوساط قاعده‌های LS و QR درنظر بگیرید. اگر K روی MN باشد ، و T روی FE

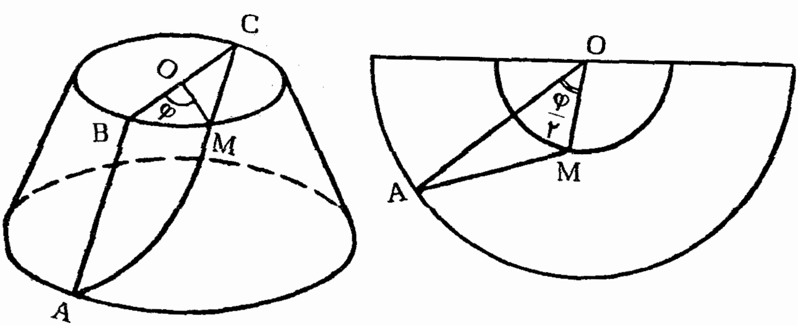
و $|FT|=|NK|$ درآن صورت آشکارا، مجموع فواصل از K تا رئوس A، B، C، D وازT، تا رئوس L، S، Q، R برابرمی‌شوند. ودر ذوزنقه LQRS (درهر چهارضلعی) مجموع فواصل تا رئوس، کمترین مقدار را وقتی پیدا می‌کند که، نقطه برمحل تقاطع دوقطر منطبق بشود واین مجموع برابر با مجموع طولهای دوقطر است.

جواب $\sqrt{4a^2+2bc}$

۲۴۸- ثابت کنید که کوتاهترین راه پیمودنی‌ازنقطه A، که به‌دایره قاعده بزرگترمخروط تعلق دارد، تا نقطه C، که متعلق به‌قاعده دیگرمخروط وقطراً متقابل با A می‌باشد، شامل مولد AB وقطر BC می‌شود.

شعاع قاعده کوچك را r، مرکز آنرا O بنامید. مسیر A تانقطه‌ای مانند M را در نظر بگیرید که، نقطه M به‌دایره کوچك تعلق دارد. کمان $\breve{AM}$ روی سطح جانبی مخروط قراردارد ووقتی کوتاهترین طول را دارا خواهد بودکه، درگسترش سطح جانبی مخروط، متناظر بایك پاره خط گردد. اما این‌گسترش با زاویه بین مولد و قاعده که $\frac{\pi}{3}$ است وشعاع قاعده R، نیمدایره‌ای به‌شعاع 2R بوجود می‌آورد. پس، گسترش یك مخروط ناقص، یك نیم تاج دایره بوجود خواهدآورد.

اکنون، اگر کمان $\breve{BM}$، واقع برروی قاعده متناظر بازاویه مرکزی φ باشد، آنگاه درگسترش، زاویه مرکزی، $\frac{\varphi}{2}$ متناظر با این کمان خواهد بود. (شکل ۵۰) پس،



شکل ۵۰

$$|AM|^2=4R^2+4r^2-8Rr\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$|MC|=2r\cos\frac{\varphi}{2}$$

باقی ماند ثابت کنیم

$$\sqrt{4R^2+4r^2-8Rr\cos\frac{\varphi}{2}}+2r\cos\frac{\varphi}{2}\geqslant 2R$$

این نامساوی هم با تبدیلات بدیهی به‌اثبات می‌رسد.

۲۴۹- اندازه‌های $|a|$ و $|b|$ و $|c|$ را ثابت نگهدارید وزوایای بین a و b، b و c، c و a را به‌ترتیب با x و y و z نشان دهید.
تفاضل سمت چپ وراست نامساوی مورد سئوال را درنظر بگیرید وآنرا $f(x,y,z)$ بنامید خواهیم داشت،

$$|a|+|b|+|c|$$
$$+\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2+2|a|\cdot|b|x+2|b|\cdot|c|y+2|c|\cdot|a|z}$$
$$-\sqrt{|a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b|x}-\sqrt{|b|^2+|c|^2+2|b|\cdot|c|y}$$
$$-\sqrt{|c|^2+|a|^2+2|c|\cdot|a|z}=f(x,y,z)$$

تابع $\varphi(t)=\sqrt{d+t}-\sqrt{l+t}=\dfrac{d-l}{\sqrt{d+t}+\sqrt{l+t}}$ را درنظر بگیرید که نسبت به t یك تابع یکنواخت است و این نشان می‌دهد که $f(x,y,z)$ وقتی کمترین مقدار را دارا می‌شود که x و y و z برابر با ± 1 باشند یعنی‌وقتی‌که a و b و c دریك راستا قرارگیرند. از آنجا نامساوی‌مطلوب مسئله به‌آسانی‌به‌اثبات می‌رسد.

۲۵۰- محل برخورد MN و D_1C_1 را L می‌نامیم. اگر $|AM|=x$ ، $|BN|=y$ ، ازفرض مسئله معلوم می‌شود $x>a$ ، $y>a$.
با تصویرهمه نقاط برروی ABB_1A_1 خواهیم داشت،

$$\frac{|C_1L|}{|LD_1|}=\frac{a}{x-a}$$

وبا تصویر آنها برروی ABCD خواهیم داشت،

$$\frac{|C_1L|}{|LD_1|}=\frac{y-a}{a}$$

در نتیجه،

$$\frac{a}{x-a}=\frac{y-a}{a}$$

ازآنجا $xy=(x+y)a$. اما $(x+y)^2\geqslant 4xy$ بنابراین $xy\geqslant 4a^2$
اکنون داریم،

$$(MN)^2=x^2+y^2+a^2=(x+y)^2-2xy+a^2=$$

$$=\frac{(xy)^2}{a^2}-2xy+a^2=\frac{1}{a^2}(xy-a^2)^2\geqslant 9a^2$$

کمترین مقدار $|MN|$ برابر است با $3a$.

۲۵۲- M روی AB_1 و N را روی BC_1 اختیاو وتصاویر آنها را روی ABCD به ترتیب M_1 و N_1 بنامید. با قراردادن $x=|BM_1|$ و $|BN_1|=y$ داریم،

$$|M_1N_1|=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad |MN|=\sqrt{x^2+y^2+(a-x-y)^2}$$

اما بنا بفرض

$$|MN|=2|M_1N_1|$$

پس،

$$(a-x-y)^2=3(x^2+y^2)$$

اگر $x^2+y^2=u^2$ ، $x+y=v$ ، داریم،

$$2u^2-v^2\geqslant 0$$

وچون $u^2=\frac{1}{3}(a-v)^2$ با قراردادن u^2 درنامساوی اخیر،که برحسب u و v است، نامعادله‌ای برحسب v بصورت زیر پیدا می‌شود،

$$v^2+4av-2a^2\leqslant 0$$

از آنجا

$$a(۲+\sqrt{۶}) \leqslant v \leqslant a(\sqrt{۶}-۲)$$

اکنون کمترین مقدار $|MN|$ را پیدا می‌کنیم که برابرمی‌شود با،

$$۲a(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

۲۵۳- مکعب $ABCD\,A_۱B_۱C_۱D_۱$ را به یال $۲R$ درنظر بگیرید. محورهای استوانه‌های مفروض را روی $AA_۱$، DC و $B_۱C_۱$ قراردهید.

(a) مرکز مکعب به‌فاصله $R\sqrt{۲}$ از تمام یالهای مکعب قراردارد. هر نقطه درفضا، به‌فاصله بیش‌از $R\sqrt{۲}$، لااقل از یکی‌از یالهای $AA_۱$، DC ، $B_۱C_۱$ قراردارد. واین ازآنجا نتیجه می‌شود که استوانه‌های به‌محورهای $AA_۱$، DC، و $B_۱C_۱$ و به‌شعاع $R\sqrt{۲}$ تنها یك نقطه مشترك دارند که مرکز مکعب است. درنتیجه، شعاع کوچکترین کره که برهمهٔ سه‌استوانه برروی خط مماس باشد، برابر $R(\sqrt{۲}-۱)$ می‌شود.

(b) اگر K و L و M به ترتیب اوساط یالهای $AA_۱$ و DC و $B_۱C_۱$ باشند، آنگاه خطی‌که از مرکزمکعب می‌گذرد و برصفحه KLM عمود است، به‌فاصلهٔ $R\sqrt{۲}$ از $AA_۱$، DC، و $B_۱B$ قرارخواهد داشت. KLM مثلث‌متساوی‌الاضلاع است ومرکز آن برمرکزمکعب منطبق است. بنابراین‌نتیجه می‌شود که هرخط‌راست که صفحه KLM را قطع می‌کند، لااقل ازیکی از رئوس مثلث KLM به‌فاصلهٔ نابیشتراز شعاع دایره محیطی آن‌که برابر با $R\sqrt{۲}$است، قرار می‌گیرد. پس شعاع بزرگترین استوانه،که برسه استوانه مفروض مماس می‌شودودرشرایط مسئله صدق می‌کند، برابراست با،

$$R(\sqrt{۲}-۱)$$

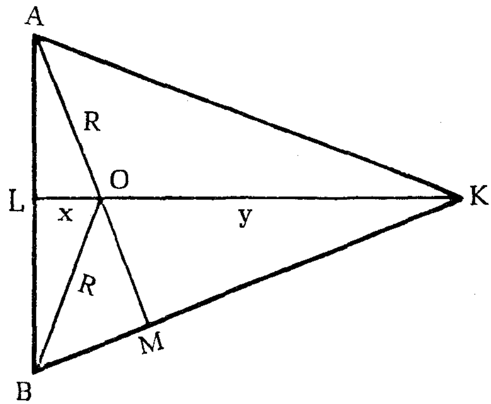
۲۵۴- $ABCD$ را چهاروجهی‌ای درنظر می‌گیریم که بیشترین مقدارحجم را داشته‌باشد. مرکزکره را هم با O نشان می‌دهیم. هرپاره‌خط که مرکز O را به‌رأس چهاروجهی وصل کند، باید به‌وجه مقابل این رأس عمود باشد. مثلا اگر AO برصفحهٔ BCD عمود نباشد، درآن صورت برروی سطح‌کره‌که نقطه A قرار دارد، ممکن است نقاطی پیدا شوندکه درفاصله‌های بیشتری ازنقطه A قرار داشته باشند. (این استدلال برای‌حالتی‌که A وB و C و D روی، سطوح کره‌های‌متمایز قرارگیرندکه لزوماً متحدالمرکزهم نیستند، باز به‌قوت خود باقی می‌ماند.)

بنا بر این نتیجه می‌شود که یالهای متقابل چهاروجهی $ABCD$ متقابلا برهم‌عمودند. بالاخره اگر، نقاط A و B روی کره به‌شعاع $R=\sqrt{10}$ و C و D برروی کره به‌شعاع $r=2$ قرارداشته باشند، فاصله نقطه O از AB و CD را به‌ترتیب با x و y نشان دهید.

از AB مقطعی رسم کنیدکه عمود بر CD باشد. محل برخورد این صفحه را با CD نقطهٔ K بنامید. با درنظرداشتن ویژگی چهاروجهی مفروض $ABCD$ به‌آسانی ثابت می‌شودکه،

$$|AK|=|BK|$$

و O محل برخورد ارتفاعات مثلث ABK می‌باشد. ارتفاعات KL و AM را رسم کنید (شکل ۵۱).



شکل ۵۱

ازتشابه مثلثهای ALO و OKM نتیجه می‌شود،

$$|OM|=\frac{xy}{R}$$

و بالاخره،

$$|AB|=2\sqrt{R^2-x^2}$$

واز تشابه مثلث‌های AOL و AMB داریم،

$$\frac{R}{\sqrt{R^۲-x^۲}}=\frac{۲\sqrt{R^۲-x^۲}}{R+\frac{xy}{R}}$$

ازآنجا ،

$$۲x^۲+xy=R^۲$$

به‌طریق مشابه می‌توان نوشت،

$$۲y^۲+xy=r^۲$$

از دستگاه زیر نتیجه می‌شود،

$$\begin{cases} ۲x^۲+xy=۱۰ \\ ۲y^۲+xy=۴ \end{cases}$$

$$y=۱ \quad , \quad x=۲$$

حجم چهاروجهی ABCD برابرخواهدبود با،

$$۶\sqrt{۲}$$

۲۵۵- رأس کنجی راکه زوایای رأس آن قائمه‌اند با A و رأس کنج دیگررا با B نشان دهید. روی AB نقطهٔ M را طوری اختیارکنیدکه،

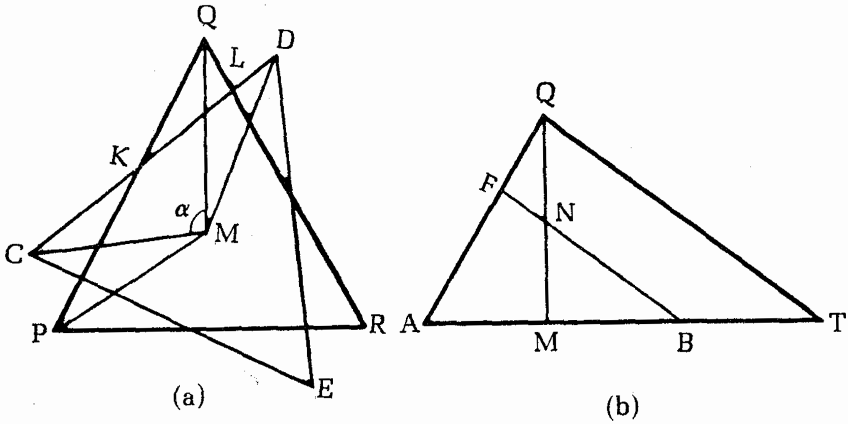
$$۲|AM|=|MB|$$

ازنقطهٔ M صفحه‌ای مروردهیدکه بر AB عمود باشد. این صفحه، هریك‌ازدوکنج را در یك مثلث متساوی‌الاضلاع بەضلع

$$b=a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

قطع خواهدکرد. درشکل ۵۲,a ، مثلث PQR متناظراست با مقطع‌کنج به رأس A . وجه BCD، هرم QFKL را از هرم APQR جدا می‌کند.
(جای نقطهٔ F درشکل ۵۲,b معلوم‌است). حجم‌این‌هرم متناسب‌است باحاصلضرب

$$|QK|\cdot|QL|\cdot|QF|$$



شکل ۵۲

واضح است اندازه $|QF|$ به‌ازای

$$\alpha = \frac{\pi}{۳}$$

بیشترین مقدار را پیدا می‌کند. دراینجا،

$$\alpha = \widehat{CMQ}$$

ثابت می‌کنیم،

$$|KQ| \cdot |QL|$$

نیز به‌ازای

$$\alpha = \frac{\pi}{۳}$$

بیشترین مقداررا کسب می‌کند. چون KL مماس بردایرهٔ محاط در PQR است، محیط مثلث KQL مقدار ثابت و برابر b می‌شود. با قراردادن،

$$|KQ| = x \qquad , \qquad |QL| = y$$

خواهیم داشت،

$$KL = b - x - y$$

قضیهٔ کسینوسها را درمثلث KQL می‌نویسیم،

$$(b-x-y)^{۲}=x^{۲}+y^{۲}-xy \Longrightarrow b^{۲}-۲b(x+y)+۳xy=$$
$$=\circ \Longrightarrow b^{۲}-۴b\sqrt{xy}+۳xy\geqslant \circ$$

از آنجا یا

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{b}{۳} \quad \text{ویا} \quad \sqrt{xy}\geqslant b$$

اما،

$$\circ\leqslant y\leqslant\frac{b}{۲} \quad , \quad \circ\leqslant x\leqslant\frac{b}{۲}$$

پس،

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{b}{۳}$$

به‌ازای،

$$x=y=\frac{b}{۳}$$

نامساوی به‌تساوی تبدیل می‌شود. به این‌ترتیب حجم هرم QKLF به‌ازای،

$$\alpha=\frac{\pi}{۳}$$

ماکزیمم می‌شود.

دراینجا،

$$|KQ|=|QL|=\frac{b}{۳}=\frac{a}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

سرانجام به‌ازای $\alpha=\frac{\pi}{۳}$، N وسط QM می‌شود (شکل ۵۲,b).

با رسم QT به‌موازات FB، خواهیم داشت،

$$|BT|=|MB|$$

پس،

$$|QF|=\frac{۲}{۵}|AQ| \quad ، \quad \frac{|AF|}{|FQ|}=\frac{|AB|}{|BT|}=\frac{۳}{۲}$$

حجم هرم APQR به‌آسانی پیدا می‌شود که برابر است با،

$$\frac{a^{۳}\sqrt{۳}}{۵۴}$$

سه هرم مساوی با هرم QFKL، هرم APQR را تجزیه می‌کنند.
حجم هریك ازآنها برابراست با

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۲}{۴۵}$$ حجم هرم APQR .

به‌این ترتیب به‌ازای $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ «باقیماندهٔ» هرم APQR را به دست می‌آوریم.
یعنی چندوجهی‌ای راکه حجم آن برابراست با

$$\frac{a^{۳}\sqrt{۳}}{۵۴}\left(۱-\frac{۲}{۱۵}\right)=\frac{۱۳a^{۳}\sqrt{۳}}{۸۱۰}$$

با استدلال مشابه، نتیجه‌می‌گیریم که به‌ازای $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ ازهرم BCDE یك‌چندوجهی
باکمترین حجم باقی خواهد ماند وحجم این چندوجهی برابراست با،

$$\frac{۱۱a^{۳}\sqrt{۳}}{۳۲۴}$$

با جمع کردن حجم‌های حاصل، جواب مسئله به‌دست می‌آید.

جواب : $$\frac{a^{۳}\sqrt{۳}}{۲۰}$$

۲۵۶- با قراردادن $|BD|=۲x$ به‌آسانی خواهیم داشت،

$$V=V_{ABCD}=\frac{x\,|۱-۲x^{۲}|\sqrt{۳-۴x^{۲}}}{۶(۱-x^{۲})}$$

با جاگزاری $u=۱-x^{۲}$ و سپس $w=۴u+\frac{۱}{u}$ خواهیم داشت،

$$(۶v)^{۲}=\frac{x^{۲}(۱-۲x^{۲})^{۲}(۳-۴x^{۲})}{(۱-x^{۲})^{۲}}=\frac{(۱-u)(۲u-۱)^{۲}(۴u-۱)}{u^{۲}}=$$

$$=(۵-\frac{۱}{u}-۴u)(۴u+\frac{۱}{u}-۴)=$$

$$=(۵-w)(w-۴)=-w^۲+۹w-۲۰$$

بیشترین مقدار به‌ازای $w=\frac{۹}{۲}$ به‌دست می‌آید. از آنجا ،

$$x=\sqrt{۱-u}=\sqrt{۱-\frac{۹\pm\sqrt{۱۷}}{۱۶}}$$

بیشترین مقدار V_{ABCD} برابرمی‌شود با $\frac{۱}{۱۲}$.

