دانش پژوهان جوان

ناشر کتابهای المپیاد

مسائل نظریه اعداد در المپیاد ریاضی

ویژه آزمون های مقدماتی و مرحله اول المپیاد ریاضی

این کتاب شامل کلیهٔ مسائل نظریه اعداد ،آزمون های مقدماتی و مرحله اول المپیاد ریاضی کشوری و نیز دهها مسأله تالیفی دیگر می باشد که همگی با پاسخ های تشریحی گردآوری شده اند. سعی شده است که مسائل آسان تر در ابتد ای هر بخش و مسائل دشوار در پایان بخش آورده شوند.

این کتاب می تواند مرجعی مناسب برای علاقه مندان به شرکت در آزمون های المپیادریاضی کشوری باشد.

olympiad

danesh pajoohan javan

www.dpj.ir

بسم الله الرحمن الرحیم

مسائل نظریه اعداد در المپیاد ریاضی

عباس ثروتی

سرشناسه : ثروتی ، عباس، ۱۳۶۱

عنوان پدیدآور : مسائل نظریه اعداد درالمپیاد ریاضی ویژه آزمون های مقدماتی و مرحله اول المپیاد ریاضی / سرپرست گروه مولفان عباس ثروتی .

مشخصات نشر : تهران : دانش پژوهان جوان ، ۱۳۸۵

مشخصات ظاهری :۱۵۱ ص . : مصور، نموداپ .

شابک :۱۷۰۰۰ ریال 4 - 87 - 7685 -964

یادداشت : فیپا

موضوع : المپیادها (ریاضیات).

موضوع : جبر - مسابقه ها.

موضوع : نظریه اعداد - مسائل ، تمرین ها و غیره .

موضوع : ریاضیات - مسائل ، تمرین ها و غیره .

موضوع : ریاضیات - مسابقه ها .

رده بندی کنگره : ۵۳م ۴ث /۳۰۶۰/۲۴ LB

رده بندی دیویی : ۳۷۳ / ۲۳۸۰۷۶

شماره کتابخانه ملی : ۲۴۳۹۸-۸۵م

مسائل نظریه اعداد در المپیاد ریاضی

مولف	عباس ثروتی
ناشر	دانش پژوهان جوان
قطع	وزیری
تیراژ	۳۳۰۰ نسخه
چاپ اول	پاییز ۱۳۸۵
قیمت	۱۷۰۰ تومان
شابک	۹۶۴-۷۶۸۵-۸۷-۴

دانش پژوهان جوان

ناشر کتابهای المپیاد

خیابان انقلاب - خیابان وحید نظری - بین فخررازی و دانشگاه - کوچه آشتیانی پلاک ۲۲

صندوق پستی : ۱۷۱۳ - ۱۳۱۴۵

تلفن: ۶۶۴۹۸۹۹۸ - ۶۶۴۹۶۳۶۳

دورنگار : ۶۶۴۶۳۹۲۴

پیش گفتار ناشر

بی شک خبر موفقیت جوانان ایرانی در المپیاد های جهانی باعث شادی و غرور تمامی ا یرانیان می گردد و ا ین شادی زمانی بیشتر می شود که احساس کنیم در ا ین موفقیت سهمی داشته ایم .

مؤسسه فرهنگی دانش پژوهان جوان با هدف حمایت ازکلیه جوانان مستعد ایرانی و به منظور تقویت بنیه علمی دانش‌آموزان ، خصوصاً آن عزیزانی که به دلیل نداشتن امکانات و منابع مطالعاتی مناسب ، امکان رشد و شکوفایی نیافته اند قدم در مسیری نهاده است که به راهنمایی های تمامی اهل علم و فرهنگ نیاز دارد .

انتشارات دانش پژوهان جوان ، به عنوان ناشر تخصصی کتاب های المپیاد از کلیه صاحب نظران در زمینه المپیاد دعوت به همکاری نموده و منتظر دریافت نظرات و پیشنهادهای شما می باشد .

در اینجا فرصت را غنیمت شمرده از شرکت محترم گلد یران (نمایندهٔ رسمی لوازم خانگی وصوتی تصویری ال جی در ایران) به خاطر اهدای تعدادی از نسخ این کتاب به دانش‌آموزان وکتابخانه های مناطق محروم تشکر و قدردانی به عمل می‌آید .

پیش گفتار

با توجه به استقبال دانش آموزان برای شرکت در المپیاد ریاضی و نیاز مبرم آنان به مسائل آزمون های المپیاد ریاضی در سال های گذشته و همچنین نمونه سؤالات آزمون های المپیاد بر آن شدیم تا این سؤالات را به صورت مجموعه ای طبقه بندی شده بر اساس موضوعات ، جمع آوری کرده و در اختیار دانش پژوهان قرار دهیم .

کتابی که پیش رو دارید شامل کلیه مسائل نظریه اعداد در آزمون های مقدماتی و مرحله اول المپیاد ریاضی کشوری و نیز دهها مساله تألیفی دیگر می باشد که همگی با پاسخ های تشریحی گردآوری شده اند . سعی شده است که مسائل آسان تر در ابتدای هر بخش و مسائل دشوار در پایان بخش آورده شوند.

دراینجا لازم می دانم از آقای وحید برجعلی لو که در جمع آوری مسائل تالیفی همکاری نمودند و همچنین آقای محمد شریفی که زحمت ویراستاری این اثر را متقبل شدند ، سپاسگزاری نمایم . امیدوارم این اثر بتواند گامی هر چند کوچک در جهت رفع نیازهای علمی دانش پژوهان بردارد.

عباس ثروتی

فهرست مندرجات

فصل ۱

مسائل

۱.۱ مسائل المپیاد

۱) عدد زیر چند رقم یک دارد؟

$$۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \ldots + \underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۳۸۱ بار}}$$

الف) ۱۳۷۶ ب) ۱۳۷۷ ج) ۱۳۷۸
د) ۱۳۷۹ ه) این عدد رقم یک ندارد

۲) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته نیست؟

الف) مجموعهٔ اعداد مربع کامل
ب) مجموعهٔ اعداد مرکب
ج) مجموعهٔ اعدادی که بر ۱۳ بخش‌پذیر نیستند.
د) مجموعهٔ اعدادی که بر ۹۱ بخش‌پذیر نیستند.
ه) مجموعهٔ توان‌های ۳

۳) اعداد ۱ تا ۱۳۸۲ را از چپ به راست پشت سر هم نوشته‌ایم تا عدد ۱۲۳...۱۳۸۰۱۳۸۱۱۳۸۲ به دست آید. باقیماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹ چند است؟

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۴) دست کم چند عضو باید از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۲۸\}$ حذف کنیم تاحاصل ضرب اعضای باقی مانده مربع کامل شود؟

الف) یک ب) دو ج) چهار د) پنج ه) بیست و سه

۵) می‌خواهیم خانه‌های خالی جدول زیر را با اعداد صحیح پر کنیم به طوری که جمع عددهای هر سه خانهٔ متوالی، مقداری ثابت باشد و به علاوه جمع همهٔ اعداد جدول برابر ۲۱۷ شود.

			۱۷				۲۰				?	

در خانه دارای علامت سؤال چه عددی می‌تواند باشد؟

الف) ۱۰ ب) ۱۳ ج) ۱۷ د) ۲۰ ه) ۲۵

۶) باقی‌مانده‌ی تقسیم $5^{22} + 7$ بر ۸ برابر است با:

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۷) در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمره‌ی مثبت و هر جواب غلط ۲ نمرهٔ منفی دارد (به سؤال‌های بدون جواب هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد). اگر نمرهٔ دانش‌آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش‌آموز به چند سؤال جواب نداده است؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۳

۸) به‌ازای کدام مقدار n، معادله‌ی $n = x + y + xy$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب ندارد؟

الف) $n = 100$ ب) $n = 105$ ج) $n = 110$ د) $n = 115$ ه) $n = 120$

۹) اگر چندجمله‌ای $ax^3 + bx + c$ بر $x^2 + tx + 1$ بخش‌پذیر باشد آن‌گاه، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) $a^2 - 2c \geq b$ ب) $a + c > 3$ ج) $a^2 - c \geq ab$
د) $a^2 + c^2 = ab$ ه) $a^2 - c^2 = ab$

۱۰) فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نمایندهٔ عددی یک رقمی است:

$$\begin{array}{cccccc} & S & U & A & V & E \\ & & S & A & G & E \\ + & & S & A & G & E \\ \hline & 4 & 6 & 9 & 3 & 3 \end{array}$$

در این‌صورت U کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۱۱) فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 16\}$ مجموعه‌ای دل‌خواه باشد. سه تایی $\{a, b, c\}$ را «اولیه» گوییم هرگاه هر دو عضوش نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه‌تایی اولیه نباشد آن‌گاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با:

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۱۲) رقم سمت راست عدد $23^{23} - 17^{17}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۱۳) اعداد زوج متوالی ۲،۴،۶،۸، ... را آن‌قدر ضرب می‌کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش‌پذیر شود. بزرگ‌ترین عدد زوج به‌کار رفته در کدام‌یک از روابط زیر صدق می‌کند؟

الف) بین ۱ تا ۱۱

ب) بین ۱۱ تا ۲۱

ج) بین ۲۱ تا ۳۱

د) بین ۳۱ تا ۴۱

ه) چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۱۴) اگر $۹x + ۵y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای این‌که لزوماً $۱۰x + ky$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، k را برابر کدام‌یک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۱۰

۱۵) چند عدد اول کوچک‌تر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) بیش از ۵

۱۶) از میان عددهای ۲۰ ,... ,۲ ,۱ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به‌طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد.

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۱۷) اعداد طبیعی x، y و n در شرایط زیر صدق می‌کنند:

i) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک x و y برابر با ۱۳۷۹ است.

ii) کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y برابر با $n!$ است.

n با کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند برابر باشد؟ $(n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n)$

الف) ۲۷ ب) ۶۴ ج) ۱۲۵ د) ۲۱۶ ه) هیچ‌کدام

۱۸) چندجمله‌ای $x^۳ + ax + ۱$ بر $x^۲ - ۳x + b$ بخش‌پذیر است. $a + ۲b$ چند است؟

الف) -۸ ب) $-\frac{۲۵}{۳}$ ج) ۱ د) ۰ ه) -۳

۱۹) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی‌ای که یکانشان در بسط مبنای ...

الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است.

ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است.

ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است.

د) نه، ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است.

ه) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

۲۰) در میان اعداد صحیح از ۱ تا ۲۰۰۲ چند عدد مجموع رقم‌هایشان بر ۵ بخش‌پذیر است؟

الف) ۳۹۷ ب) ۳۹۸ ج) ۳۹۹ د) ۴۰۰ ه) ۴۰۱

۲۱) عدد n را خوب می‌نامیم اگر بتوان ارقام آن را به دو دسته چنان تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد. به عنوان مثال ۱۲۱ خوب است زیرا $۲ = ۱ + ۱$. فرض کنید x کوچک‌ترین عدد خوب باشد که $x + ۱$ نیز خوب است، در این صورت:

الف) $۳۰۰ \le x < ۴۰۰$ ب) $۴۰۰ \le x < ۵۰۰$ ج) $۵۰۰ \le x < ۶۰۰$
د) $۶۰۰ \le x < ۷۰۰$ ه) $۷۰۰ \le x < ۸۰۰$

۲۲) فرض کنید m و n اعداد طبیعی دلخواه باشند. عدد A را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A = (\ldots(((n+۱)^m + ۱)^m + \ldots)^m + ۱$$

که در آن ۱۳۸۱ بار عبارت m ظاهر گشته است. در این صورت:

الف) A همواره زوج است.
ب) A همواره فرد است.
ج) $A + m$ همواره زوج است.
د) $A + n$ همواره زوج است.
ه) $A + m + n$ همواره زوج است.

۲۳) در این امتحان به ۳۰ سوال تستی پاسخ می‌دهید. هر جواب درست، ۴ نمرهٔ مثبت دارد و هر جواب غلط ۱ نمرهٔ منفی دارد و هر تستی که بدون پاسخ رها شود صفر نمره دارد. نمرهٔ نهایی شما چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

الف) ۱۴۵ ب) ۱۴۶ ج) ۱۴۸ د) ۱۵۰ ه) ۱۵۱

۲۴) تیم المپیاد ریاضی در یک دوره مسابقات فوتبال شرکت کرده است و در ۲۰۰۳ بازی ۵۷۰۲ امتیاز کسب کرده است. تعداد بردها، باخت‌ها و تساوی‌های این تیم چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟ (هر برد ۳ امتیاز، هر تساوی ۱ امتیاز و هر باخت صفر امتیاز دارد.)

الف) ۵۱ ب) ۵۲ ج) ۱۰۲ د) ۱۰۳ ه) ۱۰۵

۲۵) اگر از یک عدد سه رقمی کم‌تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به دست آید؟

الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

۲۶) کوچک‌ترین عددی که هم خودش و هم مجموع ارقامش بر ۵۰ بخش‌پذیر باشد چند رقم متمایز دارد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) ۹

۲۷) عددی راکه نمایش آن در مبنای ۹ به شکل $(\overline{xyzxyz})_۹$ باشد، عدد دوقلو می‌نامیم. اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک همهٔ اعداد دوقلو برابر d باشد، d چند مقسوم‌علیه اول دارد؟ (توجه داشته باشید که x, y و z رقم‌هایی بین ۰ و ۸ هستند.)

الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) چهار

۲۸) معادلهٔ $۱۰۰ \times ۴^x = ۱۰۰ \times ۱۰^x + ٦۲۱ \times ۵^{۲(x+۱)}$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) بی‌نهایت ه) جواب ندارد.

۲۹) کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به‌صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به‌صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند).

الف) ۴۵ ب) ۵۵ ج) ۱۰۰ د) ۱۳۵ ه) ۴۹۵

۳۰) چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که مجموع

$$۱! + ۲! + \cdots + n!$$

مربع کامل باشد؟

الف) تعداد نامتناهی مقدار n ب) فقط برای دو مقدار n ج) فقط برای سه مقدار n
د) فقط برای چهار مقدار n ه) فقط برای پنج مقدار n

۳۱) فرض کنید مجموع $n + \cdots + ۲ + ۱$ یک عدد سه رقمی باشد که رقم‌های آن مساوی‌اند. در این‌صورت n بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۱

۳۲) فرض کنید هر حرف لاتین نماینده‌ی یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتماً رقم‌های آن‌ها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم $\frac{SIX}{NINE} = \frac{۲}{۳}$ در این‌صورت مقدار I برابر است با:

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۳۳) معادلهٔ $۳^y = ۱ + ۲^x$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

الف) ۱ جواب ب) ۲ جواب ج) ۳ جواب
د) ۴ جواب ه) نامتناهی جواب

۳۴) فرض کنید a و b دو عدد طبیعی بوده به‌طوری که $\frac{a+۱}{b} + \frac{b+۱}{a}$ عددی طبیعی باشد. در این‌صورت بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از کدام‌یک از اعداد زیر بزرگ‌تر نیست (بهترین جواب ممکن مورد نظر است)؟

الف) $\sqrt{a+b}$ ب) $\sqrt{\frac{۲(a^۲+b^۲)}{a+b}}$ ج) $\sqrt{\frac{۳(a^۲+b^۲)}{a+b}}$
د) $\frac{\sqrt{۲a}+\sqrt{۲b}}{۲}$ ه) $\sqrt{a+b}-۱$

۳۵) عدد a را متعادل گوییم هرگاه بتوان رقم‌های آن را به دو دسته تقسیم کرد به‌طوری که مجموع رقم‌های دو دسته مساوی باشد. کوچک‌ترین عدد a، به‌طوری که a و $a+۱$ متعادل باشند در کدام‌یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرند؟

الف) $[۱۰۰, ۲۰۰]$ ب) $[۲۰۰, ۳۰۰]$ ج) $[۳۰۰, ۴۰۰]$ د) $[۴۰۰, ۵۰۰]$ ه) $[۵۰۰, ٦۰۰]$

۳۶) تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید به‌طوری که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقم‌های آن‌ها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقاً یک‌بار آمده باشد.
(مثال: $۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۴ + ۳ + ۵۲ + ۱ + ۰ = ۹۰$)

الف) ۷ ب) ۱۱ ج) ۱۵ د) ۱۹ ه) ۲۳

۳۷) فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح باشند به‌طوری که $a < ۲b$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b برابر $۲r$، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر c برابر r و باقی‌مانده‌ی تقسیم b بر c نیز برابر r است. در این‌صورت کوچک‌ترین عدد از میان اعداد زیر که بر c بخش‌پذیر باشد کدام است؟

الف) $a+b$ ب) $\frac{a+b}{۲}$ ج) $\frac{a+b}{۳}$ د) $۲(a+b)$ ه) $۳(a+b)$

۳۸) به‌ازای کدام مقدار n معادلهٔ $\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای جواب منحصر به‌فردی است؟

الف) ۱۰۲۴ ب) ۲۱۱۹ ج) ۲۲۱۹ د) ۲۶۵۱ ه) هیچ‌کدام

۳۹) فرض کنید ۱۳۷۵ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که $۲^{۱۳۷۵}$، عدد طبیعی n را می‌شمارد. در آن‌صورت بزرگ‌ترین مقدار k را به‌طوری که ۲^k عدد $A = ۱ + ۹ + ۹^۲ + \cdots + ۹^{۴n-۱}$ را بشمارد برابر است با:

الف) ۱۳۷۴ ب) ۱۳۷۵ ج) ۱۳۷۶ د) ۱۳۷۷ ه) ۱۳۷۸

۴۰) معادلهٔ $d = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$ که a،b،c و d اعداد طبیعی هستند و $a < b < c$، چند جواب دارد؟

الف) جواب ندارد. ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بی‌نهایت

۴۱) مجموعهٔ A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۴۲) معادلهٔ $x^y + ۱ = (x+۱)^۲$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

۴۳) معادلهٔ $n! + ۳ = ۳^{n-۱}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) بی‌نهایت

۴۴) فرض کنید برای هر $n \in N$،

$$A_n = \{x \in N | \text{ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک } x \text{ و } n \text{ بزرگتر از یک است.}\}$$

عدد طبیعی $n > ۱$ را «خوب» می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A_n$، داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچک‌تر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ ه) ۲۳

۴۵) معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{۱۳۷۶}$ با شرط $(x\leq y)$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) جواب ندارد.

۴۶) چند عدد اول سه رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که در آن داشته باشیم $b^۲-۴ac=۹$؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۴۷) تعداد مقسوم‌علیه‌های هر عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. عدد n را «جالب» گوییم هرگاه $d(d(d(n)))=d(d(n))$. کدام‌یک از احکام زیر نادرست است؟

الف) بی‌نهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.
ب) بی‌نهایت عدد جالب زوج وجود دارد.
ج) بی‌نهایت عدد جالب فرد وجود دارد.
د) اگر n جالب باشد، $n^۲$ نیز جالب است.
ه) اگر n جالب باشد، $d(n)$ نیز جالب است.

۴۸) برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(۱۳۷۶)=۱۷$). اگر $n_۰=(۱۳)^{۷۶}$ کدام‌یک از اعداد زیر در دنباله‌ی

$$n_۰, f(n_۰), f(f(n_۰)), \ldots, f(f(\ldots(f(n_۰))\ldots)), \ldots$$

وجود دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) هیچ‌کدام

۴۹) در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر عددی به‌صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{۵^m+۵^k \mid m,k\in N\}$ ب) $\{۴^m+۴^k \mid m,k\in N\}$ ج) $\{٦^m+٦^k \mid m,k\in N\}$
د) $\{۷^m+۷^k \mid m,k\in N\}$ ه) هیچ‌کدام

۵۰) اگر $n\geq ۲$ عددی طبیعی و $n^۲+۲^n$ عددی اول باشد، باقی‌ماندهٔ n بر ۶ کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) الف و ب ه) ب و ج

۵۱) دنبالهٔ a_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰=۰ \\ a_{n+۱}=na_n+a_n+n \end{cases}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $a_{۱۰۱}$ بر ۱۰۲ چند است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۹۹ د) ۱۰۰ ه) ۱۰۱

۵۲) بزرگ‌ترین توانی از ۲ که عدد $N=۳^{۵۱۲}-۱$ بر آن بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

الف) $۲^۸$ ب) $۲^۹$ ج) $۲^{۱۰}$ د) $۲^{۱۱}$ ه) $۲^{۱۲}$

۵۳) چند عدد در مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۱۳۷۷, \ldots, ۱۹۹۹\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟

الف) ۳۱۱ ب) ۳۱۲ ج) ۴۶۶ د) ۴۶۷ ه) ۶۲۳

۵۴) عددهای ۱،۲،... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هربار دو تا از اعداد روی تخته را به دل‌خواه پاک می‌کنیم و قدرمطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به‌دست آمده کامل‌تر است؟

الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.
ب) این عدد همواره فرد است.
ج) باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.
د) این عدد همواره زوج است.
ه) هیچ‌کدام

۵۵) از بین عددهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۵۳\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دو تایی از آن ها برابر ۴ نباشد؟

الف) ۲۶ ب) ۲۷ ج) ۲۸ د) ۲۹ ه) ۳۰

۵۶) فرض کنید $A = \overbrace{۹۹\cdots۹۹}^{۸۱}$. مجموع ارقام $A^۲$ در پایهٔ ۱۰ چند است؟

الف) ۶۹۳ ب) ۷۲۹ ج) ۷۹۰ د) ۸۳۷ ه) ۹۳۶

۵۷) $A \subseteq N$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن را به‌صورت دنبالهٔ $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ نوشت به‌طوری که هر دو جملهٔ متوالی مثل a_i و $a_{i+۱}$ دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ باشند. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر خوب <u>نیستند</u>؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱
ب) اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱
ج) اعداد طبیعی به‌صورت $۳k + ۲$
د) اعداد مربع کامل بزرگ‌تر از ۱
ه) هر چهار مجموعه، خوب هستند.

۵۸) فرض کنید $a_n = n^۳ - ۵n^۲ + ۶n$ و $b_n = n^۲ + ۵$ و d_n برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a_n و b_n است. کدام گزینه درست است؟ (max بزرگ‌ترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد.)

الف) d_n متناوب است.
ب) $\max\{d_n \mid n \in N\} = +\infty$
ج) $\max\{d_n \mid n \in N\} = ۶۳۰$
د) d_n از جایی به بعد ثابت است.
ه) الف و ج

۵۹) چند عدد گویای t وجود دارد که $۰ \leq t \leq ۷۷$ و $۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t$ عددی صحیح باشد؟

الف) ۷۸ ب) ۸۶ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۳ ه) ۲۳۲

۶۰) نقطهٔ P روی نقاط صفحهٔ xy با مختصات صحیح در حال حرکت است. به این‌صورت که اگر در نقطهٔ (a,b) باشد با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+b$ بر ۴، برابر ۰،۱،۲ یا ۳ است به‌ترتیب به راست، بالا، چپ، یا پایین می‌رود. فرض کنید P از $P_۰$ شروع به حرکت کرده و پس از ۱۰۰ حرکت به نقطه‌ی $(۰, ۱۰)$ رسیده است. به‌ازای چه تعداد $P_۰$ چنین اتفاقی می‌افتد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۶۱) عددهای طبیعی $a_۱$،$a_۲$،$a_۳$، و... به این‌صورت تعریف شده‌اند که $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = ۲a_n + ۵$. کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند در بین a_i ها ظاهر شود؟

الف) ۵۶۲۳۰۱ ب) ۷۸۶۴۲۷ ج) ۱۶۴۸۵ د) ۳۱۲۳ ه) ۵۱۵۱۹

۶۲) چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه حداقل یکی از اعداد $۱۲^{۵۰}$، $۴۵^{۲۰}$ و $۵۰^{۱۰۰}$ باشد؟

الف) ۱ ب) ۲۶۳۱۲ ج) ۲۶۳۱۳ د) ۲۶۱۵۱ ه) ۲۶۱۵۰

۶۳) از روی عدد a می‌توانیم به b برسیم، اگر $\frac{[a,b]}{(a,b)}$ عددی اول باشد و می‌نویسیم $a \to b$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

الف) با آغاز از هر عدد $a \in N$ با زنجیره‌ای مثل $a \to b \to c \cdots \to k$ می‌توان به هر $k \in N$ ای رسید.
ب) با هر $a \in N$ و اعداد $b_۱,\ldots,b_m$ که داده شده‌اند، زنجیره‌ای با آغاز از a وجود دارد که همهٔ b_i ها در آن ظاهر شوند و هرکدام یک‌بار.
ج) با آغاز از هر عدد $a \in N$، زنجیره‌ای وجود دارد که تنها شامل مضارب a باشد و همهٔ مضارب a در آن ظاهرشوند. (زنجیره‌ای نامتناهی)
د) با آغاز از هر عدد $a \in N$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همهٔ اعداد مربع کامل درآن آمده باشند. (زنجیره‌ای‌نامتناهی)
ه) با آغاز از هر عدد $a \in N$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همهٔ اعداد آن کم‌تر از b باشند و همهٔ اعداد کم‌تر از b در آن آمده باشند، هریک‌دقیقاً یک‌بار ($b > a$ عددی داده شده است).

۶۴) فرض کنیم $a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{۱۳۷۹}$ همان اعداد **۱٫۲٫...٫۱۳۷۹** هستند که با یک ترتیب دل‌خواه ظاهر شده‌اند. تعریف می‌کنیم: $f_i = |a_i - i|$ و قرار می‌دهیم: $L = f_{۱} \times f_{۲} \times \cdots \times f_{۱۳۷۹}$. با در نظر گرفتن تمام ترتیب‌ها، L مساوی چند تا از اعداد ۱ تا ۱۰ می‌تواند باشد؟

الف) هیچ مقدار ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) تمام مقادیر

۶۵) فرض کنید $a_{۱}$ عددی طبیعی باشد و $a_{n+۱}$ را برابر بزرگ‌ترین عامل اول در $a_n + ۱$ تعریف کنیم. $a_{۱}$ را خوب می‌نامیم اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ متناظر با آن، سرانجام متناوب باشد. کدام حکم درست است؟

الف) تعداد اعداد خوب، متناهی است.
ب) تعداد اعداد غیرخوب، نامتناهی است.
ج) همهٔ اعداد خوب هستند.
د) همهٔ اعداد غیرخوب هستند.
ه) اعداد غیرخوب وجود دارند و تعداد آن‌ها متناهی است.

۶۶) برای هر $m \in N$، f_m را به این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$f_{۱} = ۱, f_{۲} = ۱۱, f_{۳} = ۱۱۱, \ldots \;,\; f_m = \underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{m \text{ بار}}$$

چند تا از f_m ها را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی غیر صفر نوشت؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

۶۷) اعداد ۱٫۲٫۳٫...٫۶۱ را طوری در یک ردیف نوشته‌ایم که هر عدد مجموع اعداد قبل از خودش را می‌شمارد. اگر عدد اول در این ردیف ۶۱ و عدد دوم ۱ باشد، عدد سوم کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۳۰
د) ۳۱ ه) نمی‌توان پیدا کرد.

۶۸) دو نفر مشغول خوردن تخمه از یک ظرف هستند. قرار است که به نوبت از آن ظرف تخمه بردارند. هر نفر مجاز به برداشتن ۱،۲ یا ۵ تخمه در نوبت خودش است. هرکس که آخرین تخمه (یا تخمه‌ها) را بردارد، برنده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۷ باشد، نفر دوم برنده است.
ب) در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۸ باشد، نفر دوم برنده است.
ج) در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری ۱۳۷۹ باشد، نفر دوم برنده است.
د) در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر اول برنده است.
ه) در صورتی که تعداد تخمه‌ها در شروع تخمه‌خوری بیش از ۲۰۰۰ باشد، نفر دوم‌برنده است.

۶۹) فرض کنید شخصی یک عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ را انتخاب کرده باشد. می‌توانیم هر بار به او یک عدد بدهیم و او بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد و عدد اولیه را به ما بگوید. با چند مرحله حتماً می‌توانیم عدد او را بیابیم؟

الف) ۱۰۰

ب) $\binom{۱۰۰}{۲}$

ج) به تعداد اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰

د) به تعداد اعداد مرکب کوچک‌تر از ۱۰۰

ه) هیچ‌کدام

۷۰) جدول اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & ۱ & & & & \\ & & & ۱ & & -۱ & & & \\ & & ۱ & & -۱ & & ۱ & & \\ & ۱ & & -۱ & & ۱ & & -۱ & \\ ۱ & & -۱ & & ۱ & & -۱ & & ۱ \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

حاصل‌جمع کلیهٔ سطرها از سطر اول تا سطر ۱۳۷۹ (با خود سطر ۱۳۷۹) برابر است با:

الف) ۶۹۰ ب) ۱ ج) ۰ د) ۱۳۷۹ ه) ۶۸۹

۷۱) ۴۰ توپ را با اعداد ۱ تا ۴۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. می‌خواهیم توپ‌ها را در تعدادی جعبه قرار دهیم به این‌ترتیب که اگر در یک جعبه توپی با شمارهٔ n قرار داده شده باشد، توپ دیگری با مضارب n را نمی‌توانیم در آن جعبه بگذاریم، حداقل چند تا جعبه برای قراردادن همهٔ توپ‌ها لازم است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۱۲ د) ۱۴ ه) ۲۰

۷۲) پنج نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض است، کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درباره‌ی مختصات وسط پاره‌خط‌های واصل بین این نقاط درست است؟

الف) مختصات کلیهٔ نقاط فوق‌الذکر نیز لزوماً صحیح است.

ب) مختصات هیچ‌کدام لزوماً صحیح نیست.

ج) حداقل مختصات یکی از نقاط صحیح است و نه‌لزوماً بیش‌تر.

د) حداقل مختصات دو نقطه صحیح است و نه لزوماً بیش‌تر.

ه) حداقل مختصات سه نقطه صحیح است و نه لزوماً بیش‌تر.

۷۳) تعداد اعداد طبیعی $n \leq ۱۳۷۹$ که به‌ازای آن‌ها عدد $n^۳ + ۲n^۲$ مربع کامل باشد، چند تاست؟

الف) ۱۶ ب) ۶۴ ج) ۴۹ د) ۵۵ ه) ۳۶

۷۴) تعداد x های صحیح که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند چند تاست؟

$$\frac{x^۳+x}{x+۳}=۳۵$$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌شمار

۷۵) آیا اعداد طبیعی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n و $x_{n+۱}$ وجود دارند که

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=x_{n+۱}^۲$$

الف) برای هر n ای اعداد $x_۱$، ...، $x_{n+۱}$ وجود دارند.
ب) به‌جز $n=۱,۲$ چنین اعدادی وجود ندارند.
ج) فقط برای هر n مربع کامل و $n=۱,۲$ چنین اعدادی وجود دارند.
د) فقط برای $n=۱$ و اعداد اول n چنین اعدادی وجود دارند.
ه) هیچ‌کدام

۷۶) دنباله‌ای از اعداد حقیقی به این شکل تعریف می‌شوند $x_۰=۳, x_۱=۸$ و برای هر $n\geq ۱$، $x_{n+۱}=۳x_n-۴x_{n-۱}$. به‌طور مثال: $x_۲=۱۲, x_۳=۴, \ldots$.
در بین ۲۰۰۱ جمله‌ی ابتدایی این دنباله از $x_۰$ تا $x_{۲۰۰۰}$ چند مضرب ۳ داریم؟

الف) ۹۹۹ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۰۰۱ د) ۱۵۰۰ ه) ۱۵۰۱

۷۷) کدام‌یک از اعداد زیر به‌صورت $a^۲-b^۲$، $a,b\in Z$ قابل بیان هستند؟

الف) ۱۶،۱۳۷۹،۲۰۰۱ ب) ۱۶،۲۰۰۱،۹۸ ج) ۱۴،۱۳۷۹،۲۰۰۱
د) ۲۰۰۱،۶۶،۹۸ ه) ۱۶،۶۶،۹۸

۷۸) تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳xy-y-۵x=۱۳$ که $x,y\in N$ برابر است با

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

۷۹) چند عدد حقیقی مانند a وجود دارد که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند؟

$$[\frac{a}{۲}]+[\frac{a}{۳}]+[\frac{a}{۵}]=a$$

($[x]$ برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است.)

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۳۰ د) ۶۰ ه) بی‌نهایت

۸۰) یک عدد ۱۰ رقمی را جالب می‌گوییم اگر تمام ارقام آن متفاوت باشند و بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیر باشد. چند عدد ۱۰ رقمی جالب وجود دارد؟

الف) ۲۰۴۸ ب) ۴۰۹۶ ج) ۳۴۵۶ د) ۳۸۴۰ ه) هیچ‌کدام

۸۱) به ازای چند عدد طبیعی n، $۳^n+۳^{۱۱}+۳^۷$ مربع کامل است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بی‌نهایت

۸۲) به ازای چند عدد طبیعی n معادلهٔ $n^a+n^b+n^c=n^d$ در اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

۸۳) عدد حقیقی x را «جالب» می‌گوییم اگر در بسط اعشاری آن، بعد از ممیز، هر عدد طبیعی ظاهر شده باشد. مثلاً عدد...۰.۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲ که از پشت سرهم قرار گرفتن همهٔ اعداد طبیعی به وجود آمده، عددی جالب است. کدام یک از گزاره‌های زیر دربارهٔ اعداد جالب صحیح نیست؟

الف) در بسط اعشاری هر عدد جالب نامتناهی بار ۱۳۸۰ ظاهر می‌شود.
ب) هر عدد جالب گنگ است.
ج) اگر x و y دو عدد جالب باشند، $\frac{1}{x}$ و xy هم جالب هستند.
د) اگر x جالب باشد، عدد y هم که از حذف ارقام x به صورت یکی در میان به دست می‌آید، جالب است.
ه) اگر x جالب باشد، $x-1$ هم جالب است.

۸۴) حداکثر چند عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ می‌توان انتخاب کرد که هیچ‌کدام از آن‌ها حاصل ضرب بقیه‌شان را عاد نکند؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

۸۵) زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی را ضعیف می‌نامیم، هرگاه مجموع هیچ دو عضوی از A بر عضوی از A بخش‌پذیر نباشد. در ضمن، یک مجموعه ضعیف را بزرگ می‌نامیم، هرگاه هیچ زیرمجموعهٔ ضعیف دیگری شامل آن نباشد.

کدام گزینه نادرست است؟

الف) نامتناهی مجموعهٔ ضعیف نامتناهی داریم.
ب) مجموعهٔ ضعیف نامتناهی وجود دارد که بزرگ است.
ج) نامتناهی مجموعهٔ ضعیف متناهی داریم که بزرگ است.
د) مجموعهٔ ضعیف نامتناهی وجود دارد که همهٔ اعضای آن بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیرند.
ه) مجموعه‌ای ضعیف وجود دارد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را دارا است.

۸۶) معادلهٔ زیر در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

$$x^2 + y^5 = 1381 + z^2$$

الف) صفر ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌نهایت

۸۷) فرض کنید n عددی طبیعی باشد، مقسوم علیه d از n را خوب می‌گوییم، اگر $(d, \frac{n}{d}) = 1$. فرض کنید $f(n)$ نمایندهٔ مجموع مقسوم علیه‌های خوب n باشد و S مجموعهٔ اعداد طبیعی مانند m باشد که $f(m) - 2$ مضرب ۴ است و $1 \leq m \leq 1000$. کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) عضوی از S وجود دارد که بر ۳۰ بخش‌پذیر است.
ب) عضوی از S به شکل $۴k + ۳$ است.
ج) هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.
د) عضوی از S وجود دارد که تعداد عوامل اول آن ۴ است.
ه) هیچ‌کدام.

۸۸) یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «خوب» می‌نامیم هرگاه جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند عدد خوب کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۸۹) برای عدد طبیعی n فرض کنید $p(n)$ حاصل‌ضرب ارقام n در مبنای ۱۰ باشد. $p(۱) + \ldots + p(۹۹۹)$ چند است؟

الف) ۱۱۲۵۷۶ ب) ۲۰۷۰ ج) ۹۱۱۲۵ د) ۹۳۱۹۵ ه) ۱۳۲۰۷۰

۹۰) یک عدد طبیعی را «تقسیمی» می‌نامیم هرگاه از قرار گرفتن یک عدد مضرب ۵ در سمت راست یک عدد مضرب ۳ به دست آمده باشد. تعداد اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که تقسیمی نیستند چند تاست؟

الف) ۵۸۸ ب) ۲۹۴ ج) ۸۸۲ د) ۱۲۰۰ ه) ۴۳۲

۹۱) فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $۲^n + ۳^n$ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است. مجموع ارقام n چند است؟

الف) ۸
ب) ۷
ج) ۶
د) ۵
ه) اصلاً چنین nای وجود ندارد.

۹۲) یک عدد طبیعی را «ریشه‌دار» می‌گوییم هرگاه مجذور مجموع ارقامش با خودش برابر باشد. کدام گزینه درست است؟

الف) تعداد اعداد ریشه‌دار نامتناهی است.
ب) عدد ریشه‌دار دو رقمی وجود ندارد.
ج) عدد ریشه‌دار چهار رقمی وجود ندارد.
د) عدد ریشه‌داری به شکل $۹k + ۳$ وجود دارد.
ه) عدد ریشه‌داری به شکل $۹k + ۴$ وجود دارد.

۹۳) پس از بسط دادن $(۱ + ۲x + ۳x^۲ + \ldots + ۹x^۸ + ۱۰x^۹)^۲$، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۰

۹۴) به ازای چند عدد طبیعی n، $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]$ عددی اول است؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

الف) یک ب) دو ج) سه
د) بی‌نهایت ه) چنین عددی وجود ندارد.

۹۵) مجموعه‌های A_k، $k \in N$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} A_۱ = \text{مجموعهٔ اعداد اول} \\ A_{k+۱} = \{a_۱ \times a_۲ \times \ldots \times a_{k+۱} \mid a_۱, a_۲, \ldots, a_{k+۱} \in A_k\} \end{cases}$$

توجه کنید که $a_۱, a_۲, \ldots a_{k+۱}$ لزوماً متمایز نیستند. کدام یک از اعداد زیر، دست کم عضو یکی از A_k ها است؟

الف) $۲^{۲۴۳} \times ۳^۷$ ب) $۲^{۲۵} \times ۵^{۲۵}$ ج) $۲^{۲۳۱} \times ۷^{۲۵}$
د) $۲^{۱۱} \times ۳^۹$ ه) $۲^{۶۰} \times ۳^{۱۲} \times ۵^۶$

۹۶) به ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله $\frac{۱}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{۱}{y}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین a ای وجود ندارد. ب) یکی ج) دوتا
د) چهارتا ه) بی‌نهایت

۹۷) فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

۹۸) فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۲a+۱$، $۳a+۲$، $۴a+۳$ و یا $۵a+۴$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰^{۱۳۸۳} - ۱$ رسید؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) هیچ‌کدام

۹۹) می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که اولاً هر عدد متوالی ناهمرنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهمرنگ a و b، یا باقی‌مانده a و b بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقی‌مانده a و b بر ۱۷. کم‌ترین تعداد رنگ‌های لازم چند تا است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۷ د) ۲۱ ه) ۱۴۷

۱۰۰) فرض کنید $f(x) = x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱$. باقی مانده تقسیم $f(x^{۱۲})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^۳ + x^۲ + x + ۱$ ب) $x^۲ - x + ۶$ ج) $x + ۶$
د) ۶ ه) $۶ - x$

۱۰۱) چند عدد طبیعی را می‌توان به صورت جمع تعدادی عدد طبیعی متمایز کم‌تر از ۱۰۰ نوشت؟

الف) ۴۹۵۰ ب) ۱۴۴۰ ج) ۴۸۵۱
د) ۵۰۵۰ ه) بیش از ۱۰۰۰۰

۱۰۲) به ازای چند عدد گویای ناصفر q، حاصل $q + \frac{۱۳۸۵}{q}$ عددی صحیح است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۷ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌نهایت

۱۰۳) درون دایره‌ای خاصیت آینه‌ای دارد و نقطهٔ A روی محیط آن است. چند راستا وجود دارد که اگر از A در امتداد آن‌ها پرتوی نوری تابیده شود، پرتو در ۲۶ امین برخورد خود با دایره در نقطهٔ A است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۲۵
د) ۲۶ ه) نامتناهی راستا

۱۰۴) دستگاه معادلات روبرو چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x = \dfrac{۲y}{۱ - y^۲} \\ \\ y = \dfrac{۲x}{۱ - x^۲} \end{cases}$$

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) بی نهایت

۱۰۵) ضرایب چند جمله‌ای P صحیح است. تحت کدام‌یک از شرایط زیر P نمی‌تواند ریشهٔ صحیح داشته باشد؟

الف) $P(۶) = ۶, P(۵) = ۵$
ب) $P(۶) = ۵, P(۵) = ۵$
ج) $P(۶) = ۶, P(۵) = ۶$
د) $P(۶) = ۵, P(۵) = ۶$
ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشهٔ صحیح داشته باشد.

۱۰۶) به ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m - ۱} + \sqrt{m + ۱۵}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی نهایت

۱۰۷) مستطیلی در صفحه با رئوس $(۰, ۰), (۰, ۱۰۰), (۱۵۰, ۰), (۱۵۰, ۱۰۰)$ را در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رئوس $(۰, ۰)$ و $(۱۵۰, ۱۰۰)$ اضلاع مستطیل را در دو نقطهٔ متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ خود قطر را هم بشمارید.

الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ ه) ۳۰۰

۱۰۸) فرض کنید $(۲ + \sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ ه) ۲۹۱۱

۱۰۹) تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n^{۲}+۱$، که n عددی طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

الف) ۳
ب) ۴
ج) ۵
د) ۶
ه) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.

۱۱۰) بسط مبنای ۲− را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می‌کنیم. مثلاً

$$(۱۰۱)_{-۲} = ۱ \times (-۲)^{۲} + ۰ \times (-۲)^{۱} + ۱ \times (-۲)^{۰} = ۵$$

۱۱۷ در مبنای ۲−، چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $-(۱۰۱)_{-۲}$، مجاز نیست.)

الف) ۲
ب) ۴
ج) ۶
د) ۱۱۷ بسط مبنای ۲− ندارد.
ه) ۱۱۷ بیش تر از یک بسط در مبنای ۲− دارد.

۱۱۱) فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$، به‌ازای $k=۱,۲,۳,\ldots$، عددی صحیح باشد. در این‌صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{F(\frac{۱}{n})}{G(\frac{۱}{n})}$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، عددی صحیح است.
ب) F بر G بخش‌پذیر است.
ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به‌ازای هر عدد صحیح k، صحیح است.
د) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{F(k)}{G(k)}=\infty$.
ه) درجه‌ی $G(x)$ صفر یا یک است.

۱۱۲) فرض کنید که $P_۱$، $P_۲$، … و $P_{۱۰}$ ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنبالهٔ دلخواه $a_۱$، $a_۲$، … و $a_{۱۳۷۵}$ که a_i ها از اعداد $P_۱$ تا $P_{۱۰}$ باشند کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

الف) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آن‌ها یک مربع کامل است.
ب) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آن‌ها یک مکعب کامل است.
ج) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آن‌ها دو برابر یک مربع کامل است.
د) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آن‌ها دو برابر یک مکعب کامل است.
ه) الف و ب هر دو درست است.

۱۱۳) ۱۳۷۶ لامپ داریم که همه در حالت اولیه خاموش هستند. این لامپ‌ها را از ۱ تا ۱۳۷۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر عدد صحیح و مثبت k، سوئیچ P_k وضعیت خاموش و روشن لامپ‌هایی که شمارهٔ آن‌ها مضربی از k است را عوض می‌کند. سوئیچ‌های P_1، P_2، ...، P_{1376} را متوالیاً می‌زنیم. در آخر چند لامپ روشن می‌ماند؟

الف) ۱۳۷۶ ب) ۱۳۳۹ ج) ۷۶ د) ۳۹ ه) ۳۷

۱۱۴) $f : N \to N$ تابعی است یک‌به‌یک و پوشا و به‌علاوه می‌دانیم که m بر n بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر $f(m)$ بر $f(n)$ بخش‌پذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟

الف) $f(n)$ بر n بخش‌پذیر است.
ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $f(p) = p$
ج) برای هر a و b داریم: $f(ab) = f(a)f(b)$
د) $f(n) \leq n^2$
ه) $f(f(n)) = n$

۱۱۵) تعداد جواب‌های معادلهٔ $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ در اعداد طبیعی چند تاست؟

الف) صفر ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌نهایت

۱۱۶) فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $2^{2k} + b^2 = c^2$ چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) k د) $(k-1)^2$ ه) $k-1$

۱.۲ مسائل تألیفی

۱۱۷) اگر برای اعداد صحیح a و b و c رابطهٔ $ab|(a-1)c^2$ برقرار باشد آنگاه (a,c^2) کدام است؟

الف) c^2 ب) $|a|$ ج) ۱ د) $|\frac{c^2}{a}|$ ه) $a-1$

۱۱۸) در یک تقسیم، مقسوم‌علیه برابر ۴۳ و باقیماندهٔ تقسیم ۶ برابر مجذور خارج قسمت می‌باشد. برای مقسوم چند جواب متمایز طبیعی به‌دست می‌آید؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۱۹) روی منحنی نمایش تابع $y=\frac{3x-2}{2x+1}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۲

۱۲۰) رقم یکان عدد 5493^{138} کدام است؟

الف) ۳ ب) ۹ ج) ۱ د) ۷ ه) ۵

۱۲۱) باقیماندهٔ تقسیم $30^{30}+\ldots+2^{30}+1^{30}$ بر ۷ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۱۲۲) باقیماندهٔ عدد $5\times7^{35}-4$ بر ۱۹ کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۳ د) ۱۵ ه) ۱۷

۱۲۳) اگر $(6a,6b)+(a^3,b^3)=560$ آنگاه $[a,b]$ کدام می‌تواند باشد؟

الف) ۴۸ ب) ۴۲ ج) ۵۴ د) ۴۴ ه) ۵۰

۱۲۴) حاصل ضرب دو عدد a و b برابر ۲۱۶۰ و ب.م.م آن‌ها ۶ می‌باشد، عدد کوچکتر کدام نمی‌تواند باشد؟

الف) ۶ ب) ۱۲ ج) ۲۴ د) ۱۸ ه) ۳۰

۱۲۵) اگر باقیماندهٔ عدد فرد a بر ۲۱ برابر ۶ باشد باقیماندهٔ a بر ۴۲ کدام است؟

الف) ۶ ب) ۲۱ ج) ۱۸ د) ۱۱ ه) ۲۷

۱۲۶) بزرگترین توانی از ۴ که عدد $N=3^{1024}-1$ بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۱۲۷) جواب معادلهٔ هم نهشتی $x(x^9-2)\overset{11}{\equiv}40$ کدام است؟

الف) ۵۵ ب) ۵۶ ج) ۵۷ د) ۵۸ ه) ۵۹

۱۲۸) چند عدد طبیعی وجود دارد که همهٔ ارقام آن یک بوده و مربع کامل باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۱۲۹) دستگاه معادلات زیر چند دسته جواب در R دارد؟

$$\begin{cases} x+z^{۲}=y \\ y+x^{۲}=z \\ z+y^{۲}=x \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌شمار

۱۳۰) مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,n\}$ را به هر شکل که به دو مجموعه جدا از هم افراز کنیم،یکی از آن ها حتماً شامل دو عدد و تفاضل آن دوعدد خواهد بود. کمترین مقدار n چقدر است؟

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۶ د) ۵ ه) ۴

۱۳۱) c,b,a به ترتیب ارقام صدگان، دهگان و یکان عدد سه رقمی M هستند ومی‌دانیم $۴۹a+۷b+c=۲۸۶$ در این صورت باقیماندهٔ تقسیم M بر ۶ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۳۲) r,q,p سه رقم متمایز هستند. شش عدد دو رقمی با استفاده از این ارقام می توان ساخت. اگر مجموع شش عدد دو رقمی برابر ۴۸۴ باشد $\overline{pqr}$ کدام می‌تواند باشد؟

الف) ۷۶۷ ب) ۷۶۸ ج) ۷۶۹ د) ۷۷۰ ه) ۷۷۱

۱۳۳) چند عضو مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\dots,۱۳۸۴\}$ را می‌توان به شکل $x^{۶}+y^{۶}+z^{۶}$ نوشت به طوری که $x,y,z\in N$؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۰

۱۳۴) دستگاه معادلات زیر چند دسته جواب در R دارد؟

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}=۳$$

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۶ د) ۸ ه) بی‌شمار

۱۳۵) معادلهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$x+y+z=\sqrt{x-\frac{۱}{۴}}+\sqrt{y-\frac{۱}{۴}}+\sqrt{z-\frac{۱}{۴}}$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌شمار

۱۳۶) تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۱۱^n+۶۰^n=۶۱^n$ چند تا است؟

الف) ۰ ب) بی‌شمار ج) ۱ د) ۲ ه) ۴

۱۳۷) اگر $d(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد آنگاه تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر در اعداد طبیعی برابر است با:

$$n+d(n)+d(d(n))=۱۳۸۴^{۲۰۰۵}-۲$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۱۳۸۴ ه) ۲۰۰۵

۱۳۸) a,b دو عدد صحیح نسبت به هم اول‌اند. دراین صورت اگر دو عدد صحیح $۱۸a+۵b, ۱۱a+۲b$ نسبت به هم اول نباشند، بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن ها چیست؟

الف) ۷ ب) ۱۱ ج) ۱۳ د) ۱۷ ه) ۱۹

۱۳۹) در عبارت زیر کمترین مقدار طبیعی که می‌توان به جای n قرار داد تا حاصل بر !۱۳۷۸ بخش‌پذیر باشد کدام است؟

$$A=(۱!)\times(۲!)\times(۳!)\times\ldots\times(n!)$$

الف) ۱۷ ب) ۳۶ ج) ۱۳۷۰ د) ۱۳۷۱ ه) ۱۳۷۳

۱۴۰) مجموعهٔ ۱۳۸۴ عضوی $\{۱,۱۱,۱۱۱,\ldots,\underbrace{۱۱\ldots۱}_{\text{۱۳۸۴ تا}}\}$ دارای چند عضو است که مضرب ۷ باشند؟

الف) ۲۲۷ ب) ۲۲۸ ج) ۲۲۹ د) ۲۳۰ ه) ۲۳۱

۱۴۱) چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲-x-۳۶$ می‌توان یافت به طوری که عرض آن ها، مربع یک عدد اول باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۴۲) باقیماندهٔ تقسیم $۲^{۱۳۷۶}-۳^{۱۳۷۶}$ بر ۱۳ کدام است؟

الف) ۵ ب) ۴ ج) ۰ د) ۶ ه) ۱

۱۴۳) دنبالهٔ $a_۱,a_۲,\ldots$ را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر i، $a_{i+۱}$ برابر مجموع ارقام a_i می‌باشد.
اگر $a_۱=۹^{۱۳۸۳}+۱۷^{۲۰۰۵}$، آنگاه $a_{۱۳۸۳}$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۲ ج) ۹ د) ۱ ه) ۸

۱۴۴) چند عدد سه رقمی وجود دارد که ۱۱ برابر مجموع ارقام خود باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۴۵) چند عدد طبیعی n وجود دارد که همگی اعداد n و $n+۱$ و $n+۳$ اول باشند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌شمار

۱۴۶) عدد A را مولد عدد B می‌گوییم اگر A به اضافهٔ مجموع ارقامش برابر B باشد. مثلاً ۲۷ مولد ۳۶ است زیرا $۲۷+۲+۷=۳۶$. اعداد ۱۰۱ و ۹۷ به‌ترتیب چند مولد دارند؟

الف) ۲ و ۰ ب) ۱ و ۱ ج) ۱ و ۰ د) ۱ و ۲ ه) ۲ و ۲

۱۴۷) بزرگترین عدد طبیعی n که ۸^n مقسوم‌علیهی از (!۲۸) است، برابر چند است؟

الف) ۵ ب) ۸ ج) ۷ د) ۶ ه) ۱

۱۴۸) اگر از یک عدد سه رقمی کمتر از ۵۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به‌دست آید؟

الف) ۳۸ ب) ۴۰ ج) ۴۳ د) ۴۵ ه) ۴۶

۱۴۹) باقیماندهٔ تقسیم $۲^{(۲^{۱۳۷۷})}$ بر ۱۹ برابر است با:

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۱۵۰) چند عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ وجود دارد که در رابطهٔ زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^{۷}+y^{۷}+z^{۷}=۷k \quad (k\in N) \\ x+y+z=۵ \end{cases}$$

الف) ۶ ب) ۸ ج) ۴ د) ۲ ه) ۰

۱۵۱) دنبالهٔ عددی $(n\in N)a_n$ با ضابطهٔ $a_n.a_{n-۱}+۱=۲a_{n-۱}$ مفروض است. $a_{۲۰۰۵}$ کدام است؟ $(a_۱=۲)$

الف) $\frac{۲۰۰۵}{۲۰۰۶}$ ب) $\frac{۲۰۰۴}{۲۰۰۵}$ ج) $\frac{۲۰۰۵}{۲۰۰۴}$ د) $\frac{۲۰۰۶}{۲۰۰۵}$ ه) ۱

۱۵۲) هر یک از اعضای مجموعهٔ $A=\{۲۹۱,۲۹۲,\dots,۹۴۱۴\}$ را در عدد ۱۴۷۰ ضرب کرده‌ایم. چه تعداد از اعداد حاصل، مربع کامل هستند؟

الف) ۳۰۵ ب) ۳۰۴ ج) ۱۵ د) ۱۴ ه) ۱۳

۱۵۳) به حاصل‌ضرب اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰، ۳۶ واحد اضافه می‌کنیم. عدد حاصل در مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰، چند مقسوم‌علیه دارد؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۶ د) ۹ ه) ۱۲

۱۵۴) اگر A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۰۸ و B مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۵ باشد، آن‌گاه $A\cup B$ چند عضو دارد؟

الف) ۱۸ ب) ۱۷ ج) ۱۶ د) ۱۲ ه) ۱۵

۱۵۵) اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b برابر ۲۲ باشد، آن‌گاه $۶a+۱۲b$ کدام می‌تواند باشد؟

الف) ۳۹۶ ب) ۸۸ ج) ۶۶ د) ۴۲۰ ه) ۱۴۴

۱۵۶) اگر $(a,b)=۹$ و a عددی فرد باشد، آنگاه حاصل $(a^{۲},۱۶b)$ چه تعدادی از اعداد ۴۵, ۳۶, ۲۷, ۱۸, ۹ می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۵۷) اگر $۲^n+۱$ اول باشد، آنگاه n کدام مقدار است؟

الف) ۱۶ ب) ۱۷ ج) ۱۸ د) ۱۹ ه) ۲۰

۱۵۸) اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عدد صحیح a بر ۴ و ۶ هر دو برابر ۳ باشد، لازم است:

الف) $a = ۳$ باشد.
ب) $a = ۲۷$ باشد.
ج) $a - ۳$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.
د) $a - ۳$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد.
ه) $a - ۳$ بر ۲۴ بخشپذیر باشد.

