مسابقات فیزیک
دانشگاه بوستون امریکا
۲۰۰۴ - ۱۹۹۵

مجموعه سؤالات همراه با پاسخ تشریحی

برای دانشجویان و داوطلبان شرکت در المپیاد فیزیک

physics enlightens the world

ترجمه و تألیف :

تورج منتظری شاه توری - مهدی شیرماهی

مسابقات فیزیک دانشگاه بوستون امریکا

۲۰۰۴ ـ ۱۹۹۵

مجموعه سؤالات همراه با پاسخ تشریحی

برای دانشجویان و داوطلبان شرکت در المپیاد فیزیک

ترجمه و تألیف:

تورج منتظری شاه‌توری

مهدی شیرماهی

فهرست

پیشگفتار

به‌نام آن‌که هستی داد بنده‌اش را تا دریابد که هست و بیاموزد چرا هست و در دانستن می‌یابد چه کسی او را آفرید و دریافتن شیفته می‌شود، که شیفتگان شمع‌های راهند و در وجودشان پیام پیامبران نهفته است.

سپاس خداوند متعال را که با الطاف بیکران خود این توفیق را به ما ارزانی داشت، تا بتوانیم در راه ارتقای دانش فیزیک کشور، گام‌هایی هر چند کوچک برداشته و در انجام رسالتی که بر عهده داریم مؤثر واقع شویم.

دانشگاه هاروارد ایالات متحده از سال ۱۹۹۵ همه ساله مسابقاتی در زمینه فیزیک کلاسیک و در سطح دانشجویان سالهای پایین دانشگاههای ایالات متحده برگزار می‌نماید. مسایل مطرح شده در این مسابقات که توسط اساتید شناخته شده دانشگاه هاروارد Oleg Shpyrko و DavidMorin طراحی می‌گردند، از کیفیت بالایی برخوردارند. هم‌چنین مسایل حاوی نکات بسیار مهم و ریز آموزشی می‌باشند به‌طوری که می‌توان ادعا کرد بررسی و تحلیل مسایل همانند یک کلاس درسی، برای دانشجویان و دانش‌آموزان مفید خواهد بود.

احساس نیاز به وجود مجموعه مسائلی این چنین سازنده در زمینه فیزیک کلاسیک و البته به زبان فارسی، علت ایجاد این اثر بوده است مجموعه حاضر شامل مسایل طرح شده همچنین پاسخ تشریحی آنها، در ده سال پیاپی برگزاری «مسابقات منطقه‌ای دانشجویی فیزیک بوستون» می‌باشد.

مخاطبان این اثر را می‌توان به‌طور خاص دانش‌آموزان دبیرستانی علاقمند به شرکت در المپیادهای علمی فیزیک و نیز دانشجویان کوشا در رشته فیزیک دانست و البته این کتاب می‌تواند برای معلمان و اساتید این رشته نیز مفید واقع شود.

نکات دیگری که از جمله ویژگی‌های مثبت این اثر می‌باشد، عبارتند از: اینکه اولاً در تنظیم پاسخ‌های تشریحی مسایل، به جای استفاده از الگوریتم گونه از حساب دیفرانسیل و انتگرال، به راه‌حل‌های ابتکاری و هوشمندانه تکیه شده است. دوم اینکه: نتایج ریاضی بدست آمده در حل مسائل، مورد بسط و بررسی واقع شده و با واقعیات موجود در طبیعت و شهود فیزیکی فرد خواننده، تطبیق داده شده است. که این دو در تعمیق مفاهیم و تسلط دانش‌پژوه بر مطالب طرح شده می‌افزاید.

جا دارد از خانم آرمیتا نورمحمد و آقای طه یاسری بخاطر تلاش‌های ارزنده و همکاری در تهیه این کتاب تشکر نماییم. در پایان از مساعدت‌ها و توجه مخصوص آقای یحیی دهقانی مدیر مسئول انتشارات مبتکران کمال تشکر را داریم. همچنین از زحمات سایر کارکنان انتشارات مبتکران بویژه خانمها سیما بیطرف و فیروزه مرادی (برای تایپ)، مرضیه کریمی (برای رسم شکلها)، بهاره خدامی (به خاطر طراحی روی جلد) کبری مرادی مقدم و آقای خدایار مبین سپاسگذاریم. از کلیه صاحب‌نظران، اساتید و دانش‌آموزان استدعا داریم انتقادات و نظرات خود را از طریق وب لاگ www.physic - man.persianblog.com و یا از طریق ناشر به اطلاع برسانند.

و من الله توفیق و علیه تکلان

تورج منتظری شاه توری - مهدی شیرماهی

فروردین ۱۳۸۴

مسایل

سؤالات سال

۱۹۹۵

۱. یک لوله استوانه‌ای به‌صورتی که محورش موازی سطح زمین باشد، قرار گرفته است. شعاع استوانه r و فاصله محور آن تا زمین h است. توپ کوچکی از سطح زمین به داخل استوانه پرتاب می‌شود. در دو حالت زیر کم‌ترین سرعتی را که توپ باید داشته باشد تا از لوله خارج شود، به‌دست آورید. (ابعاد توپ قابل صرف‌نظر است)

(الف) توپ بتواند با لوله تماس داشته باشد (فرض کنید لوله بدون اصطکاک است)

(ب) توپ با لوله تماس نداشته باشد.

۲. این سؤال شامل سه قسمت است که فقط نیاز به جواب‌های کوتاه دارند.

(الف) محفظه‌ای به وسیله دیواره‌ای به دو بخش مساوی تقسیم شده است. یک بخش حاوی گازی به دمای T و بخش دیگر خلاء است. دیواره سریع برداشته می‌شود. دمای تعادل جدید محفظه چقدر است؟

(ب) یک سیم نیمه بینهایت حامل جریان I به یک صفحه بینهایت عمود بر سیم وارد می‌شود. میدان مغناطیسی را در فاصله r از سیم و d از صفحه بیابید.

(پ) یک توپ هاکی بر روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد و با یک طناب که روی سطح قرار گرفته است به میله عمودی متصل شده است. به توپ سرعت مماسی می‌دهیم. هنگامی که طناب دور میله می‌پیچد، توپ مسیر مارپیچی را طی می‌کند. بر اساس اصل بقای تکانه زاویه‌ای، هر چه فاصله توپ تا میله کاهش یابد، سرعت توپ افزایش می‌یابد. بنابراین انرژی جنبشی آن افزایش یافته و بقای انرژی نقض می‌شود. اگر اشکالی در این توجیه وجود دارد، آن را بیان کنید.

۳. می‌دانیم برای برقرای ارتباط تلگرافی تنها به یک سیم ارتباطی بین دو ایستگاه نیاز داریم. فرض کنید در هر یک از دو ایستگاه جسم فلزی کروی به شعاع r درون زمین قرار داده‌ایم و از زمین به عنوان سیم ارتباطی بین دو ایستگاه استفاده می‌کنیم. در صورتی که فاصله دو ایستگاه L، $(L >> r)$ و مقاومت ویژه زمین ρ باشد، مقاومت بین دو ایستگاه چقدر است؟

۴. کوهنوردی می‌خواهد به وسیله طنابی از یک کوه مخروطی شکل بدون اصطکاک، با زاویه رأس α، بالا رود. فرض کنید طناب همواره با کوه تماس دارد. در پایین کوه دو مغازه وجود دارند که یکی از آن‌ها طناب ارزانی می‌فروشد که از یک حلقه طناب که به دور حلقه‌ای از طناب‌ها به طول ثابت پیچیده شده است تشکیل شده، مغازه دیگر طناب گرانی را می‌فروشد که از یک تکه طناب با حلقه‌ای به طول متغیر تشکیل شده است طول حلقه می‌تواند بدون اصطکاک با طناب تغییر کند.

در هر یک از حالات زیر، α چقدر باشد، که کوهنورد بتواند در راستای کوه حرکت کند؟

(الف) کوهنورد از طناب ارزان، که آن را یک بار به دور قله کوه حلقه زده استفاده کند.

(ب) کوهنورد از طناب گران، که آن را یک بار به دور قله کوه حلقه زده استفاده کند.

(پ) کوهنورد از طناب ارزان،که آن را N بار به دور قله کوه حلقه زده استفاده کند. (فرض کنید طناب با خودش اصطکاک ندارد.)

(ت) کوهنورد از طناب گران، که آن را N بار به دور قله کوه حلقه زده استفاده کند. (فرض کنید طناب با خودش اصطکاک ندارد.)

۵. این مسأله مربوط به سرعت نهایی یک مداد است که روی سطح شیبداری به سمت پایین می‌آید. برای اجتناب از پیچیدگی‌های مربوط به ممان اینرسی، فرض کنید که کل جرم مداد، M، در مرکز محورش باشد و هم‌چنین سطح مقطع مداد شش ضلعی منتظمی به ضلع r باشد.

زاویه شیب سطح شیبدار α می‌باشد. فرض کنید اصطکاک بین مداد و سطح شیبدار به قدری باشد که مداد روی سطح نلغزد. هم‌چنین فرض کنید سطح آنقدر صلب می‌باشد که مداد در آن فرو نمی‌رود.

(الف) توضیح دهید چرا سرعت مداد حد بالا دارد؟ (فرض کنید مداد همواره با سطح در تماس باشد) چرا مداد به یک سرعت میانگین نهایی می‌رسد؟

(ب) فرض کنید شرایط به گونه‌ای باشند که مداد در انتها به یک سرعت غیر صفر نهایی برسد این سرعت نهایی را به دست آورید.

(پ) کمینه زاویه α چقدر باشد که مداد در نهایت، به سرعتی غیر صفر برسد؟

(ت) بیشینه زاویه α چقدر باشد که مداد همواره با سطح تماس داشته باشد؟

(ث) بخش‌های (ب)، (پ) و (ت) را با فرض اینکه مداد N وجه داشته باشد، حل کنید. فرض کنید N بسیار بزرگ و α کوچک می‌باشد. (می‌توانید در صورت نیاز از تقریب زوایای کوچک $\sin\theta \simeq \theta$ استفاده کنید.)

(ج) برای N های بزرگ، بیشینه سرعت مجاز برای مداد را که به واسطه آن، مداد همواره با سطح در تماس باشد، به‌دست آورید.

سؤالات سال

۱۹۹۶

۱. (الف) توپ $B_۲$ با جرم بسیار کوچک $m_۲$ بر روی توپ $B_۱$ با جرم بسیار زیاد $m_۱$ قرار دارد پایین‌ترین نقطه $B_۱$ نسبت به زمین در ارتفاع h است و پایین‌ترین نقطه $B_۲$ در فاصله $h+d$ از زمین می‌باشد. توپ‌ها رها می‌شوند توپ بالایی ($B_۲$) تا چه ارتفاعی بالا می‌پرد؟ (با این تقریب که $m_۱$ بسیار از $m_۲$ سنگین‌تر است مسأله را حل کنید.) فرض کنید که برخوردها کاملاً کشسان باشند و برای اینکه مسأله راحت‌تر باشد فرض کنید که توپ‌ها در ابتدا در یک فاصله بسیار کم از یکدیگر قرار داشته و همزمان برخورد می‌کنند.

(ب) n توپ $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$ با جرم‌های $m_۱, m_۲, \ldots, m_n$ که ($m_۱ >> m_۲ >> \cdots >> m_n$) به صورت قائم بر روی هم قرار دارند. پایین‌ترین نقطه $B_۱$ در ارتفاع h و پایین‌ترین نقطه B_n در ارتفاع $h+l$ ازسطح زمین است. توپ‌ها رها می‌شوند. توپ بالایی چقدر بالا می‌پرد؟ (با این تقریب که $m_۱$ از $m_۲$ بسیار سنگین‌تر و آن هم از $m_۳$ بسیار سنگین‌تر است و به همین ترتیب الی آخر، مسأله را حل کنید. فرض کنید همه برخوردها کشسان است. فرض قسمت (الف) را نیز برای راحت شدن مسأله در این بخش در نظر بگیرید.)

اگر $h = ۱m$ باشد، کم‌ترین تعداد توپ‌هایی که لازم است تا توپ بالایی تا ارتفاع $۱km$ بالا برود، چقدر است؟

(فرض کنید که توپ‌ها همچنان برخوردهای کشسان دارند. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. فرض کنید l نیز قابل صرف‌نظر است)

۲. (الف) فرض کنید $\overrightarrow{E}$ میدان الکتریکی ناشی از وجود حلقه‌ای به شعاع R و با چگالی بار یکنواخت باشد. نشان دهید $\overrightarrow{E}$، یک جا در سطح استوانه‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ که محورش از مرکز حلقه می‌گذرد و عمود بر سطح حلقه است، موازی با محور استوانه می‌باشد.

(ب) دو مخزن استوانه‌ای همشکل A و B حاوی حجم یکسانی از آب هستند. بادکنک پر بادی به وسیله نخ به انتهای مخزن B متصل است فرض کنید جرم هوای داخل بادکنک قابل صرف‌نظر است توجیه زیر ادعا می‌کند که فشار آب در انتهای مخزن A با فشار آب در انتهای مخزن B یکسان است. آیا این توجیه درست است؟

توجیه: کل نیرویی که انتهای ظروف A و B وارد می‌کنند، برابر با وزن آب درون مخزن‌ها می‌باشد. هم‌چنین نیرویی که انتهای ظروف وارد می‌کنند برابر با فشار کف ظرف ضرب در سطح مقطع ظرف است. بنابراین چون سطح مقطع دو ظرف و وزن آب درون آن‌ها برابر می‌باشد فشار کف دو ظرف نیز مساوی است.

۳. (الف) دو حلقه دایره‌ای شکل، به شعاع R در تماس با یکدیگر و در صفحه قائم قرار دارند. توپ کوچکی با جرم m و ابعاد قابل صرف‌نظر در بین حلقه‌ها به جلو و عقب نوسان می‌کند. (فرض کنید حلقه‌ها همواره در تماس با یکدیگر قرار داشته باشند.) شرایط اولیه به گونه‌ای است که توپ همیشه بر روی یک سهمی حرکت می‌کند. زاویه‌ای که سهمی نسبت به افق با حلقه‌ها می‌سازد، θ است.

(i) تغییرات مولفه افقی اندازه حرکت توپ در هر برخورد، $\Delta P_x(\theta)$ به‌ازاء چه مقدار بیشینه می‌شود؟

(ii) فرض کنید S سرعت توپ دقیقاً قبل یا بعد از برخورد و $\overline{F}_x(\theta)$ مولفه افقی نیروی متوسطی که حلقه‌ها را در تماس با هم نگه می‌دارد باشد مقادیر حدی (۱) $\theta = \varepsilon$ و (۲) $\theta = \frac{\pi}{۲} - \varepsilon$ را در نظر بگیرید که در آن ε بسیار کوچک است.

(A) بیشینه S را در این دو حالت حدی بیابید.

(B) یک رابطه‌ی تقریبی برای $\overline{F}_x(\theta)$ در این دو حالت حدی بیابید.

(می‌توانید از تقریب زوایای کوچک $\sin\varepsilon = \varepsilon$ و $\cos\varepsilon = ۱ - \frac{\varepsilon^۲}{۲}$ استفاده کنید.)

(ب) حالت کلی‌تری را در نظر بگیرید که توپ در برخورد با دو سطح به معادله $f(x)$، (برای $x > ۰$) و $f(-x)$، (برای $x < ۰$)، به جلو و عقب برود. فرض کنید حرکت توپ همچنان بر روی یک سهمی است. (توپ بین نقاط $(x_۰, f(x_۰))$ و $(-x_۰, f(x_۰))$ به جلو و عقب می‌رود.)

(i) تغییرات مولفه‌ی افقی تکانه توپ در هر برخورد، $\Delta P_x(x_۰)$، به ازاء چه تابع $f(x)$، مستقل از نقطه $x_۰$ است؟

(ii) مقدار متوسط مولفه‌ی افقی نیرویی که دو نیمه سطح را به هم متصل می‌کند، به ازاء چه $f(x)$، مستقل از نقطه $x_۰$ است؟

۴. جسمی به جرم M در رأس زاویه‌ای که به وسیله دو تکه چوب به طول l و جرم قابل صرف‌نظر ساخته شده است، قرار دارد. زاویه بین تکه چوب‌ها θ است. θ بسیار کوچک است.

یکی از چوب‌ها (مثلاً سمت چپی) به صورت عمودی قرار گرفته است. به جرم مذکور یک ضربه بسیار کوچک وارد کنید. در نهایت چوب سمت راست زمین می‌خورد فرض کنید این اتفاق در زمان $t_۰$ بیفتد. (فرض کنید اصطکاک کافی بین چوب‌ها و زمین باشد به طوری که چوب‌ها بر روی زمین نلغزند و فرض کنید که چوب‌ها بعد از برخورد به زمین بالا نمی‌آیند.) تماس چوب سمت چپ با زمین قطع می‌شود و سیستم حول چوب سمت راست می‌چرخد. جرم ابتدا بالا می‌آید و سپس پایین می‌آید تا وقتی که چوب سمت چپ به زمین برخورد کند. در نهایت این برخوردها تمام شده و سیستم به حالت سکون می‌رسد.

فرض کنید این اتفاق در زمان T بیفتد.

برای θ های کوچک، مقدار $T - t_{\circ}$ را حساب کنید. (می‌توانید از تقریب زوایای کوچک $\sin\theta = \theta$ و $\cos\theta = ۱ - \frac{\theta^{۲}}{۲}$ استفاده کنید.)

راهنمایی:

$$(a) \qquad \ln(۱ - x) = -\left(x + \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۴}}{۴} + \ldots\right) \quad \text{برای} \quad -۱ < x < ۱$$

$$(b) \qquad ۱ + \frac{۱}{۳^{۲}} + \frac{۱}{۵^{۲}} + \frac{۱}{۷^{۲}} + \cdots = \frac{\pi^{۲}}{۸}$$

۵. آجری به جرم بسیار بزرگ M، در فاصله $۱m$ از لبه سطح بدون اصطکاکی قرار دارد. زاویه شیب سطح θ است. یک کش کشسان آجر را به لبه‌ی سطح متصل می‌کند. جسم استوانه‌ای C به جرم بسیار کوچک m و شعاع r و لختی دورانی $I = \rho m r^{۲}$، به گونه‌ای که محورش موازی با سطح باشد، روی کش قرار دارد. در $t = ۰$ آجر می‌تواند بر روی سطح به سمت پایین حرکت کند و C می‌تواند بر روی کش حرکت کند.

اگر کش کاملاً یکسان کشیده شود و M به حد کافی بزرگ باشد و کش اثری بر حرکت آجر نداشته باشد و تنها سطحی برای حرکت C ایجاد کند و هم‌چنین اصطکاک بین C و کش به اندازه‌ای باشد که C بدون لغزش بر روی کش حرکت کند و C نیز به واسطه جرم کش اثری بر کشیده شدن کش نداشته باشد:

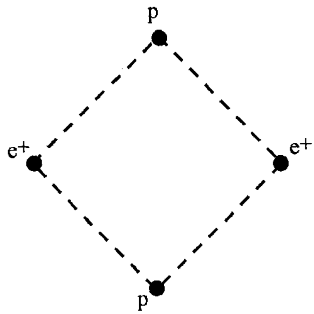
(الف) نشان دهید اگر $\rho = ۰$ باشد، C همواره در فاصله $۱m$ از آجر باقی می‌ماند.

(ب) نشان دهید اگر $\rho > ۰$ باشد:

(i) بعد از گذشت زمان کافی، نسبت مسافتی که C در راستای سطح می‌پیماید به مسافتی که آجر در راستای سطح می‌پیماید به یک میل می‌کند.

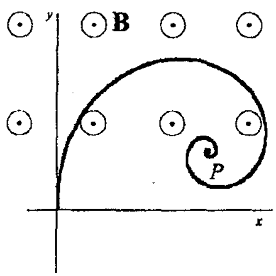
(ii) سرعت نسبی آجر و C به صورت تابع $\frac{-(۱-\rho)}{۱+\rho}$ $G(\rho)t$ رفتار می‌کند، که $G(\rho)$ تابعی از ρ است.

سؤالات سال ۱۹۹۷

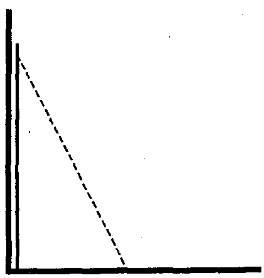


۱. (الف) قالب یخی که در آن حباب هوای کوچکی ایجاد شده است، در ظرف آبی شناور می‌باشد. یخ ذوب می‌شود. چه تغییری در سطح آب ایجاد می‌شود؟
اگر به جای حباب هوا، میخ در یخ وجود داشته باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟

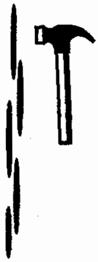
(ب) دو پروتون در دو راس مقابل یک مربع قرار دارند و دو پوزیترون در دو رأس دیگر هستند. اضلاع مربع $l = ۱۰^{-۳}m$ می‌باشد. ذرات آزادند. مقدار تقریبی سرعت ذرات در حالتی که به قدر کافی از هم دور شده‌اند، چقدر است؟ ـ جرم پوزیترون $m \simeq ۹/۱ \times ۱۰^{-۳۱}kg$ و جرم پروتون $M \simeq ۱/۷ \times ۱۰^{-۲۷}kg$



۲. میدان مغناطیسی $\overrightarrow{B} = B\hat{z}$، در بخش $y > ۰$ فضا، مطابق شکل، به سمت خارج صفحه اعمال شده است. ذره‌ای به جرم m و بار q در راستای محور y و با سرعت $v_۰$ حرکت کرده و به محدوده‌ی $y > ۰$ وارد می‌شود. فرض کنید در $y > ۰$ به ذره نیروی اصطکاک، F_f، متناسب با سرعتش وارد می‌شود. $(\overrightarrow{F}_f = -\alpha \overrightarrow{v})$.اگر نیروی اصطکاک آنقدر زیاد باشد که ذره برای همیشه در محدوده $y > ۰$ باقی بماند، کم کم به نقطه P میل می‌کند. مختصات نقطه P را به‌دست آورید.

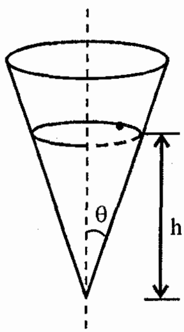


۳. تکه چوبی به طول l با چگالی طولی جرم یکنواخت، به دیوار بدون اصطکاکی تکیه داده شده است. انتهای پایینی چوب در فاصله بسیار کمی از پای دیوار قرار دارد. چوب رها می‌شود و انتهای چوب شروع به دور شدن از دیوار می‌کند. سر چوب روی دیوار سر می‌خورد و پایین می‌آید. بعد از گذشت زمان زیاد، مولفه افقی سرعت مرکز جرم چوب، چقدر است؟



۴. این مسأله به تکه چوب‌های صلب مربوط می‌شود. چوب‌هایی که طول‌شان $2r$ و جرمشان M_i و لختی دورانی آن‌ها $\rho M_i r^2$ است. (ρ یک ثابت عددی است.) مرکز جرم هر تکه چوب در مرکز آن قرار دارد. (همه آن‌ها دارای r و ρ و توزیع نسبی جرم یکسان هستند. ولی جرم آن‌ها با هم فرق دارد) ($M_1 >> M_2 >> M_3 >> \ldots$.)

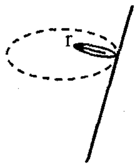
تکه چوب‌ها بر روی یک سطح بدون اصطکاک افقی قرار دارند. انتهای آن‌ها طوری در کنار هم قرار گرفته است که یکدیگر را می‌پوشاند و در یک فاصله بسیار کم از هم قرار دارند. به اولین و سنگین‌ترین تکه چوب یک ضربه آنی وارد می‌شود (مطابق شکل) این ضربه باعث می‌شود تکه چوب بچرخد (ضربه به آن طرف از تکه چوب وارد می‌شود که تکه چوب دوم در طرف راست آن باشد (مطابق شکل) بسته به مقدار ρ تکه چوب اول می‌تواند با تکه دوم برخورد کند که بعد آن هم با تکه چوب سوم برخورد کند و الی آخر. فرض کنید همه برخوردها بین تکه چوب‌ها کشسان باشند. سرعت nامین تکه چوب می‌تواند (۱) صفر (۲) بینهایت (۳) مستقل از n باشد. مقدار ρ برای هر سه حالت مذکور، وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند، چقدر است؟ (یک مثال برای تکه چوبی که این ρ را دارد بزنید). توضیحات: می‌توانید از این تقریب که M_1 بسیار از M_2 و آن هم بسیار از M_3 بزرگ‌تر و ... است، استفاده کنید.



۵. (الف) مخروطی مطابق شکل از طرف رأس، عمود بر زمین قرار دارد. زاویه رأس مخروط 2θ است. ذره‌ای با ابعاد قابل صرف‌نظر، در سطح داخلی مخروط حرکت می‌کند. این سطح بدون اصطکاک است. فرض کنید ذره در دایره‌ای به فاصله h از رأس مخروط بچرخد. بسامد زاویه‌ای (ω) این حرکت دایره‌ای چقدر است؟

(ب) حال فرض کنید سطح اصطکاک دارد و یک حلقه کوچک به شعاع r بر روی سطح داخلی مخروط، بدون لغزش می‌چرخد.

نقطه تماس حلقه و مخروط بر دایره‌ای به فاصله h از رأس مخروط می‌چرخد و سطح حلقه نیز همواره بر خط و اصل نقطه تماس و رأس مخروط عمود است



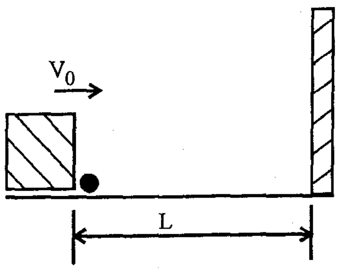
بسامد زاویه‌ای این حرکت چقدر است؟ آن را با جواب قسمت (الف) مقایسه کنید. توضیحات: r از شعاع دایره‌ای که حلقه روی آن می‌چرخد $(h\tan\theta)$ بسیار کوچکتر است.

۶. آجری با جرم زیاد M بر روی سطح بدون اصطکاکی با سرعت $V_\circ$، به سمت دیواری در حال حرکت است. آجر با ذره‌ای با جرم بسیار کم m و ابعاد قابل صرف‌نظر، که در ابتدا در فاصله L از دیوار در حال سکون است، برخورد می‌کند. ذره به صورت کشسان از آجر جدا می‌شود و به دیوار برخورد می‌کند. ذره به حرکت جلو و عقب بین دیوار و آجر ادامه می‌دهد.

(الف) آجر تا چه فاصله‌ای به دیوار نزدیک می‌شود؟

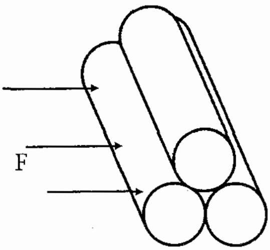
(ب) تا زمانی که آجر به نزدیکترین فاصله‌اش از دیوار برسد، ذره چند بار از آجر جدا شده است؟

در هر دو قسمت الف و ب می‌توانید از فرض $M >> m$، استفاده کنید و جواب‌های تقریبی را بدست آورید. (مقادیر $M = ۱۰kg$، $m = ۱gr$، $L = ۱m$ و $v_\circ = ۱m/s$ را در نظر گرفته و جواب‌های تقریبی دو قسمت بالا را به‌دست آورید.)



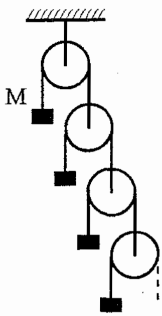
سؤالات سال

۱۹۹۸



۱. سه استوانه یکسان مطابق شکل، بر روی زمین قرار گرفته‌اند. دو تای آن‌ها روی زمین و دیگری روی دو استوانه دیگر قرار دارد. زمین و استوانه‌ها بدون اصطکاک هستند. نیرویی به سمت راست به استوانه سمت چپ وارد می‌کنیم. با این شرط که سه استوانه در تماس با یکدیگر باقی بمانند، بیشینه و کمینه شتابی که سیستم می‌گیرد، چقدر است؟

۲. ذره بارداری در مرکز یک فضای دایره‌ای قرار دارد. میدان مغناطیسی B در این فضا اعمال می‌شود. $\vec{B} = \vec{B}(r)$ فقط به فاصله شعاعی بستگی دارد و جهت آن عمود بر سطح دایره است. کل شار عبوری از دایره صفر است. به ذره ضربه‌ای می‌زنیم. نشان دهید سرعت ذره هنگام ترک کردن دایره در جهت شعاع می‌باشد.



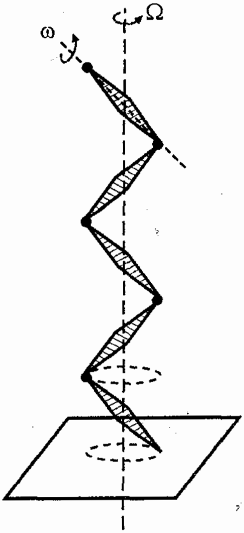
۳. یک ماشین آتوود بینهایت، مطابق شکل، در نظر بگیرید. یک انتهای طنابی که از هر قرقره می‌گذرد به وزنه‌ای به جرم M و انتهای دیگرش به قرقره دیگر متصل است. از جرم نخ‌ها و قرقره‌ها صرف‌نظر کنید. جرم‌ها را به طور ناگهانی رها می‌کنیم. شتاب جسم بالایی چقدر است؟

برای حل مسأله فرض کنید که N قرقره با جرم داریم، چه اتفاقی برای قرقره $N + ۱$ ام می‌افتد؟ سپس N را به سمت بینهایت میل دهید.
می‌توان از روش‌های دیگر نیز در حل این مسأله استفاده کرد.

۴. هر ضلع یک ۲۰ وجهی منتظم دارای مقاومت ۱Ω است. مقاومت معادل بین دو رأس مجاور را حساب کنید. (یک ۲۰ وجهی منتظم از ۲۰ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. ۱۲ رأس و ۳۰ ضلع دارد که در هر رأس ۵ ضلع به هم می‌پیوندند.)

۵. N فرفره با تقارن محوری، مطابق شکل، در نظر بگیرید. فرفره پایینی بر روی یک میز بدون اصطکاک قرار دارد. هر فرفره به وسیله یک محور آزاد به فرفره بالایی خودش متصل است. زاویه شیب فرفره‌ها یکسان است. مرکز جرم هر فرفره در وسط خط تقارن آن می‌باشد. می‌خواهیم یک حرکت دایره‌ای با سرعت

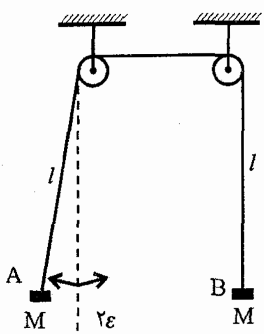
زاویه‌ای Ω حول محور فرفره‌ها داشته باشیم که در آن مرکز جرم فرفره‌ها در یک نقطه ثابت و نوک آن‌ها بر روی دایره‌هایی بچرخد. سرعت زاویه‌ای فرفره بالایی حول محور تقارنش، ω است. سرعت زاویه‌ای بقیه فرفره‌ها را به صورت تابعی از ω به‌دست آورید. (می‌توان با این تقریب که سرعت‌ها بسیار زیاد هستند، مسأله را حل کرد)



۶. دو جسم A و B با جرم‌های M به دو انتهای یک طناب بی‌جرم متصل‌اند. طناب از روی دو قرقره بی‌جرم که از ابعادشان صرف‌نظر می‌کنیم، عبورکرده است. اجسام در فاصله l از قرقره‌ها و در حال سکون هستند. جرم A را به وسیله ضربه کوچکی با دامنه ϵ، $(\epsilon << l)$، به نوسان درمی‌آوریم. به نظر می‌رسد بعد ازگذشت زمان طولانی، یکی از اجرام تدریجاً بالا آمده و با قرقره مربوط به خودش، برخورد می‌کند.

(الف) کدام یک از اجرام به قرقره می‌رسد؟

(ب) سرعت جرم B دقیقاً قبل از برخورد جسم مورد نظر به قرقره، چقدر است؟



سؤالات سال
۱۹۹۹

۱. (الف) توزیع یکنواخت بار را در یک کره در نظر بگیرید. نسبت پتانسیل الکتریکی روی سطح به پتانسیل الکتریکی مرکز کره چقدر است؟

(ب) مکعبی با توزیع یکنواخت بار، در نظر بگیرید. نسبت پتانسیل الکتریکی گوشه مکعب به پتانسیل الکتریکی مرکز مکعب چقدر است؟ (فرض کنید پتانسیل الکتریکی در بینهایت صفر باشد.)

۲. چرخی روی زمین می‌چرخد. به وسیله دوربین ساکنی از حرکت چرخ عکس می‌گیریم. با توجه به صفر نبودن زمان نوردهی دوربین، پره‌های چرخ به صورت کدر در عکس می‌افتند. در چه مکانی روی عکس این پره‌ها به صورت کدر نمی‌افتند.

۳. موتورسیکلتی می‌خواهد روی مسیر دایره‌ای به شعاع R حرکت کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین چرخ‌ها و زمین ثابت است. موتورسیکلت از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. کم‌ترین مسافتی که موتورسیکلت باید طی کند تا به بیش‌ترین سرعت مجاز خود برسد چقدر است؟ (این سرعتی است که اگر سرعت موتورسیکلت از آن بالاتر برود، از دایره خارج می‌شود.)

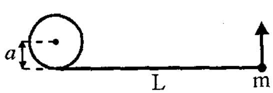
۴. روباهی با سرعت v به دنبال خرگوشی می‌دود و خرگوش نیز با سرعت v فرار می‌کند. در هر لحظه سرعت روباه هم‌راستا با خط واصل روباه و خرگوش می‌باشد. سرعت خرگوش نیز، با این خط زاویه α می‌سازد. اگر فاصله اولیه آن‌ها l باشد:

(الف) در چه زمانی و کجا روباه به خرگوش می‌رسد؟ اگر این اتفاق هیچ وقت نیفتد فاصله نهایی آن‌ها چقدر است؟

(ب) حال اگر خرگوش راستای مسیر خود را تغییر ندهد، چه موقع و کجا روباه خرگوش را می‌گیرد؟ اگر این اتفاق نیفتد فاصله نهایی آن‌ها چقدر است؟

۵. ابری از ذرات ریز آب که در هوا به طور یکنواخت پخش شده‌اند، تشکیل شده است. یک قطره باران از میان آن‌ها می‌گذرد. بعد از یک زمان طولانی قطره باران با شتاب ثابت حرکت می‌کند. این شتاب را حساب کنید. (فرض کنید وقتی قطره باران به هر ذره آب برخورد کند، ذره آب با قطره باران جمع شده و قطره‌ای کروی تشکیل می‌دهند. از مقاومت هوا نیز صرف‌نظر کنید.)

۶. جرم m به انتهای فنری با طول تعادل صفر و ثابت k متصل است. انتهای دیگر فنر ثابت است. جرم m در دایره‌ای به شعاع L بر روی یک میز افقی بدون اصطکاک می‌چرخد.

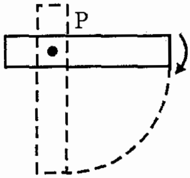


(طول اولیه صفر به معنای آن است که می‌توان از طول اولیه فنر، در مقایسه با L صرف‌نظر کرد.) یک میله

قائم با شعاع a، ($a << L$) در مرکز دایره به میز وصل می‌کنیم. جرم به دور میله می‌چرخد و در نهایت با آن برخورد می‌کند. فرض کنید فنر بر روی میله نلغزد. چقدر طول می‌کشد که جرم به میله برخورد کند؟

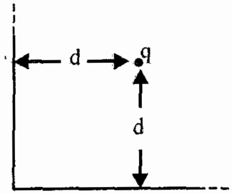
سؤالات سال

۲۰۰۰



۱. تکه چوبی به طول l و چگالی جرمی یکنواخت، حول نقطه P واقع بر آن، دوران می‌کند. در ابتدا چوب به صورت افقی قرار دارد. آن را رها می‌کنیم. نقطه P باید کجا باشد که چوب در کم‌ترین زمان بتواند به حالت عمودی برسد؟

۲. (الف) دو صفحه نیمه بینهایت رسانا، بر هم عمودند بار q را از بینهایت به نقطه‌ای در فاصله d از هر دو صفحه می‌آوریم. کار انجام شده برای آوردن این بار، (W)، چقدر است؟



(ب) وقتی بار q در فاصله d است، دو صفحه رسانا را با دو صفحه عایق تعویض می‌کنیم. (در این حالت بار روی صفحات دیگر آزاد نیستند) بار q را دوباره به بینهایت می‌بریم. کار انجام شده برای بردن بار، (W')، چقدر است؟

(ج) انرژی پتانسیل الکتریکی بارهای روی صفحات عایق چقدر است؟

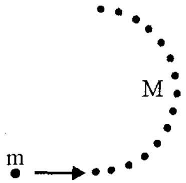
۳. چگالی متوسط ماده سازنده سیاره‌ای برابر چگالی متوسط زمین، فشار اتمسفر بر روی سطح آن برابر فشار اتمسفر بر روی سطح زمین و دمای اتمسفر آن برابر دمای اتمسفر در سطح زمین است. هم‌چنین ترکیبات اتمسفر سیاره همان ترکیبات اتمسفر زمین هستند. شعاع سیاره چقدر باشد تا پرتو نوری بتواند بر مسیر دایره‌ای دقیقاً روی سطح سیاره، حرکت کند.

(رابطه ضریب شکست نور با چگالی هوا، $n(\rho) = ۱ + \epsilon\rho$، می‌باشد. ϵ مقداری ثابت است.)

جواب‌های خود را بر حسب R_E (شعاع زمین) و g_E (شتاب جاذبه در سطح زمین) و P_E (فشار اتمسفر در سطح زمین) و ρ_E (چگالی اتمسفر در سطح زمین) و ϵ بیان کنید.

۴. N توپ بر روی یک نیم دایره روی میز بدون اصطکاکی، قرار دارند. جرم کل توپ‌ها، M می‌باشد. توپ دیگری به جرم m، مطابق شکل، از سمت چپ، به نیم دایره برخورد کرده و پس از برخورد کشسان با N توپ موجود در نیم دایره از سمت چپ و بر روی خطی مستقیم، خارج می‌شود.

(الف) در حد $N \to \infty$، (جرم هر توپ $(\frac{M}{N})$ به سمت صفر میل می‌کند)، کمینه مقدار $\frac{M}{m}$ را طوری بیابید که توپ بتواند در نهایت بر خط مستقیمی از سمت چپ نیمدایره خارج شود.



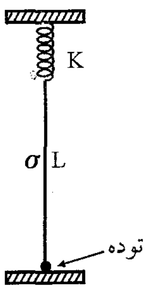
(ب) در شرایط حدی قسمت (الف) نسبت سرعت نهایی توپ به جرم m را به سرعت اولیه‌اش به‌دست آورید.