۲۵۷- شعاع کره را x ومجموع حجم آن قسمت از کره راکه درخارج چهاروجهی قرار گرفته، با آن قسمت از چهاروجهی که در خارج کره قراردارد با $V(x)$ نشان دهید. به‌آسانی دیده می‌شود،

$$V'(x)=S_۱(x)-S_۲(x)$$

که درآن $S_۱(x)$ مساحت سطح آن قسمت ازکره است‌که درخارج چهاروجهی قراردارد و $S_۲(x)$ مساحت سطح آن قسمت ازکره است‌که در داخل چهاروجهی محصورشده است. مقدار می‌نیمم به‌ازای ،

$$S_۱(x)=S_۲(x)$$

به‌دست می‌آید. از آنجا ،

$$x=a\cdot\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۲۵۸- اگر a و b و c اضلاع قاعده ، $p=\frac{a+b+c}{۲}$ و r شعاع دایرهٔ محاطی و x و y و z فواصل پای ارتفاع هرم از اضلاع a و b و c و h ارتفاع هرم باشند، داریم،

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}a\sqrt{h^۲+x^۲}+\frac{۱}{۲}b\sqrt{h^۲+y^۲}+\frac{۱}{۲}c\sqrt{h^۲+z^۲}$$

تابع مقعر $f(x)=\sqrt{h^۲+x^۲}$

را درنظر بگیرید (تحدب به‌سوی پایین) در چنین توابعی، نامساوی زیر برقرار است ،

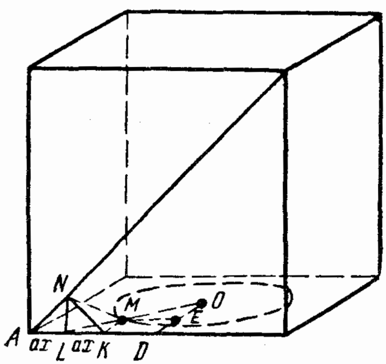
$$\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\cdots+\alpha_n f(x_n)\geqslant$$
$$\geqslant f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n)$$
$$\alpha_i\geqslant 0\ ,\ i=1,2,\cdots n$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$$

با استفاده ازاین نامساوی خواهیم داشت،

$$S_{\text{جانبی}}=P\left(\frac{a}{2P}\sqrt{h^2+x^2}+\frac{b}{2P}\sqrt{h^2+y^2}+\frac{c}{2P}\sqrt{h^2+z^2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant P\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2P}x+\frac{b}{2P}y+\frac{c}{2P}z\right)^2}=$$
$$=P\sqrt{h^2+\frac{S^2_{\text{قاعده}}}{4P^2}}=P\sqrt{h^2+r^2}$$

واین همان است‌که اثبات آن مطلوب مسئله است.

۲۵۹- اگر O مرکز دایره، L تصویر N بر روی صفحه قاعده باشد، نقطهٔ M باید بر روی LO قرارگیرد. زیرا M نزدیکترین نقطه دایره از N می‌باشد. از طرف دیگر، چون N نقطه‌ای از قطر نزدیکترین وجه، به M است، MN براین قطر عمود می‌شود و بنابراین KN نیز براین قطرعمود است و ازآنجا، K تصویر M بر روی وجهی می‌شودکه این قطررا شامل است (شکل ۵۳).



شکل ۵۳

اگر $|AL|=ax$، ANK مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و بنابراین،

$$|LK|=|AL|=ax$$

$$|MK|=|OD|\ \frac{|LK|}{|LD|}=\frac{ax}{۱-۲x}$$

$$|KD|=\frac{a}{۲}(۱-۴x)$$

درمثلث MOE قضیه فیثاغورث را می‌نویسیم (ME موازی‌با AD است)معادله زیر را خواهیم داشت،

$$\frac{(۱-۴x)^۲}{۴}+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{x}{۱-۲x}\right)^۲=\frac{۲۵}{۱۴۴}$$

$$\Longleftrightarrow\ [۶(۱-۴x)(۱-۲x)]^۲+[۶(۱-۴x)]^۲+[۵(۱-۲x)]^۲$$

با قراردادن $۵^۲=۳^۲+۴^۲$ درسمت راست وبردن‌آن به‌سمت چپ خواهیم داشت

$$[۶(۱-۴x)(۱-۲x)]^۲-[۳(۱-۲x)]^۲+[۶(۱-۴x)]^۲-[۴(۱-۲x)]^۲=۰$$

$$\Longleftrightarrow\ ۹(۱-۲x)^۲(۱-۸x)(۳-۸x)+۴(۵-۱۶x)(۱-۸x)=۰$$

$$\Longleftrightarrow\ (۱-۸x)\ [۹(۱-۲x)^۲(۳-۸x)+۴(۵-۱۶x)]=۰$$

به‌آسانی دیده می‌شودکه نقطه K باید درسمت چپ D قرارگیرد. یعنی

$$۰<x<\frac{۱}{۴}$$

وبنابراین عبارت داخل‌کروشه برابرصفرنیست. پس $x=\frac{۱}{۸}$

جواب: $\dfrac{a\sqrt{۳۴}}{۲۴}$

-۲۶۰

(a). اگر $|SC|=d$ و a و b و c اضلاع مثلث ABC و h_a و h_b و h_c ارتفاعات مثلث و S مساحت‌آن باشند، داریم،

$$\sin\alpha=\frac{h_a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad ، \quad \sin\beta=\frac{h_b}{\sqrt{d^۲+a^۲}} \quad ، \quad \sin\gamma=\frac{h_c}{\sqrt{d^۲+c^۲}}$$

بنا براین یك معادله برحسب d بدست می‌آوریم،

$$\frac{\sqrt{d^۲+b^۲}}{h_a}+\frac{\sqrt{d^۲+a^۲}}{h_b}=۱+\frac{\sqrt{d^۲+h_c^۲}}{h_c}$$

با ضرب کردن این معادله در $۲S$ خواهیم داشت

$$a\sqrt{d^۲+b^۲}+b\sqrt{d^۲+a^۲}=۲S+\sqrt{c^۲d^۲+۴S^۲} \qquad (۱)$$

با ضرب صورت ومخرج طرفین (۱) درمزدوج طرف خودش خواهیم داشت (با فرض $\hat{A}\neq\hat{B}$)

$$\frac{a^۲-b^۲}{a\sqrt{d^۲+b^۲}-b\sqrt{d^۲+a^۲}}=\frac{c^۲}{\sqrt{c^۲d^۲+۴S^۲}-۲S}$$

و ازآنجا،

$$ac^۲\sqrt{d^۲+b^۲}-bc^۲\sqrt{d^۲+a^۲}=(a^۲-b^۲)(\sqrt{c^۲d^۲+۴S^۲}-۲S) \qquad (۲)$$

با ضرب کردن (۱) در $b^۲-a^۲$ وتقسیم نتیجه بر (۲) خواهیم داشت،

$$a(b^۲+c^۲-a^۲)\sqrt{a^۲+b^۲}+b(b^۲-a^۲-c^۲)\sqrt{d^۲+a^۲}=۴S(b^۲-a^۲)$$

با استفاده ازقضیه کوسینوسها وسینوسها معادله اخیر به‌شکل زیرنوشته می‌شود،

$$\cos A\cdot\sqrt{d^۲+b^۲}-\cos B\cdot\sqrt{d^۲+a^۲}=\frac{b^۲-a^۲}{۲R} \qquad (۳)$$

سمت راست (۳) را به‌شکل زیرتغییرمی‌دهیم

$$\frac{b^۲-a^۲}{۲R}=۲R(\sin^۲B-\sin^۲A)=۲R\sin(A+B)\sin(B-A)$$

اکنون، طرفین (۳) را در $\cos A\cdot\sqrt{d^۲+b^۲}+\cos B.\sqrt{d^۲+a^۲}$ ضرب می‌کنیم، داریم،

$$(\cos^۲A-\cos^۲B)d^۲+b^۲cso^۲A-a^۲\cos^۲B$$
$$=۲R\sin(A+B)\sin(B-A)\times$$

$$\times(\cos A \cdot \sqrt{d^{2}+b^{2}}+\cos B \cdot \sqrt{d^{2}+a^{2}}) \qquad (4)$$

دیده می‌شود در (۴)،

$$\cos^{2}A-\cos^{2}B=\sin(B+A)\sin(B-A),$$

$$b^{2}\cos^{2}A-a^{2}\cos^{2}B=4R^{2}\sin(B+A)\sin(B-A)$$

درنتیجه پس ازساده کردن، (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید،

$$\cos A \cdot \sqrt{d^{2}+b^{2}}+\cos B \cdot \sqrt{d^{2}+a^{2}}=\frac{d^{2}}{2R}+2R \qquad (4')$$

با جمع کردن (۳) و(′۴) خواهیم داشت،

$$2\cos A \cdot \sqrt{d^{2}+b^{2}}=\frac{d^{2}}{2R}+2R(\sin^{2}B+\cos^{2}A)$$

وازآنجا،

$$d^{2}=4R^{2}(\cos^{2}A-\sin^{2}B)=4R^{2}\cos(A+B)\cos(A-B)$$

وبه‌این ترتیب

$$|SC|=2R\sqrt{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

اگر $A+B<90^{\circ}$ یا زاویه C درمثلث ABC منفرجه باشد مسئله ، یك جواب دارد.

(b). با استفاده از جاگذاریها در (a) نامساوی مورد نظر مـا بصورت زیرنوشته می‌شود.

$$\frac{\sqrt{d^{2}+a^{2}}}{h_b}+\frac{\sqrt{d^{2}+b^{2}}}{h_a}-\frac{\sqrt{d^{2}+h_c^{2}}}{h_c}\geqslant 1$$

اگر زاویه C حاده باشد،آنگاه طرف راست، همان طورکـه ازقسمت (a) نتیجه می‌شود، هرگز برابر ۱ نخواهد بود. بنابراین بایك نامساوی سروکارداریم. زیرا این‌موضوع به‌ازای $d=0$ صادق‌است. اگر زاویه C منفرجه‌باشد، (یا برابر 90°) آنگاه سمت راست برای مقدار منحصربفردی از d، برابر واحد می‌شود. (اگـر $C=90^{\circ}$، $d=0$) اما به‌ازای $d=0$ ومقادیرنسبتاً بزرگ d، نامساوی بدیهی و واضح است. (به‌ازای مقادیر بزرگ d، ازنامساوی مثلثی نتیجه‌گرفته می‌شود.)

d، سمت چپ کمتر از واحد باشد، درآن صورت باید سمت چپ به‌ازای‌دومقدار متمایز d، برابر واحد بشود.

۲۶۱- چهاروجهی مفروض را $ABCD$ بنامید. روی یالهای BC و BD نقاط M و N را اختیار ومسئله زیر را حل کنید:

به‌ازای‌کدام مکانهای M و N، شعاع کوچکترین‌دایره‌ای که‌مثلث AMN را محصور می‌کند،(دایره‌ها را درصفحه AMN درنظربگیرید) کمترین مقداررا پیدا می‌کند. (واضح است که شعاع کوچکترین حفره نمی‌تواندکمتر از این شعاع باشد. برای این منظورکافیست درنظر بگیریم که لحظه‌گذشتن چهاروجهی ازحفره، وقتی است که، دو رأس چهاروجهی دریك طرف صفحه حفره، رأس سوم درطرف دیگر و رأس چهارم درداخل صفحه حفره قرار داشته باشد.)

فرض کنید M و N مربوط بـه‌همان مثلث مطلوب باشند، وفرض کنید این مثلث، حاده‌الزاویه باشد. دراین صورت،کوچکترین دایره،که این مثلث را شامل بشود، منطبق بر کره محیطی آن‌خواهد بود. دایره‌ای را برمثلث AMN محیط‌کنید وجسم صلبی را درنظربگیریدکه، از دوران‌کمان AMN از این دایره، حول وتر AN ایجاد می‌شود. خط BC باید برسطح این جسم مماس باشد. به‌عبارت دیگر، روی BC می‌توانیم نقطـه M_1 را طوری اختیـارکنیم‌کـه شعاع دایـره محیطی مثلث AM_1N،کوچکتر ازشعاع دایره محیطی مثلث AMN بشود. علاوه براین، BC باید مماس برسطح کره‌ای باشدکه از A و M و N می‌گذرد، ومرکز آن درصفحه AMN قرارمی‌گیرد. خط BD نیز باید، بهمین ترتیب بر کره مماس باشد. پس،

$$|BM|=|BN|$$

با قراردادن $|BM|=|BN|=x$، وسط MN را با K وتصویر B را بر روی صفحـه AMN بـا L (L روی امتداد AK قرار دارد) نشان دهید. همانطور که قبلا اشاره شد، LM و LN مماس بردایره محیطی مثلث AMN هستند واین مثلث متساوی‌الساقین است.

$$|AM|=|AN|=\sqrt{x^2-x+1} \quad ، \quad |MN|=x$$

اگر $\widehat{MAN}=\alpha$، آنگاه

$$\cos\alpha=\frac{x^2-2x+2}{2(x^2-x+1)} \quad ، \quad \sin\alpha=\frac{x\sqrt{3x^2-4x+4}}{2(x^2-x+1)}$$

$$|LK| = |MK| \operatorname{tg} \alpha = \frac{x^۲\sqrt{۳x^۲ - ۴x + ۴}}{۲(x^۲ - ۲x + ۲)}$$

مثلث AKB را درنظر بگیرید. $\widehat{AKB} = \beta > ۱۸۰^\circ$

$$\cos \beta = \frac{۳x - ۲}{\sqrt{۳(۳x^۲ - ۴x + ۴)}},$$

$$|LK| = -|KB| \cos \beta = \frac{x(۲ - ۳x)}{۲\sqrt{۳x^۲ - ۴x + ۴}}$$

با مساوی قرار دادن دوعبارت $|LK|$، مقدار x را پیدا می‌کنیم. معادله ساده شده چنین است،

$$۳x^۳ - ۶x^۲ + ۷x - ۲ = ۰ \qquad (۱)$$

شعاع دایره محیطی مثلث AMN برابر خواهد بود با،

$$R = \frac{x^۲ - x + ۱}{\sqrt{۳x^۲ - ۴x + ۴}}$$

(می‌توان نشان داد که اگر AMN قائمه باشد، وتر آن، کمتر از $\sqrt{۱۵ - ۱۰\sqrt{۲}} > ۰{,}۹$ نیست) نشان‌میدهیم که چهاروجهی‌ما، می‌تواند ازحفره‌ای به‌شعاع بدست‌آمده عبورکند. روی یالهای CB و CA نقاط L و P را چنان تعیین کنید تا،

$$|CL| = |CP| = |BM| = |BN| = x$$

که درآن x، درمعادله (۱) صدق می‌کند.

چهاروجهی را روی صفحه شامل حفره، چنان قرار دهیدکه، M و N روی لبه حفره قرارگیرند. چهاروجهی را حول MN دوران دهید تا یال AB، ازسوراخ عبورکند وموازی صفحه قرارگیرد. سپس بانگاهداشتن AB به‌موازات‌این صفحه، چهاروجهی ABCD را طوری ازجای خود تغییردهیدکه، نقاط P و L برلبه حفره برسند. وبالاخره چهاروجهی‌را حول PL دوران دهید تایال DC،ازسوراخ خارج بشود. (چهاروجهی برخواهدگشت تا درآن طرف صفحه جا بگیرد، وجه ABC دراین صفحه قرارخواهدگرفت.)

جواب: شعاع کوچکترین حفره،

$$R=\frac{x^۲-x+۱}{\sqrt{۳x^۲-۴x+۴}}\,,$$

که در آن x ریشه معادلـه $۳x^۳-۶x^۲+۷x-۲=۰$ می‌باشد. محاسبات مربوطه، بطور تقریب مقدار آنرا معین می‌کند، $x\sim ۰٫۳۹۱۳$ و $R\sim ۰٫۴۴۷۸$ که خطای آن از ۰٫۰۰۰۰۵ تجاوز نمی‌کند.

جوابها، راهنمایی‌ها، وحل‌ها

بخش چهارم

۲۶۳- رأس کنج را با S نشان میدهیم. نقاط A و B وC را روی یالها طوری اختیار کنید تا $|SA|=|SB|=|SC|$.
نیمسازهای زوایای ASB وBSC ازاوساط AB و BC می‌گذرند ودرعین‌حال نیمساز زاویه مجاور به‌زاویه CSA موازی با CA می‌گردد.

۲۶۴- $\left[\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right]$ ، اگر $\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ عدد صحیح نباشد. $1-\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ اگـر $\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ عدد صحیح باشد. که درآن $[x]$ جزء صحیح x است.

۲۶۵- خطوط مفروض را، محورهای مختصات درنظر بگیرید. زاویه خط راست را بـا محورهای مختصات α و β و γ بنامید. تصاویر بردارهای $\overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{OB_1}$ و $\overrightarrow{OC_1}$ برروی محورهای OA وOB وOC به‌ترتیب $a\cos 2\alpha$ و $a\cos 2\beta$ و $a\cos 2\gamma$ خواهندبودکه درآن $|OA|=a$. درنتیجه محل برخورد صفحاتی که از A_1 وB_1 و C_1 می‌گذرند و بـه‌ترتیب بر OA و OB و OC عمودند، نقطه M خواهد بود که مختصات آن عبارت است از ، $(a\cos 2\gamma$ ، $a\cos 2\beta$

$(a \cos 2\alpha$). مکان هندسی نقاطی کــه مختصاتشان $(\cos^2\alpha$ ، $\cos^2\beta$ ، $\cos^2\gamma)$ باشد، مثلثی است که رئوس آن، انتهای بردارهای یکه محورهای مختصات می باشند. بنابراین مکان مطلوب مسئله نیز، مثلثی خواهد بود که مختصات رئوس آن بــه قرار زیر است،

$$(-a,-a,a) \ ، \ (-a,a,-a) \ ، \ (a,-a,-a)$$

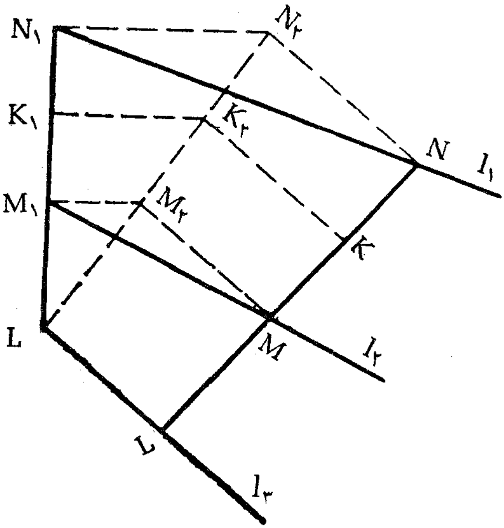
۲۶۶- خطوط مفروض را با l_1 و l_2 نشان دهید. از l_1 صفحه P_1 را به‌موازات l_2، واز l_2 نیز صفحه‌ای به‌موازات l_1 مرور دهید. واضح است اوساط پاره خطهایی کــه دوسر آنها l_1 و l_2 باشند، به‌صفحه P، موازی با P_1 و P_2 تعلق دارد وبیك‌فاصله از P_1 و P_2 واقع شده‌اند. (می‌توان نشان داد که، اگر همه چنین پاره خطهایی را درنظر بگیریم درآن صورت اوساط آنها به‌تمامی صفحه‌را پرخواهندکرد) اکنون این پــاره خطها را روی صفحه P، موازی با صفحه مفروض تصویر کنید. انتهای آنها، برروی دوخط راست قرارخواهند داشت که تصاویر l_1 وl_2 هستند وتصاویر آنها خود، موازی باخطی ازصفحه P خواهند شدکه فصل مشترك صفحه P باصفحه مفروض است. ازآنجا نتیجه می‌شودکــه مکان هندسی مطلوب نقاطی است که روی يك خط راست قرار دارند.

۲۶۷-

(a). درتمام فضا (فضای مورد بحث تمام فضاست)

(b). با انجام عمل مشابه بـا مسئله ۲۶۶، می‌توانیم ثابت‌کنیم مکان هندسی نقاطی که، همه پاره خطهای موازی با صفحه مفروض را به نسبت معینی تقسیم می‌کنند و دوسرپاره خطها روی خطوط متنافر مفروض قرار دارند، يك خط راست است. با استفاده از این حکم دردومرحله، (ابتدا مکان هندسی اوساط ضلع AB وسپس‌مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC) ثابت‌کنید در این حالت، مکان هندسی مراکز ثقل مثلث‌های ABC، يك خط راست است.