۱۵۹) تفاضل بزرگترین و کوچکترین اعداد صحیح و مثبتی که چون بر ۹۳ تقسیم شوند باقیماندهٔ تقسیم دو برابر مجذور خارج‌قسمت شود کدام است؟

الف) ۶۳۰ ب) ۱۹۵ ج) ۵۳۵ د) ۵۱۵ ه) ۹۵

۱۶۰) باقیماندهٔ تقسیم a بر ۳ و ۸ به ترتیب ۲ و ۳ می‌باشد. باقیماندهٔ تقسیم a بر ۶ چقدر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۱۶۱) وحید می‌خواهد بسته‌ای را پست کند و برای این کار باید ۱۵۳ تومان تمبر به بسته بچسباند. او تنها تمبرهای ۵ تومانی و ۸ تومانی دارد. حداقل چند تمبر بایستی به بستهٔ پستی بچسباند؟

الف) ۲۰ ب) ۲۱ ج) ۲۲ د) ۲۳ ه) ۲۴

۱۶۲) اگر $۱۳|۷x + ۳y$ که در آن $x, y \in Z$ مقدار m چقدر باشد تا داشته باشیم:

$$۱۳|۲x + my$$

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۴

۱۶۳) تعداد جواب‌های معادلهٔ $n + ۷|n^۲ + ۵$ چند تا است؟ $(n \in N)$

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۱۶۴) باقیماندهٔ تقسیم عدد $۱۳۸۳! + \ldots + ۳! + ۲! + ۱!$ بر عدد ۱۸ چند است؟

الف) ۱۱ ب) ۵ ج) ۰ د) ۹ ه) ۸

۱۶۵) اگر ک.م.م دو عدد a و b برابر با نصف مجموع آن‌ها باشد، تفاضل a و b چقدر است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) $۲a + b$ د) $a + b$ ه) $a + ۲b$

۱۶۶) چند عدد صحیح مثبت وجود دارد که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن‌ها برابر با خود آن عدد باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۶

۱۶۷) a, b اعدادی صحیح هستند به‌طوری‌که: $(a, b) = ۱$ اگر $(۸a + ۵b, ۵a + ۳b) = d$، آنگاه d کدام است؟

الف) فقط ۱ ب) ۱ یا ۲ ج) ۱ یا ۳ د) فقط ۲ ه) فقط ۳

۱۶۸) چند عدد اول p وجود دارد به‌طوری که $۲^p + ۱$ بر p قابل قسمت باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بیشمار

۱۶۹) معادلهٔ $2x^2 = 3y^2 + 7$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۰

۱۷۰) $a_1, a_2, \dots, a_{1377}$ عددهای درست هستند، $b_1, b_2, \dots, b_{1377}$ هم‌همان عددها، منتهی به ردیف دیگری هستند. دربارهٔ $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\dots(a_{1377} - b_{1377})$ همواره می‌توان گفت:

الف) مربع کامل است.
ب) فرد است.
ج) زوج است.
د) دو برابر یک مربع کامل است.
ه) حکم کلی نمی‌توان کرد.

۱۷۱) عدد $16!+86$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

الف) ۳۲۳ ب) ۵۸۹ ج) ۳۹۱ د) ۵۲۷ ه) ۴۳۷

۱۷۲) اگر $2b \overset{14}{\equiv} a + 4c$، آنگاه باقیماندهٔ $\overline{abc}$ بر ۷ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۰

۱۷۳) هر یک از اعداد ۳۸۹ و ۵۹۱ و ۸۹۴ در تقسیم بر عدد طبیعی $d(d \neq 1)$ دارای باقیمانده r هستند. مقدار $d + r$ کدام است؟

الف) ۱۵۰ ب) ۱۸۷ ج) ۱۹۱ د) ۲۰۶ ه) ۱۰۱

۱۷۴) چند دوتایی (x, y) از اعداد طبیعی در معادلهٔ $2x^2y^2 + 3y^2 - 10x^2 = 155$ صدق می‌کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ ه) این معادله جواب ندارد.

۱۷۵) تعداد سه تایی‌های مرتب (x, y, z) از اعداد صحیح که در معادلات $x + y^2 - z = 120$ و $x^2 + y - z = 100$ صدق می‌کنند چندتاست؟

الف) ۱۰ ب) ۸ ج) ۶ د) ۴ ه) ۱۲

۱۷۶) برای هر $m \in N$، f_m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_1 = 9, f_2 = 99, \dots, f_m = \underbrace{99\dots9}_{m \text{ بار}}$$

چند تا از f_m ها را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی نوشت؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۱۷۷) معادلهٔ $n! + 10 = 4^{n-1}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) بی‌نهایت ب) ۳ ج) ۲ د) ۱ ه) ۰

۱۷۸) عددهای طبیعی $a_1, a_2, a_3, \ldots$ به این صورت تعریف شده‌اند که $a_1 = ۲$ و $a_{n+1} = ۲a_n + ۴$. کدام یک از عددهای زیر می‌تواند بین a_i ها ظاهر شود؟

الف) ۵۴۳۴۲۳ ب) ۷۸۵۹۱۴ ج) ۳۱۲۳۶ د) ۱۲۳۴۵ ه) ۴۳۵۹۲

۱۷۹) اگر اعداد x و y، هر دو به‌صورت $a^۲ + ۳b^۲$ باشند آنگاه xy کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ $(a, b \in z)$

الف) ۴۲ ب) ۵۳ ج) ۴۹ د) ۳۴ ه) ۲۹

۱۸۰) چند عدد اول مانند n وجود دارد به‌طوری که $n^{n+1} + ۲$ عددی اول باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی شمار

۱۸۱) در دنبالهٔ $[\frac{۱^۳}{۱۳۷۷}], [\frac{۲^۳}{۱۳۷۷}], \ldots, [\frac{۱۳۷۷^۳}{۱۳۷۷}]$ چند عدد متمایز وجود دارد؟

الف) ۱۳۵۹ ب) ۱۳۶۰ ج) ۱۳۶۱ د) ۱۳۶۲ ه) ۱۳۶۳

۱۸۲) به‌ازای چند مقدار عدد صحیح a، معادله $x^۲ + ax + a = ۰$ ریشهٔ صحیح خواهد داشت؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۰

۱۸۳) به‌ازای چند مقدار حقیقی a تساوی $[\frac{۱}{۲}a] + [\frac{۳}{۴}a] = a$ برقرار است؟ (منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x می‌باشد.)

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۱ د) ۱۰ ه) ۱۲

۱۸۴) تعداد سه تایی‌های (a, b, c) که در آن $a, b, c > ۱$ و هر سه عضو اعداد طبیعی باشند به طوری که مربع هر کدام منهای یک، بر دوتای دیگر بخش‌پذیر باشد چند تاست؟

الف) ۴ ب) ۲ ج) ۰ د) ۶ ه) بی‌شمار

۱۸۵) عدد طبیعی $n \geq ۲$ داده شده است. تمامی کسرهای به صورت $\frac{۱}{ab}$ را در نظر بگیرید که a, b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول می‌باشند به طوری که $a < b \leq n, a + b > n$ جمع این کسرها برابر با چه مقداری است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۱}{n}$ د) $\frac{۱}{۲n}$ ه) $\frac{۱}{۲^n}$

۱۸۶) معادلهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی چند دسته جواب دارد؟

$$x^۴ + y^۴ + z^۴ - ۴xyz + ۱ = ۰$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۱۸۷) معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۱ = z^۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌شمار

۱۸۸) چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد به طوری که به ازای آن ها $\sqrt{a + ۸۰} + \sqrt{a + ۱}$ نیز عددی طبیعی شود؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۱۸۹) اگر $\frac{x+y+z}{2} = \sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}$، حاصل $3x+2y+z$ چقدر است؟
الف) ۲۸
ب) ۷۲
ج) ۴۰
د) ۴۶
ه) اطلاعات مسأله کافی نیست.

۱۹۰) z,x,y اعدادی طبیعی هستند و $x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)$ مربع کامل است. در این صورت:
الف) $x=y=z$ ب) $x=y=1$ ج) $x=y$ د) $x=y=2z$ ه) $x=y=2$

۱۹۱) تعداد دوتایی‌ها (m,n) که در معادلهٔ $(m+n)(m+n-1)=4mn$ صدق می‌کنند چند تاست؟ $(m,n\in N)$
الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) بیشمار

۱۹۲) معادلهٔ $x^2+y^2=3(a^2+b^2)$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟
الف) ۰ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) بی‌شمار

۱۹۳) بچه‌های مهد کودک را در دو ستون کنار هم قرار داده‌ایم. می‌دانیم در هر ستون، تعداد پسرها با دخترها برابر است. همچنین تعداد ردیف های دو نفری که در آن ها یک پسر و یک دختر وجود دارد با تعداد بقیهٔ ردیف‌های دونفری برابر است. اگر تعداد بچه‌ها n تا باشد، دقیقترین نتیجه‌گیری درمورد n کدام است؟
الف) $4|n$ ب) $8|n$ ج) $16|n$
د) n مربع کامل است. ه) $2|n$

۱۹۴) برای کدام مقدار n، اعداد y,x طبیعی وجود دارند که:
$$(x,y)=1998, [x,y]=n!$$
الف) ۳۱ ب) ۳۹ ج) ۲۸ د) ۳۶ ه) ۲۱

۱۹۵) چند دوتایی (x,y) از اعداد طبیعی وجود دارند که در رابطهٔ $\frac{1}{p}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ صدق می‌کند؟ (p عددی اول و مفروض است)
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۱۹۶) معادلهٔ زیر چند دسته جواب طبیعی دارد؟
$$\frac{xy}{x+y}=169$$
الف) ۵ ب) ۴ ج) ۲ د) ۰ ه) بی‌شمار

۱۹۷) معادلهٔ $x(y+۱)^۲ = ky$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی، جواب منحصر به فرد دارد. k کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۲۱۰ ب) ۳۴۳ ج) ۵۷۷ د) ۳۸۵ ه) ۷۷۰

۱۹۸) عدد زوج a دارای این خاصیت است که اگر a بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد آنگاه $a-۱$ بر $p-۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین a:

الف) هر عدد زوج است
ب) فقط ۲ است
ج) هر توان از ۲ می‌تواند باشد.
د) هر توان از ۶ می‌تواند باشد.
ه) هرتوان از ۱۰ می‌تواند باشد.

۱۹۹) چند عدد دو رقمی مانند N وجود دارد که مجموع ارقام N و عددی که از معکوس کردن ترتیب ارقام N به‌دست می‌آید، مربع کامل باشد؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۲۰۰) در معادلهٔ زیر چند جواب صحیح برای x و y داریم:

$$xy + ۶x + ۵y + ۱۹ = ۰$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۰۱) به ازای چند مقدار n $(۲^n - ۱, n)$ مخالف ۱ خواهد بود؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌شمار

۲۰۲) حداکثر مقدار n $(n \in N)$ که به ازای آن n عدد طبیعی متوالی، مرکب باشند چند است؟

الف) ۳
ب) ۶
ج) ۸
د) ۱۶
ه) n می‌تواند هر عددی باشد.

۲۰۳) تعداد دسته جواب‌های (x,y) در مجموعهٔ اعداد طبیعی برای معادلهٔ $۱۱ \times (xy - ۱۱) = ۲x^۲ + ۵y^۲$ چند تا است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۲۰۴) دو عدد اول q, p چنان‌اند که $p^۲ + q^۲ = ۱۸۵۸$ عدد $p+q$ کدام است.؟

الف) ۴۶ ب) ۵۴ ج) ۵۸ د) ۴۸ ه) ۶۰

۲۰۵) تعداد زوج‌های مرتب مانند (a,b) از اعداد طبیعی که $ab - ۱$ بر $(a-۱)(b-۱)$ بخش‌پذیر باشد چند تاست؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) ۸

۲۰۶) عدد طبیعی همانند a را «عجیب» می‌نامیم هر گاه اگر $a_1, a_2 \ldots a_n$ مقسوم‌علیه‌های مثبت a باشند آنگاه $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 18$ و $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{18}{10}$. چند عدد عجیب وجود دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۲۰۷) معادلهٔ $x^2 - y^2 = 2006$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای چند جواب می‌باشد؟

الف) ۸ ب) ۶ ج) ۴ د) ۲ ه) ۰

۲۰۸) تعداد مقسوم‌علیه‌های کدام یک از اعداد زیر برابر ۴۵ است؟

الف) ۱۸۹۰۲ ب) ۱۷۴۹۹ ج) ۱۷۴۲۴ د) ۱۶۲۵۸ ه) ۱۸۵۸۶

۲۰۹) کدام شرط برای n لازم است تا $2^{n!} - 1$ بر n قابل قسمت باشد؟

الف) n فرد باشد.

ب) n فرد باشد و به فرم $10k + 9$ نباشد.

ج) n فرد باشد و به فرم $12k + 11$ نباشد.

د) n فرد باشد و به فرم $8k + 7$ نباشد.

ه) تعداد محدودی n فرد در شرط مسأله صدق می‌کنند.

۲۱۰) معادلهٔ $(z+1)^x - z^y = -1$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند دسته جواب است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) ۶

۲۱۱) چند عدد طبیعی a وجود دارد، به‌طوری که تمامی اعداد $a + 15, a + 13, a + 9, a + 7, a + 3, a + 1$ اول باشند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) ۶

۲۱۲) عبارت $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ را به ازای n های طبیعی مختلف در نظر بگیرید. این عدد به حداکثر چند صفر ختم می‌شود؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۲۱۳) ۲۳ عدد طبیعی $a_1 < a_2 < \ldots < a_{23}$ که از ۷۲ تجاوز نمی‌کنند داده شده‌اند. در بین تفاضل‌های $a_i - a_j \quad (i > j)$، دست کم چند عدد برابر یافت می‌شود؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۱۴) در هر یک از اعداد ۱ تا ۲۰۰۸، مجموع ارقام هر عدد را حساب کرده‌ایم. این کار را برای ۲۰۰۸ عدد بعدی و به همین ترتیب انجام داده‌ایم تا زمانیکه همهٔ اعداد یک رقمی شوند. کدام یک از اعداد زیر بیشتر به‌دست آمده است؟

الف) ۹ ب) ۷ ج) ۵ د) ۳ ه) ۱

۲۱۵) به ازای چند مقدار n, m در مجموعهٔ اعداد صحیح، $m^4 + 4n^4$ عددی اول است؟

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) بیشمار

۲۱۶) عددی ده رقمی را «متفاوت» می‌نامیم اگر تمامی ارقامش متمایز باشند و بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیر باشند. چند عدد متفاوت وجود دارد؟

الف) ۱۲۰ ب) ۳۴۵۶ ج) ۳۸۴۰ د) ۳۸۴۲ ه) ۳۴۵۴

۲۱۷) چه تعداد سه تایی از اعداد اول r, q, p در معادلهٔ $pqr = ۵(p+q+r)$ صدق می‌کنند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) ۶

۲۱۸) معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ + ۸z = ۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای چند جواب است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۰

۲۱۹) معلمی برای سنجش تحصیلی شاگردانش، از بین ۳۳ دانش‌آموزی که دارد هر روز بنابه نظری که دارد از ۹ یا ۱۰ نفر از شاگردانش درس می‌پرسد.
حداقل پس از چند روز، از همهٔ دانش‌آموزان به تعداد برابر پرسش شده است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۲۲۰) تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۹}{۶۳۰} - \frac{x^۷}{۲۱} + \frac{۱۳x^۵}{۳۰} - \frac{۸x^۳}{۶۳} + \frac{۳۲x}{۳۵}$ با برد R_f ودامنهٔ Z مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $R_f = Q$ ب) $R_f \subset (Q - Z)$ ج) $R_f = Z$
د) $R_f \subset Z$ ه) $R_f = N$

۲۲۱) بزرگ‌ترین عدد ۱۳۷۶ رقمی در مبنای ۲ اگر به مبنای ۶ برود دو رقم سمت راستش کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۰۴ ج) ۲۳ د) ۰۳ ه) ۲۴

۲۲۲) چند مستطیل وجود دارد که طول‌های اضلاع آن اعداد طبیعی بوده و عدد مساحت آن ۲۰ واحد از عدد محیطشان بیشتر باشد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) بی‌شمار

۲۲۳) معادلهٔ $x^۳ - y^۳ = xy + ۶۱$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) هیچ

۲۲۴) اگر عدد $۱۰!$ در مبنای ۱۲ نوشته شود، دقیقاً به چند صفر ختم می‌شود؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۴ ه) ۲

۲۲۵) چند عدد طبیعی مانند n یافت می‌شود تا برای یک عدد طبیعی مفروض m، عدد $m^۴ + n$ یک عدد مرکب باشد؟

الف) ۱ ب) m ج) $m - ۱$ د) $m + ۱$ ه) بی‌شمار

۲۲۶) چند جفت عدد صحیح و مثبت (x, y) در معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = x^۳$ صدق می‌کنند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) هیچ ه) بی‌شمار

۲۲۷) در یک مسابقهٔ تنیس تعدادی زن و مرد شرکت می‌کنند که تعداد مردان دو برابر تعداد زنان است و هر بازیکن با هر بازیکن دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند. اگر هیچ بازی مساوی نشود و تعداد بردهای زنان $\frac{۷}{۵}$ برابر تعداد بردهای مردان بوده باشد، تعداد زنان چند نفر است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ ه) ۷

۲۲۸) اگر $\frac{n^۲-۱}{۵}$ عددی اول باشد، آن‌گاه n در کدام فاصلهٔ زیر قرار دارد؟

الف) $[۱,۵]$ ب) $[۵,۱۰]$ ج) $[۱۰,۱۵]$
د) $[۱۵,۲۰]$ ه) چنین عددی وجود ندارد.

۲۲۹) معادلهٔ زیر چند مجموعه جواب دارد؟ $(a \neq ۰)$

$$(abc)_{۱۳} = (cab)_۸$$

(یعنی عدد abc در مبنای ۱۳ با عدد cab در مبنای ۸ برابر است.)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) هیچ

۲۳۰) چند عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ در روابط زیر صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^۷ + y^۷ + z^۷ = ۷k (k \in N) \\ x + y - z = ۵ \end{cases}$$

الف) ۶ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۲ ه) ۱۴

۲۳۱) اگر !۳۵ چنین باشد: ۱۰۳۳۳۱۴۷۹۶۶۳۸۶۱۴۴۹۲۹*۶۶۶۵۱۳۳۷۵۲۳۲۰۰۰۰۰۰۰۰ رقمی که با ستاره مشخص شده کدام است؟

الف) ۷ ب) ۶ ج) ۵ د) ۳ ه) ۴

۲۳۲) مجموع همهٔ رقم‌های عدد طبیعی n را با $s(n)$ نشان می‌دهیم. عدد طبیعی n برای آن‌که داشته باشیم $n + s(n) = ۱۳۷۶$ (اگر وجود داشته باشد.) در کدام محدودهٔ زیر قرار دارد؟

الف) $[۱۳۳۲,۱۳۴۲]$ ب) $[۱۳۴۲,۱۳۵۲]$ ج) $[۱۳۵۲,۱۳۶۲]$
د) $[۱۳۶۲,۱۳۷۲]$ ه) چنین عددی وجود ندارد.

۲۳۳) چند عدد طبیعی به فرم $\overline{abcd}$ یافت می‌شود که دربارهٔ آن بتوان نوشت:

$$\overline{abcd} = \overline{ad}.\overline{ada}$$

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۳۴) مجموعهٔ $U = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ و $a_۱, a_۲, \ldots, a_n \in N$ مفروض است به قسمی که حاصلضرب هر سه عضو دلخواه از این مجموعه بر مجموع همین سه عضو بخش‌پذیر است. n حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

الف) ۳ ب) ۹ ج) ۲۷
د) $\binom{۲۷}{۳}$ ه) n هیچ محدودیتی ندارد.

۲۳۵) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد $\binom{n}{۱۳۷۵}, \binom{n+۱}{۱۳۷۵}, \ldots, \binom{n+۱۳۷۵}{۱۳۷۵}$ چیست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۱۰
د) ۱۳۷۵ ه) به مقدار n بستگی دارد.

۲۳۶) چند جفت عددهای طبیعی n و k وجود دارند به قسمی که عدد n^n دارای k رقم و عدد k^k دارای n رقم باشند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۳۷) سه رقم سمت راست عدد $۱۹۹(۲^{۱۳۷۷})$ کدام است؟

الف) ۲۰۱ ب) ۴۰۱ ج) ۶۰۱ د) ۸۰۱ ه) ۳۰۱

۲۳۸) چند دسته عددهای اول p و q یافت می‌شوند به قسمی که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} + \frac{۱}{pq}$ درست برابر با عکس یک عدد طبیعی باشد؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) هیچ

۲۳۹) کوچکترین عدد طبیعی که دارای ۱۶ مقسوم‌علیه مثبت باشد در کدام‌یک از فاصله‌های زیر قرار دارد؟

الف) $(۵۰, ۱۰۰)$ ب) $(۱۰۰, ۱۵۰)$ ج) $(۱۵۰, ۲۰۰)$
د) $(۲۰۰, ۲۵۰)$ ه) بزرگ‌تر از ۲۵۰

۲۴۰) مجموع ارقام بزرگترین عدد زوجی که نتوان آنرا به صورت مجموع دو عدد فرد مرکب نوشت، کدام است؟

الف) ۱۹ ب) ۱۷ ج) ۱۵ د) ۱۳ ه) ۱۱

۲۴۱) اگر $P = (۱۵ + \sqrt{۲۲۰})^{۱۳} + (۱۵ + \sqrt{۲۲۰})^{۷۸}$ باشد، آنگاه رقم یکان جزء صحیح عدد P کدام است؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۲۴۲) می‌دانیم $۱۳۷۹^۲ = ۱۹۰۱۶۴۱$. کدام‌یک از اعداد زیر را می‌توان به صورت مجموع مربع‌های دو عدد متوالی نوشت؟

الف) ۹۵۰۸۲۱ ب) ۷۳۳۶۷۵ ج) ۵۸۲۶۴۱ د) ۸۶۲۷۹۳ ه) ۶۳۲۸۴۳

۲۴۳) عدد اول P را «جاذب مربع» می‌گوییم هرگاه برای آن، اعداد طبیعی d, c, b, a موجود باشند، بطوریکه $P = \frac{a^۲ + b^۲}{c^۲ + d^۲}$ باشد. از بین اعداد ۳۳۱، ۱۷۹، ۲۸۳ و ۵۲۳ چه تعداد جاذب مربع هستند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۲۴۴) مجموع پنج رقم سمت راست عدد $۵^{۱۳۷۸}$ کدام است؟

الف) ۲۰ ب) ۲۲ ج) ۲۴ د) ۲۶ ه) ۲۸

۲۴۵) فرض کنید $S(n)$ برابر مجموع ارقام عدد طبیعی n باشد. برای هر عدد طبیعی n نابرابری $S(n) \leq KS(۲n)$ برقرار است. کوچکترین مقدار ممکن برای K کدام است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۵ د) ۷ ه) ۸

۲۴۶) دنباله u_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$u_۱ = u_۲ = ۱ \ , \ u_{n+۲} = u_{n+۱} + u_n \ , \ n \geq ۱$$

بزرگ ترین عامل مشترک $u_{۱۳۷۷}$ و $u_{۱۴۱۹}$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۸ د) ۱۳ ه) ۲۱

۲۴۷) تعداد همه عددهای $n \in N$ را طوری پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: اگر اعداد $n^۳$ و $n^۴$ را (در دستگاه دهدهی) در کنار هم بنویسیم عدد حاصل از ده رقم ۰،۱،۲، ...،۹ و از هر کدام تنها یک بار، تشکیل شده باشد.

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۲۴۸) اگر $d(n)$ مجموع ارقام n باشد آن گاه تعداد جواب های معادله زیر برابر است با:

$$n + d(n) + d(d(n)) = ۱۳۷۷^{۱۹۹۹} - ۱$$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۱۳۷۷ ه) ۱۹۹۹

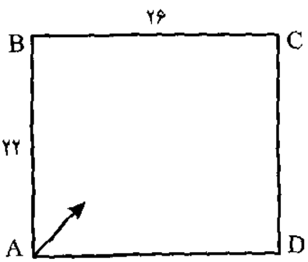
۲۴۹) به هر رأس از یک مکعب، یکی از دو عدد ۱ یا ۱- را نسبت می دهیم و در هر وجه، حاصل ضرب چهار عدد موجود در رئوس آن وجه را می نویسیم، مجموع ۱۴ عدد موجود در رئوس و وجوه این مکعب را القایی گویند. در بین تمام اعداد نامنفی چند عدد القایی وجود دارد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۵۰) معادله $۷x^۲ + y^۲ = ۲^n$ در مجموعه اعداد طبیعی چند دسته جواب (x, y, n) دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی شمار

۲۵۱) در شکل زیر پرتوی از نقطه A با زاویه ۴۵° گسیل می شود و در برخورد با هر ضلع، با زاویه برخورد منعکس می گردد. این پرتو قبل از رسیدن به یکی از رئوس مستطیل، اضلاع افقی را x بار و اضلاع عمودی را y بار قطع می کند. $۲x + y$ کدام است؟



الف) ۳۴ ب) ۳۲ ج) ۷۴ د) ۷۰ ه) ؟

۲۵۲) فرض کنید اعداد صحیح a، b و c دارای هیچ عامل مشترکی نیستند و در تساوی $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ صدق می کنند. در این صورت $b - a$ کدام می‌تواند باشد؟

الف) ۵۱۲ ب) ۳۱۲۵ ج) ۲۱۸۷ د) ۲۴۰۱ ه) ۱۷۱۵

۲۵۳) n تیم در یک تورنمنت شرکت کرده‌اند می دانیم دو نفر ۸ امتیاز گرفته اند و باقی، امتیازی برابر دارند. در این تورنمنت به برنده در هر بازی ۱، تیم بازنده صفر در صورت تساوی $\frac{1}{2}$ امتیاز می‌رسد. n کدام می تواند باشد؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۴ ه) ۱۹

۲۵۴) برای هر عدد اول p که بزرگتر از ۳ است $p^2 + 23$ بر چند عضو از اعضای مجموعهٔ $\{2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 24, 30\}$ بخش‌پذیر است؟

الف) ۹ ب) ۸ ج) ۷ د) ۶ ه) ۵

۲۵۵) تعداد x های صحیح که در معادلهٔ $\frac{x^3 + x}{x + 2} = 22$ صدق می‌کنند چندتاست؟

الف) ۴ ب) ۳ ج) ۲ د) ۱ ه) ۰

۲۵۶) تعداد جواب‌های معادله $5xy - 3x - 2y = 4$ که $x, y \in N$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۲۵۷) تعداد جواب‌های معادلهٔ $2^x + 3^y = z^2$ در مجموعهٔ اعداد صحیح و نامنفی چندتاست؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌شمار

۲۵۸) فرض کنید p عددی اول و n و a اعدادی طبیعی باشند. اگر داشته باشیم $2^p + 3^p = a^n$، کدام گزینه راجع به n صحیح است؟

الف) $n = 1$

ب) $n = 1$ یا ۲

ج) $n = 1$ یا p

د) $n = 1$ یا $p - 1$

ه) n می‌تواند تمام مقادیر طبیعی را بپذیرد.

۲۵۹) معادلهٔ $7x^2 + y^2 = 2^n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب (x, y, z) دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۶۰) چند جفت (p, q) در رابطهٔ $pq|(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ صدق می‌کنند که در آن p و q اعدادی اول هستند؟

الف) ۴ ب) ۳ ج) ۲ د) ۱ ه) ۰

۲۶۱) n عددی طبیعی است به‌طوری که $۲n+۱$ و $۳n+۱$ مربع کامل هستند. کدام گزینه دقیق‌ترین اظهار نظر در مورد $۵n+۳$ است؟

الف) اول است	ب) مرکب است	ج) مربع کامل است
د) مکعب کامل است	ه) هیچ محدودیتی ندارد

۲۶۲) اگر $a,b,c,d \in N$ و $ab=cd$، کدام یک از گزینه‌ها نمی‌تواند $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲$ باشد؟

الف) ۲۶۰	ب) ۱۴۵	ج) ۲۹۰	د) ۲۱۱	ه) ۲۵۰

۲۶۳) معادله $n!=m^۲$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) ۰	ب) ۱	ج) ۲	د) ۴	ه) بی شمار

۲۶۴) برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y تعریف می‌کنیم $x*y=\frac{x+y}{۱+xy}$. مطلوب است حاصل عبارت $(\dots((۲*۳)*۴)\dots)*۲۰۰۵$

الف) $\frac{۲۰۰۵}{۲۰۰۶}$	ب) $\frac{۲۰۰۶}{۲۰۰۵}$	ج) $\frac{(۲۰۰۵\times۲۰۰۶)-۲}{(۲۰۰۵\times۲۰۰۶)+۲}$
د) $\frac{(۲۰۰۵\times۲۰۰۶)-۱}{(۲۰۰۵\times۲۰۰۶)+۱}$	ه) $\frac{۴۰۰۹}{۱+(۲۰۰۵\times۲۰۰۴)}$

۲۶۵) تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x[x[x[x]]]=۸۸$ در R چند تاست؟ ($[x]$ برابر است با بزرگترین عد صحیح نا بیشتر از x)

الف) ۰	ب) ۱	ج) ۲	د) ۳	ه) بی شمار

۲۶۶) معادلهٔ $x^۳+y^۳+z^۳=x^۲+y^۲+z^۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

الف) ۲	ب) ۳	ج) ۴	د) ۸	ه) بی‌شمار

۲۶۷) n عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ می‌باشد. تعداد دسته جواب‌های $(a_۱,a_۲,\dots,a_n)$ که در آن a_i ها اعداد حقیقی هستند برای دستگاه معادلات زیر چند تاست؟

$$\begin{cases} a_۳=a_۲+a_۱ \\ a_۴=a_۳+a_۲ \\ \vdots \\ a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲} \\ a_۱=a_n+a_{n-۱} \\ a_۲=a_۱+a_n \end{cases}$$

الف) ۱	ب) ۲	ج) ۳	د) ۴	ه) بی‌شمار

۲۶۸) در تصاعد حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت ۷۲۹، چند عدد به شکل ۱۰^k $k\in N,(k>۱)$ وجود دارد؟

الف) ۰	ب) ۲	ج) ۴	د) ۸	ه) بی‌شمار

۲۶۹) چند دستهٔ ۸ تایی از اعداد طبیعی دو به دو متمایز وجود دارد که اگر روی رأس‌های یک مکعب، این ۸ عدد را نوشته و روی هریال آن نیز بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو سریال را بنویسیم، جمع اعداد روی رأسها با جمع اعداد روی یال ها برابر شود؟

الف) بی‌شمار	ب) فقط یکی	ج) ۲	د) ۴	ه) صفر

۲۷۰) تعداد جواب‌های معادلهٔ $k!+۴۸ = ۴۸(k+۱)^m$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند تاست؟

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

۲۷۱) تعداد اعداد طبیعی n که به ازای آن ها $۵^n + ۳^n$ بر $۵^{n-۱} + ۳^{n-۱}$ بخش‌پذیر باشد چند تاست؟

الف) بی‌شمار ب) ۸ ج) ۴ د) ۲ ه) ۱

۲۷۲) چند زوج مرتب (a,b) از اعداد طبیعی وجود دارند که برای هر دو عدد اول و متمایز q,p که از ۱۰۰۰ بزرگترند عدد $ap+bq$ اول باشد؟

الف) ۸ ب) ۴ ج) ۶ د) ۲ ه) ۰

۲۷۳) دستگاه معادلات زیر چند دسته جواب در R دارد؟

$$x^{۷۹}+y^{۷۹} = x^{۸۰}+y^{۸۰} = x^{۸۱}+y^{۸۱}$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۸

۲۷۴) تعداد جواب‌های معادلهٔ $k^x+k^y+k^z = k^n$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌شمار

۲۷۵) معادلهٔ $۴y^۳ = ۱ + ۳x^۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح چند جواب دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) جواب ندارد ه) بی‌شمار

۲۷۶) مجموع تمام اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۳۷۷ که نسبت به ۱۳۷۷ اول می‌باشند کدام است؟

الف) ۱۳۷۷×۳۴۴ ب) ۱۳۷۷×٦۸۸ ج) ۱۳۷۷×۴۲۳

د) ۱۳۷۷×٦۸۷ ه) $\frac{۱۳۷۷^۲+۱}{۲}$

۲۷۷) تعداد جوابهای معادلهٔ $۵^n + ۵^۵ - ۵^٦ = m^۲$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چندتا است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۰

۲۷۸) تعداد اعداد اول p که $p^۲ + ۱۱$ دقیقاً ۶ مقسوم علیه دارد، چند تاست؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌شمار

۲۷۹) معادلهٔ $x^۴ + ۴^x = p$ برای اعداد اول $p > ۵$ چند جواب دارد؟ $(x \in N)$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) بی‌شمار ه) جواب ندارد.

۲۸۰) دستگاه زیر در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند دسته جواب (x,y,z) می‌باشد؟

$$\begin{cases} x+y=z \\ x!+y!=z! \end{cases}$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۸۱) معادلهٔ $4xy - x - y = z^2$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند دسته جواب (x,y,z) می‌باشد؟

الف) ۴ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰ ه) بی‌شمار

۲۸۲) چه تعداد عدد طبیعی n وجود دارد که $n|2^n - 1$؟

الف) ۴ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰ ه) بی‌شمار

۲۸۳) اگر برای $n, t \in N$ داشته باشیم $(1+n)^3 - n^3 = t^2$، آنگاه برای $S \in N$، t باید به چه شکلی باشد؟

الف) S^2 ب) $S^2 + S - 1$ ج) $S^2 + (S-2)^2$
د) $(S+2)^2 - S^2$ ه) $S^2 + (S+1)^2$

۲۸۴) معادلهٔ $p^2 + 3pq + q^2 = 5^t$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند دسته جواب (p,q,t) می‌باشد به‌طوری که p و q اعدادی اول باشند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۸۵) معادلهٔ $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای چند دسته جواب می‌باشد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) بی‌شمار

۲۸۶) معادلهٔ $\frac{3}{4} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند دسته جواب است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۸۷) چند زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی وجود دارد که $mn - 1|n^3 + 1$؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۲

۲۸۸) عدد N با رقم یکان ۶، دارای این ویژگی است که اگر رقم یکان را به سمت چپ منتقل کنیم عدد حاصل، ۴ برابر N می‌شود، باقیماندهٔ N بر ۴ چقدر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۰ ه) ۰ یا ۲

۲۸۹) عدد چهار رقمی A این خاصیت را دارد که با مجذور عدد حاصل از دو رقم سمت آخر خود برابر است. مجموع ارقام A کدام است؟

الف) ۲۳ ب) ۲۴ ج) ۲۲ د) ۲۶ ه) ۲۵

۲۹۰) معادلهٔ $a = x^3y + 4xy + x^2$ به ازای کدام a در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد؟

الف) ۲۴۳ ب) ۲۶۶ ج) ۳۱۵ د) ۲۴۷ ه) ۲۶۰

۲۹۱) معادلهٔ $5^n - 7^m = 1374$ که $m, n \in N$ چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بیشمار

۲۹۲) معادلهٔ $1!+2!+3!+\dots+n!=m^{1384}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) ۳ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰ ه) بیشمار

۲۹۳) بزرگترین عدد طبیعی x که به ازای آن $4^{1000}+4^{623}+4^{x}$ مربع کامل شود، کدام است؟

الف) ۱۹۹۷ ب) ۱۹۹۸ ج) ۱۳۷۷ د) ۱۳۷۵ ه) ۱۳۷۶

۲۹۴) چه تعداد زوج مرتب (A,B) از اعداد طبیعی وجود دارد به‌طوری که تعداد ارقام A,B برابر بوده و همهٔ ارقام A زوج و همهٔ ارقام B فرد می‌باشند و تمامی ارقام صفر تا ۹ دقیقاً یکبار در A و B آمده باشند و هم‌چنین A بر B بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) ۶

۲۹۵) معادلهٔ $(x+2)^4-x^4=y^3$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای چند جواب است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۹۶) کارخانه‌ای برای افزایش فروش محصولات خود، روی تمامی محصولاتش تمامی اعداد شش رقمی را چاپ می‌کند. به‌طوری‌که اگر مجموع سه رقم سمت چپ و راست این عدد با هم برابر شوند، (نام این گونه محصول را خوب می‌نامیم.) خریدار می‌تواند محصولی دیگر به عنوان هدیه بگیرد.
مجموع همهٔ شماره‌های محصولات خوب لزوماً بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۲ ج) ۲۵ د) ۳۶ ه) ۳۷

۲۹۷) معادلهٔ $y^2=x^5-4$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای چند جواب است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۰ ه) بیشمار

۲۹۸) چند عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که 2^n-n بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌شمار

۲۹۹) چند سه تایی (a,b,c) از اعداد طبیعی یافت می‌شود که a,b,c دو به دو نسبت به هم اول باشند و $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ عددی صحیح باشد؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۰ ه) ۱۴

۳۰۰) عدد چهار رقمی A را «سه گانه» می‌نامیم که اولاً خود A مجذور کامل باشد و ثانیاً دو رقم اول و دو رقم آخر نیز اعدادی مجذور کامل باشند. چند عدد سه گانه چهار رقمی موجود است؟
(دو رقم سمت راست می‌تواند با صفر آغاز شود اما هر دو رقم سمت راست نمی‌توانند با هم صفر باشند)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۳۰۱) $p \geq 7$ عددی اول است. برای چند مقدار p، عدد طبیعی مانند k وجود دارد که kp فقط از ارقام واحد تشکیل شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۴ د) ۸ ه) بیشمار

۳۰۲) معادلهٔ $a^{۲} = b^{۳} + ۲۱۵$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۰

۳۰۳) چند زوج از اعداد طبیعی (a, b) وجود دارد به‌طوری که $a^{b+۱} + ۲^{b+۱} + ۱$ بر $a^{b} + ۲^{b} + ۱$ بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۳۰۴) عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{a}{b} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶}$$

که در آن $a, b \in N$. باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۷ برابر است با:

الف) ۱۶ ب) ۸ ج) ۱ د) ۰ ه) ۹

۳۰۵) معادلهٔ $m^{n} = ۱ + (m - ۱)!$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بیشمار

۳۰۶) چند عدد طبیعی y, x وجود دارند به نحوی که هر دو عدد $x^{۲} + y$ و $y^{۲} + x$ مربع کامل باشند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) ۶

۳۰۷) همهٔ اعداد طبیعی t, z, y, x بر عدد طبیعی $xy - zt$ بخش‌پذیر هستند. در این صورت $xy - zt$ چند مقدار متفاوت طبیعی را می‌تواند بپذیرد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۶

۳۰۸) معادلهٔ $y^{۳} = x^{۲} + ۵$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) بی‌شمار ب) صفر ج) ۱ د) ۲ ه) ۴

۳۰۹) دنبالهٔ a_n به شکل زیر تعریف شده است.

$$a_{۱} = ۲ \ , \ a_{۲} = ۵$$

$$a_{n+۲} = (۲ - n^{۲})a_{n+۱} + (۲ + n^{۲})a_{n}$$

چند تا سه تایی (x, y, z) وجود دارد که $a_x \times a_y = a_z$ باشد؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بیشمار

۳۱۰) معادلهٔ $(x - ۱)^{۲} + (x + ۱)^{۲} = y^{۲} + ۱$ دارای چند زوج (x, y) طبیعی است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بیشمار

فصل ۲

پاسخ مسائل

۲.۱ مسائل المپیاد

۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$۹+۹۹+۹۹۹+\ldots+\underbrace{۹۹\ldots۹}_{\text{۱۳۸۱ بار}}=$$

$$(۱۰-۱)+(۱۰۰-۱)+(۱۰۰۰-۱)+\ldots+(۱\underbrace{۰۰\ldots۰}_{\text{۱۳۸۱ بار}}-۱)=$$

$$\begin{array}{l}\overbrace{۱۱۱\ldots۱۱۱۱۱}^{\text{۱۳۸۱ بار}}۰\\ -\qquad\qquad ۱۳۸۱\\ \hline \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱}_{\text{۱۳۷۷ بار}}۰۹۷۲۹\end{array}$$

۲) گزینهٔ «د» صحیح است.

مجموعه اعدادی که بر ۹۱ بخش‌پذیر نیستند را A بنامید. به وضوح $۷ \in A$ و $۱۳ \in A$ اما $۹۱ = ۱۳ \times ۷$ و ۹۱ بر ۹۱ بخش‌پذیر است، پس $۷ \times ۱۳ \notin A$. یعنی A نسبت به ضرب بسته نیست. لذا گزینهٔ «د» صحیح است.

۳) گزینهٔ «د» صحیح است.

به نکته زیر توجه کنید:

برای محاسبهٔ باقیمانده یک عدد بر ۹ می‌توانید رشتهٔ ارقام آن را به دلخواه به دسته‌های

کوچکتر شکانده و باقیمانده جمع اعداد حاصل را بر ۹ محاسبه کنید. برای مثال برای محاسبهٔ باقیمانده ۴۷۹ بر ۹ می‌توانید آن را به ۴ و ۷۹ بشکانید و باقیمانده ۷۹ + ۴ را بر ۹ محاسبه کنید و یا آن را به ۴ و ۷ و ۹ شکانده، باقیمانده ۹ + ۷ + ۴ را بر ۹ محاسبه کنید.
با توجه به این نکته باقیمانده عدد داده شده بر ۹، برابر است با باقیمانده عدد زیر بر ۹:

$$۱ + ۲ + \ldots + ۱۳۸۰ + ۱۳۸۱ + ۱۳۸۲ = \frac{۱۳۸۲ \times ۱۳۸۳}{۲} = ۶۹۱ \times ۱۳۸۳$$

که باقیمانده آن بر ۹ برابر است با ۶.

۴) پاسخ صحیح گزینهٔ «ج» می‌باشد.
فرض کنید

$$X = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times ۲۸$$

$$\text{توان ۲ در } X = [\frac{۲۸}{۲}] + [\frac{۲۸}{۴}] + [\frac{۲۸}{۸}] + [\frac{۲۸}{۱۶}] = ۲۵$$

$$\text{توان ۳ در } X = [\frac{۲۸}{۳}] + [\frac{۲۸}{۹}] + [\frac{۲۸}{۲۷}] = ۱۳$$

$$\text{توان ۵ در } X = [\frac{۲۸}{۵}] + [\frac{۲۸}{۲۵}] = ۶$$

$$\text{توان ۷ در } X = [\frac{۲۸}{۷}] = ۴$$

$$\text{توان ۱۱ در } X = [\frac{۲۸}{۱۱}] = ۲$$

$$\text{توان ۱۳ در } X = [\frac{۲۸}{۱۳}] = ۲$$

$$\text{توان ۱۷ در } X = [\frac{۲۸}{۱۷}] = ۱$$

$$\text{توان ۱۹ در } X = [\frac{۲۸}{۱۹}] = ۱$$

$$\text{توان ۲۳ در } X = [\frac{۲۸}{۲۳}] = ۱$$

باید یک عامل از ۲ و یک عامل از ۳ و همچنین اعداد ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ را حذف کنیم که با حذف ۶ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ شرایط مسأله محقق می‌شود. لذا دست کم ۴ حذف باید انجام دهیم.

۵) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.
فرض می کنیم عدد پنجم و مقدار ثابت به ترتیب X و S باشند. در این صورت داریم:

			۱۷	X	$S - ۱۷ - X$		۲۰				?	

عدد یازدهم $=$ ۲۰	عدد هفتم $=$ ۱۷
عدد دوازدهم $= S -$ ۳۷	عدد نهم $= S -$ ۳۷
عدد سیزدهم $=$ ۱۷	عدد دهم $=$ ۱۷

از طرفی داریم:

$$(S - ۱۷ - X) + ۱۷ + ۲۰ = S$$

$$\Rightarrow \quad X = ۲۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{عدد سوم} = S - ۳۷ \\ \text{عدد دوم} = ۲۰ \\ \text{عدد اول} = ۱۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمع همهٔ اعداد جدول} = ۴S + ۱۷ = ۲۱۷ \rightarrow \quad S = ۵۰$$

$$\Rightarrow \text{عدد دوازدهم} = S - ۳۷ = ۵۰ - ۳۷ = ۱۳$$

۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.

$$۵^{۲۲} + ۷ \stackrel{۸}{\equiv} (۵^{۲})^{۱۱} + ۷ \stackrel{۸}{\equiv} ۲۵^{۱۱} + ۷ \stackrel{۸}{\equiv} ۱^{۱۱} + ۷ \stackrel{۸}{\equiv} ۰$$

۷) گزینهٔ «ب» صحیح است.
a را تعداد جواب‌های صحیح و b را تعداد جواب‌های غلط بگیرید. در این‌صورت خواهیم داشت: $a + b \leq ۲۰$ و $۷a - ۲b = ۸۷$ که در آن a و b اعداد صحیح و نامنفی هستند. با حل دو معادلهٔ مذکور داریم $a = ۱۳$ و $b = ۲$. بنابراین دانش‌آموز به ۵ سوال پاسخ نداده است.

۸) گزینهٔ «الف» صحیح است.
اگر به طرفین معادلهٔ فوق یک واحد اضافه کنیم، به معادلهٔ $(x + ۱)(y + ۱) = n + ۱$ می‌رسیم. با توجه به طبیعی بودن x و y، این معادله در صورت اول بودن $n + ۱$ جواب ندارد. چون بین گزینه‌ها تنها $۱۰۱ = ۱ + ۱۰۰$ عددی اول است، پاسخ صحیح گزینهٔ «الف» می‌باشد.

۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.
اگر چندجمله‌ای $ax^۳ + bx + c$ را بر $x^۲ + tx + ۱$ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر

$x(at^2+b-a)+at+c$ به‌دست می‌آید. در صورت بخش‌پذیری باید این باقیمانده برابر صفر (و مستقل از x) باشد. در نتیجه $at^2+b-a=0$ و $at+c=0$. با حذف t از این معادلات گزینهٔ «ه» به‌دست می‌آید.

۱۰) گزینهٔ «ه» صحیح است.
واضح است که S یا ۳ است یا ۴. اما اگر S برابر با ۴ باشد، در ردیف هزارگان به مشکل بر می‌خوریم. پس $S=3$ و در نتیجه U باید برابر ۸ یا ۹ باشد تا بتواند با رقم ده بر یک حاصل از ردیف صدگان، یک رقم ده بر یک به ردیف آخر منتقل کند. اما چون $U=8$ بین گزینه‌ها نیست، پس گزینهٔ «ه» صحیح است.

۱۱) گزینهٔ «ج» صحیح است.
مجموعهٔ ۱۱ عضوی $A=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16\}$ شرایط مورد نظر مسأله را دارد. اکنون ثابت می‌کنیم این تعداد حداقل است. در بین اعداد ۱ تا ۱۶، هفت عدد غیر مرکب (اعداد اول به همراه یک) داریم. با توجه به این که هر دو عدد از بین این هفت عدد، نسبت به هم اولند، لذا از بین این اعداد حداکثر ۲ تا می‌توانند در A باشند. پس A حداکثر $9+2=11$ عضو دارد.

۱۲) گزینهٔ «الف» صحیح است.

$$\begin{aligned}23^{23}-17^{17} &\overset{10}{\equiv} 3^{23}-7^{17} \overset{10}{\equiv} 3\times 9^{11}-7\times 49^{8} \overset{10}{\equiv} 3\times(-1)^{11}-7\times(-1)^{8}\\ &\overset{10}{\equiv} -3-7 \overset{10}{\equiv} 0\end{aligned}$$

۱۳) گزینهٔ «ج» صحیح است.
از آنجا که $1375 = 5^3\times 11$، در نتیجه باید تا جایی اعداد زوج را در هم ضرب کنیم که در حاصل‌ضرب ما سه عامل ۵ و یک عامل ۱۱ ظاهر شود، یعنی باید تا ۳۰ جلو برویم.

۱۴) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$\left.\begin{array}{r}11 \mid 9x+5y \xrightarrow{\times 6} 11 \mid 54x+30y\\ 11 \mid 44x+22y\end{array}\right\}\Rightarrow 11 \mid 10x+8y$$

۱۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.
تمام اعداد کوچکتر از ۱۳۷۶ که مجموع ارقامشان برابر ۲ است، عبارتند از ۲, ۱۱, ۱۰۱, ۱۰۰۱. به راحتی می‌توان دید که از بین این‌ها سه تا از آن‌ها اول هستند.

۱۶) گزینهٔ «د» صحیح است.
اعداد ۱ تا ۲۰ را به ۱۰ زوج زیر افراز می‌کنیم:

$$(1,2),(11,12),(10,13),(9,14),(8,15),(7,16),(6,17),(5,18),(4,19),(3,20)$$

واضح است که از هر زوج حداقل یک عدد باید حذف شود. یعنی در کل حداقل ۱۰ عدد باید حذف شود.

هم‌چنین اگر از این مجموعه، اعدادِ فرد را که تعدادشان ۱۰ تا می‌باشد حذف کنیم، حاصل‌جمع هر دو عدد باقی‌مانده زوج و در نتیجه مرکب خواهد بود.

۱۷) گزینهٔ «د» صحیح است.

می‌دانیم کوچک‌ترین مضرب‌مشترک دو عدد بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن دو عدد بخش‌پذیر است. لذا $n!$ باید بر $۱۹۷ \times ۷ = \mathbf{۱۳۷۹}$ بخش‌پذیر باشد و از آن‌جا n باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱۹۷ باشد. از طرفی به‌سادگی می توان نشان داد که اگر $n \geq \mathbf{۱۹۷}$ باشد، آن‌گاه $[n!, ۱۳۷۹] = n!$ و $(n!, ۱۳۷۹) = \mathbf{۱۳۷۹}$. یعنی هر $n \geq \mathbf{۱۹۷}$ جواب مسئله می‌باشد.

۱۸) گزینهٔ «الف» صحیح است.