۵. یک میز دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای Ω در حال چرخیدن است. توپی بدون لغزش روی آن می‌غلتد. چگالی جرمی توپ یکنواخت و لختی دورانی آن $I = \frac{۲}{۵}MR^۲$ است. نشان دهید با هر شرایط اولیه‌ای، (بدون لغزش)، توپ می‌تواند از دید ناظر لخت، روی دایره‌ای حرکت کند. بسامد زاویه‌ای این حرکت دایره‌ای، چقدر است؟

۶. طنابی با چگالی جرمی σ از فنری با ثابت K آویزان شده است. در حالت تعادل، طول L از طناب آویزان و انتهای طناب به صورت توده‌ای بر روی زمین قرار دارد.

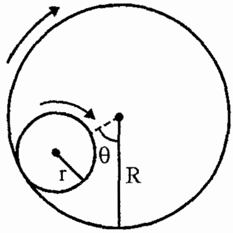
طناب را به اندازه‌ی کوچک b بالا می‌بریم و رها می‌کنیم. دامنه نوسانات طناب را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

فرض کنید: $L >> b$ باشد و نیز طناب بسیار باریک باشد. هم‌چنین طول طناب روی زمین از b خیلی کوچک‌تر است. بنابراین همیشه مقداری از طناب با زمین تماس دارد. هم‌چنین فرض کنید طناب با خودش اصطکاک نداشته باشد.

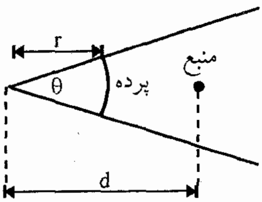


سؤالات سال

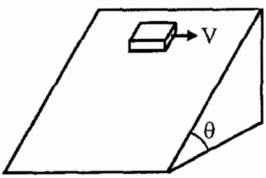
۲۰۰۱



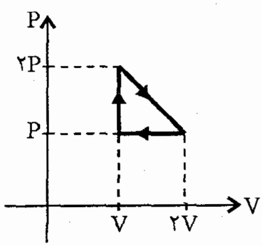
۱. توپی با لختی دورانی $I = \frac{2}{5}mr^2$، بدون لغزش در داخل استوانه‌ای به شعاع R می‌غلتد. استوانه حول محورش، که به صورت افقی قرار دارد، با شتاب زاویه‌ای α می‌چرخد. α چقدر باشد تا مرکز توپ بدون حرکت بماند به طوری که خط گذرنده از مرکز توپ و مرکز استوانه همواره با خط قائم، زاویه θ بسازد؟ (مطابق شکل)



۲. یک چشمه نور یکنواخت کروی، بر روی محور یک مخروط، با زاویه رأس θ و در فاصله d از رأس آن قرار دارد. سطح داخلی مخروط مانند آینه عمل می‌کند. پرده‌ای را مطابق شکل در داخل مخروط طوری قرار داده‌ایم که همه نقاط آن از رأس مخروط به فاصله r باشند. (قطاعی از کره به مرکز رأس مخروط و شعاع r) چه کسری از نور گسیل شده از چشمه، به وسیله پرده دریافت می‌شود؟



۳. آجری بر روی سطح شیبداری به زاویه شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک بین سطح و آجر $\mu = \tan\theta$ است. ضربه‌ای به آجر می‌زنیم و به واسطه این ضربه، آجر با سرعت افقی V، مطابق شکل، شروع به حرکت می‌کند. سرعت آجر را بعد از گذشت زمان طولانی، به‌دست آورید.



۴. بازده چرخه ترمودینامیکی نشان داده شده در نمودار زیر را که به وسیله گاز کامل تک اتمی طی شده است، حساب کنید. رئوس مثلث نقاط $(2v, p), (v, p), (v, 2p)$ هستند.

توضیحات: (۱) بازده یک چرخه ترمودینامیکی برابر با $\eta = \frac{Q_i - Q_o}{Q_i}$ می‌باشد که Q_i گرمای داده شده به سیستم و Q_o گرمای گرفته شده از سیستم است. (۲) گاز را ایده‌آل فرض کرده و انرژی داخلی آن را $\frac{3}{2}nRT$ در نظر بگیرید.

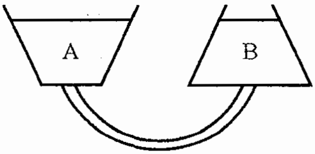
۵. یک کش لاستیکی با طول اولیه L از یک طرف به دیواری متصل شده است. در زمان $t = ۰$ سر دیگر کش را با سرعت v می‌کشیم. کش به صورت یکنواخت کشیده می‌شود. در همان زمان مورچه‌ای که در انتهای کش ولی با فاصله از دیوار قرار دارد، با سرعت u نسبت به کش، به سمت دیوار حرکت می‌کند. آیا مورچه به دیوار می‌رسد؟ اگر می‌رسد چه مدت طول می‌کشد؟

۶. N نقطه در فضا به وسیله مجموعه‌ای از مقاومت‌های یک اهمی به هم متصل شده‌اند. همه نقاط حداقل به وسیله یک مقاومت به هم متصل شده‌اند و تعداد مقاومت‌های متصل به هر نقطه می‌تواند ۱ تا $N - ۱$ باشد. دو نقطه را که با یک مقاومت ۱Ω به هم متصل‌اند، در نظر بگیرید. به خاطر وجود شبکه، مقاومت معادلی بین این دو نقطه وجود دارد. مجموع مقاومت‌های معادل در دو سر هر مقاومت یک اهمی، چقدر است؟

سؤالات سال

۲۰۰۲

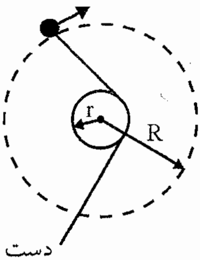
۱. دو مخزن مطابق شکل به وسیله لوله‌ای به هم متصل‌اند.



الف) آیا با گرم شدن آب مخزن A، آب در لوله جریان می‌یابد؟ اگر جواب مثبت است در کدام جهت؟

ب) اگر آب مخزن B گرم شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ (فرض کنید که مخزن‌ها در اثر گرما منبسط نمی‌شوند)

۲. نخ بدون جرمی به دور میله بدون اصطکاکی به شعاع r پیچیده شده است. یک سر نخ را در دست گرفته و به سر دیگرش، جسمی را متصل کرده‌ایم. جسم مذکور، مطابق شکل، بر روی دایره‌ای به شعاع R، روی صفحه افقی بدون اصطکاک، می‌چرخد. در $t = ۰$ جسم با سرعت $v_۰$، مماس بر دایره، شروع به حرکت می‌کند.



با کشیدن طناب، جسم را مقید به حرکت بر روی دایره مذکور، می‌کنیم. طناب همواره با میله تماس دارد. سرعت جسم را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید. توضیح دهید با گذشت زمان چه اتفاقی برای سیستم می‌افتد. (از اثرات نسبیتی صرف‌نظر کنید)

۳. آجری از زمین با زاویه θ نسبت به افق پرتاب شده است. فرض کنید وجه بزرگ‌تر آجر همواره موازی با زمین قرار گیرد. هم‌چنین بعد از برخورد آجر با زمین، هیچ تغییر شکلی در زمین و در آجر رخ نمی‌دهد. ضریب اصطکاک زمین و آجر μ است. θ چقدر باشد که آجر قبل از توقف بر روی زمین، بیشینه مسیر افقی را بپیماید؟

۴. یک صفحه فلزی بر روی پشت بامی با زاویه θ قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین دو سطح μ می‌باشد. $(\mu > \tan\theta)$ در طول روز صفحه فلزی آرام آرام منبسط شده و در طول شب منقبض می‌شود، ولی هیچگاه تماسش با پشت بام قطع نمی‌شود. ضریب انبساط گرمایی صفحه، α، اختلاف دمای صبح و شب، ΔT، و طول صفحه (از نقطه بالایی تا پایینی آن)، l می‌باشد.

بعد از یکسال، صفحه فلزی چقدر پایینتر از لبه پشت بام قرار می‌گیرد؟ $\theta = ۳۰$ و $\mu = ۱$ و $l = ۱m$ و $\Delta T = ۱۰^\circ c$ و $\alpha = ۱۷ \times ۱۰^{-۶}(c)^{-۱}$

۵. می‌توان برای بررسی رفتار ذره باردار در مقابل صفحه رسانای بینهایت از بار تصویری استفاده کرد. اگر ذره حرکت کند، جریان‌های ایجاد شده در صفحه فلزی با حرکت ذره مخالفت می‌کنند. اگر بار تصویری بعد از گذشت زمان τ، از حرکت بار اصلی با خبر شود:

(الف) نیروی لازم برای مخالفت با حرکت ذره‌ای با بار q که با سرعت v موازی یک صفحه فلزی بینهایت حرکت می‌کند، چقدر است؟ فرض کنید فاصله بار تا صفحه r باشد.

(ب) مولفه در راستای $\vec{v}$ نیروی F را که در قسمت (الف) حساب کردید، برای v و τ کوچک، به‌دست آورید. ضریب میرایی، γ، چقدر است؟ $(\vec{F} = -\gamma\vec{v})$

(پ) ضریب میرایی برای حرکت عمود بر صفحه چقدر است؟

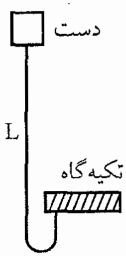
۶. توپ کوچکی به طناب بدون جرمی، به طول l متصل است. انتهای دیگر طناب به میله عمودی باریکی وصل شده است. در ابتدا طناب با راستای قائم زاویه θ می‌سازد و توپ بر روی دایره افقی حرکت می‌کند. با گذشت زمان طناب به دور میله می‌چرخد. میله بسیار باریک است و در نتیجه طول آزاد طناب بسیار آرام کاهش یابد. بنابراین می‌توان مسیر حرکت توپ را با دایره تقریب زد. هم‌چنین اصطکاک میله زیاد است و طناب بر روی آن نمی‌لغزد.

(الف) فاصله نقطه اتصال طناب و میله تا نقطه برخورد جسم با میله، چقدر است؟

(ب) نسبت سرعت نهایی توپ، قبل از برخورد با میله، به سرعت اولیه آن چقدر است؟

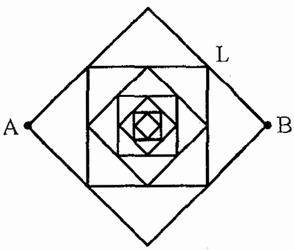
سؤالات سال

۲۰۰۳



۱. طنابی به جرم M و طول L، مطابق شکل، از نقطه‌ای آویزان شده است. انتهای دیگر طناب به تکیه‌گاهی متصل است. فرض کنید طول کمی از طناب زیر تکیه گاه باشد. طناب را رها می‌کنیم، نیرویی را که تکیه‌گاه به طناب وارد می‌کند، به صورت تابعی از زمان حساب کنید.

۲. جسمی به انتهای یک طناب بدون جرم متصل شده است. انتهای دیگر طناب به تیر قائم و بدون اصطکاکی متصل است. طناب را با دورهای دایره‌ای افقی بسیار زیاد، به طوری که جسم با تیر تماس داشته باشد، به دور تیر می‌پیچانیم. جسم را رها می‌کنیم و طناب آرام آرام باز می‌شود. طناب در زمانی که به طور کامل باز شده است، چه زاویه‌ای با تیر می‌سازد؟



۳. شبکه مقاومتی مطابق شکل، با مربعی به ضلع L شروع شده است. وسط هر ضلع را به وسط ضلع مجاور متصل می‌کنیم تا مربع دیگری به وجود آید و این روند را تا بینهایت ادامه می‌دهیم. مقاومت معادل دو سر شبکه، (بین A و B)، را تعیین کنید. (فرض کنید همه سیم‌ها دارای سطح مقطع یکسان و مقاومت ویژه برابر باشند،) جواب خود رابر حسب R (مقاومت سیم به طول L)، بیان کنید.

۴. ذره بارداری در فضایی که در آن نیروی اصطکاکی متناسب با سرعتش به آن وارد می‌شود، قرار دارد. ذره در فاصله $10\,cm$ از نقطه شروع حرکت متوقف می‌شود. اگر میدان مغناطیسی با اندازه نامعلوم، در فضا اعمال شود ذره حرکتی مارپیچ خواهد داشت و در فاصله $6cm$ از نقطه شروع متوقف می‌شود ($6cm$ فاصله مستقیم است.) اگر میدان مغناطیسی دو برابر شود، ذره در چه فاصله‌ای از نقطه شروع متوقف می‌شود؟

۵. توپی با لختی دورانی $I=\frac{2}{5}MR^2$، به طور کشسان به سطحی مایل که نسبت به افق زاویه θ می‌سازد، برخورد کرده و برمی‌گردد. سرعت توپ در جهت عمود بر سطح، قبل و بعد از برخورد تغییر نمی‌کند. هم‌چنین توپ در هنگام برخورد بر روی سطح نمی‌لغزد. این به معنای آن است که حرکت دورانی

و انتقالی توپ بر هم اثر می‌گذارند.

سرعت اولیه توپ عمود بر سطح و مقدار آن V می‌باشد و سرعت دورانی اولیه آن صفر می‌باشد. مؤلفه‌ای از سرعت توپ را که در راستای سطح می‌باشد بعد از n امین برخورد آن با سطح، به‌دست آورید.

۶. توپی با لختی دورانی $I = \frac{2}{5}MR^2$، بدون لغزش بر روی سطح داخلی یک مخروط ثابت که از رأس بر روی زمین قرار گرفته است، می‌چرخد. زاویه رأس مخروط 2θ می‌باشد. توپ در دایره افقی به شعاع l می‌چرخد و نقاط تماس توپ، (نقاطی از توپ که بامخروط در حال تماس هستند)، مسیر دایره‌ای نه لزوماً بزرگ را می‌پیمایند. شعاع این دایره چقدر باشد که توپ در سریع‌ترین حالت ممکن مسیر را بپیماید؟ می‌توان از تقریب $R << l$ استفاده کرد. هم‌چنین ضریب اصطکاک بین توپ و مخروط را بسیار زیاد در نظر بگیرید.

سؤالات سال

۲۰۰۴

۱. الف) در نظر بگیرید که شما سوار بر سورتمه‌ای هستید که با یک هل دادن روی سطح یخ بدون اصطکاکی شروع به سر خوردن می‌کند. از دید دستگاه مرجع یخ، برف به صورت عمودی بر روی سورتمه می‌بارد. فرض کنید که سورتمه مقید است تا در یک مسیر مستقیم حرکت کند. کدام یک از استراتژی‌های زیر باعث می‌شود سورتمه سریع‌ترین و کندترین حرکت خود را داشته باشد؟ دلیل خود را شرح دهید.

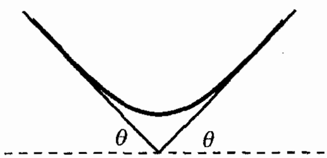
I) شما برف‌ها را در جهت عمود بر مسیر سورتمه، از روی سورتمه جاروب می‌کنید (از دید شما در دستگاه مرجع سورتمه)

II) شما برف‌ها را در جهت عمود بر مسیر سورتمه، از روی سورتمه جاروب می‌کنید (از دید ناظری در دستگاه مرجع یخ)

III) شما هیچ کاری انجام نمی‌دهید.

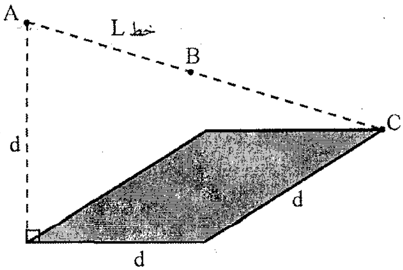
ب) فرض کنید که شما روی لبه‌ی یکی از پله‌های یک راه پله و رو به پله‌ها ایستاده‌اید. شما احساس می‌کنید که در حال افتادن از پشت سر هستید، بنابراین دستان خود را در دایره‌ای عمودی مانند آسیاب بادی می چرخانید. این عکس‌العملی است که مردم مایلند در چنین موقعیتی نشان دهند. اما آیا واقعاً این عمل از افتادن شما جلوگیری می‌کند یا این‌که باعث می‌شود که احمق به نظر برسید؟ دلایل خود را شرح دهید.

۲. یک طناب روی دو صفحه که هر دو به اندازه زاویه θ شیب دارند، (مقدار زاویه θ اختیاری است) مطابق شکل زیر قرارگرفته است. چگالی جرمی طناب یکنواخت است و ضریب اصطکاک آن با صفحات ۱ است. سمت چپ و راست سیستم نیز متقارن هستند.



بیش‌ترین نسبتی از طول طناب که با صفحات در تماس نیست چقدر است؟ این مقدار بیشینه به ازای چه زاویه θای اتفاق می‌افتد؟

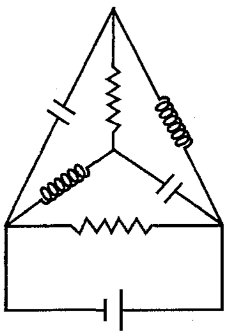
۳. یک صفحه‌ی مربعی صاف به ضلع d به عنوان یک آشکار ساز برای تابشی که از یک ذره گسیل می‌شود، به کار می‌رود. ذره تابش خود را به صورت یکسان در تمام جهات گسیل می‌کند. خط L که نقاط A و C را به هم وصل می‌کند در شکل نمایش داده شده است، C یکی از گوشه‌های مربع است، و A نقطه‌ای است که دقیقاً بالای گوشه‌ی مقابل و به فاصله‌ی d بالای مربع قرار دارد، اگر ذره روی خط L واقع باشد چه نسبتی از کل تابشی که توسط ذره انجام می‌شود، توسط آشکارساز آشکار می‌شود:



الف) اگر ذره در نقطه‌ی A باشد

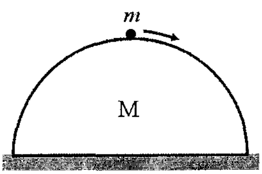
ب) اگر ذره در نقطه‌ی B باشد (در نیمه‌ی فاصله A و C)

ج)اگر ذره در نقطه‌ای بی‌نهایت نزدیک به C باشد.

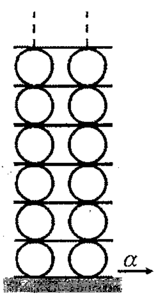


۴. یال‌های یک چهار وجهی مطابق شکل زیر تشکیل یک مدار RLC می‌دهند. دو یال مقابل مقاومت‌های R هستند دو یال مقابل دیگر خازن C و دو یال مقابل دیگر القاگر L هستند. یک ولتاژ متناوب با دامنه $V_{\circ}$ از دو سر یکی از مقاومت‌ها به مدار اعمال می‌شود. اگر بسامد به شکل $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ و علاوه بر آن $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ باشد، دامنه جریان کلی که از مدار می‌گذرد را به‌دست آورید.

۵. یک ذره نقطه‌ای به جرم m در بالای یک نیم‌کره‌ی بدون اصطکاک به جرم M در حال سکون قرار گرفته است مطابق شکل، نیم‌کره روی یک میز بدون اصطکاک قرار دارد. ذره تحت تأثیر ضربه کوچکی قرار گرفته و به پایین نیم‌کره سُر می‌خورد. مقدار زاویه θ که در آن زاویه، ذره تماس خود را با نیم‌کره قطع می‌کند، به‌دست آورید (زاویه θ، زاویه محل قطع تماس نسبت به بالای نیم‌کره می‌باشد.)



در پاسخ به این سؤال $m \neq M$، کافی است معادله‌ای که θ در آن صدق می‌کند را به‌دست آورید (لطفاً رابطه را ساده نمایید).
برای حالت خاص $m = M$، معادله شما می‌تواند به آسانی حل شود، زاویه θ را برای این حالت به‌دست آورید.



۶. مطابق شکل زیر سیستمی بی‌نهایت بلند از استوانه‌های سنگین یکسان و الوارهای سبک را در نظر بگیرید. لختی دورانی استوانه برابر است با $I = \frac{MR^2}{2}$. در هر ردیف دو استوانه وجود دارد و تعداد ردیف‌ها بی‌نهایت است.

استوانه‌ها نسبت به الوارها نمی‌لغزند ولی الوار پایینی می‌تواند آزادانه روی یک میز بلغزد. اگر الوار پایینی را بکشیم به طوری که در راستای افق به اندازه a شتاب بگیرد، شتاب افقی ردیف پایینی استوانه‌ها چقدر است؟

پاسخ مسایل

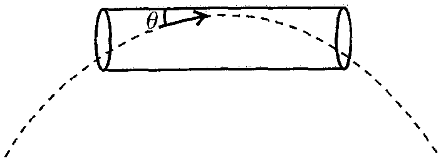
پاسخ سؤالات سال

۱۹۹۵

۱. (الف) فرض کنید توپ بر روی لوله قرارگرفته باشد. اگر یک ضربه کوچک به آن بزنیم. از روی لوله سُر می‌خورد و با زمین برخورد می‌کند با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توانیم سرعت گلوله را در هنگام برخورد به زمین تعیین کنیم: $\frac{۱}{۲}mv^{۲} = mg(r+h)$. بنابراین توپ باید با سرعت بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{۲g(r+h)}$ پرتاب شود.

(ب) **راه حل اول:** فرض کنید سهمی که توپ روی آن حرکت می‌کند، در بالای لوله، با آن زاویه θ بسازد. بنابراین سرعت توپ، در بالای لوله، $(v_\theta \cos\theta, v_\theta \sin\theta)$ خواهد بود. اگر سهمی در وسط لوله به بیشینه ارتفاع خود برسد، (در این حالت کم‌ترین مقدار انرژی را صرف می‌کند) باید:

$$(v_\theta \cos\theta)t = r\sin\theta \qquad v_\theta \sin\theta = gt$$



بنابراین:

$$v_\theta^{۲} = \frac{gr}{\cos\theta}$$

فرض کنید v سرعت پرتاب توپ از زمین باشد. بنابراین طبق اصل بقای انرژی خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}m\left(\frac{gr}{\cos\theta}\right) + mg(h + r\cos\theta)$$

با کمینه کردن این عبارت خواهیم داشت:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad v^{۲} = g(۲\sqrt{۲}r + ۲h)$$

توجه کنید که مستقل از مقادیر h و r، θ برابر ۴۵° خواهد بود.

راه حل دوم: فرض کنید ارتفاع بیشینه سهمی l و برد آن $۲d$ باشد. اگر سرعت اولیه توپ (v_x, v_y) و زمان حرکت آن $۲t$ باشد:

$$\frac{۱}{۲}gt^{۲} = l \quad , \quad v_y = gt \quad , \quad v_x t = d$$

بنابراین:

$$v^۲ = g\left(\frac{d^۲}{۲l} + ۲l\right)$$

ما می‌خواهیم این مقدار را کمینه کنیم.

هم‌چنین می‌دانیم:

$$v_x t = d \quad , \quad \frac{۱}{۲}gt^۲ = l$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x t = x \quad , \quad y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + l \\ t = \frac{x}{d}T \;\rightarrow\; \frac{۱}{۲}gT^۲ = \frac{x^۲}{d^۲}\left(\frac{۱}{۲}gt^۲\right) = \frac{x^۲}{d^۲}l \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-x^۲}{d^۲}l + l$$

سطح مقطع لوله این گونه به‌دست می‌آید:

$$(y-h)^۲ + x^۲ = r^۲$$

بنابراین:

$$y = \frac{۱}{۲l}(۲lh + d^۲ \pm \sqrt{d^۴ + d^۲(۴lh - ۴l^۲) + ۴l^۲r^۲})$$

درصورتی سهمی بر لوله مماس می‌شود که $\Delta = ۰$ شود پس: $d^۲ = ۲l(l-h \pm \sqrt{(l-h)^۲ - r^۲})$.
از آن‌جایی که علامت مثبت به منفی بودن $x^۲$ می‌انجامد، پس علامت منفی را انتخاب می‌کنیم. بنابراین:

$$v^۲ = g(۳l - h - \sqrt{(l-h)^۲ - r^۲})$$

با کمینه کردن v نسبت به l خواهیم داشت:

$$v^۲ = g(۲\sqrt{۲}r + ۲h) \text{ و } l = h \pm \frac{۳}{۲\sqrt{۲}}r$$

۲. (الف) از آن‌جایی که دیواره به سرعت برداشته می‌شود، هیچ کاری توسط گاز انجام نمی‌شود. بنابراین دما تغییر نکرده و T باقی می‌ماند.

(ب) با توجه به تقارن استوانه‌ای و با استفاده از قانون آمپر می‌دانیم، مولفه مماسی B در اطراف جریان برابر با $\frac{\mu_۰ I}{۲\pi r}$ می‌باشد. با استفاده از قانون دست راست درمی‌یابیم که جریان‌های درون صفحه فقط مؤلفه مماسی میدان را ایجاد می‌کنند. بنابراین $B = \frac{\mu_۰ I}{۲\pi r}$.

(پ) انرژی بقا دارد ولی از آن‌جایی که نیروی طناب مرکزی نیست، تکانه زاویه‌ای توپ هاکی بقا ندارد. به عبارت دیگر مرکز در حالت جابجا شدن است. (مسلماً تکانه زاویه‌ای با احتساب زمین بقا خواهد داشت.)

۳. فرض کنید کره‌ای به شعاع aL $(L >> aL >> r)$ اطراف یکی از کره‌های فلزی قرار داشته باشد. از آن‌جایی که $aL << L$، جریان با تقریب خوبی تا شعاع aL، با تقارن کروی جاری می‌شود. برای محاسبه مقاومت تا شعاع aL می‌توان از پوسته‌هایی به ضخامت dr که به صورت سری قرار گرفته‌اند، استفاده کرد. مقاومت هر پوسته $\frac{\rho dr}{۴\pi r^۲}$ است. با انتگرال‌گیری خواهیم داشت: $R = \frac{\rho}{۴\pi}(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{aL})$ که این مقاومت تا شعاع aL است. مقاومت کره دیگر نیز برابر همین مقدار می‌باشد. پس مقاومت معادل دو کره برابر است با: $\frac{\rho}{۲\pi}(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{aL})$.

مقاومت کل بین دو کره فلزی برابر با $\frac{\rho}{۲\pi}(\frac{۱}{r} - \frac{۱}{aL})$ به علاوه مقاومت مربوط به فضای بین دو کره‌ی به شعاع aL می‌باشد. مقاومت فضای بین دو کره فلزی به شعاع aL، کم‌تر از مقاومت استوانه‌ای به شعاع aL و طول L که مقدارش $\frac{\rho L}{\pi a^۲ L^۲}$ است، می‌باشد. از آن‌جایی که $a^۲ >> r$، این مقدار در مقایسه با $\frac{۱}{r}$ قابل صرف‌نظراست. اگر L به حد کافی نسبت به r بزرگ باشد، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} a^۲L >> r \\ L >> r \\ L >> aL >> r \end{array}\right\} \Rightarrow \quad L >> aL >> a^۲L >> r$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\rho}{۲\pi r}$$

۴. (الف) مخروط را در راستای خطی که از قله شروع می‌شود و از گره طناب عبور می‌کند، قطع کنید و بر روی سطحی پهن کنید. شکل حاصل قطاعی از دایره می‌باشد (S).

اگر مخروط خیلی تیز بوده باشد آنگاه S مانند یک تکه باریک کیک می‌شود. اگر مخروط پهن باشد، S مانند کیکی می‌شود که یک تکه از آن را کنده‌ایم. فرض کنید P محل گره باشد. در آن صورت P بر روی خطوط مرزی و در فاصله یکسانی از نوک S واقع است. فرض کنید β زاویه قطاع S باشد.

مسیر حلقه طناب یک خط راست بر روی S می‌باشد. از آن‌جایی که اصطکاک نداریم و با بازکردن مخروط بر روی صفحه، فواصل تغییری نمی‌کنند، طول طناب کم‌ترین فاصله بین دو نقطه است و به عبارت دیگر طناب بر روی خطی مستقیم قرار دارد. این خط مستقیم بین دو نقطه P مشخص وجود دارد که S

کوچک‌تر از نیمدایره باشد. $\beta < ۱۸۰^\circ$

فرض کنید C قطاعی از دایره به شعاع d و مرکز قله مخروط باشد. R برابر با نسبت محیط C به d می‌باشد. اگر S نیمدایره باشد، $R = \pi$ و این به آن معناست که شعاع C برابر با $\frac{d}{۲}$ است. بنابراین $\frac{\alpha}{۲} = \sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})$. بنابراین کوهنورد در صوتی می‌تواند از کوه بالا برود که

$$\alpha < ۶۰^\circ$$

$\alpha < ۶۰^\circ$ به این معناست که مسیری منحنی در اطراف کوه وجود دارد به طوری که طولش از طول مسیر مستقیم تا قله و برگشتن از آن کم‌تر می‌باشد.

(ب) همان روش قبلی را به کار می‌گیریم. مخروط را در صفحه باز کنید. اگر شیب کوه خیلی تند باشد، در حالتی که حلقه بزرگ باشد، کوهنورد خواهد افتاد. اگر کوه شیب نرمی داشته باشد، در حالتی که حلقه کوچک باشد، کوهنورد خواهد افتاد. کوهنورد تنها در حالتی نمی‌افتد که تغییرات مکان گره در راستای کوه تغییرات طول حلقه را جبران کند.

این شرط به معنای آن است که اگر P را به اندازه‌ی l، در راستای کوه بالا (پایین) ببریم، فاصله بین دو نقطه گره به اندازه l، کم (زیاد) خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت: $۱ = ۲\sin(\frac{\beta}{۲})$. پس $\beta = ۶۰^\circ$ و:

$$\alpha = ۲\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)$$

تنها یک زاویه وجود دارد که کوهنورد می‌تواند در راستای کوه از آن بالا رود. راه دیگری نیز برای فهمیدن $\beta = ۶۰^\circ$ وجود دارد. طناب گران، یکنواخت است. بنابراین سه طنابی که به گره بیرونی وصل می‌شوند، کشش یکسانی دارند. بنابراین زاویه بین آن‌ها ۱۲۰° می‌باشد و در نتیجه $\beta = ۶۰^\circ$ خواهد بود.

(پ) مخروط را N بار به روی صفحه لوله کنید. شکل حاصل، S_N، قطاعی از دایره است که به N بخش یکسان تقسیم شده است. هر کدام از این قطاع‌ها یک کپی از مخروط است. S_N باید از نیمدایره کوچک‌تر باشد. پس $R < \frac{\pi}{N}$ بنابراین:

$$\alpha < ۲\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{۲N}\right)$$

(ت) مخروط را N بار بر روی صفحه لوله کنید. می‌خواهیم $N\beta = ۶۰^\circ$ باشد. بنابراین:

$$\alpha = ۲\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{۶N}\right)$$

۵. (الف) وقتی محور چرخش مداد تغییر می‌کند، (مثلاً وقتی یک ضلع دیگر به صفحه برخورد می‌کند)، سرعت محور تغییر کرده و مقداری از انرژی جنبشی تلف می‌شود. وقتی مؤلفه سرعت عمود بر ضلع جدید از سرعت قبلی باقی می‌ماند (که عمود بر ضلع قبلی بوده است) اتلاف انرژی جنبشی، متناسب با مربع سرعت دقیقاً قبل از تغییر محور می‌باشد. وقتی سرعت به مقداری می‌رسد که تغییر انرژی جنبشی با تغییر انرژی پتانسیل برابر باشد، مداد دیگر تندتر حرکت نمی‌کند.

(ب) اگر N تعداد وجوه مداد، $v_\circ$ سرعت محور دقیقاً قبل از تغییر محور و $\beta = \frac{۲\pi}{N}$ باشد، سرعت محور بعد از تغییر برابر با $v_\circ \cos\beta$ خواهد بود.

به دلیل اصل بقای انرژی خواهیم داشت: $\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲(۱-\cos^۲\beta) = mgr(۲\sin\frac{\beta}{۲})\sin\alpha$ بنابراین در حالت پایدار بیشینه سرعتی که محور می‌تواند داشته باشد، برابر است با:

$$v_\circ = \sqrt{\frac{۴gr\sin\frac{\beta}{۲}\sin\alpha}{\sin^۲\beta}}$$

بنابراین اگر $N = ۶$ و $\beta = \frac{\pi}{۳}$ خواهیم داشت:

$$v_\circ^۲ = \frac{۸}{۳}gr\sin\alpha$$

اگر تماس مداد با صفحه قطع نشود، سرعت اولیه غیر صفر، همین مقدار خواهد بود.

(پ) اگر $\frac{\beta}{۲} > \alpha$ باشد، دقیقاً بعد از تغییر ضلع، محور باید به سمت بالا برود. این اتفاق قبل از این‌که مداد در راستای سطح پایین بیاید می‌افتد. برای این‌که $v_\circ$ غیر صفر وجود داشته باشد، باید محور آنقدر تند حرکت کند که بتواند این ضربه را پشت سر بگذارد. (در نظر داشته باشید که ما می‌توانیم به مداد ضربه اولیه بزنیم).

بنابراین اگر $\frac{\beta}{۲} > \alpha$، ارتفاعی که محور باید بالا رود برابر با $r(۱-\cos(\frac{\beta}{۲}-\alpha))$ خواهد بود. سرعت اولیه‌ای که محور با آن شروع به بالا رفتن می‌کند، $v_\circ \cos\beta$ می‌باشد. بنابراین باید داشته باشیم $\frac{۱}{۲}m(v_\circ\cos\beta)^۲ > mgr(۱-\cos(\frac{\beta}{۲}-\alpha))$. با جایگذاری مقدار $v_\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{۲\sin\frac{\beta}{۲}\sin\alpha\cos^۲\beta}{\sin^۲\beta} > ۱-\cos\left(\frac{\beta}{۲}-\alpha\right)$$

و برای $N = ۶$ و $\beta = \frac{\pi}{۳}$ داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos\alpha > ۱ - \frac{۵}{۶}\sin\alpha$$

بنابراین

$$\sin\alpha > \frac{۱۵ - ۶\sqrt{۳}}{۲۶}$$

که این زاویه حدوداً برابر با ۱۰° خواهد بود.

(ت) محور مداد حول ضلعی که با سطح تماس دارد، حرکت دایره‌ای خواهد داشت. نیروی جاذبه در راستای ضلعی که با سطح تماس دارد، شتاب جانب مرکز محور را تامین می‌کند. مداد بیشینه شتاب جانب مرکز را دقیقاً قبل از تغییر محور دوران دارد. این مقدار برابر با $\frac{mv_۰^۲}{r}$ می‌باشد و کمینه نیروی جاذبه در راستای ضلع نیز دقیقاً قبل از تغییر ضلع وارد می‌شود. این نیرو برابر با $mg\cos(\alpha + \frac{\beta}{۶})$ می‌باشد. با جایگذاری مقدار $v_۰$ در نامساوی $\frac{mv_۰^۲}{r} \leq mg\cos(\alpha + \frac{\beta}{۲})$ خواهیم داشت:

$$\tan\alpha \leq \frac{\sin^۲\beta}{۴ + \sin^۲\beta}\cot\left(\frac{\beta}{۲}\right)$$

و برای $N = ۶$ و $\beta = \frac{\pi}{۳}$:

$$\tan\alpha \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۱۹}$$

که این زاویه حدوداً برابر ۱۵° می‌باشد.

(ث) برای مقادیر کوچک α و β که در قسمت‌های (ب)، (پ) و (ت) پیدا کردیم، مقدار $v_۰$ برابر خواهد بود با:

$$v_۰^۲ = ۲gr\frac{\alpha}{\beta}$$

و شرط پشت سر گذاشتن ضربه عبارت است از:

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{۱}{۲}\left(\alpha - \frac{\beta}{۲}\right)^۲$$

هم‌چنین شرط ماندن بر روی سطح عبارت است از:

$$\alpha \leq \frac{\beta}{۲}$$

(ج) با اضافه کردن شرط بزرگ بودن مقدار N به بخش‌های (ب) و (ت)، داریم:

$$v_\circ \leq \sqrt{gr}$$

که این مقدار مستقل از N می‌باشد.

نتیجه اخیر از راه ساده‌تری نیز حاصل می‌شود. نیرویی که شتاب جانب مرکز آونگ را تامین می‌کند، وزن آن است. بنابراین $\frac{v^۲}{r} \leq g$ و یا $v^۲ \leq rg$.

پاسخ سؤالات سال

۱۹۹۶

۱. (الف) دقیقاً قبل از این‌که $B_۱$ به زمین برخورد کند هر دو توپ با سرعت $v = \sqrt{۲gh}$ که از رابطه $\frac{mv^۲}{۲} = mgh$ تعیین می‌شود، به سمت پایین حرکت می‌کنند. $B_۱$ بعد از برخورد با زمین با سرعت v به سمت بالا حرکت می‌کند ولی $B_۲$ هم چنان با سرعت v به سمت پایین حرکت می‌کند. بنابراین در این زمان سرعت نسبی آن‌ها $۲v$ است. در نتیجه سرعت نسبی توپ‌ها بعد از برخورد با هم، هم چنان $۲v$ می‌ماند. (این مسأله در حالتی که $m_۱ >> m_۲$ باشد، از دید دستگاه مختصاتی که روی B است به راحتی حل می‌شود.) از آن‌جایی که سرعت $B_۱$، v می‌ماند، سرعت بالا رفتن $B_۲$ باید $۲v + v = ۳v$ شود. با استفاده از اصل بقای انرژی می‌توان گفت $B_۲$ تا ارتفاع $H = d + \frac{(۳v)^۲}{۲g}$ و یا:

$$H = d + ۹h \tag{۱}$$

بالا می‌رود.

(ب) بعد از این‌که $B_۱$ با زمین برخورد کرد، همه توپ‌ها با سرعت $v = \sqrt{۲gh}$ که از رابطه $\frac{mv^۲}{۲} = mgh$ تعیین می‌شود، حرکت می‌کنند.

حال می‌خواهیم سرعت هر توپ را بعد از برخورد با توپ پایینی‌اش، حساب کنیم. اگر توپ B_i بعد از برخورد با $B_{i-۱}$ به سرعت v_i رسیده باشد، سرعت $B_{i+۱}$ بعد از برخورد با B_i چقدر خواهد بود؟ سرعت نسبی B_i و $B_{i+۱}$ (دقیقاً قبل از برخورد) $v + v_i$ است. سرعت نسبی آن‌ها بعد از برخورد نیز برابر همین مقدار می‌باشد. بنابراین سرعت نهایی $B_{i+۱}$ برابر با $v_i + (v + v_i)$ است. بنابراین:

$$v_{i+۱} = ۲v_i + v \tag{۲}$$

از آن‌جایی که $v_۱ = v$ پس، $v_۲ = ۳v$ و $v_۳ = ۷v$ و $v_۴ = ۱۵v$ و ... بنابراین:

$$v_n = (۲^n - ۱)v \tag{۳}$$

بنابراین B_n تا ارتفاع $H = l + (۲^n - ۱)^۲\frac{v^۲}{۲g}$ بالا می‌رود و یا:

$$H = l + (۲^n - ۱)^۲ h \tag{۴}$$

اگر $h = ۱m$ و ما بخواهیم ارتفاع H، $۱۰۰۰m$ شود، (با فرض کوچک بودن l)، لازم است که $۲^n - ۱ > \sqrt{۱۰۰۰}$، باشد. $n = ۶$ در این نامساوی صدق می‌کند. اگر از ۶ توپ استفاده کنیم، توپ

ششم تا ارتفاع $H = ۴km$ بالا می‌رود. [سرعت فرار از زمین با $n = ۱۴$ تامین می‌شود. مسلماً فرض کشسانی در این حالت و یافتن ۱۴ توپ، با شرط $m_۱ >> m_۲ >> \cdots >> m_{۱۴}$ نامعقول می‌باشد.]