۲۶۸- ازعمود مشترك خطوط راست، صفحه P را بر l_3 عمودکنید. محل برخورد NM را با l_3، L بنامید و N_1 و M_1 و L_1 را به ترتیب، محل برخورد عمود مشترك با l_1 و l_2 وl_3 در نظر بگیرید. تصاویر N وM را بر روی صفحه‌ای که مرور داده‌ایم، N_2وM_2 بنامید. زوایای l_1 و l_2 را بااین صفحه، با α و β نشان‌دهید. وسطNM راK بنامید. تصویر نقطهK رابرروی عمود مشترك‌وصفحهP (شکل ۵۴) K_1 و K_2 درنظر بگیرید. خواهیم داشت،



شکل ۵۴

$$\frac{|KK_2|}{|K_1K_2|}=\frac{|NN_2|+|MM_2|}{|N_2N_1|+|M_2M_1|}=\frac{|N_2N_1|\ \mathrm{tg}\,\alpha+|M_2M_1|\ \mathrm{tg}\,\beta}{|N_2N_1|+|M_2M_1|}=$$

$$\frac{|N_1L_1|\ \mathrm{tg}\,\alpha+|M_1L_1|\ \mathrm{tg}\,\beta}{|M_1L_1|+|M_1L_1|}=\mathrm{cons\,t},$$

بنابراین مکان نقطه K، یك خط راست است.

۲۶۹- محورهای مختصات قائمی را درنظرمی‌گیریم که، مبدأآن A باشد. $e_1(a_1,b_1,c_1)$، $e_2(a_2,b_2,c_2)$، ...، $e_n(a_n,b_n,c_n)$ را بردارهای یکه موازی با خطوط مفروض، و $e(x,y,z)$ را هم برداریکه خط موازی با خط راستی‌که درشرایط مسئله صدق می‌کند، درنظرمی‌گیریم. برای بردار e تساوی‌های زیر را داریم،

$$|a_1x+b_1y+c_1z|+|a_2x+b_2y+c_2z|+\dots$$
$$+|a_nx+b_ny+c_nz|=\mathrm{cons\,t},$$

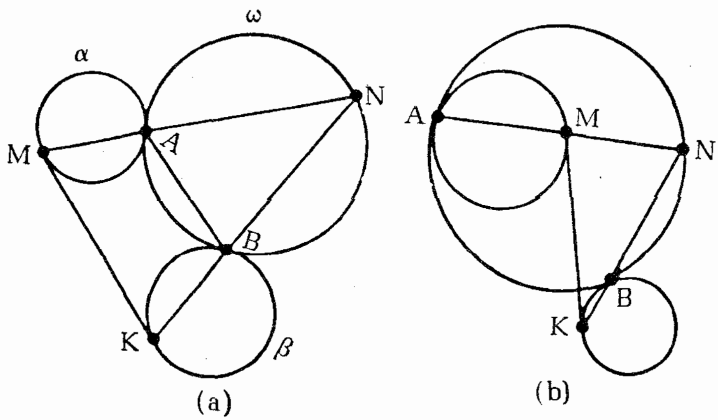
به‌آسانی دیده می‌شود‌که، مکان هندسی انتهای e مجموعه نقاطی است از دوایر، و یا قسمت‌هایی از آنها‌که، برروی سطح کره‌ای، یکه، وبه‌مرکز A قرار دارند.

۲۷۰- بارنقاط A، B، C، A_1 و B_1 را مساوی درنظرمی‌گیریم. پس مرکز ثقل دستگاه حاصل از بارها، برمرکز ثقل مثلثی منطبق خواهد شدکه رئوس آن اوساط پاره خطهای AA_1 و BB_1 و CC_1 می‌باشند.

ازطرف دیگر، مرکز ثقل این دستگاه، بروسط پاره‌خط GH منطبق است ودر آن، G مرکز ثقل مثلث ABC و H مرکز ثقل سه باری است‌که در A_1 و B_1 و C_1 متمرکزشده‌اند. با تغییری در A_1 و B_1 و C_1، نقطه H برروی خطوط l حرکت می‌کند و نقطه G ثابت باقی می‌ماند. بنابراین مکان M، وسط GH، خطی رسم می‌کند موازی با خط l.

۲۷۱- ازنقطه A خط راست t را به‌موازات l رسم‌کنید. مکان هندسه مطلوب، یك سطح استوانه‌ای، به‌جز l و t خواهد بودکه درآن l و t به‌طورقطری مولدهای‌متقابل هستند.

۲۷۲- ابتدا ثابت می‌کنیم اگر MK برکره β مماس باشد،آنگاه برکره α هم مماس می‌شود. مقطعی‌ازکره‌های مفروض‌را درنظر بگیریدکه،بوسیله‌صفحه‌ای که‌ازنقاط M، K، A، B و N می‌گذرد، ایجاد شده باشد. (شکل ۵۵)، زاویه MKB از نظر اندازه، نصف‌کمان KB است‌که در داخل این زاویه محصورشده است. (زاویه ضلعی، م) در نتیجه، $\widehat{MKB}=\widehat{BAN}$. زیراکمانهای KB و BN ازنظراندازه با هم مساوی‌اند. (اگر KN مماس خارجی باشد،کمانهای KB و BN را در طرفین KN می‌گیریم. (شکل a, ۵۵) واگر KN مماس داخلی باشد دریك‌طرف آن (شکل b, ۵۵)).



شکل ۵۵

از آنجا نتیجه می‌شود $\widehat{AMK}=\widehat{ABN}$ یا $\widehat{AMK}=180^\circ-\widehat{ABN}$ یعنی AMK ازنظر اندازه بانصف $\widehat{AM}$ برابر است. زیرا کمانهای متناظـر AM و AN یك زاویه دربردارند، پس MK بردایره‌ای که درطول آن مقطع موردداشاره کره α را قطع می‌کند، مماس خواهد بود.

اکنون می‌توان ثابت کرد که مکان نقطه M یك دایره است.

۲۷۳- دونقطه را A و B و محل برخورد AB بـا صفحه مفروض را C، ونقطه تماس کره‌ای را با صفحه مفروض M بنامید. چون، $|CM|^2=|CA|\cdot|CB|$، پس M برروی دایره‌ای به‌مرکز C وشعاع $\sqrt{|CA|\cdot|CB|}$ قرار دارد. درنتیجه مرکزکره، به‌سطح جانبی استوانه قائمی‌تعلق خواهد داشت که قاعده‌آن، این دایره است. ازطرف دیگرمرکزکره، به‌صفحه‌ای تعلق داردکه از وسط AB می‌گذرد و برآن عمود است. پس مکان مطلوب، خطی است که ازفصل مشترك سطح جانبی یك استوانه، ویك صفحه بوجود می‌آید. (این خط را خط بیضوی می‌نامند)

۲۷۴- مراکز کره‌های مفروض را با O_1 و O_2 وشعاعهای آنها را به‌ترتیب با R_1 و R_2 نشان دهید. وسط مماس مشترك را هم M بنامید. به‌آسانی دیده می‌شود،

$$|O_1M|^2-|O_2M|^2=R_1^2-R_2^2$$

و درنتیجه M، برروی صفحه‌ای عمود بر O_1O_2 قراردارد واین پاره خط را در نقطه‌ای مانند N طوری قطع می‌کند که،

$$|O_1N|^2-|O_2N|^2=R_1^2-R_2^2$$

دامنه تغییرات $|NM|$ را پیدا می‌کنیم. اگر $|O_1O_2|=a$ ، $R_1\geqslant R_2$ داریم،

$$|O_1N|=\frac{1}{2}\left(\frac{R_1^2-R_2^2}{a}+a\right)$$

اگرطول مماس‌مشترك $2x$ باشد، ووسط آنرا M بنامیم، خواهیم داشت،

$$|MN|^2=|O_1M|^2-|O_1N|^2=x^2+R_1^2-\frac{1}{4}\left(\frac{R_1^2-R_2^2}{a}+a\right)$$

اکنون، اگر $a\geqslant R_1+R_2$، آنگاه مقدار $4x^2$ درفاصله

$$a^2-(R_1-R_2)^2 \quad \text{و} \quad a^2-(R_1+R_2)^2$$

تغییرخواهدکرد وبنابراین دراین حـالت، مکان M، تاج دایره‌ای خواهد بودکـه

صفحه آن، بر O_1O_2 عمود است ومرکز آن نقطه N می‌باشد. شعاع داخلی آن برابر است با

$$\frac{1}{2}(R_1-R_2)\sqrt{1-\frac{(R_1+R_2)^2}{a^2}}$$

وشعاع دایره خارجی آن برابرمی‌شود با

$$\frac{1}{2}(R_1+R_2)\sqrt{1-\frac{(R_1-R_2)^2}{a^2}}$$

اگر $a<R_1+R_2$

یعنی دوکره متقاطع باشند، آنگاه شعاع داخلی تاج دایره برابر می‌شود با شعاع دایرهٔ فصل مشترك آنها، یعنی برابرمی‌شودبا،

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a+R_1+R_2)(a+R_1-R_2)(a+R_2-R_1)(R_1+R_2-a)}$$

۲۷۵- نقاط تماس l_1 و l_2 را باکرهٔ A و B بنامید. نقطهٔ تماس MN باکره را هم با K نشان دهید. داریم،

$$|AM=|MK| \quad ، \quad |BN|=|NK|$$

l_1 وl_2 را روی صفحه عمود بر AB، تصویرکنید. اگر A_1 ، M_1، N_1، و K_1 به‌ترتیب تصاویر A (همچنین B)، M، N و K باشند دیده می‌شود،

$$\frac{|A_1M_1|}{|AM|}=p \quad ، \quad \frac{|A_1N_1|}{|BN|}=q$$

که درآن p و q مقادیر ثابتی هستند.

فواصل K_1 را از A_1M_1 و A_1N_1 با d و h نشان می‌دهیم، داریم

$$\frac{d}{h}=\frac{\frac{1}{2}|A_1M_1|d}{\frac{1}{2}|A_1N_1|h}\cdot\frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|}=\frac{S_{A_1M_1K_1}}{S_{A_1N_1K_1}}\cdot\frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|}=$$

$$=\frac{|M_1K_1|}{|N_1K_1|}\cdot\frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|}=\frac{|MK|}{|NK|}\cdot\frac{|A_1N_1|}{|A_1M_1|}$$

$$=\frac{|AM|}{|A_1M_1|}\cdot\frac{|A_1N_1|}{|BN|}=\frac{q}{p}$$

بداین‌ترتیب نسبت فاصله K_1 ازخطوط مفروض در داخل صفحه، مقدار ثابتی است یعنی نقطه K_1، به‌یکی از دوخط راست که از A_1 می‌گذرند تعلق دارد. ومکان‌مطلوب عبارت از دو دایره‌است که برروی سطح کره مفروض قرار دارند. این دایره‌ها از قطع کره با دوصفحه‌ای بدست می‌آیند که برخطوطی که با نقطه K_1 توصیف‌می‌شوند و AB می‌گذرند. نقاط A و B خودشان حذف شده هستند.

۲۷۹- ارتفاع مثلث ABC را BK درنظر بگیرید ومحل برخورد ارتفاعات‌مثلث ABC را هم H بنامید. BM ارتفاع مثلث DBC و N محل برخورد ارتفاعات مثلث DBC می‌باشند. ثابت‌کنید N تصویر H برروی صفحه DBC است. درواقع KM، بر DC عمود است، زیرا BM بر DC عموداست و KM تصویر BM برروی صفحه ADC می‌باشد. بنابراین‌صفحه KMB، بریال DC عمودمی‌شود. درنتیجه HN بر DC عموداست. پس HN برصفحه DBC عموداست.

بدآسانی ثابت می‌شود که N برروی صفحه‌ای که از AD می‌گذرد و بر BC عمود است، قراردارد.

مکان نقاط مطلوب، دایره‌ای می‌شود به قطر HL،که در آن L پای ارتفاع وارد از A بر BC است وصفحهٔ آن برصفحه ABC عمود می‌باشد.

۲۸۳- محل برخورد اضلاع متقابل چهارضلعی $ABCD$ را با P و Q نشان دهید. اگر مقطع‌صفحه باسطح جانبی هرم $ABCDM$ یك متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه‌صفحه مقطع باید موازی صفحه PQM باشد، اضلاع متوازی‌الاضلاع موازی PM و QM گردد.

بنابراین برای اینکه مقطع مستطیل باشد، زاویه PMQ باید $90°$ باشد. یعنی M برروی سطح کره‌ای بدقطر PQ قرارگیرد.

(بنابراین قسمت (a) مسئله بداثبات رسیده‌است.)

(b) محل برخورد اقطار چهارضلعی $ABCD$ وخط PQ را با K و L نشان دهید. چون اقطارمتوازی‌الاضلاع، ازقطع سطح جانبی‌هرم $ABCDM$ باصفحه‌ای

به‌موازات MK و ML بدست آمده‌است، این متوازی‌الاضلاع یك لوزی خواهد بود اگر،

$$\widehat{KMK}=۹۰^\circ$$

یعنی M روی سطح کره‌ای به‌قطر KL قرارمی‌گیرد.

(c) ازقسمت (a) و (b) نتیجه می‌شود که مکان نقطه M دایره‌ای‌است که‌از تقاطع دوکره به‌قطرهای PQ و KL بدست می‌آید.

(d) مکان نقاط یك‌سطح مخروطی‌خواهدبود که رأس آن محل برخورداقطار چهار ضلعی $ABCD$ ودایره‌های آن، دایره قسمت قبلی‌مسئله می‌باشد.

۲۸۴- اگر K و L اوساط BC و AM و O مرکز کره محیطی $ABCM$ باشند، چون G وسط LK و OG عمود بر LK می‌باشد، پس،

$$|OL|=|OK|$$

بنابراین نتیجه می‌شود که،

$$|AM|=|BC|$$

یعنی M برروی سطح کره‌ای به‌شعاع BC و مرکز A قراردارد.
بالاخره اگر، N مرکز ثقل مثلث ABC و O_1 مرکزدایـرۀ محیطی ABC و G_1 تصویر G برصفحه ABC باشند، چون بنابه‌فرض OG بـر AK و O_1G_1 عمود است بر AK هم عمود می‌شود. ازآنجا G برروی صفحه‌ای قـرارمی‌گیرد که از O_1 می‌گذرد وبر AK عمود است. چون

$$|NG|=\frac{1}{۴}|NM|$$

پس نتیجه می‌شود نقطه M نیز، روی صفحه عمود بر AK قراردارد.
بنابراین، مکان نقاط مطلوب مسئله، خطی‌است که ازتقاطع یك کره ویك‌صفحه بوجود می‌آید. یعنی بطورکلی یك دایره‌است.

۲۸۵- دستگاه محورهای‌قائم دکارتی را طوری اختیارمی‌کنیم که مبدأ آن O رأس کنج، و محورهای‌آن، امتداد یالهای آن‌باشند. زاویه‌ای راکه صفحه‌دایره باصفحات‌محور-

های XoY و YoZ و ZoX می‌سازد، به ترتیب α و β و γ بنامید. مختصات O_1 (مرکز دایره) عبارت خواهدبود از:

$$(R\sin\beta \text{ ، } R\sin\gamma \text{ ، } R\sin\alpha)$$

که در آن R شعاع دایره است. ازمبدأ مختصات خط راستی عمود برصفحه دایره، رسم کنید. این خط با محورهـای مختصات زوایای α و β و γ خواهد ساخت. پس،

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

و از آنجا،

$$|OO_1|^2=R^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=2R^2$$

بنا بر این نقطهٔ O_1، بر روی سطح کره‌ای به مرکز O، وبه‌شعاع $R\sqrt{2}$ قـراردارد. ازطرف دیگر فاصله O_1 ازصفحات محورهای مختصات، از R تجاوز نمی‌کند. در نتیجه، مکان مطلوب مسئله، یك‌مثلث کـروی خواهد بـودکه با صفحات $x=R$ و $y=R$ و $z=R$ بر روی سطح کره

$$|OO_1|=R\sqrt{2}$$

مرزبندی شده‌است.

۲۸۶- اگرعنکبوت در رأس A ازمکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ قرار داشته باشد، مثلث DCC_1 را درنظر بگیرید. نسبتاً به‌آسانی ثابت می‌شودکه کوتاهترین راهی که A را به هرنقطه ازداخل مثلث DCC_1 وصل کند، یال DC را قطع می‌کند. درایـن حالت اگر وجوه $ABCD$ و DCC_1D_1 طوری گسترده شوند، تا از دو مربع $ABCD$وDCC_1D_1 یك‌مستطیل ایجادشود،درآن‌صورت کوتاهترین‌راه، قطعه‌ای‌از یك‌خط‌راست خواهدبود. درنتیجه، قوسی‌ازیك‌دایره‌به‌شعاع دوسانتیمترو به‌مرکز A که درگسترش درداخل مثلث DCC_1 واقع می‌شود، قسمتی‌از مرز مکان مطلوب را به‌وجود می‌آورد. وتمام‌مرزشامل‌شش‌تا ازاین‌قوسهاست‌که‌سطح‌مکعب‌رابه‌دوقسمت تقسیم می‌کنند. قسمتی‌که شامل‌رأسAمی‌باشد و به‌اضافه مـرز، درست مکان‌هندسی نقاط مطلوب مسئله‌را تشکیل می‌دهند.

۲۸۷- یالهای‌کنج را محورهای مختصات اختیار می‌کنیم. مختصات $\overrightarrow{OA}$ را (x,y,z)

ومختصات iامین قطعه خط شکسته را هم با (x_i, y_i, z_i) نشان می‌دهیم. هرقطعه‌از خط شکسته را می‌توان به‌عنوان یك بردار درنظرگرفت. پس،

$$x=\Sigma x_i \quad \text{،} \quad y=\Sigma y_i \quad \text{،} \quad z=\Sigma z_i$$

دراینجا ازشرط مسئله معلوم می‌شودکه همهٔ x_iها مخالف صفرهستند وعلامت موافق باعلامت x دارند. (درمورد y_i و z_i هم همین‌طوراست). واضح است‌که

$$|OA| \leqslant a$$

ازطرفی،

$$|x|+|y|+|z|=\Sigma(|x_i|+|y_i|+|z_i|) \geqslant \Sigma l_i = a$$

(l طول i امین قطعه خط شکسته است).

به‌آسانی می‌توان نشان دادکه هرنقطه‌ای مانند A که درشرایط

$$|OA| \leqslant a \qquad , \qquad |x|+|y|+|z|>a$$

صدق کندکه‌درآن x و y و z مختصات نقطه A می‌باشد، می‌تواند‌انتهای‌خط‌شکسته‌ای باشدکه شامل بیش‌ازسه‌قطعه خط‌نمی‌باشدو درشرایط مسئله صدق‌می‌کند. برای مثال فرض‌کنیم M_1 و M_2 دونقطه برروی‌خط راستی باشندکه از نقطهٔOخارج می‌شود طوری‌که،

$$|x_1|+|y_1|+|z_1|=a$$

(z_1 و y_1 و x_1 مختصات M_1 است).

$$x_1 y_1 z_1 \neq 0$$

$$|OM_2|=a$$

خط شکسته‌ای را درنظر بگیریدکه رئوس‌آن $(0,0,0)$،$(x_1,0,0)$،$(x_1,y_1,0)$ و (x_1,y_1,z_1) باشند. طول این‌خط شکسته برابر a است. با امتداد دادن‌این‌خط همه نقاط پاره‌خط M_1M_2 را به‌دست می‌آوریم. (به‌جز M_1) به‌این‌ترتیب مکان نقاط مطلوب، تشکیل می‌شود ازهمه نقاط واقع درخارج هشت‌وجهی

$$|x|+|y|+|z|=a$$

وداخل یا روی سطح کره‌ای به‌مرکز O و به‌شعاع a. دراین حالت، نقاطی‌که روی صفحات محورهای مختصات قراردارند، استثناء شده‌اند.

