دانش‌پژوهان جوان

ناشر کتاب‌های المپیاد

مسائل
فیزیک عمومی
ایرودف

جلد دوم

الکتریسیته، مغناطیس، القا

مهدی متقی‌پور   دکتر علیرضا صادقی‌راد   محمدامین آقامیری

بسم‌الله الرحمن الرحیم

مسائل فیزیک عمومی ایرودف

جلد دوم

الکتریسیته، مغناطیس، القاء

ترجمه و گردآوری:

مهدی متقی‌پور

دکتر علیرضا صادقی‌راد

محمدامین آقامیری

سرشناسه	: متقی‌پور، مهدی، ۱۳۵۷ -
عنوان و نام پدیدآور	: مسایل فیزیک عمومی (ایرودف)/ مهدی متقی‌پور.
مشخصات نشر	: تهران : دانش پژوهان جوان ، ۱۳۸۴ - ۱۳۸۵.
مشخصات ظاهری	: ۲ ج.:مصور، جدول.
شابک	: ۲۷۰۰۰ ریال : ج.۱: 964-7685-66-1؛ ۹۷۰۰۰ ریال: دوره:979-600-5230-58-1 ؛ ج.۱ (چاپ دوم) : 978-964-7685-66-5؛ ج.۲: 964-7685-79-3؛ ج.۲ (چاپ دوم) 978-964-7685-79-5:
یادداشت	: مولفین جلد دوم مهدی متقی‌پور، علیرضا صادقی‌راد و محمد امین آقامیری می‌باشد,
یادداشت	: کتاب حاضر راهنمای کتاب "Problems in general)" unknown Binding) physics تالیف "ایوریوگنیویچ ایرودوف" می‌باشد,
یادداشت	: ج. ۲ (چاپ اول: ۱۳۸۵)
یادداشت	: ج.۱(چاپ دوم: ۱۳۸۹)(فیپا).
یادداشت	: ج.۲(چاپ دوم:۱۳۸۹).
مندرجات	: ج. ۱. مکانیک .-- ج. ۲. الکتریسیته، مغناطیسی، القا.
موضوع	: فیزیک -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
شناسه افزوده	: صادقی‌راد، علیرضا
شناسه افزوده	: آقامیری، محمدامین
شناسه افزوده	: ایرودوف، ایگور یوگنیویچ
شناسه افزوده	: Irodov, Igor Evgenevich
رده بندی کنگره	: ۱۳۸۴ ۸م۱۸م/۲۲QC
رده بندی دیویی	: ۰۷۶/۵۳۰
شماره کتابشناسی ملی	: م۸۴-۳۹۶۴

مسائل فیزیک عمومی ایرودف، جلد دوم (الکترومغناطیس)

ترجمه و تالیف	مهدی متقی‌پور دکتر علیرضا صادقی‌راد محمدامین آقامیری
ناشر	دانش‌پژوهان جوان
قطع	وزیری
شمارگان	۲۰۰۰ نسخه
چاپ سوم	۱۳۹۰
قیمت	۴۷۰۰ تومان
شابک دوره	۹۷۸-۶۰۰-۵۲۳۰-۵۸-۱
شابک جلد اول	۹۷۸-۹۶۴-۷۶۸۵-۷۹-۵

ناشر کتابهای المپیاد

خیابان انقلاب ـ خیابان وحید نظری ـ بین فروردین و اردیبهشت ـ پلاک ۱۰۵ ـ واحد ۱۱

تلفن: ۶۶۴۹۸۹۹۸ – ۶۶۴۹۶۳۶۳ دورنگار : ۶۶۹۵۳۲۵۰

مقدمهٔ مؤلف

با توجه به رقابت رو به گسترش در المپیادهای علمی کشور و کمبود منابع فارسی به خصوص در مبحث فیزیک بر آن شدیم تا گامی در جهت رفع این مشکل برداریم. در کتاب «مسائلی در فیزیک عمومی» نوشتهٔ ایرودف، مسائل مهم از مباحث مختلف گنجانده شده است و یکی از منابع علمی در المپیاد فیزیک می‌باشد. با توجه به اهمیت موضوع، شروع به نوشتن پاسخ مسائل آن کردیم که مجموعهٔ دو جلدی حاضر تشریح مسائل، بخش مکانیک و الکترومغناطیس آن را در بردارد. در حل مسائل با فرض اینکه خواننده با مباحث مشتق و انتگرال ریاضی آشنایی مختصری دارد، سعی شده از راه‌حل‌های پیچیده با عملیات ریاضی مشکل اجتناب شود.

در اینجا لازم می‌دانم از زحمات فداکارانه و بی‌دریغ همسرم و همچنین از حمایت‌های روحی و معنوی پدر و مادرم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. همچنین از دانش‌آموز ممتاز آقای محمدامین حیدری زارع که من را در اتمام این مجموعه یاری رساند، قدردانی نمایم.

در پایان امیدوارم این مجموعه گام مؤثری در ارتقای آموزش فیزیک در سطح دبیرستان باشد و از خوانندگان محترم تقاضا دارم انتقادات و پیشنهادات خود را به اطلاع اینجانب برسانند.

مهدی متقی‌پور

پاییز ۱۳۸۹

Email:mottaghi@sharif.edu

فهرست مندرجات

فصل ۱

الکتروستاتیک

۱) مطلوب است محاسبه نسبت نیروهای الکتروستاتیکی به گرانشی در دو حالت زیر
الف) بین دو الکترون ب) بین دو پروتون
ج) به‌ازای چه مقداری از $\frac{q}{m}$، این دو نیرو از نظر اندازه با هم برابر می‌شوند؟
(با فرض اینکه دو ذره کاملاً یکسان باشند.)

۲) مطلوب است محاسبه نیروی برهم کنش بین دو کره مسی به جرم ۱ گرم که در فاصلهٔ ۱ متری از هم قرار دارند به شرطی که مجموع بارهای الکتریکی ناشی از الکترون‌ها به اندازه ۰/۱٪ با مجموع بار هسته‌های موجود در کره‌ها اختلاف داشته باشند.
(جرم اتمی مس برابر ۶۳/۵۴ گرم و هر اتم آن شامل ۲۹ پروتون است.)

۳) دو کره کوچک با بار یکسان و جرم یکسان m از یک نقطه توسط دو نخ ابریشمی به طول یکسان L آویزان شده‌اند. فاصله بین دو کره یعنی x بسیار کوچکتر از طول L است ($x << L$). مطلوب است محاسبه نرخ خروج بار، $\frac{dq}{dt}$، از هر کره اگر سرعت نزدیک شدن آنها به صورت $V = \frac{a}{\sqrt{x}}$ بر حسب فاصله x تغییر کند. (a یک عدد ثابت است.)

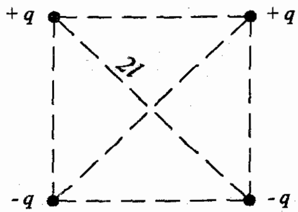
۴) دو بار مثبت $q_۱$، $q_۲$ به ترتیب نسبت به مبداء مختصات دارای بردارهای مکان $\vec{r_۱}$ و $\vec{r_۲}$ می‌باشند. اندازه بار منفی $\vec{q_۳}$ و بردار مکان آن یعنی $\vec{r_۳}$ را طوری بیابید به طوریکه اگر $q_۳$ در موقعیت $\vec{r_۳}$ قرار گیرد نیروی برآیند وارد بر هر سه بار برابر صفر شود.

۵) یک حلقه سیمی نازک به شعاع r دارای بار q می‌باشد. اگر بار $q_۰$ را در مرکز این حلقه قرار دهیم بر نیروی کششی موجود در داخل سیم چه مقدار افزوده می‌شود؟

۶) بار نقطه‌ای $+۵۰ \ \mu C$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r_۰} = ۲\ \hat{i} + ۳\ \hat{j}$ قرار دارد که $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای واحد در راستای x و y می‌باشند. مطلوب است محاسبه شدت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r} = ۸\ \hat{i} - ۵\ \hat{j}$. ($\vec{r}$ و $\vec{r_۰}$ بر حسب متر بیان شده‌اند.)

۷) بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ را مطابق شکل زیر در گوشه‌های یک مربع با قطری به طول $۲L$ قرار می‌دهیم. مطلوب است بزرگی اندازهٔ شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور

گذرنده از مرکز مربع به طوریکه این محور بر سطح مربع عمود باشد و نقطهٔ مورد نظر به فاصلهٔ x از مرکز مربع قرار داشته باشد.



۸) یک حلقه نازک نیم‌دایره‌ای به شعاع $R = ۲۰\ \text{cm}$ با بار $q = ۰/۷\ \text{nc}$ به طور یکنواخت باردار می‌شود. اندازه شدت میدان الکتریکی را در مرکز این نیم دایره بیابید.

۹) یک حلقه سیمی نازک به شعاع r دارای بار q است. اندازه شدت میدان الکتریکی را روی محور حلقه و به صورت تابعی از فاصله L تا مرکز آن بیابید. همچنین رابطه را با فرض $L >> r$ بررسی نمایید. ماکزیمم شدت میدان و فاصله L مربوط به آن را پیدا کنید.

۱۰) بار نقطه‌ای q را در مرکز یک حلقه نازک به شعاع R که به صورت یکنواخت با بار $-q$ باردار شده است، قرار می دهیم. اندازه بردار شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصله x از مرکز حلقه بیابید. فرض کنید که $x >> R$.

۱۱) یک حلقه سیمی باردار با بار qو شعاع R را در نظر بگیرید. یک ریسمان بسیار بلند که به طور یکنواخت با چگالی خطی λ باردار شده است را در امتداد محور حلقه طوری قرار می‌دهیم که یک انتهای ریسمان درست در مرکز حلقه قرار بگیرد. مطلوب است محاسبه نیروی متقابل بین ریسمان و حلقه.

۱۲) یک حلقه نارسانای نازک به شعاع R دارای چگالی بار خطی $\lambda = \lambda_0 \cos\phi$ می‌باشد که λ_0 یک عدد ثابت و ϕ زاویه با محور x است. مطلوب است بزرگی شدت میدان الکتریکی

الف) در مرکز حلقه

ب) روی محور حلقه و به صورت تابعی از فاصلهٔ x تا مرکز
تابع به‌دست آمده را برای حالت $x >> R$ بررسی کنید.

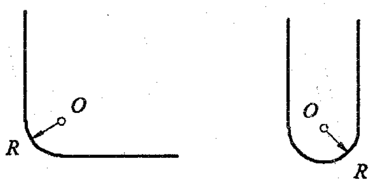
۱۳) یک میله نازک و مستقیم به طول $۲a$ به طور یکنواخت با بار q باردار شده است. مطلوب است بزرگی شدت میدان الکتریکی به صورت تابعی از r فاصله از مرکز میله و در امتداد خط مستقیم

الف) عمود بر میله و گذرنده از مرکز میله

ب) منطبق بر راستای میله منتهی در نقاط بیرون از میله جواب خود را برای حالت $r >> A$ بررسی کنید.

۱۴) یک ریسمان بسیار بلند و مستقیم به طور یکنواخت با چگالی بار خطی λ (بار بر واحد طول) باردار شده است. بزرگی و جهت شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله y از ریسمان و روی خطی عمود بر ریسمان و گذرنده از یکی از دو انتهای ریسمان را بیابید.

۱۵) یک ریسمان دارای چگالی بار خطی یکنواخت λ (بار بر واحد طول) به صورت نشان داده شده در شکل درآورده شده است. فرض کنید شعاع انحنای R نسبت به طول ریسمان بسیار کوچکتر باشد. مطلوب است محاسبه بزرگی شدت میدان الکتریکی در نقطهٔ O.



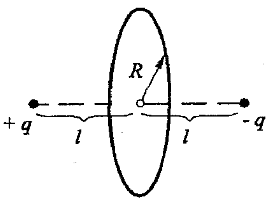
۱۶) کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار سطحی (بار بر واحد سطح) $\sigma = \vec{a} \cdot \vec{r}$ برروی سطح آن است که $\vec{a}$ برداری است ثابت و $\vec{r}$ برداری است شعاعی که از مرکز کره تا نقطه‌ای روی سطح آن امتداد می‌یابد. بردار شدت میدان الکتریکی را در مرکز کره بیابید.

۱۷) فرض کنید چگالی بار سطحی موجود بر روی کره‌ای به شعاع R بستگی به زاویهٔ کروی θ به صورت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ داشته باشد که σ_0 یک ثابت مثبت است. نشان دهید که این توزیع بار معادل است با دو توپ باردار به شعاع R که به صورت یکنواخت باردار شده‌اند و به فاصله کمی از یکدیگر قرار دارند. بارهای هر دو توپ از نظر اندازه باهم برابر و از نظر علامت مخالف هم می‌باشند. با توجه به این معادل‌سازی، بردار شدت میدان الکتریکی در داخل کره مفروض را بیابید.

۱۸) مطلوب است یافتن بردار شدت میدان الکتریکی در مرکز یک توپ به شعاع R با چگالی بار حجمی (بار بر واحد حجم) $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r}$ که $\vec{a}$ یک بردار ثابت و $\vec{r}$ بردار شعاعی که از مرکز کره ترسیم می‌شود.

۱۹) یک ریسمان بسیار بلند با چگالی بار خطی یکنواخت λ را روی محور دایره‌ای به شعاع R قرار می‌دهیم به طوری‌که انتهای ریسمان منطبق بر مرکز دایره باشد. شار الکتریکی عبور کننده از دایره را بیابید.

۲۰) دو بار نقطه‌ای q و $-q$ مطابق شکل به فاصله $2L$ از یکدیگر قرار دارند. مطلوب است محاسبه شار میدان الکتریکی گذرنده از دایره‌ای به شعاع R.



۲۱) توپی به شعاع R به صورت یکنواخت با چگالی بار حجمی (بار بر واحد حجم) ρ باردار شده است. شار الکتریکی گذرنده از سطح مقطع توپ که در اثر تقاطع صفحه‌ای با فاصله $r_0 < R$

از مرکز کره با کره بوجود آمده است را بیابید.

۲۲) دو ریسمان بلند که با هم موازی هستند هر یک دارای چگالی بار خطی (بار بر واحد طول) یکنواخت λ می‌باشند. همچنین این دو ریسمان به فاصله L از یکدیگر قرار دارند. ماکزیمم بزرگی شدت میدان الکتریکی در صفحهٔ دو ریسمان و بین آن دو را پیدا کنید.

۲۳) محور استوانه‌ای با طول بی‌نهایت و سطح مقطع دایره‌ای شکل منطبق بر محور Z دستگاه مختصات است. سطح این استوانه با چگالی بار سطحی یکنواخت $\sigma = \sigma_۰ \cos\phi$ بار دار شده است به طوری‌که ϕ زاویه قطبی استوانه است (این چگالی بار بستگی به Z ندارد) مطلوب است اندازه و جهت شدت میدان الکتریکی روی محور Z.

۲۴) یک میدان الکتریکی فقط تابعی از x و y است و از رابطه $\vec{E} = \dfrac{a\,(x\hat{i} + y\hat{j})}{x^۲ + y^۲}$ تبعیت می‌کند. (a عددی ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه محورهای x و y می‌باشند.) مطلوب است محاسبه شار میدان الکتریکی گذرنده از کره‌ای به شعاع R که مرکز آن منطبق بر مبداء مختصات باشد.

۲۵) توپی به شعاع R دارای بار مثبتی است که چگالی بار حجمی آن برابر $\rho = \rho_۰\,(۱ - \dfrac{r}{R})$ می‌باشد. در این رابطه r فاصله از مرکز توپ و $\rho_۰$ عددی ثابت است. با فرض اینکه ضریب گذردهی توپ و محیط برابر یک باشد مطلوب است:

الف) اندازه شدت میدان الکتریکی به صورت تابعی از r هم در داخل توپ و هم در خارج آن.

ب) ماکزیمم شدت $E_{\max}$ و فاصله مربوط به آن r_m.

۲۶) سیستمی را در نظر بگیرید که شامل یک توپ باردار به شعاع R که بار آن دارای تقارن کروی است و فضای بیرون آن با چگالی حجمی $\rho = \dfrac{\alpha}{r}$ پر شده است (α عددی ثابت و r فاصله از مرکز توپ می‌باشد).

الف) مقدار بار توپ را طوری بیابید که اندازه میدان الکتریکی بیرون توپ مستقل از r باشد.

ب) اندازه میدان الکتریکی چقدر است؟ ضریب گذردهی توپ و محیط را برابر یک فرض کنید.

۲۷) فضایی با چگالی حجمی بار $\rho = \rho_۰\, e^{-\alpha r^۳}$ پر شده که $\rho_۰$ و α اعدادی ثابت و r فاصله از مرکز این سیستم است. اندازه بردار میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r بیابید. عبارت بدست آمده را برای مقادیر بسیار کوچک و بزرگ یعنی $\alpha r^۳ << ۱$ و $\alpha r^۳ >> ۱$ بررسی نمایید.

۲۸) داخل توپی که با چگالی حجمی ρ به صورت یکنواخت باردار شده است، حفره‌ای کروی شکل قرار دارد. مرکز این حفره به اندازه بردار $\vec{a}$ از مرکز توپ جابه‌جا شده است. بردار $\vec{E}$ در داخل حفره را محاسبه کنید. با فرض اینکه ضریب گذردهی برابر یک باشد.

۲۹) داخل استوانه با طول بی‌نهایت که به صورت یکنواخت با چگالی حجمی بار ρ باردار شده است حفره‌ای استوانه‌ای شکل قرار دارد. فاصله بین محور استوانه و محور حفره برابر a است. بردار $\vec{E}$ را در داخل حفره بیابید. ضریب گذردهی برابر یک فرض می‌شود.

۳۰) محورهای دو حلقه سیمی نازک هر یک به شعاع R برهم منطبق‌اند. اگر فاصله بین این دو حلقه برابر a و بارهای آن‌ها به ترتیب q و $-q$ باشند، مطلوب است اختلاف پتانسیل بین مراکز این دو حلقه.

۳۱) یک ریسمان مستقیم با طول بی‌نهایت با چگالی خطی بار $\lambda = ۰/۴ \frac{\mu c}{m}$ باردار شده است. اختلاف پتانسیل بین نقاط ۱ و ۲ را بیابید به شرطی که نقطه ۲ به اندازه $n = ۲$ برابر دورتر از نقطهٔ ۱ نسبت به ریسمان قرار داشته باشد.

۳۲) مطلوب است محاسبه میدان و پتانسیل الکتریکی در مرکز یک نیم کره به شعاع R که با چگالی سطحی بار σ به صورت یکنواخت باردار شده است.

۳۳) دیسکی بسیار نازک به شعاع R دارای چگالی سطحی یکنواخت بار σ است که در خلأ قرار دارد. میدان و پتانسیل الکتریکی روی محور دیسک و به فاصله L از مرکز آن را بیابید. عبارت به دست آمده را برای حالت $L \rightarrow ۰$ و $L >> R$ بررسی نمایید.

۳۴) پتانسیل الکتریکی ϕ را روی لبه یک دیسک نازک به شعاع R که به صورت یکنواخت با چگالی سطحی بار σ باردار شده است را بیابید.

۳۵) مطلوب است بردار میدان الکتریکی که پتانسیل این میدان به صورت $\phi = \vec{a} \ . \ \vec{r}$ می‌باشد $\vec{a}$ برداری ثابت و $\vec{r}$ برداری است که از مبداء به نقطه‌ای درون میدان وصل می‌شود.

۳۶) بردار شدت میدان الکتریکی را به شرطی بیابید که پتانسیل این میدان بستگی به مختصات x و y داشته باشد و از رابطه

الف) $\phi = a\,(x^۲ - y^۲)$ ب) $\phi = axy$

تبعیت کند.

۳۷) پتانسیل یک میدان الکتروستاتیک به صورت $\phi = a\,(x^۲ + y^۲) + bz^۲$ است. a و b مقادیر ثابت هستند. مطلوب است اندازه و جهت بردار شدت میدان الکتریکی.

سطوح هم پتانسیل در هر یک از حالات زیر چه شکلی دارند؟

الف) $a > ۰$ و $b > ۰$ ب) $a < ۰$ و $b < ۰$

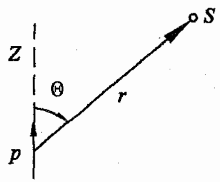
۳۸) بار q به صورت یکنواخت بر روی حجم یک کره به شعاع R توزیع شده است. با فرض اینکه ضریب گذردهی برابر یک باشد مطلوب است پتانسیل الکتریکی:

الف) در مرکز کره

ب) در داخل کره و به صورت تابعی از فاصله r تا مرکز کره

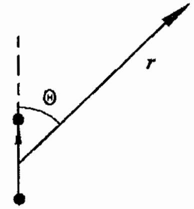
۳۹) نشان دهید پتانسیل ایجاد شده توسط یک دو قطبی با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ از رابطه $\phi = \frac{\vec{P} \ . \ \vec{r}}{۴\pi\varepsilon_{۰} r^۳}$ بدست می‌آید که $\vec{r}$ بردار شعاعی است. با استفاده از این رابطه اندازه بردار میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r و θ بیابید.

۴۰) یک دو قطبی نقطه‌ای با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ در مبداء و در جهت مثبت محور z قرار داده شده است. مؤلفه‌های E_z و $E_\perp$ (در صفحه عمود بر محور z در نقطهٔ s) از بردار میدان الکتریکی را بیابید. در چه نقطه‌ای $\vec{E}$ بر $\vec{P}$ عمود خواهد بود؟

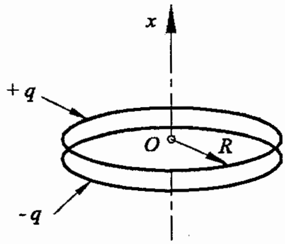


۴۱) یک دو قطبی نقطه‌ای با گشتاور $\vec{P}$ در داخل میدان خارجی و یکنواخت $\vec{E}$ قرار داده شده است. به طوری $\vec{E}_\circ \uparrow\uparrow \vec{P}$. در این شرایط یکی از سطوح هم پتانسیل که دو قطبی را در بر می‌گیرد، به صورت یک کره است. شعاع این کره را بیابید.

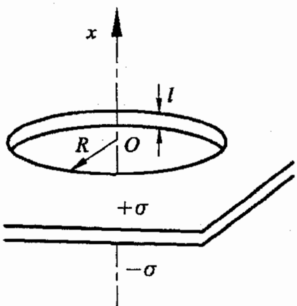
۴۲) دو ریسمان نازک و موازی هم، دارای چگالی طولی یکنواخت به ترتیب λ و $-\lambda$ می باشند. فاصله این دو ریسمان از یکدیگر برابر L است. مطلوب است محاسبه پتانسیل الکتریکی و اندازه شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r که $r >> L$ و تحت زاویه θ نسبت به بردار $\vec{L}$ قرار دارد. (مطابق شکل)



۴۳) دو حلقه هم محور، هر یک به شعاع R که از سیم نازک درست شده‌اند، به فاصله کم L $(L << R)$ از هم قرار دارند و به ترتیب دارای بارهای q و $-q$ می‌باشند. پتانسیل و اندازه میدان الکتریکی را روی محور این سیستم به صورت تابعی از مختصات x مطابق شکل بیابید. نمودار تقریبی توابع بدست آمده را رسم کنند. این توابع را در حالت $|x| >> R$ بررسی نمایید.



۴۴) دو صفحه بی‌نهایت بزرگ به فاصله L از یکدیگر به ترتیب با چگالی سطحی σ و $-\sigma$ به صورت یکنواخت باردار شده‌اند. (مطابق شکل) دو سوراخ هم محور به شعاع R در آنها موجود است به طوری که $L << R$. اگر مبدأ O و محور x را مطابق شکل در نظر بگیریم، مطلوب است پتانسیل و مؤلفه E_x میدان الکتریکی روی محور سیستم به صورت تابعی از x. نمودار تقریبی $\phi\ (x)$ را ر



۴۵) یک خازن الکتریکی با صفحات نازک دایروی شکل هر یک به شعاع R به فاصله L $(L << R)$ از هم قرار دارند و به ترتیب با چگالی سطحی σ و $-\sigma$ به صورت یکنواخت باردار شده‌اند. پتانسیل الکتریکی و اندازه میدان الکتریکی را روی محور خازن به صورت تابعی از فاصله x از صفحات به (شرطی که $x >> l$) بیابید. عبارت به دست آمده را برای حالت $x >> R$ بررسی کنید.

۴۶) یک دو قطبی با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ در فاصله r از یک ریسمان بسیار بلند که با چگالی خطی یکنواخت λ باردار شده است، قرار دارد. نیروی $\vec{F}$ وارد بر دو قطبی را بیابید اگر راستای بردار $\vec{P}$

الف) در راستای ریسمان باشد.

ب) در راستای بردار شعاعی $\vec{r}$ باشد.

۴۷) نیروی برهم کنش دو مولکول آب را بیابید، اگر فاصله آنها $L = ۱۰\ \mathrm{nm}$ و بردار گشتاور الکتریکی آنها در راستای یک خط باشد. گشتاور هر مولکول برابر $P = ۰/۶۲ \times ۱۰^{-۲۹}\mathrm{c.m}$ است.

۴۸) پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x\ ,\ y)$ مربوط به میدان الکتروستاتیک $\vec{E} = a\ (y\hat{i} + x\hat{j})$ را بیابید به‌طوری که a یک ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه محورهای x و y باشند.

۴۹) پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x\ ,\ y)$ مربوط به میدان الکتروستاتیک $\vec{E} = ۲axy\hat{i} + a\ (x^۲ - y^۲)\ \hat{j}$ را بیابید به‌طوری که a یک ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای یکه محورهای x و y باشند.

۵۰) پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x\ ,\ y)$ مربوط به میدان الکتروستاتیک $\vec{E} = ay\hat{i} + (ax + bz)\ \hat{j} + by\hat{k}$ را که a و b مقادیر ثابت و $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ بردارهای یک محورهای x و y و z باشند، بیابید.

۵۱) پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا تنها به مختصه x بستگی دارد و از رابطه $\phi = -ax^۳ + b$ تبعیت می‌کند که a و b مقادیر ثابت هستند. مطلوب است توزیع بار حجمی $\rho\ (x)$.

۵۲) یک توزیع بار حجمی یکنواخت فضای بین دو صفحه بسیار بزرگ موازی را که به فاصلهٔ d از هم قرار دارند، پر می کند. اختلاف پتانسیل بین این صفحات برابر $\Delta\ \phi$ است. به ازای چه مقداری از چگالی حجمی ρ شدت میدان الکتریکی در نزدیکی یکی از صفحات برابر صفر می‌شود؟ در اینصورت شدت میدان الکتریکی نزدیک صفحه دیگر چقدر خواهد بود؟

۵۳) پتانسیل الکتریکی درداخل یک توپ باردار فقط به فاصله r تا مرکز به صورت $\phi = ar^۲ + b$ بستگی دارد که a و b مقادیر ثابت‌اند. توزیع بار حجمی $\rho\ (r)$ را در داخل توپ بیابید.

فصل ۲

رساناها و دی‌الکتریک‌ها

۵۴) یک توپ کوچک بالای یک صفحه بی‌نهایت بزرگ افقی و رسانا توسط میله‌ای عایق و الاستیک با ضریب فنریت k معلق مانده است. به محض اینکه توپ باردار میشود، به میزان x سانتی‌متر پایین‌تر می‌آید و به فاصله L از صفحه قرار می‌گیرد. بار توپ را بیابید.

۵۵) بار نقطه‌ای q به فاصله L از یک صفحه بی‌نهایت بزرگ رسانا قرار داده می‌شود. مطلوب است محاسبه کار انجام شده برای اینکه این بار را با سرعت کم از صفحه به سمت بی‌نهایت دور کنیم.

۵۶) دو بار نقطه‌ای q و $-q$ به فاصله L از یکدیگر و هردو نسبت به یک صفحه بی‌نهایت بزرگ رسانا به فاصله $\frac{L}{۲}$ قرار دارند. پیدا کنید:

الف) اندازه بردار نیروی الکتریکی وارد بر هر بار

ب) اندازه بردار میدان الکتریکی در نقطهٔ وسط بین دو بار

۵۷) بار نقطه‌ای q بین دو صفحهٔ رسانای عمود بر هم و به فاصله L از هر یک قرار دارد. مطلوب است محاسبه اندازه بردار نیروی وارد بر بار.

۵۸) یک دو قطبی نقطه‌ای با گشتاور الکتریکی $\vec{P}$ به فاصله L از یک صفحه رسانای بی‌نهایت بزرگ قرار دارد. مطلوب است محاسبه اندازه بردار نیروی وارد بر دو قطبی اگر بردار $\vec{P}$ عمود بر صفحه باشد.

۵۹) بار q به فاصله L از یک صفحه رسانای بی‌نهایت بزرگ قرار داده می‌شود. چگالی سطحی بار القا شده روی صفحه رسانا را به صورت تابعی از r، فاصله پای عمود وارد از محل بار بر صفحه رسانا، بیابید.

۶۰) یک ریسمان نازک با طول بی‌نهایت و چگالی خطی بار λ موازی صفحه رسانای بی‌نهایت قرار دارد. فاصله بین ریسمان و صفحه برابر L است. مطلوب است:

الف) اندازه نیروی وارد بر واحد طول ریسمان

ب) توزیع چگالی سطحی بار $\sigma(x)$ روی صفحه به طوری که x فاصله از صفحه گذرنده از ریسمان و عمود بر صفحه رسانا است.

۶۱) ریسمانی بسیار بلند و مستقیم به صورت عمود بر یک صفحه رسانا قرار دارد به طوری که فاصله انتهای ریسمان تا صفحه برابر L است. همچنین ریسمان دارای چگالی خطی بار λ می‌باشد. اگر نقطهٔ O تصویر ریسمان روی صفحه باشد مطلوب است محاسبه چگالی سطحی بار القا شده روی صفحه:

الف) در نقطهٔ O

ب) به صورت تابعی از فاصله r از نقطهٔ O.

۶۲) حلقه سیمی نازک به شعاع R دارای بار q می‌باشد. این حلقه موازی صفحه رسانای بی‌نهایت بزرگ و به فاصله L از آن قرار دارد. مطلوب است:

الف) چگالی سطحی در نقطه‌ای روی صفحه که نسبت به حلقه متقارن است.

ب) میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در مرکز حلقه

۶۳) پتانسیل الکتریکی ϕ یک کره رسانای بدون بار را بیابید اگر بار نقطه‌ای q در فاصله L از مرکز کره و در خارج از آن قرار داده شود.

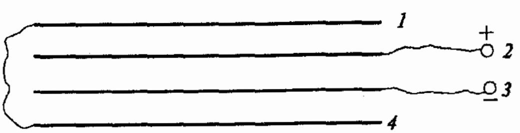
۶۴) بار نقطه‌ای q در داخل یک پوسته رسانای کروی با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 و به فاصله r $(r < R_1)$ از مرکز O آن قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در مرکز O کره را بیابید.

۶۵) سیستمی از دو کره رسانای هم مرکز تشکیل شده است به طوری که کره داخلی با شعاع a دارای بار مثبت q_1 می‌باشد. بار q_2 روی کره خارجی با شعاع b چقدر باشد تا پتانسیل کره داخلی را به صفر برساند. در این حالت پتانسیل الکتریکی ϕ چگونه به فاصله r از مرکز کره‌ها بستگی دارد؟ نمودار تقریبی ϕ را بر حسب r رسم کنید.

۶۶) چهار صفحه فلزی مطابق شکل در فاصله کم d از یکدیگر قرار دارند. صفحات خارجی با سیم به هم وصل شده‌اند و بر صفحات داخلی اختلاف پتانسیل $\Delta\phi$ اعمال می‌کنیم. پیدا کنید:

الف) مقادیر شدت میدان الکتریکی در بین دو صفحه مجاور

ب) چگالی بار سطحی روی هر صفحه



۶۷) دو صفحه رسانای بی‌نهایت ۱ و ۲ به فاصله L از هم قرار دارند. بار نقطه‌ای q بین صفحات و به فاصله x از صفحه ۱ قرار داده می‌شود. بار القا شده روی هر صفحه را بیابید.

۶۸) نیروی الکتریکی وارد بر واحد سطح یک سطح رسانای باردار با شکل دلخواه و با چگالی سطحی بار σ را بیابید.

۶۹) یک توپ فلزی با شعاع $R = ۱/۵\text{cm}$ دارای بار $q = ۱۰\ \mu\text{C}$ است. مطلوب است اندازه بردار نیروی برآیند وارد بر یک نیمه از این توپ؟

۷۰) هنگامی که یک توپ رسانای بدون بار به شعاع R درون یک میدان الکتریکی خارجی یکنواخت قرار می‌گیرد، بر روی سطح آن، چگالی سطحی بار $\sigma = \sigma_\circ \cos\theta$ القا می‌شود. ($\sigma_\circ$ یک عدد ثابت و θ زاویه قطبی است). اندازه نیروی الکتریکی برآیند وارد بر یک نیمه از این توپ را بیابید.

۷۱) یک میدان الکتریکی به شدت $E = ۱\ \frac{KV}{cm}$ قطبشی در آب ایجاد می‌کند که معادل جهت‌گیری درست تنها یک مولکول از N مولکول آب است. اگر گشتاور الکتریکی یک مولکول آب برابر $P = ۰/۶۲ \times ۱۰^{-۲۹}\mathrm{C.m}$ باشد، مقدار N را بیابید.

۷۲) یک مولکول غیر قطبی با قطبش‌پذیری β در فاصله زیاد L از یک مولکول قطبی با گشتاور دو قطبی $\vec{P}$ قرار دارد. اگر بردار $\vec{P}$ در امتداد خط واصل دو مولکول باشد اندازه نیروی برهم کنش بین آنها را بیابید.

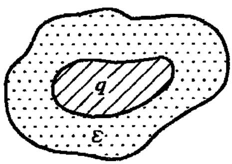
۷۳) یک مولکول غیر قطبی بر روی محور یک حلقه نازک به شعاع R که به صورت یکنواخت باردار شده است، قرار دارد. در چه فاصله‌ای x از مرکز حلقه نیروی وارد بر مولکول

الف) صفر می‌شود. ب) ماکزیمم می‌شود.

۷۴) بار نقطه‌ای q در مرکز توپی که از یک دی الکتریک یکنواخت و همگن با ضریب گذردهی ε ساخته شده است، قرار دارد. بردار قطبش $\vec{P}$ به صورت تابعی از بردار شعاعی $\vec{r}$ نسبت به مرکز کره را بیابید. همچنین بار q' را در داخل کره‌ای فرضی که شعاع آن کمتر از شعاع توپ باشد، بیابید.

۷۵) نشان دهید که در مرز یک دی الکتریک و یک رسانا، چگالی سطحی بار مرز دی الکتریک برابر $\sigma' = -\sigma\ \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}$ خواهد بود به طوری که ε ضریب گذردهی و σ چگالی سطحی بار بر روی رسانا است.

۷۶) یک رسانا با شکل دلخواه و بار q در داخل یک دی الکتریک یکنواخت با ضریب گذردهی ε محاط شده است (مطابق شکل). کل بارهای مرزی روی سطح داخلی و خارجی دی الکتریک را بیابید.

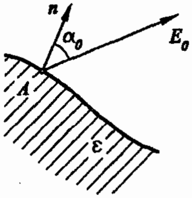


۷۷) یک دی الکتریک یکنواخت و همگن به صورت پوسته‌ای کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b ساخته شده است. نمودارهای تقریبی شدت میدان الکتریکی E و پتانسیل الکتریکی ϕ را بر حسب فاصله r از مرکز این پوسته کروی ترسیم کنید به شرطی که یک بار الکتریکی مثبت یکنواخت

الف) روی سطح داخلی پوسته کروی باشد.

ب) داخل حجم لایه پوسته پخش شده باشد.

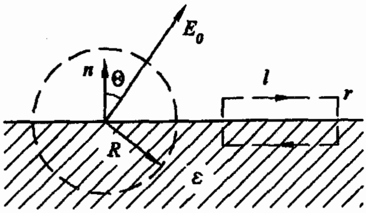
۷۸) نزدیک نقطه A (مطابق شکل) روی مرز بین شیشه و خلاء شدت میدان الکتریکی در خلاء برابر $E_\circ = ۱۰ \frac{V}{m}$ است به طوریکه زاویه بین بردار $\vec{E}_\circ$ و بردار $\vec{n}$ (بردار یکه عمود بر سطح) برابر $\alpha_\circ = ۳۰^\circ$ می‌باشد. مطلوب است شدت میدان E در شیشه نزدیک نقطهٔ A، زاویه α بین بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{n}$ و چگالی سطحی بارهای مرزی در نقطهٔ A.



۷۹) نزدیک به سطح صاف یک دی الکتریک همگن و یکنواخت با ضریب گذردهی ε شدت میدان الکتریکی در خلاء برابر $E_\circ$ است به طوری که بردار $\vec{E}_\circ$ با بردار نرمال $\vec{n}$ (بردار واحد عمود بر سطح) زاویه θ می‌سازد (مطابق شکل) با فرض اینکه میدان در داخل و خارج دی الکتریک یکنواخت باشد، مطلوب است:

الف) شار بردار $\vec{E}$ گذرنده از کره‌ای به شعاع R که مرکز آن روی سطح دی الکتریک می‌باشد.

ب) چرخش بردار $\vec{D}$ حول مسیر بسته Γ به طول L که صفحه آن عمود بر سطح دی الکتریک و موازی با بردار $\vec{E}_\circ$ است.



۸۰) یک صفحه دی الکتریک بی‌نهایت بزرگ یکنواخت با ضریب گذردهی ε با چگالی حجمی بار آزاد ρ، به صورت یکنواخت باردار شده است. با فرض اینکه ضخامت صفحه برابر $۲d$ باشد مطلوب است:

الف) اندازه شدت میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بر حسب فاصله L از نقطهٔ میانی صفحه (جایی که پتانسیل برابر صفر فرض می‌شود) با انتخاب محور x ها به صورت عمود بر صفحه، نمودارهای تقریبی مؤلفه $E_x\ (x)$ از بردار $\vec{E}$ و پتانسیل الکتریکی $\phi\ (x)$ را رسم کنید.

ب) چگالی سطحی و حجمی بار مرزی

۸۱) بارهای آزاد به طور یکنواخت با چگالی حجمی $\rho > \circ$ بر روی کره‌ای به شعاع R ساخته شده از دی‌الکتریک یکنواخت همگن با ضریب گذردهی ε توزیع شده‌اند. مطلوب است:

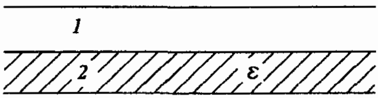
الف) اندازه شدت میدان الکتریکی به صورت تابعی از r (فاصله از مرکز کره) و نمودارهای تقریبی $E(r)$ و $\phi(r)$ را رسم کنید.
ب) چگالی سطحی و حجمی بارهای مرزی

۸۲) یک دی الکتریک دیسکی شکل به شعاع R و ضخامت d به صورت استاتیکی قطبیده می‌شود لذا دارای قطبش یکنواخت $\vec{P}$ می‌گردد. بردار $\vec{P}$ بر روی صفحه دیسک قرار دارد. مطلوب است شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در مرکز دیسک اگر $d << R$ باشد.

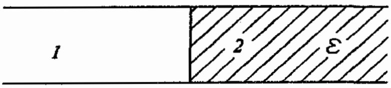
۸۳) یک صفحهٔ دی الکتریک بی‌نهایت به ضخامت $2d$ دارای قطبشی به صورت $\vec{P} = \vec{P}_0 \ (1 - \frac{x^2}{d^2})$ می‌باشد که x فاصله از صفحه میانی دی الکتریک و $\vec{P}_0$ بردار عمود بر صفحه است. شدت میدان الکتریکی در داخل دی الکتریک و اختلاف پتانسیل بین دو سطح آن را بیابید.

۸۴) در ابتدا فضای بین صفحات خازنی پر از هوا و در این حالت شدت میدان الکتریکی برابر E_0 است. سپس نیمی از این فضا را مطابق شکل از یک دی الکتریک یکنواخت همگن با ضریب گذردهی ε پر می‌کنیم. اندازه بردارهای $\vec{E}$ و $\vec{D}$ در هر دو قسمت ۱ و ۲ را بیابید به شرطی که:

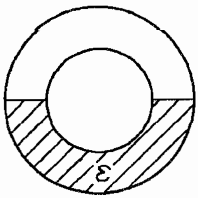
الف) ولتاژ صفحات خازن ثابت باشد.
ب) بار خازن ثابت باشد.



۸۵) مسألهٔ قبل را برای حالتی حل کنید که نیمه فضای خازن مطابق شکل پر شده باشد.



۸۶) نیمی از فضای بین دو الکترود یک خازن کروی مطابق شکل با دی الکتریک به ضریب گذردهی ε پر شده است. بار خازن نیز برابر q می‌باشد. مطلوب است اندازه شدت میدان الکتریکی بین صفحات خازن بر حسب فاصله r از مرکز خازن.



۸۷) دو توپ کوچک یکسان که بارهای آنها هم علامت هستند از یک نقطه توسط دو ریسمان هم طول آویزان می‌شوند. هنگامیکه محیط اطراف با نفت سفید پر می‌شود، زاویه بین رسمان‌ها همچنان ثابت باقی می‌ماند. چگالی که توپ‌ها از آن ساخته شده‌اند را بیابید.

۸۸) یک میدان الکتریکی یکنواخت به شدت $E = ۱۰۰ \frac{V}{m}$ در درون یک توپ ساخته شده از دی الکتریک یکنواخت و همگن با ضریب گذردهی $\varepsilon = ۵$ ایجاد شده است. شعاع این توپ برابر $R = ۳\text{cm}$ می‌باشد. بیشترین چگالی سطحی بارهای مرزی و کل بارهای مرزی از یک علامت را بیابید.

۸۹) فضا به دو نیمه تقسیم شده است نیمی از آن خلأ و نیمه دیگر از یک دی الکتریک یکنواخت همگن با ضریب گذردهی ε پر شده است. بار نقطه‌ای q را در خلأ و به فاصله L از دی الکتریک قرار می دهیم. مطلوب است:

الف) چگالی سطحی بارهای مرزی بر حسب فاصله r از بار نقطه‌ای q. نتیجه را برای حالتی که $L \to ۰$ بررسی کنید.

ب) کل بار مرزی روی سطح دی الکتریک

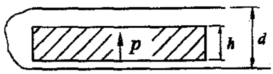
۹۰) با استفاده از حل مسألهٔ قبل مطلوب است اندازه نیرویی که بارهای مرزی بر بار نقطه‌ای q وارد می کنند.

۹۱) با توجه به مسألهٔ ۸۹ بار q را روی سطح دی الکتریک قرار می‌دهیم ($L = ۰$) مطلوب است اندازه بردارهای $\vec{P}$ و $\vec{D}$ و همچنین پتانسیل الکتریکی ϕ بر حسب فاصله r از بار نقطه‌ای q.

۹۲) یک کره رسانای کوچک با بار q را در داخل یک دی الکتریک بی نهایت بزرگ و یکنواخت و همگن با ضریب گذردهی ε قرار می‌دهیم. این دی الکتریک در مجاورت خلأ قرار دارد و فاصله کره از مرز بین خلأ و دی الکتریک برابر L می‌باشد. چگالی سطحی بارهای مرزی روی صفحه مرزی به صورت تابعی از فاصله r از کره بیابید. نتیجه به دست آمده را برای حالت $L \to ۰$ تحلیل کنید.

۹۳) نیمی از فضا از یک دی الکتریک یکنواخت همگن با ضریب گذردهی ε پر شده است و دارای یک صفحه رسانای مرزی است. در داخل این دی الکتریک و به فاصله L از این صفحه یک ساچمه فلزی کوچک با بار q قرار دارد. مطلوب است چگالی سطحی بارهای مرزی در صفحه مرزی بر حسب فاصله r از ساچمه.

۹۴) یک صفحه دی الکتریک به ضخامت h و با قطبش یکنواخت $\vec{P}$ در درون خازنی که صفحات آن با سیم به هم متصل شده‌اند قرار داده می‌شود. فاصله صفحات خازن برابر d است. شدت میدان الکتریکی در داخل و خارج دی الکتریک را بیابید.



۹۵) یک دی الکتریک استوانه‌ای شکل بلند دارای قطبشی به شکل $\vec{P} = \alpha \ \vec{r}$ است که α یک عدد ثابت مثبت و $\vec{r}$ فاصله از محور استوانه می‌باشد. چگالی حجمی ρ' بارهای مرزی را به صورت تابعی از r نسبت به محور بیابید.

۹۶) یک کره دی الکتریک دارای قطبش یکنواخت و ثابت $\vec{P}$ است. با توجه به اینکه این حالت مانند این است که یک جابه‌جایی کوچک بین بارهای مثبت و منفی بدهیم

الف) میدان الکتریکی $\vec{E}$ درون کره را بیابید.

ب) نشان دهید که میدان پتانسیل در خارج کره به مانند این است که یک دو قطبی در مرکز کره قرار دهیم و پتانسیل آن میدان برابر $\phi = \frac{\vec{P}_\circ \cdot \vec{r}}{۴\pi\varepsilon_\circ}$ می‌شود که $\vec{P}_\circ$ گشتاور الکتریکی کره و $\vec{r}$ فاصله از مرکز کره می‌باشد.

۹۷) با توجه به حل مسألهٔ قبل، شدت میدان الکتریکی $\vec{E}_\circ$ در داخل یک حفره کروی که درون یک دی الکتریک یکنواخت و پیوسته با ضریب گذردهی ε قرار دارد بیابید به شرط اینکه در فاصله بسیار دور از حفره شدت میدان برابر $\vec{E}$ باشد.

۹۸) یک دی الکتریک یکنواخت و کروی شکل با ضریب گذردهی ε درون میدان الکتریکی به شدت $\vec{E}_\circ$ قرار داده می‌شود. تحت این شرایط دی الکتریک به صورت یکنواخت قطبیده می‌شود. مطلوب است شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ داخل دی الکتریک و قطبش $\vec{P}$.

۹۹) یک استوانه دی الکتریک با طول بی نهایت به صورت ثابت و یکنواخت قطبیده می‌شود به طوریکه قطبش $\vec{P}$ آن عمود بر محور استوانه است. شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ درون دی‌الکتریک را بیابید.

۱۰۰) یک استوانه بلند ساخته شده از یک دی الکتریک یکنواخت با ضریب گذردهی ε درون میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_\circ$ گذاشته می‌شود به طوریکه محور استوانه عمود بر بردار $\vec{E}_\circ$ خواهد بود. تحت این شرایط، استوانه به صورت یکنواخت قطبیده می‌شود. با استفاده از نتیجه به دست آمده در مسأله قبل، شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ و قطبش $\vec{P}$ در داخل استوانه را بیابید.

فصل ۳

خازن‌های الکتریکی و انرژی میدان الکتریکی

۱۰۱) ظرفیت خازنی که شامل یک کره رسانا به شعاع R_1 و یک لایه دی الکتریک هم مرکز با کره با ضریب گذردهی ε و شعاع R_2 را بیابید. $(R_1 < R_2)$

۱۰۲) دو خازن تخت با دی الکتریک هوا هر کدام به ظرفیت C به طور سری به یک باتری با نیروی محرکه E متصل شده‌اند. سپس یکی از خازن‌ها با دی‌الکتریکی با گذردهی ε پر می‌شود. به چه نسبتی شدت میدان الکتریکی در آن خازن کم می‌شود؟ چه مقدار بار از باتری جریان می‌یابد.

۱۰۳) فضای بین صفحات یک خازن تخت را از دو لایه دی الکتریک ۱ و ۲ در کنار هم و به ضخامت‌های d_1 و d_2 و ضریب‌های گذردهی ε_1 و ε_2 پر می‌کنیم. اگر مساحت هر صفحه برابر S باشد، مطلوب است:

الف) ظرفیت خازن

ب) اگر ولتاژ خازن برابر V و جهت میدان الکتریکی از لایه ۱ به سمت لایه ۲ باشد، چگالی سطحی σ' بارهای مرزی در لایه مرزی را بیابید.

۱۰۴) فضای بین صفحات یک خازن تخت را از دی الکتریک با ضریب گذردهی ε که به صورت خطی از ε_1 تا ε_2 $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$ در جهت عمود بر صفحات تغییر می‌کند، پر می‌کنیم. اگر مساحت هر صفحه خازن برابر S و فاصله بین صفحات برابر d باشد مطلوب است:

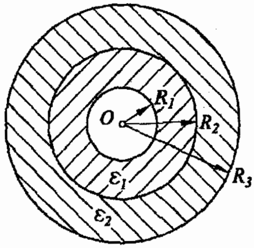
الف) ظرفیت خازن

ب) چگالی حجمی بارهای مرزی بر حسب ε به شرط اینکه بار خازن برابر q و جهت میدان $\vec{E}$ درون خازن در جهت افزایش مقدار ε باشد.

۱۰۵) ظرفیت یک خازن کروی را بیابید به طوریکه دو الکترود آن دارای شعاع‌های R_1 و R_2 $(R_2 > R_1)$ باشند و فضای بین آنها با دی الکتریکی پر شده است که ضریب گذردهی آن متغیر و به صورت $\varepsilon = \frac{a}{r}$ است. a یک عدد ثابت و r فاصله از مرکز خازن است.

۱۰۶) یک خازن استوانه‌ای از دو لایه دی الکتریک استوانه‌ای شکل به ترتیب با ضرایب گذردهی ε_1 و ε_2 پر شده است شعاع داخلی لایه‌ها R_1 و R_2 $(R_2 > R_1)$ می‌باشد. اگر ماکزیمم میدان الکتریکی که هر کدام از دی الکتریک‌ها می توانند تحمل کنند به ترتیب برابر E_{1m} و E_{2m} باشد، چه رابطه‌ای بین ε ، R و E_m برقرار باشد تا در اثر زیاد کردن ولتاژ، اندازه میدان الکتریکی برای هر دو دی الکتریک هم زمان به مقدار ماکزیمم برسند؟

۱۰۷) یک خازن استوانه‌ای با دو دی الکتریک در شکل زیر نشان داده شده است. ماکزیمم شدت میدانی که هر دو دی الکتریک می‌توانند تحمل کنند به ترتیب برابر E_1 و E_2 می‌باشد. با فرض اینکه $\varepsilon_1 R_1 E_1 < \varepsilon_2 R_2 E_2$ باشد، ولتاژ شکست خازن را بیابید.



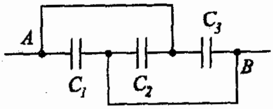
۱۰۸) دو سیم مستقیم بسیار بلند با سطح مقطع مساوی a به صورت موازی با هم در هوا قرار گرفته‌اند. فاصله بین محورهای آنها برابر b است. ظرفیت خازن متشکل از این دو سیم به ازای واحد طول و با فرض $a << b$ را بیابید.

۱۰۹) یک سیم بسیار بلند مستقیم، موازی با یک صفحه رسانای بی‌نهایت قرار داده می‌شود. اگر شعاع سطح مقطع سیم برابر a و فاصله بین محور سیم و صفحه برابر b باشد، ظرفیت این سیستم را با فرض $b >> a$ بیابید.

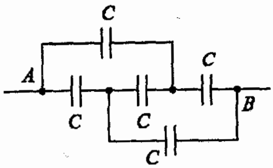
۱۱۰) ظرفیت سیستمی متشکل از دو توپ فلزی یکسان به شعاع a و فاصله بین مراکز b را بیابید به شرطی که $a << b$ و سیستم در درون یک دی الکتریک با ضریب گذردهی ε قرار داده شود.

۱۱۱) ظرفیت سیستمی متشکل از یک توپ فلزی به شعاع a و یک صفحه رسانای بی نهایت که به فاصله L از مرکز توپ قرار دارد را بیابید. $(L >> a)$

۱۱۲) ظرفیت معادل سیستمی از خازن‌های یکسان بین نقاط A و B نشان داده شده در شکل‌های «الف» و «ب» را بیابید.



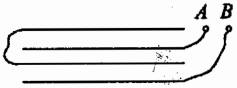
(الف)



(ب)

۱۱۳) چهار صفحه فلزی یکسان به مساحت S و به فاصله d از یکدیگر در هوا قرار گرفته‌اند. ظرفیت معادل بین نقاط A و B را بیابید، اگر صفحات مطابق شکل‌های «الف» و «ب» به هم

متصل شده باشند.

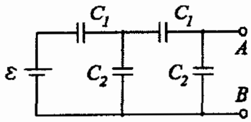


(الف)

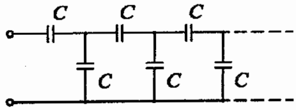
(ب)

۱۱۴) خازنی به ظرفیت $C_1 = 1\ \mu F$ با ماکزیمم ولتاژ $V_1 = 6\ \text{kV}$ و خازن دیگر با ظرفیت $C_2 = 2\ \mu F$ با ماکزیمم ولتاژ $V_2 = 4\ \text{kV}$ به صورت سری به هم وصل شده‌اند. سیستم متشکل از این دو خازن حداکثر چه ولتاژی را می‌تواند تحمل کند؟

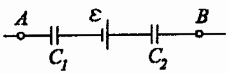
۱۱۵) اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B را در سیستم شکل زیر بیابید به شرط اینکه نیروی محرکه الکتریکی $E = 110\text{V}$ و نسبت ظرفیت‌ها $\frac{C_1}{C_1} = n = 2$ باشد.



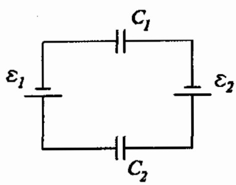
۱۱۶) ظرفیت خازن معادل یک شبکه بی‌نهایت که از تکرار اتصال دو خازن مشابه به ظرفیت C که مطابق شکل زیر درست شده است را محاسبه کنید.



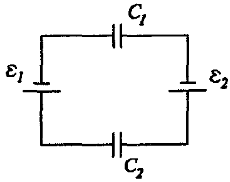
۱۱۷) مداری دارای مقطع AB مطابق شکل است. نیروی محرکه $E = 10\text{V}$ و ظرفیت خازن‌ها برابر $C_1 = 1\ \mu F$ و $C_2 = 2\ \mu F$ می‌باشد. اگر اختلاف پتانسیل $\phi_A - \phi_B = 5\text{V}$ باشد، اختلاف پتانسیل هر خازن را بیابید.



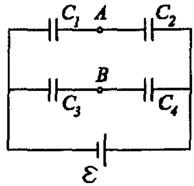
۱۱۸) در مدار نشان داده شده در شکل اختلاف پتانسیل بین صفحات چپ و راست هر خازن را بیابید.



۱۱۹) در مدار نشان داده شده در شکل بار هر خازن را بیابید.

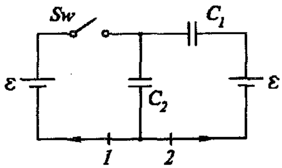


۱۲۰) اختلاف پتانسیل $\phi_A - \phi_B$ بین نقاط A و B در مدار شکل زیر را محاسبه کنید. تحت چه شرایطی این اختلاف پتانسیل برابر صفر می‌شود.

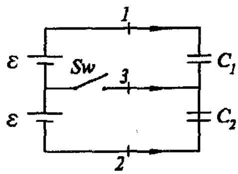


۱۲۱) خازنی به ظرفیت $C_1 = 1\ \mu F$ که تا ولتاژ $V = 110\ V$ پر شده است به صورت موازی به دو سر مداری که شامل دو خازن بدون بار سری به ظرفیت‌های $C_2 = 2\ \mu F$ و $C_3 = 3\ \mu F$ می‌باشد متصل شده است. چه مقدار بار از سیم‌های رابط جریان می‌یابد؟

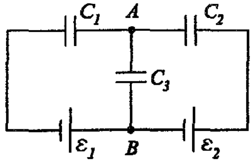
۱۲۲) پس از بستن کلید SW در مدار نشان داده شده در مدار شکل زیر، چه مقدار بار در جهت‌های مشخص شده از نقاط ۱ و ۲ عبور خواهد کرد.



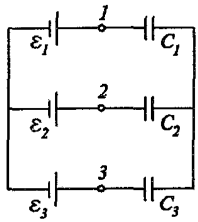
۱۲۳) در مدار نشان داده شده در شکل زیر نیروی محرکه الکتریکی هر باتری برابر $E = 60\ V$ و ظرفیت خازن‌ها برابر $C_1 = 2\ \mu F$ و $C_2 = 3\ \mu F$ است. پس از بستن کلید SW چه مقدار بار از نقاط ۱ و ۲ و ۳ در جهت‌های نشان داده شده می‌گذرد.



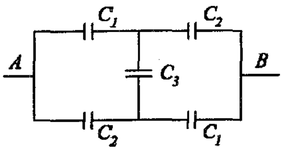
۱۲۴) اختلاف پتانسیل $\phi_A - \phi_B$ بین نقاط A و B از مدار نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.



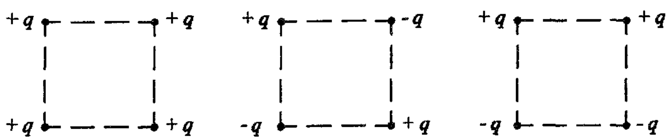
۱۲۵) پتانسیل نقطهٔ ۱ از مدار نشان داده شده در شکل زیر را با فرض صفر بودن پتانسیل نقطهٔ O بیابید. با استفاده از تقارن در فرمول بدست آمده، روابطی برای پتانسیل نقاط ۲ و ۳ نیز بنویسید.



۱۲۶) مطلوب است ظرفیت خازن معادل بین نقاط A و B در مدار نشان داده شده در شکل زیر.



۱۲۷) انرژی برهم کنش بین بارهای قرار گرفته در چهار رأس مربعی به ضلع a در مدارهای نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



۱۲۸) بی‌نهایت بار q و $-q$ را به صورت یک‌درمیان، به فاصلهٔ a از هم چیده‌ایم. انرژی برهم کنش هر بار را با سایر بارها بیابید.

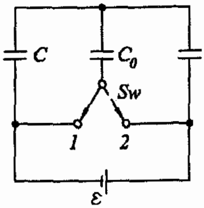
راهنمایی: از بسط توانی $ln\ (1 + \alpha)$ بر حسب توان‌های مختلف α استفاده کنید.

۱۲۹) بار نقطه‌ای q به فاصله L از یک صفحه رسانای بی‌نهایت قرار گرفته است. مطلوب است انرژی برهم کنش بین بار q با بار القا شده روی صفحه.

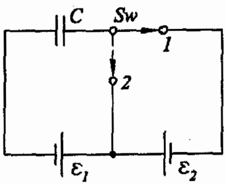
۱۳۰) انرژی بر هم کنش بین دو کره با بارهای q_1 و q_2 که به صورت تقارن کروی در آنها توزیع شده است را بیابید. فاصله بین مرکز کره‌ها برابر L می‌باشد.
راهنمایی: ابتدا انرژی برهم کنش بین یک کره با یک لایه نازک کروی از کره دیگر را بیابید.

۱۳۱) خازنی با ظرفیت $C_1 = 1\ \mu F$ و با ولتاژ اولیه $V = 300\,\text{V}$ به صورت موازی به یک خازن بدون بار با ظرفیت $C_2 = 2\ \mu F$ متصل می‌شود. تغییر انرژی الکتریکی سیستم را پس از رسیدن به حالت تعادل بدست آورده و نتیجه بدست آمده را توضیح دهید.

۱۳۲) پس از اینکه کلید SW از موقعیت ۱ به موقعیت ۲ جابه‌جا می شود چه مقدار گرما در مدار نشان داده شده در شکل زیر تولید می‌شود؟



۱۳۳) پس از اینکه کلید SW از موقعیت ۱ به موقعیت ۲ جابه‌جا می شود چه مقدار گرما در مدار نشان داه شده در شکل زیر تولید می‌شود؟



۱۳۴) سیستمی از دو پوسته فلزی هم مرکز به شعاع‌های R_1 و R_2 به ترتیب با بارهای q_1 و q_2 تشکیل شده است. مطلوب است انرژی درونی هر پوسته کروی W_1 و W_2، انرژی برهم کنش پوسته‌ها W_{12} و انرژی کل سیستم.

۱۳۵) بار q به صورت یکنواخت روی حجم کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. با فرض اینکه ضریب گذردهی برابر واحد باشد مطلوبست:

الف) انرژی الکتروستاتیک درونی کره

ب) نسبت انرژی ذخیره شده در کره W_1 به انرژی ذخیره شده در مابقی فضا W_2.

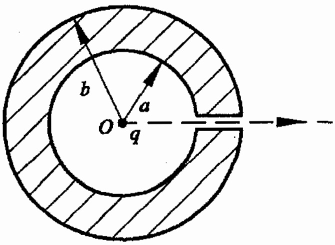
۱۳۶) بار نقطه‌ای $q = 3\ \mu c$ در مرکز یک لایه کروی از دی الکتریک یکنواخت و همگن با ضریب گذردهی ε قرار گرفته است. شعاع داخلی لایه $a = 250\ mm$ و شعاع خارجی آن $b = 500\,mm$ است. انرژی الکتروستاتیک ذخیره شده در داخل لایه دی الکتریک را بیابید.

۱۳۷) یک پوسته کروی به شعاع $R_۱$ و بار یکنواخت q تا شعاع $R_۲$ بزرگ می‌شود. کار انجام شده توسط نیروهای الکتریکی در این فرآیند را بیابید.

۱۳۸) بار نقطه‌ای $q_۰$ در مرکز یک پوسته به شعاع $R_۱$ با بار یکنواخت q قرار دارد. کار انجام شده توسط نیروهای الکتریکی هنگام انبساط پوسته از شعاع $R_۱$ تا شعاع $R_۲$ را بیابید.

۱۳۹) یک پوسته کروی به صورت یکنواخت با چگالی سطحی بار σ باردار می‌شود. با استفاده از قانون بقای انرژی، اندازه نیروی الکتریکی وارد بر واحد سطح این پوسته را بیابید.

۱۴۰) بار نقطه‌ای q در نقطهٔ O مرکز یک پوستهٔ کروی رسانای بدون بار قرار داده شده است. در این پوسته روزنهٔ کوچکی ایجاد شده است (مطابق شکل). چه مقدار کار لازم است تا بار q به آرامی از نقطهٔ O از طریق روزنه تا بی‌نهایت دور انتقال داده شود؟



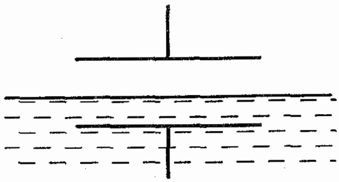
۱۴۱) هر یک از صفحات یک خازن تخت با دی الکتریک هوا مساحت S دارند. چه مقدار کار باید انجام شود تا فاصله بین صفحات خازن به آرامی از $x_۱$ تا $x_۲$ افزایش یابد به شرطی که:
الف) بار q خازن ثابت باشد.
ب) ولتاژ V دو سر خازن ثابت باشد.

۱۴۲) درون یک خازن تخت، صفحه‌ای موازی با دو صفحهٔ خازن وجود دارد به طوری که ضخامت این صفحه سوم $n = ۰/۶$ برابر فاصله بین دو صفحه خازن است. هنگامی که این صفحه درون خازن نباشد، ظرفیت خازن $C = ۲۰\mathrm{nF}$ است. ابتدا خازن به صورت موازی به منبع ولتاژ ثابت $V = ۲۰۰\mathrm{V}$ متصل شده و پس از آن جدا می‌گردد. سپس صفحه سوم از درون خازن به آرامی بیرون کشیده می‌شود.
مطلوب است کار انجام شده حین بیرون آوردن صفحه به شرطی که:
الف) جنس صفحه از فلز باشد.
ب) جنس صفحه از شیشه باشد.

۱۴۳) یک خازن تخت به صورت افقی داخل آب قرار داده می‌شود به طوریکه آب فاصله $d = ۱\mathrm{mm}$ بین صفحات را کاملاً پر می‌کند. سپس ولتاژ ثابت $V = ۵۰۰\mathrm{V}$ به خازن اعمال می شود. افزایش فشار آب بین صفحات خازن را بیابید.