باید داشته باشیم:

$$x^۳ + ax + ۱ = (x^۲ - ۳x + b)(rx + s)$$

از مساوی قرار دادن ضریب $x^۳$ در دو سمت تساوی به دست می‌آوریم:

$$x^۳ = rx^۳ \Longrightarrow r = ۱$$

از مساوی قرار دادن ضریب $x^۲$ و x و $x^۰$ در دو سمت تساوی به دست می‌آوریم:

$$sx^۲ - ۳rx^۲ = ۰ \Rightarrow s = ۳r = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$\left.\begin{array}{r} ax = -۳sx + brx \Rightarrow a = -۹ + b \\ ۱ = bs \Rightarrow b = \frac{۱}{s} = \frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{۲۶}{۳}$$

بنابراین $a + ۲b = -\frac{۲۶}{۳} + \frac{۲}{۳} = -۸$.

۱۹) گزینهٔ «ج» صحیح است.

اعدادی که یکانشان در بسط مبنای ۷، ۱ یا ۲ یا ۴ است را دو به دو در هم ضرب می‌کنیم:

$$۱ \times ۱ \overset{۷}{\equiv} ۱\ ,\ ۱ \times ۲ \overset{۷}{\equiv} ۲\ ,\ ۲ \times ۲ \overset{۷}{\equiv} ۴\ ,\ ۱ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۴\ ,\ ۴ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۲\ ,\ ۲ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

پس مجموعهٔ حاصل هم در مبنای ۷ به ۱ یا ۲ **یا** ۴ ختم می‌شود.

۲۰) گزینهٔ «ج» صحیح است.

همهٔ رقم‌های یک عدد را ثابت نگه دارید و فقط یکان آن را از ۰ تا ۹ تغییر دهید. در اینصورت در بین ده عدد حاصله، دقیقاً دو عدد مجموع رقم‌هایشان بر ۵ بخش‌پذیر است. (چرا؟)

اعداد از ۰ تا ۱۹۹۹ را به صورت زیر به دسته‌های ۱۰تایی تقسیم می‌کنیم:

$$\{۰, ۱, \ldots, ۹\}, \{۱۰, \ldots, ۱۹\}, \{۲۰, \ldots, ۲۹\}, \{۱۹۹۰, \ldots, ۱۹۹۹\}$$

تعداد این دسته‌ها $\frac{۲۰۰۰}{۱۰} = ۲۰۰$ است و طبق آنچه در شروع کار گفتیم از هر دسته دقیقاً دو عدد مجموع رقم‌هایشان مضرب ۵ است. لذا در کل $۲ \times ۲۰۰ = ۴۰۰$ تا از این اعداد دارای خاصیت گفته شده هستند، که البته یکی از این اعداد ۰ است. لذا در بیان اعداد از ۱ تا ۱۹۹۹،

۳۹۹ عدد مجموع ارقامشان مضرب ۵ است. حال از آنجایی که ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ جمع ارقامشان بر ۵ بخش‌پذیر نیست، پاسخ مسأله همان ۳۹۹ خواهد بود.

۲۱) گزینهٔ «ج» صحیح است.
اولاً دقت کنید که اگر x عددی خوب باشد، جمع ارقام x زوج خواهد بود. پس برای اینکه $x+۱$ هم خوب باشد، رقم یکان x باید ۹ باشد. از روی گزینه‌ها می‌توان فهمید که x باید عددی سه رقمی باشد. پس x باید یکی از اعداد خوبِ ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹، ۴۵۹، ۵۴۹، ۶۳۹، ۷۲۹، ۸۱۹ یا ۹۰۹ باشد. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که از بین این اعداد تنها $۵۴۹ + ۱ = ۵۵۰$ عددی خوب است. بنابر این $x = ۵۴۹$ و در نتیجه گزینهٔ «ج» صحیح است.

۲۲) گزینهٔ «د» صحیح است.
اولاً دقت کنید که توان در زوج و فردی نقشی ندارد. یعنی دو عبارت x و x^m از لحاظ زوج و فردی یکسان هستند. بنابراین زوج و فردی A با عبارت زیر یکی است:

$$(\dots(((n+۱)+۱)+۱)+\dots)+۱$$

اما چند تا ۱؟ به عبارت مربوط به A نگاه کنید. این عبارت ۱۳۸۱ تا m دارد و دقت می‌کنیم که تعداد ۱ها از تعداد mها یکی بیشتر است. بنابراین عبارت نوشته شده در بالا ۱۳۸۲ تا ۱ دارد، یعنی برابر است با $n + ۱۳۸۲$ که چون ۱۳۸۲ زوج است، زوج و فردی آن با n یکی است. نتیجه این که دو عبارت A و n زوج و فردی یکسانی دارند و بنابراین $A+n$ زوج است.

۲۳) گزینهٔ «الف» صحیح است.
اگر x تعداد جواب‌های صحیح و y تعداد جواب‌های غلط شما باشد، نمرهٔ شما $۴x-y$ خواهد بود. حال خواسته مسأله تعیین مقادیری است که $۴x-y$ می‌تواند اختیار کند (با شرط $x+y \leq ۳۰$). حداکثر نمره‌ی شما $۱۲۰ = ۳۰ \times ۴$ و حداقل آن -۳۰ می‌باشد. پس $-۳۰ \leq ۴x-y \leq ۱۲۰$. حال اعداد این محدوده را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام‌ها قابل کسب و کدام‌ها غیر قابل کسب هستند. اعداد -۳۰ تا ۰ که به وضوح با گرفتن $x = ۰$ (یعنی صفر جواب درست) و $۰ \leq y \leq ۳۰$ قابل کسب هستند. اعداد $\{۱,۲,۳,\dots,۴\times ۲۷\}$ نیز با تغییر x از ۱ تا ۲۷ و $y = ۰,۱,۲$ یا ۳، بصورت $۴x-y$ قابل کسب هستند، (زیرا هر کدام از این اعداد یا مضرب ۴ هستند و یا از یکی از مضارب ۴ حداکثر ۳ تا فاصله دارند)، که البته شرط $x+y \leq ۳۰$ را نیز برآورده می‌کنند. پس تا این‌جا همه‌ی اعداد از -۳۰ تا $۲۷ \times ۴ = ۱۰۸$ قابل اکتساب هستند. اما مابقی اعداد از ۱۰۸ تا ۱۲۰ چطور؟ برای کسب چنین نمره‌ای x باید از ۲۷ بیشتر باشد، یعنی ۲۸، ۲۹ یا ۳۰. اما با توجه به محدودیت $x+y \leq ۳۰$، y دیگر نمی‌تواند به دل‌خواه ۰، ۱، ۲ یا ۳ شود. به بیان واضح‌تر، دیگر نمرات $۴\times ۲۸ - ۳$، $۴\times ۲۹ - ۳$، $۴ \times ۲۹ - ۲$، $۴\times ۳۰ - ۳$، $۴\times ۳۰ - ۲$ و $۴\times ۳۰ - ۱$ قابل کسب نیستند. پس از بین ۱۵۱ عدد موجود از -۳۰ تا ۱۲۰، شش عدد ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۷، ۱۱۸ و ۱۱۹ نمی‌توانند نمره‌ی شما باشند. پس نمره‌ی شما ۱۴۵ مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۲۴) گزینهٔ «الف» صحیح است.

۲۰۰۳ بازی روی هم $۶۰۰۹ = ۳ \times ۲۰۰۳$ امتیاز دارد، که این تیم متأسفانه $۳۰۷ = ۵۷۰۲ - ۶۰۰۹$ امتیاز آن را از دست داده است. اما امتیاز چطور از دست می‌رود؟ دقت کنید که یک تساوی باعث از دست رفتن ۲ امتیاز و یک باخت باعث از دست رفتن ۳ امتیاز می‌شود. پس اگر تعداد تساوی‌های این تیم را y و تعداد باخت‌های آن را z بنامیم، باید $۳۰۷ = ۳z + ۲y$، و یا معادلاً $y = \frac{۳۰۷ - ۳z}{۲}$. طبق این معادله، برای آن که y عددی صحیح شود، z باید عددی فرد، و برای این که y منفی نشود، z باید کمتر از ۱۰۲ باشد. بنابراین z، یعنی تعداد باخت‌های این تیم، باید یکی از ۵۱ عدد فرد بین ۰ تا ۱۰۲ باشد، که از روی آن y یعنی تعداد تساوی‌ها از معادله‌ی قبل، و سپس از روی z و y، تعداد بردها، یعنی x، با توجه به تعداد کل بازی‌ها قابل محاسبه است.

۲۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.

اعداد سه رقمی کمتر از ۶۰۰ را که ۵۰۰ تا هستند به ۵۰ دسته ۱۰تایی تقسیم می‌کنیم:

$$(۱۰۰, ۱۰۱, \ldots, ۱۰۹), (۱۱۰, ۱۱۱, \ldots, ۱۱۹), \ldots, (۵۹۰, ۵۹۱, \ldots, ۵۹۹)$$

در این صورت اگر یک دسته را انتخاب کنیم و از هر کدام از اعداد این دسته مجموع ارقامش را کم کنیم به یک عدد می‌رسیم مثلاً در مورد دسته اول به عدد ۹۹ می‌رسیم و تمام ۵۰ عددی که از دسته‌های مختلف بدست می‌آید متمایزند، پس ۵۰ عدد مختلف بدست می‌آید.

۲۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.

یک عدد مضرب ۵۰ یا به ۰۰ و یا به ۵۰ ختم می‌شود. به وضوح کوچکترین عددی که مجموع ارقامش مضرب ۵۰ است، عددی است که اولاً جمع ارقام آن دقیقاً ۵۰ باشد و در ضمن تا حد امکان در رقم‌های با ارزش پایین‌تر ۹ داشته باشد. با توجه به این نکته:
کوچکترین عددی که مجموع ارقامش مضرب ۵۰ است و به ۰۰ ختم می‌شود ۵۹۹۹۹۹۰۰ و کوچکترین عددی که مجموع ارقامش مضرب ۵۰ است و به ۵۰ ختم می‌شود ۹۹۹۹۹۵۰ است. که به وضوح عدد دوم کوچکتر و لذا جواب مسأله ماست. همانطور که می‌بینید این عدد ۳ رقم متمایز دارد.

۲۷) گزینهٔ «د» صحیح است.

فرض کنید a عدد دوقلو باشد. داریم:

$$\begin{aligned} a = (\overline{xyzxyz})_۹ &= ۹^۵ \times x + ۹^۴ \times y + ۹^۳ \times z + ۹^۲ \times x + ۹^۱ \times y + ۹^۰ \times z \\ &= (۹^۳ + ۱) \times ۹^۲ \times x + (۹^۳ + ۱)۹^۱ \times y + (۹^۳ + ۱) \times ۹^۰ \times z \\ &= (۹^۳ + ۱)(۸۱x + ۹y + z) \end{aligned}$$

بنابراین هر عدد دوقلو مضربی از $(۱ + ۹^۳)$ است. بنابراین بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک همه اعداد دو قلو (d) نیز مضربی از $(۱ + ۹^۳)$ خواهد بود. ثابت می‌کنیم d برابر $۹^۳ + ۱$ است. واضح است که بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد دو قلوی a و b، مضربی از d است. اگر $a = (\overline{۱۱۱۱۱۱})$ و $b = (\overline{۱۱۲۱۱۲})$ باشد، بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک a و b

برابر $۱ + ۹^۳$ است. بنابراین بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک همهٔ اعداد دوقلو نیز برابر $۱ + ۹^۳$ خواهد بود.
از طرفی $۵ \times ۲ \times ۷۳ = ۱ + ۹^۳$ است که سه مقسوم علیه اول دارد.

۲۸) پاسخ صحیح گزینهٔ «الف» می‌باشد.

$$x = ۰ \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ۵^{۲(x+۱)} + ۶۲۱ \times ۱۰^x = ۲۵ + ۶۲۱ = ۶۴۶ \\ \\ ۱۰۰ \times ۴^x = ۱۰۰ \end{array} \right.$$

لذا $x = ۰$ جواب مسأله نیست.
اگر $x \geq ۱$ باشد داریم :

$$۶۲۱ \times ۱۰^x > ۱۰۰ \times ۴^x$$

$$\rightarrow ۵^{۲(x+۱)} + ۶۲۱ \times ۱۰^x > ۱۰۰ \times ۴^x$$

لذا برای x های طبیعی معادله جواب ندارد.
فرض کنید $x = -y$ که y عددی طبیعی است در این صورت داریم:

$$۵^{۲(-y+۱)} + ۶۲۱ \times ۱۰^{-y} = ۱۰۰ \times ۴^{-y}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰۰^y} ۲۵ \times ۴^y + ۶۲۱ \times ۱۰^y = ۲۵^y \times ۱۰۰$$

از طرفی داریم:

$$۲۵ \times ۴^y + ۶۲۱ \times ۱۰^y < ۲۵ \times ۵^y + ۶۲۱ \times ۱۰^y$$

$$\rightarrow ۲۵^y \times ۱۰۰ < ۲۵ \times ۵^y + ۶۲۱ \times ۱۰^y$$

$$\rightarrow ۵^y \times ۱۰۰ < ۲۵ + ۶۲۱ \times ۲^y$$

نامساوی فوق فقط برای $y = ۱$ و $y = ۲$ صادق است.
با بررسی رابطهٔ $y = ۱$ و $y = ۲$ درمی‌یابیم که $y = ۲$ جوابی برای مسأله است.
لذا معادلهٔ فوق تنها جواب $x = -۲$ را دارد.

۲۹) گزینهٔ «د» صحیح است.

این چنین عددی هم باید به صورت $(x + ۱) + (x + ۲) + \cdots + (x + ۹)$ و هم به صورت $(y + ۱) + (y + ۲) + \cdots + (y + ۱۰)$ قابل نمایش باشد. ازتساوی دو عبارت فوق، به معادلهٔ $۹x = ۱۰y + ۱۰$ می‌رسیم. بنابراین $۱۰(y + ۱)$ باید مضرب ۹ باشد. لذا $y + ۱$

نیز مضرب ۹ خواهد بود. پس کوچک‌ترین مقدار y برابر ۸ می‌باشد و جواب مسأله عدد $۱۳۵ = (۸ + ۱۰) + \cdots + (۸ + ۲) + (۸ + ۱)$ خواهد بود.

۳۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.
می‌دانیم اگر n از ۴ بزرگ‌تر باشد، $n!$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است. در نتیجه:

$$۱! + ۲! + \cdots + n! \overset{۱۰}{\equiv} ۱! + ۲! + ۳! + ۴! \overset{۱۰}{\equiv} ۳۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

ولی می‌دانیم رقم یکان یک عدد مربع کامل نمی‌تواند برابر ۳ باشد. یعنی n از ۵ کوچک‌تر است و در بین اعداد ۱ تا ۴ نیز تنها ۱ و ۳ ویژگی مورد نظر را دارند.

۳۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.
عدد $n + \cdots + ۳ + ۲ + ۱$ را به صورت $\overline{kkk}$ نمایش می‌دهیم. در نتیجه $۱۱۱ \times k = \frac{n(n+۱)}{۲}$. اکنون چون $۱۰۰۰ > \frac{n(n+۱)}{۲}$ پس $n < ۵۰$. حالا با توجه به این که $۱۱۱ = ۳ \times ۳۷$ پس n یا $n + ۱$ باید مضرب ۳۷ باشد، یعنی $n = ۳۷$ و یا $n = ۳۶$ که با امتحان‌کردن این دو مقدار می‌توان دید که تنها $n = ۳۶$ قابل‌قبول است.

۳۲) گزینهٔ «د» صحیح است.
چون $SIX < ۱۰۰۰$ پس $NINE < ۱۵۰۰$ و لذا $N = ۱$. پس $I \neq ۱$ و $I < ۵$. معادله را به‌صورت $SIX = \frac{۲}{۳}NINE$ تبدیل می‌کنیم. اکنون حالات مختلف I را بررسی می‌کنیم.

$$i)\ I = ۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \times ۱۲۱۰ \leq SIX \leq \frac{۲}{۳} \times ۱۲۱۹ \Rightarrow ۸۰۷ \leq SIX \leq ۸۱۲$$

که نتیجه می‌دهد ۱ یا $I = ۰$ که با فرض $I = ۲$ متناقض است.

$$ii)\ I = ۳ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \times ۱۳۱۰ \leq SIX \leq \frac{۲}{۳} \times ۱۳۱۹ \Rightarrow ۸۷۴ \leq SIX \leq ۸۷۹$$

که نتیجه می‌دهد $I = ۷$ که با فرض $I = ۳$ متناقض است.

$$iii)\ I = ۴ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \times ۱۴۱۰ \leq SIX \leq \frac{۲}{۳} \times ۱۴۱۹ \Rightarrow ۹۴۰ \leq SIX \leq ۹۴۶$$

حال از آن‌جایی که SIX باید زوج و دارای ارقام متمایز باشد، نتیجه می‌گیریم $SIX = ۹۴۲$ و یا $SIX = ۹۴۶$. اما $SIX = ۹۴۶$ به $NINE = ۱۴۱۹$ منجر می‌شود که نتیجه می‌دهد $E = S = ۹$ که با فرض متمایز بودن ارقام در تناقض است. پس $SIX = ۹۴۲$ و از آن‌جا $NINE = ۱۴۱۳$، یعنی $I = ۴$.

۳۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.
واضح است که یکی از جواب‌های معادله $(x, y) = (۱, ۱)$ می‌باشد. حالا فرض کنید x بزرگتر

از یک باشد. با در نظر گرفتن معادله به پیمانهٔ ۴ داریم $(-۱)^y \overset{۴}{\equiv} ۱$. پس y باید زوج باشد، یعنی $y = ۲y'$. در نتیجه به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۲^x = (۳^{y'} - ۱)(۳^{y'} + ۱)$$

پس $۳^{y'} - ۱$ و $۳^{y'} + ۱$ توان‌هایی از ۲ هستند که دو واحد با هم اختلاف دارند که باید برابر ۲ و ۴ باشند. در نتیجه $(x, y) = (۳, ۲)$ جواب دیگر معادله می‌باشد.

۳۴) گزینهٔ «الف» صحیح است.
فرض کنید $d = (a, b)$. در این‌صورت می‌توانیم فرض کنیم $a = a'd, b = b'd$. در نتیجه

$$\frac{a+۱}{b} + \frac{b+۱}{a} = \frac{a'd+۱}{b'd} + \frac{b'd+۱}{a'd} = \frac{a'^۲d + b'^۲d + a' + b'}{a'b'd}$$

حال با توجه به صحیح بودن عبارت حاصل نتیجه می‌گیریم صورت کسر و در نتیجه $a' + b'$ باید بر d بخش‌پذیر باشد. پس:

$$d | a' + b' \Rightarrow d^۲ | a'd + b'd \Rightarrow d^۲ | a + b \Rightarrow d^۲ \leq a + b$$

که نتیجهٔ آن درستی گزینهٔ «الف» است. با کمی تأمل می‌توانید گزینه‌های «د» و «ه» را رد کرده و ثابت کنید گزینهٔ «الف» از گزینه‌های «ب» و «ج» کوچک‌تر است.

۳۵) گزینهٔ «ه» صحیح است.
واضح است که برای متعادل بودن a و $a + ۱$، جمع ارقام هر یک از این دو عدد باید زوج باشند. در نتیجه رقم یکان a باید ۹ باشد. پس a باید یکی از اعداد زیر باشد:

$$۱۸۹, ۲۷۹, ۳۶۹, ۴۵۹, ۵۴۹, ۶۳۹, ۷۲۹, ۸۱۹, ۹۰۹$$

به سادگی می‌توان دید که در بین این اعداد تنها ۵۴۹ در شرایط مسأله صدق می‌کند.

۳۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.
از آنجا که باقیماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۹ با باقیماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن بر ۹ برابر است در نتیجه اعداد مورد نظر مسأله باید بر ۹ بخشپذیر باشند. زیرا:

$$۰ + ۱ + ۲ + \cdots + ۹ = ۴۵ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

از سوی دیگر این اعداد نمی‌توانند کوچکتر از $۴۵ = ۹ + \cdots + ۲ + ۱ + ۰$ باشند. بنابراین حداکثر ۷ عدد ۹۹, ۹۰, ۸۱, ۷۲, ۶۳, ۵۴, ۴۵ می‌توانند در شرط مسأله صدق کنند. حال از آنجا که بین گزینه‌ها عددی کم‌تر از ۷ وجود ندارد، پس جواب همان گزینهٔ «الف» است.

۳۷) گزینهٔ «ب» صحیح است.
با توجه به داده‌های مسأله فرض کنید $a = bq_۱ + ۲r$، $a = cq_۲ + r$ و $b = cq_۳ + r$. حال با توجه به این‌که $a < ۲b$، لذا ۱ یا $q_۱ = ۰$.

اگر $q_1 = ۰$، آن‌گاه $a = ۲r$ و در نتیجه $۲r = cq_۲ + r$ که نتیجه می‌دهد $r = cq_۲$، اما می‌دانیم که $۰ \leq r < c$، لذا $q_۲ = ۰$ و بنابراین $r = ۰$ که نتیجه می‌دهد $a = ۰$ که با فرض طبیعی بودن a تناقض دارد.
پس $q_1 = ۱$ و در نتیجه $a = b + ۲r$. بنابراین با جاگذاری این مقدار به‌جای a در رابطهٔ $a = cq_۲ + r$ به‌دست می‌آوریم: $b + r = cq_۲$. حالا کافیست دقت کنیم که:

$$\frac{a+b}{۲} = \frac{۲b+۲r}{۲} = b + r = cq_۲$$

و بنابراین $\frac{a+b}{۲}$ مضرب c خواهد بود.
حال اگر فرض کنید $c = ٦$، $b = ۹$ و $a = ۱۵$ می بینید که $\frac{a+b}{۳}$ لزوماً بر c بخش‌پذیر نیست.

۳۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n} \Rightarrow xy - ny + nx = ۰ \Rightarrow (x-n)(y+n) + n^۲ = ۰ \Rightarrow (n-x)(n+y) = n^۲$$

اگر n اول باشد، با توجه به این که باید $x + y = n^۲$ و $n - x = ۱$ باشد، لذا تنها یک جواب منحصر به فرد $y = n(n-۱)$ و $x = n - ۱$ به‌دست می‌آید.
حال فرض کنید n عددی مرکب باشد، لذا می‌توان آن را به صورت $n = pq$ که $p, q > ۱$ نمایش داد. در این صورت علاوه بر جواب قبل $y = nq - n = n(q-۱)$ و $x = n - p$ نیز یکی از جواب‌های معادله خواهند بود.
لذا معادلهٔ داده‌شده تنها برای n های اول جواب منحصر به‌فرد دارد که هیچ کدام از ۴ عدد داده شده اول نیستند و لذا گزینهٔ «ه» پاسخ سؤال است.

۳۹) گزینهٔ «د» صحیح است.
فرض کنید $n = ۲^{۱۳۷۵} \times (۲r + ۱)$ در این‌صورت داریم:

$$A = \frac{۹^{۴n} - ۱}{۹ - ۱} = \frac{۳^{۸n} - ۱}{۸} = \frac{۳^{۲^{۱۳۷۸} \times (۲r+۱)} - ۱}{۸}$$

که صورت کسر حاصل را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$۳^{۲^{۱۳۷۸} \times (۲r+۱)} - ۱ = (۳^{(۲r+۱)\times ۲^{۱۳۷۷}})(۳^{(۲r+۱)\times ۲^{۱۳۷٦}} + ۱) \cdots (۳^{(۲r+۱)} + ۱)(۳^{(۲r+۱)} - ۱)$$

اما دقت داشته باشید که $۳^{(۲r+۱)\times ۲^m} + ۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$، $۳^{(۲r+۱)} - ۱ \overset{۴}{\equiv} -۲$ و $۳^{(۲r+۱)} + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۳ \times ۹^r + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۴$. پس در عبارت تجزیه‌شده هر یک از پرانتزها یک عامل ۲ به ما می‌دهند به‌استثنای عبارت $۳^{(۲r+۱)} + ۱$ که به ما دو عامل ۲ می‌دهد پس تعداد کل عامل های ۲ در عبارت A برابر خواهد بود با $۱۳۷۸ + ۲ - ۳ = ۱۳۷۷$.

۴۰) گزینهٔ«ب» صحیح است.
از آنجا که می‌دانیم $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \leq ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} < ۲$ در نتیجه $d = ۱$ می‌باشد و معادله

به صورت $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ در می‌آید. اکنون ثابت می‌کنیم $a=2$ می‌باشد. زیرا اولاً $a\neq 1$ و اگر هم $a\geq 3$، در این‌صورت $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$. پس $a=2$ و به معادلهٔ $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$ می‌رسیم. که در آن $3\leq b<c$. اگر $b\geq 4$ در این‌صورت $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$. پس $b=3$ و در نتیجه $c=6$. بنابراین تنها جواب معادله $a=2$، $b=3$ و $c=6$ می‌باشد.

(۴۱) گزینهٔ«الف» صحیح است.

با بررسی باقیماندهٔ تقسیم اعضای A بر ۳ می‌توانیم این مسأله را حل کنیم. اولاً می‌دانیم A از همهٔ باقیمانده‌ها نمی‌تواند عضو داشته باشد زیرا اگر از هر باقیمانده یک عضو داشته باشد جمع این سه عضو مضرب ۳ و در نتیجه مرکب خواهد بود. پس A حداکثر از دو تا از باقی‌مانده‌ها عضو دارد. ثانیاً از یک باقیمانده هم بیش‌تر از دو عضو نمی‌تواند داشته باشد زیرا اگر از یک باقیمانده سه عضو داشته باشد، جمع این سه عضو مضرب ۳ و مرکب خواهد بود. پس A حداکثر ۴ عضو دارد. مثال $A=\{1,3,7,9\}$ هم یک حالت چهارعضوی برای A را نمایش می‌دهد.

(۴۲) گزینهٔ«ب» صحیح است.

با توجه به این که $x^y+1=x^2+2x+1$ نتیجه می‌گیریم $x^{y-1}=x+2$ و لذا $y\neq 1$. بنابراین $x+2$ باید مضرب x باشد. یعنی $x=1$ و یا $x=2$. از طرفی $x=1$ در معادله صدق نمی‌کند. پس $x=2$ که از آن‌جا به‌دست می‌آید $2^{y-1}=2+2=4$ یعنی $y=3$. پس تنها جواب معادله $x=2$ و $y=3$ است.

(۴۳) گزینهٔ«ب» صحیح است.

اگر $n\geq 6$ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ $n!$ بر ۹ برابر با صفر و در نتیجه باقی‌ماندهٔ سمت چپ تساوی بر ۹ برابر با ۳ خواهد بود، در حالی‌که سمت راست این تساوی بر ۹ بخشپذیر است. پس ۵ یا $n=1,2,3,4$ که با جایگذاری این مقادیر در معادله فقط $n=3,4$ پذیرفته می‌شوند.

(۴۴) گزینهٔ«ب» صحیح است.

در میان اعداد زوج فقط توان‌های دو، اعداد خوب هستند. در غیر این صورت فرض کنید n توانی از ۲ نباشد و بتوان آن را به فرم به فرم $2^k\times m$ نوشت که در آن $m>1$ عددی فرد و k عددی طبیعی است. در این صورت $(2^k,n)>1$ و $(m,n)>1$، اما می دانیم:

$$(2^k+m,n)=(2^k+m,2^k\times m)=(2^k+m,m)=(2^k,m)=1$$

از سوی دیگر به‌سادگی می‌توان دید که هر عدد به فرم 2^k نیز خوب است. لذا پاسخ مسأله برابر است با توان‌های دو که کوچک‌تر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند که برابر است با ۱۰.

(۴۵) گزینهٔ«ب» صحیح است.

فرض می‌کنیم $(x,y)=d$. در این صورت می‌توانیم بنویسیم $y=y_1.d$ و $x=x_1.d$ به طوری

که $(x_1, y_1) = 1$. در این صورت داریم:

$$\sqrt{x_1 d} + \sqrt{y_1 d} = \sqrt{1376} \Rightarrow x_1 + y_1 + 2\sqrt{x_1 y_1} = \frac{1376}{d}$$

پس $\sqrt{x_1 y_1}$ باید عددی گویا و در نتیجه عددی صحیح باشد و از انجا که x_1 و y_1 نسبت به هم اولند، لذا باید هر دو مربع کامل باشند. پس $x_1 = a^2, y_1 = b^2$ و در نتیجه $\frac{1376}{d} = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. در نتیجه باید $\frac{1376}{d}$ مربع‌کامل باشد که با توجه به این‌که $1376 = 2^5 \times 43$ نتیجه می‌گیریم ۱۶ یا $(a+b)^2 = 4$. پس ۴ یا $a+b = 2$ که با توجه به این‌که $a \leq b$ نتیجه می‌گیریم $(a,b) = (1,1)$ یا $(a,b) = (1,3)$ که به جواب‌های $(x,y) = (344, 344)$ و $(x,y) = (86, 774)$ می‌رسیم.

۴۶) گزینهٔ«الف» صحیح است.

واضح است که $\overline{abc}$، در صورتی اول است که c فرد و مخالف ۵ باشد. در ضمن با توجه به این‌که $b^2 - 4ac = 9$، b باید فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشد. در نتیجه دارای یکی از مقادیر ۵ یا ۷ یا ۹ می‌باشد.

$b = 5 \Rightarrow ac = 4 \Rightarrow a = 4, c = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 451$ اول نیست

$b = 7 \Rightarrow ac = 10$ چون c باید فرد و مخالف ۵ باشد ممکن نیست

$$b = 9 \Rightarrow ac = 18 \Rightarrow \begin{cases} a = 6, c = 3 \Rightarrow \overline{abc} = 693 & \text{اول نیست} \\ a = 2, c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 299 & \text{اول نیست} \end{cases}$$

در نتیجه این‌گونه عددی وجود ندارد.

۴۷) گزینهٔ«د» صحیح است.

واضح است که رابطهٔ $d(k) = k$ تنها برای $k = 1, 2$ برقرار است، پس چون $d(d(d(n))) = d(d(n))$ در نتیجه باید داشته باشیم ۲ یا $d(d(n)) = 1$ و لذا یا $d(n) = 1$ و یا $d(n) = p$ که در آن p عددی اول است. اگر $d(n) = 1$ باشد $n = 1$ خواهد بود، و اگر $d(n) = p$، n باید به‌صورت q^{p-1} باشد که در آن p و q اعدادی اولند. پس هر عدد جالب غیر از یک باید به فرم q^{p-1} باشد که در آن p, q اعدادی اولند. با توجه به این مطلب می‌توان دید که به جز گزینهٔ «د»، بقیهٔ گزینه‌ها درست هستند.

۴۸) گزینهٔ«د» صحیح است.

باقی‌ماندهٔ یک عدد در تقسیم بر ۹ با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ برابر است. در نتیجه $f(n) \overset{9}{\equiv} n$. یعنی همهٔ اعضای این دنباله در تقسیم بر ۹ به باقی‌مانده‌های مساوی می‌رسند. حال از آنجا که داریم:

$$n_0 \overset{9}{\equiv} (13)^{76} \overset{9}{\equiv} 4^{76} \overset{9}{\equiv} 2^{152} \overset{9}{\equiv} (2^6)^{25} \times 2^2 \overset{9}{\equiv} 4$$

لذا باقی‌ماندهٔ تقسیم همهٔ اعضای این دنباله بر ۹ برابر چهار است. از سوی دیگر واضح است که در این دنباله حتماً به عدد ۴ خواهیم رسید.

۴۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.
برای هر یک از مجموعه‌های تعریف شده در چهار گزینهٔ اول یک مثال نقض بیان می‌کنیم:
$۵^m + ۵^k \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow$ مربع کامل نیست.
$۴^m + ۴^k \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow$ مربع کامل نیست.
$۶^m + ۶^k \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow$ مربع کامل نیست.
$۷^m + ۷^k \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow$ مربع کامل نیست.

۵۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.
از آنجاکه $۲^n + n^۲$ عددی اول و در نتیجه فرد است، لذا n نیز باید عددی فرد باشد. در نتیجه:

$$۲^n + n^۲ \overset{۳}{\equiv} (-۱)^n + n^۲ \overset{۳}{\equiv} n^۲ - ۱$$

از سوی دیگر می‌دانیم که برای هر عدد طبیعی n، $n^۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا ۱. لذا چون $۲^n + n^۲$ اول است و مضرب ۳ نیست، پس باید $n^۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$، یعنی n مضرب ۳ باشد. با توجه به این که n فرد و مضرب ۳ است، لذا گزینهٔ «ب» صحیح است.

۵۱) گزینهٔ «ه» صحیح است.
با استفاده از استقراء روی n می‌توان نشان داد که $a_n = n! - ۱$. پس $a_{۱۰۱} = ۱۰۱! - ۱$. در نتیجه باید باقی ماندهٔ $۱۰۱! - ۱$ بر ۱۰۲ را محاسبه کنیم. می‌دانیم که در $۱۰۱!$ هم ۲ و هم ۵۱ ظاهر شده‌اند، لذا $۱۰۱!$ بر $۱۰۲ = ۵۱ \times ۲$ بخش‌پذیر خواهد بود، پس $۱۰۱! - ۱ \overset{۱۰۲}{\equiv} -۱ \overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۱$.

۵۲) گزینهٔ «د» صحیح است.
مقدار N را می‌توانیم با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه کنیم:

$$N = (۳^{۲۵۶} + ۱)(۳^{۱۲۸} + ۱) \cdots (۳^۲ + ۱)(۳^۲ - ۱)$$

اکنون به این نکته توجه کنید که برای هر یک از عوامل N به جز پرانتز آخر داریم:

$$۳^k + ۱ \overset{۴}{\equiv} (-۱)^k + ۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$$

یعنی هر یک از این ۸ پرانتز تنها یک عامل ۲ دارند. از سوی دیگر حاصل پرانتز آخر نیز برابر ۸ است که دارای سه عامل ۲ است. پس در مجموع $۱۱ = ۳ + ۸$ عامل ۲ به‌دست می‌آید.

۵۳) گزینهٔ «د» صحیح است.
ادعا می‌کنیم که همه‌ی اعداد طبیعی به‌صورت تفاضل دو مجذور کامل قابل نمایش هستند، به‌جز اعداد به‌فرم $۴k + ۲$. برای اثبات این ادعا ابتدا دقت می‌کنیم که $a^۲ - b^۲ = (a+b)(a-b)$. حال از آنجا که اعداد $a - b$ و $a + b$ یا هر دو زوجند یا هر دو فردند، پس اگر عددی به‌فرم $a^۲ - b^۲$ قابل نمایش باشد، یا باید فرد باشد و یا مضرب ۴. پس

نمی‌تواند به‌صورت ۲ + $۴k$ باشد. مابقی اعداد به‌فرم $a^۲ - b^۲$ قابل نمایش هستند، زیرا:

$n = ۴k \Rightarrow n = (k+۱)^۲ - (k-۱)^۲$

$n = ۴k + ۱ \Rightarrow n = (۲k+۱)^۲ - (۲k)^۲$

$n = ۴k + ۳ \Rightarrow n = (۲k+۲)^۲ - (۲k+۱)^۲$

پس باید از مجموعهٔ $\{۱۳۷۷, \ldots, ۱۹۹۹\}$ اعداد به‌فرم ۲ + $۴k$ را حذف کنیم که ۴۶۷ عدد باقی می‌ماند.

۵۴) گزینهٔ «ب» صحیح است.

با کمی دقت می‌توان فهمید که زوجیت مجموع اعداد روی تخته همواره ثابت است. حال از آنجا که مجموع اعداد اولیه فرد است لذا عددی که در نهایت باقی خواهد ماند نیز عددی فرد است.

حالا گزینهٔ «ج» را رد می‌کنیم. در هر مرحله می‌توان اعداد $۱, ۲, ۳, \ldots, i + ۴$ را با سه عمل به $۱, ۲, ۳, \ldots, i$ تبدیل کرد. برای این‌کار اول به‌جای $i + ۴$ و $i + ۳$، ۱ می‌گذاریم. بعد به‌جای $i + ۲$ و $i + ۱$، ۱ می‌گذاریم و بعد دو تا یک را با هم می‌گیریم و حذف می‌شوند. به این ترتیب می‌توان اعداد روی تخته را به $۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ تبدیل کرد و بعد به‌ترتیب اعمال زیر را انجام داد

$$\underline{۱}, \underline{۲}, ۳, ۴, ۵ \to ۱, ۳, \underline{۴}, \underline{۵} \to \underline{۱}, \underline{۱}, ۳ \to \underline{۰}, \underline{۳} \to ۳$$

لذا گزینهٔ «ج» غلط است. در نتیجه پاسخ صحیح همان گزینهٔ «ب» خواهد بود.

۵۵) گزینهٔ «ج» صحیح است.

در بین اعضای این مجموعه ۱۳ عدد به فرم $۴k$، ۱۴ عدد به فرم $۴k + ۱$، ۱۳ عدد به فرم $۴k + ۲$ و ۱۳ عدد نیز به فرم $۴k + ۳$ هستند. از هیچ کدام از این دسته‌ها نباید دو عضو متوالی انتخاب شوند. در نتیجه از هر یک از آنها حداکثر ۷ عضو و لذا در کل حداکثر ۲۸ عضو می‌توان انتخاب کرد.

۵۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$A = \overbrace{۹۹\cdots۹۹}^{۸۱} = ۱۰^{۸۱} - ۱ \Rightarrow$$

$$A^۲ = ۱۰^{۱۶۲} - ۲ \times ۱۰^{۸۱} + ۱ = ۱\overbrace{۰۰\cdots۰}^{۱۶۲} - ۲\overbrace{۰۰\cdots۰}^{۸۱} + ۱$$

$$= \underbrace{۹۹\cdots۹}_{۸۰}۸\underbrace{۰۰\cdots۰}_{۸۰}۱$$

در نتیجه جمع ارقام $A^۲$ برابر خواهد بود با $۹ \times ۸۰ + ۸ + ۱ = ۷۲۹$.

۵۷) گزینهٔ «ه» صحیح است.

با استفاده از استقراء نشان می‌دهیم مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، مجموعه‌ای خوب است. فرض کنید $a_۱ = ۲$ و اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ را ساخته باشیم. m را کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بگیرید که در بین $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ ظاهر نشده باشد، باید با یک روشی m

را هم در این دنباله وارد کنیم. قرار می‌دهیم $a_{n+2} = m$ و $a_{n+1} = k.a_n.m$ که در آن k را آن‌قدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که عدد $k.a_n.m$ قبلاً در بین $a_1, a_2, \dots, a_n$ ظاهر نشده باشد. به‌وضوح $(a_{n+1}, a_{n+2}) > 1$ و $(a_n, a_{n+1}) > 1$ و به این ترتیب عدد m هم در دنباله وارد می‌شود و به همین شیوه می‌توان تمام اعداد مجموعهٔ مورد نظر را در این دنباله وارد نمود. پس مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، مجموعه‌ای خوب است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموعه‌های گزینه‌های دیگر نیز خوب هستند، لذا گزینهٔ «ه» صحیح است.

۵۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.

اگر از الگوریتم اقلیدسی استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$d_n = (n^3 - 5n^2 + 6n, n^2 + 5) = (n^2 + 5, n + 25) = (n + 25, 630)$$

در نتیجه d_n همواره مقسوم‌علیهی از ۶۳۰ خواهد بود و به‌علاوه $d_{605} = 630$، پس $\max\{d_n | n \in N\} = 630$. هم‌چنین اگر به n، ۶۳۰ واحد اضافه کنیم مقدار d_n تغییری نخواهد کرد، یعنی:

$$d_{n+630} = (n + 630 + 25, 630) = (n + 25, 630) = d_n$$

لذا d_n متناوب نیز هست.

۵۹) گزینهٔ «د» صحیح است.

اولاً $t = 0$ جواب مسأله است. حالا می‌خواهیم جواب‌های غیرصفر مسئله را نیز پیدا کنیم. قرار دهید $t = \frac{a}{b}$ که در آن $a, b \in N$ و $(a, b) = 1$. در این‌صورت باید عبارت $\frac{3a^3 + 10a^2b - 3ab^2}{b^3}$ عددی صحیح باشد. لذا صورت عبارت و در نتیجه $3a^3$ باید مضرب b باشد. اما $(a, b) = 1$ و در نتیجه b باید برابر با ۱ یا ۳ باشد.

* اگر $b = 1$ آن‌گاه $1 \le a \le 77$ و در نتیجه ۷۷ جواب به‌دست می‌آید.
* اگر $b = 3$ آن‌گاه باید $27 | 3a^3 + 30a^2 - 27a$ و در نتیجه $9 | a^2(a + 10)$. اما $(a, 3) = 1$ و لذا $9 | a + 10$. پس a باید به‌فرم $9k - 1$ باشد. از شرط $0 \le t \le 77$ نتیجه می‌شود $0 \le \frac{9k - 1}{3} \le 77$ و بنابراین $1 \le k \le 25$. پس در این حالت هم ۲۵ جواب به‌دست می‌آید. لذا تعداد کل جواب‌ها برابر است با $77 + 1 + 25 = 103$.

۶۰) گزینهٔ «ج» صحیح است.

با کمی بررسی می‌توان فهمید که بعد از حرکت اول همهٔ حرکات حتماً به‌صورت یک‌درمیان به‌سمت بالا و چپ خواهند بود. و چون $2 \overset{4}{\equiv} 10 + 0$ حرکت آخر هم حتماً به‌سمت بالا خواهد بود و لذا نقطهٔ پس از حرکت اول یک نقطه و آن هم به مختصات $(-40, 49)$ می‌باشد. حال با توجه به این‌که $49 - 40 \overset{4}{\equiv} 1$، حرکت اول یا باید از نقطهٔ $(-40, 48)$ با حرکت به‌سمت راست و یا از نقطهٔ $(-40, 50)$ و با حرکت به‌سمت چپ شروع شود. لذا گزینهٔ «ج» صحیح است.

۶۱) گزینهٔ«ب» صحیح است.
می‌توان دید که تمام اعداد این دنباله به صورت $3k+1$ هستند. ولی در بین گزینه‌ها فقط باقی‌ماندهٔ ۷۸۶۴۲۷ بر ۳ برابر با یک است. پس تنها این عدد می‌تواند در بین a_iها ظاهر شود.

۶۲) گزینهٔ«د» صحیح است.
با استفاده از اصل شمول و عدم‌شمول پاسخ مسأله برابر با مقدار زیر خواهد بود:

تعداد مقسوم‌علیه‌های 12^{50}
+ تعداد مقسوم‌علیه‌های 45^{20}
+ تعداد مقسوم‌علیه‌های 50^{100}
− تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک 45^{20} و 12^{50}
− تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک 50^{100} و 12^{50}
− تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک 50^{100} و 45^{20}
+ تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک 50^{100} و 45^{20} و 12^{50}

حال با توجه به این که اگر تجزیهٔ n به اعداد اول به‌صورت $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های آن برابر با حاصل‌ضرب $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)$ است، می‌توانید به‌سادگی جواب مسأله را به‌دست آورید که برابر خواهد بود با:

$$101\times 51+21\times 41+101\times 201-41-101-21+1=26151$$

۶۳) گزینهٔ«ه» صحیح است.
عبارت $\frac{[a,b]}{(a,b)}$ زمانی برابر عددی اول می‌شود که یا $a=bp$ یا $b=ap$ که در آن p عددی اول است. به بیان دیگر مفهوم عمل $a\to b$ این خواهد بود که هر بار می‌توان a را در عدد اولی ضرب و یا بر عامل اولی تقسیم کرد. اکنون درستی چهار گزینهٔ اول و نادرستی گزینهٔ آخر را اثبات می‌کنیم:

گزینهٔ «الف»: ابتدا کافیست با عمل فوق عوامل a را یکی‌یکی حذف کنیم و بعد عوامل k را یکی‌یکی اضافه کنیم.

گزینهٔ «ب»: ابتدا یک عدد اول به‌اندازه‌ی کافی بزرگ مانند p در a ضرب می‌کنیم، بعد عامل‌های a را یکی‌یکی حذف و عامل‌های b_1 را یکی‌یکی اضافه می‌کنیم تا به b_1p برسیم و بعد با حذف p به b_1 می‌رسیم، البته p را آن‌قدر بزرگ می‌گیریم که به این وسیله مطمئن باشیم که در رسیدن به b_1 هیچ‌یک از مابقی b_iها ظاهر نمی‌شوند. حال مجدداً می‌توان مشابه همین کار را برای رسیدن از b_1 به b_2 و الی آخر انجام داد.

گزینهٔ «ج»: هر بار در این زنجیر از a شروع کرده برای رسیدن به مضربی مثل ma، عوامل m را یکی‌یکی اضافه می‌کنیم تا به ma برسیم، بعد از ma شروع کرده و عوامل m را یکی‌یکی حذف می‌کنیم تا مجدداً به a برسیم و به‌سراغ مضرب بعدی می‌رویم.

گزینهٔ «د»: ابتدا با حذف عوامل a از a به ۱ می‌رسیم و بعد از ۱ به هر مربع کامل بعدی می‌رویم.

گزینهٔ «ه»: این گزینه نادرست است. مثلاً کافیست $a = ۱$ و $b = ۴$. در این‌صورت باید بتوان با ۱ و ۲ و ۳ زنجیره‌ای با خاصیت خواسته‌شده ساخت. اما دو حالت بیش‌تر ممکن نیست، این زنجیره یا باید به‌صورت $۳ \to ۲ \to ۱$ و یا به‌صورت $۲ \to ۳ \to ۱$ باشد که هیچ‌کدام از این دو قابل قبول نیستند.

۶۴) گزینهٔ«ج» صحیح است.
ادعا می‌کنیم که L همواره زوج است. زیرا اگر L بخواهد فرد باشد، همه‌ی اعداد $f_۱, f_۲, \dots, f_{۱۳۷۹}$ باید فرد باشند و لذا حاصل‌جمع این اعداد، یعنی $f_۱ + f_۲ + \dots + f_{۱۳۷۹}$ نیز باید فرد باشد، اما می‌دانیم:

$$\begin{aligned} f_۱ + f_۲ + \cdots + f_{۱۳۷۹} &\overset{۲}{\equiv} |a_۱ - ۱| + |a_۲ - ۲| + \cdots + |a_{۱۳۷۹} - ۱۳۷۹| \\ &\overset{۲}{\equiv} (a_۱ - ۱) + (a_۲ - ۲) + \cdots + (a_{۱۳۷۹} - ۱۳۷۹) \\ &\overset{۲}{\equiv} (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۳۷۹}) - (۱ + ۲ + \cdots + ۱۳۷۹) \\ &\overset{۲}{\equiv} ۰ \end{aligned}$$

بنابراین L همواره زوج است. حال برای تولید عدد زوجی مانند $۲k$، اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_{۱۳۷۹}$ را به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$۲, ۳, ۴, \dots, ۲k + ۱, \quad ۱ \quad , ۲k + ۳, ۲k + ۲, \dots, ۱۳۷۹, ۱۳۷۸$$

در این‌صورت مقدار همهٔ $|a_i - i|$ ها به‌جز $|a_{۲k+۱} - (۲k + ۱)|$ برابر یک و مقدار $|a_{۲k+۱} - (۲k + ۱)|$ برابر $۲k$ خواهد شد . لذا $L = ۲k$ خواهد شد. بنابراین L می‌تواند مساوی هرکدام از اعداد زوج از ۱ تا ۱۰ باشد، درنتیجه گزینهٔ«ج» صحیح است.

۶۵) گزینهٔ«ج» صحیح است.
در این دنباله بالاخره یک‌جا عدد ۲ ظاهر خواهد شد. زیرا دقت کنید که همهٔ a_n ها $(n > ۱)$ اول هستند، پس اگر هیچ یک از a_nها برابر ۲ نشود، a_n $(n > ۱)$ همواره فرد و لذا $a_n + ۱$ زوج خواهد بود. اما دراین صورت واضح است که:

$$a_{n+۱} \leq \frac{a_n + ۱}{۲} < a_n$$

یعنی اگر در این دنباله عدد ۲ ظاهر نشود، در این دنباله از جمله‌ی دوم به بعد هر جمله از جملهٔ قبلی خود کوچک‌تر خواهد بود و لذا از جایی به‌بعد جملات دنباله منفی خواهند شد که تناقض است. از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که به هر حال در جایی از این دنباله عدد ۲ ظاهر می‌شود، که در این‌صورت از آن جمله به بعد دنباله متناوب و به‌صورت $۲, ۳, ۲, ۳, \dots$ خواهد بود. بنابراین $a_۱$ هرچه که باشد، دنباله از جایی به بعد متناوب خواهد شد، لذا همهٔ اعداد خوبند.

۶۶) گزینهٔ«الف» صحیح است.
برای هر عدد طبیعی x داریم ۱ یا ۰ $x^۲ \overset{۴}{\equiv}$. اکنون فرض کنید f_m $(m \geq ۲)$ را بتوانیم به‌صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی بنویسیم، یعنی $f_m = x^۲ + y^۲$. داریم:

$$f_m \overset{4}{\equiv} 11 \overset{4}{\equiv} 3 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \overset{4}{\equiv} (\text{۰ یا ۱}) + (\text{۰ یا ۱}) \overset{4}{\equiv} (\text{۰ یا ۱ یا ۲})$$

لذا $f_m \overset{4}{\not\equiv} x^2+y^2$. پس هیچ‌کدام از f_m ها را نمی‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی نوشت.

۶۷) گزینهٔ«الف» صحیح است.

عدد سوم باید عدد ۶۲ = ۶۱ + ۱ را بشمارد، لذا عدد سوم یا برابر ۲ و یا برابر ۳۱ است. فرض کنید x آخرین عدد در این ردیف باشد. x باید مجموع اعداد ماقبل خود یعنی x − ۶۱ + ⋯ + ۲ + ۱ را بشمارد. لذا x باید مقسوم‌علیهی از عبارت ۳۱ × ۶۱ = ۶۱ + ⋯ + ۲ + ۱ باشد. بنابراین ۶۱ یا ۳۱ = x. اما از آن‌جایی که عدد اول در این ردیف برابر ۶۱ است، x باید برابر ۳۱ باشد، پس عدد سوم در این ردیف نمی‌تواند ۳۱ باشد و لذا برابر ۲ است.

۶۸) گزینهٔ«الف» درست است.

اگر n یعنی تعداد تخمه‌ها در آغاز کار مضرب ۳ باشد نفر دوم برنده است و در غیر این‌صورت نفر اول برنده خواهد بود.

اگر n مضرب ۳ باشد، در این صورت نفر دوم به این ترتیب بازی می‌کند که اگر نفر اول در نوبت خودش ۱ تخمه برداشت، او ۲ تخمه برمی‌دارد و اگر نفر اول ۲ یا ۵ تخمه برداشت، او ۱ تخمه برمی دارد. در نتیجه نفر دوم همواره تعداد تخمه‌های باقیمانده را برابر مضربی از ۳ می‌کند. پس آخرین تخمه را نیز او برمی‌دارد. اما اگر n مضرب ۳ نباشد، در این صورت نفر اول در اولین حرکت به تعداد باقیماندهٔ تقسیم n بر ۳ (که برابر ۱ یا ۲ است) تخمه برمی‌دارد و بعد از آن با همان استراتژی که در حالت قبل برای بازی نفر دوم گفتیم بازی می‌کند. لذا در این حالت نفر اول استراتژی برد دارد.

۶۹) گزینهٔ«ه» صحیح است.

اگر عدد انتخابی این شخص n باشد، در این‌صورت با توجه به این‌که ۱۰۰ ≥ n ≥ ۱ بنابراین $n = (n, 100!)$ و لذا یک سؤال برای یافتن عدد او کافیست.

۷۰) گزینهٔ «الف» صحیح است.

حاصل‌جمع اعداد سطرهای فرد برابر ۱ و حاصل‌جمع اعداد سطرهای زوج برابر صفر است. پس حاصل‌جمع اعداد سطرهای ۱ تا ۱۳۷۹ برابر است با تعداد اعداد فرد از ۱ تا ۱۳۷۹ که برابر ۶۹۰ است.

۷۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.

واضح است که هر یک از اعداد $\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5\}$ به یک جعبهٔ مجزا احتیاج دارند، پس *حداقل به ۶ جعبه احتیاج داریم*. اکنون به‌سادگی می‌توان توپ‌ها را در ۶ جعبه به‌صورت زیر تقسیم کرد.

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, \ldots, 7\}, \{8, \ldots, 15\}, \{16, \ldots, 31\}, \{32, \ldots, 40\}$$

۷۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.

برای زوجیت مختصات هر نقطه چهار حالت داریم و چون ۵ نقطه در صفحه مفروض است،

لذا طبق اصل لانه‌کبوتری زوجیت مختصات دو تا از نقطه‌ها مانند هم است و لذا نقطه‌ی وسط پاره‌خط واصل آن‌ها نیز مختصات صحیح دارد. حالا بررسی یک مثال ساده مثل نقاط $\{(۱,۲),(۱,۰),(۰,۱),(۱,۱),(۰,۰)\}$ نشان می‌دهد که لزوماً بیش از یکی از این وسط‌ها دارای مختصات صحیح نیست. پس گزینهٔ «ج» صحیح است.