۲۸۸- توجه داشته‌باشید‌که اگر، r شعاع کـره محاط درهرم ABCD باشد، آنگاه اولاً معلوم می‌شود‌که همه یالهای چهار وجهی ABCD بـزرگتر از ۲r هستند. ثانیـاً، شعاع دایره محاط درهروجه چهاروجهی، از r بزرگتر است.
حکم اول آشکار است. برای اثبات حکم دوم، از مـرکز کـره محاطی در هرم ، صفحه‌ای طوری بگذرانید که‌مثلا موازی باوجه ABC باشد. مقطع‌مثلث $A_1B_1C_1$ می‌شود که متشابه‌است‌بامثلث ABC و به‌نسبت‌کمتر ازواحد، ودرداخل‌خود دایره‌ای به‌شعاع r را شامل می‌شود.

(۱) شرط تعیین مجموعهٔ نقاط A، با نامساوی

$$OA \geqslant ۳r$$

بیان می‌شود.

تساوی $$|OA| = ۳r$$

دریك چهاروجهی منتظم برقراراست.
اگر برای نقطه‌ای مانند A، نامساوی

$$|OA| < ۳r$$

برقرار باشد، شعاع کوچکتـرین کره‌ای‌که چهـاروجهی ABCD را شامل بشود، کمتر از ۳r خواهدبود،‌که این، ممکن نیست. (مسئله ۲۴۶ را ببینید).

(۲) شرط تعیین مجموعهٔ نقاط B، بانامساوی

$$|OB| > r\sqrt{۵}$$

بیان می‌شود.
درواقع اگر به‌ازای نقطه‌ای مانند B، داشته‌باشیم،

$$|OB| \leqslant r\sqrt{۵}$$

آنگاه برای مثلث DBC، شعاع دایره شامل این مثلث، بزرگتراز

$$\sqrt{۵r^۲ - r^۲} = ۲r$$

نخواهدبود. یعنی شعاع دایره محاط درمثلث DBC، از r تجاوز نخواهدکرد. و این غیرممکن است.

(۳) شرط تعیین مجموعهٔ نقاط C (مکان هندسی C. م.) با نامساوی،

$$|OC|>r\sqrt{۲}$$

تعریف می‌شود. درواقع اگر،

$$|OC|\leqslant r\sqrt{۲}$$

آنگاه

$$|CD|\leqslant ۲r$$

(۴) شرط تعیین مجموعهٔ نقاط D با نامساوی

$$|OD|>r$$

بیان می‌شود.
نشان می‌دهیم $|OD|$ می‌تواند طول دلخواه بزرگ داشته باشد. برای این منظور، برای‌چهاروجهی ABCD چهاروجهی‌ای‌را درنظر بگیرید که همهٔ وجوه آن، مثلث‌های متساوی قابل انطباق برهم، با زوایای رأس به‌اندازهٔکافی‌کوچك باشند. دراین صورت مراکز کره‌های محاطی ومحیطی بریکدیگرمنطبق و نسبت $\frac{R}{r}$ که درآن R شعاع کره محیطی می‌باشد، می‌تواند به‌دلخواه بزرگ باشد.

۲۸۹- اگر MC وترمثلث مورد نظر باشد، تساوی زیر برقرار است،

$$|MC|^۲=|MA|^۲+|MB|^۲$$

با انتخاب محورهای قائم دکارتی، به‌آسانی می‌توان مطمئن شدکه مکان M، سطح یك‌کره است. مرکز و شعاع این‌کره را تعیین‌کنید.
اگر $C_۱$، وسط AB، $C_۲$ برروی‌امتداد $CC_۱$، $|C_۱C_۲|=|CC_۱|$، ($ACBC_۲$ متوازی‌الاضلاع است) اضلاع مثلث ABC را مانند همیشه، با a و b و c نشان دهید و میانه وارد بر AB را m_c بنامید. داریم،

$$|MA|^۲+|MB|^۲=۲|MC_۱|^۲+\frac{|AB|^۲}{۲}=۲|MC_۱|^۲+\frac{C^۲}{۲}$$

چون،

$$|MA|^2+|MB|^2=|MC|^2$$

پس،

$$|MC|^2-2|MC_1|^2=\frac{c^2}{2} \qquad (1)$$

اگر $\widehat{MC_2C}=\varphi$ ، درمثلث‌های MC_2C و MC_2C_1 قضیه کوسینوسها را می نویسیم،

$$|MC|^2=|MC_2|^2+4m_c^2-4|MC_2|\ m_c\cos\varphi \qquad (2)$$

$$|MC_1|^2=|MC_2|^2+m_c^2-2|MC_2|\ m_c\cos\varphi \qquad (3)$$

با ضرب (۲) و (۳) درهم وکم کردن نتیجه آن از (۲) خواهیم داشت، ((۱) را هم مد نظر داشته باشید)

$$|MC_2|^2=2m_c^2-\frac{c^2}{2}=a^2+b^2-c^2$$

به‌این ترتیب، دراین حالت، اگر $a^2+b^2-c^2\geqslant 0$، مجموعه نقاط M ناتهی خواهدبود. یعنی زاویه C درمثلث ABC منفرجه نمی‌باشد. درنتیجه، همه مجموعه نقاط M، درازای یك زاویه حاده ازمثلث، ازسه کره تشکیل‌می‌شودکه مراکز آنها نقاط C_2، A_2، B_2 بوده وطوری قرار دارندکه ABA_2C ، CAC_2B و BCB_2A متوازی‌الاضلاع می‌شوندشعاعهای آنها به ترتیب برابر است با $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ ، $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$ و $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. درازای قائم الزاویه بودن مثلث ABC، مجموعه نقاط مطلوب مسئله، ازدوکره ویك‌نقطه تشکیل‌می‌شود وبرای یك مثلث منفرجه‌الزاویه فقط دوکره خواهیم داشت.

۲۹۰- اگر O مرکز زمین، A نقطه‌ای واقع بر روی استوا و نظیر نصف‌النهار صفر، و M نقطه‌ای بر روی زمین باشدکه طول وعرض جغرافیایی آن باهم برابر ومساوی φ است و N تصویر M برروی صفحه استوا باشد، دستگاه محورهای قائم دکارتی را درصفحه استوا طوری‌اختیارکنیدتا

$$x=R\cos^2\varphi \qquad , \qquad y=R\cos\varphi\sin\varphi$$

که درآن R شعاع زمین است.

به آسانی می‌توان بررسی کرد که مختصات N درمعادله،

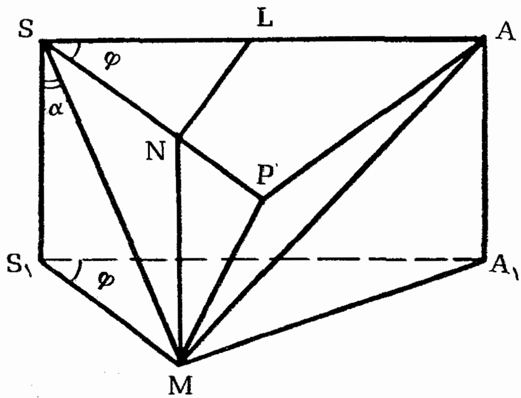
$$\left(x-\frac{R}{۲}\right)^{۲}+y^{۲}=\frac{R^{۲}}{۴}$$

صدق می‌کند. یعنی مجموعهٔ نقاط مطلوب مسئله، دایره‌ای است به مرکز $\left(\frac{R}{۲},۰\right)$ و شعاع $\frac{R}{۲}$.

۲۹۱- S را رأس مخروط، N را تصویر M بر روی صفحه‌ای که از نقاط S و A به‌موازات قاعدهٔ مخروط رسم می‌شود، P را نقطه‌ای بر روی خط SN درنظر بگیرید، به‌قسمی که،

$$\widehat{SMP}=۹۰^{\circ}$$

(شکل ۵۶).



شکل ۵۶

PM را هم نرمال صفحهٔ مخروط درنظر بگیرید. از فرض مسئله نتیجه می‌شود که، AP موازی با شعاع بازتاب است. بنابراین:

$$|AM|=|AP| \quad ، \quad \widehat{AMP}=\widehat{MPA}$$

زاویه بین ارتفاع ومولد مخروط را α و $|SA|=a$ بنامید.
صفحه‌ای که از M به‌موازات صفحهٔ SPA مرور می‌کند، محور مخروط را درنقطهٔ

S_1 قطع می‌کند، تصویر A را روی این‌صفحه، A_1 بنامید.

$$|SS_1|=x \quad ، \quad \widehat{MS_1A_1}=\varphi \quad ، \quad |MA_1|=y$$

با استفاده ازقضیهٔ‌کسینوسها درمثلث S_1MA_1 داریم،

$$y^2=x^2tg^2\alpha+a^2-2ax\ tg\,\alpha\cos\varphi \qquad (1)$$

علاوه بر این،

$$|PA|^2=|MA|^2=y^2+x^2 \qquad (2)$$

$$|SP|=\frac{|SM|}{\sin\alpha}=\frac{x}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{2x}{\sin 2\alpha} \qquad (3)$$

با نوشتن قضیه‌کوسینوسها درمثلث SPA واستفاده از روابط بالا، خواهیم داشت،

$$x^2tg^2\alpha-2ax\ tg\,\alpha\cos\varphi+x^2=\frac{4x^2}{\sin^2 2\alpha}-\frac{4ax}{\sin 2\alpha}\cos\varphi$$

که درآن $x=a\sin 2\alpha\cos\varphi$.

اکنون اگـر درصفحه SPA، درنقطه N ، عمودی بـر SN اخـراج‌کنیم ومحل برخوردآنرا با SA، L بنامیم، آنگاه،

$$|SL|=\frac{|SN|}{\cos\varphi}=\frac{x\ tg\,\alpha}{\cos\varphi}=2a\sin^2\alpha$$

به این ترتیب، $|SL|$ ثابت است ودرنتیجه، مکان N دایره‌ای به‌قطر SL خواهد بود.

۲۹۲- وقتی به‌حل این‌مسئله می‌پردازیم، به‌حکم زیردرهندسه مسطحه احتیاج پیدا می‌کنیم: اگر در دایره‌ای ازنقطه P به‌فاصله d ازمرکز آن، دو وترعمود برهم AD و BE را رسم‌کنیم، خواهیم داشت.

$$|AD|^2+|BE|^2=8R^2-4d^2 \qquad .(a)$$

(b). عمودی‌که از P بر AB رسم می‌شود، DE را نصف می‌کند.

درحالت فضایی ، این دو حکم به‌ترتیب زیر تعمیم پیدا می‌کند: اگر ازنقطه P در داخل یك‌کره به‌شعاع R ومرکز O سه وتر دوبه‌دومتقابلا عمود برهم AD و BE و CF بفاصله d ازمرکز آن رسم شوند، آنگاه

$$|AD|^۲+|BE|^۲+|CF|^۲=۱۲R^۲-۸d^۲ \qquad .(a')$$

(b'). خط راستی‌که از P می‌گذرد و بر صفحه ABC عمود است، از مرکز ثقل مثلث DEF می‌گذرد.

ابتدا قسمت (a') را ثابت می‌کنیم. $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ را به‌ترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی چهار ضلعی‌های ABDE، ACDF و BCEF و $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ را فواصل نقطهP ازمرکز دایره‌های محیطی این‌چهارضلعی‌ها، وx وy وz را به‌ترتیب فواصل نقطه O تا صفحات این سه چهارضلعی در نظر می‌گیریم. پس،

$$x^۲+y^۲+z^۲=d^۲ \text{ ، } d_۱^۲+d_۲^۲+d_۳^۲=۲(x^۲+y^۲+z^۲)=۲d^۲$$

$$R_۱^۲+R_۲^۲+R_۳^۲=۳R^۲-d^۲$$

با استفاده ازحکم (a) داریم،

$$|AD|^۲+|BE|^۲+|CF|^۲=\frac{۱}{۲}[(|AD|^۲+|BE|^۲)$$

$$+(|BE|^۲+|CF|^۲+(|CF|^۲+|AD|^۲)]$$

$$=\frac{۱}{۲}(۸R_۱^۲-۴d_۱^۲+۸R_۱^۲-۴d_۲^۲+۸R_۳^۲-۴d_۳^۲)$$

$$=۱۲R^۲-۸d^۲$$

برای اثبات (b')، خطوطی راکه برصفحات چهارضلعی‌های ABDE، ACDF و BCEF وارد شده، تصویر کنید وسپس ازقسمت (b)کمك بگیرید.

اکنون به حکم مسئله خودمان برمی‌گردیم. روی پـاره خطهای PA، PB و PC متوازی‌السطوحی را بناکنید و رأس متقابـل P از این متوازی‌السطوح را، M بنامید.

به‌طریق مشابه، نقطه N را برای پـاره خطهـای PD و PE و PF تعیین‌کنید. محل برخورد PM وصفحه ABC را K. وسط PM را Q، وسط PN را T، مرکز دایـره محیطی مثلث ABC را $O_۱$ وپای عمود وارد از P بر ABC را H بنامید.

ازقسمت (b') نتیجه می‌شودکه H روی خط NP قرار دارد. بالاخره. K مرکز ثقل مثلث ABC است و $|PK|=\frac{۱}{۳}|PM|$.

خط OQ برصفحه ABC عمود است واز O_1 می‌گـذرد. زیرا O و Q مراکز دوکره‌ای هستندکه بر A و B و C می‌گذرند. (توجه داشته باشید ثابت کرده‌ایم که تواماً نقاط O_1، K و H بریك امتداد قرار دارند و $|KH|=۲|O_1K|$ و بطوریکه می‌دانید این خط راست، خط اولر خوانده می‌شود.) به‌این ترتیب OQ موازی بـا NP می‌شود. بهمین تـرتیب TO موازی MP است. پس O وسط MN است.

روی پاره خط OP، نقطه S را طوری اختیارکنیدکه

$$|PS|=\frac{۱}{۳}|PO|$$

خط عمودی‌که از S بر KH وارد می‌شود، ازوسط KH می‌گذرد. درنتیجه

$$|SK|=|SH|$$

$$SK||OM$$

$$|SK|=\frac{۱}{۳}|OM|=\frac{۱}{۶}|NM|$$

ازقسمت (a') نتیجه می‌شودکه

$$|NM|^۲=۱۲R^۲-۸d^۲$$

(NM قطرمتوازی‌السطوحی‌که یالهای‌آن برابر $|AD|$، $|BE|$ و $|CF|$ است)

یعنی، $|SK|=\frac{۱}{۳}\sqrt{۳R^۲-۲d^۲}$ مقداری‌است‌که بستگی به‌طرز رسم PA و PB و pC ندارد.

۲۹۳- بردارهـای یکه را بـرامتداد یـالهای‌کنج، بـا a و b و c نشان دهید. سپس، $\overrightarrow{ON}=e$ و مرکز کـره را P، $\overrightarrow{OP}=u$ ، $\overrightarrow{OA}=xa$ ، $\overrightarrow{OB}=yb$ و $\overrightarrow{OC}=zc$ بنامید. خواهیم داشت،

$$(u-e)^۲=u^۲ \quad ، \quad (xa-u)^۲=u^۲$$

$$(yb-u)^۲=u^۲ \quad ، \quad (zc-u)^۲=u^۲$$

از آنجا

$$\begin{cases} e^۲ - ۲eu = ۰ \\ x - ۲au = ۰ \\ y - ۲bu = ۰ \\ z - ۲cu = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر، $e = \alpha a + \beta b + \gamma c$ ، بـا ضرب کردن دومین، سومین وچهارمین‌معادلات دستگاه (۱) به‌ترتیب در α و β و γ وکم کردن از اولی خواهیم داشت،

$$e^۲ - \alpha x - \beta y - \gamma z = ۰ \qquad (۲)$$

اگر M مرکز ثقل مثلث ABC باشد،آنگاه

$$\overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۳}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{۱}{۳}(xa + yb + zc)$$

با درنظر داشتن (۲) می‌توان نتیجه‌گرفت که مکان نقطه M یك صفحه است.

۲۹۴- ثابت‌کنید هریك از این صفحات، ازقرینه نقطه N نسبت به‌مرکز ثقل چهاروجهی می‌گذرند.

۲۹۵- ثابت‌کنید همه این صفحات ازقرنیه مرکز کره محیطی چهاروجهی، نسبت به‌مرکز ثقل آن می‌گذرند.

۲۹۶- **ضمن حل مسئله ۲۹۵، ثابت‌کردیم که، نقطه مونژ و مرکزکره محیطی چهاروجهی، نسبت به‌مرکز ثقل چهاروجهی قرینه یکدیگرند. درنتیجه اگر نقطه مونژ روی یکی ازوجوه چهاروجهی قرارگیرد، درآن‌صورت فاصله مرکز کره محیطی چهاروجهی، از این وجه، با نصف طول ارتفاع نظیراین وجه، برابر و درآن طرف ازاین وجه قرارمی‌گیرد که خود چهاروجهی قرارگرفته است. واین بـه‌آسانی ما را بـه‌حکم مسئله هدایت می‌کند.**

۲۹۷-

با استفاده ازتساوی ،

$$|MA|^۲ + |MB|^۲ = \frac{۴|MD|^۲ + |AB|^۲}{۲}$$

که درآن D، وسط AB است واستفاده ازاین مطلب که درهرچهاروجهی دلخواه مجموع مربعات یالهای متقابل برابر است با دوبرابرمجموع مربعات فواصل بین

اوساط دو زوج یـا لهای باقیمانده. مسئله را به‌نتیجه برسانید. (مسئله ۲۱ را نگاه کنید.)

-۲۹۸

مساحات وجوه چهاروجهی را با $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ و $S_۴$ وحجم آن‌را با V نشان دهید. اگر r شعاع کرهٔ مماس برهمه وجوه چهاروجهی باشد، آنگاه با علائم

$$\varepsilon_i \pm ۱ \quad , \quad i = ۱,۲,۳,۴$$

که مناسب انتخاب شده باشند تساوی زیر به‌دست می‌آید

$$(\varepsilon_۱ S_۱ + \varepsilon_۲ S_۲ + \varepsilon_۳ S_۳ + \varepsilon_۴ S_۴)\frac{r}{۳} = V \qquad (۱)$$

دراین حالت اگر بـه ازای مجموعه مفروض ε_i، مقدار r که با تساوی (۱) تعیین می‌شود، مثبت باشد، آنگاه کره متناظر وجود خواهد داشت.

بنابراین برای هرچهاروجهی دلخواه، همیشه یك کره محاطی $(\varepsilon_i = +۱)$ وچهار کره محاطی خارجی (برای یکی $\varepsilon_i = -۱$ و برای بقیه $\varepsilon_i = +۱$) وجود دارد. یعنی چهار کره‌ای، که مراکز هریك درخارج چهاروجهی بوده وبریکی ازوجوه آن درنقطه‌ای واقع درداخل آن‌مماس باشند.