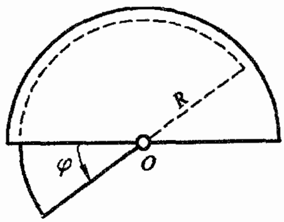
۱۴۴) یک خازن تخت به صورت افقی طوری درون مایع قرار می‌گیرد که یکی از صفحات آن داخل مایع و صفحه دیگر خارج از آن باشد (مطابق شکل) ضریب گذردهی مایع ε و چگالی آن برابر

ρ است. اگر روی صفحات خازن چگالی سطحی بار σ قرار گیرد، مایع تا چه ارتفاعی بالا خواهد آمد.



۱۴۵) یک لایه استوانه‌ای دی الکتریک با ضریب گذردهی ε داخل یک خازن استوانه ای شکل می‌شود به طوری که تمام فضای بین دو الکترود خازن را پر می‌کند. شعاع متوسط الکترودها برابر R و فاصله بین آنها برابر d $(d << R)$ است. اگر ولتاژ ثابت V به دو سر الکترود های خازن متصل گردد، نیروی الکتریکی که دی الکتریک را به داخل خازن می‌کشد، بیابید.

۱۴۶) خازنی از دو صفحه ساکن به شعاع نیم‌دایره و به شعاع R و یک دی الکتریک متحرک بین آنها با ضریب گذردهی ε که می تواند حول نقطهٔ O دوران کند، تشکیل شده است (مطابق شکل). ضخامت دی الکتریک برابر فاصله دو صفحه خازن و برابر d است. اگر اختلاف پتانسیل V به این خازن اعمال شود، گشتاور وارد بر دی الکتریک حول نقطهٔ O در موقعیت نشان داده شده در شکل را بیابید.



فصل ۴

جریان الکتریکی

۱۴۷) یک استوانه بلند با چگالی سطحی بار یکنواخت و شعاع سطح مقطع $a = 1\text{cm}$ در راستای محورش با سرعت ثابت $V = 10\ \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. شدت میدان الکتریکی بر واحد طول در سطح استوانه برابر $E = 0/9\ \frac{kV}{cm}$ می‌باشد. جریانی که از انتقال بارها بوجود می‌آید را بیابید.

۱۴۸) یک خازن استوانه‌ای با دی الکتریک هوا متصل به یک منبع ولتاژ $V = 200\text{V}$ و با سرعت ثابت $V = 5\frac{mm}{s}$ وارد مخزنی آبی می‌شود. اگر فاصله بین الکترودهای این خازن $d = 2\text{mm}$ و شعاع متوسط الکترودهای آن برابر $r = 50\text{mm}$ باشد، در این حالت جریان عبوری بین دو الکترود را بیابید. $(d << r)$

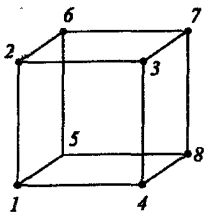
۱۴۹) در دمای صفر درجه سانتیگراد مقاومت رسانای ۲، n برابر رسانای ۱ است. ثابت گرمایی مقاومت معادل این دو رسانا را بیابید هنگامی که به صورت:

الف) سری به هم متصل شده باشند.

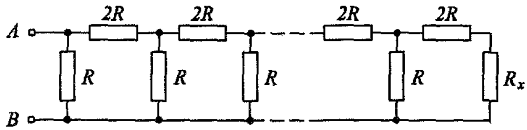
ب) موازی به هم متصل شده باشند.

۱۵۰) مقاومت معادل شبکه شکل زیر را بین نقاط داده شده بیابید. (مقاومت هر ضلع R است)

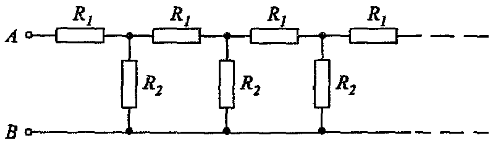
الف) ۱ – ۷ ب) ۲ – ۱ ج) ۳ – ۱



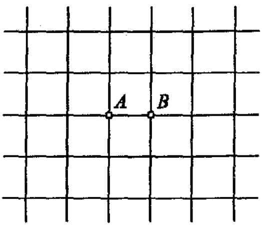
۱۵۱) مقاومت R_x در مدار نشان داده شده در شکل زیر چقدر باشد تا مقاومت کل مدار بین نقاط A و B به تعداد خانه‌های مدار بستگی نداشته باشد؟



۱۵۲) شکل زیر یک مدار بی‌نهایت را نشان می‌دهد که از تکرار خانه‌های مشابه با مقاومت‌ها $R_1 = ۴\Omega$ و $R_2 = ۳\Omega$ تشکیل شده است.
مطلوب است مقاومت معادل بین نقاط A و B.



۱۵۳) یک شبکهٔ بی‌نهایت سیمی با خانه‌های مربعی شکل وجود دارد (مطابق شکل) به طوری که مقاومت هر سیم بین دو گره مجاور برابر R_0 است. مطلوب است مقاومت معادل R شبکه بین نقاط A و B.
راهنمایی: از اصل تقارن و برهم نهی استفاده کنید.



۱۵۴) یک مادهٔ همگن از رسانای ضعیف با مقاومت ویژهٔ ρ فضای بین دو استوانه هم مرکز که از جنس رسانای ایده‌آل هستند را پر می‌کند. شعاع استوانه‌ها به ترتیب برابر a و b $(a < b)$ و طول استوانه برابر L است. با صرف‌نظر از اثرات لبه، مقاومت محیط بین دو استوانه را بیابید.

۱۵۵) یک کرهٔ فلزی با شعاع a توسط یک پوستهٔ کروی فلزی هم مرکز با شعاع b احاطه شده است. اگر فضای بین کره و پوسته توسط یک رسانای ضعیف همگن با مقاومت ویژه ρ پر شده باشد، مقاومت معادل فضای بین کره و پوسته را بیابید.
جواب به دست آمده را برای حالتی که $b \to \infty$ است تحلیل کنید.

۱۵۶) فضای بین دو کره رسانای هم مرکز به شعاع‌های a، b $(a < b)$ از یک رسانای ضعیف همگن پر شده است. ظرفیت این سیستم برابر c می‌باشد، اگر اختلاف پتانسیل بین کره‌ها هنگامی که از منبع ولتاژ خارجی جدا شده‌اند در مدت زمان Δt، n برابر کاهش یابد، مقاومت ویژهٔ ρ محیط بین دو کره را بیابید.

۱۵۷) دو کرهٔ فلزی با شعاع یکسان a درون یک محیط رسانای ضعیف همگن با مقاومت ویژه ρ قرار داده می‌شوند. با فرض این‌که فاصله بین کره‌ها خیلی بزرگتر از شعاع آنها باشد، مقاومت محیط بین دو کره را بیابید.

۱۵۸) یک توپ فلزی با شعاع a در فاصلهٔ L از یک صفحهٔ رسانای ایده‌آل بی‌نهایت قرار داده می‌شود. فضای اطراف کره با یک رسانای ضعیف همگن با مقاومت ویژهٔ ρ پر می‌گردد. با فرض این‌که $L >> a$ مطلوب است.

الف) اگر اختلاف پتانسیل بین کره و صفحه برابر V باشد، چگالی جریان در صفحهٔ رسانا را بر حسب فاصلهٔ r از کره بیابید.

ب) مقاومت الکتریکی معادل محیط بین کره و صفحه.

۱۵۹) دو سیم بلند موازی در یک محیط رسانای ضعیف با مقاومت ویژهٔ ρ قرار داده می‌شوند. اگر فاصلهٔ بین محورهای سیم‌ها برابر L و شعاع سطح مقطع هر سیم برابر a باشد، با فرض $a << L$ مطلوب است.

الف) اگر اختلاف پتانسیل بین سیم‌ها برابر V باشد، چگالی جریان در نقطهٔ که در فاصلهٔ مساوی r از هر دو سیم قرار دارد، بیابید.

ب) مقاومت معادل محیط بین سیم‌ها بر واحد طول.

۱۶۰) فضای بین صفحات یک خازن تخت از شیشه با مقاومت ویژهٔ $\rho = ۱۰۰ G\Omega m$ پر شده است.
ظرفیت خازن برابر $C = ۴\mu F$ می‌باشد.
هنگامی که خازن به ولتاژ $V = ۲kV$ متصل می‌شود، جریان نشتی خازن را بیابید.

۱۶۱) دو رسانا با شکل دلخواه درون یک محیط رسانای ضعیف با مقاومت ویژهٔ ρ و ضریب گذردهی ε قرار داده می‌شوند. حاصل‌ضرب RC را که R مقاومت محیط بین دو رسانا و C ظرفیت بین دو رساناست بیابید.

۱۶۲) یک رسانا با مقاومت ویژهٔ ρ، دی‌الکتریکی با ضریب گذردهی σ را احاطه کرده است. در یک نقطه مشخص مثل A روی سطح رسانا بردار جابه‌جایی الکتریکی برابر $\vec{D}$ است. بردار $\vec{D}$ از رسانا به سمت خارج است و با راستای عمود بر سطح رسانا زاویهٔ α می‌سازد. مطلوب است چگالی سطحی بارها روی رسانا در نقطهٔ A و چگالی جریان در رسانا در نزدیکی همان نقطه.

۱۶۳) فضای بین صفحات یک خازن تخت از یک رسانای ضعیف غیریکنواخت پر می‌شود به طوری که رسانایی آن به طور خطی در جهت عمود بر صفحات از $\sigma_۱ = ۱\frac{ps}{m}$ تا $\sigma_۲ = ۲\frac{ps}{m}$ تغییر می‌کند. مساحت هر صفحه برابر $S = ۲۳۰ cm^۲$ و فاصلهٔ بین صفحات $d = ۲mm$ می‌باشد. اگر خازن به ولتاژ $V = ۳۰۰V$ متصل گردد، جریان عبوری از خازن را بیابید.

۱۶۴) نشان دهید که قانون شکست خطوط جریان مستقیم در مرز بین دو محیط رسانا به صورت $\frac{\tan\alpha_۲}{\tan\alpha_۱} = \frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}$ است که $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ به ترتیب رسانایی دو محیط و $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ زوایای بین خطوط جریان با راستای عمود بر سطح مرزی است.

۱۶۵) دو استوانه رسانا با سطح مقطع یکسان و با مقاومت‌های ویژه متفاوت $\rho_۱$ و $\rho_۲$ از انتها به هم متصل شده‌اند. اگر جریان I از رسانای ۱ به سمت رسانای ۲ جریان یابد، بارهای موجود در مرز این دو استوانه را بیابید.

۱۶۶) فاصلهٔ بین صفحات یک خازن تخت با دو لایهٔ دی الکتریک به ضخامت‌های d_1 و d_2 و ضرایب گذردهی ε_1 و ε_2 و مقاومت‌های ویژه ρ_1 و ρ_2 پر شده است. ولتاژ ثابت V به این خازن اعمال می‌شود به نحوی که جهت میدان الکتریکی از لایهٔ ۱ به سمت لایهٔ ۲ است. مطلوب است چگالی سطحی بارها روی مرز دو لایهٔ دی‌الکتریک. تحت چه شرایطی $\sigma = 0$ می‌شود؟

۱۶۷) فاصلهٔ بین صفحات ۱ و ۲ از یک خازن تخت توسط یک رسانای ضعیف غیریکنواخت پر می‌شود. ضریب گذردهی و مقاومت ویژه از ε_1 و ρ_1 در صفحهٔ ۱ تا مقادیر ε_2 و ρ_2 در صفحهٔ ۲ تغییر می‌کند. ولتاژ ثابت به این خازن اعمال می‌شود و باعث می‌گردد جریان I از صفحهٔ ۱ به سمت صفحهٔ ۲ جریان یابد. کل بار خارجی موجود در محیط بین صفحات چقدر است؟

۱۶۸) فضای بین صفحات یک خازن تخت از یک رسانای غیریکنواخت ضعیف پر شده است. مقاومت ویژه این رسانای ضعیف به صورت خطی و در جهت عمود بر صفحات تغییر می‌کند به طوری که نسبت ماکزیمم مقاومت ویژه به می‌نیمم آن برابر n است. با فرض این‌که فاصلهٔ بین صفحات خازن برابر d و اختلاف پتانسیل اعمال شده بر خازن برابر V باشد، مطلوب است چگالی حجمی بار بین صفحات.

۱۶۹) یک رسانای استوانه‌ای شکل بلند به مساحت S از ماده‌ای ساخته شده است که مقاومت ویژهٔ آن تنها به فاصلهٔ r از محور استوانه بستگی دارد. این وابستگی به شکل $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$ است که α یک عدد ثابت می‌باشد. مطلوب است:

الف) مقاومت بر واحد طول این رسانا.

ب) اگر جریان I از این رسانا عبور کند، شدت میدان الکتریکی در داخل آن چقدر است؟

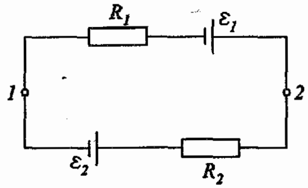
۱۷۰) یک خازن با ظرفیت $C = 400PF$ از طریق مقاومت $R = 650\Omega$ به یک منبع ولتاژ ثابت V_0 متصل شده است. چقدر طول می‌کشد تا ولتاژ خازن به $V = 0/9V_0$ برسد؟

۱۷۱) خازنی با دی‌الکتریکی به ضریت گذردهی $\varepsilon = 2/1$ پر شده است. این خازن در مدت زمان $\tau = 3\text{min}$ دقیقه نیمی از بار خود را از دست می‌دهد. با فرض این‌که خازن فقط از طریق دی‌الکتریک تخلیه شود، مقاومت ویژهٔ دی‌الکتریک را بیابید.

۱۷۲) مداری از یک منبع با نیروی محرکهٔ ثابت E و یک مقاومت R و یک خازن با ظرفیت C که به صورت سری به هم متصل شده‌اند، تشکیل یافته است. از مقاومت داخلی منبع صرف‌نظر می‌شود. در لحظهٔ $t = 0$ ظرفیت خازن به صورت ناگهانی n بار کاهش می‌یابد. جریان مدار را به صورت تابعی از زمان t به دست آورید.

۱۷۳) یک آمپرسنج و یک ولت‌متر به طوری سری به یک باطری به نیروی محرکهٔ $\varepsilon = 6V$ متصل هستند. هنگامی که یک مقاومت مشخص به صورت موازی به ولت‌متر متصل می‌شود، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد $n = 2$ برابر کاهش می‌یابد. در حالی‌که عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، $n = 2$ برابر افزایش می‌یابد. عدد ولت‌سنج را بعد از اتصال مقاومت بیابید.

۱۷۴) مطلوب است اختلاف پتانسیل $\Phi_۱ - \Phi_۲$ بین نقاط ۱ و ۲ در مدار نشان داده شده در شکل زیر. اگر $R_۱ = ۱۰\Omega, R_۲ = ۲۰\Omega, \varepsilon_۱ = ۵V$ و $\varepsilon_۲ = ۲V$ باشد از مقاومت داخلی منابع جریان صرف‌نظر می‌شود.

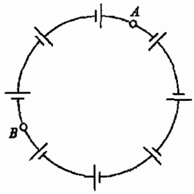


۱۷۵) دو منبع جریان با نیروی محرکهٔ الکتریکی برابر و مقاومت‌های درونی متفاوت $R_۱$ و $R_۲$ $(R_۲ > R_۱)$ به صورت سری به هم متصل شده‌اند. مقاومت خارجی R چقدر باشد تا اختلاف پتانسیل دو سر یکی از دو منبع برابر صفر شود؟ کدام یک؟

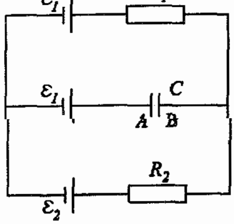
۱۷۶) N منبع جریان با نیروی محرکهٔ الکتریکی متفاوت مطابق شکل زیر به هم متصل شده‌اند. نیروی محرکهٔ الکتریکی هر منبع متناسب با مقاومت درونی آن است. یعنی $\varepsilon = \alpha R$ که α یک عدد ثابت می‌باشد. اگر مقاومت سیم‌های رابط ناچیز باشد مطلوب است:

الف) جریان مدار.

ب) اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B به طوری‌که این دو نقطه مدار را به دو قسمت n و $N - n$ منبع تقسیم کنند.

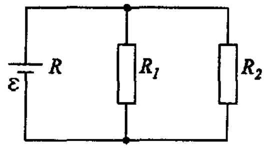


۱۷۷) در مدار نشان داده شده در شکل نیروی محرکهٔ الکتریکی منابع به ترتیب برابر $\varepsilon_۱ = ۱V$ و $\varepsilon_۲ = ۲/۵V$ و مقاومت‌های داخلی منابع صرف‌نظر می‌شود. مطلوب است اختلاف پتانسیل Φ_A و Φ_B بین صفحات خازن C.

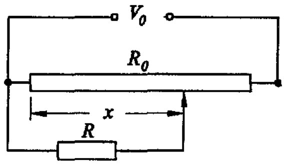


۱۷۸) در مدار نشان داده شده در شکل نیروی محرکه الکتریکی منبع برابر $\varepsilon = ۵V$ و مقاومت‌ها به ترتیب برابر $R_۱ = ۴\Omega$ و $R_۲ = ٦\Omega$ می‌باشند. مقاومت داخلی منبع برابر $R = ۰/۱$ است.

مطلوب است جریان مقاومت‌های R_1 و R_2.

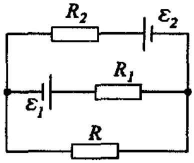


۱۷۹) شکل زیر مدار یک پتانسیومتر را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان ولتاژ V اعمال شده بر وسیله‌ای با مقاومت R را تغییر دهیم. پتانسیومتر دارای طول L و مقاومت R_0 است که ولتاژ V_0 به ورودیهای آن اعمال می‌شود. مطلوب است ولتاژ V اعمال شده بر مقاومت R بر حسب فاصلهٔ x. حالت $R >> R_0$ را به صورت جداگانه تحلیل کنید.



۱۸۰) نیروی محرکه الکتریکی و مقاومت داخلی معادل دو باتری که به صورت موازی به هم متصل‌اند، و نیروی محرکهٔ الکتریکی آنها به ترتیب برابر ε_1 و ε_2 و مقاومت داخلی آن‌ها R_1 و R_2 می‌باشند مرا بیابید.

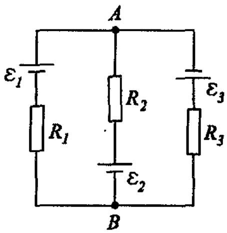
۱۸۱) اندازه و جهت جریان عبوری از مقاومت داخلی R در مدار نشان داده شده در شکل روبرو را بیابید. به شرطی که $\varepsilon_1 = ۱/۵V$ و $\varepsilon_2 = ۳/۷V$ و $R_1 = ۱۰\Omega$ و $R_2 = ۲۰\Omega$ و $R = ۵\Omega$ باشد. از مقاومت داخلی منابع صرف‌نظر می‌شود.



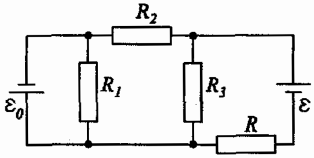
۱۸۲) در مدار نشان داده شده در شکل زیر نیروی محرکهٔ الکتریکی منابع به ترتیب $\varepsilon_1 = ۱/۵V$، $\varepsilon_2 = ۲V$ و $\varepsilon_3 = ۲/۵V$ و مقاومت‌ها به ترتیب برابر $R_1 = ۱۰\Omega$، $R_2 = ۲۰\omega$ و $R_3 = ۳۰\Omega$ می‌باشند. از مقاومت داخلی منابع صرف‌نظر می‌شود. مطلوب است:

الف) جریان عبوری از مقاومت R_1.

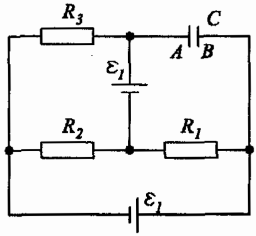
ب) اختلاف پتانسیل $\Phi_A - \Phi_B$ بین نقاط A و B.



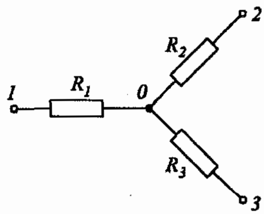
۱۸۳) جریان عبوری از مقاومت R در مدار نشان داده شده در شکل زیر را بیابید. از مقاومت داخلی باتری‌ها صرف‌نظر می‌شود.



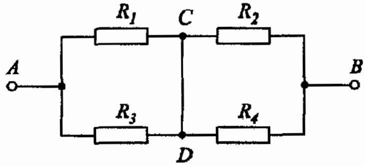
۱۸۴) اختلاف پتانسیل $\Phi_A - \Phi_B$ بین صفحات خازن C از مدار نشان داده شده در شکل زیر را بیابید. $\varepsilon_1 = ۴V$ و $\varepsilon_2 = ۱V$ و مقاومت‌ها برابر $R_1 = ۱۰\Omega$ و $R_2 = ۲۰\Omega$ و $R_3 = ۳۰\Omega$ می‌باشد. مقاومت داخلی باتری‌ها ناچیز فرض می‌شوند.



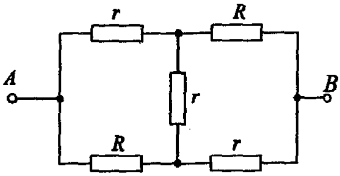
۱۸۵) جریان عبوری از مقاومت R_1 در مدار نشان داده شده در شکل زیر را بیابید. اگر $R_1 = ۱۰\Omega$ و $R_2 = ۲۰\Omega$ و $R_3 = ۳۰\Omega$ و پتانسیل نقاط ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برابر $\Phi_1 = ۱۰V$ و $\Phi_2 = ٦V$ و $\Phi_3 = ۵V$ باشند.



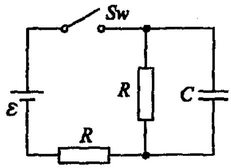
۱۸۶) ولتاژ ثابت $V = ۲۵V$ بین نقاط A و B از مدار شکل زیر ثابت نگه داشته می‌شود. مطلوب است اندازه و جهت جریان عبوری از بخش CD اگر مقاومت‌ها برابر $R_1 = ۱\Omega$ و $R_2 = ۲\Omega$ و $R_3 = ۳\Omega$ و $R_4 = ۴\Omega$ باشند.



۱۸۷) مقاومت معادل بین نقاط A و B از مدار نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.



۱۸۸) بعد از بستن کلید SW در لحظهٔ $t = 0$ (مطابق شکل)، ولتاژ دو سرخازن C چگونه با زمان t تغییر می‌کند.

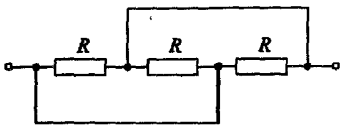


۱۸۹) چه مقدار گرما در یک پیچه با مقاومت R تولید می‌شود به شرطی که بار q از آن عبور کند و جریان داخل پیچه :

الف) به طور یکنواخت در فاصلهٔ زمانی Δt به صفر برسد.

ب) طوری به صفر میل کند که در هر فاصلهٔ زمانی Δt مقدارش نصف شود.

۱۹۰) یک منبع dc با مقاومت داخلی R_0 به سه مقاومت یکسان R متصل به هم مطابق شکل زیر وصل شده است. به ازای چه مقداری از R، توان حرارتی تولید شده ماکزیمم می‌شود؟



۱۹۱) نشان دهید که توزیع جریان در دو مقاومت R_1 و R_2 که به صورت موازی به هم متصل شده‌اند به نحوی است که توان حرارتی تولید شده می‌نیمم است.

۱۹۲) یک باتری با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\varepsilon = 2/6\text{V}$ به یک مقاومت خارجی متصل شده و جریان $I = 1\text{A}$ در آن ایجاد می‌کند. در این حالت اختلاف پتانسیل بین دو سر باتری برابر $V = 2\text{V}$ می‌شود. توان حرارتی تولید شده در باتری و توان داده شده به مدار توسط نیروهای الکتریکی باتری را بیابید.

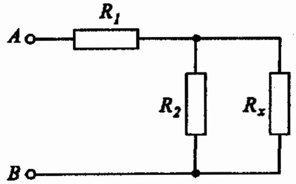
۱۹۳) ولتاژ V به یک موتور الکتریکی dc اعمال می‌شود. اگر مقاومت سیم‌پیچ آرمیچر برابر R باشد، به ازای چه مقدار جریان عبوری از سیم‌پیچ توان مفید موتور ماکزیمم است. این توان چقدر است؟ بازدهٔ موتور در این حالت چقدر است؟

۱۹۴) چند درصد از قطر سیم فیلمان در اثر تبخیر باید کاهش یافته باشد در صورتی که برای ثابت نگه داشتن دمای سیم باید اختلاف پتانسیل $n = \%1$ افزایش یابد. فرض کنید میزان انتقال حرارت از سیم فیلمان به محیط اطراف متناسب با مساحت سطح فیلمان باشد.

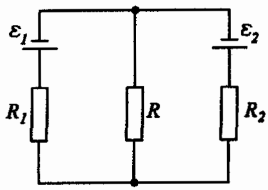
۱۹۵) یک رسانا دارای مقاومت مستقل از دمای R و ظرفیت گرمایی C است. در لحظهٔ $t = 0$ این رسانا به ولتاژ ثابت V متصل می‌شود. با فرض این‌که توان حرارتی اتلاف شده توسط رسانا به محیط اطراف به صورت $q = k(T - T_0)$ تغییر کند که k یک عدد ثابت و T_0 دمای محیط اطراف باشد. مطلوب است دمای مقاومت، T، بر حسب زمان t.

(می‌دانیم در لحظهٔ اولیه دمای رسانا برابر T_0 است.)

۱۹۶) مدار نشان داده شده در شکل زیر دارای مقاومت‌های $R_1 = 20\Omega$ و $R_2 = 30\Omega$ می‌باشد. به ازای چه مقداری از R_x، توان حرارتی تولید شده در آن عملاً مستقل از تغییرات کوچک مقاومت می‌باشد. در این حالت فرض کنید ولتاژ بین نقاط A و B ثابت باشد.

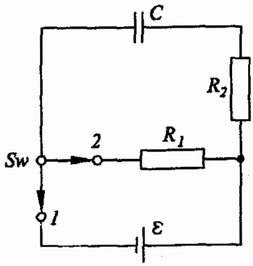


۱۹۷) در مدار نشان داده شده در شکل زیر مقاومت‌های R_1 و R_2 و نیروی محرکه‌های ε_1 و ε_2 معلوم هستند. از مقاومت درونی منابع صرف‌نظر می‌شود. به ازای چه مقداری از R، توان حرارتی تولید شده در آن ماکزیمم خواهد بود؟ این مقدار را بیابید؟



۱۹۸) یک ترکیب سری - موازی باتری‌ها، از $N = 300$ باتری یکسان با مقاومت داخلی $r = 0/3\Omega$ تشکیل شده که بر مقاومت خارجی $R = 10\Omega$ متصل شده است. تعداد شاخه‌های موازی، n، که به ازای آن توان حرارتی مقاومت خارجی R ماکزیمم می‌شود را بیابید. (هر شاخه موازی شامل $\frac{N}{n}$ باتری سری است.)

۱۹۹) یک خازن با ظرفیت $C = 5\mu F$ به منبع ثابت $\varepsilon = 200V$ متصل شده است. (شکل صفحهٔ بعد) سپس کلید SW از وضعیت ۱ به وضعیت ۲ تغییر مکان می‌دهد. مطلوب است گرمای تولید شده در مقاومت R_1 و R_2.



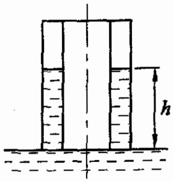
۲۰۰) بین صفحات یک خازن تخت، صفحه‌ای فلزی با ضخامت $n = ۰/۶$ برابر فاصله بین صفحات خازن موجود است، هنگامی که این صفحه درون خازن نباشد، ظرفیت خازن برابر $C = ۲۰\text{nF}$ است. خازن را به منبع ولتاژ ثابت $V = ۱۰۰\text{V}$ وصل می‌کنیم. صفحهٔ فلزی را به آرامی از خازن خارج می‌کنیم. مطلوب است:

الف) تغییر انرژی خازن.

ب) کار مکانیکی انجام شده در حین خارج کردن صفحه از خازن.

۲۰۱) خازنی تخت با یک تیغهٔ شیشه‌ای، به عنوان دی‌الکتریک به طور کامل پر شده است. بدون تیغهٔ شیشه‌ای ظرفیت خازن برابر $C = ۲۰nF$ است. خازن را به منبع ولتاژ ثابت $V = ۱۰۰V$ متصل کرده، سپس تیغهٔ شیشه‌ای را به آرامی در حالی که اصطکاک نیست از خازن خارج می‌کنیم. تغییر انرژی خازن و کار مکانیکی انجام شده هنگام بیرون آوردن تیغه را محاسبه نمایید.

۲۰۲) خازن استوانه‌ای شکل متصل به ولتاژ ثابت V از یک انتها در تماس با سطح آب قرار دارد. (مطابق شکل) فاصلهٔ بین صفحات خازن از شعاع متوسط آنها خیلی کوچک‌تر است. مطلوب است ارتفاع h که آب در بین صفحات خازن بالا می‌رود.
از اثر مویینگی صرف‌نظر می‌شود.



۲۰۳) شعاع الکترودهای یک خازن کروی برابر a و b است. $(a < b)$. فضای بین الکترودها از ماده‌ای همگن با ضریب گذردهی ε و مقاومت ویژهٔ ρ پر شده است. در ابتدا خازن بدون بار است. سپس در لحظهٔ $t = ۰$ به الکترود داخلی بار $q_۰$ داده می‌شود. مطلوب است:

الف) تغییرات زمانی بار روی الکترود داخلی.

ب) مقدار حرارت ایجاد شده در اثر انتقال بار.

۲۰۴) الکترودهای خازنی با ظرفیت $C = ۲\mu F$ بارهای مخالف $q_۰ = ۱\text{cm}$ دارند. سپس الکترودها با مقاومت $R = ۵M\Omega$ به هم متصل می‌شوند. مطلوب است:

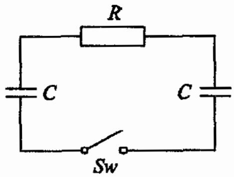
الف) بار منتقل شده از مقاومت در مدت زمان $\tau = ۲\mathrm{s}$.

ب) گرمای ایجاد شده در مقاومت در همان مدت زمان.

۲۰۵) در مدار نشان داده شده در شکل زیر ظرفیت هر خازن برابر C و مقاومت برابر R می‌باشد. یکی از خازن‌ها با ولتاژ $V_۰$ باردار شده سپس در لحظهٔ $t = ۰$ کلید SW بسته می‌شود. مطلوب است:

الف) جریان I در مدار به صورت تابعی از زمان t.

ب) گرمای ایجاد شده با توجه به این‌که $I(t)$ معلوم است.



فصل ۵

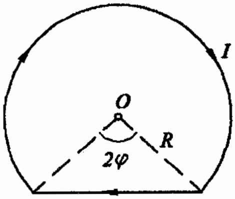
میدان‌های مغناطیسی ثابت

۲۰۶) جریان $I = 1\text{A}$ در یک حلقهٔ سیمی نازک به شعاع $R = 100\text{mm}$ جاری است.
مطلوب است یافتن میدان مغناطیسی :
الف) در مرکز حلقه
ب) در نقطه‌ای روی محور حلقه و به فاصلهٔ $x = 100\text{mm}$ از مرکز آن.

۲۰۷) یک سیم نازک را به شکل یک n ضلع منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R در می‌آوریم. اگر جریان I در این سیم جاری شود، مطلوب است میدان مغناطیسی در مرکز سیم. جواب را در حالت $n \to \infty$ بررسی کنید.

۲۰۸) میدان مغناطیسی را در مرکز قاب سیمی مستطیل شکل بیابید به طوری که اندازهٔ قطر آن برابر $d = 16\text{cm}$ زاویهٔ بین دو قطر آن برابر $\Phi = 30$ و جریان عبوری از سیم برابر $I = 5\text{A}$ باشد.

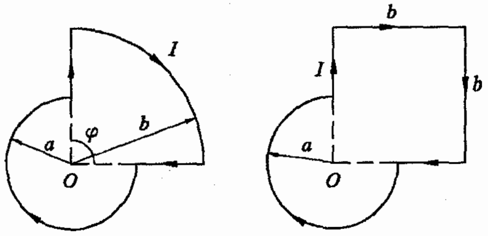
۲۰۹) جریان $I = 5\text{A}$ از سیمی به شکل زیر عبور می‌کند. شعاع قسمت منحنی برابر $R = 120\text{mm}$ و زاویهٔ $2\Phi = 90$ می‌باشد. میدان مغناطیسی را در نقطهٔ O بیابید.



۲۱۰) مطلوب است محاسبهٔ میدان مغناطیسی در نقطهٔ O از یک حلقه با جریان I به طوری که شکل آن نشان داده شده:

الف) در شکل «الف» که شعاع‌های a و b و همچنین زاویهٔ Φ معلوم‌اند.

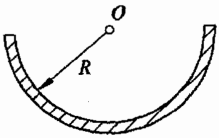
ب) در شکل «ب» که شعاع‌های a و b معلوم‌اند.



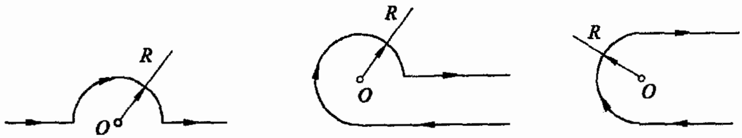
(الف) (ب)

۲۱۱) جریان I از یک استوانه دیوار نازک با شعاع R که یک شکاف طولی به پهنای h در آن است عبور می‌کند. با فرض این‌که $h << R$ باشد، میدان مغناطیسی در داخل استوانه را بیابید.

۲۱۲) جریان I از یک سیم مستقیم بلند که سطح مقطع آن به صورت یک نیم حلقهٔ نازک به شعاع R است، عبور می‌کند. (مطابق شکل). میدان مغناطیسی را در نقطهٔ O بیابید.



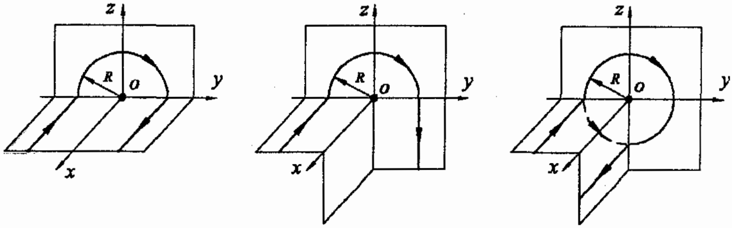
۲۱۳) میدان مغناطیسی در نقطهٔ O را بیابید اگر شکل سیم حامل جریان مشابه شکل‌های «الف»، «ب» و «ج» باشد. شعاع قسمت‌های انحنادار برابر R و قسمت‌های راست، بسیار بلند فرض می‌شوند.



(الف) (ب) (ج)

۲۱۴) یک سیم بسیار بلند، حاوی جریان $I = ۵\mathrm{A}$ به صورت ۹۰ درجه خم می‌شود. در نقطه‌ای عمود بر صفحهٔ سیم و گذرنده از محل خمیدگی که به فاصلهٔ $L = ۳۵\mathrm{cm}$ از آن قرار دارد، میدان مغناطیسی را بیابید.

۲۱۵) میدان مغناطیسی را در نقطهٔ O بیابید اگر سیم حامل جریان $I = ۸\mathrm{A}$ و شکل آن مطابق شکل‌های «الف»، «ب» و «ج» باشد. شعاع قسمت‌های انحنادار برابر $R = ۱۰۰\mathrm{mm}$ و قسمت‌های راست خیلی بلند فرض می‌شوند.



(الف) (ب) (ج)

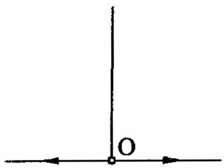
۲۱۶) اندازه و جهت بردار میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را در حالت‌های زیر بیابید.

الف) یک صفحهٔ بی‌نهایت که دارای چگالی جریان خطی $\vec{i}$ است. بردار $\vec{i}$ در تمام صفحه یکسان است.

ب) دو صفحهٔ بی‌نهایت موازی که به ترتیب دارای چگالی جریان خطی $\vec{i}$ و $-\vec{i}$ می‌باشند. بردارهای $\vec{i}$ و $-\vec{i}$ در تمام نقاط صفحات مربوطهٔ خود یکسان هستند.

۲۱۷) چگالی جریان یکنواخت، داخل یک صفحهٔ بی‌نهایت به ضخامت $۲d$ و موازی با سطح صفحه جریان دارد. با فرض این‌که ضریب گذردهی مغناطیسی در داخل و خارج صفحه برابر واحد باشد، میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ x از صفحهٔ میانی دو سطح بیابید.

۲۱۸) جریان مستقیم I داخل سیم بلندی جاری است. مطابق شکل این جریان از نقطهٔ O، به صورت شعاعی روی یک صفحهٔ رسانا عمود بر سیم پخش می‌شود. میدان مغناطیسی را در تمام فضا بیابید.



۲۱۹) جریان I داخل حلقهٔ گردی جاری است. انتگرال $\int \vec{B} . d\vec{r}$ را روی محور حلقه از $-\infty$ تا $+\infty$ محاسبه کنید. نتیجه به دست آمده را توضیح دهید.

۲۲۰) جریان مستقیمی با چگالی $\vec{i}$ داخل سیمی با سطح مقطع دایره‌ای شکل به شعاع R جاری است. با فرض این‌که ضریب گذردهی مغناطیسی در کل فضا برابر واحد باشد، بردار میدان مغناطیسی ناشی از این جریان را در نقطه‌ای که نسبت به محور سیم با بردار شعاعی $\vec{r}$ مشخص می‌شود، بیابید.

۲۲۱) داخل سیمی بسیار بلند و مستقیم با سطح مقطع دایره‌ای شکل، حفره‌ای استوانه شکل و بلند وجود دارد به طوری که محور آن موازی با محور سیم و به اندازهٔ بردار $\vec{L}$ نسبت به محور سیم جابه‌جا شده است. چگالی جریان مستقیم $\vec{i}$ درون سیم جاری است. میدان مغناطیسی داخل حفره را بیابید. حالت خاصل $\vec{L}=۰$ را نیز بررسی کنید.

۲۲۲) جریانی موازی با تقارن شعاعی از الکترون‌ها وجود دارد به طوری که میدان مغناطیسی در داخل آن به صورت $B = br^{\alpha}$ تغییر می‌کند که α و b اعداد ثابت و r فاصلهٔ شعاعی تا محور تقارن این جریان است. چگالی جریان را به صورت تابعی از r به دست آورید.

۲۲۳) یک سیم‌لوله تک لایه‌ای با طول L و شعاع سطح مقطع R دارای n دور بر واحد طول می‌باشد. اگر جریان I از این سیم‌لوله بگذرد میدان مغناطیسی را در مرکز سیم‌لوله بیابید.

۲۲۴) یک سیم‌لولهٔ بسیار بلند با شعاع سطح مقطع R دارای n دور بر واحد طول است. فرض کنید x فاصله از یک انتهای سیم‌لوله باشد که روی محور آن اندازه‌گیری می‌شود. اگر جریان I از این سیم‌لوله بگذرد، مطلوب است:

الف) میدان مغناطیسی B روی محور به صورت تابعی از x یک نمودار تقریبی B بر حسب نسبت $\frac{x}{R}$ رسم کنید.

ب) فاصلهٔ $x_{\circ}$ در نقطه‌ای روی محور به طوری که در آن نقطه مقدار B، به اندازهٔ $n = \%۱$ از مقدار B در وسط سیم‌لوله اختلاف داشته باشد.

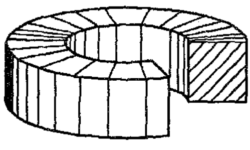
۲۲۵) یک نوار نازک رسانا به پهنای $h = ۲\text{cm}$ را به شکل یک سیم‌لوله تک لایه‌ای بلند با شعاع سطح مقطع $R = ۲/۵\text{cm}$ در می‌آوریم. جریان مستقیم $I = ۵\text{A}$ از داخل نوار می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در داخل و خارج سیم‌لوله به صورت تابعی از فاصلهٔ r از محور بیابید.

۲۲۶) $N = ۲/۵ \times ۱۰^{۳}$ دور سیم به صورت یکنواخت دور هستهٔ چوبی حلقوی شکل با سطح مقطع کوچک پیچیده می‌شود. اگر جریان I از سیم بگذرد، نسبت میدان مغناطیسی داخل هسته به میدان در مرکز حلقهٔ چوبی، n، را بیابید.

۲۲۷) جریان مستقیم $I = ۱۰\text{A}$ از یک رسانای استوانه‌ای بلند و مستقیم می‌گذرد. شار مغناطیسی گذرنده از نصف سطح مقطع سیم در یک متر از طول آن را بیابید.

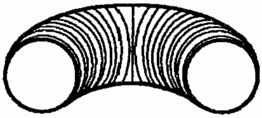
۲۲۸) از سیم‌لوله بسیار بلندی جریان I می‌گذرد. مساحت سطح مقطع این سیم‌لوله برابر S و دارای n دور بر واحد طول می‌باشد. مطلوب است شار بردار $\vec{B}$ گذرنده از صفحهٔ انتهایی سیم‌لوله.

۲۲۹) شکل زیر، چنبره‌ای با سطح مقطع مستطیلی را نشان می‌دهد. اگر جریان عبوری برابر $I = ۱/۷\text{A}$، تعداد کل دورها $N = ۱۰۰۰$ و نسبت قطر خارجی به داخلی برابر $a = ۱/۶$ و ارتفاع $h = ۵\text{cm}$ باشد، شار مغناطیسی گذرنده از سطح مقطع را بیابید.



۲۳۰) گشتاور مغناطیسی یک حلقهٔ نازک دایره‌ای حامل جریان را بیابید به شرط این‌که شعاع حلقه برابر $R = ۱۰۰\text{mm}$ و میدان مغناطیسی در مرکز آن $B = ۶\mu T$ باشد.

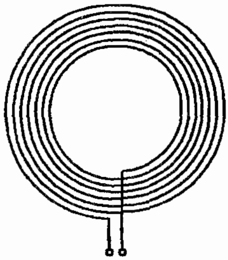
۲۳۱) گشتاور مغناطیسی یک سیم نازک با جریان $I = ۰/۸\mathrm{A}$ که به صورت محکم روی یک نیم چنبره پیچیده شده است را بیابید. (مطابق شکل) قطر سطح مقطع چنبره برابر $d = ۵\mathrm{cm}$ و تعداد دورها $N = ۵۰۰$ می‌باشد.



۲۳۲) یک سیم روکش‌دار به شکل یک مارپیچ مسطح درآورده می‌شود. این سیم حامل جریان $I = ۸m\mathrm{A}$ است. شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب برابر $a = ۵۰\mathrm{mm}$ و $b = ۱۰۰\mathrm{mm}$ می‌باشند. (مطابق شکل) مطلوب است:

الف) میدان مغناطیسی در مرکز مارپیچ

ب) گشتاور مغناطیسی مارپیچ به ازای جریان داده شده.



۲۳۳) یک دیسک نازک نارسانا به شعاع R را از یک طرف با چگالی سطحی بار σ باردار می‌کنیم. دیسک با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خودش دوران می‌کند. مطلوب است:

الف) میدان مغناطیسی در مرکز دیسک.

ب) گشتاور مغناطیسی دیسک.

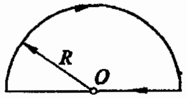
۲۳۴) کره‌ای نارسانا به شعاع $R = ۵۰\mathrm{mm}$ به طور یکنواخت با چگالی سطحی $\sigma = ۱۰\frac{\mu C}{m^۲}$ باردار شده است. این کره با سرعت زاویه‌ای $\omega = ۷۰\frac{Rad}{S}$ حول محوری گذرنده از مرکز خود دوران می‌کند. میدان مغناطیسی در مرکز کره را بیابید.

۲۳۵) دو پروتون با سرعت‌های برابر $V = ۳۰۰\frac{km}{S}$ به صورت موازی هم حرکت می‌کنند. نسبت نیروی مغناطیسی به نیروی الکتریکی دو پروتون را بیابید.

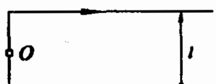
۲۳۶) مقدار و جهت نیروی وارد شده بر واحد طول یک سیم نازک حامل جریان $I = ۸\mathrm{A}$ در نقطهٔ O را بیابید، به شرطی که سیم:

الف) مطابق شکل الف خم شده و $R = ۱۰\mathrm{cm}$ باشد.

ب) مطابق شکل ب خم شده به طوری که فاصلهٔ بین دو سیم موازی طویل $L = ۲۰\mathrm{cm}$ باشد.



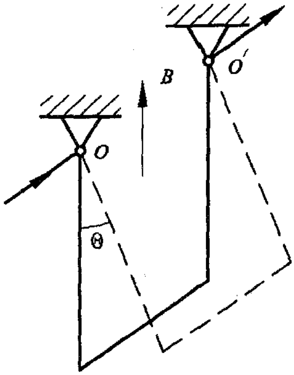
(الف)



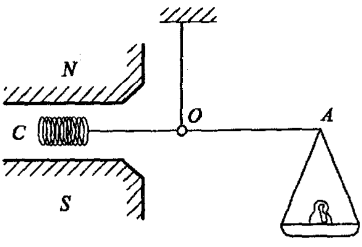
(ب)

۲۳۷) سیم‌پیچی که جریان $I = ۱۰mA$ از آن عبور می‌کند در یک میدان مغناطیسی طوری قرار گرفته است که محور آن در راستای جهت میدان مغناطیسی است. این سیم‌پیچ تک لایه‌ای از سیم مسی با قطر $d = ۰/۱\text{mm}$ و شعاع سیم‌پیچ $R = ۳۰\text{mm}$ ساخته شده است. به ازای چه میدان مغناطیسی خارجی، سیم‌پیچ پاره می‌شود؟

۲۳۸) یک سیم مسی با سطح مقطع $S = ۲/۵\text{mm}^۲$ طوری خم شده است که سه ضلع یک مربع را به وجود آورده است و می‌تواند مطابق شکل حول محور افقی OO' دوران کند. کل مجموعه در یک میدان مغناطیسی قائم و یکنواخت قرار گرفته است. اگر جریان $I = ۱۶\text{A}$ از سیم بگذرد، میدان مغناطیسی چقدر باشد تا سیم به اندازهٔ زاویهٔ $\theta = ۲۰°$ منحرف شود؟



۲۳۹) سیم‌پیچ کوچک C با $N = ۲۰۰$ دور بر انتهای یک میلهٔ سبک که در بین دو قطب آهن‌ربا قرار گرفته، سوار شده است. (مطابق شکل). سطح مقطع سیم‌پیچ $S = ۱\text{cm}^۲$ و طول بازوی OA از میله برابر $L = ۳۰\text{cm}$ می‌باشد. اگر جریان $I = ۲۲\text{mA}$ از سیم‌پیچ عبور کند با قرار دادن جرم $\Delta m = ٦۰\text{mg}$ به قسمت مقابل، تعادل همچنان حفظ می‌شود. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای که سیم‌پیچ قرار دارد بیابید.



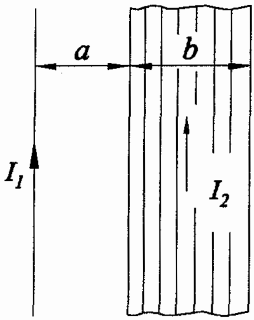
۲۴۰) یک قاب مربعی شکل حامل جریان $I = ۰/۹\text{A}$ در همان صفحه‌ای است که یک سیم طویل مستقیم حامل جریان $I_۰ = ۵\text{A}$ در آن قرار گرفته است. طول اضلاع مربع برابر $a = ۸\text{cm}$ و محور مربع که از وسط اضلاع روبه‌رو عبور می‌کند، موازی سیم طویل است. فاصله محور مربع تا سیم $n = ۱/۵$ برابر بزرگتر از اندازهٔ اضلاع مربع می‌باشد. مطلوب است:

الف) نیروی مغناطیسی وارد بر قاب.
ب) کار مکانیکی که باید انجام شود تا قاب را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه حول محورش بچرخاند و این در حالی است که جریان ثابت بماند.

۲۴۱) دو سیم موازی طویل با مقاومت ناچیز از یک انتها به مقاومت R و از طرف دیگر به یک منبع ولتاژ ثابت dc متصل شده‌اند. فاصلهٔ بین محور سیم‌ها $n =$ ۲۰ برابر بزرگتر از شعاع سطح مقطع هر کدام از سیم‌ها است. به ازای چه مقداری از R نیروی بر هم کنش بین دو سیم صفر می‌شود؟

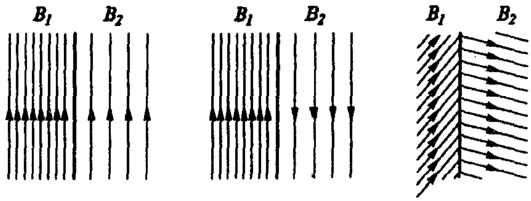
۲۴۲) جریان مستقیم I در طول یک رسانای طویل که سطح مقطع آن به شکل یک نیم حلقه نازک به شعاع R است. عبور می‌کند. همان جریان منتهی در جهت عکس از یک سیم طویل که در محور رسانای قبل (نقطهٔ O در شکل مسأله ۲۱۲) قرار گرفته است، عبور می‌کند. نیروی مغناطیسی متقابل بین رسانا و سیم را بر واحد طول محاسبه نمایید.

۲۴۳) دو رسانای نازک طویل و موازی هم مطابق شکل زیر جریان‌های مستقیم I_1 و I_2 را از خود عبور می‌دهند. فاصلهٔ بین رساناها برابر a و پهنای رسانای سمت راست برابر b می‌باشد. اگر هر دو رسانا در یک صفحه قرار گرفته باشند، نیروی مغناطیسی متقابل وارد بر واحد طول رساناها را بیابید.



۲۴۴) سیستمی شامل دو صفحهٔ موازی حامل جریان به نحوی که بین صفحات میدان مغناطیسی یکنواخت B تولید می‌شود. در فضای بیرون از بین دو صفحه، میدان مغناطیسی صفر است. نیروی مغناطیسی وارد بر واحد سطح صفحه‌ها را بیابید.

۲۴۵) یک صفحهٔ رسانای حامل جریان در یک میدان خارجی یکنواخت قرار می‌گیرد. که در نتیجه این عمل، میدان مغناطیسی در یک طرف صفحه برابر B_1 و در طرف دیگر آن برابر B_2 می‌گردد. مطلوب است محاسبهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر واحد سطح صفحه در حالت‌های نشان داده شده در شکل صفحهٔ بعد. در هر حالت جهت جریان در صفحه را مشخص کنید.

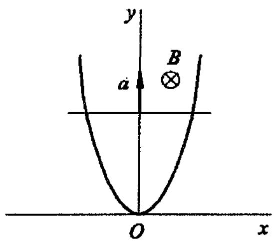


(a) (b) (c)

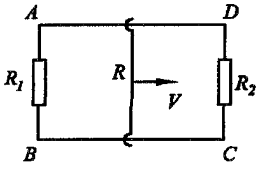
فصل ۶

القای الکترومغناطیسی

۲۴۶) یک سیم خم شده به شکل سهمی $y = bx^2$ در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار داده می‌شود. بردار $\vec{B}$ بر صفحهٔ $x - y$ عمود است. در لحظهٔ $t = 0$ یک میله رسانا در جهت نشان داده شده در شکل از رأس سهمی با شتاب ثابت a شروع به لغزش می‌کند. مطلوب است نیروی محرکهٔ القایی در حلقهٔ تشکیل شده به صورت تابعی از y.



۲۴۷) یک حلقهٔ مستطیلی با یک لغزندهٔ رسانا به طول L در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار داده می‌شود، به طوری که میدان بر صفحهٔ حلقه عمود است. (مطابق شکل) لغزندهٔ رسانا دارای مقاومت R و قسمت‌های AB و CD به ترتیب دارای مقاومت‌های R_1 و R_2 می‌باشند. اگر از خود القایی حلقه صرف نظر شود و لغزندهٔ رسانا با سرعت ثابت V حرکت کند. جریان گذرنده از لغزنده را بیابید.



۲۴۸) یک دیسک فلزی با شعاع $a = ۲۵\text{cm}$ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = ۱۳۰\frac{Rad}{S}$ حول محورش دوران می‌کند. مطلوب است اختلاف پتانسیل بین مرکز دیسک با لبهٔ آن به شرطی که:

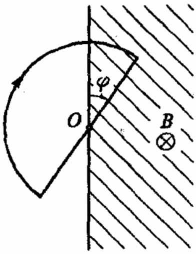
الف) میدان مغناطیسی خارجی موجود نباشد.

ب) میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۵mT$ در جهت عمود بر دیسک باشد.

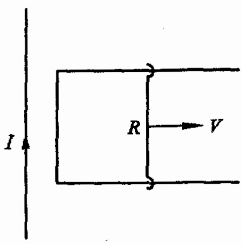
۲۴۹) سیم نازک AC به شکل نیم‌حلقه با قطر $d = ۲۰\text{cm}$ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = ۱۰۰\frac{Rad}{S}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۵mT$ دوران می‌کند به طوری که بردار $\vec{\omega}$ موازی با بردار $\vec{B}$ می‌باشد. محور دوران از نقطهٔ انتهایی A عبور کرده و بر قطر AC نیز عمود است. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int \vec{E} \,.\, \vec{dr}$ در طول سیم از نقطهٔ A تا نقطهٔ C نتیجهٔ به دست آمده را تعمیم دهید.

۲۵۰) یک حلقه مطابق شکل زیر که شعاع قسمت نیم‌دایره‌ای آن برابر R است، روی مرز میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار داده می‌شود. در لحظهٔ $t = ۰$ حلقه با شتاب زاویه‌ای ثابت β حول محور گذرنده از نقطهٔ O که موازی با بردار $\vec{B}$ است، شروع به دوران می‌کند. مطلوب است:

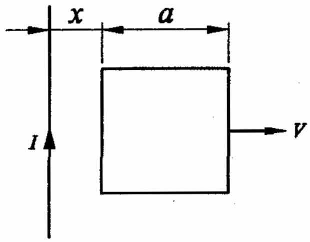
نیروی محرکهٔ القایی از حلقه بر حسب تابعی از زمان t.



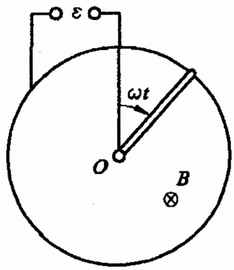
۲۵۱) یک سیم طویل و مستقیم حامل جریان I و یک قاب u شکل با میلهٔ لغزنده در یک صفحه مطابق شکل قرار می‌گیرند. طول میلهٔ لغزنده برابر L و مقاومت آن R می‌باشد. این میله با سرعت ثابت V به سمت راست می‌لغزد، مطلوب است جریان القایی در حلقه به صورت تابعی از فاصلهٔ جدایی r بین میلهٔ لغزنده و سیم مستقیم. از مقاومت قاب u شکل و از اثرات خود القایی صرف نظر می‌شود.



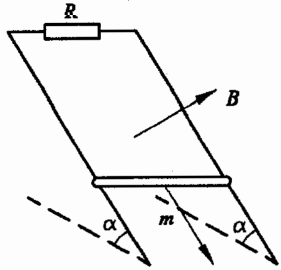
۲۵۲) یک قاب مربعی شکل با طول ضلع a و یک سیم طویل راست حامل جریان I در یک صفحه مطابق شکل قرار گرفته‌اند. اگر قاب با سرعت ثابت V به سمت راست حرکت کند، نیروی محرکهٔ القایی از قاب را به صورت تابعی از فاصلهٔ x به دست آورید.



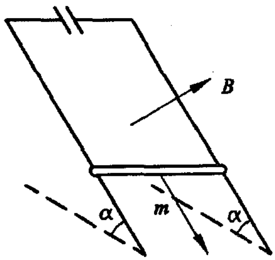
۲۵۳) یک میلهٔ فلزی به جرم m می‌تواند مطابق شکل حول محور افقی O بر روی یک رسانای دایره‌ای شکل به شعاع a بلغزد. مجموعه در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار می‌گیرد به طوری که خطوط میدان عمود بر صفحهٔ حلقه است. محور و حلقه را به یک منبع ولتاژ وصل می‌کنیم تا یک مدار با مقاومت R تشکیل گردد. با صرف نظر از اصطکاک، القای مدار و مقاومت حلقه طبق چه رابطه‌ای منبع نیروی محرکه باید تغییر کند تا میله با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران کند.



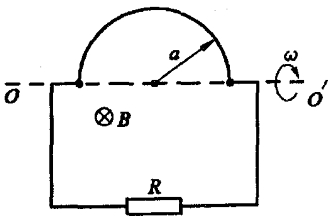
۲۵۴) یک لغزندهٔ مسی به جرم m در اثر وزنش روی دو میلهٔ مسی هموار که با افق زاویهٔ α می‌سازند، به سمت پایین می‌لغزد. (مطابق شکل) در بالا، دو میلهٔ مسی توسط مقاومت R به هم متصل شده‌اند و فاصلهٔ بین دو میله برابر L می‌باشد. سیستم را در میدان مغناطیسی یکنواخت B که عمود بر صفحهٔ لغزش لغزنده است قرار می‌دهیم از مقاومت میله‌های مسی، لغزندهٔ مسی و اثرات خود القایی حلقه صرف نظر می‌شود. سرعت حد لغزنده را بیابید.



۲۵۵) سیستم مسألهٔ قبل را با این تفاوت حل کنید که خازن C جایگزین مقاومت R شود. در این حالت، شتاب لغزنده را بیابید.

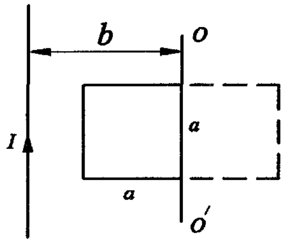


۲۵۶) یک سیم به شکل نیم‌دایره با شعاع a حول محور OO' با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در میدان مغناطیسی یکنواخت B مطابق شکل دوران می‌کند. محور دوران بر جهت میدان مغناطیسی عمود است و کل مقاومت مدار برابر R می‌باشد. با صرف نظر از میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی، مطلوب است متوسط توان حرارتی تولید شده در حلقه در مدت زمان یک پریود.



۲۵۷) یک پیچهٔ کوچک در بین قطب‌های یک آهن‌ربا قرار داده می‌شود به طوری که محور آن منطبق بر جهت میدان مغناطیسی است. سطح مقطع سیم‌پیچ برابر $S = ۳\text{mm}^۲$ و تعداد دورهای آن $N = ۶۰$ می‌باشد. هنگامی که سیم‌پیچ حول قطرش به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دوران می‌کند گالوانومتر متصل به سیم‌پیچ عبور بار $q = ۴/۵\mu c$ را نشان می‌دهد. اگر مقاومت مدار الکتریکی معادل $R = ۴۰\Omega$ باشد، میدان مغناطیسی بین قطب‌های آهن‌ربا را بیابید.

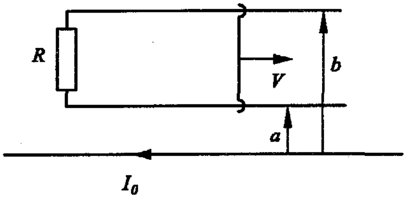
۲۵۸) یک قاب سیمی مربعی شکل با ضلع a و یک سیم رسانای مستقیم حامل جریان ثابت I در یک صفحه مطابق شکل صفحهٔ بعد قرار داده می‌شوند. ضریب خود القایی و مقاومت قاب به ترتیب برابر L و R می‌باشند. قاب به اندازهٔ ۱۸۰ درجه حول محور OO' که به فاصلهٔ b از رسانای حامل جریان قرار دارد، دوران می‌کند مطلوب است بار الکتریکی جریان یافته درون قاب.



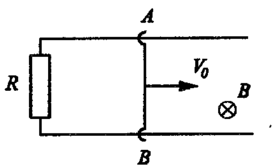
۲۵۹) سیمی دراز و مستقیم حامل جریان I_0 است. در فاصله‌های a و b از این سیم، دو سیم موازی آن قرار دارند که توسط مقاومت R به هم متصل شده‌اند. (مطابق شکل). میله‌ای لغزنده و بدون اصطکاک در طول سیم‌ها با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. فرض کنید که مقاومت سیم‌ها، میلهٔ لغزنده و ضریب خود القایی قاب ناچیز باشد. مطلوب است:

الف) اندازه و جهت جریان القایی در میلهٔ لغزنده.

ب) نیروی مورد نیاز برای ثابت نگه داشتن سرعت میلهٔ لغزنده.



۲۶۰) میلهٔ رسانای AB به جرم m می‌تواند بدون اصطکاک روی دو ریل رسانای طویل که به فاصلهٔ L از یکدیگر قرار گرفته‌اند، بلغزد. در انتهای چپ، دو ریل توسط مقاومت R به هم متصل شده‌اند. سیستم را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحهٔ حلقه قرار می‌دهیم. در لحظهٔ $t = 0$ میلهٔ AB با سرعت اولیه V_0 به سمت راست شروع به حرکت می‌کند. از مقاومت ریل‌ها و میلهٔ AB و خود القایی مدار صرف‌نظر می‌شود. مطلوب است:

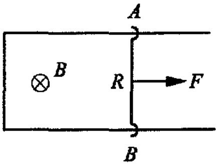


الف) مسافتی که میلهٔ AB می‌پیماید تا این‌که بایستد.

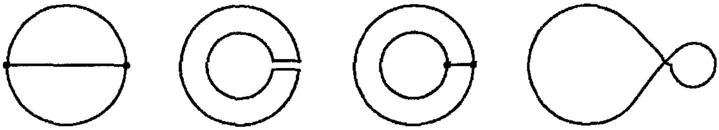
ب) در انجام این فرآیند چه مقدار گرما در مقاومت R تولید می‌شود.

۲۶۱) میلهٔ لغزندهٔ AB می‌تواند بدون اصطکاک در طول یک رسانای u شکل که در صفحهٔ افقی قرار داده شده، بلغزد. (مطابق شکل). میلهٔ لغزنده دارای طول L، جرم m و مقاومت R است. تمام سیستم را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B که عمود بر صفحهٔ رسانای u شکل است، قرار می‌دهیم. در لحظهٔ $t = 0$ نیروی ثابت افقی F بر میلهٔ AB اعمال شده و آن را به سمت

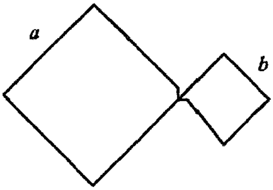
راست جابجا می‌کند. سرعت میلهٔ AB بر حسب زمان t چگونه تغییر می‌کند؟
(خود القایی حلقه و مقاومت رسانای u شکل ناچیز فرض می‌شود.)



۲۶۲) شکل زیر پیکربندی‌های مسطح ساخته شده از رساناهای نازک را نشان می‌دهد که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار گرفته‌اند. جهت این میدان عمود بر صفحهٔ کاغذ و به داخل آن می‌باشد. اندازهٔ میدان شروع به کاهش می‌کند. جهت جریان‌های القایی در این حلقه‌ها به چه صورتی است؟



۲۶۳) حلقه‌ای مسطح مطابق شکل زیر، به صورت دو مربع با اندازهٔ اضلاع $a = 20\text{cm}$ و $b = 10\text{cm}$ ساخته شده که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به طور عمود بر صفحهٔ حلقه قرار داده می‌شود. این میدان نسبت به زمان به صورت $B = B_0 \sin\omega t$ تغییر می‌کند که $B_0 = 10mT$ و $\omega = 100\dfrac{Rad}{S}$ اگر مقاومت بر واحد طول این حلقه برابر $\rho = 50\dfrac{m\Omega}{m}$ باشد، دامنهٔ ماکزیمم جریان القایی در حلقه را بیابید.



