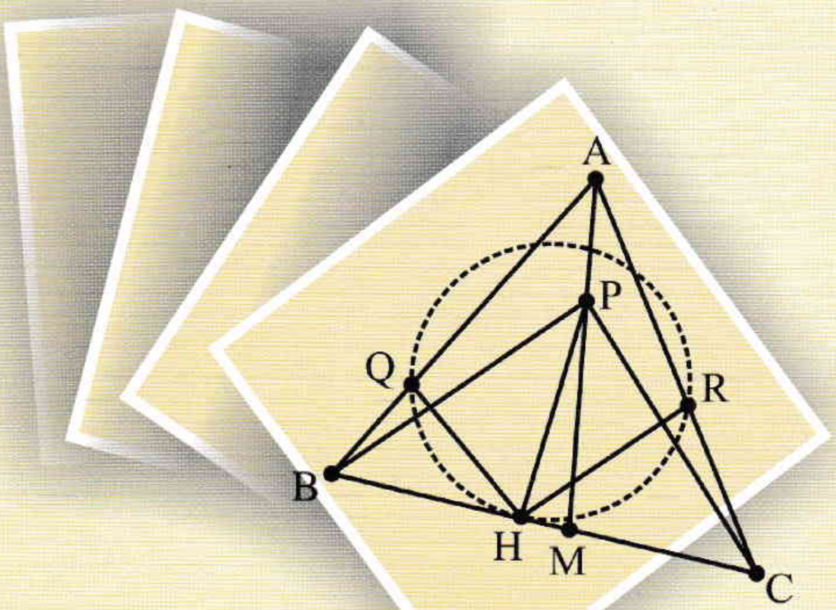
مسایل هندسه

در

المپیاد ریاضی ایران و جهان



مسایل هندسه در المپیاد ریاضی

ایران و جهان

(مرحله‌ی اول)

شامل:

** نمونه سؤالات پنج گزینه‌ای و طبقه‌بندی شده‌ی هندسه

در المپیاد ریاضی ایران و جهان

قابل استفاده برای: دبیران علاقه‌مند ریاضی

دانش‌آموزان المپیادی

دانش‌آموزان ممتاز و علاقه‌مند در درس ریاضی

مؤلف: بهزاد مهرانفر

کانون فرهنگی آموزش و مؤسسه‌ی نخبگان دانش و اندیشه‌ی ایرانیان

سرشناسه :مهرانفر، بهزاد ۱۳۵۳ -
عنوان ونام پدیدآور :مسائل هندسه در المپیاد ریاضی ایران و جهان (مرحله ی اول) شامل :نمونه سوالات پنج گزینه‌ای و طبقه بندی شده ی هندسه در المپیاد ریاضی ایران و جهان.../ مولف‌بهزاد مهرانفر.
مشخصات نشر :تهران: کانون فرهنگی آموزش:موسسه نخبگان دانش و اندیشه ایرانیان، ۱۳۸۷.
مشخصات ظاهری :۲۲۴ ص.: مصور.؛ ۲۹×۲۲ س م.
شابک :۶۷۰۰۰ ریال 4 - 496 - 509 - 964 - 978
وضعیت فهرست نویسی :فیپا.
عنوان دیگر :نمونه سوالات پنج گزینه‌ای و طبقه بندی شده ی هندسه در المپیاد ریاضی ایران و جهان...
موضوع :المپیادها(هندسه).
موضوع :هندسه -- مسابقه ها .
موضوع :هندسه — مسائل، تمرین‌ها و غیره.
رده‌بندی کنگره :۱۳۸۷ ۵م۸۳م/۲۴/۳۰۶۰ *LB*
رده‌بندی دیویی :۳۷۳/۲۳۸۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی :۱۲۲۱۱۵۷

انتشارات کانون فرهنگی آموزش

عنوان کتاب : مسائل هندسه در المپیاد ریاضی ایران و جهان (مرحله اول)
مولف : بهزاد مهرانفر
ویراستار: بهزاد مهرانفر
ناظر علمی: محمد تقی طاهری تنجانی
شورای برنامه ریزی : غلامرضا امیری - حسین خوش کیش - علیرضا ظفری - کاظم قلم چی
چاپ : اول (۱۳۸۷)
قطع : رحلی
چاپخانه : چکاد چاپ
تیراژ : ۱۵۰۰
لیتوگرافی : امین گراف
قیمت : ۶۷۰۰ تومان
شابک : ۴ - ۴۹۶ - ۵۰۹ - ۹۶۴ - ۹۷۸ (ISBN:978 - 964 - 509 - 496 - 4)

به نام خدا

خلاقیت اشاره به قدرت ایجاد اندیشه‌های نو و نوآوری به معنای کاربردی ساختن آن افکار تازه است و از خلاقیت تا نوآوری راهی بس طولانی در پیش است.

در تخیّل خلاق، اندیشه‌ی نو در ذهن فرد می‌جوشد و شکل می‌گیرد و تنها محصول آن، ذهن آدمی است، بدین سان علم به صورت جوانه‌هایی در اذهان می‌روید. تجربیات نشانگر آن است که درجه‌ی مؤثّر بودن خلاقیت ما با برآیند انرژی فکر، کوشش و میزان پشتکارمان در به کارگیری مغز ارتباط بیش‌تری دارد تا با استعداد درونی‌مان.

در المپیادهای علمی یکی از اهداف مهمّی که همواره پیش‌رو است، فراهم آوردن زمینه‌های مناسب برای تفکّر خلاق و ظهور خلّاقیت افراد است.

کتاب‌های المپیاد کانون فرهنگی آموزش و مؤسسه‌ی نخبگان دانش و اندیشه‌ی ایرانیان با هدف ارتقاء و تعمیق علمی دانش‌پژوهان در تمامی نقاط کشور تدوین شده است.

امید است مقبول درگاه ایزد منّان و مورد استفاده‌ی شما عزیزان قرار گیرد.

به نام خدا

المپیادهای علمی و موفقیت دانش‌آموزان ایرانی، تکاپوی عجیبی را در بین سایر دانش‌آموزان ایجاد کرده است، به طوری‌که مدارس و معلمین ریاضی را نیز تحت‌الشعاع قرار داده و همگی را بر آن داشته تا با ایجاد بستر مناسب در مدارس، به صورت ایجاد کلاس‌های المپیاد و بالا رفتن سطح دانش معلمین، از این غافله عقب نمانند. در این میان، کمبود مراجع سؤالات و تمارین دسته‌بندی شده برای این دسته از دانش‌آموزان، مؤلف را بر آن داشت که اقدام به نگارش کتاب حاضر نماید تا بدین وسیله مجموعه کاملی در مبحث المپیاد دراختیار دانش‌پژوهان عزیز قرار گیرد.

سؤالات این کتاب مجموعه‌ای است از سؤالات هندسه آزمون‌های مرحله اول کشوری، سؤالات بسیار زیبایی از مسابقات ریاضی کشورهای مختلف جهان و آزمون‌های استعدادیابی آن‌ها و پرسش‌های جالب دیگری که مؤلف در طول سال‌های تدریس المپیاد، طرح نموده و در قالب تمرین و پرسش‌های کلاسی برای دانش‌آموزان ارائه کرده است.

به واسطه‌ی تنوع مسایل و مطالب درسی موجود در آن، توصیه می‌شود که داوطلبان آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها و مؤسسات عالی نیز در جهت تقویت و آماده‌سازی هر چه بهتر خود از آن‌ها استفاده نمایند. در این مجموعه مسایل طوری مطرح شده‌اند که حل آن‌ها دانش‌آموزان عزیز را در هر سطح علمی که باشند، یاری نموده و توانایی علمی آن‌ها را در حل مسایل هندسه و کسب مهارت کافی برای انجام آن افزایش می‌دهد.

در مورد نحوه استفاده از این کتاب مطالب زیر به دانش‌آموزان عزیز توصیه می‌شود:

۱- نظر به این‌که در تدوین کتاب برخی از مطالب کتاب‌های درسی دانسته فرض شده است، لذا دانش‌آموزان لازم است قبل از مطالعه این کتاب، کتب درسی مربوطه را به طور کامل و با دقت فرا گیرند.

۲- قبل از اقدام به حل مسایل و تست‌ها، حتماً درس‌نامه‌های موجود در متن کتاب را دقیق مطالعه نمایند.

۳- جهت راهنمایی دانش‌آموزان و هم‌چنین اطمینان کامل آن‌ها از عملیات خود در حل مسایل، پاسخ کامل آن‌ها در انتهای هر فصل قید شده است.

لیکن دانش‌آموزان عزیز بایستی قبل از این‌که به پاسخ مسایل مراجعه نمایند، شخصاً اقدام به حل مسایل نموده و نسبت به حل آن‌ها نهایت تلاش و اهتمام خود را نمایند، سپس جهت حصول اطمینان از صحت راه‌حل خود به پاسخ‌ها رجوع نمایند.

در پایان وظیفه خود می‌دانم از مسؤولین واحد المپیاد کانون فرهنگی آموزش آقایان غلامرضا امیری و محمدتقی طاهری تنجانی و هم‌چنین از زحمات دوست و همکار عزیزم جناب آقای محمد شریفی که بنده را در تألیف این مجموعه یاری نمودند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

بهزاد مهرانفر

بهار ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

بخش I

مسائل

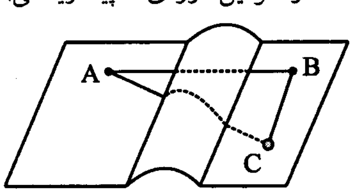
فصل ۱

چند ضلعی‌ها

۱) در یک چهار ضلعی محدب کدام‌یک از نقاط زیر دارای این خاصیت است که مجموع فواصل آن از چهار رأس چهارضلعی حداقل مقدار ممکن را دارد؟ (سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

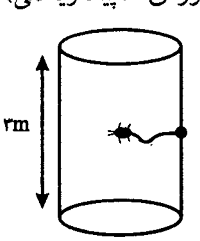
الف) مرکز ثقل چهار ضلعی
ب) یکی از رئوس چهارضلعی
ج) نقطه‌ای بیرون چهارضلعی
د) محل برخورد قطرهای چهارضلعی
ه) محل برخورد پاره‌خط‌هایی که اوساط اضلاع را به هم وصل می‌کند.

۲) در شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($\hat{B} = ۹۰^\circ$) و $\overline{AB} = ۱۰ - \pi$ و $\overline{BC} = ۶$. نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط C, A مانع شده است. مورچه بنا به دلایلی (!) باید هرچه سریع‌تر از نقطه‌ی A به لانه‌اش در نقطه‌ی C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با: (بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



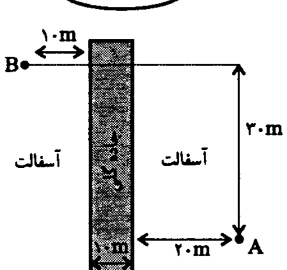
الف) $\sqrt{۱۳۶}$
ب) $\sqrt{۱۳۶ - \pi}$
ج) ۱۰
د) $۷ + \pi$
ه) ۱۱

۳) حشره‌ای را با نخی به طول ۱ متر به وسط یک استوانه به ارتفاع ۳ متر و محیط قاعده‌ی $\sqrt{۳}$ متر، از بیرون بسته‌ایم! مساحت قسمتی از استوانه که حشره می‌تواند به آن برود، چه‌قدر است؟ (بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



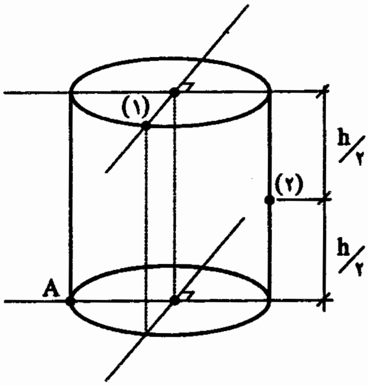
الف) $\frac{۲}{۳}\pi + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$
ب) π
ج) $\frac{۲}{۳}\pi + \sqrt{۳}$
د) $\pi + \sqrt{۳}$
ه) $۲\sqrt{۳}$

۴) مطابق شکل مقابل، یک دونده در نقطه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد در کم‌ترین زمان ممکن خود را به B برساند. در مسیر حرکت او یک جاده‌ی گلی وجود دارد که باعث می‌شود سرعت حرکتش حین گذر از آن به نصف کاهش یابد. سرعت حرکت دونده روی آسفالت ۱۰ متر بر ثانیه است. کم‌ترین زمان ممکن را پیدا کنید. (بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



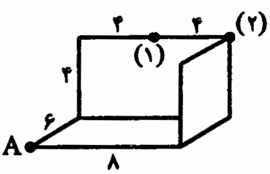
الف) $\sqrt{۲۶}$ ثانیه
ب) $\sqrt{۲۵}$ ثانیه
ج) ۵ ثانیه
د) $\sqrt{۳۵}$ ثانیه
ه) $\sqrt{۳۴}$ ثانیه

۵) استوانه‌ای قائم با شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع h مفروض است. دو مگس (۱) و (۲) در نقاط مشخص شده در شکل مفروض‌اند. اگر هر دو در یک لحظه با سرعت یکسان و انتخاب بهترین مسیر، شروع به حرکت کرده تا به نقطه‌ی A برسند و بدانیم که هم‌زمان رسیده‌اند، مقدار h چه قدر است؟



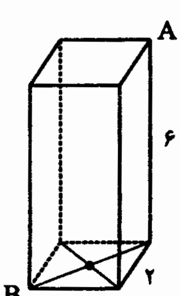
الف) ۲π　　ب) ۲
ج) π　　د) $\frac{۲\pi}{۳}$
ه) $\frac{۳\pi}{۲}$

۶) کنجی متشکل از سطح زمینی مستطیل شکل و دو دیوار قائم با ابعاد مشخص شده مفروض‌اند. دو حشره‌ی (۱) و (۲) در جایگاه‌های مشخص شده مفروض‌اند. حشره‌ی ۱، توانایی پرواز کردن ندارد و لیکن حشره‌ی ۲، می‌تواند پرواز کند. هر دو در یک لحظه تصمیم می‌گیرند که به نقطه‌ی A برسند. به همین منظور با سرعتی یکسان، یکی (حشره‌ی ۱) با حرکت روی سطوح و دیگری (حشره‌ی ۲) به وسیله‌ی پرواز اقدام به حرکت می‌کنند و ضمناً هر دو بهترین مسیر را برای خود انتخاب می‌کنند؛ در این صورت:



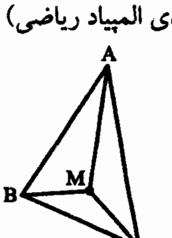
الف) حشره‌ی ۱ زودتر می‌رسد.
ب) حشره‌ی ۲ زودتر می‌رسد.
ج) هر دو هم‌زمان می‌رسند.
د) چون انتخاب بهترین مسیر برای حشره‌ی ۱ امکان‌پذیر نیست، نمی‌توان تعیین کرد کدام زودتر می‌رسند.
ه) چون انتخاب بهترین مسیر برای هر دو امکان‌پذیر نیست، نمی‌توان تعیین کرد که کدام زودتر می‌رسند.

۷) اتاقی مکعب مستطیل شکل، مفروض و مورچه‌ای در نقطه‌ی A قرار دارد و می‌خواهد با حرکت روی دیوارهای اتاق به نقطه‌ی B برسد. ضمناً در مسیر خود می‌خواهد از مرکز قاعده‌ی اتاق عبور کرده و طعمه‌ی موجود در آن‌جا را بردارد. اگر بهترین مسیر را برای خود انتخاب کند، طول این مسیر چه‌قدر است؟



الف) $۶+۲\sqrt{۲}$　　ب) $۲+۵\sqrt{۲}$
ج) $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳۷}$　　د) $۶\sqrt{۲}$
ه) $۱+۵\sqrt{۲}$

۸) نقطه‌ی M درون مثلث غیر متساوی‌الساقین ABC مفروض است. کدام جمله‌ی زیر در مورد مقدار $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}$ درست است؟ (هجدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) همیشه از بزرگ‌ترین ضلع مثلث کوچک‌تر است.
ب) همیشه از جمع دو ضلع بزرگ‌تر مثلث، کوچک‌تر است.
ج) همیشه از جمع دو ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر است.
د) همیشه از سه برابر شعاع دایره‌ی محیطی، بزرگ‌تر است.
ه) از جمع دو ارتفاع بزرگ‌تر مثلث، کوچک‌تر است.

۹) در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای درونی عمود است. اگر اندازه‌ی اضلاع این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشند، آن‌گاه اندازه‌ی محیط این مثلث برابر است با: (هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۵ د) ۱۸ هـ) ۲۱

۱۰) در مثلث ABC، ارتفاع رأس A برابر ۳ و ارتفاع رأس C برابر ۶ می‌باشد. در این صورت اگر ارتفاع رأس B را با h_b نمایش دهیم، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۹ > h_b > ۱$ ب) $۹ > h_b > \sqrt{۳}$

ج) $٦ > h_b > ۲\sqrt{۲}$ د) $٦ > h_b > ۳$

هـ) $٦ > h_b > ۲$

۱۱) n شهر $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ متعلق به کشوری مفروض‌اند و پایتخت آن شهر A_m $(۱ < m < n)$ می‌باشد. اگر فاصله‌ی شهر $A_۱$ تا $A_۲$ برابر ۱ کیلومتر، فاصله‌ی شهر $A_۲$ تا $A_۳$ برابر ۲ کیلومتر و ... و فاصله‌ی شهر $A_{n-۱}$ تا A_n برابر $n - ۱$ کیلومتر و در نهایت فاصله‌ی A_n تا $A_۱$ برابر با $\frac{n(n-۱)}{۲}$ کیلومتر باشد و بخواهیم جاده‌ای تأسیس کنیم که از پایتخت این کشور بگذرد و مجموع فواصل سایر شهرها از آن حداقل باشد، در این صورت مجموع فواصل شهرهای $A_۱$ تا A_n از این جاده چه‌قدر است؟

الف) $\frac{n+۱}{۲}$ ب) $\frac{n(n+۱)}{۲}$

ج) $\frac{n(n-۱)}{۲}$ د) $\frac{n-۱}{۲}$

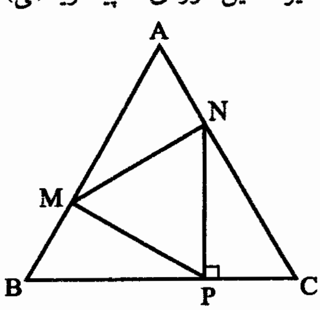
هـ) ۰

۱۲) از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله‌ی دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصله‌ی شهر A از دو شهر دیگر ۶۰ و ۵۰ کیلومتر و فاصله‌ی دو شهر B و C از هم‌دیگر ۴۰ کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ هـ) ۷۰

۱۳) مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط شده است، به طوری که $NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با:

(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



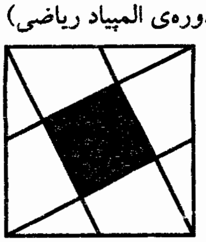
الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳}$

ج) $\frac{۳}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

هـ) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۱۴) در شکل زیر فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کنیم. مساحت مربع کوچک‌تر چه‌قدر است؟

(چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

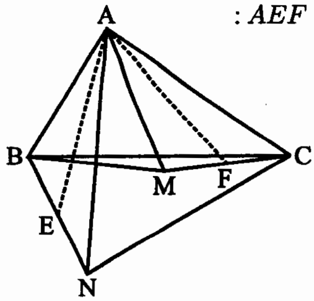


الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۵}$

ج) $\frac{۱}{٦}$ د) $\frac{۱}{۷}$

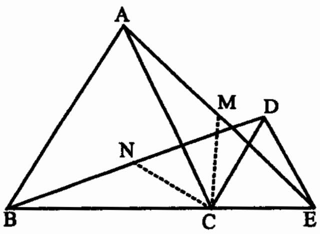
هـ) $\frac{۱}{۸}$

۱۵) مطابق شکل روی اضلاع AC, AB از مثلث دل‌خواه ABC، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ACN, ABM را از داخل بنا می‌کنیم. اگر نقاط F, E به ترتیب اوساط CM, BN باشند، در این صورت مثلث AEF:



الف) متساوی‌الاضلاع است.
ب) متساوی‌الساقین است.
ج) متشابه با مثلث ABC است.
د) دارای مساحتی برابر با مساحت مثلث ABC است.
هـ) فقط در صورتی‌که زاویه‌ی $\widehat{BAC}$، 120° باشد، متساوی‌الاضلاع است.

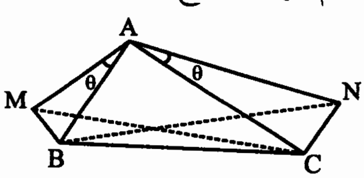
۱۶) مطابق شکل مثلث‌های CDE, ABC، متساوی‌الاضلاع‌اند. نقاط N, M را روی AE و BD طوری انتخاب می‌کنیم که $K = \frac{\overline{BN}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{ME}}$. در این صورت مثلث CMN:



الف) حتماً متساوی‌الساقین است.
ب) فقط دارای یک زاویه‌ی 60° است.
ج) حتماً متساوی‌الاضلاع است.
د) فقط وقتی که $K = 1$ باشد، متساوی‌الاضلاع است.
هـ) فقط وقتی‌که $K \neq 1$، متساوی‌الاضلاع است.

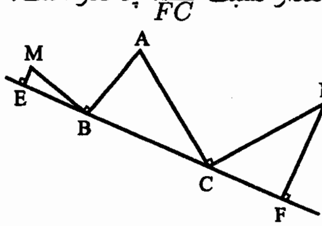
۱۷) در کدام یک از حالات زیر دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت (برابر) هستند؟
الف) یک ضلع و مجموع دو ضلع دیگر از یکی با یک ضلع و مجموع دو ضلع دیگر از دیگری برابر باشند.
ب) محیط و یک زاویه از یکی با محیط و یک زاویه از دیگری برابر باشند.
ج) یک ضلع، یکی از زوایای مجاور به این ضلع و مجموع دو ضلع دیگر از یکی با اجزاء متناظر خود از دیگری برابر باشند.
د) محیط و دو زاویه از یکی، با محیط و دو زاویه از دیگری برابر باشند.
هـ) گزینه‌های «ج» و «د» هر دو صحیح هستند.

۱۸) مثلث دل‌خواه ABC مفروض است. مثلث‌های متساوی‌الساقین ABM و ACN با رأس A را روی دو ضلع AB و AC طوری بنا می‌کنیم که $\widehat{BAM} = \widehat{CAN} = \theta$؛ اگر بدانیم که $\overline{BN} = \overline{CM}$، کدام گزینه صحیح است؟



الف) $\theta \leq 90^\circ$
ب) $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
ج) مقدار θ فقط برابر با 60° یا 90° است.
د) $\theta \leq 60^\circ$
هـ) θ هر مقداری می‌تواند داشته باشد.

۱۹) مثلث دل‌خواه ABC مفروض است. از رئوس C, B عمودهای CN, BM را به ترتیب به اندازه‌های $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ از همین دو ضلع خارج کرده‌ایم، اگر نقاط F, E تصاویر N, M بر امتداد BC باشند، مقدار نسبت $\frac{\overline{EB}}{\overline{FC}}$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$
ب) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$
ج) ۱
د) $(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}})^2$
هـ) $(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}})^2$

۲۰) روی اضلاع یک متوازی‌الاضلاع مفروض، مربع‌هایی را بنا می‌کنیم و مراکز آن‌ها را O_1, O_2, O_3, O_4 می‌نامیم. چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ ، ..... است.

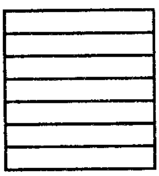
الف) حتماً یک متوازی‌الاضلاع　　ب) یک لوزی

ج) حتماً یک مربع　　د) مستطیل

ه) فقط هنگامی مربع است که قطرهای متوازی‌الاضلاع بر هم عمود باشند.

۲۱) یک مربع به ۷ مستطیل برابر، مطابق شکل روبه‌رو تقسیم شده است. اگر محیط هر مستطیل برابر ۳۲ باشد، محیط مربع چه‌قدر است؟

(بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۵۶　　ب) ۹۸

ج) ۱۱۲　　د) ۱۹۶

ه) ۲۲۴

۲۲) فرض کنید سه باغچه‌ی سبزیجات به شکل دایره‌ی به شعاع ۱۰ متر، مستطیلی به طول ۵۰ متر و عرض ۶ متر و مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲۶ متر داریم. می‌خواهیم دور هر کدام حصاری بکشیم که خرگوش‌ها به یک متری باغچه هم نزدیک نشوند. کدام یک به حصار بیش‌تری نیاز دارد؟

(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

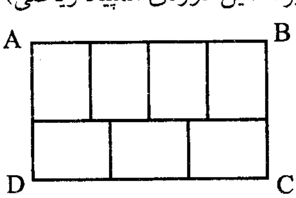
الف) به ترتیب، دایره، مستطیل و مثلث　　ب) به ترتیب، مستطیل، مثلث و دایره

ج) به ترتیب، مستطیل، دایره و مثلث　　د) به ترتیب، مثلث، دایره و مستطیل

ه) به ترتیب، دایره، مثلث و مستطیل

۲۳) مستطیل $ABCD$، مطابق شکل به هفت مستطیل مساوی کوچک‌تر تقسیم شده است. اگر مساحت $ABCD$ برابر ۳۳۶ سانتی‌متر مربع باشد، در آن صورت محیط $ABCD$ بر حسب سانتی‌متر برابر کدام یک از اعداد زیرا است؟

(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



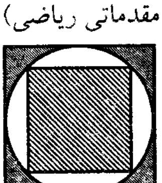
الف) ۷۶　　ب) ۸۶

ج) ۹۶　　د) ۱۰۶

ه) ۱۱۶

۲۴) در شکل مقابل مساحت ناحیه‌ی سیاه را با A، مساحت ناحیه سفید را با B و مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده را با C نشان می‌دهیم. چه رابطه‌ای بین C, B, A برقرار است؟

(بیست و دومین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)

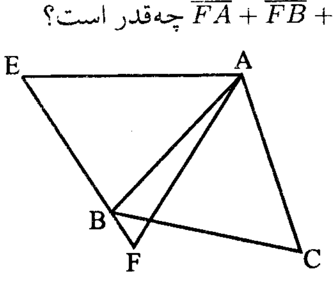


الف) $A < B < C$　　ب) $B < A < C$

ج) $A < C < B$　　د) $B < C < A$

ه) $C < A < B$

۲۵) مطابق شکل مثلث‌های AEF, ABC هر دو متساوی‌الاضلاع‌اند. اگر بدانیم که طول ضلع مثلث ABC برابر با ۱ و نسبت مساحت مثلث AEF به مساحت مثلث ABC برابر با ۴ باشد، مجموع $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$ چه‌قدر است؟



الف) ۴　　ب) $\frac{۹}{۲}$

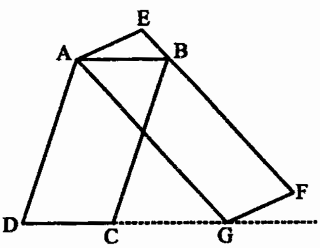
ج) ۵　　د) $\frac{۱۱}{۲}$

ه) ۶

۲۶) در مستطیل $ABCD$ از رأس B به نقطه‌ی I وسط ضلع DC رسم می‌کنیم، اگر BI بر قطر AC از این مستطیل عمود باشد، نسبت $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ب) $\sqrt{۲}$ ج) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ د) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ه) $\sqrt{۳}$

۲۷) مطابق شکل چهارضلعی‌های $AEFG, ABCD$ متوازی‌الاضلاع‌اند. نسبت مساحت $ABCD$ به مساحت $AEFG$ چه‌قدر است؟

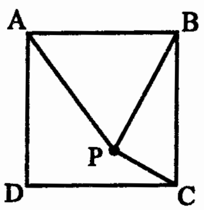


الف) بزرگ‌تر از ۱ ب) کوچک‌تر از ۱

ج) ۱ د) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$

ه) $(\frac{AB}{AE})^۲$

۲۸) مطابق شکل $ABCD$ یک مربع است و نقطه‌ی P در داخل آن قرار دارد. حداقل مقدار $\frac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}}$ چند است؟



الف) ۱ ب) $\sqrt{۲}$

ج) ۲ د) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

ه) $۱+\sqrt{۵}$

۲۹) روی اضلاع BC, AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و در خارج آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCQ, ABP را بنا کرده‌ایم. در مورد مثلث DPQ کدام گزینه صحیح است؟

الف) متساوی‌الساقین است .

ب) متساوی‌الاضلاع است.

ج) فقط در صورتی‌که $ABCD$ لوزی باشد، متوازی‌الاضلاع است.

د) فقط دارای یک زاویه‌ی ۶۰° است.

ه) فقط در صورتی که $ABCD$ لوزی باشد، متساوی‌الساقین است.

۳۰) از نقطه‌ی O واقع در درون مثلث ABC، عمودهای OP, ON, OM را به ترتیب بر اضلاع AC, BC, AB رسم می‌کنیم. اگر $\overline{AM}=۳$ ، $\overline{BM}=۵$ ، $\overline{BN}=۴$، $\overline{NC}=۲$ و $\overline{CP}=۴$ ، در این صورت مقدار $\overline{AP}$ برابر است با:

الف) ۳ ب) $۲\sqrt{۲}$ ج) ۴ د) $۲\sqrt{۳}$ ه) $۲\sqrt{۲}$

۳۱) مربع $ABCD$، در صفحه مفروض است. سه خط موازی $L_۳, L_۲, L_۱$ را به ترتیب از سه رأس C, B, A رسم می‌کنیم، به طوری‌که فاصله‌ی $L_۱$ با $L_۲$ برابر ۵ و فاصله‌ی $L_۲$ با $L_۳$ برابر ۷ باشد. مطلوب است مساحت مربع؟

(پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۷۰ ب) $\sqrt{۳۵}$ ج) ۳۵ د) $\sqrt{۷۴}$ ه) ۷۴

۳۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\overline{AB}=\overline{AC})$ میانه‌ی BM عمود بر نیمساز CD است. در این صورت $\sin C$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

د) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ ه) $\frac{۱}{۴}$

۳۳) بین اضلاع مثلثی به طول‌های c,b,a رابطه‌ی $a^۲=\frac{b^۲c^۲}{b^۲+c^۲}$ برقرار است. اگر h_c,h_b,h_a به ترتیب ارتفاع‌های وارد بر اضلاع c,b,a باشند، در این صورت مثلث متشکل از این سه ارتفاع ...

الف) متشابه با مثلث اولیه است. ب) حتماً متساوی‌الساقین است.

ج) قائم‌الزاویه است. د) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

ه) لزوماً با این سه ارتفاع مثلثی ساخته نمی‌شود.

۳۴) در مثلث مفروض ABC، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. عمود AN را برابر $\overline{HC}$ از ضلع AB و عمود MC را برابر با $\overline{AH}$، از ضلع BC خارج می‌کنیم. در این صورت:

الف) $\overline{BM}+\overline{BN}=\overline{AB}+\overline{AC}$ ب) $\overline{BM}^۲+\overline{BN}^۲=\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲$

ج) $\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ د) رأس B روی عمود منصف MN واقع است.

ه) نقاط H,N,M روی یک خط هستند.

۳۵) در چهار ضلعی محدب $ABCD$، نقطه‌ی P مفروض است. عمودهای PW,PZ,PY,PX را به ترتیب بر اضلاع AB,AD,CD,BC فرود می‌آوریم. اگر بدانیم که: $\overline{AW}=۲$، $\overline{BW}=۴$، $\overline{BX}=۱$، $\overline{CX}=۳$، $\overline{CY}=۶$ و $\overline{DY}=۴$ نسبت $\frac{\overline{AZ}}{\overline{DZ}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\sqrt{۲}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) ۲ ه) $\frac{۵}{۲}$

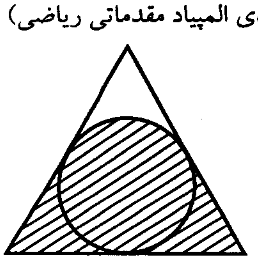
۳۶) در چهار ضلعی محدب $ABCD$، قطرهای BD,AC بر هم‌دیگر عمودند. اگر بدانیم که $\overline{AB}=۷$ و $\overline{DC}=۱$ حداکثر مقدار $\overline{AD}.\overline{BC}$ چه‌قدر است؟

الف) ۲۰ ب) ۲۲ ج) ۲۴ د) ۲۵ ه) ۲۸

۳۷) در چهار ضلعی $ABCD$، $\overline{BC}=۸$، $\overline{CD}=۱۲$، $\overline{AD}=۱۰$ و $\hat{A}=\hat{B}=۶۰^\circ$. اگر طول AB برابر با $p+\sqrt{q}$ باشد، که در آن q,p اعداد صحیح مثبت هستند، $p+q$ چند است؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۲۵ ج) ۱۵۰ د) ۱۷۰ ه) ۱۷۵

۳۸) در شکل زیر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ و دایره‌ای مماس بر اضلاع آن را نشان می‌دهد. مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با: (بیست و سومین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)

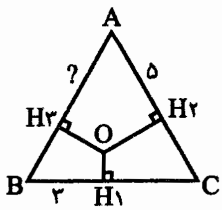


الف) $\pi+۶\sqrt{۳}$ ب) $\pi+\sqrt{۳}$

ج) $\pi+۵\sqrt{۳}$ د) $\frac{\pi}{۲}+۲\sqrt{۳}$

ه) $\frac{\pi}{۲}+۴\sqrt{۳}$

۳۹) از نقطه‌ی O داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، عمودهای $OH_۳, OH_۲, OH_۱$ را به ترتیب بر اضلاع AB, AC, BC رسم می‌کنیم. اگر بدانیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با ۷ است و ۳ $= \overline{BH_۱}$ و ۵ $= \overline{AH_۲}$، در این صورت طول $\overline{AH_۳}$ چه‌قدر است؟



الف) ۶
ب) ۴
ج) $\frac{۱۳}{۲}$
د) $\frac{۱۱}{۲}$
ه) $\frac{۳۱}{۵}$

۴۰) در کدام‌یک از حالت‌های زیر نیمسازهای زاویه‌های C, A از چهار ضلعی محدب $ABCD$ موازی‌اند؟

الف) دو ضلع CD, AB موازی باشند.
ب) دو قطر چهارضلعی بر هم عمود باشند.
ج) زاویه‌های D, B با هم برابر باشند.
د) چهار ضلعی محاطی باشد.
ه) چهار ضلعی محیطی باشد.

۴۱) مثلث ABC را با اضلاعی با طول‌های صحیح c, b, a در نظر می‌گیریم و طول ارتفاع‌های آن را h_c, h_b, h_a می‌نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$، در این صورت داریم:
(شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.
ب) $۲(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
ج) $۳(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
د) $b^۲ + c^۲ - a^۲$ مربع کامل است.
ه) $a^۲ + b^۲ - c^۲$ مربع کامل است.

۴۲) طول اقطار ذوزنقه‌ای ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این ذوزنقه چه‌قدر است؟

(هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۵۶
ب) ۷۲
ج) ۸۴
د) ۹۶
ه) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۴۳) بزرگ‌ترین مربعی که بتوان در مثلثی به مساحت یک محاط کرد، چه مساحتی دارد؟

الف) $\frac{۱}{۴}$
ب) $\frac{۱}{۳}$
ج) $\frac{۱}{۲}$
د) $\frac{۲}{۳}$
ه) $\frac{۳}{۴}$

۴۴) اگر ABC مثلثی باشد که $\hat{A} = ۴۵^\circ$ و D نقطه‌ای روی امتداد BA باشد به قسمی که $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC}$ و نقاط K و M به ترتیب روی BC, AB به گونه‌ای قرار داشته باشند که مساحت مثلث BDM مساوی مساحت مثلث BCK باشد، آن‌گاه زاویه‌ی $\widehat{BKM}$ برابر است با:

(شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

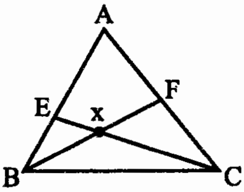
الف) $۲۲/۵^\circ$
ب) ۳۰°
ج) ۴۵°
د) ۱۵°
ه) ۲۰°

۴۵) ABC یک مثلث است. D نقطه‌ای روی AB و E نقطه‌ای روی AC است. تقاطع CD, BE را P می‌نامیم. اگر مساحت مثلث‌های CEP, BPD, ADE به ترتیب برابر ۳، ۸، ۵ باشند، مساحت مثلث ABC برابر است با:

(هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۲۵
ب) ۲۷
ج) ۳۰
د) ۳۲
ه) اطلاعات مسئله کافی نمی‌باشد.

۴۶) در مثلث مفروض ABC به مساحت S'، مساحت هر یک از مثلث‌های XCF, XEB, XBC به ترتیب $S, \frac{S}{۲}, \frac{S}{۳}$ می‌باشد. در این صورت نسبت $\frac{S'}{S}$ برابر است با:



الف) $\frac{۶}{۵}$　　ب) $\frac{۸}{۵}$

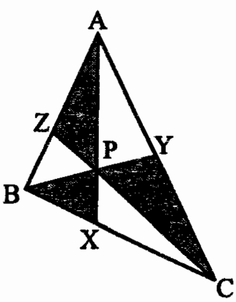
ج) ۲　　د) $\frac{۱۲}{۵}$

هـ) ۳

۴۷) روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC به ترتیب نقاط N, M را طوری در نظر می‌گیریم که مثلث مزبور به سه مثلث هم‌ارز (هم‌مساحت) BNC, MNC, AMN تقسیم شود. امتداد MN، امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی P قطع کرده است. نسبت $\frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$　　ب) $\frac{۳}{۴}$　　ج) $\frac{۲}{۳}$　　د) $\frac{۵}{۱۲}$　　هـ) $\frac{۴}{۵}$

۴۸) نقطه‌ی P داخل مثلث ABC قرار دارد. خطوط CZ, BY, AX که ترسیم شده‌اند، همگی از نقطه‌ی P می‌گذرند و مثلث را به ۶ مثلث دیگر تقسیم می‌کنند. اگر مساحت‌های مثلث‌های رنگ شده هر کدام ۱ باشند، مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۹}{۲}$　　ب) ۵　　ج) ۶

د) $\frac{۱۵}{۲}$　　هـ) اطلاعات موجود کافی نمی‌باشند.

۴۹) در مثلث ABC نقاط Q, P به ترتیب روی اضلاع AC, BC در نظر گرفته می‌شوند. اگر بدانیم که $\overline{BP} = \overline{CP}$ و $\overline{CQ} = \frac{۱}{۲}\overline{AQ}$ باشد، با فرض این‌که X محل برخورد BQ, AP باشد، نسبت مساحت مثلث ABX به مساحت ABC چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۵}$　　ب) $\frac{۲}{۵}$　　ج) $\frac{۳}{۵}$　　د) $\frac{۱}{۲}$　　هـ) $\frac{۳}{۱۰}$

۵۰) چهار ضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. فرض کنیم: $S_{\overset{\triangle}{DAB}} \leq S_{\overset{\triangle}{CDA}} \leq S_{\overset{\triangle}{BCD}} \leq S_{\overset{\triangle}{ABC}}$. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد این چهار ضلعی صحیح است؟

الف) چنین چهارضلعی وجود ندارد.

ب) فرض فوق در هر چهار ضلعی غیر مشخصی می‌تواند برقرار باشد.

ج) چهار ضلعی فوق حتماً دو ضلع موازی دارد.

د) چهار ضلعی فوق حتماً یک زاویه‌ی قائمه دارد.

هـ) چهار ضلعی فوق حتماً دو زاویه‌ی قائمه دارد.

۵۱) در چهار ضلعی $ABCD$ هر یک از قطرهای AC و BD آن را به دو بخش هم‌ارز تقسیم کرده‌اند. در این صورت کدام گزینه در مورد این چهار ضلعی صحیح است؟

الف) حتماً متوازی‌الاضلاع است.　　ب) حتماً لوزی است.

ج) حتماً مستطیل است.　　حتماً ذوزنقه است.

هـ) هر چهارضلعی غیر مشخصی می‌تواند باشد.

۵۲) در مثلث ABC نقاط Y,X روی ضلع BC به گونه‌ای قرار دارند که $\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$، اگر AX و AY زاویه‌ی $\widehat{BAC}$ را به سه بخش برابر تقسیم کنند. اندازه‌ی $\widehat{BAC}$ چه‌قدر است؟

الف) ۳۰° ب) ۴۵° ج) ۶۰°
د) ۹۰° ه) چنین چیزی امکان ندارد.

۵۳) از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع، یک چهار ضلعی به دست می‌آید. اگر طول اضلاع متوازی‌الاضلاع b,a باشد، نسبت مساحت این چهارضلعی به مساحت متوازی الاضلاع برابر است با:

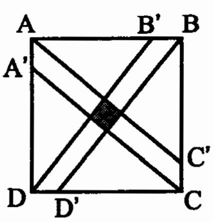
(بیست و دومین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)

الف) $\frac{|a-b|}{a+b}$ ب) $\frac{(a-b)^۲}{۲ab}$ ج) $\frac{۲|a-b|}{a+b}$ د) $\frac{|a-b|}{ab}$ ه) $\frac{(a-b)^۲}{(a+b)^۲}$

۵۴) در شکل $ABCD$ مربعی است به طول ضلع ۱ و نقاط D',C',B',A' طوری روی اضلاع انتخاب شده‌اند که داشته باشیم:

$$\frac{AA'}{AB}=\frac{BB'}{BC}=\frac{CC'}{CD}=\frac{DD'}{DA}=\frac{۱}{n}$$

ناحیه‌ی محدود به خطوط DB',BD',CA',AC' دارای مساحتی برابر $\frac{۱}{۱۹۸۵}$ است. مقدار n برابر است با:

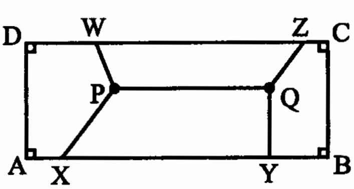


الف) ۳۰ ب) ۳۱
ج) ۳۲ د) ۳۳
ه) ۳۴

۵۵) در مستطیل $ABCD$ نقاط Q,P در داخل آن به گونه‌ای قرار دارند که AB,PQ موازی‌اند ($PQ||AB$). هم‌چنین نقاط X و Y روی AB و W و Z روی CD طوری قرار دارند که مساحت چهار بخش ایجاد شده با هم‌دیگر برابر بوده و ضمناً:

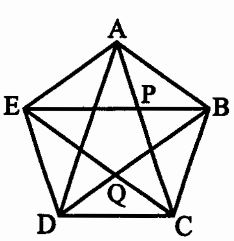
$$\overline{BC}=۱۹ \text{ و } \overline{PQ}=۸۷ \text{ و } \overline{XY}=\overline{YB}+\overline{BC}+\overline{CZ}=\overline{WZ}=\overline{WD}+\overline{DA}+\overline{AX}$$

طول $\overline{AB}$ چه‌قدر است؟



الف) ۱۲۵ ب) ۱۵۰
ج) ۱۷۳ د) ۱۷۴
ه) ۱۹۳

۵۶) $ABCDE$ یک پنج ضلعی منتظم است. ستاره‌ی $ACEBD$ دارای مساحت ۱ است. نقاط Q,P به ترتیب محل تلاقی AC با BE و نیز BD با CE اند. مساحت چهارضلعی $APQD$ چه‌قدر است؟

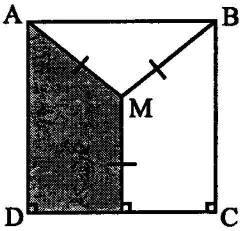


الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$
ج) $\cos ۳۶^\circ$ د) $\frac{۱}{۲}$
ه) $\frac{۲}{۳}\cos ۳۶^\circ$

۵۷) در شش ضلعی محدب $ABCDEF$، فرض می‌کنیم قطرهای CF, BE, AD هر یک سطح شش ضلعی را به دو سطح هم‌ارز تقسیم می‌کنند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح هستند؟

الف) شش ضلعی فوق، حتماً منتظم است.
ب) سه قطر مزبور حتماً با هم برابرند.
ج) سه قطر مزبور حتماً در یک نقطه همرس‌اند.
د) سه قطر مزبور با یک‌دیگر زاویه‌های برابری می‌سازند.
ه) هر دو گزینه‌ی «ب» و «ج» صحیح‌اند.

۵۸) در شکل روبه‌رو ضلع مربع $ABCD$، ۱ است و نقطه‌ی M از رأس A، رأس B و ضلع DC به یک فاصله است. مساحت چهارضلعی مشخص شده چند است؟
(بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\frac{۱}{۳}$
ب) $\frac{۲}{۵}$
ج) $\frac{۱۳}{۳۰}$
د) $\frac{۱۳}{۳۲}$
ه) $\frac{۷}{۱۵}$

۵۹) یک مستطیل کاغذی به طول ۵ و عرض ۱ را به گونه‌ای تا می‌کنیم که دو سر یک قطر آن روی هم قرار گیرند. مساحت ناحیه‌ی یک لایه چه‌قدر است؟
(بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۰	ب) $\frac{۵}{۲}$	ج) ۲	د) $\frac{۶}{۵}$	ه) $\frac{۱۲}{۵}$

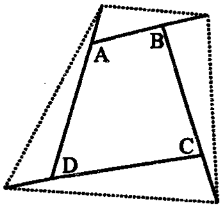
۶۰) نقطه‌ی M درون مثلث ABC قرار دارد. $H_۱, H_۲, H_۳$ به ترتیب پای عمودهای مرسوم از M بر AB, AC, BC می‌باشند. اگر حاصل‌ضرب $\overline{MH_۱}.\overline{MH_۲}.\overline{MH_۳}$ حداکثر مقدار ممکن خود را اختیار کند، آن‌گاه M کدام‌یک از نقاط زیر است؟
(شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) مرکز ارتفاعی
ب) مرکز دایره‌ی محاطی
ج) مرکز دایره‌ی محیطی
د) مرکز ثقل
ه) نقطه‌ای که از آن سه ضلع مثلث به یک زاویه دیده می‌شوند

۶۱) در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ از نقطه‌ی دل‌خواه M در داخل مثلث ، عمودهای MH, MH', MH'' را بر سه ضلع مثلث رسم می‌کنیم. اگر مساحت‌های مثلث‌های $MHH', MHH'', MH'H''$ را به ترتیب با $S_۱, S_۲, S_۳$ نمایش دهیم، حداکثر مقدار $S_۱ \times S_۲ \times S_۳$ برابر است با:

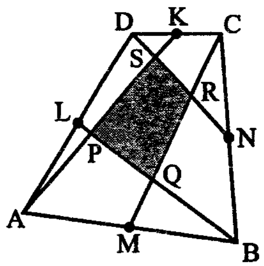
الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۲^{۱۰}}$
ب) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲^{۱۲}}$
ج) $\frac{۱}{۲^{۱۲} \times ۳\sqrt{۳}}$
د) $\frac{۱}{۲^{۱۱}\sqrt{۳}}$
ه) $\frac{\sqrt{۳}}{۲^{۱۲}}$

۶۲) هر یک از اضلاع یک چهارضلعی محدب را به اندازه‌ی K برابر خود و از چهار طرف امتداد می‌دهیم (مطابق شکل)، تا چهار ضلعی جدیدی حاصل شود. اگر مساحت این چهارضلعی ۲۵ برابر مساحت چهارضلعی اولیه باشد، مقدار K چه‌قدر است؟



الف) $K = ۳$
ب) $K = ۴$
ج) $K = \frac{۷}{۲}$
د) $K = ۵$
هـ) $K = \frac{۹}{۲}$

۶۳) در شکل، چهار ضلعی $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب است و نقاط L, K, N, M به ترتیب اوساط اضلاع AD, CD, BC, AB هستند. با ترسیم DN, BL, CM, AK، چهارضلعی $PQRS$ حاصل می‌شود. اگر مساحت $ABCD$ برابر با ۳۰۰۰ و مساحت‌های $APQM$ و $CKSR$، به ترتیب ۵۱۳ و ۳۸۸ باشند، مساحت $PQRS$ (هاشور خورده) چه‌قدر است؟



الف) ۵۹۸
ب) ۵۹۹
ج) ۶۰۰
د) ۶۰۲
هـ) ۶۰۴

۶۴) نقطه‌ی P، درون مثلث ABC قرار دارد. از P عمودهای PF, PE, PD را به ترتیب بر اضلاع AC, AB, BC وارد می‌کنیم. مقدار عبارت $\frac{bc}{PD^۲} + \frac{ab}{PF^۲} + \frac{ac}{PE^۲}$ هنگامی حداقل است که نقطه‌ی P ... باشد.
(c, b, a به ترتیب طول اضلاع AB, AC, BC از مثلث ABC اند.)

الف) مرکز ثقل
ب) مرکز ارتفاعیه
ج) مرکز دایره‌ی محیطی
د) مرکز دایره‌ی محاطی
هـ) نقطه‌ی وسط بزرگ‌ترین ضلع مثلث

۶۵) مساحت مثلثی که طول یک ضلع آن ۳ و طول ضلع دیگرش ۶ است، حداکثر چه‌قدر است؟

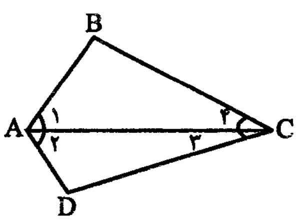
(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)

الف) ۱۸
ب) ۱۲
ج) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$
د) ۹
هـ) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$

۶۶) مساحت چهارضلعی زیر چه‌قدر است، اگر

$$\overline{AB} = ۴, \overline{BC} = ۸, \overline{CD} = ۹, \overline{DA} = ۵ \text{ و } \hat{A}_۱ + \hat{C}_۳ = ۹۰^\circ \text{ و } \hat{A}_۲ + \hat{C}_۴ = ۳۰^\circ$$

(نوزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

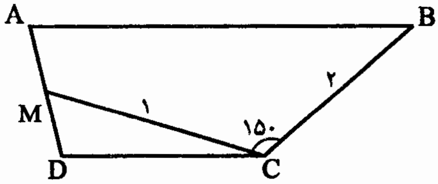


الف) ۲۸
ب) ۲۹
ج) $۱۸ + ۱۰\sqrt{۳}$
د) $۱۰ + ۹\sqrt{۳}$
هـ) $۹ + ۱۰\sqrt{۳}$

۶۷) چهار ضلعی $ABCD$ مفروض است. اوساط قطرهای BD, AC را N, M و وسط AD را P می‌نامیم. اگر داشته باشیم که $S_{\overset{\triangle}{MNP}} = m.(S_{\overset{\triangle}{ADC}} - S_{\overset{\triangle}{BDC}})$، آن‌گاه $|m|$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۸}$　ب) $\frac{۱}{۶}$　ج) $\frac{۱}{۴}$　د) $\frac{۱}{۳}$　هـ) $\frac{۱}{۲}$

۶۸) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، AB با CD موازی است و نقطه‌ی M، وسط ضلع AD است، به طوری که $\widehat{MCB} = ۱۵۰°$. اگر $\overline{CB} = ۲$ و $\overline{CM} = ۱$ باشند، مساحت ذوزنقه چه‌قدر است؟



الف) ۱　ب) $\frac{۳}{۲}$
ج) $\frac{۴}{۳}$　د) $\frac{۵}{۴}$
هـ) ۲

۶۹) نقاط K, N, M بر روی اضلاع مربع $ABCD$ طوری اختیار شده‌اند که M وسط AB و N روی BC و K روی AD، طوری قرار دارند که:

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} = ۲$$

زاویه‌ی بین خط‌های MC و NK چند است؟

الف) $۷۵°$　ب) $۹۰°$
ج) $\text{Arcsin}\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$　د) $\text{Arcsin}\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$
هـ) $۴۵°$

۷۰) در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A که $(\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = ۲)$، نیمسازهای داخلی رئوس B و C، نیمساز خارجی رأس A را در نقاط M و N قطع کرده‌اند. نسبت مساحت چهارضلعی $BCMN$ به مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف) ۳　ب) ۵　ج) ۷　د) ۳/۵　هـ) ۵/۵

۷۱) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، $\hat{C} = ۳۰°, \hat{B} = ۱۵°$ می‌باشند. از رأس A، عمودی از AB خارج می‌کنیم تا BC را در نقطه‌ی D قطع کند. نسبت $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۲　ب) $\frac{۱}{۲}$　ج) $\frac{۲}{۳}$　د) $\frac{۳}{۲}$　هـ) $\frac{۱}{۳}$

۷۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = ۹۰°)$، H پای ارتفاع وارد بر وتر و هم‌چنین نقطه‌ی K، وتر را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. زاویه‌ی $\hat{C}$ چند درجه است؟

الف) $۳۰°$　ب) $\text{Arccos}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$
ج) $\text{Arcsin}\sqrt{\frac{۲}{۵}}$　د) $\text{Arccos}\sqrt{\frac{۲}{۵}}$
هـ) $\text{Arcsin}\sqrt{\frac{۵}{۶}}$

۷۳) $ABCD$، یک چهار ضلعی محدب است. چند نقطه در داخل این چهار ضلعی پیدا می‌شود، به طوری که اگر از آن‌ها به اوساط اضلاع این چهارضلعی وصل کنیم، مساحت چهارضلعی به چهار قسمت برابر تقسیم شود؟

الف) ۱ ب) ۲
ج) ۳ د) ۴
ه) بی‌شمار

۷۴) در مثلث ABC $(\overline{AB} < \overline{AC})$ ، $\hat{A} = ۲\hat{C}$، نقطه‌ی D روی ضلع AC طوری قرار دارد که $\overline{AB} = \overline{CD}$. از رأس B، خط L را به موازات AC ترسیم می‌کنیم. نیمساز خارجی رأس A و هم‌چنین خطی گذرنده از رأس C و به موازات ضلع AB، خط L را به ترتیب در N, M قطع می‌کنند. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\widehat{MDN} = \hat{B} + \hat{C}$
ب) مثلث MDN با مثلث ABC متشابه است.
ج) مثلث MDN متساوی‌الساقین است.
د) مثلث MDN قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.
ه) گزینه‌های «الف» و «ج» هر دو صحیح هستند.

۷۵) در مثلث ABC، نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است. اگر نقطه‌ی D محل برخورد AO با ضلع BC باشد و OE عمود وارد بر ضلع BC باشد، کدام رابطه صحیح است؟

الف) $\widehat{BOD} = ۲\widehat{EOD}$ ب) $\widehat{COE} = \widehat{BAC}$
ج) $\widehat{BOD} = \widehat{COE}$ د) $۴\widehat{EOD} = \widehat{BAC}$
ه) هیچ‌کدام

۷۶) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، نیمسازهای داخلی CE, BD را رسم کرده‌ایم واز D, E عمودهای DM, EF را بر BC وارد می‌کنیم. اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{FAM}$ چه‌قدر است؟

الف) ۳۰° ب) ۴۵° ج) ۱۵° د) $۲۲/۵^\circ$ ه) ۳۶°

۷۷) در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۵^\circ, \hat{A} = ۶۰^\circ$ و نیمساز داخلی رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. اگر $\overline{AT} = ۲۴$ باشد، مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

الف) $۳۶(۱ + ۲\sqrt{۳})$ ب) $۳۶(۳ + \sqrt{۳})$
ج) $۷۲(۱ + ۲\sqrt{۳})$ د) $۷۲(۳ + \sqrt{۳})$
ه) $۲۴(۲ + ۳\sqrt{۳})$

۷۸) در مثلث ABC داریم: $\hat{C} = ۳۰^\circ$ ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\overline{AB} = ۱$ F, E به ترتیب روی اضلاع AC, BC طوری قرار دارند که $\overline{AC} = ۶\overline{AF}$ و $\overline{BC} = ۴\overline{CE}$. طول EF برابر است با:

الف) ۱ ب) $\frac{\sqrt{۳۹}}{۶}$ ج) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$
د) $\frac{۳}{۲}$ ه) قابل محاسبه نمی‌باشد.

۷۹) اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه‌ی $c^۴ - ۲(a^۲ + b^۲)c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ = ۰$ برقرار باشد، زاویه‌ی C برابر است با:

(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۳۰° ب) ۶۰° ج) ۱۲۰° د) ۶۰° یا ۱۲۰° ه) ۳۰° یا ۱۲۰°

۸۰) فرض کنید در مثلث ABC، CH ارتفاع باشد و $۲\overline{CH} \geq \overline{AB}$. در این صورت بزرگ‌ترین مقدار زاویه‌ی C برابر است با:
(چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۳۰°
ب) ۴۵°
ج) ۶۰°
د) ۹۰°
ه) ۱۲۰°

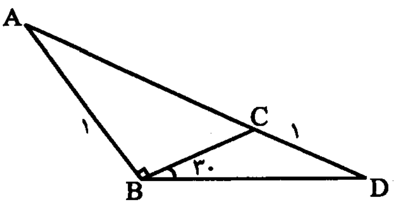
۸۱) در مثلث ABC، $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و مجموع دو ضلع AC, AB برابر با ۱۰ است. در مورد ضلع BC چه می‌توان گفت؟
(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $\overline{BC} < ۹$
ب) $\overline{BC} \geq ۵\sqrt{۳}$
ج) $۵ \leq \overline{BC} \leq ۹$
د) $۵\sqrt{۳} \leq \overline{BC} \leq ۹$
ه) $\frac{۱۱}{۲} \leq \overline{BC} \leq \frac{۱۷}{۳}$

۸۲) اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a = \lambda b$ و $\hat{B} = ۲\hat{C}$، آن‌گاه λ در کدام‌یک از فواصل زیر قرار می‌گیرد؟
(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $۰ \leq \lambda \leq ۱$
ب) $\frac{۱}{۲} < \lambda \leq ۱$
ج) $۰ < \lambda < \frac{۳}{۲}$
د) $۱ \leq \lambda < ۲$
ه) $\frac{۱}{۲} \leq \lambda < \frac{۳}{۲}$

۸۳) در شکل زیر فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD} = ۱$. در این صورت طول AC برابر است با:
(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\sqrt{۲}$
ب) $\sqrt{۳}$
ج) $\frac{۳}{۲}$
د) $\sqrt[۳]{۳}$
ه) $\sqrt[۳]{۲}$

۸۴) در مثلث مفروض ABC، D را پای نیمساز رأس A و E را قرینه‌ی D نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC می‌گیریم. حال اگر F را روی BC به قسمی انتخاب کنیم که $\widehat{BAF} = \widehat{EAC}$ ، در آن صورت $\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}$ برابر کدام‌یک از مقادیر زیر است؟
(پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $\frac{c}{b}$
ب) $\frac{c^۲}{b^۲}$
ج) $\frac{c^۳}{b^۳}$
د) $\frac{c}{c+b}$
ه) $\frac{c^۲}{(b+c)^۲}$

۸۵) در مثلث ABC ، نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث است. اگر داشته باشیم که $\overline{AH} = \overline{BC}$ ، آن‌گاه زاویه‌ی A چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟
(پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

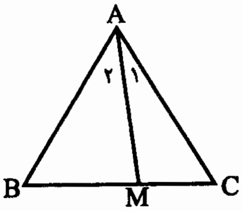
الف) $۴۵^\circ, ۳۰^\circ$
ب) $۷۵^\circ, ۶۰^\circ$
ج) ۶۰°
د) $۱۳۵^\circ, ۴۵^\circ$
ه) $۶۰^\circ, ۴۵^\circ$

۸۶) در چهار ضلعی $ABCD$ داریم $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} = ۹۰^\circ$ و $\overline{AB} = \overline{CD}$. اگر O محل تقاطع BD, AC باشد و $\overline{BO} = ۳, \overline{BC} = ۵$ ، طول $\overline{CO}$ چه‌قدر است؟

الف) ۴
ب) $\sqrt{۱۵}$
ج) $\sqrt{۱۴}$
د) ۳
ه) $۳\sqrt{۲}$

۸۷) در شکل روبه‌رو زاویه‌ی $\hat{A}_۲$ دو برابر زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ است و داریم $\overline{AC} = \sqrt{۳}$ ،$\overline{AB} = ۱$ و AM میانه‌ی BC است. طول BC کدام است؟

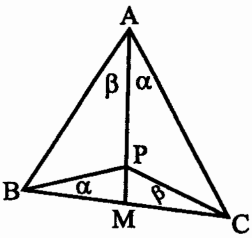
(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$
ب) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$
ج) ۲
د) $\sqrt{۳}$
ه) $\frac{۳}{۲}$

۸۸) در مثلث ABC ، AM میانه است. نقطه‌ی P روی AM چنان قرار گرفته است که $\widehat{PAC} = \widehat{PBC} = \alpha$ و $\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = \beta$ اگر $\alpha + \beta = ۸۰$ ، زاویه‌ی $\widehat{CPA}$ چه‌قدر است؟

(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۱۳۰°
ب) ۱۲۰°
ج) ۱۴۰°
د) $۱۲۰^\circ < \widehat{CPA} < ۱۳۰^\circ$
ه) تمام مقادیر بین ۱۲۰° و ۱۴۰° می‌تواند باشد.

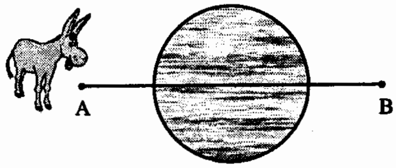
۸۹) همه‌ی زوایای مثلثی از ۵۹ درجه بزرگ‌تر هستند. کدام گزینه درباره‌ی این مثلث همواره صحیح است؟

(بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) یک زاویه‌ی منفرجه دارد.
ب) یک زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد.
ج) قائم‌الزاویه است.
د) متساوی‌الاضلاع است.
ه) همه‌ی زاویه‌هایش از ۶۲ درجه کوچک‌تر هستند.

۹۰) الاغی می‌خواهد از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A برود ولی دقیقاً در وسط راه دریاچه‌ای دایره‌ای شکل به قطر ۲ کیلومتر قرار دارد. اگر فاصله‌ی B, A چهار کیلومتر باشد، کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟

(بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$
ب) $۲+\pi$
ج) ۵
د) $۲\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$
ه) ۶

۹۱) مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع به ضلع یک، چه‌قدر است؟

(بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
ج) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}$
د) $۲۵\sqrt{۳}-۴۸$
ه) $\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$

فصل ۲

تالس و تشابه

۱) در مثلث ABC، نقطه‌ی M را روی BC در نظر می‌گیریم و از آن خطوطی به موازات اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. فرض کنید مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل $\frac{۵}{۱۸}$ مساحت مثلث شود، در این‌صورت نقطه‌ی M ضلع BC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟ (چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۱ به ۶ ب) ۱ به ۴ ج) ۱ به ۵ د) ۱ به ۹ هـ) ۱ به ۳

۲) در مثلث ABC ارتفاع وارد بر ضلع BC آن را در D قطع می‌کند و ارتفاع وارد بر ضلع AC نیز AD را در H قطع می‌کند. اگر $\overline{AD} = ۴$ و $\overline{BD} = ۳$ و $\overline{CD} = ۲$، آن‌گاه طول HD برابراست با: (هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\sqrt{۵}$ د) $\frac{۵}{۲}$ هـ) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$

۳) در مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC، BD و CE، به ترتیب ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AC و AB هستند. می‌دانیم: $\overline{BC} = ۲\overline{DE}$. زاویه‌ی $\hat{A}$، چند درجه است؟ (نوزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۶۰° ب) ۳۰° ج) ۴۵°

د) ۳۰° یا ۶۰° هـ) نمی‌توان آن را مشخص کرد.

۴) خط متغیر D و غیرگذرنده از نقاط B و C همواره دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب، در دو نقطه‌ی M و N چنان قطع می‌نماید که مساحت مثلث AMN، برابر مجموع مساحت‌های مثلث‌های MNB و MNC می‌باشد. کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

الف) این خط باید همواره با ضلع BC موازی باشد.

ب) $\frac{\overline{AM}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{MC}}$

ج) این خط باید، همواره از یک نقطه‌ی ثابت در صفحه‌ی مثلث بگذرد.

د) این خط باید همواره از وسط ارتفاع AH بگذرد.

هـ) این خط باید همواره بر دایره‌ی محاطی داخلی مثلث مماس باشد.

۵) در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(\overline{AB} = \overline{AC})$، نیمساز زاویه‌ی $\hat{C}$ مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ برابر کدام‌یک از اعداد زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۶) در مثلث ABC، سه نقطه‌ی A'، B' و C' به ترتیب بر روی سه ضلع BC، CA و AB چنان واقع شده‌اند که سه خط AA'، BB' و CC'، در نقطه‌ی P همرس‌اند. می‌دانیم که $\overline{PB} = ۴$، $\overline{PC} = ۶$، $\overline{PA'} = ۲$، $\overline{PB'} = ۲$ و $\overline{PC'} = ۳$. اندازه‌ی $\overline{PA}$ چه‌قدر است؟ (بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)

الف) ۳ ب) ۳/۵ ج) ۴ د) ۴/۵ هـ) ۵

۷) فرض کنید در مستطیل $ABCD$، نقاط M و N پای عمودهای وارد از A و C بر قطر BD اند. اگر اضلاع مستطیل برابر ۱ و ۳ باشند، مساحت چهارضلعی $AMCN$ چند است؟

الف) $\frac{۸}{۵}$ ب) $\frac{۶}{\sqrt{۱۰}}$ ج) ۲ د) $\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}$ هـ) $\frac{۱۲}{۵}$

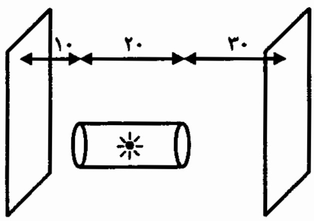
۸) چند خط در صفحه وجود دارد که یک مستطیل ۵×۲، داده شده را به دو مستطیل متشابه تقسیم کند؟

(بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۹) وسط لوله‌ای استوانه‌ای شکل به طول ۲۰ سانتی‌متر، لامپی روشن است. در دو طرف لوله، دو پرده‌به فاصله‌ی ۳۰ و ۱۰ سانتی‌متر قرار گرفته است. نسبت مساحت ناحیه‌های روشن شده دو پرده چند است؟

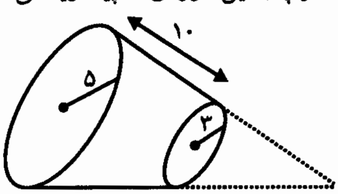
(بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۳ ب) ۴
ج) ۶ د) ۸
هـ) ۹

۱۰) مخروطی ناقص به شکل روبه‌رو روی زمین می‌غلطد. و به جای اولش برمی‌گردد. اگر شعاع قاعده‌های مخروط ۳ و ۵ و طول یال آن ۱۰ باشد، شعاع دایره‌ای که قاعده‌ی کوچک‌تر مخروط طی می‌کند، چه‌قدر است؟

(بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۳ ب) ۵
ج) ۱۰ د) ۱۵
هـ) ۲۰

۱۱) در مثلث ABC، $(\overline{AC} > \overline{AB})$ ضلع BC را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم، تا نقطه‌ی M به‌دست آید، از M، عمودی را بر نیمساز داخلی زاویه‌ی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند، نسبت $\frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) ۳ د) $\frac{۳}{۲}$ هـ) ۳/۵

۱۲) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع DC و BC واقع‌اند، به طوری‌که: $\overline{BN} = \overline{NC}$ و $\frac{\overline{DM}}{\overline{MC}} = \frac{۱}{۲}$. پاره‌خط‌های AM و AN قطر BD از متوازی‌الاضلاع مزبور را در نقاط E و F قطع می‌کنند. نسبت $\frac{\overline{EF}}{\overline{BD}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۵}{۱۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۳) در مثلث ABC ، AM میانه است و نقطه‌ی N وسط این میانه می‌باشد. $(\overline{AN}=\overline{NM})$ اگر امتداد BN، ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع کند، نسبت مساحت مثلث ANP به مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

الف) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{1}{10}$ هـ) $\frac{1}{12}$

۱۴) در مثلث ABC نقاط M، N و P به ترتیب اوساط اضلاع BC، AB و AC می‌باشند. اگر H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، در این صورت، چهارضلعی $HNPM$، ...

الف) فقط یک ذوزنقه است.

ب) یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است.

ج) یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.

د) یک ذوزنقه است که مساحت آن نصف مساحت مثلث ABC است.

هـ) یک ذوزنقه است که قاعده‌ی کوچک آن نصف قاعده‌ی بزرگ آن است.

۱۵) در مثلث مفروض ABC، ضلع $\overline{BC}$ دو برابر ضلع $\overline{AC}$ است و AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC است. اگر AE طول میانه‌ی وارد بر ضلع CM از مثلث AMC باشد، $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ هـ) $\frac{2}{5}$

۱۶) در چهارضلعی محدب $ABCD$ اقطار AC و BD در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. از نقاط B و C، خطوطی را به ترتیب به موازات اضلاع DC و AB ترسیم می‌کنیم تا اقطار AC و BD را به ترتیب در E و G قطع کنند. اگر $\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}=\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\overline{OG}}{\overline{AD}}\times\frac{\overline{EG}}{\overline{GD}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{5}{4}$ هـ) $\frac{1}{2}$

۱۷) در مثلث مفروض ABC، a، b و c به ترتیب طول اضلاع BC، AC و AB هستند. خط دل‌خواهی گذرنده از رأس B نیمساز AD را در نقطه‌ی F و ضلع AC را در E قطع می‌کند. اگر $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}$ ، نسبت $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{b}{c}$ ب) $\frac{c}{b}$ ج) $\frac{b^2}{a^2}$ د) $\frac{c^2}{b^2}$ هـ) $\frac{a}{b}$

۱۸) در مثلث ABC، H محل همرسی ارتفاعات (مرکز ارتفاعیه) می‌باشد. اگر اندازه‌ی زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ به ترتیب ۶۰ و ۷۵ درجه باشند، حاصل $\frac{\overline{AH}\times\overline{BH}}{\overline{BC}\times\overline{AC}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ب) $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$ ج) $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$ د) $\frac{1}{4}$ هـ) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$

۱۹) مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ مفروض است. در خارج مثلث و روی اضلاع قائمه دو مربع $ABDE$ و $ACFG$ را رسم می‌کنیم. اگر خطوط CD و AB در نقطه‌ی H و خطوط BF و AC در نقطه‌ی K متقاطع باشند و $\widehat{ACB}=30^\circ$ باشد، نسبت $\frac{\overline{HK}}{\overline{BC}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}$

ج) $\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{4}$ د) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

هـ) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

۲۰) نیمسازهای زوایای A و D از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را رسم می‌کنیم. تا اقطار BD و AC را به ترتیب در M و N قطع کنند اگر $\overline{AB}=x$ و $\overline{AD}=y$ باشند. نسبت مساحت چهارضلعی $ANMD$ به مساحت چهارضلعی $BNMC$ چه‌قدر است؟

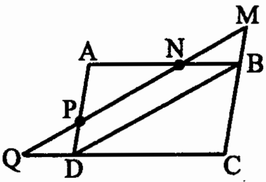
الف) $\frac{y}{x}$ ب) $(\frac{y}{x})^2$ ج) $\frac{xy}{(y+x)^2}$ د) $\frac{(y+x)^2}{yx}$ ه) $\frac{y^2+x^2}{xy}$

۲۱) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، $(AB \parallel DC)$، $\overline{AB}=x$، $\overline{BC}=y$، $\overline{CD}=z$ و $\overline{AD}=w$. اگر نیمسازهای خارجی زوایای A و D یک‌دیگر را در نقطه‌ی E و نیمسازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه‌ی F هم‌دیگر را قطع کنند، طول $\overline{EF}$ چه‌قدر است؟

الف) $x+z$ ب) $y+w$ ج) $\frac{x+y+z+w}{2}$

د) $\frac{2(x+z)+(y+w)}{3}$ ه) $\frac{2(y+w)+(x+z)}{3}$

۲۲) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خطی که به موازات قطر BD ترسیم می‌شود اضلاع BC، AB، AD و DC را به ترتیب در M، N، P و Q قطع کرده است اگر $\frac{\overline{NP}}{\overline{MQ}}=\frac{1}{4}$ باشد، نسبت $\frac{\overline{NP}}{\overline{BD}}$ چه‌قدر است؟



الف) ۰/۲۵ ب) ۰/۴

ج) ۰/۵ د) ۰/۶

ه) ۰/۸

۲۳) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $\overline{AB}=a$ و $\overline{BC}=b$، نقطه‌ی دل‌خواه M روی ضلع BC و یا امتداد آن مفروض است اگر AM، ضلع DC را در نقطه‌ی N قطع کند، $\overline{BM}\times\overline{DN}$ برابراست با:

الف) a^2+b^2 ب) $|a^2-b^2|$ ج) $(a+b)^2$ د) $(a-b)^2$ ه) ab

۲۴) خط متغیر L و گذرنده از نقطه‌ی C امتدادهای اضلاع AB و AD را به ترتیب در M و N قطع می‌کند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر همواره ثابت است؟(با تغییر خط L)

الف) $\overline{AB}\times\overline{AM}+\overline{AD}\times\overline{AN}$ ب) $\overline{MB}\times\overline{AB}+\overline{DN}\times\overline{AD}$ ج) $\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{DN}}{\overline{AD}}$

د) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AN}}$ ه) $\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{DN}}$

۲۵) طول AB از مستطیل $ABCD$ دو برابر عرض BC است. از رأس A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم. این عمود قطر BD را در N و ضلع CD را در نقطه‌ی M قطع می‌کند، $\frac{\overline{DM}}{\overline{AB}}$ چه‌قدر است؟

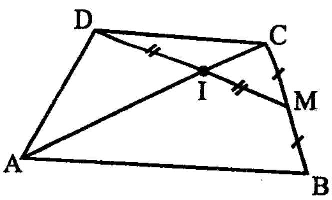
الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{3}{8}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{5}$ ه) $\frac{2}{5}$

۲۶) از نقطه‌ی M واقع بر ضلع AB از مثلث ABC خطوط MQ و MP را به ترتیب به موازات اضلاع AC و BC رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث BMQ برابر S' و مساحت مثلث ABC برابر S باشد، مساحت چهارضلعی $MPCQ$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S'}}{2}$ ب) $(\sqrt{S}-\sqrt{S'})^2$ ج) $\frac{(\sqrt{S}+\sqrt{S'})^2}{2}$

د) $\sqrt{SS'}$ ه) $2\sqrt{S'}(\sqrt{S}-\sqrt{S'})$

۲۷) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، قاعده‌ی کوچک‌تر، CD و قاعده‌ی بزرگ‌تر AB است. قطر AC از نقطه‌ی I وسط پاره‌خط DM که رأس D را به وسط BC وصل می‌کند، می‌گذرد. نسبت $\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۱}{۴}$
ب) $\frac{۱}{۳}$
ج) $\frac{۲}{۳}$
د) $\frac{۱}{۲}$
هـ) $\frac{۳}{۵}$

۲۸) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) نیمساز داخلی زاویه‌ی B، ارتفاع AH و ضلع AC را به ترتیب در E و D قطع می‌کند. خط موازی با ضلع BC و گذرنده از نقطه‌ی E ضلع AC را در G قطع می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\overline{AD} = \overline{DG} = \overline{CG}$
ب) $\overline{AD} = \overline{CG}$
ج) $\overline{AD} = \overline{CG} = ۲\overline{DG}$
د) $\overline{AG} = \overline{DC} = \overline{AB}$
هـ) $\overline{AD} = \overline{CG} = ۳\overline{DG}$

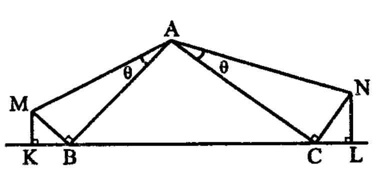
۲۹) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، H پای ارتفاع وارد بر وتر BC است. نقاط E و F به ترتیب روی اضلاع AB و AC طوری قرار دارند که $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$. اگر $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{۱}{۴}$ باشد، نسبت مساحت مثلث EHF به مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$
ب) $\frac{۱}{۸}$
ج) $\frac{۱}{۱۶}$
د) $\frac{۱}{۱۲}$
هـ) $\frac{۱}{۱۰}$

۳۰) فرض کنید $ABCD$ یک مربع باشد، و E و F نقاطی دل‌خواه به ترتیب روی اضلاع AB و AD باشند. اگر پاره‌خط‌های EF و AC در نقطه‌ی P متقاطع باشند. خواهیم داشت که: $\frac{k}{\overline{AP}} = \frac{۱}{\overline{AF}} + \frac{۱}{\overline{AE}}$. مقدار k چه‌قدر است؟

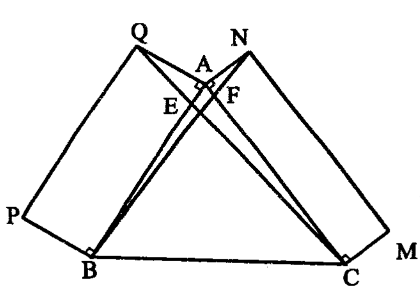
الف) ۱
ب) ۲
ج) $\sqrt{۲}$
د) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
هـ) $\sqrt{۳}$

۳۱) در مثلث مفروض ABC از نقاط B و C عمود BM و CN را به ترتیب از اضلاع AB و AC خارج می‌کنیم به طوری که، $\widehat{BAM} = \widehat{CAN} = \theta$ باشد. از نقاط M و N عمودهای MK و NL را بر امتداد ضلع BC وارد می‌کنیم. نسبت $\frac{\overline{BK}}{\overline{CL}}$ چه‌قدر است؟



الف) $\sin\theta$
ب) $\cos\theta$
ج) $\tan\theta$
د) $\cot\theta$
هـ) ۱

۳۲) روی اضلاع AB و AC از مثلث مفروض ABC، مستطیل‌های $ABPQ$ و $ACMN$ را که دارای مساحت‌هایی برابر باشند، بنا می‌شوند. خطوط CQ و BN، اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کنند. نسبت $\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$ کدام است؟



الف) $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CN}}$
ب) $\frac{\overline{AN}}{\overline{AP}}$
ج) $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
د) $\frac{\sqrt{S_{ABPQ}}}{\sqrt{S_{ACMN}}}$
هـ) $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$

۳۳) در مثلث ABC، $\widehat{BAC} = ۱۲۰^\circ$. نیمساز داخلی زاویه‌ی A ضلع BC در نقطه‌ی D قطع می‌کند، کدام رابطه صحیح است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$ ب) $\frac{۲}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$

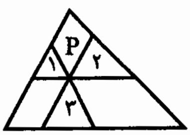
د) $\frac{۱}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$ ه) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$

۳۴) در مثلث ABC، AD نیمساز داخلی رأس A می‌باشد، اگر $\overline{AD}$، واسطه‌ی توافقی اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ باشد. زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

الف) ۳۰° ب) ۴۵° ج) ۶۰°

د) ۹۰° ه) چنین مثلثی وجود ندارد.

۳۵) در مثلث ABC، از نقطه‌ی P، درون آن خطوطی را به موازات اضلاع رسم می‌کنیم تا توسط آن‌ها سه مثلث کوچک‌تر در درون مثلث ایجاد شود. اگر مساحت‌های این سه مثلث $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ باشند و S نیز مساحت مثلث ABC باشد، کدام رابطه صحیح است؟



الف) $S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{S}{۲}$

ب) $S_۱^{\frac{۱}{۲}} + S_۲^{\frac{۱}{۲}} + S_۳^{\frac{۱}{۲}} = S^{\frac{۱}{۲}}$

ج) $S_۱^{\frac{۲}{۳}} + S_۲^{\frac{۲}{۳}} + S_۳^{\frac{۲}{۳}} = S^{\frac{۲}{۳}}$

د) $S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{S}{۳}$

ه) با توجه به نوع مثلث هر کدام از روابط فوق می‌تواند صحیح باشد.

۳۶) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) می‌دانیم $\widehat{ACB} = ۳۰^\circ$. نقطه‌ی D در داخل مثلث طوری قرار دارد که $\widehat{ADB} = ۱۲۰^\circ$. اگر $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$، نسبت $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۴+۳\sqrt{۲}}}$ ب) $\frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۵+۲\sqrt{۳}}}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳+۳\sqrt{۳}}}$

د) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۷+۲\sqrt{۳}}}$ ه) $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۵+۳\sqrt{۲}}}$

۳۷) در مثلث ABC، $\overline{AC} = ۳\overline{AB}$. از نقطه‌ی M وسط ضلع BC، خطی به موازات نیمساز داخلی AD رسم می‌کنیم تا AC را نقطه‌ی Q و امتداد AB را در P، قطع کند. حاصل $\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۴/۵ ه) ۵

۳۸) در مثلث مفروض ABC، از نقطه‌ی M وسط ضلع BC، عمودی را بر نیمساز داخلی زاویه‌ی A از این مثلث فرود می‌آوریم، تا اضلاع AB و AC (یا امتداد آن‌ها را)، به ترتیب در E و F قطع کند. اگر بدانیم که $\overline{BE} = \overline{CF}$، در این صورت زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

الف) ۳۰

ب) ۶۰

ج) ۹۰

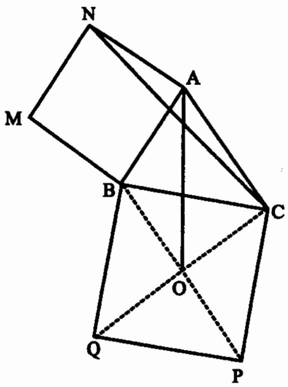
د) ۱۲۰

ه) هر مقداری کم‌تر از ۱۸۰° می‌تواند داشته باشد.

۳۹) مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(\overline{AB}=\overline{AC})$ مفروض است. نقطه‌ی D، نقطه‌ای ثابت است که روی قاعده‌ی BC قرار دارد به طوری که $\overline{BD}=\frac{۱}{۳}\overline{BC}$، نقاط متغیر U و V روی ضلع AC و امتداد ضلع AB طوری تغییر می‌کنند که همواره با نقطه‌ی D روی یک خط قرار دارند. اگر داشته باشیم $\frac{z}{AB}+\frac{y}{BV}=\frac{x}{CU}$. سه‌تایی (x,y,z) کدام است؟

الف) (۱, ۲, ۳) ب) (۲, ۱, ۳) ج) (۳, ۲, ۱)
د) (۱, ۱, ۱) ه) (۲, ۱, ۱)

۴۰) مطابق شکل روی اضلاع AB و BC، مربع‌های $ABMN$ و $BCPQ$ بنا شده‌اند و نقطه‌ی O مرکز مربع $BCPQ$ می‌باشد. نسبت $\frac{\overline{AO}}{\overline{NC}}$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۱}{۲}$
ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
ج) ۱
د) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
ه) بستگی به نوع مثلث ABC دارد.

۴۱) در مثلث مفروض ABC، AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC و نقطه‌ی دل‌خواه P روی آن مفروض‌اند. اگر فاصله‌ی P از ضلع AC، دو برابر فاصله‌ی آن از ضلع AB باشد، در این صورت نسبت $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۱}{۴}$ ه) $\frac{۲}{۳}$

۴۲) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، طول قاعده‌های AB و CD به ترتیب برابر a و b می‌باشند $(\overline{CD}>\overline{AB})$. از نقطه‌ی محل تلاقی امتدادهای AD و BC خطی به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم. اگر امتدادهای AC و BD، خط مزبور را در نقاط E و F قطع کنند. طول EF چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۲ab}{a+b}$ ب) $\frac{ab}{a+b}$ ج) $\frac{ab}{b-a}$
د) $\frac{۲ab}{b-a}$ ه) $\frac{a^۲+b^۲}{a+b}$

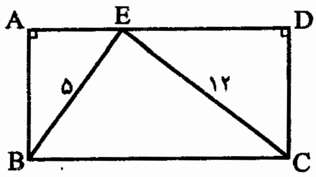
۴۳) در ذوزنقه‌ی مفروض $ABCD$ ، ضلع AB با ضلع CD موازی است. نقاط P و Q به ترتیب روی اضلاع AB و CD طوری واقع‌اند که $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{CQ}}$. نقطه‌ی M، محل تلاقی AQ و DP و نقطه‌ی N محل تلاقی PC و QB است. طول $\overline{MN}$ چه‌قدر است؟ $(\overline{CD}=b\,,\,\overline{AB}=a)$

الف) $\frac{۲ab}{a+b}$ ب) $\frac{(a-b)^۲}{a+b}$ ج) $\frac{ab}{a+b}$
د) $\frac{ab}{|a-b|}$ ه) $\frac{۲ab}{|a-b|}$

۴۴) در مستطیل $ABCD$، نقاط M و N روی ضلع DC طوری قرار دارند که $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{DN}$. اگر مثلث‌های BDM و BMN، متشابه باشند، نسبت $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) ۲ ج) $\sqrt{۳}$ د) ۳ ه) ۴

۴۵) در مستطیل $ABCD$، نقطه‌ی E را روی ضلع AD طوری در نظر می‌گیریم، که مجموع دو زاویه‌ی $\widehat{ABE}$ و $\widehat{DCE}$ برابر ۹۰° بشود. اگر بدانیم $\overline{BE} = ۵$ و $\overline{CE} = ۱۲$، طول $\overline{DE}$ چه‌قدر است؟

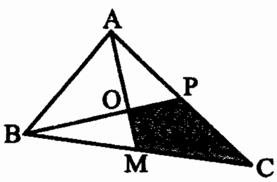


الف) $\frac{۱۴۴}{۱۳}$ ب) $\frac{۱۲۱}{۱۲}$

ج) ۹ د) $\frac{۶۰}{۱۳}$

ه) ۱۱

۴۶) در مثلث ABC میانه‌های AM و BP هم‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند، اگر مساحت مثلث ABC، ۴ باشد، مساحت چهارضلعی $CMOP$ چه‌قدر است؟

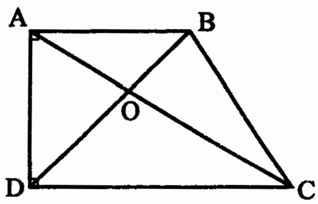


الف) $\frac{۴}{۳}$ ب) $\frac{۳}{۲}$

ج) ۲ د) ۱

ه) $\frac{۷}{۴}$

۴۷) در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$، ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است. اگر $\overline{CD} = ۲\overline{AB}$، کدام گزینه صحیح است؟



الف) $S_{O\hat{D}C} = ۴S_{O\hat{A}B}$ ب) $S_{O\hat{D}C} = S_{A\hat{B}C}$

ج) $S_{O\hat{A}D} = S_{O\hat{B}C}$ د) «ب» و «ج» هر دو صحیح‌اند.

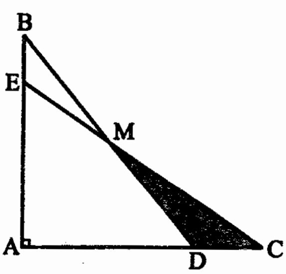
ه) «الف» و «ج» هر دو صحیح‌اند.

۴۸) چند نوع مثلث غیرمتشابه با یک‌دیگر مانند ABC می‌توان پیدا کرد که در آن مجذور طول نیمساز داخلی زاویه‌ی A، برابر باشد با حاصل‌ضرب AB و AC؟

الف) یک‌نوع ب) دونوع ج) سه‌نوع

د) چهارنوع ه) چنین مثلثی وجود ندارد.

۴۹) در شکل زیر دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و AEC با هم برابرند. اگر BD و CE، هم‌دیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند و $\overline{AE} = ۲$ و $\overline{AC} = ۳$ باشند، مساحت مثلث MDC چه‌قدر است؟

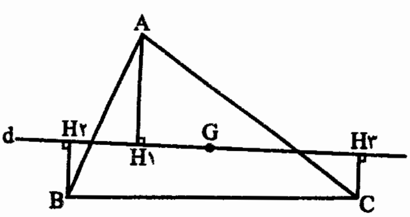


الف) $\frac{۲}{۵}$ ب) $\frac{۳}{۵}$

ج) $\frac{۳}{۱۰}$ د) $\frac{۲}{۳}$

ه) $\frac{۴}{۷}$

۵۰) در شکل مقابل خط d از مرکزثقل مثلث ABC می‌گذرد. اگر $\overline{AH_۱} = ۵$ و $\overline{BH_۲} = ۳$ باشند، $\overline{CH_۳}$ چه‌قدر است؟



الف) $۲\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۱۵}$

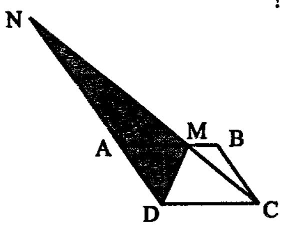
ج) $\frac{۵}{۳}$ د) ۲

ه) $\frac{۵}{۲}$

۵۱) در چهارضلعی محدب $ABCD$، $\overline{AC} = ۸$ و $\overline{BD} = ۶$ می‌باشد. اگر طول پاره‌خطی که وسط AB را به وسط CD وصل می‌کند، x باشد و طول پاره‌خطی که وسط BC را به وسط AD وصل می‌کند نیز x باشد، x چه‌قدر است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۱۰ د) ۷ ه) ۱۲

۵۲) متوازی‌الاضلاع $ABCD$، مفروض است، خط d از رأس C می‌گذرد و ضلع AB و امتداد ضلع AD را به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر $S_{\overset{\triangle}{MBC}} = ۱$ و $S_{\overset{\triangle}{NCD}} = ۹$ باشند، $S_{\overset{\triangle}{MDN}}$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۱۱}{۲}$ ب) $\frac{۷}{۲}$
ج) ۴ د) ۵
ه) ۶

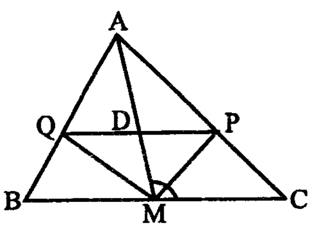
۵۳) در چهارضلعی $ABCD$، G و G' به ترتیب محل برخورد میانه‌های مثلث‌های ABD و CBD هستند. اگر $\overline{AC} - \overline{GG'} = ۱$ باشد، $\overline{AC}$ چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۵}{۲}$ د) ۱٫۸ ه) ۲٫۴

۵۴) از رأس‌های A، B و C از مثلث ABC سه خط موازی $L_۱$ و $L_۲$ و $L_۳$ را طوری رسم کرده‌ایم که $L_۲$ پاره‌خط AC را در Y و $L_۱$ و $L_۳$، امتداد BC و AB را به ترتیب در X و Z قطع کنند. اگر مساحت مثلث‌های ABY و BYC به ترتیب برابر با ۴ و ۳ باشند، مساحت مثلث XYZ چه‌قدر است؟

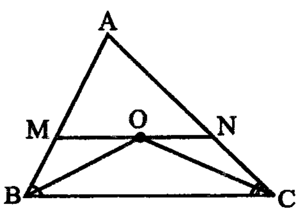
الف) ۱۴ ب) ۱۲ ج) ۹ د) ۷ ه) ۱۱

۵۵) در شکل، AM، میانه‌ی وارد بر ضلع BC و MP، نیمساز زاویه‌ی $\widehat{AMC}$ می‌باشد. اگر PQ با ضلع BC موازی باشد زاویه‌ی $\widehat{PMQ}$ چه‌قدر است؟



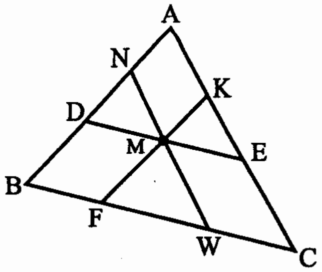
الف) $۱۸۰ - \hat{A}$ ب) ۹۰°
ج) $۴۵ + \frac{\hat{A}}{۲}$ د) کم‌تر از ۹۰°
ه) هیچ‌کدام

۵۶) در مثلث ABC، BO و CO، نیمساز زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند. اگر $MN \parallel BC$ باشد و محیط مثلث ABC و محیط مثلث AMN، به ترتیب P و P' باشند، کدام گزینه صحیح است؟



الف) $\frac{P}{P'} < ۲$ ب) $\frac{P}{P'} \leq ۲$
ج) $\frac{P}{P'} = ۲$ د) $\frac{P}{P'} \geq ۲$
ه) $\frac{P}{P'} > ۲$

۵۷) نقطه‌ی M در داخل مثلث ABC قرار دارد. از نقطه‌ی M، خطوطی به موازات BC، AC و AB رسم می‌کنیم. تا به وسیله‌ی اضلاع مثلث به ترتیب پاره‌خط‌های DE و WN و KF به وجود آیند. فرض کنید به ازاء هر M داشته باشیم: $f(M) = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{WN}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{KF}}{\overline{AB}}$. کدام گزینه صحیح است؟



الف) $f(M)$، می‌نیممی برابر $\frac{۳}{۲}$ دارد.
ب) $f(M)$، وقتی نقطه‌ی M مرکز دایره‌ی محیطی باشد، ماکزیمم می‌شود.
ج) $f(M)$، می‌نیممی برابر $\frac{۵}{۲}$ دارد.
د) $f(M)$، وقتی نقطه‌ی M مرکزثقل باشد، ماکزیمم می‌شود.
هـ) $f(M)$ مقداری ثابت است.

۵۸) در مثلث ABC نقطه‌ی M روی ضلع BC و K روی AM طوری قرار دارند که $\overline{AK} = \frac{۱}{۳}\overline{AM}$ و $\overline{CM} = \frac{۱}{۳}\overline{BC}$. اگر BK ضلع AC را در E قطع کند، در این صورت نسبت مساحت مثلث AKE به مساحت مثلث ABC برابراست با:

الف) $\frac{۱}{۱۲}$ ب) $\frac{۱}{۲۴}$ ج) $\frac{۱}{۳۴}$ د) $\frac{۱}{۱۸}$ هـ) $\frac{۱}{۳۶}$

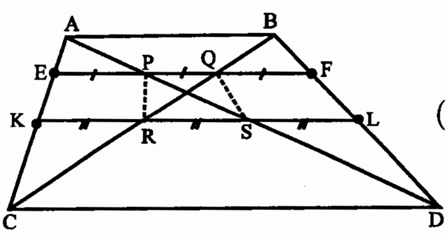
۵۹) در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۲۰^\circ$. در این صورت کدام‌یک از روابط زیر بین اضلاع مثلث برقرار است؟

الف) $\overline{BC}^۲ = \overline{AC}^۲ - ۲\overline{AB}^۲$ ب) $۳\overline{AC}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲$
ج) $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}^۲ - \overline{AB}^۲$ د) $\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}^۲ - \overline{AB}^۲$
هـ) هیچ کدام از روابط فوق برقرار نمی‌باشند.

۶۰) در چهارضلعی محدب $ABCD$، اقطار AC و BD با یک‌دیگر برابر و در نقطه‌ی O، بر هم‌دیگر عمودند. مراکزثقل مثلث‌های OAB، OBC، OCD، OAD را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم. تا چهارضلعی جدیدی حاصل شود. در این صورت این چهارضلعی یک .... و نسبت مساحت آن به مساحت $ABCD$ برابراست با ....