۲. (الف) نقطه‌ای مانند P که در فاصله بسیار دور از حلقه قرار دارد را در نظر می‌گیریم در نقطه P میدان الکتریکی به سمت خارج محور می‌باشد، (فرض کنید که بار حلقه مثبت باشد) زیرا اختلاف فاصله نقاط مختلف حلقه تا نقطه‌ی P از مرتبه دوم (بر حسب نسبت $R^۲$ به مربع فاصله حلقه تا نقطه P) می‌باشد که مقدار کوچکی است.

حال اگر ثابت کنیم میدان در یک نقطه از استوانه به سمت داخل محور می‌باشد، می‌توان از پیوستگی میدان استفاده کرده و بگوییم میدان در یک جا بر روی استوانه در امتداد محور است. کل شار عبوری از استوانه باید صفر باشد. پس اگر در نقطه‌ای (مثلاً در انتهای استوانه گوسی فرضی) میدان به سمت خارج باشد، باید در نقطه دیگر به سمت داخل باشد.

(ب) ادعا غلط بود. کل نیرویی که کف ظرف B وارد می‌کند، برابر با فشار ضرب در مساحت سطح کف ظرف نمی‌باشد. به کف ظرف، نیروی کشش نخ به سمت بالا وارد می‌شود. و عکس‌العمل این نیرو توسط کف ظرف به نخ به طرف پایین وارد می‌شود. بنابراین فشار کمی بیش‌تر است.

۳. (الف) (i) ابتدا سرعت توپ، (v_x, v_y)، را دقیقاً بعد از برخورد با حلقه سمت چپ و برگشت آن حساب می‌کنیم. اگر توپ بعد از زمان t به حلقه دیگر برخورد کند، باید داشته باشیم:

$$۲v_y = gt \tag{۵}$$

هم‌چنین اگر توپ با زاویه θ نسبت به افق به حلقه برخورد کند، مسافت افقی بین دو نقطه برخورد $۲R(۱ - \cos\theta)$ است. پس:

$$v_x t = ۲R(۱ - \cos\theta) \tag{۶}$$

با حذف کردن t از معادلات بالا و استفاده از این‌که $v_y = v_x \tan\theta$ خواهیم داشت:

$$(v_x, v_y) = \left(\sqrt{gR}\left(\sqrt{\cot\theta(۱ - \cos\theta)}\right), \sqrt{gR}\left(\sqrt{\tan\theta(۱ - \cos\theta)}\right)\right) \tag{۷}$$

هم‌چنین $\Delta P_x = ۲mv_x$، پس برای بیشینه کردن ΔP_x باید $\cot\theta(۱ - \cos\theta)$ را بیشینه کنیم. با

صفر قرار دادن مشتق این عبارت نسبت به θ خواهیم داشت:

$$\cos^{3}\theta - 2\cos\theta + 1 = 0 \tag{8}$$

یک جواب این معادله، $\cos\theta = 1$ و جواب دیگر آن، $\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌باشد.

$\cos\theta = 1$ برای ما قابل قبول نیست. از آن‌جایی که $1 - \cos\theta = \frac{\theta^{2}}{2}$ و $\cot\theta = \frac{1}{\theta}$ بنابراین وقتی θ به سمت صفر میل می‌کند، v_x و $\Delta P(x)$ نیز به سمت صفر میل می‌کنند. بنابراین بیشینه در حالتی اتفاق می‌افتد که:

$$\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \tag{9}$$

(این مقدار عکس عدد طلایی است و $\theta \approx 52^{\circ}$)

(ii) (A) با استفاده از معادله (۷) و تقریب $\tan\epsilon = \epsilon$ و $\cos\epsilon = 1 - \frac{\varepsilon^{2}}{2}$ داریم:

اگر $\theta = \varepsilon$ و $\varepsilon \to 0$ آنگاه:

$$(v_x, v_y) = \sqrt{\frac{gR}{2}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\ ,\ \varepsilon^{\frac{3}{2}}\right) \tag{10}$$

بنابراین سرعت، تا مرتبه اول ε، $S = \sqrt{\frac{gR\varepsilon}{2}}$ می‌باشد و وقتی $\varepsilon \to 0$ سرعت نیز به سمت صفر میل می‌کند.

اگر $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ و $\varepsilon \to 0$ آنگاه:

$$(v_x, v_y) = \sqrt{gR}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\ ,\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{11}$$

و سرعت، تا مرتبه اول ε، $S = \sqrt{\frac{gR}{\epsilon}}$ می‌باشد، که وقتی $\varepsilon \to 0$، سرعت به سمت بینهایت میل می‌کند.

(B) نیرو برابر با تغییرات تکانه در واحد زمان است. پس نیروی متوسط افقی $(\overline{F_x})$ که حلقه‌ها را به هم وصل می‌کند برابر با $\overline{F}_x = \frac{\Delta P_x}{T}$، می‌باشد که T زمان بین دو برخورد است. از آن‌جایی که $\Delta P_x = 2mV_x$ و $T = \frac{2V_y}{y}$ پس $\overline{F}_x = \frac{\Delta P_x}{T} = mg\frac{v_x}{v_y}$. بنابراین:

$$\overline{F}_x = mg\cot\theta \tag{12}$$

اگر $\theta = \varepsilon$ و $\varepsilon \to 0$ آنگاه

$$\overline{F}_x = mg\cot\varepsilon \simeq \frac{mg}{\varepsilon} \tag{13}$$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ و $\varepsilon \to 0$ آنگاه

$$\overline{F}_x = mg\cot\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = mg\tan\varepsilon \simeq mg\varepsilon \tag{14}$$

در حالت اول به دلیل سریع اتفاق افتادن برخوردها، با این‌که سرعت توپ به صفر میل می‌کند، نیروی افقی وارد به آن به بینهایت میل می‌کند (وقتی $\theta \to 0$) در حالت دوم با آن که سرعت توپ به بینهایت میل می‌کند، ولی نیروی متوسط به صفر میل می‌کند. $(\theta \to \frac{\pi}{2})$ [با استفاده از همین توجیه ما می‌بینیم که نیروی عمودی $F = \frac{\Delta Py}{T} = \frac{mgV_y}{V_y} = mg$ است و این مقدار به زاویه بستگی ندارد.] اگر حلقه‌ها توپ را بالای زمین نگه دارند، باید نیرویی برابر وزن و در خلاف جهت آن وارد کنند.

(ب): این سؤال معادل آن است که بگوییم: به ازاء چه $f(x)$، v_x مستقل از v_0 می‌شود؟

اگر ما به نقطه تماس در نیمه راست نگاه کنیم، داریم:

$$\frac{v_x}{v_y} = -f'(x_0) \tag{15}$$

اختلاف مکان دو برخورد برابر است با $-2x_0 = v_xt = v_x(\frac{2v_y}{g})$. پس:

$$v_xv_y = -gx_0 \tag{16}$$

با استفاده از دو معادله قبل خواهیم داشت:

$$v_x = -\sqrt{gx_0f'(x_0)} \tag{17}$$

برای این‌که مقدار حاصل مستقل از x_0 باشد باید داشته باشیم:

$$f(x) = a\ln(x) + b \tag{18}$$

که a و b ثابت هستند و $(a > 0)$.

(ii) مانند بخش ii قسمت الف داریم $\overline{F}_x = mg\frac{v_x}{v_y}$. با استفاده از معادله (۱۵) می‌توان نوشت: $\overline{F}_x = -mgf'(x_\circ)$ و برای این‌که این مقدار مستقل از $x_\circ$ باشد باید:

$$f(x) = cx + d \qquad (۱۹)$$

که c و d ثابت هستند و $(c > \circ)$

۴. در هر دوران مؤلفه‌ای از سرعت جسم، که عمود بر محور جدید چوب باشد تغییر نمی‌کند. بنابراین سرعت جدید $\cos\theta$ برابر سرعت قبلی است. بنابراین انرژی جنبشی $\cos^۲\theta$ برابر انرژی جنبشی قبلی است. فرض کنید که زاویه بین خط عمود و محور دوران چوب ϕ باشد. برای ϕهای کوچک، مؤلفه‌ای از جاذبه که بر جسم اثر می‌کند. مماس بر مسیر محور است $g\sin\phi \simeq \phi$ می‌باشد پس $F = ma \to \ddot{\phi} = \frac{g}{l}\phi$ حل این معادله دیفرانسیل به این نتیجه منجر می‌شود که

$$\phi(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t} \qquad \gamma = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (۲۰)$$

که در آن ثابت‌های A و B وابسته به شرایط اولیه می‌باشد. اگر در شرایط اولیه $\phi(\circ) = \phi_\circ$ و $\dot{\phi}(\circ) = \omega_\circ$ باشد، A و B به راحتی به‌دست می‌آیند:

$$\phi(t) = \left(\frac{\gamma\phi_\circ + \omega_\circ}{۲\gamma}\right)e^{\gamma t} + \left(\frac{\gamma\phi_\circ - \omega_\circ}{۲\gamma}\right)e^{-\gamma t} \qquad (۲۱)$$

در نظر داشته باشید که $\dot{\phi}(t) = \circ$ وقتی که:

$$t = \frac{۱}{۲r}\ln\left(\frac{\gamma\phi_\circ - \omega_\circ}{\gamma\phi_\circ + \omega_\circ}\right) \qquad (۲۲)$$

در این رابطه t به γ تبدیل شود. کل زمان حرکت را می‌توان با جمع زدن زمان‌های بین تغییر محور دوران به‌دست آورد. اگر $t_\circ$ اولین باری باشد که محور دوران تغییر کند و $t_۱$ زمان دومین تغییر باشد و همین‌طور الی آخر، کل زمان حرکت برابر خواهد بود با:

$$T - t_\circ = \sum_{n=۱}^{\infty} t_n - t_{n-۱} \qquad (۲۳)$$

که $t_n - t_{n-۱}$ از دو برابر کردن زمان t در معادله (۲۲) به‌دست می‌آید. (زیرا جسم باید بالا برود و بایستد و برگردد.) $\phi_\circ = \pm\frac{\theta}{۲}$ و $\omega_\circ$ سرعت زاویه‌ای دقیقاً بعد از n امین تغییر محور دوران است. سرعت

زاویه‌ای بعد از n امین تغییر محور $\cos^n\theta$ برابر سرعت زاویه‌ای قبل از اولین تغییر است. سرعت زاویه‌ای قبل از اولین تغییر برابر با $\omega = \pm\gamma\frac{\theta}{2}$ می‌باشد. بنابراین سرعت زاویه‌ای بعد از n امین تغییر محور برابر با $\pm\cos^n\gamma\frac{\theta}{2}$ است. با استفاده از معادله (۲۲) خواهیم داشت:

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{1+\cos^n\theta}{1-\cos^n\theta}\right) \tag{۲۴}$$

پس کل زمان $T - t_0$ برابر است با:

$$T - t_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{1+\cos^n\theta}{1-\cos^n\theta}\right) \tag{۲۵}$$

حال این جمع را ساده می‌کنیم: با تغییر متغیر به جای $\cos\theta$، x می‌گذاریم. پس:

$$T - t_0 = \frac{1}{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+x^n) - \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-x^2)\right)$$

$$= \frac{2}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{x^{nk}}{k}$$

$$= \frac{2}{\gamma}\sum_{k\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{x^k}{1-x^k} \tag{۲۶}$$

حال می‌توان از تقریب $x^k = \cos^k\theta \simeq 1 - \frac{k\theta^2}{2}$ استفاده کرد. (از این تساوی فقط در حالت $1 >> \frac{k\theta^2}{2}$ می‌توان استفاده کرد. بنابراین تقریب را از k تا $M = \frac{\eta}{\theta^2}$ استفاده می‌کنیم.) ($\eta >> 1$). حال اگر $1 >> \eta >> \theta$ آنگاه $M >> 1$ و هم چنان شرط استفاده از تقریب برقرار است. پس می‌توان نوشت:

$$T - t_0 = \frac{2}{\gamma}\sum_{k\ \text{فرد}}^{M}\frac{1}{k}\left(\frac{1-\frac{k\theta^2}{2}}{\frac{k\theta^2}{2}}\right) + \frac{2}{\gamma}\sum_{M\ \text{و}\ k\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{x^k}{1-x^k} \tag{۲۷}$$

جمله دوم کوچک‌تر است از:

$$\frac{2}{\gamma}\sum_{M\ \text{و}\ k\ \text{فرد}}\frac{x^k}{M(1-x^M)} = \frac{2}{\gamma}\frac{1}{M(1-x^M)}\frac{x^M}{1-x^2} \tag{۲۸}$$

$$\simeq \frac{2}{\gamma}\frac{1}{M(M\frac{\theta^2}{2})}\frac{1}{\theta^2}$$

$$= \frac{4}{\gamma\eta^2} \tag{۲۹}$$

و جمله اول حدوداً برابر است با:

$$\frac{۴}{\gamma\theta^{۲}}\sum_{k\ \text{فرد}}^{M}\frac{۱}{k^{۲}} \simeq \frac{۴}{\gamma\theta^{۲}}\sum_{k\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{۱}{k^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۲\gamma\theta^{۲}} \tag{۳۰}$$

از آن‌جایی که $۱ >> \eta >> \theta$ پس:

$$T - t_{\circ} \simeq \sqrt{\frac{l}{y}}\left(\frac{\pi^{۲}}{۲\theta^{۲}}\right) \tag{۳۱}$$

۵. (الف) از آن‌جایی که لختی دورانی C صفر می‌باشد، گشتاور وارد بر C و در نتیجه نیروی وارد بر C از طرف کش نیز صفر می‌باشد. بنابراین استوانه C تنها تحت اثر نیروی وزنش قرار دارد. در نتیجه شتاب حرکت استوانه و آجر مساوی می‌باشد. از آن‌جایی که سرعت اولیه آجر و استوانه برابر است، فاصله آن‌ها همواره ثابت و برابر با $۱m$ خواهد ماند.

(ب) (i) اگر V سرعت C در راستای سطح و Ω سرعت زاویه‌ای آن و v_b سرعت کش در محل C باشد، خواهیم داشت:

$$V = V_b + r\omega \tag{۳۲}$$

هم‌چنین اگر f نسبت فاصله C از لبه سطح به طول کش و g_θ شتاب جاذبه در راستای سطح $(g_\theta = g\sin\theta)$ و V_B سرعت آجر باشد، خواهیم داشت:

$$V_B = tg\sin\theta = g_\theta t \tag{۳۳}$$

$$v_b = fV_B = fg_\theta t \tag{۳۴}$$

بنابراین رابطه (۳۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V = fg_\theta t + r\omega \tag{۳۵}$$

نیروهایی که در راستای سطح به استوانه C وارد می‌شوند، عبارتند از: نیروی وزن استوانه در راستای سطح و به سمت پایین (mg_θ) و نیرویی که کش به استوانه به سمت بالا وارد می‌کند (F). اگر قانون نیوتن را برای نیروهایی که در راستای سطح به استوانه وارد می‌شوند بنویسیم خواهیم داشت:

$$mg_\theta - F = ma \tag{۳۶}$$

که در رابطه بالا، a شتاب در راستای سطح C می‌باشد.
حال اگر رابطه مربوطه به گشتاور وارد شده به C را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$rF = \rho m r^2 \alpha \tag{۳۷}$$

که در رابطه بالا، α شتاب زاویه‌ای C می‌باشد.
با استفاده از روابط (۳۶) و (۳۷) خواهیم داشت:

$$g_\theta - \rho r \alpha = a \tag{۳۸}$$

با انتگرال گرفتن از رابطه بالا به این نتیجه می‌رسیم که:

$$V = g_\theta t - \rho r \omega \tag{۳۹}$$

با استفاده از روابط (۳۵) و (۳۹) خواهیم داشت:

$$V = g_\theta t \left(\frac{1 + \rho f}{1 + \rho}\right) \tag{۴۰}$$

که در رابطه (۴۰)، $g_\theta t$ سرعت آجر در زمان t می‌باشد. بنابراین نسبت سرعت C به سرعت آجر برابر خواهد بود با:

$$\frac{V}{V_B} = \frac{1 + \rho f}{1 + \rho} \tag{۴۱}$$

بعد از گذشت زمان بسیار طولانی نسبت مسافتی که C طی کرده به مسافتی که آجر طی کرده است برابر با نسبت سرعت‌های آن‌ها خواهد شد. بنابراین اگر f_∞ را مقدار f بعد از گذشت زمان بسیار طولانی، در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$f_\infty = \frac{1 + \rho f_\infty}{1 + \rho} \tag{۴۲}$$

بنابراین:

$$f_\infty = 1 \tag{۴۳}$$

(ii) از آن‌جایی که فاصله آجر تا لبه سطح $1 + \frac{g_\theta t^2}{2}$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\int V dt = f\left(1 + \frac{g_\theta t^2}{2}\right) \tag{44}$$

اگر از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که:

$$V = f g_\theta t + \left(1 + \frac{g_\theta t^2}{2}\right) f' \tag{45}$$

بعد از گذشت زمان طولانی، می‌توان از جمله f' در مقابل $\frac{g_\theta t^2 f'}{2}$ صرف‌نظر کرد و با استفاده از رابطه (۴۰)، نوشت:

$$1 = f + \frac{1+\rho}{2} f' t \tag{46}$$

بنابراین:

$$f \approx 1 - c t^{\frac{-2}{1+\rho}} \tag{47}$$

بنابراین سرعت نسبی آجر و C برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} V_{rel} = V_B - V &= g_\theta t - g_\theta t\left(\frac{1+\rho f}{1+\rho}\right) \\ &= \frac{g_\theta \rho c}{1+\rho} t^{-\frac{1-\rho}{1+\rho}} \end{aligned} \tag{48}$$

با توجه به رابطه بالا، درمی‌یابیم که:

۱) اگر $\rho = 0$ آنگاه $V_{rel} = 0$

۲) اگر $\rho = \frac{1}{2}$ آنگاه $V_{rel} \sim t^{\frac{-1}{3}}$ و در آن صورت، سرعت نسبی بعد از گذشت زمان طولانی به صفر میل می‌کند.

۳) اگر $\rho = 1$، سرعت نسبی بعد از گذشت زمان طولانی، به مقدار ثابتی میل می‌کند.

۴) اگر $\rho = 2$ آنگاه $V_{rel} \sim t^{\frac{1}{3}}$ و در آن صورت، سرعت نسبی بعد از گذشت زمان طولانی به بینهایت میل می‌کند.

پاسخ سؤالات سال
۱۹۹۷

۱. (الف) در حالتی که حباب هوا درون قالب یخ وجود دارد، سطح آب تغییر نمی‌کند زیرا حجم آب جابجا شده دقیقاً برابر با حجم آب اضافی که از ذوب شدن قالب یخ حاصل می‌شود، می‌باشد.

در حالتی که میخ در یخ است، سطح آب پایین می‌آید. زیرا حجم آب جابجا شده برای خنثی کردن وزن میخ از حجم آب یخ ذوب شده به علاوه میخ بیش‌تر است.

(ب) از آن‌جایی که پوزیترون‌ها از پروتون‌ها بسیار سبک‌تر هستند، بهتر است مسأله را به دو بخش تقسیم کنیم.

- پوزیترون‌ها دور شوند ولی پروتون‌ها در جایشان باقی بمانند:

با استفاده از اصل بقای انرژی خواهیم داشت:

$$۴ \times \frac{۱}{۲}\alpha\left(\frac{۱}{l}+\frac{۱}{l}+\frac{۱}{l\sqrt{۲}}\right)=\frac{\alpha}{l\sqrt{۲}}+۲\frac{mv_{e+}^{۲}}{۲} \tag{۱}$$

که $\alpha = ۲/۳ \times ۱۰^{-۲۸} Jm$ یا

$$v_{e+}=\sqrt{\frac{\alpha}{ml}\left(۴+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)} \simeq ۱۱۰۰ m/s \tag{۲}$$

- بعد از دور شدن پروتون‌ها:

$$v_p=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{۲}Ml}} \simeq ۹/۸ m/s \tag{۳}$$

۲. (الف) نیروهایی که به جسم وارد می‌شوند، نیروی اصطکاک و نیروی مغناطیسی هستند. پس $\vec{F}=-\alpha\vec{v}+q\vec{v}\times\vec{B}$. جسم در صفحه $x-y$ باقی می‌ماند. بنابراین $\vec{v}$ هیچ مؤلفه‌ای در راستای $\vec{z}$ ندارد و می‌توان نوشت:

$$F_x=-\alpha v_x+qBv_y \tag{۴}$$

$$F_y=-\alpha v_y-qBv_x$$

و یا:

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲}=-\alpha\frac{dx}{dt}+qB\frac{dy}{dt} \tag{۵}$$
$$m\frac{d^۲y}{dt^۲}=-\alpha\frac{dy}{dt}-qB\frac{dx}{dt}$$

با انتگرال‌گیری از این معادلات نسبت به زمان، خواهیم داشت:

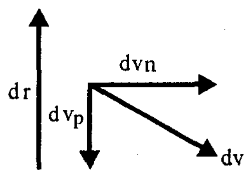
$$m\Delta v_x = -\alpha \Delta x + qB\Delta y$$

$$m\Delta v_y = -\alpha \Delta y - qB\Delta x \qquad (۶)$$

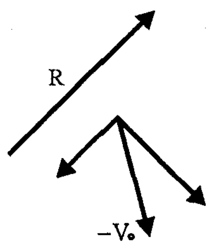
سرعت اولیه $\vec{v} = (0, v_0, 0)$ و سرعت نهایی $\vec{v} = (0, 0, 0)$ می‌باشد. پس $\Delta v_x = 0$ و $\Delta v_y = v_0$. با حل کردن معادله (۶) داریم:

$$\Delta x = \frac{\cancel{4}^{\,q} Bmv_0}{\alpha^2 + (qB)^2} \qquad \Delta y = \frac{\alpha m v_0}{\alpha^2 + (qB)^2} \qquad (۷)$$

یک راه حل دیگر نیز می‌توان برای این مسأله ارائه کرد. بازه زمانی کوچک dt را در نظر بگیرید. مکان ذره به صورت $dr = \dot{r}dt$ و سرعت آن به صورت $dv_p = \frac{\alpha}{m}dt$ تغییر می‌کند. در نظر داشته باشید مؤلفه‌های تغییر سرعت متناسب با تغییر مکان هستند. این ترکیب سرعت‌ها را می‌توان برای هر dt رسم کرد. با جمع کردن آن‌ها و در نظر گرفتن کل تغییر سرعت ذره $(-v_0)$، می‌توانیم نمودار نهایی را رسم کنیم.



از آن‌جایی که در جمع برداری، نسبت‌ها ثابت می‌مانند، کل جابجایی، (R) و مولفه‌هایش به راحتی به‌دست می‌آید.



۳. نکته این مسأله این است که چوب قبل از برخورد به زمین از دیوار جدا می‌شود. اولین چیزی که باید حساب شود این است که در چه زمانی تماس چوب با دیوار قطع می‌شود.

فرض کنید $r = \frac{l}{2}$ باشد. به آسانی مشاهده می‌شود که مرکز جرم چوب وقتی چوب در تماس با دیوار است، در دایره‌ای با شعاع r در حال حرکت است. فرض کنید θ زاویه بین دیوار و خط واصل نقطه پایینی

دیوار به مرکز جرم چوب باشد (هم‌چنین این زاویه بین دیوار و چوب است.) این مسأله را با فرض این‌که چوب در دایره حرکت می‌کند و حساب کردن نقطه‌ای که سرعت مرکز جرم در آن کاهش می‌یابد حل کنیم. (نقطه‌ای که نیروی عمود بر سطح که از طرف دیوار وارد می‌شود منفی شود [که این اتفاق نمی‌تواند بیفتد])

به وسیله اصل بقای انرژی، انرژی جنبشی چوب برابر با تغییرات انرژی پتانسیل آن و برابر با $mgr(1-\cos\theta)$ می‌باشد. این انرژی جنبشی می‌تواند به انرژی انتقالی مرکز جرم و انرژی دورانی تقسیم شود. انرژی انتقالی C_M برابر است با $mr^2\frac{\dot\theta^2}{2}$ (چون C_M در دایره حرکت می‌کند) انرژی دورانی برابر است با $\frac{I\dot\theta^2}{2}$ فرض کنید $I=\rho mr^2$. (که برای چوب $\rho=\frac{1}{3}$ است.) با استفاده از قانون بقای انرژی داریم: $mgr(1-\cos\theta)=(1+\rho)mr^2\frac{\dot\theta^2}{2}$ پس سرعت مرکز جرم، $v=r\dot\theta$، برابر است با:

$$v=\sqrt{\frac{2gr}{1+\rho}}\sqrt{(1-\cos\theta)} \quad (8)$$

سرعت افقی برابر است با:

$$v_x=\sqrt{\frac{2gr}{1+\rho}}\sqrt{(1-\cos\theta)}\cos\theta \quad (9)$$

با مشتق گرفتن از $\sqrt{1-\cos\theta}\cos\theta$ می‌فهمیم که سرعت در $\cos\theta=\frac{2}{3}$ بیشینه است. (که مستقل از ρ است.) پس ارتباط چوب با دیواره در حالتی که $\cos\theta=\frac{2}{3}$ باشد، قطع می‌شود.

$$\cos\theta=\frac{2}{3} \quad (10)$$

با استفاده از مقدار θ در رابطه (۹) سرعت افقی برابر خواهد بود با: $(\rho=\frac{1}{3})$

$$v_x=\frac{1}{3}\sqrt{2gr}=\frac{1}{3}\sqrt{gl} \quad (11)$$

این سرعت افقی دقیقاً بعد از قطع تماس چوب با دیوار است. به عبارت دیگر سرعت افقی از این لحظه به بعد می‌باشد. زیرا اصطکاک صفر است و سرعت ثابت باقی می‌ماند.

۴. فرض کنید سرعت انتهای تکه چوب سنگین‌تر V باشد. از آن‌جایی که این تکه چوب بسیار سنگین است ما می‌توانیم آن را یک توپ به جرم بسیار زیاد با سرعت V فرض کنیم (درجه آزادی انتقالی چوب سنگین قابل صرف‌نظر است.)

ما برای سادگی بیش‌تر، مسأله را در دستگاه مختصات ثابت نسبت به توپ بسیار سنگین و درست قبل از برخورد حل می‌کنیم و این شرایط مربوط به چوبی به جرم m به طول $2r$ و لختی دورانی $I = \rho m r^2$ و سرعت V است که به یک دیوار برخورد می‌کند. برای بررسی رفتار چوب باید ۱ـ از بقای انرژی و ۲ـ از بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حول نقطه تماس استفاده کنیم.

فرض کنید u سرعت مرکز جرم تکه چوب و ω سرعت زاویه‌ای آن بعد از برخورد است. از آن‌جایی که جرم دیوار بینهایت فرض می‌شود، انرژی جنبشی به آن منتقل نخواهد شد. پس:

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}(\rho m r^2)\omega^2 \tag{12}$$

تکانه زاویه‌ای اولیه حول نقطه تماس $L = mrv$ است. با استفاده از اصل بقای تکانه زاویه‌ای (L را بعد از برخورد به دو بخش تقسیم می‌کنیم. یکی L مرکز جرم و دیگری l جسم نسبت به مرکز جرم)، خواهیم داشت:

$$mrV = mru + (\rho m r^2)\omega \tag{13}$$

با حل کردن معادلات (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$u = V\frac{1-\rho}{1+\rho} \quad , \quad r\omega = V\frac{2}{1+\rho} \tag{14}$$

$u = V$ و $r\omega = 0$ حالتی را می‌دهد که چوب با دیوار تماسی نداشته باشد.

اکنون به دستگاه مختصات ثابت آزمایشگاه برگردیم. (V را از سرعت u کم کنیم.) می‌بینیم که برخورد به مرکز جرم تکه چوب سبکتر سرعتی برابر با $v = \frac{2V\rho}{1+\rho}$ می‌دهد که در جهت V است ولی انتهای دیگر چوب سرعت زاویه‌ای به سمت عقب دارد که برابر است با: $r\omega = \frac{2V}{1+\rho}$. این سرعت زاویه‌ای از سرعت مرکز جرم بیش‌تر است. پس انتهای دیگر چوب با سرعت V' حرکت می‌کند که:

$$V' = r\omega - v = V\frac{2(1-\rho)}{1+\rho} \tag{15}$$

و در خلاف جهت V است.

این روابط برای برخورد بعدی نیز صادق هستند. به عبارت دیگر انتهای پایین چوب‌ها با سرعتی که یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{2(1-\rho)}{1+\rho}$ را تشکیل می‌دهد حرکت می‌کند. اگر این قدر نسبت از ۱ کم‌تر

باشد ($\rho > \frac{۱}{۳}$) درآن صورت وقتی $n \to \infty$، سرعت به سمت صفر میل می‌کند و اگر بزرگ‌تر از ۱ باشد، ($\rho < \frac{۱}{۳}$) سرعت به بینهایت میل می‌کند و اگر مساوی ۱ باشد، ($\rho = \frac{۱}{۳}$) سرعت‌ها مستقل از n هستند. پس جواب به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{۱}{۳} \tag{۱۶}$$

یک تکه چوب یکنواخت دارای $\rho = \frac{۱}{۳}$ (معمولاً به این صورت نوشته می‌شود که $I = \frac{ml^۲}{۱۲}$ وقتی که $l = ۲r$) البته در صورتی که $\rho = ۰$، مرکز جرم چوب در حال سکون باقی می‌ماند و سرعت‌های زاویه‌ای تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ درست می‌کنند. این البته جواب درست نمی‌باشد زیرا اجسام واقعی دارای لختی دورانی متناهی هستند. روش فیزیکی این است که $\rho \to ۰$ را در نظر بگیریم. ولی در آن صورت وقتی $n \to \infty$ این حد نیز به بینهایت میل می‌کند.

۵. (الف) نیروهای وارد بر ذره، نیروی جاذبه (mg) و نیروی عمود بر سطح از طرف مخروط (N) می‌باشد. برآیند نیروهای قائم باید صفر باشد. بنابراین:

$$N\sin\theta = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\sin\theta} \tag{۱۷}$$

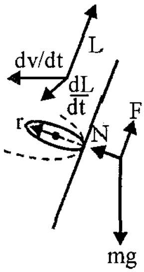
بنابراین نیروی افقی مرکزگرا، $N\cos\theta$، برابر با $\frac{mg}{\tan\theta}$ می‌باشد. این نیرو شتاب جانب مرکز ایجاد می‌کند. شعاع دایره‌ای که جسم روی آن می‌چرخد $r = h\tan\theta$ است. بنابراین $m(h\tan\theta)\omega^۲ = \frac{mg}{\tan\theta}$ و

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}\frac{۱}{\tan\theta} \tag{۱۸}$$

(ب) نیروهای وارد بر حلقه، نیروی جاذبه (mg)، نیروی عمود بر سطح (N)، و اصطکاک (F)، می‌باشد. برآیند نیروها در حالت قائم صفر است. بنابراین:

$$N\sin\theta + F\cos\theta = mg \tag{۱۹}$$

و نیروهای افقی به سمت داخل، شتاب مرکزگرا ایجاد می‌کنند. بنابراین:



$$N \cos\theta - F \sin\theta = m(h\tan\theta)\omega^2 \quad (۲۰)$$

حال باید گشتاور، $\vec{\tau}$، حلقه را حساب کنیم. گشتاور فقط حاصل از F می‌باشد. پس:

$$\vec{\tau} = r\vec{F} \quad (۲۱)$$

از آن‌جایی که $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$، باید $\frac{d\vec{L}}{dt}$ را حساب کنیم.

$\vec{L}$ از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول ناشی از حرکت مرکز جرم حلقه است که حول مرکز مخروطی می‌چرخد. این بخش از $\vec{L}$ با زمان تغییر نمی‌کند. بخش دیگر $\vec{L}$ از چرخش حلقه حاصل می‌شود. این بخش را $\vec{L'}$ می‌نامیم. $\vec{L'}$ بر دایره‌ای به شعاع $L'\sin\theta$ حرکت می‌کند. بسامد زاویه‌ای این حرکت دایره‌ای همان ω است. پس:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L'}}{dt} = \omega L' \sin\theta \quad (۲۲)$$

بنابراین:

$$rF = \omega L' \sin\theta \quad (۲۳)$$

$L' = mr^2\omega'$ می‌باشد. ω' سرعت زاویه‌ای حلقه است. از آن‌جایی که حرکت حلقه بدون لغزش است، $r\omega' = (h\tan\theta)\omega$ (شرط چرخیدن بدون لغزش). پس $\omega' = (h+\tan\theta)\omega$ می‌باشد. بنابراین $L' = mr(h\tan\theta)\omega$ است. با استفاده از رابطه (۲۳) خواهیم داشت:

$$F = m\omega^2(h\tan\theta)\sin\theta \quad (۲۴)$$

از معادلات (۱۹) و (۲۰) خواهیم داشت:

$$F = mg\cos\theta - m\omega^2(h\tan\theta)\sin\theta \quad (۲۵)$$

و با استفاده از معادله (۲۴) داریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2h}}\frac{1}{\tan\theta} \qquad (۲۶)$$

که این بسامد زاویه‌ای $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر بسامد زاویه‌ای به‌دست آمده در بخش (الف) می‌باشد.

توضیحات: اگر لختی دورانی جسم را $I = \rho m r^2$، (در حلقه $\rho = 1$)، در نظر بگیریم، به راحتی می‌توان نشان داد که ضریب ۲ در معادله (۲۶) به جای $\rho + 1$ است و به راحتی می‌توان راه حل را تعمیم داد.

۶. الف) **راه حل اول:** یکی از برخوردهای آجر و ذره را در نظر بگیرید. V و v را به ترتیب سرعت آجر و سرعت ذره بعد از برخورد بگیرید. فرض کنید برخورد در فاصله l از دیوار اتفاق می‌افتد. ما ادعا می‌کنیم که $l(v - V)$ مقداری پایا است (یعنی برای همه‌ی برخوردها مقدار آن ثابت است) و ادعای خود را این گونه اثبات می‌کنیم:

مکان برخورد بعدی آجر l'، را به‌دست می‌آوریم. زمان برخورد بعدی با استفاده از معادله $Vt + vt = 2l$ به‌دست می‌آید (مسافتی که به وسیله دو جسم طی می‌شود $2l$ است.) چون $l' = l - Vt$، داریم:

$$l' = \frac{l(v - V)}{v + V} \qquad (۲۷)$$

از آن‌جایی که سرعت نسبی دو جسم قبل و بعد از برخورد برابر است، خواهیم داشت:

$$v + V = v' - V' \qquad (۲۸)$$

که درآن v' و V' سرعت اجسام بعد از برخورد می‌باشد.

با استفاده از معادله (۲۷) داریم:

$$l'(v' - V') = l(v - V) \qquad (۲۹)$$

و این ادعایی بود که می‌خواستیم اثبات کنیم.

حال مقدار این ثابت چیست؟ بعد از برخورد اول، آجر با سرعت v_0 و ذره با سرعت $2V_0$ حرکت خود را ادامه می‌دهند بنابراین $L(2V_0 - V_0) = LV_0$ خواهد بود.

فرض کنید L_c نزدیک‌ترین فاصله تا دیوار باشد. در این فاصله سرعت آجر صفر است. بنابراین انرژی جنبشی آجر به ذره منتقل شده و $v = V_0\sqrt{\frac{M}{m}}$ خواهد بود. هم‌چنین می‌دانیم $LV_0 \approx L_c(v_0\sqrt{\frac{M}{m}} - 0)$.

بنابراین:

$$L_c \simeq L\sqrt{\frac{m}{M}} \tag{۳۰}$$

راه حل دوم:

فرض کنید $V(t)$ سرعت آجر و $v(t)$ سرعت ذره و $x(t)$ فاصله آجر تا دیوار باشد. وقتی آجر به نزدیک‌ترین نقطه تا دیوار برسد، همه انرژی جنبشی آن به ذره منتقل می‌شود بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}MV_\circ^۲ \tag{۳۱}$$

بنابراین $v = V_\circ\sqrt{\frac{M}{m}}$. اگر ما رابطه‌ای بین $v(t)$ و $x(t)$ را بیابیم، مسأله حل می‌شود.
ما ادعا می‌کنیم که اگر $m << M$، حاصلضرب $v(t)x(t)$ برابر با $V_\circ L$ خواهد بود. ادعای خود را اینگونه اثبات می‌کنیم:

فرض کنید در یک زمان معین، v آنقدر زیاد است که تعداد dn (برخوردها)، در زمان dt زیاد باشد. بنابراین، x در این زمان تغییر چندانی نمی‌کند.

از آن‌جایی که ذره مسافت vdt را در زمان dt طی می‌کند و هم‌چنین فاصله رفت و برگشت آجر تا دیوار $۲x$ است، داریم:

$$dn = v\frac{dt}{۲x} \tag{۳۲}$$

بعد از هر برخورد آجر و ذره، سرعت ذره به اندازه $۲V$ افزایش می‌یابد. (آجر را بینهایت سنگین در نظر گرفتیم). بنابراین افزایش سرعت ذره در طول زمان dt برابر خواهد بود با:

$$dv = ۲V\,dn = \frac{Vvdt}{x} \tag{۳۳}$$

هم‌چنین $V = -\frac{dx}{dt}$ پس:

$$dv = -v\frac{dx}{x} \tag{۳۴}$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت: $\ln v = -\ln x + C$ و یا:

$$vx = C \tag{۳۵}$$

بنابراین سرعت ذره با عکس فاصله دیوار و آجر متناسب است.

این دقیقاً چیزی است که ما انتظار داشتیم. اگر ذره را یک گاز یک بعدی در نظر می‌گرفتیم، رابطه $pV^\gamma = cte$، رفتار گاز را در تراکم بی در رو توصیف می‌کرد که:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + ۱}{C_v} = \frac{\frac{i}{۲} + ۱}{\frac{i}{۲}} \qquad (۳۶)$$

در رابطه بالا، i تعداد درجات آزادی گاز می‌باشد. برای گاز یک بعدی $i = ۱$ پس $\gamma = ۳$ و $pV^۳ = cte$. از آن‌جایی که PV متناسب با T یا همان $v^۲$ در این مسأله و V (حجم گاز) همان x می‌باشد، $v^۲x^۲ = cte$ و یا $vx = C$. حال باید C را با بررسی برخوردهای اول حساب کنیم. برخورد اول به ذره سرعت $۲V_\circ$ می‌دهد. بعد از برخورد، آجر حرکت خود را با سرعت $V_\circ$ ادامه می‌دهد. بنابراین به آسانی می‌توان فهمید که برخورد دوم در فاصله $\frac{L}{۳}$ اتفاق می‌افتد. بعد از برخورد دوم سرعت ذره $۴V_\circ$ می‌شود و سرعت آجر هم چنان $V_\circ$ باقی می‌ماند. بنابراین برخورد سوم در فاصله $\frac{L}{۵}$ اتفاق می‌افتد. بعد از برخورد سوم، سرعت ذره $۶V_\circ$ می‌شود و آجر سرعت $V_\circ$ دارد. بنابراین برخورد چهارم در فاصله $\frac{L}{۷}$ اتفاق می‌افتد.