۲۶۴) پیچه‌ای مسطح با N دور به صورت محکم به هم پیچانده می‌شود سپس در یک میدان مغناطیسی که عمود بر صفحه است قرار می‌گیرد. شعاع بزرگترین دور مارپیچ برابر a است. اگر میدان مغناطیسی نسبت به زمان به صورت $B = B_0 \sin\omega t$ تغییر کند (B_0 و ω مقادیر ثابت هستند) مطلوب است: دامنهٔ (ماکزیمم) نیروی محرکهٔ القایی در این مارپیچ مسطح.

۲۶۵) رسانایی u شکل در یک میدان مغناطیسی یکنواخت که عمود بر صفحهٔ رساناست و نسبت به زمان به صورت $\dot{B} = 0/1\dfrac{T}{S}$ تغییر می‌کند، قرار داده می‌شود. یک میلهٔ لغزندهٔ رسانا به طول $L = 20\text{cm}$ با شتاب ثابت $a = 10\dfrac{cm}{s^2}$ شروع به حرکت بر روی میله‌های رسانای u شکل می‌کند. مطلوب است نیروی محرکهٔ القایی در حلقه در $t = 2s$ بعد از شروع حرکت به شرطی که در لحظهٔ $t = 0$ مساحت حلقه و میدان مغناطیسی برابر صفر باشند. از خودالقایی حلقه

صرف‌نظر می‌شود.

۲۶۶) در یک سیم‌لولهٔ دراز با شعاع سطح مقطع a و n دور بر واحد طول، جریان با نرخ ثابت $\dot{I}=\frac{A}{S}$ تغییر می‌کند. مطلوب است اندازهٔ شدت میدان جریان گردابی بر حسب فاصلهٔ r از محور سیملوله.

۲۶۷) یک سیم‌لولهٔ دراز و مستقیم با قطر سطح مقطع $d=5\text{cm}$ و تعداد $n=20$ دور بر هر سانتیمتر طول، دارای یک دور سیم مسی حلقوی با مساحت سطح مقطع $S=1\text{mm}^2$ که به صورت محکم روی آن پیچانده شده است. مطلوب است جریان عبوری از سیم مسی به شرطی که جریان در سیم‌های سیم‌لوله با نرخ ثابت $\dot{I}=100\frac{A}{S}$ افزایش یابد، از القای سیم مسی صرف‌نظر می‌شود.

۲۶۸) یک سیم‌لولهٔ دراز با شعاع سطح مقطع a دارای یک حلقهٔ سیمی روکش‌دار است که به صورت محکم روی آن پیچیده شده، مقاومت نصف حلقهٔ n برابر نصف دیگر است. اگر میدان مغناطیسی تولید شده توسط سیم‌لوله با زمان به صورت $B=bt$ تغییر کند که b یک عدد ثابت است، مطلوب است اندازهٔ شدت میدان الکتریکی در حلقه.

۲۶۹) یک حلقهٔ نازک غیررسانا به جرم m حاوی بار q می‌تواند آزادانه حول محورش دوران کند. در ابتدا حلقه در حال سکون است و هیچ میدان مغناطیسی وجود ندارد. سپس یک میدان مغناطیسی یکنواخت که عمود بر صفحهٔ حلقه است به وجود می‌آید. این میدان نسبت به زمان طبق رابطهٔ $\vec{B}\,(t)$ افزایش می‌یابد. مطلوب است سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ حلقه به صورت تابعی از میدان $\vec{B}\,(t)$

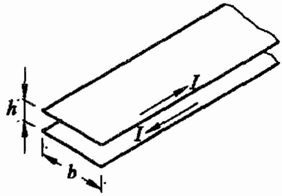
۲۷۰) یک حلقهٔ سیمی نازک به شعاع a و مقاومت r در داخل یک سیم‌لولهٔ دراز طوری قرار می‌گیرد که محورهای آنها بر هم منطبق باشد. طول سیم‌لوله برابر L و شعاع سطح مقطع آن برابر b است. در یک لحظهٔ مشخص سیم‌لوله به منبع ولتاژ ثابت V متصل می‌شود. اگر مقاومت مدار برابر R باشد، مطلوب است ماکزیمم نیروی شعاعی که بر واحد طول حلقه وارد می‌شود؟ از القاییدگی حلقه صرف‌نظر کنید.

۲۷۱) یک شار مغناطیسی گذرنده از حلقهٔ ساکنی با مقاومت R بر حسب زمان به صورت $\Phi=at(\tau-t)$ که τ یک فاصلهٔ زمانی ثابت است، تغییر می‌کند. مطلوب است مقدار گرمای تولید شده در حلقه در مدت زمان τ. از القاییدگی حلقه صرف‌نظر شود.

۲۷۲) در وسط یک سیم‌لولهٔ دراز یک حلقهٔ هم محور که سطح مقطع سیم آن مربع شکل و ساخته شده از ماده‌ای با مقاومت ویژهٔ ρ است، وجود دارد. ضخامت حلقه برابر h و شعاع داخلی و خرجی آن به ترتیب برابر a و b می‌باشد. مطلوب است جریان القایی در حلقه به شرطی که میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط سیم‌لوله نسبت به زمان به صورت $B=\beta t$ (β عدد ثابت) تغییر کند. از اثر القاییدگی حلقه صرف‌نظر می‌شود.

۲۷۳) یک پیچه با ضریب خودالقایی $L=300mH$ و مقاومت $R=140m\Omega$ به یک منبع ولتاژ ثابت متصل شده‌اند. در چه مدت زمانی جریان پیچه به $n=\%50$ جریان حالت پایدار می‌رسد.

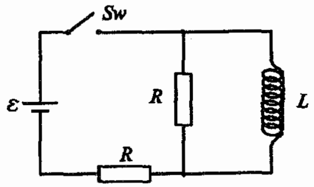
۲۷۴) ضریب خود القایی واحد طول دو خط نوار را بیابید (مطابق شکل صفحهٔ بعد) به شرطی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر h بسیار کوچکتر از پهنای b باشد؟ به طور مثال $\frac{b}{h}=50$.



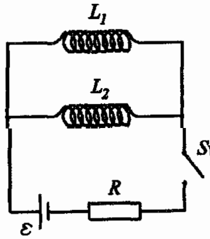
۲۷۵) یک مدار بسته شامل یک منبع ولتاژ ثابت ε و یک پیچهٔ چوک با ضریب خودالقایی L به صورت سری به آن متصل است. مقاومت مؤثر کل مدار برابر R می‌باشد. در لحظهٔ $t = 0$ ضریب خودالقایی پیچه به صورت ناگهانی به مقدار n برابر کاهش می‌یابد. مطلوب است محاسبهٔ جریان به صورت تابعی از زمان t.

راهنمایی: هنگام تغییر تدریجی ضریب خودالقایی، شار مغناطیسی کل ثابت باقی می‌ماند.

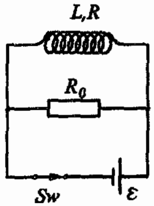
۲۷۶) پس از بستن کلید SW در لحظهٔ $t = 0$ (مطابق شکل) جریان عبوری از القاگر L را بر حسب زمان بیابید.



۲۷۷) در مدار نشان داده شده در شکل زیر نیروی محرکهٔ الکتریکی ε، مقاومت R و خودالقاهای L_1 و L_2 معلومند. از مقاومت داخلی منبع و القاگرها صرف‌نظر می‌شود. بعد از بستن کلید SW جریان‌های حالت پایدار عبوری از القاگرهای L_1 و L_2 را محاسبه کنید.



۲۷۸) یک خودالقا با ضریب خودالقایی $L = 2\mu H$ و با مقاومت $R = 10\Omega$ مطابق شکل صفحهٔ بعد به یک منبع ولتاژ ثابت $\varepsilon = 3V$ به صورت موازی با مقاومت $R_0 = 2\Omega$ متصل شده است. بعد از قطع شدن کلید SW مقدار حرارت تولید شده در القاگر را بیابید. از مقاومت داخلی باتری صرف‌نظر کنید.



۲۷۹) یک حلقهٔ ابررسانا به شعاع a و ضریب خود القایی L در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار داده می‌شود. صفحهٔ حلقه موازی با بردار $\vec{B}$ می‌باشد و جریان عبوری از حلقه برابر صفر است. حلقه به اندازهٔ ۹۰ درجه می‌چرخد تا این‌که صفحهٔ آن عمود بر جهت میدان شود. مطلوب است:

الف) جریان القایی در حلقه بعد از چرخش.

ب) کار انجام شده هنگام چرخش.

۲۸۰) جریان $I_\circ = ۱/۹\mathrm{A}$ از یک سیم‌لولهٔ دراز عبور می‌کند. سیمی که در ساخت این سیم‌لوله به کار رفته به صورت ابررسانا است. اگر طول سیم‌لوله $n = ٪۵$ افزایش یابد، مطلوب است جریان عبوری از سیم‌لوله.

بخش II

پاسخ مسائل

فصل ۷

الکترواستاتیک

۱) الف) بین دو الکترون :

$$\left.\begin{aligned} &\text{نیروی الکتروستاتیک} : F_e = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} \\ &\text{نیروی گرانش} : F_g = \frac{Gm^۲}{r^۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ Gm^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{(۱/۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۹})^۲}{\frac{۱}{۹\times۱۰^۹} \times ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times (۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱})^۲} = ۴ \times ۱۰^{۴۲}$$

ب) بین دو پروتون :

$$\text{به طور مشابه} : \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ Gm^۲}$$

$$= \frac{(۱/۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۹})^۲}{\frac{۱}{۹\times۱۰^۹} \times ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times (۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})^۲} = ۱ \times ۱۰^{۳۶}$$

ج)

$$F_e = F_g \Rightarrow \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} = \frac{Gm^۲}{r^۲} \Rightarrow \frac{q}{m} = \sqrt{۴\pi\varepsilon_۰ G}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = \sqrt{\frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}}{۹ \times ۱۰^۹}} = ۰/۸۶ \times ۱۰^{-۱۰} C/kg$$

۲) بنابراین:

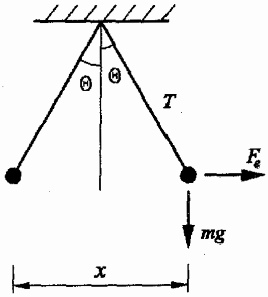
$$\text{تعداد اتم‌ها در کره‌ای به جرم ۱ گرم} = \frac{۱}{۶۳/۵۴} \times ۶/۰۲۳ \times ۱۰^{۲۳}$$

$$\text{بار کل هسته} = \frac{۶/۰۲۳ \times ۱۰^{۲۳}}{۶۳/۵۴} \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۲۹$$

لذا بار خالص هر کره = کل بار الکتریکی − کل بار هسته. در نتیجه:

بار خالص هر کره $= \frac{۶/۰۲۳ \times ۱۰^{۲۳}}{۶۳/۵۴} \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۲۹ \times \frac{۱}{۱۰۰}$
$= ۴/۳۹۸ \times ۱۰^{۲} C$
نیروی برهم کنش الکتریکی بین دو کره : $F = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{q^۲}{r^۲}$
$= ۹ \times ۱۰^۹ \times \frac{(۴/۳۹۸ \times ۱۰^۲)^۲}{۱^۲} = ۱/۷۴ \times ۱۰^{۱۵} N$

۳) با توجه به شکل و از قانون دوم نیوتن مقابل خواهیم داشت:



$$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\sin\theta = F_e \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{Fe}{mg} \quad (۱)$$

از طرف دیگر باتوجه به شکل : $\tan\theta = \frac{\frac{x}{۲}}{\sqrt{L^۲ - (\frac{x}{۲})^۲}} \xrightarrow{x<<L} \tan\theta = \frac{x}{۲L} \quad (۲)$

$$(۲),(۱) \Rightarrow F_e = \frac{mgx}{۲L} \Rightarrow \frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ x^۲} = \frac{mgx^۲}{۲L} \Rightarrow q^۲ = \frac{۲\pi\varepsilon_۰ mgx^۳}{L}$$

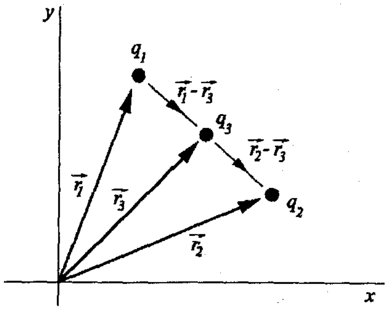
از طرفین رابطهٔ فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم، بنابراین:

$$۲q\frac{dq}{dt} = \frac{۲\pi\varepsilon_۰ mg}{L} \times ۳x^۲\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} = V = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow (\frac{۲\pi\varepsilon_۰ mg}{L}x^۳)^{\frac{۱}{۲}}\frac{dq}{dt} = \frac{۳\pi\varepsilon_۰ mg}{L}x^۲\frac{a}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{۳}{۲}a\sqrt{\frac{۲\pi\varepsilon_۰ mg}{L}}$$

۴) می‌دانیم برای این‌که بار $q_۳$ در تعادل باقی بماند باید جمع نیروهای وارد بر $q_۳$ از طرف بارهای $q_۱$ و $q_۲$ برابر صفر شود که لازمه‌اش این است که هر سه بار در یک خط راست قرار داشته باشند. به کمک شکل زیر می‌توان نوشت :



$$\vec{F}_{23}+\vec{F}_{13}=0$$

$$\frac{kq_2q_3}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|^2}\,\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|}+\frac{kq_1q_3}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|^2}\,\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|}=0 \quad (1)$$

دقت کنید که $\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|r_2-\vec{r_3}|}$ بردار واحد در جهت CB است. همچنین $\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|}$ بردار واحد در جهت CA است. چون راستا و اندازهٔ این دو بردار با هم برابرند ولی جهت یکی در خلاف دیگری است بنابراین:

$$\frac{\vec{r_2}-\vec{r_3}}{|r_2-\vec{r_3}|}=-\frac{\vec{r_1}-\vec{r_3}}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|} \quad (2)$$

$$(2),(1)\rightarrow \frac{q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_3}|^2}=\frac{q_1}{|\vec{r_1}-\vec{r_3}|^2}\rightarrow=\sqrt{q_2}(\vec{r_1}-\vec{r_3})=\sqrt{q_1}(\vec{r_2}-\vec{r_3})$$

$$\rightarrow\vec{r_3}=\frac{\sqrt{q_2}\,\vec{r_1}+\sqrt{q_1}\,\vec{r_2}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}} \quad (3)$$

از تعادل بار q_1 نیز مشابهاً می‌توان نوشت:

$$\frac{kq_1q_3}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|^2}\,\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|r_3-\vec{r_1}|}+\frac{kq_1q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^2}\,\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}=0 \quad (4)$$

همچنین مشابهاً می‌توان نوشت:

$$\frac{\vec{r_3}-\vec{r_1}}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|}=-\frac{\vec{r_2}-\vec{r_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|} \quad (5)$$

$$(5),(4)\rightarrow q_3=\frac{-q_2}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^2}|\vec{r_1}-\vec{r_3}|^2 \quad (6)$$

با جایگذاری $\vec{r_3}$ از رابطهٔ زیر در رابطهٔ «۶» نهایتاً به دست می‌آید:

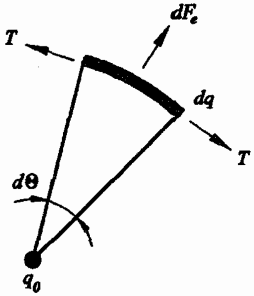
$$q_3=\frac{-q_1q_2}{(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2}$$

۵) فرض می‌کنیم افزایش کشش حلقه در اثر قرار دادن بار q_0 در مرکز حلقه برابر T باشد، یک جزء از این حلقه را در نظر گرفته که روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی $d\theta$ است

بار موجود در این جزء برابر $qd = \frac{q}{2\pi r}(rd\theta)$ می‌باشد. حال از تعادل این جزء می‌توان نوشت :

نیروی دافعهٔ الکتریکی = نیروی کششی در راستای شعاع

$$2T\sin(\frac{d\theta}{2}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_\circ dq}{r^2}, \sin(\frac{d\theta}{2}) \simeq \frac{d\theta}{2}$$

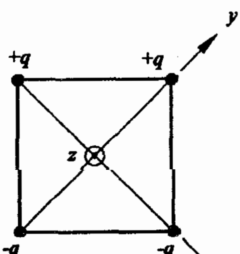


$$\Rightarrow Td\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_\circ}{r^2}(\frac{q}{2\pi r}rd\theta) \Rightarrow T = \frac{qq_\circ}{8\pi^2\varepsilon_\circ r^2}$$

۶)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r_\circ}|^2} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{(8-2)^2 + (-5-3)^2}$$
$$= 4500\frac{V}{m} = 4{,}5kV/m$$

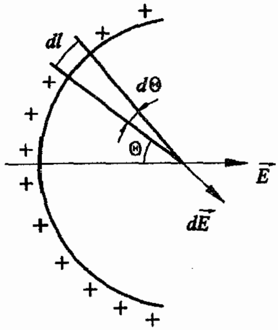
۷) با توجه به شکل مقابل، مبدأ مختصات را مرکز مربع و محور z را عمود بر سطح مربع و به سمت بیرون در نظر می‌گیریم: لذا:



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{L\vec{i} + x\vec{k}}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-L\vec{i} + x\vec{k}}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{L\vec{j} + x\vec{k}}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-L\vec{j} + x\vec{k}}{(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}[2L\vec{i} - 2L\vec{j}] \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{qL}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_\circ(L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۸) حلقه را به صورت جزء المان‌هایی به طول dL در نظر می‌گیریم و میدان ناشی از این جزء المان‌ها را در مرکز نیم‌دایره با هم جمع می‌کنیم. از طرفی از تقارن می‌یابیم که میدان الکتریکی برآیند در جهت محور x خواهد بود. پس کافی است مؤلفه‌های افقی میدان ناشی از هر جزء المان را با هم جمع می‌کنیم. از طرفی بار موجود در هر جزء المان برابر است با $dL = Rd\theta, dq = \frac{q}{\pi R} \times dL$ لذا:

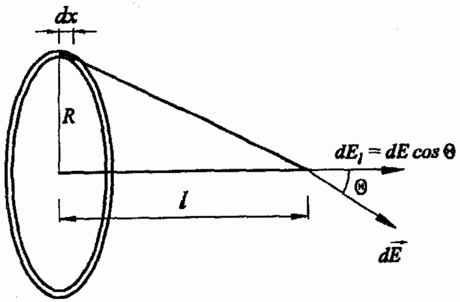


$$E = \int dE_x$$

$$dE_x = \frac{dq}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲} \cos\theta = \frac{qR\cos\theta d\theta}{۴\pi^۲\varepsilon_\circ R^۳}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{۴\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos\theta d\theta = \frac{q}{۲\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}$$

۹)



$$dE_L = \frac{dq}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲+L^۲)} \cos\theta = \frac{(\frac{q}{۲\pi R}dx)}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲+L^۲)} (\frac{L}{\sqrt{R^۲+L^۲}})$$

$$\Rightarrow E = \int dE_L = \int_\circ^{۲\pi R} \frac{qL}{۲\pi R} . \frac{dx}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲+L^۳)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} . \frac{qL}{(L^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

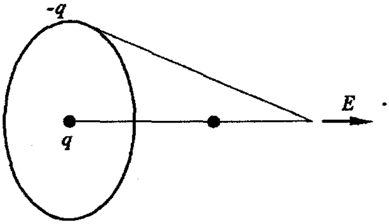
$$L >> R \Rightarrow E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} \frac{q}{L^۲}$$

برای یافتن E_{max}، می‌بایست $\frac{dE}{dL}$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{dE}{dL} = 0 \Rightarrow (L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}L(L^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}(2L) = 0$$

$$\Rightarrow L^2 + R^2 - 3L^2 = 0 \Rightarrow L = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow E_{max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$$

۱۰) میدان برآیند برابر جمع برداری میدان ناشی از بار نقطه‌ای q و میدان ناشی از حلقه است لذا به کمک مسألهٔ ۹ می‌توان نوشت:



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}x^3[(1 + \frac{R^2}{x^2})^{\frac{3}{2}} - 1]}{x^2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

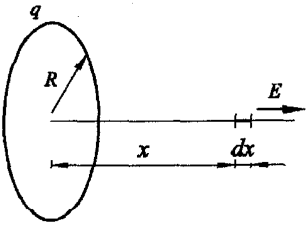
$$= \frac{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}x^3\ [1 + \frac{3}{2}\frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{8}\frac{R^4}{x^4} + \ldots]}{x^2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x >> R \Rightarrow E = \frac{3qR^2}{8\pi\varepsilon_0 x^4}$$

نکته: برای محاسبهٔ عبارت داخل براکت از بسط معادل زیر استفاده کردیم.

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots |x| < 1$$

۱۱) از حل مسألهٔ ۹ می‌دانیم میدان ناشی از حلقه در یک نقطهٔ دلخواه روی محور حلقه و به فاصلهٔ x از مرکز برابر است با:



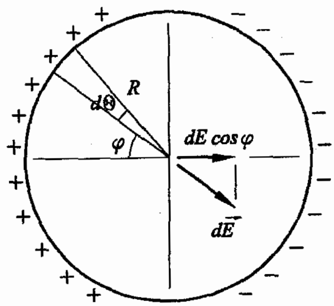
$$E(x) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

یک جزء به طول dx از ریسمان را در نظر می‌گیریم این جزء دارای بار $dq = \lambda dx$ است. حال نیروی وارده بر این جزء سیم را محاسبه می‌کنیم:

$$(1) \rightarrow dF = Edq = E(\lambda dx) = \frac{\lambda qxdx}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow F=\int dF=\int_{\circ}^{\infty}\frac{\lambda q x dx}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(R^{۲}+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\lambda q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

۱۲) الف) محاسبه میدان در مرکز حلقه:

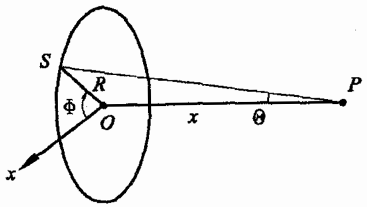


$$dE\cos\Phi=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{dq}{R^{۲}}\cos\Phi$$

$$dq=\lambda R d\Phi=\lambda R\cos\Phi d\Phi$$

$$\Rightarrow E=\int dE\cos\Phi=\frac{\lambda_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R}\int_{\circ}^{۲n}\cos^{۲}\Phi d\Phi=\frac{\lambda_{\circ}}{۴\varepsilon_{\circ}R}$$

ب) محاسبه میدان روی محور حلقه:



در نقطهٔ P : $|d\vec{E}|=\dfrac{\lambda_{\circ}\cos\Phi d\Phi R}{۴\pi\varepsilon_{\circ}(x^{۲}+R^{۲})}$

مؤلفه‌های $\vec{dE}$ در راستای OP و OS قابل محاسبه می‌باشند.

مؤلفه در راستای OP: $\vec{dE}\cos\theta$

مؤلفه در راستای OS: $\vec{dE}\sin\theta$

مؤلفه $\vec{E_p}$ در راستای OP $=\displaystyle\int_{\circ}^{۲\pi}\frac{\lambda R_{\circ}\cos\theta\cos\Phi}{۴\Phi\varepsilon_{\circ}(x^{۲}+R^{۲})}d\Phi=\circ$

مؤلفهٔ $\vec{E_p}$ در راستای OS خود در دو راستا قابل بررسی می‌باشد:

مؤلفه در راستای x ها : $(d\vec{E}\sin\theta)\cos\Phi$

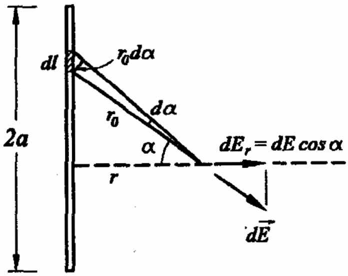
مؤلفه در راستای y ها : $(d\vec{E}\sin\theta)\sin\Phi$

مؤلفه در راستای محور y ها نیز پس از انتگرال‌گیری صفر خواهد شد و خواهیم داشت:

$$|\vec{E}| = E_x = \int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \frac{\lambda_{\circ} R^{\text{۲}} \cos^{\text{۲}}\Phi}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}(x^{\text{۲}}+R^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}} d\Phi = \frac{\lambda_{\circ} R^{\text{۲}}}{\text{۴}\varepsilon_{\circ}(x^{\text{۲}}+R^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}}}$$

$$x >> R \Rightarrow E_x = \frac{\lambda_{\circ}\pi R^{\text{۲}}}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}x^{\text{۳}}}$$

۱۳) الف)



$$dE_r = dE\cos\alpha = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\lambda dL}{r_{\circ}^{\text{۲}}}\cos\alpha, \lambda = \frac{q}{\text{۲}a}$$

می‌دانیم : $dL\cos\alpha = r_{\circ}d\alpha, r_{\circ} = \dfrac{r}{\cos\alpha}$

$$\Rightarrow dE_r = \frac{\text{۱}}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{\lambda r_{\circ}d\alpha}{r_{\circ}^{\text{۲}}} = \frac{\lambda}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}r}\cos\alpha d\alpha$$

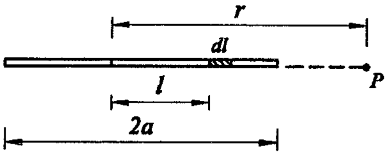
$$E = \int dE_r = \frac{\lambda}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}r} \times \text{۲}\int_{\circ}^{\alpha_{\circ}}\cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}r}\times \text{۲}\sin\alpha_{\circ}$$

$$\sin\alpha_{\circ} = \frac{a}{\sqrt{a^{\text{۲}}+r^{\text{۲}}}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}r\sqrt{a^{\text{۲}}+r^{\text{۲}}}}$$

$$r >> a \Rightarrow E = \frac{q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}r^{\text{۲}}}$$

ب)



$$dE = \frac{\lambda dL}{۴\pi\varepsilon_\circ (r-L)^۲}$$

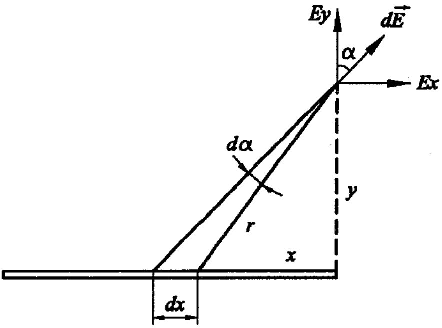
اگر المان dL در طرف دیگر میله باشد، خواهیم داشت:

$$dE = \frac{\lambda dL}{۴\pi\varepsilon_\circ (r+L)^۲}$$

$$\Rightarrow E = \int_\circ^a \frac{\lambda dL}{۴\pi\varepsilon_\circ (r-L)^۲} + \int_\circ^L \frac{\lambda dL}{۴\pi\varepsilon_\circ (r+L)^۲} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ} \times \frac{۱}{(r^۲ - a^۲)}$$

$$r >> a \Rightarrow E \simeq \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

۱۴)



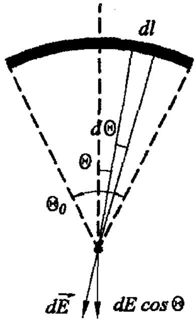
$$dE_x = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} \frac{\lambda dx}{r^۲} \sin\alpha$$

می‌دانیم : $dx = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}, r = \frac{y}{\cos\alpha} \Rightarrow dE_x = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ y} \sin\alpha d\alpha$

$$E_x = \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} dE_x = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ y}$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ y} \cos\alpha d\alpha \Rightarrow E_y = \int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} dEy = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ y} \Rightarrow E = \sqrt{Ex^۲ + Ey^۲} = \frac{\sqrt{۲}\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ y}$$

۱۵) میدان‌های ناشی از قسمت‌های مستقیم سیستم، به کمک رابطهٔ به دست آمده در مسألهٔ قبل قابل محاسبه می‌باشد. در اینجا میدان ناشی از یک کمان را به دست می‌آوریم.



$$E = \int dE\cos\theta = \int_{-\frac{\theta_\circ}{۲}}^{+\frac{\theta_\circ}{۲}} \frac{\lambda R d\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ R^۲}\cos\theta = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ R}\sin\frac{\theta_\circ}{۲}$$

الف) در این حالت میدان‌های ناشی از قسمت‌های مستقیم سیم یکدیگر را خنثی می‌کنند و خواهیم داشت:

$$\theta_\circ = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{۲}\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ R}$$

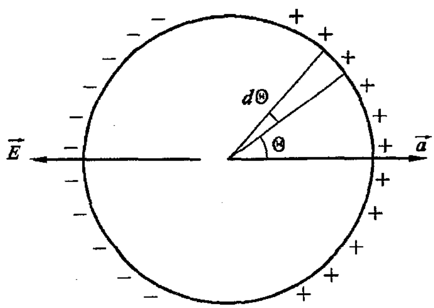
ب)

میدان ناشی از قسمت‌های مستقیم : $E_۱ = \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ R}) = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ R}$

میدان ناشی از قسمت نیم دایره : $\theta_\circ = \pi \Rightarrow E_۲ = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ R}$

$$\Rightarrow E = E_۱ - E_۲ = ۰$$

۱۶)



$$dq = \sigma(۲\pi r\sin\theta)rd\theta$$

$$= (\vec{a}\,.\,\vec{r})۲\pi r^۲\sin\theta d\theta$$

$$= ۲\pi a r^۳ \sin\theta \cos\theta d\theta$$

با استفاده از جواب مسألهٔ ۹ داریم:

$$d\vec{E} = \frac{r dq \cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ (r^۲ \sin^۲\theta + r^۲\cos^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}}\left(\frac{-\vec{a}}{a}\right)$$

$$= \frac{(۲\pi a r^۳ \sin\theta\cos\theta d\theta) r\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}\left(\frac{-\vec{a}}{a}\right) = \frac{-\vec{a}\, r}{۲\varepsilon_۰}\sin\theta\cos^۲\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{(-\vec{a})r}{۲\varepsilon_۰}\int_۰^{\pi}\sin\theta\cos^۲\theta d\theta = \frac{(-\vec{a}\, r)}{۲\varepsilon_۰}\times\frac{۲}{۳}$$

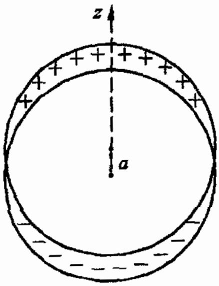
$$\Rightarrow E = -\frac{r}{۳\varepsilon_۰}(\vec{a})$$

۱۷) فرض کنید دو کره به شعاع R و چگالی با $+\rho$ و $-\rho$ داریم که مراکز آن‌ها به ترتیب در $+\frac{a}{۲}$ و $\frac{-a}{۲}$ قرار دارد. معادلهٔ سطح این دو کره به صورت زیر قابل بیان است:

$$|\vec{r} - \frac{\vec{a}}{۲}| = R \Rightarrow r - \frac{a}{۲}\cos\theta = R$$

$$|\vec{r} + \frac{\vec{a}}{۲}| = R \Rightarrow r + \frac{a}{۲}\cos\theta = R$$

هرگاه a کوچک فرض کنیم، فاصلهٔ بین دو سطح کروی در راستای شعاعی در زاویهٔ θ برابر $|a\cos\theta|$ می‌باشد. مشاهده می‌شود که این فاصله مستقل از زاویهٔ آزیموت می‌باشد. با توجه به شکل مقابل مجموع این دو کره مشابه کره‌ای با چگالی بار $\sigma = \rho a\cos\theta$ می‌باشد، هرگاه $\sigma_۰ = \rho a$ فرض کنیم $\sigma = \sigma_۰\cos\theta$ می‌باشد.



باتوجه به این‌که میدان به صورت شعاعی می‌باشد، بر طبق قانون گاؤس خواهیم داشت:

$$۴\pi r^۲ E = \frac{۴\pi}{۳\varepsilon_۰} r^۳\rho \Rightarrow E = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}$$

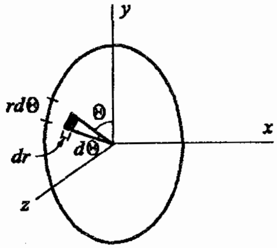
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{۲}) - \frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{۲}) = -\frac{\rho}{۳\varepsilon_۰}\vec{a} = \frac{\sigma_۰}{۳\varepsilon_۰}\vec{k}$$

۱۸) پوستهٔ کروی به ضخامت dr را به عنوان المان در نظر می‌گیریم و بر اساس حل مثله ۱۶ خواهیم داشت:

$$\sigma = \rho dr = (\vec{a} \cdot \vec{r})dr \Rightarrow d\vec{E} = -\frac{\vec{a}\, r}{3\varepsilon_0}dr$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{a}}{3\varepsilon_0}\int_0^R r dr = -\frac{\vec{a}\, R^2}{6\varepsilon_0}$$

۱۹) براساس جواب مسألهٔ ۱۴ داریم :



$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(-\vec{i}) + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\vec{e}\, r)$$

$\vec{er}$ برداریکه در راستای شعاعی می‌باشد.

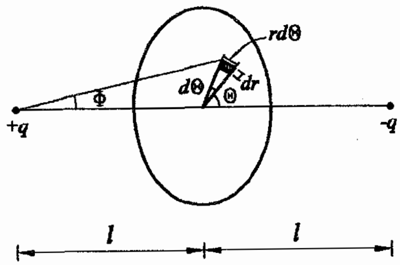
$$d\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds} = [\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(-\vec{i}) + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\vec{e}\, r)].(rdrd\theta)\,\vec{i}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}drd\theta$$

$$\Rightarrow \phi_E = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi} drd\theta = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}$$

توجه نمایید که اگر $d\vec{s} = -(rdrd\theta)\,\vec{i}$ فرض می‌گردید، جواب به صورت $\Phi_E = +\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}$ ارائه می‌شد.

۲۰)

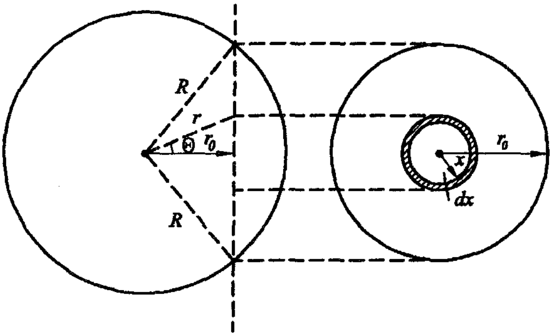


$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds} = 2E_0 \cos\Phi ds = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0(L^2 + r^2)} \times \frac{L}{(L^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}(rd\theta)dr$$

$$= \frac{۲qLrdrd\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ(r^۲+L^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow \phi_E = \frac{۲qL}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^R \frac{rdr}{(r^۲+L^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\int_\circ^{۲\pi} d\theta$$

$$= \frac{۲qL\times ۲\pi}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^R \frac{rdr}{(r^۲+L^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{q}{\varepsilon_\circ}(۱-\frac{L}{\sqrt{L^۲+R^۲}})$$

۲۱)



$d\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{ds}$

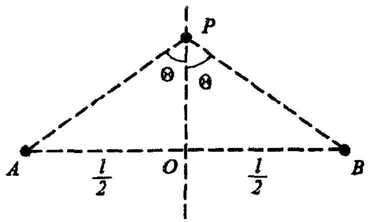
از قانون گاؤس $E_r = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}$ می‌باشد:

$d\phi_E = E_r ds\cos\theta$

$$ds = ۲\pi x dx, \cos\theta = \frac{r_\circ}{r} \Rightarrow d\phi_E = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}\times ۲\pi x dx\frac{r_\circ}{r} = \frac{\rho r_\circ}{۳\varepsilon_\circ}۲\pi x dx$$

$$\Phi_E = \frac{۲\pi\rho r_\circ}{۳\varepsilon_\circ}\int_\circ^{\sqrt{R^۲-r_\circ^۲}} xdx = \frac{۲\pi\rho r_\circ}{۳\varepsilon_\circ}\frac{(R^۲-r_\circ^۲)}{۲} = \frac{\pi\rho r_\circ}{۳\varepsilon_\circ}(R^۲-r_\circ^۲)$$

۲۲) اندازهٔ میدان در نقطهٔ P ناشی از A و B هر کدام دارای اندازهٔ $\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ(x^۲+\frac{L^۲}{۴})^{\frac{۱}{۲}}}$ می‌باشد، اما یکی در راستای AP و دیگری در راستای BP می‌باشد. برآیند میدان در راستای OP بوده و اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



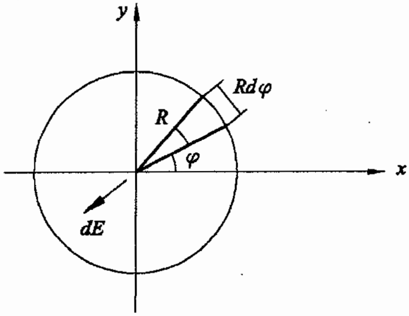
$$E = \frac{\lambda x}{\pi\varepsilon_\circ(x^۲+\frac{L^۲}{۴})} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_\circ[x+\frac{L^۲}{۴x}-۲\frac{L}{۲\sqrt{x}}\sqrt{x}+L]}$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_\circ[(\sqrt{x} - \frac{L}{\text{۲}\sqrt{x}})^\text{۲} + L]}$$

باتوجه به رابطهٔ فوق حداکثر میدان به ازای $x = \frac{L}{\text{۲}}$ حاصل خواهد شد:

$$E_{max} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_\circ L}$$

۲۳)



$$dE = \frac{\sigma_\circ \cos\Phi (Rd\phi)}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ R}$$

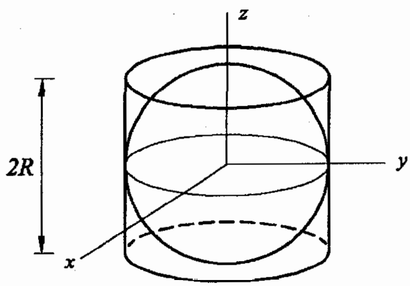
$$dE_x = dE\cos\Phi$$

$$dE_y = dE\sin\phi$$

$$E_x = \int dE_x = \int_\circ^{\text{۲}\pi} \frac{\sigma_\circ \cos^\text{۲}\phi d\phi}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ} = \frac{\sigma_\circ}{\text{۲}\varepsilon_\circ}$$

$$E_y = \int dEy = \int_\circ^{\text{۲}\pi} \frac{\sigma_\circ \sin\phi\cos\phi}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ} d\phi = \circ$$

۲۴) باتوجه به تقارن محوری مسأله می‌توان گفت، شار عبوری از کره با شار عبوری از سطح جانبی استوانهٔ محیط بر کره برابر است.



$$\phi_E = \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = E_r S = (\frac{a}{R})S$$

$$= (\frac{a}{R})(\text{۲}\pi R \times \text{۲}R) = \text{۴}\pi a R$$

۲۵) الف)

$(r < R)r$ بارداخل کره به شعاع $= \int_\circ^r \text{۴}\pi r^\text{۲}\rho dr$

$$= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 (1-\frac{r}{R})dr = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_0 (r - \frac{3r^2}{4R})$$

قانون گاؤس : $E_r(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}(r - \frac{3r^2}{4R})$

$(r > R)R$ بارداخل کره به شعاع $= \int_0^R 4\pi r^2 dr \rho_0 (1-\frac{r}{R}) = 4\pi\rho_0 \frac{R^3}{12}$

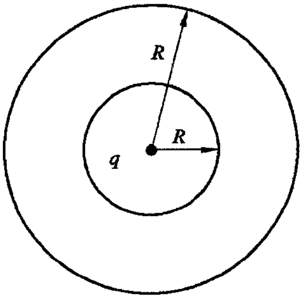
قانون گاؤس : $E_r(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow Er = \frac{\rho_0 R^3}{12r^2\varepsilon_0}$

ب) همان‌گونه در راوبط بالا ملاحظه می‌گردد در حالت $(r > R)$ با افزایش r میدان کاهش می‌یابد، لذا ماکزیمم میدان در حالت $(r < R)$ رخ می‌دهد:

$$\frac{d}{dr}(r - \frac{3}{4}\frac{r^2}{R}) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3r}{2R} = 0 \Rightarrow r = \frac{2R}{3}$$

$$\Rightarrow E_{max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

۲۶) مقدار بار کره را برابر q فرض کرده و قانون گاؤس را برای سطح کروی به شعاع کروی به شعاع $r > R$ به کار می‌بریم:



قانون گاؤس : $E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}[q + \int_R^r \frac{\alpha}{r}(4\pi r^2)dr]$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q - 2\pi\alpha R^2}{\varepsilon_0} + \frac{2\pi\alpha r^2}{\varepsilon_0}$$

باتوجه به رابطه بالا هرگاه بخواهیم E مستقل از R باشد، می‌بایست:

$$q - 2\pi\alpha R^2 = 0 \Rightarrow q = 2\pi\alpha R^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi r^2}(\frac{2\pi\alpha r^2}{\varepsilon_0}) = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}$$

۲۷) سطح کروی به شعاع r را در نظر گرفته و قانون گاؤس را به کار می‌بریم:

قانون گاؤس : $E_r(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0 e^{-\alpha r^3}(4\pi r^2)dr$

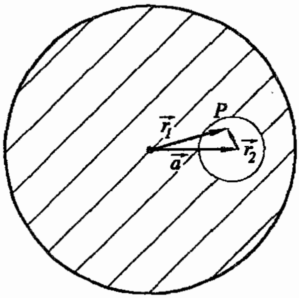
$$= \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0\alpha}(1 - e^{-\alpha r^3})$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}(1 - e^{-\alpha r^3})$$

$$\alpha r^3 << 1 \Rightarrow E_r \simeq \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

$$\alpha r^3 >> 1 \Rightarrow E_r \simeq \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}$$

۲۸) برای حل مسأله ابتدا فرض می‌کنیم کره توپر بوده و و میدان را در نقطهٔ P محاسبه می‌کنیم سپس فرض می‌کنیم در ناحیهٔ حفره بار چگالی $-\rho$ وجود دارد و میدان را در نقطهٔ P را ناشی از این بار منفی به دست می‌آوریم. حال می‌توان گفت میدان در نقطهٔ P حاصل‌جمع این دو مقدار است:



قانون گاؤس: $\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$

قانون گاؤس: $\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

۲۹) مشابه مسألهٔ قبل می‌توان نوشت:

قانون گاؤس: $\vec{E}_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_1$

قانون گاؤس: $\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{a}$$

۳۰)

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R(R^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V_۲ = \frac{-q}{۴\pi\varepsilon_۰ R} + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰(R^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

بنابراین $V_۱ - V_۲ = \Delta V = ۲(\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ R} + \frac{-q}{۴\pi\varepsilon_۰ R(R^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}) = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰ R}(۱ - \frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{a}{R})^۲}})$

۳۱) قانون گاوس میدان الکتریکی در فاصلهٔ r از یک سیم طویل مستقیم حامل چگالی بار خطی λ را به این صورت مشخص می‌کند: $E_r = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r}$.

پس نتیجه این چنین خواهد شد:

$$\int_۱^۲ E_r dr = \int_x^{nx} \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r}\, dr$$

(x فاصلهٔ نقطهٔ ۱ از سیم است که حرکت از آن‌جا آغاز شده است.)

پس:

$$\Delta V_{۱۲} = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰}\ln n$$

۳۲) اگر همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است یک سطح جزئی حلقوی در نظر بگیریم بار جزئی آن برابر خواهد شد با $dq = (۲\pi R\sin\theta)Rd\theta\sigma$ که از طریق این پتانسیل جزئی حاصل برای مرکز نیمکره برابر خواهد شد با:

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{dq}{R} = \frac{۲\pi\sigma R\sin\theta d\theta}{۴\pi\varepsilon_۰} = \frac{\sigma R}{۲\varepsilon_۰}\sin\theta d\theta$$

پس پتانسیل کل نیمکره برابر است با:

$$V = \frac{R\sigma}{۲\varepsilon_۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin\theta d\theta = \frac{\sigma R}{۲\varepsilon_۰}$$

برآیند میدان الکتریکی (با توجه به تقارن شکل) در راستای محور y ها و به سمت منفی آن است.

$$dE_y = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{dq\cos\theta}{R^۲} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

بنابراین

$$E = E_y = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{۴\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin ۲\theta d\theta = \frac{\sigma}{۴\varepsilon_۰}$$

۳۳) اگر یک حلقهٔ جزئی با کلفتی dy و شعاع y درنظر بگیریم آن‌گاه پتانسیل الکتریکی حاصل از آن در نقطهٔ p به فاصلهٔ L از مرکز حلقه برابر است با:

$$dV = \frac{\sigma ۲\pi y dy}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{(y^۲+L^۲)}}$$

بنابراین پتانسیل حاصل از کل صفحه برابر خواهد شد با:

$$V = \int_۰^R \frac{\sigma ۲\pi y dy}{۴\pi\varepsilon_۰\sqrt{y^۲+L^۲}} = \frac{\sigma L}{۲\varepsilon_۰}(\sqrt{۱+(\frac{R}{L})^۲} - ۱)$$

با توجه به تقارن شکل:

$$E = -\frac{dV}{dL} = -\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[\frac{۲L}{۲\sqrt{R^۲+L^۲}} - ۱\right] = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[۱ - \frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{R}{L})^۲}}\right]$$

$$L \to ۰ \;\Rightarrow\; V = \frac{\sigma R}{۲\varepsilon_۰}\,,\; E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}$$

$$L >> R \;\Rightarrow\; V = \frac{\sigma R^۲}{۴\varepsilon_۰ L}\,,\; E = \frac{\sigma R^۲}{۴\varepsilon_۰ L^۲}$$

۳۴) طبق تعریف پتانسیل حاصل از یک صفحهٔ باردار از طریق $V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int \frac{\sigma ds}{r}$ محاسبه می‌شود. برای ساده‌تر کردن انتگرال سطح جزئی را به صورت یک حلقه با شعاع r و ضخامت dr انتخاب می‌کنیم که بنابر آن $ds = ۲\theta r dr$ و $r = ۲R\cos\theta$ و $dr = -۲R\sin\theta d\theta$. پس از جایگذاری این مقادیر در انتگرال پتانسیل برای نقطهٔ o به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V = -\frac{\sigma R}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} \theta\sin\theta d\theta$$

پس از تفکیک انتگرال (استفاده از روش
$(uv)' = udv + vdu \;\Leftarrow\; \int udv = -uy + \int vdu$) و قرار دادن $\theta = u$ و $\sin\theta d\theta = dv$
انتگرال محاسبه خواهد شد:

$$\int \theta\sin\theta d\theta = -\theta\cos\theta + \int\cos\theta d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta$$

که پس از قرار دادن حدود انتگرال در عبارت به‌دست آمده حاصل آن $''-۱''$ خواهد بود. که نتیجه برابر $V = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_۰}$ خواهد شد.

۳۵) با توجه به مسألهٔ $V = \vec{a}\,.\,\vec{r}$ $\quad(\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\;,\; \vec{a} = \vec{ax} + \vec{ay} + \vec{az})$ و با توجه به این‌که $\vec{E} = \vec{\nabla} V$ داریم:

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_x x)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(a_y y)\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(a_z z)\,\vec{k}\right]$$

$$= -\left[a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right] = -\,\vec{a}$$

۳۶) (الف) با توجه به فرض داریم $V = a(x^۲ - y^۲)$ پس:

$$\vec{E} = -\,\vec{\nabla} V = -۲a(x\,\vec{i} - y\,\vec{j})$$

بنابراین شکل خطوط میدان به‌دست آمده همان‌گونه که در شکل (الف) نشان داده شده است خواهد بود، البته با فرض این‌که $a > ۰$ باشد.

ب) از آن‌جایی که $V = axy$ پس:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -ay\,\vec{i} - ax\,\vec{j}$$

پس جواب شکل (ب) خواهد بود.

۳۷) بنابر فرض داریم $V = a(x^۲ + y^۲) + bz^۲$ پس:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -۲\left[ax\,\vec{i} + ay\,\vec{j} + bz\,\vec{k}\right]$$

بنابراین:

$$|\vec{E}| = ۲\sqrt{a^۲(x^۲ + y^۲) + b^۲ z^۲}$$

برای پیدا کردن شکل صفحات هم‌پتانسیل از این تغییر متغیر استفاده خواهیم کرد $\vec{p} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow \quad p^۲ = x^۲ + y^۲$.

بنابراین معادلهٔ سطح هم‌پتانسیل برابر $V = cte = ap^۲ + bz^۲ =$ مقدار ثابت خواهد بود.

اگر $a >$ ۰ و $b >$ ۰ آن‌گاه $V >$ ۰ که عبارت سطوح هم‌پتانسیل برابر $\frac{p^۲}{\frac{V}{a}} + \frac{z^۲}{\frac{V}{b}} =$ ۱ خواهد بود که شکل به‌دست آمده یک بیضی است که محورهایش در راستای p و z است و در سه بعد وجود دارد و طول نیم محورهایش عبارت است از $\sqrt{\frac{V}{a}}$ و $\sqrt{\frac{V}{b}}$.

اما اگر $a >$ ۰ و $b <$ ۰ باشد آن‌گاه V می‌تواند $\geq$ ۰ باشد که اگر $>$ ۰ باشد معادله برابر

$$\frac{p^۲}{\frac{V}{a}} - \frac{z^۲}{\frac{V}{|b|}} = ۱$$

خواهد بود که نشانگر یک هذلولی دوران یافته حول محور z ها خواهد بود. و اگر $V =$ ۰ باشد آن‌گاه

$$ap^۲ + bz^۲ = ap^۲ - |b|z^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{a}{|b|}}\,p$$

که نشانگر دو مخروط هست که در امتداد همدیگر واقع شده‌اند و نقطهٔ مشترک آن‌ها $(۰, ۰)$ که رأس دو مخروط هست می‌باشد.

و اگر $V <$ ۰ باشد معادله می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$\frac{z^۲}{|\frac{V}{b}|} - \frac{p^۲}{|\frac{V}{a}|} = ۱ \quad \text{یا} \quad |b|z^۲ - ax^۲ = |V|$$

که این هم یک هذلولی دو قسمتی دوران یافته حول محور z است.

۳۸) از طریق قانون گاوس شدت میدان الکتریکی در داخل یک کره با چگالی بار ρ در فاصلهٔ r از مرکز آن برابر با $E_r = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}$ و در خارج آن $E_r = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{q}{r^۲}$ به‌دست می‌آید.

الف) پتانسیل در مرکز این کره برابر است با:

$$V = \int_۰^\infty \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_۰^R \frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}\,dr + \int_R^\infty \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲}\,dr$$

$$= \frac{\rho}{۳\varepsilon_۰} \times \frac{R^۲}{۲} + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \qquad , \qquad \left(\rho = \frac{۳q}{۴\pi R^۳}\right)$$

و

$$\Rightarrow V = \frac{q}{۸\pi\varepsilon_۰ R} + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ R} = \frac{۳q}{۸\pi\varepsilon_۰ R}$$

ب) پتانسیل در فاصلهٔ r از مرکز کره که در داخل کره واقع شده باشد برابر است با:

$$V(r) = \int_r^R \frac{\rho r}{۳\varepsilon_۰}\, dr + \int_R^\infty \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{dr}{r^۲} = \frac{۳q}{۸\pi\varepsilon_۰ R}\,(۱ - \frac{r^۲}{۳R^۲})$$
$$= V_۰\,(۱ - \frac{r^۲}{۳R^۲})$$

۳۹) اگر ۲ بار $+q$ و $-q$ به فاصلهٔ L از هم قرار گرفته باشند آن‌گاه پتانسیل الکتریکی در فاصلهٔ $r >> L$ برای این دو قطبی برابر $V(r) = \frac{+q}{۴\pi\varepsilon_۰ r_+} + \frac{-q}{۴\pi\varepsilon_۰ r_-} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+})$ خواهد بود.

با توجه به این‌که $r_+ r_- = r^۲$ و $r_- - r_+ = L\cos\theta$ که با جایگذاری در عبارت فوق داریم:

$$(p = qL) \qquad V(r) = \frac{qL\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} = \frac{p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} = \frac{\vec{p}\,.\,\vec{r}}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}$$

با توجه به این‌که

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{۲p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}\ ,\quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r d\theta} = \frac{p\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$E = \sqrt{E_\theta^۲ + E_r^۲} = \frac{p}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}\sqrt{۴\cos^۲\theta + \sin^۲\theta}$$

۴۰) با استفاده از نتایج به‌دست آمده در سؤال قبل $(E_r = \frac{۲p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}\ ,\ E_\theta = \frac{p\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳})$ و شکل سؤال واضح است که:

$$E_z = E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta = \frac{p}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}\,(۳\cos^۲\theta - ۱)$$

و

$$E_\perp = E_r\sin\theta + E_\theta\cos\theta = \frac{۳p\sin\theta\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳}$$

هنگامی‌که $E_z = ۰\ ,\ |\vec{E}| = E_\perp\ ,\ \vec{E}_\perp \vec{p}$ آن‌گاه $\cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳\cos^۲\theta = ۱$

۴۱) اگر دو قطبی را مرکز یک سطح کروی هم‌پتانسیل در نظر بگیریم، آن‌گاه در سطح هم‌پتانسیل میدان مماس بر سطح کره باید صفر باشد تا سطح هم‌پتانسیل بماند.

$-E_۰\sin\theta + E_\theta = ۰$ یا $-E_\theta\sin\theta + \frac{p\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۳} = ۰$

بنابراین $r = (\frac{p}{۴\pi\varepsilon_۰ E_۰})^{\frac{۱}{۳}}$.

۴۲) اگر p یک نقطه در فاصلهٔ r و $L >> r$ و با زاویهٔ θ نسبت به بردار $\vec{l}$ در نظر بگیریم.

$$p = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} \frac{\vec{r} + \frac{\vec{L}}{۲}}{|\vec{r} + \frac{\vec{L}}{۲}|^۲} - \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} \frac{\vec{r} - \frac{\vec{L}}{۲}}{|\vec{r} - \frac{\vec{L}}{۲}|^۲}$$

$$= \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{\vec{r} + \frac{\vec{L}}{۲}}{r^۲ + \frac{L^۲}{۴} + rL\cos\theta} - \frac{\vec{r} - \frac{\vec{L}}{۲}}{r^۲ + \frac{L^۲}{۴} - rL\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\vec{L}}{r^۲} - \frac{۲L\,\vec{r}}{r^۳}\cos\theta\right)$$

پس:

$$E = |\vec{E}| = \frac{\lambda\, L}{۲\pi\varepsilon_\circ r^۲} \quad , \quad r >> L$$

هم‌چنین:

$$V = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} Ln(\vec{r} + \frac{\vec{L}}{۲}) - \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} Ln(\vec{r} - \frac{\vec{L}}{۲})$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_\circ} Ln\left(\frac{r^۲ + rL\cos\theta + \frac{L^۲}{۴}}{r^۲ - rL\cos\theta + \frac{L^۲}{۴}}\right) = \frac{\lambda L\cos\theta}{۲\pi\varepsilon_\circ r} \quad , \quad r >> L$$

۴۳) برای محاسبهٔ پتانسیل و میدان الکتریکی ابتدا پتانسیل و میدان الکتریکی حاصل از هر حلقه را حساب می‌کنیم، سپس میدان را جمع برداری و پتانسیل را جمع اسکالر می‌کنیم.
مکان حلقهٔ بالایی را $x = \frac{L}{۲}$ و حلقهٔ پایینی را $x = -\frac{L}{۲}$ در نظر می‌گیریم.

$$V = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + (x - \frac{L}{۲})^۲)^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + (x + \frac{L}{۲})^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\cong \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲ - Lx)^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲ + Lx)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\cong \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\left(۱ + \frac{Lx}{۲(R^۲ + x^۲)}\right) - \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\left(۱ - \frac{Lx}{۲(R^۲ + x^۲)}\right)$$

$$\cong \frac{qLx}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$|x| >> R \quad \Rightarrow \quad V \approx \frac{qL}{۴\pi x^۲}$$

می‌دانیم ، $\vec{E} = -\nabla V = \frac{-\partial V}{\partial x}\hat{x}$

$$|\vec{E}| = \frac{qL}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲)^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{۳}{۲}\frac{qL}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^۲ + x^۲)^{\frac{۵}{۲}}} \times ۲a$$

$$= \frac{qL(۲x^۲ - R^۲)}{۴\pi\varepsilon_۰(R^۲+x^۲)^{\frac{۵}{۲}}} \qquad |x| >> r : E \approx \frac{qL}{۲\pi\varepsilon_۰ x^۳}$$

۴۴) برای حل مسأله می‌توانیم نخست پتانسیل را برای دو صفحه بدون سوراخ محاسبه کنیم و بعد دو سطح دایره با بار مخالف روی هر صفحه قرار دهیم و پتانسیل حاصل از آن سطوح دایره‌ای را به پتانسیل قبلی اضافه کنیم.
برای محاسبهٔ قسمت دوم از پاسخ سؤال قبل می‌توانیم استفاده کنیم.

$$V = \int_۰^R \frac{(-\sigma)L۲\pi r dr x}{۴\pi\varepsilon_۰(r^۲+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{\sigma x L}{۴\varepsilon_۰}\int_{x^۲}^{R^۲+x^۲}\frac{dy}{y^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\sigma x L}{۲\varepsilon_۰\sqrt{R^۲+x^۲}}$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\sigma L}{۲\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{\sqrt{R^۲+x^۲}} - \frac{x^۲}{(R^۲+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\right] = -\frac{\sigma L R^۲}{۲\varepsilon_۰(R^۲+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۴۵) برای $x > ۰$ از نتیجهٔ فوق استفاده می‌کنیم.

$$V \approx \pm\frac{\sigma L}{۲\varepsilon_۰}\left(۱ - \frac{|x|}{(R^۲+x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\right)$$

در نقطهٔ $|X| = ۰$ یک جهش در اندازهٔ پتانسیل وجود دارد و جواب برای $x < ۰$ با تغییر $-\sigma \;\rightarrow\; \sigma$ درست می‌شود.

پس $\quad V = \frac{-\sigma\rho x}{۲\varepsilon_۰(R^۲+x^۲)^{\frac{۱}{۲}}} +$ مقدار ثابت

بنابراین (با در نظر نگرفتن جهش) $\quad E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma L R^۲}{۲\varepsilon_۰(R^۲+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

برای $|x|$ های بزرگ $\quad V = \pm\frac{p}{۴\pi\varepsilon_۰ x^۲} \;,\; E \approx \frac{p}{۴\pi\varepsilon_۰|x|^۳} \;,\; (p = \pi R^۲\sigma L)$

۴۶)

$$E_r = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ r} \;,\; E_\theta = E_\phi = ۰ \;,\; \vec{F} = p\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial L}$$

الف) موازی سیم: چون اگر دو قطبی در راستای سیم جابجا شود تغییری مشاهده نمی‌شود. پس $F = ۰$.

ب) در راستای شعاع:

$$\vec{F} = Fr\,\vec{er} = \frac{\lambda p}{۲\pi\varepsilon_۰ r^۲}\,\vec{er} = -\frac{\lambda\vec{p}}{۲\pi\varepsilon_۰ r^۲}\;\left(\frac{\partial}{\partial r}\;\vec{er} = ۰\right)$$

۴۷) نیروی وارد بر دو قطبی p تحت میدان E برابر است با $F = |p \dfrac{dE}{dL}|$.
میدان حاصل از یک دو قطبی الکتریکی در فاصلهٔ L از آن برابر است با $|\vec{E}| = \dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0 L^3}$
پس نیرو برابر است با $\vec{F} = \dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 L^4} = 2/1 \times 10^{-16}\ N$

۴۸)

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dr} = a(ydx + xdy) = ad(xy) \Rightarrow V = -axy + C$$

۴۹)

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dr} = (2axy\,\vec{i} + 2(x^2 - y^2)\,\vec{j}) \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j})$$

$$= 2axydx + a(x^2 - y^2)dy = ad(x^2y) - ay^2dy$$

$$\Rightarrow V = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right) + C$$

۵۰)

$$-dV = \vec{E} \cdot \vec{dr} = a(ydx + axdy) + b(zdy + ydz) = ad(xy) + bd(yz)$$

$$\Rightarrow V = -(axy + byz) + C$$

۵۱)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 3ax^2$$

قانون گاوس : $\dfrac{\partial Ex}{\partial x} = \dfrac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$

پس : $\rho(x) = 6a\varepsilon_0 x$

۵۲) از معادلهٔ پرسیون داریم $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}$ یا $V = -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}x^2 + Ax + B$ و ρ_0 چگالی حجمی بار ثابت است. همچنین $V(0) = 0$ پس $B = 0$.
چون $V(d) = \Delta = Ad - \dfrac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon_0}$ یا $A = \dfrac{\Delta V}{d} + \dfrac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}$. هم‌چنین برای $x = 0$ داریم $E = 0$.

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x - A = 0$$

اگر $A = \dfrac{\Delta V}{d} + \dfrac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0} = 0$ آن‌گاه $\rho_0 = -\dfrac{2\varepsilon_0 \Delta V}{d^2}$.
هم‌چنین $E(d) = \dfrac{\rho_0 d}{\varepsilon_0}$.

۵۳)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -۲ar$$

قانون گاوس : $۴\pi r^۲ E_r = \int \frac{dq}{\varepsilon_۰}$ (dq بار بین دو دایره با شعاع‌های $r, r+dr$ است)

بنابراین : $۴\pi r^۲ E_r = ۴\pi r^۲(-۲ar) = \frac{۴\pi}{\varepsilon_۰}\int_۰^r r'^۲\rho\,(r')dr'$

از دو طرف مشتق می‌گیریم. پس:

$$\rho = -۶a\varepsilon_۰$$

فصل ۸

رساناها و دی‌الکتریک‌ها

۵۴) با استفاده از بار تصویری می توان نیروی وارد بر توپ را حساب کرد و از روی آن بار توپ را به‌دست آورد.

$$\frac{q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}(2L)^{2}} = kx \Rightarrow q = 4L\sqrt{\pi\varepsilon_{0}kx}$$

۵۵) با استفاده از بار تصویری داریم:

$$dW = Fxdx = -\frac{q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}(2x)^{2}}\,dx$$

$$W = \int_{L}^{\infty} -\frac{q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}(2x)^{2}}\,dx = -\frac{q^{2}}{16\pi\varepsilon_{0}L}$$

۵۶) الف) ۲ بار تصویری و یک بار حقیقی داریم.

$$F = \sqrt{2}\,\frac{q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}L^{2}} - \frac{q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}(\sqrt{2}L)^{2}} = \frac{q^{2}}{8\pi\varepsilon_{0}L^{2}}\,(2\sqrt{2}-1)$$

ب)

$$E = 2\,(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}})\,\frac{q}{\pi\varepsilon_{0}L^{2}}$$

۵۷) با استفاده از بار تصویری جواب به‌راحتی به‌دست می‌آید.

$$F = \frac{\sqrt{2}q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}(2L)^{2}} + \frac{(-q)^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}(2\sqrt{2}L)^{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-1)\,q^{2}}{32\pi\varepsilon_{0}(L)^{2}} \qquad \text{جاذبه}$$

۵۸) با استفاده از بار تصویری داریم :

$$F = p\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial L} \Rightarrow |\vec{F}| = |p\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial L}| = \frac{3p^{2}}{32\pi\varepsilon_{0}L^{4}} \qquad (\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_{0}(2L)^{3}})$$

۵۹) با استفاده از میدان الکتریکی می‌توان چگالی سطحی را محاسبه کرد و برای پیدا کردن میدان از بار تصویری استفاده می‌کنیم.

$$E = 2E\cos\alpha = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\,\frac{L}{x} = \frac{qL}{2\pi\varepsilon_0(L^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

($\vec{n}$ بردار عمود بر سطح) با استفاده از قانون گاوس داریم $\sigma = \varepsilon_0 E_n$.

$$E = E_n$$

$$\sigma = -\varepsilon_0 E = -\frac{qL}{2\pi\,(L^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۶۰) الف) با استفاده از بار تصویری میدان را محاسبه می‌کنیم.

$$E = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2L)} \quad , \quad F = 1\times\lambda\times E \Rightarrow F = \frac{-\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \qquad \text{جاذبه}$$

ب) مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم.

$$E(x) = E_n(x) = \frac{\lambda L}{\pi\varepsilon_0\,(x^2+L^2)}$$

$$\sigma(x) = \varepsilon_0\,E_n = \frac{\lambda L}{\pi\,(x^2+L^2)}$$

۶۱) الف)

$$E_n(O) = 2\int_L^\infty \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 L}$$

پس

$$\sigma(O) = \varepsilon_0\,E_n = \frac{\lambda}{2\pi L}$$

ب)

$$\begin{aligned} E_n(r) &= 2\int_L^\infty \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}\,\frac{x}{(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_L^\infty \frac{xdx}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L^2+r^2}^\infty \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{L^2+r^2}} \end{aligned}$$

پس

$$\sigma(r) = \varepsilon_0\,E_n(r) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{L^2+r^2}}$$

۶۲) از روش بار تصویری استفاده می‌کنیم.

$$\vec{E} = 2\,\frac{qL}{4\pi\varepsilon_0(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\,(-\vec{n})$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n \Rightarrow \sigma = \frac{-qL}{2\pi(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

علامت منفی نشاندهندهٔ علامت بار القایی مخالف q

است.