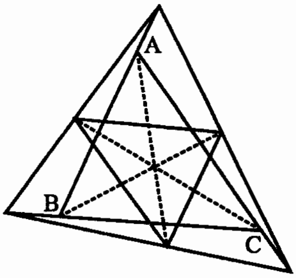
الف) مربع - $\frac{۱}{۳}$ ب) مستطیل - $\frac{۲}{۳}$ ج) مربع - $\frac{۲}{۹}$
د) متوازی‌الاضلاع - $\frac{۱}{۳}$ هـ) مستطیل - $\frac{۲}{۹}$

۶۱) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، $(AB \parallel CD)$، قاعده‌ی $\overline{CD}$، سه برابر قاعده‌ی $\overline{AB}$ است. پاره‌خط‌های EF و KL که به موازات دو قاعده ترسیم شده‌اند، هر یک توسط اقطار و ساق‌ها به سه قسمت برابر تقسیم شده‌اند.(مطابق شکل). نسبت مساحت ذوزنقه‌ی $PQSR$ به مساحت ذوزنقه‌ی $ABCD$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۱}{۴۹}$ ب) $(\frac{۶}{۳۵})^۲$
ج) $\frac{۱}{۲۵}$ د) $(\frac{۹}{۳۵})^۲$
هـ) $\frac{۴}{۴۹}$

۶۲) اضلاع مثلث ABC ، منسوب به شماره‌ی ۱ را هر یک از یک طرف و به اندازه‌ی ثلث خود امتداد می‌دهیم تا مثلث شماره‌ی ۲ ایجاد شود. میانه‌های مثلث شماره‌ی ۱ را رسم می‌کنیم تا امتداد آن‌ها اضلاع مثلث شماره‌ی ۲ را قطع کنند. مثلث حاصل را شماره‌ی ۳ می‌نامیم مطلوب است $\frac{S_۳}{S_۱}$ ؟ (نسبت مساحت مثلث شماره‌ی ۳ به مساحت مثلث شماره‌ی ۱)



الف) $\frac{۲۵}{۸۱}$

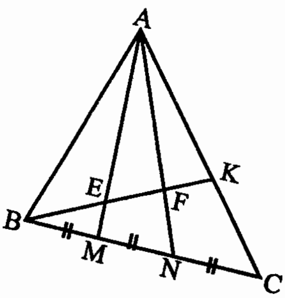
ب) $\frac{۱۱}{۲۷}$

ج) $\frac{۱۳}{۲۷}$

د) $\frac{۴۹}{۸۱}$

ه) $\frac{۵۳}{۸۱}$

۶۳) در مثلث مفروض ABC نقاط M و N روی ضلع BC طوری قرار دارند که ($\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}$). نقطه‌ی K روی ضلع AC طوری واقع است که BK مثلث AMN را به دو بخش هم‌سطح تقسیم می‌کند. مقدار $\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}$ به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟



الف) ۱

ب) $\frac{۷}{۶}$

ج) $\frac{۴}{۳}$

د) $\frac{۳}{۲}$

ه) $\frac{۵}{۳}$

۶۴) در مثلث ABC ، نقطه‌ی K روی ضلع BC طوری واقع است که فاصله‌ی رأس B تا مرکزثقل AKC، برابراست با فاصله‌ی رأس C تا مرکزثقل مثلث AKB. اگر H پای ارتفاع وارد از رأس A به ضلع BC باشد، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\overline{BH} = \overline{CK}$

ب) $\overline{HK} = \frac{\overline{BC}}{۲}$

ج) $\overline{BK} = \overline{KC}$

د) $\overline{BK} - \overline{CK} = \overline{HC} - \overline{HB}$

ه) هر دو گزینه‌ی «الف» و «د» صحیح است.

۶۵) از رأس A از مثلث ABC ، عمودهای AM و AN را بر نیمسازهای خارجی زوایای B و C فرود می‌آوریم. اگر P نصف محیط مثلث باشد، در این صورت طول پاره‌خط MN چه‌قدر است؟ (a، b و c به ترتیب طول اضلاع BC، AC و AB می‌باشند.)

الف) $۲P$

ب) P

ج) $\frac{b}{c}P$

د) $\frac{b-c}{a}P$

ه) $\frac{P}{۲}$

۶۶) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نقاط M و N روی اضلاع AB و CD مفروض‌اند. از M خطوطی را به رأس‌های C و D و از N نیز خطوطی را به رأس‌های A و B ترسیم می‌کنیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی E و F قطع کنند. اگر خط راستی که از این دو نقطه می‌گذرد مساحت متوازی‌الاضلاع را نصف کند، کدام گزینه صحیح است؟

الف) یکی از نقاط M یا N وسط اضلاع هستند.

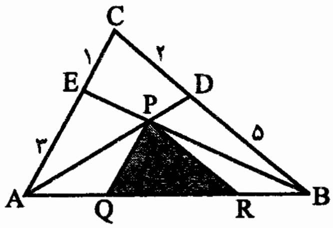
ب) هر دو نقطه‌ی M و N حتماً اوساط اضلاع هستند.

ج) $\overline{AM} = \overline{CN}$

د) $\overline{AM} = \overline{ND}$

ه) M و N هر جایی روی ضلع AB و CD می‌توانند باشند.

۶۷) در مثلث ABC، نقاط E و D به ترتیب روی اضلاع AC و BC طوری واقع‌اند که داریم ۳ = $\overline{EA}$ و ۱ = $\overline{EC}$ و ۲ = $\overline{CD}$ و ۵ = $\overline{BD}$، AD و BE هم‌دیگر را در نقطه‌ی P قطع کرده‌اند. از P دو خط به موازات AC و BC رسم می‌کنیم، تا به ترتیب ضلع AB را در Q و R قطع کنند. نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

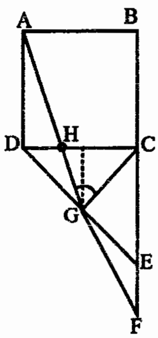


الف) $\frac{۱۱۵}{۳۰۴}$
ب) $\frac{۲۲۵}{۶۷۶}$
ج) $\frac{۱۱}{۳۸}$
د) $\frac{۱۰۵}{۲۲۴}$
هـ) $\frac{۱}{۳}$

۶۸) در مثلث ABC، E و F به ترتیب اوساط اضلاع AC و AB می‌باشند. از نقطه‌ی D روی ضلع BC، خطوطی را به موازات CF و BE رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در P و Q قطع کنند. پاره‌خط PQ، BE و CF را به ترتیب در R و S قطع می‌کند. اگر $\frac{\overline{RS}}{\overline{PQ}} = \frac{۱}{۳}$ باشد، در این صورت نقطه‌ی D، ...

الف) پای میانه‌ی وارد بر BC است.
ب) پای نیمساز وارد بر BC است.
ج) پای ارتفاع وارد بر BC است.
د) تصویر مرکزثقل روی ضلع BC است.
هـ) هر نقطه‌ی دل‌خواه روی ضلع BC می‌تواند باشد.

۶۹) در مربع $ABCD$، به طول ضلع ۱ نقاط E و F روی امتداد BC قرار دارند. به طوری که ۱ = $\overline{CE}$. نقاط H و G، به ترتیب محل تلاقی AF با DC و DE می‌باشند. اگر نیمساز زاویه‌ی $\widehat{CGH}$ با ضلع BC موازی باشد، طول $\overline{EF}$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{\sqrt{۲}-۲}{۲}$
ب) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$
ج) $\sqrt{۲}-۱$
د) $\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۲}$
هـ) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۳}$

۷۰) در مثلث ABC، $A > ۹۰^\circ$ است. روی ضلع BC نقاطی مانند P و Q به طوری واقع‌اند که $\widehat{BAP} = \widehat{PAQ}$ و هم‌چنین می‌دانیم $\overline{BP} \cdot \overline{CQ} = \overline{BC} \cdot \overline{PQ}$، اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{PAC}$ چه‌قدر است؟

الف) ۶۰°
ب) ۷۵°
ج) ۹۰°
د) ۱۲۰°
هـ) هر مقدار بین ۷۵° و ۹۰° می‌تواند باشد.

۷۱) در ذوزنقه‌ی $ABCD$، ($AB \parallel CD$)، می‌دانیم قطر BD بر ضلع BC عمود است. و هم‌چنین $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{۱}{۲}$، اگر امتدادهای AD و BC، یک‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع کنند، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\overline{EC} = ۲\overline{AD}$
ب) $\overline{DC} = \overline{AD} + \overline{AB}$
ج) $\overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BC}$
د) $\overline{AC} = \overline{DC}$
هـ) $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{BD}$

۷۲) روی اضلاع PQ و PS از متوازی‌الاضلاع $PQRS$، مثلث‌های متساوی‌الساقین متشابه PQA (به رأس Q) و PBS (به رأس S) را بیرون آن بنا می‌کنیم. اگر مثلث ARB با دو مثلث PQA و PBS متشابه باشد، در این صورت:

الف) $PQRS$ حتماً لوزی است.
ب) $PQRS$ حتماً مستطیل است.
ج) $PQRS$ حتماً یک زاویه‌ی ۱۲۰° دارد.
د) $PQRS$ حتماً یک زاویه‌ی ۱۵۰° دارد.
ه) $PQRS$ هر متوازی‌الاضلاع دل‌خواهی می‌تواند باشد.

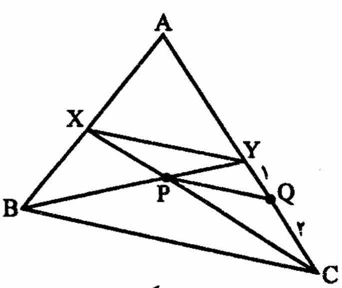
۷۳) در یک چهارضلعی محدب $ABCD$ ، M و N به ترتیب اوساط اضلاع AD و BC هستند اگر $\overline{MN} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{۲}$، کدام گزینه صحیح است؟

الف) این چهارضلعی حتماً یک لوزی است.　　ب) این چهارضلعی، حتماً متوازی‌الاضلاع است.
ج) این چهارضلعی حتماً یک ذوزنقه است.　　د) $\widehat{D}=\widehat{C}$
ه) این چهارضلعی حتماً محاطی است.

۷۴) در ذوزنقه‌ی $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ ، می‌دانیم که $\widehat{ADB}+\widehat{DBC}=۱۸۰^\circ$، کدام گزینه صحیح است؟

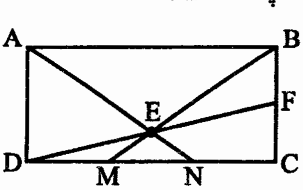
الف) $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{DC}$　　ب) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$
ج) $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\overline{AD}\cdot\overline{DC}$　　د) $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{DC}\cdot\overline{BC}$
ه) $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$

۷۵) در مثلث ABC، XY به موازات BC ترسیم شده است. نقطه‌ی P، محل تلاقی BY و CX می‌باشد. از P خطی به موازات BC رسم می‌شود تا AC را در نقطه‌ی Q قطع کند، اگر $\overline{YQ}=۱$ و $\overline{CQ}=۲$، باشند طول $\overline{AC}$ چه‌قدر است؟



الف) ۵　　ب) ۶
ج) ۷　　د) $\frac{۹}{۲}$
ه) $\frac{۱۱}{۲}$

۷۶) در مستطیل $ABCD$، نقاط M و N روی ضلع CD، آن را به سه بخش مساوی تقسیم کرده‌اند، اگر امتداد DE، ضلع BC را در F قطع کند، نسبت مساحت مثلث BEF به مساحت مستطیل $ABCD$ چند است؟



الف) $\frac{۱}{۴}$　　ب) $\frac{۱}{۵}$
ج) $\frac{۱}{۶}$　　د) $\frac{۱}{۷}$
ه) $\frac{۱}{۸}$

۷۷) در مثلث مفروض ABC، نقاط P و Q به ترتیب روی اضلاع AB و AC، طوری قرار دارند که $\overline{AP}=\frac{۱}{۴}\overline{AB}$ و $\overline{AQ}=\frac{۱}{۲}\overline{AC}$. اگر پاره‌خط PQ، میانه‌ی AM از این مثلث را در نقطه‌ی X قطع کند، نسبت $\frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۴}$　　ب) $\frac{۱}{۳}$　　ج) $\frac{۱}{۲}$　　د) $\frac{۳}{۸}$　　ه) $\frac{۵}{۱۲}$

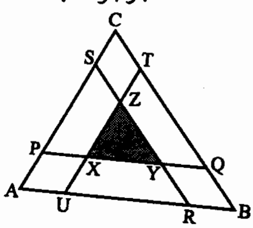
۷۸) در چهارضلعی $ABCD$، قطر BD را رسم می‌کنیم، می‌دانیم که $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$ و $\widehat{BCD} = \widehat{ABD}$، اگر $\overline{BC} = 6$، $\overline{AB} = 8$ و $\overline{BD} = 10$ باشند، طول $\overline{CD}$ چه‌قدر است؟

الف) ۱۲٫۸ ب) ۱۳٫۲ ج) ۱۲ د) ۱۳٫۶ ه) ۱۳

۷۹) در مثلث ABC ، $\overline{AB} = 21$ ، $\overline{AC} = 22$ ، و $\overline{BC} = 20$. از محل تلاقی نیمسازهای داخلی این مثلث خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کند. طول $\overline{DE}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{512}{43}$ ب) $\frac{700}{63}$ ج) $\frac{703}{43}$ د) $\frac{860}{63}$ ه) $\frac{800}{57}$

۸۰) در مثلث ABC، مطابق شکل خطوط راست PQ، UT و RS که به ترتیب به موازات اضلاع AB، AC و BC ترسیم شده‌اند، مساحت مثلث را به دو بخش برابر تقسیم می‌کنند. اگر مساحت مثلث XYZ برابر ۱ باشد، مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟



الف) $12 + 34\sqrt{3}$ ب) $24 + 30\sqrt{2}$
ج) $34 + 12\sqrt{3}$ د) $24 + 12\sqrt{2}$
ه) $34 + 24\sqrt{2}$

۸۱) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(A = 90^\circ)$، نقطه‌ای مانند M روی وتر BC طوری واقع است که اگر عمودهایی را از آن بر اضلاع AB و AC وارد کنیم، سه ناحیه حاصل، دارای مساحت‌های برابری شوند، تعداد نقاط M چند است؟

الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) چهار

۸۲) یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع ۳، ۴ و ۵ و یک مستطیل 7×6 مفروض‌اند، خط L_1، مثلث را به یک مثلث T_1 و یک ذوزنقه R_1 تقسیم می‌کند. خط L_2 نیز مستطیل را به یک مثلث T_2 و یک ذوزنقه‌ی R_2 تقسیم می‌کند، اگر بدانیم که T_1 با T_2 و هم‌چنین R_1 با R_2 متشابه‌اند، حداقل مساحت T_1 چه‌قدر است؟

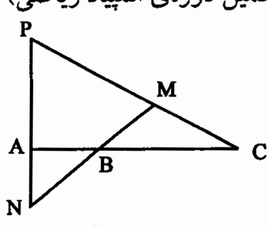
الف) $\frac{1}{16}$ ب) $\frac{3}{32}$ ج) $\frac{5}{18}$ د) $\frac{31}{98}$ ه) $\frac{75}{98}$

۸۳) در مثلث مفروض ABC، نقطه‌ی D وسط ضلع AB بوده و نقطه‌ی E روی ضلع BC طوری قرار دارد که: $\overline{BE} = 2\overline{EC}$ و $\widehat{ADC} = \widehat{BAE}$، زاویه‌ی $\widehat{BAC}$ چه‌قدر است؟ (هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) 60° ب) 90° ج) 120° د) 135° ه) $\widehat{BAC} > 90^\circ$

۸۴) در شکل روبه‌رو $\overline{BM} = \overline{BN}$. اگر داشته باشیم: $\frac{S_{\overset{\triangle}{BMC}}}{S_{\overset{\triangle}{APC}}} = \frac{4}{9}$ مطلوب است مقدار $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$؟

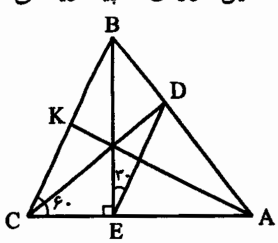
(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\frac{4}{49}$ ب) $\frac{2}{7}$ ج) $\frac{14}{15}$
د) $\frac{3}{7}$ ه) $\frac{2}{3}$

۸۵) در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $\widehat{BED} = 30^\circ$ و $\widehat{ACB} = 60^\circ$ باشد، نسبت BK به BC چند است؟

(بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{1}{4}$
ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{1}{3}$
ه) $\frac{1}{2}$

فصل ۳

دایره

۱) اگر XX' قطری از دایره‌ی محاطی داخل مثلث مفروض باشد که بر قطری از آن دایره که از O، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث می‌گذرد عمود باشد، در این صورت مثلث OXX' دارای محیطی برابر با ..... است. (R شعاع دایره‌ی محیطی و r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC می‌باشند)

الف) $۲R$ ب) $r+R$ ج) $\frac{۳}{۲}R$ د) $\frac{۳}{۲}(R+r)$ هـ) $\frac{۲R^۲-r^۲}{r}$

۲) مثلث XYZ مثلثی است که توسط نقاط تماس اضلاع مثلث ABC با دایره‌ی محاطی داخلی آن به وجود آمده است. در این صورت اگر S مساحت ABC و S' مساحت XYZ باشند. $\frac{S'}{S}$ چه‌قدر است؟ (r, R شعاع‌های دایره‌های محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC می‌باشند)

الف) $\frac{r}{R}$ ب) $\frac{۲r}{R}$ ج) $\frac{r}{۲R}$ د) $\frac{r}{R+r}$ هـ) $\frac{r}{R+۲r}$

۳) نقطه D روی اضلاع BC از مثلث مفروض ABC طوری واقع است که نسبت شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABD، به شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ACD برابر است با $\frac{BD}{CD}$، در این صورت نقطه‌ی D ...

الف) پای نیمساز داخلی رأس A است.
ب) پای ارتفاع رأس A است.
ج) پای میانه نظیر رأس A است.
د) محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است.
هـ) محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC است.

۴) سه خطی که به موازات سه ضلع یک مثلث، بر دایره‌ی محاطی داخلی مثلث محاط می‌شوند،سه مثلث کوچک‌تر ایجاد می‌کنند،در این صورت اگر P محیط مثلث مزبور باشد، مجموع محیط‌های این سه مثلث برابر است با:

الف) $\frac{P}{۲}$ ب) P ج) $\frac{۳}{۲}P$ د) $۲P$ هـ) $\frac{۵}{۲}P$

۵) طول ارتفاع وارد بر وتر و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ترتیب ۶ و ۳ می باشند. اگر شعاع دایره‌ی محاطی داخلی یک از مثلث‌هایی که توسط اضلاع و ارتفاع وارد بر وتر از مثلث مزبور ایجاد می‌شود، ۲ باشد، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی دیگری چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) ۱ ج) $\frac{۱}{۲}$

د) $\frac{۳}{۲}$ هـ) با اطلاعات فوق قابل محاسبه نیست.

۶) طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای a بوده و نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی با آن، آن را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ تقسیم کرده است. در این صورت مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی مزبور برابر است با:

الف) $\frac{a^۲}{۵}$ ب) $\frac{a^۲}{۱۰}$ ج) $\frac{۲a^۲}{۱۵}$ د) $\frac{۴a^۲}{۲۵}$ هـ) $\frac{۶a^۲}{۲۵}$

۷) خطی در H، مرکز ارتفاع مثلث ABC بر ارتفاع HC از مثلث مزبور عمود می‌شود دایره‌ی محیطی مثلث HBC را در P قطع می‌کند اگر $\overline{BP} = \overline{AH}$ باشد در این صورت، مثلث ABC،

الف) قائم الزاویه در رأس A است. ب) متساوی‌الساقین در رأس A است.

ج) حتماً متساوی‌الاضلاع است. د) متساوی‌الساقین به رأس B است.

هـ) هر مثلث دل‌خواهی می‌تواند باشد.

۸) دایره‌ی محاطی داخل مثلث مفروض ABC در نقطه‌ی D بر ضلع BC، مماس است و I مرکز این دایره است. اگر نقطه‌ی L، مرکز ارتفاع مثلث IBC باشد. در این صورت نسبت $\frac{ra}{LD}$ برابر است با (ra شعاع دایره محاطی خارجی رأس A است)

الف) $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ ب) $\frac{r}{ha}$ ج) ۱ د) $\frac{ha}{a}$ هـ) ۲

۹) از نقطه دل‌خواه U روی ضلع BC از مثلث ABC، عمود UQ را بر شعاع AO از دایره‌ی محیطی مثلث مزبور فرود می‌آوریم تا ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع کند،اگر AB, AP با یک‌دیگر برابر باشند،در این صورت، نقطه‌ی U ...

الف) پای ارتفاع است.

ب) پای میانه است.

ج) پای نیمساز است.

د) نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC است.

هـ) نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC است.

۱۰) در مثلث مفروض ABC نقاط E, D، نقاط تماس دایره‌ی محاطی داخلی با اضلاع AC, BC هستند $(\overline{AC} > \overline{AB})$. نقطه B' روی ضلع AC طوری انتخاب می وشد که $\overline{AB'} = \overline{AB}$ باشد. اگر محل تقاطع DE, BB' را K بنامیم. در این صورت K روی ...

الف) نیمساز وارد بر ضلع BC واقع است.

ب) ارتفاع وارد بر ضلع BC واقع است.

ج) میانه وارد بر ضلع BC واقع است.

د) روی خط واصل بین نقاط وسط ضلع BC و محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع AB واقع است.

۱۱) نقاط M, H به ترتیب پای ارتفاع و میانه‌ی وارد بر ضلع BC، از مثلث ABC می‌باشند. از رئوس C, B، عمودهای CL, BK را بر نیمساز داخلی رأس A فرود می‌آوریم. در این صورت چهار ضلعی $HKML$:

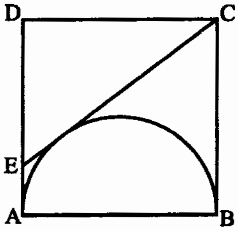
الف) ذوزنقه است. ب) محاطی است. ج) محیطی است.

د) ذوزنقه متساوی‌الساقین است. هـ) می‌تواند محاطی باشد.

۱۲) نقطه‌ی X را به دل‌خواه روی محیط دایره چهار ضلعی محاطی $ABCD$ اختیار می‌کنیم. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی X از اضلاع AB، CD, BC به ترتیب ۳، ۲ و ۱ باشد، فاصله‌ی آن از ضلع AD چه‌قدر است؟

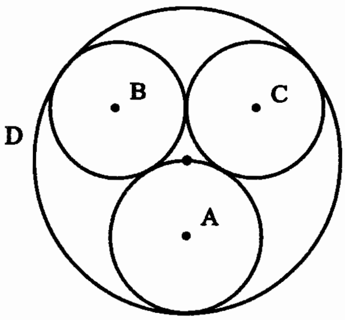
الف) ۴ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۳}{۲}$ د) ۲ هـ) $\frac{۶}{۵}$

۱۳) طول هر ضلع مربع $ABCD$ برابر ۲ است. نیم‌دایره‌ای به قطر AB درون این مربع رسم کرده‌ایم و مماس بر این نیم‌دایره که از C رسم شده است، ضلع AD را در نقطه‌ی E قطع کرده است، طول $\overline{CE}$ چه‌قدر است؟



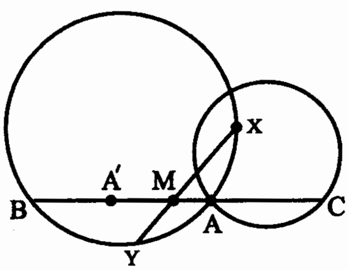
الف) $\frac{۲+\sqrt{۵}}{۵}$
ب) $\sqrt{۵}$
ج) $\sqrt{۶}$
د) $\frac{۵}{۲}$
هـ) $۵-\sqrt{۵}$

۱۴) دایره‌های A ، B و C بر یک‌دیگر مماس خارجی‌اند و هر یک بر دایره‌ی D مماس داخل. دایره‌های B و C برابرند. شعاع دایره‌ی A برابر ۱ است و از مرکز دایره‌ی D گذشته است. شعاع دایره B چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۲}{۳}$
ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
ج) $\frac{۷}{۸}$
د) $\frac{۸}{۹}$
هـ) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۳}$

۱۵) در شکل زیر $\overline{BM}=\overline{MC}, \overline{AM}=\overline{A'M}, (\overline{AB}>\overline{AC})$. اگر XY خطی گذرنده از M باشد، به طوری که $Y\hat{X}A'=۲۵^\circ, X\hat{Y}A'=۴۵^\circ$، آن‌گاه زاویه‌ی $X\hat{C}Y$ چه قدر است؟



الف) ۶۰°
ب) $۲۵^\circ < X\hat{C}Y < ۴۵^\circ$
ج) $۴۵^\circ < X\hat{C}Y > ۶۰^\circ$
د) $X\hat{C}Y = ۷۰^\circ$
هـ) $۶۰^\circ < X\hat{C}Y < ۷۰^\circ$

۱۶) فرض کنید O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد. N, M را به ترتیب محل برخورد AO با ضلع BC و دایره محیطی مثلث ABC بگیرید. اگر $\overline{AB}\neq\overline{AC}, \overline{OM}=\overline{MN}$، آن‌گاه کدام حکم زیر در مورد زاویه‌ی A صحیح است؟

الف) $\hat{A}=۴۵^\circ$
ب) $\hat{A}<۴۵^\circ$
ج) $\hat{A}=۶۰^\circ$
د) $\hat{A}>۶۰^\circ$
هـ) $۴۵^\circ<\hat{A}<۶۰^\circ$

۱۷) چهارضلعی محیطی $ABCD$ مفروض است. یکی از اقطار آن را رسم کرده تا چهار ضلعی مذکور به دو مثلث تقسیم شود. اگر دوایر محاطی داخلی هر یک از این مثلث‌ها را ترسیم کنیم در این صورت:

الف) مجموع شعاع های این دوایر با شعاع دایره‌ی محاطی $ABCD$ برابر است.
ب) این دوایر بر هم‌دیگر مماس‌اند.
ج) اگر این دو دایره بر هم‌دیگر مماس باشند $ABCD$ یک لوزی است
د) مراکز دو دایره‌ی مزبور و دایره‌ی محاطی $ABCD$ بر یک امتداد واقع‌اند.
هـ) موارد «ج» و «د» هر دو برقرار است.

۱۸) مثلث ABC چنان است که $\overline{AB} = ۳$، $\overline{AC} = ۵$ و $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$. اگر I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث باشد، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث IBC کدام است؟

الف) $۳\sqrt{۵}$ ب) $۵\sqrt{۳}$ ج) $۴\sqrt{۳}$ د) ۷/۲ ه) ۷

۱۹) در مثلث ABC داریم $\hat{A} = ۶۰^\circ$، $\overline{AC} = ۴$، $\overline{AB} = \frac{۵}{۲}$ پای نیمساز وارد بر ضلع AC را D می‌نامیم. دایره‌ی محیطی مثلث ABD ضلع BC را در F و دایره‌ی محیطی مثلث BDC، امتداد ضلع AB را در E قطع کرده است. حاصل $\overline{BE} + \overline{BF}$ برابر است با:

الف) $\frac{۳}{۴}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) ۱ د) $\frac{۴}{۵}$ ه) $\frac{۵}{۳}$

۲۰) در مثلث ABC که در آن $(\hat{C} = ۴۵^\circ)$ است AM, AH به ترتیب ارتفاع و میانه وارد بر ضلع BC هستند. دایره‌ی محیطی مثلث ABH، میانه‌ی AM را در نقطه‌ی E و دایره‌ی محیطی مثلث AMC، ارتفاع AH را در نقطه‌ی F قطع می‌کنند. اگر بدانیم $\frac{\overline{HF}}{\overline{ME}} = ۲$، در این صورت نسبت $\frac{\overline{AM}}{\overline{BC}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) ۲ د) $\frac{۷}{۴}$ ه) ۲/۵

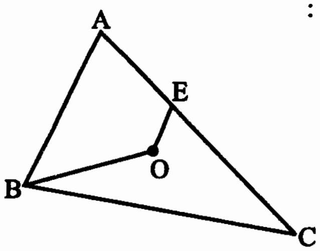
۲۱) در مثلث مفروض ABC، نقطه‌ی X طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از سه رأس مثلث برابر با $\frac{۳}{۲}P$ است. (P نصف محیط است) اگر بدانیم محیط سه مثلث XAB، XAC و XBC با یک‌دیگر برابر بوده و $r_۱$، $r_۲, r_۳$ شعاع های دوایر محاطی داخلی آن‌ها می‌باشند، در این صورت مقدار $\frac{r_۱ + r_۲ + r_۳}{r}$ برابر است با: (r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است)

الف) ۱ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{۷}{۵}$ ه) ۲

۲۲) در مثلث ABC داریم $r = ۱$، $r_b = ۳$، $r_c = ۶$، ارتفاع نظیر رأس A (h_a) چه‌قدر است:

الف) ۲ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) ۳ د) ۴ ه) ۴

۲۳) در شکل مقابل O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌باشد. اگر نقطه‌ی E روی AC طوری قرار داشته باشد که مساحت چهارضلعی $OBAE$ نصف مساحت مثلث باشد، در این صورت نقطه‌ی E :



الف) پای نیمساز زاویه‌ی B است.
ب) پای ارتفاع است.
ج) پای میانه است.
د) پای نیمساز $A\hat{B}O$ است.
ه) محل تلاقی عمود منصف BC با ضلع AC است.

۲۴) در چهارضلعی محدبی که اقطار آن بر هم‌دیگر عمودند، قرینه‌ی محل تلاقی اقطار را نسبت به هر یک از اضلاع پیدا می‌کنیم، چهارضلعی حاصل از این نقاط یک چهار ضلعی .....

الف) محیطی است.
ب) محاطی است.
ج) فقط در صورتی‌که چهار ضلعی محدب اولیه محاطی باشد، محاطی است.
د) با اقطار عمود بر هم است.
هـ) فقط در صورتی‌که چهار ضلعی محدب اولیه محیطی باشد، محیطی است.

۲۵) در یک چهار ضلعی محاطی تصویر محل تلاقی اقطار آن را روی هر یک از اضلاع به دست می‌آوریم. چهار ضلعی حاصل از این نقاط یک چهار ضلعی ...

الف) محیطی است و محل تلاقی اقطار چهار ضلعی اولیه مرکز دایره‌ی محاطی آن است.
ب) محیطی است و مرکز دایره‌ی محیطی چهار ضلعی اولیه مرکز دایره‌ی محاطی آن است.
ج) محاطی است و محل تلاقی اقطار چهار ضلعی اولیه مرکز دایره‌ی محیطی آن است.
د) محاطی است و مرکز دایره‌ی محیطی چهار ضلعی اولیه مرکز دایره‌ی محیطی آن است.
هـ) فقط در صورتی که اقطار آن بر هم‌دیگر عمود باشند، گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۲۶) $ABCD$ یک چهار ضلعی است که هم محیطی است و هم محاطی. اگر S مساحت این چهار ضلعی و P نصف محیط آن باشد،مقدار $\frac{P^2}{S}$ کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) $\frac{5}{2}$ هـ) $\frac{9}{2}$

۲۷) نقطه‌ی I مرکز دایره‌ی محاطی داخل مثلث ABC است. کدام‌یک از روابط زیر برقرار است. (a، b، c به ترتیب طول اضلاع BC، AC، AB می‌باشند)

الف) $\frac{a\overline{IA}}{bc}+\frac{b\overline{IB}}{ac}+\frac{c\overline{IC}}{ab}=1$

ب) $(\frac{\overline{IA}}{a})^2+(\frac{\overline{IB}}{b})^2+(\frac{\overline{IC}}{c})^2=1$

ج) $\frac{\overline{IA}^2}{bc}+\frac{\overline{IB}^2}{ac}+\frac{\overline{IC}^2}{ab}=1$

د) $\frac{\overline{IA}}{a}+\frac{\overline{IB}}{b}+\frac{\overline{IC}}{c}=1$

هـ) $\frac{a\overline{IA}}{bc}+\frac{b\overline{IB}}{ac}+\frac{c\overline{IC}}{ab}=2$

۲۸) از نقطه‌ی دل‌خواهی روی دایره‌ی محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت S خطوطی را به موازات اضلاع رسم می‌کنیم تا سه مثلث کوچک‌تر در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه ایجاد شود اگر مساحت این سه مثلث S_1، S_2 و S_3 باشند کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S}$

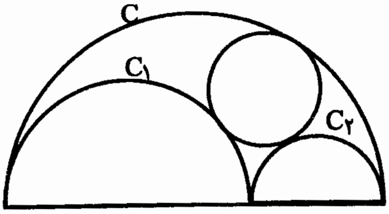
ب) $S_1+S_2+S_3=\frac{2S}{3}$

ج) $S_1+S_2+S_3=\frac{S}{2}$

د) گزینه‌ی ۱و ۲ هر دو صحیح است.

هـ) گزینه‌ی ۱ و ۳ هر دو صحیح است.

۲۹) در شکل دو نیم‌دایره‌ی مماس بر هم $C_۱$ و $C_۲$ به ترتیب دارای شعاع‌های r و $۲r$ می‌باشند و هر دو داخل نیم‌دایره‌ی بزرگ‌تر C، مماس داخلی هستند. شعاع دایره‌ی مماس بر سه نیم‌دایره‌ی، مطابق شکل چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۳}{۴}r$
ب) $\frac{۴}{۵}r$
ج) $\frac{۵}{۶}r$
د) $\frac{۶}{۷}r$
ه) $\frac{۷}{۸}r$

۳۰) سه دایره به شعاع‌های r و $۲r$ و $۳r$ بر یک‌دیگر مماس بیرونی هستند. امتداد مماس مشترک دو دایره به شعاع‌های r و $۲r$، در نقطه‌ی تماس آن‌ها، وتری روی دایره‌ی سوم (به شعاع $۳r$) ایجاد می‌کند. طول این وتر چه‌قدر است؟

الف) $۲\sqrt{۲}r$ ب) $۴r$ ج) $۳\sqrt{۲}r$ د) $۴\sqrt{۲}r$ ه) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}r$

۳۱) نیمسازهای داخلی زوایای C, B از مثلث در نقطه‌ی I متقاطع‌اند. Q, P به ترتیب پای عمودهای وارد از C, B بر CI و BI هستند، اگر PQ ، ضلع AB را در نقطه‌ی X قطع کند، در این صورت نقطه‌ی X ...

الف) پای ارتفاع وارد بر ضلع AB است.
ب) پای میانه وارد بر ضلع AB است.
ج) محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع AB است.
د) محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس C با ضلع AB است.
ه) محل تلاقی نیمساز زاویه‌ی $I\hat{C}A$ با ضلع AB است.

۳۲) در مثلث ABC ، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مماس بر ضلع BC است. از I_a قاطع موازی AB رسم می‌کنیم. تا BC را در G قطع کند، D را محل تقاطع خطوط AB, GI تعریف کنید. نسبت $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ چند است:

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ د) $\cos\frac{\hat{A}}{۲}$ ه) $\sin\frac{\hat{A}}{۲}$

۳۳) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ ، اقطار بر هم‌دیگر عمودند، اگر طول اضلاع را به ترتیب در جهت مثلثاتی $a, b.c, d$ و محیط چهار ضلعی را به P نمایش دهیم. کدام‌یک از گزینه های زیر همواره صحیح‌اند؟

الف) مرکز دایره‌ی محیطی چهار ضلعی روی محل تلاقی اقطار قرار دارد.
ب) وسط های اضلاع روی دایره‌ای به شعاع نصف مجموع اقطار قرار دارند.
ج) $(P-۲b)(P-۲d)=(P-۲a)(P-۲c)$.
د) $(P+۲b)(P+۲d)=(P+۲a)(P+۲c)$.
ه) هیچ کدام صحیح نمی‌باشد.

۳۴) در مثلث قائم‌الزاویه b, a طول دو ضلع زاویه قائمه، C طول وتر و h طول ارتفاع وارد بر وتر است، اگر $a+b=c+h$ داریم:

الف) مثلث متساوی‌الساقین است
ب) یکی از زاویه های مثلث ۳۰° است
ج) شعاع دایره‌ی محاطی مثلث نصف شعاع دایره‌ی محیطی آن است
د) رابطه فوق در هر مثلث قائم‌الزاویه برقرار است
ه) چنین وضعیتی هرگز اتفاق نمی‌افتد

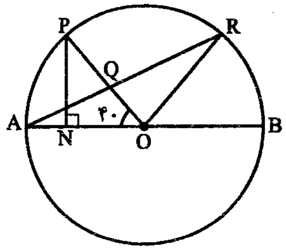
۳۵) نیم دایره‌ای به قطر AB مفروض است و چهار ضلعی $ABCD$ محاط در آن مفروض است. نقطه‌ی دل‌خواه P را روی کمان $\widehat{AD}$ در نظر گرفته و محل تقاطع خط‌های راست AC و PB را E و محل تقاطع خط‌های راست AD و PC را F می‌نامیم. بنابراین می‌توان گفت که EF بر AD عمود است اگر و تنها اگر ....

الف) $\widehat{BC}+\widehat{CD}=۹۰^\circ$ ب) $\widehat{AP}=\widehat{PD}$ ج) $\widehat{BC}=\widehat{DC}$

د) حداقل یکی از کمان‌های $\widehat{BC}$، $\widehat{CD}$ یا $\widehat{AD}$ برابر ۹۰° باشد

هـ) پاره‌خط‌های راست CD, AB با یک‌دیگر موازی باشند.$(AB||CD)$

۳۶) نقطه‌ی P روی محیط دایره‌ای به قطر AOB مفروض است به طوری‌که $\widehat{AOP}=۴۰^\circ$. نقطه N را تصویر نقطه‌ی P روی قطر AOB در نظر می‌گیریم. می‌دانیم نقطه‌ی Q روی PO طوری قرار دارد که: $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AN}}=۲$.
اگر امتداد AQ دایره را در نقطه‌ی دیگری مثل R قطع کند زاویه‌ی $A\hat{O}R$ برابر است با:



الف) ۶۰° ب) ۹۰°

ج) ۱۲۰° د) ۱۵۰°

هـ) ۱۶۰°

۳۷) در مثلث ABC، میانه‌های وارد بر اضلاع AC, AB بر یک‌دیگر عمودند و اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}=۴۵^\circ$ است.اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، در این صورت نسبت $\frac{\overline{AH}}{\overline{BC}}$ چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) ۱ د) $۲\sqrt{۲}$ هـ) $۴\sqrt{۲}$

۳۸) سه شهر A، B و C غیر واقع بر یک امتداد مفروض‌اند، به طوری‌که فواصل بین شهری A تا B، A تا C و B تا C به وسیله‌ی احداث جاده‌هایی به هم مرتبط‌اند به ترتیب ۵، ۶ و ۷ کیلومتر است.
می‌خواهیم مدرسه ای را طوری احداث نماییم که فاصله‌ی آن از جاده‌های بین سه شهر برابر باشد. نزدیک‌ترین شهر به این مدرسه کدام شهر بوده و فاصله‌ی آن تا مدرسه چه‌قدر است؟

الف) شهر A و به فاصله‌ی $\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}$ کیلومتر ب) شهر A و به فاصله‌ی ۳ کیلومتر

ج) شهر B و به فاصله‌ی ۳ کیلومتر د) شهر C و به فاصله‌ی $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$ کیلومتر

هـ) شهر C و به فاصله‌ی $\frac{۲\sqrt{۴۲}}{۳}$ کیلومتر

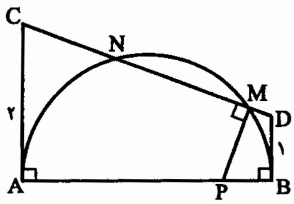
۳۹) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط در دایره‌ی C و نقطه‌ی دل‌خواه M روی کمان $\widehat{AC}$ مفروض‌اند، کدام‌یک از روابط زیر صحیح است.

الف) $\overline{MB}^۲=\overline{MA}^۲+\overline{MC}^۲$ ب) مقدار ثابت $=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}$

ج) $\overline{MB}=\overline{MA}+\overline{MC}$ د) مقدار ثابت $=\overline{MA}^۲+\overline{MB}^۲+\overline{MC}^۲$

هـ) گزینه‌های «ب» و «د» هر دو صحیح است.

۴۰) نیم دایره‌ای به قطر AB مطابق شکل مفروض بوده و مماس‌های BD, AC بر آن دارای طول‌های ۲ و ۱ می‌باشند. از نقطه‌ی M محل تلاقی پاره‌خط راست CD با نیم دایره‌ی مفروض عمودی را خارج می‌کنیم تا قطر AB را در نقطه‌ی P قطع کند، اگر $\frac{\overline{MC}}{\overline{MD}} = ۴$ باشد طول $\overline{MP}$ چه‌قدر است.

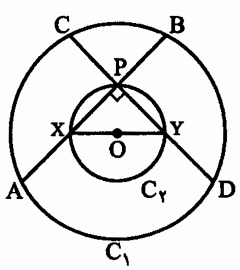


الف) $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$
ب) $۲\sqrt{\frac{۲}{۵}}$
ج) $\sqrt{\frac{۳}{۵}}$
د) $۲\sqrt{\frac{۳}{۵}}$
هـ) $\sqrt{\frac{۴}{۵}}$

۴۱) دو دایره‌ی هم مرکز $C_۲, C_۱$ به مرکز O مفروض‌اند. ($C_۲$ داخل $C_۱$ واقع است). نقاط متغیر A روی $C_۱$ و نقاط C, B روی $C_۲$ واقع‌اند. و BOC همواره قطری از دایره‌ی $C_۲$ است. اگر امتدادهای AC, AB دایره‌ی $C_۱$ را در دو نقطه‌ی F, E قطع کنند با تغییرات A ، B و C مقدار $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$ ...

الف) وقتی ماکسیمم است که A، B و C روی یک امتداد باشند.
ب) وقتی می‌نیمم است که A ، C, B روی یک امتداد باشند.
ج) وقتی ماکزیمم است که AO بر BC عمود باشد.
د) وقتی می‌نیمم است که AO بر BC عمود باشد.
هـ) همواره مقداری ثابت است.

۴۲) دو دایره‌ی هم‌مرکز $C_۱$ و $C_۲$ به مرکز O مفروض‌اند ($C_۲$ داخل $C_۱$ است). نقاط متغیر P، Y, X روی دایره‌ی $C_۲$ طوری حرکت می‌کنند که xoy همواره قطری از دایره $C_۲$ است. امتداد PX دایره $C_۱$ را در B, A و امتداد PY دایره‌ی $C_۲$ را در D, C قطع می‌کنند. از P عمود PH را بر AC رسم می‌کنیم تا امتداد آن وتر BD را در I قطع کند. در این صورت کدام عبارت همواره ثابت است؟

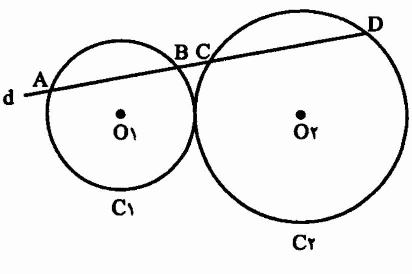


الف) $\frac{\overline{PI}}{\overline{PH}}$
ب) $\overline{IH}$
ج) $\overline{PI}.\overline{PH}$
د) $\overline{PI}^۲ + \overline{PH}^۲$
هـ) $\frac{\overline{PH}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{PI}}{\overline{BD}}$

۴۳) دایره‌ای به مرکز O و قطر AB مفروض است. وتر CD را که عمود منصف OB است در نظر می‌گیریم. وترهای متغیر MN در این دایره طوری‌اند که وسط‌هایشان همواره روی CD قرار دارد. کدام عبارت همواره ثابت است؟

الف) $\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲$
ب) $\overline{AM} + \overline{AN}$
ج) $\overline{AM}.\overline{AN}$
د) $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$
هـ) $\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ - ۲\overline{MN}^۲$

۴۴) دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ و به مراکز $O_۲, O_۱$ و به شعاع‌های r و $۲r$ مماس خارجی‌اند. خط مستقیم d دوایر را چنان قطع کرده است که $\overline{AB} = \overline{CD} = ۲\overline{BC}$ طول $\overline{AD}$ چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۳}r$
ب) $۵\sqrt{۲}r$
ج) $\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۳}r$
د) $۲\sqrt{۲}r$
هـ) $۴\sqrt{۲}r$

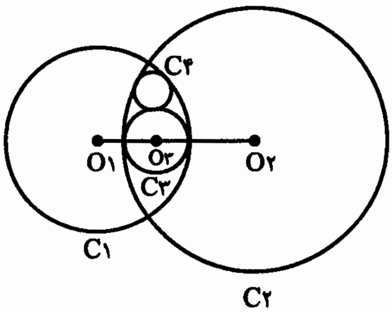
۴۵) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ قطر AC نیمساز زاویه A می‌باشد، مقدار $\frac{\overline{AB}+\overline{AD}}{\overline{AC}}$ برابر است با:

الف) $۲sin\frac{\hat{A}}{۲}$　　ب) $۲sin\hat{A}$

ج) $cos\hat{A}$　　د) $۲cos\frac{\hat{A}}{۲}$

هـ) $sin\frac{\hat{A}}{۲}$

۴۶) با توجه به شکل اگر بدانیم $r_۱ = R$ ، $r_۲ = ۲R, r_۳ = \frac{R}{۴}$ می‌باشند، شعاع $C_۴$ چند است؟



الف) $\frac{۲۱}{۱۲۴}R$　　ب) $\frac{۱۷}{۱۲۴}R$

ج) $\frac{۲۷}{۱۲۴}R$　　د) $\frac{۱۵}{۶۲}R$

هـ) $\frac{۳۱}{۱۲۴}R$

۴۷) عمود منصف‌های اضلاع AB, AC از مثلث ABC به ترتیب اضلاع AC, AB را در نقاط Q, P قطع می‌کنند. در این صورت کدام مجموعه از نقاط بر روی یک دایره قرار دارند.

الف) فقط Q, P, B, C

ب) Q, P, B, C و مرکز دایره‌ی محیطی ABC

ج) Q, P, B, C و مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC

د) Q, P ، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث

هـ) Q, P مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A

۴۸) در مثلث دل‌خواه ABC از نقطه‌ی D روی ضلع BC عمودهای DP و DQ را به ترتیب بر اضلاع AC, AB وارد می‌کنیم. اگر نقاط Q, P, C, B بر روی محیط یک دایره قرار داشته باشند، بنابراین نقطه‌ی D ...

الف) پای میانه است.

ب) پای نیمساز است.

ج) پای ارتفاع است.

د) محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC است.

هـ) محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC است.

۴۹) در مثلث دل‌خواه ABC، نقطه P مرکز ارتفاعی مثلث است. از نقطه‌ی H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC عمودهای HK, HL را به ترتیب بر اضلاع AC, AB فرود می‌آوریم اگر LK ارتفاعات وارد بر اضلاع AC, AB را به ترتیب در F, E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $PEHF$:

الف) یک ذوزنقه است.　　ب) یک چهار ضلعی متشابه با $BCKL$ است.

ج) یک چهار ضلعی محاطی است.　　د) یک چهار ضلعی محیطی است.

هـ) با توجه به نوع مثلث هر یک از گزینه‌ها می‌توانند برقرار باشند.

۵۰) در مثلث دل‌خواه ABC، T محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BCاست. اگر محل تماس دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABT و ACT با اضلاع AC, AB به ترتیب Y, X باشند در این صورت ...

الف) مثلث AXY با مثلث ABC متشابه است.
ب) مثلث AXY، متساوی‌الساقین است.
ج) در مثلث AXY،AT ارتفاع وارد بر ضلع XY است.
د) در مثلث AXY، AT امتداد میانه وارد بر ضلع XY است.
هـ) گزینه های «الف» و «د» هر دو برقرار است.

۵۱) نقطه‌ی دل‌خواه L درون زاویه‌ی xoy واقع است و نقاط Q, P قرینه‌ی آن نسبت به اضلاع Oy, Ox می‌باشند. محل تقاطع LQ با Ox را نقطهٔ P' و هم‌چنین محل تقاطع LP با Oy را Q' می‌نامیم. در این صورت

الف) نقاط L، Q, P, O روی یک دایره واقع‌اند.
ب) نقاط P، Q، Q', P' روی یک دایره واقع‌اند.
ج) نقاط Q،P و Q', P' وقتی روی یک دایره واقع‌اند که L روی نیمساز زاویه واقع باشد.
د) نقاط O, Q', P', Q, P روی یک دایره واقع‌اند.
هـ) نقاط O, Q', P' و یکی از نقاط Q, P روی یک دایره واقع‌اند.

۵۲) مثلث ABC مفروض است. نقطه‌ی M روی ضلع BC طوری واقع است که دوایر محاطی داخلی مثلث‌های ABM و ACM بر یک‌دیگر مماس‌اند. در این صورت نقطه‌ی M ....

الف) پای ارتفاع است.
ب) پای نیمساز است.
ج) پای میانه است.
د) محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC است.
هـ) محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی با ضلع BC است.

۵۳) دو دایره به شعاع واحد بر یک‌دیگر مماس‌اند. از نقطه‌ی A روی مماس مشترک گذرنده از محل تماس آن‌ها دو مماس AP, AT را بر آن‌ها رسم می‌کنیم. اگر مثلث ATP متساوی‌الاضلاع باشد طول ضلع آن چند است.

الف) $\sqrt{۳+۵\sqrt{۳}}$ ب) $\sqrt{۵+۳\sqrt{۳}}$
ج) $\sqrt{۵+۴\sqrt{۳}}$ د) $۴-\sqrt{۳}$
هـ) $۲+\sqrt{۳}$

۵۴) وتر متغیر AB از دایره‌ای به مرکز o، متوازی با قطری از دایره است که از نقطه‌ی معلوم P می‌گذرد. (P داخل دایره قرار دارد). در این صورت اگر N وسط کمان $\widehat{AB}$ باشد:

الف) $\overline{PA}^۲ + \overline{PB}^۲ = \overline{PN}^۲$ ب) $\overline{PA}^۲ + \overline{PB}^۲ = ۲\overline{PN}^۲$ ج) $\overline{PA} + \overline{PB} = ۲PN$
د) $|\overline{PA} - \overline{PB}| = \frac{\overline{PN}}{۲}$ هـ) $\overline{PA} + \overline{PB} = r + \overline{PN}$

۵۵) در دایره‌ای سه وتر دو به دو متقاطع رسم شده است. نقطه‌های برخورد، هر یک از وترها را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. اگر طول یکی از این وترها برابر ۳ باشد، شعاع دایره چه‌قدر است؟

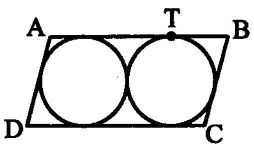
الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ ج) $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ د) $\sqrt{۳}$ هـ) $\sqrt{\frac{۱۰}{۳}}$

۵۶) در دایره‌ای به مرکز O، وتر AB را از سمت B به اندازه‌ی شعاع دایره امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C حاصل شود. امتداد CO دایره را در D قطع می‌کند. AD را رسم می‌کنیم. اگر زاویه‌ی $A\hat{O}D = x, A\hat{C}O = y$ باشند کدام رابطه صحیح است؟

الف) $x = ۲y$ ب) $x = ۳y$ ج) $x = y$

د) $x = ۶۰°$ ه) $y = ۴۵°$

۵۷) در شکل $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. دایره‌ها دارای شعاع برابر ۱ و بر یک‌دیگر و هم‌چنین اضلاع متوازی‌الاضلاع مماس‌اند. مساحت $ABCD$ را محاسبه کنید. $(\overline{BT} = \sqrt{۳})$



الف) $۴\sqrt{۳}$ ب) $۲ + ۴\sqrt{۳}$

ج) $۳ + ۳\sqrt{۳}$ د) $۵ + \frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$

ه) $۴ + \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

۵۸) نقاط E, D به ترتیب روی اضلاع BC, AB از مثلث ABC قرار دارند. می‌دانیم، $ADEC$ یک چهار ضلعی محاطی است و $\overline{AB} = \overline{BE} + \overline{ED}$ و $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DE}$. کدام صحیح است؟

الف) $\overline{AE} = \overline{DC}$ ب) $AE \perp Dc$ ج) $\overline{AB} = \overline{BC}$

د) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ه) $\overline{AE} = \overline{BC}$

۵۹) دایره محاطی مثلث ABC، میله‌ی AM را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کند. نسبت $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ چند است؟

الف) ۲ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) ۳ د) $\frac{۱}{۳}$ ه) $\frac{۵}{۲}$

۶۰) دایره‌هایی به شعاع‌های $R, \frac{R}{۳}$ مماس خارجی‌اند، مماس مشترک داخلی آن‌ها، سطح محدود به دو دایره و یکی از مماس مشترک‌های بیرونی آن‌ها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.

الف) $\frac{۹}{۲}(\frac{۴\sqrt{۳} - ۲\pi}{۲\sqrt{۳} - \pi})$ ب) $۳(\frac{۲\sqrt{۳} - \pi}{\pi - \sqrt{۳}})$ ج) $۳(\frac{۲\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}}{\pi - \sqrt{۳}})$

د) $\frac{۹}{۲}(\frac{۲\sqrt{۳} - \pi}{۳\sqrt{۳} - \pi})$ ه) $\frac{۱}{۳}(\frac{۳\pi - \sqrt{۳}}{\pi - \sqrt{۳}})$

۶۱) نقاط Q, P به ترتیب نقاط تماس دوایر محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC می‌باشند. اگر M وسط ضلع BC باشد، در این صورت در مثلث APQ، AM،

الف) نیمساز است.

ب) میانه است.

ج) ضلع PQ را به نسبت $\frac{۲}{۱}$ تقسیم می‌کند.

د) زاویه $P\hat{A}Q$ را به نسبت $\frac{۲}{۱}$ تقسیم می‌کند.

ه) ضلع PQ را نسبت شعاع‌های دو دایره تقسیم می‌کند.

۶۲) اوساط کمان‌های ایجاد شده از دایره‌ی محیطی یک چهار ضلعی محاطی، توسط اضلاع آن را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم، در این صورت چهار ضلعی حاصل ...

الف) متشابه با چهار ضلعی اولیه است. ب) ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است.

ج) دارای قطرهایی برابر است. د) دارای قطرهایی متعامد است.

ه) گزینه‌های «ج» و «د» هر دو صحیح است.

۶۳) در مثلث ABC نقاط F, E به ترتیب محل تماس دایره محاطی داخلی با اضلاع AC, AB اند، هم‌چنین نقاط K, L محل تماس دوایر محاطی داخلی نظیر رأس‌های B, C با اضلاع مزبور می‌باشند. امتدادهای FL, EK، امتداد ضلع BC را به ترتیب در Y, X قطع می‌کنند،اگر داشته باشیم $\overline{CX} = \overline{BY}$ در این صورت ...

الف) مثلث ABC متساوی‌الساقین است.
ب) مثلث ABC قائم‌الزاویه در رأس A است.
ج) مثلث ABC هر مثلث دل‌خواهی می‌تواند باشد.
د) مثلث ABC حتماً متساوی‌الاضلاع است.
ه) مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

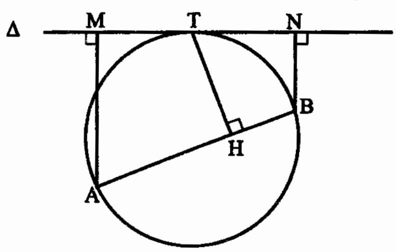
۶۴) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ می‌دانیم، $\overline{AB} = ۲$، $\overline{AD} = ۳$، $\overline{DC} = ۴$ و $\overline{BC} = ۵$ می‌باشند، نقاط P، T، F, E به ترتیب محل تماس دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های ABD، BDC، ABC و ADC با قطرهای چهار ضلعی‌اند. نسبت مساحت چهار ضلعی $ABCD$ به مساحت چهار ضلعی $PETF$ چه قدر است؟

الف) ۲۳ ب) ۲۷ ج) $\frac{۲۷}{۲}$ د) ۳۶ ه) ۱۸

۶۵) در نیم‌دایره‌ای به مرکز O و شعاع R دوایر $C_۱(O_۱, r_۱)$ و $C_۲(O_۲, r_۲)$ مماس بر آن و قطر نیم‌دایره و هم‌چنین مماس بر یک‌دیگر مفروض‌اند، اگر $O_۱\widehat{O}O_۲ = ۹۰^\circ$ باشد، حداقل مقدار $r_۱ + r_۲$ چه‌قدر است؟

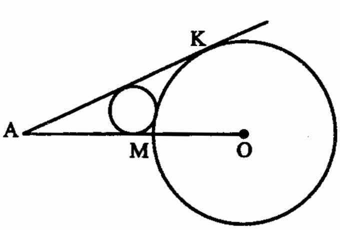
الف) $\sqrt{۲}R$
ب) $(\sqrt{۲} + ۱)R$
ج) $۲(\sqrt{۲} - ۱)R$
د) $\frac{\sqrt{۲} + ۱}{۲}R$
ه) $\frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}R$

۶۶) خط Δ بر دایره‌ی مفروضی در نقطه‌ی T مماس است و AB نیز وتر دل‌خواهی از دایره است. اگر TH فاصله‌ی نقطه‌ی T از وتر مزبور، و BN, AM فواصل نقاط B, A از خط Δ باشند. در این صورت:



الف) $\frac{۱}{\overline{TH}} = \frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{BN}}$
ب) $\frac{۲}{\overline{TH}} = \frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{BN}}$
ج) $\overline{TH} = \frac{\overline{AM} + \overline{BN}}{۲}$
ج) $\overline{TH}^۲ = \overline{AM}.\overline{BN}$
ه) $\overline{TH} = \frac{\overline{AM} + \overline{BN}}{۳}$

۶۷) از نقطه‌ی A مماس AK بر دایره ای به شعاع ۲ و با مرکز O رسم شده است. اگر $O\hat{A}K = ۶۰^\circ$ باشد، شعاع دایره‌ی مماس در مثلث خمیده، MKA چند است.



الف) $\frac{۴ - ۲\sqrt{۲}}{۳}$
ب) $\frac{۶ - ۴\sqrt{۲}}{۳}$
ج) $\frac{۳ - \sqrt{۲}}{۳}$
د) $\frac{۳\sqrt{۲} - ۲}{۳}$
ه) $\frac{\sqrt{۲} + ۲}{۳}$

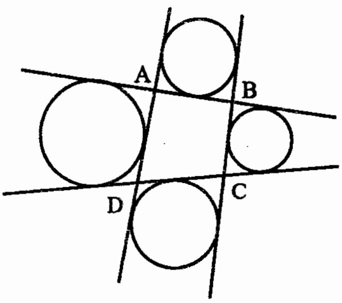
۶۸) بر دایره‌ای به شعاع r سه نقطه طوری انتخاب شده‌اند که دایره به سه کمان، به نسبت ۵ : ۴ : ۳ تقسیم می‌شود. در نقطه‌های تقسیم مماس‌هایی بر دایره رسم می شود. مساحت مثلث تشکیل شده با این مماس‌ها برابر است با:

الف) $(۳ + ۲\sqrt{۳})r^۲$
ب) $(۲ + ۳\sqrt{۲})r^۲$
ج) $۳(۱ + \sqrt{۳})r^۲$
د) $(۲ + ۳\sqrt{۳})r^۲$
ه) $(۱ + \sqrt{۳})r^۲$

۶۹) نیم‌دایره ای به قطر AB مفروض و چهار ضلعی $ABCD$ محاط در آ ن است. اگر y, x به ترتیب طول تصاویر اضلاع BC, AD بر ضلع CD باشند. بنابراین نسبت $\frac{x}{y}$ برابر است با:

الف) $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$　ب) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$　ج) ۱　د) $\frac{\overline{AB}}{4}$　ه) $\frac{|\overline{AD}-\overline{BC}|}{2}$

۷۰) $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب است. چهار دایره در نظر می‌گیریم که هر یک بر سه ضلع این چهار ضلعی (و یا امتداد آن‌ها) مماس باشند. چهار ضلعی حاصل از مرکز این دایره‌ها:

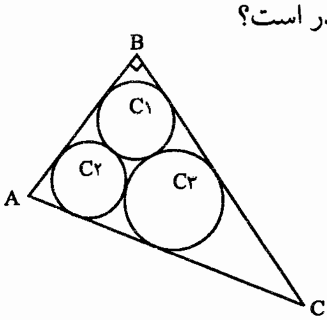


الف) متشابه با $ABCD$ است.
ب) محیطی است.
ج) محاطی است.
د) فقط در صورتی که $ABCD$ ذوزنقه باشد، محیطی است.
ه) فقط در صورتی که $ABCD$ ذوزنقه باشد محاطی است.

۷۱) AB، قطری از دایره و چهار ضلعی $ABCD$ در آن محاط است. نقاط F, E به ترتیب پای عمودهای وارد از نقاط B, A بر خط CD هستند. اگر S مساحت چهار ضلعی $AEFB$، s'', s' به ترتیب مساحت‌های ABC و ADB باشند، در این صورت:

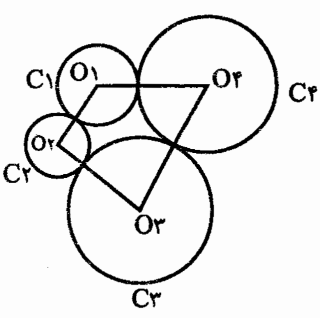
الف) $s \geq s' + s''$
ب) $s \leq s' + s''$
ج) $s = s' + s''$
د) گزینه‌ی «ج» به شرطی که AB موازی CD باشد.
ه) $s = \frac{s'+s''}{2}$

۷۲) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ سه دایره c_1، c_2, c_3 به شعاع‌های ۱ ، ۲ و ۴ بر یک‌دیگر و هم‌چنین هر یک بر دو ضلع از مثلث مذکور مماس‌اند. شعاع دایره‌ی محاطی داخلی این مثلث چه‌قدر است؟



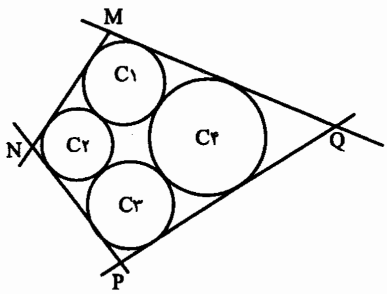
الف) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$　ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
ج) $4-2\sqrt{2}$　د) $3-\sqrt{2}$
ه) $\frac{1+3\sqrt{2}}{4}$

۷۳) چهار دایره C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 با مراکز O_1، O_2، O_3 و O_4 مطابق شکل بر یک‌دیگر مماس‌اند. کدام گزینه در مورد چهار ضلعی $O_1O_2O_3O_4$ صحیح است



الف) یک ذوزنقه است.
ب) محیطی است.
ج) محاطی است.
د) دارای اقطار متعامد است.
ه) «ج» و «د» هر دو صحیح است.

۷۴) چهار دایره‌ی $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$ به شعاع های به ترتیب r، $۲r$، $۳r$، R، دو به دو مطابق شکل بر یک‌دیگر مماس‌اند و مماس مشترک‌های آن‌ها در نقاط M، N، P,Q مقاطع‌اند. اگر چهار ضلعی $MNPQ$ یک چهار ضلعی محیطی باشد در این صورت نسبت $\frac{R}{r}$ چه‌قدر است؟



الف) ۱
ب) $\sqrt{۲}$
ج) $\sqrt{۲}-۱$
د) ۲
هـ) $\sqrt{۲}+۱$

۷۵) ارتفاع AH از مثلث قائم‌الزاویه ABC، $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، آن را به دو قسمت قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH با مراکز دوایر محاطی داخلی $O_۱$ و $O_۲$ تقسیم کرده است. اگر O مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC باشد. نسبت $\frac{\overline{AO}}{\overline{O_۱O_۲}}$ برابر است با:

الف) ۱
ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
ج) $\sqrt{۲}$
د) $\frac{۱}{۲}$
هـ) همواره بین ۱ و $\sqrt{۲}$ واقع است.

۷۶) دایره‌ای در رأس بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از I، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث می‌گذرد. این دایره AV را در K,H قطع می‌کند. اگر $\hat{B}-\hat{A}=۳۰^\circ$، $A\hat{I}H=۶۰^\circ$ باشند، $B\hat{I}K$ چه‌قدر است؟

الف) ۳۰°
ب) ۴۵°
ج) ۵۰°
د) ۶۰°
هـ) ۹۰°

۷۷) در مثلث ABC نیمساز داخلی AB ، با ضلع AB برابر است. اگر AH، تصویر ضلع AC روی این نیمساز باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

الف) $\frac{۱}{\overline{AH}}=\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{AB}}$
ب) $\frac{۲}{\overline{AH}}=\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{AB}}$
ج) $\overline{AH}^۲=\overline{AB}\times\overline{AC}$
د) $\overline{AH}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}}{۳}$
هـ) $\overline{AH}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{۲}$

۷۸) دو دایره به شعاع‌های r,R بر هم‌دیگر مماس خارجی هستند. سه مماس مشترک آن‌ها (دو خارجی و یک داخلی) مثلثی را ایجاد می‌کنند. مساحت این مثلث برابر است با:

الف) $\frac{۳(Rr)^{\frac{۳}{۲}}}{۲(R-r)}$
ب) $\frac{۲(Rr)^{\frac{۳}{۲}}}{R+r}$
ج) $\frac{(Rr)^{\frac{۳}{۲}}}{R-r}$
د) $\frac{۲(Rr)^{\frac{۳}{۲}}}{R-r}$
هـ) $\frac{(Rr)^{\frac{۳}{۲}}}{۳(R-r)}$

۷۹) فرض کنید I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC، D ، محل برخورد AI با دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد، فرض کنید نقاط F,E پای ارتفاع‌های وارد از I بر CD,BD باشند. اگر $\overline{AE}+\overline{AF}=\frac{\overline{AD}}{۲}$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر است با:

الف) ۳۰°
ب) ۴۵°
ج) ۶۰°
د) ۹۰°
هـ) ۱۲۰°

۸۰) در مثلث ABC نقطه‌ی F روی ضلع AB قرار دارد و D نیز وسط ضلع BC است. محل تلاقی AD, CF را X و محل تلاقی AC, BX را E می‌نامیم. اگر بدانیم که چهار ضلعی $AFXE$ محاطی است و هم‌چنین $\overline{AE} = ۳$ ، $\overline{CD} = ۴$ ،$\overline{CE} = ۵$ باشند. مقدار $\overline{DX}$ چه‌قدر است؟

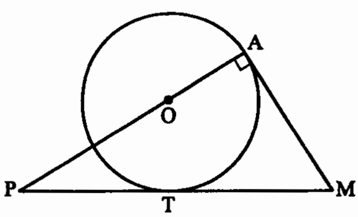
الف) $۲\sqrt{۲}$　　ب) $۴\sqrt{\frac{۵}{۱۱}}$　　ج) $۲\sqrt{۷}$　　د) $۳\sqrt{\frac{۱۷}{۳}}$　　ه) $\sqrt{\frac{۲۳}{۳}}$

۸۱) نقاط M, K روی اضلاع BC, AB از مثلث ABC مفروض‌اند. نقطه‌ی N محل تلاقی CK, AM است. اگر فرض کنیم که چهار ضلعی‌های $KBMN, AKMC$ محاطی بوده و ضمناً شعاع دایره محیطی آن‌ها برابر باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{B}C$ کدام است؟

الف) $۳۰°$　　ب) $۴۵°$　　ج) $۶۰°$

د) $۱۲۰°$　　ه) گزینه‌های «ج» و «د» هر دو صحیح است.

۸۲) مثلث قائم‌الزاویه APM ($\hat{A} = ۹۰°$) دارای محیطی برابر با ۱۵۲ می‌باشد. دایره‌ای به مرکز O (که نقطه‌ی O روی ضلع AP واقع است) دارای شعاعی برابر ۱۹ می‌باشد. و در رأس A، بر AM مماس است. طول OP برابر است با:



الف) ۳۰　　ب) ۳۱

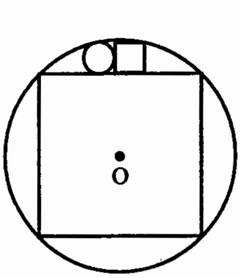
ج) $\frac{۹۵}{۳}$　　د) ۳۲

ه) $\frac{۹۷}{۳}$

۸۳) در مثلث ABC طول میانه‌ی CE برابر با ۲۷ می‌باشد، و طول ضلع AB نیز برابر ۲۴ است. میانه‌ی CE را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را در نقطه‌ی F قطع کند. نسبت مساحت مثلث ABF به مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱۶}{۸۱}$　　ب) $\frac{۱۷}{۸۱}$　　ج) $\frac{۲}{۹}$　　د) $\frac{۲۰}{۸۱}$　　ه) $\frac{۷}{۲۷}$

۸۴) در دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۲}$، مربعی محاط است. مربع کوچک دیگر مطابق شکل، دو رأس روی یک ضلع مربع و دو رأس دیگرش روی دایره قرار دارد. دایره‌ای مماس بر دو ضلع مربع و هم‌چنین مماس داخلی بر دایره بزرگ‌تر ترسیم شده است. شعاع این دایره به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

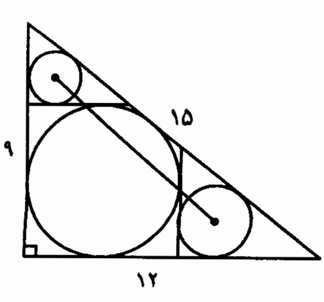


الف) ۱٫۲　　ب) ۱٫۳

ج) ۱٫۴　　د) ۱٫۵

ه) ۱٫۶

۸۵) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع ۱۵، ۱۲ و ۹،مماس‌هایی به موازات اضلاع قائم، بر دایره‌ی محاطی داخلی آن رسم می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه کوچک‌تر در داخل آن ایجاد شوند. طول خط‌المرکزین دوایر محاطی داخل این دو مثلث اخیر چه قدر است؟

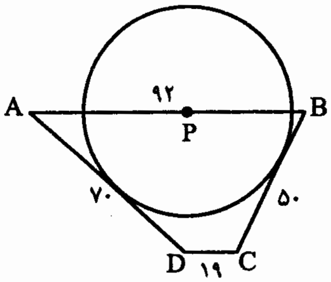


الف) $\frac{\sqrt{۱۲۱ + ۴۸\sqrt{۶}}}{۲}$　　ب) $\frac{\sqrt{۹۷ + ۲۴\sqrt{۱۲}}}{۲}$

ج) $\frac{\sqrt{۱۲۱ + ۲۴\sqrt{۳}}}{۲}$　　د) $\frac{\sqrt{۹۷ + ۴۸\sqrt{۶}}}{۲}$

ه) $\frac{\sqrt{۹۷ + ۲۴\sqrt{۶}}}{۲}$

۸۶) $ABCD$ یک ذوزنقه است که در آن اضلاع AB و CD با هم‌دیگر موازی‌اند. $\overline{AB} = ۹۲$، $\overline{BC} = ۵۰$، $\overline{CD} = ۱۹$ و $\overline{DA} = ۷۰$. P نقطه‌ای روی AB است، به طوری‌که دایره‌ای به مرکز P بر AD و BC مماس است. طول $\overline{AP}$ چه‌قدر است؟

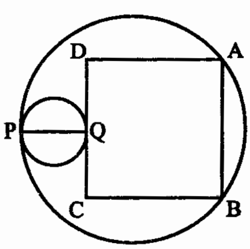


الف) ۵۰
ب) $\frac{۱۵۵}{۳}$
ج) $\frac{۱۵۷}{۳}$
د) ۵۳
ه) $\frac{۱۶۱}{۳}$

۸۷) در مثلث ABC می‌دانیم $\overline{AB} = ۹$، $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{۴۰}{۴۱}$. بیش‌ترین مساحت این مثلث چه‌قدر است؟

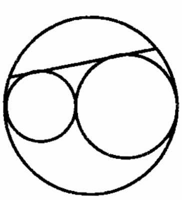
الف) ۷۹۰ ب) ۸۰۰ ج) ۸۱۰ د) ۸۲۰ ه) ۸۳۰

۸۸) دایره‌ی بزرگ‌تر، دارای قطر ۴۰ و دایره‌ی کوچک‌تر دارای قطر ۱۰ است و در نقطه‌ی P به صورت داخلی مماس می‌باشند. PQ قطر دایره‌ی کوچک است و $ABCD$ مربعی است که دو رأس آن روی دایره‌ی بزرگ قرار داشته و ضلع مربوط به دو رأس دیگر آن بر دایره‌ی کوچک‌تر در Q مماس است. طول $\overline{AB}$ چه‌قدر است؟



الف) $۵ + ۶\sqrt{۱۹}$
ب) $۸ + ۴\sqrt{۱۹}$
ج) ۲۴
د) $۶ + ۴\sqrt{۱۹}$
ه) $۶ + ۵\sqrt{۱۹}$

۸۹) سه دایره دارای شعاع‌های ۳، ۶ و ۹ می‌باشند (مطابق شکل). طول وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌های کوچک‌تر مماس است، چه قدر است؟



الف) $۴\sqrt{۱۴}$
ب) $۱۲\sqrt{۲}$
ج) $۴\sqrt{۲۲}$
د) $۸\sqrt{۱۰}$
ه) $۲\sqrt{۲۶}$

۹۰) نقطه‌ی A_1 روی ضلع BC از مثلث ABC طوری واقع است که دوایر محاطی داخی مثلث‌های ABA_1, ACA_1 در یک نقطه روی AA_1 مماس هستند. نقاط B_1, C_1 نیز به ترتیب روی اضلاع AB, AC با همین خاصیت اختیار می‌شوند. کدام گزینه صحیح است؟

الف) مجموع شعاع‌های هر دو دایره طرفین AA_1, BB_1, CC_1 با یک‌دیگر برابر است.

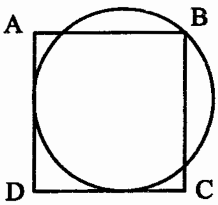
ب) میانگین شعاع‌های این دوایر، برابر قطر دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

ج) میانگین شعاع‌های این دوایر، برابر قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

د) AA_1, BB_1, CC_1 همرس هستند.

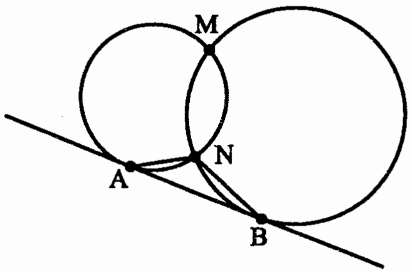
ه) گزینه‌های «ب» و «د» هر دو صحیح است..

۹۱) $ABCD$ یک مربع است به طول ضلع ۱. دایره‌ای طوری ترسیم شده است که بر دو ضلع این مربع مماس بوده و از یک رأس دیگر مربع عبور می‌کند. شعاع این دایره چه‌قدر است؟



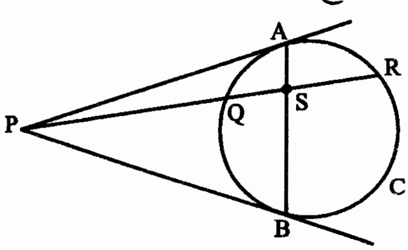
الف) $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$
ب) $۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
ج) $۲-\sqrt{۲}$
د) $۲(\sqrt{۲}-۱)$
هـ) $\frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۳}$

۹۲) دو دایره به شعاع‌های r و R هم‌دیگر را در نقاط M و N قطع کرده و AB مماس مشترک بیرونی آن‌ها می‌باشد. شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABN چه‌قدر است؟



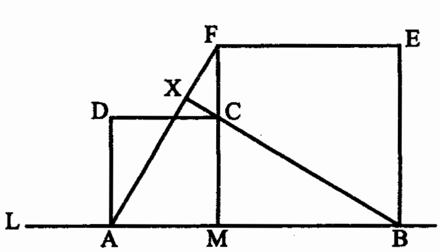
الف) $\frac{rR}{r+R}$
ب) $\frac{r+R}{۲}$
ج) $\sqrt{rR}$
د) $\sqrt{\frac{rR}{۲}}$
هـ) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۹۳) مماس‌های PA و PB از نقطه‌ی P که خارج دایره‌ی C است بر آن ترسیم می‌شوند. خطی گذرنده از نقطه‌ی P، AB را در نقطه‌ی S و دایره‌ی C را در نقاط Q و R قطع می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟



الف) $\overline{PS}=\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{۲}$
ب) $\overline{PS}^{۲}=\overline{PQ}.\overline{PR}$
ج) $\overline{PS}^{۲}=۲\overline{PQ}.\overline{PR}$
د) $\frac{۱}{\overline{PS}}=\frac{۱}{\overline{PQ}}+\frac{۱}{\overline{PR}}$
هـ) $\frac{۲}{\overline{PS}}=\frac{۱}{\overline{PQ}}+\frac{۱}{\overline{PR}}$

۹۴) مطابق شکل، مربع‌های $AMCD$ و $MBEF$ روی امتداد L بنا شده‌اند. اگر نقطه‌ی X محل تقاطع BC, AF باشد، در این صورت:



الف) نقطه‌ی X روی دایره‌ی محیطی مربع $AMCD$ واقع است.
ب) نقطه‌ی X روی دایره‌ی محیطی مربع $MBEF$ واقع است.
ج) نقطه‌ی X فقط وقتی که نسبت طول اضلاع دو مربع ۱ : ۲ باشد، روی دایره‌ی محیطی هر دو واقع است.
د) نقطه‌ی X روی دایره‌ی محیطی هر دو مربع واقع است.
هـ) BX، نیمساز زاویه‌ی ABF می‌باشد.

۹۵) مثلث ABC و دایره‌ی محاطی داخلی آن مفروض‌اند. محل تماس این دایره با ضلع AC را D می‌نامیم. DM قطری از این دایره است. اگر امتداد BM، ضلع AC را در نقطه‌ی K قطع کند، طول $\overline{AK}$ چه‌قدر است؟ (c, b, a به ترتیب طول اضلاع PB, AC, BC و P نصف محیط است.)

الف) $۲(P-b)$
ب) $a+b-P$
ج) $P-c$
د) $\frac{(۲b+a)-P}{۲}$
هـ) $P+c$

۹۶) در مستطیل $ABCD$، $\overline{BC} = ۳, \overline{AB} = ۴$. ضلع BC را به اندازه‌ی $\overline{CE} = \overline{AC}$ امتداد می‌دهیم. اگر نقطه‌ی F وسط AE باشد، طول $\overline{DF}$ چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۵}$ ب) $۲\sqrt{۵}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ د) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ه) $\sqrt{۱۰}$

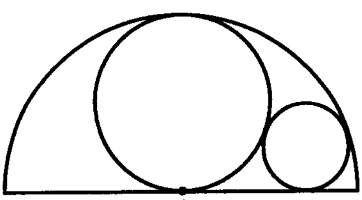
۹۷) قطرهای BD, AC از چهار ضلعی محدب $ABCD$ در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر نیمساز زاویه‌ی $\widehat{ACD}$، امتداد ضلع AB از سمت A را در نقطه‌ی K قطع کند، به طوری‌که $\overline{MA}.\overline{MC} + \overline{MA}.\overline{CD} = \overline{MB}.\overline{MD}$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

الف) چهارضعلی $ABCD$ محاطی است.
ب) چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.
ج) چهارضلعی $KBCD$ محاطی است.
د) مثلث BKC متساوی‌الساقین است.
ه) گزینه‌های «الف» و «د» هر دو صحیح‌اند.

۹۸) دایره‌ی گذرنده از رأس A، از مثلث ABC، در نقطه‌ی D بر ضلع BC مماس است و اضلاع AC, AB را به ترتیب در F, E قطع می‌کند. اگر EF نیمساز زاویه‌ی $\widehat{AFD}$ باشد و $\widehat{ADC} = ۸۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی ABC چند درجه است؟

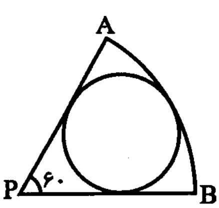
الف) ۳۰° ب) ۴۰° ج) ۵۰° د) ۸۰° ه) هیچ‌کدام

۹۹) مطابق شکل دو دایره مماس بر هم‌دیگر، در نیم‌دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۲ مماس داخلی‌اند. شعاع دایره‌ی کوچک‌تر چه‌قدر است؟



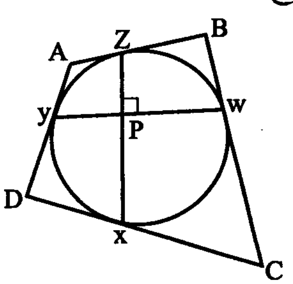
الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ د) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ ه) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۱۰۰) مطابق شکل APB قطاعی از دایره‌ای به مرکز P می‌باشد و دایره‌ای داخل این قطاع مماس است. اگر $\widehat{APB} = ۶۰^\circ$ باشد، نسبت مساحت دایره به مساحت قطاع چه‌قدر است؟



الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۵}{۱۲}$ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) $\frac{۵}{۶}$

۱۰۱) $ABCD$ یک چهار ضلعی محیطی است و مطابق شکل محل تماس اضلاع آن با دایره محاطی‌اش، به ترتیب w, z, y, x می‌باشند. اگر پاره‌خط‌های yw, xz بر هم‌دیگر عمود باشند، کدام گزینه صحیح است؟



الف) این چهار ضلعی حتماً ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است.
ب) در این چهار ضلعی حتماً دو ضلع با هم‌دیگر موازی‌اند.
ج) این چهارضلعی یک چهارضلعی محاطی است.
د) در این چهارضلعی حتماً دو زاویه‌ی مجاور متمم هم‌دیگر هستند.
ه) در این چهارضلعی حتماً دو قطر بر هم‌دیگر عمود هستند.

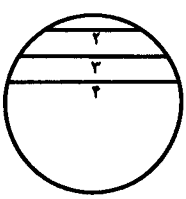
۱۰۲) نقطه‌ی M روی محیط نیم‌دایره‌ای به قطر AB قرار دارد و K نقطه‌ای دل‌خواه روی AB است. اگر Q, P به ترتیب مراکز دوایر محیطی مثلث‌های BMK, AMK باشند، کدام گزینه در مورد چهارضلعی $PMQK$ صحیح است؟

الف) همیشه محیطی است.
ب) همیشه محاطی است.
ج) وقتی محیطی است که یکی از زوایای مثلث AMB برابر با ۳۰° باشد.
د) وقتی محاطی است که یکی از زوایای مثلث AMB برابر ۳۰° باشد.
ه) گزینه‌های «الف» و «ب» هر دو صحیح است.

۱۰۳) پنج ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵$، در دایره‌ای محاط است و نقطه‌ی B محل تقاطع اقطار $A_۲A_۵, A_۱A_۴$ است. اگر بدانیم $A_۴\widehat{A_۱}A_۳ = A_۴\widehat{A_۲}A_۵$ و هم‌چنین $A_۲\widehat{A_۴}A_۱ = A_۲\widehat{A_۵}A_۳$ و $A_۱\widehat{A_۳}B = ۳۰^\circ$، زاویه‌ی $A_۱\widehat{B}A_۵$ چند درجه است؟

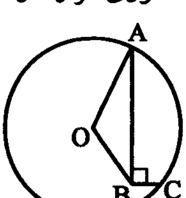
الف) ۱۲۰°　　ب) ۱۳۰°　　ج) ۱۳۵°　　د) ۱۴۰°　　ه) $۱۲۷/۵^\circ$

۱۰۴) وترهای موازی از دایره روبه‌رو دارای طول‌های ۲، ۳ و ۴ می‌باشند و زاویه‌ی روبه‌روی آن‌ها به ترتیب x، y و $x+y$ است ($x + y < ۱۸۰^\circ$). مقدار $\cos x$ چه‌قدر است؟



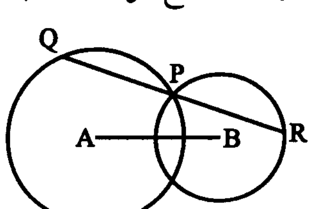
الف) $\frac{۷}{۸}$　　ب) $\frac{۱۱}{۳۲}$
ج) $\frac{۳}{۸}$　　د) $\frac{۱۵}{۳۲}$
ه) $\frac{۱۷}{۳۲}$

۱۰۵) در شکل، A و C روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{۵۰}$ قرار دارند. نقطه‌ی B در داخل دایره طوری قرار دارد که $\widehat{ABC} = ۹۰^\circ$، $\overline{AB} = ۶$ و $\overline{BC} = ۲$. طول $\overline{OB}$ چه‌قدر است؟



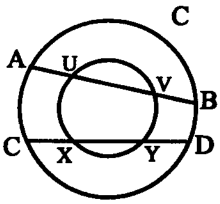
الف) $\sqrt{۵۰}$　　ب) ۵
ج) $\sqrt{۲۶}$　　د) $\sqrt{۳۰}$
ه) $\sqrt{۳۴}$

۱۰۶) با توجه به شکل، $\overline{AB} = ۱۲$ و دایره‌هایی که دارای شعاع‌های ۸ و ۶ با مراکز B, A می‌باشند، هم‌دیگر را در دو نقطه که یکی از آن‌ها را P نامیده‌ایم قطع کرده‌اند. خطی گذرنده از P، دو دایره را در R, Q قطع کرده است، به طوری‌که $\overline{PQ} = \overline{QR}$. مقدار $\overline{PQ}^۲$ چه‌قدر است؟



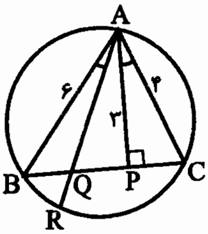
الف) ۱۰۰　　ب) ۱۱۰
ج) ۱۲۰　　د) ۱۳۰
ه) ۱۵۰

۱۰۷) فرض کنیم CD, AB دو وتر از دایره‌ی C هستند که دایره‌ی کوچک‌تر هم‌مرکز با آن را در Y, X, V, U قطع می‌کنند. اگر $\overline{AU} = ۲$، $\overline{UV} = ۱۰$ و $\overline{CX} = ۳$ باشند، $\overline{XY}$ چه‌قدر است؟



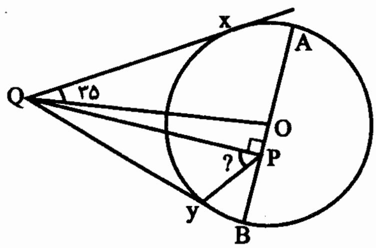
الف) $\frac{۲۰}{۳}$　　ب) ۱۵
ج) ۱۰　　د) ۵
ه) ۱۲

۱۰۸) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. AP ارتفاع وارد بر ضلع BC است. نقطه‌ی Q روی ضلع BC طوری انتخاب می‌شود که $\widehat{BAQ} = \widehat{PAC}$. اگر امتداد AQ دایره را در R قطع کند و بدانیم: $\overline{AP} = ۳, \overline{AC} = ۴, \overline{AB} = ۶$، طول $\overline{AR}$ چه‌قدر است؟



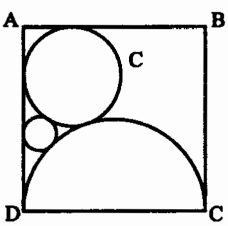
الف) ۸
ب) ۶
ج) ۱۰
د) ۹
ه) $\frac{۱۹}{۲}$

۱۰۹) با توجه به شکل، AB قطری از دایره است و QP عمود بر آن مفروض است. از نقطه‌ی Q مماس‌های Qy, Qx را بر این دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویه‌ی $\widehat{XQO}$ برابر با ۳۵° باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{QPY}$ چند درجه است؟



الف) ۵۵°
ب) ۶۰°
ج) ۶۵°
د) ۷۵°
ه) قابل محاسبه نیست.

۱۱۰) مطابق شکل $ABCD$، مربعی به طول ضلع ۲ است و از داخل آن نیم‌دایره‌ای به قطر CD ترسیم شده است. دایره‌ی C در داخل مربع طوری ترسیم می‌شود که بر اضلاع AD, AB و هم‌چنین نیم‌دایره مماس است. دایره‌ی کوچک‌تر دیگری مماس بر نیم‌دایره، دایره‌ی C و ضلع AD ترسیم شده است. شعاع این دایره چه‌قدر است؟



الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
ب) $\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۳}$
ج) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$
د) $\frac{۲\sqrt{۳}-۱}{۴}$
ه) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۳}$

۱۱۱) چهارضلعی $ABCD$، در دایره‌ای به قطر AB محاط است. فرض کنم S محل تقاطع BD, AC بوده و T پای عمود وارد از نقطه‌ی S بر قطر AB باشد. کدام گزینه صحیح است؟

الف) امتداد ST از وسط DC می‌گذرد.
ب) ST نیمساز زاویه‌ی DTC است.
ج) مثلث‌های SCT, SDT با یک‌دیگر متشابهند.
د) $۲\overline{ST}^۲ = \overline{AD}.\overline{BC}$
ه) $\overline{AD} + \overline{BC} = ۲\overline{ST}$

۱۱۲) از نقطه‌ی C، خارج دایره‌ای قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A, B قطع کند (B بین C, A قرار دارد). هم‌چنین مماس CN نیز بر دایره ترسیم می‌شود. اگر نیمساز زاویه‌ی $\widehat{ACN}$، پاره‌خط‌های BN, AN را به ترتیب در Q, P قطع کند، با فرض بر این‌که $\widehat{AB} = ۴۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی $\widehat{NPC}$ چه‌قدر است؟

الف) ۶۰°
ب) ۷۰°
ج) ۷۵°
د) $۷۵/۵^\circ$
ه) ۸۰°

۱۱۳) دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ با شعاع‌های $R_۱$ و $R_۲$ در نقاط A و A' متقاطع‌اند و نقاط B و C به ترتیب روبه‌روی قطری A در دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ می‌باشند. نسبت مساحت مثلث $AA'C$ به مساحت مثلث $AA'B$ برابر است با:

الف) $\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}}$
ب) $(\frac{BA'}{CA'})^۲$
ج) $\frac{R_۱}{R_۲}$
د) $(\frac{R_۱}{R_۱})^۲$
ه) $(\frac{R_۲}{R_۱})^۲$

۱۱۴) دو دایره‌ی $C_۱, C_۲$ به ترتیب دارای شعاع‌های R, r بوده و مماس خارجی هستند. AB مماس مشترک بیرونی آن‌ها است. به طوری‌که A روی $C_۱$ و B روی $C_۲$ قرار دارند. نقطه‌ی P روبه‌روی قطری نقطه‌ی A در دایره‌ی $C_۱$ است. از نقطه‌ی P ، مماس PQ را بر دایره‌ی $C_۲$ رسم می‌کنیم. طول $\overline{PQ}$ چه‌قدر است؟

الف) $۲r$ ب) $۲R$ ج) $r+R$ د) $۳R-r$ هـ) $۳r-R$

۱۱۵) نقطه‌ی M در داخل مربع $ABCD$ واقع است. $A_۱, B_۱, C_۱, D_۱$ دومین نقطه‌ی برخورد AM, BM, CM, DM با دایره‌ی محیطی مربع‌اند. اگر بدانیم $\overline{B_۱C_۱} = ۴$ و $\overline{C_۱D_۱} = ۲\overline{A_۱D_۱}$ ، در این صورت $\overline{A_۱B_۱}$ چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) ۲ ج) $\frac{۵}{۲}$ د) ۳ هـ) $\frac{۷}{۲}$

۱۱۶) نقاط G, I به ترتیب مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و مرکز ثقل مثلث ABC هستند. اگر b, a به ترتیب طول اضلاع BC و AC از مثلث بوده و r نیز طول شعاع دایره محاطی داخلی باشد، مساحت مثلث CIG چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۱}{۳}r|a-b|$ ب) $\frac{۱}{۴}r|a-b|$ ج) $\frac{۱}{۶}r|a-b|$ د) $\frac{۳}{۸}r|a-b|$ هـ) $\frac{۲}{۵}r|a-b|$

۱۱۷) اگر در مثلث ABC، $b < c < a$ ، جملات متوالی از یک تصاعد حسابی باشند، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $IG \perp AC$ ب) $\overline{IG} = \frac{۱}{۶}a$

ج) $IG || AB$ د) $AI \perp IG$

هـ) گزینه‌های «ب» و «ج» هر دو صحیح است.

۱۱۸) نقاط F, E روی ضلع BC از چهارضلعی محدب $ABCD$ قرار دارند (E به B نزدیک است)، به طوری‌که $\widehat{BAE} = \widehat{CDF}$ و $\widehat{EAF} = \widehat{FDE}$. در این صورت:

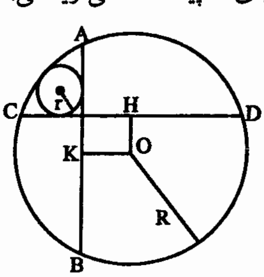
الف) $ABCD$ محیطی است. ب) $\widehat{FAC} = \widehat{EDB}$ ج) AD حتماً با BC موازی است.

د) DC حتماً با AB موازی است. هـ) $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$

۱۱۹) در چهار ضلعی محدب $ABCD$، E محل برخورد CD, AB است. اگر بدانیم که $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ و $\overline{AB} = \overline{AE} = ۵$ و $\overline{DC} = ۴$ و $\overline{DE} = ۳$ ، در این صورت طول $\overline{AC}$ چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۷}$ ب) $\sqrt{۶}$ ج) $\sqrt{۵}$ د) ۲ هـ) $\sqrt{۳}$

۱۲۰) در شکل مقابل دو وتر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ بر هم عمودند و داریم: $OK = ۳$ و $OH = ۱$ و شعاع دایره‌ی کوچک‌تر، یعنی r، برابر ۱ است. شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چه‌قدر است؟ (بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)



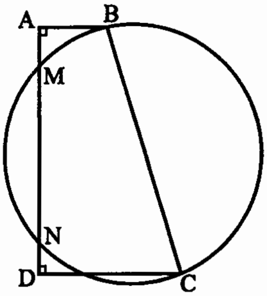
الف) ۵ ب) $۱+۲\sqrt{۵}$

ج) ۶ د) $۱+\sqrt{۱۰}$

هـ) $\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}$

۱۲۱) در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی $ABCD$ دایره‌ای به قطر BC ضلع AD را در دو نقطه‌ی M و N مطابق شکل قطع کرده است. داریم: $\overline{CD} = ۷$، $\overline{AB} = ۴$. اندازه‌ی $AM \times MD$ چه‌قدر است؟

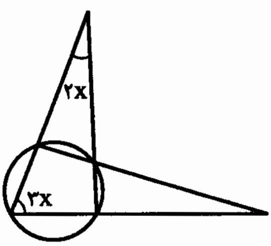
(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)



الف) ۲۸
ب) $\sqrt{۱۳}$
ج) ۴
د) ۳
ه) $\sqrt{۱۷}$

۱۲۲) در شکل زاویه‌ی x برابراست با:

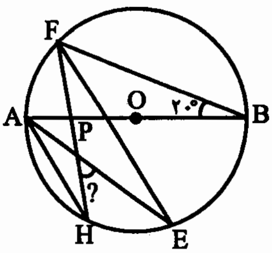
(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $x = ۱۰^\circ$
ب) $x = ۱۵^\circ$
ج) $x = ۱۸^\circ$
د) $x = ۲۰^\circ$
ه) $x = ۲۵^\circ$

۱۲۳) در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\angle FBA = ۲۰^\circ$، در این صورت زاویه‌ی $\angle HPE$ برابراست با:

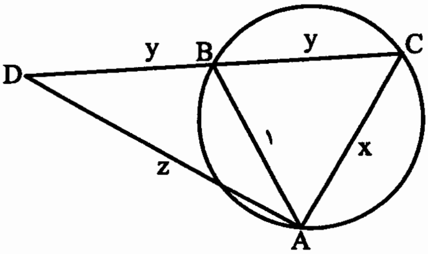
(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۲۰°
ب) ۲۵°
ج) ۳۰°
د) ۳۵°
ه) ۴۰°

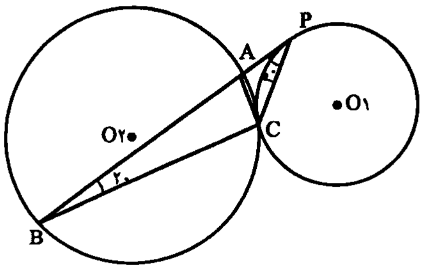
۱۲۴) در شکل زیر PA مماس بر دایره است و B وسط PC است. می‌دانیم که $\overline{AB} = ۱$. طول $\overline{AC}$ چه‌قدر است؟

(بیستمین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)



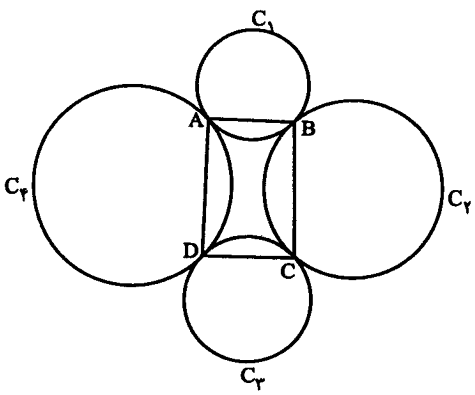
الف) $\frac{۳}{۲}$
ب) $\sqrt{۲}$
ج) $\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}$
د) ۲
ه) هیچ‌کدام

۱۲۵) در شکل مقابل BP بر دایره‌ی (O_1) مماس است. داریم: $\widehat{APC} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{CBA} = ۲۰^\circ$. هم‌چنین دوایر (O_1) و (O_2) بر هم مماس‌اند. اندازه‌ی $\widehat{BAC}$ کدام است؟ (بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



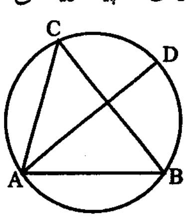
الف) ۸۰°　ب) ۱۳۰°
ج) ۶۰°　د) ۵۰°
ه) ۱۴۰°

۱۲۶) چهار دایره‌ی C_1، C_2، C_3 و C_4 مطابق شکل در نقاط A، B، C و D بر هم مماس هستند. کدام‌یک از احکام زیر در مورد چهارضلعی $ABCD$ همواره درست است؟ (سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $ABCD$ محیطی است.
ب) $ABCD$ محاطی است.
ج) $ABCD$ ذوزنقه است.
د) قطرهای $ABCD$ بر هم عمودند.
ه) قطرهای $ABCD$ هم‌دیگر ار نصف می‌کنند.