۷۳) گزینهٔ «ه» صحیح است.
چون $n^۳+۲n^۲=n^۲(n+۲)$، پس $n+۲$ باید مربع‌کامل باشد، هم‌چنین باید داشته باشیم: $۳\le n+۲\le ۱۳۸۱$. پس جواب مسئله برابر است با تعداد اعداد مربع‌کامل بین ۳ تا ۱۳۸۱ که برابر با ۳۶ می‌باشد.

۷۴) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$x^۳+x=۳۵(x+۳)\Rightarrow x^۳-۳۴x=۳\times ۳۵\Rightarrow x(x^۲-۳۴)=۳\times ۵\times ۷$$

پس $x^۲-۳۴$ باید برابر با یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۰۵ باشد که به‌سادگی می‌توان دید که از بین آن‌ها فقط $x^۲-۳۴=۱۵$ جواب صحیح دارد، پس $x^۲=۴۹$ و از آن‌جا $x=\pm ۷$ که از این دو جواب هم فقط $x=۷$ در معادله صدق می‌کند.

۷۵) گزینهٔ «الف» صحیح است.
ادعا می‌کنیم معادله برای هر عدد طبیعی n جواب دارد. برای اثبات این ادعا کافیست دقت کنید که اگر $x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=x_{n+۱}^۲$ آن‌گاه خواهیم داشت

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲+(۲x_{n+۱})^۲+(۲x_{n+۱})^۲=(۳x_{n+۱})^۲$$

پس اگر برای n چنین اعدادی موجود باشند برای $n+۲$ هم این معادله جواب خواهد داشت. حال از آن‌جایی که به‌وضوح معادله برای $n=۱,۲$ جواب دارد، پس معادله برای هر عدد طبیعی n جواب خواهد داشت.

۷۶) گزینهٔ «ج» صحیح است.
دقت کنید که $x_{n+۱}\overset{۳}{\equiv}۳x_n-۴x_{n-۱}\overset{۳}{\equiv}-x_{n-۱}$ و $x_۰\overset{۳}{\equiv}۰, x_۱\overset{۳}{\equiv}-۱$ در نتیجه $x_{۲k}\overset{۳}{\equiv}۰$ و $x_{۲k-۱}\overset{۳}{\equiv}(-۱)^k$. یعنی جملات با اندیس زوج مضرب ۳ هستند، پس از $x_۰$ تا $x_{۲۰۰۰}$، ۱۰۰۱ جمله مضرب ۳ خواهند بود.

۷۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.
ادعا می‌کنیم که همه‌ی اعداد را می‌توان به‌صورت $a^۲-b^۲$ نوشت به جز اعداد به‌فرم $۴k+۲$.

$n=۴k\rightarrow n=(k+۱)^۲-(k-۱)^۲$

$n=۴k+۱\rightarrow n=(۲k+۱)^۲-(۲k)^۲$

$n=۴k+۳\rightarrow n=(۲k+۲)^۲-(۲k+۱)^۲$

و از آن‌جا که $x^۲\overset{۴}{\equiv}$ ۱ یا ۰ در نتیجه $a^۲-b^۲\overset{۴}{\equiv}$ ۱− یا ۱ یا ۰ که نشان می‌دهد اعداد به‌فرم $۴k+۲$ به‌صورت $a^۲-b^۲$ قابل نمایش نیستند. با توجه به این مطالب به‌سادگی می‌توان دید که گزینهٔ «الف» صحیح است.

۷۸) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$۳xy - y - ۵x = ۱۳ \Rightarrow ۹xy - ۳y - ۱۵y = ۳۹ \Rightarrow (۳x-۱)(۳y-۵) = ۴۴$$

که با بررسی حالات مختلف تنها جواب‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} ۳x - ۱ = ۲ \\ ۳y - ۵ = ۲۲ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (۱,۹)$$

$$\begin{cases} ۳x - ۱ = ۱۱ \\ ۳y - ۵ = ۴ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (۴,۳)$$

$$\begin{cases} ۳x - ۱ = ۴۴ \\ ۳y - ۵ = ۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (۱۵,۲)$$

۷۹) گزینهٔ «ج» صحیح است.
از آن‌جایی که سمت چپ این معادله عددی صحیح است، سمت راست آن یعنی a نیز باید عددی صحیح باشد. حال a را بر ۳۰ تقسیم می‌کنیم. $a = ۳۰q + r, ۰ \leq r < ۳۰$. با جای‌گذاری a در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$[\frac{۳۰q + r}{۲}] + [\frac{۳۰q + r}{۳}] + [\frac{۳q + r}{۵}] = ۳۰q + r \Rightarrow$$
$$۱۵q + ۱۰q + ۶q + [\frac{r}{۲}] + [\frac{r}{۳}] + [\frac{r}{۵}] = ۳۰q + r \Rightarrow$$
$$q = r - [\frac{r}{۲}] - [\frac{r}{۳}] - [\frac{r}{۵}]$$

یعنی به‌ازای هر مقدار $۰ \leq r < ۳۰$ مقدار متناظر q از رابطهٔ فوق به‌دست می‌آید و از آن‌جا a از رابطهٔ $a = ۳۰q + r$ به‌دست می‌آید. پس چون r، ۳۰ مقدار می‌تواند به خود بگیرد، معادلهٔ داده شده دارای ۳۰ جواب می‌باشد.

۸۰) گزینهٔ «ج» صحیح است.
فرض کنید n یک عدد جالب باشد، در این‌صورت

$$n \overset{۹}{\equiv} \sum \text{ارقام } n \overset{۹}{\equiv} ۰ + ۱ + \cdots + ۹ \overset{۹}{\equiv} ۴۵ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

یعنی n بر ۹ هم بخش‌پذیر است. لذا n باید بر ۹۹۹۹۹ بخش‌پذیر باشد. عدد ۱۰ رقمی n را می‌توان به‌صورت $n = \overline{xy}$ که x و y هریک ۵ رقمی هستند نوشت. حالا دقت می‌کنیم که:

$$n \equiv ۱۰^۵ x + y \equiv x + y \text{ (به پیمانهٔ ۹۹۹۹۹)}$$

بنابراین $x + y$ باید مضرب ۹۹۹۹۹ باشد. اما از آن‌جایی که x و y هر دو پنج‌رقمی هستند، لذا $۰ < x + y < ۲ \times ۹۹۹۹۹$ و در نتیجه $x + y = ۹۹۹۹۹$. یعنی اگر $n = \overline{a_{۱۰}a_۹ \cdots a_۱}$ باید داشته باشیم: $a_۱ + a_۶ = a_۲ + a_۷ = \cdots = a_۵ + a_{۱۰} = ۹$. پس اگر $a_{۱۰}, a_۹, \ldots, a_۶$ را تعیین کنیم مابقی از روی آنها به دست می‌آیند. به سادگی می‌توان دید که برای انتخاب $a_{۱۰}, a_۹, \ldots, a_۶$ هم $۹ \times ۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۴۵۶$ راه وجود دارد.

۸۱) گزینهٔ «الف» صحیح است.

اگر $n \geq ۷$ باشد، آنگاه $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n = ۳^۷(۱ + ۳^۴ + ۳^{n-۷})$ و در نتیجه توان ۳ در این عبارت عددی فرد خواهد بود و لذا این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد. پس $n < ۷$.

حال با توجه به اینکه $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n = ۳^n(۳^{۷-n} + ۳^{۱۱-n} + ۱)$ نتیجه می‌گیریم که n باید عددی زوج باشد. امّا در این صورت $۳^۷ + ۳^{۱۱} + ۳^n \overset{۴}{\equiv} -۱ - ۱ + (-۱)^n \overset{۴}{\equiv} -۱$ در حالی که باقیمانده یک عدد مربع کامل بر ۴ نمی‌تواند برابر ۱ – باشد. بنابر این در حالت $n < ۷$ هم این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۸۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.

ابتدا روشن است که d باید از هر سه عدد a و b و c بزرگ‌تر باشد. بنابراین

$$n^d = n^a + n^b + n^c \leq n^{d-۱} + n^{d-۱} + n^{d-۱} = ۳n^{d-۱}$$

$$\Rightarrow n \leq ۳ \Rightarrow n = ۳ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱$$

واضح است که $n \neq ۱$. مثال‌های سادهٔ $۲^۳ = ۲^۲ + ۲ + ۲$ و $۳^۲ = ۳ + ۳ + ۳$ نشان می‌دهند که به ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ معادلهٔ مذکور جواب دارد.

۸۳) گزینهٔ «ج» صحیح است.

چنانچه گزارهٔ «ج» در مورد اعداد جالب برقرار باشد، باید $x \cdot (\frac{۱}{x}) = ۱$ هم جالب باشد که نیست.

۸۴) گزینهٔ «ج» صحیح است.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول از ۱ تا ۳۰ را انتخاب می‌کنیم. تعداد این اعداد ۱۰ تاست و روشن است که هیچ‌یک از این اعداد حاصلضرب بقیه‌شان را نمی‌شمارد.

حال نشان می‌دهیم که ۱۰ حداکثر مقدار ممکن نیز می‌باشد.

فرض کنید تعدادی عدد انتخاب کرده‌ایم، بطوریکه هیچ‌کدام از آن‌ها حاصلضرب مابقی را نمی‌شمارد. ادعا می‌کنیم می‌توان تمام این اعداد را به صورت p^α در نظر گرفت، بدون اینکه تعداد این اعداد کاهش یابد. برای این کار فرض کنید $n = p_۱^{\alpha_۱} \dots p_k^{\alpha_k}$ یکی از این اعداد باشد، در اینصورت حداقل یکی از $p_i^{\alpha_i}$ها حاصلضرب مابقی اعداد را نمی‌شمارد، زیرا در غیر اینصورت حاصلضرب مابقی اعداد باید بر همهٔ $p_i^{\alpha_i}$ها و در نتیجه بر حاصلضرب آنها یعنی n بخشپذیر باشد که تناقض است. حال می‌توان جای n و $p_i^{\alpha_i}$ را با هم عوض کرد، بدون اینکه خاصیت مسأله به هم بخورد.

به این ترتیب می‌توان همهٔ این اعداد را به p^αها تبدیل کرد بدون اینکه تعداد آنها کاهش یابد. حال دقت می‌کنیم که اگر p^α و q^β دو تا از این اعداد باشند، در اینصورت $p \neq q$ (چرا؟) لذا تعداد این اعداد حداکثر برابر تعداد اعداد اول مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$، یعنی ۱۰ خواهد بود.

۸۵) گزینهٔ «ه» صحیح است.

فرض کنیم A مجموعه‌ای ضعیف باشد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را داشته باشد، در این صورت از بین ۳ و ۲ و ۱ یکی عضو A است. واضح است که ۱ عضو A نیست و اگر ۲ عضو A باشد بین بقیه اعضا ۲ تا زوج و یا ۲ تا فرد پیدا می‌شود و به تناقض می‌رسیم، بنابراین $۳ \in A$. برای $k \geq ۲$ بین سه عدد $۳k$، $۳k+۱$ و $۳k+۲$ یکی عضو A است. اگر $۳k \in A$ در این صورت $۳|۳k+۳$ که تناقض است، پس $۳k+۱ \in A$ یا $۳k+۲ \in A$. ولی امکان ندارد از یک سه تایی $۳k+۱$ انتخاب شود و از دیگری $۳k'+۲$، چون جمعشان بر ۳ بخشپذیر می‌شود. پس برای هر $k \geq ۲$ یا همواره $۳k+۱$ عضو A است و یا همواره $۳k+۲$. در حالت اول $۷,۲۸ \in A$ و $۷|۷+۲۸$ که تناقض است و در حالت دوم $۸,۳۲ \in A$ و $۸|۸+۳۲$ که تناقض است. پس چنین مجموعه ضعیفی وجود ندارد.

۸۶) گزینهٔ «ه» صحیح است.

فرض کنیم y یک عدد زوج باشد و قرار می‌دهیم $z = \frac{y^۵ - ۱۳۸۰}{۲}$ و $x = \frac{y^۵ - ۱۳۸۲}{۲}$ که اعدادی صحیح خواهند بود و در معادله صدق می‌کنند، زیرا داریم:

$$\begin{aligned}
&y^۵ - ۱۳۸۱ = ۱ \times (y^۵ - ۱۳۸۱)\\
&= (\frac{y^۵ - ۱۳۸۰}{۲} - \frac{y^۵ - ۱۳۸۲}{۲})(\frac{y^۵ - ۱۳۸۰}{۲} + \frac{y^۵ - ۱۳۸۲}{۲})\\
&= (z-x)(z+x) = z^۲ - x^۲\\
&\Rightarrow y^۵ + x^۲ = z^۲ + ۱۳۸۱
\end{aligned}$$

پس برای هر y زوج برای x و z جواب پیدا می‌شود، پس معادله بی‌نهایت جواب دارد.

۸۷) گزینهٔ «ج» صحیح است.

فرض کنیم $n = P_۱^{\alpha_۱} \times P_۲^{\alpha_۲} \times \ldots \times P_k^{\alpha_k}$. یک مقسوم علیه خوب n مانند d را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم d بر P_i بخش‌پذیر باشد در این صورت داریم:

$$\left(d, \frac{n}{d}\right) = ۱ \Rightarrow \left(P_i, \frac{n}{d}\right) = ۱$$

پس توان P_i در $\frac{n}{d}$ برابر صفر است و در d برابر α_i خواهد بود بنابراین هر مقسوم علیه خوب n حاصل‌ضرب تعدادی از $P_i^{\alpha_i}$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$f(n) = \sum_{\text{خوب است } d} d = (P_۱^{\alpha_۱}+۱)(P_۲^{\alpha_۲}+۱)\ldots(P_k^{\alpha_k}+۱)$$

حال فرض کنیم $m \in S$ در این صورت $f(m) - ۲$ مضرب ۴ خواهد بود و اگر m دست کم سه عامل اول داشته باشد دست کم دو عامل اول فرد خواهد داشت و با توجه به فرمول $f(m)$ دیده می‌شود که $f(m)$ بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود و $f(m) - ۲$ نمی‌تواند مضرب ۴ باشد که تناقض است، بنابراین هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.

۸۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.

فرض کنید n یک عدد خوبِ غیر اول باشد. در این صورت n مقسوم‌علیه دیگری غیر از ۱ و n مانند d خواهد داشت:

طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} d+۱ \overset{۷}{\equiv} ۰ \\ n+۱ \overset{۷}{\equiv} ۰ \end{array}\right\} \Longrightarrow n+d+۲ \overset{۷}{\equiv} ۰$$

در ضمن باید $n+d \overset{۷}{\equiv} ۰$ بنابراینت باید $۰ \overset{۷}{\equiv} ۲$ که تناقض است. بنابراین یک عدد خوب باید حتماً اول باشد. حال برای پیدا کردن تعداد اعداد خوب کمتر از ۱۰۰ باید تعداد اعداد اول به فرم $۷k + ٦$ کمتر از ۱۰۰ را بیابیم (چرا؟).

برای این کار هم با توجه به اینکه $k \leq ۱۳$ و k فرد بوده و مضرب ۳ نیست، کافیست مقادیر ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ را برای k امتحان کنیم، که اعداد ۱۳، ۴۱، ۵۵، ۸۳ و ۹۷ نتیجه خواهد شد که ۴ تا از آنها اولند.

بنابراین تعداد اعداد خوب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۴.

۸۹) گزینهٔ «د» صحیح است.

از این مجموع، اعداد دارای رقم صفر را می‌توان کنار گذاشت، زیرا حاصل‌ضرب ارقام عددی که یکی از ارقامش صفر باشد، برابر صفر است. حال به حاصل‌ضرب زیر دقت کنید:

$$(۱+۲+۳+\ldots+۹)(۱+۲+\ldots+۹)(۱+۲+\ldots+۹) =$$
$$۱\times۱\times۱+۱\times۱\times۲+\ldots+۹\times۹\times۹$$

هر جمله از حاصل‌ضرب فوق دقیقاً متناظر با حاصل‌ضرب ارقام یک عدد سه رقمی است، لذا مقدار عبارت فوق دقیقاً برابر است با

$$p(۱۰۰)+p(۱۰۱)+\ldots+p(۹۹۹)$$

مشابهاً:

$$p(۱۰)+p(۱۱)+\ldots+p(۹۹) = (۱+\ldots+۹)(۱+\ldots+۹)$$

و

$$p(۱)+\ldots+p(۹) = ۱+\ldots+۹$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} & p(۱)+\ldots+p(۹۹۹) \\ & = (۱+\ldots+۹)^۳+(۱+\ldots+۹)^۲+(۱+\ldots+۹) \\ & = ۴۵^۳+۴۵^۲+۴۵ = ۹۳۱۹۵ \end{aligned}$$

بنابراین گزینهٔ «د» صحیح است.

۹۰) گزینهٔ «الف» صحیح است.

کافیست تعداد اعداد تقسیمی ۴ رقمی را محاسبه کرده، آن را از تعداد کل اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ که ۱۸۰۰ تا هستند کم کنیم. فرض کنید $\overline{abcd}$ نمایانگر یک عدد تقسیمی ۴ رقمی

باشد. d یعنی رقم یکان یک عدد تقسیمی که ۲ حالت دارد: یا صفر یا پنج. حال اعداد تقسیمی ۴ رقمی را برای سادگی شمارش براساس سه رقم سمت چپ آنها یعنی $\overline{abc}$ به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

i) اعداد تقسیمی که در آنها a مضرب ۳است. تعداد این اعداد به وضوح برابر است با:

$$۳ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۲ = ۶۰۰$$

ii) اعداد تقسیمی که در آنها $\overline{ab}$ و یا معادلاً $a+b$ مضرب ۳ است ولی a مضرب ۳ نیست. تعداد این اعداد نیز به وضوح برابر است با:

$$۶ \times ۳ \times ۱۰ \times ۲ = ۳۶۰$$

iii) اعداد تقسیمی که در آنها $\overline{abc}$ و یا معادلاً $a+b+c$ مضرب ۳ است، ولی نه a و نه $a+b$ هیچ‌یک مضرب ۳ نیستند.

در این حالت جهت انتخاب c، ۶ حالت، جهت انتخاب b، ۷ حالت و جهت انتخاب a ۳ حالت داریم. لذا تعداد این اعداد برابر است با:

$$۳ \times ۷ \times ۶ \times ۲ = ۲۵۲$$

بنابراین تعداد اعداد تقسیمی ۴ رقمی برابر است با ۱۲۱۲ و لذا جواب مسأله $۱۸۰۰ - ۱۲۱۲ = ۵۸۸$ خواهد بود.

۹۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$۲^n + ۳^n \overset{۵}{\equiv} ۲^n + (-۲)^n = \begin{cases} ۰ & \text{فرد } n \\ ۲ \times ۲^n & \text{زوج } n \end{cases}$$

بنابراین n باید فرد باشد. حال

$$\begin{aligned} ۲^n + ۳^n &= (۲+۳)(۲^{n-۱} - ۳ \times ۲^{n-۲} + \ldots + ۳^{n-۱}) \\ &= (۲^{n-۱} - ۳ \times ۲^{n-۲} + \ldots + ۳^{n-۱}) \end{aligned}$$

از آنجا که $۲^n + ۳^n \overset{۱۲۵}{\equiv} ۰$، باید

$$\begin{aligned} &۲^{n-۱} - ۳ \times ۲^{n-۲} + \ldots + ۳^{n-۱} \overset{۵}{\equiv} ۰ \iff \\ &۲^{n-۱} - (-۲) \times ۲^{n-۲} + \ldots + (-۲)^{n-۱} \overset{۵}{\equiv} ۰ \iff \\ &n \cdot ۲^{n-۱} \overset{۵}{\equiv} ۰ \iff \\ &n \overset{۵}{\equiv} ۰ \end{aligned}$$

پس $n = ۵k$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} ۲^n + ۳^n &= (۲^۵)^k + (۳^۵)^k \\ &= (۲^۵ + ۳^۵)\big((۲^۵)^{k-۱} - (۳^۵)(۲^۵)^{k-۲} + \ldots + (۳^۵)^{k-۱}\big) \end{aligned}$$

اما $11 \times 25 = 275 = 3^5 + 2^5$ و بنابراین برای برقراری رابطهٔ $2^5 + 3^5 \overset{125}{\equiv} 0$، پرانتز دوم باید مضرب ۵ باشد. حال کافیست دقت کنیم که چون $-2 \overset{5}{\equiv} 3$، بنابراین $-2^5 \overset{5}{\equiv} 3^5$ و در نتیجه

$$(2^5)^{k-1} - (3^5)(2^5)^{k-2} + \ldots + (3^5)^{k-1} \overset{5}{\equiv}$$
$$(2^5)^{k-1} - (-2^5)(2^5)^{k-2} + \ldots + (-2^5)^{k-1} \overset{5}{\equiv}$$
$$k \cdot (2^5)^{k-1} \overset{5}{\equiv} 0$$

و در نتیجه لازم و کافیست که k مضرب ۵ باشد. به این ترتیب دیدیم برای اینکه $2^n + 3^n$ مضرب ۱۲۵ باشد، n باید عددی فرد و مضرب ۲۵ باشد. بنابراین کوچکترین عدد طبیعی با این خاصیت ۲۵ است که جمع ارقام آن برابر است با ۷.

۹۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.

فرض کنید $n = \overline{a_4a_3a_2a_1}$ یک عدد ریشه‌دار ۴ رقمی باشد. یعنی

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} = (a_4 + a_3 + a_2 + a_1)^2$$

دقت می‌کنیم که $a_i \leq 9$ $(1 \leq i \leq 4)$ و بنابراین

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} \leq (9 + 9 + 9 + 9)^2 = 1296$$

بنابراین باید $a_4 = 1$. اما در این صورت

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} \leq (1 + 9 + 9 + 9)^2 = 784$$

که غیر ممکن است. بنابراین هیچ عدد چهار رقمی ریشه‌داری وجود ندارد.

به این ترتیب صحت گزینهٔ «ج» ثابت شد و نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست. اما ما سایر گزینه‌ها را نیز بررسی و رد می‌کنیم.

در مورد گزینه «الف»، تعداد اعداد ریشه‌دار نمی‌تواند نامتناهی باشد. برای توجیه این مطلب فرض کنید $n = \overline{a_k \ldots a_1}$ عددی k رقمی و ریشه‌دار باشد، در این صورت از یک طرف $n \geq 10^{k-1}$ و از طرفی

$$n = (a_k + \ldots + a_1)^2 \leq (9k)^2 = 81k^2$$

پس باید $81k^2 \geq 10^{k-1}$. ولی به وضوح به ازای kهای به اندازه کافی بزرگ جهت این نامساوی برمی‌گردد و بنابراین تعداد ارقام یک عدد ریشه‌دار و در نتیجه تعداد کل اعداد ریشه‌دار نمی‌تواند از حدی بیشتر شود.

در مورد گزینهٔ «ب»، $(8 + 1)^2 = 81$ و بنابراین، این گزینه نیز نادرست است. در مورد گزینه‌های «د» و «ه»، فرض کنید n عددی ریشه‌دار باشد، می‌دانیم که اگر جمع ارقام n را با $s(n)$ نمایش دهیم، آنگاه $s(n) \overset{9}{\equiv} n$. طبق ریشه‌دار بودن n، $n = \left(s(n)\right)^2$. لذا

$$\left.\begin{array}{lcl} n & = & \left(s(n)\right)^۲ \\ n & \overset{۹}{\equiv} & s(n) \end{array}\right\} \Longrightarrow n \overset{۹}{\equiv} n^۲$$

یعنی $۹|n^۲ - n = n(n-۱)$، بنابراین یا $۹|n$ یا $۹|n-۱$، یعنی یک عدد ریشه‌دار یا بصورت $۹k$ یا $۹k+۱$ است؛ به این ترتیب گزینه‌های «د» و «ه» نیز رد می‌شوند.

۹۳) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.
کافی است پیدا کنیم که حاصل همنهشتی $(۱+۲x+۳x^۲+\ldots+۹x^۸+۱۰x^۹)^۲$ در پیمانهٔ ۲، چند جمله دارد.

$$(۱+۲x+۳x^۲+\ldots+۹x^۸+۱۰x^۹)^۲ \overset{۲}{\equiv} ۱+۹x^۴+۲۵x^۸+۴۹x^{۱۲}+۸۱x^{۱۶}$$

لذا تنها ۵ تا از ضرایب فرد هستند.

۹۴) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.
عدد اول مورد نظر را با p نمایش می دهیم. بدیهی است که $n \geq ۳$ می‌باشد.
اگر $n = ۳k$ باشد داریم:

$$[\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۹k^۲}{۳}] = ۳k^۲ = p \quad \rightarrow \quad k = ۱ \quad \rightarrow \quad n = ۳$$

اگر $n \neq ۳k$ باشد داریم :

$$n^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱ \rightarrow n^۲ = ۳t+۱ \rightarrow [\frac{n^۲}{۳}] = [\frac{۳t+۱}{۳}] = t = \frac{n^۲-۱}{۳} = p$$

$$\Rightarrow \frac{n^۲-۱}{۳} = p \rightarrow n^۲ - ۱ = ۳p$$

$$\Rightarrow (n-۱)(n+۱) = ۳p$$

حالات ممکن برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} n-۱=۱ \\ n+۱=۳p \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=۲ \\ p=۱ \rightarrow \text{تناقض} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} n-۱=۳p \\ n+۱=۱ \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=۰ \rightarrow \text{تناقض} \\ p=\frac{-۱}{۳} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} n-۱=p \\ n+۱=۳ \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=۲ \\ p=۱ \rightarrow \text{تناقض} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} n-۱=۳ \\ n+۱=p \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=۴ \\ p=۵ \end{array}\right.$$ قابل قبول

لذا تنها $n=۳$ و $n=۴$ جواب‌های مسأله هستند.

۹۵) گزینهٔ «د» صحیح است.

شرط لازم برای اینکه عدد a متعلق به یکی از A_k ها باشد، این است که مجموع نمای اعداد اول در تجزیهٔ عدد a به عوامل اول به فرم $m!$ باشد. $(m! = ۱\times۲\times۳\ldots\times m)$

واضح است که برای عدد دلخواه $a\in A_k$، مجموع نمای اعداد اول در تجزیهٔ a به عوامل اول، مقداری است وابسته به k و به نوع انتخاب a بستگی ندارد. اگر این مقدار را (مجموع نمای اعداد اول در تجزیهٔ $a\in A_k$ به عوامل اول) برای هر A_k برابر با a_k در نظر بگیریم، داریم:

$$a_۱=۱\ ,\ a_۲=۲\times۱\ ,\ a_۳=۳\times۲\times۱\ ,\ \forall k\in N: a_{k+۱}=a_k\times(k+۱)$$

$$\Rightarrow\ \forall k\in N: a_k=k!$$

در بین گزینه‌ها تنها در گزینهٔ «د» مجموع نمای اعداد اول برابر با $m! = ۵! = ۱۲۰ = ۱۱۱+۹$ است.

۹۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$\frac{۱}{x}=\frac{a}{x+y}-\frac{۱}{y}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{a}{x+y}\ \Rightarrow\ (x+y)^۲=axy$$

$$\Rightarrow\ x^۲+(۲-a)y\times x+y^۲=۰$$

$$\text{شرط وجود جواب}\ \Rightarrow\ \Delta=m^۲\ \rightarrow\ ((۲-a)y)^۲-۴\times۱\times y^۲=m^۲$$

$$\Rightarrow\ (a^۲-۴a)y^۲=m^۲\ \Rightarrow\ a^۲-۴a=n^۲\ \Rightarrow\ a^۲-۴a+۴=n^۲+۴$$

$$\Rightarrow\ (a-۲)^۲=n^۲+۴\ \Rightarrow (a-۲)^۲-n^۲=۴ \qquad (۱)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که تفاضل دو عدد صحیح مربع کامل برابر با ۴ است. می‌دانیم اعداد صحیح مربع کامل عبارتند از ۰، ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، که تفاضل دو جملهٔ متوالی آن‌ها از عدد ۴ به بعد بزرگ تر از ۴ است. بنابراین فقط دو عدد ۰ و ۴ هستند که دارای تفاضل ۴ می‌باشند. پس:

$$a-۲=۲, n=۰\ \Rightarrow\ a=۴$$

همچنین اگر در معادلهٔ $a = ۴$ و $x = y$ قرار دهیم معادله جواب خواهد داشت. بنابراین تنها $a = ۴$ جواب سؤال است.

۹۷) گزینهٔ «د» صحیح است.

فرض کنید:

$$\overline{b_۱ b_۰} = S(n) = a_۶ + a_۵ + a_۴ + a_۳ + a_۲ + a_۱ + a_۰ \quad , \quad n = \overline{a_۶ a_۵ a_۴ a_۳ a_۲ a_۱ a_۰}$$

می‌دانیم باقی‌ماندهٔ هر عدد در تقسیم بر عدد ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ مجموع ارقام آن عدد در تقسیم بر ۹. بنابراین:

$$n \overset{۹}{\equiv} S(n) \overset{۹}{\equiv} S(n) + b_۱ + b_۰ = ۴۵ - S(n) \;\Rightarrow\; S(n) \overset{۹}{\equiv} ۴۵ - S(n)$$

$$\Rightarrow\; ۲S(n) \overset{۹}{\equiv} ۰ \;\Rightarrow\; S(n) \overset{۹}{\equiv} ۰ \qquad (۱)$$

از طرفی $\{a_۰, a_۱, \ldots, a_۵, a_۶, b_۰, b_۱\} = \{۱, ۲, \ldots, ۸, ۹\}$ می‌باشد و

$$S(n) = \sum_{i=۰}^{۶} a_i \;\Rightarrow\; \begin{cases} S(n) \leq ۹ + ۸ + ۷ + \ldots + ۴ + ۳ \\ S(n) \geq ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۶ + ۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; ۲۸ \leq S(n) \leq ۴۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \;\Rightarrow\; \begin{cases} ۲۸ \leq S(n) \leq ۴۲ \\ S(n) \overset{۹}{\equiv} ۰ \end{cases} \;\Rightarrow\; S(n) = ۳۶$$

$$\Rightarrow\; \{a_۶, a_۵, \ldots, a_۱, a_۰\} = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹\} = A$$

از طرفی تعداد اعداد هفت رقمی با ارقام متمایز از مجموعهٔ A برابر است با $۱ \times ۲ \times \ldots \times ۶ \times ۷ = ۷!$ بنابراین $۷! = ۵۰۴۰$ عدد هفت رقمی با ویژگی مسأله داریم.

۹۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.

اگر a به فرم $a = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma} - ۱$ باشد که $۰ \leq \alpha, \beta, \gamma \leq ۱۳۸۳$ هستند، بعد از تعدادی مرحله می‌توان به عدد $۱ - ۳۰^{۱۳۸۳} = ۱ - ۵^{۱۳۸۳} \times ۳^{۱۳۸۳} \times ۲^{۱۳۸۳}$ رسید. زیرا اگر در یک مرحله به جای عدد a، عدد $۲a + ۱$ را قرار دهیم، داریم:

$$۲a + ۱ = ۲ \times (۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma} - ۱) + ۱ = ۲^{\alpha+۱} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma} - ۱$$

به این صورت یک واحد به توان عدد ۲ در a اضافه می‌شود و پس از چند گام می‌توان α را به ۱۳۸۳ رساند. به همین صورت داریم:

$$۳a + ۲ = ۳ \times (۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma} - ۱) + ۲ = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta+۱} \times ۵^{\gamma} - ۱$$

$$۵a + ۴ = ۵ \times (۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma} - ۱) + ۴ = ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma+۱} - ۱$$

که بعد از تعدادی مرحله می توان β و γ را نیز به عدد ۱۳۸۳ رساند. در بین گزینه‌ها فقط $۱۱ = ۱ - ۲^{۲} \times ۳^{۱} \times ۵^{۰}$ به فرم $۱ - ۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma}$ که $(۰ \leq \alpha, \beta, \gamma \leq ۱۳۸۳)$ است.
بنابراین گزینهٔ «ب» صحیح است.

۹۹) گزینهٔ «ب» صحیح است.
هم ارز گزارهٔ «اگر a و b ناهم‌رنگ باشند، آنگاه یا باقیمانده a و b بر ۱۱ متفاوت باشد یا باقیماندهٔ a و b بر ۱۷ متفاوت باشد.» گزارهٔ زیر است:
«اگر باقیماندهٔ a و b بر هر یک از اعداد ۱۱ و ۱۷ یکی بود، آنگاه a و b هم رنگ باشند.» و یا بهتر:
«اگر باقیماندهٔ a و b بر عدد ۱۸۷ یکی بود، آنگاه a و b هم‌رنگ باشند.»
واضح است که با دو رنگ نمی‌توان مسأله را با شرایط خواسته شده حل کرد. زیرا باید همهٔ اعداد فرد به رنگ A و همهٔ اعداد زوج به رنگ B باشند و چون دو عدد او ۱۸۸ باقیماندهٔ یکسانی در تقسیم بر عدد ۱۸۷ دارند طبق شرط مسأله باید هم‌رنگ باشند که ممکن نیست.
برای سه رنگ A و B و C یک رنگ آمیزی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد می‌توان این کار را با شرایط مسأله انجام داد. ابتدا همهٔ اعدادی که در تقسیم بر عدد ۱۸۷ به باقیماندهٔ ۱۸۶ می‌رسند را به رنگ C رنگ آمیزی می‌کنیم. همچنین همهٔ اعدادی را که در تقسیم بر عدد ۱۸۷ به یکی از باقیمانده‌های ۱، ۳، ۵، ...، ۱۸۳، ۱۸۵ می‌رسند را با رنگ A رنگ آمیزی می‌کنیم. و در پایان همهٔ اعدادی را که در تقسیم بر عدد ۱۸۷ به یکی از باقیمانده‌های ۰، ۲، ۴، ...،۱۸۴ می‌رسند را با رنگ B رنگ آمیزی می‌کنیم. با کمی دقت معلوم می‌شود که رنگ آمیزی شرایط مسأله را داراست.

۱۰۰) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$f(x^{۱۲}) = Q(x) \times f(x) + r(x)$$

$$f(x) = ۰ \Rightarrow x^{۵} + x^{۴} + \ldots + x + ۱ = ۰ \overset{x \neq ۱}{\Longrightarrow} (x - ۱)(x^{۵} + x^{۴} + \ldots + x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۶} - ۱ = ۰ \Rightarrow x^{۶} = ۱ \Rightarrow x^{۱۲} = ۱$$

$$\Rightarrow r(x) = f(۱) = ۱^{۵} + ۱^{۴} + ۱^{۳} + ۱^{۲} + ۱^{۱} + ۱ = ۶$$

۱۰۱) گزینهٔ «الف» صحیح است.
ادعا می‌کنیم که همه اعداد ۱ تا ۹۹+...+۲+۱ را می‌توان بصورت این مجموع نوشت. می‌دانیم عدد ۱ این ویژگی را دارد. حال اگر بتوان عدد k را به صورت $k = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_r$ نوشت که $a_۱ < a_۲ < \ldots < a_r$، نشان می‌دهیم عدد $k+۱$ را نیز می‌توان. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
۱) $a_۱ = ۱$ و $a_r = ۹۹$. در این صورت اگر اندیس i وجود نداشته باشد که $a_{i+۱} - a_i \geq ۲$، آنگاه همه اعداد متوالی‌اند و k برابر با $۱ + \ldots + ۹۹$ می‌شود. پس $a_{i+۱} - a_i \geq ۲$. حال کافیست قرار دهیم: $k + ۱ = a_۱ + \ldots + a_{i-۱} + (a_i + ۱) + a_{i+۱} + \ldots + a_r$.
۲) $a_۱ \neq ۱$ یا $a_r \neq ۹۹$. در این صورت اگر $a_۱ \neq ۱$، عدد ۱ را به ابتدای i ها اضافه می‌کنیم $k + ۱ = ۱ + a_۱ + \ldots + a_r$ و اگر $a_r \neq ۹۹$ قرار می‌دهیم: $k + ۱ = a_۱ + \ldots + a_{r-۱} + (a_r + ۱)$.
پس همهٔ اعداد فوق را می‌توان به صورت گفته شده نوشت و پاسخ برابر است با

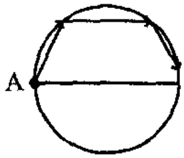
$$۱ + ۲ + \ldots + ۹۹ = \frac{۹۹ \times ۱۰۰}{۲} = ۴۹۵۰$$

۱۰۲) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$q = \frac{m}{n} \quad , \quad (m,n) = ۱ \quad , \quad n \in N$$
$$\Rightarrow q + \frac{۱۳۸۵}{q} = \frac{m}{n} + \frac{۱۳۸۵n}{m} = \frac{m^۲ + ۱۳۸۵n^۲}{mn} = k \in Z$$
$$\begin{cases} n \mid ۱۳۸۵n^۲ + m^۲ \\ n \mid ۱۳۸۵n^۲ \end{cases} \Rightarrow n \mid m^۲ \overset{(m,n)=۱}{\Longrightarrow} n = ۱$$

در نتیجه q عددی صحیح است. پس ۱۳۸۵ باید بر q بخش‌پذیر باشد. $۱۳۸۵ = ۵ \times ۲۷۷$.
تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح ۱۳۸۵ جواب مسئله است که برابر است با $۲ \times (۱ + ۱)(۱ + ۱) = ۸$.

۱۰۳) گزینهٔ «ج» صحیح است.



فرض می‌کنیم کمان‌های α° روی دایره جدا شوند، برای اینکه در ۲۶ امین برخورد، به نقطهٔ A برسیم، زاویهٔ طی شده باید ضریبی از ۳۶۰° باشد. در نتیجه:

$$۳۶۰k = ۲۶\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۳۶۰}{۲۶}k \quad ۰ < \alpha < ۳۶۰ \Rightarrow ۱ \leq k \leq ۲۵$$

پس ۲۵ راستا وجود دارد.

۱۰۴) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$x=\frac{۲y}{۱-y^۲}=\frac{\frac{۴x}{۱-x^۲}}{۱-\frac{۴x^۲}{(۱-x^۲)^۲}}=\frac{۴x(۱-x^۲)^۲}{(۱-x^۲)(x^۴-۶x^۲+۱)}=\frac{۴x(۱-x^۲)}{x^۴-۶x^۲+۱}$$

$x=۰ \ :\Rightarrow y=۰\Rightarrow (۰,۰)$ یک جواب
$x\neq ۰ \ :\Rightarrow x^۴-۶x^۲+۱=۴(۱-x^۲)\Rightarrow x^۴-۲x^۲-۳=۰\Rightarrow (x^۲-۳)(x^۲+۱)=۰$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{۳}\Rightarrow y=\dfrac{۲x}{۱-x^۲}=-\sqrt{۳}\\ x=-\sqrt{۳}\Rightarrow y=\sqrt{۳}\end{cases}$$

پس معادلهٔ فوق سه دسته جواب دارد.

۱۰۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.
برای هر چند جمله‌ای صحیح الضرایب $P(x)$ و اعداد صحیح a,b داریم:

$$a-b|P(a)-P(b)$$

فرض می‌کنیم m ریشهٔ P باشد. در نتیجه $P(m)=۰$. اگر گزینهٔ «ب» را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} P(۶)=۵\\ P(۵)=۵\\ P(m)=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m-۶|P(m)-P(۶)\\ m-۵|P(m)-P(۵)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m-۶|۵\\ m-۵|۵\end{cases}$$

$m-۵$ و $m-۶$ دو عدد متوالی‌اند. ولی ۵ بر هیچ دو عدد متوالی بخش‌پذیر نیست. پس P با این شرایط ریشهٔ صحیح ندارد.

۱۰۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.
اگر $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ عددی طبیعی باشد، در نتیجه:

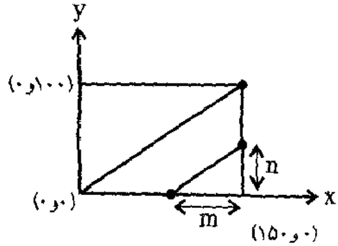
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=k\Rightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=k\Rightarrow\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{k}=k'\in Q$$

پس $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ عددی گویاست. در نتیجه $۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ هم عددی گویاست و x باید مربع کامل باشد. به همین ترتیب y.
طبق صورت مسئله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} m-۱=x_۱^۲\\ m+۱۵=y_۱^۲\end{cases}\Rightarrow y_۱^۲-x_۱^۲=۱۶$$

دو حالت برای $(y_۱,x_۱)$ وجود دارد: (۰و ۴) و (۳و۵) که متناظر با این دو حالت: ۱۰ یا $m=۱$. پس مسئله دو جواب دارد.

۱۰۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.



معادلهٔ قطر : $y = \frac{100}{150}x = \frac{2}{3}x$

$\frac{n}{m} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ m مضرب ۳ است

تعداد مضارب ۳ از خود ۳ تا قبل ۱۵۰ برابر است با: $\frac{150}{3} - 1 = 49$.
پس ۴۹ خط زیر قطر اصلی داریم. به همین ترتیب ۴۹ خط هم بالای قطر اصلی داریم. پس تعداد خطوط برابر است با $49 + 49 + 1 = 99$.

۱۰۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.
در بسط $(2 - \sqrt{3})^n$ فقط عبارت‌هایی که شامل $\sqrt{3}$ هستند، تغییر علامت می‌دهند. پس می‌توان گفت:

$$(2 - \sqrt{3})^n = 5042 - b\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow (2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3})^n = (5042 - b\sqrt{3})(5042 + b\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow 5042^2 - 3b = 1 \Rightarrow b = 2911$$

۱۰۹) گزینهٔ «ب» صحیح است.
فرض می‌کنیم a_1 جملهٔ اول و $n^2 + 1$ قدر نسبت تصاعد باشد.
سه جملهٔ اول تصاعد $a_1 + 2(n^2 + 1), a_1 + (n^2 + 1), a_1$ هستند.
هیچ کدام از این سه جمله باقیمانده‌های یکسانی در تقسیم بر ۳ ندارند. زیرا اگر دو تا از این جملات در تقسیم بر ۳ به یک باقیماندهٔ برسند، آنگاه باید $n^2 + 1$ مضرب ۳ باشد. در حالیکه باقیماندهٔ $n^2 + 1$ بر ۳ یا ۱ است و یا ۲.
پس دقیقاً یکی از این سه جمله بر ۳ بخش پذیرند که این امکان‌پذیر نیست، مگر در حالتی که این عدد برابر ۳ شود که در اینصورت فقط دو حالت زیر امکان پذیرند:
۱) $a_1 = 3$ - در این حالت جملهٔ چهارم دنبالهٔ $(a_1 + 3(n^2 + 1))$ مضرب ۳ است و نمی‌تواند اول باشد، بنابراین تصاعد حداکثر ۳ صفر دارد. مانند حالت $a_1 = 3, n = 1 \leftarrow (3, 5, 7)$
۲) $a_2 = 3$ - در این حالت باید $a_1 = 1$ باشد که غیر ممکن است.

۱۱۰) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$117 = (110110101)_{-2}$$

همان‌طور که می‌بینید این عدد ۶ رقم یک دارد.

۱۱۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$F(x) = G(x)Q(x) + R(x) \qquad (\deg R < \deg G)$$

که در آن $Q(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویاست. $Q(x)$ را به‌صورت $Q(x) = \frac{S(x)}{A}$ بازنویسی می‌کنیم که در آن $S(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و A عددی طبیعی است. خواهیم داشت:

$$F(x) = G(x)\frac{S(x)}{A} + R(x) \Rightarrow A\frac{F(x)}{G(x)} = S(x) + A\frac{R(x)}{G(x)}$$

حال اگر $\frac{F(k)}{G(k)}$ به‌ازای هر عدد طبیعی k، صحیح باشد، باید $A\frac{R(k)}{G(k)}$ هم برای هر k طبیعی عددی صحیح باشد. اما اگر $R(k)$ متحد با صفر نباشد، چون درجه‌ی G از R بیش‌تر است، به‌ازای اعداد طبیعی به‌اندازه‌ی کافی بزرگ k، عبارت $A\frac{R(k)}{G(k)}$ به‌سمت صفر میل خواهد کرد و عددی غیرصحیح خواهد شد. پس $R(x)$ متحد با صفر و در نتیجه گزینهٔ «ب» صحیح است.

۱۱۲) گزینهٔ «الف» صحیح است.

اعداد $a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_2\ldots a_{1375}$ را در نظر بگیرید. به هرکدام از این اعداد یک ۱۰ تایی مثل $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10})$ نسبت می‌دهیم که در آن α_i برابر با تعداد p_i های ظاهر شده در آن عدد می‌باشد. دقت کنید که این ده تایی‌ها از لحاظ زوج و فردی $1024 = 2^{10}$ حالت بیش‌تر ندارند و چون تعداد اعدادی که در نظر گرفتیم ۱۳۷۵ تا می‌باشد، دو تا از آن‌ها هستند که ده تایی‌های متناظرشان از لحاظ زوجیت یکسان هستند. اگر این دو عدد $a_1a_2\ldots a_r$ و $a_1a_2\ldots a_s$ باشند $(r < s)$ با کمی دقت می‌توان دریافت که حاصل‌ضرب $a_{r+1}\ldots a_s$ مربع‌کامل است، زیرا با توجه به مطالب گفته شده، توان هر یک از p_i ها در این حاصل‌ضرب زوج خواهد بود. در نتیجه گزینهٔ «الف» صحیح است. اما چرا گزینهٔ «ب» صحیح نیست. برای رد این گزینه باید یک مثال نقض بسازیم. برای برآورده کردن شرط زوج بودن p_iها قرار می‌دهیم: $p_i = 2q_i$ که در آن q_iها اعداد اول فرد و متمایزی هستند. حال ببینیم اعداد $a_1, \ldots, a_{1375}$ را چگونه باید انتخاب کرد. مشابه قسمت قبل به هر یک از عبارات $a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_2\ldots a_{1375}$ یک ده تایی مثل $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{10})$ نسبت می‌دهیم، که در آن α_i برابر تعداد p_iهای ظاهر شده در آن عبارت می‌باشد. حال اگر هیچ دو تایی از این ده‌تایی‌ها به پیمانهٔ ۳ همنهشت نبوده و نیز هیچ یک به پیمانهٔ ۳ صفر نباشند، حاصلضرب هیچ چندتای متوالی از a_i ها مکعب کامل نخواهد بود. لذا کافیست ۱۳۷۵ ده‌تایی ناصفر از ۲, ۱, ۰ چنان بیابیم که دوبه‌دو متمایز باشند و هر ده تایی با ده تایی ما قبل خود در ۹ مؤلفه یکسان و در یک مؤلفه یک واحد (به پیمانه ۳) بیشتر باشد، و البته اولین ده تایی ۹ صفر و یک ۱ داشته باشد.

۱۱۳) گزینهٔ«ه» صحیح است.

می‌دانیم که تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد مثل n فرد خواهد بود اگر و تنها اگر n مربع‌کامل

باشد. از سوی دیگر می‌دانیم که یک لامپ به‌اندازهٔ تعداد مقسوم‌علیه‌های شمارهٔ خود تغییر وضعیت می‌دهد. پس در آخر کار لامپی روشن خواهد بود که تعداد مقسوم‌علیه‌های شمارهٔ آن فرد باشد، یعنی طبق آنچه گفته شد، شمارهٔ آن باید مربع‌کامل باشد. لذا تعداد لامپ‌های روشن در آخر کار برابر است با تعداد اعداد مربع‌کامل از ۱ تا ۱۳۷۶ که برابر با ۳۷ می‌باشد.

۱۱۴) گزینهٔ «ج» صحیح است.
فرض کنید P مجموعهٔ اعداد اول و $\sigma : P \to P$ یک جایگشت روی اعداد اول باشد. حال تابع $f(n)$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم که اگر $n = \Pi p_i^{\alpha_i}$، قرار می‌دهیم $f(n) = \Pi \sigma(p_i)^{\alpha_i}$ به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که این تابع شرایط مورد نظر مسأله را برآورده می‌سازد. حال با توجه به این مثال نادرستی گزینه‌های «الف» و «ب» بدیهی است. هم‌چنین اگر قرار دهیم $\sigma(۲) = ۵$ و $\sigma(۵) = ۲$ نتیجه می‌شود $f(۲) = ۵$ که مثال نقضی برای «د» است. هم‌چنین چنان‌چه σ را طوری انتخاب کنیم که $\sigma o \sigma \neq ۱$ گزینهٔ «ه» نیز رد خواهد شد. لذا تنها گزینهٔ «ج» می‌تواند درست باشد.

۱۱۵) گزینهٔ«ه» صحیح است.
اگر قرار دهید $c = a + ۱$، در این‌صورت داریم:

$$a^۲ + b^۲ = (b + ۱)^۲ + ۳ \Rightarrow a^۲ = ۲b + ۴ \Rightarrow b = \frac{a^۲ - ۴}{۲}$$

حالا برای این‌که b عددی طبیعی باشد کافیست a عددی زوج باشد. پس اگر $a = ۲k$، در این‌صورت:

$$a = ۲k, \ \ b = \frac{(۲k)^۲ - ۴}{۲}, \ \ c = a + ۱ = ۲k + ۱$$

لذا برای هر $k \in N$ $(k > ۱)$، اعداد فوق جوابی برای این معادله خواهند بود و بنابراین این معادله در مجموعه اعداد طبیعی بی‌نهایت جواب دارد.

۱۱۶) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$۲^{۲k} + b^۲ = c^۲ \Rightarrow (c - b)(c + b) = ۲^{۲k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c + b = ۲^{\alpha} \\ c - b = ۲^{\beta} \\ \alpha + \beta = ۲k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = ۲^{\alpha - ۱} + ۲^{\beta - ۱} \\ \\ b = ۲^{\alpha - ۱} - ۲^{\beta - ۱} \end{cases}$$

که برای طبیعی‌بودن جواب‌ها باید داشته باشیم $\alpha > \beta \geq ۱$. یعنی α باید یکی از اعداد $k + ۱, k + ۲, \ldots, ۲k - ۱$ باشد، لذا مسئله $k - ۱$ جواب دارد.

۲.۲ مسائل تألیفی

۱۱۷) گزینهٔ «ب» صحیح است.
می‌دانیم اگر x و y و z اعداد صحیح باشند و $x|yz$ ، $(x,y)=۱$ آنگاه: $x|z$

$$a|ab \quad , \quad ab|(a-۱)c^۲ \quad \rightarrow \quad a|(a-۱)c^۲$$

$$(a,a-۱)=۱ \quad \rightarrow \quad a|c^۲$$

پس a مقسوم علیه $c^۲$ می‌باشد و $(a,c^۲)=|a|$.

۱۱۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.
اگر a، مقسوم و q خارج قسمت باشد، طبق مفروضات مسأله داریم:

$$a=۴۳q+۶q^۲$$

طبق قضیه و الگوریتم تقسیم می‌دانیم که اگر $a=bq+r$ که در آن b مقسوم علیه و r باقیمانده است، خواهیم داشت: $۰\leq r<b$. پس داریم:

$$۰\leq ۶q^۲<۴۳$$

$$\Rightarrow \quad |q|\leq ۲$$

که با جایگذاری مقادیر مجاز برای q، تنها در حالت‌های $q=۱$ و $q=۲$، a عددی طبیعی خواهد بود.

۱۱۹) گزینهٔ «الف» صحیح است. برای این که y عددی صحیح شود باید $۲x+۱|۳x-۲$.

$$۲x+۱|۳x-۲ \quad \Rightarrow \quad ۲x+۱|۲(۳x-۲) \quad \Rightarrow \quad ۲x+۱|۶x-۴ \qquad (۱)$$

$$۲x+۱|۳(۲x+۱) \quad \Rightarrow \quad ۲x+۱|۶x-۳ \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) و کم کردن آن‌ها خواهیم داشت:

$$۲x+۱|(۶x+۳)-(۶x-۴) \quad \Rightarrow \quad ۲x+۱|۷$$

یعنی $۲x+۱$ باید مقسوم علیه ۷ باشد پس به‌ازای x هایی که $۲x+۱$ برابر با یکی از مقادیر ۱ و ۱- و ۷ و ۷- باشد، y نیز عددی صحیح خواهد بود.