۶۳) چون پتانسیل همهٔ کره یکسان است (رسانا است) و محاسبهٔ پتانسیل در مرکز کره آسان‌تر است، ما پتانسیل را برای مرکز کره محاسبه می‌کنیم.

$$V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{q}{L} + V'$$

قسمت اول فقط پتانسیل حاصل از بار q است و V' پتانسیل حاصل از بار القایی، ولی چون بار القایی متقارن و مختلف العلامة هستند برای مرکز مجموعش صفر خواهد شد پس $V' = ۰$ پس $V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \times \frac{q}{L}$.

۶۴) بار q در پوستهٔ داخل رسانا بار $-q$ القا می‌کند و در لایهٔ خارجی چون مجموع بار باید صفر باشد بار q القا می‌شود و چون همهٔ بارها از مرکز به یک فاصله هستند پتانسیل به راحتی محاسبه می‌شود.

$$V(O) = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{-q}{۴\pi\varepsilon_۰ R_۱} + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ R_۲}$$

۶۵) پتانسیل در داخل کرهٔ مرکزی برابر است با:

$$V_a = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ a} + \frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ b}$$

و $V_a = ۰$ پس $q_۲ = -\frac{b}{a}\, q_۱$

وقتی $r \geq b$

$$V(r) = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r}\,(۱ - \frac{b}{a})$$

وقتی $r \leq b$

$$V(r) = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ r} + \frac{q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰ b} = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\,(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{a})$$

۶۶) الف) میدان بین ۲–۱ و ۴–۳ هم‌جهت و هم‌اندازه هستند. چون تمام شرایط برای آن‌ها یکسان هست ولی میدان ۳–۲ در خلاف جهت آن قرار دارد و از جهتی دیگر چون صفحه‌های ۴ و ۱ به هم متصل هستند هم پتانسیل هستند.

$$\Delta V = Ed$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{۱-۲}d + E_{۲-۳}d + E_{۳-۴}d = ۰ \\ E_{۱-۲} = E_{۳-۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ۲E_{۱-۲}d + E_{۲-۳}d = ۰$$

$$\Rightarrow \quad E_{۲-۳} = -۲E_{۱-۲}$$

ب) با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان تصور کرد که بار موجود در صفحهٔ ۲ به دو قسمت تقسیم شده است. $\frac{۱}{۳}$ آن در قسمت بالایی صفحه موجود است و $\frac{۲}{۳}$ آن در قسمت زیرین صفحه موجود است.

$$E_{۲-۳} = \frac{\Delta V}{d} \ \Rightarrow \ E_{۱-۲} = E_{۳-۴} = \frac{\Delta V}{۲d}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_۰}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{1,4} = \dfrac{\varepsilon_0 \triangle V}{2d} \\ \sigma_{2,3} = \dfrac{\varepsilon_0 \triangle V}{d} + \dfrac{\varepsilon_0 \triangle V}{2d} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_0 \triangle V}{d} \end{cases}$$

۶۷) می‌توانیم بار نقطه‌ای را با یک صفحهٔ باردار همگن با بار کلی q و چگالی سطحی σ جایگزین کرد. پس:

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

و چون صفحه‌ها به هم وصل هستند باید هم پتانسیل باشند

$$E_1 x = E_2(L-x)$$

پس

$$E_1 = \frac{\sigma}{L\varepsilon_0}(L-x) \ , \ E_2 = \frac{\sigma}{L\varepsilon_0}x \ , \ E_n\varepsilon_0 = \sigma$$

پس

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{L}(L-x) \ , \ \sigma_2 = -\frac{\sigma}{L}x$$

از این می‌توان نتیجه گرفت

$$q_1 = -\frac{q}{L}(L-x) \ , \ q_2 = -\frac{q}{L}x$$

۶۸) میدان در نزدیکی سطح کره برابر با $E = E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ است.
این میدان را می‌توان به صورت حاصل‌جمع دو میدان E_1 و E_2 نوشت. میدان E_1 میدان حاصل از سطح جزئی ds است که برابر می‌شود با $E_1 = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ و قسمت باقی‌مانده برابر $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.
برای محاسبهٔ نیروی وارد بر ds نیروی E_1 را حذف می‌کنیم، چون یک نیروی داخلی است.

$$\frac{dF}{dS} = \sigma.\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

۶۹) کل نیروی وارد بر نیم‌دایره برابر است با:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cos\theta.2\pi R\sin\theta R d\theta = \frac{2\pi R^2\sigma^2}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2\varepsilon_0}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{q}{4\pi r^2}\right)^2 = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 R}$$

۷۰) مجموع نیروها در راستای z قرار خواهند گرفت پس نیروی در راستای z را محاسبه می‌کنیم.

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\sigma\vec{E}\,ds$$

$$dF_z = dF\cos\theta \ , \ ds = 2\pi R\sin\theta R d\theta \ , \ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$dF_z = \frac{\pi\sigma^2 R^2}{\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta = -\left(\frac{\pi\sigma_0^2 R^2}{\varepsilon_0}\right)\cos^2\theta d\cos\theta$$

$$\Rightarrow F = F_z = \frac{\pi\sigma_0^2 R^2}{4\varepsilon_0}$$

۷۱) پولاریزاسیون حاصل برابر خواهد بود با $P = (\varepsilon - ۱)\,\varepsilon_\circ E$ این باید برابر باشد با $\frac{n_\circ P}{N}$ که $n_\circ$ باید تعداد مولکول آب در واحد حجم باشد.

$$N = \frac{n_\circ P}{(\varepsilon - ۱)\varepsilon_\circ E} = ۲/۹۳ \times ۱۰^{۳}$$

۷۲)

$$\vec{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{۳\,\vec{p}\,.\,\vec{r}\,\vec{r} - \vec{p}\,r^{۲}}{r^{۵}}\ ,\ \ r = L\ ,\ \vec{p}\,||\,\vec{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\,\frac{۲\,\vec{p}}{L^{۳}}$$

$$P_{ind} = \beta\,\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{۲\,\vec{p}}{L^{۳}}\,\varepsilon_\circ \ \Rightarrow\ F = \frac{\beta}{۴\pi}\,\frac{۲p}{L^{۳}}\,\frac{۵}{۵L}\,\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{۲p}{L^{۳}} = \frac{۳\beta p^{۲}}{۴\pi^{۲}\varepsilon_\circ L^{۷}}$$

۷۳) میدان از فاصلهٔ x از مرکز حلقه برابر است با:

$$E(x) = \frac{qx}{۴\pi\varepsilon_\circ(R^{۲} + x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$P = \beta\varepsilon_\circ E = \frac{q\beta x}{۴\pi(R^{۲} + x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

نیروی وارد بر این مولکول برابر است با:

$$F = p\frac{\partial}{\partial x}\,E = \frac{q\beta x}{۴\pi(R^{۲} + x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\,\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{(R^{۲} + x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \frac{q^{۲}\beta}{۱۶\pi^{۲}\varepsilon_\circ}\,\frac{x(R^{۲} - ۲x^{۲})}{(R^{۲} + x^{۲})^{۴}}$$

به جز $x = \circ$ و $x = \infty$ در $x = \pm\frac{R}{\sqrt{۲}}$ عبارت صفر خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x(R^{۲} - ۲x^{۲})}{(R^{۲} + x^{۲})^{۴}} = \circ \ \Rightarrow\ x = \frac{R}{\sqrt{۲\circ}}\,\sqrt{۱۳ \pm \sqrt{۱۲۹}}$$

۷۴) در داخل کره

$$\vec{D}\,(\vec{r}) = \frac{q}{۴\pi}\,\frac{\vec{r}}{r^{۳}} = \varepsilon\varepsilon_\circ\,\vec{E}$$

هم‌چنین $\varepsilon_\circ\,\vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ یا $\vec{P} = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}\,\vec{D} = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}\,\frac{q}{۴\pi}\,\frac{\vec{r}}{r^{۳}}$

هم‌چنین $q' = -\oint \vec{P}\,.\,d\,\vec{s} = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}\,\frac{q}{۴\pi}\int d\Omega = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}\,q$

۷۵)

$E_{\text{دی‌الکتریک}} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_\circ}$ یا $\sigma = D_{\text{رسانا}} = D_{\text{دی‌الکتریک}} = \varepsilon\varepsilon_\circ E_{\text{دی‌الکتریک}}$

$$\sigma' = -P_n = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}\sigma \qquad P_n = (\varepsilon - ۱)\varepsilon_\circ E_{\text{دی‌الکتریک}} = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}\sigma$$

۷۶) با توجه مسألهٔ قبل:

$$q_{\text{داخلی}} = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon} \int \sigma ds = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon} q$$

چون دی‌الکتریک در کل خنثی است بار خارجی آن برابر $q_{\text{خارجی}} = +\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon} q$ خواهد بود.

۷۷) الف) بدیهی است که برای $r < a$, $E = ۰$ خواهد بود.
برای $b > r > a$ طبق قانون گاوس داریم:

$$\varepsilon\varepsilon_۰ E \times ۴\pi r^۲ = ۴\pi a^۲ \sigma_۰ \Rightarrow E = \frac{\sigma_۰}{\varepsilon_۰ \varepsilon} \left(\frac{a}{r}\right)^۲$$

برای $r > b$ مشابه قسمت دوم عمل می‌کنیم.

$$E = \frac{\sigma_۰}{\varepsilon_۰} \left(\frac{a}{r}\right)^۲$$

$$-E.dr = dV \quad \Rightarrow \quad r > b : V = \frac{\sigma_۰ a^۲}{\varepsilon_۰ r}$$

$$a < r < b \ : \ V = \frac{\sigma_۰ a^۲}{\varepsilon\varepsilon_۰ r} + B$$ (B یک مقدار ثابت است)

$$r < a \ : \ V = A$$ (A یک مقدار ثابت است)

ب)

$$r < a \ : \ E = ۰$$

$$a < r < b \ : \ \varepsilon\varepsilon_۰ ۴\pi r^۲ E = \frac{۴\pi}{۳} (r^۳ - a^۳) \rho_۰ \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho_۰}{۳\varepsilon\varepsilon_۰} \left(r - \frac{a^۳}{r^۲}\right)$$

$$r > b \ : \ E = \frac{(b^۳ - a^۳)\rho_۰}{۳\varepsilon_۰ r^۲}$$

با استفاده از انتگرال

$$r < a \ : \ V = A$$ (A یک مقدار ثابت است)

$$a < r < b \ : \ V = B - \frac{\rho_۰}{۳\varepsilon\varepsilon_۰} \left(\frac{r^۲}{۲} + \frac{a^۳}{r}\right)$$

$$r > b \ : \ V = \frac{b^۳ - a^۳}{۳\varepsilon_۰ r^۲} \rho_۰$$

۷۸)

$$E_۰ \cos\alpha_۰ = \varepsilon E \cos\alpha \qquad E_۰ \sin\alpha_۰ = E \sin\alpha$$

پس $$E = E_۰ \sqrt{\sin^۲\alpha_۰ + \frac{۱}{\varepsilon^۲} \cos^۲\alpha_۰} \ , \ \tan\alpha = \varepsilon \tan\alpha_۰$$

$$D_n = \varepsilon\varepsilon_۰ E_n = \varepsilon\varepsilon_۰ E \cos\alpha = \varepsilon_۰ E_۰ \cos\alpha_۰$$

$$\sigma' = P_n = D_n - \varepsilon_\circ E_n = (\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\varepsilon})\, \varepsilon_\circ E_\circ \cos\alpha_\circ = \frac{\varepsilon - \text{۱}}{\varepsilon}\, \varepsilon_\circ\, E_\circ \cos\alpha_\circ$$

۷۹) با توجه به مسألهٔ قبل $\sigma' = \varepsilon_\circ\ \frac{\varepsilon - \text{۱}}{\varepsilon}\ E_\circ\ \cos\theta$

الف)

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\text{۱}}{\varepsilon_\circ} Q = \pi R^{\text{۲}} E_\circ \cos\theta\ \frac{\varepsilon - \text{۱}}{\varepsilon}$$

ب)

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{dl} = (D_{\text{۱}t} - D_{\text{۲}t})\ell = (\varepsilon_\circ E_\circ \sin\theta - \varepsilon\varepsilon_\circ \sin\theta) = -(\varepsilon - \text{۱})\varepsilon_\circ E_\circ \ell \sin\theta$$

۸۰) الف)

$$div\, \vec{D} = \frac{\partial Dx}{\partial x} = \rho \quad , \quad D = \rho\ell$$

$$\ell < d\ :\ E_x = \frac{\rho\ell}{\varepsilon\varepsilon_\circ} \qquad , \qquad \ell > d\ :\ E_x = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}$$ (مقدار ثابت)

$$\ell < d\ :\ V(x) = -\frac{\rho\ell^{\text{۲}}}{\text{۲}\varepsilon\varepsilon_\circ}\ ,\ V(x) = A - \frac{\rho\ell d}{\varepsilon_\circ}\ ,$$

$$\ell > d\ :\ V(x) = \frac{\rho d}{\varepsilon_\circ}\, (d - \frac{d}{\text{۲}\varepsilon} - \ell)$$

ب)

$$\rho' = -div\, \vec{P} = -div(\varepsilon - \text{۱})\varepsilon_\circ\, \vec{E} = -\rho\, \frac{\varepsilon - \text{۱}}{\varepsilon}$$

$$\sigma' = P_{\text{۱}n} - P_{\text{۲}n} = P_{\text{۱}n}\ (P_{\text{۲}n} = \circ) = \rho d - \frac{\rho d}{\varepsilon} = \rho d\, \frac{\varepsilon - \text{۱}}{\varepsilon}$$

۸۱) الف)

$$div\, \vec{D} = \frac{\text{۱}}{r^{\text{۲}}}\, \frac{\partial}{\partial r}\, r^{\text{۲}} D_r = \rho$$

$$r^{\text{۲}} D_r = \rho\, \frac{r^{\text{۳}}}{\text{۳}} + A D_r = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\rho r^{\text{۳}} + \frac{A}{r^{\text{۲}}} \qquad r < R$$

$r > R\ :\ D_r = \frac{B}{r^{\text{۲}}}$ در $r = \circ$ چون $D \neq \infty$ داریم $A = \circ$ بنابراین $E_r = \frac{\rho r}{\text{۳}\varepsilon\varepsilon_\circ}$.

به خاطر ممتد بودن D_r در $r = R$ داریم $B = \frac{\rho R^{\text{۳}}}{\text{۳}}$.

بنابراین:

$$r > R\ :\ E_r = \frac{\rho R^{\text{۳}}}{\text{۳}\varepsilon_\circ r^{\text{۲}}} \qquad , \qquad V = \frac{\rho R^{\text{۳}}}{\text{۳}\varepsilon_\circ r}$$

$$r < R\ :\ V = -\frac{\rho r^{\text{۲}}}{\text{۶}\varepsilon\varepsilon_\circ} + C$$

ب)

$$\rho' = div\, \vec{P} = -\frac{\text{۱}}{r^{\text{۲}}}\, \frac{\partial}{\partial r}\, \{\frac{r^{\text{۳}}}{\text{۳}}\, \rho\, (\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\varepsilon})\} = -\frac{\rho(\varepsilon - \text{۱})}{\varepsilon}$$

$$\sigma' = P_{1r} - P_{2r} = P_{1r} = \frac{1}{3}\,\rho R\,(1 - \frac{1}{\varepsilon})$$

۸۲)

$$\vec{E} = -\int \frac{\sigma' ds}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}$$

$\sigma' = P_n = P\cos\theta$ (در سطح خمیده) $(p_n = 0$ (در سطح صاف)

$E = -\int_0^{2\pi} \frac{P\cos\theta R d\theta \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,.\,d$ $(\vec{P}, \vec{r}$ زاویهٔ بین $\theta)$

هنگامی‌که $r = R$ و $d << R$

$$\vec{E} \approx -\frac{\vec{P}\,d}{4\varepsilon_0 R}$$

۸۳)

$div\,\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0$ (مقدار ثابت است. Dx)

چون D_x در ∞ صفر است پس همه‌جا صفر است.

بنابراین:

$\vec{E} = -\frac{\vec{P}_0}{\varepsilon_0}\,(1 - \frac{x^2}{d^2})$ یا $E_x = \frac{-P_0}{\varepsilon_0}\,(1 - \frac{x^2}{d^2})$

پس:

$$V = \frac{P_0 x}{\varepsilon_0} - \frac{P_0 x^3}{3\varepsilon_0 d^2} + C$$

بنابراین:

$$V(+d) - V(-d) = \frac{2P_0 d}{\varepsilon_0} - \frac{2P_0 d^3}{3d^2\varepsilon_0} = \frac{4P_0 d}{3\varepsilon_0}$$

۸۴) الف)

$D_1 = D_2$, $\varepsilon E_2 = E_1$, $E_1\,\frac{d}{2} + E_2\,\frac{d}{2} = E.d$ یا $E_1 + E_2 = 2E_0$

بنابراین:

$$E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}\ ,\ E_1 = \frac{2\varepsilon E_0}{\varepsilon + 1}\ ,\ D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1}$$

ب)

$$D_1 = D_2\ ,\ \varepsilon E_2 = E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0$$

بنابراین:

$$E_1 = E_0\ ,\ E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon}\ ,\ D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$$

۸۵) الف)

$$E_1 = E_2 = E_0\ ,\ D_1 = \varepsilon_0\,E_0\ ,\ D_2 = \varepsilon_0\varepsilon E_0$$

ب)

$$E_۱ = E_۲ \quad , \quad D_۱ = \varepsilon_\circ E_۱ \quad , \quad D_۲ = \varepsilon\varepsilon_\circ E_۲ = \varepsilon D_۱$$

$$E_۱ (۱ + \varepsilon) = ۲E_\circ$$ یا $$E_۱ = E_۲ = \frac{۲E_\circ}{\varepsilon + ۱}$$

۸۶)

$$E_{۱t} = E_{۲t}$$

میدان الکتریکی باید شعاعی باشد. $a < r < b \; : \; E_۱ = E_۲ = \dfrac{A}{\varepsilon_\circ \varepsilon r^۲}$

$$q = \frac{A}{R^۲} (۲\pi R^۲) + \frac{A}{\varepsilon R^۲} (۲\pi R^۲) = A(۱ + \frac{۱}{\varepsilon})\, ۲\pi$$

یا $$E_۱ = E_۲ = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_\circ r^۲ \,(۱ + \varepsilon)}$$

۸۷)

$$F \Longrightarrow F' = \frac{F}{\varepsilon} \quad , \quad mg \Rightarrow mg\,(۱ - \frac{\rho_\circ}{\rho})$$

$$\frac{۱}{\varepsilon} = ۱ - \frac{\rho_\circ}{\rho}$$ یا $$\frac{\rho_\circ}{\rho} = ۱ - \frac{۱}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon} \Rightarrow \rho = \rho_\circ \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon}$$

۸۸)

$$E_n = E\cos\theta \quad , \quad E_t = E\sin\theta$$

پس $$D_n = \varepsilon\varepsilon_\circ E\cos\theta \quad , \quad P_n = (\varepsilon - ۱)\,\varepsilon_\circ E\cos\theta$$

یا $$\sigma' = (\varepsilon - ۱)\,\varepsilon_\circ E\cos\theta$$

بنابراین $$\sigma_{\max} = (\varepsilon - ۱)\,\varepsilon_\circ E$$

$$q' = \int_\circ^۱ (\varepsilon - ۱)\,\varepsilon_\circ E\cos\theta\, ۲\pi R^۲ d\,(\cos\theta) = \pi R^۲ \varepsilon_\circ\,(\varepsilon - ۱)\,E$$

چون فقط یک طرف را می‌خواهیم از ۱ → ∘ انتگرال می‌گیریم.

۸۹) $$E_{۱n} = \frac{q'}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\cos\theta - \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\cos\theta \qquad E_{۲n} = \frac{-q''}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\cos\theta$$

$$E_{۱t} = \frac{q'}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\sin\theta + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\sin\theta \qquad E_{۲t} = \frac{q''}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\sin\theta$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$D_{۱n} = D_{۲n} \quad , \quad E_{۱t} = E_{۲t} \quad , \quad \varepsilon q'' = q - q' \quad , \quad q'' = q + q'$$

پس:

الف)

$$q'' = \frac{۲q}{\varepsilon + ۱} \quad , \quad q' = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\, q$$

$$\sigma' = P_{۲n} = D_{۲n} - \varepsilon_\circ E_{۲n} = (\varepsilon - ۱)\varepsilon_\circ E_{۲n}$$

$$= -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\, \frac{q}{۲\pi r^۲}\, \cos\theta = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\, \frac{q\, \ell}{۲\pi r^۳}$$

ب)

$$-\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱} q \int_\circ^\infty \frac{\ell}{۲\pi(\ell^۲ + x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\, ۲\pi x dx = -\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\, q$$

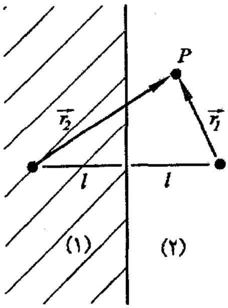
۹۰)

$$E_{\text{تصویر}} = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱} \times \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ (۲L)^۲}$$

بنابراین

$$F = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\, \frac{q^۲}{۱۶\pi\varepsilon_\circ L^۲}$$

۹۱)



$$\vec{E}_p = \frac{q\, \vec{r}_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ r_۱^۳} + \frac{q'\, \vec{r}_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ r_۲^۳} \qquad (\text{در نقطه ۱ } p)$$

$$\vec{E}_p = \frac{q''\, \vec{r}_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ r_۱^۳} \qquad (\text{در نقطه ۲ } p)$$

$$q'' = \frac{۲q}{\varepsilon + ۱}, q' = q'' - q$$

برای رسیدن به جواب مسئله حالت حدی $L \to \circ$ را بررسی می‌کنیم:

$$\vec{E}_p = \frac{(q + q')\, \vec{r}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۳} = \frac{q\, \vec{r}}{۲\pi\varepsilon_\circ (۱ + \varepsilon) r^۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$E_p = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_\circ (۱ + \varepsilon) r^۲}$$

$$V = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_\circ (۱ + \varepsilon) r}$$

$D = \frac{q\varepsilon}{۲\pi\varepsilon_\circ (۱ + \varepsilon) r^۲}$ (در ناحیهٔ دی‌الکتریک) $D = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_\circ (۱ + \varepsilon) r^۲}$ (در ناحیهٔ خلأ)

۹۲)

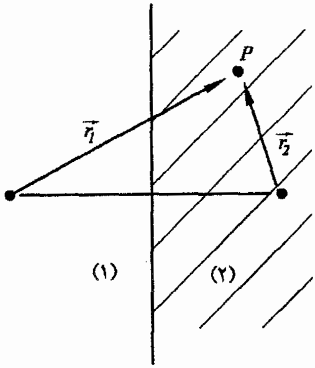
$$\vec{E}_p = \frac{q\,\vec{r}_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ \varepsilon r_۲^۳} + \frac{q'\,\vec{r}_۱}{۴\pi\varepsilon_\circ r_۱^۳} \qquad (p \text{ در نقطهٔ ۲})$$

$$\vec{E}_p = \frac{q''\,\vec{r}_۲}{۴\pi\varepsilon_\circ r_۲^۳} \qquad (p \text{ در نقطهٔ ۱})$$

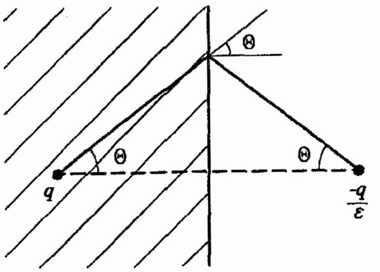
$$q - ۴q' = q'', q + \varepsilon q' = \varepsilon q''$$

$$\Rightarrow q'' = \frac{۲q}{\varepsilon + ۱}, q' = \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\frac{q}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sigma' = \frac{qL}{۲\pi r^۳}\left(\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\right)\frac{۱}{\varepsilon}$$



۹۳)



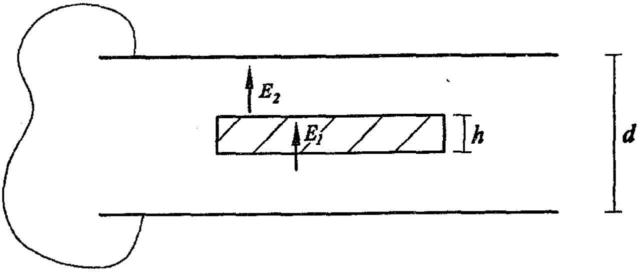
برای محاسبهٔ میدان الکتریکی می‌بایست توجه نمود که بار تصویر باید به گونه‌ای باشد که میدان الکتریکی بر مرز فلزی عمود باشد. برای اینکه مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی صفر شود لازم است بار تصویر برابر $\frac{-q}{\varepsilon}$ باشد.

$$E_n = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q}{\varepsilon r^۲}\right) \times ۲\cos\theta = \frac{qL}{۲\pi\varepsilon_\circ \varepsilon r^۳}$$

حال چگالی بار روی سطح مرز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Rightarrow P_n = D_n - \varepsilon_\circ E_n = \frac{(\varepsilon - ۱)qL}{۲\pi\varepsilon r^۳} = \sigma'$$

۹۴) باتوجه به این‌که دو صفحهٔ خازن هم‌پتانسیل می‌باشند، می‌توان گفت:



$$E_۱h + E_۲(d-h) = ۰$$

$$P + \varepsilon_۰ E_۱ = \varepsilon_۰ E_۲ \Rightarrow E_۱ + \frac{P}{\varepsilon_۰} = E_۲ \Rightarrow E_۲ d - \frac{Ph}{\varepsilon_۰} = ۰ \Rightarrow E_۲ = \frac{Ph}{\varepsilon_۰ d}$$

$$\Rightarrow E_۱ = -\frac{P}{\varepsilon_۰}(۱ - \frac{h}{d})$$

۹۵)

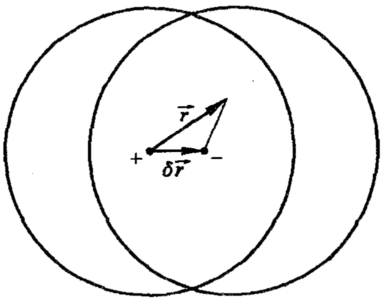
$$\vec{\rho} = \alpha\, \vec{r} \Rightarrow p' = -div\, \vec{\rho}' = -div \alpha\, \vec{r} = -۲\alpha$$

می‌دانیم : $div\, \vec{r} = \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = ۲$

۹۶)

کره باتوزیع بار یکنواخت : $E_r = \frac{\rho_۰ r}{۳\varepsilon_۰} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_۰}{۳\varepsilon_۰}\, \vec{r}$

باتوجه به شکل زیر میدان کل برابر است با:



$$\vec{E} = \frac{\rho_۰}{۳\varepsilon_۰}\, \vec{r} - \frac{\rho_۰}{۳\varepsilon_۰}(\vec{r} - \vec{\delta r})$$

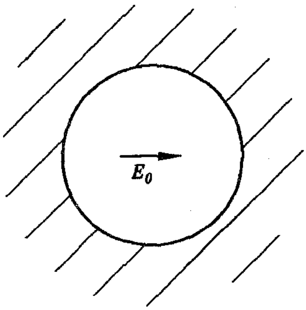
$$= \frac{\rho_۰}{۳\varepsilon_۰}\delta\, \vec{r} = -\frac{\vec{p}}{۳\varepsilon_۰}$$

$(r > R)$ پتانسیل در خارج از کره : $V = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{\delta r}|})$

$$= \frac{\vec{p}_\circ . \vec{r}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۳}, \vec{p}_\circ = \frac{-۴\pi R^۳}{۳}\rho_\circ \vec{sr}$$

همان‌طور که مشاهده می‌گردد: در رابطهٔ فوق $\vec{p}_\circ$ برابر گشتاور دو قطبی یک دو قطبی می‌باشد.

۹۷)



۱) فرض کنید حفره‌ای وجود نداشته باشد، در این‌صورت یک میدان یکنواخت $\vec{E}$ وجود خواهد داشت:

$$\vec{P} = (\varepsilon - ۱)\varepsilon_\circ \vec{E}$$

۲) حال فرض کنید صرفاً یک کره به همان شعاع حفره داریم که میدان الکتریکی در داخل آن برابر $-\frac{\vec{p}}{۳\varepsilon_\circ}$ باشد.

حال اگر میدان وضعیت‌های «۱» و «۲» را با هم جمع کنیم، به خواسته مسأله می‌رسیم:

$$\vec{E}_\circ - \frac{\vec{p}}{۳\varepsilon_\circ} = E \Rightarrow \vec{E}_\circ = \vec{E} + \frac{۱}{۳}(\varepsilon - ۱)\vec{E} = \frac{۱}{۳}(\varepsilon + ۲)\vec{E}$$

۹۸) به کمک اصل برهم نهی، میدان داخل کره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

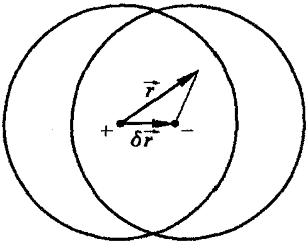
$$\vec{E} = \vec{E}_\circ - \frac{\vec{p}}{۳\varepsilon_\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\vec{p} = (\varepsilon - ۱)\varepsilon_\circ \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E}[۱ + \frac{۱}{۳}(\varepsilon - ۱)] = \vec{E}_\circ \Rightarrow \vec{E} = \frac{۳\vec{E}_\circ}{\varepsilon + ۲}, \vec{p} = ۳\varepsilon_\circ \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۲}E_\circ$$

۹۹) از همان روش حل به کار رفته در مسألهٔ ۹۶ استفاده می‌کنید:



استوانهٔ طویل بابار یکنواخت : $E_r = \frac{\rho}{۲\varepsilon_\circ} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{۲\varepsilon_\circ}\,\vec{r}$

با توجه به شکل، میدان کل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{۲\varepsilon_\circ}\,\vec{r} - \frac{\rho}{۲\varepsilon_\circ}(\vec{r} - \delta\,\vec{r}) = \frac{\rho}{۲\varepsilon_\circ}\delta\,\vec{r} = -\frac{\vec{p}}{۲\varepsilon_\circ}$$

در رابطهٔ فوق $\vec{p} = -\rho\delta\,\vec{r}$ می‌باشد و جهت آن از بار منفی به سمت بار مثبت است.

۱۰۰) مشابه مسألهٔ ۹۸ می‌توان نوشت:

$$\vec{E} = \vec{E}_\circ - \frac{\vec{p}}{۲\varepsilon_\circ}$$

$$\vec{p} = (\varepsilon - ۱)\varepsilon_\circ\,\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\left(\frac{\varepsilon + ۱}{۲}\right) = \vec{E}_\circ \Rightarrow \vec{E} = \frac{۲\,\vec{E}_\circ}{\varepsilon + ۱},\ \vec{p} = ۲\varepsilon_\circ\frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}\,\vec{E}_\circ$$

فصل ۹

خازن‌های الکتریکی و انرژی میدان الکتریکی

۱۰۱) فرض می‌کنیم بار $q+$ بر روی کرهٔ فلزی وجود داشته باشد.

$$\vec{V}_۱ - \vec{V}_۲ = \int_{R_۱}^{R_۲} \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ \varepsilon r^۲} dr + \int_{R_۲}^{\infty} \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲} dr$$

$$= \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon}(\frac{۱}{R_۱} - \frac{۱}{R_۲}) + \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{۱}{R_۲} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon}[\frac{\varepsilon - ۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۱}]$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{V_۱ - V_۲} = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon q}{q[\frac{\varepsilon-۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۱}]} = \frac{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon R_۱}{(\varepsilon - ۱)\frac{R_۱}{R_۲} + ۱}$$

۱۰۲) در حالت اول به علت این‌که ظرفیت دو خازن یکسان می‌باشد. ولتاژ هر کدام از خازن‌ها برابر $V_۱ = \frac{E}{۲}$ می‌باشد و در نتیجه بار هر خازن $q = CV = C\frac{E}{۲}$ است.
در حالت دوم ظرفیت خازن‌ها C و εC خواهد بود، و ظرفیت معادل در حالت سری برابر $C' = \frac{\varepsilon C}{۱ + \varepsilon}$ می‌شود. دراین حالت اختلاف پتانسیل خازنی که درون آن دی‌الکتریک وجود دارد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V_۲ = \frac{q'}{\varepsilon C} = \frac{\varepsilon C}{۱ + \varepsilon} \times \frac{E}{\varepsilon C} = \frac{E}{۱ + \varepsilon}$$

از طرف دیگر می‌دانیم، میدان الکتریکی خازن، با ولتاژ آن متناسب است:

$$\frac{\text{میدان الکتریکی در حالت دوم}}{\text{میدان الکتریکی در حالت اول}} = \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\frac{E}{۱+\varepsilon}}{\frac{E}{۲}} = \frac{۲}{۱ + \varepsilon}$$

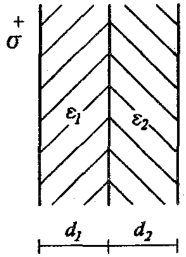
همچنین مقدار بار جابه‌جا شده از رابطهٔ زیر به دست خواهد آمد:

$$\Delta q = q' - q = \frac{\varepsilon C}{۱+\varepsilon}E - \frac{C}{۲}E = \frac{C}{۲}E \ \frac{\varepsilon - ۱}{\varepsilon + ۱}$$

۱۰۳) چون لایه‌ها به صورت سری هستند لذا:

$$\frac{۱}{C} = \frac{d_۱}{\varepsilon_\circ \varepsilon_۱ S} + \frac{d_۲}{\varepsilon_\circ \varepsilon_۲ S}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_\circ S}{\frac{d_۱}{\varepsilon_۱} + \frac{d_۲}{\varepsilon_۲}}$$



هرگاه بار سطحی در صفحهٔ خازن را σ در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

چگالی سطحی بار در لایهٔ مرزی : $\sigma' = \sigma(۱ - \frac{۱}{\varepsilon_۱}) - \sigma(۱ - \frac{۱}{\varepsilon_۲}) = \sigma(\frac{۱}{\varepsilon_۲} - \frac{۱}{\varepsilon_۱})$

تذکر: رابطهٔ فوق در انتهای مسأله اثبات شده است.

می‌دانیم : $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{CV}{S} = \frac{\varepsilon_\circ S \varepsilon_۱ \varepsilon_۲}{\varepsilon_۲ d_۱ + \varepsilon_۱ d_۲}\frac{V}{S}$

$$\Rightarrow \sigma' = \sigma(\frac{۱}{\varepsilon_۲} - \frac{۱}{\varepsilon_۱}) = \frac{\varepsilon_\circ V(\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲)}{\varepsilon_۲ d_۱ + \varepsilon_۱ d_۲}$$

اثبات: با قانون گاوس در خلاء آشنا هستیم می‌خواهیم قانون گاوس را به نحوی تعمیم دهیم که اثر قطبی شدگی در آن نهفته باشد. یعنی بتوان قانون گاوس را در عایق‌ها نیز به کار برد. یک خازن مسطح در نظر بگیرید. در این خازن عایق بین صفحات به علت قطبی شدگی دارای یک لایهٔ بار q' منفی در صفحهٔ مثبت و یک لایه بار $+q'$ در صفحهٔ منفی خواهد بود. در این‌جا E میدان اصلی (بدون عایق) و E' میدان مخالف حاصل از قطبی شدگی عایق است. با نوشتن قانون گاوس برای سطح استوانه‌ای شکل داریم:

$$\oint E.dS = \frac{q - q'}{\varepsilon_\circ} \rightarrow EA = \frac{q - q'_\circ}{\varepsilon_\circ}$$

لذا:

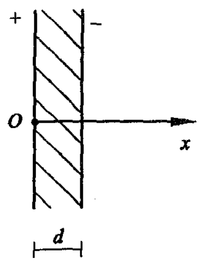
$$E = \frac{q}{A\varepsilon_\circ} - \frac{q'}{A\varepsilon_\circ}$$

از طرفی $\varepsilon = \frac{V_\circ}{V} = \frac{E_\circ}{E}$ که ε ضریب گذردهی عایق است می‌توان نوشت:

$$E = \frac{۱}{\varepsilon}E_\circ = \frac{q}{\varepsilon_\circ A} - \frac{q'}{\varepsilon_\circ A}, E_\circ = \frac{q}{\varepsilon_\circ A}$$
$$\Rightarrow \frac{q'}{\varepsilon_\circ A} = \frac{q}{\varepsilon_\circ A}(۱ - \frac{۱}{\varepsilon}) \rightarrow q' = q(۱ - \frac{۱}{\varepsilon})$$
$$\Rightarrow \frac{q'}{A} = \frac{q}{A}(۱ - \frac{۱}{\varepsilon}) \rightarrow \sigma' = \sigma(۱ - \frac{۱}{\varepsilon})$$

۱۰۴) الف) با توجه به این نکته که ε به صورت خطی تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon(x) = a + bx$$



با توجه به این‌که در $x = ۰$، مقدار $\varepsilon(x)$ برابر $\varepsilon_۱$ و در $x = d$، مقدار $\varepsilon(x)$ برابر $\varepsilon_۲$ است، ضرایب a و b به دست می‌آیند. در نتیجه:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_۱ + \frac{\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱}{d}x$$

اختلاف پتانسیل دو صفحه خازن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V = \int_۰^d \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_۰^d \frac{\sigma}{\varepsilon_۰ \varepsilon(x)} dx$$

$$= \int_۰^d \frac{\sigma}{\varepsilon_۰(\varepsilon_۱ + \frac{\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱}{d}x)} dx = \frac{\sigma d}{(\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱)\varepsilon_۰} Ln\frac{\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱}$$

$$\Rightarrow \text{ظرفیت خازن} : C = \frac{\sigma S}{\Delta V} = \frac{(\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱)\varepsilon_۰ S}{Ln(\frac{\varepsilon_۲}{\varepsilon_۱}) \times d}$$

ب)

$$D = \frac{q}{S}, P = \frac{q}{S} - \frac{q}{S\varepsilon(x)}$$

$$\Rightarrow \rho' = -divP = -\frac{q(\varepsilon_۲ - \varepsilon_۱)}{Sd\varepsilon^۲(x)}$$

۱۰۵)

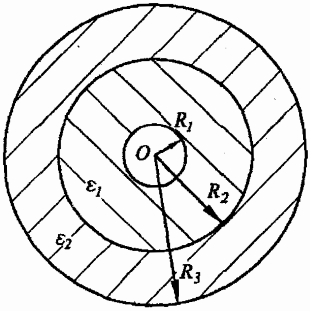
$$V = \int_{R_۱}^{R_۲} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_{R_۱}^{R_۲} \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ \frac{a}{r}} \times \frac{۱}{r^۲} dr = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a} \ln\frac{R_۲}{R_۱}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{v} = \frac{q}{\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a}\ln\frac{R_۲}{R_۱}} = \frac{۴\pi\varepsilon_۰ a}{\ln\frac{R_۲}{R_۱}}$$

۱۰۶) هرگاه λ را چگالی بار خطی در نظر بگیریم، (باردر واحد طول) خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} E_{۱m} = \dfrac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ R_۱\varepsilon_۱} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰} = E_{۱m}R_۱\varepsilon_۱ \\ E_{۲m} = \dfrac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰ R_۲\varepsilon_۲} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰} = E_{۲m}R_۲\varepsilon_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow E_{۱m}R_۱\varepsilon_۱ = E_{۲m}R_۲\varepsilon_۲$$

۱۰۷)



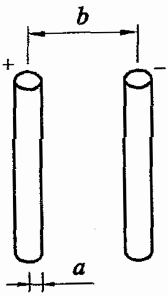
هرگاه λ را چگالی بار خطی در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r}dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}]$$

در مسألهٔ قبل دیدیم $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = E_m R\varepsilon$ می‌باشد، حال باتوجه به این‌که $E_1R_1\varepsilon_1 < E_2R_2\varepsilon_2$، می‌توان گفت، در این مثله $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = E_1R_1\varepsilon_1$ خواهد بود.

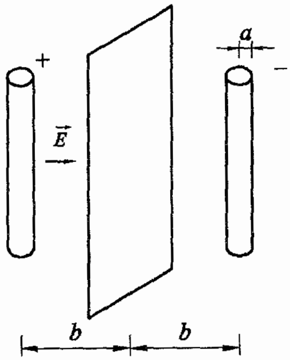
$$V = E_1R_1\varepsilon_1[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}] = E_1R_1[\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}]$$: ولتاژ شکست

۱۰۸) هرگاه چگالی خطی هرکدام از سیم‌ها برابر λ باشد، طبق قانون گاؤس برای محاسبهٔ میدان الکتریکی هر کدام از سیم‌ها خواهیم داشت:



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$
$$\Rightarrow V = \int_a^{b-a} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-a}{a}$$
$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-a}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b-a}{a}} \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$$

۱۰۹) میدان الکتریکی بین صفحه و سیم را به کمک یک سیم باردار بابار مخالف سیم اول به عنوان تصویر سیم اول در صفحه به دست می‌آوریم.



$$V = \int \vec{E} \cdot \vec{dr}$$
$$= \int_a^b [\frac{\lambda}{۲\varepsilon_\circ r} + \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ(۲b - r)}]dr$$
$$= \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} \ln\frac{b}{a} - \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} \ln\frac{b}{۲b - a}$$
$$= \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} \ln\frac{۲b - a}{a} \simeq \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ} \ln\frac{۲b}{a}$$

حال ظرفیت را به ازای واحد طول سیم به دست می‌آوریم:

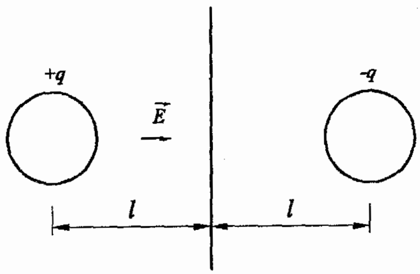
$$\Rightarrow C = \frac{\lambda}{V} = \frac{۲\pi\varepsilon_\circ}{\ln\frac{۲b}{a}}$$

۱۱۰) هرگاه فاصلهٔ بین دو کره به اندازهٔ کافی زیاد باشد ($b >> a$)، می‌توان از اثرات کره‌ها برروی یکدیگر از نظر توزیع بار صرف‌نظر کرد، لذا می‌توان گفت:

$$\Delta V = V_۱ - V_۲ = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon a} - (\frac{-q}{۴\pi\varepsilon_\circ\varepsilon a}) = \frac{q}{۲\pi\varepsilon\varepsilon_\circ a}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q}{۲\pi\varepsilon\varepsilon_\circ a}} = ۲\pi\varepsilon\varepsilon_\circ a$$

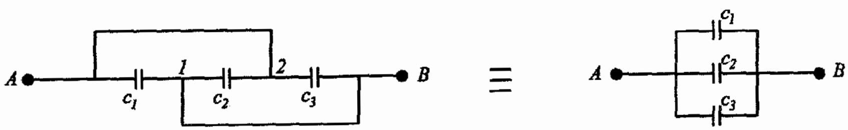
۱۱۱) از روش تصاویر استفاده می‌کنیم: (رجوع شود به مسألهٔ ۱۲۹)



$$\Delta V = \frac{۱}{۲}(V^+ - V^-) \simeq \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}$$

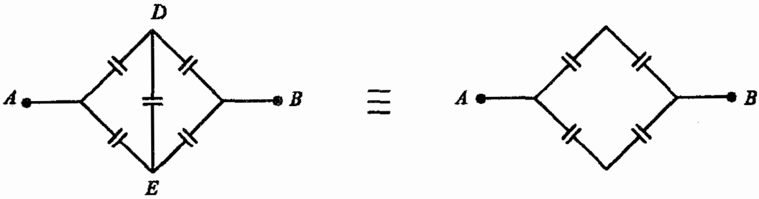
$$\Rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}} = ۴\pi\varepsilon_\circ a$$

۱۱۲) الف) از شکل مشخص است که $V_B = V_۱, V_A = V_۲$ می‌باشد، یعنی اختلاف پتانسیل سه خازن باهم مساوی است، یعنی سه خازن به صورت موازی می‌باشند.



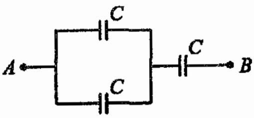
معادل $C = C_۱ + C_۲ + C_۳$

ب) باتوجه به تقارن مسأله، $V_D = V_E$ می‌باشد، یعنی می‌توان شاخهٔ DE را حذف کرد.



$$C\ \text{معادل} = \frac{C}{۲} + \frac{C}{۲} = C$$

۱۱۳) الف) این مشابه ترکیب سه خازن به ظرفیت $C = \frac{\varepsilon_\circ S}{d}$ به صورت زیر است.



$$\frac{۱}{C\ \text{معادل}} = \frac{۱}{۲C} + \frac{۱}{C} \Rightarrow C\ \text{معادل} = \frac{۲C \times C}{۲C + C} = \frac{۲}{۳}C = \frac{۲\varepsilon_\circ S}{۳d}$$

ب) ظرفیت خازن بین هر دو صفحهٔ متوالی برابر $C = \frac{\varepsilon_\circ S}{d}$ است.

فرض کنید بر بالاترین صفحه بار $+q_۱$ و بر روی پایین‌ترین صفحهٔ بار $-q$ وجود دارد.
می‌دانیم اختلاف پتانسیل بین این دو صفحه صفر است:

$$-\frac{q_۱}{C} + \frac{q_۲}{C} - \frac{q_۱}{C} = \circ \rightarrow q_۲ = ۲q_۱$$

$$\text{می‌دانیم} : V_{AB} = \frac{q_۲}{C}$$

$$\Rightarrow C\ \text{معادل} = \frac{q}{V_{AB}} = \frac{q_۱ + q_۲}{\frac{q_۲}{C}} = \frac{۳q_۱}{\frac{۲q_۱}{C}} = \frac{۳}{۲}C = \frac{۳\varepsilon_\circ S}{۲d}$$

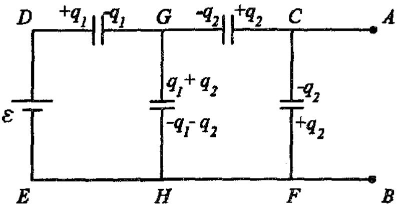
(۱۱۴

$$\left.\begin{array}{l} q_۱ = C_۱V_۱ \\ q_۲ = C_۲V_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{C_۱V_۱ < C_۲V_۲} q_{max} = q_۱ = C_۱V_۱$$

$$C\ \text{معادل} = \frac{C_۱C_۲}{C_۱ + C_۲}$$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{q_{max}}{C\ \text{معادل}} = \frac{C_۱V_۱}{\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}} = V_۱(۱ + \frac{C_۱}{C_۲}) = ۹kV$$

۱۱۵) توزیع بارها را مطابق شکل مقابل به دست می‌آوریم، حال قانون ولتاژ کیرشهف $\sum V_i = \circ$ را به کار می‌بندیم:



$DCFED$ در حلقه : $\frac{q_۱}{C_۱} - \frac{q_۲}{C_۱} - \frac{q_۲}{C_۲} = \varepsilon \Rightarrow q_۱ = C_۱[\varepsilon + q_۲(\frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲})]$

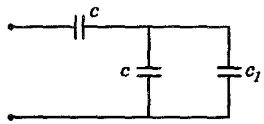
$DGHED$ حلقه : $\frac{q_۱}{C_۱} + \frac{q_۱ + q_۲}{C_۲} = \varepsilon$

از ترکیب دو روابط فوق، خواهیم داشت:

$$q_۲[\frac{۱}{C_۱} + \frac{۳}{C_۲} + \frac{C_۱}{C_۲^۲}] = -\frac{\varepsilon C_۱}{C_۲}$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{-q_۲}{C_۲} = \frac{E}{\frac{C_۲^۲}{C_۱}} \frac{۱}{[\frac{۱}{C_۱} + \frac{۳}{C_۲} + \frac{C_۱}{C_۲^۲}]} = \frac{E}{(\frac{C_۲}{C_۱})^۲ + ۳(\frac{C_۲}{C_۱}) + ۱} = ۱۰V$$

۱۱۶) هرگاه ظرفیت معادل کل سیستم را $C_۱$ بنامیم، می‌توان کل سیستم را با شکل زیر معادل فرض کرد.



$$\frac{۱}{C_۱} = \frac{۱}{C + C_۱} + \frac{۱}{C}$$

$$\Rightarrow C_۱^۲ + CC_۱ - C^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow C_۱ = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲} C$$

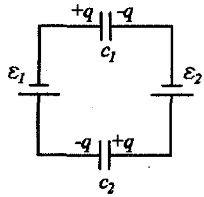
۱۱۷) فرض کنید بار q برروی هر کدام از خازن‌ها قرار دارد:

$$V_A - V_B = \frac{q}{C_۱} - E + \frac{q}{C_۲} \Rightarrow q = \frac{V_A - V_B + E}{C_۱ + C_۲} C_۱ C_۲$$

$$V_۱ = \frac{q}{C_۱} = \frac{V_A - V_B + E}{C_۱ + C_۲} C_۲ = ۱۰V$$

$$V_۲ = \frac{q}{C_۲} = \frac{V_A - V_B + E}{C_۱ + C_۲} C_۱ = ۵V$$

۱۱۸) در شکل زیر قانون حلقه کیرشهف $\sum V_i = ۰$ را می‌نویسیم:



$$\frac{-q}{C_1}+\varepsilon_2-\frac{q}{C_2}-\varepsilon_1=0$$

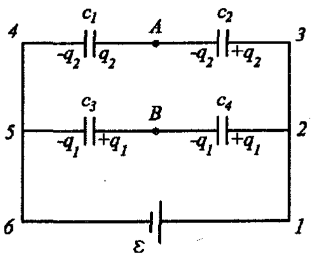
$$\Rightarrow q=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)C_1C_2}{C_1+C_2}$$

$$\begin{cases} V_1=\frac{q}{C_1}=\dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)C_2}{C_1+C_2} \\ V_2=\frac{-q}{C_2}=\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)C_1}{C_1+C_2} \end{cases}$$

۱۱۹) همان‌گونه که در حل مسئلهٔ ۱۸ ملاحظه گردید، بار هر خازن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$|q|=\frac{|\varepsilon_2-\varepsilon_1|C_1C_2}{C_1+C_2}$$

۱۲۰) توزیع بارها را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم.



حال قانون حلقه کیرشهف ($\sum V_i=0$) را به کار می‌بریم:

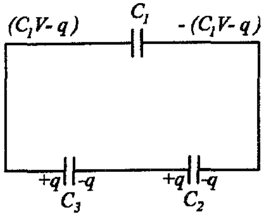
حلقه (۱۲۵۶۱) : $\frac{q_1}{C_4}+\frac{q_1}{C_3}-\varepsilon=0\Rightarrow q_1=\frac{\varepsilon C_3C_4}{C_3+C_4}$

حلقه (۱۳۴۶۱) : $\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_2}{C_1}-\varepsilon=0\Rightarrow q_2=\frac{\varepsilon C_1C_2}{C_1+C_2}$

$$V_A-V_B=\frac{q_2}{C_1}-\frac{q_1}{C_3}=\varepsilon\left[\frac{C_2}{C_1+C_2}-\frac{C_4}{C_3+C_4}\right]=\varepsilon\left[\frac{C_2C_3-C_1C_4}{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\right]$$

$$V_A=V_B\Rightarrow C_2C_3-C_1C_4=0\Rightarrow\frac{C_1}{C_2}=\frac{C_3}{C_4}$$

۱۲۱) اگر بار q در سیم‌ها جریان یابد در واقع این بار از خازن C_1 خارج شده لذا بار جدید خازن C_1 بعد از اتصال برابر C_1V-q می‌شود از طرفی چون دو خازن C_2 و C_3 به صورت سری هستند لذا هر دو دارای بار q به صورت مساوی خواهند شد.

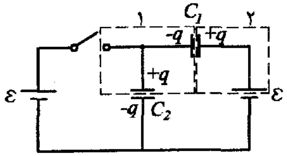


حال باتوجه به این‌که ولتاژ خازن $C_۱$ بعد از اتصال باید با جمع ولتاژهای خازن‌های $C_۲$ و $C_۳$ برابر باشد، لذا می‌توان نوشت:

$$V_۱ = V_۲ + V_۳ \rightarrow \frac{C_۱ V - q}{C_۱} = \frac{q}{C_۲} + \frac{q}{C_۳}$$

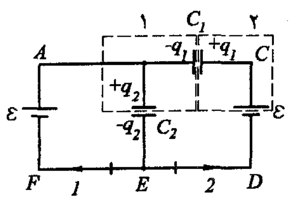
$$\rightarrow q = \frac{V}{\frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \frac{۱}{C_۳}} = ۰/۰۶ mc$$

۱۲۲) قبل از بستن کلید، خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ به صورت سری هستند لذا بار هردوی آن‌ها با هم برابر و مساوی q می‌باشد. حال با توجه به خازن معادل (C_{eq}) می‌توان بار آن‌ها را به صورت زیر بدست آورد.



$$q = C_{eq}\xi = (\frac{C_۱ C_۲}{C_۱ + C_۲})\xi \qquad (۱)$$

اگر بعد از اتصال کلید، بار خازن $C_۱$ برابر $q_۱$ و بار خازن $C_۲$ برابر $q_۲$ شود آنگاه می‌دانیم در حلقه $ABEFA$ باید جمع ولتاژها برابر صفر شود لذا:



$$\xi - \frac{q_۲}{C_۲} = ۰ \Rightarrow q_۲ = C_۲\xi \qquad (۲)$$

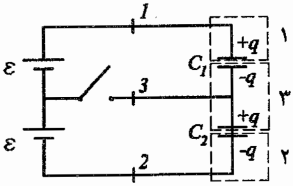
همچنین در حلقه $ACDFA$ نیز باید جمع ولتاژها برابر صفر شود، بنابراین :

$$\xi + \frac{q_۱}{C_۱} - \xi = ۰ \rightarrow q_۱ = ۰ \qquad (۳)$$

با توجه به شکل «۱» درمی‌یابیم که در حالت قبل از اتصال مقدار بار خالص داخل حلقه ۱ برابر صفر است. ولی بعد از اتصال مقدار بار داخل این حلقه برابر $q_۲ - q_۱ = q_۲ - ۰ = q_۲$ می‌شود. بنابراین نتیجه می‌گیریم که از نقطهٔ ۱ به اندازهٔ اختلاف این دو حالت یعنی $q_۲ - ۰ = C_۲\varepsilon$ بار گذاشته است. همچنین از حلقهٔ ۲ بار این حلقه ابتدا برابر $q = (\frac{C_۱ C_۲}{C_۱ + C_۲})\xi$ بود بعد از

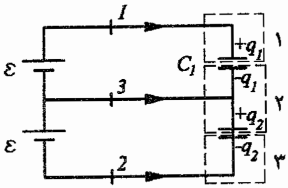
اتصال بار این حلقه صفر شده است لذا باید از نقطهٔ ۲ به اندازهٔ اختلاف این دوبار یعنی $\circ - q = -(\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲})\xi$ بار عبور کرده باشد.

۱۲۳) در ابتدا که کلید باز است دو خازن با هم سری هستند لذا هر دو دارای بار مساوی می‌باشند که می‌توان بار هر یک را از فرمول خازن معادل به شکل زیر حساب کرد.



$$q = C_{eq}(۲\xi) = (\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲})۲\xi$$

بعد از بستن کلید در واقع به هر خازن ولتاژ ξ اعمال می‌گردد لذا می‌توان نوشت:



$$q_۱ = C_۱\xi \quad q_۲ = C_۲\xi$$

حال می‌دانیم قبل از اتصال، در حلقهٔ ۱ بار $+q$ موجود بود که بعد از اتصال بار در حلقهٔ ۱ به مقدار $+q_۱$ رسیده است. بنابراین بار عبوری از نقطهٔ ۱ برابر است با:

$$q_۱ - q = C_۱\xi - (\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲})۲\xi = (\frac{C_۱-C_۲}{C_۱+C_۲})C_۱\xi = -۲۴\mu C$$

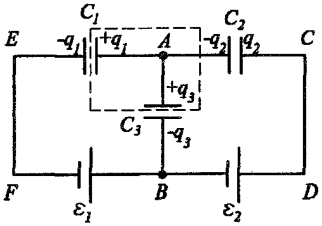
همین‌طور در حلقهٔ ۳ بار ابتدا صفر بوده که بعد از اتصال به مقدار $+q_۲ - q_۱$ رسید لذا بار عبوری از نقطهٔ ۲ برابر است با:

$$q_۲ - q_۱ - \circ = (C_۲ - C_۱)\xi = -۶\circ\mu C$$

در حلقهٔ ۲ بار ابتدا $-q$ بوده که بعد از اتصال به مقدار $-q_۲$ رسیده لذا بار عبوری از نقطهٔ ۲ برابر است با:

$$-q_۲ - (-q) = -q_۲ + q = -C_۲\xi + (\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲})۲\xi = (\frac{C_۱-C_۲}{C_۱+C_۲})C_۲\xi = -۳۶\mu C$$

۱۲۴) باتوجه به شکل، فرض می‌کنیم بار خازن $C_۳$ برابر $q_۳$ باشد، فرض می‌کنیم که جوشن بالایی این خازن $+q_۳$ باشد. حال اگر مقدار $q_۳$ را مثبت در آوریم معمول می‌شود فرض فوق درست است در غیر این‌صورت روی جوشن پایینی بار $+q_۳$ جمع شده است. می‌دانیم در حلقه $EABFE$ باید جمع ولتاژها صفر باشد لذا:



$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} - \xi_1 = 0 \qquad (1)$$

همچنین از حلقهٔ $ACDBA$ می‌توان نوشت:

$$\frac{q_2}{C_2} - \xi_2 + \frac{q_3}{C_3} = 0 \qquad (2)$$

حال با فرض این‌که خازن‌ها در ابتدا خالی بوده‌اند می‌توان از پایستگی بار در حلقهٔ ۱ نوشت:

$$q_1 - q_2 + q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = q_2 - q_1 \qquad (3)$$

$$\text{از } (1),(2) \Rightarrow q_2 - q_1 = (C_2\xi_2 - \frac{C_2}{C_3}q_3) - (\frac{C_1}{C_3}q_3 + C_1\xi_1)$$

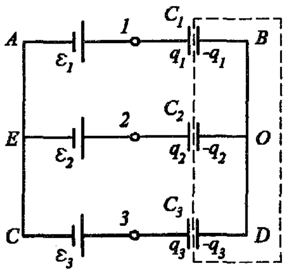
$$= -q_3(\frac{C_1}{C_3} + \frac{C_2}{C_3}) + C_2\xi_2 - C_1\xi_1 \qquad (4)$$

$$\text{از } (3),(4) \Rightarrow q_3 = -q_3(\frac{C_1 + C_2}{C_3}) + C_2\xi_2 - C_1\xi_1$$

$$\Rightarrow q_3 = \frac{(C_2\xi_2 - C_1\xi_1)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \qquad (5)$$

می‌دانیم : $V_A - V_B = \frac{q_3}{C_3} \xRightarrow{\text{از «5»}} V_A - V_B = \frac{C_2\xi_2 - C_1\xi_1}{C_1 + C_2 + C_3}$

۱۲۵) باتوجه به اینکه جمع ولتاژها از حلقهٔ $ABOEA$ باید صفر باشد می‌توان نوشت :



$$\xi_1 - \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} - \xi_2 = 0 \qquad (1)$$

همچنین در حلقهٔ $ABDCA$ نیز می‌توان نوشت:

$$\xi_1 - \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} - \xi_3 = 0 \qquad (2)$$

بافرض اینکه خازن‌ها قبل از اتصال بی‌بار باشند با توجه به پایستگی بار در حلقهٔ خط چین می‌توان نوشت:

$$-q_1 - q_2 - q_3 = 0 \Rightarrow q_1 + q_2 + q_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\text{از } (1),(2) \Rightarrow q_2 + q_3 = [(\xi_2 - \xi_1)C_2 + \frac{C_2}{C_1}q_1] + [(\xi_3 - \xi_1)C_3 + \frac{C_3}{C_1}q_1] \qquad (4)$$

$$\text{از } (3),(4) \quad -q_1 = (\xi_2 - \xi_1)C_2 + (\xi_3 - \xi_1)C_3 + \frac{(C_2 + C_3)}{C_1}q_1$$

$$q_1 = \frac{[(\xi_1 - \xi_2)C_2 + (\xi_1 - \xi_3)C_3]C_1}{(C_1 + C_2 + C_3)}$$

$$= \frac{[\xi_1(C_2 + C_3) - \xi_2 C_2 - \xi_3 C_3]C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \qquad (5)$$

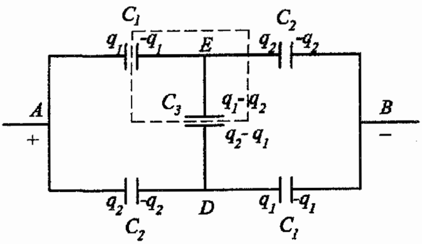
$$V_1 - V_0 = V_1 - 0 = \frac{q_1}{C_1} \xrightarrow{\text{از «5»}} V_1 = \frac{\xi_1(C_2 + C_3) - \xi_2 C_2 - \xi_3 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

باتوجه به تقارن عبارت فوق مشابهاً می‌توان نوشت:

$$V_2 = \frac{\xi_2(C_1 + C_3) - \xi_1 C_1 - \xi_3 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$V_3 = \frac{\xi_3(C_1 + C_2) - \xi_1 C_1 - \xi_2 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

۱۲۶) باتوجه به تقارن توزیع بار، می‌توان بارهای روی هر خازن را مطابق شکل زیر نمایش داد.