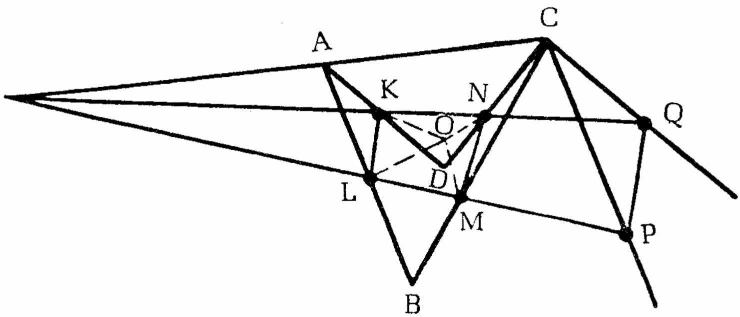
به‌علاوه، به‌طور وضوح معلوم می‌شود اگـر برای بعضی مقادیر انتخابی ε_i کره‌ای وجود داشته باشد، آنگاه برای مجموعه مخالف ε_i کره‌ای وجود نخواهد داشت. و این بدین‌معناست که حداکثر ۸ کره وجود خواهد داشت. دقیقاً ۸ کره، اگرمجموع مساحات هردو وجه، برابر با مجموع مساحتهای دو وجه دیگر نباشد.

-۲۹۹ برای هردوضلع مجاور چهارضلعی، دوصفحه متساوی‌الفـاصله ازآنها وجوددارند. (صفحات نیمساز زاویهٔ خود چهارضلعی و زاویه مجاور آن). دراین حالت اگرسه صفحه از این صفحات، متناظر با سه رأس چهارضلعی دریك نقطه همدیگر را قطع کنند، ازاین نقطه یکی‌از دوصفحه نیمساز رأس چهارم هم می‌گذرد. به‌این‌ترتیب، برای پیداکردن نقاط واقع به‌یك‌فاصله از اضلاع که چهارضلعی را تشکیل‌می‌دهند، کافیست صفحات نیمسازسه زاویه از این چهارضلعی را درنظر بگیریم. چون به‌هر زاویه، دوصفحه نظیر می‌شود، پس درحالت‌کلی هشت نقطه تلاقی پیدا می‌شود.

اکنون می‌ماند اینکه تعیین‌کنیم تحت شرایطی سه‌تا از این صفحات همدیگررا قطع نمی‌کنند. چون چهارضلعی مورد نظرما مسطحه نیست، هیچ دوصفحه نیمسازی‌موازی نخواهند بود. ازآنجا احتمال آنکه یك صفحه نیمساز موازی فصل مشترك دوصفحه

دیگر باشد، باقی می‌ماند. بدین معناکه اگر سه صفحه مار ازچند نقطه درفضا، با صفحه مفروضی موازی باشند، آنگاه این سه‌صفحه دریك خط راست مقاطع‌خواهند بود.

برای قطعیت موضوع، فرض‌کنیم صفحات نیمسازهای سه زاویه داخلی چهارضلعی ABCD متقاطع نباشند. از رأس C خطوط راستی به‌موازات اضلاع AB و AD رسم‌کنید. (شکل ۵۷). روی این خطها، CP، CQ را طوری جداکنید که



شکل ۵۷

$|CP|=|CQ|$. استدلال قبلی نشان می‌دهد‌که صفحات نیمساز زوایای MCP، PCQ، QCN و NCM ، درطول یك خط راست یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین تمام نقاط این خط راست، از اضلاع CP، CQ، CN، و CM به‌یك فاصله‌اند. یعنی خطوط CP، CQ، CN و CM روی سطح یك مخروط قرار دارند و PQNM یك‌چهارضلعی محاطی‌است. اگرصفحه چهارضلعی PQNM، AB و AD را درنقاط L و K قطع‌کند. خط LK با QP موازی می‌شود، یعنی NMLK نیز یك‌چهارضلعی محاطی‌است. علاوه براین به‌آسانی می‌توان دیدکه،

$$|KA|=|AL| \quad، \quad |KD|=|DN| \quad، \quad |LB|=|MB|$$

بنابراین بخصوص نتیجه می‌شودکه:

$$|AB|+|DC|=|AD|+|BC|$$

اکنون مرکز دایره محیطی چهارضلعی KLMN را با O نشان میدهیم. از تساوی مثلث‌های LOB و MOB معلوم می‌شودکه O ، بیك فاصله از AB و BC قرار دارد.

با ادامه‌کار به‌طریق‌مشابه، نشان خواهیم داد O، از تمام اضلاع چهارضلعی ABCD بیك فاصله است. یعنی O مرکز کره‌ای است که برخط AB، BC، CD و DA مماس می‌شود. حالت دیگر، عیناً بهمین طریق بررسی می‌شود، تا رابطه مشابه بین اضلاع ABCD بدست آید:

$$|AB|+|AD|=|CD|+|CB|$$

$$|AB|+|BC|=|AD|+|DC|$$

به‌آسانی نشان داده می‌شود، روابط بین اضلاع چهار ضلعی ABCD که دربالا بـه‌آن اشاره شد، شرط لازم وکافی برای وجودکره‌های نامتناهی مماس براضلاع چهارضلعی می‌باشد. درتمام حالات باقیمانده، هشت تـا از چنین‌کره‌هایی موجود است.

۳۰۰- با استفاده ازفرمول مسئلهٔ (۱۱) دربارهٔ حجم چهار وجهی، ثابت کنید هـریك از روابط تحت شرایط مسئله، برابراست با

$$\frac{۴S_۱S_۲S_۳S_۴}{۹v^۲}$$

که درآن $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ مساحتهای وجوه چهاروجهی، و v حجم آن است.

۳۰۱- اگر h_i $(i=۱,۱,۳,۴)$ ارتفاع نظیرچهاروجهی باشد، آنگاه

$$\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۴} S_i^۲(l_i^۲-R_i^۲)}$$

$$=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۴} s_i^۲h_i^۲\,\frac{l_i^۲-R_i^۲}{h_i^۲}}$$

$$=v\sqrt{\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{۴}\frac{l_i^۲-R_i^۲}{h_i^۲}}$$

اکنون اگر d_i فاصله مرکز کـره محیطی از iامین وجه باشد (R شعاع کره است) در آن صورت،

$$l_i^۲-R_i^۲=(l_i^۲-h_i^۲)-(R^۲-d_i^۲)+h_i^۲$$
$$=[R^۲-(h_i-d_i)^۲]-(R^۲-d_i^۲)+h_i^۲=۲h_id_i$$

از آنجا مقدار قطعی زیر رادیکال چنین خواهد شد،

$$\sum \frac{d_i}{h_i} = ۱$$

(مسئله ۱۸۲ را نگاه کنید) واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(فرض کرده‌ایم مرکز کره محیطی در داخل چهاروجهی قرارگرفته است. اگر مرکز درخارج آن باشد، با ادامه‌کار به‌طریق مشابه متوجه خـواهیم شد اندازه یکی d_i ها منفی می‌شود).

۳۰۲- طول یالهای چهار وجهی را همان‌طورکه درشکل (۵۸,a) نشان داده شده بـا a نشان دهید.

از رأس A، صفحه‌ای مماس برکرهٔ محیطی چهـاروجهی ABCD مـرور دهید. چهاروجهی $ABC_۱D_۱$ دراین شکل، با این‌صفحه مماس وصفحات ABC،ABD وهمچنین صفحه‌ای که از B به‌موازات وجه ADC رسم‌می‌شوند، ایجاد شده‌است. به‌طریق مشابه، چهاروجهی $AB_۲C_۲D$ باهمیـن صفحه مماس، صفحات ABD ، ADC وصفحه‌ای‌که از D به‌مـوازات ABC رسم می‌شوند، ساخته می‌شود. مثلث‌های ABC و $ABC_۱$ مشابه‌اندزیرا درشکل ۵۸b، $AC_۱$ بردایرهٔ محیطی‌مثلث ABC مماس است درنتیجه،

$$\widehat{BAC_۱} = \widehat{BCA}$$

علاوه براین،

$$BC_۱ \| AC$$

بنابراین،

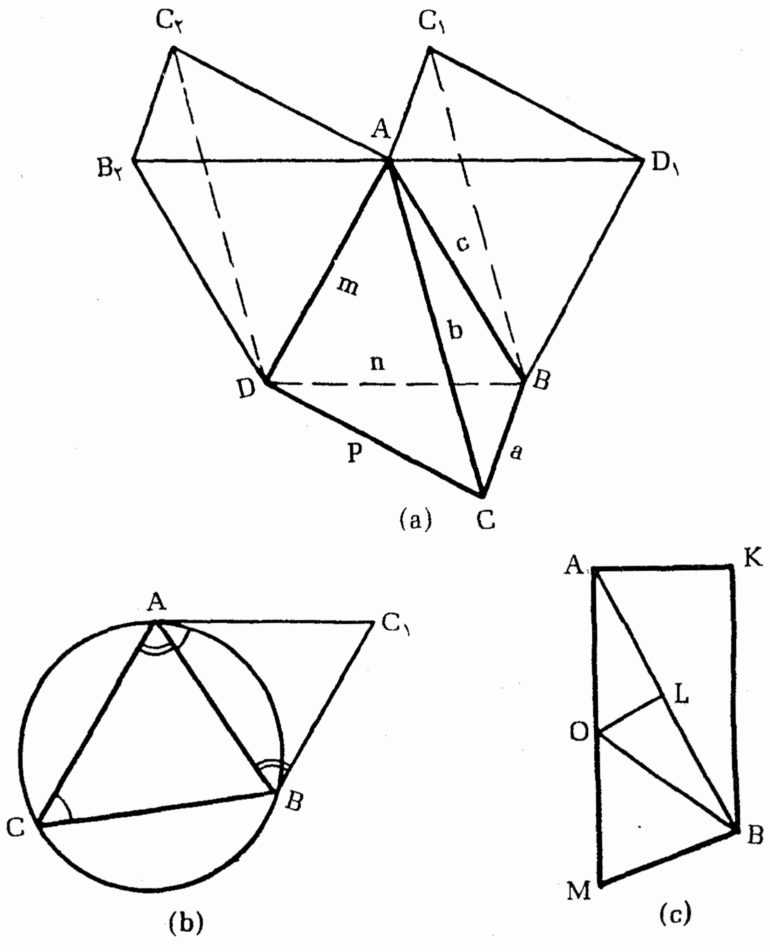
$$\widehat{C_۱BA} = \widehat{BAC}$$

پس

$$|AC_۱| = \frac{ac}{b}$$

به‌طریق مشابه.

$$|AD_۱| = \frac{nc}{m} \quad ، \quad |AC_۲| = \frac{mp}{b} \quad ، \quad |AB_۲| = \frac{mn}{c}$$



شکل ۵۸

اما مثلثهای AC_1D_1 و AB_2C_2 متشابه‌اند. پس

$$\frac{|C_1D_1|}{|AC_2|}=\frac{|AD_1|}{|AB_2|} \quad , \quad |C_1D_1|=\frac{Pc^2}{bm}$$

توجه داشته باشید که اگر، طولهای اضلاع مثلث در $\frac{bm}{c}$ ضرب شود، در آن

صورت از نظر اندازه برابر مقادیر am، bn، و cp خواهند شد. بنابراین

$$S_{AD_1C_1}=\frac{c^2}{b^2m^2}S \ .$$

سرانجام قطر کرهٔ محیطی را با AM و ارتفاع هرم ABC_1D_1 را که از B بر AC_1D_1 وارد می‌شود، با BK نشان دهید. (شکل ۵۸,c) . از تشابه مثلث‌های ABK و OLA (OL بر AB عمود است) نتیجه بگیرید،

$$|BK|=\frac{c^2}{2R}$$

پس،

$$V_{AD_1C_1B}=\frac{1}{3}\ \frac{c^4}{2Rb^2m^2}S$$

و بالاخره،

$$\frac{V_{AD_1C_1B}}{V}=\frac{S_{ABC_1}\ S_{ABD_1}}{S_{ABC}\ S_{ABD}}=\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{m^3}$$

$$V_{AD_1C_1B}=\frac{c^4}{b^2m^2}V \ .$$

ازمقایسه دوعبارت مربوط به $V_{AD_1C_1B}$ درستی حکم مسئله نتیجه می‌شود.

یادآوری. از استدلال ما، چنین برمی‌آید که زوایای مثلث که طولهای اضلاع آن از نظر اندازه، برابر است با حاصلضربهای طولهای یالهای متقابل چهاروجهی، برابرند با زوایای بین مماسهای مرسوم بر دایره‌های محیطی سه‌وجه از چهاروجهی. مماس‌هایی که از رأس مشترك به این وجوه رسم می‌شوند و درصفحه وجه مناسب قرار دارند. به آسانی دیده می‌شود عین این مطالب درمورد چهار وجهی منحط، یعنی چهارضلعی مسطحه، نیز صادق است. بنابراین درحالت خاص، می‌توان قضیه کسینوسها را برای چهار ضلعی‌های مسطحه به‌دست آورد. (قضیه برتشنایدر) . مسئلهٔ ۲۰۸ را نگاه کنید.

۳۰۳- S_1 و S_2 را مساحتهای وجوهی که یال مشترك به‌طول a دارند، S_3 و S_4 را مساحتهای دو وجه باقیمانده و a، m و n را طولهای یالهای سازنده وجه S_1 در

نظر بگیرید. فرجه‌های مجاور به‌آنها را هم، با α و γ و δ وحجم چهاروجهی را با V نشان دهید. به‌آسانی معلوم می‌شود، تساویهای زیر برقراراست:

$$a\frac{3V}{S_1}\operatorname{cotg}\alpha+N\frac{3V}{S_1}\operatorname{cotg}\gamma+n\frac{3V}{S_1}\operatorname{cotg}\delta=2S_1$$

یا

$$a\operatorname{cotg}\alpha+m\operatorname{cotg}\gamma+n\operatorname{cotg}\delta=\frac{2S_1^2}{3V}$$

با نوشتن نظیراین تساویها، برای همه وجوه چهاروجهی، جمع‌کردن تساویهای نظیر S_1 و S_2 وکم‌کردن دوتای دیگر، خواهیم داشت،

$$a\operatorname{cotg}\alpha-b\operatorname{cotg}\beta=\frac{1}{3V}(S_1^2+S_2^2-S_3^2-S_4^2)$$

با مجذورکردن این تساوی، وقراردادن $\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$ و $\frac{1}{\sin^2\beta}-1$ به‌جای $\operatorname{cotg}^2\alpha$ و $\operatorname{cotg}^2\beta$ وبا استفاده ازتساویهای زیر

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{4S_1^2S_2^2}{9V^2}\quad,\quad\frac{b^2}{\sin^2\beta}=\frac{4S_3^2S_4^2}{9V^2}$$

(مسئله ۱۱ را نگاه‌کنید) سرانجام خواهیم داشت:

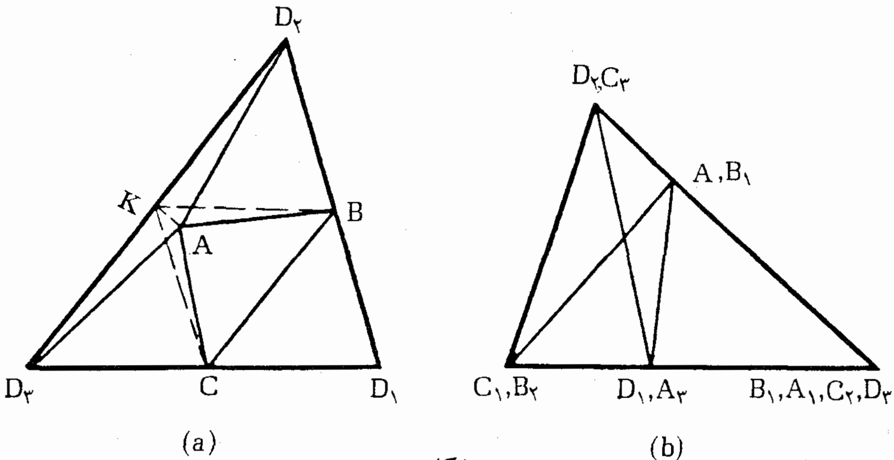
$$a^2+b^2+2ab\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta=\frac{1}{9V^2}(2Q-T)$$

که درآن Q مجموع مربعات حاصلضربهای دوبه‌دوی مساحتهای وجوه و T مجموع توانهای چهارم مساحتهای وجوه می‌باشند.

۳۰۴- شرط لازم مسئله بدیهی است. شرط کافی آنرا اثبات می‌کنیم.

(a) حکم مسئله باگسترش چهاروجهی به‌آسانی اثبات می‌شود. (برای این منظور، سطح چهاروجهی را باید درطول سه‌یالی‌که ازیك رأس خارج می‌شوند، برید).

(b) گسترش‌چهاروجهی $ABCD$ را مطابق (شکل ۵۹,a) وبافرض‌اینکه‌مجموع زوایای رأس B و C برابر $180°$ است، بدست‌آورید.



شکل ۵۹

نقاط D_1 و D_2 و D_3 متناظر بارأس D هستند. دوحالت اتفاق می‌افتد:

$$|AD|=|BC| \qquad (1)$$

در این‌حالت،

$$|D_3A|+|D_2A|=2|BC|=|D_3D_2|$$

یعنی مثلث D_2AD_3 منحط است، نقطهٔ A باید بر نقطهٔ K که وسط D_2D_3 است منطبق شود.

$$|AB|=|CD| \qquad (2)$$

یا

$$|AC|=|BD|$$

دراین حالت،

$$|KB|=|AB|$$

نقطهٔ A بروسط عمود برضلع D_2D_3 قرار می‌گیرد. اگر $D_1D_2D_3$ مثلث حاده‌الزاویه باشد، درآن‌صورت، اگر A درداخل مثلث KBC باشد،آنگاه

$$|AB|<|KB|$$

و اگر درخارج مثلث KBC باشد،آنگاه

$$|AB|>|KB|$$

اگر مثلث $D_1D_2D_3$ منفرجه‌الزاویه باشد (وزاویهٔ منفرجه رأس D_2 ویا D_3 باشد). درآن‌صورت، دریکی‌از دورأس چهاروجهی (یا B ویا C) یکی از زوایای رأس بزرگتر از مجموع دوزاویهٔ دیگر خواهدشد.

(c) اگر $|AB|=|CD|$ ، $|AC|=|DB|$

ومجموع زوایـای رأس D ، °۱۸۰ باشد. آنگاه مثلث ACD بـا مثلث ABD مساوی می‌شود. درنتیجه ،

$$\widehat{ADB}=\widehat{DAC}$$

ازآنجا،

$$\widehat{ADB}+\widehat{ADC}+\widehat{CDB}=\widehat{DAC}+\widehat{ADC}+\widehat{CDB}=180^\circ$$

پس ، $$\widehat{CDB}=\widehat{ACD}$$

و $$\triangle_{ACD}=\triangle_{CDB}$$

$$|AD|=|CB|$$

(d) چهاروجهی را درطول یالها قطع‌کنید وچهارمثلث را روی هم قـرار دهید، طوری‌که یکی برروی دیگری قرارگیرد وزوایای مساوی برهم‌منطبق‌شوند. درشکل ۵۹,b، حروف یکسان متناظر بایك رأس واندیس‌های یکسان متناظر با یك‌وجه از چهاوجهی درنظر گرفته شده است.

حروف یکسان متناظر بایك نقطه، نشان می‌دهدکه این‌نقطه متناظر بررأسهای‌مناسب مثلث‌ها منطبق شده‌است ودرنتیجه،

$$|C_3A_3|=|CA| \quad , \quad |B_2D_2|=|B_1D_1|$$

واین به‌آن معنی است‌که AC_3 موازی B_2D_1 است واین ممکن نیست.

