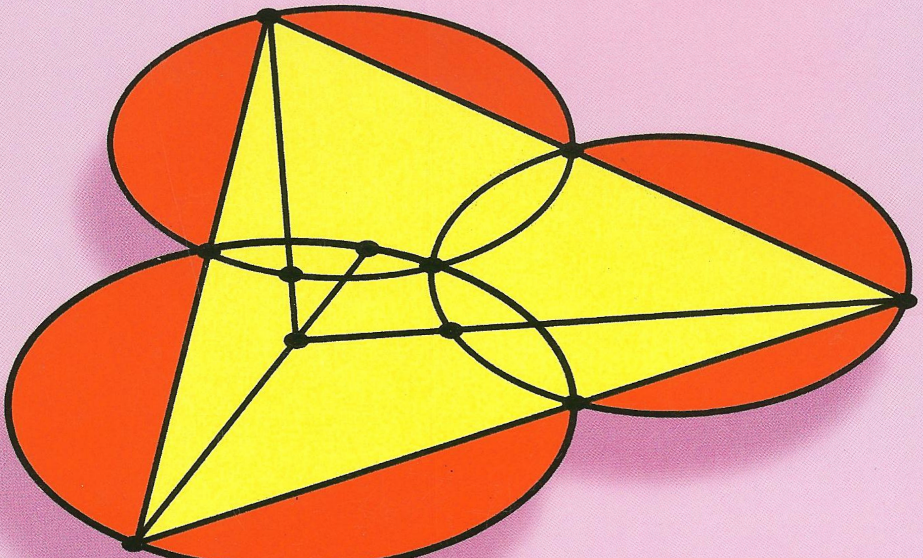
مسأله‌هایی در

هندسهٔ مسطحه

ای . ف . شاریگین



ترجمهٔ ارشک حمیدی

مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه در حقیقت جلد اول از دو جلد کتاب مسأله‌های هندسه است. جلد دوم را، که به مسأله‌های هندسهٔ فضایی اختصاص دارد، انتشارات مبتکران با نام مسائلی در هندسه منتشر کرده است. هر دو این کتابها برای استفادهٔ دانش‌آموزان و معلمان دبیرستانی تهیه شده‌اند.

این جلد مجموعه‌ای بی‌نظیر، شامل بیش از ۶۰۰ مسألهٔ زیبا و جالب هندسهٔ مسطحه است. به‌علاوه، درمیان مسأله‌های بخش دوم، تعدادی ازمعروفترین قضیه‌های هندسهٔ مسطحه گنجانده شده‌است. این‌قضیه‌ها به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که در حل کردن بقیهٔ مسأله‌ها بیشترین کاربرد را داشته باشند. بیشتر مسأله‌های کتاب را مسأله‌هایی تشکیل می‌دهند که یا در المپیادهای ریاضی پیشنهاد شده‌اند، و یا در مجله‌های مختلف ریاضی، از جمله مجلهٔ کوانت (چاپ مسکو) چاپ شده‌اند.

ای. ف. شاریگین

مسأله‌هایی در

هندسهٔ مسطحه

ترجمهٔ ارشک حمیدی

سرشناسه	: شاریگین، ایگور فئودوروویچ *Sharygin, Igor Fedorovich*
عنوان و پدیدآور	: مسأله‌هایی در هندسه مسطحه. مؤلف / ای. ف. شاریگین. مترجم / ارشک حمیدی.
مشخصات نشر	: تهران: مبتکران، پیشروان، ۱۳۸۵.
مشخصات ظاهری	: ۲۵۶ ص. مصور.
فروست	: انتشارات مبتکران؛ ۱۷۳
شابک	: ۹۷۸-۹۶۴-۴۸۶-۰۵۳-۹
یادداشت	: فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
یادداشت	: عنوان اصلی: *Zadachi po geometrii planimetriia*
موضوع	: هندسه مسطحه ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره.
شناسه	: حمیدی، ارشک، ۱۳۵۰
رده بندی کنگره	: ۵ م ۲ ش / QA۴۷۴
رده بندی دیویی	: ۵۱۶/۰۵۰۷۶
شماره کتابخانه ملی	: م۸۵ ـ ۱۷۶۳

ناشر: انتشارات مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲)

انتشارات پیشروان (پروانه نشر: ۲۶۲۳)

تهران، میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۱۱۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

تلفن ۹۱ ـ ۶۶۹۵۴۳۹۰ دورنگار ۶۶۹۵۴۳۹۲

E-Mail: post@mobtakeran.org

نام کتاب: مسأله‌هایی در هندسه مسطحه

مؤلف: ای. ف. شاریگین

مترجم: ارشک حمیدی

چاپ چهارم: ۱۳۸۵ (چاپ اول: ۱۳۷۵)

شمارگان: ۲۰۰۰ جلد

حروف‌نگاری: مبتکران

لیتوگرافی: مبتکران

چاپ: سهند

بها: ۳۰۰۰ تومان

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار	۵
مسأله‌ها	۷
بخش ۱. نتیجه‌ها و قضیه‌های اساسی هندسه. مسأله‌های محاسبه‌ای	۹
بخش ۲. مسأله‌ها و قضیه‌های برگزیده از هندسهٔ مسطحه	۳۷
قضیهٔ کارنو	۳۷
قضیه‌های سوا و منلائوس. مسأله‌های آفین	۴۰
مکان هندسی نقطه‌ها	۴۶
مثلثها، مثلث و دایره	۴۹
چهارضلعیها	۶۲
دایره‌ها و مماسها، قضیهٔ فوئرباخ	۶۹
ترکیب شکلها، جابه‌جایی در صفحه، چندضلعیها	۷۳
نابرابریهای هندسی. مسأله‌های اکسترمم	۷۸
جوابها، راهنماییها، راه‌حلها	
بخش ۱	۸۶
بخش ۲	۱۲۹

بنام خدا

پیشگفتار

کتاب حاضر ترجمه‌ای از چاپ اصلاح شدهٔ کتاب روسی است که در سال ۱۹۸۲ منتشر شده است. کتاب، در حقیقت جلد اول از دو جلد کتاب حل مسأله در هندسه است، جلد دوم «مسأله‌هایی در هندسهٔ فضایی» را، نخستین‌بار، انتشارات میر در سال ۱۹۸۶ به‌انگلیسی منتشر کرده است.

هر دو جلد برای استفادهٔ دانش‌آموزان و معلمان تهیه شده است.

این جلد حاوی بیش از ۶۰۰ مسأله در هندسهٔ مسطحه و عبارت از دو قسمت است. قسمت اول حاوی مسأله‌های نسبتاً ساده‌ای برای حل کردن در سر کلاسها یا در خانه است. قسمت دوم هم شامل راهنماییها و حل کامل مسأله‌هاست. بیش از ۲۰۰ مسألهٔ تازه به‌چاپ ۱۹۸۲ کتاب اضافه شده است، مسأله‌های ساده‌تر در چاپ اول، حذف شده‌اند، و چند بخش تازه (دایره‌ها و مماسها، چندضلعیها، ترکیب شکلها، و غیره) گنجانده شده است. ساختار عمومی کتاب قدری تغییر کرده است تا با بخشهای تازه، جزئیات بیشتر، و دسته‌بندی مسأله‌ها هماهنگی داشته باشد. در نتیجه، تمام مسأله‌های این جلد دوباره مرتب شده‌اند.

اگرچه قدمت مسأله‌های این مجموعه با یکدیگر متفاوت است (برخی از آنها را می‌توان در کتابها و مجله‌های قدیمی پیدا کرد، برخی دیگر در المپیادهای ریاضی پیشنهاد یا در مجلهٔ «کوانت» (مسکو) چاپ شده‌اند)، با این حال، امیدوارم برخی از مسأله‌های این مجموعه برای هندسه‌دانان باتجربه سودمند باشد.

تقریباً هر مسألهٔ هندسی (در مقایسه با تمرینهای عادی در حل کردن معادله‌ها، نامعادله‌ها، و غیره) نامتعارف است: باید حدس زد چه ترسیمهای اضافی انجام شود، یا از کدام فرمولها یا قضیه‌ها استفاده شود، از این‌رو، این مجموعه را نمی‌توان حل‌المسائل در هندسه دانست؛ بلکه، مجموعه‌ای است از مسأله‌های دشوار هندسی که هدفش نشان دادن زیبایی روشهای مقدماتی اثبات هندسی و شیوه‌های محاسبه (بدون استفاده از جبربرداری و با استفادهٔ کمی از روش مختصات، تبدیلهای هندسی، ولو با قدری استفادهٔ زیادتر از مثلثات) است.

در آخر، مایلم از ا.ز.برشتین که در آماده کردن بخش اول کتاب برای چاپ، کمکم کرده است، تشکر کنم. همچنین از ا.ا. یعقوبیان که از چند نتیجهٔ زیبای هندسی آگاهم کرد، سپاسگزارم.

مؤلف

بخش ۱

نتیجه‌ها و قضیه‌های اساسی هندسه

مسأله‌های محاسبه‌ای

۱ ـ ثابت کنید که میانه‌ها در مثلث، یکدیگر را در یک نقطه (نقطهٔ میانه‌ای) قطع می‌کنند و این نقطه، میانه‌ها را به‌نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند.

۲ ـ ثابت کنید که میانه‌ها، مثلث را به‌شش بخش برابر تقسیم می‌کنند.

۳ ـ ثابت کنید که قطر دایرهٔ محیطی مثلث، برابر است با نسبت یک ضلع آن به‌سینوس زاویهٔ روبه‌رو به‌این ضلع.

۴ ـ فرض کنید رأس یک زاویه بیرون دایره‌ای واقع باشد، و فرض کنید ضلعهای زاویه، دایره را قطع کنند. ثابت کنید که اندازهٔ زاویه برابر است با نصف تفاضل اندازهٔ کمانهای درون زاویه که ضلعهای آن از دایره بریده‌اند.

۵ ـ فرض کنید رأس یک زاویه در درون دایره‌ای واقع باشد. ثابت کنید که اندازهٔ زاویه برابر است با نصف مجموع اندازهٔ کمانهایی که یکی از آنها بین ضلعهای آن و دیگری بین امتدادهای آنها محصور شده است.

۶ ـ فرض کنید AB معرف وتری از یک دایره و l مماس بر دایره در نقطهٔ A باشد. ثابت کنید که اندازهٔ هریک از دو زاویهٔ بین AB و l، برابر است با نصف اندازهٔ کمانی از دایره که در درون آن زاویه محصور شده است.

۷ ـ از نقطهٔ M به‌فاصلهٔ a از مرکز دایره‌ای به‌شعاع R $(a>R)$، قاطعی رسم شده است که دایره را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. ثابت کنید که حاصلضرب $|MA|\cdot|MB|$، برای همهٔ این قاطعها ثابت و برابر است با a^2-R^2 (که مربع طول مماس از این نقطه است).

۸ـ وتر AB، از نقطهٔ M که درفاصلهٔ a از مرکز دایره‌ای به‌شعاع R $(a<R)$ واقع است، رسم می‌شود. ثابت کنید که $|AM|\cdot|MB|$ برای همهٔ این وترها ثابت و برابر با $R^۲-a^۲$ است.

۹ـ فرض کنید AM نیمسازی از مثلث ABC باشد. ثابت کنید که $|BM|:|CM| = |AB|:|AC|$. همین نتیجه برای نیمساز زاویهٔ خارجی مثلث هم درست است (در این حالت، نقطهٔ M بر امتداد ضلع BC قرار دارد).

۱۰ـ ثابت کنید که مجموع مربعهای طول قطرهای متوازی‌الاضلاع، برابر است با مجموع مربعهای طول ضلعهای آن.

۱۱ـ ضلعهای یک مثلث داده شده‌اند $(a، b، c)$. ثابت کنید که m_a، طول میانهٔ مرسوم به‌ضلع با طول a، را می‌توان با دستور $m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^۲+۲c^۲-a^۲}$ محاسبه کرد.

۱۲ـ دو مثلث که در رأس A مشترک‌اند، مفروض‌اند. رأسهای دیگر، بر دو خط راست که از A می‌گذرند، قرار دارند. ثابت کنید که نسبت مساحتهای این مثلثها، برابر است با نسبت حاصلضرب دو ضلع هر مثلث که از رأس A خارج شده‌اند.

۱۳ـ ثابت کنید که مساحت چندضلعی محیطی برابر است با rp، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی و p نصف محیط چندضلعی است (به‌ویژه، این دستور برای مثلث هم درست است).

۱۴ـ ثابت کنید که مساحت چهارضلعی برابر است با حاصلضرب قطرهای آن و سینوس زاویهٔ بین آنها.

۱۵ـ درستی دستورهای زیر را، برای مساحت مثلث، ثابت کنید.

$$S=\frac{a^۲\sin B\sin C}{۲\sin A}\quad,\quad S=۲R^۲\sin A\sin B\sin C$$

که A، B و C زاویه‌های مثلث‌اند، a طول ضلع روبه‌رو به‌زاویهٔ A و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

۱۶ـ ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه را می‌توان با دستور $r=\frac{a+b-c}{۲}$، محاسبه کرد، که در آن a و b طول ساقها هستند و c طول وتر آن است.

۱۷ـ ثابت کنید که هرگاه a و b طول دو ضلع از مثلث، α اندازهٔ زاویهٔ بین آنها، و l طول نیمساز این زاویه باشد، آن وقت $l=\dfrac{۲ab\cos\frac{\alpha}{۲}}{a+b}$.

۱۸ـ ثابت کنید که فاصلهٔ رأس Aی مثلث ABC تا نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی آن با ضلعهای AB , AC، (برای هر نقطه) برابر است با $p-a$، که در آن p نصف محیط مثلث ABC است و $a=|BC|$.

۱۹ـ ثابت کنیدکه اگر درچهارضلعی محدب $ABCD$: $|AB|+|CD|=|AD|+|BC|$، آن وقت دایره‌ای وجود دارد که بر همهٔ ضلعهای آن مماس است.

۲۰ـ (الف) ثابت کنید که ارتفاعهای مثلث همرس‌اند (یعنی، در یک نقطه مشترک‌اند)؛ (ب) ثابت کنید که فاصلهٔ هر رأس مثلث تا نقطهٔ برخورد ارتفاعها، دو برابر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تا ضلع روبه‌رو به‌آن رأس است.

* * *

۲۱ـ نقطه‌های A و B بر یک ضلع زاویهٔ قائمه‌ای به‌رأس O اختیار می‌شوند، $|OA| = a$ و $|OB| = b$. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از A و B می‌گذرد و بر ضلع دیگر زاویه مماس است.

۲۲ـ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر با c و اندازهٔ یکی از زاویه‌های حادهٔ آن $30°$ است. شعاع دایرهٔ با مرکز رأس زاویهٔ $30°$ را، که مثلث را به‌دو قسمت برابر تقسیم می‌کند، پیدا کنید.

۲۳ـ طول ساقهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای a و b است. فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمه تا نزدیکترین نقطه از دایرهٔ محاطی مثلث را پیدا کنید.

۲۴ـ طول یکی از میانه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر m است و زاویهٔ قائمه را به‌نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را پیدا کنید.

۲۵ـ سه ضلع مثلث ABC داده شده‌اند: $|BC| = a$، $|CA| = b$ و $|AB| = c$. نسبتی را که نقطهٔ برخورد نیمسازها، نیمساز زاویهٔ B را تقسیم می‌کند، پیدا کنید.

۲۶ـ ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه از قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین تا ساقهای آن، برابر است با طول ارتفاع وارد بر یکی از ساقها.

۲۷ـ ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه در درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا ضلعهای آن، برابر است با طول ارتفاع مثلث.

۲۸ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ M بر قاعدهٔ AC طوری اختیار شده است که $|AM| = a$ و $|MC| = b$. دایره‌هایی در مثلثهای ABM و CBM محاط می‌شوند. فاصلهٔ میان نقطه‌های تماس این دایره‌ها با ضلع BM را پیدا کنید.

۲۹ـ مساحت چهارضلعی محدود به‌نیمسازهای متوازی‌الاضلاعی به‌ضلعهای a و b و زاویهٔ α را پیدا کنید.

۳۰ـ دایره‌ای در یک لوزی به‌ارتفاع h و زاویهٔ حادهٔ α محاط شده است. شعاع بزرگترین دایره، از دو دایرهٔ ممکن، را که هر یک بر دایرهٔ مفروض و دو ضلع لوزی مماس است، پیدا کنید.

۳۱ـ زاویهٔ حادهٔ یک لوزی را که ضلعش واسطهٔ هندسی قطرهای آن است، پیدا کنید.

۳۲ـ طول قطرهای چهارضلعی محدبی a و b و پاره‌خطهایی که وسط ضلعهای روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، قابل انطباق‌اند. مساحت چهارضلعی را پیدا کنید.

۳۳ـ ضلع AD از مستطیل $ABCD$، سه برابر ضلع AB است؛ نقطه‌های M و N، AD را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. $\angle AMB + \angle ANB + \angle ADB$ را بیابید.

۳۴ـ دو دایره در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع می‌کنند. از نقطهٔ A، وترهای AC و AD

مماس بر دایره‌های مفروض، رسم شده‌اند. ثابت کنید که $|AC|^{۲}.|BD| = |AD|^{۲}.|BC|$.

۳۵ـ ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر را نصف می‌کند.

۳۶ـ بر دایره‌ای به‌شعاع r، سه نقطه طوری انتخاب شده‌اند که دایره به‌سه کمان به‌نسبت ۳:۴:۵ تقسیم می‌شود. در نقطه‌های تقسیم، مماسهایی بر دایره رسم می‌شود. مساحت مثلث تشکیل شده با این مماسها را پیدا کنید.

۳۷ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر یک دایره محیط شده است. طول ساق ذوزنقه l و یکی از قاعده‌های آن برابر با a است. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۳۸ـ دو خط راست موازی با قاعده‌های یک ذوزنقه، هر ضلع جانبی آن را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. این خطها، ذوزنقهٔ اصلی را به‌سه بخش تقسیم می‌کنند. اگر مساحت بخشهای بالایی و پایینی، به‌ترتیب، $S_۱$ و $S_۲$ باشد، مساحت بخش میانی را پیدا کنید.

۳۹ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$: $|AB| = a$ و $|BC| = b$ $(a \neq b)$. نیمساز زاویهٔ A، قاعدهٔ BC یا ضلع جانبی CD را قطع می‌کند. هر کدام از آنها را پیدا کنید.

۴۰ـ طول پاره‌خط موازی با قاعده‌های یک ذوزنقه را که از نقطهٔ برخورد قطرهای آن می‌گذرد، پیدا کنید، به‌شرط اینکه طول قاعده‌های ذوزنقه برابر با a و b باشد.

۴۱ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محیط بر یک دایره، نسبت طول ضلعهای موازی k است. اندازهٔ زاویهٔ مجاور به‌قاعده را پیدا کنید.

۴۲ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعدهٔ AB برابر با a و قاعدهٔ CD برابر با b است. اگر بدانیم که قطرهای ذوزنقه، نیمساز زاویه‌های DAB و ABC هستند، مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۴۳ـ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی، میانخط* برابر با a است و قطرها دو به‌دو بر هم عمودند. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۴۴ـ مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محیط بر یک دایره، برابر با S و ارتفاع ذوزنقه برابر با نصف ساق آن است. شعاع دایرهٔ محاط در ذوزنقه را پیدا کنید.

۴۵ـ مساحت مثلثهای تشکیل شده با قطعه‌های قطرهای یک ذوزنقه و قاعده‌های آن، برابرند با $S_۱$ و $S_۲$. مساحت ذوزنقه را بیابید.

۴۶ـ در مثلث ABC، زاویهٔ ABC برابر با α است. اندازهٔ زاویهٔ AOC را، که در آن O مرکز دایرهٔ محاطی است، پیدا کنید.

۴۷ـ در مثلثی قائم‌الزاویه، نیمساز زاویهٔ قائمه رسم شده است. فاصلهٔ بین نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای حاصل را پیدا کنید، به‌شرط اینکه طول ساقهای مثلث مفروض a و b باشد.

۴۸ـ خط راستی عمود بر دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع، آن را به‌دو ذوزنقه، که در هریک از آنها

* پاره خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند. ـ م.

می‌توان دایره‌ای محاط کرد، تقسیم می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید، به‌شرط اینکه طول ضلعهایش a و b $(a<b)$ باشد.

۴۹ـ نصف قرصی به‌قطر AB مفروض است، دو خط راست که از وسط نیمدایره رسم شده‌اند، نصف قرص را به‌سه بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کنند. این خطها، قطر AB را به‌چه نسبتی تقسیم می‌کنند؟

۵۰ـ مربع $ABCD$ به‌ضلع a و دو دایره رسم شده‌اند. اولین دایره، به‌تمامی در درون مربع قرار دارد و بر ضلع AB در نقطهٔ E، و ضلع BC و قطر AC مماس است. دایرهٔ دوم با مرکز A، از نقطهٔ E می‌گذرد. مساحت بخش مشترک دو قرص محدود به‌این دایره‌ها را پیدا کنید.

۵۱ـ رأسهای شش‌ضلعی منتظمی به‌ضلع a، مرکز دایره‌هایی به‌شعاع $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ هستند. مساحت آن قسمت از شش‌ضلعی را که این دایره‌ها محصور نکرده‌اند، پیدا کنید.

۵۲ـ نقطهٔ A بیرون دایره‌ای به شعاع R اختیار شده است. دو قاطع از این نقطه رسم می‌شود: یکی از مرکز دایره و دیگری به‌فاصلهٔ $\frac{R}{۲}$ از مرکز، می‌گذرد. مساحت ناحیهٔ محصور بین این دو قاطع را پیدا کنید.

۵۳ـ در چهارضلعی $ABCD$: $\angle DAB = ۹۰^\circ$، $\angle DBC = ۹۰^\circ$، $|DB| = a$، $|DC| = b$. فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره را که یکی از آنها از نقطه‌های D،A و B و دیگری از نقطه‌های B،C و D می‌گذرد، پیدا کنید.

۵۴ـ بر ضلعهای AB و AD از لوزی $ABCD$، نقطه‌های M و N طوری اختیار شده‌اند که خطهای راست MC و NC، لوزی را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کند. اگر $|BD| = d$، $|MN|$ را پیدا کنید.

۵۵ـ نقطه‌های M و N بر ضلع AB از مثلث ABC طوری اختیار شده‌اند که $|AM|:|MN|:|NB| = ۱:۲:۳$. از نقطه‌های M و N، خطهای راستی به‌موازات AC رسم می‌شوند. مساحت آن بخش از مثلث، محصور بین این خطها را، اگر مساحت مثلث ABC برابر S باشد، پیدا کنید.

۵۶ـ یک دایره و نقطهٔ A واقع در بیرون این دایره مفروض‌اند. خطهای راست AB و AC بر دایره مماس‌اند (B و C نقطه‌های تماس‌اند). ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بر دایرهٔ مفروض قرار دارد.

۵۷ـ دایره‌ای بر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محیط و نقطهٔ دلخواه M بر کمان BC اختیار می‌شود. ثابت کنید که $|AM| = |BM| + |CM|$.

۵۸ـ فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. اندازهٔ زاویه‌های داخلی مثلث ABC را، اگر $\angle BAH = \alpha$ و $\angle ABH = \beta$، پیدا کنید.

۵۹ـ مساحت یک لوزی برابر با S و مجموع طول قطرهایش برابر با m است. طول ضلع لوزی را پیدا کنید.

۶۰ـ مربعی به‌ضلع a در یک دایره محاط شده است. طول ضلع مربع محاط در یکی از قطعه دایره‌های به‌دست آمده را پیدا کنید.

۶۱ـ در قطعه‌ای 120° به‌ارتفاع h از یک دایره، مستطیل $ABCD$ طوری محاط شده است که $|AB|:|BC| = 1:4$ (BC روی وتر قرار دارد). مساحت مستطیل را پیدا کنید.

۶۲ـ مساحت طوقی برابر با S است. شعاع دایرهٔ بزرگتر برابر محیط دایرهٔ کوچکتر است. شعاع دایرهٔ کوچکتر را پیدا کنید.

۶۳ـ طول ضلع ده‌ضلعی منتظم را بر حسب R، شعاع دایرهٔ محیطی آن، بیان کنید.

۶۴ـ مماسهای MA و MB که از نقطهٔ بیرونی M بر دایره‌ای به‌شعاع R رسم شده‌اند، زاویه‌ای به‌اندازهٔ α تشکیل می‌دهند. مساحت شکلی را که به‌مماسها و کمان کوچکتر دایره محدود شده است، پیدا کنید.

۶۵ـ مربع $ABCD$ به‌ضلع a مفروض است. مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه‌های زیر می‌گذرد: وسط ضلع AB، مرکز مربع و رأس C.

۶۶ـ لوزی به‌ضلع a و زاویهٔ حادهٔ α داده شده است. شعاع دایره‌ای را که از دو رأس مجاور لوزی می‌گذرد و برضلع رو به‌رو به‌آنها و یا امتداد آن مماس است، پیدا کنید.

۶۷ـ سه دایرهٔ دو به‌دو مماس به‌شعاع r مفروض‌اند. مساحت مثلث تشکیل شده با سه خط را که هریک از آنها بر دو دایره مماس است و دایرهٔ سوم را قطع نمی‌کند، پیدا کنید.

۶۸ـ دایره‌ای به‌شعاع r، برخط راستی درنقطهٔ M مماس است. دو نقطهٔ A و B براین خط و در دو طرف نقطهٔ M طوری اختیار می‌شوند که $|MA| = |MB| = a$. شعاع دایره‌ای را که از A و B می‌گذرد و بر دایرهٔ مفروض مماس است، پیدا کنید.

۶۹ـ مربع $ABCD$ به‌ضلع a داده شده است. بر ضلع BC، نقطه‌ای مانند M به‌نحوی که $|BM| = 3|MC|$ و بر ضلع CD، نقطه‌ای مانند N به‌طوری که $|ND| = 2|CN|$ اختیار می‌شود. شعاع دایرهٔ محاط در مثلث AMN را پیدا کنید.

۷۰ـ مربع $ABCD$ به‌ضلع a داده شده است. فاصلهٔ میان وسط پاره‌خط AM، که در آن M وسط BC است، و نقطه‌ای مانند N بر ضلع CD، به‌طوری که $|CN|:|ND| = 3:1$، را پیدا کنید.

۷۱ـ خط راستی که از رأس A در مثلث ABC می‌گذرد، میانهٔ BDی آن را نصف می‌کند (نقطهٔ D بر ضلع AC قرار دارد). نسبتی که این خط، ضلع BC را تقسیم می‌کند، چیست؟

۷۲ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ساق CA برابر با b، ساق CB برابر با a، CH ارتفاع و AM میانه است. مساحت مثلث BMH را پیدا کنید.

۷۳ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $\angle A = \alpha > 90^\circ$ و $|BC| = a$، مفروض است. فاصلهٔ بین نقطهٔ برخورد ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را پیدا کنید.

۷۴ـ دایره‌ای بر مثلث ABC که در آن $|BC| = a$، $\angle B = \alpha$ و $\angle C = \beta$، محیط شده است.

نیمساز زاویهٔ A، در نقطهٔ K با دایره برخورد می‌کند. $|AK|$ را پیدا کنید.

۷۵ـ در دایره‌ای به‌شعاع R، یک قطر رسم و نقطهٔ A روی آن، به‌فاصلهٔ a از مرکز دایره، اختیار شده است. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که بر این قطر در نقطهٔ A مماس و با دایرهٔ مفروض مماس درونی باشد.

۷۶ـ در دایره‌ای، سه وتر دو به‌دو متقاطع رسم شده است. نقطه‌های برخورد، هر وتر را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. شعاع دایره را، اگر طول یکی از وترها برابر با a باشد، پیدا کنید.

۷۷ـ شش‌ضلعی منتظمی در درون یک دایره محاط و شش‌ضلعی منتظم دیگری بر آن محیط شده است. شعاع دایره را، اگر تفاوت محیط شش‌ضلعیها برابر با a باشد، پیدا کنید.

۷۸ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که ضلعش برابر a است، ارتفاع BK رسم شده است. در هریک از مثلثهای ABK و BCK، دایره‌ای محاط و یک مماس مشترک خارجی، به‌غیر از ضلع AC، بر آنها رسم می‌شود. مساحت مثلثی را که این مماس از مثلث ABC جدا می‌کنند، پیدا کنید.

۷۹ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$: $\angle DAB=\alpha$، $\angle ABC=\beta$ و $\angle BKC=\gamma$، که در آن K نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی است. اندازهٔ زاویهٔ ACD را پیدا کنید.

۸۰ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$، که قطرهایش در نقطهٔ K متقاطع‌اند، $|AB|=a$، $|BK|=b$، $|AK|=c$ و $|CD|=d$. $|AC|$ را پیدا کنید.

۸۱ـ دایره‌ای بر یک ذوزنقه محیط شده است. زاویهٔ بین یکی از قاعده‌های ذوزنقه و یک ضلع جانبی آن، برابر با α و زاویهٔ بین این قاعده و یکی از قطرهای ذوزنقه، برابر با β است. نسبت مساحت دایره به‌مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۸۲ـ در ذوزنقهٔ متساوی الساقین $ABCD$، قاعدهٔ AD برابر با a و قاعدهٔ BC برابر با b است و $|AB|=d$. از رأس B، خط راستی رسم می‌شود که قطر AC را نصف و AD را در نقطهٔ K قطع می‌کند. مساحت مثلث BDK را پیدا کنید.

۸۳ـ مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ M، واقع بر قطر یک دایره، را تا دو سر هر وتر موازی این قطر، پیدا کنید، به‌شرط اینکه شعاع دایره R و فاصلهٔ M تا مرکز دایره a باشد.

۸۴ـ وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع را می‌توان از مرکزهای آنها تحت زاویه‌های ۹۰° و ۶۰° دید. شعاع دایره‌ها را، اگر فاصلهٔ بین مرکزهای آنها a باشد، پیدا کنید.

۸۵ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ K، ضلع AC را به‌نسبت ۲:۱ و نقطهٔ M ضلع AB را به‌نسبت ۱:۲ (وقتی که در هر دو حالت از رأس A سنجیده شود) تقسیم می‌کند. ثابت کنید که طول پاره‌خط KM، برابر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

۸۶ـ دو دایره به‌شعاعهای R و $\frac{R}{۲}$ مماس بیرونی‌اند. یکی از دو سر پاره‌خطی به‌طول $۲R$، با خط‌المرکزین دایره‌ها، در مرکز دایرهٔ با شعاع کوچکتر، زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. چه بخشی از ا...

پاره‌خط بیرون دو دایره قرار دارد؟ (پاره خط هر دو دایره را قطع می‌کند.)

۸۷ـ میانهٔ BK، نیمساز BE و ارتفاع AD، در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر بدانیم خطهای BK و BE، پاره‌خط AD را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کنند و $|AB| = ۴$ ، طول ضلع AC را پیدا کنید.

۸۸ـ نسبت شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقینی به‌شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث، برابر با k است. اندازهٔ زاویهٔ مجاور به‌قاعدهٔ مثلث را پیدا کنید.

۸۹ـ کسینوس زاویهٔ مجاور به‌قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی را، اگر نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن بر روی دایرهٔ محاطی مثلث قرار گیرد، پیدا کنید.

۹۰ـ مساحت پنج‌ضلعی را پیدا کنید که به‌خطهای BC، CD، AN، AM، BD محدود است، به‌طوری که A، B، C و D رأسهای مربع $ABCD$ هستند، N وسط ضلع BC است، و M ضلع CD را به‌نسبت ۲:۱ (با محاسبه از رأس C) تقسیم می‌کند. ضلع مربع $ABCD$ برابر با a است.

۹۱ـ در مثلث ABC: $\angle BAC = \alpha$ و $\angle ABC = \beta$. دایره‌ای به‌مرکز B، از A می‌گذرد و خط AC را در نقطهٔ K، متمایز از A، و خط BC را در نقطه‌های E و F قطع می‌کند. اندازهٔ زاویه‌های مثلث EKF را پیدا کنید.

۹۲ـ مربعی به‌ضلع a مفروض است. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا کنید که یک رأسش بر وسط یکی از ضلعهای مربع منطبق است و دو رأس دیگرش روی قطرهای مربع قرار دارند.

۹۳ـ نقطه‌های M، N و K بر ضلعهای مربع $ABCD$ طوری اختیار شده‌اند که M وسط AB است، N بر ضلع BC قرار دارد ($|NC| = ۲|BN|$) و K روی ضلع DA واقع است ($|KA| = ۲|DK|$). سینوس زاویهٔ بین خطهای MC و NK را پیدا کنید.

۹۴ـ دایره‌ای به‌شعاع r، از رأسهای A و Bی مثلث ABC می‌گذرد و ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $|AB| = c$ و $|AC| = b$ ، شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه‌های A،D و C می‌گذرد.

۹۵ـ در مثلث ABC، ضلع AB برابر با ۳ و ارتفاع CD، وارد بر ضلع AB، برابر با $\sqrt{۳}$ است. پای Dی ارتفاع CD بر ضلع AB قرار دارد و پاره‌خط AD برابر با ضلع BC است. $|AC|$ را پیدا کنید.

۹۶ـ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ در دایره‌ای به‌شعاع R محاط شده است. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ACD را پیدا کنید.

۹۷ـ طول ضلع AB از مربع $ABCD$، برابر با ۱ و وتری از یک دایره است، بقیهٔ ضلعهای مربع بیرون این دایره قرار دارند. طول مماس CD، مرسوم از رأس C بر دایره، برابر است با ۲. طول قطر دایره را پیدا کنید.

۹۸ـ در مثلثی قائم‌الزاویه، زاویهٔ کوچکتر برابر با α است. خط راستی که عمود بر وتر رسم

شده است، مثلث را به‌دو بخش با مساحت برابر تقسیم می‌کند. نسبتی را که این خط وتر را قسمت می‌کند، پیدا کنید.

۹۹ ـ در درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع ۱، دو دایره، مماس بر یکدیگر، رسم شده‌اند. هر یک از دایره‌ها، بر دو ضلع مثلث مماس است (هر ضلع مثلث دست کم بر یکی از دایره‌ها مماس است). ثابت کنید که مجموع شعاعهای این دایره‌ها از $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ کمتر نیست.

۱۰۰ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ حادهٔ A برابر با 30° است. نیمساز زاویهٔ حادهٔ دیگر رسم می‌شود. اگر طول ساق کوچکتر برابر با ۱ باشد، فاصلهٔ میان مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABD و CBD را پیدا کنید.

۱۰۱ ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، زاویه‌های A و D، مجاور به‌قاعدهٔ AD، به‌ترتیب، برابرند با 60° و 30°. نقطهٔ N روی قاعدهٔ BC قرار دارد و $|BN|:|NC| = 2$. نقطهٔ M بر قاعدهٔ AD واقع است. خط راست MN، بر قاعده‌های ذوزنقه عمود است و مساحت آن را به‌دو بخش برابر تقسیم می‌کند. $|AM|:|MD|$ را پیدا کنید.

۱۰۲ ـ در مثلث ABC: $|BC| = a$، $\angle A = \alpha$ و $\angle B = \beta$. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که بر ضلع AC، در نقطهٔ A، و ضلع BC مماس است.

۱۰۳ ـ در مثلث ABC: $|AB| = c$، $|BC| = a$ و $\angle B = \beta$. بر ضلع AB، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌شود که $2|AM| = 3|MB|$. فاصلهٔ M تا وسط ضلع AC را پیدا کنید.

۱۰۴ ـ در مثلث ABC، نقطهٔ M بر ضلع AB و نقطهٔ N بر ضلع AC طوری اختیار می‌شود که $|AM| = 3|MB|$ و $2|AN| = |NC|$. اگر مساحت مثلث ABC برابر با S باشد، مساحت چهارضلعی $MBCN$ را پیدا کنید.

۱۰۵ ـ دو دایرهٔ هم‌مرکز به‌شعاعهای R و r $(R>r)$ و مرکز مشترک O، مفروض‌اند. دایرهٔ سومی بر هر دو آنها مماس است. تانژانت زاویهٔ بین مماسهای مرسوم از نقطهٔ O بر دایرهٔ سوم را پیدا کنید.

۱۰۶ ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$: $|AB| = a$، $|AD| = b$ $(b>a)$ و $\angle BAD = \alpha$ $(\alpha<90^\circ)$. بر ضلعهای AD و BC، نقطه‌های K و M طوری اختیار شده‌اند که $BKDM$ لوزی است. طول ضلع این لوزی را پیدا کنید.

۱۰۷ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، وتر برابر با c است. رأسهای مثلث، مرکزهای سه دایره به‌شعاع $\frac{c}{5}$ هستند. شعاع دایره چهارمی را پیدا کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس و آنها را محصور نکرده است.

۱۰۸ ـ شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که روی هر دو ضلع زاویه‌ای به‌اندازهٔ α، وتری به‌طول a جدا می‌کند، به‌شرطی که بدانیم کوتاهترین فاصلهٔ دو سر وترها، برابر با b است.

۱۰۹ ـ دایره‌ای به‌قطر ضلع BCی مثلث ABC رسم شده است. این دایره ضلعهای AB و AC

را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC برابر با S باشد و $\angle BAC = \alpha$، مساحت مثلث AMN را پیدا کنید.

۱۱۰ ـ در دایره‌ای به‌شعاع R، دو وتر دو به‌دو بر هم عمود MN و PQ رسم شده‌اند. اگر $|NQ| = a$، فاصلهٔ بین نقطه‌های P و Q را پیدا کنید.

۱۱۱ ـ در مثلث ABC، روی BC، بزرگترین ضلع مثلث برابر با b، نقطه‌ای مانند M انتخاب می‌شود. کوتاهترین فاصلهٔ میان مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BAM و ACM را پیدا کنید.

۱۱۲ ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$: $|AB| = a$، $|BC| = b$ و $\angle ABC = \alpha$. فاصلهٔ میان مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BCD و DAB را پیدا کنید.

۱۱۳ ـ در مثلث ABC، $\angle A = \alpha$، $|BA| = a$ و $|AC| = b$. روی ضلعهای AC و AB، نقطه‌های M و N اختیار شده‌اند، M وسط AC است. اگر مساحت مثلث AMN، $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC باشد، طول پاره‌خط MN را پیدا کنید.

۱۱۴ ـ زاویه‌های یک لوزی را، اگر مساحت دایرهٔ محاطی آن نصف مساحت لوزی باشد، پیدا کنید.

۱۱۵ ـ مساحت مشترک دو مربع برابر، به‌ضلع a، را اگر یکی از دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ ۴۵° دور یک رأس دیگری به‌دست بیاید، پیدا کنید.

۱۱۶ ـ در چهارضلعیی محاط در یک دایره، دو ضلع روبه‌رو به‌هم، بر هم عمودند، طول یکی از آنها برابر با a است و یکی از قطرها، زاویهٔ حادهٔ مجاور به‌این ضلع را به‌زاویه‌هایی به‌اندازهٔ α و β تقسیم می‌کند. طول قطرهای چهارضلعی را پیدا کنید (زاویهٔ به‌اندازهٔ α، مجاور به‌ضلع داده شده است).

۱۱۷ ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$، با زاویهٔ حادهٔ DAB برابر با α، که در آن $|AB| = a$ و $|AD| = b$ $(a<b)$، داده شده است. فرض کنید K معرف پای عمود وارد از رأس B بر AD و M پای عمود وارد از نقطهٔ K بر امتداد ضلع CD باشد. مساحت مثلث BKM را پیدا کنید.

۱۱۸ ـ در مثلث ABC، از رأس C، دو نیمخط که زاویهٔ ACB را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کنند، رسم شده است. اگر $|BC| = ۳|AC|$ و $\angle ACB = \alpha$، نسبت قطعه‌هایی از این نیمخطها را که در درون مثلث محصور شده‌اند، پیدا کنید.

۱۱۹ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(|AB| = |BC|)$، نیمساز AD رسم می‌شود. مساحت مثلثهای ABD و ADC، به‌ترتیب، برابر $S_۱$ و $S_۲$ است. $|AC|$ را پیدا کنید.

۱۲۰ ـ دایره‌ای به‌شعاع $R_۱$، در زاویه‌ای برابر با α محاط شده است. دایرهٔ دیگری به‌شعاع $R_۲$، بر یک ضلع زاویه، در همان نقطهٔ تماس دایرهٔ اولی، مماس است و ضلع دیگر زاویه را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. $|AB|$ را پیدا کنید.

۱۲۱ ـ روی خط راستی که از O، مرکز دایره‌ای به‌شعاع ۱۲، می‌گذرد، نقطه‌های A و B طوری اختیار شده‌اند که $|OA| = ۱۵$ و $|AB| = ۵$. از نقطه‌های A و B، مماسهایی بر دایره رسم

می‌شود، به‌طوری که نقطه‌های تماسشان با دایره، در یک طرف خط OAB قرار دارند. مساحت مثلث ABC را، که در آن C نقطهٔ بر خورد این مماسهاست، پیدا کنید.

۱۲۲ ـ در مثلث ABC: $|BC| = a$، $\angle A = \alpha$ و $\angle B = \beta$. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که همهٔ ضلعهای مثلث را قطع می‌کند و روی هر یک از آنها وتری به‌طول d جدا می‌کند.

۱۲۳ ـ در چهارضلعیی محدب، پاره‌خطهایی که وسط ضلعهای رو به‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، برابر a و bاند و یکدیگر را در زاویهٔ ۶۰° قطع می‌کنند. طول قطرهای چهارضلعی را پیدا کنید.

۱۲۴ ـ در مثلث ABC، نقطهٔ M بر ضلع BC طوری اختیار می‌شود که فاصلهٔ رأس B تا مرکزثقل مثلث AMC، برابر است با فاصلهٔ رأس C تا مرکز ثقل مثلث AMB. ثابت کنید، $|DC| = |BM|$، که در آن D پای ارتفاع وارد از رأس A بر BC است.

۱۲۵ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، BE، نیمساز زاویهٔ قائمه B، را طوری تقسیم می‌کند که $|BO|:|OE| = \sqrt{۳}:\sqrt{۲}$. اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ مثلث را پیدا کنید.

۱۲۶ ـ دایره‌ای به‌قطر پاره‌خط AB به‌طول R، رسم شده است. دایرهٔ دیگری با همان شعاع و به‌مرکز A رسم می‌شود. دایرهٔ سومی بر دایرهٔ اول مماس درونی و بر دایرهٔ دوم مماس بیرونی است؛ به‌علاوه، این دایره بر پاره‌خط AB مماس است. شعاع دایرهٔ سوم را پیدا کنید.

۱۲۷ ـ مثلث ABC مفروض است. می‌دانیم: $|AB| = ۴$، $|AC| = ۲$ و $|BC| = ۳$. نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ K قطع می‌کند. خط راستی که به‌موازات AC، از نقطهٔ B می‌گذرد، امتداد نیمساز AK را در نقطهٔ M قطع می‌کند. $|KM|$ را پیدا کنید.

۱۲۸ ـ دایره‌ای با مرکزی واقع در درون یک زاویهٔ قائمه، بر یکی از ضلعهای زاویه مماس است، و ضلع دیگر را در نقطه‌های A و B و نیمساز زاویه را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. طول وتر AB برابر با $\sqrt{۶}$ و طول وتر CD برابر با $\sqrt{۷}$ است. شعاع دایره را پیدا کنید.

۱۲۹ ـ دو دایره به‌شعاع ۱ در یک متوازی‌الاضلاع واقع‌اند. هر دایره بر دیگری و سه ضلع از متوازی‌الاضلاع مماس است. طول یکی از قطعه‌های ضلعها، از رأس تا نقطهٔ تماس، برابر با $\sqrt{۳}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۳۰ ـ دایره‌ای به‌شعاع R، از رأسهای A و Bی مثلث ABC می‌گذرد و بر خط AC در نقطهٔ A مماس است. اگر $\angle B = \alpha$ و $\angle A = \beta$، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۱۳۱ ـ در مثلث ABC، نیمساز AK بر میانهٔ BM عمود و زاویهٔ B برابر با ۱۲۰° است. نسبت مساحت مثلث ABC به‌مساحت دایرهٔ محیطی این مثلث را پیدا کنید.

۱۳۲ ـ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، دایره‌ای رسم می‌شود که از وسطهای AB و AC می‌گذرد و بر ضلع BC مماس است. اگر $|AB| = ۳$ و $|BC| = ۴$، طول آن بخش از وتر AC را که درون این دایره قرار دارد، پیدا کنید.

۱۳۳ ـ پاره‌خطی به‌طول a مفروض است. مرکزهای سه دایره به‌شعاع R، دو سر و وسط پاره‌خط اختیار می‌شوند. شعاع دایرهٔ چهارمی را پیدا کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس است.

۱۳۴ ـ اندازهٔ زاویهٔ بین مماسهای مشترک داخلی و مماسهای مشترک خارجی دو دایره به‌شعاعهای R و r را پیدا کنید، به‌شرطی که فاصلهٔ میان مرکزهایشان برابر با $\sqrt{2(R^2+r^2)}$ باشد (مرکز دایره‌ها در یک طرف مماس خارجی و دو طرف مماس داخلی قرار دارند).

۱۳۵ ـ پاره خط AB قطر یک دایره است و نقطهٔ C بیرون این دایره قرار دارد. پاره‌خطهای AC و BC، دایره را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D و E قطع می‌کنند. اگر نسبت مساحتهای مثلثهای DCE و ABC، ۱:۴ باشد، اندازهٔ زاویهٔ CBD را پیدا کنید.

۱۳۶ ـ در لوزی $ABCD$ به‌ضلع a، زاویهٔ رأس A برابر با $120°$ است. نقطه‌های E و F، به‌ترتیب، بر ضلعهای BC و AD قرار دارند. پاره‌خط EF و قطر ACی لوزی در نقطهٔ M متقاطع‌اند. نسبت مساحتهای چهارضلعیهای $BEFA$ و $ECDF$، ۱:۲ است. اگر $|AM|:|MC| = 1:3$، $|EM|$ را پیدا کنید.

۱۳۷ ـ دایره‌ای به‌شعاع R و مرکز O مفروض است. مماس AK از A، نقطهٔ انتهایی پاره‌خط OA که دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند، رسم می‌شود. اگر $\angle OAK = 60°$، شعاع دایرهٔ مماس بر پاره‌خطهای AK و AM و کمان MK را پیدا کنید.

۱۳۸ ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC، که در آن $|AB| = |BC|$ و $\angle B = \beta$، در دایره‌ای محاط شده است. میانخط* مثلث را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌های D و E قطع کند ($DE \parallel AC$). نسبت مساحتهای مثلثهای ABC و DBE را پیدا کنید.

۱۳۹ ـ زاویه‌ای به اندازهٔ α با رأس O مفروض است. نقطهٔ M روی یکی از ضلعهای زاویه اختیار می‌شود، عمودی از این نقطه رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویه را در نقطهٔ N قطع کند. به‌همین روش، از نقطهٔ K روی ضلع دیگر زاویه، عمودی را امتداد می‌دهیم تا ضلع اول را در نقطهٔ P قطع کند. فرض کنید B معرف نقطهٔ برخورد خطهای MN و KP، و A نقطهٔ برخورد خطهای OB و NB باشد. اگر $|OM| = a$ و $|OP| = b$، $|OA|$ را پیدا کنید.

۱۴۰ ـ دو دایره به‌شعاعهای R و r، بر ضلعهای یک زاویهٔ مفروض و یکدیگر مماس‌اند. شعاع دایرهٔ سومی را پیدا کنید که بر ضلعهای زاویه مماس و مرکزش نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مفروض باشد.

۱۴۱ ـ فاصلهٔ مرکزهای دو دایرهٔ غیر متقاطع برابر با a است. ثابت کنید که چهار نقطهٔ برخورد مماسهای مشترک داخلی و خارجی آنها، بر یک دایره واقع‌اند. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۱۴۲ ـ ثابت کنید که طول قطعه‌ای از مماس مشترک خارجی دو دایره که بین مماسهای مشترک داخلی آنها محصور شده، برابر با طول مماس مشترک داخلی آنهاست.

۱۴۳ ـ دو شعاع عمود بر هم OA و OB در دایره‌ای به‌مرکز O رسم شده‌اند. نقطهٔ C روی کمان

---

* پاره‌خطی که وسط ساقهای مثلث متساوی‌الساقین را به‌هم وصل می‌کند. ـ م.

AB طوری قرار دارد که $\angle AOC = ۶۰^\circ$ ($\angle BOC = ۳۰^\circ$). دایره‌ای به‌مرکز A و شعاع AB، امتداد OC، از طرف نقطهٔ C، را در D قطع می‌کند. ثابت کنید که پاره‌خط CD برابر است با ضلع ده‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط شده است.

اکنون، نقطهٔ M را مقابل قطری نقطهٔ C بگیرید. طول پاره‌خط MD را به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۵}$ طول آن افزایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم تقریباً برابر نصف محیط دایره بشود. خطای این تقریب را برآورد کنید.

۱۴۴ ـ مستطیلی ۸×۷ مفروض است. یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی بر یکی از رأسهای مستطیل منطبق است و دو رأس دیگر آن بر ضلعهایی از این مستطیل که شامل این رأس نیستند، واقع‌اند. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۴۵ ـ شعاع کوچکترین دایره‌ای را پیدا کنید که ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی را با قاعده‌های ۱۵ و ۱۴ و ضلع جانبی ۹ در برگیرد.

۱۴۶ ـ $ABCD$ مستطیلی است که در آن $|AB| = ۹$ و $|BC| = ۷$. نقطهٔ M بر ضلع CD به‌طوری که $|CM| = ۳$، و نقطهٔ N بر ضلع AD به‌طوری که $|AN| = ۲٫۵$، اختیار می‌شود. شعاع بزرگترین دایره‌ای را پیدا کنید که در درون پنج‌ضلعی $ABCMN$ جا می‌گیرد.

۱۴۷ ـ اندازهٔ بزرگترین زاویهٔ مثلثی را، اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث با رأسهای پای ارتفاعهای مثلث مفروض، برابر با نصف کوچکترین ارتفاع مثلث مفروض باشد، پیدا کنید.

۱۴۸ ـ در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ C، بر میانه‌ای که از رأس B خارج می‌شود، عمود است. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، بر دایره‌ای که از نقطه‌های A و C و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد، قرار دارد. اگر $|BC| = ۱$، $|AB|$ را پیدا کنید.

۱۴۹ ـ نقطهٔ M، به‌فاصلهٔ ۲، ۳ و ۶ از ضلعهای مثلثی متساوی الاضلاع (یعنی، از خطهایی که این ضلعها بر آنها واقع‌اند) قرار دارد. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را، اگر مساحت آن کمتر از ۱۴ باشد، پیدا کنید.

۱۵۰ ـ نقطهٔ M، به فاصلهٔ $\sqrt{۳}$ و $۳\sqrt{۳}$ از ضلعهای زاویه‌ای ۶۰° قرار دارد (پای عمودهای وارد از M بر ضلعهای زاویه، روی خود ضلعهای زاویه قرار دارند نه روی امتداد آنها). خط راستی که از نقطهٔ M می‌گذرد و ضلعهای زاویه را قطع می‌کند، مثلثی جدا می‌کند که محیطش ۱۲ است. مساحت این مثلث را پیدا کنید.

۱۵۱ ـ مستطیل $ABCD$ که در آن $|AB| = ۴$ و $|BC| = ۳$، مفروض است. طول ضلع لوزی را پیدا کنید که یک رأس آن بر A منطبق است و سه رأس دیگرش بر پاره‌خطهای AB، BC و BD (یک رأس روی هر پاره‌خط) قرار دارند.

۱۵۲ ـ مربع $ABCD$ به‌ضلع ۱ داده شده است. طول ضلع لوزی را پیدا کنید که یک رأس آن بر A منطبق است، رأس رو به‌رو به‌آن بر خط BD واقع است و دو رأس باقیمانده، بر خطهای BC و CD قرار دارند.

۱۵۳ ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، زاویهٔ حاده برابر با α است. دایره‌ای به‌شعاع r، از رأسهای

A، B و C می‌گذرد و خطهای AD و CD را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مساحت مثلث BMN را پیدا کنید.

۱۵۴ ـ دایره‌ای که از رأسهای A و B و C ی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد، خطهای AD و CD را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. نقطهٔ M، به‌فاصلهٔ ۴، ۳ و ۲، به‌ترتیب، از رأسهای B، C و D قرار دارد. $|MN|$ را پیدا کنید.

۱۵۵ ـ مثلث ABC که در آن $\angle BAC = \frac{\pi}{۶}$، مفروض است. دایرهٔ به‌مرکز A و شعاع برابر با ارتفاع وارد بر BC، مثلث را به‌دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند. اندازهٔ بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۵۶ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $\angle B = ۱۲۰^\circ$. طول وتر مشترک دو دایره را پیدا کنید که یکی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و دیگری از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و پای نیمسازهای زاویه‌های A و C می‌گذرد، به‌شرطی که $|AC| = ۱$.

۱۵۷ ـ در مثلث ABC، طول ضلع BC برابر با a و شعاع دایرهٔ محاطی برابر با r است. شعاعهای دو دایرهٔ برابر و مماس بر هم را، که یکی از آنها بر ضلعهای BC و BA، و دیگری بر ضلعهای BC و CA مماس است، پیدا کنید.

۱۵۸ ـ ذوزنقه‌ای در یک دایره به‌شعاع R محاط شده است. خطهای راستی که از دو سر یک قاعده به‌موازات ضلعهای جانبی ذوزنقه می‌گذرند، یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند. یک ضلع جانبی از مرکز دایره به‌زاویهٔ α دیده می‌شود. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۱۵۹ ـ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر با c است. دامنهٔ تغییرات فاصلهٔ میان مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و محل برخورد میانه‌های آن، چیست؟

۱۶۰ ـ طول ضلعهای متوازی‌الاضلاعی برابرند با a و b $(a \neq b)$. دامنهٔ تغییرات کسینوس زاویهٔ حادهٔ بین قطرهای آن چیست؟

۱۶۱ ـ از نقطهٔ M در درون مثلث ABC، سه خط راست به‌موازات ضلعهای آن رسم می‌شود. قطعه‌هایی از خطها که در درون مثلث محصورند، با یکدیگر برابرند. اگر طول ضلعهای مثلث a، b و c باشد، طول قطعه‌ها را پیدا کنید.

۱۶۲ ـ در درون مثلث ABC، سه دایرهٔ برابر رسم می‌شوند که هر یک از آنها بر دو ضلع مثلث مماس است. این سه دایره، در یک نقطه مشترک‌اند. اگر شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلث، به‌ترتیب، برابر با r و R باشد، شعاع دایره‌ها را پیدا کنید.

۱۶۳ ـ در مثلث ABC، میانهٔ AD رسم شده و $\angle DAC + \angle ABC = ۹۰^\circ$. اگر $|AB| \neq |AC|$، $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۱۶۴ ـ سه دایره به‌شعاعهای ۱، ۲ و ۳ بر یکدیگر مماس بیرونی‌اند. شعاع دایره‌ای را که از نقطه‌های تماس این دایره‌ها می‌گذرد، پیدا کنید.

۱۶۵ـ مربعی با مساحت واحد در مثلث متساوی‌الساقینی محاط شده و یکی از ضلعهای مربع بر قاعدهٔ مثلث واقع است. اگر بدانیم مرکزهای ثقل مثلث و مربع بر هم منطبق است، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۱۶۶ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، هر ضلع برابر با a است. بر ضلع BC، نقطهٔ D، و بر ضلع AB، نقطهٔ E، طوری اختیار می‌شود که $|BD| = \frac{a}{۳}$ و $|DE| = |AE|.|CE|$ را پیدا کنید.

۱۶۷ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده است. نیمساز CL ($|CL| = a$) و میانهٔ CM ($|CM| = b$) از زاویهٔ قائمهٔ C رسم می‌شوند. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۶۸ـ دایره‌ای در یک ذوزنقه محاط شده است. مساحت ذوزنقه را با داده‌های طول یک قاعده برابر با a و طول پاره‌خطهایی که نقطهٔ تماس، یک ضلع جانبی را تقسیم می‌کند، برابر با b و d، پیدا کنید (پاره‌خط به‌طول b، مجاور قاعدهٔ به‌طول a است).

۱۶۹ـ طول قطرهای ذوزنقه‌ای برابر با ۳ و ۵ و طول پاره‌خطی که وسطهای دو قاعده را به‌هم وصل می‌کند، برابر با ۲ است. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۱۷۰ـ دایره‌ای به‌شعاع ۱، در مثلث ABC که در آن $\cos B = ۰٫۸$، محاط شده است. این دایره بر میانخط مثلث ABC، موازی با ضلع AC، مماس است. طول AC را پیدا کنید.

۱۷۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با مساحت S مفروض است. سه خط راست، به‌موازات ضلعهای مثلث و به‌فاصلهٔ برابر از آنها، رسم می‌شوند، و از برخورد آنها، در درون مثلث، مثلث $A_۱B_۱C_۱$ با مساحت Q درست می‌شود. فاصلهٔ میان ضلعهای موازی مثلثهای ABC و $A_۱B_۱C_۱$ را پیدا کنید.

۱۷۲ـ ضلعهای AB و CDی چهارضلعی $ABCD$، دو به‌دو بر هم عمودند؛ این ضلعها، قطرهای دو دایرهٔ برابر به‌شعاع r و مماس بر یکدیگر، هستند. اگر $|BC|:|AD| = k$، مساحت چهارضلعی $ABCD$ را پیدا کنید.

۱۷۳ـ دو دایرهٔ مماس بر هم، در زاویه‌ای به‌اندازهٔ α محاط شده‌اند. نسبت شعاع دایرهٔ کوچکتر را به‌شعاع دایرهٔ سومی که بر هر دو دایره و یک ضلع زاویه مماس است، پیدا کنید.

۱۷۴ـ در مثلث ABC، دایره‌ای که به‌قطر میانخط DE، موازی با AB، رسم می‌شود، ضلعهای AC و BC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. اگر $|BC| = a$، $|AC| = b$ و $|AB| = c$، $|MN|$ را پیدا کنید.

۱۷۵ـ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره، برابر با a است. طول ضلع یک لوزی را پیدا کنید که دو رأس رو به‌روی آن بر یک دایره و دو رأس دیگر آن بر دایرهٔ دیگر قرار دارد، به‌شرطی که شعاع دایره‌ها R و r باشد.

۱۷۶ـ مساحت لوزی $ABCD$ را، اگر شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ABD، به‌ترتیب R و r باشد، پیدا کنید.

۱۷۷ـ زاویه‌ای به‌اندازهٔ α با رأس A، و نقطهٔ B به‌فاصلهٔ a و b از ضلعهای زاویه، داده شده است. $|AB|$ را پیدا کنید.

۱۷۸ـ در مثلث ABC، h_a و h_b، به‌ترتیب، طول ارتفاعهای مرسوم از رأسهای A و B، و l طول نیمساز زاویهٔ C، داده شده‌اند. $\angle C$ را پیدا کنید.

۱۷۹ـ دایره‌ای بر یک مثلث قائم‌الزاویه محیط شده است. دایرهٔ دیگری با همان شعاع، بر ساقهای این مثلث مماس و یکی از رأسهای مثلث نقطهٔ تماس است. نسبت مساحت مثلث به‌مساحت بخش مشترک دو دایرهٔ مفروض را پیدا کنید.

۱۸۰ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، $|AB| = |BC| = |CD| = a$ و $|DA| = ۲a$. نقطه‌های E و F، متمایز از رأسهای ذوزنقه، به‌ترتیب بر خطهای راست AB و AD طوری اختیار شده‌اند که محل برخورد ارتفاعهای مثلث CEF بر محل برخورد قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ منطبق است. مساحت مثلث CEF را پیدا کنید.

* * *

۱۸۱ـ طول ارتفاع وارد بر وتر AB در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، برابر با h، و D پای آن است؛ M و N، به‌ترتیب، وسط پاره‌خطهای AD و DB هستند. فاصلهٔ رأس C تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث CMN را پیدا کنید.

۱۸۲ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های AD و BC داده‌شده‌است. $a = |CD| = |AB|$، $b = |BD| = |AC|$، $|BC| = c$ و M نقطه‌ای دلخواه روی کمان BC از دایرهٔ محیط بر $ABCD$ است. نسبت $\dfrac{|BM|+|MC|}{|AM|+|MD|}$ را پیدا کنید.

۱۸۳ـ طول هر ساق مثلث متساوی‌الساقینی برابر با ۱، و قاعدهٔ آن برابر با a است. دایره‌ای بر مثلث محیط می‌شود. طول وتری را پیدا کنید که ساقهای مثلث را قطع می‌کند و نقطه‌های برخورد، آن را به‌سه پاره‌خط برابر تقسیم می‌کنند.

۱۸۴ـ MN قطری از یک دایره است، $|MN| = ۱$، A و B نقطه‌هایی از دایره، واقع در یک طرف MN، هستند و C نقطه‌ای روی نیمدایره‌ای است که شامل A و B نیست. A وسط نیمدایره است و $|MB| = \frac{۳}{۵}$. طول پاره‌خطی که از برخورد قطر MN با وترهای AC و BC تشکیل شده، برابر با a است. بیشترین مقدار a چیست؟

۱۸۵ـ $ABCD$ چهارضلعیی محدب است. M وسط AB و N وسط CD است. می‌دانیم مساحت مثلثهای ABN و CDM برابر است، و مساحت بخش مشترکشان برابر با $\frac{۱}{k}$ مساحت هر یک از آنهاست. نسبت طول ضلعهای BC و AD را پیدا کنید.

۱۸۶ ـ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ داده شده است. زاویهٔ حادهٔ مجاور به‌قاعدهٔ بزرگترش، برابر با 60° و طول قطرش برابر با $\sqrt{3}$ است. نقطهٔ M به‌فاصلهٔ ۱ و ۳ به‌ترتیب، از رأسهای A و D قرار دارد، $|MC|$ را پیدا کنید.

۱۸۷ ـ نیمساز هر زاویهٔ مثلثی، ضلع رو به‌رو را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به‌فاصلهٔ برابر از وسطهای دو ضلع دیگر قرار دارد. آیا این بدان معنی است که مثلث، متساوی‌الاضلاع است؟

۱۸۸ ـ در مثلثی، دو ضلع با طولهای a و b $(a>b)$ داده شده‌اند. طول ضلع سوم را پیدا کنید، اگر بدانیم $a+h_a \le b+h_b$، که در آن h_a و h_b، طول ارتفاعهای وارد بر همین ضلعها هستند (h_a، طول ارتفاع وارد بر ضلع با طول a است).

۱۸۹ ـ چهارضلعی محدب $ABCD$، محیط بر دایره‌ای به‌قطر ۱، داده شده است. در درون $ABCD$، نقطهٔ M طوری است که $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2=2$. مساحت $ABCD$ را پیدا کنید.

۱۹۰ ـ در چهارضلعی $ABCD$، $|AB|=a$، $|BC|=b$، $|CD|=c$، $|DA|=d$، $a^2+c^2 \ne b^2+d^2$ و $c \ne d$. M نقطه‌ای روی BD و به‌فاصلهٔ برابر از A و C است. نسبت $|BM|:|MD|$ را پیدا کنید.

۱۹۱ ـ ضلع کوچکتر مستطیل $ABCD$ برابر با ۱ است. چهار دایرهٔ هم‌مرکز، به‌مرکز A، را که، به‌ترتیب، از B، C و D و محل برخورد قطرهای مستطیل $ABCD$ می‌گذرند، در نظر بگیرید. همچنین، مستطیلی با رأسهای روی این دایره‌ها وجود دارد (یک رأس روی هر دایره). ثابت کنید، مربعی وجود دارد که رأسهایش بر این دایره‌ها قرار دارند. طول ضلع مربع را پیدا کنید.

۱۹۲ ـ مثلث ABC داده شده است. عمودهای مرسوم بر وسطهای AB و BC، خط AC را در نقطه‌های M و N طوری قطع می‌کنند که $|MN|=|AC|$. عمودهای مرسوم بر وسطهای AB و AC، BC را در نقطه‌های K و L طوری قطع می‌کنند که $|KL|=\frac{1}{2}|BC|$. اندازهٔ کوچکترین زاویهٔ مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۹۳ ـ نقطه‌ای مانند M، بر ضلع AB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که خط راستی که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را به‌نقطهٔ میانه‌ای مثلث BCM وصل می‌کند، بر CM عمود است. اگر $|BA|:|BC|=k$، نسبت $|BM|:|BA|$ را پیدا کنید.

۱۹۴ ـ در چهارضلعی محاطی $ABCD$ که در آن $|AB|=|BC|$، K محل برخورد قطرهاست. اگر $|BK|=b$ و $|KD|=d$، $|AB|$ را پیدا کنید.

۱۹۵ ـ تعبیر هندسی معادلهٔ (۱) و دستگاه معادله‌های (۲)، (۳) و (۴) را بیان کنید. معادلهٔ (۱) و دستگاه معادله‌های (۲) و (۳) را حل کنید. در دستگاه معادله‌های (۴)، $x+y+z$ را پیدا کنید.

$$\sqrt{x^2+a^2}-ax\sqrt{3}+\sqrt{y^2+b^2}-by\sqrt{3}+\sqrt{x^2+y^2}-xy\sqrt{3}=\sqrt{a^2+b^2} \quad (1)$$

$$(a>0\,,\,b>0)$$

$$(۲)\begin{cases} x=\sqrt{z^۲-a^۲}+\sqrt{y^۲-a^۲} \\ y=\sqrt{x^۲-b^۲}+\sqrt{z^۲-b^۲} \\ z=\sqrt{y^۲-c^۲}+\sqrt{x^۲-c^۲} \end{cases}$$

$$(۳)\quad x^۲+y^۲=(a-x^۲)+b^۲=a^۲+(b-y^۲)$$

$$(۴)\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=a^۲ \\ y^۲+yz+z^۲=b^۲ \\ z^۲+zx+x^۲=a^۲+b^۲ \end{cases}$$

۱۹۶ ـ طول ضلع مربعی، برابر با a و حاصلضربهای فاصله‌های دو رأس مقابل تا خطی مانند l، با هم برابر است. اگر بدانیم که هیچ ضلع مربع با l موازی نیست، فاصلهٔ مرکز مربع تا خط l را پیدا کنید.

۱۹۷ ـ طول یکی از ضلعهای مثلث ABC، دو برابر طول یک ضلع دیگر آن است و $\angle B=۲\angle C$. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

۱۹۸ ـ دایره‌ای بر ضلعهای AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. فرض کنید M نقطهٔ تماس دایره با ضلع AB و N محل برخورد دایره با قاعدهٔ BC باشد. اگر $|AM|=a$ و $|BM|=b$، $|AN|$ را پیدا کنید.

۱۹۹ ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که در آن $|AB|=k|BC|$، داده شده است. K و L نقطه‌هایی روی خط CD هستند (K روی ضلع CD است). M نقطه‌ای روی BC، AD نیمساز زاویهٔ KAL، و AM نیمساز زاویهٔ KAB است. $|BM|=a$ و $|DL|=b$. $|AL|$ را پیدا کنید.

۲۰۰ ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. خط راستی که از رأس C می‌گذرد، ضلعهای AB و AD را، به‌ترتیب، در نقطه‌های K و L قطع می‌کند. مساحت مثلثهای KBC و CDL، به‌ترتیب، برابرند با p و q. مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را پیدا کنید.

۲۰۱ ـ دایره‌ای به‌شعاع R و دو نقطهٔ A و B روی آن به‌طوری که $|AB|=a$، داده شده است. دو دایره به‌شعاعهای x و y، در نقطه‌های A و B بر دایرهٔ مفروض مماس‌اند. مطلوب است: (الف) طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ اخیر، اگر هر دو آنها به‌یک نحو (درونی یا بیرونی) بر دایرهٔ مفروض مماس باشند؛ (ب) طول مماس مشترک داخلی آنها، اگر دایرهٔ به‌شعاع x، بر دایرهٔ مفروض مماس بیرونی و دایرهٔ به‌شعاع y، بر دایرهٔ مفروض مماس درونی باشد.

۲۰۲ ـ در مثلث ABC: $|AB|=۱۲$، $|BC|=۱۳$ و $|CA|=۱۵$. بر ضلع AC، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌شود که شعاعهای دایره‌های محاط در مثلثهای ABM و BCM برابرند. نسبت $|AM|:|MC|$ را پیدا کنید.

۲۰۳ـ شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلثی، به‌ترتیب، برابر r و R است. اگر بدانیم دایره‌ای که از مرکز دایره‌های محاطی و محیطی و محل برخورد ارتفاعهای مثلث می‌گذرد، دست‌کم از یکی از رأسهای مثلث هم می‌گذرد، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۲۰۴ـ مستطیل $ABCD$ که در آن $|AB| = 2a$ و $|BC| = a\sqrt{2}$، داده شده است. نیمدایره‌ای، به‌قطر ضلع BC و بیرون آن رسم می‌شود. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه از نیمدایره باشد و خط MD، AB را در N و خط MC را در L قطع کند. $|AL|^2+|BN|^2$ را پیدا کنید (مسألهٔ فرما*).

۲۰۵ـ دو دایره به‌شعاعهای R و r، مماس درونی‌اند. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا کنید که یک رأس آن بر نقطهٔ تماس دو دایره منطبق باشد و دو رأس دیگرش روی دایره‌های مفروض قرار گیرد.

۲۰۶ـ دو دایره به‌شعاعهای R و r $(R>r)$، بر یکدیگر در نقطهٔ A مماس بیرونی‌اند. از نقطه‌ای مانند B روی دایرهٔ بزرگتر، خط راستی رسم می‌شود که در نقطهٔ C بر دایرهٔ کوچکتر مماس است. اگر $|AB| = a$، $|BC|$ را پیدا کنید.

۲۰۷ـ در درون متوازی‌الاضلاع $ABCD$، سه دایره دو به‌دو بر هم مماس‌اند؛ به‌علاوه، یکی از آنها بر ضلعهای AB و BC، دومی بر ضلعهای AB و AD، و سومی بر ضلعهای BC و AD مماس است. اگر فاصلهٔ نقطه‌های تماس روی ضلع AB، برابر با a باشد، شعاع دایرهٔ سوم را پیدا کنید.

۲۰۸ـ قطرهای چهارضلعی $ABCD$، در نقطهٔ M متقاطع‌اند و زاویهٔ بین آنها برابر با α است. فرض کنید O_1، O_2، O_3 و O_4، به‌ترتیب، معرف مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABM، BCM، CDM و DAM باشند. نسبت مساحتهای چهارضلعیهای $ABCD$ و $O_1O_2O_3O_4$ را پیدا کنید.

۲۰۹ـ در متوازی‌الاضلاعی که مساحتش برابر با S است، نیمسازهای زاویه‌های داخلی رسم می‌شوند تا یکدیگر را قطع کنند. مساحت چهارضلعی حاصل برابر است با Q. نسبت طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۲۱۰ـ در مثلث ABC، نقطهٔ M روی ضلع AC و نقطهٔ N روی ضلع BC اختیار شده است. پاره‌خطهای AN و BM در نقطهٔ O متقاطع‌اند. اگر مساحت مثلثهای OMA، OAB و OBM، به‌ترتیب، S_1، S_2 و S_3 باشد، مساحت مثلث CMN را پیدا کنید.

۲۱۱ـ نقطهٔ میانه‌ای مثلث قائم‌الزاویه‌ای بر دایرهٔ محاطی این مثلث قرار دارد. اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ این مثلث را پیدا کنید.

۲۱۲ـ دایرهٔ محاطی مثلث ABC، میانهٔ BM آن را به‌سه بخش برابر تقسیم می‌کند. نسبت $|BC|:|CA|:|AB|$ را پیدا کنید.

---

* فرما، پیردو (۱۶۰۱ ـ ۱۶۶۵)، ریاضی‌دان غیرحرفه‌ای فرانسوی.

۲۱۳ـ در مثلث ABC، عمود منصف ضلع AB، خط AC را در M، و عمود منصف ضلع AC، خط AB را در N قطع می‌کند. می‌دانیم که $|MN| = |BC|$ و خط MN بر خط BC عمود است. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را تعیین کنید.

۲۱۴ـ مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های AD و BC، برابر با S است و $|AD| : |BC| = ۳$؛ روی خط راستی که امتداد قاعدهٔ AD، از طرف D، را قطع می‌کند، پاره‌خط EF طوری قرار گرفته که $DF \parallel AE$، $CF \parallel BE$ و $|AE| : |DF| = |CF| : |BE| = ۲$. مساحت مثلث EFD را پیدا کنید.

۲۱۵ـ در مثلث ABC، طول ضلع BC برابر با a و شعاع دایرهٔ محاطی برابر با r است. اگر دایرهٔ محاطی مثلث، بر دایرهٔ مرسوم به‌قطر BC مماس باشد، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۲۱۶ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌ضلع a داده شده و BD ارتفاع مثلث است. مثلث متساوی الاضلاع دومی، $BDC_۱$، روی BD، و مثلث متساوی‌الاضلاع سومی، $BD_۱C_۲$، بر ارتفاع $BD_۱$ از مثلث دوم رسم می‌شود. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $CC_۱C_۲$ را پیدا کنید. ثابت کنید، مرکز این دایره بر یکی از ضلعهای مثلث ABC قرار دارد ($C_۲$ بیرون مثلث ABC است).

۲۱۷ـ ضلعهای متوازی‌الاضلاعی برابرند با a و b $(a \neq b)$. خطهای راستی، از رأسهای زاویه‌های منفرجهٔ این متوازی‌الاضلاع، بر ضلعهای آن عمود رسم می‌شوند. ضمن برخورد، این خطها، متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروض می‌سازند. کسینوس زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع مفروض را پیدا کنید.

۲۱۸ـ در مثلث KLM، دو نیمساز KN و LP که یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع می‌کند، رسم شده‌اند. پاره‌خط PN طولی برابر ۱ دارد و رأس M، بر دایره‌ای قرار دارد که از نقطه‌های N، P و Q می‌گذرد. طول ضلعها و اندازهٔ زاویه‌های مثلث PNQ را پیدا کنید.

۲۱۹ـ مرکز دایره‌ای به‌شعاع r، که بر ضلعهای AB، AD و BC از چهارضلعی محدب $ABCD$ مماس است، روی قطر ACی آن قرار دارد. مرکز دایره‌ای به‌همان شعاع r، که بر ضلعهای BC، CD و AD مماس است، بر قطر BD واقع است. اگر این دو دایره بر هم مماس بیرونی باشند، مساحت چهارضلعی $ABCD$ را پیدا کنید.

۲۲۰ـ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC، برابر با ۱ است. می‌دانیم مرکز دایره‌ای که از رأسهای A و C و محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد، بر این دایره قرار دارد. $|AC|$ را پیدا کنید.

۲۲۱ـ مثلث ABC داده شده است. نقطه‌های M، N و P اختیار می‌شوند: M و N، به‌ترتیب، بر ضلعهای AC و BC، و P روی پاره‌خط MN، به‌طوری که

$$|AM| : |MC| = |CN| : |NB| = |MP| : |PN|$$

اگر مساحت مثلثهای AMP و BNP، به‌ترتیب، T و Q باشد، مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۲۲ـ دایره‌ای به‌شعاع R و نقطهٔ A به‌فاصلهٔ a از مرکز آن، داده شده است $(a>R)$. فرض کنید K معرف نزدیکترین نقطهٔ دایره به نقطهٔ A باشد. خط قاطعی که از A می‌گذرد، دایره را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث KMN برابر با S باشد، $|MN|$ را پیدا کنید.

۲۲۳ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(|AB| = |BC|)$، از E، انتهای نیمساز AE، عمودی بر AE رسم می‌شود تا امتداد ضلع AC را در F قطع کند (C بین A و F قرار دارد). می‌دانیم که $|AC| = ۲m$ و $|FC| = \frac{m}{۴}$. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۲۴ـ دو مثلث متساوی‌الاضلاع و قابل انطباق ABC و CDE به‌ضلع ۱، طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که تنها در نقطهٔ C مشترک‌اند و زاویهٔ BCD از $\frac{\pi}{۳}$ کمتر است. K معرف وسط ضلع AC، L وسط CE، و M وسط BD است. مساحت مثلث KLM برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$. $|BD|$ را پیدا کنید.

۲۲۵ـ از نقطه‌ای مانند K بیرون دایره‌ای به‌مرکز O، دو مماس KM و KN (M و N نقطه‌های تماس‌اند) بر دایره رسم شده‌اند. نقطهٔ C $(|MC| < |CN|)$ روی وتر MN اختیار می‌شود. از نقطهٔ C، خط راستی عمود بر پاره‌خط OC رسم می‌شود تا پاره خط NK را در B قطع کند. می‌دانیم شعاع دایره برابر است با R، $\angle MKN = \alpha$ و $|MC| = b$. $|CB|$ را پیدا کنید.

۲۲۶ـ پنج‌ضلعی $ABCDE$ در دایره‌ای محاط شده است. نقطه‌های M، Q، N و P، پای عمودهای وارد از رأس E، به‌ترتیب، بر ضلعهای AB، BC، CD (یا امتدادهای آنها) و قطر AD هستند. می‌دانیم که $|EP| = d$ و نسبت مساحتهای مثلثهای MQE و PNE برابر با k است. $|EM|$ را پیدا کنید.

۲۲۷ـ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای داده شده است. خط راستی که به‌موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌شود، آن را به‌دو بخش طوری تقسیم می‌کند که در هر یک از آنها می‌توان دایره‌ای محاط کرد. طول قاعده‌های ذوزنقهٔ اصلی را، اگر طول ضلعهای جانبی آن برابر با c و d $(d>c)$ باشد، پیدا کنید.

۲۲۸ـ نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، بر ضلعهای KL و MN از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $KLMN$، طوری انتخاب می‌شوند که پاره‌خط PQ به‌موازات قاعده‌های ذوزنقه است. در هریک از ذوزنقه‌های $KPQN$ و $PLMQ$، می‌توان دایره‌ای محاط کرد که شعاعهای آنها، به‌ترتیب، برابر با R و r است. $|LM|$ و $|KN|$ را پیدا کنید.

۲۲۹ـ در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. می‌دانیم که $|AB| - |BD| = a$ و $|AC| + |CD| = b$. $|AD|$ را پیدا کنید.

۲۳۰ـ با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ قبل، ثابت کنید که مربع طول هر نیمساز مثلث، برابر است با حاصلضرب طول ضلعهایی که این نیمساز را در بردارند منهای حاصلضرب طول پاره‌خطهایی از ضلع سوم که همین نیمساز روی ضلع سوم جدا می‌کند.

۲۳۱ ـ دایره‌ای به‌قطر AB داده شده است. دایرهٔ دیگری به‌مرکز A، دایرهٔ نخست را در نقطه‌های C و D، و قطر آن را در E قطع می‌کند. نقطهٔ M، متمایز از نقطه‌های C و E، روی کمان CE که شامل نقطهٔ D نیست، اختیار می‌شود. نیمخط BM، دایرهٔ نخست را در نقطهٔ N قطع می‌کند. می‌دانیم که $a = |CN|$ و $b = |DN|$. $|MN|$ را پیدا کنید.

۲۳۲ ـ در مثلث ABC، زاویهٔ B برابر با $\frac{\pi}{۴}$ و زاویهٔ C برابر با $\frac{\pi}{۶}$ است. دایره‌هایی که به‌قطر میانه‌های BN و CN رسم می‌شوند، یکدیگر را در نقطه‌های P و Q قطع می‌کنند. وتر PQ، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. نسبت $|DC| : |BD|$ را پیدا کنید.

۲۳۳ ـ فرض کنید AB معرف قطر یک دایره، O مرکز آن، $AB = ۲R$، C نقطه‌ای روی دایره و M نقطه‌ای روی وتر AC باشد. از نقطهٔ M، عمود MN بر AB، و عمود دیگری بر AC رسم می‌شود تا دایره را در نقطهٔ L قطع کند (پاره‌خط CL، AB را قطع می‌کند). اگر $a = |AN|$، فاصلهٔ بین وسطهای AO و CL را پیدا کنید.

۲۳۴ ـ دایره‌ای بر مثلث ABC محیط شده است. مماس بر دایره که از نقطهٔ B می‌گذرد، خط AC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر $k = |BC| : |AB|$، نسبت $|MC| : |AM|$ را پیدا کنید.

۲۳۵ ـ نقطه‌های A، B، C و D، به‌ترتیب متوالی، روی خط راستی قرار گرفته‌اند، به‌طوری که $|AB| \alpha = |AC|$ و $|AB| \beta = |AD|$. دایرهٔ دلخواهی از A و B می‌گذرد، CM و DN دو مماس بر این دایره هستند (M و N نقطه‌هایی از دایره‌اند که در دو طرف خط AB واقع‌اند). خط MN، پاره‌خط AB را به‌چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۲۳۶ ـ در چهارضلعی محیطی $ABCD$، طول هر پاره‌خط از A تا نقطه‌های تماس، برابر با a و طول هر پاره‌خط از C تا نقطه‌های تماس، برابر با b است. قطر BD، قطر AC را به‌چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۲۳۷ ـ نقطهٔ K روی قاعدهٔ AD از ذوزنقهٔ $ABCD$ طوری قرار دارد که $|AD| \lambda = |AK|$. نسبت $|MD| : |AM|$ را پیدا کنید، که در آن، M محل برخورد قاعدهٔ AD با خطی است که از نقطه‌های برخورد خطهای AB و CD، و خطهای BK و AC می‌گذرد.

با قرار دادن $\lambda = \frac{۱}{n}$ $(n = ۱, ۲, ۳, ...)$، پاره‌خط مفروضی را به‌کمک یک خطکش تنها و خط راست مفروضی موازی این پاره‌خط، به n بخش برابر تقسیم کنید.

۲۳۸ ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، با وتر AB به‌طول c، دایره‌ای به‌قطر ارتفاع CD رسم شده است. دو مماس بر این دایره که از نقطه‌های A و B می‌گذرند، به‌ترتیب، در نقطه‌های M و N بر دایره مماس‌اند و امتدادهای آنها، یکدیگر را در نقطهٔ K قطع می‌کنند. $|MK|$ را پیدا کنید.

۲۳۹ ـ بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC، نقطه‌های $C_۱$، $A_۱$ و $B_۱$ طوری اختیار می‌شوند که $k = |B_۱A| : |CB_۱| = |A_۱C| : |BA_۱| = |C_۱B| : |AC_۱|$. بر ضلعهای $A_۱B_۱$، $B_۱C_۱$ و $C_۱A_۱$ نقطه‌های $C_۲$، $B_۲$ و $A_۲$ طوری اختیار می‌شوند که

$$|A_1C_2| : |C_2B_1| = |B_1A_2| : |A_2C_1| = |C_1B_2| : |B_2A_1| = \frac{1}{k}$$

ثابت کنید که مثلث $A_2B_2C_2$ با مثلث ABC متشابه است و نسبت تشابه را پیدا کنید.

۲۴۰ ـ در مثلث ABC، شعاع دایره‌های محیطی (R) و محاطی (r) داده شده است. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 معرف نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن باشند. نسبت مساحتهای مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ را پیدا کنید.

۲۴۱ ـ دو مثلث با ضلعهای متناظر موازی و مساحتهای S_1 و S_2، یکی در مثلث ABC محاط و دیگری بر آن محیط شده است. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۴۲ ـ اندازهٔ زاویهٔ A از مثلث ABC را تعیین کنید، در صورتی که نیمساز این زاویه، بر خط راستی که از محل برخورد ارتفاعهای این مثلث و مرکز دایرهٔ محیطی آن می‌گذرد، عمود باشد.

۲۴۳ ـ اندازهٔ زاویه‌های مثلثی را پیدا کنید، در صورتی که فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محیطی و محل برخورد ارتفاعهایش، نصف طول بزرگترین ضلع مثلث و برابر با کوچکترین ضلع آن باشد.

۲۴۴ ـ مثلث ABC داده شده است. نقطه‌ای مانند D، بر نیمخط BA طوری اختیار می‌شود که $|BD| = |BA| + |AC|$. فرض کنید K و M، به‌ترتیب، دو نقطه روی نیمخطهای BA و BC باشند، به‌طوری که مساحت مثلث BDM با مساحت مثلث BCK برابر شود. اگر $\angle BAC = \alpha$، $\angle BKM$ را پیدا کنید.

۲۴۵ ـ در ذوزنقهٔ $ABCD$، ضلع جانبی AB، بر AD و BC عمود است و $|AB| = \sqrt{|AD|.|BC|}$. فرض کنید E معرف نقطهٔ برخورد ضلعهای ناموازی ذوزنقه، O محل برخورد قطرها و M وسط AB باشد. $\angle EOM$ را پیدا کنید.

۲۴۶ ـ دو نقطهٔ A و B، و دو خط راست که در نقطهٔ O متقاطع‌اند، در یک صفحه داده شده‌اند. پای عمودهای وارد برخطهای مفروض، ازنقطهٔ A را، به‌ترتیب، با M و N و ازنقطهٔ B را، به‌ترتیب با K و L نشان می‌دهیم. اگر $\angle AOB = \alpha \le ۹۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ بین خطهای MN و KL را پیدا کنید.

۲۴۷ ـ دو دایره بر یکدیگر در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. شعاع OB، مماس بر دایرهٔ کوچکتر در نقطهٔ C، از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ بزرگتر، رسم می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ BAC را پیدا کنید.

۲۴۸ ـ نقطهٔ M در درون مربع $ABCD$ طوری اختیار می‌شود که $\angle MAB = ۶۰^\circ$ و $\angle MCD = ۱۵^\circ$. $\angle MBC$ را پیدا کنید.

۲۴۹ ـ در مثلث ABC: $\angle A = ۴۵^\circ$ و $\angle B = ۱۵^\circ$. بر امتداد ضلع AC، از طرف نقطهٔ C، نقطهٔ M طوری اختیار می‌شود که $|CM| = ۲|AC|$. $\angle AMB$ را پیدا کنید.

۲۵۰ ـ در مثلث ABC، $\angle B = ۶۰^\circ$ و نیمساز زاویهٔ A، BC را در M قطع می‌کند، نقطهٔ K بر ضلع AC طوری اختیار می‌شود که $\angle AMK = ۳۰^\circ$. $\angle OKC$ را پیدا کنید، که در آن، O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMC است.

۲۵۱ ـ مثلث ABC، که در آن $|AB| = |AC|$ و $\angle A = ۸۰^\circ$، داده شده است. (الف) نقطهٔ

M در درون مثلث طوری اختیار می‌شود که $\angle MBC = ۳۰^\circ$ و $\angle MCB = ۱۰^\circ$. $\angle AMC$ را پیدا کنید. (ب) نقطهٔ P بیرون مثلث طوری اختیار می‌شود،که $\angle PBC = \angle PCA = ۳۰^\circ$ و پاره‌خط BP، ضلع AC را قطع می‌کند. $\angle PAC$ را پیدا کنید.

۲۵۲ ـ در مثلث ABC، $\angle B = ۱۰۰^\circ$ و $\angle C = ۶۵^\circ$؛ نقطهٔ M روی AB طوری اختیار می‌شود که $\angle MCB = ۵۵^\circ$ و نقطهٔ N بر AC طوری اختیار می‌شود که $\angle NBC = ۸۰^\circ$. $\angle NMC$ را پیدا کنید.

۲۵۳ ـ در مثلث ABC، $|AB| = |BC|$ و $\angle B = ۲۰^\circ$. نقطهٔ M روی AB، به‌طوری که $\angle MCA = ۶۰^\circ$، و نقطهٔ N بر ضلع CB، به‌طوری که $\angle NAC = ۵۰^\circ$، اختیار می‌شود. $\angle NMC$ را پیدا کنید.

۲۵۴ ـ در مثلث ABC، $\angle B = ۷۰^\circ$ و $\angle C = ۵۰^\circ$. نقطهٔ M روی ضلع AB، به‌طوری که $\angle MCB = ۴۰^\circ$، و نقطهٔ N بر ضلع AC، به‌طوری که $\angle NBC = ۵۰^\circ$، اختیار می‌شود. $\angle NMC$ را پیدا کنید.

۲۵۵ ـ فرض کنید M و N معرف نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی با ضلعهای BC و BA از مثلث ABC باشند و K نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ A و خط MN باشد. ثابت کنید که $\angle AKC = ۹۰^\circ$.

۲۵۶ ـ فرض کنید P و Q معرف نقطه‌هایی از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، به‌طوری که $|PA|^۲ = |PB|.|PC|$ و $|QA|^۲ = |QB|.|QC|$ (یکی از نقطه‌ها روی کمان AB و دیگری روی کمان AC است). اگر تفاضل میان اندازهٔ زاویه‌های B و C از مثلث ABC، α باشد، $\angle PAB - \angle QAC$ را پیدا کنید.

۲۵۷ ـ دو نقطهٔ ثابت A و B، روی دایره‌ای مفروض اختیار شده‌اند و $\widehat{AB} = \alpha$. دایره‌ای دلخواه از نقطه‌های A و B می‌گذرد. به‌علاوه، خط دلخواه l از نقطهٔ A رسم می‌شود و دایره را در نقطه‌های C و D، متمایز از B، قطع می‌کند (C روی دایرهٔ مفروض است). مماسهای بر دایره در نقطه‌های C و D (C و D نقطه‌های تماس‌اند)، در M متقاطع‌اند؛ N نقطه‌ای روی خط l است، به‌طوری که $|CN| = |AD|$ و $|DN| = |CA|$. مقدارهای ممکن $\angle CMN$ چیست؟

۲۵۸ ـ ثابت کنید که هرگاه یکی از زاویه‌های مثلثی برابر با ۱۲۰° باشد، آن‌گاه مثلثی که با پای نیمسازهای آن تشکیل شده، قائم‌الزاویه است.

۲۵۹ ـ در چهارضلعی $ABCD$: $\angle DAB = ۱۵۰^\circ$ و $\angle DAC + \angle ABD = ۱۲۰^\circ$ و $\angle DBC - \angle ABD = ۶۰^\circ$. $\angle BDC$ را پیدا کنید.

* * *

۲۶۰ ـ در مثلث ABC: $|AB| = ۱$ و $|AC| = ۲$. اگر بدانیم نیمساز زاویه‌های خارجی A و C (یعنی، پاره‌خطی از نیمسازها، از رأس تا نقطهٔ برخورد آنها با خطی که شامل ضلع رو به‌رو به‌آن زاویه است) قابل انطباق‌اند، $|BC|$ را پیدا کنید.

۲۶۱ ـ نقطه‌ای مانند D بر ضلع CB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که $|CD| = \alpha |AC|$. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر با R است. فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ADB را پیدا کنید.

۲۶۲ ـ دایره‌ای بر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle C = ۹۰^\circ$) محیط شده است. فرض کنید CD معرف ارتفاع مثلث باشد. دایره‌ای به‌مرکز D، از وسط کمان AB می‌گذرد و AB را در M قطع می‌کند. اگر $|AB| = c$، $|CM|$ را پیدا کنید.

۲۶۳ ـ محیط مثلث ABC را پیدا کنید، در صورتی که $|BC| = a$ و طول قطعه‌ای از خط راست مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث و موازی با BC، که درون مثلث محصور شده است، برابر با b باشد.

۲۶۴ ـ سه خط راست، موازی با ضلعهای یک مثلث و مماس بر دایرهٔ محاطی آن رسم شده‌اند. این خطها، سه مثلث از مثلث مفروض جدا می‌کند. شعاع دایره‌های محیطی آنها برابرند با $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض را پیدا کنید.

۲۶۵ ـ وترهای AB و AC، در دایره‌ای به‌شعاع R رسم شده‌اند. نقطهٔ M روی AB یا بر امتداد آن، از طرف نقطهٔ B، اختیار می‌شود، فاصلهٔ M تا خط AC، برابر است با $|AC|$. به‌همین ترتیب، نقطهٔ N روی خط AC یا بر امتداد آن، از طرف نقطهٔ C، اختیارمی‌شود، فاصلهٔ N تا خط AB، برابر است با $|AB|$. طول MN را پیدا کنید.

۲۶۶ ـ دایره‌ای به‌شعاع R و به‌مرکز O داده شده است. دو دایرهٔ دیگر، با دایرهٔ مفروض مماس درونی و در نقطه‌های A و B متقاطع‌اند. اگر $\angle OAB = ۹۰^\circ$، مجموع شعاعهای این دو دایره را پیدا کنید.

۲۶۷ ـ دو وتر متقاطع عمود بر هم، در دایره‌ای به‌شعاع R رسم شده‌اند. پیدا کنید:

(الف) مجموع مربعهای طول چهار قطعهٔ این وترها را که نقطهٔ برخورد آنها جدا می‌کند؛

(ب) مجموع مربعهای طول وترها را، در صورتی که فاصلهٔ مرکز دایره تا نقطهٔ برخورد وترها، برابر با a باشد.

۲۶۸ ـ دو دایرهٔ هم‌مرکز به‌شعاعهای r و R مفروض‌اند ($R>r$). خط راستی از نقطهٔ P، روی دایرهٔ کوچکتر، رسم می‌شود تا دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های B و C قطع کند. عمود بر BC در نقطهٔ P، دایرهٔ کوچکتر را در A قطع می‌کند. $|PA|^۲+|PB|^۲+|PC|^۲$ را پیدا کنید.

۲۶۹ ـ در یک نیمدایره، دو وتر متقاطع از دو انتهای قطر رسم می‌شوند. ثابت کنید که مجموع حاصلضربهای طول هر قطعهٔ مجاور به‌قطر از وتر و طول تمام وتر، برابر است با مربع طول قطر.

۲۷۰ ـ فرض کنید، a، b، c و d طول ضلعهای چهارضلعیی محاطی (ضلع به‌طول a

روبه‌رو به‌ضلع با طول c است) و h_a، h_b، h_c و h_d فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلعهای نظیرشان باشند. اگر مرکز دایره در درون چهارضلعی باشد، آن وقت ثابت کنید که $ah_c+ch_a=bh_d+dh_b$.

۲۷۱ ـ دو ضلع رو به‌رو درچهارضلعیی محاط در یک دایره، در نقطه‌های P و Q متقاطع‌اند. اگر طول مماسهای مرسوم از P و Q بر دایره، به‌ترتیب، برابر با a و b باشد، $|PQ|$ را پیدا کنید.

۲۷۲ ـ یک چهارضلعی در دایره‌ای به‌شعاع R محاط شده است. فرض کنید، P، Q و M، به‌ترتیب، معرف نقطه‌های برخورد امتداد ضلعهای رو به‌رو و قطرهای این چهارضلعی باشند. اگر فاصلهٔ P، Q و M از مرکز دایره، به‌ترتیب، a، b و c باشد، طول ضلعهای مثلث PQM را پیدا کنید.

۲۷۳ ـ چهارضلعی $ABCD$ بر دایره‌ای به‌شعاع r محیط شده است. نقطهٔ تماس دایره با ضلع AB، آن را به‌قطعه‌هایی با طولهای a و b و نقطهٔ تماس دایره با ضلع AD، آن را به‌قطعه‌هایی با طولهای a و c تقسیم می‌کند. دامنهٔ تغییرات r چیست؟

۲۷۴ ـ دایره‌ای به‌شعاع r، با دایره‌ای به‌شعاع R مماس درونی و A نقطهٔ تماس است. خط راستی عمود بر خط‌المرکزین دایره‌ها، یکی از دایره‌ها را در B و دیگری را در C قطع می‌کند. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۷۵ ـ دو دایره به‌شعاعهای R و r یکدیگر را قطع می‌کنند، A یکی از نقطه‌های برخورد و BC یک مماس مشترک است (B و C نقطه‌های تماس‌اند). شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۷۶ ـ در چهارضلعی $ABCD$: $|AB|=a$ و $|AD|=b$؛ ضلعهای BC، CD و AD بر دایره‌ای که مرکزش وسط AB است، مماس‌اند. $|BC|$ را پیدا کنید.

۲۷۷ ـ در چهارضلعی $ABCD$: $|AB|=a$، $|AD|=b$ $(a>b)$. اگر BC، CD و AD بر دایره‌ای که مرکزش روی AB قرار دارد، مماس باشند، $|BC|$ را پیدا کنید.

* * *

۲۷۸ ـ در چهارضلعی محدب $ABCD$، $|AB|=|AD|$. در درون مثلث ABC، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌شود که $\angle MBA=\angle ADC$ و $\angle MCA=\angle ACD$. اگر $\angle BAC=\alpha$، $\angle ADC-\angle ACD=\varphi$ و $|AM|<|AB|$، $\angle MAC$ را پیدا کنید.

۲۷۹ ـ دو دایرهٔ متقاطع در یک زاویه محاط شده‌اند. A رأس زاویه، B یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌ها و C وسط وتری است که دو انتهایش نقطه‌های تماس دایرهٔ اول با ضلعهای زاویه است. اگر وتر مشترک دو دایره، از مرکز دایرهٔ دوم، به‌زاویهٔ α دیده شود، اندازهٔ زاویهٔ ABC را پیدا کنید.

۲۸۰ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $|AC|=|BC|$، BD نیمساز و $BDEF$ مستطیل

است. اگر $\angle BAE = 120^\circ$، $\angle BAF$ را پیدا کنید.

۲۸۱ ـ دایره‌ای به‌مرکز O، بر مثلث ABC محیط شده است. مماس بر دایره در نقطهٔ C، خطی را که زاویهٔ B را نصف می‌کند، در نقطهٔ K قطع می‌کند. زاویهٔ BKC، نصف تفاضل سه برابر زاویهٔ A و زاویهٔ C از مثلث ABC است. مجموع طول ضلعهای AC و AB، برابر با $2+\sqrt{3}$ و مجموع فاصله‌های نقطهٔ O تا ضلعهای AC و AB، برابر با ۲ است. شعاع دایره را پیدا کنید.

۲۸۲ ـ نقطه‌های قرینهٔ رأسهای مثلثی نسبت به‌ضلعهای رو به‌رو به‌آنها، رأسهای مثلثی به‌ضلعهای $\sqrt{8}$، $\sqrt{8}$ و $\sqrt{14}$ هستند. طول ضلعهای مثلث اصلی را، اگر متمایز باشند، تعیین کنید.

۲۸۳ ـ در مثلث ABC، زاویهٔ بین میانه و ارتفاعی که از رأس A خارج می‌شوند، برابر با α و زاویهٔ بین میانه و ارتفاعی که از رأس B خارج می‌شوند، برابر با β است. زاویهٔ بین میانه و ارتفاعی را که از رأس C خارج می‌شوند، پیدا کنید.

۲۸۴ ـ شعاع دایرهٔ محیط بر مثلثی، برابر با R است. فاصلهٔ مرکز این دایره تا نقطهٔ میانه‌ای مثلث، برابر با d است. حاصلضرب مساحتهای مثلث مفروض و مثلث تشکیل شده با خطهایی را که از رأسهای مثلث مفروض می‌گذرند و بر میانه‌هایی که از این رأسها خارج می‌شوند، عمودند، پیدا کنید.

۲۸۵ ـ نقطه‌های A_1، A_3 و A_5 بر یک خط راست و نقطه‌های A_2، A_4 و A_6 بر خط راست دیگری که اولی را قطع می‌کند، واقع‌اند. اگر بدانیم که ضلعهای شش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ برابرند (ممکن است یکدیگر را قطع کنند)، اندازهٔ زاویهٔ بین این خطها را پیدا کنید.

۲۸۶ ـ دو دایره به‌مرکزهای O_1 و O_2، بر دایره‌ای به‌شعاع R و مرکز O، مماس درونی‌اند. می‌دانیم که $|O_1O_2| = a$. خط راستی که بر دو دایرهٔ اول مماس است و پاره‌خط O_1O_2 را قطع می‌کند، مماسهای مشترک خارجی آنها را در M و N، و دایرهٔ بزرگتر را در A و B قطع می‌کند. نسبت $|AB| : |MN|$ را پیدا کنید، هرگاه (الف) پاره‌خط O_1O_2 شامل O باشد؛ (ب) دایره‌های به‌مرکزهای O_1 و O_2 بر یکدیگر مماس باشند.

۲۸۷ ـ دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بر ضلع AC در نقطهٔ M و بر ضلع BC در نقطهٔ N مماس است؛ نیمساز زاویهٔ A، خط MN را در K، و نیمساز زاویهٔ B، خط MN را در L قطع می‌کند. ثابت کنید که پاره‌خطهای MK، NL و KL می‌توانند مثلثی تشکیل دهند. اگر مساحت مثلث ABC، برابر S و زاویهٔ C برابر با α باشد، مساحت این مثلث را پیدا کنید.