در حالت کلی می‌توان فهمید که برخورد kام در فاصله $\frac{L}{۲k - ۱}$ام اتفاق می‌افتد و سرعت ذره قبل از این برخورد $V_\circ (k - ۱)۲$ و بعد از برخورد $۲kV_\circ$ می‌باشد.

اگر $\frac{M}{m}$ به قدر کافی بزرگ باشد، $C = vx \approx \frac{۲kV_\circ L}{۲k - ۱} \approx V_\circ L$. بنابراین:

$$vx \approx V_\circ L \qquad (۳۷)$$

و با استفاده از رابطه (۳۱) خواهیم داشت:

$$x_c \approx L\sqrt{\frac{m}{M}} \qquad (۳۸)$$

(ب) **راه حل اول:** فرض کنید v, V به ترتیب سرعت‌های ذره و آجر باشند. کاهش تکانه آجر در هر ضربه برابر با افزایش تکانه ذره ($۲mv$) می‌باشد. (ما فرض می‌کنیم V نسبت به v بسیار کم باشد. این فرض بعد از چند برخورد صحیح است. اگر dn برخورد در زمان dt داشته باشیم، با استفاده از بقای تکانه خواهیم داشت: (فرض کنید تغییرات v در زمان dt قابل صرف‌نظر باشد)

$$MdV = -۲mvdn \qquad (۳۹)$$

با استفاده از بقای انرژی، $\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MV_0^2}{2}$، خواهیم داشت:

$$v = V_0\sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}} \tag{40}$$

با استفاده از رابطه (۳۹) و قرار دادن $y = \frac{V}{V_0}$، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_1^0 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int_0^N dn = -N \tag{41}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\arccos y|_1^0 = N \quad \Rightarrow \quad N \simeq \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{M}{m}} \tag{42}$$

البته از آن‌جایی که رابطه (۳۹) در حالتی که V به V_0 نزدیک می‌باشد، صادق نیست، این انتگرال نیز در آن حالت صادق نمی‌باشد.

راه حل دوم: فرض کنید V و v سرعت‌های آجر و ذره قبل از برخورد و V' و v' سرعت‌های آن‌ها بعد از برخورد باشد. بنابراین:

$$MV - mv = MV' + mv \tag{43}$$

و با استفاده از رابطه ۲۸، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} V' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M-m}{M+m} & \frac{-2m}{M+m} \\ \frac{2M}{M+m} & \frac{M-m}{M+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ v \end{pmatrix} \tag{44}$$

مقادیر ویژه این ماتریس، A_i و بردارهای ویژه آن، λ_i، عبارتند از:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = \frac{M-m}{M+m} + \frac{2i\sqrt{Mm}}{M+m} \equiv e^{i\theta} \tag{45}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{M-m}{m+m} - \frac{2i\sqrt{Mm}}{M+m} \equiv e^{-i\theta} \tag{46}$$

که $\theta = \arctan(\frac{۲\sqrt{Mm}}{M+m}) \approx ۲\sqrt{\frac{m}{M}}$ است.

با استفاده از شرایط اولیه مسأله، می‌دانیم: $(V, v) = (V_۰, ۰) = \frac{V_۰}{۲}(A_۱ + A_۲)$ بنابراین بعد از n برخورد خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{V_۰}{۲}(\lambda_۱^n A_۱ + \lambda_۲^n A_۲) \qquad (۴۷)$$

از آن‌جایی که $\lambda_۱ = e^{i\theta}$ و $\lambda_۲ = e^{-i\theta}$ و با به کار بردن مقدار A_i، خواهیم داشت:

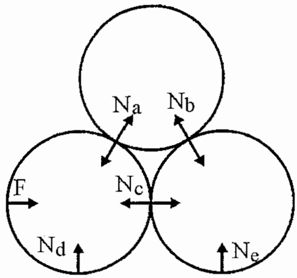
$$\begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{V_۰}{۲}(e^{in\theta}A_۱ + e^{-in\theta}A_۲) = V_۰ \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sqrt{\frac{M}{m}} \sin n\theta \end{pmatrix}$$

بنابراین در هنگام ایستادن آجر که $V_n = ۰$، $N\theta = \frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. پس با استفاده از رابطه‌ای که برای θ داشتیم، به این نتیجه می‌رسیم که وقتی آجر می‌ایستد:

$$N = \frac{\pi}{۲} \frac{۱}{\arctan \frac{۲\sqrt{Mm}}{M+m}} \simeq \frac{\pi}{۴}\sqrt{\frac{M}{m}}$$

پاسخ سؤالات سال ۱۹۹۸

۱. با صرف‌نظرکردن از نیروی جاذبه نیروهای وارد بر استوانه‌ها عبارتند از:
F که ما وارد کردیم، نیرویی که زمین بر دو استوانه پایینی وارد می‌کند که آن‌ها را با N_d و N_e نشان می‌دهیم و ۳ جفت نیرویی که استوانه‌ها دوبه‌دو بر هم وارد می‌کنند. آن‌ها را نیز با N_a و N_b و N_c نشان می‌دهیم.



شتاب وقتی کمینه می‌شود که دو استوانه پایینی از هم جدا شوند. $(N_c = ۰)$. بنابراین با نوشتن قانون دوم نیوتن در مورد مولفه افقی نیروهای وارد به استوانه سمت راست، خواهیم داشت:

$$Ma = N_b \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{N_b}{۲} \qquad (۱)$$

مؤلفه عمودی نیروهای وارد بر استوانه بالایی این رابطه را به ما خواهد داد.

$$Mg = N_b \cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) + N_a \cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) \qquad (۲)$$

برای استوانه سمت چپ داریم:

$$N_a \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{N_a}{۲} = F - Ma = ۲Ma \qquad (۳)$$

با حذف کردن N_a و N_b خواهیم داشت:

$$Mg = (۲Ma + ۴Ma)\frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad (۴)$$

بنابراین شتاب کمینه برابر خواهد بود با:

$$a_{\min} = \frac{g}{۳\sqrt{۳}}$$

وقتی شتاب افزایش بیابد، تماس استوانه بالایی با استوانه سمت راست قطع می‌شود و در نهایت N_b صفر می‌شود. در این حالت برای مؤلفه‌ی عمودی نیروهای وارد بر استوانه بالایی می‌توان نوشت:

$$Mg = N_a \cos\frac{\pi}{۶} \qquad (۵)$$

و هم‌چنین با نوشتن قانون نیوتن در مورد مؤلفه افقی نیروها خواهیم داشت:

$$Ma = N_a \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{N_a}{۲} \tag{۶}$$

بنابراین:

$$a_{\max} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲g}{\sqrt{۳}}\right) = \frac{g}{\sqrt{۳}} = ۳a_{\min}$$

۲. معادله حرکت ذره، در میدان مغناطیسی به صورت $m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ خواهد بود. در مختصات استوانه‌ای که، $\vec{r} = r\hat{r}$ و $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ و $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + ۲\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^۲\hat{r}$ ، در هر لحظه نیروی مماسی وارد بر ذره عبارت است از:

$$m(۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = q\dot{r}B \tag{۷}$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در r خواهیم داشت:

$$۲mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^۲\ddot{\theta} = qr\dot{r}B \tag{۸}$$

که رابطه بالا معادل است با:

$$m\frac{d(r^۲\dot{\theta})}{dt} = qB(r)r\frac{dr}{dt} \tag{۹}$$

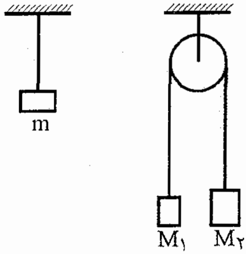
هم‌چنین طرف چپ این معادله، نرخ تغییرات تکانه زاویه‌ای ذره، ($L = mr^۲\dot{\theta}$)، می‌باشد. که برابر با گشتاور حول مرکز دایره‌ای که ذره به دور آن می‌چرخد، می‌باشد. با انتگرال‌گیری رابطه (۹) تا زمانی که ذره از سطح دایره خارج نشده باشد، خواهیم داشت:

$$mr^۲\dot{\theta}\Big|_{t,r=۰}^{t=T,r=R} = \int_{r=۰}^{r=R} qBr\,dr \tag{۱۰}$$

طرف راست این معادله، $\frac{q}{۲\pi}$، برابر کل شار عبوری از محیط دایره است که آن هم صفر است. بنابراین $\dot{\theta}$ صفر می‌باشد. از آن‌جایی که میدان مغناطیسی ثابت بر روی ذره کار انجام نمی‌دهد، نباید تغییری در انرژی جنبشی ذره ایجاد شود. بنابراین سرعت ذره در هنگام خروج از دایره نباید صفر باشد. از آن‌جایی

که سرعت مماسی ذره در هنگام خروج از دایره صفر است، کل سرعت ذره، در راستای شعاع و به سمت خارج دایره می‌باشد.

۳. **راه حل اول:** مسأله دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:



اولی شامل جرم آویزان m است و دومی شامل یک قرقره است که جرم‌های $M_۱$ و $M_۲$ از آن آویزان هستند. هر دو دستگاه با شتاب a_s به سمت پایین حرکت می‌کنند. حال می‌خواهیم بدانیم برای آنکه کشش نخ‌های بالایی در هر دو دستگاه برابر باشد، جرم‌ها باید چه رابطه‌ای با هم داشته باشند.

در سیستم اول:

$$mg - T = ma_s \tag{۱۱}$$

در سیستم دوم: (a را شتاب $M_۲$ نسبت به محل اتصال بگیرید و پایین را مثبت در نظر بگیرید.)

$$\begin{aligned} M_۱ g - \frac{T}{۲} &= M_۱(a_s - a) \\ M_۲ g - \frac{T}{۲} &= M_۲(a_s + a) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

اگر $g' \equiv g - a_s$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} mg' &= T \\ M_۱ g' &= \frac{T}{۲} - M_۱ a \\ M_۲ g' &= \frac{T}{۲} + M_۲ a \end{aligned} \tag{۱۳}$$

در نتیجه:

$$m = \frac{۴M_۱ M_۲}{M_۱ + M_۲} \tag{۱۴}$$

حال بیایید به ماشین آتوود اولیه‌مان برگردیم. (فرض کنید N قرقره داریم و در نهایت N را به بینهایت میل می‌دهیم.) اگر جرم پایینی x باشد، با استفاده از مسأله بالا درمی‌یابیم که می‌توان به جای دو جرم M و x از جرم معادل $f(x)$ استفاده کرد، که:

$$f(x) = \frac{۴x}{۱ + \frac{x}{M}} \tag{۱۵}$$

ما می‌توانیم سپس ترکیب جرم $f(x)$ و M بعدی را به عنوان جرم معادل، $f(f(x))$، بیان کنیم. با ادامه این روند، به این نتیجه می‌رسیم که جرم $f^{N-۱}(x)$ به قرقره بالایی متصل شده است.

حال باید رفتار $f^N(x)$ را وقتی $N \to \infty$ بررسی کنیم. رفتار تابع با رسم نمودار تابع بسیار واضح است. (در نظر داشته باشید که $x = ۳M$ نقطه ثابت تابع می‌باشد: $f(۳M) = ۳M$) این واضح است که هر مقداری که x داشته باشد، این مقدار به $۳M$ میل می‌کند. (غیر از حالتی که $x = ۰$) بنابراین ماشین آتوود بینهایت معادل است با دو جرم M و $۳M$. بنابراین شتاب جرم بالایی برابر است با:

$$a = \frac{۲Mg}{۴M} = \frac{g}{۲}$$

از آن‌جایی که جرم معادل کل دستگاه $۳M$ می‌باشد، $۳Mg$ نیرویی است که به محل اتصال وارد می‌شود.

راه حل دوم: اگر شتاب جاذبه در ضریب η ضرب شود، کشش در کل طناب نیز در ضریب η ضرب می‌شود. هم‌چنین اگر ما سیستم را در سیاره دیگری قرار دهیم و بفهمیم که کشش طناب η برابر شده است، آنگاه می‌فهمیم که شتاب جاذبه آنجا ηg می‌باشد. فرض کنید کشش نخ متصل به اولین قرقره T باشد. بنابراین کشش نخ متصل به بالای قرقره دوم $\frac{T}{۲}$ است. فرض کنید شتاب قرقره دوم $a_{p۲}$ باشد. بنابراین قرقره دوم به طور معادل در جهانی است که، شتاب جاذبه $g - a_{p۲}$ است. اگر طناب بالای قرقره دوم را بگیریم و با شتاب $a_{p۲}$ پایین بیاوریم، در آن صورت چیزی عوض نشده و کشش طناب در این جهان $\frac{T}{۲}$ می‌ماند.

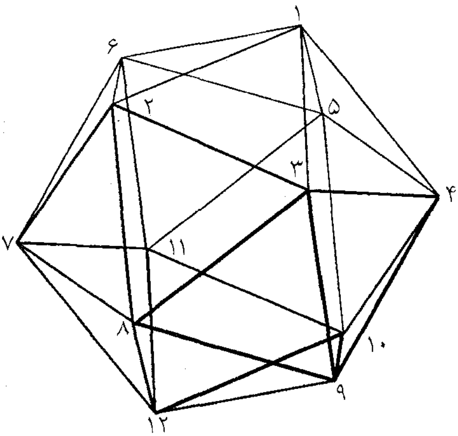
$$\frac{T}{g} = \frac{\frac{T}{۲}}{g - a_{p۲}} \tag{۱۶}$$

بنابراین $a_{p۲} = \frac{g}{۲}$ به همین ترتیب شتاب نسبی قرقره دوم و سوم $\frac{g}{۴}$ می‌باشد و هم‌چنین $a_{p۲}$ شتاب جسم بالایی نیز می‌باشد. بنابراین جواب $\frac{g}{۲}$ است.

۴. دو راه حل وجود دارد که دومی کلی‌تر است و در هر شبکه مقاومت متقارن به کار می‌رود.

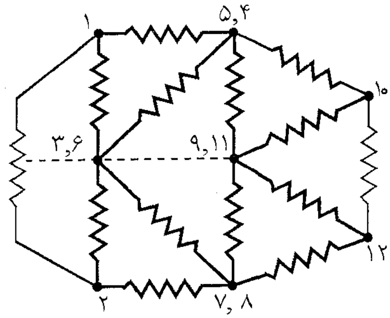
راه حل مستقیم:

نکته این است که باید نقاطی را که هم پتانسیل هستند به هم متصل کنیم. فرض کنید مقاومت معادل بین نقاط ۱ و ۲ را می‌خواهیم. با استفاده از تقارن مسأله، نقاط زیر با یکدیگر هم پتانسیل‌اند:



- ۳ و ۶ و ~~۹ و ۱۱~~
- ۴ و ۵
- ۷ و ۸
- ۹ و ۱۱

و مدار به صورت زیر ساده می‌شود:



خطوط پررنگ نشانگر مقاومت $\frac{1}{2}\Omega$ هستند.

برای ساده کردن مدار بهتر است نقاط میانی مقاومت‌های ۲ − ۱ و ۱۲ـ ۱۰ را به نقاط هم پتانسیل ۱۱ و ۹ـ ۶ و ۳ وصل کنیم. حال مقاومت بین ۱ و ۲ از سمت راست به چپ برابر خواهد بود با:

$$\frac{R_{1-2}}{2} = \left(\left(\left(\left(\frac{1}{2}||\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)||\frac{1}{2}||\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)||\frac{1}{2}||\frac{1}{2} = \frac{11}{60}\Omega \qquad (17)$$

که $a||b$ به معنی موازی بودن a و b است و $a||b = \frac{ab}{a+b}$. بنابراین $R_{1-2} = \frac{11}{30}\Omega$.

راه حل ارزشمندتر:

فرض کنید جریان I از رأس ۱ وارد می‌شود بقیه ۱۱ رأس به مدار خارجی متصلند که از هر کدامشان جریان‌های مساوی $(\frac{I}{۱۲-۱})$ خارج می‌شود. تقارن مسأله به ما می‌گوید هر کدام از ۵ مقاومت که از رأس L خارج شده‌اند، جریان یکسان $\frac{۱}{۵}I$ را حمل می‌کند. بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو مقاومت ۲ − ۱ برابر می‌شود با $\frac{I}{۵}\times ۱۰\Omega$.

حال فرض کنید از رأس ۲ جریان I خارج شده و به هر کدام از رئوس جریان‌های مساوی $(\frac{I}{۱۲-۱})$ وارد می‌شود. دوباره قسمت قبل را تکرار می‌کنیم.

از آن‌جایی که روابط حاکم بر مقاومت‌ها خطی می‌باشد، می‌توان از اصل برهم نهی استفاده کرد. جریان در هر مقاومت برابر با جمع جبری دو جریان در دو حالت بالا می‌باشد.

جریانهایی که در رئوس ۱ و ۲ جریان دارند، مساویند و هر یک برابر با $I+\frac{I}{(۱۲-۱)}$ می‌باشد. بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲ − ۱ برابر با $V=۲\times\frac{۱}{۵}\times ۱۰\Omega$ است. بنابراین مقاومت معادل بین رئوس ۱ و ۲ برابر می‌شود با:

$$R=\frac{\frac{۲I}{۵}}{\frac{۱۲I}{۱۱}}=\frac{۱۱}{۳۰}\Omega \tag{۱۸}$$

که صورت برابر با تعداد رئوس منهای یک و مخرج برابر تعداد مقاومت‌ها می‌باشد که:

(۱۹) تعداد مقاومت‌هایی که از هر رأس خارج شده × تعداد رئوس × $\frac{۱}{۲}$ = تعداد مقاومت‌ها

۵. فرض کنید سرعت زاویه‌ای فرفره‌ها ω_i، لختی دورانی هر کدام از فرفره‌ها حول محور تقارنش، I و سرعت زاویه‌ای حول محور گردنده Ω باشد. اگر ω_iها به قدر کافی بزرگ باشند (همان‌طور که فرض کردیم)، تکانه زاویه‌ای فرفره‌ی iام، $L_i=I\omega_i$ و در راستای محور تقارنش می‌باشد. (از تکانه زاویه‌ای کوچکی که به دلیل حرکت تقدیمی فرفره حاصل شده است، صرف‌نظرمی‌کنیم.)

نوک بردار $\overrightarrow{L_i}$ دایره‌ای به شعاع $L_i\sin\theta$ را با سرعت زاویه‌ای Ω می‌پیماید. بنابراین:

$$\left|\frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt}\right|=\Omega L_i\sin\theta=\Omega I\omega_i\sin\theta \tag{۲۰}$$

که $\dfrac{d\overrightarrow{L}_i}{dt}$ مماس بر دایره است.

هیچ‌کدام از N فرفره در راستای قائم شتاب ندارد بنابراین نیروی عمودی به سمت بالا وارد بر پایین‌ترین فرفره NMg می‌باشد. این نیرو به پایین‌ترین نقطه فرفره وارد می‌شود. نیروی $(N-1)Mg$ نیز دلیل وجود $N-1$ فرفره دیگر، به سمت پایین به آن وارد می‌شود بنابراین گشتاور وارد به فرفره آخر، حول مرکز جرمش، برابر با $(2N-1)Mgr\sin\theta$ می‌باشد. r نصف طول فرفره است. به راحتی اثبات می‌شود که گشتاور وارد بر دومین فرفره از پایین $(2N-3)Mgr\sin\theta$ می‌باشد. و به همین ترتیب گشتاور وارد بر i امین فرفره $(2i-1)Mgr\sin\theta$ است. از آن‌جایی که $\vec{\tau}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$، خواهیم داشت:

$$(2i-1)Mgr\sin\theta=\Omega I\omega_i\sin\theta \tag{21}$$

$$\Omega_i=(2i-1)\omega_1\equiv(2i-1)\omega \tag{22}$$

۶. (الف) فرض کنید r فاصله A تا قرقره، θ زاویه بین نخ متصل به A و راستای عمود و T کشش طناب باشد (T تابع r و θ است.) بنابراین با نوشتن قانون دوم نیوتن برای جرم‌های A و B در راستای نخ‌ها خواهیم داشت:

$$T-mg\cos\theta=mr\dot{\theta}^2-m\ddot{r}$$

$$T-mg=m\ddot{r} \tag{23}$$

با ترکیب این دو معادله خواهیم داشت: $2\ddot{r}=r\dot{\theta}^2-g(1-\cos\theta)$ و با استفاده از تقریب $1-\cos\theta=\dfrac{1}{2\theta^2}$، در زوایای کوچک، می‌توان نوشت: $1-\cos\theta=\dfrac{1}{2\theta^2}$

$$2\ddot{r}=r\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}g\theta^2 \tag{24}$$

دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱) دقیقاً بعد از این‌که به A ضربه زدیم:

در این حالت r تغییر نمی‌کند و حرکت تقریباً حرکت آونگی به طول l خواهد بود بنابراین θ و $\dot{\theta}$ به این صورت خواهند بود:

$$\theta\approx\frac{\varepsilon}{r}\sin\omega t\quad,\quad\dot{\theta}\approx\frac{\omega\varepsilon}{r}\cos\omega t \tag{25}$$

که $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ و $r = l$. با جایگذاری مقادیر θ و $\dot\theta$ در معادله (۲۴) خواهیم داشت:

$$2\ddot r = \frac{g\epsilon^2}{r^2}\cos^2\omega t - \frac{g\varepsilon^2}{2r^2}\sin^2\omega t \tag{۲۶}$$

از آن‌جایی که مقدار متوسط $\sin^2\omega t$ و $\cos^2\omega t$ در طول چند نوسان، $\frac{1}{2}$ می‌باشد، مقدار متوسط $\ddot r$ چنین خواهد بود:

$$\ddot r = \frac{\varepsilon^2 g}{8r^2} \tag{۲۷}$$

این مقدار مثبت است، بنابراین جرم B ابتدا شروع به بالا رفتن می‌کند.

۲) بعد از این‌که B مقداری بالا رفت:

در این حالت r تغییر می‌کند پس نمی‌توان گفت که حرکت مانند حرکت آونگ است ، (مثلاً ما در قسمت (ب) می‌فهمیم که در $\theta = 0$، $\dot r = r$ می‌باشد. پس این حرکت نمی‌تواند از نوع حرکت آونگ باشد.) به نظر می‌رسد که $\ddot r$ هنوز از رابطه‌ی ۲۷ به‌دست آید (فقط ϵ و r تغییر کردند ما در قسمت (ب) تغییرات ϵ را بررسی می‌کنیم.) حال بپردازیم به این‌که چرا این ادعا درست است.

معادله (۲۴) وقتی که $\dot r \neq 0$ نیز صادق است. تنها کمیت‌هایی که ممکن است تغییر کرده باشند، θ و $\dot\theta$ در معادله (۲۵) هستند. در نتیجه باید آن‌ها را بررسی کنیم:

فرض کنید در یک لحظه خاص $\dot r = v$ باشد می‌توان گفت در این حالت، دستگاه مختصات با سرعت v به سمت پایین حرکت می‌کند. در این دستگاه حرکت A شبیه حرکت آونگ است. شتاب ناشی از جاذبه در این دستگاه هنوز g و از همه مهم‌تر، تغییرات r بسیار کم است. بنابراین حرکت شبیه آونگی است که در آن $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$. از آن‌جایی که دستگاه مختصات با سرعت ثابت حرکت می‌کند، $\ddot r$ در این دستگاه با $\ddot r$ از دید آزمایشگر برابر است. بنابراین معادله (۲۷) هم چنان صادق می‌باشد. از آن‌جایی که $\ddot r$ همواره مثبت است و r افزایش می‌یابد، جرم B به قرقره‌اش برخورد می‌کند.

(ب) با استفاده از رابطه (۲۷)، شتاب اولیه B، $a_i = \dfrac{\varepsilon^2 g}{8l^2}$ به دست می‌آید. اگر این شتاب ثابت بود، سرعت B در هنگام برخورد با قرقره‌اش $\sqrt{2a_i l} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon^2 g}{4l}}$ می‌شد. با گذشت زمان، ε و l در معادله (۲۷) تغییر می‌کنند. بنابراین $\ddot r$ با بالا رفتن B، تغییر می‌کند. برای بررسی رفتار $\ddot r$، بهتر است رابطه ε و r را به‌دست آوریم.

از آنجایی‌که، انرژی جنبشی B، به دلیل حرکتش به سمت بالا افزایش می‌یابد، انرژی جنبشی A کاهش می‌یابد. رابطه بین انرژی جنبشی A و B در حالت $\theta = ۰$ به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{۱}{۲}mr^۲\dot{\theta}^۲_{\theta=۰} + \frac{۱}{۲}m\dot{r}^۲\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{۱}{۲}m\dot{r}^۲\right) \qquad (۲۸)$$

$d(\frac{۱}{۲}m\dot{r}^۲)$ کاری است که بر روی B انجام می‌شود و برابر با $dW_B = (T - mg)dr$ می‌باشد. از روابط (۲۳) و (۲۷) به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\frac{dW_B}{dr} = T - mg = \frac{mg\varepsilon^۲}{۸r^۲} \qquad (۲۹)$$

هم‌چنین با استفاده از معادله (۲۵) داریم: $\dot{\theta}^۲_{\theta=۰} = (\frac{\varepsilon\omega^۲}{r})^۲$ که $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$. بنابراین با استفاده از معادله (۲۸) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{mg\varepsilon^۲}{۲r}\right) = -۲\frac{dW_B}{dr} = -\frac{mg\varepsilon^۲}{۴r^۲} \qquad (۳۰)$$

با مشتق‌گیری و ساده کردن روابط خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dr} = \frac{r}{۴} \qquad (۳۱)$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\int \frac{۱}{\varepsilon}d\varepsilon = \frac{۱}{۴}\int \frac{۱}{r}dr$$
$$\Rightarrow \quad \varepsilon_r = Cr^{\frac{۱}{۴}}$$

بنابراین می‌بینیم که اگر r به آرامی تغییر کند، دامنه ϵ با $r^{\frac{۱}{۴}}$ متناسب خواهد بود. با استفاده از شرایط اولیه $(\varepsilon_l \equiv \varepsilon)$ خواهیم داشت:

$$\epsilon_r = \epsilon\left(\frac{r}{l}\right)^{\frac{۱}{۴}} \qquad (۳۲)$$

بنابراین شتاب در معادله (۲۷) تبدیل می‌شود به:

$$\ddot{r} = \left(\frac{\epsilon^۲ g}{۸\sqrt{l}}\right)\frac{۱}{r^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۳۳)$$

با ضرب کردن رابطه بالا در $\dot{r}$ و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{r}^{2}}{2} = \frac{\epsilon^{2} g}{4l} - \left(\frac{\epsilon^{2} g}{4\sqrt{l}}\right) \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad (34)$$

ثابت انتگرال در طرف راست تساوی از شرایط اولیه مسأله به‌دست می‌آید. در پایان در حالت $r = 2l$، خواهیم داشت:

$$\dot{r}_{r=2l} = \sqrt{\frac{\epsilon^{2} g}{2l} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

پاسخ سؤالات سال

۱۹۹۹

۱. (الف) فرض کنید که شعاع کره R و بار کل آن Q باشد. بنابراین پتانسیل مرکز آن برابر است با:

$$V(R) = \frac{kQ}{R} \tag{۱}$$

طبق قانون گوس، میدان در فاصله r از مرکز کره و در داخل آن، برابر است با:

$$E(r) = k\frac{Q(\frac{r^۳}{R^۳})}{r^۲} = \frac{kQr}{R^۳} \tag{۲}$$

با انتگرال‌گیری از $r = R$ تا $r = ۰$ تغییرات پتانسیل را به‌دست می‌آوریم. بنابراین:

$$\Delta V = \int_{r=۰}^{R} E(r)dr = \frac{kQ}{R^۳}\int_{r=۰}^{R} rdr = \frac{kQ}{۲R^۳}r^۲|_۰^R = \frac{kQ}{۲R}$$

بنابراین پتانسیل مرکز برابر است با:

$$\Delta V = V(۰) - V(R) = \frac{kQ}{۲R} \;\Rightarrow\; V(۰) = VR + \frac{kQ}{۲R} = \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{۲R} = \frac{۳kQ}{۲R} \tag{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{V(R)}{V(۰)} = \frac{\frac{kQ}{R}}{\frac{۳kQ}{۲R}} = \frac{۲}{۳} \tag{۴}$$

(ب) فرض کنید ρ چگالی بار مکعب باشد. فرض کنید V_l پتانسیل گوشه مکعب به ضلع l باشد. و V'_l پتانسیل مرکز مکعبی بر ضلع l باشد.

با تحلیل ابعادی داریم:

$$V_l \propto \frac{Q}{l} = \rho l^۲ \tag{۵}$$

پس:*

$$V_l = ۴V_{\frac{l}{۲}} \tag{۶}$$

*) دو مکعب را یکی با ضلع l و دیگری با ضلع $\frac{l}{۲}$ فرض کنید: حجم موثر اولی $۸ = ۲^۳$ برابر حجم موثر دومی است به عبارت دیگر می‌توان گفت بار اولی ۸ برابر بار دومی است ولی فواصل در اولی ۲ برابر فواصل در دومی می‌باشند. پس از رابطه ۵ می‌توان فهمید که V_l باید ۴ برابر $V_{\frac{l}{۲}}$ باشد.

با استفاده از اصل بر هم نهی داریم:

$$V'_l = ۸V_{\frac{l}{۲}} \qquad (۷)$$

این به آن دلیل است که مرکز مکعب بزرگ‌تر بر روی وجه مکعب کوچک‌تری که از آن ساخته شده است، قرار دارد. پس:

$$\frac{V_l}{V'_l} = \frac{۴V_{\frac{l}{۲}}}{۸V_{\frac{l}{۲}}} = \boxed{\frac{۱}{۲}} \qquad (۸)$$

۲. نقطه‌ای که بر روی زمین است به طور لحظه‌ای ساکن می‌باشد. بنابراین به صورت لکه در عکس ظاهر نمی‌شود با این وجود نقاط دیگری نیز بر روی چرخ وجود دارند که در عکس به صورت لکه ظاهر نمی‌شوند.

خصوصیت نقطه‌ای که در عکس واضح باشد، این است که در طول بازبودن دریچه دوربین، بر روی پره‌ی چرخ باقی بماند.

پره‌ای را در نیمه پایینی چرخ در نظر بگیریم. در زمانی کوتاه این پره باید حرکت کند ولی با مکان اولیه‌اش تقاطع خواهد داشت. این پره در نقطه تقاطع به صورت واضحی در عکس ظاهر می‌شود. بنابراین ما باید این نقاط تقاطع را به‌دست آوریم.

فرض کنید R شعاع چرخ باشد و فرض کنید پره‌ی چرخ با راستای قائم زاویه θ بسازد. اجازه دهید که چرخ به اندازه‌ی $d\theta$ بچرخد. مرکز چرخ به اندازه‌ی $Rd\theta$ جابجا شود. حرکت پره چرخ ترکیبی از حرکت انتقالی چرخ به اندازه‌ی $Rd\theta$ و حرکت چرخشی آن به اندازه‌ی $d\theta$ می‌باشد. فرض کنید r مکان شعاعی نقطه تقاطع مذکور باشد. بنابراین خواهیم داشت:

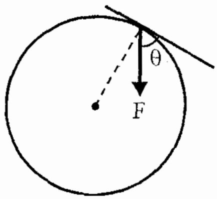
$$(Rd\theta)\cos\theta = rd\theta \qquad (۹)$$

بنابراین $r = R\cos\theta$ و این معرف دایره‌ای است که قطر آن برابر با فاصله عمودی شعاع چرخ تا زمین می‌باشد.

۳. راه حل اول:

برای نیروی اصطکاک می‌توان دو مؤلفه یکی در راستای مماس بر مسیر و دیگری در راستای شعاع دایره در نظر گرفت. فرض کنید نیروی اصطکاک (F) بیشینه مقدار خود را (μmg) داشته باشد و زاویه آن با مسیر (خط مماس بر مسیر) β باشد.

پس $F\sin\beta$، مؤلفه‌ای از نیروی اصطکاک می‌باشد که نیروی جانب به مرکز را تامین می‌کند و $F\cos\beta$ آن مؤلفه از نیروی اصطکاک است که شتاب مماسی را ایجاد می‌کند پس داریم:



$$F\sin\beta = \frac{mv^{۲}}{R} \quad , \quad F\cos\beta = m\frac{dv}{dt} = m\dot{v} \tag{۱۰}$$

اگر از معادله اول نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت: $F\dot{\beta}\cos\beta = \dfrac{۲mv\dot{v}}{R}$

از آن‌جایی که مقدار $m\dot{v}$ را از معادله دوم داریم، پس: $F\dot{\beta}\cos\beta = \dfrac{۲v}{R}(F\cos\beta)$ پس $\dot{\beta} = \dfrac{۲v}{R}$.

از آن‌جایی که می‌دانیم $v = R\dot{\theta}$ (θ زاویه کمانی است که موتور سیکلت روی دایره طی کرده است)، $\dot{\beta} = ۲\dot{\theta}$ و با انتگرال‌گیری از این رابطه خواهیم داشت:

$$\int \dot{\beta}dt = ۲\int \theta dt \;\; \Rightarrow \;\; \beta = ۲\theta \tag{۱۱}$$

در معادله (۱۰) می‌بینیم برای این‌که v بیشینه مقدار خود را داشته باشد، باید $F\sin\beta$ بیشینه باشد، به عبارت دیگر $\beta = \dfrac{\pi}{۲}$. پس بیشینه سرعت در $\beta = \dfrac{\pi}{۲}$ اتفاق می‌افتد و از آن‌جایی که $\theta = \dfrac{\beta}{۲}$، بیشینه سرعت وقتی اتفاق می‌افتد که

$$\theta = \frac{\pi}{۴} \tag{۱۲}$$

و این یعنی موتورسیکلت باید کمان $\theta = \dfrac{\pi}{۴}$ را روی دایره طی کند. به عبارت دیگر موتورسیکلت باید مسافت $R\theta = \dfrac{R\pi}{۴}$ را طی کند تا سرعت آن بیشینه شود.

راه حل دوم:

می‌دانیم برای این‌که بعد ازکم‌ترین مسافت طی شده سرعت بیشینه شود، باید نیروی وارد شده بیشترین مقدار خود را داشته باشد. به عبارت دیگر $F = \mu mg$ این نیروی اصطکاک دو مؤلفه دارد. یکی مماسی و دیگری شعاعی. می‌توان گفت: $F_t = \sqrt{F^۲ - F_r^۲}$ که F_t نیروی مماسی و F_r نیروی شعاعی می‌باشد. می‌دانیم $F_t = m\dfrac{dv}{dt}$ و $F_r = \dfrac{mv^۲}{R}$. پس:

$$m\frac{dv}{dt} = \sqrt{(\mu mg)^۲ - \left(\frac{mv^۲}{R}\right)^۲} \tag{۱۳}$$

می‌دانیم $v = \dfrac{dx}{dt}$ پس $dt = \dfrac{dx}{v}$. با قرار دادن این مقدار در معادله (۱۳) خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{\left(\dfrac{dx}{v}\right)} = \sqrt{(\mu g)^۲ - \left(\frac{v^۲}{R}\right)^۲} \Rightarrow dx = \frac{vdv}{\sqrt{(\mu g)^۲ - \left(\dfrac{v^۲}{R}\right)^۲}} \tag{۱۴}$$

فرض کنید $\dfrac{v^۲}{\mu gR} \equiv z$. پس $dz = \dfrac{۲vdv}{\mu gR}$ با جایگذاری این مقادیر در معادله (۱۴) خواهیم داشت:

$$dx = \frac{\dfrac{v}{\mu g}\left(\dfrac{\mu gRdz}{۲v}\right)}{\sqrt{۱ - \left(\dfrac{v^۲}{\mu gR}\right)^۲}} \Rightarrow dx = \frac{rdz}{۲\sqrt{۱ - z^۲}} \tag{۱۵}$$

مقدار بیشینه v از معادله $\dfrac{mv^۲}{R} = mg\mu$ به‌دست می‌آید. پس $v^۲ = \mu gR$ و به عبارت دیگر $z = ۱$. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۵) خواهیم داشت:

$$\int_{x=۰}^{X} dx = \frac{R}{۲}\int_{Z=۰}^{۱} \frac{dz}{\sqrt{۱ - z^۲}} \Rightarrow X = \frac{R}{۲}\arcsin z\Big|_{z=۰}^{۱} = \frac{R}{۲}\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{R\pi}{۴} \Rightarrow$$

$$X = \frac{R\pi}{۴} \tag{۱۶}$$

یعنی بیشینه سرعت بعد از طی مسافت $\dfrac{R\pi}{۴}$ حاصل می‌شود.

۴. (الف) در تمامی مراحل حرکت، سرعت نسبی روباه و خرگوش برابر با $v_{(rel)} = v - v\cos\alpha$ می‌باشد بنابراین زمانی که لازم است فاصله آن‌ها از l به صفر برسد، برابر است با:

$$T = \frac{l}{v(۱ - \cos\alpha)} \tag{۱۷}$$

این مقدار همه حالات غیر از $\alpha = ۰$، که در آن صورت به وضوح روباه به خرگوش نمی‌رسد. برای به‌دست آوردن مکان رسیدن آن‌ها از دو روش استفاده می‌کنیم:

راه حل اول:

فرض کنید که این خرگوش به دنباله خرگوش دیگری بدود و آن خرگوش هم به دنبال خرگوش دیگری بدود و به همین ترتیب ادامه داشته باشد. به طوری که هر خرگوش در هر لحظه با زاویه α نسبت به خط واصل خودش و خرگوشی که دنبالش می‌دود، حرکت کند. (شرایط مکانی خرگوش و روباه برای هر دو خرگوش که دنبال هم می‌دوند برقرار باشد.) می‌توان به راحتی فهمید که مکان اولیه همه این حیوانات دایره‌ای است به شعاع:

$$R = \frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

مرکز این دایره (P) رأس مثلث متساوی‌الساقینی به قاعده l و زاویه رأس α است روباه و خرگوش در دو رأس کناری این مثلث قرار دارند. با توجه به تقارن این مسأله می‌توان فهمید که مسیر همه این حیوانات بر روی دایره‌های به مرکز P می‌باشد. پس P نقطه‌ای است که روباه و خرگوش به هم می‌رسند. حرکت حیوانات فرضی به صورت مارپیچ و به سمت نقطه P است.

