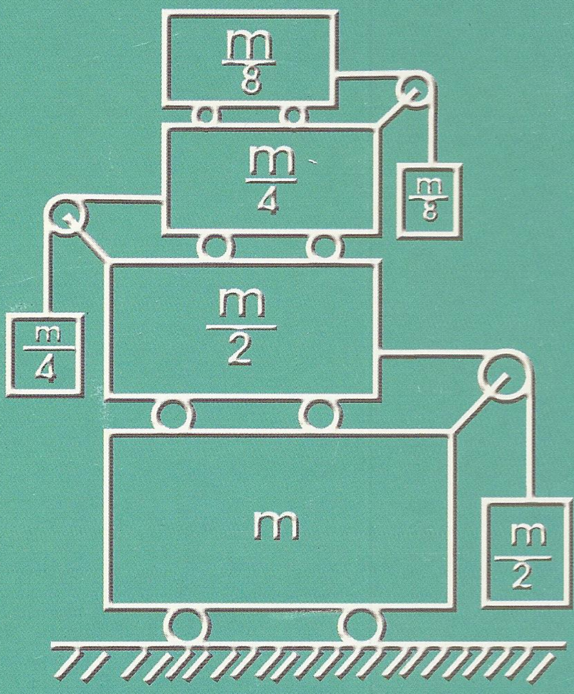
دانش پژوهان جوان

مسایل فیزیک عمومی

(ایرودف)

جلد اول - مکانیک



$$a_m = ?$$

مهدی متقی پور

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

مقدمه مؤلف

با توجه به رقابت رو به گسترش در المپیادهای علمی کشور و کمبود منابع فارسی به خصوص در مبحث فیزیک بر آن شدیم تا گامی در جهت رفع این مشکل بر داریم . در کتاب "مسائلی در فیزیک عمومی" نوشته ایرودف مسائل مهم از مباحث مختلف گنجانده شده است و یکی از منابع علمی در المپیاد فیزیک می باشد. با توجه به اهمیت موضوع، شروع به نوشتن پاسخ مسائل آن کردیم که کتا ب حاضر تشریح مسائل، بخش مکانیک را در بر دارد. در حل مسائل سعی شده از راه حلهای پیچیده با عملیات ریاضی مشکل اجتناب شود و فرض بر این شده که خواننده با مباحث مشتق و انتگرال آشنایی مختصری دارد. در اینجا لازم است از زحمات فداکارانه و بی دریغ همسرم و همچنین از حمایتهای روحی و معنوی پدر و مادرم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. همچنین از دانش آموز ممتاز آقای محمد امین حیدری زارع که مرا در اتمام این مجموعه یاری رساندند قدردانی می کنم. در پایان امیدوارم این مجموعه گام مؤثری در ارتقای آموزش فیزیک در سطح دبیرستان باشد و از خوانندگان محترم تقاضا دارم انتقادات و پیشنهادات خود را به اطلاع اینجانب برسانند.

مهدی متقی پور
بهار ۱۳۸۴
Email: mottaghi@sharif.edu

سینماتیک

۱ـ یک قایق موتوری که در جهت جریان رودخانه حرکت می کند، در نقطهٔ A از یک تخته شناور بر روی آب سبقت می گیرد. بعد از زمان $\tau = ۶۰$ دقیقه، قایق تغییر جهت می دهد و پس از مدت زمانی دوباره به تخته در فاصلهٔ $l = ۶km$ از نقطهٔ A می رسد. سرعت جریان آب را بیابید. فرض کنید توان موتور قایق در طول حرکت ثابت است.

۲ـ ذره ای نصف مسیری را با سرعت $v_۰$ طی می کند. باقیماندهٔ مسیر را در نصف زمان با سرعت $v_۱$ و در نصف زمان باقیمانده با سرعت $v_۲$ طی می کند. متوسط سرعت ذره را در کل مسیر به دست آورید.

۳ـ متحرکی از حالت سکون روی خط راست شروع به حرکت می کند. ابتدا با شتاب ثابت $a = ۵m/s^۲$ حرکت می کند، سپس با سرعت ثابت ادامه مسیر می دهد و بعد با همان شتاب اولیه از سرعتش می کاهد. کل زمان حرکت $t = ۲۵s$ به طول می انجامید. اگر سرعت متوسط در طول حرکت $۷۲\dfrac{km}{h}$ باشد، مدت زمانی که متحرک با سرعت ثابت حرکت کرده است را بیابید.

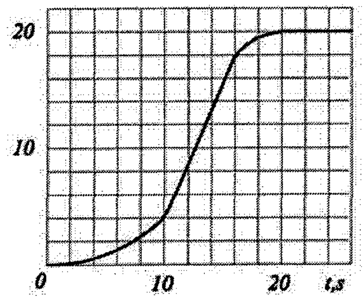
۴ـ متحرکی در خط مستقیم در یک جهت حرکت می کند. شکل ۱ مسافت طی شده توسط متحرک را بر حسب تابعی از زمان نمایش می دهد. به کمک شکل مطلوب است

محاسبه :

الف) سرعت متوسط متحرک در طول حرکت ؛

ب) حداکثر سرعت متحرک در طول حرکت ؛

ج) لحظهٔ $t_\circ$ که در آن سرعت لحظه ای با سرعت متوسط متحرک تا آن لحظه برابر باشد؛



شکل ۱

د) شتاب متوسط متحرک در ۱۰ و ۱۶ ثانیه اول حرکت

۵ـ دو ذرهٔ ۱ و ۲ با بردار سرعتهای ثابت $\vec{V}_۱ , \vec{V}_۲$ حرکت می کنند. اگر بردارهای مکان دو ذره $\vec{r}_۱ , \vec{r}_۲$ باشد، چه رابطه ای بین این چهار بردار باید باشد تا این دو ذره با یکدیگر برخورد کنند؟

۶ـ یک کشتی در طول خط استوا با سرعت $۳۰ km/h$ به طرف شرق حرکت می کند. باد با سرعت ۱۵ km/h در جهت جنوب شرقی با زاویه ۶۰ درجه نسبت به خط استوا می وزد سرعت نسبی باد نسبت به کشتی v' و زاویه ϕ' بین خط استوا و جهت وزش باد را از دید ناظری که روی کشتی است به دست آورید.

۷ـ دو شناگر از نقطهٔ A از یک طرف رودخانه همزمان شروع به شنا کردن می کنند تا به نقطهٔ مقابل A (یعنی نقطه B)در طرف دیگر رودخانه برسند .شناگر اول در مسیر مستقیم

AB شنا می کند، در حالیکه شناگر دوم در جهت عمود بر جریان رودخانه شنا می کند و سپس در ساحل مقابل به طرف نقطهٔ B راه می رود تا مسافتی را که توسط جریان رودخانه به پایین دست کشیده شده است جبران کند. سرعت گام او در ساحل u می باشد در صورتی که هر دو شناگر با هم به نقطهٔ B برسند، سرعت u را بیابید. سرعت جریان آب $v_۰ = ۲\frac{km}{h}$ و سرعت هر دو شناگر نسبت به آب $v' = ۲/۵\frac{km}{h}$ می باشد.

۸ـ دو قایق A و B از یک شناور ثابت در وسط رودخانه روی دو مسیر مستقیم عمود بر هم شروع به پارو زدن می کنند؛ قایق A در طول رود و قایق B در عرض رودخانه. هر دو هنگامی که در مسافت برابری از شناور دور شده اند، تغییر جهت داده و باز می گردند. نسبت زمانهای حرکت قایق A به قایق B ، یعنی $\frac{T_A}{T_B}$ را بیابید در صورتی که سرعت قایقها نسبت به آب ساکن به اندازه ضریب $\eta = ۱/۲$ بزرگتر از سرعت آب باشد.

۹ـ یک قایق نسبت به آب با سرعتی که $\eta = ۲$ برابر سرعت آب است حرکت می کند. قایق در چه زاویه ای نسبت به جهت آب باید حرکت کند که کمترین رانش و حرکت را در راستای آب داشته باشد.

۱۰ـ دو ذره هم زمان از یک نقطه پرتاب می شوند با این تفاوت که اولی تحت زاویه ۶۰° نسبت به افق و دومی به طور قائم و به سمت بالا. سرعت اولیه آنها با هم برابر و مساوی $۲۵m/s$ می باشد. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا فاصله دو ذره را بعد از گذشت ۱/۷ ثانیه از لحظه پرتاب به دست آورید.

۱۱ـ دو ذره در یک میدان گرانشی یکنواخت با شتاب جاذبه ژ قرار دارند. در یک زمان دو ذره از یک نقطه با سرعتهای $۴\ m/s$ و $۳\ m/s$ در جهت مخالف هم در راستای افق

پرتاب می شوند. فاصله بین ذرات را هنگامیکه بردارهای سرعت آنها بر هم عمود هستند بیابید.

۱۲ـ سه ذره در سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a قرار دارند؛ هر سه ذره با سرعت ثابت v شروع به حرکت می کنند. به طوریکه ذرهٔ اول به طرف ذرهٔ دوم، ذرهٔ دوم به طرف ذرهٔ سوم و ذرهٔ سوم به طرف ذرهٔ اول. بعد ا زچه مدتی این سه ذره به هم خواهند رسید.

۱۳ـ نقطهٔ A پیوسته باسرعتی که اندازهٔ آن ثابت و برابر v است به سمت نقطهٔ B و نقطهٔ B هم با سرعت ثابت u که $u < v$ در امتداد یک خط مستقیم حرکت می کند. در لحظهٔ اول $\vec{u} \perp \vec{v}$ می باشد و نقاط به فاصلهٔ l از یکدیگر قرار دارند. زمانی را بیابید که نقاط A و B به هم می رسند.

۱۴ـ یک قطار به طول $l = ۳۵۰\ m$ در راستای مستقیم با شتاب ثابت $w = ۳\times۱۰^{-۲}\dfrac{m}{s^۲}$ آغازبه حرکت می کند. بعد از گذشت $t = ۳۰\ s$ از شروع حرکت چراغ جلوی لوکوموتیو روشن می شود (رویداد ۱) و $\tau = ۶۰\ s$ بعد از این رویداد، چراغ انتهایی روشن می شود (رویداد ۲). فاصله این دو رویداد از یکدیگر از دید ناظر روی زمین چقدر است. ناظر سوم با چه سرعت و در چه جهتی باید حرکت کند تا از دید او دو رویداد در یک نقطه اتفاق بیافتند..

۱۵ـ یک آسانسور که طول فاصله کف تا سقف آن $۲/۷\ m$ است، شروع به بالا رفتن با شتاب $۱/۲\dfrac{m}{s^۲}$ می کند. $۲s$ بعد از آغاز حرکت، یک پیچ از سقف آسانسور رها می شود

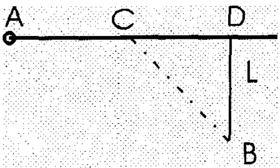
مطلوب است :

الف) مدت زمان سقوط آزاد پیچ تا اینکه با کف آسانسور برخورد کند.

ب) جابجایی و مسافت طی شده توسط پیچ در سقوط آزاد نسبت به چارچوب مرجع متصل به زمین.

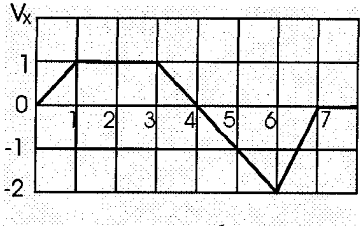
۱۶ــ دو ذرهٔ ۱ و ۲ با سرعتهای ثابت v_1 و v_2 در طول دو خط عمود بر هم که در نقطهٔ O با یکدیگر متقاطعند حرکت می کنند. در لحظهٔ $t = 0$ دو ذره به ترتیب در فاصلهٔ l_1 و l_2 از نقطه O قرار دارند. بعد از چه مدت زمانی فاصله دو ذره به کمترین مقدار خود می رسد؟ این فاصله را محاسبه کنید.

۱۷ـ متحرکی مطابق شکل ۲ قصد دارد از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد. سرعت متحرک در راستای خط AD ، η برابر بیشتر از سرعت در خارج خط مورد نظر است. همچنین فاصله عمودی نقطهٔ B از خط AD برابر l می باشد. فاصله نقطهٔ C از D را طوری به دست آورید که زمان لازم برای رسیدن متحرک از A به B مینیمم شود.



شکل۲

۱۸ـ ذره ای در طول محور x ها با سرعت V_x حرکت می کند. V_x مطابق شکل۳ بر حسب زمان تغییر می کند. با فرض اینکه متحرک در لحظه $t = 0$ در $x = 0$ قرار داشته است نمودار شتاب و مکان متحرک و مسافت طی شده توسط متحرک برحسب زمان را رسم کنید.



شکل ۳

۱۹ـ متحرکی نصف محیط یک دایره به شعاع $۱۶۰\ cm$ را در ۱۰ ثانیه طی می کند. مطلوبست :

الف) میانگین اندازهٔ سرعت $<v>$ ؛

ب) اندازهٔ میانگین بردار سرعت $|<\vec{v}>|$ ؛

ج) اندازهٔ میانگین بردار شتاب $|<\vec{w}>|$؛ در صورتی که متحرک با شتاب مماسی ثابت حرکت کند.

۲۰ـ بردار مکان یک ذره به صورت $\vec{r} = \vec{a}t(۱-\alpha t)$ نسبت به زمان تغییر می کند که $\vec{a}$ برداری ثابت و α عددی مثبت است.

الف) بردارهای سرعت $\vec{v}$ و شتاب $\vec{w}$ را بر حسب زمان به دست آورید.

ب) فاصله زمانی Δt که در طول آن ذره به مکان اولیه خود بر می گردد و همچنین مسافت طی شده s در طول این زمان را به دست آورید.

۲۱ـ در لحظهٔ $t=۰$ ذره ای از مبدأ در جهت مثبت محور x ها شروع به حرکت می کند. سرعت ذره از رابطه $\vec{v}=\vec{v}_۰(۱-t/\tau)$ که $\vec{v}_۰$ بردار سرعت اولیه است تبعیت می کند. اندازه $\vec{v}_۰$، $۱۰\ cm/s$ و مقدار $\tau = ۵\ s$، می باشد. مطلوبست محاسبه :

الف) مکان x ذره در زمانهای ۶، ۱۰ و ۲۰ ثانیه ؛

ب) زمانهایی که فاصله ذره از مبدأ $۱۰\ cm$ باشد ؛

ج) مسافت طی شده s توسط متحرک در ۴ و ۸ ثانیه اول.
د) نمودار تقریبی مسافت بر حسب زمان را بکشید.

۲۲ـ سرعت یک ذره که در طول محور x ها حرکت می کند طبق رابطهٔ $v=\alpha\sqrt{x}$ تغییر می کند(α ثابت مثبت). با این فرض که ذره در $t=0$ در $x=0$ باشد. مطلوبست
الف) سرعت و شتاب ذره بر حسب زمان ؛
ب) سرعت متوسط ذره بعد از طی کردن مسافت s از ابتدای حرکت.

۲۳ـ متحرکی در طول خط راست با شتاب کند شونده ای که رابطه اش با سرعت به صورت $\omega=a\sqrt{v}$ است و a ثابت مثبتی می باشد، حرکت می کند. سرعت اولیه متحرک v_0 می باشد. مسافت طی شده توسط متحرک را قبل از سکون به دست آورید. چه مدت زمانی طول می کشد تا متحرک به سکون برسد؟

۲۴ـ بردار مکان نقطهٔ A نسبت به مبدأ طبق رابطهٔ $\vec{r}=at\hat{i}-bt^2\hat{j}$ تغییر می کند که a و b ثابت های مثبت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه در جهت x و y هستند.
الف) معادله مسیر $y(x)$ نقطه A را به دست بیاورید و نمودار آن را رسم کنید.
ب) بردارهای سرعت $\vec{v}$ و شتاب $\vec{w}$ و اندازه های آنها را بر حسب زمان به دست آورید.
ج) زاویه α بین بردار $\vec{v}$ و $\vec{w}$ را بر حسب زمان به دست آورید.
د) میانگین بردار سرعت و اندازه این بردار در t ثانیه اول حرکت را به دست آورید.

۲۵ـ ذره ای در صفحهٔ xy به نحوی حرکت می کند که $x=at$ و $y=at(1-\alpha t)$ که a و α ثابت های مثبتی هستند و t زمان است. مطلوبست :
الف) معادله مسیر ذره $y(x)$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.
ب) سرعت v و شتاب w را به صورت توابعی از زمان به دست آورید.

ج) زمان t_0 را که د رآن زاویه بین بردار سرعت و بردار شتاب $\frac{\pi}{۴}$ است بیابید.

۲۶ـــ ذره ای در صـــفحه xy حرکـــت مـــی کنـــد بـــه طـــوری کـــه $x = a\sin(\omega t)$ و $y = a(۱-\cos(\omega t))$ و a و ω ثابتهای مثبت اند. مطلوبست :

الف) مسافت طی شده توسط ذره در t ثانیه اول

ب) زاویهٔ بین بردارهای شتاب و سرعت

۲۷ـ ذره ای در صفحهٔ xy با شتاب ثابت w که در جهت منفی محور y ها است حرکت می کند. معادله مسیر متحرک به صورت $y = ax - bx^{۲}$ می باشد که a و b ثابت های مثبتی اند. سرعت ذره را در لحظه ای که در مبدأ قرار دارد به دست آورید.

۲۸ـ یک جسم کوچک با زاویه α نسبت به افق با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ پرتاب می شود. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا :

الف) جابجایی جسم را به صورت تابعی از زمان $\vec{r}(t)$ بیابید.

ب) بردار سرعت متوسط $<\vec{v}>$ با متوسط گیری در t ثانیهٔ اول و در کل حرکت را بیابید.

۲۹ـ ذره ای از سطح زمین تحت زاویه α نسبت به خط افق و با سرعت اولیه $v_۰$ پرتاب می شود . با صرفنظر از مقاومت هوا مطلوبست :

الف) زمان کل حرکت؛

ب) بیشترین ارتفاع صعود و برد ذره. تحت چه زاویه ای برد و ارتفاع ماکزیمم ذره برابر می شود؟

ج) معادله مسیر ذره $y(x)$ که y و x مقدار انحراف های عمودی و افقی ذره نسبت به

مبدأ می باشند؛

د) شعاع انحنای مسیر حرکت ذره در ابتدا و در نقطهٔ اوج حرکت.

۳۰ـ با توجه به شرایط مسئله قبل نمودار وابستگی زمانی شتاب های مماسی w_t و عمود بر مسیر w_n را بر حسب زمان رسم کنید. همچنین نمودار w_v شتاب در راستای سرعت را بر حسب زمان رسم کنید.

۳۱ـ توپی از حالت سکون از ارتفاع h ، بالای سطح شیبداری که با سطح افق زاویه α می سازد ، سقوط کرده و با سطح به صورت کشسان برخورد می کند. در چه فاصله ای از نقطه اول برخورد، توپ دوباره با سطح شیبدار برخورد می کند؟

۳۲ـ تفنگ و هدفی در فاصله ۵/۱ km از هم در یک سطح قرار دارند اگر تفنگ گلوله را با سرعت اولیه ۲۴۰ m/s شلیک کند، چه قدر طول می کشد تا گلوله به هدف برخورد کند؟ از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

۳۳ـ توپی دو گلوله را در یک سمت با زاویه های 60° و 45° نسبت به افق و با سرعت اولیه ۲۵۰ m/s به طور پی در پی شلیک می کند. با صرفنظر از مقاومت هوا، دو گلوله در چه فاصله های زمانی باید شلیک شوند تا به یکدیگر برخورد کنند؟

۳۴ـ بالنی از سطح زمین شروع به بالا رفتن می کند. سرعت افزایش ارتفاع ثابت و برابر v_0 است. بالن تحت اثر باد سرعت افقی $v_x = ay$ را به دست می آورد که a یک ثابت مثبت و y ارتفاع از سطح زمین می باشد. رابطه کمیتهای زیر را بر حسب ارتفاع بدست آورید :

الف) تغییر مکان افقی بالن $x(y)$ ؛

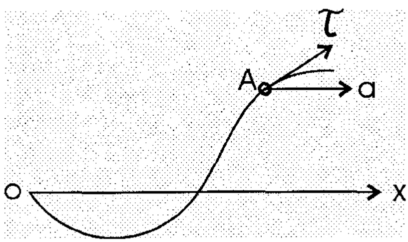
ب) شتاب کل، شتاب مماسی و شتاب عمود بر مسیر حرکت بالن.

۳۵ـ ذره ای در صفحهٔ xy با سرعت $\vec{v} = a\hat{i} + bx\hat{j}$ که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهایی که در جهت x و y هستند حرکت می کند. a و b ثابتند. در لحظه $t = ۰$ ذره در مکان $x = y = ۰$ قرار دارد. مطلوبست :

الف) معادله مسیر ذره $y(x)$ ؛

ب) شعاع انحنای مسیر ذره به صورت تابعی از x .

۳۶ـ ذره A در طول مسیر داده شده در شکل زیر با شتاب مماسی $a_t = \vec{a}.\hat{\tau}$ در حال حرکت است که $\vec{a}$ برداری ثابت در جهت مثبت محور x و $\hat{\tau}$ برداری است که در جهت بردار سرعت لحظه ای می باشد. اگر از سرعت ذره در نقطه $x = ۰$ صرف نظرشود سرعت ذره را بر حسب x بدست آورید.



شکل ۴

۳۷ـ ذره ای روی محیط یک دایره با سرعت $v = at$ شروع به حرکت می کند به طوری که $a = ۰/۵ m/s^۲$. شتاب کل ذره را وقتی $n = ۰/۱$ از محیط دایره از ابتدای حرکت طی شده باشد، محاسبه کنید.

۳۸ـ ذره ای با شتاب کند شونده ، روی محیط دایره ای به شعاع R به نحوی حرکت می کند که در هر لحظه شتاب مماسی و شتاب عمود بر سرعت ذره (شتاب عمودی) از

نظر اندازه برابرند. در $t = 0$ سرعت ذره v_0 می باشد. مطلوبست :

الف) سرعت ذره به صورت توابعی جداگانه از زمان و مسافت طی شده s ؛

ب) شتاب کل ذره به صورت توابعی جداگانه از سرعت و مسافت طی شده.

۳۹ـ ذره ای روی محیط دایره ای به شعاع R حرکت می کند. سرعت ذره به صورت $V = a\sqrt{s}$ به مسافت طی شده بستگی دارد که a ثابت و s مسافت طی شده توسط ذره است. مطلوبست زاویه α بین بردار سرعت و بردار شتاب به صورت تابعی از مسافت.

۴۰ـ ذره ای روی کمان دایره ای به شعاع R طبق رابطه $l = a\sin(\omega t)$ حرکت می کند که l مسافت طی شده در طول کمان از مکان اولیه می باشد. a و ω ثابتند. با فرض اینکه $R = 1m$، $a = 0.8m$ و $\omega = 2\ rad/s$ مطلوبست :

الف) اندازه شتاب کل ذره در نقاط $l = 0$ و $l = \pm a$ ؛

ب) مینیمم مقدار شتاب و مکان l متناظر با آن.

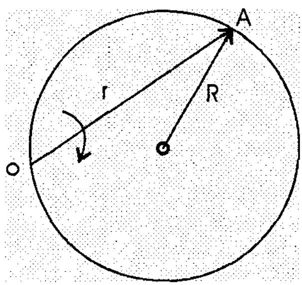
۴۱ـ ذره ای در صفحه طوری حرکت می کند که شتاب مماسی $w_\tau = a$ و شتاب عمود بر سرعت آن(شتاب عمودی) $w_n = bt^4$ می باشد و a و b ثابتهای مثبت و t زمان است. در زمان $t = 0$ ذره در حال سکون می باشد. شعاع انحناء مسیر حرکت R و شتاب کل w را بر حسب مسافت طی شده s به دست آورید.

۴۲ـ ذره ای در صفحه xy روی مسیر $y(x)$ با سرعت ثابت v حرکت می کند. شتاب و شعاع انحنای مسیر را در $x = 0$ به دست آورید. در صورتی که :

الف) مسیر به صورت سهمی $y = ax^2$ باشد ؛

ب) مسیر به صورت بیضی $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ باشد(a و b ثابتند).

۴۳ـ ذره A مطابق شکل ۵ روی محیط دایره ای به شعاع $R = ۵۰\ cm$ طوری حرکت می کند که بردار مکان $\vec{r}$ نسبت به نقطه O با سرعت زاویه ای $\omega = ۰/۴\ rad/s$ حرکت می کند. اندازه سرعت ذره و همچنین اندازه و جهت شتاب کل ذره را به دست آورید.



شکل ۵

۴۴ـ چرخی حول محور ثابتی طوری می چرخد که زاویهٔ چرخش ϕ ، با زمان به صورت $\phi = at^۲$ تغییر می کند که t زمان و $a = ۰/۲\ rad/s^۲$ است. شتاب کل نقطهٔ A روی محیط چرخ، ω را در $t = ۲/۵\ s$ به دست آورید. در صورتی که سرعت خطی نقطه A در آن لحظه $v = ۰/۶۵\ m/s$ باشد.

۴۵ـ یک گلوله سرعت اولیهٔ $v = ۳۲۰\ m/s$ را بدست می آورد و پس از عبور از لولهٔ تفنگ به طول l ،$n = ۲$ دور می چرخد. فرض کنید گلوله داخل لوله با سرعت خطی یکنواخت حرکت کند. سرعت زاویه ای آن را هنگامی که از لوله خارج می شود پیدا کنید.

۴۶ـ جسم صلبی حول محور ثابتی طبق رابطهٔ $\phi = at - bt^{۳}$ که ϕ زاویه چرخش، $a = ۶\ rad/s$ و $b = ۲\ rad/s^{۳}$ است می چرخد. مطلوبست :

الف) مقدار متوسط سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای در فاصله زمانی $t = ۰$ تا لحظه ای که ذره به حالت سکون در می آید؛

ب) شتاب زاویه ای ذره، زمانی که ذره به حالت سکون می رسد.

۴۷ـ جسم صلبی حول محور ثابتی با شتاب زاویه ای $\beta = at$ که $a = ۲\times۱۰^{-۲}\dfrac{rad}{s^{۳}}$ است، شروع به حرکت می کند. بعد از چه زمانی بردار شتاب کل ذره زاویهٔ $\alpha = ۶۰^{\circ}$ با بردار سرعت می سازد؟

۴۸ـ جسم صلبی با شتاب زاویه ای کند شونده حول محور ثابتی دوران می کند، به طوری که $\beta\alpha\sqrt{\omega}$ که β شتاب زاویهٔ کند شونده و ω سرعت زاویه ای می باشد. سرعت متوسط زاویه ای در فاصله زمانی حرکت تا سکون ذره را بیابید. در صورتی که در $t = ۰$ سرعت زاویه ای اولیه $\omega_{۰}$ باشد.

۴۹ـ ذره ای حول محور ثابتی می چرخد. رابطه سرعت زاویه ای آن با زاویهٔ چرخش ϕ به صورت $\omega = \omega_{۰} - a\phi$ است که $\omega_{۰}$ و a ثابتهای مثبتی هستند. در لحظهٔ $t = ۰$، $\phi = ۰$ است. مطلوب است محاسبهٔ کمیت های زیر بر حسب زمان :

الف) مقدار زاویه چرخش ؛

ب) سرعت زاویه ای.

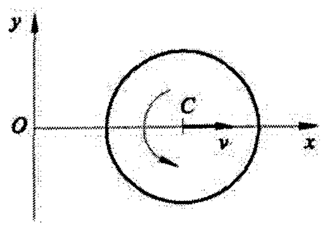
۵۰ـ جسم صلبی با شتاب زاویه ای $\vec{\beta} = \vec{\beta}_{۰}.\cos\phi$ که $\vec{\beta}_{۰}$ برداری ثابت و ϕ مقدار زاویه چرخش از محل اولیه است، شروع به دوران می کند. سرعت زاویه ای را به صورت

تابعی از ϕ به دست آورید. نمودار سرعت زاویه ای بر حسب زاویه چرخش ϕ را رسم کنید.

۵۱ـ چرخی چرخان مطابق شکل زیر در جهت مثبت محور x حرکت می کند . مکان هندسی محور دوران لحظه ای چرخ $y(x)$ را در صورتی که در لحظهٔ اولیه مرکز C دایره در مبدأ قرار گرفته باشد به دست آورید. در صورتی که :

الف) چرخ با سرعت ثابت v و شتاب زاویه ای ساعت گرد β حرکت کند. سرعت زاویه ای اولیه صفر است ؛

ب) با شتاب ثابت β و سرعت اولیه ی صفر و سرعت زاویه ای ثابت ω حرکت کند.



شکل ۶

۵۲ـ نقطه A روی محیط چرخی قرار گرفته که بدون لغزش روی سطح افقی با سرعت $v = ۱\ m/s$ حرکت می کند. مطلوبست :

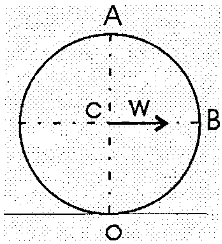
الف) جهت و اندازه بردار شتاب نقطه A ؛

ب) کل مسافت طی شده توسط نقطه A بعد از دوبار تماس با سطح افق.

۵۳ـ توپی با شعاع $R = ۱۰\ cm$ مطابق شکل۷ بدون لغزش روی سطح افقی طوری حرکت می کند که مرکزش دارای شتاب ثابت $a = ۲/۵\ cm/s^۲$ می باشد. $۲s$ بعد از شروع حرکت موقعیت مکان های مربوط مانند زیر است. مطلوبست :

الف) سرعت نقاط A ، B و O ؛

ب) شتاب نقاط فوق.



شکل ۷

۵۴ـ استوانه ای بدون لغزش بر روی سطح افق حرکت می کند. شعاع استوانه r می باشد. شعاع انحنا مسیر حرکت نقاط A و B در شکل فوق را به دست آورید.

۵۵ـ دو جسم صلب حول دو محور عمود بر هم به ترتیب با سرعت زاویه ای ثابت $\omega_1 = ۳\ rad/s$ و $\omega_2 = ۴\ rad/s$ حرکت می کنند. سرعت و شتاب زاویه ای یک جسم را نسبت به جسم دیگر به دست آورید.

۵۶ـ جسم صلبی با سرعت زاویه ای $\vec{\omega} = at\hat{i} + bt^2\hat{j}$ که $a = ۰/۵\ rad/s^2$ و $b = ۰/۰۶\ rad/s^3$ حرکت می کند. $\hat{i}$ و $\hat{j}$ به ترتیب بردارهای یکه محورهای x و y هستند. مطلوبست :

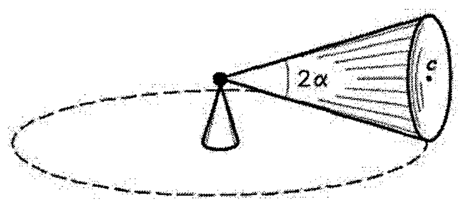
الف) اندازه سرعت و شتاب زاویه ای در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$؛

ب) زاویهٔ بین بردارهای سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای در لحظهٔ فوق.

۵۷ـ مخروط استوانه ای با نیم زاویهٔ $\alpha = ۳۰^\circ$ و شعاع قاعده $R = ۵\,cm$ با سرعت ثابت و بدون لغزش روی سطح افق مطابق شکل۸ حرکت می کند. رأس مخروط در نقطهٔ O که هم سطح نقطهٔ C ، مرکز قاعده مخروط می باشد، قرار گرفته است. سرعت نقطهٔ C $v = ۱۰\ cm/s$ است. مطلوبست :

الف) بردار سرعت زاویهٔ مخروط و زاویه ای که با راستای قائم می سازد ؛

ب) بردار شتاب زاویه ای مخروط.



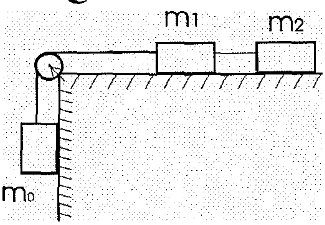
شکل۸

۵۸ـ جسم صلبی با سرعت زاویه ای ثابت $\omega_۰ = ۰/۵\ rad/s$ حول محور AB دوران می کند. در لحظه $t = 0$ محور AB نیز حول محور عمود بر خودش با سرعت زاویه ای ثابت $\beta_۰ = ۰/۱\ rad/s^۲$ شروع به دوران می کند.. سرعت و شتاب زاویه ای جسم را بعد از $t = ۲\,s$ به دست آورید.

دینامیک

۵۹ـ بالنی به جرم m با شتاب ثابت a در حال پایین آمدن است. مطلوبست محاسبه جرم وزنه تعادلی را که باید بیرون انداخته شود تا بالن شتابی با همان بزرگی ولی به طرف بالا داشته باشد. از اصطکاک هوا صرف نظر کنید.

۶۰ـ در شکل ۹، ۳ جرم m_0 و m_1 و m_2 با هم برابرند و جرم قرقره و نخ ها و نیز اصطکاک میان قرقره و نخ ها ناچیز است. شتاب وزنهٔ m_0 و نیز کشش نخ بین دوجسم m_1 و m_2 را با فرض اینکه ضریب اصطکاک بین آنها و سطح k باشد، بیابید. حالت های ممکن را در نظر بگیرید.

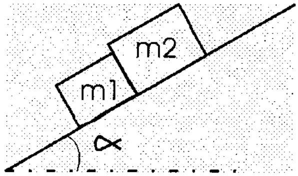


شکل ۹

۶۱ـ دو قطعه به جرم های m_1 و m_2 مطابق شکل ۱۰ روی سطح شیبداری که با افق زاویه α ساخته است، قرار دارند. اگر ضریب اصطکاک سطح با آنها به ترتیب k_1 و k_2 باشد و داشته باشیم $k_1 > k_2$ ، مطلوبست :

الف) نیروی عمل و عکس العمل قطعات در حین حرکت؛

ب) حداقل زاویهٔ α که به ازای آن قطعات شروع به حرکت کنند.



شکل ۱۰

۶۲ـ یک جسم کوچک روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ $\alpha = ۱۵^\circ$ می سازد به سمت بالای آن پرتاب می شود. مطلوبست محاسبه ضریب اصطکاک، در صورتی که زمان بالا رفتن $\eta = \frac{۱}{۲}$ برابر زمان پایین آمدن باشد.

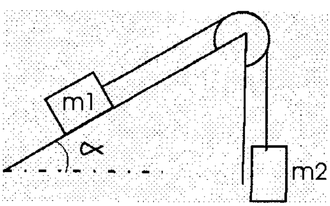
۶۳ـ پارامترهای زیر از سیستم شکل ۱۱ معلوم می باشد. ۱ـ زاویه α که سطح شیبدار با افق می سازد. ۲ـ ضریب اصطکاک بین سطح شیبدار و جسم $m_۱$ که برابر k است. از جرم قرقره و نخ و نیز از اصطکاک نخ و قرقره صرف نظر کنید. با فرض اینکه هر دو جسم در ابتدا ساکن بوده اند، نسبت $\frac{m_۲}{m_۱}$ را در شرایطی که $m_۲$:

الف) پایین بیاید ؛

ب) بالا رود ؛

ج) ساکن بماند ؛

بیابید.



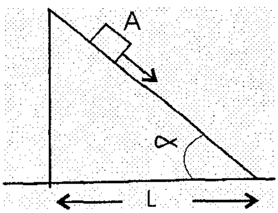
شکل ۱۱

۶۴ـ زاویه سطح شیبدار شکل ۱۱ با افق $\alpha = ۳۰^\circ$ و نسبت بین دو جرم $m_۱$ و $m_۲$، $\eta = \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۲}{۳}$ می باشد. اگر ضریب اصطکاک سطح با جسم $m_۱$، $k = ۰/۱$ باشد و جرم قرقره و نخ ها نیز ناچیز باشد، اندازه و جهت شتاب جسم $m_۲$ را هنگامی که سیستم از

حالت سکون و تعادل اولیه شروع به حرکت می کند را بیابید.

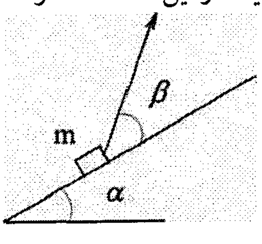
۶۵ـ روی یک تخته به جرم m_1 قطعه ای به جرم m_2 قرار گرفه است که با هم روی یک سطح افقی صاف قرار دارند. یک نیروی متغیر با زمان $F = \alpha t$ (α یک ثابت است) به قطعه وارد می شود. رابطه شتاب تخته a_1 و شتاب قطعه a_2 با زمان را بیابید در صورتی که ضریب اصطکاک بین تخته و قطعه، k باشد. نمودار تقریبی این وابستگی ها را بکشید.

۶۶ـ یک جسم کوچک مطابق شکل ۱۲ شروع به پایین آمدن از نوک یک گوه که طول قاعدهٔ آن $l = ۲/۱\, m$ است، می کند. اگر ضریب اصطکاک بین جسم و گوه $\alpha = ۰/۱۴$ باشد، در چه زاویه ای زمان پایین آمدن حداقل خواهد بود؟ این زمان را به دست آورید؟



شکل ۱۲

۶۷ـ جسمی به جرم m روی یک سطح شیبداری قرار دارد که با خط افق زاویهٔ α می سازد. مطابق شکل۱۳ این جسم توسط نخی که با سطح شیبدار زاویهٔ β می سازد به طرف بالا کشیده می شود. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح شیبدار μ است. زاویهٔ β را به ازای مینیمم کشش در نخ پیدا کنید. در این حالت مقدار کشش نخ چقدر است؟

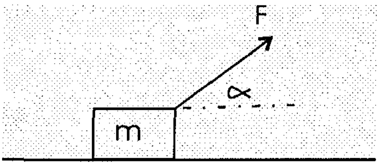


شکل ۱۳

۶۸ـ در لحظهٔ $t = ۰$ نیروی $F = at$ مطابق شکل ۱۴ بر جسمی به جرم m که روی یک سطح صاف در حال سکون است وارد می شود. (a یک ثابت است). جهت این نیرو ثابت و با سطح افق زاویهٔ α می سازد. مطلوبست محاسبه :

الف) سرعت جسم در لحظهٔ جدا شدن آن از سطح

ب) مسافت طی شده بوسیله جسم تا این لحظه.



شکل ۱۴

۶۹ـ جسمی به جرم m روی سطح صافی به حالت سکون قرار دارد و با وارد کردن نیروی $F = \frac{mg}{۳}$ که اندازهٔ آن ثابت است شروع به حرکت می کند. در طی حرکت مستقیم خود، نیروی F با سطح افق زاویهٔ α می سازد که با رابطهٔ $\alpha = as$ تغییر می کند. a یک ثابت و s مسافت طی شده از نقطهٔ اولیه است. سرعت جسم را به صورت تابعی از زاویهٔ α پیدا کنید.

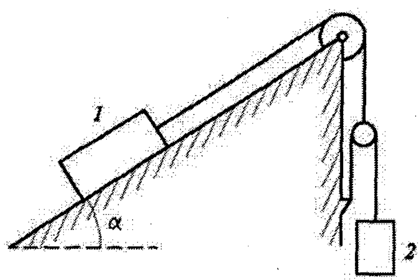
۷۰ـ بر روی سطحی با ضریب اصطکاک k دو جسم بشرح زیر قرار رگرفته اند :
یک قالب و یک موتور الکتریکی که توسط طناب به هم متصل اند. یک سر طناب از یک طرف به قالب بسته شده و از طرف دیگر به دور محور موتور پیچیده شده است فاصله بین قالب و محور موتور برابر l می باشد. وقتی موتور روشن می شود، قالب که جرم آن ۲ برابر جرم موتور است، شروع به حرکت به سمت موتور می کند. اگر موتور با شتاب ثابت a حرکت کند در چه مدت زمانی این دو جسم به هم می رسند؟

۷۱ـ قرقره ای به سقف یک آسانسور متصل شده است. ریسمانی از روی این قرقره عبور کرده و به دو انتهای آن جرمهای m_1 و m_2 متصل شده اند. آسانسور با شتاب ثابت w_0 به سمت بالا حرکت می کند. فرض کنید جرم قرقره و طناب و اصطکاک قابل چشم پوشی باشند. با فرض $m_1 > m_2$ مطلوبست :

الف) شتاب جرم m_1 نسبت به ناظر درون آسانسور و نسبت به ناظر روی زمین.

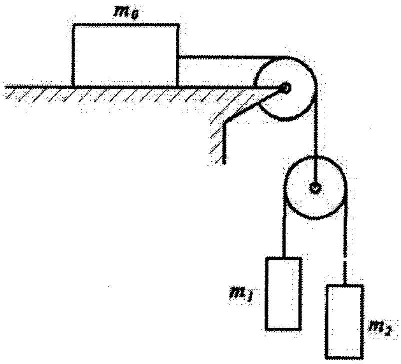
ب) نیروی وارد شده توسط قرقره به سقف آسانسور.

۷۲ـ در شکل۱۵، m_2، η برابر m_1 می باشد و سطح شیبدار با افق زاویهٔ α می سازد. شتاب m_2 ، w را پیدا کنید. ا زجرم قرقره ها و نخ ها و اصطکاک صرفنظر کنید. حالات ممکن را بررسی کنید.



شکل۱۵

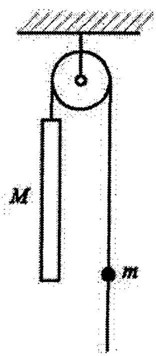
۷۳ـ در شکل ۱۶، اجسام دارای جرم های m_0، m_1 و m_2 می باشند و اصطکاک وجود ندارد. جرم قرقره ها و نخ ها قابل چشم پوشی است. شتاب جرم m_1 را پیدا کنید. حالات ممکن را بررسی کنید.



شکل ۱۶

۷۴ـ مطابق شکل ۱۷جرم میله M بزرگتر از جرم مهره m است. مهره دارای سوراخی است که می تواند با کمی اصطکاک در طول ریسمان سر بخورد. جرم قرقره و اصطکاک در محور قرقره قابل چشم پوشی اند. در لحظه اوله مهره روبروی پایین ترین قسمت میله قرار گرفته است. وقتی سیستم رها می شود، هر دو جسم با شتاب ثابتی شروع به حرکت می کنند.

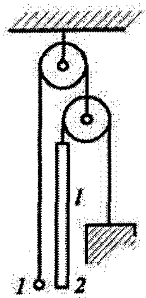
نیروی اصطکاک بین مهره و ریسمان را پیدا کنید در صورتی که t ثانیه بعد از شروع حرکت مهره روبروی بالاترین انتهای میله قرار داشته باشد. (طول میله برابر l است).



شکل ۱۷

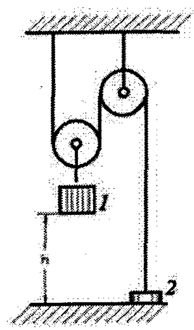
۷۵ـ مطابق شکل ۱۸، جرم مهره ۱، ۱/۸ = η برابر جرم میلهٔ ۲ و طول میله $l = ۱۰۰\ cm$

است. از اصطکاک و جرم قرقره ها و نخ صرفنظر می شود. مهره از نظر ارتفاع با پایین ترین قسمت میله هم ارتفاع و برای بالا آمدن آزاد است. چه زمانی مهره به انتهای بالای میله می رسد؟



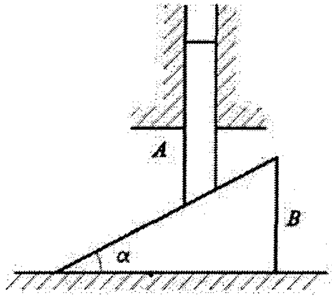
شکل ۱۸

۷۶ـ در سیستم نشان داده شده در شکل۱۹، جرم جسم ۱، ۴ = η برابر جرم جسم ۲ می‌باشد و ارتفاع h برابر ۲۰ cm است. از جرم قرقره، نخ و همچنین ضریب اصطکاک صرف نظر کنید. در یک لحظه جرم ۲ رها می شود و دستگاه شروع به حرکت می کند. ارتفاع ماکزیمم جرم ۲ را بیابید.



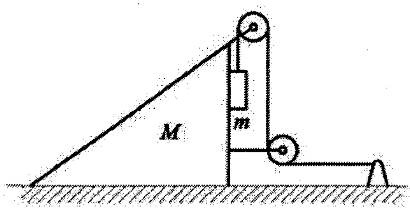
شکل ۱۹

۷۷ـ مطلوبست شتاب میلهٔ A و گوهٔ B نشان داده شده در شکل ۲۰، در صورتی که نسبت جرم گوه به جرم میله برابر η باشد (اصطکاک بین تمامی سطوح ناچیز است).



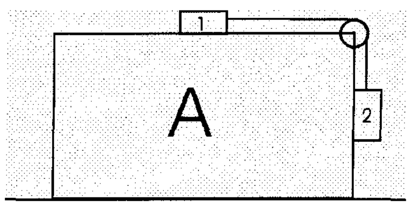
شکل ۲۰

۷۸ـ در شکل ۲۱، جرم گوه M و جرم جسم m معلوم و ضریب اصطکاک بین جسم m و گوهٔ M برابر k است. شتاب جسم m را نسبت به سطح افقی که گوه روی آن قرار گرفته، پیدا کنید. (جرم قرقره و ریسمان ها ناچیز است. بقیهٔ سطوح بدون اصطکاک هستند).



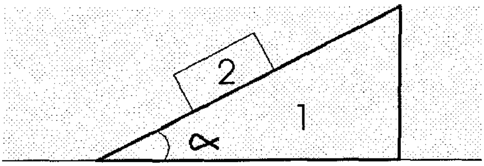
شکل ۲۱

۷۹ـ مطابق شکل ۲۲ می نیمم شتاب وارد بر جسم A چقدر باشد تا دو جسم ۱ و ۲ نسبت به آن ساکن بمانند. جرم جسمهای ۱ و ۲ برابر و ضریب اصطکاک بین جسم ۱ و ۲ با A برابر k است. (جرم قرقره و ریسمان ناچیز است).



شکل ۲۲

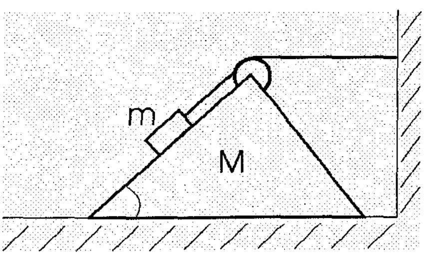
۸۰ـ در شکل ۲۳، جسم ۲ به جرم m روی منشور ۱ قرار دارد. ماکزیمم شتاب افقی w وارد بر منشور به سمت چپ چقدر باشد تا جرم m نسبت به آن ساکن بماند. ضریب اصطکاک بین جسم و منشور k می باشد. $(\cot\alpha > k)$



شکل ۲۳

۸۱ـ منشور ۱ به جرم m_1 و زاویهٔ α روی سطح افقی قرار دارد.مطابق شکل ۲۳ جسم ۲ به جرم m_2 بر روی آن قرار گرفته است. فرض کنید اصطکاک ناچیز است. مطلوبست محاسبه شتاب منشور.

۸۲ـ در شکل۲۴، جرم جسم m و جرم گوه M و زاویهٔ α معلوم هستند. مطلوبست محاسبه شتاب گوه در صورتی که اصطکاک بین سطوح و جرم قرقره و ریسمان ناچیز باشد.



شکل۲۴

۸۳ـ ذره ای به جرم m روی دایره ای به شعاع R حرکت می کند. بردار نیروی متوسط وارد بر جرم را در یک ربع دایره حساب کنید. در صورتی که :

الف) جسم با سرعت یکنواخت v حرکت کند؛

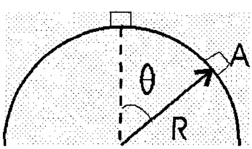
ب) با شتاب مماسی یکنواخت a_t حرکت کند. (سرعت اولیه جسم صفر می باشد).

۸۴ـ هواپیمایی با سرعت ثابت $v = ۳۶۰ \frac{km}{h}$ به دور حلقه ای در صفحه قائم و به شعاع $R = ۵۰۰\ m$ می چرخد. وزن ظاهری خلبان به جرم $m = ۷۰\ kg$ را در بالاترین و پایین ترین نقطه و نقاط میانی حلقه بیابید.

۸۵ـ کره کوچکی به جرم m از ریسمانی آویزان است. ریسمان را به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰ درجه از حالت قائم منحرف کرده سپس آن را رها می کنیم.
الف) مطلوبست شتاب کره و کشش ریسمان هنگامی که ریسمان با خط قائم زاویهٔ θ بسازد.
ب) مطلوبست کشش ریسمان در لحظه ای که مؤلفه عمودی سرعت ماکزیمم باشد.
ج) زاویهٔ θ بین ریسمان با خط قائم را در لحظه ای که بردار شتاب افقی باشد، بیابید.

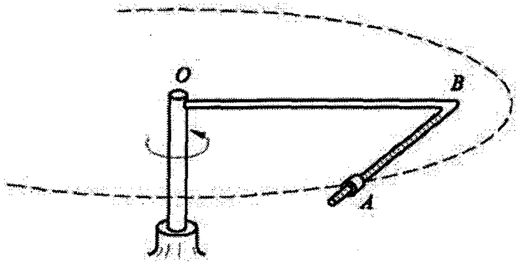
۸۶ـ توپی از طنابی که در صفحه قائم نوسان می کند، آویزان است به طوری که مقدار شتاب توپ در بالاترین نقطه از مسیر نوسانی با مقدار آن در پایین ترین نقطه برابر است. زاویه انحراف طناب از خط قائم را در بالاترین نقطه بیابید.

۸۷ـ جسم کوچک A مطابق شکل۲۵ شروع به سر خوردن از بالای کرهٔ صافی به شعاع R می کند. در چه زاویه θ جسم سطح کره را ترک می کند و همچنین سرعت جسم در آن لحظه را پیدا کنید.



شکل۲۵

۸۸ـ میله ای L شکل،مطابق شکل ۲۶ روی یک صفحهٔ افقی قرار دارد وجسم استوانه ای شکل A به جرم m با فنر بدون جرم با ثابت فنر k به نقطه B متصل شده است، تمام سیستم با سرعت زاویه ای ω حول یک محور عمودی که از نقطهٔ می گذرد دوران می کند. مطلوبست محاسبه کرنش فنر $(\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_\circ})$. جهت چرخیدن چه اثری بر این کرنش دارد؟



شکل ۲۶

۸۹ـ دوچرخه سواری بر روی محیط دایره ای روی سطح افقی و به شعاع r در حال رکاب زدن است. ضریب اصطکاک با شعاع r به صورت $k = k_\circ(1-\frac{r}{R})$ رابطه دارد، به طوری که $R, k_\circ$ ثابت می باشند.
مطلوبست محاسبه ماکزیمم r که در آن دوچرخه سوار بیشترین سرعت را قبل از سر خوردن خواهد داشت. مقدار این سرعت چقدر است؟

۹۰ـ اتومبیلی با شتاب ثابت مماسی $w_1 = 0/62\ m/s^2$ روی سطح افقی دور دایره ای با شعاع $R = 40\ m$ حرکت می کند. ضریب اصطکاک لغزشی بین چرخهای اتومبیل و سطح $k = 0/2$ است. در صورتی که سرعت اولیه اتومبیل صفر باشد، این اتومبیل چه مسافتی را بدون لغزیدن طی خواهد کرد؟

۹۱ـ خودرویی با سرعت ثابت بر روی یک منحنی افقی به معادلهٔ $y = a\sin(\frac{x}{\alpha})$ حرکت

می کند به طوری که α و a مقادیر ثابتی هستند و ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده برابر k است. در چه سرعتی اتومبیل بدون لغزیدن حرکت خواهد کرد؟

۹۲ـ زنجیری به جرم m که تشکیل دایره ای با شعاع R می دهد، بر روی یک مخروط صافی با نیم زاویهٔ θ قرار گرفته است. کشش زنجیر را هنگامی که مخروط و زنجیر با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور عمودی منطبق بر محور مخروط، می چرخند بیابید.

۹۳ـ یک میلگرد با استفاده از ریسمان بدون جرمی، جرم های $m_۱$ و $m_۲$ را نگه داشته است. بین ریسمان و میلگرد اصطکاک وجود دارد؛ به طوری که اگر نسبت $\frac{m_۲}{m_۱}=\eta_۰$ برقرار شود، ریسمان شروع به حرکت می کند. مطلوبست :

الف) ضریب اصطکاک ؛

ب) شتاب جرم های $m_۱$ و $m_۲$ وقتی $\frac{m_۲}{m_۱}=\eta>\eta_۰$ باشد.

۹۴ـ ذره ای به جرم m روی سطح صاف داخل استوانه ای به شعاع R با سرعت اولیه $v_۰$ که با سطح افق زاویهٔ α می سازد پرتاب می شود. نیرویی که ذره بر دیوارهٔ استوانه وارد می کند را بیابید.

۹۵ـ ذره ای به جرم m بر روی مسیری در صفحهٔ xy که با رابطه زیر داده شده است حرکت می کند :

$$x=a\sin(\omega t)$$
$$y=b\cos(\omega t)$$

a و b و ω ثابت هستند.

مطلوب است اندازه و جهت نیروی وارد بر ذره.

۹۶ـ پرتابه ای به جرم m با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ و با زاویه θ نسبت به سطح افق پرتاب می شود. با صرف نظر کردن از مقاومت هوا، مطلوبست :

الف) تغییر تکانه $\overrightarrow{\Delta P}$ پرتابه در t ثانیه اول حرکت ؛

ب) تغییر تکانه $\overrightarrow{\Delta P}$ پرتابه در کل زمان حرکت.

۹۷ـ به ذره ای که ابتدا در حال تعادل است در زمان $t = 0$ نیروی وابسته به زمان $\vec{F} = \vec{a}t(\tau - t)$ وارد می شود که $\vec{a}$ یک بردار ثابت و τ مدت زمانی است که نیرو اعمال می شود. مطلوبست :

الف) تکانه خطی ذره بعد از قطع شدن نیرو ؛

ب) مسافت پیموده شده توسط ذره.

۹۸ـ ذره ای به جرم m با وارد آمدن نیروی $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$ در لحظه $t = 0$ شروع به حرکت می کند، که در اینجا $\vec{F}_0$ و ω ثابت هستند. مسافت طی شده به وسیله ذره را به صورت تابعی از t پیدا کنید. نمودار تقریبی از این تابع رسم کنید.

۹۹ـ ذره ای به جرم m با وارد آمدن نیروی $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$ در لحظهٔ $t = 0$ شروع به حرکت می کند، که $\vec{F}_0$ و ω ثابت هستند. این ذره تا زمان اولین توقف خود چه مدت زمانی درحال حرکت خواهد بود؟ در این مدت زمان چه مسافتی را طی خواهد کرد؟ سرعت ماکزیمم ذره را در طول این مسیر پیدا کنید.

۱۰۰ـ یک قایق موتوری به جرم m در طول دریاچه ای با سرعت v_0 حرکت می کند. در لحظه t_0 موتور قایق خاموش می شود. فرض کنید مقاومت آب با سرعت قایق متناسب

باشد؛ $\vec{F}=-r\vec{v}$. مطلوبست :

الف) مدت زمانی که قایق با موتور خاموش حرکت کرده است ؛

ب) سرعت قایق به صورت تابعی از فاصله طی شده با موتور خاموش، و همچنین کل مسافت طی شده تا توقف کامل آن ؛

ج) سرعت متوسط قایق در فاصله زمانی که شروع آن در لحظه $t=0$ بوده و در طی آن سرعت قایق η برابر کاهش یافته است.

۱۰۱ـ سرعت گلوله ای در برخورد با تخته ای به ضخامت h ، از v_0 به v_1 تغییر می کند. بازه زمانی را که در آن گلوله در داخل چوب حرکت کرده است، با فرض اینکه نیروی مقاومت با مجذور سرعت متناسب است بیابید.

۱۰۲ـ یک جسم کوچک از روی یک سطح شیبدار که با افق زاویهٔ α می سازد، شروع به پایین آمدن می کند. ضریب اصطکاک سطح به مسافت پیموده شده x به صورت $k=ax$ (a یک ثابت است) رابطه دارد. مسافتی که جسم می پیماید تا متوقف شود و ماکزیمم سرعت جسم در این فاصله را بیابید.