۲۸۸ ـ روی ضلعهای AB و BCی مربعی، نقطه‌های M و N طوری اختیار می‌شوند که $|AB| = |BN| + |BM|$. ثابت کنید که خطهای DM و DN، قطر AC را به‌سه پاره‌خط که می‌توانند مثلثی تشکیل دهند، تقسیم می‌کنند و یکی از زاویه‌های این مثلث برابر با 60° است.

۲۸۹ ـ مثلث متساوی‌الساقین ABC داده شده است، $|AB| = |BC|$ و AD نیمساز آن است. عمود وارد بر AD در D، امتداد ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند؛ پای عمودهای وارد از B و D بر AC، به‌ترتیب، نقطه‌های M و N هستند. اگر $|AE| = a$، $|MN|$ را پیدا کنید.

۲۹۰ ـ از نقطهٔ A، دو نیمخط، تحت زاویهٔ α، خارج شده‌اند. دو نقطهٔ B و B_1 بر یک نیمخط و دو نقطهٔ C و C_1 بر دیگری اختیار می‌شوند. اگر $|AB| - |AC| = |AB_1| - |AC_1| = a$، طول وتر مشترک دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و AB_1C_1 را پیدا کنید.

۲۹۱ ـ فرض کنید O مرکز یک دایره، C نقطه‌ای روی این دایره و M وسط OC باشد. نقطه‌های A و B، بر دایره، در یک طرف خط OC، طوری قرار دارند که $\angle AMO = \angle BMC$. اگر $|BM| - |AM| = a$، $|AB|$ را پیدا کنید.

۲۹۲ ـ فرض کنید A، B و C سه نقطه واقع بر یک خط راست باشند. در یک طرف این خط، سه نیمدایره به‌قطرهای AB، BC و AC رسم می‌شوند. مرکز دایره‌ای که بر این سه نیمدایره مماس است، از خط AC، به‌فاصله d قرار دارد. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۲۹۳ ـ وتر AB در دایره‌ای به‌شعاع R رسم شده است. فرض کنید M معرف نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد. پاره‌خط MN $(|MN| = R)$ روی نیمخط MA، و روی نیمخط MB، پاره‌خط MK با طولی برابر با فاصلهٔ M تا محل برخورد ارتفاعهای مثلث MAB، جدا می‌شود. اگر اندازهٔ کمان کوچکتر رو به‌رو به AB، برابر با 2α باشد، $|NK|$ را پیدا کنید.

۲۹۴ ـ ارتفاع وارد از زاویهٔ قائمهٔ مثلثی قائم‌الزاویه بر وتر آن، مثلث را به‌دو مثلث که در هرکدام دایره‌ای محاط شده، تقسیم می‌کند. اگر طول ارتفاع مثلث اصلی h باشد، اندازهٔ زاویه‌ها و مساحت مثلثی را پیدا کنید که از ساقهای مثلث اصلی و خطی که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد، تشکیل شده است.

۲۹۵ ـ طول ارتفاع مرسوم بر وتر مثلثی قائم‌الزاویه، برابر با h است. ثابت کنید که رأسهای زاویه‌های حادهٔ مثلث و تصویرهای پای این ارتفاع بر ساقها، همگی بر یک دایره واقع‌اند. طول وتری را که این دایره روی خط شامل ارتفاع جدا می‌کند و طول قطعه‌هایی از وتر دایره را که وتر مثلث جدا می‌کند، تعیین کنید.

۲۹۶ ـ دایره‌ای به‌شعاع R، بر خط l در نقطهٔ A مماس است و AB قطری از این دایره و BC وتری دلخواه است. فرض کنید D معرف پای عمود فرود آمده از C بر AB باشد. نقطهٔ E بر امتداد CD، از طرف نقطهٔ D، قرار دارد و $|ED| = |BC|$. مماسهایی بر دایره که از E می‌گذرند، خط l را در نقطه‌های K و N قطع می‌کنند. $|KN|$ را پیدا کنید.

۲۹۷ ـ در چهارضلعی محدب $ABCD$: $|AB| = a$، $|AD| = b$، $|BC| = p-a$ و $|DC| = p-b$. فرض کنید O محل برخورد قطرها باشد. اندازهٔ زاویهٔ BAC را با α نشان می‌دهیم. وقتی که $\alpha \to 0$، $|OA|$ به‌چه میل می‌کند؟

بخش ۲

مسأله‌ها و قضیه‌های برگزیده از هندسهٔ مسطحه

قضیهٔ کارنو

۱ـ نقطه‌های A و B مفروض‌اند. ثابت کنید که مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M، به‌طوری که $|AM|^۲-|MB|^۲=k$ (که در آن، k عددی مفروض است)، خط راستی عمود بر AB است.

۲ـ فرض کنید فاصلهٔ نقطهٔ M تا رأسهای A، B و C از مثلث ABC، به‌ترتیب، a، b و c باشد. ثابت کنید که عدد $d\neq ۰$ و نقطه‌ای بر صفحه وجود ندارد که فاصله‌هایش تا رأسهای مثلث، به‌همان ترتیب، با عددهای $\sqrt{a^۲+d}$، $\sqrt{b^۲+d}$ و $\sqrt{c^۲+d}$ قابل بیان باشد.

۳ـ ثابت کنید، برای اینکه عمودهای وارد از نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ بر ضلعهای BC، CA و ABی مثلث ABC، در یک نقطه متقاطع باشند، لازم و کافی است که

$$|A_۱B|^۲-|BC_۱|^۲+|C_۱A|^۲-|AB_۱|^۲+|B_۱C|^۲-|CA_۱|^۲=۰$$ (قضیهٔ کارنو)

۴ـ ثابت کنید که اگر عمودهای وارد از نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$، به‌ترتیب، بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC، در یک نقطه متقاطع باشند، آن‌گاه عمودهای وارد از نقطه‌های A، B و C بر خطهای $B_۱C_۱$، $C_۱A_۱$ و $A_۱B_۱$ هم، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۵ـ چهارضلعی $ABCD$ داده شده است. فرض کنید $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ معرف نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای BCD، ACD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A، B و C، به‌ترتیب، بر خطهای $B_۱C_۱$، $C_۱A_۱$ و $A_۱B_۱$، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۶ـ نقطه‌های A و B مفروض‌اند. ثابت کنید که مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M، به‌طوری که $k|AM|^۲+l|BM|^۲=d$ (k، l و d عددهایی مفروض‌اند و $k+l\neq ۰$)، یا یک دایره با

مرکزی روی خط AB، یا یک نقطه و یا مجموعه‌ای تهی است.

۷ـ فرض کنید A_1، A_2، . . . ، A_n نقطه‌هایی ثابت و k_1، k_2، . . . ، k_n عددهایی مفروض باشند. در این صورت، مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M، به‌طوری که مجموع $k_1|A_1M|^2+k_2|A_2M|^2+\cdots+k_n|A_nM|^2$ ثابت باشد، عبارت است از: (الف) یک دایره، یک نقطه و یا مجموعه‌ای تهی، اگر $k_1+k_2+\cdots+k_n \neq 0$؛ (ب) یک خط راست، مجموعه‌ای تهی و یا تمام صفحه، اگر $k_1+k_2+\cdots+k_n = 0$.

۸ـ دایره‌ای و نقطهٔ A در بیرون دایره داده شده‌اند. فرض کنید دایره‌ای که از A می‌گذرد، بر دایرهٔ مفروض در نقطهٔ دلخواه B مماس باشد و مماسهایی که بر دایرهٔ دوم از نقطه‌های A و B رسم می‌شوند، در نقطهٔ M متقاطع باشند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید.

۹ـ نقطه‌های A و B مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید، به طوری که $|AM|:|MB| = k \neq 1$.

۱۰ـ نقطه‌های A، B و C بر یک خط راست واقع‌اند (B بین A و C است). دایره‌ای دلخواه با مرکز B اختیار می‌کنیم و نقطهٔ برخورد مماسهای مرسوم بر دایره از A و C را با M نشان می‌دهیم. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را بیابید، به‌طوری که نقطه‌های تماس خطهای راست AM و CM با دایره، به‌بازه‌های باز AM و CM متعلق باشند.

۱۱ـ دو دایره داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را بیابید، به‌طوری که نسبت طول مماسهای مرسوم از M بر دایره‌های مفروض، برابر با مقدار ثابت k باشد.

۱۲ـ فرض کنید خط راستی، یک دایره را در نقطه‌های A و B، و دایرهٔ دیگری را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد مماسهای مرسوم بر دایرهٔ اول در نقطه‌های A و B، و مماسهای مرسوم بر دایرهٔ دوم در نقطه‌های C و D (منظور، نقطه‌های برخورد مماسهای دایره‌های متمایز است)، بر دایره‌ای واقع‌اند که مرکزش روی خط راستی که از مرکز دایره‌های مفروض می‌گذرد، قرار دارد.

۱۳ـ سه دایره که هر یک بر یک ضلع مثلثی و بر امتداد دو ضلع دیگر آن مماس است، اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که عمودهای مرسوم بر ضلعهای مثلث در نقطه‌های تماس با این دایره‌ها، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۱۴ـ مثلث ABC داده شده است. کلیهٔ زوج نقطه‌های ممکن مانند M_1 و M_2 را در نظر می‌گیریم، به‌طوری که $|AM_1|:|BM_1|:|CM_1| = |AM_2|:|BM_2|:|CM_2|$. ثابت کنید که خطهای M_1M_2 از نقطه‌ای ثابت در صفحه می‌گذرند.

۱۵ـ فاصلهٔ نقطهٔ M تا رأسهای A، B و C از مثلثی، به‌ترتیب، برابر با ۱، ۲ و ۳ و فاصلهٔ نقطهٔ M_1 تا همان رأسها، به‌ترتیب، برابر با ۳، $\sqrt{15}$ و ۵ است. ثابت کنید که خط راست MM_1 از مرکز دایرهٔ مُحیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۱۶ـ فرض کنید A_1، B_1 و C_1 معرف پای عمودهای وارد از رأسهای A، B و Cی مثلث

ABC بر خط l باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، بر BC، CA و AB، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۱۷ ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطهٔ دلخواه D مفروض‌اند. فرض کنید A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، معرف مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای BCD، CAD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از رأسهای A، B و C، به‌ترتیب، بر B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۱۸ ـ سه دایرهٔ دو به‌دو متقاطع مفروض‌اند. ثابت کنید که سه وتر مشترک این دایره‌ها از یک نقطه می‌گذرند.

۱۹ ـ نقطه‌های M و N، به‌ترتیب، روی خطهای AB و AC اختیار شده‌اند. ثابت کنید وتر مشترک دو دایره به قطرهای CM و BN، از محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد.

۲۰ ـ یک دایره و نقطهٔ N در صفحه‌ای داده شده‌اند. فرض کنید AB وتری دلخواه از دایره باشد. فرض کنید M معرف نقطهٔ برخورد خط AB و مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث ABN در نقطهٔ N، باشد. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید.

۲۱ ـ نقطهٔ A در درون دایره‌ای اختیار شده است. مکان هندسی نقطه‌های برخورد مماسهای بر دایره در دو انتهای کلیهٔ وترهای ممکن را که از نقطهٔ A می‌گذرند، پیدا کنید.

۲۲ ـ عددهای α، β و γ و k مفروض‌اند. فرض کنید x، y و z معرف فاصله‌های نقطه‌ای مانند M در درون یک مثلث، تا ضلعهای آن باشند. ثابت کنید که مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M به‌طوری که $\alpha x+\beta y+\gamma z=k$، مجموعه‌ای تهی، یک پاره‌خط، یا بر مجموعهٔ کلیهٔ نقطه‌های مثلث منطبق است.

۲۳ ـ مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M، واقع در درون مثلثی مفروض، را طوری بیابید که فاصله‌های M تا ضلعهای مثلث مفروض، ضلعهای مثلثی معلوم به‌حساب آیند.

۲۴ ـ فرض کنید A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، وسط ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند. نقطه‌های A_2، B_2 و C_2، به‌ترتیب، بر عمودهای وارد از نقطه‌ای مانند M بر ضلعهای BC، CA و AB، اختیار می‌شوند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، بر خطهای B_2C_2، C_2A_2 و A_2B_2، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲۵ ـ خط راست l و سه خط l_1، l_2 و l_3، عمود بر l، داده شده‌اند. فرض کنید A، B و C معرف سه نقطهٔ ثابت روی خط l باشند، A_1 نقطه‌ای دلخواه روی l_1، B_1 نقطه‌ای دلخواه بر l_2 و C_1 نقطه‌ای دلخواه روی l_3 است. ثابت کنید که اگر برای ترتیبی معلوم از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، عمودهای وارد از A، B و C، به‌ترتیب، بر خطهای B_1C_1، C_1A_1، A_1B_1، در یک نقطه متقاطع باشند، آن وقت این عمودها، با هر ترتیب دیگری از A_1، B_1 و C_1 نیز، در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

۲۶ ـ فرض کنید AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث ABC، و A_2، B_2 و C_2 تصویرهای A،

B و C، به‌ترتیب، روی B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A_2، B_2 و C_2، به‌ترتیب، بر BC، CA و AB، در یک نقطه متقاطع‌اند.

قضیه‌های سوا* و منلائوس**

مسأله‌های آفین

۲۷ ـ ثابت کنید که مساحت مثلثی که ضلعهایش با میانه‌های مثلثی مفروض برابرند، به‌اندازهٔ $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث اخیر است.

۲۸ ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است. خط راستی موازی با BC، AB و CD را به‌ترتیب، در نقطه‌های E و F، و خط راستی موازی با AB، BC و DA را، به‌ترتیب، در نقطه‌های G و H قطع می‌کند. ثابت کنید که خطهای EH، GF و BD، یا در یک نقطه متقاطع‌اند و یا موازی هستند.

۲۹ ـ چهار نقطهٔ ثابت روی خط راست l داده شده‌اند: A، B، C و D. دو خط موازی، به‌دلخواه از نقطه‌های A و B، و دو خط موازی دلخواه دیگر، از نقطه‌های C و D، رسم می‌شود. خطهای مرسوم، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که قطرهای این متوازی‌الاضلاع، l را در دو نقطهٔ ثابت قطع می‌کنند.

۳۰ ـ چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. فرض کنید O نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD، M نقطه‌ای بر AC به‌طوری که $|AM| = |OC|$ و N نقطه‌ای بر BD باشد، به‌طوری که $|BN| = |OD|$، و K و L وسطهای AC و BD باشند. ثابت کنید که خطهای ML، NK و خطی که نقطه‌های میانه‌ای مثلثهای ABC و ADC را به‌هم وصل می‌کند، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۳۱ ـ نقطه‌های A_1 و A_2، بر ضلع BC از مثلث ABC، نسبت به‌وسط BC، قرینه اختیار می‌شوند. به‌روش مشابه، بر ضلع AC، نقطه‌های B_1 و B_2، و بر ضلع AB، نقطه‌های C_1 و C_2 اختیار می‌شوند. ثابت کنید که مساحتهای مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ برابرند و مرکزهای ثقل مثلثهای $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$ و ABC همخط‌اند.

۳۲ ـ از M، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC، خط راستی رسم می‌شود که ضلعهای AB و AC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های K و L، و امتداد ضلع BC را در نقطهٔ P قطع می‌کند (C بین P و B قرار می‌گیرد). ثابت کنید که $\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$.

---

* سوا، جیووانی (۱۶۴۷-۱۷۳۴). ریاضی‌دان ایتالیایی که اثباتهایی استاتیک و هندسی برای همرسی خطهای راستی که از رأسهای مثلث می‌گذرند، ارائه داد.

** منلائوس اسکندرانی (قرن اول بعد از میلاد مسیح). هندسه‌دانی که کتابهای متعددی دربارهٔ مثلثها و دایره‌های مسطحه و کروی نوشت.

۳۳ـ از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$، خط راستی رسم شده که AB را در نقطهٔ M، و CD را در نقطهٔ N قطع می‌کند. از نقطه‌های M و N، خطهایی، به‌ترتیب، موازی با CD و AB رسم می‌شوند که AC و BD را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید که BE با CF موازی است.

۳۴ـ چهارضلعی $ABCD$ داده شده است. بر خطهای AC و BD، به‌ترتیب، نقطه‌های K و M طوری اختیار می‌شوند که $AD \parallel BK$ و $BC \parallel AM$. ثابت کنید که $CD \parallel KM$.

۳۵ـ فرض کنید E نقطه‌ای دلخواه بر ضلع AC از مثلث ABC باشد. از رأس Bی مثلث، خط دلخواه l رسم می‌شود. خطی که از نقطهٔ E به‌موازات BC می‌گذرد، خط l را در نقطهٔ N، و خطی که از E به‌موازات AB می‌گذرد، آن را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت‌کنیدکه AN با CM موازی است.

* * *

۳۶ـ هر یک از ضلعهای چهارضلعی محدبی، به $2n+1$ بخش برابر تقسیم شده است. نقطه‌های تقسیم روی ضلعهای متقابل، متناظراً به‌هم وصل می‌شوند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی مرکزی، به اندازهٔ $\frac{1}{(2n+1)^2}$ مساحت تمام چهارضلعی است.

۳۷ـ خط راستی که از وسط قطرهای AC و BC از چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرد، ضلعهای AB و DCی آن را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. ثابت کنید، $S_{DCM} = S_{ABN}$*.

۳۸ـ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، رأسهای A، B، C و D، به‌ترتیب، به‌وسط ضلعهای CD، AD، AB و BC وصل شده‌اند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعیی که با این پاره‌خطها تشکیل شده، $\frac{1}{5}$ مساحت متوازی الاضلاع است.

۳۹ـ ثابت کنید که مساحت هشت‌ضلعیی که با خطهایی تشکیل شده که رأسهای متوازی‌الاضلاعی را به‌وسط ضلعهای مقابل آنها وصل می‌کنند، $\frac{1}{6}$ مساحت این متوازی‌الاضلاع است.

۴۰ـ دو متوازی‌الاضلاع $ACDE$ و $BCFG$ روی ضلعهای AC و BC از مثلث ABC و در بیرون آن رسم شده‌اند. امتدادهای DE و FD در نقطهٔ H متقاطع‌اند. بر ضلع AB، متوازی‌الاضلاع $ABML$ که ضلعهایش: AL و BM موازی و برابر HC هستند، رسم می‌شود. ثابت کنید که مساحت متوازی‌الاضلاع $ABML$، برابر است با مجموع مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای ساخته شده بر AC و BC.

۴۱ـ دو خط موازی که قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه‌ای را قطع می‌کنند، از دو انتهای قاعدهٔ کوچکتر آن رسم شده‌اند. این خطها و قطرهای ذوزنقه، آن را به‌هفت مثلث و یک پنج‌ضلعی تقسیم می‌کنند.

---

* در اینجا و جاهای دیگر، چنین نمادی، نشانهٔ مساحت شکلی است که در زیر آن نوشته شده است.

ثابت کنید که مجموع مساحتهای مثلثهای مجاور به‌ضلعهای جانبی و قاعدهٔ کوچکتر، برابر با مساحت پنج‌ضلعی است.

۴۲ - در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، نقطهٔ E بر خط AB و نقطهٔ F بر خط AD (B روی پاره‌خط AE و D روی AF) قرار دارد. K نقطهٔ برخورد خطهای ED و FB است. ثابت کنید که مساحتهای چهارضلعیهای $ABKD$ و $CEKF$ برابرند.

* * *

۴۳ - مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. فرض کنید A_1، B_1 و C_1، سه نقطه، به‌ترتیب، روی خطهای BC، CA و AB باشند. با نمادگذاری زیر

$$R=\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$$

$$R^*=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}$$

ثابت کنید که $R=R^*$.

۴۴ - برای اینکه خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به‌هم برسند (یا هر سه موازی باشند)، لازم و کافی است که $R=1$ (مسألهٔ قبل را ببینید) و از سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1، یکی یا هر سه، روی ضلعهای مثلث ABC، و نه بر امتدادهای آنها، قرار بگیرد (قضیهٔ سوا).

۴۵ - برای اینکه نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر یک خط راست واقع باشند، لازم و کافی است که $R=1$ (مسأله ۴۳، بخش ۲ را ببینید) و از سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1، یا دو نقطه بر ضلعهای مثلث ABC، و نه بر امتدادهای آنها، قرار گیرد، و یا هر سه بر امتدادهای ضلعهای مثلث ABC قرار گیرند (قضیهٔ منلائوس).

تبصره. به‌جای نسبت $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ و دو نسبت دیگر، می‌توان نسبتهای پاره‌خطهای جهت‌دار را در نظر گرفت که با $\frac{AC_1}{C_1B}$ نموده می‌شوند و مانند زیر تعریف می‌شوند: $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ و $\frac{AC_1}{C_1B}$ وقتی‌که بردارهای $\overrightarrow{AC_1}$ و $\overrightarrow{C_1B}$ در یک جهت باشند، مثبت، و اگر این بردارها در جهتهای مخالف هم باشند، منفی است. ($\frac{AC_1}{C_1B}$، تنها برای نقطه‌های واقع بر یک خط راست با معنی است.) به‌سادگی دیده می‌شود که نسبت $\frac{AC_1}{C_1B}$، مثبت است، اگر نقطهٔ C_1 روی پاره‌خط AB واقع باشد ومنفی است، اگر C_1 بیرون AB باشد. از این رو، به‌جای R، حاصلضرب نسبتهای پاره‌خطهای جهت‌دار را که با $\bar{R}$ نموده می‌شود، در نظر می‌گیریم. به‌علاوه، مفهوم زاویهٔ جهت‌دار

را در نظر می‌گیریم. برای مثال، منظورمان از $\measuredangle ACC_1$، زاویه‌ای است که به‌اندازهٔ آن باید CA را دور C، در جهت مخالف با گردش عقربه‌های ساعت، دوران دهیم تا نیمخط CA بر نیمخط CC_1 منطبق گردد. اکنون، به‌جای R^*، حاصلضرب نسبتهای سینوس زاویه‌های جهت‌دار، $\tilde{R}^*$، را در نظر می‌گیریم.

اکنون، مسأله‌های ۴۳، ۴۴ و ۴۵ این بخش را به‌روش زیر تنظیم می‌کنیم:

*۴۳ـ ثابت کنید که $\tilde{R} = \tilde{R}^*$.

*۴۴ـ برای اینکه خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به‌هم برسند (یا موازی باشند)، لازم و کافی است که $\tilde{R} = 1$ (قضیهٔ سوا).

*۴۵ـ برای اینکه نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 همخط باشند، لازم و کافی است که $\tilde{R} = -1$ (قضیهٔ منلائوس).

۴۶ـ ثابت کنید که اگر سه خط راست که از رأسهای مثلثی می‌گذرد، در یک نقطه به هم برسند، آن وقت خطهای قرینه آنها نسبت به‌نیمسازهای زاویه‌های متناظر از مثلث نیز، در یک نقطه متقاطع و یا موازی‌اند.

۴۷ـ فرض کنید O معرف نقطه‌ای دلخواه در یک صفحه باشد، و M و N پای عمودهای وارد از O بر نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A از مثلث ABC باشند؛ به‌همین نحو، P و Q برای زاویهٔ B، و R و T برای زاویهٔ C تعریف می‌شوند. ثابت کنید که خطهای MN، PQ و RT در یک نقطه متقاطع و یا موازی‌اند.

۴۸ـ فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد و A_0، B_0 و C_0 نقطه‌های تماس این دایره، به‌ترتیب، با ضلعهای BC، CA و AB باشند. روی نیمخطهای OA_0، OB_0 و OC_0، به‌ترتیب، نقطه‌های L، M و K به‌فاصله‌های برابر از O، اختیار می‌شوند. (الف) ثابت کنید که خطهای AL، BM و CK در یک نقطه به‌هم می‌رسند؛ (ب) فرض کنید A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، تصویرهای A، B و C روی خط دلخواه l که از O می‌گذرد، باشند. ثابت کنید که خطهای A_1L، B_1M و C_1K همرس‌اند (یعنی، در یک نقطهٔ مشترک متقاطع‌اند).

۴۹ـ برای اینکه قطرهای AD، BE و CF از شش‌ضلعی $ABCDEF$، که در دایره‌ای محاط شده است، در یک نقطه به‌هم برسند، لازم و کافی است که برابری

$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|$$

برقرار باشد.

۵۰ـ ثابت کنید که: (الف) نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث، امتداد ضلعهای متقابل آن را در سه نقطه که بر یک خط راست واقع‌اند، قطع می‌کنند؛ (ب) مماسهای مرسوم از رأسهای مثلث بر دایرهٔ محیطی آن، ضلعهای متقابل آن را در سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

۵۱ـ دایره‌ای، ضلع AB از مثلث ABC را در نقطه‌های C_1 و C_2، ضلع CA را در نقطه‌های B_1 و B_2 و ضلع BC را در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خطهای AA_1، BB_1 و

CC_1 در یک نقطه به‌هم برسند، خطهای AA_2، BB_2 و CC_2 هم، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۵۲ـ روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC، نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 اختیار شده‌اند. فرض کنید C_2 نقطهٔ برخورد خطهای AB و A_1B_1، A_2 نقطهٔ برخورد خطهای BC و B_1C_1، و A_3 نقطهٔ برخورد خطهای AC و A_1C_1 باشد. ثابت کنید که اگر خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به‌هم برسند، آن‌گاه نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر یک خط راست واقع‌اند.

۵۳ـ خط راستی، ضلعهای AB و BC و امتداد ضلع AC از مثلث ABC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D، E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که وسط پاره‌خطهای DC، AE و BF بر یک خط راست (خط گاوسی*) واقع‌اند.

۵۴ـ مثلث ABC داده شده است. نقطهٔ A_1 را روی خط BC به‌روش زیر تعریف می‌کنیم: A_1 وسط ضلع KL از پنج‌ضلعی منتظم $MKLNP$ است که رأسهای K و L آن بر BC و رأسهای M و N، به‌ترتیب، روی AB و AC قرار دارند. به‌همین نحو، روی ضلعهای AB و AC، نقطه‌های C_1 و B_1 تعریف می‌شوند. ثابت کنید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه متقاطع‌اند.

۵۵ـ سه دایرهٔ دو به‌دو نامتقاطع داده شده است. سه نقطهٔ برخورد مماسهای مشترک داخلی هر دو تا از آنها را با A_1، A_2 و A_3 و نقطه‌های برخورد مماسهای مشترک خارجی نظیر را با B_1، B_2 و B_3 نشان می‌دهیم. ثابت کنید که این نقطه‌ها، بر چهار خط، سه تا روی هر یک از آنها، قرار می‌گیرند (A_1، A_2، B_3؛ A_1، B_2، A_3؛ B_1، A_2، A_3؛ B_1، B_2 و B_3).

۵۶ـ ثابت کنید که اگر خطهای راستی که از رأسهای A، B و Cی مثلث ABC به‌موازات خطهای B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 می‌گذرند، در یک نقطه به‌هم برسند، آن‌گاه خطهای راستی که از A_1، B_1 و C_1 به‌موازات خطهای BC، CA و AB می‌گذرند هم، در یک متقاطع‌اند (یا موازی‌اند).

۵۷ـ مثلث ABC داده شده و M نقطه‌ای دلخواه در صفحهٔ آن است. نیمسازهای دو زاویه‌ای که با خطهای AM و BM تشکیل شده‌اند، خط AB را در نقطه‌های C_1 و C_2 قطع می‌کنند (C_1 روی پاره‌خط AB قرار می‌گیرد). به‌همین ترتیب، روی BC و CA، به‌ترتیب، نقطه‌های A_1، A_2، و B_1، B_2 تعیین می‌شوند. ثابت کنید که نقطه‌های A_1، A_2، B_1، B_2، C_1 و C_2 بر چهار خط، سه تا روی هر یک از آنها، قرار می‌گیرند.

۵۸ـ نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، برضلعهای BC، CA و AB ازمثلث ABC ونقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر ضلعهای B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ اختیار می‌شوند. خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 دریک نقطه به‌هم می‌رسند وخطهای A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 هم، دریک نقطه متقاطع‌اند. ثابت کنید که خطهای AA_2، BB_2 و CC_2 یا همرس‌اند و یا موازی.

---

* گاوس، کارل فریدریش (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵)، ریاضی‌دان آلمانی.

۵۹ـ در چهارضلعی $ABCD$، P نقطهٔ برخورد BC و AD، Q نقطهٔ برخورد CA و BD، و R نقطهٔ برخورد AB و CD است. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد BC و QR، CA و RP، و AB و PQ همخط‌اند.

۶۰ـ زاویه‌ای با رأس O مفروض است. نقطه‌های A_1، A_2، A_3 و A_4 بر یک ضلع زاویه و نقطه‌های B_1، B_2، B_3 و B_4 بر ضلع دیگر آن اختیار می‌شوند. خطهای A_1B_1 و A_2B_2 در نقطهٔ N و خطهای A_3B_3 و A_4B_4 در نقطهٔ M متقاطع‌اند. ثابت کنید، برای اینکه نقطه‌های O، N و M همخط باشند، لازم و کافی است که برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{OB_1}{OB_3}\cdot\frac{OB_2}{OB_4}\cdot\frac{B_3B_4}{B_1B_2}=\frac{OA_1}{OA_3}\cdot\frac{OA_2}{OA_4}\cdot\frac{A_3A_4}{A_1A_2}$$

(تبصرهٔ مسأله‌های ۴۳ـ۴۵ را ببینید.)

۶۱ـ مثلث ABC داده شده است. زوج نقطه‌های A_1 و A_2، B_1 و B_2، و C_1 و C_2، به‌ترتیب، روی ضلعهای BC، CA و AB طوری اختیار می‌شوند که AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به‌هم می‌رسند و AA_2، BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه متقاطع‌اند. ثابت کنید که: (الف) نقطه‌های برخورد خطهای A_1B_1 و AB، B_1C_1 و BC، و C_1A_1 و CA، بر یک خط راست مانند l_1 واقع‌اند. به‌همین نحو، نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 خط راستی مانند l_2 مشخص می‌کنند؛ (ب) نقطهٔ A، محل برخورد خطهای l_1 و l_2، و نقطه برخورد خطهای B_1C_1 و B_2C_2، بر یک خط راست قرار دارند؛ (ج) نقطه‌های برخورد خطهای BC و B_2C_1، CA و C_2A_2، و AB و A_1B_1، همخط‌اند.

۶۲ـ خط راست دلخواهی، خطهای AB، BC و CA را، به‌ترتیب، در نقطه‌های K، M و L، و خطهای A_1B_1، B_1C_1 و C_1A_1 را در نقطه‌های K_1، M_1 و L_1 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خطهای A_1M، B_1L و C_1K در یک نقطه به‌هم برسند، خطهای AM_1، BL_1 و CK_1 نیز همرس‌اند.

۶۳ـ مثلث ABC و نقطهٔ D داده شده است. نقطه‌های E، F و G، به‌ترتیب، روی خطهای AD، BD و CD واقع‌اند. K نقطهٔ برخورد AF و BE، L نقطهٔ برخورد BG و CF، و M نقطهٔ برخورد CE و AG است، P، Q و R نقطه‌های برخورد DK و AB، DL و BC، و DM و AC هستند. ثابت کنید که هر شش خط AL، EQ، BM، FR، CK و GP در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

۶۴ـ نقطه‌های A و A_1، نسبت به‌خط l قرینه‌اند، همین‌طور، زوجهای B و B_1، و C و C_1، N نقطه‌ای دلخواه روی l است. ثابت کنید که خطهای AN، BN و CN، به‌ترتیب، خطهای B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 را در سه نقطه، واقع بر یک خط راست، قطع می‌کنند.

۶۵ـ فرض کنید A_1، A_3 و A_5 سه نقطه واقع بر یک خط راست و A_2، A_4 و A_6 واقع بر خط راست دیگری باشند. ثابت کنید که سه‌نقطه‌ای که زوج خطهای A_1A_2 و A_4A_5، A_2A_3 و

A_5A_6، و A_3A_4 و A_1A_6، در آنها، یکدیگر را قطع می‌کند، بر یک خط راست واقع‌اند.

مکان هندسی نقطه‌ها

۶۶ـ از یک نقطهٔ برخورد دو دایره، خط راستی که دایره‌ها را برای دومین بار در A و B قطع می‌کند، رسم می‌شود، مکان هندسی وسط AB را پیدا کنید.

۶۷ـ نقطهٔ A و خط راست l مفروض‌اند، B نقطه‌ای دلخواه روی l است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را طوری بیابید که ABM مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد.

۶۸ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطه‌های D و E، به‌ترتیب، بر امتداد ضلعهای AB و ACی مثلث، از طرف نقطه‌های B و C، طوری اختیار می‌شوند که $|BD|.|CE| = |BC|^2$. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای DC و BE را پیدا کنید.

۶۹ـ سه نقطهٔ A، B و C بر یک خط راست، و نقطهٔ دلخواه D در صفحه و غیر واقع بر این خط مفروض‌اند. خطهای راستی که از C عمود بر AD و BD رسم می‌شوند، خطهای BD و AD را در نقطه‌های P و Q قطع می‌کنند. مکان هندسی M، پای عمود وارد از C بر PQ، را بیابید و تمام نقطه‌هایی مانند D را که برای آنها، M نقطه‌ای ثابت است، پیدا کنید.

۷۰ـ نقطهٔ K روی ضلع AC از مثلث ABC، و نقطهٔ P بر میانهٔ BDی آن، طوری اختیار شده که مساحت مثلث APK با مساحت مثلث BPC برابر است. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای AP و BK را بیابید.

۷۱ـ دو نیمخط که زاویهٔ مفروض α را تشکیل می‌دهند، از نقطهٔ O، در درون زاویه‌ای مفروض، می‌گذرند. فرض کنید یک نیمخط، یک ضلع زاویه را در نقطهٔ A، و نیمخط دیگر، ضلع دیگر زاویه را در نقطهٔ B قطع کند. مکان هندسی پای عمود وارد از O بر خط AB را پیدا کنید.

۷۲ـ دو قطر دو به‌دو بر هم عمود AC و BD در دایره‌ای رسم شده‌اند. فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد، و PA، BD را در نقطهٔ E قطع کند. خط راستی که از E به‌موازات AC می‌گذرد، خط PB را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را بیابید.

۷۳ـ زاویه‌ای با رأس A و یک نقطهٔ B داده شده‌اند. دایره‌ای دلخواه، که از نقطه‌های A و B می‌گذرد، ضلعهای زاویه را در نقطه‌های C و D (متمایز از A) قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ACD را پیدا کنید.

۷۴ـ یک رأس در مستطیلی، بر نقطه‌ای مفروض واقع است، و دو رأس دیگر آن، که به یک ضلع متعلق نیستند، بر دو خط راست عمود بر هم مفروض، قرار دارند. مکان هندسی رأس چهارم چنین مستطیلی را بیابید.

۷۵ـ فرض کنید A یکی از دو نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ مفروض باشد؛ از نقطهٔ برخورد دیگر، خط دلخواهی رسم می‌شود که دایرهٔ اول را در نقطهٔ B، و دایرهٔ دیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کند، هر دو

نقطه، از نقطه‌های مشترک این دایره‌ها متمایزند. مطلوب است مکان هندسی: (الف) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC؛ (ب) مرکز ثقل مثلث ABC؛ (ج) محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC.

۷۶ـ فرض کنید B و C دو نقطهٔ ثابت از دایره‌ای مفروض باشند و A نقطه‌ای متغیر از این دایره باشد. مکان هندسی پای عمود وارد از وسط AB بر AC را پیدا کنید.

۷۷ـ مکان هندسی نقطه‌های برخورد قطرهای مستطیلهایی را پیدا کنید که ضلعهای آنها (یا امتدادهای آنها) از چهار نقطهٔ مفروض در صفحه می‌گذرند.

۷۸ـ دو دایره که با هم در نقطهٔ A مماس درونی‌اند، داده شده است. مماسی بر دایرهٔ کوچکتر، دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۷۹ـ دو دایرهٔ متقاطع مفروض‌اند. مکان هندسی مرکزهای مستطیلهای با رأسهای واقع بر این دایره‌ها را بیابید.

۸۰ـ توپی کشسان که می‌توان از ابعادش چشم پوشی کرد، در درون یک میز بیلیارد دایره‌ای شکل، در نقطهٔ A، متمایز از مرکز آن، قرار دارد. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند A را تعیین کنید که از آنها، این توپ چنان هدف‌گیری شود که، پس از سه بار برخورد متوالی با کنارهٔ میز، با گذشتن از مرکز میز بیلیارد، به‌نقطهٔ A برسد.

۸۱ـ از نقطه‌ای به‌فاصلهٔ برابر از دو خط موازی مفروض، خط راستی رسم شده است که این خطها را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مکان هندسی رأس Pی مثلث متساوی‌الاضلاع MNP را بیابید.

۸۲ـ دو نقطهٔ A و B و خط راست l داده شده است. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی را پیدا کنید که از A و B می‌گذرند و خط l را قطع می‌کنند.

۸۳ـ دو نقطهٔ O و M داده شده است. پیدا کنید: (الف) مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه را که یک رأس مثلثی با مرکز دایرهٔ محیطی در نقطهٔ O و مرکز ثقل در نقطهٔ M، به حساب می‌آیند؛ (ب) مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه را که یک رأس مثلثی منفرجه با مرکز دایرهٔ محیطی درنقطهٔ O و مرکز ثقل در نقطهٔ M، به‌حساب می‌آیند.

۸۴ـ مثلث متساوی‌الاضلاعی در یک دایره محاط شده است. مکان هندسی نقطه‌های برخورد ارتفاعهای کلیهٔ مثلثهای محاطی ممکن در دایره را پیدا کنید، به‌شرطی که، دو ضلع از این مثلثها به موازات دو ضلع از مثلث مفروض باشند.

۸۵ـ مکان هندسی مرکزهای کلیهٔ مستطیلهای ممکن محیطی مثلثی مفروض را بیابید (مستطیل، محیطی خوانده می‌شود، اگر یکی از رأسهای مثلث بر یک رأس مستطیل منطبق باشد و دو رأس دیگرش بر دو ضلع از مستطیل که شامل این رأس نیستند، قرار گیرند).

۸۶ـ دو مربع که ضلعهایشان به‌طور متناظر موازی‌اند، داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را تعیین کنید، به‌طوری که برای هر نقطهٔ P از مربع اول، نقطه‌ای مانند Q از مربع دوم

وجود داشته باشد، به قسمی که مثلث MPQ متساوی‌الاضلاع باشد. فرض کنید طول ضلع مربع اول a و طول ضلع مربع دوم b باشد. به‌ازای چه رابطه‌ای بین a و b، مکان هندسی مطلوب، تهی نیست.

۸۷ـ در درون مثلثی مفروض، مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید که برای هر یک از آنها، و هر نقطهٔ N از محیط مثلث، نقطه‌ای مانند P در درون یا روی محیط مثلث وجود داشته باشد، به‌طوری که مساحت مثلث MNP، از $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث مفروض، کمتر نباشد.

۸۸ـ دو نقطهٔ A و I مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند B را پیدا کنید، به‌طوری که مثلث ABC با مرکز دایرهٔ محاطی I وجود داشته باشد و تمام زاویه‌هایش از α $(۶۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ)$ کمتر باشند.

۸۹ـ نقطه‌های A، B و C بر یک خط راست واقع‌اند (B بین A و C است). مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید، به‌طوری که $\cot \angle AMB+\cot \angle BMC=k$.

۹۰ـ دو نقطهٔ A و Q مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند B را طوری بیابید که مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC وجود داشته باشد و Q مرکز ثقل آن باشد.

۹۱ـ دو نقطهٔ A و H مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند B را پیدا کنید، به‌طوری که مثلث ABC وجود داشته باشد که H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن باشد و هر یک زاویه‌های آن از α $(\alpha<\frac{\pi}{۴})$ بیشتر باشد.

۹۲ـ دو نیمخط در صفحه‌ای داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه، به‌فاصله برابر از این نیمخطها را بیابید. (فاصلهٔ نقطه تا نیمخط، برابر است با فاصلهٔ این نقطه تا نزدیکترین نقطه از این نیمخط.)

۹۳ـ یک زاویه و دایره‌ای به‌مرکز O، محاط در این زاویه، داده شده است. خط دلخواهی بر دایره مماس است و ضلعهای زاویه را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MON را بیابید.

۹۴ـ دو دایره و دو نقطهٔ A و B (یکی روی هر دایره) با فاصله‌های برابر از وسط پاره‌خطی که مرکزهای آنها را به‌هم وصل می‌کند، داده شده است. مکان هندسی وسط پاره‌خط AB را بیابید.

۹۵ـ پاره‌خط AB مفروض است. نقطهٔ دلخواه M را بر AB اختیار می‌کنیم و دو مربع $AMCD$ و $MBEF$، واقع در یک طرف AB، را در نظر می‌گیریم. سپس، دایره‌هایی بر این مربعها محیط می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را با N (N مخالف M است) نشان می‌دهیم. ثابت کنید که (الف) AF و BC در N متقاطع‌اند؛ (ب) MN از نقطه‌ای ثابت در صفحه می‌گذرد. مکان هندسی وسط پاره‌خطی راکه مرکز مربعها را به‌هم وصل می‌کند، پیدا کنید.

۹۶ـ یک دایره و نقطهٔ A داده شده است. فرض کنید M معرف نقطه‌ای دلخواه بر روی دایره

باشد. مکان هندسی نقطهٔ برخورد عمود منصف پاره خط AM و مماس بر دایره را، که از نقطهٔ M می‌گذرد، پیدا کنید.

۹۷ـ دو دایره در نقطهٔ A بر هم مماس‌اند. خطی که از A می‌گذرد، برای دومین بار، این دایرها را در نقطه‌های B و C، و خط دیگری، به‌همین منوال، دایره‌ها را در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع می‌کند (B و B_1 بر یک دایره واقع‌اند). مکان هندسی نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C و ABC_1 را پیدا کنید.

۹۸ـ مکان هندسی رأس زاویه‌های قائمهٔ کلیهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را، که دو انتهای وترهایشان بر دو دایرهٔ مفروض واقع‌اند، پیدا کنید.

۹۹ـ ضلعهای مثلثی مفروض، قطرهای سه متوازی‌الاضلاع محسوب می‌شوند. ضلعهای متوازی‌الاضلاعها به‌موازات دو خط راست l و p هستند. ثابت کنید که سه قطر این متوازی‌الاضلاعها، متمایز از ضلعهای مثلث، در نقطه‌ای مانند M متقاطع‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید، به‌شرطی که، l و p دلخواه و دو به‌دو بر هم عمود باشند.

۱۰۰ـ فرض کنید B و C معرف دو نقطهٔ ثابت از دایره‌ای باشند و A نقطه‌ای دلخواه از این دایره باشد. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و M تصویر H روی نیمساز زاویهٔ BAC باشد. مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید.

۱۰۱ـ مثلث ABC مفروض است. فرض کنید D نقطه‌ای دلخواه بر خط BC باشد. خطهای راستی که از D به‌موازات AB و AC می‌گذرند، AC و AB را، به‌ترتیب، در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را که از نقطه‌های D، E و F می‌گذرند، پیدا کنید.

۱۰۲ـ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M، در درون مثلث، را طوری بیابید که $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \frac{\pi}{۲}$.

۱۰۳ـ نقطهٔ M در درون مثلثی طوری اختیار شده است که خط راست l وجود دارد که از M می‌گذرد و مثلث را به‌دو بخش چنان قسمت می‌کند که بر اثر نگاشتی متقارن نسبت به‌خط l یک قسمت به‌درون یا بر محیط دیگری فرستاده می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

مثلثها. مثلث و دایره

۱۰۴ـ از رأس Aی مثلث ABC، عمودهای AM و AN بر نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C فرود می‌آیند. ثابت کنید که طول پاره خط MN، برابر با نصف محیط مثلث ABC است.

۱۰۵ـ ارتفاع BD در مثلث ABC رسم شده، AN بر AB، و CM بر BC عمود است، $|AN| = |DC|$ و $|CM| = |AD|$. ثابت کنید که فاصله‌های M و N از رأس B، با هم برابرند.

۱۰۶ـ ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایره‌ای که با دایرهٔ محیطی مثلث مماس درونی و بر ساقهای آن مماس است، برابر با قطر دایرهٔ محاطی مثلث است.

۱۰۷ ـ ثابت کنید که اگر یکی از ضلعهای مثلثی بر خط ثابتی در صفحه قرار گیرد و محل برخورد ارتفاعهای آن بر نقطه‌ای ثابت منطبق باشد، آن وقت دایرهٔ محیطی این مثلث هم، از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.

۱۰۸ ـ مثلث ABC داده شده است. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 نقطه‌هایی از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و، به‌ترتیب، مقابل قطری رأسهای A، B و C باشند. از A_1، B_1 و C_1، خطهای راستی، به‌ترتیب، موازی با BC، CA و AB رسم می‌شوند. ثابت‌کنید، مثلثی که بااین خطها تشکیل شده، با مثلث ABC، به‌نسبت تجانس ۲ ومرکز محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، متجانس است.

۱۰۹ ـ ثابت کنید که تصویرهای پای یک ارتفاع مثلث روی ضلعهایی که این ارتفاع را در بردارند و روی دو ارتفاع دیگر، بر یک خط راست واقع‌اند.

۱۱۰ ـ در مثلث ABC، نقطهٔ D روی امتداد ضلع AB، از طرف نقطهٔ B، طوری اختیار می‌شود که $|BD| = |CB|$. به‌همین نحو، بر امتداد ضلع CB، از طرف B، نقطهٔ F طوری اختیار می‌شود که $|BF| = |AB|$. ثابت کنید که نقطه‌های A، C، D و F بر یک دایره که مرکزش روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد، واقع‌اند.

۱۱۱ ـ سه دایرهٔ برابر از نقطهٔ H می‌گذرند. ثابت کنید که H، محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که رأسهایش بر سه نقطهٔ دیگر برخود دو به‌دو دایره‌ها منطبق است.

۱۱۲ ـ فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیط بر یک مستطیل باشد. دو خط راست که از نقطهٔ P به‌موازات ضلعهای مستطیل می‌گذرند، ضلعهای مستطیل یا امتدادهای آنها را در نقطه‌های K، L، M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید که N محل برخورد ارتفاعهای مثلث KLM است. همچنین، ثابت کنید که پای ارتفاعهای مثلث KLM، متمایز از P، بر قطرهای مستطیل قرار دارند.

۱۱۳ ـ در مثلث ABC، نیمسازهای AD، BE و CF رسم شده‌اند. خط راست عمود بر AD که از وسط AD می‌گذرد، AC را در نقطهٔ P قطع می‌کند. خط راست عمود بر BE که از وسط BE می‌گذرد، AB را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. بالاخره، خط راست عمود بر CF که از وسط CF می‌گذرد، CB را درنقطهٔ R قطع می‌کند. ثابت‌کنیدکه مساحتهای مثلثهای DEF و PQR برابرند.

۱۱۴ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($|AB| = |BC|$)، D وسط AC، E تصویر D روی BC و F وسط DE است. ثابت کنید، خطهای BF و AE دو به‌دو بر هم عمودند.

۱۱۵ ـ دایره‌ای که در مثلث ABC محاط شده، در نقطه‌های C_1 و B_1 بر ضلعهای AB و ACی آن مماس است. دایرهٔ مماس برضلع BC و امتدادهای AB و AC، در نقطه‌های C_2 و B_2 بر خطهای AB و AC مماس است. فرض‌کنید D وسط ضلع BC باشد. خط AD، خطهای B_1C_1 و B_2C_2 را در نقطه‌های E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که $BECF$ متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۶ ـ نیمساز ADی زاویهٔ داخلی A در مثلث ABC، رسم شده است. در نقطهٔ A، مماس l را بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط راست مرسوم از D به‌موازات l، بر

دایرهٔ محاطی مثلث ABC مماس است.

۱۱۷ ـ خط راستی در مثلث ABC رسم می‌شود تا ضلعهای AC و BC را در نقطه‌های M و N طوری قطع کند که $|MN| = |AM| + |BN|$. ثابت کنید که تمام چنین خطهایی بر یک دایره مماس‌اند.

۱۱۸ ـ ثابت کنید که نقطه‌های قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به‌وسط میانه‌های آن، روی ارتفاعهای مثلث قرار دارند.

۱۱۹ ـ ثابت کنید که اگر طول یک ارتفاع مثلثی، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ محاطی آن باشد، آن وقت خط راست واصل پای عمودهای وارد از پای این ارتفاع بر ضلعهایی که آن را در بردارند، از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد.

۱۲۰ ـ فرض کنید ABC مثلثی قائم‌الزاویه باشد $(\angle C = ۹۰^\circ)$. CD ارتفاع آن است و K نقطه‌ای در صفحه، به‌طوری که $|AK| = |AC|$. ثابت کنید، قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABK که از رأس A می‌گذرد، بر خط DK عمود است.

۱۲۱ ـ در مثلث ABC، خطی از رأس A به‌موازات BC رسم شده است؛ نقطهٔ D بر این خط طوری اختیار می‌شود که $|AD| = |AC| + |AB|$؛ پاره‌خط DB، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید که خط مرسوم از نقطهٔ E به‌موازات BC، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گذرد.

۱۲۲ ـ دو دایره از رأس یک زاویه و نقطه‌ای واقع بر نیمساز آن می‌گذرند. ثابت کنید که قطعه‌هایی از ضلعهای زاویه، که بین دایره‌ها محصورند، قابل انطباق‌اند.

۱۲۳ ـ مثلث ABC و نقطهٔ D داده شده است. خطهای AD، BD و CD، برای دومین بار، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ قطع می‌کنند. دو دایره در نظر بگیرید: اولی از A و $A_۱$ می‌گذرد و دومی از B و $B_۱$. ثابت کنید که دو انتهای وتر مشترک این دو دایره و نقطه‌های C و $C_۱$ بر یک دایره واقع‌اند.

۱۲۴ ـ سه خط موازی $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$، به‌ترتیب، از رأسهای A، B و Cی مثلث ABC رسم شده‌اند. ثابت کنید که خطهای قرینهٔ $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$، به‌ترتیب، نسبت به‌نیمساز زاویه‌های A، B و C، در یک نقطه واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC متقاطع‌اند.

۱۲۵ ـ ثابت کنید که اگر M نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد و خطهای AM، BM و CM، به‌ترتیب، از مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BMC، CMA و AMB بگذرند، آن وقت M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

۱۲۶ ـ در مثلث ABC، نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$، به‌ترتیب، روی ضلعهای BC، CA و AB اختیار شده‌اند. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. خط راست BM، دایره‌ای را که از $A_۱$، B و $C_۱$ می‌گذرد، برای بار دوم، در نقطهٔ $B_۲$ قطع می‌کند، CM، دایره‌ای را که از $A_۱$، $B_۱$ و C می‌گذرد، در نقطهٔ $C_۲$، و AM، دایره‌ای را که از A، $B_۱$ و $C_۱$ می‌گذرد، در نقطهٔ $A_۲$ قطع

می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌های A_2، B_2، C_2 و M بر یک دایره واقع‌اند.

۱۲۷ ـ فرض کنید A_1 نقطهٔ قرینهٔ محل تماس دایرهٔ محاطی مثلث ABC با ضلع BC، نسبت به‌نیمساز زاویهٔ A، باشد. نقطه‌های B_1 و C_1 به‌همین منوال تعیین می‌شوند. ثابت کنید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 و خطی که از مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث ABC می‌گذرد، در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

۱۲۸ ـ فرض کنید AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث ABC باشند. خط راستی عمود بر AB، AC و A_1C_1 را در نقطه‌های K و L قطع می‌کند. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLB_1، روی خط راست BC قرار دارد.

۱۲۹ ـ چهار دایره به‌شعاعهای برابر، از نقطهٔ A می‌گذرند. ثابت کنید که سه پاره‌خط که دو انتهای آنها از A متمایز و نقطه‌های برخورد دو تا از دایره‌ها هستند (دو سر هر پاره‌خط، به‌یک دایره متعلق نیستند)، در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

۱۳۰ ـ مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویهٔ قائمه C، مفروض است. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی و M نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با وتر مثلث باشد. فرض کنید دایره‌ای به مرکز M که از O می‌گذرد، نیمساز زاویه‌های A و B را در نقطه‌های K و L، متمایز از O، قطع کند. ثابت کنید که K و L، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ACD و BCD هستند، که در آنها، CD ارتفاع مثلث ABC است.

۱۳۱ ـ ثابت کنید که در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A، میانخط موازی با AC و خط راست واصل نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی با ضلعهای CB و CA، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۱۳۲ ـ سه خط راست مفروض‌اند. یکی از آنها از پاهای دو ارتفاع یک مثلث، خط دوم از دو انتهای دو نیمساز آن و سومی از دو نقطه که در آنها دایرهٔ محاطی بر ضلعهای مثلث مماس است، می‌گذرد (همهٔ نقطه‌ها بر دو ضلع از مثلث واقع‌اند). ثابت کنید که این سه خط راست در یک نقطه متقاطع‌اند.

۱۳۳ ـ در مثلث ABC، نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، بر ضلعهای BC، CA و AB طوری اختیار می‌شوند که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به‌هم می‌رسند. ثابت کنید که اگر AA_1 نیمساز زاویهٔ $B_1A_1C_1$ باشد، AA_1 ارتفاع مثلث ABC است.

۱۳۴ ـ روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC، به‌ترتیب، نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 طوری اختیار می‌شوند که $\angle AA_1C = \angle BB_1A = \angle CC_1B$ (زاویه‌ها در یک جهت سنجیده می‌شوند). ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث محدود به‌خطهای AA_1، BB_1 و CC_1، بر نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC منطبق است.

۱۳۵ ـ رأسهای مثلث $A_1B_1C_1$، بر خطهای راست BC، CA و AB قرار دارند (A_1 بر BC، B_1 بر CA، و C_1 بر AB). ثابت کنید که اگر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ متشابه باشند (رأسهای A و A_1، B و B_1، و C و C_1 دو به‌دو متناظرند)، آن وقت نقطهٔ برخورد ارتفاعهای

مثلث $A_1B_1C_1$، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABCاست. آیا عکس آن هم درست است؟

۱۳۶ ـ دو نقطه روی هر ضلع مثلثی طوری اختیار می‌شوند که کلیهٔ شش پاره‌خطی که هر نقطه را به‌رأس مقابل آن وصل می‌کنند، قابل انطباق‌اند. ثابت کنید که وسطهای شش پاره‌خط روی یک دایره قرار دارند.

۱۳۷ ـ در مثلث ABC، پاره‌خطهایی به‌طول $|AM| = |CN| = p$، که در آنها p نصف محیط مثلث است، روی نیمخطهای ABو CB جدا شده‌اند (B بین Aو M، و بین C و N قرار دارد). فرض کنید K نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث ABCو مقابل قطری نقطهٔ B باشد. ثابت کنید که عمود وارد از K بر MN، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث می‌گذرد.

۱۳۸ ـ از نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، خطهای راستی موازی با BC، CA و AB رسم شده‌اند، که CA، AB و BC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M، N و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که M، N و Q بر یک خط راست واقع‌اند.

۱۳۹ ـ ثابت کنید که سه خط راست که نسبت به‌ضلعهای مثلثی، قرینهٔ خط راست دلخواهی هستند که از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث می‌گذرد، همرس‌اند.

۱۴۰ ـ فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، در این صورت، برابری زیر برقرار است

$$۳|MG|^{۲} = |MA|^{۲}+|MB|^{۲}+|MC|^{۲}-\frac{۱}{۳}(|AB|^{۲}+|BC|^{۲}+|CA|^{۲})$$

(قضیهٔ لایبنیتس).

۱۴۱ ـ فرض کنید ABCمثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع a و M نقطه‌ای در صفحه به فاصلهٔ d از مرکز مثلث ABCباشد. ثابت کنید، مساحت مثلثی را که ضلعهایش با پاره‌خطهای MA، AB و MC برابرند، می‌توان با دستور $S = \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}|a^{۲}-۳d^{۲}|$ نشان داد.

۱۴۲ ـ دو مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است: ABCو $A_1B_1C_1$. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را طوری پیدا کنید که مساحتهای دو مثلث که با پاره‌خطهای MA، MB، MC و MA_1، MB_1، MC_1 تشکیل شده‌اند، برابر باشند.

۱۴۳ ـ مثلث ABCداده شده است. پاره‌خطهای AKو CM، که با ACبرابرند، به‌ترتیب، روی نیمخطهای ABو CB جدا شده‌اند. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث BKM، برابر است با فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محیطی و محاطی مثلث ABC، و خط راست KM بر خطی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث را به‌هم وصل می‌کند، عمود است.

۱۴۴ ـ خط راستی، از یک رأس مثلثی بر خطی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث را به‌هم وصل می‌کند، عمود رسم می‌شود. ثابت کنید که این خط و ضلعهای مثلث مفروض، دو مثلث تشکیل می‌دهند که تفاضل بین شعاع دایره‌های محیطی آنها، برابر است با فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث اصلی.

۱۴۵ ـ ثابت کنید که اگر طول ضلعهای مثلثی یک تصاعد عددی تشکیل دهند، آن گاه
(الف) شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، برابر است با $\frac{1}{3}$ طول ارتفاع وارد بر ضلع با طول میانی؛
(ب) خطی که مرکزثقل و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث را به‌هم وصل می‌کند، موازی ضلع با طول میانی است؛
(ج) نیمساز زاویهٔ درونی رو به‌رو به‌ضلع با طول میانی، بر خطی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث را به‌هم وصل می‌کند، عمود است؛
(د) برای هر نقطه روی این نیمساز، مجموع فاصله‌های آن تا ضلعهای مثلث ثابت است؛
(ه) مرکزدایرهٔ محاطی مثلث، وسطهای بزرگترین وکوچکترین ضلع و رأس زاویهٔ تشکیل شده با آنها، بر یک دایره واقع‌اند.

۱۴۶ ـ فرض کنید K معرف وسط ضلع BC از مثلث ABC و M پای ارتفاع وارد بر BC باشد. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، در نقطهٔ D بر ضلع BC مماس است؛ دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر امتداد ضلعهای AB و AC و ضلع BC، در نقطهٔ E بر ضلع BC مماس است. یک مماس مشترک بر این دایره‌ها، متمایز از ضلعهای مثلث، دایره‌ای را که از K و M می‌گذرد، در نقطه‌های F و G قطع می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌های D، E، F و G بر یک دایره قرار دارند.

* * *

۱۴۷ ـ ثابت کنید که مرکز ثقل مثلث، نقطهٔ برخورد ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی آن، بر یک خط مستقیم (خط اویلر*) قرار دارند.

۱۴۸ ـ چه ضلعهایی در مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث منفرجه، خط اویلر را قطع می‌کنند؟

۱۴۹ ـ فرض کنید K معرف نقطهٔ قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به‌ضلع BCی آن باشد. ثابت کنید که خط اویلر مثلث ABC، پاره خط AK را نصف می‌کند.

۱۵۰ ـ ثابت کنید که نقطه‌ای مانند P روی خط اویلر مثلث ABC وجود دارد، به‌طوری که فاصله‌های مرکز ثقل مثلثهای ABP، BCP و CAP، به‌ترتیب، از رأسهای C، A و B، برابرند.

۱۵۱ ـ فرض کنید P نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد، به‌طوری که هر یک از زاویه‌های APB، BPC و CPA برابر با 120° است (همهٔ زاویه‌های داخلی مثلث ABC کمتر از 120° فرض می‌شود). ثابت کنید که خطهای اویلر مثلثهای APB، BPC و CPA در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

تبصره. ضمن حل این مسأله، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۹۶ این بخش استفاده کنید.

۱۵۲ ـ ثابت‌کنید، خط راستی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلثی مفروض را به‌هم

---

* اویلر، لئونارد (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ریاضی‌دان سوئیسی.

وصل می‌کند، خط اویلر مثلث با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث مفروض با ضلعهای آن، است.

* * *

۱۵۳ ـ ثابت کنید که پای عمودهای وارد از نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیطی مثلث بر ضلعهای آن، همخطاند (خط سیمسون*).

۱۵۴ ـ ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط سیمسون نظیر دو نقطه از دایره، با نصف اندازهٔ کمان بین این دو نقطه برابر است.

۱۵۵ ـ فرض کنید M نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد. خط راستی که از M می‌گذرد و بر BC عمود است، دایرهٔ محیطی مثلث را، برای بار دوم، در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که خط سیمسون نظیر نقطهٔ M، موازی خط AN است.

۱۵۶ ـ ثابت کنید که طول تصویر ضلع AB از مثلث ABC بر خط سیمسون نظیر نقطهٔ M، برابر است با فاصلهٔ میان تصویرهای نقطهٔ M روی ضلعهای AC و BC.

۱۵۷ ـ فرض کنید AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث ABC باشند. خطهای AA_1، BB_1 و CC_1، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را، برای بار دوم، به‌ترتیب، در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند. خطهای سیمسون نظیر نقطه‌های A_2، B_2 و C_2، مثلث $A_3B_3C_3$ را تشکیل می‌دهند (A_3 نقطهٔ برخورد خطهای سیمسون نظیر نقطه‌های B_2 و C_2 است، و غیره). ثابت کنید در صورتی که خطهای A_2A_3، B_2B_3 و C_2C_3 در یک نقطه به‌هم برسند، مرکز ثقل مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_3B_3C_3$ بر هم منطبق‌اند.

۱۵۸ ـ فرض کنید A_1، B_1 و C_1 نقطه‌هایی روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند به‌طوری که $\widehat{AA_1}+\widehat{BB_1}+\widehat{CC_1}=2k\pi$ (همهٔ کمانها در یک جهت سنجیده می‌شوند و k عددی درست است)، ثابت کنید که خطهای سیمسون مثلث ABC، نظیر نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

۱۵۹ ـ ثابت کنید که مماس بر سهمی در رأس آن، خط سیمسون مثلثی است که با سه مماس دلخواه متقاطع بر همان سهمی، تشکیل شده است.

* * *

۱۶۰ ـ ثابت کنید که وسط ضلعهای مثلث، پای ارتفاعهای آن و وسط پاره‌خطهای میان رأسها و

---

* روبرت سیمسون (۱۶۸۷ ـ ۱۷۶۸)، ریاضی‌دان اسکاتلندی.

نقطهٔ برخورد ارتفاعها، همگی بر دایره‌ای به‌نام دایرهٔ نه‌نقطه واقع‌اند.

۱۶۱ ـ فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای یک مثلث، D وسط یک ضلع و K یکی از نقطه‌های برخورد خط HD با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، D بین H و K قرار دارد. ثابت کنید که D وسط پاره‌خط HK است.

۱۶۲ ـ فرض کنید M معرف نقطهٔ میانه‌ای یک مثلث، E پای یک ارتفاع و F یکی از نقطه‌های برخورد خط ME با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، M بین E و F قرار دارد. ثابت کنید که $|FM| = ۲|EM|$.

۱۶۳ ـ ارتفاع مرسوم بر ضلع BC از مثلث ABC، دایرهٔ محیطی آن را در نقطهٔ $A_۱$ قطع می‌کند. ثابت کنید که فاصلهٔ مرکز دایرهٔ نه‌نقطه تا ضلع BC، برابر با $\frac{۱}{۴}|AA_۱|$ است.

۱۶۴ ـ در مثلث ABC، $AA_۱$ ارتفاع و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهاست. فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و M نقطه‌ای بر خط HP باشد، به‌طوری که $|HA|.|HA_۱| = |HM|.|HP|$ (H روی پاره‌خط MP قرار دارد، اگر مثلث ABC با زاویه‌های حاده باشد و خارج آن است، اگر مثلثی منفرجه باشد). ثابت کنید، M روی دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد.

۱۶۵ ـ در مثلث ABC، BK ارتفاع مرسوم از رأس B بر ضلع AC، و BL میانه مرسوم از همان رأس است، و M و N تصویر نقطه‌های A و C روی نیمساز زاویهٔ B هستند. ثابت‌کنیدکه‌نقطه‌های K، L، M و N همگی بر دایره‌ای که مرکزش بر دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد، واقع‌اند.

۱۶۶ ـ فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای یک مثلث و F نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیطی آن باشد. ثابت کنید که خط سیمسون نظیر نقطهٔ F، از یکی از نقطه‌های برخورد خط FH و دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث می‌گذرد (مسأله‌های ۱۵۳ و ۱۵۹ این بخش را ببینید).

۱۶۷ ـ فرض کنید l معرف خطی دلخواه باشد که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد، و فرض کنید $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ تصویر نقطه‌های A، B و C روی l باشند. سه خط راست رسم شده‌اند: از $A_۱$ یک خط عمود بر BC، از $B_۱$ یک خط عمود بر AC و از $C_۱$ یک خط عمود بر AB. ثابت کنید که این سه خط در یک نقطه، روی دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC، به‌هم می‌رسند.

۱۶۸ ـ مثلث ABC داده شده است. $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ ارتفاعهای آن هستند. ثابت کنید که خطهای اویلر مثلثهای $AB_۱C_۱$، $A_۱BC_۱$ و $A_۱B_۱C$ در یک نقطه مانند P از دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث متقاطع‌اند، به‌طوری که طول یکی از پاره‌خطهای $PA_۱$، $PB_۱$ و $PC_۱$، برابر با مجموع طولهای دوتای دیگر است (مسألهٔ تبولت*).

۱۶۹ ـ سه دایره در دسترس است، هرکدام از یک رأس مثلثی و پای ارتفاع مرسوم از این رأس می‌گذرد و بر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث که به‌این رأس رسم شده، مماس است. ثابت کنید که

* تبولت (Thebault)، ویکتور، هندسه‌دان معاصر فرانسوی.

دایره‌ها در دو نقطه، واقع بر خط اویلر مثلث مفروض، متقاطع‌اند.

۱۷۰ ـ سه دایره در نظر بگیرید که هر کدام از آنها از یک رأس مثلثی و پاهای دو نیمسازی (داخلی و خارجی) که از این رأس خارج می‌شوند، می‌گذرد (این دایره‌ها، دایره‌های آپولونیوس* نامیده می‌شوند). ثابت کنید که: (الف) این سه دایره در دو نقطه (M_1 و M_2) متقاطع‌اند؛ (ب) خط M_1M_2 از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد؛ (ج) پای عمودهای وارد از نقطه‌های M_1 و M_2 بر ضلعهای مثلث، رأسهای دو مثلث متساوی‌الاضلاع محسوب می‌شوند.

۱۷۱ ـ خط راست قرینهٔ یک میانه از مثلث، نسبت به‌نیمساز زاویهٔ مقابل به‌پای میانه، هم‌میانه نامیده می‌شود. فرض کنید هم‌میانه‌ای که از رأس Bی مثلث ABC خارج می‌شود، AC را در نقطهٔ K قطع کند. ثابت کنید که $|AK|:|KC| = |AB|^2:|BC|^2$.

۱۷۲ ـ فرض کنید D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC از مثلث ABC باشد. فرض کنید E و F نقطه‌هایی بر ضلعهای AC و AB باشند، به‌طوری که DE با AB، و DF با AC موازی است. دایره‌ای که از D، E و F می‌گذرد، BC، CA و AB را، برای بار دوم، به‌ترتیب، در نقطه‌های D_1، E_1 و F_1 قطع می‌کند. فرض کنید M و N، به‌ترتیب، معرف نقطه‌های برخورد DE و F_1D_1، و DF و D_1E_1 باشند. ثابت کنید که M و N بر هم‌میانه‌ای که از رأس A خارج می‌شود، قرار دارند. اگر D بر پای این هم‌میانه منطبق باشد، آن وقت، دایره‌ای که از D، E و F می‌گذرد، بر ضلع AC مماس است. (این دایره، دایرهٔ توکر** نامیده می‌شود.)

۱۷۳ ـ ثابت کنید که وترمشترکهای دایرهٔ محیطی مثلث و سه دایرهٔ آپولونیوس آن، هم‌میانه‌های مثلث هستند (مسأله‌های ۱۷۰-۱۷۱ این بخش را ببینید).

* * *

۱۷۴ ـ ذوزنقهٔ $ABCD$، که ضلع جانبی آن CD، بر قاعده‌های AD و BCی آن عمود است، مفروض است. دایره‌ای به‌قطر AB، AD را در نقطهٔ P قطع می‌کند (P غیر از A است). مماس بر دایره در نقطهٔ P، CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مماس دیگری از M بر دایره رسم می‌شود که در نقطهٔ Q بر آن مماس است. ثابت کنید که خط BQ، CD را نصف می‌کند.

۱۷۵ ـ فرض کنید M و N معرف تصویرهای نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC روی نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی B باشند. ثابت کنید که خط MN، ضلع AC را نصف می‌کند.

۱۷۶ ـ دایره‌ای و دو نقطهٔ A و B روی آن داده شده است. مماسهای بر دایره که از A و B می‌گذرند، یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند. دایره‌ای که از C می‌گذرد، در نقطهٔ B بر AB مماس است و، برای بار دوم، دایرهٔ مفروض را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که خط AM، پاره‌خط CB را نصف می‌کند.

---

* آپولونیوس پرگایی (پرگا، شهری باستانی در شمال آسیای صغیر-م) (حدود ۱۷۰-۲۵۵ قبل از میلاد)، هندسه‌دان بزرگ یونانی که کارهای اقلیدس را ادامه داد.

** توکر، هاوارد گرگوری (تولد، ۱۹۲۲)، ریاضی‌دان معاصر آمریکایی.

۱۷۷ ـ بر دایره‌ای، از نقطهٔ A، واقع در خارج این دایره، دو مماس AM و AN (M و N نقطه‌های تماس‌اند) و قاطعی که دایره را در نقطه‌های K و L قطع می‌کند، رسم شده است. خط دلخواه l به‌موازات AM رسم می‌شود. فرض کنید KM و LM، l را، به‌ترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کنند. ثابت کنید که خط MN، پاره‌خط PQ را نصف می‌کند.

۱۷۸ ـ دایره‌ای در مثلث ABC محاط شده است. قطری از این دایره، از نقطهٔ تماس دایره با ضلع BC می‌گذرد و وتری را که دو نقطهٔ دیگر تماس را به‌هم وصل می‌کند، در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که AN، BC را نصف می‌کند.

۱۷۹ ـ دایره‌ای در مثلث ABC محاط شده است. فرض کنید M نقطهٔ تماس این دایره با ضلع AC، و MK قطر دایره باشد. خط BK، AC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که $|AM| = |NC|$.

۱۸۰ ـ دایره‌ای در مثلث ABC محاط شده و برضلع BC در نقطهٔ M مماس است. MK قطر دایره است. خط AK، دایره را در نقطهٔ P قطع می‌کند. ثابت کنید که مماس بر دایره در نقطهٔ P، ضلع BC را نصف می‌کند.

۱۸۱ ـ خط راست l، بر دایره‌ای در نقطهٔ A مماس است. فرض کنید CD وتری موازی با l و B نقطه‌ای دلخواه روی l باشد. خطهای CB و DB، برای بار دوم، دایره را، به‌ترتیب، در نقطه‌های L و K قطع می‌کنند. ثابت کنید، خط LK، پاره‌خط AB را نصف می‌کند.

۱۸۲ ـ دو دایرهٔ متقاطع داده شده‌اند. فرض کنید A یکی از نقطه‌های تقاطع آنها باشد. از نقطه‌ای دلخواه واقع بر امتداد وتر مشترک دایره‌های مفروض، بر یکی از آنها دو مماس رسم شده که در نقطه‌های M و N بر آن مماس‌اند. فرض کنید P و Q، به‌ترتیب، معرف نقطه‌های برخورد (متمایز از A) خطهای راست MA و NA با دایرهٔ دوم باشند. ثابت کنید که خط MN، پاره‌خط PQ را نصف می‌کند.

۱۸۳ ـ در مثلث ABC، دایره‌ای که به‌قطر ارتفاع BD رسم شده است، ضلعهای AB و BC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های K و L قطع می‌کند. خطهای مماس بر دایره در نقطه‌های K و L، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. ثابت کنید که خط BM، ضلع AC را نصف می‌کند.

۱۸۴ ـ خط راست l، بر پاره‌خط AB عمود است و از B می‌گذرد. دایره‌ای بامرکز روی l، از A می‌گذرد و l را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. مماسهای بر دایره در نقطه‌های A و C، در N متقاطع‌اند. ثابت کنید که خط DN، پاره‌خط AB را نصف می‌کند.

۱۸۵ ـ دایره‌ای بر مثلث ABC محیط شده است. فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره باشد که از B و C می‌گذرند. M نقطه‌ای از دایره است، به‌طوری که AM با BC موازی و K نقطهٔ برخورد MN و دایره است. ثابت کنید که KA، BC را نصف می‌کند.

۱۸۶ ـ فرض کنید A معرف تصویر مرکز دایره‌ای روی خط راست l باشد. دو نقطهٔ B و C روی این خط طوری اختیار می‌شوند که $|AB| = |AC|$. دو قاطع دلخواه که دایره را،

به‌ترتیب، در جفت نقطه‌های P، Q و M، N قطع می‌کنند، از B و C رسم می‌شوند. فرض کنید خطهای NP و MQ، خط l را، به‌ترتیب، در نقطه‌های R و S قطع کنند. ثابت کنید، $|RA| = |AS|$.

۱۸۷ ـ مثلث ABC داده شده است. A_1، B_1 و C_1 وسط ضلعهای BC، CA و AB هستند؛ K و L، به‌ترتیب، پای عمودهای وارد از رأسهای B و C، به ترتیب، بر خطهای راست A_1C_1 و A_1B_1 هستند؛ O مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث است. ثابت کنید که خط A_1O، پاره‌خط KL را نصف می‌کند.

* * *

۱۸۸ ـ فرض کنید نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به‌ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید که: (الف) دایره‌های محیطی مثلثهای A_1BC، AB_1C و ABC_1 در یک نقطه مشترک‌اند؛ (ب) دایره‌های محیطی مثلثهای A_1B_1C، A_1BC_1 و AB_1C_1 در یک نقطه مشترک‌اند.

۱۸۹ ـ فرض کنید AB قطر یک نیمدایره و M نقطه‌ای روی قطر AB باشد. نقطه‌های C، D، E و F روی نیمدایره طوری قرار گرفته‌اند که $\angle AMD = \angle EMB$ و $\angle CMA = \angle FMB$. فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد خطهای CD و EF باشد. ثابت کنید که خط PM بر AB عمود است.

۱۹۰ ـ در مثلث ABC، عمود بر ضلع AB در نقطهٔ وسط آن D، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطهٔ E قطع می‌کند (C و E در یک طرف AB واقع‌اند). F تصویر E روی AC است. ثابت کنید که خط DF، محیط مثلث ABC را نصف می‌کند، و سه خطی که بدین گونه برای هر ضلع مثلث رسم می‌شوند، همرس‌اند.

۱۹۱ ـ ثابت کنید، خط راستی که محیط و مساحت مثلثی را به‌یک نسبت تقسیم می‌کند، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث می‌گذرد.

۱۹۲ ـ ثابت کنید، سه خط که از رأسهای مثلثی می‌گذرند و محیط آن را نصف می‌کنند، در یک نقطه (به‌نام نقطهٔ ناگل*) متقاطع‌اند. فرض کنید M معرف مرکز ثقل مثلث، I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و S مرکز دایرهٔ محاطی مثلث با رأسهای وسط ضلعهای مثلث مفروض باشد. ثابت کنید که نقطه‌های N (نقطهٔ ناگل)، M، I و S بر یک خط واقع‌اند، $|MN| = 2|IM|$ و $|IS| = |SN|$.

* * *

* ناگل، تریگو (Trygve) (۱۸۹۵ ـ ۱۹۵۸)، ریاضی‌دان نروژی.

۱۹۳ ـ فرض کنید a، b و c معرف طول ضلعهای مثلثی باشند و $a+b+c = ۲p$. فرض کنید G نقطهٔ میانه‌ای مثلث باشد و O، I و I_a، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های محیطی، محاطی و محاطی خارجی (دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC) آن باشند، R، r و r_a، به‌ترتیب، شعاعهای آنها هستند. ثابت کنید، رابطه‌های زیر درست‌اند:

(الف) $a^۲+b^۲+c^۲ = ۲p^۲-۲r^۲-۸Rr$

(ب) $|OG|^۲ = R^۲-\frac{۱}{۹}(a^۲+b^۲+c^۲)$

(ج) $|IG|^۲ = \frac{۱}{۹}(p^۲+۵r^۲-۱۶Rr)$

(د) $|OI|^۲ = R^۲-۲Rr$ (اویلر)

(هـ) $|OI_a|^۲ = R^۲+۲Rr_a$

(و) $|II_a|^۲ = ۴R(r_a-r)$

۱۹۴ ـ فرض کنید $BB_۱$ و $CC_۱$، به‌ترتیب، معرف نیمساز زاویه‌های B و C از مثلث ABC باشند. با استفاده از نمادگذاری مسألهٔ قبل، ثابت‌کنیدکه $|B_۱C_۱| = \frac{abc}{(b+a)(c+a)R}|OI_a|$.

۱۹۵ ـ ثابت کنید، نقطه‌های قرینهٔ مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث نسبت به‌مرکز دایرهٔ محیطی آن، روی دایره‌ای قرار دارند که با دایرهٔ محاطی مثلث هم‌مرکز و شعاعش برابر با قطر دایرهٔ محیطی مثلث است.

۱۹۶ ـ مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید، مجموع مساحتهای سه مثلث که رأسهای هر یک از آنها، سه نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلع نظیر مثلث ABC و امتدادهای دو ضلع دیگر است، برابر است با دو برابر مساحت مثلث ABC به‌اضافهٔ مساحت مثلث با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ محاط در $\triangle ABC$.

۱۹۷ ـ مجموع مربعهای فاصلهٔ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلثی مفروض با ضلعهای آن، تا مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را پیدا کنید، به‌شرطی که شعاع دایرهٔ محاطی آن r و شعاع دایرهٔ محیطی آن R باشد.

۱۹۸ ـ دایره‌ای از پای نیمسازهای مثلث ABC گذشته است. ثابت کنید که طول یکی از وترهای تشکیل شده با تقاطع این دایره و ضلعهای مثلث، برابر با مجموع طولهای دو وتر دیگر است.

۱۹۹ ـ فرض کنید $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ نیمسازهای مثلث ABC باشند، L نقطهٔ برخورد خطهای $AA_۱$ و $B_۱C_۱$، و K نقطهٔ برخورد خطهای $CC_۱$ و $A_۱B_۱$ است. ثابت کنید که $BB_۱$، نیمساز زاویهٔ LBK است.

۲۰۰ ـ در مثلث ABC، نقطه‌های K و L برضلعهای AB و BC طوری اختیار می‌شوند که $|AK| = |KL| = |LC|$. از نقطهٔ برخورد خطهای AL و CK، خط راستی به‌موازات

نیمساز زاویهٔ B رسم می‌شود تا خط AB را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید که $|AM| = |BC|$.

۲۰۱ ـ در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ B، خطی را که از وسط AC و وسط ارتفاع مرسوم بر AC می‌گذرد، در نقطهٔ M قطع می‌کند؛ N وسط نیمساز زاویهٔ B است. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ C، نیمساز زاویهٔ MCN نیز هست.

۲۰۲ ـ (الف) ثابت کنید که اگر مثلثی دو نیمساز برابر داشته باشد، آن وقت چنین مثلثی متساوی‌الساقین است (قضیهٔ شتینر*).

(ب) ثابت کنید که اگر در مثلث ABC، نیمسازهای زاویه‌های مجاور به‌زاویه‌های A و C برابر و هر دو در درون یا بیرون زاویهٔ ABC باشند، آن وقت $|AB| = |BC|$. آیا این نتیجه درست است که اگر مثلثی دو نیمساز خارجی برابر داشته باشد، آن وقت متساوی‌الساقین است؟

۲۰۳ ـ مثلثی داده شده است. می‌دانیم که مثلث تشکیل شده با پای نیمسازهای آن، متساوی‌الساقین است. آیا این حکم که مثلث مفروض هم متساوی‌الساقین است، درست است؟

* * *

۲۰۴ ـ فرض کنید $ABCDEF$ یک شش‌ضلعی محاطی باشد. فرض کنید K معرف نقطهٔ برخورد AC و BF، و L نقطهٔ برخورد CE و FD باشد. ثابت کنید که قطرهای AD و BE و خط KL در یک نقطه متقاطع‌اند (قضیهٔ پاسکال).

۲۰۵ ـ مثلث ABC و نقطهٔ M داده شده است. خط راستی که از نقطهٔ M می‌گذرد، خطهای AB، BC و CA را، به‌ترتیب، در نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 قطع می‌کند. خطهای AM، BM و CM، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند. ثابت کنید که خطهای A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 در نقطه‌ای، واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC، متقاطع‌اند.

۲۰۶ ـ دو خط عمود بر هم، از محل برخورد ارتفاعهای مثلثی رسم شده‌اند. ثابت کنید که وسط پاره‌خطهایی که این خطها روی ضلعهای مثلث (یعنی، روی خطهایی که مثلث را تشکیل می‌دهند) جدا کرده‌اند، بر یک خط راست واقع‌اند.

* * *

۲۰۷ ـ مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه P داده شده است. پای عمودهای وارد از نقطهٔ P بر ضلعهای

---

* شتینر، یاکوب (۱۷۹۶-۱۸۶۳)، ریاضی‌دان سوئیسی.

مثلث ABC، رأسهای مثلث $A_1B_1C_1$ به‌حساب می‌آیند. رأسهای مثلث $A_2B_2C_2$ نقطه‌های برخورد (متمایز از A، B و C) خطهای راست AP، BP و CP با دایرهٔ محیطی مثلث ABC هستند. ثابت کنید که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2C_2B_2$ متشابه‌اند. برای مثلث مختلف‌الاضلاع ABC، چه تعداد نقطه مانند P وجود دارد، به‌طوری که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ی نظیر آن، با مثلث ABC متشابه باشند؟

۲۰۸ ـ فرض کنید A_1، B_1 و C_1 معرف پای عمودهای وارد از نقطهٔ دلخواه M، به‌ترتیب، بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید، سه خط راست که از وسط پاره‌خطهای B_1C_1 و MA، C_1A_1 و MB، و A_1B_1 و MC می‌گذرند، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲۰۹ ـ فرض کنید S مساحت مثلثی مفروض و R شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث باشد. به علاوه، فرض کنید S_1 معرف مساحت مثلث تشکیل شده با پای عمودهای وارد از نقطه‌ای واقع در فاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض، بر ضلعهای آن، باشد. ثابت کنید که $S_1 = \frac{S}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|$ (قضیهٔ اویلر).

۲۱۰ ـ ثابت کنید که هرگاه A، B، C و D نقطه‌های دلخواهی در صفحه باشند، آن وقت چهار دایره که هر کدام از وسط پاره‌خطهای AB، AC و AD؛ یا BA، BC و BD؛ یا CA، CB و CD؛ یا DA، DB و DC می‌گذرند، یک نقطهٔ مشترک دارند.

۲۱۱ ـ مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه D در صفحه داده شده است. مثلث تشکیل شده با پای عمودهای وارد از نقطهٔ D بر ضلعهای مثلث ABC، مثلث پایی نقطهٔ D نسبت به مثلث ABC، و دایرهٔ محیطی مثلث پایی، دایرهٔ پایی نامیده می‌شود. فرض کنید D_1 معرف نقطهٔ برخورد خطهای قرینهٔ خطهای AD، BD و CD، به‌ترتیب، نسبت به‌نیمساز زاویه‌های A، B و Cی مثلث ABC، باشد. ثابت کنید که دایره‌های پایی نقطه‌های D و D_1 بر هم منطبق‌اند.

۲۱۲ ـ چهار نقطه در صفحه که هیچ سه‌تایی همخط نیستند، در نظر بگیرید. ثابت کنید، چهار دایرهٔ پایی، که هر یک نظیر یکی از نقطه‌ها نسبت به‌مثلثی است که رأسهایش سه نقطهٔ باقیمانده هستند، یک نقطهٔ مشترک دارند.

۲۱۳ ـ خط راستی که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد، AB و AC را، به‌ترتیب، درنقطه‌های C_1 و B_1 قطع می‌کند. ثابت کنید، دایره‌هایی که به‌قطر BB_1 و CC_1 رسم می‌شوند، در دو نقطه که یکی بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دیگری بر دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد، متقاطع‌اند.

چهارضلعیها

۲۱۴ ـ چهارضلعی محاطی $ABCD$ داده شده است. AB قطر دایره است. ثابت کنید که

تصویرهای ضلعهای AD و BC روی خط CD، از نظر طول برابرند.

۲۱۵ ـ در چهارضلعی محدب $ABCD$، O محل برخورد قطرهای آن است و E، F و G تصویرهای B، C و O روی AD هستند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی برابر است با $\frac{|AD|.|BE|.|CF|}{۲|OG|}$.

۲۱۶ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محدب باشد، چهار دایره در نظر بگیرید که هر یک بر سه ضلع این چهارضلعی مماس باشد.

(الف) ثابت کنید که مرکزهای این دایره‌ها بر یک دایره واقع‌اند.

(ب) فرض کنید $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$ و $r_۴$ معرف شعاعهای این دایره‌ها باشند (دایرهٔ به‌شعاع $r_۱$ بر ضلع DC، دایرهٔ به‌شعاع $r_۲$ بر ضلع AD، دایرهٔ به‌شعاع $r_۳$ بر ضلع AB و دایرهٔ به‌شعاع $r_۴$ بر ضلع BC مماس نیست). ثابت کنید که

$$\frac{|AB|}{r_۱}+\frac{|CD|}{r_۳}=\frac{|BC|}{r_۲}+\frac{|AD|}{r_۴}$$

۲۱۷ ـ ثابت کنید که برای S، مساحت چهارضلعی محاطی، دستور زیر درست است

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

که در آن p نصف محیط است، و a، b، c و d طول ضلعهای چهارضلعی هستند.

۲۱۸ ـ فرض کنید ۲φ، مجموع دو زاویهٔ مقابل از چهارضلعیی محیطی، a، b، c و d طول ضلعهای آن و S مساحت آن باشد. ثابت کنید که $S=\sqrt{abcd}\sin\varphi$.

۲۱۹ ـ نقطه‌های M و N بر ضلعهای AB و CD از چهارضلعی محدب $ABCD$ طوری اختیار شده‌اند که آنها را به‌یک نسبت (با احتساب از رأسهای A و C) تقسیم می‌کنند. با وصل کردن این نقطه‌ها به‌همهٔ رأسهای چهارضلعی $ABCD$، آن را به شش مثلث و یک چهارضلعی تقسیم می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی حاصل، برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث مجاور به ضلعهای BC و AD.

۲۲۰ ـ قطر AB و تر CD که این قطر را قطع نمی‌کند، در دایره‌ای رسم شده‌اند. فرض کنید E و F معرف پای عمودهای وارد از نقطه‌های A و B بر خط CD باشند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی $AEFB$ برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای ACB و ADB.

۲۲۱ ـ چهارضلعی محدب $Q_۱$ داده شده است. چهار خط راست که بر ضلعهای آن عمودند و از وسطهای آنها می‌گذرند، چهارضلعی $Q_۲$ را تشکیل می‌دهند. چهارضلعی $Q_۳$، به‌همین نحو برای چهارضلعی $Q_۲$ تشکیل می‌شود. ثابت کنبد که چهارضلعی $Q_۳$ با چهارضلعی $Q_۱$ متشابه است.

۲۲۲ ـ نقطه‌های M و N برضلعهای رو به‌رو به‌هم BC و DA از چهارضلعیی محدب طوری اختیار می‌شوند که $|BM|:|MC|=|AN|:|ND|=|AB|:|CD|$. ثابت کنید که خط

MN با نیمساز زاویهٔ تشکیل شده با ضلعهای AB و CD، موازی است.

۲۲۳ ـ قطرهای چهارضلعیی محدب، آن را به چهار مثلث تقسیم کرده‌اند. دایره‌های محاطی این مثلثها، شعاعهایی برابر دارند. ثابت کنید که چهارضلعی مفروض لوزی است.

۲۲۴ ـ قطرهای چهارضلعیی، آن را به‌چهار مثلث با محیطهای برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید که این چهارضلعی لوزی است.

۲۲۵ ـ در چهارضلعی $ABCD$، دایره‌های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB شعاعهایی برابر دارند. ثابت کنید که چهارضلعی مفروض مستطیل است.

۲۲۶ ـ چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای محاط شده است. فرض کنید M نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره که از A و C می‌گذرند، N نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره که از B و D می‌گذرند، K نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و Cی چهارضلعی و L نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های B و D باشد. ثابت کنید که هرگاه یکی از چهار گزارهٔ: (الف) M متعلق به‌خط راست BD است؛ (ب) N متعلق به‌خط راست AC است؛ (ج) K روی BD واقع است؛ (د) L روی AC واقع است، درست باشد، آن وقت سه گزارهٔ باقیمانده هم درست است.

۲۲۷ ـ ثابت کنید، چهار خط که هریک از پاهای دو عمود وارد از یک رأس چهارضلعیی محاطی بر ضلعهایی که شامل این رأس نیستند، می‌گذرند، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲۲۸ ـ فرض کنید AB و CD دو وتر از دایره‌ای باشند و M نقطهٔ برخورد دو عمود: یکی بر AB در نقطهٔ A و دیگری بر CD در نقطهٔ C، باشد. فرض کنید N نقطهٔ برخورد عمودهای بر AB و CD، به‌ترتیب، در نقطه‌های B و D، باشد. ثابت کنید، خط MN از نقطهٔ برخورد BC و AD می‌گذرد.

۲۲۹ ـ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. دایره‌ای به‌شعاع R از نقطه‌های A و B می‌گذرد. دایرهٔ دیگری به‌همان شعاع از B و C می‌گذرد. فرض کنید M معرف دومین نقطهٔ برخورد این دایره‌ها باشد. ثابت کنید که شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای AMD و CMD برابر با R است.

۲۳۰ ـ فرض کنید $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد. دایره‌ای بر خطهای راست AB و AD مماس است و BD را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. ثابت کنید، دایره‌ای وجود دارد که از M و N می‌گذرد و بر خطهای CB و CD مماس است.

۲۳۱ ـ فرض کنید $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد. دایره‌ای به‌قطر AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد دایره با خطهای AB و AD را، به‌ترتیب، M و N می‌نامیم. ثابت کنید که خطهای BD و MN و مماس بر دایره در نقطهٔ C، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲۳۲ ـ چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای محاط شده است. فرض کنید O_1، O_2، O_3 و O_4، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB، و H_1، H_2، H_3 و H_4 نقطه‌های برخورد ارتفاعهای همان مثلثها باشند. ثابت کنید، چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$

مستطیل است و مساحت چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ برابر است با مساحت چهارضلعی $ABCD$.

۲۳۳ ـ مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه D در صفحه داده شده است. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABD، BCD و CAD، رأسهای یک مثلث، با مساحتی برابر با مساحت مثلث مفروض، هستند.

۲۳۴ ـ ثابت کنید که اگر دایره‌ای قابل محاط در یک چهارضلعی باشد، آن وقت (الف) دایره‌های محاطی دو مثلث که یک قطر چهارضلعی مفروض، آن را به‌آنها تقسیم می‌کند، بر هم مماس‌اند؛ (ب) نقطه‌های تماس این دایره‌ها با ضلعهای چهارضلعی، رأسهای چهارضلعیی محاطی هستند.

۲۳۵ ـ ثابت کنید که اگر $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد، آن وقت مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD، برابر است با مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای BCD و BDA.

* * *

۲۳۶ ـ فرض کنید a، b، c و d طول ضلعهای یک چهارضلعی، m و n طول قطرهای آن و A و C دو زاویهٔ روبه‌رو به‌هم از آن باشند. در این صورت، رابطهٔ زیر برقرار است

$$m^2n^2 = a^2c^2+b^2d^2-2abcd\ \cos(A+C)$$

(قضیهٔ برتشنیدر* یا قانون کسینوسها در چهارضلعی).

۲۳۷ ـ فرض کنید a، b، c و d معرف طول ضلعهای چهارضلعیی محاطی و m و n طول قطرهای آن باشند. ثابت کنید که $mn=ac+bd$ (قضیهٔ بطلمیوس**).

۲۳۸ ـ ثابت کنید که اگر ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و M نقطه‌ای دلخواه در صفحه، غیر واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC، باشد، آن وقت مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش برابر است با $|MA|$، $|MB|$ و $|MC|$ (قضیهٔ پومپیو***). اندازهٔ زاویهٔ این مثلث را که روبه‌رو به‌ضلع با طول برابر با $|MB|$ است، پیدا کنید، به‌شرطی که $\angle AMC=\alpha$.

۲۳۹ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. چهار دایره، α، β، γ و δ، بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$، به‌ترتیب، در نقطه‌های A، B، C و D مماس‌اند. فرض کنید $t_{\alpha\beta}$ معرف طول قطعه‌ای از مماس بر دایره‌های α و β باشد، $t_{\alpha\beta}$ طول پاره‌خط مماس مشترک

---

* Bretschneider

** بطلمیوس (کلودیوس بطلمیوس) (در حدود ۱۵۰ میلادی)، هندسه‌دان، منجم، و جغرافی‌دان اسکندرانی.

*** پومپیو (pompeiu)، دیمیتری (۱۸۷۳-۱۹۵۴)، ریاضی‌دان رومانیایی.

خارجی است، اگر α و β به‌یک نحو (درونی یا بیرونی) بر دایرهٔ مفروض مماس باشند، و طول پاره خط مماس مشترک داخلی است، اگر α و β به‌طور متفاوت بر دایرهٔ مفروض مماس باشند (مقدارهای $t_{\beta\gamma}$، $t_{\alpha\delta}$، و غیره، به‌روش مشابه تعریف می‌شوند). ثابت کنید که

$$t_{\alpha\beta}\, t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}\, t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta} \quad (*)$$

(قضیهٔ تعمیم یافتهٔ بطلمیوس).

۲۴۰ ـ فرض کنید α، β، γ و δ چهار دایره در صفحه باشند، ثابت کنید که اگر رابطهٔ

$$t_{\alpha\beta}\, t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}\, t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta} \quad (*)$$

برقرار باشد، که در آن، $t_{\alpha\beta}$، و غیره، طول پاره‌خطهای مماس مشترک خارجی یا داخلی دایره‌های α و β، و غیره، هستند (برای هر سه دایره، سه مماس خارجی یا یک مماس خارجی و دو مماس داخلی می‌گیریم)، آن وقت دایره‌های α، β، γ و δ بر یک دایره مماس‌اند.

* * *

۲۴۱ ـ امتداد ضلعهای AB و DC از چهارضلعی محدب $ABCD$، در نقطهٔ K و امتداد ضلعهای AD و BCی آن در نقطهٔ L متقاطع‌اند. پاره‌خط BL، DK را قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر یکی از سه رابطهٔ

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

$$|BK| + |BL| = |DK| + |DL|$$

$$|AK| + |CL| = |AL| + |CK|$$

برقرار باشد، آن وقت دوتای دیگر هم برقرارند.

۲۴۲ ـ امتداد ضلعهای AB و DC از چهارضلعی محدب $ABCD$، در نقطهٔ K و امتداد ضلعهای AD و BCی آن درنقطهٔ L متقاطع‌اند، پاره‌خط BL، DK را قطع می‌کند. ثابت‌کنید که اگر یکی از سه رابطهٔ $|AD| + |DC| = |AB| + |CB|$، $|AK| + |CK| = |AL| + |CL|$، و $|BK| + |DK| = |BL| + |DL|$ برقرار باشد، آن‌گاه دوتای دیگر هم برقرارند.

۲۴۳ ـ ثابت کنید که اگر دایره‌ای مماس بر خطهای AB، BC، CD و DA وجود داشته باشد، آن وقت مرکز آن و وسطهای AC و BD همخط‌اند.

۲۴۴ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. عمود بر BA در نقطهٔ A، خط CD را

در نقطهٔ M، و عمود بر DA در نقطهٔ A، خط BC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که MN از مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرد.

۲۴۵ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی، E نقطه‌ای دلخواه بر خط راست AB و F نقطه‌ای دلخواه بر خط DC باشد. خط راست AF، دایره را در نقطهٔ M، و خط DE، دایره را در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که خطهای BC، EF و MN، همرس و یا موازی‌اند.

۲۴۶ ـ ثابت کنید، پای عمودهای وارد از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعیی محاطی بر ضلعهای آن، رأسهای چهارضلعیی هستند که در آن دایره‌ای قابل محاط شدن است. شعاع این دایره را پیدا کنید، به‌شرطی که قطرهای چهارضلعی محاطی دو به‌دو بر هم عمود باشند و شعاع دایرهٔ مفروض R و فاصلهٔ مرکز آن تا نقطهٔ برخورد قطرها، d باشد.

۲۴۷ ـ قطرهای چهارضلعیی محاطی دو به‌دو بر هم عمودند. ثابت کنید که وسط ضلعهای آن و پای عمودهای وارد از نقطهٔ برخورد قطرها بر ضلعهای آن، بر یک دایره واقع‌اند. شعاع این دایره را پیدا کنید، به‌شرطی که شعاع دایرهٔ مفروض R و فاصلهٔ مرکز آن تا نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی، d باشد.

۲۴۸ ـ ثابت کنید که اگر چهارضلعیی، هم محاط در دایره‌ای به‌شعاع R و هم محیط بر دایره‌ای به‌شعاع r باشد، و فاصلهٔ میان مرکزهای این دایره‌ها d باشد، آن وقت رابطهٔ

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}$$

درست است. در این حالت، بینهایت چهارضلعی، محاط در دایرهٔ بزرگتر و محیط بر دایرهٔ کوچکتر وجود دارد (هر نقطهٔ دایرهٔ بزرگتر را می‌توان یکی از رأسها اختیار کرد).

۲۴۹ ـ چهارضلعیی محدب را قطرهایش به‌چهار مثلث تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید، خطی که مرکزهای ثقل دو مثلث مقابل را به‌هم وصل می‌کند، بر خط راست واصل بین نقطه‌های برخورد ارتفاعهای دو مثلث دیگر، عمود است.

۲۵۰ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد و M و N، به‌ترتیب، وسطهای AC و BD باشند. ثابت کنید که اگر DB نیمساز زاویهٔ ANC باشد، آن وقت AC نیمساز زاویهٔ BMD است.

۲۵۱ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. امتداد ضلعهای رو به‌رو به‌هم AB و CD، در نقطهٔ K و امتداد ضلعهای BC و AD، در نقطهٔ L متقاطع‌اند. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های BKC و BLA دو به‌دو بر هم عمودند و نقطهٔ برخوردشان بر خط راستی قرار دارد که وسطهای AC و BD را به‌هم وصل می‌کند.

۲۵۲ ـ قطرهای چهارضلعیی دو به‌دو بر هم عمودند. ثابت کنید، چهار خط راست که هر کدام یک رأس چهارضلعی را به‌مرکز دایره‌ای که از آن رأس و دو رأس مجاور به‌آن می‌گذرد، وصل می‌کند، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲۵۳ـ فرض کنید P، Q و M، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیی محاطی و امتداد ضلعهای مقابل آن باشند. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث PQM، بر مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی مفروض منطبق است (قضیهٔ بروکار).

۲۵۴ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محیطی، K نقطهٔ برخورد خطهای راست AB و CD، و L نقطهٔ برخورد AD و BC باشد. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث تشکیل شده با خطهای KL، AC و BD، بر مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی $ABCD$ منطبق است.

۲۵۵ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محدب باشد، $\angle ABC = \angle ADC$، M و N پای عمودهای وارد از A، به‌ترتیب، بر ضلعهای BC و CD باشند و K نقطهٔ برخورد خطهای راست MD و NB باشد. ثابت کنید که خطهای راست AK و MN دو به‌دو بر هم عمودند.

* * *

۲۵۶ـ ثابت کنید که چهار دایره، محیط بر چهار مثلث تشکیل شده با چهار خط راست متقاطع در صفحه، یک نقطهٔ مشترک (نقطهٔ میشل*) دارند.

۲۵۷ـ ثابت کنید که مرکزهای چهار دایره، محیط بر چهار مثلث تشکیل شده با چهار خط راست متقاطع در صفحه، بر یک دایره قرار دارند.

۲۵۸ـ چهار خط راست دو به‌دو متقاطع داده شده است. فرض کنید M معرف نقطهٔ میشل نظیر این خطها باشد (مسأله ۲۵۶ بخش ۲ را ببینید). ثابت کنید که اگر چهار تا از شش نقطهٔ برخورد دو به‌دو خطهای مفروض، بر دایره‌ای به‌مرکز O واقع باشند، آن وقت خط راستی که از دو نقطهٔ باقیمانده می‌گذرد، شامل نقطهٔ M و عمود بر OM است.