۱۲۰) گزینه «ب» صحیح است.
روش اول:

$$۵۴۹۳^{۱۳۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۱۳۸} \overset{۱۰}{\equiv} (۳^۲)^{۶۹} \overset{۱۰}{\equiv} ۹^{۶۹} \overset{۱۰}{\equiv}$$

$$(-۱)^{۶۹} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱) \overset{۱۰}{\equiv} ۹$$

روش دوم: برای یافتن رقم یکان عدد a^b کافیست روش زیر به‌کار برده شود:

$$a \overset{۱۰}{\equiv} a' \ , \ b \overset{۴}{\equiv} b' \quad (b' = \text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴})$$

$$\Rightarrow a^b \overset{۱۰}{\equiv} (a')^{b'}$$

$$۵۴۹۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \ , \ ۱۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \ \Rightarrow \ ۵۴۹۳^{۱۳۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۹$$

۱۲۱) گزینهٔ «د» صحیح است.
ازآن‌جا که ۷ عددی اول است، در مجموعه اعداد ۱ تا ۳۰، تمام اعداد به غیر از مضارب ۷، نسبت به ۷ اول‌اند. پس طبق قضیهٔ فرما در مورد آن عدد داریم:

$$(a, ۷) = ۱ \Rightarrow a^{۷-۱} = a^۶ \overset{۷}{\equiv} ۱ \ \Rightarrow \ (a^۶)^۵ \overset{۷}{\equiv} a^{۳۰} \overset{۷}{\equiv} ۱$$

$$۱^{۳۰} + ۲^{۳۰} + \ldots + ۳۰^{۳۰} \overset{۷}{\equiv} \underbrace{۱ + ۱ + \ldots + ۱}_{\text{۲۶ تا}} + \underbrace{۰ + ۰ + ۰ + ۰}_{\text{به خاطر مضارب ۷}} \overset{۷}{\equiv} ۲۶ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم عدد مفروض بر ۷، برابر با ۵ می‌باشد.

۱۲۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.
طبق قضیهٔ فرما و با توجه به اول بودن ۱۹ داریم:

$$۷^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow ۷^{۳۶} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \overset{۱۹}{\equiv} ۱ + ۴ \times ۱۹ \overset{۱۹}{\equiv} ۷۷$$

$$۷^{۳۶} \overset{۱۹}{\equiv} ۷۷ \ \Rightarrow ۷^{۳۵} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱$$

با توجه به این که ۱=(۷،۱۹) داریم:

$$\Rightarrow ۵ \times ۷^{۳۵} - ۴ \overset{۱۹}{\equiv} ۵ \times ۱۱ - ۴ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۳$$

۱۲۳) گزینهٔ «الف» صحیح است.
می‌دانیم که اگر $(a,b)=d$ باشد داریم:

$$(a^n,b^n)=d^n \quad , \quad (ka,kb)=kd$$

$$(a,b)=d \;\Rightarrow\; d^۳+۶d=۵۶۰ \;\Rightarrow\; d(d^۲+۶)=۸\times۷۰$$

یکی از جواب‌های معادلهٔ بالا $d=۸$ است. پس d می‌تواند برابر هشت باشد.
همچنین می‌دانیم که $(a,b)|[a,b]$، چون اگر $a=a'd$ و $b=b'd$ آنگاه $[a,b]=a'b'd$. پس $d|a'b'd$.
چون $d=۸$، پس $[a,b]$ باید مضرب ۸ باشد که در بین گزینه‌ها فقط ۴۸ مضرب ۸ می‌باشد.

۱۲۴) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$(a,b)=d\,,\; a=a'd\,,\; b=b'd\,,\; (a',b')=۱$$
$$ab=a'b'd^۲=۳۶a'b'=۲۱۶۰ \;\Rightarrow\; a'b'=۶۰$$
$$۶۰=۲^۲\times۳\times۵=a'b'$$

بدون از بین رفتن کلیت مسأله فرض می‌شود a عدد کوچکتر باشد.
حال بنابر گزینه‌ها اگر $a=۱۲$ باشد چون $d=۶$، نتیجه می‌شود $a'=۲$ و چون $a'b'=۶۰$، پس $b'=۳۰$.
اما داریم $(a',b')=۱$. پس a نمی‌تواند ۱۲ باشد.
اما در مورد سایر گزینه‌ها به‌ترتیب داریم:

الف) $a'=۱ \;,\; b'=۶۰$
ج) $a'=۴ \;,\; b'=۱۵$
د) $a'=۳ \;,\; b'=۲۰$
ه) $a'=۵ \;,\; b'=۱۲$

۱۲۵) گزینه «ه» صحیح است.
روش اول:

$$a=۲۱q+۶$$

از آن‌جا که a عددی فرد است، q نیز باید فرد باشد. فرض می‌کنیم $q=۲k+۱$.

$$a=۲۱(۲k+۱)+۶=۴۲k+۲۷ \;\Rightarrow\; a\overset{۴۲}{\equiv}۲۷$$

روش دوم: با جای گذاری عدد ۲۷ به جای a، می‌توانستیم به جواب مسأله دست یابیم.

۱۲۶) گزینهٔ «ج» صحیح است.
با تجزیهٔ N از طریق اتحاد مزدوج به‌دست می‌آید:

$$۳^{۱۰۲۴}-۱=(۳^{۵۱۲}+۱)(۳^{۲۵۶}+۱)\ldots(۳^۲+۱)(۳^۲-۱)$$

اما می‌دانیم:

$$۳^{۲k}+۱\overset{۴}{\equiv}(-۱)^{۲k}+۱\overset{۴}{\equiv}۲$$

پس اعداد ۹ پرانتز سمت چپ، به شکل $۴q+۲$ بوده و هر کدام تنها یک عامل دو دارند.
$۳^۲-۱$ نیز دارای سه عامل ۲ می‌باشد پس N، کلاً دارای ۱۲= ۳+۹ عامل ۲ می‌باشد یعنی:

$$N=۲^{۱۲}(۲r+۱)=۴^{۶}(۲r+۱)$$

$$\Rightarrow ۴^{۶}|N\ ,\ ۴^{۷}\not|N$$

یعنی ۶، ماکسیمم توانی از ۴ است که N بر $۴^۶$ بخش‌پذیر می‌باشد.

۱۲۷) گزینهٔ «ه» صحیح است.

اگر $(x,۱۱)\neq ۱$ باشد نتیجه می‌شود که x باید مضرب ۱۱ باشد در این صورت $x\overset{۱۱}{\equiv}\circ$ و به دنبال آن $x(x^{۹}-۲)\overset{۱۱}{\equiv}\circ$.

پس $(x,۱۱)=۱$. طبق قضیهٔ فرما خواهیم داشت:

$$x^{۱\circ}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

$$x(x^{۹}-۲)\overset{۱۱}{\equiv}x^{۱\circ}-۲x\overset{۱۱}{\equiv}۱-۲x\overset{۱۱}{\equiv}۴$$

$$\Rightarrow ۲x\overset{۱۱}{\equiv}-۳\overset{۱۱}{\equiv}۸\ \Rightarrow\ x\overset{۱۱}{\equiv}۴$$

در بین گزینه ها، تنها ۵۹ چنین شرایطی را داراست.

۱۲۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.

تنها عدد یک دارای چنین خاصیتی می‌باشد.

عددی که تمامی ارقام آن یک باشد قطعاً عددی فرد است. همچنین می‌دانیم اگر عددی فرد و مربع کامل باشد، حتماً به شکل $۸k+۱$ خواهد بود یعنی در تقسیم بر ۸ باقیماندهٔ ۱ خواهد داشت.

اما اگر تعداد ارقام این عدد بیشتر از ۲ باشد این عدد به فرم $۱\circ\circ\circ q+۱۱۱$ خواهد بود که نهایتاً به شکل $۸k+۷$ در می‌آید که تناقض است.

عدد ۱۱ نیز مربع کامل نیست.

۱۲۹) گزینهٔ «ب» صحیح است.

با جمع زدن طرفین معادله‌ها خواهیم داشت:

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=\circ$$

یعنی مجموع سه عدد که بزرگتر یا مساوی صفر هستند، صفر شده است. پس همگی صفر هستند و تنها جواب مسأله عبارت است: $(x,y,z)=(۰,۰,۰)$.

۱۳۰) گزینهٔ «د» است.

مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ را می‌توان به صورت $\{\{۱,۴\},\{۲,۳\}\}$ افراز کرد که درآن هیچ یک از دو مجموعه، شامل دو عدد و تفاضل آن دو عدد و تفاضل آن دو عدد نیست. پس $n\geq ۵$. ثابت می کنیم $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را به هر شکل به دو مجموعه افراز کنیم یکی از آن هاشامل دو عدد و تفاضل آن دو عدد خواهد بود. مجموعه‌ای که شامل یک است A می‌نامیم. بنابراین عدد ۲ در مجموعهٔ دوم است که آن را B می‌نامیم. چون $۲\in B$ پس $۴\in A$ (چون ۴=۲+۲) چون ۱و۴ در A هستند پس $۳\in B$. (چون $۴=۳+۱$). حال عدد ۵ چه در A باشد چه درB، دو عدد و تفاضل آن دو عدد دریک مجموعه وجود خواهند داشت.

۱۳۱) گزینه «ه» صحیح است.

$$
\begin{aligned}
&۴۹a+۷b+c\overset{۷}{\equiv}۲۸۶\Rightarrow c\overset{۷}{\equiv}۲۸۶\overset{۷}{\equiv}۶\\
&b,c\in\{۰,۱,۲,\dots,۹\}, a\in\{۱,۲,\dots,۹\}\\
&\Rightarrow c=۶\\
&\Rightarrow ۴۹a+۷b=۲۸۰\Rightarrow ۷a+b=۴۰\\
&۷a+b\overset{۷}{\equiv}۴۰\Rightarrow b\overset{۷}{\equiv}۵\Rightarrow b=۵\Rightarrow a=۵\\
&\Rightarrow M=۵۵۶\overset{۶}{\equiv}۴
\end{aligned}
$$

۱۳۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.

شش عدد دو رقمی عبارتنداز $\overline{rq},\overline{rp},\overline{qr},\overline{qp},\overline{pr},\overline{pq}$.

پس مجموع آن ها برابر است با:

$$
\begin{aligned}
S&=۱۰p+q+۱۰p+r+\dots+۱۰r+q=۲۰(p+q+r)+۲(p+q+r)\\
&=۲۲(p+q+r)=۴۸۴\Rightarrow p+q+r=۲۲
\end{aligned}
$$

در بین گزینه‌ها، تنها درگزینهٔ «ج» جمع ارقام برابر ۲۲ می‌باشد.

۱۳۳) گزینه «ج» صحیح است.

با توجه به این که $۳^۶<۱۳۸۴<۲\times۳^۶$، بنابراین x,y,z برابر ۱ یا ۲ یا ۳ هستند و همچنین حداکثر یکی از آن ها برابر با ۳ خواهد بود. با امتحان و بررسی حالات مختلف، تنها ۷ عدد از مجموعهٔ مذکور را می‌توان به فرم $x^۶+y^۶+z^۶$ نوشت که به این صورت خواهند بود:

$$(x,y,z)\in\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۱,۳),(۱,۲,۲),(۱,۲,۳),(۲,۲,۲),(۲,۲,۳)\}$$

۱۳۴) گزینه «د» صحیح است.

$$۳ = a^۴ + b^۴ + c^۴ = a^۲ + b^۲ + c^۲ \Rightarrow (a^۲ - ۱)^۲ + (b^۲ - ۱)^۲ + (c^۲ - ۱)^۲$$
$$= a^۴ + b^۴ + c^۴ - ۲(a^۲ + b^۲ + c^۲) + ۳ = ۳ - ۶ + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ - ۱ = ۰ \\ b^۲ - ۱ = ۰ \\ c^۲ - ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow a, b, c \in \{۱, -۱\}$$

۱۳۵) گزینهٔ «الف» صحیح است.

$$((x - \frac{۱}{۴}) - \sqrt{x - \frac{۱}{۴}} + \frac{۱}{۴}) + ((y - \frac{۱}{۴}) - \sqrt{y - \frac{۱}{۴}} + \frac{۱}{۴}) + ((z - \frac{۱}{۴}) - \sqrt{z - \frac{۱}{۴}} + \frac{۱}{۴}) = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x - \frac{۱}{۴}} - \frac{۱}{۲})^۲ + (\sqrt{y - \frac{۱}{۴}} - \frac{۱}{۲})^۲ + (\sqrt{z - \frac{۱}{۴}} - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - \frac{۱}{۴}} = \sqrt{y - \frac{۱}{۴}} = \sqrt{z - \frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = y = z = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۶) گزینهٔ «ج» صحیح است.

روش اول: مطابق با آخرین قضیهٔ فرما، معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ با شرط $n \geq ۳$،جواب طبیعی ندارد. بنابراین $n \leq ۲$ برای $n = ۱$ تساوی نادرست وبرای $n = ۲$، تساوی برقرار است. پس تنها جواب طبیعی مسأله $n = ۲$ می‌باشد.

روش دوم: طرفین تساوی را بر ۶۱^n تقسیم می‌کنیم:

$$(\frac{۱۱}{۶۱})^n + (\frac{۶۰}{۶۱})^n = ۱$$

اما اگر فرض کنیم $\sin\alpha = \frac{۱۱}{۶۱}$ $(۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲})$ آنگاه از رابطهٔ $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ نتیجه می‌شود: $\cos\alpha = \frac{۶۰}{۶۱}$ پس $n = ۲$ یک جواب معادله است. به ازای $n = ۱$ نیز، تساوی برقرار نیست.

حال فرض کنید $n > ۲$،در این صورت چون $\frac{۱۱}{۶۱}, \frac{۶۰}{۶۱} < ۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (\frac{۱۱}{۶۱})^n < (\frac{۱۱}{۶۱})^۲ \\ (\frac{۶۰}{۶۱})^n < (\frac{۶۰}{۶۱})^۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow (\frac{۱۱}{۶۱})^n + (\frac{۶۰}{۶۱})^n < (\frac{۱۱}{۶۱})^۲ + (\frac{۶۰}{۶۱})^۲ = ۱$$

که نشان می‌دهد مسأله برای $n > ۲$، جواب ندارد. پس تنها جواب مسأله $n = ۲$ می‌باشد.

۱۳۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.

می‌دانیم که باقیماندهٔ n بر ۹، برابر است با باقیماندهٔ مجموع ارقام n بر ۹. بنابراین: $n \overset{۹}{\equiv} d(n)$
به همین ترتیب خواهیم داشت $d(n) \overset{۹}{\equiv} d(d(n))$ و نهایتاً داریم: $n \overset{۹}{\equiv} d(n) \overset{۹}{\equiv} d(d(n))$
پس اگر طرفین معادلهٔ مسأله را به پیمانهٔ ۹ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$n + d(n) + d(d(n)) \overset{۹}{\equiv} ۳n \overset{۹}{\equiv} ۱۳۸۴^{۲۰۰۵} - ۲ \overset{۹}{\equiv} (-۲)^{۲۰۰۵} - ۲ \overset{۹}{\equiv} -۲ \times ۲^{۲۰۰۴} - ۲$$

اما می‌دانیم: $۲^{۶} \overset{۹}{\equiv} ۱$

بنابراین داریم: $(۲^{۶})^{۳۳۴} = ۲^{۲۰۰۴} \overset{۹}{\equiv} ۱$

بنابراین: $۱۳۸۴^{۲۰۰۵} - ۲ \overset{۹}{\equiv} ۵$

اما داشتیم: $۳n \overset{۹}{\equiv} ۱۳۸۴^{۲۰۰۵} - ۲ \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۳n \overset{۹}{\equiv} ۵$
که این امکان‌پذیر نیست. بنابراین معادله هیچ جوابی ندارد.

۱۳۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.

فرض می‌کنیم: $(۱۱a + ۲b, ۱۸a + ۵b) = d$

$$\left.\begin{array}{l} d|۱۱a + ۲b \\ d|۱۸a + ۵b \end{array}\right\} \Rightarrow d|(۱۸a + ۵b) - (۱۱a + ۲b) = ۷a + ۳b$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d|۷۷a + ۱۴b \\ d|۷۷a + ۳۳b \end{array}\right. \Rightarrow d|(۷۷a + ۳۳b) - (۷۷a + ۱۴b) = ۱۹b$$

$$\Rightarrow d|۱۹, d \neq ۱ \Rightarrow d = ۱۹$$

تذکر: از $d|۱۹b$ نمی‌توان نتیجه گرفت $d|b$، چون اگر $d|b$، بنابر $d|۱۱a + ۲b$ نتیجه می‌شود $d|a$ یعنی این که b, a مقسوم علیه مشترک بزرگتر از یک دارند که خلاف فرض مسأله است.

۱۳۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.

می‌دانیم ۱۳۷۸ عددی اول نیست. برای این که A بر !۱۳۷۸ بخش‌پذیر باشد، باید بر تمامی اعداد اول کوچکتر از ۱۳۷۸ بخش‌پذیر باشد. بزرگترین عدد اول کوچکتر از ۱۳۷۸، عدد ۱۳۷۳ می‌باشد. بنابراین کمترین مقدار ممکن برای n، ۱۳۷۳ می‌باشد.

۱۴۰) گزینهٔ «د» صحیح است.

می‌دانیم اگر عددی به فرم $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ باشد باقیماندهٔ این عدد بر ۷ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a \overset{7}{\equiv} \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \dots$$

پس اگر داشته باشیم $A_n = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ تا}}$ ، خواهیم داشت:

$$A_n \overset{7}{\equiv} \overline{111} - \overline{111} + \overline{111} - \dots$$

برای این که A_n مضرب ۷ باشد باید تعداد ارقام یک آن مضرب ۳ باشند چون ۱و یا ۱۱ مضرب ۷ نیستند. همچنین برای این که ۱۱۱ یکی در میان حذف شوند تعداد علامت های +و- باید برابر باشند پس n باید مضرب ۶ باشد. پس کافیست n مضرب ۶ باشد تا A_n مضربی از ۷ شود. پس کافی است $[\frac{1384}{6}]$ را محاسبه کنیم که برابر است با ۲۳۰.

۱۴۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.

فرض می‌کنیم عرض این نقطه p باشد.

$$3x^2 - x - 36 = (2x-9)(x+4) = p^2$$

با در نظر گرفتن تمامی حالات ممکن برای سمت راست معادله، با توجه به صحیح بودن x و p تنها حالات زیر به‌دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} 2x - 9 = 1 \\ x + 4 = p^2 \end{cases} \Rightarrow x = 5, p = 3$$

$$\begin{cases} 2x - 9 = p \\ x + 4 = p \end{cases} \Rightarrow x = 13, p = 17$$

۱۴۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.

روش اول:

$$\begin{aligned} &3^{1376} - 2^{1376} = (3^2)^{688} - (2^2)^{688} \\ &= ((3^2)^{344} + (2^2)^{344})((3^2)^{172} + (2^2)^{172}) \dots (3^2 + 2^2)(3+2)(3-2) \\ &= 13k \end{aligned}$$

روش دوم: طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$\begin{aligned} &(2, 13) = (3, 13) = 1 \\ &\Rightarrow 2^{12} \overset{13}{\equiv} 3^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \\ &1376 = 12 \times 114 + 8 \Rightarrow 3^{1376} - 2^{1376} \overset{13}{\equiv} (3^{12})^{114} \times 3^8 - (2^{12})^{114} \times 2^8 \overset{13}{\equiv} \\ &3^8 - 2^8 \overset{13}{\equiv} (3^4 + 2^4)(3^2 + 2^2)(3+2)(3-1) \overset{13}{\equiv} 0 \end{aligned}$$

۱۴۳) گزینهٔ «ه» صحیح است.

با توجه به اطلاعات مسأله داریم: $a_i \overset{9}{\equiv} a_{i+1}$ بدین ترتیب تمامی a_iها به پیمانهٔ ۹، دارای باقیماندهٔ یکسان خواهند بود. پس خواهیم داشت:

$$a_{1383} \overset{9}{\equiv} a_1 \overset{9}{\equiv} (-1)^{2005} \overset{9}{\equiv} -1 \overset{9}{\equiv} 8$$

که در بین گزینه‌ها، عدد ۸ چنین خاصیتی را دارد.

۱۴۴) گزینهٔ «الف» صحیح است.

فرض می‌کنیم عدد مطلوب برابر $\overline{abc}$ باشد. با توجه به شرط مسأله خواهیم داشت:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(a+b+c) \quad (1)$$
$$\Rightarrow 89a = b + 10c \quad (2)$$

اما می‌دانیم که $a, b, c \leq 9$ بنابراین ماکسیمم مقدار سمت راست تساوی (۱) برابر خواهد بود با $297 = 27 \times 11$. پس a مساوی ۱ یا ۲ خواهد بود.

حالت اول $a = 1$:

با جایگذاری $a = 1$ در تساوی (۲) داریم:

$$89 = b + 10c \Rightarrow 89 \overset{10}{\equiv} b + 10c \Rightarrow 9 \overset{10}{\equiv} b \Rightarrow b = 9, c = 8$$

پس $\overline{abc} = 198$.

حالت دوم $a = 2$:

$$89 \times 2 = 178 = b + 10c \Rightarrow 178 \overset{10}{\equiv} b + 10c$$
$$\Rightarrow 8 \overset{10}{\equiv} b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow c = 17 > 9$$

پس برای حالت دوم مسأله جوابی ندارد.

۱۴۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.

می‌دانیم از بین اعداد n و $n+1$، یکی زوج می‌باشد و تمام اعداد زوج غیر از ۲، مرکب می‌باشند پس $n = 1$ یا $n = 2$. اما به ازای $n = 1$، $n + 3$ اول نیست. پس تنها جواب قابل قبول برای مسأله $n = 2$ می‌باشد.

۱۴۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.

ابتدا عدد ۱۰۱ را بررسی می‌کنیم. به‌وضوح عدد ۱۰۰ یک مولد برای عدد ۱۰۱ می‌باشد.

از طرفی می‌دانیم مولد n، کوچکتر از n می‌باشد. پس اگر ۱۰۰ مولد دیگری داشته باشد این عدد باید دورقمی باشد. فرض می‌کنیم عدد $\overline{xy}$ مولد ۱۰۱ باشد؛ پس داریم:

$$\overline{xy} + x + y = 10x + y + x + y = 11x + 2y = 101$$

اما x و y رقم هستند پس $x + y \leq 18$. پس خواهیم داشت:

$$101 \leq \overline{xy} + 18 \Rightarrow \overline{xy} \geq 83 \Rightarrow x = 8 \text{ یا } x = 9$$
$$x = 8 \Rightarrow 88 + 2y = 101 \Rightarrow y \notin N$$
$$x = 9 \Rightarrow 99 + 2y = 101 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \overline{xy} = 91$$

پس مولدهای ۱۰۱ عبارتند از ۱۰۰ و ۹۱.
حال ۹۷ را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\overline{xy}$ مولد ۹۷ باشد. مطابق بالا خواهیم داشت:

$$۱۱x+۲y=۹۷$$
$$۹۷=\overline{xy}+x+y\le\overline{xy}+۱۸\Rightarrow\overline{xy}\ge ۷۹\Rightarrow x=۷\text{یا}۸\text{یا}۹$$
$$x=۷\Rightarrow ۷۷+۲y=۹۷\Rightarrow y\notin\{۰,۱,۲,\dots,۹\}$$
$$x=۸\Rightarrow ۸۸+۲y=۹۷\Rightarrow y\notin N$$
$$x=۹\Rightarrow ۹۹+۲y=۹۷\Rightarrow y\notin N$$

پس ۹۷ مولد ندارد.

۱۴۷) گزینهٔ «ب» صحیح است.
ابتدا بزرگترین توانی از ۲ را می‌یابیم که ۲^m مقسوم‌علیهی از (!۲۸) باشد:

$$m=[\frac{۲۸}{۲}]+[\frac{۲۸}{۴}]+[\frac{۲۸}{۸}]+[\frac{۲۸}{۱۶}]=۲۵$$

$$\Rightarrow ۲^{۲۵}|۲۸!\Rightarrow(۲^۳)^۸\times۲|۲۸!\Rightarrow ۸^۸|۲۸!$$

پس بیشترین مقدار برای n عدد ۸ می‌باشد.

۱۴۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.
یک عدد سه رقمی را به شکل $\overline{xyz}$ نشان می‌دهیم. چون $\overline{xyz}<۵۰۰$ بنابراین داریم:

$$x\in\{۱,۲,۳,۴\}\quad,\quad y,z\in\{۰,۱,۲,\dots,۹\}$$

$$\overline{xyz}-(x+y+z)=۱۰۰x+۱۰y+z-(x+y+z)=۹۹x+۹y=۹(۱۱x+y)$$

پس مسأله به این شکل تغییر می‌کند که به ازای شروط $x\in\{۱,۲,۳,۴\}$ و $y\in\{۰,۱,۲,\dots,۹\}$، $۱۱x+y$ چند مقدار مختلف را خواهد پذیرفت.
مسأله را به ازای x های مختلف بررسی می‌کنیم:

$$(۱)\ x=۱\Rightarrow ۱۱x+y=۱۱+y\in\{۱۱,۱۲,۱۳,\dots,۲۰\}=A$$
$$(۲)\ x=۲\Rightarrow ۱۱x+y=۲۲+y\in\{۲۲,۲۳,۲۴,\dots,۳۱\}=B$$
$$(۳)\ x=۱\Rightarrow ۱۱x+y=۳۳+y\in\{۳۳,۳۴,۳۵,\dots,۴۲\}=C$$
$$(۴)\ x=۱\Rightarrow ۱۱x+y=۴۴+y\in\{۴۴,۴۵,۴۶,\dots,۵۳\}=D$$

ملاحظه می‌شود که A و B و C و D هیچ اشتراکی با هم ندارند و هر کدام ۱۰ عضو دارند پس $۱۱x+y$ و نهایتاً $۹۹x+۹y$، ۴۰ مقدار متفاوت را می‌تواند بپذیرد.

۱۴۹) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$۲^۷\overset{۱۸}{\equiv}۲\Rightarrow ۲^{۱۳۷۷}\overset{۱۸}{\equiv}(۲^۷)^{۱۹۶}\times۲^۵\overset{۱۸}{\equiv}۲^{۱۹۶}\times۲^۵\overset{۱۸}{\equiv}۲^{۲۰۱}\overset{۱۸}{\equiv}$$

$$(\text{۲}^\text{۷})^\text{۲۸} \times \text{۲}^\text{۵} \overset{\text{۱۸}}{\equiv} \text{۲}^\text{۲۸} \times \text{۲}^\text{۵} \overset{\text{۱۸}}{\equiv} (\text{۲}^\text{۷})^\text{۴} \times \text{۲}^\text{۵} \overset{\text{۱۸}}{\equiv} \text{۲}^\text{۹} \overset{\text{۱۸}}{\equiv} \text{۲}^\text{۷} \times \text{۲}^\text{۲} \overset{\text{۱۸}}{\equiv} \text{۲}^\text{۳} = \text{۸}$$
$$\Rightarrow \text{۲}^\text{۱۳۷۷} \overset{\text{۱۸}}{\equiv} \text{۸} \Rightarrow \text{۲}^{(\text{۲}^\text{۱۳۷۷})} \overset{\text{۱۹}}{\equiv} \text{۲}^{\text{۱۸}k+\text{۸}} = (\text{۲}^\text{۱۸})^k \times \text{۲}^\text{۸}$$

اما طبق قضیهٔ کوچک فرما داریم:

$$\text{۲}^\text{۱۸} \overset{\text{۱۹}}{\equiv} \text{۱}$$

پس:

$$\text{۲}^{(\text{۲}^\text{۱۳۷۷})} \overset{\text{۱۹}}{\equiv} \text{۱}^k \times \text{۲}^\text{۸} \overset{\text{۱۹}}{\equiv} \text{۲}^\text{۸} \overset{\text{۱۹}}{\equiv} \text{۹}$$

۱۵۰) گزینهٔ «ه» صحیح است.
با توجه به شرط $x+y+z=\text{۵}$ و با توجه به مثبت بودن x و y و z و همچنین $x \neq \text{۰}$، مسأله را بر اساس مقادیر مختلف x حالت بندی می‌کنیم:

$$(\text{۱})\ x=\text{۵} \Rightarrow y=z=\text{۰} \quad , \quad \text{۵}^\text{۷}+\text{۰}+\text{۰} \neq \text{۷}k$$

$$(\text{۲})\ x=\text{۴} \Rightarrow y=\text{۱}, z=\text{۰} \text{ یا } y=\text{۰}, z=\text{۱} \Rightarrow \text{۴}^\text{۷}+\text{۱}+\text{۰} \overset{\text{۷}}{\equiv} (\text{۴}^\text{۶}) \times \text{۴}+\text{۱}$$
$$\overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۱} \times \text{۴} + \text{۱} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰}$$

$$(\text{۳})\ x=\text{۳} \Rightarrow \begin{cases} y=\text{۲}, z=\text{۰} \text{ یا } y=\text{۰}, z=\text{۲} \\ \quad \Rightarrow \text{۳}^\text{۷}+\text{۲}^\text{۷}+\text{۰} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۳}(\text{۳}^\text{۶})+\text{۲}(\text{۲}^\text{۶})+\text{۰} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۳}\times\text{۱}+\text{۲}\times\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۵} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \\ y=\text{۱}, z=\text{۱} \Rightarrow \text{۳}^\text{۷}+\text{۱}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۳} \times (\text{۳}^\text{۶})+\text{۱}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۳}\times\text{۱}+\text{۲} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \end{cases}$$

$$(\text{۴})\ x=\text{۲} \Rightarrow \begin{cases} y=\text{۳}, z=\text{۰} \text{ یا } y=\text{۰}, z=\text{۳} \Rightarrow \text{۲}^\text{۷}+\text{۳}^\text{۷} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۲}+\text{۳} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \\ y=\text{۲}, z=\text{۱} \text{ یا } y=\text{۱}, z=\text{۲} \Rightarrow \text{۲}^\text{۷}+\text{۲}^\text{۷}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۲}+\text{۲}+\text{۲} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \end{cases}$$

$$(\text{۵})\ x=\text{۱} \Rightarrow \begin{cases} y=\text{۴}, z=\text{۰} \text{ یا } y=\text{۰}, z=\text{۴} \Rightarrow \text{۴}^\text{۷}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۴}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \\ y=\text{۳}, z=\text{۰} \text{ یا } y=\text{۰}, z=\text{۳} \Rightarrow \text{۳}^\text{۷}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۳}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \\ y=\text{۲}, z=\text{۲} \Rightarrow \text{۲}^\text{۷}+\text{۲}^\text{۷}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\equiv} \text{۲}+\text{۲}+\text{۱} \overset{\text{۷}}{\not\equiv} \text{۰} \end{cases}$$

پس مسأله هیچ جوابی ندارد.

۱۵۱) گزینهٔ «د» صحیح است.
با استقرای ساده مشخص می‌شود که $a_n = \frac{n+\text{۱}}{n}$.
به ازای $n=\text{۱}$، حکم استقرا برقرار است. با فرض برقراری حکم برای n، خواهیم داشت:

$$a_{n+\text{۱}} . a_n + \text{۱} = \text{۲} a_n \Rightarrow a_{n+\text{۱}} \times \frac{n+\text{۱}}{n} + \text{۱} = \text{۲}\left(\frac{n+\text{۱}}{n}\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+\text{۱}} = \frac{\frac{\text{۲}n+\text{۲}}{n} - \text{۱}}{\frac{n+\text{۱}}{n}} = \frac{n+\text{۲}}{n+\text{۱}}$$

۱۵۲) گزینهٔ «د» صحیح است.

فرض می‌کنیم عدد x را در ۱۴۷۰ ضرب کرده و عدد حاصل مربع کامل باشد:

$$۱۴۷۰ \times x = k^۲ \Rightarrow ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷^۲ \times x = k^۲ \Rightarrow x = ۳۰m^۲$$

$$۲۹۱ \leq x \leq\Rightarrow ۹۴۱۴ \Rightarrow ۲۹۱ \leq ۳۰m^۲ \leq ۹۴۱۴$$

$$\Rightarrow ۴ \leq m \leq ۱۷$$

پس m می‌تواند چهارده مقدار متفاوت را بپذیرد، پس x نیز می‌تواند چهارده مقدار متمایز را در مجموعهٔ A اختیار کند.

۱۵۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.

فرض می‌کنیم عدد حاصل A باشد:

$$A = (۲ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times ۹۷) + ۳۶ = ۲ \times ۳(۵ \times ۷ \times \cdots \times ۹۷ + ۲ \times ۳) = ۶B$$

فرض می‌کنیم عدد B، دارای مقسوم‌علیه‌ای کوچکتر از ۱۰۰ باشد. در این صورت این مقسوم‌علیه دارای حداقل یک عامل اول خواهد بود. این عامل اول را P می‌نامیم. اگر P برابر با ۲ یا ۳ باشد در این صورت چون $P|B$ بنابراین نتیجه می‌شود که $P|۵ \times ۷ \times \cdots \times ۹۷$، اما می‌دانیم که $P = ۲$ یا $P = ۳$ که این ممکن نیست.

اگر هم P عددی از بین اعداد اول ۵ تا ۹۷ باشد در این صورت چون $P|B$، بنابراین $P|۲ \times ۳$ که باز هم تناقض است. پس P مقسوم‌علیه‌ای کوچکتر از ۱۰۰ ندارد. پس باید مقسوم‌علیه‌های کوچکتر از ۱۰۰ در عدد A را در ضریب B، یعنی شش یافت. پس مقدار مقسوم‌علیه‌های طبیعی A در مجموعهٔ اعداد کوچکتر از ۱۰۰، همان تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۶ می‌باشد یعنی ۴ تا.

۱۵۴) گزینهٔ «ه» صحیح است.

می‌دانیم:

$$۱۰۸ = ۲^۲ \times ۳^۳ \ , \ ۴۵ = ۳^۲ \times ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۸, ۴۵) = ۳^۲$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

= تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۰۸ + تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت ۴۵

− تعداد مقسوم‌علیه‌های (۱۰۸, ۴۵)

$$= (۲ + ۱)(۳ + ۱) + (۲ + ۱)(۱ + ۱) - (۲ + ۱) = ۱۵$$

۱۵۵) گزینهٔ «الف» صحیح است.

$$(a,b) = ۲۲ \Rightarrow a = ۲۲a' \ , \ b = ۲۲b' \ , \ (a',b') = ۱$$

$$\Rightarrow ۶a + ۱۲b = ۶(۲۲a') + ۱۲(۲۲b') = ۶ \times ۲۲(a' + ۲b')$$

$$\Rightarrow ۶a + ۱۲b = ۱۳۲(a' + ۲b')$$

پس $۶a + ۱۲b$ باید مضرب ۱۳۲ باشد و در بین گزینه‌ها فقط ۳۹۶ چنین خاصیتی را دارد.

۱۵۶) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$(a,b) = ۹ \Rightarrow a = ۹c, b = ۹d, c:$ فرد

$\Rightarrow (a^۲, ۱۶b) = (۸۱c^۲, ۱۶ \times ۹d) = ۹(۹c^۲, ۱۶d)$

از آن‌جا که $۹c^۲$ عددی فرد است پس نمی‌تواند مقسوم‌علیه زوج داشته باشد یعنی $(۹c^۲, ۱۶d)$ باید عددی فرد باشد پس $(a^۲, ۱۶b)$ نمی‌تواند عددی زوج باشد. پس تنها می‌تواند مقادیر ۹ و ۲۷ و ۴۵ را از بین مقادیر داده شده بپذیرد.

۱۵۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.
می‌دانیم که اگر n عددی فرد و طبیعی و همچنین a نیز طبیعی باشد، خواهیم داشت:

$$a^n + ۱^n = (a+۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + \ldots + ۱^{n-۱})$$

در این صورت $a^n + ۱^n$ عددی مرکب خواهد بود. پس n، ۱۷ و ۱۹ نمی‌تواند باشد. همچنین داریم:

$$۲^{۱۸} + ۱ = ۲^{۱۸} + ۱^{۱۸} = (۲^۶)^۳ + (۱^۶)^۳ = (۲^۶ + ۱)(۲^{۱۲} - ۲^۶ + ۱)$$

$$۲^{۲۰} + ۱ = ۲^{۲۰} + ۱^{۲۰} = (۲^۴)^۵ + (۱^۴)^۵ = (۲^۴ + ۱)(۲^{۱۶} - ۲^{۱۲} + ۲^۸ - ۲^۴ + ۱)$$

پس $۲^{۱۸} + ۱$ و $۲^{۲۰} + ۱$ نیز اعدادی مرکب هستند.

۱۵۸) گزینهٔ «د» صحیح است.
طبق فرضیات مسأله و همچنین الگوریتم تقسیم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۴q + ۳ \\ a = ۶q' + ۳ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times ۶ \\ \times ۴ \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۶a = ۲۴q + ۱۸ \\ ۴a = ۲۴q' + ۱۲ \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow ۶a - ۴a = ۲۴(q - q') + ۶ \Rightarrow ۲a = ۲۴(q - q') + ۶$$

$$\Rightarrow a = ۱۲(q - q') + ۳ = ۱۲k + ۳ \Rightarrow a - ۳ = ۱۲k$$

پس باید $a - ۳$ بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد.

۱۵۹) گزینهٔ «ج» صحیح است.
طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow ۰ \leq r < b$$

بنابر فرضیات مسأله خواهیم داشت:

$$a = ۹۳q + ۲q^۲ \Rightarrow ۰ \leq ۲q^۲ < ۹۳$$

اما $q \neq ۰$، چون در این صورت $a = ۰$ که عددی مثبت نیست، پس $۰ < ۲q^۲ < ۹۳$ و می‌دانیم q عددی صحیح است پس نتیجه می‌شود که $۱ \leq q \leq ۶$.
اما می‌دانیم a در مجموعهٔ اعداد طبیعی بر حسب q، صعودی است، پس a به ازای $q = ۱$،

حداقل و به ازای $q = ۶$ حداکثر مقدار خود را دارد. تفاضل این دو مقدار برابر است با:

$$۹۳ \times ۶ + ۲ \times (۶)^۲ - ۹۳ \times ۱ - ۲ \times ۱^۲ = ۵۳۵$$

۱۶۰) گزینهٔ «ه» صحیح است.
روش اول: با انتخاب $a = ۱۱$ پاسخ مسأله کاملاً واضح خواهد بود.
روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۳q + ۲ \\ a = ۸q' + ۳ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \times ۸ \\ \times ۳ \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ۸a = ۲۴q + ۱۶ \\ ۳a = ۲۴q' + ۹ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (۸a - ۳a) = ۲۴(q - q') + ۷$$
$$\Rightarrow ۵a = ۲۴k + ۷ \Rightarrow ۵a \overset{۶}{\equiv} ۲۴k + ۷ \Rightarrow -a \overset{۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} ۵$$

۱۶۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.
روش اول: فرض کنید تعداد تمبرهای ۵ تومانی، x تا و تعداد تمبرهای ۸ تومانی y تا باشد:

$$۱۵۳ = ۵x + ۸y \quad (۱)$$
$$\Rightarrow ۱۵۳ \overset{۵}{\equiv} ۵x + ۸y \Rightarrow ۳ \overset{۵}{\equiv} ۳y \;,\; (۳,۵) = ۱ \Rightarrow ۱ \overset{۵}{\equiv} y$$
$$۱۵۳ \overset{۸}{\equiv} ۵x + ۸y \Rightarrow ۱ \overset{۸}{\equiv} ۵x \Rightarrow ۵x \overset{۸}{\equiv} ۲۵ \Rightarrow x \overset{۸}{\equiv} ۵$$
$$y \overset{۵}{\equiv} ۱ \;,\; ۸y \leq ۱۵۳ \Rightarrow y \in \{۱, ۶, ۱۱, ۱۶\}$$

با توجه به شرایطی که برای x و y به‌دست آوردیم، (x,y) هایی که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند عبارتند از:

$$(x,y) \in \{(۲۹,۱), (۲۱,۶), (۱۳,۱۱), (۵,۱۶)\}$$

که در بین این چهار زوج مرتب، $(۵,۱۶)$ دارای کمترین مجموع مؤلفه‌ها هستند.

روش دوم: خواستهٔ مسأله این است که $x + y$ حداقل مقدار را داشته باشد:

$$۱۵۳ = ۵x + ۸y = ۵(x+y) + ۳y$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{۱۵۳ - ۳y}{۵} = ۳۰ + \frac{۳(۱-y)}{۵} \;,\; y \in \{۱, ۶, ۱۱, ۱۶\}$$

$$\Rightarrow \min(x+y) : y = ۱۶ \Rightarrow (x+y) = ۳۰ + \frac{۳ \times (-۱۵)}{۵} = ۲۱$$

۱۶۲) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$۱۳ | ۷x + ۳y \Rightarrow ۱۳ | ۱۴x + ۶y \;,\; ۱۳ | ۱۳x$$

$$\Rightarrow 13|(14x+6y)-13x = x+6y$$
$$\Rightarrow 13|2x+12y \Rightarrow m = 12$$

۱۶۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} n+7|n(n+7) = n^2+7n \\ n+7|n^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow n+7|(n^2+7n)-(n^2+5) = 7n-5$$

$$\left.\begin{array}{l} n+7|7n-5 \\ n+7|7(n+7) \end{array}\right\} \Rightarrow n+7|(7n+49)-(7n-5) = 54$$

پس $n+7$ باید مقسوم‌علیه ۵۴ باشد اما با توجه به مثبت بودن n، تنها چهار حالت قابل قبول است که در آن‌ها n برابر یکی از مقادیر ۲ یا ۱۱ یا ۲۰ یا ۴۷ می‌باشد.

۱۶۴) گزینهٔ «د» صحیح است.
از آن‌جا که $18 = 2 \times 3^2$، پس به ازای $n \geq 6$ عدد $n!$ بر ۱۸ بخش‌پذیر خواهد بود. پس باید باقیماندهٔ عدد $5!+4!+3!+2!+1!$ بر ۱۸ محاسبه شود که برابر است با ۹.

۱۶۵) گزینهٔ «الف» صحیح است.
اگر فرض کنیم $[a,b]=k$, $(a,b)=d$ آنگاه $a=a'd$, $b=b'd$ که در آن $(a',b')=1$.
اما می‌دانیم $[a,b](a,b)=ab$، بنابراین:

$$k \times d = ab = a'b'd^2 \Rightarrow k = a'b'd$$
$$k = a'b'd = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a'+b')d$$
$$\Rightarrow 2a'b' = a'+b'$$
$$\Rightarrow a'|a'+b' \;\;,\;\; a'|a' \Rightarrow a'|b'$$

به همین ترتیب نتیجه می‌شود $b'|a'$ یعنی $a'=b'$. اما می‌دانستیم $(a',b')=1$ پس $a'=b'=1$. یعنی $a=b=d$. بنابراین تفاضل a و b برابر صفر خواهد بود.

۱۶۶) گزینهٔ «ج» صحیح است.
می‌دانیم اگر m و n اعدادی طبیعی باشند و m مقسوم‌علیهی از n باشد آنگاه $m \leq n$. پس اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n برابر با n باشند پس بایستی تمام اعداد $1, 2, \ldots, n$ مقسوم‌علیه‌های n باشند. اما می‌دانیم که برای $n \geq 1$، $(n, n-1) = 1$ و تنها اعدادی که در شرایط مسأله صدق می‌کنند عبارتند از $n=1$ یا $n=2$.

۱۶۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.
می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{l} d|\;\; 8a+5b \\ d|\;\; 5a+3b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d|\;\; 40a+25b \\ d|\;\; 40a+24b \end{array}\right\} \Rightarrow d|(40a+25b)-(40a+24b) = b$$

چون $d|b$ ، $d|5a+3b$ نتیجه می‌شود که $d|a$.
یعنی d مقسوم علیه مشترک a,b می‌باشد. پس $d=1$

۱۶۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.
به وضوح، $p=2$ جواب مسأله نمی‌باشد.
پس p عددی فرد خواهد بود و در نتیجه $(2,p)=1$.
اما طبق قضیهٔ کوچک فرما می‌دانیم:

$$2^p \overset{p}{\equiv} 2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$2^p+1 \overset{p}{\equiv} 0 \overset{p}{\equiv} 2^p-2$$

در نتیجه $3 \overset{p}{\equiv} 0$ که معادل است با این که $p=3$.
با جایگذاری $p=3$ نتیجه می‌شود تنها جواب مسأله $p=3$ می‌باشد.

۱۶۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.
معادلهٔ فوق را به پیمانهٔ ۳ در نظر بگیرید.

$$2x^2 \overset{3}{\equiv} 3y^2+7 \overset{3}{\equiv} 4$$

که از معادلهٔ هم‌نهشتی بالا نتیجه می‌شود که $x^2 \overset{3}{\equiv} 2$.
اما مربع هر عدد طبیعی به پیمانهٔ ۳ یا هم‌نهشت صفر است یا هم‌نهشت یک.
پس معادلهٔ فوق در مجموعهٔ اعداد طبیعی جوابی ندارد.

۱۷۰) پاسخ صحیح گزینهٔ «ج» می‌باشد.
حاصلضرب عددهای $c_i=a_i-b_i$ $(i=1,2,\ldots,1377)$ عددی زوج است زیرا حداقل یکی از آن‌ها زوج است. در واقع اگر همهٔ عددهای c_i فرد باشد، آن وقت مجموع آن‌ها هم عددی فرد می‌شود در حالی‌که داریم:

$$c_1+c_2+\ldots+c_{1377}=(a_1-b_1)+\ldots+(a_{1377}-b_{1377})$$
$$=(a_1+\ldots+a_{1377})-(b_1+\ldots+b_{1377})=0$$

۱۷۱) پاسخ صحیح گزینهٔ «الف» می‌باشد.
طبق قضیهٔ ویلسون داریم:

$$1)\ 16! \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 16!+86 \overset{17}{\equiv} 85 \overset{17}{\equiv} 0$$
$$2)\ 18! \overset{19}{\equiv} -1 \Rightarrow 18\times 17\times 16! \overset{19}{\equiv} -1 \Rightarrow (-1)(-2)\times 16! \overset{19}{\equiv} -1$$
$$\Rightarrow 2\times 16! \overset{19}{\equiv} -1 \overset{19}{\equiv} 18 \Rightarrow 16! \overset{19}{\equiv} 9 \Rightarrow 16!+86 \overset{19}{\equiv} 95 \overset{19}{\equiv} 0$$
$$(1),(2) \Rightarrow 16!+86 \overset{17\times 19}{\equiv} 0 \Rightarrow 16!+86 \overset{323}{\equiv} 0$$

۱۷۲) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c$$

$$\Rightarrow \quad \overline{abc} \overset{۷}{\equiv} ۱۰۰a + ۱۰b + c \overset{۷}{\equiv} ۲a + ۳b + c$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم: $a \overset{۱۴}{\equiv} ۲b - ۴c$ که نتیجه می‌شود $a \overset{۷}{\equiv} ۲b - ۴c$ پس خواهیم داشت:

$$\overline{abc} \overset{۷}{\equiv} ۲a + ۳b + c \overset{۷}{\equiv} ۲(۲b - ۴c) + ۳b + c \overset{۷}{\equiv} ۷b - ۷c \overset{۷}{\equiv} ۰$$

۱۷۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$۳۸۹ = ad + r \implies d|۳۸۹ - r \qquad (۱)$$

$$۵۹۱ = bd + r \implies d|۵۹۱ - r \qquad (۲)$$

$$۸۹۴ = cd + r \implies d|۸۹۴ - r \qquad (۳)$$

از کم کردن طرف راست روابط (۱) و (۲) و همچنین (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$d|۲۰۲, d|۳۰۳ \Rightarrow d|۳۰۳ - ۲۰۲ \Rightarrow d|۱۰۱$$

از آن‌جا که ۱۰۱ عددی اول است و با توجه به فرض مسأله که $d \neq ۱$، نتیجه می‌شود: $d = ۱۰۱$.

$$۳۸۹ = ۱۰۱a + r \ , \quad ۰ \leq r < ۱۰۱$$

$$\Rightarrow a = ۳ \quad \Rightarrow r = ۸۶$$

$$\Rightarrow r + d = ۸۶ + ۱۰۱ = ۱۸۷$$

۱۷۴) گزینهٔ «الف» صحیح است.

$$۲x^۲y^۲ + ۳y^۲ - ۱۰x^۲ = ۱۵۵ \Rightarrow ۲x^۲(y^۲ - ۵) + ۳(y^۲ - ۵) = ۱۴۰$$

$$\Rightarrow (۲x^۲ + ۳)(y^۲ - ۵) = ۱۴۰ = ۴ \times ۵ \times ۷$$

از طرفی چون $۲x^۲ + ۳$، عددی فرد می‌باشد باید یکی از مقادیر ۱، ۵، ۷ یا ۳۵ را داشته باشد.

از آن‌جا که x باید عددی صحیح باشد، پس $۲x^۲ + ۳$ تنها می‌تواند مساوی ۵ یا ۳۵ باشد.

$$۲x^۲ + ۳ = ۵ \quad \Rightarrow \quad y^۲ - ۵ = ۲۸ \quad \Rightarrow \quad y^۲ = ۳۳$$

در این حالت، y عدد طبیعی نمی‌شود پس x نمی‌تواند ۱ باشد.

$$۲x^۲ + ۳ = ۳۵ \quad \Rightarrow \quad y^۲ - ۵ = ۴ \quad \Rightarrow \quad y = ۳$$

پس تنها جواب مسأله $(۴, ۳)$ می‌باشد.

۱۷۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.

با کم کردن دو معادله از یکدیگر به‌دست می‌آید:

$$y^۲ - y + x - x^۲ = ۲۰$$

$$\Rightarrow \quad (y - x)(y + x - ۱) = ۴ \times ۵$$

از طرفی بین دو عدد $y - x$ و $y + x - ۱$، حتماً یکی زوج و دیگری فرد است. پس این دو عدد یعنی $(y + x - ۱, y - x)$ می‌توانند مقادیر $(۱, ۲۰)$ و $(-۲۰, -۱)$ و $(۲۰, ۱)$ و $(-۱, -۲۰)$ و $(۴, ۵)$ و $(-۵, -۴)$ و $(۵, ۴)$ و $(-۴, -۵)$ را بپذیرند که همگی دارای جواب‌های صحیح برای x و y خواهند بود. بدین ترتیب مسأله دارای هشت جواب صحیح و متمایز خواهد بود.

۱۷۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.

می‌دانیم برای هر عدد طبیعی m، $m^۲ \overset{۴}{\equiv} ۰$ یا ۱ فرض می‌کنیم f_m را بتوانیم به صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی بنویسیم یعنی $f_m = x^۲ + y^۲ \quad (m \geq ۲)$

$$f_m = x^۲ + y^۲ \overset{۴}{\equiv} (۱ \text{ یا } ۰) + (۰ \text{ یا } ۱) \overset{۴}{\equiv} ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲$$

اما می‌دانیم:

$$f_m \overset{۴}{\equiv} ۹۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \neq ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۰$$

برای $m = ۱$ نیز، کاملاً واضح است هیچ x و y ای موجود نیستند.

۱۷۷) گزینهٔ «د» صحیح است.

برای $n \geq ۴$، باقیماندهٔ $۴^{n-۱}$ بر ۴ صفر خواهد بود اما باقیماندهٔ سمت چپ تساوی به ۴، برابر با ۲ خواهد بود. پس $n \leq ۳$.

با امتحان کردن مقادیر $n = ۱, ۲, ۳$، مشاهده می‌شود که فقط $n = ۳$ در معادله صدق می‌کند.

۱۷۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.
به سادگی ملاحظه می‌شود که تمامی a_i ها در پیمانهٔ ۳ باقیماندهٔ ۲ دارند. با استقرایی ساده خواهیم داشت:

$$a_n \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow a_{n-۱} \overset{۳}{\equiv} ۲a_n + ۴ \overset{۳}{\equiv} ۲ \times ۲ + ۴ \overset{۳}{\equiv} ۸ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow a_{n+۱} \overset{۳}{\equiv} ۲$$

همچنین می‌دانیم $a_۱ \overset{۳}{\equiv} ۲$. پس تنها گزینه‌ای که به پیمانهٔ ۳ باقیمانده‌ای برابر ۲ دارد، گزینه «ه» خواهد بود.

۱۷۹) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$x = a^۲ + ۳b^۲, y = m^۲ + ۳n^۲$$

$$xy = (a^۲ + ۳b^۲)(m^۲ + ۳n^۲) = a^۲m^۲ + ۹b^۲n^۲ + ۳b^۲m^۲ + ۳a^۲n^۲$$

$$= a^۲m^۲ + ۹b^۲n^۲ + ٦ambn + ۳b^۲m^۲ + ۳a^۲n^۲ - ٦ambn$$

$$= (am + ۳bn)^۲ + ۳(bm - an)^۲ = A^۲ + ۳B^۲$$

در بین گزینه‌ها، فقط ۴۹ چنین خاصیتی را دارد که در آن $A = ۱$ و $B = ۴$.