۱۰۳ـ یک جسم به جرم m روی یک صفحه افقی با ضریب اصطکاک k در حال سکون است. در لحظه $t=0$ یک نیروی افقی که با زمان به صورت $\vec{F}=\vec{a}t$ ($\vec{a}$ یک بردار ثابت است.) تغییر می کند به آن وارد می گردد. مطلوبست مسافت طی شده توسط جسم بعد از زمان کوتاه t از شروع عملکرد نیروی $\vec{F}$.

۱۰۴ـ یک جسم به جرم m با سرعت v_0 مستقیماً به طرف بالا پرتاب شده است. مطلوبست محاسبه سرعت v' جسم هنگامی که پایین می آید اگر اصطکاک هوا برابر kv^2 باشد که

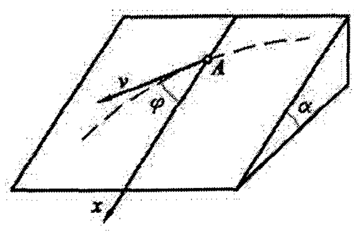
در آن k یک ثابت و v سرعت لحظه ای جسم است.

۱۰۵ـ جسمی به جرم m تحت تأثیر نیرویی که اندازهٔ آن ثابت ولی جهت آن با سرعت زاویه ای ثابت ω در صفحهٔ p تغییر می کند، در همان صفحه حرکت می کند. با فرض اینکه جسم در لحظهٔ $t = ۰$ ساکن باشد، مطلوبست محاسبه :

الف) سرعت آن به صورت تابعی از زمان؛

ب) مسافت طی شده توسط جسم در فاصله بین دو توقف پیاپی و سرعت متوسط آن در این بازه.

۱۰۶ـ دیسک کوچک A مطابق شکل ۲۷ روی سطح شیبداری که با افق زاویه α می سازد قرار دارد و سرعت اولیه v_0 به آن داده شده است. در صورتی که ضریب اصطکاک سطح $k = \tan(\alpha)$ و زاویه اولیه $\varphi_0 = \frac{\pi}{۲}$ باشد، رابطهٔ سرعت م و زاویه ϕ را بیابید. .



شکل ۲۷

۱۰۷ـ یک زنجیر به طول l روی یک سطح کروی صاف با شعاع R قرار دارد به طوری که یک سر آن به بالاترین نقطه کره محکم شده است. مطلوبست محاسبه شتاب ω برای هر تکه از زنجیر درست در لحظه ای که سر زنجیر آزاد می شود. فرض کنید که $l < \frac{۱}{۲}\pi R$ است.

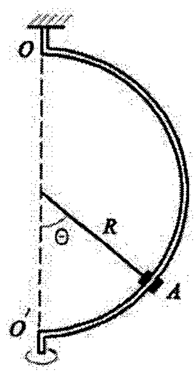
۱۰۸ـ جسم کوچکی در بالای یک کره به شعاع R قرار دارد. سپس به کره شتاب ثابت $w_{\circ}$ در راستای افق داده می شود که باعث می گردد جسم شروع به لغزیدن کند. مطلوبست:

الف) سرعت جسم نسبت به کره در لحظه جدا شدن

ب) زاویه ، $\theta_{\circ}$ ، زاویه جدا شدن جسم از کره نسبت به راستای قائم ، $\theta_{\circ}$ را برای حالت خاص $w_{\circ} = g$ محاسبه کنید.

۱۰۹ـ جسمی در یک صفحه تحت تأثیر نیرویی است که پیوسته بر سرعت جسم عمود است و به فاصله جسم از یک نقطهٔ خاص به صورت $\frac{1}{r^n}$ (n یک ثابت است) بستگی دارد، به ازای چه مقداری از n حرکت جسم روی صفحه دائمی و پایدار خواهد بود؟

۱۱۰ـ استوانهٔ کوچک A مطابق شکل ۲۸ قادر است آزادانه در طول یک چوب صاف که به شکل نیم دایره ای به شعاع R است، حرکت کند. کل سیستم با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور عمودی OO' دوران می کند. مطلوبست محاسبه زاویه θ ، به طوری که استوانه A در حالت تعادل پایدار قرار داشته باشد.



شکل ۲۸

۱۱۱ـ تفنگی به طور مستقیم به طرف هدفی که در راستای شمال قرار دارد، نشانه رفته است و سپس شلیک می شود. با فرض اینکه اصطکاک هوا ناچیز است، گلوله در چه فاصله ای از مرکز نشانه و در چه جهتی به آن برخورد خواهد کرد؟ در صورتی که تفنگ در عرض جغرافیایی $\varphi_{\cdot} = ۶۰^{\circ}$ قرار داشته باشد و سرعت گلوله ان $v = ۹۰۰\dfrac{m}{s}$ و فاصله تفنگ و نشانه، $S = ۱\ km$ باشد.

۱۱۲ـ یک دیسک افقی حول یک محور عمودی که از مرکز آن می گذرد با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = ۶\dfrac{rad}{s}$ دوران می کند. یک جسم کوچک به جرم $m = ۰/۵\, kg$ در راستای قطر دیسک با سرعت $v' = ۵۰\dfrac{cm}{s}$ که نسبت به دیک ثابت است، حرکت می کند. نیروی وارد به جسم از طرف دیسک را هنگامی که محل جسم نسبت به محور دوران $r = ۳۰\ cm$ باشد، بیابید.

۱۱۳ـ یک تختهٔ افقی صاف AB با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = ۲\dfrac{rad}{s}$ حول یک محور عمودی که از یک انتهای آن می گذرد، می چرخد. یک استوانه کوچک به جرم $m = ۰/۵kg$ آزادانه در امتداد تخته از نقطه « با سرعت اولیه $v_{\cdot} = ۱\dfrac{m}{s}$ شروع به حرکت می کند. مطلوبست محاسبه نیروی کوریولیس که به استوانه وارد می شود، (نسبت به چهارچوب مرجع متصل به تخته چرخان) در لحظه ای که استوانه در فاصلهٔ $r = ۵۰\ cm$ از محور دوران است.

۱۱۴ـ یک دیسک افقی به شعاع R با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور عمودی

ساکنی که از لبهٔ آن می گذرد، دوران می کند. در امتداد محیط دیسک جسمی به جرم m با سرعتی که نسبت به دیسک ثابت است، حرکت می کند. در لحظه ای که جسم بیشترین فاصله را با محور دوران دارد، اثر نیروی لختی F_{in} بر جسم نسبت به چهارچوبی که به دیسک متصل است صفر می شود. مطلوبست:

الف) شتاب جسم نسبت به دیسک (a_{rel})

ب) وابستگی نیروی F_{in} نسبت به فاصله از محور دوران .

۱۱۵ـ یک جسم کوچک به جرم $m = ۰/۳\ kg$ که در بالای کره ای به شعاع $R = ۱\,m$ قرار دارد، شروع به سر خوردن و پایین آمدن می کند. کره با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = ۶\dfrac{rad}{s}$ حول یک محور عمودی که از مرکز آن می گذرد، دوران می کند. نیروی کوریولیس در لحظه ای که جسم از کره جدا می شود نسبت به چهارچوب مرجع متصل به کره و نیز نیروی گریز از مرکز ناشی از لختی را بیابید.

۱۱۶ـ قطاری به جرم ۲۰۰۰ تن در عرض جغرافیایی $\varphi = ۶۰^\circ$ نیم کره شمالی به طرف شمال در حال حرکت است. مطلوبست :

الف) بزرگی و جهت نیروی جانبی وارد بر ریل از طرف قطار، اگر قطار در راستای نصف النهار با سرعت $v = ۵۴\dfrac{km}{h}$ حرکت کند ؛

ب) در چه جهتی و با چه سرعتی قطار باید حرکت کند تا نتیجهٔ نیروی لختی وارد به آن در چهارچوب مرجع وابسته به زمین برابر با صفر باشد.

۱۱۷ـ یک جسم در استوا در حالت سکون نسبت به زمین از ارتفاع $h = ۵۰۰\,m$ شروع به افتادن می کند. با فرض اینکه اصطکاک هوا ناچیز است، مقدار انحراف جسم را هنگام برخورد با زمین بیابید.

کاروانرژی

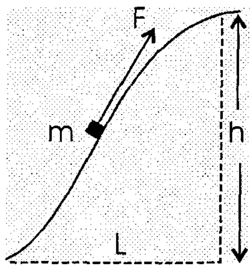
۱۱۸ـ یک ذره در طول مسیری در صفحه xy از نقطه ۱ با بردار مکان $\overrightarrow{r}_1=\hat{i}+2\hat{j}$ به نقطهٔ ۲ با بردار مکان $\overrightarrow{r}_2=2\hat{i}-3\hat{j}$ منتقل شده است. اگر ذره در طی این فاصله تحت تأثیر نیروی $\overrightarrow{F}=3\hat{i}+4\hat{j}$ بوده باشد. کار انجام شده توسط نیروی $\overrightarrow{F}$ را پیدا کنید. (در اینجا واحدهای $\overrightarrow{r}_1$ و $\overrightarrow{r}_2$ و $\overrightarrow{F}$ ، همگی در دستگاه SI بیان شده اند.)

۱۱۹ـ لوکوموتیوی به جرم m شروع به حرکت می کند و سرعت آن با توجه به رابطه $v=a\sqrt{s}$ تغییر می کند. (در اینجا a یک ثابت است). و s مسافت طی شده به وسیله لوکوموتیو می باشد. کل کار انجام شده به وسیله نیروهایی که در t ثانیه اول بعد از شروع حرکت اعمال می شوند را پیدا کنید.

۱۲۰ـ انرژی جنبشی یک ذره در حال حرکت در طول یک دایره به شعاع R به فاصله طی شده s به صورت $T=as^2$ بستگی دارد. (a یک ثابت است). نیروی اعمال شده بر روی ذره را به صورت تابعی از s پیدا کنید.

۱۲۱ـ جسمی به جرم m مطابق شکل ۲۹ به آرامی به وسیلهٔ نیروی $\overrightarrow{F}$ از تپه ای بالابرده می شود . جهت نیروی $\vec{F}$ در هر نقطه مماس بر مسیر حرکت است. کار انجام شده توسط این نیرو را پیدا کنید. در صورتی که ارتفاع تپه h ، طول آن l و ضریب اصطکاک بین

جسم و سطح k باشد.



شکل ۲۹

۱۲۲ـ دیسکی به جرم $m = ۵۰\ gr$ با سرعت اولیهٔ صفر روی یک سطح شیبدار به طرف پایین سر می خورد و سپس مسافت افقی $l = ۵۰\ cm$ را در طول صفحه افقی طی می کند، در نهایت دیسک متوقف می شود. کار انجام شده به وسیله نیروی اصطکاک در طی کل مسافت را حساب کنید. فرض کنید ضریب اصطکاک برای سطح شیبدار و سطح افقی $k = ۰/۱۵$ باشد.

۱۲۳ـ دو جسم به جرم های $m_۱$ و $m_۲$ با فنر تغییر شکل نیافته ای به هم وصل شده اند و روی سطح افقی به حالت سکون قرار دارند. ضریب اصطکاک بین اجسام و سطح برابر k می باشد. چه نیروی ثابت مینیممی باید در جهت افقی به جسم $m_۱$ وارد شود تا جسم دیگر در آستانه حرکت قرار گیرد؟

۱۲۴ـ زنجیری به جرم $m = ۰/۸ kg$ و طول $l = ۱/۵ m$ روی یک میز ناهموار در حالت سکون قرار دارد و از یک انتها از لبهٔ میز آویزان شده است. اگر طول قسمت آویزان شده

$\eta = \frac{۱}{۳}$ طول کل زنجیر باشد، زنجیر خود به خود شروع به سر خوردن روی میز خواهد کرد. کل کار انجام شده توسط نیروهای اصطکاک را تا لحظه ای که زنجیر کاملاً از میز جدا شود، محاسبه کنید.

۱۲۵ـ جسمی به جرم m با زاویهٔ α نسبت به افق و سرعت اولیهٔ $v_۰$ پرتاب می شود. مطلوب است محاسبه توان متوسط و لحظه ای، که به وسیله نیروی گرانش در تمام مدت زمان حرکت جسم ایجاد می شود را محاسبه کنید.

۱۲۶ـ ذره ای به جرم m در طول دایره ای به شعاع R حرکت می کند. شتاب این ذره عمودی است و با زمان تحت رابطه $a_n = at$ تغییر می کند. (a یک ثابت است). وابستگی زمانی توان ایجاد شده به وسیلهٔ تمام نیروهای اعمال شده بر ذره را پیدا کنید. همچنین توان متوسط این ذره را در t ثانیه اول بعد از حرکت بیابید.

۱۲۷ـ جسم کوچکی به جرم m روی سطح افقی در نقطهٔ O قرار دارد. به جسم سرعت $v_۰$ داده می شود و شروع به حرکت می کند. مطلوبست :
الف) توان متوسط ایجاد شده توسط نیروی اصطکاک در کل مدت زمان حرکت جسم در صورتی که داشته باشیم : ضریب اصطکاک $k = ۰/۲۷$ و $m = ۱ kg$ و $v_۰ = ۱/۵ \frac{m}{s}$ ؛
ب) ماکزیمم توان لحظه ای ایجاد شده به وسیله نیروی اصطکاک در صورتی که $K = ax$ در اینجا خ یک ثابت و x مسافت طی شده از نقطهٔ O می باشد.

۱۲۸ـ جسم کوچکی به جرم m حول محوری ثابت با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = ۵ rad / s$ دوران می کند. چه کاری توسط نیروی گریز از مرکز ناشی از لختی جسم در طی جابجایی آن از نقطهٔ ۱ به ۲ انجام می شود؟ نقطهٔ ۱ در فاصله $r_۱ = ۳۰ cm$ و

نقطهٔ ۲ در فاصلهٔ $r_2 = 50cm$ از محور چرخش قرار دارند.

۱۲۹ـ سیستمی از دو فنر با ثابت های k_1 و k_2 تشکیل شده است که به طور سری به هم متصل اند. مینیمم کار انجام شده را با توجه به کشیدگی سیستم به اندازهٔ ΔL پیدا کنید.

۱۳۰ـ جسمی به جرم m با وارد آوردن نیروی F از سطح میز بالا برده می شود. نیروی F با افزایش ارتفاع و به صورت $F = 2(ay-1)mg$ تغییر می کند که در اینجا a یک ثابت مثبت است. کار انجام شده به وسیلهٔ نیرو و افزایش انرژی پتانسیل جسم را در میدان گرانشی زمین طی نیمهٔ اول صعود آن پیدا کنید.

۱۳۱ـ انرژی پتانسیل یک ذره در یک میدان عبارت است از : $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ (که a و b ثابتهای مثبت هستند.) مطلوبست :

الف) مقدار $r_\circ$ که در آن ذره در حالت تعادل قرار دارد. (پایدار یا ناپایدار بودن این حالت را بررسی کنید).

ب) اندازه ماکزیمم نیروی جاذبه (نمودار U_r و F_r را بر حسب شعاع r رسم کنید).

۱۳۲ـ در یک میدان نیروی دو بعدی، انرژی پتانسیل ذره ای از رابطه $U = \alpha x^2 + \beta x^2$ بدست می آید که در اینجا β, α مقادیر ثابت و مثبتی هستند که اندازه های متفاوت دارند.

آیا این میدان مرکزگرا است؟

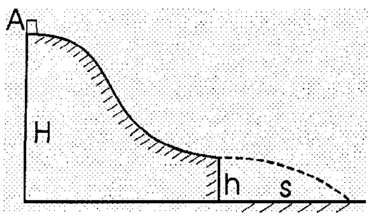
شکل سطوح تعادل و سطوحی که در آنها اندازهٔ بردار $\vec{F}$ ثابت است را به دست آورید.

۱۳۳ــ دو نیروی پایدار $\vec{F} = ay\hat{i}$ و $\vec{F} = ax\hat{i} + by\hat{j}$ را در نظر بگیرید، ($\hat{i}$ و $\hat{j}$

بردارهایی که محورهای x و y هستند و a و b ثابت اند). آیا این میدانها دارای تابع پتانسیل هستند؟

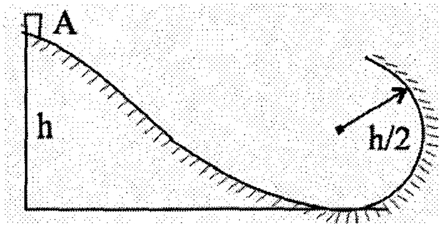
۱۳۴ـ جسمی با جرم m با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ روی یک سطح شیبدار به طرف بالا کشیده می شود. سطح شیبدار با خط افق زاویهٔ α می سازد و ضریب اصطکاک برابر k می باشد. این جسم چه مسافتی را قبل از توقفش طی خواهد کرد و نیروی اصطکاک روی این مسیر چه کاری انجام خواهد داد؟

۱۳۵ـ دیسک کوچک A با سرعت اولیهٔ صفر مطابق شکل ۳۰ از نوک تپه ای به ارتفاع H به طرف پایین سر می خورد. این تپه (یک قسمت افقی نیز دارد که ارتفاع آن h و طول آن s است. ارتفاع h چه مقداری باید باشد تا دیسک حتماً مسافت s را طی کند؟



شکل ۳۰

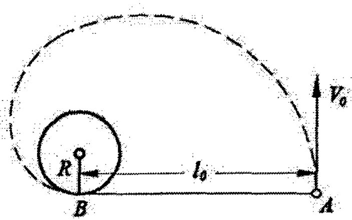
۱۳۶ـ جسم کوچکی به جرم m مطابق شکل ۳۱ از بالای سطح منحنی شیبداری به ارتفاع h به طرف پایین سر می خورد و سپس وارد نیم دایره ای به شعاع $\frac{h}{۲}$ می گردد. فرض کنید اصطکاک قابل چشمپوشی باشد. سرعت جسم را در بالاترین نقطه از مسیر حرکت پرتابی خود بعد از جدا شدن از نیم دایره پیدا کنید.



شکل ۳۱

۱۳۷ـ توپی به جرم m با یک ریسمان به طول l ازنقطه ای آویزان است. می خواهیم نقطهٔ اتصال این نخ را طوری به حرکت در آوریم که توپ در طول دایره ای حول آن حرکت کند. چه سرعت مینیممی برای این کار لازم خواهد بود؟ کشش ریسمان را در لحظه ای که توپ در حالت افقی قرار دارد پیدا کنید.

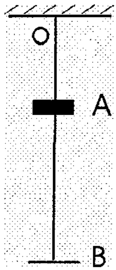
۱۳۸ـ در یک صفحه افقی دو جسم به شرح زیر قرار دارند. یک استوانهٔ عمود بر صفحه به شعاع R و دیسک A که با نخی به طول l_0 به هم متصل اند. (شکل ۳۲ نمای بالا را نشان می دهد) به دیسک سرعت v_0 می دهیم. این دیسک تا زمانی که به استوانه برخورد کند چه مدت در صفحه در حال حرکت خواهد بود؟ فرض کنید اصطکاک وجود ندارد.



شکل ۳۲

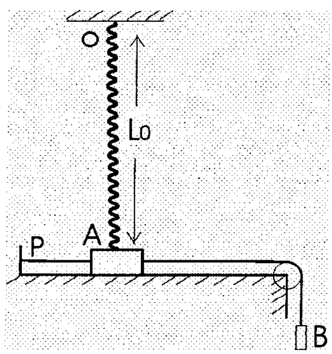
۱۳۹ـ یک طناب نازک کشسان به طول l و ضریب کشسانی k مطابق شکل ۳۳ از یک انتها به نقطهٔ O آویزان و در انتهای دیگرش به جسم B متصل است. مهرهٔ کوچک A به جرم m شروع به پایین آمدن از نقطهٔ O در طول طناب می کند. از جرم های طناب و

جسم B صرف نظر کنید. ماکزیمم تغییر طول طناب را پیدا کنید.



شکل ۳۳

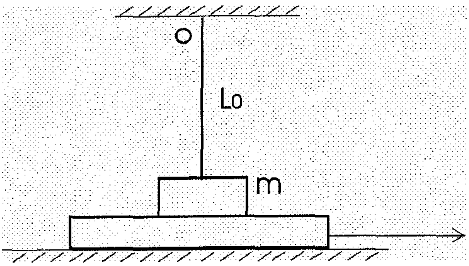
۱۴۰ـ جرم A مطابق شکل ۳۴ روی سطح افق توسط ریسمانی به نقطهٔ P متصل شده است. جرم جسم با جرم جسم B برابر وجسم A با یک فنر سبک که در وضعیت تعادل (بدون تغییر طول) قرار دارد به نقطهٔ O متصل شده است. طول فنر $l_0 = ۵۰cm$ و سختی آن $k = ۵mg/l_0$ می باشد که در آن m جرم جسم است. ریسمان PA پاره می گردد و جرم A شروع به حرکت می کند. سرعت آن را هنگامی که از صفحه جدا می شود، بیابید.



شکل ۳۴

۱۴۱ـ روی یک صفحه افقی مطابق شکل ۳۵ تخته ای قرار گرفته که روی آن جسمی به جرم $m = ۱kg$ و با یک ریسمان کشسان به طول $l_0 = ۴۰cm$ به نقطهٔ O متصل است

ضریب اصطکاک بین جسم و تخته برابر $k = ۰/۲$ می باشد. تخته را به آرامی به سمت راست می کشیم تا جسم شروع به لغزیدن روی آن کند. در این لحظه ریسمان با راستای قائم زاویه $\theta = ۳۰^\circ$ می سازد کاری را که تا آن لحظه توسط اصطکاک در چارچوب متصل به تخته روی جسم انجام شده بیابید.



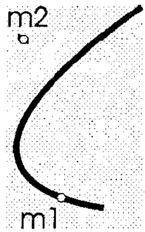
شکل ۳۵

۱۴۲ـ میلهٔ افقی AB می تواند حول انتهای A بچرخد. حلقه کوچکی به جرم m که روی میله قرار دارد توسط فنر بدون جرم به طول $l_\circ$ و ضریب سختی X به انتهای A متصل است. برای اینکه میله را به طور یکنواخت به سرعت زاویه ای ω برسانیم چه مقدار کار باید انجام شود؟

۱۴۳ـ قرقره ای به طور ثابت به سقف بسته شده است و دارای نخی است که به دو سر آن جرم های $m_۱$ و $m_۲$ بسته شده اند. جرم قرقره و نخ و همچنین نیروی اصطکاک قابل چشم پوشی است. شتاب مرکز جرم سیستم a_c را در صورت رها شدن اجرام بیابید.

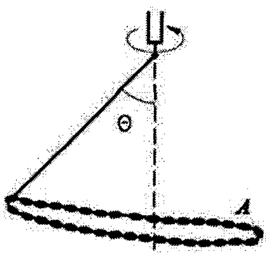
۱۴۴ـ دو ذره در حال بر هم کنش مطابق شکل ۳۶ با یکدیگر تشکیل یک دستگاه بسته را می دهند که مرکز جرم آن ساکن می باشد. ، مکان دو ذره در یک لحظه و همچنین مسیر

ذره به جرم $m_۱$ در شکل ترسیم شده است . مسیر جرم $m_۲$ را رسم کنید. $m_۲ = \frac{m_۱}{۲}$.



شکل ۳۶

۱۴۵ـ زنجیر بسته A مطابق شکل ۳۷ به جرم $m = ۰/۳۶\ kg$ به وسیلهٔ یک ریسمان به یک قلاب قائم چرخان با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = ۳۵\, Rad / s$ وصل شده است ریسمان، زاویهٔ $\theta = ۴۵^\circ$ با خط قائم ساخته است. فاصلهٔ گرانیگاه زنجیر از محور دوران و کشش ریسمان را بیابید.

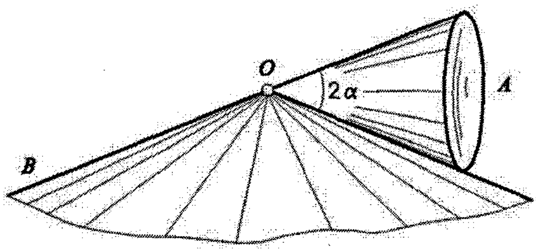


شکل ۳۷

۱۴۶ـ مخروط A به جرم $m = ۳/۲\ kg$ با نیم زاویه رأس $\alpha = ۱۰^\circ$ مطابق شکل ۳۸ به طور یکنواخت و بدون لغزش روی سطح مخروطی B دوران می کند به طوری که رأس O آن ثابت است. گرانیگاه مخروط A هم سطح نقطه O و به فاصلهٔ $l = ۱۷\ cm$ از آن قرار دارد و محور مخروط با سرعت زاویه ای ω در حال دوران است. مطلوبست :

الف) نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر مخروط A اگر $\omega = ۱\, Rad / s$ باشد؛

ب) به ازای چه مقادیری از ω مخروط A بدون لغزش می غلطد، اگر ضریب اصطکاک بین سطوح $k = ۰/۲۵$ باشد؟



شکل ۳۸

۱۴۷ـ در چارچوب مرجع k دو ذره در راستای محور x حرکت می کنند. یکی با جرم m_1 و سرعت $\vec{v}_۱$ و دیگری به جرم $m_۲$ و سرعت $\vec{v}_۲$. مطلوبست :

الف) سرعت $\vec{v}$ چارچوب مرجع K' که در آن مجموع انرژی جنبشی دو ذره مینیمم باشد؛

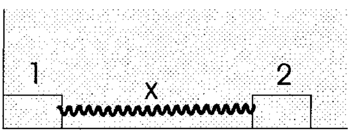
ب) مجموع انرژی جنبشی ذرات در دستگاه K' .

۱۴۸ـ چارچوب مرجعی که در آن مرکز جرم ذرات در حال سکون است، به وسیله سرعت $\vec{v}$ تبدیل به دستگاه k می شود. جرم دستگاه ذرات برابر m و انرژی کل در دستگاه مرکز جرم برابر $\widetilde{E}$ می باشد. انرژی کل دستگاه ذرات را در چارچوب مرجع k بیابید.

۱۴۹ـ دو دیسک کوچک به جرمهای m_1 و $m_۲$ به وسیلهٔ فنر بدون جرمی به یکدیگر متصل شده اند و روی سطح هموار افقی قرار دارند. دیسک ها را با سرعت $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ به حرکت در می آوریم به نحوی که جهت آنها عمود بر یکدیگر باشد و در صفحهٔ افقی قرار داشته باشد. انرژی کل این دستگاه، $\widetilde{E}$ را در چارچوب مرکز جرم بیابید.

۱۵۰ـ سیستمی از دو جسم کروی به جرمهای m_1 و m_2 که با فنر بدون جرمی به هم متصل شده اند تشکیل شده است. در لحظه $t = 0$ کره ها با سرعت های اولیه $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ در میدان گرانشی یکنواخت زمین پرتاب می شوند.
با صرفنظر کردن از مقاومت هوا وابستگی تکانه کل سیستم به زمان را در طول حرکت بیابید. همچنین بردار مکان مرکز جرم سیستم را نسبت به نقطه اولیه بر حسب زمان بیابید.

۱۵۱ـ دو جسم به جرم های m_1 و m_2 مطابق شکل ۳۹ توسط فنر بدون جرمی به ضریب سختی k به هم متصل شده و روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارند. جسم شماره ۲ به اندازه x به سمت چپ جابجا می گردد و سپس رها می شود. سرعت مرکز جرم کل مجموعهٔ جسم ها و فنر را بعد از اینکه جسم ۱ از دیوار جدا شده به دست آورید.

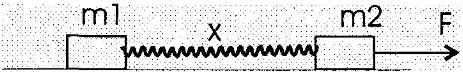


شکل۳۹

۱۵۲ـ دو جسم مطابق شکل ۴۰ بوسیله فنر بدون جرمی به ضریب سختی k و طول آزاد l_0 به هم متصل شده و روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند. نیروی ثابت افقی F بر جرم m_2 وارد می شود. بیشترین و کمترین فاصله بین جرم ها را در طول حرکت بیابید در صورتی که :

الف) جرم ها برابر باشند ؛

ب) یکی از جرم ها m_1 و دیگری m_2 باشد .

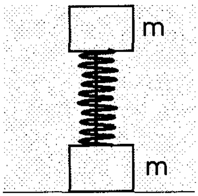


شکل ۴۰

۱۵۳ـ مطابق شکل ۴۱ دو مکعب یکسان به جرم m در صفحه قائم توسط فنر بدون جرم فشرده شده ای به ضریب سختی k به هم متصلند. دومکعب به وسیله ریسمانی به هم وصل شده اند که در لحظه معینی بریده می شود.

الف) به ازای چه مقادیری از ΔL ، مقدار فشرده شدن اولیه فنر، مکعب پایینی بعد از بریده شدن نخ از زمین جدا می شود؟

ب) ارتفاع h که مرکز جرم این مجموعه صعود خواهد کرد در صورتی که $\Delta l = ۷mg/k$ باشد، به دست آورید.



شکل ۴۱

بقای تکانه خطی

۱۵۴ـ دو چهار چرخه مشابه که بر هر یک از آنها فردی سوار است بر روی سطح بدون اصطکاک به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. زمانی که دو چهارچرخه به یکدیگر می رسند دو فرد با پرشی عمود بر مسیر حرکت، جای خود را عوض می کنند. در نتیجهٔ این عمل چهارچرخه اول می ایستد و چهارچرخه دوم در همان راستای قبلی با سرعت $\vec{v}$ به حرکت خود ادامه می دهد. سرعتهای اولیه هر چهارچرخه، $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ را بیابید اگر جرم هر چهار چرخه بدون آدم M و جرم هر آدم m باشد.

۱۵۵ـ دو چهارچرخه مشابه با سرعت ثابت $\vec{v}_۰$ بر روی سطح بدون اصطکاک پشت سر هم در حال حرکت هستند. مردی با جرم m بر چهارچرخه عقبی سوار است. در لحظه مشخصی مرد با سرعت $\vec{u}$ نسبت به چهارچرخه خود بر روی چهارچرخه جلویی می پرد. با دانستن اینکه جرم هر چهارچرخه M است، سرعت هر چهارچرخه را بعد از این عمل به دست آورید.

۱۵۶ـ دو فرد هر کدام به جرم m در یک سر چهارچرخه ای به جرم M ایستاده اند. با صرفنظر کردن از اصطکاک، سرعت چهار چرخه بعد از اینکه هر دو با سرعت نسبی $\vec{u}$ نسبت به چهارچرخه بیرون پریدند را بیابید در صورتی که :

الف) دو فرد به طور همزمان بیرون می پرند؛

ب) یکی بعد از دیگری بیرون می پرد.
در کدام حالت سرعت چهارچرخه بیشتر خواهد بود و چند برابر بیشتر؟

۱۵۷ـ زنجیری توسط نخی آویزان وه سر پایینی زنجیر با سطح میز در تماس می باشد. اگر نخ بریده شود نیرویی که میز هنگام سقوط زنجیر احساس می کند بر حسب ارتفاع سقوط سر بالایی زنجیر بدست آورید.

۱۵۸ـ توپی فلزی به جرم $m = ۵۰\ gr$ از ارتفاع $h = ۱\ m$ روی سطح تخته سنگی می افتد. کل تکانه ای که توپ بعد از تعداد زیادی برخورد به میز اعمال می کند را به دست آورید، در صورتی که در هر برخورد سرعت توپ به اندازه ضریب $\eta = ۱/۲۵$ کمتر شود.

۱۵۹ـ قایقی به جرم M که فردی به جرم m روی آن سوار است بدون حرکت، روی سطح دریاچه ای قرار دارد. فرد مسافت l' را نسبت به قایق با سرعت $v'(t)$ می پیماید و سپس می ایستد. با صرف نظر کردن از مقاومت آب، مطلوبست :
الف) تغییر مکان قایق l نسبت به مرجع ثابت (ساحل) ؛
ب) نیروی افقی که فرد در طول حرکت به قایق وارد کرده است.

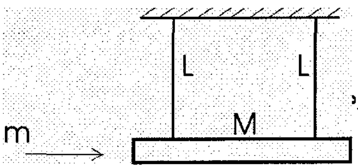
۱۶۰ـ طنابی از قرقره ثابتی عبور کرده است به طوری که یک سر طناب به نردبانی که فردی روی آن قرار دارد وصل است و سر دیگر آن به یک وزنهٔ تعادلی به جرم M متصل است. فرد با جرم m به اندازه L' نسبت به نردبان حرکت می کند و سپس می ایستد. با صرف نظر کردن از وزن طناب و اصطکاک محور قرقره، تغییر مکان مرکز جرم کل سیستم را پیدا کنید.

۱۶۱ـ یک توپ جنگی به جرم M از روی سطح شیبداری که با سطح افق زاویه α می سازد، به سمت پایین شروع به حرکت می کند. توپ بعد از طی مسافت l ، شلیک کرده و گلوله در راستای افق با تکانه $\vec{P}$ پرتاب می شود. در نتیجه این عمل تفنگ می ایستد. با فرض اینکه نیروی اصطکاک و جرم گلوله در مقابل جرم توپ قابل صرف نظر کردن باشد، زمان شلیک را بیابید.

۱۶۲ـ ذره ای به جرم m مطابق شکل ۴۲ در راستای افق وارد جرم M می شود. جرم M توسط دو نخ مشابه به طول l از سقف آویزان است در نتیجه این عمل نخ ها تا زاویه θ منحرف می شوند. مطلوبست محاسبه :

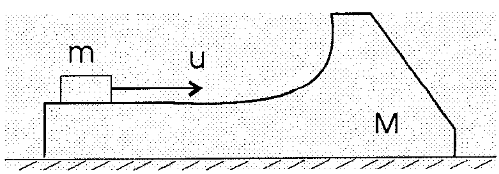
الف) سرعت ذره قبل از برخورد ؛

ب) نسبت انرژی تبدیل شده به گرما به انرژی اولیه ذره



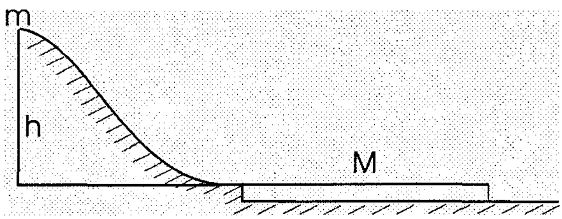
شکل ۴۲

۱۶۳ـ جسمی به جرم M مطابق شکل ۴۳ همراه جسم دیگری به جرم m روی سطح افق به طور ساکن قرار دارند . جرم m ، سرعت اولیه v را نسبت به M در راستای افق به دست می آورد. جرم m بعد از ترک جرم M تا چه ارتفاعی (نسبت به ارتفاع اولیه خود) صعود خواهد کرد؟ از اصطکاک صرف نظر کنید.



شکل ۴۳

۱۶۴ـ ذره ای به جرم m مطابق شکل ۴۴ از روی سطح همواری به ارتفاع h بدون سرعت اولیه تا سطح افقی و روی جرم M سر می خورد. سطح هموار را بدون اصطکاک فرض کنید. به واسطه اصطکاک بین جرم m و M از سرعت جرم m کاسته می شود و بعد از یک لحظهٔ معین دو جرم m و M به صورت جسم به حرکت ادامه می دهند.
الف) کل کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک را به دست آورید ؛
ب) آیا می توان گفت که نتیجه حاصل از قسمت (الف) مستقل از ناظر می باشد؟



شکل ۴۴

۱۶۵ـ سنگی بدون سرعت اولیه از ارتفاع h از سطح زمین سقوط می کند. اگر از مقاومت هوا صرف نظر کنیم بدیهی است که سنگ با سرعت $v_۰ = \sqrt{۲gh}$ نسبت به زمین، با زمین برخورد خواهد کرد. همین نتیجه را با استفاده از دید ناظری که با سرعت ثابت v_0 به سمت زمین حرکت می کند به دست آورید.

۱۶۶ـ ذره ای به جرم ۱ gr که با سرعت $\vec{v}_۱ = ۳\hat{i} - ۲\hat{j}$ حرکت می کند، یک برخورد کاملاً غیر کشسان را با ذرهٔ دیگری به جرم ۲ gr و سرعت $\vec{v}_۲ = ۴\hat{i} - ۶\hat{k}$ تجربه می کند. اندازه و بردار سرعت نهایی دو ذره به هم چسبیده $\vec{v}$ را به دست آورید. (تمام واحدها در دستگاه SI می باشند.)

۱۶۷ـ تغییر انرژی ناشی از برخورد کاملاً غیرکشسان دو ذره m_1 و m_2 که به ترتیب سرعت های $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ دارند را محاسبه کنید.

۱۶۸ـ ذره ای به جرم m_2 برخورد کاملاً کشسانی را با ذره ای ساکن به جرم m_1 تجربه می کند. جرم m_2 به چه نسبتی از انرژی جنبشی خود را از دست می دهد در صورتی که :
الف) بعد از برخورد عمود بر راستای اولیه حرکت کند ؛
ب) برخورد کاملاً از روبرو باشد.

۱۶۹ـ ذره ۱ به طور کاملاً کشسان با ذره ساکن ۲ برخورد می کند. نسبت جرمهای آنها را به دست آورید در صورتی که :
الف) بعد از برخورد دو ذره با سرعت برابر در راستای مخالف هم حرکت می کنند؛
ب) دو ذره به طور متقارن نسبت به راستای حرکت ذره ۱ با زاویه واگرایی $\theta = ۶۰^\circ$ از هم دور می شوند.

۱۷۰ـ یک توپ در حرکت مستقیم به توپ ساکنی با همان جرم به طور کشسان برخورد می کند. در لحظه برخورد زاویه بین خط مستقیم گذرنده از مرکزهای دو توپ و راستای حرکت توپ برخورد کننده، برابر $\alpha = ۴۵^\circ$ می باشد. با فرض هموار بودن سطح توپ ها، چه کسری از انرژی جنبشی اولیه توپ برخورد کننده در لحظهٔ ماکزیمم تغییر شکل، به انرژی پتانسیل تبدیل می شود. (η)

۱۷۱ـ پرتابه ای که با سرعت $v = ۵۰۰\ m/s$ حرکت می کند به سه قطعه یکسان و مشابه تقسیم می شود به طوری که انرژی جنبشی دستگاه $\eta = ۱/۵$ بار افزایش می یابد. ماکزیمم سرعتی که یکی از قطعات می تواند بدست آورد، چقدر است؟

۱۷۲ـ ذره ۱ که با سرعت $v = 10\ m/s$ حرکت می کند با ذره مشابه ۲ برخورد رو در رو می کند و در اثر برخورد انرژی جنبشی دستگاه $\eta = 1\%$ کاهش می یابد. مقدار و جهت سرعت ذره ۱ را پس از برخورد بدست آورید.

۱۷۳ـ ذره ای به جرم m با ذرهٔ ساکنی به جرم M برخورد می کند و با زاویه $\frac{\pi}{2}$ منحرف می گردد. همچنین ذره M با زاویه $\alpha = 30^\circ$ نسبت به راستای اولیه حرکت m پس زده می شود. چه مقدار (به درصد) و به چه طریقی انرژی جنبشی دستگاه بعد از برخورد تغییر می کند اگر $\frac{M}{m} = 5$ باشد.

۱۷۴ـ یک دستگاه بسته تشکیل شده است از دو ذره به جرم m_1 و m_2 که عمود بر یکدیگر با سرعتهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ حرکت می کنند. مطلوبست کمیتهای زیر نسبت به چهارچوب متصل به مرکز جرم.

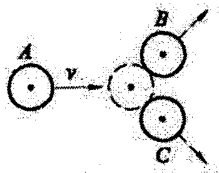
الف) تکانه خطی

ب) انرژی جنبشی کل دو ذره.

۱۷۵ـ یک ذره به جرم m_1 با سرعت م با ذره ساکن دیگری به جرم m_2 $(m_1 > m_2)$ به طور کشسان برخورد می کند. ماکزیمم زاویه ای را که ذره برخورد کننده m_1 در اثر برخورد می تواند پراکنده شود بیابید.

۱۷۶ـ سه دیسک یکسان A و B و C مطابق شکل ۴۵ روی سطح هموار افقی قرار دارند. دیسک A با سرعت $\vec{v}$ در حال حرکت است که برخورد کشسانی با دیسک های B و C انجام می دهد. فاصله بین مراکز دیسک های B و C قبل از برخورد A، η برابر

بزرگتر از اندازه قطر هر دیسک است. سرعت دیسک A را بعد از برخوردمحاسبه کنید. به ازای چه مقادیری از η ، دیسک A پس زده می شود، یا می ایستد یا به حرکتش ادامه می دهد.



شکل ۴۵

۱۷۷ـ یک مولکلو با مولکول ساکن دیگری با همان جرم برخورد می کند. ثابت کنید زاویه جدایی دو مولکول بعد از برخورد :

الف) برابر 90° است اگر برخورد کشسان باشد؛

ب) متفاوت با 90° است اگر برخورد ناکشسان باشد.

جرم متغیر

۱۷۸ـ موشکی گاز حاصل از سوخت را به طور یکنواخت با سرعت نسبی $\vec{u}$ به بیرون می فرستد. نرخ خروج گاز برابر $\dot{m}\, kg/s$ است. ثابت کنید معادله حرکت موشک در این حالت به شکل زیر است :

$$m\vec{a} = \vec{F} - \dot{m}\vec{u}$$

که m جرم لحظه ای موشک، $\vec{a}$ شتاب و $\vec{F}$ نیروی خارجی است.

۱۷۹ـ موشکی در غیاب نیروی خارجی با بیرون فرستادن گاز حاصل از سوخت به طور یکنواخت با سرعت نسبی $\vec{u}$ حرکت می کند. در لحظه ای که جرم موشک m است، سرعت $\vec{v}$ موشک را بیابید اگر جرم اولیه $m_\circ$ و سرعت اولیه صفر باشد. از رابطهٔ داده شده در سؤال قبلی استفاده کنید.

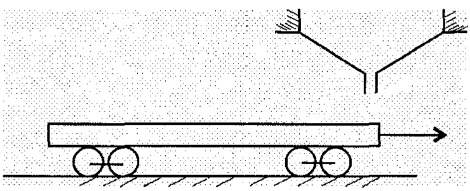
۱۸۰ـ رابطه بین جرم موشک با زمان را بیابید، در صورتی که با شتاب ثابت a حرکت کند، اثر نیروهای خارجی صفر باشد، گاز با سرعت ثابت u نسبت به موشک خارج شود و جرم آن در لحظهٔ اول برابر $m_\circ$ باشد.

۱۸۱ـ یک سفینه فضایی به جرم $m_\circ$ در غیاب نیروهای خارجی با سرعت ثابت $\vec{v}_\circ$ حرکت می کند. برای تغییر راستای حرکت، یک موتور جت روشن می شود و شروع به خروج

گاز با سرعت نسبی $\vec{u}$ می کند که نسبت به سفینه ثابت است و درجهت عمود به حرکت می باشد. موتور زمانی که جرم سفینه به m کاهش یابد خاموش می شود. مقدار زاویه α که مشک در اثر کار موتور منحرف می شود را بیابید.

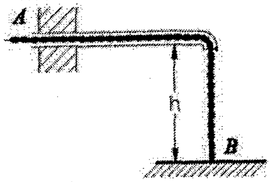
۱۸۲ـ یک واگن پر از شن تحت تأثیر نیروی $\vec{\mathrm{F}}$ موازی با سرعت واگن در صفحه افقی حرکت می کند. در این حین، شن از سوراخی در کف، با نرخ $\mu kg/s$ به بیرون می ریزد. شتاب و سرعت واگن را در زمان t بیابید اگر در زمان صفر جرم واگن $m_\circ$ و سرعت آن برابر صفر باشد. اصطکاک قابل صرف نظر کردن است.

۱۸۳ـ یک واگن مطابق شکل۴۶ در اثر نیروی ثابت افقی $\vec{F}$ شروع به حرکت می کند. قیفی با آهنگ ثابت $\dot{m} = \mu\, kg/s$ شن بر روی این واگن می ریزد. سرعت و شتاب واگن را بر حسب زمان بیابید. اصطکاک قابل چشم پوشی است.



شکل ۴۶

۱۸۴ـ زنجیر AB به طول l مطابق شکل ۴۷ در داخل لوله افقی شکل بدون اصطکاکی قرار دارد و طول h از آن از سر لوله به صورت آزاد آویزان و سر B زنجیر بر سطح میز مماس می باشد. در یک لحظه سر انتهایی زنجیر، A ، رها می شود. با چه سرعتی این سر زنجیر، A ،از لوله خارج می گردد؟



شکل ۴۷

بقای تکانه زاویه ای

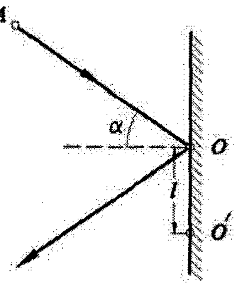
۱۸۵ـ تکانه زاویه ای یک ذره نسبت به نقطهٔ O به صورت $\vec{H}_O = \vec{a} + \vec{b}t^۲$ نسبت به زمان تغییر می کند، که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ثابتی هستند و $\vec{a} \perp \vec{b}$. مطلوب است محاسبه گشتاور $\vec{M}_O$ وارد بر ذره نسبت به نقطهٔ O در لحظه ای که زاویه بین بردارهای $\vec{M}_O$ و $\vec{H}_O$ برابر ۴۵° باشد.

۱۸۶ـ یک توپ به جرم m با زاویه α نسبت به افق با سرعت اولیه $v_۰$ پرتاب می شود. رابطه زمانی اندازه بردار تکانه زاویه ای توپ نسبت به نقطهٔ پرتاب را بیابید. تکانه زاویه ای توپ را در ماکزیمم ارتفاع بیابید، در صورتی که داشته باشیم $m = ۱۳۰ gr$، $\alpha = ۴۵^\circ$ و $v_۰ = ۲۵ m/s$ مقاومت هوا قابل صرف نظر کردن است.

۱۸۷ـ دیسک A به جرم m مطابق شکل۴۸ روی سطح هموار افقی با سرعت $\vec{v}$ در حال حرکت است و برخورد کاملاً کشسانی در نقطهٔ O با دیوار ساکن انجام می دهد. زاویه بین راستای حرکت دیسک و راستای عمود به دیوار برابر α است. مطلوبست :

الف) نقاطی که تکانه زاویه ای دیسک نسبت به آنها در این برخورد ثابت می ماند؛

ب) میزان افزایش بردار سرعت زاویه ای دیسک نسبت به نقطهٔ O' که روی صفحهٔ حرکت دیسک و به فاصلهٔ l از O قرار دارد.



شکل ۴۸

۱۸۸ـ یک توپ کوچک به جرم m از نقطهٔ O از سقف به وسیله ریسمانی به طول l معلق است و روی دایره ای با سرعت زاویه ای ثابت ω حرکت می کند. نسبت به چه نقاطی تکانه زاویه ای $\overrightarrow{H}$ توپ ثابت باقی می ماند؟
میزان افزایش بردار تکانه زاویه ای توپ را نسبت به نقطه O در نصف زمان چرخش بدست آورید.

۱۸۹ـ یک توپ به جرم m بدون سرعت اولیه از ارتفاع h روی زمین سقوط می کند. میزان افزایش بردار تکانه زاویه ای توپ را در زمان سقوط (نسبت به نقطهٔ O' در چارچوب مرجع که با سرعت $\vec{v}$ در جهت افقی حرکت می کند) بیابید. توپ از نقطهٔ O آغاز به سقوط می کند و مقاومت هوا قابل صرف نظر کردن است.

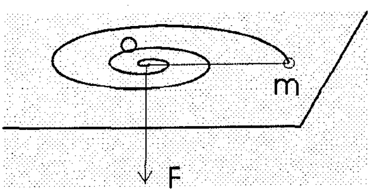
۱۹۰ـ یک دیسک هموار افقی با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محور ثابت گذرنده از مرکز آن، دوران می کند. در لحظهٔ $t = ۰$ جسمی به جرم m با سرعت $\vec{v}$، از مرکز O به حرکت در می آید. تکانه زاویه ای دیسک $\overrightarrow{H}(t)$ را نسبت به نقطه O در چارچوب مرجع متصل به دیسک بیابید. اطمینان حاصل کنید که این تکانه زاویه ای به وسیلهٔ نیروی

کوریولیس به دست آمده است.

۱۹۱ـ یک ذره در یک مسیر بسته در یک میدان نیروی مرکزی حرکت می کند، به طوری که انرژی پتانسیل ذره برابر $U = kr^2$ (k یک ثابت مثبت و r فاصله ذره از نقطهٔ O مرکز میدان می باشد). اگر می نیمم فاصله ذره از نقطهٔ O برابر r_1 و سرعت آن در دورترین نقطه از O برابر v_2 باشد، جرم ذره را بیابید.

۱۹۲ـ یک توپ به وسیله ریسمان سبکی به طول l از نقطه ای آویزان شده است. سپس توپ به یک سمت کشیده می شود و به طوری که ریسمان زاویهٔ θ با خط عمود می سازد و در جهت عمود بر صفحهٔ قائمی که ریسمان و توپ در آن قرار دارد، به حرکت در می آید(حرکت به صورت سه بعدی است). سرعت اولیه ای که به توپ باید داده شود تا بتواند به زاویه انحراف $\frac{\pi}{2}$ نسبت به خط قائم در حین حرکت برسد، چقدر است؟

۱۹۳ـ جسم کوچکی به جرم m مطابق شکل۴۹ به ریسمان غیر کشسانی گره خورده است و روی سطح افقی همواری حرکت می کند. سر دیگر ریسمان به داخل سوراخ O با سرعت ثابت کشیده می شود. کشش ریسمان را به صورت تابعی از r ، فاصله بین جسم و سوراخ بیابید اگر در $r = r_0$ سرعت زاویه ای ریسمان برابر ω_0 باشد.



شکل ۴۹

۱۹۴ـ یک ریسمان سبک غیر کشسانی به قرقره سنگین ثابتی به شعاع R بسته شده است. جسم کوچکی به جرم m به سر آزاد ریسمان بسته شده است. در زمان $t=0$ دستگاه رها می شود و شروع به حرکت می کند. تکانه زاویه ای دستگاه را نسبت به محور قرقره به صورت تابعی از زمان t بیابید.

۱۹۵ـ کره یکنواختی به جرم m و شعاع R شروع به غلتش بدون لغزش روی سطح شیبداری به زاویهٔ α می کند. رابطهٔ زمانی تکانه زاویه ای کره را نسبت به نقطهٔ تماس در لحظهٔ اولیه بیابید. نتیجهٔ به دست آمده چگونه تغییر می کند اگر سطح شیبدار کاملاً هموار (بدون اصطکاک) باشد؟

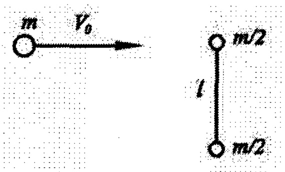
۱۹۶ـ دستگاهی حاوی ذراتی با تکانه های خطی کل $\vec{P}_O$ و تکانه زاویه ای کل $\vec{H}_O$ نسبت به نقطهٔ O می باشد. تکانه زاویه ای آن را نسبت به نقطهٔ O' بیابید به طوری که مکان O' نسبت به O با بردار $\vec{r}$ مشخص شود، نشان دهید در چه حالتی تکانه زاویه ای دستگاه مستقل از انتخاب نقطهٔ O می باشد.

۱۹۷ـ ثابت کنید که تکانه زاویه ای $\vec{H}_O$ دستگاهی از ذرات نسبت به نقطهٔ O از چارچوب مرجع k می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\vec{H}_O=\vec{H}_C+\vec{r}_{C/o}\times P_C$$

که $\vec{H}_C$ مقدار خالص تکانه زاویه ای نسبت به مرکز جرم دستگاه و $\vec{r}_{C/O}$ بردار مکان مرکز جرم نسبت به نقطهٔ O و $\vec{P}_C$ تکانه خطی کل دستگاه ذرات در چارچوب مرجع k می باشد.

۱۹۸ـ یک توپ به جرم m که با سرعت v_0 در حال حرکت است مطابق شکل ۵۰ به یکی از کره های ساکن دمبلی رودررو برخورد کشسان می کند. جرم هر یک از کره ها $\frac{m}{2}$ و فاصله بین آنها l می باشد. با صرف نظر کردن از اندازهٔ کره ها، تکانه زاویه ای خالص دمبل را بعد از برخورد بیابید. (یعنی تکانه زاویه ای دمبل نسبت به چارچوب متصل به مرکز جرم دمبل H_C).



شکل ۵۰

۱۹۹ـ دو دیسک کوچک یکسان به جرم m روی سطح افقی هموار قرار دارند. دیسک ها با فنر سبک غیر کشسان به طول l_0 و ضریب سختی k به یکدیگر وصل شده اند. در لحظه ای یکی از دیسک ها با سرعت v_0 در جهت عمود به فنر روی سطح به حرکت در می آید. بیشترین کرنش $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ فنر را در حین حرکت بیابید. اگر بدانیم که به طور قابل ملاحظه ای از واحد کوچکتر است.

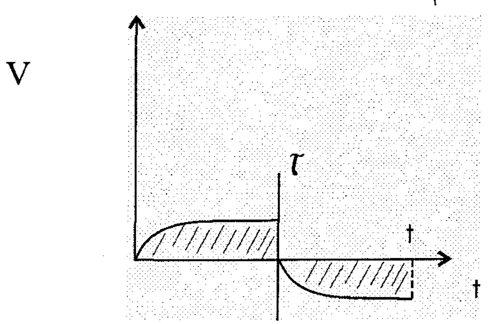
پاسخ تشریحی مسائل

سینماتیک

۱ـ چون الوار روی آب شناور است پس سرعت الوار با آب برابر می باشد. حال باید ببینیم چقدر طول می کشد تا قایق در رفت و برگشت دوباره به الوار می رسد در اینصورت با داشتن این زمان t و مقداری که الوار جابجا شده (یعنی L) می توان سرعت الوار (آب) را به صورت l/t حساب کرد. برای راحتی کار از سرعت نسبی کمک می گیریم. یعنی نسبت به ناظری که همراه آب در حرکت است. از دید این ناظر آب و الوار ساکن هستند و قایق نسبت به آن جلو و عقب می رود. حال با توجه به اینکه توان قایق ثابت است می توان نوشت :

$$P=\frac{w}{t}=\frac{Fd}{t}=Fv=mav=\text{ثابت} \qquad (۱)$$

بنابراین با افزایش سرعت، شتاب کم می شود و برعکس. لذا می توان نمودار کیفی $v-t$ (نسبی) را به صورت زیر ترسیم کرد.



با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر جابجایی است و همچنین نمودار سرعت

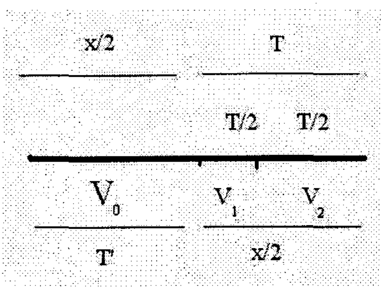
رفت با برگشت نیز یکی می باشد. بنابراین برای اینکه قایق دوباره به الوار برسد باید جابجایی آن برابر صفر گردد یا مساحت زیر نمودار بالای محور t برابر با مساحت زیر نمودار زیر محور t گردد بنابراین $t = 2\tau$ در نتیجه :

$$v_{\text{الوار}} = \frac{L}{2\tau}$$

نکته : در شکل نمودار، اغماضی صورت گرفته است. چرا که اگر سرعت به سمت صفر میل کند شتاب به سمت بی نهایت میل می کند که هیچ موتوری نمی تواند چنین شتابی تولید کند.

۲ـ با توجه به تعریف سرعت متوسط داریم : $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

همچنین با توجه به شکل می توان نوشت :



$$v_1 \frac{T}{2} + v_2 \frac{T}{2} = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad T = \frac{x}{v_1 + v_2}$$

$$v_0 T' = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad T' = \frac{x}{2v_0}$$

$$\rightarrow \quad \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{\frac{x}{2v_0} + \frac{x}{v_1 + v_2}} = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}$$

نکته : اگر مسیر منحنی باشد $\bar{v}$ برابر با رابطه فوق نمی شود.