۲۵۹ـ چهار خط راست دو به‌دو متقاطع، چهار مثلث تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که اگر یکی از این خطها به موازات خط اویلر (مسأله ۱۴۷ بخش ۲ را ببینید) مثلث تشکیل شده با سه خط دیگر باشد، آن وقت سه خط دیگر نیز، همین ویژگی را دارند.

۲۶۰ـ مثلث ABC داده شده است. خط راستی، خطهای راست AB، BC و CA را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D، E و F قطع می‌کند. خطهای DC، AE و BF، مثلثی مانند KLM تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که دایره‌های به‌قطر DC، AE و BF، در دو نقطهٔ P و Q متقاطع‌اند (این دایره‌ها دو به‌دو متقاطع فرض شده‌اند) و خط PN از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLM و نیز از نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC، BDE، DAF و CEF می‌گذرد.

۲۶۱ـ مثلث ABC داده شده است. خطی دلخواه، خطهای راست AB، BC و CA را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D، E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد ارتفاعهای

* میشل، جان هنری (۱۸۷۹-۱۹۴۰)، ریاضی‌دان استرالیایی.

مثلثهای ABC، BDE، DAF و CEF، بر یک خط، عمود بر خط گاوسی مثلث (مسألهٔ ۵۳ بخش ۲ را ببینید)، قرار دارند.

۲۶۲ ـ ثابت کنید که عمود منصفهای پاره‌خطهایی که نقطه‌های برخورد ارتفاعها و مرکز دایره‌های محیطی چهار مثلث تشکیل شده با چهار خط راست دلخواه در صفحه را به‌هم وصل می‌کنند، در یک نقطه (نقطهٔ هروی*) متقاطع‌اند.

۲۶۳ ـ شانزده نقطه، مرکزهای کلیهٔ دایره‌های محاطی و محاطی خارجی چهار مثلث تشکیل شده با چهار خط متقاطع در صفحه، را در نظر بگیرید. ثابت کنید که این شانزده نقطه را می‌توان به‌چهار تا چهارتایی، به‌دو طریق چنان دسته‌بندی کرد که هر چهارتایی بر یک دایره قرار بگیرد. در روش اول، مرکزهای این دایره‌ها، روی یک خط راست و در روش دوم، روی خط راست دیگری قرار دارند. این خطها دو به‌دو بر هم عمودند و در نقطهٔ میشل، که نقطهٔ مشترک دایره‌های محیطی چهار مثلث است، متقاطع‌اند.

دایره‌ها و مماسها

قضیهٔ فوئرباخ**

۲۶۴ ـ روی یک خط راست، نقطه‌های A، B، C و D طوری قرار گرفته‌اند که $|AB|۲ = |BC|$ و $|AC| = |CD|$. دایره‌ای از A و C، و دایرهٔ دیگری از B و D می‌گذرد. ثابت کنید که وتر مشترک این دایره‌ها، پاره‌خط AC را نصف می‌کند.

۲۶۵ ـ فرض کنید B معرف نقطه‌ای متعلق به‌پاره‌خط AC باشد. شکل محدود به‌کمانهای سه نیمدایره به‌قطرهای AB، BC و CA، واقع در یک طرف خط CA، چاقوی کفاش یا چاقوی کفاشی ارشمیدس نامیده می‌شود. ثابت کنید، شعاعهای دو دایره، که هر کدام هم بر دو نیمدایره و هم بر خط عمود بر AC که از B می‌گذرد، مماس است، با یکدیگر برابرند (مسألهٔ ارشمیدس).

۲۶۶ ـ سه دایره، هر یک از دو نقطهٔ مفروض در صفحه می‌گذرند. فرض کنید $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ معرف مرکز آنها باشند. خط راستی که از یکی از نقطه‌های مشترک سه دایره می‌گذرد، برای بار دوم، آنها را، به‌ترتیب، در نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ قطع می‌کند. ثابت کنید که $|A_۱A_۲|:|A_۲A_۳| = |O_۱O_۲|:|O_۲O_۳|$.

۲۶۷ ـ دو دایرهٔ غیر متقاطع داده شده است. ثابت کنید که چهار نقطهٔ تماس مماسهای مشترک خارجی با این دایره‌ها، بر یک دایره واقع‌اند؛ به‌همین ترتیب، چهار نقطهٔ تماس مماسهای مشترک داخلی با دایره‌ها، بر دایرهٔ دومی قرار دارند و چهار نقطهٔ برخورد مماسهای مشترک داخلی با مماسهای مشترک خارجی، روی دایرهٔ سومی قرار دارند و این سه دایره هم‌مرکزند.

۲۶۸ ـ دو دایرهٔ نامتقاطع مفروض‌اند. دایرهٔ سومی بر آنها مماس بیرونی و مرکزش روی خطی

* Herwey

** Feuerbach

است که از مرکز دایره‌های مفروض می‌گذرد. ثابت کنید که دایرهٔ سوم، مماسهای مشترک داخلی دایره‌های مفروض را در چهار نقطه قطع می‌کند که تشکیل چهارضلعیی می‌دهند که دو ضلع آن به‌موازات مماسهای مشترک خارجی دایره‌های مفروض است.

۲۶۹ ـ دو دایره مفروض‌اند. خط راستی که یکی از دایره‌ها را در نقطه‌های A و C، و دایرهٔ دیگر را در نقطه‌های B و D قطع می‌کند، از مرکز دایرهٔ اول رسم شده است. ثابت کنید که اگر $|AB|:|BC| = |AD|:|DC|$، آن‌گاه دایره‌ها بر هم عمودند، یعنی، زاویهٔ بین مماسهای بر آنها در نقطهٔ بر خوردشان، قائمه است.

۲۷۰ ـ نقطه‌های A، B، C و D بر یک دایره یا یک خط راست واقع‌اند. چهار دایره از نقطه‌های A و B، B و C، C و D، و D و A رسم شده‌اند. فرض کنید A_1، B_1، C_1، D_1 و A_1 معرف نقطه‌های برخورد (متمایز از A، B، C و D)، به‌ترتیب، اولین و دومین، دومین و سومین، سومین و چهارمین، و چهارمین و اولین دایره باشند. ثابت کنید که نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 بر یک دایره (یا یک خط راست) قرار دارند.

۲۷۱ ـ از نقطهٔ A در بیرون دایره‌ای، دو مماس AM و AN (M و N نقطه‌های تماس‌اند) و دو قاطع رسم شده‌اند. فرض کنید P و Q معرف نقطه‌های برخورد دایره با قاطع اول، و K و L نقطه‌های برخورد آن با قاطع دوم باشند. ثابت کنید که خطهای راست PK، QL و MN یا در یک نقطه متقاطع و یا موازی‌اند.

سعی کنید روش ترسیم مماس بر دایره‌ای مفروض از نقطه‌ای داده شده، به‌کمک یک خطکش تنها، راگسترش دهید.

۲۷۲ ـ دایره‌ای با مرکز O و نقطهٔ A داده شده‌اند. فرض کنید B معرف نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد. مکان هندسی نقطه‌های برخورد مماسهای بر دایره در نقطهٔ B با خط راستی را که از O عمود بر AB می‌گذرد، پیدا کنید.

۲۷۳ ـ دایره‌ای و دو نقطهٔ A و B روی آن، داده شده است. فرض کنید N نقطه‌ای دلخواه روی خط AB باشد. دو دایره رسم می‌کنیم که هر یک از نقطهٔ N می‌گذرد و بر دایرهٔ مفروض، یکی در نقطهٔ A و دیگری در نقطهٔ B مماس است. فرض کنید M معرف دومین نقطهٔ برخورد این دایره‌ها باشد. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

۲۷۴ ـ دو وتر دلخواه PQ و KL از نقطه‌ای ثابت در درون دایره‌ای، رسم شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای PK و QL را پیدا کنید.

۲۷۵ ـ دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطع‌اند. خط راستی دلخواه از نقطهٔ B می‌گذرد و برای بار دوم، دایرهٔ اول را در نقطهٔ C و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ D قطع می‌کند. مماس بر دایرهٔ اول در نقطهٔ C و مماس بر دایرهٔ دوم در نقطهٔ D، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. از نقطهٔ برخورد AM و CD، خط راستی به‌موازات CM می‌گذرد و AC را در نقطهٔ K قطع می‌کند. ثابت کنید، KB بر دایرهٔ دوم مماس است.

۲۷۶ ـ دایره‌ای و مماس l بر آن داده شده است. فرض کنید N معرف نقطهٔ تماس و NM قطر دایره باشد. روی خط NM، نقطهٔ ثابت A اختیار می‌شود. دایره‌ای دلخواه با مرکز روی l را که از A می‌گذرد، در نظر بگیرید. فرض کنید C و D نقطه‌های برخورد این دایره با l، و P و Q نقطه‌های برخورد خطهای راست MC و MD با دایرهٔ مفروض باشند. ثابت کنید که وتر PQ از نقطهٔ ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۲۷۷ ـ نقطه‌های O_1 و O_2 مرکزهای دو دایرهٔ متقاطع هستند و A یکی از نقطه‌های برخورد آنهاست. دو مماس مشترک بر دایره‌ها رسم می‌شوند؛ BC و EF وترهای این دایره‌ها با نقطه‌های انتهایی نقطه‌های تماس هستند (C و F از A دورترند). M و N، به‌ترتیب، وسط BC و EF هستند. ثابت کنید که $\angle O_1AO_2 = \angle MAN = 2\angle CAE$.

۲۷۸ ـ قطر AB در دایره‌ای رسم شده است. CD وتری عمود بر AB است. دایره‌ای دلخواه، بر وتر CD و کمان CBD مماس است. ثابت کنید که طول مماس بر این دایره مرسوم از نقطهٔ A، برابر طول AC است.

۲۷۹ ـ قطعه‌ای از یک دایره مفروض است. دو دایرهٔ دلخواه، بر وتر و کمان قطعه، مماس و در نقطه‌های M و N متقاطع‌اند. ثابت کنید که خط راست MN از نقطهٔ ثابتی در صفحه می‌گذرد.

۲۸۰ ـ دو دایرهٔ متساوی و نامتقاطع مفروض‌اند. دو نقطهٔ دلخواه F و F' روی دو مماس مشترک داخلی آنها اختیار شده‌اند. از هر دو نقطه، می‌توان بیش از یک مماس بر هر دایره رسم کرد. فرض کنید مماسهای مرسوم از نقطه‌های F و F' بر یک دایره، در نقطهٔ A، و بر دایرهٔ دیگر، در نقطهٔ B، به‌هم برسند. مطلوب است اثبات: (۱) خط AB به‌موازات خطی است که مرکز دایره‌ها را به‌هم وصل می‌کند (در حالتی که دایره‌ها نابرابر باشند، AB از نقطهٔ برخورد مماسهای خارجی می‌گذرد)؛ (۲) خطی که وسطهای FF' و AB را به‌هم وصل می‌کند، از وسط پاره خطی که مرکز دایره‌ها را به‌هم وصل می‌کند، می‌گذرد.

(این مسأله را پروفسور و. یرماکوف برای خوانندگان «بولتن فیزیک تجربی و ریاضیات مقدماتی» پیشنهاد کرده بود. این مجله، قرن گذشته در روسیه چاپ می‌شده است. مسأله، در شمارهٔ (۲) ۱۴ از این بولتن، در سال ۱۸۸۷ چاپ شده است. جایزه‌ای، چند کتاب ریاضی، برای حل درست به‌خوانندگان پیشنهاد شده بود.)

۲۸۱ ـ سه دایرهٔ α، β و γ مفروض‌اند. فرض کنید l_1 و l_2 معرف مماسهای مشترک داخلی دایره‌های α و β، m_1 و m_2 مماسهای مشترک داخلی دایره‌های β و γ، و n_1 و n_2 مماسهای مشترک داخلی دایره‌های γ و α باشند. ثابت کنید که اگر خطهای l_1، m_1 و n_1 همرس باشند، آن وقت خطهای l_2، m_2 و n_2 نیز، همرس‌اند.

۲۸۲ ـ نقطه‌های C و D، کمان AB از دایره‌ای را به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند (C به A نزدیکتر است). در دوران دور A به‌اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$، نقطه‌های B، C و D به‌نقطه‌های B_1، C_1 و D_1 تبدیل می‌شوند. F محل برخورد خطهای راست AB_1 و DC_1 است؛ E نقطه‌ای روی نیمساز زاویهٔ

B_1BA است، به‌طوری که $|BD| = |DE|$. ثابت کنید که مثلث CEF متساوی‌الاضلاع است (قضیهٔ فینلی*).

* * *

۲۸۳ ـ زاویه‌ای با رأس A و دایره‌ای محاط در آن، داده شده است. خط راست دلخواهی مماس بر دایرهٔ مفروض، ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرهٔ محیط بر مثلث ABC، بر دایرهٔ محاط در زاویهٔ مفروض مماس است.

۲۸۴ ـ در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AC اختیار شده است. دایرهٔ مماس بر پاره‌خط AD در نقطهٔ M، بر پاره خط BD و بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر بگیرید. ثابت کنید، خط راستی که از نقطهٔ M به‌موازات BD می‌گذرد، بر دایرهٔ محاطی مثلث ABC مماس است.

۲۸۵ ـ در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AC اختیار شده است. فرض کنید O_1 مرکز دایره‌ای باشد که برپاره‌خطهای AD و BD و دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است، و O_2 مرکز دایره‌ای باشد که بر پاره‌خطهای CD و BD و دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است. ثابت‌کنید که خط O_1O_2 از O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، می‌گذرد و $|O_1O|:|OO_2| = \tan^2\frac{\varphi}{2}$، که در آن $\varphi = \angle BDA$ (قضیهٔ تبولت).

۲۸۶ ـ چهار دایره، هریک بر دایره‌ای مفروض مماس درونی و بر دو تا از وترهای دو به‌دو متقاطع آن مماس‌اند. ثابت کنید که قطرهای چهارضلعی با رأسهای مرکزهای این چهار دایره، دو به‌دو بر هم عمودند.

* * *

۲۸۷ ـ ثابت کنید که دایرهٔ نه‌نقطهٔ (مسألهٔ ۱۶۰ بخش ۲ را ببینید)، بر دایرهٔ محاطی مثلث و کلیهٔ دایره‌های محاطی خارجی آن مماس است (قضیهٔ فوئرباخ).

۲۸۸ ـ فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. ثابت کنید دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث، بر کلیهٔ دایره‌های محاطی و محاطی خارجی مثلثهای AHB، BHC و CHA مماس است.

۲۸۹ ـ ثابت کنید که نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC با دایره‌های محاطی و محاطی خارجی آن، بر میانخط مثلث قرار دارد.

۲۹۰ ـ فرض کنید F، F_a، F_b و F_c معرف نقطه‌های تماس دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث ABC با دایرهٔ

* *Finlay*

محاطی و سه دایرهٔ محاطی خارجی آن باشند (F_a نقطهٔ تماس با دایرهٔ به‌مرکز I_a است و غیره). به‌علاوه، فرض کنید A_1 و A_2، B_1 و B_2، و C_1 و C_2، به‌ترتیب، معرف نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A، B و C با ضلعهای روبه‌رو به‌آنها باشند. ثابت کنید که مثلثهای زیر دوبه‌دو متشابه‌اند: $\triangle F_aF_bF_c$ و $\triangle A_1B_1C_1$، $\triangle FF_bF_c$ و $\triangle A_1B_2C_2$، $\triangle FF_cF_a$ و $\triangle B_1C_2A_2$، $\triangle FF_aF_b$ و $C_1A_2B_2$ (قضیهٔ تبولت).

ترکیب شکلها. جابه‌جایی در صفحه. چندضلعیها.

۲۹۱ ـ سه مربع $BCDE$، $ACFG$ و $BAHK$ روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC و بیرون آن رسم شده‌اند. فرض کنید $FCDQ$ و $EBKP$ متوازی‌الاضلاع باشند. ثابت کنید که مثلث APQ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۲۹۲ ـ فرض کنید $ABCD$ مستطیل، E نقطه‌ای روی BC، F نقطه‌ای روی DC، E_1 وسط AE و F_1 وسط AF باشد. ثابت کنید که اگر مثلث AEF متساوی‌الاضلاع باشد، آن وقت مثلثهای DE_1C و BF_1C هم، متساوی‌الاضلاع‌اند.

۲۹۳ ـ دو مربع $ACKL$ و $BCMN$، روی ساقهای AC و BC از مثلثی قائم‌الزاویه و بیرون آن رسم شده‌اند. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی محدود به‌ساقهای مثلث مفروض و خطهای راست LB و NA، برابر است با مساحت مثلث تشکیل شده با خطهای LB، NA و وتر AB.

۲۹۴ ـ مربعهایی بر ضلعهای چهارضلعیی محدب و در بیرون آن رسم شده‌اند. ثابت کنید که اگر قطرهای چهارضلعی دوبه‌دو بر هم عمود باشند، آن وقت پاره‌خطهایی که مرکز مربعهای روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی می‌گذرند.

۲۹۵ ـ ثابت کنید، اگر مرکز مربعهایی که بر ضلعهای مثلثی مفروض و بیرون آن رسم شده‌اند، رأسهای مثلثی به‌حساب آیند که مساحتش دو برابر مساحت مثلث مفروض است، آن وقت مرکز مربعهایی که بر ضلعهای مثلث و در درون آن رسم شده‌اند، بر یک خط راست واقع‌اند.

۲۹۶ ـ روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC و بیرون آن، مثلثهای A_1BC و B_1CA و C_1AB طوری رسم شده‌اند که $\angle A_1BC = \angle C_1BA$، $\angle C_1AB = \angle B_1AC$ و $\angle B_1CA = \angle A_1CB$. ثابت کنید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲۹۷ ـ فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الساقین ($|AB| = |BC|$) و BD ارتفاع آن باشد. قرصی به‌شعاع BD، در امتداد خط راست AC دوران می‌کند. ثابت کنید، به‌شرط آنکه B در درون قرص باشد، طول کمان مستدیر در درون مثلث، ثابت است.

۲۹۸ ـ دو نقطه، روی دو خط راست متقاطع با سرعت برابر حرکت می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌ای ثابت در صفحه وجود دارد که در هر لحظه از زمان، به‌فاصلهٔ متساوی از نقطه‌های متحرک است.

۲۹۹ـ دو دوچرخه‌سوار دور دو دایرهٔ متقاطع می‌چرخند، هر دوچرخه سوار دور دایرهٔ خودش با تندیی ثابت می‌چرخد. با شروع همزمان از یک نقطهٔ برخورد دایره‌ها، دوچرخه‌سوارها، پس از یک‌دور چرخش، یک‌بار دیگر درهمین نقطه به‌هم می‌رسند. ثابت کنید که نقطه‌ای ثابت وجود دارد، به‌طوری که فاصله‌های آن تا دوچرخه سوارها، در هر لحظه برابرند، به‌شرطی که آنها (الف) در یک جهت (جهت گردش عقربه‌های ساعت)؛ (ب) در جهت مخالف هم، گردش کنند.

۳۰۰ـ ثابت کنید که: (الف) دوران دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ زاویهٔ α، هم‌ارز است با دو تقارن محوری متوالی که محورهایشان از نقطهٔ O می‌گذرد و زاویهٔ بین محورها $\frac{\alpha}{۲}$است؛ انتقال هم‌ارز است با دو تقارن محوری با محورهای موازی؛ (ب) دو دوران متوالی در یک جهت، یکی دور نقطهٔ $O_۱$ به‌اندازهٔ α و دیگری دور نقطهٔ $O_۲$ به‌اندازهٔ زاویهٔ β $(۰ \leq \alpha < ۲\pi$ و $۰ \leq \beta < ۲\pi)$ هم‌ارز است با یک دوران به‌اندازهٔ $\alpha+\beta$ دور نقطهٔ معلوم O، به‌شرطی که $\alpha+\beta \neq ۲\pi$. زاویه‌های مثلث $O_۱O_۲O$ را پیدا کنید.

۳۰۱ـ مثلث دلخواه ABCداده شده است. سه مثلث متساوی‌الساقین AKB، BLC و CMA با زاویهٔ رأسهای K، L و M، به‌ترتیب، برابر با α، β و γ، $\alpha+\beta+\gamma=۲\pi$، به‌قاعدهٔ ضلعهای مثلث رسم شده‌اند. همهٔ مثلثها، یا در بیرون مثلث ABC و یا در درون آن قرار گرفته‌اند. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث KLM برابرند با $\frac{\alpha}{۲}$، $\frac{\beta}{۲}$ و $\frac{\gamma}{۲}$.

۳۰۲ـ فرض کنید $ABCDEF$ شش ضلعیی محاطی باشدکه درآن $|AB|=|CD|=|EF|=R$، که R شعاع دایرهٔ محیطی است و O مرکز آن. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد دوبه‌دو دایره‌های محیطی مثلثهای BOC، DOE و FOA، متمایز از O، رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌ضلع R به حساب می‌آیند.

۳۰۳ـ چهار لوزی، هریک با زاویهٔ حادهٔ α، روی ضلعهای چهارضلعیی محدب و بیرون آن رسم شده‌اند. زاویه‌های دو لوزی مجاور به‌یک رأس از چهارضلعی، برابرند. ثابت کنید که پاره‌خطهایی که مرکز لوزیهای روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، با یکدیگر برابرند و زاویهٔ حادهٔ میان این پاره‌خطها، برابر با α است.

۳۰۴ـ مثلثی دلخواه داده شده است. روی ضلعها و بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که مرکزهایشان رأسهای مثلث Δ محسوب می‌شوند، رسم شده‌اند. مرکز مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که روی ضلعهای مثلث اصلی و در درون آن رسم شده‌اند، رأسهای مثلث دیگر δ، به‌حساب می‌آیند. ثابت کنید: (الف) Δ و δ مثلثهایی متساوی‌الاضلاع هستند؛ (ب) مرکزهای Δ و δ برمرکزثقل مثلث اصلی منطبق است؛ (ج) تفاضل میان مساحتهای Δ و δ، برابر با مساحت مثلث اصلی است.

۳۰۵ـ سه نقطه در صفحه‌ای داده شده‌اند. از این نقطه‌ها، سه خط که مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند، رسم شده است. مکان هندسی مرکز این مثلثها را بیابید.

۳۰۶ـ مثلث ABC داده شده است. روی خطی که از رأس A می‌گذرد و بر ضلع BC عمود است، دو نقطهٔ A_1 و A_2 طوری اختیار می‌شوند که $|AA_1| = |AA_2| = |BC|$ (A_1 از A_2 به‌خط BC نزدیکتر است). به‌همین ترتیب، روی خط عمود بر AC که از B می‌گذرد، نقطه‌های B_1 و B_2 طوری اختیار می‌شوند که $|BB_1| = |BB_2| = |AC|$. ثابت کنید که پاره‌خطهای A_1B_2 و A_2B_1 برابر و دوبه‌دو بر هم عمودند.

***

۳۰۷ـ ثابت کنید، چندضلعی محیطی که ضلعهایش برابرند، منتظم است، به‌شرطی که تعداد ضلعهای آن فرد باشد.

۳۰۸ـ خط راستی از مرکز n ضلعی منتظمی محاط در دایرهٔ واحد رسم شده است. مجموع مربعهای فاصله‌های این خط تا رأسهای n ضلعی را پیدا کنید.

۳۰۹ـ ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در درون چندضلعی محدب تا ضلعهای آن، ثابت است، به‌شرطی که (الف) همهٔ ضلعهای چندضلعی برابر باشند؛ (ب) همهٔ زاویه‌های چندضلعی برابر باشند.

۳۱۰ـ نیمدایره‌ای، با نقطه‌های A_0، A_1، $\ldots$، A_{2n+1}، به $2n+1$ کمان برابر تقسیم می‌شود (A_0 و A_{2n+1} دو انتهای نیمدایره هستند)، O مرکز نیمدایره است. ثابت کنید که خطهای راست OA_n و OA_{n+1}، ضمن برخورد با خطهای راست A_1A_{2n}، A_2A_{2n-1}، $\ldots$ و A_nA_{n+1}، پاره‌خطهایی تشکیل می‌دهند که مجموع طولهایشان برابر با شعاع دایره است.

۳۱۱ـ ثابت کنید که اگر عمودهای مرسوم بر ضلعهای $2n$ ضلعیی محاطی، نقطه‌ای دلخواه از دایره را تشکیل دهند، آن وقت حاصلضربهای یکی در میان طول عمودها با هم برابرند.

۳۱۲ـ فرض کنید $A_1A_2\ldots A_n$ چندضلعیی محاطی باشد؛ مرکز دایره، در درون چند ضلعی قرار دارد. مجموعه‌ای از دایره‌ها، بر دایرهٔ مفروض در نقطه‌های A_1، A_2، $\ldots$ و A_n مماس درونی‌اند و یکی از نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ مجاور، روی ضلعی از چندضلعی قرار دارد. ثابت کنید، اگر n فرد باشد، آن وقت شعاع همهٔ دایره‌ها یکی است. طول مرز بیرونی اجتماع دایره‌های محاطی، برابر با محیط دایرهٔ مفروض است.

۳۱۳ـ دایره‌ای که در آن $2n+1$ ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ محاط شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید A نقطه‌ای دلخواه از کمان A_1A_{2n+1} باشد.

(الف) ثابت کنید، مجموع فاصله‌های A تا رأسهای زوج، برابر است با مجموع فاصله‌های A تا رأسهای فرد.

(ب) دایره‌هایی برابر که به‌یک طریق بر دایرهٔ مفروض در نقطه‌های A_1، A_2، $\ldots$ و A_{2n+1} مماس‌اند، رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع طول مماسهای مرسوم از A بر دایره‌های مماس

بر دایرهٔ مفروض در رأسهای زوج، برابر است با مجموع طول مماسهای مرسوم از A بر دایره‌های مماس بر دایرهٔ مفروض در رأسهای فرد.

۳۱۴ـ (الف) دو مماس، بر دایره‌ای مفروض رسم شده‌اند. فرض کنید A و B معرف نقطه‌های تماس و C نقطهٔ برخورد مماسها باشد. خط راست دلخواه l را که بر دایرهٔ مفروض مماس است و از نقطه‌های A و B نمی‌گذرد، رسم می‌کنیم. فرض کنید u و v، به‌ترتیب، فاصلهٔ A و B تا l باشند و w فاصلهٔ C تا l باشد. اگر $\angle ACB = \alpha$ ، $\frac{uv}{w^2}$ را پیدا کنید.

(ب) یک چندضلعی بر دایره‌ای محیط شده است. فرض کنید l خط دلخواهی مماس بر دایره باشد و بر هیچ ضلع چندضلعی منطبق نباشد. ثابت کنید که نسبت حاصلضرب فاصله‌های رأسهای چندضلعی تا خط l به‌حاصلضرب فاصله‌های نقطه‌های تماس ضلعهای چندضلعی با دایره تا l، مستقل از جای خط l است.

(ج) فرض کنید $A_1A_2\ldots A_{2n}$ ۲nضلعیی محیط بر یک دایره، و l مماس دلخواهی بر دایره باشد. ثابت کنید که حاصلضرب فاصله‌های رأسهای فرد تا خط l، و حاصلضرب فاصله‌های رأسهای زوج تا خط l، دارای نسبتی ثابت، مستقل از l، هستند (فرض می‌شود خط l شامل هیچ رأس از چندضلعی نیست).

۳۱۵ـ در چندضلعیی محاطی، قطرهای نامتقاطع رسم می‌شوند و چندضلعی را به‌مثلثهایی تقسیم می‌کنند. ثابت کنید که مجموع شعاعهای دایره‌های محاط در این مثلثها، مستقل از طریقی است که قطرها رسم شده‌اند.

۳۱۶ـ فرض کنید $A_1A_2\ldots A_n$ چندضلعیی با محیط $2p$ ، محیط بر دایره‌ای به‌شعاع r باشد. B_1، B_2، . . . و B_n نقطه‌های تماس دایره، به‌ترتیب، با ضلعهای A_1A_2، A_2A_3، . . . و A_nA_1 هستند و M نقطه‌ای به‌فاصلهٔ d از مرکز دایره است. ثابت کنید که

$$|MB_1|^2|A_1A_2|+|MB_2|^2.|A_2A_3|+\cdots+|MB_n|^2.|A_nA_1| = 2p(r^2+d^2)$$

۳۱۷ـ فرض کنید $ABCD$ معرف چهارضلعیی محاطی و M نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ محیطی آن باشد. ثابت کنید که تصویرهای نقطهٔ M روی خطهای سیمسون (مسأله ۱۵۳ بخش ۲ را ببینید) نظیر نقطهٔ M نسبت به‌مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB، بر یک خط راست (خط سیمسون چهارضلعی) قرار دارند.

به‌علاوه، با دانستن خط سیمسون nضلعی، خط سیمسون $n+1$ضلعی را به‌استقرا پیدا می‌کنیم. برای مثال، برای $n+1$ضلعی دلخواه محاطی و نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی آن، تصویرهای این نقطه روی کلیهٔ خطهای سیمسون ممکن این نقطه نسبت به‌تمام nضلعیهای ممکن تشکیل شده با n رأس از این $n+1$ضلعی، روی یک خط راست، که خط سیمسون $n+1$ ضلعی است، قرار دارند.

۳۱۸ـ دایرهٔ β در درون دایرهٔ α قرار دارد. روی دایرهٔ α، دو دنباله از نقطه‌ها داده شده‌اند:

$A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، . . . و $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، . . . ، پشت سر هم در یک جهت و به‌طوری که خطهای راست $A_۱A_۲$، $A_۲A_۳$، $A_۳A_۴$ . . . و $B_۱B_۲$، $B_۲B_۳$، $B_۳B_۴$ . . . بر دایرهٔ β مماس‌اند. ثابت کنید که خطهای راست $A_۱B_۱$، $A_۲B_۲$، $A_۳B_۳$ . . . بر یک دایره، که مرکزش روی خط راستی قرار دارد که از مرکز دایره‌های α و β می‌گذرد، مماس‌اند.

۳۱۹ـ با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ قبل، حکم زیر (قضیهٔ پونسله*) را ثابت کنید. اگر یک nضلعی در دایرهٔ α محاط و بر دایرهٔ β محیط باشد، آن وقت بینهایت nضلعی محاط در دایرهٔ α و محیط بر دایرهٔ β وجود دارد، و هر نقطه از دایره، می‌تواند به جای یک رأس یک چنین nضلعیی اختیار شود.

۳۲۰ـ مثلثهای متساوی‌الساقین PXQ، QYR و RZP به‌قاعدهٔ ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع PQR، و در بیرون آن، رسم شده‌اند، به‌طوری که $\angle PXQ = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle A)$ و $\angle QYR = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle B)$ و $\angle RZP = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle C)$، که در آنها A، B و C زاویه‌های مثلث معلوم ABC هستند. فرض کنید $A_۰$ معرف نقطهٔ برخورد خطهای راست ZP و YQ، $B_۰$ نقطهٔ برخورد خطهای XQ و ZR، و $C_۰$ نقطهٔ برخورد YR و XP باشد. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث $A_۰B_۰C_۰$ بر زاویه‌های نظیر از مثلث ABC قابل انطباق‌اند.

با استفاده از نتیجهٔ حاصل، قضیهٔ زیر از مورلی** را ثابت کنید. اگر هریک از زاویه‌های مثلثی دلخواه، به‌سه قسمت برابر تقسیم شود (از این رو، خطهای مربوط را سه‌ساز می‌نامند)، آن وقت سه نقطهٔ برخورد زوج سه‌سازهای مجاور به‌ضلعهای نظیر از مثلث، رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند.

۳۲۱ـ رأسهای مثلث ABC را به‌ترتیب مثبت (عکس گردش عقربه‌های ساعت) مرتب می‌کنیم برای هر دو نیمخط α و β، نماد $(\alpha \,\hat{و}\, \beta)$ معرف زاویه‌ای است که به‌اندازهٔ آن نیمخط α باید در جهت عکس گردش عقربه‌های ساعت دوران کند تا بر نیمخط β منطبق گردد. فرض کنید $\alpha_۱$ و $\alpha'_۱$ معرف دو نیمخط با مبدأ A باشند که برای آنها

$$(AB \,\hat{و}\, \alpha_۱) = (\alpha_۱ \,\hat{و}\, \alpha'_۱) = (\alpha'_۱ \,\hat{و}\, AC) = \frac{۱}{۳}\angle A$$

$\alpha_۲$ و $\alpha'_۲$ دو نیمخط باشند که برای آنها

$$(AB \,\hat{و}\, \alpha_۲) = (\alpha_۲ \,\hat{و}\, \alpha'_۲) = (\alpha'_۲ \,\hat{و}\, AC) = \frac{۱}{۳}(\angle A + ۲\pi)$$

و بالاخره، $\alpha_۳$ و $\alpha'_۳$ نیمخطهایی باشند که برای آنها

$$(AB \,\hat{و}\, \alpha_۳) = (\alpha_۳ \,\hat{و}\, \alpha'_۳) = (\alpha'_۳ \,\hat{و}\, AC) = \frac{۱}{۳}(\angle A + ۴\pi)$$

---

* پونسله، ژان ویکتور (۱۷۸۸-۱۸۶۷)، هندسه‌دان و مهندس فرانسوی.

** مورلی (Morley)، فرانک (۱۸۶۰-۱۹۳۷)، ریاضی‌دان انگلیسی.

α_i و α'_i، $i = ۱, ۲, ۳$، را سه‌سازهای نوع اول، دوم و سوم می‌نامند). به‌همین ترتیب، برای رأسهای B و C، β_j، β'_j و γ_k، γ'_k $(j, k = ۱,۲,۳)$ را تعیین می‌کنیم. مثلث تشکیل شده با، به‌ترتیب، خطهای (نه نیمخطهای) متقاطع α_i و β'_j، β_j و γ'_k، و γ_k و α'_i را با $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که به‌ازای کلیهٔ i، j و kهایی که $i+j+k-۱$ مضربی از سه نباشد، مثلثهای $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ متساوی‌الاضلاع‌اند، ضلعهای متناظرشان موازی‌اند و رأسهایشان روی نه خط راست شش تا روی هر خط، واقع‌اند (قضیهٔ کامل مورلی).

نابرابریهای هندسی

مسأله‌های اکسترمم

۳۲۲ـ در آغاز قرن نوزدهم، مالفاتی*، هندسه‌دان ایتالیایی، این مسأله را پیشنهاد کرد: از مثلثی مفروض، سه دایره طوری جدا کنید که مجموع مساحتهای آنها بیشترین مقدار باشد. در تحقیقات بعدی، دایره‌های مالفاتی، سه دایرهٔ دوبه‌دو بر هم مماس و نیز هر یک مماس بر دو ضلع از مثلث مفروض، در نظر گرفته شدند (۱). ثابت کنید که برای مثلث متساوی‌الاضلاع، دایره‌های مالفاتی هیچ جوابی از مسألهٔ اصلی به دست نمی‌دهند. (تنها در میانهٔ این قرن بود که ثابت شد، برای هر مثلث، دایره‌های مالفاتی هیچ جوابی برای مسألهٔ اولیه به‌دست نمی‌دهند.)

۳۲۳ـ ثابت کنید، $p \geq \frac{۳}{۲}\sqrt{۶Rr}$، که در آن p نصف محیط مثلث است و r و R، به‌ترتیب، شعاع دایره‌های محاطی و محیطی آن هستند.

۳۲۴ـ ثابت کنید، محیط مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلثی مفروض با زاویه‌های حاده هستند، از نصف محیط مثلث مفروض تجاوز نمی‌کند.

۳۲۵ـ ثابت کنید که اگر مثلث تشکیل شده با میانه‌های مثلثی دیگر، منفرجه باشد، آن وقت کوچکترین زاویهٔ مثلث اولی، کمتر از ۴۵° است.

۳۲۶ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محدب باشد، ثابت کنید، دست کم یکی از چهار زاویهٔ BAC، DBC، ACD و BDA، از $\pi/۴$ تجاوز نمی‌کند.

۳۲۷ـ ثابت کنید که میانهٔ مرسوم بر بزرگترین ضلع مثلث، با ضلعهایی که این میانه را در بر دارند، زاویه‌هایی تشکیل می‌دهد که، هر یک، از نصف کوچکترین زاویهٔ مثلث، کمتر نیست.

۳۲۸ـ ثابت کنید که اگر در مثلث ABC، زاویهٔ B منفرجه باشد و $|AB| = |AC|/۲$، آن وقت $\angle C > \angle A/۲$.

۳۲۹ـ ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث نمی‌تواند از مرکز یک دایرهٔ محاطی خارجی آن

---

* مالفاتی، جیووانی فرانسیسکو جوزپ (۱۷۳۱-۱۸۰۷)، ریاضی‌دان ایتالیایی.

(۱) برای اطلاع ازچگونگی‌ترسیم دایره‌های مالفاتی، کتاب «نظریهٔ ساختمانهای هندسی» نوشتهٔ آگوست آدلر، ترجمهٔ پرویز شهریاری را ببینید. ـ م.

بگذرد.

۳۳۰ـ در مثلثی، یک میانه، یک نیمساز و یک ارتفاع از رأس A خارج شده‌اند. زاویهٔ A داده شده است، معلوم کنید کدام یک از این زاویه‌ها بزرگتر است: زاویهٔ بین میانه و نیمساز یا زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع.

۳۳۱ـ ثابت کنید که اگر میانه‌های مرسوم از رأسهای B و Cی مثلث ABC دو به‌دو بر هم عمود باشند، آن وقت $\cot B + \cot C \geq ۲/۳$.

۳۳۲ـ مثلث ABC داده شده است، $|AB| < |BC|$. ثابت کنید که برای نقطهٔ دلخواه M روی میانهٔ مرسوم از رأس B، $\angle BAM > \angle BCM$.

۳۳۳ـ دو مماس AB و AC، از نقطهٔ بیرونی A، بر دایره‌ای رسم شده‌اند؛ D و E، وسط مماسها، با خط راست DE به‌هم وصل می‌شوند. ثابت کنید که این خط، دایره را قطع نمی‌کند.

۳۳۴ـ ثابت کنید که اگر خط راستی، دایره‌ای را قطع نکند، آن وقت برای هر دو نقطه از خط، فاصلهٔ میان انها، بین مجموع و تفاضل طول مماسهای مرسوم از این نقطه‌ها بر دایره، محدود است. عکس این را هم ثابت کنید: اگر برای دو نقطه روی خط، ادعای بالا محقق نباشد، آن وقت خط دایره را قطع می‌کند.

۳۳۵ـ در مثلث ABC، زاویه‌ها با نابرابری $۳\angle A - \angle C < \pi$ به‌هم مربوط‌اند. زاویهٔ B، با خطهای راستی که ضلع AC را قطع می‌کنند، به‌چهار بخش برابر تقسیم می‌شود. ثابت کنید که پاره‌خط سوم (با شمارش از رأس A) از تقسیمات ضلع AC، از $|AC|/۴$ کوچکتر است.

۳۳۶ـ فرض کنید a، b، c و d طول ضلعهای متوالی یک چهارضلعی باشند. ثابت کنید که هرگاه S مساحت آن باشد، آن وقت $S \leq (ac+bd)/۲$، برابری، تنها در چهارضلعیی محاطی که قطرهایش دوبه‌دو بر هم عمودند، رخ می‌دهد.

۳۳۷ـ ثابت کنید که اگر طول نیمسازهای مثلثی از ۱ کمتر باشد، آن وقت مساحت آن از $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ کمتر است.

۳۳۸ـ ثابت کنید که مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است، بر حسب آنکه، عبارت $a^۲+b^۲+c^۲-۸R^۲$، به‌ترتیب، مثبت، صفر و یا منفی باشد (a، b و c طول ضلعهای مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی آن است).

۳۳۹ـ ثابت کنید که مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است، بر حسب آنکه، نصف محیط آن، به‌ترتیب، بزرگتر از، برابر یا کمتر از مجموع قطر دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی آن باشد.

۳۴۰ـ ثابت کنید که اگر ضلعهای مثلثی با نابرابری $a^۲+b^۲>۵c^۲$ به‌هم مربوط باشند، آن وقت c طول کوچکترین ضلع است.

۳۴۱ـ در مثلث ABC، $\angle A < \angle B < \angle C$، I مرکز دایرهٔ محاطی، O مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهاست. ثابت کنید که I در درون مثلث BOH قرار دارد.

۳۴۲ـ مثلثهای ABC و AMC طوری قرار دارند که MC، AB را در نقطهٔ O قطع می‌کند و

$|BC|+|AB|=|AM|+|MC|$. ثابت کنید که اگر $|AB|=|BC|$، آن وقت $|OB|>|OM|$.

۳۴۳ـ در مثلث ABC، نقطهٔ M روی ضلع BC قرار دارد. ثابت کنید که

$$(|AM|-|AC|)\,|BC|\leq(|AB|-|AC|)\,|MC|$$

۳۴۴ـ فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC و M نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. مینیمم مجموع $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2$ را بیابید.

۳۴۵ـ ضلعهای زاویه‌ای برابر با α، لبه‌های یک میز بیلیارد را تشکیل می‌دهند. ماکسیمم تعداد بازگشتهایی که یک توپ (توپ بدون بعد فرض می‌شود) می‌تواند انجام دهد، چیست؟

۳۴۶ـ چهار دهکده در رأسهای مربعی به‌ضلع ۲km واقع‌اند. دهکده‌ها با جاده به‌هم مرتبطاند، به‌طوری که هر دهکده به‌بقیه وصل شده است. آیا ممکن است طول همهٔ جاده‌ها از ۵٫۵km کمتر باشد.

۳۴۷ـ نقطهٔ A، بین دو خط موازی، به‌فاصلهٔ a و b از آنها، قرار دارد. این نقطه، یک رأس با زاویهٔ α، در کلیهٔ مثلثهای ممکن، که دو رأس دیگر آنها روی دو خط مفروض (یکی روی هر خط) قرار دارند، به‌حساب می‌آید. مساحت کوچکترین مثلث را پیدا کنید.

۳۴۸ـ در دایره‌ای به‌شعاع R با مرکز O و قطر AB، نقطهٔ M روی شعاع OA طوری است که $|AM|:|MO|=k$. وتر دلخواه CD، ازنقطهٔ M رسم می‌شود. ماکسیمم مساحت چهارضلعی $ABCD$ چیست؟

۳۴۹ـ زاویه‌ای با رأس A و دو نقطهٔ M و N در درون این زاویه، داده شده‌اند. از M، یک خط راست که ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند، رسم می‌شود. ثابت کنید، برای اینکه مساحت چهارضلعی $ABNC$ مینیمم باشد، لازم و کافی است که خط راست BC، AN را در نقطه‌ای مانند P طوری قطع کند که $|BP|=|MC|$. روش ترسیم این خط را بیان کنید.

۳۵۰ـ رأس زاویه‌ای به‌اندازهٔ α، در نقطهٔ O، و A نقطه‌ای ثابت در درون این زاویه است. روی ضلعهای زاویه، نقطه‌های M و N طوری اختیار می‌شوند که $\angle MAN=\beta$ $(\alpha+\beta<\pi)$. ثابت کنید که هرگاه $|AM|=|AN|$، آن وقت، مساحت چهارضلعی $OMAN$ به‌ماکسیمم خود می‌رسد (از همهٔ چهارضلعیهای ممکن درنتیجهٔ تغییر M و N).

۳۵۱ـ با در نظر داشتن نتیجهٔ مسألهٔ قبل، مسألهٔ زیر را حل کنید. نقطهٔ A در درون زاویه‌ای با رأس O اختیار شده است. خط راست OA، با ضلعهای زاویه، زاویه‌های φ و ψ می‌سازد. روی ضلعهای زاویهٔ اولی، نقطه‌های M و N را طوری پیدا کنید که $\angle MAN=\beta$ $(\varphi+\psi+\beta<\pi)$ و مساحت چهارضلعی $OMAN$ ماکسیمال باشد.

۳۵۲ـ مثلث OBC $(\angle BOC=\alpha)$ داده شده است. برای هر نقطه مانند A روی ضلع BC، نقطه‌های M و N را، به‌ترتیب، روی OB و OC طوری معلوم می‌کنیم که $\angle MAN=\beta$

($\alpha+\beta<\pi$) و مساحت چهارضلعی $OMAN$ ماکسیمال باشد. ثابت کنید که این مساحت ماکسیمال، مینیمم خود را به‌ازای نقطه‌هایی مانند A، M و N، که برای آنها $|MA| = |AN|$ و خط راست MN با BC موازی است، به‌دست‌می‌آورد (چنین نقطه‌هایی وجود دارند به‌شرطی که زاویه‌های B و Cی مثلث ABC، از $\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$ تجاوز نکنند).

۳۵۳ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. طول قطر AC برابر با a است و با ضلعهای AB و AD، به‌ترتیب، زاویه‌های α و β تشکیل می‌دهد. ثابت کنید که اندازهٔ مساحت این چهارضلعی، بین $\frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$ و $\frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}$ قرار دارد.

۳۵۴ـ زاویه‌ای به‌اندازهٔ α با رأس نقطهٔ O و نقطهٔ A در درون زاویه، داده شده است. همهٔ چهارضلعیها مانند $OMAN$ را، با رأسهای M و N روی ضلعهای زاویه، در نظر بگیرید، به‌طوری که $\angle MAN=\beta$ ($\alpha+\beta>\pi$). ثابت کنید که اگر میان این چهارضلعیها، چهارضلعیی محدب وجود داشته باشد، به‌طوری که $|MA| = |AN|$، آن وقت این چهارضلعی، کمترین مساحت را، بین چهارضلعیهای مورد بحث، داراست.

۳۵۵ـ نقطهٔ A را در درون زاویه‌ای با رأس O در نظر بگیرید، OA، با ضلعهای زاویهٔ مفروض زاویه‌های φ و ψ می‌سازد. روی ضلعهای زاویه، نقطه‌های M و N را طوری پیدا کنید که $\angle MAN=\beta$ ($\varphi+\psi+\beta>\pi$) و مساحت چهارضلعی $OMAN$ مینیمال باشد.

۳۵۶ـ مثلث OBC داده شده است، $\angle BOC=\alpha$. برای هر نقطه مانند A روی ضلع BC، نقطه‌های M و N را، به‌ترتیب، روی OB و OC طوری معلوم می‌کنیم که $\angle MAN=\beta$ و مساحت چهارضلعی $OMAN$ مینیمال باشد. ثابت کنید که این مساحت مینیمال، به‌ازای نقطه‌هایی چون A، M و N، که برای آنها $|MA| = |AN|$ و خط راست MN موازی BC است، ماکسیمال است (اگر چنین نقطهٔ Aای وجود نداشته باشد، آن وقت، ماکسیمم در انتهای ضلع BC، به‌ازای چهارضلعیی تباهیده، به‌دست می‌آید).

۳۵۷ـ اندازهٔ شعاع بزرگترین دایره را پیدا کنید که با سه دایره به‌شعاع R پوشانده شود. مسأله را در حالت کلی، وقتی که شعاعها R_1، R_2 و R_3 هستند، حل کنید.

۳۵۸ـ آیا ممکن است مربعی به‌ضلع ۵/۴ را با سه مربع به‌ضلع واحد پوشاند؟

۳۵۹ـ بیشترین مقدار مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که می‌تواند با سه مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۱ پوشانده شود، چیست؟

۳۶۰ـ در مثلث ABC، روی ضلعهای AC و BC، به ترتیب، نقطه‌های M و N، و نقطهٔ L روی پاره‌خط MN، اختیار می‌شود. فرض کنید مساحت مثلثهای ABC، AML و BNL، به‌ترتیب، S، P و Q باشد. ثابت کنید که $\sqrt[3]{S}\geq\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q}$.

۳۶۱ـ فرض کنید a، b، c و S، به‌ترتیب، معرف طول ضلعها و مساحت یک مثلث، و α، β و γ زاویه‌های مثلثی دیگر باشند. ثابت کنید که $a^2\cot\alpha+b^2\cot\beta+c^2\cot\gamma\geq 4S$، برابری،

تنها در حالتی که مثلثها متشابه باشند، رخ می‌دهد.

۳۶۲ـ نابرابری $a^۲+b^۲+c^۲ \geq ۴S\sqrt{۳}+(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲$ را ثابت کنید، که در آن a، b، c و S، به‌ترتیب، طول ضلعها و مساحت مثلث هستند (نابرابری فینسلر ـ هادویگر*).

۳۶۳ـ مثلثی به‌ضلعهای a، b و c، مفروض است. مساحت بزرگترین مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث مفروض و مساحت کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن را پیدا کنید.

۳۶۴ـ فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث ABC باشد. خط راست AM، دایرهٔ محیط بر مثلث ABC را در نقطهٔ $A_۱$ قطع می‌کند. ثابت کنید، $\frac{|BM|.|CM|}{|A_۱M|} \geq ۲r$، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است. برابری، وقتی که M بر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث منطبق باشد، به‌دست می‌آید.

۳۶۵ـ فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث ABC باشد. ثابت کنید که $|AM|\sin \angle BMC+|BM|\sin \angle AMC+|CM|\sin \angle AMB \leq p$ (p نصف محیط مثلث ABC است). برابری، وقتی که M بر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث منطبق باشد، رخ می‌دهد.

۳۶۶ـ فرض کنید $h_۱$، $h_۲$ و $h_۳$ طول ارتفاعهای مثلث ABC و u، v و w فاصلهٔ ضلعهای متناظر تا نقطهٔ M، واقع در درون مثلث ABC، باشند. نابرابریهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $\frac{h_۱}{u}+\frac{h_۲}{v}+\frac{h_۳}{w} \geq ۹$

(ب) $h_۱h_۲h_۳ \geq ۲۷uvw$

(ج) $(h_۱-u)(h_۲-v)(h_۳-w) \geq ۸uvw$

۳۶۷ـ فرض کنید h طول بزرگترین ارتفاع مثلثی غیر منفرجه، و R و r، به‌ترتیب، شعاع دایره‌های محیطی و محاطی آن باشند. ثابت کنید که $R+r \leq h$ (قضیهٔ اردیش**).

۳۶۸ـ ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث تشکیل شده با میانه‌های مثلثی حاده، از ۵/۶ شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث اصلی بزرگتر است.

۳۶۹ـ ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در صفحه تا ضلعهای مثلث، کمترین مقدار را به‌ازای نقطه‌ای در درون مثلث که فاصله‌هایش تا ضلعهای متناظر، با همین ضلعها متناسب‌اند، می‌گیرد. همچنین، ثابت کنید که این نقطه، محل برخورد هم‌میانه‌های مثلث مفروض است (نقطهٔ لموان***).

---

* *Finsler - Hadviger*

** پال اردیش (Paul Erdös)، ریاضی‌دان مجاری (تولد، ۱۹۱۳). شهرتش بیشتر به‌خاطر طرح و حل مسأله‌های دشوار ریاضی است. ـ م.

*** *Lemuan*

۳۷۰ـ مثلثی که هر یک از زاویه‌هایش از 120° کمتر است، مفروض است. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در درون آن تا رأسهای این مثلث، کمترین مقدار را می‌گیرد، به‌شرطی که هر ضلع مثلث از آن نقطه به‌زاویهٔ 120° دیده شود (نقطهٔ توریچلی).

۳۷۱ـ ثابت کنید که از میان همهٔ مثلثهای محاط در یک مثلث حادهٔ مفروض، مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلث مفروض است، کمترین محیط را دارد.

۳۷۲ـ ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ای در درون مثلث تا رأسهای آن، از $6r$، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است، کمتر نیست.

۳۷۳ـ در مثلثی دلخواه، نابرابری $\dfrac{bc\cos A}{b+c}+a<p<\dfrac{bc+a^2}{a}$ را ثابت کنید، که در آن a، b و c طول ضلعهای مثلث‌اند و p نصف محیط آن است.

۳۷۴ـ فرض کنید K معرف نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی محدب $ABCD$، L نقطه‌ای بر ضلع AD، N نقطه‌ای بر ضلع BC و M نقطه‌ای بر قطر AC باشد، KL و MN با AB، و LM با DC موازی است. ثابت کنید که $KLMN$ متوازی‌الاضلاع و مساحت آن از ۸/۲۷ مساحت چهارضلعی $ABCD$ کمتر است (قضیهٔ هاتوری*).

۳۷۵ـ دو مثلث، ضلعی مشترک دارند. ثابت کنید که فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محاطی آنها، از فاصلهٔ بین رأسهای نامنطبق آنها، کمتر است (مسألهٔ زالگالر**).

۳۷۶ـ مثلث ABC که زاویه‌هایش برابرند با α، β و γ، مفروض است. مثلث DEF بر مثلث ABC طوری محیط می‌شود که رأسهای A، B و C، به‌ترتیب، روی ضلعهای EF، FD و DE قرار می‌گیرند، و $\angle ECA = \angle DBC = \angle FAB = \varphi$. مقدار زاویهٔ φ را که به‌ازای آن مساحت مثلث EFD ماکسیمم خود را به‌دست می‌آورد، پیدا کنید.

۳۷۷ـ در مثلث ABC، نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، بر ضلعهای آن: BC، CA و AB اختیار شده‌اند. ثابت کنید که مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ از مساحت دست کم یکی از سه مثلث: AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C، کمتر نیست.

۳۷۸ـ فرض کنید O، I و H، به‌ترتیب، معرف مرکز دایره‌های محیطی و محاطی مثلثی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن باشند. ثابت کنید که $|OH| \geq |IH|\sqrt{2}$.

۳۷۹ـ فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث ABC باشد؛ x، y و z فاصله‌های نقطهٔ M تا رأسهای A، B و C؛ u، v و w فاصله‌های نقطهٔ M، به‌ترتیب، تا ضلعهای BC، CA و AB؛ a، b و c طول ضلعهای مثلث؛ S مساحت آن، R و r، به‌ترتیب، شعاع دایره‌های محیطی و محاطی هستند. نابرابریهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $ax+by+cz \geq 4S$

---

* Hattori

** ویکتور آبراموویچ زالگالر (Viktor Abramovich Zalgaller) (تولد، ۱۹۲۰)، هندسه‌دان روس. ـ م.

(ب) $x+y+z \geq ۲(u+v+w)$ (نابرابری اردیش)

(ج) $xu+yv+zw \geq ۲(uv+vw+wu)$

(د) $۲\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\right) \leq \frac{۱}{u}+\frac{۱}{v}+\frac{۱}{w}$

(هـ) $xyz \geq \frac{R}{۲r}(u+v)\ (v+w)\ (w+u)$

(و) $xyz \geq \frac{۴R}{r}uvw$

(ز) $xy+yz+zx \geq \frac{۲R}{r}\ (uv+vw+wu)$

۳۸۰ـ در مثلثی مفروض، میانهٔ بزرگترین ضلع را رسم می‌کنیم. این میانه، مثلث را به‌دو بخش تقسیم می‌کند. در هریک از مثلثهای حاصل هم، میانهٔ بزرگترین ضلع را رسم می‌کنیم، و غیره. ثابت کنید، تمام مثلثهای ساخته شده را می‌توان به‌تعداد متناهی رده تقسیم کرد، به‌این ترتیب که کلیهٔ مثلثهای متعلق به‌یک رده، متشابه باشند. همچنین، ثابت کنید که هر زاویهٔ مثلث تازه به دست آمده، از نصف کوچکترین زاویهٔ مثلث اصلی، کمتر نیست.

۳۸۱ـ مثلثی با کمترین مساحت پیدا کنید که بتواند هر مثلث با طول ضلعهای نابیشتر از ۱ را بپوشاند.

جوابها، راهنماییها، راه حلها

بخش ۱

۱۷ ـ این نیمساز، مثلث مفروض را به دو بخش که مساحتهایشان برابرند با $\frac{al}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\frac{bl}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}$، تقسیم می‌کند. مساحت تمام مثلث، $\frac{ab}{۲}\sin\alpha$ است؛ بنابراین

$$\left(\frac{al}{۲}+\frac{bl}{۲}\right).\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{ab}{۲}\sin\alpha$$

و

$$l=\frac{۲ab\cos\frac{\alpha}{۲}}{a+b}$$

۱۹ ـ دایره‌ای مماس بر ضلعهای AB، BC و CD اختیار می‌کنیم. اگر این دایره بر ضلع DA مماس نباشد، آن وقت با رسم مماس $DA_۱$ بر دایره ($A_۱$ روی AB قرار دارد)، به‌مثلث $DAA_۱$ می‌رسیم که در آن یک ضلع برابر مجموع دو ضلع دیگر است.

۲۰ ـ با ترسیم خطهای راستی از رأسهای مثلث به‌موازات ضلعهای روبه‌رو به‌آنها، به‌مثلثی می‌رسیم که ارتفاعهای مثلث اصلی بر ضلعهای آن، در وسط آنها، عمودند.

۲۱ ـ $\frac{a+b}{۲}$.

۲۲ ـ $\frac{c}{۲}\sqrt{\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}}$.

۲۳ ـ $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}(a+b-\sqrt{a^۲+b^۲})$.

۲۴ ـ $m^۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

۲۵ ـ $\frac{c+a}{b}$.

۲۸ ـ $\frac{|a-b|}{۲}$.

۲۹ ـ $\frac{۱}{۲}(a-b)^۲\sin\alpha$.

۳۰ ـ $\frac{h}{۲}\tan^۲\frac{\pi-\alpha}{۴}$.

۳۱ـ ۳۰°.

۳۲ـ $\frac{ab}{۲}$.

۳۳ـ ۹۰°.

۳۶ـ $r^۲(۲\sqrt{۳}+۳)$.

۳۷ـ $l\sqrt{a(۲l-a)}$.

۳۸ـ $\frac{۱}{۲}(S_۱+S_۲)$.

۳۹ـ اگر $a>b$، آن وقت نیمساز، ضلع جانبی CD را قطع می‌کند؛ اگر $a<b$، آن وقت BC قاعده است.

۴۰ـ $\frac{۲ab}{a+b}$.

۴۱ـ $\arccos\frac{۱-k}{۱+k}$.

۴۲ـ $\frac{a+b}{۴}\sqrt{۳b^۲+۲ab-a^۲}$.

۴۳ـ $a^۲$.

۴۴ـ $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{S}{۲}}$.

۴۵ـ $(\sqrt{S_۱}+\sqrt{S_۲})^۳$.

۴۶ـ $۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$.

۴۷ـ $\frac{|a-b|}{a+b}\sqrt{a^۲+b^۲}$.

۴۸ـ $\arcsin\left(\frac{b}{a}-۱\right)$.

۴۹ـ $(۶-\pi):۲\pi:(۶-\pi)$.

۵۰ـ $\frac{a^۲}{۸}(\sqrt{۲}-۱)[(۲\sqrt{۲}-۱)\pi-۴]$.

۵۱ـ $\frac{a^۲}{۴}(۶\sqrt{۳}-۶-\pi)$.

۵۲ـ $\frac{R^۲}{۲}\left(\frac{\pi}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$.

۵۳ـ $\frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲-a^۲}$.

۵۴ـ $\frac{d}{۳}$.

۵۵ـ $\frac{۴}{۹}S$.

۵۸ـ اگر $\alpha<۹۰^\circ$ و $\beta<۹۰^\circ$، آن وقت زاویه‌های $\triangle ABC$ برابرند با $۹۰^\circ-\alpha$، $۹۰^\circ-\beta$ و $\alpha+\beta$؛ اگر $\alpha>۹۰^\circ$ و $\beta<۹۰^\circ$، آن وقت زاویه‌ها برابرند با $\alpha-۹۰^\circ$، $۹۰^\circ+\beta$ و $۱۸۰^\circ-\alpha-\beta$؛ اگر $\alpha<۹۰^\circ$ و $\beta>۹۰^\circ$، آن وقت زاویه‌ها برابرند با $۹۰^\circ+\alpha$، $\beta-۹۰^\circ$ و $۱۸۰^\circ-\alpha-\beta$.

۵۹ـ $\frac{۱}{۲}\sqrt{m^۲-۴S}$.

۶۰ـ $\frac{a}{۵}$.

۶۱ـ $\frac{۳۶}{۲۵}h^۲$.

۶۲ـ $\sqrt{\frac{S}{\pi(۴\pi^۲-۱)}}$.

۶۳ـ در مثلثی متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $\frac{\pi}{۵}$، نیمساز یک زاویهٔ مجاور به‌قاعده، مثلث را به‌دو مثلث، که یکی با مثلث اصلی متشابه است، تقسیم می‌کند.
جواب: $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}R$.

۶۴ـ $R^۲\left[\cot\frac{\alpha}{۲}-\frac{۱}{۲}(\pi-\alpha)\right]$.

۶۵ـ $\frac{a}{۴}\sqrt{۱۰}$.

۶۶ـ $\frac{a(۴\sin^۲\alpha+۱)}{۸\sin\alpha}$.

۶۷ـ $۲r^۲(۲\sqrt{۳}+۳)$.

۶۸ـ $\frac{a^۲+۴r^۲}{۴r}$.

۶۹ـ $\frac{۳a}{۲(۵+\sqrt{۱۳})}$.

۷۰ـ $\frac{a\sqrt{۱۰}}{۴}$.

۷۱ـ ۲.

۷۳ـ $\frac{a}{۲}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}-\cot\alpha\right)$.

۷۴ـ $\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}{\sin(\alpha+\beta)}$.

۷۵ـ $\frac{R^۲-a^۲}{۲R}$.

۷۶ـ $\frac{a\sqrt{۷}}{۳\sqrt{۳}}$.

۷۷ـ $a\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{۱}{۲}\right)$.

۷۸ـ $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲}$.

۷۹ـ $\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma-\alpha)$.

۸۰ـ $\frac{ac+bd}{a}$.

۸۱ـ $\frac{\pi}{۲\sin^۲\alpha\sin ۲\beta}$.

۸۲ـ $\frac{|b-a|}{۴}\sqrt{۴d^۲-(b-a)^۲}$.

۸۳ـ $۲(R^۲+a^۲)$.

۸۴ـ دو حالت ممکن است: دو مرکز، در دو طرف وتر مشترک و یا در یک طرف آن باشند. بنابراین، دو جفت جواب داریم: $a(\sqrt{۳}-۱)$، $a\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$، و $a(\sqrt{۳}+۱)$، $a\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۳}+۱)$.

۸۶ـ $\frac{۳-\sqrt{۷}}{۴}$.

۸۷ـ $\sqrt{۱۳}$.

۸۸ـ $\arccos\frac{۱\pm\sqrt{۱-۲k}}{۲}$.

۸۹ـ $\frac{۲}{۳}$.

۹۰ـ $\frac{۳a^۲}{۸}$.

۹۱ـ $\frac{\pi}{۲}$، $\left|\alpha+\frac{\beta}{۲}-\frac{\pi}{۲}\right|$ و $\frac{\pi}{۲}-\left|\alpha+\frac{\beta}{۲}-\frac{\pi}{۲}\right|$.

۹۲ـ $a^۲\frac{۲\sqrt{۳}-۳}{۸}$ (به‌طور کلی، دو مثلث ممکن است، اما یکی از آنها، دو رأسش روی امتدادهای قطرها واقع است.)

۹۳ـ $\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$.

۹۴ـ $\frac{br}{c}$.

۹۵ـ $\sqrt{7}$.

۹۶ـ $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$.

۹۷ـ $\sqrt{10}$.

۹۸ـ $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}-1$.

۱۰۰ـ $\frac{1}{3}\sqrt{96-54\sqrt{3}}$.

۱۰۱ـ ۳:۴

۱۰۲ـ $a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$.

۱۰۳ـ $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}$.

۱۰۴ـ $\frac{3}{4}S$.

۱۰۵ـ $\frac{4\sqrt{Rr}(R-r)}{6Rr-r^2-R^2}$.

۱۰۶ـ $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2(b-a\cos\alpha)}$.

۱۰۷ـ $\frac{3}{10}c$.

۱۰۸ـ $\dfrac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\sin\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

۱۰۹ـ $S\cos^2\alpha$.

۱۱۰ـ $\sqrt{4R^2-a^2}$.

۱۱۱ـ $\frac{b}{2}$.

۱۱۲ـ $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\cdot|\cot\alpha|$.

۱۱۳ـ $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}ab\cos\alpha}$.

۱۱۴ـ $\arcsin\frac{2}{\pi}$ و $\pi-\arcsin\frac{2}{\pi}$

۱۱۵ـ $a^2(\sqrt{2}-1)$.

۱۱۶ـ $\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$ و $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+\beta)}$.

۱۱۷ـ $\frac{1}{2}a(b-a\cos\alpha)\sin^3\alpha$.

۱۱۸ـ $\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}$.

۱۱۹ـ $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$.

۱۲۰ـ $4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_2\sin^2\frac{\alpha}{2}+R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

۱۲۱ـ $\frac{۱۵۰}{۷}$.

۱۲۲ـ $\sqrt{\frac{d^۲}{۴}+\frac{\sin^۲\frac{\beta}{۲}\cos^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}}{a^۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}}$.

۱۲۳ـ $\sqrt{a^۲+b^۲-ab}$ و $\sqrt{a^۲+b^۲+ab}$.

۱۲۵ـ ۱۵° و ۷۵°.

۱۲۶ـ $\frac{R\sqrt{۳}}{۸}$.

۱۲۷ـ $۲\sqrt{۶}$.

۱۲۸ـ $\sqrt{۲}$.

۱۲۹ـ $\frac{۴}{۳}(۲\sqrt{۳}+۳)$.

۱۳۰ـ $\frac{۲R^۲\sin^۳\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

۱۳۱ـ $\frac{۳\sqrt{۳}(\sqrt{۱۳}-۱)}{۳۲\pi}$.

۱۳۲ـ ۱ر۱.

۱۳۳ـ اگر $\frac{a}{۲} > R > \frac{a}{۴}$، تنها یک جواب وجود دارد: $\frac{a^۲}{۱۶R}$. اگر $۰ < R \le \frac{a}{۴}$ یا $R \ge ۲$، دو جواب داریم: $\frac{a^۲}{۱۶R}$ و $\frac{a^۲}{۸R}$.

۱۳۴ـ $\frac{\pi}{۲}$ و $\arccos\frac{R^۲-r^۲}{R^۲+r^۲}$.

۱۳۵ـ ۳۰°.

۱۳۶ـ $\frac{a\sqrt{۷}}{۴}$.

۱۳۷ـ $\frac{R(۳-۲\sqrt{۲})}{۳}$.

۱۳۸ـ $۴\sqrt{\frac{۱-\cos\beta}{۳-\cos\beta}}$.

۱۳۹ـ $\frac{ab\tan\alpha}{\sqrt{a^۲\tan^۲\alpha+(a-b^۲)}}$.

(در مثلث ONP، KP و NM ارتفاع هستند، بنابراین OA ارتفاع است.)

۱۴۰ـ $\frac{۲Rr}{R+r}$.

۱۴۱ـ $\frac{a}{۲}$.

۱۴۳ـ خطا از ۰ر۰۰۰۰۵| شعاع دایره تجاوز نمی‌کند.

۱۴۴ـ $۱۱۳-۵۶\sqrt{۳}$.

۱۴۵ـ ۷ر۵.

۱۴۶ـ $۳\frac{۱}{۱۲}$.

۱۴۷ـ $\frac{۲\pi}{۳}$.

۱۴۸ـ $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}}{۲}$.

۱۴۹ـ $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$.

۱۵۰ـ $4\sqrt{3}$.

۱۵۱ـ $\frac{16}{9}(4-\sqrt{7})$.

۱۵۲ـ $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

۱۵۳ـ $2r^2\sin^2\alpha\,\sin 2\alpha$.

۱۵۴ـ $2\frac{2}{3}$.

۱۵۵ـ $\left(\frac{3}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}\arccos$.

۱۵۶ـ $\sqrt[4]{12}(2-\sqrt{3})$.

۱۵۷ـ $\frac{ar}{a+2r}$.

۱۵۸ـ اگر $\alpha<\frac{\pi}{3}$، آن وقت مسأله دو جواب دارد: $R^2\sin\alpha\left(1\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)$؛ اگر $\frac{\pi}{3}\le\alpha<\pi$، تنها جواب، $R^2\sin\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ است.

۱۵۹ـ از $(3\sqrt{2}-4)\frac{c}{6}$ تا $\frac{c}{3}$.

۱۶۰ـ از $\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}$ تا ۱.

۱۶۱ـ $\frac{2abc}{ab+bc+ca}$. (از نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث، سه‌خط راست به‌موازات ضلعهای آن رسم می‌کنیم. فرض کنید خط اول با نسبت تشابه برابر با λ، خط دوم با نسبت تشابه برابر با μ و خط سوم با نسبت تشابه γ، مثلثی متشابه با مثلث اصلی جدا کند. ثابت کنید که $\lambda+\mu+\gamma=2$)

۱۶۲ـ $\frac{Rr}{R+r}$.

۱۶۳ـ روی خط BA، نقطهٔ A_1 را طوری اختیار کنید که $|A_1B|=|A_1C|$. نقطه‌های A_1، A، D و C بر یک دایره واقع‌اند. $(\angle DA_1C=90^\circ-\angle ABC=\angle DAC)$. در نتیجه $\angle A_1AC=\angle A_1DC=90^\circ$ و بنابراین $\angle BAC=90^\circ$.

۱۶۴ـ ۱.

۱۶۵ـ $2\frac{1}{4}$.

۱۶۶ـ $\frac{13}{15}a$.

۱۶۷ـ $\frac{a^2+a\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$.

۱۶۸ـ $\frac{a^2+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$.

۱۶۹ـ ۶.

۱۷۰ـ ۳.

۱۷۱ـ اگر $Q\ge\frac{1}{4}S$، آن وقت‌فاصله مطلوب، $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}-\sqrt{Q})$ است. اگر $Q<\frac{1}{4}S$، آن وقت دوجواب ممکن است: $\frac{\sqrt[4]{3}}{3}(\sqrt{S}\pm\sqrt{Q})$.

۱۷۲ـ $3r^2\frac{|1-k^2|}{1+k^2}$.

۱۷۳ـ $\frac{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

۱۷۴ـ $\frac{(a^۲+b^۲-c^۲)c}{۴ab}$.

۱۷۵ـ فرض کنید A و B معرف دو رأس مجاور از لوزی، M نقطهٔ برخورد قطرهای آن و $O_۱$ و $O_۲$ مرکز دایره‌ها ($O_۱$ روی AM و $O_۲$ روی BM) باشند. داریم

$$|AB|^۲=|AM|^۲+|BM|^۲=(|O_۲A|^۲-|O_۲M|^۲)+(|O_۱B|^۲-|O_۱M|^۲)$$
$$=R^۲+r^۲-(|O_۱M|^۲+|O_۲M|^۲)=R^۲+r^۲-a^۲$$

جواب: $\sqrt{R^۲+r^۲-a^۲}$.

۱۷۶ـ $\frac{۸R^۳\,r^۳}{(R^۲+r^۲)^۲}$.

۱۷۷ـ $|AB|=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲+۲ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$، اگر B در درون زاویهٔ مفروض یا در درون زاویهٔ متقابل به‌رأس با آن قرار گیرد؛ $|AB|=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۲ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$، در بقیهٔ حالتها.

۱۷۸ـ $۲\arcsin\frac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$.

۱۷۹ـ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۵\pi-۳}$.

۱۸۰ـ چون EF بر CO (O نقطهٔ برخورد قطرهاست) عمود است، و شرطهای مسأله ایجاب می‌کند که AC نیمساز زاویهٔ ۶۰°ی A است، داریم: $|AE|=|AF|=|EF|$. اگر K وسط EF باشد، آن وقت $|AO|=۲a\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $|CO|=a\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و

$$|CK|\,.\,|OK|=|EK|^۲=\frac{۱}{۳}|AK|^۲$$

جواب: $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و $۲a^۲\sqrt{۳}$.

۱۸۱ـ $\frac{۳}{۴}h$.

۱۸۲ـ فرض کنید $\angle BAC=\angle BDC=\alpha$، $\angle CBA=\angle BCD=\beta$ و $\angle BAM=\varphi$.

در این صورت

$$\frac{|BM|+|MC|}{|AM|+|MD|}=\frac{\sin\varphi+\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta+\alpha-\varphi)+\sin(\beta+\varphi)}$$
$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\left(\frac{\alpha}{۲}-\varphi\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{۲}-\varphi\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)+\sin\beta}=\frac{c}{a+b}$$

۱۸۳ـ همواره وتری موازی با قاعدهٔ مثلث وجود دارد. این وتر را ضلعهای جانبی به‌سه بخش

برابر تقسیم می‌کنند (مسلماً، $۲ > a > ۰$) و طول آن $\frac{۳a}{۲a^۲+۱}$ است. به‌علاوه، اگر $a < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$، آن وقت وتری دیگر وجود دارد که موازی با قاعده نیست و همان ویژگی را دارد. طول این وتر $\frac{۳}{\sqrt{۹-۲a^۲}}$ است.

۱۸۴ ـ فرض کنید BC و AC، MN را، به‌ترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کنند. با قرار دادن $x = \frac{|MC|}{|CN|}$، داریم: $\frac{|MP|}{|PN|} = \frac{S_{BMC}}{S_{BNC}} = \frac{|MB|.|MC|}{|BN|.|CN|} = \frac{۳x}{۴}$. بنابراین $|MP| = \frac{۳x}{۳x+۴}$. به‌طور مشابه، $|MQ| = \frac{x}{x+۱}$. برای x، به‌معادلهٔ $\frac{x}{x+۱} - \frac{۳x}{۳x+۴} = a$ یا

$$۳ax^۲ + (۷a-۱)x + ۴a = ۰$$

می‌رسیم. چون $D \geq ۰$ و $۱ > a > ۰$، بیشترین مقدار a، برابر با $۷ - ۴\sqrt{۳}$ است.

۱۸۵ ـ برابری $S_{ABN} = S_{CDM}$، نتیجه می‌دهد که $S_{MBN} = S_{MCN}$، زیرا MN میانهٔ مثلثهای ABN و CDM است. بنابراین، $MN \parallel BC$ و $MN \parallel AD$، یعنی، $ABCD$ ذوزنقه‌ای با قاعده‌های AD و BC است.

جواب: $\frac{۵k-۲ \pm ۲\sqrt{۲k(۲k-۱)}}{۲-۳k}$.

۱۸۶ ـ داریم: $|AD| \geq |DM| - |AM| = ۲$. از طرف دیگر، $|AD| \leq \frac{|BD|}{\sin ۶۰^\circ} = ۲$. در نتیجه، $|AD| = ۲$، AD بزرگترین قاعده است و نقطهٔ M روی خط AD قرار دارد.

جواب: $\sqrt{۷}$

۱۸۷ ـ فرض کنید BD معرف نیمسازی در مثلث ABC باشد، $A_۱$ و $C_۱$ وسط ضلعهای BC و AB هستند و $|DA_۱| = |DC_۱|$. دو حالت ممکن است: (۱) $\angle BA_۱D = \angle BC_۱D$ و (۲) $\angle BA_۱D + \angle BC_۱D = ۱۸۰^\circ$. درحالت اول، $|AB| = |BC|$. در حالت دوم، مثلث $AC_۱D$ را، دور D، به‌اندازهٔ زاویهٔ $C_۱DA_۱$ دوران می‌دهیم تا $C_۱$ به $A_۱$ برود. مثلثی با طول ضلعهای $\frac{ba}{a+c}$، $\frac{a+c}{۲}$ و $\frac{bc}{a+c}$ (a، b و c طول ضلعهای $\triangle ABC$ اند) به‌دست می‌آوریم، که با مثلث ABC متشابه است. در نتیجه، $c : \frac{bc}{a+c} = b : \frac{a+c}{۲} = a : \frac{ba}{a+c}$، بنابراین $a+c = b\sqrt{۲}$. چون $a \neq c$، دست‌کم یکی از دو نابرابری $b \neq a$ و $b \neq c$ درست است. فرض کنید $b \neq c$، در این‌صورت، $b+c = a\sqrt{۲}$ و $b = a$، و مثلثی به ضلعهای a، a و $a(\sqrt{۲}-۱)$ به‌دست می‌آوریم که این ویژگی را دارد، بنابراین، دو دسته از مثلثها، که در شرطهای مسأله صادق‌اند، وجود دارد: مثلثهای متساوی‌الاضلاع و مثلثهای متشابه با مثلث به ضلعهای ۱، ۱ و $\sqrt{۲}-۱$

۱۸۸ ـ اگر α زاویهٔ بین ضلعهای به‌طول a و b باشد، آن وقت داریم

$$a + b\sin\alpha \leq b + a\sin\alpha$$

$$(a-b)(\sin\alpha-۱) \geq ۱$$

$$\sin\alpha \geq ۱$$

بنابراین، $\alpha = ۹۰^\circ$.
جواب: $\sqrt{a^۲+b^۲}$.

۱۸۹ ـ ثابت کنید که بین کلیهٔ چهارضلعیهای محیط بر دایرهٔ مفروض، مربع کمترین مساحت را دارد (برای مثال، می‌توانید از نابرابری $\tan\alpha+\tan\beta \geq ۲\tan[(\alpha+\beta)/۲]$ استفاده کنید، که در آن α و β زاویه‌هایی حاده‌اند). از طرف دیگر

$$S_{ABCD} \leq \frac{۱}{۲}(|MA|.|MB|+|MB|.|MC|+|MC|.|MD|+|MD|.|MA|) \leq \frac{۱}{۴}(|MA|^۲+|MB|^۲)+\frac{۱}{۴}(|MB|^۲+|MC|^۲)+\frac{۱}{۴}(|MC|^۲+|MD|^۲) + \frac{۱}{۴}(|MD|^۲+|MA|^۲) = ۱$$

در نتیجه، $ABCD$ مربعی با مساحت ۱ است.

۱۹۰ ـ قرار می‌گذاریم: $|BM| = x$، $|DM| = y$، $|AM| = l$ و $\angle AMB = \varphi$. فرض کنید M روی پاره‌خط BD واقع باشد. با نوشتن قانون کسینوسها در مثلثهای AMB و AMD، و حذف کردن $\cos\varphi$، به‌دست می‌آوریم: $l^۲(x+y)+xy(x+y) = a^۲y+d^۲x$. به‌همین ترتیب، رابطهٔ $l^۲(x+y)+xy(x+y) = b^۲y+c^۲x$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$(a^۲-b^۲)y = (c^۲-d^۲)x$$

جواب: $\left|\frac{a^۲-b^۲}{c^۲-d^۲}\right|$

۱۹۱ ـ اگر رأسهای مستطیل روی دایره‌های هم‌مرکز قرار گیرد (دو رأس روبه‌رو به‌هم، بر دایره‌های با شعاعهای $R_۱$ و $R_۲$، و دو رأس دیگر، بر دایره‌های با شعاعهای $R_۳$ و $R_۴$)، آن وقت برابری $R_۱^۲+R_۲^۲ = R_۳^۲+R_۴^۲$ برقرار خواهد بود. این برابری را ثابت می‌کنیم. فرض کنید A معرف مرکز دایره‌ها باشد، و رأسهای K و M مستطیل $KLMN$، به‌ترتیب، روی دایره‌های با شعاعهای $R_۱$ و $R_۲$، و L و N، به‌ترتیب، روی دایره‌های با شعاعهای $R_۳$ و $R_۴$ قرار گیرند. در مثلثهای AKM و ALN، میانه‌هایی که از رأس A خارج می‌شوند، برابرند، همچنین ضلعهای KM و LN برابرند. این بدان معنی است که حکم ما درست است.
فرض کنید طول ضلع دوم مستطیل x باشد و $x > ۱$. شعاعهای $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$، به‌ترتیبی برابرند با ۱، x، $\sqrt{x^۲+۱}$ و $\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۱}$. با بررسی ترتیبهای ممکن، به‌دست می‌آوریم: $x^۲ = ۷$، $R_۱ = ۱$، $R_۲ = ۲\sqrt{۲}$، $R_۳ = \sqrt{۲}$ و $R_۴ = \sqrt{۷}$. مربع $K_۱L_۱M_۱N_۱$ به‌ضلع y را که رأسهایش روی دایره‌های به‌شعاعهای $R_۱ = ۱$، $R_۳ = \sqrt{۲}$، $R_۲ = ۲\sqrt{۲}$ و $R_۴ = \sqrt{۷}$ واقع‌اند، در نظر

بگیرید. فرض کنید: $\angle AK_1L_1 = \varphi$. در این صورت $\angle AK_1N_1 = 90^\circ \pm \varphi$ یا $\varphi \pm 90^\circ$. با نوشتن قانون کسینوسها در مثلثهای AK_1L_1 و AK_1N_1، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} 1+x^2-2x\cos\varphi = 2 \\ 1+x^2 \pm 2x\sin\varphi = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\cos\varphi = x^2-1 \\ \pm 2x\sin\varphi = x^2-6 \end{cases}$$

با مربع کردن دو برابری آخری و جمع کردن حاصلها با هم، به‌دست می‌آوریم

$$2x^4-10x^2+37=0$$

و $x^2 = 5\pm\frac{1}{2}\sqrt{26}$.

جواب: $\sqrt{5\pm 2\sqrt{26}}$.

۱۹۲ ـ ابتدا حکم زیر را ثابت می‌کنیم. اگر عمودهای بر AB و BC در وسطهایشان، AC را در نقطه‌های M و N طوری قطع کنند که $|MN| = \lambda\,|AC|$، آن وقت یا $\tan A\tan C = 1-2\lambda$ و یا $\tan A\tan C = 1+2\lambda$. قرار می‌گذاریم: $|AB| = c$، $|BC| = a$ و $|AC| = b$. اگر قطعه‌های عمودها، از وسط ضلعها تا نقطه‌های M و N، نامتقاطع باشند، آن وقت

$$|MN| = b-\frac{c}{2\cos A}-\frac{a}{2\cos C} = \lambda b$$

$$\Rightarrow 2(1-\lambda)\sin B\cos A\cos C = \frac{1}{2}(\sin 2C+\sin 2A)$$

$$\Rightarrow 2(1-\lambda)\sin(A+C)\cos A\cos C = \sin(A+C)\cos(A-C)$$

$$\Rightarrow 2(1-\lambda)\cos A\cos C = \cos A\cos C+\sin A\sin C$$

$$\Rightarrow \tan A\tan C = 1-2\lambda$$

و اگر این قطعه‌ها متقاطع باشند، آن وقت $\tan A\tan C = 1+2\lambda$. در مسألهٔ ما، $\lambda = 1$، یعنی، یا $\tan A\tan C = -1$ و یا $\tan A\tan C = 3$. برای زاویه‌های B و C به‌دست می‌آوریم $(\lambda = \frac{1}{2})\ \tan B\tan C = 0$ (که این ممکن نیست) و یا $\tan B\tan C = 2$. دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} \tan A\tan C = -1 \\ \tan B\tan C = 2 \\ A+B+C = \pi \end{cases}$$

هیچ جوابی ندارد. از این رو، $\tan A\tan C = 3$. با حل کردن دستگاه معادله‌های نظیر، به‌دست می‌آوریم: $\tan A = 3$، $\tan B = 2$ و $\tan C = 1$. جواب: $\frac{\pi}{4}$.

۱۹۳ـ فرض کنید R معرف شعاع دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، O مرکز آن و N نقطهٔ میانه‌ای مثلث BCM باشد. عمود بودن ON و CM، برابری $|CN|^۲-|MN|^۲=|CO|^۲-|OM|^۲$ را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $|AB|=۱$، $|MB|=x$ و $|CM|=y$، در این صورت
$|MN|^۲=\frac{۱}{۹}(۲y^۲+۲x^۲-k^۲)$، $|CN|^۲=\frac{۱}{۹}(۲y^۲+۲k^۴-x^۲)$، $|CO|^۲=R^۲$ و $|OM|^۲=R^۲\cos^۲C+\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲$. برای x، به‌معادلهٔ $۲x^۲-۳x+k^۲=۰$ می‌رسیم.
جواب: $\frac{۳\pm\sqrt{۹-۸k^۲}}{۴}$ (اگر $۱<k<\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$، آن وقت هر دو نقطه در درون پاره‌خط AB قرار می‌گیرند).

۱۹۴ـ اگر O وسط AC باشد، آن‌گاه

$$|AB|^۲=|BO|^۲+|AO|^۲=|BK|^۲-|KO|^۲+|AO|^۲$$
$$=|BK|^۲+(|AO|-|AK|)(|AO|+|AK|)=|BK|^۲+|AK|.|CK|=b^۲+bd$$

جواب: $\sqrt{b^۲+bd}$.

۱۹۵ـ (۱) طول خطی شکسته، متشکل از سه پاره‌خط، برابر است با طول پاره‌خطی که دو انتهای آن را به‌هم وصل می‌کند. این، تنها وقتی ممکن است که تمام رأسهای آن بر این پاره‌خط واقع باشند. $x=\frac{۲ab}{a+b\sqrt{۳}}$ و $y=\frac{۲ab}{a\sqrt{۳}+b}$.

(۲) x، y و z، طول ضلعهای یک مثلث‌اند که طول ارتفاعهایش a، b و c هستند. چنین مثلثی نباید منفرجه باشد. برای پیدا کردن x، y و z، از این نتیجه استفاده می‌کنیم که مثلثی که ضلعهایش با عکس ارتفاعهای مثلث مفروض متناسب‌اند، با مثلث اخیر متشابه است.

$x=\frac{۱}{۲as}$، $y=\frac{۱}{۲bs}$ و $z=\frac{۱}{۲cs}$، که در آنها، $s=\sqrt{p\left(p-\frac{۱}{a}\right)\left(p-\frac{۱}{b}\right)\left(p-\frac{۱}{c}\right)}$ و $۲p=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$. مسأله جواب دارد، اگر $\frac{۱}{c^۲}\geq\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}$، $\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}\geq\frac{۱}{a^۲}$ و

$$\frac{۱}{c^۲}+\frac{۱}{a^۲}\geq\frac{۱}{b^۲}$$

(۳) نقطه‌های $A(a,b)$، $B(x,۰)$ و $C(۰,y)$ را در یک دستگاه مختصات قائم در نظر بگیرید. از دستگاه معادله‌های مفروض، نتیجه می‌شود که ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است. در دوران دور A به‌اندازهٔ زاویهٔ ۶۰° در جهت مناسب، نقطهٔ B به‌نقطهٔ C می‌رود. می‌توانیم معادلهٔ خط راستی را که در این دوران، محور xها به‌آن منتقل می‌شود، به‌دست آوریم. (به‌ویژه، ضریب زاویهٔ آن برابر با $\pm\sqrt{۳}$ است.)
جواب: $x=-a\pm b\sqrt{۳}$ و $y=-b\pm a\sqrt{۳}$.

(۴) اگر $x \geq 0$، $y \geq 0$ و $z \geq 0$، آن وقت x، y و z، فاصلهٔ رأسهای مثلثی قائم‌الزاویه مانند ABC، با ساقهای BC و CA، به‌ترتیب، به‌طولهای a و b، از نقطه‌ای مانند M در درون مثلث هستند، به‌طوری که همهٔ ضلعهای مثلث، از این نقطه، به‌زاویهٔ 120° قابل رؤیت‌اند. برای تعیین مجموع $x+y+z$، مثلث CMA را، دور C، به‌اندازهٔ زاویهٔ 60°، در جهت بیرون نسبت به‌مثلث ABC، دوران می‌دهیم. در نتیجه، M و A، به‌ترتیب، به M_1 و A_1 تبدیل می‌شوند. در این صورت، BMM_1A_1 خط راست است، و در نتیجه

$$x+y+z = |BM|+|CM|+|AM| = |BA_1| = \sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$$

به‌همین ترتیب، حالتی را که یکی از متغیرها منفی باشد (به‌طور کلی، هیچ یک از آنها به‌تنهایی منفی نیست) و بقیهٔ حالتها را بررسی می‌کنیم.

جواب: $\pm\sqrt{a^2+b^2 \pm ab\sqrt{3}}$.

۱۹۶ ـ فرض کنید x فاصلهٔ مرکز مربع تا خط راست l، و φ زاویهٔ حادهٔ تشکیل شده با یکی از قطرهای مربع و خط l باشد. فاصلهٔ رأسهای مربع تا l (به‌ترتیب دوری) برابرند با

$$x+a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\ ,\ x+a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\ ,\ \left|x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right|\ ,\ \left|x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right|$$

بنابرفرض مسأله، $\left|x^2-\frac{a^2}{2}\cos^2\varphi\right| = \left|x^2-\frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\right|$، که از آنجا، یا $\tan^2\varphi = 1$، که ناممکن است، و یا $x^2 = \frac{a^2}{4}$.

جواب: $\frac{a}{2}$.

۱۹۷ ـ از شرط $\angle B = 2\angle C$، رابطهٔ $b^2 = c^2+ac$ برای ضلعهای مثلث به‌دست می‌آید. با بررسی $b = 2c$، $a = 2c$، $b = 2a$ و $a = 2b$، $a = 2c$ را انتخاب می‌کنیم، زیرا در بقیهٔ حالتها نابرابری مثلث برقرار نیست.

جواب: $\angle C = \frac{\pi}{6}$، $\angle B = \frac{\pi}{3}$ و $\angle A = \frac{\pi}{2}$.

۱۹۸ ـ فرض کنید D وسط BC باشد. داریم

$$b^2 = |BM|^2 = (|BD|+|DN|)\,(|BD|-|DN|) = |BD|^2-|DN|^2$$
$$= |AB|^2-|AD|^2-|DN|^2 = (a+b)^2-|AD|^2-|DN|^2$$

بنابراین، $|AN|^2 = |AD|^2+|DN|^2 = (a+b)^2-b^2 = a^2+2ab$.

جواب: $\sqrt{a^2+2ab}$.

۱۹۹ ـ نقطهٔ N را روی BC طوری اختیار می‌کنیم که مثلث ABN با مثلث ADL متشابه باشد.

در این صورت، $\angle NMA = \angle MAK + \angle KAD = \angle MAB + \angle DAL = \angle MAN$.
در نتیجه، $|MN| = |AN| = k|AL|$.

جواب: $\frac{a}{k} + b$.

۲۰۰ ـ $2\sqrt{pq}$

۲۰۱ ـ (الف) $\frac{a}{R}\sqrt{(R\pm x)(R\pm y)}$، علامت جمع برای تماس بیرونی دایره‌ها و علامت منها برای تماس درونی آنها. (ب) $\frac{a}{R}\sqrt{(R+x)(R-y)}$.

۲۰۲ ـ فرض کنید $|AM|:|MC| = k$. برابری شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABM و BCM، بدین معنی است که نسبت مساحتهای آنها، برابر نسبت محیطهای آنهاست. بنابراین، چون نسبت مساحتها k است، به‌دست می‌آوریم $|BM| = \frac{13k-12}{1-k}$. به‌ویژه، از این برابری نتیجه می‌شود که $\frac{12}{13} < k < 1$. با نوشتن قانون کسینوسها در مثلثهای ABM و BCM (برای زاویه‌های BMA و BMC) و حذف کردن کسینوس زاویه‌ها از این معادله‌ها، برای k به‌معادله‌ای درجه دوم با ریشه‌های $\frac{2}{3}$ و $\frac{22}{23}$ می‌رسیم. با حساب محدویت k، به دست می‌آوریم $k = \frac{22}{23}$

۲۰۳ ـ فرض کنید ABC معرف مثلث مفروض باشد، و O، K و H، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های محیطی و محاطی و محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشند. از نتیجهٔ زیر استفاده می‌کنیم: در مثلثی دلخواه، نیمساز هریک از زاویه‌های آن، با شعاع دایرهٔ محیطی و ارتفاع خارج شده از آن رأس، زاویه‌های برابر می‌سازد (اثبات به‌خواننده واگذار می‌شود). چون دایره‌ای که از O، K و H می‌گذرد، دست کم، شامل یک رأس از مثلث ABC (مثلاً، رأس A) است، نتیجه می‌شود که $|OK| = |KH|$. نقطهٔ K، دست‌کم، در درون یکی از مثلثهای OBH و OCH قرار می‌گیرد. فرض کنید این مثلث OBH باشد. زاویهٔ B نمی‌تواند منفرجه باشد. در مثلثهای OBK و HBK، داریم: $|OK| = |HK|$، KB ضلعی مشترک است و $\angle OBK = \angle HBK$. بنابراین $\triangle OBK = \triangle HBK$، زیرا در غیر این صورت $\angle BOK + \angle BHK = 180^\circ$، که این ناممکن است ($K$ در درون مثلث OBH است). در نتیجه، $|BH| = |BO| = R$. فاصلهٔ O تا AC، برابر است با $0{,}5R$ ($|BH| = 0{,}5$ (مسألهٔ ۲۰ بخش ۱)، یعنی، $\angle B = 60^\circ$ ($\angle B$ حاده است) و $|AC| = R\sqrt{3}$. حال اگر A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، نقطه‌های تماس ضلعهای BC، CA و AB با دایرهٔ محاطی مثلث باشند، آن وقت $|BA_1| = |BC_1| = r\sqrt{3}$ و

$$|CA_1| + |AC_1| = |CB_1| + |B_1A| = |AC| = R\sqrt{3}$$

محیط مثلث برابر با $2\sqrt{3}(R+r)$ است. اکنون، پیدا کردن مساحت آن آسان است.
جواب: $\sqrt{3}(R+r)r$.

۲۰۴ ـ فرض کنید P تصویر M روی AB باشد و $|AP| = a+x$. در این صورت،

$$|PB| = a-x \text{ ، } |MP| = y = \sqrt{a^۲-x^۲} \text{ ، } |AN| = (a+x)\frac{a\sqrt{۲}}{a\sqrt{۲}+y} \text{ ،}$$

$$|NB| = ۲a-(a+x)\frac{a\sqrt{۲}}{a\sqrt{۲}+x} = \frac{a\sqrt{۲}(a-x+y\sqrt{۲})}{a\sqrt{۲}+y} \text{ و } |AL| = \frac{a\sqrt{۲}(a+x+y\sqrt{۲})}{a\sqrt{۲}+y}.$$

به‌این ترتیب

$$|AL|^۲+|NB|^۲ = \frac{۴a^۲}{(a\sqrt{۲}+y)^۲}(a^۲+۲\sqrt{۲}ay+۲y^۲+x^۲)$$
$$= \frac{۴a^۲}{(a\sqrt{۲}+y)^۲}(a^۲+۲\sqrt{۲}ay+۲y^۲+(a^۲-y^۲)) = ۴a^۲$$

۲۰۵ ـ فرض کنید x معرف طول ضلع مثلث باشد، و ضلعهایی که از نقطهٔ مشترک دایره‌ها خارج می‌شوند، با خطی که از مرکزهای آنها می‌گذرد، زاویه‌های α و β تشکیل دهند؛ $\alpha\pm\beta=۶۰^\circ$، در این صورت، $\cos\alpha = \frac{x}{۲R}$ و $\cos\beta = \frac{x}{۲r}$ (یا بر عکس). با پیدا کردن $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ از معادلهٔ $\cos(\alpha\pm\beta) = \frac{۱}{۲}$، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{Rr\sqrt{۳}}{\sqrt{R^۲+r^۲-Rr}}$$

۲۰۶ ـ خط راست AB را رسم می‌کنیم و دومین نقطهٔ برخورد آن با دایرهٔ کوچکتر را به D نشان می‌دهیم. کمانهای AB و AD را در نظر بگیرید (هر کدام از یک نیمدایره کوچکترند). از آنجا که مماس مشترک بر دایره‌ها در نقطهٔ A، با خطهای AB و AD زاویه‌های برابر تشکیل می‌دهد، زاویه‌های مرکزی نظیر این کمانها نیز برابرند. در نتیجه، $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{r}{R}$، $|AD| = a\frac{r}{R}$ و $|BC| = \sqrt{|BD|.|BA|} = a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$.

۲۰۷ ـ فرض کنید $O_۱$، $O_۲$ و O معرف مرکز دایره‌ها (دو دایرهٔ اول بر AB مماس‌اند) و x، y و R، به‌ترتیب، شعاعهای آنها باشند. طول مماسهای مشترک دایره‌های به‌مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$، $O_۱$ و O، و $O_۲$ و O، به‌ترتیب، برابرند با $۲\sqrt{xy}$، $۲\sqrt{Rx}$ و $۲\sqrt{Ry}$. بنا به‌فرض، $۲\sqrt{xy} = a$. مثلث قائم‌الزاویهٔ $O_۱MO_۲$ با رأس قائمهٔ M را در نظر بگیرید؛ $O_۱M$ با BC موازی است، $|O_۱O_۲| = x+y$، $|O_۲M| = ۲R-(x+y)$ و $|O_۱M| = |۲\sqrt{Rx}-\sqrt{Ry}|$ (طول $O_۱M$، برابر است با تفاضل بین طول مماسهای مشترک دایره‌های به‌مرکزهای O، $O_۱$، و O، $O_۲$). بنابراین، $(x+y)^۲ = (۲R-x-y)^۲+(۲\sqrt{Rx}-۲\sqrt{Ry})^۲$، که از آنجا $R = ۲\sqrt{xy} = a$.

۲۰۸ ـ توجه کنید که $O_۱O_۲O_۳O_۴$ متوازی‌الاضلاعی است با زاویه‌های α و $\pi-\alpha$ ($O_۱O_۴ \perp AC$ و $O_۲O_۳ \parallel AC$، بنابراین $O_۲O_۳ \parallel O_۱O_۴$، و غیره). اگر K وسط AM و L وسط MC باشد، آن وقت

$$|O_۳O_۴| = \frac{|KL|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{۲\sin\alpha}$$

به‌همین ترتیب، $|O_۲O_۳| = \frac{|BD|}{۲\sin\alpha}$؛ در نتیجه

$$S_{O_۱O_۲O_۳O_۴} = \frac{|AC|.|BD|\sin\alpha}{۴\sin^۲\alpha} = \frac{S_{ABCD}}{۲\sin^۲\alpha}$$

جواب: $۲\sin^۲\alpha$.

۲۰۹ ـ نیمسازهای متوازی‌الاضلاع، ضمن برخورد با هم، مستطیلی تشکیل می‌دهند که قطرهایش با ضلعهای متوازی‌الاضلاع موازی‌اند و با تفاضل ضلعهای متوازی‌الاضلاع برابرند. در نتیجه، اگر a و b طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع و α زاویهٔ بین آنها باشد، آن وقت، $S=ab\sin\alpha$ و $Q = \frac{۱}{۲}(a-b)^۲\sin\alpha$ و $\frac{S}{Q} = \frac{۲ab}{(a-b)^۲}$.

جواب: $\frac{S+Q+\sqrt{Q^۲+۲QS}}{S}$

۲۱۰ ـ فرض کنید x معرف مساحت مثلث OMN و y مساحت مثلث CMN باشد، در این صورت، $\frac{S_۳}{S_۲} = \frac{x}{S_۱} = \frac{|ON|}{|OA|}$، $x = \frac{S_۱S_۳}{S_۲}$ و $\frac{S_۱+S_۲}{S_۳+x+y} = \frac{S_۱+x}{y} = \frac{|AM|}{|MC|}$.

مساحت مطلوب، برابر $\frac{S_۱S_۳(S_۱+S_۲)(S_۳+S_۲)}{S_۲(S_۲^۲-S_۱S_۳)}$ است.

۲۱۱ ـ فرض کنید در مثلث ABC، زاویهٔ C، زاویه‌ای قائمه، M نقطهٔ میانه‌ای، O مرکز دایرهٔ محاطی و r شعاع آن باشد و $\angle B = \alpha$؛ در این صورت

$$|AB| = r\left(\cot\frac{\alpha}{۲} + \cot\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\alpha}{۲}\right)\right) = \frac{r\sqrt{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\alpha}{۲}\right)}$$

$|CM| = \frac{۱}{۳}|AB|$، $|CO| = r\sqrt{۲}$، $|OM| = r$ و $\angle OCM = \alpha - \frac{\pi}{۴}$.

بانوشتن قانون کسینوسها در مثلث COM، به‌دست می‌آوریم $۱ = ۲ + \frac{۸}{۹(۲x-\sqrt{۲})^۲} - \frac{۸x}{۳(۲x-\sqrt{۲})}$، که در آن $x = \cos\left(\frac{\pi}{۴} - \alpha\right)$، که از آنجا $x = \frac{۴\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۶}$.

جواب: $\frac{\pi}{۴} \pm \arccos\frac{۴\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۶}$.