۱۸۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.
می‌دانیم اگر n عددی اول باشد و $n \geq ۳$، می‌توان آن را به‌صورت $٦k + ۱$ یا $٦k - ۱$ نمایش داد.
همچنین اگر $n > ۳$ و عددی اول باشد، $n + ۱$ عددی زوج خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$n = ٦k + ۱ : n^{n+۱} + ۲ = (٦k + ۱)^{٦k+۲} + ۲ \overset{۳}{\equiv} ۱ + ۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$n = ٦k - ۱ : n^{n+۱} + ۲ = (٦k - ۱)^{٦k} + ۲ \overset{۳}{\equiv} (-۱)^{٦k} + ۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

یعنی برای $n > ۳$، اگر n عددی اول باشد $n^{n+۱} + ۲$ عددی مرکب خواهد بود.

$$n = ۲ \Rightarrow n^{n+۱} + ۲ = ۱۰ \quad : \quad \text{مرکب}$$

$$n = ۳ \Rightarrow n^{n+۱} + ۲ = ۸۳$$: اول

۱۸۱) گزینهٔ «ه» صحیح است.
جز صحیح دو عدد $\frac{a}{۱۳۷۷}$ و $\frac{a+t}{۱۳۷۷}$ در صورتی که $t \geq ۱۳۷۷$، حتماً متفاوت خواهد بود.
پس برای یافتن جواب مسأله باید نامساوی زیر را حل کنیم:
$$(t+۱)^۳ - t^۳ \geq ۱۳۷۷$$

$$\Rightarrow ۳t^۲ + ۳t + ۱ \geq ۱۳۷۷ \Rightarrow t > ۲۰$$

یعنی از جملهٔ $[\frac{۲۱^۲}{۱۳۷۷}]$ به بعد، تمامی اعضای دنباله متفاوت خواهند بود که تعدادشان ۱۳۵۷ می‌باشد.
بین ۲۰ جملهٔ اول دنباله نیز تنها ۶ مقدار متمایز ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ تولید می‌شوند. پس تعداد کل اعضای متمایز دنباله برابر است با: ۱۳۵۷+۶ یعنی ۱۳۶۳.

۱۸۲) گزینهٔ «ب» صحیح است.
با حل معادله خواهیم داشت:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^۲ - ۴a}}{۲}$$

برای این‌که x عددی صحیح باشد و چون a عددی صحیح است، باید مبین این معادلهٔ درجه دوم یعنی $a^۲ - ۴a$، مربع کامل باشد.

$$a^۲ - ۴a = m^۲ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = m^۲ + ۴$$

$$(a-۲)^۲ = m^۲ + ۴ \Rightarrow (a-۲-m)(a-۲+m) = ۴$$

همچنین دو عدد $a - ۲ + m$ و $a - ۲ - m$ به لحاظ زوجیت یکسان هستند. چون تفاوت آن‌ها $۲m$ می‌باشد، و چون $a - ۲ + m$ و $a - ۲ - m$ هر دو عدد صحیح هستند تنها باید دو حالت را در نظر گرفت:

$$\begin{cases} a - ۲ - m = ۲ \\ a - ۲ + m = ۲ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a - ۲ - m = -۲ \\ a - ۲ + m = -۲ \end{cases}$$

که با حل این معادلات a برابر ۰ یا ۴ خواهد بود که با جایگذاری در معادلهٔ x بر حسب a، x نیز عدد صحیح خواهد شد.

۱۸۳) گزینهٔ «ه» صحیح است.
واضح است که a عددی صحیح است چون به‌صورت مجموع دو عدد صحیح می‌باشد.
حال فرض می‌کنیم $a = ۱۲k + r$ که در آن k و r اعداد صحیح هستند و $۰ \le r \le ۱۱$.
با قرار دادن a در معادله به‌دست می‌آید:

$$[۴k + \frac{r}{۳}] + [۹k + \frac{۳r}{۴}] = ۱۲k + r$$

$$\Rightarrow \quad ۱۳k + [\frac{r}{۳}] + [\frac{۳r}{۴}] = ۱۲k + r$$

$$\Rightarrow \quad k = r - [\frac{r}{۳}] - [\frac{۳r}{۴}]$$

با جایگذاری مقادیر مجاز r یعنی $۰ \le r \le ۱۱$، مقادیر مختلف a به‌دست می‌آید:

$$a \in \{۰, ۳, ۴, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۷\}$$

۱۸۴) گزینهٔ «ج» صحیح است.
فرض کنید $a \ge b \ge c$ در شرط مسأله صدق کنند. $a^۲ - ۱$ بر b بخش‌پذیر است پس b, a نسبت به یکدیگر اول‌اند. همچنین $c^۲ - ۱$ بر b, a بخش‌پذیر است پس بر ab نیز بخش‌پذیر است. در نتیجه $c^۲ - ۱ \ge ab$.
ولی $b \ge c, a \ge c$ پس $ab \ge c^۲$ و این تناقض است.

۱۸۵) گزینه «ب» صحیح است.
روش اول: با جایگذاری $n = ۳, n = ۲$، جواب مسأله به‌دست می‌آید.
روش دوم: برای $n = ۲$، جواب $\frac{۱}{۲}$ است. حالت کلی را با استقراروی n ثابت می‌کنیم. فرض کنید مسأله برای $n - ۱$ برقرار باشد. در حالت بعدی یعنی n، کسرهایی که جدید اضافه می‌شود آن‌هایی هستند که درآن‌ها $b = n$ و همچنین a نسبت به n اول است و کسرهایی که حذف می‌شوند آن‌هایی هستند که $a + b = n$. حال توجه شود که کسرهای اضافه شده $\frac{۱}{an}, \frac{۱}{bn}$، حذف کسر $\frac{۱}{ab}$ را خنثی می‌کنند چون $\frac{۱}{an} + \frac{۱}{bn} = \frac{a+b}{abn} = \frac{n}{abn} = \frac{۱}{ab}$ بنابراین مجموع تغییر نخواهد کرد وهمان $\frac{۱}{۲}$ باقی خواهد ماند.

۱۸۶) گزینه «د» صحیح است.
با اضافه و کم کردن دو عبارت $۲x^۲y^۲, ۲z^۲$ به سمت چپ معادله خواهیم داشت:

$$(x^۴ + y^۴ - ۲x^۲y^۲) + (z^۴ - ۲z^۲ + ۱) + ۲(x^۲y^۲ + z^۲ - ۲xyz) = ۰$$

$$\Rightarrow (x^۲ - y^۲)^۲ + (z^۲ - ۱)^۲ + ۲(xy - z)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ = y^۲ \\ z^۲ = ۱ \\ xy = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \pm ۱ \\ x = \pm y \end{cases} \Rightarrow \pm x^۲ = z \Rightarrow x = \pm ۱$$

$$\Rightarrow (x, y, z) \in \{(۱, ۱, ۱), (۱, -۱, -۱), (-۱, -۱, +۱), (-۱, ۱, -۱)\}$$

۱۸۷) گزینهٔ «ه» صحیح است.

روش اول: در نظر می‌گیریم $y = ۲n, x = ۲n^۲$ که در آن $n \in Z$.
خواهیم داشت:

$$x^۲ + y^۲ + ۱ = ۴n^۴ + ۴n^۲ + ۱ = (۲n^۲ + ۱)^۲$$

پس به ازای $y = ۲n, x = ۲n^۲$، یک جواب $z = ۲n^۲ + ۱$ بدست می‌آید. پس معادله بی‌نهایت دسته جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح خواهد داشت.
روش دوم: با انتقال $y^۲$ به سمت راست معادله خواهیم داشت:

$$x^۲ + ۱ = z^۲ - y^۲ = (z + y)(z - y) \Rightarrow$$ یکی ازحالات ممکن را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} z - y = ۱ \\ z + y = x^۲ + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{x^۲}{۲} + ۱ \\ y = \frac{x^۲}{۲} \end{cases}$$

پس تنها کافی است x زوج باشد. با انتخاب یک عدد زوج برای x، مقادیر z, y نیز به طور یکتا تعیین می‌شوند وچون x عددی زوج و دلخواه است، پس معادله بی‌نهایت جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح دارد.

۱۸۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.

می‌دانیم جذر یک عدد طبیعی، یا عددی است طبیعی یا گنگ. بنابراین برای این که $\sqrt{a + ۸۰} + \sqrt{a + ۱}$ عددی طبیعی شود باید $\sqrt{a + ۸۰}, \sqrt{a + ۱}$ خودشان اعدادی طبیعی باشند. برای این منظور فرض می‌کنیم $a + ۸۰ = n^۲, a + ۱ = m^۲$ که در آن n, m اعدادی طبیعی هستند. پس خواهیم داشت:

$$(a + ۸۰) - (a + ۱) = n^۲ - m^۲ = ۷۹ \Rightarrow (n - m)(n + m) = ۷۹ = ۱ \times ۷۹$$

از طرفی واضح است که $n > m$. پس $n - m, n + m$ هردو مثبت هستند و از طرفی $n + m > n - m$. پس معادله به دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} n-m=1 \\ n+m=79 \end{cases} \Rightarrow n=40, m=39$$

از مقادیر فوق، با جاگذاری در روابط اولیه تنها یک مقدار برای a به دست می‌آید که برابر است با ۱۵۲۰.

۱۸۹) گزینه «ج» صحیح است.

$$2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}+6\sqrt{z-9}=x+y+z$$

$$\Rightarrow (x-1-2\sqrt{x-1}+1)+(y-4-4\sqrt{y-4}+4)+(z-9-6\sqrt{z}-9+9)=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x-1}-1)^2+(\sqrt{y-4}-2)^2+(\sqrt{z-9}-3)^2=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}=1, \sqrt{y-4}=2, \sqrt{z-9}=3$$

$$\Rightarrow x=2, y=8, z=8 \Rightarrow 3x+2y+z=40$$

۱۹۰) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$A=x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)$$
$$=(x+y+z+1)^2-4x-2z-1<(x+y+z+1)^2$$

به همین شکل ثابت می‌شود که $A>(x+y+z-1)^2$. پس چون A مربع کامل است باید داشته باشیم $A=(x+y+z)^2$ که از آن جا نتیجه خواهد شد $x=y$.

۱۹۱) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$m^2-(2n+1)m+n^2-n=0 \Rightarrow m=\frac{2n+1\pm\sqrt{8n+1}}{2} \qquad (1)$$

چون $m\in N$ پس $8n+1$ باید مربع کامل باشد. از طرفی می‌دانیم مربع تمامی اعداد فرد به فرم $8k+1$ می‌باشد پس کافی است $n=k$. همچنین چون $8n+1$ عددی فرد است جذر آن نیز عددی فرد خواهد بود و نهایتاً m عددی صحیح خواهد بود که اگر در رابطهٔ (۱) علامت + را انتخاب کنیم m عددی طبیعی خواهد بود. پس معادلهٔ فوق بی‌نهایت جواب دارد.

۱۹۲) گزینه «الف» صحیح است.

فرض می‌کنیم $(x,y,a,b)=d$. پس خواهیم داشت:

$$x=x_1d\ ,\ y=y_1d\ ,\ a=a_1d\ ,\ b=b_1d\ ,\ (a_1,b_1,x_1,y_1)=1$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله خواهیم داشت:

$$d^۲(x_۱^۲ + y_۱^۲) = ۳d^۲(a_۱^۲ + b_۱^۲) \Rightarrow x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۳(a_۱^۲ + b_۱^۲) \qquad (۱)$$

با توجه به این تساوی خواهیم داشت:

$$x_۱^۲ + y_۱^۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

چون مربع هر عدد صحیح به پیمانهٔ ۳ برابر یک یا صفر است، پس تنها حالتی که قابل قبول است این است که $x_۱ \overset{۳}{\equiv} y_۱ \overset{۳}{\equiv} ۰$ در نتیجه $x_۱^۲ \overset{۹}{\equiv} y_۱^۲ \overset{۹}{\equiv} ۰$ و بنابراین $x_۱^۲ + y_۱^۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$. با توجه به معادلهٔ (۱) نتیجه خواهد شد که $۳(a_۱^۲ + b_۱^۲) \overset{۹}{\equiv} ۰$ و در نتیجه $a_۱^۲ + b_۱^۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$

همان طور که قبلاً گفتیم معادلهٔ هم نهشتی اخیر به معادلهٔ $a_۱^۲ \overset{۳}{\equiv} b_۱ \overset{۳}{\equiv} ۰$ منجر خواهد شد. اما در این صورت $a_۱, b_۱, x_۱, y_۱$، همگی مضرب ۳ خواهند بود که با توجه به $(a_۱, b_۱, x_۱, y_۱) = ۱$، تناقض است. پس معادلهٔ فوق در مجموعهٔ اعداد طبیعی، جواب ندارد.

۱۹۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.

تعداد ردیف های شامل دوپسر را با x، تعداد ردیف های شامل دو دختر را با y،تعداد ردیف هایی که در ستون اول یک پسر و درستونِ دوم یک دختر قرار دارد را با z و تعداد ردیف هایی که در ستون اول یک دختر و درستون دوم یک پسر قرار دارد را با t نمایش می‌دهیم. پس **تعداد کل بچه ها یعنی n برابر با $۲(x + y + z + t)$ خواهد بود. همچنین خواهیم داشت:**

$$\begin{cases} x + y = z + t \\ x + z = y + t \\ z + y = x + t \end{cases} \Rightarrow x = y = z = t \Rightarrow n = ۲(۴x) = ۸x \Rightarrow ۸|n$$

۱۹۴) گزینهٔ «ب» صحیح است.

می‌دانیم که اگر $(a,b) = d$ باشد آنگاه $d|[a,b]$ چون $[a,b] = a'b'd$ که درآن $a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}$

بنابراین در این مورد باید داشته باشیم $۱۹۹۸|n!$.

اما می‌دانیم $۱۹۹۸ = ۲ \times ۳^۳ \times ۳۷$ بنابراین باید داشته باشیم: $۳۷|n!$ اما چون ۳۷ عددی اول است، پس برای اینکه $n!$ بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد باید داشته باشیم $n \geq ۳۷$ که در بین گزینه ها تنها ۳۹ بزرگتر از ۳۷ می‌باشد.

۱۹۵) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{۱}{p} \Rightarrow xy - px - py = ۰$$

$$\Rightarrow xy - px - py + p^۲ = p^۲$$
$$\Rightarrow (x - p)(y - p) = p^۲ = ۱ \times p^۲ = p \times p = (-۱)(-p^۲) = (-p)(-p)$$

با بررسی تمام حالات ممکن، به نتیجه می‌رسیم که فقط سه حالت زیر قابل قبول هستند:

$$\begin{cases} x-p=1 \\ y-p=p^2 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1+p,p^2+p)$$

$$\begin{cases} x-p=p \\ y-p=p \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(2p,2p)$$

$$\begin{cases} x-p=p^2 \\ y-p=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(p^2+p,p+1)$$

۱۹۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.

$$xy-169x-169y=0 \Rightarrow xy-169x-169y+169^2=169^2$$
$$\Rightarrow (x-169)(y-169)=13^4=1\times 13^4=13\times 13^3=13^2\times 13^2$$

با در نظر گرفتن تمامی حالت‌های مجاز ($x,y \in N$)، پنج حالت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x-169=1 \\ y-169=13^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-169=13^2 \\ y-169=13^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-169=13^4 \\ y-169=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-169=13 \\ y-169=13^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-169=13^3 \\ y-169=13 \end{cases}$$

۱۹۷) گزینهٔ «ب» صحیح است.

از صورت معادله خواهیم داشت: $(y+1)^2|ky$

اما می‌دانیم $(y,y+1)=1$ در نتیجه $(y,(y+1)^2)=1$. بنابراین نتیجه می‌شود که $(y+1)^2|k$.

اگر معادله جواب منحصر به فردی داشته باشد، باید عدد k فقط دارای یک عامل مربع کامل باشد در بین گزینه ها فقط عدد ۳۴۳ این خاصیت را دارد چون $7^3=343$.

۱۹۸) گزینهٔ «ج» صحیح است.

طبق فرضیات مسأله:

$$p|a, p-1|a-1$$
$$p|a \Rightarrow a=kp \Rightarrow a-1=kp-1 \overset{p-1}{\equiv} k-1 \overset{p-1}{\equiv} 0 \Rightarrow k \overset{p-1}{\equiv} 1$$

پس k باید عضو مجموعهٔ $\{۱, p, ۲p-۱, ۳p-۲, \ldots\}$ باشد. اگر p عددی فرد باشد، k نیز بوضوح عددی فرد خواهد بود چون k عضو مجموعه ای با اعضای به شکل $mp-(m-۱)$ می‌باشد ($m \in N \cup \{۰\}$). پس $a = kp$ نیز عددی فرد خواهد بود که تناقض است. پس نتیجه می گیریم که $p = ۲$. یعنی a عامل اول فرد ندارد. پس نتیجه می‌شود که $p = ۲, a = ۲^t$ که برای $t \geq ۱, t \in N$ شرایط مسأله یعنی $p-۱|a-۱, p|a$ برقرار است. پس a می‌تواند هر توانی از ۲ باشد.

۱۹۹) گزینهٔ «ج» صحیح است.
فرض می‌کنیم $N = \overline{xy}$ که در آن x و y رقم هستند و $x \neq ۰$. طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\overline{yx} + x + y = ۱۱y + ۲x = k^۲ \quad (k \in N)$$

اما چون x و y رقم هستند پس:

$$(x \geq ۱) \quad ۲ \leq ۱۱y + ۲x \leq ۱۳ \times ۹ = ۱۱۷$$

بنابراین برای برقراری شرط مسأله $۱۱x + ۲y$ باید یکی از مقادیر ۴ یا ۹ یا ۱۶ یا ۲۵ یا ۳۶ یا ۴۹ یا ۶۴ یا ۸۱ یا ۱۰۰ را بپذیرد. با بررسی حالات مختلف، مسأله برای حالات زیر جواب خواهد داشت:

$$۱۱y + ۲x = ۴ \Rightarrow y = ۰, x = ۲ \Rightarrow N = ۲۰$$
$$۱۱y + ۲x = ۱۶ \Rightarrow y = ۰, x = ۸ \Rightarrow N = ۸۰$$
$$۱۱y + ۲x = ۲۵ \Rightarrow y = ۱, x = ۷ \Rightarrow N = ۷۱$$
$$۱۱y + ۲x = ۳۶ \Rightarrow y = ۲, x = ۷ \Rightarrow N = ۷۲$$
$$۱۱y + ۲x = ۴۹ \Rightarrow y = ۳, x = ۸ \Rightarrow N = ۸۳$$
$$۱۱y + ۲x = ۸۱ \Rightarrow y = ۷, x = ۲ \Rightarrow N = ۲۷$$
$$۱۱y + ۲x = ۱۰۰ \Rightarrow y = ۸, x = ۶ \Rightarrow N = ۶۸$$

۲۰۰) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$xy + ۶x + ۵y + ۳۰ = ۱۱ \Rightarrow x(y+۶) + ۵(y+۶) = ۱۱$$
$$\Rightarrow (x+۵)(y+۶) = ۱۱ \Rightarrow x+۵|۱۱$$

۱) $x + ۵ = ۱ \Rightarrow x = -۴ \Rightarrow y = ۵$

۲) $x + ۵ = -۱ \Rightarrow x = -۶ \Rightarrow y = -۱۷$

۳) $x + ۵ = ۱۱ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow y = -۵$

۴) $x + ۵ = -۱۱ \Rightarrow x = -۱۶ \Rightarrow y = -۷$

۲۰۱) گزینهٔ «د» صحیح است.
ثابت می‌کنیم به ازای $n = ۶k$ که در آن $k \in N$، $(۲^n - ۱, n)$ مخالف با یک خواهد بود.

$$۲^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۲)^{۳k} \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{٦k} \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳|۲^n - ۱$$
$$n = ٦k \Rightarrow ۳|n$$

بنابراین ۳، مقسوم‌علیه مشترکی برای $۲^n - ۱$ و n خواهد بود. یعنی $(۲^n - ۱, n)$ مضربی از ۳ خواهد بود و در نتیجه مخالف یک می‌باشد. پس برای بی‌نهایت n $(n = ٦k)$ شرط مسأله برقرار خواهد بود.

۲۰۲) گزینهٔ «ه» صحیح است.

دنبالهٔ اعداد زیر را در نظر بگیرید که شامل n عدد طبیعی متوالی است:

$$\left.\begin{array}{l} (n+۱)! + ۲ \\ (n+۱)! + ۳ \\ (n+۱)! + ۴ \\ \cdots\cdots\cdots \\ (n+۱)! + n + ۱ \end{array}\right\} n \text{ جمله}$$

به‌وضوح تمامی جملات این دنباله مرکب هستند. فرض کنید یک جملهٔ این دنباله $(n+۱)! + k$ باشد که در آن $۲ \le k \le n+۱$. در این‌صورت چون $k \le n+۱$ آنگاه $k|(n+۱)!$ و همچنین $k|k$، پس $k|(n+۱)!+k$. پس $(n+۱)!+k$ عددی مرکب است.

۲۰۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.

$$۱۱xy - ۱۲۱ = ۲x^۲ + ۵y^۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۵y^۲ - ۱۱xy = -۱۲۱$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ - xy + ۵y^۲ - ۱۰xy = (۲x - y)(x - ۵y) = -۱۲۱$$

به این ترتیب ۶ حالت زیر نتیجه می‌شود:

$$(۱) \quad \begin{cases} ۲x - y = -۱ \\ x - ۵y = ۱۲۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-۱۴, -۲۷)$$

$$(۲) \quad \begin{cases} ۲x - y = ۱ \\ x - ۵y = -۱۲۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (۱۴, ۲۷)$$

$$(۳) \quad \begin{cases} ۲x - y = -۱۱ \\ x - ۵y = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (\frac{-۳۲}{۳}, \frac{-۱۱}{۳})$$

$$(۴) \quad \begin{cases} ۲x - y = ۱۱ \\ x - ۵y = -۱۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (\frac{۲۲}{۳}, \frac{۱۱}{۳})$$

$$(۵) \quad \begin{cases} ۲x - y = -۱۲۱ \\ x - ۵y = ۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (\frac{-۴۰۴}{۳}, \frac{-۴۱}{۴})$$

$$(٦) \quad \begin{cases} ۲x - y = ۱۲۱ \\ x - ۵y = -۱ \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (\frac{۴۰۴}{۳}, \frac{۴۱}{۳})$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول $(۱۴, ۲۷)$ می‌باشد.

۲۰۴) گزینهٔ «الف» صحیح است.
معادلهٔ فوق را در پیمانهٔ ۳ در نظر می‌گیریم.

$$p^{۲} + q^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۱۸۵۸ \overset{۳}{\equiv} ۱$$

از طرفی می‌دانیم باقیماندهٔ مربع هر عدد طبیعی در پیمانهٔ ۳، برابر ۰ یا ۱ است.
بنابراین نتیجه می‌شود که باقیماندهٔ یکی از $p^{۲}$ یا $q^{۲}$ به پیمانهٔ ۳ باید برابر ۱ و باقیماندهٔ دیگری برابر صفر باشد.
اگر فرض کنیم که $p^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۰$، نتیجه می‌شود که $p \overset{۳}{\equiv} ۰$.
اما چون p عددی اول است، بنابراین تنها حالت ممکن $p = ۳$ می‌باشد که با جاگذاری در معادلهٔ اصلی، نتیجه می‌شود که $q = ۴۳$. بنابراین داریم:

$$p + q = ۴۶$$

۲۰۵) گزینهٔ «ج» صحیح است.
طبق مسأله باید داشته باشیم:

$$(a - ۱)(b - ۱) | ab - ۱ \Rightarrow a - ۱ | ab - ۱$$

اما می‌دانیم $a - ۱ | ab - b$ بنابراین $a - ۱ | (ab - ۱) - (ab - b)$ یعنی $a - ۱ | b - ۱$.
به همین ترتیب ثابت می‌شود که $b - ۱ | a - ۱$.
بنابراین دو حالت پیش می‌آید:
حالت اول:

$$\begin{aligned} & a - ۱ = b - ۱ \Rightarrow a = b \\ & \Rightarrow (a - ۱)(a - ۱) | a^{۲} - ۱ \Rightarrow a - ۱ | a + ۱, a - ۱ | a - ۱ \\ & \qquad \Rightarrow a - ۱ | ۲ \Rightarrow (a, b) \in \{(۲, ۲), (۳, ۳)\} \end{aligned}$$

حالت دوم:

$$(a - ۱) = -(b - ۱) \Rightarrow a + b = ۲$$

اما با توجه به طبیعی بودن a, b تنها یک حالت داریم و آن عبارت است از $a = b = ۱$.
با توجه به اینکه صفر بر خودش بخش‌پذیر است $a = b = ۱$ نیز یک جواب مسأله است.
پس در کل سه زوج مرتب در شرایط مسأله صدق می‌کنند.

۲۰۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.
می‌دانیم که برای عدد a، یک و a مقسوم‌علیه‌های a می‌باشند. پس مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت a، بیشتر از a می‌باشد.

بنابراین $a < ۱۸$. یعنی $a \geq ۱۷$. همچنین اگر a عددی اول باشد $a + ۱ = ۱۸$. یعنی $a = ۱۷$ که در نتیجه $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۱۷$ که در تساوی $\frac{۱۸}{۱۰} = \frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۱}$ صدق نمی‌کنند.
پس تنها، اعداد مرکب کوچکتر از ۱۷ باید بررسی شوند که از بین این اعداد، تنها عدد ۱۰ در شرایط مسأله صدق می‌کند. پس تنها عدد عجیب موجود، عدد ۱۰ می‌باشد.

۲۰۷) گزینهٔ «ه» صحیح است.
ثابت می‌کنیم معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = n$ که در آن n عددی طبیعی و به فرم $۴k + ۲$ می‌باشد دارای جواب نیست.
اگر $x^۲ - y^۲ = ۴k + ۲$ آنگاه خواهیم داشت:

$$(x - y)(x + y) = ۲(۲k + ۱)$$

با توجه به این که اعداد به فرم $۴k + ۲$ تنها یک عامل دو دارند، نتیجه می‌شود که معادلهٔ مذکور دارای جواب نیست. چون $x + y$ و $x - y$ به لحاظ زوجیت یکسان هستند و $x^۲ - y^۲$ یا باید عددی فرد باشد یا مضرب ۴.
با توجه به این که $۲۰۰۶ = ۴ \times ۵۰۱ + ۲$ پس معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۲۰۰۶$ دارای جواب نیست.

۲۰۸) گزینهٔ «ج» صحیح است.
ثابت می‌کنیم اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عددی، فرد باشد آن عدد مربع کامل است.
روش اول:
اگر نمایش n در تجزیه به اعداد اول به شکل $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، آنگاه تعداد مقسوم علیه‌های n برابر است با

$$(\alpha_۱ + ۱)(\alpha_۲ + ۱) \dots (\alpha_k + ۱)$$

و با توجه به فرد بودن مقدار فوق، بنابراین تمامی α_i ها باید زوج باشند.
یعنی n باید مربع کامل باشد.
روش دوم: اگر d یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد n باشد، $\frac{n}{d}$ نیز یکی دیگر از مقسوم‌علیه‌های n می‌باشد.
حال $(d, \frac{n}{d})$ را یک زوج می‌گیریم. وقتی تعداد مقسوم‌علیه‌های عددی فرد باشد، یعنی زوجی وجود دارد که مؤلفه‌هایش با هم برابرند. از طرفی حاصل‌ضرب اعضای هر زوج برابر با n است. پس اگر زوج (m, m) جز زوج‌های مذکور باشد، داریم:

$$m^۲ = n$$

یعنی n عددی مربع کامل است.
حال با توجه به نکته فوق و با توجه به فرد بودن ۴۵ نتیجه می‌شود که n باید عددی مربع کامل باشد که تنها ۱۷۴۲۴ این خاصیت را دارد.
گزینه‌های «الف» و «د» با توجه به این نکته که رقم یکان هیچ مربع کاملی عضو $\{۲, ۳, ۷, ۸\}$ نمی‌باشد، رد می‌شوند.

گزینهٔ «ب» نیز عددی مضرب ۳ می‌باشد ولی مضرب ۹ نیست. گزینهٔ «ه» نیز عددی زوج می‌باشد ولی مضرب ۴ نیست.

۲۰۹) گزینهٔ «الف» صحیح است.
به وضوح n زوج نمی‌تواند باشد. چون $۲^{n!} - ۱$ عددی فرد است.
اما n می‌تواند هر عدد فردی باشد. با توجه به قضیهٔ اویلر داریم: (n عددی فرد است.)

$$۲^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$$

هم‌چنین $\varphi(n) \leq n - ۱$
بنابراین $\varphi(n)|n!$ یا به عبارتی $n! = k\varphi(n)$

$$۲^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^{\varphi(n)})^k \overset{n}{\equiv} ۲^{n!} \overset{n}{\equiv} ۱$$

یعنی اگر n فرد باشد $۲^{n!} - ۱$ بر n بخش‌پذیر خواهد بود.

۲۱۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.
ابتدا طرفین معادله را در پیمانهٔ z در نظر بگیرید.
خواهیم داشت:

$$۱^x \overset{z}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۲ \overset{z}{\equiv} ۰$$

که نتیجه می‌شود $z = ۱$ یا $z = ۲$.
اگر $z = ۱$ آنگاه داریم:

$$۲^x - ۱ = -۱ \Rightarrow ۲^x = ۰$$

که تناقض است. پس $z = ۲$.
یعنی:

$$۳^x = ۲^y - ۱$$

با در نظر گرفتن طرفین معادله به پیمانهٔ ۳ نتیجه می‌شود که y زوج است.
اگر $y \geq ۴$، آنگاه ۲^y بر ۸ قابل قسمت خواهد بود و هم چنین ۳^x به پیمانهٔ ۸ باقیمانده‌ای برابر ۱ یا ۳ خواهد داشت.
پس خواهیم داشت:
$-۱ \overset{۸}{\equiv} ۲^y - ۱ \overset{۸}{\equiv} ۳^x \overset{۸}{\equiv} ۱$ یا ۳ که ممکن نیست. پس $y = ۲$.
با داشتن $z = ۲$ و $y = ۲$ نتیجه می‌شود که $x = ۱$. پس معادله تنها یک دسته جواب دارد.

۲۱۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.
تنها جواب مسأله $a = ۴$ می‌باشد.
به ازای $a = ۱$، $a + ۳$ مرکب می‌شود.

به ازای $a = ۲$، $a + ۷$ مرکب می‌شود.
و به ازای $a = ۳$، $a + ۱$ مرکب خواهد شد.
اگر $a > ۵$ باشد، آنگاه با توجه به این که باقیماندهٔ عددهای ۱و۳و۷و۹و۱۳و۱۵ بر ۵ به ترتیب برابر است با ۱و۳و۲و۴و۳و۰ نتیجه می‌شود که همهٔ باقیمانده‌های ممکن بر ۵ به وجود می‌آیند. پس a به پیمانهٔ ۵، هر باقیمانده‌ای که داشته باشد با اضافه شدن به یکی از مقادیر ۱ یا ۳ یا ۷ یا ۹ یا ۱۳ یا ۱۵ مضربی از ۵ خواهد بود که نتیجه می‌شود حداقل یکی از اعداد مذکور اول نیست و مضرب ۵ است.
پس تنها جواب مسأله $a = ۴$ می‌باشد (البته توجه شود که $a + ۱$ به ازای $a = ۴$ مضرب ۵ است ولی عددی اول است. ولی اگر $a > ۴$، آنگاه اگر عددی مضرب ۵ تولید شود، حتماً مرکب خواهد بود.)

۲۱۲) گزینهٔ «الف» صحیح است.
به ازای $n = ۱$، $n = ۲$ این عدد به یک صفر و به ازای $n = ۳$ به ۲ صفر ختم می‌شود.
برای $n \geq ۳$ عددهای $۴^n, ۲^n$ بر ۸ بخش‌پذیر خواهند بود. هم چنین ۴ یا $۲ \overset{۸}{\equiv} ۳^n + ۱^n$.
بنابراین عبارت $۱^n + ۲^n + ۳^n + ۴^n$ به ازای $n \geq ۳$، بر ۸ و در نتیجه بر هزار بخش‌پذیر نخواهد بود.
پس این عدد نمی‌تواند به ۳ یا تعداد بیشتری صفر ختم شود.

۲۱۳) گزینهٔ «ج» صحیح است.
۲۲ عدد طبیعی $a_۲ - a_۱$، $a_۳ - a_۲$، $\ldots$، $a_{۲۳} - a_{۲۲}$ را در نظر بگیرید.
فرض کنید بین این اعداد، پنج عدد برابر یافت نشود. در این صورت حداقل مجموع این اعداد برابر است با:

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + \ldots + ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۶ + ۶ =$$
$$۴(۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵) + ۱۲ = ۷۲$$

اما می‌دانیم مجموع این اعداد برابر است با:

$$(a_{۲۳} - a_{۲۲}) + (a_{۲۲} - a_{۲۱}) + \ldots + (a_۳ - a_۲) + (a_۲ - a_۱) = a_{۲۳} - a_۱ = ۷۲$$

اما با توجه به این که $a_۱ \geq ۱, a_{۲۳} \leq ۷۲$، نتیجه می‌شود که $a_{۲۳} - a_۱ < ۷۲$ که تناقض است.
پس در بین تفاضل‌های $a_i - a_j(i > j)$، حداقل ۵ عدد برابر یافت می‌شود.

۲۱۴) گزینهٔ «ه» صحیح است.
می‌دانیم که باقیماندهٔ تقسیم مجموع ارقام هر عدد بر ۹ با باقیماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۹ برابر است.
بنابراین در نهایت عدد یک، از اعدادی حاصل خواهد شد که در تقسیم بر ۹ باقیمانده‌ای برابر ۱ دارند. یعنی عدد ۱ از اعداد ۱ و ۱۰ و ۱۹ و ... و ۲۰۰۸ بدست می‌آید. عدد ۳ از اعداد ۲۰۰۱, ... ,۲۱, ۱۲, ۳ حاصل می‌شود.
به همین ترتیب نتیجه می‌شود که عدد یک، یک واحد بیشتر از سایر عددها به‌دست می‌آید.

۲۱۵) گزینهٔ «ج» صحیح است.
جواب‌های مسأله عبارتند از:

$$m=-n=-۱,\quad m=-n=۱,\quad m=n=-۱,\quad m=n=۱$$

با توجه به عبارت برابر با $m^۴+۴n^۴$ خواهیم داشت:

$$m^۴+۴n^۴=(m+۲n^۲)^۲-۴m^۲n^۲=(m^۲+۲n^۲+۲mn)(m^۲+۲n^۲-۲mn)$$

با توجه به اول بودن $m^۴+۴n^۴$ و هم چنین با توجه به اینکه $m^۲\pm ۲mn+۲n^۲=(m\pm n)^۲+n^۲$ همواره مثبت است پس یکی از پرانتزها باید برابر یک باشد.

حالت اول:

$$m^۲-۲mn+۲n^۲=(m-n)^۲+n^۲=۱\qquad (m,n\in Z)$$
$$(m-n)^۲\geq ۰,n^۲\geq ۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m=n\Rightarrow\quad n^۲=۱\Rightarrow n=+۱\ \text{یا}-۱\Rightarrow m^۴+۴n^۴=۵\\ n=۰\Rightarrow\quad m=+۱\ \text{یا}-۱\Rightarrow m^۴+۴n^۴=۱\neq \text{عددی اول}\end{cases}$$

حالت دوم:

$$m^۲+۲mn+۲n^۲=(m+n)^۲+n^۲=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=۰\Rightarrow\quad m=+۱\ \text{یا}-۱\Rightarrow m^۴+۴n^۴=۱\neq \text{عددی اول}\\ m=-n\Rightarrow\quad n^۲=۱\Rightarrow n=+۱\ \text{یا}-۱\Rightarrow m^۴+۴n^۴=۵\end{cases}$$

۲۱۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.
فرض کنید عدد $N=\overline{a_۰a_۱a_۲\ldots a_۹}$، متفاوت باشد.
می‌دانیم که a_i ها همگی متمایزند و چون رقم هستند، پس تمامی مقادیر ۰ تا ۹ را اختیار می‌کنند.
پس خواهیم داشت:

$$N\overset{۹}{\equiv}a_۰+a_۱+a_۲\ldots a_۹\overset{۹}{\equiv}۰+۱+۲\ldots+۹\overset{۹}{\equiv}۰$$

پس N، علاوه بر ۱۱۱۱۱، بر ۹ نیز بخش‌پذیر است. اما با توجه به این که $(۹,۱۱۱۱۱)=۱$، پس N باید مضربی از ۹۹۹۹۹ باشد.
از طرفی با در نظر گرفتن $\overline{a_۵a_۶\ldots a_۹}=B,\overline{a_۰a_۱\ldots a_۴}=A$ داریم:

$$N=۱۰^۵A+B\overset{۹۹۹۹۹}{\equiv}A+B\overset{۹۹۹۹۹}{\equiv}۰$$

اما می‌دانیم که $\circ < A+B < ۲(۹۹۹۹۹)$، بنابراین تنها حالت ممکن این است که $A+B = ۹۹۹۹۹$.

با توجه به مطلب فوق، نتیجه می‌شود که:

$$a_\circ + a_۵ = a_۱ + a_۶ = a_۲ + a_۷ = a_۳ + a_۸ = a_۴ + a_۹ = ۹$$

پس $(۵!)$ حالت برای پخش کردن $(\circ, ۹), (۱, ۸), \ldots, (۴, ۵)$ بین $(a_i, a_{i+۵})$ وجود دارد و همچنین $۲^۵$ حالت نیز برای ترتیبِ مؤلفه‌های هر زوج مرتب وجود دارد.

اما فراموش نشود که $a_\circ \neq \circ$.

پس همه از بین حالات محاسبه شده، فقط $\frac{۹}{۱\circ}$ آن‌ها مطلوب است.

پس کل حالات برابر است با:

$$(\frac{۹}{۱\circ}) \times ۳۲ \times ۱۲\circ = ۳۴۵۶$$

۲۱۷) گزینهٔ «ه» صحیح است.

با توجه به صورت معادله نتیجه می‌شود که $۵|pqr$ و با توجه به اول بودن r, p, q، نتیجه می‌شود که حداقل یکی از آن‌ها برابر ۵ است.

فرض می‌کنیم $p = ۵$. از صورت اصلی معادله نتیجه می‌شود که:

$$qr = ۵ + q + r \Rightarrow qr = ۵ + q + r \Rightarrow qr - q - r = ۵ \Rightarrow (q-۱)(r-۱) = ۶$$

با در نظر گرفتن تمامی حالات ممکن برای سمت راست معادله فوق و با توجه به اول بودن r, q دو جواب به‌دست می‌آید که عبارتند از:

$(r = ۷, q = ۲)$ یا $(r = ۲, q = ۷)$

با توجه به جایگشت‌های q, r, p نتیجه می‌شود که معادله دارای شش دسته جواب است.

۲۱۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.

معادلهٔ $x^۲ = ۲y^۲ - ۸z + ۳$ را در نظر بگیرید.

اگر y عددی زوج باشد، سمت راست معادله به پیمانهٔ ۸ باقیمانده‌ای برابر ۳ خواهد داشت.

اما می‌دانیم که معادلهٔ $x^۲ \overset{۸}{\equiv} ۳$ دارای جواب نیست.

اگر y عددی فرد باشد در این صورت سمت راست معادله به پیمانهٔ ۸ باقیماندهٔ ۵ می‌آورد.

یعنی $x^۲ \overset{۸}{\equiv} ۵$ که باز هم ممکن نیست. پس این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب نیست.

۲۱۹) گزینهٔ «ج» صحیح است.

x را تعداد روزهایی در نظر بگیرید که معلم از ۹ نفر درس پرسیده است و y را تعداد روزهایی بگیرید که معلم از ۱۰ نفر درس پرسیده است.

هم‌چنین فرض کنید هر کدام از دانش‌آموزان، z بار درس جواب داده‌اند.
با توجه به شرایط مسأله باید داشته باشیم:

$$۹x + ۱۰y = ۳۳z$$

معادلهٔ فوق را باید در اعداد طبیعی حل کنیم، به‌طوری که $x + y$، حداقل باشد.
اگر داشته باشیم $z = ۱$، معادله برای x و y جواب طبیعی نخواهد داشت. چون:

$$۹x + ۱۰y = ۳۳ \Rightarrow x \leq ۳$$

به ازای $x \leq ۳$، هیچ جوابی برای y به‌دست نمی‌آید. پس باید داشته باشیم $z = ۲$ که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$۹x + ۱۰y = ۶۶ \Rightarrow ۹x + ۱۰y \overset{۹}{\equiv} y \overset{۹}{\equiv} ۶۶ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

تنها حالت ممکن $y = ۳$ می‌باشد که از آن‌جا نتیجه می‌شود $x = ۴$.
پس تعداد حداقل روزها، هفت روز خواهد بود.
حداقل بودن $x + y$ نیز بدین ترتیب ثابت می‌شود:

$$۹x + ۱۰y = ۳۳z \Rightarrow ۱۰(x + y) - x = ۳۳z$$

اگر $z \geq ۳$ باشد، نتیجه می‌شود که $x + y \geq ۱۰$
پس حداقل $x + y$ همان هفت می‌باشد.

۲۲۰) پاسخ صحیح گزینهٔ «د» می‌باشد.
$f(x)$ به‌صورت زیر و به سادگی تجزیه می‌شود:

$$f(x) = \frac{x(x-۱)(x+۱)(x+۲)(x-۲)(x-۳)(x+۳)(x+۴)(x-۴)}{۶۳۰}$$

حاصل‌ضرب ۹ عدد متوالی حتماً بر ۶۳۰ بخش‌پذیر است (زیرا بر ۹ و ۷ و ۲ و ۵ بخش‌پذیر است)
لذا $R_f \subset Z$ می باشد.

۲۲۱) پاسخ صحیح گزینهٔ «د» می‌باشد.
بزرگ‌ترین عدد ۱۳۷۶ رقمی در مبنای ۲ شامل ۱۳۷۶ یک می‌باشد.

$$A = \frac{(۱۱۱\ldots۱۱)}{۱۳۷۶\text{رقم}} = ۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + \ldots + ۲^{۱۳۷۵}$$

این مجموع را با استفاده از مجموع جملات یک تصاعد هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت ۲ محاسبه می‌کنیم:

$$A = ۱ \times \frac{۲^{۱۳۷۶} - ۱}{۲ - ۱} = ۲^{۱۳۷۶} - ۱$$

اکنون برای به‌دست آوردن دو رقم سمت راست در مبنای ۶ کافی است باقی‌ماندهٔ آن را در تقسیم بر عدد $۳۶ = ۶^۲$ به‌دست آوریم:

$$۲^۵ \overset{۳۶}{\equiv} -۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۳۷۵} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۵۵۰} \Rightarrow ۲^{۱۳۷۶} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۵۵۱}$$

$$-۲^{۲۲۵} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۸۸} \Rightarrow -۲^{۲۲۱} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۸۹}$$

$$-۲^{۸۵} \overset{۳۶}{\equiv} ۲^{۳۴} \Rightarrow -۲^{۸۹} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۳۸}$$

$$۲^{۳۵} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۱۴} \Rightarrow ۲^{۳۸} \overset{۳۶}{\equiv} -۲^{۱۷}$$

$$-۲^{۱۵} \overset{۳۶}{\equiv} ۲^{۶} \Rightarrow -۲^{۱۷} \overset{۳۶}{\equiv} ۲^{۸} \quad , \quad ۲^۵ \overset{۳۶}{\equiv} -۲^۲$$

$$-۲^۵ \overset{۳۶}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۳۷۶} - ۱ \overset{۳۶}{\equiv} ۴ - ۱ \overset{۳۶}{\equiv} ۳$$

در نتیجه دو رقم سمت راست ۰۳ است.

۲۲۲) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.

a و b را طول و عرض مستطیل فرض می‌کنیم. داریم:

$$ab = ۲(a+b) + ۲۰ \Rightarrow ab = ۲a + ۲b + ۲۰ \Rightarrow a = ۲ + \frac{۲۴}{b-۲} \Rightarrow b-۲|۲۴$$

$$\Rightarrow ۲۴ = (b-۲)k \Rightarrow \begin{cases} k=۱ & \Rightarrow & a=۳ \ , \ b=۲۶ \\ k=۲ & \Rightarrow & a=۴ \ , \ b=۱۴ \\ k=۳ & \Rightarrow & a=۵ \ , \ b=۱۰ \\ k=۴ & \Rightarrow & a=۶ \ , \ b=۸ \end{cases}$$

به ازای سایر مقادیر $k(-۱,-۲,-۳,-۴,\pm۶,\pm۸)$ جواب‌های منفی و تکراری به‌دست می‌آید.

پس برای مسأله ۴ جواب وجود دارد.

۲۲۳) پاسخ صحیح گزینهٔ «الف» می‌باشد.

$$x^۳ - y^۳ = xy + ۶۱$$
$$\Rightarrow (x-y)(x^۲+xy+y^۲) = xy + ۶۱ \Rightarrow x^۲+xy+y^۲|xy+۶۱$$

در نتیجه $x^۲+y^۲ \leq ۶۱ \Leftarrow x^۲+xy+y^۲ \leq xy+۶۱$ و همچنین چون طرف راست تساوی مثبت است پس $x^۳ - y^۳ > ۰$ و لذا $x^۳ > y^۳$ یعنی $x > y$ بنابراین:

تنها کافی است x و y را معین کنیم که دو شرط $\begin{cases} x > y \\ x^۲+y^۲ \leq ۶۱ \end{cases}$ صدق می‌کنند اعدادی طبیعی هستند، پس تنها کافی است (x,y) هایی را که در زیر آمده است، امتحان کنیم.

$(۲,۱),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),$
$(۵,۴),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۷,۱),(۷,۲),(۷,۳)$

به سادگی می‌توان دریافت که $(۶,۵)$ تنها جواب این مسأله می‌باشد.

۲۲۴) پاسخ صحیح گزینهٔ «د» می‌باشد.

برای پاسخ به این سؤال باید در واقع به این سؤال پاسخ داد که این عدد در مبنای ۱۲ به چند صفر ختم می‌شود؟ یعنی دارای چند عامل ۱۲ است.

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2^{8} 5^{2} \times 3^{4} \times 7$$
$$= 5^{2} \times 7 \times (2^{2} \times 3)^{4} = 52 \times 7 \times 12^{4}$$

یعنی ۴ عدد ۱۲ دارد. پس به ۴ صفر ختم می‌شود.

۲۲۵) پاسخ صحیح گزینهٔ «ه» می‌باشد.

$n = 4k^4$ فرض می‌کنیم.

$$\Rightarrow m^4 + n = m^4 + 4k^4 = (m^2 + 2k^2)^2 - 4k^2m^2$$
$$= (m^2 + 2k^2 - 2km)(m^2 + 2k^2 + 2km)$$

پس به ازای $n = 4k^4$ حاصل عددی مرکب می‌شود و بی‌شمار عدد به فرم فوق وجود دارد.

۲۲۶) پاسخ صحیح گزینهٔ «ه» می‌باشد.

$$x^2 + y^2 = x^3 \quad \Rightarrow y^2 x^3 - x^2 = x^2(x-1) \quad y = x\sqrt{x-1}$$

که فقط به ازای $x < 1$ جواب نمی‌دهد و به ازای $x \geq 1$ جواب دارد. یعنی بی‌شمار جواب دارد و کافی است که $x - 1 = n^2$ یعنی $x = n^2 + 1$ اختیار شود. اینک به ازای هر عدد صحیح n یک جفت x و y به‌دست می‌آید.

۲۲۷) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.

تعداد مردها را $2n$ و زن‌ها را n فرض می‌کنیم. پس تعداد کل بازی‌ها $\binom{3n}{2}$ است و تعداد بردهای مردان را $5m$ و تعداد بردهای زن‌ها را $7m$ فرض می‌کنیم. پس تعداد کل بازی‌ها $12m$ می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\binom{3n}{2} = 12m$$

از برابری فوق نتیجه می‌شود:

$$8m = n(3n - 1)$$

پس یا باید n مضرب ۸ باشد و یا $3n - 1$ مضرب ۸ باشد که با امتحان می‌توان فهمید تنها به ازای $n = 3$ برابری حاصل می‌شود، یعنی $m = 3$، $2n = 6$، $n = 3$.

۲۲۸) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.

قبل از همه باید $n^3 - 1$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد. یعنی عدد n باید به صورت $5k + 1$ باشد. در این صورت:

$$\frac{n^3 - 1}{5} = 25k^3 + 15k^2 + 3k = k(25k^2 + 15k + 3)$$

و روشن است که این حاصلضرب وقتی می‌تواند اول باشد که یکی از عامل‌های آن برابر واحد شود، چون $k < 25k^2 + 15 + 3$ پس $k = 1$ و $n = 6$.

۲۲۹) پاسخ صحیح گزینهٔ «ه» می‌باشد.

$$(abc)_{13} = (cab)_8 \Rightarrow \quad 169a + 13b + c = 64c + 8a + b \Rightarrow \quad 63c - 12b = 161a$$
$$\Rightarrow 3(21c - 4b) = 161a \quad (3, 161) = 1$$
$$\Rightarrow 21c - 4b = 161k \Rightarrow 4b = 7(3c + 23k)$$

چون $b < 8$ لذا ۷ یا $b = 0$ لذا داریم:
از قرار دادن آن در معادله به‌دست می‌آید:

$$b = 0 \Rightarrow 3c + 23k = 0 \Rightarrow c = k = 0 (c < 8 \text{چون})$$

$a = b = c = 0$ غیر قابل قبول است. چون $c < 8$ لذا باید $k = 0$ که به دست می‌آید:
$b = 7 \quad \Rightarrow 4 = 3c + 23k \Leftarrow$
$3c = 4$ که چون c عدد طبیعی است غیر قابل قبول می‌باشد. پس چنین عددی وجود ندارد.

۲۳۰) پاسخ صحیح گزینهٔ «د» می‌باشد.

$$x^7 + y^7 + z^7 = 7k \Rightarrow x^7 + y^7 + z^7 - (x + y + z) = (x^7 - x) + (y^7 - y) + (z^7 - z)$$

می‌دانیم باقی‌ماندهٔ توان هفتم هر عدد بر ۷ با باقی‌ماندهٔ خود عدد بر هفت برابر است:

$$\Rightarrow x^7 + y^7 + z^7 - (x + y + z) = 7k' + 7k'' + 7k''' = 7m \Rightarrow 7k - (x + y + z) = 7m$$
$$\Rightarrow x + y + z = 7n$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7n \\ x + y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2y = 7n + 5$$

چون $x, y, z \leq 9$ پس حداکثر

$$x + y + z = 27$$

پس ۳ یا $n = 1$ چون داریم $2(x + y) = 7n + 5$ و ۵ و ۷ اول و فرد می‌باشند برای اینکه مجموع زوج داشته باشند لذا n باید فرد باشد.

$$n = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \overline{xyz} \in \{151, 241, 331, 421, 511, 601\}$$

$$n = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 21 \\ x + y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ z = 8 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \overline{xyz} \in \{498, 588, 678, 768, 858, 948\}$$

۲۳۱) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام عدد بر ۹. حال چون

$۲۵ \times \ldots \times ۷ \times ٦ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = !۳۵$ پس !۳۵ بر ۹ بخش‌پذیر است. لذا مجموع ارقام آن هم باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

مجموع ارقام : $N = ۱۳۸ + * = ۹ \times ۱۵ + ۳ + *$

لذا باید $* + ۳$ مضرب ۹ باشد و چون $*$ از ارقام یک عدد است، لذا باید یک رقمی باشد و تنها به ازای $* = ٦$، $* + ۳$ مضرب ۹ می‌شود.

۲۳۲) پاسخ صحیح گزینهٔ «د» می‌باشد.

اگر n سه رقمی باشد حداقل اختلاف آن با ۱۳۷۶، ۳۷۷=۹۹۹-۱۳۷۶ که بیشتر از مجموع ارقام که ۲۷ است می‌باشد. لذا عدد باید چهار رقمی باشد که حداکثر مجموع ارقام آن ۳۶ می‌باشد، لذا عدد باید حداقل $۱۳۷٦ - ۳٦ = ۱۳۴۰$ باشد و هم‌چنین حداقل مجموع ارقام ۴ است یعنی عدد از $۱۳۷٦ - ۴ = ۱۳۷۲$ نمی‌تواند بزرگ‌تر باشد، پس اگر عدد را $\overline{abcd}$ فرض کنیم، خواهیم داشت: $a = ۱$ و $b = ۳$

لذا:

$$۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d + a + b + c + d = ۱۳۷٦$$

$$\Rightarrow ۱۰۱a + +۱۰۱b + ۱۱c + ۲d = ۱۳۷٦ \longrightarrow ۱۱c + ۲d = ۷۲$$

$۱۱c = ۲(۳٦ - d)$ یعنیcباید زوج باشد

$$۲d = ۷۲ - ۱۱c \quad \Rightarrow d = \frac{۷۲ - ۱۱c}{۲} = ۳٦ - ۵c - \frac{c}{۲} \quad \Rightarrow c = ۲k$$

می‌دانیم c، حداقل باید ۴ باشد یعنی $k = ۲$ در نتیجه:

$c = ۴ \Rightarrow d = ۳٦ - ۲۰ - ۲ = ۱۴$ که غیر قابل قبول است.

$$k = ۳ \Rightarrow c = ٦ \Rightarrow d = ۳٦ - ۳۰ - ۳ = ۳ \Rightarrow \begin{cases} c = ٦ \\ d = ۳ \end{cases}$$

$k = ۴ \Rightarrow c = ۸ \Rightarrow d = ۳٦ - ۴۰ - ۴ = -۸$ غیر قابل قبول

(چون c باید یک رقمی باشد لذا تنها جواب $d = ۳$ و $c = ٦$ قابل قبول خواهد بود پس عدد مورد نظر ۱۳٦۳ است.)