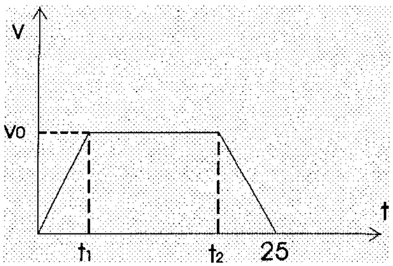
۳ـ درحل مسائل سرعت و شتاب خیلی خوب است که از نمودار v − t کمک گرفت چرا که در این نمودار از دو مطلب زیر می توان استفاده کرد.

I) شیب در نمودار v − t برابر با شتاب متحرک است.

II) مساحت زیر نمودار v − t برابر جابجایی متحرک است.

در این مسأله نمودار v − t به صورت زیر ترسیم می شود.

چون :



$$\bar{v} = ۷۲\frac{km}{h} = ۲۰\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow ۲۰ = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{۲۵} \quad \rightarrow \quad \Delta x = ۵۰۰ m$$

با توجه به نکته II : مساحت زیر نمودار برابر ۵۰۰ است. همچنین با توجه به نکته I داریم :

$$\frac{v_۰}{t_۱} = \tan\alpha = a = ۵ \rightarrow v_۰ = ۵t_۱ \quad (۱)$$

$$\frac{v_۰}{۲۵ - t_۲} = a = ۵ \rightarrow v_۰ = ۱۲۵ - ۵t_۱ \quad (۲)$$

$$\rightarrow t_۲ = ۲۵ - t_۱ \quad (۳)$$

مساحت زیر نمودار

$$= ۵۰۰ = \left[\frac{۲۵ + (t_۲ - t_۱)}{۲}\right] \times v_۰ \xrightarrow{\text{از } (۳)} ۵۰۰ = t_۲\ v_۰ \quad (۴)$$

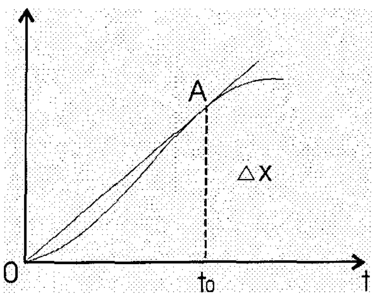
$$(۲)\ ,\ (۴)\text{از} \rightarrow t_۲ = ۲۰\ ,v_۰ = ۲۵ \rightarrow t_۱ = ۵ \rightarrow t_۲ - t_۱ = ۱۵s$$

۴ـ الف) می دانیم :

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{۲} = \frac{۲۰-۰}{۲۰} = ۱\frac{cm}{s}$$

ب) در نمودار $x - t$، شیب نمودار برابر سرعت می باشد لذا کافی است ببینیم کجا شیب خط مماس بر نمودار به حداکثر مقدار خود می رسد.

ج) برای یافتن زمان $t_۰$ به طوری که سرعت لحظه ای با سرعت متوسط برابر شود کافی است از مبدأ خطی را بر نمودار مماس کنیم در هر نقطه ای که این خط مماس شد همان نقطهٔ مورد نظر است. زیرا با توجه به شکل، شیب خط مماس OA که همان سرعت لحظه ای در نقطهٔ A است برابر $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ نیز می باشد این کسر نیز برابر سرعت متوسط می باشد لذا، $t = ۱۶\ s$.

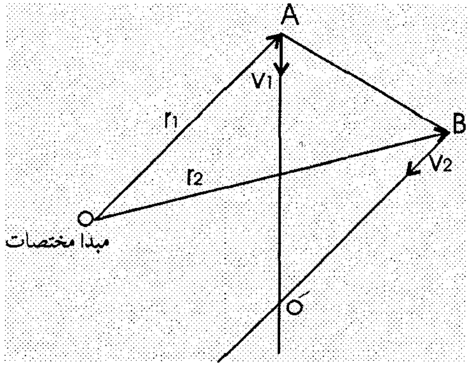


د) می دانیم : $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ بنابراین کافی است شیب نمودار در لحظات ۱۰ و ۱۶ ثانیه را بدست آوریم. لذا :

$$\overline{a}_{۱۰} = \frac{v(۱۰) - ۰}{۱۰} \qquad \overline{a}_{۱۶} = \frac{v(۱۶) - ۰}{۱۶}$$

۵ـ می دانیم وقتی برداری ثابت باشد باید هم مقدار و هم جهت آن ثابت باشد لذا چون $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ ثابت هستند در نتیجه راستای آنها نیز ثابت است بنابراین این دو متحرک مطابق

شکل زیر روی خطوط راست حرکت می کنند.



از طرفی اگر این دو متحرک بخواهند با هم برخورد کنند باید هر دو در یک زمان t فاصله های $o'B$ و $o'A$ را طی کنند (o' : محل برخورد) لذا می توان نوشت :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_{۲} - \vec{r}_{۱} \ , \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Ao'} - \overrightarrow{Bo'} = t\,\vec{v}_{۱} - t\,\vec{v}_{۲} = t(\vec{v}_{۱} - \vec{v}_{۲})$$

$$\rightarrow \quad \vec{r}_{۲} - \vec{r}_{۱} = t(\vec{v}_{۱} - \vec{v}_{۲}) \qquad (۱)$$

از طرفی اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و k عدد اسکالری باشند و داشته باشیم $\vec{b} = k\vec{a}$ آنگاه

اندازه k برابر است با $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ بنابراین از رابطه (۱) می توان نتیجه گرفت :

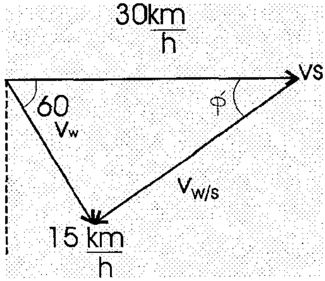
$$t = \frac{|\vec{r}_{۲} - \vec{r}_{۱}|}{|\vec{v}_{۱} - \vec{v}_{۲}|}$$

$$\rightarrow \quad (\vec{r}_{۲} - \vec{r}_{۱})/|\vec{r}_{۲} - \vec{r}_{۱}| = (\vec{v}_{۱} - \vec{v}_{۲})/|\vec{v}_{۱} - \vec{v}_{۲}|$$

۶- v_s : سرعت کشتی $\qquad$ v_w : سرعت باد.

سرعت نسبی باد نسبت به کشتی $= \vec{v}_{w/s} = \vec{v}_w - \vec{v}_s$

با توجه به شکل داریم :



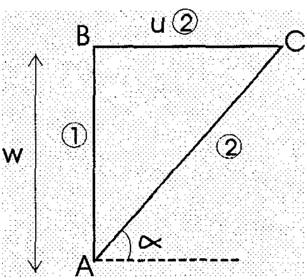
$$\left|\vec{v}_{w/s}\right| = \sqrt{\left|\vec{v}_s\right|^{۲} + \left|v_w\right|^{۲} - \left|\vec{v}_s\right|\left|v_w\right|\cos ۶۰}$$

$$= \sqrt{۳۰^{۲} + ۱۵^{۲} - ۲\times ۳۰\times ۱۵\cos ۶۰} \rightarrow \quad \left|\vec{v}_{w/s}\right| = ۲۵/۹۸\frac{m}{s}$$

همچنین از مثلثات داریم :

$$\frac{\left|\vec{v}_w\right|}{\sin\phi'} = \frac{\left|\vec{v}_{w/s}\right|}{\sin ۶۰} \rightarrow \quad \sin\phi' = ۰/۵ \quad \rightarrow \quad \phi' = ۳۰$$

۷ـ چون شناگر (۱) در جهت AB حرکت می کند بنابراین با توجه به دیاگرام سرعت و اینکه عرض رودخانه برابر W است می توان نوشت :

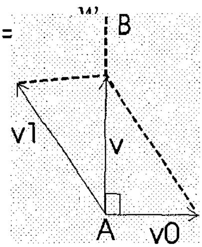


$$v = \sqrt{v_{۱}^{۲} - v_{۰}^{۲}}$$

v_1 : سرعت مطلق شناگر (۱)

لذا زمان لازم برابر خواهد بود با :

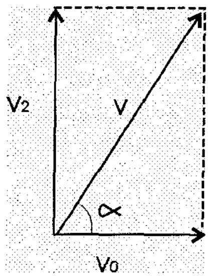
$t_1 =$



شناگر (۲) : با توجه به دیاگرام سرعت و با توجه به اینکه راستای سرعت همان راستای مسیر است (یعنی زاویه α بین v و v_0 با زاویه α بین AC و خط افقی برابر است) لذا

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_2^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{w}{BC} = \frac{v_2}{v_0}$$



بنابراین زمان لازم برای طی کردن مسیر AC و AB توسط شناگر (۲) جمعاً برابر است با :

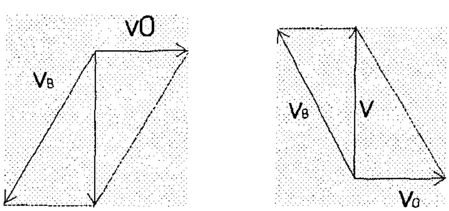
$$t_2 = t_{AC} + t_{BC} = \frac{AC}{v} + \frac{BC}{u} = \frac{w/\sin\alpha}{v} + \frac{w}{u} = \frac{w}{v\sin\alpha} + \frac{w}{u}$$

$$= \frac{w}{v_2} + \frac{w}{u} = w(\frac{u+v_2}{uv_2})$$

با توجه به فرض مسأله $t_1 = t_2$ و $v_1 = v_2$ $\leftarrow$

$$\rightarrow \frac{u+v_1}{uv_1} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_0^2}} \rightarrow u = \frac{v_0\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}{v_1 - \sqrt{v_1^2 - v_0^2}} = \frac{v_0}{(1-(\frac{v_0}{v_1})^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}$$

۸ـ شناگر B : با توجه به دیاگرام سرعت برای این شناگر داریم :



$$v=\sqrt{v_B^2-v_0^2}$$

$$\text{زمان رفت و برگشت}=T_B=\frac{2L}{v}=\frac{2L}{\sqrt{v_B^2-v_0^2}}$$

زمان رفت با زمان برگشت برای این شناگر یکی است.

شناگر A : با توجه به دیاگرام سرعت شناگر A در رفت و برگشت داریم:

دیاگرام سرعت رفت
$$\xrightarrow{\quad v_A \quad} \quad \underset{v_0}{\longrightarrow} \; = \; \xrightarrow{\quad v_A+v_0 \quad}$$

دیاگرام سرعت برگشت
$$\xleftarrow{\quad v_A \quad}\underset{v_0}{\longrightarrow} \; = \; \xleftarrow{\quad v_A-v_0 \quad}$$

$$T_A=\frac{L}{v_A+v_0}+\frac{L}{v_A-v_0}=\frac{L2v_A}{v_A^2-v_0^2}$$

با توجه به اینکه $v_A=v_B=\eta v_0$ لذا:

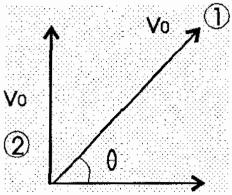
$$\frac{T_A}{T_B}=\frac{(2L\eta v_0)/(\eta^2v_0^2-v_0^2)}{2L/\sqrt{\eta^2v_0^2-v_0^2}}=\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}=1/8$$

۹ـ برای اینکه کمترین حرکت در راستای آب صورت گیرد باید بردار برایند سرعت عمود بر راستای آب باشد. با توجه به شکل می توان نوشت :

$$\sin\alpha=\frac{v_0}{v}=\frac{v_0}{\eta v_0}=\frac{1}{\eta}$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{\pi}{2}+Arc\sin\frac{1}{\eta}=120^\circ$$

۱۰ـ می دانیم فاصله دو ذره از رابطه $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ به دست می آید.



همچنین می دانیم معادلات حرکت یک حرکت پرتابی به صورت زیر است.

θ : زاویه اولیه پرتاب نسبت به افق
$$x = (v_0 \cos\theta)t$$

v_0 : سرعت اولیه پرتاب
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t$$

متحرک (۱)
$$\begin{cases} x_1 = (v_0 \cos\theta)t \\ y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t \end{cases}$$

متحرک (۲)
$$\begin{cases} x_2 = (v_0 \cos 90)t = 0 \\ y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{cases}$$

$$d = \left[(v_0 t \cos\theta)^2 + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t \sin\theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= v_0 t \left[\cos^2\theta + 1 + \sin^2\theta - 2\sin\theta\right]^{\frac{1}{2}} = v_0 t\sqrt{2(1-\sin\theta)} = 21/99m$$

۱۱ـ با توجه به جهت مختصات و با استفاده از قوانین حاکم بر حرکت پرتابه می توان بردارهای سرعت این دو پرتابه را به صورت زیر نوشت :

$$\vec{v}_1 = (-v_{1x})\hat{i} + gt\,\hat{j}$$
$$\vec{v}_2 = (v_{2x})\hat{i} + gt\,\hat{j}$$

حال در لحظه ای که این دو بردار بر هم عمودند داریم :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad \rightarrow -v_{1x}v_{2x} + (gt)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{v_{1x}\,v_{2x}}}{g}$$

از طرفی در این مدت زمان می توان مسافتهای افقی طی شده توسط این دو پرتابه را به

صورت زیر حساب کرد.

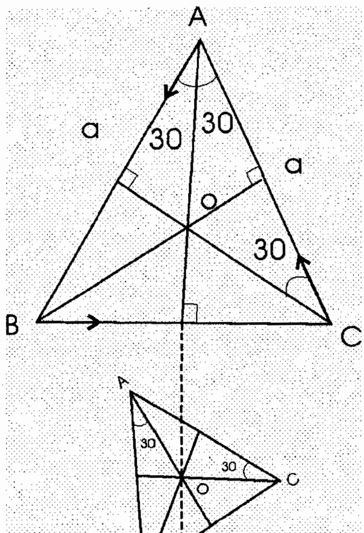
$$x_1 = v_{1x}t \quad , \quad x_2 = v_{2x}t$$

فاصله هر دو پرتابه :

$$\rightarrow L = x_1 + x_2 = (v_{1x} + v_{2x})t = (v_{1x} + v_{2x})\frac{\sqrt{v_{1x}\, v_{2x}}}{g} = 2/42m$$

۱۲ـ ممکن است این مسأله به ظاهر مشکل برسد اما با کمی درایت خواهید فهمید که با توجه به ۳ نکته زیر حل آن بسیار آسان است.

نکته ۱ : با توجه به تقارن شکل هندسی و تقارن فیزیکی(مشابه بودن جرم و سرعت) می توان گفت در هر لحظه شکل سه متحرک ABC همچنان مثلث باقی می ماند با این تفاوت که اندازه ضلع آن کوچکتر شده و مقداری دوران یافته است مطابق شکل ب.

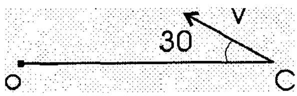


نکته ۲ : با توجه به تقارن زمانیکه متحرکها به هم می رسند در واقع دقیقاً در نقطهٔ O به هم می رسند. لذا زمان رسیدن متحرکها به نقطهٔ O با هم برابر و برابر زمانی است که این سه

متحرک به هم می رسند.

نکته ۳: در هر لحظه زاویه بین ضلع AB با OC برابر ۳۰ درجه و همین طور برای سایر متحرکها این زاویه ضلع با عمود منصف برابر ۳۰ است.

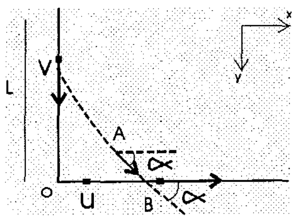
حال به کمک این ۳ نکته می توان دریافت برای ناظری که مثلاً متصل به خط OC است در می یابد که متحرک C با سرعت ثابت v cos ۳۰ به سمت نقطهٔ O در حرکت است. با توجه به اینکه طول اولیه OC برابر است با (a/۲)/cos۳۰ لذا زمان رسیدن متحرک C به نقطهٔ O برابر است با :



$$t = \frac{\frac{a}{۲\cos ۳۰}}{v\cos ۳۰} = \frac{a}{۲v(\cos ۳۰)^۲} = \frac{a}{۲v \times \frac{۳}{۴}} = \frac{۲a}{۳v}$$

این زمان، همان زمان رسیدن متحرکها به هم می باشد.

۱۳ـ با توجه به روابط سرعت و مسافت نسبی می توان گفت که فاصله بین A , B که در



برابر L می باشد با سرعت نسبی v − u cosα پیموده می شود. بنابراین مسافت طی شده در فاصله زمانی Δt بین A , B برابر با $\Delta x = (v - u\cos\alpha)\Delta t$ است لذا اگر بعد از زمان کل τ ، A به B برسد (یعنی مسافت L پیموده شده) کافی است Δx ها را با هم جمع کنیم که در نتیجه :

$$\int_0^{\tau} (v - u\cos\alpha)dt = L \qquad (1)$$

همچنین در این زمان τ، متحرک B مسافت uτ را می پیماید. از طرفیمؤلفه افقی سرعت متحرک A برابر v cosα است. لذا متحرک A نیز در این زمان τ باید همین مسافت را بپیماید. بنابراین :

$$\int_0^{\tau} v\cos\alpha\, dt = u\tau \qquad (2)$$

$$\text{از } (1) \rightarrow \int_0^{\tau} v dt - u\int_0^{\tau} \cos\alpha\, dt = L \rightarrow u\int_0^{\tau} \cos\alpha = v\tau - L$$

$$\rightarrow \int_0^{\tau} \cos\alpha = \frac{v\tau - L}{u} \qquad (3)$$

$$\text{از } (2) \rightarrow \int_0^{\tau} \cos\alpha dt = \frac{u\tau}{v} \qquad (4)$$

$$\text{از } (3),(4) \rightarrow \frac{v\tau - L}{u} = \frac{u\tau}{v} \rightarrow \tau = \frac{vL}{v^2 - u^2}$$

۱۴ـ اگر فرض کنیم در آغاز زمان، انتهای قطار بر روی مبدأ قرار داشته باشد. حال فاصله x_1 که رویداد (۱) در آن اتفاق افتاده برابر است با :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}wt^2 + L$$

از طرفی فاصله x_2 که رویداد (۲) در آن اتفاق می افتد برابر است با :

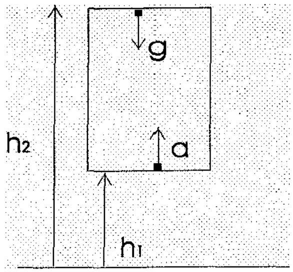
$$x_2 = \frac{1}{2}w(t+\tau)^2$$

$$\rightarrow x_1 - x_2 = L + \frac{1}{2}w(t^2 + (t+\tau)^2) = L - w\tau(t + \frac{\tau}{2}) = 242\,m$$

ب) برای اینکه ناظر هر دو رویداد را در یک مکان ببیند کافی است که در جهت خلاف حرکت قطار حرکت کند و سرعت آن برابر $v = \frac{x_1 - x_2}{\tau}$ باشد. لذا :

$$v=\frac{۲۴۲}{\tau}=\frac{۲۴۲}{۶۰}=۴/۰۳\frac{m}{s}$$

۱۵ـ الف) برای اینکه حل آسان تر شود از مفهوم نسبی کمک می گیریم. یعنی همان روابط سینماتیک را می نویسیم منتهی تمام کمیت های جابجایی، سرعت و شتاب به صورت نسبی وارد می گردند. بنابراین با توجه به شکل می توان نوشت .



فاصله نسبی پیچ نسبت به کف $= h_۲ - h_۱ = ۲/۷m$

شتاب نسبی پیچ نسبت به کف $= a-(-g)=a+g=۹/۸+۱/۲=۱۱\frac{m}{s^۲}$

سرعت نسبی اولیه پیچ نسبت به کف $= v_۰ - v_۰ = ۰$

فرمول به صورت $x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t$ که برای حالت نسبی به صورت زیر در می آید.

$$\rightarrow\ x_{\text{نسبی}}=\frac{۱}{۲}a_{\text{نسبی}}t^۲+۰\times t\rightarrow ۲/۷=\frac{۱}{۲}\times ۱۱\times t^۲\rightarrow t=۰/۷s$$

ب) ابتدا زمانی که پیچ نسبت به ناظر روی زمین تغییر جهت می دهد را بدست می آوریم.

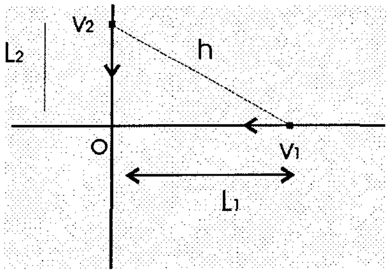
$v=-۹/۸t+۲/۴\rightarrow v=۰\rightarrow t=۰/۲۴۵$ لحظه تغییر جهت

مسافت طی شده $S=\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times ۰/۲۴۵^۲+\frac{۱}{۲}۹/۸(۰/۷-۰/۲۴۵)^۲=۱/۳m$

از طرفی با توجه به اینکه سرعت اولیه پیچ در لحظه رها شدن نسبت به ناظر روی زمین برابر است با $v=۲\times ۱/۲=۲/۴$

جابجایی مطلق متحرک $\rightarrow \quad \Delta x=+\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\,(۰/۷)^{۲}-۲/۴\times ۰/۷=۰/۷۲۱m$

۱۶ـ مختصات لحظه ای هر ذره را می نویسیم :



ذره ۱ $\left| \begin{array}{l} x_{۱}= v_{۱}t+L_{۱} \\ y_{۱}=۰ \end{array} \right.$ ذره ۲ $\left| \begin{array}{l} y_{۲}=-v_{۲}t+L_{۲} \\ x_{۲}=۰ \end{array} \right.$

بنابراین فاصله دو ذره در هر لحظه برابر است با :

$$h=\sqrt{(x_{۲}-x_{۱})^{۲}+(y_{۲}-y_{۱})^{۲}}=\left[(-v_{۱}t+L_{۱})^{۲}+(-v_{۲}t+L_{۲})^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

برای اینکه h می نیمم شود کافی است که مشتق آن را نسبت به t برابر صفر قرار دهیم.

$$\frac{dh}{dt}=۰$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}\left[(-v_{۱}t+L_{۱})^{۲}+(-v_{۲}t+L_{۲})^{۲}\right]^{-\frac{۱}{۲}}\left[-۲v_{۱}(-v_{۱}t+L_{۱})-۲v_{۲}(-v_{۲}t+L_{۲})\right]=۰$$

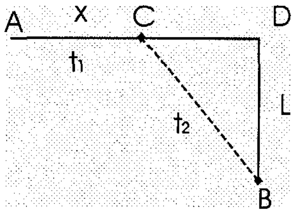
$$\rightarrow -۲v_{۱}(-v_{۱}t+L_{۱})-۲v_{۲}(-v_{۲}t+L_{۲})=۰ \rightarrow t=\frac{v_{۱}L_{۱}+v_{۲}L_{۲}}{v_{۱}^{۲}+v_{۲}^{۲}} \rightarrow$$

با جایگذاری داریم:

$$h_{\min}=\frac{\left|L_{۱}v_{۲}-L_{۲}v_{۱}\right|}{\sqrt{v_{۱}^{۲}+v_{۲}^{۲}}}$$

۱۷ـ فرض می کنیم که متحرک تا نقطهٔ C روی AD حرکت کند و بعد از آن از خط

AD خارج گردد زمان می نیمم می شود در نتیجه این زمان را بر حسب یک متغیر (مثل x) بدست می آوریم.



$$t = t_۱ + t_۲ = \frac{x}{\eta v} + \frac{\sqrt{(AD - x)^۲ + L^۲}}{v}$$

حال برای اینکه t می نیمم شود باید $\frac{dt}{dx} = ۰$ گردد. بنابراین با توجه به اینکه طول AD و سرعت v ثابت هستند داریم.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{۱}{\eta v} + \frac{۱}{۲v}\left[(AD - x)^۲ + L^۲\right]^{-\frac{۱}{۲}} \times \left[-۲(AD - x)\right] = ۰$$

$$\rightarrow \left[(AD - x)^۲ + L^۲\right]^{\frac{۱}{۲}} = \eta(AD - x) \rightarrow (AD - x)^۲(\eta^۲ - ۱) = L^۲$$

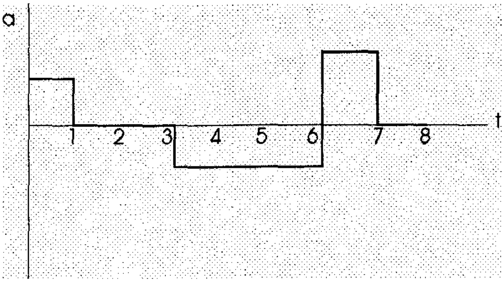
$$\rightarrow CD = AD - x = \frac{L}{\sqrt{\eta^۲ - ۱}}$$

۱۸ـ می دانیم :

نکتهٔ ۱ : مساحت زیر نمودار v − t برابر جابجایی (Δt) متحرک است.

نکتهٔ ۲ : شیب نمودار v − t برابر شتاب متحرک است.

برای رسم شتاب کافی است شیب در هر قسمت را حساب کنیم. لذا :



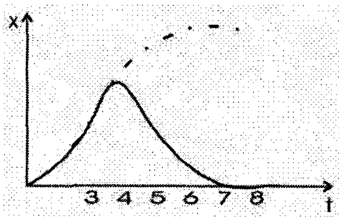
برای رسم نمودار x − t ابتدا تابع سرعت را ناحیه بندی می کنیم بنابراین :

$$v=\begin{cases} t & ۰\leqslant t\leqslant ۱ \\ ۱ & ۱\leqslant t\leqslant ۳ \\ -t+۴ & ۳\leqslant t\leqslant ۶ \\ ۲t-۱۴ & ۶\leqslant t\leqslant ۷ \\ ۰ & ۷\leqslant t \end{cases} \rightarrow \quad x=\begin{cases} \frac{۱}{۲}t^{۲} & ۰\leqslant t\leqslant ۱ \\ t-\frac{۱}{۲} & ۱\leqslant t\leqslant ۳ \\ -\frac{۱}{۲}t^{۲}+۴t-۵ & ۳\leqslant t\leqslant ۶ \\ t^{۲}-۱۴t+۴۹ & ۶\leqslant t<۷ \\ ۴۹ & ۷\leqslant t \end{cases}$$

نکته ۱ : برای به دست آوردن تابع جابجایی x از تابع سرعت می توان یا از انتگرال استفاده کرد یا با توجه به روابط $x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰}$ و $v=at+v_{۰}$ تابع x را در هر قسمت بدست آورید. دقت کنید که مقدار $x_{۰}$ در هر ناحیه برابر است با جابجایی طی شده در مجموع نواحی قبلی است.

نکته ۲ : در این مسأله شتاب ثابت بود اگر شتاب نیز متغیر باشد تنها راه حل همان انتگرال است. برای رسم تابع x کافی است در هر ناحیه تابع مربوطه را بکشید.

نکته ۳ : چون مسافت یک متحرک در هر لحظه در حال افزایش است بنابراین نمودار مسافت زمان همیشه صعودی است بنابراین هر جا نمودار مکان ـ زمان صعودی باشد نمودار مسافت زمان بر آن منطبق است و هرجا نمودار مکان زمان نزولی باشد، نمودار مسافت زمان قرینه آن است. یعنی خطوط خط چین در شکل فوق.



۱۹ـ الف) برای بدست آوردن میانگین اندازه سرعت کافی است از رابطه زیر کمک بگیریم :

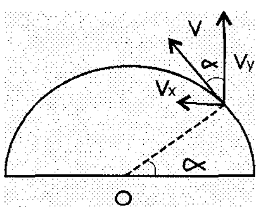
$$|\bar{v}|=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{تغییرات زمانی}}=\frac{\pi R}{\tau}=\frac{۱۶۰\pi}{۱۰}=۱۶\pi\frac{cm}{s}$$

ب) در حالت الف کمیت ذاتاً اسکالر است یعنی اگر شکل مسیر عوض بشود ولی مسافت πR و زمان طی شده τ باشد باز میانگین اندازه سرعت همان مقدار فوق می شد. در حالت ب ابتدا باید بردار سرعت را متوسط گیری کنیم که حاصل نیز یک بردار است سپس اندازه آن را به دست بیاوریم.

برای راحتی محاسبه کافی است میانگین بردار سرعت در جهت x و y را بطور جداگانه به دست بیاوریم پس میانگین بردار سرعت کل برابر است با :

$$\overline{\vec{v}}=\overline{\vec{v}}_x+\overline{\vec{v}}=\bar{v}_x\hat{i}+\bar{v}_y j$$

با توجه به شکل مسأله می توان دریافت که $\bar{v}_y=۰$ پس کافی است میانگین بردار سرعت در جهت x را حساب کنیم.



نکته : متوسط تابع f(x) در فاصله [a , b] برابر است با $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

اثبات این فرمول در حل مسأله ۸۳ آمده است. بنابراین :

v : سرعت مماسی متحرک

$$\bar{v}_x=\frac{۱}{\pi-۰}\int_۰^{\pi}(v\sin\alpha)d\alpha=\frac{۲v}{\pi}\quad(۱)$$

اگر سرعت مماسی ثابت باشد داریم :

$$v = R\omega = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\frac{\pi}{\tau} \qquad (۲)$$

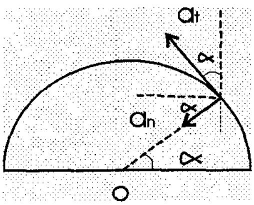
$$\text{از } (۱),(۲) \rightarrow \bar{v}_x = \frac{۲}{\pi}\times\frac{R\pi}{\tau} \quad \rightarrow \quad \bar{v}_y = ۰ \quad \rightarrow \quad \overline{\vec{v}} = \frac{۲R}{\tau}\hat{i}$$

$$\rightarrow \left|\overline{\vec{v}}\right| = \frac{۲R}{\tau} = \frac{۲\times۱۶۰}{۱۰} = ۳۲\frac{cm}{s}$$

ج) مطابق شکل شتاب کل برابر است با :

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

فرض می کنیم متحرک از حال سکون شروع به حرکت کند با توجه به اینکه a_t ثابت است و شتاب a_n نقشی در اندازه سرعت ندارد. لذا :



$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ \quad \rightarrow \quad \pi R = \frac{۱}{۲}a_t\,\tau^۲ \quad \rightarrow \quad a_t = \frac{۲\pi R}{\tau^۲}$$

مشابه با قسمت قبل بردار $\vec{a}_t$ را در جهت x و y تجزیه می کنیم. واضح است که میانگین بردار شتاب مماسی در جهت قائم صفر است پس کافی است در جهت x محاسبه کنیم.

$$(\bar{a}_x) = \frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} (a_t\sin\alpha)d\alpha = \frac{۲a_t}{\pi} = \frac{۲}{\pi}\times\frac{۲\pi R}{\tau^۲} = \frac{۴R}{\tau^۲}$$

$$\rightarrow \quad \overline{\vec{a}}_t = (\bar{a}_t)_x\hat{i} = \frac{۴R}{\tau^۲}\hat{i} \quad \rightarrow \quad \left|\overline{\vec{a}}_t\right| = \frac{۴R}{\tau^۲}$$

نکته : برای محاسبه میانگین بردار شتاب کل باید ابتدا میانگین بردار شتاب عمودی را حساب کرد و با شتاب مماسی جمع برداری کرد.

۲۰ـ الف) با مشتق گیری از بردار مکان، بردار سرعت و با مشتق گیری از بردار سرعت

می توان بردار شتاب را بدست آورد.

$$\vec{r} = \vec{a}t(۱-\alpha t) \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{a}(t-\alpha t^{۲})) = \vec{a}(۱-۲\alpha t)$$

شتاب $x(۲۰) = ۱۰(۲۰ - \frac{۱}{۱۰}\times ۴۰۰) = -۲۰۰$

$$\vec{r} = \vec{a}t(۱-\alpha t) \rightarrow \vec{r} = ۰ \rightarrow t = ۰ \;,\; \frac{۱}{\alpha} \rightarrow \Delta t = \frac{۱}{\alpha}$$

از رابطه سرعت $\vec{v} = \vec{a}(۱-۲\alpha t)$ می یابیم که متحرک در زمان $t = \frac{۱}{۲\alpha}$ تغییر جهت می دهد.

بنابراین مسافت طی شده تا $t = \frac{1}{\alpha}$ دو برابر مسافت تا زمان $\frac{۱}{۲\alpha}$ است. بنابراین:

$$S = ۲ \;\; |\vec{a}| \times \frac{۱}{۲\alpha}(۱-\alpha\times\frac{۱}{۲\alpha}) \;\; = \frac{|\vec{a}|}{۲\alpha}$$

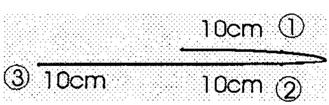
۲۱- $\vec{v} = \vec{v}_{۰}(۱-\frac{t}{\tau}) \rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_{۰}(۱-\frac{t}{\tau}) \rightarrow dx = \vec{v}_{۰}(۱-\frac{t}{\tau})dt$

$$\rightarrow \int_{۰}^{x} dx = \int_{۰}^{t} \vec{v}_{۰}(۱-\frac{t}{\tau})dt \rightarrow x - ۰ = \vec{v}_{۰}(t - \frac{۱}{۲\tau}t^{۲})$$

الف) $x(۱۰) = ۱۰(۱۰ - \frac{۱}{۱۰}\times ۱۰۰) = ۰$ $\qquad x(۶) = ۱۰(۶ - \frac{۱}{۱۰}\times ۳۶) = ۲۴$

$$x(۲۰) = ۱۰(۲۰ - \frac{۱}{۱۰}\times ۴۰۰) = -۲۰۰$$

ب) با توجه به حرکت رفت و برگشتی متحرک ۳ جواب داریم زیرا در $x = -۱۰$ نیز باز فاصله تا مبدأ برابر ۱۰cm می شود.

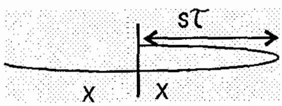


$$x=|\vec{v}_0|(t-\frac{1}{2\tau}t^2) \;\rightarrow\; \pm 10=10(t-\frac{1}{10}t^2) \;\Rightarrow\; \pm 10=10t-t^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} t^2-10t+10=0 \;\rightarrow\; t=8/87,\,1/127s \\ t^2-10t-10=0 \;\rightarrow\; t=10/91s \end{cases}$$

ج) $\rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0(1-\frac{t}{\tau})=0 \;\rightarrow\; t=\tau=5 \;\rightarrow$

متحرک در t = ۵s تغییر جهت می دهد.



بنابراین تا قبل از این زمان مسافت با جابجایی برابر است لذا :

$$t \leqslant \tau \quad s(t)=v_0(t-\frac{t^2}{2\tau}) \;\rightarrow\; s(4)=24cm$$

برای زمان $t>\tau$ با توجه به شکل می توان با در نظر گرفتن علامت x ، مسافت را به صورت زیر نوشت :

$$s(t)=2s_\tau-x(t)=2v_0(\tau-\frac{\tau^2}{2\tau})-v_0(t-\frac{t^2}{2\tau})$$
$$=v_0(\tau-t+\frac{t^2}{2\tau})=\frac{v_0\tau}{2}\left[1+\left(1-\frac{t}{2\tau}\right)^2\right]$$

-۲۲

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\sqrt{x} \;\rightarrow\; \frac{dx}{\sqrt{x}}=\alpha dt \;\rightarrow\; \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_0^t \alpha dt \;\rightarrow\; x=\frac{\alpha^2}{4}t^2$$

$$\rightarrow \quad v=\frac{dx}{dt}=\frac{\alpha^{۲}}{۲}t \quad \rightarrow \quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{\alpha^{۲}}{۲}$$

ب) می دانیم چون $v=\frac{\alpha^2}{2}t$ برای $t > ۰$ همیشه مثبت است لذا متحرک تغییرجهت نمی دهد در نتیجه مسافت با جابجایی برابر است. حال اگر متحرک مسافت S را در زمان τ بپیماید آنگاه چون شتاب ثابت است داریم :

$$S=\frac{۱}{۲}a\tau^{۲} \quad \rightarrow \quad S=\frac{\alpha^{۲}}{۴}\tau^{۲} \quad \text{یا} \quad \tau=\frac{۲\sqrt{S}}{\alpha}$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{\alpha^{۲}}{۴}\tau^{۲}}{\tau}=\frac{\alpha^{۲}}{۴}\tau=\frac{\alpha^{۲}}{۴}\times\frac{۲\sqrt{S}}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{S}}{۲}$$

۲۳ـ
$$\omega=\frac{dv}{dt}=-a\sqrt{v} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{v}}=-adt \quad \rightarrow \quad \int_{v_۰}^{v}\frac{dv}{\sqrt{v}}=\int_{۰}^{t}-adt$$

$$\rightarrow \quad ۲(\sqrt{v}-\sqrt{v_۰})=-at \quad \rightarrow \quad v=(\sqrt{v_۰}-\frac{a}{۲}t)^{۲}$$

بنابراین زمانی که متحرک به سکون می رسد برابر است با :

$$v=۰ \quad \rightarrow \quad \sqrt{v_۰}-\frac{a}{۲}\tau=۰ \quad \rightarrow \quad \tau=۲\sqrt{v_۰}/a$$

از طرفی $v=\frac{dx}{dt}=(\sqrt{v_۰}-\frac{a}{۲}t)^{۲} \quad \rightarrow \quad \int_{x_۰}^{x}dx=\int_{۰}^{t}(\sqrt{v_۰}-\frac{a}{۲}t)^{۲}dt$

$$\rightarrow \quad x=\frac{۱}{۳}(\sqrt{v_۰}-\frac{a}{۲}t)^{۳}\times\left(-\frac{۲}{a}\right)+\frac{۲}{۳a}(\sqrt{v_۰})^{۳} \quad \text{چون} \quad \tau=\frac{2\sqrt{v_0}}{a} \quad \rightarrow$$

$$\Delta x=\frac{۲}{۳a}v_۰^{\frac{۳}{۲}}$$ مسافت طی شده قبل از رسیدن به سکون

۲۴ـ الف)

$$\vec{r} = at\hat{i} - bt^{۲}\hat{j} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x(t) = at \rightarrow t = \dfrac{x}{a} \\ y(t) = -bt^{۲} \end{array}\right\} \rightarrow y = -b\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}$$

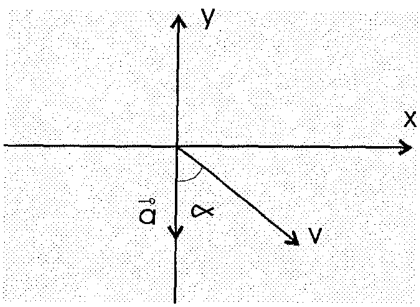
ب)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = a\hat{i} - ۲bt\,\hat{j} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -۲b\,\hat{j}$$

$$\rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{a^{۲} + ۴b^{۲}t^{۲}} \quad , \quad |\vec{a}| = ۲b$$

ج) با توجه به شکل می توان نوشت :

$$\tan\alpha = \frac{v_x}{|v_y|} = \frac{a}{|-۲bt|} = \frac{a}{۲bt} \rightarrow \alpha = Arc\tan\left(\frac{a}{۲bt}\right)$$



د) $|\overline{\vec{v}}| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}t^{۲}}$

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{at\hat{i} - bt^{۲}\hat{j} - ۰}{t} = a\hat{i} - bt\,\hat{j}$$

۲۵ـ الف)

$$\left.\begin{array}{l} x = at \rightarrow t = \dfrac{x}{a} \\ y = at(۱ - \alpha t) \end{array}\right\} \rightarrow y = x\left(۱ - \frac{\alpha}{a}x\right) = x - \frac{\alpha}{a}x^{۲}$$

ب)

$$\vec{r} = at\hat{i} + at(۱ - \alpha t)\,\hat{j} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

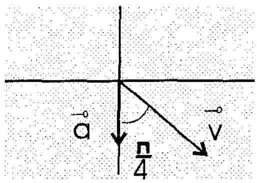
$$\rightarrow \quad \vec{v} = a\hat{i} + (a - ۲\alpha at)\hat{j}$$

$$\rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -۲\alpha\hat{j}$$

ج) از شکل کمک می گیریم (جهت شتاب همیشه در جهت y− است).

با توجه به اینکه مؤلفه قائم سرعت منفی است لذا می توان نوشت :

$$\tan\frac{\pi}{۴} = \frac{a}{-(a - ۲\alpha at)} \quad \rightarrow \quad a = -a + ۲\alpha at \quad \rightarrow \quad t = \frac{۱}{\alpha}$$



۲۶ـ

$$\left.\begin{array}{l} x = a\sin wt \\ y = a - a\cos wt \quad \rightarrow \quad a\cos wt = a - y \end{array}\right\} \rightarrow$$

$x^2 + (a-y)^2 = a^2 \quad \rightarrow$ جسم بر روی دایره ای به شعاع a حرکت می کند

با مشتق گیری از مختصه های x و y نسبت به زمان داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t \quad v_y = \frac{dy}{dt} = a\omega\sin\omega t \rightarrow v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = a\omega$$

بنابراین سرعت ذره ثابت می باشد. لذا مسافت طی شده برابر است با :

$$S = vt = (a\omega)t$$

ب) با مشتق از v_y, v_x ، به ترتیب شتابهای a_y, a_x بدست می آید. لذا،

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^۲\sin\omega t \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = a\omega^۲\cos\omega t$$

بنابراین :

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (a\omega\cos\omega t)\hat{i} + (a\omega\sin\omega t)\hat{j}$$

$$\vec{a} = ax\hat{i} + ay\hat{j} = (-a\omega^۲\sin\omega t)\hat{i} + (a\omega^۲\cos\omega t)j$$

$$\vec{a}.\vec{v} = (-a\omega^{۲}\sin\omega t)(a\omega\cos\omega t) + (a\omega^{۲}\cos\omega t)(a\omega\sin\omega t) = ۰$$

لذا بردار شتاب در هر لحظه بر بردار سرعت عمود است.

۲۷ـ با مشتق گیری از معادله مسیر داریم :

$$y = ax - bx^{۲} \rightarrow \frac{dy}{dt} = a\frac{dx}{dt} - ۲bx\frac{dx}{dt} \quad \text{یا} \quad v_y = av_x - ۲bxv_x \qquad (۱)$$

با گرفتن مشتق دوم

$$\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}} = a\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} - ۲b\left[(\frac{dx}{dt})^{۲} + x\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}\right] \quad \text{یا} \quad a_y = aa_x - ۲b\left[v_x^{۲} + xa_x\right]$$

چون شتاب کل در جهت y− است لذا $a_x = ۰ \qquad a_y = -w$

همچنین سرعت در مبدأ را می خواهد لذا x = y = ۰ بنابراین :

$$(۱) \text{ از } \rightarrow x = ۰ \rightarrow v_y = av_x \quad (۳)$$

$$(۲) \text{ از } \rightarrow x = ۰\,,\, a_x = ۰ \rightarrow a_y = -۲bv_x^{۲}$$

$$\text{چون } a_y = -w \rightarrow -۲bv_x^{۲} = -w \rightarrow v_x^{۲} = \frac{w}{۲b} \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳) \text{ از } \rightarrow v_y^{۲} = a^{۲} \times \frac{w}{۲b}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{v_x^{۲} + v_y^{۲}} = \sqrt{\frac{w}{۲b} + a^{۲}\frac{w}{۲b}} = \sqrt{\frac{w}{۲b}(۱ + a^{۲})}$$

۲۸- با توجه به معادلات حرکت پرتابه می توان بردار مکان را به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (v_{۰}t\cos\alpha)\hat{i} + \left(-\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{۰}t\sin\alpha\right)\hat{j}$$

ب) بردار سرعت متوسط در t ثانیه اول:

$$<\vec{V}>=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}-\cdot}{t}=(v_\cdot\cos\alpha)\hat{i}+\left(-\frac{۱}{۲}gt\quad+v_\cdot\sin\alpha\right)$$

۲۹ـ الف) می دانیم زمان حرکت رفت با زمان حرکت برگشت برابر است از طرفی زمان رفت برابر زمانی است که سرعت قائم متحرک تحت شتاب ثقل به صفر برسد یعنی $v_y=\cdot$. لذا :

$$v_y=at+(v_\cdot)_y \;\rightarrow\; \cdot=-gt+v_\cdot\sin\alpha \;\rightarrow\; t=\frac{v_\cdot\sin\alpha}{g}$$

بنابراین زمان کل حرکت برابر است با $\tau=\dfrac{۲v_\cdot\sin\alpha}{g}$

ب) ارتفاع ماکزیمم در جایی اتفاق می افتد که $v_y=\cdot$ شود لذا :

$$v_y^۲-(v_\cdot)_y^۲=-۲gh\rightarrow\cdot-v_\cdot^۲\sin^۲\alpha=-۲gh_{\max}\rightarrow h_{\max}=\frac{v_\cdot^۲\sin^۲\alpha}{۲g}$$

برای یافتن برد با توجه به زمان کل حرکت داریم :

$$x=(v_\cdot\cos\alpha)t \;\rightarrow\; R=(v_\cdot\cos\alpha)\times\frac{۲v_\cdot\sin\alpha}{g}=\frac{v_\cdot^۲\sin ۲\alpha}{g}$$

اگر برد ذره با ارتفاع ماکزیمم برابر باشد داریم :

$$\frac{v_\cdot^۲\sin^۲\alpha}{۲g}=\frac{v_\cdot^۲\sin ۲\alpha}{g}$$

$$\rightarrow \sin^۲\alpha=۲\sin ۲\alpha=۴\sin\alpha\cos\alpha \;\rightarrow\; \tan\alpha=۴$$

$$\rightarrow \alpha=۷۶^\circ$$

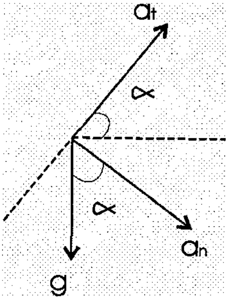
ج) می دانیم :

$$x=(v_{\cdot}\cos\alpha)t \rightarrow t=\frac{x}{v_{\cdot}\cos\alpha}$$
$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{\cdot}\sin\alpha t$$
$$\rightarrow$$

$$y=-\frac{۱}{۲}g\left(\frac{x}{v_{\cdot}\cos\alpha}\right)^{۲}+v_{\cdot}\sin\alpha\left(\frac{x}{v_{\cdot}\cos\alpha}\right)$$

$$\rightarrow \quad y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

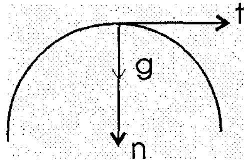
د) برای یافتن شعاع انحنا از رابطه شتاب جانب مرکز (شتاب عمودی) $a_n=\frac{v^{۲}}{R}$ استفاده می کنیم. برای محاسبه شعاع انحنا در ابتدای مسیر با توجه به شکل ابتدا شتاب g که تنها شتاب ذره است را در راستای a_n و a_t (شتابهای عمودی و مماسی) تجزیه می کنیم. بنابراین :



$$a_n=g\cos\alpha \quad\rightarrow\quad g\cos\alpha=\frac{v_{\cdot}^{۲}}{R}$$

$$\rightarrow \quad R=\frac{v_{\cdot}^{۲}}{g\cos\alpha}$$

شعاع انحنا در بالاترین نقطه از مسیر مطابق شکل برابر است با :

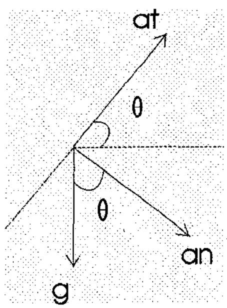


$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow g = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{g}$$

از طرفی چون سرعت در بالاترین نقطه همان سرعت افقی است یعنی $v = v_0 \cos\alpha$ لذا :

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

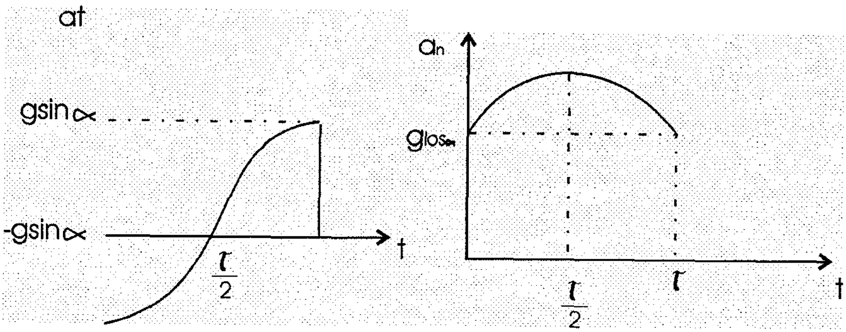
۳۰ـ اگر مطابق شکل برای یک لحظه دلخواه جهتهای عمودی و مماسی را رسم کنیم خواهیم داشت :



θ : زاویه بردار سرعت با افق است از طرفی چون a_t نیز مماس بر مسیر است لذا زاویه بردار شتاب مماسی با افق نیز θ می باشد. بنابراین :

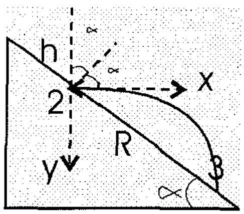
$$a_n = g\cos\theta$$
$$a_t = -g\sin\theta$$

با توجه به اینکه θ در حرکت پرتابی از زاویه اولیه پرتاب یعنی α تا ۰ کم می شود سپس تا انتهای پرتاب به مقدار α- می رسد لذا می توان a_t , a_n را به صورت زیر رسم کرد.



چون شتاب در راستای سرعت همان a_t است لذا a_v مطابق شکل a_t می شود.

۳۱ـ مطابق شکل توپ شبیه نور از سطح بازتاب می یابد.



$$v_۲ = \sqrt{۲gh}$$

از طرفی چون توپ از نقطهٔ ۲ تا ۳ به صورت یک پرتابه حرکت می کند، با قرار دادن نقطهٔ ۲ به عنوان مبدأ می توان برای نقطهٔ برخورد ۳ نوشت :

$$R\cos\alpha = v_. \cos(۹۰ - ۲\alpha)t \;\rightarrow\; R\cos\alpha = v_.(\sin ۲\alpha)t \qquad (۱)$$

$$R\sin\alpha = \frac{۱}{۲}gt^۲ - v_. \sin(۹۰ - ۲\alpha)t$$

$$\rightarrow R\sin\alpha = \frac{۱}{۲}gt^۲ - v_.(\cos ۲\alpha)t \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \text{از} \rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{۱}{۲}gt^۲ - v_۰(\cos ۲\alpha)t}{v_۰(\sin ۲\alpha)t} \rightarrow t = \frac{۲v_۰}{g}$$

$$\rightarrow R\cos\alpha = v_۰(\sin ۲\alpha)\frac{۲v_۰}{g} \rightarrow R = \frac{۴v_۰^۲ \sin\alpha}{g} = \frac{۴\times ۲gh\sin\alpha}{g}$$

$$\rightarrow R = ۸h\sin\alpha$$

۳۲ـ اگر گلوله تحت زاویه α و سرعت اولیه $v_۰$ رها شود، آنگاه از مسأله ۲۹ می توان نوشت:

$$R = \frac{v_۰^۲ \sin ۲\alpha}{g} \rightarrow \sin ۲\alpha = \frac{Rg}{v_۰^۲} = \frac{۵.۱\times ۱۰^۳ \times ۹.۸}{۲۴۰^۲} = ۰/۸۶۷ \rightarrow$$

$$\alpha = ۳۰/۰۹۶ \,,\; ۵۹/۹۰$$

$$\text{از طرفی } t = \frac{۲۷۰\sin\alpha}{g} \rightarrow t_۱ = ۲۴/۵۶s \;,\; t_۲ = ۴۲/۳۷s$$

۳۳ـ اگر دو گلوله بخواهند با هم برخورد کنند باید دارای یک مختصات باشند بنابراین :

$$\text{گلوله اول}\left|\begin{array}{l} x_۱ = v_۰(\cos\theta_۱)t_۱ \\ y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ + v_۰(\sin\theta_۱)t_۱ \end{array}\right.$$

$$\text{گلوله دوم}\left|\begin{array}{l} x_۲ = v_۰(\cos\theta_۲)t_۲ \\ y_۲ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ + v_۰(\sin\theta_۲)t_۲ \end{array}\right.$$

$$\rightarrow x_۱ = x_۲ \rightarrow t_۲ = \left(\frac{\cos\theta_۱}{\cos\theta_۲}\right)t_۱ \qquad (۱)$$

$$y_۱ = y_۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}g(t_۲^۲ - t_۱^۲) = v_۰((\sin\theta_۲)t_۲ - (\sin\theta_۱)t_۱) \qquad (۲)$$

با جایگذاری (۱) در (۲) می توان نوشت :

$$\frac{۱}{۲}g t_۱^۲\left(\frac{\cos^۲\theta_۱}{\cos^۲\theta_۲}-۱\right)=v_. t_۱\left[(\sin\theta_۲)\frac{\cos\theta_۱}{\cos\theta_۲}-(\sin\theta_۱)\right]$$

$$=v_. t_۱\left[\frac{\sin(\theta_۲-\theta_۱)}{\cos\theta_۲}\right]\rightarrow \quad t_۱=\frac{۲v_.}{g}\left[\frac{\sin(\theta_۲-\theta_۱)\times\cos\theta_۲}{(\cos^۲\theta_۱-\cos^۲\theta_۲)}\right]$$

$$\rightarrow \quad t_۲=\frac{۲v_.}{g}\left[\frac{\cos\theta_۱\sin(\theta_۲-\theta_۱)}{\cos^۲\theta_۱-\cos^۲\theta_۲}\right]$$

$$\rightarrow \quad t_۱-t_۲=\Delta t=\frac{۲v_.}{g}\left[\frac{\sin(\theta_۱-\theta_۲)}{\cos\theta_۱+\cos\theta_۲}\right]=۱۰/۹۳$$

۳۴ـ الف) با توجه به فرض مسأله داریم :

$$v_y=v_. \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dt}=v_. \quad\rightarrow\quad y=v_. t$$

$$v_.=ay\rightarrow\frac{dx}{dt}=ay\rightarrow x=\int_.^x dx=\int_.^x ay\,dt=\int_.^t av_. t\,dt=\frac{۱}{۲}av_. t^۲$$

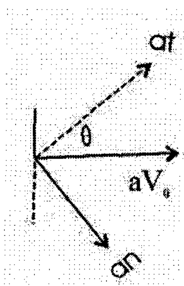
$$\rightarrow \quad x=\frac{۱}{۲}av_. t^۲=\frac{۱}{۲}av_.\left(\frac{y}{v_.}\right)^۲ \quad\rightarrow\quad x=\frac{۱}{۲}a\frac{y^۲}{v_.}$$

ب) از قسمت قبل می توان نوشت :

$$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}=(av_. t)\hat{i}+v_.\hat{j} \quad\rightarrow$$

شتاب $\vec{A}=av_.\hat{i} \quad\rightarrow\quad |\vec{A}|=av_.$ کل شتاب

با توجه به شکل داریم :



$$a_t = av_0 \cos\theta \qquad a_n = av_0 \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{av_0 t}{\sqrt{a^2 v_0^2 t^2 + v_0^2}} = \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 + 1}}$$

$$\rightarrow \quad a_t = av_0 \cos\theta = \frac{a^2 v_0 t}{\sqrt{a^2 t^2 + 1}} = \frac{a^2 y}{\sqrt{a^2 (\frac{y}{v_0})^2 + 1}}$$

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{a^2 v_0^2 t^2 + v_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 + 1}}$$

$$\rightarrow a_n = av_0 \sin\theta = \frac{av_0}{\sqrt{a^2 t^2 + 1}}$$

$$\rightarrow \quad a_n = \frac{av_0}{\sqrt{a^2 (\frac{y}{v_0})^2 + 1}}$$

۳۵- $\vec{v} = a\hat{i} + bx\hat{j} \quad \rightarrow \quad v_x = a \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = a \quad \rightarrow \quad x = \int_0^t adt = at$

$$v_y = bx = adt \rightarrow \frac{dy}{dt} = abt \rightarrow y = \frac{1}{2}abt^2 \rightarrow y = \frac{1}{2}ab(\frac{x}{a})^2 = \frac{1}{2}\frac{b}{a}x^2$$

با مشتق گیری از سرعت می توان شتاب را حساب کرد.

$$\rightarrow \quad \vec{A} = ab\,\hat{j}$$

ب) شعاع انحنا را می توان از رابطه زیر بدست آورد :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$$

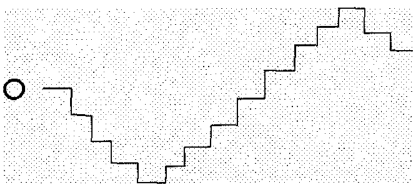
از طرفی چون شتاب کل در راستای قائم است، لذا :

$$a_n = |\vec{A}|\cos\theta = ab\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{v_x}{v} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (bx)^2}}$$

$$\to a_n = \frac{a^۲ b}{\sqrt{a^۲ + (bx)^۲}} \to R = \frac{a^۲ + (bx)^۲}{a^۲ b / \sqrt{a^۲ + (bx)^۲}} = \frac{۱}{a^۲ b}(a^۲ + (bx)^۲)^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\to \quad R = (a/b)\left[۱ + (\frac{bx}{a})^۲\right]^{\frac{۳}{۲}}$$

۳۶ـ می توان مسیر را به صورت خطوط قائم و افقی مطابق شکل تقسیم بندی کرد.