۲۱۲ ـ فرض کنید طول هر قطعهٔ میانه برابر با a باشد. طول کوچکترین پاره‌خطی را که نقطهٔ

تماس دایرهٔ محاطی، روی ضلع نظیر پای میانه جدا می‌کند، با x نشان می‌دهیم. اکنون، طول ضلعهای مثلث را می‌توان بر حسب a و x نشان داد. طول ضلعهایی که میانه را در بردارند، $a\sqrt{2}+x$ و $3a\sqrt{2}+x$ وطول ضلع سوم $2a\sqrt{2}+2x$ است. بااستفاده از دستور طول میانه (مسألهٔ ۱۱، بخش ۱ را ببینید)، به‌دست می‌آوریم

$$9a^2=\frac{1}{4}\left[2(a\sqrt{2}+x)^2+2(3a\sqrt{2}+x)^2-(2a\sqrt{2}+2x)^2\right]$$

که از آنجا $x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

جواب: ۱۳ : ۵ : ۱۰

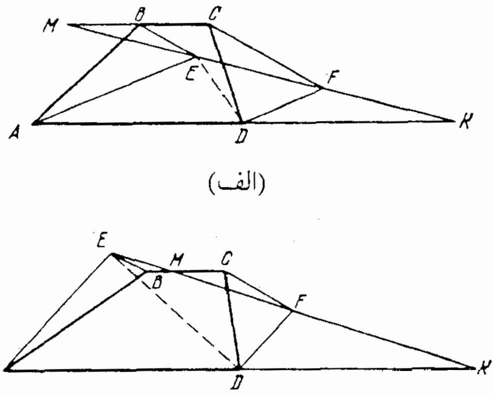
۲۱۳ـ فرض کنید $|BC|=a$، $\angle C>\angle B$ و D و E وسطهای AB و AC باشند. چهارضلعی $EMDN$ چهارضلعیی محاطی است (زیرا، $\angle MEN=\angle MDN=90^\circ$)؛ $|MN|=a$، $|ED|=\frac{a}{2}$ و MN قطر دایرهٔ محیط بر $MEND$ است. در نتیجه

$$\angle DME=30^\circ\ ,\ \angle CAB=90^\circ-\angle EMD=60^\circ$$

$\angle CBA=\angle EDN=\angle EMN=\frac{\angle EMD}{2}=15^\circ$ و $\angle ACB=105^\circ$.

جواب: $\angle A=60^\circ$، $\angle B=15^\circ$، $\angle C=105^\circ$ یا $\angle A=60^\circ$، $\angle B=105^\circ$، $\angle C=15^\circ$

۲۱۴ـ نقطه‌های برخورد خط راست EF با AD و BC را، به‌ترتیب، با K و M نشان می‌دهیم.



(الف)

(ب)

(شکل ۱)

فرض کنید M بر امتداد BC، از طرف نقطهٔ B، واقع باشد. اگر $|AD|=3a$ و $|BC|=a$، آن وقت از تشابه مثلثهای نظیر، نتیجه می‌شود که $|DK|=|AD|=3a$ و $|MB|=|BC|=a$ (شکل ۱ الف).

به‌علاوه، $|ME| = |EF| = |FK|$. اگر h طول ارتفاع ذوزنقه باشد، آن وقت فاصله E تا AD، برابر با $\frac{۲}{۳}h$ است، $S_{EDK} = ah$ و $S_{EDF} = \frac{۱}{۲} S_{EDK} = \frac{ah}{۴} = \frac{۱}{۴} S$.

اگر خط EF، قاعدهٔ BC را در نقطهٔ M قطع کند، آن وقت $|BM| = \frac{۱}{۳}a$ (شکل ۱ ب). در این حالت $\frac{|EK|}{|MK|} = ۲:\frac{۵}{۳} = \frac{۶}{۵}$ و فاصلهٔ E تا AD، برابر است با $\frac{۶}{۵}h$، به‌این ترتیب

$$S_{EFD} = \frac{۱}{۲} S_{EDK} = \frac{۱}{۴} \cdot ۳a \cdot \frac{۶}{۵}h = \frac{۹}{۲۰} S$$

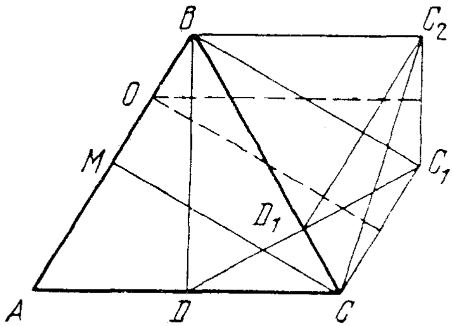
جواب: $\frac{۱}{۴}S$ یا $\frac{۹}{۲۰}S$.

۲۱۵ـ فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و M وسط BC باشد، و K، L و N نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی، به‌ترتیب، با ضلعهای AC، AB و BCی مثلث باشند. قرار می‌گذاریم: $|AK| = |AL| = x$، $|CK| = |CN| = y$، $|BL| = |BN| = z$ و $y+z = a$. بـنـا به‌فرض $|OM| = \frac{a}{۲} - r$. در نتیجه، $|NM| = \sqrt{|OM|^۲ - |ON|^۲} = \sqrt{\frac{a^۲}{۴} - ar}$ و یکی از پاره‌خطهای به‌طول y یا z، برابر با $\frac{a}{۲} - \sqrt{\frac{a^۲}{۴} - ar}$، و دیگری برابر با $\frac{a}{۲} + \sqrt{\frac{a^۲}{۴} - ar}$ است. مساحت مثلث را از دستور هرون و $S = pr$، محاسبه کنید:

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)r \Rightarrow xar = (x+a)r^۲ \Rightarrow x = \frac{ar}{a-r}$$

بنابراین، مساحت مطلوب، برابر است با $\left(\frac{ar}{a-r}+a\right)r = \frac{a^۲r}{a-r}$.

۲۱۶ـ ثابت می‌کنیم که اگر $C_۱$ و $C_۲$ (شکل ۲) در طرفی از ضلع BC که رأس A نیست، واقع باشند، آن وقت مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $CC_۱C_۲$، در نقطهٔ O روی ضلع BC، قرار دارد، و $|BO| = \frac{۱}{۴}|AB|$. با رسم ارتفاع CM از رأس C، به‌چهارضلعی مستطیل CM $BC_۱$ می‌رسیم.



شکل ۲

بنابراین، عمود مرسوم بر CC_1 در وسط آن، از نقطهٔ O می‌گذرد. با در نظر گرفتن اینکه $BD \parallel C_1C_2$ و $|C_1C_2| = \frac{1}{2}|BD|$، مشاهده می‌کنیم که عمود منصف C_1C_2 نیز، از نقطهٔ O می‌گذرد. اکنون، به‌راحتی، شعاع مطلوب، برابر با

$$\sqrt{|CM|^2+|MO|^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{13}$$

به‌دست می‌آید.

۲۱۷ـ دو حالت در نظر بگیرید: (۱) پای عمودها، بر ضلعهای متوازی‌الاضلاع واقع باشند، و (۲) یکی از عمودها، ضلعی را که بر آن فرود می‌آید، قطع نمی‌کند. در حالت اول، به‌تناقض می‌رسیم، در حالت دوم، به‌دست می‌آوریم $\cos\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$، که در آن، α زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع مفروض است.

۲۱۸ـ با نوشتن زاویهٔ PQN بر حسب زاویه‌های مثلث و در نظر داشتن اینکه

$$\angle PMN + \angle PQN = 180^\circ$$

به‌دست می‌آوریم: $\angle PMN = 60^\circ$؛ بنابراین، $\angle NPQ = \angle QMN = 30^\circ$ و

$$\angle PNQ = \angle PMQ = 30^\circ$$

یعنی، PQN مثلثی متساوی‌الساقین با زاویه‌های 30°، مجاور به‌ضلع PN، است و

$$|PQ| = |QN| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۲۱۹ـ از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که $ABCD$ ذوزنقه است، $BC \parallel AD$ و AC نیمساز زاویهٔ BAD است؛ بنابراین $|AB| = |BC|$، به‌همین نحو، $|BC| = |CD|$. فرض کنید $|AB| = |BC| = |CD| = a$ و $|AD| = b$. فاصلهٔ بین وسط قطرها، $2r$ است، در نتیجه $\frac{b-a}{2} = 2r$. ارتفاع BM را، از نقطهٔ B، بر AD رسم می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$|AM| = \frac{b-a}{2} = 2r,\ |BM| = 2r$$

درنتیجه، $a = |AB| = 2r\sqrt{2}$ و $b = 4r+2r\sqrt{2}$.

جواب: $4r^2(\sqrt{2}+1)$.

۲۲۰ـ اندازهٔ زاویه‌های A، B و C را، به‌ترتیب، با α، β و γ نشان می‌دهیم. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث و O مرکز دایره‌ای باشد که از A، H و C می‌گذرد. در این صورت، $\angle HOC = 2\angle HAC = 2(90^\circ-\gamma)$ و $\angle HOA = 2\angle HCA = 2(90^\circ-\alpha)$. اما

$$\angle AOC = 180^\circ-\beta$$ (چون $BAOC$ چهارضلعیی محاطی است)

$۱۸۰^\circ-\beta = ۲(۹۰^\circ-\alpha)+۲(۹۰^\circ-\gamma)$، $۱۸۰^\circ-\beta = ۳۶۰^\circ-۲\alpha-۲\gamma$، $۲\beta = ۱۸۰^\circ-\beta$،

$\beta = ۶۰^\circ$ و $|AC| = ۲R\sin\beta = \sqrt{۳}$.

۲۲۱ ـ با نامگذاری نسبت $\lambda = \dfrac{|AM|}{|MC|}$، داریم: $S_{MCP} = \dfrac{T}{\lambda}$، $S_{CPN} = \lambda Q$ و $S_{MCP} = \lambda S_{CPN}$؛

در نتیجه، $\dfrac{T}{Q} = \lambda^۳$ و

$$S_{ABC} = \frac{|AC|}{|MC|}\cdot\frac{|BC|}{|CN|}S_{CMN} = \frac{(\lambda+۱)^۲}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda}+\lambda Q\right) = \frac{(\lambda+۱)^۲}{\lambda^۲}(T+\lambda^۲ Q)$$
$$=(\lambda+۱)^۳Q = (T^{۱/۳}+Q^{۱/۳})^۳$$

۲۲۲ ـ اگر O مرکز دایره باشد، آن وقت مساحت $\triangle OMN$، $\dfrac{a}{a-R}$ برابر مساحت $\triangle KMN$

است. اگر $\angle MON = \alpha$، آن وقت، $\dfrac{R^۲}{۲}\sin\alpha = \dfrac{a}{a-R}S$، $\sin\alpha = \dfrac{۲aS}{R^۲(a-R)}$ و

$|MN| = ۲R\sin\dfrac{\alpha}{۲} = R\sqrt{۱-\cos\alpha} = R\sqrt{۱\pm\sqrt{۱-\dfrac{۴a^۲S^۲}{R^۴(a-R)^۲}}}$. مسأله جواب

دارد، اگر $S \le \dfrac{R^۲(a-R)}{۲a}$.

۲۲۳ ـ اگر $\angle BAC = \angle BCA = ۲\alpha$، آن وقت، از قانون سینوسها، به‌دست می‌آوریم

$$|AE| = \frac{۲m\sin ۲\alpha}{\sin ۳\alpha} \text{ و } |AF| = \frac{|AE|}{\cos\alpha} = \frac{۲m\sin ۲\alpha}{\sin ۳\alpha\cos\alpha}.$$

بنابراین، $\dfrac{۲m\sin ۲\alpha}{\sin ۳\alpha\cos\alpha} = \dfrac{۹}{۴}m$، که از آنجا $\cos ۲\alpha = \dfrac{۷}{۱۸}$ و $S_{ABC} = m^۲\tan ۲\alpha = \dfrac{۵m^۲\sqrt{۱۱}}{۷}$.

۲۲۴ ـ نقطه‌های C، M، D و L، بر یک دایره واقع‌اند. در نتیجه

$\angle CML = \angle CDL = ۳۰^\circ$

به‌همین ترتیب، $\angle CMK = ۳۰^\circ$؛ بنابراین $\angle LMK = ۶۰^\circ$ و $\triangle LMK$ متساوی‌الاضلاع

است و $|KM| = \dfrac{۲}{\sqrt{۵}}$. از قانون کسینوسها، به‌دست می‌آوریم: $\cos\angle LCK = \dfrac{-۳}{۵}$. چون

$\angle DCB = \angle LCK - ۱۲۰^\circ$، داریم: $|DB| = \dfrac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}$.

۲۲۵ ـ فرض کنید A نقطهٔ برخورد خطهای راست BC و KM باشد. چهارضلعی $ONBC$

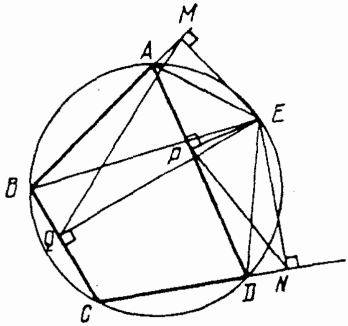
محاطی است ($\angle OCB = \angle ONB = ۹۰^\circ$)، در نتیجه، $\angle OBC = \angle ONC = \dfrac{\alpha}{۲}$.

به‌همین ترتیب، $CMAO$ هم، چهارضلعیی محاطی است و $\angle CAO = \angle CMO = \dfrac{\alpha}{۲}$،

یعنی، OAB مثلثی متساوی‌الساقین است. بنابراین

$$|CB| = |AC| = |CO| \cdot \cot\frac{\alpha}{۲} = \sqrt{R^{۲}+b^{۲}-۲Rb\cos\frac{\alpha}{۲}}\ \cot\frac{\alpha}{۲}$$

۲۲۶ـ نقطه‌های E، M، B و Q، روی دایره‌ای به‌قطر BE، و نقطه‌های E، P، D و N، بر دایره‌ای به‌قطر ED واقع‌اند (شکل ۳).



شکل ۳

بنابراین، $\angle EMQ = \angle EBQ = ۱۸۰^\circ - \angle EDC = \angle EDN = \angle EPN$ ، به‌همین‌ترتیب، $\angle EQM = \angle ENP$ ، یعنی، مثلث EMQ با مثلث EPN، با نسبت تشابه $\sqrt{k}$، متشابه است. (برای تکمیل حل، لازم است که حالتهای دیگر ترتیب نقطه‌ها را درنظر بگیرید.)

جواب: $d\sqrt{k}$.

۲۲۷ـ با امتداد دادن ضلعهای ناموازی ذوزنقه تا نقطهٔ برخورد آنها، سه مثلث متشابه به‌دست می‌آوریم، نسبت تشابه مثلث میانی و مثلث بزرگتر، و مثلث کوچکتر و مثلث میانی یکی است. این نسبت را با λ، طول قاعدهٔ بزرگتر را با x و شعاع دایرهٔ محاطی بزرگتر را با R نشان می‌دهیم. در این صورت، طول پاره‌خطهای موازی با قاعدهٔ بزرگتر، به‌ترتیب، برابرند با λx و $\lambda^{۲}x$، طول بزرگترین ساق ذوزنقهٔ پایینی، برابر با $۲R\frac{d}{c}$ و شعاع دایرهٔ محاطی دوم، برابر با λR است. بنابراین، $R+\lambda R = \frac{c}{۲}$. بنابر ویژگی چهارضلعی محیطی، $x+\lambda x = ۲R+۲R\frac{d}{c}$. و بالاخره، با وارد کردن عمودی از انتهای قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه اصلی برقاعدهٔ بزرگتر، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ساقهای c و $x-\lambda^{۲}x$ و وتر d به‌دست می‌آوریم. به‌این ترتیب، به‌دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x(۱+\lambda) = ۲R\dfrac{c+d}{c} \\ x(۱-\lambda^{۲}) = \sqrt{d^{۲}-c^{۲}} \\ R(۱+\lambda) = \dfrac{c}{۲} \end{cases}$$

می‌رسیم، که از آنجا $\lambda = \dfrac{d-\sqrt{d^۲-c^۲}}{c}$.

جواب: قاعده‌ها برابرند با $\dfrac{d-\sqrt{d^۲-c^۲}}{c}$ و $\dfrac{d+\sqrt{d^۲-c^۲}}{c}$.

۲۲۸ ـ عمودهایی از مرکز دایره‌ها به‌یکی از ساقها رسم می‌کنیم، و از مرکز دایرهٔ کوچکتر، خط راستی به‌موازات این ساق می‌کشیم. با این کار، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر به‌طول $R+r$ و یک ساق برابر با $R-r$ و یک زاویهٔ حادهٔ برابر با α، مجاور به‌این ساق، وبرابر با زاویهٔ حادهٔ مجاور به‌قاعدهٔ ذوزنقه، به‌دست می‌آوریم. بنابراین، $\cos\alpha = \dfrac{R-r}{R+r}$. قاعدهٔ بزرگتر، برابر است با $۲R\sqrt{\dfrac{R}{r}} = ۲R\cot\dfrac{\alpha}{۲}$. قاعدهٔ کوچکتر، برابر است با $۲r\sqrt{\dfrac{r}{R}} = ۲r\tan\dfrac{\alpha}{۲}$.

۲۲۹ ـ روی ضلع AB، نقطهٔ K را به‌طوری که $|BK| = |BD|$، و بر امتداد AC، نقطهٔ E را به‌طوری که $|CE| = |CD|$، اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که مثلث ADK با مثلث ADE متشابه است. اگر A، B و C، زاویه‌های داخلی $\triangle ABC$ باشند، آن وقت

$$\angle DKA = ۱۸۰^\circ - \angle DKB = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \angle\frac{B}{۲}) = ۹۰^\circ + \angle\frac{B}{۲}$$

$$\angle ADE = ۱۸۰^\circ - \angle CED - \angle\frac{A}{۲} = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\angle A + \angle C) = ۹۰^\circ + \angle\frac{B}{۲}$$

بنابراین، $\angle AKD = \angle ADE$. به‌علاوه، بنابه‌فرض، $\angle DAE = \angle DAK$.

جواب: $\sqrt{ab}$.

۲۳۰ ـ با نمادگذاری حل مسألهٔ قبل، داریم

$$|AD|^۲ = (|AC| + |CD|)(|AB| - |BD|)$$
$$= |AC|.|AB| - |CD|.|BD| + (|AB|.|CD| - |AC|.|BD|)$$

اما، عبارت داخل پرانتز برابر صفر است، زیرا $\dfrac{|BD|}{|CD|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ (مسألهٔ ۹ در بخش ۱ را ببینید).

۲۳۱ ـ BN و CN را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ دوم را، برای بار دوم، به‌ترتیب، در نقطه‌های K و L قطع کنند؛ $|MN| = |NK|$، زیرا $\angle ANB = ۹۰^\circ$ و MK وتری از دایرهٔ با مرکز A است. چون کمانهای متناظر برابرند، داریم $\angle LNK = \angle BNC = \angle BND$.

به‌این‌ترتیب، $b = |LN| = |ND|$، $|MN|.|NK| = |MN|^۲ = ab$ و $|MN| = \sqrt{ab}$.

۲۳۲ ـ توجه کنید که PQ بر CB عمود است. فرض کنید T نقطهٔ برخورد MN و PQ باشد و L و K پای عمودهای وارد از C و B بر خط راست MN باشند (L و K روی دایره‌های با قطرهای CN و BM واقع‌اند). از ویژگی وترهای متقاطع در دایره‌ها، به‌دست می‌آوریم

$|PT|.|TQ| = |NT| \cdot |LT|$
$|PT|.|TQ| = |MT|.|TK|$
اما $|LT|=|CD|$ و $|TK| = |DB|$ (زیرا $CLKB$ مستطیل و PQ بر CB عمود است).
بنابراین، $|NT|.|CD| = |MT|.|DB|$، یا $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|MT|}{|NT|}$، یعنی، خط راست PQ، CB و MN را به‌یک نسبت تقسیم می‌کند. بنابراین، PQ از نقطهٔ A می‌گذرد، و D پای ارتفاع است.
جواب: $|BD|:|DC| = ۱:\sqrt{۳}$.

۲۳۳ ـ فرض کنید $\angle BOC = ۲\alpha$ و $\angle BOL = ۲\beta$. در این صورت، $|AC| = ۲R\cos\alpha$
$|CL| = ۲R\sin(\alpha+\beta)$، $|CM| = |CL|\cos(۹۰^\circ-\beta) = ۲R\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$،
$|AM| = |AC|-|CM| = ۲R(\cos\alpha-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta) = ۲R\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$،
و بالاخره، $|AN| = a = |AM|\cos\alpha = ۲R\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$. از طرف دیگر، اگر K، P و Q، به‌ترتیب، وسطهای AO، CO و CL باشند، آن‌وقت

$$|KP| = \frac{۱}{۲}|AC| = R\cos\alpha$$

به‌علاوه، $|PQ| = \frac{R}{۲}$ و

$$\angle KPQ = \angle KPO + \angle OPQ = \alpha + ۱۸۰^\circ - \angle COL = ۱۸۰^\circ - \alpha - ۲\beta$$

و بنابر قانون کسینوسها

$$|KQ|^۲ = \frac{R^۲}{۴} + R^۲\cos^۲\alpha + R^۲\cos\alpha\cos(\alpha+۲\beta)$$
$$= \frac{R^۲}{۴} + ۲R^۲\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \frac{R^۲}{۴} + Ra$$

جواب: $\sqrt{\frac{R^۲}{۴}+Ra}$.

۲۳۴ ـ از تشابه مثلثهای MAB و MBC، نتیجه می‌شود که

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MA|}{|MB|} \cdot \frac{|MB|}{|MC|} = \frac{|BA|^۲}{|BC|^۲} = k^۲$$

۲۳۵ ـ از مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۱، نتیجه می‌شود که $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AM|^۲}{|MB|^۲}$ و $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AN|^۲}{|NB|^۲}$.
اگر K نقطهٔ برخورد MN و AB باشد، آن وقت

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{S_{AMN}}{S_{BMN}} = \frac{|AM|.|AN|.\sin\angle MAN}{|MB|.|NB|.\sin\angle MBN} = \sqrt{\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{|AD|}{|BD|}}$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha-۱)(\beta-۱)}}$$

۲۳۶ـ فرض کنید K، L، M و N، به‌ترتیب، نقطه‌های تماس ضلعهای AB، BC، CD و DA با دایرهٔ محاطی باشند. فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد AC و KM باشد. اگر $\angle AKM=\varphi$، آن گاه $\angle KMC=۱۸۰^\circ-\varphi$. بنابراین

$$\frac{|AP|}{|PC|}=\frac{S_{AKM}}{S_{KMC}}=\frac{\frac{۱}{۲}\,|AK|.|KM|\,\sin\varphi}{\frac{۱}{۲}\,|KM|.|MC|\,\sin(۱۸۰^\circ-\varphi)}=\frac{|AK|}{|MC|}=\frac{a}{b}$$

اما، خط راست NL، AC را به‌همین نسبت تقسیم می‌کند. بنابراین، خطهای AC، KM و NL در یک نقطه به‌هم می‌رسند. با در نظر گرفتن قطر BD، و همین نحوهٔ استدلال، ثابت می‌کنیم که BD هم از نقطهٔ P می‌گذرد. نسبت مطلوب، برابر است با $\frac{a}{b}$.

۲۳۷ـ فرض کنید P و Q، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد BK و AC، و AB و DC باشند. خط راست QP، AD را در نقطهٔ M و BC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. با استفاده از تشابه مثلثهای متناظر، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{|AM|}{|MD|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|MK|}{|AM|}=\frac{|AK|-|AM|}{|AM|}$$

اگر $|AM|=x|AD|$، آن وقت

$$\frac{|AM|}{|MD|}=\frac{|AM|}{|AD|-|AM|}=\frac{x}{۱-x}$$

و $\frac{\lambda-x}{x}=\frac{x}{۱-x}$، که از آنجا $x=\frac{\lambda}{\lambda+۱}$.

جواب: $\frac{\lambda}{\lambda+۱}$.

اگر $\frac{۱}{n}=\lambda$، آن گاه $|AM|=\frac{۱}{n+۱}|AD|$، بنابراین، ابتدا با اختیارکردن K منطبق بر D $(\lambda=۱)$، به‌وسط AD، نقطه‌ای مثل $M_۱$ می‌رسیم؛ با اختیار کردن K منطبق بر $M_۱$، $M_۲$ را در $\frac{۱}{۳}$ طول AD به‌دست می‌آوریم، و غیره.

۲۳۸ـ فرض کنید $x=|KM|=|KN|$، $|AD|=y$ و $z=|DB|$ در این صورت $|CD|=\sqrt{yz}$ و $c=y+z$. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث AKB برابراست با $\frac{۱}{۲}\sqrt{yz}=\frac{۱}{۲}|CD|$. مساحت مثلث AKB را از دستور هرون و $S=pr$، حساب کنید. به‌معادلهٔ $\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)\frac{۱}{۲}\sqrt{yz}$ می‌رسیم. می‌دانیم $y+z=c$، داریم $x=\frac{c}{۳}$.

۲۳۹ـ از نقطهٔ $A_۲$، خط راستی به‌موازات AC رسم کنید. فرض کنید R نقطهٔ برخورد این خط با AB باشد. با در نظر داشتن اینکه $\frac{|AR|}{|RC_۱|}=\frac{|B_۱A_۲|}{|A_۲C_۱|}=\frac{۱}{k}$ و $\frac{|AC_۱|}{|C_۱B|}=k$، به‌دست

می‌آوریم: $\frac{|AR|}{|AB|}=\frac{k}{(k+۱)^۲}$. به‌همین‌ترتیب، با رسم کردن خط راستی از $C_۲$ به‌موازات AC، که BC را در نقطهٔ S قطع می‌کند، به‌دست می‌آوریم: $\frac{|CS|}{|CB|}=\frac{k}{(k+۱)^۲}$. بنابراین نقطه‌های R، $A_۲$، $C_۲$ و S، روی خط راستی به‌موازات AC واقع‌اند. به‌این ترتیب، ضلعهای مثلثهای ABC و $A_۲B_۲C_۲$ متناظراً موازی‌اند. اکنون، به‌آسانی به‌دست می‌آید که $|A_۲C_۲|=|RS|-|RA_۲|-|C_۲S|=|AC|\cdot\left(۱-\frac{۳k}{(k+۱)^۲}\right)$، بنابراین نسبت تشابه برابر $\frac{k^۲-k+۱}{(k+۱)^۲}$ است.

۲۴۰ـ از دستور $S=۲R^۲\sin A\sin B\sin C$ برای مساحت مثلث، استفاده می‌کنیم، که در آن A، B و C زاویه‌های مثلث‌اند. در این صورت، مساحت مثلث $A_۱B_۱C_۱$، که در آن $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن هستند، برابر

$$S=۲R^۲\sin\frac{A+B}{۲}\sin\frac{B+C}{۲}\sin\frac{C+A}{۲}=۲R^۲\cos\frac{C}{۲}\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}$$

خواهد بود و $\frac{S}{S_۱}=۸\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$. از طرفی $|BC|=۲R\sin A$، $r\left(\cot\frac{B}{۲}+\cot\frac{C}{۲}\right)=۲R\sin A$ و $r=۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$. بنابراین، $\frac{S}{S_۱}=\frac{۲r}{R}$.

۲۴۱ـ فرض کنید O مرکز تجانس مثلثهای محاطی و محیطی باشد و $M_۱$ و $M_۲$ دو رأس متجانس باشند ($M_۱$ برضلع AB واقع است)، و فرض کنید پاره‌خط OA، مثلث محاطی را در نقطهٔ K قطع کند. دراین‌صورت، $S_{OM_۱K}=\lambda S_۱$، $S_{OM_۲A}=\lambda S_۱$، $\frac{S_{OM_۱A}}{S_{OM_۲A}}=\frac{|OM_۱|}{|OM_۲|}=\sqrt{\frac{S_۱}{S_۲}}$، که از آنجا $S_{OM_۱A}=\lambda\sqrt{S_۱S_۲}$، که در آن $\lambda=\frac{S_{OM_۱K}}{S_۱}$. با درنظرگرفتن شش مثلث از این قبیل، و جمع کردن مساحتهای آنها با هم، به‌دست می‌آوریم: $S_{ABC}=\sqrt{S_۱S_۲}$.

۲۴۲ـ فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. چون خط راست OH بر نیمساز زاویهٔ A عمود است، این خط، ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های K و M، به‌طوری که $|AK|=|AM|$، قطع می‌کند. بنابراین، $\angle AOB=۲\angle C$ (فرض می‌کنیم زاویهٔ C حاده باشد)؛ $\angle OAK=۹۰^\circ-\angle C=\angle HAM$. بنابراین، $\triangle OAK=\triangle HAM$ و $|OA|=|HA|=R$ (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است). اگر D پای عمود وارد از O بر BC باشد، آن وقت $|OD|=\frac{|AH|}{۲}=\frac{R}{۲}$. در نتیجه، $\cos A=\cos\angle DOC=\frac{۱}{۲}$ و $\angle A=۶۰^\circ$.

۲۴۳ـ ثابت کنید مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است، برحسب آنکه فاصلهٔ میان مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث، کمتر از، برابر با و یا بیشتر از نصف طول بزرگترین

ضلع آن باشد.

جواب: ۹۰°، ۶۰° و ۳۰°.

۲۴۴ ـ شرط $S_{BDM} = S_{BCK}$ بدین معنی است که $|BD|.|BM| = |BK|.|BC|$، یعنی، $|BC|.|BK| = |BM|(|BA|+|AC|)$ (۱). از M، خط راستی به‌موازات AC رسم کنید؛ فرض کنید L نقطهٔ برخورد این خط با BA باشد. ثابت کنید که $|KL| = |LM|$؛ بنابراین زاویهٔ مطلوب، $\angle BKM = \frac{۱}{۲}\angle BAC = \frac{\alpha}{۲}$، به‌دست می‌آید. چون مثلث BLM با مثلث BAC متشابه است، داریم $|LM| = \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AC|$ و $|BL| = \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AB|$. اکنون، $|BK|$ را از (۱) به‌دست می‌آوریم و می‌نویسیم

$$|KL| = |BK| - |BL| = \frac{|BA|+|AC|}{|BC|}\cdot|BM| - \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AB|$$
$$= \frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AC|$$

که از آنجا $|KL| = |LM|$.

۲۴۵ ـ فرض کنید $|AD| = a$ و $|BC| = b$. از O، عمود OK را بر AB رسم کنید. اکنون، داریم

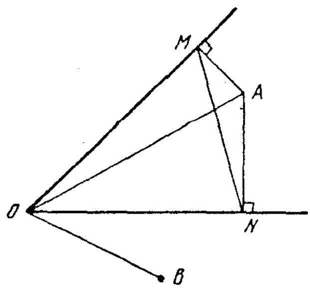
$|BK| = \sqrt{ab}\,\frac{b}{b+a}$، $|BE| = \sqrt{ab}\,\frac{b}{a-b}$،

$|MK| = \frac{\sqrt{ab}}{۲} - \sqrt{ab}\,\frac{b}{b+a} = \sqrt{ab}\,\frac{a-b}{۲(a+b)}$،

$|EK| = |BE| + |BK| = \sqrt{ab} - \frac{۲ab}{(a-b)(a+b)}$ و $|OK| = \frac{ab}{a+b}$. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $|OK|^۲ = |EK|.|MK|$.

جواب: ۹۰°.

۲۴۶ ـ توجه داشته باشید که نقطه‌های A، M، N و O، بر یک دایره واقع‌اند (شکل ۴ را ببینید).



(شکل ۴)

درنتیجه، $\angle NMO = \angle OAN = ۹۰^\circ - \angle AON$. بنابراین با دوران کردن OA دور O با زاویهٔ φ، خط راست NM به‌اندازهٔ همین زاویهٔ φ (در جهت مخالف) دوران می‌کند، و وقتی A در امتداد OA جابه‌جا شود، خط MN به‌موازات خودش جابه‌جا می‌شود. به‌این ترتیب، نتیجه می‌شود که زاویهٔ مطلوب، برابر با α است.

۲۴۷ـ اگر $O_۱$ مرکز دایرهٔ کوچکتر باشد و $\angle BOA = \varphi$ ، آن گاه $\angle BAO = ۹۰^\circ - \frac{\varphi}{۲}$ ، $\angle CO_۱A = ۹۰^\circ + \varphi$ و $\angle CAO_۱ = ۴۵^\circ - \frac{\varphi}{۲}$. بنابراین

$$\angle BAC = \angle BAO - \angle CAO_۱ = ۴۵^\circ$$

۲۴۸ـ مثلث متساوی الاضلاع ABK را روی AB و در درون مربع رسم کنید. در این صورت، $\angle KAB = ۶۰^\circ$ و $\angle KCD = ۱۵۰^\circ$ ، یعنی، K بر M منطبق است.

جواب: ۳۰°.

۲۴۹ـ فرض کنید $M_۱$ قرینهٔ M نسبت به BC، و CB نیمساز زاویهٔ $MCM_۱$ باشد. چون $\angle M_۱CA = ۶۰^\circ$ و $|AC| = \frac{۱}{۲}|CM_۱|$ ، داریم $\angle M_۱AC = ۹۰^\circ$، بنابراین AB نیمساز زاویهٔ $M_۱AC$ است. به‌علاوه، CB نیمساز زاویهٔ $M_۱CM$ است، یعنی، B، از خطهای راست $M_۱C$ و $M_۱A$، به‌یک فاصله است و روی نیمساز زاویهٔ مجاور به‌زاویهٔ $AM_۱C$ قرار دارد. بنابراین، $\angle BMC = \angle BM_۱C = ۷۵^\circ$.

جواب: ۷۵°.

۲۵۰ـ اگر $\angle BAC = ۲\alpha$ ، آن وقت به‌سادگی معلوم می‌شود

$$\angle KMC = \angle MKC = ۳۰^\circ + \alpha$$

یعنی، $|KC| = |MC|$ .MK را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطه‌ای مانند N قطع کند؛ $\triangle KMC$ با $\triangle KAN$ متشابه است، بنابراین، $|AN| = |KN| = R$، یعنی، برابر با شعاع دایره (زیرا $\angle AMN = ۳۰^\circ$). نقطه‌های A، K و O، بر دایره‌ای به‌مرکز N واقع‌اند و $\angle ANO = ۶۰^\circ$ ، در نتیجه، $\angle AKO = ۳۰^\circ$ یا ۱۵۰° ، بر حسب اینکه زاویهٔ AMC منفرجه یا حاده باشد.

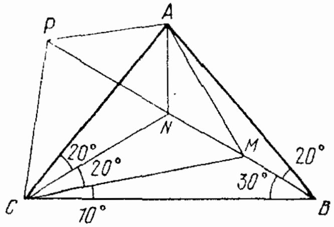
جواب: ۳۰° یا ۱۵۰°.

۲۵۱ـ (الف) نیمساز زاویهٔ A را رسم‌کنید و BM را امتداد دهید تا نیمساز را درنقطه‌ای مانند N قطع‌کند (شکل ۵). چون $|BN| = |NC|$ و $\angle BNC = ۱۲۰^\circ$ ، بنابراین، هریک از زاویه‌های BNA و CNA هم، برابرند با ۱۲۰° و $\angle NCA = \angle NCM = ۲۰^\circ$، یعنی

$$\triangle NMC = \triangle NCA$$

و $|AC| = |MC|$. در نتیجه، AMC متساوی‌الساقین است و $\angle AMC = ۷۰^\circ$.

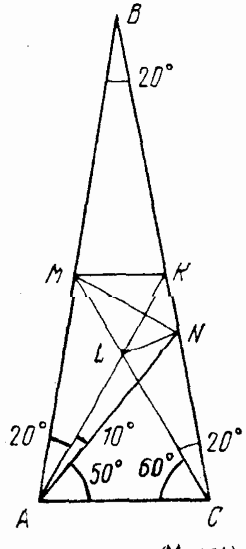
(ب) نقطه‌های M، P، A و C، بر یک دایره قرار دارند (نقطهٔ M از قسمت (الف) است)؛ $\angle PAC = \angle PMC = ۴۰^\circ$.



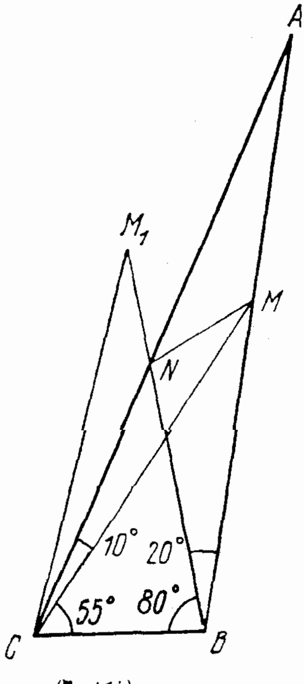
(شکل ۵)

۲۵۲ـ دایره‌ای بر مثلث MCB محیط کنید (شکل ۶) و BN را امتداد دهید تا این دایره را در نقطه‌ای مانند M_1 قطع کند؛ $|CM_1| = |CM|$، زیرا مجموع زاویه‌های روبه‌رو به‌آنها ($80°$ و $100°$) برابر $180°$ است؛ $\angle M_1CM = \angle M_1BM = 20°$، یعنی، NC نیمساز زاویهٔ M_1CM است و $\triangle M_1CN = \triangle NCM$ و $\angle NMC = \angle NM_1C = \angle CMB = 25°$.

۲۵۳ـ روی BC، نقطه‌ای مانند K (شکل ۷) طوری اختیاری می‌کنیم که $\angle KAC = 60°$ و $AC \parallel MK$. فرض کنید L نقطهٔ برخورد AK و MC باشد؛ ALC مثلثی متساوی‌الاضلاع و ANC مثلثی متساوی‌الساقین است (ازخواننده می‌خواهیم‌که اندازهٔ زاویه‌ها را پیدا کند). بنابراین



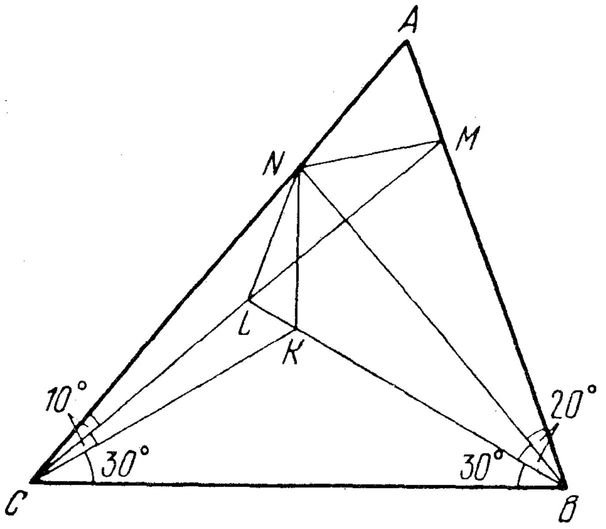
(شکل ۷)



(شکل ٦)

LNC هم، مثلثی متساوی‌الساقین است و $\angle LCN = ۲۰^\circ$. اکنون، اندازهٔ زاویه‌های NLM و MKN را پیدا می‌کنیم ـ هرکدام از آنها برابر با ۱۰۰° است. چون MKL مثلثی متساوی‌الاضلاع است، هریک از زاویه‌های KLN و NKL برابر با ۴۰° است، یعنی، $|KN| = |LN|$، $\triangle MKN = \triangle MLN$ و $\angle NML = \angle KMN = ۳۰^\circ$.

۲۵۴ ـ نقطه‌ای مانند K (شکل ۸) طوری اختیار می‌کنیم که $\angle KBC = \angle KCB = ۳۰^\circ$ و نقطهٔ برخورد خطهای راست MC و BK را به L نشان می‌دهیم.
ازآنجاکه $\triangle BNC$ متساوی‌الساقین است ($\angle NBC = \angle NCB = ۵۰^\circ$)، $\angle KNC = ۴۰^\circ$. L نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث NKC است (LK و LC نیمسازها هستند). در نتیجه، NL هم نیمساز زاویهٔ KNC است و $\angle LNB = ۶۰^\circ$ ؛ همچنین، BN نیمساز زاویهٔ MBL است؛ به‌علاوه، BN بر ML عمود است؛ بنابراین، BN، ML را نصف می‌کند و $\angle MNB = \angle BNL = ۶۰^\circ$ و $\angle NMC = ۳۰^\circ$.



(شکل ۸)

۲۵۵ ـ فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد؛ نقطه‌های C، O، K و M، بر یک دایره واقع‌اند ($\angle COK = \angle A/۲ + \angle C/۲ = ۹۰^\circ - \angle B/۲ = \angle KMB = ۱۸۰^\circ - \angle KMC$)؛ اگر نقطهٔ K بر امتداد NM قرار گیرد، آن وقت $\angle CMK = \angle COK$). بنابراین، $\angle OKC = \angle OMC = ۹۰^\circ$.

۲۵۶ ـ اگر P روی کمان AB و Q روی کمان AC واقع باشد، آن وقت، با نشان دادن زاویهٔ PAB با φ و زاویهٔ QAC با ψ، به دو رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$\sin^{۲}(C-\varphi)=\sin\varphi\sin(B+C-\varphi)$$

$$\sin^{۲}(B-\psi)=\sin\psi\sin(B+C-\psi)$$

با نوشتن تفاضل این برابریها به‌تفصیل، و با تبدیل آن، به‌دست می‌آوریم

$$\sin(B+C-\varphi-\psi)\sin[(B-C)+(\varphi-\psi)]=\sin(B+C-\varphi-\psi)\sin(\varphi-\psi)$$

که‌ازآنجا (چون $\circ<B+C-\varphi-\psi<\pi$) $B-C+\varphi-\psi=\pi-(\varphi-\psi)$، وبه‌جواب می‌رسیم.

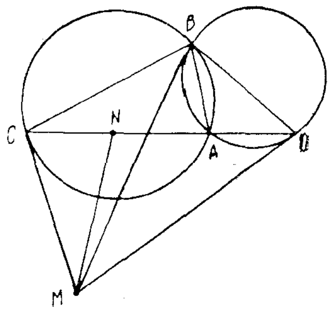
جواب: $\frac{\pi-\alpha}{۲}$.

۲۵۷ ـ ثابت می‌کنیم مثلث CMN با مثلث CAB متشابه است (شکل ۹).

داریم: $\angle MCN=\angle CBA$. چون چهارضلعی $CBDM$ چهارضلعیی محاطی است، داریم:

$$\frac{|CM|}{|CB|}=\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle CMB}=\frac{\sin\angle CDM}{\sin\angle CDB}=\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle ADB}=\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|CN|}{|AB|}.$$

بنابراین، $\angle CMN=\angle BCA$، یعنی، زاویهٔ مطلوب، برابر است با $\frac{\alpha}{۲}$ یا $\pi-\frac{\alpha}{۲}$.



(شکل ۹)

۲۵۸ ـ فرض کنید $\angle ABC=۱۲۰^\circ$ و BD، AE و CM نیمسازهای مثلث ABC باشند. نشان خواهیم داد که DE نیمساز زاویهٔ BDC، و DM نیمساز زاویهٔ BDA است. در حقیقت، BE نیمساز زاویهٔ مجاور به‌زاویهٔ ABD است، یعنی، در مثلث ABD، E، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویهٔ BAD و زاویهٔ مجاور به‌زاویهٔ ABD است؛ به‌این ترتیب، نقطهٔ E، از خطهای راست AB، BD و AD به‌یک فاصله است؛ بنابراین، DE نمساز زاویهٔ BDC است. درست به‌همین روش، DM نیمساز زاویهٔ BDA است.

۲۵۹ ـ فرض کنید: $\angle ABD=\alpha$ و $\angle BDC=\varphi$. بنا به‌فرض، $\angle DAC=۱۲۰^\circ-\alpha$، $\angle BAC=۳۰^\circ+a$، $\angle ADB=۳۰^\circ-\alpha$ و $\angle DBC=۶۰^\circ+\alpha$. بنابر قانون سینوسها در مثلثهای ABC، BCD و ACD، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{\sin(۳۰^\circ+\alpha)}{\sin(۶۰^\circ+۲\alpha)}=\frac{۱}{۲\cos(۳۰^\circ+\alpha)}\text{،}\quad \frac{|DC|}{|BC|}=\frac{\sin(۶۰^\circ+\alpha)}{\sin\varphi}\ \text{و}$$

$$\frac{|AC|}{|DC|}=\frac{\sin(۳۰^\circ-\alpha+\varphi)}{\sin(۱۲۰^\circ-\alpha)}$$

با ضرب کردن این برابریها در هم، داریم

$$\sin(۳۰^\circ-\alpha-\varphi)=۲\cos(۳۰^\circ+\alpha)\sin\varphi\Rightarrow ۲\cos(۶۰^\circ+\alpha)\sin(۳۰^\circ-\varphi)=۰$$

بنابراین، $\angle BDC=\varphi=۳۰^\circ$.

۲۶۰ـ در مسألهٔ ۱۷ بخش ۱، دستوری برای محاسبه طول نیمساز یک زاویهٔ داخلی مثلث ABC به‌دست آوردیم. به‌همان طریق، می‌توان ثابت کرد که طول نیمساز زاویهٔ خارجی A، با دستور $l_A=\dfrac{۲bc\sin\frac{A}{۲}}{|b-c|}$ ($|AB|=c$، $|BC|=a$ و $|CA|=b$) محاسبه می‌شود.

سپس، $\sin\frac{A}{۲}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sin\frac{A}{۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱-\cos A)}=\sqrt{\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\right)}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{۴bc}}$$

به‌همین طریق، با محاسبهٔ $\sin\frac{A}{۲}$ و $\sin\frac{C}{۲}$ بر حسب ضلعهای مثلث، و محاسبهٔ l_A و l_C، به‌دست می‌آوریم $\dfrac{\sqrt{a(b+c-a)}}{|b-a|}=\dfrac{\sqrt{c(a+b-c)}}{|b-c|}$.

بنابه‌فرض، $b=۲$ و $c=۱$. بنابراین، a باید در معادلهٔ

$$\sqrt{a+۱}=\frac{\sqrt{a(۳-a)}}{|a-۲|}\Rightarrow(a-۱)(a^۲-a-۴)=۰$$

صدق کند. اما $a\neq ۱$، در نتیجه، $|BC|=a=\dfrac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$.

۲۶۱ـ اگر O و $O_۱$، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ADB باشند، آن وقت مثلث $AOO_۱$ با مثلث ACD متشابه است.

جواب: αR.

۲۶۲ـ اگر K وسط کمان AB و O مرکز دایره باشد و $|AB|=۲R=c$، آن وقت

$$|CM|^۲=|CD|^۲+|DM|^۲=|CD|^۲+|DK|^۲=|AD|.|DB|+R^۲+|DO|^۲$$
$$=(R+|DO|)(R-|DO|)+R^۲+|DO|^۲=۲R^۲=\frac{c^۲}{۲}$$

جواب: $c\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۲۶۳ ـ فرض کنید KM پاره‌خطی موازی با BC باشد و N و L نقطه‌هایی باشند که در آنها، دایرهٔ محاطی برضلعهای ACو BC مماس است. همان‌طور که می‌دانیم (مسألهٔ ۱۸ بخش ۱ را ببینید)، $|AN| = |AL| = p-a$ ،که در آن pنصف محیط مثلث ABCاست. از طرف دیگر، $|AL| = |AN|$ نصف محیط مثلث AKMاست که با مثلث ABC متشابه است. درنتیجه،

$$\frac{b}{a} = \frac{p-a}{p} \text{ و } p = \frac{a^{\text{۲}}}{a-b}.$$

جواب: $\frac{\text{۲}a^{\text{۲}}}{a-b}$.

۲۶۴ ـ اگر a، b و c طول ضلعهای مثلث مفروض باشند، آن وقت محیط مثلثهای جدا شده برابرند با $\text{۲}(p-a)$ ، $\text{۲}(p-b)$ و $\text{۲}(p-c)$، که در آنها pنصف محیط مثلث مفروض است، در نتیجه، اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد، آن وقت

$$R_{\text{۱}}+R_{\text{۲}}+R_{\text{۳}} = \left(\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}\right)R = R$$

جواب: $R_{\text{۱}}+R_{\text{۲}}+R_{\text{۳}}$.

۲۶۵ ـ اگر $\angle A=\alpha$ ، آن وقت $|AM| = \frac{|AC|}{\sin\alpha}$ و $|AN| = \frac{|AB|}{\sin\alpha}$ ، یعنی، $|AM|:|AN| = |AC|:|AB|$ ؛ بنابراین، $\triangle AMN$ با $\triangle ABC$، با نسبت تشابه $\frac{\text{۱}}{\sin\alpha}$، متشابه است، بنابراین $|MN| = \frac{|BC|}{\sin\alpha} = \text{۲}R$.

۲۶۶ ـ فرض کنید $O_{\text{۱}}$ و $O_{\text{۲}}$ مرکز دایره‌های متقاطع باشند. شعاعهای آنها را، به‌ترتیب، با xو y نشان می‌دهیم، $|OA| = a$. بنا به‌فرض، چون مساحتهای مثلثهای $AOO_{\text{۱}}$و $AOO_{\text{۲}}$برابرند، با محاسبهٔ مساحتهایشان از دستور هرون، و در نظر داشتن اینکه $x= |O_{\text{۱}}A|$ ، $|OO_{\text{۱}}| = R-x$ ، $|O_{\text{۲}}A| = y$ و $|OO_{\text{۲}}| = R-y$ ، پس از تبدیلات، به‌دست می‌آوریم

$$(R-\text{۲}x)^{\text{۲}} = (R-\text{۲}y)^{\text{۲}}$$

که از آنجا (چون $x \neq y$)، به‌دست می‌آوریم $x+y = R$.

جواب: R.

۲۶۷ ـ فرض کنید ABو CD وترهای مفروض باشند و M نقطهٔ برخورد آنها باشد. (الف) مجموع اندازهٔ کمانهای ACو BD، برابر با ۱۸۰° (نصف دایره) است؛ در نتیجه

$$|AC|^{\text{۲}}+|BD|^{\text{۲}} = \text{۴}R^{\text{۲}}$$

بنابراین، $|AM|^{\text{۲}}+|MC|^{\text{۲}}+|MB|^{\text{۲}}+|MD|^{\text{۲}} = |AC|^{\text{۲}}+|BD|^{\text{۲}} = \text{۴}R^{\text{۲}}$.

جواب: $\text{۴}R^{\text{۲}}$.

(ب)
$$|AB|^{\text{۲}}+|CD|^{\text{۲}} = (|AM|+|MB|)^{\text{۲}}+(|CM|+|MD|)^{\text{۲}}$$
$$= \text{۴}R^{\text{۲}}+\text{۲}|AM|\cdot|MB|+\text{۲}|CM|.|MD|$$

$$= ۴R^{۲}+۲(R^{۲}-a^{۲}) = ۶R^{۲}-۲a^{۲}$$

جواب: $۶R^{۲}-۲a^{۲}$.

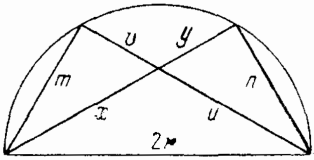
۲۶۸ ـ اگر M دومین نقطهٔ برخورد BC با دایرهٔ کوچکتر باشد، آن وقت $|BM| = |PC|$ (M بین B و P است)، $|BP| = |MP|+|BM|$ و

$$|PA|^{۲}+|PB|^{۲}+|PC|^{۲}=|PA|^{۲}+(|PB|-|PC|)^{۲}+۲|PB|\,.\,|PC|$$

$$= |PA|^{۲}+|MP|^{۲}+۲|PB|\,.\,|PC|$$

$$= ۴r^{۲}+۲(R^{۲}-r^{۲}) = ۲(R^{۲}+r^{۲})$$

۲۶۹ ـ طول قطعه‌های وترها را همان‌طور که در شکل ۱۰ نشان داده شده و طول قطر را با $۲r$ نمایش می‌دهیم.



(شکل ۱۰)

با استفاده از این نتیجه که زاویه‌های روبه‌رو به‌قطر، زاویه‌هایی قائمه‌اند، و $xy = uv$، به‌دست می‌آوریم: $x(x+y)+u(u+v) = (u+v)^{۲}+x^{۲}-v^{۲} = (u+v)^{۲}+m^{۲} = ۴r^{۲}$.

۲۷۰ ـ اگر α، β، γ و δ اندازهٔ کمانهای نظیر ضلعهای به‌طول a، b، c و d باشند، آن وقت برابریی که باید ثابت شود، متناظر با برابری مثلثاتی

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}=\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\delta}{۲}+\cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\delta}{۲}$$

یا $\sin\frac{\alpha+\gamma}{۲}=\sin\frac{\beta+\delta}{۲}$ است.

۲۷۱ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعیی محاطی باشد. AB و CD در نقطهٔ P متقاطع‌اند، A و D، به‌ترتیب، روی پاره‌خطهای BP و CP واقع‌اند. BC و AD در نقطهٔ Q متقاطع‌اند، C و D روی پاره‌خطهای BQ و AQ واقع‌اند. دایره‌ای بر مثلث ADP محیط می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این دایره با خط راست PQ را به M نشان می‌دهیم. (ثابت کنید M بر پاره‌خط PQ قرار دارد.) داریم: $\angle DMQ = \angle DAP = \angle BCD$. درنتیجه، $CDMQ$ چهارضلعیی محاطی است. بنابه‌فرض، چون طول مماسهای مرسوم بر دایرهٔ اصلی از نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، برابر a و b است، داریم $|QM|.|QP| = |QD|.|QA| = b^{۲}$ و $|PM|.|PQ| = |PD|.|PC| = a^{۲}$. با جمع‌کردن این تساویها با هم، به‌دست می‌آوریم $|PQ|^{۲} = a^{۲}+b^{۲}$.

جواب: $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$.

۲۷۲ـ طول پاره‌خط QP برابر است با $\sqrt{(b^2-R^2)+(c^2-R^2)}=\sqrt{b^2+c^2-2R^2}$ (حل مسألهٔ قبل را ببینید). فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض و Q نقطهٔ برخورد AB و CD باشد (A بر پاره‌خط BQ قرار دارد). برای پیدا کردن طول PQ، دایره‌ای بر مثلث QCA محیط می‌کنیم و نقطهٔ برخورد QP با این دایره را به N نشان می‌دهیم. چون $\angle ANP=\angle ACQ=\angle ABP$، نقطه‌های A، B، N و P هم، بر یک دایره واقع‌اند. داریم

$$|QP|.|QN|=|QA|.|QB|=b^2-R^2$$

$$|PN|.|PQ|=|CP|.|PA|=R^2-a^2$$

با کم کردن تساوی دوم از اولی، به‌دست می‌آوریم $|QP|^2=b^2+a^2-2R^2$. به‌همین ترتیب، $|PM|^2=c^2+a^2-2R^2$.

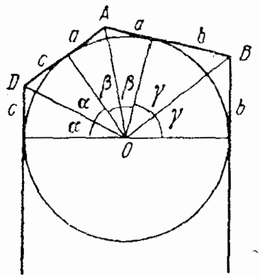
جواب: $|QM|=\sqrt{b^2+c^2-2R^2}$، $|QP|=\sqrt{b^2+a^2-2R^2}$ و

$|PM|=\sqrt{c^2+a^2-2R^2}$

۲۷۳ـ شعاع دایرهٔ محاطی، بین مقدارهای شعاعهای دو حالت حدی قرار دارد. این شعاع نمی‌تواند از شعاع دایرهٔ محاط در مثلث به‌ضلعهای $a+b$، $b+c$ و $c+a$، که برابر است با $\frac{S}{p}$، که در آن S مساحت و p نصف محیط مثلث است، کمتر باشد؛ بنابراین

$$r>\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+b+c}=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

از طرف دیگر، r از شعاع دایرهٔ نشان داده شده در شکل ۱۱، کمتر است (در این شکل، مماسهای روبه‌رو موازی‌اند و نقطهٔ C به‌بینهایت میل می‌کند). چون برای زاویه‌های α، β و γ که در شکل مشخص‌شده‌اند، برابری $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$، برقراراست، $\tan\alpha=\frac{c}{\rho}$، $\tan\beta=\frac{a}{\rho}$، $\tan\gamma=\frac{b}{\rho}$، که در آنها ρ شعاع دایرهٔ نشان داده شده است، $\tan(\alpha+\beta)=\cot\gamma$ یا $\frac{(c+p)\rho}{\rho^2-ac}=\frac{\rho}{b}$، که از آنجا $\rho=\sqrt{ab+bc+ca}$. بنابراین، $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}<r<\sqrt{ab+bc+ca}$.



(شکل ۱۱)

۲۷۴ـ فرض کنید M نقطهٔ برخورد خط راست CB با خط‌المرکزین دایره‌ها باشد. قرار می‌گذاریم: $|AM|=x$، $\angle ACB=\varphi$؛ $|AB|^2=2rx$، $|AC|^2=2Rx$ و $\sin\varphi=\frac{x}{|AC|}$.

اگر ρ شعاع دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ باشد، آن وقت $\rho=\frac{|AB|}{2\sin\varphi}=\frac{|AB|.|AC|}{2x}=\sqrt{Rr}$.

جواب: $\sqrt{Rr}$.

۲۷۵ـ فرض کنید O_1 و O_2 مرکز دایره‌ها باشند، A نقطهٔ برخوردشان که از BC دورتر است، باشد و $\angle O_1AO_2=\varphi$. نشان می‌دهیم $\angle BAC=\frac{\varphi}{2}$. (برای نقطهٔ دیگر، این زاویه برابر با $\frac{\varphi}{2}-180^\circ$ است.) در حقیقت

$$\angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle BCA=180^\circ-(90^\circ-\angle ABO_1)-(90^\circ-\angle ACO_2)$$

$$=\angle ABO_1+\angle ACO_2=\angle BAO_1+\angle CAO_2=\varphi-\angle BAC$$

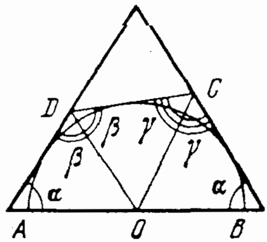
فرض کنید $|O_1O_2|=a$. با ترسیم $O_2M \parallel BC$ (M بر O_1B قرار دارد)، به‌دست می‌آوریم $|BC|=|O_2M|=\sqrt{a^2-(R-r)^2}$. در مثلث O_1AO_2، داریم $\cos\varphi=\frac{R^2+r^2-a^2}{2Rr}$؛ بنابراین، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابراست با

$$\frac{|BC|}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sqrt{a^2-(R-r)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{R^2-r^2-a^2}{2Rr}}}=\sqrt{Rr}$$

جواب: $\sqrt{Rr}$ (در هر دو مثلث).

۲۷۶ـ DO و CO نیمساز زاویه‌های ADC و DCB هستند. فرض کنید α، β و γ معرف اندازهٔ زاویه‌های متناظر باشند (شکل ۱۲). اما، $\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha=2\pi$؛ بنابراین، $\alpha+\beta+\gamma=\pi$؛ به‌این ترتیب، نتیجه می‌شود که $\angle DOA=\gamma$، $\angle COB=\beta$ و مثلث AOD با مثلث COB متشابه است؛ در نتیجه، $|AD|.|CB|=|AO|.|OB|=\frac{|AB|^2}{4}$.

جواب: $\frac{a^2}{4b}$.



(شکل ۱۲)

۲۷۷ ـ از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که نیمسازهای زاویه‌های C و D، روی ضلع AB متقاطع‌اند. این نقطهٔ برخورد را با O نشان می‌دهیم. دایره‌ای بر مثلث DOC محیط کنید. فرض کنید K دومین نقطهٔ برخورد این دایره با AB باشد. داریم

$$\angle DKA = \angle DCO = \frac{۱}{۲}\angle DCB = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle DAK) = \frac{۱}{۲}(\angle DKA + \angle ADK)$$

بنابراین، $\angle DKA = \angle ADK$ و $|AD| = |AK|$. به‌همین ترتیب، $|BC| = |BK|$؛ در نتیجه، $|AD| + |CB| = |AB|$.

جواب: $a-b$.

۲۷۸ ـ روی نیمخط MC، نقطه‌ای مانند N طوری اختیار می‌کنیم که $|AN| = |AB| = |AD|$. چون $\frac{\sin \angle MNA}{\sin \angle MCA} = \frac{|AC|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle ACD}$ و $\angle MCA = \angle ACD$، داریم $\sin \angle MNA = \sin \angle ADC = \sin \angle ABM$، یعنی، زاویه‌های ABM و MNA یا برابرند و یا مجموعشان ۱۸۰° است. ولی M در درون مثلث ABN است، بنابراین، $\angle ABM = \angle MNA$. اکنون، می‌توانیم ثابت کنیم $\triangle ABM = \triangle AMN$؛

$$\angle NAC = \angle MNA - \angle NCA = \angle ADC - \angle ACD = \varphi$$

جواب: $\frac{\alpha+\varphi}{۲}$.

۲۷۹ ـ فرض کنید K و L معرف نقطه‌های تماس دایره‌های اول و دوم با یک ضلع زاویه، و M و N، به‌ترتیب، نقطه‌های دیگر برخورد خط راست AB با دایره‌های اول و دوم باشند. فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ دوم باشد. چون A مرکز تجانس دایره‌های مفروض است، $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AN|} = \lambda$، که از آنجا

$$|AK|.|AL| = \lambda |AL|^۲ = \lambda |AB|.|AN| = |AB|^۲$$

از طرف دیگر، از تشابه مثلثهای AKC و ALO، داریم: $|AK|.|AL| = |AC|.|AO|$. در نتیجه، $|AC|.|AO| = |AB|^۲$؛ بنابراین، مثلثهای ABC و AOB متشابه‌اند.

جواب: $\frac{\alpha}{۲}$ یا $\pi - \frac{\alpha}{۲}$.

۲۸۰ ـ فرض کنید $\angle BAF = \varphi$، $\angle DBA = \alpha$ و $\angle DAB = ۲\alpha$ (از فرض، نتیجه می‌شود که نقطه‌های A، E و F در یک طرف BD واقع‌اند و $\angle BDA < ۹۰^\circ$، یعنی، $\alpha > ۳۰^\circ$).
بنابر قانون سینوسها، در مثلثهای DEA، DAB و BAF داریم

$$\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{\sin(۱۲۰^\circ - ۲\alpha)}{\sin(۳۰^\circ + \alpha)} = ۲\cos(۳۰^\circ + \alpha)$$

$\frac{|AB|}{|BF|}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}$ و $\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{\sin\alpha}{\sin ۳\alpha}=\frac{۱}{۴\cos(۳۰^\circ+\alpha)\cos(۳۰^\circ-\alpha)}$. با ضرب کردن برابریها درهم، به‌دست می‌آوریم $\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}=۲\cos(\alpha-۳۰^\circ)$، که از آنجا $\angle BAF=\varphi=۳۰^\circ$.

۲۸۱ ـ دو حالت در نظر بگیرید.

(۱) پاره‌خط BK، AC را قطع کند. از شرط $\angle BKC=\frac{۳\angle A-\angle C}{۲}$، نتیجه می‌شود که $\angle C=۹۰^\circ$

($\angle BCK=\angle B+\angle C$، $\angle CBK=\frac{\angle B}{۲}$ و

$$\frac{۳\angle A-\angle C}{۲}+(\angle B+\angle C)+\frac{\angle B}{۲}=۱۸۰^\circ$$

و غیره). در نتیجه، نقطهٔ O بر AB قرار دارد و مجموع فاصله‌های O تا AC و AB، برابر با $\frac{۱}{۲}|BC|$ است؛ بنابراین

$$|BC|=۴>۲+\sqrt{۳}=|AC|+|AB|>|AB|$$

یعنی، یک ساق بزرگتر از وتر است، که این ناممکن است. بنابراین، به‌تناقض رسیدیم.

(۲) پاره‌خط BK، AC را قطع نکند. دراین‌حالت، $\angle CBK=۱۸۰^\circ-\frac{\angle B}{۲}$، $\angle BCK=\angle A$ و $\angle BKC=\frac{۳\angle A-\angle C}{۲}$ (بنا به‌فرض)؛ به‌این ترتیب

$$\left(۱۸۰^\circ-\frac{\angle B}{۲}\right)+\angle A+\frac{۳\angle A-\angle C}{۲}=۱۸۰^\circ$$

که از آنجا $\angle A=۳۰^\circ$.

باز هم، دو حالت ممکن است.

(۲ الف) O مرکز دایرهٔ محیطی، در درون مثلث قرار دارد. فرض کنید عمود وارد از O بر AB، AB را در N و AC را در K، و عمود مرسوم بر AC از O، AC را در M و AB را در L قطع کند. فرض می‌کنیم $|OM|=x$، $|ON|=y$؛ $x+y=۲$ (بنا به‌فرض)، $|OK|=\frac{۲x}{\sqrt{۳}}$، $|MK|=\frac{x}{\sqrt{۳}}$، $|AK|=۲|NK|=۲y+\frac{۴x}{\sqrt{۳}}$، $|AM|=|AK|-|MK|=۲y+x\sqrt{۳}$.

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آوریم $|AN|=۲x+y\sqrt{۳}$. بنا به‌فرض

$$|AN|+|AM|=\frac{۱}{۲}(|AB|+|AC|)=\frac{۱}{۲}(۲+\sqrt{۳})$$

از طرف دیگر، $|AN|+|AM|=(۲+\sqrt{۳})(x+y)=۲(۲+\sqrt{۳})$، که تناقض است.

(۲ب) نقطهٔ O بیرون مثلث ABC است. می‌توانیم نشان دهیم که $\angle B$ منفرجه است. در غیر این صورت، اگر $\angle C > ۹۰^\circ$، آن وقت $۰ < \frac{۳\angle A - \angle C}{۲}$. بنابراین، O در درون پاره‌خط AC که شامل B نیست، قرار دارد؛ اما، این، جواب را نتیجه نمی‌دهد. با استفاده از نمادگذاری قسمت قبل، داریم $|AM| = ۲y - x\sqrt{۳}$ و $|AN| = y\sqrt{۳} - ۲x$. از دستگاه معادله‌های $x+y = ۲$ و $|AM| + |AN| = (۲+\sqrt{۳})y - (۲+\sqrt{۳})x = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$، به‌دست می‌آوریم

$$x = \frac{۳}{۴}, \ y = \frac{۵}{۴}, \ |AM| = \frac{۵}{۲} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

شعاع دایره برابر است با $\sqrt{|AM|^۲ + |MO|^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۴ - ۱۵\sqrt{۳}}$.

۲۸۲ـ اگر $C_۱$ قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به AB، و $B_۱$ قرینهٔ B نسبت به AC باشد، آن وقت (مثل همیشه، a، b و c طول ضلعهای $\triangle ABC$ هستند و S مساحت آن است)

$$\begin{aligned}|C_۱B_۱|^۲ &= b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos ۳A = a^۲ + ۲bc(\cos A - \cos ۳A)\\ &= a^۲ + ۸bc\sin^۲ A\cos A = a^۲ + ۱۶(b^۲ + c^۲ - a^۲)\frac{S^۲}{b^۲c^۲}\end{aligned}$$

بنابراین، به‌دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} a^۲b^۲c^۲ + ۱۶S^۲(b^۲ + c^۲ - a^۲) = ۸b^۲c^۲ \\ a^۲b^۲c^۲ + ۱۶S^۲(a^۲ + b^۲ - c^۲) = ۸a^۲b^۲ \\ a^۲b^۲c^۲ + ۱۶S^۲(c^۲ + a^۲ - b^۲) = ۱۴c^۲a^۲ \end{cases}$$

با کم کردن معادلهٔ دوم از اولی، و در نظر داشتن اینکه $a \neq c$، به‌دست می‌آوریم: $۴S^۲ = b^۲$. با قرار دادن $\frac{b^۲}{۴}$ به‌جای $S^۲$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} a^۲c^۲ + ۴(b^۲ - c^۲ - a^۲) = ۰ \\ a^۲b^۲c^۲ + ۴b^۲c^۲ + ۴b^۲a^۲ - ۴b^۴ - ۱۴a^۲c^۲ = ۰ \\ b^۲ = ۴S^۲ \end{cases}$$

با فرض $a^۲c^۲ = x$ و $a^۲ + c^۲ = y$، داریم

$$\begin{cases} ۴y - x = ۴b^۲ \\ x(b^۲ - ۱۴) + ۴b^۲y = ۴b^۴ \end{cases}$$

با ضرب کردن معادلهٔ اول دستگاه معادله‌های اخیر در $b^۲$، و کم کردن نتیجه از معادلهٔ دوم، به‌دست می‌آوریم: $x(۲b^۲ - ۱۴) = ۰$، که از آنجا $b = \sqrt{۷}$.

جواب: ۱، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$ یا $\sqrt{\frac{۲۱-\sqrt{۲۱۷}}{۲}}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{\frac{۲۱+\sqrt{۲۱۷}}{۲}}$.

۲۸۳ ـ ثابت کنید، $\tan\alpha = \frac{|b^۲-c^۲|}{۲S}$، که در آن S مساحت مثلث است (به‌همین نحو، یک چنین برابری را برای زاویه‌های دیگر ثابت کنید).

جواب: $\arctan|\tan\alpha \pm \tan\beta|$.

۲۸۴ ـ کتانژانت زاویهٔ بین یک میانه و یک ضلع مثلث ABC را پیدا می‌کنیم. اگر $\angle A_۱AB = \varphi$ ($AA_۱$ میانهٔ مثلث ABC است، a، b و c طول ضلعهای مثلث و m_a، m_b و m_c طول میانه‌های آن هستند و S مساحت آن است)، آنگاه

$$\cot\varphi = \frac{۲c-a\cos\beta}{h_c} = \frac{۲c^۲-ac\cos B}{۲c^۲} = \frac{۳c^۲+b^۲-a^۲}{۴S}$$

فرض‌کنید M نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC باشد، خطهای راست عمود برمیانه‌هایی‌که ازرأسهای A و B خارج می‌شوند، در $C_۱$ متقاطع‌اند؛ $\angle MC_۱B = \angle MAB = \varphi$ ($MAC_۱B$ چهارضلعیی محاطی است). در نتیجه

$$S_{MBC_۱} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}m_b\right)^۲\cot\varphi = \frac{(۲a^۲+۲c^۲-b^۲)(۳c^۲+b^۲-a^۲)}{۷۲S}$$

مساحت مثلث مطلوب، برابر مجموع مساحتهای شش مثلث است که هر مساحت به‌روشی مشابه به‌دست می‌آید. بالاخره، به دست می‌آوریم $\frac{(a^۲+b^۲+c^۲)^۲}{۱۲S} = \frac{۲۷(R^۲-d^۲)^۲}{۴S}$ (اثبات برابری $a^۲+b^۲+c^۲ = ۹(R^۲-d^۲)$ به‌خواننده واگذار می‌شود).

جواب: $\frac{۲۷}{۴}(R^۲-d^۲)^۲$.

۲۸۵ ـ ۶۰°.

۲۸۶ ـ ابتدا توجه کنید که $|MN|$ برابر طول مماس مشترک خارجی دایره‌های به‌مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$ است (مسألهٔ ۱۴۲ بخش ۱ را ببینید). در نتیجه، اگر شعاعهای این دایره‌ها x و y باشند و $x+y = ۲R-a$، آن وقت $|MN| = \sqrt{a^۲-(x-y)^۲}$. فرض کنید φ معرف زاویهٔ تشکیل شده با AB و $O_۱O_۲$، و L نقطهٔ برخورد AB و $O_۱O_۲$ باشد. داریم

$$|O_۱L| = \frac{xa}{x+y} = \frac{xa}{۲R-a} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{x}{|O_۱L|} = \frac{۲R-a}{a}$$

$$|OL| = |x+|O_۱L|-R| = \frac{R}{۲R-a}|۲x+a-۲R| = \frac{R}{۲R-a}|x-y|$$

$$|AB| = ۲\sqrt{R^۲ - |OL|^۲ \sin^۲\varphi} = \frac{۲R}{a}\sqrt{a^۲-(x-y)^۲} = \frac{۲R}{a}|MN|$$

جواب: $\frac{۲R}{a}$ (در هر دو حالت).

۲۸۷ ـ زاویهٔ AKB برابر ۹۰° است (مسألهٔ ۲۵۵ بخش ۱ را ببینید). فرض کنید R نقطهٔ برخورد BK و AC، و Q نقطه‌ای بر BK باشد، به‌طوری که $AC \parallel NQ$. با استفاده از نمادگذاری همیشگی، داریم: $|AR| = |AB| = c$، $|MR| = c-(p-a) = p-b = |NB|$ و $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|MR|}{|QN|} = \frac{|CB|}{|RC|} = \frac{a}{b-c}\,(b>c)$. از آنجا که $|MN| = ۲(p-c)\sin\frac{\alpha}{۲}$، $|MK| = a\sin\frac{\alpha}{۲}$. بقیهٔ پاره‌خطها، به‌روش مشابه در نظر گرفته می‌شوند. مثلث مطلوب، با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه برابر با $\sin\frac{\alpha}{۲}$ است. مساحت این مثلث برابر با $S.\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ است.

۲۸۸ ـ فرض کنید $|AM| = x$، $|CN| = y$ و $x+y = a$، که در آن a طول ضلع مربع است. نقطه‌های برخورد MD و DN با AC را به E و F نشان می‌دهیم. طول پاره‌خطهای $|AE|$، $|EF|$ و $|CF|$، به‌سادگی بر حسب a، x و y محاسبه می‌شوند، که در نتیجهٔ آن، می‌توان برابری $|EF|^۲ = |AE|^۲ + |FC|^۲ - |AE|.|FC|$ را تحقیق کرد.

۲۸۹ ـ فرض کنید P نقطهٔ برخورد خط راست DE با AB و K نقطه‌ای روی AB باشد، به‌طوری که KD با AC موازی است، AKD مثلثی متساوی‌الساقین است، زیرا

$$\angle KDA = \angle DAC = \angle DAK$$

بنابراین، KD میانه‌ای در مثلث قائم‌الزاویه است و

$$|MN| = \frac{۱}{۲}|KD| = \frac{۱}{۴}|AP| = \frac{۱}{۴}|AE| = \frac{۱}{۴}a$$

۲۹۰ ـ فرض کنید $A_۱$ نقطهٔ دیگر برخورد دایره‌های محیطی $\triangle ABC$ و $\triangle AB_۱C_۱$ باشد. از فرض نتیجه می‌شود که $|BB_۱| = |CC_۱|$، به‌علاوه، $\angle ABA_۱ = \angle ACA_۱$ و $\angle AB_۱A_۱ = \angle AC_۱A_۱$

درنتیجه، $\triangle A_۱BB_۱ = \triangle A_۱CC_۱$. بنابراین، $|A_۱B| = |A_۱C|$. فرض‌کنید $\angle ABC = \beta$، $\angle ACB = \gamma$ و $\angle ABA_۱ = \angle ACA_۱ = \varphi$. چون $\triangle A_۱BC$ متساوی‌الساقین است، داریم $\angle A_۱BC = \angle A_۱CB$، یعنی، $\beta+\varphi = \gamma-\varphi$، $\varphi = \frac{۱}{۲}(\gamma-\beta)$ و اگر شعاع دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$، R باشد، آن وقت $|AA_۱| = ۲R\sin\frac{\gamma-\beta}{۲}$؛ اما

$$|AB| - |AC| = ۲R(\sin\gamma - \sin\beta) = ۴R\sin\frac{\gamma-\beta}{۲}\cos\frac{\beta+\gamma}{۲} = ۲|AA_۱|\sin\frac{\alpha}{۲}$$

در نتیجه، $|AA_1| = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

۲۹۱ ـ توجه کنید که نقطه‌های A، O، M و B بر یک دایره واقع‌اند ($\angle AMB$، برابر است با نصف مجموع کمان AB و کمان قرینهٔ AB نسبت به OC، یعنی، $\angle AMB = \angle AOB$). پاره‌خط MK را روی AM برابر با MB جدا می‌کنیم؛ در این صورت، مثلث AKB با مثلث OMB متشابه است.

جواب: $|AB| = 2a$.

۲۹۲ـ فرض‌کنید $|AB| = 2r$، $|BC| = 2R$، O_1 وسط AB، O_2 وسط BC، O_3 وسط AC و O مرکز دایرهٔ چهارم به‌شعاع x باشد. از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که $|O_1O_3| = R$، $|O_2O_3| = r$، $|O_1O| = r+x$، $|O_2O| = R+x$ و $|O_3O| = R+r-x$. با محاسبهٔ مساحت مثلثهای O_1OO_3 و O_1OO_2 از دستور هرون و نیز دستور نصف حاصلضرب قاعده و ارتفاع متناظر، دو معادله به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}\sqrt{(R+r)r(R-x)x} = \dfrac{1}{2}Rd\\ \sqrt{(R+r+x)\,Rrx} = \dfrac{1}{2}(R+r)d\end{cases}$$

با مربع کردن هر کدام از این معادله‌ها و کم کردن یکی از دیگری، به‌دست می‌آوریم: $x = \dfrac{d}{2}$.

جواب: $\dfrac{d}{2}$.

۲۹۳ ـ فرض کنید P پای عمود وارد از N بر خط راست MB باشد، در این صورت، $|MP| = R\cos\alpha$؛ در نتیجه، $|MP|$ برابر فاصلهٔ O، مرکز دایره، تا AB است. اما، فاصلهٔ هر رأس مثلث تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهایش، دو برابر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن تا ضلع مقابل به‌آن رأس است (مسألهٔ ۲۰ بخش ۱ را ببینید)، یعنی، $|MP| = \dfrac{1}{2}|MK|$. بنابراین، نتیجه می‌شود که M بر قوس بزرگتر دایره قرار دارد، یعنی، $\angle AMB = \alpha$، در این صورت، $|NK| = R$؛ و اگر $\angle AMB = 180^\circ - \alpha$ (یعنی، M بر قوس کوچکتر دایره قرار بگیرد)، آن وقت $|NK|^2 = R^2(1+8\cos^2\alpha)$.

جواب: $|NK| = R$، اگر M بر قوس بزرگتر دایره قرار بگیرد، و $|NK| = R\sqrt{1+8\cos^2\alpha}$ اگر M روی روی قوس کوچکتر دایره قرار بگیرید.

۲۹۴ ـ فرض کنید ABC مثلث مفروض و CD ارتفاع آن باشد، O_1 و O_2، به‌ترتیب، مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ACD و BDC و K و L نقطه های برخورد خطهای راست DO_1 و DO_2، به‌ترتیب، با AC و CB هستند. چون مثلث ADC با مثلث CDB متشابه است و KD و

و LD نیمساز زاویه‌های قائمهٔ این مثلثها هستند، $O_۱$ و $O_۲$، به‌ترتیب، KD و LD را به‌یک نسبت تقسیم می‌کنند. به‌این ترتیب، KL با $O_۱O_۲$ موازی است. اما $CKDL$ چهارضلعیی محاطی است ($\angle KCL = \angle KDL = ۹۰^\circ$)، در نتیجه، $\angle CKL = \angle CDL = \frac{\pi}{۴}$ و

$$\angle CLK = \angle CDK = \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین، خط راست $O_۱O_۲$ با هر کدام از ساقها، زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازد. اگر M و N نقطه‌های برخورد $O_۱O_۲$ با CB و AC باشند، آن وقت مثلث $CMO_۲$ با مثلث $CDO_۲$ قابل انطباق است ($CO_۲$ ضلعی مشترک است، $\angle O_۲CD = \angle O_۲CM$ و $\angle CDO_۲ = \angle CMO_۲$). بنابراین

$$|CM| = |NC| = h$$

جواب: زاویه‌های مثلث برابرند با $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۲}$ و مساحتش $\frac{h^۲}{۲}$ است.

۲۹۵- برای اسم‌گذاری، شکل ۱۳ راببینید. $CKDL$ مستطیل است. ازآنجاکه $\angle LKA = ۹۰^\circ + \alpha$ و $\angle LBA = ۹۰^\circ - \alpha$، $BLKA$ چهارضلعیی محاطی است،

$$\tan\varphi = \frac{|LC|}{|CA|} = \frac{h\cos\alpha}{\frac{h}{\sin\alpha}} = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha \qquad (۱)$$

اگر R شعاع دایره باشد، آن وقت $R = \frac{|KL|}{۲\sin\varphi} = \frac{h}{۲\sin\varphi}$ (۲).

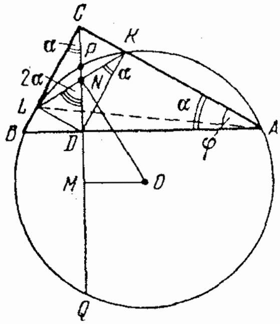
چون $\angle LOK = ۲\varphi$، داریم: $|ON| = R\cos\varphi = \frac{h}{۲\tan\varphi} = \frac{h}{\sin ۲\alpha}$ (از برابریهای (۱) و (۲) استفاده کرده‌ایم)، $|OM| = |ON| \sin(۹۰^\circ - ۲\alpha) = h\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha} = h\cot ۲\alpha$، و بالاخره، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲}|PQ| = |QM| = \sqrt{R^۲ - |OM|^۲} = \sqrt{\frac{h^۲}{۴\sin^۲\varphi} - h^۲\cot^۲ ۲\alpha}$$

$$= h\sqrt{\frac{۱}{۴}(۱ + \cot^۲\varphi) - \cot^۲ ۲\alpha}$$

$$= h\sqrt{\frac{۱}{۴}\left(۱ + \frac{۴}{\sin^۲ ۲\alpha}\right) - \cot^۲ ۲\alpha} = \frac{h\sqrt{۵}}{۲}$$

یا $|PQ| = h\sqrt{۵}$. اکنون، اگر طول قطعه‌های PQ و DQ از وتر، با x و y نشان داده شوند، آن وقت $x+y = h\sqrt{۵}$ و $xy = h^۲$، که از آنجا طول پاره‌خطهای مطلوب، برابر با $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}h$ و $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}h$ می‌شود.



(شکل ۱۳)

۲۹۶ ـ فرض کنید (شکل ۱۴) P و Q نقطه‌های تماس مماسهای مرسوم از E باشند. ثابت کنید $|EP| = |EQ| = |BD|$. در حقیقت

$$|EP|^{۲} = (|ED| + |DC|)(|ED| - |DC|) = |ED|^{۲} - |DC|^{۲}$$
$$= |BC|^{۲} - |DC|^{۲} = |BD|^{۲}$$

(از فرض، $|ED| = |BC|$). فرض کنید $|KN| = x$ ، $|PN| = |NA| = y$ و

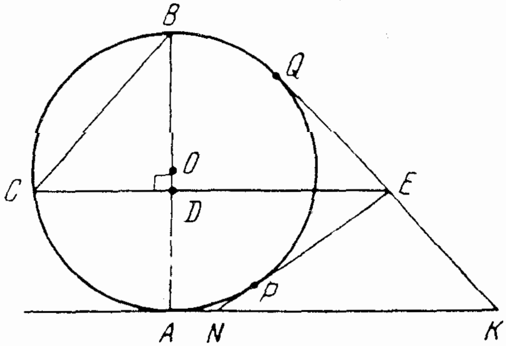
$$|EQ| = |EP| = |BD| = z$$

در این صورت، $|KE| = x+y-z$. داریم $S_{KEN} = \frac{۱}{۲}x(۲R-x)$؛ از طرف دیگر

$$S_{KEN} = S_{KON} + S_{KOE} - S_{EON} = \frac{۱}{۲} R(x+x+y-z-y-z) = R(x-z)$$

بنابراین، $\frac{۱}{۲}x(۲R-z) = R(x-z)$ و $x = ۲R$.

جواب: $۲R$.



(شکل ۱۴)

۲۹۷ ـ ابتدا، $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{|AO|}{|OC|}$ را پیدا کنید. فرض کنید $\angle C = \beta$، داریم

$$\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{\frac{1}{2}\, ab\, \sin\alpha}{\frac{1}{2}\,(p-a)(p-b)\sin\beta} \qquad (1)$$

ولی بنابر قانون کسینوسها

$$a^2+b^2 = 2ab\cos\alpha = (p-a)^2+(p-b)^2-2(p-a)(p-b)\cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{p(p-a-b)+ab\cos\alpha}{(p-a)(p-b)}$$

که از آنجا

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)}$$

$$= \frac{\sqrt{ab(1-\cos\alpha)(2p^2-2ap-2bp+ab+ab\cos\alpha)}}{(p-a)(p-b)} \qquad (2)$$

اگر $\alpha \to 0$، آن وقت $\cos\alpha \to 1$؛ در نتیجه، وقتی‌که $\alpha \to 0$، $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} \to \sqrt{2}$.

با این ملاحظات، از (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{|AO|}{|OC|} = \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$$

از آنجا که $|AC| \to p$،

$$\lim_{\alpha \to 0} |AO| = \frac{p\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+\sqrt{(p-a)(p-b)}}$$

بخش ۲

۱ـ ثابت کنید، اگر D تصویر M روی AB باشد، آن وقت

$$|AD|^2-|DB|^2=|AM|^2-|MB|^2$$

۲ـ فرض کنید چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد (آن را با N نشان می‌دهیم)، در این صورت، خط راست MN بر سه ضلع مثلث عمود است.

۳ـ اگر M نقطهٔ برخورد عمودهای وارد از A_1 و B_1 بر BC و AC باشد، آن‌وقت (مسألهٔ ۱ بخش ۲ را ببینید) $|MB|^2-|MC|^2=|A_1B|^2-|A_1C|^2$ و $|MC|^2-|MA|^2=|B_1C|^2-|B_1A|^2$؛ با جمع کردن این برابریها باهم و در نظر گرفتن شرطهای مسأله، به‌دست می‌آوریم: $|MB|^2-|MA|^2=|C_1B|^2-|C_1A|^2$، یعنی، M روی عمود مرسوم از C_1 بر AB، قرار دارد.

۴ـ از مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود که شرط برخورد عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1 بر ضلعهای BC، CA و AB در یک نقطه، همان شرط برخورد عمودهای وارد از A، B و C، به‌ترتیب، بر B_1C_1 و C_1A_1 و A_1B_1 در یک نقطه است.

۵ـ خاطر نشان می‌کنیم که عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، بر BC، CA و AB، در نقطه‌ای مانند D متقاطع‌اند، در این صورت، از نتیجهٔ به‌دست آمده در مسألهٔ قبل استفاده کنید.

۶ـ مسألهٔ بعد، نتیجهٔ کلیتری را ثابت می‌کند. از برهان این مسأله نتیجه خواهد شد که مرکز دایره بر خط راست AB واقع است.

۷ـ دستگاه مختصات قائم را در نظر می‌گیریم. اگر مختصات نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n،

به‌ترتیب، $(x_1$ و $y_1)$، $(x_2$ و $y_2)$، ...، $(x_n$ و $y_n)$ و مختصات نقطهٔ M $(x$ و $y)$ باشد، آن‌وقت مکان هندسی از معادله $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ به‌دست می‌آید، که در آن $a=k_1+k_2+\cdots+k_n$؛ به‌این ترتیب، حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۸ـ اگر B نقطهٔ تماس و O مرکز دایرهٔ مفروض باشد، آن وقت

$$|OM|^2-|AM|^2=|OM|^2-|BM|^2=|OB|^2=R$$

بنابراین، M روی خط راستی عمود بر OA قرار دارد (مسألهٔ ۱ بخش ۲ را ببینید).

۹ـ شرطی که مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M را تعریف می‌کند، معادل شرط $|AM|^2-k^2|BM|^2=0$ است، یعنی، این مجموعه، یک دایره است (مسألهٔ ۷ بخش ۲ را ببینید). این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند؛ به‌روشنی، مرکز این دایره بر خط راست AB قرار دارد.

۱۰ـ از آنجا که MB نیمساز زاویهٔ AMC است، $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{|AB|}{|BC|}$. در نتیجه، نیمساز زاویهٔ خارجی زاویهٔ AMC، خط AC را در نقطهٔ ثابت K قطع می‌کند: $\frac{|AK|}{|KC|}=\frac{|AB|}{|BC|}$، و مجموعهٔ مطلوب از نقطه‌های M، کمان دایرهٔ مرسوم به‌قطر BK و محصور بین خطهای راست عمود بر پاره‌خط AC که از نقطه‌های A و C می‌گذرند، است.

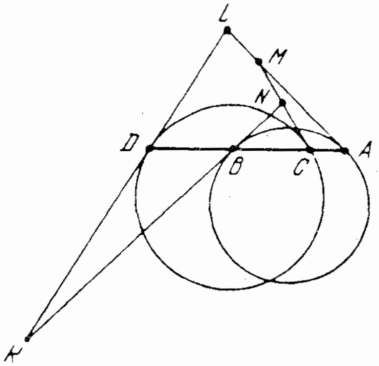
۱۱ـ فرض کنید O_1 و O_2 مرکز دایره‌های مفروض و r_1 و r_2 شعاعهایشان باشند، M نقطه‌ای از مجموعهٔ مطلوب است و MA_1 و MA_2 مماسها هستند. بنا به‌فرض، $|MA_1|=k|MA_2|$. در نتیجه، $|MO_1|^2-k^2|MO_2|^2=r_1^2-k^2r_2^2$. بنابراین (مسألهٔ ۶ بخش ۲ را ببینید)، به‌ازای $k\neq 1$، مجموعهٔ خواسته شده از نقطه‌های M، دایره‌ای با مرکز روی خط راست O_1O_2 است، در صورتی که، به‌ازای $k=1$، مجموعهٔ مطلوب، خط راستی عمود بر O_1O_2 است.

۱۲ـ فرض کنید (شکل ۱۵) K و L نقطه‌های برخورد مماس بر دایرهٔ دوم که از D می‌گذرد و مماسهای بر دایرهٔ اول که از B و A می‌گذرند، و M و N دو نقطهٔ دیگر باشند. روشن است که $\angle DKB=\angle CMA$ (هریک از این زاویه‌ها، برابر با نصف تفاضل میان زاویه‌های متناظر کمانهای AB و CD است). بنابراین (در شکل) $\angle LMN+\angle LKN=180^\circ$. در نتیجه، $KLMN$ چهارضلعیی محاطی است. به‌علاوه، داریم

$$\frac{|DK|}{|KB|}=\frac{\sin\angle DBK}{\sin\angle BDK}=\frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{AB}}{\sin\frac{1}{2}\widehat{DC}}$$

نسبت طولهای مماسهای مرسوم از نقطه‌های L، M و N، به‌همین ترتیب پیدا می‌شوند. همهٔ این نسبتها برابرند؛ بنابراین، مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی $KLMN$، بر خط راستی که از

مرکز دایره‌های مفروض می‌گذرد، قرار دارد (مسألهٔ ۶ بخش ۲ را ببینید).



شکل ۱۵

۱۳ ـ با پیداکردن فاصلهٔ رأسهای مثلث تا نقطه‌های تماس، برقراری شرطهای مسألهٔ ۳ بخش ۲ را تحقیق کنید.

۱۴ ـ فرض کنید $|AM_1|:|BM_1|:|CM_1| = p:q:r$. در این صورت، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M، به‌طوری که $(r^2-q^2)|AM|^2+(p^2-r^2)|BM|^2+(q^2-p^2)|CM|^2 = 0$، خط راستی است که از M_1، M_2 و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد (مسألهٔ ۷ بخش ۲ را ببینید).

۱۵ ـ نقطه‌های M_1 و M_2 به‌مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M که به‌ازای آنها $5|MA|^2-8|MB|^2+3|MC|^2 = 0$، متعلق‌اند. این مجموعه، یک خط راست است و به‌روشنی، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث در شرطی که این مجموعه را تعریف می‌کند، صدق می‌کند (مسألهٔ ۷ بخش ۲ را ببینید).

۱۶ فرض کنید $|AA_1| = a$، $|BB_1| = b$، $|CC_1| = c$، $|A_1B_1| = x$، $|B_1C_1| = y$ و $|C_1A_1| = z$ در این صورت، $|AB_1|^2 = a^2+x^2$، $|B_1C_1|^2 = c^2+y^2$، و غیره. اکنون تحقیق کردن شرطهای مسألهٔ ۳ بخش ۲، آسان است.

۱۷ ـ فرض کنید $|AD| = x$، $|BD| = y$، $|CD| = z$ و $|AB| = a$. فرض کنید A_2، B_2 و C_2 معرف نقطه‌های تماس دایره‌های محاط در، به‌ترتیب، مثلثهای BCD، CAD و ABD با ضلعهای BC، CA و AB، باشند. عمودهای مرسوم از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر ضلعهای BC، CA و AB، بر عمودهای مرسوم بر همان ضلعها در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2، منطبق‌اند. اما $|BA_2| = \dfrac{a+y-z}{2}$ و $|A_2C| = \dfrac{a+z-y}{2}$؛ $|AC_2|$، $|C_2B|$، $|AB_2|$ و $|B_2C|$ به‌روش مشابه پیدا می‌شوند. اکنون، تحقیق شرطهای مسألهٔ ۳ بخش ۲، آسان است.

۱۸ ـ با گرفتن نقطه‌های A، B و C به‌جای مرکز دایره‌ها، و هر یک از دو نقطهٔ برخورد دایره‌ها به‌جای نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 (A_1، یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های به‌مرکزهای B و C است، و غیره)، شرطهای مسألهٔ ۳ بخش ۲ را به‌کار ببرید.

۱۹ ـ دایرهٔ سومی به‌قطر BC اختیار کنید. ارتفاعهای مرسوم از رأسهای B و Cی مثلث، وتر مشترک دایره‌های اول و سوم و نیز، دوم و سوم هستند. در نتیجه (مسألهٔ ۱۸ بخش ۲ را ببینید)، وتر مشترک دایره‌های مفروض هم، از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد.

۲۰ ـ فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ مفروض، R شعاع آن و MC مماس بر دایره باشد. داریم: $|MO|^2-|MN|^2=|MO|^2-|MB|.|MA|=|MO|^2-|MC|=R^2$، یعنی، نقطهٔ M روی خط راستی عمود بر خط راست ON قرار دارد (مسألهٔ ۱ بخش ۲ را ببینید). به‌سادگی، می‌توان نشان داد که همهٔ نقطه‌های این خط به‌مکان هندسی تعلق دارند.

۲۱ ـ فرض کنید O معرف مرکز دایره، r شعاع دایره، $a=|OA|$، BC وتری که از A می‌گذرد و M نقطهٔ برخورد مماسها باشد. در این صورت

$$|OM|^2=|BM|^2+r^2$$

$$\begin{aligned}|AM|^2&=|BM|^2-\frac{1}{4}|BC|^2+\left(\frac{1}{2}|BC|-|BA|\right)^2\\&=|BM|^2-|BC|.|BA|+|BA|^2\\&=|BM|^2-|BA|.|AC|=|BM|^2-r^2+a^2\end{aligned}$$

بنابراین، $|OM|^2-|AM|^2=2r^2-a^2$. یعنی (مسألهٔ ۱ بخش ۲ را ببینید)، مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، خط راستی عمود بر OA است. این خط را قطبی نقطهٔ A نسبت به‌دایرهٔ مفروض می‌نامند.

۲۲ ـ نشان دهید که اگر M_1 و M_2 دو نقطهٔ متمایز و متعلق به‌مکان هندسی باشند، آن وقت هر نقطه مانند M از قطعهٔ خط راست M_1M_2 که در درون مثلث محصور است هم، به‌این مکان هندسی متعلق است. برای اثبات حکم اخیر، فاصله‌های M_1 تا ضلعهای مثلث را با x_1، y_1 و z_1 و فاصله‌های M_2 را با x_2، y_2 و z_2 نشان می‌دهیم، در این صورت، می‌توانیم x، y و z، فاصله‌های M تا ضلعهای مثلث، را بر حسب این مقادیر و فاصله‌های بین M_1، M_2 و M نشان دهیم. مثلاً، اگر $|M_1M|=k|M_1M_2|$ و جهتهای M_1M و M_1M_2 یکی باشد، آن وقت، $x=(1-k)x_1+kx_2$، $y=(1-k)y_1+ky_2$ و $z=(1-k)z_1+kz_2$. به‌این ترتیب، نتیجه می‌شود که اگر برابری، به‌ازای سه نقطهٔ غیر همخط در درون مثلث، برقرار باشد، آن وقت، برای کلیهٔ نقطه‌های مثلث هم برقرار است.

تبصره. حکم مسأله، برای چندضلعی محدب دلخواه هم درست است. به‌علاوه، می‌توانیم همهٔ نقطه‌های در صفحه را در نظر بگیریم، اما، فاصله‌های از خط راست نقطه‌های واقع در طرفین خط باید با علامتهای مخالف اختیار شوند.

۲۳ـ برای اینکه طولهای x، y و z ضلعهای یک مثلث باشد، لازم و کافی است که نابرابریهای $x<y+z$، $y<z+x$ و $z<x+y$ برقرار باشند. اما مجموعهٔ نقطه‌هایی که به‌ازای آنها، مثلاً، $x=y+z$، پاره‌خطی با نقطه‌های انتهایی واقع بر پای نیمسازهاست (در پای نیمساز، دو طول برابرند، پس سومی باید برابر با صفر باشد؛ در نتیجه، تساوی برقرار است؛ و از حل مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود که این برابری برای کلیهٔ نقطه‌های پاره‌خط درست است).

جواب: امکان هندسی مطلوب، عبارت است از نقطه‌های واقع در درون مثلث با رأسهای پای نیمسازها.

۲۴ـ چون عمودهای وارد از A_2، B_2 و C_2، به‌ترتیب، بر B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1، همرس‌اند عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، بر B_2C_2، C_2A_2 و A_2B_2، نیز، همرس‌اند (مسألهٔ ۴ بخش ۲ را ببینید).

۲۵ـ فرض کنید a_1 و a_2 معرف فاصله‌های A، به‌ترتیب، تا خطهای راست l_2 و l_3، b_1 و b_2 فاصله‌های B، به‌ترتیب، تا خطهای راست l_3 و l_1، و c_1 و c_2 فاصله‌های C، به‌ترتیب، تا خطهای راست l_1 و l_2، و x، y و z، به‌ترتیب، فاصله‌های A_1، B_1 و C_1 تا l باشند. برای همرسی عمودهای وارد از A، B و C، به‌ترتیب، بر B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1، لازم و کافی است که برابری زیر برقرار باشد (مسألهٔ ۳ بخش ۲ را ببینید)

$$|AB_1|^2-|B_1C|^2+|CA_1|^2-|A_1B|^2+|BC_1|^2-|C_1A|^2=0$$

یا

$$(a_1^2+y^2)-(c_2^2+y^2)+(c_1^2+x^2)-(b_2^2+x^2)+(b_1^2+z^2)-(a_2^2+z^2)=0$$

که به‌شرط $a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2+c_1^2-c_2^2=0$، مستقل از x، y و z، منجر می‌شود.

۲۶ـ کافی است برقراری شرط

$$|AB_2|^2-|B_2C|^2+|CA_2|^2-|A_2B|^2+|BC_2|^2-|C_2A|^2=0$$

را تحقیق کنیم (مسألهٔ ۳ بخش ۲ را ببینید). توجه کنید که مثلثهای BB_2C_1 و AA_2C_1 متشابه‌اند، بنابراین $|BC_1|.|C_1A_2|=|AC_1|.|C_1B_2|$؛ به‌علاوه، $\angle AC_1B_2=\angle BC_1A_2$، درنتیجه $|AB_2|^2-|BA_2|^2=(|AC_1|^2-|C_1B|^2)+(|C_1B_2|^2-|A_2C_1|^2)$. بانوشتن برابریهای متناظر برای $|CA_2|^2-|AC_2|^2$ و $|BC_2|^2-|CB_2|^2$، و جمع کردن آنها با یکدیگر، مشاهده می‌کنیم که مجموع تفاضلها در پرانتزهای اولی، برابر صفر است (شرطهای مسألهٔ ۳ بخش ۲ را برای مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ به‌کار ببرید؛ چون ارتفاعها در یک نقطه متقاطع‌اند، مجموع برابر صفر را به‌دست می‌آوریم). به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که AA_2، BB_2 و CC_2 از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرند، یعنی، مجموع تفاضلها در پرانتزهای دومی هم، صفر است.

۳۲ـ از K و L، خطهای راستی به‌موازات BC رسم کنید تا میانهٔ AD را در نقطه‌های N و S

قطع کنند. فرض کنید $|AD| = 3a$ ، $|MN| = xa$ و $|MS| = ya$. از آنجا که

$$\frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|MS|}{|MN|}, \frac{|LS|}{|NK|} = \frac{|AS|}{|AN|}$$

داریم $\frac{|MS|}{|MN|} = \frac{|AS|}{|AN|}$ ، $\frac{y}{x} = \frac{(2+y)a}{(2-x)a}$ و $y = \frac{x}{1-x}$. برابری

$$\frac{1}{|MK|} = \frac{1}{|ML|} + \frac{1}{|MP|}$$

با $\frac{1}{|MD|} + \frac{1}{|MS|} = \frac{1}{|MN|}$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{ay} = \frac{1}{ax}$ هم‌ارز است. با قرار دادن $y = \frac{x}{1-x}$، به برابری درستی می‌رسیم.