توضیحات: راه حل معادل راه حل بالا را می‌توان اینگونه بیان کرد که بردار سرعت خرگوش دوران یافته بردار سرعت روباه با زاویه α می‌باشد. بنابراین بردار جابه‌جایی کل خرگوش همان بردار جابه‌جایی کل روباه است که با زاویه α دوران یافته است. پس این دو بردار را می‌توان همان دو ساق مثلث متساوی‌الساقین در نظر گرفت که فاصله نقاط شروع آن‌ها l (قاعده مثلث) می‌باشد. پس محل برخورد دو بردار در نقطه P (همان مرکز دایره مفروض) است.

راه حل دوم:

سرعت خرگوش در راستای عمود بر خط واصل دو حیوان، $v\sin\alpha$ است. بنابراین در زمان dt جهت حرکت روباه به اندازه‌ی زاویه $d\theta = v\sin\alpha\dfrac{dt}{l_t}$ تغییر می‌کند که l_t فاصله در زمان t می‌باشد. بنابراین تغییرات سرعت روباه برابر است با: $|\overrightarrow{dv}| = vd\theta = v(v\sin\alpha\dfrac{dt}{l_t})$. بردار $\overrightarrow{dv}$ عمود بر بردار $\vec{v}$ است. بنابراین برای به‌دست آوردن مؤلفه x برای $\overrightarrow{dv}$ باید $|\overrightarrow{dv}|$ را در $\dfrac{v_y}{v}$ ضرب کنیم. همین کار را برای به‌دست آوردن مؤلفه y آن نیز باید انجام دهیم.

بنابراین:

$$v_x = \frac{v v_y \sin\alpha}{l_t} \quad (۱۸)$$

و

$$v_y = \frac{-v v_x \sin\alpha}{l_t} \quad (۱۹)$$

حال ما می‌دانیم $l_t = (l - v(1-\cos\alpha)t)$. بنابراین با ضرب کردن دو رابطه بالا در l_t و انتگرال‌گیری آن‌ها از زمان صفر تا t داریم:

$$\begin{aligned} v_{x,0} l + v(1-\cos\alpha)X &= v\sin\alpha Y \\ v_{y,0} l + v(1-\cos\alpha)Y &= -v\sin\alpha X \end{aligned} \quad (۲۰)$$

که (X, Y) بردار جابه‌جایی کل و $(v_{x,0}, v_{y,0})$ بردار سرعت اولیه می‌باشد با قرار دادن X و Yها در طرف راست معادله و به توان دو رساندن دو طرف و جمع کردن معادلات خواهیم داشت:

$$l^2 v^2 = (X^2+Y^2)(v^2\sin^2\alpha + v^2(1-\cos\alpha)^2) \quad (۲۱)$$

بنابراین جابه‌جایی برابر است با:

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} = \frac{l}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}} = \frac{\frac{l}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (۲۲)$$

برای به‌دست آوردن مکان دقیق می‌توان $v_{x,0} = 0$ را در معادله قرار داد. در آن صورت $\frac{Y}{X} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$ و این مقدار همان مقداری است که از راه حل اول به‌دست آمد.

(ب) راه حل اول:

فرض کنید $A(t)$ و $B(t)$ به ترتیب مکان روباه و خرگوش باشند و $C(t)$ پای عمود بر خط مسیر خرگوش از نقطه A باشد. هم‌چنین فرض کنید α_t زاویه‌ای باشد که خرگوش نسبت به جهتی که به طور مستقیم از روباه دور می‌شود، داشته باشد $(\alpha_0 = \alpha \quad , \quad \alpha_\infty = 0)$.

سرعتی که AB با آن کاهش می‌یابد، برابر است با $v - v\cos\alpha_t$ و سرعتی که CB با آن افزایش می‌یابد نیز $v - v\cos\alpha_t$ می‌باشد بنابراین مجموع مسافت AB و CB ثابت است. در ابتدا این مجموع برابر با $l + l\cos\alpha$ و در پایان برابر با $2d$ است. بنابراین:

$$d = \frac{l(1+\cos\alpha)}{2} \tag{۲۳}$$

راه حل دوم:

فرض کنید α_t همان زاویه‌ای باشد که در راه حل اول تعریف کردیم و l_t فاصله در زمان t باشد سرعت خرگوش در جهت عمود بر خط واصل دو حیوان $v\sin\alpha_t$ است.

فاصله برابر با l_t است. بنابراین تغییرات α_t نسبت به زمان برابر است با:

$$\dot{\alpha}_t = \frac{-v\sin\alpha_t}{l_t} \tag{۲۴}$$

و l_t به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\dot{l}_t = -v(1-\cos\alpha_t) \tag{۲۵}$$

با استفاده از رابطه (۲۴) و (۲۵) خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{l}_t}{l_t} = \frac{\dot{\alpha}_t(1-\cos\alpha_t)}{\sin\alpha_t} \tag{۲۶}$$

طرف راست تساوی را می‌توان به صورت $\frac{\sin\alpha_t}{1+\cos\alpha_t}\cancel{t}\,\dot{\alpha}$ نیز نوشت و بنابراین با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\ln(l_t) = -\ln(1+\cos\alpha_t) + C \tag{۲۷}$$

که C ثابت انتگرال‌گیری است.

از رابطه (۲۷) می‌توان به این نتیجه رسید که

$$l_t(1+\cos\alpha_t) = B$$

که B یک مقدار ثابت است. با بررسی شرایط اولیه سیستم خواهیم داشت: $B = l_\circ(1+\cos\alpha_\circ)$ که $l_\circ = l$ و $\alpha_\circ = \alpha$ بنابراین:

$$l_t = \frac{l(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha_t} \tag{۲۸}$$

اگر $t \to \infty$ و $\alpha_\infty \to ۰$، خواهیم داشت:

$$l_\infty = \frac{l(۱+\cos\alpha)}{۲} \tag{۲۹}$$

توضیحات: این راه حل برای هر زاویه‌ای به جز $\alpha = \pi$ درست است. اگر $\alpha = \pi$ در آن صورت خرگوش به سمت روباه می‌دود و آن‌ها در زمان $t = \frac{l}{۲v}$ بعد از طی نصف فاصله بین‌شان به هم می‌رسند.

۵. فرض کنید ρ چگالی قطرات باران باشد و λ چگالی ابری باشد که در فضا پراکنده شده است. فرض کنید $r(t)$ و $M(t)$ و $v(t)$ به ترتیب شعاع و جرم و سرعت قطره باران باشند به دلیل ثابت بودن چگالی قطره باران داریم: $M = (\frac{۴}{۳}\pi r^۳)\rho$. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان داریم:

$$\dot{M} = ۴\pi r^۲ \rho \dot{r} = \frac{۳}{r}\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rho\right)\dot{r} = \frac{۳}{r} M \dot{r} \quad \Rightarrow$$ (مشتق M نسبت به زمان)

$$\dot{M} = \frac{۳M\dot{r}}{r} \tag{۳۰}$$

تعبیر دیگری که برای $\dot{M}$ می‌توان داشت این است که $\dot{M}$ چیزی نیست به جز تغییرات M که به خاطر جذب شدن مقداری ذرات آب معلق در هوا ایجاد می‌شود. قطره باران متناسب با مقدار حجمی که در زمان طی می‌کند قطرات آب موجود در آن حجم را جارو می‌کند. به عبارت دیگر اگر سطح مقطع قطره باران $\pi r^۲$ باشد و مسافت dx را در زمان مذکور طی کند، جرمی برابر با $M = \pi r^۲ dx \lambda$ از قطرات آب موجود در ابر را جذب می‌کند. پس تغییرات جرم نسبت به زمان برابر خواهد بود با:

$$\dot{M} = \pi r^۲ \lambda \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{M} = \pi r^۲ \lambda v \tag{۳۱}$$

نیروی وزن (Mg) برابر با تغییرات اندازه حرکت قطره باران می‌باشد. پس $\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \dot{M}v + M\dot{v}$ بنابراین:

$$Mg = \dot{M}v + M\dot{v} \tag{۳۲}$$

در نهایت با حل سه معادله‌ی به دست آمده سه مجهول M و r و v به‌دست می‌آیند. در نظر داشته باشید که نمی‌توان از قانون بقای انرژی استفاده کرد. برخوردها کاملاً غیرکشسان هستند و با گرم شدن قطرات باران همراه می‌باشند و به عبارت دیگر انرژی بقا ندارد برای درک بهتر به توضیحات آخر سؤال دقت کنید.

هدف ما این است که $\dot{v}$ را بعد از زمان بسیار زیاد پیدا کنیم. برای این کار ابتدا $\ddot{r}$ را بعد از گذشت زمان طولانی به‌دست می‌آوریم:

از معادلات ۳۰ و ۳۱ می‌دانیم:

$$\pi r^{۲} v\lambda = ۳M\frac{\dot{r}}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{M}{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}\dot{r} = \frac{v\lambda}{۴} \;\Rightarrow\; \rho\dot{r} = \frac{v\lambda}{۴} \;\Rightarrow\; v = \frac{۴\rho\dot{r}}{\lambda} \;\Rightarrow\; \dot{v} = \frac{۴\rho\ddot{r}}{\lambda} \qquad (۳۳)$$

با جایگذاری معادلات (۳۰) و (۳۳) در معادله (۳۲) خواهیم داشت:

$$Mg = \left(\frac{۳M\dot{r}}{r}\right)\left(\frac{۴\rho\dot{r}}{\lambda}\right) + M\left(\frac{۴\rho\ddot{r}}{\lambda}\right) \qquad (۳۴)$$

پس:

$$\frac{g\lambda}{\rho}r = ۱۲\dot{r}^{۲} + ۴r\ddot{r} \qquad (۳۵)$$

می‌توان به آسانی ثابت کرد که شتاب قطره باران بعد از گذشت زمان زیاد ثابت است. فرض کنید که برای t بسیار زیاد r متناسب با t^{α} باشد. بنابراین طرف چپ معادله(۳۵) متناسب با t^{α} و طرف راست آن متناسب با $t^{۲\alpha-۲}$ است. ($\dot{r}$ با $t^{\alpha-۱}$ و $\ddot{r}$ با $t^{\alpha-۲}$ متناسب است و چون r متناسب با t^{α} است، پس $(\dot{r})^{۲}$ متناسب است با $t^{۲\alpha-۲}$ و نیز $r\ddot{r}$ متناسب است با $t^{۲\alpha-۲}$) حال باید برای داشتن این تساوی بُعد زمانی دو طرف یکسان باشد. پس $\alpha = ۲\alpha - ۲$ پس $\alpha = ۲$ در آن صورت r متناسب با $t^{۲}$ و $\ddot{r}$ ثابت است. بنابراین با گذشت زمان زیاد شتاب متناسب با زمان نبوده و ثابت خواهد شد.

بنابراین می‌توان گفت:

$$\ddot{r} \simeq bg \;,\;\; \dot{r} \simeq bgt \;,\;\; r \simeq \frac{۱}{۲}bgt^{۲} \qquad (۳۶)$$

که b یک ثابت عددی است.

برای زمان‌های بسیار بزرگ می‌توان از رابطه (۳۶) استفاده کرد و مقادیر آن را در معادله (۳۵) گذاشت

پس:

$$\left(\frac{g\lambda}{\rho}\right)\left(\frac{۱}{۲}bgt^{۲}\right) = ۱۲(bgt)^{۲} + ۴\left(\frac{۱}{۲}bgt^{۲}\right)bg \qquad (۳۷)$$

پس $b = \frac{\lambda}{۲۸\rho}$ و $\ddot{r} = \frac{g\lambda}{۲۸\rho}$ و می‌توان از معادله (۳۳) شتاب را بعد از گذشت زمان طولانی پیدا کرد.

$$\dot{v} = \frac{۴\rho\ddot{r}}{\lambda} = \frac{۴\rho}{\lambda}\left(\frac{g\lambda}{۲۸\rho}\right) \Rightarrow \dot{v} = \frac{g}{۷} \tag{۳۸}$$

که این مقدار مستقل از ρ و λ است.

توضیحات: می‌توان تغییرات انرژی مکانیکی قطره باران و سپس میزان گرم شدن آن را محاسبه کرد. در معادله (۳۳) دیدیم v متناسب با $\dot{r}$ است یعنی سرعت قطره باران متناسب با تغییر شعاع آن است. این مسأله ما را به یاد مخروط می‌اندازد. فرض کنید مخروطی پر از مایع باشد سرعت خارج شدن مایع برابر است با: $v_y = \frac{dy}{dt}$ که $\tan(\frac{\theta}{۲})\frac{dr}{dt}$ که θ زاویه رأس مخروط و r شعاع دایره‌ای است که از برخورد صفحه‌ی سطح مایع با دیواره‌های ظرف (مخروط) ایجاد می‌شود. به عبارت دیگر v متناسب با $\dot{r}$ است. قطره بارانی را هم که شعاعش تغییر می‌کند، می‌توان مانند مخروطی در نظر گرفت که از مایع پر می‌شود. از آن‌جایی که مرکز جرم مخروط در فاصله $\frac{h}{۴}$ از سطح مقطع مخروط است،*

با جابجا شدن قطره بارانی به جرم M به اندازه h، تغییر انرژی مکانیکی آن، برابر خواهد بود با:

$$E = Mg\frac{h}{۴} - \frac{۱}{۲}Mv^۲ \tag{۳۹}$$

با استفاده از این‌که $v^۲ = ۲(\frac{g}{۷}h)$ داریم:

$$\Delta E_Q = E = \frac{Mgh}{۴} - \frac{Mgh}{۷} = \frac{۳}{۲۸}Mgh \tag{۴۰}$$

که ΔE_Q انرژی گرمایی است که قطره باران کسب کرده است انرژی که لازم است تا دمای $۱kg$ آب را $۱^\circ C$ بالا ببرد برابر $۴۲۰۰J$ می‌باشد. پس داریم:

$$\Delta E_Q = ۴۲۰۰M\Delta T \tag{۴۱}$$

---

*) مخروط را مجموع تعدادی قرص در نظر بگیرید که ضخامت هر یک dy است. مرکز جرم هر قرص روی محور مخروط است. می‌توان گفت $y_{cm} = \frac{\int_{y=۰}^{h} y\,dm}{M}$ که $M = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h\rho$ و $dm = \pi r^۲ dy\rho$ که $R = h\tan\frac{\theta}{۲}$. پس خواهیم داشت: $y_{cm} = \frac{\int_{y=۰}^{h}\rho\pi(h-y)^۲(\frac{\theta}{۲})y\,dy}{\frac{۱}{۳}\pi h^۳\rho\tan^۲(\frac{\theta}{۲})}$ پس $y_{cm} = \frac{\int_۰^h (h-y)^۲ y\,dy}{\frac{۱}{۳}h^۳} = \frac{h}{۴}$

با استفاده از روابط (۴۰) و (۴۱) خواهیم داشت:

$$۴۲۰۰\Delta T = \frac{۳}{۲۸}gh \qquad (۴۲)$$

حال می‌توان این سؤال را مطرح کرد که قطره باران باید چه مسافتی را طی کند که به جوش آید. به عبارت دیگر h چقدر باشد که $\Delta T = ۱۰۰$ شود. خواهیم داشت:

$$h = ۴۰۰ km \qquad (۴۳)$$

ما مسلماً این مسأله را ساده کردیم ولی به هیچ وجه نباید نگران این باشیم که با ریختن باران بسوزیم. h میانگین برای قطرات باران $۱۰km$ است. این تغییر ارتفاع دمای آن‌ها را حدود ۲ یا ۳ درجه سانتیگراد تغییر می‌دهد. این اثر نیز مسلماً به وسیله عوامل دیگری از بین رفته و و قابل صرف‌نظراست.

۶. فرض کنید $\theta(t)$ زاویه‌ای باشد که فنر درآن قرار دارد. هم‌چنین فرض کنید $x(t)$ طول پیچیده نشده فنر و $v(t)$ سرعت جرم مذکور و $k(t)$ ثابت فنر در قسمت پیچیده نشده، باشد. (چگونگی تغییر k در ادامه راه حل بررسی می‌شود.) با استفاده از تقریب $a << L$ می‌توان گفت که حرکت جسم دایره‌ای است (این تقریب وقتی که x از مرتبه a باشد دیگر درست نیست. ولی زمان سپری شده از آن لحظه به بعد نسبت به کل زمان قابل صرف‌نظراست.) مرکز لحظه‌ای دایره نقطه تماس فنر با میله می‌باشد. با نوشتن $F = ma$ حول این مرکز خواهیم داشت:

$$\frac{mv^۲}{x} = kx \qquad (۴۴)$$

با درنظرگرفتن مقدار v سرعت زاویه‌ای حرکت به صورت زیر به‌دست می‌آید: (با توجه به رابطه‌ی (۴۴))

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{x} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۴۵)$$

$k(t)$ یعنی ثابت فنر برای طول پیچیده نشده آن، متناسب با عکس طول تعادل آن قسمت است. (مثلاً اگر ما فنر را نصف کنیم ثابت فنر دو برابر حالت اولیه می‌شود.) همه طول‌های تعادل در این مسأله در مقایسه با L بسیار کوچکند ولی نسبت معکوس k و طول تعادل را باید بررسی کرد.
در نظر داشته باشید که تغییرات زاویه در نقطه تماس فنر با میله برابر با تغییرات زاویه جسم در اطراف میله می‌باشد در یک بازه زمانی کوچک، فنر زاویه کوچک $d\theta$ را طی کرده و طول $ad\theta$ روی میله پیچیده

می‌شود. بنابراین نسبت تغییرات طول فنر به طول اولیه آن (قبل از حرکت به اندازه $d\theta$)، برابر با $a\dfrac{d\theta}{x}$ است. از بخش بالا به این نتیجه می‌رسیم که:

$$k' = \frac{k}{\dfrac{x - ad\theta}{x}} = \frac{k}{۱ - \dfrac{ad\theta}{x}}$$

و از بسط دو جمله‌ای نیوتن ($\dfrac{۱}{۱-\alpha} = ۱ + \alpha$)، می‌توان این نتیجه را گرفت که:

$$k' = k\left(۱ + \frac{ad\theta}{x}\right) \tag{۴۶}$$

که k' ثابت فنر در حالت جدید و k ثابت فنر در حالت قبلی است. پس $dk = \dfrac{kad\theta}{x}$. با مشتق‌گیری نسبت به زمان می‌توان به این نتیجه رسید که:

$$\dot{k} = \frac{ka\omega}{x} \tag{۴۷}$$

حال برای حل کردن مسأله فقط نیاز به یک معادله داریم که به وسیله‌ی آن بقای انرژی حاصل شود. فرض کنید طول فنر و ثابت آن و سرعت جسم در یک زمان مشخص به ترتیب x و k و v و بعد از زمان dt طول و ثابت فنر و سرعت جسم x' و k' و v' باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}kx^{۲} + \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}k'x'^{۲} + \frac{۱}{۲}mv'^{۲} + \left(\frac{۱}{۲}kx^{۲}\right)\left(a\frac{d\theta}{x}\right) \tag{۴۸}$$

که جمله آخر بیانگر انرژی ذخیره شده در قسمت پیچیده شده فنر به طول $ad\theta$ است. بنابراین انرژی آن $\dfrac{ad\theta}{x}$ برابر انرژی فنر در حالت اول می‌باشد. با جایگذاری v از معادله (۴۴) به صورت تابعی از x در این معادله خواهیم داشت:

$$kx^{۲} = k'x'^{۲} + \frac{۱}{۲}kxad\theta \tag{۴۹}$$

به عبارت دیگر $d(kx^{۲}) = -\dfrac{۱}{۲}kxad\theta$. که این را تا تقریب مرتبه اول حساب کردیم و البته از تعدادی از جملات با مرتبه‌ی بالاتر صرفنظر کردیم. با تقسیم این رابطه بر dt خواهیم داشت:

$$-\frac{۱}{۲}kxa\omega = \frac{d(kx^{۲})}{dt} = \dot{k}x^{۲} + ۲kx\dot{x} = \left(\frac{ka\omega}{x}\right)x^{۲} + ۲kx\dot{x} \tag{۵۰}$$

که در رابطه بالا از معادله (۴۷) استفاده کردیم.

پس داریم:

$$\dot{x} = -\frac{3}{4} a\omega \tag{۵۱}$$

حال باید دو معادله دیفرانسیل (۴۷) و (۵۱) را حل کنیم. با تقسیم کردن این دو معادله بر هم خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{3}{4}\frac{\dot{k}}{k} \tag{۵۲}$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۵۲) داریم:

$$\ln\frac{x}{L} = -\frac{3}{4}\ln\frac{k}{k_0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{L}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{k}{k_0} \quad \rightarrow \quad k = \frac{k_0 L^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} \tag{۵۳}$$

که k_0 ثابت فنر در حالت اولیه و L طول فنر در حالت اولیه است. (یعنی حالت جمع نشده) با استفاده از معادله (۵۳) و این‌که $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ داریم:

$$x^{\frac{2}{3}}\dot{x} = \frac{-3ak_0^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{3}}}{4m^{\frac{1}{2}}} \tag{۵۴}$$

با انتگرال‌گیری و در نظر گرفتن این‌که $x = L$ خواهیم داشت:

$$x^{\frac{5}{3}} = L^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{5ak_0^{\frac{1}{2}}L^{\frac{2}{3}}}{4m^{\frac{1}{2}}}\right)t \tag{۵۵}$$

پس در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که:

$$x(t) = L\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{3}{5}} \tag{۵۶}$$

که:

$$T = \frac{4}{5}\frac{L}{a}\sqrt{\frac{m}{k_0}} \tag{۵۷}$$

و T زمانی است که $x(t) = 0$ و جسم به میله برخورد می‌کند.

توضیحات:

(الف) در نظر داشته باشید به دلیل مرکزی نبودن نیرو تکانه زاویه‌ای جسم حول میله ثابت نیست.

(ب) با انتگرال‌گیری رابطه (۵۱) (از زمان صفر تا وقتی که جسم به میله می‌خورد)، به این نتیجه می‌رسیم که $L = \frac{۳}{۴}a\theta$ که $a\theta$ کل طولی است که به دور میله پیچیده شده است و می‌بینیم که $a\theta = \frac{۴}{۳}L$. یعنی طولی از فنر که به دور میله پیچیده شده $\frac{۴}{۳}$ طول اولیه (در حالت پیچیده نشده) است. به عبارت دیگر فنر به اندازه‌ی $\frac{۱}{۳}$ طول L کشیده شده است.

پاسخ سؤالات سال ۲۰۰۰

۱. فرض کنید x فاصله نقطه P تا مرکز چوب باشد. لختی دورانی چوب، حول مرکز جرم آن، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$I_{CM} = \int_{-\frac{l}{۲}}^{\frac{l}{۲}} x^۲ dm = \int_{-\frac{l}{۲}}^{\frac{l}{۲}} x^۲ \sigma dx = \frac{\sigma l^۳}{۱۲} = \frac{Ml^۲}{۱۲} \qquad (۱)$$

با استفاده از قضیه محورهای موازی می‌توان لختی دورانی چوب را حول P به‌دست آورد:

$$I_p = I_{CM} + Mx^۲ \ \rightarrow \ I_P = \frac{Ml^۲}{۱۲} + Mx^۲ \qquad (۲)$$

گشتاور، τ، حول محور دوران، P، از نیروی وزن چوب، ناشی می‌شود. بنابراین در زمانی که زاویه چوب با راستای افقی θ باشد، گشتاور برابر با $\tau = Mgx\cos\theta$ خواهد بود و از آن‌جایی که $\tau = I_p\alpha$ داریم:

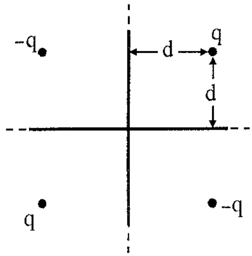
$$Mgx\cos\theta = \left(\frac{Ml^۲}{۱۲} + Mx^۲\right)\alpha$$
$$\rightarrow \ \alpha = \frac{Mgx\cos\theta}{\frac{Ml^۲}{۱۲} + Mx^۲} \qquad (۳)$$

سریع‌ترین حالت حرکت آن است که ضریب $\cos\theta$ بیشینه باشد. اگر مشتق α را نسبت به x صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Mg\left(\frac{Ml^۲}{۱۲} + Mx^۲\right) - ۲Mx(Mgx) = ۰$$
$$\Rightarrow \ x^۲ = \frac{l^۲}{۱۲} \ \Rightarrow \ x = \frac{l}{\sqrt{۱۲}} \qquad (۴)$$

پس در حالتی که $x = \frac{l}{\sqrt{۱۲}}$ باشد، یعنی فاصله نقطه اتصال تا مرکز چوب $\frac{l}{\sqrt{۱۲}}$ باشد، چوب سریع‌ترین حرکت را خواهد داشت و درکم‌ترین زمان ممکن به حالت قائم می‌رسد.

۲. (الف) اگر ۳ بار تصویری دیگر طوری قرار دهیم که چهار بار، مربعی مطابق شکل بسازند، به راحتی می‌توان دید که میدان الکتریکی ایجاد شده بر دو صفحه عمودند و از آن‌جایی که این میدان شرایط مرزی ما را ارضا می‌کند، این آرایش بارها میدانی برابر آنچه بار q و بارهای منفی القایی روی صفحات ایجاد می‌کردند، به وجود می‌آورد. بنابراین می‌توان به جای بررسی سیستم دو صفحه و یک بار، این آرایش مربعی چهار بار را در نظر گرفته و مسأله را حل کرد.



انرژی پتانسیل کل سیستم برابر است با:

$$V = ۴\left(\frac{-kq^۲}{۲d}\right) + ۲\left(\frac{kq^۲}{۲\sqrt{۲}d}\right) \tag{۵}$$

انرژی پتانسیل بار واقعی q و بارهای منفی القا شده بر روی صفحات در واقع $\frac{V}{۴}$ می‌باشد. این بدین دلیل است که در سیستم واقعی ما میدان الکتریکی فقط در یکی از چهار بخش وجود دارد ولی در این حالت میدان الکتریکی درهر چهار بخش وجود دارد و به واسطه این تفاوت، انرژی پتانسیل ذخیره شده واقعی هم، یک چهارم این مقدار می‌باشد. کار انجام شده، W برای آوردن بار q برابر با انرژی پتانسیل سیستم بارهای واقعی می‌باشد. پس:

$$W = \frac{V}{۴} = \frac{kq^۲}{d}\left(-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\right) \tag{۶}$$

و این مقدار همانطور که انتظار می‌رفت منفی است.

(ب) وقتی ما بار q را از صفحات عایق دور می‌کنیم، به این بار همان نیرویی وارد می‌شود که گویی ما آن را از سه بار تصویری که در جایشان بی حرکت هستند و در بخش قبل آن‌ها را قرار داده‌ایم، دور می‌کنیم.

بنابراین کار انجام شده، W'، برای دور کردن بار q از صفحات عایق برابر است با کار لازم برای دور کردن بار q از سه بار تصویری پس

$$\begin{aligned} W' &= ۲\left(\frac{Kq^۲}{۲d}\right) - \left(\frac{kq^۲}{۲\sqrt{۲}d}\right) \\ &= \frac{kq^۲}{d}\left(۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

که این مقدار همانطور که انتظار داشتیم مثبت است.

(ج) انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده روی صفحات عایق برابر با مجموع کارهای انجام شده روی

سیستم می‌باشد. که برابر است با:

$$W + W' = \frac{kq^{۲}}{d}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\right) \qquad (۸)$$

که این مقدار نیز همانطور که انتظار داشتیم مثبت است.

۳. طبق اصل کم‌ترین زمان فرما، نور مسیری را بین دو نقطه انتخاب می‌کند که نسبت به مسیرهای مجاورش در کم‌ترین زمان طی شود. پس در این مسأله مسیر دایره‌ای نسبت به مسیرهای اطرافش در کم‌ترین زمان طی می‌شود. این به آن معناست که نور برای طی کردن مسیرهای دایره‌ای همسایه همان زمان را (حداقل تا مرتبه اول)، صرف می‌کند.

سرعت نور در هر ماده متناسب با عکس ضریب شکست آن ماده است. بنابراین شرط وجود چنین مسیر دایره‌ای عبارت است از:

$$\frac{n(R+h)}{n(R)} = \frac{V(R)}{V(R+h)} = \frac{R}{R+h} \qquad (۹)$$

طبق این رابطه می‌دانیم: $\frac{n(R+h)-n(R)}{n(R)} = -\frac{(R+h)-R}{R+h}$ و با محاسبه این مقدار تا مرتبه‌ی اول h به این نتیجه می‌رسیم که $\frac{dn}{dh} = \frac{-n}{R}$. هم‌چنین با استفاده از فرضیات مسأله می‌دانیم $n = ۱ + \epsilon\rho$. به واسطه این رابطه به این نتیجه می‌رسیم که $\frac{dn}{dh} = \epsilon\frac{d\rho}{dh}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{-n}{R} = \epsilon\frac{d\rho}{dh} \Rightarrow R = \frac{-n}{\epsilon\frac{d\rho}{dh}} \qquad (۱۰)$$

بنابراین باید $\frac{d\rho}{dh}$ را محاسبه کنیم. با استفاده از سه رابطه زیر می‌توان $\frac{d\rho}{dh}$ را محاسبه کرد.

(الف) رابطه اول عبارت است از:

$$\frac{d\rho}{dh} = \frac{\rho_E}{P_E}\frac{dP}{dh} \qquad (۱۱)$$

این رابطه از قانون گاز کامل $(PV = nRT)$ به‌دست آمده اگر ما دو طرف این معادله را بر V تقسیم کنیم خواهیم داشت: $P = \frac{\rho}{M}RT$ که M جرم مولی گاز است. به عبارت دیگر، $P \propto \rho$ می‌باشد. از آن‌جایی که دمای اتمسفر سیاره مذکور به ارتفاع بستگی ندارد، ضریب این تناسب نیز به ارتفاع بستگی

ندارد، بنابراین ما این تناسب را با یک ضریب K که مستقل از ارتفاع می‌باشد، به تساوی تبدیل می‌کنیم. بنابراین در هر ارتفاعی می‌توان نوشت: $\frac{\rho}{P} = K$. مسلماً این رابطه در سطح زمین نیز صدق می‌کند، یعنی $K = \frac{\rho_E}{P_E}$. بنابراین: $\rho = \frac{\rho_E}{P_E}P$. با مشتق‌گیری دو طرف نسبت به h به رابطه‌ی (۱۱) یعنی $\frac{d\rho}{dh} = \frac{\rho_E}{P_E}\frac{dP}{dh}$ می‌رسیم.

(ب) دومین رابطه عبارت است از:

$$\frac{dP}{dh} = -g\rho \qquad (۱۲)$$

که این رابطه از بررسی نیروهای وارد شده به جزء کوچکی از اتمسفر (در ارتفاع dh و سطح موثر A) به‌دست می‌آید. برای هر جز کوچک از اتمسفر می‌توان فرض کرد که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر می‌باشد. نیروهای عمودی وارد بر آن عبارتند از: نیرویی که به دلیل اختلاف فشار بالا و پایینش به سمت بالا به آن وارد می‌شود که مقدارش $F_p = A\left(\frac{-dP}{dh}\right)dh$ می‌باشد (علامت منفی برای آن است که $\frac{dP}{dh}$ مقداری منفی دارد.) و نیروی حاصل از وزن آن که برابر $(\rho A dh)g$ می‌باشد. از آن‌جایی که این دو نیرو همدیگر را خنثی می‌کنند. داریم: $F_p = F_G$ و یا $\cancel{A}(\frac{-dP}{dh})dh = \rho A dh g$. با ساده کردن این معادله خواهیم داشت: $\frac{dP}{dh} = -g\rho$ که این همان رابطه (۱۲) است.

(پ) سومین رابطه عبارت است از:

$$g = \frac{g_E}{R_E}R \qquad (۱۳)$$

که این رابطه از معادله $g = \frac{GM}{R^۲}$ بدست آمده است. از آن‌جایی که چگالی زمین و سیاره مذکور برابر است، می‌توان نوشت: $M = \rho_E(\frac{۴}{۳}\pi R^۳)$. با قرار دادن مقدار M در رابطه بالا به این نتیجه می‌رسیم که $g \propto R$ و ضریب تناسب نیز $\frac{g_E}{R_E}$ می‌باشد. این همان رابطه (۱۳) است.

از تلفیق این سه رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{d\rho}{dh} = -\left(\frac{\rho_E}{P_E}\right)\left(\frac{g_E R}{R_E}\right)\rho \qquad (۱۴)$$

و با جایگذاری این مقدار در معادله (۱۰) خواهیم داشت:

$$R = \frac{nR_E P_E}{\epsilon g_E \rho_E \rho R} \qquad (۱۵)$$

$$\Rightarrow\ R = \sqrt{\frac{nR_E P_E}{\epsilon g_E \rho_E \rho}}$$

با استفاده از $n = ۱ + \epsilon\rho$ و فرض این‌که $\rho = \rho_E$ خواهیم داشت:

$$R = \sqrt{\frac{(۱ + \epsilon\rho_E)R_E P_E}{\epsilon g_E \rho_E^۲}} \qquad (۱۶)$$

مقدار $\epsilon\rho_E$ حدوداً برابر با ۳×۱۰^{-۴} می‌باشد. (اثر این مقدار در محاسبه عددی معادله (۱۶) قابل صرف‌نظراست.) و $R_E \approx ۶/۴ \times ۱۰^۶ m$ و $g_E \approx ۱۰ m/s^۲$ و $P_E \approx ۱ \times ۱۰^۵ Kg/ms^۲$ و $\rho_E \approx ۱/۲ \frac{Kg}{m^۳}$. بنابراین:

$$R \approx ۱/۳ \times ۱۰^۷ m \simeq ۲R_E \qquad (۱۷)$$

۴. الف) $\mu = \frac{M}{N}$ جرم هر توپ روی نیم‌دایره است. ما می‌خواهیم زاویه انحراف توپ، در هر برخورد $\theta = \frac{\pi}{N}$ باشد که در نهایت توپ بعد از N برخورد با زاویه π خارج شود. اگر $\frac{\mu}{m}$ بسیار کوچک باشد، این زاویه انحراف دست یافتنی نیست. حال می‌خواهیم مقدار این زاویه انحراف را به صورت کمی به‌دست آوریم.

ادعا می‌کنیم که اگر جرم m با جرم ساکن μ برخورد کند، بیشینه زاویه انحراف از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin\theta_{max} = \frac{\mu}{m} \qquad (۱۸)$$

حال باید ادعای خود را ثابت کنیم.

اثبات: فرض کنید V سرعت اولیه جرم m از دید آزمایشگر باشد.

می دانیم مکان مرکز جرم دستگاه برابر است با:

$$X = \frac{mX' + \mu X''}{m + \mu}$$

که X' و X'' مکان جرم‌های m و μ در دستگاه مختصات آزمایشگر می‌باشند. پس سرعت مرکز جرم برابر است با:

$$V_{cm} = \frac{dX}{dt} = \frac{mV + ۰}{m + \mu}$$

برای بررسی سرعت‌ها از دیدگاه مرکز جرم، می‌توان نوشت:

$$V_m = V - V_{cm} = V - \frac{mV}{m+\mu} = \frac{\mu V}{m+\mu}$$

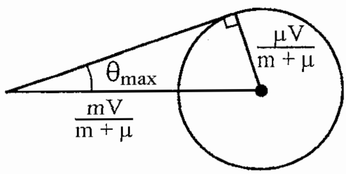
$$V_\mu = \frac{mV}{m+\mu} \qquad (۱۹)$$

به دلیل کشسان بودن برخوردها، اندازه‌ی سرعت‌های نهایی از دید مرکز جرم برابر با همین سرعت‌هاست.

برای بررسی دستگاه از دید آزمایشگر باید به سرعت‌های نهایی مقدار سرعت V_μ را که برابر $V_\mu = \frac{mV}{m+\mu}\hat{x}$ می‌باشد، اضافه کنیم. پس برای جرم m داریم:

$$V_f = \left(\frac{mV}{m+\mu}\right)\hat{x} + \left(\frac{\mu V}{m+\mu}\right)\hat{r} \qquad (۲۰)$$

که $\hat{r}$ بردار یکه‌ای است که جهت را نسبت به دستگاه مرکز جرم بیان می‌کند. برای بیشینه شدن زاویه انحراف از دید آزمایشگر، سرعت باید مماس بر دایره باشد. در این حالت $\sin\theta_{\max} = \frac{\mu}{m}$. البته این مقدار را با معادلات حاصل از بقای انرژی و بقای تکانه نیز می‌توان به‌دست آورد. در نهایت در آن معادلات شرط وجود جواب $\sin\theta \leq \frac{\mu}{m}$ می‌باشد. به عبارت دیگر $\sin\theta_{\max} = \frac{\mu}{m}$. البته این راه حل بسیار طولانی و شامل محاسبات بسیار زیادی می‌باشد.



(این نتیجه فقط وقتی درست است که $\mu < m$. اگر $\mu > m$ باشد، آنگاه بیشینه زاویه انحراف ۱۸۰° می‌شود.)

در این مسأله می‌دانیم $\theta = \frac{\pi}{N}$ و از آن‌جایی که θ کوچک است، $\sin\theta \approx \theta$ می‌باشد و می‌توان گفت اگر $\sin\theta \leq \frac{\mu}{m}$ باشد، آنگاه:

$$\theta \leq \frac{\mu}{m} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{N} \leq \frac{\left(\frac{M}{N}\right)}{m} \;\Rightarrow\; \pi \leq \frac{M}{m} \qquad (۲۱)$$

با داشتن جرم m یک کران پایین برای M به‌دست می‌آید زیرا اگر M خیلی کوچک باشد، جرم m می‌تواند به راحتی از میان نیم‌دایره بگذرد.

(ب) با توجه به شکل، در حالتی که زاویه انحراف بیشینه باشد، سرعت نهایی بعد از یک برخورد برابر است با:

$$V_f = V\frac{\sqrt{m^۲ - \mu^۲}}{m+\mu} \approx V\left(۱ - \frac{\mu}{m}\right) \qquad (۲۲)$$

با محاسبه تا مرتبه اول بزرگی $\frac{\mu}{m}$، به این نتیجه می‌رسیم که بعد از هر برخورد سرعت ثانویه با ضریب $(1-\frac{\mu}{m})$ نسبت به سرعت اولیه کاهش می‌یابد. در حالت خاصی که $\frac{\mu}{m}=\frac{\pi}{N}$ می‌توان دید که بعد از N برخورد نسبت سرعت نهایی به سرعت اولیه، از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{V_f}{V}=\left(1-\frac{\pi}{N}\right)^N\approx e^{-\pi} \qquad (۲۳)$$

(که $e^{-\pi}$ حدوداً برابر با $\frac{1}{23}$ می‌باشد. پس فقط در حدود ۴٪ سرعت اولیه باقی می‌ماند.)