چون در راستای خطوط قائم بردار $\vec{\tau}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است لذا $w_t = ۰$ می شود. همچنین در راستای خطوط افقی زاویه بین $\vec{\tau}$, $\vec{a}$ صفر می شوددر نتیجه برای این خطوط $|\vec{a}| = w_t$ است. از طرفی می دانیم شتابی که باعث تغییر در سرعت ذره می شود شتاب مماسی است و شتاب عمودی تنها جهت مسیر را عوض می کند و تأثیری بر سرعت ندارد لذا تنها در راستای x ذره شتاب می گیرد. بنابراین :

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax \quad \to \quad v^۲ = ۲w_t x \quad \to \quad v = \sqrt{۲|\vec{a}|x}$$

۳۷ـ می دانیم شتاب کل ذره برابر است با $A = \sqrt{a_n^۲ + a_t^۲}$ از طرفی داریم :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = a = ۰/۵\frac{m}{s^۲}, v = at \to \frac{dx}{dt} = at \to x = \frac{۱}{۲}at^۲$$

حال وقتی n برابر محیط را دور می زند زمان سپری شده برابر است با :

$$n(2\pi R) = \frac{1}{2} a\tau^2 \quad \rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{4n\pi R}{a}}$$

سرعت بعد از این زمان برابر است با :

$$v = a\tau \rightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2\tau^2}{R} = \frac{4n\pi Ra}{R} = 4n\pi a$$

$$\rightarrow \quad A = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{a^2 + (4n\pi a)^2} = a\sqrt{1+16n^2\pi^2} = 0/802\frac{m}{s^2}$$

۳۸ـ الف) چون شتاب ذره کند شونده و از نظر مقدار برابر با شتاب عمودی است لذا :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-v^2}{R} \rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{dt}{R} \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -\frac{dt}{R} \rightarrow (-\frac{1}{v})\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{1}{R}t$$

$$\rightarrow (\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}) = -\frac{t}{R} \rightarrow v = \frac{v_0}{1+v_0 t/R} (1) \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+v_0 t/R} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{R}{v_0}(e^{\frac{x}{R}} - 1) \xrightarrow[\text{جایگذاری می کنیم}]{\text{در } (1)} v = \frac{v_0}{1+e^{\frac{x}{R}} - 1} \rightarrow v = v_0 e^{-\frac{x}{R}}$$

ب) $$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-a_n)^2 + a_n^2} = \sqrt{2}a_n = \sqrt{2}\,\frac{v^2}{R}$$

همچنین

$$a = \sqrt{2}\,\frac{v^2}{R} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{\sqrt{2}}{R}(v_0 e^{-\frac{x}{R}})^2 = \frac{\sqrt{2}v_0^2}{R}\; e^{-\frac{2x}{R}}$$

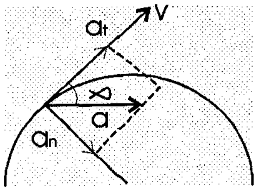
۳۹ـ

$$v = a\sqrt{s} \;\rightarrow\; \frac{ds}{dt} = a\sqrt{s} \;\rightarrow\; \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_0^t a\,dt \rightarrow 2s^{\frac{1}{2}} = at$$

$$\rightarrow \quad s = \frac{۱}{۴}a^۲t^۲ \rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \frac{۱}{۲}a^۲t$$ و شتاب $$A = \frac{۱}{۲}a^۲ \quad \rightarrow$$

شتاب مماسی $= a_t = A = \frac{۱}{۲}a^۲$

با توجه به شکل زاویه بین شتاب کل با سرعت، α، برابر زاویه بین شتاب کل و شتاب مماسی است، لذا:



$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\frac{v^۲}{R}}{\frac{۱}{۲}a^۲} = \frac{۲v^۲}{Ra^۲} = \frac{۲(a\sqrt{s})^۲}{Ra^۲} = \frac{۲s}{R}$$

$$\rightarrow \quad \alpha = Arc\tan(\frac{۲s}{R})$$

۴۰ـ الف) $$v = \frac{dl}{dt} = aw\cos wt \quad \rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt} = -aw^۲\sin wt$$

شتاب کل:

$$A = \sqrt{a_n^۲ + a_t^۲} = \sqrt{a_t^۲ + (\frac{v^۲}{R})^۲}$$

$$= \left[a^۲w^۴\sin^۲ wt + \frac{۱}{R^۲}a^۴w^۴\cos^۴ wt\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\rightarrow \quad A = aw^۲\left[\sin^۲ wt + \frac{a^۲}{R^۲}\cos^۴ wt\right]^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۱)$$

$$L=\cdot \rightarrow \sin wt=\cdot \rightarrow \cos wt=۱ \rightarrow A=\frac{a^۲ w^۲}{R}=۲/۶\frac{m}{s^۲}$$

$$L=\pm a \rightarrow \sin wt=\pm ۱ \rightarrow \cos wt=\cdot \rightarrow A=aw^۲=\frac{۳}{۲}\frac{m}{s^۲}$$

ب) برای یافتن می نیمم شتاب کافی است از رابطه (۱) نسبت به زمان مشتق گرفته برابر صفر قرار دهیم. لذا:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{۱}{۲}aw^۲\left[\sin^۲ wt+\frac{a^۲}{R^۲}\cos^۴ wt\right]^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\times\left[۲\sin wt(w\cos wt)+\frac{۴a^۲}{R^۲}\cos^۳ wt(-w\sin wt)\right]=\cdot$$

$$\rightarrow ۲\sin wt(w\cos(wt))-\frac{۴a^۲}{R^۲}\cos^۳(wt)(w\sin wt)=\cdot \rightarrow$$

$$۲-\frac{۴a^۲}{R^۲}\cos^۲ wt=\cdot \rightarrow \cos wt=\pm\frac{R}{\sqrt{۲}a}$$

$$\rightarrow \sin wt=\pm\sqrt{۱-\frac{R^۲}{۲a^۲}}$$

$$\rightarrow \quad L=a\sin wt=\pm a\sqrt{۱-\frac{R^۲}{۲a^۲}}=\pm ۰/۳۷m$$

از رابطهٔ (۱) $\rightarrow \quad A_{\min}=aw^۲\sqrt{۱-(\frac{R}{۲a})^۲}=۲/۵\,\frac{m}{s^۲}$

۴۱ـ $w_t=\frac{dv}{dt}=a \rightarrow \int_{\cdot} dv=\int_{\cdot}^{t} adt \rightarrow v=at \rightarrow \frac{dx}{dt}=at \qquad (۱)$

$$\rightarrow \quad x=\int_{\cdot}^{t} at\,dt=\frac{۱}{۲}at^۲$$

چون جابجایی تابعی صعودی است لذا مسافت ذره با جابجایی آن برابر است یعنی $x = s$

$$\rightarrow \ S = \frac{1}{2}at^2 \ (2) \ \ w_n = \frac{v^2}{R} = bt^4 \rightarrow R = \frac{v^2}{bt^4} = \frac{a^2t^2}{bt^4} = \frac{a^2}{bt^2}$$

$$\text{از } (2) \quad \rightarrow t^2 = \frac{2s}{a} \rightarrow R = \frac{a^2}{b \times \frac{2s}{a}} = \frac{a^3}{2b}s$$

$$w = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \left[a^2 + (\frac{v^2}{R})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[a^2 + (bt^4)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[a^2 + (b(\frac{2s}{a})^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

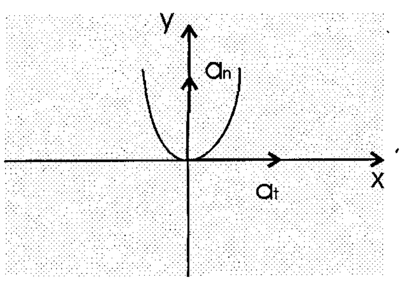
$$\text{شتاب کل} \rightarrow \quad w = \left[a^2 + b^2(\frac{2s}{a})^4\right]^{\frac{1}{2}}$$

۴۲ـ برای راحتی نوشتار از علایم زیر کمک می گیریم :

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

الف) با مشتق گیری از معادله مسیر به صورت ضمنی داریم :

$$y = ax^2 \rightarrow \dot{y} = 2ax\dot{x} \quad (1) \quad \rightarrow \text{در } x = 0 \rightarrow \dot{y} = 0 \rightarrow v_y = 0$$



چون سرعت کل ثابت است لذا $v_x = v$

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{(\dot{x})^۲ + (\dot{y})^۲} = \sqrt{(\dot{x})^۲ + (۲ax\dot{x})^۲}$$

$$= \dot{x}\sqrt{۱ + ۴a^۲x^۲} \qquad (۲)$$

اگر از رابطه (۱) مشتق گیری کنیم تا به روابط شتاب برسیم، خواهیم داشت :

$$\ddot{y} = ۲a\dot{x}\dot{x} + ۲ax\ddot{x} = ۲a(\dot{x})^۲ + ۲ax\ddot{x} \qquad (۳)$$

$$x = ۰ \;\rightarrow\; \ddot{y} = ۲a(\dot{x})^۲ \;\rightarrow\; a_y = ۲av^۲ \qquad (۴)$$

حال به کمک شکل در می یابیم که در x = ۰ داریم :

$$a_y = a_n \;\rightarrow\; ۲av^۲ = \frac{v^۲}{R} \;\rightarrow\; R = \frac{۱}{۲a}$$

اگر از رابطه (۲) مشتق بگیریم با توجه به اینکه مقدار سرعت v ثابت و مشتق آن برابر صفر است خواهیم داشت :

$$۰ = \ddot{x}\sqrt{۱ + ۴ax^۲} + \frac{۱}{۲}\dot{x}(۱ + ۴a^۲x^۲)^{-\frac{۱}{۲}} \times ۸a^۲x\dot{x} \qquad (۵)$$

$$x = ۰ \;\rightarrow\; ۰ = \ddot{x} + ۰ \;\rightarrow\; \ddot{x} = ax = ۰$$

لذا ذره در جهت x شتابی ندارد بنابراین شتاب کل برابر است با :

$$A = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} = \sqrt{۰ + a_y^۲} = ay = ۲av^۲$$

ب) مشابه با قسمت قبل از معادله مسیر مشتق می گیریم تا به روابط سرعت برسیم.

$$(\frac{x}{a})^۲ + (\frac{y}{b})^۲ = ۱ \;\rightarrow\; b^۲x^۲ + a^۲y^۲ = a^۲b^۲ \qquad (۱)$$

با مشتق گیری ضمنی داریم.

$$۲b^۲x\dot{x} + ۲a^۲y\dot{y} = ۰ \;\rightarrow\; b^۲x\dot{x} + a^۲y\dot{y} = ۰ \qquad (۲)$$

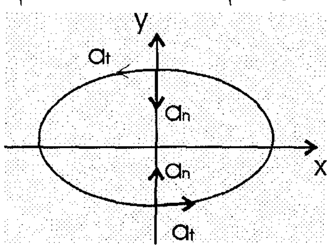
$$\text{از } (۱) \;\rightarrow\; x = ۰ \;\rightarrow\; y = \pm b \qquad (۳)$$

$$(۳),(۱) \text{ از } \rightarrow x=۰ \rightarrow y\neq ۰\ ,\ \dot{y}=۰$$
$$\rightarrow v_y=۰ \rightarrow v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}=v_x \quad (۴)$$

با مشتق گیری از رابطه (۲):

$$b^۲\dot{x}\dot{x}+b^۲x\ddot{x}+a^۲\dot{y}\dot{y}+a^۲y\ddot{y}=۰$$
$$\rightarrow b^۲(\dot{x})^۲+b^۲x\ddot{x}+a^۲(\dot{y})^۲+a^۲y\ddot{y}=۰ \quad (۵)$$
$$(۵),(۴),(۳) \text{ از } \quad x=۰ \rightarrow b^۲v^۲+۰+۰\pm a^۲bay=۰$$
$$\rightarrow a_y=\pm\frac{b}{a^۲}v^۲$$

با توجه به شکل معادله مسیر درمی یابیم که در $x=۰$ داریم



$$a_n=a_y \rightarrow \frac{v^۲}{R}=\frac{b}{a^۲}v^۲ \rightarrow R=\frac{a^۲}{b}$$

محاسبه شتاب کل:

$$(۲) \text{ از } \rightarrow \dot{y}=\frac{b^۲}{a^۲}\frac{x}{y}\dot{x} \rightarrow v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}=\sqrt{(\dot{x})^۲+(\frac{b^۲}{a^۲}\frac{x}{y}\dot{x})^۲}$$
$$\rightarrow v^۲=\dot{x}^۲\left[۱+(\frac{b^۲}{a^۲})^۲(\frac{x}{y})^۲\right] \quad (۶)$$

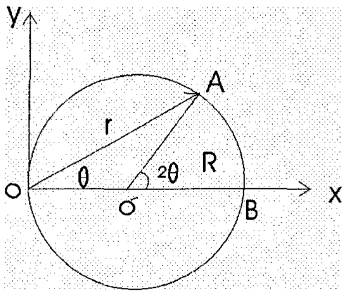
با مشتق گیری از رابطه (۶) و با توجه به اینکه V ثابت و مشتق آن صفر است داریم.

$$۰=۲\dot{x}\ddot{x}\left[۱+(\frac{b^۲}{a^۲})^۲(\frac{x}{y})^۲\right]+\dot{x}^۲\left[(\frac{b^۲}{a^۲})^۲\frac{۲x\dot{x}y^۲-x^۲(۲y\dot{y})}{y^۴}\right]$$

$$x=\text{۰} \rightarrow \text{۰}=\text{۲}\dot{x}\ddot{x}+\text{۰} \rightarrow \dot{x}\neq\text{۰} \rightarrow \ddot{x}=\text{۰} \rightarrow a_x=\text{۰}$$

شتاب کل $A=\sqrt{a_x^{\text{۲}}+a_y^{\text{۲}}}=a_y=\pm\dfrac{bv^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}}$

۴۳ـ اگر زاویه $AOO'=\theta$ باشد با توجه به تساوی $\mathrm{O'A}=\mathrm{OO'}$ در می یابیم که زاویه خارجی $AO'B=\text{۲}\theta$ است.



چون r بردار مکان است لذا داریم :

$$x=r\cos\theta \quad (\text{۱}) \qquad\qquad y=r\sin\theta \quad (\text{۲})$$

از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{\mathrm{AOO'}}$ داریم :

$$r=\sqrt{R^{\text{۲}}+R^{\text{۲}}-\text{۲}R^{\text{۲}}\cos(\text{۱۸۰}-\text{۲}\theta)}=\text{۲}R\cos\theta \qquad (\text{۳})$$

با توجه به اینکه مشتق θ نسبت به زمان برابر سرعت زاویه ای خط OA است بنابراین $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$ و به کمک علایم زیر داریم :

$$a_y=\frac{d^{\text{۲}}y}{dt^{\text{۲}}}=\ddot{y}\,,v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}\ \,,a_x=\frac{d^{\text{۲}}x}{dt^{\text{۲}}}=\ddot{x},\ v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$

$$\text{از}(\text{۲}),(\text{۳}) \rightarrow x=(\text{۲}R\cos\theta)\cos\theta=\text{۲}R\cos^{\text{۲}}\theta \qquad (\text{۴})$$

$$\text{از}(\text{۲}),(\text{۳}) \rightarrow y=(\text{۲}R\cos\theta)\sin\theta=R\sin\text{۲}\theta \qquad (\text{۵})$$

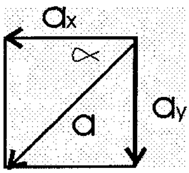
با مشتق گیری از روابط (۴) و (۵) داریم :

$$v_x = \dot{x} = -۴R\omega\cos\theta\sin\theta = -۲R\omega\sin ۲\theta \qquad (۶)$$

$$v_y = \dot{y} = R\times ۲\omega\cos ۲\theta \qquad (۷)$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{\dot{x}^۲ + \dot{y}^۲} = ۲R\omega$$

بنابراین سرعت ذرهٔ A ثابت است



با مشتق گیری از روابط (۶) و (۷) داریم :

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -۴R\omega^۲\cos ۲\theta \\ a_y &= \ddot{y} = -۴R\omega^۲\sin ۲\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow a = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} = \sqrt{(\ddot{x})^۲ + (\ddot{y})^۲} = ۴R\omega^۲$$

اگر α زاویه شتاب کل با خط افق باشد می دانیم :

$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-۴R\omega^۲\sin ۲\theta}{-۴R\omega^۲\cos ۲\theta} = \tan ۲\theta \quad \rightarrow \quad \alpha = ۲\theta$$

بنابراین جهت شتاب کل در راستای $O'A$ و به طرف مرکز O' است.

۴۴ـ نکته ۱ : برای حرکات دورانی محض (بدون انتقالی) روابط زیر برقرار است:

شتاب زاویه ای $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^۲\theta}{dt^۲} = \ddot{\theta}$ سرعت زاویه ای $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

برای شتاب زاویه ای ثابت داریم :

$$\Delta\theta = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ + \omega_۰ t$$

$$\omega = \alpha t + \omega_۰$$

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\theta$$

نکته ۲ : روابط بین سرعت و شتاب زاویه ای با سرعت و شتاب خطی به صورت زیر است :

$x = R\theta$

$v = R\omega$ R : شعاع دوران

$a = R\alpha$

به کمک روابط فوق می توان نوشت :

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = ۲at \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = ۲a$$

شتاب کل $A = \sqrt{(R\omega^{۲})^{۲} + (R\alpha)^{۲}} = R\sqrt{\omega^{۴} + \alpha^{۲}} = R\sqrt{(۲at)^{۴} + ۴a^{۲}}$

$$v = R\omega \Rightarrow R = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{۲at} \quad \rightarrow \quad A = \frac{v}{۲at}\sqrt{(۲at)^{۴} + ۴a^{۲}} = ۰/۷\frac{m}{s^{۲}}$$

۴۵ـ می دانیم چرخش گلوله در هنگام خروج از تفنگ به خاطر خان درون لوله است. خانها به صورت مارپیچ و با گام یکسان تراشیده می شوند. بنابراین چون سرعت خطی گلوله ثابت است و گام خان در طول لوله تغییر نمی کند، در نتیجه سرعت زاویه ای گلوله نیز ثابت می ماند. از طرفی زمانی که طول می کشد تا گلوله به انتهای لوله برسد برابر است با $\frac{l}{v}$ لذا:

$$\Delta\omega = \omega\Delta t \rightarrow (۲\pi)n = \omega \times \frac{l}{v} \rightarrow \omega = \frac{۲n\pi l}{v}$$ سرعت زاویه ای خروج

۴۶ـ نکته : مانند سرعت و شتاب متوسط خطی برای حالت زاویه ای نیز داریم :

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

الف)

$$\varphi = at - bt^{۳} \rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = a - ۳bt^{۲} \rightarrow \omega_{۰} = a$$ سرعت زاویه ای اولیه

زمان رسیدن به سکون $\omega=\text{۰} \rightarrow a-\text{۳}b\tau^{\text{۲}}=\text{۰} \qquad \tau=(\frac{a}{\text{۳}b})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \quad (\text{۱})$

$$\rightarrow \overline{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\text{۰}-a}{\sqrt{\frac{a}{\text{۳}b}}}=-\sqrt{\text{۳}ab} \ \rightarrow |\overline{\alpha}|=\sqrt{\text{۳}ab}=\text{۶}Ra\frac{d}{s^{\text{۲}}}$$

با توجه به زمان τ مقدار زاویه φ_2 در این زمان برابر است با :

$$\varphi_{\text{۲}}=\sqrt{\frac{a}{\text{۳}b}}(a-b\times\frac{a}{\text{۳}b})=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}a\sqrt{\frac{a}{\text{۳}b}}$$

$$\rightarrow \overline{\omega}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi_{\text{۲}}-\text{۰}}{\Delta t}=\frac{\frac{\text{۲}}{\text{۳}}a\sqrt{\frac{a}{\text{۳}b}}}{\sqrt{\frac{a}{\text{۳}b}}}=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}a=\text{۴}\ \frac{Rad}{s}$$

ب) با دو بار مشتق گیری از φ به شتاب زاویه ای دست می یابیم.

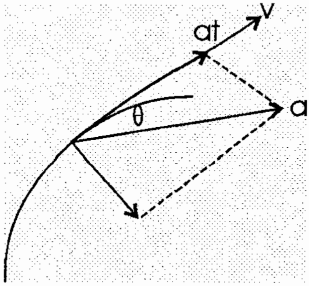
$$\alpha=\frac{d^{\text{۲}}\varphi}{dt^{\text{۲}}}=\frac{d\omega}{dt}=-\text{۶}bt$$

$\rightarrow$ در حال سکون $\rightarrow \alpha=-\text{۶}b\tau=-\text{۶}b\times\sqrt{\frac{a}{\text{۳}b}}=-\text{۲}\sqrt{\text{۳}ab}$

$$\rightarrow |\overline{\alpha}|=\text{۲}\sqrt{\text{۳}ab}=\text{۱۲}\frac{Rad}{s^{\text{۲}}}$$

۴۷- $\beta=at \rightarrow \frac{d\omega}{dt}=at \rightarrow \int_{\text{۰}}^{\omega}d\omega=\int_{\text{۰}}^{t}at\,dt \rightarrow \omega=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}at^{\text{۲}}$

چون شتاب زاویه ای مثبت است لذا بردار سرعت در راستا و جهت بردار شتاب مماسی است در نتیجه زاویه بین a_t, a_n باید $60°$ درجه شود بنابراین با توجه به شکل داریم :



$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{R\omega^۲}{R\beta} = \frac{\frac{۱}{۴}a^۲t^۴}{at} = at^۳$$
$$\rightarrow \quad t = \sqrt[۳]{\frac{۴}{a}\tan ۶۰} = \sqrt[۳]{\frac{۴}{a}\sqrt{۳}} = ۷s$$

۴۸ـ با توجه به فرض مسأله اگر k عدد ثابتی باشد داریم :

$$\beta = -k\sqrt{\omega} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -k\sqrt{\omega} \rightarrow \int_{\omega_۰}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int_۰^t -kdt \rightarrow$$
$$(۲\sqrt{\omega})\Big|_{\omega_۰}^{\omega} = -kt \rightarrow ۲(\sqrt{\omega}-\sqrt{\omega_۰}) = -kt \rightarrow \omega = (-\frac{k}{۲}t+\sqrt{\omega_۰})^۲ \quad (۱)$$

لحظه τ که جسم به سکون می رسد برابر است با :

$$\omega = ۰ \rightarrow \tau = \frac{۲\sqrt{\omega_۰}}{k} \rightarrow \bar{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{۰-\omega_۰}{۲\sqrt{\omega_۰}/k} = \frac{-k}{۲}\sqrt{\omega_۰}$$ شتاب زاویه ای متوسط

$$\text{از } (۱) \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = (-\frac{k}{۲}t+\sqrt{\omega_۰})^۲ \rightarrow \int_۰^{\theta} d\theta = \int_۰^t (-\frac{k}{۲}t+\sqrt{\omega_۰})^۲ dt$$

$$\to \theta = \left[\frac{۱}{۳}(-\frac{k}{۲}t + \sqrt{\omega_۰})^۳ (\frac{-۲}{k}) \right]_۰^t$$

$$\to \theta = \frac{۱}{۳}(\frac{-k}{۲}t + \sqrt{\omega_۰})^۳ (\frac{-۲}{k}) + \frac{۲}{۳k}(\sqrt{\omega_۰})^۳$$

مقدار θ تا لحظه τ برابر است با $\theta_۲$:

$$\theta_۲ = \frac{۱}{۳}(-\frac{k}{۲} \times \frac{۲\sqrt{\omega_۰}}{k} + \sqrt{\omega_۰})^۳ (-\frac{۲}{k}) + \frac{۲}{۳k}(\sqrt{\omega_۰})^۳ = \frac{۲}{۳k}(\sqrt{\omega_۰})^۳$$

$$\to \overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\frac{۲}{۳k}\sqrt{\omega_۰}}{۲\sqrt{\frac{\omega_۰}{۳}}} = \frac{\omega_۰}{۳}$$

۴۹ـ الف) $\omega = \omega_۰ - a\varphi \to \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_۰ - a\varphi \to \int_۰^\varphi \dfrac{d\varphi}{\omega_۰ - a\varphi} = \int_۰^t dt$

$$\to \left[-\frac{۱}{a}\ln(\omega_۰ - a\varphi) \right] \Bigg|_۰^\varphi = t \to \ln\frac{\omega_۰ - a\varphi}{\omega_۰} = -at \to$$

$$\varphi = \frac{\omega_۰}{a}(۱ - e^{-at})$$

ب) $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\omega_۰}{a}(ae^{-at}) = \omega_۰ e^{-at}$

۵۰ـ نکته : رابطه $\omega d\omega = \beta d\varphi$ (β : شتاب زاویه ای) برای هر β, ω, φ برقرار است.

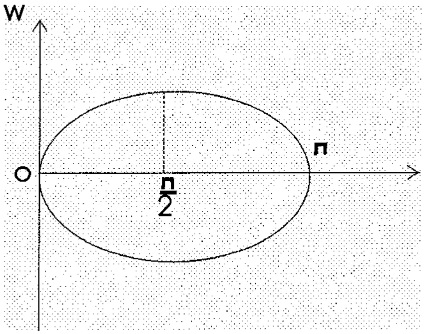
اثبات.

$$\omega d\omega = \omega \frac{d\omega}{dt} dt = (\omega dt)\beta = \beta d\varphi$$

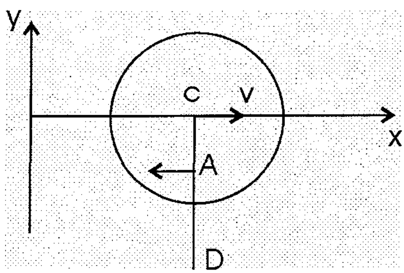
بنابراین :

$$\int_۰^{\omega} \omega d\omega = \int_۰^{\varphi} \beta d\varphi \rightarrow \frac{۱}{۲}\omega^۲ = \int_۰^{\varphi} \beta_۰ \cos\varphi d\varphi = \beta_۰ \sin\varphi$$

$$\rightarrow \quad \omega = \pm\sqrt{۲\beta_۰ \sin\varphi}$$



۵۱ـ می دانیم محور یا نقطه دوران لحظه ای، نقطه ای از جسم یا خارج آن است که در آن لحظه سرعتی برابر صفر دارد.



از طرفی می دانیم اگر چرخ در سر جای خود دوران می کرد سرعت نقاط روی خط DC در جهت منفی x و متناسب با فاصله آن از نقطه c بود حال که چرخ هم حرکت دورانی و هم حرکت انتقالی دارد می توان سرعت مطلق نقاط روی DC (مثل نقطهٔ A) را از رابطه حرکت نسبی به دست آورد. با توجه به رابطه برداری رو به رو می توان نوشت.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{A/C}$$

جهت $\qquad \longrightarrow \quad \longleftarrow$

مقدار $\qquad v \quad AC\omega$

$$\vec{v}_A = (v - \overline{AC}\omega)\,\hat{i}$$

حال اگر بخواهد سرعت نقطهٔ A برابر صفر شود باید داشته باشیم :

$$v - \overline{AC}\omega = 0 \rightarrow \overline{AC} = \frac{v}{\omega}, \quad \text{از طرفی } \omega = \beta t \rightarrow \overline{AC} = \frac{v}{\beta t}$$

بنابراین مختصات نقطهٔ A را می توان به صورت زیر نوشت :

$$A\left| \begin{array}{l} x_A = x_C = vt \rightarrow t = \dfrac{x}{v} \\ y = -\dfrac{v}{\beta t} \end{array} \right. \rightarrow y = -\frac{v}{\beta \dfrac{x}{v}} = -\frac{v^2}{\beta x}$$

که تابع هموگرافیک می باشد.

نکته : اگر نقطه A خارج خط DC در نظر گرفته شود آنگاه دارای یک مؤلفه سرعت در جهت قائم خواهد بود که با هیچ مؤلفه ای از حرکت انتقالی چرخ خنثی نشده لذا همیشه سرعت غیر صفر دارد.

ب) مشابه با قسمت قبل باید سرعت دورانی نقطهٔ A با سرعت انتقالی برابر و در جهت عکس باشد. بنابراین :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{سرعت انتقالی} & v_C = \beta t \\ \text{سرعت دورانی} & v = \overline{AC}\omega \end{array} \right\} \rightarrow \overline{AC} = \frac{\beta t}{\omega} = y$$

حال مختصات نقطهٔ A را می نویسیم :

$$A\left|\begin{aligned} &x_A = x_C = \frac{۱}{۲}\beta t^۲ \\ &y = \frac{-\beta t}{\omega} \rightarrow t = \frac{-\omega y}{\beta} \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{۱}{۲}\beta\left(-\frac{\omega y}{\beta}\right)^۲$$

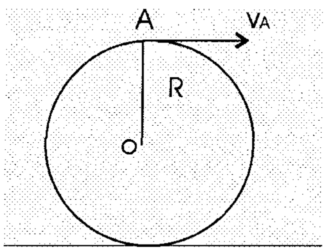
$$\rightarrow \quad x = \frac{۱}{۲\beta}\omega^۲ y^۲ \quad \rightarrow \quad y = -\sqrt{۲\beta x}/\omega$$

شکل سهمی است.

نکته : اینکه گفته شد محور دوان لحظه ای خارج جسم هم می تواند باشد یعنی اگر جسم مزبور را گسترش دهیم با همان شتاب و سرعت دورانی آنگاه محور دوران لحظه ای در این صورت روی جسم و با سرعت صفر است.

۵۲ـ با توجه به رابطه شتاب نسبی داریم :

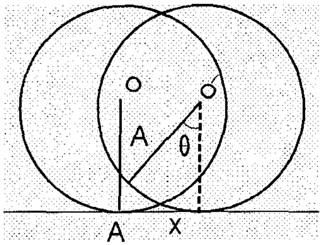
$$\vec{a}_A = \vec{a}_O = \vec{a}_{A/O}$$



چون چرخ با سرعت ثابت در حرکت است لذا $\vec{a}_O = ۰$ از طرفی $a_{A/O} = \frac{v^۲}{R}$

بنابراین شتاب کل نقطهٔ A برابر است با $|\vec{a}_A| = \frac{v^۲}{R}$ که به سمت مرکز چرخ می باشد.

ب) وقتی چرخ بدون لغزش به اندازه x جلو می رود همزمان با آن به اندازه θ نیز می چرخد بنابراین برای حرکت بدون لغزش داریم $x = R\theta$ با توجه به شکل می توان مختصات نقطهٔ A را با فرض اینکه ابتدا در مبدأ بوده است به صورت زیر نوشت :



$$\begin{cases} x_A = x - R\sin\theta = R\theta - R\sin\theta \\ y_A = R - R\cos\theta \end{cases}$$

از طرفی طول منحنی از رابطه $\int\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ بدست می آید. بنابراین :

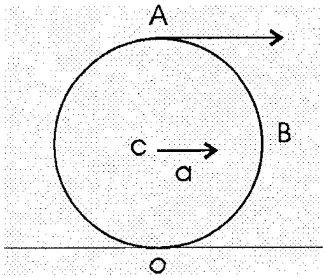
$$L = \int\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \qquad (1)$$

$$x = R\theta - R\sin\theta \quad \rightarrow \quad dx = (R - R\cos\theta)d\theta$$
$$y = R - R\cos\theta \quad \rightarrow \quad dy = (R\sin\theta)d\theta$$

با جایگذاری در (۱) و با توجه به اینکه A در ابتدا در تماس با سطح بود، لذا اگر A برای بار دوم بخواهد با سطح در تماس باشد کافی است که چرخ به اندازه ۲π بچرخد. لذا :

$$L = \int_0^{2\pi} \left[(R - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$
$$= 4R(-\cos\frac{\theta}{2})\Big|_0^{2\pi} = 8R$$

۵۳ـ سرعت و شتاب نقاط را می توان به کمک روابط سرعت و شتاب نسبی نسبت به مرکز C بدست آورد.



نقطهٔ A (سرعت) $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{A/C}$

جهت ? $\rightarrow$ $\rightarrow$

مقدار ? at $R\omega$

نکته : همیشه راستای سرعت نسبی دو نقطه اختیاری عمود بر خط واصل بین آنهاست.

$$a = R\alpha \rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = ۰/۲۵ \rightarrow \omega = \alpha t = \frac{a}{R}t = ۰/۵\frac{Rad}{s}$$

با توجه به رابطه برداری فوق می توان دریافت که چون v_C ، $v_{A/C}$ هم جهت هستند لذا :

$$|\vec{v}_A| = at + R\omega = (at + R\alpha t) = ۲at = ۱۰ cm/s$$

نقطهٔ A (شتاب)، با توجه به اینکه توپ با شتاب حرکت می کند لذا نقطهٔ A نسبت C هم دارای شتاب مماسی $(v_{A/C})_t$ و هم دارای شتاب عمودی $(v_{A/C})_n$ است. بنابراین :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{A/C} = \vec{a}_C + (\vec{a}_{A/C})_t + (\vec{a}_{A/C})_n$$

جهت ؟ $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\downarrow$

مقدار ؟ a $R\alpha$ $R\omega^۲$

با توجه به رابطه برداری فوق می توان نوشت :

$$\vec{a}_A = (a + R\alpha)\hat{i} + (R\omega^۲)\hat{j} = (۲a)\hat{i} + (R\omega^۲)j$$

$$|\vec{a}_A| = \sqrt{۴a^۲ + R^۲\omega^۴} = ۵/۵۹\frac{cm}{s^۲}$$

نکته : همیشه شتاب نسبی مماسی بین دو نقطه در راستای عمود بر خط و اصل میان دو نقطه است و شتاب عمودی در راستای خط واصل می باشد.

نقطهٔ B : (سرعت)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{C/B}$$

جهت ؟ $\rightarrow$ $\downarrow$

مقدار ؟ at Rω

$$\rightarrow \vec{v}_B = (at)\hat{i} + (-R\omega)\hat{j} \quad \rightarrow |\vec{v}_B| = \sqrt{a^۲t^۲ + R^۲\omega^۲}$$

$$\rightarrow |\vec{v}_B| = ۷/۰۷\frac{cm}{s}$$

نقطهٔ B : (شتاب)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + (\vec{a}_{B/C})_t + (\vec{a}_{B/C})_n$$

جهت ؟ $\rightarrow$ $\downarrow$ $\leftarrow$ $\quad \vec{a}_{\mathbf{B}} = (a - R\omega^۲)\hat{i} + (R\alpha)\hat{j}$

مقدار ؟ a Rα $R\omega^2$

$$|\vec{a}_B| = \sqrt{(a - R\omega^۲)^۲ + R^۲\alpha^۲} = ۲/۵\,\frac{cm}{s}$$

نقطهٔ O : (سرعت)

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C + \vec{v}_{O/C}$$

جهت ؟ $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\quad v_۰ = (at - R\omega)\hat{i} = ۰$

مقدار ؟ at Rω

نقطهٔ O : (شتاب)

$$\vec{a}_O = \vec{a}_C + (\vec{a}_{O/C})_t + (\vec{a}_{O/C})_n$$

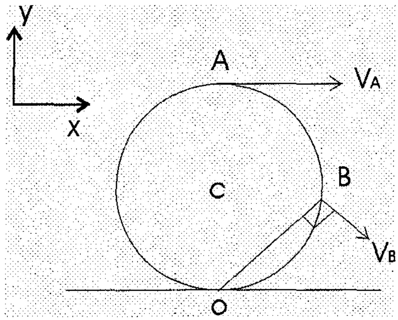
جهت ؟ $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\uparrow$

مقدار ؟ a Rα $R\omega^۲$

$$\vec{a}_O = (a - R\alpha)\hat{i} + (R\omega^۲)\hat{j}$$

$$\rightarrow \ |\vec{a}_O| = \sqrt{(a - R\alpha)^۲ + R^۲\omega^۴} = ۲/۵ \ \frac{cm}{s}$$

۵۴ـ با فرض اینکه استوانه با سرعت ثابت در حال حرکت باشد می توان شتاب نقطهٔ A را به کمک رابطه شتاب نسبی بدست آورد.



$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{A/C}$$

جهت	؟	۰	$\downarrow$
مقدار	؟	۰	$R\omega^2$

$$\vec{a}_A = -(R\omega^۲)\,\hat{j}$$

از طرفی از مسأله ۵۲ به یاد داریم که :

$$\begin{matrix} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(۱ - \cos\theta) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \dot{x} = R\omega(۱ - \cos\theta) = v_x \\ \dot{y} = R\omega\sin\theta = v_y \end{matrix}$$

برای موقعیت A داریم $\theta = \pi$ در نتیجه :

$$(v_A)_x = ۲R\omega \qquad (v_A)_y = ۰$$

با توجه به اینکه سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر است بنابراین شیب مسیر حرکت در نقطهٔ A برابر صفر است لذا مرکز انحنای مسیر باید در امتداد AC باشد حال با داشتن شتاب و سرعت نقطهٔ A می توان شعاع انحنای مسیر، ρ، را به صورت زیر بدست آورد.

$$(a_n)_A = \frac{v_A^۲}{\rho_A} \ \rightarrow \ \rho_A = \frac{۴R^۲\omega^۲}{R\omega^۲} = ۴R$$

ب) با توجه به اینکه نقطهٔ O مرکز دوران لحظه ای استوانه است بنـابراین سـرعت نقطـهٔ B برابر است.

$$v_B = \overline{OB}\omega = \sqrt{۲}\ R\omega$$

شتاب نقطهٔ B:

به کمک رابطه شتاب نسبی :

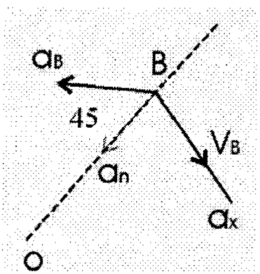
$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}$$

	$\vec{a}_B$	$\vec{a}_C$	$\vec{a}_{B/C}$
جهت	؟	۰	$\leftarrow$
مقدار	؟	۰	$R\omega^2$

$$\vec{a}_B = -(R\omega^۲)\hat{i}$$

جهت شتاب مماسی همان جهت سرعت است لذا جهت شـتاب عمـودی در راسـتای عمـود بر آن است در نتیجه با توجه به شکل در می یابیم که مرکز انحنای مسیر B باید در راسـتای OB باشد.

حال به کمک شکل :

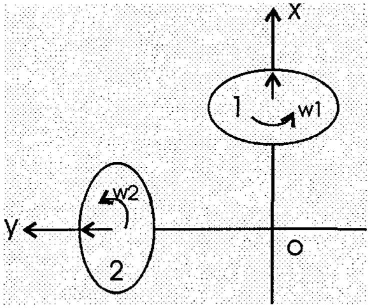


$$(a_n)_B = a_B \cos ۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} R\omega^۲$$

بنابراین :

$$(a_n)_B = \frac{v_B^۲}{\rho_B} \rightarrow \rho_B = \frac{(\sqrt{۲}R\omega)^۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}R\omega^۲} = ۲\sqrt{۲}R$$

۵۵ـ نکته ۱ : جهت برداری سرعت و شتاب زاویه ای از قانون دست راست تبعیت مـی کنـد به این صورت که اگر انگشتان دست در جهت سرعت یـا شـتاب زاویـه ای چرخانـده شـود شصت دست جهت بردار سرعت یا بردار شتاب زاویه ای را نشان می دهد.

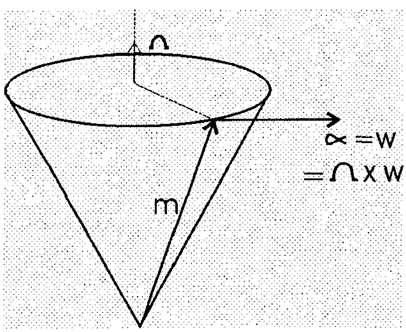


نکته ۲ : بردارهای سرعت و شتاب زاویه ای از قوانین بردارها تبعیت می کنند. بنابراین :

$$\vec{\omega}_{1/2} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 = \omega_1 \hat{i} - \omega_2 \hat{j}$$

$$\rightarrow |\vec{\omega}_{1/2}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

نکته ۳: می دانیم شتاب زاویه ای α یک جسم در حرکت سه بعدی، مشتق سرعت زاویه ای آن نسبت به زمان، یعنی $\vec{a} = \dot{\vec{\omega}}$ است. اما برخلاف حالت دوران در یک صفحه یگانه که در آن، مقدار α فقط ناشی از تغییر مقدار سرعت زاویه ای می باشد، در حرکت سه بعدی، بردار α منعکس کننده هم تغییر امتداد ω و هم تغییر مقدار آن است. حال هنگامی که مقدار ω ثابت باشد، شتاب زاویه ای α عمود بر ω خواهد بود. مطابق شکل زیر اگر Ω نماینده سرعت زاویه ای باشد که با این سرعت زاویه ای، خود بردار ω دوران کند آنگاه شتاب زاویه ای را می توان چنین نوشت :



$$\alpha = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}$$

حال در این مسأله شتاب زاویه ای نسبی خواسته شده است. لذا ناظری که روی جسم (۱) است احساس می کند که جسم (۱) ساکن است و محور ox و در نتیجه آن محور oy حول ox با سرعت زاویه ω_1 در حال دوران هستند. چون خود جسم (۲) نیز با سرعت ω_2 در حال دوران است بنابراین به کمک نکته (۳) شتاب زاویه ای نسبی برابر است با :

$$\vec{\alpha}_{۱/۲} = \vec{\omega}_۱ \times \vec{\omega}_۲ \rightarrow |\vec{\alpha}_{۱/۲}| = |\vec{\omega}_۱||\vec{\omega}_۲| \sin ۹۰ = |\vec{\omega}_۱||\vec{\omega}_۲|$$

۵۶ـ الف)

$$\vec{\omega} = at\hat{i} + bt^۲\hat{j} \rightarrow |\vec{\omega}| = \sqrt{(at)^۲ + (bt^۲)^۲} = ۷/۸۱ \ \frac{Rad}{s}$$

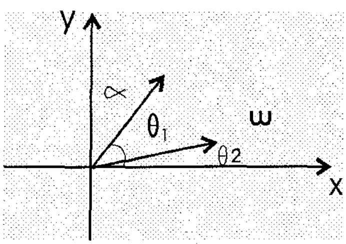
$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = a\hat{i} + ۲bt\hat{j} \rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{a^۲ + (۲bt)^۲} = ۱/۳ \ \frac{Rad}{s}$$

ب)

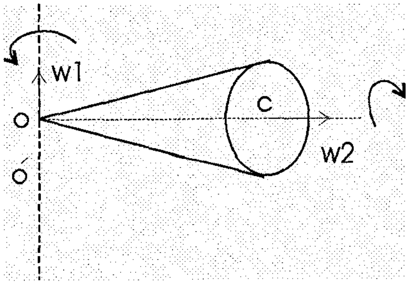
$$\tan\theta_۲ = \frac{bt^۲}{at} = \frac{bt}{a} = ۱/۲ \rightarrow \theta_۲ = ۵۰.۱۹^\circ$$

$$\tan\theta_۱ = \frac{۲bt}{a} = ۲/۴ \rightarrow \theta_۱ = ۶۷.۳۸$$

$$\rightarrow \theta_۱ - \theta_۲ = ۱۷/۱^\circ$$



۵۷ـ همانطور که از شکل پیداست مخروط دو بردار سرعت زاویه ای دارد یکی حول محور oc و دیگری حول محور oo′ بنابراین بردار سرعت زاویه ای کل مخروط برابر است با :

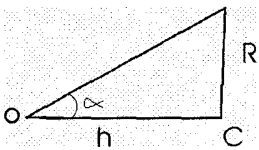


$\vec{\omega} = \vec{\omega}_۱ + \vec{\omega}_۲$

حال با توجه به اینکه قاعده مخروط یک حرکت غلتشی را انجام می دهد، بنابراین :

$v_c = R\omega_۲ \rightarrow \omega_۲ = \frac{v_c}{R} = ۲\frac{\mathrm{Re}\, d}{s}$

با توجه به شکل، ارتفاع مخروط برابر است با :



$\tan\alpha = \frac{R}{h} \rightarrow h = \frac{R}{\tan\alpha} = ۸/۶$

می دانیم مرکز دایره قاعده (نقطهٔ c) با سرعت v دایره ای به شعاع h را می پیماید، بنـابراین :

$v_c = h\omega_۱ \;\rightarrow\; \omega_۱ = \frac{v_c}{h} = ۱/۱۵$

با توجه به اینکه $\omega_۱$, $\omega_۲$ بر هم عمودند، لذا :

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_۱^۲ + \omega_۲^۲} = \sqrt{(\frac{v_c}{R})^۲ + (\frac{v_c}{h})^۲} = \frac{v_c}{hR}\sqrt{R^۲ + h^۲} = \frac{v_c}{R}\sqrt{(\frac{R}{h})^۲ + ۱}$$

$$= \frac{v_c}{R}\sqrt{\tan^۲\alpha + ۱} = \frac{v_c}{R}\cos\alpha = ۱/۷۳$$

زاویه بردار سرعت زاویه ای با خط عمود

$$\tan\theta = \frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \frac{۲}{۱/۱۵} = ۱/۷۳ \;\rightarrow\; \theta = ۶۰^\circ$$

ب) با توجه به نکتهٔ ۳ در مسأله ۵۵ چون بردار سرعت زاویه ای ω_2 خود با سرعت زاویه ω_1 در حال گردش است، لذا :

$$\vec{\alpha}=\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2 \rightarrow |\vec{\alpha}|=|\vec{\omega}_1||\vec{\omega}_2|\sin 90$$

$$\rightarrow |\vec{\alpha}|=\frac{v_c}{h}\times\frac{v_c}{R}=\frac{v_c^2}{R^2}\tan\alpha=(\frac{v_c}{R})^2\tan\alpha=2/3\frac{Rad}{s}$$

۵۸ـ ابتدا سرعت زاویه ای محور AC را در ثانیه t بدست می آوریم :

$$\omega_{AC}=\beta_0 t$$

بنابراین اگر ω_b سرعت زاویه ای جسم باشد داریم :

$$\vec{\omega}_b=\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_{AC} \rightarrow |\vec{\omega}_b|=\sqrt{\omega_0^2+\omega_{AC}^2}$$

$$=\sqrt{\omega_0^2+(\beta_0 t)^2}=0/53\frac{Rad}{s}$$

شتاب زاویه ای جسم حال جمع برداری شتاب زاویه ای ناشی از تغییر امتداد بردار $\vec{\omega}_0$ است که برابر $\vec{\alpha}=\vec{\omega}_{AC}\times\vec{\omega}_0$ می باشد و شتاب زاویه محور AC که برابر β_0 است.

چون $\vec{\alpha}$ برابر $\vec{\beta}_0$ عمود است لذا شتاب زاویه ای جسم برابر است.

$$\beta_b=\sqrt{\beta_0^2+(\omega_{AC}\omega_0)^2}=\sqrt{\beta_0^2+(\beta_0\omega_0 t)^2}$$

$$=\beta_0\sqrt{1+(\omega_0 t)^2}=0/14\frac{Rad}{s^2}$$

دینامیک

۵۹ـ حالت اولیه :

F: نیروی ارشمیدس ناشی از سیال هوا که به وزن بستگی ندارد.

$$mg - F = ma \quad (۱)$$

حالت ثانویه :

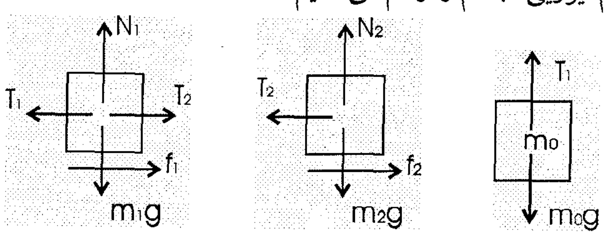
$$F - m'g = m'a \quad (۲)$$

m' : جرم در حالت ثانویه

$$\text{از } (۱),(۲) \rightarrow (m - m')g = (m + m')a \quad , \quad m = m' + \Delta m$$

$$\rightarrow \Delta mg = (۲m - \Delta m)a \rightarrow \Delta m(g + a) = ۲ma \rightarrow \Delta m = \frac{۲ma}{g + a}$$

۶۰ـ ابتدا دیاگرام نیرویی اجسام را رسم می کنیم :



با توجه به اینکه شتاب این سه جسم با هم برابر است، لذا :

$m_{۰}$ جرم : $m_{۰}g - T_{۱} = m_{۰}a \quad (۱)$

$m_{۱}$ جرم : $T_{۱} - T_{۲} - f_{۱} = m_{۱}a \quad (۲) \quad f_{۱} = km_{۱}g$

$m_{۲}$ جرم : $T_{۲} - f_{۲} = m_{۲}a \quad (۳) \quad f_{۲} = km_{۲}g$

از جمع سه رابطه (۱) تا (۳) داریم :

$$m_۰g - f_۱ - f_۲ = (m_۰ + m_۱ + m_۲)a \rightarrow a = \frac{m_۰g - k(m_۱ + m_۲)g}{m_۰ + m_۱ + m_۲}$$

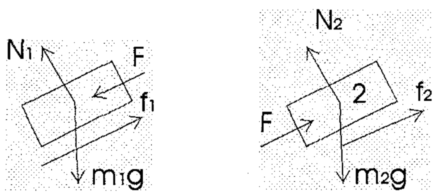
از رابطه (۳) :

$$T_۲ = m_۲a + f_۲ = \frac{m_۲[m_۰g - k(m_۱ + m_۲)g]}{m_۰ + m_۱ + m_۲} + km_۲g$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{m_۰m_۲g(k+۱)}{m_۰ + m_۱ + m_۲}$$

جواب فوق در حالتی است که وزن $m_۰$ بر مجموع اصطکاکها غالب بیاید.

۶۱ـ ابتدا دیاگرام نیرویی اجسام را رسم می کنیم.



الف) با توجه به اینکه $k_۱ > k_۲$ می توان گفت که جرم m2 زودتر به آستانه لغزش می رسد. بنابراین نیروی F مابین دو جرم به صورت فشاری است.

جرم $m_۱$:

$$\sum F_x = m_۱a$$

$$\rightarrow m_۱g\sin\alpha + F - f_۱ = m_۱a \quad (۱) \quad f_۱ = N_۱k_۱ = (m_۱g\cos\alpha)k_۱$$

جرم $m_۲$:

$$\sum F_x = m_۲a \rightarrow$$

$$m_۲g\sin\alpha - F - f_۲ = m_۲a \quad (۲) \quad f_۲ = N_۲k_۲ = (m_۲g\cos\alpha)k_۲$$

از روابط (۱) و (۲) داریم :

$$F = \frac{m_۱ g\cos\alpha(k_۱ - k_۲)}{۱ + \frac{m_۱}{m_۲}} = \frac{m_۱ m_۲ g\cos\alpha(k_۱ - k_۲)}{m_۱ + m_۲}$$

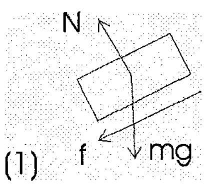
ب) در آستانه حرکت کافی است در روابط (۱) و (۲) $a = ۰$ قرار دهیم. بنابراین :

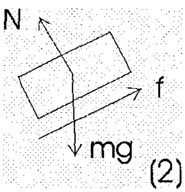
$$\left.\begin{aligned} m_۱ g\sin\alpha + F - f_۱ = ۰ \\ m_۲ g\sin\alpha - F - f_۲ = ۰ \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$(m_۱ + m_۲)g\sin\alpha = g\cos\alpha(m_۱ k_۱ + m_۲ k_۲)$$

$$\rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{m_۱ k_۱ + m_۲ k_۲}{m_۱ + m_۲}$$

۶۲ـ با توجه به دیاگرام نیرویی می توان دریافت :





a_1 : شتاب بالا رفتن

a_2 : شتاب پایین رفتن

k : ضریب اصطکاک

بالارفتن $-mg\sin\alpha - f = -ma_۱ \rightarrow a_۱ = g(\sin\alpha + k\cos\alpha)$ (۱)

پایین رفتن $mg\sin\alpha - f = ma_۲ \rightarrow a_۲ = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$ (۲)

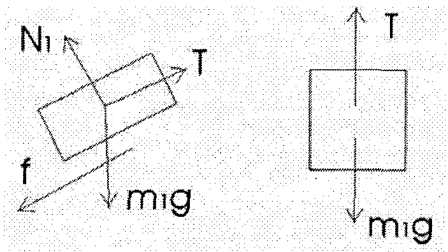
با توجه به اینکه مسافت طی شده هنگام بالا رفتن و پایین رفتن با هم برابر است، پس :

$$x=\frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲=\frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲ \rightarrow a_۱t_۱^۲=a_۲t_۲^۲ \rightarrow a_۱(nt_۲)^۲=a_۲t_۲^۲$$

$$\rightarrow \quad a_۲=n^۲a_۱ \quad \rightarrow \quad (\sin\alpha-k\cos\alpha)=n^۲(\sin\alpha+k\cos\alpha)$$

$$\rightarrow \quad k\cos\alpha(n^۲+۱)=\sin\alpha(۱-n^۲) \quad \rightarrow \quad k=\frac{۱-n^۲}{۱+n^۲}\tan\alpha=۰.۱۶$$

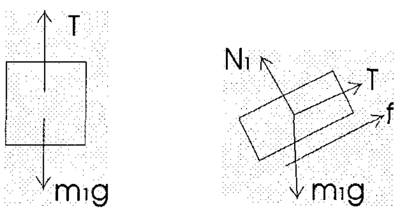
۶۳ـ الف) برای اینکه جرم $m_۲$ پایین بیاید باید وزن آن از اصطکاک و وزن $m_۱$ در امتداد سطح بیشتر باشد. لذا:



$$m_۲g>m_۱g\sin\alpha+m_۱g\cos\alpha k$$

$$\rightarrow \quad \frac{m_۲}{m_۱}>(\sin\alpha+k\cos\alpha)$$

ب) با توجه به شکل باید شرط زیر برقرار باشد.



$$m_۱g\sin\alpha-f>m_۲g \rightarrow (\sin\alpha-k\cos\alpha)>\frac{m_۲}{m_۱}$$

ج) برای اینکه ساکن بماند بین دو حالت زیر باید قرار گیرد.

(۱) سیستم در آستانه حرکت به سمت بالا باشد. لذا:

$$\left(\frac{m_۲}{m_۱}\right)_{\max}=(\sin\alpha+k\cos\alpha)$$

(۲) سیستم در آستانه حرکت به سمت پایین باشد. لذا :

$$(\frac{m_۲}{m_۱})_{\min} = (\sin\alpha - k\cos\alpha)$$

بنابراین باید نسبت $\frac{m_۲}{m_۱}$ بین حالت حداکثر و حداقل باشد. لذا :

$$\sin\alpha - k\cos\alpha < \frac{m_۲}{m_۱} < \sin\alpha + k\cos\alpha$$

۶۴ـ با توجه به مسأله قبل داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha - k\cos\alpha = ۰/۴۱ \\ \sin\alpha + k\cos\alpha = ۰/۵۸ \\ \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۲}{۳} = ۰/۶۶\end{array}\right\} \rightarrow \sin\alpha + k\cos\alpha < \frac{m_۲}{m_۱} \rightarrow$$

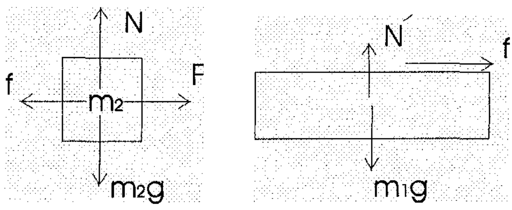
جرم $m_۲$ به سمت پایین می رود.