۲۳۳) پاسخ صحیح گزینهٔ «ج» می‌باشد.

$$\overline{abcd} = \overline{ad}\ \overline{ada}$$

در این معادله سیاله حاصل‌ضرب یک عدد سه رقمی در یک عدد ۲ رقمی برابر با یک عدد چهار رقمی شده است. و همچنین رقم سمت چپ هر سه این اعداد یکی است و برابر a است. a مخالف صفر است و هم‌چنین a فقط و فقط می‌تواند ۱ باشد زیرا اگر a، ۱ نباشد:

$a = ۲ : \overline{۲d}.\overline{۲da} \geq ۴۰۰۰ > \overline{۲bcd}$

$a = ۳ : \overline{۳d}.\overline{۳da} \geq ۹۰۰۰ > \overline{۳bcd}$

و الی آخر

بنابراین:

$\overline{1bcd} = \overline{1d}.\overline{|d|} \Rightarrow (1000 + 100b + 10c + d) = (d + 10)(101 + 10d)$
$\Rightarrow 10d^2 + 200d + 10 - 100b - 10c = 0, d^2 + 20d + 1 - 10b - c = 0$
$\Rightarrow d^2 + 20d + 1 = 10b + c,$
$10b + c \leq 99$ پس $d^2 + 20d + 1 \leq 99$ و در نتیجه $d < 5$ و لذا $d = 0, 1, 2, 3, 4$
$d = 0 : \overline{1bc0} = \overline{10} \times \overline{101} = 1010 \Rightarrow b = 0, c = 1$
$d = 1 : \overline{1bc1} = \overline{11} \times \overline{111} = 1221 \Rightarrow b = c = 2$
$d = 2 : \overline{1bc2} = \overline{12} \times \overline{121} = 1452 \Rightarrow b = 4, c = 5$
$d = 3 : \overline{1bc3} = \overline{13} \times \overline{131} = 1703 \Rightarrow b = 7, c = 0$
$d = 4 : \overline{1bc4} = \overline{14} \times \overline{141} = 1974 \Rightarrow b = 9, c = 7$

و به این ترتیب ۵ دسته جواب متمایز به‌دست می‌آید.

۲۳۴) پاسخ صحیح گزینهٔ «ه» می‌باشد.
ثابت می‌کنیم می‌توان بی‌نهایت عدد طبیعی یافت به طوری که حاصل‌ضرب هر سه عضو آن بر مجموع آن‌ها بخش‌پذیر باشد. یک مجموعهٔ n تایی از اعداد طبیعی دلخواه می‌سازیم. $V = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ اکنون با یک تناظر یک به یک، مجموعهٔ V را طوری می‌سازیم که در شرط مسأله صدق می‌کند، به این صورت که تمام زیر مجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ V را (که تعداد آن‌ها $\binom{n}{3}$ می‌باشد)، در نظر می‌گیریم. مجموع عضوهای همهٔ این زیر مجموعه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و عدد حاصل را k می‌نامیم. کافی است همهٔ عضوهای مجموعهٔ V را در k ضرب کنیم تا مجموعهٔ u حاصل شود، یعنی $u = \{kb_i | b_i \in V\}$ این مجموعه خاصیت گفته شده را دارد و این موضوع به راحتی ثابت می‌شود. سه عضو دلخواه a_i و a_j و a_k از این مجموعه را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\frac{a_i \times a_j \times a_k}{a_i + a_j + a_k} = \frac{b_i b_j b_k k^3}{(b_i + b_j + b_k)k} = \frac{b_i b_j b_k k^2}{b_i + b_j + b_k}$$

اما واضح است که k بر $b_i + b_j + b_k$ بخش‌پذیر است. پس شرط مسأله برقرار است و n محدودیتی ندارد.

۲۳۵) پاسخ صحیح گزینهٔ «الف» می‌باشد.
فرض می‌کنیم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این اعداد d می‌باشد و $d > 1$، از قضیهٔ زیر در آنالیز ترکیبی استفاده می‌کنیم:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \Rightarrow \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \Rightarrow$$

$$\binom{n+1}{1375} - \binom{n}{1375} = \binom{n}{1374} \Rightarrow \binom{n+2}{1375} - \binom{n+1}{1375} = \binom{n+1}{1374} \Rightarrow$$

$$\binom{n+1375}{1375} - \binom{n+1374}{1375} = \binom{n+1374}{1374}$$

یعنی تفاضل هر دو عدد از این مجموعهٔ اعداد، عددهای صحیح

دیگری به فرم $\binom{n}{۱۳۷۴}$ و $\binom{n+۱}{۱۳۷۵}$ و ... و $\binom{n+۱۳۷۴}{۱۳۷۴}$ می‌باشد که همان مقسوم‌علیه مشترک d را دارند. به همین ترتیب و با همین استدلال $\binom{n}{۱۳۷۳}$ و $\binom{n+۱}{۱۳۷۳}$ و ... و $\binom{n+۱۳۷۳}{۱۳۷۳}$ نیز، همان مقسوم علیه مشترک را دارند و با تکرار همین عمل $\binom{n}{۰}$ نیز باید بر d بخش‌پذیر باشد، یعنی $d = ۱$

۲۳۶) پاسخ صحیح گزینهٔ «ج» می‌باشد.

نخست فرض می‌کنیم $k < n$، در نتیجه $k^k < n^n$، پس عدد n^n از عدد k^k بزرگ‌تر است و بنابراین تعداد رقم‌های عدد n^n یا از تعداد رقم‌های عدد k^k بیشتر است و یا با آن مساوی است. اما بنا بر فرض عدد n^n دارای k رقم و عددهای k^k دارای n رقم است و $k < n$، که این تناقض است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $n < k$ باشد نیز باز هم به تناقض می‌رسیم. پس $k = n$. پس می‌بایست دنبال اعدادی به صورت n^n باشیم که n رقم دارند.

از طرفی اگر عددی n رقم داشته باشد، (به عنوان مثال عدد A)، آن‌گاه $A < ۱۰^n$

و لذا $n^n < ۱۰^n \Leftarrow n < ۱۰$. پس کافی است $۱ \leq n \leq ۹$ را امتحان کنیم، یعنی کافی است ببینیم که آیا $۱^۱$، ۱ رقم دارد یا نه؟

$۲^۲$، ۲ رقم دارد یا نه؟ $۳^۳$، ۳ رقم دارد یا نه؟ و الی آخر.

با محاسبه در می‌یابیم به ازای $n = ۱,۸,۹$ حکم مسأله برقرار است. ($n = ۱,۸,۹$ در شرط مسأله صدق می‌کنند.)

۲۳۷) پاسخ صحیح گزینهٔ «ج» می‌باشد.

$۱۹۹^۲ = ۳۹۶۰۱ \quad \Rightarrow \quad ۶۰۱ : ۱۹۹^۲$ سه رقم سمت راست

$۱۹۹^{(۲^۲)} \quad \Rightarrow \quad ۲۰۱ : ۱۹۹^{(۲^۲)}$ سه رقم سمت راست

$۱۹۹^{(۲^۳)} = (۱۹۹^۴)^۲ \quad \Rightarrow \quad ۴۰۱$ سه رقم سمت راست

$۱۹۹^{(۲^۴)} \quad \Rightarrow \quad ۸۰۱$ سه رقم سمت راست

$۱۹۹^{(۲^۵)} \quad \Rightarrow \quad ۶۰۱$ سه رقم سمت راست

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۹۹^{(۲^{۴k+۱})} \Rightarrow ۶۰۱ & \text{سه رقم سمت راست} \\ ۱۹۹^{(۲^{۴k+۲})} \Rightarrow ۲۰۱ & \text{سه رقم سمت راست} \\ ۱۹۹^{(۲^{۴k+۳})} \Rightarrow ۴۰۱ & \text{سه رقم سمت راست} \\ ۱۹۹^{(۲^{۴k})} \Rightarrow ۸۰۱ & \text{سه رقم سمت راست} \end{cases}$$

حال کافی است، باقی‌ماندهٔ ۱۳۷۷ بر ۴ را به دست آوریم:

از آنجا که باقی‌ماندهٔ ۱۳۷۷ بر ۴ برابر ۱ می‌باشد ($۱۳۷۷ = ۴k + ۱$) لذا سه رقم سمت راست $۱۹۹^{(۲^{۱۳۷۵})}$ برابر ۶۰۱ می‌شود.

۲۳۸) پاسخ صحیح گزینهٔ «ب» می‌باشد.
مطابق فرض می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{pq}=\frac{۱}{n} \quad n\in N \quad \Rightarrow \frac{p+q+۱}{pq}=\frac{۱}{n}\Rightarrow p+q+۱=\frac{pq}{n}$$

چون $\frac{pq}{n}\in N$ لذا فقط چهار حالت زیر ممکن است:

$$n=۱ \quad , \quad n=p \quad , \quad =q \quad , \quad n=pq$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که از این حالت‌ها فقط $n=۱$ قابل قبول است و لذا می‌نویسیم:

$$p+q+۱=pq \quad \Rightarrow \quad q=\frac{p+۱}{p-۱}=۱+\frac{۲}{p-۱}$$

در نتیجه داریم:

$p-۱|۲ \quad \Rightarrow p-۱=۱$ یا $p-۱=۲$

و لذا $p=۲$ یا $p=۳$ و از آنجا $q=۲$ یا $q=۳$ دو دسته جواب به صورت $(p,q)=(۲,۳)$ و $(p,q)=(۳,۲)$ داریم.

۲۳۹) گزینهٔ «ب» صحیح است.
می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $n=P_۱^{\alpha_۱}P_۲^{\alpha_۲}\dots P_k^{\alpha_k}$ وقتی P_i هااعداد اول متمایزی باشند برابر با $(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\dots(\alpha_k+۱)$ می‌باشد. حال عدد ۱۶ را به حاصلضرب اعداد طبیعی بزرگتر از یک به صورت زیر تجزیه می‌کنیم.

$$۱۶=۱۶=۸\times۲=۴\times۴=۴\times۲\times۲=۲\times۲\times۲\times۲$$

متناظر با تجزیه‌های فوق اعداد زیر بدست خواهند آمد:

$a_۱=۲^{۱۵}, a_۲=۲^۷\times۳^۱, a_۳=۲^۳\times۳^۳,$

$a_۴=۲^۳\times۳^۱\times۵^۱, a_۵=۲^۱\times۳^۱\times۵^۱\times۷^۱$

واضح است که از بین اعداد فوق $a_۴$ یعنی ۱۲۰ کمترین مقدار ممکن را داراست.

۲۴۰) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$n=(n-۱۵)+۱۵=(n-۲۵)+۲۵=(n-۳۵)+۳۵$$

می‌دانیم که یکی از سه عدد $n-۳۵, n-۲۵, n-۱۵$ بر ۳ بخش‌پذیر بوده و به ازای $n>۳۸$، مرکب می‌باشد. یعنی هر عدد بزرگتر از ۳۸ را می‌توان به هر سه صورت فوق نوشت که هر دو عامل یکی از آنها فرد بوده و یکی از عامل‌هایش مضرب ۳ و عامل دیگرش مضرب ۵ می‌باشد. پس بزرگترین عدد ممکن با خواص خواسته شده عدد ۳۸ می‌باشد.

۲۴۱) گزینهٔ «هـ» صحیح است.

$$(۱۵+\sqrt{۲۲۰})^{۱۳}+(۱۵-\sqrt{۲۲۰})^{۱۳}=۱۰k$$

$$(۱۵+\sqrt{۲۲۰})^{۷۸}+(۱۵-\sqrt{۲۲۰})^{۷۸}=۱۰k'$$
$$\Rightarrow (۱۵+\sqrt{۲۲۰})^{۱۳}+(۱۵+\sqrt{۲۲۰})^{۷۸}=۱۰k''-(۱۵-\sqrt{۲۲۰})^{۱۳}-(۱۵-\sqrt{۲۲۰})^{۷۸}$$

می دانیم $\frac{۱}{۲} > ۱۵-\sqrt{۲۲۰}$. پس $\frac{۱}{۲} > (۱۵-\sqrt{۲۲۰})^n$. یعنی:

$$۱۰k''-۱<(۱۵+\sqrt{۲۲۰})^{۱۳}+(۱۵+\sqrt{۲۲۰})^{۷۸}<۱۰k''$$

پس جواب مطلوب رقم ۹ می‌باشد.

۲۴۲) گزینهٔ «الف» صحیح است.

در حالت کلی اگر عدد فرد $۲n+۱$ مربع کامل باشد، می‌توان $n+۱$ را به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت. زیرا:

$$۲n+۱=(۲t+۱)^۲=۴t^۲+۴t+۱\Rightarrow n=۲t^۲+۲t\Rightarrow n+۱=t^۲+(t+۱)^۲$$

چون ۱۹۰۱۶۴۱ مربع کامل است، پس طبق اثبات بالا می‌توان ۹۵۰۸۲۱ را به صورت مجموع مربعات دو عدد متوالی نوشت:

$$۹۵۰۸۲۱=۶۸۹^۲+۶۹۰^۲$$

۲۴۳) گزینهٔ «الف» صحیح است.

نشان می‌دهیم هیچ عدد اولی به صورت $۴k+۳$ جاذب مربع نیست. فرض می‌کنیم $p=۴k+۳$ جاذب مربع باشد. پس:

$$a^۲+b^۲=p(c^۲+d^۲)$$

فرض می‌کنیم $m=(a,b,c,d)$. اگر عامل m را از d,c,b,a بیرون بکشیم، داریم:

$$(a',b',c',d')=۱ \qquad (*)$$
$$\Rightarrow a'^۲+b'^۲=p(c'^۲+d'^۲) \qquad (**)$$
$$\Rightarrow a'^۲+b'^۲\overset{p}{\equiv}۰\Rightarrow a'^۲\overset{p}{\equiv}-b'^۲$$
$$\Rightarrow (a'^۲)^{\frac{p-۱}{۲}}\overset{p}{\equiv}(-۱)^{\frac{p-۱}{۲}}(b'^۲)^{\frac{p-۱}{۲}}\Rightarrow (a')^{p-۱}\overset{p}{\equiv}-(b')^{p-۱}$$
$$\Rightarrow (\text{۰یا۱})\overset{p}{\equiv}-۱\times(\text{۰یا۱})$$

همنهشتی فقط وقتی درست است که $a'\overset{p}{\equiv}b'\overset{p}{\equiv}۰$. پس a' و b' هر دو مضرب p هستند. فرض می‌کنیم $a'=px,\quad b'=py$. پس از رابطهٔ (**) نتیجه می‌گیریم که:

$$p(x^۲+y^۲)=c'^۲+d'^۲$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که هیچ یک از اعداد داده شده جاذب مربع نیستند، چون همگی به صورت $۴k+۳$ هستند.

۲۴۴) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$\begin{aligned}
۵^{۱۳۷۸} &= ۵^{۱۷۱\times۸+۱۰}\\
&= ۵^{۱۰}[(۵^{۱۷۱}-۱)(۵^{۱۷۱}+۱)(۵^{۳۴۲}+۱)(۵^{۶۸۴}+۱)+۱]\\
&= [۵^{۱۰}(۵^{۱۷۱}-۱)(۵^{۱۷۱}+۱)(۵^{۳۴۲}+۱)(۵^{۶۸۴}+۱)]+۵^{۱۰}
\end{aligned}$$

$(۵^{۱۷۱}-۱)$ مضرب ۴ و $(۵^{۱۷۱}+۱)$، $(۵^{۳۴۲}+۱)$ و $(۵^{۶۸۴}+۱)$ نیز مضرب ۲ می‌باشند.
پس پنج رقم سمت راست عدد داخل کروشه همگی صفر می‌باشند. پس پنج رقم سمت راست $۵^{۱۳۷۸}$ همان پنج رقم سمت راست عدد $۵^{۱۰}$ یعنی ۶۵۶۲۵ می‌باشد.

۲۴۵) گزینهٔ «ج» صحیح است.

به راحتی می‌توان نشان داد که $S(a+b)\leq S(a)+S(b)$. پس داریم:

$$S(n)=S(۱۰n)=S(۵(۲n))\leq ۵S(۲n)$$

حالت تساوی نشان می‌دهد که کمترین مقدار k برابر ۵ می‌باشد.

۲۴۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.

در دنباله فیبوناچی داریم: $(U_n,U_m)=U_{(n,m)}$. پس:

$$(U_{۱۴۱۹},U_{۱۳۷۷})=U_{(۱۴۱۹,۱۳۷۷)}=U_۳=۲$$

که منظور از (a,b) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b می باشد.

۲۴۷) گزینهٔ «ب» صحیح است.

تعداد ارقام عدد m را با $f(m)$ نمایش می دهیم. یکی از اعداد مطلوب را n می‌نامیم. خواهیم داشت:

$$f(n^۳)+f(n^۴)=۱۰$$

اگر $n\geq ۲۲$ باشد آن گاه: $n^۳>۱۰^۴$ و $n^۴>۱۰^۵$ که نامساوی $f(n^۳)+f(n^۴)>۱۰$ را نتیجه می دهد و اگر $n\leq ۱۷$ باشد آن گاه: $n^۳<۱۰^۴$ و $n^۴<۱۰^۵$ که نامساوی $f(n^۳)+f(n^۴)<۱۰$ را نتیجه می دهد. پس شرط لازم برای n جهت داشتن خاصیت مطلوب آن است که داشته باشیم: $۱۸\leq n\leq ۲۱$.
از بین چهار عدد ۱۸، ۱۹، ۲۰ و ۲۱ فقط عدد ۱۸ خاصیت مطلوب را دارد یعنی $۱۸^۳=۵۸۳۲$ و $۱۸^۴=۱۰۴۹۷۶$.

۲۴۸) گزینهٔ «الف» صحیح است.

اگر در تقسیم بر ۳ عدد n باقیمانده α داشته باشد آن گاه $d(n)$ نیز در تقسیم بر ۳ باقی مانده α خواهد داشت. پس سمت چپ تساوی همیشه مضرب ۳ بوده در حالی است که سمت راست تساوی مضرب ۳ نمی باشد.

۲۴۹) گزینهٔ «الف» صحیح است.

تعداد ۱ ها را n و تعداد ۱−ها را n' می نامیم. پس:

$$n+n'=۱۴\quad(۱)$$

اعداد موجود بر رئوس را x_1، x_2، ... و x_8 و اعداد موجود بر وجوه را x_9، x_{10}، ... و x_{14} می نامیم. پس:

$$x_1.x_2. \dots .x_{14} = x_1^4.x_2^4. \dots .x_8^4 = 1$$

یعنی به تعداد زوجی از ۱۴ عدد مورد نظر ۱- می باشد یعنی n' زوج است. عدد حاصل از مجموع ۱۴ عدد را y می نامیم. پس:

$$y = n \times 1 + n' \times (-1) = n - n' \quad (2)$$

از تفاضل دو رابطه (۱) و (۲) از یکدیگر خواهیم داشت:

$$2n' = 14 - y$$

چون n' زوج بود پس y باید به صورت $4k + 2$ باشد. از بین چهار عدد ۲، ۶، ۱۰ و ۱۴ که به صورت $4k + 2$ هستند عدد ۱۰ القایی نمی باشد زیرا برای بدست آوردن مجموع ۱۰ لازم است از بین ۱۴ عدد مورد نظر فقط دو عدد ۱- داشته باشیم که امکان ندارد. بنابراین اعداد القایی نامنفی فقط ۲،۶، ۱۴ می باشند.

۲۵۰) گزینهٔ «هـ» صحیح است.
یک جواب این معادله $(x,y,n) = (1,1,3)$ می باشد. فرض می کنیم (x_1,y_1,n_1) یک جواب معادله باشد بطوری که x_1 و y_1 از نظر زوجیت یکسان هستند، پس در این صورت داریم:

$$7\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_1 - y_1}{2}\right)^2 = 14x_1^2 + 2y_1^2 = 2(7x_1^2 + y_1^2) = 2^{n_1+1}$$

یعنی $(x_1 + y_1, 7x_1 - y_1, n_1 + 1)$ نیز یک دسته جواب است. بنابراین معادله فوق بیشمار جواب دارد.

۲۵۱) گزینهٔ «الف» صحیح است.
اگر ۱۱ عدد از مستطیل های فوق را در راستای افقی و ۱۳ عدد از مستطیل‌های فوق را در راستای عمودی قرار دهیم یک مربع ۲۸۶ × ۲۸۶ در می‌آید که پرتو از گوشه سمت راست و بالای آن خارج می شود که این پرتو اضلاع افقی را ۱۲ بار و اضلاع عمودی را ۱۰ بار قطع می‌کند. پس $x = 12$، $y = 10$ و در نتیجه $2x + y = 34$.

۲۵۲) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$(a,b) = d \Rightarrow a = a'd\ ,\ b = b'd\ ,\ (a',b') = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a'd} - \frac{1}{b'd} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{b'-a'}{a'b'd} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{b'-a'}{a'b'} = \frac{d}{c}$$

$$(a',b') = 1 \Rightarrow (a'b', b'-a') = 1$$

$$(a,b,c)=1 \Rightarrow (d,c)=1$$

از قیاس سه رابطه اخیر به تساوی $b'-a'=d$ خواهیم رسید. بنابراین:

$$b'd-a'd=d^2 \Rightarrow b-a=d^2$$

یعنی $b-a$ باید مربع کامل باشد. در بین گزینه های داده شده فقط ۲۴۰۱ مربع کامل می باشد. به ازای $a=49$، $b=2450$ و $c=50$ تساوی صادق است.

۲۵۳) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$16+(n-2)a=\frac{n(n-1)}{2}$$
$$32+2(n-2)a=n(n-1) \Rightarrow n(n-1) \overset{n-2}{\equiv} 32 \Rightarrow \overset{n-2}{\equiv} 32$$
$$\Rightarrow 30 \overset{n-2}{\equiv} 0 \Rightarrow n-2|30$$
$$\text{.امتیاز دو نفر ۸ است} \Rightarrow n \geq 9 \Rightarrow \begin{cases} n=14 \\ n=17 \\ n=32 \end{cases}$$

۲۵۴) گزینه «ج» صحیح است.
هر عدد اول p که بزرگتر از ۳ باشد را می‌توان به شکل $6k \pm 1$ نمایش داد.

$$p^2+23=(6k\pm1)^2+23=36k^2\pm12k+24$$
$$=12(3k^2\pm k+24)$$

عبارت $3k^2 \pm k + 24$ به‌ازای تمام مقادیر صحیح k، زوج می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$p^2+23=24q$$

پس p^2+23 به‌ازای $p>3$ بر مقسوم علیه‌های ۲۴ یعنی ۲ و ۳ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۲ و ۲۴، بخش‌پذیر می‌باشد.

۲۵۵) گزینه «ه» صحیح است.

$$x^3+x=22x+44 \quad \Rightarrow \quad x^3-21x=44 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-21)=44$$

$$x(x^2-21)=2^2\times 11 \qquad (1)$$

پس x^2-21 باید یکی از مقادیر $\pm1, \pm2, \pm4, \pm11, \pm22, \pm44$ باشد که به سادگی می‌توان دید که از بین آن‌ها، فقط $x^2-21=4$ جواب صحیح دارد.

پس خواهیم داشت که $x = \pm 5$ اما اگر $x^2 - 21 = 4$ باشد طبق صورت معادلهٔ (۱)، x باید برابر با ۱۱ باشد که چنین نیست، پس معادله هیچ جوابی ندارد.

۲۵۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.
طرفین معادله را در ۵ ضرب می‌کنیم.

$$25xy - 15x - 10y = 20 \quad \Rightarrow \quad 25xy - 15x - 10y + 6 = 26$$

$$\Rightarrow (5x - 2)(5y - 3) = 26 = 1 \times 26 = 2 \times 13$$

با امتحان کردن حالت‌های مختلف (۴ حالت)، تنها زمانی جواب برای x و y، طبیعی خواهد بود که داشته باشیم:

$$\begin{cases} 5x - 2 = 13 \\ 5y - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 1)$$

یعنی تنها جواب معادله $(x, y) = (3, 1)$ می‌باشد.

۲۵۷) گزینهٔ «د» صحیح است.
اگر $y = 0$، آنگاه $2^x = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$. پس $z + 1$ و $z - 1$، توان‌های ۲ هستند ولی تنها توان‌های ۲ که با هم دو تا اختلاف دارند عبارتند از ۲ و ۴. پس $(x, y, z) = (3, 0, 3)$. اگر $y > 0$، آنگاه باقیماندهٔ 2^x بر ۳ برابر باقیماندهٔ z^2 بر ۳ است ولی یک مربع کامل باقیمانده‌اش به ۳، صفر یا یک است پس x باید زوج باشد در نتیجه $3^y = z^2 - 2^x = (z - 2^{\frac{x}{2}})(z + 2^{\frac{x}{2}})$
لذا دو عامل در حاصل ضرب اخیر باید توان‌های ۳ باشند. پس $z + 2^{\frac{x}{2}} = 3^m$ و $z - 2^{\frac{x}{2}} = 3^n$.
ولی در این‌صورت $3^m - 3^n = 2^{\frac{x}{2}+1}$. چون سمت راست بر ۳ بخش‌پذیر نیست پس $n = 0$ و $3^m - 1 = 2^{\frac{x}{2}+1}$ که اگر $x = 0$ آنگاه $m = 1$ و لذا $(x, y, z) = (0, 1, 2)$. در غیر این‌صورت باید $3^m - 1$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد و در نتیجه m زوج است پس $(3^{\frac{m}{2}} - 1)(3^{\frac{m}{2}} + 1) = 2^{\frac{x}{2}+1}$. دو عامل در این حاصل‌ضرب توان‌های ۲ هستند که دو واحد اختلاف دارند پس ۲ و ۴ هستند. یعنی $x = 4$ و $(x, y, z) = (4, 2, 5)$.

۲۵۸) گزینهٔ «الف» صحیح است.
اگر $p = 2$، آنگاه $13 = 3^2 + 2^2$ که در آن $n = 1$. اگر $p > 2$، چون p اول است پس باید فرد باشد. پس ۵، مقسوم علیه $3^p + 2^p$ می‌شود چون:
$2^p + 3^p = (2 + 3)(2^{p-1} - 3 \times 2^{p-2} + \ldots + 3^{p-1})$.
در این‌صورت، a بر ۵ بخش‌پذیر خواهد بود. اکنون اگر $n > 1$، a^n بر ۲۵ بخش‌پذیر خواهد شد ولی:

$$\frac{۲^p+۳^p}{۵}=۲^{p-۱}-۳\times ۲^{p-۲}+\ldots+۳^{p-۱}\overset{۵}{\equiv}$$

$$۲^{p-۱}-(-۲)\times ۲^{p-۲}+\ldots+۳^{p-۱}\overset{۵}{\equiv} p\times ۲^{p-۱}\overset{۵}{\equiv}۰$$

که اگر $p\neq ۵$ تناقض است. اگر $p=۵$ خواهیم داشت: $a^n=۲^۵+۳^۵=۷۵۳$، که ۷۵۳ توانی از هیچ عدد طبیعی کوچکتر از خود نیست و باز هم داریم: $n=۱$.

۲۵۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.
صحت جواب مسأله را نیز با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. می‌دانیم جواب مسأله در $n=۳$، $x=y=۱$ می‌باشد. حال فرض کنید برای عدد طبیعی n ای، عددهای فرد x و y یافت شوند که $۷x^۲+y^۲=۲^n$. در این صورت خواهیم داشت:

$$۷(\frac{x\pm y}{۲})^۲+(\frac{۷x\mp y}{۲})^۲=۲(۷x^۲+y^۲)=۲^{n+۱}$$

همچنین یکی از عددهای $\frac{x+y}{۲}$ و $\frac{|x-y|}{۲}$ فرد است (چون مجموع آن‌ها مساوی با ماکسیمم x و y می‌باشد که عددی فرد است). پس با گزینش مناسب علامت + یا −، جفت مناسب (x,y) از اعداد فرد، که جوابی برای $n+۱$ ایجاد خواهد کرد، به دست می‌آید.

۲۶۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.
اگر $p|۵^p-۲^p$، خواهیم داشت ۵ یا $p\neq ۲$. پس طبق قضیهٔ کوچک فرما خواهیم داشت:

$$۵^p\overset{p}{\equiv}۵\ ,\ ۲^p\overset{p}{\equiv}۲\ \Rightarrow\ ۵^p-۲^p\overset{p}{\equiv}۵-۲\overset{p}{\equiv}۰\ \Rightarrow\ p=۳$$

فرض کنید $p,q\neq ۳$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$P|۵^q-۲^q\ ,\ q|۵^p-۲^p$$

بدون این‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای بخورد فرض می‌کنیم $p>q$ پس $(p,q-۱)=۱$.
اگر x عدد صحیحی باشد که $۲x\overset{q}{\equiv}۵$، خواهیم داشت $ord_q^x|q-۱$ و $ord_q^x|p$. پس نتیجه می‌شود که $ord_q^x=۱$ که تناقض است.
(ord_q^x کوچکترین عدد طبیعی n است که $x^n\overset{q}{\equiv}۱$). پس حداقل یکی از p و q باید برابر با ۳ باشد. اگر $p\neq ۳$ آن وقت: $p|۵^۳-۲^۳=۹\times ۱۳$ پس $p=۱۳$ و در نتیجه: $(p,q)=(۳,۳)$ یا $(۳,۱۳)$ یا $(۱۳,۳)$.

۲۶۱) گزینهٔ «ب» صحیح است.
فرض کنید: $۲n+۱=a^۲$ و $۳n+۱=b^۲$ که در آن $a,b\in N$، در این صورت:

$$۵n+۳=۴(۲n+۱)-(۳n+۱)=۴a^۲-b^۲=(۲a-b)(۲a+b)$$

چون $۲a-b\geq ۲$ و $۲a+b\geq ۳$، در نتیجه $۵n+۳$ مرکب است.
نامساوی دوم بدیهی است اما اثبات نامساوی اول به شکل زیر است:

$$۲۵n^۲ + ۲۰n + ۴ > ۱۲n + ۴ \Rightarrow (۵n+۲)^۲ > ۱۲n+۴$$

$$\Rightarrow ۵n + ۲ > ۲\sqrt{۳n+۱} \Rightarrow ۴(۲n+۱) > (۱+\sqrt{۳n+۱})^۲$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲n+۱} - \sqrt{۳n+۱} > ۱ \Rightarrow ۲a - b > ۱ \Rightarrow ۲a - b \geq ۲$$

۲۶۲) گزینهٔ «د» صحیح است.
ثابت می‌کنیم $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲$ باید مرکب باشد.
فرض می‌کنیم: $(a,c)=m$، پس $a=ma_۱$ و $c=mc_۱$.

$$ab = cd \Rightarrow a_۱mb = c_۱md \Rightarrow a_۱b = c_۱d \Rightarrow a_۱|c_۱d \quad , \quad c_۱|a_۱b$$

اما چون $(a_۱,c_۱) = ۱$ بنابراین $a_۱|d$ و $c_۱|b$. در نتیجه $d = a_۱t_۱$ و $b = c_۱t_۲$. با جایگذاری در فرض مسأله داریم:

$$a_۱mc_۱t_۲ = c_۱ma_۱t_۱ \Rightarrow t_۱ = t_۲ = t$$

در نتیجه:

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲ = a_۱^۲m^۲ + c_۱^۲t^۲ + c_۱^۲m^۲ + a_۱^۲t^۲ = (a_۱^۲+c_۱^۲)(m^۲+t^۲)$$

با توجه به این‌که $a_۱$ و $c_۱$ و m و t همگی بزرگتر یا مساوی با یک می‌باشند پس $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲$ مرکب خواهد بود. و در بین گزینه‌ها فقط ۲۱۱ عددی اول می‌باشد.
برای گزینه‌های مختلف جواب زیر به‌دست می‌آید:

الف) $a = ۳\ ,\ b = ۵\ ,\ c = ۱\ ,\ d = ۱۵$

ب) $a = ۲\ ,\ b = ۱۰\ ,\ c = ۴\ ,\ d = ۵$

ج) $a = ۷\ ,\ b = ۶\ ,\ c = ۳\ ,\ d = ۱۴$

هـ) $a = ۳\ ,\ b = ۱۲\ ,\ c = ۹\ ,\ d = ۴$

تنها گزینهٔ «د» عددی اول می‌باشد.

۲۶۳) گزینهٔ «ب» صحیح است.
ثابت می‌کنیم تنها جواب معادله $n = m = ۱$ می‌باشد. برای این کار حکم زیر را ثابت می‌کنیم:
در تجزیه $n!$ به عوامل اول $(n > ۱)$، حداقل یک عامل اول با توان واحد وجود دارد.

حکم فوق برای $n=۲$ و $n=۳$ برقرار است. پس فرض می‌کنیم $n>۳$.
اگر $n=۲k$ عددی زوج باشد چون $n>۳$ پس $k>۱$ و بنابر قضیهٔ چبیشف بین k و $n=۲k$ عدد اولی مانند p وجود دارد یعنی: $k<p<۲k=n$.
در نتیجه $n=۲k<۲p$ و $p<n<۲p$. بنابراین در تجزیه $n!$ به عوامل اول، توان p برابر با یک خواهد بود.
اگر $n=۲k+۱>۳$، دوباره $k>۱$ و طبق قضیهٔ چبیشف عدد اولی مانند p وجود دارد که $k<p<۲k$.
در نتیجه $p\geq k+۱$ و $۲p\geq ۲k+۲$ که نشان می‌دهد $p<n<۲p$. همانند حالت قبل نتیجه خواهد شد که توان p در تجزیه $n!$ به عوامل اول برابر یک است.
اما می‌دانیم اگر عددی مربع کامل باشد باید توان عوامل اول آن، همگی زوج باشند. پس معادله فوق برای $n>۱$، جواب نخواهد داشت.

۲۶۴) گزینهٔ «ج» صحیح است.
به روش استقرا ثابت می‌کنیم:

$$(\dots((۲*۳)*۴)*\dots)*n=\frac{n(n+۱)+۲(-۱)^n}{n(n+۱)-۲(-۱)^n}\quad (n\geq ۳)$$

برای $n=۳$ حکم بدیهی است. فرض کنید تساوی فوق برقرار باشد. در این صورت:

$$((\dots((۲*۳)*۴)*\dots)*n)*(n-۱)=\frac{\frac{n(n+۱)+۲(-۱)^n}{n(n+۱)-۲(-۱)^n}+n+۱}{۱+(n+۱)\times\frac{n(n+۱)+۲(-۱)^n}{n(n+۱)-۲(-۱)^n}}$$

$$=\frac{n(n+۱)+۲(-۱)^n+n(n+۱)^۲-۲(-۱)^n(n+۱)}{n(n+۱)-۲(-۱)^n+n(n+۱)^۲+۲(-۱)^n(n+۱)}$$

$$=\frac{(n+۱)(n+۲)+۲(-۱)^{n+۱}}{(n+۱)(n+۲)-۲(-۱)^{n+۱}}$$

یعنی با فرض درستی حکم برای مقدار n، تساوی برای مقدار $n+۱$ نیز برقرار است. در نتیجه طبق قضیه استقرا، حکم برای همهٔ مقادیر طبیعی $n\geq ۳$ برقرار است.

۲۶۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.
لم. فرض کنید $f(x)=x[x[x[x]]]$.
اگر a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $ab>۰$ و $|a|>|b|\geq ۱$، در این صورت:

$$|f(a)|>|f(b)|$$

برهان. توجه کنید که $|[a]|\geq|[b]|\geq ۱$. با ضرب این نامساوی‌ها در نامساوی $|a|>|b|\geq ۱$ خواهیم داشت $|a[a]|>|b[b]|\geq ۱$. از طرفی $a[a]$ و $a[a[a]]$ هم علامت می‌باشند. به همین

ترتیب $b[b]$ و $b[b[b]]$ نیز هم علامتند. درنتیجه با تکرار ضرب نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$|a[a[a]]| \geq |b[b[b]]| \geq ۱\ ,\ |a[a]| > |b[b]| \geq ۱$$

که بیانگر آن است که $|f(a)| > |f(b)|$.

می‌دانیم اگر $|x| < ۱$ آنگاه $f(x) = ۰$ و $f(۱) = f(-۱) = ۱$. فرض کنید $f(x) = ۸۸$ پس $|x| > ۱$. مسأله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

(۱) $x \geq ۱$. به راحتی می‌توان نشان داد $f(\frac{۲۲}{۷}) = ۸۸$. از لم فوق نتیجه می‌شود که $f(x)$ در ناحیه $(۱, +\infty)$ صعودی است. پس $x = \frac{۲۲}{۷}$ تنها جواب معادله در این فاصله خواهد بود.

(۲) $x \leq -۱$. از لم فوق نتیجه می‌شود که $f(x)$ در ناحیهٔ $(-\infty, -۱)$ نزولی است. چون:

$$|f(-۳)| = ۸۱ < f(x) = ۸۸ < |f(-\frac{۱۱۲}{۳۷})| = ۱۱۲$$

پس $\frac{-۱۱۲}{۳۷} > x > -۳$ و $[x[x[x]]] = -۳۷$ که نتیجه می‌دهد $-۳ < \frac{۸۸}{-۳۷} = x$ که تناقض است. بنابراین هیچ ریشه‌ای برای معادله در این فاصله وجود ندارد. پس تنها جواب مسأله $x = \frac{۲۲}{۷}$ می‌باشد.

۲۶۶) گزینهٔ «ه» صحیح است.

فرض کنید $y = -z$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = x^۳ + y^۳ + (-y)^۳ = x^۳$$
$$\to x^۲ + ۲y^۲ = x^۳ \Rightarrow x^۲(x-۱) = ۲y^۲$$

پس $\frac{x-۱}{۲}$ باید مربع کامل باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{x-۱}{۲} = t^۲ \Rightarrow x = ۲t^۲ + ۱ \Rightarrow ۲t^۲(۲t^۲+۱)^۲ = ۲y^۲$$
$$\Rightarrow y = t(۲t^۲+۱) \text{ یا } -t(۲t^۲+۱)$$
$$\Rightarrow z = -t(۲t^۲+۱) \text{ یا } t(۲t^۲+۱)$$

که نشان می‌دهد به ازای هر $t \in z$ برای z, y, x جواب خواهیم داشت.

۲۶۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.

روش اول: داریم:

$$a_۳ = a_۲ + a_۱$$
$$a_۴ = a_۳ + a_۲ = ۲a_۲ + a_۱$$
$$a_۵ = a_۴ + a_۳ = ۳a_۲ + ۲a_۱$$
$$\vdots$$
$$a_{n-۱} = f_{n-۲}a_۲ + f_{n-۳}a_۱ \quad (۱)$$
$$a_n = f_{n-۱}a_۲ + f_{n-۲}a_۱ \quad (۲)$$

که درآن f_n، nامین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناچی است که در آن:

$$f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}, \ldots, f_۳ = ۲, f_۲ = ۱, f_۱ = ۱$$

$$\begin{cases} a_1 = a_n + a_{n-1} = f_{n-1}a_2 + f_{n-2}a_1 + f_{n-2}a_2 + f_{n-3}a_1 \\ a_2 = a_1 + a_n = a_1 + f_{n-1}a_2 + f_{n-2}a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(1 - f_{n-1}) = a_2 f_n \quad (3) \\ a_1(1 + f_{n-2}) = a_2(1 - f_{n-1}) \quad (4) \end{cases}$$

حال با فرض $a_1 \neq 0$، از (۳) نتیجه می‌شود که $a_2 \neq 0$. در نتیجه از (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$(1 - f_{n-1})^2 = f_n(1 + f_{n-2}) = f_n + f_n f_{n-2} \quad (5)$$

اما در مورد دنبالهٔ فیبوناچی و اعضای آن می‌دانیم:

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

بنابراین:

$$f_n + f_n f_{n-2} = f_n + f_{n-1}^2 + (-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow 1 - 2f_{n-1} + f_{n-1}^2 = f_n + f_{n-1}^2 + (-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f_n + 2f_{n-1} = 1 - (-1)^{n-1}$$

در تساوی فوق، عبارت سمت چپ به ازای $n > 2$، از ۳ بیشتر است در صورتی که عبارت سمت راست حداکثر برابر است با ۲. درنتیجه باید $a_1 = 0$ که از آن تساوی (۳) نتیجه می‌شود $a_2 = 0$. از طرفی $a_3 = a_2 + a_1$ پس $a_3 = 0$. و به همین ترتیب ثابت می‌شود تمامی a_i ها باید برابر با صفر باشند. پس تنها جواب دستگاه عبارت است از:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

روش دوم: فرض می کنیم بین این n عدد، a_k کوچکترین عضو باشد.

$$\left.\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + a_{k+2} \\ a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-2} \Rightarrow a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-2}}{2}$$

فرض کردیم که a_k، کوچکترین عضو باشد پس:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{a_{k+1} + a_{k-2}}{2} < a_{k-2} \\ a_k &= \frac{a_{k+1} + a_{k-2}}{2} < a_{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{k+1} + a_{k-2} < a_{k-2} + a_{k+1}$$

که تناقض است. بنابراین برای برقراری تساوی

$$2\left(\frac{a_{k+1} + a_{k-2}}{2}\right) = a_{k+1} + a_{k-2}$$

باید علامت‌های نامساوی درروابط فوق، به تساوی تبدیل شوند. بدین ترتیب نتیجه می‌شود $a_{k+1} = a_{k-2} = a_k$ و به همین شکل ثابت می‌شود تمامی a_i ها با هم برابرند که با حل معادلهٔ اول ($a_2 = a_2 + a_1$) نتیجه می‌شود:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

۲۶۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.

ثابت می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n، عدد $10^{81n} - 1$ بر ۷۲۹ بخش‌پذیر است.

داریم:

$$10^{81}n - 1 = (10^{81})^n - 1 = (10^{81} - 1)A$$

کهA عددی طبیعی است.

$$10^{81} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{\text{۸۱ تا}}$$

$$= 999\ldots9 \times \overbrace{1\underbrace{0\ldots0}_{\text{۸ تا}}1\underbrace{0\ldots0}_{\text{۸ تا}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{\text{۸ تا}}1}^{\text{تعداد یک‌ها۹ تا می‌باشد}} =$$

$$9 \times (\underbrace{11\ldots1}_{\text{۹ تا}}) \times (10\ldots010\ldots01\ldots10\ldots01)$$

در این عدد که حاصل‌ضرب سه عدد می‌باشد هر سه عدد به ۹ بخش‌پذیر می‌باشند. چون اولی ۹ است و دوتای دیگر مجموع ارقامشان ۹ است، پس در کل حاصل‌ضرب آن ها که همان ($10^{81} - 1$) است بر $729 = 9 \times 9 \times 9$ بخش‌پذیر است. در نتیجه $10^{81n} - 1$ برای هر n بر ۹ بخش‌پذیراست.پس همه اعدادطبیعی به شکل 10^{81n} درتصاعد مذکور ظاهر می‌شوند که تعداد آن‌ها نامتناهی است.

۲۶۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.

اگر b, a دو عدد طبیعی باشند طوری که $a > b$ آنگاه داریم:

$$(a,b) \le b, (a,b) \le \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} 2(a,b) \le a \\ (a,b) \le b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(a,b) \le a + b \Rightarrow (a,b) \le \frac{a+b}{3}$$

اگر برای هر ۱۲ یال این نامساوی را بنویسیم و جمع بزنیم چون عدد هر رأس در صورت کسر سمت راست نامساوی، دقیقاً سه بار تکرار می‌شود خواهیم داشت مجموع اعداد روی رأس ها،

بزرگتر یا مساوی مجموع اعداد روی یال ها هستند. پس برای برقراری شرط مسأله باید برای هر یالی تساوی $\frac{a+b}{۲} = (a,b)$ برقرار باشد. اما اگر $(a,b) = d$ ، $a = a'd$ ، $b = b'd$، آنگاه داریم:

$$۳d = a'd + b'd \Rightarrow ۳ = a' + b' \quad ,(a',b') = ۱ \quad ,a' > b'$$

پس نتیجه خواهد شد: $a' = ۲$ و $b' = ۱$ یعنی $a = ۲b$

حال اگر d, c دو رأس دیگری باشند که به رأس a متصل اند هر کدام از این دو عدد یا نصف a هستند یا دو برابر آن. در هر صورت یا خواهیم داشت $c = d$ که تناقض است و یا این که یکی از آن ها با b برابر می‌شود که بازهم تناقض است چون طبق شرط مسأله اعداد متمایز هستند.

۲۷۰) گزینهٔ «الف» صحیح است.

فرض می‌کنیم چنین m, k ای وجود داشته باشند بنابراین $۴۸|k!$ پس $k \geq ۶$ ولی با امتحان کردن، می توان دید که $k = ۶$ به جواب نمی‌رسد. پس $k \geq ۷$. درچنین حالتی $k!$ بر ۳۲و۹ بخش‌پذیر خواهد بود پس $\frac{k!+۴۸}{۴۸}$ نسبت به ۶ اول است و لذا $(k+۱)$ هم باید نسبت به ۶ اول باشد. اگر عدد$(k+۱)$ اول نباشد عامل اولی بزرگتر از ۳ خواهد داشت ولی این عدد $k!$ را می‌شمارد پس $k! + ۴۸$ رانمی‌شمارد. از این نتیجه خواهد شد که $(k+۱)$ اول است. پس بنابر قضیه ویلسون $k! + ۱$ بر $(k+۱)$ بخش‌پذیر خواهد بود و چون $k! + ۴۸$ نیز بر $(k+۱)$ بخش‌پذیر است پس $k+۱ = ۴۷$ پس تنها باید بررسی شود که $\frac{۴۶!}{۴۸} + ۱$ توانی از ۴۷ است یا نه. اما داریم: $\frac{۴۶!}{۴۸} + ۱ \overset{۵۳}{\equiv} ۲۹$

اما مرتبهٔ ۵۳ برابر ۱۳ است. پس هیچ توانی از ۴۷ به پیمانهٔ ۵۳، هم‌نهشت با ۲۹ نخواهد بود. پس به تناقض رسیدیم و هیچ k, m ای در معادله صدق نمی‌کند.

۲۷۱) گزینهٔ «ه» صحیح است.

اگر فرض کنیم $A_n = ۳^n + ۵^n$، آنگاه با استقرا روی n می‌توان ثابت کرد که:

$$A_n = (۳+۵)A_{n-۱} - ۳ \times ۵ \times A_{n-۲}$$

البته این تساوی با جایگذاری ضابطهٔ A_n درابطه نیز ثابت می‌شود.

پس اگر A_n بر $A_{n-۱}$ بخش‌پذیر باشد عدد $۳ \times ۵ \times A_{n-۲}$ هم بر $A_{n-۱}$ بخش‌پذیر است. اگر $n > ۱$،آنگاه $A_{n-۱}$ نسبت به ۳ و نسبت به ۵ اول است پس $A_{n-۲}$ بر $A_{n-۱}$ باید بخش‌پذیرباشد که ممکن نیست چون $A_{n-۱} > A_{n-۲}$، پس تنها حالت $n = ۱$ ممکن و قابل قبول است.

۲۷۲) گزینهٔ «ه» صحیح است.

فرض کنید چنین b, aای وجود دارند. اگر m عددی اول باشد و همچنین بزرگتراز $a + b$ باشد بنابر قضیهٔ دیریکله، نامتناهی عدد اول وجود دارد که باقیماندهٔ آن ها بر m برابر b باشد و نامتناهی عدد اول نیز وجود دارد که باقیماندهٔ آن ها بر m برابر $m - a$ باشد. حال اگر p عددی

اول از دستهٔ اول و بزرگتر از ۱۰۰۰ و q هم عددی از دستهٔ دوم و بزرگتر از ۱۰۰۰ باشد آنگاه $ap+bq$ بر m بخش‌پذیر است و این با اول بودن $ap+bq$ در تناقض است.

۲۷۳) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$x^{۸۱}+y^{۸۱}=(x^{۸۰}+y^{۸۰})(x+y)-xy(x^{۷۹}+y^{۷۹})$$

با فرض $m = x^{۷۹}+y^{۷۹} = x^{۸۰}+y^{۸۰} = x^{۸۱}+y^{۸۱}$ خواهیم داشت:

$$m=m(x+y)-xym$$
$$\Rightarrow m(x-۱)((۱-y)=۰ \begin{cases} x=۱ \Rightarrow y=۰ \text{ یا } ۱ \\ y=۱ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } ۱ \\ m=۰ \Rightarrow x=y=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y)\in\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$$

۲۷۴) گزینهٔ «ه» صحیح است.

بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض می‌کنیم $x \le y \le z < n$. خواهیم داشت:

$$k^x+k^y+k^z=k^n \Rightarrow k^n \le ۳k^z \Rightarrow k^{n-z}\le ۳$$

از نامساوی اخیر، سه حالت زیر نتیجه می‌شوند:

حالت اول. $k=۱$

$$۱^k+۱^y+۱^z=۳\neq ۱^n \Rightarrow$$ معادله جواب ندارد.

حالت دوم. $n-z=۱, k=۲$

$$۲^x+۲^y+۲^z=۲^{z+۱}\Rightarrow ۲^x+۲^y=۲^z$$
$$\Rightarrow ۱+۲^{y-x}=۲^{z-x} \overset{z\geq x}{\Rightarrow} ۲|۲^{y-x}+۱ \Rightarrow ۲^{y-x}=۱\Rightarrow y=x$$
$$\Rightarrow ۲^z=۲^x+۲^x=۲x+۱ \Rightarrow z=x+۱$$

پس یک سری از جواب‌های طبیعی معادله عبارت خواهند بود از:

$$(k,x,y,z,n)=(۲,x,x,x+۱,x+۲) \qquad (x\in N)$$

حالت سوم. $n-z=۱, k=۳$

$$۳^x+۳^y+۳^z=۳^{z+۱}=۲\Rightarrow ۳^x+۳^y=۲\times ۳^z \Rightarrow ۱+۳^{y-x}=۲\times ۳^{z-x}$$

اگر $x<z$، آنگاه چون $۳|۲\times ۳^{z-x}$، پس $۱+۳^{y-x}\overset{۳}{\equiv}۰$ که هیچ وقت امکان پذیر نیست. پس $z=x$. در نتیجه خواهیم داشت: $۱+۳^{y-x}=۲$ که بیانگر آن است که $y=x$. پس یک سری دیگر از جواب‌های طبیعی معادله عبارتند از:

$$(k,x,y,z,n)=(۳,x,x,x,x+۱)$$

۲۷۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.

طرفین معادله را در ۲ ضرب کنید خواهیم داشت:

$$6x^2 + 2 = 8y^3 \Rightarrow (x+1)^3 - (x-1)^3 = 8y^3$$
$$\Rightarrow (x+1)^3 = (2y)^3 + (x-1)^3$$

اما طبق قضیهٔ آخر فرما معادلهٔ $x^3 + y^3 = z^3$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است اگر $z = 0$ یا این که یکی از اعداد x یا y برابر صفر باشند.

بنابراین دو حالت داریم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1 \qquad (1)$$
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1 \qquad (2)$$

همچنین در حالت دوم، y نمی‌تواند صفر باشد چون به ازای $y = 0$ معادله برای x جواب نخواهد داشت.

پس معادله تنها دو دسته جواب دارد.

۲۷۶) گزینهٔ «ج» صحیح است.