۵. سرعت زاویه‌ای میز را $\Omega\hat{z}$ و سرعت زاویه‌ای توپ را $\vec{\omega}$ فرض کنید. سرعت توپ نسبت به آزمایشگر برابر با سرعت توپ نسبت به میز به علاوه سرعت میز نسبت به آزمایشگر می‌باشد. از آن‌جایی که حرکت غلتشی محض است، سرعت توپ نسبت به میز، $\omega\times(a\hat{z})$ می‌باشد. (a شعاع توپ است.) بنابراین سرعت توپ نسبت به آزمایشگر برابر است با:

$$\vec{v}=(\Omega\hat{z})\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(a\hat{z}) \qquad (۲۴)$$

تکانه زاویه‌ای توپ برابر است با:

$$L=I\omega \qquad (۲۵)$$

اصطکاک با سطح هم تکانه خطی و هم تکانه زاویه‌ای توپ را تغییر می‌دهد. در مورد تکانه خطی می‌توان نوشت:

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۲۶)$$

و از آن‌جایی که $\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ (نسبت به مرکز توپ) و $\vec{\tau}=(-a\hat{z})\times\vec{F}$ پس:

$$(-a\hat{z})\times\vec{F}=\frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۲۷)$$

حال با استفاده از روابط بالا می‌توان نشان داد که توپ مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. با جایگذاری مقادیر L و F از معادلات (۲۵) و (۲۶) در معادله (۲۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(-a\hat{z})\times\left(\frac{md\vec{v}}{dt}\right)&=I\frac{d\vec{\omega}}{dt}\\ \Rightarrow\ \frac{d\vec{\omega}}{dt}&=-\left(\frac{am}{I}\right)\hat{z}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \Omega\hat{z}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times(a\hat{z})\\ &= \Omega\hat{z}\times\vec{v}-\left(\left(\frac{am}{I}\right)\hat{z}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\times a\hat{z}\right)\end{aligned} \quad (۲۹)$$

از آن‌جایی که $\frac{d\vec{v}}{dt}$ در صفحه افقی قرار دارد، به راحتی می‌توان معادله بالا را به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= \Omega\hat{z}\times\vec{v}-\left(\frac{a^۲m}{I}\right)\frac{d\vec{v}}{dt}\\ \Rightarrow\quad \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left(\frac{\Omega}{۱+\left(\frac{a^۲m}{I}\right)}\right)\hat{z}\times\vec{v}\end{aligned} \quad (۳۰)$$

لختی دورانی یک کره یکنواخت $I=\frac{۲}{۵}ma^۲$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\frac{۲}{۷}\Omega\right)\hat{z}\times\vec{v} \quad (۳۱)$$

بنابراین توپ حرکت دایره‌ای خواهد داشت بسامد زاویه‌ای آن مستقل از شرایط اولیه، $\frac{۲}{۷}$ بسامد زاویه‌ای میز می‌باشد.

با انتگرال‌گیری از معادله (۳۱) از زمان صفر تا زمان t خواهیم داشت:

$$\vec{v}-\vec{v}_\circ=\left(\frac{۲}{۷}\Omega\right)\hat{z}\times(\vec{r}-\vec{r}_\circ) \quad (۳۲)$$

که می‌توان این معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{v}=\left(\frac{۲}{۷}\Omega\right)\hat{z}\times\left(\vec{r}-\left(\vec{r}_\circ+\frac{۷}{۲\Omega}(\hat{z}\times\vec{v}_\circ)\right)\right) \quad (۳۳)$$

که این معادله حرکت دایره‌ای را بر روی دایره‌ای که بردار مکان مرکز آن از دید آزمایشگر

$$\vec{r}_c=\vec{r}_\circ+\left(\frac{۷}{۲\Omega}\right)(\hat{z}\times\vec{v}_\circ) \quad (۳۴)$$

می‌باشد، را بیان می‌کند. بنابراین شعاع چنین دایره‌ای برابر با $\frac{۷v_\circ}{۲\Omega}=(\frac{۷}{۲\Omega})|\hat{z}\times\vec{v}_\circ|$ است. حال می‌توان چند حالت خاص را بررسی کرد.

• اگر $v_\circ = \circ$ باشد، (حرکت چرخشی توپ کاملاً حرکت دورانی حاصل از چرخش میز را خنثی می‌کند) توپ همواره در یک مکان ثابت می‌ماند.

• اگر توپ در ابتدا نمی‌چرخید و فقط با میز حرکت می‌کرد، $v_\circ = \Omega r_\circ$ و شعاع دایره برابر با $r_c = \frac{۷}{۲} r_\circ$ بود.

• اگر بخواهیم مرکز دایره بر مرکز میز منطبق شود، با استفاده از معادله (۳۴) درمی‌یابیم که $-\vec{r_\circ} = \frac{۷}{۲}\Omega(\hat{z}\times\vec{v_\circ})$ این رابطه بیان می‌کند که $v_\circ = (\frac{۲}{۷})\Omega r_\circ$ و هم‌چنین $v_\circ$ در جهت مماس بر حرکت میز خواهد بود. (به عبارت دیگر توپ باید با سرعت $\frac{۲}{۷}$ برابر سرعت میز حرکت کند.)

• این‌که بسامد زاویه‌ای توپ ضریب گویایی از بسامد زاویه‌ای میز است به این معناست که توپ دوباره به مکان اولیه خود روی میز باز می‌گردد. از دید آزمایشگر وقتی میز هفت بار می‌چرخد، توپ باید دو دایره را طی کند. از دید شخصی که با میز می‌چرخد، توپ قبل از رسیدن به مکان اولیه‌اش پنج بار حرکت مارپیچی خواهد داشت.

اگر توپی با لختی دورانی $I = \eta m a^۲$، (در کره یکنواخت $\eta = \frac{۲}{۵}$)، را بررسی کنیم، درمی‌یابیم که ضریب $\frac{۲}{۷}$ به‌دست آمده در این مسأله همان $\frac{\eta}{۱+\eta}$ است. حال اگر کل جرم توپ در مرکزش جمع شود، ($\eta \to \circ$)، بسامد زاویه‌ای حرکت دورانی آن صفر می‌شود و شعاع دایره به بینهایت میل می‌کند.

۶. ما این راه حل را به سه بخش تقسیم می‌کنیم. ۱ـ بسامد زاویه‌ای نوسان، ۲ـ اتلاف انرژی در هر نوسان و ۳ـ دامنه نوسان‌گر به صورت تابعی از زمان.

۱ـ بسامد زاویه‌ای نوسان:

در حالت تعادل، نیروی فنر، نیروی وزن طناب را خنثی می‌کند. اگر طناب به اندازه‌ی y جابجا شود، (با در نظر گرفتن بالا به عنوان جهت مثبت)، نیروی فنر به اندازه‌ی $-ky$ تغییر می‌کند و هم‌چنین نیروی وزن نیز به اندازه‌ی $-(\sigma y)g$ تغییر می‌کند. در این صورت نیرویی برابر با $F = -(k+\sigma g)y$ به طنابی به جرم $M = \sigma L$ وارد می‌شود. با استفاده از رابطه نیوتن خواهیم داشت:

$$-(k+\sigma g)y = (\sigma L)\ddot{y} \qquad (۳۵)$$

بنابراین بسامد زاویه‌ای نوسان برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k+\sigma g}{\sigma L}} = \sqrt{\frac{k}{M}+\frac{g}{L}} \tag{۳۶}$$

یک جواب معمول ولی غلط برای بسامد زاویه‌ای $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ است. جمله $\frac{g}{L}$ باید به جواب اضافه شود تا مقداری درست برای ω به‌دست آید. در حالتی که $k \to 0$ (فنر ضعیف باشد)، نیروی فنر با جابه‌جایی تغییر چندانی نمی‌کند و همیشه نیرویی به اندازه‌ی $Mg = (\sigma L)g$ به سمت بالا وارد می‌کند. اگر طناب به اندازه‌ی y بالا برده شود، نیروی وزن $-(L+y)\sigma g$ می‌شود بنابراین برآیند نیروی فنر و وزن برابر با $-(\sigma g)y$ می‌شود. با استفاده از قانون نیوتن می‌توان نوشت: $-(\sigma g)y = (L\sigma)\ddot{y}$. بنابراین $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ که این مقدار مستقل از k است. طناب با فرکانسی که با طولش رابطه دارد نوسان می‌کند. بنابراین در حالت کلی، چنین جمله‌ای نیز باید در رابطه بسامد زاویه‌ای وجود داشته باشد.

می‌توانیم معادله حرکت را دقیق‌تر بنویسیم. اگر $l = L+y$، طول آویزان طناب در هوا باشد، خواهیم داشت:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}((l\sigma)\dot{l}) = \sigma l\ddot{l} + \sigma\dot{l}^2 = \sigma(L+y)\ddot{y} + \sigma\dot{y}^2 \tag{۳۷}$$

وقتی طناب بالا می‌رود، نیروی برآیند وارد بر طناب $F = -(k+\sigma g)y$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از معادله (۳۷) می‌توان نوشت:

$$-(k+\sigma g)y = \sigma(L+y)\ddot{y} + \sigma\dot{y}^2 \tag{۳۸}$$

وقتی طناب پایین می‌آید، سطح نیز نیروی عمودی به سمت بالا، (F')، به آن وارد می‌کند. بنابراین برآیند نیروهای وارد بر طناب برابر می‌شود با: $F = -(k+\sigma g)y + F'$. (F' همان نیرویی است که باعث می‌شود اتم‌هایی از طناب که به زمین برخورد می‌کنند بایستند.) می‌توان گفت وقتی طناب با سرعت $|\dot{y}|$ حرکت می‌کند، جرم با نرخ $\sigma|\dot{y}|$ به زمین برخورد می‌کند. بنابراین تغییرات تکانه اتم‌های طناب در واحد زمان، (F')، برابر با $\sigma\dot{y}^2$ می‌باشد. با استفاده از معادله (۳۸) می‌توان نوشت:

$$-(k+\sigma g)y = \sigma(L+y)\ddot{y} \tag{۳۹}$$

۲ـ اتلاف انرژی در هر نوسان:

طبق معادلات حرکت به‌دست آمده در قسمت قبل، حرکت طناب، نوسانی است و جواب معادله دیفرانسیلی که این حرکت را توصیف می‌کند چنین است:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t) \qquad (۴۰)$$

وقتی یک جز دیفرانسیلی از طناب به جرم dm با زمین برخورد کند، انرژی جنبشی آن به مقدار $\frac{۱}{۲}(dm)v^۲$ کاهش می‌یابد. در یک زمان کوچک dt می‌دانیم $dm = |\sigma v dt|$. بنابراین این کاهش انرژی برابر با $|\frac{۱}{۲}\sigma v^۳ dt|$ می‌باشد. با استفاده از رابطه (۴۰) به این نتیجه می‌رسیم که $v(t) = -\omega A(t)\sin(\omega t)$. بنابراین تغییرات انرژی در هنگام پایین آمدن طناب، $(-\Delta E')$، برابر است با:

$$\Delta E_{\text{پایین آمدن}} = \frac{-۱}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{\omega}} \sigma\omega^۳ A^۳ \sin^۳(\omega t)dt \qquad (۴۱)$$

با یک تغییر متغیر به صورت $\theta \equiv \omega t$ و استفاده از نتیجه انتگرال زیر

$$\int_۰^{\pi} \sin^۳\theta d\theta = \int_۰^{\pi}(۱-\cos^۲\theta)\sin\theta d\theta = \left(-\cos\theta + \frac{\cos^۳\theta}{۳}\right)\Big|_۰^{\pi} = \frac{۴}{۳} \qquad (۴۲)$$

با ثابت در نظر گرفتن A در طول یک نوسان خواهیم داشت:

$$\Delta E_{\text{پایین آمدن}} = -\frac{۱}{۲}\sigma\omega^۲ A^۳ \int_۰^{\pi} \sin^۳\theta d\theta = -\frac{۲}{۳}\sigma\omega^۲ A^۳ \qquad (۴۳)$$

برای بالا رفتن طناب نیز باید تغییرات انرژی، $(\Delta E')$، را حساب کنیم. وقتی جرم dm از طناب ساکن به حرکت درآید، مقداری اتلاف انرژی خواهیم داشت. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید.

فرض کنید جرم dm در زمانی که طناب با سرعت v در حرکت است به آن بپیوندد و با آن به حرکت درآید. این جزء از طناب انرژی جنبشی برابر با $\frac{۱}{۲}(dm)v^۲$ کسب می‌کند. هم‌چنین تکانه آن به اندازه‌ی $dp = (dm)v$ افزایش می‌یابد. کاری که فنر باید انجام دهد تا این جرم را به سرعت v برساند برابر با $W = \int F dx = \int F v dt$ می‌باشد. با فرض ثابت ماندن سرعت در یک بازه زمانی کوچک می‌توان نوشت:

$$W = v\int F dt = v(dp) = (dm)v^۲ \qquad (۴۴)$$

و از آن‌جایی که تغییرات انرژی جنبشی جرم مذکور نصف این مقدار است و نصف دیگر این کار به گرما تبدیل شده است، مقدار انرژی اتلافی برابر می‌شود با: $\frac{۱}{۲}(dm)v^۲ = \frac{۱}{۲}|\sigma v dt|v^۲$.

و این همان مقدار انرژی اتلافی در حالت پایین رفتن است $(\Delta E = \Delta E' = \frac{۱}{۲}\sigma v^۳ dt)$ بنابراین کل انرژی اتلافی برابر می‌شود با:

$$\Delta E_t = \Delta E + \Delta E' = ۲\Delta E = -\frac{۴}{۳}\sigma\omega^۲ A^۳ \qquad (۴۵)$$

۳ـ دامنه نوسانگر:

انرژی طناب در حالتی که با دامنه A نوسان کند، برابر با $E = \frac{M\omega^۲ A^۲}{۲}$ می‌باشد. بنابراین $dE = M\omega^۲ A dA$. تعداد نوسانات در زمان dt برابر با $\frac{\omega dt}{۲\pi}$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از تقریب $M \simeq \sigma L$ و رابطه ۴۵ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}(\sigma L)\omega^۲ A dA &= -\left(\frac{\omega dt}{۲\pi}\right)\left(\frac{۴}{۳}\sigma\omega^۲ A^۳\right)\\ \Rightarrow \quad \frac{dA}{A^۲} &= \left(\frac{-۲\omega}{۳\pi L}\right) dt \end{aligned} \qquad (۴۶)$$

با انتگرال‌گیری این رابطه از $t = ۰$ تا زمان t و استفاده از این‌که $A(۰) \equiv b$ خواهیم داشت:

$$A(t) = \frac{۱}{\frac{۱}{b} + \frac{۲\omega t}{۳\pi L}} \qquad (۴۷)$$

که اگر t بسیار بزرگ باشد، می‌توان به طور تقریبی نوشت:

$$A(t) \approx \frac{۳\pi L}{۲\omega t} \qquad (۴۸)$$

و این به معنی آن است که دامنه نوسان مستقل از دامنه اولیه (b)، می‌باشد. رفتار $\frac{۱}{t}$ به ما نشان می‌دهد که وقتی $t \to \infty$ کل مسافتی که نوسانگر طی کرده است، به بینهایت میل می‌کند. $(\int_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \to \infty)$
حال اگر معادله (۴۸) را بر حسب تعداد نوسانات، $(n = \frac{\omega t}{۲\pi})$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$A(n) \approx \frac{۳L}{۴n} \qquad (۴۹)$$

پاسخ سؤالات سال

۲۰۰۱

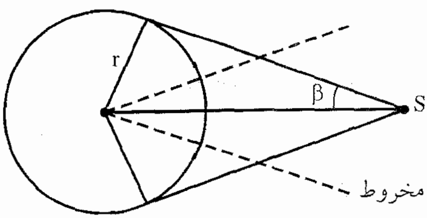
۱. فرض کنید نیروی اصطکاک بین استوانه و توپ، F باشد. برای این‌که توپ بتواند در زاویه θ باقی بماند، F باید مؤلفه مماسی وزن توپ را خنثی کند. بنابراین $F = mg\sin\theta$.

از طرف دیگر گشتاور وارد شده به توپ فقط حاصل از نیروی اصطکاک است. (بقیه نیروها از مرکز می‌گذرد و فاصله اثر آن‌ها صفر است.) بنابراین $\tau = Fr$. از آن‌جایی که $F = mg\sin\theta$ خواهیم داشت: $\tau = mgr\sin\theta$. از طرف دیگر داریم: $\tau = I\alpha_b$ که α_b شتاب زاویه‌ای توپ است. بنابراین $mgr\sin\theta = I\alpha_b$. از آن‌جایی که شتاب خطی توپ و استوانه در نقطه‌ی تماس مساوی هستند، $r\alpha_b = R\alpha$ یا $\alpha_b = \frac{R}{r}\alpha$. با جایگذاری این مقدار در معادله بالا خواهیم داشت:

$$mgr\sin\theta = \left(\frac{۲}{۵}mr^۲\right)\left(\frac{R}{r}\alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{۵g\sin\theta}{۲R} \qquad (۱)$$

۲. وقتی نور از سطحی بازتاب می‌شود، زاویه تابش و بازتابش آن با هم برابر هستند. بنابراین می‌توان از روش تصویرسازی برای فهمیدن این‌که آیا یک پرتو به پرده برخورد می‌کند یا نه، استفاده کرد.

اگر به مقطع دو بعدی مخروط نگاه کنید، به این نتیجه می‌رسید که وقتی یک تصویر بارها از لبه‌های این مخروط بازتاب شود، در نهایت بر روی یک دایره به شعاع r قرار می‌گیرد. از همین روش می‌توان به این نتیجه رسید که در یک سیستم سه بعدی، پرتوها در نهایت به کره‌ای به شعاع r و به مرکز رأس مخروط می‌رسند. حال این سؤال مطرح می‌شود که چه کسری از نور گسیل شده از چشمه، به کره‌ای به شعاع r به مرکز o در فاصله d از چشمه می‌رسد؟



در شکل بالا مشاهده می‌شود که ما باید کنجی راکه به وسیله مخروطی با نیم زاویه رأس β تشکیل می‌شود حساب کنیم که $\sin\beta = \frac{r}{d}$. با بررسی کره به شعاع r مشاهده می‌شود که سطح عرقچینی که به وسیله این مخروط محدود شده است را می‌توان با افراز عرقچین، به نوارهای دایره‌های به‌دست آورد. شعاع هر دایره برابر با $R\sin\alpha$ می‌باشد. که α زاویه‌ای است که شعاع کره با خط واصل منبع و مرکز کره می‌سازد. می‌توان با ضرب کردن محیط دایره در پهنای نوار، $dl = Rd\alpha$، سطح آن نوار را به‌دست آورد.

و با انتگرال‌گیری می‌توان سطح کل عرقچین را حساب کرد. بنابراین:

$$A = \int_{۰}^{\beta} (۲\pi R \sin\alpha)(R d\alpha) = -۲\pi R^۲ \cos\alpha|_{۰}^{\beta} = ۲\pi R^۲(۱ - \cos\beta) \qquad (۲)$$

بنابراین نسبت این سطح به سطح کل کره برابر خواهد بود با:

$$= \frac{A}{۴\pi R^۲} = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos\beta) = \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{\sqrt{d^۲ - r^۲}}{d}\right) \qquad (۳)$$

اگر $r > d$ باشد، این نسبت مسلماً یک می‌شود.

۳. نیروی عمود بر سطح وارد شده بر آجر برابر با $N = mg\cos\theta$ می‌باشد. بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر آجر برابر با $\mu N = \tan\theta mg\cos\theta = mg\sin\theta$ و در خلاف جهت حرکت جسم است هم‌چنین مؤلفه نیروی وزن در راستای سطح نیز بر جسم اثر می‌کند که مقدار آن $mg\sin\theta$ می‌باشد. مقدار این دو نیرو برابر است. بنابراین شتاب در راستای حرکت برابر با منفی شتاب پایین آمدن جسم روی سطح است. در یک بازه زمانی کوچک همان مقدار که از سرعت آجر در اثر اصطکاک کم می‌شود، به سرعت آجر در حرکت به سمت پایین روی سطح، افزوده می‌شود. فرض کنید سرعت آجر v باشد و مؤلفه سرعت در راستای شیب سطح v_y باشد. بنابراین:

$$v + v_y = c \qquad (۴)$$

که c یک مقدار ثابت است. با استفاده از شرایط اولیه مسأله، $(v = V, v_y = ۰)$، خواهیم داشت $c = V$. بعد از گذشت زمان طولانی جسم فقط حرکت رو به پایین در راستای سطح خواهد داشت و به عبارت دیگر معادله ۴ تبدیل می‌شود به $v_f + v_f = c$ که v_f سرعت نهایی جسم است. بنابراین $۲v_f = c$ و از آن‌جایی که می‌دانیم $c = V$ خواهیم داشت:

$$۲v_f = V \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{V}{۲} \qquad (۵)$$

۴. حل این سؤال را با قانون اول ترمودینامیک (اصل بقای انرژی) شروع می‌کنیم:

$$dQ = dU - dW \qquad (۶)$$

dQ مقدار بسیار کوچک گرما است که به دستگاه داده شده است. dU تغییرات انرژی درونی دستگاه و dW مقدار بسیار کوچک کار مکانیکی است که روی سیستم انجام شده است.

از آن‌جایی که U فقط تابع حالت دستگاه است و با حرکت در یک چرخه و دوباره بازگشتن به نقطه اولیه، حالت سیستم عوض نمی‌شود، انرژی درونی سیستم نیز تغییر نمی‌کند. منظور از حالت، فشار (P)، حجم (V) و دما (T) است که در گاز کامل با داشتن هر جفت از این کمیات می‌توان کمیت سوم را به‌دست آورد. بنابراین در یک چرخه $dU = 0$، و خواهیم داشت: $\Delta Q = -\Delta W$. کار انجام شده روی سیستم برابر است با:

$$dW = -PdV \tag{7}$$

بنابراین انتگرال dW در کل مسیر برابر با منفی سطح محصور در نمودار $P - V$ (برای چرخه ساعتگرد) می‌باشد.

بنابراین برای هر بخش از چرخه داریم:

$Q_i - Q_o = \Delta Q = -W$، که W سطح محصور زیر نمودار می‌باشد. در این چرخه چون سطح پدید آمده یک مثلث است $-W = \frac{1}{2}P_0V_0$ و $Q_i - Q_o = \frac{1}{2}P_0V_0$ (که P_0 و V_0 فشار و حجم نقطه شروع هستند.) برای به‌دست آوردن بازده کافی است Q_i را حساب کنیم. می‌دانیم که $Q_o = Q_i + W$ و چون W از سطح محصور در نمودار $P - V$ حاصل می‌شود با حساب کردن Q_i بازده $(\eta = \dfrac{Q_i - Q_o}{Q_i})$ به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر می‌دانیم انرژی داخلی گاز کامل در هر نقطه برابر با $U = \frac{3}{2}nkT$ و از آن‌جایی که می‌دانیم در گاز کامل:

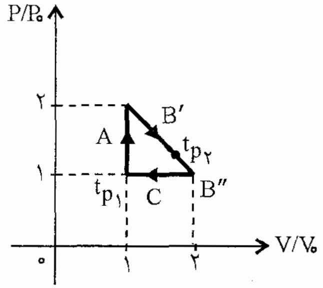
$$PV = nkT \quad \text{یا} \quad PV = NRT \tag{8}$$

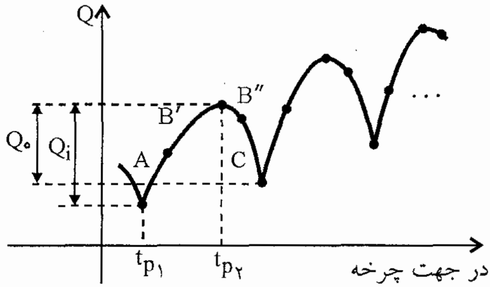
(که در آن n تعداد ذرات و N تعداد مول‌های گاز می‌باشد)

می‌توان بدون استفاده از T، انرژی داخلی گاز کامل را محاسبه کرد:

$$U = \frac{3}{2}PV \tag{9}$$

در این‌جا لازم است که نقاط بازگشت Q (جاهایی که dQ تغییر علامت می‌دهد) را پیدا کنیم (t_{P_1} و t_{P_2} در شکل سمت راست صفحه بعد).





فرآیند A: حجم تغییری نمی‌کند. بنابراین $\Delta W = 0$ است. از آن‌جایی که فشار دو برابر شده است، U از $\frac{3}{2}P_\circ V_\circ$ به $\frac{3}{2}(2P_\circ)V_\circ$ تبدیل شده است.

بنابراین $\Delta U = \frac{3}{2}P_\circ V_\circ$ و از آن‌جا $\Delta Q = \Delta U - \Delta W = \frac{3}{2}P_\circ V_\circ$ خواهد بود.

فرآیند C: فرآیند همفشار است. بنابراین انتگرال $\Delta W = -\int P dv$ به $\Delta W = -P\Delta V = P_\circ V_\circ$ تبدیل می‌شود. از طرف دیگر $\Delta U = \frac{3}{2}P\Delta V = -\frac{3}{2}P_\circ V_\circ$ پس:

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W = -\frac{3}{2}P_\circ V_\circ - P_\circ V_\circ = -\frac{5}{2}P_\circ V_\circ \tag{10}$$

با بررسی فرآیندهای A و C معلوم می‌شود که یک نقطه بازگشت در رأس مثلث (t_{p_1}) واقع است.

فرآیند B: این فرآیند همدما نیست بنابراین نمی‌توان گفت $PV = const$ و از آن هم نتیجه گرفت که $dQ > 0$. از طرف دیگر نمی‌توان به دلیل صفر بودن ΔU در کل این فرآیند، ΔW را حساب کرده و به واسطه آن ΔQ را به‌دست آوریم. در بخشی از این فرآیند U و ΔW کاهش یافته و در بخشی دیگر افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر این امکان وجود دارد که در بخشی از فرآیند ΔQ مثبت و در بخشی دیگر منفی باشد. یعنی نقطه بازگشتی مانند t_{p_2} در این فرآیند وجود داشته باشد. حال اگر کل فرآیند را یک جا بررسی کنیم، جمع این دو ΔQ مثبت و منفی را حساب کرده و نمی‌توان گفت Q_i دقیقاً چقدر بوده است.

برای حل این مسأله ما متغیر بی‌بعد $x \in [1, 2]$ را تعریف می‌کنیم. به واسطه آن $P(x)$ و $V(x)$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$P(x) = P_\circ(3 - x) \quad \Rightarrow \quad dP = -P_\circ dx$$

$$V(x) = V_\circ x \quad \Rightarrow \quad dV = V_\circ dx$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} dQ = dU - dW &= \frac{۳}{۲}d(PV) + PdV \\ &= \frac{۳}{۲}(PdV + VdP) + PdV = \\ &= \frac{۳}{۲}P_\circ V_\circ((۳-x)dx - xdx) + P_\circ V_\circ((۳-x)dx) \\ &= \frac{P_\circ V_\circ}{۲}(۹ - ۶x - ۲x + ۶)dx \\ &\Rightarrow \quad dQ = \frac{P_\circ V_\circ}{۲}(۱۵ - ۸x)dx \end{aligned} \tag{۱۱}$$

در نقطه بازگشت، ($t_{p_۲}$)، $dQ = \circ$ است. بنابراین در نقطه بازگشت $۱۵ - ۸x = \circ$ و به عبارت دیگر $x = \frac{۱۵}{۸}$ خواهد بود. حال برای حساب کردن Q_i و Q_o باید این فرآیند را به دو قسمت تقسیم کنیم. برای $x \in [۱ , \frac{۱۵}{۸}]$ و $x \in [\frac{۱۵}{۸} , ۲]$ به صورت مجزا ΔQ را حساب کرده و Q_i را به طور دقیق به‌دست می‌آوریم.

$$Q_i = \Delta Q = \int_{x=۱}^{\frac{۱۵}{۸}} dQ = \frac{P_\circ V_\circ}{۲}\int_{x=۱}^{\frac{۱۵}{۸}}(۱۵ - ۸x)dx = \frac{P_\circ V_\circ}{۲}(۱۵x - ۸x)^۲\Big|_۱^{\frac{۱۵}{۸}} = \frac{۴۹}{۳۲}P_\circ V_\circ \tag{۱۲}$$

و ما فقط به مقدار Q_i نیاز داریم. بنابراین لزومی ندارد که Q_o را نیز حساب کنیم.

حال با جمع کردن Q_i در فرآیندهای A و B کل گرمای ورودی سیستم را حساب می‌کنیم. بنابراین:

$$Q_i = \frac{۳}{۲}P_\circ V_\circ + \frac{۴۹}{۳۲}P_\circ V_\circ = \frac{۹۷}{۳۲}P_\circ V_\circ$$

و از آن‌جایی که $Q_i - Q_o = -W = \frac{۱}{۲}P_\circ V_\circ$، بازه برابر خواهد شد با:

$$\eta = \frac{Q_i - Q_o}{Q_i} = \frac{-W}{Q_i} = \frac{\frac{۱}{۲}P_\circ V_\circ}{\frac{۹۷}{۳۲}P_\circ V_\circ} = \frac{۱۶}{۹۷} = \circ/۱۶۴۹ \simeq ۱۶/۵\% \tag{۱۳}$$

۵. در زمان t انتهای متحرک کش در فاصله $l(t) = L + vt$ از دیوار است.

فرض کنید مکان مورچه نسبت به دیوار $r(t)$ و هم‌چنین $F(t) = \frac{r(t)}{l(t)}$ نسبت فاصله مورچه تا دیوار به طول کش باشد. حال می‌توان سؤال معادلی را مطرح کرد. برای چه مقدار t، $F(t)$ صفر می‌شود؟

باید بررسی کنیم که $F(t)$ چگونه با زمان تغییر می‌کند.

بعد از زمان کوچک dt به خاطر کشیدن کش، فاصله مورچه به اندازه‌ی $\frac{r}{l}vdt$ زیاد و به خاطر حرکت مورچه به اندازه‌ی udt کم می‌شود. بنابراین:

$$F(t+dt) = \frac{r + \left(\frac{r}{l}\right) vdt - udt}{l + vdt}$$

$$= \frac{r}{l} - \frac{udt}{l+vdt} \tag{۱۴}$$

که این مقدار تا مرتبه اول dt برابر خواهد بود با:

$$F(t+dt) = F(t) - \frac{u}{l}dt \tag{۱۵}$$

از رابطه ۱۵ می‌توان به این نتیجه رسید که:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-u}{l} \tag{۱۶}$$

با استفاده از رابطه $l(t) = L + vt$ و با انتگرال‌گیری از رابطه ۱۶ خواهیم داشت:

$$\int_{t=0}^{t} dF(t) = \int_{t=0}^{t} \frac{-u}{L+vt}dt \quad \Rightarrow \quad F(t) - F(0) = \frac{-u}{v}\ln\left(1 + \frac{vt}{L}\right) + C$$

و از آن‌جایی که $1 = \frac{l}{l} = \frac{r(0)}{l(0)} = F(0)$، خواهیم داشت:

$$F(t) = 1 - \frac{u}{v}\ln\left(1 + \frac{v}{L}t\right) \tag{۱۷}$$

حال می‌توان فهمید که برای هر مقدار u مثبت، $F(t) = 0$ با شرط زیر برقرار است:

$$t = \frac{L}{v}\left(e^{\frac{v}{u}} - 1\right) \tag{۱۸}$$

برای مقدار $\frac{v}{u}$ بزرگ مقدار t بسیار بزرگ می‌شود. ولی در هر صورت مقدار متناهی خواهد داشت. برای $\frac{v}{u}$ بسیار کوچک می‌توان از تقریب $(e^x = 1 + x)$ استفاده کرد.

۶. با تعدادی مثال عادی می‌توان حدس زد که جواب مسأله $\Omega(N-1)$ باشد. حال باید این جواب را برای حالت کلی اثبات کرد.

دو نقطه A و B که به وسیله مقاومت 1Ω به هم متصل شده‌اند را در نظر بگیرید. اگر جریان I را به A وارد و آن را از B خارج کنیم، مقاومت معادل بین A و B برابر با $\frac{V}{I}$ خواهد شد که V اختلاف پتانسیل بین دو نقطه است.

حالتی که جریان I وارد A شده و از B خارج می‌شود را می‌توان با برهم نهی دو گام زیر جایگزین کرد: ۱ـ جریان $\frac{N-1}{N}I$ به A وارد شده و جریان $\frac{1}{N}I$ از هر یک از $N-1$ مقاومت دیگر خارج شود، ۲ـ جریان $\frac{N-1}{N}I$ از B خارج شده و جریان $\frac{1}{N}$ را به هر یک از $N-1$ مقاومت دیگر وارد شود. در حالت اول جریانی که از A به B می‌رود را با $I^A_{A\to B}$ و در حالت دوم آن را با $I^B_{A\to B}$ نشان می‌دهیم. بنابراین در کل، جریانی برابر با $I^A_{A\to B}+I^B_{A\to B}$ از A به B می‌رود. از آن‌جایی که این جریان از یک مقاومت یک اهمی می‌گذرد اختلاف پتانسیلی برابر با $V=(I^A_{A\to B}+I^B_{A\to B})\times(1\Omega)$ بین A و B ایجاد می‌شود. بنابراین مقاومت معادل بین A و B برابر است با:

$$R_{AB}=\frac{(I^A_{A\to B}+I^B_{A\to B})(1\Omega)}{I} \tag{19}$$

حال ما باید این R_{AB} ها را برای جفت‌های مقاومت، جمع بزنیم. فرض کنید این جمع S باشد. بنابراین:

$$S=\sum_{A,B}(I^A_{A\to B}+I^B_{A\to B})\frac{(1\Omega)}{I} \tag{20}$$

این جمع زدن باید بر روی هر دو جفت نقطه A و B که به وسیله مقاومتی بر هم متصلند انجام شود. این تساوی را در حالت عکس نیز می‌توان نوشت (یعنی جای A و B را عوض کنیم). بنابراین

$$S=\sum_{A,B}(I^B_{B\to A}+I^A_{B\to A})\frac{(1\Omega)}{I} \tag{21}$$

با جمع کردن دو رابطه ۲۰ و ۲۱ خواهیم داشت:

$$2S=\sum_{A,B}(I^A_{A\to B}+I^B_{B\to A})\frac{1\Omega}{I}+\sum_{A,B}(I^A_{B\to A}+I^B_{A\to B})\frac{(1\Omega)}{I} \tag{22}$$

جمع اول نمایانگر N جریان است که به N نقطه وارد می‌شود. برای این N نقطه می‌توان گام اول را پیاده کرد. اگر به هر یک، طبق گام اول، جریانی برابر با $I'=\frac{N-1}{N}I$ وارد شود، جمله اول برابر با $(N-1)(1\Omega)$ خواهد شد جمع دوم نیز نمایانگر N جریان است که از N نقطه خارج می‌شود. این

مصداق گام دوم می‌شود و اگر طبق گام دوم، جریانی معادل $I'' = \frac{N-۱}{N}I$ از هر مقاومت خارج شود، جمله دوم برابر با $(N-۱)(۱\Omega)$ خواهد شد بنابراین:

$$S = (N-۱)\Omega \tag{۲۳}$$

پاسخ سؤالات سال
۲۰۰۲

۱. (الف) اگر A گرم شود، مایع از B به A جریان می‌یابد.

فشار در عمق h برابر با $P = \rho g h$ می‌باشد. وقتی آب در مخزن A منبسط می‌شود، ارتفاع h افزایش می‌یابد و چگالی ρ کاهش می‌یابد.

ρ متناسب با $\frac{1}{A}$ است. A سطح مقطع ذوزنقه و $A = \omega h$ که ω برابر پهنا در نصف ارتفاع می‌باشد.

پس $P = \rho g h \propto \frac{h}{A} = \frac{1}{\omega}$ و از آن‌جایی که ω با افزایش ارتفاع مایع افزایش می‌یابد، فشار در مخزن A کاهش یافته و در نتیجه مایع از B به A جریان می‌یابد.

(ب) اگر B گرم شود مایع باز هم از B به A جریان می‌یابد. در این‌جا ω، با افزایش ارتفاع مایع در مخزن کاهش می‌یابد. بنابراین فشار B افزایش یافته و جریان در این حالت نیز از B به A است.

۲. فرض کنید F کشش طناب باشد. نخ متصل به جسم با شعاع دایره بزرگ در محل جسم، زاویه $\theta = \sin^{-1}\frac{r}{R}$ می‌سازد. مؤلفه شعاعی و مماسی نیرو برابرند با:

$$F\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$
$$F\sin\theta = m\dot{v} \qquad (1)$$

با حذف کردن F از معادلات بالا خواهیم داشت:

$$\frac{m\dot{v}\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{mv^2}{R} \qquad (2)$$

بنابراین:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = \frac{\tan\theta}{R}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{\tan\theta}{R}t$$
$$\Rightarrow \quad v = \left(\frac{1}{v_0} - \frac{\tan\theta}{R}t\right)^{-1} \qquad (3)$$

بنابراین v در زمان

$$t = T = \frac{R}{v_0\tan\theta} \qquad (4)$$

بینهایت می‌شود.

و این، به آن معناست که چرخش جرم روی دایره تا زمان T ممکن است و بعد از آن غیر ممکن می‌شود.

هم‌چنین با میل کردن زمان به سمت T مسافت طی شده، $d = \int v dt$، نیز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۳. اگر V سرعت اولیه باشد، مؤلفه افقی و عمودی آن به ترتیب $V\cos\theta$ و $V\sin\theta$ می‌باشد می‌توان به سادگی نشان داد که مسافت طی شده در هوا برابر است با:

$$d_a = \frac{۲V^۲ \sin\theta\cos\theta}{g} \qquad (۵)$$

برای محاسبه مسافتی که جسم روی زمین طی می‌کند، باید سرعت جسم را وقتی که به زمین برخورد می‌کند، حساب کنیم. نیروی N (که زمین به جسم وارد می‌کند)، نیرویی است که سرعت عمودی را در طول برخورد از $v\sin\theta$ به صفر تبدیل می‌کند. بنابراین:

$$\int N\, dt = mv\sin\theta \qquad (۶)$$

با ضرب کردن این نیرو در μ نیروی اصطکاک به‌دست می‌آید. این نیرو سرعت افقی جسم را در طول برخورد تغییر می‌دهد. بنابراین:

$$m\Delta v_x = -\int(\mu N)dt = -\mu mV\sin\theta \;\Rightarrow\; \Delta v_x = -\mu V\sin\theta \qquad (۷)$$

البته در این‌جا از نیروی mg در هنگام برخورد نسبت به N صرف‌نظرکردیم. بنابراین آجر حرکت خود را با سرعت v روی زمین آغاز می‌کند. که:

$$v = V\cos\theta - \mu V\sin\theta \qquad (۸)$$

البته واضح است که این رابطه فقط وقتی $\tan\theta \leq \frac{۱}{\mu}$ باشد، درست است. اگر θ از این مقدار بیش‌تر باشد سرعت افقی جسم صفر شده و آجر هیچ مسافت افقی را طی نخواهد کرد.