از دیاگرام نیرویی در مسأله قبل داریم :

$$\left.\begin{array}{l}m_۲ g - T = m_۲ a \\ T - f - m_۱ g\sin\alpha = m_۱ a\end{array}\right\} \rightarrow (m_۲ g - f - m_۱ g\sin\alpha) = (m_۱ + m_۲)a$$

$$\rightarrow a = \frac{m_۲ g - m_۱ g\cos\alpha k - m_۱ g\sin\alpha}{m_۱ + m_۲} = \frac{g(n - k\cos\alpha - \sin\alpha)}{۱ + n}$$

۶۵ـ ابتدا زمان t. که دو جسم در آستانه حرکت قرار می گیرند را می یابیم. می دانیم تا این زمان دو جسم با هم و دارای یک شتاب هستند. به کمک دیاگرام نیرویی داریم :



$$F = (m_۱ + m_۲)a \quad (۱)$$
$$f = m_۱ a \quad (۲)$$
$$f = m_۲ gk \quad (۳)$$
$$\text{از (۱) تا (۳)} \rightarrow \frac{F}{f} = \frac{m_۱ + m_۲}{m_۱} \rightarrow \frac{\alpha t_۰}{m_۲ gk} = \frac{m_۱ + m_۲}{m_۱}$$
$$\rightarrow \quad t_۰ = \frac{(m_۱ + m_۲) m_۲ gk}{\alpha m_۱}$$

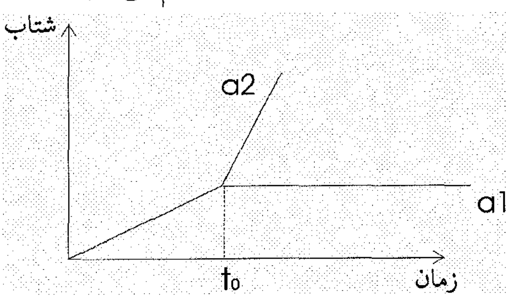
بعد از زمان t_0 دو جسم نسبت به هم شروع به لغزش کرده و شتابهای آنها از این لحظه با هم متفاوت می شوند لذا به کمک دیاگرام نیرویی داریم :

$$F - f = m_۲ a_۲ \rightarrow \alpha t - m_۲ gk = m_۲ a_۲ \rightarrow a_۲ = \frac{\alpha}{m_۲} t - gk$$

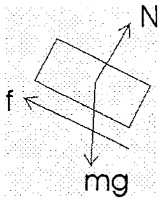
$$f = m_۱ a_۱ \rightarrow m_۲ gk = m_۱ a_۱ \rightarrow a_۱ = \frac{m_۲}{m_۱} gk$$

$$f = m_۲ gk$$

به کمک روابط فوق، نمودار شتابها به صورت زیر رسم می شود.



۶۶ـ با توجه به دیاگرام نیرویی :



$$mg\sin\alpha - mg\cos\alpha k = ma \rightarrow a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$$

اگر S مسافت پیموده شده روی سطح شیبدار باشد آنگاه :

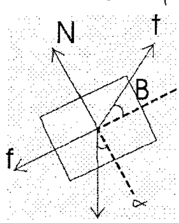
$$S = \frac{۱}{۲}at^۲ \rightarrow \frac{L}{\cos\alpha} = \frac{۱}{۲}at^۲ \rightarrow t^۲ = \frac{۲L}{g\cos\alpha(\sin\alpha - k\cos\alpha)} \qquad (۱)$$

برای اینکه t می نیمم شود باید مشتق آن نسبت به α صفر گردد. با مشتق گیری ضمنی :

$$۲t\frac{dt}{d\alpha} = \frac{-۲L}{g}\ \frac{\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha + ۲\sin\alpha\cos\alpha k}{\cos^۲\alpha(\sin\alpha - k\cos\alpha)^۲} = ۰ \quad \rightarrow$$

$$\cos ۲\alpha + k\sin ۲\alpha = ۰ \quad \rightarrow \quad \tan ۲\alpha = -\frac{۱}{k} \quad \rightarrow \quad \alpha = ۴۸/۹۸$$

۶۷ـ می دانیم اولاً می نیمم کشش نخ در حالتی است که جسم با سرعت ثابت در حال حرکت باشد. حال به کمک قانون دوم نیوتن :



$$\sum F_x = ۰ \quad T\cos\beta - f - mg\sin\alpha = ۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \quad N + T\sin\beta - mg\cos\alpha = ۰$$

$$\rightarrow N = mg\cos\alpha - t\sin\beta \qquad (۲)$$

$$f = \mu N \qquad (۳)$$

$$\text{(۱) تا (۳) از} \rightarrow T\cos\beta-\mu(mg\cos\alpha-T\sin\beta)-mg\sin\alpha=0 \rightarrow$$

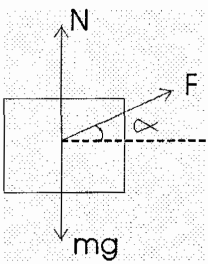
$$T=\frac{mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha}{\cos\beta+\mu\sin\beta} \qquad (۴)$$

برای می نیمم شدن T کافی است مشتق آن را نسبت به β برابر صفر قرار دهید.

$$\frac{dT}{d\beta}=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\frac{-[-\sin\beta+\mu\cos\beta]}{[\cos\beta+\mu\sin\beta]^2}=0 \rightarrow \tan\beta=\mu$$

$$\text{(۴) از} \rightarrow T_{\min}=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)/\sqrt{\mu^2+1}$$

۶۸ـ الف) در لحظه جدا شدن $N = 0$ است. بنابراین به کمک قانون دوم نیوتن :



$$\sum F_y=0 \rightarrow F\sin\alpha=mg$$

از رابطه فوق زمان t_0 جدا شدن بدست می آید.

$$\rightarrow at_0\sin\alpha=mg \rightarrow t_0=\frac{mg}{a\sin\alpha} \qquad (۱)$$

$$\sum F_x=mA \rightarrow F\cos\alpha=mA \rightarrow A=\frac{dv}{dt}=\frac{a}{m}t\cos\alpha \rightarrow$$

$$\int_0^v dv=\int_0^t \frac{a}{m}t\cos\alpha dt \rightarrow v=\frac{a}{2m}\cos\alpha t^2 \qquad \text{(۲) سرعت در هر لحظه}$$

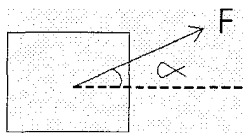
$$t=t_0 \text{ در } \rightarrow v(t_0)=\frac{a}{2m}\cos\alpha t_0^2 \xrightarrow{\text{از (1)}}$$

$$v(t_0)=\frac{a}{2m}\cos\alpha\frac{(mg)^2}{a^2\sin^2\alpha}=\frac{mg^2\cos\alpha}{2a\sin^2\alpha}$$

$$\text{از (2)} \rightarrow v=\frac{dx}{dt}=\frac{a}{2m}\cos\alpha t^2 \rightarrow \int_0^x dx=\int_0^t \frac{a}{2m}\cos\alpha t^2 dt$$

$$\rightarrow x=\frac{a}{6m}\cos\alpha t^3 \rightarrow x(t_0)=\frac{a}{6m}\cos\alpha\frac{m^3g^3}{a^3\sin^3\alpha}=\frac{m^2g^3\cos\alpha}{6a^2\sin^3\alpha}$$

۶۹ـ از قانون دوم نیوتن داریم :



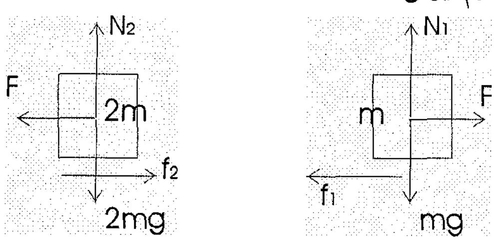
$$F\cos\alpha=mA \rightarrow A=\frac{mg}{3m}\cos\alpha=\frac{g}{3}\cos(as)$$

حال به کمک رابطه vdv = Adx و با توجه به اینکه جهت حرکت عوض نمی شود و جابجایی و مسافت با هم برابر است لذا :

$$vdv=Ads \rightarrow \int_0^v vdv=\int_0^s \frac{g}{3}\cos(as)ds \rightarrow \frac{1}{2}v^2=\frac{g}{3a}\sin(as)$$

$$\rightarrow v=\sqrt{\frac{2g}{3a}\sin\alpha}$$

۷۰ـ به کمک قانون دوم نیوتن :



$$\sum F_x = ۲ma_۲ \rightarrow F - ۲mgk = ۲ma_۲ = ۲ma$$

$$\sum F_x = ma_۱ \rightarrow F - mgk = ma_۱$$

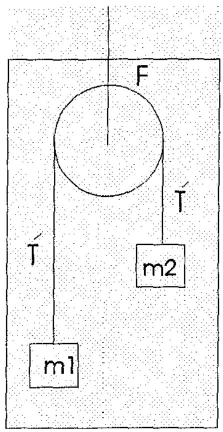
$$\rightarrow \begin{cases} F = ۲m(a_۲ + gk) \\ F = m(a_۱ + gk) \end{cases} \rightarrow \quad a_۱ = ۲a_۲ + gk = ۲a + gk$$

به کمک رابطه شتاب نسبی، شتاب نسبی بین قالب و موتور برابر است با :

$$a_{rel} = a_۱ + a_۲ = ۳a + gk \rightarrow L = \frac{۱}{۲} a_{rel} t^۲ \rightarrow L = \frac{۱}{۲}(۳a + gk)t^۲$$

$$\rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{۲L}{۳a + gk}}$$

۷۱ـ فرض می کنیم $m_۱ > m_۲$



اگر آسانسورساکن باشد آنگاه می توان نوشت :

$$\begin{aligned} m_۱ g - T &= m_۱ a \\ T - m_۲ g &= m_۲ a \end{aligned} \rightarrow \quad \frac{m_۱ g - T}{T - m_۲ g} = \frac{m_۱}{m_۲}$$

$$\rightarrow T = \frac{۲m_۱ m_۲ g}{m_۱ + m_۲} \rightarrow \frac{T}{g} = \frac{۲m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲}$$

همانطور که ملاحظه می شود $\frac{T}{g}$ مقداری ثابت است حال اگر این دستگاه اتوود را به کره دیگر برویم چون شتاب جاذبه فرق می کند لذا کشش طناب نیز مقداری متفاوت نشان می دهد ولی نسبت $\frac{T'}{g'}$ همان مقدار قبلی است. بنابراین هنگامی که آسانسور با شتاب $w_۰$ بالا می رود ناظر متصل به آسانسور احساس می کند که در میدان گرانش $g+w_۰$ قرار گرفته بنابراین :

$$\frac{T'}{g+w_۰}=\frac{۲m_۱m_۲}{m_۱+m_۲}\rightarrow T'=\frac{۲m_۱m_۲(g+w_۰)}{m_۱+m_۲}$$

نیروی وارد شده به سقف آسانسور $F=۲T'=\frac{۴m_۱m_۲(g+w_۰)}{m_۱+m_۲}$ از طرفی

به همین ترتیب اگر شتاب وزنه ها نسبت به ناظر متصل به آسانسور برابر a باشد با توجه به اینکه ناظر شتاب جاذبه $g+w_0$ را احساس می کند داریم :

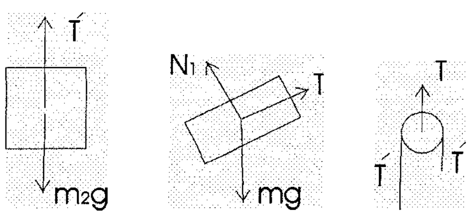
شتاب اجرام $\begin{array}{l} m_1(g+w_0)-T=m_1a \\ T-m_2(g+w_0)=m_2a \end{array} \rightarrow a=\frac{(m_1-m_2)(g+w_0)}{m_1+m_2}$

نسبت به آسانسور

چون جرم $m_۱$ نسبت به آسانسور در حال پایین آمدن است و آسانسور با شتاب $w_۰$ بالا می رود لذا شتاب $m_۱$ نسبت به زمین برابر است.

$$A=w_۰-a=\frac{۲m_۲w_۰-(m_۱-m_۲)g}{m_۱+m_۲}$$

۷۲ـ حالت ۱) جرم $m_۲$ پایین می آید.

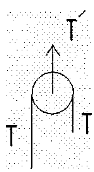


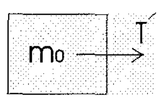
$$\left.\begin{array}{l} T-m_1 g\sin\alpha=m_1 a_1 \\ T=2T' \\ m_2 g-T'=m_2 a_2 \\ a_2=2a_1 \\ m_2=nm_1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad a=2g(2n-\sin\alpha)/(4n+1)$$

حالت ۲) جرم m2 بالا برود.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 g\sin\alpha-T=m_1 a_1 \\ T=2T' \\ T'-m_2 g=m_2 a_2 \\ a_2=2a_1 \\ m_2=nm_1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad a=2g(\sin\alpha-2n)/4n+1$$

۷۳ـ می دانیم شتاب جرم m_0 یعنی a_0 با شتاب دستگاه اتوود یکسان است. از طرفی ناظر متصل به قرقره متحرک (دستگاه اتوود) شتاب جاذبه $g-a_0$ را احساس می کند. لذا برای حالتی که $m_1>m_2$ شتابی که ناظر می بیند (شتاب نسبی)، a، از رابطه زیر بدست می آید.





$$\begin{array}{l} m_1(g-a_0)-T=m_1 a \\ T-m_2(g-a_0)=m_2 a \end{array} \rightarrow \quad a=\frac{(m_1-m_2)(g-a_0)}{m_1+m_2} \qquad (1)$$

$$T=\frac{2m_1 m_2(g-a_0)}{m_1+m_2} \qquad (2)$$

از طرفی با توجه به دیاگرام نیرویی داریم :

$$T'=2T \qquad\qquad T'=m_0 a_0$$

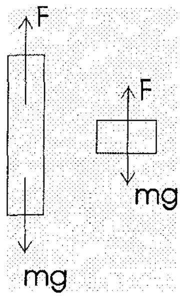
$$\rightarrow \quad ۲T = m_۰ a_۰ \qquad (۳)$$

از (۲) , (۳) $\quad \rightarrow \quad a_۰ = \dfrac{۴m_۱ m_۲ g}{۴m_۱ m_۲ + m_۰(m_۱ + m_۲)}$

چون شتاب جرم $m_۱$ نسبت به ناظر برابر a و به سمت پایین است و همچنین دستگاه اتوود با شتاب $a_۰$ پایین می آید لذا شتاب کل جرم $m_۱$ برابر است با :

$$A = a + a_۰ = \frac{[۴m_۱ m_۲ + m_۰(m_۱ + m_۲)]\, g}{۴m_۱ m_۲ + m_۰(m_۱ + m_۲)}$$

۷۴ـ با توجه به دیاگرام نیرویی :



$$Mg - f = Ma \qquad (۱)$$
$$mg - f = ma' \qquad (۲)$$

چون هر دو جرم در یک جهت حرکت می کنند لذا شتاب نسبی بین آنها برابر $a - a'$ است. از طرفی فاصله نسبی انتهای میله M تا جرم m برابر L است. لذا :

$$L = \frac{۱}{۲}(a - a')t^۲ \qquad (۳)$$

از (۱) و (۲) و (۳) $\quad \rightarrow \quad f = \dfrac{۲mML}{(M - m)t^۲}$

۷۵ـ با توجه به اینکه جرم $m_۱$ کمتر از ۲ برابر جرم $m_۲$ است لذا میله $m_۲$ به سمت پایین

می آید.

از طرفی با توجه به قرقره متحرک متصل بـه $m_۲$ مـی تـوان دریافـت کـه شـتاب جـرم $m_۱$ نصف جرم $m_۲(a)$ است بنابراین :

$$m_۲ g - T = m_۲ a \qquad (۱)$$

$$۲T - m_۱ g = m_۱ (\frac{a}{۲}) \quad (۲)$$

$$m_۱ = n m_۲$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \quad a = \frac{(۴m_۲ - ۲m_۱)g}{۴m_۲ + m_۱} = \frac{(۴ - ۲n)}{(۴ + n)} g$$

با توجه به اینکه این دو جرم در خلاف جهت یکدیگر حرکت مـی کننـد لـذا شـتاب نـسبی بین آنها برابر است با $a + \frac{a}{۲} = \frac{۳}{۲} a$.فاصله نسبی هم برابر L است لذا زمانی که مهـره بـه انتهای بالای میله می رسد به صورت زیر بدست می آید.

$$L = \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲} a) t^۲ \rightarrow t = \sqrt{\frac{۴L}{۳a}} = \sqrt{\frac{۲L(۴ + n)}{۳(۲ - n)g}}$$

۷۶ـ با توجه به قرقره متحرک، هنگامی که جرم $m_۱$ به زمین می رسد جـرم $m_۲$ بـه انـدازه ۲h بالا می رود. که از این لحظه به بعد به صورت یک حرکتی پرتابی عمل می کنـد. بـرای محاسبه سرعت پرتاب شدن ابتدا شتاب جرم m_2 را بدست می آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} m_۱ g - ۲T = m_۱ \dfrac{a}{۲} \\ T - m_۲ g = m_۲ a \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{(m_۱ - ۲m_۲)g}{\frac{m_۱}{۲} + ۲m_۲} = \frac{(۲\eta - ۴)}{\eta + ۴}$$

حال با توجه به ثابت بودن شتاب :

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax \rightarrow v^۲ = ۴\frac{(\eta - ۲)}{\eta + ۴} g(۲h)$$

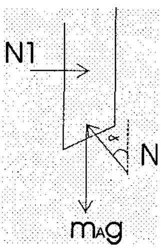
برای حرکت پرتابه به صورت قائم با سرع اولیه $v_۰$ ارتفاع ماکزیمم از رابطه زیر بدست مـی

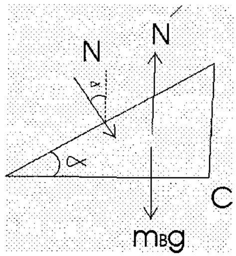
آید.

$$v_\cdot = \sqrt{۲gh'} \rightarrow h' = \frac{v_\cdot^۲}{۲g} = \frac{۱}{۲g}(۸hg\frac{\eta - ۲}{\eta + ۴}) = ۴h\frac{\eta - ۲}{\eta + ۴}$$

ارتفاع کل جرم $m_۲$ $H = ۲h + h' = ۲h(۱ + ۲\frac{\eta - ۲}{\eta + ۴}) = ۶h\eta/(\eta + ۴) = ۰/۶m$

۷۷ـ ابتدا دیاگرام نیرویی دوجسم را رسم می کنیم.

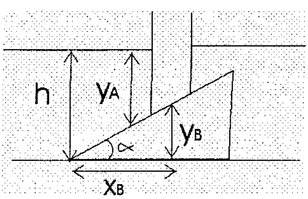




جرم B : $\sum F_x = m_B a_B \rightarrow N\sin\alpha = m_B a_B$ (۱)

جرم A : $\sum F_y = m_A a_A \rightarrow m_A g - N\sin\alpha = m_A a_A$ (۲)

همانطور که ملاحظه می کنیم دو معادله و ۳ مجهول N, a_B, a_A داریم لذ به معادله دیگری نیاز داریم. معادله سوم در واقع از هندسه مسأله (قید مسأله) بدست می آید. مطابق شکل ارتفاع h ثابت است بنابراین :



(3) $y_A + y_B = h =$ ثابت

حال از علائم اختصاری زیر استفاده می کنیم :

$$\ddot{y}_A = a_A = \frac{d^۲ y_A}{dt^۲} \quad , \quad \dot{y}_A = v_A = \frac{dy_A}{dt}$$

با دو بار مشتق گیری از رابطه (۳) داریم :

$$\ddot{y}_A + \ddot{y}_B = \cdot \quad , \quad y_B = x_{\mathbf{B}} \tan\alpha \rightarrow \ddot{y}_B = \ddot{x}_B(\tan\alpha)$$

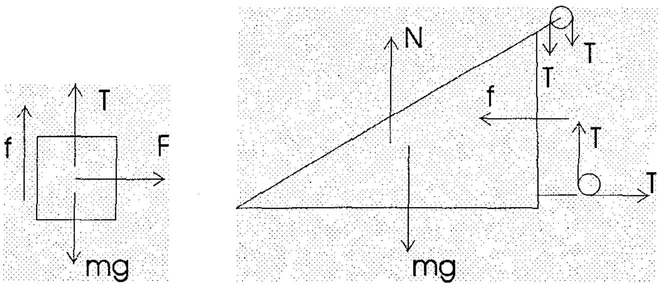
$$\rightarrow \quad \ddot{y}_A = -\ddot{x}_B(\tan\alpha) \qquad (۴)$$

از طرفی می دانیم چون x_B مرتب در حال کاهش است در حالی که شتاب B به سمت راست است لذا :

$$\ddot{x}_B = -a_B \xrightarrow{\text{از (۴)}} a_A = a_B \tan\alpha \qquad (۵)$$

$$\text{از (۱) و (۲) و (۵)} \rightarrow \quad a_A = \frac{g}{۱+\eta \cot an^{۲}\alpha} \quad a_B = \frac{g}{\tan\alpha + \eta \cot an\alpha}$$

۷۸ـ از دیاگرام نیرویی می توان نوشت :



جرم m:

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow mg - T - f = ma_y \qquad (۱)$$

$$f = KF \qquad (۲)$$

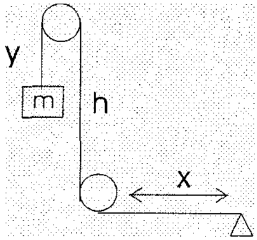
$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F = ma_x \qquad (۳)$$

جرم M:

$$\sum F_x = Ma_۲ \rightarrow T - F = Ma_۲ \qquad (۴)$$

از طرفی چون جرم m همیشه در تماس با M است لذا $a_۲ = a_x$ (۵) همانطور که ملاحظه می شود ۵ معادلهٔ ۶ مجهول داریم لذا معادله آخر از شکل هندسی مسأله بدست

می آید.



با توجه به اینکه طول طناب ثابت است لذا می توان نوشت :

$$x + y + h = L$$

حال با دو بار مشتق گیری نسبت به زمان داریم :

$$\ddot{x} + \ddot{y} = ۰$$

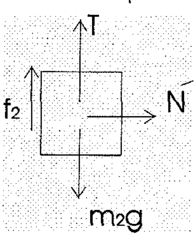
از طرفی $\ddot{y} = a_y \;,\; \ddot{x} = -a_۲ \quad \leftarrow \quad a_۲ = a_y \quad (۶)$

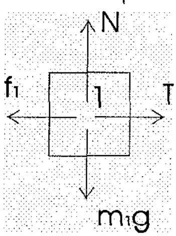
از رابط (۱) تا (۶) می توان نوشت :

$a_x = g/(۲ + k + \frac{M}{m}) \rightarrow$ $m_۱$ شتاب جرم $a = \sqrt{a_x^۲ + a_y^۲} = \sqrt{۲}a_x$

$$\rightarrow a = \sqrt{۲}g/(۲ + k + \frac{M}{m})$$

۷۹ـ مینیمم شتاب هنگامی است که جرم m_2 در آستانه لغزش به سمت پایین باشد. با توجه به اینکه شتاب ۳ جرم با هم برابر است و به کمک دیاگرام نیرویی می توان نوشت :



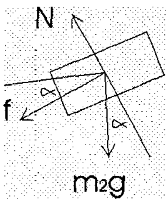


جرم $m_۱$: $\sum F_x = m_۱ a \rightarrow T - m_۱ g k = m_۱ a \quad (۱)$

جرم $m_۲$: $\begin{cases} \sum F_x = m_۲ a \rightarrow N' = m_۲ a & (۲) \\ \sum F_y = ۰ \rightarrow m_۲ g = T + N'K & (۳) \end{cases}$

از (۱) و (۲) و(۳) $\rightarrow \quad a=\left(\dfrac{۱-k}{۱+k}\right)g$

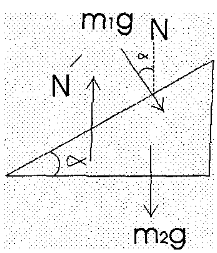
۸۰ـ می دانیم ماکزیمم شتاب هنگامی است که جرم ۲ در آستانه لغزش به سمت بالا باشد از طرفی چون دو جرم نسبت به هم ساکن هستند لذا شتاب هر دو یکسان است. با توجه به دیاگرام نیرویی :

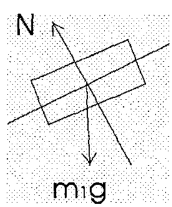


$$\sum F_x = ma \rightarrow f\cos\alpha + N\sin\alpha = ma \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ۰ \rightarrow N\cos\alpha = mg + f\sin\alpha \qquad (۲)$$
$$f = KN \qquad (۳)$$

از (۱) و (۲) و (۳) $\rightarrow \quad a=\left(\dfrac{k\cot an\alpha+۱}{\cot an\alpha-k}\right)g$

۸۱ـ با توجه به دیاگرام نیرویی :





جرم ۲ :

$$\sum F_x = m_۲ a_{۲x} \rightarrow N\sin\alpha = m_۲ a_{۲x} \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = m_۲ a_{۲y} \rightarrow m_۲ g - N\cos\alpha = m_۲ a_۲ y \qquad (۲)$$

جرم ۱ :

$$\sum F_x = m_۱ a_{۱x} \rightarrow N\sin\alpha = m_۱ a_{۱x} \qquad (۳)$$

همانطور که ملاحظه می شود ۳ معادله و ۴ مجهول داریم لذا معادله چهارم را از هندسه مسأله به دست می آوریم که از رابطه شتاب نسبی بدست می آید. می دانیم :

$$\vec{a}_۲ = \vec{a}_۱ + \vec{a}_{۲/۱}$$

جهت ؟ $\rightarrow$ $\swarrow$ $\quad \rightarrow \quad a_۲ = (a\cos\alpha - a_{۱x})\hat{i} + (a\sin\alpha)\hat{j}$

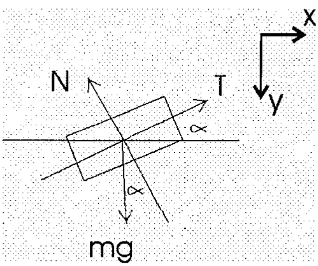
مقدار ؟ $a_{۱x}$ a

بنابراین :

$$\left.\begin{aligned} a_{2x} &= a\cos\alpha - a_{1x} \\ a_{2y} &= a\sin\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\alpha = \frac{a_{2y}}{a_{2x} + a_{1x}} \qquad (4)$$

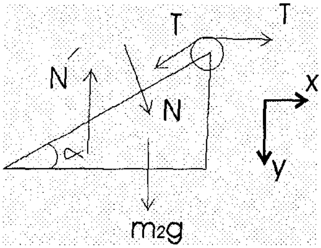
از روابط (۱) تا (۴) $\rightarrow \quad a_{1x} = \dfrac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \dfrac{m_1}{m_2}}$

۸۲ـ جرم m:



$$\sum F_x = ma_x \rightarrow T\cos\alpha - N\sin\alpha = ma_x \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ma_y \rightarrow mg - N\cos\alpha - T\sin\alpha = ma_y \qquad (۲)$$

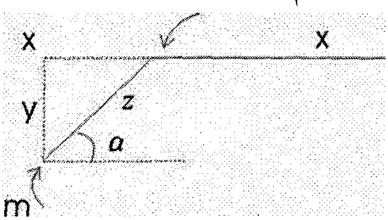
جرم M:



$$\sum F_x = MA \rightarrow T - T\cos\alpha + N\sin\alpha = Ma \qquad (۳)$$

ملاحظه می شود که ۳ معادله و ۵ مجهول داریم لذا به دو معادله دیگر نیاز داریم. بنابراین از هندسه مسأله کمک می گیریم.

فرض کنید ابتدا گوه در دورترطن فاصله از دیوار باشد در نتیجه جرم m نزدیک قرقره قرار می گیرد که با رها کردن گوه، جرم m هم جلو می آید و هم پایین با توجه به ثابت بودن طول طناب در هر لحظه داریم :



$X + Z = L =$ طول طناب (a)

$$x = L - X - Z\cos\alpha \qquad (b)$$

$$y = Z\sin\alpha \qquad (c)$$

با دوبار مشتق گیری نسبت به زمان از ۳ رابطه فوق داریم :

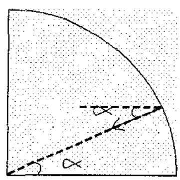
$$\left.\begin{array}{lll} (a)\text{از} & \rightarrow & \ddot{X} = -\ddot{Z} \\ (b)\text{از} & \rightarrow & \ddot{x} = -\ddot{X} - \ddot{Z}\cos\alpha \\ (c)\text{از} & \rightarrow & \ddot{y} = \ddot{Z}\sin\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \ddot{x} = -\ddot{X}(۱-\cos\alpha) \\ \ddot{y} = -\ddot{X}\sin\alpha \end{array}$$

با توجه به اینکه $A = -\ddot{X}$, $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ آنگاه :

$$\rightarrow \quad \begin{array}{ll} a_x = A(1-\cos\alpha) & (4) \\ a_y = A\sin\alpha & (5) \end{array}$$

از روابط (۱) تا (۵) $\rightarrow \quad A = \dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}$

۸۳ـ الف) می دانیم در این حالت نیروی $\dfrac{mv^2}{R}$ بر ذره وارد می شود که به سمت مرکز دایره می باشد. کافی است متوسط این نیرو در جهت x و y را بدست آورد. سپس در رابطه $\overline{F} = \sqrt{(\overline{F}_x)^2 + (\overline{F}_y)^2}$ قرار می دهیم :



نکته : متوسط تابع f(x) در فاصله [a , b] برابر است با : $\overline{F} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

با حل این مسأله این رابطه را نیز اثبات می کنیم. ابتدا این ربع دایره را به n قسمت هر کدام به طول dl تقسیم می کنیم. هر قسمت یک مؤلفه نیرویی در جهت x و y دارد. در اینجا متوسط مؤلفه نیرویی را در جهت x حساب می کنیم. بنابراین با توجه به عمل متوسط گیری معمولی داریم :

$$\overline{F}_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} F\cos\alpha}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F\cos\alpha dl}{ndl}$$

حال اگر تعداد تقسیمات را به سمت بی نهایت سوق دهیم صورت کسر به انتگرال تبدیل می شود و با توجه به اینکه $ndl = \pi R/2$ داریم:

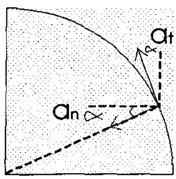
$$\overline{F}_x = \frac{\int F\cos\alpha dl}{\pi\frac{R}{۲}} = \frac{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} F\cos\alpha(Rd\alpha)}{\pi\frac{R}{۲}} = \frac{۱}{\frac{\pi}{۲}-۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} F\cos\alpha d\alpha$$

$$\rightarrow \quad \overline{F}_x = \frac{۲}{\pi}\frac{mv^۲}{R}$$

به طور مشابه $\overline{F}_y = \frac{۲}{\pi}\frac{mv^۲}{R}$ بنابراین :

$$\overline{F} = \sqrt{(\overline{F}_x)^۲ + (\overline{F}_y)^۲} = ۲\sqrt{۲}\,\frac{mv^۲}{\pi R}$$

ب) ابتدا بردار نیروی متوسط مماسی را حساب می کنیم که مشابه قسمت الف داریم:



$$(\overline{F}_y)_t = \frac{۱}{\frac{\pi}{۲}-۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (ma_t)\cos\alpha dt = \frac{۲}{\pi}ma_t$$

$$(\overline{F}_x)_t = \frac{۱}{\frac{\pi}{۲}-۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (ma_t)\sin\alpha d\alpha = \frac{۲}{\pi}ma_t$$

$$\rightarrow \quad \overline{F}_t = \sqrt{(\overline{F}_x)_t^۲ + (\overline{F}_y)_t^۲} = \frac{۲\sqrt{۲}ma_t}{\pi}$$

بردار نیروی متوسط عمودی :

چون سرعت در حال تغییر است نیروی عمودی $\frac{mv^۲}{R}$ متغیر می شود.

$$v^{۲}-v_{۰}^{۲}=۲ax \rightarrow v^{۲}=۲at(R\alpha)$$

بنابراین :

$$(\overline{F}_x)_n=\frac{۱}{\frac{\pi}{۲}-۰}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} F\cos\alpha d\alpha=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{m(۲a_tR\alpha)}{R}\cos\alpha d\alpha$$

$$=\frac{۴ma_t}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \alpha\cos\alpha d\alpha$$

نکته: از روش انتگرال گیری جز به جز استفاده می کنیم :

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \alpha\cos\alpha d\alpha=(\alpha\sin\alpha)_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin\alpha d\alpha=\frac{\pi}{۲}-۱$$

$$\rightarrow \quad (\overline{F}_x)_n=\frac{۴ma_t}{\pi}(\frac{\pi}{۲}-۱)\xrightarrow{\text{بطور مشابه}}(\overline{F}_y)_n=\frac{۴ma_t}{\pi}$$

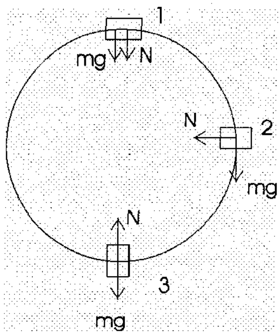
بردار نیروی متوسط کل

$$=\left\{\left[\frac{4ma_t}{\pi}(\frac{\pi}{2}-1)+\frac{2}{\pi}ma_t\right]^2+\left[\frac{4ma_t}{\pi}-\frac{2}{\pi}\,ma_t\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{F}=ma_t\left[(۲-\frac{۴}{\pi}+\frac{۲}{\pi})^{۲}+(\frac{۴}{\pi}-\frac{۲}{\pi})^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}=ma_t\left[(۲-\frac{۲}{\pi})^{۲}+(\frac{۲}{\pi})^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\overline{F}=\frac{۲ma_t}{\pi}\left[(\pi-۱)^{۲}+۱\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

۸۴ـ با توجه به دیاگرام نیرویی در نقاط ۱ تا ۳ می توان نوشت .



بالاترین نقطه :

$$mg + N_۱ = m\frac{v^۲}{R} \rightarrow N_۱ = m(\frac{v^۲}{R} - g) = ۷۰۰N$$

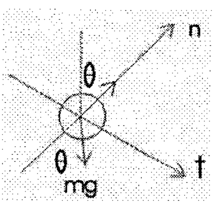
نقطهٔ میانی :

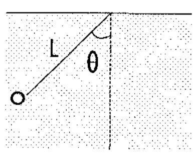
$$N_۲ = m\frac{v^۲}{R} = ۱۴۰۰N \qquad F = \sqrt{۱۴۰۰^۲ + ۷۰۰^۲} = ۱۵۶۵/۲N$$

پایین ترین نقطه :

$$N_۳ - mg = m\frac{v^۲}{R} \rightarrow N_۳ = m(\frac{v^۲}{R} + g) = ۲۱۰۰N$$

۸۵ـ ابتدا به کمک قضیه کار و انرژی سرعت کره را در هنگامی که ریسمان با خط قائم زاویه θ می سازد، می یابیم.





$$mg\,L\cos\theta = \frac{۱}{۲}mv^۲ \rightarrow v = \sqrt{۲gl\cos\theta}$$

حال به کمک دیاگرام نیرو:

$$T - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

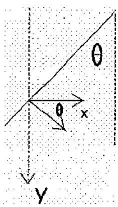
$$mg\sin\theta = ma_t \rightarrow a_t = g\sin\theta \qquad (2)$$

$$\text{از } (1) \rightarrow a_n = \frac{v^2}{L} = 2g\cos\theta \ ,$$

$$T = mg\cos\theta + 2mg\cos\theta = 3mg\cos\theta$$

$$\rightarrow \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{4g^2\cos^2\theta + g^2\sin^2\theta} = g\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

ب) با توجه به شکل :



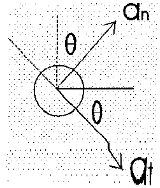
$$v_y = v\sin\theta = (\sqrt{2gL\cos\theta})\sin\theta$$

$$\frac{dv_y}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{-1}{2}(2gL\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \times 2gL\sin^2\theta + \sqrt{2gL\cos\theta}\cos\theta = 0$$

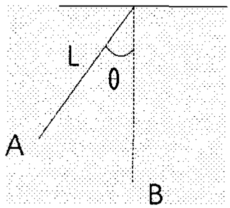
$$\rightarrow \tan^2\theta = 2 \rightarrow 1+\tan^2\theta = 3 \rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

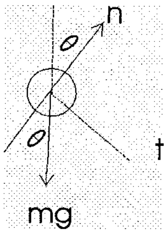
$$\rightarrow T = 3mg\cos\theta = \sqrt{3}mg$$

ج) چون شتاب کل افقی است لذا د جهت قائم مؤلفه ای ندارد. بنابراین :



۸۶ـ شتاب در نقطهٔ A:





سرعت در نقطهٔ A صفر است لذا:

$$T - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{v^۲}{R} = ۰ \;\rightarrow\; a_n = ۰$$

$$mg\sin\theta = ma_t \rightarrow a_t = g\sin\theta$$

$$a_A = at = g\sin\theta$$

شتاب در نقطهٔ B:

$$T - mg = ma_n = m\frac{v^۲}{R}$$

$$\sum F_t = ma_t \rightarrow a_t = ۰$$

از کار و انرژی داریم:

$$mgL(۱-\cos\theta) = \frac{۱}{۲}mv^۲ \rightarrow v^۲ = ۲gl(۱-\cos\theta)$$

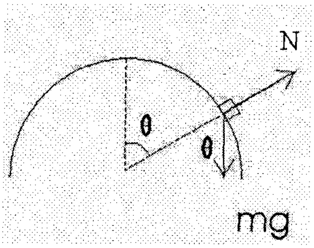
$$\rightarrow a_n = \frac{v^۲}{L} = ۲g(۱-\cos\theta)$$

$$\rightarrow \;\; a_B = a_n = ۲g(۱-\cos\theta)$$

$$a_A = a_B \rightarrow g\sin\theta = ۲g(۱-\cos\theta) \rightarrow ۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲} = ۲(۲\sin^۲\frac{\theta}{۲})$$

$$\rightarrow \;\; \cos\frac{\theta}{۲} = ۲\sin\frac{\theta}{۲} \rightarrow \tan\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta = ۵۳/۱^\circ$$

۸۷ـ با توجه به دیاگرام نیرویی داریم :



$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^{۲}}{R} \qquad (۱)$$

از کار و انرژی داریم :

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = mgR(۱-\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{v^{۲}}{R} = ۲g(۱-\cos\theta) \qquad (۲)$$

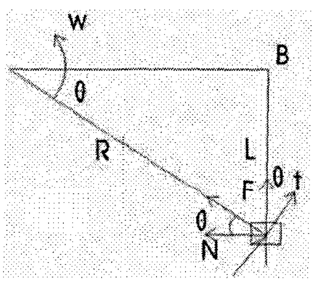
در لحظه جدا شدن جسم داریم $N = ۰$ بنابراین از روابط ۱ و ۲ داریم :

$$mg\cos\theta = ۲mg(۱-\cos\theta) \rightarrow ۳\cos\theta = ۲$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{۳} \rightarrow \theta = ۴۸/۱۸^\circ$$

$$(۲) \text{ از } \rightarrow v = \sqrt{۲gR(۱-\cos\theta)} = \sqrt{\frac{۲}{۳}gR}$$

۸۸ـ فرض می کنیم جهت حرکت پادساعتگرد باشد. با توجه به دیاگران نیرو :



$$\sum F_n = ma_n \to N\cos\theta + F\sin\theta = mRw^۲ \quad (۱)$$
$$\sum F_t = ma_t = ۰ \to N\sin\theta = F\cos\theta \quad (۲)$$
از (۱) و(۲) $\to F = mRw^۲ \sin\theta \ , \ L = R\sin\theta \ , \ L = R\sin\theta \to$
$$F = mw^۲ L$$

از طرفی نیروی F برابر است با $F = k\Delta L$ در نتیجه :

$$K\Delta L = mw^۲ L \to \frac{\Delta L}{L} = \frac{mw^۲}{K} \to \frac{\Delta L}{L_۰} = \frac{mw^۲}{k - mw^۲} = \frac{۱}{\frac{k}{mw^۲} - ۱}$$

اگر جهت حرکت عوض شود تأثیری بر کرنش آن نمی گذارد.

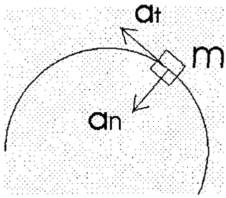
۸۹ـ می دانیم بیشترین سرعت در جایی است که دوچرخه در آستانه لغزش قرار گیرد. لذا :

$$\sum F_n = ma_n \to mgk = m\frac{v^۲}{r}$$
$$\to \ gk_۰(۱ - \frac{r}{R})r = v^۲ \ \to \ v = \sqrt{gk_۰(r - \frac{r^۲}{R})}$$

برای یافتن ماکزیمم سرعت کافی است قرار دهیم $\frac{dv}{dr} = ۰$ لذا :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{۱}{۲}(gk_۰(r - \frac{r^۲}{R}))^{-\frac{۱}{۲}} gk_۰(۱ - \frac{۲r}{R}) = ۰ \to r = \frac{R}{۲}$$
$$\to \ v = \sqrt{gk_۰(\frac{R}{۲} - \frac{R}{۴})} = \frac{۱}{۲}\sqrt{gk_۰ R}$$

۹۰ـ حداکثر مسافت در جایی است که اتومبیل در آستانه لغزش قرار گیرد. از طرفی با توجه به دیاگرام نیرویی می توان نوشت :



$$m\sqrt{a_n^۲ + a_t^۲} = mgk \rightarrow (\frac{v^۲}{R})^۲ + w_۱^۲ = (gk)^۲ \qquad (۱)$$

همچنین :

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax \rightarrow v^۲ = ۲w_۱x \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\rightarrow \frac{v^۲}{R} = \sqrt{(gk)^۲ - w_۱^۲} \rightarrow \frac{۲w_۱x}{R} = \sqrt{(gk)^۲ - w_۱^۲} \rightarrow$

$$x = \frac{R}{۲}\sqrt{(\frac{gk}{w_۱})^۲ - ۱}$$

۹۱ـ با توجه به اینکه متحرک با سرعت ثابت منحنی مورد نظر را دور می زند لذا مؤلفه شتاب مماسی، a_t، برابر صفر می شود و تنها شتاب، شتاب عمودی است. بنابراین باید به دنبال نقاطی بگردیم که حداکثر شتاب را دارا هستند. حال چون سرعت ثابت است و در منحنی سینوسی نقاط اکسترمم دارای کمترین شعاع انحنا می باشند لذا این نقاط دارای حداکثر شتاب می باشند. بنابراین حداکثر سرعت در این نقاط به صورتی است که متحرک در آستانه لغزش قرار می گیرد. با توجه به توضیحات فوق می توان نوشت :

$$y = a\sin(\frac{x}{\alpha}) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\alpha}\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) = ۰$$

$\rightarrow \cos(\frac{x}{\alpha}) = ۰ \rightarrow \frac{x}{\alpha} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$ نقاط اکسترمم

از طرفی در این نقاط $a_n = a_y = \ddot{y}$ و $a_t = a_x = \ddot{x} = ۰$ و $\dot{x} = v_x = v$ و

$\dot{y} = v_y = ۰$

با مشتق گیری از معادله منحنی

$$y = a\sin(\frac{x}{\alpha}) \rightarrow \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{a}{\alpha}\cos(\frac{x}{\alpha})\dot{x}$$

با مشتق گیری مجدد داریم :

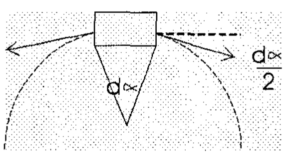
$$\ddot{y} = -\frac{a}{\alpha^{۲}}\sin(\frac{x}{\alpha})\dot{x}^{۲} + \frac{a}{\alpha}\cos(\frac{x}{\alpha})\ddot{x}$$

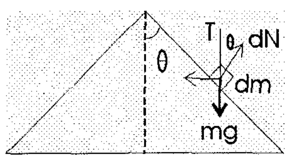
$$\rightarrow \quad a_n = \ddot{y} = -\frac{a}{\alpha^{۲}}\dot{x}^{۲} = -\frac{a}{\alpha^{۲}}v^{۲}$$

بنابراین اندازه شتاب عمودی در این نقاط $a_n = \frac{a}{\alpha_{۲}}v^{۲}$ است. بنابراین :

$$F = ma_n \leq f = mgk \rightarrow \frac{a}{\alpha^{۲}}v^{۲} \leq gk \rightarrow v \leq \alpha\sqrt{gk/a}$$

۹۲ـ نکته ای که در این مسأله حائز اهمیت است سه بعدی بودن آن می باشد. حال یک جزء جرمی مثل dm از این زنجیر را در نظر می گیریم. با توجه به شکل (۱) و (۲) برای حرکت دورانی با سرعت ثابت می توان نوشت.





$$۲T\sin\frac{d\alpha}{۲} - (dN)\cos\theta = dmRw^{۲} \qquad (۱)$$

اگر چگالی بر واحد طول برابر λ باشد یعنی $\lambda = \frac{m}{۲\pi R}$ آنگاه :

$$dm = (Rd\alpha)\lambda \qquad (2)$$

چون $d\alpha$ زاویه کوچکی است لذا $\sin\frac{d\alpha}{۲}=\frac{d\alpha}{۲}$ بنابراین :

$$(۳)\qquad T d\alpha - dN\cos\theta = (\lambda R d\alpha)Rw^{۲} \quad \leftarrow \text{از (۱) و (۲)}$$

از شکل (۲) می توان دریافت :

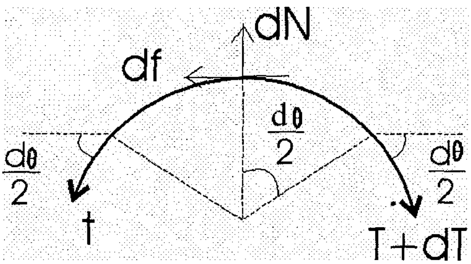
$$\sum F_y = ۰ \rightarrow dN\sin\theta = dmg = (\lambda R d\alpha)Rw^{۲}$$

$$\rightarrow dN = \frac{\lambda R d\alpha g}{\sin\theta} \qquad (۴)$$

$$\text{از (۳) و (۴)} \rightarrow T d\alpha - \frac{\lambda R d\alpha g}{\sin\theta}\cos\theta = (\lambda R d\alpha)Rw^{۲} \rightarrow \lambda = \frac{m}{۲\pi R} \rightarrow$$

$$T = \frac{m}{۲\pi}(g\cot an\theta + Rw^{۲})$$

۹۳- یک جزء جرمی dm از این طناب را در نظر می گیریم. به کمک قانون دوم می توان نوشت :



$$\sum F_x = dma_x \rightarrow (T+dT)\cos\frac{d\theta}{۲} - T\cos\frac{d\theta}{۲} - df = dma_x$$

$$\sum F_y = dma_y \rightarrow [(T+dT)+T]\sin\frac{d\theta}{۲} - dN = dma_y$$

چون مسأله از جرم طناب صرف نظر کرده لذا $dm=۰$ بنابراین :

$$dT\cos\frac{d\theta}{۲} - df = ۰$$

$$۲T\sin\frac{d\theta}{۲} + dT\sin\frac{d\theta}{۲} - dN = ۰$$

حـال چـون تغییـرات $d\theta$ کوچـک اسـت در نتیجـه $\cos\frac{d\theta}{۲} = ۱$, $\sin\frac{d\theta}{۲} = ۰$ و از تغییرات $dT\sin\frac{d\theta}{۲}$ در برابر $T\sin\frac{d\theta}{۲}$ صرف نظر می شود. بنابراین :

$$dT = df \qquad (۱)$$

$$Td\theta = dN \qquad (۲)$$

حال اگر نسبت $\frac{m_۲}{m_۱} = \eta_۰$ باشد جسم در آستانه لغزش قرار می گیرد. پس :

$$f = kN$$

$$\text{از (۱) و (۲) و (۳)} \rightarrow dT = kTd\theta \rightarrow \frac{dT}{T} = kd\theta \rightarrow \int_{T_۱}^{T_۲} \frac{dT}{T} = \int_۰^{\theta} kd\theta$$

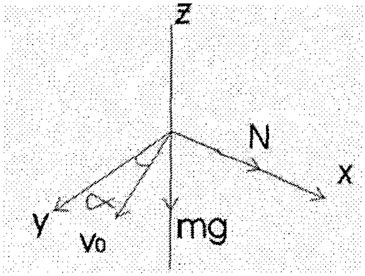
$$\rightarrow \ln\frac{T_۲}{T_۱} = k\theta \rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = e^{k\theta} \quad , \quad \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{m_۲ g}{m_۱ g} = \eta_۰ \quad , \quad \theta = \pi$$

$$\rightarrow \eta_۰ = e^{k\pi} \rightarrow k = \frac{۱}{\pi}\ln\eta_۰$$

ب) وقتی $\frac{m_۲}{m_۱} > \eta_۰$ نخ شروع به سر خوردن می کند. حال به کمک دیاگران نیرویی می توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} m_۲ g - T_۲ = m_۲ a \\ T_۱ - m_۱ g = m_۱ a \\ \frac{T_۲}{T} = e^{k\pi} = \eta_۰ \\ \frac{m_۲}{m_۱} = \eta \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{g(\eta - \eta_۰)}{\eta + \eta_۰}$$

۹۴ـ با توجه به شکل، مسأله ما به صورت سه بعدی است.



این حرکت حاصل جمع دو حرکت است یکی دورانی با سرعت ثابت حول محور استوانه و دیگری شتاب ثابت با شتاب g و در راستای قائم. حال برای حرکت دورانی داریم :

$$\sum F = ma_n = m\frac{v^{۲}}{R} \rightarrow N = m\frac{(v_{۰}\cos\alpha)^{۲}}{R} = \frac{mv_{۰}^{۲}}{R}\cos^{۲}\alpha$$

۹۵ـ ابتدا بردار مکان را می یابیم :

$$\begin{matrix} x = a\sin(wt) \\ y = b\cos(wt) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = a\sin wt\,\hat{i} + b\cos wt\,\hat{j}$$

با دو بار مشتق گیری از بردار مکان می توان بردار شتاب را بدست آورد.

$$\rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (aw\cos wt)\hat{i} + (-bw\sin wt)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-aw^{۲}\sin t)\hat{i} + (-bw^{۲}\cos wt)\hat{j}$$

$$= -w^{۲}\left[a\sin wt\,\hat{i} + b\cos wt\,\hat{j}\right]$$

$$\rightarrow \vec{a} = -w^{۲}\vec{r} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = -mw^{۲}\vec{r}$$

بنابراین جهت بردار F در خلاف جهت بردار $\vec{r}$ و به سمت مبدأ می باشد. از طرفی :

$$|\vec{F}| = mw^{۲}\,|\vec{r}| = mw^{۲}\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$$

۹۶ـ می دانیم در هر حرکت پرتابی سرعت در راستای افقی ثابت باقی می ماند. بنابراین

تغییر تکانه در این راستا وجود ندارد و فقط تغییر تکانه در راستای y داریم بنابراین :

$$\Delta p = m(v_{y۲} - v_{y۰}) \qquad (۱)$$

اگر متحرک تحت زاویه θ رها شود و جهت قراردادی مثبت به سمت پایین باشد آنگاه :

$$v_{y۲} = gt - v_۰ \sin\theta \qquad v_{y۰} = -v_۰ \sin\theta \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\rightarrow \quad \Delta p = m(gt - v_۰ \sin\theta + v_۰ \sin\theta) = mgt$

ب) هنگامی که پرتابه به سطح افقی می رسد همان سرعت را داراست. منتهی با زاویه θ پایین تر از افق. بنابراین :

$$\Delta p = m(v_{y۲} - v_{y۰}) = m(-v_۰ \sin\theta - v_۰ \sin\theta)$$

$$\rightarrow \quad \Delta p = -۲mv_۰ \sin\theta$$

۹۷ـ چون در لحظه $t = \tau$ نیرو قطع می گردد بنابراین :

$$\vec{F} = \vec{a}t(\tau - t) \rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}\,t(\tau - t) \rightarrow m\int_۰^v dv = \int_۰^t \vec{a}\,t(\tau - t)\,dt$$

$$\rightarrow \quad mv = \vec{a}(\frac{۱}{۲}\tau t^۲ - \frac{۱}{۳}t^۳) \rightarrow \quad \text{در } t = \tau \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = \frac{۱}{۶}\vec{a}\,\tau^۳$$

ب) اول ببینیم سرعت در کجا تغییر جهت می دهد.

$$v = ۰ \rightarrow t = ۰ \;, \quad t = \frac{۳}{۲}\tau$$

در نتیجه در فاصله ۰ تا τ متحرک تغییر جهت نمی دهد لذا جابجایی با مساحت طی شده برابر است.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{a}}{m}(\frac{۱}{۲}\tau t^۲ - \frac{۱}{۳}t^۳) \rightarrow x = \int_۰^\tau \frac{\vec{a}}{m}(\frac{۱}{۲}\tau t^۲ - \frac{۱}{۳}t^۳)\,dt$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{\vec{a}}{۱۲m}\tau^۴ = s \qquad \text{مسافت پیموده شده}$$

ـ۹۸

$$\vec{F} = \vec{F}_{\cdot} \sin(wt) \rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\cdot} \sin(wt)$$

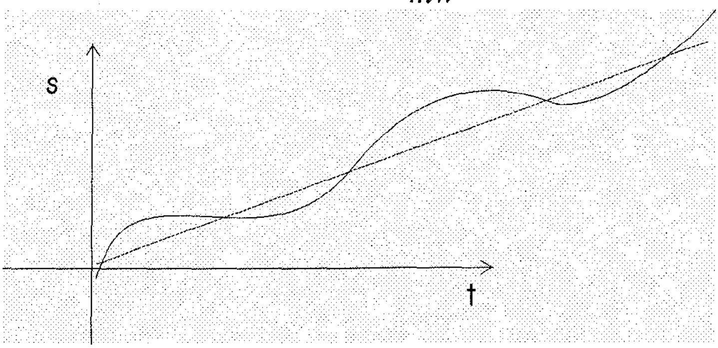
$$\rightarrow m\int_{\cdot}^{v} dv = \int_{\cdot}^{t} F_{\cdot} \sin(wt)dt$$

$$\rightarrow m\vec{v} = (-\frac{\vec{F}_{\cdot}}{w}\cos wt)\Big|_{\cdot}^{t} = -\frac{\vec{F}_{\cdot}}{w}(\cos wt - ۱) = \frac{\vec{F}_{\cdot}}{w}(۱ - \cos wt)$$

با توجه به اینکه همیشه $1 - \cos wt \geq 0$ است لذا متحرک در طی مسیر تغییر نمی دهد لذا مسافت پیموده شده با جابجایی برابر است از طرفی :

$$m\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{F}_{\cdot}}{w}(۱ - \cos wt) \rightarrow m\vec{x} = \int_{\cdot}^{t} \frac{\vec{F}_{\cdot}}{w}(۱ - \cos wt)\,dt \rightarrow$$

$$m\vec{x} = \frac{\vec{F}_{\cdot}}{w}(t - \frac{۱}{w}\sin wt) \rightarrow S = |\vec{x}| = \frac{|\vec{F}_{\cdot}|}{mw^{۲}}(wt - \sin wt)$$



۹۹- $$\vec{v} = \frac{\vec{F}_{\cdot}}{mw}(۱ - \cos wt) = \cdot \rightarrow \cos wt = ۱ \rightarrow t = \cdot\, , \frac{۲\pi}{w}, \frac{۴\pi}{w}, \ldots\ldots$$

بنابراین اولین توقف در زمان $t = \frac{۲\pi}{w}$ رخ می دهد. از مسأله ۹۸ داریم :

$$S = \frac{|\vec{F}_{\cdot}|}{mw^{۲}}(wt - \sin wt) \;\rightarrow\; t = \frac{۲\pi}{w} \;\rightarrow\; S = \frac{۲\pi|\vec{F}|}{mw^{۲}}$$

برای یافتن ماکزیمم، مشتق v نسبت به زمان یعنی شتاب را برابرصفر قرار دهیم. لذا :

$$a=\frac{\vec{F}_{\cdot}}{m}\sin(wt)=\cdot \rightarrow wt=\cdot\,,\pi\,,\,۲\pi \rightarrow \cdot<t=\frac{\pi}{w}<\frac{۲\pi}{w}$$

$$\rightarrow \vec{v}_{\max}=\frac{۲\vec{F}_{\cdot}}{mw}$$

۱۰۰ـ
$$\vec{F}=-r\vec{v} \rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}=-r\vec{v} \rightarrow m\int_{v_{\cdot}}^{v}\frac{dv}{v}=-r\int_{\cdot}^{t}dt \rightarrow$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{r}{m}t \rightarrow \frac{v}{v_0}=e^{-\frac{r}{m}t} \qquad (1)$$

طبق رابطه (۱) اگر $t\rightarrow\infty$ آنگاه $v\rightarrow\cdot$ بنابراین مدت زمانی که قایق با موتور خاموش حرکت می کند تا بایستد بی نهایت است.