۱۲۷) مثلث ABC محاط در داخل دایره‌ی C را در نظر بگیرید. فرض کنید AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ باشد. اگر $\overline{AB} = \sqrt{۲BC} = \sqrt{۲AD}$، در این صورت زوایای مثلث ABC برابرند با: (چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



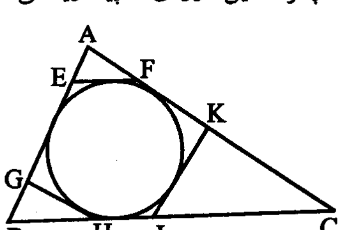
الف) $۱۵^\circ, ۳۰^\circ, ۱۳۵^\circ$　ب) $۳۰^\circ, ۶۰^\circ, ۹۰^\circ$
ج) $۴۵^\circ, ۴۵^\circ, ۹۰^\circ$　د) $۲۰^\circ, ۴۰^\circ, ۱۲۰^\circ$
ه) $۱۵^\circ, ۶۰^\circ, ۱۰۵^\circ$

۱۲۸) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\angle A = ۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلث‌های ABH و ACH به ترتیب برابر ۱ و ۳ باشند آن‌گاه شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ABC چه‌قدر است؟

(چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۵　ب) $\sqrt{۱۰}$　ج) $۲\sqrt{۲}$　د) ۴/۵　ه) ۳

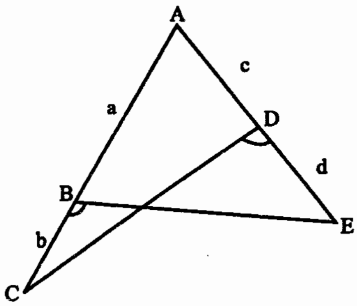
۱۲۹) مثلث ABC و دایره‌ی محاطی آن به شعاع r مفروض است. سه مماس EF، GH و KL را به ترتیب موازی BC، AC و AB رسم کرده‌ایم. اگر r_a، r_b و r_c به ترتیب شعاع‌های دایره‌های محاطی مثلث‌های AEF، BGH و CKL باشند، آن‌گاه کدام‌یک از روابط زیر همواره صحیح است؟ (پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $r - r_a < r_a + r_b$
ب) $r - r_a > r_b + r_c$
ج) $r - r_a = r_b + r_c$
د) $r - r_a = r_b - r_c$
ه) هیچ‌کدام از این روابط همواره برقرار نیست.

۱۳۰) در شکل زیر زوایای $\angle CDE$ و $\angle CBE$ مساوی‌اند. اگر $AB = a$، $BC = b$، $AD = c$ و $DE = d$ آن‌گاه داریم:

(شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $b(a+d) = d(c+d)$

ب) $ab = cd$

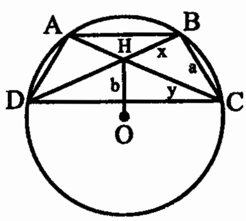
ج) $a(a+b) = c(c+d)$

د) $ad = bc$

ه) $c(a+b) = a(c+d)$

۱۳۱) در شکل زیر $ABCD$ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محاط در دایره‌ی واحد است. فرض کنید $x < y$. در این صورت $y - x$ برابراست با:

(پانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $(ab)^۲$

ب) $a\sqrt{b}$

ج) ab

د) $b\sqrt{a}$

ه) $\sqrt{ab}$

۱۳۲) مثلث ABC با اضلاع $\overline{AB} = ۴$، $\overline{AC} = ۵$ و $\overline{BC} = ۶$ مفروض است. نقاط A'، B' و C' پای ارتفاع‌های نظیر رأس‌های A، B و C هستند. A''، B'' و C'' را به ترتیب محل تلاقی امتداد این ارتفاع‌ها با دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گیریم. در این صورت $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ برابراست با:

(شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۴

ب) ۵

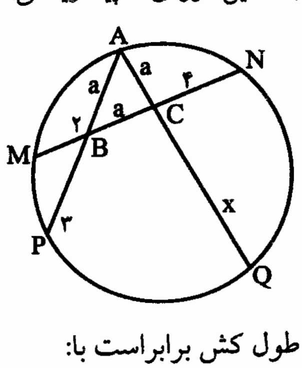
ج) $۳\sqrt{۲}$

د) $۲\sqrt{۳} + ۱$

ه) $۳\sqrt{۳} - ۱$

۱۳۳) دایره‌ی Ω به شعاع r و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a درون آن مفروض است. اگر A روی محیط دایره باشد و ضلع BC دایره را در نقاط N و M، و AB و AC دایره را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند و $\overline{BP} = ۳$، $\overline{MB} = ۲$ و $\overline{CN} = ۴$ آن‌گاه مقدار $\overline{CQ}$ کدام است؟

(هجدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۴

ب) ۴/۵

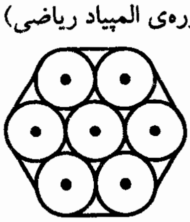
ج) ۵

د) ۵/۵

ه) با اطلاعات مسئله نمی‌توان آن را به دست آورد.

۱۳۴) هفت مداد مشابه را مطابق شکل با کش بسته‌ایم. اگر شعاع مدادها برابر ۱ واحد باشد طول کش برابراست با:

(هجدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۶π

ب) ۱۸

ج) $۱۲ + \pi$

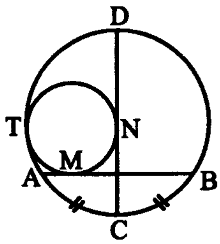
د) $۱۲ + ۲\pi$

ه) $۱۸ + ۲\pi$

۱۳۵) دایره‌ی C روی صفحه مفروض است. چهار نقطه‌ی A, B, C, D طوری روی دایره‌ی C قرار دارند که داریم:

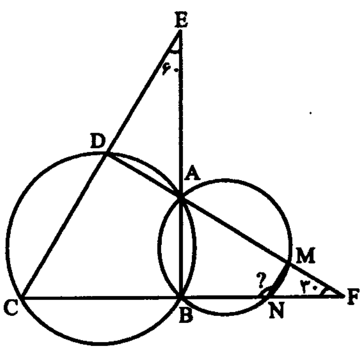
$$\widehat{AB}=\widehat{BD}=۶۰^\circ = ۲\ \widehat{AC}$$

دایره‌ی C' بر AB و CD در نقاط M و N و بر دایره‌ی C در نقطه‌ی T مماس داخلی است. مقدار زاویه‌ی $\widehat{MTN}$ کدام است؟
(هجدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۱۵°
ب) ۲۰°
ج) $۲۲/۵^\circ$
د) $۲۷/۵^\circ$
هـ) ۳۰°

۱۳۶) در چهارضلعی محاطی $ABCD$، E و F به ترتیب محل برخورد AB با CD و AD با BC می‌باشند. دایره‌ای دل‌خواه از A و B می‌گذرانیم تا AF و BF را به ترتیب در M و N قطع کند اگر $\widehat{AFB} = ۳۰^\circ$ و $\widehat{AED} = ۶۰^\circ$، آن‌گاه $\widehat{MNB}$ برابراست با:
(بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۹۰°
ب) ۱۲۰°
ج) ۱۳۵°
د) ۱۰۵°
هـ) ۱۵۰°

۱۳۷) سه دایره‌ی $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ به شعاع ۵ و به مراکز $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که $\overline{O_۱O_۲} = ۶$، $\overline{O_۱O_۳} = ۸$ و $O_۱O_۲$ بر $O_۱O_۳$ عمود است. مساحت ناحیه‌ای از $C_۱$ که با $C_۲$ و $C_۳$ تداخل ندارد، چه‌قدر است؟
(بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۱۰π
ب) ۱۲π
ج) ۲۴
د) ۴۸
هـ) ۵۴

۱۳۸) داخل یک نیم‌کره و صفحه‌ی گذرنده از دایره‌ی عظیمه‌ی آن را آینه کرده‌ایم. پرتوی را در نظر بگیرید که از نقطه‌ای روی نیم‌کره به سوی درون آن تابیده می‌شود. فرض کنید اگر پرتو به مرز دایره‌ی عظیمه برخورد کند روی همان مسیر برگردد. (توجه کنید که بردار عمود بر سطح، پرتو تابش و بازتابش همواره در یک صفحه‌اند و هر پرتو که به نیم‌کره برخورد می‌کند چنان منعکس می‌شود که نیمساز بین پرتو تابش و بازتابش از مرکز بگذرد.
(بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) مسیر این پرتو به مرز دایره‌ی عظیمه میل می‌کند.
ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم‌کره و دایره‌ی عظیمه‌ی آن به دل‌خواه نزدیک می‌شود.
ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.
د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش، متناوب است.
هـ) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش، متناوب است.

۱۳۹) دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در دو نقطه‌ی A و B متقاطع می‌باشند. طول خط‌المرکزین دو دایره برابر ۵ و شعاع‌های آن‌ها ۴ و ۳ می‌باشد. خطی که از نقطه‌ی A گذشته دو دایره را در نقاط M و N قطع کرده است. اگر اندازه‌ی وتر AM برابر ۴ باشد اندازه‌ی $\overline{MN}$ کدام است؟ (بیست و دومین دوره‌ی المپیاد مقدماتی ریاضی)

الف) $۴+۳\sqrt{۳}$
ب) ۷
ج) ۸
د) $۴+۳\sqrt{\frac{۱۳}{۵}}$
ه) $۴\sqrt{۵}$

۱۴۰) از نقطه‌ی P خارج دایره‌ی (O) دو قاطع بر دایره رسم می‌کنیم. اولی در A و B و دومی در C و D دایره را قطع می‌کند. از نقطه‌ی P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر M وسط کمان AB باشد و MD و MC، به ترتیب، AB را در E و F قطع نمایند و $\angle ETF = ۷۰^\circ$ و $\angle FTP = ۳۰^\circ$ آن‌گاه زاویه‌ی $\widehat{TPE}$ چه‌قدر است؟

(بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۶۰° ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۵۰° ه) ۷۵°

۱۴۱) در مثلث ABC، طول میانه‌ی رأس B، ۳ است و $\hat{A} = ۱۵۰^\circ$ طول میانه‌ی رأس A حداقل چه‌قدر است؟

(بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۱
ب) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}$
ج) $\frac{۳}{۲}(۳-\sqrt{۷})$
د) ۲
ه) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۱۴۲) می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دل‌خواه ABC، قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{DAC}$ برابراست با:

(بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $\frac{\hat{A}}{۲}$
ب) $\frac{\hat{B}}{۲}$
ج) $۹۰^\circ - \hat{A}$
د) $۹۰^\circ - \hat{B}$
ه) $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$

۱۴۳) درون دایره‌ای که خاصیت آینه‌ای دارد، نقطه‌ی A روی محیط آن است. چند راستا وجود دارد که اگر از A در امتداد آن‌ها پرتو نوری تابیده شود، پرتو در ۲۶ امین برخورد خود با دایره در نقطه‌ی A است؟

(بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۲۵
د) ۲۶ ه) تعداد نامتناهی راستا

۱۴۴) نیمسازهای داخلی مثلث ABC دایره‌ی محیطی آن را در نقاط A', B', C' قطع می‌کنند. اگر I' مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{B'I'C'}$ برابر کدام گزینه است؟

(بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $۹۰^\circ + \frac{\hat{B}+\hat{C}}{۴}$
ب) $۱۸۰^\circ - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{۴}$
ج) $۲\hat{A}+\hat{B}-\hat{C}$
د) $۱۸۰^\circ - \hat{A}$
ه) $۲\hat{A}$

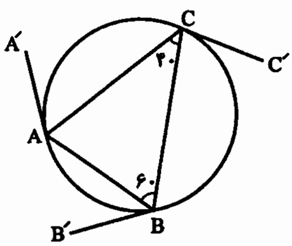
۱۴۵) در مثلث ABC نقطه‌ی D محل برخورد نیمساز زاویه‌ی A با ضلع BC و نقطه‌ی E محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $\overline{BE} = \overline{ED}$، کدام گزینه صحیح است؟ (بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) $۳\hat{A} + ۲\hat{C} = ۱۸۰^\circ$　ب) $۲\hat{A} + ۳\hat{C} = ۱۸۰^\circ$　ج) $\hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ$
د) $۲\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$　ه) $\hat{B} = ۲\hat{C}$

۱۴۶) در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط ضلع BC و نقطه‌ی E محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطه‌ی L وسط AM و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطه‌ی $۲(\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{BC}$ باشد، آن‌گاه $\frac{\overline{AK}}{\overline{AE}}$ کدام است؟ (بیست و چهارمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) ۱　ب) $\frac{۲}{۳}$　ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$　د) $\frac{۱}{۲}$　ه) $\frac{۳}{۴}$

۱۴۷) در مثلث ABC، $\hat{B} = ٦۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۰^\circ$. AA'، BB' و CC' هم‌طول و در یک جهت بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس‌اند. زاویه‌ی $\widehat{B'A'C'}$ چند درجه است؟ (بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

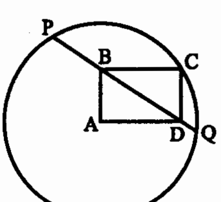


الف) ۳۰°　ب) ۴۰°
ج) ٦۰°　د) ۸۰°
ه) ۱۲۰°

۱۴۸) نقطه‌ی A روی دایره‌ی C ثابت است و نقطه‌های N, M طوری روی دایره حرکت می‌کنند که مقدار زاویه‌ی $\widehat{MAN}$ همواره ۳۳ درجه است. کدام گزینه صحیح است؟ (بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

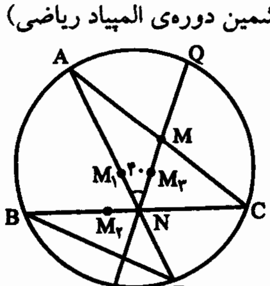
الف) همه‌ی خطوط MN از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند.
ب) همه‌ی خطوط MN به دایره‌ی ثابتی مماس هستند.
ج) تفاضل طول AN, AM مقداری ثابت است.
د) نسبت طول‌های AN, AM مقداری ثابت است.
ه) اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی مثلث AMN عددی ثابت است.

۱۴۹) فرض کنید $ABCD$، مستطیلی ۲×۱ باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط Q, P قطع کند، طول PQ چه‌قدر است؟ (بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) $\sqrt{\frac{۸۴}{۵}}$　ب) $\sqrt{\frac{۳۵}{۲}}$
ج) $\sqrt{\frac{۹۲}{۵}}$　د) $\sqrt{٦\pi}$
ه) $\sqrt{۲۰}$

۱۵۰) در شکل روبه‌رو $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و M به‌ترتیب وسط AD، BC، PQ و CA هستند و $\widehat{ANQ} = ۴۰^\circ$ زاویه‌ی بین دو خط گذرنده از $M_۱M_۲$ و $M_۲M_۳$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)
(بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) ۲۰　ب) ۴۰
ج) ۵۰　د) ۶۰
ه) ۸۰

فصل ۴

مکان هندسی

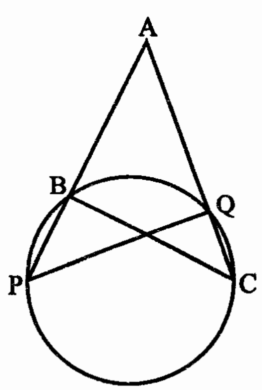
۱) چهار ضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند M را پیدا کنید، به طوری‌که دو چهارضلعی $ABCM$ و $AMCD$ دارای مساحت یکسان باشند.
(سیزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) یک پاره‌خط است.
ب) کمانی از یک دایره است.
ج) خطی عمود بر BC است.
د) خطی موازی AC است.
هـ) خطی است که با یکی از اضلاع موازی است.

۲) نقاط C, B, A روی یک خط واقع‌اند و B نقطه‌ای میان C, A است. تمام دایره‌های گذرا از نقاط B, A را در نظر می‌گیریم و از C مماس‌هایی بر آن‌ها رسم می‌کنیم. در این صورت مکان هندسی نقاط تماس برابر است با:
(چهاردهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)

الف) یک خط راست
ب) یک دایره
ج) یک نیم‌دایره
د) یک بیضی
هـ) هیچ‌کدام

۳) در مثلث ABC دایره‌هایی را در نظر بگیرید که از رئوس B و C می‌گذرند و AB و AC یا امتداد آن‌ها را در نقاطی مثل P و Q قطع می‌کنند. مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی مانند PQ کدام است؟ (بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد ریاضی)



الف) عمود منصف BC
ب) خطی که از A می‌گذرد.
ج) قسمتی از دایره‌ای که از C, B می‌گذرد.
د) دایره‌ای که از A می‌گذرد.
هـ) هیچ‌کدام

۴) مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو دایره‌ی متخارج $C_۲, C_۱$ با زوایای برابری رؤیت شوند کدام است؟

الف) خطی عمود بر خط‌المرکزین دو دایره است.
ب) فقط دو نقطه است.
ج) دایره‌ای است مماس بر دو دایره‌ی $C_۲, C_۱$
د) دایره‌ای است که مرکز آن روی خط‌المرکزین $C_۲, C_۱$ قرار دارد.
هـ) دو کمان از یک دایره است.

۵) نقاط B, A دو نقطه‌ی دل‌خواه ثابت روی دایره‌ای هستند. مکان هندسی مرکز ثقل همه‌ی مثلث‌هایی را که دو رأس آن‌ها نقاط B, A و رأس سوم آن‌ها روی دایره‌ی مزبور تغییر می‌کند، کدام است؟

الف) کمانی از یک دایره است. ب) یک خط است. ج) دو کمان از یک دایره‌اند.
د) یک دایره است. ه) یک بیضی است.

۶) نقاط B, A دو نقطه‌ی دل‌خواه ثابت روی دایره‌ی C هستند. مکان هندسی مرکز ارتفاعیه همه‌ی مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها نقاط B, A و رأس سوم آن‌ها روی دایره حرکت می‌کند کدام است؟

الف) یک کمان است. ب) خطی عمود بر AB است. ج) دایره‌ای مماس بر AB است.
د) دایره‌ای برابر با دایره‌ی C است. ه)دو کمان برابر از یک دایره هستند.

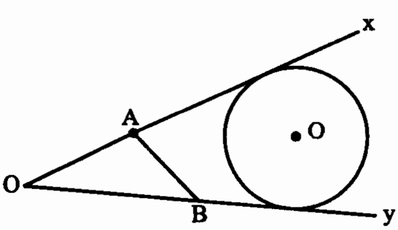
۷) نقاط B, A دو نقطه‌ی دل‌خواه ثابت روی دایره‌ی C هستند. مکان هندسی محل تلاقی نیمسازهای داخلی همه‌ی مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها نقاط B, A و رأس سوم آن‌ها رو دایره حرکت می‌کند کدام است؟

الف) یک دایره است. ب) دو دایره است. ج) یک کمان از دایره است.
د) دو کمان از یک دایره است. ه) دو کمان از دو دایره‌اند.

۸) پاره‌خط AB در صفحه مفروض است. مکان هندسی محل برخورد قطرهای همه‌ی متوازی‌الاضلاع‌هایی را تعیین کنید که یک ضلع آن‌ها پاره‌خط AB و ضلع دیگر آن دارای طولی کوچک‌تر از AB است.

الف) همه‌ی نقاط روی پاره‌خطی موازی و برابر با AB است.
ب) محیط نیم‌دایره‌ای به‌قطر AB است.
ج) همه‌ی نقاط داخل نیم‌دایره‌ای به قطر AB است.
د) محیط دایره‌ای به شعاع AB است.
ه) همه‌ی نقاط داخل دایره‌ای به قطر AB است.

۹) زاویه‌ی $x\hat{o}y$ و دو نقطه‌ی ثابت B, A روی آن مفروض‌اند. مکان هندسی مرکز ثقل همه‌ی مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها نقاط B, A و رأس دیگر آن‌ها نقطه‌ی O، مرکز همه‌ی دایره‌هایی باشند که مطابق شکل بر oy, ox مماس‌اند، کدام است؟



الف) یک نیم‌خط است.
ب) دو نیم‌خط است.
ج) یک دایره است.
د) خطی گذرنده از O است.
ه) دو خط عمود بر یک‌دیگر است.

۱۰) پاره‌خط ثابت AB مفروض است. نقطه‌ی M را طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ برابر با مقدار ثابت K باشد. از رأس A، عمودی را بر نیمساز داخلی MD از مثلث MAB فرود می‌آوریم تا ضلع MB را در نقطه‌ی X قطع کند. با تغییر M مکان هندسی X کدام است؟

الف) بخشی از یک دایره است. ب) یک دایره است. ج) یک خط است.
د) دو خط است. ه) یک نیم‌دایره است.

۱۱) دایره‌ی C به شعاع R و پاره‌خط مفروض AB به طول a در خارج آن مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی که قرینه‌ی هر نقطه از محیط دایره‌ی مفروض نسبت به نقاط موجود روی پاره‌خط AB می‌باشد، سطحی است به مساحت:

الف) $2\pi R^2$　　ب) $2\pi R^2 + aR$
ج) $\pi R^2 + 4aR$　　د) $2\pi R^2 + 2aR$
ه) $\pi R^2 + 2aR$

۱۲) مرکز ارتفاعیه، وسط قاعده و وسط راستای قاعده‌ی مثلث متغیری ثابت هستند. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث کدام است؟

الف) دو خط به موازات راستای قاعده　　ب) یک خط عمود بر راستای قاعده
ج) دو خط عمود بر راستای قاعده　　د) یک خط به موازات راستای قاعده
ه) یک دایره

۱۳) روی اضلاع OB, OA از زاویه‌ی مفروض O، دو نقطه‌ی متغیر B', A' را مشخص می‌کنیم، به‌طوری‌که نسبت $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$ مقداری ثابت باشد. روی $A'B'$ نقطه‌ی I را طوری برمی‌گزینیم که نسبت $\frac{A'I}{B'I}$ ثابت باشد. مکان هندسی I عبارت است از:

الف) یک خط راست　　ب) دو خط راست　　ج) کمانی از یک دایره
د) دو کمان از یک دایره　　ه) یک دایره

۱۴) BB', AA' دو قطر عمود بر هم‌دیگر از دایره‌ای به مرکز O هستند. وتر متغیر گذرنده از B دایره را در M و AA' را در N قطع می‌کند. مماسی مرسوم در نقطه‌ی M بر دایره و عمود وارده بر AA' در نقطه‌ی N، هم‌دیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. مکان هندسی P کدام است؟

الف) خطی گذرنده از مرکز دایره　　ب) خطی مماس بر دایره　　ج) دو خط گذرنده از مرکز دایره
د) کمانی از یک دایره　　ه) یک دایره

۱۵) قاعده‌ی BC و دایره‌ی محیطی مثلث متغیر ABC ثابت هستند. مکان هندسی مرکز ارتفاعیه مثلثی را که رأس‌های آن محل برخورد امتدادهای نیمسازهای داخلی مثلث ABC با دایره‌ی محیطی است، کدام است؟

الف) کمانی از یک دایره است.　　ب) سطح داخل یک دایره است.　　ج) محیط یک دایره است.
د) دو خط موازی است.　　ه) دو کمان از دو دایره است.

۱۶) قاعده‌ی BC و زاویه‌ی A از مثلث متغیر ABC ثابت هستند. روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A پاره‌خط AL را برابر با $\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ جدا می‌کنیم. مکان هندسی L کدام است؟

الف) یک کمان است.　　ب) دایره است.
ج) خطی موازی BC است.　　د) خطی عمود بر BC است.
ه) دو کمان برابر از یک دایره است.

۱۷) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه مانند P که با پاره‌خط‌های PC, PB, PA بتوان یک مثلث ساخت، چیست؟

الف) تمام نقاط خارج مثلث
ب) تمام نقاط خارج دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.
ج) تمام نقاط صفحه به غیر از دایره‌ی محیطی ABC است.
د) تمام نقاط خارج از مثلث به غیر از امتداد اضلاع است.
ه) همه‌ی نقاط روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.

۱۸) قرینه‌ی هر یک از نقاط روی محیط دایره‌ی محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ را نسبت به همه‌ی نقاط محیط مثلث مزبور در نظر می‌گیریم. مساحت حاصل برابر است با:

الف) $۳\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ ب) $\sqrt{۳}+۳\pi$ ج) $۵\sqrt{۳}+\pi$

د) $۵\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$ هـ) $۷\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$

۱۹) دایره‌ای و نقطه‌ی A در بیرون آن مفروض‌اند. فرض کنیم دایره‌ای که از A می‌گذرد بر دایره‌ی مفروض در نقطه‌ی B مماس شود و مماس‌هایی که بر دایره‌ی دوم از نقاط B, A رسم می‌شوند در نقطه‌ی M متقاطع باشند. مکان هندسی نقاطی مانند M عبارت‌اند از:

الف) دایره‌ای گذرنده از نقاط A و مرکز دایره‌ی اول

ب) کمانی گذرنده از نقاط A و مرکز دایره‌ی اول

ج) خطی به موازات خط گذرنده از A و مرکز دایره‌ی اول

د) خطی عمود بر خط گذرنده از A و مرکز دایره‌ی اول

هـ) دایره‌ای گذرنده از وسط پاره‌خطی که دو سر آن A و مرکز دایره‌ی اول است.

۲۰) از نقطه‌ی M داخل زاویه‌ی $x\hat{o}y$ دو خط به موازات اضلاع زاویه رسم می‌کنیم تا آن‌ها را در Q, P قطع کنند. مکان هندسی نقطه‌ی M برای آن‌که محیط متوازی‌الاضلاع $MPOQ$ مقدار ثابتی باشد، کدام است؟

الف) یک دایره ب) یک پاره‌خط ج) یک بیضی

د) دو پاره‌خط هـ) دو دایره

۲۱) نقطه‌ی K روی ضلع AC از مثلث ABC و نقطه‌ی P بر میانه‌ی BD از آن طوری اختیار شده‌اند که مثلث‌های BPC, APK معادل هستند. مکان هندسی نقطه‌ی برخورد خطوط BK, AP کدام است؟

الف) یک دایره مماس بر BC ب) یک دایره مماس بر BK, AB ج) پاره‌خطی موازی AC

د) پاره‌خطی موازی BC هـ) پاره‌خطی موازی AB

۲۲) نقطه‌ی A و خط راست L که از آن نمی‌گذرد مفروض‌اند. اگر B نقطه‌ای متغیر روی L باشد، مکان هندسی مجموعه نقاطی مانند C، به قسمی که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، کدام است؟

الف) بخشی از محیط یک دایره است.

ب) یک خط راست است.

ج) دو خط راست موازی است.

د) بخشی از محیط دو دایره است.

هـ) دو خط راست متقاطع است.

۲۳) دو دایره‌ی متحدالمرکز $C'(O,r), C(O,R)$ مفروض‌اند $(R>r)$. فرض کنید P نقطه‌ای ثابت روی دایره‌ی کوچک و B نقطه‌ای روی دایره‌ی بزرگ بوده و پاره‌خط BP دایره‌ی بزرگ را در نقطه‌ی دیگر C قطع می‌کند. از P عمودی بر BP رسم می‌کنیم تا دایره‌ی کوچک را در A قطع کند. مکان هندسی وسط پاره‌خط AB چیست؟

الف) یک پاره‌خط راست مماس بر دایره‌ی C' ب) پاره‌خط راست متقاطع با دایره‌ی C'

ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ د) دایره‌ای به شعاع $\frac{r}{۲}$

هـ) دایره‌ای به شعاع $R-r$

۲۴) دایره‌ی $C(O,R)$ و نقطه‌ی A در بیرون آن مفروض‌اند. اگر M نقطه‌ای تصادفی روی محیط دایره باشد، مکان هندسی نقطه‌ی برخورد خط مماس بر دایره در نقطه‌ی M و عمود منصف AM کدام است؟

الف) دو خط راست موازی ب) یک خط راست ج) محیط یک دایره
د) قسمتی از محیط یک دایره ه) دو خط راست عمود بر هم

۲۵) P یک نقطه‌ی داخلی دایره‌ی K و متمایز از مرکز آن است. همه‌ی وترهای K را که بر P می‌گذرند، در نظر بگیرید. مکان هندسی نقطه‌های وسط این وتر عبارت است از:

الف) دایره‌ای به جز یک نقطه آن
ب) یک دایره به شرط آن‌که فاصله‌ی P تا مرکز دایره، کوچک‌تر از نصف شعاع دایره‌ی K باشد؛ در غیر آن صورت کمانی کوچک‌تر از ۳۶۰° از یک دایره
ج) یک نیم‌دایره به جز یک نقطه آن
د) یک نیم‌دایره
ه) یک دایره

۲۶) مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع S مفروض است. مکان هندسی همه‌ی نقطه‌های P از صفحه‌ی مثلث را در نظر می‌گیریم که مجموع مربعات فاصله‌های P تا رأس‌های مثلث مقدار ثابت a باشد. این مکان هندسی:

الف) به شرط $a > s^{۲}$، یک دایره است.
ب) اگر $a = ۲s^{۲}$ فقط شامل سه نقطه است و اگر $a > ۲s^{۲}$ یک دایره است.
ج) فقط وقتی که $s^{۲} < a < ۲s^{۲}$ یک دایره‌ی با شعاع مثبت است.
د) به ازاء همه‌ی مقادیر a فقط شامل تعداد محدودی نقطه است.
ه) هیچ یک از این‌ها نیست.

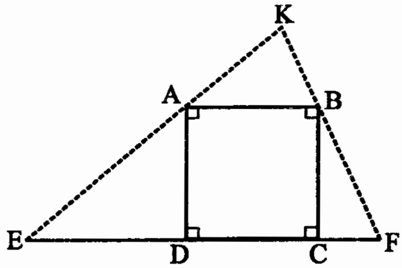
۲۷) دو دایره‌ی هم‌مرکز $C_۲, C_۱$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی A روی دایره‌ی بزرگ‌تر ثابت است. فرض کنید BC وتری متغیر از دایره‌ی بزرگ‌تر باشد که همواره بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC کدام است؟

الف) دو کمان از دو دایره ب) یک دایره ج) دو خط متقاطع روی OA
د) دو خط موازی ه) یک پاره‌خط

۲۸) مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{C} = ۹۰^\circ)$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی مانند P به شرطی که داشته باشیم $۲\overline{PC}^{۲} = \overline{PA}^{۲} + \overline{PB}^{۲}$ کدام است؟

الف) خطی غیر مشخص
ب) دایره‌ای گذرنده از M وسط ضلع AB
ج) خطی گذرنده از M، وسط AB و مرکز دایره‌ی محاطی مثلث
د) خطی گذرنده از M، وسط AB که نقاط برخورد آن با AB و BC مثلثی متشابه با BMC به وجود می‌آورد.
ه) خطی عمود بر میانه‌ی CM

۲۹) مربع $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی رأس سوم همه‌ی مثلث‌هایی که دو رأس متغیر آن با فاصله‌ی ثابت مطابق شکل روی امتداد ضلع CD (و در طرفین آن) بوده و مربع مزبور در آن محاط باشد، کدام است؟



الف) خطی عمود بر امتداد DC

ب) خطی موازی DC

ج) کمانی از دایره‌ای به مرکز وسط DC

د) دو خط به موازات DC

هـ) دو خط عمود بر امتداد DC

۳۰) پاره‌خط ثابت BC در صفحه مفروض است. همه‌ی مثلث‌هایی مانند ABC را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که محیط آن‌ها ثابت باشد. از رأس C، خطی به موازات نیمساز داخلی رأس A و از نقطه‌ی M وسط ضلع AC نیز خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند. مکان هندسی P (با تغییر A) کدام است؟

الف) خطی موازی BC ب) دو خط موازی ج) دو خط متقاطع

د) دو کمان از دو دایره هـ) یک دایره

۳۱) فاصله‌ی مرکزهای دو دایره به شعاع $\sqrt{۳}$، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست کم یکی از دو دایره را قطع می‌کند. مساحت این مجموع چه‌قدر است؟

الف) صفر ب) $۲\pi - \sqrt{۳}$

ج) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$ د) $۲\sqrt{۳} - \pi$

هـ) $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$

۳۲) رأس C از مثلث ABC در امتداد خطی موازی با ضلع ثابت AB تغییر می‌کند. مکان هندسی مرکز ارتفاعیه مثلث، عبارت است از:

الف) یک خط ب) یک دایره ج) یک سهمی

د) یک بیضی هـ) کمانی از یک دایره

۳۳) ABC یک مثلث حادالزاویه است و D نقطه‌ای متغیر روی ضلع BC است. $O_۱$ مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABD و $O_۲$ مرکز دایره محیطی مثلث ACD است و O نیز مرکز دایره‌ی محیطی مثلث $AO_۱O_۲$ است. مکان هندسی O کدام است؟

الف) قسمتی از یک دایره است. ب) قسمتی از یک سهمی است. ج) قسمتی از یک بیضی است.

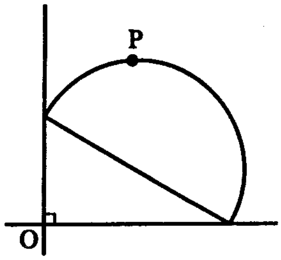
د) دو کمان از دو دایره است. هـ) یک پاره‌خط است.

۳۴) خط d و دو نقطه‌ی ثابت B, A روی آن مفروض‌اند. دو دایره‌ی متغیر $C_۲, C_۱$ در نقاط B, A و از یک طرف بر خط d مماس بوده و از طرفی در نقطه‌ی T نیز مماس خارجی‌اند. مکان هندسی T عبارت است از:

الف) بخشی از یک دایره ب) تمام نقاط داخل یک دایره ج) محیط یک دایره

د) دو کمان از دو دایره هـ) پاره‌خطی موازی با d

۳۵) دیسک نیم‌دایره‌ای بر روی دو ضلع یک زاویه‌ی قائمه از حالت قائم تا حالت افق می‌لغزد. نقطه‌ی P، نقطه‌ای ثابت روی محیط دیسک است. مکان هندسی P با لغزش دیسک کدام است؟



الف) کمانی از یک دایره
ب) پاره‌خطی که امتداد آن از مبدأ می‌گذرد
ج) کمانی از دایره‌ای به مرکز مبدأ
د) دقیقاً نیم‌دایره برابر با شعاع دیسک
ه) کمانی از یک بیضی

۳۶) X نقطه‌ای روی ضلع BC از مثلث ABC است. مماس مشترک دوایر محاطی مثلث‌های ACX, ABX را رسم می‌کنیم (غیر از BC) . فرض کنید این خط، AX را در نقطه‌ی Y قطع کند. با تغییر X، مکان هندسی Y کدام است؟

الف) پاره‌خطی موازی BC　　ب) پاره‌خطی متقاطع با BC　　ج) دو کمان از دو دایره
د) دو کمان برابر از یک دایره　　ه) کمانی از یک دایره

۳۷) پاره‌خط ثابت AB مفروض است. C نقطه‌ای متغیر روی آن است. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع $A'BC, AB'C$ را در یک طرف آن می‌سازیم. پاره‌خط‌های BB', AA' یک‌دیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کرده‌اند. مکان هندسی P عبارت است از:

الف) پاره‌خطی برابر و موازی AB　　ب) دو پاره‌خط متقاطع　　ج) دو کمان از دو دایره
د) کمانی از یک دایره　　ه) یک نیم‌دایره به قطر $\overline{AB}$

۳۸) در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از نقطه‌ی M عمودهای MF, ME, MD را به ترتیب بر اضلاع AC, AB, BC فرود می‌آوریم. مطلوب است مکان هندسی همه‌ی نقاط M در صورتی‌که $\widehat{EDF} = ۹۰^\circ$ باشد.

الف) خطی به موازات BC　　ب) کمانی از یک دایره　　ج) یک نیم‌دایره
د) فقط یک نقطه است　　ه) دو کمان از یک دایره

۳۹) نقطه‌ی D، درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، به گونه‌ای قرار دارد که $\widehat{BDC} = ۱۲۰^\circ$ می‌باشد. اگر امتدادهای CD, BD به ترتیب اضلاع AB, AC را در نقاط F, E قطع کنند. مکان هندسی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث AEF عبارت است از:

الف) پاره‌خطی به موازات ضلع BC
ب) کمانی از یک دایره
ج) دایره‌ای مماس بر ضلع BC
د) کمانی از یک دایره و مماس بر اضلاع AC, AB
ه) روی پاره‌خطی به طول $\frac{۲a}{۳}$

۴۰) $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب است. نقاط H, G, F, E وسط‌های اضلاع AB، BC، CD و DA هستند. مکان هندسی نقاطی مانند P، به‌طوری‌که $S_{PHAE} = S_{PEBF} = S_{PFCG} = S_{PGDH}$ عبارت است از:

الف) یک پاره‌خط　　ب) دو پاره‌خط　　ج) کمانی از یک دایره
د) فقط یک نقطه　　ه) دایره‌ای به مرکز محل تقاطع اقطار

بخش II

پاسخ مسائل

فصل ۱

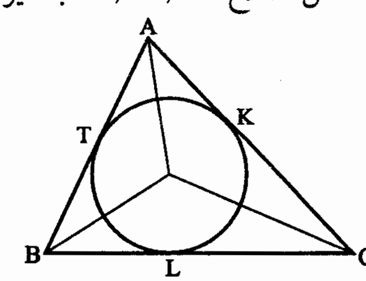
چند ضلعی‌ها

• **چندضلعی‌های محیطی**

اگر در یک چندضلعی محدب، نیمسازهای داخلی زوایای آن در یک نقطه همرس باشند، بدیهی است که این نقطه دارای فاصله‌ی یکسان از تمامی اضلاع چندضلعی می‌باشد؛ لذا اگر به مرکز این نقطه‌ی همرسی و شعاع فاصله‌ی آن از اضلاع، دایره‌ای رسم کنیم، بر تمامی اضلاع این چندضلعی مماس است. به این چندضلعی، یک چندضلعی محیطی گفته و به دایره‌ی محاط در آن دایره‌ی محاطی چند ضلعی می‌گویند.

بدیهی است که بنابر همرسی نیمسازهای داخلی در هر مثلث، مثلث یک چندضلعی محیطی خواهد بود.

اگر محل تماس اضلاع BC, AC, AB با دایره‌ی محاطی را به‌ترتیب L, K, T فرض کنیم، لذا:



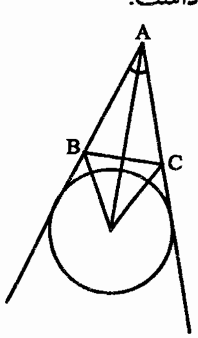
$$\begin{cases} \overline{AT} = \overline{AK} = p - a \\ \overline{BT} = \overline{BL} = p - b \\ \overline{CK} = \overline{CL} = p - c \end{cases}$$

(p نصف محیط و c, b, a به ترتیب طول اضلاع AB, AC, BC می‌باشند.)

درضمن اگر r طول شعاع دایره‌ی محاطی و S مساحت مثلث باشد، داریم $r = \frac{S}{p}$.

با ترسیم نیمسازهای خارجی زوایای C, B و نیمساز داخلی زاویه‌ی A بدیهی است که این سه نیمساز نیز همرسند و این نقطه‌ی همرسی نیز دارای فواصل یکسانی از سه ضلع است. لذا اگر به طول فاصله‌ی این نقطه از سه ضلع و به مرکز نقطه‌ی همرسی مزبور دایره‌ای رسم کنیم، این دایره نیز بر سه ضلع مماس است. به این دایره، دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A گویند. مشابهاً دوایر محاطی نظیر رئوس C, B نیز ترسیم می‌شوند.

اگر شعاع دوایر محاطی نظیر رئوس B،A و C را به ترتیب با r_b،r_a و r_c فرض کنیم، خواهیم داشت:

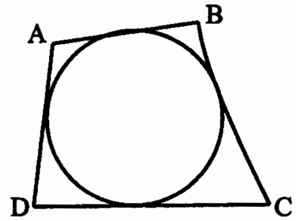


$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-c}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

از روابط مهم در این زمینه می‌توان به دو رابطه‌ی زیر اشاره کرد:

$$\begin{cases} \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} \\ \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r} \end{cases}$$

که در آن h_a, h_b, h_c به‌ترتیب ارتفاع‌های وارد بر اضلاع a, b, c می‌باشند.

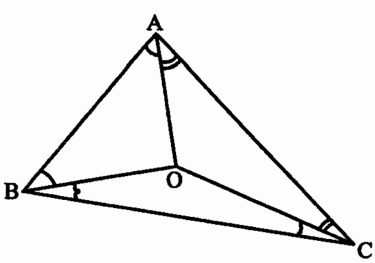


• چهارضلعی‌های محیطی
نکته‌ی قابل توجه در مورد چهارضلعی‌های محیطی این است که:
یک چهار ضلعی محیطی است، اگر وتنها اگر مجموع اضلاع روبه‌رو در آن با یک‌دیگر برابر باشند:

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$$

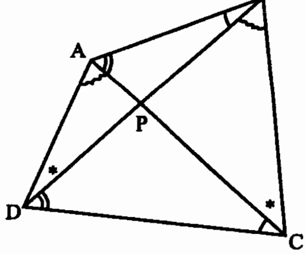
• چندضلعی‌های محاطی
به یک چندضلعی محدب، محاطی گویند اگر و تنها اگر عمودمنصف‌های اضلاع آن در یک نقطه همرس باشند. بدیهی است که این نقطه دارای فاصله‌ی یکسان از تمامی رئوس می‌باشد. لذا اگر به مرکز این نقطه‌ی همرسی و شعاع فاصله‌ی آن از رئوس چندضلعی، دایره‌ای ترسیم شود، این دایره از تمامی رئوس چندضلعی عبور می‌کند.
به دایره‌ی گذرنده از رئوس این چندضلعی محاطی، دایره‌ی محیطی این چندضلعی گفته می‌شود.
بنا بر همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، مثلث یک چندضلعی محاطی نیز خواهد بود.

اگر O، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد، داریم:



$$\begin{cases} O\hat{B}C=O\hat{C}B=۹۰-\hat{A} \\ O\hat{A}B=O\hat{B}A=۹۰-\hat{B} \\ O\hat{A}C=O\hat{C}A=۹۰-\hat{C} \end{cases}$$

• چهارضلعی‌های محاطی
برای تشخیص محاطی بودن یک چهارضلعی، به‌جز آن‌چه که به عنوان تعریف کلی برای چندضلعی‌های محاطی بیان کردیم، روش‌های دیگری که در واقع خواص چهارضلعی‌های محاطی محسوب می‌شوند، وجود دارد:



الف) $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰$
رابطه‌ی فوق کافی است تا چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد.

ب) $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=\dfrac{\widehat{AD}}{۲}\quad \widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\dfrac{\widehat{AB}}{۲};\quad \widehat{BAC}=\widehat{BDC}=\dfrac{\widehat{BC}}{۲}\quad ;\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=\dfrac{\widehat{CD}}{۲}$
یکی از تساوی‌های فوق کافیست تا چهارضلعی محدب $ABCD$ محاطی باشد.
ج) اگر P محل تقاطع اقطار BD, AC باشد، تساوی $\overline{AP}\cdot\overline{PC}=\overline{BP}\cdot\overline{PD}$ کافی است تا $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد.

• قضیه‌ی بطلمیوس
در چهارضلعی $ABCD$ به اقطار BD, AC رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

لازم به ذکر است که در حالت کلی و برای هر چهاضلعی محدب، نامساوی زیر برقرار است:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

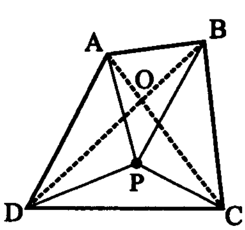
(تساوی وقتی برقرار است که چهارضلعی مزبور محاطی باشد.)

• اصل حمار (نامساوی مثلثی)
بنابراین اصل کوتاه‌ترین فاصله‌ی ممکن بین دو نقطه، یک خط راست است، در نتیجه‌ی این اصل در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.
بنابراین اگر c, b, a سه عدد حقیقی مثبت باشند، با این سه عدد می‌توان یک مثلث ساخت، اگر و تنها اگر سه نامساوی هم‌زمان برقرار باشد:

$$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$$

از اصل فوق دو قضیه‌ی مهم زیر نتیجه می‌شود:
۱) در هر مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.
۲) در هر مثلث زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

۱) گزینه‌ی «د» صحیح است.

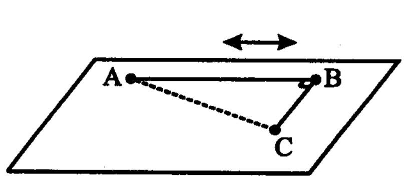


نقطه‌ای دل‌خواه مانند P را در داخل چهار ضلعی در نظر می‌گیریم. هم‌چنین با ترسیم دو قطر محل تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. با در نظر گرفتن دو مثلث PBD, PAC ، نامساوی مثلثی را در مورد آن‌ها به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} \overline{PB}+\overline{PD}\geq\overline{BD} \\ \\ \overline{PA}+\overline{PC}\geq\overline{AC} \end{cases}$$

در هر دو نامساوی، علامت تساوی وقتی برقرار است که نقطه‌ی P روی قطرهای AC, BD (به ترتیب دو نامساوی) قرار داشته باشد. لذا دو نامساوی به‌صورت توأم وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که P روی دو قطر قرار داشته باشد و پرواضح است که این نقطه فقط و تنها فقط محل تقاطع دو قطر است.

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



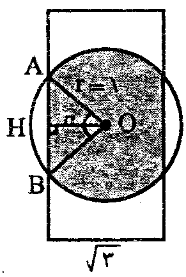
کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه، یک خط راست است، لذا می‌بایستی از A به C رسم کنیم، ولی به دلیل وجود مانع، مسیر مزبور روی مانع مشخص نیست، به همین دلیل صفحه را در امتداد AB باز کرده تا مانع از بین برود.
روشن است که این عمل، تغییری در طول مسیر مورچه (کوتاه‌ترین مسیر) ایجاد نمی‌کند و ضمناً به طول AB اولیه مقدار $\frac{۲\pi r}{۲}-۲r$ (r شعاع استوانه است)، اضافه می‌شود و طول BC نیز ثابت خواهد ماند.

$$\overline{AB}=۱۰-\pi+\pi(۱)-۲=۸\quad,\quad\overline{BC}=۶$$

با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث برای مثلث ABC، طول AC (کوتاه‌ترین مسیر) محاسبه خواهد شد.

$$\overline{AC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ = ۸^۲ + ٦^۲ = ٦۴ + ۳٦ = ۱۰۰ \Rightarrow \overline{AC} = ۱۰$$

۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



استوانه را باز می‌کنیم تا به یک مستطیل تبدیل شود. حال مستطیلی به طول و عرض $۳, \sqrt{۳}$ داریم که حشره در مرکز آن با نخی بسته شده است. روشن است، مساحتی را که حشره می‌تواند روی این سطح پوشش دهد، سطح دایره‌ای به شعاع طول نخ است (که در این‌جا ۱ است).
ولیکن با توجه به این‌که قطر دایره (۲)، بزرگ‌تر از طول مستطیل ($\sqrt{۳}$) می‌باشد. بنابراین منطقه‌ی پوشش داده شده توسط حشره قسمت هاشورخورده در شکل است که می‌بایستی محاسبه شود.

$$\text{سطح هاشورخورده} = \pi r^۲ - ۲[\frac{\alpha}{۲\pi}(\pi r^۲) - \frac{۱}{۲}(\overline{OH} \times \overline{AB})]$$

$$OAH \text{ در مثلث} : \cos\frac{\alpha}{۲} = \frac{\overline{OH}}{r} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} = \frac{\pi}{٦} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\pi}{۳}$$

$$\overline{AB} = ۲\overline{AH} = ۲\sqrt{۱^۲ - (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = ۱ \quad , \quad S_{O\hat{A}B} = \frac{۱}{۲}(\overline{OH} \times \overline{AB}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

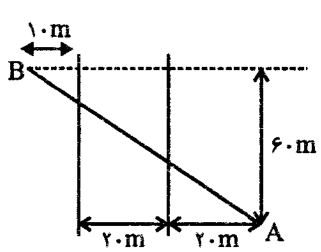
$$\text{سطح هاشور خورده} = \pi - ۲[\frac{\pi}{٦} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}] = \frac{۲\pi}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

البته بدون انجام محاسبات فوق و با کمی دقت می‌توانستیم پاسخ صحیح را پیدا کنیم. بدین صورت که بخش هاشورخورده دارای مساحتی کم‌تر از π است. بنابراین تنها گزینه‌ی «الف» است که می‌تواند جواب صحیح باشد. زیرا سایر گزینه‌ها مقادیری بزرگ‌تر از π می‌باشند.

۴) گزینه‌ی «؟» صحیح است.

با یک استدلال، تمام گزینه‌ها را رد می‌کنیم و مدعی می‌شویم که پاسخ صحیح در بین گزینه‌ها موجود نمی‌باشد.
فرض کنید دونده، مطابق شکل پس از طی سه تکه $d_۱, d_۲, d_۳$ از A به B برسد. زمان لازم برابر است با:

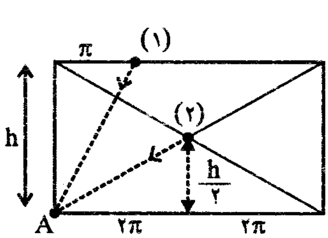
$$t = \frac{d_۱}{۱۰} + \frac{d_۲}{۵} + \frac{d_۳}{۱۰} = \frac{d_۱ + d_۲ + d_۳}{۱۰} + \frac{d_۲}{۱۰} > \frac{\overline{AB}}{۱۰} + \frac{۱۰}{۱۰} = \frac{۵۰}{۱۰} + ۱ = ٦$$



بنابراین دونده به زمانی بیش از ۶ ثانیه احتیاج خواهد داشت، در حالی که همه‌ی گزینه‌ها از ۶ کوچک‌ترند.
ولیکن مورد فوق راه حل مسئله نمی‌باشد. برای حل مسئله ابتکار زیر را بکار می‌بریم:
در جاده گلی که سرعت نصف می‌شود، می‌توان سرعت را به اندازه‌ی اولیه‌ی خود حفظ کرده و در عوض ابعاد مسیر را (هم در طول و هم در عرض)، دو برابر کرده و سپس مسئله را حل کنیم.

$$t = \frac{\overline{AB}}{۱۰} = \frac{\sqrt{(٦۰)^۲ + (۵۰)^۲}}{۱۰} = \sqrt{٦۱} \text{ ثانیه}$$

۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

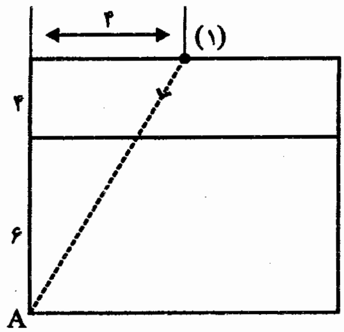


استوانه را در امتداد خط موازی با محور استوانه و گذرنده از نقطه‌ی A باز می‌کنیم. موقعیت دو مگس مطابق شکل خواهد بود. وقتی سرعت آن‌ها یکسان بوده و از طرفی هم‌زمان به نقطه‌ی A می‌رسند. بنابراین مسافت یکسانی را تا نقطه‌ی A طی خواهند کرد. بنابراین:

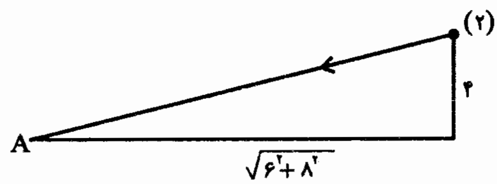
$$\pi^۲ + h^۲ = ۴\pi^۲ + (\frac{h}{۲})^۲ \Rightarrow h = ۲\pi$$

۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

برای پیدا کردن مسیر حشره‌ی ۱ دیوار قائم را باز و با سطح افق هم‌سطح می‌کنیم. (مطابق شکل I)



(I)



(II)

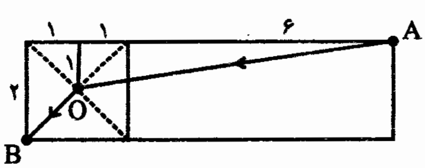
وحشره‌ی ۲ که با پرواز اقدام به حرکت می‌کند وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را مطابق شکل (II) طی می‌کند. اگر V سرعت حشره‌ها باشد:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\sqrt{(6+4)^2+4^2}}{V} = \dfrac{\sqrt{116}}{V} \\ t_2 = \dfrac{\sqrt{(6^2+8^2)+4^2}}{V} = \dfrac{\sqrt{116}}{V} \end{cases}$$

پس دو حشره هم‌زمان به نقطه‌ی A می‌رسند.

۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.

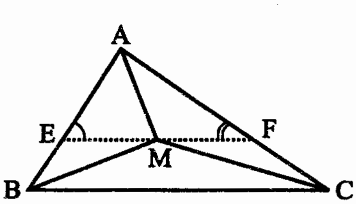
مانند مسئله‌ی قبل مکعب را مطابق شکل باز می‌کنیم.



روشن است که بهترین مسیر $\overline{AO}+\overline{OB}$ خواهد بود. پس:

$$\overline{AO}+\overline{OB} = \sqrt{(6+1)+1^2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}+\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



فرض می‌کنیم BC، کوچک‌ترین ضلع مثلث ABC می‌باشد. (پس $\hat{A}$ نیز کوچک‌ترین زاویه خواهد بود).
از خط M خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا اضلاع AC, AB را به ترتیب در F, E قطع کند.

$$\begin{cases} EBM \text{ در مثلث}: \overline{MB} < \overline{EB}+\overline{EM} \\ FCM \text{ در مثلث}: \overline{MC} < \overline{FC}+\overline{FM} \end{cases} \Rightarrow \overline{MB}+\overline{MC} < \overline{EF}+\overline{EB}+\overline{FC} \quad (1)$$

حال در مثلث AEF اولاً می‌دانیم که یکی از زوایای $\widehat{AME}, \widehat{AMF}$ منفرجه است، لذا $\overline{AM}$ از یکی از اضلاع AE و یا AF کوچک‌تر است که ما فرض می‌کنیم AF باشد. پس:

$$\overline{AM} < \overline{AF} \quad (2)$$

ثانیاً چون $\hat{F}=\hat{C}, \hat{E}=\hat{B}$، لذا $\hat{A}$ کوچک‌ترین زاویه در مثلث AEF نیز خواهد بود. بنابراین:

$$\overline{EF} < \overline{AE} \quad (3)$$

با جمع طرفین نامساوی‌های (۱) و (۲):

$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}<\overline{EF}+\overline{EB}+\overline{AC}$$

و با قرار دادن $\overline{AE}$ به جای $\overline{EF}$ از نامساوی (۳) در نامساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}<\overline{AE}+\overline{EB}+\overline{AC}$$

بنابراین:

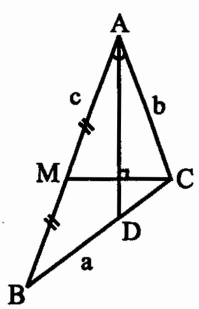
$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}<\overline{AB}+\overline{AC}$$

پس مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس مثلث از مجموع دو ضلع بزرگ‌تر مثلث، کوچک‌تر خواهد بود.

۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

فرض می‌کنیم در مثلث ABC، میانه‌ی CM و نیمساز AD بر یک‌دیگر عمودند. روشن است که مثلث AMC متساوی‌الساقین خواهد بود، لذا $c=۲b$ پس:

$$c>b$$



بنابراین ترتیب اضلاع مثلث به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} c>b>a \ : \ (I) \\ a>c>b \ : \ (II) \\ c>a>b \ : \ (III) \end{cases}$$

در مورد نامساوی‌های $(I),(II)$:

$$c=b+۱$$

بنابراین:

$$b+۱=۲b\Rightarrow b=۱\Rightarrow \begin{cases} (I):\ ۲>۱>۰ \\ (II):\ ۳>۲>۱ \end{cases}$$

که هر دو رد می‌شوند، زیرا در (I)، یکی از اضلاع دارای طول صفر است که غلط است و در (II)، $۱+۲=۳$ (مجموع دو ضلع برابر ضلع سوم‌است) که این نیز قابل قبول نمی‌باشد. پس تنها حالت صحیح مورد (III) است و:

$$c>a>b\Rightarrow b+۲=c\Rightarrow$$

$$b+۲=۲b\Rightarrow b=۲\Rightarrow a=۳,c=۴\Rightarrow \text{محیط مثلث}=۲+۳+۴=۹$$

۱۰) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

فرض کنید h_c,h_b,h_a به ترتیب ارتفاع رأس‌های C,B,A بوده و S نیز مساحت مثلث ABC باشد. اگر c,b,a به ترتیب طول اضلاع AB,AC,BC باشند، طبق نامساوی مثلثی داریم:

$$a+c>b>a-c\Rightarrow \frac{۲S}{h_a}+\frac{۲S}{h_c}>\frac{۲S}{h_b}>\frac{۲S}{h_a}-\frac{۲S}{h_c}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_c}>\frac{۱}{h_b}>\frac{۱}{h_a}-\frac{۱}{h_c}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}>\frac{۱}{h_b}>\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}\Rightarrow ۶>h_b>۲$$

۱۱) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

می‌دانیم که: $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}\geq\overline{A_1A_n}$

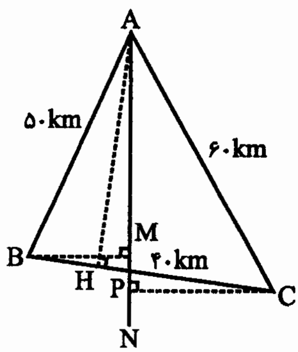
و حالت تساوی وقتی برقرار است که همه‌ی شهرها روی یک خط باشند.

$$\overline{A_1A_n}=\frac{n(n-1)}{2}$$

از طرفی $\overline{A_1A_2}+\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$

لذا همه‌ی شهرها روی یک خط قرار داشته و جاده نیز بر همین خط منطبق خواهد بود.

۱۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



محل تلاقی جاده با BC را P می‌نامیم. عمودهای CN, BM

(فواصل C, B از جاده) و هم‌چنین ارتفاع AH ترسیم می‌شوند.

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABP: \overline{BM}=\dfrac{2S_{\overset{\triangle}{ABP}}}{\overline{AP}} \\ \text{در مثلث } ACP: \overline{CN}=\dfrac{2S_{\overset{\triangle}{ACP}}}{\overline{AP}} \end{cases} \Rightarrow \overline{BM}+\overline{CN}=\frac{2S_{ABC}}{\overline{AP}}$$

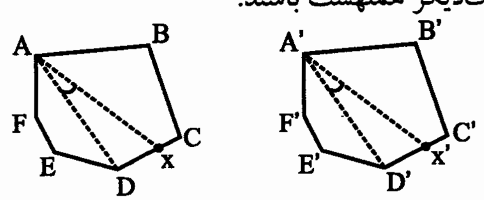
با توجه به تساوی اخیر $\overline{BM}+\overline{CN}$، وقتی حداکثر است که مخرج کسر، حداقل بوده و این در صورتی است که P، پای ارتفاع باشد. پس:

$$\max(\overline{BM}+\overline{CN})=\frac{2S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\overline{AH}}=\overline{BC}\Rightarrow\max(\overline{BM}+\overline{CN})=40Km$$

• همنهشتی (برابری) در چند ضلعی‌ها

تعریف: دو n ضلعی، اعم از محدب یا مقعر با یک‌دیگر همنهشت (برابر) هستند، اگر و تنها اگر، هر n ضلع از آن‌ها، نظیر به نظیر با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌چنین هر n زاویه از آن‌ها نیز، نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

مثلاً، اگر دو شش ضلعی زیر با یک‌دیگر همنهشت باشند:



$(\overline{AB}=\overline{A'B'};\overline{BC}=\overline{B'C'};\overline{CD}=\overline{C'D'};\overline{DE}=\overline{D'E'};\overline{EF}=\overline{E'F'};\overline{AF}=\overline{A'F'};)$

$(\hat{A}=\hat{A}';\hat{B}=\hat{B}';\hat{C}=\hat{C}';\hat{D}=\hat{D}';\hat{E}=\hat{E}';\hat{F}=\hat{F}')$

تذکر: اگر دو n ضلعی با یک‌دیگر همنهشت باشند، کلیه‌ی اجزاء متناظر نیز، با یک‌دیگر برابر بوده و کلیه زوایای بین اجزاء متناظر نیز با هم برابر خواهند بود.

مثلاً با توجه به شکل، اگر X', X روی دو ضلع متناظر $C'D', CD$ طوری اختیار شوند که:

$$\frac{\overline{CX}}{\overline{XD}}=\frac{\overline{C'X'}}{\overline{X'D'}}$$

بنابراین، $A'X', AX$ دو جزء متناظر بوده و در نتیجه برابر خواهند بود $(\overline{AX}=\overline{A'X'})$.

هم‌چنین چون $A'D', AD$ نیز دو جزء متناظر بوده و در نتیجه برابرند، پس

$$\widehat{XAD}=\widehat{X'A'D'}$$

همنهشتی در مثلث‌ها

در حالتی که $n = ۳$ و یا به عبارت دیگر دو سه ضلعی (مثلث) با هم‌دیگر همنهشت باشند، سه قضیه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

۱) اگر سه ضلعی از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت‌اند.

۲) اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن دو ضلع از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

۳) اگر دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه از مثلث دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند.

لازم به ذکر است که سه قضیه‌ی فوق همان تعریف اولیه‌ی همنهشتی دو n ضلعی، در مثلث‌ها می‌باشد؛ به عبارت دیگر حالت $n = ۳$ تنها حالت از حالت کلی برابری (همنهشتی) چندضلعی‌ها است که موارد گفته شده در ۳ قضیه‌ی فوق، سایر موارد در تعریف کلی را نتیجه خواهد داد. (مثلاً برابر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها، برابری ضلع سوم و دو زاویه‌ی دیگر را نتیجه خواهد داد.)

۱۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

روشن است که سه مثلث AMN، NPC و MPB با هم‌دیگر همنهشت‌اند.

$$\text{در مثلث } NPC : \widehat{PNC} = ۳۰°$$

از طرفی:
$$\widehat{MNP} = ۶۰° \Rightarrow \widehat{ANM} = ۹۰ \Rightarrow \triangle PNC \simeq \triangle AMN$$

اگر طول اضلاع مثلث ABC را a فرض کنیم:

$$\overline{PC} = \overline{AN} \Rightarrow \overline{NC} + \overline{PC} = a$$

پس:
$$\text{در مثلث } NPC : \overline{PC} = \frac{\overline{NC}}{۲} \Rightarrow \overline{NC} = \frac{۲}{۳}a, \overline{PC} = \frac{a}{۳}$$

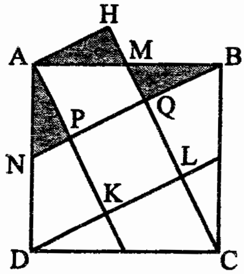
با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث خواهیم داشت:

$$\overline{NP} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

$$S_{\overset{\triangle}{NPC}} = S_{\overset{\triangle}{AMN}} = S_{\overset{\triangle}{MBP}} = \frac{۱}{۲}\overline{PC}.\overline{NP} = \frac{۱}{۲}(\frac{a}{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳}a) = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۸}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = ۱ - ۳\frac{S_{\overset{\triangle}{NPC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = ۱ - ۳(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۸} : \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}) = \frac{۱}{۳}$$

۱۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



با توجه به شکل، عمودی را از رأس A بر امتداد CM فرود می‌آوریم. همنهشتی مثلث‌های APN, MBQ, AHM، متضمن مربع بودن $APQH$ خواهد بود. لذا در شکل اولیه جمع هر مثلث کوچک کناری $(\triangle ANP)$ با هر ذوزنقه کناری $(AMPQ)$، مربعی برابر با مربع وسطی $(PQLK)$ را تولید خواهد کرد. لذا:

$$\frac{S_{PQLK}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{PQLK}}{۵S_{PQLK}} = \frac{۱}{۵}$$

۱۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

با دقت در شکل سؤال داریم:

$$\begin{cases} \overline{AN} = \overline{AC} \\ \overline{AM} = \overline{AB} \\ \widehat{MAC} = \widehat{NAB} = ۶۰^\circ - \widehat{MAN} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABN \simeq \triangle ACM$$

برابری اخیر دو مثلث ACM, ABN ایجاب می‌کند که دو میانه‌ی نظیر متناظر AF, AE (وارد بر دو ضلع متناظر MC, BN) با یک‌دیگر برابر باشند، پس $(\overline{AE} = \overline{AF})$ و ضمناً $\widehat{EAN} = \widehat{FAC}$.

$$\widehat{EAF} = \widehat{EAN} + \widehat{NAF} = \widehat{FAC} + \widehat{NAF} = ۶۰^\circ$$

بنابراین مثلث AEF مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویه‌ی رأس آن ۶۰° است، لذا $\triangle AEF$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد بود.

۱۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

با دقت در شکل، روشن است که مثلث‌های BCD, ACE همنهشت‌اند و BD, AE دو ضلع متناظر از آن‌ها می‌باشند. با توجه به این‌که:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{ND}} = K$$

پس CN, CM نیز متناظر خواهند بود. لذا

$$\overline{CM} = \overline{CN} \text{ و } \widehat{NCB} = \widehat{MCA}.$$

$$\widehat{NCM} = \widehat{NCA} + \widehat{ACM} = \widehat{NCA} + \widehat{NCB} = ۶۰^\circ$$

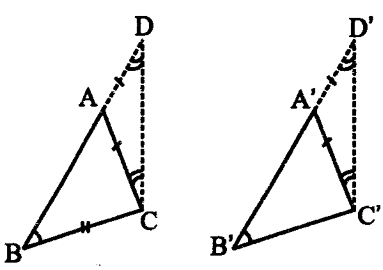
بنابراین مثلث CMN، مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

۱۷) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

برای اثبات قسمت «ج»:

فرض می‌کنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{A'B'} + \overline{A'C'} \quad , \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad , \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}$$



در هر دو مثلث اضلاع AB و $A'B'$ را به ترتیب به اندازه‌ی AC و $A'C'$ امتداد می‌دهیم تا نقاط D و D' حاصل شوند. لذا:

$$\overline{BD} = \overline{B'D'} = \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{A'B'} + \overline{A'C'}$$

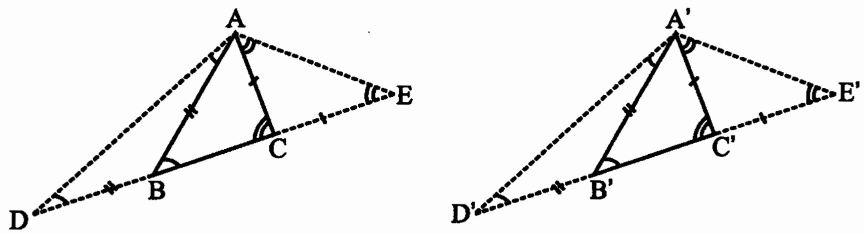
پس دو مثلث BDC و $B'D'C'$ بنا بر دو ضلع و زاویه‌ی بین با یک‌دیگر همنهشت‌اند. پس:

$$\hat{D} = \hat{D'}.$$

از طرفی با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های $A'D'C', ADC$ داریم $\hat{A} = \hat{A'} = ۲\hat{D} = ۲\hat{D'}$ پس $\hat{C} = \hat{C'}$.

بنابراین دو مثلث $A'B'C', ABC$ بنا بر دو ضلع و زاویه‌ی بین برابر خواهند بود.

برای اثبات قسمت «د»:



می‌دانیم: $\hat{C}=\hat{C'}, \hat{B}=\hat{B'}$ و هم‌چنین $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'B'}+\overline{A'C'}+\overline{B'C'}$

روی امتداد اضلاع BC و $B'C'$ از دو مثلث، مطابق شکل E', E, D', D را به اندازه‌های $\overline{DB}=\overline{AB}$ و $\overline{CE}=\overline{AC}$ و متشابهاً برای $A'B'C'$ ترسیم می‌کنیم.

از همنهشتی مثلث‌های $A'D'E', ADE$ به راحتی و مطابق اثبات قسمت «ج»، همنهشتی $\triangle A'B'C', \triangle ABC$ نتیجه می‌شود.

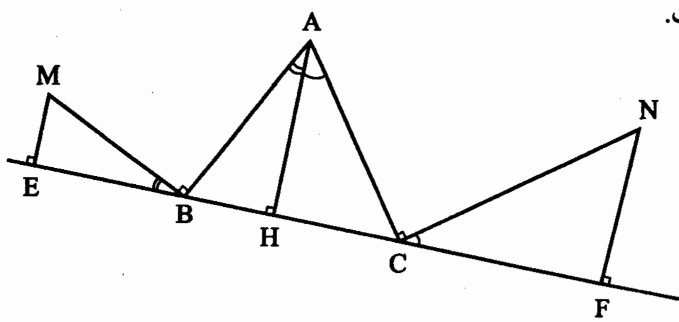
۱۸) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

با توجه به شکل، مثلث‌های AMC, ABN با یک‌دیگر همنهشت‌اند، زیرا:

$$\begin{cases}\overline{AN}=\overline{AC}\\ \widehat{MAC}=\widehat{NAB}=\hat{A}+\hat{\theta}\\ \overline{AM}=\overline{AB}\end{cases} \Rightarrow \triangle ABN\simeq\triangle AMC \text{ (بنابر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها) } \Rightarrow \overline{BN}=\overline{CM}$$

بنابراین نتیجه‌ی فوق مستقل از اندازه‌ی θ می‌باشد.

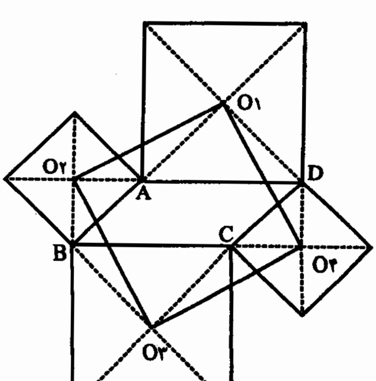
۱۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



$$\begin{cases}\widehat{BAH}+\hat{B}=\widehat{MBE}+\hat{B}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{MBE}\\ \hat{H}=\hat{E}=۹۰^\circ\\ \overline{AB}=\overline{BM}\end{cases} \Rightarrow \triangle ABH\simeq\triangle BME \Rightarrow \overline{EB}=\overline{AH}$$

مشابه با اثبات بالا، ثابت می‌کنیم که مثلث‌های CNF, AHC نیز با یک‌دیگر همنهشت‌اند و لذا: $\overline{CF}=\overline{AH}$

و با توجه به دو تساوی اخیر: $\overline{CF}=\overline{EB}\Rightarrow \dfrac{\overline{EB}}{\overline{CF}}=۱$



۲۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که مثلث‌های $AO_۱O_۲$ ، $BO_۲O_۳$ ، $CO_۳O_۴$ و $DO_۱O_۴$ بنا بر دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم‌دیگر برابرند. بنابراین طول‌های $\overline{O_۱O_۲}$ ، $\overline{O_۲O_۳}$ ، $\overline{O_۳O_۴}$ ، $\overline{O_۱O_۴}$ که اضلاع متناظر مثلث‌های فوق‌الذکر می‌باشند با یک‌دیگر برابر خواهند بود.

$(\overline{O_۱O_۲} = \overline{O_۲O_۳} = \overline{O_۳O_۱} = \overline{O_۴O_۱})$

حال اثبات می‌کنیم که تمامی زوایای چهارضلعی $O_۱O_۲O_۳O_۴$ قائمه می‌باشند.

می‌دانیم: $\triangle AO_۱O_۲ \simeq \triangle DO_۱O_۴ \Rightarrow A\widehat{O_۱}O_۲ = D\widehat{O_۱}O_۴$

$$\Rightarrow O_۲\widehat{O_۱}O_۴ = A\widehat{O_۱}O_۲ + A\widehat{O_۱}O_۴ = D\widehat{O_۱}O_۴ + A\widehat{O_۱}O_۴ = A\widehat{O_۱}D = ۹۰^\circ$$

سایر زوایا نیز مشابه با اثبات فوق، ثابت می‌شوند که برابر با ۹۰° می‌باشند. بنابراین $O_۱O_۲O_۳O_۴$ یک مربع است.

۲۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

اگر طول ضلع مربع a باشد، محیط هر مستطیل برابر خواهد بود با $۲(a + \frac{a}{۷})$ بنابراین:

$$۲(a+\frac{a}{۷}) = ۳۲ \Rightarrow a = ۱۴$$

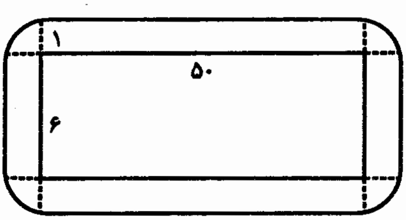
بنابراین محیط مربع برابر خواهد بود با: $۴a = ۵۶$

۲۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

در مورد هر یک از باغچه‌ها، طول حصار مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم. حصار باغچه دایره‌ای شکل به شعاع $۱۱ = ۱ + ۱۰$ متر دارای طولی برابر با $۲۲\pi = ۱۱ \times ۲\pi$ می‌باشد.

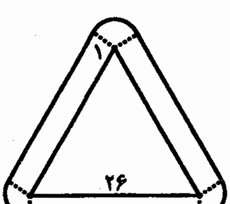
حصار لازم برای باغچه‌ی مستطیل شکل مطابق شکل، شامل دو حصار ۵۰ متری و دو حصار ۶ متری و چهار ربع دایره به شعاع واحد است که معادل با یک دایره می‌باشند.

پس طول حصار لازم برابر است با:



$$(۲ \times ۵۰) + (۲ \times ۶) + (۲\pi \times ۱) = ۱۱۲ + ۲\pi$$

در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع، حصار شامل سه قسمت ۲۶ متری و سه ثلث دایره که روی هم معادل یک دایره هستند می‌باشد و لذا طول آن برابر است با:



$$(۳ \times ۲۶) + (۲\pi \times ۱) = ۷۸ + ۲\pi$$

حال با مقایسه سه عدد : $۱۱۲ + ۲\pi > ۷۸ + ۲\pi > ۲۲\pi$

۲۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

فرض کنید y, x به ترتیب طول و عرض هر کدام از مستطیل‌های کوچک باشد. در این صورت داریم: $۴y = ۳x$.

$$۴y(x+y) = ۳۳۶ \quad (۱)$$

از طرفی مساحت هر کدام از مستطیل‌های کوچک برابر است با:

$$x.y = \frac{۳۳۶}{۷} = ۴۸ \quad (۲)$$

از دو معادله‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$۴xy + ۴y^۲ = ۳۳۶ \Rightarrow ۴ \times ۴۸ + ۴y^۲ = ۳۳۶ \Rightarrow y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = ۶$$

حال با توجه به این‌که $y = \frac{۳}{۴}x$ ، لذا $x = ۸$ و محیط مستطیل $ABCD$ برابر خواهد بود با:

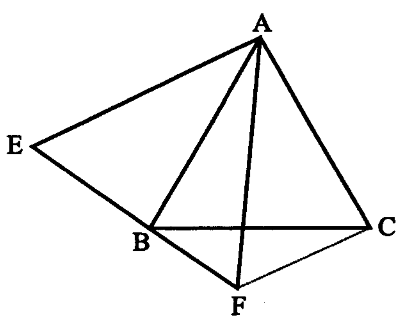
$$۲[۴y + (x+y)] = ۲(۲۴ + ۸ + ۶) = ۲ \times ۳۸ = ۷۶$$

۲۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

فرض می‌کنیم شعاع دایره برابر با ۱ باشد. در این صورت قطر مربع داخلی برابر ۲ و طول ضلع مربع خارجی نیز برابر ۲ خواهند بود. لذا:

$$\begin{cases} C = \dfrac{۲ \times ۲}{۲} = ۲ \\ B = \text{مساحت دایره} - C = \pi(۱)^۲ - ۲ = \pi - ۲ \\ A = \text{سطح مربع خارجی} - \text{مساحت دایره} = ۴ - \pi \end{cases} \Rightarrow ۲ > \pi - ۲ > ۴ - \pi$$

۲۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



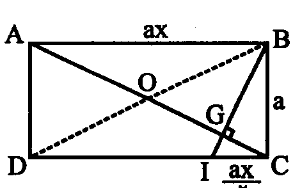
$$\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۴}(۱)^۲ \\ S_{AEF} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۴}(\overline{FA})^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \overline{FA}^۲ = ۴ \Rightarrow \overline{FA} = ۲$$

بنابراین طول ضلع مثلث AEF برابر ۲ است.
به وضوح دیده می‌شود که دو مثلث ACF, ABE با یک‌دیگر همنهشت هستند، زیرا:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{AB} \\ \overline{AF} = \overline{AE} \\ \widehat{BAE} = \widehat{CAF} = ٦٠ - \widehat{BAF} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE \simeq \triangle ACF \Rightarrow \overline{FC} = \overline{BE}$$

$$\Rightarrow \overline{FC} + \overline{FB} = \overline{EF} \Rightarrow \overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} = \overline{EF} + \overline{FA} = ۲ + ۲ = ۴$$

۲۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



فرض می‌کنیم O محل تلاقی اقطار AC و BD باشد و محل برخورد BI و AC را G می‌نامیم. روشن است که G مرکز ثقل (مرکز تلاقی میانه‌ها) در مثلث BDC می‌باشد. ضمناً می‌دانیم در هر مثلث مرکز ثقل، میانه را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند.

$$BIC \text{ در مثلث}: \overline{BI}^۲ = \overline{BC}^۲ + \overline{IC}^۲ = a^۲ + (\frac{ax}{۲})^۲ \Rightarrow \overline{BI} = a\sqrt{۱ + \frac{x^۲}{۴}}$$

$$\overline{BG} = \frac{۲}{۳}\overline{BI} \Rightarrow \overline{BG} = \frac{۲a}{۳}\sqrt{۱ + \frac{x^۲}{۴}}$$

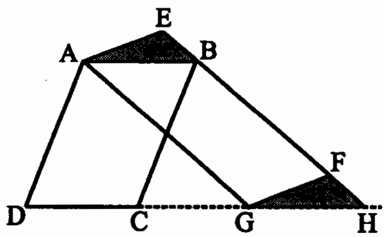
$$ABC \text{ در مثلث}: \overline{AC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ = (ax)^۲ + a^۲ \Rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{۱ + x^۲}$$

$$\overline{GC} = \frac{۲}{۳}\overline{AO} = \frac{۲}{۳}(\frac{\overline{AC}}{۲}) = \frac{\overline{AC}}{۳} \Rightarrow \overline{GC} = \frac{a}{۳}\sqrt{۱ + x^۲}$$

$$BGC \text{ در مثلث}: \overline{BC}^۲ = \overline{BG}^۲ + \overline{CG}^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۹}a^۲(۱ + \frac{x^۲}{۴}) + \frac{a^۲}{۹}(۱ + x^۲) = a^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

۲۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

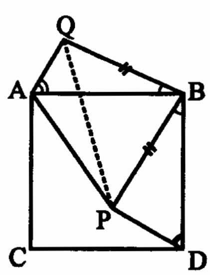
ضلع BF از متوازی‌الاضلاع $AEFG$ را امتداد می‌دهیم تا امتداد DC را در نقطه‌ی H، قطع کند. روشن است که مثلث‌های GFH, AEB همنهشت‌اند، لذا دارای مساحت‌های برابری نیز خواهند بود.
از طرفی متوازی‌الاضلاع‌های $ABHG, ABCD$ دارای مساحت‌های برابری هستند زیرا دارای ارتفاع‌ها و قاعده‌های برابر هستند.
بنابراین:



$$S_{ABCD} = S_{ABHG} = S_{AEFG} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{AEFG}} = ۱$$

۲۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

مثلث ABQ را روی ضلع AB از مربع و برابر (همنهشت) با مثلث PBC بنا می‌کنیم، به طوری‌که $\overline{BP} = \overline{BQ}$ بنابراین $\overline{PC} = \overline{AQ}$



$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PA} + \overline{AQ} \geq \overline{PQ} \quad (۱)$$

(تساوی وقتی برقرار است که نقطه‌ی P ، بر رأس C منطبق باشد.)

از طرفی واضح است که مثلث BPQ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، لذا:

$$BPQ \text{ در مثلث}: \overline{PQ}^۲ = ۲\overline{PB}^۲ \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{۲}\,\overline{PB} \quad (۲)$$

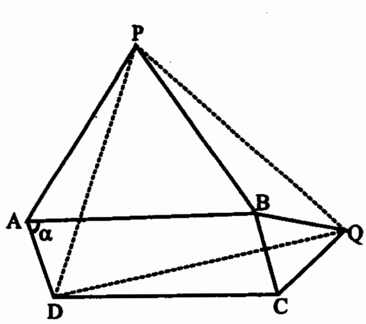
از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\overline{PA} + \overline{PC} \geq \sqrt{۲}\,\overline{PB} \Rightarrow \frac{\overline{PA} + \overline{PC}}{\overline{PB}} \geq \sqrt{۲}$$

بنابراین حداقل مقدار $\frac{\overline{PA} + \overline{PC}}{\overline{PB}}$ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

مثلث‌های APD ، DCQ و BPQ با یک‌دیگر همنهشتند.



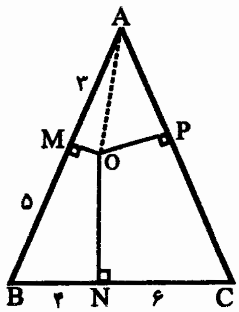
$$\begin{cases} \overline{AP} = \overline{BP} = \overline{DC} \\ \widehat{PAD} = \widehat{DCQ} - \widehat{PBQ} = ۶۰ + \alpha \\ \overline{AD} = \overline{CQ} = \overline{BQ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle APD \simeq \triangle DCQ \simeq \triangle BPG$$

بنابراین اضلاع متناظر $\overline{PQ}, \overline{QD}, \overline{PD}$ با یک‌دیگر برابر بوده، لذا مثلث PQD ، متساوی‌الاضلاع خواهد بود.

۳۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.

قضیه‌ی فیثاغورث را برای مثلث‌های قائم‌الزاویه $AOP, POC, CON, BON, BOM, AOM$ می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \overline{AO}^۲ - \overline{AM}^۲ = \overline{BO}^۲ - \overline{BM}^۲ = \overline{OM}^۲ \\ \overline{BO}^۲ - \overline{BN}^۲ = \overline{CO}^۲ - \overline{CN}^۲ = \overline{ON}^۲ \\ \overline{CO}^۲ - \overline{CP}^۲ = \overline{AO}^۲ - \overline{AP}^۲ = \overline{OP}^۲ \end{cases}$$

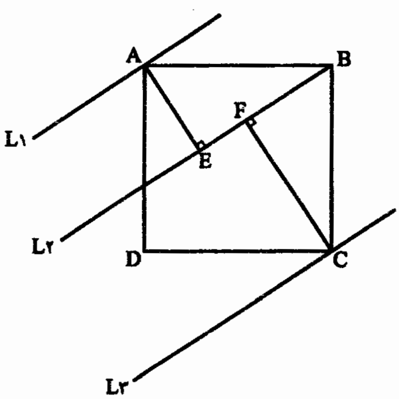
با جمع طرفین تساوی‌ها خواهیم داشت:

$$\overline{AM}^۲ + \overline{BN}^۲ + \overline{CP}^۲ = \overline{BM}^۲ + \overline{CN}^۲ + \overline{AP}^۲$$

حال با جایگذاری خواهیم داشت:

$$۳^۲ + ۴^۲ + ۴^۲ = ۵^۲ + ۲^۲ + \overline{AP}^۲ = ۱۲ \Rightarrow \overline{AP}^۲ = ۱۲ \Rightarrow \overline{AP} = ۲\sqrt{۳}$$

۳۱) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



می‌دانیم $\overline{CF} = ۷, \overline{AE} = ۵$. روشن است که مثلث‌های ABE و BCF با یک‌دیگر همنهشت‌اند. پس:

$$\overline{BF} = \overline{AE} = ۵$$

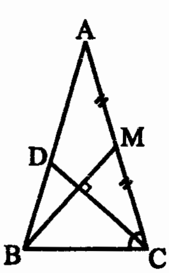
حال با دقت در مثلث قائم‌الزاویه BCF ، $\overline{CF} = ۷, \overline{BF} = ۵$

پس بنا بر رابطه‌ی فیثاغورث در این مثلث، داریم:

$$\overline{BC}^۲ = \overline{BF}^۲ + \overline{CF}^۲ = ۴۹ + ۲۵ = ۷۴$$

$$\Rightarrow \overline{BC}^۲ = S_{ABCD} = ۷۴$$

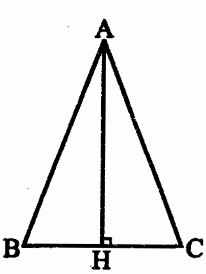
۳۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.



با دقت در مثلث BCM می‌بینیم که نیمساز رأس C ارتفاع وارد بر ضلع BM نیز می‌باشد، بنابراین مثلث مزبور متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه:

$$\overline{BC} = \overline{CM} = \frac{\overline{AC}}{۲} \Rightarrow \overline{AC} = ۲\overline{BC}$$

حال با ترسیم ارتفاع AH و توجه به مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم:



طبق رابطه‌ی فیثاغورث در: $\triangle AHC : \overline{AH}^۲ = \overline{AC}^۲ - \overline{HC}^۲ = \overline{AC}^۲ - (\frac{\overline{BC}}{۲})^۲$

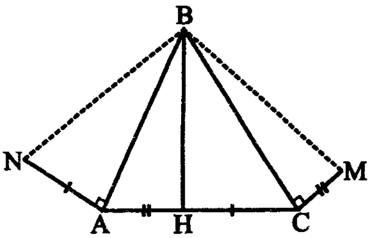
$$\Rightarrow \overline{AH}^۲ = \overline{AC}^۲ - (\frac{\overline{AC}}{۴})^۲ \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \sin\hat{C} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

۳۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

$$a^۲ = \frac{b^۲c^۲}{b^۲ + c^۲} \Rightarrow \frac{۱}{a^۲} = \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲} \Rightarrow \frac{h_a^۲}{۴s^۲} = \frac{h_b^۲}{۴s^۲} + \frac{h_c^۲}{۴s^۲} \Rightarrow h_a^۲ = h_b^۲ + h_c^۲$$

بنابراین با سه مقدار h_c, h_b, h_a می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه ساخت.

۳۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.



از رأس B به نقاط N, M رسم می‌کنیم و رابطه‌ی فیثاغورث را برای مثلث‌های BCM, ABN ارائه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABN: \overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AN}^2, (\overline{AN} = \overline{HC}) \Rightarrow \overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{HC}^2 \quad (1) \\ \text{در مثلث } BCN: \overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CM}^2, (\overline{CM} = \overline{AH}) \Rightarrow \overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AH}^2 \quad (2) \end{cases}$$

از طرفی با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث‌های BCH, ABH:

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABH: \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 \\ \text{در مثلث } BCH: \overline{HC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 \end{cases}$$

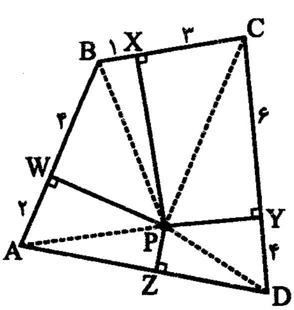
با قرار دادن روابط اخیر در روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 \\ \overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{BN} = \overline{BM}$$

بنابراین می‌بینیم که فاصله‌ی رأس B از نقاط N, M به یک اندازه است. لذا رأس B روی عمود منصف پاره‌خط MN قرار خواهد گرفت.

۳۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

از نقطه‌ی P به رئوس چهارضلعی وصل می‌کنیم. با در نظر گرفتن رابطه‌ی فیثاغورث برای هر هشت مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شده داریم:



$$\overline{BW}^2 + \overline{PW}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{PX}^2 \Leftrightarrow \overline{BW}^2 - \overline{BX}^2 = \overline{PX}^2 - \overline{PW}^2$$

$$\overline{AZ}^2 + \overline{PZ}^2 = \overline{AW}^2 + \overline{PW}^2 \Leftrightarrow \overline{AZ}^2 - \overline{AW}^2 = \overline{PW}^2 - \overline{PZ}^2$$

$$\overline{DY}^2 + \overline{PY}^2 = \overline{DZ}^2 + \overline{PZ}^2 \Leftrightarrow \overline{DY}^2 - \overline{DZ}^2 = \overline{PZ}^2 - \overline{PY}^2$$

$$\overline{CX}^2 + \overline{PX}^2 = \overline{CY}^2 + \overline{PY}^2 \Leftrightarrow \overline{CX}^2 - \overline{CY}^2 = \overline{PY}^2 - \overline{PX}^2$$

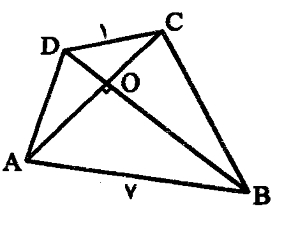
حال با جمع طرفین چهار تساوی فوق خواهیم داشت:

$$\overline{BW}^2 + \overline{AZ}^2 + \overline{DY}^2 + \overline{CX}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{AW}^2 + \overline{DZ}^2 + \overline{CY}^2$$

با قرار دادن مقادیر:

$$4^2 + \overline{AZ}^2 + 4^2 + 3^2 = 1^2 + 2^2 + \overline{DZ}^2 + 6^2 \Rightarrow \overline{AZ}^2 + 41 = \overline{DZ}^2 + 41$$
$$\Rightarrow \overline{AZ} = \overline{DZ} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{DZ}} = 1$$

۳۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.



همان‌طور که مشاهده می‌شود چهار مثلث قائم‌الزاویه در داخل چهارضلعی تشکیل شده است. می‌خواهیم به یک نتیجه‌ی کلی در چهارضلعی‌هایی که دو قطر آن‌ها بر هم‌دیگر عمود هستند برسیم.

با نوشتن روابط فیثاغورث در چهار مثلث فوق‌الذکر :

$$\begin{cases} \overline{AO}^{۲}+\overline{BO}^{۲}=\overline{AB}^{۲} \\ \overline{CO}^{۲}+\overline{DO}^{۲}=\overline{DC}^{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{(با جمع طرفین تساوی)} : (\overline{AO}^{۲}+\overline{DO}^{۲})+(\overline{BO}^{۲}+\overline{CO}^{۲})=\overline{AB}^{۲}+\overline{DC}^{۲}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^{۲}+\overline{BC}^{۲}=\overline{AB}^{۲}+\overline{DC}^{۲}$$

رابطه‌ی اخیر بدان معنی است که در چهارضلعی‌های با اقطار متعامد، مجموع مربعات اضلاع روبه‌رو با هم‌دیگر برابرند.

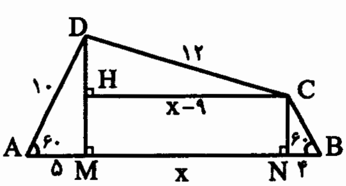
بنابراین : $\overline{AD}^{۲}+\overline{BC}^{۲}=۷^{۲}+۱^{۲}=۵۰$

از طرفی : $\overline{AD}^{۲}+\overline{BC}^{۲}\geq ۲\overline{AD}.\overline{BC}\Rightarrow ۵۰\geq ۲\overline{AD}.\overline{BC}$

$$\Rightarrow \overline{AD}.\overline{BC}\leq \frac{۵۰}{۲}\Rightarrow \overline{AD}.\overline{BC}\leq ۲۵$$

۳۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

از رئوس D,C عمودهای DM,CN را بر ضلع AB فرود می‌آوریم و عمود CH را از رأس C بر DM وارد می‌کنیم.



اگر فرض کنیم که $\overline{AB}=x$ لذا: $\overline{MN}=\overline{CH}=x-۹$

در مثلث‌های قائم‌الزاویه BCN, ADM داریم: $\overline{BN}=۴, \overline{AM}=۵$

$$\overline{DH}=\overline{DM}-\overline{HM}=\overline{DM}-\overline{CN}=۵\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

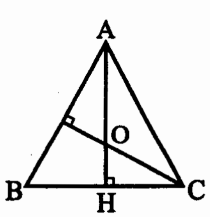
حال با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث DHC :

$$(x-۹)^{۲}=۱۲^{۲}-(\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۱۴۱}+۹$$

بنابراین $p=۹$ و $q=۱۴۱$ لذا $p+q=۱۴۱+۹=۱۵۰$

۳۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

در ابتدا مساحت بخش محدود بین مثلث و دایره را پیدا می‌کنیم؛ که از سه بخش مساوی تشکیل شده است.
روشن است که مقدار $\overline{OH}$ برابر شعاع دایره است.



$$\overline{AH}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶)=۳\sqrt{۳}\quad , \overline{OH}=\frac{۱}{۳}\overline{AH}\Rightarrow \overline{OH}=\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi r^{۲}=\pi(\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow \text{مساحت دایره}=۳\pi$$

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}(\overline{AH}.\overline{BC})=\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۳})(۶)=۹\sqrt{۳}\Rightarrow \text{مساحت مثلث}=۹\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت بخش محدود بین مثلث و دایره}=۹\sqrt{۳}-۳\pi$$

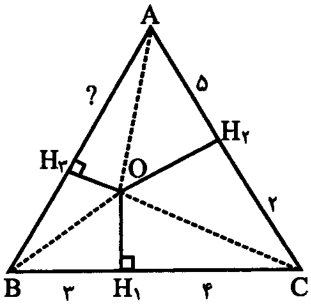
$$\text{سطح هاشور خورده}=\text{مساحت مثلث}-\frac{۱}{۳}(۹\sqrt{۳}-۳\pi)$$

$$\Rightarrow \text{سطح هاشور خورده}=۹\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}+\pi=۶\sqrt{۳}+\pi$$

۳۹) گزینه‌ی «د» صحیح است.

از نقطه‌ی O به رئوس مثلث وصل می‌کنیم و رابطه‌ی فیثاغورث را برای مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی تشکیل شده می‌نویسیم:

ضمناً داریم: $\overline{CH}_{۲}=۲, \overline{CH}_{۱}=۴$.



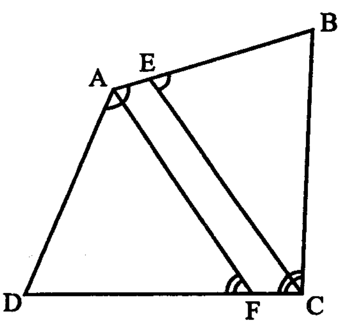
$$\begin{cases} \overline{AO}^۲ - \overline{AH_۳}^۲ = \overline{BO}^۲ - \overline{BH_۳}^۲ \\ \overline{BO}^۲ - \overline{BH_۱}^۲ = \overline{CO}^۲ - \overline{CH_۱}^۲ \\ \overline{CO}^۲ - \overline{CH_۲}^۲ = \overline{AO}^۲ - \overline{AH_۲}^۲ \end{cases}$$

با جمع طرفین تساوی:

$$\overline{AH_۳}^۲ + \overline{BH_۱}^۲ + \overline{CH_۲}^۲ = \overline{BH_۳}^۲ + \overline{CH_۱}^۲ + \overline{AH_۲}^۲ \Rightarrow \overline{AH_۳}^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ = (۷ - \overline{AH_۳}^۲) + ۴^۲ + ۵^۲ \Rightarrow$$

$$\overline{AH_۳}^۲ + ۹ + ۴ = ۴۹ + \overline{AH_۳}^۲ - ۱۴\overline{AH_۳} + ۱۶ + ۲۵ \Rightarrow ۱۴\overline{AH_۳} = ۷۷ \Rightarrow \overline{AH_۳} = \frac{۷۷}{۱۴} = \frac{۱۱}{۲}$$

۴۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



اگر مطابق شکل نیمسازهای زوایای $\hat{C}, \hat{A}$ اضلاع AB, DC را به ترتیب در E, F قطع کنند، بنا بر اصل خطوط موازی و مورب داریم:

$$\widehat{BEC} = \frac{\hat{A}}{۲} \quad , \quad \widehat{AFD} = \frac{\hat{C}}{۲}$$

لذا با دقت در مثلث‌های BEC, ADF داریم:

$$\begin{cases} ADF \text{ در مثلث} : \hat{D} = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} - \widehat{AFD} = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} - \frac{\hat{C}}{۲} \\ BEC \text{ در مثلث} : \hat{D} = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} - \widehat{BEC} = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} - \frac{\hat{A}}{۲} \end{cases}$$

بنابراین زاویه‌های $\hat{B}, \hat{D}$ با یک‌دیگر برابر خواهد بود.