بار روی خازن C_3 نیز از پایستگی بار در حلقه خط‌چین به صورت $q_1 - q_2$ در می‌آید. حال در حلقهٔ $ADEA$ باید جمع ولتاژها برابر صفر باشد لذا:

$$-\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_2 - q_1}{C_3} + \frac{q_1}{C_1} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_2(C_1 + C_3)} \qquad (1)$$

حال می‌توان ظرفیت معادل را به صورت زیر نوشت:

$$C_{eq} = \frac{q_2 + q_2}{V_A - V_B} = \frac{q_1 + q_2}{\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_1}{C_1}} = \frac{1 + \frac{q_1}{q_2}}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}(\frac{q_1}{q_2})} \qquad (2)$$

$$\text{از (1) و (2)} \Rightarrow C_{eq} = \frac{2C_1C_2 + C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + 2C_3}$$

۱۲۷) می‌دانیم اگر دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار داشته باشند آن‌گاه انرژی بر هم کنش بین آن دو برابر است با:

$$U = \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_\circ r}$$

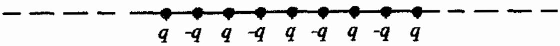
اگر ضلع هر مربع برابر a باشد آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$U_a = 4\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a} + 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ(\sqrt{2}a)}$$

$$U_b = 4\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a} + 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ(\sqrt{2}a)}$$

$$U_c = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a} - \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a} - \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_\circ(\sqrt{2}a)} = -\frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a}$$

۱۲۸) باتوجه به اینکه بارها تا بی‌نهایت امتداد دارند و فواصل بارها با هم یکسان و به صورت متقارن هستند بنابراین کافی است انرژی بر هم کنش را برای نصف بارها حساب کرد سپس برای محاسبه انرژی کل آن را در ۲ ضرب کرد بنابراین :



$$U = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ}[-\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} + \frac{1}{4a} - \dots]$$

$$\rightarrow U = -2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_\circ a}[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots] \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به بسط توانی $\ln(1+\alpha)$ داریم :

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3$$

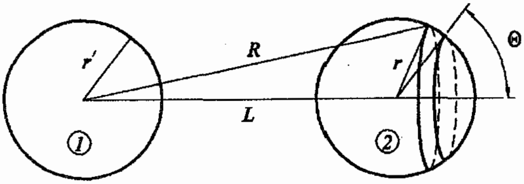
$$\alpha = 1 \rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \qquad (2)$$

$(2),(1)$ از $\rightarrow U = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_\circ a} ln2$

۱۲۹) یکی از روش‌های حل این‌گونه از مسائل استفاده از روش تصاویر است. می‌توان نشان داد اگر بار نقطه‌ای q به فاصلهٔ L از یک صفحهٔ رسانای بی‌نهایت قرار گیرد، شدت میدانی که به وسیلهٔ بار q و بارهای القایی منفی که طرف راست صفحه ایجاد می‌شوند برابر با شدت میدانی است که به وسیلهٔ بارهای نقطه‌ای $+q$ و $-q$ به وجود آمده است که فاصلهٔ آنها برابر $2L$ می‌باشد. بنابراین روش تصاویر می‌گوید از تقارن مسأله می‌توان صفحه را برداشت و به جای آن بار $-q$ را در فاصلهٔ $2L$ از بار $+q$ قرار دارد. از طرفی انرژی بر هم کنش دو بار q و $-q$ به فاصلهٔ $2L$ برابر است با:

$$U = \frac{-qq}{4\pi\varepsilon_\circ(2L)} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_\circ L}$$

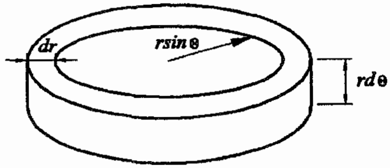
۱۳۰) می‌دانیم انرژی برهم کنش برابر کار لازم برای قرار دادن توزیعی از بارها در میدان مجموعه از بارهای دیگراست. باتوجه به تعریف پتانسیل الکتریکی، این کار به انرژی پتانسیل الکتریکی تبدیل می‌شود لذا:



V: پتانسیل الکتریکی

$$U = \int V dq \qquad (۱)$$

در ابتدا انرژی بر هم کنش یک کره (کرهٔ شمارهٔ ۱ با بار $q_۱$) باپوستهٔ کروی به شعاع دلخواه r و به فاصلهٔ L (مرکز تا مرکز) را حساب می‌کنیم. یک پوستهٔ حلقوی شکل به عنوان المان در نظر می‌گیریم حجم این المان با توجه به شکل (۲) برابر است با:



$$dV = ۲\pi(r\sin\theta)(rdr)d\theta$$

$$dV = ۲\pi r^۲ \sin\theta dr d\theta \qquad (۲)$$

حال به کمک رابطهٔ «۱» در می‌یابیم که انرژی برهم کنش بین کرهٔ ۱ و پوستهٔ کروی برابر است با:

$$U_۱ = \int V dq$$

در رابطهٔ فوق V پتانسیل کره در محل بارهایی است که روی پوستهٔ حلقه‌ای شکل قرار گرفته‌اند. می‌دانیم چون فاصلهٔ کرهٔ ۱ نسبت به تمام بارهای روی حلقه به یک فاصلهٔ R است لذا:

$$V = \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R} \to U_۱ = \int \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R} dq \qquad (۳)$$

به کمک تعریف چگالی حجمی بار داریم:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \to dq = \rho dV \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳),(۲) \to U_۱ = \int_۰^\pi \frac{q_۱}{۴\pi\varepsilon_۰ R}\rho(۲\pi r^۲ \sin\theta) dr d\theta \qquad (۵)$$

باتوجه به شکل «۱» داریم.

$$R = \sqrt{r^۲ + L^۲ - ۲rL\cos(۱۸۰ - \theta)} = \sqrt{r^۲ + L^۲ + ۲rL\cos\theta} \qquad (٦)$$

$$(٦),(۵) \to U_۱ = \int_۰^\pi \frac{\rho q_۱ r^۲ \sin\theta dr d\theta}{۲\varepsilon_۰\sqrt{r^۲ + L^۲ + ۲rL\cos\theta}}$$

$$U_1 = \frac{\rho q_1 r^2 dr}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + L^2 + 2rL\cos\theta}}$$

با عمل جانشانی $h = \cos\theta$ داریم

$$-dh = \sin\theta d\theta \quad \cos(0) = 1 \quad \cos(\pi) = -1$$

$$\to U_1 = \frac{\rho q_1 r^2 dr}{2\varepsilon_0} \int_1^{-1} \frac{-dh}{\sqrt{r^2 + L^2 + 2rLh}}$$

$$\to U_1 = \frac{\rho q_1 r^2 dr}{2\varepsilon_0} (\frac{1}{rL}\sqrt{r^2 + L^2 + 2rLh})_{-1}^{1}$$

$$\to U_1 = \frac{\rho q_1 r^2 dr}{2\varepsilon_0} \frac{1}{rL}[(L+r) - (L-r)]$$

$$\to U_1 = \frac{\rho q_1 r^2 dr}{\varepsilon_0 L} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 L}(4\pi r^2 \rho dr) \qquad (7)$$

انرژی برهم کنش بین دو کره به شعاع r برابر انرژی بر هم کنش بین یک کره با تمام پوسته‌های کروی که درون کرهٔ دوم جای دارد، لذا:

$$U = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 L} \int_0^{r'} 4\pi r^2 \rho dr\omega$$

از طرفی المان یک حجم کروی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \to dV = 4\pi r^2 dr \ \rho = \frac{dq}{dV} \ \Rightarrow dq = \rho dV \qquad (9)$$

$$(9),(8) \ \ U = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 L} \int_0^{r'} dq = \frac{q_1 q_2}{4\varepsilon_0 \pi L}$$

۱۳۱) می‌دانیم بار موجود در خازن C_1 برابر $q = C_1 V$ و انرژی ذخیره شده در آن برابر $U_i = \frac{1}{2}C_1 V^2$ است. در حالت ثانویه اگر بار خازن C_1 برابر q_1 و خازن C_2 برابر q_2 شود از پایستگی بار داریم:

$$C_1 V = q = q_1 + q_2 \qquad (1)$$

همچنین چون دو خازن به صورت موازی بسته شده‌اند لذا باید دارای یک ولتاژ باشند در نتیجه:

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \qquad (2)$$

$$(2),(1) \to q_1 = \frac{C_1^2 V}{C_1 + C_2} \quad q_2 = \frac{C_1 C_2 V}{C_1 + C_2} \qquad (3)$$

بنابراین انرژی حالت ثانویه (U_f) برابر است با:

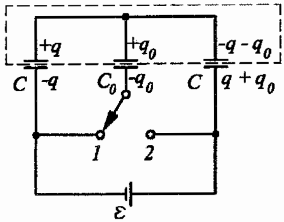
$$U_f = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} \xrightarrow{\text{از «۳»}} U_f = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 V^2}{(C_1 + C_2)}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 V^2}{(C_1 + C_2)} - \frac{1}{2}C_1 V^2 = -0/03 mJ$$

در واقع انرژی ثانویه کمتر از حالت اولیه است چرا که به دلیل وجود مقاومت در سیم‌های رابط بین دو خازن مقداری از انرژی به صورت گرما آزاد می‌شود. همچنین اگر مقاومت هم در مدار نباشد. هنگام اتصال دو خازن به یکدیگر در اثر زدن جرقه در محل اتصال کلید، مقداری

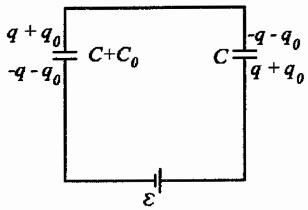
از انرژی به صورت امواج الکترومغناطیس آزاد می‌گردد و بدین ترتیب انرژی ثانویه کمتر می‌شود.

۱۳۲) با فرض اینکه خازن‌ها در ابتدا بدون بار هستند و از پایستگی بار در حلقهٔ خط‌چین می‌توان بار هر خازن را مطابق شکل در نظر گرفت. باتوجه به موازی بودن خازن $C_\circ$ با C می‌توان نوشت:



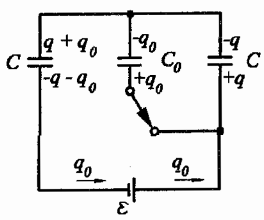
$$\frac{q}{C}=\frac{q_\circ}{C_\circ} \qquad (۱)$$

حال با ساده‌سازی، مدار به صورت شکل (۲) درمی‌آید. بنابراین جمع ولتاژها باید برابر صفر باشد لذا:



$$\frac{q+q_\circ}{C+C_\circ}+\frac{q+q_\circ}{C}-\xi=\circ \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \text{ از } \rightarrow q=\frac{C^{۲}\xi}{C_\circ+۲C}, q_\circ=\frac{CC_\circ\xi}{C_\circ+۲C} \ (۳)$$



در حالت ثانویه که کلید به نقطهٔ ۲ متصل می‌شود، به خاطر تقارن مسأله تغییری در انرژی خازن‌ها صورت نمی‌گیرد ولی باتوجه به این‌که تغییر بار مطابق شکل (۳) می‌شود.

در واقع بار $q_\circ$ در حلقه راست از میان دو خازن جریان می‌یابد و بار $q_\circ$ از میان باتری نیز می‌گذرد. بنابراین گرمای تولید شده به خاطر انرژی مصرف شده در باتری برای انتقال بار $q_\circ$ است لذا:

$$\text{حرارت تولید شده} = \Delta q\xi = q_\circ \xi = \frac{CC_\circ \xi^2}{C_\circ + 2C}$$

۱۳۳) در حالت اولیه بار خازن C برابر است با:

$$q_1 = C(\xi_1 - \xi_2) \qquad (1)$$

در حالت ثانویه بار خازن برابر است با:

$$q_2 = C\xi_1 \quad (2)$$

بنابراین تغییر بار برابر است با:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C\xi_2 \quad (3)$$

حال به کمک قانون بقای انرژی می‌توان نوشت:

کار باتری برای جابه‌جایی بار Δq = حرارت تلف شده + تغییر انرژی در خازن

$$\rightarrow \tfrac{1}{2}C\xi_1^2 - \tfrac{1}{2}C(\xi_1 - \xi_2)^2 + \text{حرارت تلف شده} = \Delta \xi_1 \quad (4)$$

دقت کنید که فقط باتری ξ_1 در انتقال بار Δq نقش دارد.

$$(4),(3) \text{ از } \rightarrow \text{ حرارت تلف شده } = \frac{1}{2}C\varepsilon_1^2$$

۱۳۴) می‌دانیم یک پوستهٔ کروی در واقع یک صفحه از خازن است که صفحهٔ دوم آن پوستهٔ کروی با شعاع بی‌نهایت می‌باشد لذا اگر بار پوسته q باشد و V پتانسیل آن مثل خازن‌ها انرژی این پوسته برابر با: $\frac{1}{2}qV$ است. (رجوع کنید به کتاب هالیدی بخش ظرفیت) بنابراین انرژی هر پوسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_1 = \frac{1}{2}q_1\left(\frac{kq_1}{R_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{kq_1^2}{R_1} = \frac{q_1^2}{8\pi\xi_\circ R_1}$$

$$W_2 = \frac{q_2^2}{8\pi\xi_\circ R_2}$$

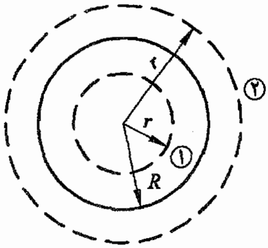
می‌دانیم انرژی برهم کنش بین پوسته‌های باردار، برابر است با ضرب بار q یک پوسته در پتانسیل V تولید شده توسط پوسته دیگر در نقطه‌ای که بار q در آن موقعیت قرار دارد لذا:

$$W_{12} = q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_\circ R_2}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_\circ R_2}$$

بنابراین کل انرژی برابر است با:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2}\right)$$

۱۳۵) ابتدا میدان در داخل و خارج کره را به کمک قانون گاؤس به دست می‌آوریم. (رجوع به کتاب هالیدی قانون گاؤس)



میدان داخل کره: ابتدا سطح گاؤسی کروی به شعاع r که $r \leq R$ است در نظر می‌گیریم پخش شده است به کمک نسبت می‌توان بار درون این سطح را به صورت زیر به دست آورد.

$$q' = q(\frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}) = \frac{r^{۳}}{R^{۳}}q$$

به کمک قانون گاؤس داریم.

$$\int \vec{E}\,.\,\vec{dA} = \frac{q'}{\varepsilon_{\circ}} \rightarrow E_{۱} \times ۴\pi r^{۲} = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}}\frac{r^{۳}}{R^{۳}}q$$

میدان داخل کره:

$$\rightarrow E_{۱} = \frac{qr}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}} \quad r \leq R$$

میدان خارج کره:

$$\int \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_{\circ}} \rightarrow E_{۲}(۴\pi r^{۲}) = \frac{q}{\varepsilon_{\circ}}$$

میدان خارج کره:

$$\rightarrow E_{۲} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}} \quad r \geq R$$

می‌دانیم چگالی انرژی ناشی از میدان الکتریکی با ضریب گذردهی یک برابر است با $U = \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}E^{۲}$ (رجوع شود به کتاب هالیدی بخش ظرفیت) بنابراین انرژی ذخیره شده در داخل کره برابر است با:

$$U_{۱} = \int_{\circ}^{R} udV = \int_{\circ}^{R} \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}E_{۱}^{۲}dV \rightarrow V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \rightarrow dV = ۴\pi r^{۲}dr$$

$$\rightarrow U_{۱} = \int_{\circ}^{R} \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}(\frac{qr}{۴\pi\varepsilon_{\circ}R^{۳}})^{۲}۴\pi r^{۲}dr \rightarrow U_{۱} = \frac{۱}{۵}(\frac{q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_{\circ}R})$$

به همین ترتیب انرژی ذخیره شده در خارج کره برابر است با:

$$U_{۲} = \int_{R}^{\infty} udV = \int_{R}^{\infty} \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}(\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}})^{۲}۴\pi r^{۲}dr = \frac{q^{۲}}{۸\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

در نتیجه انرژی الکترواستاتیک درونی کره در کل فضا برابر است با:

$$U = U_{۱} + U_{۲} = \frac{۳q^{۲}}{۲۰\pi\varepsilon_{\circ}R}$$

همچنین نسبت آن‌ها برابر است با:

$$\frac{U_{۱}}{U_{۲}} = \frac{۱}{۵}$$

۱۳۶) می‌دانیم چگالی انرژی ناشی از میدان الکتریکی E در محیطی با ضریب گذردهی ε برابر است با $u = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$. به کمک قانون گاوس مشابه با مسألهٔ قبل می‌توان میدان در داخل لایهٔ کروی را به صورت $E = \frac{kq}{r^2}$ به‌دست آورد. بنابراین انرژی ذخیره شده در این لایه برابر است با:

$$U = \int u dV = \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \int_a^b (\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r})^2 (4\pi r^2 dr)$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 27mJ$$

۱۳۷) مطابق با استدلالی که در مسألهٔ ۱۳۴ کردیم اختلاف انرژی ذخیره شده در این دو حالت برابر است با کار انجام شده توسط نیروهای الکتریکی. لذا:

$$W = U_1 - U_2 = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2)$$

از طرفی چون پتانسیل یک کره با بار q و شعاع R برابر است با $V = \frac{kq}{R}$ لذا:

$$W = \frac{1}{2}q(\frac{kq}{R_1} - \frac{kq}{R_2}) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

۱۳۸) می‌دانیم کار انجام شده توسط نیروهای الکتریکی برابر اختلاف انرژی ذخیره شده در این دو حالت است. لذا:

$$W = U_i - U_f \qquad (1)$$

انرژی اولیه سیستم برابر است با $U_i = U_1 + U_{12}$ که U_1 انرژی درونی و U_{12} انرژی برهم‌کنش ناشی از دو بار است، بنابراین:

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \qquad (2)$$

مطابق با حالت اول می‌توان برای حالت دوم نیز نوشت:

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad (3)$$

بنابراین

از (۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow W = U_i - U_f = \frac{q(q_0 + \frac{q}{2})}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$

۱۳۹) می‌دانیم انرژی ذخیره شده در این پوسته برابر است با

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}q(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (1)$$

حال اگر شعاع این پوسته به اندازه dr تغییر کند آنگاه کار نیروی وارد بر واحد سطح برابر است با:

$$dW_u = F_u \cdot dr$$

بنابراین کل کار، با ضرب سطح در کار واحد نیرو dW_u به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$dW = 4\pi r^2 W_u = 4\pi r^2 F_u dr \qquad (2)$$
$$dW = -dU \qquad (3)$$

از قانون بقای انرژی داریم:

$$\text{از (1) و (2) و (3)} \Rightarrow 4\pi r^2 F_u dr = -\left(\frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

$$\Rightarrow F_u = \frac{q^2}{4\pi r^2\,(8\pi\varepsilon_0 r^2)} = \frac{(4\pi r^2\sigma)^2}{4\pi r^2\,(8\pi\varepsilon_0 r^2)} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

۱۴۰) با توجه به این‌که میدان الکتریکی در داخل لایهٔ رسانا صفر است می‌توان به کمک قانون گاوس نشان داد که بار $-q$ در سطح داخلی و $+q$ در سطح خارجی لایهٔ کروی القا می‌شود. می‌دانیم کار انجام شده برای انتقال بار q از حالت اولیه به حالت ثانویه برابر اختلاف انرژی ذخیره شده بین این دو حالت است. یعنی:

$$W = U_f - U_i$$

انرژی در حالت اولیه برابر جمع انرژی‌های درونی بعلاوه و انرژی برهم‌کنش بین بارها. لِذا:

$$U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{1}{2}\frac{(-q^2)}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-qq}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{qq}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{-qq}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

از طرفی در حالت ثانویه که بار در بی‌نهایت است می‌دانیم $U_f = 0$. بنابراین:

$$W = U_f - U_i = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

۱۴۱) الف) کار انجام شده برابر تغییر انرژی خازن از حالت اولیه به ثانویه است بنابراین:

$$W = U_2 - U_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c_2} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{c_1} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0\frac{S}{x_2}} - \frac{1}{\varepsilon_0\frac{S}{x_1}}\right)$$

$$= \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}(x_2 - x_1)$$

ب) می‌دانیم در حالت بار ثابت و ولتاژ ثابت چون صفحات خازن دارای بارهای غیرهمنام هستند. لذا این دو صفحه تمایل به جذب یکدیگر دارند. بنابراین دور کردن صفحات در هر دو حالت نیازمند انرژی است اما فرق این حالت با حالت قبلی در این است که باید کار باتری نیز منظور گردد. در واقع انرژی‌هایی که ما صرف دور کردن صفحات می‌کنیم مقداری از آن در باتری ذخیره می‌شود.

بنابراین:

$$W + W_\varepsilon = \triangle U \qquad (۱)$$

W : کار انجام شده توسط ما

W_ε : کار انجام شده توسط باتری

می‌دانیم

$$C_۱ = \frac{\varepsilon_\circ S}{x_۱} \quad , \quad q_۱ = C_۱ V = \frac{\varepsilon_\circ SV}{x_۱}$$

$$C_۲ = \frac{\varepsilon_\circ S}{x_۲} \quad , \quad q_۲ = C_۲ V = \frac{\varepsilon_\circ SV}{x_۲}$$

$$W_\varepsilon = \triangle qV = \varepsilon_\circ SV^۲ \left(\frac{۱}{x_۲} - \frac{۱}{x_۱}\right) \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) $\Rightarrow \quad W = \triangle U - W_\varepsilon = U_۲ - U_۱ - W_\varepsilon$

$$= \frac{۱}{۲} C_۲ V^۲ - \frac{۱}{۲} C_۱ V^۲ - W_\varepsilon = \frac{۱}{۲} V^۲ \left(\frac{\varepsilon_\circ S}{x_۲} - \frac{\varepsilon_\circ S}{x_۱}\right) - \varepsilon_\circ SV^۲ \left(\frac{۱}{x_۲} - \frac{۱}{x_۱}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{۱}{۲} \varepsilon_\circ SV^۲ \left(\frac{۱}{x_۱} - \frac{۱}{x_۲}\right)$$

۱۴۲) الف) هنگامی که صفحهٔ فلزی به ضخامت nd (d فاصلهٔ بین صفحات خازن) درون خازن قرار داشته باشد ظرفیت خازن برابر است با (رجوع شود به حل مسأله ۲۰۰)

$$C_۱ = \frac{\varepsilon_\circ S}{d\,(۱-n)} \Rightarrow q_۱ = C_۱ V = \frac{\varepsilon_\circ SV}{d(۱-n)} \qquad (۱)$$

در حالت ثانویه انرژی خازن برابر با $C_۲ = \frac{\varepsilon_\circ S}{d}$ است. از طرفی هنگامی‌که خازن از باتری جدا شد، بار درون خازن ثابت می‌ماند، لذا $q_۱ = q_۲$. هم‌چنین کار انجام شده برابر تغییر انرژی ذخیره شده در خازن است پس:

$$W = U_۲ - U_۱ = \frac{۱}{۲}\frac{q_۲^۲}{C_۲} - \frac{۱}{۲}\frac{q_۱^۲}{C_۱} \qquad (۲)$$

از طرفی

$$C_۲ = \frac{\varepsilon_\circ S}{d} = C = ۲\circ nF \Rightarrow C_۱ = \frac{C}{۱-n} \qquad (۳)$$

از (۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow \quad W = \frac{۱}{۲}\left[\frac{\varepsilon_\circ SV}{d(۱-n)}\right]^۲ \left(\frac{۱}{C} - \frac{(۱-n)}{C}\right)$

$$= \frac{۱}{۲}\frac{CV^۲}{(۱-n)^۲} = ۱/۵\, mJ$$

ب) در این حالت در واقع ما دو خازن به صورت سری داریم.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d(1-n)}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{nd}} = \frac{\varepsilon d(1-n)+nd}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{(1-\varepsilon)nd+\varepsilon d}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

$$\Rightarrow C_1 = C_{eq} = \left(\frac{\varepsilon}{n(1-\varepsilon)+\varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right) = \frac{\varepsilon C}{n(1-\varepsilon)+\varepsilon}$$

$$q_1 = C_1 V = \frac{\varepsilon C V}{n(1-\varepsilon)+\varepsilon}$$

مشابه با قسمت قبل می‌توان نوشت:

$$W = \triangle U = \frac{1}{2} q_1^2 \left[\frac{1}{C} - \frac{1}{C_1}\right] = \frac{1}{2}\frac{CV^2 \varepsilon n(\varepsilon-1)}{[\varepsilon - n(\varepsilon-1)]^2} = 0/8\, mJ$$

۱۴۳) در اثر اتصال خازن به منبع ولتاژ، خازن باردار می‌شود. فرض کنید چگالی بار آزاد روی صفحات برابر σ_1 باشد. هم‌چنین به‌خاطر اینکه آب یک دی‌الکتریک است بارهای مرزی القایی درون آن ظاهر می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم که σ_2 چگالی سطحی بارهای مرزی باشد. به کمک قانون گاوس (رجوع شود به اثبات نکته در مسألهٔ ۱۰۳) می‌توان نشان داد که میدان الکتریکی ناشی از بار آزاد برابر $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$ و ناشی از بار مرزی برابر $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$ است. هم‌چنین میدان الکتریکی کل برابر $\frac{\sigma_1}{\varepsilon\varepsilon_0}$ می‌باشد. (ε ضریب دی‌الکتریک آب)
حال با توجه به این‌که علامت بار مرزی مخالف با بار آزاد است لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_2 = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)\sigma_1$$

به علت وجود میدان ناشی از بارهای آزاد یک نیروی ربایشی بین بارهای مرزی و صفحات خازن نزدیک به آن‌ها است. این نیرو بر واحد سطح برابر است با:

$$\frac{1}{2}\sigma_2 \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon-1)\sigma_1^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

ضریب $\frac{1}{2}$ در عبارت فوق نیاز به توضیح دارد. می‌دانیم نیروی وارد بر یک بار آزمون q در میدان الکتریکی E برابر qE است. اما اگر خود بار نیز از میدان الکتریکی تولید شده باشد آن‌گاه نیرو باید به صورت جزء به جزء محاسبه شود یعنی:

$$F = \int_0^E q(E')dE'$$

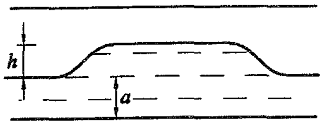
اگر $q(E')\alpha E'$ آن‌گاه داریم:

$$F = \frac{1}{2} q(E) E$$

حال این نیرو یک فشار اضافی بر مایع وارد می‌کند. با توجه به این‌که:

$$\frac{V}{d} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow \triangle p = \frac{\varepsilon_0\varepsilon(\varepsilon-1)V^2}{2d^2}$$

۱۴۴) یک راه‌حل درست مشابه مسألهٔ قبل است اما در اینجا می‌خواهیم از روش انرژی استفاده کنیم.



فرض کنید مایع به اندازه ارتفاع h بالا بیاید. در این حالت انرژی اضافه شده به مایع مساوی مجموع انرژی قطبش و انرژی گرانشی است. انرژی گرانشی برابر است با:

$$\frac{1}{2}\, hmg = \frac{1}{2}\, h \underbrace{\rho\, g\, s\, h}_{mg} = \frac{1}{2}\, \rho\, g\, s\, h^2$$

اگر σ چگالی سطحی بار آزاد روی صفحه باشد آنگاه چگالی بار مرزی با توجه به مسألهٔ قبل برابر خواهد بود با:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\, \sigma$$

بنابراین انرژی بر واحد حجم مانند قبل برابر است با:

$$-\frac{1}{2}\, \sigma'\, E_0 = -\frac{1}{2}\, \sigma'\, \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{-(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

و انرژی قطبش کلی برابر است با:

$$-\, s(a+h)\, \frac{(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

s : مساحت هر صفحه خازن است.

در نتیجه انرژی کلی برابر است با:

$$U(h) = -s(a+h)\, \frac{(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{1}{2}\, \rho\, g\, s\, h^2$$

ارتفاع ماکزیمم بالا آمدن مایع را با مشتق‌گیری تعیین می‌کنیم. لذا:

$$\frac{dU}{dh} = U'(h) = 0 \;\Rightarrow\; h = \frac{(\varepsilon - 1)\sigma^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon \rho g}$$

۱۴۵) می‌دانیم انرژی خازن برابر $U = \frac{q^2}{2C}$ است. از طرفی داریم $F_x = \frac{-dU}{dx}$ (برای اثبات این فرمول رجوع شود به مسألهٔ ۲۰۲) با توجه به این‌که بار ثابت است لذا تغییر انرژی ناشی از تغییر ظرفیت است بنابراین مقدار نیرو برابر است با:

$$F_x = \frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{q^2}{2c}\right) = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{c^2}\, \frac{dc}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{c}\right)^2 \frac{dc}{dx} = \frac{1}{2}\, V^2\, \frac{dc}{dx} \qquad (1)$$

توجه: علامت منفی در فرمول $F_x = \frac{-dU}{dx}$ نشان‌دهندهٔ جذب کنندگی نیروها است و اثری در مقدار ندارد.

حال با توجه به این‌که $d << R$ می‌توان ظرفیت خازن داده شده را از فرمول ظرفیت خازن مسطح به‌دست آورد. بنابراین اگر دی‌الکتریک به اندازه x وارد خازن شده باشد، در واقع دو خازن داریم که با هم موازی شده‌اند. منتهی یکی دارای دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک k و دیگری بدون آن. بنابراین:

$$C_1 = \frac{k\varepsilon_0 A}{d} = \frac{k\varepsilon_0 (2\pi Rx)}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 [2\pi R(L-x)]}{d}$$

$$\Rightarrow \; C = C_1 + C_2 = \frac{k\varepsilon_0 2\pi Rx}{d} + \frac{\varepsilon_0 2\pi R (L-x)}{d}$$

$$= \frac{2\pi R\varepsilon_0}{d} [kx + (L-x)]$$

$$= \frac{2\pi R\varepsilon_0}{d} \left[(k-1)x + L\right] \qquad (2)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow \; F_x = \frac{1}{2} V^2 \left[\frac{2\pi R\varepsilon_0}{d} (k-1)\right] = \varepsilon_0 (k-1) \frac{\pi R V^2}{d}$$

۱۴۶) با توجه به این‌که بارهای ناهمنام بر روی دی‌الکتریک القا می‌شوند لذا دی‌الکتریک تمایل دارد در نزدیک‌ترین حالت نسبت به صفحات خازن قرار گیرد. بنابراین برای دور کردن دی‌الکتریک باید انرژی صرف کرد تا بتوان بر این جاذبه بین بارها غلبه کرد و این صرف انرژی باعث افزایش انرژی سیستم شده و در آن ذخیره می‌شود. از طرفی می‌دانیم که با خارج کردن دی‌الکتریک انرژی خازن (هنگامی که ولتاژ ثابت باشد) کم می‌شود. اما چون انرژی کل سیستم باید افزایش بیابد لذا مقداری از انرژی توسط حرکت بارها از درون باتری در باتری ذخیره می‌شود.

به این ترتیب بار خازن نسبت به حالت اولیه کمتر شده و هم‌چنان ولتاژ آن ثابت می‌ماند. بنابراین مقدار انرژی که در باتری ذخیره می‌شود برابر است با $\triangle U_b = (q_1 - q_2) V$ که q_1 بار خازن در حالت اولیه و q_2 بار خازن در حالت ثانویه است.

از طرفی تغییر انرژی خازن برابر است با:

$$\triangle Uc = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} c_2 V^2 - \frac{1}{2} c_1 V^2 = \frac{1}{2} V^2 (c_2 - c_1)$$

$$= \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{q_2}{V} - \frac{q_1}{V}\right) = \frac{1}{2} (q_2 - q_1) V$$

از دو رابطهٔ فوق درمی‌یابیم که تغییر انرژی باتری از نظر مقدار دو برابر تغییر انرژی خازن است، منتها با علامت مخالف. حال تغییر انرژی کل سیستم برابر است با:

$$\triangle U_t = \triangle U_b + \triangle U_c = \frac{1}{2} (q_1 - q_2) V = -\triangle U_c \qquad (1)$$

هم‌چنین می‌دانیم در حرکت چرخشی، در اثر اعمال گشتاور M اگر تغییر زاویه برابر $\triangle\varphi$ باشد آن‌گاه کار انجام شده برابر $W = M \triangle \varphi$ خواهد بود. از طرفی کار انجام شده سبب افزایش انرژی پتانسیل سیستم شده، بنابراین در حالت حدی می‌توان

نوشت:

$$W = -dU_t = dU_c \Rightarrow M d\varphi = dU_c \Rightarrow M = \frac{dU_c}{d\varphi} \qquad (۲)$$

در حالتی که دی‌الکتریک به اندازه φ می‌چرخد ظرفیت از ترکیب دو خازن موازی یکی دارای دی‌الکتریک با ثابت k و دیگری بدون الکتریک است، به‌دست می‌آید، لذا:

$$c = \frac{\varepsilon_\circ \left(\frac{\varphi}{۲} R^۲\right)}{d} + \frac{k\varepsilon_\circ \left(\frac{(\pi - \varphi)}{۲} R^۲\right)}{d} \qquad (۳)$$

نکته: مساحت قطاعی از دایره به زاویهٔ φ برابر $\frac{\phi}{۲} R^۲$ است.

می‌دانیم ظرفیت خازن برابر $U_c = \frac{۱}{۲}CV^۲$. بنابراین:

$$\text{از (۲) و (۳)} \Rightarrow M = \frac{۱}{۲}V^۲ \left(\frac{dc}{d\varphi}\right) = \frac{۱}{۲}V^۲\left[\frac{\varepsilon_\circ R^۲}{۲d} + \frac{-k\varepsilon_\circ R^۲}{۲d}\right]$$

$$\Rightarrow M = -(k-۱)\,\varepsilon_\circ \frac{R^۲V^۲}{۴d}$$

علامت منفی نشان‌دهندهٔ این است که گشتاور در جهت عقربه‌های ساعت است.

فصل ۱۰

جریان الکتریکی

۱۴۷) به کمک قانون گاوس (رجوع شود به کتاب هالیدی) می‌توان رابطهٔ بین میدان الکتریکی روی سطح و چگالی بار سطحی σ به صورت زیر به‌دست آورد.

$$\int EdA = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_\circ E \qquad (۱)$$

از طرفی باری که بر روی استوانه به طول x روی سطح استوانه قرار دارد برابر است با:

$$q = \sigma A \xrightarrow{\text{از } (۱)} q = \varepsilon_\circ EA = \varepsilon_\circ E\,(۲\pi a x) \qquad (۲)$$

همچنین می‌دانیم $I = \frac{dq}{dt}$ لذا:

$$\Rightarrow I = \frac{dq}{dt} = ۲\varepsilon_\circ E\pi a \frac{dx}{dt} = ۲\varepsilon_\circ E\pi a V$$

۱۴۸) با توجه به این‌که $d << r$، برای محاسبهٔ ظرفیت می‌توان از فرمول ظرفیت خازن تخت استفاده کرد. اگر طول این خازن استوانه‌ای برابر L و ثابت دی‌الکتریک آب برابر k باشد، در لحظه‌ای که خازن به‌اندازهٔ x وارد آب می‌شود، می‌توان ظرفیت خازن را از ترکیب دو خازن موازی به صورت زیر به‌دست آورد.

$$C = \frac{k\varepsilon_\circ A_۱}{d} + \frac{\varepsilon_\circ A_۲}{d} = \frac{k\varepsilon_\circ(۲\pi r x)}{d} + \frac{\varepsilon_\circ\,[۲\pi r(L-x)]}{d} \qquad (۱)$$

می‌دانیم بار در هر لحظه برابر است با $q = CV$. لذا:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} \xrightarrow{\text{از } (۱)} I = V\,[\,\frac{k\varepsilon_\circ ۲\pi r}{d}\frac{dx}{dt} - \frac{\varepsilon_\circ ۲\pi r}{d}\frac{dx}{dt}\,]$$

$$I = V\,(\frac{\varepsilon_\circ ۲\pi r}{d})\,(k-۱)\,\frac{dx}{dt} = \frac{۲V\pi r\varepsilon_\circ}{d}\,(k-۱)\,V = \circ/۱۱\ \mu A$$

۱۴۹) الف) می‌دانیم $R_t = R_\circ\,(۱+\alpha t)$ به طوری‌که R_t مقدار مقاومت در دمای t و $R_\circ$ مقدار مقاومت در دمای ۰ درجه و α ضریب مقاومت دمایی است. بنابراین:

$$R_۱ = R_\circ\,(۱+\alpha t) \qquad , \qquad R_۲ = nR_\circ\,(۱+\alpha_۲ t)$$

در حالت سری می‌توان نوشت:

$$R = R_۱ + R_۲ = R_\circ\left[(۱+n)+(\alpha_۱+n\alpha_۲)\,t\right]$$

$$= R_\circ\,(۱+n)\,\left[۱ + \frac{\alpha_۱+n\alpha_۲}{۱+n}\,t\right] \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) درمی‌یابیم که ضریب مقاومت دمایی برای مقاومت معادل برابر است با:

$$\alpha = \frac{\alpha_۱+n\alpha_۲}{۱+n}$$

ب) در حالت موازی مقاومت معادل برابر است با:

$$R = \frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲} = \frac{R_\circ(۱+\alpha_۱ t)\,n\,R_\circ(۱+\alpha_۲ t)}{R_\circ(۱+\alpha_۱ t)\ +\ n\,R_\circ(۱+\alpha_۲ t)}$$

$$= \frac{nR_\circ}{۱+n}\ \frac{(۱+n)(۱+(\alpha_۱+\alpha_۲)t+\alpha_۱\alpha_۲ t^۲)}{۱+n+(\alpha_۱+n\alpha_۲)t}$$

$$= \frac{nR_\circ}{۱+n}\ \frac{(۱+n+\alpha_۱ t+n\alpha_۲ t)\ +\ [\alpha_۲ t+n\alpha_۱ t+\alpha_۱\alpha_۲(n+۱)t^۲]}{۱+n+(\alpha_۱+n\alpha_۲)t}$$

$$= \frac{nR_\circ}{۱+n}\left[۱ + \frac{(n\alpha_۱+\alpha_۲)t\ +\ \alpha_۱\alpha_۲(n+۱)t^۲}{۱+n+(\alpha_۱+n\alpha_۲)t}\right]$$

$$= \frac{nR_\circ}{۱+n}\left\{۱ + \frac{(n\alpha_۱+\alpha_۲)t}{۱+n}\left[\frac{۱+\frac{\alpha_۱\alpha_۲(n+۱)}{n\alpha_۱+\alpha_۲}\,t}{۱+\frac{\alpha_۱+n\alpha_۲}{۱+n}\,t}\right]\right\}$$

حال نشان می‌دهیم که عبارت داخل کروشه تقریباً برابر ۱ است. عبارت داخل کروشه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱+At}{۱+Bt} \quad , \quad A = \frac{\alpha_۱\alpha_۲(n+۱)}{n\alpha_۱+\alpha_۲} \quad , \quad B = \frac{\alpha_۱+n\alpha_۲}{۱+n}$$

با توجه به این‌که $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ مقادیر کوچکی هستند بنابراین از جملات $\alpha_۲\ \alpha_۱$ و $\alpha_۱^۲$ و $\alpha_۲^۲$ می‌توان صرف‌نظر کرد. هم‌چنین می‌توان از جملات AB و $A^۲$ و $B^۲$ که همگی حاوی جملات $\alpha_۱^۲$ و $\alpha_۲\ \alpha_۱$ و $\alpha_۲^۲$ هستند نیز صرف‌نظر کرد. لذا:

$$\frac{1+At}{1+Bt} = \frac{(1+At)(1-Bt)}{1-B^2t^2} \simeq (1+At)(1-Bt)$$

$$= 1+(A-B)t - ABt^2 \simeq 1+(A-B)t$$

$$= 1+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2(n+1)}{n\alpha_1+\alpha_2} - \frac{\alpha_1+n\alpha_2}{1+n}\right]t$$

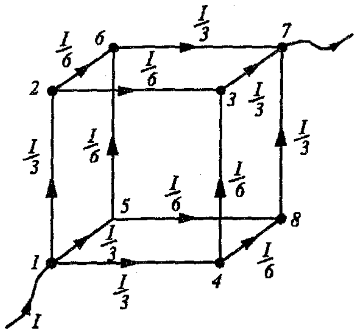
$$= 1 - \frac{n(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(1+n)(n\alpha_1+\alpha_2)} \simeq 1$$

$$= R \simeq \frac{nR_0}{1+n}\left(1+\frac{n\alpha_1+\alpha_2}{1+n}t\right) \qquad (3)$$

از مقایسهٔ (۱) و (۳) می‌توان دریافت که:

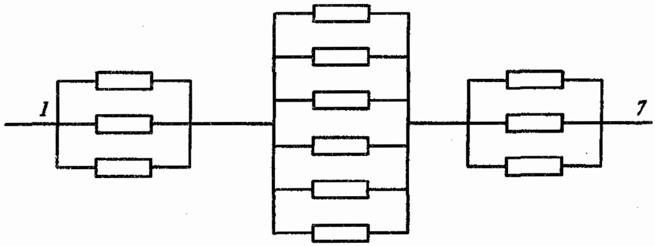
$$\alpha = \frac{n\alpha_1+\alpha_2}{1+n}$$

۱۵۰) در این‌جا چون مقاومت‌ها سری یا موازی نیستند از ترکیب ساده آن‌ها نمی‌توان پاسخ مسأله را به‌دست آورد. اما در هر قسمت با توجه به تقارن می‌توان نقاط هم‌پتانسیل را یافت و به هم وصل کرد و در نتیجه از فرمول مقاومت های سری و موازی، مقاومت‌های معادل را به‌دست می‌آوریم.



شکل (۱)

الف) در این حالت با توجه به تقارن مسأله درمی‌یابیم که نقاط ۲ و ۴ و ۵ نسبت به نقطهٔ ۱ در موقعیت یکسان مداری قرار دارند. بنابراین این سه نقطه دارای پتانسیل می‌باشند. هم‌چنین نقاط ۳ و ۶ و ۸ نیز نسبت به نقطهٔ ۷ موقعیت یکسانی دارند بنابراین این سه نقطه نیز دارای یک پتانسیل می‌باشند. با وصل کردن نقاط هم پتانسیل در مدار هیچ تغییری رخ نمی‌دهد و شکل مدار به صورت زیر به‌دست می‌آید. لذا:

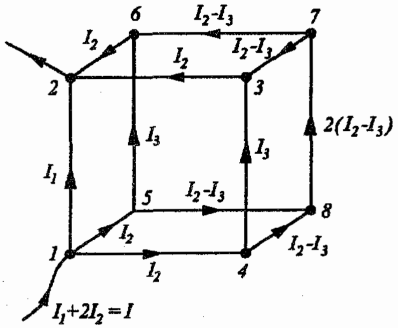


$$R_{eq} = \frac{R}{۳} + \frac{R}{٦} + \frac{R}{۳} = \frac{۵R}{٦}$$

راه حل دوم: هنگامی که جریان از نقطهٔ ۱ وارد می‌شود بر سر راه جریان سه راه مشابه وجود دارد مسیر ۵-۱ و ۲-۱ و ۴-۱. بنابراین چون این سه راه نسبت به هم ارجحیت ندارند، در نتیجه جریان به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود. همین‌طور هنگامی‌که جریان به گره ۲ می‌رسد به علت تقارن دو راه ۶-۲ و ۳-۲ جریان به دو قسمت مساوی $\frac{I}{٦}$ تقسیم می‌شود. (مطابق شکل (۱)). بنابراین اگر بین نقاط ۱ و ۷ پتانسیل V اعمال شود داریم:

$$V = R_{eq}I = (R\frac{I}{۳} + R\frac{I}{٦} + R\frac{I}{۳}) = \frac{۵R}{٦}\,I \Rightarrow R_t = \frac{۵R}{٦}$$

ب) با توجه به تقارن نقاط ۴ و ۵ با هم و نقاط ۳ و ۶ با هم، می‌توان جریان هر مقاومت را به صورت شکل زیر ترسیم کرد.



در حلقهٔ ۱۴۳۲۱ می‌توان نوشت: (۱) $\quad RI_۱ = ۲RI_۲ + RI_۳ \Rightarrow I_۱ = I_۳ + ۲I_۲$

در حلقهٔ ۴۸۷۳۴ داریم:

$$R(I_۲ - I_۳) + ۲R(I_۲ - I_۳) + R(I_۲ - I_۳) = RI_۳$$

$$\Rightarrow ۴(I_۲ - I_۳) = I_۳ \Rightarrow I_۳ = \frac{۴}{۵}\,I_۲ \qquad (۲)$$

$$I_۱ = \frac{۱۴}{۵} I_۲ \Leftarrow \text{از (۱) و (۲)}$$

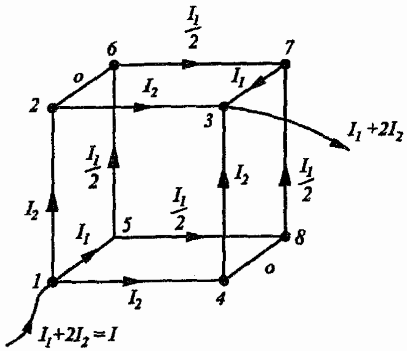
اگر اختلاف پتانسیل V بین نقاط ۱ و ۲ اعمال شود داریم:

$$V = R_{eq} I = R_{eq}(I_۱ + ۲I_۲) = \frac{۲۴}{۵} I_۲ R_{eq} \qquad (۳)$$

$$V = RI_۱ \qquad (۴)$$

$$\text{از (۳) و (۴)} \Rightarrow \frac{۴}{۵} I_۲ = \frac{۲۴}{۵} I_۲ R_{eq} \Rightarrow R_{eq} = \frac{۷}{۱۲} R$$

ج) با توجه به تقارن نقاط ۲ و ۴ با هم و نقاط ۸ و ۶ می‌توان جریان مدار را به صورت شکل زیر در نظر گرفت.



حال در حلقهٔ ۱۵۶۲۱ داریم:

$$RI_۲ = RI_۱ + R\frac{I_۱}{۲} \Rightarrow I_۲ = \frac{۳}{۲} I_۱ \qquad (۱)$$

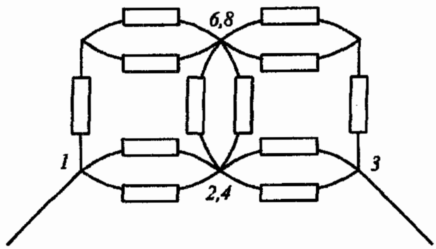
$$V = R_{eq} I = R_{eq}(I_۱ + ۲I_۲) \xrightarrow{\text{از (۱)}} V = ۴I_۱ R_{eq} \qquad (۲)$$

از طرفی:

$$V = RI_۲ + RI_۲ = ۲RI_۲ = ۳RI_۱ \qquad (۳)$$

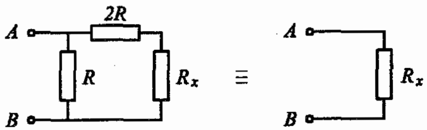
$$\text{از (۲) و (۳)} \Rightarrow R_{eq} = \frac{۳}{۴} R$$

• توجه: اگر نقاط هم‌پتانسیل ۴ و ۲ را با هم و نقاط ۶ و ۸ را با هم وصل کنیم مدار شبکه به صورت شکل زیر درمی‌آید.



همان‌طور که می‌بینیم مدار، تشکیل پل وتستون را می‌دهد لذا جریان گذری از مقاومت ۶-۲ و ۸-۴ برابر صفر است.

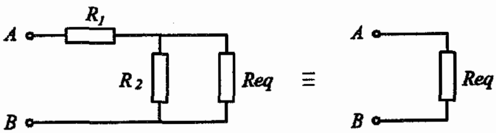
۱۵۱) برای این‌که مقاومت شبکه بستگی به تعداد شاخه نداشته باشد باید مقاومت معادل حلقه آخر برابر R_x شود تا به این ترتیب مقاومت حلقه‌های دیگر نیز برابر R_x شود و به این‌صورت مقاومت معادل شبکه به تعداد حلقه‌ها بستگی نداشته باشد بنابراین:



$$\Rightarrow \quad R_x = \frac{(R_x + ۲R)R}{(R_x + ۲R) + R} \Rightarrow R_x^۲ + ۲RR_x - ۲R^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \quad R_x = R(\sqrt{۳} - ۱)$$

۱۵۲) اگر R_{eq} مقاومت معادل این شبکه باشد آن‌گاه با توجه به مفهوم بی‌نهایت، می‌توان دو شبکه شکل زیر را با هم معادل گرفت.



بنابراین:

$$R_{eq} = \frac{R_{eq}R_۲}{R_۲ + R_{eq}} + R_۱ \Rightarrow R_{eq}^۲ - R_۱R_{eq} - R_۱R_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R_۱ + \sqrt{R_۱^۲ + ۴R_۱R_۲}}{۲} = ۶\Omega$$

۱۵۳) فرض کنید ولتاژ V بین دو نقطه A و B اعمال شود اگر R مقاومت معادل کل شبکه و I جریان کل و $I_۰$ جریان عبوری از ضلع AB باشد. آن‌گاه داریم:

$$V = RI = R_۰I_۰ \qquad (۱)$$

حال مسأله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. حالت اول فرض کنید جریان I وارد نقطهٔ A

می‌شود و در نقطه‌ای بی‌نهایت دور از نقطه‌ای خارج شود. با توجه به تقارن می‌توان دریافت جریان در نقطهٔ A به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌گردد، لذا جریان شاخه AB نیز برابر $\frac{I}{۴}$ است. حال فرض کنید جریان I در نقطه‌ای بی‌نهایت وارد شبکه شود و از نقطهٔ B خارج گردد. با توجه به تقارن می‌توان دریافت، چهار جریان مساوی با هم جمع و از نقطهٔ B خارج شده‌اند، لذا در این حالت نیز جریان عبوری از ضلع AB برابر $\frac{I}{۴}$ است. با جمع این دو حالت با هم (طبق اصل برهم نهی) می‌توان دریافت جریان شاخه AB برابر $\frac{I}{۲} = \frac{I}{۴} + \frac{I}{۴}$ است، لذا:

$$I_\circ = \frac{I}{۲} \xrightarrow{\text{از } (۱)} RI = R_\circ \frac{I}{۲} \Rightarrow R = \frac{R_\circ}{۲}$$

۱۵۴) اگر پوسته استوانه‌ای به شعاع $a < r < b$ با ضخامت dr در نظر بگیریم، می‌دانیم که جریان گذری از استوانه به شعاع a تا استوانه به شعاع b بر سطح این استوانه فرضی عمود است. بنابراین با توجه به فرمول $R = \rho \frac{L}{A}$ می‌توان مقاومت این پوسته استوانه فرضی را به صورت زیر به‌دست آورد.

$$dR = \rho \frac{dr}{۲\pi r L}$$

بنابراین مقاومت کل با انتگرال‌گیری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{۲\pi r L} = \frac{\rho}{۲\pi L} \ln (\frac{b}{a})$$

۱۵۵) یک پوسته کروی به شعاع r با ضخامت dr در نظر می‌گیریم. با توجه به‌این‌که جریان بر سطح این پوسته عمود است، لذا این پوسته کروی شبیه یک مقاومت به طول dr با مساحت $۴\pi r^۲$ عمل می‌کند لذا:

$$dR = \rho \frac{dr}{۴\pi r^۲}$$

با انتگرال‌گیری مقاومت کل به‌دست می‌آید. یعنی:

$$R = \int_a^b dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{۴\pi r^۲} = \frac{\rho}{۴\pi} (\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b})$$

$$b \to \infty \quad , \quad R = \frac{\rho}{۴\pi a}$$

۱۵۶) از مسألهٔ قبل داریم:

ρ : مقاومت ویژهٔ رسانای ضعیف

$$R = \frac{\rho}{۴\pi} (\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b})$$

$$\Rightarrow i = \frac{V}{R} = \frac{V}{\frac{\rho}{۴\pi} (\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b})} \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$i = \frac{-dq}{dt} = -\frac{d}{dt} (CV) = -C \frac{dV}{dt} \qquad (۲)$$

(ظرفیت خازن ثابت است)

$$(۲),(۱) \rightarrow \frac{V}{\frac{\rho}{۴\pi}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})} = -C\frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow -\int_{V_۱}^{V_۲}\frac{dV}{V} = \int_۰^{\Delta t}\frac{dt}{\frac{\rho C}{۴\pi}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})}$$

$$\Rightarrow -\ln\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\Delta t ۴\pi ab}{\rho C(b-a)} \Rightarrow -\ln(\frac{۱}{n}) = \frac{\Delta t ۴\pi ab}{\rho C(b-a)}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{۴\pi ab\Delta t}{C(b-a)\ln n}$$

۱۵۷) فرض کنید بار فرضی $q+$ و $q-$ روی کره‌ها اعمال شود. حال با توجه به دوری کره‌ها نسبت به اندازه آن‌ها می‌توان فرض کرد که توزیع بارها روی کره‌ها به‌طور یکنواخت است. با استفاده از قانون گاوس اندازه شدت میدان روی کره‌ها برابر است با:

$$E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}$$

بنابراین چگالی جریان برابر است با: (رجوع شود به کتاب هالیدی بخش جریان و مقاومت)

$$J = \frac{۱}{\rho}E = \frac{۱}{\rho}\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}$$

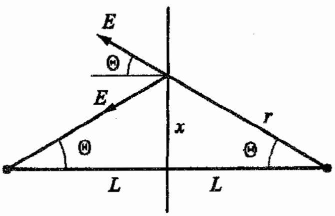
و جریان الکتریکی نیز برابر است با:

$$I = \int J.dA = JA = \frac{q}{۴\rho\pi\varepsilon_۰ a^۲}\cdot ۴\pi a^۲ = \frac{q}{\rho\varepsilon_۰}$$

هم‌چنین اختلاف پتانسیل بین کره‌ها برابر است با:

$$V_+ - V_- = ۲\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a} \Rightarrow R = \frac{V_+ - V_-}{I} = \frac{\frac{۲q}{۴\pi\varepsilon_۰ a}}{\frac{q}{\rho\varepsilon_۰}} = \frac{\rho}{۲\pi a}$$

۱۵۸) به کمک روش تصاویر (رجوع شود به مسألهٔ ۱۲۹) می‌توان به‌جای صفحهٔ رسانا، تصویر بار را در فاصلهٔ $۲L$ از آن قرار داد. بنابراین پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای خارج از ناحیهٔ هاشور خورده (بیرون صفحهٔ رسانا) برابر با جمع پتانسیل بار و تصویر آن است. لذا می‌توان نوشت:



$$V = KQ(\frac{۱}{r_۱}-\frac{۱}{r_۲}) \qquad (۱)$$

r_1 و r_2 به ترتیب فاصلهٔ نقطه از بار و تصویر آن است. با توجه به این‌که پتانسیل صفحهٔ رسانا صفر است، در نتیجه چون اختلاف پتانسیل کره و صفحه V است لذا پتانسیل کره فلزی برابر V می‌شود، بنابراین از رابطهٔ (۱) داریم:

$$V = KQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2L}\right) \qquad (2)$$

با توجه به این‌که $L >> a$ می‌توان از $\frac{1}{2L}$ در برابر $\frac{1}{a}$ صرف‌نظر کرد لذا از (۲) می‌توان دریافت که $KQ = Va \quad (3)$. با توجه به این‌که پتانسیل کره فلزی V است می‌توان بار متناسب با این پتانسیل را به صورت زیر به‌دست آورد.

$$V = \frac{KQ}{a} \Rightarrow Q = \frac{1}{K} Va \qquad (4)$$

بنابراین با توجه به شکل میدان الکتریکی نقطه‌ای مانند p روی سطح برابر است با:

$$E_p = \frac{KQ}{r^2} 2\cos\theta = \frac{KQ}{r^2} 2\left(\frac{L}{r}\right) = \frac{2KQL}{r^3} \qquad (5)$$

از طرفی چگالی جریان برابر است با:

$$J = \frac{1}{\rho} E_p = \frac{2KQL}{\rho r^3} \xrightarrow{\text{از } (3)} J = \frac{2VaL}{\rho r^3}$$

چون بردار E_p بر سطح عمود است لذا J نیز بر سطح عمود است.

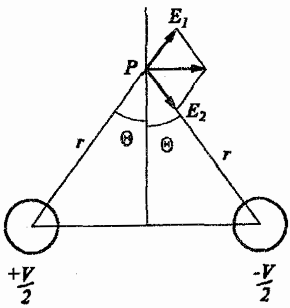
ب) به کمک مسألهٔ قبل و با استفاده از روش تصاویر می‌توان مقاومت معادل را به‌دست آورد.

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$

۱۵۹) فرض می‌کنیم سیم‌ها کاملاً رسانا هستند، لذا هرگونه مقاومت ناشی از محیط اطراف است. بدون این‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم سیم چپ دارای پتانسیل $\frac{+V}{2}$ و سیم راست دارای پتانسیل $\frac{-V}{2}$ باشد.

از طرفی اگر طول سیم‌ها برابر L باشد آنگاه مقاومت R مربوط به محیط متناسب با $\frac{1}{L}$ خواهد بود زیرا قسمتهای مختلف سیم به صورت موازی با محیط اطراف هستند تا اینکه سری باشند.

لذا اگر R_1 مقاومت بر واحد طول سیم باشد آنگاه $R = \frac{R_1}{L}$.



با توجه به تقارن واصل بر هم نهی می توان پتانسیل در نقطهٔ P را به صورت زیر بدست آورد. $(L >> a)$

$$\phi = \frac{A}{2} \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) - \frac{A}{2} \ln\left(\frac{r_2}{a}\right) = \frac{A}{2} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

از طرفی

برای پتانسیل سیم ۱

$$\phi_1 = \frac{V}{2} = \frac{A}{2} \ln\left(\frac{a}{L}\right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{V}{\ln\left(\frac{L}{a}\right)} \Rightarrow \phi = \frac{-V}{2\ln\left(\frac{L}{a}\right)} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

برای محاسبه میدان در نقطهٔ P که به فاصله برابر r از سیم‌ها قرار دارد می‌توان نوشت:

$$E = \frac{V}{2\ln\left(\frac{L}{a}\right)} \left(\frac{1}{r}\right) 2\sin\theta = \frac{VL}{2\ln\left(\frac{L}{a}\right)} = \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow J = \sigma E = \frac{1}{\rho} \frac{V}{2r^2 \ln\left(\frac{L}{a}\right)}$$

ب) در نزدیکی هر سیم داریم:

$$E = \frac{V}{2a\ln\left(\frac{L}{a}\right)} \Rightarrow J = \sigma E = \frac{V}{2\rho a\ln\left(\frac{L}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R} = L\frac{V}{R_1} = J 2\pi a L = \frac{2\pi a L V}{2\rho a\ln\left(\frac{L}{a}\right)} = \frac{\pi L V}{\rho \ln\left(\frac{L}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow L\frac{V}{R_1} = \frac{\pi L V}{\rho \ln\left(\frac{L}{a}\right)} \Rightarrow R_1 = \frac{\rho}{\pi} \ln\left(\frac{L}{a}\right)$$

۱۶۰) اگر فرض کنیم بارهای $+q$ و $-q$ روی صفحات خازن القا شده باشد، آن‌گاه داریم:

$$C = \frac{q}{V} \xrightarrow{\text{از قانون گاوس}} C = \frac{k\varepsilon_0 \int \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dA}}{V} \qquad (1)$$

ازطرفی جریان الکتریکی و چگالی جریان برابر است با: (رجوع شود به کتاب هالیدی بخش جریان و مقاومت)

$$\left.\begin{array}{l} i = \int \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{dA} \\ \overrightarrow{J} = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{E} \end{array}\right\} \longrightarrow i = \int \frac{1}{\rho} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dA} \qquad (2)$$

$$(2),(1) \Rightarrow \rho i = \frac{CV}{K\varepsilon_0} \Rightarrow i = \frac{CV}{\rho k \varepsilon_0} = 1/5\ \mu A$$

۱۶۱) بدون این‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم بارهای $+q$ و $-q$ روی این رساناها اعمال شده و اختلاف پتانسیل بین آن‌ها برابر V باشد. همچنین فرض می‌کنیم محیط از نظر الکتریکی رسانای بسیار ضعیفی باشد تا بتوان سطح هر رسانا را یک سطح هم پتانسیل در نظر گرفت. حال اگر یک سطح بسته A دور بار مثبت محیط کنیم آن‌گاه می‌توان نوشت:

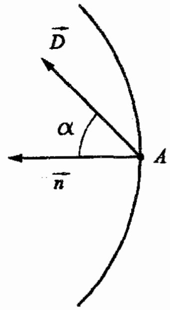
$$R=\frac{V}{i}=\frac{V}{\int \vec{J}\,.d\vec{A}}=\frac{V}{\int \frac{E}{\rho}d\vec{A}} \qquad (۱)$$

(بردار $\vec{J}$ با بردار $\vec{E}$ و با بردار عمود بر سطح یعنی $\vec{dA}$ موازی است.)

$$C=\frac{q}{V} \xrightarrow{\text{از قانون گاؤس}} C=\frac{k\varepsilon_\circ \int EdA}{V} \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱)\rightarrow RC=\rho k\varepsilon_\circ$$

۱۶۲) می‌دانیم انتهای دی‌الکتریک منتهی به یک رسانا شده است. و روی یک انتها بردار جابه‌جایی الکتریکی D نشان داده شده است.