ب)

$$\text{(۱) از} \rightarrow v=v_{\cdot}e^{-\frac{r}{m}t} \rightarrow \int_{\cdot}^{x}dx=\int_{\cdot}^{x}v_{\cdot}e^{-\frac{r}{m}t} \rightarrow x=\left(-\frac{mv_{\cdot}}{r}e^{-\frac{r}{m}t}\right)_{\cdot}^{t}$$

$$\rightarrow x=\frac{v_{\cdot}m}{r}(۱-e^{-\frac{r}{m}t}) \quad (۲) \quad , \quad \frac{v}{v_{\cdot}}=e^{-\frac{r}{m}t} \rightarrow$$

$$x=\frac{v_{\cdot}m}{r}(۱-\frac{v}{v_{\cdot}})=\frac{m}{r}(v_{\cdot}-v) \rightarrow v=v_{\cdot}-\frac{rx}{m} \qquad (۳)$$

از رابطه (۱) می توان دریافت که چون سرعت صفر نمی شود لذا تغییر جهت نمی دهد بنابراین $x = s$.

مسافت طی شده تا توقف
$$\rightarrow v=v_{\cdot}-\frac{rs}{m} \rightarrow v=\cdot \rightarrow v_{\cdot}=\frac{rs}{m} \rightarrow s=\frac{mv_{\cdot}}{r}$$

ج)
$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-\cdot}{\tau} \quad v=\eta v_{\cdot} \xrightarrow{\text{از}(۱)} \eta=e^{-\frac{r}{m}\tau} \rightarrow -\frac{m}{r}\ln\eta=\tau$$

$$\text{(۳) از} \rightarrow \eta v_{\cdot}=v_{\cdot}-\frac{xr}{m} \rightarrow x=\frac{m}{r}v_{\cdot}(۱-\eta)$$

$$\rightarrow \quad \bar{v} = \frac{x}{\tau} = \frac{\frac{m}{r} v_{0}(1-\eta)}{-\frac{m}{r}\ln\eta} = \frac{v_{0}(\eta-1)}{\ln\eta}$$

۱۰۱- $F = -kv^{2}$ نیروی مقاومت k: عدد ثابت

$$\rightarrow \quad ma = -kv^{2} \quad \rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = -kv^{2} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v^{2}} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\rightarrow \int_{v_{0}}^{v} \frac{dv}{v^{2}} = \int_{0}^{t} -\frac{k}{m}dt \rightarrow (-\frac{1}{v})_{v_{0}}^{v} = -\frac{k}{m}t \rightarrow (\frac{1}{v} - \frac{1}{v_{0}}) = \frac{k}{m}t$$

$$\rightarrow \quad v = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_{0}}} \qquad (1)$$

حال بازه زمانی که سرعت به v_1 می رسد را حساب می کنیم.

$$v_{1} = \frac{1}{\frac{k}{m}\tau + \frac{1}{v_{0}}} \rightarrow \tau = \frac{m(v_{0} - v_{1})}{kv_{0}v_{1}} \qquad (2)$$

$$\text{از } (1) \rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_{0}}} \quad \rightarrow \quad \int_{0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \frac{dt}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_{0}}} \rightarrow$$

$$x = \frac{m}{k}\left[\ln(\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_{0}}) - \ln\frac{1}{v_{0}}\right]$$

چون در طی زمان τ ثانیه، گلوله مسافت h را پیموده است، لذا :

$$h = \frac{m}{k}\left[\ln(\frac{k}{m}\tau + \frac{1}{v_{0}}) - \ln\frac{1}{v_{0}}\right] = \frac{m}{k}\left[\ln(\frac{k}{m}v_{0}t + 1)\right]$$

$$\rightarrow \quad e^{h\frac{k}{m}} = \frac{k}{m}v_{0}\tau + 1 \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{m}{kv_{0}}(e^{h\frac{k}{m}} - 1) \qquad (3)$$

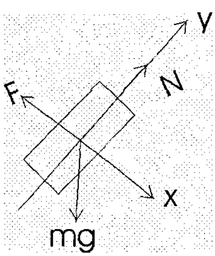
برای حذف $\frac{m}{k}$ داریم :

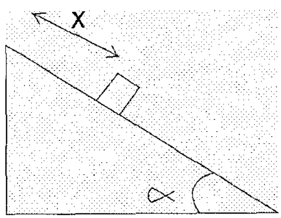
$$\text{از (۲) و (۳)} \rightarrow \frac{m}{k}\,\frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1} = \frac{m}{k v_0}\left(e^{h\frac{k}{m}} - 1\right) \rightarrow \frac{v_0 - v_1}{v_1} = e^{h\frac{k}{m}} - 1$$

$$\rightarrow h\frac{k}{m} = \ln\frac{v_0}{v_1} \rightarrow \frac{m}{k} = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v_1}} \qquad (4)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{h(v_0 - v_1)}{v_0 v_1 \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)}$$

۱۰۲ـ با توجه به دیاگرام نیرویی جسم می توان نوشت :





$$\sum F_x = ma \rightarrow mg\sin\alpha - f = mA \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha \qquad (2)$$
$$f = \mu N \qquad (3)$$
$$\text{از (۲) و (۳)} \rightarrow f = (ax)mg\cos\alpha \xrightarrow{\text{از (۱)}}$$
$$mg\sin\alpha - a_x mg\cos\alpha = mA$$
$$\rightarrow A = g(\sin\alpha - a_x\cos\alpha) \qquad (4)$$

نکته : برای هر شتاب و سرعتی داریم : $vdv = Adx$ (۵) (A : شتاب ذره)

$$\text{اثبات} \rightarrow \quad vdv = v\frac{dv}{dt}dt = (vdt)A = Adx$$

$$\text{از (۴) و (۵)} \rightarrow \int_{\cdot}^{v} vdv = \int_{\cdot}^{x} Adx = \int_{\cdot}^{x} g(\sin\alpha - a_x \cos\alpha)dx$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}v^{۲} = g(\sin\alpha x - \frac{۱}{۲}ax^{۲}\cos\alpha) \qquad (۶)$$

اگر در مسافت s جسم متوقف شود، داریم :

$$v = \cdot \rightarrow \cdot = g((\sin\alpha)s - \frac{۱}{۲}as^{۲}\cos\alpha) \rightarrow \quad s = \frac{۲}{a}\tan\alpha$$

برای یافتن ماکزیمم سرعت کافی است از عبارت (۶) نسبت به x مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم. لذا :

$$v = \sqrt{۲g(\sin\alpha x - \frac{۱}{۲}ax^{۲}\cos\alpha)} \qquad (۷)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \cdot$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}\left[۲g((\sin\alpha)x - \frac{۱}{۲}ax^{۲}\cos\alpha)\right]^{-\frac{۱}{۲}}[\sin\alpha - ax\cos\alpha] = \cdot$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{۱}{a}\tan\alpha \xrightarrow{\text{از (۷)}}$$

$$v_{max} = \sqrt{۲g(\frac{۱}{a}\tan\alpha\sin\alpha - \frac{۱}{۲a}\tan^{۲}\alpha\cos\alpha)}$$

$$\rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{g}{a}\tan\alpha\sin\alpha}$$

۱۰۳ـ می دانیم نیرو از صفر (t = ۰) شروع به زیاد شدن می کند تا لحظه ای که جسم در آستانه لغزش قرار گیرد. بنابراین زمانی که طول می کشد (τ) تا جسم در آستانه لغزش قرار گیرد برابر است با :

$$F = f \rightarrow mgk = a\tau \rightarrow \tau = mg\frac{k}{a} \qquad (۱)$$

بعد از این زمان جسم با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند، لذا :

$$F - mgk = mA \rightarrow at - mgk = mA \rightarrow a(t - mg\frac{k}{a}) = mA$$

$$\rightarrow a(t-\tau) = mA \rightarrow m\int_{۰}^{v} dv = \int_{\tau}^{t} a(t-\tau)dt$$

$$\rightarrow mv = \frac{۱}{۲}a(t-\tau)^{۲}\Big|_{\tau}^{t}$$

$$\rightarrow v = \frac{a}{۲m}(t-\tau)^{۲}$$

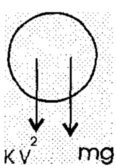
با توجه به اینکه همیشه $v \geq ۰$ لذا متحرک تغییر جهت نمی دهد بنابراین جابجایی با مسافت برابر است.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{۲m}(t-\tau)^{۲} \rightarrow x = \int_{\tau}^{t} \frac{a}{۲m}(t-\tau)^{۲}dt \rightarrow s = x = \frac{a}{۶m}(t-\tau)^{۳}$$

۱۰۴ـ نکته : می دانیم برای هر شتاب و سرعتی رابطه $vdv = adx$ برقرار است.

اثبات : $vdv = v\frac{dv}{dt}dt = vadt = a(vdt) = adx$

حال با توجه به دیاگرام نیرو در مسیر رفت می توان نوشت :



$$-(mg + kv^{۲}) = ma \rightarrow a = -(g + \frac{k}{m}v^{۲})$$

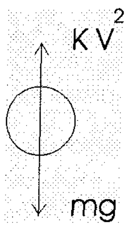
$$\rightarrow vdv = adx \rightarrow \frac{vdv}{-(g+\frac{k}{m}v^{2})} = dx \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{-\frac{m}{k}vdv}{\frac{mg}{k}+v^{2}} = \int_0^{x} dx$$

$$\rightarrow -\frac{m}{2k}\ln(\frac{mg}{k}+v^{2})\Big|_{v_0}^{v} = x \rightarrow x = \frac{m}{2k}\ln\frac{\frac{mg}{k}+v_0^{2}}{\frac{mg}{k}+v^{2}} \qquad (1)$$

حداکثر ارتفاع وقتی است که $v = 0$ باشد، لذا :

$$h = \frac{m}{2k}\ln\left(\frac{\frac{mg}{k}+v_0^{2}}{\frac{mg}{k}}\right) \qquad (2)$$

با توجه به دیاگرام نیرویی در برگشت می توان نوشت :



$$mg - kv^{2} = ma \rightarrow a = g - \frac{k}{m}v^{2}$$

$$vdv = adx \rightarrow \frac{vdv}{g-\frac{k}{m}v^{2}} = dx$$

$$\rightarrow \int_0^{h} dx = \int_0^{v'} \frac{vdv}{g-\frac{k}{m}v^{2}} \rightarrow h = -\frac{m}{2k}\ln(g-\frac{k}{m}v^{2})\Big|_0^{v'}$$

$$\rightarrow \quad h=\frac{m}{۲k}\ln\left[\frac{g}{g-\frac{k}{m}(v')^{۲}}\right] \qquad (۳)$$

$$\text{از (۲) و (۳)} \rightarrow \quad \frac{\frac{mg}{k}+v_{۰}^{۲}}{\frac{mg}{k}}=\frac{g}{g-\frac{k}{m}(v')^{۲}} \rightarrow v'=\frac{v_{۰}}{\sqrt{۱+\frac{k}{mg}v_{۰}^{۲}}}$$

۱۰۵ـ

$$a_x=\frac{F}{m}\cos(wt)$$

$$a_y=\frac{F}{m}\sin(wt)$$

$$\rightarrow \frac{dv_x}{dt}=\frac{F}{m}\cos(wt) \rightarrow v_x=\int_{۰}^{t}\frac{F}{m}\cos(wt)dt=\frac{F}{mw}\sin wt$$

$$\rightarrow \frac{dv_y}{dt}=\frac{F}{m}\sin(wt) \rightarrow v_y=\int_{۰}^{t}\frac{F}{m}\sin(wt)dt=-\frac{F}{mw}(\cos wt)_{۰}^{t}$$

$$=\frac{F}{m}(۱-\cos wt)$$

$$v=\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}=\frac{F}{mw}\sqrt{\sin^{۲}wt+۱+\cos^{۲}wt-۲\cos wt}$$

$$=\frac{F}{mw}\sqrt{۲(۱-\cos wt)}=\frac{۲F}{mw}\left|\sin\frac{wt}{۲}\right|$$

ب) $$v=\frac{۲F}{mw}\left|\sin\frac{wt}{۲}\right|=۰ \rightarrow \sin\frac{wt}{۲}=۰ \rightarrow \frac{wt}{۲}=۰,\pi,۲\pi$$

$$\rightarrow t_۱=۰\ ,\ t_۲=\frac{۲\pi}{w}$$

از روابط سرعت داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x dt = (\frac{F}{mw}\sin wt)dt$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow dy = v_y dt = \frac{F}{mw}(۱-\cos wt)dt$$

با توجه به فرمول انتگرالی طول منحنی :

$$L = \int\sqrt{۱+(y')}dx = \int\sqrt{dx^۲ + dy^۲}$$

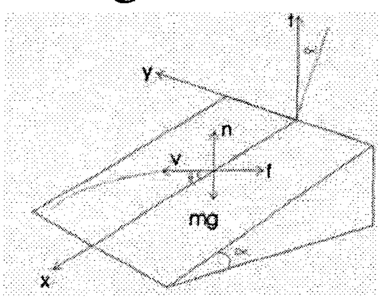
مسافت طی شده در فاصله ۰ تا $\frac{۲\pi}{w}$ برابر است با :

$$s = \int_۰^{\frac{۲\pi}{w}} \frac{F}{mw}\left[\sin^۲ wt + (۱-\cos wt)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}} dt = \int_۰^{\frac{۲\pi}{w}} \frac{۲F}{mw}\sin(\frac{wt}{۲})dt$$

$$\rightarrow \quad s = \frac{۸F}{mw^۲} \quad \rightarrow \quad \bar{v} = \frac{s}{\Delta t} = \frac{۸\frac{F}{mw^۲}}{\frac{۲\pi}{w}} = \frac{۴F}{\pi mw}$$

۱۰۶ـ می دانیم نیروی اصطکاک همواره در راستای حرکت و با جهت حرکت مخالفت می کند.

بنابراین دیاگرام نیروهای وارد بر دیسک A به صورت زیر خواهد بود. با توجه به اینکه دیسک در راستای z (راستای عمود بر سطح) شتابی ندارد لذا :



$$\sum F_z = ۰ \rightarrow \quad N = mg\cos\alpha \qquad (۱)$$

سدر راستاهای x و y حرکت شتاب دار است بنابراین در لحظه ای که زاویه بین سرعت و محور x برابر φ باشد داریم :

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow mg\sin\alpha - f\cos\varphi = ma_x \qquad (۲)$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow -f\sin\varphi = ma_y \qquad (۳)$$

از طرفی از حرکت لغزشی دیسک داریم :

$$f = kN = \tan\alpha(mg\cos\alpha) = mg\sin\alpha \qquad (۴)$$

از (۲) و (۴) $\rightarrow \quad a_x = mg\sin\alpha(1-\cos\varphi) \qquad (۵)$

از (۳) و (۴) $\rightarrow \quad a_y = (-mg\sin\alpha)\sin\varphi \qquad (۶)$

از (۵) و (۶) $\rightarrow \quad \dfrac{a_x}{a_y} = \dfrac{1-\cos\varphi}{-\sin\varphi} \rightarrow \dfrac{\dfrac{dv_x}{dt}}{\dfrac{dv_y}{dt}} = \dfrac{1-\cos\varphi}{-\sin\varphi}$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_x}{dv_y} = \frac{1-\cos\varphi}{-\sin\varphi} \qquad (۷)$$

حال با توجه به رابطه بین سرعتهای افقی و قائم v_x , v_y با سرعت کل v می توان نوشت :

$$v_x = v\cos\varphi \quad \rightarrow \quad dv_x = dv\cos\varphi - v\sin\varphi d\varphi$$

$$v_y = v\sin\varphi \quad \rightarrow \quad dv_y = dv\sin\varphi + v\cos\varphi d\varphi$$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_x}{dv_y} = \frac{dv\cos\varphi - v\sin\varphi d\varphi}{dv\sin\varphi + v\cos\varphi d\varphi} \qquad (۸)$$

از (۷) و (۸) $\rightarrow \quad \dfrac{1-\cos\varphi}{-\sin\varphi} = \dfrac{dv\cos\varphi - v\sin\varphi d\varphi}{dv\sin\varphi + v\cos\varphi d\varphi} \rightarrow$

$$\frac{dv}{v}=\frac{۱-\cos\varphi}{\sin\varphi}d\varphi=(\tan\frac{\varphi}{۲})d\varphi \rightarrow \int_{v_۰}^{v}\frac{dv}{v}=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\varphi}(\tan\frac{\varphi}{۲})d\varphi$$

$$\rightarrow \ln\frac{v}{v_۰}=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\varphi}\frac{\left(\sin\frac{\varphi}{۲}\right)d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{۲}} \qquad (۹)$$

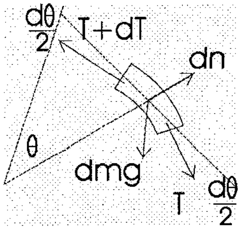
با عمل جانشانی $t=\cos\frac{\varphi}{۲}$ داریم : $dt=-\frac{۱}{۲}(\sin\frac{\varphi}{۲})d\varphi$

$$\rightarrow \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\varphi}\frac{(\sin\frac{\varphi}{۲})d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{۲}}=\int\frac{-۲dt}{t}=-۲\ln t=-۲\ln\cos\frac{\varphi}{۲}\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\varphi}=-۲\ln(\frac{\cos\frac{\varphi}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})$$

$$=\ln(\frac{۱}{۲\cos^۲\frac{\varphi}{۲}}) \qquad (۱۰)$$

$$(۹)\text{ و }(۱۰)\text{ از } \rightarrow \ln\frac{v}{v_۰}=\ln(\frac{۱}{۲\cos^۲\frac{\varphi}{۲}})\rightarrow v=\frac{v_۰}{۲\cos^۲\frac{\varphi}{۲}}=\frac{v_۰}{۱+\cos\varphi}$$

۱۰۷ـ مطابق شکل دیاگرام نیرو را برای یک تکه از زنجیر رسم می کنیم. با توجه به قانون دوم در دستگاه عمودی ـ مماسی می توان نوشت :



$$\sum F_n = ma_n \rightarrow dmg\cos\theta - dN + (۲T + dT)\sin\frac{d\theta}{۲} = dm\frac{v^۲}{R} \quad (۱)$$

$$\sum F_t = ma_t$$

$$\rightarrow (T\cos\frac{d\theta}{۲}) - (T + dT)\cos\frac{d\theta}{۲} + dmg\sin\theta = dma_t \quad (۲)$$

چون درست در لحظه آزاد شدن انتهای زنجیر ۰ = v است لذا شتاب عمودی نداریم. از رابطه (۲) می توان نوشت :

$$-dT\cos\frac{d\theta}{۲} + dmg\sin\theta = dma_t \qquad (۳)$$

چون dθ کوچک است لذا ۰ = $\cos\frac{d\theta}{۲}$ حال با توجه به اینکه جرم بر واحد طول این زنجیر برابر است با :

$$\rho = \frac{m}{L} \rightarrow dm = \rho(Rd\theta)$$

با انتگرالی از رابطه (۳) می توان نوشت :

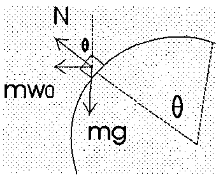
$$-\int dT + \int g\sin\theta dm = a_t\int dm$$

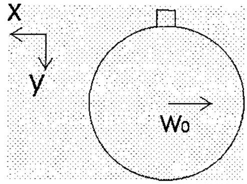
با توجه به اینکه در انتها و ابتدای زنجیر کشش زنجیر صفر است، لذا :

$$-\int_۰^۰ dT + \int_۰^{\frac{L}{R}} g\sin\theta\rho Rd\theta = a_t m \rightarrow ma_t = \rho gR(-\cos\theta)_۰^{\frac{L}{R}}$$

$$\rightarrow \rho Lma_t = \rho gR(۱-\cos\frac{L}{R}) \rightarrow a_t = \frac{Rg}{L}(۱-\cos\frac{L}{R})$$

۱۰۸ـ الف) ناظر متصل به کره احساس می کند که یک نیروی افقی $mw_{\circ}$ در جهت X به جسم وارد می شود و کره ثابت است بنابراین با توجه به دیاگرام نیرو در دستگاه عمودی ـ مماسی داریم :





$$\sum F_n = ma_n \rightarrow mg\cos\theta - N - mw_{\circ}\sin\theta = m\frac{v^{۲}}{R}$$

در لحظه جدا شدن $N = ۰$ پس :

$$mg\cos\theta - mw_{\circ}\sin\theta = m\frac{v^{۲}}{R} \qquad (۱)$$

حال به کمک قضیه کار و انرژی، کار نیروی وزن و $mw_{\circ}$ را برابر تغییرات انرژی جنبشی قرار می دهیم.

$$mw_{\circ}R\sin\theta + mgR(۱-\cos\theta) = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\rightarrow \quad g\cos\theta - w_{\circ}\sin\theta = \frac{۲}{۳}g \qquad (۳)$

از (۱) و (۳) $\rightarrow \quad \frac{۲}{۳}g = \frac{v^{۲}}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{۲}{۳}gR}$

ب) $w_{\circ} = g$ در رابطهٔ (۳) می گذاریم.

$$g(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{۲}{۳}g \rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \frac{۲}{۳}$$

$$\rightarrow (\cos\theta - \sin\theta)^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

$$\rightarrow ۱ - \sin ۲\theta = \frac{۴}{۹} \rightarrow \sin^{۲}\theta = \frac{۵}{۹} \rightarrow \theta = ۱۶/۸۷^{\circ}$$

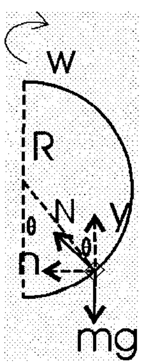
۱۰۹ـ چون نیروی مورد نظر همواره بر سرعت عمود است لذا کار انجام شده این نیرو روی جسم صفر است. بنابراین به بیانی جزئی تر کار این نیرو به مسیر بستگی ندارد پس این نیرو، یک نیروی بایستار است و می توان برای آن یک تابع پتانسیل به شکل زیر تعریف کرد :

$$F = -\frac{du}{dr} \rightarrow \Delta u = -\int F dr = -\int \frac{1}{r^n} dr = \frac{-1}{-n+1} r^{-n+1}$$

$$\rightarrow \quad \Delta u = \frac{1}{n-1} r^{1-n} \qquad (1)$$

برای داشتن یک حرکت پایدار و دائمی باید از مقادیر بزرگ انرژی پتانسیل دوری کرد. همانطور که از رابطهٔ (۱) ملاحظه می شود اگر توان r منفی باشد هنگامی که r به سمت صفر میل کند Δu به سمت بی نهایت میل می کند و سیستم از حالت پایدار خارج می گردد. بنابراین باید $1-n > 0$ در نتیجه $n < 1$ باید باشد.

۱۱۰ـ اگر استوانه فرضاً در زاویه θ به تعادل رسیده باشد آنگاه با توجه به دیاگرام در دستگاه عمودی ـ مماسی می توان نوشت :



$$\sum F_n = ma_n \rightarrow N\sin\theta = mrw^2 = m(R\sin\theta)w^2 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow N\cos\theta = mg \quad (۲)$$

$$(۱)\ \text{از} \rightarrow \sin\theta = ۰ \rightarrow \theta = ۰\ ,\ ۱۸۰^\circ$$

اگر ۱۸۰ و ۰ $\theta \neq$ آنگاه از (۱) و(۲) می توان نتیجه گرفت که :

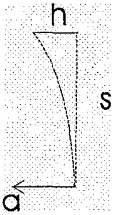
$$mRw^۲\cos\theta = mg \rightarrow \cos\theta = \frac{g}{Rw^۲} \rightarrow Rw > g$$

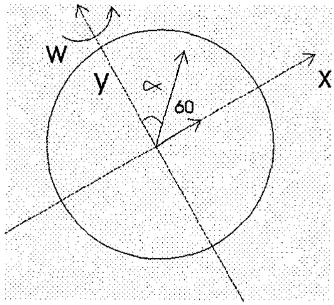
$$\rightarrow \theta = Arc\cos\frac{g}{Rw^۲}$$

اگر $Rw < g$ نقطهٔ تعادل وجود ندارد و جسم سر می خورد تا به نقطهٔ تعادل بدیهی $\theta = ۰$ برسد.

۱۱۱ـ نکته : عبارت $۲\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$ به شتاب کریوسیس معروف است. در شکل زیر یک دیسک دوران کننده با یک شیار شعاعی را نشان می دهد که ذره کوچک A مقید می باشد در شیار مزبور بلغزد. فرض کنید دیسک با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ بچرخد و ذره با تندی $v_{rel} = \dot{x}$ نسبت به شیار در راستای آن حرکت کند. همان طور که از شکل پیداست. نیروی $m\omega\dot{x}$ در جهت نشان داده شده بر جسم وارد می شود که جهت آن از قانون دست راست بدست می آید.

در واقع شتاب کریولیس تفاوت بین دیدگاه دستگاه مختصات دورانی و غیردورانی را بیان می کند. حال در حل این مسأله با توجه به اینکه زمین در حال گردش از غرب به شرق با سرعت زاویه ای ω است و تنها مؤلفه v_x دارای شتاب کریوسیس است. لذا :





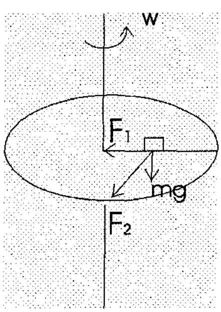
$$a = ۲\omega v_x = ۲\omega v \sin ۶۰$$

زمان رسیدن گلوله به هدف
$$t = \frac{s}{v} = \frac{۱۰۰۰}{۹۰۰} = ۱/۱۱ s$$

$$h = \frac{۱}{۲} a t^۲ \rightarrow h = \frac{۱}{۲} \times ۲\omega v \sin ۶۰ . t^۲ = \omega v \sin ۶۰ . (\frac{s}{v})^۲$$

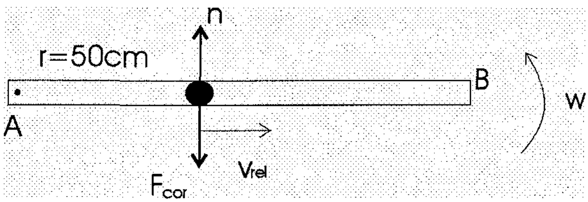
$$\rightarrow \quad h = \frac{\omega s^۲}{v} \sin ۶۰ = \frac{۲\pi s^۲}{Tv} \sin ۶۰ = \frac{۲\pi \times ۱۰^۶ \sin ۶۰}{(۲۴ \times ۳۶۰۰)۹۰۰} = ۶/۹ cm$$

۱۱۲ـ اولاً چون جسم با سرعت ثابت نسبت به دیسک در حال حرکت است لذا در هر شعاع r دارای شتاب $m\frac{v^۲}{r}$ است. از طرفی با توجه به حرکت دورانی دیسک و حرکت خطی جسم نسبت به دیسک جسم دارای شتاب کریوسیس می باشد. بنابراین برای حالتی که جسم در حال نزدیک شدن به محور دیسک است نیروها مطابق با شکل زیر ترسیم می شوند.



$$F = m\sqrt{g^{۲} + (r\omega^{۲})^{۲} + (۲v\omega)^{۲}} = ۷/۹۴ N$$

۱۱۳ــ برای ناظر متصل به دستگاه چرخان نیروی مجازی کریولیس برابر $\vec{F} = -۲m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$ می باشد که $\vec{\omega}$ بردار سرعت زاویه ای تخته و $\vec{v}_{rel}$ بردار سرعت نسبی استوانه نسبت به تخته است. در نتیجه با توجه به ضرب خارجی می توان مطابق شکل جهت نیروی مجازی کریولیس را رسم کرد.



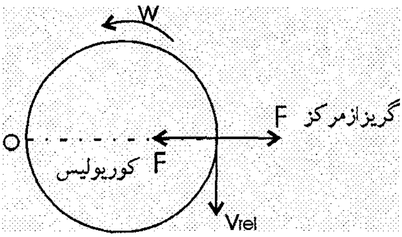
علامت منفی بخاطر این است که از دید ناظر متصل به دستگاه نیروی اینرسی ma− دیده می شود. اگر استوانه در موقعیت r باشد نیروی اینرسی گریز از مرکز $mr\omega^2$ به آن وارد می شود. بنابراین با توجه به قانون دوم نیوتن داریم :

$$\sum F = ma \rightarrow mr\omega^{۲} = ma \rightarrow a = r\omega^{۲} \rightarrow vdv = adr$$

$$\rightarrow \int_{v_۰}^{v} vdv = \int_{۰}^{r} r\omega^{۲}dr \rightarrow \frac{۱}{۲}(v^{۲} - v_۰^{۲}) = \frac{۱}{۲}r^{۲}\omega^{۲}$$

$$\rightarrow v_{rel} = \sqrt{v_۰^{۲} + (r\omega)^{۲}} \quad \rightarrow \quad |\vec{F}| = ۲m\omega\sqrt{v_۰^{۲} + (r\omega)^{۲}} = ۲/۸۲N$$

۱۱۴ـ می دانیم در دستگاه مختصات دورانی(با سرعت زاویه ای ثابت)، نیروی لختی وارد بر جسم برابر است با :



$$\vec{F}_{in} = -۲m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (۱)$$

v_{rel} : سرعت نسبی جسم نسبت به دستگاه مختصات دورانی

$\vec{\omega}$: بردار سرعت زاویه ای دستگاه مختصات دورانی

با توجه به اینکه نیروی لختی در دورترین نقطه از محور دوران برابر صفر است لـذا باید دو نیرو یکدیگر را خنثی کنند :

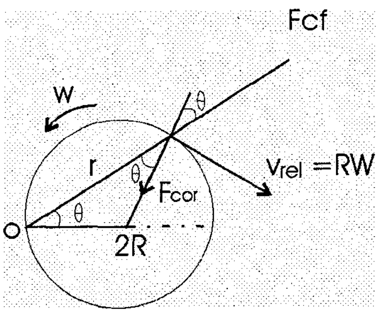
$$|۲m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}| = |m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})| \rightarrow ۲m\omega v_{rel} = m\omega^۲(۲R)$$

$$\rightarrow v_{rel} = R\omega \qquad (۲)$$

از دید ناظر متصل به دیسک جرم m با سرعت ثابت $v_{rel} = R\omega$ دایره ای به شـعاع R را دور می زند بنابراین از دید این ناظر جرم m فقط دارای شتاب عمودی (جانـب مرکز) است در نتیجه :

$$a_{rel} = \frac{v_{rel}}{R} = R\omega^۲$$

ب) با توجه به شکل در فاصله r از محور دوران می توان نوشت :



$$F_{in} = \left[(F_{cor} - F_{cf}\cos\theta)^{۲} + (F_{cf}\sin\theta)^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

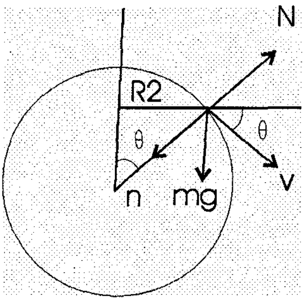
$$= \left[F_{cor}^{۲} + F_{cf}^{۲} - ۲F_{cor}F_{cf}\cos\theta\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left[(۲m\omega R\omega)^{۲} + (mr\omega^{۲})^{۲} - ۲(۲mR\omega^{۲})(mr\omega^{۲})\cos\theta\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= m\omega^{۲}\left[(۲R)^{۲} + r^{۲} - ۴Rr\cos\theta\right]^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow ۲R\cos\theta = r \rightarrow$$

$$F_{in} = m\omega^{۲}\sqrt{(۲R)^{۲} - r^{۲}}$$

۱۱۵ـ چون جرم m نسبت به دستگاه مرجع ثابت فقط دارای حرکت بر روی محیط دایره و در صفحه سطح مقطع است. لذا به کمک قانون دوم در دستگاه عمودی ـ مماسی داریم :



$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^{۲}}{R} \qquad (۱)$$

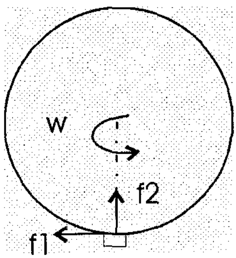
از طرفی از قانون پایستگی انرژی در دستگاه مرجع ثابت می توان نوشت :

$$mgR(۱-\cos\theta) = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \rightarrow m\frac{v^{۲}}{R} = ۲mg(۱-\cos\theta) \qquad (۲)$$

در لحظه جدایی $N = ۰$ لذا از روابط (۱) و (۲) زاویه جدایی برابر است با :

$$\cos\theta=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{(۱)از}=v\sqrt{\frac{۲}{۳}gR}\qquad(۳)$$

در دستگاه متصل به کره تنها مؤلفه $v_۱=v\cos\theta$ می تواند شتاب کوریولیس درست کند. همچنین با چرخش کره، جرم در واقع دارای یک حرکت دایره ای نسبت به کره است که شعاع دایره آن $R_۲=R\sin\theta$ می باشد. در نتیجه سرعت عرضی جرم نسبت به دستگاه متصل به کره $v_۲=R_۲\omega$ است. بنابراین با توجه به شکل نیروی کوریولیس کل برابر $F_{cor}=\sqrt{F_۱^۲+F_۲^۲}$ می شود.



$$F_{cor}=\left[(۲m\omega v_۱)^۲+(۲m\omega R_۲\omega)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$=rm\omega\left[(\frac{۲}{۳}gR\cos^۲\theta)+(R^۲\sin^۲\theta\omega^۲)\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\cos\theta=\frac{۲}{۳}\to\ \sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\to\ F_{cor}=۲m\omega\sqrt{\frac{۸}{۲۷}gR+\frac{۵}{۹}R^۲\omega^۲}$$

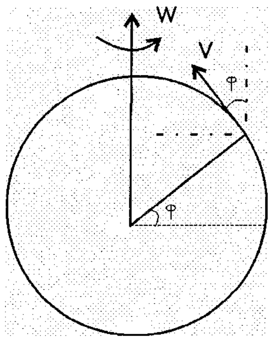
$$\to\ F_{cor}=\frac{۲}{۳}mR\omega^۲\sqrt{\frac{۸g}{۳R\omega^۲}+۵}=۱۷/۲۲N$$

ب) می دانیم جرم m دارای دو حرکت دورانی عرضی و طولی است. از طرفی در لحظه جدایش نیروی گریز از مرکز ناشی از حرکت طولی (حرکت به دور مرکز کره) با $mg\cos\theta$ خنثی می شود بنابراین تنها نیروی گریز از مرکز حلو دایره ای به

شعاع R_2 می ماند. پس :

$$F_{cf} = mR_۲\omega^۲ = mR\sin\theta\omega^۲ = \frac{\sqrt{۵}}{۳}mR\omega^۲$$

۱۱۶ـ تنها مؤلفه ای از سرعت در نیروی کوریولیس نقش دارد که عمود بر محور دوران باشد (یعنی مؤلفه $v\sin\varphi$) بنابراین :

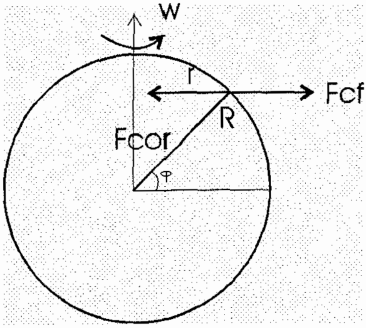


$$F_{cor} = ۲m\omega(v\sin\varphi) = ۲\times۲\times۱۰^۶\times\left(\frac{۲\pi}{۲۴\times۳۶۰۰}\right)\frac{۵۴}{۳.۶}\times\sin۶۰$$

$= ۳۷۷۸/۷N$

در دستگاه متصل به کره زمین، این نیرو در جهت غرب به شرق است لذا ریل سمت راست آن را تحمل می کند.

ب) با توجه به جهت نیروی گریز از مرکز، F_{cf}، باید قطار در جهتی حرکت کند تا بردار نیرویی $\vec{F}_{cor} = -۲m\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}$ در خلاف جهت آن واقع شود. بنابراین اگر قطار از شرق به غرب حرکت کند خواسته مسأله برآورده می شود. از طرفی چون نیروی لختی صفر شده است پس :



$$ ۲m\omega v_{rel} = mr\omega^۲ \rightarrow v_{rel} = \frac{۱}{۲} r\omega^۲ = \frac{۱}{۲}(R\cos\varphi)\omega^۲ $$

R شعاع زمین و ω سرعت زاویه ای زمین.

۱۱۷ـ بر اثر نیروی کریولیس جسم سقوط کننده روی زمین به طور افقی و به سمت شرق منحرف می شود. با توجه به دیاگرام نیروها می توان نوشت :

$$ \sum F_y = ma_y \rightarrow mg = ma_y \rightarrow a_y = g \quad (۱) $$

با توجه به اینکه در حین سقوط، نیروی کوریولیس به جسم سرعت افقی می دهد که این سرعت خود می تواند منشأ شتاب کوریولیس دیگری در جهت متفاوت باشد. لذا ما با تقریب خوب از شتاب کوریولیس ناشی از سرعت افقی صرفنظر می کنیم و برای جهت افقی می نویسیم :

$$ \sum F_x = ma_x \rightarrow ۲m\omega v_y = ma_x \rightarrow ۲\omega v_y = a_x \quad (۲) $$

$$ (۱) \text{ از} \rightarrow v_y = gt \rightarrow a_x = ۲\omega(gt) \rightarrow v_x = \omega_g t^۲ $$

$$ \rightarrow x = \frac{۱}{۳}\omega g t^۳ \quad (۳) \ , \ y = \frac{۱}{۲} g t^۲ \rightarrow h = \frac{۱}{۲} g \tau^۲ $$

$$ \rightarrow \tau = \sqrt{\frac{۲h}{g}} $$

با جایگذاری زمان در رابطه (۳) مقدار انحراف به صورت زیر بدست می آید.

$$x = \frac{۱}{۳}\omega g(\frac{۲h}{g})^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{۳}\omega h\sqrt{\frac{۲h}{g}} = ۰/۲۴\ m$$

کار و انرژی

۱۱۸ـ

$$کار = \Delta w = \vec{F}.\Delta\vec{r}$$

$$= (۳\hat{i} + ۴\hat{j}).(۲\hat{i} - ۳\hat{j} - \hat{i} - ۲\hat{j}) = (۳\hat{i} + ۴\hat{j}).(\hat{i} - ۵\hat{j})$$

$$= ۳ - ۲۰ = -۱۷J$$

۱۱۹ـ با توجه به رابطه $v = a\sqrt{s}$ چون همیشه $v \geq ۰$ لذا تغییر جهت نمی دهد و جابجایی با مسافت برابر است. بنابراین :

$$v = \frac{dx}{dt} = a\sqrt{x} \rightarrow \int_۰^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_۰^t adt \rightarrow ۲x^{\frac{۱}{۲}} = at$$

$$\rightarrow x = \frac{a^۲}{۴}t^۲ \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{a^۲}{۲}t \qquad A = \frac{dv}{dt} = \frac{a^۲}{۲}$$

نکته ۱ : می دانیم با توجه به اینکه نیروی لوکوموتیو همواره در راستای x اعمال می شود لذا :

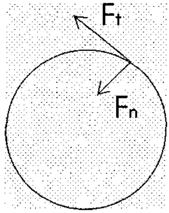
$$w = \int F.dx = \int Fdx$$

نکته ۲ :
$$F = mA \rightarrow w = \int Fdx = \int madx = \int ma(\frac{dx}{dt})dt = \int mavdt$$

با توجه به نکات (۱) و (۲) کار کل نیروها در t ثانیه اول برابر است با :

$$w = \int_۰^t mAvdt = \int_۰^t m(\frac{a^۲}{۲})(\frac{a^۲}{۲}t)dt = m\frac{a^۴}{۴} \times \frac{۱}{۲}t^۲ = \frac{۱}{۸}ma^۴t^۲$$

۱۲۰ـ می دانیم در حرکت دایره ای دو نیروی F_t , F_n در حالت کلی بر جسم وارد می شود. از طرفی چون F_n همیشه عمود بر مسیر حرکت است لذا مقدار کار آن برابر صفر است. بنابراین تنها کار نیروی F_t موجب تغییرات انرژی جنبشی می شود. به کمک قضیه کار و انرژی داریم :



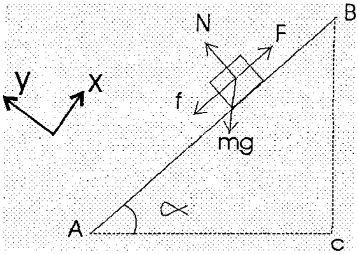
$$w=\Delta T \rightarrow \int F_t ds = T-۰ = as^۲ \rightarrow \frac{d}{ds}(\int F_t ds)=\frac{d}{ds}(as^۲)$$

$$\rightarrow \quad F_t = ۲as$$

از طرفی $T=as^۲ \rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ = as^۲ \rightarrow m\frac{v^۲}{R}=\frac{۲as^۲}{R} \rightarrow F_n=\frac{۲as^۲}{R}$

$$\rightarrow \quad F=\sqrt{F_t^۲+F_n^۲}=\sqrt{۴a^۲s^۲+\frac{۴a^۲s^۴}{R^۲}}=۲as\sqrt{۱+(\frac{s}{R})^۲}$$

۱۲۱ـ چون جسم به آرامی و در حال تعادل بالا برده می شود لذا برایند نیروها وارد بر جسم برابر صفر است. اگر مطابق شکل جزئی از این تپه را در نظر بگیریم همراه با دیاگارم نیرو خواهیم داشت :



$$\sum F_x = ۰ \rightarrow F = mg\cos\alpha k + mg\sin\alpha$$

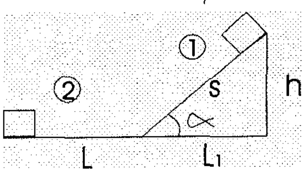
بنابراین کار نیروی F در فاصله جزئی $\overline{AB}$ برابر است با :

$$\Delta w = F\overline{AB} = mgk(\overline{AB}\cos\alpha) + mg(\overline{AB}\sin\alpha) = mgk\overline{AC} + mg\overline{BC}$$

حال اگر ما طول کل تپه را به فاصله های جزئی شبیه AB تقسیم کنیم، مسلماً هر کدام زاویه α متفاوت با دیگر فواصل دارند، اما در هر فاصله کار نیروی F برابر است با ضرب mgk در تصویر افقی آن فاصله بعلاوه ضرب mg در تصویر قائم آن فاصله. بنابراین کار F در طول کل تپه از جمع طولهای تصاویر افقی و قائم تپه به صورت زیر بدست می آید.

$$w = mgk\sum_{i=۱}^{n}(AC)_i + mg\sum_{i=۱}^{n}(BC)_i = mgkL + mgh = mg(kL+h)$$

۱۲۲ـ با توجه به قضیه کار و انرژی داریم :



$$w_f = \Delta E = E_۲ - E_۱ = ۰ - E_۱ = -mgh \qquad (۱)$$

از طرفی $w_f = w_۱ + w_۲ = -(mg\cos\alpha k)s - mgkL \qquad (۲)$

مطابق شکل :

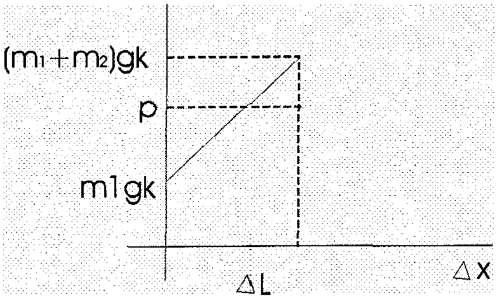
$$s\cos\alpha = L_۱ \qquad \frac{h}{L_۱} = \tan\alpha \qquad (۳)$$

از روابط (۱) تا (۳) $\rightarrow \quad mgL_۱\tan\alpha = mgkL_۱ + mgkL \rightarrow L_۱ = \dfrac{kL}{\tan\alpha - k}$

از (۱) $w_f = -mgh = -mgL_۱\tan\alpha = -mg\tan\alpha(\dfrac{kL}{\tan\alpha - k})$

$$\rightarrow \quad w_f = \frac{-mgkL}{۱ - k\cot an\alpha}$$

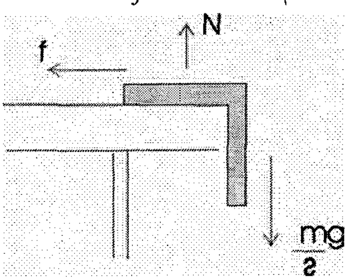
۱۲۳ـ اگر ثابت فنر را برابر k' فرض کنیم، آنگاه تغییرات نیروی متغیر F بر حسب جابجایی جرم $m_۱$ (Δx) را می توان به صورت زیر ترسیم کرد.



بنابراین نیروی متغیر F از $m_۱gk$ شروع می شود تا به مقدار $(m_۱+m_۲)gk$ می رسد. که در این لحظه جرم $m_۲$ در آستانه لغزش قرار می گیرد. بنابر شکل کار نیروی F برابر مساحت زیر نمودار است. حال اگر نیروی ثابت P را درست بین $(m_1+m_2)gk$ و $m_۱gk$ در نظر بگیریم آنگاه کار نیروی P برابر با کار نیروی F است. بنابراین نیروی ثابت P برابر است.

$$P=\frac{(m_۱+m_۲)gk+m_۱gk}{۲}=(m_۱+\frac{m_۲}{۲})gk$$

۱۲۴ـ با فرض یکنواخت بودن جرم زنجیر، اگر w_f کار نیروی اصطکاک باشد، داریم :

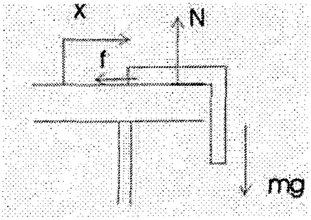


$$w_f=\int f.dx=-\int fdx$$

با توجه به دیاگرام نیرو در ابتدای حرکت می توان نوشت :

$$f=\eta mg \;\rightarrow\; (m-\eta m)gk=\eta mg \;\rightarrow\; k=\frac{\eta}{۱-\eta}$$

حال لحظه ای را در نظر می گیریم که زنجیر به اندازه x جابجا شده است و جرو واحد طول زنجیر λ باشد، آنگاه :



$$f=(m-\eta m-x\lambda)gk \quad , \quad \lambda=\frac{m}{L}$$

$$\rightarrow \quad f=m(۱-\eta-\frac{x}{L})gk$$

$$\rightarrow \quad w_f=-\int_{۰}^{(۱-\eta)L} m(۱-\eta-\frac{x}{L})gkdx$$

$$=-\frac{۱}{۲}mgL\eta(۱-\eta)=-۱/۳۳J$$

۱۲۵- می دانیم توان لحظه ای برابر است با $P=\frac{dw}{dt}$ از طرفی کار، w، نیروی وزن در زمان t را بصورت زیر حساب می شود.

$$w=-mgy=-mg(-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{۰}\sin\alpha t)$$

$$\rightarrow P=\frac{dw}{dt}=-mg(-gt+v_{۰}\sin\alpha)$$

$$\rightarrow \quad P=mg(gt-v_{۰}\sin\alpha)$$

از طرفی در کل مسیر چون کار نیروی وزن برابر صفر است لذا :

$$\overline{P}=\frac{\Delta w}{\Delta t}=\cdot$$

۱۲۶ـ با توجه به اینکه نیروی عمودی F_n همواره بر مسیر عمود است لذا کار آن صفر و توانی ندارد. پس کافی است توان ایجاد شده توسط نیروی مماسی F_t را حساب کنیم. از طرفی :

$$a_n=at\rightarrow\frac{v^{۲}}{R}=at\rightarrow v=\sqrt{Rat}\qquad(۱)$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{Ra}{t}}\qquad(۲)$$

$$\rightarrow\ F_t=ma_t=\frac{m}{۲}\sqrt{\frac{Ra}{t}}\qquad(۳)$$

$$P_t=F_t.v=\frac{m}{۲}\sqrt{\frac{Ra}{t}}\sqrt{Rat}=\frac{۱}{۲}mRa\ \rightarrow$$ توان ثابت و مستقل از زمان است.

۱۲۷ـ الف) $-mgk=ma\rightarrow a=-gk\rightarrow v=-gkt+v_{\cdot}\ \rightarrow$

زمان حرکت $\rightarrow\ \cdot=-gk\tau+v_{\cdot}\ \rightarrow\tau=\dfrac{v_{\cdot}}{gk}$

مسافت کل $\rightarrow v^{۲}-v_{\cdot}^{۲}=۲ax\ \rightarrow\ \cdot-v_{\cdot}^{۲}=-۲gks\ \rightarrow\ s=\dfrac{v_{\cdot}^{۲}}{۲gk}$

$$\overline{P}=\frac{\Delta w}{\Delta t}=\frac{-mgks}{\tau}=\frac{-mgk\times\dfrac{v_{\cdot}^{۲}}{۲gk}}{\dfrac{v_{\cdot}}{gk}}=-\frac{۱}{۲}mgkv_{\cdot}=۲/\cdot۲w$$

ب) $P=\dfrac{dw}{dt}=F.v\qquad -mgk=mA\rightarrow A=-gax\ \rightarrow$

$$vdv=Adx\rightarrow\int_{v_{\cdot}}^{v}vdv=\int_{\cdot}^{x}-gaxdx\rightarrow\ \frac{۱}{۲}(v_{\cdot}^{۲}-v^{۲})=\frac{۱}{۲}gax^{۲}$$

$$\rightarrow \; v=(v_0^2-gax^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P=F.v=-mgax(v_0^2-gax^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dP}{dx}=0 \rightarrow \; -mga(v_0^2-gax^2)^{\frac{1}{2}}-mgax\times\frac{1}{2}(v_0^2-gax^2)^{-\frac{1}{2}}(-2gax)=0$$

$$\rightarrow \; x=\frac{v_0}{\sqrt{2ga}} \; \rightarrow \; P_{\max}=-\frac{1}{2}mv_0^2\sqrt{ga}$$

۱۲۸ـ $w=\int F.dr=\int_{r_1}^{r_2}(mrw^2)dr=\frac{1}{2}mw^2(r_2^2-r_1^2)$

۱۲۹ـ چون دو فنر به صورت سری هستند می توان یک فنر معادل $k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ جایگزین کرد.

$$w=\int Fdx=\int_0^{\Delta L}kxdx=\frac{1}{2}k(\Delta L)^2$$

۱۳۱ـ می دانیم برای هر تابع پتانسیل u ، $F=-\frac{du}{dr}$ حال اگر بخواهیم در حال تعادل باشد باید :

$$F=0=-\frac{du}{dr} \; \rightarrow \; \frac{du}{dr}=-2ar^{-3}+br^{-2}=0$$

$$\rightarrow \ \frac{b}{r_{\circ}^{۲}} = \frac{۲a}{r_{\circ}^{۳}} \ \rightarrow \ r_{\circ} = \frac{۲a}{b}$$

$$\frac{d^{۲}u}{dr^{۲}}\bigg|_{r=r_{\circ}} = ۶ar^{-۴} - ۲br^{-۳}\bigg|_{r=r_{\circ}} = ۶a(\frac{۲a}{b})^{-۴} - ۲b(\frac{۲a}{b})^{-۳} = \frac{b^{۴}}{(۲a)^{۳}} > ۰$$

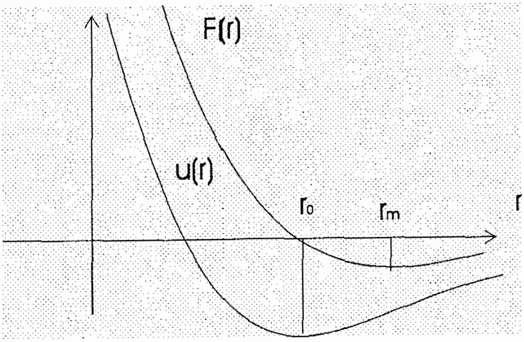
پس تعادل نقطه r_0 به صورت پایدار است.

$$F = -\frac{du}{dr} = ۲ar^{-۳} - br^{-۲} = \frac{۲a}{r^{۳}} - \frac{b}{r^{۲}}$$

برای یافتن ماکزیمم F کافی است قرار دهیم.

$$\frac{dF}{dr} = ۰ \rightarrow -۶ar^{-۴} + ۲br^{-۳} = ۰ \ \rightarrow r = \frac{۶a}{۲b}$$

$$\rightarrow \ F_{\max} = ۲a(\frac{۶a}{۲b})^{-۳} - b(\frac{۶a}{۲b})^{-۲} = -\frac{۱}{۲۷}\frac{b^{۳}}{a^{۲}}$$



۱۳۲- $F_x = -\frac{du}{dx} = -۲\alpha x \qquad F_y = -\frac{du}{dy} = -۲\beta y$

$\rightarrow \quad F = Fx\hat{i} + Fy\,\hat{j} = -۲(\alpha x\hat{i} + \beta y\,\hat{j})$ از طرفی $r = (x\hat{i} + y\,\hat{j})$

چون بردار F در راستای $\vec{r}$ نیست لذا این نیرو مرکزگرا نیست.

برای یافتن سطوح هم پتانسیل کافی است مقدار انرژی پتانسیل را برابر ثابت بگیریم. لذا :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = c \rightarrow \frac{x^2}{\beta} + \frac{y^2}{\alpha} = \frac{c}{\alpha\beta}$$

بنابراین شکل سطوح هم پتانسیل به صورت بیضی هایی است با نسبت قطر $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

از طرفی برای شکل سطوح نیرو ثابت، کافی است اندازه نیرو را ثابت بگیریم. لذا:

$$|\vec{F}| = 4\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2} = \text{ثابت} \rightarrow \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = c = \text{ثابت} \rightarrow$$

شکل این سطوح نیز بیضی است با نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ $\qquad \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{c}{\alpha^2\beta^2}$

۱۳۳ـ نکته ۱ : برای اینکه نیروها تابع پتانسیل داشته باشند باید پایستار باشند. از طرفی شرط پایستار بودن برای یک نیروی دو بعدی $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ به صورت زیر است :

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}$$

نکتهٔ ۲ : شرط پایستار بودن یک نیروی سه بعدی $F = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$ به صورت زیر است :

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{dF_x}{dy} \ , \ \frac{dF_z}{dx} = \frac{dF_x}{dz} \ , \ \frac{dF_z}{dy} = \frac{dF_y}{dz}$$

با توجه به نکتهٔ (۱) برای نیروی $F = ay\,\hat{i}$ می توان نتیجه گرفت :

$$\begin{matrix} F_x = ay \rightarrow \frac{dF_x}{dy} = a \\ F_y = 0 \rightarrow \frac{dF_y}{dx} = 0 \end{matrix} \rightarrow \frac{dF_x}{dy} \neq \frac{dF_y}{dx} \rightarrow$$

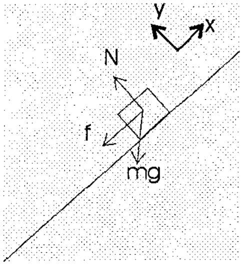
این نیرو تابع پتانسیل ندارد لذا پایستار هم نیست.