۴۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

می‌دانیم: $$a.h_a = b.h_b = c.h_c = ۲S$$

بنابراین: $$\frac{۲S}{a} = \frac{۲S}{b} + \frac{۲S}{c} \Rightarrow bc = ab + ac \Rightarrow bc - ab - ac = ۰$$

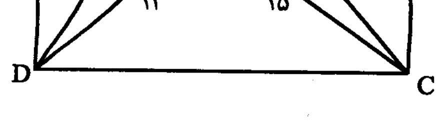
با ضرب ۲ در طرفین : $$۲bc - ۲ab - ۲ac = ۰$$

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + (۲bc - ۲ab - ۲ac) = (a - b - c)^۲$$

بنابراین مقدار $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است.

۴۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

بنا بر فرض $\overline{AC} = ۱۵, \overline{BD} = ۱۳$. حال عمودهای CF, DE را بر امتداد ضلع AB وارد می‌کنیم. روشن است:



$$\overline{DE} = \overline{CF} = ۱۲$$

با نوشتن روابط فیثاغورث برای مثلث‌های ACF, BDE :

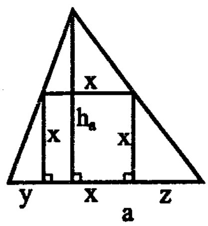
$$\overline{BE}^{۲} = ۱۳^{۲} - ۱۲^{۲} = ۱۶۹ - ۱۴۴ \Rightarrow \overline{BE} = ۵$$

$$\overline{AF}^{۲} = ۱۵^{۲} - ۱۲^{۲} = ۲۲۵ - ۱۴۴ \Rightarrow \overline{AF} = ۹$$

$$\overline{AF} + \overline{BE} = \overline{EF} + \overline{AB} = ۹ + ۵ = ۱۴$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}).\overline{DE}}{۲} = \frac{۱۴ \times ۱۲}{۲} = ۸۴$$

۴۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



فرض می‌کنیم مربعی را در مثلثی به طول قاعده‌ی a و ارتفاع وارد بر این قاعده به طول h_a محاط کرده‌ایم. اگر طول ضلع این مربع را x فرض کنیم، می‌خواهیم آن را بر حسب h_a, a محاسبه کنیم.

مجموع مساحت‌های مثلث‌های کوچک - مساحت مثلث بزرگ = مساحت مربع

$$\Rightarrow x^{۲} = \frac{a.h_a}{۲} - \frac{(h_a - x)x}{۲} - \frac{x.y}{۲} - \frac{x.z}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x^{۲} = ah_a - x(h_a - x) - x(y + z) \\ \text{از طرفی}: y + z = a - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} = ah_a + x^{۲} - xh_a + x^{۲} - ax \Rightarrow x = \frac{a.h_a}{a + h_a} = \frac{۲S}{a + h_a}$$

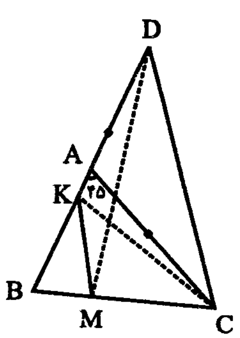
حال به حل مسئله می‌پردازیم:

$$x = \frac{a.h_a}{a + h_a} = \frac{۲S}{a + h_a} = \frac{۲S}{a + \frac{۲S}{a}} \quad ; \ S = ۱ \Rightarrow x = \frac{۲}{a + \frac{۲}{a}}$$

$$a > ۰ \Rightarrow a + \frac{۲}{a} \geq ۲\sqrt{a \times \frac{۲}{a}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \min(a + \frac{۲}{a}) = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \max(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \max(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \max(S\ \text{مربع}) = [\max(x)]^{۲} \Rightarrow \max(S\ \text{مربع}) = \frac{۱}{۲}$$

۴۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



بنا بر فرض مسئله مساحت‌های دو مثلث BDM و BCK با یک‌دیگر برابرند، پس:

$$S_{\overset{\triangle}{BDM}} = S_{\overset{\triangle}{BCK}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BKM}} + S_{\overset{\triangle}{DKM}} = S_{\overset{\triangle}{BKM}} + S_{\overset{\triangle}{CKM}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{DKM}} = S_{\overset{\triangle}{CKM}}$$

بنابراین مساحت‌های مثلث‌های CKM, DKM با یک‌دیگر برابرند.

حال چون دو مثلث فوق دارای قاعده‌ی مشترک KM می‌باشند، لذا ارتفاع‌های مرسوم از رئوس D, C بر این ضلع نیز با هم‌دیگر مساوی خواهند بود و این امر زمانی تحقق می‌یابد که KM, CD با یک‌دیگر موازی باشند. بنابراین:

$$\widehat{BKM} = \widehat{BDC}$$

روشن است که مثلث ADC متساوی‌الساقین است، چون:

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{AC} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AC}$$

پس:

$$\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$$

و از طرفی زاویه‌ی $\hat{A} = ۴۵°$ زاویه‌ی خارجی این مثلث است، پس:

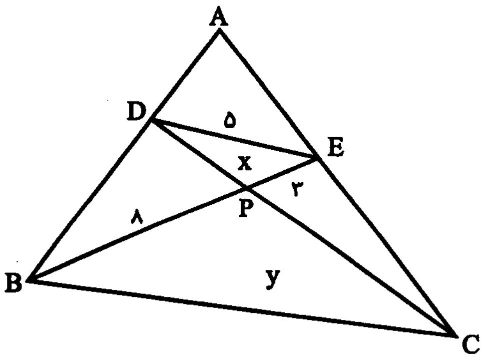
$$۲\widehat{BDC} = ۴۵° \Rightarrow \widehat{BDC} = ۲۲/۵°$$

بنابراین:

$$\widehat{BKM} = ۲۲/۵°$$

۴۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

می‌دانیم اگر دو مثلث دارای دو ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت دو قاعده‌ی آن‌ها؛ بنابراین اگر مساحت‌های مثلث‌های PBC, PDE را به ترتیب y, x فرض کنیم، خواهیم داشت:



$$\frac{S_{P\overset{\triangle}{D}E}}{S_{P\overset{\triangle}{D}B}} = \frac{S_{P\overset{\triangle}{C}E}}{S_{P\overset{\triangle}{C}B}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PB}} \Rightarrow \frac{x}{۸} = \frac{۳}{y}$$

متشابهاً: $\frac{S_{A\overset{\triangle}{D}E}}{S_{B\overset{\triangle}{D}E}} = \frac{S_{A\overset{\triangle}{D}C}}{S_{B\overset{\triangle}{D}C}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۸+x} = \frac{۵+۳+x}{۸+y} \Rightarrow \frac{۵}{۸+x} = \frac{۸+x}{۸+y}$$

کافی است از دو معادله‌ی اخیر مقادیر y, x محاسبه شوند:

$$xy = ۲۴ \Rightarrow y = \frac{۲۴}{x} \Rightarrow (۸+x)^۲ = ۵(۸ + \frac{۲۴}{x})$$

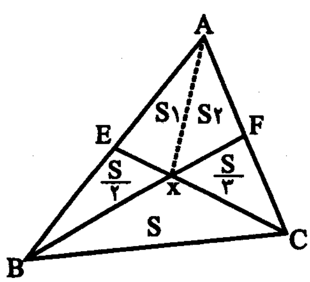
$$\Rightarrow x^۳ + ۱۶x^۲ + ۲۴x - ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = ۱۲$$

معادله فوق دارای سه ریشه است که یکی از آن‌ها ۲ و دو مقدار دیگر منفی هستند که قابل قبول نمی‌باشند. پس:

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C} = ۸ + ۵ + ۳ + ۲ + ۱۲ = ۳۰$$

۴۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.

از رأس A به نقطه‌ی x وصل می‌کنیم تا محدوده‌ی $AEXF$ به دو بخش AFX, AEX با مساحت‌های $S_۲, S_۱$ تقسیم شود. با توجه به آن‌چه که در مسئله قبل نیز دیدیم:



$$\frac{S_{B\overset{\triangle}{C}F}}{S_{B\overset{\triangle}{A}F}} = \frac{S_{X\overset{\triangle}{C}F}}{S_{X\overset{\triangle}{A}F}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{S_{X\overset{\triangle}{C}F}}{S_{X\overset{\triangle}{A}F}} = \frac{S_{B\overset{\triangle}{C}F} - S_{X\overset{\triangle}{C}F}}{S_{B\overset{\triangle}{A}F} - S_{X\overset{\triangle}{A}F}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{X\overset{\triangle}{C}F}}{S_{X\overset{\triangle}{A}F}} = \frac{S_{B\overset{\triangle}{C}X}}{S_{A\overset{\triangle}{B}X}} \Rightarrow \frac{\frac{S}{۳}}{S_۲} = \frac{S}{\frac{S}{۲} + S_۱}$$

$$\Rightarrow ۳S_۲ = S_۱ + \frac{S}{۲} \Rightarrow ۳S_۲ - S_۱ = \frac{S}{۲}$$

متشابهاً $\frac{S_{B\overset{\triangle}{C}E}}{S_{A\overset{\triangle}{C}E}} = \frac{S_{B\overset{\triangle}{X}E}}{S_{A\overset{\triangle}{X}E}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \Rightarrow \frac{S_{B\overset{\triangle}{X}E}}{S_{A\overset{\triangle}{X}E}} = \frac{S_{B\overset{\triangle}{C}E} - S_{B\overset{\triangle}{X}E}}{S_{A\overset{\triangle}{C}E} - S_{A\overset{\triangle}{X}E}} = \frac{S_{B\overset{\triangle}{C}X}}{S_{A\overset{\triangle}{C}X}}$

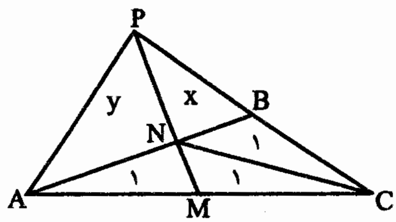
$$\Rightarrow \frac{\frac{S}{۲}}{S_۱} = \frac{S}{\frac{S}{۳} + S_۲} \Rightarrow ۲S_۱ = \frac{S}{۳} + S_۲ \Rightarrow ۲S_۱ - S_۱ = \frac{S}{۳}$$

از دو معادله‌ی اخیر خواهیم داشت که: $S_۲ = \frac{۴}{۱۵}S \quad , \quad S_۱ = \frac{۳}{۱۰}S$

بنابراین: $S_{A\overset{\triangle}{B}C} = S' = S_۱ + S_۲ + S + \frac{S}{۲} + \frac{S}{۳} = \frac{۱۲}{۵}S \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{۱۲}{۵}$

۴۷) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

مساحت هر یک از سه بخش هم‌ارز CBN, CMN, AMN را ۱ فرض کرده، هم‌چنین مساحت‌های مثلث‌های PNB و PNA را به ترتیب x و y فرض می‌کنیم. داریم:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{APM}}}{S_{\overset{\triangle}{CPM}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{CMN}}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \Rightarrow \frac{y+1}{x+2} = \frac{1}{1} \Rightarrow y - x = 1$$

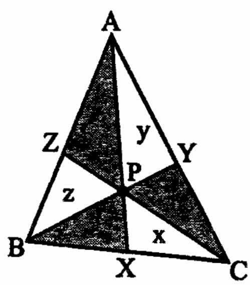
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{APB}}}{S_{\overset{\triangle}{ACB}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{PNB}}}{S_{\overset{\triangle}{BNC}}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x+y}{3} = \frac{x}{1} \Rightarrow 3x = x + y \Rightarrow y = 2x$$

از دو معادله‌ی اخیر خواهیم داشت: $x = 1, y = 2$ پس:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}} = \frac{x}{1} = 1 \Rightarrow \overline{PB} = \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} = \frac{1}{2}$$

۴۸) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

مساحت مثلث‌های PAY, PBZ, PCX را به ترتیب y, z, x در نظر می‌گیریم.



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABX}}}{S_{\overset{\triangle}{ACX}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{PBX}}}{S_{\overset{\triangle}{PCX}}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \Rightarrow \frac{2+z}{x+y+1} = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABY}}}{S_{\overset{\triangle}{BCY}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{APY}}}{S_{\overset{\triangle}{PCY}}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{CY}} \Rightarrow \frac{y+z+1}{2+x} = \frac{y}{1} \quad (2)$$

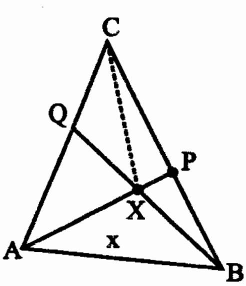
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ACZ}}}{S_{\overset{\triangle}{BCZ}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{APZ}}}{S_{\overset{\triangle}{BPZ}}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \Rightarrow \frac{2+y}{x+z+1} = \frac{1}{z} \quad (3)$$

از حل دستگاه متشکل از سه معادله (۱)، (۲) و (۳) مشاهده می‌شود که تنها جواب دستگاه $x = y = z = 1$ خواهد بود. بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = 6 \times 1 = 6$$

۴۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

از رأس C به نقطه‌ی X وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که مساحت مثلث ABC برابر ۶ و مساحت مثلث ABX برابر x باشد.



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = 6 \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABP}} = S_{\overset{\triangle}{ACP}} = 3 \quad , \quad S_{\overset{\triangle}{CBQ}} = 2 \quad , \quad S_{\overset{\triangle}{ABQ}} = 4$$

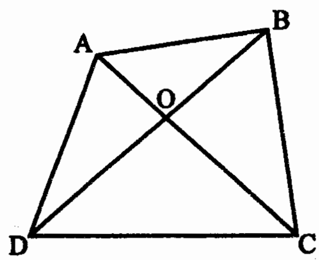
$$S_{\overset{\triangle}{BPX}} = 3 - x = S_{\overset{\triangle}{CPX}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BCX}} = 2(3 - x)$$

$$S_{\overset{\triangle}{CQX}} = S_{\overset{\triangle}{BCQ}} - S_{\overset{\triangle}{BCX}} = 2 - 2(3 - x) = 2x - 4 \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AQX}} = 2(2x - 4)$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABX}} + S_{\overset{\triangle}{AQX}} = 4 \Rightarrow x + 2(2x - 4) = 4 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABX}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{12}{5}}{6} = \frac{2}{5}$$

۵۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنا بر فرض:

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C} \le S_{B\overset{\triangle}{C}D} \le S_{C\overset{\triangle}{D}A} \le S_{D\overset{\triangle}{A}B}$$

با ترسیم اقطار چهار ضلعی، محل تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم.

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C} \le S_{B\overset{\triangle}{C}D} \Rightarrow S_{A\overset{\triangle}{B}O} + S_{B\overset{\triangle}{C}O} \le S_{B\overset{\triangle}{C}O} + S_{D\overset{\triangle}{C}O} \Rightarrow S_{A\overset{\triangle}{B}O} \le S_{D\overset{\triangle}{C}O} \qquad (۱)$$

$$S_{C\overset{\triangle}{D}A} \le S_{A\overset{\triangle}{B}D} \Rightarrow S_{D\overset{\triangle}{C}O} + S_{A\overset{\triangle}{D}O} \le S_{A\overset{\triangle}{B}O} + S_{A\overset{\triangle}{D}O} \Rightarrow S_{D\overset{\triangle}{C}O} \le S_{A\overset{\triangle}{B}C} \qquad (۲)$$

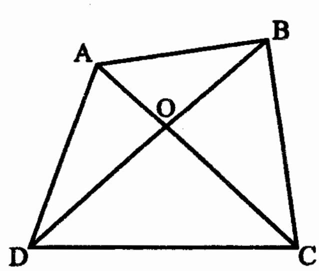
با مشاهده‌ی دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$S_{A\overset{\triangle}{B}O} = S_{D\overset{\triangle}{C}O} \Rightarrow S_{A\overset{\triangle}{B}O} + (S_{B\overset{\triangle}{C}O}) = S_{D\overset{\triangle}{C}O} + (S_{B\overset{\triangle}{C}O}) \Rightarrow S_{A\overset{\triangle}{B}C} = S_{B\overset{\triangle}{D}C}$$

حال چون دو مثلث BDC, ABC دارای مساحت‌های یکسان بوده و از طرفی در ضلع BC نیز مشترک هستند، بنابراین فواصل رئوس C, B از ضلع AD (ارتفاع‌های دو مثلث) برابر خواهند بود و این امر مستلزم آن است که دو ضلع BC, AD با یک‌دیگر موازی باشند.

۵۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

می‌دانیم که هریک از اقطار، چهار ضلعی را به دو بخش هم‌سطح (نصف مساحت چهارضلعی) تقسیم می‌کنند. بنابراین ، اگر مساحت چهارضلعی را S فرض کنیم:



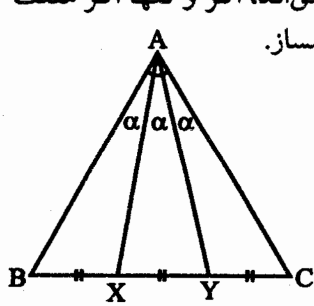
$S_{A\overset{\triangle}{B}C} = S_{B\overset{\triangle}{C}D} = \frac{S}{۲} \Rightarrow$ دو ضلع BC, AD با هم موازی‌اند $(AD \| BC)$

$S_{A\overset{\triangle}{B}D} = S_{A\overset{\triangle}{B}C} = \frac{S}{۲} \Rightarrow$ دو ضلع CD, AB با هم موازی‌اند $(AB \| CD)$

بنابراین به دلیل توازی دو به دوی اضلاع این چهارضلعی، چهار ضلعی مزبور متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

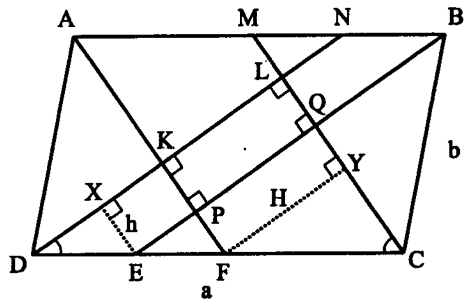
۵۲) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

می‌دانیم که ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر یک ضلع در مثلث بر هم‌دیگر منطبق‌اند، اگر و تنها اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد. با توجه به شکل در مثلث ABY، AX هم میانه است و هم نیمساز. بنابراین ارتفاع هم خواهد بود، لذا AX بر BC عمود است. به همین صورت در مثلث ACX، AY هم میانه است و هم نیمساز. بنابراین ارتفاع هم خواهد بود. لذا AY هم بر BC عمود است. می‌بینیم که از رأس A در مثلث ABC، دو عمود AX و AY بر ضلع BC وارده شده‌اند که تناقض است.



۵۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

اولاً به راحتی ثابت می‌شود که چهارضلعی $KLQP$ یک مستطیل است.



هم‌چنین با دقت و توجه به مثلث BEC، CQ که نیمساز رأس C می‌باشد بر ضلع BE عمود هم می‌باشد، لذا BEC یک مثلث متساوی‌الساقین است. پس:

$$\overline{EC} = \overline{BC} = b \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} = a - b$$

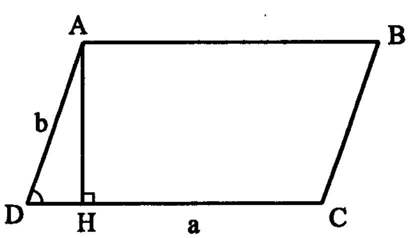
مشابهاً با متساوی‌الساقین بودن مثلث ADF خواهیم داشت:

$\overline{DF} = \overline{DA} = b \Rightarrow \overline{CF} = a - b$

در مثلث $\triangle DEX : h = \overline{DE} \sin \frac{\hat{D}}{۲} \Rightarrow h = (a-b) \sin \frac{\hat{D}}{۲}$

در مثلث $\triangle CFY : H = \overline{CF} \sin \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow H = (a-b) \sin \frac{\hat{C}}{۲}$

$S_{KLQP} = h.H = (a-b)^۲ . \sin \frac{\hat{D}}{۲} . \sin \frac{\hat{C}}{۲}$



از طرفی: $\hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲} + \frac{\hat{D}}{۲} = ۹۰ \Rightarrow \sin \frac{\hat{C}}{۲} = \cos \frac{\hat{D}}{۲}$

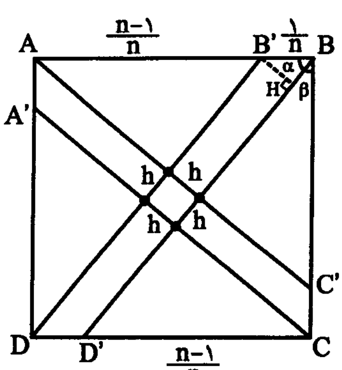
$\Rightarrow S_{KLQP} = \frac{(a-b)^۲}{۲} \sin \hat{D}$

$S_{ABCD} = \overline{AH}.a = (b.\sin \hat{D})a \Rightarrow S_{ABCD} = ab \sin \hat{D}$

$\Rightarrow \frac{S_{KLQP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{(a-b)^۲}{۲}.\sin \hat{D}}{ab.\sin \hat{D}} = \frac{(a-b)^۲}{۲ab}$

۵۴) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

روشن است که چهار ضلعی میانی یک مربع است که طول ضلع آن را h فرض می‌کنیم. (زیرا زوایا همگی قائمه‌اند و هم‌چنین از برابری $BD'DB', AC'CA'$ دو ضلع مجاور، که ارتفاع‌های آن‌ها می‌باشند نیز با یک‌دیگر برابر خواهند بود.) با توجه به مثلث قائم‌الزاویه BCD':



(بنا به رابطه‌ی فیثاغورث) $\overline{BD'} = \overline{DB'} = \overline{AC'} = \overline{A'C} = \sqrt{۱ - (\frac{n-۱}{n})^۲}$

$\Rightarrow \overline{BD'} = \frac{\sqrt{n^۲ + (n-۱)^۲}}{n}$

در مثلث BHB': $\sin \alpha = \frac{h}{\frac{۱}{n}} \Rightarrow h = \frac{۱}{n} \sin \alpha \qquad (۱)$

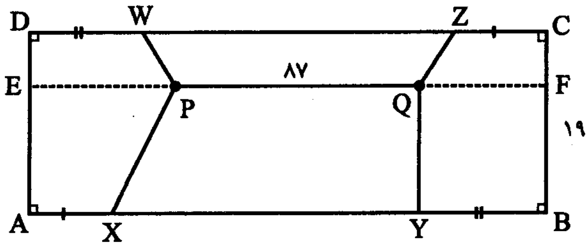
BCD' در مثلث : $\cos\hat{\beta} = \sin\hat{\alpha} = \frac{۱}{BD'} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{n^۲+(n-۱)^۲}}$　　(۲)

$\Rightarrow$ (۲),(۱) از دو رابطه‌ی : $h = \frac{۱}{\sqrt{n^۲+(n-۱)^۲}}$

مساحت مربع $= h^۲ = \frac{۱}{n^۲+(n-۱)^۲} = \frac{۱}{۱۹۸۵} \Rightarrow n^۲+(n-۱)^۲ = ۱۹۸۵ \Rightarrow n = ۳۲$

۵۵) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

بنا بر فرض مسئله می‌دانیم:



$$\overline{XY} = \overline{WZ} = \overline{AX} + \overline{DW} + ۱۹ = \overline{YB} + \overline{ZC} + ۱۹$$

با توجه به دو ذوزنقه $PQZW$ و $PQYX$ می‌دانیم که دارای قاعده‌های برابری هستند (PQ مشترک و $\overline{XY} = \overline{WZ}$) بنابراین چون طبق فرض دارای مساحت یکسانی می‌باشند، لذا PQ از مرکز مستطیل گذشته و به عبارت دیگر روی محور تقارن طولی مستطیل قرار دارد. از طرفی:

$$\begin{cases} \overline{AX} + \overline{DW} = \overline{YB} + \overline{ZC} & \text{(بنا به فرض)} \\ \overline{XY} = \overline{WZ} \Rightarrow \overline{AX} + \overline{YB} = \overline{ZC} + \overline{DW} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{AX} - \overline{YB} = \overline{ZC} - \overline{DW} \\ \overline{AX} + \overline{YB} = \overline{ZC} + \overline{DW} \end{cases} \Rightarrow \overline{AX} = \overline{ZC} \quad ; \quad \overline{BY} = \overline{DW}$$

$$S_{PQXY} = \frac{۱}{۴} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{(\overline{PQ} + \overline{XY}).\frac{\overline{BC}}{۲}}{۲} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{۴} \Rightarrow ۸۷ + \overline{XY} = AB$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\overline{AB} = \overline{XY} + \overline{AX} + \overline{BY}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{AX} + \overline{YB} = \overline{ZC} + \overline{DW} = ۸۷$$

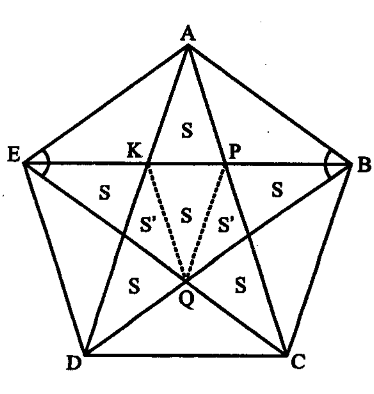
از طرفی:

$$\overline{XY} = \overline{WZ} = \overline{AX} + ۱۹ + \overline{DW} = \overline{AX} + ۱۹ + \overline{YB} = ۸۷ + ۱۹ = ۱۰۶ \Rightarrow \overline{XY} = \overline{WZ} = ۱۰۶$$

$$\overline{AB} = \overline{XY} + (\overline{AX} + \overline{YB}) = ۱۰۶ + ۸۷ = ۱۹۳$$

۵۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد مثلث‌های متساوی‌الساقین AEB و QEB با یک‌دیگر همنهشت‌اند. از این همنهشتی، همنهشتی دو مثلث متساوی‌الساقین PKQ, AKP نیز، نتیجه خواهد شد. لذا با توجه به شکل که مساحت هر بخش در داخل آن نوشته شده است:

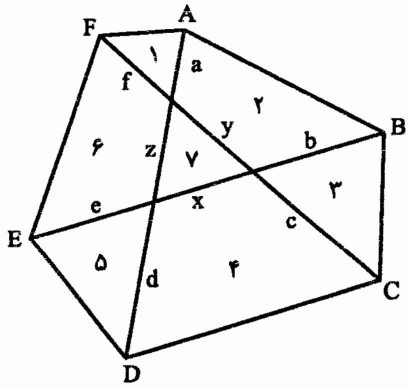


طبق فرض : $S+S+S+S+S+S+S'+S' = ۶S + ۲S' = ۱$

$$S_{APQD} = ۳S + S' = \frac{۱}{۲}(۶S + ۲S') = \frac{۱}{۲}(۱) = \frac{۱}{۲}$$

۵۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

بنا بر فرض مسئله، هر یک از قطرهای CF, BE, AD مساحت شش ضلعی را به دو بخش برابر تقسیم کرده‌اند، پس:



$$S_{FABC} = S_{ABCD} \Rightarrow S_۱ + S_۲ + S_۳ = S_۲ + S_۳ + S_۴ + S_۷$$

$$\Rightarrow S_۱ = S_۴ + S_۷ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AFX}} = S_{\overset{\triangle}{CDX}} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲} af.\sin\hat{x} = \frac{۱}{۲}(c+y)(d+z)\sin\hat{X} \Rightarrow af = (c+y)(d+z) \geq cd$$

به همین صورت و مشابه قبل ثابت می‌شود که:

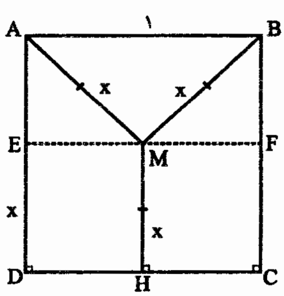
$$S_{\overset{\triangle}{EDY}} = S_{\overset{\triangle}{ABY}} \quad , \quad S_{\overset{\triangle}{BCZ}} = S_{\overset{\triangle}{EFZ}}$$

و در نتیجه آن‌ها خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} af = (c+y)(d+z) \geq cd \\ bc = (e+x)(f+y) \geq ef \\ de = (a+z)(b+x) \geq ab \end{cases}$$

در سه نامساوی اخیر می‌بینیم که ضرب طرفین نامساوی‌ها با یک‌دیگر مساوی و برابر با مقدار $a.b.c.d.e.f$ می‌باشند. بنابراین نامساوی‌های اخیر به تساوی تبدیل شده و این امر مستلزم آن است که $x = y = z = ۰$ باشد. لذا مساحت مثلث XYZ برابر صفر بوده و به عبارت بهتر، قطرهای CF, BE, AD می‌بایستی همرس باشند.

۵۸) گزینه‌ی «د» صحیح است.



از M خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع AD را در E قطع کند.

روشن است که:

$$\overline{AE} + \overline{ED} = ۱$$

اگر طول‌های برابر MA ، MB و MH را x فرض کنیم، روشن است که:

$$\overline{DH} = \overline{EM} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad \overline{ED} = x$$

با ارائه‌ی رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث AEM خواهیم داشت:

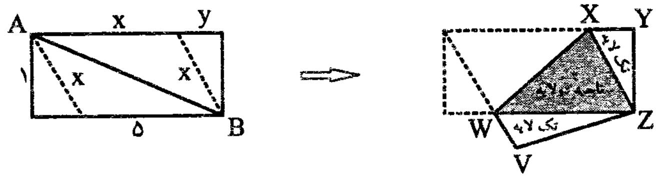
$$\overline{AE} = \sqrt{(\overline{AM})^۲ - \overline{EM}^۲} \Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{x^۲ - \frac{۱}{۴}}$$

پس: $\sqrt{x^۲ - \frac{۱}{۴}} + x = ۱ \Rightarrow x^۲ - \frac{۱}{۴} = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۴} \Rightarrow x = \frac{۵}{۸}$

$$S_{ADHM} = \frac{\overline{DH}.(\overline{MH} + \overline{AD})}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۸} + ۱)}{۲} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۳}{۸} \Rightarrow S_{ADHM} = \frac{۱۳}{۳۲}$$

۵۹) گزینه‌ی «هـ» صحیح می‌باشد.

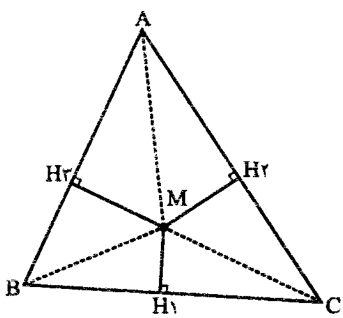
اگر قرار باشد مستطیل سمت چپ طوری تا شود که نقطه‌ی A روی B قرار گیرد، شکل حاصل به صورت پنج‌ضلعی $XYZVW$ خواهد بود. بنابراین با توجه به مستطیل سمت چپ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی کناری آن (XYZ):



$$\begin{cases} x+y=۵ \\ y^۲+۱=x^۲ \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۲۶}{۱۰},\quad y=\frac{۲۴}{۱۰} \Rightarrow \text{مساحت تک لایه} = ۲S_{\overset{\triangle}{XYZ}} = \overline{XY}.\overline{YZ} = y \times ۱ = \frac{۲۴}{۱۰}$$

$$\text{مساحت تک لایه} = \frac{۱۲}{۵}$$

۶۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



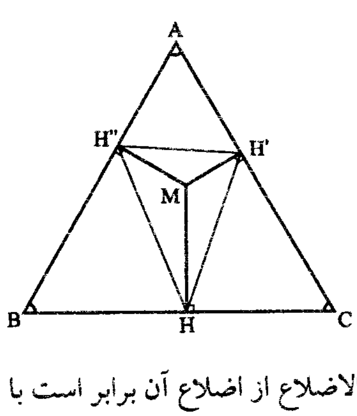
$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{AMB}} = \overline{MH_۳}.\frac{\overline{AB}}{۲} \\ S_{\overset{\triangle}{BMC}} = \overline{MH_۱}.\frac{\overline{BC}}{۲} \\ S_{\overset{\triangle}{AMC}} = \overline{MH_۲}.\frac{\overline{AC}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{MH_۱}.\overline{MH_۲}.\overline{MH_۳} = \frac{۸S_{\overset{\triangle}{AMB}}.S_{\overset{\triangle}{BMC}}.S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{\overline{AB}.\overline{AC}.\overline{BC}}$$

در تساوی فوق، با توجه به ثابت بودن BC, AC, AB (اضلاع مثلث)، حاصل‌ضرب $\overline{MH_۱}.\overline{MH_۲}.\overline{MH_۳}$ زمانی حداکثر خواهد بود که حاصل‌ضرب $S_{\overset{\triangle}{AMB}}.S_{\overset{\triangle}{BMC}}.S_{\overset{\triangle}{AMC}}$ حداکثر شود. از طرفی می‌دانیم که حاصل جمع این سه مقدار ثابت و برابر با مساحت مثلث ABC است. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی حداکثر خواهد شد که هر سه با یک‌دیگر برابر باشند و این امر زمانی تحقق می‌یابد که M، مرکز ثقل مثلث ABC باشد.

۶۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

با توجه به چهارضلعی‌های $AH'MH''$ ، $BHMH''$ و $CHMH'$ می‌بینیم که هریک دارای دو زاویه‌ی قائمه هستند و با توجه به این‌که مجموع زوایای داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰° است و از طرفی $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$ بنابراین:



$$H\widehat{M}H'' = H\widehat{M}H' = H'\widehat{M}H'' = ۱۲۰^\circ$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که مجموع فواصل هر نقطه در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاع آن برابر است با ارتفاع آن مثلث، پس:

$$\overline{MH}+\overline{MH'}+\overline{MH''} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\ (\text{طول ارتفاع مثلث}) \Rightarrow \max(\overline{MH}.\overline{MH'}.\overline{MH''}) = (\frac{\sqrt{۳}}{۶})^۳ \Rightarrow$$

$$\max(\overline{MH}^۲.\overline{MH'}^۲.\overline{MH''}^۲) = (\frac{۱}{۱۲})^۳$$

از طرفی:

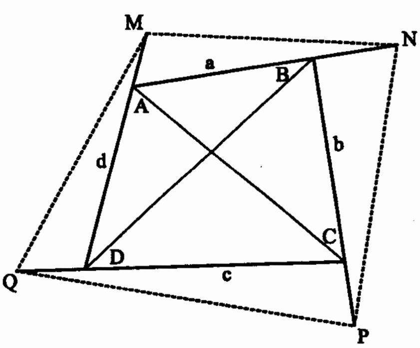
$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{MHH'}} = \frac{۱}{۲}(\overline{MH}.\overline{MH'}).\sin ۱۲۰ \\ S_{\overset{\triangle}{MHH''}} = \frac{۱}{۲}(\overline{MH}.\overline{MH''}).\sin ۱۲۰ \\ S_{\overset{\triangle}{MH'H''}} = \frac{۱}{۲}(\overline{MH'}.\overline{MH''}).\sin ۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\triangle}{MHH'}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\overline{MH}.\overline{MH'}) \\ S_{\overset{\triangle}{MHH''}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\overline{MH}.\overline{MH''}) \\ S_{\overset{\triangle}{MH'H''}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\overline{MH'}.\overline{MH''}) \end{cases}$$

با ضرب طرفین تساوی: $S_{\overset{\triangle}{MHH'}}.S_{\overset{\triangle}{MHH''}}.S_{\overset{\triangle}{MH'H''}} = (\frac{\sqrt{۳}}{۴})^۳\overline{MH}^۲.\overline{MH'}^۲.\overline{MH''}^۲$

روشن است که این حاصل‌ضرب وقتی حداکثر است که مقدار $\overline{MH}^۲.\overline{MH'}^۲.\overline{MH''}^۲$ حداکثر باشد، لذا:

$$\max[S_{\overset{\triangle}{MHH'}}.S_{\overset{\triangle}{MHH''}}.S_{\overset{\triangle}{MH'H''}}] = (\frac{\sqrt{۳}}{۴})^۳ \times (\frac{۱}{۱۲})^۳ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴^۳ \times ۱۲^۳} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴^۶ \times ۳^۳} = \frac{۱}{۲^{۱۲} \times ۳\sqrt{۳}}$$

۶۲) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



قطرهای BD, AC از این چهارضلعی را ترسیم می‌کنیم.
اضلاع AD, CD, BC, AB را به ترتیب d, c, b, a می‌نامیم، لذا:

$$\overline{BN} = Ka, \overline{CP} = Kb, \overline{CD} = Kc, \overline{AM} = Kd$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۱}{۲}\overline{AM}.\overline{AN}.\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}Kd.(K+۱)a.\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}K(K+۱)ad\sin\hat{A} = K(K+۱)S_{\overset{\triangle}{ABD}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{CPQ}} = \frac{۱}{۲}\overline{CP}.\overline{CQ}.\sin\hat{C} = \frac{۱}{۲}Kb.(K+۱)c.\sin\hat{C} = \frac{۱}{۲}K(K+۱)bc\sin\hat{C} = K(K+۱)S_{\overset{\triangle}{BCD}}$$

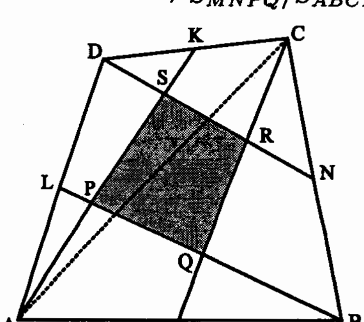
$$S_{\overset{\triangle}{MDQ}} = \frac{۱}{۲}\overline{DM}.\overline{DQ}.\sin\hat{D} = \frac{۱}{۲}Kc.(K+۱)d.\sin\hat{D} = \frac{۱}{۲}K(K+۱)cd\sin\hat{D} = K(K+۱)S_{\overset{\triangle}{ADC}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{BNP}} = \frac{۱}{۲}\overline{BP}.\overline{BN}.\sin\hat{B} = \frac{۱}{۲}Ka.(K+۱)b.\sin\hat{B} = \frac{۱}{۲}K(K+۱)ab\sin\hat{B} = K(K+۱)S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

از جمع طرفین تساوی فوق داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}} + S_{\overset{\triangle}{CPQ}} + S_{\overset{\triangle}{MDQ}} + S_{\overset{\triangle}{BNP}} = ۲K(K+۱)S_{ABCD}$$
$$\Rightarrow S_{MNPQ} = [۱ + ۲K(K+۱)]S_{ABCD}$$
$$\Rightarrow S_{MNPQ}/S_{ABCD} = ۱ + ۲K(K+۱) = ۲۵ \Rightarrow K(K+۱) = ۱۲ \Rightarrow K = ۳$$

۶۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



در ابتدا ثابت می‌کنیم که مساحت چهارضلعی $AMCK$ نصف مساحت چهارضلعی $ABCD$ است. زیرا اگر قطر AC را رسم کنیم تا چهار ضلعی به دو مثلث ABC, ADC تقسیم شود، پاره‌خط‌های CM, AK میانه‌های اضلاع AB, DC از دو مثلث اخیر بوده و لذا هر یک مساحت دو مثلث را نصف خواهند کرد، یعنی:

$$\begin{cases} S_{A\hat{K}C} = \frac{۱}{۲} S_{A\hat{D}C} \\ S_{A\hat{M}C} = \frac{۱}{۲} S_{A\hat{B}C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{A\hat{K}C} + S_{A\hat{M}C} = \frac{۱}{۲}(S_{A\hat{D}C} + S_{A\hat{B}C}) \Rightarrow S_{AMCK} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

$$S_{PQRS} = S_{AMCK} - S_{PQMA} - S_{KCRS} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD} - S_{PQMA} - S_{KCRS}$$

$$\Rightarrow S_{PQRS} = \frac{۱}{۲}(۳۰۰۰) - (۵۱۳ + ۳۸۸) = ۱۵۰۰ - ۹۰۱ - ۵۹۹$$

۶۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

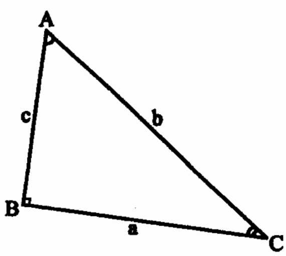
بنابر نامساوی حسابی- هندسی داریم:

$$\frac{bc}{\overline{PD}^۲} + \frac{ab}{\overline{PF}^۲} + \frac{ac}{\overline{PE}^۲} \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{a^۲.b^۲.c^۲}{\overline{PD}^۲.\overline{PE}^۲.\overline{PF}^۲}}$$

از طرفی سمت راست نامساوی هنگامی حداقل است که مخرج آن حداکثر باشد و بنابر آن‌چه که در مسئله‌ی شماره «۵۹» بیان شد، این امر وقتی تحقق می‌یابد که نقطه‌ی P، مرکز ثقل مثلث باشد.

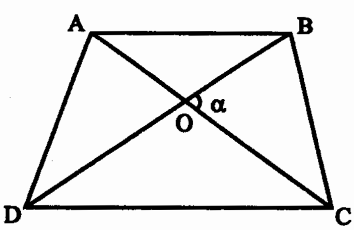
رابطه‌ای مهم، مربوط به مساحت در مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها

می‌دانیم در هر مثلث، مساحت برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.



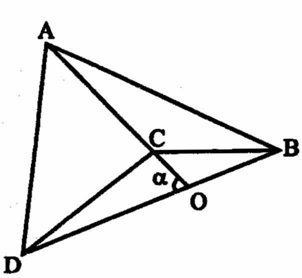
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} bc \sin \hat{A} = \frac{۱}{۲} ab \sin \hat{C} = \frac{۱}{۲} ac \sin \hat{B}$$

متشابهاً در هر چهارضلعی اعم از محدب یا مقعر، مساحت برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن دو قطر.



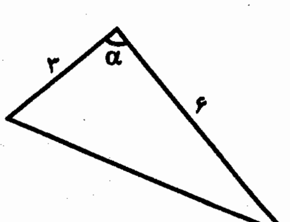
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \overline{AC}.\overline{BD}.\sin \hat{\alpha}$$

(با فرض بر این‌که دو قطر هم‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده و زاویه‌ی بین آن‌ها α می‌باشد.)



۶۵) گزینه‌ی «د» صحیح است.

بنا بر آن‌چه که در بالا گفته شد:



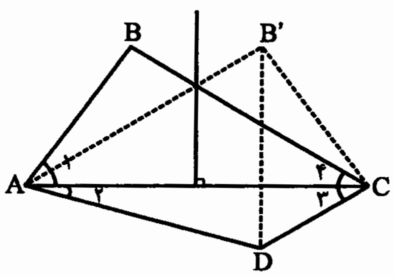
$$S = \frac{۱}{۲}(۳ \times ۶) \sin \alpha$$

واضح است که در تساوی فوق مقدار مساحت (S)، وقتی حداکثر خود را خواهد داشت که $\sin\alpha$ نیز حداکثر خود را داشته باشد، یعنی $\sin\alpha = ۱$ ، لذا:

$$\max(S) = \frac{۱}{۲}(۳ \times ۶) \times ۱ = ۹$$

۶۶) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

نقطه‌ی B را نسبت به عمود منصف AC قرینه می‌کنیم تا نقطه‌ی B' به دست آید.
روشن است که دو مثلث $AB'C, ABC$ با یک‌دیگر همنهشت خواهند بود. با توجه به فرضیات مسئله در مورد این چهارضلعی به دست خواهیم آورد که:

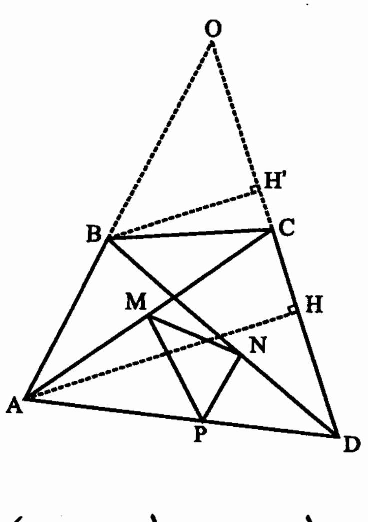


$$\begin{cases} \widehat{B'CD} = \hat{C}_۳ + \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{B'AD} = \hat{A}_۲ + \hat{C}_۴ = ۳۰^\circ \end{cases}$$

از طرفی مساحت چهارضلعی $ABCD$ با مساحت چهارضلعی $AB'CD$ برابر خواهد بود و لذا:

$$S_{ABCD} = S_{AB'CD} = S_{\overset{\triangle}{AB'D}} + S_{\overset{\triangle}{B'CD}} = \frac{۱}{۲}(\overline{AB'}.\overline{AD}.\sin ۳۰^\circ) + \frac{۱}{۲}(\overline{B'C}.\overline{DC}.\sin ۹۰^\circ)$$
$$= \frac{۸ \times ۵ \times \frac{۱}{۲}}{۲} + \frac{۴ \times ۹}{۲} = ۲۸$$

۶۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



همان‌طور که در فصل بعد خواهیم دید، بنا بر قضیه‌ی تالس:

$$\overline{NP} = \frac{\overline{AB}}{۲} \quad , \quad \overline{MP} = \frac{\overline{CD}}{۲}$$

از طرفی به علت توازی MP با CD و هم‌چنین NP با AB خواهیم داشت:

$$\widehat{MPN} = \hat{O}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}} = \frac{۱}{۲}\overline{MP}.\overline{NP}.\sin(\widehat{MPN}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\overline{CD})(\frac{۱}{۲}\overline{AB}).\sin\hat{O}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MNP}} = \frac{۱}{۸}\overline{AB}.\overline{CD}.\sin\hat{O} \quad (۱)$$

حال با ترسیم ارتفاع‌های AH و BH' خواهیم داشت:

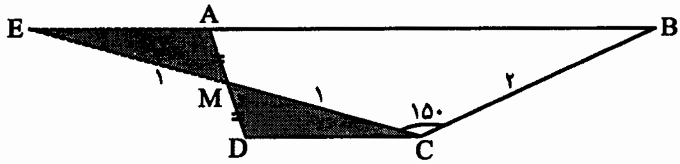
$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{۱}{۲}\overline{AH}.\overline{CD} = \frac{۱}{۲}\overline{CD}.\overline{OA}.\sin\hat{O} \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}\overline{BH'}.\overline{CD} = \frac{۱}{۲}\overline{CD}.\overline{OB}.\sin\hat{O} \end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ACD}} - S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}\overline{CD}(\overline{OA} - \overline{OB})\sin\hat{O}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ACD}} - S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}\overline{CD}.\overline{AB}.\sin\hat{O} \quad (۲)$$

از دو رابطه‌ی $(۱),(۲)$ $\Rightarrow m = \frac{۱}{۴}$

۶۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

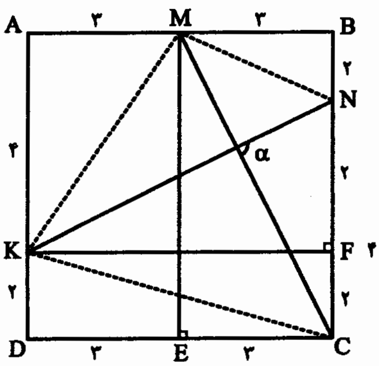
CM را امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه‌ی E قطع کند. به راحتی ثابت می‌شود که مثلث‌های AME, MDC همنهشتند. لذا:



$$\overline{EM} = \overline{MC} = ۱$$

پس : $S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{CBE}} = \frac{۱}{۲}\overline{CB}.\overline{CE}.\sin\widehat{BCE} = \frac{۱}{۲}(۲)(۲)\sin ۱۵۰ = ۱$

۶۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



نقاط C, K, M, N را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم تا چهارضلعی $MNCK$ حاصل شود. مساحت این چهارضلعی را از دو راه متفاوت پیدا کرده و با یک‌دیگر برابر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} S_{MNCK} = S_{ABCD} - S_{\overset{\triangle}{AMK}} - S_{\overset{\triangle}{BMN}} - S_{\overset{\triangle}{CDK}} \\ S_{MNCK} = \frac{۱}{۲}\overline{CM}.\overline{NK}.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow$$ (اگر فرض کنیم طول ضلع مربع ۶است.)

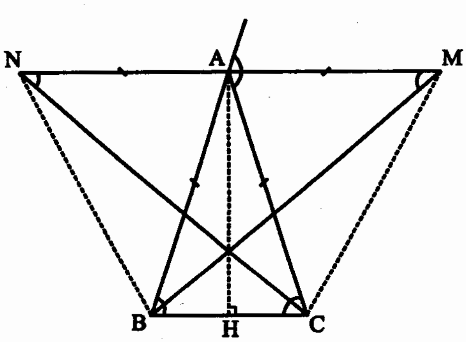
$$S_{MNCK} = (۶^۲) - \frac{۱}{۲}(۳\times۴) - \frac{۱}{۲}(۳\times۲) - \frac{۱}{۲}(۲\times۶) = ۲۱$$

حال قائم‌های KF, ME را بر اضلاع BC, DC وارد می‌کنیم و با توجه به مثلث‌های قائم‌الزاویه NKF, MCE طول‌های $\overline{NK}, \overline{CM}$ را توسط رابطه‌ی فیثاغورث محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \overline{CM}^۲ = \overline{ME}^۲ + \overline{CE}^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ = ۳۶ + ۹ = ۴۵ \\ \overline{KN}^۲ = \overline{KF}^۲ + \overline{NF}^۲ = ۶^۲ + ۲^۲ = ۳۶ + ۴ = ۴۰ \end{cases} \Rightarrow S_{MNCK} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۵}.\sqrt{۴۰}.\sin\alpha = ۱۵\sqrt{۲}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{MNCK} = ۱۵\sqrt{۲}\sin\hat{\alpha} = ۲۱ \Rightarrow \sin\hat{\alpha} = \frac{۷}{۵\sqrt{۲}} \Rightarrow \alpha = \text{Arcsin}\frac{۷}{۵\sqrt{۲}}$$

۷۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



روشن است که نیمساز خارجی رأس A با ضلع BC موازی است. بنابر اصل خطوط موازی و مورب، BC, MN با یک‌دیگر موازی بوده و NC, MB مورب‌های آن می‌باشند، لذا:

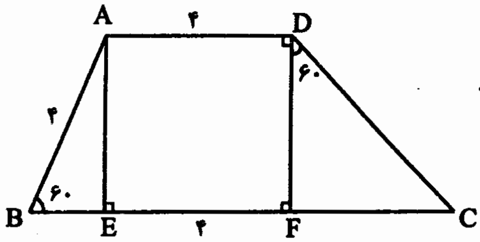
$$\widehat{NMB} = \widehat{MNC} = \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{C}}{۲}$$

بنابراین مثلث‌های ACN, ABM هر دو متساوی‌الساقین بوده و لذا:

$$\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{AB} = \overline{AC} = ۲\overline{BC}$$

با ترسیم ارتفاع AH:

$$\begin{cases} S_{MNBC} = \frac{(\overline{MN} + \overline{BC})\overline{AH}}{۲} = \frac{۵\overline{BC}.\overline{AH}}{۲} \\ S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{\overline{BC}.\overline{AH}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{MNBC}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = ۵$$



۷۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

عمودهای AE و DF را از رئوس A و D بر ضلع BC وارد می‌کنیم.

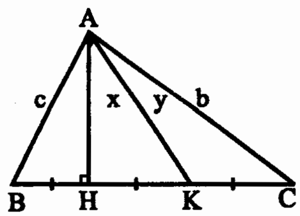
$$\begin{cases} ABE\text{در مثلث } : \overline{AE} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}, \overline{BE} = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲ \\ DFC\text{در مثلث } : \overline{DF} = \overline{AE} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \overline{DC} = ۲(۲\sqrt{۳}) = ۴\sqrt{۳}, \overline{CF} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۴\sqrt{۳}) = ۶ \end{cases}$$

بنابراین:

$$\overline{BC} = ۲ + ۴ + ۶ = ۱۲ \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{(۴+۱۲) \times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۱۶\sqrt{۳}$$

۷۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

ارتفاع AH و پاره‌خط AK را به ترتیب x و y فرض می‌کنیم. روشن است که مثلث ABK، متساوی‌الساقین است. زیرا AH، علاوه بر ارتفاع بودن میانه نیز است. لذا: $y = c$. بنابراین:



$$AHK\text{ درمثلث} : \overline{AH}^۲ = \overline{AK}^۲ - \overline{HK}^۲$$

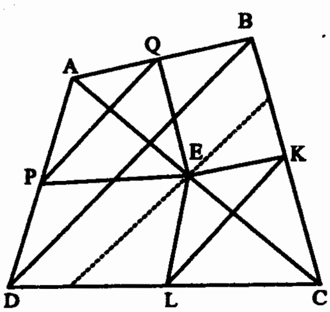
$$\Rightarrow x^۲ = c^۲ - (\frac{a}{۳})^۲ \Rightarrow x^۲ = c^۲ - \frac{a^۲}{۹}$$

حال با توجه به مثلث AHC، AK میانه‌ی وارد بر ضلع HC است. پس با نوشتن رابطه‌ی میانه‌ها:

$$۲\overline{AK}^۲ = \overline{AH}^۲ + \overline{AC}^۲ - \frac{\overline{HC}^۲}{۲} \Rightarrow ۲y^۲ = b^۲ + x^۲ - \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳}a)^۲$$

از سه معادله‌ی اخیر خواهیم داشت $b^۲ - c^۲ = \frac{a^۲}{۳}$ و از طرفی چون $a^۲ = b^۲ + c^۲$، بنابراین:

$$۲b^۲ = \frac{۴}{۳}a^۲ \Rightarrow b^۲ = \frac{۲}{۳}a^۲ \Rightarrow \sin\hat{B} = \cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow C = \text{Arccos}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$



۷۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

اوساط اضلاع AD, CD, BC, AB را به ترتیب P, L, K, Q می‌نامیم. اگر از نقطه‌ی E، وسط قطر AC به نقاط مزبور رسم کنیم، روشن است که مساحت چهارضلعی‌های $CKEL, APEQ$ هرکدام ربع مساحت چهارضلعی $ABCD$ هستند.

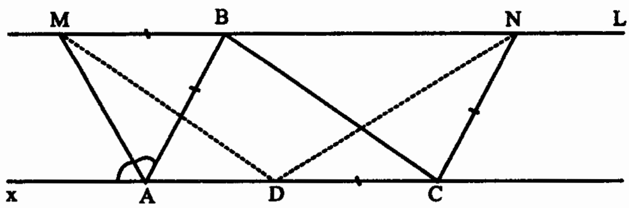
بنابراین اگر از E، خطی به موازات قطر BD رسم کنیم، واضح است که با حرکت E روی این خط مساحت‌های $APEQ$ و $CKEL$ ثابت می‌مانند.

حال اگر از نقطه‌ی F، وسط قطر BD به موازات قطر AC رسم کنیم، مطابق آن‌چه که گفته شد، با تغییر F روی این خط سطوح $FKBQ$ و $FPDL$ ثابت مانده و برابر ربع مساحت چهارضلعی $ABCD$ خواهند بود. بنابراین

تنها نقطه‌ای که اگر از آن به اوساط اضلاع رسم کنیم، مساحت چهارضلعی به چهار بخش برابر تقسیم می‌شود، محل تقاطع دو خط موازی مزبور است.

۷۴) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

امتداد L با ضلع BC موازی است و نیمساز خارجی رأس A، یعنی AM مورب است. لذا:



$$\widehat{BMA} = \widehat{MAX} = \widehat{BAM}$$

بنابراین مثلث ABM، متساوی‌الساقین است و $\overline{AB} = \overline{BM}$. از طرفی بنا بر فرض مسئله: $\overline{AB} = \overline{CD}$. از دو تساوی اخیر خواهیم داشت که $\overline{CD} = \overline{BM}$ و چون CD با BM موازی نیز می‌باشد، پس چهارضلعی $MBCD$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. پس:

$$\widehat{BMD} = \hat{C} \qquad (۱)$$

با توجه به متوازی‌الاضلاع $ABNC$ داریم: $\overline{NC} = \overline{AB}$ و چون $\overline{AB} = \overline{CD}$، پس $\overline{NC} = \overline{CD}$ و لذا مثلث DCN نیز متساوی‌الساقین می‌باشد. پس:

$$\widehat{CND} = \widehat{NDC} = \frac{۱۸۰ - \widehat{ACN}}{۲} = \frac{۱۸۰ - (۱۸۰ - \widehat{BAC})}{۲} = \frac{۲\hat{C}}{۲} = \hat{C}$$

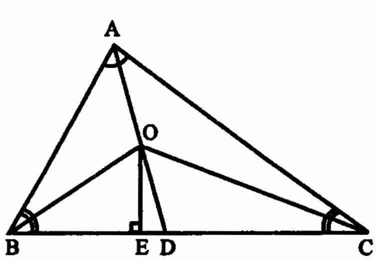
$$\widehat{BNC} = \widehat{BAC} = ۲\hat{C} \Rightarrow \widehat{BND} = \widehat{BNC} - \widehat{CND} = ۲\hat{C} - \hat{C} = \hat{C} \Rightarrow \widehat{BND} = \hat{C} \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت که مثلث DMN متساوی‌الساقین است و

$$\widehat{MDN} = ۱۸۰ - ۲\hat{C} = ۱۸۰ - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$$

پس گزینه‌های «الف» و «ج» هردو برقرار می‌باشند.

۷۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

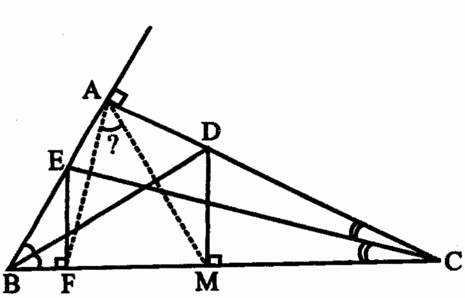


$$\begin{cases} \text{در مثلث } COE : \widehat{COE} = ۹۰ - \dfrac{\hat{C}}{۲} \\ \text{در مثلث } AOB : \widehat{BOD}(\text{زاویه‌ی خارجی}) = \dfrac{\hat{A}}{۲} + \dfrac{\hat{B}}{۲} \\ \qquad = \dfrac{۱۸۰ - \hat{C}}{۲} = ۹۰ - \dfrac{\hat{C}}{۲} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\widehat{COE} = \widehat{BOD}$$

۷۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز، دارای فواصل برابری از اضلاع زاویه می‌باشد. بنابراین:

$$\overline{EA} = \overline{EF} \quad , \quad \overline{DA} = \overline{DM}$$

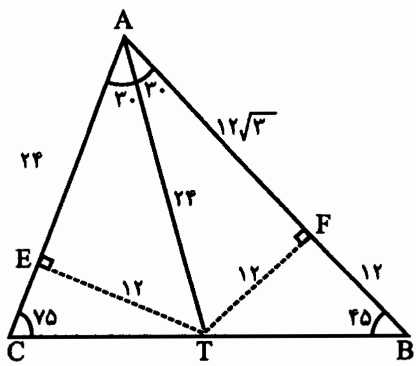
پس مثلث‌های DAM, EAF هر دو متساوی‌الساقین خواهند بود، لذا:

$$\widehat{BAF}=\frac{\widehat{BEF}}{۲} \quad , \quad \widehat{CAM}=\frac{\widehat{CDM}}{۲}$$

$$\widehat{BAF}=\frac{۹۰-\hat{B}}{۲}, \widehat{CAM}=\frac{۹۰-\hat{C}}{۲} \Rightarrow \widehat{FAM}=۹۰-\widehat{BAF}-\widehat{CAM}=۹۰-\frac{(۹۰-\hat{B})+(۹۰-\hat{C})}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{FAM}=۹۰-\frac{۱۸۰-(\hat{B}+\hat{C})}{۲}=۹۰-\frac{۹۰}{۲} \Rightarrow \widehat{FAM}=۴۵^\circ$$

۷۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.



عمودهای TE و TF را از نقطه‌ی T بر اضلاع AC و AB وارد می‌کنیم.

در مثلث‌های همنهشت ATF و ATE:

$$\overline{AE}=\overline{AF}=۱۲\sqrt{۳} \quad , \quad \overline{TE}=\overline{TF}=۱۲$$

روشن است که مثلث TFB قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، پس:

$$\overline{BF}=\overline{TF}=۱۲$$

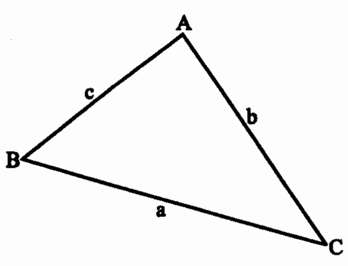
پس مثلث ACT نیز متساوی‌الساقین بوده و لذا:

$$\widehat{ATC}=\widehat{TAB}+\widehat{ABC}=۳۰+۴۵=۷۵^\circ \Rightarrow \overline{AC}=\overline{AT}=۲۴$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{ATB}}+S_{\overset{\triangle}{ATC}}=\frac{۱۲(۱۲+۱۲\sqrt{۳})}{۲}+\frac{۱۲\times ۲۴}{۲}=۶(۱۲+۲۴+۱۲\sqrt{۳})=۷۲(۳+\sqrt{۳})$$

قضایای کسینوس‌ها - سینوس‌ها - رابطه‌ی استوارت و روابط طولی در مثلث

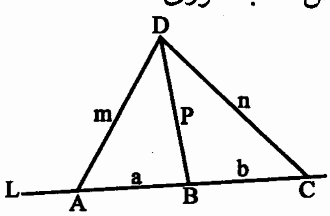
قضیه‌ی کسینوس‌ها: در هر مثلث بین اضلاع و زوایای آن روابط زیر برقرار است:



$$\begin{cases} a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A} \\ b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos\hat{B} \\ c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{C} \end{cases}$$

در نتیجه‌ی این قضیه، قضیه مهم دیگری تحت عنوان قضیه‌ی استوارت مطرح می‌شود.

قضیه‌ی استوارت: نقطه‌ی A, B, C روی خط L و نقطه‌ی D خارج این خط مفروض‌اند. به طوری‌که



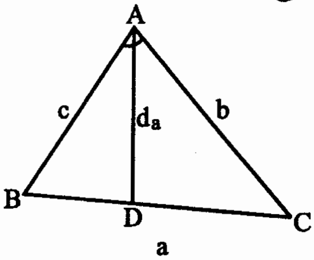
$$\overline{DC}=n\ ,\ \overline{DB}=p\ ,\ \overline{AD}=m\ ,\ \overline{BC}=b\ ,\ \overline{AB}=a$$

در این صورت رابطه‌ی زیر بین این طول‌ها برقرار است:

$$an^۲+bm^۲=(a+b)(p^۲+mn)$$

به کمک این قضیه طول میانه‌ها و نیمسازهای هر مثلث بر حسب اضلاع قابل محاسبه خواهند بود.

اگر c, b, a طول اضلاع مثلث و m_c, m_b, m_a به ترتیب طول میانه‌های وارد بر این اضلاع باشند، در این صورت:



$$\begin{cases} ۲m_a^۲ = b^۲ + c^۲ - \dfrac{a^۲}{۲} \\ ۲m_b^۲ = a^۲ + c^۲ - \dfrac{b^۲}{۲} \\ ۲m_c^۲ = a^۲ + b^۲ - \dfrac{c^۲}{۲} \end{cases}$$

هم‌چنین مطابق شکل اگر نیمساز رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند، در این‌صورت اولاً رابطه‌ی :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}$$

برقرار است و در نتیجه‌ی آن داریم:

$$\overline{CD} = \frac{ab}{b+c} \quad , \quad \overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$$

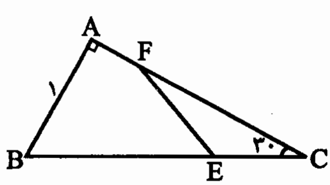
اگر d_c, d_b, d_a به ترتیب طول نیمسازهای رئوس C, B, A باشند، به کمک رابطه‌ی استوارت خواهیم داشت:

$$d_a^۲ = bc - \overline{BD}.\overline{DC} \Rightarrow d_a^۲ = bc(۱ - \frac{a^۲}{(b+c)^۲});$$

$$d_b^۲ = ac(۱ - \frac{b^۲}{(a+c)^۲});$$

$$d_c^۲ = ab(۱ - \frac{c^۲}{(a+b)^۲})$$

۷۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



اولاً در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم: $\overline{BC} = ۲ \quad , \quad \overline{AC} = \sqrt{۳}$

بنابراین:

$$\overline{CE} = \frac{۱}{۴}\overline{BC} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad \overline{CF} = \frac{۵}{۶}\overline{AC} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

حال برای به دست آوردن طول EF، قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای مثلث CEF ارائه می‌کنیم:

$$\overline{EF}^۲ = \overline{CE}^۲ + \overline{CF}^۲ - ۲\overline{CE}.\overline{CF}.\cos ۳۰ \Rightarrow \overline{EF}^۲ = \tfrac{۱}{۴} + \tfrac{۲۵\times۳}{۳۶} - ۲ \times \tfrac{۱}{۲} \times \tfrac{۵\sqrt{۳}}{۶} \times \tfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \tfrac{۳۹}{۳۶}$$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{\sqrt{۳۹}}{۶}$$

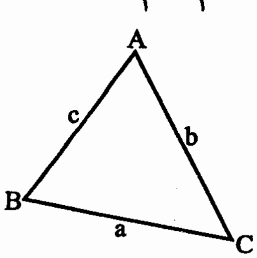
۷۹) گزینه‌ی «د» صحیح است.

$$c^۴ - ۲(a^۲ + b^۲)c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ = [c^۲ - (a^۲ + b^۲ + ab)][c^۲ - (a^۲ + b^۲ - ab)] = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c^۲ = a^۲ + b^۲ + ab \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ab \end{cases}$$ از طرفی طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها: $c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$

$$\Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۶۰^\circ, ۱۲۰^\circ$$

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها، اگر c, b, a طول اضلاع AB, AC, BC از مثلثی باشند که طول قطر دایره‌ی محیطی آن برابر $۲R$ است، در این‌صورت:

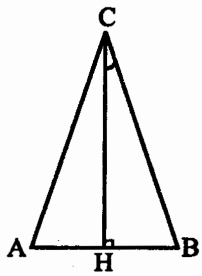


$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۲R$$

و به عبارت دیگر می‌توان گفت که:

$$\begin{cases} a = ۲R\sin\hat{A} \\ b = ۲R\sin\hat{B} \\ c = ۲R\sin\hat{C} \end{cases}$$

۸۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



$$\overline{AB} \le ۲\overline{CH} \Rightarrow \frac{\overline{AB}.\overline{AB}}{۴} \le \frac{۲\overline{CH}.\overline{AB}}{۴}$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{c^۲}{۴} \Rightarrow \frac{ab.\sin\hat{C}}{۲} \ge \frac{C^۲}{۴} \Rightarrow$$

$$۲\sin\hat{A}.\sin\hat{B} \ge \sin\hat{C} \Rightarrow \sin(\hat{A}+\hat{B}) + \sin(\hat{A}-\hat{B}) \ge \sin\hat{C} \Rightarrow \sin(A-B) \ge ۰ \Rightarrow A \ge B$$

$$\Rightarrow \pi - \hat{B} - \hat{C} \ge \hat{B} \Rightarrow \hat{C} \le \pi - ۲\hat{B} \Rightarrow \hat{C}_{\max} = \pi - ۲B$$

حال از آن‌جا که $C = \pi - B - A$ بنابراین وقتی زاویه‌ی C ماکزیمم است که $\hat{A} = \hat{B}$ یعنی مثلث متساوی‌الساقین باشد.

$$\overline{AB} \le ۲\overline{CH} \Rightarrow \frac{\frac{\overline{AB}}{۲}}{\overline{CH}} \le ۱ \Rightarrow \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} \le ۱ \Rightarrow \tan\frac{\hat{C}}{۲} \le ۱ \Rightarrow \frac{C}{۲} \le ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{C} \le ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_{\max} = ۹۰^\circ$$

۸۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

فرض می‌کنیم $\overline{AB} = x$ و $\overline{AC} = y$ در این‌صورت بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\overline{BC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲ - ۲\overline{AB}.\overline{AC}.\cos ۱۲۰^\circ = x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos ۱۲۰ \Rightarrow \overline{BC}^۲ = x^۲ + y^۲ + xy$$

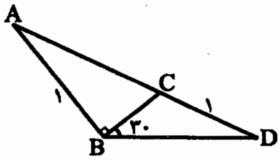
$$\Rightarrow \overline{BC}^۲ = (x+y)^۲ - xy \Rightarrow \overline{BC}^۲ = ۱۰۰ - xy$$

چون: $۰ < xy \le (\frac{x+y}{۲})^۲ \Rightarrow ۷۵ \le \overline{BC}^۲ < ۱۰۰ \Rightarrow ۵\sqrt{۳} \le \overline{BC} < ۱۰$

چون x می‌تواند به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک شود، xy نیز می‌تواند به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک شود. در این صورت BC می‌تواند به اندازه‌ی کافی به ۱۰ نزدیک شود، یعنی طول BC می‌تواند هر مقدار نزدیک به ۱۰ را بگیرد.

۸۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها:



$$a = \lambda b \Rightarrow \lambda = \frac{a}{b} = \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}} = \frac{\sin(۱۸۰ - ۳\hat{C})}{\sin ۲\hat{C}} = \frac{\sin ۳\hat{C}}{\sin ۲\hat{C}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{۳\sin\hat{C} - ۴\sin^۳\hat{C}}{۲\sin\hat{C}.\cos\hat{C}} = \frac{۳ - ۴\sin^۲\hat{C}}{۲\cos C} = \frac{۴\cos^۲\hat{C} - ۱}{۲\cos\hat{C}} = ۲\cos\hat{C} - \frac{۱}{۲\cos\hat{C}}$$

حال با توجه به این‌که $۰ < \hat{C} < ۶۰$، بنابراین $۰ < \lambda < \frac{۳}{۲}$.

۸۳) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های BCD و ABC ارائه می‌دهیم:

در$\triangle BCD : \dfrac{\overline{CD}}{\sin ۳۰} = \dfrac{\overline{BD}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \dfrac{۱}{\sin ۳۰} = \dfrac{\overline{BD}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \dfrac{\overline{BD}}{۲}$

در$\triangle ABC : \sin \hat{C} = \dfrac{۱}{\overline{AC}}$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\overline{AC}.\overline{BD} = ۲ \qquad (۱)$$

حال قضیه‌ی کسینوس‌ها را در مثلث ABC ارائه می‌دهیم:

$$\overline{AD}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BD}^۲ - ۲\overline{AB}.\overline{BD}\cos(۹۰ + ۳۰)$$

$$(۱ + \overline{AC})^۲ = ۱ + \overline{BD}^۲ + \overline{BD} \qquad (۲)$$

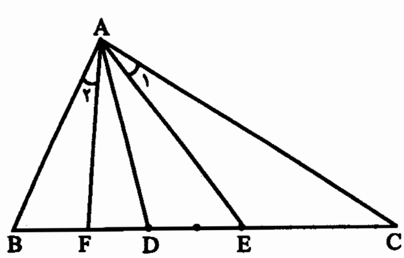
از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) و با فرض بر این‌که $\overline{AC} = x$، خواهیم داشت:

$$(۱ + x)^۲ = ۱ + \tfrac{۴}{x^۲} + \tfrac{۲}{x} \Rightarrow x^۴ + ۲x^۳ = ۲x + ۴ \Rightarrow x^۳(x + ۲) = ۲(x + ۲) \Rightarrow$$

$$x^۳ = ۲ \Rightarrow x = \overline{AC} = \sqrt[۳]{۲}$$

۸۴) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها در دو مثلث AEB و AEC



$$\begin{cases} \dfrac{\overline{EC}}{\sin \hat{A}_۱} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin \hat{C}} \\ \dfrac{\overline{EB}}{\sin(\hat{A} - \hat{A}_۱)} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin \hat{B}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EB}} = \dfrac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} \times \dfrac{\sin \hat{A}_۱}{\sin(\hat{A} - \hat{A}_۱)}$$

مشابه فوق، بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها در دو مثلث AFC, AFB به دست خواهیم آورد:

$$\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FB}} = \dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \times \dfrac{\sin \hat{A}_۲}{\sin(\hat{A} - \hat{A}_۲)}$$

با توجه به این‌که $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و هم‌چنین دو رابطه‌ی اخیر، خواهیم داشت:

$$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = (\dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}})^۲ \times \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EB}}$$

و از آن‌جا که E، قرینه‌ی D نسبت به وسط ضلع BC است، پس:

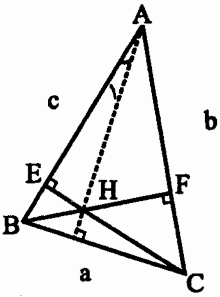
$$\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EB}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = (\dfrac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}})^۲ \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = (\dfrac{c}{b})^۲ \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{c^۳}{b^۳}$$

۸۵) گزینه‌ی «د» صحیح است.

فرض می‌کنیم CE, BF ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AB, AC باشند.



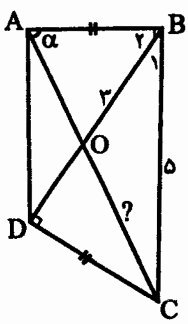
$$\begin{cases} \text{در مثلث } AEC: \overline{AE} = b\cos\hat{A} \\ \text{در مثلث } AEH: \overline{AH} = \dfrac{\overline{AE}}{\cos\hat{A}_۱} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin B} \end{cases} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{b\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}}$$

$$\text{طبق فرض}: \overline{AH} = a \Rightarrow \frac{b.\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}} = a \Rightarrow \frac{۲R\sin\hat{B}.\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}} = ۲R\sin\hat{A} \Rightarrow \sin\hat{A} = \cos\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ$$

در این حالت $\widehat{BHC} = ۱۳۵^\circ$ توجه داشته باشید که A می‌تواند منفرجه باشد، در این حالت با توجه به شکل جای نقاط H, A تعویض می‌شود. بنابراین $\hat{A} = ۱۳۵^\circ$.

۸۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

دو مثلث DOC, AOB را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها در این دو مثلث:



$$\begin{cases} \text{در مثلث } AOB: \dfrac{\overline{AB}}{\sin\hat{O}} = \dfrac{۳}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{AO}}{\sin\hat{B}_۲} \\ \text{در مثلث } DOC: \dfrac{\overline{DC}}{\sin\hat{O}} = \overline{OC} \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{\sin\alpha} = \overline{OC} = \frac{\overline{AO}}{\sin\hat{B}_۲} \qquad (۱)$$

$$\text{در مثلث } ABC: \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \sin\hat{\alpha} = \frac{۵}{\overline{AO} + \overline{OC}} \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{۳}{\overline{OC}} = \frac{۵}{\overline{AO} + \overline{OC}} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{۲}{۳} \qquad (۳)$$

$$\text{در}\triangle BCD: \sin\hat{B}_۱ = \cos\hat{B}_۲ = \frac{\overline{CD}}{۵} \qquad ;(۳),(۱)\text{ با توجه به رابطه‌ی}: \sin\hat{B}_۲ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲\hat{B}_۲ + \cos^۲\hat{B}_۲ = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{CD}^۲}{۲۵} + \frac{۴}{۹} = ۱ \Rightarrow \overline{CD} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۳}$$

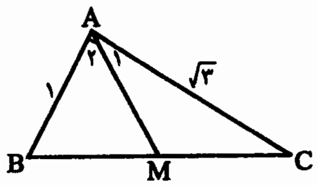
$$\text{در}\triangle BDC: \overline{BC}^۲ = \overline{CD}^۲ + \overline{BD}^۲ \Rightarrow ۲۵ = \frac{۱۲۵}{۹} + \overline{BD}^۲ \Rightarrow \overline{BD}^۲ = \frac{۱۰۰}{۹} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{۱۰}{۳}$$

$$\overline{OD} = \overline{BD} - \overline{BO} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{۱۰}{۳} - ۳ \Rightarrow \overline{OD} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{در}\triangle ODC: \overline{OC}^۲ = \overline{OD}^۲ + \overline{DC}^۲ = \frac{۱}{۹} + \frac{۱۲۵}{۹} = ۱۴ \Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{۱۴}$$

۸۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های ABM و ACM را ارائه می‌دهیم:



$$\begin{cases} ABM \text{ در مثلث}: \dfrac{\sin \hat{M}}{۱} = \dfrac{\sin \hat{A}_۲}{\overline{BM}} \\ ACM \text{ در مثلث}: \dfrac{\sin \hat{M}}{\sqrt{۳}} = \dfrac{\sin \hat{A}_۱}{\overline{CM}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}_۲}{\sin \hat{A}_۱} = \sqrt{۳}$$

$$\frac{\sin ۲\hat{A}_۱}{\sin \hat{A}_۱} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۲\sin \hat{A}_۱ . \cos \hat{A}_۱}{\sin \hat{A}_۱} = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos \hat{A}_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۳۰^\circ, \hat{A}_۲ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{(\sqrt{۳})^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

راه حل دوم:

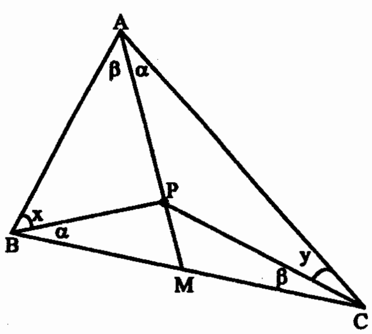
فرض می‌کنیم $\hat{A}_۱ = \alpha$. در این صورت $\hat{A}_۲ = ۲\alpha$ ، هم‌چنین AH را ارتفاع وارد بر ضلع BC می‌گیریم.

$$S_{\overset{\triangle}{AMB}} = \frac{\overline{AH}.\overline{BM}}{۲} = \frac{\overline{AH}.\overline{CM}}{۲} = S_{\overset{\triangle}{AMC}} \Rightarrow \overline{AM}.\overline{AB} \sin ۲\alpha = \overline{AM}.\overline{AC}.\sin\alpha \Rightarrow \sin ۲\alpha = \sqrt{۳}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{۳}\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \cos \hat{A}_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = ۹۰^\circ$$

و طول BC مانند روش قبل محاسبه می‌شود.

۸۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های BPM و CPM:

$$\begin{cases} BPM \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{PM}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{BP}}{\sin M} \\ CPM \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{PM}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{CP}}{\sin M} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \qquad (۱)$$

حال قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث‌های ACP, ABP نیز به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} ABP \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{BP}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{AP}}{\sin x} \\ ACP \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{CP}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{AP}}{\sin y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \times \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin y}{\sin x} \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \times \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin y}{\sin x} \Rightarrow \sin x = \sin y$$

حال با توجه به این‌که $x + y < ۱۸۰^\circ$ ، بنابراین : $x = y$

$$\widehat{AMC} = x + \alpha + \beta = y + \alpha + \beta = \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = ۹۰^\circ$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین خواهد بود و لذا: $\alpha = \beta = ۴۰^\circ$.

$$\widehat{BPC} = ۱۸۰ - ۴۰ - ۴۰ = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \widehat{MPC} = ۵۰^\circ \Rightarrow \widehat{APC} = ۱۳۰^\circ$$

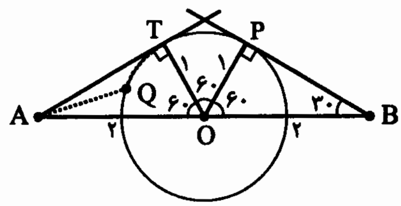
۸۹) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

همه‌ی زوایای مثلث از ۵۹ درجه بزرگ‌ترند، فرض کنیم حداقل یکی از این زوایا از ۶۲ درجه بزرگ‌تر باشد، در این‌صورت:

$$\begin{cases} \alpha > ۶۲ \\ \beta > ۵۹ \\ \gamma > ۵۹ \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma > ۱۸۰^\circ$$

یعنی مجموع زوایای داخلی مثلث از ۱۸۰ درجه بزرگ‌تر است که تناقض می‌باشد، پس همه‌ی زوایای این مثلث از ۶۲ درجه کوچک‌ترند.

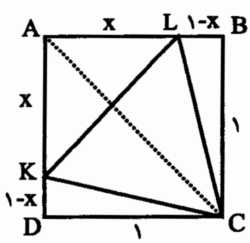
۹۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



از نقاط A و B که قرینه‌ی یک‌دیگر نسبت به نقطه‌ی O(مرکز دایره) می‌باشند مماس BP, AT را بر دایره، رسم می‌کنیم ادعا می‌کنیم که $ATPB$ کوتاه‌ترین مسیر است. اگر مسیر دیگری مانند $AQTPB$ را در نظر بگیریم، در شکل بسته‌ی AQT بدیهی است که $\overline{AQ}+\widehat{QT}>\overline{AT}$ و برای هر مسیر دیگر، استدلالی مشابه خواهیم داشت.

$$\overline{AT}=\overline{BP}=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\times ۲=\sqrt{۳},\qquad \widehat{TP}=\frac{۱}{۶}(۲\pi R)=\frac{۱}{۶}(۲\pi)=\frac{\pi}{۳}$$

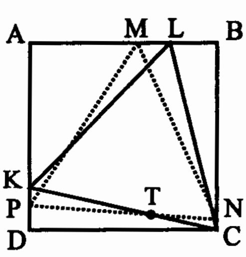
$$ATPB=۲\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۳}$$



۹۱) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

مثلث متساوی‌الاضلاعی مطابق شکل رسم می‌کنیم، به‌طوری که قطر AC از مربع، محور تقارن آن باشد. اثبات خواهیم کرد که این مثلث بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع است.

به همین منظور مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری مانند MNP را در نظر می‌گیریم، اگر قرار باشد که طول ضلع مثلث KCL از طول ضلع مثلث MNP بزرگ‌تر نباشد، بدیهی است که می‌بایستی نقطه‌ی L نسبت به M به B نزدیک‌تر باشد.



مشابهاً نقطه‌ی K نیز نسبت به P می‌بایستی به A نزدیک‌تر باشد.
حال ثابت می‌کنیم که $KC > NP$. اگر PN, KC در نقطه‌ی T متقاطع باشند،

$$\begin{cases} \text{در مثلث } TNC: \widehat{TNC} > ۹۰^\circ \Rightarrow \overline{TC} > \overline{TN} \\ \text{در مثلث } TPK: \widehat{TPK} > ۹۰^\circ \Rightarrow \overline{TK} > \overline{TP} \end{cases} \Longrightarrow \text{جمع طرفین نامساوی}: \overline{KC} > \overline{NP}$$

و اثبات کامل شد.

حال برای به دست آوردن مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع KCL ابتدا طول ضلع آن را می‌یابیم:

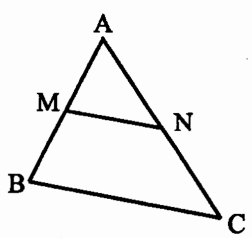
$$\overline{KL}=\overline{CL}\Rightarrow x^۲+x^۲=(۱-x)^۲+۱^۲\Rightarrow ۲x^۲=x^۲-۲x+۲\Rightarrow x^۲+۲x=۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+۱=۳\Rightarrow (x+۱)^۲=۳\Rightarrow x=\sqrt{۳}-۱\Rightarrow \overline{KL}=\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)$$

$$S_{KLC}=\frac{۱}{۲}\cdot(\overline{KL})^۲\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}[۲(۳+۱-۲\sqrt{۳})]=\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$$

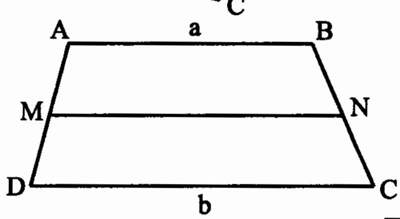
فصل ۲

تالس و تشابه



بر اساس قضیه‌ی تالس اگر نقاط N, M به ترتیب روی اضلاع AC, AB از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار داشته باشند، می‌توان گفت:

$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$، اگر و تنها اگر MN با BC موازی باشد.



چند نکته:

اگر $ABCD$ یک ذوزنقه باشد و نقاط N, M به ترتیب روی ساق‌های BC, AD قرار داشته باشند، می‌توان گفت که:

الف) MN با قاعده‌های CD, AB موازی است، اگر و تنها اگر $\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}}$.

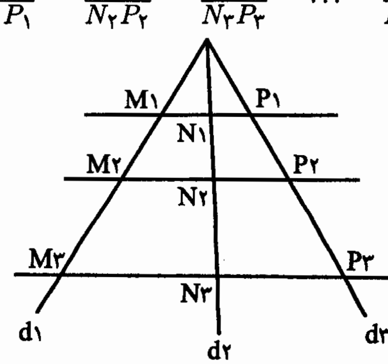
ب) در این‌صورت اگر طول قاعده‌های CD, AB به ترتیب b, a باشد و $\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = k$، طول MN برابر خواهد بود با $\overline{MN} = \frac{a+bk}{k+۱}$. (به دانش‌آموزان عزیز توصیه می‌شود که این رابطه را به یاد بسپارند.)

بدیهی است اگر نقاط N, M به ترتیب اوساط ساق‌های BC, AD باشند، در این‌صورت $\overline{MN} = \frac{a+b}{۲}$. به عبارت دیگر $\overline{MN}$ میانگین دو قاعده است.

- **قضیه‌ی اصلی تالس**

اگر چند خط موازی در صفحه توسط چند خط همرس قطع شوند، در این صورت قطعات ایجاد شده روی خط‌های موازی با هم متناسب هستند:

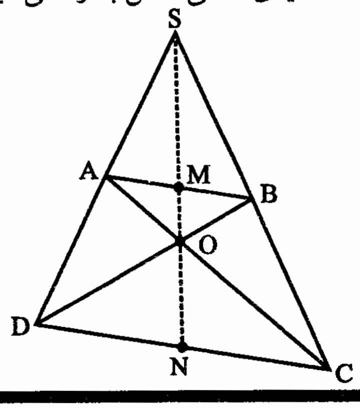
$$\frac{\overline{M_۱N_۱}}{\overline{N_۱P_۱}} = \frac{\overline{M_۲N_۲}}{\overline{N_۲P_۲}} = \frac{\overline{M_۳N_۳}}{\overline{N_۳P_۳}} = \ldots = \frac{\overline{M_nN_n}}{\overline{N_nP_n}}$$



لازم به ذکر است که عکس قضیه‌ی فوق نیز برقرار است؛ یعنی اگر در یک صفحه چند خط موازی توسط چند خط متقاطع به طوری قطع شوند که قطعات ایجاد شده روی خط‌های موازی با یکدیگر متناسب باشند، در این صورت خط‌های متقاطع در یک نقطه همرسند.

• قضیه

در هر ذوزنقه اوساط قاعده‌ها، محل تقاطع اقطار و محل تلاقی امتداد ساق‌ها، چهار نقطه هستند که بر روی یک امتداد قرار دارند. (اثبات این قضیه توسط قضیه‌ی اصلی تالس به راحتی میسر است.)



• تشابه

دو n ضلعی را متشابه گویند اگر و تنها اگر دارای زوایای برابر بوده و ضمناً اضلاع آن‌ها نظیر به نظیر با یک‌دیگر متناسب باشند.

تشابه دو مثلث

دو مثلث در سه حالت با یک‌دیگر متشابه‌اند:

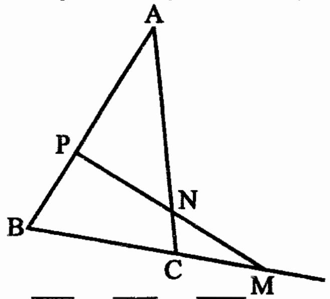
الف) دارای زوایای برابری باشند.

ب) یک زاویه از آن‌ها برابر و اضلاع مجاور آن زاویه با یک‌دیگر متناسب باشند.

ج) اضلاع آن نظیر به نظیر با یک‌دیگر متناسب باشند.

• قضیه‌ی منلائوس

یکی از قضایای پرکاربرد می‌باشد. بر اساس این قضیه، سه نقطه‌ی P, M, N روی اضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ و یا امتداد آن‌ها از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ روی یک خط قرار دارند، اگر و تنها اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:



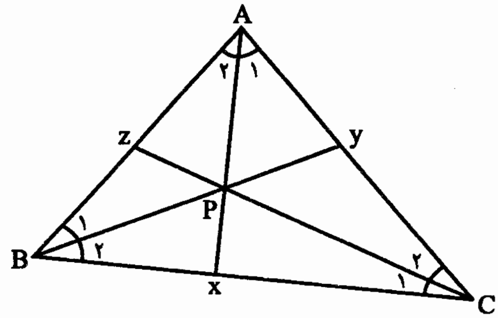
$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = ۱$$

همرسی‌ها و قضیه‌ی سوا

در هر مثلث به سه خط گذرنده از رئوس که در یک نقطه همرس می‌باشند، سه خط سوایی گفته می‌شود. میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌ها در هر مثلث همرس‌اند؛ لذا سه خط سوایی محسوب می‌شوند. نکته‌ی قابل توجه آن است که میانه‌ها یک‌دیگر را به نسبت $\frac{۲}{۱}$ تقسیم می‌کنند.

• **قضیه‌ی سوا**

در مثلث مفروض $\overset{\triangle}{ABC}$، AX، BY و CZ در نقطه‌ی P همرس‌اند، اگر و تنها اگر داشته باشیم:



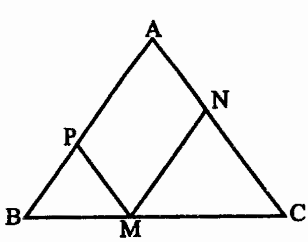
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \times \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = ۱$$

• **بیان مثلثاتی قضیه‌ی سوا**

در مثلث مفروض $\overset{\triangle}{ABC}$ (شکل فوق) AX، BY و CZ در نقطه‌ی P همرس‌اند، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\frac{\sin \hat{A}_۱}{\sin \hat{A}_۲} \times \frac{\sin \hat{B}_۱}{\sin \hat{B}_۲} \times \frac{\sin \hat{C}_۱}{\sin \hat{C}_۲} = ۱$$

۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



فرض کنیم خطوط مرسوم از M، اضلاع AC و AB را به ترتیب در N و P قطع کنند. فرض کنید $\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = x$. در این صورت:

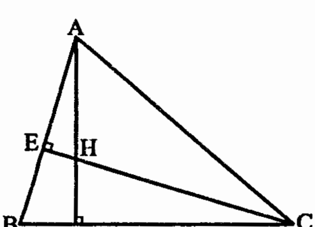
$$\frac{S_{ANMP}}{S_{ABC}} = \frac{۲S_{ANP}}{S_{ABC}} = ۲ \times (\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}) \times (\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}})$$

اکنون با استفاده از قضیه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = x\ ;\ \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = ۱ - x$$

با جای‌گذاری در رابطه‌ی فوق به معادله‌ی $۲x(۱-x) = \frac{۵}{۱۸}$ می‌رسیم که دارای جواب‌های $x = \frac{۱}{۶}$ و $x = \frac{۵}{۶}$ می‌باشد. پس نقطه‌ی M ضلع BC را به نسبت ۱ به ۵ تقسیم می‌کند.

۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



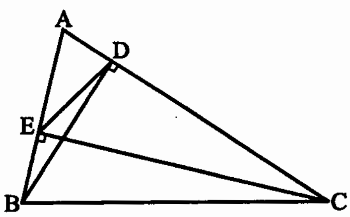
فرض کنیم ارتفاع وارد بر AB، آن را در E قطع کند. با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و CBE داریم:

$$\begin{cases} \widehat{ABC}: & \text{مشترک} \\ \hat{D} = \hat{E} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCE}$$

حال روشن است که دو مثلث ABD و HDC متشابه می‌باشند.

$$\begin{cases}\widehat{BAD}=\widehat{BCE}\\ \hat{D}=\hat{E}=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \triangle HDC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{HD}} \Rightarrow \frac{۴}{۲}=\frac{۳}{\overline{HD}} \Rightarrow \overline{HD}=\frac{۳}{۲}$$

۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



با توجه به دو مثلث ACE و ABD داریم:

$$\begin{cases}\hat{A}: \text{مشترک}\\ \hat{D}=\hat{E}=۹۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

از رابطه‌ی اخیر خواهیم دید که مثلث‌های AED و ABC متشابه خواهند بود.

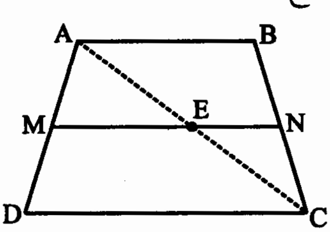
$$\begin{cases}\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\\ \hat{A}: \text{مشترک}\end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\cos\hat{A}$$

به عبارت بهتر، مثلث‌های AED و ABC متشابه و به نسبت تشابه $\cos\hat{A}$ می‌باشند.

بنابراین: $\frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}=\frac{۱}{۲}=\cos\hat{A} \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$

۴) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

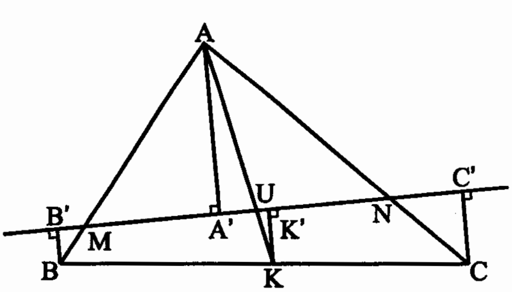
در ابتدا ثابت می‌کنیم، خطی که وسط دو ساق در هر ذوزنقه را به هم‌دیگر وصل می‌کند با میانگین دو قاعده ذوزنقه برابر است. برای اثبات کافی است، قطر AC را رسم کنیم تا MN را در E قطع کند.



$$\begin{cases}\text{در مثلث } ADC: (ME \parallel DC) \Rightarrow \frac{\overline{ME}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \overline{ME}=\frac{\overline{DC}}{۲}\\ \text{در مثلث } ABC: (NE \parallel AB) \Rightarrow \frac{\overline{NE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{BC}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \overline{NE}=\frac{\overline{AB}}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{ME}+\overline{NE}=\overline{MN}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{۲}$$

حال به حل مسئله می‌پردازیم.



پای عمودهای وارد از رئوس A، B و C بر خط D را به ترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. K وسط ضلع BC بوده و پای عمود وارد از آن بر خط D را K' می‌نامیم. داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AMN}}=S_{\overset{\triangle}{BMN}}+S_{\overset{\triangle}{CMN}} \Rightarrow \overline{AA'}\times\frac{\overline{MN}}{۲}=\overline{BB'}\times\frac{\overline{MN}}{۲}+\overline{CC'}\times\frac{\overline{MN}}{۲}$$
$$\Rightarrow \overline{AA'}=\overline{BB'}+\overline{CC'}$$

از طرفی $BB'C'C$، یک ذوزنقه است و K وسط ضلع BC، لذا بنا بر آن‌چه گفته شد:

$$\overline{BB'}+\overline{CC'}=۲\overline{KK'}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت که:

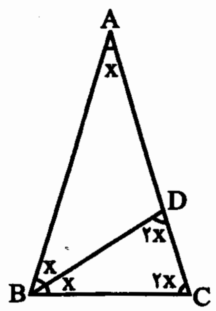
$$\overline{AA'}=۲\overline{KK'} \Rightarrow \frac{\overline{AA'}}{\overline{KK'}}=۲$$

واضح است که مثلث‌های $AA'U$ و $KK'U$ متشابه‌اند، لذا:

$$\frac{\overline{AU}}{\overline{UK}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{KK'}}=۲\Rightarrow\frac{\overline{AU}}{\overline{AK}}=\frac{۲}{۳}\Leftrightarrow U\equiv G$$

پس U، مرکزثقل مثلث ABC است، لذا خطوط متغیر D، همگی گذرنده از مرکز ثقل مثلث می‌باشند.