در داخل رسانا در هر نقطه‌ای مانند A هیچ مؤلفهٔ عمودی از میدان الکتریکی یافت نمی‌شود. به کمک قانون گاوس می‌توان به راحتی در آورد که:

چگالی سطحی بار در نقطهٔ A: $\sigma=D_n=D\cos\alpha$

مؤلفهٔ افقی را می‌توان از نظریهٔ چرخش $\oint \vec{E}\,.\,\vec{dr}=\circ$ به دست آورد. (به شرطی که تمام سطح رسانا به صورت پیوسته باشد.) بنابراین در داخل رسانا یک میدان الکتریکی مماس به اندازهٔ $\frac{D\sin\alpha}{\varepsilon_\circ\varepsilon}$ در نقطهٔ A است. که موجب جریان می‌شود و بنابر قانون اهم داریم.

$$j=\frac{D\sin\alpha}{\varepsilon_\circ\varepsilon\rho}$$

۱۶۳) می‌دانیم مقاومت یک لایه از محیط به ضخامت dx و به فاصلهٔ x از صفحهٔ اول خازن برابر است با:

$$dR=\rho\frac{dx}{A}=\frac{۱}{\sigma}\frac{dx}{A} \qquad (۱)$$

که مقاومت ویژهٔ این رسانا متغیر است یعنی $\rho=\rho(x)$ و همچنین رسانندگی $\sigma=\sigma(x)$ از طرفی چون رسانندگی به طور خطی در فاصلهٔ d از $\sigma_۱$ تا $\sigma_۲$ تغییر می‌کند لذا می‌توان رسانندگی در فاصلهٔ x از صفحهٔ اول خازن را به صورت زیر نوشت:

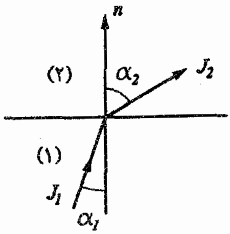
$$\sigma=\sigma_۱+(\frac{\sigma_۲-\sigma_۱}{d})x \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱)\rightarrow dR=\frac{۱}{\sigma_۱+(\frac{\sigma_۲-\sigma_۱}{d})x}\frac{dx}{A}$$

$$\to R=\int_{\circ}^{d}\frac{dx}{A[\sigma_1+(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{d})x]}=\frac{d}{A(\sigma_2-\sigma_1)}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$\to i=\frac{V}{R}=\frac{AV(\sigma_2-\sigma_1)}{d\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}=5nA$$

۱۶۴) با توجه به بقای بار، جریان j با ترک کردن محیط ۱ باید وارد محیط ۲ شود. بنابراین:



$$j_1\cos\alpha_1=j_2\cos\alpha_2$$

رابطهٔ دیگری که می‌توان استفاده کرد $E_{1t}=E_{2t}$ که نتیجهٔ $\oint\vec{E}\,.\,\vec{dr}=\circ$ است. بنابراین:

$$\frac{1}{\sigma_1}j_1\sin\alpha_1=\frac{1}{\sigma_2}j_2\sin\alpha_2$$

یا

$$\frac{\tan\alpha_1}{\sigma_1}=\frac{\tan\alpha_2}{\sigma_2}$$

و یا

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

۱۶۵) میدان الکتریکی در استوانهٔ اول و دوم به ترتیب برابرند با:

$$E_1=\rho_1 J=\rho_1\frac{I}{A}=\rho_1\frac{I}{\pi R^2}$$

$$E_2=\rho_2 J=\rho_2\frac{I}{A}=\rho_2\frac{I}{\pi R^2}$$

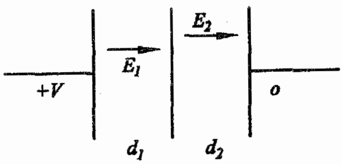
R: شعاع استوانه

اگر σ بار القای شده در مرز استوانه‌ها باشد آن‌گاه با در نظر گرفتن یک سطح استوانه‌ای شکل در مرز می‌توان نوشت،

$$\frac{-\rho_1 I}{\pi R^2}dA+\frac{\rho_2 I}{\pi R^2}dA=\frac{\sigma dA}{\varepsilon_\circ}$$

$$\to\sigma=\varepsilon_\circ(\rho_2-\rho_1)\frac{1}{\pi R^2}$$

۱۶۶) می‌دانیم جمع ولتاژهای خازن باید برابر V شود. پس:



$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = V \qquad (1)$$

از طرفی باتوجه به بقای جریان باید چگالی جریان در دو طرف یکسان باشد لذا:

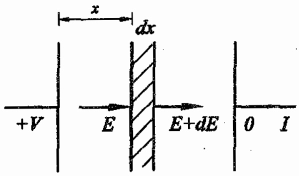
$$J_1 = J_2 \rightarrow \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow E_1 = \frac{\rho_1 V}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}, E_2 = \frac{\rho_2 V}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$$

در مرز بین دو دی الکتریک داریم:

$$\sigma = D_2 - D_1 = k_2 \varepsilon_\circ E_2 - k_1 \varepsilon_\circ E_1 = \frac{\varepsilon_\circ V}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}(k_2 \rho_2 - k_1 \rho_1)$$

۱۶۷) باتوجه به بقای جریان برای یک لایه از این دی الکتریک به ضخامت dx باید چگالی جریان در دو طرف این لایه باهم برابر باشد لذا:



$$J_x = J_{x+dx} \rightarrow \frac{E(x)}{\rho(x)} = \frac{E(x) + dE(x)}{\rho(x) + d\rho(x)}$$

$$\rightarrow E(x)\rho(x) + E(x)d\rho(x) = \rho(x)E(x) + \rho(x)dE(x)$$

$$\rightarrow \frac{dE(x)}{E(x)} = \frac{d\rho(x)}{\rho(x)} \xrightarrow{\text{باانتگرال‌گیری}} \ln E(x) = \ln \rho(x) + C'$$

C' یک ثابت است و می‌توان آن را به صورت $C' = \ln C$ در نظر گرفت لذا :

$$\ln E(x) - \ln \rho(x) = \ln C \rightarrow \ln \frac{E(x)}{\rho(x)} = \ln C \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{E(x)}{\rho(x)} = C \rightarrow E(x) = C\rho(x) \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$E = \rho J = \rho \frac{I}{A} \rightarrow E(x) = \rho(x)\frac{I}{A} \qquad (2)$$

بنابراین بار القاء شده روی واحد سطح در این لایه برابر است با :

$$d\sigma = dD = d(k(x)\varepsilon_\circ E(x)) = \varepsilon_\circ d(k(x)\rho(x)\frac{I}{A}) = \frac{\varepsilon_\circ I}{A} d(k(x)\rho(x))$$

$$\rightarrow dQ = (d\sigma)A = \varepsilon_\circ I d(k(x)\rho(x))$$

با انتگرال‌گیری می‌توان کل بار القاء شده را به صورت زیر به دست آورد.

$$Q = \varepsilon_{\circ} I(k_{۲}\rho_{۲} - k_{۱}\rho_{۱})$$

۱۶۸) از مسألهٔ قبل داریم:
(تغییرات مقاومت ویژه خطی است).

$$E(x) = C\rho(x) = C(\rho_{\circ} + \rho_{۱}x) \quad (۱)$$

$$\frac{\rho_{\circ} + \rho_{۱}d}{\rho_{\circ}} = n \rightarrow \rho_{۱} = \frac{(n-۱)}{d}\rho_{\circ} \qquad (۲)$$

همچنین ولتاژ با انتگرال‌گیری به دست می‌آید (رجوع شود به کتاب هالیدی)

$$V = \int_{\circ}^{d} Edx = \int_{\circ}^{d} C\rho(x)dx = \int_{\circ}^{d} C[n_{\circ} + \frac{n-۱}{d}\rho_{\circ}x]dx$$

$$= C\rho_{\circ}[x + \frac{n-۱}{۲d}x^{۲}]|_{\circ}^{d} = \frac{۱}{۲}C\rho_{\circ}d(n+۱) \qquad (۳)$$

$$\rightarrow C = \frac{۲V}{\rho_{\circ}d(n+۱)} \qquad (۴)$$

طبق تعریف، چگالی بار حجمی برابر است :
V : حجم فضای مورد نظر : $\quad (۵) \quad \rho = \frac{dq}{dV}$ از طرفی می‌دانیم که قانون گاؤس در شکل دیفرانسیلی به صورت زیر است.
(به کتاب نایفه مراجعه شود) (ρ: چگالی بار حجمی)

$$\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{d_z} = \frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}}$$

با توجه به این‌که مسألهٔ ما به صورت یک بعدی است لذا:

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}} \quad (۶), E_x = E(x)$$

$$(۶),(۵) \rightarrow \rho = \frac{dq}{dV} = \frac{\varepsilon_{\circ}dE_x}{dx} \rightarrow \frac{dq}{Adx} = \frac{\varepsilon_{\circ}dE_x}{dx}$$

A : مساحت صفحات خازن می‌باشد که ثابت است لذا:

$$\frac{\varepsilon_{\circ}dEx}{dx} = \varepsilon_{\circ}c\rho_{۱} \qquad (۷)$$

$$(۷),(۴),(۲) \rightarrow \rho = \frac{۲\varepsilon_{\circ}V}{\rho_{\circ}d(n+۱)}\frac{(n-۱)\rho_{\circ}}{d} = \frac{۲\varepsilon_{\circ}V(n-۱)}{(n+۱)d^{۲}}$$

۱۶۹) استوانه‌ای به طول واحد در نظر بگیرید که آن را به پوسته‌هایی با شعاع r و ضخامت dr به صورت موازی هم تقسیم می‌کنیم. برای یک پوسته نوعی رسانایی پوسته (عکس مقاومت) برابر است با:

$$d(\frac{۱}{R_{۱}}) = \frac{۲\pi rdr}{(\alpha/r^{۲})} = \frac{۲\pi r^{۳}dr}{\alpha}$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\pi R^4}{2\alpha}=\frac{S^2}{2\pi\alpha}$$

$$\rightarrow R_1=\frac{2\pi\alpha}{S^2}, S=\pi R^2 \rightarrow R_1=\frac{2\pi\alpha}{(\pi R^2)^2}$$

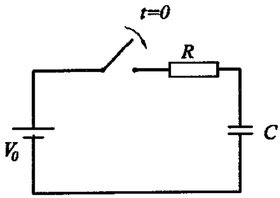
ب) فرض کنید میدان الکتریکی در داخل برابر $E_z=E_\circ$ باشد. (محور z منطبق بر محور رساناست.) هنگامی که مؤلفه‌های دیگر E حضور ندارند آنگاه میدان الکتریکی در شرایط پایدار نمی‌تواند بستگی به r داشته باشد. چرا که تئوری چرخش یعنی $\oint \vec{E}\cdot\vec{dr}=0$ را زیرپا گذاشته است. جریانی که از مقطع با شعاع‌های r و $r+dr$ می‌گذرد برابر است با:

$$2\pi r dr\frac{1}{\alpha/r^2}E=2\pi r^3 dr\frac{E}{\alpha}$$

$$\rightarrow I=\int_0^R 2\pi r^3 r dr\frac{E}{\alpha}=\frac{\pi R^4 E}{2\alpha}$$

$$\rightarrow E=\frac{2\alpha\pi I}{S^2}=\frac{2\alpha\pi I}{(\pi R^2)^2}$$

۱۷۰) هنگامی که کلید را می‌بندیم با توجه به قانون ولتاژ کیرشهف kVL می‌توان نوشت:



$$V_\circ-RI-V_e=0 \qquad (1)$$

V_c: ولتاژ خازن :

باتوجه به این‌که $I=\frac{dq}{dt}, V_c=\frac{q}{c}$ می‌توان معادله فوق را به صورت زیر نوشت:

$$V_\circ-R\frac{dq}{dt}-\frac{q}{C}=0\rightarrow R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=V_\circ \qquad (2)$$

معادلهٔ «۲» که در آن رابطه بین بار q و مشتق آن برقرار است یک معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول گویند. در این‌جا بحث ما حل این‌گونه معادلات نیست فقط اشاره می‌کنیم که با جداسازی متغیرهای q و t وانتگرال‌گیری از معادلهٔ «۲» می‌توان تغییرات q را بر حسب t به صورت زیر نتیجه گرفت: (به مسألهٔ ۲۷۰ رجوع کنید.)

$$q(t)=CV_\circ(1-e^{\frac{-t}{RC}})\ \ t\geq 0 \qquad (3)$$

با جایگذاری q و مشتق آن در معادلهٔ «۲» می‌توان به راحتی درستی پاسخ مذکور را تحقیق کرد. تأکید می‌شود که در لحظهٔ $t = ۰$ مقدار q ذخیره شده روی خازن برابر صفر است که خالی از خاکی بودن مدار در هنگام بستن کلید می‌باشد. برای به دست آوردن ولتاژ دو سر خازن کافی است که از $V_c(t) = \frac{q}{C}$ کمک بگیریم، در نتیجه:

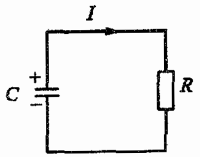
$$V_c(t) = V_۰(۱ - e^{-\frac{t}{RC}})t \geq ۰ \qquad (۴)$$

$$\frac{V_c}{V_۰} = ۱ - e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = ۱ - \frac{V_c}{V_۰} = \frac{V_۰ - V_c}{V_۰}$$

$$\rightarrow t = RC \ln \frac{V_۰}{V_۰ - V_c} \quad (۵)$$

$$V_c = ۰/۹V_۰ \xrightarrow{\text{از «۵»}} t = RC \ln ۱۰ = ۰/۶ \mu S$$

۱۷۱) در حقیقت خازن و مقاومت دی‌الکتریک به صورت سری هستند چرا که باری که از خازن خارج می‌شود از داخل دی‌الکتریک عبور می‌کند مثل شکل روبه‌رو به کمک قانون ولتاژ کیرشهف می‌توان نوشت:



$$V_c - RI = ۰$$

با توجه به این‌که جهت جریان انتخاب شده در جهت کاهش بار خازن است لذا $V_c = \frac{q}{C}, I = -\frac{dq}{dt}$ بنابراین معادلهٔ مذکور به صورت زیر در می‌آید.

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = ۰ \qquad (۱)$$

این معادله نیز از نوع معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول است، اما با انتگرال‌گیری به سادگی قابل حل است لذا:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{۱}{RC}dt \rightarrow \int_۰^q \frac{dq}{q} = \int_۰^t -\frac{۱}{RC}dt$$

$$\rightarrow q = q_۰ e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq ۰ \qquad (۲)$$

وقتی خازن نیمی از بار خود را از دست بدهد یعنی $q = \frac{q_۰}{۲}$ با جایگذاری در «۲» داریم :

$$\frac{q_۰}{۲} = q_۰ e^{\frac{-t}{RC}} \rightarrow \text{با لگاریتم گرفتن از طرفین } \ln \frac{۱}{۲} = -\frac{t}{RC} \rightarrow t = RC \ln ۲ \qquad (۳)$$

$$t = ۳ \min = ۳ \times ۶۰ = ۱۸۰ S \xrightarrow{\text{از «۳»}} RC = \frac{۱۸۰}{\ln ۲}$$

$$\rightarrow (\rho\frac{A}{d})(\frac{k\varepsilon_\circ A}{d}) = \frac{۱۸۰}{\ln ۲} \rightarrow \rho = \frac{۱۸۰}{k\varepsilon_\circ \ln ۲} = ۱/۴ \times ۱۰^{۱۳}\Omega.m$$

۱۷۲) فرض کنید q بار در لحظهٔ t باشد. در ابتدا که $t = ۰$ داریم $q = C\epsilon$ در لحظهٔ t نیز داریم:

$$\frac{nq}{C} - iR - \epsilon = ۰$$

از طرفی $i = \frac{-dq}{dt}$ (علامت منفی به خاطر این است که بار در حال کم شدن است.) بنابراین:

$$\frac{nq}{C} + R\frac{dq}{dt} = \epsilon \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{n}{RC}q = \frac{\epsilon}{R}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(qe^{tn/RC}) = \frac{\epsilon}{R}e^{tn/RC}$$

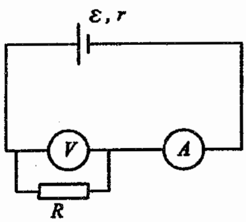
$$\rightarrow q = \frac{C\epsilon}{n} + Ae^{-nt/RC}$$

$$t = ۰ \rightarrow q = C\epsilon = \frac{C\epsilon}{n} + A \rightarrow A = C\epsilon(۱ - \frac{۱}{n})$$

$$\rightarrow q = C\epsilon[\frac{۱}{n} + (۱ - \frac{۱}{n})e^{-nt/RC}]$$

$$\rightarrow i = \frac{-dq}{dt} = \frac{\epsilon(n-۱)}{R}e^{-nt/RC}$$

۱۷۳) فرض کنید مقاومت داخلی باتری برابر r، مقاومت داخلی آمپرسنج، صفر و مقاومت داخلی ولت‌سنج برابر G باشد. در حالت اولیه (قبل از وصل کردن مقاومت) با توجه به قانون کیرشهف:



$$V_۱ = \epsilon - rI_۱, I_۱ = \frac{\epsilon}{r+G} \rightarrow V_۱ = \epsilon\frac{G}{r+G} \qquad (۱)$$

بعد از اتصال مقاومت R: مقاومت معادل برابر $r + \frac{RG}{R+G}$ می‌شود حال با توجه به قانون کیرشهف و با توجه به این‌که ولتاژ دو سر ولت‌سنج برابر $V_۲ = \frac{V_۱}{n}$ شده است داریم:

$$V_۲ = \frac{V_۱}{n} = \epsilon - rI_۲, I_۲ = \frac{\epsilon}{r + \frac{RG}{R+G}} \qquad (۲)$$

$$\rightarrow \frac{V_۱}{n} = \epsilon - \frac{r\epsilon}{r + \frac{RG}{R+G}} \qquad (۳)$$

از طرفی جریان آمپرسنج n برابر حالت اولیه شده است لذا:

$$I_۲ = nI_۱ \rightarrow \frac{\epsilon}{r + \frac{RG}{R+G}} = n\frac{\epsilon}{r+G} \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳) \rightarrow \frac{V_۱}{n} = \epsilon - \frac{nr\epsilon}{r+G} \qquad (۵)$$

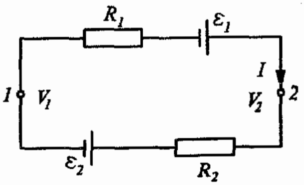
$$(۵),(۱) \rightarrow \frac{\epsilon G}{n(r+G)} = \epsilon - \frac{nr\epsilon}{r+G} \rightarrow \frac{G}{n} = (r+G) - nr$$

$$\rightarrow G = nr \qquad (٦)$$

$$V_۲ = \frac{V_۱}{n} = \frac{\epsilon G}{n(r+G)} = \frac{\epsilon(nr)}{n(r+nr)} = \frac{\epsilon}{n+۱}$$

$\rightarrow V_۲ = \frac{\epsilon}{n+۱}$ عدد ولت‌سنج در حالت ثانویه

۱۷۴) باتوجه به این‌که $\epsilon_۱ > \epsilon_۲$ لذا جریان نهایی مطابق شکل می‌شود. حال باتوجه به قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

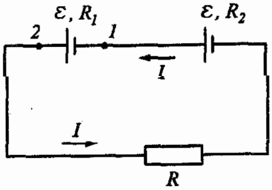


$$\epsilon_۱ R_۲ I - \epsilon_۲ - R_۱ I = ۰$$
$$\rightarrow I = \frac{\epsilon_۱ - \epsilon_۲}{R_۱ + R_۲}$$

حال اختلاف پتانسیل بین نقاط ۱ و ۲ با توجه به جهت جریان برابر است با :

$$V_۱ - R_۱ I + \epsilon_۱ = V_۲ \rightarrow V_۱ - V_۲ = R_۱ I - \epsilon_۱ = R_۱ \frac{\epsilon_۱ - \epsilon_۲}{R_۱ + R_۲} - \epsilon_۱$$

۱۷۵) با توجه به قانون ولتاژ کیرشهف kVL می‌توان نوشت:



$$\varepsilon - R_۲ I + \varepsilon - R_۱ I - RI = ۰$$

$$\rightarrow I = \frac{۲\varepsilon}{R_۱ + R_۲ + R} \qquad (۱)$$

اگر ولتاژ دو سر باتری سمت چپ صفر شود آن‌گاه داریم :

$$V = 0 \rightarrow V = \varepsilon - R_1 I = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_1} \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow \frac{2\varepsilon}{R_1 + R_2 + R} = \frac{\varepsilon}{R_1} \rightarrow 2R_1 = R_1 + R_2 + R$$

$$R = R_1 - R_2 \qquad (3)$$

رابطهٔ «۳» امکان ندارد زیرا $R_1 < R_2$,$R_1 - R_2 < 0$ و ما مقاومت منفی نداریم بنابراین باید ولتاژ باتری سمت راست صفر شود لذا:

$$V = \varepsilon - R_2 I = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_2} \qquad (4)$$

$$(4),(1) \rightarrow \frac{2\varepsilon}{R_1 + R_2 + R} = \frac{\varepsilon}{R_2} \rightarrow R = R_2 - R_1$$

۱۷۶) باتوجه به قانون ولتاژ کیرشهف برای این حلقه داریم :

$$N\varepsilon - NRI = 0 \rightarrow I = \frac{N\varepsilon}{NR} = \frac{\alpha R}{R} = \alpha$$

ب) باتوجه به این‌که جهت جریان در جهت عقربه‌های ساعت است لذا:

$$V_B + n\varepsilon - nRI = V_A \rightarrow V_A - V_B = n\varepsilon - nRI = n(\alpha R) - \pi R\alpha = 0$$

۱۷۷) در حالت پایدار که خازن پرشده است جریانی از آن نمی‌گذرد لذا جریان سیم وسطی صفر است. بنابراین به کمک قانون ولتاژ کیرشهف برای حلقه بیرونی و با توجه به این‌که جهت جریان از باتری قوی‌تر ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) تبعیت می‌کند (خلاف عقربه‌های ساعت) داریم:

$$\varepsilon_2 - R_2 I - R_1 I - \varepsilon_1 = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1 + R_2}$$

حال قانون ولتاژ کیرشهف را برای حلقهٔ درونی (پایینی) اعمال می‌کنیم در نتیجه:

$$\varepsilon_2 - R_2 I + (V_A - V_B) - \varepsilon_1 = 0 \rightarrow V_A - V_B = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + R_2 I \qquad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow V_A - V_B = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + R_2\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R_1 + R_2}\right) = -0/5V$$

۱۷۸) مقاومت معادل برابر $R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ است لذا:

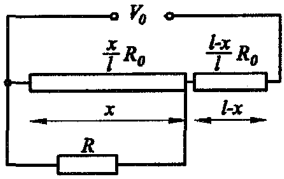
$$I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2}}$$

اگر I_1 جریان مقاومت R_1 و I_2 جریان مقاومت R_2 باشد آن‌گاه :

$$\left.\begin{array}{l} I_1 + I_2 = I \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{array}\right\} \rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = 1/2A$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = 0/8A$$

۱۷۹) با یک نسبت ساده ، مقاومت به طول x از پتانسیومتر برابر $R_x = \frac{x}{L} R_0$ می‌شود. حال به کمک شکل، مقاومت معادل مدار برابر است با:



$$R_t = \frac{L - x}{L} R_0 + \frac{R\frac{xR_0}{L}}{R + \frac{xR_0}{L}}$$

$$\rightarrow R_t = R_0 [\frac{L - x}{L} + \frac{xR}{LR + xR_0}]$$

بنابراین جریان کل مدار برابر است با $I_t = \frac{V_0}{R_t}$، به کمک مسألهٔ قبل جریان مقاومت R را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$I = \frac{\frac{x}{L} R_0}{R + \frac{x}{L} R_0} I_t$$

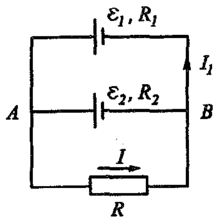
در نتیجه ولتاژ اعمال شده به مقاومت R مساوی است با:

$$V = RI = \frac{\frac{x}{L} R_0 R}{R + \frac{x}{L} R_0} \left(\frac{V_0}{R_0 [\frac{L - x}{L} + \frac{xR}{LR + xR_0}]} \right)$$

$$= \frac{RxV_0}{(LR + xR_0)(1 - \frac{x}{L} + \frac{xR}{LR + xR_0})} = \frac{RxV_0}{[LR + R_0 x(1 - \frac{x}{L})]}$$

$$, R >> R_0 \rightarrow V \simeq V_0 \frac{x}{L}$$

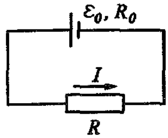
۱۸۰) فرض کنید مقاومت R متصل به دو باتری باشد. به کمک قانون ولتاژ کیرشهف برای شکل ۱ می‌توان نوشت:



$$\varepsilon_1 - R_1 I_1 - RI = 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_2 - R_2(I - I_1) - RI = 0 \qquad (2)$$

همچنین به کمک قانون ولتاژ کیرشهف برای باتری معادل (شکل ۲) می‌توان نوشت:



$$\varepsilon_0 - RI - R_0 I = 0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon_0}{R + R_2} \qquad (3)$$

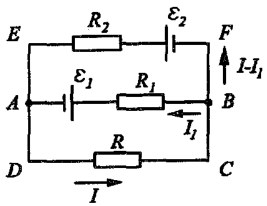
با حذف I_1 از روابط «۱» و «۲» می‌توان I را به صورت زیر به دست آورد.

$$I = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \left(\frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}\right) / \left(R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right) \qquad (4)$$

از مقایسهٔ روابط «۳» و «۴» به دست می‌آید که:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}, R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

۱۸۱) فرض می‌کنیم جهت جریان مقاومت R مطابق شکل باشد.



با نوشتن قانون ولتاژ کیرشهف برای حلقهٔ $ABCDA$ داریم :

$$\varepsilon_1 + R_1 I_1 + RI = 0 \qquad (1)$$

همچنین برای حلقهٔ $DCFED$ نیز می‌توان نوشت:

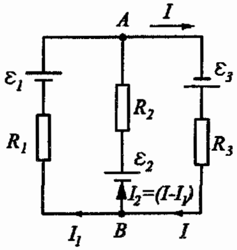
$$-RI + \varepsilon_2 - R_2(I - I_1) = 0 \qquad (2)$$

با حذف $I_۱$ از روابط «۱» و «۲» داریم:

$$I = \frac{(R_۱\varepsilon_۲ - R_۲\varepsilon_۱)}{RR_۱ + R_۱R_۲ + R_۲R} = ۰/۰۲A$$

چون مقدار جواب، مثبت درآمد نشان می‌دهد که جهت فرضی ما درست بوده است. اگر جواب منفی شود، جهت جریان در خلاف جهت فرضی ما می‌شد.

۱۸۲) جهت جریان‌ها را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. بانوشتن قانون ولتاژ کیرشهف برای حلقهٔ چپ و راست به ترتیب داریم :



$$\varepsilon_۲ - R_۲(I - I_۱) - \varepsilon_۱ + R_۱I_۱ = ۰ \qquad (۱)$$

$$\varepsilon_۲ - R_۲(I - I_۱) + \varepsilon_۳ - R_۳I = ۰ \qquad (۲)$$

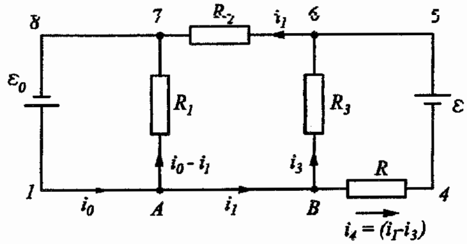
با حذف I از روابط فوق، $I_۱$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$I_۱ = \frac{R_۳(\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲) + R_۲(\varepsilon_۱ + \varepsilon_۳)}{R_۱R_۲ + R_۱R_۳ + R_۲R_۳} = ۰/۰۶A$$

ب)

$$V_A - \varepsilon_۱ + R_۱I_۱ = V_B \rightarrow V_A - V_B = \varepsilon_۱ - R_۱I_۱ = ۰/۹V$$

۱۸۳) جهت جریان را مطابق شکل در نظر می‌گیریم به کمک قانون ولتاز کیرشهف در حلقه‌های ۱A۷۸۱ و ۱B۶۸۱، B۴۵۶B به ترتیب می‌توان نوشت:



$$\varepsilon_۰ - R_۱(i_۰ - i_۱) = ۰ \qquad (۱)$$

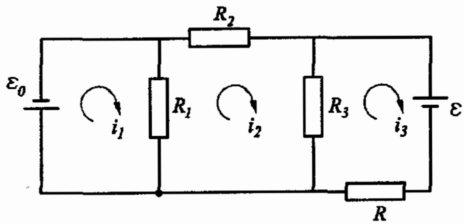
$$\varepsilon_0 - R_3 i_3 - R_2 i_1 = 0 \qquad (2)$$

$$-(i_1 - i_3)i_4 + \varepsilon + R_3 i_3 = 0 \qquad (3)$$

از حل معادلات فوق می‌توان به دست آورد:

$$(i_1 - i_3) = \frac{\varepsilon(R_2 + R_3) + \varepsilon_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

راه حل دوم : دقت کنید اگر تعداد حلقه‌های یک مدار زیاد شود نوشتن معادلات کیرشهف و حل آن‌ها ما را دچار سردرگمی می‌کند. روشی که در ذیل به آن اشاره می‌کنیم موسوم به تحلیل خانه‌ای است که در واقع با بهره‌گیری از قوانین ولتاژ کیرشهف (KVL) و جریان کیرشهف (kCL) می‌توان مدارهای الکتریکی را با هرنوع پیچیدگی بررسی و حل کرد. منظور از حل کامل یک مدار به دست آوردن جریان تمام شاخه‌ها و اختلاف پتانسیل دو سر هر کدام از عناصر آن است. مدارهایی که از تعداد زیادی شاخه تشکیل یافته‌اند، مسیرهای بستهٔ متعددی دارند. این مسیرهای بسته را حلقه گوییم. ساده‌ترین حلقه‌ها، مسیرهای بسته‌ای است که داخل آن‌ها دیگر حلقه‌ای موجود نیست و به آن‌ها مش گوییم. بنابراین در این مسأله ما ۶ حلقه و ۳ مش داریم. برای حل یک مدار نیازی به نوشتن KVL در تمام حلقه‌ها نیست بلکه کافی است پس از نام‌گذاری جریان شاخه‌ها، KVL را در تمام مش‌ها بنویسیم. آن‌گاه از قانون جریان کیرشهف در گره‌ها برای به دست آوردن رابطه بین جریان شاخه‌ها کمک می‌گیریم. و سپس با حل معادلات KVL و KCL نوشته شده جریان‌ها در تمام شاخه‌ها به دست خواهد آمد. حال به حل مسأله با روش تحلیل خانه‌ای توجه کنید.



حل: در این‌جا سه مش داریم. جهت جریان در هر مش را به صورت ساعت‌گرد در نظر می‌گیریم آن‌گاه KVL در مش به ترتیب از چپ به راست به صورت زیر می‌شود.

$$-\varepsilon_0 - R_1(i_1 - i_2) = 0 \qquad (1)$$

$$-R_1(i_2 - i_1) - R_2 i_2 - R_3(i_2 - i_3) = 0 \qquad (2)$$

$$-R_3(i_3 - i_2) - \varepsilon - R i_3 = 0 \qquad (3)$$

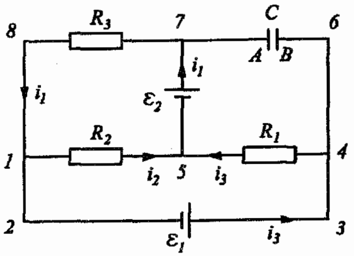
$$(۳)+(۲)+(۱) \rightarrow -\varepsilon_{\circ} - R_{۲}i_{۲} - \varepsilon - Ri_{۳} = \circ \qquad (۴)$$

با حذف $i_{۲}$ از روابط «۳» و «۴» داریم:

$$i_{۳} = -\frac{\varepsilon(R_{۲}+R_{۳})+\varepsilon_{\circ}R_{۳}}{R(R_{۲}+R_{۳})+R_{۲}R_{۳}}$$

نشان می‌دهد که جهت واقعی در خلاف جهت شکل است.
توجه: اگر مدار شما پیچیده است یا در نوشتن معادلات کیرشهف به صورت معمولی دچار سردرگمی می‌شوید حتماً از روش تحلیل خانه‌ای استفاده کنید.

۱۸۴) با توجه به این‌که از خازن پرجریانی نمی‌گذرد و با توجه به جهت جریان‌ها طبق شکل زیر، قانون ولتاژ کیرشهف را در حلقه‌های ۱۲۳۴۱ و ۱۵۷۸۱ به ترتیب می‌نویسیم:



$$\varepsilon_{۱} - R_{۱}i_{۳} + R_{۲}i_{۲} = \circ$$

$$\rightarrow \varepsilon_{۱} - R_{۱}i_{۳} + R_{۲}(i_{۱} - i_{۳}) = \circ \qquad (۱)$$

$$-R_{۲}i_{۲} + \varepsilon_{۲} - R_{۳}i_{۱} = \circ \rightarrow -(i_{۱} - i_{۳})R_{۲} + \varepsilon_{۲} - R_{۳}i_{۱} = \circ \qquad (۲)$$

باحذف $i_{۱}$ از روابط «۱» و «۲» $i_{۳}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

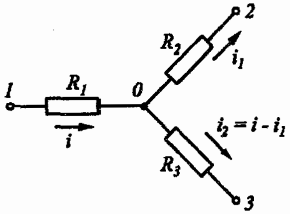
$$i_{۳} = \frac{\varepsilon_{۱}(R_{۲}+R_{۳})+\varepsilon_{۲}R_{۲}}{R_{۱}R_{۲}+R_{۲}R_{۳}+R_{۳}R_{۱}}$$

از طرفی می‌دانیم :

$$V_A - V_B = \varepsilon_{۲} - R_{۱}i_{۳}$$

$$= \frac{\varepsilon_{۲}R_{۳}(R_{۱}+R_{۲}) - \varepsilon_{۱}R_{۱}(R_{۲}+R_{۳})}{R_{۱}R_{۲}+R_{۲}R_{۳}+R_{۳}R_{۱}} = -۱V$$

۱۸۵) فرض کنید توزیع جریان در مسیرها به صورت شکل مقابل باشد، بنابراین:

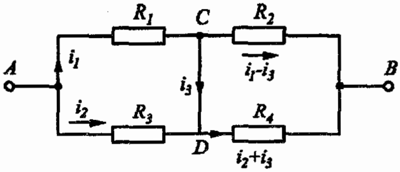


$$V_1 - R_1 i - R_2 i_1 = V_2 \qquad (1)$$
$$V_1 - R_1 i - R_3(i - i_1) = V_3 \qquad (2)$$

با حذف i_1 از روابط فوق داریم:

$$i = \frac{R_3(V_1 - V_2) + R_2(V_1 - V_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} = 0/2A$$

۱۸۶) جریان را مطابق شکل در نظر می‌گیریم به کمک قانون ولتاژ کیرشهف داریم.



$$i_1R_1 = i_2R_3 \qquad (1)$$
$$i_1R_1 + (i_1 - i_3)R_2 = V \qquad (2)$$
$$i_2R_3 + (i_2 + i_3)R_4 = V \qquad (3)$$

i_2 را از روابط فوق حذف می‌کنیم لذا:

$$i_1(R_1 + R_2) - i_3R_2 = V$$
$$i_1\frac{R_1}{R_3}(R_3 + R_4) + i_3i_4 = V$$

از روابط فوق i_1 را حذف می‌کنیم در نتیجه،

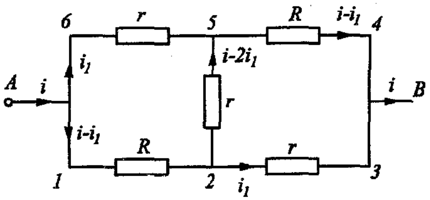
$$i_1 = \frac{V_1 + i_3R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow \left(\frac{V + i_3R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{R_1}{R_3}(R_3 + R_4) + i_3R_4 = V$$

$$\rightarrow i_3[R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)]$$
$$= V[R_3(R_1 + R_2) - R_1(R_3 + R_4)]$$

$$\rightarrow i_3 = \frac{R_3(R_1 + R_2) - R_1(R_3 + R_4)}{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)} = 1A$$

چون جواب مثبت است لذا جریان مطابق شکل خواهد بود یعنی از C به طرف D.

۱۸۷) با توجه به تقارن مسأله، جریان‌ها را می‌توان مطابق شکل در نظر گرفت.



$$V_A - V_B = ri_۱ + R(i - i_۱) \qquad (۱)$$

بانوشتن قانون ولتاژ کیرشهف در حلقه ۱۲۵۶۱ داریم:

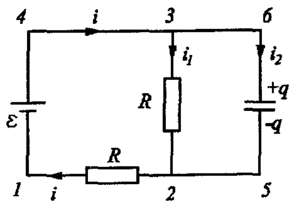
$$-R(i - i_۱) - r(i - ۲i_۱) + ri_۱ = ۰$$
$$\rightarrow i_۱ = \frac{r + R}{۳r + R} i \qquad (۲)$$

اگر R_e مقاومت معادل بین نقاط A و B باشد آن‌گاه به کمک روابط «۱» و «۲» داریم:

$$R_e = \frac{V_A - V_B}{i} = \frac{(r - R)i_۱ + Ri}{i} = (r - R)\frac{i_۱}{i} + R = (r - R)(\frac{r + R}{۳r + R}) + R$$

$$\rightarrow R_e = \frac{r(r + ۳R)}{۳r + R}$$

۱۸۸) فرض کنید در هر لحظه بارهای روی صفحات خازن به ترتیب به صورت $+q$ و $-q$ باشد بنابراین ولتاژ خازن برابر $V_C = \frac{q}{c}$ خواهد بود.



می‌دانیم :

$$i = i_۱ + i_۲ \quad , \quad i_۲ = \frac{dq}{dt} \qquad (۱)$$

بانوشتن قانون ولتاژ کیرشهف kVL در حلقهٔ ۶۵۱۴۶ داریم.

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - Ri = ۰ = \qquad (۲)$$

همچنین در حلقهٔ ۲۵۶۳۲ داریم:

$$\frac{q}{C} - Ri_۱ = ۰ \rightarrow Ri_۱ = \frac{q}{C} \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲),(۱) \to \varepsilon - \frac{q}{C} - R(i_۱ + \frac{dq}{dt}) = ۰ \to \varepsilon - \frac{q}{C} - \frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = ۰$$

$$\to \frac{dq}{\varepsilon - \frac{۲q}{C}} = \frac{dt}{R} \to \int_۰^q \frac{dq}{\varepsilon - \frac{۲q}{C}} = \int_۰^t \frac{dt}{R}$$

$$\to -\frac{C}{۲}\ln(\varepsilon - \frac{۲q}{C})|_۰^q = \frac{t}{R} \to \ln(\frac{\varepsilon - \frac{۲q}{C}}{\varepsilon}) = \frac{-۲t}{CR}$$

$$\to \varepsilon - \frac{۲q}{C} = \varepsilon e^{-۲t/CR} \to V_c = \frac{q}{C} = \frac{۱}{۲}\varepsilon(۱ - e^{-۲t/RC})$$

۱۸۹) الف) با توجه به این‌که جریان نسبت به زمان به صورت یک تابع خطی است و به طور مثال از مقدار $i_۰$ در مدت زمان Δt به صفر می‌رسد لذا:

$$i = mt + b \qquad (۱)$$

$$t = ۰ \Rightarrow i = i_۰ \to i_۰ = b \qquad (۲)$$

$$t = \Delta t \Rightarrow i = ۰ \to ۰ = m\Delta + b \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲),(۱) \to i = \frac{-i_۰}{\Delta t}t + i_۰ = i_۰(۱ - \frac{t}{\Delta t}) \qquad (۴)$$

$$q = \int_۰^{\Delta t} idt = \int_۰^{\Delta t} i_۰(۱ - \frac{t}{\Delta t})dt = i_۰(t - \frac{t^۲}{۲\Delta t})|_۰^{\Delta t}$$

$$q = \frac{i_۰\Delta t}{۲} \to i_۰ = \frac{۲q}{\Delta t} \qquad (۵)$$

$$(۵),(۴) \to i = \frac{۲q}{\Delta t}(۱ - \frac{t}{\Delta t})$$

$$\text{توان} = P = \frac{dQ}{dt} = Ri^۲ \to Q = \int_۰^t Ri^۲ dt$$

$$Q = \int_۰^t R\frac{۴q^۲}{\Delta t^۲}(۱ - \frac{t}{\Delta t})^۲ dt = \frac{۴Rq^۲}{\Delta t^۲}(-\Delta t)\frac{۱}{۳}(۱ - \frac{t}{\Delta t})^۳|_۰^{\Delta t}$$

$$Q = \frac{۴q^۲R}{۳\Delta t}$$

ب) اگر مقدار اولیهٔ جریان $i_۰$ باشد در زمان $t = \Delta t$ جریان برابر $i_۱ = \frac{i_۰}{۲}$ و در زمان $t = ۲\Delta t$ جریان برابر $i_۲ = \frac{i_۰}{۲^۲}$، ... و در زمان $t = n\Delta t$ جریان برابر $i_n = \frac{i_۰}{۲^n}$ خواهد بود لذا:

$$t = n\Delta t, i_n = \frac{i_۰}{۲^n} \to n = \frac{t}{\Delta t}, \frac{i_n}{i_۰} = \frac{۱}{۲^n}$$

$$\rightarrow \frac{i_n}{i_\circ} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{\Delta t}} \rightarrow i = i_\circ (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{\Delta t}} \qquad (۱)$$

باتوجه به این‌که با شرایط فرض «ب» در زمان بی‌نهایت مقدار جریان به صفر می‌رسد لذا :

$$q = \int_\circ^\infty i dt = \int_\circ^\infty i_\circ (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{\Delta t}} = i_\circ \int_\circ^\infty ۲^{-\frac{t}{\Delta t}}$$

$$= i_\circ (\frac{-\Delta t}{\ln ۲}) ۲^{-\frac{t}{\Delta t}} |_\circ^\infty$$

$$q = \frac{i_\circ \Delta t}{\ln ۲} \rightarrow i_\circ = \frac{q \ln ۲}{\Delta t} \qquad (۲)$$

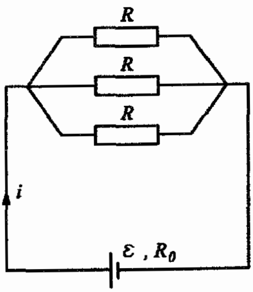
مقدار گرمای تولید شده برابر است با:

$$(۲),(۱) \rightarrow i = \frac{q \ln ۲}{\Delta t} (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{\Delta t}}$$

$$Q = \int_\circ^\infty R i^۲ dt = \int_\circ^\infty R (\frac{q \ln ۲}{\Delta t} ۲^{-\frac{t}{\Delta t}})^۲ dt = \frac{R q^۲ (\ln ۲)^۲}{\Delta t^۲} (\frac{-\Delta t}{۲}) ۲^{-\frac{t}{\Delta t}} |_\circ^\infty$$

$$Q = \frac{q^۲ (\ln ۲) R}{۲ \Delta t}$$

۱۹۰) باتوجه به این‌که اختلاف ولتاژ دو سر مقاومت‌ها با هم برابر هستند لذا می‌توان مدار را به صورت روبه‌رو ترسیم کرد. بنابراین مقاومت معادل برابر است با:



$$R_e = R_\circ + \frac{R}{۳}$$

جریان مدار نیز برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon}{R_\circ + \frac{R}{۳}}$$

توان گرمایی تولید شده در مدار برابر است با:

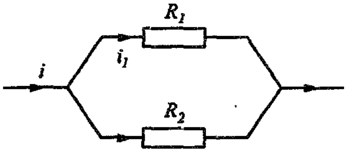
$$P = \frac{R}{۳} i^۲ = \frac{R}{۳} \frac{\varepsilon^۲}{(R_\circ + \frac{R}{۳})^۲}$$

برای این‌که توان گرمایی ماکزیمم باشد برای یافتن R قرار می‌دهیم $\frac{dP}{dR} = \circ$ لذا:

$$\frac{\varepsilon^{۲}}{۳(R_{۰}+\frac{R}{۳})^{۲}}+\frac{R}{۳}\frac{-\frac{۲}{۳}(R_{۰}+\frac{R}{۳})\varepsilon^{۲}}{(R_{۰}+\frac{R}{۳})^{۴}}=۰$$

$$\rightarrow ۱-\frac{۲}{۳}\frac{R}{(R_{۰}+\frac{R}{۳})}=۰\rightarrow R=۳R_{۰}$$

۱۹۱) باتوجه به بقای جریان، توان اتلافی گرمایی تولید شده برابر است با:



$$P=R_{۱}i_{۱}^{۲}+R_{۲}(i-i_{۱})^{۲}$$

برای این‌که P می‌نیمم شود کافی است قرار دهیم: $\frac{dp}{di_{۱}}=۰$ بنابراین

$$\frac{dp}{di_{۱}}=۲R_{۱}i_{۱}-۲R_{۲}(i-i_{۱})=۰\rightarrow i_{۱}=\frac{R_{۲}}{R_{۱}+R_{۲}}i$$

۱۹۲) اگر r مقاومت داخلی باتری باشد آن‌گاه ولتاژ دو سر باتری و توان گرمایی تولید شده درون باتری به ترتیب برابرند با:

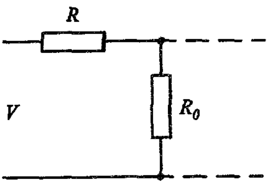
$$V=\varepsilon-rI \qquad (۱)$$

$$Q=rI^{۲} \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱)\rightarrow Q=(\frac{\varepsilon-V}{I})I^{۲}=(\varepsilon-V)I=۰/۶W$$

می‌دانیم در یک باتری کار توسط نیروهای الکتریکی انجام داده می‌شود (که منشأ آن فرایندهای شیمیایی است که درون باتری صورت می‌گیرد) بنابراین کار انجام شده، ذخیره می‌شود و در مدار الکتریکی خارجی مورد استفاده قرار می‌گیرد و بزرگی آن درست برابر با توان مصرفی در مدار الکتریکی است. بنابراین می‌توانیم بگوییم که توان خالص گسترش یافته توسط نیروهای الکتریکی برابر است با $P=-IV=-۲W$ علامت منفی نشان می‌دهد که این توان تولیدی است و نه مصرفی.

۱۹۳) توانی که موتور می‌گیرد مقداری از آن صرف اتلافات درونی می‌شود و مقداری از آن به صورت مفید به بار $R_{۰}$ داده می‌شود. بنابراین:



$$I = \frac{V}{R+R_\circ}$$

$$\text{توان مفید} = P = R_\circ I^{\text{۲}} = \frac{R_\circ V^{\text{۲}}}{(R_\circ + R)^{\text{۲}}}$$

برای این‌که توان مفید ماکزیمم باشد، باید $\frac{dP}{dR_\circ} = \circ$ شود لذا:

$$\frac{dP}{dR_\circ} = \frac{V^{\text{۲}}(R_\circ + R)^{\text{۲}} - \text{۲}R_\circ V^{\text{۲}}(R_\circ + R)}{(R_\circ + R)^{\text{۲}}} = \circ \rightarrow R = R_\circ$$

بنابراین:

$$I = \frac{V}{\text{۲}R}$$

$$\text{ماکزیمم توان مفید}\ P_{max} = \frac{RV^{\text{۲}}}{\text{۴}R^{\text{۲}}} = \frac{V^{\text{۲}}}{\text{۴}R}$$

می‌دانیم توان ورودی برابر $\frac{V^{\text{۲}}}{R+R_\circ}$ و مقدار این توان هنگامی که توان مفید ماکزیمم باشد برابر $\frac{V^{\text{۲}}}{\text{۲}R}$ خواهد بود لذا:

$$\text{بازده} = \frac{\text{توان مفید}}{\text{توان ورودی}} = \frac{\frac{V^{\text{۲}}}{\text{۴}R}}{\frac{V^{\text{۲}}}{\text{۲}R}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \text{۵۰}\%$$

۱۹۴) اگر قطر سیم به مقدار δ کم شود آن‌گاه:

$$Q:\ \text{حرارت از دست رفته از طریق سطح} = \text{توان} = P = \frac{V^{\text{۲}}}{R}$$

بنابراین $Q \propto (\text{۱} - \delta)$:

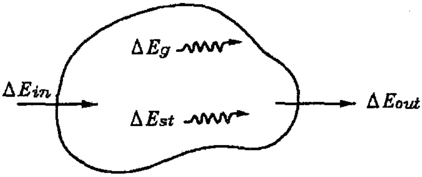
$$\rightarrow R\alpha(\text{۱} - \delta)^{-\text{۲}} \rightarrow \frac{V^{\text{۲}}}{R_\circ}(\text{۱} - \delta)^{\text{۲}} = A(\text{۱} - \delta)$$

$$\rightarrow V^{\text{۲}}(\text{۱} - \delta) = \text{ثابت}$$

از طرفی $V\alpha \text{۱} + n$ لذا $(\text{۱} - \delta)(\text{۱} + n)^{\text{۲}} = \text{ثابت} = \text{۱}$

$$\rightarrow \delta = \text{۲}n = \text{۲}\%$$

۱۹۵) قبل از حل مسأله لازم است فرمول انتقال گرما از یک حجم مورد نظر را به دست بیاوریم. در این‌جا مناسب است به اختلاف اساسی موجود بین انتقال گرما و ترمودینامیک اشاره شود. ترمودینامیک با حالت‌های تعادل ماده سر و کار دارد بنابراین در این حالت تغییرات دمایی Δt نداریم اما انتقال گرما ذاتاً یک فرایند غیرتعادلی است و برای وقوع انتقال گرما، وجود اختلاف دما ΔT الزامی است که دلیل بر غیر تعادلی بودن آن دارد. با استفاده از بقای انرژی برای حجم مورد نظر در فاصلهٔ زمانی Δt می‌توان به فرمول انتقال گرما دست یافت. باتوجه به این قانون در یک بازهٔ زمانی Δt، مقدار انرژی‌های گرمایی و مکانیکی ورودی به حجم مورد نظر ΔE_{in} به اضافهٔ انرژی گرمایی تولید شده در داخل حجم ΔE_g، منهای مقدار انرژی‌هایی که حجم را ترک می‌کنند ΔE_{out}، باید با مقدار انرژی ذخیره شده در حجم ΔE_{st} برابر باشد، لذا:



$$\Delta E_{in} + \Delta E_g - \Delta E_{out} = \Delta E_{st}$$

با تقسیم طرفین رابطهٔ فوق Δt داریم:

$$\frac{\Delta E_{in}}{\Delta t} + \frac{\Delta E_g}{\Delta t} - \frac{\Delta E_{out}}{\Delta t} = \frac{\Delta E_{st}}{\Delta t}$$

حال اگر Δt را به سمت صفر میل دهیم جملات تبدیل به مشتق می‌شوند لذا:

$$\frac{dE_{in}}{dt} + \frac{dE_g}{dt} - \frac{dE_{out}}{dt} = \frac{dE_{st}}{dt} \text{ یا } \dot{E_{in}} + \dot{E_g} - \dot{E_{out}} = \dot{E_{st}} \qquad (۱)$$

در این مسأله نرخ انرژی‌ها به صورت زیر است:

$$\dot{E_{in}} = ۰, \dot{E_g} = \frac{V^۲}{R}, E_{out} = q = k(T - T_۰)$$

c : ظرفیت گرمایی ویژه و C: ظرفیت گرمایی $\Leftarrow (mc = C)$

$$\dot{E_{st}} = \frac{d}{dt}(mcT) = \frac{d}{dt}(CT) = C\frac{dT}{dt}$$

با جایگذاری در رابطهٔ «۱» داریم:

$$\frac{V^۲}{R} - k(T - T_۰) = C\frac{dt}{dt} \qquad (۲)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (۳)$$

با تغییر متغیر $T - T_۰ = \theta$ داریم:

$$\rightarrow \frac{V^۲}{R} - k\theta = C\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} + \frac{k}{C}\theta = \frac{V^۲}{RC} \qquad (۴)$$

معادلهٔ فوق یک معادله دیفرانسیل می‌باشد (معادله‌ای که در آن تابع و مشتق آن حضور داشته باشد) دراین‌جا مجال آن نیست که حل این‌گونه معادلات رابسط دهیم فقط برای آشنایی شما مختصری حل معادلهٔ بالا را بیان می‌کنیم. اگر طرفین معادله فوق را در $e^{kt/c}$ ضرب کنیم داریم:

$$e^{\frac{kt}{c}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{k}{C}\theta e^{\frac{kt}{C}} = \frac{V^۲}{RC}e^{\frac{kt}{C}}$$

$$\frac{d}{dt}(\theta e^{kt/C}) = \frac{V^۲}{RC}e^{kt/c} \rightarrow \int d(\theta e^{kt/C}) = \frac{V^۲}{RC}e^{kt/C}dt$$

$$\theta e^{kt/C} = \frac{V^۲}{kR}e^{kt/C} + A \qquad (۵)$$

A یک عدد ثابت می‌باشد. با توجه به این‌که در لحظهٔ اولیه $t = ۰$، مقاومت در محیط قرار داشته لذا دمای آن دمای محیط بوده است در نتیجه در لحظهٔ اولیه $T = T_۰$ بنابراین در لحظهٔ

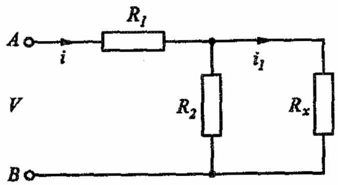
اولیه $\theta = T - T_\circ = \circ$ می‌شود.

$$t = \circ, \theta = \circ \xrightarrow{\text{جایگذاری در «۵»}} \circ = \frac{V^{۲}}{kR} + A \rightarrow A = \frac{-V^{۲}}{kR} \qquad (٦)$$

$$(٦),(\text{۵}) \rightarrow \theta = \frac{V^{۲}}{kR} - \frac{V^{۲}}{kR}e^{-kt/C} \rightarrow T - T_\circ = \frac{V^{۲}}{kR}(۱ - e^{-kt/C})$$

$$\rightarrow T = T_\circ + \frac{V^{۲}}{kR}(۱ - e^{-kt/C})$$

۱۹۶) با فرض این‌که ولتاژ اعمالی بین نقاط A و B برابر V باشد آن‌گاه توان گرمایی تولید شده در مقاومت R_x برابر است با:



$$P = R_x i_۱^{۲} \qquad (۱)$$

با استفاده از حل مسأله ۱۷۸ داریم:

$$i_۱ = [\frac{V}{R_۱ + \frac{R_۲ R_x}{R_۲ + R_x}} \frac{R_۲}{R_۲ + R_x}] \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow P = R_x[\frac{V}{R_۱ + \frac{R_۲ R_x}{R_۲ + R_x}} \frac{R_۲}{R_۲ + R_x}]^{۲} \qquad (۳)$$

چون توان P از تغییرات کوچک مقاومت R_x، یعنی dR_x مستقل باید باشد لذا می‌توان گفت $\frac{dp}{dRx} = \circ$ بنابراین:

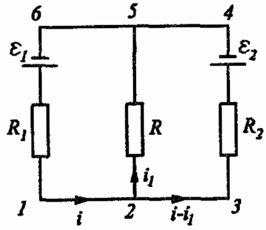
$$(۳) \rightarrow P = R_x[\frac{R_۲ V}{R_۱(R_۲ + R_x) + R_۲ R_x}]^{۲}$$

$$\frac{dp}{R_x} = \circ \rightarrow \quad [\frac{R_۲ V}{(R_۱ + R_۲)R_x + R_۱ R_۲}]^{۲} + ۲R_x[\frac{R_۲ V}{(R_۱ + R_۲)R_x + R_۱ R_۲}] \times$$

$$\frac{-R_۲ V(R_۱ + R_۲)}{[R_x(R_۱ + R_۲) + R_۱ R_۲]^{۲}} = \circ$$

$$\rightarrow R_x = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} = ۱۲\Omega$$

۱۹۷) اگر جریان‌ها را مطابق شکل در نظر بگیریم با نوشتن قانون ولتاژ کیرشهف kVL در حلقه ۱۲۵۶۱ داریم:



$$-Ri_۱ + \varepsilon_۱ - R_۱ i = ۰ \qquad (۱)$$

همچنین در حلقهٔ ۲۳۴۵۲ به دست می‌آید که:

$$-R_۲(i - i_۱) - \varepsilon_۲ + Ri_۱ = ۰ \qquad (۲)$$

با حذف i از روابط «۱» و «۲» نتیجه می‌دهد:

$$i_۱ = \frac{\varepsilon_۱ R_۲ + \varepsilon_۲ R_۱}{RR_۱ + R_۱ R_۲ + RR_۲}$$

از طرفی توان گرمایی تولید شده در مقاومت R برابر است با:

$$P = Ri_۱^۲ = R[\frac{\varepsilon_۱ R_۲ + \varepsilon_۲ R_۱}{RR_۱ + R_۱ R_۲ + RR_۲}]^۲$$

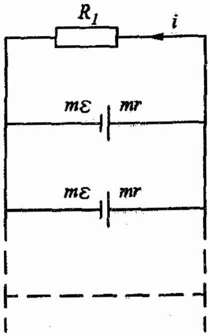
برای این‌که، توان P ماکزیمم شود قرار می‌دهیم $\frac{dp}{dx} = ۰$ لذا :

$$\frac{dp}{dR} = ۰ \rightarrow R = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲}$$

با جایگذاری، توان ماکزیمم برابر است با :

$$P_{max} = \frac{(\varepsilon_۱ R_۲ + \varepsilon_۲ R_۱)^۲}{۴R_۱ R_۲ (R_۱ + R_۲)}$$

۱۹۸) اگر m تعداد باتری‌هایی باشند که به صورت سری در n گروه موازی به هم متصل باشند آن‌گاه:



$$mn = N \to m = \frac{N}{n} \qquad (۱)$$

باتوجه به این‌که n شاخه‌ای که با هم موازی هستند عیناً مثل هم می‌باشند لذا از هر کدام جریان $\frac{i}{n}$ می‌گذرد (i جریان عبوری از مقاومت R) حال برای هر حلقه‌ای که شامل یکی از این n شاخه و مقاومت R باشد طبق قانون ولتاژ کیرشهف می‌توان نوشت،

$$m\varepsilon - mr(\frac{i}{n}) - Ri = ۰ \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \to i = \frac{m\varepsilon}{R + \frac{mr}{n}} = \frac{\frac{N}{n}\varepsilon}{R + \frac{Nr}{n^۲}}$$

توان گرمایی تولید شده در مقاومت R برابر است با:

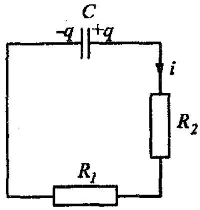
$$P = Ri^۲ = R(\frac{Nn\varepsilon}{n^۲R + Nr})^۲$$

برای این‌که توان P ماکزیمم شود قرار می‌دهیم $\frac{dp}{dn} = ۰$ لذا:

$$\frac{dp}{dn} = ۰ \to ۲R[\frac{N\varepsilon(n^۲R + Nr) - Nn\varepsilon(۲nR)}{n^۲R + Nr}](\frac{Nn\varepsilon}{n^۲R + Nr}) = ۰$$

$$\to n = \sqrt{\frac{Nr}{R}} = ۳$$

۱۹۹) هنگامی که کلید در وضعیت ۱ قرار دارد خازن پر شده و جریان در مدار قطع می‌شود لذا بار خازن $q_۰$ برابر است با:



$$q_0 = C\varepsilon \qquad (۱)$$

حال هنگامی که کلید به وضعیت ۲ منتقل می‌شود، مدار مسألهٔ مطابق شکل روبه‌رو شده و خازن شروع به خالی شدن می‌کند و لذا جریان i را در مدار ایجاد می‌کند. حال با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$-(R_1 + R_2)i + V_c = 0 \rightarrow (R_1 + R_2)i = Vc = \frac{q}{C}$$

چون بار خازن مرتب در حال کم شدن است لذا $i = \dfrac{-dq}{dt}$

$$\rightarrow (R_1 + R_2)(-\frac{dq}{dt}) = \frac{q}{c} \rightarrow \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}\int_0^t dt$$

$$\rightarrow \ln(\frac{q}{q_0}) = \frac{-t}{(R_1 + R_2)C} \rightarrow q = q_0 e^{\frac{-t}{(R_1 + R_2)C}} \qquad (۱)$$

$$i = \frac{-dq}{dt} = -q_0 e^{\frac{-t}{(R_1 + R_2)C}}(\frac{-1}{(R_1 + R_2)C}) = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} e^{\frac{-t}{(R_1 + R_2)C}} \qquad (۲)$$

گرمای ایجاد شده در مقاومت‌ها را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$P_1 = \frac{dQ_1}{dt} = R_1 i^2 \quad P = \frac{dQ_2}{dt} = R_2 i^2$$

$$Q_1 = \int_0^\infty R_1 i^2 dt = \int_0^\infty R_1 (\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2})^2 e^{\frac{-t}{(R_1 + R_2)C}} |_0^\infty$$

$$Q_1 = R_1 (\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2})^2 [-\frac{(R_1 + R_2)C}{2}] e^{\frac{-2t}{(R_1 + R_2)C}} |_0^\infty$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}\frac{CR_1}{R_1 + R_2}\varepsilon^2$$

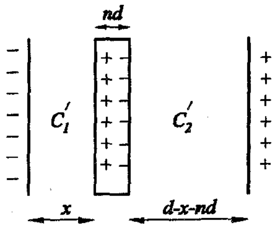
به همین ترتیب می‌توان برای مقاومت R_2 نوشت:

$$P_2 = R_2 i^2 = \frac{dQ_2}{dt} \rightarrow Q_2 = \int_0^\infty R_2 i^2 dt$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\frac{CR_2}{R_1 + R_2}\varepsilon^2$$

۲۰۰) هنگامی که صفحه فلزی داخل خازن نیست ظرفیت خازن برابر $C = \frac{\varepsilon_\circ S}{d}$ است. هنگامی که صفحه فلزی داخل خازن باشد ظرفیت در این حالت برابر $C_۱ = \frac{\varepsilon_\circ S}{d(۱-n)}$ است.

اثبات: وقتی صفحه فلزی داخل خازن باشد در واقع خازن متشکل از دو خازن سری می‌شود بنابراین باتوجه به شکل داریم.



$$\frac{۱}{C_۱} = \frac{۱}{C'_۱} + \frac{۱}{C'_۲} \qquad (۱)$$

$$C'_۱ = \frac{\varepsilon_\circ S}{x}, C'_۲ = \frac{\varepsilon_\circ S}{(۱-n)d - x} \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow \frac{۱}{C_۱} = \frac{x + (۱-n)d - x}{\varepsilon_\circ S}$$

$$= \frac{(۱-n)d}{\varepsilon_\circ S} \rightarrow C_۱ = \frac{\varepsilon_\circ S}{(۱-n)d} = \frac{C}{۱-n}$$

الف) تغییر انرژی خازن هنگامی که صفحه بیرون آورده می‌شود برابر است با:

$$\Delta u = u_۲ - u_۱ = \frac{۱}{۲}CV^۲ - \frac{۱}{۲}C_۱V^۲ = \frac{۱}{۲}V^۲(C - \frac{C}{۱-n})$$

$$= \frac{۱}{۲}CV^۲(\frac{n}{n-۱}) < \circ$$

ب) همان‌طور که ملاحظه می‌شود انرژی خازن کم شده است. روی صفحه فلزی بارهای القاء شده نسبت به صفحات خازن غیر همنام هستند (مطابق شکل) لذا برای بیرون آوردن صفحهٔ فلزی، باید انرژی مصرف کنیم تا براین بارهای غیر همنام غلبه کنیم. این انرژی مصرف شده در مدار باید ذخیره شود. از طرفی چون انرژی خازن بعد از بیرون آوردن صفحهٔ فلزی کم شده است در نتیجه این انرژی در باتری ذخیره گردیده است.

بنابراین می‌توان نوشت :

$$W + W_\varepsilon = \Delta u \qquad (۳)$$

W: کار مکانیکی که ما انجام می‌دهیم تا صفحهٔ فلزی بیرون آید.