۳۴ـ فرض کنید O نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD باشد؛ با استفاده از تشابه مثلثهای مناسب، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{|OK|}{|OC|} = \frac{|OK|}{|OB|} \cdot \frac{|OB|}{|OC|} = \frac{|OA|}{|OD|} \cdot \frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM|}{|OD|}$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳۵ـ فرض کنید F و D معرف نقطهٔ برخورد EN و EM، به‌ترتیب، با AB و BC باشند. ثابت کنید که مثلثهای AFN و MDC متشابه‌اند. با استفاده از تشابه مثلثهای مختلف و برابری ضلعهای روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع، داریم

$$\frac{|NF|}{|FA|} = \frac{|NF|}{|FB|} \cdot \frac{|FB|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|ED|}{|FA|} = \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|FE|}$$
$$= \frac{|BD|}{|DM|} \cdot \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|DC|}{|DM|}$$

یعنی، مثلث AFN با مثلث MDC متشابه است.

۳۶ـ حکم مسأله، از دو نتیجهٔ زیر واضح است:

(۱) اگر بر ضلعهای چهارضلعی $ABCD$، نقطه‌های K، L، M و N طوری اختیار شوند که ضلعهای AB، BC، CD و DA را به یک نسبت تقسیم کنند ($\frac{|BK|}{|KA|} = \frac{|CM|}{|MD|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AN|}{|ND|}$)، آن وقت پاره‌خطهای KM و LN را هم، نقطهٔ P محل برخورد آنها، به همین نسبت تقسیم می‌کند. در حقیقت، از اینکه خطهای راست KL و NM با قطر AC موازی‌اند، نتیجه می‌شود که

$$\frac{|KP|}{|PM|} = \frac{|KL|}{|NM|} = \frac{|KL|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|NM|} = \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|AD|}{|ND|} = \frac{|BK|}{|BA|} \cdot \frac{|BA|}{|KA|}$$
$$= \frac{|BK|}{|KA|}$$

(۲) اگر بر ضلعهای AB و CD از چهارضلعی، نقطه‌های K_1 و K، و M_1 و M طوری اختیار شوند که $\frac{1}{m}=\frac{|M_1M|}{|CD|}=\frac{|K_1K|}{|AB|}$، $|AK_1|=|KB|$ و $|DM_1|=|CM|$، آن وقت مساحت چهارضلعی K_1KMM_1، برابر با $\frac{1}{m}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ است. در حقیقت

$S_{BKC}=\frac{|BK|}{|BA|}S_{ABC}$ و $S_{ACD}=\frac{|BK|}{|BA|}S_{ACD}$، $S_{AM_1D}=\frac{|M_1D|}{|CD|}$. در نتیجه

$$S_{AKCM_1}=\left(1-\frac{|BK|}{|BA|}\right)S_{ABCD}=\frac{|AK|}{|BA|}S_{ABCD}$$

به‌همین ترتیب، $S_{K_1KMM_1}=\frac{|K_1K|}{|AK|}S_{AKCM_1}$. بنابراین

$$S_{K_1KMM_1}=\frac{|K_1K|}{|AB|}S_{ABCD}=\frac{1}{m}S$$

۳۷ـ فرض‌کنید K وسط DB و L وسط AC باشد، $S_{ANM}=S_{CNM}$ (چون $|AL|=|LC|$). به‌همین نحو، $S_{BNM}=S_{DNM}$، که از آنجا حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۳۸ـ اگر M وسط DC و N وسط BC باشد و K و L نقطه‌های برخورد DN، به‌ترتیب، با AM و AB باشند، آن وقت $\frac{1}{4}=\frac{|DM|}{|AL|}=\frac{|KM|}{|AK|}$، یعنی، $|AK|=\frac{4}{5}|AM|$؛ در نتیجه $S_{ADK}=\frac{4}{5}S_{ADM}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}S=\frac{1}{5}S$ (S، مساحت متوازی‌الاضلاع است). بنابراین، مساحت شکل مطلوب، برابر است با $S-4S_{ADK}=\frac{1}{5}S$.

۳۹ـ فرض کنید Q، N و M وسطهای AD، BC و DC، و K، P و R، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد DN با AM، QC با DN، و QC با AM باشند. دراین‌صورت، $|DK|=\frac{2}{5}|DN|$، $|DP|=|PN|$، $|QP|=|PC|$، $|QR|=\frac{1}{3}|QC|$،

$$\frac{S_{RPQ}}{S_{QPD}}=\frac{|RP|}{|QP|}\cdot\frac{|KP|}{|DP|}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

و $S_{RPK}=\frac{1}{15}\times\frac{S}{8}=\frac{S}{120}$. در نتیجه، از چهارضلعیی که در مسألهٔ قبل در نظر گرفته شد، چهار مثلث، هریک به‌مساحت $\frac{S}{120}$، جدا شده است و مساحت هشت‌ضلعی مطلوب، برابر با $\frac{S}{5}-\frac{4S}{120}=\frac{S}{6}$ است.

۴۰ـ فرض کنید خط راست HC، AB و LM را، به‌ترتیب، در نقطه‌های T و N، خط راست AL، ED را در نقطهٔ K، و خط راست BM، PG را در نقطهٔ P قطع کند. داریم:

$S_{ACDE}=S_{ACHK}=S_{ATNL}$ و $S_{BCFG}=S_{BCHP}=S_{BMNT}$؛ بنابراین، $S_{ACDE}+S_{BCFG}=S_{ABML}$.

۴۱ - فرض‌کنید Q معرف مساحت پنج‌ضلعی‌باشد و $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ مساحت مثلثهای، به‌ترتیب، مجاور به‌یک ضلع جانبی، قاعدهٔ کوچکتر و ضلع جانبی دیگر باشند؛ x مساحت مثلث محصور بین مثلثهای با مساحت $S_۱$ و $S_۲$، و y مساحت مثلث محصور بین مثلثهای با مساحت $S_۲$ و $S_۳$ است. در این صورت، $S_۱+x+S_۲=S_۲+y+S_۳=\frac{۱}{۲}(x+y+S_۲+Q)$، و بنابراین

$$S_۱+x+S_۲+S_۲+y+S_۳=x+y+S_۲+Q \Rightarrow S_۱+S_۲+S_۳=Q$$

۴۲ - اگر S مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، آن وقت $S_{ABK}+S_{KCD}=\frac{۱}{۲}S$. از طرف دیگر، $S_{DBC}=S_{EKC}+S_{KCD}=\frac{۱}{۲}S$، بنابراین، $S_{ABK}=S_{EKC}$. به‌همین ترتیب، $S_{AKD}=S_{KCP}$؛ با جمع کردن دو تساوی اخیر با یکدیگر، به‌دست می‌آوریم: $S_{ABKD}=S_{CEKF}$.

۴۳ - داریم

$$\frac{|AC_۱|}{|C_۱B|}=\frac{A_{ACC_۱}}{S_{CC_۱B}}=\frac{\frac{۱}{۲}\,|AC|.|CC_۱|\ \sin\angle ACC_۱}{\frac{۱}{۲}\,|CC_۱|.|CB|\ \sin\angle O_۱CB}=\frac{|AC|}{|BC|}\cdot\frac{\sin\angle ACC_۱}{\sin\angle C_۱CB}$$

با به‌دست آوردن تساویهای مشابه برای نسبتهای $\frac{|BA_۱|}{|A_۱C|}$ و $\frac{|CB_۱|}{|B_۱A|}$، و ضرب کردن آنها در یکدیگر، به‌حکم مطلوب می‌رسیم.

۴۴ - نشان می‌دهیم که اگر این خطهای راست در یک نقطه (فرض کنید M معرف این نقطه باشد) متقاطع باشند، آن وقت $R^*=۱$ (و در نتیجه، $R=۱$؛ مسألهٔ ۴۳ بخش ۲ را ببینید). از قانون سینوسها در مثلث AMC، داریم $\frac{\sin\angle ACC_۱}{\sin\angle A_۱AC}=\frac{|AM|}{|MC|}$. با نوشتن تساویهای مشابه برای مثلثهای AMB و BMC، و ضرب‌کردن آنها در یکدیگر، به‌حکم مطلوب می‌رسیم. به‌عکس، اگر $R=۱$ و کلیهٔ نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ (یا تنها یکی از آنها) بر ضلعهای مثلث واقع باشند، آن‌وقت، باترسیم خطهای راست $AA_۱$ و $BB_۱$، نقطهٔ برخوردآنها را با $M_۱$ نشان می‌دهیم؛ فرض کنید خط راست $CM_۱$، AB را در نقطه‌ای مانند $C_۲$ قطع کند. با در نظر گرفتن شرطهای مسأله و اینکه شرط لازم $R=۱$، اثبات شد، داریم: $\frac{|AC_۲|}{|C_۲B|}=\frac{|AC_۱|}{|C_۱B|}$ و هر دو نقطهٔ $C_۱$ و $C_۲$ یا روی پاره‌خط AB و یا بیرون آن واقع‌اند. در نتیجه، $C_۱$ و $C_۲$ بر هم منطبق‌اند.

۴۵ - فرض کنید $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ همخط باشند. از C، خط راستی به‌موازات AB رسم می‌کنیم ونقطهٔ برخورد آن با خط راست $A_۱B_۱$ را به M نشان‌می‌دهیم. ازتشابه مثلثهای مناسب، به‌دست می‌آوریم: $\frac{|BC_۱|}{|CM|}=\frac{|BA_۱|}{|A_۱C|}$ و $\frac{|CM|}{|AC_۱|}=\frac{|CB_۱|}{|B_۱A|}$. به‌کمک این تساویها، با قرار دادن

نسبتهای متناظر در عبارت R (مسألهٔ ۴۳ بخش ۲ را ببینید)، به‌دست می‌آوریم: $R=1$. صورت عکس، تقریباً به‌همان نحو که در مسألهٔ قبل عمل کردیم، اثبات می‌شود (خط راست B_1A_1 را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را به C_2 نشان می‌دهیم، و غیره).

۴۶ـ حکم زیر را تحقیق کنید: اگر برای خطهای راست مفروض، $R^* = 1$، آن وقت، برای خطهای قرینهٔ آنها هم، همین نتیجه درست است. اگر خط راستی که از، مثلاً، رأس A می‌گذرد، ضلع BC را قطع کند، آن وقت، خط راست قرینهٔ آن نسبت به‌نیمساز این زاویه هم، ضلع BC را قطع می‌کند (مسألهٔ ۴۳ و ۴۴ بخش ۲ را ببینید).

۴۷ـ اگر A_0، B_0 و C_0، به‌ترتیب، وسط پاره‌خطهای AO، BO و CO باشند، آن وقت خطهای راست رسم شده، با خطهای A_0O، B_0O و C_0O، نسبت به‌نیمسازهای مثلث $A_0B_0C_0$، قرینه‌اند (مسألهٔ قبل را ببینید).

۴۸ـ (الف) فرض کنید خط راست BM، AC را در نقطهٔ B'، و خط CK، AB را در نقطهٔ C' قطع کند. از M، خط راستی به‌موازات AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با AB و BC را، به‌ترتیب، با P و Q نشان می‌دهیم. به‌روشنی، $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|PM|}{|MQ|}$. با رسم کردن خط راستی از K به‌موازات AB و نشان دادن نقطه‌های برخورد آن با CA و CB، به‌ترتیب، با E و F، داریم: $\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{|FK|}{|KE|}$. ساختار مشابهی برای نقطهٔ L انجام می‌دهیم. با قرار دادن نسبتهای عبارت R (مسألهٔ ۴۳ بخش ۲ را ببینید) به‌کمک این تساویها، ملاحظه می‌کنیم به‌ازای هر پاره‌خط در صورت، پاره‌خطی برابر در مخرج وجود دارد، مثلاً: $|PM| = |KE|$.

(ب) برای روشنی وضع، فرض کنید خط l، پاره‌خطهای C_0A و CA_0 را قطع می‌کند و با OK، زاویهٔ حادهٔ φ تشکیل می‌دهد. خط راست A_1L، پاره خط MK را به‌نسبت $\frac{S_{LMA_1}}{S_{LKA_1}}$ (با احتساب از نقطهٔ M) تقسیم می‌کند. نسبتهایی که ضلعهای KL و LM از مثلث KLM به‌آنها تقسیم می‌شوند، به‌روش مشابه پیدا می‌شوند. باید ثابت کنیم که برابری $R=1$ (مسألهٔ ۴۳ بخش ۲ را ببینید) برقرار است. نسبتهای پاره‌خطها را با نسبتهای مساحتهای مثلثهای متناظر عوض می‌کنیم. در این صورت، R شامل S_{LMA_1} در صورت و S_{KMC_1} در مخرج است. ثابت کنید، $\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} = \frac{\sin C}{\sin A}$، که در آن A و C زاویه‌های مثلث ABC اند. به‌روشنی $\frac{S_{B_0OA_0}}{S_{B_0OC_0}} = \frac{\sin C}{\sin A}$.

به‌علاوه، $\angle A_1B_0A_0 = \angle C_0B_0A_0 + \angle A_1B_0C_0 = 90^\circ - \angle \frac{B}{2} + \varphi$ (این تساوی از این حقیقت که دایرهٔ به‌قطر AO، از B_0، C_0 و A_1 می‌گذرد، نتیجه می‌شود) و

$$\angle B_0A_1O = \angle B_0AO = \frac{\angle A}{2}$$

به‌همین نحو، $\angle B_{\circ} C_{۱} O = \frac{\angle C}{۲}$ و

$$\begin{aligned}\angle C_{۱}B_{\circ}C_{\circ} &= \left(۹۰^\circ - \frac{\angle B}{۲}\right) + \angle C_{۱}OL\\ &= \left(۹۰^\circ - \frac{\angle B}{۲}\right) + (۱۸۰^\circ - \angle C - \angle B_{\circ}OC_{۱})\\ &= \left(۹۰^\circ - \frac{\angle B}{۲}\right) + (\angle B_{\circ}CA_{۱} - \angle C)\\ &= \left(۹۰^\circ - \frac{\angle B}{۲}\right) + (۱۸۰^\circ - \angle A - \angle C - \varphi)\\ &= ۹۰^\circ + \frac{\angle B}{۲} - \varphi\end{aligned}$$

یعنی، $\sin \angle A_{۱} B_{\circ} A_{\circ} = \sin \angle C_{۱} B_{\circ} C_{\circ}$. به‌این ترتیب

$$\frac{S_{A_{۱}B_{\circ}A_{\circ}}}{S_{C_{۱}B_{\circ}C_{\circ}}} = \frac{|B_{\circ}A_{۱}|}{|B_{\circ}C_{۱}|} = \frac{|B_{\circ}A_{\circ}|}{|B_{\circ}C_{\circ}|} = \frac{\sin\frac{C}{۲}\cos\frac{C}{۲}}{\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

فرض‌کنید r معرف شعاع دایرهٔ محاطی مثلث باشد و $a = |OL| = |OK| = |OM|$. داریم

$$\frac{S_{LMA_{۱}}}{S_{KMC_{۱}}} = \frac{S_{LOM} + S_{LOMA_{۱}}}{S_{KOM} + S_{KOMC_{۱}}} = \frac{\frac{a^{۲}}{r^{۲}} S_{A_{\circ}OB_{\circ}} + \frac{a}{r} S_{A_{\circ}OB_{\circ}A_{۱}}}{\frac{a^{۲}}{r^{۲}} S_{C_{\circ}OB_{\circ}} + \frac{a}{r} S_{C_{\circ}OB_{\circ}C_{۱}}}$$

$$= \frac{\frac{a}{r} S_{A_{\circ}OB_{\circ}} + (S_{A_{\circ}B_{\circ}A_{۱}} - S_{A_{\circ}OB_{\circ}})}{\frac{a}{r} S_{C_{\circ}OB_{\circ}} + (S_{C_{\circ}B_{\circ}C_{۱}} - S_{C_{\circ}OB_{\circ}})}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{r} - ۱\right) S_{A_{\circ}OB_{\circ}} + S_{A_{\circ}B_{\circ}A_{۱}}}{\left(\frac{a}{r} - ۱\right) S_{C_{\circ}OB_{\circ}} + S_{C_{\circ}B_{\circ}C_{۱}}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

(تساوی آخری، از این حقیقت که $\frac{S_{A_{\circ}OB_{\circ}}}{S_{C_{\circ}OB_{\circ}}} = \frac{S_{A_{\circ}B_{\circ}A_{۱}}}{S_{C_{\circ}B_{\circ}C_{۱}}} = \frac{\sin C}{\sin A}$ نتیجه می‌شود.) به‌همین‌نحو درصورت و مخرج عبارت R، دو زوج دیگر انتخاب می‌کنیم که نسبتهایشان، به‌ترتیب، برابر با $\frac{\sin A}{\sin B}$ و $\frac{\sin B}{\sin C}$ باشند. بنابراین، $R = ۱$. تنها این می‌ماند که ثابت کنید، تعداد نقطه‌های برخورد خطهای راست $LA_{۱}$، $KC_{۱}$ و $MB_{۱}$، به‌ترتیب، با پاره‌خطهای KM، ML و LK، فرد است.

۴۹ـ مثلث ACE را، که از رأسهایش خطهای راست AD، CF و EB رسم شده‌اند، در نظر بگیرید. سینوس زاویه‌های تشکیل شده با این خطها و ضلعهای مثلث ACE، با طول وترهای

مقابل به‌آنها متناسب‌اند؛ در نتیجه، شرط $R = 1$ (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲ را ببینید)، با شرط داده شده در مسأله هم‌ارز است.

۵۰ـ ثابت کنید که تساوی $R = 1$ برقرار است (در قسمت (ب)، از نتیجهٔ به‌دست آمده در مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۱ استفاده کنید) و هر سه نقطه، بر امتداد ضلعهای مثلث واقع‌اند. بنابراین، حکم ما، از قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲ را ببینید) نتیجه می‌شود.

۵۱ـ بنابر ویژگی قاطع مرسوم از نقطه‌ای بیرونی بر دایره، یا از ویژگی قطعه‌های وترهای دایره که از یک نقطه می‌گذرند، داریم

$$|BC_1|.|BC_2| = |BA_1|.|BA_2|$$

$$|CB_1|.|CB_2| = |CA_1|.|CA_2|$$

$$|AB_1|.|AB_2| = |AC_1|.|AC_2|$$

اکنون، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر ادعای قضیهٔ سوا (برابری $R = 1$) برای نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 درست باشد، آن وقت برای نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 هم، درست است. از صورت مسأله نتیجه می‌شود که یا هر سه نقطهٔ A_2، B_2 و C_2 بر ضلعهای متناظر مثلث قرار دارند و یا تنها یکی از آنها چنین است (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲ را ببینید).

۵۲ـ با نوشتن تساوی $R = 1$ (طبق قضیه‌های سوا و منلائوس ـ مسأله‌های ۴۴ و ۴۵ بخش ۲ را ببینید) برای نقطه‌های A_1، B_1 و C_1؛ A_1، B_1 و C_2؛ A_1، B_2 و C_1؛ و A_2، B_1 و C_1، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 هم، تساوی $R = 1$ درست است. اکنون، تنها این می‌ماند که ثابت کنید، یا هر سه نقطهٔ A_2، B_2 و C_2 بر امتدادهای ضلعهای مثلث واقع‌اند (یعنی حالتی که نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر ضلعهای مثلث قرار دارند) یا تنها یکی از آنها بر امتدادهای ضلعها واقع است (اگر تنها یکی از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر ضلعهای مثلث واقع باشد) و از قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲ را ببینید) استفاده کنید.

۵۳ـ از قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲ را ببینید) استفاده کنید. وسط ضلعهای مثلث ABC را که روی آنها و امتدادهایشان نقطه‌های مورد بحث قرار دارند، به‌جای رأسهای مثلث مفروض اختیار کنید.

۵۴ـ اگر a طول ضلع پنج‌ضلعی $MKLNP$، b طول ضلع پنج‌ضلعی با یک ضلع روی AB و c طول ضلع پنج‌ضلعیی که یک ضلعش روی AC است، باشد، آن وقت $\frac{|BA_1|}{|C_1B|} = \frac{a}{b}$، $\frac{|AC_1|}{|B_1A|} = \frac{b}{c}$ و $\frac{|CB_1|}{|A_1C|} = \frac{c}{a}$. این تساویها را در هم ضرب کنید، به‌دست می‌آوریم $R = 1$، و سپس از قضیهٔ سوا (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲) استفاده کنید.

۵۵ـ تحقیق کنید که نقطه‌های A_1، A_2 و A_3، B_1، B_2، B_3 یا بر ضلعهای مثلث $O_1O_2O_3$ (O_1، O_2 و O_3 مرکز دایره‌ها هستند) یا بر امتدادهای آنها واقع‌اند، و نسبت فاصله‌های هر یک از

این نقطه‌ها تا رأسهای متناظر مثلث $O_۱O_۲O_۳$، برابر است با نسبت شعاعهای دایره‌های متناظر با آنها. به‌علاوه، از قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲ را ببینید) برای هر یک از این سه نقطه استفاده کنید.

۵۶ـ حکم مسأله، از مسأله‌های ۴۳ و ۴۴ بخش ۲ نتیجه می‌شود.

۵۸ـ از برابری $\frac{\sin \angle B_۱AA_۲}{\sin \angle A_۲AC_۱}=\frac{|AC_۱|}{|AB_۱|}\cdot\frac{|B_۱A_۲|}{|A_۲C_۱|}$ استفاده کنید. با به‌دست آوردن تساویهای مشابه برای زاویه‌های دیگر و ضرب کردن آنها درهم، به‌کمک نتیجه‌های مسأله‌های ۴۳ و ۴۴ بخش ۲، به‌حکم‌مان می‌رسیم.

۵۹ـ قضیهٔ منلائوس را در مثلثهای ABD، BDC و DCA به‌کار می‌بریم (مسألهٔ *۴۵ بخش ۲، تبصره): $\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DP}{PA}=-۱$، $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DQ}{QB}=-۱$ و

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CN}{NA}=-۱$$

(L، M و N، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد AB و PQ، BC و QR، و AC و PR هستند). با ضرب کردن این برابریها درهم، به‌دست می‌آوریم $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}=-۱$، یعنی، نقطه‌های L، M و N همخط‌اند.

۶۰ـ دستگاه مختصاتی در نظر بگیرید که محورهایش خطهای مفروض باشند (این دستگاه مختصات، دستگاه مختصات آفین است). معادلهٔ خط راست در این دستگاه مختصات، به‌روش معمول، به‌شکل $ax+by+c=۰$ است. نخست، شرط لازم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید N به‌مختصات (u, v) و M به‌مختصات $(\lambda u, \lambda v)$ باشد. معادلهٔ خطهای راست $A_۱B_۱$، $A_۲B_۲$، $A_۳B_۳$ و $A_۴B_۴$، به‌ترتیب، به‌شکل $y-v=k_۱(x-u)$، $y-v=k_۲(x-u)$، $y-\lambda v=k_۳(x-\lambda u)$ و $y-\lambda v=k_۴(x-\lambda u)$ است. دراین‌صورت، نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ واقع برمحور xها، روی این محور، به‌ترتیب، به‌مختصات $u-\frac{۱}{k_۱}v$، $u-\frac{۱}{k_۲}v$، $\lambda u-\frac{\lambda}{k_۳}v$ و $\lambda u-\frac{\lambda}{k_۴}v$ هستند. اکنون، به‌سادگی می‌توان درستی تساوی داده شده در صورت مسأله را تحقیق کرد. کفایت، به‌روش معمول، با رسیدن به‌تناقض اثبات می‌شود.

۶۱ـ در قسمتهای (الف) و (ج)، از قضیه‌های سوا و منلائوس (مسأله‌های ۴۴ و ۴۵ بخش ۲، تبصره) استفاده کنید. به‌علاوه، در قسمت (ب)، از نتیجهٔ مسألهٔ قبل استفاده کنید؛ در اینجا، مانند مسألهٔ ۶۰، راحت‌تر است که از دستگاه مختصات آفین، که محورهایش خطهای راست AB و AC، و نقطه‌های B و C به‌مختصات (۱ و ۰) و (۰ و ۱) هستند، استفاده کنید.

۶۲ـ فرض کنید S معرف نقطهٔ برخورد خطهای راست A_1M، B_1L و C_1K باشد. با به‌کار بردن قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲، تبصره) در مثلثهای SMK، SKL و SLM، به‌دست می‌آوریم: $\frac{KL_1}{L_1M}\cdot\frac{MA_1}{A_1S}\cdot\frac{SC_1}{C_1K}=-1$ ، $\frac{LM_1}{M_1K}\cdot\frac{KC_1}{C_1S}\cdot\frac{CB_1}{B_1L}=-1$ و $\frac{MK_1}{K_1L}\cdot\frac{LB_1}{B_1S}\cdot\frac{SA_1}{A_1M}=-1$. با ضرب کردن این تساویها درهم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{KL_1}{L_1M}\cdot\frac{LM_1}{M_1K}\cdot\frac{MK_1}{K_1L}=-1 \qquad (1)$$

برابری (۱)، شرط لازم و کافی است برای اینکه خطهای A_1M، B_1L و C_1K در یک نقطه متقاطع باشند. لزوم قبلاً ثابت شده است. کفایت، مطابق معمول، با رسیدن به‌تناقض ثابت می‌شود. (نقطهٔ برخورد A_1M و B_1L را با S' نشان می‌دهیم، $S'C_1$ را رسم کنید، نقطهٔ برخورد آن با خط راست مفروض را با K' نشان دهید و ثابت کنید که K و K' بر هم منطبق‌اند.) چون برابری (۱) با عوض کردن K، L، M، به‌ترتیب، با K_1، L_1 و M_1 و برعکس، تغییری نمی‌کند، ادعای مسأله ثابت شده است.

۶۳ـ با به‌کار بردن قضیهٔ سوا (مسألهٔ *۴۴ بخش ۲، تبصره) در مثلثهای ABD، BDC و CDA به‌دست‌می‌آوریم: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DE}{EA}=1$ ، $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DF}{FB}=1$ و $\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DG}{GC}=1$

با ضرب کردن این برابریها درهم، به‌دست می‌آوریم: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$، یعنی، خطهای راست AQ، BR و CP در یک نقطه متقاطع‌اند. این نقطه را با N نشان می‌دهیم. فرض کنید T نقطهٔ برخورد PG با DN باشد. از قضیهٔ منلائوس داریم: $\frac{DT}{TN}\cdot\frac{NP}{PC}\cdot\frac{CG}{GD}=-1$، که از آنجا $\frac{DT}{TN}=-\frac{PC}{NP}\cdot\frac{GD}{CG}=-\frac{CP}{PN}\cdot\frac{GD}{CG}$. اگر $\frac{AE}{ED}=\alpha$، $\frac{BF}{FD}=\beta$ و $\frac{CG}{GD}=\gamma$، آن‌وقت $\frac{AP}{PB}=\frac{\alpha}{\beta}$، $\frac{CR}{RA}=\frac{\gamma}{\alpha}$، $\frac{CN}{NP}=-\frac{BA}{PB}\cdot\frac{RC}{AR}=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}$ و

$$\frac{CP}{PN}=-\left(1+\frac{CN}{NP}\right)=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta}$$

بنابراین، $\frac{DT}{TN}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$. خطهای راست دیگر، پاره‌خط DN را به‌همین نسبت تقسیم می‌کنند.

۶۴ـ نخست، حالت حدی را، وقتی که نقطهٔ N در بینهایت قرار دارد، در نظر می‌گیریم؛ در این صورت، خطهای راست AN، BN و CN با خط راست l موازی‌اند. فرض کنید فاصلهٔ نقطه‌های A، B و C تا خط l برابر با a، b و c باشد. (برای سادگی، فرض می‌کنیم که A، B و C در یک

طرف l هستند.) خطهای موازی با l که از A، B و C می‌گذرند، خطهای راست B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 را، به‌ترتیب، در نقطه‌هایی مانند A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند. به‌سادگی می‌توان دید که $\frac{a+c}{c+b}=\frac{|A_1C_2|}{|C_2B_1|}$، $\frac{b+a}{a+c}=\frac{|B_1A_2|}{|A_2C_1|}$ و $\frac{c+b}{b+a}=\frac{|C_1B_2|}{|B_2A_1|}$. با ضرب کردن این برابریها درهم، قانع می‌شویم که حکم قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲) برقرار است (همچنین لازم است مطمئن شویم که تعداد فردی نقطه از میان A_2، B_2 و C_2 بر امتدادهای ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ قرار دارند). بنابراین، نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 همخط‌اند.

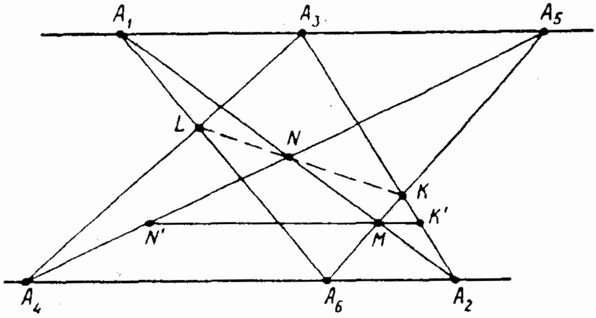
حالت کلی مسأله می‌تواند به‌حالت اول تحویل یابد، مثلاً، اگر ترتیب مفروض مثلثها، از یک نقطه در فضا به‌صفحهٔ دیگری تصویر شود. با انتخاب این نقطه، قرینه بودن مثلثها را حفظ خواهیم کرد و نقطهٔ N به‌سمت بینهایت می‌رود. همچنین می‌توان از بررسیهای فضایی اجتناب کرد. دستگاه مختصاتی با خط l به‌جای محور xها و مبدأ N در نظر می‌گیریم. تبدیل $x'=\frac{1}{x}$ و $y'=\frac{y}{x}$ را انجام می‌دهیم. در نتیجهٔ این تبدیل، نقطه‌های محور xها ($y=0$)، به نقطه‌هایی روی خط راست $y'=0$ تبدیل می‌شوند؛ نقطه‌های قرینه نسبت به‌محور xها، به‌نقطه‌های قرینه نسبت به‌خط $y'=0$ تبدیل می‌شوند؛ همچنین خطهای راست به‌خطهای راست تبدیل می‌شوند؛ خطهای راست که از مبدأ می‌گذرند به‌خطهای راست موازی با خط $y'=0$ تبدیل می‌شوند (این تبدیل، ذاتاً، تصویر کردنی است که در بالا ذکر شد). با انجام دادن این تبدیل، به‌ترتیبی که بررسی کردیم، می‌رسیم.

۶۵ـ فرض می‌کنیم خطهای مفروض موازی باشند. این را می‌توان با تصویر کردن یا تبدیل کردن مختصات به‌دست آورد (حل مسألهٔ ۶۴ بخش ۳ را ببینید). قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲) را در مثلث A_1A_6M به‌کار ببرید (در شکل ۱۶، $N'K'$ با خطهای راست مفروض موازی است). داریم

$$\begin{aligned}\frac{|A_1L|}{|LA_6|}\cdot\frac{|A_6K|}{|KM|}\cdot\frac{|MN|}{|NA_1|}&=\frac{|A_1A_3|}{|A_4A_6|}\cdot\frac{|A_6A_2|}{|K'M|}\cdot\frac{|MN'|}{|A_5A_1|}\\&=\frac{|A_1A_3|}{|K'M|}\cdot\frac{|MN'|}{|A_4A_6|}\cdot\frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|}\\&=\frac{|A_1A_3|}{|A_3M|}\cdot\frac{|MA_5|}{|A_5A_6|}\cdot\frac{|A_6A_2|}{|A_5A_1|}\\&=\frac{|A_1M|}{|A_2M|}\cdot\frac{|MA_5|}{|A_5M|}\cdot\frac{|A_2M|}{|MA_1|}=1\end{aligned}$$

بنابراین، نقطه‌های L، N و K همخط‌اند. بر طبق تبصرهٔ مسأله‌های ۴۴ و ۴۵ بخش ۲، می‌توانیم

نسبت $\frac{A_1L}{LA_4}$ و بقیهٔ نسبتها در نظر بگیریم. در این حالت $\frac{|A_1L|}{|LA_4|}$ و بقیهٔ نسبتها را به‌جای حاصلضرب کسرهای مناسب هم، برابر با (۱ـ) است.



شکل ۱۶

۶۷ـ مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو خط راست، که از نقطهٔ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به‌خط راست l می‌گذرند و با l زاویهٔ 60° می‌سازند.

۶۸ـ مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، کمان BCی دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نظیر زاویهٔ مرکزی 120° است.

۶۹ـ اگر N نقطهٔ برخورد خطهای راست PQ و AB باشد، آن وقت

$$\frac{|CN|}{|AN|}=\frac{|PC|}{|AQ|}=\frac{|CB|}{|AC|}$$

یعنی، N نقطهٔ ثابتی است. مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، دایره‌ای به‌قطر CN است. اکنون، اگر M نقطه‌ای ثابت باشد، آن وقت D بر خط راستی قرار دارد که با خط MN موازی است و از نقطهٔ ثابتی مانند L روی خط راست AB، به‌طوری که $\frac{|AL|}{|LB|}=\frac{|AN|}{|CN|}$، می‌گذرد، L نسبت به‌پاره‌خط AB، به‌همان نحوی قرار می‌گیرد که N نسبت به‌پاره‌خط AC.

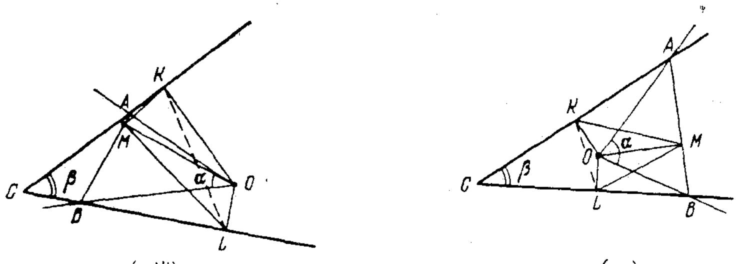
۷۰ـ فرض کنید φ معرف زاویهٔ بین BD و AC باشد؛ $S_{APK}=\frac{1}{2}\,|AK|.|PD|\sin\varphi$ و

$$S_{BPC}=\frac{1}{2}\,|BP|.|DC|\sin\varphi=\frac{1}{2}\,|BP|.|AD|\,\sin\varphi$$

چون $S_{APK}=S_{BPC}$، $|AK|.|PD|=|BP|.|AD|$، یا $\frac{|AK|}{|AD|}\cdot\frac{|PD|}{|BP|}=1$، اما بنابر قضیهٔ منلائوس درمثلث BDK (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲ را ببینید)، $\frac{|AK|}{|AD|}\cdot\frac{|DP|}{|PB|}\cdot\frac{|BM|}{|MK|}=1$ (M، نقطهٔ برخورد AP و BK است)، در نتیجه، $|BM|=|MK|$، یعنی، مکان هندسی

مطلوب، میانخط مثلث ABC، موازی با ضلع AC، است (اگر نقطه‌های P و K روی خطهای راست AC و BD اختیار شوند، آن وقت مکان هندسی، خط راستی است به‌موازات AC که از وسط پاره‌خطهای AB و BC می‌گذرد).

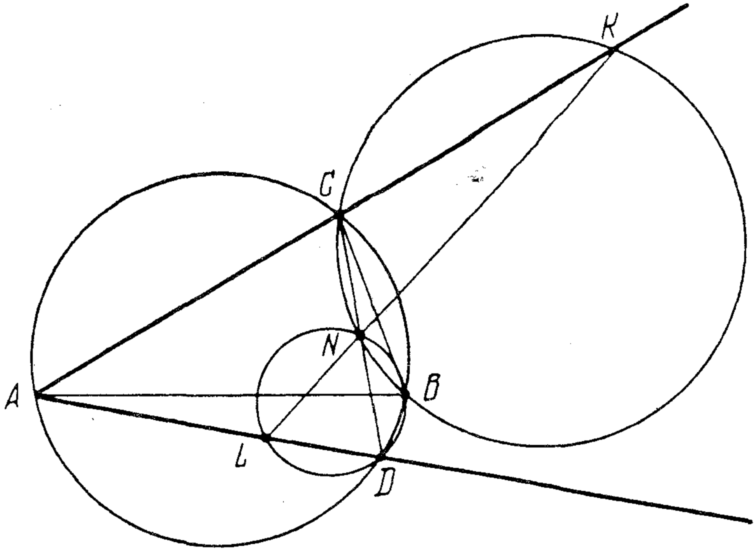
۷۱ـ فرض کنید C معرف رأس زاویهٔ مفروض و β اندازهٔ آن باشد. عمودهای OK و OL را از O بر ضلعهای زاویه فرود می‌آوریم (شکل ۱۷ الف). بر چهارضلعی $OKAM$ می‌توان دایره‌ای محیط کرد. در نتیجه، $\angle KMO = \angle KAO$. به‌همین ترتیب، $\angle OML = \angle OBL$. به‌این ترتیب، $\angle KML = \angle KAO + \angle OBL = \alpha+\beta$، یعنی، M روی کمانی از دایره که از K و L می‌گذرد و حاوی زاویهٔ $\alpha+\beta$ است، قرار دارد، تمامی نقطه‌های این کمان، به‌مجموعهٔ نقطه‌ها متعلق‌اند. اگر $\alpha \leq \beta$، آن وقت هیچ نقطهٔ دیگری در مجموعهٔ نقطه‌ها نیست. و اگر $\alpha>\beta$، آن وقت به‌مجموعهٔ نقطه‌ها، نقطه‌هایی مانند M واقع در طرف دیگر خط راست KL، که به‌ازای آنها $\angle KML = \alpha-\beta$، اضافه می‌شود (شکل ۱۷ ب). در این حالت، مجموعهٔ نقطه‌ها، یک جفت کمان است که نقطه‌های انتهایشان را وضعیتهای حدی زاویهٔ AOB تعیین می‌کند. اگر نیمخطهای زاویهٔ ثابت β و زاویهٔ متحرک α امتداد داده شوند، و به‌جای زاویه‌ها، زوجهایی از خطهای راست در نظر گرفته شوند، آن وقت مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، یک جفت دایره (شامل هر دو کمانهای ذکر شده در بالا) است.



(شکل ۱۷)

۷۲ـ چهارضلعی $DEPM$ را در نظر بگیرید که در آن $\angle DEM = \angle DPM = ۹۰^\circ$، در نتیجه، این چهارضلعی، چهارضلعیی محاطی است. بنابراین، $\angle DME = \angle DPE = ۴۵^\circ$. مکان هندسی مطلوب، خط راست DC است.

۷۳ـ حالتی را در نظر بگیرید که نقطهٔ B در درون زاویهٔ مفروض واقع است. پیش از هر چیز، یادآوری می‌کنیم که تمامی مثلثهای BCDی ممکن متشابه‌اند (شکل ۱۸)، زیرا $\angle BCD = \angle BAD$ و $\angle BDC = \angle BAC$. بنابراین، اگر N وسط CD باشد، آن وقت زاویه‌های BNC و BND ثابت‌اند. دایره‌ای بر مثلث BNC محیط می‌کنیم و فرض می‌کنیم K دومین نقطهٔ برخورد این دایره با AC باشد.



(شکل ۱۸)

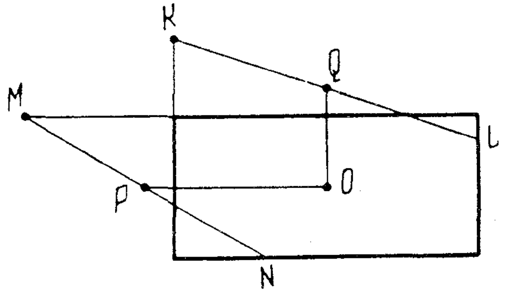
چون $\angle BNC - {}^\circ$۱۸۰ $= \angle BKA$ ، K نقطه‌ای ثابت است. به‌همین ترتیب، L، دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ محیطی مثلث BND و خط راست AD هم، ثابت است. داریم: $\angle LNK = \angle LNB + \angle BNK = {}۱۸۰^\circ - \angle BDA + \angle BCK = {}۱۸۰^\circ$ ، یعنی، N روی خط راست LK قرار دارد. مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند N، پاره خط LK است و مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ACD، پاره‌خطی به‌موازات LK است که AK را به‌نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند (و به‌کمک تبدیل تجانسی به‌مرکز A و نسبت تجانس برابربا $\frac{۲}{۳}$، به‌دست می‌آید).

۷۴ـ اگر O رأس زاویه و $ABCD$ مستطیل باشد (A ثابت است)، آن وقت نقطه‌های A، B، C، D و O بر یک دایره واقع‌اند. در نتیجه، $\angle COA = {}$۹۰$^\circ$ ، یعنی، نقطهٔ C روی خط راست عمود بر OA که از O می‌گذرد، قرار دارد.

۷۵ـ توجه کنید که تمامی مثلثهای $ABCD$ی حاصل، متشابه‌اند. در نتیجه، اگر در هر مثلث نقطه‌ای مانند K که ضلع BC را به‌یک نسبت تقسیم می‌کند، اختیار کنیم، آن وقت، چون $\angle AKC$ بدون تغییر باقی می‌ماند، نقطهٔ K یک دایره را می‌پیماید. بنابراین، نقطهٔ M که AK را به‌نسبت ثابت تقسیم می‌کند، دایره‌ای را می‌پیماید که از دایرهٔ اولی با تبدیل تجانسی به‌مرکز A و نسبت تجانس $k = \frac{|AM|}{|AK|}$، به‌دست می‌آید. از این استدلال در تمامی قسمتها: (الف)، (ب) و (ج)، استفاده می‌شود.

۷۶ـ فرض کنید K معرف وسط AB و M پای عمود وارد از K بر AC باشد. همهٔ مثلثهای AKM (با دو زاویهٔ برابر) متشابه‌اند، در نتیجه، همهٔ مثلثهای ABM متشابه‌اند. اکنون، به‌سادگی به‌دست می‌آید که مکان هندسی مطلوب، دایره‌ای است به‌وتر BC، و زاویهٔ روبه‌رو به‌این کمان برابر با زاویهٔ AMB یا زاویهٔ متمم آن، است. (کمان کوچکتر این دایره، در همان طرف BC قرار دارد که کمان کوچکتر دایرهٔ اصلی واقع است).

۷۷ـ اگر M، N، L و K نقطه‌های مفروض باشند (M و N روی ضلعهای متقابل مستطیل قرار دارند، همین طور L و K)، و P وسط MN، Q وسط KL و O نقطهٔ برخورد قطرهای مستطیل باشد (شکل ۱۹)، آن وقت $\angle POQ = ۹۰^\circ$. در نتیجه، مکان هندسی مطلوب، دایرهٔ مرسوم به‌قطر PQ است.



(شکل ۱۹)

۷۸ـ فرض کنید R و r معرف شعاع دایره‌های مفروض باشند ($R \geq r$)، و D نقطهٔ تماس وتر BC و دایرهٔ کوچکتر باشد. فرض کنید K و L نقطه‌های برخورد وترهای AC و AB با دایرهٔ کوچکتر باشند، و بالاخره، فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد. چون اندازه‌های زاویه‌ای کمانهای AK و AC برابرند، $|AK| = rx$ و $|AC| = Rx$؛ بنابراین، به‌دست می‌آوریم: $|DC|^۲ = |AC|.|CK| = (R-r)Rx^۲$. به‌همین ترتیب، $|AB| = Ry$ و $|DB|^۲ = (R-r)Ry^۲$؛ در نتیجه $\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{x}{y} = \frac{|AC|}{|AB|}$، یعنی، AD نیمساز زاویهٔ BAC است. به‌علاوه، داریم: $\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{Rx}{\sqrt{(R-r)Rx}} = \sqrt{\frac{R}{R-r}}$. بنابراین، مکان‌هندسی مطلوب، دایره‌ای است به‌شعاع $\rho = r\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{r\sqrt{R}}{\sqrt{R}+\sqrt{R-r}}$، که با دو دایرهٔ مفروض در همان نقطهٔ A مماس درونی است.

۷۹ـ فرض کنید O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌های مفروض باشند و خط راست O_1O_2 دایره‌ها را در نقطه‌های A، B، C و D (به‌طور متوالی) قطع کند. دو حالت در نظر بگیرید:

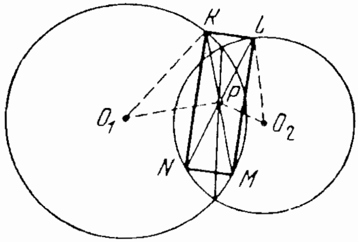
الف) مستطیل $KLMN$ طوری قرار گرفته که رأسهای مقابل به‌هم K و M، بر یک دایره قرار دارند در حالی که L و N بر دایرهٔ دیگر واقع‌اند. در این حالت، اگر P نقطهٔ برخورد قطرها باشد (شکل ۲۰ الف)، آن وقت

$$|O_1P|^2-|O_2P|^2=(|O_1K|^2-|KP|^2)-(|O_2L|^2-|LP|^2)$$
$$=|O_1K|^2-|O_2L|^2=R_1^2-R_2^2$$

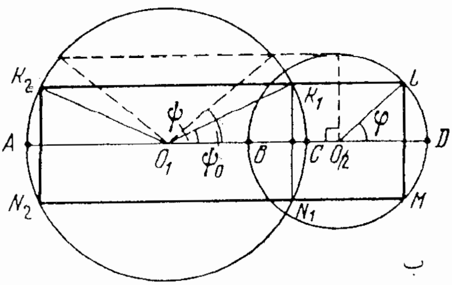
که در آن R_1 و R_2 شعاع دایره‌ها هستند، یعنی، نقطهٔ P بر وتر مشترک دایره‌ها قرار دارد؛ وسط وتر مشترک و نقطه‌های انتهایی آن مستثنی هستند، زیرا در این حالت مستطیل تباهیده می‌شود.

ب) دو رأس مجاور به‌هم مستطیل $KLMN$ بر یک دایره واقع‌اند و دوتای دیگر بر دایرهٔ دیگر قرار دارند. چون عمودهای وارد از O_1 بر KN و از O_2 بر LM، باید آنها را نصف کنند، خط راست O_1O_2 محور تقارن مستطیل $KLMN$ است.

فرض کنید R_2 کمتر از R_1 باشد و شعاع O_2L با خط المرکزین دایره‌ها زاویهٔ φ تشکیل دهد. از L، خط راستی به‌موازات O_1O_2 رسم می‌کنیم. این خط، دایرهٔ O_1 را در دو نقطه مانند K_1 و K_2 قطع می‌کند، و به‌نقطهٔ L، دو مستطیل: K_1LMN_1 و K_2LMN_2 متناظر است (شکل ۲۰ ب).



الف



ب

(شکل ۲۰)

با تغییر کردن φ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$، زاویهٔ ψ، تشکیل شده با شعاع $O_۱K_۱$ و نیمخط $O_۱O_۲$، از ۰ تا مقدار معین $\psi_۰$ تغییر می‌کند. با تغییر بیشتری در φ(از $\frac{\pi}{۲}$ تا π)، ψ، از $\psi_۰$ تا صفر کاهش می‌یابد. در ضمن، مرکز مستطیلهای $K_۱LMN_۱$ پاره‌خطی را از وسط CD تا وسط BC، بجز نقطه‌های انتهایی و نقطهٔ برخورد این پاره‌خط با وتر مشترک دایره‌ها، می‌پیمایند. به‌همین ترتیب، مرکز مستطیلهای $K_۲LMN_۲$، در بازهٔ با نقطه‌های انتهایی وسطهای ABو ADانباشته‌اند (نقطه‌های انتهایی بازه، جزء مکان هندسی نیستند).

اگر سه رأس مستطیل و، بنابراین، رأس چهارم بر یک دایره قرار گیرند، آن وقت مرکز مستطیل بر مرکز دایرهٔ متناظر با آن منطبق می‌شود.

بنابراین، مکان‌هندسی، اجتماعی ازسه‌بازه است: نقطه‌های انتهایی بازهٔ اول ـ به‌ترتیب، وسطهای ABو AD، نقطه‌های انتهایی بازهٔ دوم ـ وسطهای BC و CD، نقطه‌های انتهایی بازهٔ سوم ـ نقطه‌های برخورد دایره‌هاست، وسط وتر مشترک کنار گذاشته می‌شود.

۸۰ـ اگر Bو C اولین و دومین نقطهٔ برگشت باشند و O مرکز میز باشد، آن وقت، BOنیمساز زاویهٔ CBAاست. مسیر توپ نسبت به‌قطر شامل C، متقارن است، بنابراین، Aبر این قطر واقع است. اگر $\angle BCO = \angle CBO = \varphi$، آن وقت $\angle ABO = \varphi$ و $\angle BOA = ۲\varphi$؛ با به کار بردن قانون سینوسها در مثلث ABO($|BO| = R$ و $|OA| = a$)، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{R}{\sin ۳\varphi} = \frac{a}{\sin \varphi}$$

که از آنجا $\cos ۲\varphi = \frac{R-a}{۲a}$، و به‌ازای $a > \frac{R}{۳}$، می‌توانیم φ را پیدا کنیم.

جواب: نقطه‌های واقع در بیرون دایره به شعاع $\frac{R}{۳}$ و به‌مرکز، مرکز میز بیلیارد.

۸۱ـ مکان هندسی مطلوب، دو خط راست، عمود بر خطهای مفروض، است.

۸۲ـ اگر خط ABبا l موازی نباشد، آن وقت دو دایره وجود دارند که از Aو Bمی‌گذرند و بر l مماس‌اند. فرض کنید $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهایشان باشند. مکان هندسی مطلوب، خط راست $O_۱O_۲$ بجز بازهٔ $(O_۱O_۲)$ است. اگر AB با l موازی باشد، آن وقت مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نیمخطی عمود بر l.

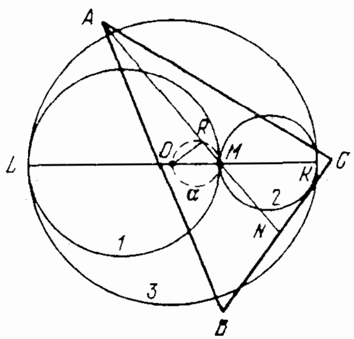
۸۳ـ (الف) فرض کنید A (شکل ۲۱) یک رأس مثلث باشد. پارخط AM را، از طرف M، طوری امتداد دهید که امتداد آن، به‌بزرگی $|MN| = \frac{۱}{۲}|AM|$ باشد. نقطهٔ N وسط ضلع روبه‌رو به‌رأس Aاست. در نتیجه، N باید در درون دایرهٔ محیطی مثلث قرار گیرد، یعنی، در درون دایرهٔ به‌شعاع $|OA|$ و مرکز O. از O، عمودی مانند OR بر ANرسم کنید. باید نابرابری $|AR| > |RN|$ برقرار باشد. اگر $\angle AMO \geq ۹۰^\circ$، آن وقت این نابرابری خودبه‌خود برقرار است. اگر $\angle AMO < ۹۰^\circ$، آن وقت

$$|AM|-|MR|>|MN|+|MR|$$

$$\Rightarrow\ |AM|-\frac{۱}{۲}\ |AM|>۲|MR|\ \Rightarrow\ |AM|>۴|MR|$$

اما R روی دایرهٔ α به‌قطر OM قرار دارد، بنابراین A باید بیرون دایره‌ای که با دایرهٔ α به‌نسبت تجانس ۴ و مرکز M، متجانس است، قرار گیرد. به‌علاوه، نقطهٔ N نباید روی دایرهٔ α قرار گیرد، زیرا دراین صورت، ضلع مثلث که وسطش این نقطه است، با عمود بودن بر ON، روی خط راست AN قرار می‌گیرد، یعنی، تمامی رأسهای مثلث بر یک خط راست قرار دارند. در نتیجه، A روی دایره‌ای که با α به‌مرکز تجانس M و نسبت ۲، متجانس است، قرار ندارد. بنابراین، اگر روی خط راست OM نقطه‌های L و K را طوری اختیار کنیم که $|LO|:|OM|:|MK|=۳:۱:۲$ ، و به‌قطر LM، دایرهٔ ۱ و به‌قطر MK، دایرهٔ ۲ را رسم کنیم، آن وقت مکان هندسی مطلوب، کلیهٔ نقطه‌های بیرون دایرهٔ ۱ با برداشتن نقطه‌های دایرهٔ ۲ بجز نقطهٔ K، است (نقطهٔ K جزء مکان هندسی است).

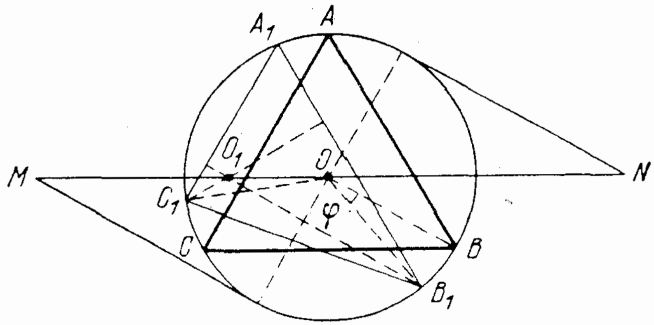
ب) اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و M مرکز ثقل مثلث باشد، آن وقت K (قسمت (الف) را ببینید) نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث است (مسألهٔ ۲۰ بخش ۱ را ببینید). اما، فاصلهٔ میان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منفرجه تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن، از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث بزرگتر است. در نتیجه، رأسهای مثلث منفرجه، در درون دایرهٔ ۳، که به‌قطر LK رسم شده است، و بیرون دایرهٔ ۱ با برداشتن نقطه‌های دایرهٔ ۲، قراردارند (رأس زاویه‌های منفرجه، در درون دایرهٔ ۲ قرارمی‌گیرد).



(شکل ۲۱)

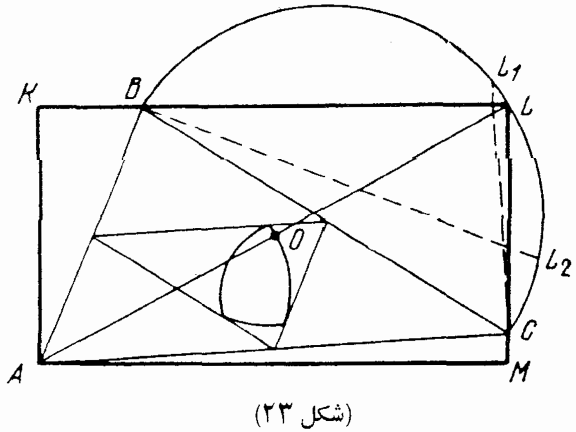
۸۴ـ فرض کنید ABC (شکل ۲۲) مثلث متساوی‌الاضلاع اصلی، $A_۱B_۱C_۱$ مثلثی دلخواه با شرطهای $AC \parallel A_۱C_۱$ و $AB \parallel A_۱B_۱$، O مرکز دایره و $O_۱$ نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_۱B_۱C_۱$ باشد. فرض کنید $\angle BOB_۱=\varphi$. چون $OB \parallel O_۱B_۱$، داریم: $\angle OB_۱O_۱=\varphi$؛ چون $\angle C_۱O_۱B_۱=\angle C_۱OB_۱=۱۲۰^\circ$، چهارضلعی $C_۱O_۱OB_۱$ محاطی‌است، و بنابراین،

$\angle O_1OB=\varphi+120^\circ+30^\circ-\varphi=150^\circ$.به‌این‌ترتیب، $\angle O_1OC_1=\angle O_1B_1C_1=30^\circ-\varphi$، یعنی، خط راست OO_1 با CB موازی است. برای پیداکردن مسیری که نقطهٔ O_1، هنگامی که در امتداد این خط راست حرکت می‌کند، می‌پوشاند، توجه کنید که برای تعیین جای نقطهٔ O_1، از نقطهٔ متغیر B_1، خط راستی به‌موازات OB رسم می‌کنیم تا خط راستی راکه از O به‌موازات CB می‌گذرد، قطع کند. به‌وضوح، دورترین نقطه‌ها، به‌ازای نقطه‌های انتهایی قطر عمود بر OB به‌دست می‌آیند. بنابراین، MN (قطعه‌ای ازخط موازی با CB، به‌طول $4R$ و نقطهٔ وسط O) قسمتی از مکان هندسی است، کل مکان هندسی، عبارت است از سه‌پاره‌خط (با نقطه‌های انتهایی برداشته شده) از این قبیل.



(شکل ۲۲)

۸۵ـ اگر ABC (شکل ۲۳) مثلث مفروض باشد و یک رأس مستطیل محیطی $AKLM$، بر A منطبق باشد (B روی KL و C روی LM واقع است)، آن وقت L به‌نیمدایرهٔ به قطر BC متعلق است و زاویه‌های ABL و ACL منفرجه‌اند، یعنی، L دو وضعیت حداکثر دارد: L_1 و L_2،



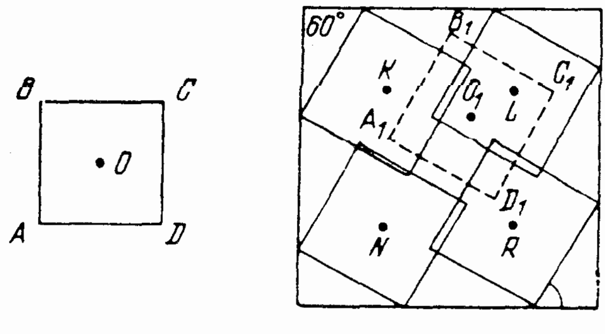
(شکل ۲۳)

$\angle L_1CA = \angle L_2BA = 90^\circ$، در صورتی که، مرکز O، کمانی را متجانس با کمان L_1L_2 به‌مرکز تجانس Aو نسبت $\frac{1}{2}$، می‌پیماید.

جواب: اگر مثلث حاده باشد، آن وقت مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، مثلثی خمیده است که کمانهایی از نیمدایره‌های مرسوم به‌قطر میانخطهای مثلث، روبه‌درون مثلث تشکیل شده با این میانخطها، تشکیل می‌دهند، اگر مثلث حاده نباشد، آن وقت مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، عبارت است از دو کمان از نیمدایره‌هایی که روی دو میانخط کوچکتر به‌یک نحو رسم شده‌اند.

۸۶ـ اگر مربع اول، دور نقطهٔ M به‌اندازهٔ زاویهٔ 60° (شکل ۲۴ را ببینید) در جهت گردش عقربه‌های ساعت یا خلاف گردش عقربه‌های ساعت دوران کند، آن وقت باید کاملاً در درون مربع دوم قرار بگیرد. به‌عکس، به‌هر مربع واقع در درون مربع بزرگتر، و برابر با مربع کوچکتر، که ضلعهایش با ضلعهای مربع بزرگتر زاویهٔ 30° و 60° تشکیل می‌دهند، نقطه‌ای مانند M نظیر می‌شود که ویژگی لازم را دارد. (این مربع، در شکل با خط‌چین نشان داده شده است.) این نقطه، مرکز دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ 60° است که مربع $ABCD$ را به‌مربع $A_1B_1C_1D_1$ می‌برد؛ این نقطه، از نقطهٔ O_1 با دوران دور O در جهت لازم، به‌اندازهٔ زاویهٔ 60°، به‌دست می‌آید. وضعیتهای نهایی مربع $A_1B_1C_1D_1$ (وقتی که دو رأس آن روی ضلعهای مربع بزرگتر قرار گیرند) را در نظر بگیرید. مرکزهای آنها، رأسهای مربع $KLRN$ به‌حساب می‌آیند که ضلعش برابر با $\frac{1}{2}a(\sqrt{3}+1)-b$ است (ضلعهای مربع $KLRN$، با ضلعهای مربعهای مفروض موازی‌اند و مرکز آن بر مرکز مربع بزرگتر منطبق است). مرکزهای خانوادهٔ دیگری از مربعها که با ضلعهای مربع بزرگتر زاویه‌های 30° و 60° تشکیل می‌دهند نیز، مربع $KLRN$ را پر می‌کنند. بنابراین، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از اجتماع دو مربع، که یکی از مربع $KLRN$ با دوران آن دور O به‌اندازهٔ زاویهٔ 60° در یک جهت، و دیگری با دوران به اندازهٔ زاویهٔ 60° در جهت مخالف، به‌دست می‌آید.

اگر $b \geq \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$، مسأله جواب دارد (ممکن است نقطه‌های P و Qروی محیط مربعها قرار گیرند).



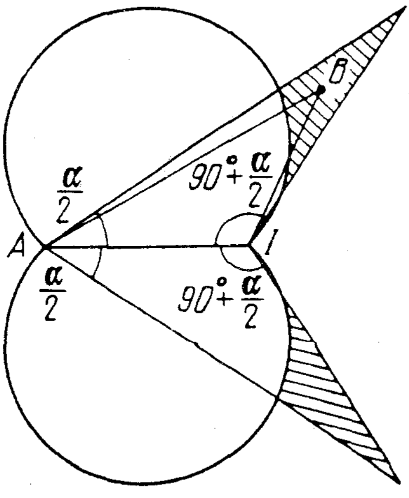
(شکل ۲۴)

۸۷ـ تنها یک چنین نقطه‌ای وجود دارد، یعنی مرکز ثقل (نقطهٔ میانه‌ای) مثلث. به‌سادگی دیده می‌شود که در این حالت، به‌ازای هر نقطهٔ N روی محیط مثلث، می‌توانیم یکی از رأسهای مثلث را به‌عنوان نقطهٔ P اختیار کنیم. نقطهٔ دیگری مانند M_1 اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم این نقطه در درون مثلث AMD یا روی محیط آن واقع باشد، که در آن M مرکز ثقل مثلث ABC و D وسط AC است. از M_1، خط راستی به‌موازات BD رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این خط و AD را نقطهٔ N می‌گیریم و نقطهٔ برخورد آن با AM را به M_2 نشان می‌دهیم. به‌وضوح، به‌ازای هر نقطهٔ P در درون مثلث یا بر محیط آن، مساحت مثلث M_1NP از مساحت یکی از مثلثهای AM_2N، M_2NC و M_2NB تجاوز نمی‌کند. همچنین، روشن است که $S_{AM_2N}<S_{AMD}=\frac{1}{6}S$. به‌علاوه، اگر $|AD|=|DC|=a$ و $x=|ND|$، آن وقت

$$\frac{S_{M_2NC}}{S_{MDC}}=\frac{|M_2N|}{|MD|}\cdot\frac{|NC|}{|DC|}=\frac{a^2-x^2}{a^2}\leq 1$$

بالاخره، $1>$ $\frac{S_{M_2NB}}{S_{AMD}}=\frac{|M_2N|}{|MD|}\cdot\frac{|ND|}{|AD|}=\frac{(a-x)x}{a^2}$.

۸۸ـ اگر A، B و C زاویه‌های مثلث ABC باشند، آن وقت زاویه‌های مثلث ABI برابرند با $\frac{A}{2}$، $\frac{B}{2}$ و $90^\circ+\frac{C}{2}$ (شکل ۲۵)؛ در نتیجه، مکان هندسی مطلوب، یک جفت مثلث است که دو ضلع آنها پاره‌خط و سومی کمانی است که بخشی است از قطعهٔ مرسوم بر AI که حاوی زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ است.



(شکل ۲۵)

۸۹ـ بر BM در نقطهٔ M عمودی اخراج می‌کنیم؛ فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد این عمود و عمود مرسوم بر خط راست اصلی در نقطهٔ B، باشد. نشان می‌دهیم که مقدار $|PB|$ ثابت است. فرض کنید $\angle MBC$ برابر با φ باشد؛ K و L معرف پای عمودهای وارد از A و C بر MB هستند. بنابر فرض، $\frac{|MK|}{|KA|}+\frac{|LM|}{|LC|}=k$، اما $|LC| = |BC|\sin\varphi$ و

$$|AK| = |BA|\sin\varphi$$

بنابراین

$$\frac{|MK|}{|BA|\sin\varphi}+\frac{|LM|}{|BC|\sin\varphi}=k$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BM| \pm |BK|}{|BA|\sin\varphi}+\frac{|BM| \pm |BL|}{|BC|\sin\varphi}=k$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BM|}{\sin\varphi}\left(\frac{۱}{|BA|}+\frac{۱}{|BC|}\right) \pm \left(\frac{|BK|}{|BA|\sin\varphi}-\frac{|BL|}{|BC|\sin\varphi}\right)=k$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BM|}{\sin\varphi}=\frac{k|BA|.|BC|}{|BA|+|BC|} \Leftrightarrow |PB| = \frac{k|BA|.|BC|}{|BA|+|BC|}$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم. در نتیجه، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو دایره که بر خط راست AC در نقطهٔ B مماس‌اند و قطرشان برابر است با $\frac{k|BA|.|BC|}{|BA|+|BC|}$.

۹۰ـ AQ را، از طرف نقطهٔ Q، امتداد دهید و روی این نیمخط، نقطه‌ای مانند M به‌طوری که $|QM| = \frac{۱}{۲}|AQ|$ و نقطه‌ای مانند $A_۱$ به‌طوری که $|MA_۱| = |AM|$، اختیار کنید؛ M وسط ضلع BC ی مثلث ABC است؛ $\angle CBA_۱ = \angle BCA$ و $\angle ABA_۱ = ۱۸۰^\circ - \angle BAC$. در نتیجه، اگر دایره‌هایی به‌قطر AM، $MA_۱$ و $AA_۱$ رسم کنیم، آن وقت، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نقطه‌های واقع در بیرون دو دایرهٔ اول و در درون دایرهٔ سوم.

۹۱ـ چهار حالت در نظر بگیرید: یا مثلث ABC حاده است، یا یکی از زاویه‌های A، B و C منفرجه است. در همهٔ حالتها، می‌توان اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABH را برحسب اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC پیدا کرد.

۹۲ـ اگر نقطه‌های انتهایی نیمخطها بر هم منطبق نباشد، آن وقت، مکان هندسی مطلوب، از خطهای زیر تشکیل می‌شود: نیمسازهای دو زاویه که با خطهای راستی که نیمخطهای مفروض را در بردارند، تشکیل شده‌اند، عمود منصف پاره‌خطی که نقطه‌های انتهایی نیمخطها را به‌هم وصل می‌کند و دو سهمی (سهمی، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از یک نقطه و یک خط راست مفروض به‌یک فاصله‌اند). اگر نقطه‌های انتهایی برهم منطبق باشند، آن وقت مکان

هندسی مطلوب، عبارت است از نیمساز زاویهٔ تشکیل شده با نیمخطها و نیز قسمتی از صفحه، محصور در درون زاویهٔ تشکیل شده با عمودهای مرسوم بر نقطه‌های انتهایی نیمخطها.

۹۳ ـ فرض کنید A معرف رأس زاویه باشد. می‌توان ثابت کرد که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MON بر نقطهٔ برخورد نیمساز AO و دایرهٔ محیطی مثلث AMN، منطبق است. فرض کنید α اندازهٔ این زاویه، r شعاع دایره و K وسط AO باشد. روی نیمساز AO، نقطه‌های L و P را طوری اختیار می‌کنیم که

$$|AL| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{۲}\left(۱-\sin\frac{\alpha}{۲}\right)}\ ,\quad |AP| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{۲}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)}$$

مکان هندسی مطلوب، عبارت است از پاره‌خط KL (K به‌این مجموعه متعلق نیست و L متعلق است) و نیمخط با مبدأ P و واقع بر نیمساز زاویه.

۹۴ ـ فرض کنید $O_۱$ و $O_۲$ معرف مرکز دایره‌ها و $r_۱$ و $r_۲$ شعاعهای آنها باشند، و M وسط AB و O وسط $O_۱O_۲$ باشد. داریم (بنابر دستور طول میانه، مسألهٔ ۱۱ بخش ۱)

$$|O_۱M|^۲ = \frac{۱}{۴}(۲r_۱^۲ + ۲|O_۱B|^۲ - |AB|^۲)$$

$$|O_۲M|^۲ = \frac{۱}{۴}(۲r_۲^۲ + ۲|O_۲A|^۲ - |AB|^۲)$$

$$|O_۱B|^۲ = \frac{۱}{۲}(|O_۱O_۲|^۲ + ۴|OB|^۲ - ۲r_۲^۲)$$

$$|O_۲A|^۲ = \frac{۱}{۲}(|O_۱O_۲|^۲ + ۴|OA|^۲ - ۲r_۱^۲)$$

بنابراین، $|O_۱M|^۲ - |O_۲M|^۲ = r_۱^۲ - r_۲^۲$، یعنی (مسألهٔ ۱ بخش ۲)، نقطهٔ M روی عمودی بر $O_۱O_۲$ واقع است. اگر دایره‌ها شعاعهای مختلف داشته باشند و متقاطع نباشند، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو پاره‌خط که به‌روش زیر به‌دست می‌آیند: از پاره‌خط با نقطه‌های انتهایی در وسطهای مماسهای مشترک خارجی، نقطه‌های واقع بین وسطهای مماسهای مشترک داخلی را می‌داریم (اگر M نقطه‌ای روی پاره خط با نقطه‌های انتهایی در وسطهای مماسهای مشترک داخلی باشد، آن وقت خط راستی که از M عمود بر OM می‌گذرد، دایره را قطع نمی‌کند). در حالتهای باقیمانده (دایره‌ها متقاطع یا برابرند)، مکان هندسی مطلوب، سرتاسر پاره‌خط با نقطه‌های انتهایی در وسطهای مماسهای مشترک خارجی است.

۹۵ ـ الف) چون $\angle FNM = ۴۵^\circ$ ، $\angle CNM = ۱۳۵^\circ$ ، $\angle FNB = ۹۰^\circ$ (فرض می‌کنیم $|AM| > |MB|$)، $\angle FNC = ۹۰^\circ$ و N ، C و B هم‌خط‌اند، و غیره.

(ب) مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABK با وتر AB را در نظر می‌گیریم (K در طرف دیگر AB، نسبت به‌مربعها، قرار دارد). چهارضلعی $ANBK$ چهارضلعیی محاطی است و $\angle ANK = \angle ABK = ۴۵^\circ$ ، یعنی، NK از M می‌گذرد.

مکان هندسی مطلوب، میانخط مثلث ALB است، که در آن L قرینهٔ نقطهٔ K نسبت به AB است.

۹۶ـ فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد عمود منصف و مماس باشد؛ O مرکز دایره و R شعاع آن است. داریم: $|ON|^۲-|NA|^۲=R^۲+|MN|^۲-|NA|^۲=R^۲$. بنابراین مکان هندسی مطلوب، خط راستی عمود بر OA است (مسألهٔ ۱ بخش ۲).

۹۷ـ اگر $O_۱$ و $O_۲$ مرکز دایره‌های مفروض و $Q_۱$ و $Q_۲$ مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای $ABC_۱$ و $AB_۱C$ باشند، آن وقت $O_۱Q_۱O_۲Q_۲$ متوازی‌الاضلاع است. خط راست $Q_۱Q_۲$ از وسط پاره‌خط $O_۱O_۲$ (نقطهٔ D) می‌گذرد. دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای $ABC_۱$ و $AB_۱C$، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به‌خط راست $Q_۱Q_۲$ است. مکان هندسی مطلوب، دایره‌ای به‌شعاع $|AD|$ و به‌مرکز نقطهٔ D است.

۹۸ـ فرض کنید $O_۱$ و $O_۲$ معرف مرکز دایره‌های مفروض و $r_۱$ و $r_۲$ شعاعهای آنها باشند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $O_۱O_۲O$ و $O_۱O_۲O'$ با وتر $O_۱O_۲$ را درنظربگیرید. مکان هندسی مطلوب، دو طوق با مرکزهای O و O' و شعاعهای زیر است: شعاع خارجی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(r_۱+r_۲)$ و شعاع داخلی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}|r_۱-r_۲|$. این حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید M نقطه‌ای روی دایرهٔ $O_۱$، و N نقطه‌ای روی دایرهٔ $O_۲$ باشد. اگر M ثابت باشد و N دایرهٔ دوم را بپیماید، آن وقت رأسهای قائمهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، دو دایره به‌شعاع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}r_۲$ را می‌پیمایند، که از دایرهٔ $O_۲$ با دوران دور M به‌اندازهٔ زاویهٔ ۴۵° (هر دو در جهت گردش عقربه‌های ساعت یا خلاف گردش عقربه‌های ساعت) و به‌دنبال آن تبدیل تجانسی به‌مرکز تجانس M و نسبت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، به‌دست می‌آیند. فرض کنید O_M مرکز یکی از این دایره‌ها باشد. نقطهٔ O_M، از $O_۲$ با دورانی دور M در جهت مناسب و به‌دنبال آن تبدیلی تجانسی به مرکز تجانس M و نسبت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، به‌دست می‌آید. اما O_M با دورانی متناظر و تبدیل تجانسی به مرکز تجانس $O_۲$ قابل دسترسی است. در نتیجه، وقتی که M دایرهٔ $O_۱$ را می‌پیماید، O_M، دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}r_۱$ و مرکز O یا O' را می‌پیماید.

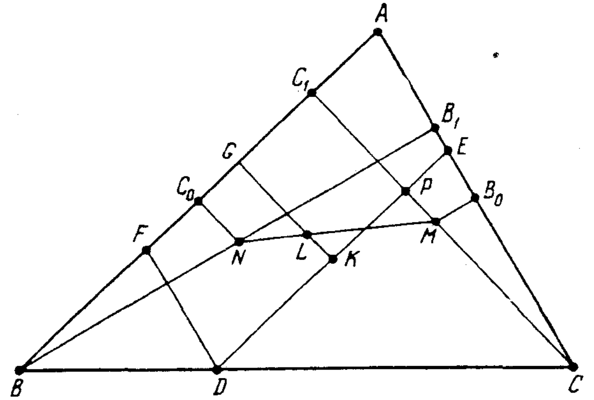
۹۹ـ اجتماع سه متوازی‌الاضلاع ساخته شده، متوازی‌الاضلاعی محیط بر مثلث مفروض که به‌چهار متوازی‌الاضلاع کوچکتر تفکیک شده است، تشکیل می‌دهد. به‌سادگی می‌توان نسبتهایی راکه هر قطر، هر یک از قطرهای مورد بحث دیگر را تقسیم می‌کند، بر حسب قطعه‌های ضلعهای متوازی‌الاضلاع بزرگتر، پیدا کرد. اگر متوازی‌الاضلاعها، مستطیل باشند، آن وقت با انتقال دو تا از سه قطر در نظر گرفته شده، مثلثی قابل انطباق بر مثلث مفروض به‌دست می‌آوریم، و این بدان معنی است که زاویه‌های بین آنها، با زاویه‌های متناظر مثلث و یا با

مکملهای آنها برابرند. مکان هندسی مطلوب، دایره‌ای است که از وسط ضلعهای مثلث مفروض می‌گذرد.

۱۰۰ ـ ثابت می‌کنیم $|\cos\angle BAC| = \frac{|AM|}{|AD|}$، که در آن، D، نقطهٔ برخورد AM با دایره است. فرض کنید O معرف مرکز دایره، P وسط BC و K وسط AH باشد. مثلثهای DOA و MKA متشابه‌اند. بنابراین، $|\cos\angle BAC| = \frac{|OP|}{|OB|} = \frac{|AK|}{|DO|} = \frac{|MA|}{|AD|}$. مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو کمان، متعلق به‌دو دایرهٔ متمایز.

۱۰۱ ـ فرض کنید C_0 و B_0 وسط ضلعهای AC و AB، و BB_1 و CC_1 ارتفاع باشند، K وسط DE باشد (شکل ۲۶) و C_0K و C_0N^i بر AB عمود باشند و B_0M بر AC عمود باشد. در این صورت، $\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|KP|}{|C_0C_1|} = \frac{|GC_1|}{|C_0C_1|} = \frac{|ML|}{|NM|}$ (تساوی آخری، از تشابه مثلثهای DCE و ABC نتیجه می‌شود، K، P و C_0، C_1 نقطه‌های متناظر در این مثلثها هستند). به‌همین روش عمود منصف DF، MN را در نقطه‌ای مانند L_1 طوری قطع می‌کند که $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|NL_1|}{|NM|}$، یعنی، نقطه‌های L و L_1 برهم منطبق‌اند.

مکان هندسی مطلوب، خط راست MN است.



(شکل ۲۶)

۱۰۲ ـ روشن است که هر نقطه از ارتفاعهای مثلث ABC، به‌مکان هندسی مطلوب متعلق است. نشان می‌دهیم هیچ نقطهٔ دیگری وجود ندارد. نقطه‌ای مانند M غیر واقع بر ارتفاعهای مثلث ABC اختیار می‌کنیم. فرض کنید خط راست BM، ارتفاعهای وارد از رأسهای A و C را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M_1 و M_2 قطع کند. اگر شرطهای مسأله برای هر سه نقطهٔ M_1، M_2 و M

صادق باشند، آن وقت تساویهای $\angle MAM_1 = \angle MCM_1$ و $\angle MAM_2 = \angle MCM_2$ برقرار خواهند بود، و در این صورت، پنج نقطهٔ A، M، M_1، M_2 و C_1، قرینهٔ C نسبت به‌خط راست BM، بر یک دایره واقع‌اند، که این هم ناممکن است.

۱۰۳ ـ توجه کنید که اگر خط راستی مانند l، واجد ویژگی لازم، از M بگذرد، آن وقت یا خط راستی مانند l_1 که از M و یک رأس مثلث می‌گذرد و یا خط راستی مانند l_2 که از M می‌گذرد و بر یک ضلع مثلث عمود است، و واجد همین ویژگی هستند، وجود دارد. در حقیقت، فرض کنید خط l، ضلعهای AB و CBی مثلث ABC را در نقطه‌های C_0 و A_0 قطع کند و فرض کنید نقطه‌ای مانند B_1، قرینهٔ B نسبت به l، در درون مثلث ABC موجود باشد. l را دور M دوران می‌دهیم، بنابراین B_1، با حرکت بر روی کمان دایرهٔ متناظر، تا اینکه نقطهٔ C_0 یا A_0 بر رأس A یا C منطبق شود، یا به‌ضلعهای BC یا AB نزدیک می‌شود (و خط l_1 را به‌دست می‌آوریم) و یا بر ضلع متناظر قرار می‌گیرد (و به‌خط l_2 می‌رسیم). اگر α معرف مجموعهٔ نقطه‌های مثلث ما، واقع در درون چهارضلعی محدود به‌نیمسازهای مرسوم به‌کوچکترین و بزرگترین ضلع مثلث و عمودهای مرسوم در وسطهایشان، باشد (اگر مثلث مفروض متساوی‌الساقین باشد، آن وقت α تهی است. در بقیهٔ حالتها α چهارضلعی با پنج‌ضلعی است)، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از همهٔ نقطه‌های مثلث بجز نقطه‌های درونی α.

۱۰۵ ـ داریم

$$|MB|^2=a^2+c^2\cos^2A=a^2+c^2-c^2\sin^2A=a^2+c^2-a^2\sin^2C$$
$$=c^2+a^2\cos^2C=|NB|^2$$

۱۰۷ ـ ثابت کنید که نقطهٔ قرینهٔ محل برخورد ارتفاعهای مثلث نسبت به‌یک ضلع آن، روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

۱۰۹ ـ فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، و AD ارتفاع مثلث باشد و K، L، M و N تصویرهای D، به‌ترتیب، روی AC، CH، HB و BA باشند. از این مطلب استفاده کنید که K و L بر دایرهٔ به‌قطر CD، L و M بر دایرهٔ قطر HD، و M و N بر دایرهٔ به‌قطر DB قرار دارند.

۱۱۱ ـ ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث، برابر شعاع دایره‌های مفروض است و این دایره‌ها با دایرهٔ محیطی مثلث، نسبت به‌ضلعهای مثلث، قرینه‌اند.

۱۱۲ ـ فرض کنید $ABCD$ معرف مستطیل مفروض باشد و فرض کنید نقطه‌های K، L، M و N، به‌ترتیب، روی خطهای راست AB، BC، CD و DA واقع باشند. فرض کنید P_1 دومین نقطهٔ برخورد خط راست LN با دایرهٔ محیطی مثلث مفروض باشد (P نقطهٔ اول است). در این صورت، $KN \perp LM$، $KN \parallel BP_1$، $LM \parallel P_1D$ و $\angle BP_1D = 90°$. بنابراین، $KN \perp LM$. به‌علاوه، $LN \perp KM$؛ بدین ترتیب، N نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث KLM است. اکنون، برای

روشـنی وضـع، فـرض کـنید L و N روی ضـلعهای BC و DA بـاشند. قـرار مـی‌گذاریـم: $|AB|=a$، $|BC|=b$، $|KP|=x$ و $|PN|=y$. خـــط راست KN، BD را بـــه‌نسبت $\frac{(a+y)x}{(b-x)y}$، با احتساب از رأس B، تقسیم مـی‌کند. خـط راست LM، BD را بـه‌همین نسـبت تقسیم می‌کند.

۱۱۳ ـ طولهای $|AP|$، $|BQ|$ و $|CR|$ را می‌توان بر حسب طول ضلعهای مثلث نشان داد مثلاً: $|AP|=\frac{bc}{b+c}$.

۱۱۴ ـ فرض کنید M معرف وسط AD باشد. تحقیق کنید که $|BM|^{۲}=|FM|^{۲}+|BF|^{۲}$.

۱۱۵ ـ از D، خط راستی عمود بر نیمساز زاویهٔ A رسم کنید، سپس نقطه‌های برخورد آن با AB و AC را، به‌ترتیب، با K و M نشان دهید، و ثابت کنید که $|AK|=|AM|=\frac{b+c}{۲}$. چون، $|AB_۱|=|AC_۱|=p-a$ و $|BC_۲|=|AC_۲|=p$ (p نصف محیط مثلث ABC است، و a، b و c طول ضلعهای آن هستند)، نقطه‌های K و M وسط پاره‌خطهای $C_۱C_۲$ و $B_۱B_۲$ هستند.

۱۱۶ ـ ثابت کنید که با AD، l همان زاویه‌هایی را تشکیل می‌دهد که خط راست BC مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث. بنابراین، نتیجه می‌شود که مماس دیگر بر دایرهٔ محاطی که از D می‌گذرد، با l موازی است.

۱۱۷ ـ دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر خطهای راست MN، AC و BC طوری مماس است که P و Q نقطه‌های تماس آن با خطهای AC و BC، بیرون پاره‌خطهای CM و CN قرار دارند (یعنی، یک دایرهٔ محاطی خارجی مثلث MCN). اگر R نقطهٔ تماس MN بـا دایـره بـاشد، آن وقت $|MR|=|MP|$ و $|NQ|=|NR|$، در نتیجه، $|MN|=|MP|+|NQ|$؛ اما داریـم $|MN|=|MA|+|NB|$. بنابراین، یکی از نقطه‌های P یا Q، روی ضلع متناظر با آن واقع است، در حالی که دیگری روی امتداد ضلع متناظرش قرار دارد. داریم

$$|CP|=|CQ|=\frac{۱}{۲}(|CP|+|CQ|)=\frac{۱}{۲}\left(|AC|+|CB|\right)$$

یعنی، دایرهٔ رسم شده، برای کلیهٔ خطهای راست ثابت است.

۱۱۸ ـ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، D وسط CB، H نقطهٔ برخورد ارتفاعها و L وسط AN باشد، آن وقت، $|OD|=|AL|$ و چون AL با OD موازی است، OL، AD را نصف می‌کند، یعنی، L قرینهٔ O نسبت به‌وسط AD است.

۱۱۹ ـ فرض کنید BD معرف ارتفاع مثلث باشد و $|BD|=R\sqrt{۲}$، که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی است، K و M پای عمودهای فرود آمده از D، به‌ترتیب، بر AB و BC هستند و O مرکز دایرهٔ محیطی است. اگر زاویهٔ C حاده باشد، آن وقت $\angle KBO=۹۰^\circ-\angle C$. چون $BMDK$

چهارضلعیی محاطی است، $\angle MKD = \angle DBM = ۹۰^\circ - \angle C$. بنابراین

$$\angle MKB = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - (۹۰^\circ - \angle C) = \angle C$$

در نتیجه، BO بر KM عمود است. اما

$$S_{BKM} = \frac{۱}{۲}\,|BD|^۲ \sin A \sin B \sin C = R^۲ \sin A \sin B \sin C = \frac{۱}{۲} S_{ABC}$$

(از دستور $S = ۲R^۲ \sin i \sin B \sin C$ استفاده کرده‌ایم.) از طرف دیگر، اگر $h_۱$ طول ارتفاع مثلث BKM، مرسوم از رأس B، باشد، آن وقت

$$\frac{۱}{۲} S = \frac{۱}{۴}\,|AC|.|BD| = S_{BKM} = \frac{۱}{۲}\,|KM|\,h_۱ = \frac{۱}{۲}\,|BD| h_۱ \sin B$$

بنابراین، $R = \frac{|AC|}{۲\sin B} = h_۱$؛ با در نظر داشتن اینکه $BO \perp KM$، نتیجه می‌گیریم نقطهٔ O روی KM قرار دارد.

۱۲۰ ـ توجه کنید که مثلثهای ADK و ABK متشابه‌اند، زیرا $|AB|.|AD| = |AC|^۲ = |AK|^۲$. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABK باشد، آن وقت $\angle OAD + \angle ADK = ۹۰^\circ - \angle AKB + \angle ADK = ۹۰^\circ$ ($\angle AKB$ حاده فرض شده است؛ اگر $\angle AKB$ منفرجه باشد، استدلال مشابه است).

۱۲۱ ـ ثابت کنید که خط راست موازی با BC که از E می‌گذرد، نیمساز زاویهٔ A را به‌همان نسبت تقسیم می‌کند که نیمساز زاویهٔ C آن را قسمت می‌کند.

۱۲۲ ـ اگر O رأس زاویهٔ و A نقطه‌ای بر نیمساز آن باشد، و $B_۱$ و $B_۲$ نقطه‌های برخورد دایرهٔ اول با ضلعهای زاویه و $C_۱$ و $C_۲$ نقطه‌های برخورد دایرهٔ دیگر با آنها باشند ($B_۱$ و $C_۱$ بر یک ضلع واقع‌اند)، آن وقت $\triangle AB_۱C_۱ = \triangle AB_۲C_۲$.

۱۲۳ ـ از این نتیجه استفاده کنید که وتر مشترک دو دایره که از A، $A_۱$ و B، $B_۱$ می‌گذرند، از نقطهٔ D می‌گذرد (مسألهٔ ۱۸ بخش ۲).

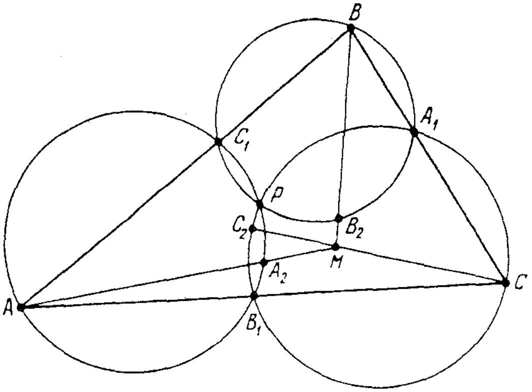
۱۲۵ ـ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB باشد، آن وقت $\angle MAB = ۹۰^\circ - \angle OMB = \angle BMC - ۱۸۰^\circ$. زاویهٔ MAC به‌همین اندازه است.

۱۲۶ ـ به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که دایره‌های مورد بحث، در یک نقطه متقاطع‌اند. این نقطه را با P نشان می‌دهیم. اگر نقطه‌ها مطابق شکل ۲۷ قرار گرفته باشند، آن وقت

$$\angle PB_۲M = ۱۸۰^\circ - \angle BB_۲P = \angle PC_۱B = ۱۸۰^\circ - \angle PC_۱A = \angle PB_۱A$$

$$= \angle PA_۲A = ۱۸۰^\circ - \angle PA_۲M$$

یعنی، نقطه‌های P، $B_۲$، M و $A_۲$ بر یک دایره واقع‌اند. به‌طریق مشابه، ثابت می‌کنیم نقطه‌های P، $B_۲$، M و $C_۲$ بر یک دایره واقع‌اند. در نتیجه، پنج نقطهٔ P، M، $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ بر یک دایره واقع‌اند.



(شکل ۲۷)

۱۲۷ ـ ثابت کنید که ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ با ضلعهای متناظر از مثلث ABC موازی‌اند.

۱۲۸ ـ ثابت کنید که در نتیجهٔ تغییر مکان خط راست KL، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLB_1 یک خط راست را می‌پیماید.

۱۲۹ ـ ثابت کنید که هر دو پاره خط را نقطهٔ برخوردشان نصف می‌کند.

۱۳۰ ـ اگر KN عمودی از K بر AB باشد و $\angle CAB = \alpha$، آن وقت

$$\frac{|KN|}{|OM|} = \frac{|AK|}{|AO|} = \frac{|AO| - |KO|}{|AO|} = \frac{|AO| - ۲|OM| \sin\frac{\alpha}{۲}}{|AO|}$$

$$= \frac{|AO| - ۲|AO| \sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{|AO|}$$

$$= \cos\alpha = \frac{|CD|}{|CB|}$$

چون مثلثهای ACB و ACD متشابه‌اند، نتیجه می‌شود که طول KN با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ACD برابر است، و چون K روی نیمساز زاویهٔ A واقع است، K مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ACD است. اثبات برای L، به روش مشابه انجام می‌شود.

۱۳۱ ـ وسطهای AB و BC را با C_1 و A_1 و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث با AC و BC را با B' و A' نشان دهید. برای روشنی وضع، فرض کنید $c \geq b$ (c و b طول ضلعهای مثلث‌اند)، در این صورت، نیمساز زاویهٔ A، امتداد C_1A_1 را در نقطه‌ای مانند K طوری قطع می‌کند که

$$|A_1K| = \frac{c-b}{۲}$$

خط راست $B'A'$ باید از همین نقطهٔ K بگذرد، زیرا مثلثهای KA_1A' و $A'B'C'$

متساوی‌الساقین‌اند، $|B'C| = |A'C|$ ، $|A_1A'| = |A_1K|$ و

$\angle A'A_1K = \angle A'CB'$

۱۳۲ - زاویهٔ با رأس A را در نظر بگیرید. سه نقطهٔ B_1، B_2 و B_3 بر یک ضلع زاویه و سه نقطهٔ C_1، C_2 و C_3 روی ضلع دیگر آن اختیار می‌شوند. از قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲، تبصره) نتیجه می‌شود برای اینکه خطهای راست B_1C_1، B_2C_2 و B_3C_3 در یک نقطه به‌هم برسند، لازم و کافی است که برابری زیر برقرار باشد

$$\frac{AB_2}{B_2B_1}\cdot\frac{C_1C_2}{C_2A}=\frac{AB_3}{B_3B_1}\cdot\frac{C_1C_3}{C_3A} \qquad (1)$$

(نسبتها حاکی از مفهوم اشاره شده در تبصره‌اند). در حقیقت، اگر برابری (۱) برقرارباشد، آن‌وقت از قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که خطهای راست B_2C_2 و B_3C_3، ضلع B_1C_1 ی مثلث AB_1C_1 را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۱۳۳ - از A، خط راستی به‌موازات BC رسم کنید و نقطه‌های برخورد آن با A_1C_1 و A_1B_1 را، به‌ترتیب، با K و L نشان دهید. داریم: $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|KA|}{|BA_1|}$ و $\frac{|A_1C|}{|AL|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$. بنابر قضیهٔ سوا (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲)، $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1$، بنابراین، $|KA| = |AL|$. اما، اگر AA_1 نیمساز زاویهٔ KA_1L باشد، آن وقت، چون $|KA| = |AL|$ ، AA_1 بر KL عمود است، یعنی، AA_1 ارتفاع مثلث ABC است.

۱۳۴ - فرض کنید K نقطهٔ برخورد AA_1 و BB_1، و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. نقطه‌های A، K، H و B بر یک دایره واقع‌اند (زاویه‌های AKB و AHB یا با یکدیگر برابرند و یا مجموعشان برابر 180° است، برحسب آنکه نقطه‌های K و H در یک طرف یا دو طرف خط راست AB واقع باشند). شعاع این دایره برابر است با R، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC. اگر φ زاویهٔ بین AA_1 و AH باشد، آن وقت، $|KH| = 2R\sin\varphi$.

۱۳۵ - فرض کنید H مغرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ باشد. نقطه‌های A_1، H، B_1 و C بر یک دایره و نقطه‌های B_1، H، C_1 و A هم بر یک دایره واقع‌اند. شعاعهای این دایره‌ها با هم برابرند؛ زاویه‌های HB_1C و HB_1A یا با هم برابرند یا مکمل‌اند. در نتیجه $|HA| = |HC|$. عکس مسأله درست نیست. به‌ازای هر نقطهٔ A_1 روی خط راست BC، به‌طور کلی، دو مثلث موجود است: $A_1B_1C_1$ و $A_1'B_1'C_1'$ (B_1 و B_1' بر AC، و C_1 و C_1' بر AB قرار می‌گیرند)، که در آنها نقطهٔ برخورد ارتفاعها بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منطبق است و یکی از آنها با مثلث ABC متشابه است و دیگری نیست. مثلاً، اگر ABC مثلثی

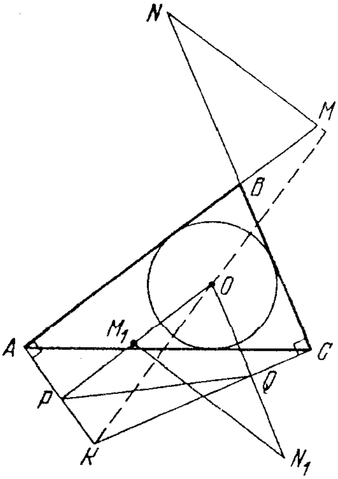
متساوی‌الاضلاع و A_1 وسط BC باشد، آن وقت، می‌توانیم وسطهای AC و AB را به‌جای B_1 و C_1، و نقطه‌هایی را روی امتدادهای AC و AB، از طرف B و C، به‌جای B'_1 و C'_1 اختیار کنیم، $|CB| = |CB'_1|$ و $|BC| = |BC'_1|$. عکس مسأله درست است، به‌شرط اینکه نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 روی ضلعهای مثلث ABC، و نه برامتدادهای آنها، قرار گیرند.

۱۳۶ ـ ثابت می‌کنیم که مرکز دایرهٔ مطلوب بر مرکز ارتفاعی مثلث (محل برخورد ارتفاعها) منطبق است. فرض کنید BD معرف ارتفاع و H نقطهٔ برخورد ارتفاعها باشد و K و L وسط پاره‌خطهای مرسوم از رأس B باشند، $|BK| = |BL| = l$ و M وسط BD باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}|KH|^2 = |LH|^2 = |MH|^2 + |KM|^2 &= l^2 - |BM|^2 + |MH|^2\\ &= l^2 - \frac{|BD|^2}{4} + \left(|BH| - \frac{|BD|}{2}\right)^2\\ &= l^2 + |BH|^2 - |BH|.|BD|\\ &= l^2 - |BH|.|HD|\end{aligned}$$

می‌ماند اینکه ثابت کنیم حاصلضربهای قطعه‌هایی که نقطهٔ برخورد ارتفاعها، ارتفاعها را به‌آنها تقسیم می‌کند، برابرند. ارتفاع AE را رسم می‌کنیم. چون مثلثهای BHE و AHD متشابه‌اند، داریم: $|BH|.|HD| = |AH|.|HE|$، که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۳۷ ـ قرار می‌گذاریم (شکل ۲۸): $a = |BC|$، $b = |CA|$ و $c = |AB|$. از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، خطهای راستی به‌موازات AB و BC رسم می‌کنیم تا AK و KC را در نقطه‌های



(شکل ۲۸)

P و Q قطع کنند. در مثلث OPQ داریم: $\angle POQ = \angle ANC$، $|OQ| = p-c$ و $|OP| = p-a$، که‌درآن، p نصف‌محیط مثلث ABC است. اما،بنابرفرض $\angle NBM = \angle ABC$، $|NB| = p-a$ و $|MB| = p-c$. در نتیجه، $\triangle POQ = \triangle NBM$. اگر روی خط راست OP، نقطه‌ای مانند M_1 به‌طوری که $|OM_1| = |OQ|$، و روی OQ، نقطه‌ای مانند N_1 به‌طوری که $|ON_1| = |OP|$، اختیار کنیم، آن وقت $\triangle ON_1M_1 = \triangle NBM$ و ضلعهای متناظرشان موازی می‌شوند، یعنی، $OM_1 \parallel BM$ و $ON_1 \parallel BN$. بنابراین، $NM \parallel N_1M_1$. ثابت می‌کنیم OK بر N_1M_1 عمود است. چون در چهارضلعی $OPKQ$، دو زاویه روبه‌رو قائمه‌اند، چهارضلعی اخیر محاطی است، در نتیجه، $\angle OKP = \angle OQP$. به‌علاوه

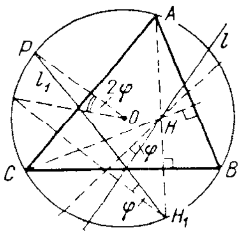
$$\angle KOP + \angle OM_1N_1 = \angle KOP + \angle OQP = \angle KOP + \angle OKP = ۹۰^\circ$$

و این بدان معنی است که $OK \perp M_1N_1$.

۱۳۸ ـ برای روشنی وضع، فرض کنید P روی کمان AC واقع باشد. نقطه‌های A، M، P و N روی یک دایره واقع‌اند، بنابراین، $\angle NMP = \angle NAP$. به‌همین ترتیب، نقطه‌های P، M، Q و C روی یک دایره قرار دارند و

$$\angle PMQ = ۱۸۰^\circ - \angle PCQ = ۱۸۰^\circ - \angle PAN = ۱۸۰^\circ - \angle PMN$$

۱۳۹ ـ فرض کنید ABC مثلث مفروض (شکل ۲۹) و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن باشد، توجه کنید که نقطه‌های قرینهٔ H نسبت به‌ضلعهای مثلث، روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند (مسألهٔ ۱۰۷ بخش ۲ را ببینید). اگر H_1 نقطهٔ قرینهٔ H نسبت به‌ضلع BC باشد، آن وقت خط‌راست l_1، قرینهٔ l نسبت‌به‌همین‌ضلع، از H_1 می‌گذرد. بادوران‌کردن l دور H به‌اندازهٔ‌زاویهٔ φ، خط l_1 دور H_1 به‌اندازهٔ همان زاویهٔ φ، در جهت مخالف، دوران می‌کند. در نتیجه، اگر P دومین نقطهٔ برخورد خط l_1 با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، آن وقت شعاع OP (O مرکز دایرهٔ محیطی است)، دور O، به‌اندازهٔ زاویهٔ ۲φ، در جهت مناسب، دوران می‌کند. همین استدلال برای دو خط راست دیگر قرینه نسبت به l، درست است. اما، اگر l بر یک ارتفاع مثلث منطبق باشد، آن وقت



(شکل ۲۹)

حکم مسأله روشن است (نقطهٔ P بر رأس متناظر از مثلث منطبق می‌شود). در نتیجه، حکم مسأله همیشه درست است.

۱۴۰ ـ فرض کنید نقطه‌های A، B، C و M در دستگاه مختصات قائم، به‌ترتیب، به‌مختصات زیر باشند: (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) و (x, y)، و فرض کنید مختصات نقطهٔ G، $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ باشد. در این صورت درستی حکم از اتحاد

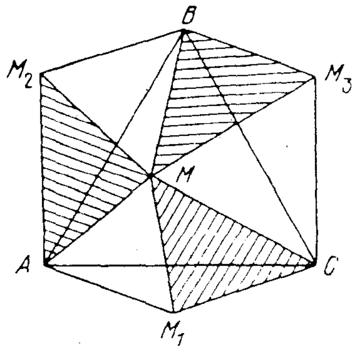
$$3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 = (x-x_1)^2+(x-x_2)^2+(x-x_3)^2-\frac{1}{3}\left((x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\right)$$

و رابطهٔ مشابه برای عرضها، نتیجه می‌شود.