(e) چهاوجهی ABCD را برروی صفحه موازی با یالهای AB وCD تصویر کنید. می‌توان ثابت‌کردکه تصاویرمثلث‌های ABC وABD معادل‌هستند. درست به‌همین طریق، تصاویـر مثلث‌های ACD و BCD هم معـادل می‌شوند. یعنـی

متوازی‌الاضلاع به‌اقطار AB و CD، تصویر $ABCD$ خواهدبود. پس تساوی‌های زیررا می‌توان نوشت،

$$|AC| = |BD| \quad ، \quad |AD| = |BC|$$

تساوی $|AB| = |CD|$ هم، درست به‌همین‌طریق اثبات می‌شود.

(f) $O_۱$ را نقطهٔ تماس کرهٔ محاطی باوجه ABC، $O_۲$ را با وجه BCD درنظر بگیرید. ازفرض مسئله معلوم می‌شودکه، $O_۱$ و $O_۲$ مراکزدوایرمحیطی ABC و BCD هستند. علاوه براین، مثلث $BCO_۱$ قابل انطباق بـرمثلث $BCO_۲$ است. از آنجا،

$$\widehat{BAC} = \frac{۱}{۲}\widehat{BO_۱C} = \frac{۱}{۲}\widehat{BO_۲C} = \widehat{BDC}$$

با استدلال مشابه، نتیجه می‌گیریم همه زوایای مجاور رأس D، با زوایای نظیراز مثلث ABC برابرند. یعنی مجموع آنها ۱۸۰° است. به همین‌ترتیب می‌توان در باره بقیهٔ رئوس چهاروجهی $ABCD$ هـم استدلال‌کرد. سرانجام از قسمت (a) استفاده‌کنید.

(g) چهاروجهی مفروض را تکمیل‌کنید تا مانند همیشه، یك متوازی‌السطوح‌ایجاد شود. یعنی، ازهر یال چهاروجهی، صفحه‌ای به‌موازات یال مقابل مروردهید. دراین صورت، شرط لازم وکافی برای مساوی بودن وجوه چهاروجهی، به قائـم بـودن متوازی‌السطوح حاصل، منجرمی‌شود. وازاینکه یالهای این متوازی‌السطوح مساوی وموازی با پاره‌خطهای متناظری هستندکه اوساط یالهای متقابل چهاروجهی‌را به‌هم وصل می‌کنند، حکم موردنظر به‌نتیجه می‌رسد.

(h) اگر O مرکزکرهٔ محیطی چهاروجهی $ABCD$ باشد، از فرض مسئله معلوم می‌شودکه، مثلث AOB قابل انطباق بـرمثلث COD است. زیرا هردو، مثلثهای متساوی‌الساقینی هستندکه ساقهای مساوی و میانه‌های مساوی دارندکه از O خارج می‌شوند. (O بروسط پاره‌خطی منطبق است‌که اوساط AB و CD را به‌هم وصل می‌کند). درنتیجه،

$$|AB| = |CD|$$

تساوی زوج یالهای متقابل دیگرهم به‌همین‌طریق اثبات می‌شود.

(i). ازاینکه فاصله مرکز ثقل، تا تمام وجوه، برابر است، تساوی ارتفاعات چهار-وجهی وسپس تساوی وجوه آنرا می‌توان نتیجه گرفت (قسمت(e) را نگاه کنید)

۳۰۵- a و b و c و d را بردارهایی در نظر بگیرید که بروجوه چهاروجهی عمود و جهت آنها بطرف خارج، وطول آنها از نظر اندازه، برابر با مساحت وجوه نظیر خود باشند. e_a، e_b، e_c و e_d را هم بردارهای یکه آنها ودرهمان جهت a و b و c و d اختیار کنید. و بالاخره، مجموع کوسینوسهای فرجه‌ها را با S نشان دهید.

$$K=e_a+e_b+e_c+e_d$$

واضح است که

$$K^2=4-2S$$

پس، $S\leqslant 2$ و $S=2$، اگر وتنها اگر $K=e_a+e_b+e_c+e_d=0$. اما چون $a+b+c+d=0$ (چون $a=b=c=d$) نتیجه می‌گیریم تمام وجوه چهار وجهی بایکدیگرمعادل هستند. وازمعادل بودن وجوه چهاروجهی، قابل انطباق بودن آنها بریکدیگر نتیجه می‌شود. (مسئله ۳۰۴ را نگاه کنید (e))

برای تکمیل برهان، نشان میدهیم $S>0$ یا $|K|<2$.

به‌آسانی ملاحظه خواهیم کرد،

$$|d|\leqslant 1 \ ،\ |c|\leqslant 1 \ ،\ |b|\leqslant 1 \ ،\ |a|=1$$

درنتیجه،

$$e_a=a \quad ، \quad |K|=|a+b+c+d+(e_b-b)+(e_c-c)+(e_d-d)|\leqslant$$
$$|e_b-b|+|e_c-c|+|e_d-d|=3-(|b|+|c|+|d|)\leqslant 3-|b+c+d|$$
$$=3-|a|=2$$

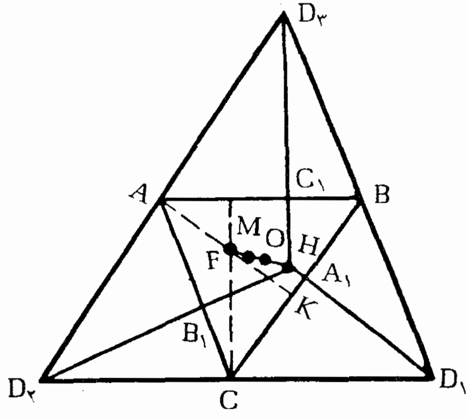
تساوی وقتی برقرار می‌شود که اگر وتنها اگر بردارهای a و b و d و c بریک استقامت قرارگیرند. چون چنین نیست پس $|K|<2$ و $S>0$.

۳۰۶- چهاروجهی‌ای را درنظر بگیرید که همه وجوه آن، مثلث‌های قابل انطباق برهم و زوایای آنها به‌ترتیب، برابر با زوایای رأس کنج مفروض باشند. (ثابت کنید چنین چهاروجهی‌ای وجود دارد) همه کنج‌های این چهاوجهی، باکنج مفروض برابرند. مجموع کوسینوسهای فرجه‌های چنین چهاروجهی‌ای، برابر ۲ می‌شود (مسئله ۳۰۴

را نگاه کنید). در نتیجه، مجموع کوسینوسهای فرجه‌های کنج مفروض نیز ۲ است.

۳۰۷- بـا ساختن یك متوازی‌السطوح ازچهاروجهی، باگذراندن یك صفحه از هر یـال بموازات یـال متقابل، یك متوازی‌السطوح قائم برای چهاروجهی متساوی‌الوجوه بدست خواهیم آورد. مرکز کره محاطی، بر مرکز متوازی‌السطوح منطبق و مراکز کره‌های محاطی‌خارجی برروی رئوس متوازی‌السطوح متمایز ازرئوس‌چهاروجهی بنا می‌شوند واین هردوحکم مسئله را ثابت می‌کند.

۳۰۸- $ABCD$ را چهاروجهی مفروض، DH را ارتفاع آن، DA_1، DB_1، DC_1 را ارتفاعات وجوه وارد از رأس D براضلاع BC، CA و AB درنظرمی‌گیریم. سطح چهاروجهی را درطول یـالهای DA، DB، DC ببریـد وگسترش دهید. (شکل ۶۰) واضح است که H محل برخورد ارتفاعـات مثلث $D_1D_2D_3$ خواهد



شکل ۶۰

بود. محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC را با F نشان دهید و AK را ارتفاع این مثلث و $|AF|=h_1$، $|FK|=h_2$ درنظر بگیرید. دراین صورت داریم،

$$|D_1H|=2h_1 \quad ، \quad |D_1A_1|=h_1+h_2 \quad ، \quad |HA_1|=|h_1-h_2|$$

بنابراین چون h ارتفاع چهاروجهی مسئله مفروض است پس،

$$h^2=|DH|^2=|DA_1|^2-|HA_1|^2$$

$$=(h_1+h_2)^2-(h_1-h_2)^2=4h_1h_2$$

اکنون، مرکز ثقل مثلث ABC را با M، (این نقطه همچنین مرکز ثقل مثلث $D_1D_2D_3$ می‌شود) مرکز دایره محیطی این‌مثلث را با O نشان دهید. معلوم‌می‌شود که F، M و O برروی یك خط راست قرار دارند. (خط اولر) و M بین F و O قرار دارد و

$$|FM|=2|MO|$$

ازطرف دیگر، مثلث $D_1D_2D_3$، مجانس مثلث ABC به‌مرکز M ونسبت تجانس (-2) است. پس $|MN|=2\ |FM|$ وازآنجا،

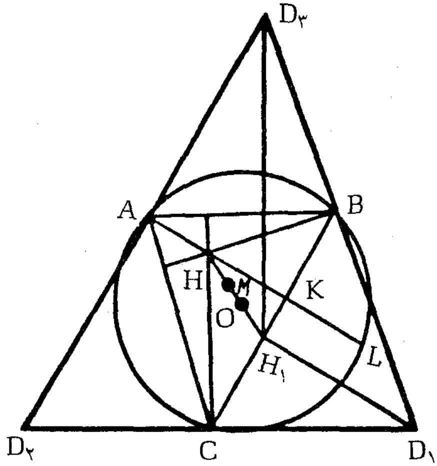
$$|OH|=|FO|$$

۳۰۹- درحل مسئله قبل، ثابت کردیم مرکز کره محیطی چهاروجهی، روی هر یال، بروسط پاره خطی‌تصویرمی‌شودکه، دوسرآن، پای‌ارتفاع وارد براین وجه ومحل برخورد ارتفاعات همان وجه می‌باشد. و چون، فاصله از مرکز کره محیطی چهاروجهی تا وجه، برابر است با $\frac{1}{4}h$، که درآن h ارتفاع چهاروجهی می‌باشد، مرکز کره محیطی به‌فاصله $\sqrt{\frac{1}{16}h^2+a^2}$ ازنقاط مفروض واقع می‌شود. دراینجا a فاصله بین محل برخورد ارتفاعات ومرکز دایره محیطی وجه است.

۳۱۰- قبل‌ازهرچیز، همه مثلث‌های ABC را حاده‌الزاویه درنظرمی‌گیریم. درواقع اگر H محل برخورد ارتفاعات مثلث ABC، و O مراکز دایره مفروض باشد، آنگاه $|OH|=3|OM|$ و M بین O و H قرارمی‌گیرد. یعنی H، در داخل دایره محیطی مثلث ABC قرار دارد واین بدان‌معنی است‌که مثلث ABC حاده‌الزاویه است. درنتیجه نقطه‌ای مانند D پیدا می‌شود، به‌قسمی‌که $ABCD$ یك چهاروجهی متساوی‌الوجوه باشد. این چهاروجهی راگسترش می‌دهیم، (شکل ۶۱)
واضع است H_1، که محل برخورد ارتفاعات مثلث $D_1D_2D_3$ است، پای ارتفاع وارد از D بر ABC می‌شود. اما مثلث‌های ABC و $D_1D_2D_3$ مرکز ثقل‌مشترك M دارندکه نسبت به‌آن با نسبت (-2) مجانس یکدیگرند. پس،

$$|H_1M|=2|MH|$$

و M بین H_1 و H قرار دارد و H_1 نقطه ثابتی است . باقی می‌ماند ثابت‌کنیم



شکل ۶۱

که ارتفاع چهاروجهی ABCD هم ثابت‌است. درمثلث ABC ارتفاع AK را رسم وامتداد دهید تا دایره محیطی را درنقطه L قطع کند. می‌دانیم که (وبه‌آسانی ثابت می‌شود) $|LK|=|KH|$.

$|AH|=h_1$ ، $|HK|=h_2$ وارتفاع چهاروجهی را h بنامید. (مسئله ۳۰۷ را نگاه‌کنید) داریم،

$$h^2=4h_1h_2=2|AH|\times|HL|=2(R^2-9a^2)$$

که درآن $|OM|=a$ واین مطلوب مسئله است.

۳۱۱- مکعب $AEFGA_1F_1G_1$ راکه یال‌آن برابر با ضلع مربع ABCD می‌باشد، درنظر بگیرید. روی یالهای A_1E_1 و A_1G_1 ، نقاط P و Q را طوری اختیار کنید که

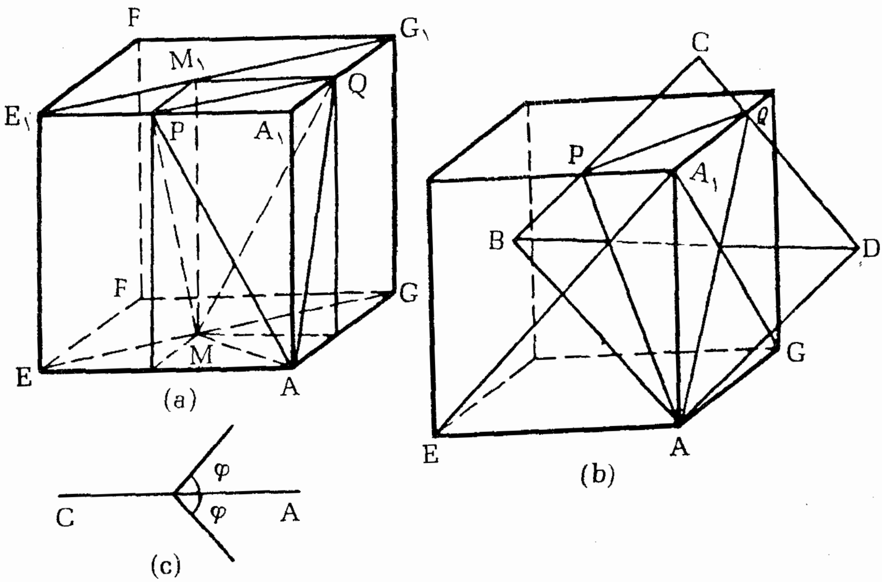
$$|A_1P|=|BP|=|CQ| \quad ، \quad |A_1Q|=|QD|=|PC|$$

(شکل ۶۲,a)

مستطیل A_1PM_1Q را درنظر بگیرید. بنا به فرض،

$$|A_1P|+|A_1Q|=|A_1E_1|$$

M_1 روی قطر E_1G_1 قرار دارد. درنتیجه، اگر M تصویر M_1 روی EG



شکل ۶۲

باشد، آنگاه همه وجوه چهاروجهی APQM، بامثلث APQ مساوی خواهند بود. مربع ABCD که شامل مثلث APQ می‌باشد ازدوران مربع AEE_1A_1 حول قطر AF_1 تحت زاویه‌ای مانند α بدست می‌آید. چون صفحه EGA_1 بر قطر AF_1 عمود است، BD بـه‌این صفحه تعلق دارد. اما صفحات AEE_1A_1 و ABCD و بعلاوه خطوط EG، EA_1، A_1G و BD بر کره محاط درمکعب مماس هستند. ازآنجا، نتیجه می‌شود کـه زاویـه بین صفحات ABCD و A_1EC مقدارثابتی است، واین مقدار برابراست با زاویه φ یعنی زاویه بین صفحات AEE_1A_1 و A_1EG که درآن $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$. امـا صفحـات A_1EG و ABCD، درطول BD یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین، نقطه M در داخل صفحه‌ای کـه از BD می‌گذرد وبا صفحه ABCD زاویه φ می‌سازد قرار دارد. مکان تصاویرنقاط M، دوپاره خط خواهد بودکـه، از وسط AC خارج می‌شوند وبـا AC زاویـه φ می‌سازند و طولی برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ دارند، به قسمی‌که $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$.(شکل ۶۲,c)

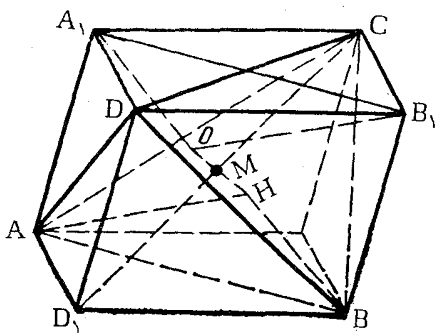
-۳۱۲ (a). ABCD را چهاروجهی مفروض درنظربگیرید. اگر ارتفاعات آن، درنقطه

H متقارب باشند، درآن صورت DH برصفحه ABC عمود وبنابراین، DH بر BC هم عمود خواهد بود.
درست به همین طریق، AH بر BC عمود می‌شود. درنتیجه صفحه DAH بر BC عمود می‌شود. یعنی یالهای DA و BC متقابلا بریکدیگر عمودند.
برعکس، اگر یالهای متقابل چهاروجهی $ABCD$ دوبه‌دو بریکدیگرعمود باشند، از DA صفحه‌ای بگذرانیدکه بر BC عمود باشد. نشان میدهیم ارتفاعات چهار وجهی‌که از رئوس A و D رسم می‌شوند، دراین صفحه قرار دارند.
محل برخورد صفحه‌ای راکه گذرانده‌ایم، با BC، K می‌نامیم. ارتفاع DD_1 از مثلث ADK بر AK و BC عمود می‌شود و بنابراین یکی از ارتفاعات چهار وجهی‌است. به‌این‌ترتیب هردوارتفاع چهاروجهی، متقارب می‌شوند، پس هرچهار تا دریك نقطه متقارب هستند.
(b). بـه‌آسانی ثابت می‌شودکـه اگر یکی از ارتفاعـات چهاروجهی، ازمحل برخورد ارتفاعات وجـه مقابل بگذرد، درآن صورت یالهای متقابل چهاروجهی، دوبه‌دو بریکدیگرعمودند واین، ازقضیه سه‌عمود نتیجه‌می‌شود. بنابراین قسمت‌های (a) و (b) هم‌ارز هستند.
(c). مساوی بودن مجموع مربعات یالهای متقابل چهاروجهی، هم‌ارز است بـا شرط عمود بودن یالهای متقابل‌آن (قسمت (a) را نگاه‌کنید).
(d). مانند همیشه باگذراندن صفحه‌ای ازهریال چهاروجهی به‌موازات یال‌مقابل، چهاروجهی را بـه‌متوازی‌السطوح تبدیل‌کنید. یـالهای متوازی‌السطوح حـاصل، برابرند بافاصله بین اوساط یالهای متناظرچهاروجهی. ازطرف دیگر، شرط عمود بودن یالهای متقابل چهاروجهی، بنابر قسمت (a)، هم‌ارز است با شرط خاصیت مرکز ارتفاعی داشتن چهاروجهی مفروض، واین بنوبه‌خود، هم‌ارز است با شرط مساوی بودن یـالهای متوازی‌السطوح بدست‌آمده (اقطار هروجه مساوی وموازی با دویال متقابل چهاروجهی‌اند یعنی هروجه باید لوزی باشد.)
(e). از مسائل ۳۰۰ و ۳۰۳ نتیجه می‌شودکه این شرط، هم‌ارز است بـا شرط قسمت (c).

(f). a و a_1، b و b_1، c و c_1 را طولهای سه‌زوج یال متقال چهاروجهی، و α را زاویه بین‌آنها درنظر بگیرید. ازمسئله ۱۸۵ نتیجه می‌شودکه، یکی ازسه عدد $aa_1\cos\alpha$، $bb_1\cos\alpha$ و $cc_1\cos\alpha$ برابراست با مجموع دوتای دیگر. اگر $\cos\alpha\neq 0$ آنگاه، یکی‌ازسه عدد aa_1، bb_1، cc_1 با مجموع دوعدد دیگر

برابر می‌شود. اما این امکان‌پذیر نیست، زیرا مثلثی پیدا می‌شود که طولهای اضلاع آن از نظر اندازه، برابر است با اندازه‌های aa_1، bb_1 و cc_1. (مسئله ۳۰۲ را نگاه کنید.)