W_ε: کار باتری و Δu: تغییر انرژی خازن.

$$W_\varepsilon = \Delta q V = [CV - (\frac{C}{۱-n})V]V$$

$$= CV^۲(\frac{n}{n-۱}) < ۰ \qquad (۴)$$

کار باتری منفی است یعنی باتری انرژی ذخیره می‌کند. حال به کمک قسمت الف و روابط «۳» و «۴» کار مکانیکی به دست می‌آید.

$$W + CV^۲(\frac{n}{n-۱}) = \frac{۱}{۲}CV^۲(\frac{n}{n-۱}) \rightarrow W = \frac{۱}{۲}CV^۲(\frac{n}{۱-n}) > ۰$$

۲۰۱) ظرفیت خازن بدون تیغهٔ شیشه‌ای برابر $C = \frac{\varepsilon_۰ A}{d}$ و با تیغهٔ شیشه‌ای برابر $C_۱ = \frac{k\varepsilon_۰ A}{d} = kC$ است. مطابق حل مسألهٔ قبل داریم :

الف) تغییر انرژی خازن برابر است با:

$$\Delta u = u_۲ - u_۱ = \frac{۱}{۲}CV^۲ - \frac{۱}{۲}C_۱V^۲ = \frac{۱}{۲}CV^۲(۱-k) < ۰$$

ب) $$W_\varepsilon = \Delta q V = (q_۲ - q_۱)V = (CV - kCV)V = CV^۲(۱-k) < ۰$$

$$W + W_\varepsilon = \Delta u \rightarrow W = \frac{۱}{۲}CV^۲(k-۱)$$

۲۰۲) با توجه به این‌که فاصلهٔ صفحات خازن از شعاع متوسط استوانه خازن خیلی کوچکتر است لذا برای محاسبهٔ ظرفیت می‌توان از فرمول خازن‌های تخت استفاده کرد. بنابراین اگر ارتفاع این خازن L و شعاع متوسط آن r باشد آن‌گاه اگر آب تا ارتفاع x بالا بیاید ظرفیت خازن ترکیب موازی دو خازن است که یکی دارای دی‌الکتریک آب با ضریب دی‌الکتریک k و دیگری بدون آن است لذا:

$$C = \frac{k\varepsilon_۰(۲\pi rh)}{d} + \frac{\varepsilon_۰[۲\pi r(L-x)]}{d} = \frac{\varepsilon_۰ ۲\pi r}{d}[L + (k-۱)x] \qquad (۱)$$

بنابراین انرژی خازن در این حالت برابر است با، $U = \frac{۱}{۲}CV^۲$ از طرفی می‌توان نیروی جاذبه بین دی‌الکتریک آب و خازن را از رابطهٔ $F_x = \frac{-du}{dx}$ به دست آورد. اثبات این رابطه در آخر مسأله آورده شده است. از طرفی چون ولتاژ خازن ثابت است لذا:

$$F_x = \frac{-du}{dx} = -\frac{۱}{۲}V^۲\frac{dc}{dx} \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow F_x = -\frac{۱}{۲}V^۲\frac{\varepsilon_۰ ۲\pi r}{d}(k-۱)$$

علامت منفی در رابطهٔ فوق نشان دهندهٔ این است که نیرو جاذبه‌ای است که البته ما با مقدار F_x کار داریم. از طرفی این نیرو باید بتواند وزن آب به ارتفاع x را تحمل کند لذا:

$$F_x = mg = \rho(2\pi r x d)g$$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon_0 \pi r V^2}{d}(k-1) = \rho 2\pi r x d g$$

$$\rightarrow x = \frac{\varepsilon_0 V^2 (k-1)}{2\rho d^2 g}$$

اثبات رابطه $F_x = \frac{-du}{dx}$:

می‌دانیم انرژی مکانیکی E یک دستگاه برابر مجموع انرژی پتانسیل u و انرژی جنبشی آن k است یعنی

$$E = k + u \qquad (1)$$

حال اگر در دستگاه اتلافات نداشته باشیم و تمام نیروهای وارد بر دستگاه پایستار باشند (کار انجام شده توسط نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد مثل کار نیروی وزن) آن‌گاه برای تغییر وضعیت دستگاه از حالت ۱ به حالت ۲ $\Delta E = E_2 - E_1 = 0$ لذا :

$$\Delta E = \Delta k + \Delta u \rightarrow \Delta k + \Delta u = 0 \rightarrow \Delta u = -\Delta k \qquad (2)$$

از طرفی به کمک قضیهٔ کار و انرژی داریم:

$$W = \Delta k \qquad (3)$$

$$(3),(2) \rightarrow \Delta u = -W \qquad (4)$$

برای حالت یک بعدی (جهت x) مثل این مسأله می‌دانیم کار انجام شدهٔ W روی یک ذره هنگامی که ذره مسافت Δx را طی می‌کند برابر با $F(x)\Delta x$ است. ($F(x)$ نیروی وارد بر ذره) بنابراین با جایگذاری در رابطهٔ «۴» داریم:

$$\Delta U = -W = -F(x)\Delta x \rightarrow F(x) = \frac{-\Delta u}{\Delta x}$$

در حالت حد هنگامی که Δx به سمت صفر میل کند رابطهٔ بالا تبدیل به مشتق می‌شود. در نتیجه : (حرکت یک بعدی)

$$F_x = F(x) = \frac{-du}{dx}$$

نکته: اگر حرکت به صورت سه بعدی بود آن‌گاه :

$$F_x = \frac{-du}{dx}, F_y = \frac{-du}{dy}, F_z = \frac{-du}{dz}$$

۲۰۳) ابتدا یک پوسته کروی با شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r + dr$ در داخل کره در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که خطوط جریان در هر نقطه عمود بر سطح آن است لذا می‌توان آنرا رسانایی به ضخامت dr با مساحت سطح مقطع $۴\pi r^۲$ در نظر گرفت. بنابراین مقاومت این پوسته برابر است با:

$$dR = \rho \frac{dr}{A} = \rho \frac{dr}{۴\pi r^۲} \qquad (۱)$$

$$\int_۰^R dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{۴\pi r^۲} \Rightarrow R = \frac{\rho}{۴\pi}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right) \qquad (۲)$$

از طرفی ظرفیت خازن کروی برابر است با: (رجوع شود به کتاب هالیدی بخش ظرفیت)

$$C = ۴\pi k\varepsilon_۰ \frac{ab}{b-a} \qquad (۳)$$

حال اگر بار این خازن کروی برابر q باشد آن‌گاه داریم:

$$q = CV \qquad (۴)$$

چون خازن در حال خالی شدن است بنابراین $I = -\frac{dq}{dt}$ و در نتیجه

$$V = RI = -R\frac{dq}{dt} \qquad (۵)$$

$$(۵),(۴),(۳),(۲) \Longrightarrow q = CV = -CR\frac{dq}{dt}$$

$$\Longrightarrow \int_{q_۰}^{q} \frac{dq}{q} = \int_۰^t \frac{-۱}{CR}\,dt$$

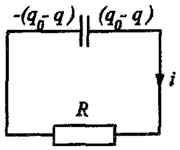
$$\Longrightarrow \ln\frac{q}{q_۰} = -\frac{۱}{CR}t = \frac{-t}{۴\pi k\varepsilon_۰ \frac{ab}{(b-a)}\frac{\rho}{۴\pi}\frac{b-a}{ab}}$$

$$\Longrightarrow \ln\frac{q}{q_۰} = \frac{-t}{\rho k\varepsilon_۰} \Longrightarrow q = q_۰\, e^{\frac{-t}{\rho k\varepsilon_۰}}$$

ب) با توجه به این‌که در حالت نهایی بار خازن صفر می‌شود و از طرفی خازن به باتری نیز متصل نیست لذا:

$$Q = U_i - U_f = \frac{۱}{۲}\frac{q_۰^۲}{C} - ۰ = \frac{۱}{۲}\frac{q_۰^۲}{۴\pi k\varepsilon_۰}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right)$$

۲۰۴) اگر $q_۰$ بار اولیه خازن باشد و در لحظه t بار q به مقاومت منتقل گردد آن‌گاه باری که در این لحظه بر روی صفحات خازن باقی مانده برابر $q_۰ - q$ است. از طرفی جریان عبوری از مقاومت برابر است با:



$$i = \frac{-d(q_\circ - q)}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

به کمک قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$\frac{q_\circ - q}{C} - Ri = \circ \implies \frac{q_\circ - q}{C} = R\frac{dq}{dt} \implies \int_\circ^q \frac{dq}{q_\circ - q} = \int_\circ^t \frac{dt}{RC}$$

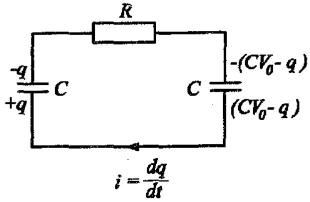
$$\ln\left(\frac{q_\circ - q}{q_\circ}\right) = -\frac{t}{RC} \implies q = q_\circ\left(۱ - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

$$t = ۲S \quad\Rightarrow\quad q = ۰/۱۸\,mc$$

ب) با توجه به قانون بقای انرژی، انرژی گرمایی ایجاد شده برابر با تغییر انرژی خازن در مدت ۲ ثانیه است لذا:

$$Q = \frac{۱}{۲}\frac{q_\circ^۲}{C} - \frac{۱}{۲}\frac{q_\circ^۲\left(۱ - e\overline{RC}\right)^۲}{V} = ۸۲\,mJ$$

۲۰۵) اگر در هر لحظه بار q در مدار جریان یابد آن‌گاه جریان عبوری در مدار برابر $i = \frac{dq}{dt}$ خواهد شد. به کمک قانون ولتاژ کیرشهف KVL داریم:



$$-\frac{q}{C} - RI + \frac{CV_\circ - q}{C} = \circ$$

$$\frac{CV_\circ - ۲q}{C} = R\frac{dq}{dt} \implies \frac{dq}{CV_\circ - ۲q} = \frac{dt}{RC}$$

$$\int_\circ^q \frac{dq}{CV_\circ - ۲q} = \int_\circ^t \frac{dt}{RC} \implies \ln\left(\frac{CV_\circ - ۲q}{CV_\circ}\right) = -\frac{۲t}{RC}$$

$$q = \frac{CV_\circ}{۲}\left(۱ - e^{\frac{-۲t}{RC}}\right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{CV_\circ}{۲}\,\frac{۲}{RC}\,e^{\frac{-۲t}{RC}} = \frac{V_\circ}{R}\,e^{\frac{-۲t}{RC}}$$

ب)

$$p = \frac{dQ}{dt} = Ri^{۲} \implies Q = \int_{۰}^{\infty} Ri^{۲} dt$$

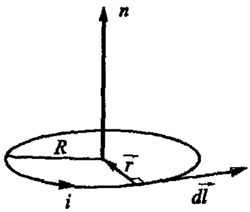
$$Q = \int_{۰}^{\infty} R\,(\frac{V_{۰}}{R})^{۲}\, e^{\frac{-۲t}{RC}}\, dt = \frac{V_{۰}^{۲}}{R}\,(\frac{-RC}{۴}\, e^{\frac{-۲t}{RC}})\,|_{۰}^{\infty}$$

$$Q = \frac{۱}{۴}\, CV_{۰}^{۲}$$

فصل ۱۱

میدانهای مغناطیسی ثابت

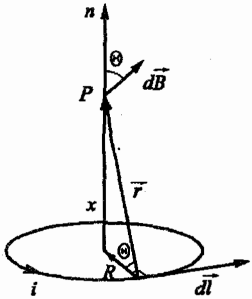
۲۰۶) الف) با توجه به این‌که شعاع بر دایره مماس است لذا دو بردار $\vec{dl}$ و $\vec{r}$ بر هم عمودند. بنابراین حاصل‌ضرب $\vec{dL} \times \vec{r}$ برداری در جهت $\vec{n}$ است. حال به کمک قانون بیو-ساوار داریم:



$$\vec{dB} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} i \frac{\vec{dL} \times \vec{r}}{r^۳} \Rightarrow dB = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} i \frac{(Rd\theta)\, R}{R^۳}$$

$$B = \int dB = \int_\circ^{۲\pi} \frac{\mu_\circ}{۴\pi} \frac{i}{R} d\theta = \frac{\mu_\circ}{۲} \frac{i}{R} = ۶/۳\ \mu T$$ در جهت بردار n

ب) مجموع dB ها، B را در نقطهٔ دلخواه p روی محور حلقه به‌دست خواهد داد. تقارن موجود در شکل نشان می‌دهد که همه جزء جریان‌های روی حلقه، جزء میدان‌های dB با اندازه‌های یکسان را در نقطه p تولید می‌کنند و زاویهٔ یکسان θ با محور حلقه می‌سازند و نهایتاً برآیند آن‌ها فقط در جهت محور حلقه ($\vec{n}$)خواهد بود.



بنابراین برای به‌دست آوردن برآیند dB ها کافی است مولفه قائم آن‌ها را با هم جمع کنیم، از طرفی چون بردارهای $\vec{dL}$ و $\vec{r}$ بر هم عمودند لذا:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{rdL}{r^3} \sin 90 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dL}{r^2}$$

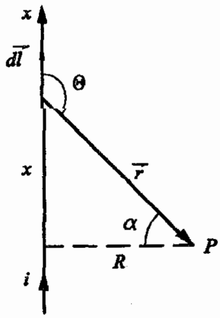
بنابراین:

$$B = \int dB \cos\theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dL}{r^2} \cos\theta$$

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dL}{(x^2+R^2)} \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \int dL$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR\,(2\pi R)}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۲۰۷) **نکته ۱:** قبل از حل مسأله ابتدا میدان در یک نقطه ناشی از یک سیم حامل جریان را محاسبه می‌کنیم.
فرض می‌کنیم سیم جریان منطبق بر محور x ها باشد و نقطه‌ای که می‌خواهیم میدان مغناطیسی را در آن حساب کنیم به نام p و به فاصلهٔ R از محور x ها باشد. جهت $\vec{dB}$ در جهت $\vec{dL} \times \vec{r}$ است که با توجه به شکل بردار $\vec{dB}$ به داخل صفحه خواهد بود.



این مطلب برای همه جزء جریان‌های idl روی سیم صادق است. به کمک قانون بیو–ساوار می‌توان نوشت:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dLr\sin\theta}{r^3} \qquad (1)$$

θ زاویه بین دو بردار $\vec{dL}$ و $\vec{r}$ است. به کمک شکل داریم:

$$R = r\cos\alpha \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

$$\theta = 90 + \alpha \Rightarrow \sin\theta = \cos\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{x}{R} = \tan\alpha \Rightarrow x = Rtan\alpha \Rightarrow dL = dx = R(1+\tan^2\alpha)\,d\alpha$$

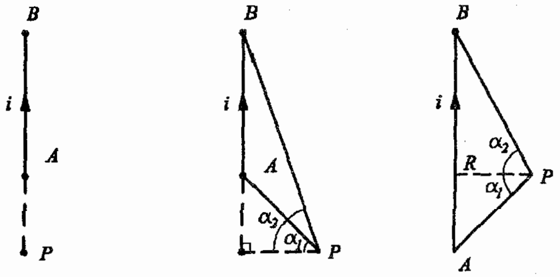
$$\Rightarrow dL = \frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha \qquad (4)$$

$$(1) \text{ تا } (4) \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left(\frac{Rd\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \frac{\cos\alpha}{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2}$$

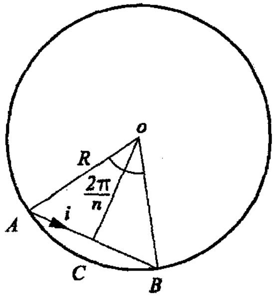
$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{R}\cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{R}\sin\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{R}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \qquad (*)}$$

توجه: در رابطه فوق R فاصله عمودی نقطه p تا خط جریان است.
برای جایگذاری مقادیر α_1 و α_2 و مثبت یا منفی بودن آن‌ها از شکل‌های زیر کمک بگیرید.



نکته ۲: برای سیم نامحدود، $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ و $\alpha_1 = \frac{-\pi}{2}$ قرار می‌دهیم.
حل: با توجه به شکل اگر AB یک ضلع از این n ضلعی باشد آن‌گاه $\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$ و فاصله ضلع AB از مرکز دایره برابر است با $OC = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. حال با توجه به نکته ۱ میدان حاصل از ضلع AB در نقطهٔ O برابر است با:



$$B_{AB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{OC}(\sin(\frac{\pi}{n}) - \sin(\frac{-\pi}{n})) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\tan(\frac{\pi}{n})$$

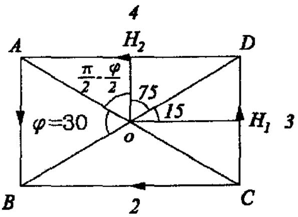
با توجه به اینکه میدان سایر اضلاع در نقطهٔ O با میدان ناشی از ضلع AB برابر و همگی به سمت خارج صفحه است لذا:

$$B_0 = \frac{n\mu_0 i}{2\pi R}\tan(\frac{\pi}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} B_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{n\mu_0 i}{2\pi R}(\frac{\pi}{n}) = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

توجه: اگر $x \longrightarrow 0$ آنگاه عبارت $\tan x$ و x هم‌ارزند.

۲۰۸) می‌دانیم میدان‌های ناشی از اضلاع ۱ و ۳ با هم و ۲ و ۴ نیز با هم در نقطهٔ O با هم برابرند. حال به کمک رابطهٔ (*) بیان شده در نکتهٔ ۱ حل مسألهٔ ۲۰۷ داریم:



$$OH_1 = OD\cos\frac{\phi}{2} = \frac{d}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

$$OH_2 = \frac{d}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}) = \frac{d}{2}\sin\frac{\phi}{2}$$

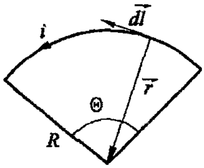
$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{OH_1}\left[\sin\frac{\phi}{2} - \sin(-\frac{\phi}{2})\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{\frac{d}{2}}2\tan(\frac{\phi}{2})$$

$$B_2 = B_4 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{OH_2}[\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}) - \sin(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{2})] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{\frac{d}{2}}2\,cotan(\frac{\phi}{2})$$

$$B_0 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{2\mu_0 i}{\pi d}(\tan\frac{\phi}{2} + cotan\frac{\phi}{2})$$

$$= \frac{۲\mu_\circ i}{\pi d \sin\frac{\phi}{۲}\cos\frac{\phi}{۲}} = \frac{۴\mu_\circ i}{\pi d\sin\phi} = ۰/۱\ mT$$

۲۰۹) نکته: ابتدا میدان ناشی از کمانی از دایره را در مرکز انحنای آن به‌دست می آوریم. بر روی کمان موردنظر بردار $\vec{dL}$ به فاصلهٔ R از نقطهٔ O قرار دارد و همواره بر بردار $\vec{r}$ عمود است. بنابراین با این اطلاعات جزء میدان ناشی از dL در نقطهٔ O بر اساس قانون بیو-ساوار چنین است:



$$\vec{dB} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} i \frac{\vec{dL}\times\vec{r}}{r^۳} \Rightarrow dB = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi}\ \frac{dL}{R^۲}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R^۲}\int dL = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R^۲} L = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R^۲}(R\theta)$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R}\theta \qquad (**)}$$

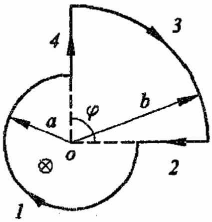
توجه: R در رابطه فوق شعاع کمان و θ زاویه کمان بر حسب رادیان است.
حل: میدان در نقطه O ناشی از جمع دو میدان است (جهت هر دو میدان در نقطهٔ O به داخل صفحه است) یکی میدان ناشی از کمان B_a و دیگری میدان ناشی از سیم راست B_L.
حال به کمک روابط (*) و (**) بیان شده به ترتیب در مسائل ۲۰۷ و ۲۰۹ داریم:

$$B_a = \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R}(۲\pi - ۲\phi)$$

$$B_L = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{i}{R\cos\phi}\left[\sin\phi - \sin(-\phi)\right]$$

$$B_\circ = B_a + B_L = \frac{\mu_\circ i}{۲\pi R}(\pi - \phi + \tan\phi) = ۲۸\ \mu T$$

۲۱۰) الف) با توجه به حل مسألهٔ ۲۰۷ سیم‌های ۲ و ۴ چون از نقطهٔ O عبور کرده‌اند لذا هیچ میدانی در این نقطه تولید نمی‌کنند.
حال به کمک رابطهٔ (**) در مسألهٔ ۲۰۹ می‌توان نوشت:



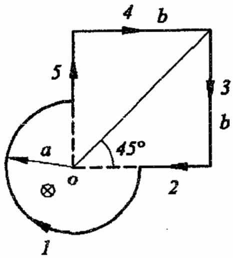
$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}(2\pi - \phi)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}\phi$$

حال با توجه به این‌که هر دو میدان هم جهت و به سمت داخل صفحه هستند لذا:

$$B_0 = B_1 + B_3 = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{2\pi - \phi}{a} + \frac{\phi}{b}\right)$$

ب) چون سیم‌های ۲ و ۵ از نقطهٔ O گذشته‌اند لذا میدان آن‌ها در نقطهٔ O برابر صفر است. هم‌چنین میدان‌های سیم‌های ۳ و ۴ با هم برابرند. به کمک روابط (*) و (**) بیان شده به ترتیب درمسائل ۲۰۷ و ۲۰۹ داریم:



$$B_3 = B_4 = \frac{\mu_0 i}{4\pi b}(\sin 45 - \sin 0) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{8\pi b}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\mu_0 i}{8\pi a}$$

با توجه به این‌که میدان ناشی از هر سه، در نقطهٔ O به سمت داخل صفحه هستند لذا:

$$B_0 = B_1 + B_3 + B_4 = \frac{3\mu_0 i}{8\pi a} + \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{4\pi b} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{3}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

نکته: برای یافتن جهت، کافی است سر انگشتان را در جهت جریان بچرخانید تا انگشت شصت شما جهت میدان را نشان دهد.

۲۱۱) **نکته:** در یک پوسته استوانه‌ای شکل با طول بی‌نهایت که جریان در راستای محور است، میدان در هر نقطه داخل آن صفر است. اثبات این نکته در حل مسألهٔ ۲۲۱ آمده است.

این دیواره استوانه‌ای شکل همراه با یک شکاف طولی معادل است با یک دیواره استوانه‌ای کامل و یک خط جریان به پهنای شکاف با چگالی جریان یکسان، منتها در خلاف جهت. با توجه به نکته بیان شده میدان حاصل از اولی صفر است. بنابراین کافی است میدان ناشی از خط جریان به پهنای h را حساب کنیم.

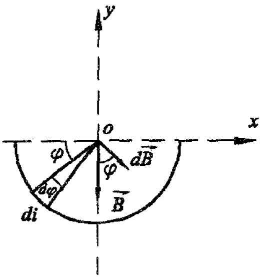
می‌دانیم چگالی طولی جریان برابر $\frac{I}{۲\pi R}$ است لذا جریانی که از نواری به پهنای h می‌گذرد برابر با $\frac{Ih}{۲\pi R}$ است حال به کمک رابطهٔ (**) بیان شده در مسألهٔ ۲۰۹ داریم:

$$B = \frac{\mu_{\circ} i}{۴\pi r}\left(\sin\frac{\pi}{۲} - \sin\left(\frac{-\pi}{۲}\right)\right) = \frac{\mu_{\circ}\frac{Ih}{۲\pi R}}{۲\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_{\circ} Ih}{۴\pi^{۲} Rr}$$

r فاصلهٔ نقطهٔ مزبور تا باریکه شکاف است.

۲۱۲) ابتدا جهت میدان $\vec{B}$ در نقطهٔ O را می‌یابیم. برای این منظور تمام سطح مقطع رسانا را به بخش‌های مساوی که هر یک حامل جریان di باشند تقسیم می‌کنیم. (می‌دانیم میدان هر یک از این جزء ها در مرکز برابر $B = \frac{\mu_{\circ}}{۲\pi}\frac{di}{R}$ است.)



با توجه به این‌که محور y محور تقارن است لذا مؤلفه‌های افقی میدان هر جزء جریان با یکدیگر خنثی می‌شوند و تنها مؤلفهٔ قائم آن‌ها با هم جمع می‌شود، بنابراین میدان برآیند در جهت نشان داده شده است. (فرض کنید جریان I به سمت داخل صفحه باشد) بنابراین:

$$B = ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} dB\ \cos\phi$$

از چگالی خطی جریان داریم:

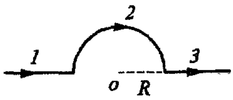
$$\frac{I}{\pi R} = \frac{di}{Rd\phi} \Rightarrow di = \frac{Id\phi}{\pi}$$

بنابراین:

$$B = ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\mu_{\circ}}{۲\pi}\frac{di}{R}\cos\phi = \frac{\mu_{\circ}}{\pi R}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{I}{\pi}\cos\phi\, d\phi$$

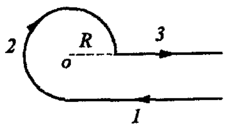
$$B = \frac{\mu_{\circ} I}{\pi^{۲} R}$$

۲۱۳) الف) با توجه به این‌که خطوط جریان ۱ و ۳ از نقطهٔ O می‌گذرند لذا میدان ناشی از آن‌ها در O صفر است. (رجوع کنید به مسألهٔ ۲۰۷) میدان ناشی از سیم ۲ به کمک رابطهٔ (**) در مسألهٔ ۲۰۹ به صورت زیر به‌دست می‌آید.



$$B_۰ = B_۲ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(\pi) = \frac{\mu_۰ i}{۴R}$$

ب) امتداد خط جریان ۳ از نقطهٔ O می‌گذرد لذا $B_۳ = ۰$. $B_۱$ و $B_۲$ به کمک روابط (*) و (**) به ترتیب از مسائل ۲۰۷ و ۲۰۹ به‌دست می‌آید.

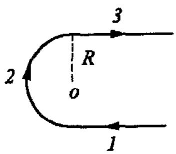


$$B_۲ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۳\mu_۰ i\pi}{۸\pi R}$$

$$B_۱ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(\sin\frac{\pi}{۲} - \sin ۰) = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}$$

$$B_۰ = B_۱ + B_۲ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(۱ + \frac{۳\pi}{۲})$$

ج) با توجه به تقارن شکل: $B_۳ = B_۱$.

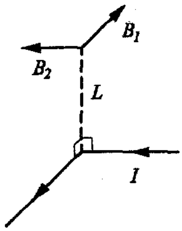


$$B_۱ = B_۳ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(\sin\frac{\pi}{۲} - \sin ۰) = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}$$

$$B_۲ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}\pi$$

$$B_۰ = B_۱ + B_۲ + B_۳ = \frac{\mu_۰ i}{۴\pi R}(۲ + \pi)$$

۲۱۴) می‌دانیم $B_۲ = B_۱$ لذا $B_۰ = \sqrt{۲}B_۱$.



به کمک رابطهٔ (*) در مسألهٔ ۲۰۷ داریم:

$$B_۱ = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi L}(\sin\frac{\pi}{۲} - \sin\circ) = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi L}$$

$$B_\circ = \frac{\sqrt{۲}\mu_\circ I}{۴\pi L} = ۲\ \mu T$$

۲۱۵) الف)

$$\vec{B}_\circ = \vec{B}_۱ + \vec{B}_۲ + \vec{B}_۳$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(\sin\frac{\pi}{۲} - \sin\circ)(-\vec{k}) + \frac{\mu_\circ i}{۴\pi R}\pi(-\vec{i}) + \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(\sin\frac{\pi}{۲} - \sin\circ)(-\vec{k})$$

$$= -\frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}[۲\vec{k} + \pi\vec{i}]$$

$$|\vec{B}_\circ| = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}\sqrt{\pi^۲ + ۲^۲} = \circ/۳\ \mu T$$

ب)

$$\vec{B}_\circ = \vec{B}_۱ + \vec{B}_۲ + \vec{B}_۳$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(-\vec{k}) + \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}\pi(-\vec{i}) + \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(-\vec{i})$$

$$= -\frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}[\vec{k} + (\pi + ۱)\vec{i}]$$

$$|\vec{B}_\circ| = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}\sqrt{۱ + (\pi + ۱)^۲} = \circ/۳۴\ \mu T$$

ج) به کمک قانون مقاومت‌های موازی، جریان در دو قسمت خط جریان دایره‌ای شکل را به‌دست می‌آوریم. چون طول یکی ۳ برابر دیگری است لذا مقاومت آن نیز ۳ برابر است. در نتیجه:

$$I_۱ + I_۲ = I \quad , \quad \frac{I_۱}{I_۲} = \frac{۱}{۳}$$

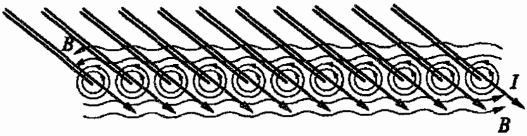
$$\Rightarrow\ I_۲ = \frac{۳}{۴}I \quad , \quad I_۱ = \frac{۱}{۴}I \qquad (۱)$$

$$\vec{B}_\circ = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(-\vec{k}) + \frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}(-\vec{j}) + [\frac{\mu_\circ I_۱}{۴\pi R}(\frac{۳\pi}{۲})(-\vec{i}) + \frac{\mu_\circ I_۲}{۴\pi R}(\frac{\pi}{۲})\ \vec{i}]$$

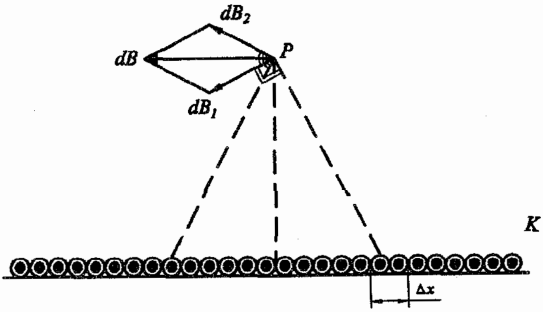
$$(۱) \Rightarrow \vec{B}_\circ = \frac{-\mu_\circ I}{۴\pi R}(\vec{j} + \vec{k}) + \circ$$

$$|\vec{B}_\circ| = \frac{\sqrt{۲}\mu_\circ I}{۴\pi R} = \circ/۱۱\ \mu T$$

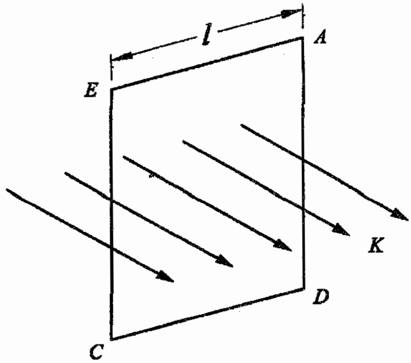
۲۱۶) شکل روبه‌رو نمونه فیزیکی صفحهٔ فوق را نشان می دهد. می‌دانیم میدان مغناطیسی اطراف یک سیم نامحدود به صورت دایره‌هایی سیم را احاطه می‌کنند و شکل زیر میدان‌های اطراف هر سیم و نهایتاً مجموع آن‌ها را نشان می دهد.



این میدان در بالای صفحه، افقی و به سمت چپ و در پایین صفحه، به سمت راست خواهد بود. از تقارن، میدان باید افقی باشد و چون طول سیم‌ها بی‌نهایت است لذا مقدار میدان برآیند به فاصله تا صفحه وابسته نیست. هر پهنای بسیار کوچک Δx از صفحه مانند یک سیم عمل می‌کند که میدان $dB_۱$ را در نقطهٔ P بالای جریان سطحی ایجاد می‌کند و برای این Δx در سمت راست یک جزء قرینه در سمت چپ وجود دارد که میدان $dB_۲$ را به‌وجود می‌آورد. مجموعهٔ دو جزء $dB_۱$ و $dB_۲$ برابر dB است که به صورت افقی می‌باشد.



حال با داشتن وضعیت میدان به محاسبهٔ عبارت سمت چپ قانون آمپر یعنی $\epsilon B \cdot dL$ روی حلقه مستطیل شکل نشان داده شده می‌پردازیم. با توجه به این‌که میدان صفحه عمود بر اضلاع قائم مستطیل هستند لذا عبارت $B \cdot dL$ برابر صفر می‌شود.



با توجه به هم‌جهت بودن میدان با اضلاع افقی عبارت $\int B \, . \, dL$ برابر $2BL$ می‌گردد لذا:

$$\epsilon B \, . \, dL = \int_A^E B \, . \, dL + \int_E^C B \, . \, dL + \int_C^D B \, . \, dl + \int_D^A B \, . \, dL$$

$$= BL + 0 + BL + 0 = 2BL = \mu_0 \, (iL)$$

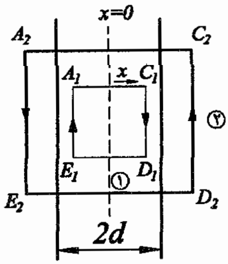
مقدار iL جریان عبوری از حلقه است.

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

ب) با توجه به قسمت الف سهم میدان هر صفحه برابر $\frac{\mu_0 i}{2}$ است. از طرفی چگالی جریان‌ها مخالف یکدیگرند لذا بین دو صفحه میدان‌ها با هم جمع شده و برابر $B = \mu_0 i$ است و خارج آن میدان‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین $B = 0$ پس

$$B = \begin{cases} \mu_0 i & \text{بین دو صفحه} \\ 0 & \text{خارج دو صفحه} \end{cases}$$

۲۱۷) با توجه به شکل سطح مقطع و فرض این‌که جریان عمود بر صفحه و به داخل آن باشد، می‌توان به کمک حل مسأله قبل دریافت که میدان در داخل یا خارج صفحه، موازی با سطح خواهد بود.



حلقه مستطیل شکل را در نظر بگیرید. آن‌گاه:

$$\epsilon B \, . \, dL = \mu_0 I$$

$$A_1C_1 = E_1D_1 = 2x \quad , \quad C_1D_1 = A_1E_1 = L_1$$

$$\epsilon B \,.\, dL = 0 + BL_1 + 0 + BL_1 = \mu_0 \,(2xL_1)\, i$$

$$\Rightarrow \quad B = \mu_0 x i \qquad |x| \leq d$$

ب) برای حالت $|x| \geq d$ حلقه مستطیل شکل ۲ را در نظر می‌گیریم حال به کمک قانون آمپر داریم:

$$A_2C_2 = E_2D_2 = 2x \qquad C_2D_2 = A_2E_2 = L_2$$

$$\epsilon B \,.\, dL = 0 + BL_2 + 0 + BL_2 = \mu_0 \,(2dL_2)\, i$$

$$B = \mu_0 d i \qquad |x| \geq d$$

۲۱۸) با توجه به تقارن شکل به راحتی می‌توان فهمید که میدان در فضای بالا و پایین صفحه رسانا به صورت دایره‌های متحدالمرکز است. اگر مسیر دایره‌ای شکل به شعاع r در فضای بالای صفحه و موازی با آن در نظر بگیریم به طوری‌که مرکز دایره بر سیم حامل جریان I منطبق باشد آن‌گاه به کمک قانون آمپر داریم:

$$\epsilon\, B \,.\, dL = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B\,(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\, I$$ بالای صفحه رسانا

حال اگر همین مسیر دایره‌ای با شرایط بالا را در فضای زیر صفحه در نظر بگیریم به طوری‌که مرکز دایره بر امتداد سیم حامل جریان I منطبق باشد چون جریانی از این مسیر نمی‌گذرد لذا $I = 0$ است بنابراین:

$$\int B \,.\, dL = 0 \quad \Rightarrow \quad B\,(2\pi r) = 0 \quad B = 0$$

۲۱۹) با توجه به حل مسأله ۲۰۶ میدان روی محور حلقه و به فاصلهٔ x از مرکز حلقه برابر است با: (با فرض این‌که محور حلق بر محور x منطبق باشد.)

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = B_x$$

که میدان در راستای محور حلقه است بنابراین:

$$\int \vec{B} \cdot \vec{dr} = \int_{-\infty}^{\infty} B_x dx = \frac{\mu_\circ I R^۲}{۲} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^۲ + R^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

با جانشانی $x = R\tan\theta$ داریم:

$$= \frac{\mu_\circ I R^۲}{۲} \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{R\,(۱+\tan^۲\theta)\,d\theta}{R^۳\,(۱+\tan^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= \frac{\mu_\circ I R^۲}{۲} \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{R \,/\cos^۲\theta\; d\theta}{r^۳ \,/\, \cos^۳\theta} = \frac{\mu_\circ I}{۲} \int_{\frac{-\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos\theta d\theta = \mu_\circ I$$

تفسیر فیزیکی عبارت $\int_{-\infty}^{\infty} Bxdx$:

می‌توان فرض کرد محور حلقه در واقع دایره‌ای است به شعاع بی‌نهایت که دو انتهای محور آن در بی‌نهایت به هم متصل می‌شوند. بنابراین از این حلقه بی‌نهایت بزرگ، جریان I توسط حلقه حامل جریان عبور کرد. لذا:

$$\epsilon\, B \,.\, dL = \int_{-\infty}^{\infty} B_x dx = \mu_\circ I$$

۲۲۰) به کمک قانون آمپر برای مسیر دایره‌ای شکل داخل سیم داریم:

$$\epsilon\, B \,.\, dL = \mu_\circ I \;\Rightarrow\; B(۲\pi r) = \mu_\circ\,(\pi r^۲ i) \;\Rightarrow\; B = \frac{\mu_\circ i r}{۲}$$

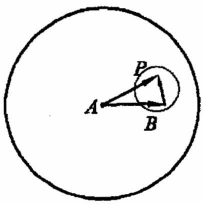
بنابراین $\qquad \vec{B} = \frac{۱}{۲}\mu_\circ\, \vec{i} \times \vec{r}$

مشابهاً برای خارج سیم:

$$\epsilon\, B \,.\, dL = \mu_\circ I \;\Rightarrow\; B(۲\pi r) = \mu_\circ\,(\pi R^۲ i)$$

$$\Rightarrow\; B = \frac{\mu_\circ i R^۲}{۲r} \qquad \text{یا} \qquad \vec{B} = \frac{۱}{۲}\mu_\circ \frac{R^۲}{r^۲}(\vec{i} \times \vec{r})$$

۲۲۱) می‌توان از اصل برهم‌نهی (جمع آثار) استفاده کرد. به این‌صورت که مسألهٔ ما معادل است با استوانه بدون حفره که از آن چگالی جریان $\vec{i}$ می‌گذرد. به‌علاوه استوانهٔ دیگری به قطر حفره که از آن چگالی جریان $-\vec{i}$ عبور می کند.



به کمک مسأله قبل برای نقطهٔ اختیاری P داخل حفره داریم:

میدان ناشی از سیم $B_w = \frac{۱}{۲}\mu_۰ \; \vec{i} \times \vec{AP}$

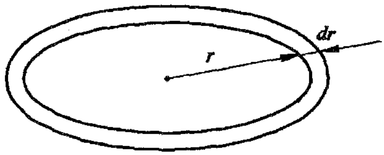
میدان ناشی از حفره $B_c = \frac{۱}{۲}\mu_۰ \; (\vec{-i}) \times \vec{BP}$

$$B = B_w + B_c = \frac{۱}{۲}\mu_۰ \; \vec{i} \times (\vec{AP} - \vec{BP}) = \frac{۱}{۲}\mu_۰ \; \vec{i} \times (\vec{AP} + \vec{PB})$$

$$= \frac{۱}{۲}\mu_۰ \; \vec{i} \times \vec{AB} \Rightarrow \quad B = \frac{۱}{۲}\mu_۰ \; \vec{i} \times \vec{L}$$

از رابطه فوق ملاحظه می‌شود هنگامی‌که حفره هم مرکز با سیم باشد آن‌گاه $\vec{L} = ۰$ لذا داخل حفره هیچ میدان مغناطیسی وجود ندارد، بنابراین اگر سیم ما به صورت پوسته استوانه‌ای شکل باشد باز درون آن میدان مغناطیسی صفر است و این استدلال اثبات نکته مسألهٔ ۲۱۱ نیز است.

۲۲۲) با توجه به این‌که تقارن شعاعی است لذا میدان بر روی یک جزء مساحت dA به شعاع داخلی r' و شعاع خارجی $r' + dr'$ در تمام نقاط یکسان است.



حال به کمک قانون آمپر داریم:

$$\epsilon\, B \,.\, dL = \mu_۰ I \;\Rightarrow\; \epsilon\, B \,.\, dL = \mu_۰ \int i \,.\, dA$$

i : چگالی جریان است.

$$A = \pi\,(r')^۲ \;\Rightarrow\; dA = (۲\pi r')\, dr'$$

$$B\,(۲\pi r) = \mu_۰ \int_۰^r i\,(۲\pi r')\, dr'$$

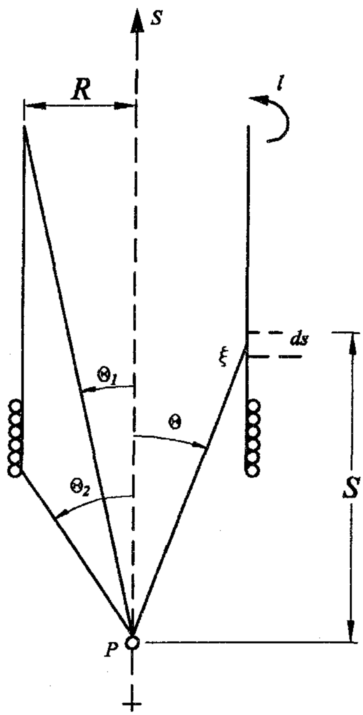
$$\Rightarrow \; Br = \mu_۰ \int_۰^r i\, r'\, dr' \;\Rightarrow\; br^{\alpha+۱} = \mu_۰ \int_۰^r i\, r'\, dr'$$

با دیفرانسیل‌گیری از طرفین:

$$d\,(br^{\alpha+۱}) = \mu_\circ\, i\, r$$

$$(\alpha + ۱)\, br^{\alpha} = \mu_\circ\, i\, r \;\;\Rightarrow\;\; i = \frac{b\,(\alpha+۱)}{\mu_\circ}\, r^{\alpha-۱}$$

۲۲۳) ابتدا میدان را در نقطه‌ای مانند P روی محور سیملوله مطابق شکل زیر محاسبه می‌کنیم.



فرض می کنیم که سیملوله از حلقه‌های جریان رشته‌ای در کنار هم تشکیل یافته است که نزدیک هم بوده و گام ناچیزی دارد. سپس با این فرض توزیع جریان شبیه توزیع جریان در یک ورقه استوانه‌ای است. اگر n تعداد حلقه بر واحد طول و I جریان حلقه باشد.
آن‌گاه جریان بر واحد طول، k، این ورقه استوانه‌ای برابر است با $k = nI$. جهت k که همان جهت I است در شکل نشان داده شده است. بنابراین در طول dz جریان kdz است. حال به کمک حل مسألهٔ ۲۰۶ می‌دانیم سهم هر حلقه حامل جریان سیملوله در میدان B روی محور در نقطهٔ P عبارت است از:

$$dB = dB_z = \frac{\mu_\circ\,(kdZ)}{۲}\;\frac{R^۲}{(Z^۲+R^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$\frac{R}{Z} = \tan\theta \;\Rightarrow\; Z = \frac{R}{\tan\theta} \;\Rightarrow\; dZ = -R\,(\frac{۱ + \tan^۲\theta}{\tan^۲\theta})\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad dZ = \frac{-Rd\theta}{\sin^{۲}\theta} \qquad (۲)$$

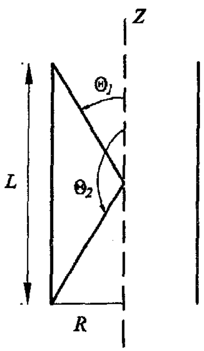
$$\frac{R^{۲}}{(Z^{۲}+R^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{R^{۲}}{(Z^{۲}+R^{۲})}\,\frac{R}{\sqrt{Z^{۲}+R^{۲}}}\,\frac{۱}{R} = \frac{\sin^{۳}\theta}{R} \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲),(۱) \;\Rightarrow\; dB = \frac{-\mu_{\circ}k}{۲}\left(\frac{Rd\theta}{\sin^{۲}\theta}\right)\frac{\sin^{۳}\theta}{R} = \frac{-\mu_{\circ}k}{۲}\sin\theta d\theta$$

بنابراین:

$$B = \int_{\theta_{۲}}^{\theta_{۱}} dB = \frac{\mu_{\circ}k}{۲}\left[\cos\theta_{۱} - \cos\theta_{۲}\right]$$

برای نقطهٔ p واقع در مرکز سیملوله با توجه به شکل زیر داریم:



$$\theta_{۱} + \theta_{۲} = \pi$$

$$\theta_{۲} = \pi - \theta_{۱} \;\Rightarrow\; \cos\theta_{۲} = -\cos\theta_{۱}$$

در مرکز $B = \mu_{\circ}\, k \,\cos\,\theta_{۱}$ $\qquad$ $\cos\theta_{۱} = \dfrac{\frac{L}{۲}}{\sqrt{R^{۲}+\frac{L^{۲}}{۴}}}$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_{\circ}K}{\sqrt{۱+(\frac{۲R}{L})^{۲}}} = \frac{\mu_{\circ}nI}{\sqrt{۱+(\frac{۲R}{L})^{۲}}}$$

۲۲۴) الف) با توجه به حل مسألهٔ قبل داریم:

$$B = \frac{\mu_{\circ}nI}{۲}(\cos\theta_{۱} - \cos\theta_{۲})$$

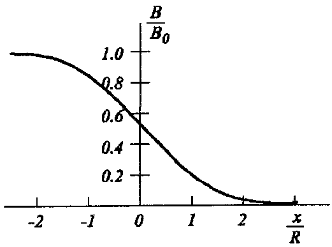
از طرفی چون سیملوله بسیار بلند است لذا در طول بی‌نهایت زاویه $\theta_{۱}$ به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین:

$\theta_۱ \rightarrow ۰ \qquad \cos\theta_۱ = ۱$

$B = \frac{\mu_۰ nI}{۲}(۱ - \cos\theta_۲) \qquad \cos\theta_۲ = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + R^۲}}$

$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_۰ nI}{۲}(۱ - \frac{x}{\sqrt{x^۲ + R^۲}})$

جواب فوق در $x > ۰$ برای نقاط خارج سیملوله و $x < ۰$ برای نقاط داخل سیملوله است.
نمودار میدان بر حسب مکان $B - x$ به صورت زیر است:



ب) در نقطهٔ وسط برای سیملوله با طول بی‌نهایت داریم:

$\theta_۲ = \pi - \theta_۱ \qquad \cos\theta_۲ = -\cos\theta_۱$

$B = \mu_۰ nI\cos\theta_۱ \qquad \theta_۱ \rightarrow ۰ \qquad \cos\theta_۱ = ۱$

میدان در وسط $B_m = \mu_۰ nI$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این فرمول را در کتاب فیزیک ۳ یاد گرفته‌اید.

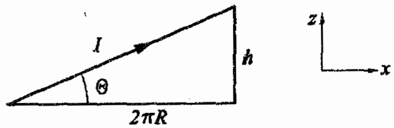
$B_x = (۱ - a)B_m \Rightarrow \frac{\mu_۰ nI}{۲}(۱ - \frac{x}{\sqrt{x^۲ + R^۲}}) = (۱ - a)\mu_۰ nI$

$۱ - ۲(۱ - a) = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + R^۲}} \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۲ + R^۲} = (-۱ + ۲a)^۲ = (۱ - ۲a)^۲$

$\Rightarrow x^۲[۱ - (۱ - ۲a)^۲] = R^۲(۱ - ۲a)^۲$

$x = \frac{R(۱ - ۲a)}{\sqrt{۱ - ۱ + ۴a - ۴a^۲}} \Rightarrow x = \frac{R(۱ - ۲a)}{۲\sqrt{a(۱ - a)}}$

۲۲۵) اگر این نوار به صورت کاملاً محکم بپیچانیم آن‌گاه می‌توان گفت که گام حلقه‌های آن h است و این بدان معنا است که جریان به صورت مایل در این پوستهٔ استوانه‌ای شکل جاری است. پس ما جریان را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم یکی در راستای محور استوانه و دیگری در راستای عمود بر آن. اگر ما یک دور از این سیملوله را باز کنیم شکل آن به صورت یک مثلث قائم‌الزاویه است که ضلع افقی آن همان محیط دایره و ضلع قائم آن همان گام سیملوله است.



$$I_z = I\sin\theta = I\frac{h}{\sqrt{h^۲ + ۴\pi^۲ R^۲}}$$

$$I_x = I\cos\theta = I\frac{۲\pi R}{\sqrt{h^۲ + ۴\pi^۲ R^۲}}$$

به کمک حل مسألهٔ ۲۲۱ میدان ناشی از I_z در داخل سیم‌لوله صفر است. بنابراین فقط مؤلفهٔ افقی جریان در داخل این پوستهٔ استوانه‌ای میدان تولید می‌کند. برای یک سیملوله به طول بی‌نهایت می‌دانیم میدان در داخل ثابت و برابر $B = \mu_\circ nI$ (n تعداد سیم بر واحد طول) است. چون عرض هر سیم h است. بنابراین $n = \frac{۱}{h}$ در نتیجه:

$$B = \mu_\circ nI_x = \mu_\circ \frac{۱}{h}(I\frac{۲\pi R}{\sqrt{h^۲ + ۴\pi^۲ R^۲}}) = \mu_\circ \frac{I}{h}\frac{۲\pi R}{\sqrt{h^۲ + ۴\pi^۲ R^۲}} \qquad (۱)$$

اگر گام h نسبت به محیط دایره کوچک باشد (زاویهٔ θ کوچک باشد) آن‌گاه $\sin\theta \simeq \tan\theta$ در نتیجه :

$$\cos\theta = \sqrt{۱ - \sin^۲\theta} \simeq \sqrt{۱ - \tan^۲\theta} = \sqrt{۱ - (\frac{h}{۲\pi R})^۲}$$

$$B \simeq \mu_\circ \frac{I}{h}\sqrt{۱ - (\frac{h}{۲\pi R})^۲}$$

در بیرون از سیم‌لوله به کمک قانون آمپر در می‌یابیم که مؤلفهٔ افقی هیچ نقشی در میدان خارج از سیم‌لوله ندارد و فقط مؤلفهٔ قائم نقش دارد. بنابراین به کمک قانون آمپر و برای یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع r داریم :

$$\epsilon B.dL = \mu_\circ I \to B(۲\pi r) = \mu_\circ(\frac{I_z}{h}) \times ۲\pi R$$

در عبارت فوق $\frac{I_z}{h}$ چگالی طولی جریان است (جریان بر واحد) چون محیط استوانه $۲\pi R$ است لذا کل جریان عبوری از حلقهٔ آمپری برابر $\frac{I_z}{h}(۲\pi R)$ در نتیجه:

$$B = \frac{\mu_\circ I_z}{h}\frac{R}{r} = \frac{\mu_\circ I}{\sqrt{h^۲ + (۲\pi R)^۲}}\frac{R}{r}$$

برای حالتی که زاویهٔ θ کوچک است داریم $\sin\theta \simeq \tan\theta$

$$I_z = I\sin\theta \simeq I\tan\theta = \frac{Ih}{۲\pi R}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_\circ I_z}{h}\frac{R}{r} = \frac{\mu_\circ Ih \,/\, ۲\pi R}{h}\frac{R}{r} = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r}$$

۲۲۶) اگر a شعاع سطح مقطع هسته باشد می‌توان گام مارپیچ را به صورت $\frac{۲\pi R}{N}$ محاسبه کرد. لذا چگالی جریان سطحی برابر است با:

$$\vec{J_s} = \frac{۱}{۲\pi R \,/\, N}\ \vec{e_۱} + \frac{۱}{۲\pi a}\ \vec{e_۲}$$

در رابطه فوق بردار واحد $\vec{e_۱}$ در امتداد سطح مقطع هسته و بردار واحد $\vec{e_۲}$ در امتداد طول آن است.

میدان مغناطیسی داخل سطح مقطع هسته (به علت عبارت اول رابطه فوق) توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$B_\phi\ (۲\pi R) = \mu_\circ NI \ \Rightarrow\ B_\phi = \frac{\mu_\circ NI}{۲\pi R}$$

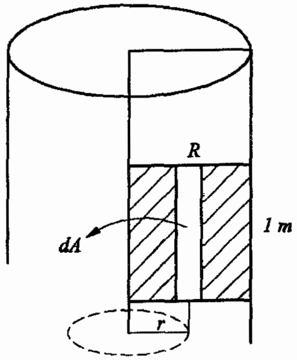
میدان مغناطیسی در مرکز هسته را می‌توان از فرمول اصلی بدست آورد یعنی:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{\vec{J_s} \times \vec{r_\circ}}{r_\circ^۳}\, ds$$
$$\Rightarrow\ \vec{B} = B_z\,\vec{e_z} = \vec{e_z}\ \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\ \frac{I}{۲\pi a}\ \int \frac{۱}{R^۳}\, Rd\phi \times ۲\pi a$$
$$\Rightarrow\ B_z = \frac{\mu_\circ I}{۲R}$$

~~لذا~~ نسبت این دو میدان برابر است با:

$$n = \frac{N}{\pi}$$

۲۲۷) در واقع ما دنبال شار گذرنده از مستطیل هاشور خورده هستیم. ابتدا به کمک قانون آمپر میدان در فاصلهٔ r از محور را به دست می‌آوریم. لذا برای مسیر دایره‌ای شکل به شعاع r داریم :



$\epsilon B.dL = \mu_{\circ} I$

طبق تقارن میدان بستگی به زاویه ندارد یعنی روی دایره به شعاع r یکسان است.

$$B(2\pi r) = \mu_{\circ}(\frac{I}{\pi R^2})\pi r^2 \rightarrow B = \frac{\mu_{\circ} I}{2\pi}\frac{r}{R^2} \qquad (1)$$

بنابراین شار گذرنده از مستطیل هاشور خورده برابر است با:

$$\phi = \int B.dA = \int_{\circ}^{R} \frac{\mu_{\circ} I}{2\pi}\frac{r}{R^2}(1.dr) = \frac{\mu_{\circ} I}{4\pi R^2}R^2 = \frac{\mu_{\circ} I}{4\pi}$$

۲۲۸) به کمک مسألهٔ ۲۲۴ می‌دانیم میدان در نقطه‌ای به فاصلهٔ x از یک انتهای سیملوله برابر است با:

$$B = \frac{\mu_{\circ} nI}{2}(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}})$$

بنابراین در موقعیت صفحه انتهای سیم‌لوله $x = \circ$ است پس :

$$B = \frac{\mu_{\circ} nI}{2}$$

شار گذرنده برابر است با :

$$\phi = BA = \frac{\mu_{\circ} nI}{2}S = \frac{\phi_{\circ} S}{2}, \phi_{\circ} = \mu_{\circ} nI$$

$\phi_{\circ}$ شار میدان گذرنده از سطح مقطع سیم‌لوله در جایی که دور از دو انتها باشد.

۲۲۹) ابتدا به کمک قانون آمپر، B را در فاصلهٔ r از محور به دست می‌آوریم.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_\circ I \rightarrow B\,(\text{۲}\pi r) = \mu_\circ NI \rightarrow B = \frac{\mu_\circ NI}{\text{۲}\pi r} \qquad R_i \leq r \leq R_\circ$$

$$\phi = \int B.dA = \int_{R_i}^{R_\circ} \frac{\mu_\circ NI}{\text{۲}\pi r}(hdr) = \frac{\mu_\circ NhI}{\text{۲}\pi} \ln \frac{R_\circ}{R_i}$$

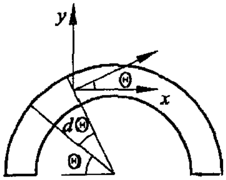
$$\phi = \frac{\mu_\circ NhI}{\text{۲}\pi} \ln a$$

۲۳۰) گشتاور دو قطبی مغناطیسی یک حلقه جریان از رابطهٔ $P_m = nis$ بدست می‌آید که n تعداد دور حلقه، S مساحت حلقه $S = \pi r^{\text{۲}}$ و i جریان حلقه است از طرفی میدان در مرکز حلقه از رابطهٔ $B = \frac{\mu_\circ}{\text{۲}} \frac{i}{R}$ به دست می‌آید لذا :

$$B = \frac{\mu_\circ}{\text{۲}} \frac{i}{R} \rightarrow i = \frac{\text{۲}BR}{\mu_\circ} \rightarrow P_m = \frac{\text{۲}nBRS}{\mu_\circ} = \frac{\text{۲}n\pi BR^{\text{۳}}}{\mu_\circ}$$

در این مسأله $n = \text{۱}$ است.

۲۳۱) اگر یک جزء به طول $Rd\theta$ از این نیم چنبره در نظر بگیریم. با توجه به این‌که در طول πR، N دور سیم پیچیده شده لذا در طول $Rd\theta$ تعداد دورهای سیم برابر با $n = \frac{NRd\theta}{\pi R} = \frac{Nd\theta}{\pi}$ می‌دانیم گشتاور مغناطیسی این تعداد حلقه بر سطح جزء حلقه‌ها عمود است و از مسألهٔ قبل مقدار آن برابر است با:



$$P_m = nis = \left(\frac{Nd\theta}{\pi}\right) I \left(\frac{\pi}{\text{۴}} d^{\text{۲}}\right) = \frac{N}{\text{۴}} d^{\text{۲}} I d\theta$$

حال می‌توان یک بردار گشتاوری را در راستای x و y تجزیه کرد.

در راستای y : $\int_\circ^\pi \frac{N}{\text{۴}} d^{\text{۲}} I \cos\theta d\theta = \circ$

در راستای x : $\int_\circ^\pi \frac{N}{\text{۴}} d^{\text{۲}} I \sin\theta d\theta = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} N d^{\text{۲}} I$

بنابراین گشتاور مغناطیسی کل برابر است با:

$$P_m = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} N d^{\text{۲}} I$$

۲۳۲) از مسأله ۲۰۶ به یاد داریم که میدان مغناطیسی از مرکز یک حلقه حامل جریان I و به شعاع r برابر است با $B = \frac{\mu_\circ}{۲r}I$.
از طرفی این سیم مارپیچ از حلقه‌های هم مرکز با شعاع‌های مختلف درست شده است بنابراین میدان مغناطیسی کل برابر جمع میدان‌های ناشی از هر حلقه است. از طرفی اگر در فاصلهٔ r تا $r+dr$ تعداد dN حلقه باشد چون از شعاع a تا b، N حلقه داریم. با یک نسبت ساده داریم :

$$\frac{N}{b-a} = \frac{dN}{(r+dr)-r} = \frac{dN}{dr}$$

$$dN = \frac{Ndr}{b-a}$$

چون در فاصلهٔ r تا $r+dr$، dN حلقه است لذا میدان مغناطیسی ناشی از این جزء در مرکز حلقه برابر است با :

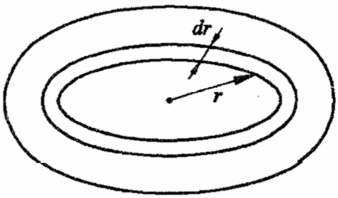
$$dB_\circ = \frac{dN\mu_\circ I}{۲r}$$

$$B_\circ = \int \frac{\mu_\circ I}{۲r}dN = \int_a^b \frac{\mu_\circ I}{۲r}(\frac{Ndr}{b-a}) = \frac{\mu_\circ IN}{۲(a-b)}\ln(\frac{b}{a})$$

ب) گشتاور مغناطیسی حلقه به شعاع r برابر است با $p_m = iS = i\pi r^۲$ لذا گشتاور مغناطیسی کل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$P_m = \int P_m dN = \int_a^b I\pi r^۲ \frac{N}{b-a}dr = \frac{\pi IN(b^۳-a^۳)}{۳(b-a)}$$

۲۳۳) الف) یک جزء حلقه‌ای شکل از دیسک به شعاع r و ضخامت dr در نظر می‌گیریم. بار موجود روی این جزء برابر است با:



$$dq = \sigma(۲\pi r dr)$$

جریان این جزء از سطح که به خاطر حرکت بارها ایجاد شده است در مدت زمان یک دوره تناوب برابر است با:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{۲\pi/w} = \sigma rwdr$$

بنابراین میدان مغناطیسی ناشی از این جزء در مرکز حلقه برابر است با :

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{di}{r}$$

لذا میدان کل:

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0}{2}\frac{\sigma r w dr}{r} = \frac{\mu_0}{2}\sigma w R$$

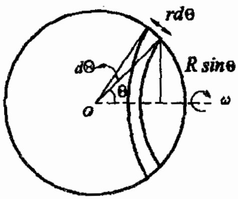
ب) گشتاور مغناطیسی این جزء برابر است با :

$$dP_m = (di)\pi r^2 = (\sigma r w dr)\pi r^2 = \sigma \pi w r^3 dr$$

بنابراین گشتاور مغناطیسی کل :

$$P_m = \int dP_m = \int_0^R \sigma \pi w r^3 dr = \frac{1}{4}\sigma w \pi R^4$$

۲۳۴) چون فقط سطح خارجی کره باردار است یک المان (جزء) حلقه‌ای شکل مطابق شکل روبه‌رو در نظر می‌گیریم. مشابه مسألهٔ قبل جریان معادل این جزء حلقه‌ای برابر است با:



$$di = \frac{dq}{T} = \frac{2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta)\sigma}{2\pi/w} = R^2 w\sigma \sin\theta d\theta \qquad (1)$$

از طرفی میدان مغناطیسی این جزء حلقه در مرکز کره (نقطهٔ O) به کمک مسألهٔ ۲۰۶ برابر است با :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi(R\sin\theta)^2 di}{R^3} = \frac{\mu_0 \sin^2\theta}{2R}di$$

بنابراین میدان مغناطیسی کل در نقطهٔ O به صورت زیر به دست می‌آید.

$$B = \int dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \sin^2\theta}{2R}(R^2 w\sigma \sin\theta d\theta)$$

$$B = \int_0^\pi \frac{1}{2}\mu_0 R\sigma w \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\mu_0 R\sigma w \int_0^\pi \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$

با جانشانی $\cos\theta = u \leftarrow \sin\theta d\theta = -du$.

$$B = \frac{۱}{۲}\mu_\circ R\sigma w \int_{۱}^{-۱} -(۱-u^۲)du = \frac{۱}{۲}\mu_\circ R\sigma w \int_{-۱}^{۱} (۱-u^۲)du$$

$$B = \frac{۱}{۲}\mu_\circ R\sigma w (u - \frac{۱}{۳}u^۳)_{-۱}^{۱} = \frac{۲}{۳}\mu_\circ R\sigma w = ۲۹pT$$

۲۳۵) باتوجه به این‌که سرعت هر پروتون V و بار آن e است. اگر این پروتون مسافت L را در t ثانیه طی می‌کند که $(V = \frac{L}{t})$ آن‌گاه به کمک قانون بیو - ساوار میدان مغناطیسی ناشی از حرکت پروتون با بار e در فاصلهٔ r به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} i \frac{\vec{L}\times\vec{r}}{r^۳} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{e}{t}\ \frac{\vec{L}\times\vec{r}}{r^۳} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} e(\frac{\vec{L}}{t}) \times \frac{\vec{r}}{r^۳}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi} e(\vec{V}\times\vec{r})_/ r^۳ \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ نیروی مغناطیسی وارد بر پروتونی که با سرعت $\vec{V}$ حرکت می‌کند برابر است با :

$$\vec{F_m} = e(\vec{V}\times\vec{B}) \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow F_m = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\ \frac{e^۲}{r^۳}[\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r})] \qquad (۳)$$

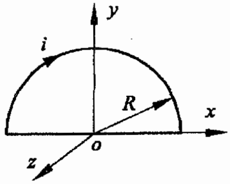
نیروی الکتریکی نیز برابر است با:

$$\vec{F_e} = e\,\vec{E} = e(\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{e\,\vec{r}}{r^۳}) \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳) \rightarrow \frac{|\vec{F_m}|}{|\vec{F_e}|} = -V^۲\mu_\circ\varepsilon_\circ = (\frac{V}{C})^۲ = ۱۰^{-۶}$$

C : سرعت نور است.

۲۳۶) الف) میدان مغناطیسی در نقطهٔ O فقط به خاطر نیم‌دایره است و سیم افقی چون از نقطهٔ O گذشته است لذا میدان آن در این نقطه برابر صفر است. حال به کمک رابطه (**) از مسألهٔ ۲۰۹ و به کمک قانون دست راست (برای یافتن جهت) داریم:



$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{۴\pi R}\pi(-\vec{k})=\frac{\mu_\circ I}{۴R}(-\vec{k}) \qquad (۱)$$

توجه، محور z به طرف بیرون صفحهٔ کاغذ است.
می‌دانیم نیروی مغناطیسی وارد بر سیمی به طول L حامل جریان I در میدان $\vec{B}$ برابر است با :

$$\vec{F}=I\vec{L}\times\vec{B} \qquad (۲)$$

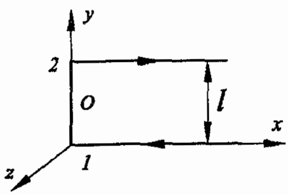
بنابراین نیروی وارد بر واحد طول در نقطهٔ O به کمک روابط «۱» و «۲» به دست می‌آید.

$$\vec{F}=I(-\vec{i})\times\vec{B}=I(-\vec{i})\times(\frac{\mu_\circ I}{۴R}(-\vec{k}))$$

$$\vec{F}=\frac{\mu_\circ I^۲}{۴R}(\vec{i}\times\vec{k})=\frac{\mu_\circ I^۲}{۴R}(-\vec{j})$$

$$|\vec{F}|=\frac{\mu_\circ I^۲}{۴R}=\circ/۲N/m$$

ب) چون سیم ۲-۱ از نقطهٔ O گذشته لذا میدانی در آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین میدان در نقطهٔ O ناشی از دو سیم نیمه بی‌نهایت است. (میدان هر دو سیم با هم برابر و در یک جهت است) به کمک رابطهٔ (*) مسألهٔ ۲۰۷، میدان هر سیم برابر است با :



$$\vec{B}_۱=\vec{B}_۲=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{I}{(L/۲)}(\sin\frac{\pi}{۲}-\circ)=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi L}(-\vec{k})$$

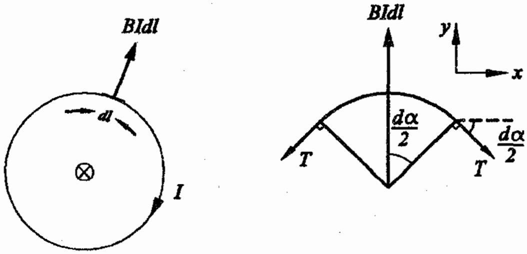
$$\vec{B}_\circ=۲\vec{B}_۱=\frac{\mu_\circ I}{\pi L}(-\vec{k})$$

نیروی وارد بر واحد طول در نقطهٔ O برابر است با :

$$\vec{F}=I(+\vec{j})\times(\frac{\mu_\circ I}{\pi L})(-\vec{k})=\frac{-\mu_\circ I^۲}{\pi L}(\vec{j}\times\vec{k})=\frac{\mu_\circ I^۲}{\pi L}(-\vec{i})$$

$$|\vec{F}|=\frac{\mu_\circ I^۲}{\pi L}$$

۲۳۷) باتوجه به شکل «۱» هر جزء از سیم به طول dL نیرویی برابر $BIdL$ را احساس می‌کند. از طرفی بخاطر تعادل سیم، نیروی کشش T در سیم ایجاد می‌شود (شکل ۲) از تعادل می‌توان نوشت:



$$\sum Fy = \circ \rightarrow ۲T\sin(\frac{d\alpha}{۲}) = BIdL \quad , \quad \sin(\frac{d\alpha}{۲}) \simeq \frac{d\alpha}{۲}$$

$$\rightarrow Td\alpha = BIdL$$

$d\alpha$ زاویهٔ مرکزی کمانی به طول dL است.

$$T = BI\frac{dL}{d\alpha} = BIR$$

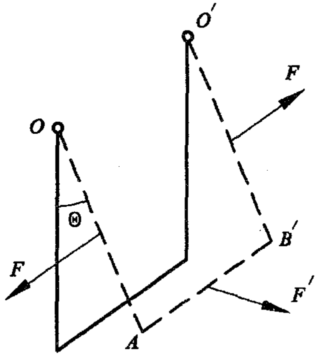
بنابراین تنش (کشش بر واحد سطح) در این سیم برابر است با :

$$\sigma = \frac{T}{A} = \frac{BIR}{(\frac{\pi}{۴})d^۲} = \frac{۴BIR}{\pi d^۲}$$

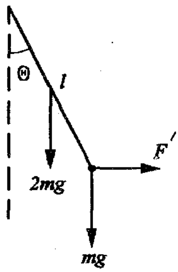
برای این‌که سیم پاره نشود باید تنش فوق نباید از تنش ماکزیمم σ_{max} بیشتر باشد لذا ماکزیمم میدان برابر است با:

$$\sigma \leq \sigma_{max} \rightarrow \frac{۴B_{max}IR}{\pi d^۲} = \sigma_{max}$$
$$\rightarrow B_{max} = \frac{\pi d^۲ \sigma_{max}}{۴IR}$$

۲۳۸) مطابق شکل بر ضلع‌های OA و $O'A'$ نیروهای برابر با جهت‌های مخالف وارد می‌شود لذا این دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند و چون موازی محور OO' می‌باشند بنابراین گشتاوری حول این محور ایجاد نمی‌کنند. اگر سیستم در زاویهٔ θ به تعادل برسد.