از این به بعد نیروی اصطکاک μmg و شتاب حرکت $a = -\mu g$ خواهد بود. بنابراین مسافت طی شده روی زمین برابر خواهد بود با:

$$d_g = \frac{(V\cos\theta - \mu V\sin\theta)^۲}{۲\mu g} \qquad (۹)$$

باید زاویه‌ای را به‌دست آوریم که به ازا آن، مسافت کل، $d_{tot} = d_a + d_g$ ، بیشینه شود. مسافت کل برابر است با:

$$d_{tot} = \frac{V^۲}{۲\mu g}(۴\mu\sin\theta\cos\theta + (\cos\theta - \mu\sin\theta)^۲) = \frac{V^۲}{۲\mu g}(\cos\theta + \mu\sin\theta)^۲ \qquad (۱۰)$$

با صفر قرار دادن مشتق d نسبت به θ خواهیم داشت:

$$\tan\theta = \mu \qquad (۱۱)$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\tan\theta \leq \frac{1}{\mu}$. پس:
اگر $\mu < 1$ در آن صورت $\tan\theta = \mu$ (آجر به حرکت بعد از پرتاب ادامه می‌دهد.)
و اگر $\mu \geq 1$ در آن صورت $\theta = 45^\circ$ (آجر بعد از برخورد می‌ایستد و $\theta = 45^\circ$ بیش‌ترین مقدار d_a را می‌دهد.)

۴. در این مسأله نقطه‌ای که صفحه حول آن منبسط می‌شود با نقطه‌ای که حولش منقبض می‌شود، متفاوت است. در نتیجه صفحه از روی شیروانی مثل کرم پایین می‌آید.

ابتدا انبساط را بررسی می‌کنیم. فرض کنید نقطه ثابت به فاصله a از بالا و b از پایین باشد. ($a+b=l$) قسمت پایین صفحه که جرمش $\frac{mb}{l}$ است، در راستای پشت بام (شیروانی) پایین می‌آید. پس نیروی اصطکاکی به اندازه $\mu N = \mu m(\frac{b}{l})\cos\theta g$ به سمت بالا به آن وارد می‌شود. جرم قسمت بالا، $m\frac{a}{l}$ می‌باشد پس نیروی اصطکاک به مقدار $\mu(m\frac{a}{l})g\cos\theta$ به سمت پایین آن وارد می‌شود. برای آنکه صفحه شتاب نداشته باشد باید:

$$\mu m\left(\frac{b-a}{l}\right)g\cos\theta = mg\sin\theta \;\;\Rightarrow\;\; b-a = \frac{l\tan\theta}{\mu} \qquad (۱۲)$$

با توجه به معادله بالا درمی‌یابیم که $b > a$ و هم‌چنین $b - a \leq l$. اگر $\tan\theta > \mu$ آنگاه جوابی برای معادله به دست می‌آید و نیروها نمی‌توانند همدیگر را خنثی کنند و صفحه شتاب می‌گیرد. در مورد انقباض نیز استدلال‌های بالا صحیح است به جز این‌که جای a و b عوض شده و نقطه ساکن آن به پایین شیروانی نزدیک می‌شود و خواهیم داشت:

$$a - b = \frac{l\tan\theta}{\mu} \qquad (۱۳)$$

با استفاده از معادلات (۱۲) و (۱۳) درمی‌یابیم که فاصله نقطه‌ای که صفحه حول آن منبسط می‌شود، (P_e)، تا نقطه‌ای که حول آن منقبض می‌شود، (P_c)، برابر است با:

$$d = \frac{l\tan\theta}{\mu} \qquad (۱۴)$$

در انبساط نقطه P_c به اندازه‌ی ϵ جابجا می‌شود که:

$$\epsilon = \alpha d \Delta T = \frac{\alpha l \tan\theta \Delta T}{\mu} \tag{۱۵}$$

و در انقباض ثابت می‌ماند. هم‌چنین می‌توان گفت که نقطه وسط صفحه بعد از انبساط و انقباض به اندازه‌ی نصف این مقدار تغییر مکان می‌دهد.

بنابراین در طول یک چرخه کامل (۲۴ ساعت) صفحه به اندازه‌ی ϵ پایین می‌آید. بنابراین:

$$\begin{aligned} ۳۶۵\epsilon &= \frac{(۳۶۵)(۱۷ \times ۱۰^{-۶}(c^\circ)^{-۱})(۱m)(\tan ۳۰^\circ)(۱۰^\circ C)}{۱} \\ &\approx ۰/۰۳۶m \equiv ۳/۶cm \end{aligned} \tag{۱۶}$$

۵. (الف) بار تصویری به اندازه‌ی $v\tau$ از بار واقعی عقب مانده است. بنابراین براساس قضیه فیثاغورث فاصله آن‌ها برابر با $d = \sqrt{(۲r)^۲ + (v\tau)^۲}$ می‌باشد. برای ثابت ماندن سرعت در راستای صفحه باید نیروی الکتریکی بین دو بار را خنثی کنیم. پس:

$$F = \frac{kq^۲}{d^۲} = \frac{kq^۲}{۴r^۲ + v^۲\tau^۲} \tag{۱۷}$$

این نیرو با صفحه زاویه θ می‌سازد که:

$$\tan\theta = \frac{v\tau}{۲r} \tag{۱۸}$$

(ب) مؤلفه نیروی مذکور در راستای سرعت برابر است با:

$$F_v = F\sin\theta = \frac{kq^۲}{۴r^۲ + v^۲\tau^۲}\left(\frac{v\tau}{\sqrt{۴r^۲ + v^۲\tau^۲}}\right) \tag{۱۹}$$

برای حل مسأله تا تقریب مرتبه اول از توان‌های بالاتر $v\tau$ صرف‌نظرمی‌کنیم. بنابراین:

$$F_v \approx \frac{kq^۲ v\tau}{۸r^۳} \tag{۲۰}$$

این نیرویی است که نیرویی مقاومت، $F = -\gamma v$، را خنثی می‌کند. بنابراین:

$$\gamma = \frac{kq^۲\tau}{۸r^۳} \tag{۲۱}$$

(پ) به دلیل تاخیر در حرکت بار تصویری، فاصله دوبار در حرکت عمود بر صفحه، $۲r + v\tau$ می‌باشد. بنابراین نیروی الکتریکی که آن‌ها بر هم وارد می‌کنند، برابر است با:

$$F = \frac{kq^۲}{(۲r+v\tau)^۲} \approx \frac{kq^۲}{۴(r^۲+rv\tau)} \approx \frac{kq^۲(r^۲-rv\tau)}{۴r^۴} = \frac{kq^۲}{۴r^۲} - \frac{kq^۲v\tau}{۴r^۳} \qquad (۲۲)$$

نیروی حاصل، از نیرویی که به بارها در حالت سکون وارد می‌شود کم‌تر است. این امر به دلیل نیروی مقاومت، $F = -\gamma v$ است. که:

$$\gamma = \frac{kq^۲\tau}{۴r^۳} \qquad (۲۳)$$

۶. فرض کنید طول نخ، l، و زاویه نخ با میله، θ، باشد.

حرکت جسم حول دایره‌ای به شعاع $l\sin\theta$ می‌باشد. از آن‌جایی که نیروی عمودی وارد بر طناب mg است، نیروی افقی $mg\tan\theta$ می‌باشد. با نوشتن معادله نیوتن خواهیم داشت:

$$mg\tan\theta = \frac{mv^۲}{l\sin\theta} \qquad (۲۴)$$

با استفاده از اصل بقای انرژی می‌دانیم که مجموع تغییرات انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U) صفر می‌باشد. تغییرات انرژی جنبشی $d\frac{mv^۲}{۲}$ و تغییرات انرژی پتانسیل $mgl\sin\theta d\theta$ می‌باشد. نقطه‌ای به فاصله dl از محل اتصال طناب و میله را در نظر بگیرید. بعد از گذشت زمانی کوتاه، این نقطه تبدیل به نقطه اتصال می‌شود. ارتفاع این نقطه (با تقریب مرتبه اول) تغییر نمی‌کند. تغییر فاصله توپ نسبت به این نقطه ثابت، متناسب با ارتفاع طناب معلق در هوا، $(l-dl)$، می‌باشد. با ضرب کردن این مقدار در $\sin\theta$، طول عمودی کمان به‌دست می‌آید و در نتیجه، تغییرات ارتفاع توپ، $(l-dl)d\theta\sin\theta$ خواهد شد. که تا تقریب مرتبه اول، برابر با $l\sin\theta d\theta$ خواهد بود.

طبق اصل بقای انرژی داریم:

$$\frac{۱}{۲}d(mv^۲) + mgl\sin\theta d\theta = ۰ \qquad (۲۵)$$

حال از معادله (۲۴) و (۲۵) استفاده کرده و l را بر حسب θ به‌دست می‌آوریم. با جایگذاری $v^۲$ از معادله (۲۴) و (۲۵) خواهیم داشت:

$$d(l\sin\theta\tan\theta) + ۲l\sin\theta d\theta = ۰$$

$$\Rightarrow (dl\sin\theta\tan\theta + l\cos\theta\tan\theta d\theta + l\sin\theta\sec^۲\theta) + ۲l\sin\theta d\theta = ۰$$

$$\text{۲}l\sin\theta d\theta = \circ$$

$$\Rightarrow dl\frac{\sin^{\text{۲}}\theta}{\cos\theta} + \text{۳}l\sin\theta d\theta + l\frac{\sin\theta}{\cos^{\text{۲}}\theta} = \circ$$

$$\Rightarrow \int\frac{dl}{l} = -\int\frac{\text{۳}\cos\theta d\theta}{\sin\theta} - \int\frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \ln l = -\text{۳}\ln(\sin\theta) + \ln\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + C$$

$$\Rightarrow l = A\frac{\cos\theta}{\sin^{\text{۴}}\theta} \quad \text{که} \quad A = l\left(\frac{\sin^{\text{۴}}\theta_\circ}{\cos\theta_\circ}\right) \qquad (\text{۲۶})$$

معادله (۲۶) به ما نشان می‌دهد که توپ با زاویه $\theta = \frac{\pi}{\text{۲}}$ به میله برخورد می‌کند.

حال باید مکان برخورد توپ با میله را پیدا کنیم. طول قائم یک جزء دیفرانسیلی از طناب، برابر با $dy = dl\cos\theta$ می‌باشد. بنابراین فاصله قائمی که توپ بعد از برخورد با محل اتصال طناب دارد، برابر است با:

$$y = \int dl\cos\theta = A\int_{\theta=\theta_\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} d\left(\frac{\cos\theta}{\sin^{\text{۴}}\theta}\right)\cos\theta \qquad (\text{۲۷})$$

با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء خواهیم داشت:

$$\frac{y}{A} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin^{\text{۴}}\theta}\right)\cos\theta\Big|_{\theta_\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} - \int_{\theta_\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\frac{\cos\theta}{\sin^{\text{۴}}\theta}(-\sin\theta)d\theta$$

$$= \frac{\cos^{\text{۲}}\theta}{\sin^{\text{۴}}\theta}\Big|_{\theta_\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}} + \int_{\theta_\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\frac{\cos\theta}{\sin^{\text{۳}}\theta}d\theta$$

$$= \left(\frac{\cos^{\text{۲}}\theta}{\sin^{\text{۴}}\theta} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sin^{\text{۲}}\theta}\right)\Big|_{\theta_\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}$$

$$= \frac{-\text{۱}}{\text{۲}} - \left(\frac{\cos^{\text{۲}}\theta_\circ}{\sin^{\text{۴}}\theta_\circ} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sin^{\text{۲}}\theta_\circ}\right) \qquad (\text{۲۸})$$

بنابراین با جایگذاری مقدار A در معادله (۲۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y &= l\left(\frac{\sin^{۴}\theta_۰}{\cos\theta_۰}\right)\left(-\frac{۱}{۲}-\left(\frac{\cos^{۲}\theta_۰}{\sin^{۴}\theta_۰}-\frac{۱}{۲\sin^{۲}\theta_۰}\right)\right) \\ &= l\left(\frac{\sin^{۴}\theta_۰}{\cos\theta_۰}\right)\left(-\frac{\cos^{۲}\theta_۰}{\sin^{۴}\theta_۰}+\frac{\cos^{۲}\theta_۰}{۲\sin^{۲}\theta_۰}\right) \\ &= -l\cos\theta_۰\left(۱-\frac{\sin^{۲}\theta_۰}{۲}\right) \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

از آن‌جایی که توپ از مکان $y=-l\cos\theta_۰$ شروع به حرکت کرده است، در حین چرخیدن به دور میله، به اندازه‌ی $\Delta y=\frac{۱}{۲}=l\cos\theta_۰\sin^{۲}\theta_۰$، بالا می رود. (با توجه به رابطه ۲۹، درمی‌یابیم که اگر $\tan\theta_۰=\sqrt{۲}$، تغییرات ارتفاع توپ بیشینه و برابر با، $\Delta y=\frac{l}{۳\sqrt{۳}}$، خواهد شد.)

برای به‌دست آوردن سرعت نهایی توپ، می‌توان از اصل بقای انرژی استفاده کرد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}mv_f^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_i^{۲}-mg\left(\frac{۱}{۲}l\cos\theta_۰\sin^{۲}\theta_۰\right) \qquad (۳۰)$$

با توجه به رابطه (۲۴) می‌دانیم:

$$v_i^{۲}=gl\frac{\sin^{۲}\theta_۰}{\cos\theta_۰} \qquad (۳۱)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۲}mv_f^{۲} &= \frac{۱}{۲}mgl\frac{\sin^{۲}\theta_۰}{\cos\theta_۰}-\frac{۱}{۲}mgl\cos\theta_۰\sin^{۲}\theta_۰ \\ &= \frac{۱}{۲}mgl\sin^{۲}\theta_۰\left(\frac{۱}{\cos\theta_۰}-\cos\theta_۰\right) \\ &= \frac{۱}{۲}mgl\frac{\sin^{۴}\theta_۰}{\cos\theta_۰} \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

بنابراین:

$$v_f^{۲}=gl\frac{\sin^{۴}\theta_۰}{\cos\theta_۰} \qquad (۳۳)$$

و با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۳) به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\frac{v_f}{v_i}=\sin\theta_۰ \qquad (۳۴)$$

پاسخ سؤالات سال ۲۰۰۳

۱. در زمان t انتهای آزاد طناب با سرعت gt حرکت کرده و به اندازه $\frac{gt^2}{2}$ سقوط می‌کند. این طول در زیر تکیه‌گاه جمع می‌شود. پس در زمان t طول $\frac{gt^2}{4}$ متوقف است و طول $L-\frac{gt^2}{4}$ با سرعت gt حرکت می‌کند. بنابراین، اندازه حرکت کل طناب برابر با $-\rho(L+\frac{-gt^2}{4})(gt)$ می‌باشد. که $\rho=\frac{M}{L}$. علامت منفی به معنای حرکت به سمت پایین است. نیروی وارد به طناب برابر با $Mg=\rho Lg$ و به سمت پایین و N (نیروی وارد از طرف تکیه‌گاه) به سمت بالا می‌باشد. با استفاده از رابطه $F=\frac{dp}{dt}$ که F نیروی کل وارد بر طناب است، می‌توان نوشت:

$$N-\rho Lg=\frac{d}{dt}\left(-\rho Lgt+\frac{\rho g^2t^3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N=\frac{3\rho g^2t^2}{4} \qquad (1)$$

که این مقدار برابر است با: $\frac{3\rho v^2}{4}$. این نتیجه تا $t=\sqrt{\frac{4L}{g}}$ که انتهای آزاد طناب مسافت $2l$ را می‌پیماید، درست است. بعد از این زمان، نیروی وارد شده از طرف تکیه‌گاه به طناب برابر با Mg می‌شود.

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌بینیم در زمان t که وزن $\rho(\frac{gt^2}{4})g=\frac{\rho g^2t^2}{4}$ از طناب متوقف شده است، نیرویی که تکیه‌گاه وارد می‌کند سه برابر وزن طناب روی آن می‌باشد. این نیروی اضافی به این دلیل وارد می‌شود که تکیه‌گاه باید اندازه حرکت اتمهایی از طناب را که متوقف می‌شوند (بعد از سقوط آزاد) تغییر دهد.

۲. به دلیل باریک بودن میله می‌توان در تمام لحظات حرکت جسم را، با دایره تقریب زد. اگر θ زاویه طناب کاملاً باز شده باشد، تغییرات ارتفاع جسم برابر با $l\cos\theta$ خواهد شد. با استفاده از اصل بقای انرژی داریم:

$$mgl\cos\theta=\frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

به دلیل حرکت آرام جسم، مؤلفه قائم کشش طناب mg است. بنابراین مؤلفه افقی نیروی کشش طناب، $mg\tan\theta$ خواهد بود. جسم در دایره‌ای به شعاع $l\sin\theta$ حرکت می‌کند. با استفاده از قانون نیوتن می‌توان نوشت:

$$mg\tan\theta=\frac{mv^2}{l\sin\theta} \qquad (3)$$

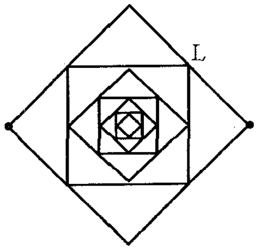
در نتیجه:

$$\tan\theta=\sqrt{2} \qquad (4)$$

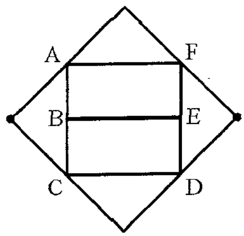
و یا: $\theta \approx ۵۴/۷^\circ$.

۳. فرض کنید که مقاومت معادل xR باشد. اگر از سری مقاومت مذکور دو مربع بزرگ‌تر را حذف کنیم، سری مقاومتی جدیدی حاصل می‌شود که آن را $S_{۳}$ می‌نامیم. مقاومت معادل سری $S_{۳}$ نصف مقاومت معادل سری اولیه و برابر با $\frac{xR}{۲}$ می‌باشد.

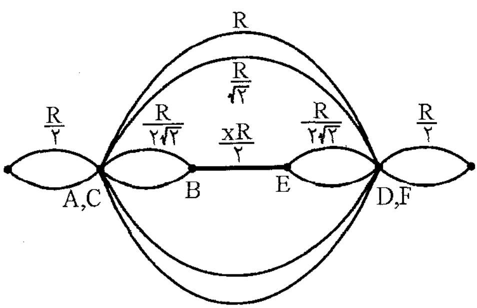
به خاطر تقارن راست ـ چپ نقاط روی خط تقارن عمودی هم پتانسیل هستند و به همین دلیل می‌توان مطابق شکل زیر، گوشه‌های بالا و پایین سری $S_{۳}$ را از خطوط افقی متصل به آن‌ها جدا کرد.



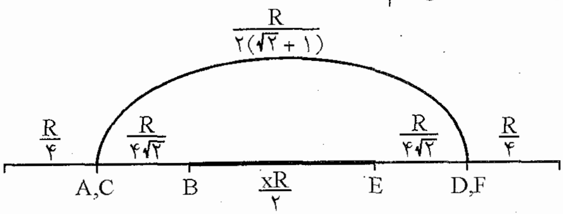
هم‌چنین می‌توان مطابق شکل، به جای سری $S_{۳}$، مقاومت معادل آن را بین نقاط B و E قرار دهیم.



به دلیل تقارن بالا ـ پایین، نقاط A، C و نقاط D، F در شکل بالا هم پتانسیل هستند. بنابراین می‌توان شبکه حاصل را با یکی کردن این نقاط، ساده‌تر کرد.



و با ساده کردن دوباره خواهیم داشت:



که مقاومت معادل شبکه بالا برابر با xR می‌باشد. بنابراین:

$$xR = \frac{R}{۲} + \left(\frac{۱}{\frac{R}{۲(\sqrt{۲}+۱)}} + \frac{۱}{\frac{R}{۲\sqrt{۲}} + \frac{xR}{۲}} \right)^{-۱} \tag{۵}$$

$$\Rightarrow ۲x - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۲} + ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}x + ۱}}$$

$$\Rightarrow \quad (۲x - ۱)((۲ + \sqrt{۲})x + ۲\sqrt{۲} + ۱) = \sqrt{۲}x + ۱$$

$$\Rightarrow \quad (۲ + \sqrt{۲})x^۲ + \sqrt{۲}x - (\sqrt{۲} + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \quad x^۲ + (\sqrt{۲} - ۱)x - \frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳} - \sqrt{۲} + ۱) \approx ۰/۶۵۹ \tag{۶}$$

۴. با انتگرال‌گیری از $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt \tag{۷}$$

قبل از اعمال میدان مغناطیسی، نیروی وارد بر ذره $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$ است. بنابراین:

$$\Delta \mathbf{p} = \int (-b\mathbf{v}) dt \tag{۸}$$

از آن‌جایی که $\int \mathbf{v} dt = \Delta \mathbf{x}$ ($\Delta x = ۱۰\, cm$)، خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{p}_۰ = -b\Delta \mathbf{x}_۰ \tag{۹}$$

حال اگر میدان مغناطیسی را اعمال کنیم: $\mathbf{F} = -b\mathbf{v} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

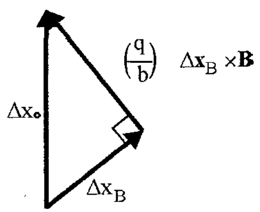
پس:

$$\Delta \mathbf{p} = \int (-b\mathbf{v} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})dt$$
$$= -b\Delta\mathbf{x} + \mathbf{q}\Delta\mathbf{x}\mathbf{B} \tag{۱۰}$$

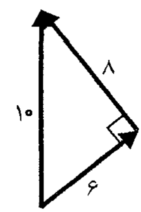
از آن‌جایی که سرعت اولیه ذره در این حالت با سرعت اولیه‌اش در حالت قبل برابر و سرعت نهایی نیز در هر دو حالت صفر می‌باشد، تغییرات تکانه ذره در هر دو حالت برابر خواهد بود. بنابراین:

$$\Delta\mathbf{x}_{\circ} = \Delta\mathbf{x}_B - \left(\frac{q}{b}\right)\Delta\mathbf{x}_B \times B \tag{۱۱}$$

دو جمله سمت راست دو بردار عمود بر هم را تشکیل می‌دهند که از جمع آن‌ها ، بردار سمت چپ حاصل می‌شود. از آن‌جایی که $\frac{|\Delta\mathbf{x}_B|}{|\Delta\mathbf{x}_{\circ}|} = \frac{۶}{۱۰}$، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ را خواهیم داشت:



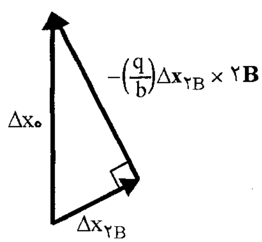
$\Longleftrightarrow$



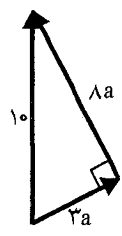
حال اگر میدان مغناطیسی را دو برابر کنیم:

$$\Delta\mathbf{x}_{\circ} = \Delta\mathbf{x}_{۲\mathbf{B}} - \left(\frac{q}{b}\right)\Delta x_{۲B} \times ۲\mathbf{B} \tag{۱۲}$$

نسبت دو بردار سمت راست، در این حالت $(\frac{۸}{۳})$، می‌باشد که دو برابر نسبت دو بردار سمت راست، در حالت قبل یعنی $(\frac{۸}{۶})$، است حال خواهیم داشت:



$\Longleftrightarrow$



با استفاده از رابطه فیثاغورث، $a = \frac{۱۰}{\sqrt{۷۳}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین مسافتی که ذره در این حالت طی می‌کند برابر است با:

$$|\Delta x_{۲B}| = ۳a = \frac{۳۰}{\sqrt{۷۳}} \approx ۳/۵۱cm \qquad (۱۳)$$

۵. ابتدا با صرف‌نظرکردن از شیب سطح رابطه w_f و v_f (بعد از برخورد) را با w_i و v_i (قبل از برخورد) به‌دست می‌آوریم. (v مؤلفه موازی سطح سرعت می‌باشد.) جهت مثبت سرعت و نیرو را به سمت راست و جهت مثبت سرعت زاویه‌ای را پادساعتگرد در نظر می‌گیریم. اگر در زمان کوچک برخورد، از نیروی اصطکاک و گشتاور حاصل انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$F = \frac{dp}{dt} \;\Rightarrow\; \int F dt = dp$$
$$\tau = \frac{dL}{dt} \;\Rightarrow\; \int \tau dt = \Delta L$$

از طرف دیگر $RF = \tau$ که R ثابت می‌باشد. بنابراین:

$$\Delta L = \int RF dt = R\int F dt = R\Delta P \qquad (۱۴)$$

بنابراین:

$$I(\omega_f - \omega_i) = Rm(v_f - v_i) \qquad (۱۵)$$

با استفاده از اصل بقای انرژی خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}mv_f^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega_f^۲ = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + \frac{۱}{۲}Iw_i^۲$$
$$\overset{*}{\Rightarrow}\; I(\omega_f^۲ - \omega_i^۲) = m(v_i^۲ - v_f^۲) \qquad (۱۶)$$

$$R(\omega_f + \omega_i) = -(v_f + v_i) \qquad (۱۷)$$

*) حرکتی که ما بررسی کردیم حرکت بدون لغزش می‌باشد. برای حفظ بقای انرژی نباید کاری توسط نیروی اصطکاک انجام شود. ولی از آن‌جایی که کار برابر با نیرو ضرب در جابه‌جایی است، حالتی که نیرو صفر باشد و یا جابه‌جایی نسبی صفر باشد به یک نتیجه می‌انجامد. از آن‌جایی که سطح اصطکاک دارد، حالت دوم (حرکت بدون لغزش)، به کار ما می‌آید.

با استفاده از معادله (۱۷) و (۱۵) و قرار دادن مقدار $I = \frac{2}{5}mR^2$ در آن‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{2}{5}R(\omega_f - \omega_i) = v_f - v_i \qquad (18)$$

حال می‌توان v_f و ω_f را به‌دست آورد:

$$\begin{pmatrix} v_f \\ R\omega_f \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ R\omega_i \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} v_i \\ R\omega_i \end{pmatrix} \qquad (19)$$

که در رابطه بالا:

$$A^2 = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = I \qquad (20)$$

حال، اثر شیب سطح را نیز در مسأله وارد می‌کنیم. به دلیل ثابت بودن سرعت توپ در راستای عمود بر سطح، زمان بین برخوردها تغییر نمی‌کند و از آن‌جایی که شتاب عمود بر سطح $g\cos\theta$ می‌باشد، این زمان برابر با $T = \frac{2v}{g\cos\theta}$ خواهد بود. در این زمان سرعت در راستای سطح به اندازه‌ی $(g\sin\theta)T = 2v\tan\theta \equiv V_0$ افزایش می‌یابد.

فرض کنید Q بردار $(v, R\omega)$ را مشخص می‌کند. در ابتدا $Q = 0$ می‌باشد. دقیقاً قبل از برخورد اول، با فرض تغییر نکردن ω در هوا، $Q_1 = (v_0, 0) \equiv V_0$ و بعد از برخورد اول: $Q'_1 = AV_0$ می‌باشد. همچنین $Q_2 = AV_0 + V_0$ و $Q'_2 = A(AV_0 + V_0)$ بنابراین:

$$Q_n = (A^{n-1} + \cdots + A + I)V_0$$
$$Q'_n = (A^n + \cdots + A^2 + A)V_0 \qquad (21)$$

هم‌چنین $A^2 = I$ بنابراین همه توان‌های زوج A برابر با I می‌باشند. پس مقدار Q بعد از n برخورد برابر خواهد بود با:

n زوج $\qquad Q_n = \frac{n}{2}(A + I)V_0$

n فرد $\qquad Q_n = \frac{1}{2}((n+1)A + (n-1)I)V_0 \qquad (22)$

با استفاده از رابطه (۱۹) داریم:

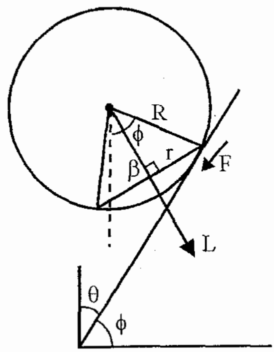
$$n \text{ زوج باشد.} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_n \\ R\omega_n \end{pmatrix} = \frac{n}{۷} \begin{pmatrix} ۵ & -۲ \\ -۵ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

$$n \text{ فرد باشد} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_n \\ R\omega_n \end{pmatrix} = \frac{۱}{۷} \begin{pmatrix} ۵n-۲ & -۲n-۲ \\ -۵n-۵ & ۲n-۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \qquad (۲۳)$$

بنابراین سرعت در راستای سطح بعد از n برخورد: $(v_۰ = ۲v\tan\theta)$

$$n \text{ زوج} \quad v = \frac{۱۰nV\tan\theta}{۷} \qquad (۲۴)$$
$$n \text{ فرد} \quad v = \frac{(۱۰n-۴)V\tan\theta}{۷}$$

۶. به نظر می‌رسد که توپ بتواند با سرعت دلخواه به دور مخروط بچرخد. همانطورکه خواهیم دید صفحه دایره برخورد باید نسبت به نقطه برخورد، به سمت پایین شیب داشته باشد. پس اندازه حرکت زاویه‌ای در نقطه نشان داده شده دارای مؤلفه افقی به سمت راست خواهد بود. برای ادامه دادن راحت‌تر است که با زاویه $\phi = ۹۰^\circ - \theta$ کار کنیم.



بیایید در ابتدا رابطه نیوتن را در راستای سطح بنویسیم. اگر Ω بسامد زاویه‌ای توپ در حرکت به دور مخروط باشد، شتاب افقی توپ برابر با $lm\Omega^۲$ و به سمت چپ خواهد بود بنابراین در راستای سطح خواهیم داشت:

$$mg\sin\phi + F_f = ml\Omega^۲\cos\phi \qquad (۲۵)$$

که F_f نیروی اصطکاک می‌باشد. برای بررسی چرخش توپ، حرکت آن را در دستگاهی که مرکز توپ در آن ساکن است بررسی می‌کنیم. در این دستگاه توپ در جای خودش می‌چرخد و مخروط نیز حول آن دوران می‌کند. از آن‌جایی که حرکت غلتشی می‌باشد، نقاط تماس توپ و مخروط دارای سرعت یکسانی هستند که برابر است با:

$$\omega r = \Omega l \;\rightarrow\; \omega = \frac{\Omega l}{r} \qquad (۲۶)$$

که در رابطه بالا، ω سرعت زاویه‌ای حول مرکز توپ و r شعاع دایره‌ای است که توپ با آن تماس دارد. **

تکانه زاویه‌ای توپ از دید آزمایشگر برابر با: $L = I\omega$ می‌باشد. (حداقل برای مقصود ما در این‌جا)***
بردار L به دور مخروط و با فرکانس Ω، حرکت می‌کند. از آن‌جایی که مؤلفه افقی L، دایره‌ای به شعاع $L_{hor} = L\sin\beta$ را با فرکانس Ω می‌پیماید پس:

$$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = L_{hor}\Omega = (I\omega\sin\beta)\Omega = \frac{I\Omega^{2} l\sin\beta}{r} \qquad (۲۷)$$

هم‌چنین جهت $\frac{dL}{dt}$ به سمت داخل صفحه است.
گشتاور توپ حول مرکزش ناشی از نیروی اصطکاک (F_f) خواهد بود. بنابراین $|\tau| = F_f R$ و جهت آن نیز به سمت داخل صفحه می‌باشد. بنابراین با استفاده از $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ و این‌که برای توپ $I = \frac{2}{5}mR^{2}$ خواهیم داشت:

$$F_f R = \frac{I\Omega^{2} l\sin\beta}{r} \;\Rightarrow\; F_f = \frac{\eta m R\Omega^{2} l\sin\beta}{r}\left(\eta = \frac{2}{5}\right) \qquad (۲۸)$$

با قرار دادن F_f در رابطه ۲۵ خواهیم داشت:

$$mg\sin\phi + \frac{\eta m R\Omega^{2} l\sin\beta}{r} = ml\Omega^{2}\cos\phi \qquad (۲۹)$$

**) اگر مرکز توپ در دایره‌ای با شعاع l بچرخد، در این‌جا l باید با $l + R\sin\phi$ که شعاع دایره برخورد با مخروط است جایگزین شود. ولی از آن‌جایی که فرض کردیم $l >> R$ می‌توانیم از $R\sin\phi$ صرف‌نظرکنیم.

***) $L = I\omega$ کاملاً درست نیست. زیرا سرعت زاویه‌ای توپ از دید آزمایشگر برابر با سرعت زاویه‌ای از دید مرکز توپ (w و به سمت پایین) به علاوه سرعت زاویه‌ای مرکز توپ از دید آزمایشگر (Ω و به سمت بالا) می‌باشد. قسمت دوم سرعت زاویه‌ای یک مقدار اضافه‌ای را به مؤلفه عمودی تکانه زاویه‌ای می‌افزاید. ولی از آن‌جایی که مؤلفه عمودی L ثابت می‌باشد و ما در این مسأله به $\frac{d\vec{L}}{dt}$ نیاز داریم، این بخش از سرعت زاویه‌ای را وارد نمی‌کنیم.

در نتیجه:

$$\Omega^۲ = \frac{g \sin \phi}{l \left(\cos \phi - \frac{\eta R \sin \beta}{r} \right)} \tag{۳۰}$$

بنابراین اگر:

$$\cos \phi = \frac{\eta \sin \beta}{\frac{r}{R}} \tag{۳۱}$$

توپ می‌تواند با سرعت بسیار زیاد به دور مخروط حرکت کند.

با قرار دادن $r = \phi - \beta$ خواهیم داشت: $\frac{r}{R} = \sin \gamma$, $\beta = \phi - \gamma$ بنابراین:

$$\cos \phi = \frac{\eta \sin(\phi - r)}{\sin \gamma} \tag{۳۲}$$

با استفاده از بسط سینوس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tan \gamma = \frac{\eta}{۱ + \eta} \tan \phi &= \frac{۲}{۷} \tan \phi \\ &= \frac{۲}{۷} \cot \theta \end{aligned} \tag{۳۳}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{r}{R} = \sin \gamma = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \cot^۲ \gamma}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \frac{۴۹}{۴} \tan^۲ \theta}} \tag{۳۴}$$

۱ـ در شرایطی که $\phi \approx \theta$، (مخروط باریک)، می‌توان گفت: $\frac{r}{R} \approx ۱$ و این به آن معناست که دایره تماس یک دایره افقی با شعاع بزرگ می‌باشد.

۲ـ در حالت $\theta = ۹۰^\circ$ (صفحه مسطح)، خواهیم داشت: $\frac{r}{R} \simeq ۰$ و این به آن معناست که دایره تماس بسیار کوچک است ولی توپ هنوز می‌تواند به دور مخروط با سرعت زیاد حرکت کند. (فرض کنید مقدار اصطکاک مطلوب باشد.)

می‌خواهیم ببینیم ϕ چقدر باشد که β بیشینه شود. با توجه به معادله (۳۱) می‌بینیم که بیشینه کردن β به معنای بیشینه کردن $\frac{r}{R} \cos \phi$ و یا $\left(\frac{r}{R}\right)^۲ \cos^۲ \phi$ می‌باشد. با قرار دادن مقدار $\frac{r}{R}$ از معادله (۳۴)

خواهیم داشت:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{۲}\cos^{۲}\phi = \frac{\cos^{۲}\phi}{۱+\frac{۴۹}{۴}\cot^{۲}\phi} \qquad (۳۵)$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به ϕ و صفر قرار دادن مقدار مشتق خواهیم داشت:

$$\tan\phi = \sqrt{\frac{۷}{۲}} \;\Rightarrow\; \phi = ۶۱/۹^{\circ} \qquad (۳۶)$$

در نتیجه:

$$\sin\beta_{\max} = \frac{۵}{۹} \;\Rightarrow\; \beta_{\max} = ۳۳/۷^{\circ} \qquad (۳۷)$$

حال برای دایره تماسی سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم و شرایط به وقوع پیوستن این حالات را بررسی می‌کنیم.

(۱) دایره افقی: در این حالت $\beta = ۰$ بنابراین:

$$\Omega^{۲} = \frac{g\tan\phi}{l} \qquad (۳۸)$$

در این حالت $\vec{L}$ عمودی خواهد بود و $\frac{d\vec{L}}{dt} = ۰$ بنابراین گشتاور صفر و در نتیجه نیروی اصطکاک صفر می‌باشد. پس توپ در اطراف مخروط با همان سرعتی که ذره بدون اصطکاک سر می‌خورد می‌چرخد.

(۲) دایره بزرگ: در این حالت $r = R$ و $\beta = -(۹۰^{\circ} - \phi)$، بنابراین $\sin\beta = -\cos\phi$. در نتیجه:

$$\Omega^{۲} = \frac{g\tan\phi}{l(۱+\eta)} \qquad (۳۹)$$

در حالتی که $\eta = ۰$، حرکت مانند یک ذره بدون اصطکاک خواهد شد.

(۳) دایره قائم: در این حالت $r = R\cos\phi$ و $\beta = -۹۰^{\circ}$ بنابراین:

$$\Omega^{۲} = \frac{g\tan\phi}{l\left(۱+\frac{\eta}{\cos^{۲}\phi}\right)} \qquad (۴۰)$$

و باز هم در حالتی که $\eta = ۰$، حرکت مانند یک ذره بدون اصطکاک خواهد شد هم‌چنین اگر $\phi \to ۹۰$ (مخروط باریک)، Ω به صفر میل می‌کند.

پاسخ سؤالات سال

۲۰۰۴

۱. الف) ترتیب استراتژی‌ها از بهترین تا بدترین حالت بدین صورت است II، III و I. برای توضیح آن می‌توان از قانون پایستگی تکانه استفاده کرد. هیچ نیروی خارجی افقی به سورتمه و برف وارد نمی‌شود، بنابراین تکانه‌ی کل سورتمه و برف در طی زمان ثابت خواهد بود.

استراتژی II بهتر از III است زیرا، در حالت II برف‌ها بدون هیچ تکانه روبه جلو حذف می‌شوند، در صورتی که در حالت III برف‌ها همراه سورتمه به حرکت روبه جلوی خود ادامه می‌دهند. بنابراین در حالت II، برف‌ها تکانه‌ی کم‌تری نسبت به حالت III دارند، لذا سورتمه در حالت II باید تکانه بیش‌تری نسبت به حالت III داشته باشد.

استراتژی III بهتر از استراتژی I است زیرا:

در استراتژی I، وقتی یک دانه‌ی برف از روی سورتمه جاروب می‌شود، از آن‌جایی که این دانه برف همراه سورتمه در حال حرکت است، سرعتی مساوی با سرعت سورتمه دارد. ولی وقتی دانه‌ی برف بعدی به سورتمه می‌رسد، سرعت سورتمه کم‌تر است. بدین علت سرعت روی به جلوی دانه برف جاروب شده از سورتمه بیش‌تر است. لذا سورتمه با سرعتی کم‌تر از سرعت مرکز جرم سیستم سورتمه به علاوه‌ی دانه برف حرکت می‌کند. حال آن‌که سرعت اخیر (سرعت مرکز جرم سیستم سورتمه و دانه برف) همان سرعت سورتمه در حالت III می‌باشد.