برای نیروی $F = ax\,\hat{i} + by\,\hat{j}$ داریم :

این نیرو پایستار و دارای تابع پتانسیل است.

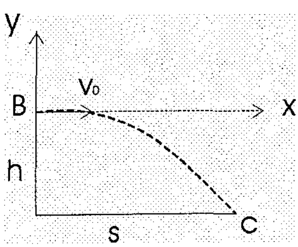
$$\left.\begin{array}{l} F_x = ax \quad \to \quad \dfrac{dF_x}{dy} = ۰ \\ F_y = by \quad \to \quad \dfrac{dF_y}{dx} = ۰ \end{array}\right\} \to$$

۱۳۴ـ با توجه به دیاگرام نیرو داریم :



$$\sum F_x = ma \to -mg\cos\alpha k - mg\sin\alpha = ma \to$$
$$a = -g\,(\cos\alpha k + \sin\alpha)$$
$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax \to ۰ - v_۰^۲ = -۲g(\cos\alpha k + \sin\alpha)\,x$$
$$\to \quad x = \frac{v_۰^۲}{۲g\,(k\cos\alpha + \sin\alpha)}$$
$$w_f = -mgk\cos\alpha\left[\frac{v_۰^۲}{۲g(k\cos\alpha + \sin\alpha)}\right] = -\frac{mk}{۲}\ \frac{v_۰^۲}{k + \tan\alpha}$$

۱۳۵ـ ابتدا سرعت پرتاب دیسک به داخل قسمت افقی را از پایستگی انرژی بدست می آویم.



$$mg(H-h)=\frac{1}{2}mv_0^2 \;\rightarrow\; v_0=\sqrt{2g(H-h)} \qquad (1)$$

اگر نقطه B را مبدأ مختصات بگیریم با توجه به معادلات حرکت پرتابی داریم.

$$\left.\begin{array}{l} x=v_{۰}t \\ y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲} \end{array}\right\} \rightarrow y=-\frac{۱}{۲}g(\frac{x}{v_{۰}})^{۲} \qquad (۲)$$

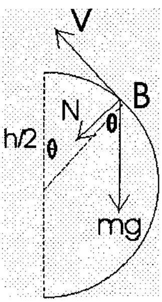
حال مختصات نقطهٔ c را در رابطه (۲) می گذاریم.

$$-h=-\frac{1}{2}g(\frac{s}{v_0})^2 \rightarrow v_0^2h=\frac{1}{2}gs^2 \xrightarrow{\text{از } (1)} 2g(H-h)h=\frac{1}{2}gs^2$$

$$\rightarrow ۲Hh-۲h^{۲}=\frac{۱}{۲}s^{۲} \rightarrow ۴h^{۲}-۴Hh+s^{۲}=۰ \rightarrow h=\frac{۲H\pm\sqrt{۴H^{۲}-۴s^{۲}}}{۴}$$

$$\Delta\geq ۰ \rightarrow s\leq H \rightarrow S_{\max}=H \rightarrow h=\frac{H}{۲}$$

۱۳۶ـ فرض می کنیم جسم در نیمه بالایی نیم دایره در زاویه θ نسبت به خط قائم از سطح جدا شود. می توان قانون دوم نیوتن را در دستگاه مختصات عمودی ـ مماسی به صورت زیر نوشت :



$$\sum F_n=ma_n \rightarrow N+mg\cos\theta=m\frac{v^{۲}}{R}=\frac{mv^{۲}}{\frac{h}{۲}} \qquad (۱)$$

حال به کمک پایستگی انرژی بین دو نقطه A (نقطه شروع) و نقطه B می توان نوشت :

$$mg\,\frac{h}{۲}(۱-\cos\theta)=\frac{۱}{۲}mv^{۲} \qquad (۲)$$

همچنین در لحظه جداشدن $N=۰$ است. از معادلات (۱) و (۲) بدست می آید :

$$\cos\theta=\frac{۲v^{۲}}{gh}\xrightarrow{\text{از (۱)}}v=\sqrt{\frac{gh}{۳}}\;\rightarrow\;\cos\theta=\frac{۲}{۳}\;\rightarrow\;\theta=۴۸/۱^{\circ}$$

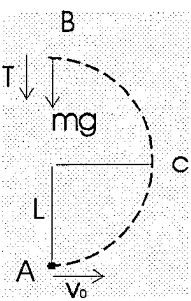
هنگامی که جسم در نقطه B از سطح جدا می شود حرکت به صورت حرکت پرتابه خواهد بود. لذا :

$$v_{۰}=\sqrt{\frac{gh}{۳}}\quad\theta=۴۸/۱$$

بنابراین در ماکزیمم ارتفاع این پرتابه، سرعت قائم صفر است و کل سرعت برابر سرعت افقی اولیه می شود. لذا :

$$v_x=v_{۰}\cos\theta=\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{gh}{۳}}$$

۱۳۷ـ می نیمم سرعت اولیه در A مقداری است که کشش نخ در نقطهٔ B برابر صفر گردد (تنها نیروی وزن، شتاب عمودی می دهد).



حال با توجه به قانون دوم برای نقطهٔ B می توان نوشت :

$$\sum F_n = ma_n \rightarrow mg + T = m\frac{v^۲}{L} \ , \ T = ۰ \rightarrow v^۲ = gL \quad (۱)$$

حال با توجه به قضیه کار و انرژی برای دو نقطهٔ A و B می توان نوشت :

$$\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = ۲mgL + \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow{(۱) \text{از}}$$

$$v_۰^۲ = ۴gL + gL = ۵gL \rightarrow v_۰ = \sqrt{۵gL}$$

ب) ابتدا به کمک پایستگی انرژی سرعت در نقطه C، v_C را بدست می آوریم.

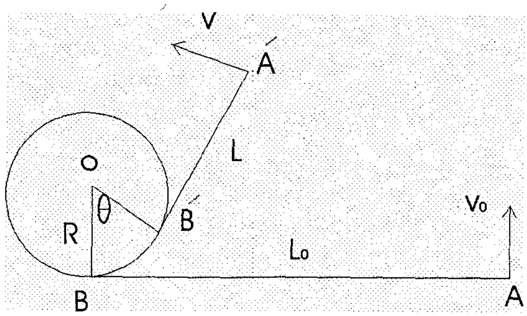
$$\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ = mgL + \frac{۱}{۲}mv_c^۲ \rightarrow ۵kgL - ۲mgL = mv_c^۲$$

$$\rightarrow ۳mg = m\frac{v_c^۲}{L} \quad (۱)$$

با توجه به دیاگرام نیرو در نقطهٔ C داریم :

$$T = m\frac{v_c^۲}{L} \rightarrow T = ۳mg$$

۱۳۸ـ می دانیم تمام نیروهای وارد شده(نیروی وزن، عکس العمل سطح و نیروی کشش ریسمان) بر دیسک A بر مسیر حرکت A عمود هستند لذا بر روی آن کاری انجام نمی دهند بنابراین طبق قضیه کارو انرژی چون انرژی پتانسیل A ثابت است می توان نتیجه گرفت که انرژی جنبشی نیز ثابت است یا سرعت جسم در هر لحظه مقدار ثابتی است. از طرفی هنگامی که نخ دور استوانه می پیچد، نقطه ای که نخ بر استوانه مماس می شود نقطهٔ دوران لحظه ای در آن لحظه خواهد بود لذا می توان سرعت را بر حسب سرعت زاویه ای بدست آورد یعنی : $v_۰ = l_۰\omega_{AB}$ یا $v = l\omega_{A'B'}$



$$v_0 = v \;\rightarrow v_0 = l_0\omega_0 = l\omega \qquad (۱)$$

با توجه به شکل برای زاویه θ، طول طناب در حال دوران در موقعیت جدید به صورت زیر است:

$$L = L_0 - R\theta \qquad (۲)$$

چون در این لحظه نقطهٔ B' مرکز دوران است، لذا :

$$v = (L_0 - R\theta)\omega = (L_0 - R\theta)\frac{d\theta}{dt} \qquad (۳)$$

از (۱) و (۲) و (۳) $\rightarrow \; v_0 = (L_0 - R\theta)\;\dfrac{d\theta}{dt} \;\rightarrow\; (L_0 - R\theta)d\theta = v_0 dt$

از طرفی وقتی کل L_0 دور استوانه پیچیده شود به اندازه $\theta = \dfrac{L_0}{R}$ رادیان پیچیده شده است. بنابراین :

$$\rightarrow \int_0^{\frac{L_0}{R}} (L_0 - R\theta)\; d\theta = \int_0^{\tau} v_0 dt \;\rightarrow\; -\frac{۱}{۲R}(L_0 - R\theta)^۲\Big|_0^{\frac{L_0}{R}} = v_0\tau$$

$$\rightarrow\; -\frac{۱}{۲R}\left[(L_0 - L_0)^۲ - L_0^۲\right] = v_0\tau \;\rightarrow\; \tau = \frac{L_0^۲}{۲Rv_0}$$

۱۳۹ـ با توجه به پایستگی انرژی و اینکه در ماکزیمم کشیدگی طناب، سرعت مهره A برابر

صفر است. لذا :

$$mg(L+y_{max})=\frac{۱}{۲}ky_{max}^{۲} \quad \rightarrow \quad ky_{max}^{۲}-۲mgy_{max}-۲mgL=۰$$

$$\rightarrow \quad y_{max}=\frac{mg\pm\sqrt{(mg)^{۲}+۲mglk}}{k}$$

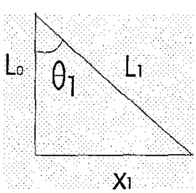
از دو جواب فوق $\frac{mg-\sqrt{\Delta}}{k}$ غیر قابل قبول است زیرا باید $y_{max}>۰$ باشد.

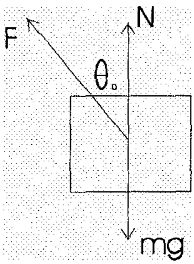
۱۴۰ـ فرض کنیم بعد از پاره شدن نخ PA، جرم A به اندازه x جابجا شود. در نتیجه جرم B نیز به اندازه x پایین می آید. لذا به کمک پایستیگ انرژی می توان نوشت :

$$m_Bgx=\frac{۱}{۲}k(L-L_۰)^{۲}+\frac{۱}{۲}m_Av^{۲}+\frac{۱}{۲}m_Bv^{۲} \qquad m_A=m_B=m \rightarrow$$

$$mgx=\frac{۱}{۲}k(L-L_۰)^{۲}+mv^{۲} \quad (۱)$$

از طرفی در لحظه ای که جسم A از سطح جدا می شود داریم $N=۰$ فرض می کنیم در این لحظه طول فنر L_1 باشد. حال به کمک دیاگرام نیرو می توان نوشت:





$$\sum F_y=۰\rightarrow F\cos\theta_۱+N=mg \;,\; N=۰ \rightarrow$$

$$F\cos\theta_۱=mg \quad (۲)$$

$$F=k(L_۱-L_۰)=\frac{۵mg}{L_۰}(L_۱-L_۰) \qquad (۳)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{L_0}{L_1} \qquad (4)$$

از (۲) و (۳) و (۴) $\rightarrow \quad \frac{5mg}{L_0}(L_1 - L_0)\times\frac{L_0}{L_1} = mg \quad \rightarrow$

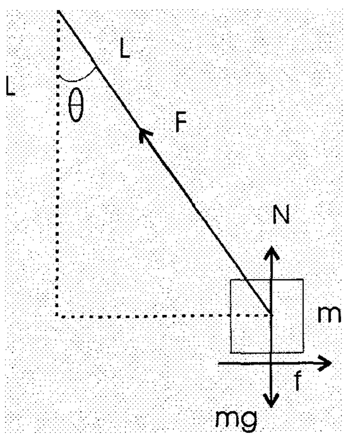
$$L_1 = \frac{5}{4}L_0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \sqrt{L_1^2 - L_0^2} = \frac{3}{4}L_0$$

به کمک رابطه (۱) در لحظه جدا شدن می توان نوشت.

$$mgx_1 = \frac{1}{2}k(L_1 - L_0)^2 + mv_1^2 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}mgL_0 = \frac{1}{2}\frac{5mg}{L_0}(\frac{10^2}{16}) + mv_1^2$$

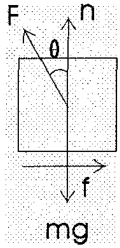
$$\rightarrow \quad v_1 = \sqrt{19g\frac{L_0}{32}} = 1/72 \ \frac{m}{s}$$

۱۴۱ـ اگر مجموعه ریسمان و جسم m را به عنوان سیستم در نظر بگیریم و با فرض اینکه ضریب کشسانی ریسمان برابر K' باشد به کمک قضیه کار و انرژی می توان نوشت :



$$W = \Delta E \ \rightarrow W_f = \frac{1}{2}K'(L - l_0)^2 \qquad (1)$$

از طرفی چون جسم در زاویه $\theta = 30$ در حال تعادل است به کمک دیاگرام نیرو داریم



$$\sum F_y = \cdot \;\rightarrow\; F\cos\theta + N = mg \qquad (۲)$$

$$\sum F_x = \cdot \;\rightarrow\; f = F\sin\theta \qquad (۳)$$

چون جسم در حال لغزش است، بنابراین :

$$f = kN \qquad (۴)$$

از (۲) و (۴) $f = K(mg - F\cos\theta) \xrightarrow{\text{از } (3)} K(mg - F\cos\theta) = F\sin\theta$

$$\rightarrow F(\sin\theta + K\cos\theta) = Kmg \;\rightarrow\; F = \frac{Kmg}{\sin\theta + K\cos\theta} \qquad (۵)$$

از طرفی برای نخ در حال کشش داریم :

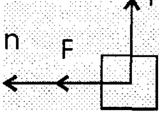
$$f = K'(L - L_\cdot) \qquad (۶) \;\rightarrow\; K'(L - L_\cdot) = \frac{Kmg}{\sin\theta + K\cos\theta} \qquad (۷)$$

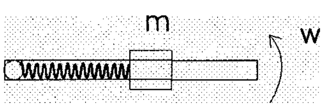
از (۱) و (۷) $\rightarrow\; W_f = \dfrac{Kmg}{۲}\,\dfrac{(L - L_\cdot)}{\sin\theta + K\cos\theta} \;,\; L_\cdot = L\cos\theta$

$$W_f = \frac{KmgL_\cdot}{۲}\,\frac{(\frac{۱}{\cos\theta} - ۱)}{\sin\theta + K\cos\theta} = \frac{KmgL_\cdot}{۲}\,\frac{(۱ - \cos\theta)}{\cos\theta(\sin\theta + K\cos\theta)}$$

۱۴۲ـ با توجه به اینکه سرعت زاویه ای میله ثابت است لذا فقط شتاب عمودی داریم.

بنابراین :





$$\sum F_n = ma_n \rightarrow X(L-L_0) = mL\omega^2 \qquad (1)$$

از طرفی به کمک قضیه کار و انرژی، کار انجام شده برابر است با :

$$W = \Delta E = E_2 - E_1 = E_2 \rightarrow W = \frac{1}{2}X(L-L_0)^2 + \frac{1}{2}m(L\omega)^2 \qquad (2)$$

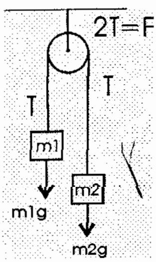
$$\text{از } (1) \rightarrow L = \frac{XL_0}{X - m\omega^2} = \frac{L_0}{1 - \frac{m\omega^2}{X}} \rightarrow n = \frac{m\omega^2}{X} \rightarrow L = \frac{L_0}{1-n}$$

با جایگذاری L در رابطهٔ (۲) داریم :

$$W = \frac{1}{2}X\left(\frac{L_0}{1-n} - L_0\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L_0}{1-n}\omega\right)^2 \rightarrow$$

$$W = \frac{XL_0^2}{2}\left[\left(\frac{1}{1-n} - 1\right)^2 + \frac{m\omega^2}{X}\left(\frac{1}{1-n}\right)^2\right] = \frac{XL_0^2}{2}\left(\frac{n(n+1)}{(1-n)^2}\right)$$

۱۴۳ـ برای یافتن شتاب مرکز جرم باید تمام نیروهایی که به سیستم اجرام وارد می شود را حساب کرده و به کمک قانون دوم شتاب را بدست آورد که این شتاب، همان شتاب مرکزجرم است.



بنابراین با توجه به شکل نیروهای خارجی عبارتند از f و m_1g و m_2g.

لذا با فرض $m_1 > m_2$ داریم :

$$\sum F = (\sum m)a_c \rightarrow m_1g + m_2g - F = (m_1 + m_2)a_c \qquad (1)$$

از طرفی برای ماشین اتوود داریم :

$$\begin{aligned} m_۱ g - T &= m_۱ a \\ T - m_۲ g &= m_۲ a \end{aligned} \rightarrow \frac{m_۱ g - T}{T - m_۲ g} = \frac{m_۱}{m_۲} \rightarrow T = \frac{۲ m_۱ m_۲ g}{m_۱ + m_۲}$$

همچنین از تعادل قرقره داریم :

$$F = ۲T = \frac{۴ m_۱ m_۲ g}{m_۱ + m_۲} \qquad (۲)$$

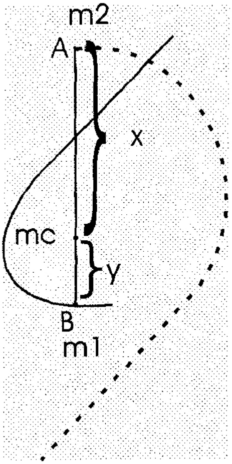
$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow (m_1 + m_2)g - \frac{4 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = (m_1 + m_2)a_c \rightarrow$$

$$a_c = \frac{(m_۱ - m_۲)^۲ g}{(m_۱ + m_۲)^۲}$$

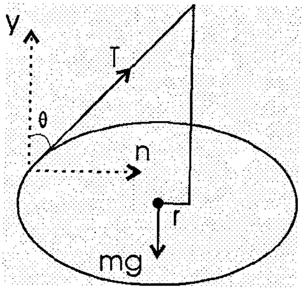
۱۴۴ـ ابتدا به کمک اصل گشتاورها مکان مرکز جرم دو جسم را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$m_۱ g y = m_۲ g x \rightarrow m_۱ y = \frac{m_۱}{۲} x \rightarrow x = ۲y$$

حال اگر نقطهٔ B روی مسیر مربوط به جرم m_1 حرکت کند آنگاه با ثابت بودن m_c و اینکه در هر لحظه $x = ۲y$ ، آنگاه نقطهٔ A ،مکان هندسی جرم m_2 را ترسیم می کند. بنابراین مکان جرم m_2 مطابق شکل شبیه مکان جرم m_1 و به صورت خط چین است.



۱۴۵ـ با توجه به دیاگرام نیرویی می توان نوشت :



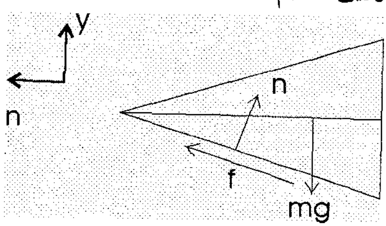
$$\sum F_y = \cdot \;\rightarrow\; T\cos\theta = mg \qquad (۱)$$

$$\sum F_n = ma_n \;\rightarrow\; T\sin\theta = mr\omega^{۲} \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) از $\rightarrow\; \tan\theta = \dfrac{r\omega^{۲}}{g} \;\rightarrow\; r = (\dfrac{g}{\omega^{۲}})\tan\theta = \cdot/۸\ cm$

(۱)از $\rightarrow\; T = \dfrac{mg}{\cos\theta} = ۴/۹۸\,N$

۱۴۶ـ با توجه به دیاگرام نیرویی داریم :



$$\sum F_y = \cdot \;\rightarrow\; N\cos\alpha + f\sin\alpha = mg \qquad (۱)$$

$$\sum F_n = ma_n \;\rightarrow\; f\cos\alpha - N\sin\alpha = mL\omega^{۲} \qquad (۲)$$

با حذف N از روابط فوق داریم :

$$\tan\alpha = \frac{f\cos\alpha - mL\omega^{۲}}{mg - f\sin\alpha}$$

$$\rightarrow\ f = mg(\frac{L\omega^{۲}}{g}\cos\alpha + \sin\alpha) = ۶N \quad (۳)$$

ب) می دانیم برای اینکه مخروط نلغزد باید نیروی اصطکاک کمتر از نیروی اصطکاک در آستانه لغزش باشد. لذا :

$$f < kN \qquad (۴)$$

از روابط (۱) و (۲) با حذف f داریم:

$$\tan\alpha = \frac{mg - N\cos\alpha}{mL\omega^{۲} + N\sin\alpha} \rightarrow\ N = m(g\cos\alpha - L\omega^{۲}\sin\alpha) \qquad (۵)$$

از (۳) و (۴) و (۵)

$$\rightarrow mg(\frac{L\omega^{۲}}{g}\cos\alpha + \sin\alpha) < Km(g\cos\alpha - L\omega^{۲}\sin\alpha)$$

$$\rightarrow \omega^{۲} < \frac{g(K\cos\alpha - \sin\alpha)}{L(\cos\alpha + K\sin\alpha)}$$

$$\rightarrow\ \omega < \sqrt{\frac{g(K - \tan\alpha)}{L(۱ + K\tan\alpha)}} = ۲/۰۱\frac{Rad}{s}$$

۱۴۷ـ فرض می کنیم مرجع k' با سرعت $\vec{v}$ حرکت می کند آنگاه به کمک مفهوم سرعت نسبی، سرعتهای نسبی اجرام $m_۱$, $m_۲$ نسبت به این مرجع برابر است با :

$$\vec{v}_{۱_{/k'}} = \vec{v}_۱ - \vec{v} = v_۱\hat{i} - v\hat{i} = (v_۱ - v)\hat{i}$$

$$\vec{v}_{۲_{/k'}} = \vec{v}_۲ - v = v_۲ - v\hat{i} = (v_۲ - v)\hat{i}$$

که $v_۱, v_۲, v$ می توانند مقادیر مثبت و منفی به خود بگیرند و $\hat{i}$ برداریکه در راستای مثبت محور x.

بنابراین انرژی جنبشی مجموع دوذره در دستگاه k' برابر است با :

$$T=\frac{۱}{۲}m_۱(v_۱-v)^۲+\frac{۱}{۲}m_۲(v_۲-v)^۲$$

برای می نیمم شدن عبارت فوق کافی است مشتق آن را نسبت به v برابر صفر قرار دهیم. لذا :

$$\frac{dT}{dv}=-m_۱(v_۱-v)-m_۲(v_۲-v)=۰ \quad\rightarrow\quad v=\frac{m_۱v_۱+m_۲v_۲}{m_۱+m_۲} \qquad (۱)$$

$$\rightarrow\quad \vec{v}=v\hat{i}=\frac{m_۱v_۱\hat{i}+m_۲v_۲\hat{i}}{m_۱+m_۲}=\frac{m_۱\vec{v}_۱+m_۲\vec{v}_۲}{m_۱+m_۲}$$

ب) $$\text{از }(۱)\rightarrow T=\frac{۱}{۲}m_۱(v_۱-\frac{m_۱v_۱+m_۲v_۲}{m_۱+m_۲})^۲+\frac{۱}{۲}m_۲(v_۲-\frac{m_۱v_۱+m_۲v_۲}{m_۱+m_۲})^۲$$

$$\rightarrow\ T=\frac{m_۱m_۲}{۲(m_۱+m_۲)}(v_۱-v_۲)^۲$$

۱۴۸ـ اگر $\vec{v}$ سرعت مرکز جرم و $\vec{\dot{r}}_i$ سرعت جرم ذره m_i نسبت به دستگاه مرکز جرم باشد (r_i فاصله جرم m_i از مرکز جرم) آنگاه سرعت ذره m_i در دستگاه k برابر است با :

$$\vec{v}_i=\vec{v}+\vec{\dot{r}}_i$$

حال انرژی جنبشی کل مجموعه ذرات در دستگاه k برابر است با :

$$T=\sum\frac{۱}{۲}m_i\vec{v}_i\,.\,\vec{\dot{r}}_i=\frac{۱}{۲}\sum m_i(\vec{v}+\vec{\dot{r}}_i).(\vec{v}+\vec{\dot{r}}_i)=\frac{۱}{۲}\sum m_i(\vec{v})^۲$$

$$+\frac{۱}{۲}\sum m_i(\vec{\dot{r}}_i)^۲+\sum m_i\vec{v}.\vec{\dot{r}}_i \qquad (۱)$$

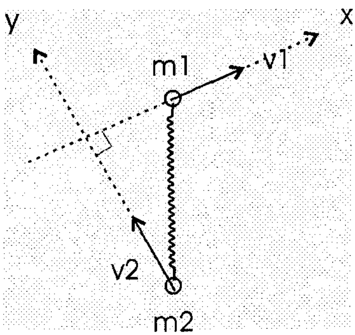
از آنجا که فاصله r_i نسبت به مرکز جرم سنجیده می شود لذا $\sum m_ir_i=0$ بنابراین عبارت آخر در رابطه (۱) برابر است با :

$$\vec{v}.\sum m_i\vec{\dot{r}}_i=\vec{v}.\frac{d}{dt}(\sum m_i\,r_i)=۰$$

د رنتیجه انرژی جنبشی کل در دستگاه k برابر است با :

$$T=\frac{۱}{۲}m(\vec{v})^{۲}+\sum\frac{۱}{۲}m_i(\dot{\vec{r}}_i)^{۲}=\frac{۱}{۲}m(\vec{v})^{۲}+\widetilde{E}$$

۱۴۹ـ ابتدا باید سرعت مرکز جرم را به دست بیاوریم. با توجه به محورهای مختصات و اینکه تکانه خطی مرکز جرم در هر راستا برابر مجموع تکانه های ذرات در راستای مورد نظر است لذا :



$$(m_۱+m_۲)v_{cx}=m_۱v_۱ \;\rightarrow\; v_{cx}=\frac{m_۱v_۱}{m_۱+m_۲}$$

$$(m_۱+m_۲)v_{cy}=m_۲v_۲ \;\rightarrow\; v_{cy}=\frac{m_۲v_۲}{m_۱+m_۲}$$

حال سرعتهای m_1 , m_2 نسبت به دستگاه مرکز جرم c برابر است با :

$$\vec{v}_{۱/c}=\vec{v}_۱-\vec{v}_c=v_۱\hat{i}-(v_{cx}\hat{i}+v_{cy}\hat{j})=(v_۱-v_{cx})\hat{i}-v_{cy}\hat{j}$$

$$=v_۱(۱-\frac{m_۱}{m_۱+m_۲})\hat{i}-\frac{m_۲v_۲}{m_۱+m_۲}\hat{j}=\frac{m_۲}{m_۱+m_۲}(v_۱\hat{i}-v_۲\hat{j}) \qquad (۱)$$

$$\vec{v}_{۲/c}=\vec{v}_۲-\vec{v}_c=v_۲\hat{j}-(v_{cx}\hat{i}+v_{cy}\hat{j})$$

$$=-\frac{m_۱v_۱}{m_۱+m_۲}\hat{i}+v_۲(۱-\frac{m_۲}{m_۱+m_۲})\hat{j}$$

$$=\frac{m_۱}{m_۱+m_۲}(-v_۱\hat{i}+v_۲\hat{j}) \qquad (۲)$$

انرژی جنبشی این دو دیسک نسبت به دستگاه مرکز جرم c برابر است با :

$$T=\frac{1}{2}m_1(v_{1/c})^2+\frac{1}{2}m_2(v_{2/c})^2$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow T=\frac{1}{2}\ \frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{2}\ \frac{m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}(v_1^2+v_2^2)$$

$$\rightarrow T=\frac{1}{2}\ \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1^2+v_2^2)$$

۱۵۰ـ از قانون دوم نیوتن داریم :

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow d\vec{P}=\vec{F}dt \rightarrow \int_{P_0}^{P}d\vec{P}=\int_0^t \vec{F}dt=\int_0^t (m_1+m_2)\vec{g}\,dt$$

$$\rightarrow \vec{P}-\vec{P}_0=(m_1+m_2)\vec{g}t \rightarrow \vec{P}=\vec{P}_0+(m_1+m_2)\vec{g}t$$

از طرفی

$$\vec{P}_0=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{P}=\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\right)+\left(m_1+m_2\right)\vec{g}t \quad , \quad m_1+m_2=m$$

$$\rightarrow \vec{P}=m\vec{v}=m\frac{d\vec{r}}{dt}=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)+m\vec{g}t \rightarrow$$

$$\vec{r}=\int_0^t\left[\frac{1}{m}(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)+\vec{g}t\right]dt=\frac{1}{m}(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

۱۵۱ـ در لحظه ای که جرم ۲ به موقعیت اولیه خود می رسد نیروی فشاری فنر بر جرم ۱ قطع می شود لذا در این لحظه نیروی عکس العمل دیوار وارد بر جرم ۱ صفر می شود و جرم ۱ در آستانه حرکت قرار می گیرد. لذا به کمک قضیه کار و انرژی می توان نوشت :

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (1)$$

از طرفی چون تکانه مرکز جرم برابر جمع تکانه های تک تک اجرام در راستای افقی و در لحظه جدا شدن جرم ۱ تکانه این ذره برابر صفر است لذا می توان نوشت :

$$(m_۱ + m_۲)v_c = ۰ + m_۲ v_۲ \qquad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \quad (m_۱ + m_۲)v_c = m_۲\sqrt{\frac{k}{m_۲}x^۲} \quad \rightarrow \quad v_c = \frac{\sqrt{km_۲}x}{m_۱ + m_۲}$$

حال وقتی جرم m_1 هم از دیوار جدا شد و سرعت به خود گرفت، چون به کل سیستم نیروی خارجی وارد نمی شود لذا مرکز جرم با همان سرعت v_c به مسیر خود ادامه می دهد.

۱۵۲ـ اگر x_2, x_1 به ترتیب موقعیتهای مطلق اجرام m_2, m_1 و x_c موقعیت مطلق مرکز جرم و a_c شتاب آن باشد برای کل مجموعه به کمک قانون دوم نیوتن می توان نوشت :

$$F = (m_۱ + m_۲)a_c \qquad (۱)$$

نکته۱ : جابجایی نیرو ی F برابر با جابجایی جرم $m_۲$، $x_۲$، است.

نکته ۲: در حداکثر کشیدگی سرعت نسبی اجرام m_2, m_1 نسبت به مرکز جرم برابر صفر است. یعنی در حداکثر کشیدگی داریم: $V_۱ = V_۲ = V_c = V$

به کمک قضیه کارو انرژی در لحظه حداکثر کشیدگی $\Delta l_{\max}$ و با توجه به اینکه کار نیروی F برابر Fx_2 است، می توان نوشت :

$$W = \Delta k \rightarrow Fx_۲ = \frac{۱}{۲}m_۱V^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲V^۲ + \frac{۱}{۲}k(\Delta l_{\max})^۲ \qquad (۲)$$

چون نیرو ثابت است لذا شتاب مرکز جرم نیز ثابت می باشد.

$$V^۲ = V_c^۲ = ۲a_c x_c \rightarrow x_c = \frac{V_c^۲}{۲a_c} \qquad (۳)$$

$$, \Delta l_{\max} = x_۲ - x_۱ \qquad (۴)$$

همچنین به کمک مفهوم مرکز جرم و با توجه به رابطه (۴) داریم :

$$(m_۱ + m_۲)x_c = m_۱x_۱ + m_۲x_۲ = m_۱(x_۲ - \Delta l_{\max}) + m_۲x_۲$$

$$\rightarrow (m_1+m_2)x_c = x_2(m_1+m_2) - m_1\Delta l_{\max}$$

$$\rightarrow x_2 = x_c + \frac{m_1\Delta l_{\max}}{m_1+m_2} \qquad (5)$$

از روابط (۲) ، (۳) و (۵) می توان نوشت :

$$F\left(\frac{V^2}{2a_c}+\frac{m_1\Delta l_{\max}}{m_1+m_2}\right)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+\frac{1}{2}k(\Delta l_{\max})^2 \qquad (6)$$

$$\text{از رابطه (۱)} \rightarrow \frac{F}{a_c}=m_1+m_2 \rightarrow F\left(\frac{V^2}{2a_c}\right)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 \qquad (7)$$

$$\text{از (۶) و (۷)} \; F\left(\frac{m_1\Delta l_{\max}}{m_1+m_2}\right)=\frac{1}{2}k(\Delta l_{\max})^2 \rightarrow \Delta l_{\max}=\frac{2m_1F}{k(m_1+m_2)}$$

در حالت خاص که $m_1 = m_2$ است داریم :

$$\Delta l_{\max}=\frac{F}{k}$$

۱۵۳ـ حداقل ΔL هنگامی است که در لحظه بلند شدن جرم پایینی، جرم بالایی بدون سرعت باشد. حال با فرض اینکه جرم بالایی به اندازه $\Delta L'$ از طول اولیه فنر، L_0، بالاتر رود و نیروی عکس العمل سطح وارد بر جرم پائینی در لحظه بلند شدن صفر باشد. به کمک قضیه کار و انرژی داریم :

$$W=\Delta E=0 \rightarrow \frac{1}{2}K(\Delta L)^2=\frac{1}{2}K(\Delta L')^2+mg(\Delta L'+\Delta L) \qquad (1)$$

همچنین از قانون دوم نیوتن برای جرم پایینی در لحظه بلند شدن داریم :

$$\sum F_y=0 \rightarrow K(\Delta L')=mg \rightarrow \Delta L'=\frac{mg}{k}$$

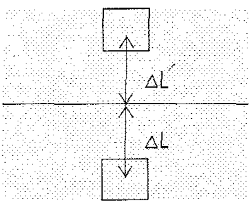
$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow (\Delta L)^2-\frac{2mg}{k}\Delta L-(\Delta L')^2-\frac{2mg}{k}\Delta L'$$

$$\rightarrow (\Delta L)^{۲}-\frac{۲mg}{k}\Delta L-\frac{۳(mg)^{۲}}{k^{۲}}=۰ \quad \rightarrow (\Delta L-\frac{۳mg}{k})(\Delta L+\frac{mg}{k})=۰$$

بنابراین حداقل تغییر طول باید $\frac{۳mg}{k}$ باشد، لذا :

$$\Delta L>\frac{۳mg}{k}$$

ب) برای یافتن ارتفاع ماکزیمم مرکز جرم ابتدا باید سرعت پرتاب اولیه آن را حساب کنیم تا به کمک پرتابه ارتفاع ماکزیمم حساب شود. در لحظه ای که جرم پایینی در آستانه جدا شدن از زمین است (N = ۰)، جرم بالایی دارای سرعت v است. حال مطابق قسمت الف می توان نوشت :



$$\frac{۱}{۲}k(\Delta L)^{۲}=\frac{۱}{۲}k(\Delta L')^{۲}+mg(\Delta L+\Delta L')+\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

$$k\Delta L'=mg$$

$$\rightarrow \quad \frac{۱}{۲}k(\frac{۴۹(mg)^{۲}}{k^{۲}}-\frac{(mg)^{۲}}{k^{۲}})-mg\frac{۸mg}{k}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

$$\rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{۳۲mg^{۲}}{k}}$$

حال سرعت مرکز جرم با توجه به برابری دو جرم، مساوی است با متوسط سرعت دو جرم

$$v_c=\frac{۱}{۲}(v+۰)=\sqrt{\frac{۸mg^{۲}}{k}}$$

از این لحظه به بعد مسأله یک حرکت پرتابی داریم که با سرعت اولیه v_c پرتاب می شود لذا ارتفاع بالا رفتن $h_۱$ برابر است با :

$$v_c = \sqrt{۲gh_۱} \rightarrow \sqrt{\frac{۸mg^۲}{k}} = \sqrt{۲gh_۱} \rightarrow h_۱ = \frac{۴mg}{k}$$

از طرفی موقعی که جرم بالایی از موقعیت اولیه خود به اندازه $\Delta L + \Delta L'$ بالا می رود.

مرکز جرم از موقعیت اولیه تا لحظه پرتاب به اندازه $h_۲ = \frac{\Delta L + \Delta L'}{۲}$ جابجا شده است

لذا ارتفاعی که در مجموع مرکز جرم می پیماید برابر است با :

$$h = h_۱ + h_۲ = \frac{۴mg}{k} + \frac{\Delta L + \Delta L'}{۲} = \frac{۴mg}{k} + \frac{۴mg}{k} = \frac{۸mg}{k}$$

بقای تکانه خطی

۱۵۴ـ اگر مجموع دو چهار چرخه و افراد سوار بر آنها را به عنوان سیستم در نظر بگیریم چون نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر است لذا بقای اندازه حرکت خطی بر سیستم برقرار است.

$$(m+M)\vec{v}_۲+(m+M)\vec{v}_۱=(m+M)\vec{v}+۰ \rightarrow \vec{v}_۲+\vec{v}_۱=\vec{v} \qquad (۱)$$

از طرفی برای متحرک ۱ هنگامی که دو فرد پرش می کند هیچ نیرویی در راستای افق وارد نمی شود لذا باز بقای اندازه حرکت برای چهار چرخه ۱ و فردی که از چهار چرخه ۲ بر روی آن می برد صادق است. چون سرعت نهایی این چهار چرخه صفر است لذا :

$$m\vec{v}_۲+M\vec{v}_۱=۰ \rightarrow m\vec{v}_۲=-M\vec{v}_۱ \qquad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \vec{v}_۲(۱-\frac{m}{M})=\vec{v} \rightarrow \vec{v}_۲=\frac{M\vec{v}}{M-m}\ ,\ v_۱=\frac{-m\vec{v}}{M-m}$$

نکته : می شد بجای رابطه (۲)، بقای اندازه حرکت خطی را برای ارابه ۲ و فردی که از ارابهٔ (۱) بر روی آن می پرد نوشت. لذا :

$$Mv_۲-mv_۱=(M+m)v$$

۱۵۵ـ اگر $\vec{v}_2 , \vec{v}_1$ سرعتهای چهار چرخه های عقبی و جلو بعد از پرش باشد به کمک رابطه سرعت نسبی سرعت مطلق فرد بعد از چهار چرخه عقبی برابر است با $\vec{v}=\vec{v}_۱+\vec{u}$. حال به کمک برقراری بقای تکانهٔ خطی برای هر چهارچرخه داریم :

$$\text{چهارچرخه عقبی}: (M+m)\vec{v}_0 = M\vec{v}_1 + m(\vec{v}_1+\vec{u}) \qquad (1)$$

$$\text{چهارچرخه جلو}: m(\vec{v}_1+\vec{u}) + M\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}_2 \qquad (2)$$

$$\text{از (۱)} \rightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_0 - \frac{m}{M+m}\vec{u} \qquad (3)$$

$$\text{از (۲) و (۳)} \rightarrow \vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{mM}{(M+m)^2}\vec{u}$$

۱۵۶ـ الف) ابتدا به کمک رابطه سرعت نسبی، سرعت مطلق هر فرد هنگام پریدن را بدست می آوریم که برابر است با $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u}$ از طرفی به کمک بقای تکانه خطی برای کل سیستم در حالت اولیه و ثانویه داریم :

$$M\vec{v}_1 + 2m\vec{v} = 0 \ \rightarrow \ M\vec{v}_1 + 2m(\vec{v}_1+\vec{u}) = 0$$

$$\rightarrow \ \vec{v}_1 = \frac{-2m\vec{u}}{M+2m} \qquad (1)$$

ب) اگر $\vec{v}_2$ سرعت چهار چرخه بعد از خروج فرد اول باشد آنگاه :

$$(M+m)\vec{v}_2 + m(\vec{v}_2+\vec{u}) = 0 \ \rightarrow \ \vec{v}_2 = \frac{-m\vec{u}}{M+2m} \qquad (2)$$

حال در لحظه ای که فرد دوم می پرد به کمک بقای تکانهٔ خطی داریم :

$$(M+m)\vec{v}_2 = M\vec{v}_3 + m(\vec{v}_3+\vec{u}) \ \rightarrow \ \vec{v}_3 = \frac{(M+m)\vec{v}_2 - m\vec{u}}{M+m}$$

$$\rightarrow \ \vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \frac{m\vec{u}}{M+m} = \frac{-m\vec{u}}{M+2m} - \frac{m\vec{u}}{M+m}$$

$$= \frac{-m(2M+3m)}{(M+2m)(M+m)}\vec{u} \qquad (3)$$

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{(2M+3m)}{2(M+m)} = 1 + \frac{m}{2(M+m)}$$

۱۵۷ـ اگر N نیروی عکس العمل سطح و x فاصله سقوط طی شده توسط سر بالایی زنجیر و ρ چگالی واحد طول آن باشد، آنگاه به کمک رابطه $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ و با توجه به اینکه سرعت زنجیر هنگامیکه به اندازه x پایین بیاید برابر با $\sqrt{۲gx}$ است. می توان نوشت :

$$N-\rho gx=\rho\sqrt{۲gx}\times\sqrt{۲gx}\rightarrow N=۳\rho gx$$

۱۵۸ـ با توجه به اصول سینماتیک سرعت اولین برخورد برابر است با $v_۱=\sqrt{۲gh}$ و سرعت برگشت با توجه به فرض برابر است با $v_۲=\frac{۱}{\eta}v_۱=\frac{۱}{\eta}\sqrt{۲gh}$ اگر از مقاومت هوا صرف نظر شود توپ با همین سرعت v_2 با سطح برخورد می کند اما با سرعت v_3 که برابر است با $v_۳=\frac{۱}{\eta}v_۲=\frac{۱}{\eta^۲}\sqrt{۲gh}$ از سطح بلند می شود و همین طور عمل تکرار می شود بنابراین تکانه ای که توپ به سطح وارد می کند مجموع همه این تکانه ها است حال اگر جهتی که به سمت سطح است را مثبت در نظر بگیریم آنگاه کل تکانه برابر است با :

$$\Delta p=[mv_۱-(-mv_۲)]+[mv_۲-(-mv_۳)]+[mv_۳-(-mv_۴)]+\ldots\ldots$$
$$=m\sqrt{۲gh}\left[(۱+\frac{۱}{\eta})+(\frac{۱}{\eta}+\frac{۱}{\eta^۲})+(\frac{۱}{\eta^۲}+\frac{۱}{\eta^۳})+\ldots\ldots\right]$$
$$=m\sqrt{۲gh}\left[۱+۲(\frac{۱}{\eta}+\frac{۱}{\eta^۲}+\frac{۱}{\eta^۳}+\ldots\ldots)\right]$$

با توجه به اینکه داخل پرانتز یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{\eta}$ است لذا حد مجموع آن به صورت زیر نوشته می شود :

$$\Delta p = m\sqrt{2gh}\left[1+2\frac{\frac{1}{\eta}}{1-\frac{1}{\eta}}\right] = m\sqrt{2gh}\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right) = 1/99\ km\frac{m}{s}$$

۱۵۹ـ با توجه به حرکت نسبی، مسافت طی شده $\vec{L}_1$ توسط فرد نسبت به ساحل (مسافت مطلق) برابر است با :

$$\vec{L}_1 = \vec{L} + \vec{L}'$$

از طرفی با توجه به برقراری بقای اندازه حرکت خطی برای کل سیستم (ثابت بودن مرکز جرم) داریم :

$$M\vec{L} + m\vec{L}_1 = 0 \ \rightarrow \ M\vec{L} + m(\vec{L} + \vec{L}') = 0 \ \rightarrow \ \vec{L} = \frac{-m\vec{L}'}{M+m}$$

ب) اگر $\vec{v}_m$ سرعت مطلق فرد و $\vec{v}_M$ سرعت مطلق قایق باشد به کمک رابطه سرعت نسبی می توان نوشت :

$$\vec{v}_m = \vec{v}_M + \vec{v}'$$

به کمک بقای تکانۀ خطی داریم :

$$M\vec{v}_M + m\vec{v}_m = 0 \ \rightarrow \ M\vec{v}_M' + m(\vec{v}_M + \vec{v}') = 0$$

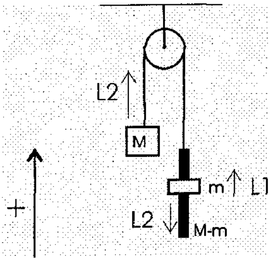
$$\rightarrow \ v_M = \frac{-m\vec{v}'}{M+m}$$

با مشتق گیری از رابطه فوق داریم :

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{-m}{M+m}.\frac{d\vec{v}'}{dt} \ \rightarrow \ F = Ma_M = M\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{-mM}{M+m}\frac{d\vec{v}'}{dt}$$

۱۶۰ـ با توجه به اینکه سیستم در حال تعادل است لذا جرم نردبان برابر $M - m$ می باشد. از طرفی اگر L_1 مسافت مطلق جرم m و L_2 مسافت مطلق جرم M باشد آنگاه نردبان

مسافت L_2 به سمت پایین می پیماید (مطابق شکل) همچنین از حرکت نسبی داریم :



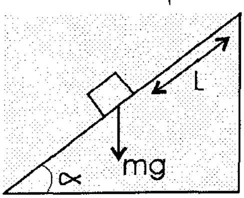
$$L' = L_1 - (-L_2) = L_1 + L_2$$

نکته ۲ : چون جرم m کوچکتراز M است لذا مسافت مطلق m یعنی L_1 به سمت بالا خواهد بود. حال به کمک گشتاورها (مفهوم مرکز جرم) و فرض اینکه مرکز جرم کل به اندازه L جابجا شود داریم :

$$[M + m + (M - m)]L = ML_2 + mL_1 + (M - m)(-L_2)$$

$$\rightarrow 2ML = m(L_1 + L_2) = mL' \quad \rightarrow \quad L = \frac{mL'}{2M}$$

۱۶۱ـ ابتدا سرعت توپ را در فاصله L به کمک قضیه کار و انرژی بدست می آوریم. با صرفنظر کردن جرم گلوله در برابر توپ داریم :



$$\frac{1}{2}Mv^2 = MgL\sin\alpha \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gL\sin\alpha}$$

حال در راستای سطح شیبدار قانون دوم نیوتن را می نویسیم :

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \rightarrow (Mg\sin\alpha)\Delta t = P_2 - P_1 = -P_1 = -(Mgv - P\cos\alpha)$$

نکته : با توجه به اینکه گلوله با تکانه P پرتاب شده است لذا تکانـه P- در راستای افـق بـه توپ وارد می شود.

$$\to (Mg\sin\alpha)\Delta t = (P\cos\alpha - M\sqrt{۲gL\sin\alpha})$$

$$\to \Delta t = (P\cos\alpha - M\sqrt{۲gL\sin\alpha})/Mg\sin\alpha$$

۱۶۲ـ با توجه بـه اینکـه در راستای افـق بـه مجمـوع اجـرام M و m نیـروی خـارجی وارد نمی شود لذا بقای تکانه خطی در این راستا برقرار است. بنابراین :

v_m : سرعت ذره قبل از ذره

$$mv_m = (m+M)v \qquad (۱)$$

v : سرعت مجموعه بعد از برخورد

حال بعد از برخورد به کمک قضیه کار و انرژی داریم :

$$W = \Delta E = ۰ \to \frac{۱}{۲}(m+M)v^۲ = (m+M)gL(۱-\cos\theta) \qquad (۲)$$

$$\text{از(۱) و (۲)} \to \frac{۱}{۲}(m+M)(\frac{mv_m}{m+M})^۲ = (m+M)gL(۱-\cos\theta) \to$$

$$\to v_m = \frac{۲(M+m)}{m}\sin\frac{\theta}{۲}\sqrt{gL}$$

ب)

$$\left.\begin{aligned} E_۱ &= \frac{۱}{۲}mv_m^۲ \\ E_۲ &= \frac{۱}{۲}(m+M)v^۲ \end{aligned}\right\} \to Q = E_۱ - E_۲$$

$$\eta = \frac{Q}{E_۱} = \frac{E_۱ - E_۲}{E_۱} = ۱ - \frac{E_۲}{E_۱} = ۱ - \frac{(m+M)v^۲m^۲}{m(m+M)^۲v^۲}$$

$$= ۱ - \frac{m}{m+M} \simeq ۱ - \frac{m}{M}$$

۱۶۳ـ اگر سرعت جرم M برابر v_M باشد با توجه به رابطه سرعت نسبی، سرعت مطلق m ،

v_m ، برابر است با : $v_m = v - v_M$

حال با توجه به بقای تکانهٔ خطی در راستای افق برای کل مجموعه و قبل از پرتاب داریم :

$$mv_m = Mv_M \to m(v - v_M) = Mv_M \to mv = (m+M)v_M$$

با توجه به اینکه تکانه خطی کل قبل از پرتاب m ، صفر است لذا بعد از پرتاب جرم m نیز باید صفر باشد. از طرفی هنگامی که جرم در راستای قائم پرتاب می شود، تکانه افقی آن صفر است بنابراین چون کل تکانه باید در راستای افق باشد، لذا بعد از پرتاب m، سرعت جرم M نیز صفر می شود. حال به کمک پایستگی انرژی می توان نوشت :

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = mgh \to \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{Mv_M}{m}\right)^2 + Mv_M^2\right] = mgh$$

$$\to \frac{1}{2}Mv_M^2\left[\frac{M}{m}+1\right] = mgh \to \frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2\left[\frac{M}{m}+1\right] = mgh$$

$$\to h = \frac{Mv^2}{2g(M+m)}$$

۱۶۴ـ به کمک قضیه کار و انرژی داریم :

$$W_f = \Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 - mgh \qquad (1)$$

از طرفی برای مجموعه اجرام m و M بقای تکانهٔ خطی در راستای افق برابر است. لذا :

$$mv_m = (m+M)v \qquad (2)$$

از قانون پایستگی انرژی داریم :

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = mgh \to v_m = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

از (۱)و(۲)و(۳) $\to W_f = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}\right)^2 - mgh$

$$= \frac{m^2gh}{M+m} - mgh$$

$$\rightarrow W_f = \frac{-mM}{M+m} gh$$

ب) بله

۱۶۵ـ فرض کنید ناظر و سنگ در درون آسانسوری که با سرعت ثابت v_0 به سمت پایین می آید قرار داشته باشند. اگر مختصات مکان و سرعت ناظر و سنگ نسبت به دستگاه مرجع ساکن زمین به ترتیب x_1, v_1 و x_2, v_2 باشد آنگاه برای ارتفاع نسبی سقوط h داریم :

$$x_2 - x_1 = h$$

$$x_1 = v_0 t$$

$$x_2 = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

$$x_2 - x_1 = h \rightarrow h = \frac{1}{2} g \tau^2 \rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_1 = v_0 \qquad v_2 = gt + v_0$$

$$\rightarrow v_2 - v_1 = (g\tau + v_0) - v_0 = g\tau = \sqrt{2gh}$$

همانطور که ملاحظه می شود نسبت به ناظر با سرعت ثابت v_0 ، سرعت سقوط بعد از طی ارتفاع نسبی h ، همان مقداری است که برای یک ناظر ساکن برای ارتفاع مطلق h رخ می دهد.