۱۴۱ ـ حالتی را در نظر بگیرید که نقطهٔ M (شکل ۳۰) در درون مثلث ABC قرار می‌گیرد. مثلث ABM را دور A به‌اندازهٔ زاویهٔ 60° دوران دهید تا B به C بیاید. به‌مثلث AM_1C می‌رسیم که با مثلث ABM قابل انطباق است؛ مثلث AMM_1 متساوی‌الاضلاع است، در نتیجه، ضلعهای مثلث CMM_1 برابرند با پاره‌خطهای MA، MB و MC، نقطه‌های M_2 و M_3 به‌طریق مشابه به‌دست می‌آیند. مساحت شش‌ضلعی $AM_1CM_3BM_2$ دو برابر مساحت مثلث ABC است، یعنی، برابر است با $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. از طرف دیگر، مساحت این شش ضلعی برابر است با مجموع مساحتهای سه مثلث متساوی‌الاضلاع AMM_1، CMM_3 و BMM_2 و سه مثلث، قابل انطباق با مثلث مورد نظر ما. در نتیجه

$$3S+(|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2)\frac{\sqrt{3}}{4}=a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴۰ بخش ۲، به‌دست می‌آوریم $3S+(3d^2+a^2)\frac{\sqrt{3}}{4}=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$، که از آنجا $S=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2-3d^2)$. حالتهای دیگر جای نقطهٔ M به‌روش مشابه قابل بررسی‌اند.



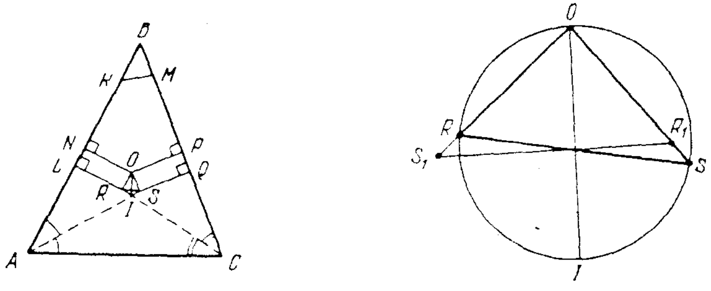
(شکل ۳۰)

۱۴۲ ـ از نتیجهٔ مسأله‌های ۱۴۱ و ۶ بخش ۲ استفاده کنید. به‌طوری کلی، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از یک خط راست و یک دایره.

۱۴۳ ـ فرض کنید (شکل ۳۱ الف) O مرکز دایرهٔ محیطی و I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد. از O و I، عمودهای ON، OP، IL و IQ را بر AB و BC فرود می‌آوریم. اگر a، b و c معرف طولهای نظیر ضلعهای BC، CA و AB باشند و p نصف محیط مثلث ABC باشد، آن وقت $|BK|=|c-b|$، $|BM|=|a-b|$، $|BN|=\frac{c}{۲}$، $|BP|=\frac{a}{۲}$، $|BL|=|BQ|=p-b$، $|NL|=\frac{۱}{۲}|a-b|$ و $|PQ|=\frac{۱}{۲}|c-b|$ (مسألهٔ ۱۸ بخش ۱ را ببینید). در نتیجه، اگر از O خطهای راستی به‌موازات ضلعهای AB و BC رسم کنیم تا عمودهای وارد از I را قطع کنند، آن وقت به‌مثلث ORS، متشابه با مثلث BKM با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$، می‌رسیم. اما، دایره مرسوم به‌قطر OI، بر مثلث ORS محیط است. در نتیجه، شعاع دایرهٔ محیطی $\triangle BKM$ برابر با OI است. برای اثبات قسمت دوم مسأله، یادآوری می‌کنیم که اگر پاره‌خطی مانند $OR_۱$، برابر با OR، روی خط راست OS و پاره‌خطی مانند $OS_۱$، برابر با OS، روی خط OR جدا شود، آن وقت خط $R_۱S_۱$ با KM موازی می‌شود (شکل ۳۱ ب)؛ اما

$$\angle OR_۱S_۱+\angle IOR_۱=\angle ORS+\angle IOS=۹۰^\circ$$

یعنی، $S_۱R_۱ \perp OI$.



(الف) (ب)

(شکل ۳۱)

۱۴۴ ـ با استفاده نمادگذاری حل مسألهٔ قبل، از A، خط راستی عمود بر OI رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با خط راست BC را به D نشان می‌دهیم. ثابت کنید که تفاضل شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و ACD، برابر با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث BKM است.

۱۴۵ ـ فرض کنید طول ضلعهای مثلث برابر a، b و c باشد و $b=\frac{a+c}{۲}$.

*(الف) از برابری $pr = \frac{۱}{۲} bh_b$ (p نصف محیط r شعاع دایرهٔ محاطی و h_b طول ارتفاع مرسوم بر ضلع با طول b است)، به‌دست می‌آوریم $\frac{۱}{۲}(a+b+c) = \frac{۱}{۲} bh_b$؛ اما $a+c = ۲b$، بنابراین، $h_b = ۳r$.

(ب) حکم از این حقیقت که $r = \frac{۱}{۳} h_b$ و نقطهٔ میانه‌ای، هر میانه را به‌نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند، نتیجه می‌شود.

(ج) نیمساز BD را امتداد دهید تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر ثابت کنیم O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، BM را نصف می‌کند، آن وقت به‌موجب آن، حکم ما ثابت می‌شود. (قطر BN را رسم می‌کنیم، در این صورت، خطی که مرکز دایره‌های محیطی و محاطی را به‌هم وصل می‌کند، با NM موازی است و $\angle BMN = ۹۰^\circ$.) اما مثلث COM متساوی‌الساقین است، زیرا $\angle COM = \angle OCM = \frac{۱}{۲}(\angle C + \angle B)$. بنابراین، $|OM| = |CM|$. از شرط $b = \frac{a+c}{۲}$، بنابر ویژگی نیمساز به‌دست می‌آوریم: $|CD| = \frac{a}{۲}$. فرض کنید K وسط CB باشد؛ $\triangle CKO = \triangle CDO$ ($|CK| = |CD|$ و $\angle KCO = \angle OCD$)؛ به‌این‌ترتیب، نتیجه می‌شود: $\angle BKO = \angle CDM$؛ به‌علاوه، $\angle DCM = \angle OBK = \frac{\angle B}{۲}$ و $|CD| = |BK|$، یعنی، $\triangle BKO = \triangle CDM$ و $|CM| = |BO|$، بنابراین $|BO| = |OM|$، که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

(د) نقطه‌ای روی نیمساز اختیار می‌کنیم. فرض کنید فاصله‌هایش تا ضلعهای BC و BA برابر با x و تا ضلع AC برابر با y باشد. داریم

$$\frac{۱}{۲}(ax+cx+by) = S_\triangle \Rightarrow b(۲x+y) = ۲S_\triangle \Rightarrow ۲x+y = h_b$$

(هـ) اگر L وسط BA باشد، آن وقت چهارضلعی مطلوب، با چهارضلعی $BCMA$، به‌نسبت $\frac{۱}{۲}$، متجانس است. (قسمت (ج) را ببینید).

۱۴۶ ـ فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد این مماس مشترک با BC باشد. کافی است تحقیق کنیم $|FN|.|NG| = |KN|.|NM| = |DN|.|NE|$. همهٔ پاره‌خطها به‌سادگی محاسبه می‌شوند، چون $|BD| = |CE| = p-b$، $|DE| = |b-c|$، $\frac{|DN|}{|NE|} = \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ (r_a شعاع دایرهٔ مماس بر ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC است)، و غیره.

۱۴۷ ـ از رأسهای مثلث ABC، خطهای راستی به‌موازات ضلعهای روبه‌رو رسم می‌کنیم تا مثلث $A_۱B_۱C_۱$، متشابه با مثلث ABC، را به‌وجود آورند. این مثلث، از مثلث ABC با تبدیلی تجانسی به‌مرکز، مرکز ثقل مثلث، که در مثلثهای ABC و $A_۱B_۱C_۱$ مشترک است، و

نسبت تجانس برابر ۲ ـ، به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ است. در نتیجه، نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ محیطی)، G (مرکز ثقل) و H (نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC) بر یک خط راست واقع‌اند و $|OG| = \frac{1}{2}|GH|$ و G روی پاره‌خط OH قرار می‌گیرد.

۱۴۸ ـ در مثلث حاده، خط اویلر، ضلعهای بزرگتر و کوچکتر را قطع می‌کند. در مثلث منفرجه، خط اویلر، ضلعهای بزرگتر و میانی را قطع می‌کند.

۱۵۰ ـ نشان دهید، نقطه‌ای مانند P، روی خط اویلر، که به‌ازای آن $|OH| = |PO|$ (O مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهاست)، ویژگی مورد نظر را داراست؛ در این صورت، در هر مثلث، فاصلهٔ مرکز ثقل آن تا رأس مقابل مثلث اصلی، برابر با $\frac{4}{3}R$ است، که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، و خط راستی که از مرکز ثقل این مثلث و رأس مقابل از مثلث اصلی می‌گذرد، از نقطهٔ O می‌گذرد.

۱۵۱ ـ فرض کنید C_1 معرف مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APB و C_2 نقطهٔ قرینهٔ C_1 نسبت به AB باشد. به‌همین نحو، برای مثلثهای BPC و CPA، به‌ترتیب، نقطه‌های A_1 و A_2، و B_1 و B_2 را معین می‌کنیم. چون مثلثهای AC_1B، AC_2B، BA_1C، BA_2C، CB_1A و CB_2A متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 120° هستند، مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متساوی‌الاضلاع می‌شوند (مسألهٔ ۲۹۶ بخش ۲ را ببینید). با محاسبهٔ اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی با رأسهای P، A_2، B_2 و C_2، می‌توانیم ثابت‌کنیم که‌اینها روی یک دایره واقع‌اند. به‌علاوه، اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث APB باشد، آن وقت، چون $|PH| = |C_1C_2|$، و در نتیجه، PHC_2C_1 متوازی‌الاضلاع است، خط راست C_1H (خط اویلر مثلث APB) از وسط PC_2 می‌گذرد. اما PC_2 وتری از دایرهٔ به‌مرکز C_1 است، در نتیجه، C_1H بر PC_2 عمود است. بنابراین، سه خط اویلر، بر عمودمنصف پاره‌خطهای PC_2، PB_2، PA_2 منطبق‌اند و چون نقطه‌های P، A_2، B_2 و C_2 روی یک دایره واقع‌اند، این خطها در مرکز آن، که مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع $A_2B_2C_2$ است، متقاطع‌اند. از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۹۶ بخش ۲، به‌دست می‌آید که این سه خط اویلر، در نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC متقاطع‌اند.

۱۵۲ ـ فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد که طول ضلعهایش a، b و c ($a \geq b \geq c$) هستند، A_1، B_1 و C_1 نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی باشند، I مرکز دایرهٔ محاطی و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد. چون در مثلث $A_1B_1C_1$، I مرکز دایرهٔ محیطی است، کافی است ثابت کنیم که خط راست IO، از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ می‌گذرد. روی نیمخطهای AC و BC، پاره‌خطهای AK و BL ($|AK| = |BL| = c$) و روی نیمخطهای AB و CB، پاره‌خطهای AM و CN ($|AM| = |CN| = b$) را جدا کنید. همان‌طور که می‌دانیم (مسألهٔ ۱۴۳ بخش ۲ را ببینید)، خط IO بر LK و MN عمود است، بنابراین،

$MN \parallel LK$. فرض کنید $\angle KLC = \angle BNM = \varphi$. بنابر قانون سینوسها در مثلثهای KLC و BNM، داریم

$$\frac{|LC|}{|KC|} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\sin(\varphi+C)}{\sin\varphi} \qquad (۱)$$

$$\frac{|BN|}{|BM|} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{\sin(B-\varphi)}{\sin\varphi} \qquad (۲)$$

اکنون، در مثلث $A_1B_1C_1$، ارتفاع ضلع B_1C_1 را رسم می‌کنیم. فرض کنید Q نقطهٔ برخورد آن با خط راست IO باشد. باید ثابت کنیم، Q نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ است. اما فاصلهٔ I تا B_1C_1، برابر با $|IA_1|\cos A_1 = r\sin\frac{A}{2}$ است. بنابراین، برابری $|A_1Q| = 2r\sin\frac{A}{2}$ درست خواهد بود. اندازهٔ زاویه‌های مثلث QIA_1 را می‌توان برحسب اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC و φ نشان داد، مثلاً، $\angle QIA_1 = 180^\circ - \varphi$ و $\angle QA_1I = \frac{\angle B - \angle C}{2}$. باید ثابت کنیم

$$2\sin\frac{A}{2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\left(\varphi - \frac{B-C}{2}\right)} \Leftrightarrow \sin(\varphi+C) - \sin(B-\varphi) = \sin\varphi$$

برابری اخیر، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

۱۵۳ ـ ضمن اثبات، از این نتیجه استفاده می‌کنیم که اگر عمودهای PK و PL از نقطه‌ای مانند P، برخطهای راستی که در نقطهٔ M متقاطع‌اند، رسم شوند، آن وقت نقطه‌های P، K، L و M بر یک دایره واقع‌اند.

۱۵۴ ـ از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۴۶ بخش ۱ استفاده کنید.

۱۵۶ ـ فاصلهٔ میان تصویرهای M روی AC و BC، برابر $|CM|\sin C$ است. اگر K و L تصویرهای M روی AB و BC باشند، آن وقت تصویر AB روی خط راست KL (این همان خط سیمسون است)، برابر است با

$$|AB|.|\cos\angle BKL| = |AB|.|\cos\angle BML| = |AB|\sin\angle CBM = |CM|\sin C$$

۱۵۷ ـ ثابت کنید که ضلعهای مثلثهای $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ متناظراً موازی‌اند.

۱۵۸ ـ ثابت کنید که خط سیمسون نظیر A_1، بر B_1C_1 عمود است (همین‌طور برای نقطه‌های دیگر). به‌علاوه، می‌توان ثابت کرد که خط سیمسون نظیر A_1، از وسط A_1H می‌گذرد، که در آن H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است (همچنین، حل مسألهٔ ۱۶۶ بخش ۲ را ببینید). در نتیجه، خطهای سیمسون، ارتفاعهای مثلثی‌اند که رأسهایش وسط پاره‌خطهای A_1H، B_1H و C_1H هستند.

تبصره. می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای سیمسون نظیر نقطه‌های دلخواه A_1، B_1 و C_1 نسبت

به‌مثلث ABC، مثلثی متشابه با مثلث $A_1B_1C_1$ به‌وجود می‌آورند و مرکز دایرهٔ محیطی آن بر وسط پاره‌خطی که نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ را به‌هم وصل می‌کند، منطبق است.

۱۵۹ - پیش از هر چیز، درستی حکم زیر را تحقیق کنید: اگر عمودهای مرسوم بر ضلعهای مثلث (یا امتدادهای آنها) در نقطه‌های برخورد آنها با یک خط راست، در نقطه‌ای مانند M به‌هم برسند، آن وقت M روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد. (این حکم، عکس حکم مسألهٔ ۱۵۳ است.)

سهمی $y = ax^۲$ را در نظر بگیرید. مماسی دلخواه بر آن، به‌شکل $y = kx - \frac{k^۲}{۴a}$ است (مماس، تنها یک نقطهٔ برخورد با سهمی دارد، بنابراین، مبیّن معادلهٔ $ax^۲ = kx+b$ برابر صفر است). این مماس، محور xها را در نقطهٔ $x = \frac{k}{۴a}$ قطع می‌کند. عمود بر مماس در این نقطه، با خط راست $y = -\frac{۱}{k}\left(x - \frac{k}{۴a}\right) = \frac{-x}{k} + \frac{۱}{۴a}$ نشان داده می‌شود. در نتیجه، تمامی چنین عمودهایی از نقطهٔ $\left(۰, \frac{۱}{۴a}\right)$ (کانون سهمی) می‌گذرند. اکنون از ملاحضات ابتدای مسأله استفاده می‌کنیم.

۱۶۰ - فرض کنید ABC معرف مثلث مفروض و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن باشد، A_1، B_1 و C_1، به‌ترتیب، وسط پاره‌خطهای AH، BH و CH هستند؛ $AA_۲$ ارتفاع و $A_۳$ وسط BC است. برای راحتی‌کار، فرض می‌کنیم ABC مثلثی حاده باشد، ازآنجاکه $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ و $\triangle B_1A_۲C_1 = \triangle B_1HC_1$، داریم

$$\angle B_1A_۲C_1 = \angle B_1HC_1 = ۱۸۰^\circ - \angle B_1A_1C_1$$

یعنی، نقطه‌های A_1، B_1، $A_۲$ و C_1 بر یک دایره واقع‌اند. همچنین، به‌سادگی می‌توان دید که $\angle B_1A_۳C_1 = \angle B_1HC_1 = ۱۸۰^\circ - \angle B_1A_1C_1$، یعنی، نقطه‌های A_1، B_1، $A_۳$ و C_1 هم، روی یک دایره (یعنی، همان دایره) واقع‌اند. بنابراین نتیجه می‌شود که تمامی نقطه‌های مذکور در صورت مسأله، روی یک دایره واقع‌اند. حالت مثلثی منفرجه مانند ABC، به‌روش مشابه بررسی می‌شود. توجه کنید که دایرهٔ نه نقطه، با دایرهٔ محیطی مثلث، به مرکز تجانس H و نسبت $\frac{۱}{۲}$، متجانس است (مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$، درست به‌این نحو قرار گرفته‌اند.) از طرف دیگر، دایرهٔ نه نقطه، با دایرهٔ محیطی مثلث، به مرکز تجانس نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC و نسبت $\frac{-۱}{۲}$، متجانس است. (مثلث ABC و مثلث با رأسهای وسط ضلعهای آن، درست به‌این نحو قرار گرفته‌اند.)

۱۶۱ - حکم مسأله، از این حقیقت که D بر دایرهٔ نه نقطه واقع است و این دایره با دایرهٔ محیطی، به‌مرکز تجانس H و نسبت $\frac{۱}{۲}$، متجانس است (مسألهٔ ۱۶۰ بخش ۲ را ببینید)، نتیجه می‌شود.

۱۶۲ـ حکم مسأله، ازاین‌حقیقت‌که E روی دایرهٔ نه‌نقطه واقع است و این‌دایره با دایرهٔ محیطی، به‌مرکز تجانس M ونسبت $\frac{-۱}{۲}$، متجانس است (مسألهٔ ۱۶۰ بخش ۲ را ببینید)، نتیجه می‌شود.

۱۶۳ـ این فاصله، برابر با نصف مجموع فاصله‌های H، نقطهٔ برخورد ارتفاعها، و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، تا BC است، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا BC، برابر با نصف $|HA|$ است.

۱۶۴ـ فرض کنید $M_۰$ وسط HP و $A_۰$ وسط HA باشد و نقطه‌های $A_۰$، $A_۱$ و $M_۰$ روی دایرهٔ نه‌نقطه قرار داشته باشند. در نتیجه، M نیز بر روی این دایره واقع است، زیرا از فرض، برابری $|HA_۱|.|A_۰H| = |HM|.|M_۰H|$، نتیجه می‌شود، و H، به‌طور همزمان، یا در درون و یا بیرون هر یک از پاره‌خطهای $M_۰M$ و $A_۰A_۱$ قرار دارد.

۱۶۵ـ ثابت می‌کنیم که M و N روی میانخطهای مثلث ABC، متناظر با آنها، واقع‌اند. اگر P وسط AB باشد، آن وقت $\angle MPA = ۲\angle ABM = \angle ABC = \angle APL$. برای روشنی وضع، فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد و $\angle A \geq \angle C$، در این صورت، $\angle MNK = ۱۸۰^\circ - \angle KNB = \angle KCB = \angle MLK$ (از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که نقطه‌های K، N، B و C بر روی یک دایره واقع‌اند و ML با BC موازی است). بنابراین، نقطه‌های M، L، N و K برروی یک دایره واقع‌اند. به‌علاوه

$$\angle LMK = \angle PMB + \angle NMK = \frac{۱}{۲}\angle B + \angle BMK = \frac{۱}{۲}\angle B + \angle A$$

اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث LMK باشد، آن وقت

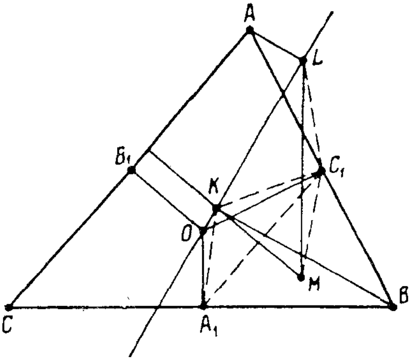
$$\angle LOK = ۲\angle LMK = \angle B + ۲\angle A = ۱۸۰^\circ - \angle C + \angle A = ۱۸۰^\circ - \angle LPK$$

$(\angle LPK = \angle APK - \angle APL = ۱۸۰^\circ - ۲\angle A - \angle B = \angle C - \angle A)$ یعنی، O بر دایره‌ای واقع است که از نقطه‌های L، P و K می‌گذرد، و این درست همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است.

۱۶۶ـ چون وسط FN بر دایرهٔ نه نقطه قرار دارد (مسألهٔ ۱۶۰ بخش ۲ را ببینید)، کافی است نشان دهیم که خط سیمسون نظیر نقطهٔ F هم، FH را نصف می‌کند. فرض کنید K تصویر F بر یک ضلع مثلث، D پای ارتفاع وارد بر همین ضلع و $H_۱$ نقطهٔ برخورد این ارتفاع و دایرهٔ محیطی مثلث باشد، $|H_۱D| = |HD|$ (حل مسألهٔ ۱۰۷ در بخش ۲ را ببینید)، L نقطهٔ برخورد خط سیمسون با همین ارتفاع باشد، و بالاخره، M نقطه‌ای روی خط راست $HH_۱$ باشد که برای آن $KD \parallel FM$؛ دراین‌صورت، $\triangle FMH_۱ = \triangle KDL = \triangle KDL$ ($|FM| = |KD|$)، هردوآنها قائم‌الزاویه‌اند و $\angle DLK = \angle MH_۱F$، زیرا ارتفاع مثلث، خط سیمسون نظیر رأسی است که از آن خارج می‌شود و می‌توانیم از حکم مسألهٔ ۱۵۴ بخش ۲ استفاده کنیم. همچنین، به‌سادگی می‌توان نشان داد که جهتهای $\overrightarrow{H_۱M}$ و $\overrightarrow{DL}$ یکی‌اند، یعنی، $FKHL$ متوازی‌الاضلاع است، که از آنجا حکم ما نتیجه می‌شود.

۱۶۷ـ در شکل ۳۲، O مرکز دایرهٔ محیطی است، $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ وسط ضلعها و L و K،

به‌ترتیب، تصویر A و B روی l هستند، M نقطهٔ برخورد خطهای راستی است که از نقطه‌های L و K عمود بر BC و CA می‌گذرند. برای روشنی وضع، فرض کنید مثلث ABC با زاویه‌های حاده باشد. نخست، ثابت می‌کنیم که C_1، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLM است. نقطه‌های A_1، O، K، C_1 و B بر یک دایره واقع‌اند. در نتیجه، $\angle C_1KL = \angle OA_1C_1 = 90^\circ - \angle C$؛ به‌روش مشابه، $\angle C_1LK = 90^\circ - \angle C$. بنابراین، $|KC_1| = |C_1L|$ و $\angle LC_1K = 2\angle C$، و چون $\angle KML = \angle C$، حکم ما اثبات شده است. به‌علاوه، KM بر A_1C_1 عمود است و $|KC_1| = |C_1M|$، بنابراین $\angle C_1MA_1 = \angle C_1KA_1 = 180^\circ - \angle B$، یعنی، M بر دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ واقع است.



(شکل ۳۲)

۱۶۸ ـ فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد و A_2، B_2 و C_2، به‌ترتیب، وسط پاره‌خطهای AH، BH و CH باشند. توجه کنید که مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C متشابه‌اند (رأسهای متناظر، با یک حرف نشان داده شده‌اند) و A_2، B_2 و C_2 مرکز دایرهٔ محیطی متناظر با آنها را نشان می‌دهند. نخست، ادعای زیر را ثابت می‌کنیم: سه خط راست که از نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 می‌گذرند ونسبت به‌مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C وضعیت یکسانی را اشغال می‌کنند، در نقطه‌ای روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث متقاطع‌اند. توجه کنید که خطهای راست A_2B_1، B_2B و C_2B_1، نسبت به‌مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C به‌طور یکسان قرار دارند و در نقطهٔ B_1، واقع بر دایرهٔ نه نقطه، متقاطع‌اند. چون نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر دایرهٔ نه نقطه واقع‌اند، روشن است که سه خط راست حاصل از دوران خطهای راست A_2B_1، B_2B و C_2B_1، به‌ترتیب، دور نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 و با یک زاویه نیز، در یک نقطه، واقع بر دایرهٔ نه نقطه، متقاطع‌اند. اکنون فرض کنید P نقطهٔ برخورد خطهای اویلر مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C باشد. فرض کنید: $\angle PA_2A = \varphi$. برای

راحتی‌کار، فرض می‌کنیم ABC مثلثی حاده باشد و نقطهٔ P روی کمان $B_۱A_۲$ی دایرهٔ نه نقطه قرار گیرد (شکل ۳۳ را ببینید). در این صورت، $\angle PA_۲A_۱ = ۱۸۰^\circ - \varphi$،

$$\angle PA_۲B_۱ = ۱۸۰^\circ - \varphi - \angle B_۱A_۲A_۱ = ۱۸۰^\circ - \varphi - \angle B_۱C_۱A_۱ = ۲\angle C - \varphi$$

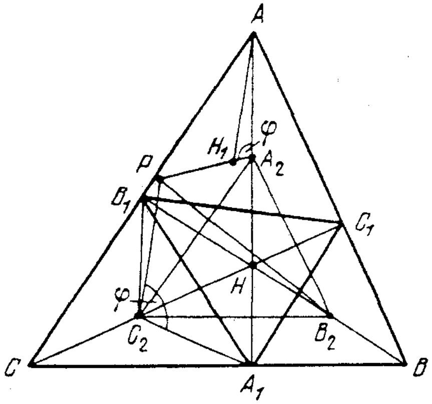
و

$$\angle PA_۲C_۱ = ۱۸۰^\circ - \varphi + ۱۸۰^\circ - ۲\angle B = ۳۶۰^\circ - \varphi - ۲\angle B$$

چون وترهای $PA_۱$، $PB_۱$ و $PC_۱$ با سینوس زاویه‌های مقابل به‌آنها متناسب‌اند، می‌ماند اینکه ثابت کنیم یکی از سه مقدار: $\sin\varphi$، $\sin(۲C-\varphi)$ و $-\sin(۲B+\varphi)$ (در حالت ما، اولی) برابر است با مجموع دوتای دیگر، یعنی

$$\sin\varphi = \sin(۲C-\varphi) - \sin(۲B+\varphi)$$

اما درمثلث $AA_۲H_۱$: $|AA_۲| = R$، $|AH_۱| = ۲R\cos A$ (R شعاع دایرهٔ‌محیطی و $R\cos A$ فاصلهٔ $A_۲$، مرکز دایرهٔ محیطی، تا $B_۱C_۱$ است) و $\angle H_۱AA_۲ = \angle A + ۲\angle B - ۱۸۰^\circ$.



(شکل ۳۳)

بنابر قانون سینوسها در $\triangle AA_۲H_۱$، داریم

$$\frac{۲\cos A}{\sin\varphi} = \frac{۱}{\sin(۲B+A+\varphi)}$$

$$\Rightarrow -\sin(۲B+۲A+\varphi) - \sin(۲B+\varphi) = \sin\varphi \Rightarrow \sin(۲C-\varphi) - \sin(۲B+\varphi) = \sin\varphi$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم. بنابراین، حکم را برای مثلث حاده ثابت کرده‌ایم. حالت مثلثی منفرجه مانند ABC، درست به‌همین نحو بررسی می‌شود.

۱۶۹ ـ فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد و $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ وسط ضلعهای متناظر آن باشند.

ثابت کنید، دایره‌ای که ، مثلاً از رأس A می‌گذرد و در شرطهای مسأله صادق است، از نقطه‌های برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی A و میانخط B_1C_1 هم می‌گذرد. بنابراین، برای کلیهٔ نقطه‌هایی مانند M از این دایره، برابری $|B_1M|:|C_1M| = |B_1A|:|C_1A| = b:a$ برقرار است (مسألهٔ ۹ بخش ۲ را ببینید). بنابراین، اگر M_1 و M_2 نقطه‌های برخورد چنین دایره‌هایی باشند، آن وقت $|A_1M_1|:|B_1M_1|:|C_1M_1| = a:b:c$ (همین‌طور برای نقطهٔ M_2)، بدین ترتیب، M_1 و M_2 به‌دایرهٔ سومی متعلق‌اند. به‌علاوه، M_1 و M_2 متعلق به‌خط راستی هستند که برای کلیهٔ نقطه‌هایی مانند M از آن، برابری $(c^2-b^2)|A_1M|^2+(a^2-c^2)|B_1M|^2+(b^2-a^2)|C_1M|^2 = 0$ صادق است (مسألهٔ ۱۴ بخش ۲ و حل آن را ببینید). این خط از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ و نقطهٔ برخورد میانه‌های آن می‌گذرد (این را با نشان دادن طول میانه‌ها برحسب طول ضلعهای مثلث، تحقیق کنید)، یعنی، این خط بر خط اویلر مثلث $A_1B_1C_1$، و بنابراین، بر خط اویلر مثلث ABC منطبق است.

۱۷۰ ـ الف) همان طور که در مسألهٔ قبل انجام دادیم، می‌توانیم ثابت کنیم سه دایره، در دو نقطهٔ M_1 و M_2 متقاطع‌اند و $|AM_1|:|BM_1|:|CM_1| = bc:ac:ab$ (همین طور برای نقطهٔ M_2).
(ب) از قسمت (الف) و مسألهٔ ۱۴ بخش ۲ نتیجه می‌شود.
(ج) ثابت کنید که اگر M_1 در درون مثلث ABC باشد، آن وقت $\angle AM_1C = 60^\circ + \angle B$، $\angle BM_1A = 60^\circ + \angle C$ و $\angle CM_1B = 60 + \angle A$ (برای این منظور، از قضیهٔ برتشنیدر، مسألهٔ ۲۳۶ بخش ۲، استفاده کنید).

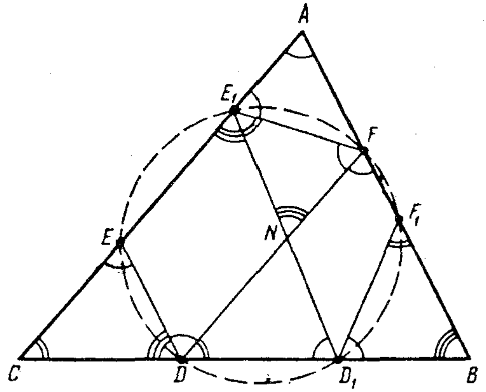
۱۷۱ ـ روی BC، نقطه‌ای مانند A_1 و روی BA، نقطه‌ای مانند C_1 انتخاب کنید، به‌طوری که $|BA_1| = |BA|$ و $|BC_1| = |BC|$ (مثلث A_1BC_1 با مثلث ABC، نسبت به‌نیمساز زاویهٔ B، قرینه است). به‌روشنی، BK، A_1C_1 را نصف می‌کند. دو متوازی‌الاضلاع BA_1MC_1 و $BCND$ را رسم می‌کنیم (ضلعهای متناظر متوازی‌الاضلاعها موازی‌اند و نقطه‌های B، K، M و N همخط‌اند)؛ $|CN| = |AA_1|\dfrac{|BC|}{|BA_1|} = \dfrac{|BC|^2}{|BA|}$، درنتیجه

$$\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|CN|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$$

۱۷۲ ـ داریم (شکل ۳۴): $\angle FE_1A = \angle EDF = \angle A$، بنابراین، $|AF| = |E_1F|$، $\angle FE_1N = \angle FDB = \angle C$ و $\angle E_1FN = \angle A$. در نتیجه، $\triangle E_1FN$ با $\triangle ABC$ متشابه است، $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|E_1F|}{|FN|} = \dfrac{|AF|}{|FN|}$ و $\angle AFN = 180^\circ - \angle A$. اکنون، می‌توانیم نشان دهیم که AN، هم‌میانه است. برای اثبات حکم اخیر، متوازی‌الاضلاع ACA_1B را در نظر

بگیرید؛ AA_1، BC را نصف می‌کند و مثلث ACA_1 با مثلث AFN متشابه است، بنابراین

$\angle NAF = \angle A_1AC$



(شکل ۳۴)

۱۷۳ ـ دایرهٔ آپولونیوس که از رأس Bی مثلث ABC می‌گذرد، مکان هندسی نقطه‌های M است که برای آنها $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$ (حل مسألهٔ ۱۷۰ بخش ۲). در نتیجه، اگر D نقطهٔ برخورد این دایرهٔ آپولونیوس و دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن وقت خط راست BD، AC را به‌نسبت $\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}} = \frac{|AB|\,.\,|AD|}{|CB|\,.\,|CD|} = \frac{|AB|^۲}{|CB|^۲}$ تقسیم می‌کند.

۱۷۴ ـ فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد BQ و CD، O مرکز دایرهٔ و R شعاع آن باشد. توجه کنید که $\angle NBC = \frac{۱}{۲}\angle PMQ$.

(اگر Q بر پاره‌خط NB قرار گیرد، آنوقت $\angle NBC = ۹۰^\circ - \angle QBP = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle QOP = \frac{۱}{۲}\angle PMQ$.)

بنابراین، مثلثهای NBC و POM متشابه‌اند و

$$|CN| = |BC|\,\frac{R}{|PM|} = R\,\frac{|PO|}{|PM|} = R\,\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{۱}{۲}\,|BP| = \frac{۱}{۲}\,|CD|$$

۱۷۵ ـ فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعها، مرکز O دایرهٔ محیطی و B_1 وسط CA باشد. خط راست MN از K، وسط BH، می‌گذرد و $|BK| = |B_1O|$. ثابت کنید که خط MN با OB موازی است (اگر $\angle C > \angle A$، آن وقت $\angle MKN = ۲\angle MBN = \angle C - \angle A = \angle OBH$).

۱۷۶ ـ فرض کنید خط راست AM، دایره‌ای را که از B، C و M می‌گذرد، برای بار دوم، در نقطه‌ای مانند D قطع کند. در این صورت، $\angle MDB = \angle MBA = \angle MAC$ و $\angle MDC = \angle MBC = \angle MAB$. در نتیجه، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

۱۷۷ـ از حل مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۲، نتیجه می‌شود که $\frac{|LN|}{|NK|}=\frac{|LM|}{|MK|}$. می‌توانیم فرض کنیم l از N می‌گذرد. با به‌کار بردن قانون سینوسها در مثلث NKP، و جایگزین کردن نسبت سینوسها با نسبت وترهای متناظر آنها، داریم

$$|NP|=\frac{|NK|\sin\angle NKP}{\sin\angle KPN}=\frac{|NK|\sin\angle NKM}{\sin\angle KMA}=\frac{|NK|}{|KM|}|NM|$$

و غیره.

۱۷۸ـ فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ محاطی باشد، و K و L نقطه‌های تماس این دایره با ضلعهای AC و AB باشند. خط راستی که از N به موازات BC می‌گذرد، ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های R و M قطع می‌کند. چهارضلعی $OKMN$ چهارضلعیی محاطی است ($\angle ONM=\angle OKM=۹۰^\circ$)؛ در نتیجه، $\angle OMN=\angle OKN$، به‌همین ترتیب، $\angle ORN=\angle OLN$، اما $\angle OLN=\angle OKN$، بنابراین، $\angle ORN=\angle OMN$، مثلث ORM متساوی الساقین است و ON ارتفاع آن است؛ بنابراین $|RN|=|NM|$.

۱۷۹ـ اگر $|BC|=a$، $|CA|=b$ و $|AB|=c$، آن وقت، همان طور که می‌دانیم (مسألهٔ ۱۸ بخش ۱ را ببینید)، $|MC|=\frac{a+b-c}{۲}$. از K، خط راستی به‌موازات AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با AB و BC را، به‌ترتیب، با $A_۱$ و $C_۱$ نشان می‌دهیم. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، یک دایرهٔ محاطی خارجی برای مثلث $A_۱BC_۱$ است (این دایره، بر $A_۱C_۱$ و امتدادهای $BA_۱$ و $BC_۱$ مماس است). اما مثلث $A_۱BC_۱$ با مثلث ABC متشابه است. در نتیجه، دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC، بر AC در نقطهٔ N مماس خواهد بود؛ فرض کنید R و L معرف نقطه‌های تماس دایره، به‌ترتیب، با امتدادهای BA و BC باشند. داریم

$$|BR|=|BL|=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$$

بنابراین، $|AN|=|AR|=|RB|-|BA|=\frac{a+b-c}{۲}=|MC|$.

۱۸۰ـ از K، خط راستی به‌موازات BC رسم کنید. فرض کنید L و Q معرف نقطه‌های برخورد مماس در نقطهٔ P با خط BC و خط مرسوم به‌موازات آن، باشند و N نقطهٔ برخورد AK و BC باشد. از آنجا که $|BM|=|CN|$ (مسألهٔ ۱۷۹ بخش ۲ را ببینید)، کافی است ثابت کنیم $|LM|=|NL|$؛ اما $|LM|=|PL|$، پس باید ثابت کنیم $|NL|=|PL|$. چون مثلث PLN با مثلث PQK، که در آن $|QK|=|PQ|$، متشابه است، داریم: $|NL|=|PL|$ و $|LB|=|CL|$.

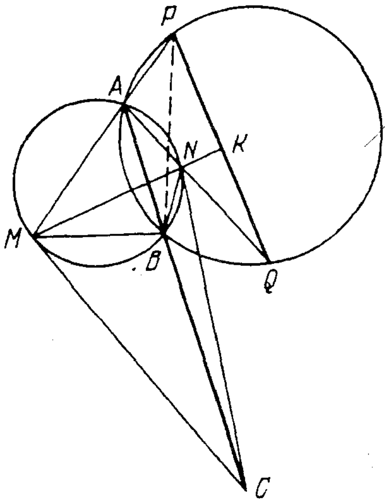
۱۸۱ـ فرض کنید M و N معرف نقطه‌های برخورد خط راست LK با خطهای راست l و CD باشند. در این صورت، $|AM|^۲=|ML|.|MK|$. از تشابه مثلثهای KMB و DKN نتیجه

می‌شود که $|MK| = \dfrac{|KN|.|MB|}{|DN|}$. چون مثلثهای CNL و MLB متشابه‌اند، داریم:
$|ML| = \dfrac{|LN|.|MB|}{|CN|}$. بنابراین

$$|MK|.|ML| = \frac{|KN|.|LN|}{|CN|.|DN|} \cdot |MB|^2 = |MB|^2$$

یعنی، $|MA|^2 = |MB|^2$ و $|MA| = |MB|$.

۱۸۲ـ فرض کنید B دومین نقطهٔ مشترک دایره‌ها، C نقطه‌ای روی خط راست AB که مماسها از آن رسم شده‌اند، و بالاخره، K نقطهٔ برخورد خطهای راست MN و PQ باشد (شکل ۳۵).



(شکل ۳۵)

با استفاده از قانون سینوسها و نتیجهٔ مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۱، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{|PM|}{|MA|} = \frac{|PM|}{\sin\angle PBM} \cdot \frac{\sin\angle PBM}{|MA|} = \frac{|BM|}{\sin\angle BPM} \cdot \frac{\sin\angle PBM}{|MA|}$$

$$= \sqrt{\frac{|CB|}{|CA|}} \cdot \frac{\sin\angle PBM}{\sin\angle BPM}$$

بنابراین، با نشان دادن زاویهٔ AMB با α و زاویهٔ APB با β (α و β ثابت‌اند)، به‌دست می‌آوریم:
$\dfrac{|PM|}{|MA|} = \sqrt{\dfrac{|CB|}{|CA|}} \cdot \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{|AN|}{|NQ|} = \sqrt{\frac{|CA|}{|CB|}} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

اما، بنابر قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲ را ببینید)، $\frac{|PM|}{|MA|} \cdot \frac{|AN|}{|NQ|} \cdot \frac{|QK|}{|KP|} = 1$.

بنابراین، $\frac{|QK|}{|KP|} = 1$.

۱۸۳ ـ از نقطهٔ M، خط راستی به‌موازات AC رسم می‌کنیم تا خطهای راست BA و BC را در نقطه‌های A_1 و C_1 قطع کند. داریم

$$\angle A_1KM = 90^\circ - \angle DKM = 90^\circ - \angle KBD = \angle BAD = \angle KA_1M$$

در نتیجه، KMA_1 مثلثی متساوی‌الساقین است و $|A_1M| = |MK|$. به‌همین ترتیب، $|ML| = |MC_1|$؛ اما $|KM| = |ML|$، بنابراین $|A_1M| = |MC_1|$، یعنی، خط راست BM، AC را نصف می‌کند.

۱۸۴ ـ فرض کنید M معرف نقطهٔ برخورد ND و AB، و P نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره در نقطه‌های A و D، باشد. چون خطهای راست NC، AB و PD موازی‌اند، از تشابه مثلثهای متناظر به‌دست می‌آوریم

$$|AM| = |DP| \cdot \frac{|AN|}{|NP|} \qquad (1)$$

$$\frac{|MB|}{|NC|} = \frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|AP|}{|ND|}$$

$$|MB| = |NC| \frac{|AP|}{|NP|} \qquad (2)$$

اما، $|AP| = |DP|$ و $|AN| = |NC|$. در نتیجه، طرف راست عبارتهای (۱) و (۲) با یکدیگر برابرند، یعنی، $|AM| = |MB|$.

۱۸۵ ـ فرض می‌کنیم D وسط CB باشد و AD دایره را، برای دومین بار، در نقطه‌ای مانند K قطع کند. ثابت می‌کنیم که مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و C، روی خط راست MK متقاطع‌اند.

چهارضلعی $CMBK$ را در نظر بگیرید. برای اینکه نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره در نقطه‌های C و B، روی قطر MK واقع باشد، لازم و کافی است که (مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۱ را ببینید)

$$\frac{|CM|}{|CK|} = \frac{|MB|}{|BK|}$$

اما، $\frac{|MB|}{|BK|} = \frac{|AC|}{|BK|} = \frac{|CD|}{|DK|} = \frac{|BD|}{|DK|} = \frac{|AB|}{|CK|} = \frac{|CM|}{|CK|}$.(دراولین وآخرین برابری از این حقیقت که $|CM| = |AB|$ و $|MB| = |AC|$، زیرا AM با BC موازی است، در دومین و چهارمین برابری از اینکه مثلث ABD با مثلث CDK، و مثلث ADC با مثلث KDB متشابه است، و در برابری سوم از این حقیقت که AD میانه است، استفاده کرده‌ایم.)

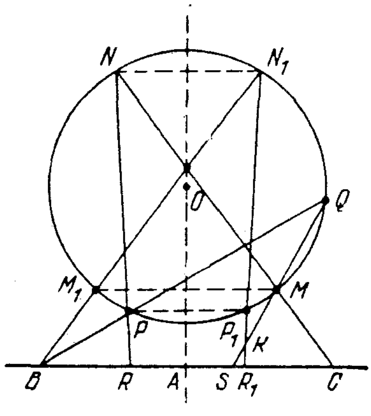
۱۸۶ ـ فرض کنید O معرف مرکز دایره باشد و $N_۱$، $M_۱$، $P_۱$ و $R_۱$، به‌ترتیب، نقطه‌های قرینهٔ نقطه‌های N، M، P و R، نسبت به‌خط راست OA، باشند و K نقطهٔ برخورد خطهای راست $N_۱R_۱$ و QS باشد. باید ثابت کنیم که نقطه‌های $R_۱$، S و K بر هم منطبق‌اند. نقطه‌های $N_۱$، $M_۱$ و B روی یک خط راست، قرینه با خط راست NMC، واقع‌اند؛ نقطه‌های $N_۱$، $P_۱$ و $R_۱$ هم، روی یک خط راست، قرینه با خط راست NPR، واقع‌اند (شکل ۳۶). نقطه‌های B، $N_۱$، Q و K روی یک دایره واقع‌اند، زیرا

$$\angle BN_۱K = \angle M_۱N_۱P_۱ = \angle MNP = \angle PQM = \angle BQK$$

نقطه‌های B، $N_۱$، Q و $R_۱$ هم، روی یک دایره قرار دارند، زیرا

$$\angle N_۱R_۱B = \angle N_۱P_۱P = \angle N_۱QP = \angle N_۱QB$$

در نتیجه، پنج نقطهٔ B، $N_۱$، Q، $R_۱$ و K همخط‌اند، بنابراین، $R_۱$ و K بر هم منطبق‌اند.



(شکل ۳۶)

۱۸۷ ـ خودمان را به‌حالتی که ABC مثلثی حاده است، محدود می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع $A_۱MON$ را در نظر بگیرید (M و N، به‌ترتیب، روی $A_۱B_۱$ و $A_۱C_۱$ واقع‌اند). چون $A_۱O$، با $A_۱C_۱$ و $A_۱B_۱$، زاویه‌های $(۹۰° - \angle B)$ و $(۹۰° - \angle C)$ می‌سازد، داریم

$$\frac{|A_1M|}{|A_1N|}=\frac{|A_1M|}{|MO|}=\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{|A_1L|}{|A_1K|}$$

۱۸۸ ـ حکم مسأله از این حقیقت نتیجه می‌شود که: اگر بر هر ضلع مثلث یک دایره طوری رسم شود که مجموع مقدارهای زاویه‌ای کمانهای آنها (واقع در یک طرف با مثلث) برابر با 2π باشد، آن وقت این دایره‌ها در یک نقطه مشترک‌اند.

۱۸۹ ـ نقطه‌های E_1 و F_1 را قرینهٔ نقطه‌های E و F، نسبت به AB، بگیرید. در این صورت، مسأله، به‌حالت خاصی از مسألهٔ ۱۸۶ بخش ۲ منجر می‌شود.

۱۹۰ ـ بر امتداد AC، از طرف نقطهٔ C، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌کنیم که $|CM|=|CB|$؛ در این صورت، E مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB است ($|AE|=|BE|$ و $\angle AEB=\angle ACB=2\angle AMB$). بنابراین، نتیجه می‌شود که F وسط AM است و DF محیط مثلث ABC را نصف می‌کند. به‌علاوه، DF با BM، و BM با نیمساز زاویهٔ Cی مثلث ABC، موزای است، یعنی، DF نیمساز زاویهٔ D از مثلث DKL است، که در آن K و L، به‌ترتیب، وسطهای AC و CB هستند.

۱۹۱ ـ فرض کنید این خط راست، ضلعهای AC و ABی مثلث ABC را در نقطه‌های M و N قطع کند. قرار می‌گذاریم: $2l=|AN|+|AM|$. شعاع دایرهٔ با مرکز روی MN که بر AC و AB مماس است، برابر است با $\frac{S_{AMN}}{l}$، بنابر فرض $r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{S_{AMN}}{l}$، که در آن p نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

۱۹۲ ـ ثابت کنید، در تبدیل تجانسی به مرکز M و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$، نقطهٔ N به I تبدیل می‌شود (به‌روشنی، این تبدیل تجانسی، I را به S می‌برد). فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد، A_0، B_0 و C_0، به‌ترتیب، وسط ضلعهای BC، CA و AB باشند و A_1 نقطه‌ای روی ضلع BC باشد، به‌طوری که AA_1 محیط مثلث را به‌دو بخش مساوی تقسیم می‌کند. به‌سادگی می‌توان دید که A_1، نقطهٔ تماس ضلع BC با دایرهٔ محاطی خارجیی است که بر امتداد ضلعهای AB و AC هم مماس است. A_2 نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع BC است. داریم: $|CA_1|=|BA_2|$. در نقطهٔ A_2، عمودی بر BC اخراج می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AA_1 را به D نشان می‌دهیم. با تکرار کردن استدلال حل مسألهٔ ۱۷۹ بخش ۲، ثابت می‌کنیم که $|A_2I|=|ID|$. در نتیجه، خط راست A_0I با AA_1 موازی است. اگر تبدیل تجانسی مذکور در ابتدای حل را انجام دهیم، آن وقت خط راست AA_1 به‌خط A_0I تبدیل می‌شود. به‌روش مشابه، دو خط راست دیگر که محیط را نصف می‌کنند، به‌ترتیب، به B_0I و C_0I تبدیل می‌شوند. بنابراین، هر سه این خطها، در نقطه‌ای مانند N متقاطع‌اند که در این تبدیل، به I تبدیل می‌شود. این، حکم مسأله را ایجاب می‌کند.

۱۹۳ ـ الف) با استفاده از دستورهای $r=\frac{S}{p}$، $R=\frac{abc}{4S}$ و $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$،

که در آنها S مساحت مثلث ABC است، رابطهٔ داده شده را به‌سادگی اثبات می‌کنیم.

ب) از دستور لایبنیتس (مسألهٔ ۱۴۰ بخش ۲)، با گرفتن مرکز دایرهٔ محیطی به‌جای M، استفاده کنید.

ج) از دستور لایبنیتس (مسألهٔ ۱۴۰ بخش ۲)، با گرفتن مرکز دایرهٔ محاطی به‌جای M، استفاده کنید. مثلاً، برای محاسبهٔ $|MA|^{۲}$ ، عمود MK را بر AB فرود می‌آوریم؛ داریم: $|MK| = r$ و $|AK| = p-r$ ؛ بنابراین، $|AM|^{۲} = (p-a)^{۲}+r$ ، $|MB|^{۲}$ و $|MC|^{۲}$ به‌روشی مشابه محاسبه می‌شوند. برای ساده کردن طرف راست، از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید.

د) فرض کنید M معرف نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ B و دایرهٔ محیطی باشد. اگر $|IO| = d$ ، آن وقت $|BI|.|IM| = R^{۲}-d^{۲}$. مثلث ICM متساوی‌الساقین است ($|IM| = |CM|$)، زیرا $\angle CIM = \frac{۱}{۲}(\angle B+\angle C)$ و $\angle ICM = \frac{۱}{۲}(\angle B+\angle C)$. در نتیجه

$$R^{۲}-d^{۲} = |BI|.|IM| = |BI|.|CM| = \frac{r}{\sin\frac{B}{۲}}\, ۲R\sin\frac{B}{۲} = ۲Rr$$

ه) به‌همان روش قسمت (د) اثبات خواهد شد.

و) فاصلهٔ میان‌تصویرهای I و I_a روی AC، برابر با a است. نقطه‌ای مانند K طوری اختیار می‌کنیم که $AC \parallel IK$ و $I_aK \perp AC$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ IKI_a، داریم $\angle KII_a = \frac{۱}{۲}\angle A$ ، $|IK| = a$ و $|I_aK| = r_a-r$. بنابراین

$$|II_a|^{۲} = \frac{|IK|^{۲}}{\cos^{۲}\frac{A}{۲}} = \frac{a}{\sin A}\, ۲\,|IK|\tan\frac{A}{۲} = ۴R(r_a-r)$$

۱۹۴ـ از نقطهٔ O، خطهای راستی به‌موازات AB و AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد این خطها با عمودهای وارد از I_a بر AB و AC را، به‌ترتیب، با L و K نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که مثلثهای $AB_۱C_۱$ و OLK متشابه‌اند. داریم: $\angle B_۱AC_۱ = \angle LOK$، $|AB_۱| = \frac{bc}{c+a}$ ، $|AC_۱| = \frac{bc}{c+a}$، $|OL| = p-\frac{c}{۲} = \frac{۱}{۲}(a+b)$ و $|OK| = p-\frac{b}{۲} = \frac{۱}{۲}(a+c)$ بنابراین

$$\frac{|AB_۱|}{|OL|} = \frac{|AC_۱|}{|OK|} = \frac{۲bc}{(c+a)(b+a)}$$

اما OI_a قطر دایرهٔ محیطی مثلث OLK است. درنتیجه

$$|B_۱C_۱| = \frac{۲bc}{(c+a)(b+a)}\,|LK| = \frac{۲bc}{(c+a)(b+a)}\,|OI_a|\sin A$$
$$= \frac{abc}{(c+a)(b+a)R}\cdot|OI_a|$$

۱۹۶ ـ ثابت کنید که Q_a، مساحت مثلث با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی خارجی به‌مرکز I_a با دستور $Q_a = S_{ABC}\dfrac{r_a}{2R} = \dfrac{S^2_{ABC}}{2R(p-a)}$ قابل محاسبه است، که در آن، نمادگذاری، مانند مسألهٔ ۱۹۳ بخش ۲ است. دستورهای مشابه برای دیگر مثلثها به‌دست خواهند آمد. (حل مسألهٔ ۲۴۰ بخش ۱ را ببینید.)

۱۹۷ ـ فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، B_1 وسط AC و N نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث با AC باشد. در این صورت، $|AN| = p-a$، $|CN| = p-c$ (مسألهٔ ۱۸ بخش ۱ را ببینید) و

$$|ON|^2 = |OB_1|^2 + |B_1N|^2 = |AO|^2 - |AB_1|^2 + |B_1N|^2$$

$$= R^2 - \frac{b^2}{4} + \left(p-a-\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= R^2 - (p-a)(p-c)$$

سپس مربع فاصلهٔ نقطه‌های دیگر تماس را پیدا می‌کنیم و آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم تا مجموع مورد نظر را به‌دست آوریم؛ این مجموع برابر است با

$$3R^2 - (p-a)(p-c) - (p-c)(p-b) - (p-b)(p-a) = 3R^2 - M$$

با استفاده از دستور هرون برای مساحت مثلث و دستورهای $S = pr$ و $S = \dfrac{abc}{4R}$، به‌دست می‌آوریم: $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ و $4Rr = \dfrac{abc}{p}$. با جمع کردن دو برابری اخیر و استفاده از اتحاد

$$(p-a)(p-b)(p-c) + abc = p((p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a))$$

$$= pM$$

به‌دست می‌آوریم: $M = 4Rr + r^2$.

جواب: $3R^2 - 4Rr - r^2$.

۱۹۸ ـ حاصلضرب طول پاره‌خطهای از رأس Aی مثلث ABC تا نقطه‌های برخورد ضلع AB با دایرهٔ مفروض، برابر است با همین حاصلضرب برای ضلع AC. طول هر یک از این پاره‌خطها به‌سادگی بر حسب طول ضلعهای مثلث و وترهای مورد بحث قابل بیان‌اند. بنابراین، دستگاه معادله‌هایی با سه معادله به‌دست می‌آوریم که ما را قادر می‌سازد طول وترها را برحسب طول

ضلعهای مثلث نشان دهیم. برای اجتناب از بررسی حالتهای مختلف، راحت‌تر است جهت معینی برای پیمودن مثلث انتخاب کنیم و پاره‌خطها را جهت‌دار و طول آنها را عددهای حقیقی دلخواه در نظر بگیریم.

۱۹۹ ـ فرض کنید K_1 و L_1 نقطه‌هایی، به‌ترتیب، روی BC و BA باشند، به‌طوری که $B_1B \parallel L_1L \parallel K_1K$. کافی است ثابت کنیم که مثلثهای BK_1K و BL_1L متشابه‌اند، یعنی، $\frac{|BL_1|}{|L_1L|}=\frac{|BK_1|}{|K_1K|}$. داریم: $\frac{|BK_1|}{|BA_1|}=\frac{|B_1K|}{|B_1A_1|}$، $\frac{|K_1K|}{|BB_1|}=\frac{|A_1K|}{|B_1A_1|}$، و بنابر ویژگی نیمساز (مسألهٔ ۹ بخش ۱)

$$\frac{|BK_1|}{|K_1K|}=\frac{|B_1K|}{|A_1K|}\cdot\frac{|BA_1|}{|BB_1|}=\frac{|CB_1|}{|CA_1|}\cdot\frac{|BA_1|}{|BB_1|}=\frac{c}{b}\cdot\frac{|CB_1|}{|BB_1|}$$
$$=\frac{ca}{(c+a)|BB_1|}$$

عبارت اخیر، نسبت به a و c متقارن است، و بنابراین، با $\frac{|BL_1|}{|L_1L|}$ هم برابر است.

۲۰۰ ـ فرض کنید $\angle KAL=\angle KLA=\varphi$ و $\angle KCL=\angle LKC=\psi$. در این صورت، $\angle BKL=2\varphi$، $\angle BLK=2\psi$ و $2\varphi+2\psi=180^\circ-\angle B$. اگر Q نقطهٔ برخورد AL و KC باشد، آن‌وقت $\angle AQC=180^\circ-(\varphi+\psi)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$. از M، خط راستی به‌موازات BC رسم می‌کنیم تا KC را در نقطه‌ای مانند N قطع کند، در این صورت، MQ نیمساز زاویهٔ AMN است و $\angle AQN=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$. بنابراین، نتیجه می‌شود که Q نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث AMN است (مسألهٔ ۴۶ بخش ۱ را ببینید)؛ به‌این ترتیب، مثلث AMN با مثلث KBL، و مثلث KMN با مثلث KBC متشابه است. فرض کنید $x=|AK|=|KL|=|LC|$، $|AM|=y$ و $z=|MN|$. دراین صورت، $\frac{z}{a-x}=\frac{y}{c-x}$ و $\frac{y-x}{c-x}=\frac{z}{a}$، که از آنجا $y=a$.

۲۰۱ ـ فرض کنید B_1 وسط AC باشد. نیمساز زاویهٔ B را امتداد دهید تا عمود اخراج شده بر AC، در نقطهٔ B_1، را در نقطه‌ای مانند B_2 قطع کند. نقطهٔ B_2 روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد. از M، عمودی بر AC رسم می‌کنیم؛ فرض کنید L نقطهٔ برخورد آن با AC، و K نقطهٔ برخورد آن با BB_1 باشد، دراین‌صورت $|ML|=|KM|$. از نقطهٔ K، خط راستی به‌موازات AC رسم می‌کنیم تا خطهای راست AB و BC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D و E قطع کند. اگر G و F، به‌ترتیب، تصویرهای D و E روی AC باشند، آن وقت M مرکز مستطیل $GDEF$ است و مثلث DME با مثلث AB_2C متشابه می‌شود (مثلث DME، از مثلث AB_2C بر اثر تبدیلی تجانسی با مرکز B به‌دست می‌آید.) داریم

$$\cot\angle MCL = \frac{|LC|}{|ML|} = \frac{|LF|}{|ML|} + \frac{|FC|}{|ML|} = \frac{|AB_۱|}{|B_۱B_۲|} + ۲\frac{|FC|}{|EF|}$$
$$= \cot\frac{B}{۲} + ۲\cot C$$

اکنون، اگر B' پای نیمساز زاویهٔ C باشد و P و T، به‌ترتیب، تصویرهای N و B' روی BC باشند، آن وقت

$$\cot\angle NCB = \frac{|PC|}{|NP|} = \frac{|PT|}{|NP|} + \frac{|TC|}{|NP|} = \frac{|BP|}{|NP|} + ۲\frac{|TC|}{|B'T|} = \cot\frac{B}{۲} + ۲\cot C$$

یعنی، $\angle MCA = \angle NCB$.

۲۰۲ ـ الف) این مسألهٔ معروف، چندین راه حل دارد. یکی از آنها را بررسی می‌کنیم که بر معیار زیر برای قابل انطباق بودن مثلثها مبتنی است. دو مثلث با یک ضلع برابر، زاویهٔ مقابل به‌این ضلع برابر، نیمساز این زاویهٔ برابر، قابل انطباق‌اند. این معیار را اثبات می‌کنیم. دو مثلث ACB و $ACB_۱$ را در نظر بگیرید که در آنها $\angle B = \angle B_۱$ (B و $B_۱$ در یک طرف AC واقع‌اند). این مثلثها، دایرهٔ محیطی مشترکی دارند. می‌توانیم فرض کنیم B و $B_۱$ در یک طرف قطر این دایره که بر AC عمود است، واقع‌اند. فرض کنید نیمساز زاویهٔ B، AC را در نقطهٔ D و نیمساز زاویهٔ $B_۱$ را در نقطهٔ $D_۱$ قطع کند، M وسط AC و N وسط کمان AC است که نقطه‌های B و $B_۱$ را در برندارد. نقطه‌های B، D و N، و به‌علاوه، $B_۱$، $D_۱$ و N همخط‌اند. فرض کنید B و $B_۱$ نامنطبق باشند، بنابراین، D و $D_۱$ هم نامنطبق‌اند. فرض کنید $|MD_۱| > |MD|$؛ در این صورت $|B_۱N| > |BN|$ و $|D_۱N| > |DN|$. در نتیجه

$$|B_۱D_۱| = |B_۱N| - |ND_۱| > |BN| - |ND| = |BD|$$

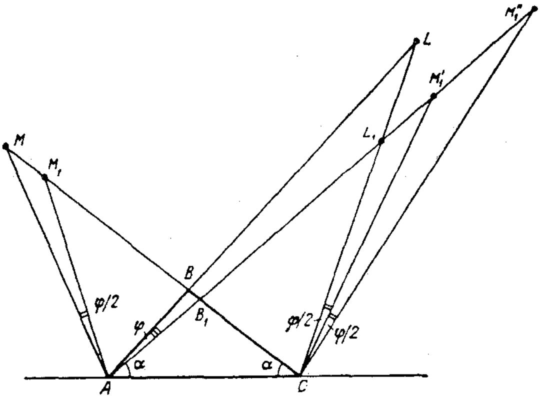
که این تناقض است. اکنون، فرض کنید نیمساز $AA_۱$ در مثلث ABC، با نیمساز $CC_۱$ برابر باشد. معیاری راکه هم‌اکنون ثابت شد، در مثلثهای $BAA_۱$ و $BCC_۱$ به‌کار ببرید.

ب) اگر هر دو نیمسازهای زاویه‌های خارجی A و Cی مثلث ABC در درون زاویهٔ B قرار گیرند، آن وقت، اثبات، درست به‌همان روش قسمت (الف) انجام خواهد شد.

فرض کنید این نیمسازها بیرون زاویهٔ B قرار گیرند. فرض می‌کنیم $|BA| > |BC|$. روی BC، نقطه‌ای مانند $B_۱$ طوری اختیار کنید که $|AB_۱| = |CB_۱|$. فرض کنید $\angle B_۱AC = \angle BCA = \alpha$ و $\angle B_۱AB = \varphi$. L نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ خارجی C و AB، و M نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ خارجی A و CB است. بقیهٔ نمادگذاریها از روی شکل ۳۷ روشن است. بنابر فرض، $|CL| = |AM|$، به‌علاوه، $|CL_۱| = |AM_۱|$، زیرا $B_۱AC$ مثلثی متساوی‌الساقین است، و $|CM'_۱| = |AM|$، زیرا مثلثهای $CL_۱M'_۱$ و $AM_۱M$ قابل انطباق‌اند. به‌علاوه، $|CM''_۱| > |CM'_۱|$، زیرا $\angle M''_۱M'_۱C > \angle M'_۱CA > ۹۰°$. از طرف دیگر، نقطه‌های C، A، L و $M''_۱$ بر یک دایره واقع‌اند که در آن، زاویهٔ حادهٔ مقابل به

LC ($\angle LAC$) از زاویهٔ حادهٔ مقابل به $M''_۱C$ بزرگتر است. بنابراین، $|CL|<|CM''_۱|<|CM'_۱|=|AM|$. اما، این تناقض است.

در حالت کلی، برابری نیمسازهای زاویه‌های خارجی، ایجاب نمی‌کندکه مثلث، متساوی‌الساقین است. مسألهٔ ۲۶۰ بخش ۱، مثالی از چنین مثلثی ارائه می‌دهد.



(شکل ۳۷)

۲۰۳ ـ فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد و $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ نیمسازهای آن باشند. اگر $|A_۱B_۱|=|A_۱C_۱|$، آن وقت یا $\angle A_۱B_۱C=\angle A_۱C_۱B$ (در این حالت، $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است) یا $\angle A_۱B_۱C+\angle A_۱C_۱B=۱۸۰^\circ$. در حالت دوم، مثلث $A_۱B_۱C$ را دور نقطهٔ $A_۱$، به‌اندازهٔ زاویهٔ $B_۱A_۱C_۱$، دوران می‌دهیم. در نتیجه، مثلثهای $A_۱C_۱B$ و $A_۱B_۱C$ به‌کنار یکدیگر می‌آیند و مثلثی متشابه با مثلث ABC به‌وجود می‌آورند. اگر طول ضلعهای مثلث ABC، a، b و c باشند، آن وقت طول ضلعهای مثلث حاصل برابرند با $\frac{ac}{b+c}$، $\frac{ab}{b+c}$ و $\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{a+b}$. با توجه به‌اینکه مثلثها متشابه‌اند، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{a}{b+c}\Leftrightarrow b^۳+c^۳-a^۳+b^۲c+b^۲a+c^۲b+c^۲a-a^۲b-a^۲c+abc=۰ \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم $\cos\angle BAC=x$. بنابر قانون کسینوسها، $b^۲+c^۲-a^۲=۲bcx$. با ضرب کردن برابری اخیر، به‌طور متوالی، در a، b و c و کم کردن آن از (۱)، به‌دست می‌آوریم

$$۲x(a+b+c)+a=۰\Leftrightarrow a=-\frac{۲(b+c)x}{۲x+۱}$$

چون $۰<a<b+c$، داریم

$$-\frac{۱}{۴}<x<۰ \qquad (۲)$$

با نوشتن a در قانون کسینوسها بر حسب b، c و x، و فرض $\frac{b}{c}=\lambda$، برای λ به‌معادلهٔ

$(\lambda>0, \lambda\neq 1)$ می‌رسیم. برای اینکه این معادله $(4x+1)\lambda^2-2\lambda(4x^3+8x^2+x)+4x+1=0$ با شرطهای (۲) جواب داشته باشد، باید نابرابریهای زیر محقق باشند

$$4x^3+8x^2+x>0 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{4}D=(4x^3+8x^2+x)^2-(4x+1)^2=(2x+1)^2(x+1)(2x-1)(2x^2+5x+1)>0 \qquad (4)$$

که در آن، D، مبیّن معادلهٔ درجه دوم است. دستگاه نامعادله‌های (۲)، (۳) و (۴)، به‌ازای $\frac{\sqrt{17}-5}{4}<x<-\frac{1}{4}$ درست است.

بنابراین، مثلث اصلی لزوماً متساوی‌الساقین نیست، اما ثابت شده است که این مثلث می‌تواند متساوی الساقین باشد به‌شرطی که یکی از زاویه‌های مثلث اصلی منفرجه و کسینوس آن در بازهٔ $\left(\frac{\sqrt{17}-5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ واقع باشد، که این تقریباً متناظر با زاویه‌ای از $102°40'$ تا $104°28'$ است. اگر $x=-\frac{1}{4}$، آن وقت مثلث ساخته شده تباهیده می‌شود؛ به‌ازای $x=\frac{\sqrt{17}-5}{4}$، داریم: $\angle A_1C_1B=\angle A_1B_1C_1=90°$، یعنی، دو حالتی که در ابتدای حل بررسی کردیم، به‌ازای این اندازه از زاویه، یکی‌اند.

۲۰۴ـ فرض کنید M معرف نقطهٔ برخورد AD و KL باشد:

$$\frac{|KM|}{|ML|}=\frac{S_{AKD}}{S_{ALD}}=\frac{\frac{1}{2}|AK|.|AD| \sin\angle KAD}{\frac{1}{2}|DL|.|AD| \sin\angle ADL}=\frac{|AK|.|CD|}{|DL|.|AF|}$$

(از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که سینوس زاویه‌های محاطی، با وترها متناسب‌اند.) به‌همین ترتیب، اگر M_1 نقطهٔ برخورد BE و KL باشد، آن وقت به‌دست می‌آوریم

$$\frac{|KM_1|}{|M_1L|}=\frac{|BK|.|EF|}{|LE|.|BC|}$$

اما، از تشابه مثلثهای AKF و BKC، و CLD و FLE، داریم $\frac{|AK|}{|AF|}=\frac{|BK|}{|BC|}$ و $\frac{|FE|}{|LE|}=\frac{|CD|}{|DL|}$؛ با ضرب کردن این برابریها در هم، به‌دست می‌آوریم $\frac{|KM|}{|ML|}=\frac{|KM_1|}{|M_1L|}$، یعنی، M و M_1 بر هم منطبق‌اند.

تبصره. می‌توانیم نشان دهیم که حکم مسأله اگر A، B، C، D، E و F شش نقطهٔ دلخواه روی دایره باشند، به‌جای خود باقی است. معمولاً، قضیهٔ پاسکال را به‌شکل زیر تنظیم می‌کنند: اگر A، B، C، D، E و F نقطه‌هایی بر یک دایره باشند، آن وقت سه نقطهٔ برخورد زوج خطهای

راست AB و DE، BC و EF، و CD و FA بر یک خط راست واقع‌اند.

۲۰۵ـ فرض کنید N نقطهٔ برخورد خط راست A_2A_1 و دایره باشد، N متمایز از A_2 است. قضیهٔ پاسکال را برای شش‌ضلعی $ABCC_2NA_2$، که ممکن است خودش را قطع کند، به‌کار ببرید (مسألهٔ ۲۰۴ بخش ۲). نقطه‌های برخورد زوج خطهای راست AB و C_2N، BC و NA_2 (نقطهٔ A_1)، CC_2 و AA_2 (نقطهٔ M) بر یک خط راست واقع‌اند. در نتیجه، AB و C_2N در نقطهٔ C_1 متقاطع‌اند.

۲۰۶ـ فرض کنید خطهای راست دوبه‌دو متقاطع مفروض، محور xها و yهای یک دستگاه مختصات قائم باشند. دراین‌صورت، ارتفاعهای مثلث روی خطهای $y=k_ix$ $(i=1,2,3)$ قرار دارند؛ در این حالت، ضلعهای مثلث باید شیبهایی برابر با $-\frac{1}{k_i}$ داشته باشند، و از این امر که رأسها، (x_i,y_i)، به‌ارتفاعها متعلق‌اند، نسبتهای جمله‌های ثابت، c_i، را در معادله‌های ضلعها $k_iy+x=c_i$، پیدا می‌کنیم:

$$c_1=k_1y_3+x_3\,,\ c_2=k_2y_3+x_3\,,\ y_3=k_3x_3\ \Rightarrow\ \frac{c_1}{c_2}=\frac{k_1k_3+1}{k_2k_3+1}$$

و غیره. با انتخاب مناسب واحد طول، می‌توانیم $c_i=\frac{k_i}{k+k_i}$ بگیریم، که در آن $k=k_1k_2k_3$.

نقطه‌های برخورد خط $k_iy+x=\frac{k_i}{k+k_i}$ بامحورها، $\left(0,\frac{1}{k+k_i}\right)$ و $\left(\frac{k_i}{k+k_i},0\right)$ هستند و (P_i) وسط پاره‌خط میان آنها $\left(\frac{k_i}{2(k+k_i)},\frac{1}{2(k+k_i)}\right)$ است. شیب خط راست P_1P_2 برابر است با

$$\left(\frac{1}{2(k+k_2)}-\frac{1}{2(k+k_1)}\right)\div\left(\frac{1}{2(k+k_2)}-\frac{k_1}{2(k+k_1)}\right)=(k_1-k_2)\div(kk_2-kk_1)$$

$$=-\frac{1}{k}$$

شیب خطهای P_2P_3 و P_3P_1 هم، همین است. بنابراین، نقطه‌های P_1، P_2 و P_3 روی یک خط راست‌اند (معادلهٔ آن $ky+x=\frac{1}{2}$ است).

تبصرهٔ ۱. با وصل کردن نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای مثلث، به‌نقطه‌های P_1، P_2 و P_3 به‌وسیلهٔ خطهای راست، به‌نتیجهٔ جالبی می‌رسیم. فرض کنید α_1، α_2 و α_3 زاویه‌های مثلث باشند که در جهت مخالف گردش عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری شده‌اند و a_1، a_2 و a_3 خطهای راست حامل ضلعهای روبه‌رو به‌این زاویه‌ها باشند؛ سه خط راست p_1، p_2 و p_3، از نقطهٔ H طوری می‌گذرند که زاویه‌های میان جفتهای p_2 و p_3، p_3 و p_1، و p_1 و p_2 (زاویه‌ها در جهت مخالف گردش عقربه‌های ساعت سنجیده شده‌اند) برابرند با α_1، α_2 و α_3. در این صورت، نقطه‌های برخورد جفتهای p_1 و a_1، p_2 و a_2، و p_3 و a_3 روی یک خط راست واقع‌اند. اثبات حالتهای خاص این قضیه، به‌خواننده واگذار می‌شود (بسیاری از این نتیجه‌های هندسی،

زیبا و غیر بدیهی‌اند).

تبصرهٔ ۲. در مسألهٔ ما، به‌جای وسط پاره‌خطهای جدا شده روی ضلعهای مثلث، می‌توانیم نقطه‌هایی راکه آنها را به‌یک نسبت تقسیم می‌کنند، اختیار کنیم، این نقطه‌ها هم، همخط از آب در می‌آیند.

۲۰۷ـ برای تعیین اندازهٔ زاویه‌های مثلث $A_1B_1C_1$، از این نتیجه که نقطه‌های P، A_1، B_1 و C_1 روی یک دایره واقع‌اند، استفاده کنید (همین مطلب، برای چهار نقطهٔ دیگر هم درست است).
اگر نقطهٔ P در درون مثلث ABC قرار گیرد، آن وقت

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = \angle APB - \angle ACB$$

برای مثلث مختلف‌الاضلاع ABC، هشت نقطهٔ متمایز P وجود دارد، به‌طوری که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ی متناظر آنها، با مثلث ABC متشابه‌اند (مثلث $A_2B_2C_2$ با آن قابل انطباق می‌شود). از این هشت نقطه، شش تا در درون دایرهٔ محیطی مثلث و دو تا بیرون آن قرار دارند.

۲۰۸ـ خطهای راست مورد بحث، عمود منصف ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ هستند.

۲۰۹ـ نمادگذاری: ABC مثلث مفروض و M نقطهٔ به‌فاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، A_1، B_1 و C_1 پای عمودهای وارد از M بر BC، CA و AB؛ A_2، B_2 و C_2، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد AM، BM و CM با دایرهٔ محیطی مثلث ABC، a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC، a_1، b_1، c_1 و a_2، b_2، c_2، به‌ترتیب، طول ضلعهای مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$؛ S، S_1 و S_2 مساحت این مثلثها هستند. داریم

$$a_1 = |AM| \sin A = |AM| \frac{a}{2R} \qquad (1)$$

طول ضلعهای b_1 و c_1 به‌روش مشابه پیدا می‌شوند. از تشابه مثلثهای B_2MC_2 و BMC، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{a_2}{a} = \frac{|B_2M|}{|CM|} = \frac{|C_2M|}{|BM|} \qquad (2)$$

نسبتهای مشابه برای $\frac{b_2}{b}$ و $\frac{c_2}{c}$، به‌روش مشابه به‌دست می‌آیند. مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متشابه‌اند (مسألهٔ ۲۰۷ بخش ۲ را ببینید)؛ به‌علاوه

$$\frac{S_2}{S} = \frac{a_2b_2c_2}{abc} \qquad (3)$$

با توجه به‌تمام اینها، داریم

$$\left(\frac{S_1}{S}\right)^3 = \frac{S_1^3}{S_2^3} \cdot \frac{S_2^3}{S^3} = \frac{a_1^2b_1^2c_1^2}{a_2^2b_2^2c_2^2} \cdot \frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a^3b^3c^3}$$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3\frac{|AM|^2|BM|^2|CM|^2a^2b^2c^2}{a^3b^3c^3}\cdot a_2b_2c_2$$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3|AM|^2|BM|^2|CM|^2\;\frac{|B_2M|}{|CM|}\;\frac{|C_2M|}{|AM|}\cdot\frac{|A_2M|}{|BM|}$$

$$=\left(\frac{1}{4R^2}\,|R^2-d^2|\right)^3$$

(در برابری دوم، از تشابه مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ و تساوی (۳)، در برابری سوم از دستور (۱)، و در برابری چهارم از دستور (۲) استفاده کرده‌ایم.)

تبصره. به‌ازای $d=R$، مساحت مثلث تشکیل شده با پای عمودها، برابر با صفر می‌شود، یعنی، این پاها روی یک خط راست واقع‌اند. این خط، خط سیمسون (مسألهٔ ۱۵۳ بخش ۲ را ببینید) است.

۲۱۰ ـ حکم از نتیجهٔ کلیتری به‌دست می‌آید: اگر روی ضلعهای مثلث، دایره‌هایی رسم شوند، به‌طوری که کمانهای آنها که بیرون مثلث قرار گرفته‌اند جمعاً برابر با 4π یا 2π باشند، آن وقت این دایره‌ها در یک نقطه مشترک‌اند (در حالت ما، برای مثلثی مناسب، می‌توانیم مثلث با رأسهای وسط ضلعهای مثلث ABC را بگیریم، و ثابت کنیم که سه دایره که از وسطهای AB، AC و AD؛ BA، BC و BD؛ CA، CB و CD می‌گذرند، در یک نقطه مشترک‌اند).

۲۱۱ ـ حکم مسأله مبتنی بر نتیجهٔ زیر است. فرض کنید دایره‌ای دلخواه، زاویهٔ با رأس N را در نقطه‌های A، B و C، D قطع کند؛ عمودهای اخراج شده بر ضلعهای زاویه در نقطه‌های A و D، در نقطه‌ای مانند K، و عمودهای اخراج شده در نقطه‌های B و C، در نقطه‌ای مانند L متقاطع‌اند. در این صورت، خطهای راست NK و NL، نسبت به‌نیمساز این زاویه، قرینه‌اند. در حقیقت، $\angle ANK=\angle ADK$ (نقطه‌های A، K، D و N بر یک دایره واقع‌اند). به‌روش مشابه، $\angle LNC=\angle LBC$. بنابراین، $\angle ADK=90^\circ-\angle ADN=90^\circ-\angle NBC=\angle LBC$.
(فرض شده است که چهارضلعی $ABCD$ خودش را قطع نمی‌کند.)

۲۱۲ ـ فرض کنید A، B، C و D نقطه‌های مفروض باشند و D_1 نقطهٔ برخورد خطهای راست قرینه با AD، BD و CD، نسبت به‌نیمسازهای متناظر از مثلث ABC، باشد. در مسألهٔ قبل ثابت شد که دایره‌های پایی نقطه‌های D و D_1 نسبت به‌مثلث ABC، بر هم منطبق‌اند. فرض کنید خطهای راست قرینه با BA، CA و DA، نسبت به‌نیمسازهای متناظر از مثلث BCD، در نقطه‌ای مانند A_1 متقاطع باشند. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A_1 و D_1، نسبت به‌خط راست CB، قرینه‌اند. در نتیجه، دایره‌های پایی نقطهٔ D (یا D_1) نسبت به‌مثلث ABC، و نیز نقطهٔ A (یا A_1) نسبت به‌مثلث BCD، از وسط D_1A_1 می‌گذرند. با پیدا کردن نقطه‌های B_1 و C_1 به‌روش مشابه، مشاهده می‌کنیم که هر یک از دایره‌های پایی مورد بحث، از وسط پاره‌خطهایی که نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 را به‌هم وصل می‌کنند، متناظر با آن، می‌گذرد.

بدین ترتیب، مسألهٔ ما، به‌مسألهٔ ۲۱۰ بخش ۲ منجر شده است.

۲۱۳ - فرض کنید B_2 و C_2 نقطه‌های مقابل قطری نقطه‌های B و C باشند، M دومین نقطهٔ برخورد B_2B_1 و دایرهٔ محیطی مثلث ABC و C_1' نقطهٔ برخورد AB و C_2M باشد. بنابر قضیهٔ پاسکال، مسألهٔ ۲۰۴ بخش ۲، که در شش‌ضلعی AB_2CMBC_2 به‌کار رود، نقطهٔ O (مرکز دایره)، B_1 و C_1' روی یک خط راست واقع‌اند، یعنی C_1' بر C_1 منطبق است. اما $\angle BMB_1 = \angle BMB_2 = 90°$ و $\angle CMC_1 = \angle CMC_2 = 90°$؛ بنابراین، M یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های به‌قطر BB_1 و CC_1 است. فرض کنید N دومین نقطهٔ برخورد این دایره‌ها باشد. وتر مشترک آنها شامل نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، است (مسألهٔ ۱۹ بخش ۲). اگر BB_0 ارتفاع مثلث ABC باشد، آن وقت $|MH|.|HN| = |BH|.|HB_0|$. بدین‌ترتیب (مسألهٔ ۱۶۴ بخش ۲ را ببینید)، N روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد.

۲۱۸ - فرض کنید شعاع دایره r باشد و زاویه‌های بین شعاعهای مرسوم به‌نقطه‌های تماس مجاور، به‌طور دوری، برابر با 2α، 2β، 2γ و 2δ $(\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi)$ باشند. در این صورت

$$S = r^2(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta) \qquad (1)$$

طول ضلعهای چهارضلعی (یکی از آنها را پیدا می‌کنیم) برابرند با

$$r(\tan\alpha+\tan\beta) = r\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

و غیره. چون $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\delta)$ و $\sin(\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\delta)$، دستور داده شده در صورت مسأله، به

$$S = r^2\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta} \qquad (2)$$

ساده می‌شود. می‌ماند اینکه برابری طرفهای راست (۱) و (۲) را، به‌شرط اینکه $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$، ثابت کنید.

۲۱۹ - ثابت کنید، $S_{BNA} = S_{BMC}+S_{AMD}$. اگر $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|CN|}{|CD|} = \lambda$، آن وقت $S_{BMC} = (1-\lambda)S_{BAC}$ و $S_{AMD} = \lambda S_{BAD}$. از طرف دیگر، با نشان دادن فاصلهٔ تا C، D و N تا AB، به‌ترتیب، با h_1، h_2 و h، به‌دست می‌آوریم $h = \lambda h_2+(1-\lambda)h_1$. در نتیجه

$$S_{ABN} = \frac{1}{2}|AB|.h = \lambda\frac{1}{2}|AB|h_2+(1-\lambda)\frac{1}{2}|AB|h_1 = \lambda S_{ABD}+(1-\lambda)S_{BAC}$$
$$= S_{AMD}+S_{BMC}$$

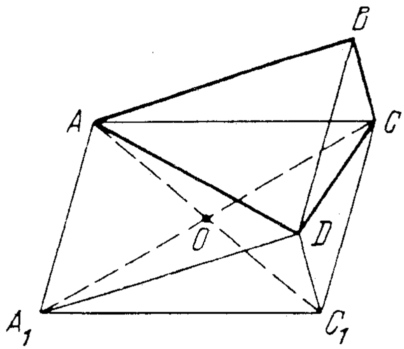
۲۲۱ - زاویه‌های میان ضلعهای و نیز میان ضلعها و قطرهای چهارضلعی Q_2، بر حسب زاویه‌های میان ضلعها و نیز میان ضلعها و قطرهای چهارضلعی Q_1 حساب می‌شوند. (قطرهای چهارضلعی Q_2 بر قطرهای نظیر چهارضلعی Q_1 عمودند و از وسط آنها می‌گذرند.)

۲۲۲ - متوازی‌الاضلاعهای $ABMK$ و $DCML$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که KL، DA را به‌همان نسبت تقسیم می‌کند که نقطهٔ N آن را قسمت می‌کند، و خط راست MN نیمساز زاویهٔ KML است.

۲۲۳ - پیش از هر چیز، ثابت کنید که قطرهای چهارضلعی مفروض را نقطهٔ برخوردشان نصف می‌کند، یعنی، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض و O نقطهٔ برخورد قطرهای آن باشد. فرض کنید $|BO| < |OD|$ و $|AO| \leq |OC|$ ؛ مثلث OA_1B_1، قرینهٔ مثلث OAB نسبت به‌نقطهٔ O، را در نظر بگیرید؛ به‌روشنی، شعاع دایرهٔ محاطی مثلث OA_1B_1 از شعاع دایرهٔ محاطی مثلث OCD کوچکتر است، حال آنکه، بنابر فرض، آنها برابرند. بنابراین، O وسط هر دو قطر است. ثابت می‌کنیم که تمامی ضلعهای چهارضلعی برابرند. از دستور $S = pr$ (S مساحت، P نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است) استفاده می‌کنیم. چون مساحتها و شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای ABO و BOC برابرند، محیطهای آنها هم برابرند، یعنی، $|AB| = |BC|$.

۲۲۴ - با استفاده از حل مسألهٔ قبل، ثابت کنید که قطرهای چهارضلعی را نقطهٔ برخورد آنها، نصف می‌کند.

۲۲۵ - فرض مسأله ایجاب می‌کند که $ABCD$ (شکل ۳۸) چهارضلعیی محدب باشد.



(شکل ۳۸)

متوازی‌الاضلاع ACC_1A_1 را، که در آن ضلعهای AA_1 و CC_1 با یکدیگر برابر و با قطر BD موازی‌اند، در نظر بگیرید. مثلثهای ADA_1، CDC_1 و C_1DA_1، به‌ترتیب، با مثلثهای ABD، BCD و ABC قابل انطباق‌اند. در نتیجه، پاره‌خطهایی که D را به‌رأسهای A، C، C_1 و A_1 وصل می‌کند، متوازی‌الاضلاع را به‌چهار مثلث تقسیم می‌کنند که در آنها شعاع دایره‌های محاطی

با هم برابرند. اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع ACC_1A_1 باشد، آن وقت D باید بر O منطبق باشد (مثلاً، اگر D در درون مثلث COC_1 باشد، آن وقت شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ADA_1 از شعاع دایرهٔ محاطی مثلث AOA_1 بزرگتر است، و همین‌طور در مثلث CDC_1). بنابراین، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، اما، به‌علاوه، از مسألهٔ ۲۲۳ بخش ۲، نتیجه می‌شود که ACC_1A لوزی است، یعنی، $ABCD$ مستطیل است.

۲۲۶ـ شرط لازم و کافی برای اینکه هر چهار قسمت برقرار باشد، برابری $|AB|.|CD| = |AD|.|BC|$ است. برای قسمتهای (الف) و (ب)، این، از قضیهٔ مربوط به‌نیمساز یک زاویهٔ داخلی مثلث، و برای قسمتهای (ج) و (د)، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۱ نتیجه می‌شود.

۲۲۷ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض باشد. فرض می‌کنیم زاویه‌های A و D منفرجه و B و C حاده باشند. پای عمودهای فرود آمده از رأس A را، با M و N و از رأس C را، با K و L نشان دهید (شکل ۳۹ الف)، R نقطهٔ برخورد MN و LK است. توجه کنید که نقطه‌های A، K، N، C، L و M روی دایرهٔ به‌قطر AC واقع‌اند. نشان می‌دهیم که $MK \parallel LN$

$$\angle MKL = \angle MAL = ۹۰^\circ - \angle B = \angle KCB = \angle KLN$$

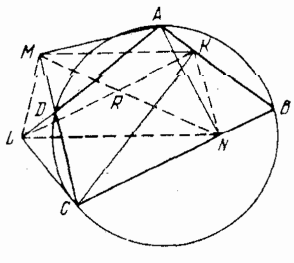
بنابراین

$$\frac{|MR|}{|RN|} = \frac{|MK|}{|LN|} = \frac{\sin\angle MCK}{\sin\angle LAN} = \frac{\sin(\angle C+\angle B-۹۰^\circ)}{\sin(\angle A+\angle B-۹۰^\circ)}$$

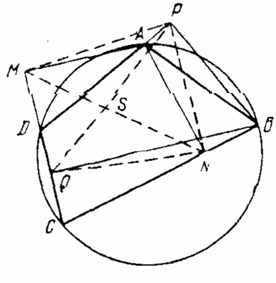
$$= \frac{\cos(\angle A-\angle B)}{\sin(\angle A+\angle B-۹۰^\circ)}$$

اکنون فرض کنید P و Q پای عمودهای وارد از رأس B باشند، S نقطهٔ برخورد MN و PQ است (شکل ۳۹ ب). چون $\angle PNB = \angle PAB = \angle C$، PN با DC موازی است، یعنی، $MQNP$ ذوزنقه است ($ANBP$ چهارضلعیی محاطی با قطر AB است). بنابراین

$$\frac{|MS|}{|SN|} = \frac{|MQ|}{|PN|} = \frac{|AB|\ \cos(\angle A+\angle D-۱۸۰^\circ)}{|AB|\ \sin(\angle B+\angle A-۹۰^\circ)} = \frac{\cos(\angle A-\angle B)}{\sin(\angle A+\angle B-۹۰^\circ)}$$



(الف)



(ب)

(شکل ۳۹)

(از این حقیقت که MQ تصویر AB روی DC است، استفاده کرده‌ایم؛ زاویهٔ میان AB و DC برابر است با $\angle A + \angle D - 180^\circ$.) بنابراین، نقطه‌های R و S، MN را به‌یک نسبت تقسیم می‌کنند، یعنی، بر هم منطبق‌اند؛ بنابراین، سه‌خط راست، در یک نقطه متقاطع‌اند. اکنون، به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر چهار خط راست، در همین نقطه متقاطع‌اند.

۲۲۸ ـ نسبتی را که BC، MN را تقسیم می‌کند، پیدا می‌کنیم. این نسبت برابر است با

$$\frac{S_{MCB}}{S_{CBN}} = \frac{|MC|\cos\angle BCD}{|BN|\cos\angle CBA}$$

به‌همین ترتیب، نسبتی که AD، MN را تقسیم می‌کند، برابر است با

$$\frac{|AM|\cos\angle BAD}{|ND|\cos\angle ADC}$$

اما این نسبتها با یکدیگر برابرند، زیرا $\angle BCD = \angle BAD$، $\angle CBA = \angle CDA$ و مثلث AMC با مثلث DNB متشابه است.

۲۲۹ ـ M_1 را طوری بگیرید که $BCMM_1$ متوازی‌الاضلاع باشد؛ M_1 روی دایره‌ای قرار دارد که از نقطه‌های B، M و A می‌گذرد. چون $|AM_1| = |DM|$ ($ADMM_1$ هم، متوازی‌الاضلاع است)، مثلثهای CDM و BAM_1 قابل انطباق‌اند، یعنی، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث CDM برابر با R است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ADM هم، برابر با R است.

۲۳۰ ـ فرض کنید K و L معرف نقطه‌های تماس دایرهٔ مفروض با خطهای راست AB و AD باشند. برای روشنی وضع، فرض کنید K و L در درون پاره‌خطهای AB و AD قرار گیرند. روی خط راست CB، یک نقطهٔ P طوری اختیار می‌کنیم که $|BP| = |BK|$، B بین P و C قرار می‌گیرد، و روی خط CD، یک نقطهٔ Q اختیار می‌کنیم، به‌طوری که $|DQ| = |DL|$، D بین C و Q قرار می‌گیرد. داریم

$$|CP| = |CB| + |BK| = |CB| + |AB| - |AK| = |CQ|$$

دایره‌ای‌که ازنقطه‌های P و Q می‌گذرد و برخطهای CB و CD مماس است، BD را درنقطه‌هایی مانند M_1 و N_1 قطع می‌کند، که برای آنها، برابریهای $|BM|.|BN| = |BM_1|.|BN_1|$ و $|CM|.|CN| = |CM_1|.|CN_1|$ درست است. این برابریها ایجاب می‌کنند که M_1 و N_1 باید، به‌ترتیب، بر M و N منطبق باشند. حالتهای دیگر ترتیب نقطه‌ها، به‌همین روش بررسی می‌شود. می‌توان با تعیین جهتهای مثبت روی خطهای AB، BC، CD و DA، و در نظر گرفتن پاره‌خطهای جهت‌دار روی این خطها، از بررسی حالتهای مختلف اجتناب کرد.

۲۳۱ ـ برای روشنی وضع، فرض می‌کنیم نقطه‌های B و D، در درون دایره قرار گیرند. فرض کنید P و Q معرف نقطه‌های برخورد خط راست BD و دایره باشند (P به B نزدیکتر است)، L نقطهٔ برخورد CB و دایره، و l مماس بر دایره است که از نقطهٔ C می‌گذرد. مثلث PCN را، که از

رأسهایش خطهای راست PQ، NM و l خارج می‌شوند، در نظر بگیرید. به‌کمک قضیهٔ سوا (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲)، با استدلال به‌روش حل مسألهٔ ۴۹ بخش ۲، نتیجه می‌گیریم، برای اینکه خطهای PQ، NM و l در یک نقطه متقاطع باشند، لازم و کافی است که برابری زیر برقرار باشد

$$\frac{|PM|}{|MC|}\cdot\frac{|CQ|}{|QN|}\cdot\frac{|NC|}{|CP|}=1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، در شش‌ضلعی $ALPMCQ$، قطرهای AM، LC و PQ در یک نقطه متقاطع‌اند. بنابراین (مسألهٔ ۴۹ بخش ۲ را ببینید)

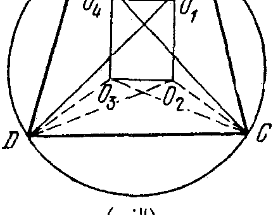
$$|AL|.|PM|.|CQ| = |LP|.|MC|.|QA| \qquad (2)$$

به‌روشنی، $|NC| = |AL|$، $|QN| = |LP|$ و $|CP| = |QA|$. بدین ترتیب، از درستی برابری (۲)، درستی برابری (۱) نتیجه می‌شود.

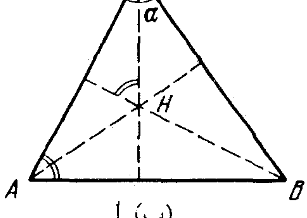
۲۳۲ ـ ۱ـ چون O_1 مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است، داریم: $\angle BO_1A=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BCA$ (مسألهٔ ۴۶ بخش ۱). بنابراین $\angle BO_1A = \angle BO_4A$ و ABO_1O_4 چهارضلعی محاطی است (شکل ۴۰ الف را ببینید)؛ در نتیجه، زاویهٔ مجاور به‌زاویهٔ BO_1O_4، برابر است با $\angle BAO_4 = \frac{1}{2}\angle BAD$. به‌همین ترتیب، زاویهٔ مجاور به $\angle BO_1O_2$، برابر است با $\frac{1}{2}\angle BCD$. اما، $\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle BCD) = 90^\circ$؛ بنابراین، $\angle O_4O_1O_2 = 90^\circ$.

۲ـ برای اثبات بخش دوم حکم، نخست، نشان دهید که فاصلهٔ هر رأس مثلث تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن را اندازهٔ زاویهٔ این رأس و طول ضلع روبه‌رو به‌آن، به‌تمامی معلوم می‌کنند، مثلاً (شکل ۴۰ ب): $|CH| = |CB|\frac{\cos\alpha}{\sin\angle CAB} = \frac{|AB|}{\sin\alpha}\cos\alpha = |AB|\cot\alpha$.

چون $ABCD$ چهارضلعی محاطی است، $|AH_3|=|BH_2|$ و AH_3 با BH_2 موازی است؛ بنابراین، ABH_2H_3 متوازی‌الاضلاع است. بدین ترتیب، نقطهٔ برخورد AH_2 و BH_3، این پاره‌خطها را نصف می‌کند. با در نظر گرفتن متوازی‌الاضلاعهای دیگر، مشاهده می‌کنیم که پاره‌خطهای H_3A، H_4B، H_1C و H_1D در همان نقطه (M) متقاطع‌اند و این نقطه، آنها را نصف می‌کند، یعنی، چهارضلعیهای $ABCD$ و $H_1H_2H_3H_4$، نسبت به‌نقطهٔ M، متقارن مرکزی‌اند (شکل ۴۰ ج).

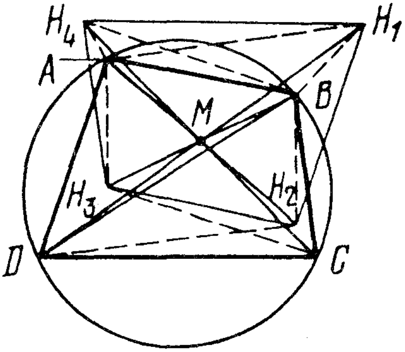


(الف)



(ب)

(شکل ۴۰)



(شکل ۴۰ ج)

۲۳۳ ـ اگر طول ضلعهای مثلث ABC، روبه‌رو به‌رأسهای A، B و C، به‌ترتیب، برابر با a، b و c، و زاویه‌های ADB، BDC و CDA، به‌ترتیب، برابر با α، β و γ باشند (فرض می‌کنیم $\alpha+\beta+\gamma = ۲\pi$)، آن وقت، فاصله‌های نقطهٔ D تا نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ADB، BDC و CDA، به‌ترتیب، برابرند با مقدارهای $c\cot\alpha$، $a\cot\beta$ و $b\cot\gamma$ (حل مسألهٔ ۲۳۲ بخش ۲ را ببینید). به‌سادگی می‌توان قانع شد که مساحت مثلث با رأسهای نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ADB، BDC و CDA، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}c\cot\alpha\,.\,a\cot\beta\,.\sin B+\frac{۱}{۲}a\cot\beta . b\cot\gamma\,.\sin C+\frac{۱}{۲}b\cot\gamma\,.\,c\cot\alpha\,.\,\sin A$$

$$=S_{ABC}\,(\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha)=S_{ABC}$$

زیرا عبارت داخل پرانتز، برابر با ۱ است (این را با در نظر گرفتن اینکه $\alpha+\beta+\gamma=۲\pi$، ثابت کنید.) به‌همین ترتیب، حالتهای دیگر جای نقطهٔ D را (وقتی که یکی از زاویه‌های α، β و γ، برابر مجموع دوتای دیگر باشد) بررسی می‌کنیم.

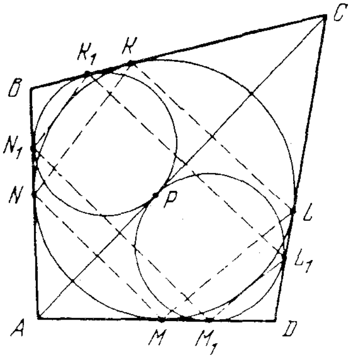
۲۳۴ ـ الف) فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض باشد و R و Q، به‌ترتیب، نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با خط راست AC باشند. در این صورت (مسألهٔ ۱۸ بخش ۱ را ببینید)

$$|RQ| = \big|\,|AQ|-|AR|\,\big|$$
$$=\frac{۱}{۲}\,\big|(|AB|+|AC|-|BC|)-(|AD|+|AC|-|CD|)\big|$$
$$=\frac{۱}{۲}\,\big|\,|AB|+|CD|-|AD|-|BC|\,\big|$$

چون $ABCD$ چهارضلعی محیطی است، $|AB|+|CD| = |AD|+|BC|$، یعنی،

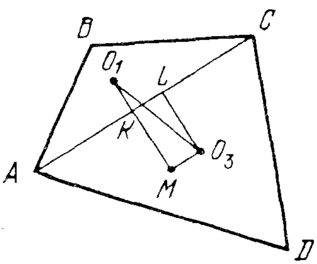
$|RQ| = 0$.

ب) اگر K، L، M و N نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای چهارضلعی، و K_1، L_1، M_1 و N_1 نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با ضلعهای چهارضلعی باشند (شکل ۴۱)، آن وقت $NK \parallel N_1K_1$ و $ML \parallel M_1L_1$. ثابت می‌کنیم که $KL \parallel K_1L_1$ و $NM \parallel N_1M_1$. چون دایره‌های محاطی مثلثهای ACB و ACD، روی قطر چهارضلعی، در یک نقطهٔ P برهم مماس‌اند، داریم: $|AM| = |AP| = |AN_1|$، یعنی، $NM \parallel N_1M_1$. در نتیجه، $K_1L_1M_1N_1$، و به‌علاوه، $KLMN$، چهارضلعیی محاطی است.

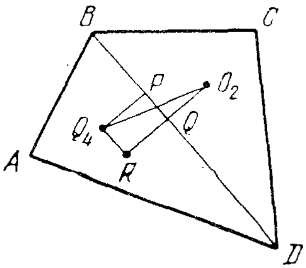


(شکل ۴۱)

۲۳۵ ـ فرض کنید O_1، O_2، O_3 و O_4، به‌ترتیب، معرف مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB باشند (شکل ۴۲، الف و ب). چون $O_1O_2O_3O_4$ مستطیل است(مسألهٔ ۲۳۲ بخش ۲ را ببینید)، داریم: $|O_2O_4| = |O_1O_3|$. اگر K و L نقطه‌های تماس



(الف)



(ب)

(شکل ۴۲)

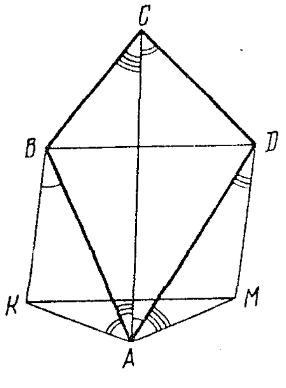
دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با AC باشند، آن وقت، $|KL| = \frac{۱}{۲}\left||AB|+|CD|-|BC|-|AD|\right|$ (حل مسألهٔ ۲۳۴ بخش ۲ را ببینید).