باید گشتاور حاصل از نیروی F' با گشتاور ناشی از وزن سه ضلع حول محور OO' برابر باشد
پس با توجه به شکل زیر (نمای جانبی) داریم:



$$F'\ (L\cos\theta) = mg(L\sin\theta) + ۲mg(\frac{L}{۲}\sin\theta)$$

L : طول هر ضلع $\qquad$ mg : وزن هر ضلع

$$\rightarrow F' = ۲mg\tan\theta \qquad (۱) \qquad , \qquad F' = ILB \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow ILB = ۲mg\tan\theta \rightarrow B = \frac{۲mg\tan\theta}{IL} \qquad (۳)$$

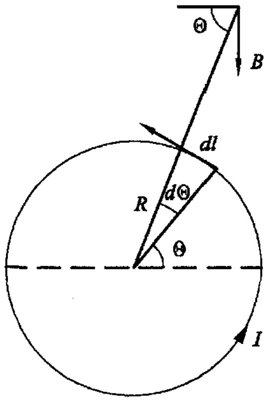
$$m = \rho V = \rho(SL) = \rho SL$$ ρ : چگالی حجمی (۴)

$$(۴),(۳) \rightarrow B = \frac{۲\rho SLgtan\theta}{IL} = \frac{۲\rho Sg\tan\theta}{I}$$

۲۳۹) نکته: گشتاور وارد بر یک گشتاور دو قطبی (حلقهٔ حامل جریان) در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر است با:

$\vec{M}=\vec{P_m} \times \vec{B}$

که $\vec{P_m}= IS\hat{n}$ که $\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح و جهت آن از قانون دست راست پیروی می‌کند.



اثبات: مطابق شکل یک حلقه از سیم‌پیچ را در نظر می‌گیریم. نیروی وارد بر جزء dL از این حلقه برابر است با:

$d\vec{F}= I\, d\vec{L} \times \vec{B}$

$dF = IdLB\sin(۱۸۰ - \theta) = IdLB\sin\theta$

جهت این نیرو در نیم‌دایره بالایی شکل فوق به بیرون صفحه و برای نیم‌دایره پایینی به داخل صفحه است. از طرفی گشتاور حاصل از این نیرو برای جزء dL، حول قطر وسط حلقه، برابر است با:

$dM = (IdLB\sin\theta)R\sin\theta = I(Rd\theta)BR\sin^۲\theta$

می‌توان این دایره را به ۴ قسمت تقسیم کرده که گشتاور هر کدام با هم برابر است لذا:

$$M = ۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} dM = ۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} IR^۲B\sin^۲\theta d\theta = IR^۲B\pi$$

$$= I(\pi R^۲)B = ISB = P_mB$$

که باتوجه به جهت بردارها برای N حلقه داریم:

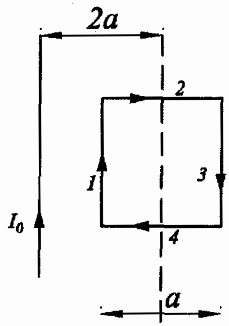
$\vec{M}= N\, \vec{P_m} \times \vec{B}$

حل: باتوجه به نکتهٔ فوق و تعادل سیستم باید گشتاور حاصل از وزن Δmg با گشتاور مغناطیسی سیم‌پیچ برابر باشد لذا:

$$NP_mB = \Delta mgL \rightarrow NIBS = \Delta mgL$$

$$\rightarrow B = \frac{\Delta mgL}{NIS} = ۰/۴T$$

۲۴۰) واضح است که نیروهای وارد بر اضلاع ۲ و ۴ با هم برابر و در جهت مخالف یکدیگر هستند لذا برآیند آن‌ها صفر می‌شود. از طرفی چون سیم ۱ به سیم حامل جریان نسبت به سیم ۳ نزدیک‌تر است، بنابراین نیروی وارد بر سیم ۱ بیشتر از ۳ است لذا با این‌که این دو نیرو مخالف جهت هم هستند اما برایند آن‌ها صفر نیست بنابراین:



$$F_۱ = IaB = Ia[\frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰}{(n-\frac{۱}{۲})a}] = \frac{\mu}{۲\pi}\frac{II_۰}{(n-\frac{۱}{۲})}$$

به همین ترتیب:

$$F_۳ = \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{II_۰}{(n+\frac{۱}{۲})}$$

در نتیجه برآیند این دو نیرو:

$$\sum F = F_۱ - F_۳ = \frac{۲\mu_۰ II_۰}{\pi(۴n^۲-۱)} = ۰/۴\mu N$$

ب) کار انجام شده برای چرخش قاب تحت یک زاویه برابر است با

$W = \int Id\phi$

ϕ: شار گذرنده از قاب

چون جریان ثابت است لذا:

$W = I\int d\phi = I(\phi_f - \phi_i)$

i حالت ابتدایی و f، حالت نهایی است. از طرفی :

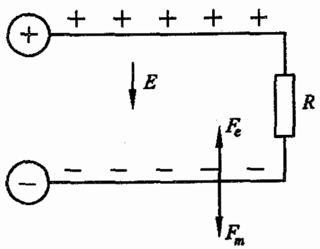
$$|\phi_i| = |\phi_f| = \phi \qquad \phi_i = -\phi_f$$

$$\Delta\phi = ۲\phi \rightarrow W = ۲\phi I \qquad (۱)$$

$$\phi = \int \vec{B}.d\vec{S} \rightarrow W = ۲I\int \vec{B}.d\vec{S}$$

$$W = 2I \int_{\alpha(n-\frac{1}{2})}^{\alpha(n+\frac{1}{2})} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{r} dr = \frac{\mu_0 I I_0}{\pi} \ln(\frac{2n+1}{2n-1})$$

۲۴۱) صرف نظر از این‌که سیم‌ها حامل جریان باشند بارهای سطحی مازاد روی هر سیم ایجاد می‌شود بنابراین علاوه بر نیروی مغناطیسی F_m باید نیروی الکتریکی F_e در نظر گرفته شود. با فرض این‌که چگالی طولی هر سیم برابر λ باشد آن‌گاه نیروی الکتریکی وارد بر واحد طول یک سیم که از طرف سیم دیگر وارد می‌شود برابر است با:

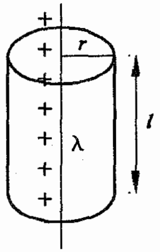


$F_e = \lambda E \qquad (1)$

E : میدان ناشی از یک سیم در محل دیگر

به کمک قانون گاوؤس میدان الکتریکی ناشی از یک سیم با چگالی طولی λ در فاصلهٔ r برابر است با

$$E(2\pi r)L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$



در این مسأله اگر فاصلهٔ دو سیم L باشد آن‌گاه میدان E یکی در محل سیم دیگر برابر است با:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi L \varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$(1) \rightarrow F_e = \lambda(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 L}) = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 L} \qquad (2)$$

نیروی الکتریکی وارد بر هر سیم فقط ناشی از میدان سیم دیگر است. نیروی مغناطیسی وارد بر هر سیم نیز برابر است با:

$$F_m = \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{I^۲}{L} \qquad (۳)$$

I : جریان هر سیم

برای مدار فوق داریم $V = RI$. همچنین با استفاده از مفهوم کار و اختلاف پتانسیل (رجوع شود به کتاب هالیدی بخش ظرفیت) می‌توان نوشت،

$$V = \int_a^{L-a} E_t dr \qquad (۴)$$

a : شعاع سطح مقطع سیم‌ها.
E_t : میدان برآیند و برابر جمع میدان‌های دو سیم است لذا:

$$E_t = \frac{\lambda}{۲\pi r\varepsilon_\circ} + \frac{\lambda}{۲\pi(L-r)\varepsilon_\circ} \qquad (۵)$$

$$(۵),(۴) \to V = \int_a^{L-a} \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ}[\frac{۱}{r} + \frac{۱}{L-r}]dr$$

$$V = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ}[\ln r - \ln(L-r)]_a^{L-a} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_\circ}\ln\frac{L-a}{a}$$

$$V = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_\circ}\ln(n-۱) \qquad (٦)$$

از طرفی می‌دانیم اختلاف پتانسیل V برابر با $V = RI$ است لذا :

$$RI = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_\circ}\ln(n-۱) \to \frac{I}{\lambda} = \frac{\ln(n-۱)}{\pi R\varepsilon_\circ} \qquad (۷)$$

برای این‌که برآیند نیروهای وارد بر هر سیم صفر شود لازم است که $F_e = F_m$.

$$(۷),(۳),(۲) \to \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{I^۲}{L} = \frac{\lambda^۲}{۲\pi\varepsilon_\circ L} \to [\frac{\ln(n-۱)}{\pi R\varepsilon_\circ}]^۲ = \frac{۱}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}$$

$$R = \sqrt{\frac{\mu_\circ}{\varepsilon_\circ}}\frac{\ln(n-۱)}{\pi}$$

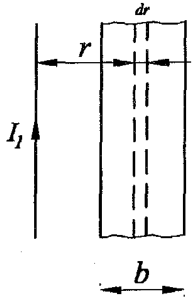
۲۴۲) به کمک مسألهٔ ۲۱۲ می‌دانیم میدان مغناطیسی ناشی از نیم حلقهٔ رسانا در نقطهٔ O برابر است با:

$$B_\circ = \frac{\mu_\circ I}{\pi^۲ R}$$

بنابراین چون این میدان بر خط جریان سیم عمود است لذا :

$$F = ILB \to \frac{F}{L} = IB = \frac{\mu_\circ I^۲}{\pi^۲ R}$$

۲۴۳) المان کوچکی به عرض dr و طول واحد از رسانای سمت راست در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که جریانی که از کل پهنای b این رسانا می‌گذرد برابر I_2 است لذا جریان عبوری از المان مورد نظر برابر است با $dI_2 = \frac{I_2}{b}dr$ در نتیجه نیروی وارد بر این المان (به طول واحد) از طرف میدان ناشی از سیم چپ برابر است با:



$$dF = dI_2 \times 1 \times B_1 = \frac{I_2}{b}dr(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dr}{2\pi b r}$$

$$F = \int dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\int_a^{a+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}\ln(\frac{a+b}{a})$$

باتوجه به قانون سوم نیوتن نیرویی که بر سیم چپ نیز وارد می‌شود مساوی با مقدار فوق و برابر است با :

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\ln(\frac{a+b}{a})$$

۲۴۴) باتوجه به مسألهٔ ۲۱۶ می‌دانیم که میدان مغناطیسی هر دو صفحه با هم مساوی و برابر :

$$B_1 = B_2 = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\mu_0 i \qquad (1)$$

است. در رابطهٔ فوق i جریان عبوری بر واحد طول می‌باشد. از طرفی هر صفحه در میدان صفحهٔ دیگر قرار دارد بنابراین این دو صفحه به هم نیرو وارد می‌کنند لذا :

$$F_1 = iLB_1 = iL(\frac{1}{2}\mu_0 i) = \frac{1}{2}\mu_0 L(\frac{B}{\mu_0})^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}L$$

چون i جریان بر واحد طول است لذا:

$\frac{F_1}{L} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$ نیروی بر واحد سطح

۲۴۵) الف) با توجه به شکل «الف» پیداست چون فاصلهٔ خطوط میدان B_1 نزدیکتر و فشرده‌تر به هم نسبت به خطوط میدان B_2 هستند، لذا $B_1 > B_2$ از طرفی اگر میدان مغناطیسی یکنواخت

خارجی را با Be و میدان مغناطیسی صفحه را با B_p نمایش دهیم با توجه به حل مسألهٔ ۲۱۶ می‌دانیم جهت میدان صفحهٔ BP در دو طرف صفحهٔ مخالف هم است. از طرفی چون میدان‌های $B_۱$ و $B_۲$ در یک جهت هستند می‌توان گفت که $B_e > B_p$ چرا که با کم کردن B_p از B_e که همان $B_۲$ می‌شود دارای همان جهت $B_۱$ می‌باشد که از جمع میدان‌ها ناشی شده است لذا:

$$\left.\begin{array}{l} B_e + B_p = B_۱ \\ B_e - B_p = B_۲ \end{array}\right\} \rightarrow B_p = \frac{B_۱ - B_۲}{۲}, B_e = \frac{B_۱ + B_۲}{۲}$$

از حل مسألهٔ ۲۱۶ داریم:

$$B_p = \frac{۱}{۲}\mu_\circ i \rightarrow \frac{۱}{۲}\mu_\circ i = \frac{B_۱ - B_۲}{۲} \rightarrow i = \frac{B_۱ - B_۲}{\mu_\circ}$$

دقت شود که در رابطهٔ فوق i جریان بر واحد طول است. بنابراین:

$$F = iLB_e \rightarrow \frac{F}{L} = iB_e = \frac{B_۱ - B_۲}{\mu_\circ} \times \frac{B_۱ + B_۲}{۲} = \frac{B_۱^۲ - B_۲^۲}{۲\mu_\circ}$$

ب) در این حالت چون $B_۲$ خلاف جهت $B_۱$ است نشان می‌دهد که میدان ناشی از صفحه B_p بزرگتر از میدان ناشی از B_e است لذا:

$$\left.\begin{array}{l} B_p + B_e = B_۱ \\ B_p - B_e = B_۲ \end{array}\right\} \rightarrow B_p = \frac{B_۱ + B_۲}{۲}, B_e = \frac{B_۱ - B_۲}{۲}$$

لذا:

$$B_p = \frac{۱}{۲}\mu_\circ i = \frac{B_۱ + B_۲}{۲} \rightarrow i = \frac{B_۱ + B_۲}{\mu_\circ}$$

$$F = iLB_e \Rightarrow \frac{F}{L} = \frac{B_۱^۲ - B_۲^۲}{۲\mu_\circ}$$

ج) اگر زاویهٔ بین خطوط میدان $B_۱$ با افق برابر $\theta_۱$ و برای میدان $B_۲$ با افق برابر $\theta_۲$ باشد می‌توان به کمک شرطی مرزی از قانون گاوس نوشت:

$$B_۱ \cos\theta_۱ = B_۲ \cos\theta_۲ \quad (۱)$$

همچنین

$$B_۱ \sin\theta_۱ + B_۲ \sin\theta_۲ = \mu_\circ \quad (۲)$$

که i جریان بر واحد طول است.

مشابه قسمت‌های قبل می‌توان گفت که میدان خارجی موازی با صفحه باید برابر با $\frac{B_۱ \sin\theta_۱ - B_۲ \sin\theta_۲}{۲}$ باشد. (دقت کنید چون نیرو به صورت مماس است لذا مؤلفهٔ عمودی $B_۱ \cos\theta$ در نیرو اثری ندارد) بنابراین:

$$F = \frac{B_۱^۲ \sin^۲\theta_۱ - B_۲^۲ \sin^۲\theta_۲}{۲\mu_\circ} \quad (۳)$$

$$(۱) \rightarrow B_۱^۲ \cos^۲\theta_۱ = B_۲^۲ \cos^۲\theta_۲ \rightarrow B_۱^۲(۱ - \sin^۲\theta_۱) = B_۲^۲(۱ - \sin^۲\theta_۲)$$

$$\rightarrow B_۱^۲ \sin^۲\theta_۱ - B_۲^۲ \sin^۲\theta_۲ = B_۱^۲ - B_۲^۲ \quad (۴)$$

$$(۴), (۳) \rightarrow F = \frac{B_۱^۲ - B_۲^۲}{۲\mu_\circ}$$

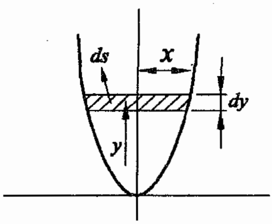
فصل ۱۲

القای الکترومغناطیسی

۲۴۶) با توجه به قانون لنز با افزایش مساحت حلقه، شار عبوری از آن زیاد شده لذا برای مخالفت با آن نیروی محرکهٔ القایی و جریان القایی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت هستند. از قانون فارادی داریم :

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = |\frac{d\Phi}{dt}| = |\frac{d}{dt}(BS)| = B|\frac{dS}{dt}| \quad (۱)$$

S مساحت حلقه در هر لحظه است. از طرفی با توجه به شکل می‌دانیم :



$$ds = ۲xdy \qquad (۲)$$

$$y = bx^{۲} \rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{b}} \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲),(۱) \rightarrow \varepsilon_{\text{القایی}} = B۲x\frac{dy}{dt} = ۲B\sqrt{\frac{y}{b}}\frac{dy}{dt} = ۲B\sqrt{\frac{y}{b}}V \qquad (۴)$$

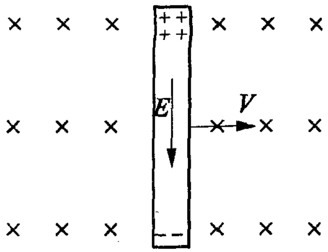
V : سرعت لغزنده در هر لحظه.

با توجه به روابط حاکم بر حرکت با شتاب ثابت داریم :

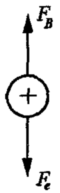
$$V^{۲} - V_{\circ}^{۲} = ۲a(y - y_{\circ}) \rightarrow V^{۲} = ۲ay \rightarrow V = \sqrt{۲ay} \qquad (۵)$$

$$(۵),(۴) \rightarrow \varepsilon_{\text{القایی}} = ۲B\sqrt{\frac{y}{b}}\sqrt{۲ay} = By\sqrt{\frac{۸a}{b}}$$

۲۴۷) بدون این‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم میدان به داخل صفحه باشد. اگر میله را مطابق شکل در نظر بگیرید که به سمت راست در حال حرکت است. می‌دانیم چون بارهای داخل میله همراه میله با سرعت v حرکت می‌کنند.



لذا نیروی F_B از جانب میدان مغناطیسی به بارها وارد می‌شود که $F_B = qvB$. در اثر نیروی F_B بارهای مثبت و منفی از هم جدا می‌شوند. در اثر جدایی بارهای غیرهمنام، میدان الکتریکی مطابق شکل به تدریج تقویت می‌شود تا جایی که از جدایی بارهای غیرهمنام جلوگیری می‌کندو در این لحظه دو نیروی F_B و F_e با هم برابر شده و بارها در جای خود به تعادل می‌رسند. لذا :

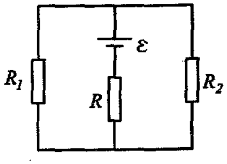


$$F_B = F_e \to qvB = qE \to E = vB \qquad (۱)$$

به علت وجود میدان الکتریکی E، در دو سر میله یک اختلاف پتانسیل به وجود می‌آید که همان نیروی محرکهٔ القایی است چون فاصلهٔ دو سر میله برابر L است لذا داریم :

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = EL \xrightarrow{\text{از }(۱)} \varepsilon_{\text{القایی}} = vBL$$

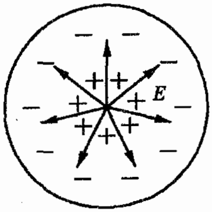
بنابراین مدار معادل مسأله به صورت زیر در می‌آید که مقاومت‌های $R_۲$ و $R_۱$ با هم موازی‌اند و جمع آن دو با مقاومت R به صورت سری هستند لذا جریان در مدار معادل برابر است با:



$$i = \frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R + \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲}} = \frac{BvL}{R + \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲}}$$

۲۴۸) الف) هنگامی که دیسک حول محورش دوران می‌کند. الکترون‌های آزاد دیسک نیز با همان سرعت زاویه‌ای ω شروع به دوران می‌کنند. از طرفی چون الکترون‌ها آزاد هستند و چیزی مانع

از حرکت آن‌ها نمی‌شود لذا به خاطر جرم و اثر گریز از مرکز شروع به دور شدن از مرکز دوران می‌کنند. در نتیجه موجب جدایش بارهای منفی و مثبت از هم مطابق شکل می‌شوند. در اثر جدایش بارهای مثبت و منفی یک میدان الکتریکی E ایجاد می‌شود به طوری‌که هر چه قدر بیشتر بارهای آزاد از مرکز دور شوند این میدان E قوی‌تر می‌شود تا جایی که بتواند بر نیروی اینرسی بارهای آزاد ($mr\omega^2$) غلبه کند لذا در حالت تعادل می‌توان با استفاده از قانون دوم نوشت:



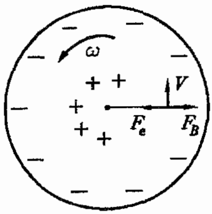
$$F_e = mr\omega^2 \rightarrow eE = mr\omega^2 \rightarrow E = \frac{m\omega^2 r}{e}$$

r: فاصلهٔ بار آزاد مورد نظر تا محور دوران.

لذا اختلاف پتانسیل بین لبه و مرکز برابر است با:

$$V_{\text{مرکز}} - V_{\text{لبه}} = \int_0^a \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_0^a \frac{m\omega^2 r}{e} dr = \frac{m\omega^2}{2e} a^2 = 3nV$$

ب) در این‌جا برای راحتی فرض می‌کنیم که سرعت زاویه‌ای ω بسیار کم است و لذا می‌توان از اثرات به وجود آمده در حالت «۱» صرف‌نظر کرد.



در اثر چرخش دیسک بارهای آزاد با سرعت خطی $V = r\omega$ حرکت می‌کنند که در میدان مغناطیسی B نیرویی برابر $F_B = evB = er\omega B$ به آنها وارد می‌شود در اثر این نیرو بارهای منفی به سمت لبهٔ دیسک کشیده می‌شود. (بافرض این‌که میدان به داخل صفحه باشد.) در اثر جدایی بارها میدان الکتریکی E به وجود می‌آید. در حالت تعادل بارها این دو نیرو با هم برابر است لذا:

$$F_e = F_B \rightarrow eE = er\omega B \rightarrow E = r\omega B = vB$$

v: سرعت است. بنابراین :

$$V_{\text{مرکز}} - V_{\text{لبه}} = \int_0^a \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_0^a r\omega B dr = \frac{1}{2}\omega B a^2 = 20mV$$

نکتهٔ ۱: در حالت کلی که $\omega > \frac{eB}{m}$ باشد می‌توان از اثرات حالت الف صرف‌نظر کرد.
نکتهٔ ۲: از حل مسائل ۲۴۷ و ۲۴۸ می‌توان دریافت که برای مسائلی که شامل حرکت در میدان مغناطیسی هستند داریم $E = vB$ که اگر آن را به صورت برداری بنویسیم خواهیم داشت:

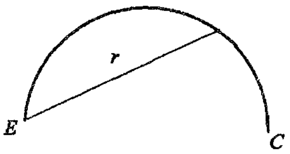
$$\boxed{\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \qquad (*)}$$

$\vec{B}$ بردار میدان مغناطیسی $\vec{v}$: سرعت ذرات یا جسم مورد نظر.

۲۴۹) می‌دانیم $V_A - V_C = \int_A^C \vec{E} \cdot \vec{dr}$ با استفاده از رابطهٔ (*) در حل مسألهٔ ۲۴۸ داریم:

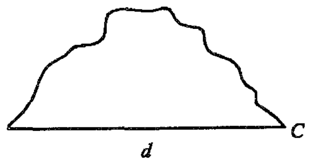
$$V_A - V_C = \int_A^C \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_A^C -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dr} = \int_{\circ}^{d} -vBdr$$

از طرفی $v = r\omega$ که r فاصلهٔ عمومی تا نقطهٔ A (مطابق شکل) است.



$$\rightarrow V_A - V_C = \int_{\circ}^{d} -r\omega Bdr = -\frac{۱}{۲}\omega Bd^{۲} = -۱\circ mV$$

در حالت کلی فرض کنید که سیم AC یک شکل دلخواه داشته باشد.
بنابراین :



$$V_A - V_C = \int_A^C \vec{E} \cdot \vec{dr} = -\int_A^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dr}$$
$$= -\int_A^C [(\vec{\omega} \times \vec{r} \times \vec{B})] \cdot \vec{dr} = -\int_A^C (\vec{B} \cdot \vec{r}\,\vec{\omega} - \vec{B} \cdot \vec{\omega}\,\vec{r})\,\vec{dr} = -\frac{۱}{۲}B\omega d^{۲}$$

بردار $\vec{r}$ از نقطهٔ A اندازه‌گیری می‌شود.

۲۵۰) ابتدا شار گذرنده از حلقه را در زاویهٔ Φ می‌یابیم.

$$\Phi = BS = B(\frac{۱}{۲}\Phi R^{۲})$$

بنابراین :

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{۱}{۲}BR^{۲}\frac{d\Phi}{dt}$$

با توجه به اینکه شتاب زاویه‌ای β ثابت است مشابه حرکتهای خطی داریم:

$$\Phi = \frac{۱}{۲}\beta t^{۲} + \omega_{\circ} t \quad , \quad \omega_{\circ} = \circ \Rightarrow \Phi = \frac{۱}{۲}\beta t^{۲}$$
$$\epsilon_{\text{القایی}} = \frac{۱}{۲}BR^{۲}\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}Bt^{۲}) = \frac{۱}{۲}B\beta R^{۲}t$$

با توجه به قانون لنز در نیم پریود جریان در حلقه برخلاف عقربه‌های ساعت و در نیم پریود بعدی در جهت عقربه‌های ساعت است لذا می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{in} = (-1)^n \frac{BR^2}{2}\beta t$$

۲۵۱) باتوجه به این‌که در سمت راست سیم، جهت میدان مغناطیسی به داخل صفحه است و مقدار آن از رابطهٔ $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$ به دست می‌آید که r فاصلهٔ عمودی از سیم است. با توجه به این‌که B در تمام طول لغزنده یکسان است به کمک رابطهٔ (*) در مسألهٔ ۲۴۸ داریم:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

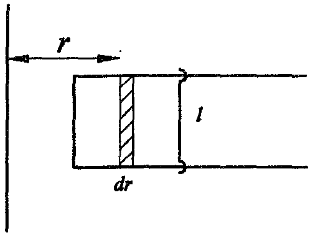
در نتیجه:

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = \int_1^2 \vec{E}\,.\,\vec{dr} = -\int_1^2 (\vec{v} \times B).\,\vec{dL} = vBL$$

بنابراین جریان القایی برابر است با:

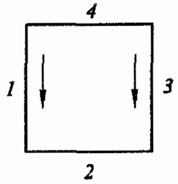
$$i_{\text{القایی}} = \frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R} = \frac{vBL}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IvL}{Rr}$$

راه‌حل دوم: ابتدا شار عبوری از حلقه را به دست می‌آوریم:



$$\Phi = \int B.dS = \int BdS$$
$$= \int_a^r \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \times Ldr = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\int_a^r \frac{dr}{r}$$
$$\varepsilon_{\text{القایی}} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\int_a^r \frac{dr}{r}\right)$$
$$= \frac{\mu_0 IL}{2\pi}\frac{d}{dr}\left(\int_a^r \frac{dr}{r}\right) \times \frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \times \frac{1}{r} \times v$$
$$\to i_{\text{القایی}} = \frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IvL}{Rr}$$

۲۵۲) می‌دانیم سیم راست حامل جریان در فاصلهٔ x میدانی برابر $B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$ ایجاد می‌کند. از طرفی باتوجه به رابطهٔ (*) در حل مسألهٔ ۲۴۸ می‌دانیم نیروی محرکهٔ القایی حرکتی برابر با $-\int(\vec{v} \times \vec{B}).\,\vec{dl}$ است. با توجه به این‌که در ضلع‌های افقی قاب راستای $\vec{v}$ با راستای $\vec{dl}$ موازی هستند، لذا $\vec{v} \times \vec{B}\,.\,\vec{dl} = 0$ و هیچ نیروی محرکهٔ القایی در اضلاع افقی ایجاد نمی‌شوند ($\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0$) بنابراین به محاسبهٔ نیروی محرکه در اضلاع قائم می‌پردازیم.



$$\varepsilon_1 = \int -(\vec{v} \times \vec{B}).\, \vec{dL} = \int_0^a v\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}dL = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Iva}{x}$$
$$\varepsilon_2 = \int -(\vec{v} \times \vec{B}).\, \vec{dL} = \int_0^a v(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{(x+a)})dL = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Iva}{x+a}$$

با توجه به این‌که جهت این دو نیروی محرکه در مدار، خلاف یکدیگر است لذا نیروی محرکهٔ کل برابر است با:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 Iva}{2\pi}[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}]$$
$$= \frac{va^2\mu_0 I}{2\pi x(x+a)}$$

۲۵۳) هنگامی که میله دوران می‌کند نیروی محرکه‌ای برابر مقدار زیر القا می‌شود:

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\theta a^2 B)$$
$$= \frac{1}{2}a^2 B\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}a^2 B\frac{d(\omega t)}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}a^2 B\omega$$

بنابراین جریان خالص در مدار برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon(t) - \frac{1}{2}a^2 B\omega}{R}$$

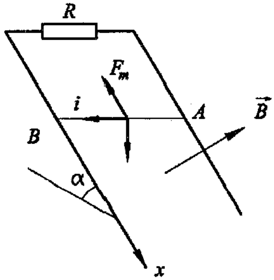
هنگامی که جریان i از میلهٔ لغزنده می‌گذرند در میدان B یک نیروی مغناطیسی به آن وارد می‌شود که مقدار آن برابر با Bi بر واحد طول است. که جهت این نیرو عمود بر میدان B و عمود بر میلهٔ لغزنده است که گشتاوری معادل زیر ایجاد می‌کند.

$$T = \int_0^a (Bi)xdx = \int_0^a \frac{\varepsilon(t) - \frac{1}{2}a^2 B\omega}{R}Bxdx$$

واضح است که گشتاورهای مغناطیسی و مکانیکی باید با هم برابر و در خلاف جهت هم باشند تا میله با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران کند. در نتیجه :

$$\rightarrow \frac{\varepsilon(t) - \frac{1}{2}a^2 B\omega}{R}\frac{Ba^2}{2} = \frac{1}{2}mga\sin\omega t$$
$$\rightarrow \varepsilon(t) = \frac{1}{2}a^2 B\omega t + \frac{mgR}{aB}\sin\omega t$$

۲۵۴) با توجه به قانون لنز جهت جریان القایی از A به سمت B می‌باشد. از طرفی با توجه به مسألهٔ ۲۴۸ نیروی محرکهٔ القایی بین فاصلهٔ A تا B برابر $BvL = \varepsilon_{\text{القایی}}$ است. حال در راستای x باتوجه به قانون دوم نیوتن داریم:



$$\sum F_x = ma_x \to mg\sin\alpha - iLB = ma$$

i: جریان القایی در حلقه است. در حالت حد که شتاب برابر صفر می‌شود داریم:

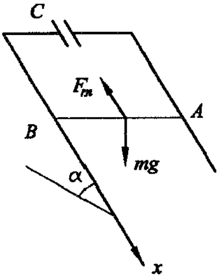
$$mg\sin\alpha = iLB \qquad (۱)$$

از طرفی:

$$i = \frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R} = \frac{BvL}{R} \quad (۲)$$

$$(۲),(۱) \to mg\sin\alpha = \frac{B^۲vL^۲}{R} \to v = \frac{mg\sin\alpha R}{B^۲L^۲}$$

۲۵۵) باتوجه به قانون لنز جهت جریان القایی، از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B است. از طرفی نیروی محرکهٔ القایی بین فاصلهٔ A تا B باید برابر با اختلاف پتانسیل دو سر خازن شود لذا:



$$\frac{q}{c} = \varepsilon_{\text{القایی}} \to q = c\varepsilon_{\text{القایی}} \to i = \frac{dq}{dt} = c\frac{d\varepsilon_{\text{القایی}}}{dt}$$

از طرفی به کمک مسألهٔ ۲۴۸ می‌دانیم، $\varepsilon_{\text{القایی}} = BLv$

$$\to i = c\frac{d\varepsilon}{dt} = c\frac{d}{dt}(BLv) = CBL\frac{dv}{dt} = CBLa \qquad (۱)$$

نیروهای وارد بر میله در راستای x عبارتند از وزن و نیروی آمپر لذا:

$$\sum F_x = max \to mg\sin\alpha - F_m = ma \qquad (۲)$$

$$F_m = iLB(CBLa)LB = CL^۲B^۲a \qquad (۳)$$

$$(۳),(۲) \rightarrow mg\sin\alpha - CL^{۲}B^{۲}a = ma$$
$$\rightarrow a = \frac{mg\sin\alpha}{m + CL^{۲}B^{۲}}$$

۲۵۶) می‌دانیم در لحظهٔ دلخواه t شار عبوری از حلقه برابر است با:

$$\Phi_t = \vec{B}\,.\,\vec{S} = B(\frac{\pi}{۲}a^{۲}\cos\omega t)$$

بنابر قانون القای فارادی داریم:

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\frac{\pi a^{۲}}{۲}\cos\omega t) = \frac{B\pi a^{۲}\omega}{۲}\sin\omega t$$

لذا جریان القایی برابر است با:

$$i_{\text{القایی}} = \frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R} = \frac{B\pi a^{۲}}{۲R}\omega\sin\omega t$$

بنابراین توان حرارتی تولید شده در مدار در لحظهٔ t برابر است با:

$$p(t) = \varepsilon_{\text{القایی}} \times i_{\text{القایی}} = (\frac{B\pi a^{۲}}{۲}\sin\omega t) \times \frac{B\pi a^{۲}}{۲R}\omega\sin\omega t$$
$$= (\frac{B\pi a^{۲}\omega}{۲})^{۲}\frac{\sin^{۲}\omega t}{R}$$

لذا توان حرارتی متوسط تولید شده در مدت زمان یک پریود τ برابر است.

$$\overline{p} = \frac{\int_{۰}^{\tau} p(t)}{\tau} = \frac{(\frac{B\pi a^{۲}\omega}{۲})^{۲}\frac{۱}{R}\int_{۰}^{\tau}\sin^{۲}\omega t dt}{\tau}$$
$$= (\frac{B\pi a^{۲}\omega}{۲})^{۲}\frac{۱}{R\tau}\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\tau}(۱ - \cos ۲\omega t)dt$$
$$= (\frac{B\pi a^{۲}\omega}{۲})^{۲}\frac{۱}{۲R\tau}(t - \frac{۱}{۲\omega}\sin ۲\omega t)_{۰}^{\tau}$$
$$\tau = \frac{۲\pi}{\omega} \rightarrow \overline{p} = \frac{۱}{۲R}(\frac{B\pi a^{۲}\omega}{۲})^{۲}$$

نکته: باتوجه به این‌که نیم‌حلقه با قسمت مستطیل شکل یک حلقهٔ کامل را تشکیل می‌دهند. اما از طرفی چون مقدار مساحت قسمت مستطیلی ثابت است در عمل مشتق‌گیری حذف شده و اثری در جواب ندارد.

۲۵۷) با دوران پیچه به اندازهٔ ۱۸۰ درجه علامت شار تغییر می‌کند. یعنی اگر ϕ در ابتدا شار عبوری از پیچه برابر BS باشد بعد از دوران شار عبوری برابر $BS-$ خواهد بود. بنابراین :

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = \frac{-N\Delta\phi}{\Delta t} = -N\frac{\phi - (-\phi)}{\Delta t} = -N\frac{۲\phi}{\Delta t} = -\frac{۲BSN}{\Delta t}$$

$$i = \frac{\text{القایی}}{R} = -\frac{۲BSN}{R\Delta t}$$

$$\Delta q = i\Delta t = (-\frac{۲BSN}{R\Delta t})\Delta t = -\frac{۲BSN}{R}$$

$$\rightarrow |B| = \frac{\Delta qR}{۲NS} = ۰/۵T$$

۲۵۸) در ابتدا بردار عمود بر سطح قاب به طرف بیرون کاغذ است و در انتها این بردار به داخل صفحه می‌باشد. لذا شار در حالت اولیه $\Phi_۱ = \vec{B} \cdot \vec{S} < ۰$ و در حالت ثانویه $\Phi_۲ > ۰$ است. در هر دو حالت شار را حساب می‌کنیم.

$$\Phi_۱ = \int B.dS = -\int_{b-a}^{b} Badr = -\int_{b-a}^{a} \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I}{r}adr$$
$$= -\frac{\mu_۰ Ia}{۲\pi} ln(\frac{b}{b-a})$$
$$\Phi_۲ = \int B.dS = \int_{b}^{b+a} \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I}{r}adr = \frac{\mu_۰ Ia}{۲\pi} ln(\frac{b+a}{b})$$
$$\Delta\Phi = \Phi_۲ - \Phi_۱ = -\frac{\mu_۰ Ia}{۲\pi}[ln(\frac{b}{b-a}) + ln(\frac{b+a}{b})]$$
$$= -\frac{\mu_۰ Ia}{۲\pi} ln(\frac{b+a}{b-a}) \qquad (۱)$$
$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}{R} = -\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \qquad (۲)$$

از طرفی:

$$q = i\Delta t \qquad (۳)$$
$$(۳),(۲),(۱) \to q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\mu_۰ Ia}{۲\pi R} ln(\frac{b+a}{b-a})$$

۲۵۹) باتوجه به این‌که میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل $I_۰$ در طول میلهٔ لغزنده تغییر می‌کند. لذا برای راحتی محاسبات ابتدا مقدار متوسط B را در فاصلهٔ a تا b می‌یابیم.

$$\overline{B} = \frac{\int_a^b Bdr}{\int_a^b dr} = \frac{\int_a^b \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰}{r}dr}{\int_a^b dr} = \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰}{(b-a)} ln(\frac{b}{a})$$

الف) باتوجه به قانون لنز جهت جریان در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است حال به کمک رابطهٔ (*) در حل مسألهٔ ۲۴۸ داریم:

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = v\overline{B}L = v(\frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰}{b-a} ln\frac{b}{a})(b-a) = \frac{\mu_۰}{۲\pi} I_۰ ln(\frac{b}{a})v$$
$$i_{\text{القایی}} = \frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R} = \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰ v}{R}(\ln\frac{b}{a})$$

ب) برای ثابت ماندن سرعت لغزنده باید نیروی ها برابر با نیروی آمپر وارد بر لغزنده باشد لذا:

$$F = iL\overline{B} = \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰ v}{R}\ln(\frac{b}{a})(b-a)(\frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{I_۰}{b-a}\ln\frac{b}{a})$$
$$= \frac{v}{R}(\frac{\mu_۰}{۲\pi} I_۰ \ln\frac{b}{a})^۲$$

۲۶۰) با توجه به اینکه شار عبوری از حلقه در حال افزایش است بنابر قانون لنز جریان در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در حلقه القا می‌شود. لذا با توجه به رابطه (*) در مسأله ۲۴۸ در میله رسانای AB نیروی محرکه القایی $\varepsilon = Blv$ ایجاد می‌شود در نتیجه جریان القایی برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R} \qquad (1)$$

از طرفی در راستای افقی تنها نیرویی که بر میله AB وارد می‌شود نیروی آمپر ناشی از جریان i از میله است. به کمک قانون دوم نیوتن داریم:

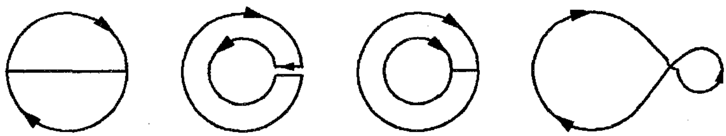
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -F_{amp} = ma \Rightarrow -iLB = ma$$
$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{-B^2L^2v}{R} = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx}$$
$$\Rightarrow -\frac{BL}{mR}dx = dv \Rightarrow \int_{v_0}^{0} dv = -\int_0^x \frac{BL}{mR}dx$$
$$\Rightarrow -v_0 = -\frac{BL}{mR}x \Rightarrow x = \frac{mRv_0}{BL}$$

ب) با توجه به اینکه انرژی اولیه سیستم برابر انرژی جنبشی میله لغزنده بوده و از طرفی انرژی فقط از طریق مقاومت R هدر می رود و چون در نهایت میله لغزنده به سکون می‌رسد در نتیجه می توان گفت مقدار حرارت تولید شده برابر انرژی جنبشی اولیه یعنی $\frac{1}{2}mv_0^2$ خواهد بود.

۲۶۱) با توجه به حل مسألهٔ قبل می‌دانیم نیروی آمپر وارد بر میله برابر است با $F_{amp} = \frac{vB^2L^2}{R}$ (که به سمت چپ می‌باشد) به کمک قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum F = ma \Rightarrow F - F_{amp} = ma \Rightarrow F = \frac{vB^2L^2}{R} + m\frac{dv}{dt}$$
$$\Rightarrow \int_0^t dt = m\int_0^v \frac{dv}{F - \frac{vB^2L^2}{R}} \Rightarrow \frac{t}{m} = -\frac{R}{B^2L^2}\ln\left(\frac{F - \frac{vB^2L^2}{R}}{F}\right)$$
$$\Rightarrow v = \left(1 - e^{-\frac{tB^2L^2}{Rm}}\right)\frac{RF}{R^2L^2}$$

۲۶۲) با توجه به قانون لنز، جهت جریان‌های القایی به نحوی است که با عامل تغییر شار مخالفت شود. بنابراین جهت جریان‌ها مطابق شکل زیر خواهد بود:



در شکل «الف» در قسمت دایره‌ای جریان در جهت عقربه‌های ساعت و در قسمت صاف جریانی وجود ندارد.

در شکل «ج» نیز در قسمت صاف جریانی وجود ندارد.

۲۶۳) با توجه به شکل، حلقه‌ها به صورتی به هم متصل شده‌اند که اگر جریان القایی در یکی در جهت عقربه‌های ساعت باشد در دیگری در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود. لذا نیروی محرک القایی در حلقه b با نیروی محرک القایی در حلقه a مخالفت می‌کند.

$$\text{نیروی محرکه القایی در حلقه } a = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(a^۲ B) = a^۲ \frac{d}{dt}(B_\circ \sin wt)$$
$$= a^۲ B_\circ w \cos wt$$

به طور مشابه:

$$\text{نیروی محرکه القایی در حلقه } b = b^۲ B_\circ w \cos wt$$

بنابراین:

$$\text{نیروی محرکه القایی خالص} = (a^۲ - b^۲)\ B_\circ w \cos wt$$

توجه: حالت منفی عبارت فوق نیز امکان دارد.

از طرفی مقاومت مدار برابر است با:

$$R = ۴\ (a+b)\ \rho$$

بنابراین جریان القایی برابر است با:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{(a^۲ - b^۲)\ B_\circ w}{۴\ (a+b)\ \rho} \cos wt = \frac{(a-b)\ B_\circ w}{۴\ \rho} \cos wt$$

در نتیجه دامنه جریان برابر است با:

$$\frac{(a-b)\ B_\circ w}{۴\ (a+b)\ \rho} = ۰/۵$$

۲۶۴) می‌دانیم این مارپیچ مسطح از حلقه‌های هم مرکز تشکیل شده که شعاع آنها از ۰ تا a تغییر می‌کند. اگر حلقه‌ای به شعاع R از این مارپیچ در نظر بگیریم آنگاه نیروی محرکه القایی در آن برابر است با:

$$\varepsilon_r = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\ .\ \vec{S})}{dt} = \pi r^۲ B_\circ w \cos wt$$

لذا با انتگرال گیری از ۰ تا a می‌توان نیروی محرکه القایی کل را بدست آورد.

$$\varepsilon_t = \int_\circ^a -(\pi r^۲ B_\circ w \cos wt)\ dN \qquad (۱)$$

dN برابر تعداد حلقه در فاصله r تا $r+dr$ است در نتیجه:

$$\frac{dN}{N} = \frac{dr}{a} \Rightarrow dN = (\frac{N}{a})\ dr \qquad (۲)$$
$$(۲)\ (۱) \Rightarrow \varepsilon_t = -\int_\circ^a (\pi r^۲ B_\circ w \cos wt)\ \frac{N}{a}\ dr$$
$$= \frac{\pi B_\circ w \cos wt N a^۲}{۳}$$

بنابراین ماکزیمم مقدار ε_t برابر است با $\frac{۱}{۳}\ \pi B_\circ w N a^۲$

۲۶۵) می‌دانیم در اثر تغییر میدان B شار گذرنده از حلقه نیز تغییر می‌کند. بنابراین نیروی محرکه القایی ایجاد شده برابر است با:

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = |\frac{d(\vec{B}\ .\ \vec{S})}{dt}|$$

چون بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{S}$ هم جهتند لذا

$$\varepsilon_{\text{القایی}} = |\frac{d(BS)}{dt}| \qquad (۱)$$

بعد از گذشت t داریم:

$$B = \text{ثابت} \Rightarrow B = \dot{B}\, t \qquad (۲)$$
$$a = \text{ثابت} \Rightarrow S = (\frac{۱}{۲}at^۲)\, L \qquad (۳)$$
$$(۳)\,,\,(۲)\,,\,(۱) \Rightarrow \varepsilon_{\text{القایی}} = \frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}\dot{B}\, aLt^۳) = \frac{۱}{۶}\dot{B}\, aLt^۳$$

۲۶۶) می‌دانیم میدان در داخل سیملوله برابر است با $B = \mu_\circ nI$. از قانون اول الکترومغناطیس داریم:

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{L} = -\frac{d\phi}{dt}$$
$$\text{برای } r < a \Rightarrow E\,(۲\pi r) = -\pi r^۲\,(\mu_\circ\, n\,\frac{dI}{dt})$$
$$\Rightarrow E = -\frac{۱}{۲}\mu_\circ n\pi r\frac{dI}{dt} \Rightarrow E = -\frac{۱}{۲}\mu_\circ \pi r\,\dot{I}$$
$$\text{برای } r > a \Rightarrow E\,(۲\pi r) = -\pi a^۲\,(\mu_\circ n\,\frac{dI}{dt}) \Rightarrow E = -\frac{۱}{۲}\mu_\circ n\,\dot{I}\,(\frac{a^۲}{r})$$

• علامت منفی از قانون لنز ظاهر می‌شود.

۲۶۷) می‌دانیم نیروی محرکه القایی در سیم مسی حلقوی برابر است.

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\mu_\circ nI\pi\,\frac{d^۲}{۴}) = \mu_\circ n\,\dot{I}\,\pi\,\frac{d^۲}{۴}$$

مقاومت این سیم مسی حلقوی نیز برابر است با:

ρ : مقاومت ویژه مس $\qquad R = \rho\,\frac{\pi d}{S}$ بنابراین جریان داخل آن:

$$i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\mu_\circ n\,\dot{I}\,\pi\frac{d^۲}{۴}}{\rho\pi\frac{d}{s}} = \frac{\mu_\circ n\,\dot{I}\,sd}{۴\rho} = ۲\ mA$$

۲۶۸) می‌دانیم با تغییر میدان مغناطیسی یک نیروی محرکه در حلقه القا می‌شود که به علت تقارن این نیروی محرکه القایی در هر دو قسمت با هم برابر است چرا که نیروی محرکه القایی القا شده توسط میدان الکترومغناطیسی به مقاومت بستگی ندارد.

از طرفی هنگامی که نیروی محرکه القایی دو قسمت با هم برابر ولی مقاومت آنها با هم برابر نباشد موجب می‌گردد که جریان در دو قسمت با هم برابر نباشند لذا این امر موجب یک شتاب بار شده که باعث ایجاد میدان الکتریکی در هر قسمت با علامتهای مخالف هم می‌شود و به این ترتیب جریان‌ها در هر قسمت به صورت برابر دیده می‌شوند. لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{\varepsilon}{۲} - \pi aE = rI \qquad (۱)$$
$$\frac{\varepsilon}{۲} + \pi aE = nrI \qquad (۲)$$

از طرفی چون ε نیروی محرکه القایی کل حلقه است در نتیجه:

$$\varepsilon = (n+۱)\,rI \qquad (۳)$$
$$(۳)\,,\,(۲)\,,\,(۱) \Rightarrow E = \frac{۱}{۲\pi a}\,(n-۱)\,rI = \frac{۱}{۲\pi a}\,(\frac{n-۱}{n+۱})\,\varepsilon$$

از قانون فارادی نیز داریم:

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(bt\pi a^{۲}) = \pi a^{۲} b$$
$$\Rightarrow \quad E = \frac{۱}{۲}\, ab\, \frac{n-۱}{n+۱}$$

۲۶۹) اگر سیستم مختصات ما متصل به حلقه باشد و حلقه با سرعت زاویه‌ای $\vec{w}\ (t)$ بچرخد آنگاه برای ناظر این دستگاه نیروی کولیس $۲m\,\vec{v} \times \vec{\omega}\ (t)$ احساس می‌شود. این نیرو باید با نیروی مغناطیسی $e\,\vec{v} \times \vec{B}\ (t)$ بالانس شود در نتیجه از بالانس این دو نیرو داریم:

$$\vec{w}\ (t) = -\frac{e}{۲m}\ \vec{B}\ (t)$$

در اینجا فرض می‌شود که بردار $\vec{w}$ کوچک و تغییرات آن ناچیز است لذا از $w^{۲}$ و w صرف نظر می‌شود.

۲۷۰) برای یک سیملوله به طول L با n دور حلقه بر واحد طول و شعاع سطح مقطع b، ضریب خودالقایی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$L = \mu_{\circ} n^{۲} (\pi b^{۲}) L \qquad (۱)$$

هنگامی که سیملوله را به منبع ولتاژ وصل می‌کنیم، نیروی محرکه القایی در آن ایجاد شده که با مقاومت موجود در مدار موجب می‌شوند که جریان به آرامی افزایش یابد. بنابراین به کمک قانون ولتاژ کیرشهف و با توجه به اینکه اختلاف پتانسیل دو سر سیملوله برابر $L\,\frac{dI}{dt}$ است لذا:

$$RI + L\,\frac{dI}{dt} = V \qquad (۲)$$

رابطهٔ فوق یک معادله دیفرانسیل است که به صورت زیر می‌توان حل کرد:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V-RI}{L} \Rightarrow \int_{\circ}^{I} \frac{dI}{V-RI} = \frac{۱}{L}\int_{\circ}^{t} dt$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{۱}{R}\, ln\,(V-RI)\Big|_{\circ}^{I} = \frac{۱}{L}\, t$$

$$\Rightarrow \quad ln\,(V-RI) - lnV = -\frac{R}{L}\, t \quad \Rightarrow \quad ln\,(\frac{V-RI}{V}) = \frac{-R}{L}\, t$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{V}{R}\,(۱ - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

در اثر این جریان متغیر، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود و موجب جاری شدن جریان در حلقه می‌گردد بنابر قانون آمپر نیروی وارد بر طول dL برابر $dF = BidL$ است که B میدان داخل سیملوله است یعنی $B = \mu_{\circ} nI$ لذا نیروی وارد بر واحد طول dL برابر است با:

$$\frac{dF}{dL} = Bi = \mu_{\circ} nIi = \mu_{\circ} nI\,(\frac{\varepsilon}{r}) = \frac{\mu_{\circ} nI}{r}\,\frac{d\,(BS)}{dt}$$

$$= \frac{\mu_{\circ} nI}{r}\, S\,\frac{dB}{dt} = \frac{\mu_{\circ} nI}{r}\,(\pi a^{۲})\,\frac{d}{dt}\,(\mu_{\circ} nI)$$

$$= \frac{(\mu_\circ n)^۲ I}{r} (\pi a^۲) \frac{d}{dt} [\frac{V}{R} (۱ - e^{-\frac{Rt}{L}})]$$

$$= \frac{(\mu_\circ n)^۲ I}{r} (\pi a^۲) \frac{V}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$= \frac{(\mu_\circ n)^۲}{r} (\frac{V}{R})^۲ (\pi a^۲) \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t} (۱ - e^{-\frac{R}{L} t})$$

می‌دانیم این نیرو در ابتدا برابر صفر و برای زمان زیاد t نیز صفر می‌شود. برای یافتن مقدار ماکزیمم می توان نوشت:

$$e^{-\frac{R}{L}t} (۱ - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{۱}{۴} - (\frac{۱}{۲} - e^{-\frac{R}{L} t})^۲$$

از رابطه فوق معلوم می‌شود که حداکثر عبارت بالا $\frac{۱}{۴}$ است در نتیجه:

$$\frac{dF_{\max}}{dL} = \frac{\mu_\circ^۲ \pi a^۲ V^۲}{r} \cdot \frac{n^۲}{۴RL}$$

$$(۱) \text{ از } \Rightarrow \frac{dF_{\max}}{dL} = \frac{\mu_\circ a^۲ V^۲}{۴rRLb^۲}$$

(۲۷۱

$$P = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = pdt \Rightarrow dQ = \frac{\varepsilon^۲}{R} dt = \frac{۱}{R} (-\frac{d\Phi}{dt})^۲ dt$$

$$= \frac{۱}{R} [-a(\tau - t) + at]^۲ dt = \frac{۱}{R} (۲at - a\tau)^۲ dt$$

$$\Rightarrow Q = \int_\circ^\tau \frac{۱}{R} (۲at - a\tau)^۲ dt$$

$$\Rightarrow Q = \frac{۱}{۲aR} \frac{۱}{۳} (۲at - a\tau)^۳ |_\circ^\tau = \frac{۱}{۶aR} [(a\tau)^۳ - (-a\tau)^۳]$$

$$\Rightarrow Q = \frac{a^۲ \tau^۳}{۳R}$$

(۲۷۲ این حلقه را می توان به صورت حلقه‌هایی با شعاع r و پهنای dr در نظر گرفت. در نتیجه نیروی محرکه القایی در هر حلقه به شعاع r برابر است با:

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} (BS) = \pi r^۲ \beta \qquad (۱)$$

از طرفی مقاومت هر حلقه به شعاع r با پهنای dr برابر است با:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{۲\pi r}{hdr} \qquad (۲)$$

بنابراین از هر حلقه r جزء جریان dI به شکل زیر می‌گذرد:

$$(۲), (۱) \Rightarrow dI = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\pi r^۲ \beta}{\rho ۲\pi r / hdr} = \frac{\beta hr}{۲\rho} dr$$

با انتگرال‌گیری، کل جریان بدست می‌آید:

$$I = \int_a^b \frac{\beta hr}{۲\rho} dr = \frac{h\beta (b^۲ - a^۲)}{۴\rho}$$

۲۷۳) با توجه به حل مسألهٔ ۲۷۰ جریان I در لحظهٔ t برابر است با:

$$I\,(t) = \frac{V}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t})$$

جریان در حالت پایدار برابر $I_0 = \frac{V}{R}$ است لذا:

$$\frac{I(t)}{I_0} = n = 1 - e^{-\frac{R}{L}\,t_0} \Rightarrow e^{-\frac{R}{L}\,t_0} = 1 - n$$

با لگاریتم گرفتن از طرفین:

$$\frac{R}{L}\,t_0 = ln\,\frac{1}{1-n} \Rightarrow t_0 = \frac{L}{R}\,ln\,(\frac{1}{1-n}) = 1{,}49\;S$$

۲۷۴) اگر از اثرات لبه‌های انتهایی صفحات صرف نظر شود میدان بین صفحات موازی صفحات و برابر $B = \mu_0 i$ که i چگالی جریان در صفحه است (رجوع به حل مسألهٔ ۲۱۶) لذا:

$$B = \mu_0 i = \mu_0\,(\frac{I}{b})$$

شار عبوری بر واحد طول صفحات برابر است با:

$$\phi = (\mu_0\,\frac{I}{b}) \times (h \times 1) = (\mu_0\,\frac{h}{b})\,I$$

ضریب خودالقایی بر واحد طول $L_1 = \mu_0\,\frac{h}{b} = 25\;nH/m$

۲۷۵) با کمک قانون ولتاژ کیرشهف در این مدار برای $t \geq 0$ داریم:

$$Ri + \frac{L}{n}\,\frac{di}{dt} = \varepsilon \qquad (1)$$

با توجه به اینکه شار پیچه در لحظهٔ $t = 0^+$ (با اندیس ۲) با لحظهٔ $t = 0^-$ (با اندیس ۱) برابر است در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \frac{\phi}{i_1}\;,\;\; L_2 = \frac{\phi}{i_2} \\ L_2 = \frac{L_1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{n} \Rightarrow i_2 = n i_1$$

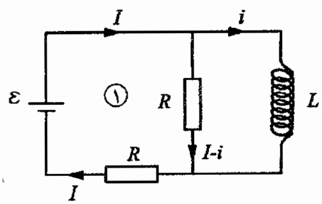
از طرفی $i_1 = \frac{\varepsilon}{R}$ در نتیجه جریان در لحظه $t = 0^+$ درست بعد از تغییر ضریب خودالقا برابر است با:

$$i = i_2 = n i_1 = \frac{n\varepsilon}{R} \qquad (2)$$

می‌دانیم جواب معادله دیفرانسیل (۱) به صورت $i = A + Be^{\frac{-t}{c}}$ است که با جایگذاری مقادیر $C = \frac{L}{nR}$ و $B = n - 1$ و $A = \frac{\varepsilon}{R}$ داریم:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\,[1 + (n-1)\,e^{-nRt/L}]$$

۲۷۶) با توجه به شکل واضح است که:



$$L\,\frac{di}{dt} = R\,(I-i) \qquad (۱)$$

در حلقه ۱ نیز از قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$\varepsilon - R\,(I-i) - RI = ۰ \qquad (۲)$$

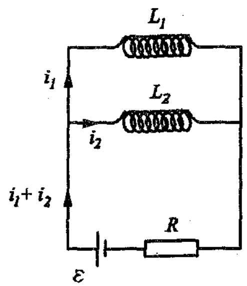
از حذف I از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$۲L\,\frac{di}{dt} = \varepsilon - Ri$$

با توجه به حل مسأله ۲۷۰ بدست می‌آید که:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\,(۱ - e^{-\frac{R}{۲L}t})$$

۲۷۷) با توجه به شکل داریم:



$$L_۱\,\frac{di_۱}{dt} = L_۲\,\frac{di_۲}{dt} = \varepsilon - R\,(i_۱ + i_۲)$$

$$\Rightarrow\ L_۱\,\frac{di_۱}{dt} - L_۲\,\frac{di_۲}{dt} = ۰ \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\,(L_۱i_۱ - L_۲i_۲) = ۰$$

یعنی مقدار $L_۱i_۱ - L_۲i_۲$ عددی ثابت است. در لحظهٔ $t = ۰$ داریم $i_۱ = i_۲ = ۰$ در نتیجه $L_۱i_۱ - L_۲i_۲ = ۰$ می‌شود لذا چون مقدار $L_۱i_۱ - L_۲i_۲$ نیز ثابت بود می‌توان گفت در تمام لحظات داریم:

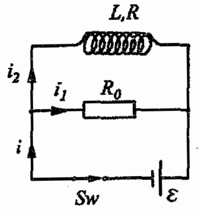
$$L_۱i_۱ - L_۲i_۲ = ۰ \ \Rightarrow\ L_۱i_۱ = L_۲i_۲ \qquad (۱)$$

در حالت پایدار نیز واضح است که:

$$i_۱ + i_۲ = \frac{\varepsilon}{R} \qquad (۲)$$

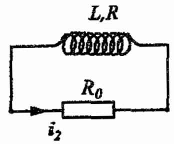
$$(۲)\,,\,(۱)\ \Rightarrow\ i_۱ = \frac{\varepsilon L_۲}{R\,(L_۱ + L_۲)}\,,\ i_۲ = \frac{\varepsilon L_۱}{R\,(L_۱ + L_۲)}$$

۲۷۸) در حالت پایدار قبل از اینکه کلید SW باز شود داریم:



$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_0} \quad , \quad i_2 = \frac{\varepsilon}{R}$$

درست بعد از باز شدن کلید SW، خود القا از تغییرات جریان جلوگیری می کند لذا $i_2(0) = \frac{\varepsilon}{R}$. حال با توجه به مدار جدید داریم:



$$L\frac{di_2}{dt} + (R+R_0)\, i_2 = 0 \qquad\qquad i_2(0) = \frac{\varepsilon}{R}$$

از حل معادله فوق با توجه به حل مسألهٔ ۲۷۰ داریم:

$$i_2 = i_2(0)\, e^{\frac{-(R+R_0)}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{\frac{-(R+R_0)}{L}t}$$

لذا حرارت اتلافی در خودالقا برابر است با:

$$Q = \int_0^\infty R i_2^2 dt = \int_0^\infty R\,(\frac{\varepsilon}{R})^2\, e^{-\frac{2(R+R_0)}{L}t}\, dt$$
$$= R\,(\frac{\varepsilon}{R})^2 \times \frac{L}{2(R+R_0)} = \frac{L\varepsilon^2}{2R\,(R+R_0)} = 3\ \mu J$$

۲۷۹) می دانیم مقاومت ابر رسانا برابر صفر است در نتیجه:

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow LdI = d\phi \qquad (1)$$
$$\Rightarrow I = \frac{\Delta\phi}{L} = \frac{\phi_f - \phi_i}{L} = \frac{\phi_f - 0}{L} = \frac{\pi a^2 B}{L} \qquad (2)$$

ب) کار انجام شده بر روی سیستم به صورت گرمای تولید شده ظاهر می‌شود بنابراین برای بدست آوردن کار، کافی است حرارت تولید شده را بدست بیاوریم:

$$W = Q = \int dQ = \int \varepsilon I dt = \int \frac{d\phi}{dt} I dt = \int I d\phi$$

از (۱) $\Rightarrow \quad W = \int I d\phi = \int LIdI = \frac{1}{2}LI^2$

از (۲) $\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}L\,(\frac{\pi a^2 B}{L})^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi^2 a^4 B^2}{L}$

۲۸۰) می‌دانیم در سیملوله ضریب خودالقایی برابر $\mu\mu_\circ \frac{N^{۲}S}{L} = \mu\mu_\circ n^{۲}SL = L$ است.

S : مساحت سطح مقطع سیملوله

L : طول سیملوله

n : تعداد دور بر واحد طول

N : تعداد دورهای سیملوله

هنگامی که طول سیملوله افزایش می‌یابد مثلاً با کشیدن آن از دو طرف، موجب کاهش ضریب خودالقایی می‌شود. بنابراین اگر جریان ثابت بماند، شار نیز کاهش می‌یابد. با کاهش شار، نیروی محرکه الکتریکی ظاهر می‌شود که طبق قانون لنز با عامل تغییر شار مخالفت می‌کند. مثلاً جریان را زیاد می‌کند. اما در حالت ابر رسانا شار تغییر نمی‌کند. در نتیجه:

$$\frac{I}{L} = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{I}{L} = \frac{I_\circ}{L_\circ}$$

$$\Rightarrow \quad I = I_\circ \frac{L}{L_\circ} = I_\circ (۱ + n)$$