۵) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



اگر اندازه‌ی هر یک از زوایای B و C را $۲x$ فرض کنیم با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های BDC و ABD، اندازه‌ی زاویه A نیز برابر با x خواهد بود. (مطابق شکل)

با توجه به شکل و آن‌چه که از زوایا حاصل شد، مثلث‌های ABC و BDC متشابه‌اند. پس:

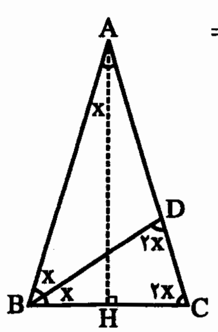
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{DC}=\frac{\overline{BC}^۲}{\overline{AB}}$$

از طرفی D پای نیمساز است، و بر اساس رابطه‌ی نیمسازها داریم:

$$\overline{DC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{BC}}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{BC}^۲}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{BC}}\Rightarrow\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{۱}{۱+\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}}\Rightarrow\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=k\right)$$



$$\Rightarrow k=\frac{۱}{۱+k}\Rightarrow k^۲+k+۱=۰\Rightarrow k=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

راه‌حل دوم: با توجه به شکل، در مثلث ABC، $x+۲(۲x)=۱۸۰^\circ$ بنابراین : $x=۳۶^\circ$

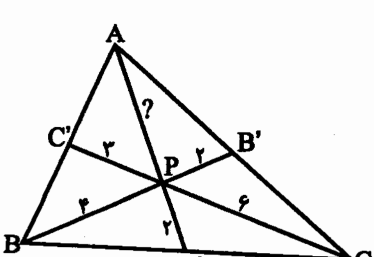
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{۲\overline{BH}}{\overline{AB}}=۲\sin\frac{۳۶^\circ}{۲}=۲\sin ۱۸^\circ=\frac{۲\sin ۱۸^\circ\times\cos ۱۸^\circ}{\cos ۱۸^\circ}$$

$$=\frac{\sin ۳۶^\circ}{\cos ۱۸^\circ}\times\frac{۲\cos ۳۶^\circ}{۲\cos ۳۶^\circ}=\frac{\sin ۷۲^\circ}{۲\cos ۱۸^\circ\times\cos ۳۶^\circ}=\frac{۱}{۲\cos ۳۶^\circ}\Rightarrow ۲\sin ۱۸^\circ=\frac{۱}{۲\cos ۳۶^\circ}$$

$$=\frac{۱}{۲(۱-۲\sin^۲ ۱۸^\circ)}\Rightarrow ۴\sin ۱۸^\circ\times(۱-۲\sin^۲ ۱۸^\circ)=۱\Rightarrow\sin ۱۸^\circ=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=۲\sin ۱۸^\circ=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



می‌دانیم مرکزثقل (محل تلاقی میانه‌ها)، هر یک از میانه‌ها را به نسبت $\frac{۲}{۱}$، تقسیم می‌کند. با توجه به این‌که:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PC'}}=\frac{۶}{۳};\ \frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}}=\frac{۴}{۲}=۲$$

بنابراین، P مرکزثقل مثلث است لذا:

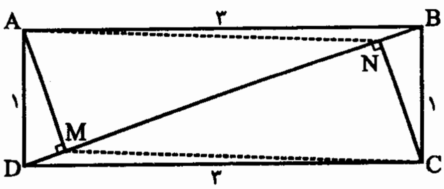
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}}=\frac{\overline{PA}}{۲}=۲\Rightarrow \overline{PA}=۴$$

البته راه‌حل کلی برای این مسئله، قضیه‌ی نقطه‌ی ژرگون می‌باشد، به طوری‌که:

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}=۱\Rightarrow \frac{۲}{۲+\overline{PA}}+\frac{۲}{٦}+\frac{۳}{۹}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۲+\overline{PA}}=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۲+\overline{PA}=٦\Rightarrow \overline{PA}=۴$$

۷) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



مثلث ABD قائم‌الزاویه و AM ارتفاع وارد بر وتر است.

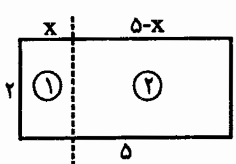
در مثلث ADB: $\overline{AD}^۲=\overline{DM}\cdot\overline{BD}\Rightarrow \overline{DM}=\overline{BN}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۳^۲}}\Rightarrow \overline{DM}=\overline{BN}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{BN}}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow \overline{DM}=\overline{BN}=\frac{۱}{۱۰}\overline{BD}\Rightarrow \overline{MN}=(۱-\frac{۲}{۱۰})\overline{BD}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۴}{۵}S_{\overset{\triangle}{ABD}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۴}{۵}(\frac{۱\times ۳}{۲})=\frac{٦}{۵}$$

$$S_{AMCN}=۲S_{\overset{\triangle}{AMN}}=۲(\frac{٦}{۵})\Rightarrow S_{AMCN}=\frac{۱۲}{۵}$$

۸) گزینه‌ی «د» صحیح است.



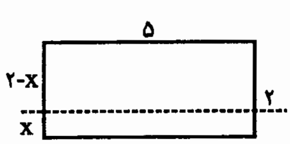
فرض کنیم خط مزبور موازی با عرض مستطیل باشد. با توجه به فواصل مشخص شده و ضمناً تشابه دو مستطیل داریم:

$$\frac{۲}{x}=\frac{۵-x}{۲}\Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=۴$$

که نشانگر دو خط است.

در روابط فوق، در دو مستطیل متشابه طول مستطیل شماره ۱، عرض مستطیل شماره‌ی ۲ می‌باشد. حال فرض کنیم عرض هر دو یکسان باشد لذا:

$$\frac{x}{۲}=\frac{۵-x}{۲}\Rightarrow x=۲/۵$$



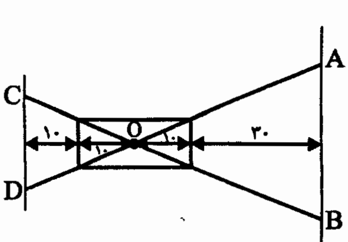
که نشانگر خطی گذرنده از مرکز مستطیل می‌باشد و دو مستطیل را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند.

$$\frac{۵}{۲-x}=\frac{x}{۵}\Rightarrow x^۲-۲x+۲۵=۰\rightarrow \text{فاقد جواب می‌باشد}$$

و یا $\quad \frac{۵}{۲-x}=\frac{۵}{x}\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱$

که نشانگر خط گذرنده از مرکز مستطیل می‌باشد. در نهایت تعداد خط‌های موجود ۴ تا است.

۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



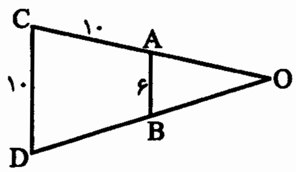
با توجه به شکل و نحوه‌ی انتشار نور، مشخص است که AB و CD قطرهای دوایر روشن شده روی پرده‌ها می‌باشند. اگر S و S' به ترتیب سطوح دوایر روشن شده روی پرده‌های سمت راست و چپ باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{S}{S'}=(\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}})^۲$$

از تشابه دو مثلث OAB و OCD خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{۱۰+۳۰}{۱۰+۱۰}=\frac{۴۰}{۲۰}=۲\Rightarrow\frac{S}{S'}=۲^۲=۴$$

۱۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.

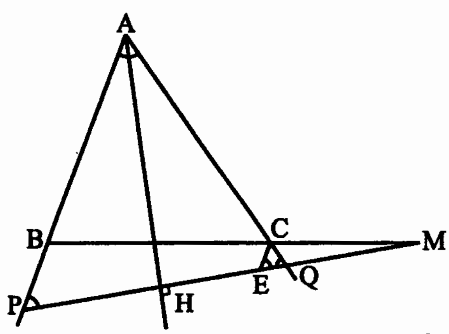


با توجه به شکل، شعاع دایره‌ای که قاعده‌ی کوچک‌تر مخروط طی می‌کند با توجه به مرکزیت نقطه‌ی O، اندازه‌ی $\overline{OB}=\overline{OA}$ می‌باشد. لذا کافی است که این اندازه با توجه به شکل محاسبه شود.

بنا بر قضیه‌ی تالس:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\Rightarrow\frac{\overline{OA}}{۱۰+\overline{OA}}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow\overline{OA}=۱۵$$

۱۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



پای عمود وارد از M، بر نیمساز داخلی رأس A را، H می‌نامیم. واضح است که APQ مثلثی متساوی‌الساقین است. لذا: $\widehat{APQ}=\widehat{AQP}$.
از رأس C، خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا MP را در نقطه‌ی E قطع کند. طبق اصل خطوط موازی و مورب $\widehat{APQ}=\widehat{CEQ}$، و از دو تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\widehat{CEQ}=\widehat{AQP}\Rightarrow\overline{CE}=\overline{CQ}\qquad(۱)$$

بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث MBP:

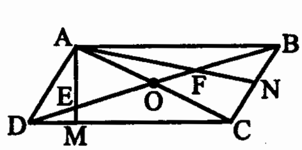
$$CE\parallel BP\Rightarrow\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{BP}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\overline{CE}}{\overline{PB}}=\frac{۱}{۲}\qquad(۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت: $\frac{\overline{PB}}{\overline{CQ}}=۲$.

راه‌حل دوم: بنا بر قضیه‌ی منلائوس، با توجه به این‌که نقاط P، Q و M روی امتدادهای اضلاع AB، AC و BC می‌باشند و از طرفی روی یک خط واقع‌اند، خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}\times\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}\times\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}=۱\Rightarrow\frac{\overline{PB}}{\overline{CQ}}\times\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow\frac{\overline{PB}}{\overline{CQ}}=۲$$

۱۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



می‌دانیم قطرها در متوازی‌الاضلاع هم‌دیگر را نصف می‌کنند، لذا در مثلث ABC، F مرکزثقل می‌باشد. پس:

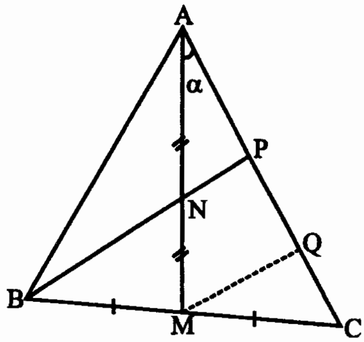
$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{\overline{OF}}{\overline{BD}}=\frac{۱}{۶}$$

در مثلث OCD، نقاط M، E و A که روی یک امتداد هستند روی اضلاع DC، OD و امتداد OC واقع‌اند. بنا بر قضیه‌ی منلائوس:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{DM}}\times\frac{\overline{DE}}{\overline{OE}}\times\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}=۱\Rightarrow\frac{\overline{OE}}{\overline{DE}}=(\frac{۲}{۱})(\frac{۱}{۲})=۱\Rightarrow\qquad\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\overline{OE}}{\overline{BD}}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{OE}}{\overline{BD}}+\frac{\overline{OF}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BD}}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳+۲}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



فرض می‌کنیم امتداد AN، ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع کند.
نسبت $\frac{AP}{AC}$ را محاسبه می‌کنیم. از M خطی به موازات BN رسم می‌کنیم تا AC را در Q قطع کند.

قضیه‌ی تالس را در مثلث‌های BPC و AMQ ارائه می‌کنیم:

$$\text{در مثلث BPC}: (MQ \parallel BP): \frac{\overline{MC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QP}} = ۱ \Rightarrow \overline{CQ} = \overline{PQ}$$

$$\text{در مثلث AMQ}: (NP \parallel MQ): \frac{\overline{AN}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = ۱ \Rightarrow \overline{AP} = \overline{PQ}$$

از دو تساوی اخیر خواهیم داشت که: $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{۱}{۳}$.

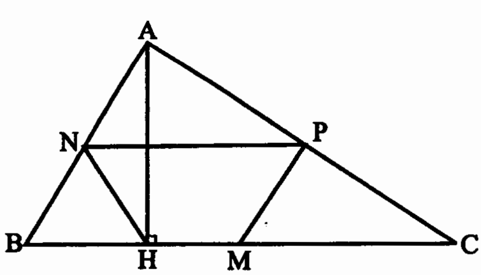
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{APN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{APN}}}{۲S_{\overset{\triangle}{AMC}}} = \frac{\overline{AN} \times \overline{AP} \times \sin\hat{\alpha}}{۲\overline{AM} \times \overline{AN} \times \sin\hat{\alpha}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}\right)\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}\right) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

راه‌حل دوم: برای محاسبه نسبت $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$، قضیه‌ی منلائوس را برای مثلث AMC و نقاط N ،P و B به کار می‌بریم:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{NM}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = (۱) \times (\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{۱}{۳}$$

ادامه راه‌حل، مشابه با راه‌حل اول می‌باشد.

۱۴) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنا بر قضیه‌ی تالس، $۱ = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$، لذا NP با ضلع BC موازی بوده و چهارضلعی $HNPM$، ذوزنقه خواهد بود.

از طرفی داریم:

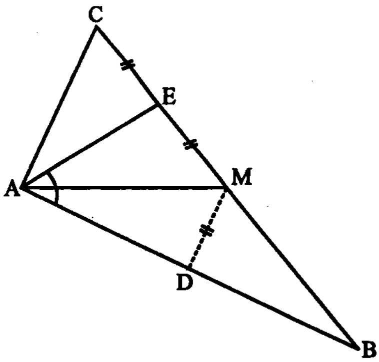
$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AB}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \overline{PM} = \frac{\overline{AB}}{۲}$$

با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH، NH میانه وارد بر وتر AB است لذا: $\overline{NH} = \frac{\overline{AB}}{۲}$.

از دو رابطه‌ی اخیر می‌بینیم که $\overline{PM} = \overline{NH}$، لذا چهارضلعی مزبور یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.

۱۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

در ابتدا ثابت می‌کنیم که AM نیمساز زاویه‌ی $\widehat{EAB}$ است. به همین منظور از نقطه‌ی M خطی به موازات ضلع AC رسم می‌کنیم، تا ضلع AB را در D قطع کند.



بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC:

$$MD \parallel AC \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \overline{MD} = \frac{۱}{۲}\overline{AC}$$

از طرفی چون $\overline{AC} = \overline{CM}$ پس:

$$\overline{MD} = \frac{۱}{۲}\overline{CM} \Rightarrow \overline{MD} = \overline{ME}$$

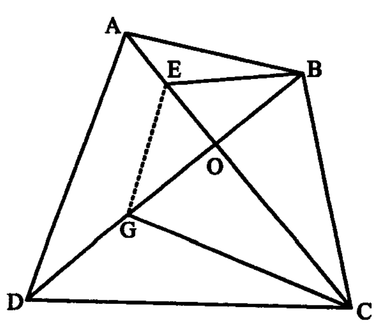
از توازی MD با AC و AM به عنوان مورب داریم: $\widehat{CAM} = \widehat{AMD}$، از طرفی به دلیل برابری AC و CM، مثلث ACM متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه $\widehat{CAM} = \widehat{CMA}$.

از دو تساوی اخیر، خواهیم داشت که: $\widehat{AMD} = \widehat{CMA}$.

$$\begin{cases} \overline{EM} = \overline{MD} \\ \widehat{AMD} = \widehat{CMA} \\ \overline{AM} :\text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEM \cong \triangle ADM \Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{DAM}$$

پس AM، نیمساز رأس A در مثلث AEB خواهد بود. حال بنا بر قضیه‌ی نیمسازها خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{MB}} = \frac{۱}{۲}$$



۱۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

روشن است که مثلث‌های OEB و OCD با یک‌دیگر متشابه‌اند،
هم‌چنین مثلث‌های OCG و OAB نیز با هم متشابه‌اند. لذا:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{OEB} \sim \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \Rightarrow \overline{OE} \times \overline{OD} = \overline{OB} \times \overline{OC} & (۱) \\ \overset{\triangle}{OCG} \sim \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{OG} \times \overline{OA} = \overline{OC} \times \overline{OB} & (۲) \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

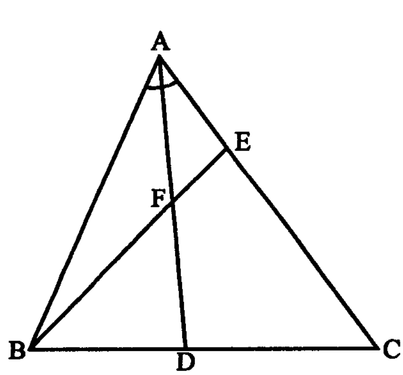
$$\overline{OE} \times \overline{OD} = \overline{OG} \times \overline{OA} \Rightarrow \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OD}} \Rightarrow EG \parallel AD$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{EG}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{OG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{EG}}{\overline{AD}} = (\frac{۲}{۱})(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$

۱۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.

بنا بر قضیه‌ی منلائوس در مثلث BEC و نقاط D، F و A:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = ۱$$



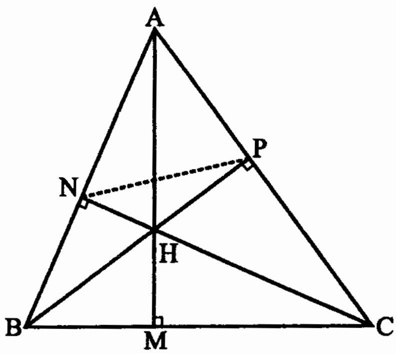
از طرفی طبق رابطه‌ی نیمسازها:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

بنابراین:

$$\frac{b}{c} \times \frac{b}{c} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{c^۲}{b^۲}$$

۱۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



فرض کنیم M، N و P، مطابق شکل پای ارتفاعات مثلث باشند.
بنا بر آن‌چه که گفته شد مثلث‌های ANP و ABC با نسبت تشابه $\cos A$ با یک‌دیگر متشابه هستند. پس:

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{BC}}=\cos A$$

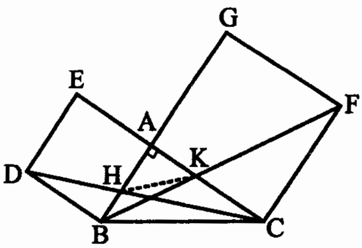
روشن است که دایره‌ی محیطی مثلث ANP گذرنده از نقطه‌ی H بوده و هم‌چنین AH قطر دایره‌ی محیطی این مثلث می‌باشد. لذا:

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AH}\cdot\sin A}{\overline{BC}}=\cos A\Rightarrow\frac{\overline{AH}}{\overline{BC}}=\cot\hat{A}$$

به همین صورت و با استدلالی مشابه خواهیم داشت: $\frac{\overline{BH}}{\overline{AC}}=\cot\hat{B}$، بنابراین:

$$\frac{\overline{AH}\times\overline{BH}}{\overline{BC}\times\overline{AC}}=(\frac{\overline{AH}}{\overline{BC}})\times(\frac{\overline{BH}}{\overline{AC}})=\cot\hat{A}\times\cot\hat{B}\quad=\cot ۶۰^\circ\times\cot ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۱=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



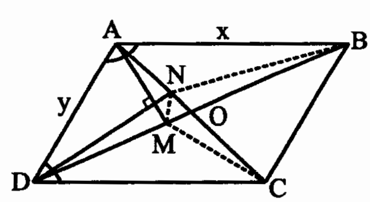
از تشابه مثلث‌های ABK با CKF و هم‌چنین ACH با HBD خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{\overline{AK}}{b}=\frac{c}{b+c}\Rightarrow\overline{AK}=\frac{bc}{b+c}$$

متشابهاً خواهیم داشت که: $\overline{AH}=\frac{cb}{b+c}$، بنابراین $\overline{AK}=\overline{AH}$ و مثلث AHK قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود. پس: $\overline{HK}=\sqrt{۲}\,\overline{AK}$

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{HK}}{a}=\frac{\sqrt{۲}\cdot b\cdot(\frac{c}{a})}{b(۱+\frac{c}{a})}=\frac{\sqrt{۲}\sin\hat{C}}{۱+\tan\hat{C}}\quad=\frac{\sqrt{۲}\cdot\sin ۳۰^\circ}{۱+\tan ۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}(۳-\sqrt{۳})}{۴}$$

۲۰) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



با توجه به قضیه‌ی نیمسازها در دو مثلث ABD و ACD داریم:

در مثلث ABD : $$\frac{\overline{DM}}{\overline{BM}}=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{\overline{DM}}{\overline{BD}}=\frac{y}{x+y}\Rightarrow\frac{\overline{DM}}{\overline{DO}}=\frac{۲y}{x+y}\quad\Rightarrow\frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}=\frac{x-y}{x+y}$$

متشابهاً برای مثلث ADC خواهیم داشت: $\frac{\overline{ON}}{\overline{OA}}=\frac{x-y}{x+y}$، لذا:

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}=\frac{x-y}{x+y}\Rightarrow MN\parallel AD$$

از توازی MN با اضلاع AD و BC، نتیجه می‌شود که چهارضلعی‌های $ANMD$ و $BNMC$ ذوزنقه هستند. لذا:

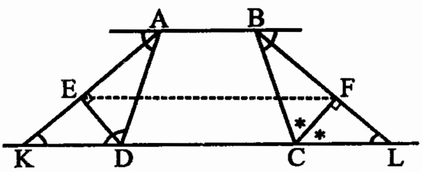
$$\frac{S_{ANMD}}{S_{BNMC}}=\frac{\frac{۱}{۲}(\overline{NM}+\overline{AD})\cdot h_۱}{\frac{۱}{۲}(\overline{NM}+\overline{BC})\cdot h_۲}=\frac{h_۱}{h_۲}$$

($h_۱$ و $h_۲$، ارتفاع‌های دو ذوزنقه و H ارتفاع وارد از O، بر ضلع AD است.)

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OA}} = \dfrac{H-h_۱}{H} = \dfrac{x-y}{x+y} \Rightarrow \dfrac{h_۱}{H} = \dfrac{۲y}{x+y} \\ \triangle ONM \sim \triangle OBC \Rightarrow \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OA}} = \dfrac{h_۲-H}{H} = \dfrac{x-y}{x+y} \Rightarrow \dfrac{h_۲}{H} = \dfrac{۲x}{x+y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ANMD}}{S_{BNMC}} = \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{\frac{h_۱}{H}}{\frac{h_۲}{H}} = \frac{\frac{۲y}{x+y}}{\frac{۲x}{x+y}} = \frac{y}{x}$$

۲۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



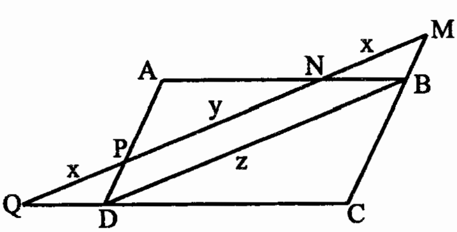
نیمسازهای خارجی زوایای A و B را امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع DC را در K و L قطع کنند. روشن است که مثلث‌های AKD و BCL متساوی‌الساقین بوده و نقاط E و F به ترتیب اوساط اضلاع AK و BL می‌باشند.

با توجه به ذوزنقه $ABLK$ و پاره‌خط EF که اوساط ساق‌های AK و BL را به هم وصل کرده است، داریم:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB}+\overline{KL}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overline{EF} = \frac{\overline{AB}+\overline{DC}+\overline{KD}+\overline{CL}}{۲} \;;\; (\overline{KD}=\overline{AD}\,,\, \overline{CL}=\overline{BC}) \Rightarrow \overline{EF} = \frac{x+y+z+w}{۲}$$

۲۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



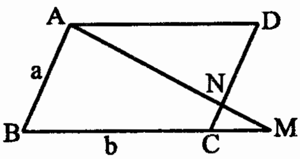
به راحتی ثابت می‌شود که مثلث‌های MBN و PDQ با یک‌دیگر همنهشت هستند، لذا $\overline{MN} = \overline{PQ} = x$. اگر $\overline{NP} = y$ و $\overline{BD} = z$، فرض شوند.

$$\frac{y}{y+۲x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳y = ۲x$$

$$\begin{cases} \triangle BCD \sim \triangle CMQ \Rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{MQ}} \\ \triangle MNB \sim \triangle MCQ \Rightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{NM}}{\overline{MQ}} \end{cases} \Rightarrow \text{با جمع طرفین}: ۱ = \frac{x+z}{۲x+y} \Rightarrow \frac{z+\frac{۳}{۲}y}{۳y+y} = \frac{z+\frac{۳}{۲}y}{۴y} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{۳}{۸} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{\overline{NP}}{\overline{BD}} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

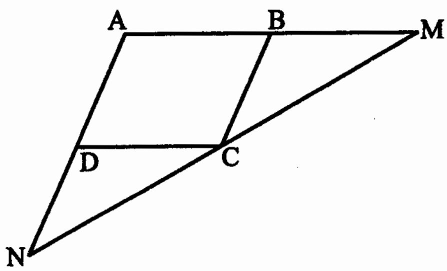
۲۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



از تشابه مثلث‌های MNC، ADN و ABM با یک‌دیگر:

$$\begin{cases} \triangle MNC \sim \triangle ADN \Rightarrow \dfrac{\overline{MC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{DN}} \\ \triangle MNC \sim \triangle ABM \Rightarrow \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{AB}} \end{cases} \Rightarrow \text{با تقسیم طرفین تساوی}: \frac{\overline{MB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DN}} \Rightarrow \overline{BM} \times \overline{DN} = ab$$

۲۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.

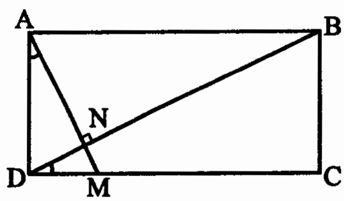


با ارائه‌ی قضیه‌ی تالس در مثلث AMN:

$$\begin{cases} BC \parallel AN \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MN}} \\ DC \parallel AM \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{MN}} \end{cases}$$

با جمع طرفین تساوی $\frac{\overline{BC}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MN}} + \frac{\overline{NC}}{\overline{MN}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = ۱$

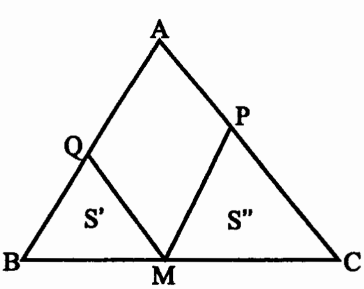
۲۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



$$\begin{cases} \triangle DMN \sim \triangle AND \Rightarrow \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AN}} \\ \triangle AND \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{\overline{DN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\overline{DM}}{\overline{AB}} = \frac{۱}{۴}$$

۲۶) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

با فرض این‌که مساحت مثلث AMP، S'' باشد. آن را بر حسب S' و S محاسبه می‌کنیم.



$$\begin{cases} \triangle BMQ \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}} \\ \triangle AMP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{BA}} = \frac{\sqrt{S''}}{\sqrt{S}} \end{cases} \Rightarrow \text{با جمع طرفین تساوی:}$$

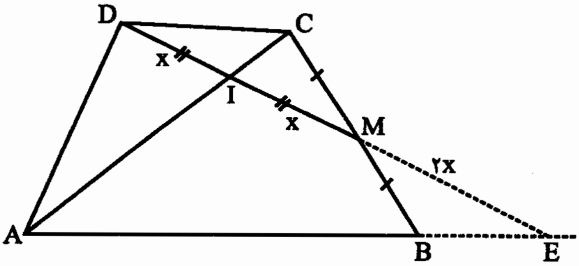
$$\frac{\overline{AM} + \overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{S'} + \sqrt{S''}}{\sqrt{S}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{S'} + \sqrt{S''} = \sqrt{S} \Rightarrow \sqrt{S''} = \sqrt{S} - \sqrt{S'}$$

$$S_{MPCQ} = S - S' - S'' = S - S' - (\sqrt{S} - \sqrt{S'})^۲ = S - S' - S - S' + ۲\sqrt{SS'} = ۲\sqrt{S'}(\sqrt{S} - \sqrt{S'})$$

۲۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.

DN را امتداد می‌دهیم، تا امتداد ضلع AB را در نقطه‌ی E قطع کند. به راحتی ثابت می‌شود که مثلث‌های DCM و BME با یک‌دیگر همنهشت‌اند، لذا: $\overline{ME} = \overline{MD}$، پس اگر $\overline{DI} = x$ فرض شود ME برابر $۲x$ خواهد بود.

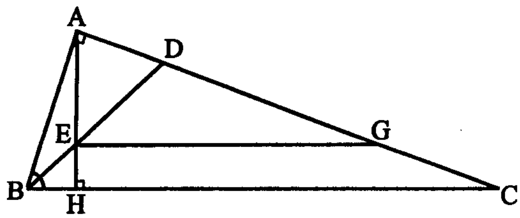
از تشابه مثلث‌های AIE و DIC خواهیم داشت:



$$\frac{\overline{EI}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BE}}{\overline{DC}} \Rightarrow (\overline{BE} = \overline{DC}) : \frac{۳x}{x} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

قضیه‌ی نیمساز را در مثلث‌های ABH و ABC به کار می‌بریم.



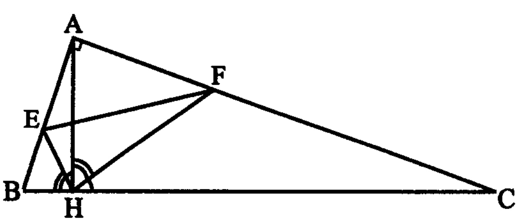
$$\begin{cases} ABH \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}} & (۱) \\ ABC \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AD}} & (۲) \end{cases}$$

از طرفی بنا بر تشابه مثلث‌های ABH با ABC و هم‌چنین با رابطه‌ی تالس در مثلث AHC خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \triangle ABH \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} & (۳) \\ AHC \text{ در مثلث}: (EG \parallel HC) \Rightarrow \dfrac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{AG}} & (۴) \end{cases}$$

$$\text{از ۴ رابطه‌ی اخیر} \Rightarrow \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{CG}$$

۲۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنا بر فرض مسئله، $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$. از تشابه دو مثلث ABH و ACH خواهیم دید که HF و HE اجزاء متناظر در دو مثلث متشابه مذکور می‌باشند. لذا:

$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{\overline{EH}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \qquad (۱)$$

$$\widehat{CHF} = \widehat{AHE} \Rightarrow \widehat{CHF} + \widehat{FHA} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{FHE} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{EHF} = ۹۰^\circ \qquad (۲)$$

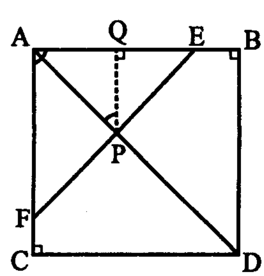
از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که مثلث‌های EHF و ABC، با یک‌دیگر متشابه‌اند پس:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{EHF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۶}$$

۳۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

از نقطه‌ی P به موازات ضلع AD رسم می‌کنیم تا AB را در Q قطع کند. با توجه به این‌که AP، نیمساز رأس A در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AEF می‌باشد. پس:

$$\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{APQ} = ۴۵^\circ \Rightarrow \triangle APQ: \text{ مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.}$$



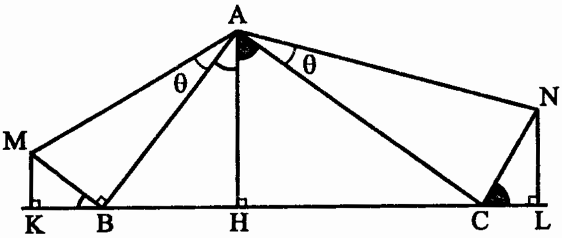
با ارائه رابطه‌ی تالس در مثلث AEF:

$$\frac{\overline{EQ}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\overline{AE} - \overline{AQ}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AF}}, \ \overline{AQ} = \overline{PQ} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\overline{AP}$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\overline{AP}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}\overline{AP}\left(\frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}}\right) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} = \frac{\sqrt{۲}}{\overline{AP}}$$

۳۱) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



ارتفاع AH را رسم می‌کنیم با کمی دقت خواهیم دید که مثلث‌های ABH با BMK و ACH با CNL متشابه‌اند لذا:

$$\begin{cases} \triangle ABH \sim \triangle BMK \Rightarrow \dfrac{\overline{BK}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BK} = \left(\dfrac{\overline{MB}}{\overline{AB}}\right)\overline{AH} = \overline{AH}\cdot\tan\hat{\theta} \\ \triangle ACH \sim \triangle CNL \Rightarrow \dfrac{\overline{CL}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CL} = \left(\dfrac{\overline{CN}}{\overline{AC}}\right)\overline{AH} = \overline{AH}\cdot\tan\hat{\theta} \end{cases} \Rightarrow \overline{BK} = \overline{CL} \Rightarrow \dfrac{\overline{BK}}{\overline{CL}} = ۱$$

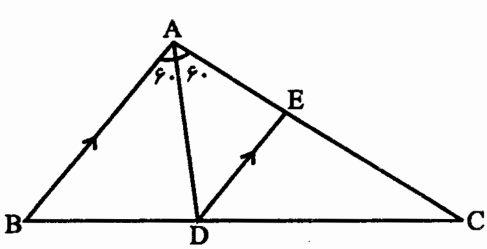
۳۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

$$S_{ABPQ} = S_{ANMC} \Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{AQ} = \overline{AN}\cdot\overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} \\ \widehat{BAN} = \widehat{CAQ} = ۹۰^\circ + \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle ACQ \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ACE}$$

$$\begin{cases} \widehat{ABF} = \widehat{ACE} \\ \hat{A} : \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

۳۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.



از نقطه‌ی D، پای نیمساز خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم، تا ضلع AC را در E قطع کند. روشن است که مثلث AED، متساوی‌الاضلاع است. پس: $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{AD}$

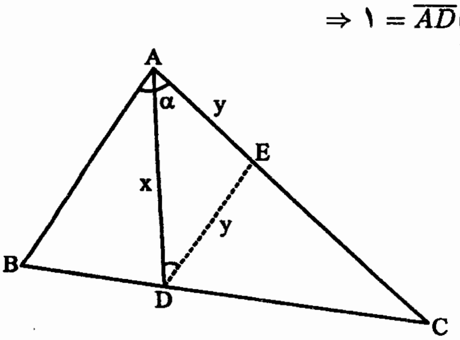
بنا بر قضیه‌ی تالس، خواهیم داشت:

$$\text{ABC در مثلث} : (ED \parallel AB) \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AC} - \overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC} - \overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow ۱ - \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow ۱ = \overline{AD}\left(\frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}\right) \Rightarrow \frac{۱}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$$

۳۴) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



بنا بر فرض مسئله داریم:

$$\frac{۲}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$$

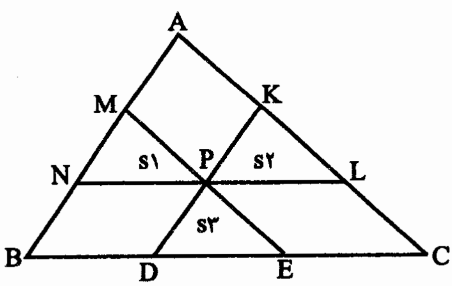
از پای نیمساز (نقطه‌ی D) خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در E قطع کند، مثلث AED، متساوی‌الساقین است. اگر $\overline{AE}=\overline{ED}=y$ و $\overline{AD}=x$ و $\frac{\hat{A}}{2}=\alpha$ باشند. بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ADE داریم:

$$x^2=y^2+y^2-2y^2\cos(\pi-2\alpha)\Rightarrow x^2=2y^2(1+\cos 2\alpha)=2y^2(2\cos^2\alpha)=4y^2\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow x=2y\cos\alpha\Rightarrow y=\frac{x}{2\cos\frac{\hat{A}}{2}}$$

بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{AB}}\Rightarrow\frac{\overline{AC}-y}{\overline{AC}}=\frac{y}{\overline{AB}}\Rightarrow 1=y\left(\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AB}}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{2\cos\frac{\hat{A}}{2}}{\overline{AD}}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}\Rightarrow 2\cos\frac{\hat{A}}{2}=2\Rightarrow\cos\frac{\hat{A}}{2}=1\Rightarrow\hat{A}=\begin{cases}0\\4\pi\end{cases}$$

که تناقض است.



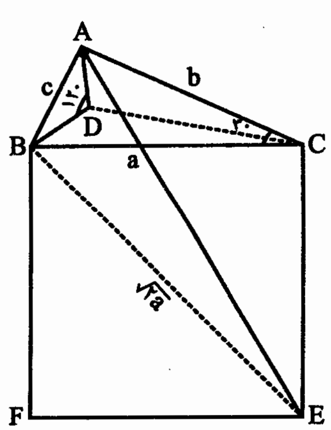
۳۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

خطوط ترسیم شده به موازات اضلاع مثلث، سه مثلث متشابه با مثلث ABC و هم‌چنین سه متوازی‌الاضلاع ایجاد کرده‌اند.

$$\begin{cases}\triangle PDE\sim\triangle ABC\Rightarrow\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}\\[2mm]\triangle MNP\sim\triangle ABC\Rightarrow(\overline{NP}=\overline{BD}):\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}\\[2mm]\triangle KPL\sim\triangle ABC\Rightarrow(\overline{PL}=\overline{EC}):\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}\end{cases}\Rightarrow$$ با جمع طرفین تساوی

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=1\Rightarrow\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S}$$

۳۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.



مربعی را روی ضلع BC بنا می‌کنیم.

روشن است که مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند

$$\begin{cases}\widehat{ADB}=\widehat{ACE}=30+90=120^\circ\\[2mm]\text{بنابرفرض}:\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\triangle AEC\sim\triangle ABD\Rightarrow\widehat{BAD}=\widehat{EAC},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$$

$$\begin{cases}\widehat{BAD}=\widehat{EAC}\Rightarrow\widehat{BAD}+(\widehat{EAD})=\widehat{EAC}+(\widehat{EAD})\Rightarrow\widehat{BAE}=\widehat{DAC}\\[2mm]\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}\Rightarrow\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\triangle ABE\sim\triangle ADC\Rightarrow\frac{b}{\overline{AE}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BE}}\Rightarrow\frac{b}{\overline{AE}}=\frac{\overline{DC}}{\sqrt{2}a}\quad\Rightarrow\overline{DC}=\frac{ab\cdot\sqrt{2}}{\overline{AE}}$$

حال، طول AE را در مثلث ACE و بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌های محاسبه می‌کنیم.

$$\text{ACE در مثلث}: \overline{AE}^{۲} = b^{۲} + a^{۲} - ۲ab\cos ۱۲۰ = b^{۲} + a^{۲} + ab \Rightarrow \overline{AE} = a\sqrt{(\frac{b}{a})^{۲} + ۱ + (\frac{b}{a})}$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = a\sqrt{۱ + \cos ۳۰ + \cos^{۲} ۳۰} \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DC}}{b} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱ + \cos ۳۰ + \cos^{۲} ۳۰}}$$

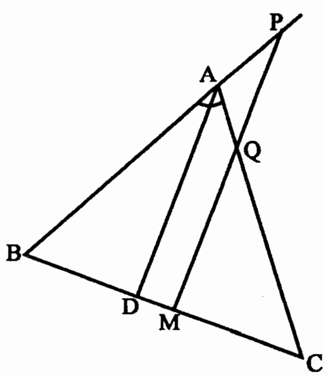
$$= \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳}{۴}}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۷ + ۲\sqrt{۳}}}$$

۳۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

بنا بر اصل خطوط موازی و مورب، $AD \parallel PQ$ یک بار AB را مورب در نظر می‌گیریم و بار دیگر AC را. لذا:

مثلث APQ، متساوی‌الساقین خواهد بود. $\widehat{APQ} = \widehat{AQP} \Rightarrow$

$\overline{AP} = \overline{AQ} = x$



قضیه‌ی تالس را در مثلث‌های ADC و BPM به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} BPM \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{DM}} \\ CAD \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{DM}} \end{cases}$$

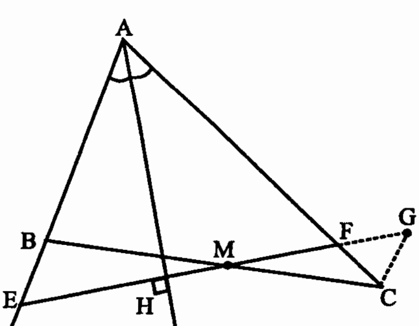
$$(\overline{BM} = \overline{CM}) \Rightarrow \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \Rightarrow \overline{BP} = \overline{CQ}$$

البته نتیجه‌ی اخیر را با ارائه قضیه‌ی منلائوس در مثلث ABC، برای نقاط Q ،P و M، می‌توان به‌دست آورد.

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} \times \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{CQ}}{\overline{BP}} = ۱ \Rightarrow \overline{BP} = \overline{CQ}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} + x = \overline{AC} - x \Rightarrow x = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{۲} = \frac{b - c}{۲}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{b}{x} + \frac{c}{x} = \frac{۲(b+c)}{b-c} = \frac{۲(۱ + \frac{b}{c})}{\frac{b}{c} - ۱} \qquad ; \frac{b}{c} = ۳ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{۲(۱ + ۳)}{۳ - ۱} = ۴$$



۳۸) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

راه‌حل اول: واضح است که مثلث AEF متساوی‌الساقین است پس

$$\widehat{AEF} = \widehat{AFE} \qquad (۱)$$

از رأس C، خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم، تا امتداد EF را در نقطه‌ی G قطع کند. روشن است که مثلث‌های MBE و MCG همنهشت‌اند پس:

$$\widehat{CGF} = \widehat{AEF} \quad (۲)\,,\ \overline{CG} = \overline{BE} \quad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت: $\widehat{CGF} = \widehat{GFC}$. پس مثلث CFG متساوی‌الساقین است لذا

$$\overline{CG} = \overline{CF} \qquad (۴)$$

از روابط (۳) و (۴) خواهیم داشت $\overline{BE} = \overline{CF}$، لذا $\hat{A}$ هر مقداری کم‌تر از ۱۸۰° می‌تواند باشد.

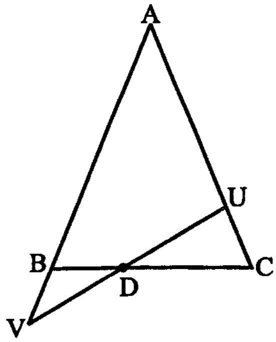
راه‌حل دوم: قضیه‌ی منلائوس را برای مثلث ABC و نقاط F، M و E ارائه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = ۱ \\ \overline{AE} = \overline{AF}\ ,\ \overline{BM} = \overline{CM} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{FC}} = ۱ \Rightarrow \overline{BE} = \overline{CF}$$

راه‌حل سوم: قضیه‌ی سینوس‌ها را برای مثلث‌های MBE و MCF ارائه می‌کنیم

$$\begin{cases} \text{در مثلث } MBE : \frac{\overline{BE}}{\sin \hat{M}} = \frac{\overline{BM}}{\sin \hat{E}} \\ \text{در مثلث } MCF : \frac{\overline{CF}}{\sin \hat{M}} = \frac{\overline{MC}}{\sin \hat{F}} \end{cases} ;(\overline{BM} = \overline{MC}\ ;\ \sin \hat{E} = \sin \hat{F}) \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\sin \hat{M}} = \frac{\overline{CF}}{\sin \hat{M}} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{CF}$$

۳۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



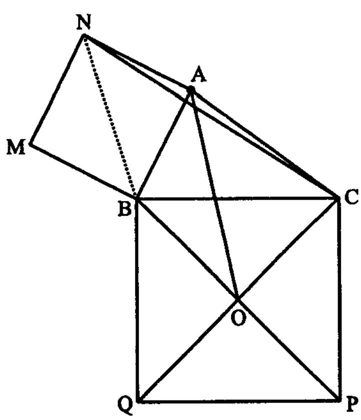
بنا بر قضیه‌ی منلائوس در مثلث متساوی‌الساقین ABC و با نقاط هم‌خط V، D و U داریم:

$$\frac{\overline{AU}}{\overline{UC}} \times \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{BV}}{\overline{AV}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AC} - \overline{UC}}{\overline{UC}} \times (۲) \times \frac{\overline{BV}}{\overline{BV} + \overline{AB}} = ۱$$

$$(\overline{AB} = \overline{AC}) \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{UC}} - ۱ = \frac{۱}{۲}(\frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} + ۱) \Rightarrow \frac{۲}{\overline{UC}} = \frac{۱}{\overline{BV}} + \frac{۳}{\overline{AB}}$$

لذا $x = ۲$، $y = ۱$ و $z = ۳$.

۴۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



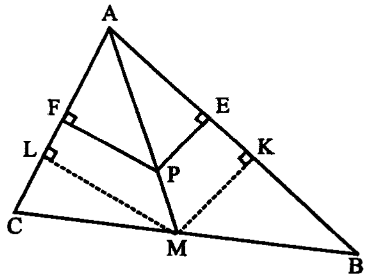
با توجه به مثلث‌های NBC و ABO داریم:

$$\begin{cases} \widehat{NBC} = \hat{B} + ۴۵^\circ = \widehat{ABO} \\ \frac{\overline{NB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}} = \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\triangle NBC \sim \triangle ABO \Rightarrow \frac{\overline{AO}}{\overline{NC}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

از نقطه‌ی M، عمودهای MK و ML را بر اضلاع AB و AC وارد می‌کنیم. قضیه‌ی تالس را برای مثلث‌های ABM و ACM به کار می‌بریم.



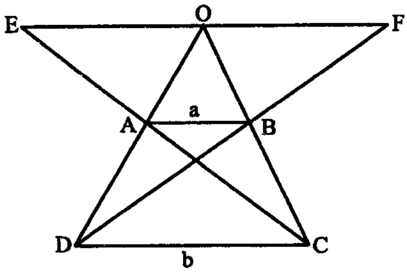
$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABM : \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{MK}} \\ \text{در مثلث } ACM : \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{ML}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PE}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{ML}} \Rightarrow \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{۲}{۱}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMC}} = S_{\overset{\triangle}{AMB}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow \overline{ML} \cdot \frac{\overline{AC}}{۲} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AB}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = ۲ \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{۱}{۲}$$

۴۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.



بنا بر قضیه‌ی تالس:

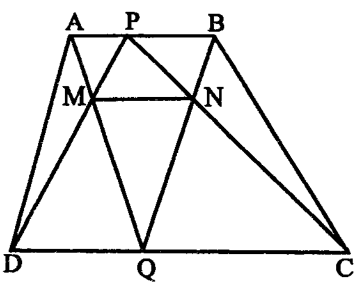
$$\begin{cases} ODF\text{در مثلث} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DO}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OF}} \\ OCE\text{در مثلث} : \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CO}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OE}} \\ OCD\text{در مثلث} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DO}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CO}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OE}} \Rightarrow \overline{OE} = \overline{OF}$$

فرض کنیم $\overline{OE} = \overline{OF} = x$. لذا:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OD}} = \dfrac{a}{x} \\ \triangle ADC \sim \triangle AOE \Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \dfrac{b}{x} \Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OD}} = \dfrac{b}{b+x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{b+x} \Rightarrow x = \frac{ab}{a-b} \Rightarrow \overline{EF} = ۲x = \frac{۲ab}{a-b}$$

۴۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



$$\begin{cases} \triangle MDQ \sim \triangle AMP \Rightarrow \dfrac{\overline{MQ}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{DQ}}{\overline{AP}} \\ \triangle NCQ \sim \triangle BNP \Rightarrow \dfrac{\overline{NQ}}{\overline{BN}} = \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{BP}} \end{cases}$$

از طرفی بنا بر فرض:

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \Rightarrow \frac{\overline{DQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{BP}}$$

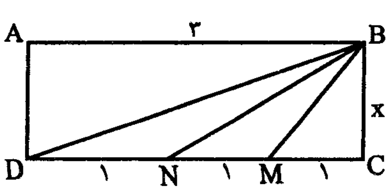
از سه تساوی اخیر خواهیم داشت که: $\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{NQ}}{\overline{BN}}$ بنابراین MN با AB و نیز CD موازی خواهد بود.

$$\begin{cases} PDC\text{در مثلث} : \dfrac{\overline{PM}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{MN}}{b} \\ QAB\text{در مثلث} : \dfrac{\overline{QM}}{\overline{QA}} = \dfrac{\overline{MN}}{a} \\ \triangle APM \sim \triangle DMQ \Rightarrow \dfrac{\overline{PM}}{\overline{MD}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MQ}} \Rightarrow \dfrac{\overline{PM}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\overline{PM}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{MN}}{b} \\ \dfrac{\overline{QM}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{MN}}{a} \end{cases} \Rightarrow \text{با جمع طرفین تساوی}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} + \frac{\overline{QM}}{\overline{AQ}} = ۱ = MN\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}\right) \Rightarrow \overline{MN} = \frac{ab}{a+b}$$

۴۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.

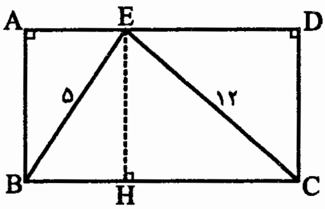


فرض کنیم $\overline{AB} = ۳$ و $\overline{BC} = x$ باشند.

$$\triangle BDM \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DM}} \Rightarrow \overline{BM}^۲ = \overline{MN} \cdot \overline{DM}$$

در $\triangle BCM : \overline{BM}^{۲} = \overline{BC}^{۲} + \overline{MC}^{۲} \Rightarrow \overline{BM}^{۲} = ۱ + x^{۲}$

$$\Rightarrow ۱ + x^{۲} = ۱ \times ۲ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{۳}{۱} = ۳$$



۴۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.
مجموع دو زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ و $\widehat{DCB}$ برابر ۱۸۰° است، از طرفی بنا بر فرض، مجموع زوایای $\widehat{ABE}$ و $\widehat{DCE}$ برابر ۹۰° است. پس مجموع دو زاویه $\widehat{EBC}$ و $\widehat{ECB}$ برابر ۹۰° بوده و لذا مثلث ECB در رأس E قائم‌الزاویه است.

اگر از E عمود EH را بر BC رسم کنیم، $EDCH$ مستطیل خواهد بود، لذا $\overline{HC} = \overline{ED}$. طبق رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث EBC، داریم:

$$\overline{BE}^{۲} + \overline{CE}^{۲} = \overline{BC}^{۲} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۵^{۲}} = ۱۳$$

از طرفی مثلث‌های EHC و EBC با یک‌دیگر متشابه‌اند لذا:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{HC} = \overline{ED} = \frac{۱۲^{۲}}{۱۳} = \frac{۱۴۴}{۱۳}$$

۴۶) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

می‌دانیم میانه‌ها در مثلث همرس‌اند. پس اگر از C به O وصل کنیم و امتداد دهیم، CO میانه‌ی رأس C خواهد بود و شش مثلث با مساحت‌های برابر حاصل می‌شود که چهارضلعی $CMOP$ در بر گیرنده‌ی دو تا از این مثلث‌های است. پس:

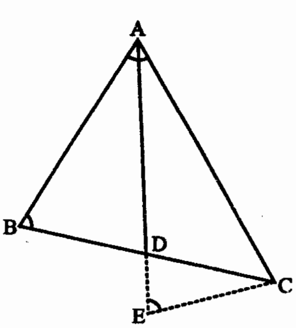
$$S_{CMOP} = \frac{۲}{۶} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۴}{۳}$$

۴۷) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

$$\begin{cases} AB \parallel CD \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD \\ \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{OCD}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB}}} = ۲^{۲} = ۴ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OCD}} = ۴ S_{\overset{\triangle}{OAB}}$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABD}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAD}} + S_{\overset{\triangle}{OAB}} = S_{\overset{\triangle}{OBC}} + S_{\overset{\triangle}{OAB}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAD}} = S_{\overset{\triangle}{OBC}}$$

۴۸) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



نیمساز AD را امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی E به گونه‌ای به‌دست آید که $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ باشد. روشن است که مثلث‌های ABD و AEC، با یک‌دیگر متشابه خواهند بود.
پس:

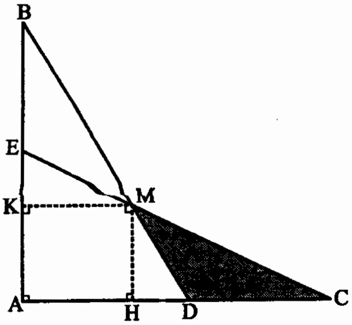
$$\triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

از طرفی بنا بر فرض: $\overline{AD}^{۲} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$. از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\overline{AD}^{۲} = \overline{AD} \cdot \overline{AE} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AE}$$

تساوی اخیر وقتی برقرار است که $\overline{DE} = ۰$ و E روی D منطبق باشد و در نتیجه $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ که تناقض است. پس چنین مثلثی وجود نخواهد داشت.

۴۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

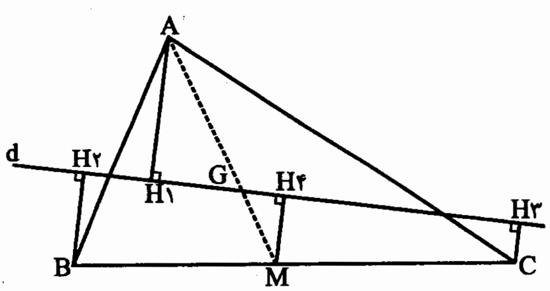


بنابه تقارن موجود در شکل، نقطه‌ی M باید روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A قرار گیرد. اگر از M دو عمود MH و MK را بر اضلاع AC و AB رسم کنیم، چهارضلعی $MKAH$ مستطیل است و چون M روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس $MKAH$ مربع است. پس $\overline{MH}=\overline{AH}$. از طرفی بنا بر تشابه دو مثلث MHC و EAC داریم:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{MH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{HC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}-\overline{AH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}-\overline{MH}} \quad \Rightarrow \frac{۲}{\overline{MH}}=\frac{۳}{۳-\overline{MH}} \Rightarrow \overline{MH}=\frac{۶}{۵}$$

$$S_{M\hat{D}C}=\frac{۱}{۲}\overline{MH}\times\overline{DC}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۵}\times(۳-۲)=\frac{۳}{۵}$$

۵۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



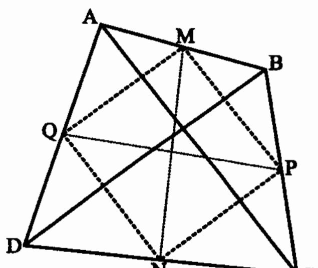
فرض کنید M وسط ضلع BC باشد، اگر از M، عمودی بر d رسم کنیم، و پای این عمود را $H_۴$ بنامیم. چهارضلعی $BH_۲H_۳C$ ذوزنقه خواهد شد که M و $H_۴$ به ترتیب اوساط اضلاع BC و $H_۲H_۳$ خواهند بود. پس: $MH_۴=\frac{\overline{BH_۲}+\overline{CH_۳}}{۲}$. از طرفی مثلث‌های $AH_۱G$ و $MH_۴G$ با یکدیگر متشابه‌اند و از طرفی دیگر، G در هر مثلث میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

پس داریم:

$$\frac{\overline{AH_۱}}{\overline{MH_۴}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{GH}}=۲ \Rightarrow \overline{AH_۱}=۲\overline{MH_۴}=\overline{BH_۲}+\overline{CH_۳} \Rightarrow \overline{AH_۱}=\overline{BH_۲}+\overline{CH_۳}$$

چون $\overline{AH_۱}=۵$، $\overline{BH_۲}=۳$، لذا مقدار $\overline{CH_۳}$ برابر ۲ خواهد بود.

۵۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



فرض کنیم نقاط M، P، N و Q اوساط اضلاع AB، BC، CD و AD باشند. در این صورت:

$$MP \parallel AC \parallel NQ\ ,\ \overline{MP}=\frac{۱}{۲}\overline{AC}=\overline{NQ}$$

پس چهارضلعی $MPNQ$ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی چون دو قطر MN و PQ با هم برابر هستند، پس $MPNQ$ مستطیل خواهد بود.

لذا:

$$\begin{cases} MQ\perp QN \\ \overline{MQ}=\frac{۱}{۲}\overline{BD}=۳ \\ \overline{NQ}=\frac{۱}{۲}\overline{AC}=۴ \end{cases} \Rightarrow \overline{MQ}^۲+\overline{NQ}^۲=\overline{MN}^۲=x^۲ \Rightarrow x^۲=۳^۲+۴^۲ \Rightarrow x=۵$$

۵۲) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

توجه کنید که اضلاع مثلث‌های BMC و CND دوبه‌دو و نظیربه‌نظیر با هم موازی هستند. پس نسبت مساحت این دو مثلث برابر است با مجذور تشابه این دو مثلث. بنابراین:

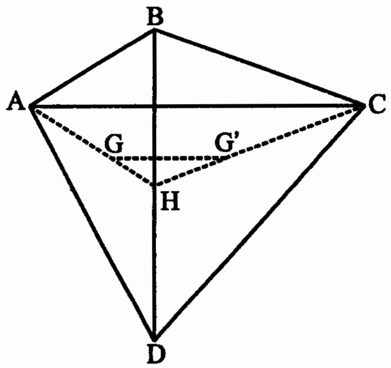
$$\frac{S_{B\hat{M}C}}{S_{N\hat{C}D}}=\frac{۱}{۹}=\left(\frac{BM}{CD}\right)^۲ \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{CD}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \overline{AM} = ۲\overline{BM}\ ;\ \frac{S_{\overset{\triangle}{AMD}}}{S_{\overset{\triangle}{BMC}}} = ۲ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMD}} = ۲$$

از طرفی مساحت مثلث MCD، برابر است با نصف مساحت متوازی‌الاضلاع، یعنی برابر است با مجموع مساحت دو مثلث BMC و AMD، بنابراین

$$S_{\overset{\triangle}{MCD}} = S_{\overset{\triangle}{BMC}} + S_{\overset{\triangle}{AMD}} = ۳ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MDN}} = S_{\overset{\triangle}{NCD}} - S_{\overset{\triangle}{MCD}} = ۹ - ۳ = ۶$$

۵۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

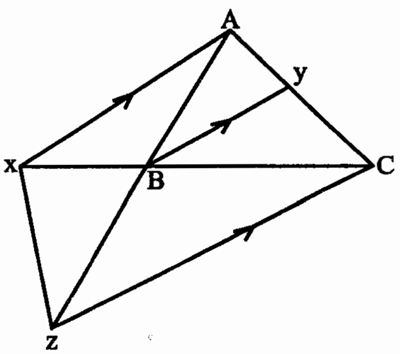


فرض کنید M وسط BD باشد، در این صورت G روی AM و G' روی CM خواهند بود. از طرفی می‌دانیم مرکزثقل در هر مثلث، میانه‌ها را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کند، بنابراین داریم:

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{MG'}}{\overline{CG'}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\overline{MG}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MG'}}{\overline{MC}} = \frac{۱}{۳} = \frac{\overline{GG'}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AC} - \overline{GG'} = ۱ \Rightarrow \overline{AC} - \frac{۱}{۳}\overline{AC} = ۱ \Rightarrow \overline{AC} = \frac{۳}{۲}$$

۵۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



AX موازی BY است. بنابراین

$$S_{\overset{\triangle}{XBY}} = S_{\overset{\triangle}{ABY}} \qquad (۱)$$

هم‌چنین BY موازی CZ است، لذا:

$$S_{\overset{\triangle}{ZBY}} = S_{\overset{\triangle}{CBY}} \qquad (۲)$$

و CZ نیز موازی با AX است، پس:

$$S_{\overset{\triangle}{ZXA}} = S_{\overset{\triangle}{CXA}}$$

حال اگر S_{ABX} را از طرفین تساوی اخیر کم کنیم، خواهیم داشت

$$S_{\overset{\triangle}{BXZ}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (۳)$$

از روابط (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

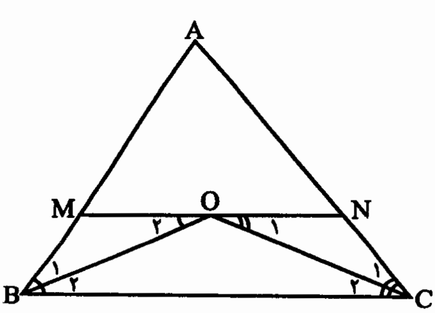
$$S_{\overset{\triangle}{XYZ}} = S_{\overset{\triangle}{BXZ}} + S_{\overset{\triangle}{ZBY}} + S_{\overset{\triangle}{XBY}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{CBY}} + S_{\overset{\triangle}{ABY}} = ۷ + ۴ + ۳ = ۱۴$$

۵۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

$$\begin{cases} PQ \parallel BC \Rightarrow \widehat{QPM} = \widehat{PMC} = \widehat{PMD} \Rightarrow \overline{DM} = \overline{DP} \\ \overline{BM} = \overline{MC}\ ,\ PQ \parallel BC \Rightarrow \overline{QD} = \overline{DP} \end{cases} \Rightarrow \overline{DM} = \overline{DP} = \overline{DQ}$$

در نتیجه در مثلث PMQ، میانه MD، نصف PQ است، بنابراین مثلث MPQ قائم‌الزاویه در رأس M است، یعنی $\widehat{PMQ} = ۹۰^\circ$.

۵۶) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



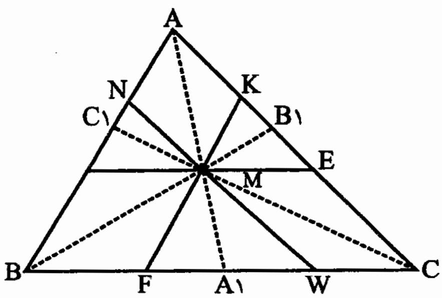
$$\begin{cases} CO : \text{نیمساز} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \\ BC \parallel MN \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{O}_۱ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{O}_۱ \Rightarrow \overline{ON} = \overline{NC}$$

$$\begin{cases} BO : \text{نیمساز} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BC \parallel MN \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{O}_۲ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overline{OM} = \overline{BM}$$

$$P' = \overline{AM} + \overline{AN} + \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{AM} + \overline{AN} + \overline{BM} + \overline{CN} = b + c$$

$$P = a + b + c \Rightarrow \frac{P'}{P} = \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a}{b+c} + ۱ \; ; \; b + c > a \Rightarrow ۰ < \frac{a}{b+c} < ۱ \Rightarrow \frac{P'}{P} < ۲$$

۵۷) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



فرض کنید AM، BM و CM اضلاع مثلث را به ترتیب در نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ قطع کنند.
مثلث ADE با مثلث ABC متشابه است، پس داریم: $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_۱}}$. به همین ترتیب داریم: $\frac{\overline{WN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BB_۱}}$ و $\frac{\overline{KF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CC_۱}}$، اگر از نقطه‌ی M عمودهای $MH_۱$، $MH_۲$ و $MH_۳$ را به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB فرود آوریم، و ارتفاع‌های مثلث را h_a، h_b و h_c بنامیم داریم:

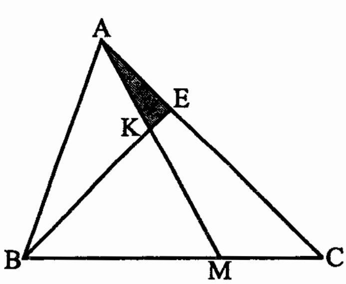
$$f(M) = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{WN}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{KF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_۱}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BB_۱}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{CC_۱}} = ۱ - \frac{\overline{A_۱M}}{\overline{AA_۱}} + ۱ - \frac{\overline{B_۱M}}{\overline{BB_۱}} + ۱ - \frac{\overline{C_۱M}}{\overline{CC_۱}}$$

$$= ۳ - \left(\frac{\overline{A_۱M}}{\overline{AA_۱}} + \frac{\overline{B_۱M}}{\overline{BB_۱}} + \frac{\overline{C_۱M}}{\overline{CC_۱}}\right) = ۳ - \left(\frac{\overline{MH_۱}}{h_a} + \frac{\overline{MH_۲}}{h_b} + \frac{\overline{MH_۳}}{h_c}\right) = ۳ - \left(\frac{S_{\overset{\triangle}{MBC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{MAC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\triangle}{MAB}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}\right)$$

$$= ۳ - \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = ۳ - ۱ = ۲$$

یعنی به ازای هر M، $f(M)$ مقداری ثابت و برابر ۲ دارد.

۵۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



$$\overline{CM} = \frac{۱}{۳}\overline{BC} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}} = \frac{۱}{۳} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \qquad (۱)$$

قضیه‌ی منلائوس را برای مثلث ANC و نقاط E، K و B می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{KM}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۱}{۳} \quad \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{۱}{۴}$$

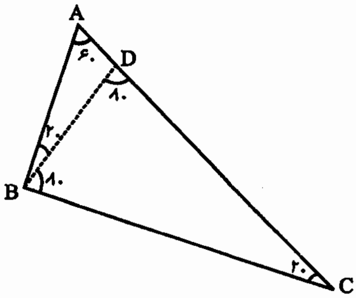
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AKE}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}\,\overline{AE}\cdot\overline{AK}\cdot\sin\widehat{MAC}}{\frac{۱}{۲}\,\overline{AM}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\widehat{MAC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AKE}} = \frac{۱}{۱۲} S_{\overset{\triangle}{AMC}} \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\triangle}{AKE}} = \frac{۱}{۲۴} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AKE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱}{۲۴}$$

۵۹) گزینه‌ی «د» صحیح است.

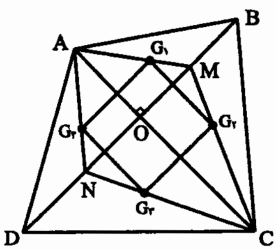


اگر از رأس B که اندازه‌ی آن ۱۰۰° خواهد بود و ضلع BC، به اندازه‌ی ۸۰° درجه جدا کنیم تا ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع کند. واضح است که اولاً، مثلث BDC متساوی‌الساقین خواهد بود. پس: $\overline{BC} = \overline{DC}$.
ثانیاً مثلث‌های ABD و ABC متشابه می‌باشند. پس:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} - \overline{DC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} - \overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^۲ = \overline{AC}^۲ - \overline{AC} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^۲ - \overline{AB}^۲$$

۶۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



می‌دانیم مرکز ثقل در هر مثلث، میانه را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند.

در مثلث AMN : $\frac{\overline{AG_۱}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AG_۴}}{\overline{AN}} = \frac{۲}{۳} = \frac{\overline{G_۱G_۴}}{\overline{MN}} \Rightarrow G_۱G_۴ \parallel BD$

در مثلث CMN : $\frac{\overline{CG_۲}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CG_۳}}{\overline{CN}} = \frac{۲}{۳} = \frac{\overline{G_۲G_۳}}{\overline{MN}} \Rightarrow G_۲G_۳ \parallel BD$

در مثلث MAC : $\frac{\overline{MG_۱}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MG_۲}}{\overline{MC}} = \frac{۱}{۳} = \frac{\overline{G_۱G_۲}}{\overline{AC}} \Rightarrow G_۱G_۲ \parallel AC$

در مثلث NAC : $\frac{\overline{NG_۳}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{NG_۴}}{\overline{NA}} = \frac{۱}{۳} = \frac{\overline{G_۳G_۴}}{\overline{AC}} \Rightarrow G_۳G_۴ \parallel AC$

پس اولاً $G_۱G_۲G_۳G_۴$ یک متوازی‌الاضلاع است و چون $BD \perp AC$ است، لذا $G_۱G_۲ \perp G_۱G_۴$ پس $G_۱G_۲G_۳G_۴$ به یک مستطیل تبدیل خواهد شد. با دقت در روابط بالا و این‌که $\overline{MN} = \frac{\overline{BD}}{۲}$:

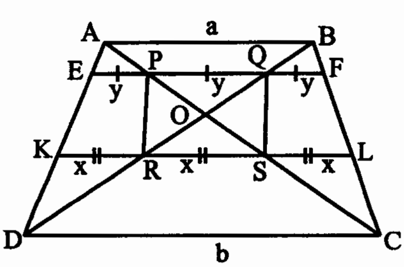
$$\begin{cases} \frac{\overline{G_۱G_۴}}{\overline{MN}} = \frac{۲\overline{G_۱G_۴}}{\overline{BD}} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \overline{G_۱G_۴} = \overline{G_۲G_۳} = \frac{\overline{BD}}{۳} \\ \frac{\overline{G_۱G_۲}}{\overline{AC}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \overline{G_۱G_۲} = \overline{G_۳G_۴} = \frac{\overline{AC}}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\overline{BD} = \overline{AC}) \Rightarrow \overline{G_۱G_۲} = \overline{G_۲G_۳} = \overline{G_۳G_۴} = \overline{G_۱G_۴}$$

پس $G_۱G_۲G_۳G_۴$ یک مربع خواهد بود.

$$\frac{S_{G_۱G_۲G_۳G_۴}}{S_{ABCD}} = \frac{(G_۱G_۲)^۲}{\frac{۱}{۲}\overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \hat{O}} = \frac{(\frac{۱}{۳}\overline{AC})^۲}{\frac{۱}{۲}(AC)^۲ \sin ۹۰^\circ} \Rightarrow \frac{S_{G_۱G_۲G_۳G_۴}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۹}$$

۶۱) گزینه‌ی «د» صحیح است.



در ابتدا بنا بر شکل، طول‌های x و y که به ترتیب $\frac{\overline{KL}}{۳}$ و $\frac{\overline{EF}}{۳}$ هستند را بر حسب a و b محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} ABD\text{در مثلث} : \frac{\overline{DK}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{KR}}{\overline{AB}} = \frac{x}{a} \\ BDC\text{در مثلث} : \frac{\overline{BL}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AD}} = \frac{۲x}{a} \end{cases} \Rightarrow \text{جمع طرفین تساوی}$$

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{DA}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{DA}}=\frac{x}{a}+\frac{۲x}{b}=۱\Rightarrow x(\frac{۱}{a}+\frac{۲}{b})=۱\Rightarrow x=\frac{ab}{۲a+b}$$

مشابهاً ثابت می‌شود که: $y=\frac{ab}{a+۲b}$.

فرض می‌کنیم h_b و h_a طول عمودهای وارد از نقطه‌ی O، به ترتیب بر اضلاع DC و AB بوده و $h_۱$ و $h_۲$ نیز طول عمودهای وارد از O بر RS و PQ باشند. و H طول ارتفاع ذوزنقه $ABCD$ است.

$$\triangle ORS\sim\triangle ODC\Rightarrow\frac{h_۱}{h_b}=\frac{\overline{RS}}{\overline{DC}}=\frac{x}{b}=\frac{a}{b+۲a}$$

$$\triangle OPQ\sim\triangle OAB\Rightarrow\frac{h_۲}{h_a}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{y}{a}=\frac{b}{a+۲b}$$

$$\triangle ODC\sim\triangle OAB\Rightarrow\frac{h_b}{h_a}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{h_b}{h_a+h_b}=\frac{b}{a+b}\Rightarrow\frac{h_b}{H}=\frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow h_b=\frac{b}{a+b}H\ ,\ h_a=\frac{a}{a+b}H$$

از تساوی‌های اخیر خواهیم داشت:

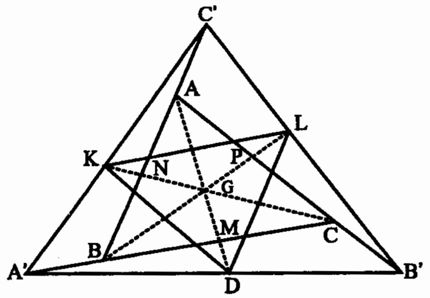
$$h_۱=(\frac{a}{b+۲a})(\frac{b}{a+b})H\Rightarrow(b=۳a):h_۱=\frac{۳}{۲۰}H$$

$$h_۲=(\frac{b}{۲a+b})(\frac{a}{a+b})H\Rightarrow(b=۳a):h_۲=\frac{۳}{۲۸}H$$

$$x=\frac{ab}{۲a+b}=\frac{۳}{۵}a\ ;\ y=\frac{ab}{a+۲b}=\frac{۳}{۷}a\Rightarrow\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}(x+y)(h_۱+h_۲)}{\frac{۱}{۲}(a+b)H}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}}=\frac{۳a(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷})\times۳H(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۲۸})}{(۴a)H}=\frac{۹\times\frac{۱۲}{۳۵}\times\frac{۱۲}{۳۵\times۴}}{۴}=(\frac{۹}{۳۵})^۲$$

۶۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.



a، b و c را به ترتیب طول اضلاع BC، AC و AB در نظر می‌گیریم. در ابتدا نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{A'C'B}}+S_{\overset{\triangle}{B'C'A}}+S_{\overset{\triangle}{A'B'C}}$$

$$=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۱}{۲}(\overline{A'B}\times\overline{BC'}\times\sin\hat{B})+\frac{۱}{۲}(\overline{AB'}\times\overline{AC'}\times\sin\hat{A})+\frac{۱}{۲}(\overline{CA'}\times\overline{CB'}\times\sin\frac{\hat{C}}{۲})$$

$$=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{۳}a\times\frac{۴}{۳}c\times\sin\hat{B}]+\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{۳}c\times\frac{۴}{۳}b\sin\hat{A}]+\frac{۱}{۲}[\frac{۱}{۳}b\times\frac{۴}{۳}a\times\sin\hat{C}]$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۴}{۹}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۴}{۳}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۷}{۳}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}=\frac{۷}{۳}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\qquad(۱)$$

حال نسبت $\frac{\overline{B'D}}{\overline{A'D}}$ را محاسبه می‌کنیم. به همین منظور قضیه‌ی منلائوس را در مثلث $A'B'C'$ و برای نقاط D، M و A ارائه می‌کنیم:

$$\frac{\overline{DB'}}{\overline{A'D}} \times \frac{\overline{A'M}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{A'D}}{\overline{B'D}} = \frac{\frac{a}{۳}+\frac{a}{۲}}{\frac{a}{۲}} \times \frac{b}{\frac{b}{۳}+b} = \frac{\frac{۵}{۶}a}{\frac{۱}{۲}a} \times \frac{b}{\frac{۴}{۳}b} = \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{B'D}}{\overline{A'D}} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \text{به همین صورت}: \frac{\overline{A'K}}{\overline{KC'}} = \frac{\overline{C'L}}{\overline{LB'}} = \frac{۴}{۵}$$

$$S_{D\overset{\triangle}{L}B'} = \frac{۱}{۲}(\overline{B'D} \times \overline{B'L} \times \sin \hat{B'}) = \frac{۱}{۲}[\frac{۴}{۹}\overline{A'B'} \times \frac{۵}{۴}\overline{B'C'} \times \sin \hat{B'}]$$

$$= \frac{۲۰}{۸۱}(\frac{۱}{۲}\overline{A'B'} \times \overline{B'C'} \times \sin \hat{B'})$$

$$\Rightarrow S_{D\overset{\triangle}{L}B'} = S_{D\overset{\triangle}{K}A'} = S_{K\overset{\triangle}{L}C'} = \frac{۲۰}{۸۱}S_{A'\overset{\triangle}{B'}C'}$$

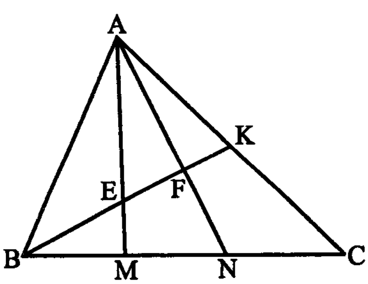
$$S_{K\overset{\triangle}{L}D} = S_{A'\overset{\triangle}{B'}C'} - ۳ \times (\frac{۲۰}{۸۱}S_{A'\overset{\triangle}{B'}C'}) \Rightarrow S_{K\overset{\triangle}{L}D} = S_{A'\overset{\triangle}{B'}c'} - \frac{۲۰}{۲۷}S_{A'\overset{\triangle}{B'}C'}$$

$$\Rightarrow S_{K\overset{\triangle}{L}D} = \frac{۷}{۲۷}S_{A'\overset{\triangle}{B'}C'} \qquad (۲)$$

$$(۱),\ (۲) \Rightarrow \begin{cases} S_۲ = \frac{۷}{۳}S_۱ \\ S_۳ = \frac{۷}{۲۷}S_۲ \end{cases} \Rightarrow S_۳ = \frac{۷}{۲۷} \times \frac{۷}{۳}S_۱ \Rightarrow \frac{S_۳}{S_۱} = \frac{۴۹}{۸۱}$$

۶۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

قضیه‌ی منلائوس را برای مثلث ANC و با نقاط هم‌خط K، F و B ارائه می‌کنیم.



$$\frac{\overline{CK}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{AF}}{\overline{FN}} \times \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} = ۱ \Rightarrow (\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} = x) : \frac{\overline{AF}}{\overline{FN}} = \frac{۳}{۲}x$$

قضیه‌ی منلائوس را یک بار دیگر و این بار برای مثلث AMC و با نقاط هم‌خط K، E و B ارائه می‌کنیم.

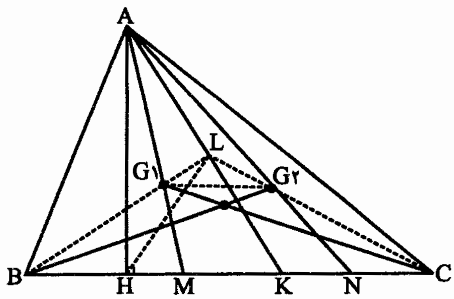
$$\frac{\overline{CK}}{\overline{AK}} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}} \times \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = ۱ \Rightarrow (\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} = x) : \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}} = ۳x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{AF}}{\overline{AN}} = \frac{۳x}{۳x+۲} \\ \frac{\overline{AE}}{\overline{AM}} = \frac{۳x}{۳x+۱} \end{cases} \Rightarrow \text{با ضرب طرفین تساوی}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AF}}{\overline{AN} \cdot \overline{AM}} = \frac{\frac{۱}{۲}\overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \sin \widehat{MAN}}{\frac{۱}{۲}\overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \sin \widehat{MAN}} = \frac{S_{A\overset{\triangle}{E}F}}{S_{A\overset{\triangle}{M}N}} = \frac{۹x^۲}{۹x^۲+۹x+۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} = \frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۶} \approx \frac{۷}{۶}$$

۶۴) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



$G_۱$ و $G_۲$ را مراکزثقل مثلث‌های ABK و ACK می‌نامیم (به ترتیب) و فرض می‌کنیم که امتدادهای $BG_۱$ و $CG_۲$ در نقطه‌ی L که وسط AK می‌باشد هم‌دیگر را قطع کنند.

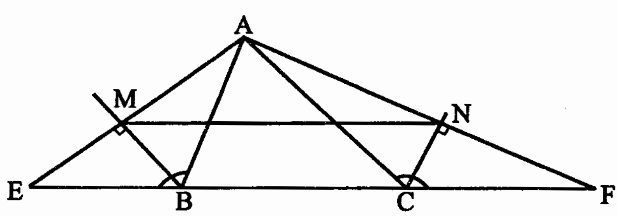
$$\begin{cases} ABK \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{AG_۱}}{\overline{G_۱M}} = ۲ \\ ACK \text{ در مثلث}: \dfrac{\overline{AG_۲}}{\overline{G_۲M}} = ۲ \end{cases}$$

بنابراین با دقت در مثلث AMN خواهیم داشت که: $\frac{\overline{AG_۱}}{\overline{G_۱M}} = \frac{\overline{AG_۲}}{\overline{G_۲M}}$ و در نتیجه $G_۱G_۲$ با MN و یا BC موازی خواهد بود.

پس چهارضلعی $BG_۱G_۲C$ یک ذوزنقه خواهد بود و چون طبق فرض مسئله قطرهای $\overline{BG_۲}$ و $\overline{CG_۱}$ با یک‌دیگر برابر هستند لذا این ذوزنقه یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود. ولذا: $\widehat{LBC} = \widehat{LCB}$.

از آن‌جا که در مثلث قائم‌الزاویه AHK، نقطه‌ی L وسط وتر AK است پس $\overline{HL} = \overline{LK}$ و به عبارت دیگر مثلث LHK متساوی‌الساقین است. از آن‌جا که مثلث LBC نیز متساوی‌الساقین است به راحتی از همنهشتی دو مثلث LBH و LKC نتیجه خواهیم گرفت که $\overline{BH} = \overline{KC}$. از نتیجه‌ی اخیر نیز تساوی $\overline{BK} - \overline{CK} = \overline{HC} - \overline{HB}$ به‌دست می‌آید.

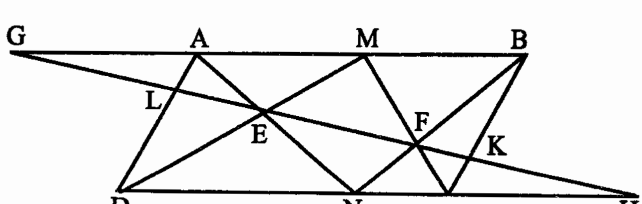
۶۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



عمودهای AM و AN را امتداد می‌دهیم تا امتداد ضلع BC را در نقاط E و F قطع کنند. روشن است که مثلث‌های ABE و ACF متساوی‌الساقین هستند. لذا نقاط M و N اوساط AE و AF می‌باشند پس در مثلث AEF، که M و N اوساط اضلاع AE و AF می‌باشند، بنا بر قضیه‌ی تالس MN موازی EF و برابر با نصف آن است، لذا:

$$(\overline{AB} = \overline{BE}), (\overline{AC} = \overline{CF}), \overline{MN} = \frac{\overline{EF}}{۲} = \frac{\overline{BE} + \overline{BC} + \overline{CF}}{۲} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{۲} = \frac{۲P}{۲} = P$$

۶۶) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



فرض کنیم خط مزبور امتداد AB را در G، AD را در L، BC را در K و امتداد DC را در H قطع کند. قضیه‌ی منلائوس را برای مثلث MDC و با نقاط E، F و H و هم‌چنین برای مثلث NAB و با نقاط E، F و G ارائه می‌کنیم.

$$\overline{DE} \over \overline{EM}} \times \frac{\overline{MF}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{HC}}{\overline{HC}+\overline{HD}} = ۱ \qquad (۱)$$: در مثلث MDC

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FN}} \times \frac{\overline{NE}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{GA}}{\overline{GA}+\overline{DC}} = ۱ \qquad (۲)$$: در مثلث NAB

از طرفی بنا بر تشابه دو مثلث MBF و NCF داریم:

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FN}} \qquad (۳)$$

و هم‌چنین با توجه به تشابه مثلث‌های MAE و DNE داریم:

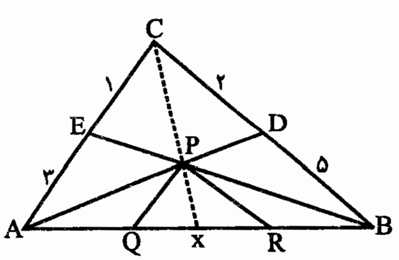
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EM}} = \frac{\overline{NE}}{\overline{EA}} \qquad (۴)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{HC}+\overline{DC}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{GA}+\overline{DC}}$$

و لذا $\overline{HC}=\overline{GA}$ و از این‌جا نیز به راحتی ثابت می‌شود که مثلث‌های ALG و KCH با یک‌دیگر همنهشت‌اند و در نتیجه: $\overline{KC}=\overline{AL}$ و از آن‌جا: $\overline{BK}=\overline{DL}$. بنابراین دو ذوزنقه $DLKC$ و $ABKL$ برابر و دارای مساحت‌های یکسان هستند پس نقاط M و N هر جایی روی اضلاع AB و CD می‌توانند واقع باشند.

۶۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



از رأس C به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم تا امتداد آن AB را در نقطه‌ی X قطع کند. به دلیل همرسی CX، AD و BE قضیه‌ی سوا را به کار می‌بریم:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \times \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳} \times \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \times \frac{۵}{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{XB}}{\overline{AB}} = \frac{۵}{۱۱}$$

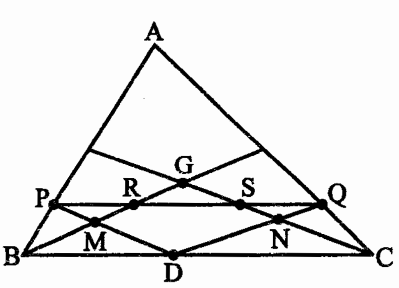
حال قضیه‌ی منلائوس را در مثلث ACX و برای نقاط E، P و B، به کار می‌بریم:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{PX}} \times \frac{\overline{BX}}{\overline{BA}} = ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۱} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{PX}} \times \frac{۵}{۱۱} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{PX}}{\overline{PC}} = \frac{۱۵}{۱۱} \Rightarrow \frac{\overline{PX}}{\overline{CX}} = \frac{۱۵}{۲۶}$$

روشن است که مثلث‌های PQR و CAB با یک‌دیگر متشابه‌اند و از طرفی PX و CX اجزاء متناظر در دو مثلث مذکور می‌باشند. بنابراین:

$$\frac{S_{P\hat{Q}R}}{S_{A\hat{B}C}} = \left(\frac{\overline{PX}}{\overline{CX}}\right)^۲ = \left(\frac{۱۵}{۲۶}\right)^۲ = \frac{۲۲۵}{۶۷۶}$$

۶۸) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



اولاً می‌دانیم $۲ = \frac{\overline{CG}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GE}}$

طبق قضیه‌ی اصلی تالس: QD و BE با هم‌دیگر موازی‌اند و BC، GC و EC در C همرس‌اند پس:

$$\frac{\overline{QN}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{GB}} = \frac{۱}{۲}$$

به همین صورت PD و CF با هم موازی‌اند و CB، GB و FB در B همرس‌اند. پس:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GC}} = \frac{۱}{۲}$$

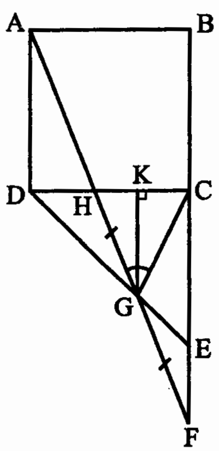
با نوشتن رابطه‌ی تالس در مثلث PQD:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{PQD}\ \text{در مثلث}: (NS \parallel PD) \Rightarrow \dfrac{\overline{QN}}{\overline{ND}} = \dfrac{\overline{QS}}{\overline{SP}} = \dfrac{\overline{QS}}{\overline{RS}+\overline{RP}} = \dfrac{۱}{۲} \\ \overset{\triangle}{PQD}\ \text{در مثلث}: (MR \parallel QD) \Rightarrow \dfrac{\overline{PM}}{\overline{MD}} = \dfrac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{PR}}{\overline{RS}+\overline{QS}} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\overline{QS}}{\overline{RS}+\overline{RP}} = \dfrac{\overline{RP}}{\overline{RS}+\overline{QS}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۲\overline{QS} = \overline{RS}+\overline{RP} \\ ۲\overline{RP} = \overline{RS}+\overline{QS} \end{cases} \Rightarrow \overline{RP} = \overline{QS} \Rightarrow \text{با قراردادن در معادله}: \overline{RP} = \overline{RS} = \overline{QS}$$

پس D، هر نقطه روی ضلع BC می‌تواند باشد.

۶۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



روشن است که HCG متساوی‌الساقین خواهد بود، پس $\overline{HK} = \overline{KC}$. در مثلث HCF، KG موازی FC است و چون $\overline{HK} = \overline{KC}$ بنا بر قضیه‌ی تالس: $\overline{HG} = \overline{GF}$. از طرفی چون $\overline{DC} = \overline{CE}$ پس مثلث DCE قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و در نتیجه DKG نیز قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بوده و لذا $\overline{DK} = \overline{KG}$

روشن است که مثلث‌های HKG و HAD با یک‌دیگر متشابه هستند، بنابراین:

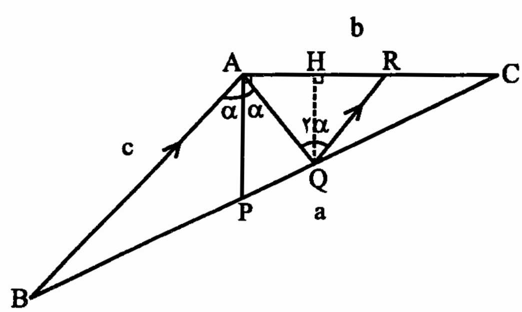
$$\triangle HKG \sim \triangle HAD \Rightarrow \frac{\overline{KG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{DH}}, (\overline{AD} = \overline{DC}), (\overline{GK} = \overline{DK}) \Rightarrow \frac{\overline{DK}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{DH}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{DH}+\overline{HK}}{\overline{DH}+۲\overline{HK}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{DH}} \Rightarrow \overline{DH} = \sqrt{۲}\,\overline{HK} \Rightarrow \frac{\overline{HG}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{DH}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

از تشابه مثلث‌های GEF و ADG خواهیم داشت:

$$\triangle GEF \sim \triangle ADG: \frac{\overline{EF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{HG}+\overline{AH}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{۱-\overline{EF}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}-۱$$

۷۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



از نقطه‌ی Q خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ی R قطع کند. اولاً، چون AP، نیمساز $\widehat{BAQ}$ در مثلث ABQ می‌باشد، لذا:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AQ}}{c} \qquad (۱) \quad \text{(طبق قضیه‌ی نیمسازها)}$$

$$\text{از طرفی}: \overline{BP}\cdot\overline{CQ} = \overline{BC}\cdot\overline{PQ} \Rightarrow \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} \qquad (۲)$$

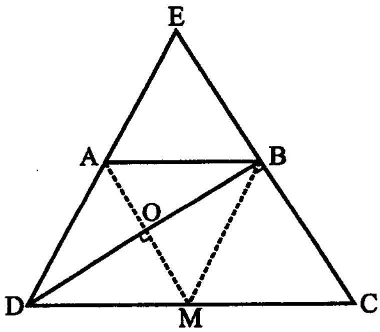
حال طبق قضیه‌ی تالس در مثلث ABC:

$$RQ \parallel AB \Rightarrow \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{RQ}}{c} \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که: $\frac{\overline{AQ}}{c} = \frac{\overline{RQ}}{c}$ و در نتیجه: $\overline{AQ} = \overline{RQ}$.

چون $RQ \parallel AB$، بنابراین $\widehat{AQR} = ۲\alpha$، لذا نیمساز QH که عمود بر AC است، با AP موازی خواهد بود و لذا AP نیز بر AC عمود بوده و $\widehat{PAC} = ۹۰^\circ$.

۷۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



از رأس B خطی به موازات ضلع AD رسم می‌کنیم، تا ضلع DC را در نقطه‌ی M قطع کند. روشن است که چهارضلعی $ABMD$ متوازی‌الاضلاع است. با فرض بر این‌که قطرهای AM و BD از این متوازی‌الاضلاع هم‌دیگر را در O قطع کنند، و با توجه به این‌که قطرها در متوازی‌الاضلاع هم‌دیگر را نصف می‌کنند پس $\overline{DO} = \overline{OB}$ از طرفی چون $AB = DM$ بنابراین $\overline{DM} = \frac{\overline{DC}}{۲}$. لذا در مثلث DBC، O وسط BD و M وسط DC است پس بنا بر قضیه‌ی تالس $OM \parallel BC$ است و چون $DB \perp BC$ پس $AM \perp BD$ و در نتیجه $ABMD$ یک لوزی خواهد بود.

بنابراین

$$\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DM} = \frac{\overline{DC}}{۲}$$

و در نهایت:

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{DC}$$

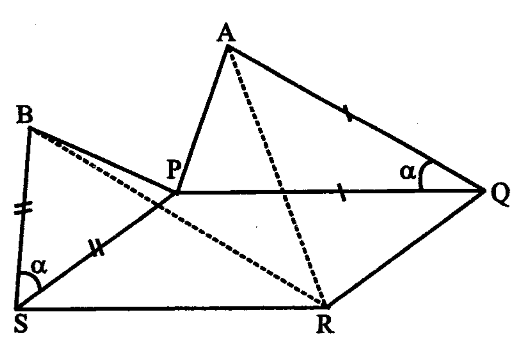
راه‌حل دوم: طبق قضیه‌ی تالس در مثلث EDC:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \overline{EB} = \overline{BC}$$

بنابراین در مثلث EDC، ارتفاع DB، میانه نظیر ضلع EC هم می‌باشد پس مثلث EDC متساوی‌الساقین بوده و $\widehat{DEC} = \widehat{DCE}$ از طرفی $\widehat{EBA} = \widehat{DCE}$، لذا $\widehat{EBA} = \widehat{DEC}$ و در نتیجه مثلث EAB نیز متساوی‌الساقین بوده و $\overline{AE} = \overline{AB}$.

$$\begin{cases} EDC\text{در مثلث} : \overline{DC} = \overline{DE} \\ EAB\text{در مثلث} : \overline{AE} = \overline{AB} \end{cases} \Rightarrow \overline{DA} + \overline{AE} = \overline{DC} \Rightarrow \overline{DA} + \overline{AB} = \overline{DC}$$

۷۲) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

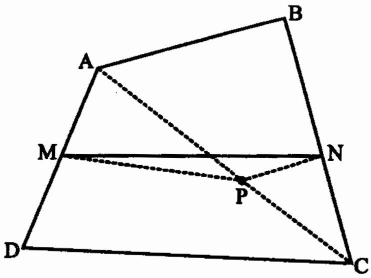


زوایای $\widehat{AQP} = \widehat{PSB} = \alpha$ فرض می‌شوند. از تساوی (همنهشتی) مثلث‌های ARQ و BRS خواهیم داشت که $\overline{AR} = \overline{BR}$ پس مثلث ARB نیز متساوی‌الساقین خواهد بود. هم‌چنین $\widehat{BRS} = \widehat{RAQ}$.

$$\widehat{ARB} = \hat{R} - \widehat{BRS} - \widehat{ARQ} = (180 - \hat{Q}) - \widehat{RAQ} - \widehat{ARQ} = \alpha$$

بنابراین ARB نیز مثلثی متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس α خواهد بود و متشابه با مثلث‌های APQ و BPS است.

۷۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

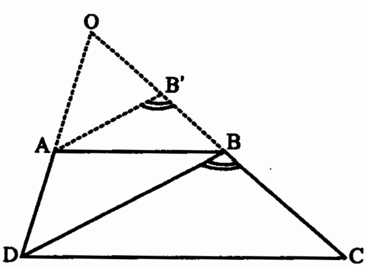


بنا بر فرض $\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$. از نقطه‌ی M خطی به موازات ضلع DC رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطه‌ی P قطع کند. بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث ADC، نتیجه می‌شود که P وسط قطر AC است لذا $\overline{MP} = \frac{\overline{DC}}{2}$. به همین صورت چون P و N اوساط اضلاع AC و BC در مثلث ABC می‌باشند، بنابراین طبق قضیه‌ی تالس $\overline{NP} = \frac{\overline{AB}}{2}$

$$\overline{MP} + \overline{NP} = \frac{\overline{DC}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} = \overline{MN}$$

با دقت در مثلث MNP مجموع دو ضلع برابر با ضلع سوم شده و تناقض است پس P روی امتداد MN واقع است و به عبارت دیگر، AB و CD هر دو با MN موازی‌اند و $ABCD$ ذوزنقه خواهد بود.

۷۴) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



فرض کنیم امتدادهای AD و BC هم‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. از رأس A خطی به موازات قطر BD رسم می‌کنیم تا OB را در B' قطع کند.

$$\text{بنا بر فرض}: \widehat{ADB} + \widehat{DBC} = 180^\circ \ , \ \widehat{DBB'} + \widehat{DBC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DBB'}$$

بنابراین $AB'BD$، یک ذوزنقه متساوی‌الساقین خواهد بود و $\overline{AD} = \overline{BB'}$.

$$\begin{cases} \text{بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث } ODB: \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{BB'}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AD}} \\ \text{بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث } ODC: \dfrac{\overline{OB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AD}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{OB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OB} - \overline{BB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{OB} - \overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{OB}\left(\frac{1}{\overline{AD}} - \frac{1}{\overline{BC}}\right) = 1$$

$$\text{در } \triangle ODC: \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OB} + \overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} \Rightarrow \overline{OB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{DC} - \overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{DC} - \overline{AB}} \times \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = 1 \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{BC} - \overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AD} \times \overline{DC} - \overline{AB} \times \overline{AD}$$

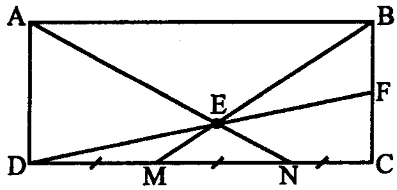
$$\Rightarrow \overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AD} \times \overline{DC}$$

۷۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

$$\begin{cases} \text{قضیه‌ی تالس در مثلث } YBC: \dfrac{\overline{PY}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{YQ}}{\overline{QC}} = \dfrac{1}{2} \\ \triangle PXY \sim \triangle PBC \Rightarrow \dfrac{\overline{PY}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{XY}}{\overline{BC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{XY}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{قضیه‌ی تالس در مثلث } ABC: \frac{\overline{AY}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{AC} - \overline{YC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AC} - 3}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AC} = 6$$

۷۶) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



$$\triangle ABE \sim \triangle MNE \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{EM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = ۳$$

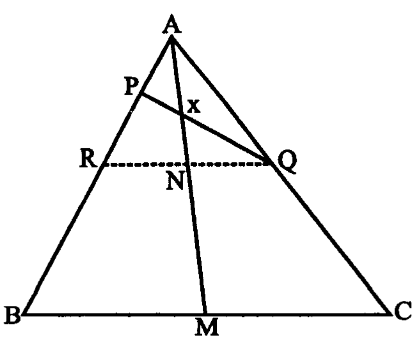
حال قضیه‌ی منلائوس را در مثلث BMC و با نقاط F، E و D ارائه می‌کنیم.