به‌همین ترتیب، اگر P و Q نقطه‌های تماس دایره‌های متناظر، با BD باشند، آن وقت $|KL| = |PQ|$. از $O_۳$، خط راستی به‌موازات AC رسم می‌کنیم تا امتداد $O_۱K$ را قطع کند. مثلث $O_۱O_۳M$ را به‌دست می‌آوریم؛ سپس، مثلث $O_۲O_۴R$ را به‌روش مشابه می‌سازیم. این دو مثلث قائم‌الزاویه، بر هم قابل انطباق‌اند، زیرا در آنها: $|O_۱O_۳| = |O_۲O_۴|$ و $|O_۳M| = |KL| = |PQ| = |Q_۴R|$. بنابراین، $|O_۱M| = |O_۲R|$؛ اما، $|O_۱M|$ برابر است با مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD، و $|O_۲R|$، برابر است با مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ACD و BDA (مسألهٔ ۳۱۵ بخش ۲ را هم، ببینید).

۲۳٦ - در چهارضلعی $ABCD$ (شکل ۴۳): $|AB| = a$، $|BC| = b$، $|CD| = c$، $|DA| = d$، $|AC| = m$ و $|BD| = n$. روی ضلع AB و در بیرون آن، مثلث AKB را متشابه با مثلث ACD رسم می‌کنیم، که در آن $\angle BAK = \angle DCA$ و $\angle ABK = \angle CAD$، و روی ضلع AD، مثلث AMD را متشابه با مثلث ABC رسم می‌کنیم، که در آن $\angle DAM = \angle BCA$ و $\angle ADM = \angle CAB$. از تشابه مثلثهای متناظر، به‌دست می‌آوریم: $|AK| = \frac{ac}{m}$، $|AM| = \frac{bd}{m}$ و $|KB| = |DM| = \frac{ad}{m}$. به‌علاوه،

$$\angle KBD + \angle MDB = \angle CAD + \angle ABD + \angle BDA + \angle CAB = ۱۸۰^\circ$$

یعنی، چهارضلعی $KBDM$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین، $|KM| = |BD| = n$. اما $\angle KAM = \angle A + \angle C$، بنابر قانون کسینوسها در مثلث KAM، داریم:



(شکل ۴۳)

$n^۲ = \left(\frac{ac}{m}\right)^۲+\left(\frac{bd}{m}\right)^۲-۲\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{bd}{m}\right)\cos(A+C)$، که از آنجا

$$m^۲n^۲=a^۲c^۲+b^۲d^۲-۲abcd\cos(A+C)$$

۲۳۷ ـ حکم قضیهٔ بطلمیوس، نتیجه‌ای از قضیهٔ برتشنیدر (مسألهٔ ۲۳۶ بخش ۲ را ببینید) است، زیرا برای چهارضلعی محاطی، $\angle A+\angle C=۱۸۰^\circ$.

۲۳۸ ـ اگر MB بزرگترین در پاره‌خطهای به‌طول $|MA|$، $|MB|$ و $|MC|$ باشد، آن وقت، با به‌کار بردن قضیهٔ برتشنیدر (مسألهٔ ۲۳۶ بخش ۲) در چهارضلعی $ABCM$، به‌دست می‌آوریم

$$|MB|^۲=|MA|^۲+|MC|^۲-۲|MA|.|MC|\cos(\angle AMC+۶۰^\circ)$$

یعنی، $|MB|<|MA|+|MC|$، زیرا $\angle AMC\neq ۱۲۰^\circ$.

۲۳۹ ـ در عبارت

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta}+t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha}=t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \qquad (۱)$$

با قرار دادن طول قطعهٔ مماسها، به‌کمک دستورهای به‌دست آمده ضمن حل مسألهٔ ۲۰۱ بخش ۱، قانع می‌شویم که اگر رابطهٔ (۱) برای برخی دایره‌های α، β، γ و δ، که در نقطه‌های A، B، C و D بر دایرهٔ مفروض مماس‌اند، برقرار باشد، آن وقت، برای هر نوعی از این دایره‌ها هم، برقرار است. می‌ماند اینکه درستی رابطهٔ (۱) را برای حالتی خاص تحقیق کنیم. اگر α، β، γ و δ دایره‌هایی با شعاع صفر باشند، آن وقت به‌قضیهٔ بطلمیوس معمولی (مسألهٔ ۲۳۷ بخش ۲) می‌رسیم. برای اینکه به‌قضیهٔ بطلمیوس نپردازیم، می‌توانیم دایره‌های α و δ را با شعاع صفر، و دایره‌های β و γ را، که بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ و تر AD مماس‌اند، اختیار کنیم. در این حالت، درستی رابطهٔ (۱) به‌سادگی تحقیق می‌شود. بنابراین، بر طبق ملاحظات انجام شده، درستی (۱) را در همهٔ حالتها به‌دست می‌آوریم (از این راه، به‌طور همزمان، خود قضیهٔ بطلمیوس را ثابت کرده‌ایم).

۲۴۰ ـ ضمن اثبات حکم، از روش «گسترش» دایره‌ها استفاده می‌کنیم. اساس این روش، بر آنچه که در زیر می‌آید مبتنی است. فرض کنید دو دایره، مثلاً α و β، بر دایرهٔ Σ مماس بیرونی باشند. دایره‌های α'، β' و Σ' را که، به‌ترتیب، با α، β و Σ هم‌مرکزند، در نظر بگیرید. اگر شعاع دایرهٔ Σ' به‌اندازهٔ χ از شعاع دایرهٔ Σ بزرگتر باشد و شعاع دایره‌های α'، β'، از شعاع دایره‌های α و β به‌همان مقدار χ، که به‌قدر کافی کوچک است، کمتر باشند، آن وقت دایره‌های α' و β' بر دایرهٔ Σ' مماس بیرونی‌اند، و طول مماس مشترک خارجی دایره‌های α' و β'، با طول مماس مشترک خارجی دایره‌های α و β برابر است. حالتی که α و β بر دایرهٔ Σ مماس درونی‌اند، به‌همین نحو بررسی می‌شود. اگر یکی از دایره‌های α و β، به‌طور بیرونی، و دیگری به‌طور درونی بر Σ مماس باشد، آن وقت با افزایش در شعاع Σ، شعاع دایرهٔ اولی کاهش و شعاع دایرهٔ دومی افزایش

پیدا می‌کند و طول مماس مشترک داخلی دایره‌های α' و β' بدون تغییر باقی می‌ماند. برای روشنی وضع، حالتی را که در برابری (*) (صورت مسأله را ببینید) تنها قطعه‌های مماسهای مشترک خارجی ظاهر می‌شوند، در نظر بگیرید. (توجه کنید که هیچ کدام از دایره‌ها در درون دیگری قرار ندارد.) ثابت می‌کنیم که دایره‌های α، β، γ و δ بر دایرهٔ معین Σ، به یک طریق، همگی یا بیرونی یا درونی، مماس‌اند. فرض کنید همهٔ دایره‌های α، β، γ و δ شعاع برابر نداشته باشند (حالت شعاعهای برابر، به‌سادگی، جداگانه بررسی می‌شود) و برای روشنی وضع، فرض کنید r_α، شعاع دایرهٔ α، کوچکترین شعاع باشد. دایره‌های α'، β'، γ' و δ' را در نظر بگیرید که در آنها α' دایره‌ای به‌شعاع صفر است، یعنی، نقطه‌ای که بر مرکز دایرهٔ α منطبق است و β'، γ' و δ' دایره‌هایی هستند که با دایره‌های β، γ، δ هم مرکزاند و شعاعهایشان به‌مقدار r_α از شعاعهای آنها کمتر است. برای پیش‌بردن برهان، از گزارهٔ زیر که با (T) مشخص می‌شود، استفاده می‌کنیم: اگر β'، γ' و δ' سه دایره باشند که هیچ کدام در درون دیگری نیست و دست کم یکی از آنها شعاع ناصفر دارد، آن وقت دقیقاً دو دایرهٔ Σ_1 و Σ_2 وجود دارد که هر یک از آنها بر دایره‌های β'، γ' و δ'، به‌یک طریق مماس است. در انتهای حل مسأله، به‌این گزاره باز می‌گردیم.

روی دایره‌های Σ_1 و Σ_2، نقطه‌های α_1 و α_2 را طوری بگیرید که

$$\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_1\delta'}}=\frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\delta'}}=\frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\delta'}}=\lambda$$

α_1 و α_2 روی کمانی قرار می‌گیرند که شامل نقطهٔ تماس با دایرهٔ γ' نیست. برای سه چهارتایی از دایره‌ها: $(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$، $(\alpha_1,\beta',\gamma',\delta')$، $(\alpha_2,\beta',\gamma',\delta')$ رابطهٔ (*) برقرار است: برای چهارتایی اول، این، گفتهٔ مسأله و برای دو چهارتایی دیگر، مبتنی بر مسألهٔ ۲۳۹ بخش ۲ است (α'، α_1 و α_2 دایره‌هایی با شعاع صفرند). در نتیجه

$$\frac{t_{\alpha_1\beta'}}{t_{\alpha_2\gamma'}}=\frac{t_{\alpha_2\beta'}}{t_{\alpha_2\gamma'}}=\frac{t_{\alpha'\beta'}}{t_{\alpha'\gamma'}}=\mu$$

اما، مکان هندسی نقطه‌های M که برای آنها نسبت طول مماسها به‌دو دایرهٔ ثابت، ثابت است، یک دایره است (مسألهٔ ۱۱ بخش ۲ را ببینید). بنابراین، α_1، α_2 و α' متعلق‌اند به‌هر دو مکان هندسی نقطه‌هایی که برای آنها نسبت طول مماسهای مرسوم بر دایره‌های β' و δ'، برابر با λ است و مکان هندسی نقطه‌هایی که برای آنها نسبت طول مماسهای مرسوم بر دایره‌های β' و γ'، برابر با μ است. و این بدان معنی است که α' باید بر α_1 یا α_2 منطبق باشد.

فرض کنید α_1 و α_2 بر هم منطبق باشند. ثابت کنید که در این حالت، دایره‌های تعریف شده با پارامترهای λ و μ بر یکدیگر مماس‌اند. $\tilde{\lambda}\neq\lambda$ ولی به‌قدر کافی نزدیک به‌آن، می‌گیریم. در این صورت، $\tilde{\lambda}$ روی Σ_1 و Σ_2 دو نقطهٔ $\tilde{\alpha}_1$ و $\tilde{\alpha}_2$ مشخص می‌کند که برای آنها

$$\frac{t_{\tilde{\alpha}_1\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_1\delta'}}=\frac{t_{\tilde{\alpha}_2\beta'}}{t_{\tilde{\alpha}_2\delta'}}=\tilde{\lambda}$$

به‌دست می‌آوریم: $\bar{\mu} = \frac{t_{\bar{\alpha}_1\beta'}}{t_{\bar{\alpha}_1\gamma'}} = \frac{t_{\bar{\alpha}_2\beta'}}{t_{\bar{\alpha}_2\gamma'}}$. بنابراین، دایره‌های متناظر با پارامترهای $\bar{\lambda}$و $\bar{\mu}$، در وتر $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$ مشترک‌اند. اگر $\bar{\lambda}\to\lambda$، آن وقت $\bar{\mu}\to\mu$ و $|\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2|\to 0$، یعنی، دایره‌های متناظر با پارامترهای λو μ، در نقطهٔ $\alpha_1=\alpha_2$ بر یکدیگر مماس‌اند. بدین ترتیب، α'، β'، γ'و δ' بر Σ_1 یا Σ_2 مماس‌اند. با «گسترش» Σ_1 یا Σ_2 به‌مقدار $\pm r_\alpha$، به‌این نتیجه می‌رسیم که α، β، γو δ بر یک دایره یا یک خط راست مماس‌اند (Σ_1 یا Σ_2 می‌توانند یک خط راست باشند) یا در یک نقطه مشترک‌اند.

اگر در برابری (*) برخی از پاره‌خطها، قطعه‌های مماسهای مشترک داخلی باشند، آن وقت باید وجود یک دایرهٔ Σ را ثابت کنیم که بر دایره‌های α، β، γو δ مماس است و آن دایره‌های α، β، γ و δ که به‌ازای آنها، در برابری (*) یک مماس مشترک داخلی ظاهر می‌شود، بر Σ به‌طرق متفاوت مماس باشند. گزارهٔ (T) باید به‌طوری مقتضی تغییر کند.

به‌گزارهٔ (T) باز می‌گردیم. به‌وسیلهٔ «گسترش»، می‌توانیم گزاره را به‌حالتی که یکی از دایره‌های β'، γ' و δ' شعاعی برابر صفر دارد، یعنی یک نقطه است، ساده کنیم. خوانندهٔ آشنا با مفهوم انعکاس، می‌تواند به‌سادگی ثابت کند که گزارهٔ (T)، اکنون، هم ارز این گزاره است که هر دو دایره که یکی در درون دیگری واقع نیست، دقیقاً دو مماس مشترک خارجی دارند.

تبصره. اگر سه تا از چهار دایرهٔ مفروض α، β، γو δ شعاعی برابر با صفر داشته باشند (اینها نقطه‌اند)، اثبات، به‌طور قابل توجهی ساده خواهد بود. این کار را به‌طور مستقل انجام دهید. از این به‌بعد (مسألهٔ ۲۸۷ بخش ۲ را ببینید)، فقط به‌این حالت خاص نیاز داریم.

۲۴۱ ـ ثابت کنید که هر یک از این شرطها، هم لازم و هم کافی است برای اینکه دایره‌ای، محاط در چهارضلعی $ABCD$وجود داشته باشد (مسألهٔ ۱۹ بخش ۱ را هم، ببینید).

۲۴۲ ـ نشان دهید که هر یک از این شرطها، هم لازم و هم کافی است برای اینکه دایره‌ای، مماس بر خطهای AB، BC، CD و DA، که مرکزش بیرون چهارضلعی $ABCD$است، وجود داشته باشد.

۲۴۳ ـ فرض کنید $ABCD$چهارضلعیی محیطی، O مرکز دایرهٔ محاطی آن، M_1 وسط AC، M_2وسط BD و rشعاع دایره باشد (فاصلهٔ O تا هر یک از ضلعها، برابر rاست)، x_1، y_1، z_1 و u_1 فاصله‌های M_1، به‌ترتیب، تا AB، BC، CD و DA، و x_2، y_2، z_2 و u_2 فاصله‌های M_2، به‌ترتیب، تا همین ضلعها هستند. چون $|AB|+|CD| = |BC|+|DA|$، داریم

$$|AB|r-|BC|r+|CD|r-|DA|r=0$$

به‌علاوه، $|AB|x_1-|BC|y_1+|CD|z_1-|DA|u_1=0$ و

$$|AB|\,x_2-|BC|\,y_2+|CD|\,z_2-|DA|\,u_2=0$$

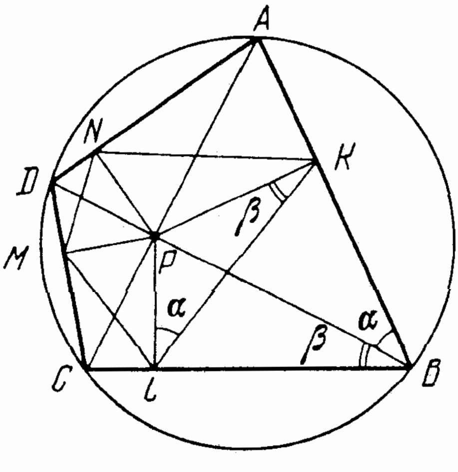
و این درست بدان معنی است که نقطه‌های O، M_1 و M_2 روی یک خط راست قرار دارند

(تبصرهٔ مسألهٔ ۲۲ بخش ۲ را ببینید). بقیهٔ حالتهای ترتیب نقطه‌های A، B، C و D و مرکز دایره، درست به‌همین نحو بررسی می‌شوند. در اینجا، از رابطه‌هایی که از پاره‌خطهای $|AB|$ ، $|BC|$ ، $|CD|$ و $|DA|$ تشکیل می‌شوند (مسأله‌های ۲۴۱ و ۲۴۲ بخش ۲ را ببینید)، استفاده کنید، و همان طور که در تبصرهٔ مسألهٔ ۲۲ بخش ۲ گفته شد، اگر دو نقطه در دو طرف یک خط راست واقع باشند، برای فاصله‌های متناظر آنها، علامتهای مخالف در نظر بگیرید.

۲۴۴ ـ فرض کنید P و L، به‌ترتیب، معرف نقطه‌های برخورد خطهای راست AM و AN با دایره باشند. از مسألهٔ ۲۰۴ بخش ۲، چنین نتیجه می‌شود که خطهای راست BL، DP و MN در یک نقطه به‌هم می‌رسند. اما BL و DP، چون قطرند، در مرکز دایره متقاطع‌اند، در نتیجه، MN از مرکز دایره می‌گذرد.

۲۴۵ ـ از قضیهٔ پاسکال (مسألهٔ ۲۰۴ بخش ۲) استفاده کنید.

۲۴۶ ـ فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد قطرها باشد و K، L، M و N پای عمودهای وارد از P، به‌ترتیب، بر AB، BC، CD و DA باشند (شکل ۴۴). چون $PKBL$ چهارضلعیی محاطی است، داریم: $\angle PKL = \angle PBC$ ، به‌همین ترتیب، $\angle PKN = \angle PAD$ ؛ اما، $\angle PBC = \angle PAD$ ، زیرا مقابل به‌یک کمان‌اند. در نتیجه، KP نیمساز زاویهٔ NKL است، بنابراین، نیمساز زاویه‌های چهارضلعی $KLMN$، در نقطهٔ P، که همان مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی $KLMN$ است، متقاطع‌اند. اکنون، فرض کنید AC و BD دوبه‌دو بر هم عمود باشند، R شعاع دایرهٔ مفروض و d فاصلهٔ P تا مرکز آن است، $|AP|.|PC| = R^2-d^2$. r، شعاع دایرهٔ مطلوب، به‌ویژه، برابر است با فاصلهٔ P تا KL. به‌فرض $\angle KLP = \angle ABP = \alpha$ و $\angle PBC = \beta$ ، به دست می‌آوریم



(شکل ۴۴)

$$r = |PL|\sin\alpha = |PB|\sin\beta\sin\alpha = |PB|\frac{|PC|}{|BC|}\cdot\frac{|AP|}{|AB|}$$

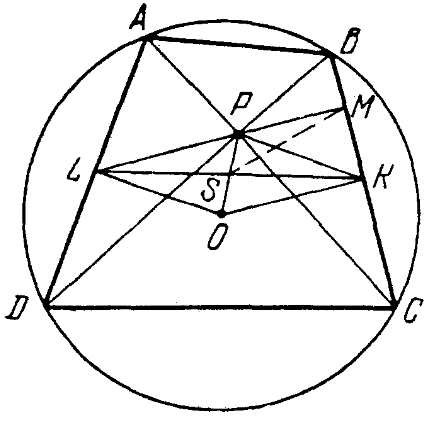
$$= (R^۲-d^۲)\frac{|PB|\,|AC|}{|BC|\cdot|AB|\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{|AC|}$$

$$= (R^۲-d^۲)\frac{۲S_{ABC}}{۲S_{ABC}}\cdot\frac{۱}{۲R} = \frac{R^۲-d^۲}{۲R}$$

جواب: $\frac{R^۲-d^۲}{۲R}$.

۲۴۷ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض، P نقطهٔ برخورد قطرهای آن، K وسط BC و L وسط AD باشد (شکل ۴۵). ثابت می‌کنیم که خط راست LP بر BC عمود است. با نشان دادن نقطهٔ برخورد LP و BC با M، داریم: $\angle BPM = \angle LPD = \angle ADP = \angle PCB$. در نتیجه، PM بر BC عمود است. بنابراین، OK با LP موازی است. به‌همین ترتیب، PK با LO موازی و $KOLP$ متوازی‌الاضلاع است و

$$|LK|^۲+|PO|^۲ = ۲(|LP|^۲+|PK|^۲) = ۲\left(\frac{|AD|^۲}{۴}+\frac{|BC|^۲}{۴}\right) = ۲R^۲$$



(شکل ۴۵)

(اگر وترهای AD و BC به‌وضعیتی در آیند که یک نقطهٔ انتهایی مشترک داشته باشند و کمانهای متناظرشان به‌دنبال یکدیگر باشند، آن وقت مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ساقهای به‌طول $|AD|$ و $|BC|$ و وتر به‌طول $۲R$ به‌وجود می‌آید، بنابراین، $|AD|^۲+|BC|^۲ = ۴R^۲$.)

در نتیجه، $|LK|^۲ = ۲R^۲-d^۲$، و نقطه‌های L و K روی دایرهٔ با مرکز S (وسط PO) و شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲-d^۲}$، واقع‌اند. اما، LMK مثلثی قائم‌الزاویه است، MS میانهٔ آن است و

$|MS| = \frac{۱}{۲}|LK| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - d^۲}$، یعنی، M روی همین دایره قرار دارد.

جواب: $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - d^۲}$.

۲۴۸ـ از مسأله‌های ۲۴۶ و ۲۴۷ نتیجه می‌شود که اگر قطرهای چهارضلعی محاطی دوبه‌دو بر هم عمود باشند، آن وقت تصویرهای نقطهٔ برخورد قطرهای این چهارضلعی روی ضلعهای آن، رأسهای چهارضلعیی به حساب می‌آیند که دایره‌ای قابل محاط شدن در آن و بر آن دایره‌ای قابل محیط شدن است. شعاعهای این دایره‌های محاطی و محیطی و فاصلهٔ میان مرکزهای آنها، به‌تمامی برحسب شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی اصلی و فاصلهٔ مرکزآن تا نقطهٔ برخوردقطرهای چهارضلعی محاط شده در آن، قابل محاسبه است. در نتیجه، وقتی که قطرهای چهارضلعی اصلی، دور نقطهٔ برخوردشان دوران داده شوند، چهارضلعی تشکیل شده با تصویرهای این نقطه، با باقی ماندن محاط در یک دایره و محیط بر یک دایره، دوران می‌کند. با در نظر گرفتن عبارتهای به‌دست آمده برای شعاع دایره‌های محاطی و محیطی در دو مسألهٔ قبل، به‌سادگی می‌توان نشان داد رابطه‌ای که می‌خواستیم ثابت کنیم، برای چنین چهارضلعیهایی درست است. برای تکمیل اثبات، می‌ماند اینکه ثابت کنیم هر چهارضلعی «محاطی ـ محیطی» قابل حصول از چهارضلعیی محاطی با قطرهای دوبه‌دو بر هم عمود، با استفاده از روش بالا، است. در حقیقت، اگر $KLMN$ چهارضلعیی «محاطی ـ محیطی» و P مرکز دایرهٔ محاطی آن باشد، آن وقت با رسم کردن خطهایی عمود بر نیمسازهای KP، LP، MP و NP، که، به‌ترتیب، از نقطه‌های K، L، M و N می‌گذرند، به‌چهارضلعی $ABCD$ می‌رسیم (شکل ۴۴ را ببینید). دراین حالت، $\angle BPK = \angle KLB = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle MLK$ (در اینجا، از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که در چهارضلعی $PKBL$ زاویه‌های روبه‌رو قائمه‌اند، و در نتیجه، چهارضلعیی محاطی است). به‌همین ترتیب، $\angle KPA = \angle KNA = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle MNK$، و بدین ترتیب

$$\angle BPA = \angle BPK + \angle KPA = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\angle MLK + \angle MNK) = ۹۰^\circ$$

بنابراین، کلیهٔ زاویه‌های BPA، APD، DPC و CPB قائمه‌اند، P نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ است و خود قطرها، دوبه‌دو بر هم عمود می‌شوند. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $ABCD$ چهارضلعیی محاطی است، زیرا

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle PBL + \angle PBK + \angle PDN + \angle PDM$$

$$= \angle PKL + \angle PLK + \angle PMN + \angle PNM$$

$$= \frac{۱}{۲}(\angle NKL + \angle KLM + \angle LMN + \angle MNK) = ۱۸۰^\circ$$

توجه: مسألهٔ ۳۱۹ بخش ۲ را هم ببینید.

۲۴۹ ـ وسط ضلعهای این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند که قطرهایش با پاره‌خطهایی که مرکزهای ثقل مثلثهای روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، موازی‌اند. متوازی‌الاضلاع دیگری با چهار ارتفاع مثلثهای گفته شده در صورت مساله، که از راسهای چهارضلعی خارج می‌شوند، تشکیل می‌شود. ضلعهای متوازی‌الاضلاع اول، با قطرهای چهارضلعی موازی‌اند، درحالی که ضلعهای متوازی‌الاضلاع دوم، بر آنها عمودند. به‌علاوه، طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع دوم، $\cot\alpha$ بار از ضلعهای متناظر متوازی‌الاضلاع اولی بزرگترند (α زاویهٔ حادهٔ میان قطرهای چهارضلعی است).

۲۵۰ ـ ثابت می‌کنیم هر دو ادعا (BD نیمساز زاویهٔ ANC و AC نیمساز زاویهٔ BMD است) با برابری $|AB|.|CD| = |AD|.|BC|$ هم‌ارزند. روی کمان BAD، نقطه‌ای مانند A_1 طوری اختیار می‌کنیم که $|DA_1| = |AB|$. شرطهای مسأله ایجاب می‌کنند که خط راست A_1C، از N، وسط BD، بگذرد، یعنی، مساحت مثلثهای DA_1C و A_1BC برابرند، که از آنجا $|DA_1|.|DC| = |BA_1|.|BC|$، یعنی، $|AB|.|CD| = |AD|.|BC|$.

۲۵۱ ـ عمود بودن نیمسازها به‌آسانی ثابت می‌شود. ادعای دوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید M معرف وسط AC و N وسط BD باشد. از تشابه مثلثهای AKC و BKD نتیجه می‌شود که $\angle MKA = \angle NKD$ و $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$، یعنی، نیمساز زاویهٔ BKC، نیمساز زاویهٔ MKN هم، هست و پاره‌خط MN را به‌نسبت $\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ تقسیم می‌کند. به‌روشنی، نیمساز زاویهٔ ALB، پاره‌خط MN را به‌همین نسبت تقسیم می‌کند.

۲۵۲ ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، O_1 و O_2 مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای DAB، BCD، و K و L، به‌ترتیب، وسط ضلعهای AB و BC هستند. نقطه‌های O_1 و O_2، به‌ترتیب، روی OK و OL قرار دارند و

$$\frac{|O_1O_2|}{|O_1K|} = \frac{|OO_2|}{|O_2L|}$$

این امر از این حقیقت که O_1O_2 بر DB عمود و، در نتیجه، با LK موازی است (LK بر AC عمود است)، نتیجه می‌شود. بنابراین، خطهای راست AO_1 و CO_2، OB را به‌یک نسبت تقسیم می‌کنند (قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲) را در مثلثهای OKB و OLD به‌کار می‌بریم).

۲۵۳ ـ فرض کنید R معرف شعاع دایره باشد و a، b و c، به‌ترتیب، فاصلهٔ P، Q و M تا مرکز آن باشند. در این صورت (مسألهٔ ۲۷۲ بخش ۱)، $|QP|^2 = a^2+b^2-2R^2$، $|QM|^2=b^2+c^2-2R^2$ و $|PM|^2=c^2+a^2-2R^2$. اگر O مرکز دایره باشد، آن‌وقت برای اینکه QO بر PM عمود باشد، لازم و کافی است که برابری $|QP|^2-|QM|^2=|OP|^2-|OM|^2$

یا $(a^۲+b^۲-۲R^۲)-(b^۲+c^۲-۲R^۲)=a^۲-c^۲$ برقرار باشد (مسألهٔ ۱ بخش ۲). عمود بودن بقیهٔ خطهای راست، به‌روش مشابه تحقیق می‌شود.

۲۵۴ـ اگر M، N، P و Q نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی، به‌ترتیب، با ضلعهای AB، BC، CD و DA باشند، آن وقت، همان‌طور که از حل مسألهٔ ۲۳۶ بخش ۱ نتیجه می‌شود، MP و NQ در نقطهٔ برخورد AC و BD به‌هم می‌رسند. به‌روش مشابه، ثابت می‌کنیم که خطهای MN و PQ در نقطهٔ برخورد خطهای راست AC و KL و خطهای راست MQ و NP در نقطهٔ برخورد خطهای KL و BD به‌هم می‌رسند. اکنون، از نتیجهٔ مسألهٔ قبل، برای چهارضلعی $MNPQ$، استفاده می‌کنیم.

۲۵۵ـ قرار می‌گذاریم: $\angle DAN=\angle MAB=\varphi$. فرض کنید L نقطهٔ برخورد AM و NB، P نقطهٔ برخورد AN و DM، و Q نقطهٔ برخورد AK و MN باشد. بنابر قضیهٔ سوا (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲)، در مثلث AMN داریم

$$\frac{|NQ|}{|QM|}=\frac{|AL|}{|LM|}\cdot\frac{|NP|}{|PA|}=\frac{S_{NAB}}{S_{NMB}}\cdot\frac{S_{DNM}}{S_{DAM}}$$

$$=\frac{\frac{|AN|}{۲}\,\frac{|AM|}{\cos\varphi}\sin\angle NAB\frac{|AN|}{۲}\,|NM|\tan\varphi\cos\angle ANM}{\frac{|AM|}{۲}\,|NM|\tan\varphi\cos\angle AMN\frac{|AN|}{۲\cos\varphi}\,|AM|\sin\angle MAD}$$

$$=\frac{|AN|\cos\angle ANM}{|AM|\cos\angle AMN}$$

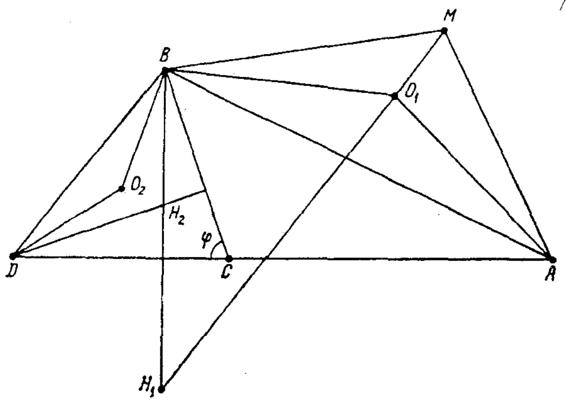
یعنی، Q، NM را به‌همان نسبت تقسیم می‌کند که ارتفاع مرسوم از A بر NM.

۲۵۷ـ نخست، گزارهٔ اضافی زیر را ثابت کنید: اگر A، B و C نقطه‌هایی همخط باشند و M نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد، آن وقت مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای MAC، MBC و MCA و نقطهٔ M روی یک دایره واقع‌اند. سپس، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۵۶ بخش ۲ استفاده کنید.

۲۵۸ـ فرض کنید A، B، C، D، P و Q معرف نقطه‌های برخورد خطهای راست مفروض باشند (نقطه‌ها به‌همان طریق حل مسألهٔ ۲۷۱ بخش ۱ قرار گرفته‌اند)؛ O مرکز دایره‌ای است که از A، B، C و D می‌گذرد و R شعاع آن است؛ a و b طول مماسهای مرسوم بر دایره، به‌ترتیب، از P و Q هستند. اینکه M روی PQ قرار دارد، ضمن حل مسألهٔ ۲۷۱ بخش ۱ ثابت شد. به‌علاوه، ثابت شد که $|PM|\cdot|PQ|=a^۲$، $|QM|.|QP|=b^۲$ و $|QP|^۲=\sqrt{a^۲+b^۲}$. بنابراین، $|PM|=\frac{a^۲}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ و $|QM|=\frac{b^۲}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$. به‌علاوه $|PO|=\sqrt{a^۲-R^۲}$ و $|QO|=\sqrt{b^۲-R^۲}$. در نتیجه، $|PO|^۲-|QO|^۲=a^۲-b^۲=|PM|^۲-|QM|^۲$.

این بدان معنی است که OM بر PQ عمود است. برای تکمیل اثبات، باید حالتی را که (با همان نمادگذاری) نقطه‌های A، C، P و Q روی دایره واقع‌اند، در نظر بگیریم (مسألهٔ ۲۵۳ بخش ۲ را هم ببینید).

۲۵۹ ـ اگر یکی از خطهای راست به‌موازات خودش جابه‌جا شود، آن وقت خط اویلر مثلثی که یکی از ضلعهایش خط جابه‌جا شده است، به‌موازت خودش جابه‌جا می‌شود. با در نظر گرفتن این امر، می‌توانیم به سادگی مسأله را به‌شکل زیر تبدیل کنیم. فرض کنید A، C و D سه نقطهٔ همخط باشند و B نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. اگر خط اویلر مثلث ABC با BD موازی باشد، آن وقت خط اویلر مثلث CBD با AB موازی می‌شود (شکل ۴۶). این را ثابت می‌کنیم. قرار می‌گذاریم: $\angle BCD=\varphi$ (فرض می‌کنیم C بین A و D قرار دارد و $\varphi \leq 90^\circ$)، O_1 و H_1، به‌ترتیب، مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، و O_2 و H_2 مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث BCD هستند. بر ABH_1 دایره‌ای محیط کنید تا O_1H_1 را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت می‌کنیم چهارضلعیهای O_1AMB و O_2DH_2B متشابه‌اند. پیش از هر چیز، مثلثهای O_1AB و O_2DB مثلثهای متساوی‌الساقین متشابه‌اند، و $\angle MAB = \angle MH_1B = \angle H_1BD = \angle H_2BD$ (BD با O_1H_1 موازی است) و $\angle MBA = \angle MH_1A = \angle H_2DB$ (AH_1 و DH_2 بر CB عمودند). تشابه این چهارضلعیها ثابت شد. به‌علاوه: $\angle O_2H_2B = \angle O_1MA = \angle H_1MA = \angle H_1BA = \angle H_2BA$، یعنی، H_2O_2 با AB موازی است.



(شکل ۴۶)

۲۶۰ ـ از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۹ بخش ۲، به‌دست می‌آید که وتر مشترک دایره‌های به‌قطر AE و DC (و نیز DC و BF، و BF و AE) شامل نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC، BDE، DAF و CEF است. به‌علاوه، فرض کنید K معرف نقطهٔ برخورد AE و DC، و L نقطهٔ

برخورد AE و BF باشد. بنابر قضیهٔ منلائوس (مسألهٔ ۴۵ بخش ۲)، در مثلثهای BEA و EAC داریم: $\frac{|BD|}{|DA|}\cdot\frac{|EC|}{|CB|}\cdot\frac{|AK|}{|KE|}=1$ و $\frac{|CF|}{|FA|}\cdot\frac{|EB|}{|BC|}\cdot\frac{|AL|}{|LE|}=1$. با تقسیم کردن این تساویها بر یکدیگر و در نظر داشتن اینکه $\frac{|AF|}{|FC|}\cdot\frac{|BD|}{|DA|}\cdot\frac{|CE|}{|EB|}=1$، به دست می‌آوریم: $\frac{|KE|}{|LE|}=\frac{|AK|}{|AL|}$. دایرهٔ به‌قطر AE را در نظر بگیرید. به‌ازای کلیهٔ نقطه‌های P از این دایره، نسبت $\frac{|PK|}{|PL|}$ ثابت است (مسألهٔ ۹ بخش ۲ را ببینید). همین مطلب برای دایره‌های به‌قطر DC و BF درست است. بنابراین، این سه دایره، در دو نقطهٔ P_1 و P_2 متقاطع‌اند، به‌طوری که نسبتهای فاصله‌های P_1 و P_2 تا K، L و M، به‌ازای آنها برابرند. اکنون، می‌توانیم از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۴ بخش ۲ استفاده کنیم.

۲۶۱ ـ حکم از نتیجهٔ مسألهٔ قبل به‌دست می‌آید.

۲۶۲ ـ فرض کنید $l(ABC)$ معرف عمود منصف پاره‌خطی باشد که نقطهٔ برخورد ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را به‌هم وصل می‌کند. فرض کنید خط راستی، ضلعهای BC، CA و ABی مثلث ABC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D، E و F قطع کند. ابتدا، ثابت می‌کنیم وقتی که خط راست DEF به‌موازات خودش جابه‌جا شود، نقطهٔ M، محل برخورد خطهای $l(DFB)$ و $l(DEC)$، یک خط راست را می‌پیماید. فرض کنید نقطه‌های D_1، E_1، F_1؛ D_2، E_2، F_2؛ D_3، E_3، F_3 متناظر با سه وضعیت از این خط باشند. خطهای $l(D_iF_iB)$ و $l(D_iE_iC)$ که در آنها $i=1,2,3$، در M_i به‌هم می‌رسند و خط راست BC را در نقطه‌های N_i و K_i قطع می‌کنند. به‌سادگی دیده می‌شود که نقطهٔ N_2، پاره‌خط N_1N_3 را به‌همان نسبتی تقسیم می‌کند که نقطهٔ K_2 پاره خط K_1K_3 را تقسیم می‌کند. این نسبت، برابر است با نسبتی که D_2، D_1D_3 را، E_2، E_1E_3 را، E_2، E_1E_3 را، و F_2، F_1F_3 را تقسیم می‌کند. چون خطهای راست $l(D_iF_iB)$ و نیز خطهای راست $l(D_iE_iC)$ موازی‌اند، خط $l(D_2F_2B)$، پاره‌خط M_1M_3 را به‌همان نسبت تقسیم می‌کند که خط $l(D_2E_2C)$، یعنی، M_2 روی پاره‌خط M_1M_3 قرار دارد.

اکنون، نشان می‌دهیم که نقطهٔ M، خط راست $l(ABC)$ را می‌پیماید. برای اثبات حکم اخیر، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای دو وضعیت از خط راست DEF، نقطهٔ M متناظر آن، روی $l(ABC)$ قرار دارد. حالتی را در نظر بگیرید که این خط از A می‌گذرد (نقطه‌های E و F بر A منطبق‌اند). دستگاه مختصاتی در نظر می‌گیریم که در آن، نقطه‌های A، B، C و D به‌مختصات زیر باشند: $A(0, a)$، $B(b, 0)$، $C(c, 0)$ و $D(d, 0)$. سپس، معادلهٔ خط راست $l(ABC)$ راپیدا می‌کنیم. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، به‌مختصات $\left(0,-\frac{bc}{a}\right)$ و

مرکز دایرهٔ محاطی آن به‌مختصات $\left(\frac{b+c}{۲}, \frac{۱}{۲}\left(a+\frac{bc}{a}\right)\right)$ است. معادلهٔ خط راست $l(ABC)$ را می‌نویسیم:

$$x(b+c)+y\left(a+\frac{۳bc}{a}\right)=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۴}+bc-\frac{۳b^{۲}c^{۲}}{۴a^{۲}}$$

با عوض کردن c با d در این معادله، معادلهٔ خط $l(ABD)$ و با عوض کردن b با d، معادلهٔ خط $l(ACD)$ را به‌دست می‌آوریم.

می‌توانیم تحقیق کنیم که هر سه خط راست، یک نقطهٔ مشترک $Q(x_{۰},y_{۰})$ دارند، که در آن

$$x_{۰}=\frac{۱}{۴}(b+c+d)-\frac{۳bcd}{۴a^{۲}}\ ,\ y_{۰}=\frac{۱}{۴a}(a^{۲}-bc-cd-db)$$

و این، پایان اثبات است، زیرا حالتی که خط DEF از B یا C بگذرد، با حالت بالا معادل است.

۲۶۳ ـ فرض کنید l، m، n و p خطهای راستی باشند که مثلثها را می‌سازند (شکل ۴۷ الف) نمادگذاری زیر را در نظر می‌گیریم: P مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تشکیل شده با خطهای l، m و n، و P_l مرکز دایرهٔ محاطی خارجی همین مثلث است که بر ضلعی که روی خط l قرار دارد، مماس است. نمادهای L، M_p، N_m، و غیره، به‌همین معنی‌اند.

L	N	M_l	P_n	$O_{۱}$
M	P	L_m	N_p	$O_{۲}$
P_m	M_p	N_m	L_p	$O_{۳}$
N_l	L_n	P_l	M_n	$O_{۴}$
$Q_{۱}$	$Q_{۲}$	$Q_{۳}$	$Q_{۴}$	

در جدول بالا، چهار نقطه‌ای که یک سطر یا ستون را تشکیل می‌دهند، روی یک دایره قرار دارند، مرکز دایره‌های متناظر با سطرها، روی یک خط راست $(q_{۱})$ قرار دارند، در حالی که مرکز دایره‌های متناظر ستونها، روی خط دیگری $(q_{۲})$ واقع‌اند؛ $q_{۱}$ و $q_{۲}$ دوبه‌دو بر هم عمودند و در نقطهٔ میشل (مسألهٔ ۲۵۶ بخش ۲) متقاطع‌اند. این را ثابت می‌کنیم. اینکه چهارتاییهای مشخص شده، روی یک دایره قرار دارند، به‌سادگی ثابت می‌شود. فرض کنید O_i و Q_i $(i=۱,۲,۳,۴)$ معرف مرکز دایره‌های متناظر با آنها باشند. ثابت می‌کنیم که $O_{۱}O_{۲}$ بر $Q_{۱}Q_{۳}$ و $Q_{۲}Q_{۴}$ عمود است. اگر در مثلث (l,m,n)، زاویهٔ میان l و m، برابر α باشد، آن وقت

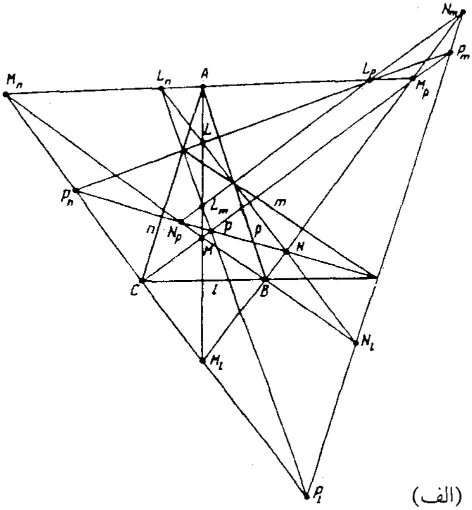
$$\angle LNM_l=\angle L_mPM=۹۰^{\circ}+\frac{\alpha}{۲}$$

درنتیجه، $\angle LO_۱M_l = \angle L_mO_۲M = ۱۸۰^\circ - \alpha$. به‌روش مشابه

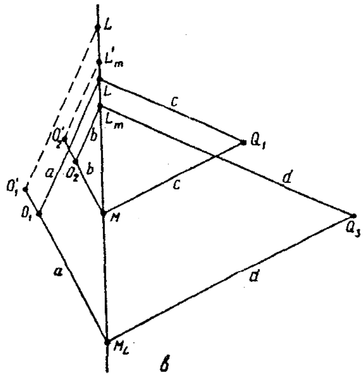
$$\angle LP_mM = \angle L_mP_lM_l = \frac{\alpha}{۲} \quad , \quad \angle LQ_۱M = \angle L_mQ_۳M_l = \alpha$$

مثلثهای $LO_۱M_l$، $L_mO_۲M$، $LQ_۱M$ و $L_mO_۳M_l$، مثلثهایی متساوی‌الساقین‌اند، و ساقهایشان بر هم عمودند (مثلاً $O_۱L$ و $LQ_۱$). به‌علاوه (شکل ۴۷ ب)

$$|Q_۱O_۱|^۲ - |O_۱O_۳|^۲ = (a^۲+c^۲)-(a^۲+d^۲) = (b^۲+c^۲)-(b^۲+d^۲)$$
$$= |O_۲Q_۱|^۲ - |O_۲Q_۳|^۲$$



(الف)



(ب)

(شکل ۴۷)

در نتیجه، O_1O_2 و Q_1Q_3 دوبه‌دو بر هم عمودند. به‌روش مشابه، ثابت می‌کنیم که O_1O_2 و Q_2O_4 هم، دوبه‌دو بر هم عمودند(خط راستی را در نظر بگیرید که نقطه‌های N، P، N_p و P_n بر روی آن واقع‌اند). بنابراین، Q_1Q_3 و Q_2Q_4 موازی‌اند (اگر این نقطه‌ها روی یک خط راست قرار نگیرند). به‌روش مشابه، Q_1Q_4 و Q_3Q_2 هم، موازی‌اند (اینها بر O_1O_3 عمودند)، Q_1Q_2 با Q_3Q_4 موازی است (اینها بر O_1O_4 عمودند)، و این بدان معنی است که نقطه‌های Q_1، Q_2، Q_3 و Q_4 همخط و برروی خط راست q_2 واقع‌اند؛ نقطه‌های O_1، O_2، O_3 و O_4 هم، همخط‌اند و روی خط q_2 قرار دارند. به‌روشنی، q_1 و q_2 دوبه‌دو بر هم عمودند.

خط m را به‌موازات خودش جابه‌جا می‌کنیم. فرض کنید L'، L'_m، O'_1 و O'_2 متناظر با خط راست m' باشند. نسبت $\frac{|LL'|}{|L_mL'_m|}=\frac{|O_1O'_1|}{|O_2O'_2|}$ ثابت است (این نسبت برابر $\frac{|AL|}{|AL_m|}$ است).

این بدان معنی است که وقتی خط m جابه‌جا شود، خط O_1O_2، یعنی، q_1، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. خط راست q_2 هم، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. چون q_1 و q_2 دوبه‌دو بر هم عمودند، نقطهٔ برخورد آنها یک دایره را می‌پیماید. اما، وقتی که m از A (و نیز B یا C) بگذرد، نقطه‌های L و L_m بر A منطبق می‌شوند و خطهای O_1O_2 و Q_1Q_3، یعنی، q_1 و q_2، از A (متناظراً B یا C) می‌گذرند. بنابراین، نقطهٔ برخورد q_1 و q_2، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را می‌پیماید. با جابه‌جا کردن خطهای دیگر (l,n,p)، ثابت می‌کنیم که نقطهٔ برخورد q_1 و q_2 به‌همهٔ دایره‌های محیطی تک‌تک مثلثهای تشکیل شده با خطهای l، m، n و p متعلق است، یعنی، خطهای q_1 و q_2 در نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی این مثلثها، یعنی در نقطهٔ میشل، به‌هم می‌رسند.

توجه کنید که، به‌طور همزمان، ثابت کرده‌ایم که چهار دایرهٔ محیطی مثلثهای تشکیل شده با چهار خط راست در صفحه، در یک نقطه متقاطع‌اند (مسألهٔ ۲۶۵ بخش ۲).

۲۶۶ـ فرض کنید C معرف یکی از نقطه‌های برخورد باشد که خط راست از آن می‌گذرد. فرض کنید B_1، B_2 و B_3 پای عمودهای فرود آمده، به‌ترتیب، از O_1، O_2 و O_3 روی این خط راست باشند و K و M نقطه‌های برخورد خطهای راست موازی با A_1A_2، که از O_1 و O_2 می‌گذرند، با O_2B_2 و O_3B_3 باشند. چون B_1 و B_2 وسط کمانهای A_1C و CA_2 هستند، داریم

$$|B_1B_2|=\frac{|A_1A_2|}{۲}$$

اگر α زاویهٔ میان خطهای راست A_1A_2 و O_1O_2 باشد، آن‌گاه

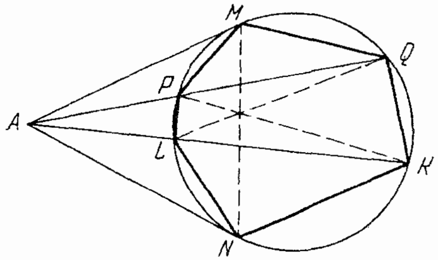
$$\frac{|A_1A_2|}{|O_1O_2|}=\frac{۲\,|B_1B_2|}{|O_1O_2|}=۲\,\frac{|O_1K|}{|O_1O_2|}=۲\cos\alpha$$

به‌روش مشابه، $\frac{|A_2A_3|}{|O_2O_3|}=۲\cos\alpha$.

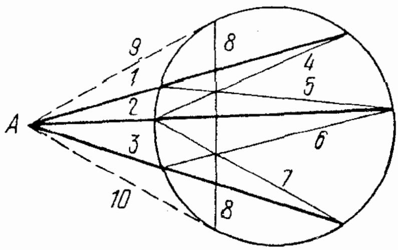
۲۶۸ـ فرض کنید O_1 و O_2 مرکز دایره‌ها و R_1 و R_2 شعاعهای آنها باشند، $a = |O_1O_2|$ و M نقطهٔ برخورد مماسهای مشترک داخلی است. دایرهٔ به‌قطر O_1O_2، از نقطه‌های برخورد مماسهای مشترک خارجی و داخلی می‌گذرد. در تبدیل تجانسی، به‌مرکز تجانس نقطهٔ M و به‌نسبت $\frac{a-R_1-R_2}{a}$، این دایره به‌دایره‌ای بامرکز روی خط O_1O_2 بدل می‌شود که بر دایره‌های مفروض مماس بیرونی است.

۲۶۹ـ فرض کنید M یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌ها باشد؛ در این صورت، MA و MC نیمسازهای (خارجی و داخلی) زاویهٔ M از مثلث BMD هستند، زیرا دایرهٔ به‌قطر AC، مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M است که به‌ازای آنها $\frac{|MB|}{|MD|} = \frac{|MA|}{|MC|}$ (مسألهٔ ۹ بخش ۲ را ببینید). با استفاده از رابطه‌های میان زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ AMC و مثلث BMD، قانع می‌شویم که شعاعهای دایره‌های محیطی، مرسوم از M، دوبه‌دو بر هم عمودند.

۲۷۱ـ توجه کنید که (شکل ۴۸ الف) مثلث APM با مثلث AMQ، APL با AKQ، و AKN با ALN متشابه است؛ از این متشابه بودنها، به‌دست می‌آوریم: $\frac{|AM|}{|AQ|} = \frac{|PM|}{|MQ|}$،



(الف)



(ب)

(شکل ۴۸)

$\frac{|AQ|}{|AL|}=\frac{|QK|}{|PL|}$ و $\frac{|AL|}{|AN|}=\frac{|LN|}{|NK|}$. با ضرب کردن این برابریها در هم و در نظر داشتن اینکه $|AN|=|AM|$، به‌دست می‌آوریم: $1=\frac{|LN|}{|NK|}\cdot\frac{|QK|}{|PL|}\cdot\frac{|PM|}{|MQ|}$. این (مسألهٔ ۴۹ بخش ۲ را ببینید)، همان شرط لازم و کافی است برای اینکه خطهای راست MN، PK و QL در یک نقطه به‌هم برسند. روش رسم خطهای مماس، با استفاده از یک خطکش تنها، از شکل ۴۸ ب روشن است. عددهای ۱، ۲، ...، ردیفی را که خطها رسم می‌شوند، نشان می‌دهند.

۲۷۲ ـ مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، یک خط راست است که قطبی نقطهٔ A نسبت به‌دایرهٔ مفروض است (مسألهٔ ۲۱ بخش ۲ را ببینید).

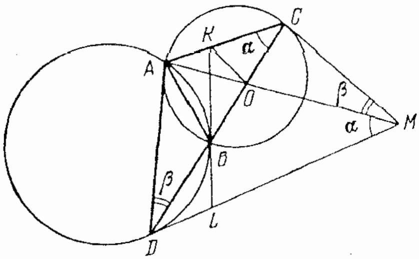
۲۷۳ ـ اندازهٔ زاویه‌های AMN و BNM را می‌توان بر حسب اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر با کمان ABی دایرهٔ مفروض، نشان داد (حالتهای مختلف جای N را در نظر بگیرید)؛ با این کار، می‌توان اندازهٔ زاویهٔ AMB را تعیین کرد. مکان مطلوب، یک دایره است.

۲۷۴ ـ از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۷۱ و ۲۱ بخش ۲ استفاده کنید. مکان به‌دست آمده، با مکان مسألهٔ ۲۱ بخش ۲ یکی است، یعنی، این مکان، قطبی نقطهٔ A نسبت به‌دایرهٔ مفروض است.

۲۷۵ ـ فرض کنید O معرف نقطهٔ برخورد AM و DC باشد (شکل ۴۹). از نقطهٔ B، مماسی بر دایرهٔ دوم رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AC را به K نشان می‌دهیم (مثل فرض مسأله). به‌روشنی، حکم مسأله معادل این ادعاست که KO با CM موازی است. فرض کنید زاویهٔ مقابل به‌کمان AB، در دایرهٔ اول برابر با α و در دایرهٔ دوم برابر با β باشد، در این صورت $\angle BCM=\angle BAC$، $\angle BDM=\angle BAD$ و

$$\angle DMC=180^\circ-\angle BDM-\angle BCM=180^\circ-\angle BAD-\angle BAC=180^\circ-\angle DAC$$

در نتیجه، $ADMC$ چهارضلعیی محاطی است و $\angle AMC=\beta$. به‌علاوه، اگر مماس BK، DM را در نقطهٔ L قطع کند، آن وقت $\angle KBO=\angle LBD=\angle BDL=\angle CAM$؛ بنابراین، $KABO$ هم، چهارضلعیی محاطی است، و $\angle KOA=\angle KBA=\beta$، یعنی، KO با CM موازی است (حالتهای دیگر جای نقطه‌های D، B و C نسبت به‌هم، به‌روش مشابه بررسی می‌شود).



(شکل ۴۹)

۲۷۶ ـ چون دایرهٔ به‌قطر CD، از نقطهٔ ثابت A، روی MN، می‌گذرد ($MN \perp CD$)، مقدار

$$|CN|.|CD| = |NA|^{۲} \qquad (۱)$$

ثابت است. نقطهٔ برخورد PQ و MN را با K نشان دهید. نشان می‌دهیم که $\frac{|MK|}{|KN|}$ ثابت است. توجه کنید که $\angle PNQ = ۱۸۰^\circ - \angle PMQ$ ؛ بنابراین

$$\frac{|MK|}{|KN|} = \frac{S_{PMQ}}{S_{PQN}} = \frac{|PM|.|MQ|}{|PN|.|NQ|} = \frac{|MN|}{|CN|} \cdot \frac{|MN|}{|ND|} = \frac{|MN|^{۲}}{|AN|^{۲}}$$

(از برابری (۱)، و این حقیقت که مثلث MNP با مثلث MNC، و مثلث MNQ با مثلث MND متشابه است، استفاده کرده‌ایم).

۲۷۷ ـ برابری $\angle O_{۱}AO_{۲} = \angle MAN$، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۷۹ بخش ۱ نتیجه می‌شود. برابری $\angle O_{۱}AO_{۲} = ۲\angle CAE$، ضمن حل مسألهٔ ۲۷۵ بخش ۱ اثبات شد.

۲۷۸ ـ فرض کنید O و $O_{۱}$ معرف مرکزهای دو دایرهٔ مورد بحث باشند (O وسط AB است)، K نقطهٔ تماس دایره‌ها (K روی خط راست $OO_{۱}$ است)، N نقطهٔ تماس دایرهٔ $O_{۱}$ با خط راست CD، و M نقطهٔ برخورد AB و CD است. چون $O_{۱}N$ با AB موازی است و مثلثهای $KO_{۱}N$ و KOA متساوی‌الساقین و متشابه‌اند، نقطه‌های N، K و A همخط‌اند. فرض کنید t معرف طول مماس بر دایرهٔ $O_{۱}$، مرسوم از نقطهٔ A، باشد (دایرهٔ $O_{۱}$ واقع در درون قطعهٔ CBD فرض می‌شود). داریم

$$\begin{aligned} t^{۲} &= |AN|.|AK| = |AN|^{۲}+|AN|.|NK| = |AM|^{۲}+|MN|^{۲}+|CN|.|ND| \\ &= |AM|^{۲}+|MN|^{۲}+(|CM|-|MN|)(|CM|+|MN|) \\ &= |AM|^{۲}+|CM|^{۲} = |AK|^{۲} \end{aligned}$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۷۹ ـ فرض کنید A وسط کمانی از دایرهٔ مفروض باشد که این قطعه در بر ندارد، و فرض کنید مماسهای از A بر دایره‌های محاط در قطعه، برابر باشند (مسألهٔ ۲۷۸ بخش ۲). این بدان معنی است که A روی خط راست MN واقع است، زیرا

$$|AO_{۱}|^{۲}-|AO_{۲}|^{۲} = |O_{۱}M|^{۲}-|O_{۲}M|^{۲}$$

که در آن $O_{۱}$ و $O_{۲}$ مرکز دایره‌ها هستند.

۲۸۰ ـ حالت کلی را، وقتی که دایره‌ها دلخواه باشند، در نظر بگیرید. فرض کنید F و F' مطابق شکل ۵۰ قرار گیرند. نمادگذاری از روی شکل روشن است. ثابت کنید، دایره‌ای محاط در چهارضلعی $AKBM$ وجود دارد، و سپس، از نتیجهٔ مسألهٔ ۵۵ بخش ۲ استفاده کنید. برای اثبات حکم اخیر، کافی است ثابت کنیم که (مسأله‌های ۲۴۱ و ۲۴۲ بخش ۲ را ببینید)

$$|BF|+|BF'|=|AF'|+|AF| \qquad (۱)$$

با توجه به‌اینکه $|BL|=|BT|$ و $|FS|=|FT|$، به‌دست می‌آوریم

$$|BF|=|BL|-|FS|$$

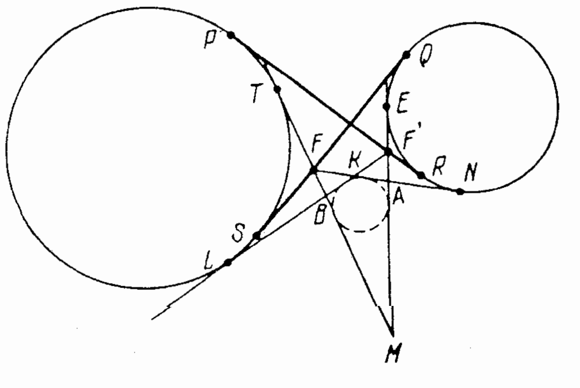
و به‌طور مشابه، $|BF'|=|F'P|-|BL|$ و $|F'A|=|AE|-|F'R|$. با قرار دادن این عبارتها در (۱)، به‌دست می‌آوریم

$$|BL|-|FS|+|F'P|-|BL|=|AE|-|F'R|+|FQ|-|AE|$$

$$\Rightarrow |F'R|+|F'P|=|FQ|+|FS| \Rightarrow |PR|=|SQ|$$

حالتهای باقی ماندهٔ ترتیب نقطه‌های F و F' بر روی مماسهای، درست به‌همین روش بررسی می‌شوند (نتیجهٔ حل مسأله‌های ۲۴۱ و ۲۴۲ بخش ۲، در نظر گرفته شود). چون هر مماس را نقطه‌های تماس و نقطهٔ برخورد مماسها، به‌چهار بخش تقسیم می‌کنند، $۸=\frac{۱}{۲}\times ۴^{۲}$ حالت داریم.

برای اثبات قسمت دوم مسأله، توجه می‌کنیم که وسطهای AB و FF' و $O_۳$، مرکز دایرهٔ سومی محاط در $AKBM$، روی یک خط راست واقع‌اند (مسألهٔ ۲۴۳ بخش ۲). اما، چون شعاع دایره‌های مفروض برابرند، AB با $O_۱O_۲$ موازی است ($O_۱$ و $O_۲$ مرکز دایره‌های مفروض‌اند)؛ A و B، به‌ترتیب، روی خطهای راست $O_۱O_۳$ و $O_۲O_۳$ واقع‌اند. بنابراین، خط راستی که از $O_۳$ و وسط AB می‌گذرد، $O_۱O_۲$ را نصف می‌کند.

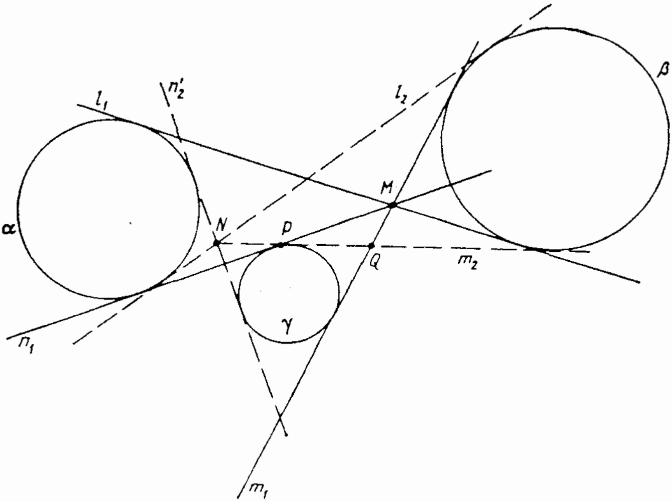


(شکل ۵۰)

۲۸۱ـ فرض کنید M نقطهٔ برخورد مماسهای $l_۱$، $m_۱$ و $n_۱$، و N نقطهٔ برخورد $l_۲$ و $m_۲$ باشد (شکل ۵۱). از N، خط راست $n'_۲$ را، مماس بر α و متمایز از $l_۲$، رسم می‌کنیم. به‌همان طریق مسألهٔ ۲۸۰ بخش ۲، می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای $m_۱$، $n_۱$، $m_۲$ و $n_۲$ بر یک دایره

مماس‌اند، این دایره، در مثلث PMQ، محاطی خارجی است (این دایره بر ضلع PQ مماس است)، یعنی، بر γ منطبق است.

تبصره. شکل ۵۱، متناظر با حالت کلی ترتیب دایره‌هایی است که در شرطهای مسأله صادق‌اند.



(شکل ۵۱)

۲۸۲ـ ثابت کنید که خط راست D_1C از O، مرکز کمان AB، و خط راست BC_1 از O_1، مرکز کمان AB_1، می‌گذرد (شکل ۵۲). DAD_1 مثلثی متساوی الاضلاع است، $|DC|=|AC|$، در نتیجه، D_1C بر DA عمود است، و D_1C از O می‌گذرد. به‌همین ترتیب، DC_1 بر D_1A عمود است. نقطهٔ O_1 روی کمان AB قرار دارد، زیرا از O، با دوران دور A، به‌اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$، به‌دست می‌آید. فرض کنید هر دو کمان به‌اندازهٔ 6α باشند (برای راحتی کار، $\alpha>\frac{\pi}{6}$). در این صورت، $\angle AO_1C_1 = 2\alpha$، $\angle O_1C_1A=\frac{\pi}{2}-\alpha$ و $\angle FAC_1 = 2\alpha$. در نتیجه، $\angle AFC_1 = \pi-2\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha=\angle FC_1A$، یعنی، $|AF|=|AC_1|=|AC|$.

ثابت می‌کنیم که مثلثهای FAC و EDC برهم قابل انطباق‌اند. داریم

$$|AF| = |AC| = |DC| = |DE|$$

$$\angle CDE = \angle CDB-\angle BDE = \pi-2\alpha-(\pi-2\angle DBE) = -2\alpha+2\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\alpha-\frac{\pi}{3} = \angle FAC$$

بنابراین، $|FC| = |CE|$. به‌علاوه داریم: $\angle DCE = \frac{2\pi}{3}-\alpha$ و $\angle B_1FD=\frac{\pi}{2}-\alpha$. (هر

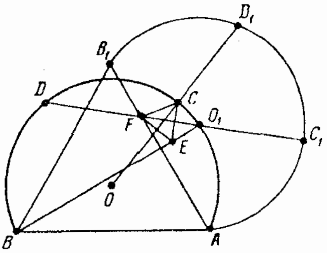
دو، بر حسب نصف مجموع اندازهٔ کمانهای متناظر محاسبه شده‌اند.)

$$\angle B_1FC = \pi - \angle CFA = \frac{\pi}{3} + \alpha$$

$$\angle DFC = \frac{5}{6}\pi$$

$$\angle DCF = \pi - \frac{5}{6}\pi - \alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \alpha$$

و بالاخره، $\angle FCE = \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\pi}{3}$.



(شکل ۵۲)

۲۸۳ ـ دو حالت در نظر بگیرید: (۱) مثلث ABC بر دایرهٔ مفروض محیط است؛ (۲) دایرهٔ مفروض بر امتداد ضلعهای AB و ACی مثلث مماس است.

در حالت اول، دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که بر ضلعهای زاویه در نقطه‌های M و N مماس و بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس درونی است. فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC باشند و r شعاع دایرهٔ مفروض باشد. $\angle A = \alpha$ و $x = |AN| = |AM|$. از قضیهٔ تعمیم یافتهٔ بطلمیوس (مسألهٔ ۲۳۹ بخش ۲) استفاده می‌کنیم: $xa = (b-x)c + (c-x)b$، که از آنجا

$$x = \frac{2bc}{a+b+c} = \frac{4S_{ABC}}{(a+b+c)\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}$$

یعنی، x ثابت است. (می‌توان ثابت کرد که MN از مرکز دایرهٔ مفروض می‌گذرد.)

در حالت دوم، باید دایرهٔ مماس بر ضلعهای زاویه و مماس بیرونی بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را اختیار کنیم.

۲۸۴ ـ طول ضلعهای مثلث ABC را به‌روش معمول نامگذاری کنید: a، b و c؛ فرض کنید $|BD| = d$، $|AD| = b_1$ و $x = |AM|$. از قضیهٔ تعمیم یافتهٔ بطلمیوس (مسألهٔ ۲۳۹ بخش ۲) استفاده کنید: $xa + (d - b_1 + x)b = (b - x)c$، که از آنجا

$$x = \frac{b(c + b_1 - d)}{a+b+c} \qquad (1)$$

برروی AB ، نقطهٔ N را طوری اختیار کنید که MN با BD موازی شود. داریم

$$|MN| = \frac{x}{b_1}d\,,\ |AN| = \frac{x}{b_1}c$$

$$S_{AMN} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 S_{ABD} = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 \frac{b_1}{b} S_{ABC} = \frac{x^2}{b_1 b} S_{ABC} \qquad (2)$$

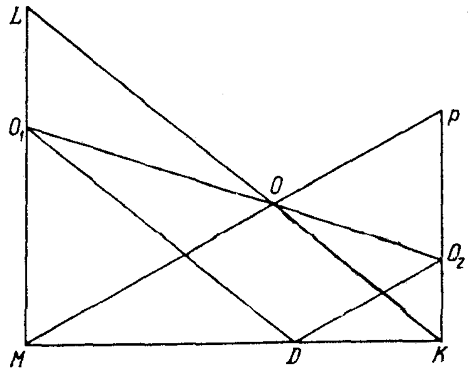
فرض کنید r شعاع دایره‌ای باشد که بر MN و امتداد AN و AM مماس است. در این صورت، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$r = \frac{2S_{AMN}}{|AM|+|AN|-|MN|} = \frac{2x^2 S_{ABC}}{bx(b_1+c-d)} = \frac{2S_{ABC}}{a+b+c}$$

یعنی، r برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC، که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۸۵ ـ فرض کنید M و K، به‌ترتیب، نقطه‌های تماس دایره‌های به‌مرکزهای O_1 و O_2 با AC باشند. از نتیجهٔ مسألهٔ قبل به‌دست می‌آید که $\angle O_1DM = \angle OKD = \frac{\varphi}{2}$ و $\angle O_2DK = \angle OMD = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$. OK و OM را امتداد می‌دهیم تا O_1M و O_1K را، به‌ترتیب، درنقطه‌های L و P قطع‌کنند (شکل۵۳). در ذوزنقهٔ $LMKP$ باقاعده‌های LM و PK، داریم: $\frac{|MO_1|}{|O_1L|} = \frac{|MD|}{|DK|} = \frac{|PO_2|}{|O_2K|}$. در نتیجه، O_1O_2 از نقطهٔ برخورد قطرهای این ذوزنقه، نقطهٔ O، می‌گذرد. به‌علاوه

$$\frac{|O_1O|}{|OO_2|} = \frac{|LM|}{|PK|} = \frac{|MK|\,\tan\frac{\varphi}{2}}{|MK|\,\cot\frac{\varphi}{2}} = \tan^2\frac{\varphi}{2}$$



(شکل ۵۳)

۲۸۶ـ حکم مسأله، از نتیجهٔ مسأله‌های ۲۸۵ و ۲۳۲ بخش ۲ به‌دست می‌آید.

۲۸۷ـ حکم این مسأله را می‌توان به‌کمک نتیجهٔ مسألهٔ ۲۴۰ اثبات کرد، به‌طور دقیقتر، در حالت خاص آن، وقتی که سه دایره، به‌شعاع صفر، یعنی نقطه، باشند. در این حالت، این نقطه‌ها وسط ضلعهای مثلث‌اند.

۲۸۸ـ حکم این مسأله، از قضیهٔ فوئرباخ (مسألهٔ ۲۸۷ بخش ۲) و این حقیقت که مثلثهای ABC، AHB، BHC و CHA دایرهٔ نه‌نقطهٔ یکسانی دارند (اثبات این امر به‌خواننده واگذار می‌شود)، نتیجه می‌شود.

۲۸۹ـ برای روشنی وضع، در مثلث ABC فرض کنید $a \le b \le c$. وسط ضلعهای BC، CA و AB را، به‌ترتیب، با A_1، B_1 و C_1، و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی و محاطی خارجی با دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC را، به‌ترتیب، با F، F_a، F_b و F_c نشان دهید. باید ثابت کنیم که در شش‌ضلعی $C_1F_cFA_1F_aF_b$ (نقطه‌های اختیار شده به‌ترتیب مشخص شده، یک شش‌ضلعی تشکیل می‌هند، زیرا $a \le b \le c$) قطرهای C_1A_1، F_cF_a و FF_a در یک نقطه به‌هم می‌رسند. برای اثبات حکم اخیر، کافی است ثابت کنیم که (مسألهٔ ۴۹ بخش ۲)

$$|C_1F_c|.|FA_1|.|F_aF_b| = |F_cF|.|A_1F_a|.|F_bC_1| \qquad (1)$$

با استفاده از دستورهای به‌دست آمده در مسألهٔ ۲۰۱ بخش ۱، به‌دست می‌آوریم

$$|C_1F_c| = \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_c}}$$

$$|FA_1| = \frac{c-b}{2}\sqrt{\frac{R}{R-2r}}$$

$$|F_aF_b| = \frac{(a+b)R}{\sqrt{R+2r_a}\cdot\sqrt{R+2r_b}}$$

$$|F_cF| = \frac{(b-a)R}{\sqrt{R-2r}\cdot\sqrt{R+2r_c}}$$

$$|A_1F_a| = \frac{c-b}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}}$$

$$|F_bC_1| = \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{R}{R+2r_b}}$$

اکنون، برابری (۱) به‌سادگی تحقیق می‌شود.

تبصره. می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی چهارضلعیی که رأسهایش نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی و محاطی خارجی مثلث مفروض با دایرهٔ نه نقطهٔ آن هستند،

بر امتدادهای میانخطهای این مثلث قرار دارند.

۲۹۰ - با استفاده از دستورهای مسأله‌های ۱۹۳، ۱۹۴ و ۲۸۹ بخش ۲ (در مسألهٔ اخیر، حل آن را ببینید)، به‌دست می‌آوریم $\frac{|F_bF_c|}{|B_1C_1|}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)R^3}{abc.|OI_a|.|OI_b|.|OI_c|}$. نسبتهای ضلعهای متناظر دیگر از مثلثهای $F_aF_bF_c$ و $A_1B_1C_1$، همین مقدار هستند. تشابه زوج مثلثهای دیگر، به‌روش مشابه ثابت می‌شود. برای $|A_1B_2|$ و دیگر مقدارها، دستورهایی مشابه با دستورهای مسألهٔ ۱۹۴ بخش ۲ به‌دست می‌آوریم.

۲۹۱ - ثابت کنید که $\triangle ABP=\triangle ACQ$. برای این منظور، کافی است ثابت شود $\triangle KBP=\triangle ABC$ و $\triangle FCQ=\triangle ABC$ (بنابر تساوی دو ضلع و زاویهٔ میان آنها):

$$\angle QAP=\angle CAB+\angle CAQ+\angle BAP=\angle CAB+\angle CAQ+\angle CQA$$

$$=\angle CAB+180^\circ-\angle QCA=\angle CAB+90^\circ-\angle QCF=90^\circ$$

(فرض شده است که $\angle CAB\leq 90^\circ$؛ حالت $\angle CAB>90^\circ$، به‌روش مشابه بررسی می‌شود).

۲۹۲ - چون $\angle FE_1E=\angle FCE=90^\circ$، FE_1EC چهارضلعیی محاطی است و $\angle FCE_1=\angle FEE_1=60^\circ$. به‌همین ترتیب، FE_1AD چهارضلعیی محاطی است و $\angle E_1DF=\angle E_1AF=60^\circ$، یعنی، DE_1C مثلثی متساوی‌الاضلاع است. به‌روش مشابه، ثابت می‌کنیم BF_1C هم، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲۹۳ - فرض کنید P، Q و R، به‌ترتیب، معرف نقطه‌های برخورد LB و AC، AN و BC، و LB و AN باشند. فرض کنید $a=|BC|$ و $b=|AC|$. کافی است نشان دهیم $S_{ACQ}=S_{APB}$ (هردو این‌مساحتها، با مساحتهای مورد بحث، به‌اندازهٔ مساحت مثلث APR اختلاف دارند). از تشابه مثلثهای متناظر، به‌دست می‌آوریم $|CQ|=|PC|=\frac{ab}{a+b}$. در نتیجه

$$S_{ACQ}=\frac{1}{2}|AC|.|CQ|=\frac{ab^2}{2(a+b)}$$

$$S_{APB}=S_{ACB}-S_{PCB}=\frac{1}{2}ab-\frac{a^2b}{2(a+b)}=\frac{ab^2}{2(a+b)}$$

۲۹۵ - ثابت‌کنیدکه مساحت مثلث با رأسهای مرکز مربعهای مرسوم بر ضلعهای مثلث مفروض و واقع دربیرون آن، ومساحت مثلث با رأسهای مرکز مربعهای مرسوم بر همان ضلعها در درون مثلث مفروض، به‌ترتیب، برابرند با $S+\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2)$ و $|S-\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2)|$، که در آنها a، b و c طول ضلعهای مثلث مفروض هستند و S مساحت آن است.

۲۹۶ - قرار می‌گذاریم: $\angle A_1BC=\alpha$ و $\angle A_1CB=\beta$؛ در این صورت، AA_1، BC را

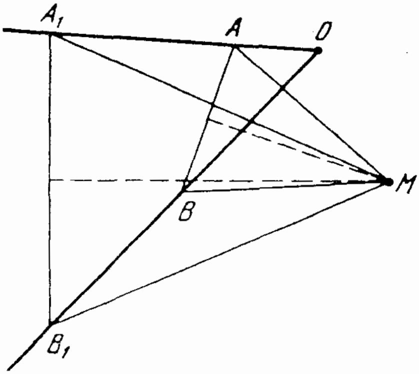
به‌نسبتی برابر با

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}}=\frac{\frac{1}{2}|AB|.|BA_1|\sin(\angle B+\alpha)}{\frac{1}{2}|AC|.|CA_1|\sin(\angle C+\beta)}=\frac{c}{b}\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\frac{\sin(\angle B+\alpha)}{\sin(\angle C+\beta)}$$

تقسیم می‌کند. با انجام دادن محاسبات مشابه برای دیگر ضلعهای مثلث ABC، از قضیهٔ سوا (مسألهٔ ۴۴ بخش ۲) استفاده کنید.

۲۹۷ـ فرض کنید KL کمان واقع در درون مثلث ABC باشد. با امتداد دادن ضلعهای AB و BC، از سمت نقطهٔ B، کمان MN را قرینه با کمان KL، نسبت به‌قطر موازی با AC، به‌دست می‌آوریم. چون $\angle B$ با کمان برابر با $\frac{1}{2}(\widehat{KL}+\widehat{MN})=\widehat{KL}$ برابر است، کمان KL طولی ثابت دارد، و زاویهٔ مرکزی متناظر با آن، برابر با زاویهٔ B است.

۲۹۸ـ فرض کنید O نقطهٔ برخورد خطهای راست باشد و A و A_1 دو وضعیت یک نقطه روی یکی از خطها در لحظه‌های متفاوت، و B و B_1 وضعیتهای نقطهٔ دیگر روی خط دیگر، در همان لحظه‌ها باشند (شکل ۵۴). عمودهایی بر وسطهای AB و A_1B_1 اخراج کنید ونقطهٔ برخورد آنها را با M نشان دهید. $\triangle AA_1M=\triangle BB_1M$، زیرا سه ضلع برابر دارند: هر کدام، از دیگری، با دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ AOB دور مرکز M، به‌دست می‌آید. این دوران، هر نقطهٔ روی AO را به‌وضعیت متناظر نقطه‌ای روی OB بدل می‌کند، بنابراین، نقطهٔ M ویژگی مطلوب را داراست.



(شکل ۵۴)

۲۹۹ـ (الف) فرض کنید A و B معرف نقطه‌های برخورد دایره‌ها، A نقطهٔ شروع دوچرخه سوارها، و M و N جای دوچرخه سوارها در لحظه‌ای معین از زمان باشند. اگر M و N در یک طرف AB باشند، آن وقت $\angle ABM=\angle ABN$، و اگر در دو طرف آن باشند، آن وقت $\angle ABM+\angle ABN=180^\circ$، یعنی، نقطه‌های B، M و N روی یک خط راست قرار دارند.

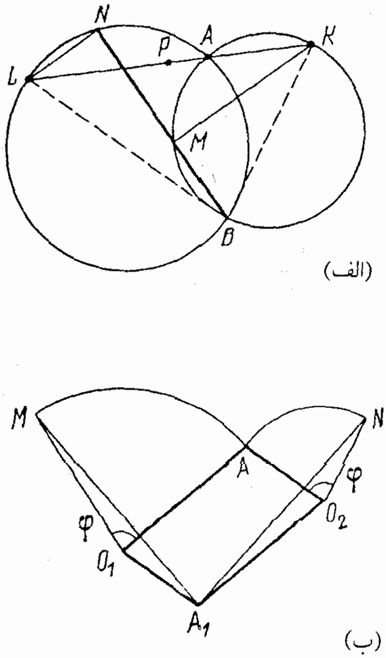
اگر L و K دو نقطه از دایره‌ها و مقابل قطری نقطهٔ B باشند (L و K ثابت‌اند)، آن وقت، چون $\angle LNM = \angle NMK = 90°$، نقطهٔ P، وسط LK، از N و M به‌فاصلهٔ برابر است. قانع می‌شویم که P، قرینهٔ B نسبت به وسط خط‌المرکزین دایره‌هاست (شکل ۵۵ الف).

(ب) فرض کنید O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌ها باشند. نقطهٔ A_1 را طوری می‌گیریم که $O_1AO_2A_1$ متوازی‌الاضلاع باشد. به‌سادگی می‌توان دید که مثلث MO_1A_1 با مثلث NO_2A_1 قابل انطباق است، زیرا $|MO_1| = |O_1A| = |O_2A_1|$،

$$|O_1A_1| = |O_2A| = |NO_2|$$

و $\angle MO_1A_1 = \varphi + \angle AO_1A_1 = \varphi + \angle AO_2A_1 = \angle NO_2A_1$، که در آن، φ، زاویهٔ متناظر با کمانهای طی شده توسط دوچرخه سوارهاست (شکل ۵۵ ب). بنابراین، نقطه‌های مطلوب، قرینهٔ نقطه‌های برخورد دایره‌ها، نسبت به‌وسط پاره‌خط O_1O_2، هستند.

تبصره. در قسمت (الف)، می‌توانستیم درست به‌همان روش قسمت (ب) عمل کنیم. مثلاً، با گرفتن نقطهٔ P به‌طوری که $\triangle O_1PO_2 = \triangle O_1AO_2$ (A و P در یک طرف O_1O_2 و نامنطبق‌اند)، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که مثلثهای متناظر، قابل انطباق‌اند.



(الف)

(ب)

(شکل ۵۵)

۳۰۰ـ (ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید. دوران دور $O_۱$ را با دو نگاشت تقارن محوری، با انتخاب خط راست $O_۱O_۲$ به‌جای محور متقارن نگاشت دوم، و دوران دور $O_۲$ را با دو نگاشت تقارن محوری، با انتخاب خط راست $O_۱O_۲$ به‌جای محور تقارن نگاشت اول، جایگزین کنید.

تبصره. اگر $\alpha+\beta = ۲\pi$، آن وقت، به‌راحتی قانع می‌شویم که انجام دورانهای مفروض به‌توالی، با یک انتقال هم‌ارز است.

جواب: اگر $\alpha+\beta<۲\pi$، آن وقت، زاویه‌های مثلث برابرند با $\frac{\alpha}{۲}$، $\frac{\beta}{۲}$ و $\pi-\frac{\alpha+\beta}{۲}$، و اگر $\alpha+\beta>۲\pi$، آن گاه این زاویه‌ها برابرند با $\pi-\frac{\alpha}{۲}$، $\pi-\frac{\beta}{۲}$ و $\frac{\alpha+\beta}{۲}$.

۳۰۱ـ سه دوران متوالی دور نقطه‌های K، L و M (یا دور $K_۱$، $L_۱$ و $M_۱$) به‌اندازهٔ زاویه‌های α، β و γ انجام می‌دهیم. چون $\alpha+\beta+\gamma = ۲\pi$، تبدیل حاصل یک انتقال است (مسألهٔ ۳۰۰ بخش ۲ را ببینید). اما، چون یکی از رأسهای مثلث اصلی، در این دورانها ثابت باقی می‌ماند، کلیهٔ نقطه‌های صفحه باید ثابت باقی بمانند. بنابراین، مرکز دوران سوم (نقطهٔ M)، باید بر مرکز دوران حاصل از انجام متوالی دو دوران اول دور نقطه‌های K و L، منطبق شود. اینک، از نتیجهٔ مسألهٔ قبل استفاده کنید.

۳۰۲ـ قرار می‌گذاریم: $\angle BOC = ۲\alpha$، $\angle DOE = ۲\beta$ و $\angle FOA = ۲\gamma$. فرض کنید K، M و L، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد دایره‌های محیطی مثلث BOC و AOF، BOC و DOE، و AOF و DOE باشند. نقطهٔ K درادرون مثلث AOB قرار دارد، و

$$\angle BKO = ۱۸۰^\circ-\angle BCO = ۹۰^\circ+\alpha$$

$$\angle AKO = ۹۰^\circ+\gamma$$

چون $\alpha+\beta+\gamma = ۹۰^\circ$، $\angle AKB = ۹۰^\circ+\beta$. به همین ترتیب، L در درون مثلث FOE قرار دارد، $\angle OLF = ۹۰^\circ+\gamma$ و

$$\angle OLE = ۹۰^\circ+\beta$$

$$\angle FLE = ۹۰^\circ+\alpha$$

به‌این ترتیب، $|AK| = |OL|$ و

$$\angle KOL = ۲\gamma+\angle KOA+\angle LOF = ۲\gamma+\angle KOA+\angle KAO = ۹۰^\circ+\gamma = \angle AKO$$

بنابراین، مثلثهای KOL و AKO برهم قابل‌انطباق‌اند، یعنی، $|KL| = |AO| = R$. به‌روش مشابه ثابت می‌کنیم که طول هر کدام از دو ضلع دیگر مثلث KLM، برابر است با R.

۳۰۳ـ فرض‌کنید $ABCD$ معرف چهارضلعی مفروض باشد و $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$ مرکزلوزیهای ساخته شده، به‌ترتیب، روی AB، BC، CD و DA باشند؛ K و L، به‌ترتیب، وسط ضلعهای

AB و BC هستند و M وسط قطر AC است. مثلثهای O_1KM و O_2LM برهم‌قابل‌انطباق‌اند ($|AB|=|LM|$ ، $|O_1K|=\frac{1}{2}|AB|=|LM|$، $|BC|=|O_2L|$ ، $|KM|=\frac{1}{2}|BC|$ و $\angle O_1KM=\angle O_2LM$).

اگر $\angle ABC+\alpha<\pi$ ، آن وقت این مثلثها در درون مثلث O_1MO_2 قرار می‌گیرند، و اگر $\angle ABC+\alpha>\pi$ ، آن وقت آنها بیرون مثلث O_1MO_2 واقع‌اند (زاویه‌های لوزی با رأس B، برابرند با α). بنابراین، $|O_1M|=|O_2M|$ و $\angle O_1MO_2=\pi-\alpha$. به‌روش مشابه، $|O_3M|=|O_4M|$ و $\angle O_3MO_4=\pi-\alpha$. درنتیجه، مثلثهای O_1MO_3 و O_2MO_4 برهم قابل انطباق‌اند، و هر کدام، از دیگری، با دوران دور M به‌اندازهٔ زاویهٔ $\pi-\alpha$، به‌دست می‌آید. بدین ترتیب، حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۳۰۴ـ فرض کنید ABC مثلث مفروض، $A_1B_1C_1$ مثلث Δ و $A_2B_2C_2$ مثلث δ باشد (A_1 و A_2 مرکز مثلثهای ساخته شده روی BC هستند) و a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC باشند.

(الف) این مطلب که $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متساوی‌الاضلاع‌اند، مثلاً، از نتیجهٔ مسألهٔ ۳۰۱ بخش ۲ به‌دست می‌آید.

(ب) حکم کلیتری را ثابت می‌کنیم. اگر روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون (یا داخل) آن مثلثهای مشابه A_1BC، B_1CA و C_1AB رسم شوند، به‌طوری که

$$\angle A_1BC=\angle B_1CA=\angle C_1AB\ ,\ \angle A_1CB=\angle B_1AC=\angle C_1BA$$

آن وقت نقطه‌های میانه‌ای مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ بر هم منطبق‌اند. نخست، توجه کنید که اگر M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، آن وقت $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$، و بر عکس، اگر این تساوی برقرار باشد، آن وقت M نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC است. می‌ماند تحقیق کنیم که $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}=0$، یا

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC_1})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA_1})+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB_1})=0$$

اما، $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$. به‌علاوه، $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}=0$، زیرا هر یک از بردارهای $\overrightarrow{AC_1}$، $\overrightarrow{BA_1}$ و $\overrightarrow{CB_1}$، به‌ترتیب، از بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$، با دوران آنها دور یک زاویه ($\angle A_1BC$) و ضرب در یک عدد واحد، به‌دست می‌آیند.

(ج) حالت کلیتری را در نظر بگیرید. مثلثهای متساوی‌الساقین A_1BC، B_1CA، C_1BA و A'_1BC، B'_1CA، C'_1BA، که در آنها نسبت طول ارتفاع مرسوم به قاعده، به‌طول قاعده برابربا k است، با قاعده‌های ضلعهای مثلث ABC، در بیرون و در درون آن، رسم می‌شوند. فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد؛ a، b و c طول ضلعهای آن و A_0، B_0 و C_0، به‌ترتیب، وسط BC، CA و AB باشند. برای روشنی وضع، فرض می‌کنیم ABC مثلثی حاده باشد. در این صورت

$$S_{A_1OC_1}=\frac{1}{2}|A_1O|.|C_1O|\sin B=\frac{1}{2}(|OA_0|+ka)(|OC_0|+kc)\sin B$$
$$=\frac{1}{2}|OA_0|\cdot|OC_0|\sin B+\frac{1}{2}k^2ac\sin B+\frac{k}{2}(a|OC_0|+c|OA_0|)\sin B$$
$$=k^2S_{ABC}+S_{A_0OC_0}+\frac{k}{4}b^2$$

با به‌دست آوردن رابطه‌های مشابه برای مثلثهای A_1OB_1 و B_1OC_1، و جمع کردن آنها با یکدیگر، به‌دست می‌آوریم: $S_{A_1B_1C_1}=\left(3k^2+\frac{1}{4}\right)S_{ABC}+\frac{k}{4}(a^2+b^2+c^2)$ (این برابری برای مثلث منفرجه هم درست است). برای مثلث $A'_1B'_1C'_1$ داریم

$$S_{A'_1B'_1C'_1}=\left|\frac{k}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(3k^2+\frac{1}{4}\right)S_{ABC}\right|$$

در نتیجه، اگر $\frac{k}{4}(a^2+b^2+c^2)-\left(3k^2+\frac{1}{4}\right)S_{ABC}\geq 0$، آن وقت

$$S_{A_1B_1C_1}-S_{A'_1B'_1C'_1}=\left(6k^2+\frac{1}{2}\right)S_{ABC}$$

و اگر $\frac{k}{4}(a+b+c)-\left(3k^2+\frac{1}{4}\right)S_{ABC}<0$، آن‌گاه

$$S_{A_1B_1C_1}-S_{A'_1B'_1C'_1}=\frac{k}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

می‌توانیم ثابت کنیم که همیشه داریم $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$ (در مسألهٔ ۳۶۲ بخش ۲، نابرابری قوئتری را اثبات می‌کنیم). و این بدان معنی است که به‌ازای $k=\frac{1}{2\sqrt{3}}$، تفاضل میان مساحت مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$، برابر است با S_{ABC}.

۳۰۵ـ فرض کنید سه نقطهٔ مفروض، یک مثلث ABC تشکیل دهند. دو خانوادهٔ ممکن از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC، وجود دارد. خانوادهٔ اول، به‌طریق زیر به‌دست می‌آید. دایره‌هایی برروی ضلعهای مثلث طوری رسم می‌کنیم که کمانهای این دایره‌ها، که بیرون مثلث واقع‌اند، به‌اندازهٔ زاویهٔ $\frac{4\pi}{3}$ باشند. یک نقطهٔ دلخواه A_1، روی دایرهٔ ساخته شده برروی BC، اختیار می‌کنیم. خط راست A_1B، دایرهٔ مرسوم بر BA را، برای بار دوم، در نقطه‌ای مانند C_1 و خط راست A_1C، دایرهٔ مرسوم بر CA را در نقطه‌ای مانند B_1 قطع می‌کند. مثلث $A_1B_1C_1$ یکی از مثلثهای متعلق به‌خانوادهٔ اول است. فرض کنید E، F و G نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث $A_1B_1C_1$ با دایره‌های مرسوم بر ضلعهای مثلث مفروض باشند. نقطه‌های E، F و G ثابت‌اند (E وسط کمان دایرهٔ مرسوم بر BC است و با مثلث ABC، در یک طرف BC قرار دارند). نقطه‌های E، F و G مرکز مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده در درون و روی ضلعهای مثلث ABC، هستند. مثلث EFG متساوی‌الاضلاع است (مسألهٔ ۳۰۴ بخش ۲ را ببینید) و مرکز آن بر نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC منطبق است. مرکز مثلث $A_1B_1C_1$ برروی

دایرهٔ محیطی مثلث EFG قرار دارد؛ مربع شعاع این دایره، برابر می‌شود با $\frac{۱}{۹}\left(\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}-۲S\sqrt{۳}\right)$. که در آن، a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC هستند و S مساحت آن است (حل مسألهٔ ۳۴ بخش ۲ را ببینید).

دومین خانواده، از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC، به‌شرط آنکه کمانهای بیرونی دایره‌هایی که برروی ضلعهای مثلث شده‌اند، (هرکدام) برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ باشند، به‌دست می‌آید.

مکان مطلوب، عبارت است از دو دایرهٔ هم‌مرکز، که مرکزهایشان بر نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC منطبق‌اند و شعاعهایشان برابرند با $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲+c^۲)\pm ۲S\sqrt{۳}}$.

۳۰۶ـ ثابت کنید که مثلثهای $CB_۱A_۲$ و $CA_۱B_۲$، هر یک، از دیگری، با دوران دور نقطهٔ C به‌اندازهٔ زاویهٔ ۹۰°، به‌دست می‌آید. در حقیقت، $\triangle CBB_۱=\triangle CAA_۱$ ($|BB_۱|=|AC|$، $|BC|=|AA_۱|$ و $\angle CBB_۱=\angle CAA_۱$)،وچون $AA_۱\perp BC$ و $BB_۱\perp AC$، داریم: $B_۱C\perp A_۱C$. به‌همین ترتیب، $A_۲C$ و $B_۲C$ با یکدیگر برابر و دوبه‌دو بر هم عمودند.

۳۰۷ـ ثابت کنید که طول مماسهای بر دایره، مرسوم از رأسهایی که بین آنها یکی از رأسهای چندضلعی قرار دارد، با یکدیگر برابرند. به‌این ترتیب، نتیجه می‌شود که در چندضلعی با تعداد ضلعهای فرد، نقطه‌های تماس، وسط ضلعهای آن هستند.

۳۰۸ـ توجه کنید که اگر دستگاه بردارهایی را در نظر بگیریم که نقطهٔ ابتدای آنها، در مرکز n ضلعی منتظم و نقطهٔ انتهایی آنها، روی رأسهای آن قرار گیرد، آن وقت مجموع این بردارها صفر است. در حقیقت، اگر همهٔ این بردارهای را به‌اندازهٔ زاویهٔ $\frac{۲\pi}{n}$ دوران دهیم، آن وقت مجموعشان تغییری نمی‌کند، از طرف دیگر، بردار مجموع آنها، به‌اندازهٔ همان زاویه دوران می‌کند. به‌این ترتیب، مجموع تصویرهای این بردارها روی هر محور دلخواه هم، صفر می‌شود.

به‌مسألهٔ خودمان بازمی‌گردیم. اگر φ زاویهٔ میان خط راست مفروض (آن را با l نشان می‌دهیم) و یکی از بردارها باشد، آن وقت بقیهٔ بردارها با آن، زاویه‌های $\varphi+\frac{۲\pi}{n}$، $\varphi+۲\frac{۲\pi}{n}$،... و $\varphi+(n-۱)\frac{۲\pi}{n}$ می‌سازند. مربع فاصلهٔ رأس kام تا l، برابر است با

$$\sin^۲\left(\varphi+k\frac{۲\pi}{n}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\cos\left(۲\varphi+k\frac{۴\pi}{n}\right)\right)$$

اما، مقدارهای $\cos\left(۲\varphi+k\frac{۴\pi}{n}\right)$، تصویرهای دستگاهی از n بردار که با l زاویه‌های $۲\varphi+k\frac{۴\pi}{n}$ ($k=۰,۱,\ldots,n-۱$) می‌سازند، روی آن هستند. اگر n فرد باشد، این بردارها یک n ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند، و اگر n زوج باشد، آنها، یک $\frac{n}{۲}$ ضلعی دوبار تکرار شده، می‌سازند.

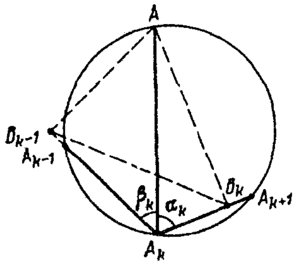
جواب: $\frac{n}{۲}$.

۳۰۹ـ الف) اگر طول ضلع چندضلعی برابر با a و S مساحت آن باشد و x_1، x_2، …، x_n فاصله‌های نقطه‌ای معلوم در درون چندضلعی تا ضلعهای آن باشند، آن‌وقت، حکم مسأله ازبرابری $S = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{2}$ نتیجه می‌شود.

(ب) چندضلعی منتظمی را در نظر بگیرید که چندضلعی مفروض را در بردارد و ضلعهایش با ضلعهای چندضلعی مفروض موازی است. مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در درون چندضلعی مفروض تا ضلعهای چندضلعی منتظم، مقدار ثابتی است (قسمت (الف)) و تفاضل آن با مجموع فاصله‌های این نقطه تا ضلعهای چندضلعی مفروض، ثابت است.

۳۱۰ـ فرض کنید B_1، B_2، … و B_{n+1} معرف نقطه‌های قرینهٔ نقطه‌های A_1، A_2، … و A_{n+1}، نسبت به قطر A_0A_{2n+1}، و C_k و C_k' نقطه‌های برخورد خط راست A_kA_{2n+1-k} با OA_n و OA_{n+1} باشند. فرض کنید D_{k-1} و D_k نقطه‌های برخورد خطهای راست A_kB_{k-1} و A_kB_{k+1} با قطر باشند. به‌روشنی، همین نقطه‌ها، نقطه‌های برخورد خطهای راست B_kA_{k-1} و B_kA_{k+1} با قطر هستند. همچنین، روشن است که مثلث $D_{k-1}A_kD_k$ بر مثلث $C_kOC'_k$ قابل انطباق است. بنابراین، مجموع طول پاره‌خطهای $C_kC'_k$، برابراست با مجموع طول پاره‌خطهای $D_{k-1}D_k$ $(k = 1, \ldots, n)$، اما، $D_0 = A_0$ و $D_n = O$، یعنی این مجموع برابر با شعاع نیمدایره است.

۳۱۱ـ فرض کنید A (شکل ۵۶) نقطهٔ مفروض و A_k یک رأس از $2n$ ضلعی باشد، B_{k-1} و B_k پای عمودهای وارد از نقطهٔ A بر روی ضلعهای حامل A_k، α_k و β_k زاویه‌های تشکیل شده با خط راست AA_k و این ضلعهای هستند ($\beta_k = \angle AA_kB_{k-1}$ و $\alpha_k = \angle AA_kB_k$) چون چهارضلعی $AB_{k-1}A_kB_k$ محاطی است، داریم: $\angle AB_{k-1}B_k = \alpha_k$ و $\angle AB_kB_{k-1} = \beta_k$ (یا مکمل این زاویه‌ها)؛ از این رو، بنابر قانون سینوسها، $\frac{|AB_{k-1}|}{|AB_k|} = \frac{\sin\beta_k}{\sin\alpha_k}$ و $\frac{|AB_{k-1}|\,|AB_{k+1}|}{|AB_k|^2} = \frac{\sin\beta_k \sin\alpha_{k+1}}{\sin\alpha_k \sin\beta_{k+1}}$. با ضرب کردن این تساویهای به‌ازای $k = 2, 4, \ldots, 2n$ در هم، و جایگزینی اندیس $2n+1$ با ۱، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.



(شکل ۵۶)

۳۱۲ـ ثابت‌کنیدکه‌اگر O_k و $O_{k+۱}$ مرکزدایره‌های‌مماس بردایرهٔ‌مفروض‌درنقطه‌های A_kو $A_{k+۱}$ باشند؛ B نقطهٔ برخوردآنها واقع برکمان $A_kA_{k+۱}$باشد؛ r_k و $r_{k+۱}$شعاعهای آنها باشند، آن‌وقت $r_k+r_{k+۱}=r$ و $\angle A_kO_kB=\angle A_{k+۱}O_{k+۱}B=\angle A_kOA_{k+۱}$ (r شعاع دایرهٔ مفروض و O مرکزآن است). به‌این‌ترتیب، برابری، به‌ازای بقیهٔ شعاعها هم، به‌دست می‌آید،که این برای n فرد، بدان معنی است که همهٔ آنها برابرند با $\frac{r}{۲}$. به‌علاوه، $\widehat{A_kB}+\widehat{BA}_{k+۱}=\widehat{A_kA}_{k+۱}$ (کمانهای کوچکتر دایره‌های متناظر در نظر گرفته شده‌اند).

۳۱۳ـ الف) فرض کنید A نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد (Aروی کمان $A_۱A_{۲n+۱}$ است). فرض‌کنید a معرف طول ضلع چندضلعی و b طول قطر واصل بین هر دو رأس باشد. بنابر قضیهٔ بطلمیوس (مسألهٔ ۲۳۷ بخش ۲)، در چهارضلعی $AA_kA_{k+۱}A_{k+۲}$داریم: $|AA_k|a+|AA_{k+۲}|a=|AA_{k+۱}|b$ $(k=۱,۲,\ldots,۲n-۱)$. برای چهارضلعیهای $AA_۱A_{۲n+۱}A_{۲n}$ و $A_۲A_۱AA_{۲n+۱}$هم، می‌توان رابطه‌هایی مشابه نوشت:

$$|AA_۱|a+|AA_{۲n+۱}|b=|AA_{۲n}|a$$

$$|AA_{۲n+۱}|a+|AA_۱|b=|AA_۲|a$$

با جمع کردن این تساویها باهم و نگهداشتن رأسهای زوج در طرف راست و رأسهای فرد در طرف چپ، به‌حکم مطلوب می‌رسیم.

(ب) حکم، از قسمت (الف) و نتیجهٔ مسألهٔ ۲۰۶ بخش ۱ (می‌توان دستور مشابهی برای حالت مماس بودن درونی دایره‌ها به‌دست آورد) به‌دست می‌آید.

۳۱۴ـ الف) فرض کنید l، ACو BCرا، به‌ترتیب، در نقطه‌های Kو N قطع کند و بر دایره در نقطهٔ M مماس باشد (شکل ۵۷). قرار می‌گذاریم: $|AC|=|BC|=a$، $|AK|=|KM|=x$ و $|BN|=|NM|=y$. به‌روشنی، $\frac{w^۲}{uv}=\frac{(a-x)(a-y)}{xy}$، اما، بنابر قانون کسینوسها، در مثلث CKN تساوی زیر درست است

$$(x+y)^۲=(a-x)^۲+(a-y)^۲-۲(a-x)(a-y)\cos\alpha \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{xy}{(a-x)(a-y)}$$

بنابراین، $\frac{uv}{w^۲}=\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$. (بقیهٔ حالتهای جای خط l، به‌روش مشابه بررسی می‌شود.)