۳۱۳- چهاروجهی مفروض‌را با $ABCD$ نشان دهید وطبق‌معمول آن‌را به‌متوازی‌السطوح تبدیل کنید. چون $ABCD$ خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، تمام یالهای متوازی‌السطوح از نظر طول برابرخواهند بود. A_1B_1 قطر یکی از وجوه متوازی‌السطوح و موازی AB، O مرکز کره محیطی چهاروجهی $ABCD$، H محل برخورد ارتفاعات آن، M مرکز ثقل آن است. (شکل ۶۳)



شکل ۶۳

پس مثلث‌های ABH و A_1B_1O نسبت به‌نقطه M قرینه یکدیگرمی‌شوند. این موضوع از آنجا نتیجه‌می‌شود که ABB_1A_1 متوازی‌الاضلاع است وعلاوه براین، A_1O برصفحه ACD عمود است، (نقاط O و A_1 ازنقاط A و C و D بیک فاصله‌اند.) وبنابراین موازی با BH خواهد بود. درست به‌همین طریق، OB_1 موازی با AH می‌شود.

۳۱۴- از نامگذاری‌های مسئله قبل استفاده می‌کنیم. اگر K و L اوساط AB و A_1B_1 باشند، درآن صورت $KOLH$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. بنابراین،

$$|OH|^2=2|OK|^2+2|OL|^2-|KL|^2$$

$$=2\left(R^2-\frac{|AB|^2}{4}\right)+2\left(R^2-\frac{|CD|^2}{4}\right)-l^2$$

$$=4R^2-\frac{1}{2}(|AB|^2+|CD|^2)-l^2=4R^2-3l^2$$

۳۱۵- اگر $ABCD$ چهاروجهی‌ای باشد که، خاصیت مرکز ارتفاعی دارد آنگاه، (مسئله ۳۱۲(d) را نگاه کنید)

$$|AB|^2+|CD|^2=|AD|^2+|BC|^2$$

از آنجا ،

$$|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2=|AD|^2+|AC|^2-|CD|^2$$

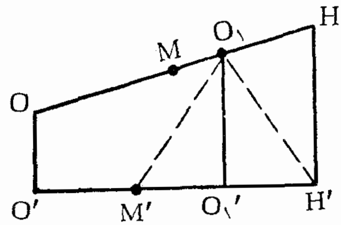
یعنی مثلث‌های BAC و DAC هردو حاده‌الزاویه ویا منفرجه‌الزاویه‌اند.

۳۱۶- مقطع یك چهاروجهی که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، با هرصفحه موازی یالهای متقابل که بیك فاصله از این یالها قرار داشته باشد، مستطیلی است که اقطار آن، با فاصله بین‌اوساط یالهای متقابل چهاروجهی برابرند (همه این‌فواصل ازنظر طولی با هم برابرند. مسئله ۳۱۲(d) را نگاه‌کنید)
از آنجا نتیجه‌می‌شود، اوساط همه یالهای یك‌چهاروجهی که خاصیت مرکزارتفاعی دارد، برروی سطح کره‌ای قرارگرفته‌اندکه مرکزآن، برمرکز ثقل چهاروجهی مفروض منطبق است وقطرآن، برابر است با فاصله بین یالهای متقابل چهاروجهی. پس همه چهار دایرهٔ نه نقطه، روی سطح این‌کره قرارمی‌گیرند.

۳۱۷- O و M و H را به‌ترتیب مرکزکره محیطی، مرکز ثقل ومرکز ارتفاعی (محل برخورد ارتفاعات) چهاروجهی بنامید که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد. M بروسط پاره خط OH قرار دارد (مسئله ۳۱۳ را نگاه‌کنید). مراکز ثقل وجوه چهاروجهی، رئوس یك چهاروجهی متجانس با چهاروجهی مفروض می‌شودکه، مرکزتجانس‌آن، M ونسبت تجانس‌آن برابر است با، $(-\frac{1}{3})$. در این تجانس تبدیل O به O_1 برروی MH، به‌قسمی است که $|OM_1|=\frac{1}{3}|OM|$ و O_1مرکز کره‌ای است که ازمراکزثقل وجوه می‌گذرد.
ازطرف دیگر، نقاط تقسیم ارتفاعات چهاروجهی از رئوس تا مرکز ارتفاعی، به نسبت ۲:۱، رئوس‌چهاروجهی‌ای‌می‌شود که،خاصیت مرکزارتفاعی دارد ومتجانس است با چهاروجهی مفروض. دراین تجانس، H مرکز ونسبت تجانس $\frac{1}{3}$ است .

همچنین دراین تجانس بـه‌آسانی دیده می‌شود که مجانس O، O_1 است. بـه‌این ترتیب، هشت‌تا از دوازده نقطه برروی سطح کره‌ای قرار می‌گیرند کـه مرکز آن، O_1 وشعاع آن برابر است با $\frac{1}{3}$ شعاع کره‌محیطی‌چهاروجهی.

ثـابت‌کنید نقاط برخورد ارتفاعات هر وجه، برروی سطح همین‌کره قرار دارد. O'، H' و M' را به‌ترتیب، مرکزدایره محیطی، محل برخورد ارتفاعات ومرکز ثقل یکی از وجوه درنظر بگیرید. O' و H' بـه‌ترتیب، تصاویر O و H روی صفحه این وجه می‌شود و M'، پـاره خط $O'H'$ را به‌نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کند. اندازه‌گیری از نقطه O' انجـام می‌گیرد. (موضوعی کـه درهندسه مسطحه، معلوم است.) اکنون براحتی می‌توان مطمئن شدکه (شکل ۵۴ را ببیند).



شکل ۶۴

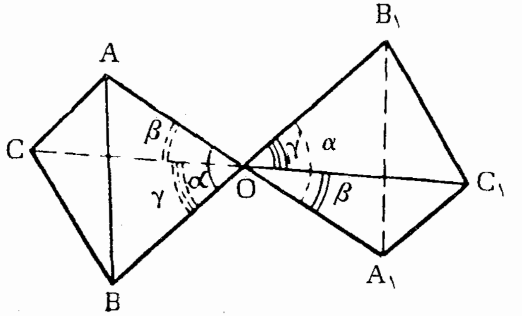
تصویر O_1 روی صفحه این وجه، (نقطه O_1') بروسط $M'H'$ منطبق است. یعنی، O_1 بیك فاصله از M' و H' قرار دارد. چیزی‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

۳۱۸- مراکز ثقل وجوه چهاروجهی‌ای‌کـه خاصیت مرکز ارتفـاعی دارد، برروی سطح کره‌ای قراردارندکه، مجانس‌کره محیطی چهاروجهی نسبت به‌مرکز تجانس M، وبا نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ است . (حل مسئله ۳۱۷ را نگـاه‌کنید) بنابراین حکم مسئله را می‌توان ازآنجا نتیجه‌گرفت.

۳۱۹- پاهای ارتفاعات چهاروجهی‌ای‌که خاصیت مرکز ارتفاعی دارد، روی‌کره‌ای قرار داردکـه مجانس‌کره محیطی چهاروجهی نسبت بـه مرکز G، بـا نسبت تجانس $\left(-\frac{1}{3}\right)$ است. (حل مسئله ۳۱۷ را نگاه‌کنید) بنابـراین حکم مسئله را می‌توان از آنجا نتیجه‌گرفت.

۳۲۰- فرض‌کنید اینطور نباشد. نقاط تقاطع دوبـه‌دوی صفحاتی راکـه‌کمانها را شامل

می‌شوند، برروی سطح کره، A و $A_۱$، B و $B_۱$، C و $C_۱$ بنـامید. (شکل ۶۵)



شکل ۶۵

چون اندازه هرکمان از ۱۸۰° بیشتر است، بایـد هرکمان لااقل شامل یکی ازهر دونقطه متقابل ازدایره‌ای باشد که، روی آن قرارگرفته‌است. این‌کمانها را برحسب صفحاتی‌کـه در آن قرارگرفته‌اند شماره‌گذاری می‌کنیم: I، II، III. A و $A_۱$ نقاط برخورد صفحات I و II، B و $B_۱$ محل برخورد صفحات II، III، C و $C_۱$ محل برخورد صفحـات III و I. هریك ازنقاط A، $A_۱$، B، $B_۱$، C، $C_۱$ باید به یك‌کمان تعلق داشته بـاشند. $A_۱$ و $C_۱$ را متعلق به‌کمان I، $B_۱$ را متعلق به II در نظر بگیرید. پس BوC باید متعلق به کمان III باشند و A متعلق به II. زوایای رأس کنج‌های سه‌وجهی راکه درشکل مشخص شده با α و β و γ نشان دهید، O مرکز کره است. چون کمان I شامل نقاط A و C نمی‌باشد، نامساوی $۳۶۰-\beta>۳۰۰^\circ$ باید برقرار باشد.

به‌طریق مشابه، چون‌کمان II شامل نقاط B و $A_۱$ نمی‌شود، باید داشته باشیم

$$۱۸۰^\circ+\alpha>۳۰۰^\circ$$

وبالاخره برای‌کمان III خواهیم داشت $۳۶۰^\circ-\gamma>۳۰۰^\circ$. بدین ترتیب

$$\beta<۶۰^\circ \quad ، \quad \alpha>۱۲۰ \quad ؛ \quad \gamma<۶۰^\circ$$

وازآنجا، $\alpha>\beta+\gamma$ که این ممکن نیست.

۳۲۱- A و B را دونقطه برروی‌کره درنظر بگیرید و C را هـم، روی‌کمـان‌کوچکتر دایره عظیمه‌ای‌که بر A و B می‌گذرد. اختیارکنید. ثابت‌کنید‌کوتاهترین راه از A به B، باید از C بگذرد. دودایره α و β را برروی سطح‌کره درنظربگیرید که از C می‌گذرند ومراکزشان برروی شعاعهای OA و OB قرار دارند. (O

مرکز کره است). فرض‌کنیم، خطی‌که A را به B وصل می‌کند، از C نگذرد و دایره α را در M ودایره β را در N قطع‌کند. با دوران دایره α وقسمتی‌ازخط داخل آن، به قسمی‌که M برروی C قرارگیرد وهمچنین با دوران دایره β، بـه همان شکل،که نقطه N را روی C منطبق سازد، خطی به‌دست خواهیم‌آوردکه A را به B وصل می‌کند وطولش به‌طور وضوح‌کمتر ازخط مورد بحث ما است.

۳۲۲- کره محیطی نمی‌تواند وجود داشته باشد. برای مثال، چند وجهی‌ای را به طریق زیر بسازید:

مکعبی را اختیارکنید وروی وجوه‌آن، به عنوان قاعده‌های هرم، هرم‌های چهار بر منتظمی را به‌طرف خارج طوری بناکنیدکه فرجه‌های نظیرقـاعده 45° باشند. در نتیجه یك دوازده وجهی حاصل می‌شود (یـالهای مکعب یالهای این دوازده وجهی نیستند) که چهارده رأس خواهد داشت و هشت‌تای‌آنها، رأس‌های مکعب هستند، و شش‌تای‌آن، رئوس هرمهای ساخته شده هستندکه بررئوس مکعب منطبق نشده‌اند. به‌آسانی دیده می‌شودکه، همه یـالهای چند وجهی، از نظرطول مساوی و ازمرکز مکعب بیك فاصله هستند با وجود این، رئوس آن نمی‌توانند متعلق به‌یك‌کره باشند.

۳۲۳- قبل ازهرچیز، این موضوع درنظر بگیریدکـه، مساحت هلالی‌که (قسمتی از سطح کره‌که بین دودایره عظیمه قرار دارد. م) ازتقاطع‌کره، باوجوه فرجه‌ای بااندازه α ساخته می‌شود ویـال آن، ازمرکزکره می‌گذرد، بـرابـر است با $2\alpha R^2$. این موضوع ازآنجا نتیجه می‌شودکه، این مساحت متناسب است با مقدار α، وبه‌ازای $\alpha=\pi$ برابرمی‌شود با $2\pi R^2$. به‌ازای هرجفت صفحه‌که دووجه فرجه مفروض را می‌سازند، دوهلال متناظر باآن، برروی‌کره ایجاد می‌شود. باجمع‌کردن مساحتهای آنها، سطح‌کره راکه به‌اندازه $4S_\Delta$ بزرگ شده است بدست می‌آوریم. دراینجا S_Δ مساحت مثلث مطلوب مسئله ما است. پس

$$S_\Delta = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

اندازه $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ را فزونی‌کروی مثلث کروی می‌نامند.

۳۲۴- کره‌ای درنظربگیریدکه مرکز آن، درداخل چند وجهی باشد. یالهای‌چندوجهی را ازمرکزکره برروی، آن تصویرکنید(تصویرمرکزی.م). سطح‌کره به‌چندضلعی‌هایی تجزیه می‌شود. اگر n_K تعداد اضلاع K امین چندضلعی، A_K مجموع زوایای‌آن S_K مساحت باشد، آنگاه،

$$S_K = R^2[A_K - \pi(n_K - 2)]$$

با نوشتن این تساوی‌ها برای تمام K ها وجمع‌کردن آنها خواهیم داشت

$$4\pi R^2 = R^2(2\pi N - 2\pi K + 2\pi M)$$

از آنجا

$$N - K + M = 2$$

-۳۲۵ α را زاویه مرکزی نظیر شعاع کروی دایره (زاویه بین شعاعهایی از کره که، مرکز کره را به‌مرکز دایره ویك‌نقطه واقع برروی آن وصل می‌کند) بنامید. مثلث کروی نظیر یك‌کنج سه وجهی را درنظر بگیرید که، رأس آن برروی مرکز کره، یکی از یالهای آن (OL) از مرکز دایره، ویال دیگر آن (OA) ازنقطه‌ای واقع برروی دایره بگذرد، ویال سوم آن (OB) طوری قرار بگیرد که صفحه OAB، بردایره مماس بشود. فرجه نظیر یال OL را با φ نشان دهید و، $\widehat{LOA} = \alpha$.
با به‌کار بستن قضیه دوم کوسینوسها(مسئله ۱۶۶ را نگاه‌کنید) فرجه نظیر یال OB را پیداکنیدکه برابر می‌شود با $\text{Arc}\cos(\cos\alpha \sin\varphi)$.
هرچند ضلعی‌محیطی (چندضلعی محیطی درنظر گرفته می‌شود زیرا درغیراین‌صورت ممکن است مساحتش کاهش پیداکند.) را می‌توان به‌مثلث‌هایی با همان خصوصیت تجزیه‌کرد. خواهیم دید بـا جمع‌کردن مساحتهای این مثلث‌ها، مساحت چند ضلعی همراه با مجموع:

$$\text{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi_1) + \text{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi_2) + \cdots$$
$$+ \text{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi_N)$$

به‌کمترین مقدار خود خواهد رسید.کـه درآن φ_1 و φ_2 و... φ_n فرجه‌های نظیر زوایا هستند و

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N = 2\pi$$

آنگاه می‌توان از این مطلب استفاده کردکه تابع $\text{Arc}\cos(K\sin\varphi)$ به‌ازای $0 < K < 1$ یك تابع مقعر است بنابراین می‌نیمم مجموع به‌ازای

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_N$$

حاصل می‌شود.

۳۲۶- مانند مسئله ۳۲۴، تعداد وجوه چند وجهی را با N، تعداد یالها را با K ، وتعداد رأس‌ها را با M نشان دهید.

$$N-K+M=۲ \qquad (۱)$$

چون ازهررأس حداقل سه‌یال خارج می‌شود، وهریال دوبار به‌حساب می‌آیدپس،

$$M\leqslant \frac{۲}{۳}K$$

با قرار دادن M در (۱) خواهیم داشت،

$$N-\frac{۱}{۳}K\geqslant ۲$$

ازآنجا

$$۲K\leqslant ۶N-۱۲$$

$$\frac{۲K}{N}<۶$$

رابطه اخیرنشان‌می‌دهدکه وجهی‌ای موجود است‌که‌کمتر ازشش‌ضلع داشته باشد. درواقع اگر N تعداد وجوه و $n_۱ , n_۲ ,\dots, n_N$ تعداد اضلاع درهروجه باشند داریم،

$$\frac{n_۱+n_۲+\dots+n_N}{N}=\frac{۲K}{N}<۶$$

۳۲۷- اگر درهروجه، بیش‌از ۳ ضلع موجود باشد، وازهر رأس بیش ازسه یال اخراج شود، آنگاه، (نامگذاری مانند مسئله ۳۲۴ انجام‌گرفته)

$$K\geqslant ۲M \quad ، \quad K\geqslant ۲N$$

و

$$N-K+M\leqslant ۰$$

که این ممکن نیست.

۳۲۸- اگرهمه وجوه، مثلث باشند، آنگاه تعداد یالها، مضربی از۳ خواهد بود. اگر لااقل یك وجـه تعداد اضلاعش از ۳ تجاوزکند، درآن صورت تعداد یـالهاکمتر از ۸

نخواهدبود. یك هرم n بر، دارای ۲n یال است

$$(n \geqslant ۳)$$

(۲n+۳) یال (n⩾۳) ، درچند وجهی‌ای پیدا خواهد شد که اگر آن چند وجهی، هرم n بر بشود و با صفحه مثلثی‌که به اندازهٔ کافی به‌یکی از رئوس قاعده نزدیك باشد قطع گردد.

۳۲۹- اگر چندوجهی مفروض n وجه داشته باشد، آنگاه هر وجه می‌تواند از سه، تا (n−۱) ضلع داشته باشد. ازآنجا نتیجه می‌شود که دووجه موجوداست‌که تعداد اضلاع آنها مساوی باشند.

۳۳۰- آنچه راکه به‌نام همسایگی به‌شعاع d ازچندوجهی‌خوانده‌می‌شود،مورد بررسی‌قرار دهید. یعنی مجموعه نقاطی را بررسی‌کنیدکه هریك ازآنها: ازحداقل یك‌نقطه چند وجهی درفاصله نابیشتراز d قرارداشته باشند. سطح جسم حاصل شامل‌قسمتهایی از صفحات برابرومتناظر باوجوه چند وجهی، قسمتهایی استوانه‌ای متناظر با یالهای چندوجهی (دراینجا اگر l_i طول بعضی‌از یالها و a_i فرجه‌های نظیراین یالها باشد آنگاه مساحت قسمتی‌که متناظر با استوانه است $(\pi - a_i) l_i d$ می‌شود.) وقسمت‌هایی‌کروی متناظر با رئوس چندوجهی خواهدبودکه‌کل مساحت‌آنها برابر با مساحت سطح کره‌ای به شعاع d می‌شود. به‌عبارت دیگر، مساحت سطح همسایگی به‌شعاع d از چند وجهی، کمتراز مساحت سطح کره‌ای به‌شعاع d+۱ می‌شود. یعنی :

$$S + d\,\Sigma(\pi - a_i)\, d_i + ۴\pi d^۲ < ۴\pi(d+۱)^۲$$

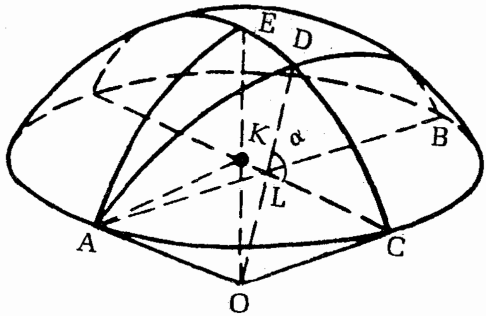
و چون ،

$$a_i \leqslant \frac{۲\pi}{۳}$$

داریم،

$$\Sigma l_i < ۲۴$$

۳۳۱- درشکل ۶۶، O مرکز کره، A و B محل برخورد یال فرجه باسطح‌کره، D و C به‌ترتیب اوساط‌کمانهای $\widehat{ADB}$ و $\widehat{ACB}$ می‌باشند. صفحه ADB ازO می‌گذرد و E رأس قطعه‌کروی می‌باشدکه باصفحه ACB قطع شده است. اندازهٔ مساحت



شکل ۶۶

مثلث منحنی‌الخط ADC برابر نصف مساحت مطلوب مسئله است.