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{BF}} \times \frac{\overline{BE}}{\overline{EM}} \times \frac{\overline{DM}}{\overline{DC}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = ۳ \times \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = ۱$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BEF}}}{S_{\overset{\triangle}{BMC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}\overline{BE} \times \overline{BF} \times \sin \widehat{MBC}}{\frac{۱}{۲}\overline{BM} \times \overline{BC} \times \sin \widehat{MBC}} = \left(\frac{\overline{BE}}{\overline{BM}}\right) \times \left(\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}\right) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

از طرفی : $$\frac{S_{\overset{\triangle}{BMC}}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}\overline{BC} \times \frac{۲}{۳}\overline{DC}}{\overline{BC} \times \overline{DC}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{BEF}}}{S_{ABCD}} = \frac{۱}{۸}$$

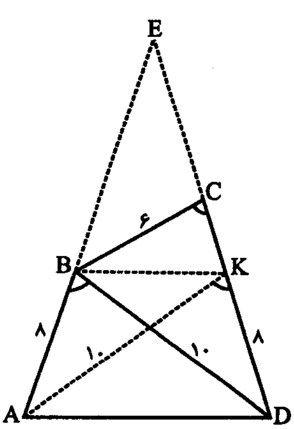
۷۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



از Q خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا میانه‌ی AM و ضلع AB را به ترتیب در N و R قطع کند. توازی RQ با BC و همرسی AB، AM و AC ایجاب می‌کند که بر اساس قضیه‌ی اصلی تالس: $\frac{\overline{RN}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = ۱$. پس: $\overline{RN} = \overline{NQ}$. لذا در مثلث ARQ، AN و QP، میانه‌های مثلث هستند، پس x مرکزثقل مثلث مذکور می‌باشد و از آن‌جا که مرکزثقل، طول میانه را به نسبت $\frac{۲}{۱}$، تقسیم می‌کند.

بنابراین: $$\frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}} = \frac{۱}{۳}$$

۷۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



فرض کنیم امتداد اضلاع AB و CD یک‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع کنند. از رأس B، خطی به موازات ضلع AD رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در نقطه‌ی K قطع کند چون $\widehat{BAD} = \widehat{CDA}$. پس چهارضلعی $BKDA$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است. لذا $\overline{AK} = \overline{BD} = ۱۰$ و نیز $\widehat{ABD} = \widehat{AKD}$ بنابراین تساوی $\widehat{AKD} = \widehat{BCD}$ نتیجه خواهد شد. و لذا ضلع BC با AK موازی می‌باشد.

قضیه‌ی تالس در مثلث EAK : $$\frac{\overline{EB}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EK}} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{\overline{EB}}{\overline{EB}+۸} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \overline{EB} = ۱۲$$

$$\Rightarrow \overline{EK} = ۱۲$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EK}} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{\overline{EK} - \overline{CK}}{\overline{EK}} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱۲ - \overline{CK}}{۱۲} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \overline{CK} = \frac{۲۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{KC} + \overline{KD} = \frac{۲۴}{۵} + ۸ = \frac{۶۴}{۵} = ۱۲/۸$$

۷۹) گزینه‌ی «د» صحیح است.

بنا بر اصل خطوط موازی و مورب می‌دانیم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow D\hat{I}B = I\hat{B}C = I\hat{B}A$$

بنابراین مثلث DIB متساوی‌الساقین بوده، لذا $\overline{DI} = \overline{DB}$. مشابهاً داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow E\hat{I}C = I\hat{C}B = I\hat{C}A$$

بنابراین مثلث EIC متساوی‌الساقین بوده و لذا $\overline{EI} = \overline{EC}$. در نتیجه $\overline{DE} = \overline{BD} + \overline{CE}$. پس کافی است طول‌های BD و CE را محاسبه کنیم. بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{۲۱ - \overline{BD}}{۲۱} = \frac{۲۲ - \overline{CE}}{۲۲} = \frac{\overline{BD} + \overline{CE}}{۲۰}$$

از تساوی‌های اخیر و حل دستگاه معادلات خواهیم داشت:

$$\overline{BD} = \frac{۴۲۰}{۶۳} \quad , \quad \overline{CE} = \frac{۴۴۰}{۶۳}$$

لذا $\overline{DE} = \frac{۴۲۰}{۶۳} + \frac{۴۴۰}{۶۳} = \frac{۸۶۰}{۶۳}$

۸۰) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

$$\triangle CPQ \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} = \sqrt{\frac{S_{\overset{\triangle}{CPQ}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \; ; \; \text{به همین صورت}: \frac{\overline{AU}}{\overline{AB}} = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{S_{APXU}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\overline{AP} \times \overline{AU} \times \sin\hat{A}}{\frac{۱}{۲}\,\overline{AC} \times \overline{AB} \times \sin\hat{A}} = ۲\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}\right)\left(\frac{\overline{AU}}{\overline{AB}}\right) = ۲\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲$$

$$(S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S) \Rightarrow S_{APXU} = ۲\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ S$$

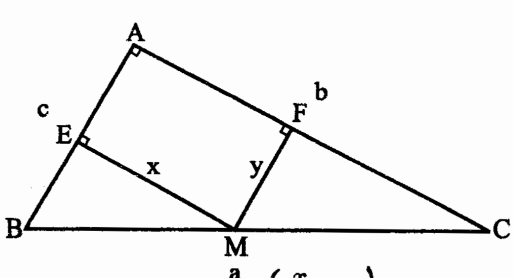
به همین صورت:

$$S_{CSZT} = S_{BQYR} = ۲\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ S$$

$$S_{PQBA} = \frac{S}{۲} \Rightarrow S_{XYRU} = S_{XZSP} = S_{YZTQ} = \frac{S}{۲} - ۴\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ S$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{XYZ}} + ۳\left(۲\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲\right)S + ۳\left(\frac{۱}{۲} - ۴\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲\right)S = S \Rightarrow S = \frac{۲}{۱۷ - ۱۲\sqrt{۲}} = ۳۴ + ۲۴\sqrt{۲}$$

۸۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



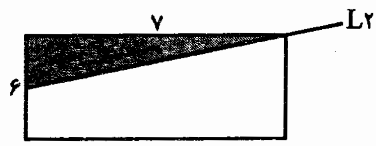
$$\begin{cases} \triangle BEM \sim \triangle ABC \Rightarrow \left(\frac{x}{b}\right)^۲ = \frac{S_{\overset{\triangle}{BEM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱}{۳} \\ \triangle CFM \sim \triangle ABC \Rightarrow \left(\frac{y}{c}\right)^۲ = \frac{S_{\overset{\triangle}{CFM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

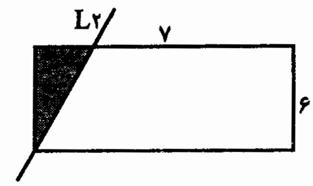
$$\begin{cases} \frac{x}{b} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{y}{c} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{b}{\sqrt{۳}} \; ; \; y = \frac{c}{\sqrt{۳}} \Rightarrow xy = \frac{bc}{۳} \qquad (۱)$$

از طرفی : $S_{AEMF} = \frac{۱}{۳} S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow xy = \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}bc) \Rightarrow xy = \frac{bc}{۶}$ (۲)

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) با تناقض مواجه می‌شویم. لذا هیچ نقطه‌ای مانند M با چنین خاصیتی وجود ندارد.

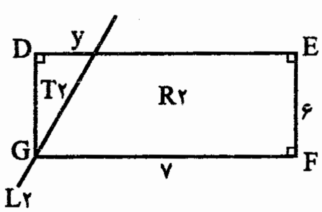
۸۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

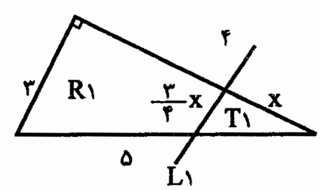




مطمئناً خط $L_۲$ که مستطیل را به یک مثلث و یک ذوزنقه تقسیم می‌کند به یکی از دو شکل روبه‌رو است و به عبارت بهتر، ذوزنقه حاصل، حتماً ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه است. (دو زاویه‌ی قائمه دارد). بنابراین خط $L_۱$ که مثلث را به مثلثی به نام $T_۱$ و ذوزنقه‌ای تحت عنوان $R_۱$ تقسیم می‌کند، نمی‌تواند موازی وتر باشد. (زیرا در این صورت ذوزنقه‌ی حاصل دیگر قائم‌الزاویه نیست)، پس $L_۱$ با یکی از دو ضلع قائمه موازی خواهد بود.

حالت اول:



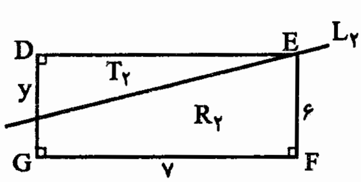


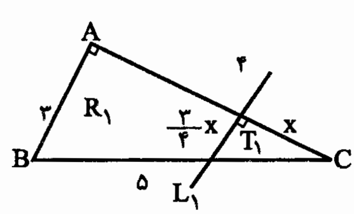
$$T_۱ \sim T_۲ \Rightarrow \frac{x}{۶} = \frac{\frac{۳}{۴}x}{y} \Rightarrow y = \frac{۹}{۲} = ۴/۵ \Rightarrow \overline{GL} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$$

$$R_۱ \sim R_۲ \Rightarrow \frac{۴-x}{۶} = \frac{\frac{۳}{۴}x}{۷-y} = \frac{۳}{۷} = \frac{۵-\frac{۵}{۴}x}{\frac{۱۵}{۲}} \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۷} \Rightarrow S_{T_۱} = \frac{۷۵}{۹۸} \qquad (I)$$

می‌توان دید که اگر $L_۱$ به موازات AC باشد، (با وضعیت مشابه $L_۲$) جواب حاصل با نتیجه‌ی بالا یکسان است.

حالت دوم:



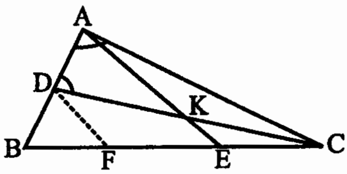


$$T_۱ \sim T_۲ \Rightarrow \frac{x}{۷} = \frac{\frac{۳}{۴}x}{y} \Rightarrow y = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵ \Rightarrow \overline{EL} = \frac{۳۵}{۴} = ۸/۷۵$$

$$R_۱ \sim R_۲ \Rightarrow \frac{۶-y}{\frac{۳}{۴}x} = \frac{۶}{۳} = \frac{۷}{۴-x} = \frac{\frac{۳۵}{۴}}{۵-\frac{۵}{۴}x} \Rightarrow ۸-۲x = ۷ \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{T_۱} = \frac{۳}{۳۲} \qquad (II)$$

$$\Rightarrow \min\left\{\frac{۷۵}{۹۸}, \frac{۳}{۳۲}\right\} = \frac{۳}{۳۲}$$



۸۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

محل تلاقی AE و CD را K می‌نامیم. بنا بر فرض $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{۲}{۱}$.
قضیه‌ی منلائوس را برای مثلث BCD و با نقاط هم‌خط E، K و A می‌نویسیم.

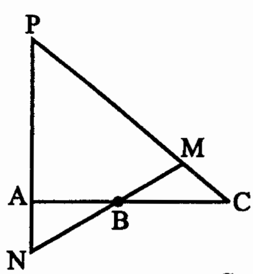
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \times \frac{\overline{CK}}{\overline{KD}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = ۱ \Rightarrow (\frac{۲}{۱})(\frac{\overline{CK}}{\overline{KD}})(\frac{۱}{۲}) = ۱ \Rightarrow \overline{CK} = \overline{KD}$$

از طرفی برای زوایای $\widehat{BAE}$ و $\widehat{ADC}$ ایجاب می‌کند که مثلث ADK، متساوی‌الساقین باشد و در نتیجه: $\overline{AK} = \overline{DK}$.

از دو تساوی اخیر داریم: $\overline{DK} = \overline{CK} = \overline{AK}$، بنابراین مثلث ADC، قائم‌الزاویه است و $\widehat{BAC} = ۹۰^\circ$.

راه‌حل دوم: نقطه‌ی F را روی ضلع BC، طوری در نظر می‌گیریم که: $\overline{BF} = \overline{FE} = \overline{EC}$. از نقطه‌ی D به F وصل می‌کنیم. در مثلث ABE، نقاط D و F اوساط اضلاع AB و BE هستند، پس $DF \parallel AE$. حال با دقت در مثلث CDF، می‌دانیم E وسط ضلع CF است. و از طرفی $KE \parallel DF$، بنابراین نقطه‌ی K وسط DC خواهد بود، لذا:

$$\overline{AK} = \overline{DK} = \overline{KC} \Rightarrow \widehat{BAC} = ۹۰^\circ$$



۸۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.

فرض می‌کنیم، $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = a$ و $\frac{\overline{PM}}{\overline{PC}} = b$ در این صورت داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BMC}}}{S_{\overset{\triangle}{APC}}} = \frac{۴}{۴۹} \Rightarrow \frac{\overline{MC} \times \overline{MB} \times \sin\hat{C}}{\overline{PC} \times \overline{AC} \times \sin\hat{C}} = \frac{۴}{۴۹} \Rightarrow \frac{\overline{MC}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{۴}{۴۹}$$

$$\Rightarrow (۱-a)(۱-b) = \frac{۴}{۴۹} \qquad (۱)$$

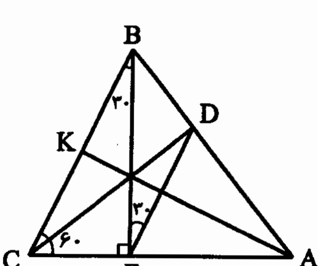
حال با استفاده از قضیه‌ی منلائوس در مثلث BMC و برای نقاط هم‌خط P، A و N داریم:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PM}} \times \frac{\overline{NM}}{\overline{NB}} = ۱ \Rightarrow a \times \frac{۱}{b} \times ۲ = ۱ \Rightarrow b = ۲a \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) و با قرار دادن $۲a$، به جای b، خواهیم داشت:

$$(۱-۲a)(۱-a) = \frac{۴}{۴۹} \Rightarrow (a - \frac{۳}{۷})(a - \frac{۱۵}{۱۴}) = ۰$$

چون $a < ۱$، جواب $\frac{۱۵}{۱۴}$ قابل قبول نیست، بنابراین $a = \frac{۳}{۷}$.



۸۵) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BEC، $\hat{C} = ۶۰^\circ$ است. بدیهی است که $\widehat{CBE} = ۳۰^\circ$. از آن‌جایی که $\widehat{BED} = ۳۰^\circ$، لذا BC, DE موازی خواهند بود ($DE \parallel BC$). بنابر قضیه‌ی تالس: $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DA}}$

از طرفی بنا بر همرسی CD, BE, AK، طبق قضیه‌ی «سوا» خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = ۱$$

از دو تساوی اخیر خواهیم داشت: $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} = ۱$ و در نتیجه $\frac{\overline{BK}}{\overline{BC}} = \frac{۱}{۲}$.

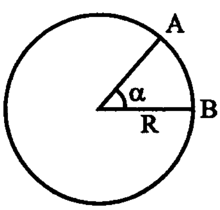
فصل ۳

دایره

روابط طولی و اندازه‌ها در دایره

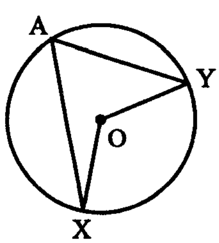
مساحت قطاعی از دایره به زاویه‌ی α و شعاع R برابر است با $S = \frac{R^2\alpha}{2}$، که در آن α بر حسب رادیان است.

محیط این قوس نیز برابر است با $\widehat{AB} = R\alpha$.



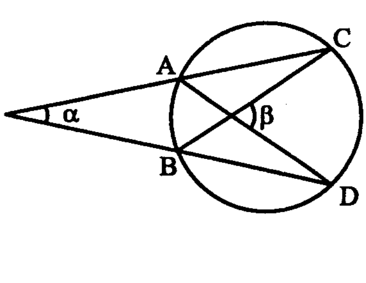
در هر دایره زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف کمان روبه‌رو و زاویه‌ی مرکزی نیز برابر است با کمان روبه‌رو به آن.

$$\widehat{XAY} = \frac{\widehat{XY}}{2}, \qquad \widehat{XOY} = \widehat{XY}$$

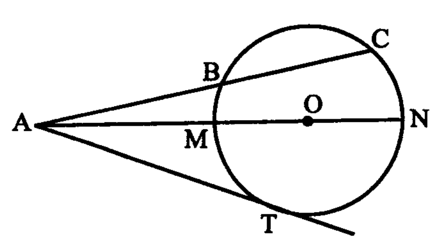


در نتیجه‌ی این موضوع با توجه به شکل به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که:

$$\beta = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \quad , \quad \alpha = \left|\frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}\right|$$



- **قوت نقطه نسبت به دایره**



بنا بر تعریف، قوت یک نقطه مانند A نسبت به یک دایره به شعاع R، که فاصله‌ی آن از مرکز دایره d می‌باشد برابر است با $P_c^A = |d^2 - R^2|$.

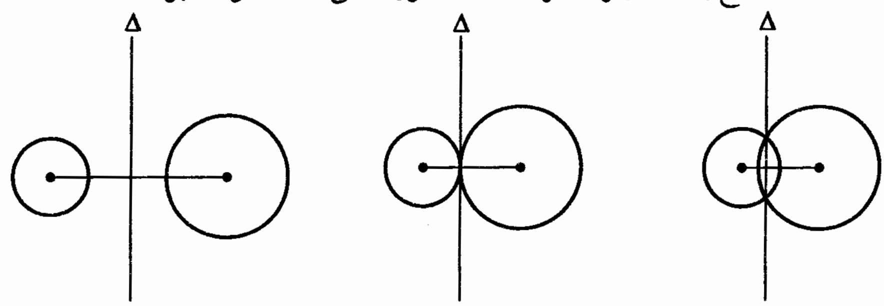
$$\begin{cases} P_c^A = (d-R)(d+R) = \overline{AM} \cdot \overline{AN} \\ d > R \end{cases}$$

اگر قاطعی دلخواه دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کند و قاطعی دیگر در نقطه‌ی T بر این دایره مماس شود، خواهیم داشت:

$$P_c^A = d^{۲} - R^{۲} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AT}^{۲}$$

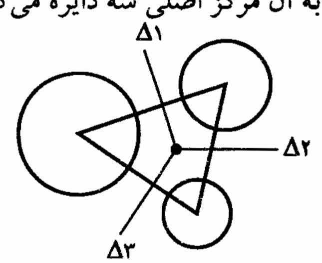
• محور اصلی دو دایره

مکان هندسی نقاطی از صفحه‌ی دو دایره هستند که دارای قوتی برابر نسبت به دو دایره بوده و این مکان هندسی خطی عمود بر خط‌المرکزین دو دایره است. اگر دو دایره مماس باشند، این خط، مماس مشترک آن‌ها در آن نقطه است و اگر در دو نقطه متقاطع باشند، وتر مشترک آن‌ها محور اصلی آن‌ها خواهد بود.



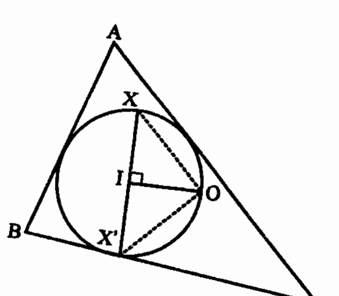
• مرکز اصلی دو دایره

سه دایره در صفحه که مراکز آن‌ها غیر واقع بر یک امتداد است، بنا بر آن‌چه که گفته شد، دو به دو دارای یک محور اصلی می‌باشند. ثابت می‌شود که این سه محور، همرس بوده و محل همرسی آن‌ها نقطه‌ای است که دارای قوتی برابر نسبت به سه دایره می‌باشد که به آن مرکز اصلی سه دایره می‌گویند.



به عنوان مثال، مرکز ارتفاعی هر مثلث مرکز اصلی سه دایره‌ای است که به قطر اضلاع آن رسم می‌شود.

۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



بنا بر رابطه‌ی اویلر می‌دانیم که $\overline{OI}^{۲} = R^{۲} - ۲rR$. حال بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه‌ی XOI خواهیم داشت:

$$\overline{OX}^{۲} = \overline{OI}^{۲} + \overline{IX}^{۲} \Rightarrow \overline{OX}^{۲} = R^{۲} - ۲rR + r^{۲} = (R-r)^{۲}$$

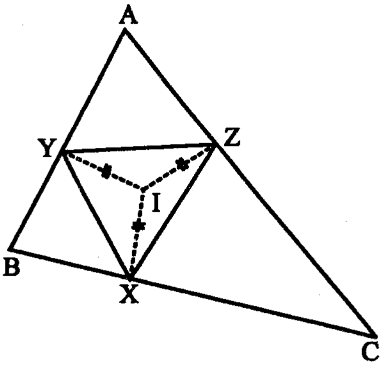
$$\Rightarrow \overline{OX} = \overline{OX'} = R - r$$

بنابراین محیط مثلث OXX' برابر خواهد بود با:

$$۲P = \overline{OX} + \overline{OX'} + \overline{XX'} = ۲(R-r) + ۲r = ۲R$$

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

واضح است که چهارضلعی‌های $CXIZ, BXIY, AYIZ$ محاطی‌اند، بنابراین:



$$\widehat{XIZ} = ۱۸۰ - \hat{C}\ ,\ \widehat{XIY} = ۱۸۰ - \hat{B}\ ,\ \widehat{YIZ} = ۱۸۰ - \hat{A}$$

$$S' = S_{X\hat{Y}Z} = S_{I\hat{Y}Z} + S_{X\hat{I}Y} + S_{X\hat{I}Z} = \frac{۱}{۲}r^۲ \sin\widehat{YIZ} + \frac{۱}{۲}r^۲ \sin\widehat{XIY} + \frac{۱}{۲}r^۲ \widehat{XIZ}$$

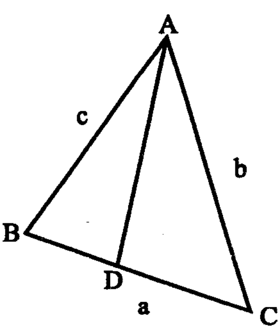
$$\Rightarrow S' = \frac{۱}{۲}r^۲ \sin\hat{A} + \frac{۱}{۲}r^۲ \sin\hat{B} + \frac{۱}{۲}r^۲ \sin\hat{C} = \frac{۱}{۲}r^۲(\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C})$$

از طرفی بنابر قضیه‌ی سینوس‌ها: $\sin\hat{C} = \frac{C}{۲R}\ ,\ \sin\hat{B} = \frac{b}{۲R}\ ,\ \sin\hat{A} = \frac{a}{۲R}$

$$S' = \frac{۱}{۲}r^۲\left(\frac{a}{۲R} + \frac{b}{۲R} + \frac{c}{۲R}\right) = \frac{r^۲}{۴R}(a+b+c) = \frac{r^۲}{۴R}(۲P) = \frac{Pr^۲}{۲R}$$

می‌دانیم: $r = \frac{S}{P}$ و در نتیجه: $P = \frac{S}{r}$. بنابراین: $S = \frac{r.S}{۲R} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{r}{۲R}$

۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



فرض می‌کنیم $r_۲, r_۱$ به ترتیب شعاع‌های دایره‌ی محاطی داخلی مثلث‌های ACD, ABD باشند. اگر مساحت و نصف محیط این دو مثلث را به ترتیب $P_۲, S_۲, P_۱, S_۱$ بنامیم، لذا:

$$\frac{r_۱}{r_۲} = \frac{S_۱/P_۱}{S_۲/P_۲} = \frac{S_۱}{S_۲} \times \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \times \frac{P_۲}{P_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{r_۱}{r_۲} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \times \frac{P_۲}{P_۱}$$

از طرفی بنا بر فرض مسئله: $\frac{r_۱}{r_۲} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$. پس $P_۱ = P_۲$ و در نتیجه:

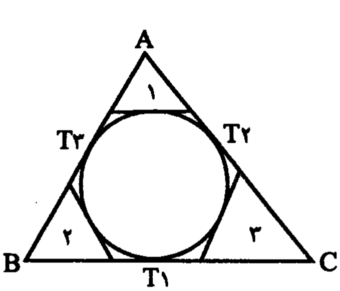
$$\overline{BD} + c = \overline{CD} + b$$

اگر $\overline{CD} = a - \overline{BD}$ در معادله‌ی فوق قرار گیرد داریم:

$$\overline{BD} = \frac{a+b-c}{۲} = P - c$$

بنابراین D محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC خواهد بود.

۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

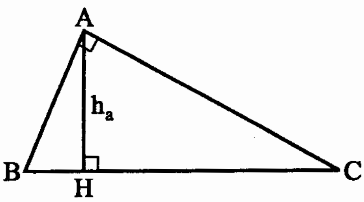


اگر سه مثلث کوچک‌تر را به شماره‌های ۱ ,۲ ,۳ بنامیم و محل تماس دایره با اضلاع AB, AC, BC به ترتیب $T_۳, T_۲, T_۱$ و هم‌چنین محیط مثلث‌های ۱ ,۲ ,۳ به ترتیب $P_۳, P_۲, P_۱$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} \overline{AT_۲}+\overline{AT_۳}=P_۱ \\ \overline{BT_۱}+\overline{BT_۳}=P_۲ \\ \overline{CT_۱}+\overline{CT_۲}=P_۳ \end{cases} \Rightarrow$$ جمع طرفین تساوی‌ها : $\overline{AT_۲}+\overline{AT_۳}+\overline{BT_۱}+\overline{BT_۳}+\overline{CT_۱}+\overline{CT_۲}=a+b+c=P$

$$=P_۱+P_۲+P_۳$$

۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



ارتفاع AH وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم می‌کنیم.
اگر r، $r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب شعاع‌های دوایر محاطی داخلی مثلث‌های ABC, ABH, ACH باشند، و نیز h_a طول ارتفاع AH باشد، ثابت می‌کنیم:

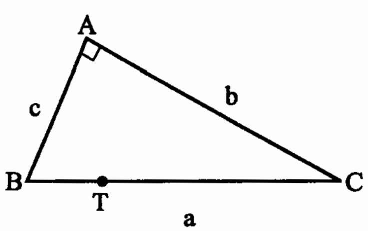
$$r+r_۱+r_۲=h_a$$

$$\begin{cases} \triangle ABH\sim\triangle ABC \Rightarrow \frac{r_۱}{r}=\frac{h_a}{b}\Rightarrow r_۱=(\frac{h_a}{b}).r \\ \triangle ACH\sim ABC \Rightarrow \frac{r_۲}{r}=\frac{h_a}{c}\Rightarrow r_۲=(\frac{h_c}{c}).r \end{cases} \Rightarrow r+r_۱+r_۲=r(۱+\frac{h_a}{b}+\frac{h_a}{c})$$

$$=\frac{a.h_a}{a+b+c}(۱+\frac{\frac{bc}{a}}{b}+\frac{\frac{bc}{a}}{c})=\frac{a.h_a}{a+b+c}(۱+\frac{c}{a}+\frac{b}{a})=\frac{a.h_a}{a+b+c}\times\frac{a+b+c}{a}=h_a$$

$$\Rightarrow ۳+۲+r_۱=۶\Rightarrow r_۱=۱$$

۶) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



اگر نقطه‌ی T را محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع $\dot{BC}$ فرض کنیم، در این صورت:

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{TC}}=\frac{۲}{۳}$$

پس:

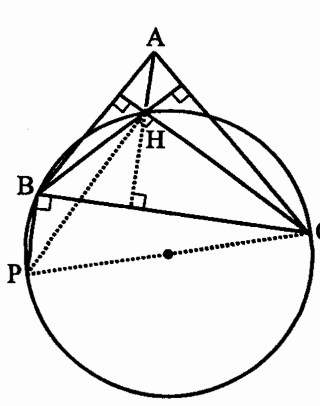
$\overline{BT}=\frac{۲}{۵}a$ (a طول وتر BC است).

$$۲\overline{BT}=۲(P-b)=a+c-b\Rightarrow a+c-b=\frac{۴}{۵}a\Rightarrow$$
$$b-c=\frac{a}{۵}$$

از طرفی بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث: $b^۲+c^۲=a^۲$ و هم‌چنین اگر S مساحت مثلث ABC فرض شود، $S=\frac{bc}{۲}$.

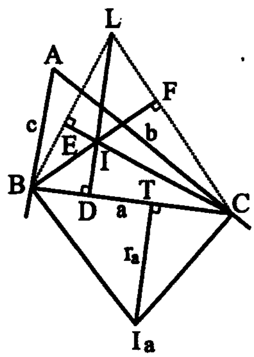
$$b^۲+c^۲=(b-c)^۲+۲bc=a^۲\Rightarrow(\frac{a}{۵})^۲+۴S=a^۲\Rightarrow ۴S=\frac{۲۴}{۲۵}a^۲\Rightarrow S=\frac{۶}{۲۵}a^۲$$

۷) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



نقاط P, C, H, B روی محیط یک دایره قرار دارند، بنابراین چهارضلعی $BHCP$ محاطی است و لذا $\widehat{PBC}=\widehat{PHC}=۹۰°$
پس BP بر BC عمود است و لذا BP با AH موازی است.
با دقت به چهارضلعی $BAHP$، $PH\|AB, BP\|AH$ و لذا این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. پس بدون در نظر گرفتن حالتی خاص $\overline{BP}=\overline{AH}$ و لذا ABC هر مثلثی دل‌خواه می‌تواند باشد.

۸) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



I_a را مرکز دایره‌ی محاطی خارجی رأس A و T را محل تماس این دایره با ضلع BC در نظر می‌گیریم.
به دو مثلث I_aTB, LDC توجه می‌کنیم. روشن است که:

$$\overline{BT} = \overline{CD} = P - c \quad (\text{نصف محیط است } P)$$

چهارضلعی $EIDC$ محاطی است، لذا: $\widehat{BCL} = ۱۸۰ - \widehat{DIF}$

$$\text{در مثلث BID}: (\widehat{DIF} :\text{زاویه‌ی خارجی}) \Rightarrow \widehat{DIF} = ۹۰^\circ + \frac{\hat{B}}{۲}$$

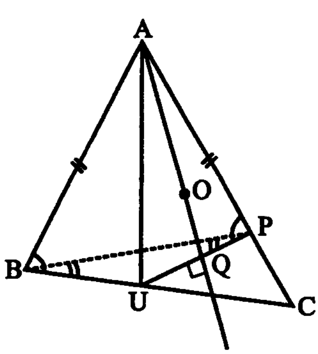
$$\Rightarrow \widehat{BCL} = ۱۸۰ - (۹۰ + \frac{\hat{B}}{۲}) \Rightarrow \widehat{BCL} = ۹۰ - \frac{\hat{B}}{۲}$$

از طرفی روشن است که در مثلث TBI_a:

$$\widehat{TBI_a} = \frac{۱۸۰ - \hat{B}}{۲} = ۹۰ - \hat{B}/۲$$

$$\begin{cases} \widehat{TBI_a} = \widehat{BCL} = ۹۰ - \dfrac{\hat{B}}{۲} \\ \hat{D} = \hat{T} = ۹۰^\circ \\ \overline{BT} = \overline{CD} = P - c \end{cases} \Rightarrow \triangle DCL \simeq \triangle BTI_a \Rightarrow \overline{TI_a} = \overline{LD} = r_a$$

۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

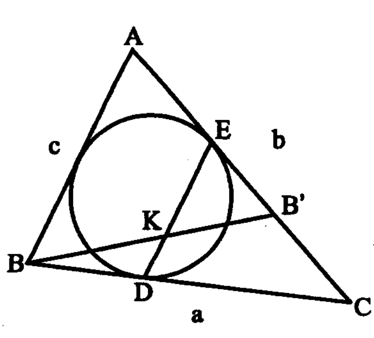


با توجه به مثلث قائم‌الزاویه APQ می‌دانیم: $\widehat{PAQ} = ۹۰ - \hat{B}$ و لذا: $\widehat{APU} = \hat{B}$.
از طرفی، از آن‌جا که $\overline{AB} = \overline{AP}$، پس مثلث ABP متساوی‌الساقین بوده و $\widehat{ABP} = \widehat{APB}$. از دو تساوی اخیر خواهیم داشت که: $\widehat{BPU} = \widehat{PBU}$، پس مثلث BPU نیز متساوی‌الساقین بوده و لذا: $\overline{UB} = \overline{UP}$.

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AP} \\ \overline{AU} : \text{مشترک} \\ \overline{UB} = \overline{UP} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABU \simeq \triangle APU \Rightarrow \widehat{BAU} = \widehat{CAU}$$

پس AU نیمساز داخلی رأس می‌باشد.

۱۰) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



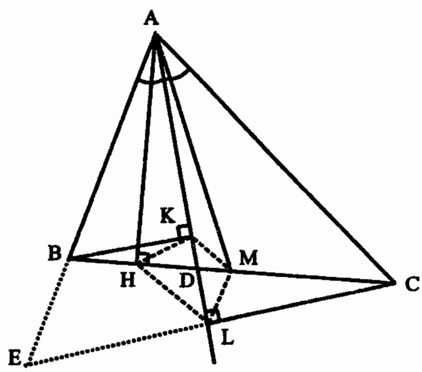
قضیه‌ی منلائوس را در مثلث $BB'C$ و نقاط هم‌خط E, K, D ارائه می‌دهیم.

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{BK}}{\overline{KB'}} \times \frac{\overline{EB'}}{\overline{EC}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{KB'}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{EB'}}{\overline{EC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KB'}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{AB'} - \overline{AE}}{\overline{EC}} \Rightarrow (\overline{AB'} = \overline{AB})$$

$$\frac{\overline{KB'}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{AB} - \overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{P-c}{P-b} \times \frac{c-(P-a)}{P-c} = \frac{(a+c)-P}{P-b} = \frac{(۲P-b)-P}{P-b} = ۱ \Rightarrow \overline{BK} = \overline{B'K}$$

با توجه به این‌که مثلث ABB' متساوی‌الساقین است و K وسط قاعده‌ی BB' از آن می‌باشد، پس نقطه‌ی K روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A واقع می‌باشد.



۱۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

D را پای نیمساز رأس A می‌نامیم. امتدادهای AB, CL هم‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع می‌کنند. با دقت به مثلث AEC، AL هم نیمساز است و هم ارتفاع؛ پس این مثلث متساوی‌الساقین بوده و L وسط ضلع EC می‌باشد. از طرفی M نیز وسط ضلع BC است. پس در مثلث CBE، LM با BE موازی بوده و لذا اگر BC مورب فرض شود، پس $\widehat{HML} = \widehat{ABC}$ (۱)

از طرفی در مثلث ABD، K, H پای ارتفاعات بوده و از تشابه دو مثلث DHK و ABD خواهیم داشت:

$$(۲) \qquad \widehat{HKL} = \widehat{ABC}$$

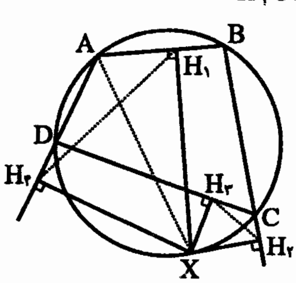
از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) خواهیم داشت که : $\widehat{HKL} = \widehat{HML}$ و در نتیجه چهارضلعی $HKML$ محاطی خواهد بود.

۱۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

$XH_۱, XH_۲, XH_۳, XH_۴$ را به ترتیب فواصل نقطه‌ی X از اضلاع AD, CD, BC, AB در نظر می‌گیریم.

در چهارضلعی محاطی $ABCD$:

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = ۱۸۰^\circ \quad : \text{از طرفی} \quad \widehat{H_۲CH_۳} + \widehat{BCD} = ۱۸۰^\circ$$



بنابراین: $\widehat{BAD} = \widehat{H_۲CH_۳}$

چهارضلعی $AH_۱XH_۴$ محاطی است، پس: $\widehat{BAD} + \widehat{H_۱XH_۴} = ۱۸۰$.

چهارضلعی $CH_۲XH_۳$ محاطی است، پس: $\widehat{H_۲CH_۳} + \widehat{H_۲XH_۳} = ۱۸۰$

از سه رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت که: $\widehat{H_۱XH_۴} = \widehat{H_۲XH_۳}$ (I)

از طرفی بنا بر محاطی بودن $AH_۱XH_۴$:

$$X\widehat{H_۱H_۴} = \widehat{XAD} = \frac{\overset{\frown}{DX}}{۲}$$

و بنا بر محاطی بودن $CH_۲XH_۳$:

$$X\widehat{H_۲H_۳} = \widehat{XCD} = \frac{\overset{\frown}{DX}}{۲}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نیز خواهیم داشت: $X\widehat{H_۱H_۴} = X\widehat{H_۲H_۳}$ (II)

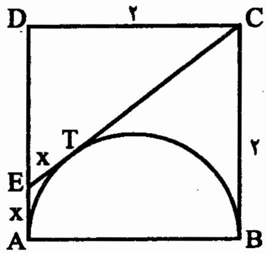
از دو رابطه‌ی II, I مثلث‌های $H_۱XH_۴, H_۲XH_۳$ متشابه خواهند بود، پس:

$$\frac{\overline{XH_۱}}{\overline{XH_۲}}=\frac{\overline{XH_۴}}{\overline{XH_۳}}$$

بنابراین:

$$\overline{XH_۱}.\overline{XH_۳}=\overline{XH_۲}.\overline{XH_۴}$$

و چون $\overline{XH_۱}=۳$ ، $\overline{XH_۲}=۲$ ، $\overline{XH_۳}=۱$ ، پس: $\overline{XH_۴}=\frac{۳\times۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$



۱۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.

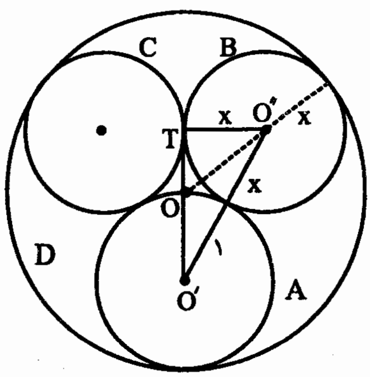
طول‌های برابر ET و EA را x فرض می‌کنیم. روشن است که: $\overline{CT}=\overline{CB}=۲$.

در مثلث قائم‌الزاویه CDE ، داریم: $\overline{DE}=۲-x \quad , \quad \overline{CE}=۲+x$

پس بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث در این مثلث:

$$\overline{CE}^۲=\overline{CD}^۲+\overline{DE}^۲\Rightarrow(۲+x)^۲=۲^۲+(۲-x)^۲\Rightarrow ۸x=۴\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

لذا: $\overline{CE}=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$



۱۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.

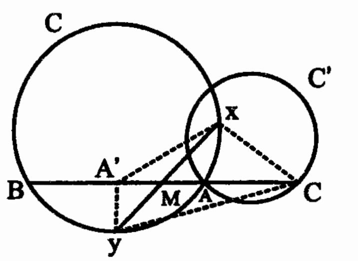
شعاع دایره‌ی B را x فرض می‌کنیم. O'',O',O نیز به ترتیب مراکز دوایر B,A,D در نظر گرفته می‌شوند. در مثلث قائم‌الزاویه $OO''T$ رابطه‌ی فیثاغورث را می‌نویسیم:

$$\overline{OO''}^۲=\overline{OT}^۲+\overline{O''T}^۲\Rightarrow(۲-x)^۲=x^۲+\overline{OT}^۲\Rightarrow\overline{OT}=۲\sqrt{۱-x}$$

در نظر داشته باشید که شعاع دایره‌ی D نیز ۲ خواهد بود.

حال قضیه فیثاغورث را برای مثلث قائم‌الزاویه $O'TO''$ می‌نویسیم:

$$\overline{O'O''}^۲=\overline{O'T}^۲+\overline{O''T}^۲\Rightarrow(۱+x)^۲=(۱+۲\sqrt{۱-x})^۲+x^۲\Rightarrow ۲x+۱=۱+۴(۱-x)+۴\sqrt{۱-x}\Rightarrow$$
$$۶x-۴=۴\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۹x^۲-۱۲x=-۴x\Rightarrow ۹x=۸\Rightarrow x=\frac{۸}{۹}$$



۱۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

بنا بر فرض، $\overline{AM}=\overline{A'M},\overline{BM}=\overline{MC}$.

قوت نقطه‌ی M را در دایره‌ی C می‌نویسیم:

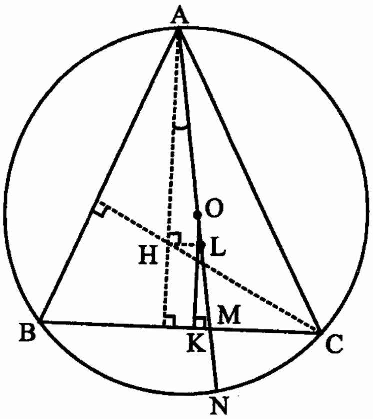
$$\begin{cases}P_C^M=\overline{MB}.\overline{MA}=\overline{Mx}.\overline{My}\\ \overline{MB}=\overline{MC}\\ \overline{MA}=\overline{MA'}\end{cases}\Rightarrow\overline{MC}.\overline{MA'}=\overline{Mx}.\overline{My}$$

بنابراین چهارضلعی $A'xCy$ یک چهارضلعی محاطی است، لذا:

$$\begin{cases}y\widehat{CA'}=y\widehat{xA'}=۴۵^\circ\\ x\widehat{CA'}=x\widehat{yA'}=۲۵^\circ\end{cases}\Rightarrow$$ با جمع طرفین تساوی: $x\widehat{CA'}+y\widehat{CA'}=x\widehat{Cy}=۴۵^\circ+۲۵^\circ=۶۰^\circ$

۱۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.

H را مرکز ارتفاعیه مثلث، K را وسط ضلع BC و L را محل تلاقی عمود خارج شده از H روی ارتفاع وارد بر ضلع BC با AM می‌نامیم. از آن‌جا که: $\overline{OK} = \frac{\overline{AH}}{۲}$ و هم‌چنین از تشابه مثلث‌های AHL و OKM خواهیم داشت:



$$\overline{AL} = ۲\overline{OM} = ۲(\frac{R}{۲}) = R$$

$$\overline{AL} = \overline{AH}/\cos\widehat{HAL} = \frac{۲R\cos\hat{A}}{\cos(\widehat{BAM} - \widehat{BAH})} = \frac{۲R\cos\hat{A}}{\cos(\hat{B} - \hat{C})}$$

$$\overline{AL} = R \Rightarrow \frac{۲R\cos\hat{A}}{\cos(\hat{B} - \hat{C})} \Rightarrow \cos(\hat{B} - \hat{C}) = ۲\cos\hat{A}$$

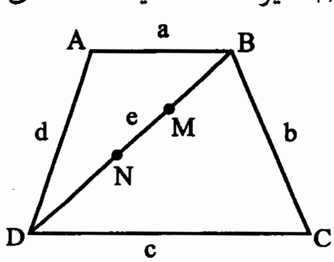
چون $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ است، بدون این‌که خللی در کلیت مسئله وارد شود، فرض می‌کنیم $b > c$، پس:

$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} > ۰ \Rightarrow \cos(\hat{B} - \hat{C}) < ۱ \Rightarrow ۲\cos\hat{A} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$A > ۶۰^\circ$$

۱۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

طول اضلاع AB, BC, CD, AD را a, b, c, d و هم‌چنین طول قطر BD را e فرض می‌کنیم. نقاط M, N به ترتیب محل تماس دوایر محاطی داخلی مثلث‌های ABD, BCD با قطر BD بوده و $P_۱, P_۲$ نیز نصف محیط مثلث‌های ABD, BCD هستند.



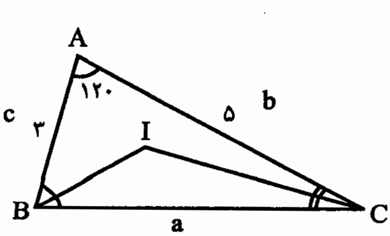
$$\begin{cases} ABD \text{در مثلث}: \overline{BM} = P_۱ - d = \frac{a + e - d}{۲} & (۱ \\ BCD \text{در مثلث}: \overline{BN} = P_۲ - C = \frac{B + e - c}{۲} & (۲ \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبه‌رو با یک‌دیگر برابر است، پس:

$$\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{BC} \Rightarrow a + c = b + d \Rightarrow a - d = b - c \qquad (۳$$

از روابط ۱, ۲, ۳ خواهیم داشت: $\overline{BM} = \overline{BN}$، لذا نقاط M, N بر هم‌دیگر منطبق‌اند. در نتیجه دوایر محاطی مثلث‌های ABD, BDC روی قطر BD بر هم‌دیگر مماس‌اند.

۱۸) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



می‌دانیم $\widehat{BIC} = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}$

بنابراین:

$$\widehat{BIC} = ۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰^\circ$$

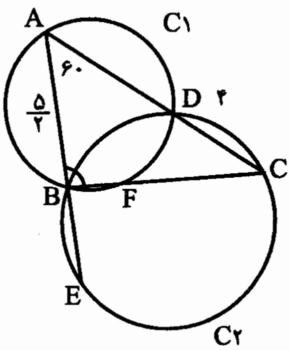
حال به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC، طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{BC}^{۲} = a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow a^{۲} = ۹ + ۲۵ - ۲(۳)(۵)\cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow a^{۲} = ۴۹ \Rightarrow a = ۷$$

اگر R' شعاع دایره‌ی محیطی مثلث BIC فرض شود:

$$\text{BIC در مثلث} : a = ۲R'\sin\widehat{BIC} \Rightarrow ۷ = R'(۲\sin ۱۵۰^\circ) = R'(۲\times\frac{۱}{۲}) \Rightarrow R' = ۷$$

۱۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



قوت نقاط C, A را نسبت به دوایر محیطی مثلث‌های ABD, BDC می‌نویسیم:

$$\begin{cases} P^{A}_{C_{۲}} = \overline{AD}.\overline{AC} = \overline{AB}.\overline{AE} \\ P^{B}_{C_{۱}} = \overline{CD}.\overline{AC} = \overline{CF}.\overline{CB} \end{cases} \Rightarrow \text{با تقسیم طرفین تساوی}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \left(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\right)\times\left(\dfrac{\overline{AE}}{\overline{CF}}\right) \\ \text{از طرفی بنا بر رابطه نیمسازها} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = ۱ \Rightarrow \overline{AE} = \overline{CF}$$

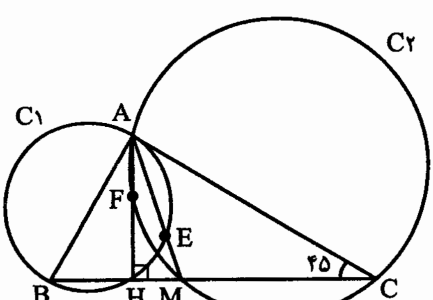
$$\begin{cases} \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} \\ \overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BF} \end{cases} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{CF} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BE} = \overline{BC} - \overline{BF} \Rightarrow \overline{BE} + \overline{BF} = \overline{BC} - \overline{AB}$$

حال بر اساس قضیه‌ی کسینوس‌ها، طول BC را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{BC}^{۲} = \overline{AB}^{۲} + \overline{AC}^{۲} - ۲\overline{AB}.\overline{AC}\cos ۶۰ = \frac{۲۵}{۴} + ۱۶ - ۲(\frac{۵}{۲})(۴)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۲۵}{۴} + ۱۶ - ۱۰ = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = \frac{۷}{۲} \quad \Rightarrow \overline{BE} + \overline{BF} = \frac{۷}{۲} - \frac{۵}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۲۰) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



با توجه به این‌که $\hat{C} = ۴۵^\circ$ ، بنابراین مثلث قائم‌الزاویه AHC، متساوی‌الساقین خواهد بود و در نتیجه:

$$\overline{AH} = \overline{CH}$$

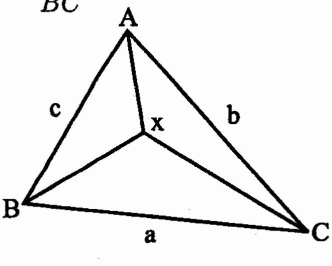
حال قوت نقطه‌های M, H را نسبت به دایره‌های $C_{۲}, C_{۱}$ می‌نویسیم:

$$P^{H}_{C_{۲}} = \overline{HF}.\overline{HA} = \overline{HA}.\overline{HC}, (\overline{HA} = \overline{HC}) \Rightarrow \overline{HF} = \overline{HM}$$

$$P^{M}_{C_{۱}} = \overline{MH}.\overline{MB} = \overline{ME}.\overline{MA}, (\overline{ME} = \frac{\overline{HF}}{۲}) \Rightarrow \overline{HF}.\overline{MB} = \frac{\overline{HF}}{۲}.\overline{MA} \Rightarrow \overline{AM} = ۲\overline{MB} = \overline{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = ۱$$

۲۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



نصف محیط هر یک از مثلث‌های XBC, XAC, XAB را P' فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{S_1}{P'} \\ r_2 = \dfrac{S_2}{P'} \\ r_3 = \dfrac{S_3}{P'} \end{cases} \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{P'} = \frac{S}{P'} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 2P' = a + \overline{XB} + \overline{XC} \\ 2P' = b + \overline{XA} + \overline{XC} \\ 2P' = c + \overline{XA} + \overline{XB} \end{cases} \Rightarrow \text{با جمع طرفین تساوی}: 6P' = (a+b+c) + 2(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}) \Rightarrow$$

$$6P' = 2P + 2(\frac{3}{2}P) \Rightarrow 6P' = 5P \Rightarrow P' = \frac{5}{6}P \qquad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ داریم:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{S}{\frac{5}{6}P} = \frac{6}{5}\frac{S}{P} = \frac{6}{5}r \Rightarrow \frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{6}{5}$$

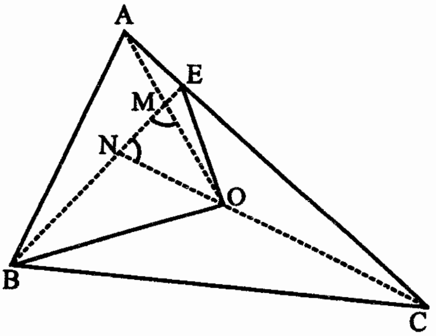
۲۲) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

$$\begin{cases} r = 1 \\ r_b = 3 \\ r_c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{S}{P} = 1 \\ \dfrac{S}{P-b} = 3 \\ \dfrac{S}{P-c} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} = 1 \\ \dfrac{a}{2S} - \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} - \dfrac{c}{2S} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = 1 \\ \dfrac{1}{h_a} - \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}) + (\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_a = 4$$

۲۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

می‌دانیم که مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن دو قطر. بنابراین:



$$S_{AEOB} = \frac{1}{2}\overline{AO} \times \overline{BE} \times \sin\widehat{OMB}$$
$$S_{BOEC} = \frac{1}{2}\overline{CO} \times \overline{BE} \times \sin\widehat{ONE}$$

$$\begin{cases} S_{AEOB} = S_{BOEC} = S_{\overset{\triangle}{ABC}}/2 \\ \overline{AO} = \overline{CO} = R \end{cases} \Rightarrow \sin\widehat{OMB} = \sin\widehat{ONE} \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{ONE}$$

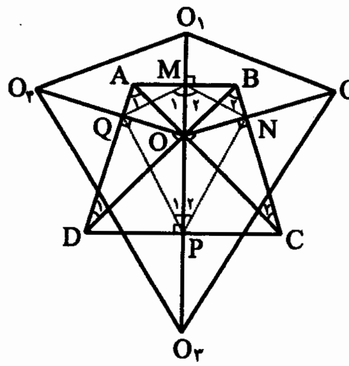
$$\begin{cases} \text{در مثلث } AMB: \widehat{OMB} = \widehat{OAB} + \widehat{ABE} = 90 - \hat{C} + \widehat{ABE} \\ \text{در مثلث } BNC: \widehat{ONE} = \widehat{EBC} + \widehat{OCB} = \hat{B} - \widehat{ABE} + 90 - \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABE} - \hat{C} = \hat{B} - \hat{A} - \widehat{ABE} \Rightarrow$$

$$2\widehat{ABE} = \hat{B} + \hat{C} - \hat{A} = 180 - 2\hat{A} \Rightarrow \widehat{ABE} = 90 - \hat{A} \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$$

پس E پای ارتفاع است.

۲۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

با کمی دقت واضح است که چهارضلعی‌های $O_۱O_۲O_۳O_۴, MNPQ$ با یک‌دیگر و به نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ متشابهند. بنابراین هر دو چهارضلعی از یک جنس می‌باشند و لذا به بررسی چهارضلعی $MNPQ$ می‌پردازیم. چهارضلعی‌های $OPDQ, OPCN, BMON, AMOQ$ محاطی‌اند. با دقت به هر یک و زوایای برابر در هر کدام:

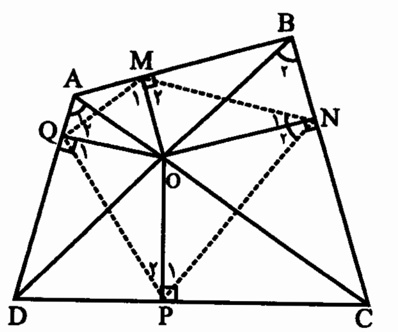


$$\begin{cases} \text{در}AMOQ : \hat{M}_۱ = \hat{A}_۱ = \frac{\widehat{OQ}}{۲} \\ \text{در}OPDQ : \hat{P}_۱ = \hat{D}_۱ = \frac{\widehat{OQ}}{۲} \\ \text{در}OPCN : \hat{P}_۲ = \hat{C}_۲ = \frac{\widehat{ON}}{۲} \\ \text{در}AMOQ : \hat{M}_۲ = \hat{B}_۲ = \frac{\widehat{ON}}{۲} \\ \text{چون قطرها بر هم‌دیگر عمودند} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲ = ۹۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جمع طرفین تساوی} : \hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ + \hat{P}_۱ + \hat{P}_۲ = \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ + \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲ = ۹۰ + ۹۰ \Rightarrow \hat{M} + \hat{P} = ۱۸۰$$

پس چهارضلعی $MNPQ$ محاطی بوده و لذا $O_۱O_۲O_۳O_۴$ نیز محاطی است.

۲۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



چهارضلعی $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی است، لذا:

$$\hat{A}_۱ = \hat{B}_۲ = \frac{\widehat{DC}}{۲}$$

از طرفی واضح است که چهارضلعی‌های $DPOQ, CPON, BNOM, AMOQ$ محاطی هستند، لذا:

$$\begin{cases} AMOQ \text{ در چهارضلعی محاطی} : \hat{A}_۱ = \hat{M}_۱ \ (۲) \\ BNOM \text{ در چهارضلعی محاطی} : \hat{B}_۲ = \hat{M}_۲ \ (۳) \end{cases} \Rightarrow \text{از} ۱, ۲, ۳ : \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$

به همین صورت ثابت می‌شود که $\hat{Q}_۱ = \hat{Q}_۲, \hat{P}_۱ = \hat{P}_۲, \hat{N}_۱ = \hat{N}_۲$ و این بدین معنی است که در چهاضلعی $MNPQ$، نیمسازهای داخلی زوایا، همرس هستند (در نقطه‌ی O). لذا چهارضلعی $MNPQ$ یک چهارضلعی محیطی است.

۲۶) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

می‌دانیم اگر یک چهارضلعی هم محاطی باشد و هم محیطی، در این صورت مساحت آن برابر است با:

$$S = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}$$

که در آن P نصف محیط چهارضلعی و d, c, b, a طول اضلاع آن می‌باشند. لذا:

$$۲(P-a)+۲(P-b)+۲(P-c)+۲(P-d)=۸P-۲(a+b+c+d)=۸P-۲(۲P)=۴P$$

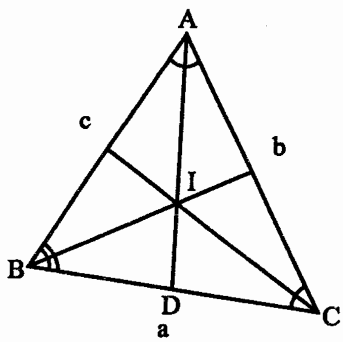
از طرفی طبق نامساوی واسطه حسابی - هندسی:

$$۲(P-a)+۲(P-b)+۲(P-c)+۲(P-d)=۴P\geq ۴\sqrt[۴]{۲^۴(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}=۸\sqrt{S}\Rightarrow$$

$$P\geq ۲\sqrt{S}\Rightarrow P^۲\geq ۴S\Rightarrow \frac{P^۲}{S}\geq ۴$$

پس مقدار $\frac{P^۲}{S}$ همیشه مقداری بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است و تنها مقدار موجود در جواب‌ها که از ۴ بزرگ‌تر است $\frac{۹}{۲}$ است.

۲۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنابر قضیه‌ی نیمسازها، در مثلث ABD:

$$\overline{AI}=\frac{C.d_a}{C+\overline{BD}}$$

که در آن d_a طول نیمساز AD است.

از طرفی بنا بر قضیه‌ی نیمسازها در مثلث ABC:

$$\overline{BD}=\frac{ac}{b+c}\quad,\quad \overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت که:

$$\overline{AI}=\frac{d_a(b+c)}{a+b+c}$$

هم‌چنین می‌دانیم:

$$d_a^۲=\overline{AD}^۲=bc-\overline{BD}.\overline{CD}=bc-\frac{a^۲.bc}{(b+c)^۲}=bc\times\frac{(b+c-a)(a+b+c)}{(b+c)^۲}$$

$$\overline{AI}^۲=\frac{(b+c)^۲}{(a+b+c)^۲}d_a^۲\Rightarrow \overline{AI}^۲=\frac{(b+c)^۲}{(a+b+c)^۲}\times bc\times\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^۲}\Rightarrow\frac{\overline{AI}^۲}{bc}=\frac{۲P-۲a}{۲P}$$

به همین صورت خواهیم داشت:

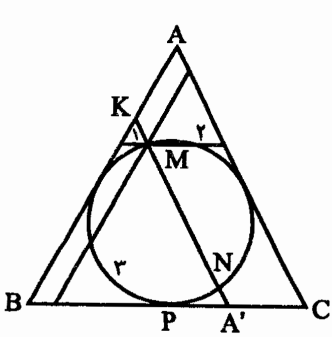
$$\frac{\overline{BI}^۲}{ac}=\frac{۲P-۲b}{۲P}\quad,\quad\frac{\overline{CI}^۲}{ab}=\frac{۲P-۲c}{۲P}$$

و در نتیجه:

$$\frac{\overline{AI}^۲}{bc}+\frac{\overline{BI}^۲}{ac}+\frac{\overline{CI}^۲}{ab}=\frac{(۲P-۲a)+(۲P-۲b)+(۲P-۲c)}{۲P}$$

$$=\frac{٦P-۲(a+b+c)}{۲P}=\frac{٦P-۴P}{۲P}=۱$$

۲۸) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



مثلث‌های ایجاد شده را ۱، ۲ و ۳ نام‌گذاری می‌کنیم و طول اضلاع مثلث‌های ABC و مثلث‌های شماره‌ی ۱ و ۲ و ۳ را به ترتیب $x_۳, x_۲, x_۱, x$ می‌نامیم.

اولاً روشن است که:

$$x_۱+x_۲+x_۳=x\quad (I)$$

مثلث BKA'، متساوی‌الاضلاع است و دایره‌ی محاطی مثلث ABC بر اضلاع BA', BK از آن مماس بوده و ضلع $A'K$ را در N, M قطع کرده است. روشن است که:

$$\overline{A'K} = \overline{KM} = x_۱$$

بنا بر قوت نقطه‌ی A' نسبت به دایره‌ی محاطی داریم:

$$P_c^{A'} = \overline{A'P}^۲ = \overline{A'N}.\overline{A'M} \Rightarrow (\overline{CP} - \overline{CA'})^۲ = \overline{A'N}.\overline{A'M} \Rightarrow (\frac{x}{۲} - x_۲)^۲ = x_۱.x_۳ \ (II)$$

$$x_۱ + x_۳ = x - x_۲ \Rightarrow (x_۱ + x_۳)^۲ = (x - x_۲)^۲ \Rightarrow ۲x_۱x_۳ = (x - x_۲)^۲ - x_۱^۲ - x_۳^۲$$: بنا بر رابطه‌ی I

حال با قرار دادن رابطه‌ی II در معادله‌ی اخیر:

$$۲(\frac{x}{۲} - x_۲)^۲ = (x - x_۲)^۲ - x_۱^۲ - x_۳^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲} + ۲x_۲^۲ - ۲xx_۲ = x^۲ + x_۲^۲ - ۲xx_۲ - x_۱^۲ - x_۳^۲$$
$$\Rightarrow x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = \frac{x^۲}{۲} \Rightarrow (\frac{x_۱}{x})^۲ + (\frac{x_۲}{x})^۲ + (\frac{x_۳}{x})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

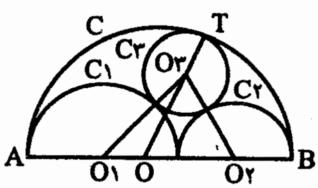
با توجه به تشابه مثلث‌های شماره‌ی ۱ و ۲ و ۳ با مثلث ABC و با فرض بر این‌که $S_۳, S_۲, S_۱, S$ مساحت مثلث ABC و مثلث‌های شماره‌ی ۱, ۲, ۳ باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{S_۱}{S} + \frac{S_۲}{S} + \frac{S_۳}{S} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{S}{۲}$$

از طرفی بنا بر مسئله‌ای که در فصل دوم حل شد اگر از نقطه‌ای دل‌خواه در داخل مثلثی مفروض خطوطی را به موازات اضلاع رسم کنیم تا سه مثلث کوچک‌تر ایجاد شود، در این صورت:

$$\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳} = \sqrt{S}$$

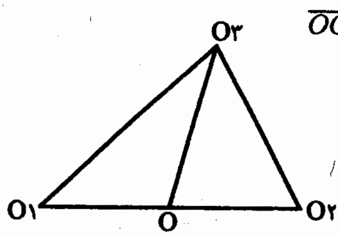
۲۹) گزینه‌ی «د» صحیح است.



با توجه به شکل

$$\overline{AB} = ۴r + ۲r = ۶r \Rightarrow \overline{AO} = ۳r$$
$$\overline{OO_۱} = ۳r - ۲r = r \quad , \quad \overline{OO_۲} = ۳r - r = ۲r$$

اگر شعاع دایره‌ی $C_۳$، x فرض شود:



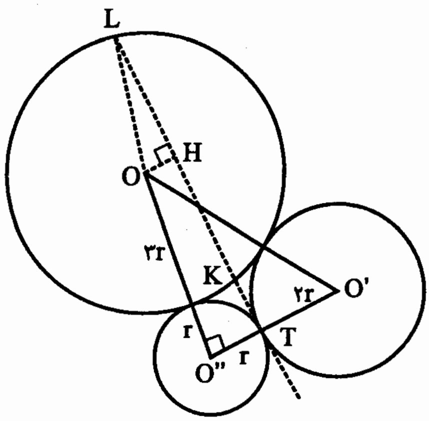
$$\overline{OO_۳} = \overline{OT} - \overline{O_۳T} = ۳r - x \quad , \quad \overline{O_۱O_۳} = ۲r + x$$
$$, \overline{O_۲O_۳} = r + x$$

حال با ارائه رابطه‌ی استوارت در مثلث $O_۱O_۲O_۳$ خواهیم داشت:

$$\overline{O_۱O}.\overline{O_۲O_۳}^۲ + \overline{O_۲O}.\overline{O_۱O_۳}^۲ = \overline{O_۱O_۲}.(\overline{OO_۳}^۲ + \overline{O_۱O}.\overline{O_۲O}) \Rightarrow$$
$$r(r+x)^۲ + ۲r(۲r+x)^۲ = ۳r[(۳r-x)^۲ + ۲r^۲] \Rightarrow$$
$$r(r^۲ + ۲rx + x^۲) + ۲r(۴r^۲ + ۴rx + x^۲) = ۳r[۹r^۲ - ۶rx + x^۲ + ۲r^۲] \Rightarrow$$
$$۹r^۲ + ۱۰rx + ۳x^۲ = ۳۳r^۲ - ۱۸rx + ۳x^۲ \Rightarrow ۲۴r^۲ = ۲۸rx \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۲۸}r = \frac{۶}{۷}r$$

۳۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.

با توجه به شکل واضح است که:



$$\overline{OO'} = ۵r \quad , \quad \overline{OO''} = ۴r \quad , \quad \overline{O'O''} = ۳r$$

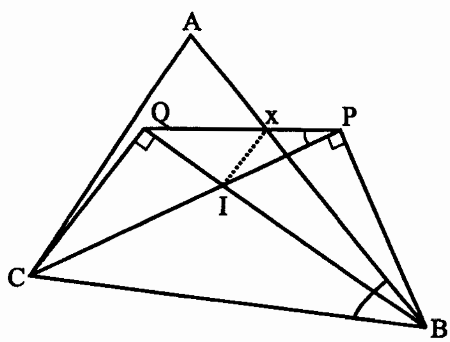
اندازه‌های اضلاع مثلث $OO'O''$ مبین آن است که این مثلث قائم‌الزاویه است. اگر $\overline{KH} = \overline{HL} = y, \overline{TK} = x$ فرض شوند، در مستطیل $OO''TH$ داریم:

$$x + y = \overline{OO''} \Rightarrow x + y = ۴r$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OLH رابطه‌ی فیثاغورث را ارائه می‌کنیم:

در مثلث OLH : $\overline{OL}^۲ = \overline{OH}^۲ + \overline{LH}^۲ \Rightarrow ۹r^۲ = r^۲ + y^۲ \Rightarrow y^۲ = ۸r^۲ \Rightarrow y = ۲\sqrt{۲}r \Rightarrow \overline{KL} = ۲y = ۴\sqrt{۲}r$

۳۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



در چهارضلعی $BCQP$؛ $\widehat{BPC} = \widehat{BQC} = ۹۰°$.

بنابراین این چهارضلعی محاطی است و لذا: $\widehat{CPQ} = \widehat{CBQ} = \dfrac{\widehat{CQ}}{۲}$

از آن‌جا که BI نیمساز زاویه‌ی B است، پس: $\widehat{CBQ} = \widehat{QBA}$.

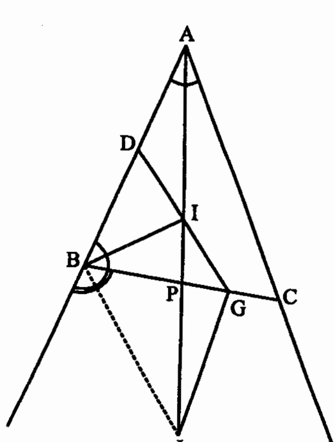
و از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که: $\widehat{CPQ} = \widehat{QBA}$

و از این‌جا خواهیم داشت که چهارضلعی $PBIX$ محاطی بوده و لذا:

$$\widehat{IXB} = \widehat{IPB} = ۹۰°$$

پس IX بر ضلع AB عمود می‌باشد و به عبارت دیگر X، نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع AB می‌باشد.

۳۲) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



با توجه به مثلث ABP، I محل تماس نیمساز داخلی رأس B با ضلع AP و I_a محل تماس نیمساز خارجی رأس B با امتداد ضلع AP می‌باشد. بنا بر قضیه‌ی نیمسازها:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IP}} = \frac{\overline{AI_a}}{\overline{I_aP}}$$

از تشابه مثلث‌های PBA, PGI_a خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{GP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{I_aP}}{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{\overline{GP}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{I_aP}}{\overline{AI_a}}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

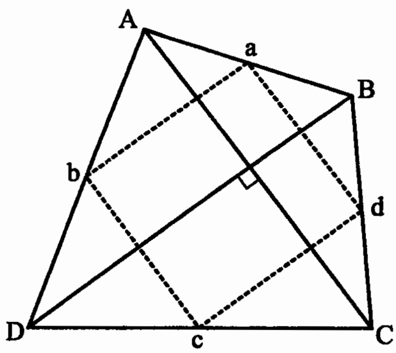
$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IP}} \times \frac{\overline{GP}}{\overline{GB}} = ۱$$

حال قضیه‌ی منلائوس را در مثلث ABP و برای نقاط هم‌خط G, I, D ارائه می‌دهیم:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \times \frac{\overline{AI}}{\overline{IP}} \times \frac{\overline{GP}}{\overline{GB}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = ۱$$

۳۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

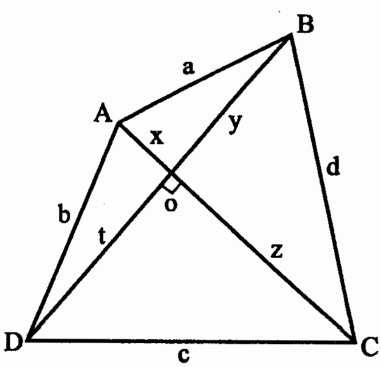
گزینه‌ی «الف» بدیهی است که غلط است. زیرا در هر دایره می‌توان دو وتر عمود بر هم ترسیم کرد، به طوری‌که محل تلاقی دو وتر مرکز دایره نباشد. در این صورت از محل برخورد وترها با دایره چهار نقطه به وجود آمده که یک چهارضلعی محاطی بوده و اقطار آن بر هم عمود می‌باشد، به طوری‌که محل تلاقی آن‌ها روی مرکز دایره‌ی محیطی آن واقع نیست.



ثابت می‌کنیم که گزینه‌ی «ب» نیز صحیح نمی‌باشد. زیرا بدیهی است که چهارضلعی حاصل از اتصال اوساط اضلاع یک مستطیل است که طول اضلاع آن نصف اقطار می‌باشد. لذا به راحتی ثابت می‌شود که طول شعاع دایره‌ی محیطی این مستطیل برابر است با:

$$\sqrt{\overline{AC}^۲+\overline{BD}^۲}/۴$$

که با گزینه‌ی «ب» متفاوت است.

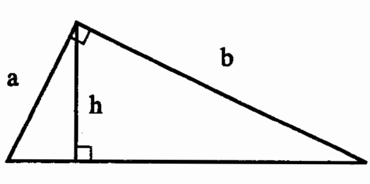


حال ثابت می‌کنیم که گزینه‌ی «ج» صحیح است.

اگر محل تلاقی اقطار را O فرض کنیم، بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث‌های OAD, OCD, OBC, OAB خواهیم داشت:

$$(x^۲+y^۲)+(z^۲+t^۲)=(x^۲+t^۲)+(y^۲+z^۲)\Rightarrow$$
$$a^۲+c^۲=b^۲+d^۲\Leftrightarrow ۲bd-(b+d)^۲=۲ac-(a+c)^۲\Leftrightarrow$$
$$۲bd-(b+d)^۲-(b+d)(a+c)=۲ac-(a+c)^۲-(a+c)(b+d)\Leftrightarrow ۲bd-P(b+d)=۲ac-P(a+c)\Leftrightarrow$$
$$P^۲+۴bd-۲P(b+d)=P^۲+۴ac-۲P(a+c)\Leftrightarrow(P-۲b)(P-۲d)=(P-۲a)(P-۲c)$$

۳۴) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



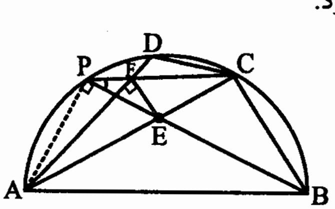
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو می‌دانیم $c>b, c>a$ و از طرفی:

$$۲S=ab=ch\Rightarrow h=\frac{ab}{c}$$

پس:

$$a+b=c+h\Rightarrow a+b=c+\frac{ab}{c}\Rightarrow$$
$$c^۲-c(a+b)+ab=۰\Leftrightarrow(c-a)(c-b)=۰\Rightarrow a=c \text{ یا } b=c$$

که هیچ‌کدام از جواب‌ها نمی‌توانند صحیح باشند، لذا چنین مثلثی هرگز وجود ندارد.



۳۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

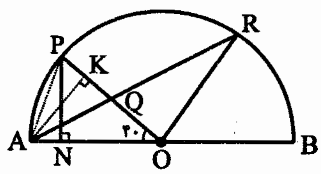
از نقطه‌ی P به A وصل می‌کنیم. روشن است که $\widehat{APB}=۹۰^\circ$.

با دقت به چهارضلعی $AEFP$، بنا بر فرض مسئله می‌دانیم $\widehat{AFE} = ۹۰°$ از طرفی $\widehat{APE} = ۹۰°$. پس این چهارضلعی، یک چهارضلعی محاطی است و در نتیجه: $\widehat{BPC} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{EF}}{۲}$.
از طرفی به دلیل محاطی بودن چهارضلعی $ABCP$ داریم:

$$\widehat{BPC} = \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{۲}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت: $\widehat{CAD} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{CD}$

۳۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

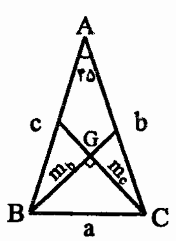


از نقطه‌ی A به P وصل می‌کنیم و عمود AK را از رأس A بر OP وارد می‌کنیم. مثلث OAP، متساوی‌الساقین و PN, AK ، ارتفاع‌های وارد بر ساق‌های OA, OP هستند. بدیهی است که طول‌های $\overline{PK}, \overline{AN}$ بنا بر همنهشتی مثلث‌های APK, APN با یک‌دیگر برابرند.
از آن‌جا که $\overline{PQ} = ۲\overline{AN}$ ، لذا $\overline{PQ} = ۲\overline{PK}$ و در نتیجه $\overline{PK} = \overline{KQ}$.
با دقت به مثلث APQ، ارتفاع AK، میانه‌ی ضلع PQ نیز می‌باشد، پس مثلث APQ متساوی‌الساقین بوده و روشن است که با مثلث متساوی‌الساقین OAP متشابه است. بنابراین:

$$\widehat{PAQ} = \widehat{POA} = ۴۰°$$

پس : $\widehat{PAQ} = ۴۰° \Rightarrow \widehat{PR} = ۸۰° \Rightarrow \widehat{POR} = ۸۰° \Rightarrow \widehat{AOR} = \widehat{AOP} + \widehat{POR} = ۴۰° + ۸۰° = ۱۲۰°$

۳۷) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



بنابر قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه GBC :

$$\overline{BC}^۲ = \overline{GB}^۲ + \overline{GC}^۲ \Rightarrow a^۲ = (\frac{۲}{۳}m_b)^۲ + (\frac{۲}{۳}m_c)^۲ \Rightarrow$$
$$a^۲ = \frac{۴}{۹}m_b^۲ + \frac{۴}{۹}m_c^۲ \Rightarrow ۲m_b^۲ + ۲m_c^۲ = \frac{۹}{۲}a^۲$$

حال رابطه‌ی میانه‌ها را در معادله‌ی اخیر اعمال می‌کنیم.

$$(a^۲ + c^۲ - \frac{b^۲}{۲}) + (a^۲ + b^۲ - \frac{c^۲}{۲}) = \frac{۹}{۲}a^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۵a^۲$$

بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲ + ۲bc\cos\hat{A}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$a^۲ + ۲bc\cos\hat{A} = ۵a^۲ \Rightarrow bc\cos\hat{A} = ۲a^۲$$

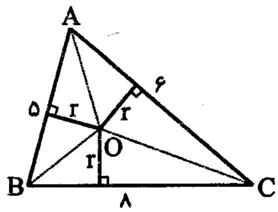
از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث، حاصل‌ضرب دو ضلع برابر است با طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم در قطر دایره‌ی محیطی مثلث. لذا:

$$bc\cos\hat{A} = (۲R).h_a.\cos\hat{A} = ۲a^۲$$

و نیز بنا بر قضیه‌ی سینوس‌ها: $۲R = \frac{a}{\sin\hat{A}}$ پس:

$$a.h_a.\cot\hat{A} = ۲a^۲ \Rightarrow \frac{h_a}{a} = ۲\tan\hat{A} = ۲\tan ۴۵° = ۲$$

۳۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



اگر P نصف محیط مثلث باشد، $P = \frac{۱}{۲}(۵ + ۶ + ۸) = ۹$ روشن است که جایگاه مدرسه روی مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC قرار دارد.

مساحت مثلث بنا بر قضیه‌ی هرون محاسبه می‌شود:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۹ \times ۲ \times ۳ \times ۴} \Rightarrow S = ۶\sqrt{۶}km^۲$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۶\sqrt{۶}}{۹} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$\overline{AO} = \frac{r}{\sin\frac{\hat{A}}{۲}} \quad , \quad \overline{BO} = \frac{r}{\sin\frac{\hat{B}}{۲}} \quad , \quad \overline{CO} = \frac{r}{\sin\frac{\hat{C}}{۲}}$$

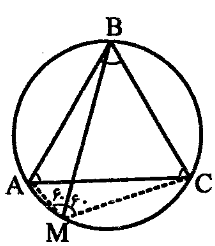
روشن است که بین سه مقدار CO, BO, AO کوچک‌ترین مقدار مربوط به بزرگ‌ترین مخرج است. بزرگ‌ترین مخرج، مربوط به بزرگ‌ترین زاویه است و از طرفی می‌دانیم که بزرگ‌ترین زاویه روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع است. لذا $\overline{AO}$ کوچک‌ترین مقدار است.
بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$\overline{BC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲ - ۲\overline{AB}.\overline{AC}\cos\hat{A} \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ + ۳۶ - ۶۰\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۱۲}{۶۰} = \frac{۱}{۵}$$

$$\cos\hat{A} = ۱ - ۲\sin^۲\frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow ۲\sin^۲\frac{\hat{A}}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\frac{\hat{A}}{۲} = \sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

$$\Rightarrow \overline{AO} = \frac{۲\sqrt{\frac{۶}{۳}}}{\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}} = \frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}Km$$

۳۹) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را a فرض کنیم، در این صورت بنا بر قضیه‌ی بطلمیوس در چهارضلعی محاطی $ABCM$:

$$\overline{AC}.\overline{BM} = \overline{AB}.\overline{CM} + \overline{BC}.\overline{AM} \Rightarrow a.\overline{BM} = a.\overline{CM} + a.\overline{AM} \Rightarrow \overline{BM} = \overline{AM} + \overline{CM}$$

بنابراین: $\overline{MA} + \overline{MC} - \overline{MB} = ۰ \Rightarrow (\overline{MA} + \overline{MC} - \overline{MB})^۲ = ۰$

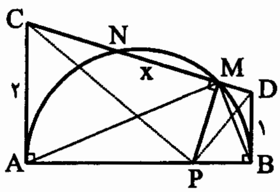
$$\Rightarrow \overline{MA}^۲ + \overline{MB}^۲ + \overline{MC}^۲ = ۲\overline{MB}.\overline{MC} + ۲\overline{MB}.\overline{MA} - ۲\overline{MA}.\overline{MC}$$

$$\Rightarrow \overline{MA}^۲ + \overline{MB}^۲ + \overline{MC}^۲ = \frac{۴}{\sin ۶۰}(\frac{۱}{۲}\overline{MB}.\overline{MC}\sin ۶۰ + \frac{۱}{۲}\overline{MB}.\overline{MA}\sin ۶۰ - \frac{۱}{۲}\overline{MA}.\overline{MC}\sin ۱۲۰)$$

$(\sin ۶۰ = \sin ۱۲۰)$ بنابراین:

$$\overline{MA}^۲ + \overline{MB}^۲ + \overline{MC}^۲ = \frac{۴}{\sin ۶۰}[S_{\overset{\triangle}{BCM}} + S_{\overset{\triangle}{BAM}} - S_{\overset{\triangle}{ACM}}] \Rightarrow$$

$$\overline{MA}^۲ + \overline{MB}^۲ + \overline{MC}^۲ = \frac{۴}{\sin ۶۰} \times S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \text{مقدار ثابت}$$



۴۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

از نقاط D,C به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم. هم‌چنین از نقاط B,A نیز به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم. روشن است که چهارضلعی‌های $PACM,PBDM$ محاطی هستند.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{در}PBDM : \widehat{DPM}=\widehat{DBM}=\dfrac{\widehat{MB}}{۲} \\ \\ \text{در}PACM : \widehat{CPM}=\widehat{CAM}=\dfrac{\widehat{MA}}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow \text{جمع طرفین تساوی}$$

$$\widehat{DPM}+\widehat{CPM}=\widehat{DPC}=\frac{\widehat{MA}+\widehat{MB}}{۲}=\frac{\widehat{AB}}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{DPC}=۹۰^\circ$$

پس مثلث PCD قائم‌الزاویه است و چون PM ارتفاع وارد بر وتر است، لذا:

$$\overline{PM}^۲=\overline{MC}.\overline{MD}$$

حال بنا بر قوت نقاط C,D نسبت به دایره:

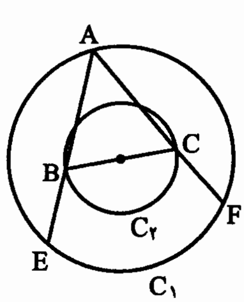
$$\left\{\begin{array}{l} P_C^D=\overline{DB}^۲=۱=\overline{MD}.\overline{DN} \\ \\ P_C^C=\overline{CA}^۲=۴=\overline{MC}.\overline{CN} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{MD}.(\overline{MD}+x)=۱ \\ \\ \overline{MC}.(\overline{MC}-x)=۴ \end{array}\right.$$

با تقسیم طرفین تساوی اخیر، خواهیم داشت:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\dfrac{\overline{MD}+x}{\overline{MC}-x}=\dfrac{۱}{۴} \\ \\ \text{بنا بر فرض}: \dfrac{\overline{MD}}{\overline{MC}}=\dfrac{۱}{۴} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\overline{MD}+x}{۴\overline{MD}-x}=۱\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\overline{MD}$$

$$\overline{MD}.(\overline{MD}+x)=۱\Rightarrow \overline{MD}\times\frac{۵}{۲}\overline{MD}=۱\Rightarrow \overline{MD}^۲=\frac{۲}{۵}\Rightarrow \overline{MC}^۲=\frac{۳۲}{۵}$$

$$\overline{MP}^۲=\overline{MC}.\overline{MD}\Rightarrow \overline{MP}^۴=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳۲}{۵}\Rightarrow \overline{MP}=۲\sqrt{\frac{۲}{۵}}$$



۴۱) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

شعاع دوایر $C_۲,C_۱$ را به ترتیب $r_۲,r_۱$ فرض می‌کنیم.
بنا بر قضیه‌ی میانه‌ها در مثلث ABC:

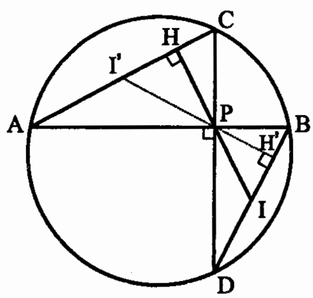
$$۲\overline{AO}^۲=\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲-\frac{\overline{BC}^۲}{۲}\Rightarrow ۲r_۱^۲=\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲-\frac{۴r_۲^۲}{۲}\Rightarrow \overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲=۲(r_۱^۲+r_۲^۲)$$

از طرفی روشن است که چون فواصل C,B از مرکز همواره ثابت است، لذا قوت آن‌ها نسبت به دایره‌ی $C_۱$ همواره ثابت می‌باشد. پس:

$P^{A}_{C_۲} = \overline{AB}.\overline{BE} = \overline{AC}.\overline{CF} = |r_۲^۲ - r_۱^۲|$

با تقسیم طرفین دو رابطه‌ی اخیر بر هم‌دیگر خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AB}^۲}{\overline{AB}.\overline{BE}} + \frac{\overline{AC}^۲}{\overline{AC}.\overline{CF}} = \frac{۲(r_۱^۲ + r_۲^۲)}{|r_۱^۲ - r_۱^۲|} = k \text{ مقدار ثابت } = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$$



۴۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

چون P روبه‌رو به قطر متغیر xy از دایره‌ی $C_۲$ قرار دارند، لذا دو وتر AB و CD از دایره‌ی $C_۱$ همواره در نقطه‌ی P بر یک‌دیگر عمود هستند.

از طرفی چون فاصله‌ی نقطه P، متغیر روی دایره‌ی $C_۲$ همواره از مرکز مقداری ثابت است، پس قوت آن نسبت به دایره‌ی $C_۱$ همواره ثابت است. پس:

$P^{P}_{C_۱} = \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD} = |\overline{OP}^۲ - R^۲| = k$ مقدار ثابت

$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{APC}} = \overline{AP}.\overline{PC} \\ S_{\overset{\triangle}{BPD}} = \overline{BP}.\overline{PD} \end{cases} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{APC}} \times S_{\overset{\triangle}{BPD}} = (P^{P}_{C_۱})^۲ = K^۲$$

عمود PH' را نیز در مثلث PBD بر BD وارد کرده و فرض می‌کنیم امتداد آن AC را در I' قطع کند. به راحتی می‌توان ثابت کرد که I', I اوساط AC, BD هستند (قضیه‌ی براهما گوپتا).

$$I \text{ از رابطه‌ی } \Rightarrow (\overline{PH}.\frac{\overline{AC}}{۲}).(\overline{PH'}.\frac{\overline{BD}}{۲}) = k^۲ \Rightarrow (\overline{PH}.\overline{PI'}).(\overline{PH'}.\overline{PI}) = K^۲$$

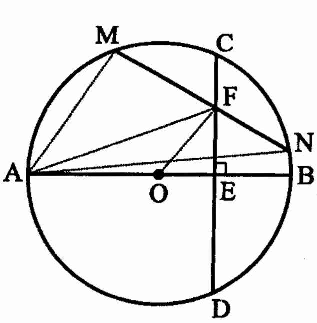
فرض می‌کنیم دو مثلث متشابه PBD, PAC به نسبت تشابه m متشابه باشند، لذا:

$$\triangle PAC \sim \triangle PBD \Rightarrow \frac{\overline{PH}}{\overline{PH'}} = \frac{\overline{PI'}}{\overline{PI}} = m \Rightarrow \overline{PH'} = \frac{۱}{m}\overline{PH} \quad , \quad \overline{PI'} = m\overline{PI}$$

بنابراین:

$$(\overline{PH}.m\overline{PI}).(\frac{۱}{m}\overline{PH}.\overline{PI}) = K^۲ \Rightarrow \overline{PH}.\overline{PI} = K$$

۴۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



بنا بر قضیه‌ی میانه‌ها در مثلث AMN:

$$\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ = ۲\overline{AF}^۲ + \frac{\overline{MN}^۲}{۲}$$

$$۲\overline{AF}^۲ + \frac{\overline{MN}^۲}{۲} = ۲(\overline{EF}^۲ + \frac{۹}{۴}R^۲) + ۲(\frac{\overline{MN}^۲}{۴}) =$$

$$= ۲[(\overline{OF}^۲ - \frac{R^۲}{۴}) + \frac{۹}{۴}R^۲] + ۲(R^۲ - \overline{OF}^۲) = ۴R^۲ + ۲R^۲ = ۶R^۲$$

پس:

$$\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ = ۶R^۲$$

۴۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

عمودهای $O_۲F, O_۱E$ را بر d وارد می‌کنیم. اگر $\overline{BC}=x$ فرض شود، لذا $\overline{EF}=\overline{O_۱H}=۳x$ و $\overline{AD}=۵x$.

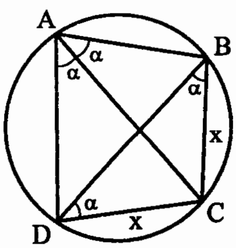
بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث $O_۱O_۲H$:

$$\overline{O_۱O_۲}^۲=\overline{O_۱H}^۲+\overline{O_۲H}^۲ \Rightarrow$$
$$(r+۲r)^۲=(۳x)^۲+(۲r-r)^۲ \Rightarrow ۹r^۲=۹x^۲+r^۲ \Rightarrow x^۲=\frac{۸}{۹}r^۲ \Rightarrow x=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}r$$

بنابراین:

$$\overline{AD}=۵x=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۳}r$$

۴۵) گزینه‌ی «د» صحیح است.



در چهارضلعی محاطی $ABCD$ داریم:

$$\widehat{DAC}=\widehat{BAC}=\widehat{CBD}=\widehat{BDC}=\alpha$$

اگر در مثلث متساوی‌الساقین BCD، طول ساق‌های CD, BC

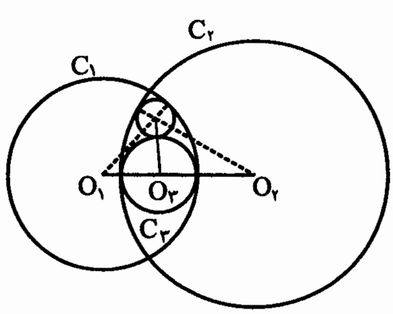
x فرض شوند، بنابر قضیه‌ی کسینوس‌ها در این مثلث:

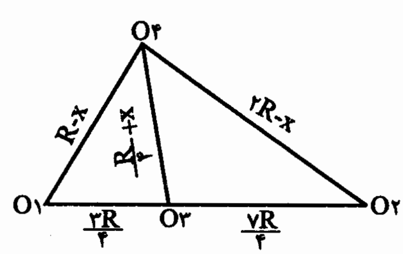
$$\overline{BD}=۲x\sin\frac{\hat{C}}{۲}=۲x\sin(\frac{۱۸۰-\hat{A}}{۲})=۲x\sin(۹۰-\frac{\hat{A}}{۲}) \Rightarrow \overline{BD}=۲x\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

حال قضیه‌ی بطلمیوس را در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ارائه می‌دهیم:

$$\overline{AB}.x+\overline{AD}.x=\overline{AC}(۲x\cos\frac{\hat{A}}{۲}) \Rightarrow \frac{\overline{AB}+\overline{AD}}{\overline{AC}}=۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

۴۶) گزینه‌ی «الف» صحیح است.





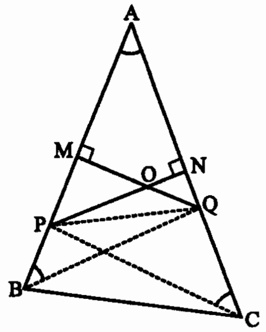
شعاع $C_۴$، x فرض شده است.

حال رابطه‌ی استوارت را برای مثلث $O_۱O_۲O_۴$ ارائه می‌دهیم:

$$\overline{O_۱O_۳}.\overline{O_۲O_۴}^۲+\overline{O_۲O_۳}.\overline{O_۱O_۴}^۲=\overline{O_۱O_۲}.(\overline{O_۳O_۴}^۲+\overline{O_۱O_۳}.\overline{O_۲O_۳})$$

$$\frac{۳R}{۴}(۲R-x)^۲+\frac{۷R}{۴}(R-x)^۲=\frac{۵R}{۲}.[(\frac{R}{۴}+x)^۲+\frac{۲۱R^۲}{۱۶}] \Rightarrow$$
$$۳(۴R^۲+x^۲-۴Rx)+۷(R^۲+x^۲-۲Rx)=۱۰(x^۲+\frac{R^۲}{۱۶}+\frac{Rx}{۲})+\frac{۱۰۵}{۸}R^۲ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۱۲۴}R$$

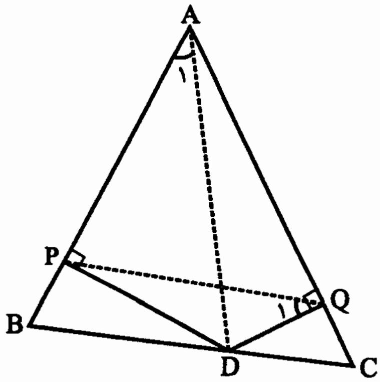
۴۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع AC, AB که مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌باشد را O می‌نامیم. واضح است که مثلث‌های AQB, APC متساوی‌الساقین‌اند (چون $\overline{AP} = \overline{PC}$، P روی عمود منصف AC است) و ($\overline{AQ} = \overline{QB}$، Q روی عمودمنصف AB است). بنابراین $\widehat{ABQ} = \widehat{ACP} = \hat{A}$ و این کافی است برای آن‌که چهارضلعی $PQCB$ محاطی باشد.

به دلیل محاطی بودن چهارضلعی $AMON$، روشن است که $\hat{A} + \widehat{MON} = ۱۸۰°$. از آن‌جا که $\widehat{ACP} = \hat{A}$ لذا، $\widehat{MON} + \widehat{ACP} = ۱۸۰$ پس چهارضلعی $POQC$، محاطی خواهد بود. بنابراین پنج نقطه‌ی O, Q, P, C, B (مرکز دایره‌ی محیطی) روی یک دایره قرار دارند.

۴۸) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



از رأس A به نقطه‌ی D روی ضلع BC وصل می‌کنیم. با توجه به محاطی بودن چهارضلعی $APDQ$ روشن است که:

$$\hat{A}_۱ = \hat{Q}_۱ \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به محاطی بودن $PQCB$، طبق فرض مسئله:

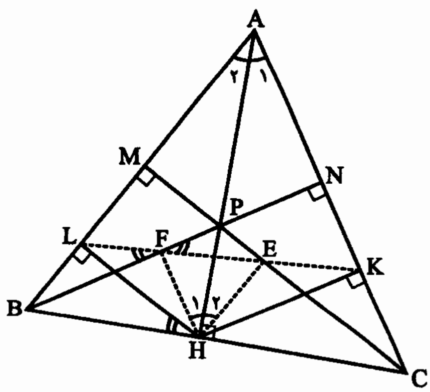
$$\hat{B} + \widehat{PQC} = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{B} + \hat{Q}_۱ + ۹۰ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B} + \hat{Q}_۱ = ۹۰° \quad (۲)$$

از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\hat{B} + \hat{A}_۱ = ۹۰°$$

حال با دقت به مثلث ABD و رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت: $\widehat{ADB} = ۹۰°$ و لذا D پای ارتفاع است.

۴۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنا بر آن‌چه که در مسئله‌ی قبلی نیز مطرح شد، چهارضلعی $ALHK$ یک چهارضلعی محاطی است. پس:

$$\widehat{LKC} + \hat{B} = ۱۸۰°$$

از طرفی چون: $\widehat{LKC} + \widehat{AKL} = ۱۸۰°$. بنابراین:

$$\widehat{AKL} = \hat{B}$$

و به همین صورت: $\widehat{ALK} = \hat{C}$.

حال با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی NFK، داریم: $\widehat{NFK} = \widehat{LFB} = ۹۰ - \hat{B}$

از طرفی با توجه به مثلث قائم‌الزاویه LBH داریم: $\widehat{LHB} = ۹۰ - \hat{B}$.

از دو رابطه‌ی اخیر داریم: $\widehat{LFB} = \widehat{LHB}$ و لذا چهارضلعی $LFHB$، یک چهارضلعی محاطی بوده و در نتیجه:

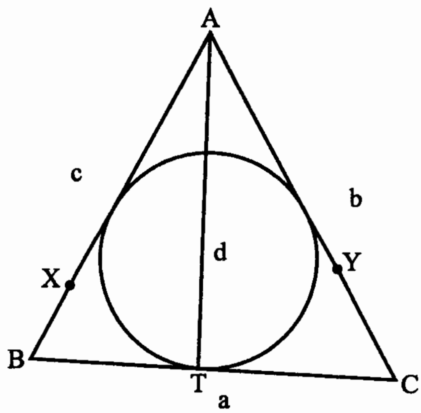
$$\widehat{HFB} = \widehat{HLB} = ۹۰^\circ$$

و HF بر BN عمود بوده و در نتیجه HF با AC موازی خواهد بود. بنابراین: $\hat{A}_۱ = \hat{H}_۱$

به همین صورت: $\hat{A}_۲ = \hat{H}_۲$ و در نهایت خواهیم داشت: $\hat{A} = \widehat{EHF}$.

بنا بر محاطی بودن چهارضلعی $AMPN$ که $\widehat{MPN} + \hat{A} = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه: $\widehat{EHF} + \widehat{MPN} = ۱۸۰$ و لذا چهارضلعی $EHFP$ محاطی است.

۵۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



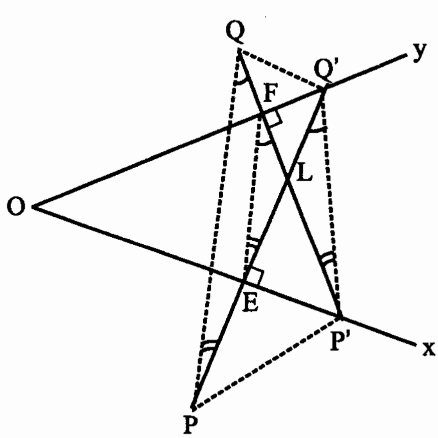
طول AT را d فرض می‌کنیم. اگر $P_۲, P_۱$ نصف محیط مثلث‌های ACT, ABT فرض شوند،

$$\begin{cases} ABT \text{ در مثلث}: \overline{AX} = P_۱ - \overline{BT} \\ ACT \text{ در مثلث}: \overline{AY} = P_۲ - \overline{CT} \\ ABC \text{ در مثلث}: \overline{BT} = P - b, \overline{CT} = P - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AX} = \dfrac{c+d+b-P}{۲} \\ \overline{AY} = \dfrac{b+d+c-P}{۲} \end{cases} \Rightarrow \overline{AX} = \overline{AY}$$

پس مثلث AXY متساوی‌الساقین است.