مسأله را در حالت کلی و برای عدد $n(n \geq 2)$ حل می‌کنیم. می‌دانیم که اگر داشته باشیم $(a,n) = 1$ که $a < n$، خواهیم داشت $(n-a,n) = 1$ که درآن هم $n - a < n$. اثبات ادعای فوق به صورت زیر است:

$$(n-a,n) = d \Rightarrow \begin{cases} d|n \\ d|n-a \end{cases} \Rightarrow d|n-(n-a) = a$$

بنابراین d مقسوم علیه مشترک n, a می‌باشد اما می‌دانیم تنها مقسوم علیه مشترک n, a برابر یک می‌باشد. پس $d = 1$ بنابراین به ازای هر عدد a که کوچکتر از n باشد و نسبت به n اول باشد، عدد $n - a$ نیز این شرایط را داراست. از طرفی اگر فرض کنیم تعداد تمام اعداد طبیعی کوچکتر از n که نسبت به n اول‌اند برابر $\phi(n)$ می‌باشد، پس $\phi(n)$ باید عددی زوج باشد. از طرفی طبق الگوریتمی که ارائه دادیم، این $\phi(n)$ تا عدد را می‌توانیم به $\frac{\phi(n)}{2}$ دستهٔ دوتایی تقسیم کنیم که مجموع آن ها برابر $(n-a) + a = n$ می‌باشد پس مجموع اعداد فوق برابر است با: $n\frac{\phi(n)}{2}$ پس جواب مسأله برابر است با: $\frac{1377\phi(1377)}{2}$.

اما می‌دانیم: $1377 = 3^4 \times 17$. بنابراین $\phi(1377) = 3^3(3-1)(17-1)$ یعنی $\phi(1377) = 864$.

پس جواب مسأله عبارت است از: 1377×432

۲۷۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.
برای $n = ۴$، به وضوح برای m جواب طبیعی نخواهیم داشت.
پس ابتدا فرض می‌کنیم $n > ۴$.

$$۵^۴(۵^{n-۴} + ۵ - ۱) = ۵^۴(۵^{n-۴} + ۴) = m^۲$$

برای برقراری این تساوی، $۵^{n-۴} + ۴$ باید عددی مربع کامل باشد. پس فرض می‌کنیم:

$$۵^{n-۴} + ۴ = k^۲ \Rightarrow ۵^{n-۴} = (k+۲)(k-۲)$$

در سمت چپ تساوی فوق،فقط عامل ۵ وجود دارد پس $k - ۲ = ۵^y, k + ۲ = ۵^x$. اما بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$۵^x - ۵^y = ۴$$

که سمت چپ تساوی مضرب ۵ است ولی سمت راست مضربی از ۵ نیست پس برای برقراری تساوی باید داشته باشیم $y = ۰$ که نتیجه خواهد شد $x = ۱$ پس با جاگذاری مقادیر فوق نتیجه می‌شود که $n = ۵$.
اگر $n = ۵$ خواهیم داشت $m = ۷۵$. پس جواب معادله برای $n > ۴$ برابر است با $m = ۷۵, n = ۵$.
اما برای $n < ۴$ خواهیم داشت:

$$۵^n(۱ + ۵^{۵-n} + ۵^{۴-n}) = m^۲$$

چون عبارت داخل پرانتز مضرب ۵ نیست، پس باید n عددی زوج باشد. بنابراین $n = ۲$ پس باید عدد $۵^۲(۱ + ۵^۳ + ۵^۲)$ عددی مربع کامل باشد که چنین نیست.

۲۷۸) گزینه «ب» صحیح است.
با جایگذاری اعداد $p = ۳, p = ۲$، مشاهده می‌شود که تنها $p = ۳$ در شرط مسأله صدق می‌کند.
می‌دانیم اعداد اول p که بزرگتر از ۳ باشند به‌صورت $۶k \pm ۱$ قابل نمایش هستند. مقدار فوق را در $p^۲ + ۱۱$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} p^۲ + ۱۱ &= (۶k \pm ۱)^۲ + ۱۱ = ۳۶k^۲ \pm ۱۲k + ۱۲ = ۱۲(۳k^۲ \pm k + ۱) \\ &= ۲^۲ \times ۳(۳k^۲ \pm k + ۱) \end{aligned}$$

می‌دانیم عدد ۱۲، دارای شش مقسوم علیه است، پس برای این که $p^۲ + ۱۱$ نیز ۶ مقسوم علیه داشته باشد، باید داشته باشیم. $۳k^۲ \pm k + ۱ = ۱$. که با حل این معادله، مقدار k، عددی صحیح نمی‌شود. پس تنها جواب معادله $p = ۳$ می‌باشد.

۲۷۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$x^{۴}+۴^{x}=p \Rightarrow (x^{۲})^{۲}+(۲^{x})^{۲}=p$$
$$\Rightarrow (x^{۲}+۲^{x})^{۲}-۲^{x+۱}\times x^{۲}=p$$

اما از آن‌جا که p عددی است اول و مخالف دو، بنابراین عددی فرد است. پس x نیز عددی فرد و در نتیجه $x+۱$ عددی زوج خواهد بود.

$$(x^{۲}+۲^{x}+۲^{\frac{x+۱}{۲}}\times x)(x^{۲}+۲^{x}-۲^{\frac{x+۱}{۲}}\times x)=p$$

از آن‌جا که پرانتز سمت چپ، مثبت است و همچنین با توجه به مثبت بودن x، از پرانتز سمت راست بزرگتر است پس تنها حالت ممکن عبارت است از:

$$\begin{cases} x^{۲}+۲^{x}+۲^{\frac{x+۱}{۲}}\times x=p \\ x^{۲}+۲^{x}-۲^{\frac{x+۱}{۲}}\times x=۱ \quad (۱) \end{cases}$$

اما ثابت می‌کنیم معادلهٔ (۱) به ازای x های طبیعی پاسخ ندارد.

$$x^{۲}+۲^{x}-۲^{\frac{x+۱}{۲}}\times x=x^{۲}+۲^{\frac{x+۱}{۲}}(۲^{\frac{x-۱}{۲}}-x)$$

اما با استقرا ثابت می‌شود که اگر $x>۶$ آنگاه $۲^{\frac{x-۱}{۲}}-x>۰$ $(x\in N)$.
پایه استقرا به ازای $x=۷$ برقرار است.

فرض استقرا : $۲^{\frac{x-۱}{۲}}>x \Rightarrow$ حکم استقرا : $۲^{\frac{x}{۲}}>x+۱$

$$۲^{\frac{x-۱}{۲}}>x \Rightarrow ۲^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{x-۱}{۲}}>\sqrt{۲}x \Rightarrow ۲^{\frac{x}{۲}}>\sqrt{۲}x>x+۱$$

که با توجه به $x\geq ۷$، این نامساوی بدیهی است.

اما با توجه به طبیعی بودن x، $۲^{\frac{x-۱}{۲}}-x$ عددی طبیعی است. با توجه به همهٔ این موارد ثابت می‌شود که:

$$x^{۲}+۲^{x}-۲^{\frac{x+۱}{۲}}\times x>۱$$

که با معادلهٔ (۱) در تناقض است. با جایگذاری $x=۳$ و $x=۵$ نیز نتیجه می‌شود معادله جوابی ندارد. پس این معادله و در کل معادلهٔ $x^{۴}+۴^{x}=p$ به ازای $x>۱$ جوابی در مجموعهٔ اعداد طبیعی نخواهد داشت.

۲۸۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.

روش اول:

$$\frac{x!+y!}{x!y!}=\frac{z!}{x!y!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{x!}+\frac{۱}{y!}=\binom{x+y}{x} \quad (۱)$$

اگر فرض کنیم که $x,y\geq ۲$ آنگاه $\frac{۱}{y!}+\frac{۱}{x!}$ کوچکتر یا مساوی یک خواهد بود که با توجه به این‌که سمت راست معادلهٔ (۱) عددی طبیعی است نتیجه می‌شود $x,y\leq ۲$. به‌وضوح مقادیر $(x=۲,y=۲),(x=۱,y=۲),(x=۲,y=۱)$ در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کنند. پس تنها حالت ممکن برای معادله $x=۱,y=۱$ می‌باشد که بنابر آن خواهیم داشت $z=۲$.

روش دوم: بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $x>y$.

$$x>y\Rightarrow x!+y!\overset{x!}{\equiv}z! \quad , \quad z>x\Rightarrow y!\overset{x!}{\equiv}z!\overset{x!}{\equiv}۰$$

که با توجه به $x>y$ تناقض است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که در $y>x$ نیز برقرار نیست. پس باید داشته باشیم $x=y$:

$$x=y\Rightarrow ۲x!=z!\Rightarrow ۲=\frac{z!}{x!}=z(z-۱)\cdots(z-x+۱)$$

با توجه به این‌که سمت چپ تساوی عدد ۲ می‌باشد، نتیجه می‌شود که $z=۲$.
پس داریم:

$$x+y=۲x=z=۲$$

یعنی $x=y=۱$. پس تنها جواب معادله $(۱,۱,۲)$ خواهد بود.

۲۸۱) گزینهٔ «د» صحیح است.

لم: ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر p عددی اول به فرم $۴k+۳$ باشد و $p|a^۲+b^۲$ آنگاه خواهیم داشت $p|a$ و $p|b$.

اثبات را با برهان خلف انجام می‌دهیم. اگر $p\nmid a$ آنگاه $(a,p)=۱$ و چون $p|a^۲+b^۲$ پس $(b^۲,p)=۱$. بنابراین $(b,p)=۱$.

در نتیجه بنابر قضیهٔ کوچک فرما داریم:

$$a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱ \quad , \quad b^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$$

از طرف دیگر $a^۲\overset{p}{\equiv}-b^۲$ و درنتیجه:

$$(a^۲)^{\frac{p-۱}{۲}}\overset{p}{\equiv}(-b^۲)^{\frac{p-۱}{۲}}=(-۱)^{\frac{p-۱}{۲}}(b^۲)^{\frac{p-۱}{۲}}$$

چون p به فرم $۴k+۳$ است پس $\frac{p-۱}{۲}$ عددی فرد خواهد بود و بنابراین:

$$۱ \overset{p}{\equiv} a^{p-۱} = (a^۲)^{\frac{p-۱}{۲}} \overset{p}{\equiv} -(b^۲)^{\frac{p-۱}{۲}} = -b^{p-۱} \overset{p}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱ \overset{p}{\equiv} -۱$$

پس $p|۲$ و یا $p=۲$ که با فرد بودن p در تناقض است. بنابراین $p|a$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $p|b$.

حال به سؤال اصلی باز می‌گردیم.

با ضرب کردن ۴ در طرفین معادله و اضافه کردن یک به آن‌ها خواهیم داشت:

$$۱۶xy-۴x-۴y+۱=۴z^۲+۱$$
$$\Rightarrow (۴x-۱)(۴y-۱)=(۲z)^۲+۱$$

اعداد به صورت $۴x-۱$ و $۴y-۱$ حتماً عامل اولی به شکل $۴k+۳$ خواهند داشت. (چون اگر تمامی عوامل اول آن‌ها به شکل $۴k+۱$ باشند، خود آن‌ها نیز باید به صورت $۴q+۱$ باشند که چنین نیست.)

پس اگر فرض کنیم یکی از عوامل اول به شکل $۴k+۳$، عدد p باشد با توجه به لم اثبات شده خواهیم داشت:

$$p|(۴x-۱)(۴y-۱) \Rightarrow p|(۲z)^۲+۱ \Rightarrow p|۲z \;\;,\;\; p|۱$$

که هرگز نمی‌تواند برقرار باشد. پس معادله هیچ جوابی ندارد.

۲۸۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.

ثابت می‌کنیم تنها جواب مسأله، $n=۱$ می‌باشد.

فرض می‌کنیم $n>۱$ در مسأله صدق کند. کوچکترین عامل اول n را p فرض می‌کنیم. پس طبق شرط مسأله داریم:

$$۲^n \overset{n}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^n \overset{p}{\equiv} ۱$$

همچنین مرتبهٔ ۲ را در پیمانهٔ p، r در نظر می‌گیریم:

$$ord_p^۲ = r \Rightarrow ۲^r \overset{p}{\equiv} ۱$$

همچنین n باید عددی فرد باشد پس $p \neq ۲$. پس خواهیم داشت $r \leq p-۱$.

همچنین باید داشته باشیم $r|n$ چون در غیر این‌صورت خواهیم داشت:

$$n = rq+t \;\; (۰ \leq t < r)$$

در نتیجه داریم:

$$۲^n \overset{p}{\equiv} ۲^{rq+t} \overset{p}{\equiv} (۲^r)^q \times ۲^t \overset{p}{\equiv} ۱^q \times ۲^t \overset{p}{\equiv} ۲^t \overset{p}{\equiv} ۱$$

و چون داریم $t<r$ پس $ord_p^۲ = t$ که تناقض است. پس $r|n$.

با توجه به شروط $r \leq p-۱$ و $r|n$ به سادگی نتیجه می‌شود که مسأله جواب ندارد. چون

$p - 1$ ،$r \leq p - 1$ پس r مقسوم‌علیهی اول کوچکتر از $p - 1$ و در نتیجه p خواهد داشت که آن را m می‌نامیم. پس $m|n$ یعنی n عاملی اول کوچکتر از p دارد که خلاف فرض ما است. پس تنها جواب مسأله $n = 1$ می‌باشد.

۲۸۳) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$t^2 = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow 4t^2 = 12n^2 + 12n + 4$$
$$\Rightarrow 4t^2 - 1 = 12n^2 + 12n + 3 = 3(4n^2 + 4n + 1) = 3(2n+1)^2$$
$$\Rightarrow (2t-1)(2t+1) = 3(2n+1)^2$$

اما می‌دانیم $(2t-1, 2t+1) = 1$، بنابراین مسأله به دو حالت زیر تبدیل می‌شود:

حالت اول:

$$\begin{cases} 2t - 1 = 3m^2 \\ 2t + 1 = k^2 \end{cases} \Rightarrow 2t + 1 = k^2 = 3m^2 + 2 \Rightarrow k^2 \overset{3}{\equiv} 3m^2 + 2 \overset{3}{\equiv} 2$$

که تناقض است چون هیچ مربع کاملی به پیمانهٔ ۳ باقیماندهٔ ۲ نخواهد داشت.

حالت دوم:

$$\begin{cases} 2t - 1 = m^2 \\ 2t + 1 = 3k^2 \end{cases} \Rightarrow 2t = m^2 + 1$$

اما با توجه به $2t - 1 = m^2$، نتیجه می‌شود که m فرد است پس فرض می‌کنیم $m = 2s + 1$:

$$\Rightarrow 2t = (2S+1)^2 + 1 \Rightarrow t = 2S^2 + 2S + 1 = S^2 + (S+1)^2$$

۲۸۴) گزینهٔ «ب» صحیح است.

طبق معادله خواهیم داشت:

$$p^2 + (3q)p + q^2 - 5^t = 0$$

مقدار p از این معادلهٔ درجه دوم به‌دست می‌آید:

$$p = \frac{-3q \pm \sqrt{9q^2 - 4(q^2 - 5^t)}}{2}$$

برای این‌که p عددی طبیعی باشد، عبارت زیر رادیکال باید مربع کامل باشد، پس:

$$5q^2 + 4 \times 5^t = m^2 \Rightarrow 5|m^2 \Rightarrow 5|m \Rightarrow m = 5s$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$q^2 + 4 \times 5^{t-1} = 5s^2$$

همچنین به وضوح $t \neq 1$، بنابراین q نیز باید مضرب ۵ باشد.

اما می‌دانیم q عددی اول است پس $q = 5$. این مقدار را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$p^2 + 15p + 25 = 5^t \Rightarrow 5|p^2 \Rightarrow 5|p \Rightarrow p = 5$$

با جایگذاری $p = q = 5$ به دست می‌آید $t = 3$. بنابراین معادله تنها دارای یک دسته جواب است.

۲۸۵) گزینهٔ «د» است.

طرفین معادله را در ۴ ضرب کرده و سپس با یک جمع می‌کنیم.

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = A$$

بنابراین باید A مربع کامل باشد، اما به سادگی می‌توان تحقیق کرد که به ازای $y \geq 3$ یا $y \leq -2$ نامساوی زیر برقرار است:

$$(2y^2 + y + 1)^2 > 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 > (2y^2 + y)^2$$

یعنی A، که خود مربع کامل است، بین مربعات کامل دو عدد متوالی قرار می‌گیرد که قابل قبول نیست. پس تنها کافی است حالت‌هایی که در آن‌ها $y \in \{-1, 0, 1, 2\}$ می‌باشد را بررسی کنیم که به این ترتیب جواب‌های زیر می‌شوند:

$$(x,y) \in \{(0,-1), (-1,-1), (0,0), (-1,0), (5,2), (-6,2)\}$$

۲۸۶) گزینهٔ «ب» صحیح است.

در طرفین معادله، $4mn$ را ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$4n + 4m - \frac{4}{n} = 3mn$$

با توجه به طبیعی بودن m و n باید $\frac{4}{n}$ نیز عددی طبیعی باشد، بنابراین خواهیم داشت $n|4$. یعنی $n \in \{1, 2, 4\}$ که با جایگذاری مقادیر مجاز برای m تنها جواب مسأله عبارت است از:

$$(m,n) = (3,2)$$

۲۸۷) گزینهٔ «ج» صحیح است.

$$mn - 1 | n^3 + 1 \Rightarrow mn - 1 | m^3(n^3 + 1) \Rightarrow mn - 1 | m^3n^3 - 1 + m^3 + 1$$

اما می‌دانیم $mn - 1 | m^3n^3 - 1$. بنابراین خواهیم داشت $mn - 1 | m^3 + 1$.

ابتدا فرض می‌کنیم $m = n$. آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} \in N \Rightarrow n + \frac{1}{n-1} \in N$$

بنابراین $\frac{1}{n-1}$ باید عدد طبیعی باشد پس $n = 2$ که با توجه به $m = n$ نتیجه می‌شود $m = 2$ که در معادله صدق می‌کنند. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $m > n$ آنگاه $m \geq n + 1$.

$$mn - 1 \geq (n+1)n - 1 = n^2 + n - 1$$

همچنین $mn - 1 | n^3 + 1$ پس $n^3 + 1 = k(mn-1)$ یعنی $n^3 = kmn - k - 1$
اما $n | n^3$ پس $n | kmn - (k+1)$ یعنی $n | k+1$ پس $k + 1 \geq n$ یا $k \geq n - 1$.
اگر $k \geq n$ باشد، آنگاه داریم:

$$k(mn-1) \geq n(mn-1) \geq n(n^2+n-1)$$
$$\Rightarrow n^3 + 1 \geq n^3 + n^2 - n \Rightarrow n^2 - n - 1 \leq 0 \Rightarrow n < 2 \Rightarrow n = 1$$
$$\Rightarrow m - 1 | 2 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = 3$$

اما اگر $k = n - 1$، آنگاه داریم:

$$n^3 + 1 = k(mn-1) = (n-1)(mn-1)$$
$$\Rightarrow \frac{n^3+1}{n-1} = mn - 1 \Rightarrow m = \frac{n^2+1}{n-1} = n + 1 + \frac{2}{n-1} \in N \quad (n \neq 1)$$

بنابراین $\frac{2}{n-1}$ باید عددی طبیعی باشد یعنی $n = 2$ یا $n = 3$.

$$n = 2 \Rightarrow 2m - 1 | 9 \Rightarrow m \in \{1, 2, 5\}$$
$$n = 3 \Rightarrow 3m - 1 | 28 \Rightarrow m \in \{1, 5\}$$

با بررسی حالت $n = 1$ نیز نتیجه می‌شود که $m = 2$ یا $m = 3$.
بنابراین تمامی جواب‌های مسأله عبارتند از:

$$(m,n) = \{(2,2), (1,2), (1,3), (5,2), (5,3), (2,1), (3,1), (2,5), (3,5)\}$$

۲۸۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.
اگر فرض کنیم $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 6}$، طبق فرض مسأله خواهیم داشت:

$$4\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 6} = \overline{6 a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$$

اما می‌دانیم که

$$4N \overset{10}{\equiv} \overline{6 a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \overset{10}{\equiv} a_1$$

همچنین:

$$4N \overset{10}{\equiv} 4(a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + 10 a_1 + 6)$$

بنابراین:

$$4N \overset{10}{\equiv} 4 \overset{10}{\equiv} a_1$$

و از آن جا که a_1، رقم است، پس $a_1 = 4$
از طرفی باقیماندهٔ هر عدد بر ۴، برابر است با باقیماندهٔ دو رقم آخر آن بر ۴.

$$N \overset{4}{\equiv} \overline{a_1 6} \overset{4}{\equiv} 46 \overset{4}{\equiv} 2$$

۲۸۹) گزینهٔ «ه» صحیح است.
فرض می‌کنیم $A=\overline{abcd}$ طبق شرط مسأله خواهیم داشت:

$$A=\overline{abcd}=(\overline{cd})^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d=(۱۰c+d)^{۲}=۱۰۰c^{۲}+۲۰bc+d^{۲}$$

$$A\overset{۱۰}{\equiv}(\overline{cd})^{۲}\Rightarrow d\overset{۱۰}{\equiv}d^{۲}\Rightarrow d\in\{۰,۱,۵,۶\}$$

$$A=\overline{abcd}=۱۰۰\overline{ab}+\overline{cd}=(\overline{cd})^{۲}\Rightarrow ۱۰۰\overline{ab}=\overline{cd}(\overline{cd}-۱)$$

$$\Rightarrow ۱۰۰|\overline{cd}(\overline{cd}-۱)$$

از آن‌جایی که $\overline{cd}-۱,\overline{cd}$ نسبت به یکدیگر اول اند، یکی از آن ها باید مضرب ۲۵ و دیگری مضرب ۴ باشد. همچنین عدد مضرب ۲۵ باید عددی فرد باشد.
با توجه به شرایط گفته شده اگر $d=۰$، آنگاه $\overline{cd}$ عددی زوج خواهد بود، پس $\overline{cd}-۱$ باید مضرب ۲۵ باشد که غیر ممکن است. چون یکان $\overline{cd}-۱$ برابر ۹ خواهد بود و $\overline{cd}-۱$ نمی‌تواند مضرب ۲۵ باشد.
اگر $d=۱$، آنگاه $\overline{cd}$ عددی فرد و $\overline{cd}-۱$ زوج خواهد بود. پس $\overline{cd}$ باید مضرب ۲۵ باشد که همانند بالا امکان‌پذیر نیست.
اگر $d=۵$، آنگاه $\overline{cd}$ فرد است و مضرب ۲۵ باید باشد. پس $c=۲$ یا $c=۷$. اگر $c=۲$ آنگاه $\overline{cd}=۲۵$ و $(\overline{cd})^{۲}$ برابر ۶۲۵ خواهد بود که ممکن نیست چون ۶۲۵ عددی چهار رقمی نیست. اگر هم $c=۷$ آنگاه $۷۵\times۷۴ \not| ۱۰۰$ اگر $d=۶$، آنگاه $\overline{cd}-۱$ عددی فرد خواهد بود. با رقم یکان ۵، و برای آنکه $۲۵|\overline{cd}-۱$ نتیجه می‌شود $c=۲$ یا $c=۷$. اگر $c=۲$، همانند بالا $(\overline{cd})^{۲}$ چهار رقمی نمی‌شود. پس $c=۷$ و در نتیجه $\overline{cd}=۷۶$
از طرفی $A=(\overline{cd})^{۲}$، پس $A=(۷۶)^{۲}=۵۷۷۶$. بنابراین داریم:

$$a+b+c+d=۲۵$$

۲۹۰) گزینهٔ «د» صحیح است.
طرفین معادله را با چهار جمع می‌کنیم.

$$a+۴=x^{۳}y+۴xy+x^{۲}+۴=xy(x^{۲}+۴)+(x^{۲}+۴)=(xy+۱)(x^{۲}+۴)$$

چون $x,y\geq ۱$، بنابراین $a+۴$ باید عددی مرکب باشد. که بین گزینه‌ها تنها $۲۴۷+۴=۲۵۱$ عددی اول است.
برای گزینهٔ اول $(x=۳,y=۶)$، برای گزینهٔ دوم $(x=۴,y=۳)$، و برای گزینهٔ سوم $(x=۵,y=۲)$ و برای گزینهٔ پنجم $(x=۲,y=۱۶)$ جواب‌هایی برای مسأله می‌باشند.

۲۹۱) گزینهٔ «الف» صحیح است.
طرفین معادله را به پیمانهٔ ۵ در نظر می‌گیریم.

$$5^n - 7^m \overset{5}{\equiv} -2^m \overset{5}{\equiv} 1374 \overset{5}{\equiv} 4 \overset{5}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^m \overset{5}{\equiv} 1$$

فرض می‌کنیم $m = 4k + r$ که در آن $k = 0, 1, 2, \ldots$ و $1 \leq r \leq 4$ $(r \in N)$

$$2^m \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{4k+r} \overset{5}{\equiv} (2^4)^k \times 2^r \overset{5}{\equiv} 1^k \times 2^r \overset{5}{\equiv} 2^r \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow r = 4$$

نتیجه می‌شود که m باید مضربی از ۴ باشد.
پس فرض می‌کنیم $m = 4x$
حال طرفین تساوی را به پیمانهٔ ۷ در نظر می‌گیریم.

$$5^n - 7^m \overset{7}{\equiv} (-2)^n \overset{7}{\equiv} 2$$

فرض می‌کنیم $n = 6k + r$ که در آن $k = 0, 1, 2, \ldots$ ، $1 \leq r \leq 6$ $(r \in N)$

$$(-2)^n \overset{7}{\equiv} (-1)^n 2^n \overset{7}{\equiv} (-1)^{6k+r} \times 2^{6k+r} \overset{7}{\equiv} (-1)^r \times (2^6)^k \times 2^r$$
$$\overset{7}{\equiv} (-1)^r \times 1^k \times 2^r \overset{7}{\equiv} (-2)^r \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow r = 4$$

پس نتیجه می‌شود که n باید به فرم $6k + 4$ باشد. بنابراین n, m هر دو اعدادی زوج هستند.
حال طرفین تساوی را به پیمانهٔ ۴ در نظر بگیرید.

$$5^n - 7^m \overset{4}{\equiv} 1^n - (-1)^m \overset{4}{\equiv} 1^{6k+4} - (-1)^{4x} \overset{4}{\equiv} 1 - 1 \overset{4}{\equiv} 0 \overset{4}{\equiv} 1374 \overset{4}{\equiv} 2$$

که تناقض است. پس معادله فوق به ازای هیچ n, m ای دارای جواب نمی‌باشد.

۲۹۲) گزینهٔ «ج» صحیح است.
سمت چپ معادلهٔ فوق، همواره عددی فرد است. بنابراین m نیز باید عددی فرد باشد. بنابراین m باید به یکی از فرم‌های $10k \pm 1$ ، $10k \pm 3$ و یا $10k + 5$ باشد. از طرفی اگر $n \geq 5$ آنگاه باقیماندهٔ تقسیم سمت چپ معادله بر ۱۰، برابر خواهد بود با ۳. مسأله را در سه حالت بررسی می‌کنیم: $(n \geq 5)$
حالت اول: $m = 10k \pm 1$

$$1! + 2! + \ldots + n! \overset{10}{\equiv} 3 \overset{10}{\equiv} m^{1384} \overset{10}{\equiv} (10k \pm 1)^{1384} \overset{10}{\equiv} (\pm 1)^{1384} \overset{10}{\equiv} 1$$

که تناقض است. $(1 \overset{5}{\not\equiv} 3)$
حالت دوم: $m = 10k \pm 3$

$$1! + 2! + \ldots + n! \overset{10}{\equiv} 3 \overset{10}{\equiv} m^{1384} \overset{10}{\equiv} (10k \pm 3)^{1384} \overset{10}{\equiv}$$

$$(\pm 3)^{1384} \overset{10}{\equiv} ((\pm 3)^4)^{346} \overset{10}{\equiv} 1^{346} \overset{10}{\equiv} 1$$

که باز هم غیر ممکن است.
حالت سوم: $m = 10k+5$

$$1!+2!+\ldots+n! \overset{10}{\equiv} 3 \overset{10}{\equiv} m^{1384} \overset{10}{\equiv} (10k+5)^{1384} \overset{10}{\equiv} 5^{1384} \overset{10}{\equiv} 5$$

که باز هم غیر ممکن است.
پس کافی است حالت‌های $n \leq 4$ را بررسی کنیم که با بررسی این حالات، تنها $n = m = 1$ جواب مسأله می‌باشد.

۲۹۳) گزینهٔ «ه» صحیح است.

$$4^x + 4^{623} + 4^{1000} = 2^{1246}(1 + 2 \times 2^{753} + 2^{2x-1246})$$

برای این که عبارت داخل پرانتز، عددی مربع کامل باشد کافی است داشته باشیم:

$$2x - 1246 = 2 \times 753$$

که نتیجه می‌شود: $x = 1376$. حال ثابت می‌کنیم که x نمی‌تواند بیشتر از ۱۳۷۶ باشد. اگر فرض کنیم $x > 1376$ خواهیم داشت:

$$2^{2(x-623)} < 1 + 2 \times 2^{753} + 2^{2(x-623)} < (2^{x-623} + 1)^2$$

بنابراین عبارت $1 + 2 \times 2^{753} + 2^{2(x-623)}$ بین مجذورهای دو عدد متوالی قرار می‌گیرد و خود نمی‌تواند مربع کامل باشد. بدین ترتیب بزرگترین مقدار ممکن برای x ۱۳۷۶ می‌باشد.

۲۹۴) گزینهٔ «الف» صحیح است.

فرض می‌کنیم اعداد A, B با چنین خواصی وجود داشته باشند و $\frac{A}{B} = m$ که در آن $m \in N$.
طبق شرط مسأله خواهیم داشت:

$$A \overset{9}{\equiv} 0+2+4+6+8 \overset{9}{\equiv} 2$$
$$B \overset{9}{\equiv} 1+3+5+7+9 \overset{9}{\equiv} 7$$

از طرفی می‌دانیم $A = mB$ بنابراین $A \overset{9}{\equiv} mB$ یعنی $7m \overset{9}{\equiv} 2$، از معادلهٔ هم‌نهشتی اخیر نتیجه می‌شود که $m \overset{9}{\equiv} 8$.
و چون m عددی طبیعی است، پس $m \geq 8$. هم‌چنین می‌دانیم که $B \geq 13759$. بنابراین:

$$A = mB \geq 8 \times 13759 > 99999$$

یعنی A باید عددی شش رقمی باشد که ممکن نیست.

۲۹۵) گزینهٔ «ب» صحیح است.
با ساده کردن سمت چپ معادله خواهیم داشت:

$$8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) = y^3$$

که نتیجه می‌شود y عددی زوج است و هم چنین x^3+3x^2+4x+2 مکعب کامل است.
اگر فرض کنیم $y=2z$، نتیجه می‌شود:

$$z^3 = x^3+3x^2+4x+2$$

اگر داشته باشیم $x\geq 0$، نامساوی زیر همواره برقرار خواهد بود:

$$(x+1)^3 < x^3+3x^2+4x+2 < (x+2)^3$$

که نتیجه می‌شود x^3+3x^2+4x+2 به ازای $x\geq 0$ می‌تواند مکعب کامل باشد.
همچنین اگر $x\leq -2$ آنگاه عددهای $Y=-y, X=-x-2\geq 0$ نیز در معادله صدق خواهند کرد که با توجه به فرض $X\geq 0$ به تناقض بر می‌خوریم. پس تنها حالت ممکن $x=-1$ خواهد بود که با بررسی آن $y=0$ به‌دست می‌آید که تنها جواب مسأله است.

۲۹۶) گزینهٔ «ه» صحیح است.
اگر شماره یکی از محصولات خوب برابر M باشد، آنگاه $N=999999-M$ نیز شماره یکی از محصولات خوب خواهد بود. از طرفی
$M+N=999999$ و همچنین $M\neq N$ همچنین داریم:

$$M+N = 999999 = 13\times 77\times 999 = 27\times 13\times 77\times 37$$

پس مجموع همهٔ شماره‌های محصولات خوب، بر ۳۷ بخش‌پذیر خواهد بود.

۲۹۷) گزینهٔ «د» صحیح است.
طرفین معادله را به پیمانهٔ ۱۱ در نظر می‌گیریم.

$$(x^5)^2 \overset{11}{\equiv} x^{10} \overset{11}{\equiv} 0 \text{ یا } 1$$

هم‌نهشتی فوق به خاطر این برقرار است که یا x مضربی از ۱۱ است که در این صورت $x^{10}\overset{11}{\equiv}0$ و یا $(x,11)=1$، پس طبق قضیهٔ کوچک فرما $x^{10}\overset{11}{\equiv}1$ از این روابط نتیجه می‌شود که $x\overset{11}{\equiv}0$ یا (-1) یا ۱ پس سمت راست معادلهٔ فوق به پیمانهٔ ۱۱ می‌تواند ۶ یا ۷ یا ۸ باشد. ولی سمت چپ تساوی مربع کامل است و مربع‌ها به پیمانهٔ ۱۱ باقیمانده‌ای برابر ۰ یا ۱ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۹ دارند. پس معادلهٔ فوق نمی‌تواند جوابی در اعداد صحیح داشته باشد.

۲۹۸) گزینهٔ «ه» صحیح است.
سؤال را در حالت کلی بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که 2^n-n بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد. برای $p=2$ کافی است n عددی زوج باشد. پس فرض می‌کنیم $p\geq 3$. طبق قضیهٔ کوچک فرما خواهیم داشت:

$$2^{p-1}\overset{p}{\equiv}1 \Rightarrow 2^{m(p-1)}\overset{p}{\equiv}1^m\overset{p}{\equiv}1\ (m\in N)$$

همچنین اگر داشته باشیم $m\overset{p}{\equiv}-1$ آن وقت به ازای $n=m(p-1)$ خواهیم داشت:

$$2^n-n = 2^{m(p-1)}-m(p-1) = 2^{m(p-1)}+m-mp \overset{p}{\equiv} m+1 \overset{p}{\equiv} 0$$

بنابراین کافی است داشته باشیم $n = m(p-1)$ که در آن $m = kp - 1$ $(k \in N)$. در این صورت $2^n - n$ بر p بخش‌پذیر خواهد بود.

۲۹۹) گزینهٔ «د» صحیح است.

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{abc} \in N$$

پس داریم:

$$abc|(a+b+c)(ab+bc+ac)$$

$$a|(a+b+c)(ab+bc+ac) \Rightarrow a|(b+c)(bc), (a,b)=(a,c)=1 \Rightarrow a|b+c$$

به همین ترتیب نتیجه می‌شود که $c|a+b, b|a+c$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $a \geq b \geq c$. از $a|b+c$ و اینکه $2a \geq b+c$ نتیجه می‌شود که ۲ یا $1 = \frac{b+c}{a}$

حالت اول:

$2 = \frac{b+c}{a}$، آنگاه: $b+c = 2a$. از طرفی با توجه به $a \geq b \geq c$ نتیجه می‌شود که $2a \geq b+c$. پس برای برقراری تساوی باید داشته باشیم $a=b=c$ و با توجه به $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ نتیجه می‌شود که

$$a=b=c=1$$

حالت دوم:

$1 = \frac{b+c}{a}$، چون $b \geq c$ نتیجه می‌شود که $b \geq \frac{a}{2}$ یعنی $2 \geq \frac{a}{b}$ و هم‌چنین $3 \geq \frac{a+c}{b}$. هم چنین $a \geq b$. بنابراین $\frac{a+c}{b} \neq 1$. پس دو حالت باقی می‌ماند که یا $2 = \frac{a+c}{b}$ که از آن جا نتیجه می‌شود $a = 3$ و $b = 2$ و $c = 1$. یا $3 = \frac{a+c}{b}$ که نتیجه می‌شود $a = 2$ و $b = c = 1$.
با در نظر گرفتن جایگشت‌های مختلف c, b, a نتیجه می‌شود که مسأله دارای ده جواب است.

۳۰۰) گزینهٔ «ب» صحیح است.

از آن جا که A، عددی چهار رقمی است، پس از به توان دو رسیدن عددی دو رقمی تولید شده است. فرض می‌کنیم: $(m = 3, 4, \ldots, 9, n = 1, 2, \ldots, 9)$ $\quad B = 10m + n$

$$A = B^2 = (10m+n)^2 = 100m^2 + 20mn + n^2$$

با توجه به شرط مسأله، $20mn + n^2$ که دو رقم سمت راست A را ایجاد می‌کند باید مربع کامل باشد و در واقع مجذور عددی طبیعی کوچکتر از ۱۰ باشد و هم‌چنین n عددی طبیعی از یک تا ۹ باشد و هم‌چنین $m^2 > 10$. پس $m \geq 4$ و $mn \leq 4$ که تنها برای $n = 1, m = 4$ ممکن است. پس مسأله یک جواب دارد که عبارت است از $A = 1681$.

۳۰۱) گزینهٔ «ه» صحیح است.

ثابت می‌کنیم برای تمامی اعداد اول بجز ۲ و ۵، چنین k ای وجود دارد. (حتی برای $p = 3$) به ازای عدد اول p اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{p+1 \text{ تا}}$$

چون تعداد این اعداد از p تا بیشتر است، پس دو تا از آنها هستند که در پیمانهٔ p هم‌نهشت هستند. تفاضل این دو عدد به صورت $\underbrace{۱۱\ldots۱۱۱}_{k\text{ تا}}۰۰۰\ldots۰۰۰$ می‌باشد. $(k \leq p)$ این عدد بر p بخش‌پذیر است ولی چون p عددی اول و مخالف ۲ و ۵ می‌باشد، پس p و ۱۰ نسبت به هم اول‌اند.

پس عدد $\underbrace{۱۱\ldots۱۱}_{k\text{ تا}}$ بر p بخش‌پذیر خواهد بود.

۳۰۲) گزینهٔ «ه» صحیح است.

فرض کنید اعداد a,b در معادله فوق صدق کنند. در این صورت اگر b زوج باشد، خواهیم داشت:

$$a^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

که ممکن نیست. پس b باید عددی فرد و a زوج باشد. بنابراین با در نظر گرفتن معادله به پیمانهٔ چهار خواهیم داشت که $b^۳ + ۲۱۵ \overset{۴}{\equiv} ۰$. به سادگی نتیجه می‌شود که باید داشته باشیم $b \overset{۴}{\equiv} ۱$. هم چنین با اضافه کردن یک به طرفین معادله خواهیم داشت:

$$a^۲ + ۱ = b^۳ + ۲۱۶ = b^۳ + ۶^۳ = (b + ۶)(b^۲ - ۶b + ۳۶) \qquad (۱)$$

اما می‌دانیم که $b + ۶ \overset{۴}{\equiv} ۳$.

بنابراین $b + ۶$ عددی به فرم $۴k + ۳$ است و حتماً عاملی اول به همین فرم خواهد داشت که آن را p می‌نامیم. اما می‌دانیم که اگر p عددی اول به فرم $۴q + ۳$ باشد و $p|a^۲ + b^۲$ آنگاه $p|b, p|a$. بنابر صورت معادلهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$p|b + ۶ \Rightarrow p|a^۲ + ۱ \Rightarrow p|a, p|۱ \Rightarrow p = ۱$$

که تناقض است. پس معادلهٔ فوق هیچ جوابی در اعداد طبیعی ندارد.

۳۰۳) گزینهٔ «ج» صحیح است.

جواب‌های معادله عبارتند از:

$$(a, b) = (۴, ۱), (۱۱, ۱)$$

اگر $b = ۱$ آنگاه $a^۲ + ۵$ باید بر $a + ۳$ بخش‌پذیر باشد.

$$\left.\begin{array}{l} a + ۳|a^۲ + ۵ \\ a + ۳|a^۲ + ۳a \end{array}\right\} \Rightarrow a + ۳|۳a - ۵, a + ۳|۳a + ۹ \Rightarrow a + ۳|۱۴$$

که نتیجه می‌شود $a = ۴$ یا $a = ۱۱$.

برای $b \geq ۲$ ثابت می‌کنیم که:

$$(a - ۱)(a^b + ۲^b + ۱) < a^{b+۱} + ۲^{b+۱} + ۱ < a(a^b + ۲^b + ۱)$$

نامساوی سمت راست به ازای $a \geq ۲$ برقرار است. اگر هم $a = ۱$ آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲^b + ۲ | ۲^{b+۱} + ۲ \\ ۲^b + ۲ | ۲^{b+۱} + ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲^b + ۲ | ۲$$

که ممکن نیست. نامساوی سمت چپ نیز با ثابت فرض کردن a و استقرا روی b، اثبات می‌شود.

پایهٔ استقرا به ازای $b = ۲$ برقرار است:

$$(a - \frac{۵}{۲})^۲ + \frac{۳۱}{۴} > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۵a + ۱۴ > ۰ \Rightarrow a^۳ + ۲^۳ + ۱ > (a-۱)(a^۲ + ۲^۲ + ۱)$$

با ساده کردن فرض استقرا نتیجه می‌شود که

$$a \times ۲^b + a < ۲^{b+۱} + ۲^b + a^b + ۲$$

با ضرب کردن دو در طرفین نامساوی خواهیم داشت: (حکم استقرا)

$$a \times ۲^{b+۱} + a < a \times ۲^{b+۱} + ۲a < ۲^{b+۱} + ۲^{b+۱} + ۲a^b + ۴ < ۲^{b+۲} + ۲^{b+۱} + a^{b+۱} + ۲$$

که حکم استقرا تبدیل می‌شود به $a^{b+۱} + ۲ > ۲a^b + ۴$ یعنی $a^b(a-۲) > ۲$ که با توجه به $a \geq ۳$ ثابت می‌شود. قبلاً ثابت شد که $a \neq ۱$. به همان ترتیب ثابت می‌شود که $a \neq ۲$. پس مسأله برای $b \geq ۲$، جوابی برای a ندارد. پس مسأله همان دو جواب را دارد.

۳۰۴) گزینهٔ «د» صحیح است.

مسأله را در حالت کلی و برای عدد اول p $(p > ۲)$ حل می‌کنیم.

فرض کنید:

$$\frac{a}{b} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{p-۱}$$

در این مورد داریم $p = ۱۷$.

$$\frac{a}{b} = (۱ + \frac{۱}{p-۱}) + (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{p-۲}) + \ldots + (\frac{۱}{\frac{p-۱}{۲}} + \frac{۱}{\frac{p+۱}{۲}})$$

با توجه به فرد بودن p، تمامی جملات ممکن در بازنویسی فوق آمده‌اند:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{۱(p-۱)} + \frac{p}{۲(p-۲)} + \ldots + \frac{p}{(\frac{p-۱}{۲})(\frac{p+۱}{۲})}$$

$$= p\,(\frac{۱}{۱(p-۱)} + \frac{۱}{۲(p-۲)} + \ldots + \frac{۱}{(\frac{p-۱}{۲})(\frac{p+۱}{۲})})$$

اگر از کسرهای داخل پرانتز مخرج مشترک بگیریم، برابر خواهد بود با $(p-۱)!$. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = p.\frac{k}{(p-۱)!} \quad (k \in N) \qquad \Rightarrow a(p-۱)! = bpk$$

با توجه به تساوی اخیر و هم‌چنین $p|a(p-۱)!$ نتیجه می‌شود که $p|a$. چون می‌دانیم که $(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$ یعنی p و $(p-۱)!$ نسبت به هم اولند. پس با توجه به $p|a$ نتیجه می‌شود که a مضربی از p است و باقیماندهٔ تقسیم a بر p برابر صفر می‌باشد.

۳۰۵) گزینهٔ «ج» صحیح است.
با در نظر گرفتن طرفین معادله به پیمانهٔ m و هم‌چنین با توجه به عکس قضیه ویلسون نتیجه می‌شود که m باید عددی اول باشد. چون:

$$(m-۱)! + ۱ \overset{m}{\equiv} m^n \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow (m-۱)! + ۱ \overset{m}{\equiv} ۰$$

که نتیجه می‌شود m عددی اول است. ثابت می‌کنیم معادلهٔ فوق برای اعداد اول m به‌طوری که $m > ۵$، جواب ندارد. اگر $m > ۵$ باشد، با توجه به فرد بودن m داریم:

$$۲ < \frac{m-۱}{۲} < m-۱$$

بنابراین $(m-۱)!$ بر عدد $(m-۱) \times \frac{m-۱}{۲} \times ۲$ یعنی $(m-۱)^۲$بخش‌پذیر خواهد بود. پس طبق صورت مسأله باید $m^n - ۱$ نیز بر $(m-۱)^۲$ بخش‌پذیر باشد. یعنی این که $m^{n-۱} + m^{n-۲} + \ldots + m + ۱$ باید بر $(m-۱)$ بخش‌پذیر باشد که با در نظر گرفتن عبارت $m^{n-۱} + m^{n-۲} + \ldots + m + ۱$ به پیمانهٔ $(m-۱)$ نتیجه می‌شود که باید n بر $(m-۱)$ بخش‌پذیر باشد. بنابراین $n \geq m-۱$. پس خواهیم داشت:

$$m^n \geq m^{m-۱} > (m-۱)^{m-۱} > (m-۱)!$$

که نتیجه می‌شود $m^n > (m-۱)! + ۱$ که با صورت معادله در تناقض است. پس $m \leq ۵$. با بررسی مقادیر مختلف m، جواب‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$(m,n) \in \{(۲,۱),(۳,۱),(۵,۲)\}$$

۳۰۶) گزینهٔ «الف» صحیح است.
فرض کنید چنین اعدادی وجود داشته باشند. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $x \geq y$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^۲ < x^۲ + y \leq x^۲ + x < (x+۱)^۲$$

یعنی $x^۲ + y$ بین مربع‌های کامل دو عدد طبیعی متوالی قرار می‌گیرد. پس خود نمی‌تواند عددی مربع کامل باشد.

۳۰۷) گزینهٔ «الف» صحیح است.
اگر فرض کنیم که $xy - zt = d$ نتیجه می‌شود که t, z, y, x همگی مضرب d هستند. بدین ترتیب xy و هم‌چنین zt بر $d^۲$ بخش‌پذیر خواهند بود. بنابراین از معادله نتیجه می‌شود که $d^۲q = d$ $(q \in N)$. یعنی $d^۲|d$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود $d = ۱$. پس $xy - zt$ تنها یک مقدار را می‌تواند بپذیرد.

۳۰۸) گزینهٔ «ب» صحیح است.
x نمی‌تواند فرد باشد چون در صورت فرد بودن x سمت چپ معادله در تقسیم بر ۴، باقیماندهٔ دو خواهد داشت. در صورتیکه y باید عددی زوج باشد که آنگاه $y^۳$ در تقسیم بر ۴ باقیماندهٔ صفر خواهد داشت که تناقض است.
پس x عددی زوج است. از این مطلب نتیجه می‌شود که y عددی فرد است به شکل $۴k + ۱$. چون در غیر این صورت $y^۳$ در تقسیم بر ۴ باقیماندهٔ ۳ می‌آورد. اما سمت چپ معادله باقیماندهٔ یک می‌آورد که تناقض است. پس فرض می‌کنیم $x = ۲q, y = ۴k + ۱$. پس خواهیم داشت:

$$x^۲ + ۴ = ۴(q^۲ + ۱) = y^۳ - ۱ = (y - ۱)(y^۲ + y + ۱) = ۴k(۱۶k^۲ + ۱۲k + ۳)$$

پس داریم:

$$q^۲ + ۱ = k(۱۶k^۲ + ۱۲k + ۳)$$

$۱۶k^۲ + ۱۲k + ۳$ عددی به شکل $۴m + ۳$ می‌باشد. پس حتماً عامل اولی همانند p دارد که آن نیز به فرم $۴t + ۳$ می‌باشد. اما می‌دانیم اگر $p = ۴t + ۳$ و $p|a^۲ + b^۲$ آنگاه $p|b, p|a$. از صورت معادله نتیجه می‌شود $p|q^۲ + ۱$. یعنی $p|q$ و $p|۱$ که نتیجه می‌دهد $p = ۱$ که تناقض است. پس معادله در اعداد طبیعی هیچ جوابی ندارد.

۳۰۹) پاسخ صحیح گزینهٔ «الف » می‌باشد.
داریم:

$$a_۱ \overset{۳}{\equiv} -۱ \ , \ a_۲ \overset{۳}{\equiv} -۱$$

به کمک استقراء ثابت می‌کنیم که $a_k \overset{۳}{\equiv} -۱$. فرض کنید برای اعداد $i = ۱ \ldots, n + ۱$ داریم $a_i \overset{۳}{\equiv} -۱$. در این صورت:

$$\begin{aligned} a_{n+۲} &\overset{۳}{\equiv} (۲ - n^۲)a_{n+۱} + (۲ + n^۲)a_n \overset{۳}{\equiv} (۲ - n^۲)(-۱) + (۲ + n^۲)(-۱) \\ &\overset{۳}{\equiv} -۲ + n^۲ - ۲ - n^۲ \overset{۳}{\equiv} -۴ \overset{۳}{\equiv} -۱ \end{aligned}$$

حال اگر x, y, z ای وجود داشته باشد که:

$$a_x \times a_y = a_z$$

در این صورت:

$$\begin{cases} a_x \times a_y \overset{۳}{\equiv} (-۱)(-۱) \overset{۳}{\equiv} ۱ \\ a_z \overset{۳}{\equiv} -۱ \end{cases}$$

که غیر قابل قبول است. پس هیچ سه تایی (x,y,z) وجود ندارد که در رابطه صدق کند.

۳۱۰) پاسخ صحیح گزینهٔ «ه» می‌باشد.
به سادگی می‌توان تحقیق کرد که:
اگر عددهای y,x **در معادلهٔ** $(x-۱)^۲ + (x+۱)^۲ = y^۲ + ۱$ صدق کنند، در معادلهٔ زیر هم صدق خواهند کرد:

$$(۲y + ۳x - ۱)^۲ + (۲y + ۳x + ۱)^۲ = (۳y + ۴x)^۲ + ۱$$

بنابراین، از هر جواب معادلهٔ (۱) برای عددهای طبیعی y,x، می‌توان جواب‌های طبیعی بزرگتری برای آن به دست آورد:

$$۳y + ۴x, ۲y + ۳x$$

از طرف دیگر عددهای $y = ۳, x = ۲$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند و بنابراین دارای بی‌نهایت جواب می‌شود.

منابع مفید در زمینه المپیاد های علمی

المپیادهای ریاضی مقدماتی ایران از ابتدا تا کنون ، مرحله اول	امیر آجرلو
المپیادهای ریاضی ایران از ابتداتا کنون ، مرحله اول	امیر اجرلو
جلوه هایی از ترکیبیات	ثروتی - محمدی
الفبای المپیاد کامپیوتر وریاضی جلد اول	مرتضی محمد آبادی
هندسه اعداد مختلط	امیر آجرلو- مهران احمدلو
مسایل پیشنهادی برای المپیاد جهانی ریاضی استرالیا	امیر آجرلو- مهران احمدلو
المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف ۱۹۹۵	مرتضی محمد آبادی
المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف ۱۹۹۷	امیرآجرلو- مجتبی نادری
مسائل پیشنهادی برای المپیادهای بین المللی ریاضی ۲۰۰۱-۱۹۹۵	امیر آجرلو- بهزاد خزائی
۱۰۲ مسئله ترکیبیات	عباس ثروتی
گامی نوین به سوی المپیاد فیزیک جلد اول	حسین پیری - سلمان چگینی
المپیادهای فیزیک ایران - مرحله اول ، جلد اول	صادقی راد- عباسی اصل
المپیادهای فیزیک ایران - مرحله اول ، جلد دوم	صادقی راد- عباسی اصل
الفبای نور هندسی	علیرضا صادقی راد
مسائل فیزیک عمومی (ایرودف)- جلد اول	مهدی متقی پور
مسائل فیزیک عمومی (ایرودف)- جلد دوم	متقی پور- صادقی راد- آقامیری
المپیاد شیمی ایران مرحله اول (از ابتدا تا کنون)	محمد نجم زاده
المپیاد شیمی (اصول ، مبانی و کاربردهای شیمی) جلد اول	نجم زاده - شیر دل
المپیاد شیمی (اصول ، مبانی و کاربردهای شیمی) جلد دوم	نجم زاده - شیر دل
المپیادهای شیمی ملی آمریکا	نجم زاده - موحدی نایینی
ویژه نامه دوره های اخیر المپیادهای ریاضی و شیمی	امیر آجرلو- محمدنجم زاده
المپیادهای زیست شناسی ایران - مرحله دوم	دستغیب - اصغریان -زارعی
المپیادهای ادبی - شانزدهمین دوره	شیوا مومنی
هنر مسئله های آها!!	جلیل صمد آقایی - مهدی زیودازی
المپیادهای زیست شناسی ایران (مرحله اول)	دستغیب - اصغریان - زارعی
مسائل جبر در المپیاد ریاضی	عباس ثروتی
مسائل نظریه اعداددرالمپیاد ریاضی	عباس ثروتی
مسائل ترکیبیات در المپیاد ریاضی	عباس ثروتی
مسائل هندسه در المپیاد ریاضی	عباس ثروتی
الفبای حرارت و سیالات	متقی پور- صادقی‌راد
برگزیده مسائل فیزیک روسیه	عباسی اصل