ازطرف دیگر (با فرض $\alpha \leqslant \frac{\pi}{۲}$)،

$$S_{ADC} = S_{AEC} - S_{AED} \qquad (۱)$$

S_{AEC} را پیدا کنید. اگر زاویه بین صفحات AEO و OEC برابر با φ،

$$|EK| = h$$

آنگاه،

$$S_{AEC} = \frac{\varphi}{۲\pi}\, ۲\pi Rh = \varphi Rh$$

و h و φ به‌آسانی پیدا می‌شوند.

$$h = |EK| = R - |OK| = R - a\sin\alpha$$

$$\sin\varphi = \sin\widehat{AKL} = \frac{|AL|}{|AK|} = \frac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha}}$$

$$\varphi = \mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha}}$$

پس ،

$$S_{AEC}=R(R-a\sin\alpha)\,\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{R^{2}-a^{2}}}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}} \qquad (۲)$$

اکنون S_{AED} را پیداکنید.

همانطورکه می‌دانیم (مسئلهٔ ۳۲۳ را نگاه‌کنید).

$$S_{AED}=R^{2}(\varphi+\psi+\gamma-\pi)$$

که در آن φ و ψ و γ فرجه‌های کنج سه‌وجهی‌ای می‌باشندکه رأس آن O، ویالهای آن OE، OA و OD می‌باشند.

زاویه φ به‌آسانی پیدا می‌شود.

برای تعیین ψ (فرجه نظیر یال OA) ازقضیه‌اول کسینوسها (مسئلهٔ ۱۶۶) استفاده کنید وآنرا دربارهٔ کنج سه‌وجهی به‌رأس A، به‌کار ببریدکه درآن،

$$\widehat{KAL}=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

$$\sin\widehat{KAO}=\frac{a\sin\alpha}{R} \quad ، \quad \sin\widehat{ALO}=\frac{R}{a}$$

درنتیجه ،

$$\cos\psi=\frac{\dfrac{\sqrt{R^{2}-a^{2}}}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}}-\sqrt{1-\dfrac{a^{2}\sin^{2}\alpha}{R^{2}}}\sqrt{1-\dfrac{a^{2}}{R^{2}}}}{\dfrac{a\sin\alpha}{R}\cdot\dfrac{a}{R}}$$

$$=\frac{\sqrt{R^{2}-a^{2}}}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}}\sin\alpha$$

واضح است‌که،

$$\gamma=\frac{\pi}{2}$$

در نتیجه،

$$S_{AED}=R^{2}\left[\operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{R^{2}-a^{2}}}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}}+\right.\qquad (۳)$$

$$\left.+\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin\alpha}}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}}-\frac{\pi}{2}\right]$$

با قراردادن (۲) و (۳) در (۱) وساده کردن آن جواب مسئله پیدا می‌شود.

جواب :

$$2R^{2}\operatorname{Arc}\cos\frac{R\cos\alpha}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}}-$$

$$-2Ra\sin\alpha\operatorname{Arc}\cos\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{R^{2}-a^{2}\sin^{2}\alpha}}$$

۳۳۲- هشت‌وجهی منتظمی به‌یال $2R$ را درنظر بگیرید. شعاع کره‌ای‌که برهمهٔ یالهای آن مماس باشد برابربا R است. سطح کره به‌وسیله هشت وجهی، به هشت قطعه کروی وشش چهارضلعی منحنی‌الخط برابر با سطح کوچکتر دو سطح مطلوب مسئله تجزیه می‌شود.

جواب :

$$\pi R^{2}\left(\frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-2\right)\quad و \quad \frac{2\pi R^{2}}{3}\left(4\sqrt{\frac{2}{3}}-3\right)$$

۳۳۳- دوازده هلال‌که مساحت کل آنها برابراست با،

$$\frac{\pi a^{2}(2-\sqrt{3})}{4}$$

وشش چهارضلعی منحنی‌الخط که مساحت کل آنها برابراست با

$$\frac{\pi a^{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

۳۳۴- فرض‌کنید یك‌کره، قابل محاط درداخل چندوجهی باشد. نقطه تماس کره، بایکی‌از

وجوه را به‌تمام رئوس این وجه وصل کنید. هروجه می‌تواند به‌چند مثلث تجزیه شود. مثلث‌هایی که دروجوه مجاورقراردارند ودریك یال مشترکند، قابل انطباق بریکدیگرند. درنتیجه، به‌هریك‌ازمثلثهای «سیاه» یك‌مثلث‌سفیدنظیرمی‌شود. مجموع زوایای مثلث، درهرنقطه تماس برابر 2π می‌باشد. مجموع این زوایا، برروی‌تمام وجوه برابراست با

$$2\pi n$$

که درآن n تعداد وجوه می‌باشد.

ازایـن مجموع، بیش از نصف آن، سهم مثلثهای «سیاه» می‌باشد. (بنا به‌فرض) و مجموع زوایای نظیراز مثلثهای سفید، همانطورکه ثابت شد، کمترنیست و این یك تناقض است.

۳۳۵- ثابت‌کنید بیش‌از شش‌کره یافت نمی‌شود.

فرض‌کنید هفت‌تاکره موجود باشد. مراکزهمهٔ هفت‌کره را به‌مرکز کرهٔ مفـروض وصل‌کنید ومحل برخورد این پاره‌خطها را با سطح‌کرهٔ مفروض، O_1، O_2، ...، O_7 بنامید. برای هر O_i، برروی‌کره، مجموعه نقاطی را درنظربگیریدکه فواصل آنها (برروی سطح‌کره) تا O_i بیشتر از فاصله تا هر O_k دیگر $k \neq i$ نباشد. سطح‌کره، به‌هفت چندضلعی‌کروی تجزیه خواهد شد. هرچندضلعی از برخورد شش نیمکره‌که شامل‌نقطه O_i می‌باشند به‌وجود می‌آید ومرزآن دایرهٔ عظیمه‌ای‌است‌که درطول آن صفحه‌ای‌که از وسط O_iO_k می‌گذرد و برآن عمود است،کره را قطع می‌کند.

هـریك‌از n ضلعی‌های تشکیل شده، شامل دایره‌ای هستندکه شعاع‌کروی آنها، از مرکز کره اصلی، تحت زاویه α دیده می‌شود و $\sin\alpha = 0{,}7$.

تعداداضلاع ورئوس جدا شده حاصل‌را، به‌ترتیب با K وN نشان‌دهید. (هرضلع ضلع مشترك دوچندضلعی مجاور است ویکبار به‌حساب می‌آید. درمورد رئوس هم، این موضوع صدق می‌کند). به‌آسانی‌دیده می‌شودکه درمورد اینگونه‌جداسازی‌ها[1] هم، فرمول اولرصادق است. (مسئله ۳۲۴ را نگاه‌کنید) در این حالت

$$K = N + 5$$

صدق خواهدکرد. از طرف دیگر،

1. Separation.

$$K \geqslant \frac{۳}{۲} N$$

زیرا ازهررأس، لااقل سه‌ضلع خارج می‌شود وهرضلع دوبار به‌حساب می‌آید. اما به‌آسانی نتیجه می‌شود،

$$N \leqslant ۱۰ \quad ، \quad K \leqslant ۱۵$$

درمسئلهٔ ۳۲۵، ثابت‌کردیم، در بین همه nضلعی‌های‌کروی شامل دایـرهٔ مفروض، یك nضلعی منتظم‌کمترین‌مساحت را دارد. علاوه براین، می‌توان‌نشان دادکه‌مجموع مساحتهای nضلعی، $(n+۲)$ ضلعی بیشتراز دوبرابرمساحت یك nضلعی‌منتظم‌است. (چندضلعی محیطی یك دایره موردنظراست). همچنین معلوم است‌که، مساحت یـك nضلعی، با افزایش n کمترمی‌شود. ازآنجا نتیجه می‌شودکه مجموع مساحتهـای هفت n ضلعی حاصل، نمی‌تواندکمتراز مجموع مساحتهای پنج چهارضلعی منتظم و دو پنج‌ضلعی منتظم محیط بردایره‌ای باشدکه شعاع‌کروی‌آن، نظیر زاویه مرکزی

$$\alpha = \operatorname{Arc}\sin \frac{۷}{۱۰}$$

است. مساحت پنج‌ضلعی نظیر برابرخواهدبود با،

$$S_{۵} = ۹\left[۱۰ \operatorname{Arc}\cos\left(\cos\alpha \sin\frac{\pi}{۵}\right) - ۳\pi \right]$$

مساحت چهارضلعی منتظم برابراست با

$$S_{۴} = ۹\left[۸ \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha\right) - ۲\pi \right]$$

به‌آسانی می‌توانیم ثابت‌کنیم:

$$۲S_{۵} + ۵S_{۴} > ۳۶\pi$$

به‌این‌ترتیب هفت‌کره باشعاع ۷ نمی‌توانند توأماً به‌کره‌ای به‌شعاع ۳ بدون تقاطع بایکدیگرمماس بشوند. درعین‌حال به‌آسانی می‌توانیم نشان بدهیم‌که امکان‌آن‌تحت شرایط مسئله با شش‌کره وجود دارد.

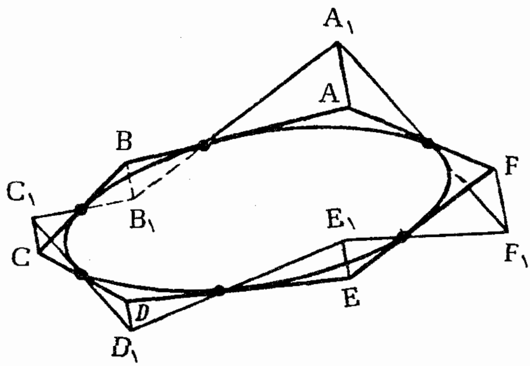
۳۳۶- مکعب $ABCD\,A_۱B_۱C_۱D_۱$ را درنظر بگیرید. روی یالهای $A_۱B$ و $A_۱D$ ، نقاط K و L را طوری اختیارکنیدکه،

$$|A_1K| = |CM| \quad ، \quad |A_1L| = |CN|$$

محل برخورد AK و BA_1، AL و DA_1 را به‌ترتیب P و Q بنامید. به‌آسانی دیده می‌شود که اضلاع مثلث A_1PQ متناظراست. با پاره‌خطهای روی قطـر BD. وچون مثلث BA_1D منتظم‌است، حکم مسئله ثابت می‌شود.

۳۳۷- اگر نقطه P درداخل صفحه مثلث ABC نباشد، حکم مسئله آشکاراست زیرا دراین حالت نقاط P و A_2 و B_2 و C_2 به‌مقطعی ازسطح کره که بر p و l می‌گذرد و بر-چهاروجهی $ABCP$ محیط‌است تعلق خواهند داشت. اکنون حکم‌مسئله را می‌توان با استفاده ازحد، به‌نتیجه رساند.

۳۳۸- $ABCDEF$ را شش‌ضلعی مسطحه محیط بریك دایره، درنظـر بگیرید. شش‌ضلعی دلخواه فضایی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را هم (شکل ۶۷) متمایزاز $ABCDEF$ در نظر بگیریدکه تصویرآن، روی صفحه مفروض، شش ضلعی $ABCDEF$ بشود و اضلاع نظیر آن، از نقاط محل برخورد شش‌ضلعی $ABCDEF$ و دایره بگذرند. برای اثبات وجود شش‌ضلعی ازنوع $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ، کافی‌است رأسی مانند A_1 را روی عمودی‌که از A برصفحه اخراج می‌شود، به‌دلخواه اختیارکرد. سپس بقیه رأسهارا به‌همین‌طریق تعیین نمود. درواقع اگر a، b، c، d، e و f طولهای



شکل ۶۷

مماسهایی‌باشندکه به‌ترتیب ازنقاط A، B، C، D، E و F بردایره رسم می‌شوند و h فاصله A از صفحه درنظر گـرفته شود، آنگاه B_1 در طرف دیگر صفحه قرارمی‌گیرد. ودرمقایسه با A به‌اندازه $\dfrac{hb}{a}$ ازصفحه فاصله دارد. C_1 درطرفی

قرارداردکه A_1 قراردارد وفاصله‌اش، از صفحه

$$\frac{hb}{a}\cdot\frac{c}{b}=\frac{hc}{a}$$

می‌باشد. به‌همین ترتیب بالاخره F_1 در مقایسه با A_1 در طرف دیگر صفحه قرار می‌گیرد وفاصله‌اش ازصفحه برابرمی‌شود با $\frac{hf}{a}$. بنابراین A_1 و F_1 بر روی خط راستی قراردارندکه از نقطه تماس AF با دایره می‌گذرد.

هر دوضلع متقابل ازشش‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$، بر روی یك صفحه، یعنی همان صفحه‌ای که ازدوضلع می‌گذرد، قراردارند واین ازآنجا نتیجه‌می‌شود، همه‌زوایایی که اضلاع شش‌ضلعی باصفحه تشکیل‌می‌دهند، مساویند. درنتیجه هردوقطر، که‌رئوس متقابل شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را به‌هم وصل می‌کنند، متقاطع هستند و بنابراین، هرسه‌قطراین شش‌ضلعی، (دریك صفحه قرارندارند) دریك نقطه‌متقاربند. چون شش‌ضلعی $ABCDEF$، تصویر شش‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ است، قضیه ثابت شده‌است.

۳۳۹- شکل‌صفحه درمسئله نشان می‌دهدکه می‌توان‌آنرا به‌عنوان تصویریك جسم سه بعدی درنظرگرفت: یك‌کنج سه‌وجهی‌که با دوصفحه قطع شده‌است. حکم مسئله به‌آسانی ازآنجا نتیجه می‌شود.

۳۴۰- این مسئله معروف یکی‌از قضایای مشابه قضیه دزارك‌است. (مسئله ۳۳۹ را ببینید). برای حل آن به‌راحتی می‌توان به‌فضای چهاربعدی رفت. بیائید بعضی خواص این فضارا مورد بررسی قراردهیم. ساده‌ترین شکل ازنمونه‌های یك‌فضای چهاربعدی، نقطه، خط راست، صفحه‌است واشکال سه‌بعدی‌مختلف دیگری که، ابرصفحه[1] خوانده می‌شوند.

سه‌شکل نخست ازدوستان قدیمی ما درفضای سه‌بعدی هستند. البته بعضی‌احکام در خصوص این‌اشکال باید دوباره مورد بررسی وبازسازی‌قرارگیرند. مثلااصل‌مربوط به‌فضای سه‌بعدی، اینکه اگردوصفحه دریك‌نقطه مشترك باشند، در یك خط راست مشترکند، بادید جدید، بااصل، «اگردوصفحه متمایزمتعلق به‌یك ابرصفحه دریك‌نقطه مشترك باشند، آنگاه همدیگررا درامتداد یك‌خط راست‌قطع‌خواهندکرد» جایگزین

1. Hyper plane.

می‌شود. معرفی شماء یك‌هندسه جدید، یك ابرصفحه، معرفی یك‌دسته اصول‌ضروری مربوط به‌آنرا تسریع می‌کند. درست مانند عبور ازهندسه مسطحه به‌هندسه فضایی، (از دوبعدی به سه‌بعدی) که نیاز به‌بیان یك‌دسته اصول‌ضروری دارد. (آنهـا را مجدداً بازسازی‌کنید) ومربوط به‌خواص اصلی صفحه درفضا می‌شوند.

این دسته اصول جدید سه‌اصل زیررا شامل می‌شوند:

۱ــ یك ابرصفحه، به‌هرشکل که‌باشد، نقاطی‌وجود داردکه به‌آن متعلق‌است‌ونقاطی وجود داردکه به‌آن متعلق نیست.

۲ــ اگردوابرصفحه متمایزدریك‌نقطه مشترك‌باشند، آنگاه همدیگررا دریك صفحه‌قطع می‌کنند. به‌عبارت دیگرصفحه‌ای وجود داردکه متعلق به‌هریك از دوابرصفحه باشد.

۳ــ اگرخط راستی‌متعلق به‌صفحه‌ای نباشدکه باآن‌صفحه یك‌نقطه مشترك دارد، آنگاه یك ابرصفحه منحصر بفردی وجود داردکه شامل این‌خط وصفحه بشود.

ازاین اصول مستقیماً نتیجه می‌شودکه اگر چهارنقطه متعلق به‌یك صفحه نباشند، یك ابرصفحه را مشخص‌می‌کنند. درست به‌همین طریق سه‌خط راست‌که به‌یك‌صفحه‌تعلق نداشته‌باشند، اما یك‌نقطه مشترك داشته‌باشند، یا دوصفحه متمایـز که یك‌خط مشترك داشته‌باشند، یك ابرصفحه را مشخص می‌کنند. خیال نداریم این احکام راثابت‌کنیم بلکه سعی می‌کنیم مستقیماً باآنها برخورد بکنیم.

برای استدلال بیشترنیاز به‌این حقیقت داریم‌که درفضای چهاربعدی: سه‌ابر صفحه متمایز،که دارای یك نقطه مشتـرك باشند، دریـك خط راست مشترکند. درحقیقت بنابراصل ۲، هردوصفحهٔ ازسه ابرصفحه، یك صفحه مشترك دارند. بیائید دوصفحه را درنظر بگیریم‌که یکی از سه ابرصفحه، دوتای دیگررا قطـع‌کند. این دوصفحه درنظرگرفته شده خود، متعلق به‌یك ابرصفحه خواهندبودکه دریك‌نقطه مشترك هستند ودرنتیجه یا دریك خط راست مشترك ویا برهم منطبق خواهندبود.

اکنون وارد برهان قضیه خودمان می‌شویم. اگرسه‌صفحه تحت بررسی،دریك‌فضای چهاربعدی درنظرگرفته شوند، آنگاه حکم روشن‌خواهدبود. درحقیقت هرکنج سه وجهی یك ابرصفحه را مشخص می‌کند. دوتا از ابرصفحه‌ها همدیگررا دریك‌صفحه قطع می‌کنند، این‌صفحه، متعلق به‌سومین ابرصفحه نیست (بنابه‌فرض این‌ابرصفحه‌ها یکی‌از صفحات داده شده را در امتـداد سه‌خط راست‌که درنقطه‌ای مشترك نیستند قطع می‌کند) درنتیجه، درامتداد یك خط راست باآنها متقاطع می‌شود.

هرسه‌وجه متناظر ازکنج سه‌وجهی، روی یك ابرصفحه قراردارندکه با دوصفحه‌ای که یالهای متناظرروی‌آنها قراردارند مشخص می‌شود وبنابراین هرسه‌وجه‌متناظر،

یك نقطه مشترك دارند.

این سه نقطه به‌سه ابرصفحه تعلق دارند که با کنج سه‌وجهی مشخص می‌شوند و همان‌طور که اثبات شد، روی یك‌خط راست قرار می‌گیرند. حالا برای کامل شدن برهان کافیست درفرض داده شده، تصویر متناظر باشکل چهار بعدی را درهیئت صفحات یك کنج سه‌وجهی «مشاهده» کنیم.