۵۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



اگر تصاویر L روی اضلاع زاویه‌ی Oy, Ox را به ترتیب F, E بنامیم، با دقت به چهارضلعی $EFQ'P'$ داریم:

$$\widehat{P'FQ'} = \widehat{P'EQ'} = ۹۰$$

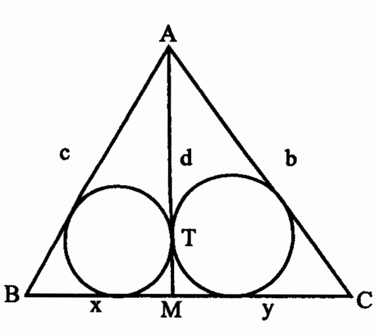
پس این چهارضلعی محاطی بوده و در نتیجه:

$$\widehat{LFE} = \widehat{P'Q'E} \quad , \quad \widehat{LEF} = \widehat{Q'P'F}$$

حال با توجه به مثلث LPQ بنا بر قضیه‌ی تالس EF با PQ موازی بوده و لذا $\widehat{LFE} = \widehat{LQP}, \widehat{LEF} = \widehat{LPQ}$ از چهار تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\widehat{LQP} = \widehat{P'Q'E} \quad , \quad \widehat{LPQ} = \widehat{Q'P'F}$$

پس چهارضلعی $PQQ'P'$ یک چهارضلعی محاطی خواهد بود.



۵۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.

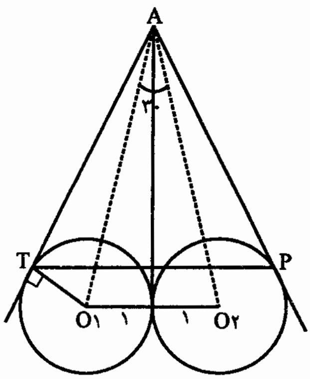
c, b, a به ترتیب طول‌های اضلاع AB, AC, BC و y, x, d نیز به ترتیب طول‌های CM, BM, AM می‌باشند.

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABM: \overline{AT} = \dfrac{c+d+x}{۲} - x = \dfrac{c+d-x}{۲} \\ \text{در مثلث } ACM: \overline{AT} = \dfrac{b+d+y}{۲} - y = \dfrac{b+d-y}{۲} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{c+d-x}{۲} = \dfrac{b+d-y}{۲} \Rightarrow y-x=b-c$$

از طرفی روشن است که: $y+x=a$ لذا:

$$\begin{cases} y-x=b-c \\ y+x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b+a-c}{۲} = P-c \\ x = \dfrac{a+c-b}{۲} = P-b \end{cases} \Rightarrow$$

پس M محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع BC است.



۵۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

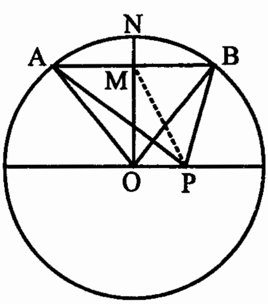
قضیه‌ی کسینوس‌ها را برای مثلث متساوی‌الساقین $AO_۱O_۲$ ارائه می‌کنیم.

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\overline{O_۱O_۲}^۲ = \overline{AO_۱}^۲ + \overline{AO_۲}^۲ - ۲\overline{AO_۱}.\overline{AO_۲}\cos ۳۰^\circ \Rightarrow$$
$$۴ = ۲\overline{AO_۱}^۲ - ۲\overline{AO_۱}^۲\cos ۳۰ \Rightarrow ۴ = ۲\overline{AO_۱}^۲(۱-\cos ۳۰^\circ) \Rightarrow$$
$$۴ = ۲\overline{AO_۱}^۲(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \overline{AO_۱}^۲(۲-\sqrt{۳}) \Rightarrow \overline{AO_۱}^۲ = \frac{۴}{۲-\sqrt{۳}} = ۴(۲+\sqrt{۳})$$

با توجه به رابطه‌ی فیثاغورث، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $AO_۱T$ خواهیم داشت:

$$\overline{AO_۱}^۲ = \overline{AT}^۲ + \overline{O_۱T}^۲ \Rightarrow \overline{AT}^۲ = ۴(۲+\sqrt{۳}) - ۱ = ۷ + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow \overline{AT} = ۲+\sqrt{۳}$$



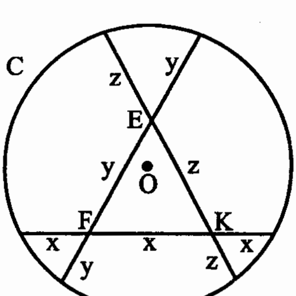
۵۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

محل تلاقی ON با وتر متغیر AB را که وسط AB می‌باشد، M می‌نامیم.
بنا بر رابطه‌ی میانه‌ها در مثلث PAB داریم:

$$۲\overline{PM}^۲ = \overline{PA}^۲ + \overline{PB}^۲ - \frac{\overline{AB}^۲}{۲}$$

لذا:

$$\overline{PA}^۲ + \overline{PB}^۲ = ۲\overline{PM}^۲ + \frac{\overline{AB}^۲}{۲} = ۲(\overline{OM}^۲ + \overline{OP}^۲) + \frac{\overline{AB}^۲}{۲} = ۲(\overline{OM}^۲ + \frac{\overline{AB}^۲}{۴}) + ۲\overline{OP}^۲$$
$$\overline{PA}^۲ + \overline{PB}^۲ = ۲R^۲ + ۲\overline{OP}^۲ = ۲(R^۲ + \overline{OP}^۲) = ۲\overline{PN}^۲$$



۵۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

طول هر یک از سه وتر را $۳z, ۳y, ۳x$ فرض می‌کنیم و
محل تلاقی آن‌ها را K, F, E می‌نامیم.

با نوشتن قوت نقطه‌ی E نسبت به دایره‌ی C خواهیم داشت:

$$P_C^E = y(۲y) = z(۲z) \Rightarrow ۲y^۲ = ۲z^۲ \Rightarrow y = z$$

مشابه فوق و با نوشتن قوت نقطه‌ی F، نسبت دایره نتیجه می‌شود که:

$$x = y = z$$

و چون طول هر یک از وترها، ۳ نتیجه می‌شود، بنابراین: $x = y = z = ۱$

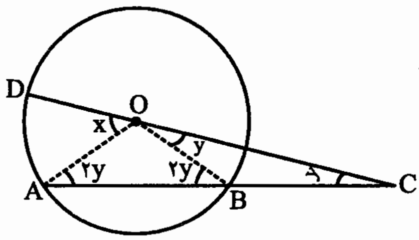
از طرفی به دلیل برابری قوت‌های نقاط K, F, E نسبت به دایره‌ی C:

$$P_C^E = P_C^F = P_C^K \Rightarrow \overline{EO}^۲ - R^۲ = \overline{FO}^۲ - R^۲ = \overline{KO}^۲ - R^۲ \Rightarrow \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OK}$$

بنابراین مرکز دایره (O)، روی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع EFK منطبق خواهد بود.

$$\overline{OE} = \frac{۳}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow P_C^E = ۱ \times ۲ = R^۲ - (\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲ \Rightarrow R = \sqrt{\frac{۷}{۳}}$$

۵۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

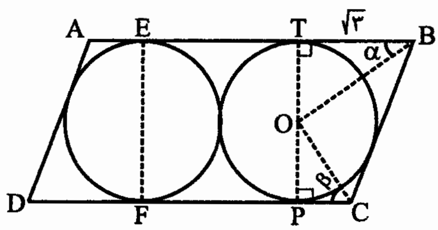


به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های OAB, OBC خواهیم داشت که:

$$\widehat{BOC} = y \quad , \quad \widehat{OBA} = \widehat{OAB} = ۲y$$

$$\begin{cases} OAB \text{ در مثلث}: \widehat{AOB} + ۴y = ۱۸۰^\circ \\ \text{از طرفی}: \widehat{AOD} + \widehat{BOC} + \widehat{AOB} = x + y + \widehat{AOB} = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۴y \Rightarrow x = ۳y$$

۵۷) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

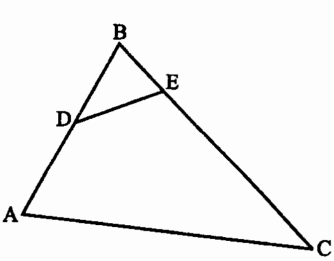


با توجه به برابری دو ذوزنقه‌ی $AEFD, BTPC$، لذا مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر است با مجموع مساحت‌های مربع $EFPT$ با دو برابر مساحت ذوزنقه $BTPC$.

$$OBT \text{ درمثلث}: \tan\hat{\alpha} = \frac{\overline{OT}}{\overline{BT}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \hat{\alpha} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۲\hat{\alpha} = ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow (\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ): \hat{C} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \beta = ۶۰^\circ$$
$$OCP \text{ در مثلث}: \tan\hat{\beta} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PC}} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۱}{\overline{PC}} \Rightarrow \overline{PC} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{ABCD} = S_{ETPF} + ۲S_{BTPC} = (۲ \times ۲) + ۲[\frac{(\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}) \times ۲}{۲}] = ۴ + \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

۵۸) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



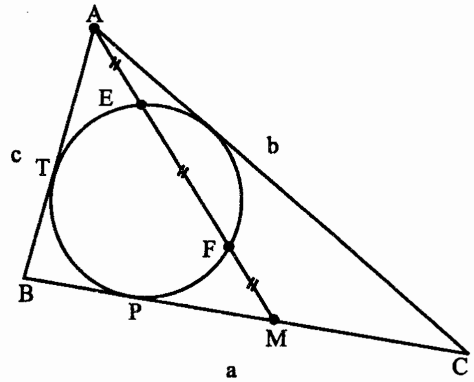
طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \overline{BA} = \overline{BE} + \overline{ED} \\ \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{BD}.(\overline{BA}) = \overline{BD}.(\overline{BE} + \overline{ED}) \\ \overline{BE}.(\overline{BC}) = \overline{BE}.(\overline{BD} + \overline{DE}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{BD}.\overline{BA} = \overline{BD}.\overline{BE} + \overline{BD}.\overline{ED} \\ \overline{BE}.\overline{BC} = \overline{BE}.\overline{BD} + \overline{BE}.\overline{DE} \end{cases}$$

از طرفی از آن‌جا که $ADEC$ محاطی است، دایره‌ی محیطی آن را S می‌نامیم و قوت نقطه‌ی B را نسبت به آن می‌نویسیم.

$P_S^B = \overline{BD}.\overline{BA} = \overline{BE}.\overline{BC} \Rightarrow \overline{BD}.\overline{BE} + \overline{BD}.\overline{ED} = \overline{BE}.\overline{BD} + \overline{BE}.\overline{DE} \Rightarrow \overline{BD}.\overline{ED} = \overline{BE}.\overline{DE}$

$\Rightarrow \overline{BD} = \overline{BE} \Rightarrow$ ۱ با توجه به رابطه‌ی : $\overline{BA} = \overline{BC}$



پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۵۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

اگر دایره‌ی محاطی میانه‌ی AM را در نقاط F, E قطع کند، طبق فرض:

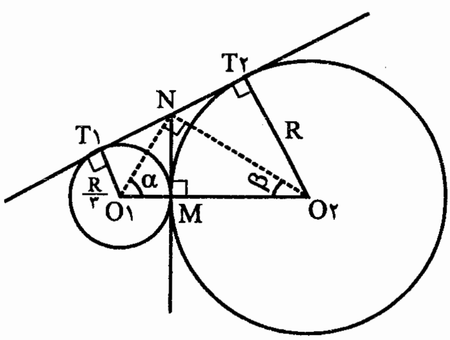
$$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FM} = \frac{\overline{AM}}{۳}$$

با نوشتن قوت نقطه‌های M, A نسبت به این دایره:

$$\begin{cases} P_C^A = \overline{AT}^۲ = (P-a)^۲ = \overline{AE}.\overline{AF} = \frac{۲}{۹}\overline{AM}^۲ \\ P_C^M = \overline{MP}^۲ = (\frac{a}{۲} - (P-b))^۲ = \overline{MF}.\overline{ME} = \frac{۲}{۹}\overline{AM}^۲ \end{cases} \Rightarrow$$

$$P - a = \frac{a}{۲} - P + b \Rightarrow ۲P = a + b + \frac{a}{۲} \Rightarrow a + b + c = a + b + \frac{a}{۲} \Rightarrow c = \frac{a}{۲} \Rightarrow \frac{a}{c} = ۲$$

۶۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



در چهارضلعی $O_۱O_۲T_۲T_۱$ ، $T_۲, T_۱$ قائمه هستند، بنابراین:

$$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۲\hat{\alpha} + ۲\hat{\beta} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = ۹۰^\circ$$

پس مثلث $NO_۱O_۲$ قائم‌الزاویه است و $O_۱\widehat{N}O_۲ = ۹۰^\circ$ می‌باشد. روشن است که در این مثلث NM ارتفاع وارد بر وتر است. پس:

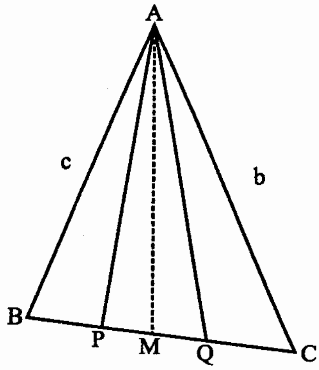
$$\overline{NM}^۲ = \overline{O_۱M}^۲ \times \overline{O_۲M} \Rightarrow \overline{NM}^۲ = \frac{R}{۳} \times R = \frac{R^۲}{۳} \Rightarrow \overline{NM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}R \Rightarrow$$

$$\frac{NM}{R} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow NMO_۲ \text{ در مثلث} : \tan\hat{\beta} = \frac{\overline{NM}}{R} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۲ = ۲\hat{\beta} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

اگر مساحت ناحیه‌ی $NT_۱M$، $S_۱$ و مساحت ناحیه‌ی $NT_۲M$ ، $S_۲$ فرض شوند؛

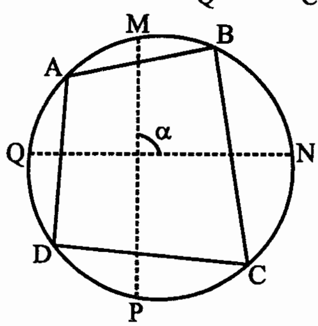
$$\begin{cases} S_۱ = S_{NMO_۱T_۱} - S_{O_۱\widehat{T_۱}M} = \overline{NM}.\frac{R}{۳} - \frac{۱}{۳}\pi(\frac{R}{۳})^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۹}R^۲ - \frac{\pi R^۲}{۲۷} = \frac{R^۲}{۹}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}) \\ S_۲ = S_{NMO_۲T_۲} - S_{O_۲\widehat{T_۲}M} = \overline{NM}.R - \frac{۱}{۶}\pi(R)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}R^۲ - \frac{\pi R^۲}{۶} = \frac{R^۲}{۳}(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{S_۲}{S_۱} = ۳ \times \frac{\frac{۲\sqrt{۳} - \pi}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳} - \pi}{۳}} = \frac{۹}{۲} \times \frac{۲\sqrt{۳} - \pi}{۳\sqrt{۳} - \pi}$$



۶۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

می‌دانیم: $\overline{BP} = P - b$ و هم‌چنین $\overline{CQ} = P - b$ بنابراین $\overline{BP} = \overline{CQ}$ و لذا نقطه‌ی M وسط PQ نیز خواهد بود و لذا AM میانه مثلث APQ نیز خواهد بود.



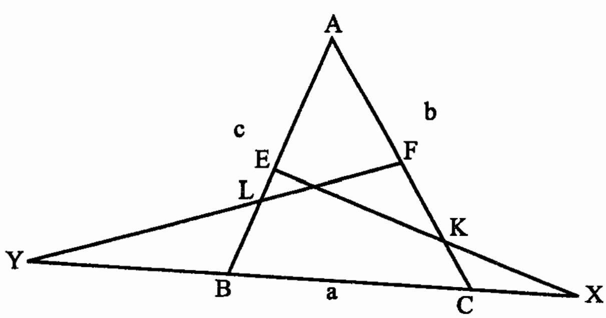
۶۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{PQ}}{۲} = \frac{\widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{PD} + \widehat{DQ}}{۲} \Rightarrow$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\frac{\widehat{AB}}{۲} + \frac{\widehat{BC}}{۲} + \frac{\widehat{DC}}{۲} + \frac{\widehat{AD}}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۴}(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD}) \Rightarrow$$

$$\hat{\alpha} = \frac{۱}{۴}(۳۶۰^\circ) = ۹۰^\circ$$

۶۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنا بر قضیه‌ی منلائوس در مثلث ABC و با نقاط هم‌خط Y, L, F:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \times \frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \times \frac{\overline{BY}}{\overline{CY}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{CY}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{BY} + a}{\overline{BY}} = \frac{P-c}{P-a} \times \frac{P-b}{P-a} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{BY} + a}{\overline{BY}} = \frac{(P-c)(P-b)}{(P-a)^{۲}} \qquad (۱)$$

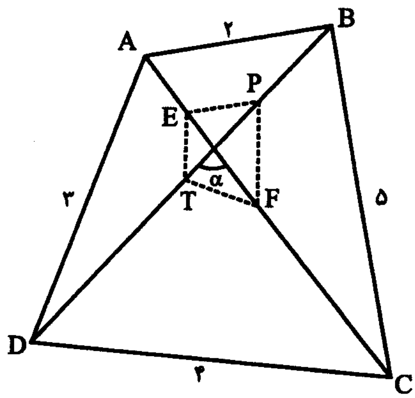
بنا بر قضیه‌ی منلائوس در مثلث ABC و با نقاط هم‌خط X, K, E:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} \times \frac{\overline{CX}}{\overline{BX}} = ۱ \Rightarrow \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{CX} + a}{\overline{CX}} = \frac{P-b}{P-a} \times \frac{P-c}{P-a}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CX} + a}{\overline{CX}} = \frac{(P-b)(P-c)}{(P-a)^{۲}} \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ خواهیم داشت: $\overline{BY} = \overline{CX}$ و لذا بدون توجه به نوع مثلث این تساوی برقرار خواهد بود.

۶۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



$$\begin{cases} \text{در}\triangle ABD : \overline{DP} = \dfrac{\overline{BD}+۳-۲}{۲} = \dfrac{\overline{BD}+۱}{۲} \\ \text{در}\triangle BDC : \overline{DT} = \dfrac{\overline{BD}+۴-۵}{۲} = \dfrac{\overline{BD}-۱}{۲} \\ \text{در}\triangle ABC : \overline{AE} = \dfrac{\overline{AC}+۲-۵}{۲} = \dfrac{\overline{AC}-۳}{۲} \\ \text{در}\triangle ADC : \overline{AF} = \dfrac{\overline{AC}+۳-۴}{۲} = \dfrac{\overline{AC}-۱}{۲} \end{cases}$$

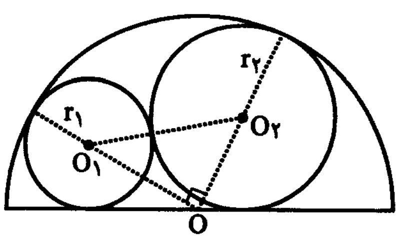
$$\begin{cases} \overline{PT} = \overline{DP} - \overline{DT} = ۱ \\ \overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \overline{PT} = \overline{EF} = ۱$$

از طرفی بنا بر قضیه‌ی بطلمیوس در چهارضلعی محاطی $ABCD$ داریم:

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{DC} + \overline{AD}.\overline{BC} = ۸ + ۱۵ = ۲۳ \Rightarrow \overline{AC}.\overline{BD} = ۲۳$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{PETF}} = \frac{\frac{۱}{۲}.\overline{AC}.\overline{BD}.\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\overline{PT}.\overline{EF}.\sin\alpha} = \frac{۲۳}{۱\times۱} = ۲۳$$

۶۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



قضیه‌ی فیثاغورث را در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OO_۱O_۲$ ارائه می‌دهیم.

$$\overline{O۱O_۲}^۲ = \overline{OO_۱}^۲ + \overline{OO_۲}^۲$$

$$\begin{cases} \overline{O_۱O_۲} = r_۱ + r_۲ \\ \overline{OO_۱} = R - r_۱ \\ \overline{OO_۲} = R - r_۲ \end{cases} \Rightarrow (R-r_۱)^۲ + (R-r_۲)^۲ = (r_۱+r_۲)^۲ \Rightarrow R^۲ = R(r_۱+r_۲) + r_۱r_۲$$

$$\Rightarrow r_۱ + r_۲ = \frac{R^۲ - r_۱r_۲}{R}$$

در تساوی فوق روشن است که $r_۱ + r_۲$ وقتی حداقل است که صورت کسر حداقل و در نتیجه $r_۱.r_۲$ حداکثر باشد.

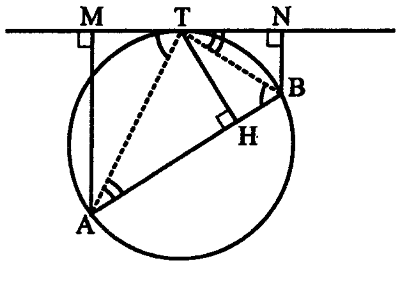
$$r_۱ + r_۲ \geq ۲\sqrt{r_۱r_۲} \Rightarrow (r_۱+r_۲)^۲ \geq ۴r_۱r_۲ \Rightarrow r_۱r_۲ \leq \frac{(r_۱+r_۲)^۲}{۴} \Rightarrow \max(r_۱.r_۲) = \frac{(r_۱+r_۲)^۲}{۴}$$

اگر $r_۱ + r_۲ = m$ فرض شود، لذا:

$$Rm = R^۲ - \frac{m^۲}{۴} \Rightarrow m^۲ + ۴mR = ۴R^۲ \Rightarrow (m+۲R)^۲ = ۸R^۲ \Rightarrow m = ۲(\sqrt{۲}-۱)R$$

۶۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.

با دقت در شکل داریم:



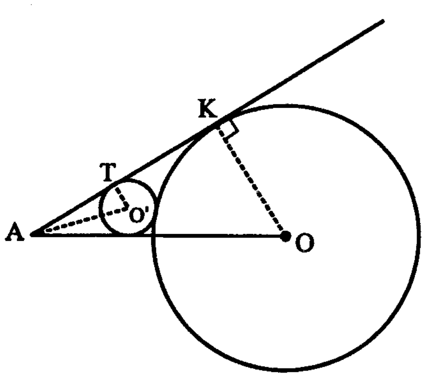
$$\begin{cases}\widehat{MTA}=\widehat{TBA}=\dfrac{\widehat{AT}}{۲}\\[2mm] \widehat{NTB}=\widehat{TAB}=\dfrac{\widehat{BT}}{۲}\end{cases}$$

واضح است که مثلث‌های AMT با BHT و هم‌چنین BTN با ATH متشابهند. لذا:

$$\begin{cases}\triangle AMT\sim\triangle BHT\Rightarrow \dfrac{\overline{AM}}{\overline{TH}}=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{BT}}\\[2mm] \triangle BTN\sim\triangle ATH\Rightarrow\dfrac{\overline{TH}}{\overline{BN}}=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{BN}}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{\overline{AM}}{\overline{TH}}=\dfrac{\overline{TH}}{\overline{BN}}\Rightarrow \overline{TH}^{۲}=\overline{AM}.\overline{BN}$$

۶۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

مرکز دایره‌ی کوچک را O' و محل تماس AK با آن را T و شعاع آن را X فرض می‌کنیم.



$\overline{TK}$، مماس مشترک بیرونی دو دایره است، لذا:

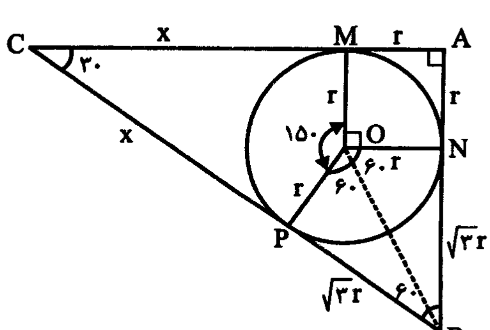
$$\overline{TK}=۲\sqrt{۲x}$$

$$\begin{cases}\text{در مثلث } AOK:\ \cot ۶۰^\circ=\dfrac{\overline{AK}}{۲}\Rightarrow\overline{AK}=\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}\\[2mm] \text{در مثلث } AO'T:\ \cot ۳۰^\circ=\dfrac{\overline{AT}}{x}\Rightarrow\overline{AT}=\sqrt{۳}x\end{cases}$$

از طرفی: $\overline{TK}=\overline{AK}-\overline{AT}\Rightarrow ۲\sqrt{۲x}=\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}-\sqrt{۳}.x\Rightarrow$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۸x=۳x^{۲}+\frac{۴}{۳}-۴x\Rightarrow ۳x^{۲}-۱۲x+\frac{۴}{۳}=۰\Rightarrow x=\frac{۶-۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۶۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



اگر نقاط مزبور را P, N, M بنامیم، روشن است که:

$$\widehat{MN}=۹۰^\circ,\ \widehat{NP}=۱۲۰^\circ,\ \widehat{PM}=۱۵۰^\circ$$

اگر محل برخورد مماس‌ها در این نقاط را C, B, A بنامیم، $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۳۰^\circ$ خواهند بود.

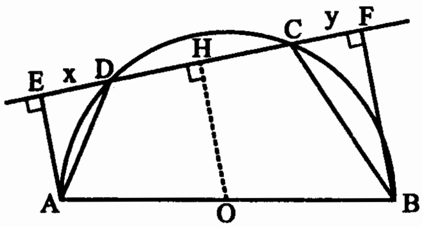
با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBN داریم: $\overline{BN}=\overline{BP}=\sqrt{۳}r$

$$\hat{C}=۳۰^\circ \Rightarrow \overline{AB}=\frac{\overline{BC}}{۲} \Rightarrow ۲(\sqrt{۳}+۱)r = x+\sqrt{۳}r \Rightarrow x=(\sqrt{۳}+۲)r$$

نصف محیط مثلث $P=(\sqrt{۳}+۲)r+r+\sqrt{۳}r=(۲\sqrt{۳}+۳)r$

از طرفی می‌دانیم $r=\frac{S}{P}$، لذا: $S=r.P=(۲\sqrt{۳}+۳)r^{۲}$

۶۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



پای عمودهای وارد از B, A را بر امتداد DC به ترتیب F, E می‌نامیم.

بنا بر فرض:

$$\overline{ED}=x \quad , \quad \overline{CF}=y$$

از مرکز O عمود OH را بر ضلع CD وارد می‌کنیم. از آن‌جا که عمود منصف هر وتر از دایره از مرکز دایره می‌گذرد، بنابراین:

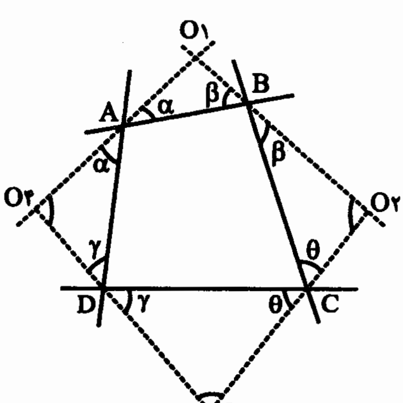
$$\overline{DH}=\overline{CH} \qquad (۱)$$

با دقت به ذوزنقه‌ی $AEFB$، OH با قاعده‌های BF, AE موازی است. بنابراین:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{EH}}{\overline{HF}}=۱ \Rightarrow \overline{EH}=\overline{FH} \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ خواهیم داشت: $\overline{ED}=\overline{CF}$، پس: $x=y \Rightarrow \frac{x}{y}=۱$

۷۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



با توجه به شکل و مثلث‌های $O_۱AB, O_۲BC, O_۳CD, O_۴AD$ خواهیم داشت که:

$$\begin{cases} \hat{O}_۱ = ۱۸۰-\alpha-\beta \\ \hat{O}_۳ = ۱۸۰-\gamma-\theta \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_۱+\hat{O}_۳ = ۳۶۰-\alpha-\beta-\gamma-\theta$$

به همین صورت:

$$\hat{O}_۲+\hat{O}_۴ = ۳۶۰-\alpha-\beta-\gamma-\theta$$

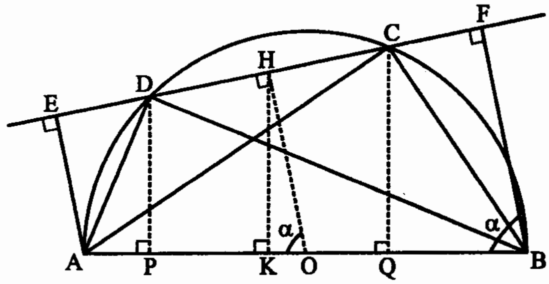
و لذا: $\hat{O}_۱+\hat{O}_۳=\hat{O}_۲+\hat{O}_۴$ و از آن‌جا که $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۴=۳۶۰$، بنابراین:

$$\hat{O}_۱+\hat{O}_۳=\hat{O}_۲+\hat{O}_۴=۱۸۰$$

و چهارضلعی $O_۱O_۲O_۳O_۴$ یک چهارضلعی محاطی خواهد بود.

۷۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

عمود OH را از مرکز دایره بر CD و هم‌چنین عمودهای DP و CQ را بر قطر AB وارد می‌کنیم. در ذوزنقه‌ی $AEFB$، BF, AE, OH با یک‌دیگر موازی‌اند و از آن‌جا که O وسط AB می‌باشد، بنابراین:



$$\overline{OH} = \frac{\overline{AE}+\overline{BF}}{۲}$$

و بدیهی است که H وسط وتر CD است. پس در ذوزنقه‌ی $CDPQ$ نیز که در آن HK با CQ, DP موازی است،

$$\overline{HK} = \frac{\overline{DP}+\overline{CQ}}{۲}$$

$$S_{AEFB} = \frac{(\overline{AE}+\overline{BF}).\overline{EF}}{۲} \Rightarrow S_{AEFB} = \overline{OH}\times\overline{EF} = S$$

$$\begin{cases} S_{ABC} = S' = \dfrac{\overline{CQ}}{۲}\times\overline{AB} \\ S_{ABD} = S'' = \dfrac{\overline{DP}}{۲}\times\overline{AB} \end{cases} \Rightarrow S'+S'' = \frac{\overline{DP}+\overline{CQ}}{۲}\times\overline{AB}$$

$$\Rightarrow S'+S'' = \overline{HK}.\overline{AB}$$

فرض کنیم امتدادهای اضلاع CD, AB یک‌دیگر را در نقطه‌ی X قطع کنند. از تشابه مثلث‌های XBF, OHK خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{XF}}{\overline{XB}}$$

و نیز بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث XBF:

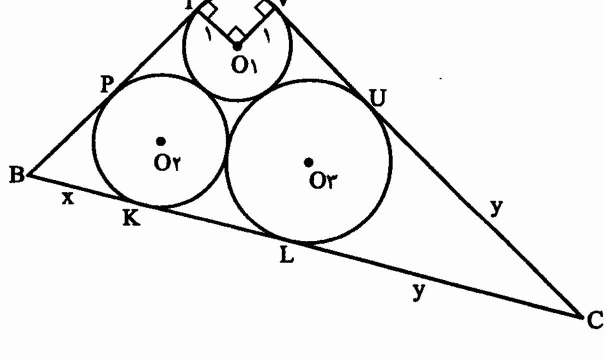
$$\frac{\overline{XF}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{HK}.\overline{AB} = \overline{OH}.\overline{EF} \Rightarrow S'+S'' = S$$

۷۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.

مطابق شکل به دلیل مربع بودن چهارضلعی $ATO_۱V$ ، $\overline{AT} = \overline{AV} = ۱$ می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع دو ضلع قائمه برابر است با مجموع قطر دایره‌ی محیطی و قطر دایره‌ی محاطی داخلی آن مثلث. پس:



$$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BC}+۲r \Rightarrow (۱+\overline{TP}+x)+(۱+\overline{VU}+y)=(x+y+\overline{KL})+۲r \Rightarrow$$
$$۲+\overline{TP}+\overline{VU}=\overline{KL}+۲r \Rightarrow ۲+۲\sqrt{r_۱r_۲}+۲\sqrt{r_۱r_۳}=۲\sqrt{r_۲r_۳}+۲r \Rightarrow$$
$$۱+\sqrt{۱\times ۲}+\sqrt{۱\times ۴}-\sqrt{۲\times ۴}=r \Rightarrow ۱+\sqrt{۲}+۲-۲\sqrt{۲}=r \Rightarrow r=۳-\sqrt{۲}$$

۷۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

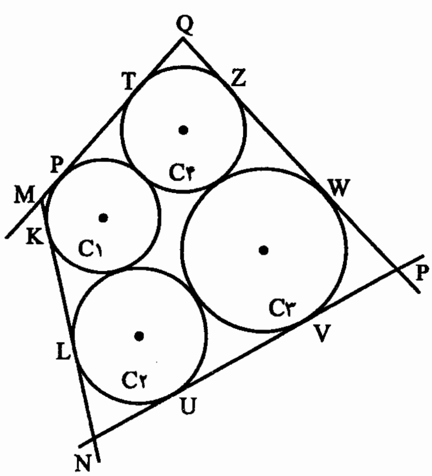
با دقت به طول اضلاع این چهارضلعی داریم:

$$\begin{cases} \overline{O_۱O_۲}=R_۱+R_۲ \\ \overline{O_۲O_۳}=R_۲+R_۳ \\ \overline{O_۳O_۴}=R_۳+R_۴ \\ \overline{O_۱O_۴}=R_۱+R_۴ \end{cases} \Rightarrow \overline{O_۱O_۲}+\overline{O_۳O_۴}=\overline{O_۱O_۴}+\overline{O_۲O_۳}=R_۱+R_۲+R_۳+R_۴$$

یعنی مجموع اضلاع روبه‌رو با یک‌دیگر برابرند و این شرطی لازم و کافی برای محیطی بودن چهارضلعی مذکور است.

۷۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.

اگر چهارضلعی $MNPQ$ محیطی باشد، داریم:



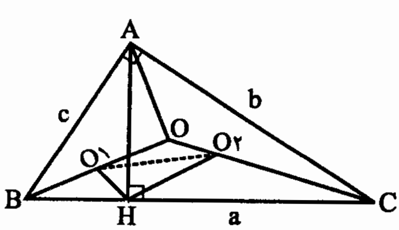
$$\overline{MN}+\overline{PQ}=\overline{PN}+\overline{MQ}$$

از آن‌جا که: $\overline{QT}=\overline{QZ}\ ,\ \overline{PV}=\overline{PW}\ ,\ \overline{NL}=\overline{NU}\ ,\ \overline{MP}=\overline{MK}$

بنابراین:

$$\overline{PT}+\overline{UV}=\overline{KL}+\overline{ZW} \Rightarrow \sqrt{rR}+\sqrt{۲r\times ۳r}=\sqrt{r\times ۲r}+\sqrt{۳rR}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)r=\sqrt{R}\times\sqrt{r}(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow \sqrt{T}=\sqrt{۲}\sqrt{r} \Rightarrow R=۲r \Rightarrow \frac{R}{r}=۲$$

۷۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $O_۱O_۲H$ قضیه‌ی فیثاغورث را ارائه می‌دهیم:

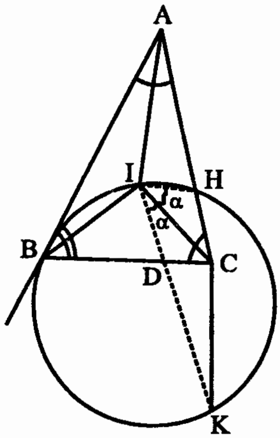
$$\overline{O_۱O_۲}^۲=\overline{O_۱H}^۲+\overline{O_۲H}^۲$$

از طرفی به دلیل تشابه مثلث‌های ABC, ACH, ABH خواهیم داشت که:

$$\frac{\overline{AO}}{a}=\frac{\overline{O_۱H}}{c}=\frac{\overline{O_۲H}}{b} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{O_۱H}=\frac{c}{a}\overline{AO} \\ \overline{O_۲H}=\frac{b}{a}\overline{AO} \end{cases} \Rightarrow \overline{O_۱O_۲}^۲=\overline{AO}^۲(\frac{c^۲+b^۲}{a^۲})=\overline{AO}^۲ \Rightarrow \overline{O_۱O_۲}=\overline{AO}$$

۷۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



در ابتدا ثابت می‌کنیم که IC نیمساز زاویه‌ی $\widehat{HIK}$ می‌باشد. به همین دلیل اگر محل تلاقی IK با ضلع BC را D بنامیم، کافی است ثابت کنیم $\widehat{IDC} = \widehat{IHC}$.

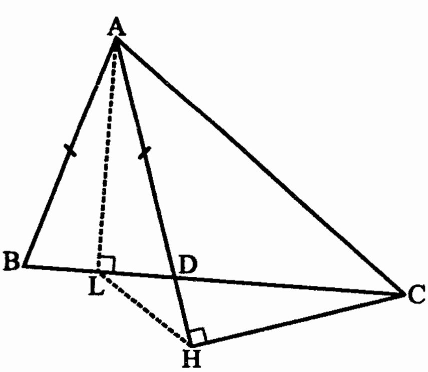
$$\widehat{IHC} = \frac{\widehat{KI}}{۲}$$

$$\begin{cases} \widehat{IDC} = \widehat{DIB} + \widehat{DBI} : \text{در مثلث } IDB \\ \widehat{DIB} = \frac{\widehat{KB}}{۲} \\ \widehat{DBI} = \widehat{IBA} = \frac{\widehat{BI}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IDC} = \frac{\widehat{KB}}{۲} + \frac{\widehat{BI}}{۲} = \frac{\widehat{KI}}{۲}$$

از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت که $\widehat{IDC} = \widehat{IHC}$ پس $\widehat{HIC} = \widehat{KIC} = \alpha$.

$$\begin{cases} \widehat{AIC} = ۹۰ + \frac{\hat{B}}{۲} = ۶۰ + \alpha \\ \widehat{BIC} = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲} = \widehat{BIK} + \alpha \end{cases} \Rightarrow \text{تفریق طرفین تساوی}: \frac{\hat{B} - \hat{A}}{۲} = ۶۰ - \widehat{BIK} \Rightarrow \widehat{BIK} = ۶۰ - \frac{۳۰}{۲} = ۴۵^\circ$$

۷۷) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



ارتفاع AL از مثلث ABC را رسم می‌کنیم.
مثلث ABD متساوی‌الساقین است، لذا:

$$\overline{BL} = \overline{LD} = \frac{\overline{BD}}{۲}$$

در چهارضلعی $ALHC$ داریم:

$$\widehat{ALC} = \widehat{AHC} = ۹۰$$

پس این چهارضلعی محاطی است و لذا:

$$\overline{AD}.\overline{DH} = \overline{LD}.\overline{DC} \Rightarrow \overline{AB}.\overline{DH} = \frac{\overline{BD}}{۲}.\overline{DC} \Rightarrow \overline{AB}.\overline{DH} = \frac{\overline{BD}.\overline{DC}}{۲}$$

$$\overline{AD}^{۲} = \overline{AB}^{۲} = \overline{AB}.\overline{AC} - \overline{BD}.\overline{DC} \Rightarrow \overline{BD}.\overline{DC} = \overline{AB}.(\overline{AC} - \overline{AB})$$

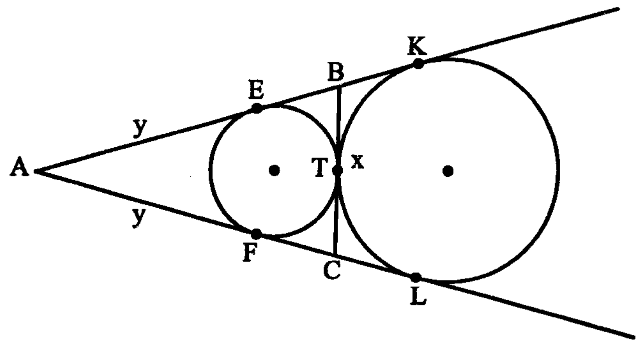
از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\overline{AB}.\overline{DH} = \frac{\overline{AB}.(\overline{AC} - \overline{AB})}{۲} \Rightarrow \overline{DH} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{۲}$$

$$\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{DH} = \overline{AB} + \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{۲} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{۲}$$

۷۸) گزینه‌ی «د» صحیح است.

طول‌های $\overline{AB}=\overline{AC}=y$ و $\overline{BC}=x$ فرض می‌شوند و محل تماس‌ها با دو دایره مطابق شکل نام‌گذاری شده‌اند.



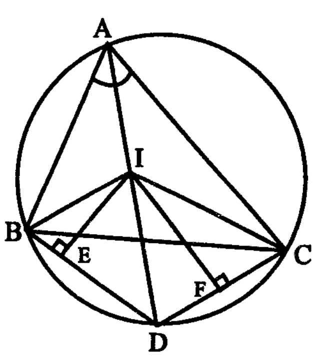
$$\overline{BT}=\frac{x}{۲}=\overline{BE}=\overline{BK}\Rightarrow \overline{EK}=x=۲\sqrt{rR}$$

$$\text{در مثلث }ABC:\begin{cases} r=\dfrac{S}{P}\\[2mm] R=\dfrac{S}{P-x}\end{cases}\Rightarrow \frac{r}{R}=\frac{P-x}{P}=\frac{۲y-x}{x+۲y}\Rightarrow y=\frac{R+r}{۲(R-r)}x\Rightarrow$$

$$y=\frac{(R+r)\sqrt{rR}}{(R-r)}\Rightarrow P=\frac{x}{۲}+y=\sqrt{rR}+\frac{R+r}{R-r}\sqrt{rR}\Rightarrow$$

$$P=\frac{۲R}{R-r}\sqrt{rR}\Rightarrow S=rP=\frac{۲(rR)\sqrt{rR}}{R-r}=\frac{۲(rR)^{\frac{۳}{۲}}}{R-r}$$

۷۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی IDF, IDE داریم:

$$\begin{cases}\overline{IE}=\overline{ID}.\sin\hat{C}\\ \overline{IF}=\overline{ID}.\sin\hat{B}\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم: $\overline{ID}=\overline{BD}=\overline{CD}$

بنابراین داریم:

$$\overline{IE}+\overline{IF}=\overline{BD}(\sin\hat{B}+\sin\hat{C})$$

$$\overline{IE}+\overline{IF}=\frac{\overline{AD}}{۲}\Rightarrow \overline{BD}(\sin\hat{B}+\sin\hat{C})=\frac{\overline{AD}}{۲}$$

$$\begin{cases}\overline{BD}=۲R\sin\dfrac{\hat{A}}{۲}\\[2mm] \overline{AD}=۲R\sin(\hat{B}+\dfrac{\hat{A}}{۲})\end{cases}\Rightarrow ۲R\sin\frac{\hat{A}}{۲}.(\sin\hat{B}+\sin\hat{C})=R\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})$$

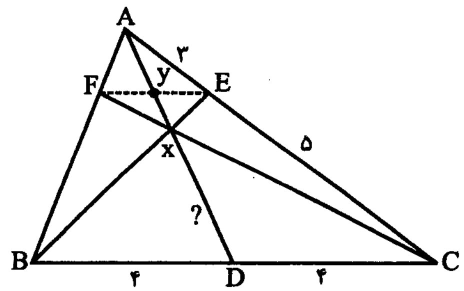
$$\Rightarrow ۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}[۲\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}).\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})]=\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲[(۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}.\cos\frac{\hat{A}}{۲}).\cos(\frac{\pi-\hat{A}-۲\hat{B}}{۲})]=\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲\sin\hat{A}.\cos[\frac{\pi}{۲}-(\frac{\hat{A}}{۲}+B)]=\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})\Rightarrow ۲\sin\hat{A}.\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})=\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲})\Rightarrow$$

$\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \hat{A}=\frac{\pi}{٦}, \hat{A}=\frac{۲\pi}{۳}, \hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}=\pi$ که تناقض است

۸۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



محل تلاقی EF و AD را Y می‌نامیم.

روشن است که مثلث ABC متساوی‌الساقین در رأس C می‌باشد.
زیرا $(\overline{CA}=\overline{CB}=۸)$

از آن‌جا که CF, BE, AD در نقطه‌ی X همرس هستند، بنا بر قضیه‌ی سوا خواهیم داشت:

$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=۱\Rightarrow\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}\Leftrightarrow EF||BC$ (EF با ضلع BC موازی است)

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\Rightarrow\frac{\overline{EF}}{۸}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow\overline{EF}=۳\Rightarrow\overline{FY}=\overline{EY}=\frac{۳}{۲}$$

از طرفی بنا بر قضیه‌ی منلائوس در مثلث ADC و با نقاط هم‌خط B, X, E داریم:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{AX}}{\overline{DX}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=۱\Rightarrow\frac{۵}{۳}\times\frac{\overline{AX}}{\overline{DX}}\times\frac{۱}{۲}=۱\Rightarrow\frac{\overline{DX}}{\overline{AX}}=\frac{۵}{٦}$$

در چهارضلعی محاطی $AEXF$ قوت نقطه‌ی Y را نسبت به دایره‌ی محیطی آن در نظر می‌گیریم.

$$\overline{AY}.\overline{XY}=(\frac{۳}{۲})(\frac{۳}{۲})=\frac{۹}{۴}$$

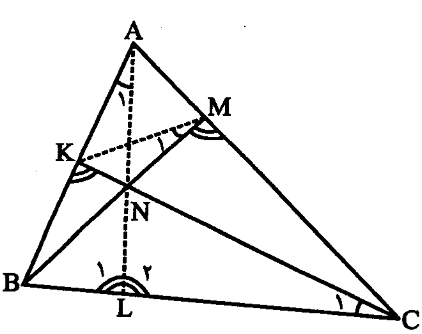
از تشابه مثلث AFE با مثلث ABC و هم‌چنین تشابه مثلث EFX با مثلث XBC داریم:

$$\begin{cases}\triangle AFE\sim\triangle ABC\Rightarrow\frac{\overline{AY}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AY}}{\overline{AX}+\overline{DX}}=\frac{۳}{۸}\\ \triangle EFX\sim\triangle XBC\Rightarrow\frac{\overline{XY}}{\overline{DX}}=\frac{۳}{۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{AY}=\frac{۳}{۸}(\overline{AX}+\overline{DX})\\ \overline{XY}=\frac{۳}{۸}\overline{DX}\end{cases}$$

$$\overline{AY}\times\overline{XY}=\frac{۹}{٦۴}.\overline{DX}.(\overline{AX}+\overline{DX})=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\overline{DX}.(\overline{AX}+\overline{DX})=۱٦\Rightarrow\overline{DX}^۲(\frac{\overline{AX}}{\overline{DX}}+۱)=۱٦$$

$$\overline{DX}^۲(\frac{٦}{۵}+۱)=۱٦\Rightarrow\overline{DX}=۴\sqrt{\frac{۵}{۱۱}}$$

۸۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



فرض کنیم امتداد BN ضلع AC را در نقطه‌ی L قطع کند. از محاطی بودن چهارضلعی $BKNM$ نتیجه می‌شود که: $\hat{B}_۱=\hat{M}_۱$
از طرفی از محاطی بودن چهارضلعی $AKMC$ نتیجه می‌شود که: $\hat{C}_۱=\hat{M}_۱$. از دو تساوی اخیر خواهیم داشت: $\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$.

حال با دقت به دو مثلث ACK, ABL خواهیم داشت: $\widehat{AKC}=\hat{L}_۱$ (۱).

مشابه آن‌چه که در بالا گفته شده ثابت می‌شود که: $\widehat{AMC} = \hat{L}_۲$ (۲) .
از طرفی از محاطی بودن چهارضلیع $AKMC$ نتیجه می‌شود که: $\widehat{AKC} = \widehat{AMC}$ (۳)

از روابط ۱, ۲, ۳ $\Rightarrow \hat{L}_۱ = \hat{L}_۲ \Rightarrow \hat{L}_۱ = \hat{L}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow BL \perp AC$

بنا بر رابطه‌ی ۱ $\widehat{AKC} = \hat{L}_۱ \Rightarrow \widehat{AKC} = ۹۰^\circ \Rightarrow CK \perp AB$

بنا بر رابطه‌ی ۲ $\widehat{AMC} = \hat{L}_۲ \Rightarrow \widehat{AMC} = ۹۰^\circ \Rightarrow AM \perp BC$

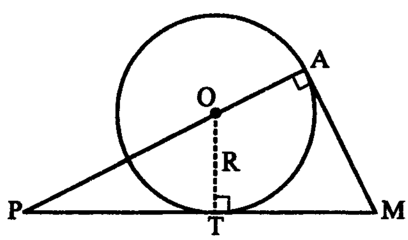
پس CK, AM, BL ارتفاعات مثلث ABC هستند و چون شعاع‌های دوایر محیطی چهارضلعی‌های $KBMN, AKMC$ برابرند، بنابراین:

$$\overline{BN} = \overline{AC}$$

قبلاً ثابت کردیم که مثلث‌های BAC, BKM به نسبت تشابه $\cos A$ با هم‌دیگر متشابه‌اند. لذا:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{KM}}{\overline{AC}} = \cos\hat{A} \\ \overline{KM} = \overline{BN}\sin\hat{A} = \overline{AC}\sin\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AC}\sin\hat{A}}{\overline{AC}} = \cos\hat{A} \Rightarrow \sin\hat{A} = \cos\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ$$

۸۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



از نقطه‌ی O مرکز دایره به محل تماس ضلع PM با دایره یعنی نقطه‌ی T وصل می‌کنیم.

از تشابه مثلث‌های OPT, APM داریم:

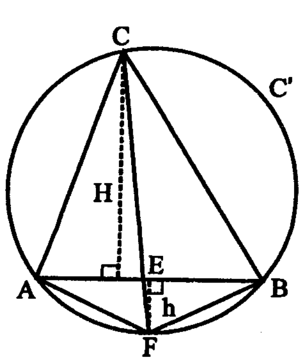
$$\frac{\overline{OT}}{\overline{AM}} = \frac{\text{محیط مثلث } \triangle OPT}{\text{محیط مثلث } \triangle APM} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{AP}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{۱۹}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{OP} + \overline{PT} + ۱۹}{۱۵۲} = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{AM} + \overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{۱۹ + \overline{OP}} \\ \text{محیط مثلث } \triangle APM = ۲\overline{AM} + \overline{PT} + ۱۹ + \overline{OP} = ۱۵۲ \Rightarrow \overline{OP} + \overline{PT} + ۱۹ = ۱۵۲ - ۲\overline{AM} \end{cases}$$

بنابراین از معادلات اخیر داریم:

$$\frac{۱۹}{\overline{AM}} = \frac{۱۵۲ - ۲\overline{AM}}{۱۵۲} = \frac{\overline{OP}}{\overline{AM} + \overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{۱۹ + \overline{OP}} \Rightarrow \overline{AM} = ۱۹, \overline{OP} = \frac{۹۵}{۳}$$

۸۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



با نوشتن قوت نقطه‌ی E نسبت به دایره‌ی محیطی مثلث ABC داریم:

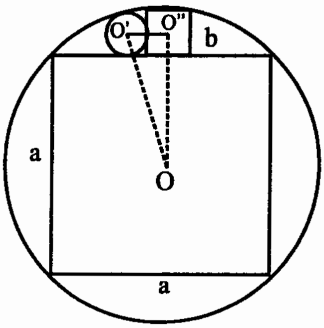
$$P_C^E = \overline{CE} \times \overline{EF} = \frac{\overline{AB}^۲}{۴} \Rightarrow ۲۸\overline{EF} = ۱۴۴ \Rightarrow \overline{EF} = \frac{۱۶}{۳}$$

اگر طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در دو مثلث FAB, ABC را به ترتیب h, H فرض کنیم، داریم:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CE}} = \frac{h}{H} = \frac{۱۶/۳}{۲۷} = \frac{۱۶}{۸۱}$$

از طرفی روشن است که $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{h}{H}$، بنابراین: $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱۶}{۸۱}$.

۸۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.



اگر شعاع دایره‌ی بزرگ برابر $۲\sqrt{۲}$ فرض شود، طول ضلع مربع بزرگ برابر ۴ خواهد بود.

$a = ۴ \Leftrightarrow R = ۲\sqrt{۲}$

به راحتی ثابت می‌شود که اگر طول ضلع مربع کوچک‌تر b باشد، (a طول ضلع مربع بزرگ است). در این صورت:

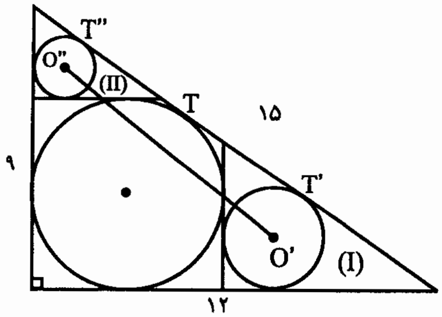
$$b = \frac{a}{۵} \Rightarrow b = \frac{۴}{۵}$$

اگر x شعاع دایره‌ی کوچک فرض شود، با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OO'O''$ خواهیم داشت:

$$\overline{OO'}^۲ = \overline{OO''}^۲ + \overline{O'O''}^۲ \Rightarrow (۲\sqrt{۲} - x)^۲ = (x + \frac{b}{۲})^۲ + (\frac{a}{۲} + x)^۲ \Rightarrow$$

$$۸ + x^۲ - ۴\sqrt{۲}x = x^۲ + \frac{۴}{۵}x + \frac{۴}{۲۵} + ۴ + x^۲ + ۴x \Rightarrow x^۲ + \frac{۴(۶ + ۵\sqrt{۲})}{۵}x - \frac{۹۶}{۲۵} = ۰ \Rightarrow x \simeq ۱/۳۸$$

۸۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



اگر R', R, r را به ترتیب شعاع‌های دوایر محاطی داخلی مثلث‌های اصلی، پایینی (I) و بالایی (II) فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۹ \times ۱۲}{۹ + ۱۲ + ۱۵} = \frac{۱۰۸}{۳۶} = ۳ \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow d = ۲r = ۶$$

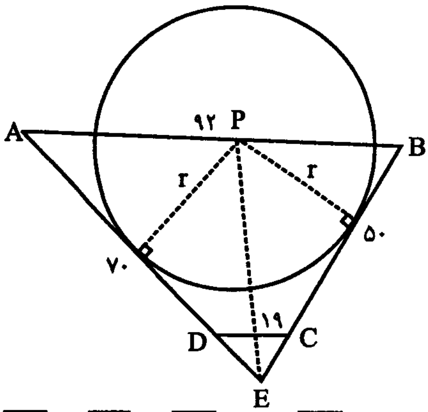
بنا بر تشابه سه مثلث مذکور، با محاسبه به سادگی به‌دست خواهیم آورد که نسبت تشابه مثلث (I) با مثلث اصلی برابر است با $\frac{۱}{۲}$ و نسبت تشابه مثلث (II) با مثلث اصلی برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

$$R = \frac{۶ \times \frac{۹}{۲}}{۶ + \frac{۹}{۲} + \frac{۱۵}{۲}} = \frac{۳}{۲} \quad , \quad R' = \frac{۱۲}{۳ + ۴ + ۵} = ۱$$

$$\overline{T'T''} = \overline{TT'} + \overline{TT''} = ۲\sqrt{۳ \times \frac{۳}{۲}} + ۲\sqrt{۳ \times ۱} \Rightarrow \overline{T'T''} = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳}$$

$$\overline{O'O''} = \sqrt{\overline{T'T''}^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow \overline{O'O''} = \frac{\sqrt{۱۲۱ + ۴۸\sqrt{۶}}}{۲}$$

۸۶) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



اضلاع BC, AD را امتداد می‌دهیم تا هم‌دیگر را در نقطه‌ی E قطع کنند. با توجه به این‌که در مثلث ABE فاصله‌ی نقطه‌ی P از دو ضلع BE, AE برابر و برابر با شعاع دایره است، لذا نقطه‌ی P (مرکز دایره) پای نیمساز داخلی رأس E از مثلث ABE می‌باشد.

بنا بر قضیه‌ی تالس در مثلث ABE،

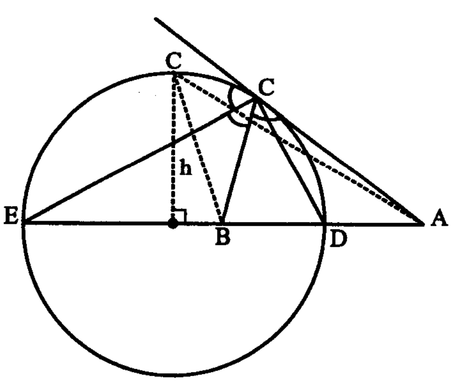
$$\frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{۷۰ + \overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{۵۰ + \overline{CE}} = \frac{۱۹}{۹۲} \Rightarrow$$

$$\overline{ED} = \frac{۱۹ \times ۷۰}{۷۳}, \overline{EC} = \frac{۱۹}{۷۳} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{۹۲ \times ۷۰}{۷۳}, \overline{BE} = \frac{۹۲ \times ۵۰}{۷۳}$$

بنا بر رابطه‌ی نیمسازها در مثلث ABE:

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AE}}{\overline{AE} + \overline{BE}} = \frac{۹۲ \times \frac{۹۲ \times ۷۰}{۷۳}}{\frac{۱۲۰ \times ۹۲}{۷۳}} = \frac{۱۶۱}{۳}$$

۸۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



همان‌طور که در فصل مربوط به مکان هندسی گفته خواهد شد، مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصل آن نقاط از دو نقطه‌ی ثابت در صفحه، مقداری ثابت است، دایره‌ای است به قطر پاره‌خطی که دو سر این پاره‌خط نقاطی هستند که پاره‌خط حاصل از دو نقطه‌ی ثابت را به نسبت مقدار ثابت داده شده تقسیم می‌کنند که این دایره به دایره‌ی «آپولونیوس» معروف است.

پس با توجه به شکل تمامی نقاط C روی دایره‌ی ترسیم شده به قطر DE واقع هستند. لذا اگر h فاصله C تا پاره‌خط AB باشد، $S_{ABC} = h \times \frac{\overline{AB}}{۲}$ و در نتیجه روشن است که S وقتی ماکزیمم است که h برابر با شعاع دایره‌ی مزبور باشد.

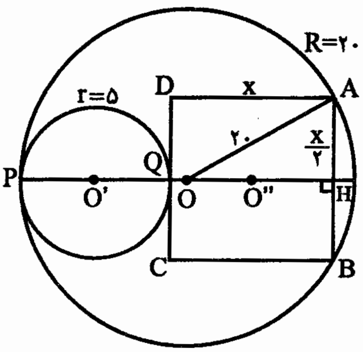
$$h = R = \frac{\overline{ED}}{۲}$$

با محاسبه‌ی ساده خواهیم داشت که:

$$\overline{ED} = ۳۶۰ + \frac{۴۰}{۹} \Rightarrow h = R = ۱۸۰ + \frac{۲۰}{۹} \Rightarrow [S_{\overset{\triangle}{ABC}}]_{\max} = \overline{AB} \times \frac{h}{۲} \Rightarrow$$

$$S_{\max} = \frac{۹}{۲}(۱۸۰ + \frac{۲۰}{۹}) = ۹(۹۰ + \frac{۱۰}{۹}) = ۸۱۰ + ۱۰ = ۸۲۰$$

۸۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



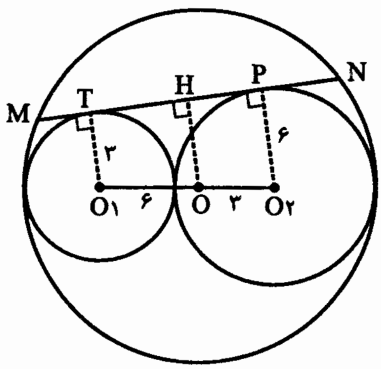
طول AB (ضلع مربع) را x فرض می‌کنیم. r, R به ترتیب شعاع‌های دوایر بزرگ و کوچک هستند و بنا بر فرض $R = ۲۰, r = ۵$.

$$\overline{OQ} = \overline{OP} - \overline{QP} = ۲۰ - ۲(۵) \Rightarrow \overline{OQ} = ۱۰$$

$$\overline{QH} = x \Rightarrow \overline{OH} = \overline{QH} - \overline{OQ} \Rightarrow \overline{OH} = x - ۱۰$$

در مثلث OAH: $\overline{OA}^۲ = \overline{OH}^۲ + \overline{AH}^۲ \Rightarrow ۴۰۰ = (x - ۱۰)^۲ + \frac{x^۲}{۴} \Rightarrow x = ۸ + ۴\sqrt{۱۹}$

۸۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



اگر مطابق شکل مراکز دوایر را $O_۲, O_۱, O$ بنامیم، به راحتی محاسبه می‌شود که:

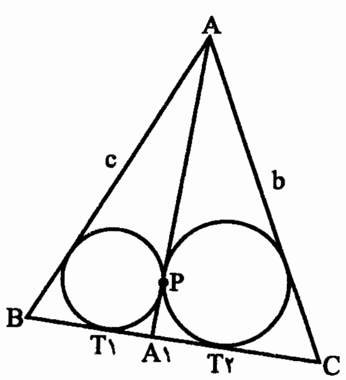
$$\overline{OO_۱} = ۶ \quad , \quad \overline{OO_۲} = ۳$$

با توجه به شکل کافی است که طول OH را در ذوزنقه قائم‌الزاویه $O_۱O_۲PT$ محاسبه کنیم. با استفاده از رابطه‌ی تالس در ذوزنقه مزبور محاسبه می‌شود:

$$\overline{OH} = ۵$$

$$\frac{\overline{MN}^۲}{۴} = ۸۱ - ۲۵ = ۵۶ \Rightarrow \overline{MN} = ۴\sqrt{۱۴}$$

۹۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



محل تماس دوایر با ضلع BC را $T_۲, T_۱$ می‌نامیم. اگر $P_۲, P_۱$ به ترتیب نصف محیط‌های مثلث‌های $ACA_۱, ABA_۱$ باشند، داریم:

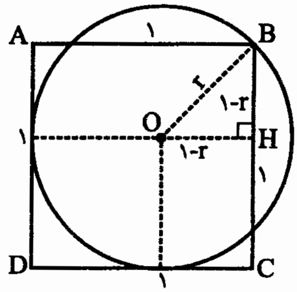
$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABA_۱ : \overline{A_۱P} = \overline{A_۱T_۱} = P_۱ - c \\ \text{در مثلث } ACA_۱ : \overline{A_۱P} = \overline{A_۱T_۲} = P_۲ - b \end{cases} \Rightarrow P_۱ - c = P_۲ - b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A_۱C} - \overline{A_۱B} = b - c \\ \text{از طرفی } \overline{A_۱C} + \overline{A_۱B} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A_۱C} = \frac{a + b - c}{۲} \\ \overline{A_۱B} = \frac{a + c - b}{۲} \end{cases}$$

به همین ترتیب: $\begin{cases} \overline{B_۱C} = \frac{b + a - c}{۲} \\ \overline{B_۱A} = \frac{b + c - a}{۲} \end{cases}$ $, \Rightarrow \frac{\overline{A_۱B}}{\overline{A_۱C}} \times \frac{\overline{CB_۱}}{\overline{AB_۱}} \times \frac{\overline{AC_۱}}{\overline{C_۱B}} = ۱$

لذا $CC_۱, BB_۱, AA_۱$ بنا بر قضیه‌ی «سِوا» همرس خواهند بود.

۹۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



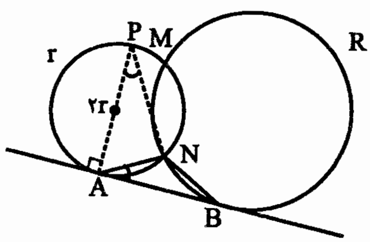
اگر نقطه‌ی H پای عمود وارد از O بر ضلع BC باشد، داریم:

$$\overline{OH} = ۱ - r \quad , \quad \overline{BH} = ۱ - r$$

حال با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH داریم:

$$\overline{OB}^۲ = \overline{OH}^۲ + \overline{BH}^۲ \Rightarrow r^۲ = (۱-r)^۲ + (۱-r)^۲ \Rightarrow r = ۲ \pm \sqrt{۲} \Rightarrow$$
$$r = ۲ - \sqrt{۲}$$

۹۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



عمودی را در A از امتداد AB خارج می‌کنیم تا دایره‌ی به شعاع r را در نقطه‌ی P قطع کند. از N به P رسم می‌کنیم.

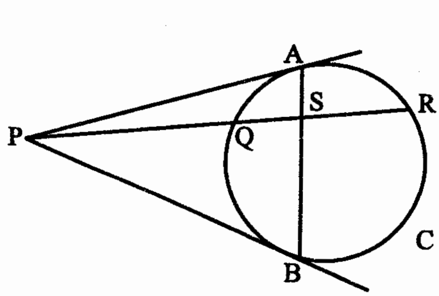
اگر x شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABN باشد، طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های AMN, ANB داریم:

$$\text{در مثلث } ANB: \begin{cases} \overline{AN} = ۲x \sin \widehat{NBA} \\ \overline{BN} = ۲x \sin \widehat{NAB} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \text{در مثلث } APN: \overline{AN} = ۲r \sin \widehat{APN} \\ \widehat{APN} = \widehat{NAB} = \dfrac{\widehat{AN}}{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{در مثلث } APN: \overline{AN} = ۲r \sin \widehat{NAB} \\ \text{و مشابه فوق}: \overline{BN} = ۲R \sin \widehat{NBA} \end{cases}$$

$$\text{بنابراین}: \begin{cases} ۲x \sin \widehat{NBA} = ۲r \sin \widehat{NAB} \\ ۲x \sin \widehat{NAB} = ۲R \sin \widehat{NBA} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \widehat{NAB}}{\sin \widehat{NBA}} = \frac{x}{r} = \frac{R}{x} \Rightarrow x = \sqrt{rR}$$

۹۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



قوت نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی C:

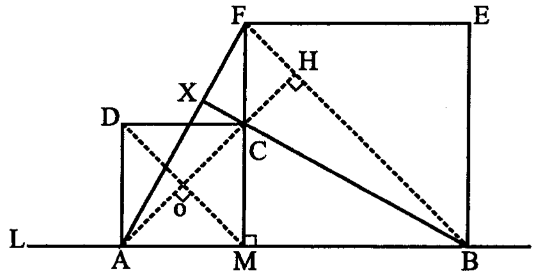
$$\overline{PA}^۲ = \overline{PQ}.\overline{PR} \quad (I)$$

قوت نقطه‌ی S نسبت به دایره‌ی C:

$$\overline{AS}.\overline{SB} = \overline{QS}.\overline{RS} \quad (II)$$

بنا بر رابطه‌ی استوارت در مثلث PAB داریم:

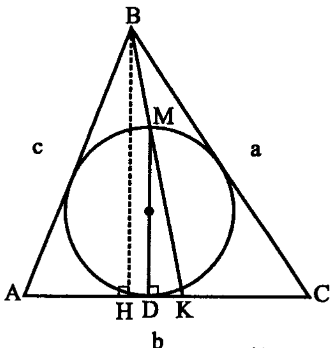
$$\overline{AS}.\overline{PA}^۲ + \overline{BS}.\overline{PA}^۲ = \overline{AB}.(\overline{AS}.\overline{BS} + \overline{PS}^۲) \Rightarrow \overline{PA}^۲ = \overline{AS}.\overline{BS} + \overline{PS}^۲ = \overline{SQ}.\overline{RS} + \overline{PS}^۲ \Rightarrow$$
$$\overline{PA}^۲ = \overline{PS}^۲ + (\overline{PS} - \overline{PQ})(\overline{PR} - \overline{PS}) \Rightarrow$$
$$۲\overline{PA}^۲ = \overline{PS}.(\overline{PQ} + \overline{PR}) \quad (III)$$
$$\text{از}\ I, III) \rightarrow ۲\overline{PQ}.\overline{PR} = \overline{PS}.(\overline{PQ} + \overline{PR}) \Rightarrow \frac{۲}{\overline{PS}} = \frac{۱}{\overline{PQ}} + \frac{۱}{\overline{PR}}$$



۹۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.

قطرهای DM, BF از دو مربع را ترسیم می‌کنیم. واضح است که این دو قطر با یک‌دیگر موازی هستند. لذا اگر امتداد قطر AC از مربع کوچک‌تر قطر BF از مربع بزرگ‌تر را در H قطع کند، از آن‌جا که AC بر DM عمود است، پس AH نیز بر BF عمود است.

لذا با دقت به مثلث ABF، FM, AH ارتفاعات مثلث و C محل تلاقی آن‌ها، مرکز ارتفاعیه این مثلث می‌باشد. لذا BX نیز ارتفاع دیگر این مثلث بوده و $\widehat{AXB} = ۹۰^\circ$. پس X روی دوایر محیطی هر دو مربع واقع است.



۹۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

اگر طول BH را h_b فرض کنیم:

$$BKH \text{ در مثلث}: (MD \| BH) \Rightarrow \frac{\overline{KD}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{BH}} = \frac{۲r}{h_b} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{KD}+\overline{DH}}{\overline{KD}} = \frac{h_b}{۲r} = \frac{\frac{۲s}{b}}{\frac{۲s}{P}} = \frac{P}{b} \Rightarrow ۱ + \frac{\overline{DH}}{\overline{KD}} = \frac{P}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{KD}} = \frac{P-b}{b} \Rightarrow \overline{DK} = \frac{b}{P-b}\overline{DH} \Rightarrow \overline{DK} = \frac{b}{P-b}(\overline{AD} - \overline{AH}) = \frac{b}{P-b}[(P-a) - c\cos\hat{A}]$$

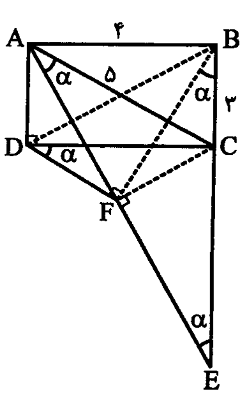
بنا بر قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}$$

$$\text{لذا}: \overline{DK} = \frac{b}{P-b}[\frac{b+c-a}{۲} - \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲b}] = \frac{۲b}{۲+c-b} \times \frac{b^۲+bc-ab-b^۲-c^۲+a^۲}{۲b}$$

$$\overline{DK} = \frac{۱}{a+c-b} \times [(a-c)(a+c) - b(a-c)] = \frac{(a-c)(a+c-b)}{a+c-b} = a-c \Rightarrow \overline{DK} = a-c$$

$$\overline{AK} = \overline{AD} + \overline{DK} \Rightarrow \overline{AK} = P - a + a - c \Rightarrow \overline{AK} = P - c$$



۹۶) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

روشن است که مثلث ACE متساوی‌الساقین است، لذا $\overline{AF} = \overline{EF}, \widehat{CAE} = \widehat{AEC} = \alpha$.

$$\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = ۹۰^\circ \Rightarrow ACFD : \text{محاطی است}$$

پس:

$$\widehat{CDF} = \widehat{CAE} = \alpha$$

از طرفی از آن‌جا که در مثلث قائم‌الزاویه ABE ، BF میانه‌ی وارد بر وتر AE است، لذا مثلث BEF متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$\widehat{AEC} = \widehat{EBF} = \alpha$$

بنابراین:

$$\widehat{AEC} = \widehat{CAE} = \widehat{CDF} = \widehat{EBF} = \alpha$$

با توجه به برابری این چهار زاویه، چهارضلعی $BDFC$ نیز محاطی خواهد بود و در نتیجه:

$$\widehat{BFD} = \widehat{BCD} = ۹۰^\circ$$

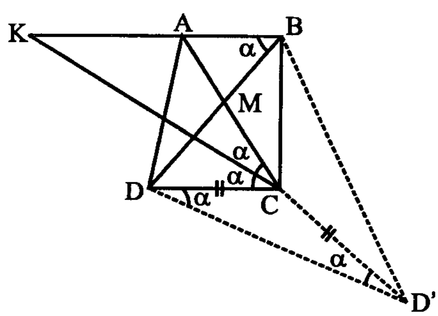
پس مثلث BFD قائم‌الزاویه خواهد بود.

$$ABE \text{در مثلث}: \begin{cases} \overline{AB} = ۴ \\ \overline{BE} = ۳ + ۵ = ۸ \end{cases} \Rightarrow \overline{AE}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BE}^۲ \Rightarrow$$

$$\overline{AE} = \sqrt{۸۰} \Rightarrow \overline{BF} = \frac{\overline{AE}}{۲} = \frac{\sqrt{۸۰}}{۲} \Rightarrow \overline{BF} = ۲\sqrt{۵}$$

$$BFD \text{در مثلث}: \overline{BD}^۲ = \overline{BF}^۲ + \overline{DF}^۲ \Rightarrow \overline{DF}^۲ = \overline{BD}^۲ - \overline{BF}^۲ = ۲۵ - ۲۰ = ۵ \Rightarrow \overline{BF} = \sqrt{۵}$$

۹۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



بنا بر فرض داریم:

$$\overline{MA} \times (\overline{MC} + \overline{CD}) = \overline{MB} \times \overline{MD}$$

حال قطر AC را از طرف C به اندازه‌ی ضلع CD امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D' به‌دست آید. $\overline{CD} = \overline{CD'}$.

لذا مثلث CDD' متساوی‌الساقین بوده و

$$\widehat{ACK} = \widehat{DCK} = \widehat{CDD'} = \widehat{CD'D} = \alpha$$

از طرفی: $\overline{MC} + \overline{CD} = \overline{MC} + \overline{CD'} = \overline{MD'}$ پس:

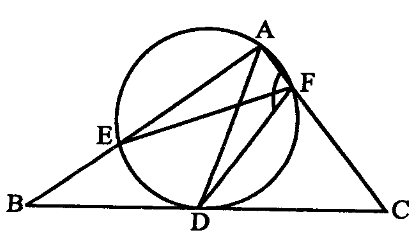
$$\overline{MA}.\overline{MD'} = \overline{MB}.\overline{MD}$$

پس چهارضلعی $ABD'D$ محاطی بوده و در نتیجه:

$$\widehat{ABD} = \widehat{CD'D} = \alpha$$

حال با دقت به چهارضلعی $KBCD$ ، $\widehat{KBD} = \widehat{KCD} = \alpha$ و لذا این چهارضلعی محاطی است.

۹۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



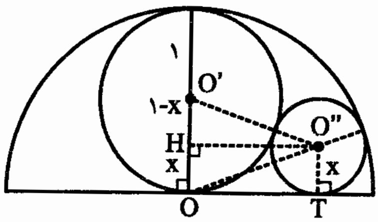
$$\widehat{ADC} = ۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = ۱۰۰ \Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{ADB} = \frac{\widehat{AD}}{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow$$

$$\widehat{DAE} = \frac{\widehat{AFD}}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow ABD \text{در مثلث}: \widehat{ABC} = ۸۰ - ۵۰ \Rightarrow$$

$$\widehat{ABC} = ۳۰^\circ$$

۹۹) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

اگر شعاع دایره‌ی کوچک را x فرض کنیم، با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه $OO''T$:



$$\begin{cases} \overline{OO''} = ۲ - x \\ \overline{O''T} = x \end{cases} \Rightarrow \overline{OT}^۲ = \overline{OO''}^۲ - \overline{O''T}^۲ = (۲-x)^۲ - x^۲ \Rightarrow \overline{O''H}^۲ = \overline{OT}^۲ = ۴(۱-x)$$

از طرفی $\overline{OH} = x, \overline{O'H} = ۱ - x, \overline{O'O''} = ۱ + x$.

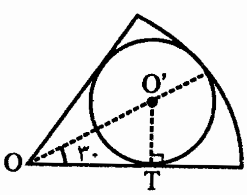
پس بنا بر رابطه‌ی استوارت در مثلث $OO'O''$:

$$\overline{OH}.\overline{O'O''}^۲ + \overline{O'H}.\overline{OO''}^۲ = \overline{OO'}.(\overline{O''H}^۲ + \overline{OH}.\overline{O'H})$$
$$\Rightarrow x(۱+x)^۲ + (۱-x)(۲-x)^۲ = ۱ \times [۴(۱-x) + x(۱-x)] \Rightarrow x^۳ + ۲x^۲ + x - x^۳ + ۴x^۲ - ۴x + x^۲ - ۴x + ۴$$
$$= ۴ - ۳x - x^۲$$
$$۸x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

۱۰۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.

فرض می‌کنیم R شعاع قطاع و r نیز شعاع دایره‌ی کوچک باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه $OO'T$ داریم:



$$\begin{cases} \overline{OO'} = R - r \\ \overline{O'T} = r \end{cases} \Rightarrow \sin ۳۰^\circ = \frac{\overline{O'T}}{\overline{OO'}} \Rightarrow R - r = ۲r \rightarrow R = ۳r$$

$$\frac{S_{\text{دایره}}}{S_{\text{قطاع}}} = \frac{\pi r^۲}{\frac{۱}{٦}\pi R^۲} = ٦(\frac{r}{R})^۲ = ٦(\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{٦}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

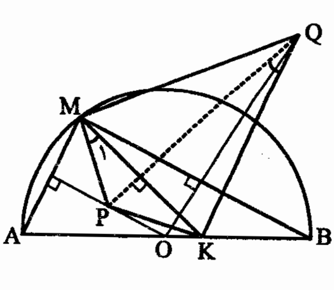
۱۰۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

$$\begin{cases} \hat{A} = \dfrac{\widehat{ZW} + \widehat{WX} + \widehat{XY} - \widehat{YZ}}{۲} \\ \hat{C} = \dfrac{\widehat{XY} + \widehat{YZ} + \widehat{ZW} - \widehat{WX}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \widehat{ZW} + \widehat{XY} \qquad (۱)$$

$$\widehat{ZPW} = ۹۰ = \frac{\widehat{ZW} + \widehat{XY}}{۲} \Rightarrow \widehat{ZW} + \widehat{XY} = ۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$

از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ خواهیم داشت که: $\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ محاطی خواهد بود.

۱۰۲) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



مثلث‌های QMK, PMK متساوی‌الساقین هستند (زیرا Q, P روی عمودمنصف MK قرار دارند). پس:

$$\overline{QM} = \overline{QK} \quad , \quad \overline{PM} = \overline{PK}$$

پس:

$$\overline{QM} + \overline{PK} = \overline{QK} + \overline{PM}$$

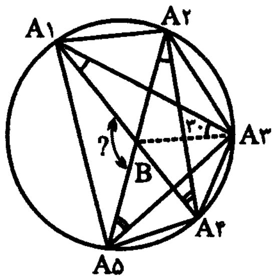
و در نتیجه چهارضلعی $PMQK$ محیطی خواهد بود.

از طرفی می‌دانیم Q,P مراکز دوایر محیطی مثلث‌های BMK, AMK هستند، پس:

$$\begin{cases} \text{در مثلث } AMK: \hat{M}_1 = 90 - \hat{A} = \hat{B} \\ \text{در مثلث } BMK: \widehat{MQK} = 2\hat{B} \Rightarrow \widehat{KQP} = \dfrac{\widehat{KQM}}{2} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{M}_1 = \widehat{KQP}$$

بنابراین چهارضلعی $PMQK$ محاطی خواهد بود.

۱۰۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



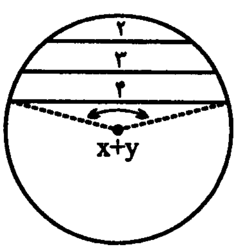
$$\begin{cases} \text{با توجه به شکل}: A_4\widehat{A_2}A_5 = A_4\widehat{A_1}A_5 = \dfrac{\overset{\frown}{A_4A_5}}{2} \\ \text{بنا بر فرض}: A_4\widehat{A_2}A_5 = A_4\widehat{A_1}A_3 \end{cases} \Rightarrow A_4\widehat{A_1}A_3 = A_4\widehat{A_1}A_5$$

$$\begin{cases} \text{با توجه به شکل}: A_2\widehat{A_4}A_1 = A_1\widehat{A_5}A_2 = \dfrac{\overset{\frown}{A_1A_2}}{2} \\ \text{بنا بر فرض}: A_2\widehat{A_4}A_1 = A_2\widehat{A_5}A_3 \end{cases} \Rightarrow A_1\widehat{A_5}A_2 = A_2\widehat{A_5}A_3$$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که B محل تلاقی نیمسازهای داخلی در مثلث $A_1A_3A_5$ بوده و به عبارت دیگر A_3B نیمساز داخلی زاویه‌ی $A_1\widehat{A_3}A_5$ می‌باشد، پس:

$$A_1\widehat{B}A_5 = 90 + \frac{A_1\widehat{A_3}A_5}{2} = 90 + 30 = 120^\circ$$

۱۰۴) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



$$\begin{cases} 4 = 2R\sin(\frac{x+y}{2}) \\ 3 = 2R\sin\frac{y}{2} \\ 2 = 2R\sin\frac{x}{2} \end{cases} \qquad \text{اگر}: \begin{cases} \frac{x}{2} = \alpha \\ \frac{y}{2} = \beta \end{cases}$$

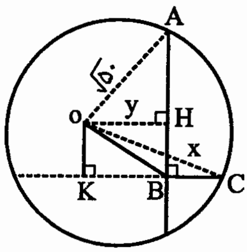
$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 2R\sin(\alpha+\beta) \\ 3 = 2R\sin\beta \\ 2 = 2R\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{1}{R} \quad , \quad \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{R^2-1}}{R} \\ \sin\beta = \dfrac{3}{2R} \quad , \quad \cos\beta = \dfrac{\sqrt{4R^2-9}}{2R} \end{cases}$$

$$\frac{2}{R} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \Rightarrow \frac{2}{R} = \frac{\sqrt{4R^2-9}}{2R^2} + \frac{3\sqrt{R^2-1}}{2R^2} \Rightarrow 15R^4 - 64R^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۸}\\ \cos\frac{x}{۲}=\frac{۷}{۸}\end{cases}\Rightarrow \cos x=۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}-۱=\frac{۹۸}{۶۴}-۱=\frac{۳۴}{۶۴}\Rightarrow \cos x=\frac{۱۷}{۳۲}$$

۱۰۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

اگر طول $\overline{BH}$ ، فرض شود و فاصله‌ی O از AB، y فرض شود:



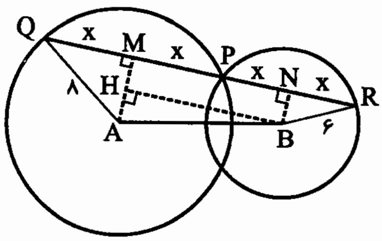
$$\begin{cases}\overline{AH}=۶-x\\ \overline{KC}=y+۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{در مثلث } OHA: y^{۲}+(۶-x)^{۲}=۵۰\\ \text{در مثلث } OKC: x^{۲}+(y+۲)^{۲}=۵۰\end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات بالا خواهیم داشت: $x=۱$ و $y=۵$، بنابراین:

$$\overline{OB}=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶}$$

۱۰۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.

اوساط وترهای PR,PQ را به ترتیب N,M می‌نامیم. اگر طول $\overline{PQ}$ ، $۲x$ فرض شود، روشن است که:



$$\overline{QM}=\overline{MP}=\overline{PN}=\overline{NR}=x$$

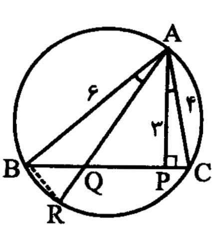
$$\begin{cases}\text{در مثلث } AMQ: \overline{AQ}^{۲}=\overline{QM}^{۲}+\overline{AM}^{۲}\\ \text{در مثلث } BNR: \overline{BR}^{۲}=\overline{RN}^{۲}+\overline{BN}^{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{AM}^{۲}=۶۴-x^{۲}\\ \overline{BN}^{۲}=۳۶-x^{۲}\end{cases}$$

$$\text{در مثلث } AHB: \overline{BH}^{۲}=\overline{AB}^{۲}+\overline{AH}^{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}=۱۴۴-(\overline{AM}-\overline{BN})^{۲}\rightarrow \text{پس از حل}: x^{۲}=۳۲.۵$$
$$\Rightarrow \overline{PQ}^{۲}=۴x^{۲}\Rightarrow \overline{PQ}^{۲}=۱۳۰$$

۱۰۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.

چون فواصل C,A از مرکز دایره‌ها به یک اندازه است. لذا قوت این دو نقطه نسبت به دایره‌ی کوچک با هم برابر است. بنابراین:

$$\overline{AU}.\overline{AV}=\overline{CX}.\overline{CY}\Rightarrow ۲(۲+۱۰)=۳(۳+\overline{XY})\rightarrow ۳+\overline{XY}=۸\Rightarrow \overline{XY}=۵$$

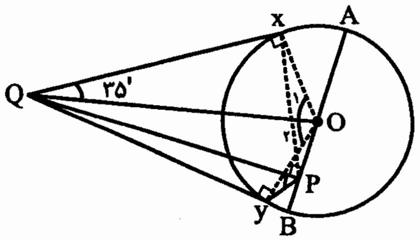


۱۰۸) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

با توجه به دو مثلث APC و ABR داریم:

$$\begin{cases}\widehat{BAC}=\widehat{BAR}\\ \widehat{ARB}=\widehat{ACB}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{cases}\Rightarrow \triangle APC\sim\triangle ARB\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AR}}{\overline{AC}}\Rightarrow\frac{۶}{۳}=\frac{\overline{AR}}{۴}\Rightarrow\overline{AR}=۸$$

۱۰۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



روشن است که $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ و با توجه به مثلث قائم‌الزاویه OXQ:

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = ۵۵^\circ$$

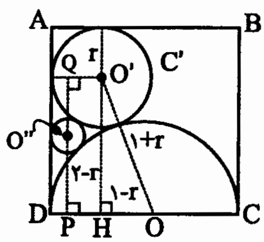
در چهارضلعی $OPYQ$ داریم:

$$\widehat{OPQ} = \widehat{OYQ} = ۹۰^\circ$$

پس $OPYQ$ محاطی خواهد بود، لذا:

$$\widehat{OPY} = \hat{O}_۲ = ۵۵^\circ$$

۱۱۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



در ابتدا شعاع دایره‌ی C را محاسبه می‌کنیم. روشن است که شعاع نیم‌دایره ۱ است. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$ داریم:

$$\overline{OO'} = ۱ + r \quad ; \quad \overline{O'H} = ۲ - r \quad , \quad \overline{OH} = ۱ - r$$

$$\overline{OO'}^۲ = \overline{O'H}^۲ + \overline{OH}^۲ \Rightarrow (۱ + r)^۲ = (۱ - r)^۲ + (۲ - r)^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ - ۸r + ۴ = ۰ \Rightarrow r = ۴ - ۲\sqrt{۳} \quad (\text{شعاع دایره‌ی } C \text{ است } r)$$

اگر مرکز دایره‌ی کوچک O'' و شعاع آن x فرض شود، از آن‌جا که طول $O''P$ برابر مماس مشترک نیم‌دایره و دایره‌ی کوچک است، لذا:

$$\overline{PO''} = ۲\sqrt{۱ \times x} = ۲\sqrt{x}$$

هم‌چنین $O''Q$ نیز مماس مشترک دو دایره‌ی C و دایره‌ی کوچک می‌باشد، لذا:

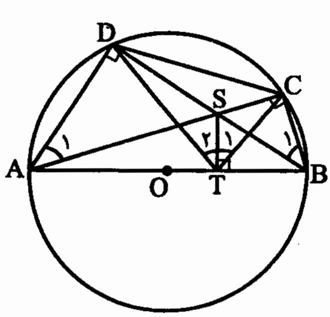
$$\overline{QO''} = ۲\sqrt{(۴ - ۲\sqrt{۳})x} = ۲\sqrt{(\sqrt{۳} - ۱)^۲} = ۲(\sqrt{۳} - ۱)\sqrt{x}$$

بدیهی است که:

$$\overline{PQ} = \overline{O''P} + \overline{O''Q} = \overline{AD} - r = ۲ - (۴ - ۲\sqrt{۳})$$

$$\overline{PQ} = ۲(\sqrt{۳} - ۱)\sqrt{x} + ۲\sqrt{x} = ۲\sqrt{۳} - ۲ \Rightarrow ۲\sqrt{۳}\sqrt{x} = ۲(\sqrt{۳} - ۱) \Rightarrow x = \frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۱۱) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



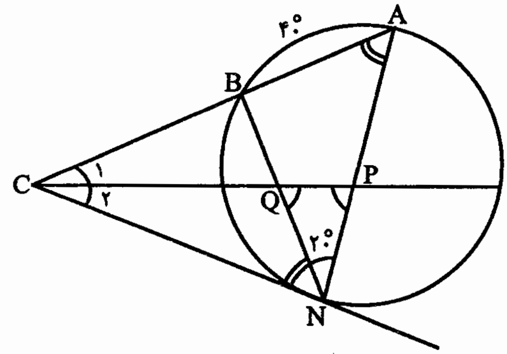
در چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{۲} = ۹۰^\circ$$

روشن است که چهارضلعی‌های $ADST, BCST$ محاطی هستند، پس:

$$\begin{cases} \hat{T}_۱ = \hat{B}_۱ : \text{در چهارضلعی } BCST \\ \hat{T}_۲ = \hat{A}_۱ : \text{در چهارضلعی } ADST \end{cases}$$

از طرفی در چهارضلعی محاطی $ABCD$ داریم: $\hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = \frac{\widehat{DC}}{۲}$ و در نتیجه $\hat{T}_۱ = \hat{T}_۲$ و به عبارت دیگر ST نیمساز زاویه‌ی DTC است.



۱۱۲) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

با توجه به شکل از آن‌جا که $\widehat{AB}=$ ۴۰° پس:

$$\widehat{ANB}=\frac{\widehat{AB}}{۲}=\frac{۴۰}{۲}=۲۰^\circ$$

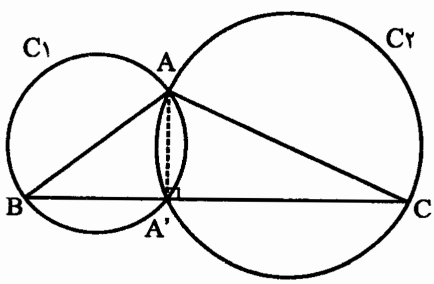
از طرفی:

$$\hat{A}=\widehat{BNC}=\frac{\widehat{BN}}{۲}$$

$$\begin{cases} \text{در مثلث } APC : \widehat{CPN}=\hat{A}+\hat{C}_۱ \\ \text{در مثلث } CQN : \widehat{PQN}=\widehat{BNC}+\hat{C}_۲ \\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲ \end{cases} \Rightarrow \widehat{CPN}=\widehat{PQN}$$

لذا مثلث PQN متساوی‌الساقین بوده و :

$$\widehat{CPN}=\widehat{PQN}=۸۰^\circ$$

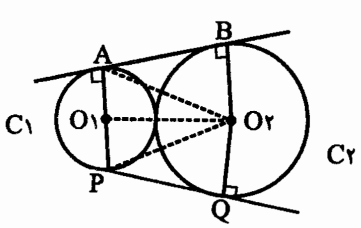


۱۱۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

$$\begin{cases} \text{در دایره‌ی } C_۱ : \widehat{AA'B}=\frac{\widehat{AB}}{۲}=۹۰^\circ \\ \text{در دایره‌ی } C_۲ : \widehat{AA'C}=\frac{\widehat{AC}}{۲}=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AA'B}+\widehat{AA'C}=۱۸۰$$

بنابراین نقاط C, A', B روی یک امتداد قرار دارند. پس:

$$\frac{S_{AA'B}}{S_{AA'C}}=\frac{\frac{۱}{۲}\overline{AA'}\times\overline{BA'}}{\frac{۱}{۲}\overline{AA'}\times\overline{CA'}}=\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}}$$



۱۱۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABO_۲ = \overline{AO_۲}^۲=\overline{AB}^۲+\overline{BO_۲}^۲ \\ \overline{AB}=۲\sqrt{rR} \\ \overline{BO_۲}=R \end{cases} \Rightarrow \overline{AO_۲}^۲=(۲\sqrt{rR})^۲+R^۲ \Rightarrow \overline{AO_۲}^۲=R^۲+۴rR$$

از طرفی می‌دانیم که: $\overline{O_۱O_۲}=r+R$, $\overline{AP}=۲r$.