۱۶۶ـ با توجه به بقای تکانه خطی برای مجموعه دو جرم در سه جهت x , y , z داریم :

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 10^{-3}(3\hat{i} - 2\hat{j}) + 2\times 10^{-3}(4\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$\rightarrow 3\times 10^{-3} \ \vec{v} = 10^{-3}\left[3\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}\right] \rightarrow \ \vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\rightarrow |\vec{v}| = 4/58 \ \frac{m}{s^2}$$

۱۶۷ـ با توجه به بقای تکانه خطی داریم:

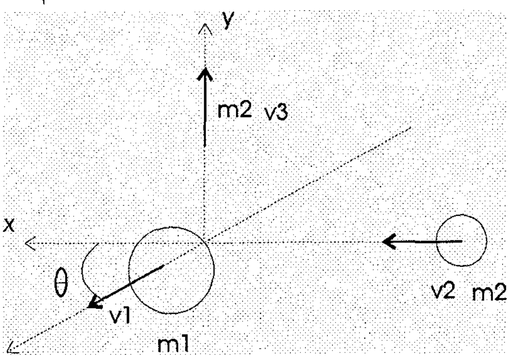
$$(m_1+m_2)\vec{v}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\Delta E=-\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2}-\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2}+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{v}^{\,2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-m\vec{v}_1^{\,2}-m_2\vec{v}_2^{\,2}-\frac{(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)^2}{m_1+m_2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{-m_1m_2\vec{v}_1^{\,2}-m_1m_2\vec{v}_2^{\,2}+2m_1m_2\vec{v}_1\vec{v}_2}{m_1+m_2}=\frac{-m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2$$

۱۶۸ـ الف) با توجه به بقای تکانه خطی در جهت x و y برای سیستم دو جرمی داریم:



x جهت : $m_2v_2=m_1v_1\cos\theta \qquad (1)$

y جهت : $0=m_2v_3-m_1v_1\sin\theta \rightarrow m_2v_3=m_1v_1\sin\theta \qquad (2)$

از پایستگی انرژی نیز داریم:

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_3^2 \qquad (3)$$

از (۱) و (۲) $\rightarrow m_2^2(v_2^2+v_3^2)=m_1^2v_1^2 \qquad (4)$

$$\text{از (۳) و (۴)} \rightarrow m_2(v_2^2 - v_3^2) = m_1\left[\left(\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\left(v_2^2 + v_3^2\right)\right]$$

$$\rightarrow \quad v_3^2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2^2$$

$$\eta = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_2 v_3^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} = 1 - \frac{v_3^2}{v_2^2} = 1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

ب) در این حالت یک راستا بیشتر نداریم. لذا :

$$\text{بقای تکانه} : m_2 v_2 = m_1 v_1 + m_2 v_3 \qquad (1)$$

$$\text{پایستگی انرژی} : \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_3^2 \qquad (2)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \; m_2(v_2^2 - v_3^2) = m_1\left(\frac{m_2(v_2 - v_3)}{m_1}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad m_1(v_2^2 - v_3^2) = m_2(v_2 - v_3)^2$$

چون $v_2 \neq v_3$ لذا :

$$m_۱(v_۲ + v_۳) = m_۲(v_۲ - v_۳) \rightarrow v_۳ = \frac{m_۲ - m_۱}{m_۱ + m_۲} v_۲$$

$$\eta = \frac{\Delta E}{E} = ۱ - \frac{v_۳^۲}{v_۲^۲} = ۱ - \left(\frac{m_۲ - m_۱}{m_۱ + m_۲}\right)^۲ = \frac{۴m_۱m_۲}{(m_۱ + m_۲)^۲}$$

۱۶۹ـ با استفاده از بقای تکانه خطی برای کل سیستم داریم :

$$m_۱v_۱ = m_۲v - m_۱v \rightarrow m_۱v_۱ = (m_۲ - m_۱)v \qquad (۱)$$

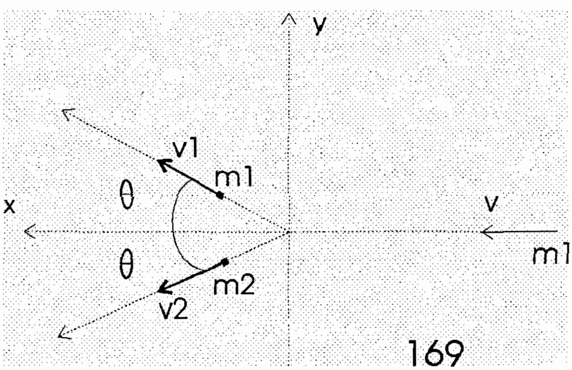
از پایستگی انرژی داریم :

$$\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v^۲ \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) $m_۱v_۱^۲ = (m_۱ + m_۲)\left(\frac{m_۱v_۱}{m_۲ - m_۱}\right)^۲ \rightarrow \frac{m_۱(m_۱ + m_۲)}{(m_۲ - m_۱)^۲} = ۱$

$$\rightarrow m_۱^۲ + m_۱m_۲ = m_۱^۲ + m_۲^۲ - ۲m_۱m_۲ \rightarrow ۳m_۱m_۲ = m_۲^۲ \rightarrow \frac{m_۱}{m_۲} = \frac{۱}{۳}$$

ب) با توجه به بقای تکانه خطی در دو راستای x و y داریم :



$$m_۱ v = (m_۱ v_۱ + m_۲ v_۲)\cos\theta \quad (۱)$$
$$m_۱ v_۱ \sin\theta = m_۲ v_۲ \sin\theta \rightarrow m_۱ v_۱ = m_۲ v_۲ \quad (۲)$$

از پایستگی انرژی داریم :

$$\frac{۱}{۲} m_۱ v^۲ = \frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ v_۲^۲ \qquad (۳)$$

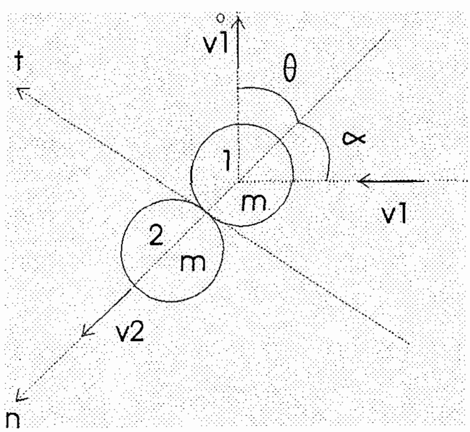
از (۱) و (۲) $\rightarrow m_1 v = 2m_1 v_1 \cos\theta \rightarrow v_1 = \dfrac{v}{2\cos\theta}\ ,\ v_2 = \dfrac{m_1 v}{2m_2 \cos\theta}$

از (۳) $\rightarrow\ m_۱ v^۲ = m_۱ (\dfrac{v}{۲\cos\theta})^۲ + m_۲ (\dfrac{m_۱ v}{۲ m_۲ \cos\theta})^۲$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{4\cos^2\theta} + \frac{m_1}{4m_2\cos^2\theta}\ \rightarrow\ 4m_2\cos^2\theta = m_2 + m_1$$

$$\rightarrow\ m_۲(۴\cos^۲\theta - ۱) = m_۱\ \ \rightarrow\ \ \frac{m_۱}{m_۲} = ۴\cos^۲\theta - ۱ = ۲$$

۱۷۰ـ با توجه به بقای تکانه خطی در راستای عمودی و مماسی $(t\ ,\ n)$ و با توجه بـه اینکـه گلوله ۲ در راستای عمودی n فقط سرعت دارد لذا می توان نوشت :



$$mv_1 \sin\alpha = mv_1' \sin\theta \qquad (1)$$
$$mv_1 \cos\alpha = mv_2 - mv_1' \cos\theta \qquad (2)$$

از پایستگی انرژی :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m(v_1')^2 \rightarrow v_1^2 = v_2^2 + (v_1')^2 \qquad (3)$$

$$\text{(۲) و (۱) از} \rightarrow \; v_1^2 = v_2^2 + (v_1')^2 - 2v_2v_1'\cos\theta \qquad (4)$$

$$\text{(۴) و (۳) از} \rightarrow \; \cos\theta = 0 \xrightarrow{\text{(۲),(۱) از}}$$
$$v_1' = v_1 \sin\alpha \;,\; v_1\cos\alpha = v_2 \quad (5)$$

در حداکثر تغییر شکل سرعت عمودی v_1 صفر می شود و به شکل پتانسیل در می آید و بعد از برخورد این انرژی به جرم دیگر داده می شود، سرعت مماسی بدون تغییر می ماند. لذا :

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

۱۷۱ـ در ابتدا فرض می کنیم جسم در حال سکون به سه قسمت با جرمهای مساوی تقسیم شود. با توجه به اینکه نیروی خارجی به سیستم وارد نمی شود، لذا بقای تکانه خطی برقرار است. حال از نظر فیزیکی می توان گفت ماکزیمم سرعت یکی از اجرام هنگامی است که دو تا از آنها در یک جهت و جرم سوم در جهت مخالف با آن دو حرکت کند. بنابراین اگر v_1 سرعت دو جرم و v_3 سرعت جرم سوم باشد، از بقای تکانه خطی داریم :

$$\frac{m}{3}v_1 + \frac{m}{3}v_1 = \frac{m}{3}v_3 \rightarrow \frac{v_3}{2} = v_1 \qquad (1)$$

حال اگر خود جسم در حال حرکت با سرعت v باشد، می توان گفت که سرعت مرکز جرم نیز $v_C = v$ خواهد بود. از طرفی ماکزیمم سرعت جرم سوم در این حالت وقتی است که در جهت v_C باشد. در نتیجه سرعت اجسام برابر خواهد بود با :

جرم سوم: $v_3' = v_c + v_3$

دو جرم اول و دوم: $|v_1 - v_c|$

مرکز جرم: v_c

به کمک فرض مسأله می توان نوشت:

$$E_2 = \eta E_1 \rightarrow$$

$$2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)(v_1 - v_c)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)(v_3 + v_c)^2 = \eta\left(\frac{1}{2}mv_c^2\right)$$

$$2(v_1 - v_c)^2 + (v_3 + v_c)^2 = 3\eta v_c^2$$

$$\text{از (1)} \rightarrow 2\left(\frac{v_3}{2} - v_c\right)^2 + (v_3 + v_c)^2 = 3\eta v_c^2$$

$$\frac{3}{2}v_3^2 = 3v_c^2(\eta - 1) \rightarrow v_3 = v_c\sqrt{2(\eta - 1)}$$

لذا سرعت مطلق ماکزیمم جرم v_3 برابر است با :

$$v_3' = v_c + v_3 = v_c\left(1 + \sqrt{2(\eta - 1)}\right)$$

۱۷۲ـ اگر فرض کنیم ذره ۱ در اثر برخورد در همان جهت اولیه خود و با سرعت v_1 حرکت کند آنگاه :

$$mv = mv_1 + mv_2 \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به درصد اتلاف انرژی داریم :

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2\right)}{\frac{1}{2}mv^2} = \eta \rightarrow 1 - \eta = \frac{v_1^2 + v_2^2}{v^2} \qquad (2)$$

$$\text{از (1) و (2)} \rightarrow 1 - \eta = \frac{v_1^2 + (v - v_1)^2}{v^2} \rightarrow 2v_1^2 - 2vv_1 + \eta v^2 = 0$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2\eta v^2}}{2} = \frac{v}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 2\eta}) \qquad (3)$$

حال برای اینکه ببینیم جواب مثبت قابل قبول است یا منفی و یا هر دو کافی است حالتی را در نظر بگیریم که $\eta=0$ باشد (حالت کاملاً کشسان) در این حالت معادلات به صورت زیر است :

$$\left.\begin{array}{lll} v=v_1+v_2 & \rightarrow & (v-v_1)^2=v_2^2 \\ v^2=v_1^2+v_2^2 & \rightarrow & v^2-v_1^2=v_2^2 \end{array}\right\} \rightarrow (v-v_1)^2=v^2-v_1^2 \rightarrow$$

$$v-v_1=v+v_1 \rightarrow v_1=0 \rightarrow v_2=v \qquad (4)$$

از روابط (۳) و (۴) می توان نتیجه گرفت که برای $\eta=0$ باید $v_1=0$ شود لذا جواب منفی قابل قبول است. لذا :

$$v_1=\frac{v}{2}(1-\sqrt{1-2\eta})=5\frac{cm}{s}$$

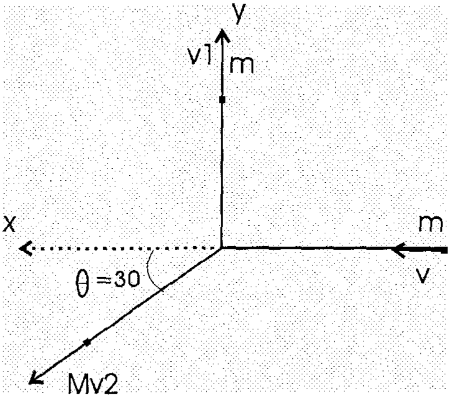
نکته : امکان داشت کسی معادلات حالت کاملاً کشسان را به صورت زیر حل کند.

$$\left.\begin{array}{lll} v=v_1+v_2 & \rightarrow & (v-v_2)^2=v_1^2 \\ v^2=v_1^2+v_2^2 & \rightarrow & v^2-v_2^2=v_1^2 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow (v-v_2) = (v+v_2) \rightarrow \begin{array}{l} v_2=0 \\ v_1=v \end{array}$$

که این جواب با فیزیک سازگار نیست زیرا بعد از برخورد گلوله ۲ ایستاده سر راه گلوله ۱ و گلوله ۱ و گلوله همچنان به مسیر با همان سرعت ادامه می دهد که این غیر ممکن است لذا باید $v_1=0$, $v_2=v$ باشد.

۱۷۳ـ با توجه به بقای اندازه حرکت در دو راستای x و y داریم :



$$mv = Mv_۲ \cos\theta \qquad (۱)$$

$$mv_۱ = Mv_۲ \sin\theta \qquad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \frac{mv_۱}{mv} = \tan\theta \rightarrow v_۱ = v\tan\theta \qquad (۳)$$

$$\frac{\Delta T}{t} = \frac{\frac{۱}{۲}mv^۲ - \left(\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + \frac{۱}{۲}Mv_۲^۲\right)}{\frac{۱}{۲}mv^۲} = ۱ - \frac{v_۱^۲}{v^۲} - \frac{Mv_۲^۲}{mv^۲}$$

$$= (۱ - \tan^۲\theta) - \frac{M}{mv^۲}\left(\frac{mv}{M\cos\theta}\right)^۲$$

$$= (۱ - \tan^۲\theta) - \frac{m}{M}(۱ + \tan^۲\theta)$$

$$= (۱ - \frac{m}{M}) - \tan^۲\theta(۱ + \frac{m}{M}) = ۴۰\%$$

انرژی جنبشی به اندازه ۴۰٪ در اثر برخورد کاهش یافته است.

۱۷۴ـ با توجه به اینکه تکانه کل سیستم با سرعت مرکز جرم $\vec{v}_C$ برابر است با مجموع تکانه های تک تک اجرام لذا:

$$(m_۱ + m_۲)\vec{v}_C = m_۱\vec{v}_۱ + m_۲\vec{v}_۲$$

$$\rightarrow \quad \vec{v}_c = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$$

تکانه خطی ذره ۱ نسبت به چهار چوب مرکز جرم برابر است با :

$$\vec{P}_{1/c} = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_c) = m_1(\vec{v}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

از طرفی چون $\vec{v}_1$ بر $\vec{v}_2$ عمود است لذا اندازه این تکانه برابر است با :

$$|\vec{P}_{1/c}| = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

به طریق مشابه اندازه تکانه خطی ذره ۲ نسبت به مرکز جرم برابر است با :

$$|\vec{P}_{2/c}| = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

ب)

$$T = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_c)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_c)^2$$

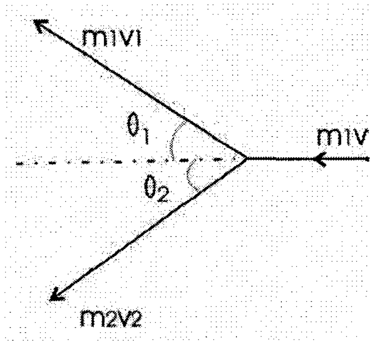
$$= \frac{1}{2}m_1(\frac{m_2}{m_1 + m_2})^2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2(\frac{m_1}{m_1 + m_2})^2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2$$

از طرفی چون $\vec{v}_1$ بر $\vec{v}_2$ است لذا :

$$(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1^2 + v_2^2)$$

۱۷۵ــ فرض کنید v_1 و v_2 سرعتهای نهایی و θ_1 و θ_2 زوایای پراکندگی به ترتیب جرمهای m_1 و m_2 باشد. با توجه به قانون بقای تکانه خطی در دو راستا و پایستگی انرژی می توان نوشت :



$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \qquad (1)$$
$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2 \qquad (2)$$
$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (3)$$

در روابط (۱) و (۲) جملاتی که شامل θ_1 هستند به طرف چپ تساوی برده و به توان دو می رسانیم و دو عبارت را با هم جمع می کنیم. بنابراین :

$$(m_1 v - m_1 v_1 \cos\theta_1)^2 + (m_1 v_1 \sin\theta_1)^2 = (m_2 v_2)^2 \quad \rightarrow$$
$$m_1^2 (v^2 + v_1^2 - 2 v v_1 \cos\theta_1) = m_2^2 v_2^2 \qquad (4)$$
(۴) و (۳) از $\rightarrow \; m_1 (v^2 + v_1^2 - 2 v v_1 \cos\theta_1) = m_2 (v^2 - v_1^2)$

$$\rightarrow \; (m_1 + m_2) v_1^2 - (2 m_1 v \cos\theta_1) v_1 + (m_1 - m_2) v^2 = 0$$

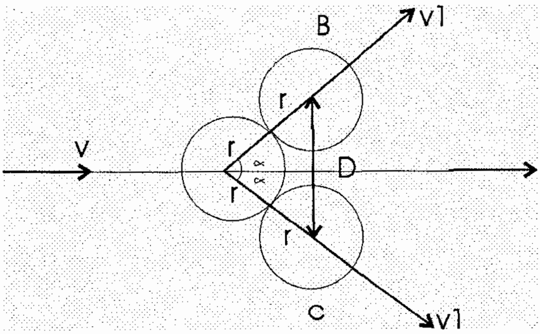
معادله درجه دوم فوق برای مجهول v_1 وقتی دارای جواب است که دلتا غیر منفی $(\Delta \geq 0)$ باشد بنابراین :

$$\Delta \geq 0 \; \rightarrow \; (2 m_1 v \cos\theta_1)^2 - 4 (m_1 + m_2)(m_1 - m_2) v^2 \geq 0$$

$$\rightarrow \; m_1^2 (1 - \cos^2\theta_1) \leq m_2^2 \; \rightarrow \; m_1^2 \sin^2\theta_1 \leq m_2^2 \; \rightarrow \; \sin\theta_1 \leq \frac{m_2}{m_1}$$

بنابراین حداکثر θ_1 وقتی است که $\sin\theta_{max} = \dfrac{m_2}{m_1}$

۱۷۶ـ به کمک تقارن مسأله و برابری تمام جرم ها می توان گفت که دیسک A بعد از برخورد در امتداد اولیه حرکت خواهد کرد و سرعتهای اجرام B و C بعد از برخورد با هم برابر و مساوی v_1 است. حال با توجه به اینکه برخورد به صورت کشسان رخ می دهد لذا در راستای مماسی بر دیسکهای B و C نیرویی وارد نمی شود. بنابراین این دو دیسک بعد از برخورد در راستای خط المرکزین برخورد حرکت خواهند کرد. اگر سرعت دیسک A بعد از برخورد v_2 باشد به کمک بقای تکانه و پایستگی انرژی داریم :



$$mv = ۲mv_۱ \cos\alpha + mv_۲ \qquad (۱)$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mv_۱^۲ + \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \qquad (۲)$$

در عبارت فوق، v_2 می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \left(\frac{v-v_۲}{۲\cos\alpha}\right)^۲ = \frac{v^۲-v_۲^۲}{۲}$$

$$\text{با شرط } v \neq v_۲ \rightarrow \frac{v-v_۲}{۲\cos^۲\alpha} = v+v_۲ \rightarrow v_۲ = \frac{v(۱-۲\cos^۲\alpha)}{۱+۲\cos^۲\alpha} \qquad (۳)$$

حال با توجه به شکل از مثلث مرکزها می توان نوشت :

$$\eta D = \sqrt{D^۲ + D^۲ - ۲D^۲\cos ۲\alpha} \rightarrow \eta D = ۲D\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{\eta}{۲}$$

از پایستگی انرژی داریم :

$$۱/۲mv_۱^۲ = ۱/۲mv_۲^۲ + ۱/۲mv_۳^۲ \qquad (۳)$$

اگر عبارات (۱) و (۲) را به توان دو رسانده با هم جمع کنیم ، خواهیم داشت:

$$v_۱^۲ = v_۲^۲ + v_۳^۲ - ۲v_۲v_۳\cos\theta_۲ \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) $\rightarrow ۲v_۲v_۳\cos\theta_۲ = ۰ \rightarrow \cos\theta_۲ = ۰ \rightarrow \theta_۲ = ۹۰ \rightarrow \theta = ۹۰$

ب) اگر برخورد کشسان نباشد آنگاه $v_۱^۲ > v_۲^۲ + v_۳^۲$ از رابطه (۴) می توان نوشت:

$$\rightarrow ۲v_۲\,v_۳\cos\theta_۲ > ۰ \rightarrow \cos\theta_۲ < ۰ \rightarrow \theta_۲ \neq ۹۰ \rightarrow \theta \neq ۹۰$$

$$\rightarrow \quad \cos^{۲}\alpha = ۱ - \frac{\eta^{۲}}{۴} \qquad (۴)$$

$$\text{از (۳) و (۴)} \rightarrow v_{۲} = \frac{v\left[۱-۲\left(۱-\frac{\eta^{۲}}{۴}\right)\right]}{۱+۲\left(۱-\frac{\eta^{۲}}{۴}\right)} \rightarrow v_{۲} = \frac{(-۲+\eta^{۲})v}{(۶-\eta^{۲})}$$

همانطور که از رابطه ملاحظه می شود می توان نتیجه گرفت :

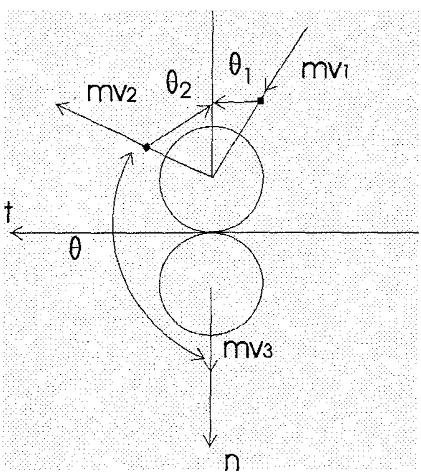
$\eta = \sqrt{۲} \quad v = ۰$

$\eta > \sqrt{۲} \quad v > ۰$

$\eta < \sqrt{۲} \quad v < ۰$

نکته : برای اینکه برخورد صورت گیرد باید $\eta < ۲$ باشد لذا ریشه $\sqrt{۶}$ در محاسبه علامت سرعت وارد نمی شود.

۱۷۷ـ الف) از بقای تکانه خطی در دو راستای t,n داریم:



$$mv_1 \sin\theta_1 = mv_2 \sin\theta_2 \qquad (1)$$

$$mv_1 \cos\theta_1 = mv_3 - mv_2 \cos\theta_2 \qquad (2)$$

جرم متغیّر

۱۷۸ـ می توان با مشتق گیری مستقیم از معادله $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ به جواب رسید. به شرط اینکه دستگاهی با جرم کل ثابت انتخاب شود. حالتی را که در نظر می گیریم که موشک به جرم m ، جرم $m_{\circ}$ را به یکباره و بدون آشفتگی از دست بدهد لذا جرم $m + m_{\circ}$ برای کل سیستم ثابت است. همچنین نیروی خارجی وارد بر دستگاه، $\sum F$، مستقیماً به m وارد می شود. بنابراین :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(mv + m_{\circ}v_{\circ}) = m\dot{v} + \dot{m}v + \dot{m}_{\circ}v_{\circ} + m_{\circ}\dot{v}_{\circ}$$

از بقای جرم می دانیم $\dot{m}_{\circ} = -\dot{m}$ و سرعت جرم خارج شده نسبت به m برابر $u = v - v_{\circ}$ است.

چون $m_{\circ}$ بدون هیچ شتابی به یکباره از m جدا می شود لذا $\dot{v}_{\circ} = \circ$. پس رابطه فوق به صورت زیر در می آید :

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u = ma + \dot{m}u$$

۱۷۹ـ چون نیروی خارجی به موشک وارد نمی شود لذا $\Sigma F = \circ$

$$\circ = m\dot{v} + \dot{m}u \rightarrow \frac{\dot{v}}{u} = -\frac{\dot{m}}{m} \rightarrow -\frac{1}{u}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} \rightarrow$$

$$\int_{\circ}^{v} \frac{dv}{u} = -\int_{m_{\circ}}^{m} \frac{dm}{m} \rightarrow \frac{v}{u} = -\ln\frac{m}{m_{\circ}} \rightarrow v = -\frac{1}{u}\ln\frac{m}{m_{\circ}}$$

۱۸۰-

$$\sum F = 0 \rightarrow \; ma + \dot{m}a = 0$$

$$\rightarrow \; \frac{\dot{m}}{m} = -\frac{a}{u} \; \rightarrow \; \int_{m_0}^{m} \cdot \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\int_{0}^{v} dv$$

$$\rightarrow \; \ln\frac{m}{m_0} = -\frac{v}{u}$$

چون شتاب ثابت است لذا v = at بنابراین :

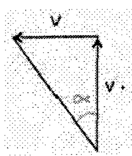
$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{at}{u} \; \rightarrow \; m = m_0 e^{-\frac{at}{u}}$$

۱۸۱-

$$\sum F = 0 \; \rightarrow \; ma + \dot{m}u = 0 \; \rightarrow \; m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \; \rightarrow$$

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = \int_{0}^{v} -\frac{1}{u}dv = \ln\frac{m}{m_0} = -\frac{v}{u} \; \rightarrow \; v = u\ln\frac{m_0}{m}$$

v سرعت عرضی موشک است حال به کمک شکل و با فرض کوچک بودن α داریم :



$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{v}{v_0} = \frac{u}{v_0}\ln\frac{m_0}{m}$$

۱۸۲- با توجه به اینکه شن در راستای افق نسبت به واگن بدون سرعت نسبی رها می شود لذا u = ۰ است بنابراین به کمک قانون دوم نیوتن برای جرم متغیر در راستای افقی داریم :

$$\sum F_x = ma + \dot{m}u \; \rightarrow \; F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_0 - \mu t}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{F}{m_{\circ}-\mu t}\rightarrow \int_{\circ}^{v} dv=\int_{\circ}^{t} \frac{F}{m_{\circ}-\mu t}dt$$

$$\rightarrow v=-\frac{F}{\mu}\ln(m_{\circ}-\mu t)\Big|_{\circ}^{t}$$

$$\rightarrow v=-\frac{F}{\mu}(\ln(m_{\circ}-\mu t)-\ln m_{\circ})\rightarrow v=\frac{F}{\mu}\ln\frac{m_{\circ}}{m_{\circ}-\mu t}$$

$$\rightarrow a=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m_{\circ}-\mu t}$$

۱۸۳ـ چون شن ها در راستای افقی سرعت ندارند لذا $u=v-\circ=v$ بنابراین:

$$\sum F=ma+\dot{m}u\rightarrow F=ma+\mu v\rightarrow F=m\frac{dv}{dt}+\mu v$$

$$\rightarrow F-\mu v=(m_0+\mu t)\frac{dv}{dt}\rightarrow \int_0^{v}\frac{dv}{F-\mu v}=\int_0^{t}\frac{dt}{m_0+\mu t}$$

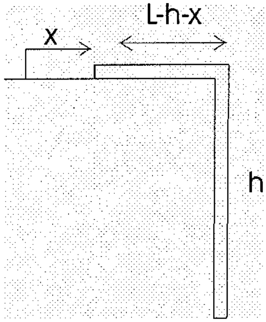
$$\rightarrow -\frac{\text{۱}}{\mu}\ln(F-\mu v)\Big|_{\circ}^{v}=\frac{\text{۱}}{\mu}\ln(m_{\circ}+\mu t)_{\circ}^{t}\rightarrow \ln\frac{F}{F-\mu v}=\ln\frac{m_{\circ}+\mu t}{m_{\circ}}$$

$$\rightarrow Fm_{\circ}=F(m_{\circ}+\mu t)-\mu v(m_{\circ}+\mu t)\rightarrow v=\frac{Ft}{m_{\circ}+\mu t}$$

$$\rightarrow v=\frac{F}{m_{\circ}}t(\text{۱}+\frac{\mu}{m_{\circ}}t)^{-\text{۱}}$$

$$\rightarrow a=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m_0}(1+\frac{\mu}{m_0}t)^{-2}$$

۱۸۴ـ می دانیم در ابتدا طول $L-h$ در درون لوله است. وقتی زنجیر به اندازه x پایین می آید طول درون لوله برابر $L-h-x$ می شود. از طرفی طول قسمت قائم همواره h است. حال اگر کشش زنجیر بین دو قسمت قائمت و افقی برابر T باشد، با توجه به اینکه جرم واحد طول λ باشد از قانون دوم نیوتن کمک گرفته می نویسیم :



$$T=(L-h-x)\lambda a \quad (۱)$$
$$h\lambda g - T = h\lambda a \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\rightarrow h\lambda g=(L-x)\lambda a \rightarrow a=\dfrac{hg}{L-x}$

از طرفی همواره داریم :

$$\rightarrow vdv = adx$$
$$\rightarrow \int_0^v vdv = \int_0^{L-h} adx \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \int_0^{L-h} \frac{hg}{L-x}dx$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}v^2 = -hg\ln(L-x)\Big|_0^{L-h}$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}v^2 = hg\ln\frac{L}{h} \rightarrow \quad v=\sqrt{2hg\ln\frac{L}{h}}$$

نکته ۱ : چون زنجیر به صورت قطعات منفصل است لذا زنجیری که به میز می رسند نیرویی بر قسمت قائم زنجیر وارد نمی کنند.

نکته ۲ : چون زنجیر در حین برخورد با میز انرژی از دست می دهد لذا نمی توان از پایستگی انرژی استفاده کرد.

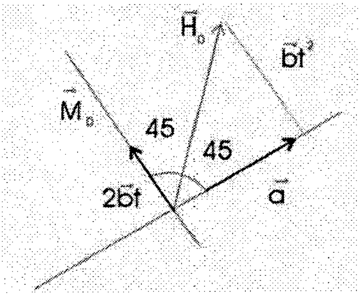
۱۸۵ـ می دانیم اگر گشتاورهای وارد بر یک ذره نسبت به نقطهٔ O ، M_O باشد و تکانه زاویه ای ذره نسبت به این نقطه برابر H_O باشد آنگاه رابطه زیر برقرار است :

$$\sum \overrightarrow{M}_O = \frac{d\overrightarrow{H}_O}{dt} = \dot{\overrightarrow{H}}_O$$

بنابراین :

$$\overrightarrow{M}_O = \frac{d\overrightarrow{H}_O}{dt} = ۲\vec{b}t$$

با توجه به شکل چون زاویه بین $\overrightarrow{H}_O$ و $\overrightarrow{M}_O$ برابر °۴۵ شده است لذا زاویه بین $\overrightarrow{H}_O$ و بردار $\vec{a}$ نیز ۴۵ درجه می شود. لذا :



$$\tan ۴۵° = \frac{|\vec{b}|t^۲}{|\vec{a}|} \rightarrow t = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{M}_O = ۲\vec{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

بقای تکانه زاویه ای

۱۸۶ـ

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times (m\vec{v}) = m(x\hat{i} + y\hat{j}) \times (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$$

از طرفی $\overrightarrow{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}$

$$\rightarrow \quad \overrightarrow{M} = m(x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}$$

همچنین برای حرکت پرتابه داریم :

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \qquad v_x = \dot{x} = v_0 \cos\alpha$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \qquad v_y = \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$\rightarrow \overrightarrow{M} = m\left[(v_0 \cos\alpha)t(-gt + v_0 \sin\alpha) - v_0 \cos\alpha\left(-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t\right)\right]\hat{k}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{M} = mv_0 \cos\alpha(-\frac{1}{2}gt^2)\hat{k} \ \rightarrow \ |\overrightarrow{M}| = \frac{1}{2}mv_0 \cos\alpha g t^2 \qquad (1)$$

ب) ابتدا زمان t را در ارتفاع بیشینه به دست می آوریم :

$$0 = -gt + v_0 \sin\alpha \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

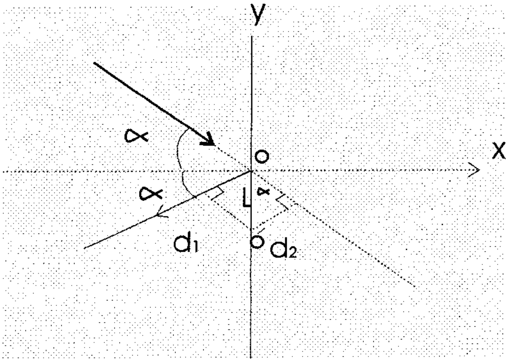
از (۱) $\rightarrow \quad |\overrightarrow{M}| = \frac{1}{2}m\, v_0^3 \sin^2\alpha \cos\alpha / g = 36/6 \ kg\frac{m^2}{s}$

۱۸۷ـ با توجه به ثابت بودن سرعت (کشسان بودن برخورد) برای اینکه اندازه تکانه زاویه ای بعد از برخورد ثابت بماند باید داشته باشیم :

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m|\vec{v}||\vec{r}\sin\alpha| = m|\vec{v}|d \qquad (۱)$$

d فاصله عمودی راستای بردار سرعت تا مبدأ دلخواه می باشد. بنابراین نقاطی می توانند خواسته مسأله را داشته باشند که از راستای بردارهای سرعت قبل و بعد از برخورد به یک فاصله باشند (دارای d یکسان باشند). از هندسه شکل پیداست که نقاط روی خط عمود بر خط OO' و گذرنده از O دارای این خاصیت می باشند.

ب) تکانه زاویه ای در دو حالت قبل و بعد از برخورد را محاسبه می کنیم و از تغییرات بردار تکانه زاویه ای را به دست می آوریم. لذا :



$$(\vec{M}_{O'})_۱ = \vec{r} \times m\vec{v} = -md_۱ v\hat{k}$$

$$(\vec{M}_{O'})_۲ = md_۲ v\hat{k}$$

$\hat{k}$: برداری که در راستای محور z

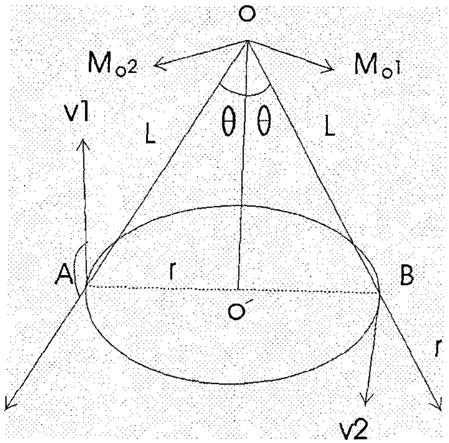
از شکل می توان دریافت :

$$d_۱ = d_۲ = L\cos\alpha \ \rightarrow \ \Delta\vec{M} = ۲mLv\cos\alpha\,\hat{k}$$

۱۸۸ـ چون جرم و سرعت توپ ثابت است. طبق رابطه شمارهٔ (۱) مسأله ۱۸۷ برای اینکه تکانه زاویه ای ثابت بماند باید فاصله عمودی راستای بردار سرعت یعنی d ثابت بماند. همانطور که واضح است نقاطی که روی خط گذرنده از مرکز دایره می باشند دارای این

خاصیت هستند.

ب) برای یافتن تکانه زاویه ای نسبت به نقطهٔ O' (نقطهٔ آویز) با توجه به شکل و استفاده از تجسم می توان نوشت :



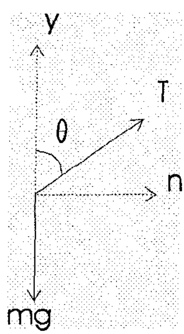
۱ـ بردارهای $\vec{M}_{O_1}$ و $\vec{M}_{O_2}$ در یک صفحه هستند.

۲ـ $OB \perp \vec{M}_{O_2}, OA \perp \vec{M}_{O_1}$

۳ـ $|\vec{M}_{O_1}| = |\vec{M}_{O_2}| = Lmv = Lm(\omega(L\sin\theta)) = mL^2\omega\sin\theta$

۴ـ زاویه بین $\vec{M}_{O_1}$ و $\vec{M}_{O_2}$ برابر است با $180 - 2\theta$

۵ـ از دیاگرام نیرویی داریم :



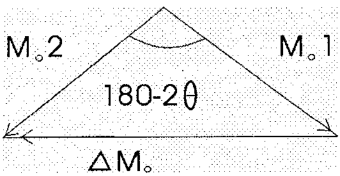
$$\left.\begin{array}{l}\sum F_y = ۰ \quad \rightarrow \quad T\cos\theta = mg \\ \sum F_n = ma_n \quad \rightarrow \quad T\sin\theta = mr\omega^۲\end{array}\right\} \rightarrow \tan\theta = \frac{r\omega^۲}{g} = \frac{L\sin\theta\omega^۲}{g}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{g}{L\omega^۲} \rightarrow \sin\theta = \sqrt{۱-(\frac{g}{L\omega^۲})^۲}$$

از نکات ۳ و ۵ می توان بدست آورد که :

$$|\vec{M}_{O_۱}| = |\vec{M}_{O_۲}| = mL^۲\omega\sqrt{۱-(\frac{g}{L\omega^۲})^۲}$$

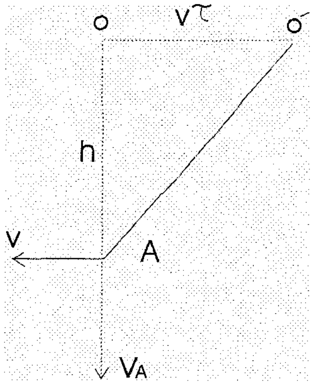
حال به کمک تفاصل بردارها داریم :



$$|\Delta\vec{M}_O| = |\vec{M}_{O_۲} - \vec{M}_{O_۱}| = ۲|\vec{M}_{O_۲}|\sin(۹۰-\theta)$$

$$= ۲|\vec{M}_{O_۲}|\cos\theta = ۲mL^۲\omega\frac{g}{L\omega^۲}\sqrt{۱-(\frac{g}{L\omega^۲})^۲} = \frac{۲mgL}{\omega}\sqrt{۱-(\frac{g}{L\omega^۲})^۲}$$

۱۸۹ـ اگر نقطهٔ O با سرعت v به سمت راست حرکت کند ناظری که بر روی توپ A سوار است احساس می کند که با سرعت افقی v به سمت چپ در حال دور شدن از نقطهٔ O است. با توجه به اینکه نقطهٔ A نسبت به O' (بعد از اینکه به اندازه h سقوط کرد) دارای سرعت افقی v و سرعت قائم $\sqrt{۲gh}$ است. و از طرفی تکانه زاویه ای A برابر جمع جبری تکانه های زاویه ای مؤلفه های سرعت A است. بنابراین:



$$\vec{M}_{A/o} = mv_A\overline{OO'} - mvh = mv_A(v\tau) - mvh$$

$$h = \frac{۱}{۲}g\tau^{۲} \;\rightarrow\; \tau = \sqrt{\frac{۲h}{g}} \quad , \quad v_A = \sqrt{۲gh}$$

$$\rightarrow \quad \vec{M}_{A/o} = mv\sqrt{۲gh}\times\sqrt{\frac{۲h}{g}} - mvh = mvh$$

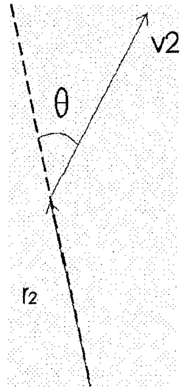
نکته : علامت منفی به خاطر این است که بردار تکانه زاویه ای حول O' ناشی از سقوط به سمت بیرون صفحه است در حالیکه بردار تکانه زاویه ای حول O' ناشی از حرکت نسبی O' به سمت داخل صفحه است.

۱۹۰ـ چون دیسک بدون اصطکاک است لذا مسیر جسم نسبت به دستگاه مرجع ساکن به صورت خط مستقیم می باشد. بنابراین در زمان T جسم مسافت $v_\circ t = x$ را می پیماید که همان فاصله r از مرکز است. حال در دستگاه متصل به دیسک، جسم دارای دو سرعت v_0 و $r\omega$ است که چون امتداد $v_\circ$ از مرکز می گذرد در نتیجه اندازه حرکتی ندارد بنابراین اندازه حرکت زاویه ای کل ناشی از سرعت $r\omega$ است.

$$H_O = rm(r\omega) = m\omega r^{۲} = m\omega(v_\circ t)^{۲}$$

۱۹۱ـ نکته این مسأله در این است که در دورترین و نزدیکترین موقعیت، بردار سرعت بر

بردار $\overrightarrow{r}$ عمود است. دلیل این است که اگر مطابق شکل در دورترین موقعیت بردار v_2 عمود بر $r_۲$ نباشد آنگاه ذره در راستای r سرعت دارد و می تواند در این راستا ادامه مسیر دهد در نتیجه می تواند موقعیت دورتری را کسب کند که این نتیجه با فرض مسأله مغایرت دارد.



مشابه این استدلال برای نزدیکترین مکان نیز صادق است. از طرفی با توجه به اینکه نیروی r مرکزگراست لذاگشاور حاصل از آن صفر است. لذا بقای تکانه زاویه ای برقرار است. بنابراین $(\sin\theta = 1)$.

$$mr_۱v_۱ = mr_۲v_۲ \rightarrow \frac{r_۲}{r_۱} = \frac{v_۱}{v_۲} \rightarrow \left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^۲ - ۱ = \left(\frac{v_۱}{v_۲}\right)^۲ - ۱ \qquad (۱)$$

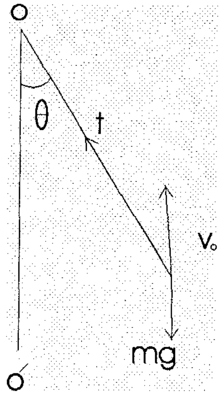
از پایستگی انرژی داریم.

$$\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + kr_۱^۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ + kr_۲^۲ \qquad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow m(v_۱^۲ - v_۲^۲) = ۲k(r_۲^۲ - r_۱^۲) \rightarrow m = ۲k\frac{r_۱^۲\left[\left(\frac{r_۲}{r_۱}\right)^۲ - ۱\right]}{v_۲^۲\left[\left(\frac{v_۱}{v_۲}\right)^۲ - ۱\right]}$$

$$\to \quad m=\frac{۲kr_۱^۲}{v_۲^۲}$$

۱۹۲ـ با توجه به اینکه نیروی کشش ریسمان با محور OO' متقاطع است و همچنین نیروی وزن نیز با این محور موازی است لذا این نیروها گشتاوری حول محور OO' ایجاد نمی کنند. در نتیجه با استفاده از تکانه زاویه ای داریم :



$$(H_{OO'})_۱ = mv_۰(L\sin\theta) \qquad (۱)$$

در حالتی که زاویه انحراف به $\frac{\pi}{۲}$ می رسد تکانه زاویه ای برابر است با

$$(H_{OO'})_۲ = mvL \qquad (۲)$$

$$(۲) \text{ و } (۱) \text{ از } \to mvL = mv_۰(L\sin\theta) \to v = v_۰\sin\theta \qquad (۳)$$

نکته : سرعت در زاویه انحراف $\frac{\pi}{۲}$ را افقی گرفتیم زیرا اگر افقی نباشد باز توپ بالاتر می رود و چون انحراف $\frac{\pi}{۲}$ ماکزیمم انحراف است لذا سرعت توپ به صورت افقی است.

از پایستگی انرژی داریم :

$$\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ + mgl(۱-\cos\theta) = \frac{۱}{۲}mv^۲ + mgl \qquad (۴)$$

$$\text{از (۳) و (۴)} \rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ - mgl\cos\theta = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲\sin^۲\theta \rightarrow v_۰ = \sqrt{\frac{۲gl}{\cos\theta}}$$

۱۹۳ـ با توجه به اینکه نیروی F از محور دوران می گذرد و نیروهای وزن و عکس العمل سطح نیز موازی با محور دوران هستند بنابراین گشتاور این نیروها حول محور برابر صفر است لذا بقای تکانه زاویه ای برقرار است و می توان نوشت:

$$\Delta H = ۰ = rmv = r_۰mv_۰ \;\Rightarrow\; r^۲\omega = r_۰^۲\omega_۰ \qquad (۱)$$

حال از حرکت دورانی می توان نوشت :

$$\sum F_n = ma_n \;\rightarrow\; F = mr\omega^۲ \qquad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \; F = mr\left(\frac{r_۰^r\omega_۰}{r_۲}\right)^۲ = \frac{m\omega_۰^۲r_۰^۴}{r^۳}$$

۱۹۴ـ فرض کنید که ممان اینرسی قرقره حول محور خودش، O، برابر I_O باشد. در لحظه ای که جرم m به اندازه h پایین می آید، فرض می کنیم سرعت زاویه ای قرقره ω و سرعت خطی جرم m برابر v باشد به کمک پایستگی انرژی داریم :

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}I_o\omega^۲ \qquad (۱)$$

همچنین می دانیم که روابط زیر برقرار است.

$$v = R\omega \qquad h = \frac{۱}{۲}at^۲ \qquad v = at \rightarrow \frac{v}{a}t \qquad (۲)$$

از طرفی چون تکانه زاویه ای جرم m و قرقره در یک جهت هستند لذا تکانه کل سیستم حول محور O قرقره برابر است با :

$$H_o = mRv + I_o\omega \qquad (۳)$$

$$\text{از (۱) و (۳)} \rightarrow H_O = mRv + \frac{2\left(mgh - \frac{1}{2}mv^2\right)}{\omega} \qquad (4)$$

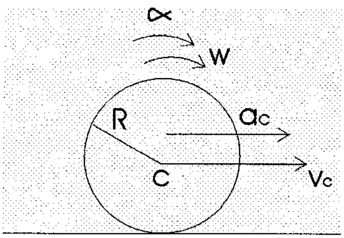
$$\text{از رابطه (۲) و (۴)} \quad H_o = mRv + \frac{2\left[mg\left(\frac{1}{2}at^2\right) - \frac{1}{2}mv^2\right]}{v/R}$$

$$H_o = \frac{mgRt^2}{v/a} = \frac{mgRt^2}{t} = mgRt$$

چون جرم m سقوط آزاد می کند لذا v = gt بنابراین :

$$|\vec{H}| = mRgt$$

۱۹۵ـ نکته ۱ : اگر دیسکی مطابق شکل روی یک سطح افقی بغلتد و مرکز دیسک دارای سرعت و شتاب خطی v_c و a_c باشد آنگاه روابط سرعت و شتاب زاویه ای ω و α با سرعت و شتاب خطی به صورت زیر خواهد بود.



$$x_c = R\theta$$
$$v_c = R\omega$$
$$a_c = R\alpha$$

نکته ۲ : انرژی جنبشی دیسک در هر لحظه جمع انرژی جنبشی انتقالی و انرژی جنبشی دورانی آن است. لذا داریم :

$$\text{انرژی جنبشی کل} \quad k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

در عبارت فوق I_c گشتاور اینرسی جرم جسم حول مرکز جرم جسم است که از انتگرال

گیری زیر بدست می آید.

$$I_c = \int r^۲ dm$$

اگر جرم m و شعاع R باشد آنگاه :

I_c دیسک = $\frac{۱}{۲} mR^۲$

I_c کره توپر = $\frac{۲}{۵} mR^۲$

I_c پوسته کره ای = $\frac{۲}{۳} mR^۲$

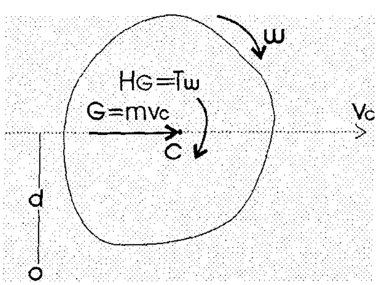
I_c حلقه = $mR^۲$

I_c استوانه توپر (حول محور استوانه) = $\frac{۱}{۲} mR^۲$

نکته ۳: می توان نشان داد برای جسمی که با سرعت زاویه ای لحظه ای ω در حال دوران باشد بین اندازه حرکت زاویه ای مرکز جرم آن، H_c، با ممان اینرسی حول مرکز جرم، I_c ، رابطه زیر برقرار است (در هر لحظه)

$$H_c = I_c \omega$$

نکته ۴: اگر جسمی همزمان دارای حرکت دورانی و انتقالی باشد. به طوری که مرکز جرم آن دارای سرعت خطی v_c و خود جسم دارای سرعت زاویه ای ω. آنگاه تکانه زاویه ای حول یک نقطهٔ اختیاری مثل O از رابطه زیر بدست می آید. (با احتساب جهت بردارها)



$$H_O = I_c \omega + m v_c d$$

d : فاصله عمودی نقطهٔ O از راستای بردار سرعت است که همان rsinα می باشد. (اثبات این رابطه در سؤال ۱۹۶ آمده است).

در شکل فوق اگر نقطهٔ O بالای راستای بردار v_c بود آنگاه $-mv_cd$ وارد فرمول فوق می شد.

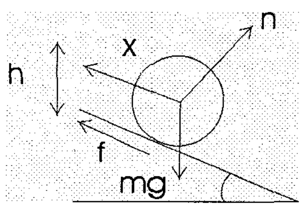
نکته ۵: اگر $\sum F$ برایند نیروهای وارد بر جسم و $\sum M_c$ برایند گشتاورهای نیروهای خارجی حول مرکز جرم c باشد آنگاه روابط زیر صادق هستند.

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum\vec{M}_c = I_c\vec{\alpha} = I_c\frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad , \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum\vec{M}_c dt = I_c\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\vec{\omega} = \vec{H}_2 - \vec{H}_1$$

حال : با توجه به نکته ۴ کافی است ما سرعت مرکز جرم کره v_c را در هر لحظه به دست آورده و با توجه به اینکه $\omega = \frac{v_c}{R}$ می توان اندازه حرکت را در زمان t بدست آورد. به کمک قضیه کار و انرژی و با توجه به اینکه کره روی سطح می غلتد (بدون لغزش) لذا نیروی اصطکاک کاری روی کره انجام نمی دهد در نتیجه :

$$W = \Delta k + \Delta u_e + \Delta u_g$$



Δu_g : تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی

Δu_e : تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی

Δk: تغییرات انرژی جنبشی

W : کار نیروهای خارجی به غیر وزن و نیروهای کشسانی مثل فنر.

در این مسأله W = ۰ و $\Delta u_e = 0$ حال به کمک نکتهٔ ۲ می توان نوشت.

$$\cdot = \left[\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\left(\frac{v_c}{R}\right)^2 - \cdot\right] + [\cdot - mgh]$$

از طرفی $h = x\sin\alpha$ و $I_c = \frac{2}{5}mR^2$ بنابراین :

$$v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gx\sin\alpha}$$

با توجه به اینکه نیروهای وارد بر کره ثابت هستند لذا شتاب کره ثابت می ماند، به کمک رابطه شتاب ثابت داریم :

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \rightarrow \frac{10}{7}gx\sin\alpha = 2ax \rightarrow a = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

$$\rightarrow v_c = (\frac{5}{7}g\sin\alpha)t$$

از نکته ۴ اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه اختیاری O برابر است با :

$$H_O = \frac{2}{5}mR^2\omega + mv_cR = \frac{2}{5}mRv_c + mv_cR = \frac{7}{5}mv_cR$$

$$= \frac{7}{5}mR(\frac{5}{7}g\sin\alpha)t = (mgR\sin\alpha)t$$

ب) اگر کره روی سطح (بدون اصطکاک) بلغزد آنگاه $\omega = \cdot$ می شود و مانند یک ذره می توان سرعت v_c را از قانون دوم و فرمول شتاب بدست آورد.

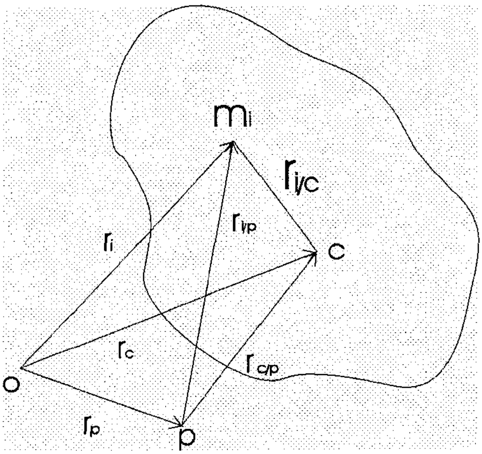
$$\sum F = ma \rightarrow mg\sin\alpha = ma \rightarrow a = g\sin\alpha \rightarrow v = g\sin\alpha t$$

لذا :

$$H_o = I_c\omega + mv_cd = \cdot + m(g\sin\alpha)tR = (mgR\sin\alpha)t$$

بنابراین فرقی با حالت الف ندارد.

۱۹۶ـ تکانه زاویه ای حول نقطهٔ اختیاری P (که می تواند شتاب $\ddot{r}_P$ داشته باشد) با توجه به شکل به صورت زیر خواهد بود.



$$\vec{H}_P = \sum \vec{r}_{i/p} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum (\vec{r}_{i/c} + \vec{r}_{c/p}) \times m_i \dot{\vec{r}}$$

دومین عبارت در رابطه بالا در پرانتز را می توان به شکل زیر نوشت :

$$\vec{r}_{c/p} \times \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{r}_{c/p} \times \sum m_i v_i = \vec{r}_{c/p} \times (\sum m)\vec{v}_c = \vec{r}_{c/p} \times \vec{P}_c$$

اولین عبارت رابطه نیز برابر است با :

$$\sum \vec{r}_{i/p} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{H}_c$$

بنابراین از روابط فوق داریم :

$$\vec{H}_p = \vec{H}_c + \vec{r}_{c/p} \times \vec{P}_c \qquad (1)$$

یا

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{c}} + \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{c/p}} \times \mathrm{M}\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}$$

$\mathrm{P_c}$: تکانه خطی مرکز جرم

به کمک رابطه فوق می توان برای دو نقطهٔ اختیاری O و O′ نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{H}_o + \vec{H}_c + \vec{r}_{c/p} \times \vec{P}_c \\ \vec{H}_{o'} = \vec{H}_c + \vec{r}_{c/o'} \times \vec{P}_c \end{array}\right\} \rightarrow \vec{H}_{o'} = (\vec{H}_o - \vec{r}_{c/o} \times \vec{P}_c) + \vec{r}_{c/o'} \times \vec{P}_c$$

$$\rightarrow \vec{H}_{o'} = \vec{H}_o + (\vec{r}_{c/o'} - \vec{r}_{c/o}) \times \vec{P}_c = \vec{H}_o + (\vec{r}_{o/c} + \vec{r}_{c/o'}) \times \vec{P}_c$$

$$\rightarrow \vec{H}_{o'} = \vec{H}_o + \vec{r}_{o/o'} \times \vec{P}_c = \vec{H}_o - \vec{r}_{o'/o} \times \vec{P}_c = \vec{H}_o - \vec{r}_o \times \vec{P}_c$$

از طرفی می دانیم $\vec{P}_{o'} = \vec{P}_o = \vec{P}_c$ زیرا به فاصله تا نقطه مورد نظر بستگی ندارد. لذا :

$$\vec{H}_{o'} = \vec{H}_o - \vec{r}_o \times \vec{P}_o$$

۱۹۷ـ این رابطه در مسأله ۱۹۶ اثبات شد.

۱۹۸ـ اگر مجموعه توپ و دمبل را به عنوان سیستم در نظر بگیریم. چون برایند نیروهای خارجی وارد بر سیستم و گشتاورهای آنها صفر هستند لذا بقای تکانه خطی و زاویه ای برای کل سیستم برقرار است. اگر v_c سرعت مرکز جرم و ω سرعت زاویه ای دمبل و v' سرعت توپ درست بعد از برخورد باشد. داریم :

تکانه خطی : $mv_{۰} = mv' + mv_c \qquad (۱)$

تکانه زاویه ای : $mv_{۰}(\frac{l}{۲}) = mv'(\frac{l}{۲}) + H_c \qquad (۲)$

از طرفی به کمک نکات درج شده در مسأله ۱۹۵ داریم :

$$H_c = I_c\omega = \left(\frac{m}{۲}\left(\frac{l}{۲}\right)^۲ + \frac{m}{۲}\left(\frac{l}{۲}\right)^۲\right)\omega = m\left(\frac{l}{۲}\right)^۲ \omega \qquad (۳)$$

از (۲) و (۳) $\rightarrow \quad v_{۰} = v' + \frac{l}{۲}\omega \qquad (۴)$

از (۱) و (۴) $\rightarrow \quad v_c = \frac{l}{۲}\omega$

اگر v_1 و v_2 به ترتیب سرعت جرم بالایی و پایین دمبل بعد از برخورد باشد با توجه به جهت چرخش دمبل می توان نوشت :

$$v_۱ = v_c + \frac{l}{۲}\omega = l\omega$$

$$v_۲ = v_c - \frac{l}{۲}\omega = ۰$$

لذا جرم پایینی دمبل مرکز دورانی دمبل خواهد بود.

به کمک پایستگی انرژی نیز داریم :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}(\frac{m}{2})v_2^2$$

$$\rightarrow \quad v_0^2 = (v')^2 + \frac{1}{2}(l\omega)^2 \qquad (5)$$

$$(5) \text{ و } (3) \text{ از } \rightarrow \; v_0^2 = (v_0 - \frac{l}{2}\omega)^2 + \frac{1}{2}(l\omega)^2 \rightarrow \omega = \frac{4}{3}\;\frac{v_0}{l} \qquad (6)$$

$$(6) \text{ و } (3) \text{ از } \rightarrow \; H_c = \frac{1}{3}mlv_0$$

۱۹۹ـ چون در حین حرکت نیرو یا گشتاور خارجی به مجموعه اجرام وارد نمی شود لذا بقای تکانه خطی و زاویه ای برقرار است.

اگر v_c سرعت مرکز جرم و ω سرعت زاویه مجموعه در هر لحظه باشد از بقای تکانه داریم :

$$mv_0 = 2mv_c \rightarrow v_0 = 2v_c \qquad (1)$$

لازم به ذکر است چون v_0 فقط در راستای افقی است لذا v_c نیز در راستای افقی حرکت خواهد کرد و مرکز جرم، جابجایی در راستای قائم ندارد (بعلت بقای تکانه خطی) از بقای تکانه زاویه ای حول نقطهٔ مرکز جرم داریم :

با توجه به نکات گفته شده در مسأله ۱۹۵ :

$$mv_0\frac{l_0}{2} = H_c = I_c\omega = \left[m\left(\frac{l_0}{2}+\frac{\Delta l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l_0}{2}+\frac{\Delta l}{2}\right)^2\right]\omega$$

$$\rightarrow \quad mv_0\frac{l_0}{2} = \frac{m}{2}(l_0+\Delta l)^2\omega \;\rightarrow\; v_0 l_0 = (l_0+\Delta l)^2\omega \qquad (2)$$

توجه : چون در لحظه ای که فنر به اندازه Δl کشیده شود آنگاه فاصله هر جرم تا مرکز برابر است با $\frac{l_0}{2}+\frac{\Delta l}{2}$

نکته : در ماکزیمم کشیدگی فنر ΔL ،دیگر دو جسم در راستای فنر سرعت ندارند و فقط در راستای عمود بر فنر سرعت خواهند داشت.

حال از پایستگی انرژی و به کمک نکته بالا داریم :

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2+\frac{1}{2}(2m)v_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2 \qquad (3)$$

$$\text{از (۱)و(۲)و(۳)} \rightarrow mv_0^2=k(\Delta l)^2+2m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2+\left(mv_0\frac{l_0}{2}\right)\left(\frac{v_0 l_0}{(l_0+\Delta l)^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2=k(\Delta l)^2+\frac{mv_0^2 l_0^2}{2(l_0+\Delta l)^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2\left(1-\frac{l_0^2}{(l_0+\Delta l)^2}\right)=k(\Delta l)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{2l_0\,\Delta l+(\Delta l)^2}{(l_0+\Delta l)^2}\right)=k(\Delta l)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{2l_0+\Delta l}{(l_0+\Delta l)^2}\right)=k(\Delta l)$$

با فرض اینکه $1 >> \varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0}$ می توان از Δl در برابر l_0 صرف نظر کرد در نتیجه:

$$\frac{mv_0^2}{l_0}=k(\Delta l) \quad \rightarrow \varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{mv_0^2}{kl_0^2}$$