ب) چرخاندن دستانتان واقعاً به شما کمک می‌کند. تکانه زاویه‌ای بدنتان را نسبت به پاهایتان در نظر بگیرید. نیروی اصطکاک در کف پا، هیچ گشتاوری نسبت به نقطه تماس پا با پله ایجاد نمی‌کند، بنابراین تنها گشتاور خارجی، گشتاور ناشی از گرانش است (که باعث افتادن شما می‌شود) در یک بازه‌ی زمانی به اندازه‌ی کافی کوچک، این گشتاور شتاب زاویه‌ای زیادی به شما وارد نمی‌کند، بنابراین تکانه زاویه‌ای شما نسبت به کف پایتان تقریباً ثابت است. حال فرض کنید که شما شروع به چرخانیدن دستانتان می‌کنید و جهت چرخاندن به گونه‌ای است که دست‌ها در پایین‌ترین نقطه به طرف جلو می‌رود و در بالاترین نقطه به طرف عقب، طبق قاعده‌ی دست راست جهت تکانه زاویه‌ای دستان شما به طرف راست شما خواهد بود. ولی از آن‌جایی که تکانه زاویه‌ای شما تقریباً ثابت است، باید چیزی وجود داشته باشد تا تکانه زاویه‌ای رو به چپ به شما وارد کند. این «چیز» شما هستید. بنابراین شما نسبت به کف پایتان به طرف جلو خواهید چرخید. به عبارت دیگر شما نخواهید افتاد (با فرض این‌که دستانتان را به اندازه کافی سریع بچرخانید).

توجه کنید که تغییر در تکانه زاویه‌ای دستان شما است که مهم است. به عبارت دیگر چرخاندن دست‌ها فقط در شروع به شما کمک می‌کند. وقتی دست‌ها به بیشینه سرعت خود می‌رسند (که عملاً خیلی سریع

اتفاق می‌افتد.) چرخاندن دست‌ها دیگر به شما کمک نمی‌کند. ولی امیدواریم که شما موفق شده باشید دراین زمان کوتاه مرکز جرم بدنتان را بالاتر از پاهایتان بیاورید.

۲. جرم کل طناب را m در نظر بگیرید و فرض کنید نسبتی از طول طناب که در هوا آویزان است، f باشد نیمه‌ی راست این قسمت از طناب را در نظر بگیرید، وزن این قسمت $\frac{f}{۲}mg$ است که باید با مؤلفه‌ی عمودی نیروی کشش ریسمان یعنی $T\sin\theta$ خنثی شود. نیروی کشش T از طرف قسمتی از طناب که با سطح در تماس است و در نقطه‌ی تماس طناب با سطح به قسمت معلق وارد می‌شود.

$$T\sin\theta = \frac{f}{۲}mg \quad\Rightarrow\quad T = \frac{f}{۲}\frac{mg}{\sin\theta}$$

حال قسمتی از طناب که با صفحه‌ی سمت راست در تماس است را در نظر بگیرید. جرم آن $\frac{m}{۲}(۱-f)$ می‌باشد. نیروی عمود بر سطح که از طرف صفحه وارد می‌شود $N = (۱-f)\frac{mg}{۲}\cos\theta$ می‌باشد. بنابراین با توجه به این‌که $\mu = ۱$ است، بیشینه نیروی اصطکاک برابر است با $(۱-f)\frac{mg}{۲}\cos\theta$. نیروهایی که در امتداد سطح و رو به پایین وارد می‌شوند عبارت‌اند از: مؤلفه افقی نیروی وزن $(۱-f)\frac{mg}{۲}\sin\theta$ و نیروی کشش که برآیند آن‌ها باید با نیروی اصطکاک خنثی شود. بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}(۱-f)mg\cos\theta = \frac{۱}{۲}(۱-f)mg\sin\theta + \frac{fmg}{۲\sin\theta} \tag{۱}$$

$$\Rightarrow\ f = \frac{F(\theta)}{۱+F(\theta)} \quad , \quad F(\theta) \equiv \cos\theta\sin\theta - \sin^{۲}\theta \tag{۲}$$

عبارت f به صورت تابع صعودی یکنوایی از $F(\theta)$ می‌باشد. بنابراین مقدار بیشینه‌ی f به ازای بیش‌ترین مقدار $F(\theta)$ به‌دست می‌آید. با استفاده از روابط دو برابر کمان، می‌توان $F(\theta)$ را به صورت زیر دوباره‌نویسی کرد:

$$F(\theta) = \frac{۱}{۲}(\sin ۲\theta + \cos ۲\theta - ۱) \tag{۳}$$

با مشتق‌گیری و مساوی صفر قرار دادن مشتق داریم

$$F'(\theta) = \cos ۲\theta - \sin ۲\theta = ۰$$

$$\tan ۲\theta = ۱ \quad\Rightarrow\quad \theta_{\max} = ۲۲/۵^\circ \tag{۴}$$

از رابطه‌ی (۳) داریم:

$$F(\theta_{\max}) = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}$$

و از رابطه‌ی (۲)

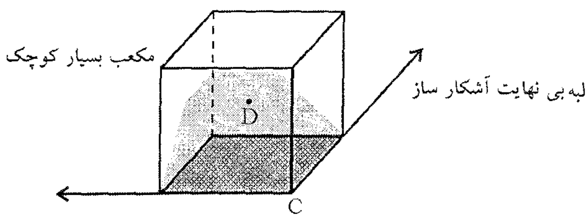
$$f_{\max} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱} = (\sqrt{۲}-۱)^{۲} = ۳ - ۲\sqrt{۲} \approx ۰/۱۷۲ \qquad (۵)$$

۳. ابتدا نقطه B را در نظر می‌گیریم. این نقطه مرکز مکعبی به ضلع d است که آشکارساز یکی از وجه‌های آن می‌باشد. از آن‌جایی که تابش ذره همسانگرد است، $\frac{۱}{۶}$ آن از هر وجه مکعب خواهد گذشت. بنابراین در این حالت $\frac{۱}{۶}$ تابش ذره توسط مربع آشکار سازی خواهد شد.

حال نقطه A را در نظر بگیرید. این نقطه مرکز مکعبی به ضلع $۲d$ می‌باشد. آشکار ساز یک چهارم یکی از صفحات این مکعب را می‌پوشاند. با توجه به این نکته و با استدلال قبلی می‌توان گفت در این حالت $\frac{۱}{۲۴} = (\frac{۱}{۶})(\frac{۱}{۴})$ از تابش ذره توسط مربع آشکارسازی می‌شود.

به عنوان آخرین حالت نقطه‌ای بسیار نزدیک به C که آن را D می‌نامیم، را در نظر بگیرید. نقطه‌ی D مرکز یک مکعب بسیار کوچک است که وجه پایینی آن یک مربع بسیار کوچک است و درگوشه‌ی آشکارساز قرارگرفته است چه مساحتی از وجوه این مکعب مربوط به تابشی است که به آشکارساز می‌رسد؟

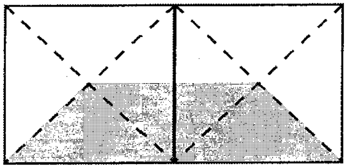
با استدلال قبلی، $\frac{۱}{۶}$ تابش ذره از صفحه پایینی مکعب می‌گذرد. بقیه قسمت‌هایی از صفحات مکعب که تابشی عبوری از آن‌ها از آشکارساز می‌گذرد با رنگ روشن‌تر در شکل نشان داده شده‌اند.



مرز افقی بالایی قسمتی که با رنگ روشن مشخص شده است، مربوط به دو ضلع دورتر آشکار ساز است، که با توجه به کوچک بودن مکعب، ضلع‌های آشکارساز بی‌نهایت دور هستند. آن دو قسمت از مرز که به صورت قطری هستند، مربوط به آن دو ضلعی از آشکارساز است که به نقطه‌ی C منتهی می‌شوند.[۱]

۱) قسمتی از مرزها که به صورت قطری هستند، به‌صورت خطوط راست هستند، این موضوع را می‌توان بدین صورت تجسم کرد: دو صفحه را در نظر بگیرید یکی وجه مکعب کوچک و دیگری صفحه‌ای که از ضلع آشکارساز (ضلع منتهی به C) و نقطه D می‌گذرد. از تقاطع این دو صفحه آن قسمت از مرز که به صورت قطری است به‌دست می‌آید.

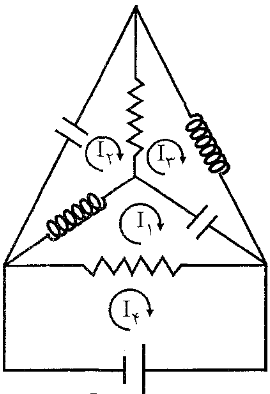
ناحیه‌ای که با رنگ روشن سایه خورده است $\frac{۳}{۸}$ مساحت دو وجه از مکعب را می‌پوشاند با بازکردن مکعب مطابق شکل زیر دیده می‌شود که



هشت مثلثی که در این شکل دیده می‌شوند به میزان مساوی تابش دریافت می‌کنند، لذا ناحیه سایه خورده که $\frac{۳}{۸}$ مساحت این دو وجه است، مطابق با $\frac{۳}{۸}$ تابشی است که از این صفحات می‌گذرد. مساحت این دو صفحه $\frac{۱}{۳}$ مساحت صفحات مکعب است.

بنابراین نسبتی از کل تابش که به آشکارساز می‌رسد برابر است با $\frac{۱}{۶} + \left(\frac{۳}{۸}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۷}{۲۴}$

۴. مانند شکل زیر، چهاروجهی را می‌توان به صورت مدار در یک صفحه در نظر گرفت (از نظر تصویر این شکل شبیه شکل سه بعدی اولیه به نظر می‌رسد). چهار حلقه جریان مانند شکل در نظر می‌گیریم. از آن‌جایی که $\omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}}$ و $R = \frac{\sqrt{L}}{C}$، مقاومت‌های ظاهری مربوط به مقاومت‌ها، القاگرها و خازن‌ها به شکل مقابل هستند.



$$Z_R = R$$

$$Z_L = i\omega L = i\sqrt{\frac{L}{C}} = iR$$

$$Z_C = \frac{-i}{\omega C} = -i\sqrt{\frac{L}{C}} = -iR \qquad (۶)$$

با توجه به صفر بودن مجموع ولتاژها در یک حلقه بسته، می‌توان نوشت:

$$(I_۱ - I_۴)R + (I_۱ - I_۲)(iR) + (I_۱ - I_۳)(-iR) = ۰$$

$$I_۲(-iR) + (I_۲ - I_۳)R + (I_۲ - I_۱)(iR) = ۰$$

$$I_3(iR)+(I_3-I_1)(-iR)+(I_3-I_2)R=0$$

$$(I_4-I_1)R=V_0 \qquad (7)$$

با ساده کردن معادلات فوق داریم:

$$(I_1-I_4)+i(I_3-I_2)=0$$

$$(I_2-I_3)-iI_1=0$$

$$(I_3-I_2)+iI_1=0$$

$$(I_4-I_1)=V_0/R \qquad (8)$$

معادلات دوم و سوم معادلند، بنابراین ما در واقع فقط سه معادله برای چهار جریانی که مجهول هستند، داریم با ضرب معادله دوم در i و جمع کردن آن با معادله اول به‌دست می‌آید:

$$2I_1-I_4=0 \quad \Rightarrow \quad I_1=\frac{I_4}{2}$$

و با قرار دادن مقدار I_1 در معادله آخر دامنه جریان کل گذرنده از مدار به‌دست می‌آید:

$$I_4=\frac{2V_0}{R} \qquad (9)$$

بنابراین مقاومت ظاهری مؤثر (مقاومت معادل) کل مدار $\frac{R}{2}$ است، لذا مشاهده می‌شود که پنج شاخه بالایی در شکل معادل با مقاومتی به اندازه‌ی R هستند که با مقاومت پایینی R موازی شده است:

توضیح: چهار معادله بالا مقدار تفاضل I_2-I_3 را که برابر با $\frac{iV_0}{R}$ می‌باشد، تعیین می‌کنند ولی این معادلات مقادیر I_2 و I_3 را به‌صورت مستقل تعیین نمی‌کنند. این دو جریان می‌توانند هر مقداری را بگیرند به شرطی که تفاضل آن‌ها $\frac{iV_0}{R}$ باشد. افزایش یکسان در مقدار آن‌ها متناظر با ریختن جریان بیش‌تر روی مجموعه‌ی دو حلقه‌ی بالایی (یعنی حلقه‌ی ۲ و ۳) می‌باشد که شامل دو القاگر و دو خازن هستند که با یکدیگر در حالت تشدید قرار دارند. (به خاطر $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$)

۵. فرض کنید ذره به طرف راست سُر می‌خورد. سرعت افقی ذره را v_x و جهت مثبت آن را رو به راست و سرعت عمودی آن را v_y و جهت مثبت آن را رو به پایین در نظر می‌گیریم. سرعت نیم‌کره را V_x و جهت

مثبت آن را رو به چپ فرض می‌کنیم. از قانون بقای تکانه می‌توان نوشت:

$$mv_x = MV_x \quad \Rightarrow \quad V_x = \left(\frac{m}{M}\right) v_x \tag{۱۰}$$

لحظه‌ای که ذره تحت زاویه θ پایین‌تر از قله نیم‌کره قرار می‌گیرد را در نظر بگیرید. در این لحظه می‌توان ذره را روی صفحه‌ای با شیب θ در نظر گرفت لذا رابطه‌ی زیر بین مؤلفه‌های سرعت برقرار است.

$$\frac{v_y}{v_x + V_x} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad v_y = \tan\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right) v_x \tag{۱۱}$$

برای اطمینان از صحت روابط نوشته شده، می‌توان روابط را از دید دستگاه مرجع نیم‌کره نیز نوشت. در این دستگاه ذره با سرعت $v_x + V_x$ به طرف راست حرکت می‌کند و با سرعت v_y پایین می‌آید. معادله (۱۱) بیان‌گر قیدی است که ذره را روی نیم‌کره در نقطه‌ای که تحت زاویه θ است، نگه می‌دارد.

حال قانون بقای انرژی را اعمال می‌کنیم. بر حسب مقدار θ، ذره به اندازه $R(1 - \cos\theta)$ پایین آمده است، لذا از بقای انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV_x^2 = mgR(1 - \cos\theta) \tag{۱۲}$$

از روابط (۱۰) و (۱۱)، v_x^2 را به‌دست می‌آوریم.

$$v_x^2 = \frac{2gR(1 - \cos\theta)}{(1 - r)(1 + (1 + r)\tan^2\theta)} \qquad r = \frac{m}{M} \tag{۱۳}$$

عبارت v_x^2 که به صورت تابعی از θ است در $\theta = 0$ صفر شده و با افزایش θ، افزایش می‌یابد. این تابع پیش از آن‌که ذره به $\theta = \frac{\pi}{2}$ برسد، به بیشینه مقدار خود می‌رسد. البته v_x، نمی‌تواند کاهش یابد. زیرا هیچ نیرویی که ذره را به طرف چپ بکشد وجود ندارد. آن چه که رخ می‌دهد این است که ابتدا v_x شروع به افزایش می‌کند و مادامی که ذره با نیم‌کره تماس دارد، نیروی عمودی سطح غیرصفر است. وقتی v_x به بیشینه مقدار خود می‌رسد، نیروی عمودی سطح صفر شده و تماس ذره با نیم‌کره قطع می‌شود و از این پس ذره با v_x ثابت در هوا به حرکت خود ادامه می‌دهد. ما باید زاویه θ که به ازای آن v_x^2 (رابطه‌ی

۱۳) بیشینه می‌شود را حساب می‌کنیم. با مساوی صفر قرار دادن مشتق این رابطه داریم:

$$
\begin{aligned}
۰ &= (۱ + (۱ + r)\tan^۲\theta)\sin\theta - (۱ - \cos\theta)(۱ - r)\frac{۲\tan\theta}{\cos\theta} \\
۰ &= (۱ + (۱ + r)\tan^۲\theta)\cos^۳\theta - ۲(۱ + r)(۱ - \cos\theta) \\
۰ &= \cos^۳\theta(۱ + r)(\cos\theta - \cos^۳\theta) - ۲(۱ + r)(۱ - \cos\theta) \\
۰ &= r\cos^۳\theta - ۳(۱ + r)\cos\theta + ۲(۱ + r) \qquad (۱۴)
\end{aligned}
$$

از رابطه‌ی اخیر مقدار θ به‌دست می‌آید. این معادله یک معادله درجه‌ی سوم است بنابراین در حالت کلی به آسانی قابل حل نیست. ولی در حالت خاص $r = ۱$ داریم:

$$۰ = \cos^۳\theta - ۶\cos\theta + ۴ \qquad (۱۵)$$

$$(\cos\theta - ۲)(\cos^۲\theta + ۲\cos\theta - ۲) = ۰ \qquad (۱۶)$$

یکی از جواب‌ها $\cos\theta = ۲$ است که جوابی غیر فیزیکی است و دیگری که جواب معادله درجه دوم است عبارت است از:

$$\cos\theta = \sqrt{۳} - ۱ \simeq ۰{,}۷۳۲ \quad \Rightarrow \quad \theta \approx ۴۲{,}۹^\circ \qquad (۱۷)$$

راه حل دوم:

از دید دستگاه مرجع نیم‌کره، سرعت افقی ذره $v_x + V_x = (۱ + r)v_x$ است. سرعت کل در این دستگاه از تقسیم این سرعت افقی بر $\cos\theta$ به‌دست می‌آید.

$$v = \frac{(۱ + r)v_x}{\cos\theta} \qquad (۱۸)$$

وقتی نیروی عمودی سطح صفر شود، ذره نیم‌کره را ترک خواهد کرد. رابطه شعاعی $F = ma$ می‌دهد

$$mg\cos\theta = \frac{mv^۲}{R} \qquad (۱۹)$$

ممکن است توجه کرده باشید که ما از نیروی مجازی در دستگاه مرجع شتاب‌دار نیم‌کره صرف‌نظر کرده‌ایم. البته در لحظه‌ای که ذره تماس خود را با نیم‌کره قطع می‌کند، نیم‌کره شتابی ندارد زیرا نیروی عمودی

بر سطح صفر می‌شود. بنابراین معادله (۱۹) دقیقاً شبیه معادله مربوط به مسأله‌ای شبیه این مسأله ولی با نیم‌کره‌ی ثابت می‌باشد. تفاوت این دو مسأله در محاسبه‌ی v است.

با استفاده از معادلات (۱۳)، (۱۸) و (۱۹) داریم:

$$mg\cos\theta = \frac{m(1+r)^2}{R\cos^2\theta}\cdot\frac{2gR(1-\cos\theta)}{(1+r)(1+(1+r)\tan^2\theta)} \tag{۲۰}$$

با ساده‌سازی داریم:

$$(1+(1+r)\tan^2\theta)\cos^3\theta = 2(1+r)(1-\cos\theta) \tag{۲۱}$$

که شبیه دومین معادله از سری معادلات (۱۴) می‌باشد ادامه حل مانند روش قبل است.

توضیح: اجازه دهید نگاهی به چند حالت خاص برای مقدار $r \equiv \frac{m}{M}$ بیاندازیم. در حد $r \to 0$ (که مانند این است که نیم‌کره ساکن بماند) معادله (۱۴) می‌دهد.

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 48{,}2^\circ \tag{۲۲}$$

که نتیجه‌ی آشنایی است. در حد $r \to \infty$ معادله (۱۴) به عبارت زیر ساده می‌شود

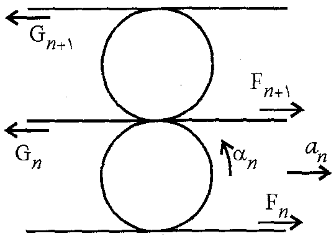
$$0 = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = (\cos\theta - 1)^2(\cos\theta + 2) \tag{۲۳}$$

که جواب آن $\theta = 0$ است. به عبارت دیگر نیم‌کره بسیار سریع به سمت چپ می‌رود.

برای سایر مقادیر r، می‌توان معادله (۱۴) را توسط فرمول ریشه‌های معادلات درجه سه و یا توسط روش‌های عددی حل نمود. برخی از نتایج عددی در زیر آمده است.

r	$\cos\theta$	θ
۰	۰٫۶۶۷	۴۸٫۲°
۰٫۵	۰٫۷۰۶	۴۵٫۱°
۱	۰٫۷۳۲	۴۲٫۹°
۲	۰٫۷۶۷	۳۹٫۹°
۱۰	۰٫۸۵۸	۳۰٫۹°
۱۰۰	۰٫۹۴۷	۱۸٫۸°
۱۰۰۰	۰٫۹۸۲	۱۰٫۸°
∞	۱	۰°

۶. هر دو استوانه‌ای که در یک ردیف هستند، مانند هم حرکت می‌کنند، سپس می‌توان به آسانی دو استوانه را در حکم یک استوانه با جرم $m = ۲M$ در نظر گرفت، نیروهایی که الوارها به استوانه‌ها وارد می‌کنند در شکل زیر نشان داده شده است. «F» نیرویی است که الوار زیرین به هر استوانه وارد می‌کند «G» نیرویی است که الوار بالایی به هر استوانه وارد می‌کند.



با توجه به قانون سوم نیوتن، داریم $F_{n+۱} = G_n$ زیرا الوارها بدون جرم هستند.

استراتژی حل مسأله این خواهد بود که شتاب خطی و زاویه‌ای هر استوانه را بر حسب شتاب استوانه‌ی زیر آن به‌دست آوریم. از آن‌جایی که با دو کمیت سروکار داریم، به دو معادله نیز نیاز داریم تا شتاب دو استوانه متوالی را به یکدیگر مربوط سازیم.

یک معادله از ترکیب روابط $F = ma$ و $\tau = I\alpha$ و قانون سوم نیوتن به‌دست می‌آید و معادله دیگر از شرط عدم لغزش به‌دست خواهد آمد.

اگر جهت مثبت برای a و α مانند شکل تعریف شود، اعمال رابطه‌ی $F = ma$ روی استوانه‌ی nام می‌دهد:

$$F_n - G_n = ma_n \tag{۲۴}$$

و اعمال رابطه‌ی $\tau = I\alpha$ روی استوانه nام می‌دهد.

$$(F_n + G_n)R = \frac{۱}{۲}mR^{۲}\alpha_n \ \Rightarrow\ F_n + G_n = \frac{۱}{۲}mR\alpha_n \tag{۲۵}$$

با حل دو معادله قبل و به‌دست آوردن F_n و G_n داریم:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{۱}{۲}\left(ma_n + \frac{۱}{۲}mR\alpha_n\right) \\ G_n &= \frac{۱}{۲}\left(-ma_n + \frac{۱}{۲}mR\alpha_n\right) \end{aligned} \tag{۲۶}$$

ولی از طرفی می‌دانیم $G_n = F_{n+1}$ است، بنابراین:

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}R\alpha_{n+1} = -a_n + \frac{1}{2}R\alpha_n \qquad (27)$$

حال از این واقعیت استفاده می‌کنیم که استوانه‌ها نسبت به الوارها لغزش ندارند. شتاب الوار روی استوانه‌ی nام عبارت است از $a_n - R\alpha_n$. ولی اگر شتاب همین الوار به عنوان الواری که زیر استوانه‌ی $n+1$ ام قرار دارد، نوشته شود، شتاب آن $a_{n+1} + R\alpha_{n+1}$ می‌باشد. بنابراین

$$a_{n+1} + R\alpha_{n+1} = a_n - R\alpha_n \qquad (28)$$

معادلات (۲۷) و (۲۸) دستگاهی از دو معادله برای دو مجهول a_{n+1} و α_{n+1} بر حسب a_n و α_n می‌باشد. با حل آن‌ها و به‌دست آوردن a_{n+1} و α_{n+1} داریم:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -3a_n + 2R\alpha_n \\ R\alpha_{n+1} &= 4a_n - 3R\alpha_n \end{aligned} \qquad (29)$$

می‌توانیم معادله بالا را به شکل ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ R\alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ R\alpha_n \end{pmatrix} \qquad (30)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ R\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ R\alpha_1 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

حال ویژه بردارها و ویژه مقادیر ماتریس بالا را در نظر بگیرید. ویژه مقادیر به صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = -3 \pm 2\sqrt{2} \qquad (32)$$

و از آن‌جا می‌توان ویژه بردارها را به‌دست آورد.

$$V_+ = \begin{pmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \end{pmatrix} \quad \text{برای} \quad \lambda_+ = -۳ + ۲\sqrt{۲}$$

$$V_- = \begin{pmatrix} ۱ \\ -\sqrt{۲} \end{pmatrix} \quad \text{برای} \quad \lambda_- = -۳ - ۲\sqrt{۲} \qquad (۳۳)$$

توجه کنید که $|\lambda_-| > ۱$ بنابراین وقتی $n \to \infty$ آن‌گاه $\lambda_-^n \to \infty$. این بدین معنی است که اگر بردار اولیه $(a_۱, R\alpha_۱)$ مؤلفه‌ای در جهت v_- داشته باشد، آن‌گاه بردارهای $(a_n, R\alpha_n)$ به بی‌نهایت میل خواهند کرد. این موضوع ناقض بقای انرژی است. بنابراین بردار $(a_۱, R\alpha_۱)$ باید متناسب با V_+ باشد. بنابراین $R\alpha_۱ = \sqrt{۲}a_۱$. با ترکیب این موضوع با این حقیقت که شتاب a الوار پایینی برابر $a_۱ + R\alpha_۱$ است به‌دست می‌آوریم:

$$a = a_۱ + \sqrt{۲}a_۱ \;\Rightarrow\; a_۱ = \frac{a}{\sqrt{۲}+۱} = (\sqrt{۲}-۱)a \qquad (۳۴)$$

توضیح: حالت کلی‌تری که در آن استوانه‌ها ممان اینرسی به شکل $I = \beta MR^۲$ داشته باشند را در نظر بگیرید. با استفاده از عبارات قبلی می‌توان نشان داد که معادله (۳۰) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{pmatrix} a_{n+۱} \\ R\alpha_{n+۱} \end{pmatrix} = \frac{۱}{۱-\beta} \begin{pmatrix} -(۱+\beta) & ۲\beta \\ ۲ & -(۱+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ R\alpha_n \end{pmatrix} \qquad (۳۵)$$

و می‌توان نشان داد که ویژه بردارها و ویژه مقادیر به صورت زیر خواهند بود:

$$V_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} \\ ۱ \end{pmatrix} \quad \text{برای} \quad \lambda_+ = \frac{\sqrt{\beta}-۱}{\sqrt{\beta}+۱}$$

$$V_- = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} \\ ۱ \end{pmatrix} \quad \text{برای} \quad \lambda_- = \frac{\sqrt{\beta}+۱}{\sqrt{\beta}-۱} \qquad (۳۶)$$

مانند قسمت قبل نمی‌توانیم جواب‌هایی با رشد توانی داشته باشیم، بنابراین فقط جواب v_+ را خواهیم داشت بنابراین داریم $R\alpha_۱ = \frac{a_۱}{\sqrt{\beta}}$. با ترکیب این رابطه با این حقیقت که شتاب a الوار پایینی برابر با

$a_1 + R\alpha_1$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$a = a_1 + \frac{a_1}{\sqrt{\beta}} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \left(\frac{\sqrt{\beta}}{1+\sqrt{\beta}}\right) a \tag{۳۷}$$

واضح است که تمامی این جواب‌ها با $\beta = \frac{1}{2}$ مطابق با نتایج به‌دست آمده در قسمت قبلی می‌باشند.

حال حالت ویژه مقدار $\lambda_+ = \frac{\sqrt{\beta}-1}{\sqrt{\beta}+1}$ را در نظر می‌گیریم: این ویژه مقدار نسبت شتاب در هر ردیف به شتاب در ردیف بعدی را می‌دهد.

• اگر $\beta = 0$ (تمام جرم استوانه در مرکز آن خواهد بود) و از آن‌جا داریم $\lambda_+ = -1$ به عبارت دیگر، شتاب‌ها از هر ردیف به ردیف بعدی مقدار یکسان ولی علامت‌های متفاوت خواهند داشت. استوانه‌ها در جای خود خواهند چرخید به گونه‌ای که مراکز آن‌ها ثابت می‌ماند. از آن‌جایی که از رابطه‌ی (۳۷)، $a_1 = 0$ مراکز واقعاً ثابت می‌مانند.

• اگر $\beta = 1$ (تمامی جرم استوانه روی محیط آن خواهد بود)، و از آن‌جا داریم $\lambda_+ = 0$ به عبارت دیگر هیچ حرکتی بالای ردیف اول وجود ندارد. پایین‌ترین استوانه روی لبه پایینی الواری (ساکن) که روی آن است می چرخد. از رابطه‌ی (۳۷) داریم که شتاب آن $a_1 = \frac{a}{2}$ می‌باشد.

• اگر $\beta \to \infty$ (استوانه گستره‌ی جرمی طولانی خواهد داشت که بسیار دورتر از محیط آن خواهد بود). و از آن‌جا داریم $\lambda_+ = 1$ به عبارت دیگر تمامی ردیف‌ها شتاب‌های مساوی خواهند داشت. با در نظر گرفتن این واقعیت و این‌که $R\alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\beta}} \approx$، نتیجه می‌شود که هیچ حرکت چرخشی در هیچ ردیف وجود ندارد، و کل سیستم همانند یک جسم صلب با شتاب $a_1 = a$ که از معادله (۳۷) به‌دست می‌آید. به طرف راست حرکت می‌کند.

《هوالحکیم》

سال ۲۰۰۵ میلادی بنا به پیشنهاد انجمن فیزیک اروپا (EPS) و تصویب مجمع بین‌المللی فیزیک محض و کاربردی (IUPAP) به عنوان «سال جهانی فیزیک» نام گذاری شد. علت انتخاب سال میلادی ۲۰۰۵ به عنوان سال جهانی فیزیک، تقارن آن با صدمین سالگرد **«سال طلایی انیشتن»** می‌باشد.

آلبرت انیشتن در سال ۱۹۰۵ در کمتر از یک سال سه نظریه بسیار مهم نسبیت خاص، کوانتومی بودن نور و حرکت براونی ذرات را ارائه داد که این نظریه‌ها نقش مهمی در پیشبرد فیزیک در قرن بیستم داشته‌اند. اعلام یک سال به عنوان سال جهانی فیزیک همانند اعلام سال ۲۰۰۰ میلادی به عنوان سال جهانی ریاضیات با هدف جلب توجه جهانیان به اهمیت دانش فیزیک و اجتماع بین‌المللی در ترویج این علم صورت گرفته است.

جا دارد در سال جهانی فیزیک از پدر فیزیک ایران پروفسور سید محمود حسابی بنیانگذار آموزش عالی، دانشگاه و بسیاری از مراکز علمی، صنعتی، فرهنگی و تحقیقاتی نوین کشور نیز یادی شود. او که از شاگردان آلبرت انیشتن بود زمانی دکترای فیزیک را گرفت و جوهر فیزیک نوین را درک نمود که در کشور ما هر کس چهار عمل اصلی را بلد بود میرزا می‌شد. او کار سازندگی علمی جامعه را در شرایطی انجام می‌داد که زمینه کار دانشگاهی حتی در ابتدایی‌ترین سطوح آن وجود نداشت، با این وجود عشق بی حد او به علم باعث شد تا تمام مشکلات را هیچ بداند و این عشق را تا آخر عمر حفظ نمود، اکنون پس از گذشت ۷۰ سال از آمدن پروفسور حسابی به ایران، هستند، افرادی که با گلایه از نامناسب بودن جو علمی و فراهم نبودن وسایل تحقیقاتی کار علمی را به این بهانه رها نموده‌اند. در حالی که حسابی دلایل جدی‌تری برای رها کردن داشت. او همواره برای چگونگی ترقی و توسعه کشور و نیل به استقلال و پیشرفت میهن عزیزمان تلاش می‌نمود و با شکافتن رازهای عالم هستی در نهایت عشق و عرفان و خلوص به ستایش پروردگار می‌پرداخت.

حال بر خود وظیفه می‌دانیم تا با اعلام سال جهانی فیزیک کتب متنوعی را در این زمینه تهیه و چاپ نماییم تا در بزرگداشت این رخداد جهانی مشارکت نموده و توجه همگان را به جایگاه علوم بنیادی از جمله فیزیک که در توسعه کشور نقش اصلی را داراست جلب نماییم و گامی هر چند کوچک در راه سازندگی و پیشرفت کشور عزیزمان ایران برداریم.

ان شاءالله

معرفی چند سایت برگزیده:

www.aapt.org این سایت مربوط به انجمن معلمین فیزیک امریکا می‌باشد. این مرکز برنامه‌های آموزشی را برای تربیت معلمین طراحی نموده است. شما می‌توانید با برنامه‌ی فعالیت‌های آزمایشگاهی که برای فیزیک دوره‌ی دبیرستان طراحی شده، آشنا شده و به مرکز اطلاعاتی مربوط به علم فیزیک دست پیدا کنید. این سایت آرشیو مجلات فیزیک امریکا را در اختیار شما قرار می‌دهد.

http://bridgecontest.usma.edu هدف این سایت آماده‌سازی دانش‌آموزان دبیرستانی برای آشنایی با شاخه‌های مهندسی می‌باشد. از طریق این مرکز، دانش‌آموزان با حل مسائل علمی قادر به آشنایی با شاخه‌های مهندسی می‌باشند و طراحی فرآیندهای مهندسی به داوطلبان، آموزش داده می‌شود. دانش‌آموزان با یادگیری ریاضیات، علوم و تکنولوژی چگونگی ساخت سیستم‌های مختلف را یاد می‌گیرند و کاربرد علوم مختلف را می‌آموزند. از طریق این مرکز دانش‌آموزان می‌آموزند که چگونه از کامپیوتر در حل مسائل خود استفاده نمایند.

http://naca.larc.nasa.gov این سایت متعلق به سازمان ناسا می‌باشد و یک کتابخانه‌ی اطلاعات الکترونیکی را در زمینه‌ی دانش هوانوردی در اختیار شما قرار می‌دهد.

www.physics.umn.edu این سایت مختص به مدرسه فیزیک و ستاره‌شناسی ایالت مینه‌سوتا می‌باشد که فعالیت‌های علمی وسیعی را در زمینه‌ی فیزیک و ستاره‌شناسی به انجام رسانیده است. قسمت اعظم تحقیقات این مرکز در زمینه‌های بیولوژیکی، فیزیک مواد (ماده چگال)، فیزیک کهکشان، فیزیک ذرات فضا و فیزیک هسته‌ای صورت گرفته است.

http://van.hep.uiuc.edu این سایت فیزیک را به صورت جالب و مفرح برای دانش‌آموزان تشریح می‌نماید و به کاربران نشان می‌دهد که جهان چه پیچیدگی‌ها و جذابیت‌هایی دارد و هم چنین کاوش در علم فیزیک را آموزش می‌دهد.

http://dep.physics.upenn.edu این سایت مربوط به بخش فیزیک و ستاره‌شناسی دانشگاه پنسیلوانیا می‌باشد.

http://epswww.epfl.ch این سایت متعلق به جامعه‌ی فیزیک اروپا است. از طریق این سایت می‌توانید اطلاعاتی درباره‌ی کنفرانس‌های انجام شده در زمینه‌ی لیزر، الکترواپتیک، الکترونیک کوانتومی کسب نمایید. این مرکز سال ۲۰۰۵ را سال جهانی فیزیک اعلام نموده است. این سایت فعالیت‌های برنامه‌ی آموزشی، مقالات و کتب چاپ شده در این زمینه را به شما معرفی می‌کند.

www.explonescience.com این سایت یک مرکز آموزشی مناسب برای آموزش علوم مختلف به

دانش‌آموزان و دانش پژوهان به شمار می‌آید و اطلاعاتی را درباره‌ی مکانیک، حرکت امواج، اپتیک، ستاره‌شناسی، علوم طبیعی، تفریحات و بازی‌ها در اختیار شما قرار می‌دهد. فعالیت‌های این شرکت ارتباط بین تئوریهای علمی و کاربردهای عملی آنها را تشریح می‌کنند. این فعالیت‌ها باعث می‌شود که دانش‌آموزان با مفاهیم علمی مختلف آشنا شوند. از طریق این سایت می‌توانید اطلاعاتی درباره‌ی رنگ‌ها، ترکیب نوری، جاذبه، الکتریسیته، مغناطیس، امواج نوری، و اصول مکانیکی مثل، سرعت وشتاب به دست آورید.

www.geomag.bgs.ac.uk این سایت اطلاعاتی را درباره‌ی ژئومغناطیس ارائه می‌دهد. ژئو مغناطیس بخشی از زلزله‌شناسی محسوب می‌گردد. این علم میدان مغناطیس زمین را مورد ارزیابی قرار می‌دهد. شما در این سایت تحقیقات انجام شده را مشاهده خواهید کرد و از مدل‌ها و نمودارهای موجود در این زمینه اطلاعاتی به دست خواهید آورد.

www.hfd.hr این سایت متعلق به جامعه‌ی فیزیک کشور کرووا‌سی می‌باشد. هدف این سایت افزایش فعالیت‌ها و بهبود برنامه‌های آموزشی در زمینه فیزیک می‌باشد.

www.kiae.ru این سایت متعلق به یک مرکز تحقیقاتی در روسیه می‌باشد. در این سایت می‌توانید سناریوهای مربوط به قدرت هسته‌ای در روسیه و فعالیت‌های این کشور را در این زمینه مشاهده نموده و علم مدرن و تکنولوژی پیشرفته‌ی روسیه را ملاحظه کنید.

http://lhea.gsfc.nasa.gov این سایت مربوط به آزمایشگاه‌های فیزیک نجوم می‌باشد که به منابع انرژی زیادی احتیاج دارند. این آزمایشگاه‌ها فعالیت‌هایی را در زمینه‌ی اشعه‌ی X و اشعه‌ی گاما انجام می‌دهند، در این مرکز تحقیقاتی نیز در زمینه‌ی سیاه چاله‌ها، ستاره‌های نوترونی و سایر اجرام آسمانی شده است.

http://phyld.ucr.edu این سایت مربوط به بخش فیزیک دانشگاه کالیفرنیا Riversede می‌باشد. این سایت مقالات و اطلاعات علمی مربوط به فیزیک را به صورت مستقیم در اختیار شما قرار می‌دهد و هم چنین می‌توانید اطلاعاتی راجع به نجوم، الکتریسته، مغناطیس، حرارت، مکانیک، فیزیک مدرن، اپتیک، خصوصیات مواد، مکانیک کوانتومی، رادیواکتیو، فیزیک هسته‌ای، نسبیت، امواج صوتی و سایر موج‌ها کسب نمایید.