حال رابطه‌ی میانه‌ها را برای مثلث $APO_۲$ به کار می‌بریم:

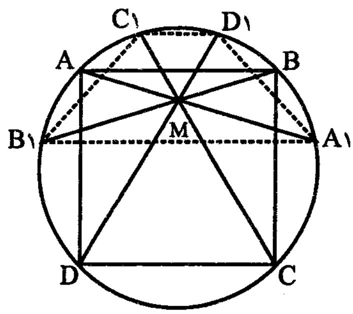
$$۲\overline{O_۱O_۲}^۲ = \overline{AO_۲}^۲ + \overline{PO_۲}^۲ - \frac{\overline{AP}^۲}{۲} \Rightarrow ۲(r+R)^۲ = (R^۲ + ۴rR) + \overline{PO_۲}^۲ - \frac{(۲r)^۲}{۲} \Rightarrow \overline{PO_۲}^۲ = R^۲ + ۴r^۲$$

حال بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه $PQO_۲$ داریم:

$$\overline{PQ}^۲ = \overline{PO_۲}^۲ - \overline{QO_۲}^۲ \Rightarrow \overline{PQ}^۲ = R^۲ + ۴r^۲ - R^۲ = ۴r^۲ \Rightarrow \overline{PQ} = ۲r$$

۱۱۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

اگر طول ضلع مربع a فرض شود:



$$\begin{cases} \triangle A_۱B_۱M \sim ABM \Rightarrow \dfrac{\overline{A_۱B_۱}}{a} = \dfrac{\overline{B_۱M}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{A_۱M}}{\overline{BM}} \\ \triangle C_۱D_۱M \sim CDM \Rightarrow \dfrac{\overline{C_۱D_۱}}{a} = \dfrac{\overline{C_۱M}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{D_۱M}}{\overline{DM}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(\frac{\overline{A_۱B_۱}}{a})^۲(\frac{\overline{C_۱D_۱}}{a})^۲ = \frac{\overline{A_۱M}.\overline{B_۱M}.\overline{C_۱M}.\overline{D_۱M}}{\overline{AM}.\overline{BM}.\overline{CM}.\overline{DM}} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \triangle B_۱C_۱M \sim \triangle BCM \Rightarrow \dfrac{\overline{B_۱C_۱}}{a} = \dfrac{\overline{B_۱M}}{\overline{CM}} = \dfrac{\overline{C_۱M}}{\overline{BM}} \\ \triangle A_۱D_۱M \sim \triangle ADM \Rightarrow \dfrac{\overline{A_۱D_۱}}{a} = \dfrac{\overline{A_۱M}}{\overline{DM}} = \dfrac{\overline{D_۱M}}{\overline{AM}} \end{cases} \Rightarrow$$

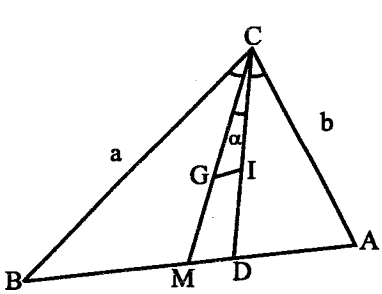
$$(\frac{\overline{B_۱C_۱}}{a})^۲(\frac{\overline{A_۱D_۱}}{a})^۲ = \frac{\overline{A_۱M}.\overline{B_۱M}.\overline{C_۱M}.\overline{D_۱M}}{\overline{AM}.\overline{BM}.\overline{CM}.\overline{DM}} \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت که:

$$\overline{A_۱B}.\overline{C_۱D_۱} = \overline{B_۱C_۱}.\overline{A_۱D_۱} \Rightarrow$$
$$\overline{A_۱B_۱}.(۲\overline{A_۱D_۱}) = ۴ \times \overline{A_۱D_۱} \Rightarrow \overline{A_۱B_۱} = ۲$$

۱۱۶) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

طبق رابطه‌ی طولی در نیمسازها:



$$\overline{AD} = \frac{bc}{a+b}$$

در مثلث ADC: $\dfrac{\overline{CI}}{\overline{ID}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \dfrac{a+b}{c} \Rightarrow$

$$\frac{\overline{CI}}{\overline{CD}} = \frac{a+b}{a+b+c} \Rightarrow \frac{\overline{CI}}{\overline{CD}} = \frac{a+b}{۲P}$$

از طرفی G مرکز ثقل مثلث است و $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{CM}} = \dfrac{۲}{۳}$

$$\frac{S_{CIG}}{S_{CMD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\overline{CI}.\overline{CG}\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\overline{CD}.\overline{CM}\sin\alpha}=(\frac{\overline{CI}}{\overline{CD}})(\frac{\overline{CG}}{\overline{CM}})=\frac{a+b}{۳P}\Rightarrow\frac{S_{CIG}}{S_{CMD}}=\frac{a+b}{۳P}\qquad(۱)$$

$$\overline{DM}=\overline{AM}-\overline{AD}=\frac{c}{۲}-\frac{bc}{a+b}\Rightarrow\frac{c(a-b)}{۲(a+b)}=\overline{DM}$$

$$\frac{S_{CMD}}{S_{ABC}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{c(a-b)}{۲(a+b)}}{c}\Rightarrow\frac{S_{CMD}}{S_{ABC}}=\frac{|a-b|}{۲(a+b)}\qquad(۲)$$

با ضرب طرفین روابط (۱) و (۲):

$$\frac{S_{CIG}}{S_{ABC}}=\frac{|a-b|}{۶P}\Rightarrow S_{CIG}=\frac{|a-b|}{۶}(\frac{S_{ABC}}{P})\Rightarrow S_{CIG}=\frac{|a-b|}{۶}r$$

۱۱۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

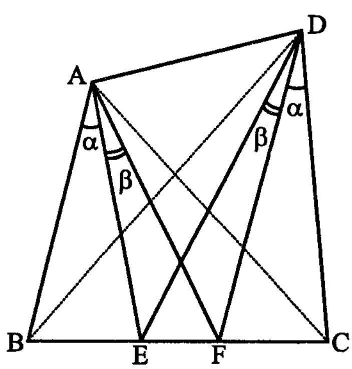
با دقت به شکل مسئله‌ی قبل، اگر a,c,b به ترتیب جملات متوالی یک تصاعد حسابی باشند، داریم:

$$۲c=a+b$$

با توجه به آن‌چه که در مسئله قبل محاسبه شد:

$$\begin{cases}\frac{\overline{CI}}{\overline{ID}}=\frac{a+b}{c}=\frac{۲c}{c}=۲\\ \text{از طرفی}:\ \frac{\overline{CG}}{\overline{GM}}=\frac{۲}{۱}=۲\end{cases}\Rightarrow \text{طبق قضیه‌ی تالس}:\ GI||AB$$

۱۱۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



فرض می‌کنیم:

$$\widehat{BAE}=\widehat{CDF}=\alpha \text{ و } \widehat{EAF}=\widehat{FDE}=\beta$$

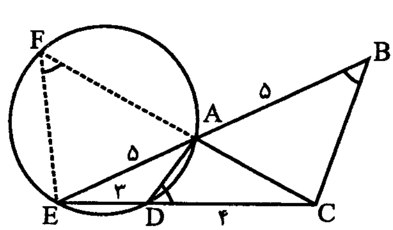
پس واضح است که چهارضلعی $ADFE$ محاطی است. بنابراین:

$$\widehat{EAD}=\widehat{CFD}\Rightarrow\hat{A}-\alpha=۱۸۰^\circ-\hat{C}-\alpha\Rightarrow$$
$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

پس چهارضلعی $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی خواهد بود، لذا با ترسیم اقطار آن، بدیهی است که:

$$\widehat{BAC}=\widehat{BDC}\Rightarrow\alpha+\beta+\widehat{FAC}=\alpha+\beta+\widehat{EDB}\Rightarrow\widehat{EDB}=\widehat{FAC}$$

۱۱۹) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



دایره‌ی محیطی مثلث ADE را ترسیم می کنیم و فرض می‌کنیم امتداد AC این دایره را در نقطه‌ی F قطع کند. از آن‌جا که چهارضلعی $ADEF$ محاطی است، لذا: $\widehat{ADC}=\widehat{AFE}$

از طرفی بنا بر فرض مسئله: $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

از دو تساوی اخیر نتیجه خواهیم گرفت که: $\widehat{ABC}=\widehat{AFE}$ و لذا چهارضلعی $BCEF$ نیز محاطی خواهد بود و در نتیجه:

$$\overline{AE}.\overline{AB} = \overline{AC}.\overline{AF} \qquad (۱)$$

بنا بر قوت نقطه‌ی C نسبت به دایره‌ی محیطی مثلث ADE:

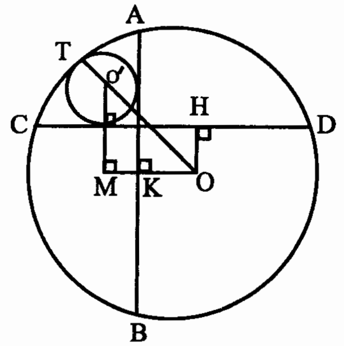
$$\overline{CD}.\overline{CE} = \overline{CA}.\overline{CF} \Rightarrow \overline{CD}.\overline{CE} = \overline{AC}.(\overline{AC}+\overline{AF}) \Rightarrow \overline{CD}.\overline{CE} = \overline{AC}^۲ + \overline{AC}.\overline{AF} \quad (۲)$$

از دو رابطه‌ی ۱ و ۲ $\Rightarrow \overline{CD}.\overline{CE} = \overline{AC}^۲ + \overline{AE}.\overline{AB} \Rightarrow \overline{AC}^۲ = \overline{CD}.\overline{CE} - \overline{AB}.\overline{AE}$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\overline{AC}^۲ = ۴ \times (۴+۳) - ۵ \times ۵ = ۲۸ - ۲۵ = ۳ \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{۳}$$

۱۲۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



محل تماس دو دایره را T و مرکز دایره‌ی کوچک‌تر را O' می‌نامیم. چون دو دایره بر هم مماس‌اند بنابراین مراکز آن‌ها یعنی O و O'، و محل تماس آن‌ها یعنی T هم‌خط‌اند. حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{OO'M}$ داریم:

$$OO'^۲ = OM^۲ + O'M^۲ = (OK+KM)^۲ + (O'L+LM)^۲ = (۳+r)^۲ + (r+OH)^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۲۰$$

بنابراین $OO' = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$، و نهایتاً

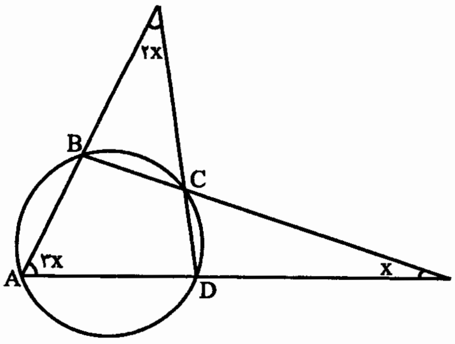
$$R = OO' + O'T = ۲\sqrt{۵} + ۱$$

۱۲۱) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

از آن‌جا که BC قطر است، لذا $\angle BMC = ۹۰^\circ$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{ABM}$ و $\overset{\triangle}{DMC}$ زوایای مساوی دارند (چرا؟) و لذا با هم متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MD}} \Rightarrow \overline{AM} \times \overline{MD} = \overline{AB} \times \overline{DC} = ۴ \times ۷ = ۲۸$$

۱۲۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.



می‌دانیم که $\widehat{ABF} = ۱۸۰ - ۴x$ و نیز $\widehat{ADE} = ۱۸۰ - ۵x$. با توجه به این‌که $ABCD$ محاطی است، پس: $\widehat{ABF} + \widehat{ADE} = ۱۸۰^\circ$، در نتیجه $۱۸۰ - ۴x + ۱۸۰ - ۵x = ۱۸۰$ و لذا $x = ۲۰^\circ$

۱۲۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

$$\widehat{HPE} = \widehat{PEF} + \widehat{PFE} = \widehat{AEF} + \widehat{FHA} = ۴۰^\circ$$

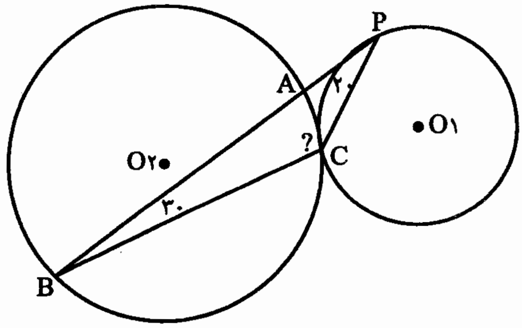
۱۲۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

از تشابه دو مثلث PBA و PAC داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{y}{z} = \frac{z}{۲y}$$

بنابراین $x = \frac{z}{y} = \frac{۲y}{z}$ و در نتیجه $x^۲ = \frac{x}{y} \cdot \frac{۲y}{z} = ۲$ لذا $AC = x = \sqrt{۲}$.

۱۲۵) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



مماس در نقطه‌ی C بر دو دایره را رسم می‌کنیم تا AP را در T قطع کند، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \widehat{TCP} = \widehat{TPC} = ۳۰^\circ \\ \widehat{TCA} = \widehat{ABC} = ۲۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACP} = ۲۰^\circ + ۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{APC} + \widehat{ACP} = ۳۰^\circ + ۵۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۱۲۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

$$\begin{cases} \angle A + \angle C = \frac{۱}{۲}(\widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{CB} + \widehat{CD}) \\ \angle B + \angle D = \frac{۱}{۲}(\widehat{BA} + \widehat{BC} + \widehat{DC} + \widehat{DA}) \end{cases} \Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D$$

از سوی دیگر داریم $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۳۶۰^\circ$. از دو معادله‌ی حاصل به دست می‌آید: $\angle A + \angle C = ۱۸۰^\circ$ که به معنای محاطی بودن چهارضلعی است.

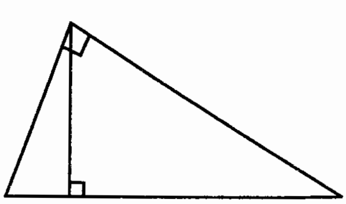
۱۲۷) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

اگر از قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin(\angle ACB)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x} \Rightarrow \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x} = \sqrt{۲}$$

با حل معادله‌ی حاصل $x = ۱۵^\circ$ به‌دست می‌آید.

۱۲۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



شعاع دوایر محاطی مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$ را به ترتیب با r و r' و r'' نمایش می‌دهیم. اکنون از آن‌جا که مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ و نیز مثلث‌های $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه‌اند، می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\frac{r'}{r} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}, \frac{r''}{r} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

با استفاده از روابط به دست آمده داریم:

$$\frac{r'^۲ + r''^۲}{r^۲} = \frac{c^۲ + b^۲}{a^۲} = ۱ \Rightarrow r'^۲ + r''^۲ = r^۲ \Rightarrow r = \sqrt{r'^۲ + r''^۲} = \sqrt{۱۰}$$

۱۲۹) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

می‌توان دید که هر سه مثلث $\overset{\triangle}{AEF}$، $\overset{\triangle}{BGH}$ و $\overset{\triangle}{CKL}$ با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه‌های آن‌ها به ترتیب برابر مقادیر $\frac{p-a}{p}$، $\frac{p-b}{p}$، $\frac{p-c}{p}$ می‌باشند. (p نصف محیط مثلث ABC است.) لذا داریم:

$$\frac{r_a}{r} + \frac{r_b}{r} + \frac{r_c}{r} = \frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = \frac{۳p - ۲p}{p} = ۱$$

و بنابراین:

$$r = r_a + r_b + r_c$$

۱۳۰) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

با توجه به این که زاویه‌های $\angle CDE$ و $\angle CBE$ با هم برابرند، لذا چهارضلعی $BCED$ محاطی است. اکنون با بررسی قوت نقطه‌ی A نسبت به دایره‌ی محاطی این چهارضلعی، خواهیم داشت $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ و در نتیجه $a(a+b) = c(c+d)$.

۱۳۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

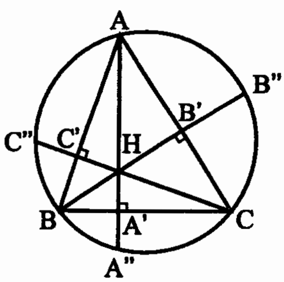
داریم:

$$\angle BHC = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{۲} = \widehat{BC} = \angle BOC$$

لذا چهارضلعی $OHBC$ محاطی است. حالا با استفاده از قضیه‌ی بطلمیوس در این چهارضلعی می‌توان نوشت:

$$OH \cdot BC + OC \cdot BH = OB \cdot CH \Rightarrow ab + x = y \Rightarrow y - x = ab$$

۱۳۲) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



H را محل همرسی ارتفاع‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌گیریم. داریم:

$$\frac{AA''}{AA'} = ۱ + \frac{A'A''}{AA'} = ۱ + \frac{HA'}{AA'} = ۱ + \frac{HA' \cdot BC}{AA' \cdot BC} = ۱ + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$$

مشابهاً به دست می‌آید: $\frac{CC''}{CC'} = ۱ + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$ و $\frac{BB''}{BB'} = ۱ + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$ و بنابراین:

$$\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} = ۳ + \frac{S_{HAC} + S_{HAB} + S_{HBC}}{S_{ABC}} = ۳ + ۱ = ۴$$

۱۳۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

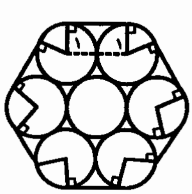
با بررسی قوت نقطه‌ی B نسبت به دایره داریم:

$$MB \cdot BN = AB \cdot BP \Rightarrow ۲(a+۴) = ۳a \Rightarrow a = ۸$$

اکنون از قوت نقطه‌ی C نسبت به دایره استفاده می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$MC \cdot CN = AC \cdot CQ \Rightarrow ۴(a+۲) = ax \Rightarrow ۴ \times ۱۰ = ۸x \Rightarrow x = ۵$$

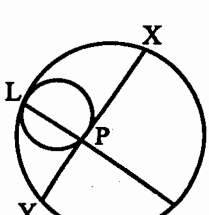
۱۳۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.



همان طور که در شکل می‌بینید این کش متشکل از ۶ پاره‌خط هر یک به طول ۲ واحد و ۶ کمان که روی هم یک دایره به شعاع ۱ واحد می‌سازند، می‌باشد. لذا طول کل کش برابراست با:

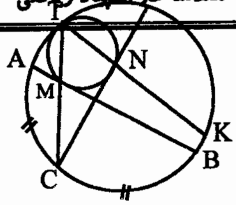
$$۶ \times ۲ + ۲\pi = ۱۲ + ۲\pi$$

۱۳۵) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



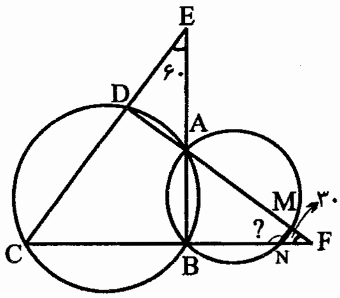
در شکل روبه‌رو اگر P محل تماس XY و دایره‌ی داخلی باشد در این صورت خط LP از وسط کمان XY می‌گذرد. (اثبات به عهده‌ی خواننده)

در نتیجه خط TM از نقطه‌ی C (وسط کمان AB) می‌گذرد. هم‌چنین اگر K وسط کمان DC باشد، TN نیز از K خواهد گذشت. بنابراین:



$$\angle MTN = \frac{\widehat{CK}}{۲} = \frac{\widehat{CD}}{۴} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{BC}}{۴} = \frac{۶۰ + ۳۰}{۴} = ۲۲/۵$$

۱۳۶) گزینه«ج» صحیح است.

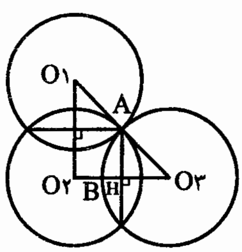


از آن‌جایی که چهارضلعی $ABNM$ محاطی است، لذا $\angle MNB = \angle BAD$. با جمع زدن زوایای دو مثلث ECB و FCD به‌دست می‌آوریم:

$$۲\hat{C} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{D} + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$$

اما $\hat{E} + \hat{F} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$، بنابراین $\hat{C} = ۴۵^\circ$ و از آن‌جا $\angle BAD = ۱۸۰ - ۴۵ = ۱۳۵^\circ$.

۱۳۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.



اولاً طبق قضیه‌ی فیثاغورس

$$O_۲O_۳ = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰$$

بنا بر این دو دایره‌ی $C_۲$ و $C_۳$ در وسط $O_۲O_۳$ بر هم مماس‌اند،
و البته از آن‌جایی که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است،
فاصله‌ی $O_۱$ از وسط $O_۲O_۳$ برابر $\frac{۱۰}{۲} = ۵$ خواهد بود و بنا بر این دایره‌ی $C_۱$ نیز از وسط $O_۲O_۳$ یعنی همان محل تماس $C_۲$ و $C_۳$ می‌گذرد.

قرار دهید $\hat{O}_۲ = \theta$ و $\hat{O}_۳ = \theta'$. در این صورت مساحت ناحیه‌ی مشترک $C_۳$ و $C_۱$ برابراست با:

$$۴ \times (\text{مساحت قطاع } O_۳AB - \text{مساحت مثلث } O_۳AH)$$

$$= ۴ \times (\frac{۵^۲\theta'}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{O_۱O_۳}{۲} \times \frac{O_۱O_۲}{۲}) = ۴ \times (\frac{۵^۲\theta'}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۲} \times \frac{۸}{۲}) = ۵۰\theta' - ۲۴$$

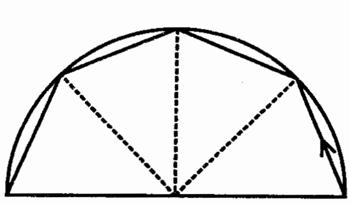
مشابهاً مساحت ناحیه‌ی مشترک $C_۲$ و $C_۱$ برابراست با:

$$۴(\frac{۵^۲\theta}{۲} - \frac{۳ \times ۴}{۲}) = ۵۰\theta - ۲۴$$

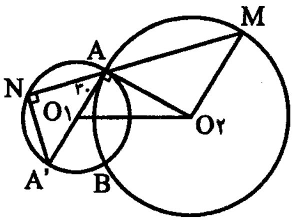
لذا مساحت ناحیه‌ای از $C_۱$ که با $C_۲$ و $C_۳$ تداخل ندارد، برابراست با:

$$\pi \times ۵^۲ - (۵۰\theta - ۲۴ + ۵۰\theta' - ۲۴) = ۲۵\pi - (۵۰(\theta + \theta') - ۴۸) = ۲۵\pi - (۵۰ \times \frac{\pi}{۲} - ۴۸) = ۴۸$$

۱۳۸) گزینه‌ی «د» صحیح است.



صفحه‌ی گذرنده از مرکز کره و عمود بر دایره عظیمه را در نظر می‌گیریم. واضح است که اگر پرتو روی این صفحه باشد همواره روی این صفحه باقی می‌ماند. پس مسئله به یک مسئله مسطحه تبدیل شد و ما روی یک نیم‌دایره که داخل و قطر آن آینه‌ای شده به دنبال نامتناهی جهت تابش هستیم که متناوب باشند، برای این منظور به ازای هر $n \in N$ اگر کمان نیم دایره را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و نقاط تقسیم را متوالیاً به هم وصل کنیم و پرتو را از روی مسیر به‌دست آمده بتابانیم پرتو همواره روی این مسیر حرکت می‌کند و مسیر حرکت آن متناوب می‌شود. در شکل این کار به ازای $n = ۴$ نمایش داده شده است.



۱۳۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

از آن‌جا که $O_1A^2 + O_2A^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = O_1O_2^2$، لذا $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ از طرفی مثلث $A\overset{\triangle}{M}O_2$ متساوی‌الاضلاع است، زیرا

$$AM = O_2A = O_2M = 4$$

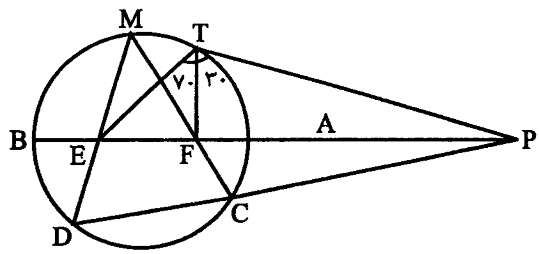
بنابراین $\angle O_2AM 60^\circ$ و لذا

$$\angle NAA' = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

که در آن A' مقابل قطری A روی دایره‌ی C_1 است.

حال در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ANA' داریم: $AN = AA' \cdot \cos 30 = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

و بنابراین $MN = 3\sqrt{3} + 4$.



۱۴۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.

ادعا می‌کنیم چهارضلعی $DEFC$ محاطی است، زیرا

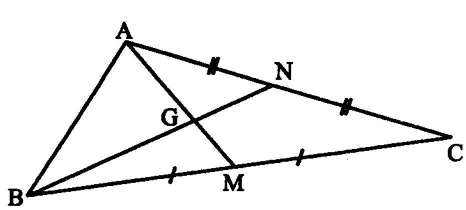
$$\widehat{EDC} + \widehat{EFC} = \frac{\widehat{MC}}{2} + \frac{\widehat{AM} + \widehat{BDC}}{2} = \frac{\widehat{MA} + \widehat{AC} + \widehat{AM} + \widehat{BDC}}{2}$$
$$= \frac{\widehat{BM} + \widehat{AC} + \widehat{AM} + \widehat{BDC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

از محاطی بودن چهارضلعی $DEFC$ نتیجه می‌گیریم $PC \cdot PD = PE \cdot PF$ از طرفی بنابه قوت نقطه‌ی P داریم $PC \cdot PD = PT^2$ و در نتیجه:

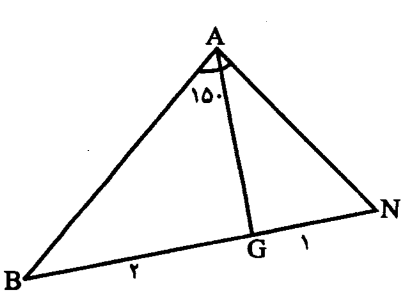
$$PT^2 = PE \cdot PF \Rightarrow \frac{PT}{PE} = \frac{PF}{PT}$$

بنابراین دو مثلث $P\overset{\triangle}{F}T$ و $P\overset{\triangle}{T}E$ به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین با هم متشابه‌اند و بنابراین $\angle PFT = \angle PTE = 100^\circ$. لذا $\angle TPE = 180 - 30 - 100 = 50^\circ$

۱۴۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



به شکل مقابل توجه کنید. می‌خواهیم در چنین مثلثی با $\angle A = 150^\circ$ و $\overline{BN} = 3$، حداقل مقدار میانه‌ی AM را بیابیم. صورت مسئله را کمی تغییر دهیم. به این منظور دقت می‌کنیم که مرکزثقل مثلث میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

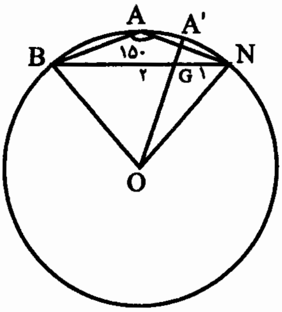


لذا $AM = \frac{3}{2}AG$ و کافی است در شکل مقابل، یعنی مثلثی با زاویه رأس 150° و ضلع مقابل $BN = 3$، حداقل طول پاره‌خط AG را بیابیم، که در آن G نقطه‌ای است که BN را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

دایره‌ی محیطی مثلث ABN را رسم می‌کنیم و مرکز آن را O می‌نامیم.

مثلث OBN متساوی‌الاضلاع است، زیرا $\angle BON = \widehat{BN} = 360 - 2 \times 150 = 60^\circ$ و در ضمن $OB = ON$. بنابراین $OB = ON = BN = 3$.

حال ببینیم A روی کمان $\widehat{BN}$ کجا باشد تا AG حداقل شود.



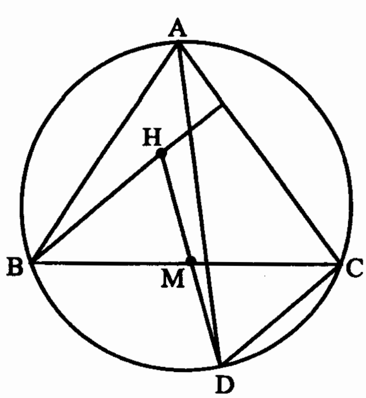
محل تلاقی OG و کمان $\widehat{BN}$ را A' نامیده، ادعا می‌کنیم این نقطه همان نقطه‌ی مورد نظر ما است. زیرا برای هر نقطه مثل A روی کمان BN، از نامساوی مثلث داریم: $OG + GA \geq OA$. که چنان‌چه به جای OA مقدار مساوی آن یعنی $OA' = OG + GA'$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود $GA \geq GA'$. بنابراین حداقل مقدار AG برابراست با $A'G$. نهایتاً می‌رسیم به محاسبه‌ی $A'G$. طبق قضیه‌ی استوارت:

$$BN(OG^2 + BG \cdot GN) = OB^2 \cdot GN + ON^2 \cdot BG$$

$$\Rightarrow 3(OG^2 + 2 \times 1) = 9 \times 1 + 9 \times 2 = 27 \Rightarrow OG = \sqrt{7}$$

و بنابراین $A'G = OA' - OG = 3 - \sqrt{7}$ و در نتیجه حداقل مقدار AM برابر می‌شود با $\frac{3}{2}(3 - \sqrt{7})$.

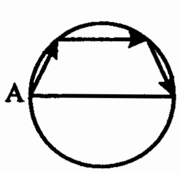
۱۴۲) گزینه‌ی «د» صحیح است.



فرض کنید H و M به ترتیب مرکز ارتفاع مثلث ABC و وسط ضلع BC باشند. طبق فرض مسئله قرینه‌ی H نسبت به M وسط ضلع BC، یعنی نقطه‌ی D بر روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار دارد. در چهارضلعی $BDCH$ قطرها یک‌دیگر را نصف کرده‌اند، بنابراین $BDCH$ متوازی‌الاضلاع است. یعنی $BH \parallel CD$ می‌باشند. از طرفی BH ارتفاع رأس B است، بنابراین بر ضلع AC عمود است و چون $BH \parallel CD$ است، CD نیز بر AC عمود است. بنابراین:

$$\widehat{DAC} = 90 - \widehat{ADC} = 90 - \frac{\widehat{AC}}{2} = 90 - \hat{B}$$

۱۴۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

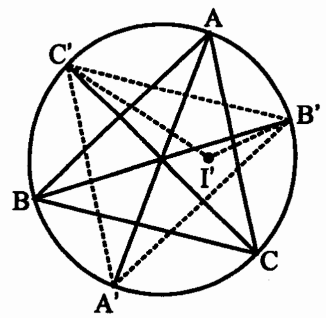


فرض می‌کنیم کمان‌های α° روی دایره جدا شوند، برای این‌که در ۲۶ امین برخورد، به نقطه‌ی A برسیم، زاویه‌ی طی شده باید ضریبی از 360° باشد. در نتیجه:

$$360k = 26\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{360}{26}k \qquad 0 < \alpha < 360 \Rightarrow 1 \leq k \leq 25$$

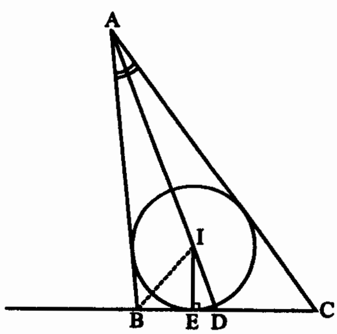
پس ۲۵ راستا وجود دارد.

۱۴۴) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



$$\widehat{B'I'C'} = ۱۸۰ - (\widehat{I'B'C'} + \widehat{I'C'B'})$$
$$= ۱۸۰ - \frac{(\hat{B}' + \hat{C}')}{۲} = ۱۸۰ - \frac{(۱۸۰ - \hat{A}')}{۲} = ۹۰ + \frac{\hat{A}'}{۲}$$
$$= ۹۰ + \frac{\widehat{AA'B'} + \widehat{C'A'A}}{۲}$$
$$= ۹۰ + \frac{\widehat{ABB'} + \widehat{ACC'}}{۲} = ۹۰ + \frac{\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}}{۲} = ۹۰ + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۴}$$

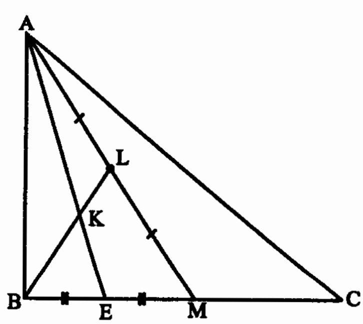
۱۴۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



عمودی که در E بر BC رسم می‌شود، خط AD را در مرکز دایره محاطی قطع می‌کند.

$BE = ED \Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{IDB} = \frac{\hat{B}}{۲}$
$\hat{E} = ۹۰^\circ$
$\widehat{AIB} = \widehat{IBD} + \widehat{IDB} = \hat{B}$
در مثلث AIB : $\widehat{AIB} + \widehat{IBA} + \widehat{BAI} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B + \frac{B}{۲} + A = ۱۸۰^\circ$
$\Rightarrow ۳B + ۲A = ۳۶۰^\circ$
$\Rightarrow ۲A + ۳B = ۳(A + B + C) - (۳B + ۲A) = ۵۴۰^\circ - ۳۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

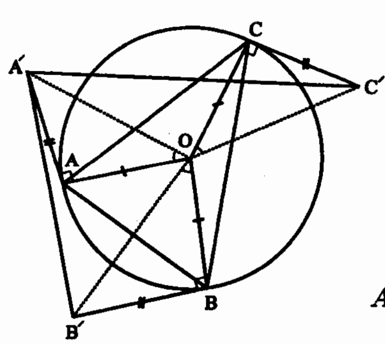
۱۴۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



$$۲(AC - AB) = BC \Rightarrow ۲(b - c) = a \Rightarrow ۲(a + c - b) = a$$
$$\Rightarrow \frac{a + c - b}{۲} = \frac{a}{۴} \Rightarrow P - b = \frac{a}{۴}$$

در نتیجه محل تماس دایره‌ی محاطی با ضلع BC درست وسط BM است.
در مثلث $A\overset{\triangle}{M}B$، AE و BL میانه‌های مثلث هستند. پس $\frac{AK}{AE} = \frac{۲}{۳}$.

۱۴۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.



از نقطه‌ی O، مرکز دایره به رئوس C, B, A وصل می‌کنیم. روشن است که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OCC', OBB', OAA' با یک‌دیگر برابرند، لذا:

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'} \quad , \quad \overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'}$$
$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} \Rightarrow \widehat{AOA'} + \widehat{AOB'} = \widehat{BOB'} + \widehat{AOB'} \Rightarrow \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}$$

مشابهاً خواهیم داشت که: $\widehat{A'OC'} = \widehat{AOC}$

از طرفی داریم:

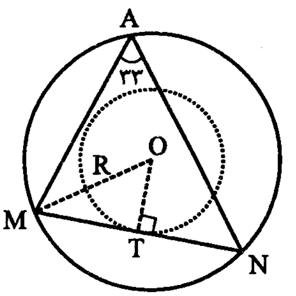
$$\begin{cases} \widehat{AOB} = ۲\widehat{ACB} = ۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A'OB'} = ۸۰^\circ \\ \widehat{AOC} = ۲\widehat{ABC} = ۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A'OC'} = ۸۰^\circ \end{cases}$$

با توجه به این‌که $\overline{OA'} = \overline{OB'} = \overline{OC'}$، پس مثلث‌های $A'OB'$, $A'OC'$ مثلث‌هایی متساوی‌الساقین به زاویه‌های رأس (به ترتیب) ۸۰ درجه و ۱۲۰ درجه خواهند بود. بنابراین:

$$\begin{cases} O\widehat{A'}B' = \dfrac{۱۸۰ - A'\widehat{O}B'}{۲} = \dfrac{۱۸۰ - ۸۰}{۲} = ۵۰^\circ \\ O\widehat{A'}C' = \dfrac{۱۸۰ - A'\widehat{O}C'}{۲} = \dfrac{۱۸۰ - ۱۲۰}{۲} = ۳۰^\circ \end{cases}$$

$$B'\widehat{A'}C' = O\widehat{A'}B' + O\widehat{A'}C' = ۵۰ + ۳۰ = ۸۰^\circ$$

۱۴۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



مثلث AMN همواره محاط در دایره‌ای به شعاع ثابت R است.
طبق قضیه‌ی سینوس‌ها:

$$\frac{\overline{MN}}{\sin \hat{A}} = ۲R \Rightarrow \overline{MN} = ۲R\sin\hat{A} = ۲R\sin ۳۳^\circ$$

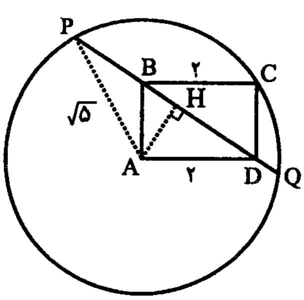
بنابراین طول وتر MN همواره مقداری ثابت است. اگر عمود OT، وارد بر MN را رسم کنیم OT، عمود منصف است و با توجه به مثلث قائم الزاویه‌ی OMT خواهیم داشت:

$$\overline{OT}^۲ = \overline{OM}^۲ - \overline{MT}^۲ \Rightarrow \overline{OT} = \sqrt{R^۲ - \left(\frac{\overline{MN}^۲}{۴}\right)}$$

$$\overline{OT} = \sqrt{R^۲ - R^۲\sin^۲ ۳۳} \Rightarrow \overline{OT} = R\cos ۳۳^\circ$$

پس فاصله مرکز دایره از پاره خط متغیر MN همواره ثابت و برابر با $R\cos ۳۳^\circ$ می باشد. به عبارت دیگر همه وترهای متغیر MN بر دایره‌ای ثابت به مرکز O و شعاع $R\cos ۳۳^\circ$ مماس می‌باشند.

۱۴۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



شعاع دایره برابر با قطر مستطیل است، پس:

$$R = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

عمود AH را از مرکز دایره، بر قطر BD وارد می‌کنیم.

$$ABD \text{ درمثلث}: \overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AH} \times \overline{BD} \Rightarrow ۱ \times ۲ = \sqrt{۵}\overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

حال با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی APH داریم:

$$\overline{PH}^۲ = \overline{AP}^۲ - \overline{AH}^۲ \Rightarrow \left(\frac{\overline{PQ}}{۲}\right)^۲ = \overline{AP}^۲ - \overline{AH}^۲$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PQ}^۲}{۴} = (\sqrt{۵})^۲ - \left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)^۲ = ۵ - \frac{۴}{۵} = \frac{۲۱}{۵} \Rightarrow \overline{PQ}^۲ = \frac{۸۴}{۵} \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{\frac{۸۴}{۵}}$$

راه‌حل دیگر: روشن است که: $\overline{BD} = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$.

اگر طول‌های DQ, PB به‌ترتیب y, x فرض شوند، داریم:

$$D \text{ قوت نقطه‌ی } D \text{ نسبت به دایره}: \overline{PB} \times \overline{QB} = |\overline{BD}^۲ - R^۲| \Rightarrow x(\sqrt{۵} + y) = ۵ - ۱ = ۴$$

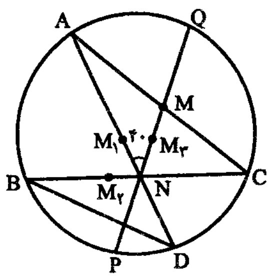
$$B \text{ قوت نقطه‌ی } B \text{ نسبت به دایره}: \overline{DQ} \times \overline{PD} = |\overline{DA}^۲ - R^۲| \Rightarrow y(\sqrt{۵} + x) = ۵ - ۱ = ۴$$

از معادلات فوق مقادیر y, x محاسبه شده و در آخر:

$$\overline{PQ} = x + y + \sqrt{5} = \sqrt{\frac{84}{5}}$$

۱۵۰) پاسخ صحیح گزینه‌ی «ب» می‌باشد.

روشن است که BC, AD, PQ وترهایی از دایره هستند، پس عمودمنصف‌های آن‌ها از نقطه‌ی O مرکز دایره می‌گذرند. لذا:



$$O\widehat{M_3}N = O\widehat{M_4}N = 90^\circ$$

بنابراین چهارضلعی OM_4NM_3 یک چهارضلعی محاطی است. مشابهاً:

$$O\widehat{M_1}N = O\widehat{M_2}N = 90^\circ$$

بنابراین چهارضلعی OM_1M_2N نیز یک چهارضلعی محاطی خواهد بود.

پس پنج نقطه‌ی M_4, M_3, M_2, M_1, O همگی روی یک دایره قرار دارند. پس:

$$M_1\widehat{M_2}M_3 = M_1\widehat{N}M_3 = 40^\circ$$

فصل ۴

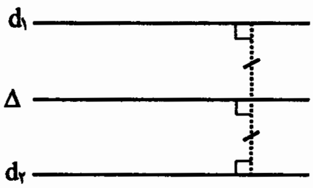
مکان هندسی

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه را گویند که از خاصیتی یکسان تبعیت می‌کنند. لذا برای یافتن یک مکان هندسی، از خاصیت مورد نظر، مکان هندسی حدس زده می‌شود و سپس دو مورد ارزیابی می‌شود: اولاً هر نقطه از مکان هندسی حدس زده شده خاصیت مورد نظر را داشته باشد، ثانیاً هر نقطه‌ای موجود در صفحه، اگر خاصیت مورد نظر را داشته باشد، روی مکان هندسی واقع باشد.

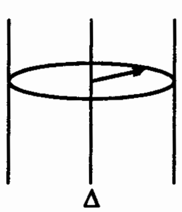
در این راستا، دانستن بعضی از مکان‌های هندسی معروف حائز اهمیت است، که در حل خیلی از مسائل مکان هندسی، به آن‌ها استناد می‌شود:

۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه که دارای فاصله‌ی یکسان و ثابتی از یک نقطه می‌باشند، دایره‌ای است به مرکز آن نقطه و شعاع مقدار ثابت مزبور.

در حالت کلی‌تر مکان هندسی نقاطی از فضا که دارای فاصله‌ی یکسان و ثابتی از یک نقطه می‌باشند، کره‌ای است به مرکز آن نقطه و شعاع مقدار ثابت.



۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه که دارای فاصله‌ی یکسان و ثابتی از یک خط مفروض در صفحه هستند، دو خط به موازات آن خط مفروض بوده و دارای فاصله‌ی آن مقدار ثابت از آن خط مفروض می‌باشند.



در حالت کلی‌تر مکان هندسی نقاطی از فضا که دارای فاصله‌ی یکسان و ثابتی از یک خط مفروض هستند، یک سطح استوانه‌ای است که دایره‌ی مقطع آن، دارای شعاع همان مقدار ثابت است.

۳. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی ثابت در صفحه، مقداری ثابت است، دایره‌ای است به مرکز وسط آن دو نقطه.

۴. مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل مربعات آن از دو نقطه‌ی ثابت در صفحه مقداری ثابت است، دو خط موازی و عمود بر پاره‌خط گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.

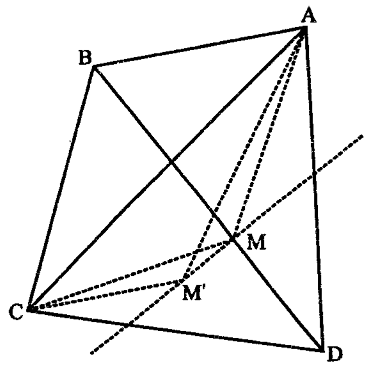
۵. مکان هندسی نقاطی از صفحه که پاره‌خط‌هایی را که یک سر آن، یک نقطه‌ی ثابت در صفحه و سر دیگر آن نقاط موجود روی محیط یک دایره‌ی ثابت در صفحه می‌باشند، به نسبت k تقسیم می‌کنند، دایره‌ای است متجانس با آن دایره، به مرکز تجانس آن نقطه‌ی ثابت و به نسبت تجانس k.

۶. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن از دو نقطه‌ی ثابت در صفحه، مقدار ثابت k می‌باشد، یک بیضی است که آن دو نقطه، کانون‌های آن و مقدار k، ثابت آن بیضی خواهد بود.

۷. مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل فواصل آن از دو نقطه‌ی ثابت در صفحه، مقدار ثابت k می‌باشد، یک هذلولی است که آن دو نقطه، کانون‌های آن ومقدار k، ثابت آن هذلولی خواهد بود.

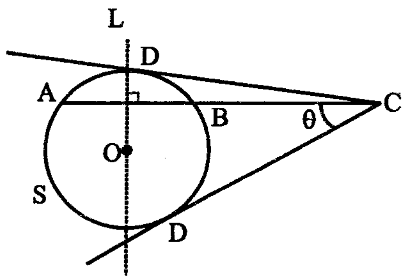
۸. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فواصل آن نقاط آن از یک نقطه‌ی ثابت و یک خط ثابت در آن صفحه برابر می‌باشد، یک سهمی است.

۱) گزینه‌ی «د» صحیح است.



روشن است که اگر M نقطه‌ی وسط قطر BD باشد، با توجه به این‌که CM, AM، به ترتیب میانه‌های مثلث‌های BCD, ABD می‌باشند، لذا چهارضلعی‌های $AMCD, ABCM$ دارای مساحت‌های برابر می‌باشند.
حال اگر از M خطی به موازات قطر AC رسم کنیم، با در نظر گرفتن نقطه‌ی دل‌خواهی مانند M' روی آن بدیهی است که مثلث‌های $M'AC, MAC$ دارای مساحت‌هایی برابر هستند و در نتیجه مساحت‌های دو چهارضلعی $ABCM', ABCM$ نیز برابر خواهد شد. لذا خط مزبور مکان هندسی مورد نظر می‌باشد.

۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

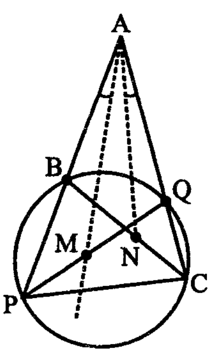


فرض کنیم S یکی از دایره‌های گذرنده از B, A باشد. با توجه به قوت نقطه‌ی C نسبت به این دایره:

$$P_S^C = \overline{AB}.\overline{AC} = \overline{CD}^{۲} = \text{مقداری ثابت}$$

بنابراین قوت نقطه‌ی C، نسبت به تمامی دوایری مانند S برابر است و لذا طول CD و به عبارت بهتر فواصل نقاط تماس از نقطه‌ی C مقداری ثابت می‌باشند. مکان هندسی مورد نظر، نقاط روی محیط یک دایره می‌باشند.

۳) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

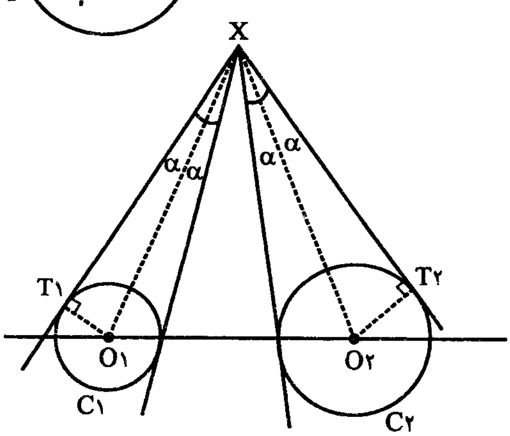


با توجه به تشابه مثلث‌های ABC و APQ، اگر نقاط M و K به ترتیب اوساط PQ و BC فرض شوند، لذا AM و AK میانه‌های متناظر در دو مثلث مزبور هستند و لذا:

$$\widehat{MAB} = \widehat{KAC}$$

بنابراین، نقطه‌ی M روی خطی ثابت و گذرنده از A تغییر می‌کند.

۴) گزینه‌ی «د» صحیح است.



اگر زاویه‌ی رؤیت دایره‌ها را ۲α فرض کنیم، با توجه به شکل خواهیم داشت:

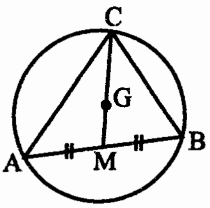
$$\begin{cases} XO_۱T_۱ \text{ در مثلث}: \overline{XO_۱} = \dfrac{\overline{T_۱O_۱}}{\sin\alpha} = \dfrac{R_۱}{\sin\alpha} \\ XO_۲T_۲ \text{ در مثلث}: \overline{XO_۲} = \dfrac{\overline{T_۲O_۲}}{\sin\alpha} = \dfrac{R_۲}{\sin\alpha} \end{cases}$$

($R_۲, R_۱$ به ترتیب شعاع‌های دوایر $C_۲, C_۱$ فرض می‌شوند.)
بنابراین:

$$\frac{\overline{XO_۱}}{\overline{XO_۲}} = \frac{R_۱}{R_۲}$$

پس مکان هندسی مزبور نقاطی هستند که نسبت فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت $O_۲, O_۱$ در صفحه مقدار ثابت $\frac{R_۱}{R_۲}$ می‌باشد. بنابراین بنا بر قضیه‌ی آپولونیوس مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای است که مرکز آن روی امتداد $O_۱O_۲$ واقع است.

۵) گزینه‌ی «د» صحیح است.

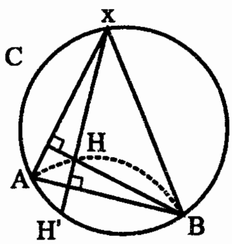


از آن‌جا که نقاط B, A دو نقطه‌ی ثابت روی دایره می‌باشند پس نقطه‌ی M وسط آن‌ها نیز، نقطه‌ی ثابتی خواهد بود. با تغییر نقطه‌ی C روی محیط دایره و با فرض بر این‌که G مرکز ثقل مثلث‌های متغیر ABC می‌باشند، بنابراین:

$$\frac{\overline{MG}}{\overline{MC}} = \frac{1}{3}$$

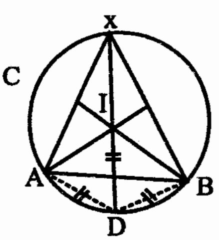
بنابراین مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای است که متجانس با دایره‌ی اولیه، به مرکز تجانس نقطه‌ی ثابت M و به نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

۶) گزینه‌ی «د» صحیح است.



اگر H مرکز ارتفاعیه مثلث متغیر XAB فرض شود، می‌دانیم که قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه‌ی هر مثلث نسبت به هر ضلع، روی دایره‌ی محیطی آن واقع است. بنابراین مکان هندسی مورد نظر قرینه‌ی دایره‌ی C، نسبت به ضلع AB می‌باشد که دایره‌ای برابر با خود دایره‌ی C خواهد بود.

۷) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

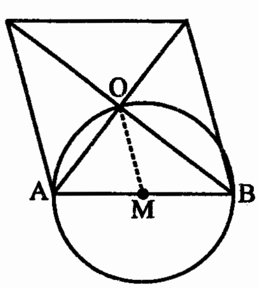


I محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث متغیر XAB فرض می‌شود. از آن‌جا که B, A دو نقطه‌ی ثابت روی دایره C هستند. پس نقطه‌ی D وسط کمان کوچک $\widehat{AB}$ نیز نقطه‌ای ثابت خواهد بود. می‌دانیم که:

$$\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DI}$$

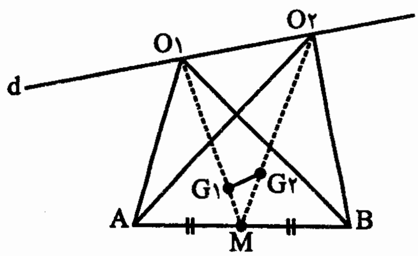
لذا فاصله‌ی نقاط متغیر I، از نقطه‌ی ثابت D، مقداری ثابت خواهد بود. پس I روی کمانی از دایره‌ای به مرکز D و شعاع $\overline{DB} = \overline{DA}$ تغییر خواهد کرد. با توجه به این‌که X روی کمان کوچک AB نیز می‌تواند قرار گیرد، بالطبع نقطه‌ی D نیز روی کمان بزرگ‌تر $\widehat{AB}$ واقع می‌شود و در نهایت مکان هندسی مورد نظر دو کمان از دو دایره خواهد شد.

۸) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



اگر فرض شود که ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع، دارای طولی دقیقاً برابر با AB است، با فرض بر این‌که O, M به ترتیب وسط ضلع AB و محل تلاقی اقطار باشند و هم‌چنین از آن‌جا که $\overline{MO} = \frac{\overline{AB}}{2}$. لذا مکان هندسی نقطه‌ی O دقیقاً دایره‌ای به قطر AB است. ولی از آن‌جا که ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع می‌تواند طولی کوچک‌تر از AB داشته باشد، لذا مکان هندسی O، محیط همه‌ی دوایر هم‌مرکز و به مرکز M و قطری کوچک‌تر از AB است و به عبارت دیگر همه‌ی نقاط داخل دایره‌ای به مرکز M و قطر AB هستند.

۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

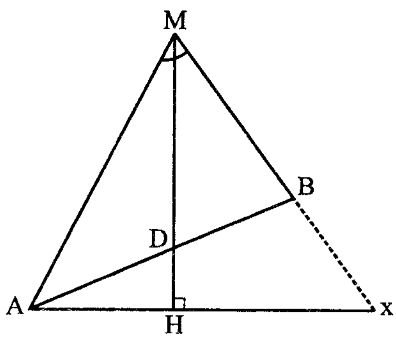


اگر امتداد d نیمساز داخلی زاویه‌ی $x\hat{o}y$ فرض شود، بدیهی است که نقاط O روی d در حال تغییر هستند.
مثلث‌های O_2AB, O_1AB دو مثلث از مثلث‌های مذکور می‌باشند و G_2, G_1 به ترتیب مراکز ثقل آن‌ها فرض می‌شوند. با توجه به مثلث MO_1O_2 داریم:

$$\frac{\overline{MG_۱}}{\overline{MO_۱}} = \frac{\overline{MG_۲}}{\overline{MO_۲}} = \frac{۱}{۳}$$ (M نقطه‌ی ثابت وسط پاره‌خط AB است)

پس بنا بر قضیه‌ی تالس $G_۱G_۲$ با امتداد d موازی خواهد بود. $(G_۱G||d)$ و روشن است که هر G_i دیگر نیز روی این نیم‌خط قرار خواهد گرفت.

۱۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



اگر پای عمود وارد از A بر نیمساز داخلی MD را x بنامیم، روشن است که مثلث MAX، متساوی‌الساقین است. پس:

$$\overline{AH} = \overline{Hx}$$

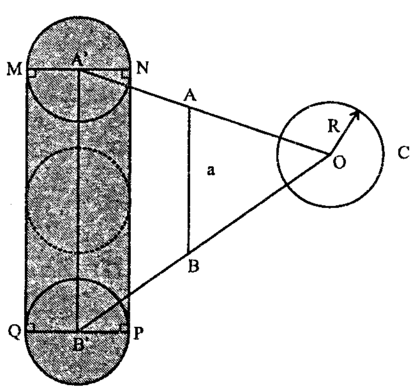
بنا بر قضیه‌ی منلائوس در مثلث ABx با نقاط همخط M, D, H:

$$\frac{\overline{Hx}}{\overline{AH}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \times \frac{\overline{MB}}{\overline{Mx}} = ۱ \Rightarrow K.\frac{\overline{MB}}{\overline{Mx}} = ۱$$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BM} + Bx} = \frac{۱}{k} \Rightarrow \frac{\overline{Bx}}{\overline{BM}} = K - ۱$$

بنا بر قضیه‌ی آپولونیوس، نقاط M روی دایره آپولونیوس نقاط B, A واقع‌اند و B نیز نقطه‌ای ثابت است. پس با توجه به رابطه‌ی اخیر، مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای متجانس با دایره‌ی آپولونیوس مذکور به مرکز تجانس نقطه‌ی B و نسبت تجانس $K - ۱$ می‌باشد.

۱۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



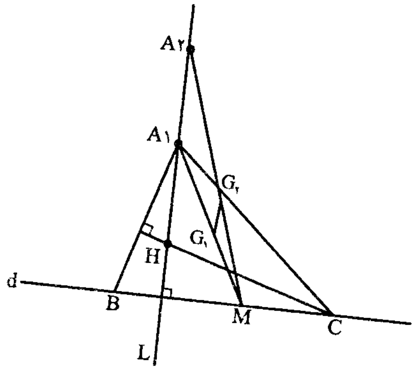
با توجه به مثلث $OA'B'$ داریم:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \overline{A'B'} = ۲a$$

اگر مساحت بخش رنگ شده که مکان هندسی مورد نظر می‌باشد را S فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$S =.S_{MNPQ} + S_C = (۲a \times ۲R) + \pi R^۲ = ۴aR + \pi R^۲$$

۱۲) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

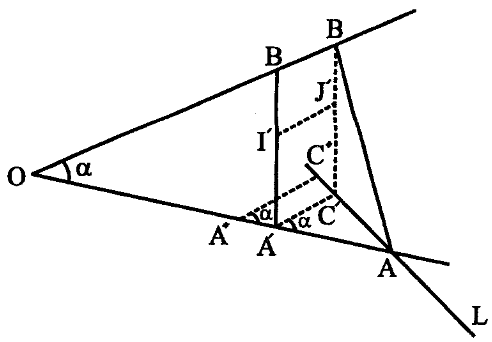


اگر H, M, d به ترتیب راستای قاعده، وسط قاعده و مرکز ارتفاعیه نامیده شوند و L امتداد عمود بر d و گذرنده از H نامیده شود، واضح است که رأس سوم مثلث (نقطه‌ی A) روی این امتداد ثابت تغییر می‌کند. مطابق شکل، دو نقطه از این نقاط $A_۲, A_۱$ هستند و $G_۲, G_۱$ به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های $A_۲BC, A_۱BC$ می‌باشند. با دقت به مثلث $MA_۱A_۲$ و بنا بر قضیه‌ی تالس:

$$\frac{\overline{MG_۱}}{\overline{MA_۱}} = \frac{\overline{MG_۲}}{\overline{MA_۲}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow G_۱G = ||L \Leftrightarrow G_۱G_۲ \perp d$$

پس مکان هندسی خطی عمود بر امتداد ثابت d می‌باشد.

۱۳) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



متوازی‌الاضلاع $A'B'BC'$ را می‌سازیم. بدیهی است که $\widehat{AA'C'} = \widehat{AOB} = \alpha$. اگر فرض کنیم $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = K$ ، بنابراین $\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'C'}} = K$. اگر برای B'', A'' دیگری که این خاصیت را دارند ($\frac{AA''}{BB''} = K$)، متوازی‌الاضلاع $A''B''BC''$ را تشکیل دهیم، از آن‌جا که: $\frac{AA'}{A'C'} = \frac{AA''}{A''C''} = K$ پس نقاط C'', C', A روی یک امتداد قرار می‌گیرند و در نتیجه هر نقطه‌ی دیگری مانند C'', C' که مشابه آن‌ها تشکیل می‌شود روی این امتداد ثابت قرار خواهند گرفت (امتداد L).

حال اگر نقطه‌ی J' را روی BC' طوری در نظر بگیریم که:

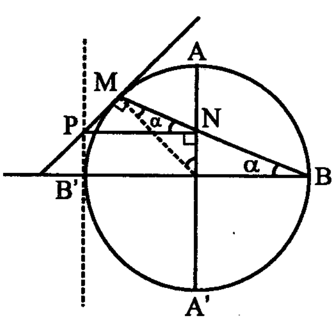
$$\frac{\overline{C'J'}}{\overline{BJ'}} = \frac{\overline{A'I'}}{\overline{B'I'}} = m$$

بدیهی است از آن‌جا که B نقطه‌ای ثابت و $C'', C', \ldots$ روی خط ثابت L در حال تغییر هستند و از طرفی:

$$\frac{\overline{BJ'}}{\overline{C'J'}} = \frac{۱}{m}$$

پس J' روری خط ثابتی به موازات L در حال تغییر است.
از آن‌جا که $I'J'$ ها موازی و برابر با $C'A'$ها خواهند بود، لذا I' ها نیز روی خطی به موازات OA تغییر خواهند کرد.

۱۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



با دقت به چهارضلعی $ONMP$، داریم:

$$\widehat{PMO} = \widehat{PNO} = ۹۰°$$

بنابراین چهار ضلعی مزبور محاطی بوده و لذا:

$$\widehat{MPN} = \widehat{NOM} \qquad (۱)$$

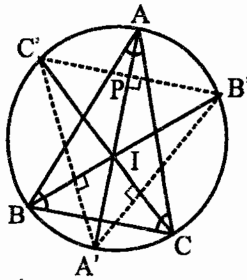
با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث $\triangle OBM$، $\widehat{NMO} = \widehat{NBO} = \alpha$. از طرفی بنا بر توازی BB', NP داریم: $\widehat{MNP} = \widehat{NBO} = \alpha$. بنابراین:

$$\widehat{NMO} = \widehat{MNP} = \alpha \Rightarrow \widehat{NMP} = \widehat{MNO} = ۹۰ + \alpha$$

$$\begin{cases} \widehat{MPN} = \widehat{NOM} \\ MN : \text{مشترک} \\ \widehat{NMP} = \widehat{MNO} \end{cases} \Rightarrow \triangle MNO \simeq \triangle NMP \Rightarrow \overline{NP} = \overline{OM} = R$$

بنابراین نقاط متغیر P، روی خطی به فاصله‌ی R (شعاع دایره) از دایره واقع‌اند که بدیهی است این خط در B' بر دایره‌ی مماس است.

۱۵) گزینه‌ی «ه» صحیح است.

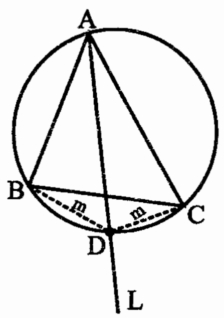


اگر نقطه‌ی I ، محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث ABC باشد، ثابت می‌کنیم که این نقطه مرکز ارتفاعیه در مثلث $A'B'C'$ است.
به همین منظور کافی است ثابت کنیم که $\widehat{IPB'} = 90^\circ$.

$$\begin{cases} \text{در مثلث } IPB' : \widehat{IB'P} = \dfrac{\widehat{BC'}}{2} = \dfrac{\hat{C}}{2} \\ \text{در مثلث } AIB : \widehat{PIB'} = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IB'P} + \widehat{PIB'} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IPB} = 90^\circ$$

حال با توجه به ثابت بودن ضلع BC و تغییر رأس A روی دایره‌ی ثابت، مکان هندسی I، مطابق با مسئله‌ی ۷، دو کمان از دو دایره خواهد بود.

۱۶) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



اگر D، وسط کمان ثابت BC باشد، فرض می‌کنیم: $\overline{BD} = \overline{CD} = m$.
بنا بر قضیه‌ی بطلمیوس در چهارضلعی محاطی $ABDC$:

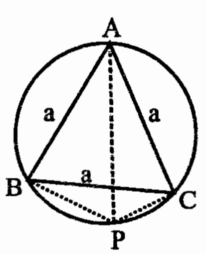
$$m.\overline{AB} + m.\overline{AC} = \overline{BC}.\overline{AD} \Rightarrow \frac{(\overline{AB} + \overline{AC}).m}{\overline{BC}} = \overline{AD}$$

از آن‌جا که: $\overline{Al} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$. بنابراین:

$$\overline{AD} = \frac{2m}{\overline{BC}}.\overline{Al} \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{lA}} = \frac{2m}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{Dl}} = \frac{2m}{\overline{BC} - 2m} = \text{مقداری ثابت}$$

پس مکان هندسی l دایره‌ای است که متجانس دایره‌ی مزبور به مرکز تجانس نقطه‌ی D و نسبت تجانس $\dfrac{2m}{\overline{BC} - 2m}$ می‌باشد.

۱۷) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



می‌دانیم که اگر P روی محیط دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و روی کمان BC باشد، $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$
حال اگر نقطه‌ی P داخل و یا خارج دایره باشد، بنا بر قضیه‌ی بطلمیوس خواهیم داشت:

$$\overline{PB}.\overline{AC} + \overline{PC}.\overline{AB} \geq \overline{PA}.\overline{BC} \Rightarrow a.\overline{PB} + a.\overline{PC} \geq a.\overline{PA} \Rightarrow \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{PA} \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به یکی از مثلث‌های PAB یا PAC داریم:

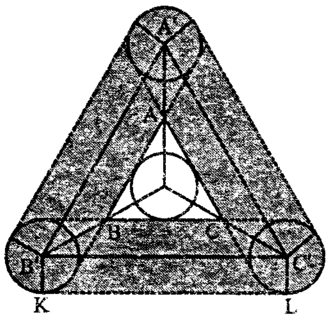
$$\text{در مثلث } PAB \begin{cases} \widehat{APB} = 60^\circ \\ \widehat{PAB} < 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{PBA} > 60^\circ \Rightarrow \overline{PA} > \overline{PB} (PA \text{ بزرگ‌ترین ضلع می‌باشد})$$

و به همین صورت: $\overline{PA} > \overline{PC}$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} \overline{PA} + \overline{PB} > \overline{PC} & (2) \\ \overline{PA} + \overline{PC} > \overline{PB} & (3) \end{cases}$$

و از روابط ۱ و ۲ و ۳ نتیجه می‌شود که با طول‌های PC, PB, PA می‌توان یک مثلث ساخت فقط در حالی که P روی محیط دایره نباشد.

۱۸) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



قرینه‌ی دایره‌ی مزبور را نسبت به هر یک از پاره‌خط‌های برابر AB، AC و BC پیدا می‌کنیم. (به مسئله‌ی شماره‌ی ۱۱ توجه کنید). مساحت بخش هاشورخورده برابر است با:

$$S = S_{\triangle A'B'C'} - S_{\triangle ABC} + ۳S_{B'C'LK} + S_{\text{دایره}}$$

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{۱}{۲}(۴ \times ۴) \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(۲ \times ۲) \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

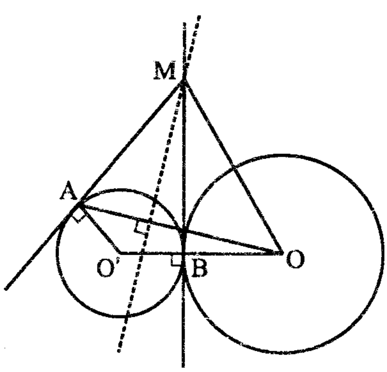
به راحتی شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$r = \frac{۱}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{B'C'LK} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۴ = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \quad ; \quad S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \frac{\pi}{۳}$$

$$S = ۴\sqrt{۳} - \sqrt{۳} + ۳(\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}) + \frac{\pi}{۳} = ۷\sqrt{۳} + \frac{\pi}{۳}$$

۱۹) گزینه‌ی «د» صحیح است.



شعاع دایره‌ی ثابت و به مرکز O را R فرض می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MBO می‌دانیم:

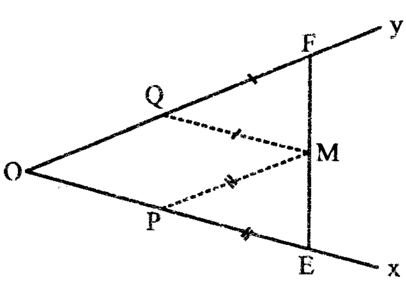
$$\overline{MO}^۲ - \overline{MB}^۲ = \overline{OB}^۲ = R^۲$$

از طرفی: $\overline{MB} = \overline{MA}$. با جایگذاری در تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\overline{MO}^۲ - \overline{MA}^۲ = R^۲$$

O, A دو نقطه‌ی ثابت هستند و تفاضل مربعات فواصل نقاطی مانند M از این دو نقطه، مقداری ثابت است $(R^۲)$. بنابراین مکان هندسی M خطی است عمود بر AO.

۲۰) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



فرض کنید محیط همه‌ی متوازی‌الاضلاع‌های مورد نظر برابر با $۲l$ باشد. نقاط F, E را روی oy, ox طوری در نظر می‌گیریم که: (نصف محیط) $\overline{OE} = \overline{OF} = l$. حال ثابت می‌کنیم همه‌ی متوازی‌الاضلاع‌هایی که رأس M آن‌ها روی قاعده‌ی EF از مثلث متساوی‌الساقین OEF واقع‌اند دارای محیط $۲l$ می‌باشند.
بدیهی است که مثلث‌های MQF, EPM متساوی‌الساقین هستند لذا:

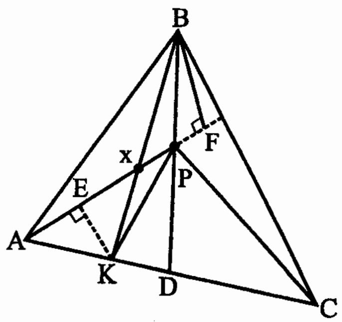
$$\begin{cases} \overline{MP} = \overline{PE} \\ \overline{MQ} = \overline{QF} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{محیط}\,(MPOQ) = \overline{OP} + \overline{PM} + \overline{OQ} + \overline{QM} = \overline{OP} + \overline{PE} + \overline{OQ} + \overline{QF} = \overline{EF} + \overline{OF} = ۲l$$

لذا مکان هندسی مورد نظر نقاط موجود روی پاره‌خط EF است.

۲۱) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



می‌دانیم میانه، مثلث را به دو سطح هم ارز (معادل) تقسیم می‌کند. پس:

$$\begin{cases} S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC} \\ S_{\triangle APD} = S_{\triangle CPD} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle BPC} = S_{\triangle ABP} \quad (۱)$$

از طرفی بنا بر فرض مسئله: $S_{\triangle BPC} = S_{\triangle APK}$.

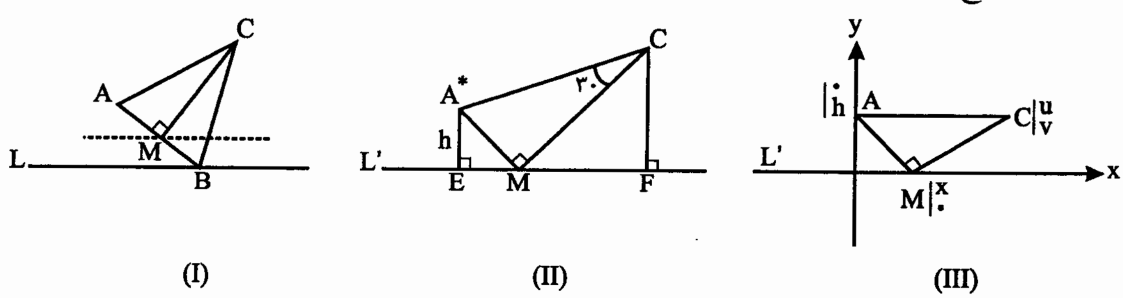
از دو رابطه‌ی اخیر (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle APK} \Rightarrow \overline{KE} \times \frac{\overline{AP}}{۲} = \overline{BF} \times \frac{\overline{AP}}{۲} \Rightarrow \overline{KE} = \overline{BF}$$

حال با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویه BFx, KEx و تساوی اخیر خواهیم دید که این دو مثلث با یک‌دیگر همنهشت بوده و لذا: $\overline{Bx} = \overline{xK}$

بنابراین بدیهی است که نقاط متغیر x روی پاره‌خطی گذرنده از وسط AB و به موازات AC قرار خواهد داشت.

۲۲) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



با توجه به شکل I، وسط AB روی خطی به موازات L در حال تغییر است، که این را خط L' می‌نامیم.
با توجه به شکل II، از تشابه مثلث‌های AEM و MFC داریم:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \Rightarrow \frac{h}{\overline{MF}} = \tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \overline{MF} = \sqrt{۳}h$$

حال از هندسه تحلیلی کمک گرفته و مطابق شکل III، موقعیت نقطه‌ی C را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. اگر $m_۱, m_۲$ ضرائب زاویه‌ی خط‌های AM و MC باشند:

$$\begin{cases} m_۱ = \frac{-h}{x} \Rightarrow m_۲ = \frac{x}{h} \\ \text{از طرفی}: m_۲ = \frac{V}{u-x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{V}{(x + \sqrt{۳}h - x)} \Rightarrow V = \sqrt{۳}x$$

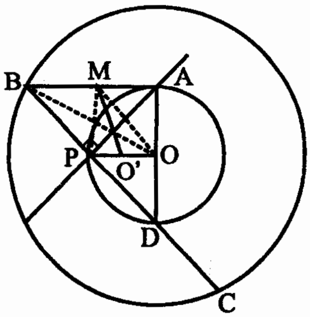
هم‌چنین: $u = x + \sqrt{۳}h \Rightarrow \sqrt{۳}u = \sqrt{۳}x + ۳h \Rightarrow \sqrt{۳}u = V + ۳h \Rightarrow V = \sqrt{۳}u - ۳h$

از طرفی با توجه به شکل III، روشن است که نقاط M روی بخش منفی محور xها نیز می‌تواند تغییر کند. پس در این حالت نیز:

$$V = -\sqrt{۳}u - ۳h$$

و لذا مکان هندسی مورد نظر دو خط متقاطع خواهد بود.

۲۳) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



وسط AB را M و محل تقاطع BC با دایره‌ی کوچک را D می‌نامیم (بدیهی است که نقاط D,O,A روی یک امتداد قرار دارند)
در مثلث قائم‌الزاویه APB ، PM میانه وارد بر وتر است، لذا:

$$\overline{PM}=\frac{\overline{AB}}{۲}$$

با توجه به رابطه‌ی میانه‌ها در مثلث AOB داریم:

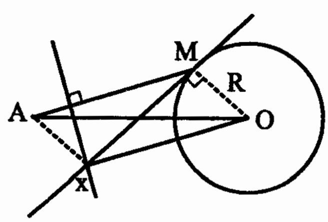
$$۲\overline{OM}^{۲}=r^{۲}+R^{۲}-\frac{\overline{AB}^{۲}}{۲}\Rightarrow ۲\overline{OM}^{۲}+۲\overline{PM}^{۲}=r^{۲}+R^{۲}\Rightarrow \overline{MO}^{۲}+\overline{MP}^{۲}=\frac{r^{۲}+R^{۲}}{۲}$$

حال اگر O'، وسط OP فرض شود، بنا بر رابطه‌ی میانه‌ها در مثلث MPO خواهیم داشت:

$$۲\overline{MO'}^{۲}=\overline{MP}^{۲}+\overline{MO}^{۲}-\frac{r^{۲}}{۲}\Rightarrow ۲\overline{MO'}^{۲}=\frac{R^{۲}}{۲}\Rightarrow \overline{MO'}=\frac{R}{۲}$$

پس مکان هندسی مزبور دایره‌ای به مرکز وسط OP و شعاع $\frac{R}{۲}$ می‌باشد.

۲۴) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



از آن‌جا که x روی عمود منصف پاره‌خط AM واقع است، لذا:

$$\overline{xA}=\overline{xM}$$

حال با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی MOx و رابطه‌ی فیثاغورث در آن:

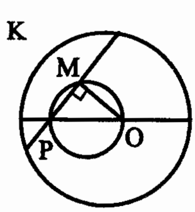
$$\overline{XO}^{۲}-\overline{xM}^{۲}=R^{۲}$$

و از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت که:

$$\overline{xO}^{۲}-\overline{xA}^{۲}=R^{۲}$$

یعنی تفاضل مربعات فواصل نقاطی مانند x از دو نقطه‌ی ثابت A,O ، مقدار ثابت $R^{۲}$ است و همان‌طور که قبلاً گفته شد، مکان هندسی نقطه‌های x روی خطی عمود بر AO می‌باشد.

۲۵) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.



وسط وترهای گذرنده از نقطه‌ی ثابت P را M می‌نامیم. بدیهی است که OM بر وتر مزبور عمود است. لذا اگر دایره‌ای به قطر OP رسم کنیم، تمامی نقاط M روی محیط این دایره قرار خواهند گرفت. اگر وتر مزبور بر OP عمود باشد، نقطه‌ی M,P بر هم منطبق خواهند بود و هم‌چنین اگر این وتر از مرکز دایره بگذرد، M,O بر یک‌دیگر منطبق می‌باشند. پس مکان هندسی، یک دایره داخل دایره‌ی K خواهد بود.

۲۶) گزینه‌ی «الف» صحیح است.

محورهای مختصات قائم را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که مختصات رأس‌های مثلث مفروض عبارت است از $(۰,۰),(S,۰)$ و $(\frac{S}{۲},S\frac{\sqrt{۳}}{۲})$. نسبت به این محورها، مختصات P را (x,y) می‌گیریم. نقطه‌ی P به مکان مورد نظر تعلق دارد اگر و تنها اگر:

$$a=x^{۲}+y^{۲}+(x-s)^{۲}+y^{۲}+(x-\frac{s}{۲})^{۲}+(y-\frac{S\sqrt{۳}}{۲})^{۲}$$

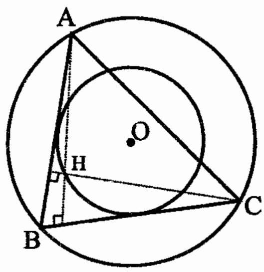
و این هم‌ارز است اگر و تنها اگر با رابطه‌ی زیر:

$$a=(۳x^{۲}-۳Sx)+(۳y^{۲}-S\sqrt{۳}y)+۲S^{۲}$$

$$\frac{a-۲S^۲}{۳}=(x-\frac{S}{۲})^۲+(y-\frac{S\sqrt{۳}}{۶})^۲-\frac{S^۲}{۳}\Rightarrow\frac{a-S^۲}{۳}=(x-\frac{S}{۲})^۲+(y-\frac{S\sqrt{۳}}{۶})^۲$$

مکان P، اگر $a<S^۲$ یک مجموعه‌ی تهی است؛ اگر $a=S^۲$ ، منحصر به یک نقطه است؛ اگر $a>S^۲$ یک دایره است.

۲۷) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



اگر شعاع‌های دوایر کوچک و بزرگ را R,r فرض کنیم روشن است که:

$$R^۲-r^۲=\frac{\overline{BC}^۲}{۴}\Rightarrow\overline{BC}=۲\sqrt{R^۲-r^۲}$$

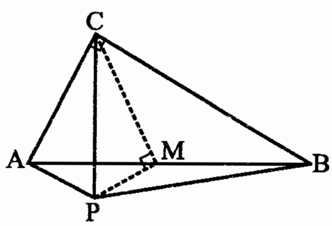
پس طول BC همواره مقداری ثابت می‌باشد. از طرفی در هر مثلث فاصله‌ی رأس A تا مرکز ارتفاعی H برابر است با:

$$\overline{AH}=\overline{BC}\times\cot\hat{A}$$

از آن‌جا که طول BC ثابت می‌باشد، پس کمان $\widehat{BC}$ از دایره‌ی بزرگ نیز ثابت بوده، لذا اندازه‌ی زاویه‌ی A نیز ثابت است. $(\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲})$.

پس با توجه به رابطه‌ی اخیر، طول AH، ثابت خواهد بود و در نتیجه مکان هندسی H، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع $۲\sqrt{R^۲-r^۲}\cot A$.

۲۸) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



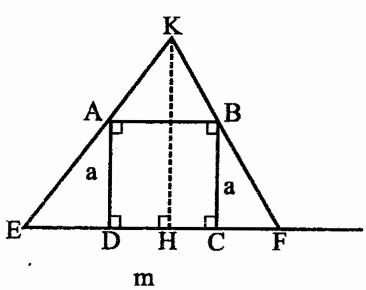
بنا بر فرض داریم: $۲\overline{PC}^۲=\overline{PA}^۲+\overline{PB}^۲$ و فرض می‌کنیم نقطه‌ی M، وسط ضلع AB باشد.

بنا بر رابطه‌ی میانه‌ها در مثلث $\triangle PAB$:

$$\left\{\begin{array}{l}۲\overline{PM}^۲=\overline{PA}^۲+\overline{PB}^۲-\frac{\overline{AB}^۲}{۲}\\ \overline{CM}=\frac{\overline{AB}}{۲}\Rightarrow\overline{CM}^۲=\frac{\overline{AB}^۲}{۴}\end{array}\right.\Rightarrow\overline{PC}^۲-\overline{PM}^۲=\overline{CM}^۲$$

پس نقاط ثابت M,C و نقطه‌ی متغیر P تشکیل مثلثی قائم‌الزاویه با رأس قائمه M داده‌اند. لذا مکان هندسی مورد نظر، خطی است عمود بر میانه‌ی CM در نقطه‌ی M .

۲۹) گزینه‌ی «د» می‌باشد.

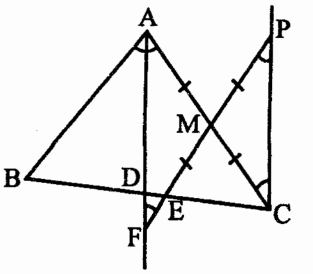


طول ضلع مربع را a و طول پاره‌خط ثابت EF را m فرض می‌کنیم. اگر H پای ارتفاع وارد از K بر ضلع EF باشد. به راحتی می‌توان ثابت کرد که:

$$a=\frac{\overline{KH}.m}{\overline{KH}+m}\Rightarrow\overline{KH}=\frac{a.m}{m-a}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود که $\overline{KH}$ دارای طول ثابتی بوده و لذا مکان هندسی، دو خط به موازات DC خواهد بود (طرفین DC)

۳۰) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



طول ثابت BC را a فرض می‌کنیم به دلیل ثابت بودن اندازه‌ی محیط، لذا: مقدار ثابت = $\overline{AB}+\overline{AC}$

اگر امتداد موازی با ضلع AB، اضلاع BC و نیمساز داخلی AD را به ترتیب در F,E قطع کند، اولاً بدیهی است که:

$$\overline{AM}=\overline{MC}=\overline{MF}=\overline{MP}=\frac{\overline{AC}}{۲}$$

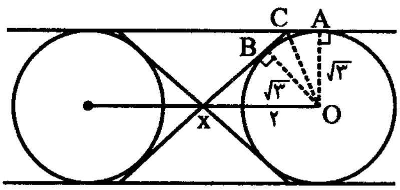
از طرفی واضح است که E وسط ضلع BC می‌باشد و هم‌چنین $\overline{ME} = \frac{\overline{AB}}{۲}$. بنابراین:

$$\overline{EP} = \overline{EM} + \overline{MP} = \frac{\overline{AB}}{۲} + \frac{\overline{AC}}{۲} = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطه‌ی E دایره‌ای است به مرکز وسط BC و شعاع مقدار ثابت $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{۲}$.

۳۱) گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

مکان هندسی این نقاط عبارت است از چهار قسمتی که به مماس‌های داخلی و خارجی دو دایره و هر کدام از دایره‌ها محدود می‌شود.



OBX در مثلث : $\overline{OX} = ۲, \overline{OB} = \sqrt{۳} \Rightarrow \widehat{BOX} = ۳۰^\circ$

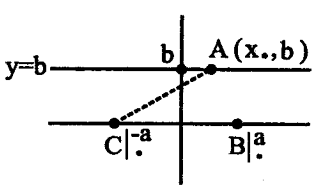
$$\Rightarrow \widehat{AOB} = ٦۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = ۳۰^\circ \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\overline{AO} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} = ۱$$

$$S_{\triangle AOB} = ۲S_{\triangle AOC} = \sqrt{۳} \times ۱ = \sqrt{۳}$$

$$S_{AOB\,\text{قطاع}} = \frac{۱}{٦}S_{\text{دایره}} = \frac{۱}{٦} \times \pi \times (\sqrt{۳})^۲ = \frac{\pi}{۲}$$

$$S_{\text{مکان هندسی}} = ۴(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}) = ۴\sqrt{۳} - ۲\pi$$

۳۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.



از روش تحلیلی استفاده کرده و نقاط C, B, A را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. بدیهی است که معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC عبارت است از:

$$h_A : \quad x = x_\circ$$

اگر m ، ضریب زاویه‌ی ضلع AC باشد، داریم:

$$m = \frac{b - \circ}{x_\circ + a} \Rightarrow m = \frac{b}{x_\circ + a}$$

بنابراین، اگر m' ضریب زاویه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AC باشد، پس:

$$m' = -\frac{x_\circ + a}{b}$$

معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع AC عبارت است از:

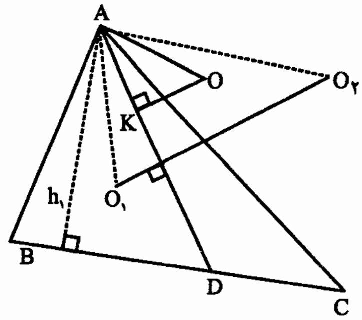
$$h_b : \; -\frac{x_\circ + a}{b} = \frac{y - \circ}{x - a} \Rightarrow h_B : y = -\frac{x_\circ + a}{b}.x + \frac{a}{b}(x_\circ + a)$$

حال اگر H مرکز ارتفاعیه باشد، از تلاقی دو ارتفاع اخیر معادله‌ی تغییرات H حاصل می‌شود.

$$y = -\frac{x + a}{b}x + \frac{a}{b}(x + a) \Rightarrow by = a^۲ - x^۲$$

که معادله‌ی یک سهمی است.

۳۳) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



h را طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث ABC فرض می‌کنیم. مطابق شکل $\overline{AO_۲}, \overline{AO_۱}$ شعاع‌های دوایر محیطی در مثلث‌های ACD, ABD می‌باشند.

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABD: \overline{AB} = ۲\overline{AO_۱}\sin\hat{D} \\ \text{در مثلث } ACD: \overline{AC} = ۲\overline{AO_۲}\sin\hat{D} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AO_۱}}{\overline{AO_۲}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (۱)$$

از طرفی:
$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABD: \widehat{DAO_۱} = ۹۰ - \hat{B} \\ \text{در مثلث } ACD: \widehat{DAO_۲} = ۹۰ - \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAO_۱} + \widehat{DAO_۲} = O_۱\widehat{A}O_۲ = ۱۸۰ - (\hat{B}+\hat{C})$$

$$\Rightarrow O_۱\widehat{A}O_۲ = \widehat{BAC} \quad (۲)$$

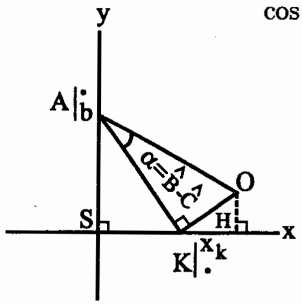
دو رابطه‌ی اخیر دلالت بر این دارد که مثلث‌های $AO_۱O_۲, ABC$ متشابه می‌باشند، لذا:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AO}}{R} = \frac{\overline{AL}}{h} \\ \overline{AL} = \frac{\overline{AD}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AO}}{R} = \frac{\frac{\overline{AD}}{۲}}{h}$$

$$\Rightarrow \overline{AO} = \frac{R}{۲h}\overline{AD} \quad (\text{شعاع دایره‌ی محیطی مثلث } ABC \text{ است} R)$$

به راحتی می‌توان محاسبه کرد که: $\widehat{OAK} = \hat{B} - \hat{C}$. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه AOK، خواهیم داشت:

$$\cos\widehat{OAK} = \cos(\hat{B}-\hat{C}) = \frac{\overline{AK}}{\overline{AO}} \Rightarrow \overline{AK} = \overline{AO}.\cos(\hat{B}-\hat{C})$$



از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AD}} = \frac{R\cos(\hat{B}-\hat{C})}{۲h} = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین بدیهی است که مکان هندسی تغییرات K روی خطی به موازات ضلع BC است.

برای یافتن مکان O از هندسه تحلیلی و محورهای قائم کمک می‌گیریم.

اگر $m_۱$ را ضریب زاویه‌ی خط AK در نظر بگیریم:

$$m_۱ = -\frac{b}{x_K}$$

هم‌چنین اگر $m_۲$ ضریب زاویه‌ی OK فرض شود، خواهیم داشت:

$$m_۲ = \frac{x_K}{b}$$

لذا معادله‌ی OK را مطابق زیر پیدا می‌کنیم:

$$\frac{x_K}{b} = \frac{y-۰}{x-x_K} \Rightarrow y = \frac{x_K}{b}(x-x_K)$$

حال از تشابه مثلث‌های AKS, OHK خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{KH}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{AK}} \Rightarrow \frac{\overline{KH}}{b} = \tan\alpha = \tan(\hat{B}-\hat{C}) \Rightarrow \overline{KH} = b.\tan(\hat{B}-\hat{C})$$

لذا معادله‌ی خط OH برابر خواهد بود:

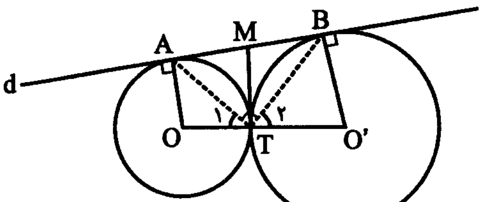
$$x = x_K + \overline{KH} \Rightarrow x = x_K + b\tan(\hat{B}-\hat{C})$$

برای یافتن مکان هندسی نقطه‌ی O روشن است که می‌بایستی معادله‌ی دو خط اخیر را تلاقی دهیم و لذا:

$$y = x\tan(\hat{B}-\hat{C}) - b\tan^{۲}(\hat{B}-\hat{C})$$

که معادله‌ی یک خط است.

۳۴) گزینه‌ی «ج» صحیح است.

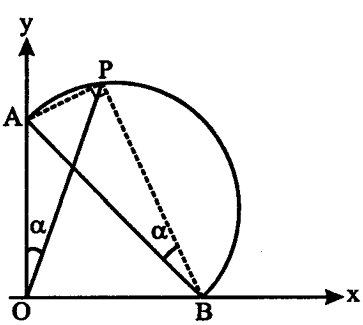


ثابت می‌کنیم که زاویه‌ی $\widehat{ATB}$ قائمه است. $(\widehat{ATB} = ۹۰°)$
برای اثبات، می‌دانیم که در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ی $ABO'O$، $\hat{O}+\hat{O}' = ۱۸۰°$ و از آن‌جا که مثلث‌های $BO'T, AOT$ متساوی‌الساقین می‌باشند، لذا:

$$\hat{O}'+\hat{O} = ۱۸۰° \Rightarrow (۱۸۰ - ۲\hat{T}_۱) + (۱۸۰ - ۲\hat{T}_۲) = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{T}_۱ + \hat{T}_۲ = ۹۰° \Rightarrow \widehat{ATB} = ۹۰°$$

بنابراین مثلث ABT، مثلثی قائم‌الزاویه است. اگر M وسط وتر AB فرض شود، بدیهی است که $\overline{MT} = \frac{\overline{AB}}{۲}$، لذا طول MT همواره مقداری ثابت بوده و در نتیجه مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای به مرکز M وسط AB و شعاع $\frac{\overline{AB}}{۲}$ می‌باشد.

۳۵) گزینه‌ی «ب» صحیح است.

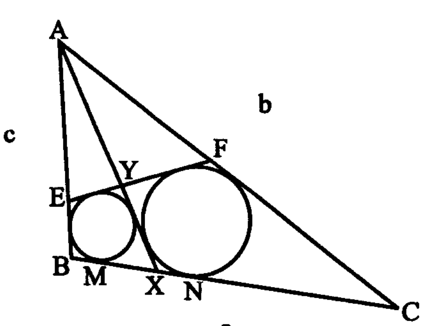


اگر B, A دو سطر قطر باشند، با لغزش نیم‌دایره‌ی مزبور مثلث قائم‌الزاویه‌ی APB همواره ثابت می‌باشد و لذا اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{ABP}$ که برابر با α فرض می‌شود ثابت است. به دلیل محاطی بودن چهارضلعی $OABP$ خواهیم داشت:

$$\widehat{AOP} = \widehat{ABP} = \alpha$$

پس با لغزش نیم‌دایره، OP زاویه ثابتی با محور yها خواهد داشت. لذا مکان هندسی P روی پاره‌خطی گذرنده از مبدأ مختصات می‌باشد.

۳۶) گزینه‌ی «ه» صحیح است.



اضلاع AB, AC, BC از مثلث ABC، $c, b, a,$ نامیده می‌شوند. اگر $P_۲, P_۱$ نصف محیط در مثلث‌های ACX, ABX باشند، می‌دانیم که:

$$\overline{MX} = P_۱ - C \quad ; \quad \overline{NX} = P_۲ - b$$

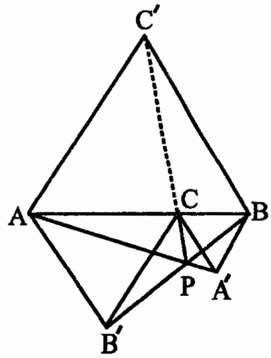
$$\begin{cases} \overline{MX} = \dfrac{c+\overline{AX}+\overline{BX}}{۲} - c \\ \overline{NX} = \dfrac{b+\overline{AX}+\overline{CX}}{۲} - b \end{cases} \Rightarrow \overline{MX}+\overline{NX} = \overline{AX} - \frac{b+c-a}{۲} = \overline{MN}$$

از طرفی می‌توان ثابت کرد که $\overline{XY} = \overline{MN}$ (اثبات به عهده خوانندگان)

بنابراین: $\overline{XY} = \overline{AX} - \frac{b+c-a}{۲} \Rightarrow \overline{AX} - \overline{XY} = \frac{b+c-a}{۲} \Rightarrow \overline{AY} = \frac{b+c-a}{۲} =$ مقداری ثابت

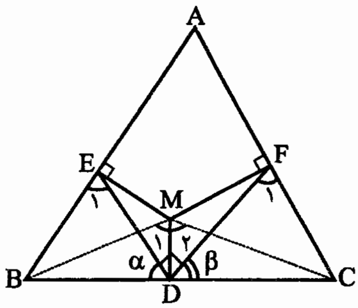
پس مکان هندسی مورد نظر کمانی از دایره‌ای است به مرکز A و شعاع $\frac{b+c-a}{۲}$.

۳۷) گزینه‌ی «د» صحیح است.



مثلث متساوی‌الاضلاع ABC' را از طرف دیگر پاره‌خط AB بنا می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که نقاط C', C, P بر روی یک امتداد قرار دارند (اثبات به عهده خوانندگان). از برابر مثلث‌های ACA', BCB' می‌توان نتیجه گرفت که BB', AA'، هم‌دیگر را با زاویه‌ی ۱۲۰° قطع کرده‌اند. بنابراین چهارضلعی $APBC'$ نیز یک چهارضلعی محاطی بوده و لذا نقطه‌ی P روی کمان $\widehat{AB}$ از دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع $AC'B$ در حال تغییر است.

۳۸) گزینه‌ی «ب» صحیح است.



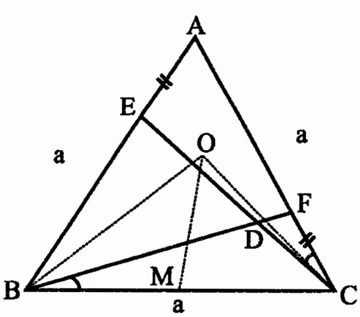
روشن است که چهارضلعی‌های $CFMD, BEMD$ محاطی هستند. بنابراین:

$$\begin{cases} BEMD \text{ در چهارضلعی}: \hat{M}_۱ = \hat{E}_۱ = \frac{\widehat{BD}}{۲} \\ CFMD \text{ در چهارضلعی}: \hat{M}_۲ = \hat{F}_۱ = \frac{\widehat{CD}}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} BED \text{ در مثلث}: \hat{E}_۱ = ۱۲۰ - \alpha \\ CFD \text{ در مثلث}: \hat{F}_۱ = ۱۲۰ - \beta \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMC} = \hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = \hat{E}_۱ + \hat{F}_۱ = ۲۴۰ - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = ۱۵۰$$

بنابراین مکان هندسی M، روی کمانی از یک دایره قرار دارد.

۳۹) گزینه‌ی «الف» صحیح است.



اگر $\widehat{BDC} = ۱۲۰^\circ$ باشد، بنابراین $\widehat{BDE} = ۶۰^\circ$ و لذا با توجه به مثلث BDC خواهیم داشت:

$$\widehat{BDE} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} \Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = ۶۰^\circ \qquad (۱)$$

$$\text{از طرفی}: \widehat{ACE} + \widehat{DCB} = ۶۰^\circ \qquad (۲)$$

$$\text{(از دو رابطه‌ی ۱ و ۲)}: \widehat{ACE} = \widehat{DBC}$$

و از آن‌جا به راحتی ثابت می‌شود که مثلث‌های BCF, ACE همنهشت‌اند و در نتیجه: $\overline{AE} = \overline{CF}$

از آن‌جا که $\widehat{ADF} + \widehat{EAF} = ۱۲۰ + ۶۰ = ۱۸۰^\circ$، پس چهارضلعی $AEDF$ محاطی بوده و لذا مرکز دایره‌ی محیطی آن همان مرکز دایره‌ی محیطی مثلث AEF خواهد بود.

اگر مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی $AEDF$، O فرض شود و هم‌چنین $\overline{AE} = \overline{CF} = x$ باشند. بنا بر قوت نقاط C, B نسبت به دایره‌ی مزبور (دایره‌ی C):

(R شعاع دایره‌ی C می‌باشد.)

$$\begin{cases} P_C^B = a(a-x) = a^۲ - ax = \overline{BO}^۲ - R^۲ \\ P_C^c = ax = \overline{CO}^۲ - R^۲ \end{cases} \Rightarrow \text{جمع طرفین}: a^۲ = \overline{BO}^۲ + \overline{CO}^۲ - ۲R^۲$$

اگر M وسط ضلع BC فرض شود، بنا بر رابطه‌ی میانه‌ها در مثلث BOC :

$$۲\overline{OM}^۲ = \overline{BO}^۲ + \overline{CO}^۲ - \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow \overline{BO}^۲ + \overline{CO}^۲ = ۲\overline{OM}^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

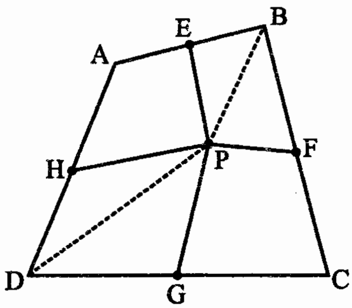
و از دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{a^۲}{۲} = ۲\overline{OM}^۲ - ۲R^۲ \Rightarrow \overline{OM}^۲ - R^۲ = \frac{a^۲}{۴}$$

می‌دانیم: $\overline{OA} = R \Rightarrow \overline{OM}^۲ - \overline{OA}^۲ = \frac{a^۲}{۴} =$ مقداری ثابت

یعنی تفاضل مربعات نقطه‌ی O از دو نقطه‌ی ثابت M, A مقدار ثابت $\frac{a^۲}{۴}$ است. لذا مکان هندسی O خطی عمود بر AM و به عبارت بهتر پاره‌خطی به موازات BC می‌باشد.

۴۰) گزینه‌ی «د» صحیح است.



اگر موقعیت نقطه‌ی P، طوری باشد که سطوح چهارضلعی‌های $PFCG, PHAE$ با هم برابر باشند، روشن است که:

$$S_{\triangle PBE} + S_{\triangle PDH} = S_{PHAE}$$

بنابراین نقطه‌ی P مساحت چهارضلعی $ABCD$ را نیز به دو بخش برابر تقسیم می‌کند و همان‌طور که در مسائل فصل‌های قبل اثبات شد، P روی پاره‌خطی به موازات قطر BD قرار دارد.

برابری سطوح چهارضلعی‌های $PEBF$ و $PGDH$ ایجاب می‌کند که P روی خطی به موازات قطر AC نیز واقع باشد و لذا P نقطه‌ای منحصر به فرد است که محل تقاطع دو خط مزبور می‌باشد.

Geometrical Problems in national & international Mathematical Olympiad

کتاب حاضر با همکاری انتشارات کانون فرهنگی آموزش (قلم چی) و مؤسسه‌ی نخبگان دانش و اندیشه‌ی ایرانیان در راستای ایجاد فرصت‌های برابر و گسترش عدالت آموزشی در عرصه‌ی المپیاد و ارتقای کیفی سطح علمی و آموزشی دانش آموزان کشور تهیه گردیده‌است.

این کتاب شامل سؤالات هندسه المپیادهای مقدماتی و مرحله‌ی اول ریاضی ایران و جهان به همراه پرسش‌های تألیفی است.

از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به طبقه‌بندی موضوعی سؤالات و ترتیب قرارگیری سؤالات بر اساس ساده به دشواراشاره کرد.

ضلع جنوب غربی پل سیدخندان - ساختمان شماره‌ی ۲۰
تلفن: ۹-۸۸۵۱۹۱۵۶ - ۶۶۹۶۲۵۰۰

8776-0-1

شابک : ۴ - ۴۹۶ - ۵۰۹ - ۹۶۴ - ۹۷۸
ISBN: 978 - 964 - 509 - 496 - 4