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. با ضرب کردن تساویهای نظیر، به‌ازای همهٔ زاویه‌های nضلعی، درهم، به‌مربع نسبت مطلوب،که خود برابر است با

$$\frac{۱}{\sin\frac{\alpha_۱}{۲}\sin\frac{\alpha_۲}{۲}\cdots\sin\frac{\alpha_n}{۲}}$$

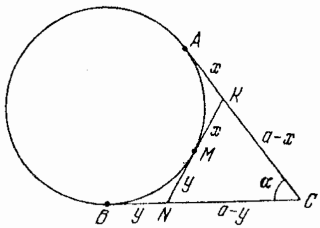
می‌رسیم، که در آن، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n زاویه‌های چندضلعی‌اند.

(ج) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. نقطه‌های تماس ضلعهای A_1A_2، A_2A_3، ...، $A_{2n-1}A_{2n}$ و $A_{2n}A_1$ با دایره را، به‌ترتیب، با B_1، B_2، ...، B_{2n-1} و B_{2n} فاصله‌های A_1، A_2، ... A_{2n} تا l را، به‌ترتیب، با x_1، x_2، ...، x_{2n-1} و x_{2n}؛ فاصله‌های B_1، B_2، ...، B_{2n} تا l را، به‌ترتیب، با y_1، y_2، $\cdots$ و y_{2n}، نشان می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت

$$\frac{x_1^2}{y_{2n}y_1}=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha_1}{2}},\ \frac{x_2^2}{y_1y_2}=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha_2}{2}},\ \cdots,\ \frac{x_{2n}^2}{y_{2n-1}y_{2n}}=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha_{2n}}{2}}$$

که در آنها، α_1، α_2، ... و α_{2n} زاویه‌های چندضلعی‌اند. با ضرب کردن برابریهای شامل x_1، x_3، ... و x_{2n-1}، در هم، و تقسیم کردن آنها بر حاصلضرب تساویهای باقیمانده، به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{x_1x_3\cdots x_{n-1}}{x_2x_4\cdots x_{2n}}\right)^2=\left(\frac{\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_4}{2}\cdots\sin\frac{\alpha_{2n}}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2}\cdots\sin\frac{\alpha_{2n-1}}{2}}\right)^2$$



(شکل ۵۷)

۳۱۵ـ حکم مسأله را می‌توان به‌روش استقرا ثابت کرد. مرحلهٔ شروع برهان، $n=4$، در مسألهٔ ۲۳۵ بخش ۲ بررسی شده است.

با این حال، راه دیگری برای حل، مبتنی بر تساوی زیر، پیشنهاد می‌کنیم. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم که زاویهٔ A بزرگترین زاویه باشد و r و R، به‌ترتیب، شعاع دایرهٔ محاطی و محیطی و d_a، d_b و d_c فاصله‌های مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلعهای متناظر از مثلث باشند. در این صورت به‌ازای مثلث حاده

$$r+R=d_a+d_b+d_c \qquad (1)$$

و به‌ازای مثلث منفرجه

$$r+R=-d_a+d_b+d_c \qquad (2)$$

(در مثلث قائم‌الزاویه، $d_a=0$ و در این مثلث هر دو رابطهٔ بالا درست است).

برهان. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد؛ $A_\circ$، $B_\circ$ و $C_\circ$، به‌ترتیب، وسط ضلعهای BC، CA و AB باشند؛ و O مرکز دایرهٔ محیطی باشد. بنابر قضیهٔ بطلمیوس (مسألهٔ ۲۳۷ بخش ۲)، در چهارضلعی $AB_\circ OC_\circ$ داریم: $\frac{b}{۲}d_c+\frac{c}{۲}d_b=\frac{a}{۲}R$. با نوشتن دو رابطهٔ مشابه در چهارضلعیهای $A_\circ OC_\circ B$ و $A_\circ OB_\circ C$، و جمع کردن آنها با هم، به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}\right)d_c+\left(\frac{a}{۲}+\frac{c}{۲}\right)d_b+\left(\frac{b}{۲}+\frac{c}{۲}\right)d_a=\frac{۱}{۲}(a+b+c)R=pR$$

که از آنجا $p(d_a+d_b+d_c)-\frac{۱}{۲}(cd_c+bd_b+ad_a)=pR$. از آنجا که

$$\frac{۱}{۲}(cd_c+bd_b+ad_a)=S=pr$$

پس‌ازحذف‌کردن p، به‌برابری (۱) می‌رسیم. حالت $\angle A>۹۰^\circ$، به‌روش مشابه بررسی می‌شود. حکم مسأله از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. برای این منظور، تساویهای متناظر را به‌ازای همهٔ مثلثهای افراز می‌نویسیم. توجه کنید که هر قطر، به‌جای یک ضلع از دو مثلث است. در نتیجه، فاصلهٔ تا قطر انتخاب شده، متناظر با این مثلثها، در رابطه‌ها، با علامتهای مخالف ظاهر می‌شود. از این‌رو، با جمع کردن همهٔ این برابریها (به‌شرط اینکه مرکز دایره در درون چندضلعی قرار گیرد)، به‌دست می‌آوریم: $\sum r+R=d_۱+d_۲+\cdots+d_n$، که در آن $d_۱$، $d_۲$، ... و d_n فاصله‌های مرکز دایره تا ضلعهای چندضلعی هستند. اگر مرکز دایره بیرون چندضلعی قرار گیرد، آن وقت فاصلهٔ تا بزرگترین ضلع، با علامت منها گرفته می‌شود.

۳۱۶- برای روشنی وضع، حالتی را در نظر بگیرید که M درِ درون چندضلعی قرار دارد. فرض کنید u و v معرف فاصله‌های M، به‌ترتیب، تا $A_۱A_۲$ و $A_۱A_n$، و x و y اندازهٔ تصویرهای $A_۱M$ روی $A_۱A_۲$ و $A_۱A_n$ باشند (اگر این تصویرها، روی نیمخطهای $A_۱A_۲$ و $A_۱A_n$ واقع باشند، x و y مثبت و در غیر این صورت منفی گرفته می‌شوند). $|A_۱B_۱|=|A_۱B_n|=a$ و $\angle A_۲A_۱A_n=\alpha$. فاصله‌های u و v را می‌توان برحسب x و y نشان داد: $u=\frac{y}{\sin\alpha}-x\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و $v=\frac{x}{\sin\alpha}-y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$؛ به‌این‌ترتیب

$$u+v=(x+y)\frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}=(x+y)\tan\frac{\alpha}{۲}=(x+y)\frac{r}{a}$$

اکنون، داریم

$$\begin{aligned}(|MB_۱|^۲+|MB_n|^۲)a&=((x-a)^۲+u^۲+(y-a)^۲+v^۲)a\\&=((x-a)^۲+(u-r)^۲+(y-a)^۲+(v-r)^۲+r(u+v)-r^۲)a\\&=۲d^۲a+۲ra(u+v)-۲r^۲a\\&=۲d^۲a+۲r^۲(x+y)-۲r^۲a\end{aligned}$$

با نوشتن رابطه‌هایی مشابه برای هر رأس و جمع کردن آنها با هم، به‌حکم مسأله می‌رسیم.

۳۱۷ـ سه مثلث ABC، ACD و ADB را با رأس مشترک A در نظر بگیرید. تصویر M روی AB، AC و AD را، به‌ترتیب، با B_1، C_1 و D_1 نشان دهید. خطهای راست B_1C_1، C_1D_1 و D_1B_1، خطهای سیمسون نقطهٔ M نسبت به‌مثلثهای ABC، ACD و ADB هستند. اما نقطه‌های A، M، B_1، C_1 و D_1 بر یک دایره واقع‌اند (AM قطر این دایره است). در نتیجه، تصویرهای نقطهٔ M روی B_1C_1، C_1D_1 و D_1B_1، روی خط راستی واقع‌اند که خط سیمسون نقطهٔ M نسبت به‌مثلث $B_1C_1D_1$ است. با در نظر گرفتن تصویرهای نقطهٔ M روی خطهای سیمسون متناظر سه مثلث با رأس مشترک B، به‌این نتیجه می‌رسیم که این سه تصویر هم، بر یک خط راست واقع‌اند، بنابراین، چهار تصویر، همخط‌اند. به‌استقرا، گذر از n به $n+1$، درست به‌روش مشابه انجام می‌شود.

۳۱۸ـ برای روشنی وضع، فرض کنید B_1 روی کمان A_1A_2، که دور قطعه‌ای است که دایرهٔ β را در برندارد، قرار دارد. فرض کنید C_1، C_2، ...، به‌ترتیب، نقطه‌های تماس A_1A_2، A_2A_3، ... با دایرهٔ β و D_1، D_2، ... نقطه‌های تماس B_1B_2، B_2B_3، ... با همین دایره باشند (شکل ۵۸)؛ K، L و P نقطه‌های برخورد D_1C_1 و A_1B_1، D_1C_1 و A_2B_2، و A_1B_1 و A_2B_2 هستند. در مثلثهای A_1KC_1 و D_1LB_2 داریم: $\angle KC_1A_1 = \angle LD_1B_2$ و

$$\angle C_1A_1K = \angle D_1B_2L$$

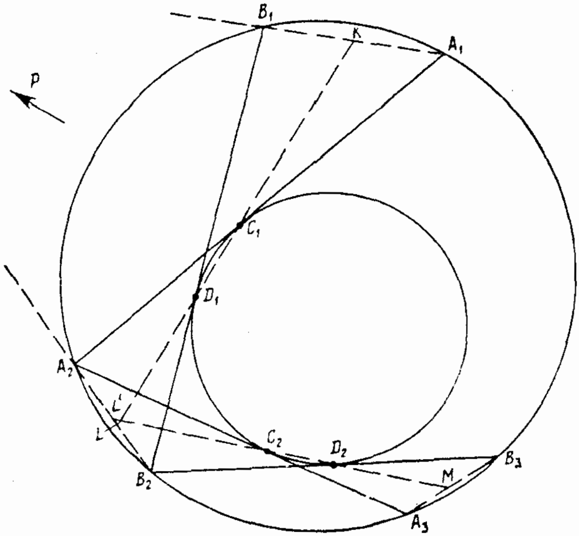
به‌این ترتیب، $\angle C_1KA_1 = \angle D_1LB_2$، یعنی، KPL مثلثی متساوی‌الساقین است و $|KP| = |PL|$.

دایرهٔ γ، مماس بر KP و PL، به‌ترتیب، در نقطه‌های K و L، را درنظر بگیرید. مرکز این دایره روی خط راستی قرار دارد که از مرکز دایره‌های α و β می‌گذرد (مسألهٔ ۱۲ بخش ۲ را ببینید). فرض کنید خط D_2C_2، A_2B_2 و A_3B_3 را، به‌ترتیب، در نقطه‌های L' و M قطع کند. مثل حالت قبل، ثابت می‌کنیم که دایره‌ای مانند γ' با مرکز واقع بر خط راست گذرنده از مرکز دایره‌های α و β و مماس بر A_2B_2 و A_3B_3، به‌ترتیب، در نقطه‌های L' و M، وجود دارد. ثابت می‌کنیم که γ و γ' بر هم منطبق‌اند. برای این کار، کافی است ثابت کنیم که L و L' بر هم منطبق‌اند. داریم

$$\frac{|A_2L|}{|LB_2|} = \frac{S_{A_2C_1D_1}}{S_{B_2C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{2}|D_1C_1|.|A_2C_1|\sin\angle A_2C_1D_1}{\frac{1}{2}|D_1C_1|.|B_2D_1|\sin\angle B_2D_1C_1} = \frac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}$$

به‌همین ترتیب، $\frac{|A_2L'|}{|L'B_2|} = \frac{|A_2C_2|}{|B_2D_2|} = \frac{|A_2C_1|}{|B_2D_1|}$، یعنی L و L' بر هم منطبق‌اند.

تبصره. از نحوهٔ استدلال معلوم می‌شود که در حالت ما، نقطه‌های تماس γ با خطهای راست A_1B_1، A_2B_2، ... در درون پاره‌خطهای A_1B_1، A_2B_2، ... واقع‌اند.



(شکل ۵۸)

۳۱۹ـ با استفاده از نمادگذاری مسألهٔ قبل، حکم مسأله به‌شکل زیر منجر می‌شود: اگر A_{n+1} بر A_1 منطبق شود، آن وقت B_{n+1} بر B_1 منطبق می‌شود. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت A_1B_1 و A_1B_{n+1} بر دایرهٔ γ مماس‌اند، A_1A_2، γ را قطع می‌کند و B_1 و B_{n+1} روی کمان A_1A_2 نظیر قطعه‌ای که β را در برندارد، واقع‌اند. نقطه‌های تماس A_1B_1 و A_1B_{n+1} با γ، در درون پاره‌خطهای A_1B_1 و A_1B_{n+1} قرار دارند. به‌این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که برای دو مماس مرسوم از A_1 بر γ، نقطه‌های تماسشان با γ، در یک طرف قاطع A_1A_2 واقع‌اند. اما، این ناممکن است.

۳۲۰ـ مثلث B_0XC_0 را در نظر می‌گیریم. خط راست XR نیمساز زاویهٔ C_0XB_0 است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\angle C_0RB_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\angle C_0XB_0$. به‌این ترتیب، نتیجه می‌شود که C_0R و B_0R، به‌ترتیب نیمساز زاویه‌های XC_0B_0 و XB_0C_0 هستند (مسألهٔ ۴۶ بخش ۱ را ببینید). به‌همین نحو، در مثلثهای C_0YA_0 و A_0ZB_0، نقطه‌های P و Q نقطه‌های برخورد نیمسازها هستند. بنابراین، با در نظر گرفتن اینکه $\angle PA_0Q = \frac{\angle A}{3}$، $\angle QB_0R = \frac{\angle B}{3}$ و $\angle RC_0P = \frac{\angle C}{3}$، به‌حکمی می‌رسیم که از آن قضیهٔ مورلی نتیجه می‌شود.

۳۲۱ـ ضمن حل مسأله، از گزاره‌های زیر استفاده می‌کنیم که به‌سادگی اثبات می‌شوند.

(الف) اگر نقطهٔ N روی نیمساز زاویهٔ M از مثلث KLM (در درون این مثلث) طوری اختیار شود که $\angle KLN = \frac{1}{2}(\pi + \angle KML)$، آن وقت N نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث KLM است. (مسألهٔ ۴۶ بخش ۱ را ببینید).

(ب) اگرنقطهٔ N در درون زاویهٔ KML وبیرون مثلث KLM، برروی امتداد نیمساز زاویهٔ درونی M طوری اختیار شود که $\angle KNL = \frac{1}{2}(\pi - \angle KML)$، آن وقت N نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ M و نیمسازهای زاویه‌های خارجی K و L است.

(ج) اگر نقطهٔ N در درون زاویهٔ KML و روی نیمساز زاویهٔ خارجی K از مثلث KML اختیار شود، به‌طوری که $\angle MNL = \frac{1}{2} \angle MKL$، آن وقت N نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ M و نیمسازهای زاویه‌های خارجی K و L است.

حکم را به‌ازای همهٔ مقدارهای ممکن i، j و k (در کل، هفت حالت) به‌یک شکل ثابت می‌کنیم. هر دفعه، حکم عکس نظیر، هم‌ارز با حالت قضیهٔ مورلی، را بیان و اثبات می‌کنیم. مسألهٔ قبل نمونه‌ای از یک چنین شکلی از اثبات است. برای اجتناب از تکرار، نخست، قسمت کلی اثبات را مشخص می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع PQR را در نظر بگیرید. مثلثهای متساوی‌الساقین PXQ، QYR و RZP را با قاعده‌های ضلعهای آن رسم می‌کنیم (هر مثلث و چگونگی ترسیم آن در هر هفت حالت، توضیح داده می‌شود). فرض کنید $A_\circ$ معرف نقطهٔ برخورد خطهای راست ZP و YQ، $B_\circ$ نقطهٔ برخورد XQ و ZR، و $C_\circ$ نقطهٔ برخورد YR و XP باشد. در این صورت، در هر حالت ثابت می‌کنیم که مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$ با مثلث ABC متشابه است و نیمخطهای $A_\circ P$ و $A_\circ Q$، $B_\circ Q$ و $B_\circ R$، و $C_\circ R$ و $C_\circ P$ سه‌سازهای آن از نوع متناظرشان هستند.

اکنون، در هر حالت مشخص می‌کنیم که چه مثلثی و چگونه باید برروی ضلعهای مثلث PQR رسم شود.

(۱) $i=j=k=1$؛ $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle A)$، $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle B)$ و $\angle RZP = \frac{1}{3}(\pi + 2\angle C)$. همهٔ مثلثها، بیرون مثلث PQR واقع‌اند.

(۲) $i=1$ و $j=k=2$؛ $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$، $\angle QYR = \pi - \frac{2\angle B}{3}$ و $\angle RZP = \pi - \frac{2\angle C}{3}$. همهٔ مثلثها، بیرون مثلث PQR قرار دارند. (فرض می‌کنیم $\angle A < \frac{\pi}{2}$. اگر $\angle A > \frac{\pi}{2}$، آن وقت مثلث PXQ رو به‌سمت دیگر مثلث PQR قرار دارد و $\angle PXQ = \frac{1}{3}(2\angle A - \pi)$. اگر $\angle A = \frac{\pi}{2}$، آن وقت مثلث PXQ به‌یک جفت خط موازی تبدیل می‌شود. این یادآوری را، در بررسی بقیهٔ حالتها، در نظر خواهیم داشت.)

(۳) $i=j=1$ و $k=3$؛ $\angle PXQ = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle A)$، $\angle QYR = \frac{1}{3}(\pi - 2\angle B)$ و

$\angle RZP = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle C)$. مثلثهای PXQ و QYR، بیرون مثلث PQR قرار دارند و مثلث RZP، در درون آن واقع است (قسمت (۲) را ببینید).

(۴) $i = j = k = ۲$؛ $\angle PXQ = \frac{۱}{۳}(\pi - ۲\angle A)$، $\angle QYR = \frac{۱}{۳}(\pi - ۲\angle B)$ و $\angle RZP = \frac{۱}{۳}(\pi - ۲\angle C)$. همهٔ مثلثها و خود مثلث PQR، در یک طرف ضلعهای نظیر مثلث PQR قرار دارند (قسمت (۲) را ببینید).

(۵) $i = ۱$، $j = ۲$ و $k = ۳$؛ $\angle PXQ = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle A)$، $\angle QYR = \frac{۱}{۳}(\pi - ۲\angle B)$ و $\angle RZP = \pi - \frac{۲\angle C}{۳}$. مثلث PXQ، بیرون مثلث PQR رسم می‌شود، در حالی‌که دو مثلث دیگر، در درون آن رسم می‌شوند (قسمت (۲) را ببینید).

(۶) $i = ۲$ و $j = k = ۳$؛ $\angle PXQ = \pi - \frac{۲\angle A}{۳}$، $\angle QYR = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle B)$ و $\angle RZP = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\angle C)$. مثلث PXQ، بیرون، و دوتای دیگر، در درون مثلث PQR رسم می‌شوند.

(۷) $i = j = k = ۳$؛ $\angle PXQ = \pi - \frac{۲\angle A}{۳}$، $\angle QYR = \pi - \frac{۲\angle B}{۳}$ و $\angle RZP = \pi - \frac{۲\angle C}{۳}$. همهٔ مثلثها، در درون مثلث PQR قرار دارند.

قسمت (۱)، در مسألهٔ ۳۲۰ بخش ۲ اثبات شد. برای نمونه، قسمت (۲) را ثابت می‌کنیم.

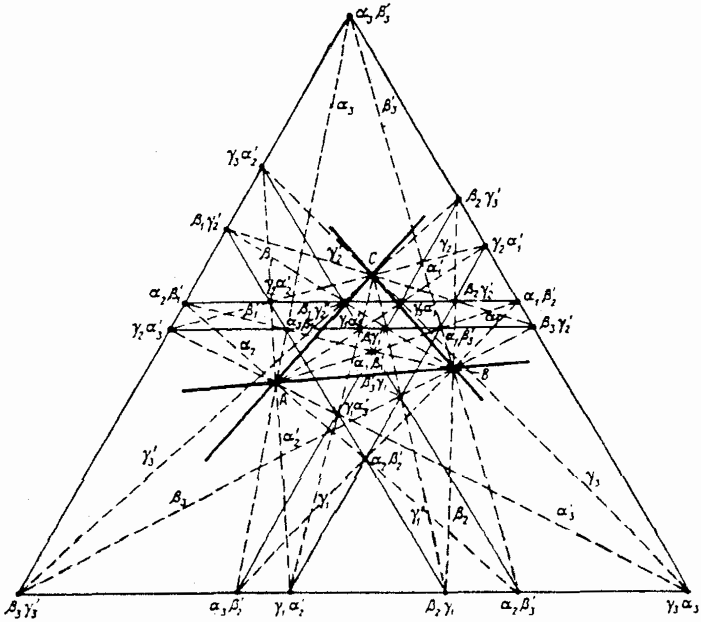
فرض کنید $\angle A < \frac{\pi}{۲}$. مثلث $B_\circ XC_\circ$ را در نظر بگیرید که در آن، XR، نیمساز زاویهٔ $B_\circ XC_\circ$ است، به‌علاوه، $\angle B_\circ RC_\circ = \frac{۱}{۲}(\pi + \angle B_\circ XC_\circ)$.

بنابر گزارهٔ (الف)، R نقطهٔ برخورد نیمسازهای این مثلث است (اگر $\angle A > \frac{\pi}{۲}$، آن وقت $B_\circ R$ و $C_\circ R$ نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث $B_\circ XC_\circ$ هستند). به‌علاوه، در مثلث $C_\circ YA_\circ$: YP نیمساز زاویهٔ خارجی Y است و $\angle A_\circ PC_\circ = \frac{۱}{۲}\angle AYC_\circ$ (این مطلب، به‌سادگی تحقیق می‌شود). بنابر گزارهٔ (ج)، P نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ $C_\circ A_\circ Y$ و نیمسازهای زاویه‌های خارجی $A_\circ C_\circ Y$ و $C_\circ YA_\circ$ از مثلث $C_\circ YA_\circ$، است. به‌روش مشابه، نقطهٔ Q، نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ $ZA_\circ B_\circ$ و نیمسازهای زاویه‌های خارجی $A_\circ ZB_\circ$ و $A_\circ B_\circ Z$ از مثلث $A_\circ ZB_\circ$ است. (این مطلب نتیجه می‌دهد که مثلث PQR، از برخورد سه‌ساز نوع اول زاویهٔ $A_\circ$ با سه‌سازهای نوع دوم زاویه‌های $B_\circ$ و $C_\circ$ از مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$، به‌وجود می‌آید (قسمت (۲) در نظر گرفته شود).) خود مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$، با مثلث ABC متشابه است.

در تمامی حالتهای باقیمانده (۳ تا ۷)، به‌همین نحو، با تفاوت در استفاده از گزاره‌ها (الف، ب، و ج)، استدلال می‌کنیم.

با تغییر دادن اندیسهای i، j و k، توجه می‌کنیم که متناظر با قسمت (۵)، شش مثلث متساوی‌الاضلاع، هر یک از قسمتهای (۲)، (۳) و (۶)، سه مثلث متساوی‌الاضلاع و هر یک از قسمتهای (۱)، (۴) و (۷)، یک مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد. به‌این ترتیب، تعداد کل مثلثهای متساوی‌الاضلاع حاصل، هجده است.

اکنون، درهرحالت، اندازه‌های مثلث PQR را طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$ی نظیر، با مثلث ABC برابر باشد. هجده شکل حاصل را یکی پس از دیگری روی هم قرار می‌دهیم، به‌طوری که مثلثهای ABC، بر هم منطبق شوند.این کار را به‌ترتیب زیر انجام می‌دهیم: نخست، شکل نظیر قسمت (۱)، سپس سه شکل نظیر قسمت (۳)، آن وقت شش شکل نظیر قسمت (۵)، پس از آن، سه شکل نظیر قسمت (۲)، و سر آخر، سه شکل قسمت (۶)، شکل قسمت (۴) و شکل قسمت (۷). در هر انطباق متوالی، دست کم یکی از رأسهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع نظیر، باید بر یکی از رأسهای مثلثهای منطبق شدهٔ قبلی منطبق شود. اگر زاویه‌ها را بشماریم، می‌توانیم ببینیم که پنج رأس از دو مثلث متساوی‌الاضلاع که یک رأس مشترک دارند، روی دو خط راست قرار دارند که از این رأس مشترک می‌گذرند. به‌این ترتیب، رأسهای هجده مثلث متساوی‌الاضلاع، حتماً باید مطابق شکل ۵۹ قرار گیرند (در این شکل، $\alpha_1\beta'_1$ معرف نقطهٔ برخورد سه‌سازهای α_1 و β'_1است، و غیره).



(شکل ۵۹)

۳۲۲ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع برابر با ۱، شعاع هر دایرهٔ مالفاتی، برابر با $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

است. مجموع مساحتهای همین دایره‌ها، برابر $\frac{۳\pi(۲-\sqrt{۳})}{۸}$ است. مجموع مساحتهای سه دایره که یکی از آنها در این مثلث محاط است و دوتای دیگر، بر این دایره و دو ضلع مثلث مماس‌اند، برابر است با: $\frac{۳\pi(۲-\sqrt{۳})}{۸} > \frac{۱۱\pi}{۱۰۸}$.

۳۲۳ـ از برابری $Rr = \frac{abc}{۴p}$ و نابرابری $۲p = a+b+c \geq ۳\sqrt[۳]{abc}$ (نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی) استفاده کنید.

۳۲۴ـ اگر $p_۱$ نصف محیط مثلث با رأسهای پای ارتفاعهای مثلث مفروض باشد و p، S، r و R، به‌ترتیب، نصف محیط، مساحت و شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی باشند، آن وقت $S = pr$، و به‌علاوه، $S = p_۱ R$ (حکم اخیر، از این حقیقت که شعاع دایره محیطی، مرسوم به‌رأس مثلث، بر پاره‌خط واصل پای ارتفاعهای وارد بر ضلعهای خارج شده از این رأس، عمود است، به‌دست می‌آید). در نتیجه، $p_۱ = p\frac{r}{R} \leq \frac{۱}{۲}p$.

۳۲۵ـ فرض کنید m_a طول بزرگترین میانه باشد. اگر از نابرابری $m_a^۲ > m_b^۲ + m_c^۲$، که از فرض مسأله به‌دست می‌آید، استفاده کنیم و طول میانه‌ها را برحسب طول ضلعها، a، b و c، جایگزین کنیم (مسألهٔ ۱۱ بخش ۱ را ببینید)، به‌دست می‌آوریم $۵a^۲ < b^۲ + c^۲$، که از آنجا

$$\cos A > \frac{۲(b^۲+c^۲)}{۵bc} = \frac{۲}{۵}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq \frac{۴}{۵} > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۲۶ـ فرض کنید O معرف نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ باشد. فرض کنید تمامی زاویه‌های مشخص شده در صورت مسأله، از $\frac{\pi}{۴}$ بزرگتر باشند. در این صورت، روی پاره‌خطهای OB و OC، می‌توانیم، به‌ترتیب، نقطه‌های $B_۱$ و $C_۱$ را طوری انتخاب کنیم که $\angle B_۱AO = \angle OB_۱C_۱ = \frac{\pi}{۴}$. فرض کنید $\angle BOA = \alpha > \frac{\pi}{۴}$. داریم

$$|OC| > |OC_۱| = \frac{|OB_۱|}{\sqrt{۲}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{۴}\right)}$$

$$= \frac{|OA|}{۲\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۴}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۴}\right)} = -\frac{|OA|}{\cos ۲\alpha} \geq |OA|$$

به‌همین روش، نابرابری $|OA| > |OC|$ را اثبات می‌کنیم. به‌این ترتیب، به‌تناقض رسیده‌ایم.

۳۲۷ـ فرض کنید طول ضلعهای مثلث ABC، در نابرابریهای $a \leq b \leq c$ صادق باشند.

نقطه‌ای مانند M روی CB، طوری اختیار می‌کنیم که $\angle CAM = \frac{۱}{۲} \angle C$. اکنون، باید ثابت کنیم که $|CM| \le \frac{a}{۲}$. بنابر قانون سینوسها، در مثلث CAM داریم

$$|CM| = \frac{b \sin \frac{C}{۲}}{\sin \frac{۳C}{۲}} = \frac{b}{۲\cos C + ۱} = \frac{ab^{۲}}{a^{۲}+ab+b^{۲}-c^{۲}} \le \frac{a}{۲}$$

۳۲۸ـ فرض کنید D معرف وسط AC باشد. در D، عمودی بر AC اخراج می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با BC را به M نشان می‌دهیم. AMC مثلثی متساوی‌الساقین است، از این رو $\angle MAC = \angle BCA$. بنا به‌فرض، ABD هم، مثلثی متساوی الساقین است، پس

$$\angle ABD = \angle BDA$$

$\angle ABM > ۹۰^\circ$ (بنا به‌فرض) و $\angle ADM = ۹۰^\circ$، بنابراین

$$\angle MBD > \angle MDB \quad , \quad |MD| > |BM|$$

بنابراین، نتیجه می‌شود که $\angle MAD > \angle MAB$ (اگر B به‌طور قرینه، نسبت به خط راست AM، نگاشته شود، آن‌وقت نقطه‌ای مثل $B_۱$، در درون زاویهٔ MAD، به‌دست می‌آید، زیرا MD بر AD عمود است و $|MD| > |MB| = |MB_۱|$)؛ بنابراین، $\angle C > \angle A - \angle C$ و

$$\angle C > \frac{۱}{۲} \angle A$$

۳۲۹ـ اگر دایرهٔ محاطی خارجی، بر امتداد ضلعهای AB و ACی مثلث مماس و O مرکز آن باشد، آن وقت به‌سادگی معلوم می‌شود که $\angle BOC + \angle A = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲} \angle A \neq ۱۸۰^\circ$.

۳۳۰ـ فرض کنید AD معرف ارتفاع، AL نیمساز و AM میانه باشد. نیمساز را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ $A_۱$ قطع کند. چون $MA_۱$ با AD موازی است، داریم $\angle MA_۱A = \angle LAD$.

جواب: اگر $\angle A < ۹۰^\circ$، آن وقت زاویهٔ میان میانه و نیمساز، از زاویهٔ میان نیمساز و ارتفاع کمتر است و اگر $\angle A > ۹۰^\circ$، بر عکس؛ اگر $\angle A = ۹۰^\circ$، زاویه‌ها برابرند.

۳۳۱ـ اگر AD ارتفاع، AN میانه و M نقطهٔ میانه‌ای باشد، آن وقت

$$\cot B + \cot C = \frac{|DB|}{|AD|} + \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|AD|} \ge \frac{|CB|}{|AN|} = \frac{|CB|}{۳|MN|} = \frac{۲}{۳}$$

۳۳۲ـ از اینکه $S_{BAM} = S_{BCM}$، $|BC| > |BA|$ و $|CM| > |MA|$، نتیجه می‌شود که $\sin \angle BAM > \sin \angle BCM$. بنابراین، اگر زاویه‌ها حاده باشند، آن وقت $\angle BAM > \angle BCM$؛ تنها، زاویهٔ BAM می‌تواند منفرجه باشد. به‌این ترتیب، همواره داریم: $\angle BAM > \angle BCM$.

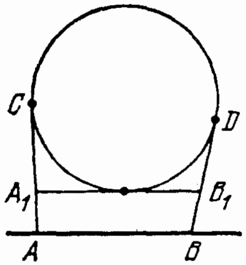
۳۳۳ـ اگر $a = |OA|$، R شعاع دایره و K نقطهٔ برخورد OA و DE باشد، آن وقت، به‌سادگی معلوم می‌شود که $|OK| = a - \frac{a^۲ - R^۲}{۲a} = \frac{a^۲ + R^۲}{۲a} > R$.

۳۳۴ـ نمادگذاری، در شکل ۶۰ داده شده است. در حالت اول (شکل ۶۰ الف)

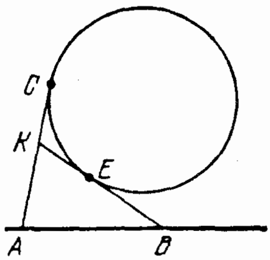
$$|AB| < |AA_۱| + |A_۱B_۱| + |B_۱B| = |AA_۱| + |A_۱C| + |B_۱D| + |BB_۱|$$

$$= |AC| + |BD|$$

در حالت دوم (شکل ۶۰ ب)، $|AB| > |BK| - |AK| > |BE| - |AC|$. عکس مسأله هم، به‌سادگی، با رسیدن به‌تناقض ثابت می‌شود.



(الف)



(ب)

(شکل ٦٠)

۳۳۵ـ فرض کنید K، L و M معرف نقطه‌هایی باشند که خطهای مرسوم، AC را قطع می‌کنند؛ به‌علاوه، فرض می‌کنیم $|AC| = b$، $|BC| = a$، $|AB| = c$ و $|BL| = l$. بنابر قضیهٔ مربوط به‌نیمساز یک زاویهٔ داخلی، به‌دست می‌آوریم $|LC| = \frac{ab}{a+c}$؛ با به‌کار بردن دوبارهٔ این قضیه در مثلث BCL، به‌دست می‌آوریم $|LM| = \frac{ba}{a+c} \cdot \frac{l}{l+a} = \frac{ba}{a+c}\left(۱ - \frac{a}{a+l}\right)$؛ اما $\angle BLA = \frac{۱}{۲}\angle B + \angle C = \frac{\pi - \angle A + \angle C}{۲} > \angle A$ (چون $\angle C > ۳\angle A - \pi$) از این رو $c > l$ و $|LM| < \frac{ba}{a+c}\left(۱ - \frac{a}{a+c}\right) = b\frac{ac}{(a+c)^۲} \leq \frac{b}{۴}$.

۳۳۶ـ فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض باشد. چهارضلعی $AB_۱CD$ را در نظر بگیرید، که در آن، $B_۱$ قرینهٔ B نسبت به‌عمود منصف قطر AC است. به‌روشنی، مساحتهای $ABCD$ و $AB_۱CD$ با یکدیگر برابرند و ضلعهای چهارضلعی $AB_۱CD$، به‌ترتیب دوری، برابرند با b، a، c و d. در این چهارضلعی، نابرابری $S \leq \frac{۱}{۲}(ac+bd)$ بدیهی است، و برابری هنگامی رخ

می‌دهد که $\angle DAB_1 = \angle B_1CD = 90^\circ$، یعنی، AB_1CD چهارضلعیی محاطی با دو زاویهٔ روبه‌رو هرکدام برابر با 90°، است. بنابراین، چهارضلعی $ABCD$ هم، محاطی (در همان دایره) است و قطرهایش دوبه‌دو بر هم عمودند.

۳۳۷ـ دو حالت در نظر بگیرید.

(۱) مثلث مفروض (ABC) حاده باشد. فرض کنید $\angle B$ بزرگترین زاویه باشد: $60^\circ \le \angle B < 90^\circ$. از آنجا که طول نیمسازهای زاویه‌های A و C از ۱ کمترند، طول ارتفاعهای نظیر این زاویه‌ها: h_A و h_C هم، از ۱ کمتر است. داریم: $S_{ABC} = \frac{h_A h_C}{2\sin B} < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(۲) اگر یکی از زاویه‌های مثلث، مثلاً B، حاده نباشد، آن وقت ضلعهایی که این زاویه را در بردارند، از نیمسازهای نظیر کوچکترند، یعنی، از ۱ کمترند و مساحت از $\frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کند.

۳۳۸ـ فرض‌کنید c طول بزرگترین ضلع، روبه‌رو رأس C، باشد. اگر $a^2+b^2+c^2-8R^2>0$، آن وقت $a^2+b^2>8R^2-c^2\ge c^2$ (زیرا $c \le 2R$)، یعنی، مثلث حاده است. به‌عکس، فرض کنید مثلث حاده باشد، در این صورت، $a^2+b^2+c^2=2m_c^2+\frac{3}{2}c^2$ (m_c طول میانه وارد بر ضلع با طول c است)؛ از این‌رو، طول کوتاهترین میانه، از مجموع $a^2+b^2+c^2$ کمتر است. اما، طول میانه ماکسیمال است، اگر که C وسط کمان باشد و با جابه‌جا شدن C روی کمان، کوتاه می‌شود. وقتی که مثلث قائم‌الزاویه باشد، مجموع $a^2+b^2+c^2-8R^2$ برابر با صفر است.

۳۳۹ـ باجایگزینی R و r با دستورهای $R=\frac{abc}{4S}$ و $r=\frac{S}{p}$، برای محاسبهٔ S، از دستور هرون و برابری

$$4S^2\left(p-\frac{abc}{S}-\frac{S}{p}\right)\left(p+\frac{abc}{2S}+\frac{S}{p}\right)=\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)$$

استفاده کنید.

۳۴۰ـ فرض می‌کنیم چنین نباشد، مثلاً $c \ge a$؛ در این صورت، $2c \ge c+a>b$؛ با مربع کردن نابرابریها و جمع کردن آنها با یکدیگر، به‌دست می‌آوریم $5c^2>a^2+b^2$، که تناقض است.

۳۴۱ـ نیمساز زاویهٔ B، نیمساز $\angle OBH$، و نیمساز زاویهٔ A، نیمساز $\angle OAH$ است. به‌علاوه، $\angle BAH = 90^\circ - \angle B < 90^\circ - \angle A = \angle ABH$؛ بنابراین، $|AH|>|BH|$. اگر K و M نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B با OH باشند، آن وقت

$$\frac{|HK|}{|KO|}=\frac{|AH|}{|AO|}=\frac{|AH|}{R}>\frac{|BH|}{R}=\frac{|BH|}{|OB|}=\frac{|HM|}{|MO|}$$

بنابراین، $|HK|>|HM|$ و نقطهٔ برخورد نیمسازها، در درون مثلث BOH قرار دارد.

۳۴۲ـ فرض کنید: $|AB|=|BC|=a$، $|AM|=c$، $|MC|=b$، $|MB|=m$، $\angle BMO=\psi$ و $\angle MBO=\varphi$. باید ثابت کنیم‌که $|OB|>|OM|$ یا $\psi>\varphi$ یا

$\cos\psi<\cos\varphi$. بنابر قانون کسینوسها در مثلثهای MBA و MBC، به‌دست می‌آوریم

$$\cos\varphi-\cos\psi=\frac{m^{۲}+a^{۲}-c^{۲}}{۲ma}-\frac{m^{۲}+b^{۲}-a^{۲}}{۲mb}=\frac{m^{۲}(b-a)-a(b^{۲}-a^{۲})+b(a^{۲}-c^{۲})}{۲mab}$$

اما $a-c=b-a$، بنابراین

$$\cos\varphi-\cos\psi=\frac{(b-a)(m^{۲}-ab-a^{۲}+ab+bc)}{۲mab}=\frac{(b-a)\left(m^{۲}-a^{۲}-b(۲a-b)\right)}{۲mab}$$

$$=\frac{(b-a)(m+b-a)(m-a+b)}{۲mab}>۰$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳۴۳ـ از نقطهٔ M، خط راستی به‌موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ K قطع کند. به‌سادگی معلوم می‌شود $|AK|=|CM|\cdot\dfrac{|AB|}{|CB|}$ و $|MK|=|MB|\cdot\dfrac{|AC|}{|CB|}$. از آنجا که $|AM|\leq|AK|+|KM|$، با قراردادن $|AK|$ و $|KM|$، به‌دست می‌آوریم

$$|AM|\leq\frac{|CM|.|AB|}{|BC|}+\frac{|MB|.|AC|}{|CB|}$$

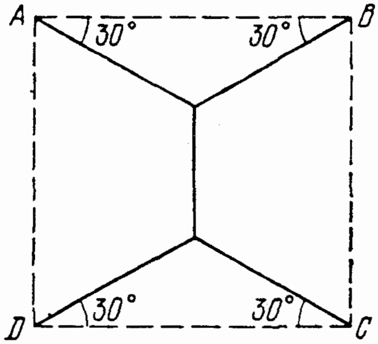
$$\Rightarrow(|AM|-|AC|)\,|BC|\leq(|AB|-|AC|)\,|MC|$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳۴۴ـ کمترین مقدار، برابر با $\dfrac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۳}$ است و وقتی به‌دست می‌آید که M مرکز ثقل مثلث ABC باشد (این مطلب را می‌توان ثابت کرد، مثلاً با استفاده از روش مختصات یا قضیهٔ لایبنیتس ـ مسألهٔ ۱۴۰ بخش ۲ را ببینید).

۳۴۵ـ مسیر توپ را «یکسو» می‌کنیم. برای این منظور، به‌جای «بازگرداندن» توپ از ضلع بیلیارد، خود بیلیارد را نسبت به‌این ضلع آیینه‌وار منعکس می‌کنیم. در نتیجه، دستگاهی از نیمخطهای با رأس مشترک، به‌دست می‌آوریم؛ هر دو تا نیمخط مجاور، با هم زاویهٔ α می‌سازند. ماکسیمال تعداد نیمخطها در دستگاه، که یک خط راست می‌تواند آنها را قطع کند، دقیقاً ماکسیمال تعداد انعکاسهای توپ است. این عدد، برابر است با $\left[\dfrac{\pi}{\alpha}\right]+۱$، به‌شرطی که $\dfrac{\pi}{\alpha}$ عدد درستی نباشد ($[x]$ بخش درست عدد x است)؛ اگر $\dfrac{\pi}{\alpha}$، عدد درستی باشد، آن وقت این عدد، برابر است با ماکسیمال تعداد انعکاسها.

۳۴۶ـ اگر جاده‌های مطابق شکل ۶۱ رسم می‌شوند (A، B، C و D معرف دهکده‌ها هستند و جاده‌ها با خطهای پیوسته نشان داده شده‌اند)، آن وقت مجموع طول آنها، برابر با $۵٫۵ < ۲\sqrt{۳} + ۲$ است. می‌توان نشان داد که ترتیب مشخص شدهٔ جاده‌ها، مینیمم مجموع طول آنها را به‌دست می‌دهد.



(شکل ۶۱)

۳۴۷ـ اگر یکی از ضلعهای مثلث که از A می‌گذرد، با خط راست عمود برخطهای راست موازی مفروض، زاویهٔ φ بسازد، آن وقت ضلع دیگر، زاویهٔ $۱۸۰^\circ-\varphi-\alpha$ می‌سازد؛ با پیدا کردن طول این ضلعها، مساحت مثلث برابر می‌شود با

$$-\frac{ab\sin\alpha}{۲\cos\varphi\cos(\varphi+\alpha)}=-\frac{ab\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha+۲\varphi)}$$

این عبارت، به‌شرط $\alpha+۲\varphi=۱۸۰^\circ$، مینیمال است.

جواب: $S_{min}=ab\cot\frac{\alpha}{۲}$.

۳۴۸ـ داریم: $S_{ACBD}=\frac{|AB|}{|MO|}S_{OCD}=۲(k+۱)S_{OCD}$. در نتیجه، S_{ABCD}، بیشترین مقدار است، به‌شرط اینکه مساحت مثلث OCD بیشترین مقدار باشد. اما، OCD مثلثی متساوی‌الساقین با طول ساق برابر با R است، از این رو، مساحت آن، وقتی ماکسیمال است که سینوس زاویهٔ رأس O ماکسیمم باشد. این زاویه را با φ نشان می‌دهیم. به‌روشنی $\varphi_\circ\le\varphi<\pi$، که در آن، $\varphi_\circ$ نظیر حالتی است که AB و CD دوبه‌دو بر هم عمودند. در نتیجه، اگر $\varphi_\circ\le\frac{\pi}{۲}$، آن وقت مساحت ماکسیمال مثلث OCD، با مقدار $\varphi_۱=\frac{\pi}{۲}$، و اگر $\varphi_\circ>\frac{\pi}{۲}$، با مقدار $\varphi_۱=\varphi_\circ$ متناظر است.

جواب: اگر $k\le\sqrt{۲}-۱$، آن وقت $S_{max}=(k+۱)R^۲$؛ اگر $k>\sqrt{۲}-۱$، آن‌وقت

$$S_{max}=\frac{۲R^۲\sqrt{k(k+۲)}}{k+۱}$$

۳۴۹ـ فرض کنید خط راست BC در شرط $|BP| = |MC|$ صدق کند (ترتیب نقطه‌ها، B، p، M و C است): می‌خواهیم ثابت کنیم که مساحت چهارضلعی $ABNC$ کمترین مقدار است. خط راست دیگری رسم می‌کنیم که ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع می‌کند. فرض کنید نقطهٔ B بین نقطه‌های A و B_1 قرار گیرد، در این صورت، نقطهٔ C_1 بین A و C واقع است. باید ثابت کنیم که $S_{BB_1N}>S_{CC_1N}$. این نابرابری، با نابرابری $S_{BB_1P}>S_{CC_1P}$ هم‌ارز است، زیرا $\frac{|AP|}{|AN|}=\frac{S_{CC_1P}}{S_{CC_1N}}=\frac{S_{BB_1P}}{S_{BB_1N}}$. با اضافه کردن S_{BPC_1} به‌دو طرف نابرابری اخیر، برای سمت چپ به‌دست می‌آوریم

$$S_{BB_1P}+S_{BPC_1}=S_{BB_1PC_1}=S_{C_1CB_1}$$

(که از برابری $|BP|=|MC|$ نتیجه می‌شود) و برای سمت راست: $S_{CC_1P}+S_{BPC_1}=S_{C_1CB}$. اما، به‌روشنی، $S_{C_1CB_1}>S_{C_1CB}$. حالتی که B_1 بین A و B قرار گیرد، به‌روش مشابه بررسی می‌شود.

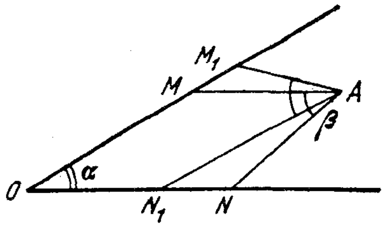
ترسیم. کافی است خط راستی رسم کنیم تا ضلعهای زاویهٔ مفروض و خطهای راست AN و AM را، به‌ترتیب، در نقطه‌های B_0، P_0، M_0 و C_0 طوری قطع کند که $|B_0P_0|=|M_0C_0|$، و سپس از M، خط راستی به‌موازات B_0C_0 رسم کنیم. متوازی‌الاضلاع AB_0DC_0 را در نظر بگیرید؛ فرض کنید K و L نقطه‌های برخورد خطهای راست AP_0 و AM_0، به‌ترتیب، با B_0D و C_0D باشند. از برابری $|B_0P_0| = |M_0C_0|$، نتیجه می‌شود که $S_{AB_0K}=S_{AC_0L}$. مسأله منجر به‌رسم کردن دو مثلث با مساحتهای برابر AB_0K و AC_0L با معلوم بودن همهٔ زاویه‌هایشان می‌شود. B_0 را به‌دلخواه اختیار و مثلث AB_0K را رسم می‌کنیم. سپس، روی AB_0، نقطهٔ E را به‌نحوی اختیار می‌کنیم که $\angle B_0KE = \angle ALC_0$ و پاره‌خط AC_1 را برابر با $\sqrt{|B_0E|\ |B_0A|}$ رسم می‌کنیم. B_0C_0 خط راست مطلوب است.

تبصره. مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید. از نقطهٔ M، واقع در درون زاویه‌ای مفروض، خط راستی متقاطع با ضلعهای زاویه در نقطه‌های B و C، طوری رسم کنید که طول پاره‌خط BC کمترین مقدار باشد. از مسألهٔ بالا نتیجه می‌شود که BC کوتاهترین پاره‌خط است، به‌شرط آنکه $|BP| = |MC|$، که در آن، P تصویر رأس مفروض روی BC است. (حتی، حکم کلیتری به‌دست می‌آید، یعنی، اگر پاره‌خط BC واجد ویژگی مطلوب باشد، آن وقت به‌ازای هر خط راست دیگری‌که از M می‌گذرد وضلعهای‌زاویه را درنقطه‌های B_1 و C_1 قطع‌می‌کند، طول‌تصویر B_1C_1 روی پاره خط BC، از $|BC|$ بزرگتر است.) با این حال، همیشه نمی‌توان چنین پاره‌خطی را به‌کمک یک جفت پرگار و خطکش رسم کرد.

۳۵۰ـ فرض کنید M_1 و N_1 دو نقطهٔ دیگر روی ضلعهای زاویه باشند (شکل ۶۲). در این صورت، $\angle M_1AN_1=\beta$ و

$$\angle AM_1M = 360^\circ - \alpha - \beta - \angle ON_1A > 180^\circ - \angle ON_1A = \angle AN_1N$$

به‌این ترتیب، با توجه به اینکه $\angle MAM_1 = \angle NAN_1$، به‌دست می‌آوریم: $|N_1A| < |M_1A|$ و بنابراین $S_{M_1AM} < S_{N_1AN}$؛ به‌این ترتیب، $S_{OMAN} < S_{OM_1AN_1}$.



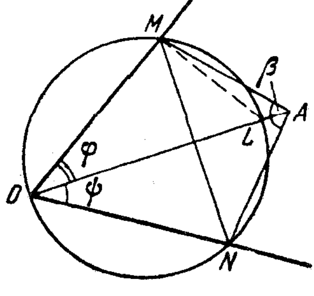
(شکل ۶۲)

۳۵۱- با در نظر داشتن نتیجه‌های مسألهٔ قبل، باید معلوم کنیم که تحت چه شرطهایی می‌توانیم روی ضلعهای زاویه، نقطه‌های M و N را طوری پیدا کنیم که $\angle MAN = \beta$ و $|MA| = |AN|$. دایره‌ای بر مثلث MON محیط کنید (شکل ۶۳). از آنجا که $\varphi + \psi + \beta < 180^\circ$، نقطهٔ A در بیرون این دایره قرار دارد. اگر L نقطهٔ برخورد خط راست OA و دایره باشد، آن وقت نابرابریهای زیر برقرارند

$$\angle AMN = 90^\circ - \frac{\beta}{2} > \angle LMN = \angle LON$$

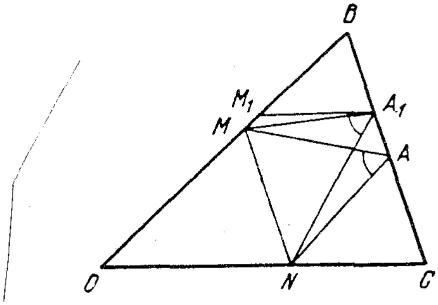
$$\angle ANM = 90^\circ - \frac{\beta}{2} > \angle LOM$$

به‌این ترتیب، اگر $\varphi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ و $\psi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$، آن وقت می‌توان نقطه‌های M و N را طوری پیدا کرد که $|MA| = |AN|$ و $\angle MAN = \beta$. اگر این شرطهای برقرار نباشد، آن وقت چنین نقطه‌هایی وجود ندارند. در این حالت، چهارضلعی با مساحت ماکسیمال، به‌یک مثلث تبدیل می‌شود (M یا N بر O منطبق می‌شود).



(شکل ۶۳)

۳۵۲ـ A_1 را نقطه‌ای روی BC می‌گیریم (شکل ۶۴). مساحت چهارضلعی OMA_1N با مساحت چهارضلعی $OMAN$ برابر است و $\angle MA_1N < \angle MAN$؛ درنتیجه، اگر روی OB، نقطهٔ M_1 را طوری اختیار کنیم که $\angle M_1A_1N = \angle MAN$، آن‌وقت $S_{OM_1A_1N} > S_{OMAN}$؛ بنابراین، مساحت چهارضلعی نظیر نقطهٔ A_1، با در نظر گرفتن نتیجه‌های دو مسألهٔ قبل، حکم را به‌دست می‌دهد.



(شکل ۶۴)

۳۵۳ـ برای روشنی وضع، فرض کنید $\sin\alpha \geq \sin\beta$؛ بر امتداد AB، نقطهٔ K را طوری اختیار می‌کنیم که $\angle BKC = \beta$. از آنجا که $\angle CBK = \angle ADC$ (زیرا $ABCD$ چهارضلعیی محاطی است)، مثلث KBC با مثلث ACD متشابه می‌شود. اما، $|CD| \geq |BC|$، در نتیجه، $S_{BCK} \geq S_{ADC}$ و $S_{AKC} \geq S_{ABCD}$. اما، $S_{AKC} = \dfrac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}$، از این رو، $S_{ABCD} \leq \dfrac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}$. به‌همین روش، می‌توانیم ثابت کنیم که

$$S_{ABCD} \geq \frac{a^2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$$

۳۵۴ـ جای دیگری از نقطه‌ها، M_1 و N_1 $(\angle M_1AN_1 = \beta)$، را در نظر بگیرید، با توجه به‌شرط $\alpha+\beta > 180^\circ$، مشابه حل مسألهٔ ۳۵۰ بخش ۲، نشان دهید که مساحت مثلث «اضافه شده»، از مساحت مثلث «برداشته شده» از چهارضلعی، بزرگتر است.

۳۵۵ـ با در نظر داشتن نتیجهٔ مسألهٔ قبل و با استدلالی کاملاً شبیه به‌مسأله ۳۵۱ بخش ۲، نتیجه می‌گیریم: اگر $\varphi > 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$ و $\psi > 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$، آن وقت چهارضلعی با کمترین مساحت وجود دارد و در آن $|MA| = |AN|$. اگر این شرطها برقرار نباشند، آن وقت چهارضلعی مطلوب تباهیده می‌شود (یکی از نقطه‌های M یا N بر رأس O منطبق می‌شود).

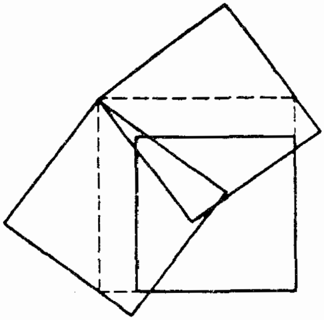
۳۵۶ـ نقطهٔ A را که شرطهای مسأله برای آن صادق است، و نقطهٔ دیگر A_1 را اختیار می‌کنیم. با ترسیم خطهای راستی از A_1 به‌موازات AM و AN که ضلعهای مثلث را در نقطه‌های M_1 و N_1 قطع می‌کنند، قانع می‌شویم که $S_{OM_1A_1N_1} < S_{OMAN}$، در نتیجه، مساحت چهارضلعی مینیمال

نظیر نقطهٔ A_1، از مساحت چهارضلعی $OMAN$، که چهارضلعی مینیمال نظیر نقطهٔ A است، کمتر است.

۳۵۷ـ شعاع بزرگترین دایره، برابر با $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ است، یعنی، برابر با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $2R$ (چنین مثلثی اختیار و دایره‌هایی به‌قطرضلعهای آن رسم می‌کنیم). به‌ازای هر دایره با شعاع بزرگتر، به‌شرط آنکه توسط دایره‌های مفروض پوشانده شود، کمانی دست‌کم $120°$ وجود دارد که با یکی از دایره‌ها پوشانده می‌شود، اما، چنین کمانی شامل یک وتر بزرگتر از $2R$ است. به‌این ترتیب، به‌تناقض رسیده‌ایم.

در حالت کلی، اگر مثلثی حاده با ضلعهای $2R_1$ ، $2R_2$ و $2R_3$ وجود داشته باشد، آن وقت شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث، شعاع مطلوب است. در بقیهٔ حالتها، شعاع بزرگترین دایره، برابر با بزرگترین عدد از بین R_1، R_2 و R_3 است.

۳۵۸ـ ممکن است. شکل ۶۵، سه مربع به‌ضلع واحد را نشان می‌دهد که مربعی به‌ضلع $\frac{5}{4}$ را پوشانده‌اند.



(شکل ٦٥)

۳۵۹ـ نخست، توجه می‌کنیم که ضلع کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع که لوزی به‌ضلع a و زاویهٔ حادهٔ $60°$ را می‌پوشاند، برابر با $2a$ است. در حقیقت، اگر رأس زاویه‌های حادهٔ M و N از لوزی، روی ضلعهای AB و BCی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع باشند و $\angle BNM = \alpha$ و $30° \le \alpha \le 90°$، آن وقت با استفاده از قانون سینوسها برای پیدا کردن $|BN|$ از مثلث BNM و $|CN|$ از مثلث KNC (K رأس منفرجهٔ لوزی است که واقع بر ضلع AC فرض می‌شود)، پس از تبدیلات خواهیم داشت: $|BC| = 2a\frac{\cos(60°-\alpha)}{\cos 30°}$. با توجه به‌اینکه $30° \le \alpha \le 90°$، به‌دست می‌آوریم $|BC| \ge 2a$. می‌توان به‌سادگی دید که مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $\frac{3}{2}$ را می‌توان با سه مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۱ پوشاند. برای

اثبات حکم اخیر، هر کدام از مثلثهای به‌ضلع واحد را طوری جا می‌دهیم که یکی از رأسهای آن، بر یکی از رأسهای مثلثی که پوشانده می‌شوند، منطبق باشد و در عین حال، وسط ضلع روبه‌رو به‌آن رأس هم، بر مرکز مثلث پوشانده شده، منطبق باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که نمی‌توان مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $b > \frac{3}{2}$ را با سه مثلث متساوی‌الاضلاع به‌مساحت واحد پوشاند. اگر چنین پوششی ممکن باشد، آن وقت رأسهای A، B و C، با مثلثهای متمایز پوشانده می‌شوند و هر یک از ضلعهای AB، BC و CA، با دو مثلث پوشانده خواهد شد. فرض کنید A به‌مثلث I، B به‌مثلث II و C به‌مثلث III و O، مرکز مثلث، مثلاً، به‌مثلث I متعلق باشد. روی AB و AC، به‌ترتیب، نقطه‌های M و N را طوری می‌گیریم که $|AM| = |AN| = \frac{1}{3}b$. از آنجاکه $|BM| = |CN| = \frac{2}{3}b > 1$، نقطه‌های M و N هم، به‌مثلث I متعلق‌اند و در نتیجه، لوزی $AMON$ را، تماماً، مثلث با طول ضلعهای کمتر از $2|AM|$ ($2|AM| > 1$) می‌پوشاند، که این هم ناممکن است.

۳۶۰ـ نسبتهای $\frac{|AM|}{|MC|}$، $\frac{|CN|}{|NB|}$ و $\frac{|ML|}{|LN|}$ را با α، β و γ نشان می‌دهیم. در این صورت (حل مسألهٔ ۲۲۱ بخش ۱ را ببینید)، $P = Q\alpha\beta\gamma$ و $S = Q(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$. بالاخره، از نابرابری $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \geq (\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+1)^3$ استفاده کنید.

۳۶۱ـ فرض کنید $\cot\alpha = x$ و $\cot\beta = y$، در این صورت

$$\cot\gamma = \frac{-xy+1}{x+y} = \frac{x^2+1}{x+y} = -x$$

$$a^2\cot\alpha + b^2\cot\beta + c^2\cot\gamma = (a^2-b^2-c^2)x + b^2(x+y) + c^2\frac{x^2+1}{x+y}$$

مینیمم عبارت $b^2(x+y)+c^2\frac{x^2+1}{x+y}$، به‌ازای x ثابت و $x+y > 0$، به‌ازای yای به‌دست می‌آید که در برابری زیر صدق می‌کند

$$b^2(x+y) = c^2\frac{x^2+1}{x+y} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{c}{b}$$

بنابراین، $\frac{c}{b} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. به‌این ترتیب، کمترین مقدار عبارت مفروض به‌ازای α، β و γای به‌دست می‌آید که سینوسهایشان با طول ضلعهای a، b و c متناسب‌اند، یعنی، وقتی که مثلثهای مورد بحث متشابه‌اند. اما، در این حالت، تساوی حاصل می‌شود (این مطلب، به‌سادگی تحقیق می‌شود).

۳۶۲ـ قرار می‌گذاریم: $p-a = x$، $p-b = y$ و $p-c = z$ (p نصف محیط است). با نگه‌داشتن $4S\sqrt{3}$ در سمت راست نابرابری و انتقال بقیهٔ جمله‌ها به‌سمت چپ، پس از تبدیلات (مثلاً،

$(a^۲-(b-c)^۲ = ۴(p-b)(p-c) = ۴yz$، وقرار دادن S از دستور هرون، به‌نابرابری $xy+yz+zx \geq \sqrt{۳(x+y+z)xyz}$ می‌رسیم. با تقسیم‌کردن دو طرف این نابرابری بر $\sqrt{xyz}$ وانجام دادن تبدیلهای $u=\sqrt{\frac{xy}{z}}$، $v=\sqrt{\frac{yz}{x}}$ و $w=\sqrt{\frac{zx}{y}}$ ($x=uw$، $y=vu$ و $z=wv$)، به‌نابرابری $u+v+w \geq \sqrt{۳(uv+vw+wu)}$ می‌رسیم که با مربع کردن دو طرف آن، به‌نابرابری معروف $u^۲+v^۲+w^۲ \geq uv+vw+wu$ منجر می‌شود.

۳۶۳ـ دو خانواده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث مفروض، وجود دارد (مسألهٔ ۳۰۵ بخش ۲ را ببینید). روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آن، مثلثهای $ABC_۱$، $BCA_۱$ و $CAB_۱$ را رسم و دایره‌هایی بر آنها محیط می‌کنیم. رأسهای مثلثهای خانوادهٔ اول، روی این دایره‌ها قرار دارند (یک رأس روی هر دایره). فرض کنید $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ معرف مرکز این دایره‌ها باشند ($O_۱O_۲O_۳$ مثلثی متساوی الاضلاع است، مسألهٔ ۳۰۴ بخش ۲ را ببینید). مثلثی که ضلعهایش به‌موازات ضلعهای مثلث $O_۱O_۲O_۳$ است، بیشترین مساحت را دارد (قاطعی که از محل برخورد دو دایره می‌گذرد، وقتی موازی خط المرکزین باشد، بیشترین طول را دارد؛ در این حالت، طول قاطع دو برابر فاصلهٔ میان مرکزهاست).

مساحت بزرگترین مثلث، $S_۰ = ۴S_{O_۱O_۲O_۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\left(\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}+۲S\sqrt{۳}\right)$ است، که در آن، S مساحت مثلث مفروض است (حل مسألهٔ ۳۰۵ بخش ۲ را ببینید).

مساحت بزرگترین مثلث متعلق به‌خانوادهٔ دوم، از این مقدار کمتر است. از میان مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاط در مثلث مفروض، مثلث با ضلعهای موازی با ضلعهای بزرگترین مثلث محیطی، کمترین مساحت را داراست. این مطلب، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۴۱ بخش ۱ به‌دست می‌آید. مساحت این مثلث، برابر است با $S_۱ = \frac{S^۲}{S_۰}$. به‌این ترتیب، مساحت بزرگترین مثلث متساوی‌الاضلاع محیطی، $S_۰ = \frac{\sqrt{۳}(a^۲+b^۲+c^۲)}{۶}+۲S$ و مساحت کوچکترین مثلث محاطی برابر با $S_۱ = \frac{S^۲}{S_۰}$ است، که در آنها S مساحت مثلث مفروض است.

۳۶۴ـ دایره‌ای برمثلث AMC محیط کنید. تمامی مثلثهای $A_۱MC$ی حاصل ازجابه‌جایی M روی کمان AC، متشابه‌اند، در نتیجه، نسبت $\frac{|CM|}{|A_۱M|}$، برای همهٔ آنها یکی است. بنابراین، اگر M نقطهٔ مینیمم عبارت $f(M) = \frac{|BM|.|CM|}{|A_۱M|}$ باشد، آن‌وقت BM باید از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMC بگذرد، در غیر این صورت، می‌توانیم $|BM|$ را کوچک کنیم بدون اینکه نسبت $\frac{|CM|}{|A_۱M|}$ تغییری کند. اکنون، فرض کنید $B_۱$ و $C_۱$، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد خطهای راست

BM و CM با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، در این صورت

$$\frac{|BM|.|CM|}{|A_1M|}=\frac{|CM|.|AM|}{|B_1M|}=\frac{|AM|.|BM|}{|C_1M|}$$

در نتیجه، خطهای راست AM و CM هم، به‌ترتیب، باید از مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BMC و AMB بگذرند. بدین ترتیب، نقطهٔ M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است (مسألهٔ ۱۲۵ بخش ۲ را ببینید). به‌علاوه، در این حالت، A_1 مرکز دایرهٔ محیطی مثلث CMB است،

$\sin\angle MBC=\frac{r}{|MB|}$ و $\frac{|CM|}{\sin\angle MBC}=2|A_1M|$؛ از این رو $\frac{|BM|.|CM|}{|A_1M|}=2r$

به‌تعیین کمترین مقدار تابع $f(M)$ باز می‌گردیم. یکی از قضیه‌های آنالیز ریاضی بیان می‌کند که تابعی پیوسته روی مجموعه‌ای بسته، کمترین و بیشترین مقدارش را روی آن مجموعه می‌گیرد . به‌ویژه، این قضیه برای تابعی دو متغیری (پیوسته) روی چندضلعی درست است. اما، این قضیه، در این مسأله به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست، چرا که تابع $f(M)$ روی رأسهای مثلث ABC تعریف نشده است. اما، با بریدن گوشه‌های مثلث، به‌یک شش‌ضلعی می‌رسیم که $f(M)$ روی آن، تابعی پیوسته است و در نتیجه کمترین مقدارش را می‌گیرد. می‌توان ثابت کرد که در نزدیکی محیط مثلث $f(M)>2r$. بدین ترتیب، اگر گوشه‌های بریده شده، به اندازهٔ کافی کوچک باشند، آن‌وقت تابع $f(M)$، کمترین مقدارش را روی شش‌ضلعیها و در نتیجه روی مثلث می‌گیرد، وقتی که M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد، این کمترین مقدار برابر با $2r$ می‌شود. از طرف دیگر، تابع $f(M)$ بیشترین مقدارش را نمی‌گیرد، هر چند که کرندار است. ثابت کنید که $f(M)<l$، که در آن l طول بزرگترین ضلع مثلث ABC است، به‌ازای همهٔ نقطه‌های مثلث بجز رأسهای آن، و $f(M)$ مقدارهای به‌دلخواه نزدیک به l را می‌گیرد.

۳۶۵ـ روی نیمخطهای MB و MC، به‌ترتیب، نقطه‌های C_1 و B_1 را طوری می‌گیریم که $|MC_1|=|MC|$ و $|MB_1|=|MB|$ (مثلث MC_1B_1 نسبت به‌نیمساز زاویهٔ BMC، قرینهٔ مثلث MBC است)، C_2 و B_2، به‌ترتیب، تصویرهای C_1 و B_1 روی خط راست AM هستند. داریم

$$|BM|\sin\angle AMC+|CM|\sin\angle AMB$$
$$=|B_1M|\sin\angle AMC+|C_1M|\sin\angle AMB$$
$$=|B_1B_2|+|C_1C_2|\geq|B_1C_1|=a$$

---

(۱) صورتی دقیقتر از این قضیه، چنین است: تابع پیوسته و حقیقی f روی مجموعهٔ فشردهٔ X، بیشترین وکمترین مقدار خود را روی آن می‌گیرد. توجه کنید که $X\subset R^n$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد. ـ م.

با نوشتن دو نابرابری دیگر به‌این شکل، و جمع کردن آنها با هم، به‌حکم مسأله می‌رسیم. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر M بر مرکز دایرهٔ محاطی منطبق باشد، آن وقت نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود.

۳۶۶ـ الف) نخست مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم. فرض کنید M نقطه‌ای روی ضلع AB از مثلث ABC باشد؛ فاصله‌های M تا ضلعهای BC و AC، به‌ترتیب، برابرند با u و v؛ h_1 و h_2، به‌ترتیب، طول ارتفاعهای مرسوم به BC و AC هستند. ثابت کنید که عبارت $\frac{h_1}{u}+\frac{h_2}{v}$، وقتی که M وسط AB است، کمترین مقدار است. طبق معمول، فرض می‌کنیم $|BC|=a$ و $|AC|=b$ و S مساحت مثلث ABC است. داریم $au+bv=2S$ و $v=\frac{2S-au}{b}$. با قرار دادن v در عبارت $\frac{h_1}{u}+\frac{h_2}{v}=t$، به‌دست می‌آوریم $atu^2-2Stu+2h_1S=0$. مبیّن این معادله نامنفی است، $S^2(t^2-4t)\geq 0$، که از آنجا $t\geq 4$. کمترین مقدار، $t=4$، به‌ازای $\frac{h_1}{2}=\frac{S}{a}=u$ و $\frac{h_2}{2}=v$ به‌دست می‌آید. از این مسأله نتیجه می‌شود که کمترین مقدار سمت چپ نابرابری قسمت (الف)، وقتی که M نقطهٔ میانه‌ای است به‌دست می‌آید. نابرابریهای قسمتهای (ب) و (ج)، به‌روش مشابه ثابت می‌شوند. در قسمت (ب)، باید معلوم کنیم که به‌ازای کدام نقطهٔ M واقع بر ضلع AB، حاصلضرب uv به‌بیشترین مقدار خود می‌رسد. در قسمت (ج)، نخست، دو طرف نابرابری را بر uvw تقسیم می‌کنیم و مسألهٔ پیدا کردن مینیمم تابع $\left(\frac{h_1}{u}-1\right)\left(\frac{h_2}{v}-1\right)$ را، به‌ازای M روی AB، حل می‌کنیم.

۳۶۷ـ فرض کنید در مثلث حادهٔ ABC، نابرابریهای $|BC|\geq|AB|\geq|AC|$ برقرار باشند؛ BD ارتفاع، O مرکز دایرهٔ محیطی، I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و E تصویر I روی BD است. از آنجا که $|ED|=r$، باید ثابت کنیم که $|BE|\geq R=|BO|$. اما، BI نیمساز زاویهٔ EBO است (BI نیمساز زاویهٔ ABC است و $\angle ABD=\angle OBC$)، $\angle BEI=90^\circ$ و $\angle BOI\geq 90^\circ$ (نابرابری اخیر، از این حقیقت که طول تصویر CI روی BC از $\frac{|BC|}{2}$ تجاوز نمی‌کند، به‌دست می‌آید). در نتیجه، $|BE|\geq|BO|$ (BO را به‌طور قرینهٔ نسبت به BI می‌نگاریم).

۳۶۸ـ از آنجا که مساحت مثلث تشکیل شده با میانه‌های مثلث، $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث اصلی است و به‌ازای هر مثلث $abc=4RS$، برای مثلث حاده باید ثابت کنیم نابرابری زیر درست است

$$m_am_bm_c>\frac{5}{8}abc \qquad (1)$$

برای راحتی محاسبه‌ها، فرض کنید طول یکی از ضلعها برابر با $۲d$ و طول میانهٔ مرسوم به این ضلع m باشد. چون مثلث با زاویه‌های حاده است، داریم $m>d$. فرض کنید t معرف کسینوس زاویهٔ حادهٔ تشکیل شده با این میانه و ضلع با طول $۲d$ باشد، $\circ \leq t < \frac{d}{m}$ ($t<\frac{d}{m}$ شرطی است برای اینکه مثلث، با زاویه‌های حاده باشد). با نشان دادن طول ضلعها و میانه برحسب d، m و t، و قرار دادن عبارتهای حاصل در نابرابری (۱)، پس از تبدیلات، به‌دست می‌آوریم

$$m^۲(۹d^۲+m^۲)^۲-۲۵d^۲(d^۲+m^۲)^۲>t^۲d^۲m^۲(۶۴m^۲-۱۰۰d^۲)$$

سمت چپ این نابرابری، به‌شکل

$$(m^۲-۴dm+۵d^۲)(m^۲+۴dm+۵d^۲)(m^۲-d^۲)$$

در می‌آید. به ازای $m>d$، این عبارت مثبت است. به‌علاوه، اگر $m=d$ (مثلث، قائم‌الزاویه باشد)، آن وقت سمت چپ نابرابری، از سمت راست آن کمتر نیست (به‌ازای $t=\circ$، تساوی به‌دست می‌آید). به‌علاوه، اگر $d<m\leq \frac{۵}{۴}d$، آن وقت سمت راست نابرابری نامثبت است و نابرابری درست است. فرض کنید $m>\frac{۵}{۴}d$، در این حالت، سمت راست نابرابری، از مقدار به‌دست آمده به‌ازای $t=\frac{d}{m}$، کمتر است. اما به‌ازای $t=\frac{d}{m}$، مثلث اصلی قائم‌الزاویه است و برای مثلثهای قائم‌الزاویه، درستی نابرابری قبلاً ثابت شده است. (کافی است همین استدلال را برای ضلع دیگر مثلث تکرار کنید.) بنابراین، ثابت شده است که نابرابری (۱)، به‌ازای همهٔ مثلثهای غیر منفرجه به‌استثنای مثلثهای متساوی‌الساقین درست است؛ به‌ازای مثلثهای اخیر، برابری رخ می‌دهد.

۳۶۹ـ فرض کنید M در درون ABC، به‌فاصلهٔ x، y و z، به‌ترتیب، از ضلعهای BC، CA و AB قرار گیرد. مسأله، پیدا کردن مینیمم $x^۲+y^۲+z^۲$، به‌شرط اینکه $ax+by+cz=۲S_{ABC}$، است. به‌روشنی، این مقدار مینیمم، به‌ازای همان مقدارهای x، y و z برای مینیمم

$$x^۲+y^۲+z^۲-۲\lambda(ax+by+cz)=(x-\lambda a)^۲+(y-\lambda b)^۲+(z-\lambda c)^۲-\lambda^۲(a^۲+b^۲+c^۲)$$

به‌دست می‌آید، که در آن، λ عدد ثابت دلخواهی است (باز هم، به‌شرط اینکه $ax+by+cz=۲S_{ABC}$). با قرار دادن $\lambda=\frac{۲S_{ABC}}{a^۲+b^۲+c^۲}$ (λ، از معادله‌های $x=\lambda a$، $y=\lambda b$، $z=\lambda c$ و $ax+by+cz=۲S_{ABC}$، به‌دست می‌آید)، مشاهده می‌کنیم که مینیمم عبارت اخیر، به‌ازای $x=\lambda a$، $y=\lambda b$ و $z=\lambda c$ به‌دست می‌آید. اکنون، فرض کنید نقطهٔ M به‌فاصلهٔ λa، λb و λc، به‌ترتیب، از BC، CA و AB و نقطهٔ $M_۱$، قرینهٔ M نسبت به‌نیمساز زاویهٔ A باشد. از آنجا که $S_{AM_۱C}=S_{AM_۱B}$، $M_۱$ روی میانه‌ای قرار دارد که از A خارج می‌شود، و این بدان معنی است که M روی هم‌میانهٔ این زاویه قرار دارد (مسألهٔ ۱۷۱ بخش ۲ را ببینید).

۳۷۰ـ فرض کنید M نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد که بزرگترین زاویه‌اش از ۱۲۰° کمتر است. مثلث AMC را دور نقطهٔ A، به‌اندازهٔ زاویهٔ ۶۰°، به‌طور خارجی نسبت به‌مثلث ABC دوران می‌دهیم. در نتیجه، نقطهٔ C به‌نقطهٔ $C_۱$ و نقطهٔ M به‌نقطهٔ $M_۱$ بدل می‌شود. مجموع $|AM|+|BM|+|CM|$، برابر است با طول خط شکستهٔ $BMM_۱C$. طول این خط، وقتی که نقطه‌های M و $M_۱$ روی پاره‌خط $BC_۱$ واقع‌اند، کمترین مقدار است. بنابراین، حکم مسأله به‌دست می‌آید.

۳۷۱ـ فرض کنید ABC مثلث حادهٔ مفروض، $A_۱$ نقطه‌ای بر ضلع BC، $B_۱$ نقطه‌ای بر ضلع CA و $C_۱$ نقطه‌ای بر ضلع AB باشد؛ $A_۲$ و $A_۳$ نقطه‌های قرینهٔ $A_۱$، به ترتیب، نسبت به‌ضلعهای AB و AC، هستند. طول خط شکستهٔ $A_۲C_۱B_۱A_۳$، برابر محیط مثلث $A_۱B_۱C_۱$ است؛ در نتیجه، با ثابت بودن نقطهٔ $A_۱$، این محیط، کمترین مقدار، و برابر با $|A_۲A_۳|$، است وقتی که نقطه‌های $C_۱$ و $B_۱$ روی پاره‌خط $A_۲A_۳$ قرار گیرند. اما، $AA_۲A_۳$ مثلثی متساوی‌الساقین است، $\angle A_۲AA_۳=۲\angle BAC$ و $|A_۲A|=|A_۳A|=|AA_۱|$. به‌این ترتیب، $|A_۲A_۳|$ کمترین مقدار است، به‌شرط اینکه $AA_۱$ ارتفاع مثلث BAC باشد. به‌همین روش، $BB_۱$ و $CC_۱$ هم، باید ارتفاعهای مثلث باشند.

۳۷۲ـ اگر بزرگترین زاویهٔ مثلث کمتر از ۱۲۰° باشد، آن وقت مجموع فاصله‌ها، به‌ازای نقطه‌ای که از آن، ضلعهای مثلث به‌زاویهٔ ۱۲۰° قابل رویت‌اند، کمترین مقدار است (مسألهٔ ۳۷۰ بخش ۲ را ببینید). این مجموع، برابر $|BC_۱|$ (با استفاده از نمادگذاری حل مسألهٔ ۳۷۰ بخش ۲) است. مربع این مجموع، برابر است با

$$a^۲+b^۲-۲ab\cos(\angle C+۶۰^\circ)=\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲+c^۲)+۲S\sqrt{۳}$$

اما، از مسألهٔ ۳۶۲ بخش ۲ نتیجه می‌شود که $a^۲+b^۲+c^۲\geq ۴S\sqrt{۳}$. می‌ماند اینکه نابرابری $S\geq ۳\sqrt{۳}r^۲$ را ثابت کنیم، که این هم، به‌روش نسبتاً ساده‌ای ثابت می‌شود؛ این مطلب نتیجه می‌دهد که از میان همهٔ مثلثهای محیط بر دایره‌ای مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع کمترین مساحت را دارد (برای این مثلث، تساوی برقرار است). برای کامل کردن برهان، لازم است تحقیق کنید که چه وقت نابرابری $a+b\geq ۶r$ درست است، چرا که برای مثلثی با یک زاویهٔ بیشتر از ۱۲۰°، کمترین مقدار مجموع فاصله‌ها تا رأسها، در رأس منفرجه به‌دست می‌آید.

۳۷۳ـ نابرابری سمت راست را ثابت می‌کنیم. برای روشنی وضع، فرض کنید $b\geq c$.

(۱) اگر $a(\leq b)$، آن وقت

$$۲p=a+b+c=(b-a)+c+۲a<۲c+۲a\leq ۲\frac{bc}{a}+۲a=۲\frac{bc+a^۲}{a}$$

(۲) اگر $a\geq b\geq c$، آن وقت $a<۲b$ و

$$۲p=a+b+c=(b+c-a)+۲a\leq c+۲a<\frac{۲bc}{a}+۲a=۲\frac{bc+a^۲}{a}$$

نابرابری سمت چپ، از نابرابری سمت راست و اتحاد

$$(b+c)(p-a)-bc\cos A=a\left(\frac{bc+a^{۲}}{a}-p\right)$$

نتیجه می‌شود.

۳۷۴ـ داریم: $\frac{|BK|}{|KD|}=\frac{|AL|}{|LD|}=\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{|BN|}{|NC|}$، یعنی، KN با CD موازی است و چهارضلعی $KLMN$ متوازی‌الاضلاع است. فرض کنید $|AK|=a$، $|KC|=b$، $|BK|=x$، $|KD|=y$ و $\frac{x}{y}\geq\frac{a}{b}$؛ در این صورت

$$S_{KLM}=S_{ALM}-S_{AKL}=\left(\frac{x}{x+y}\right)^{۲}S_{ADC}-\frac{x}{x+y}\cdot\frac{a}{a+b}S_{ADC}$$

$$=\frac{x}{x+y}\left(\frac{x}{x+y}-\frac{a}{a+b}\right)\frac{y}{y+x}S_{ABCD}<\frac{x^{۲}y}{(x+y)^{۳}}S_{ABCD}$$

قرار می‌گذاریم: $\frac{y}{x}=t$. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که $\frac{۴}{۲۷}$، بیشترین مقدار تابع $\frac{t}{(۱+t)^{۳}}$، به‌ازای $t=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید (مثلاً، با مشتق گرفتن از این تابع). بنابراین

$$S_{KLMN}=۲S_{KLM}<\frac{۸}{۲۷}S_{ABCD}$$

۳۷۵ـ فرض کنید a، b و c معرف طول ضلعهای مثلث ABC باشند و I مرکز دایرهٔ محاطی آن باشد. تساوی برداری زیر برقرار است (این تساوی از ویژگی نیمساز نتیجه می‌شود، مسألهٔ ۹ بخش ۱ را ببینید)

$$\overrightarrow{IA}.a+\overrightarrow{IB}.b+\overrightarrow{IC}.c=۰ \qquad (۱)$$

به‌علاوه، $|IB|<c$ و $|IC|<b$. این نابرابریها از این حقیقت که زاویه‌های AIB و AIC منفرجه‌اند، به‌دست می‌آیند. نقطهٔ $A_۱$ را به‌دلخواه نزدیک به‌نقطهٔ A طوری می‌گیریم که مانند قبل، نابرابریهای $|I_۱B|<c$ و $|I_۱C|<b$، که در آنها، $I_۱$ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث $A_۱BC$ است، برقرار باشند. طول ضلعهای مثلث $A_۱BC$ برابرند با a، $b_۱$ و $c_۱$. مثل مثلث ABC می‌توان نوشت

$$\overrightarrow{I_۱A_۱}.a+\overrightarrow{I_۱B}.b_۱+\overrightarrow{I_۱C}.c_۱=۰ \qquad (۲)$$

(۱) را از (۲) کم کنید:

$$a(\overrightarrow{I_۱A_۱}-\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{I_۱B}.b_۱-\overrightarrow{IB}.b+\overrightarrow{I_۱C}.c_۱-\overrightarrow{IC}.c=۰ \qquad (۳)$$

توجه کنید که

$$\overrightarrow{I_1A_1}-\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{I_1I}+\overrightarrow{AA_1} \qquad (۴)$$

$$\overrightarrow{I_1B}.b_1-\overrightarrow{IB}.b=\overrightarrow{I_1B}(b_1-b)+\overrightarrow{I_1I}.b \qquad (۵)$$

$$\overrightarrow{I_1C}.c_1-\overrightarrow{IC}.c=\overrightarrow{I_1C}(c_1-c)+\overrightarrow{I_1I}.c \qquad (۶)$$

در (۳)، با قرار دادن تفاضلهای نظیر از دستورهای (۴)، (۵) و (۶)، به‌دست می‌آوریم

$$\overrightarrow{I_1I}(a+b+c)+\overrightarrow{AA_1}.a+\overrightarrow{I_1B}(b_1-b)+\overrightarrow{I_1C}(c_1-c)=0$$

از آنجا که $|\overrightarrow{I_1B}|<c$ ، $|\overrightarrow{I_1C}|<b$ ، $|b_1-b|<|A_1A|$ و $|c_1-c|<|\overrightarrow{A_1A}|$ ، داریم

$$|I_1I|=\frac{1}{a+b+c}\,|\overrightarrow{AA_1}.a+\overrightarrow{I_1B}(b_1-b)+\overrightarrow{I_1C}(c_1-c)|<|AA_1|\frac{a+b+c}{a+b+c}$$

$$=|AA_1|$$

که ازآنجا، حکم مسأله به‌ازای هر وضعیت از نقطهٔ A_1 نتیجه می‌شود.

تبصره. در واقع از برابری (۱) مشتق گرفته‌ایم و ثابت کرده‌ایم که $|V_A|>|V_I|$ ، که در آن V_A و V_I ، به‌ترتیب، سرعت جابه‌جایی نقطه‌های A و I هستند.

۳۷۶ـ دایره‌هایی بر مثلثهای ABF ، BCD و CAE محیط کنید. این دایره‌ها در نقطهٔ M مشترک‌اند. از آنجا که زاویه‌های مثلث DEF ثابت‌اند، $\angle D=\gamma$ ، $\angle E=\alpha$ و $\angle F=\beta$ ، دایره‌های رسم شده و نقطهٔ M ، از φ مستقل‌اند. طول ضلع DF (و در نتیجه، EF و ED) وقتی DF بر BM عمود است، کمترین مقدار است. فرض کنید φ_0 زاویهٔ نظیر این وضعیت باشد. در این صورت، $\angle MBC=\angle MCA=\angle MAB=90^\circ-\varphi_0$. CM را امتداد دهید تا دایرهٔ محیطی مثلث AMB را در نقطه‌ای مانند F_1 قطع کند. خواهیم داشت: $\angle F_1BA=\alpha$ و $\angle F_1AB=\beta$ ؛ F_1B با AC موازی می‌شود. از F_1 و B ، به‌ترتیب، عمودهای F_1N و BL را بر AC فرود می‌آوریم. از آنجا که $|F_1N|=|BL|$ ، داریم

$$\tan\varphi_0=\cot(90^\circ-\varphi_0)=\frac{|CN|}{|F_1N|}=\frac{|AN|}{|F_1N|}+\frac{|AL|}{|BL|}+\frac{|CL|}{|BL|}$$

$$=\cot\beta+\cot\alpha+\cot\gamma$$

به‌این ترتیب، $\tan\varphi_0=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$. **تبصره.** زاویهٔ $\omega=90^\circ-\varphi_0$ را زاویهٔ بروکار و نقطهٔ M را نقطهٔ بروکار می‌نامند. در هر مثلث دو نقطهٔ بروکار وجود دارد. جای M_1 ، نقطهٔ دوم، با شرط $\angle M_1BA=\angle M_1AC=\angle M_1CB$ مشخص می‌شود.

۳۷۷ـ قرار دهید: $\frac{|AC_1|}{|AB|}=x$ ، $\frac{|BA_1|}{|BC|}=y$ و $\frac{|CB_1|}{|CA|}=z$.

فرض می‌کنیم $x \leq \frac{1}{2}$. فرض کنید مساحت مثلثهای AB_1C_1، BC_1A_1 و CA_1B_1، از مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ بزرگتر باشد. در این صورت، $z \leq \frac{1}{2}$ (در غیر این صورت، $S_{AC_1B_1} \leq S_{A_1C_1B_1}$) و $y \leq \frac{1}{2}$. مساحت مثلثهای مورد بحث را می‌توان به سادگی بر حسب S_{ABC}، x، y و z نشان داد، مثلاً : $S_{AB_1C_1} = x(1-z)S_{ABC}$. نابرابری $S_{A_1B_1C_1} < S_{AB_1C_1}$، به‌شکل

$$1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y) < x(1-z)$$

در می‌آید. با جمع کردن سه نابرابری از این قبیل با هم، به‌دست می‌آوریم $3-4x(1-z)-4y(1-x)-4z(1-y) < 0$. نابرابری اخیر، نسبت به x، y و z خطی است، و اگر برای مقدارهای معلوم x، y و z، بین ۰ و $\frac{1}{2}$، برقرار باشد، برای مقدارهای حداکثر این متغیرها هم، درست است، یعنی، وقتی که هر یک از متغیرها برابر با ۰ یا $\frac{1}{2}$ باشد. اما، می‌توان تحقیق کرد که این طور نیست. تناقض حاصل، حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۷۸ـ فرض کنید Q معرف وسط OH باشد. همان طور که می‌دانیم، Q مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است (مسألهٔ ۱۶۰ بخش ۲ را ببینید). داریم $|OH|^2+4|QI|^2=2|OI|^2+2|HI|^2$ از آنجا که $|QI| = \frac{R}{2}-r$ (بنابر قضیهٔ فوئر باخ، مسألهٔ ۲۸۷ بخش ۲)، $|OI|^2 = R^2-2Rr$ (دستور اویلر، مسألهٔ ۱۹۳ بخش ۲) وبا در نظر داشتن اینکه $R \geq 2r$، به‌دست می‌آوریم

$$|OH|^2 = 2|IH|^2+R^2-4r^2 \geq 2|IH|^2$$

۳۷۹ـ ایدهٔ زیبای اثبات چنین نابرابریهایی را کازارینوف پیشنهاد کرده است (مجلهٔ ریاضی میشیگان، ۱۹۵۷، شمارهٔ ۲، صص ۹۷ـ۹۸). لب مطلب به‌قرار زیر است. نقطه‌های B_1 و C_1 را، به‌ترتیب، روی نیمخطهای AB و AC اختیار کنید. روشن است که مجموع مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای رسم شده بر AB_1 و AM، و بر AC_1 و AM، برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که یک ضلعش B_1C_1 و دیگری موازی با AM و برابر با $|AM|$ است (مسألهٔ ۴۰ بخش ۲ را هم ببینید). در نتیجه

$$|AC_1|v+|AB_1|w \leq |B_1C_1|x \qquad (1)$$

(الف) نقطه‌های B_1 و C_1 را منطبق بر نقطه‌های B و C می‌گیریم؛ در این صورت، نابرابری (۱)، نابرابری $bv+cw \leq ax$ را نتیجه می‌دهد. با جمع کردن سه نابرابری از این قبیل با هم، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

(ب) اگر $|AB_1| = |AC|$، $|AC_1| = |AB|$، آن وقت نابرابری (۱) نتیجه می‌دهد $cv+bw \leq ax$ یا $x \geq \frac{c}{a}v+\frac{b}{a}w$. با جمع کردن سه نابرابری از این نوع با هم، به‌دست می‌آوریم

$$x+y+z \geq \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)u+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)v+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)w \geq ۲(u+v+w)$$

(ج) در قسمت (الف)، نابرابری $ax \geq bv+cw$ را ثابت کردیم، که از آنجا $xu \geq \frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}wu$.
به‌روش مشابه، $yv \geq \frac{a}{b}uv + \frac{c}{b}wv$ و $zw \geq \frac{a}{c}uw + \frac{b}{c}vw$. با جمع کردن این سه نابرابری با هم، به‌دست می‌آوریم

$$xu+yv+zw \geq \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)uv+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)vw+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)wu \geq ۲(uv+vw+wu)$$

(د) فرض کنید $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$، به‌ترتیب، معرف تصویرهای M روی ضلعهای BC، CA و ABی مثلث ABC باشند. روی نیمخطهای MA، $MA_۱$، MB، $MB_۱$، MC و $MC_۱$، به‌ترتیب، نقطه‌های A'، $A'_۱$، B'، $B'_۱$، C' و $C'_۱$ را طوری بگیرید که

$$|MA|.|MA'| = |MA_۱|.|MA'_۱| = |MB|.|MB'| = |MB_۱|.|MB'_۱|$$
$$= |MC|.|MC'| = |MC_۱|.|MC'_۱| = d^۲$$

می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A'، B'، C'، به‌ترتیب، روی خطهای راست $B'_۱C'_۱$، $C'_۱A'_۱$ و $A'_۱B'_۱$ واقع‌اند و MA'، MB' و MC'، به‌ترتیب، بر این خطها عمودند. بنابراین، در مثلث $A'_۱B'_۱C'_۱$، فاصله‌های M تا رأسها برابرند با $\frac{d^۲}{u}$، $\frac{d^۲}{v}$ و $\frac{d^۲}{w}$، و تا ضلعهای روبه‌روی آنها برابرند با $\frac{d^۲}{x}$، $\frac{d^۲}{y}$ و $\frac{d^۲}{z}$. با استفاده از قسمت (ب)، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

(هـ) در نابرابری (۱)، $b_۱ = c_۱ = l$ می‌گیریم؛ در این صورت $a_۱ = ۲l\sin\frac{A}{۲}$. داریم

$$x \geq \frac{۱}{۲\sin\frac{A}{۲}}(u+v)$$

با به‌دست آوردن نابرابری مشابه برای y و z، و ضرب کردن آنها با هم، به‌دست می‌آوریم

$$xyz \geq \frac{۱}{۸\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}}(u+v)(v+w)(w+u) = \frac{R}{۲r}(u+v)(v+w)(w+u)$$

(برابری $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} = \frac{r}{۴R}$، ضمن حل مسألهٔ ۲۴۰ بخش ۱ اثبات شد).

(و) از نابرابری قسمت قبل نتیجه می‌شود

$$xyz \geq \frac{R}{۲r}\,۲\sqrt{uv}.۲\sqrt{vw}.۲\sqrt{wu} = \frac{۴R}{r}uvw$$

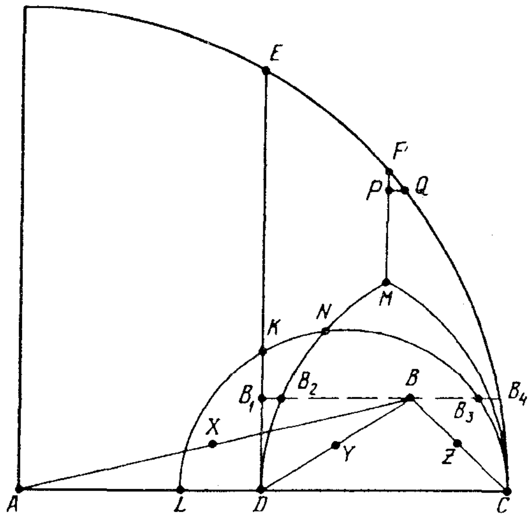
(ز) با تقسیم کردن نابرابری قسمت (د) بر نابرابری قسمت (و)، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

تبصره. در نابرابری قسمت (الف)، برابری برای مثلثهای حاده، وقتی اتفاق می‌افتد که M بر نقطهٔ

برخورد ارتفاعهای مثلث منطبق شود. در قسمتهای (ب)، (ج)، (د) و (ز)، برابری در مثلث متساوی‌الساقین، وقتی M مرکز این مثلث باشد، رخ می‌دهد. در قسمتهای (ه) و (و)، برابری در هر مثلث، وقتی که M مرکز دایرهٔ محاطی است، رخ می‌دهد.

۳۸۰ـ ردهٔ مثلثهای متشابه را در نظر بگیرید. یک نمایندهٔ این رده را مثلث ABC انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که $|AB| = v$، $|BC| = u$، $|AC| = 1$ و $1 \leq v \leq u$. به‌این ترتیب، به‌هر رده از مثلثهای متشابه، نقطهٔ B در درون مثلث خمیدهٔ CDE نظیر می‌شود، که در آن، D وسط شعاع AC، و کمان EC، کمانی از دایرهٔ به‌مرکز A وشعاع ۱ است و ED بر AC عمود است (شکل ۶۶). مثلث ABD، مثلثی «سمت چپی» و مثلث BDC، مثلثی «سمت راستی» خوانده می‌شود. فرایند توصیف شده در صورت مسأله را در نظر بگیرد؛ ضمن انجام این کار، در هر مرحله، تنها مثلثهایی را کنار می‌گذاریم که با مثلثهایی که قبلاً با آنها برخورد کرده‌ایم، متشابه‌اند. برای هر مثلث، یک نمایندهٔ رده که در بالا ذکر شد، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X، Y و Z، به‌ترتیب، وسطهای AB، DB و CB باشند؛ $m = |DB|$ و h طول ارتفاع مثلث ABC است. برای مثلثهای «سمت راستی»، سه حالت زیر ممکن است رخ دهد.

(۱) $\frac{1}{2} \leq u$ و $m \leq \frac{1}{2}$ یا $m \leq u$ و $\frac{1}{2} \leq m$، یعنی، بزرگترین ضلع، DC یا BD است. این حالت وقتی رخ می‌دهد که B در درون شکل $DMFC$ واقع باشد، که در آن، DM کمانی از دایرهٔ به‌شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز نقطهٔ C و FC بخش سمت راست کمان EC است، $|DM| = |MC| = \frac{1}{2}$، DC و FM پاره‌خط‌اند و $FM \perp DC$. در این حالت، کمان MC (به‌مرکز D)، ناحیه‌ای را که در



(شکل ٦٦)

آن DC بزرگترین ضلع مثلث DBC است، از ناحیه‌ای که بزرگترین ضلع DB است، جدا می‌کند، در این حالت، نمایندهٔ مثلث DBC ارتفاعی برابر با $2h$ دارد، به‌شرط آنکه DC بزرگترین ضلع باشد، یا

$$\frac{h}{2m^2} \geq \frac{h}{2|DB_4|^2} = \frac{h}{\frac{5}{2} - 2\sqrt{1-h^2}} = q_1(h)h$$

$q_1(h) > 1$، به‌شرط آنکه $h < \frac{\sqrt{7}}{4}$.

(۲) $u > m$، $u > \frac{1}{2}$ و $v > 2m$. توجه کنید که برای دایرهٔ به‌قطر LC، که در آن، $|AL| = \frac{1}{3}$، $v = 2m$. در درون این دایره $v > 2m$. این حالت وقتی رخ می‌دهد که نقطهٔ B، در درون مثلث خمیدهٔ DKN (KN و ND کمان و DK پاره‌خط است) باشد. از آنجا که مثلث DZC با مثلث اصلی، ABC، متشابه است، تنها مثلث DZB را در نظر می‌گیریم. طول بزرگترین ضلعش، DZ، برابر با $\frac{v}{2}$ است. نمایندهٔ آن، ارتفاعی برابر با

$$\frac{h}{4(\frac{v}{2})^2} = \frac{h}{v^2} \geq \frac{h}{|AB_2|^2} \geq \frac{h}{|AB_3|^2} = \frac{h}{\frac{5}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{9} - h^2}} = q_2(h)h_1$$

و $q_2(h) > 1$، دارد.

(۳) $u \geq \frac{1}{2}$، $u \geq m$ و $v \leq 2m$. در این حالت، بزرگترین ضلع در مثلث BZD، BD، برابر با m است و احتیاجی به‌بررسی بخشهای مثلث BDC نیست، زیرا مثلث BYZ با مثلث BDC، و مثلث DYZ با مثلث ABD متشابه است (دیگر مثلث DZC را در نظر نمی‌گیریم).

برای مثلثهای «سمت چپی» دو حالت ممکن است رخ دهد که با حالتهای (۲) و (۳) در مثلثهای «سمت راستی»، مشابه‌اند.

($'$۲) اگر B در درون شکل $DKNC$ باشد، آن وقت مثلث DXB، قابل انطباق بر مثلث DZB، برای ملاحضات بعدی کنار گذاشته می‌شود؛ طول ارتفاع نمایندهٔ آن، از $q_2(h)h$ کمتر نیست.

($'$۳) اگر B بیرون شکل $DKNC$ باشد، بررسی بیشتر بخشهای مثلث ABD متوقف می‌شود.

توجه کنید که، با افزایش در h، ضریب $q_2(h)$ افزایش می‌یابد، در حالی که $q_1(h)$ کاهش می‌یابد و در نقطهٔ F برابر با ۱ می‌شود، $h = \frac{\sqrt{7}}{4}$. نقطه‌های P و Q را، به‌ترتیب، بر FM و کمان FC و به‌اندازهٔ کافی نزدیک F، اختیار می‌کنیم. در درون شکل $B_1KNMPQB_4$، نابرابریهای $q_1(h) \geq q_0$، $q_2(h) \geq q_0$ و $q_0 > 1$ برقرارند. در نتیجه، در همهٔ حالتها، میزان افزایش h، از q_0 کمتر نیست و در تعداد متناهی مرحله یا برای همهٔ مثلثهای مورد بحث، یا حالت (۳) رخ می‌دهد یا رأس مثلث در درون مثلث PFQ قرار می‌گیرد. حالتی که نقطهٔ B در درون مثلث PFQ است، مشکلی در بر ندارد و جداگانه بررسی می‌شود. در آن حالت، مثلثهای «سمت راستی» بررسی

می‌شوند. کافی است درشرط $|FP| \leq |FM| = \frac{\sqrt{۷}-\sqrt{۳}}{۴}$ صادق باشند. درمثلث BDC، ضلع BD، برابر با m، بزرگترین ضلع است و $h^۲ \geq \frac{۷}{۱۶}$. می‌توانیم نشان دهیم که نمایندهٔ ردهٔ مثلثهای متشابه با مثلث BDC، نقطهٔ نظیری واقع در بیرون مثلث خمیدهٔ PFQ دارد و چون ارتفاع در این حالت کاهش نمی‌یابد، در هر دو بخش مثلث BDC، حالت (۳) اتفاق می‌افتد. به‌این طریق اثبات قسمت اول کامل شده است.

قسمت دوم، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۳۷ بخش ۲ و نیز، از این مطلب که همهٔ مثلثهای در نظر گرفته شده پس از تقسیم اول، دارای نماینده‌ای با ارتفاع نا کمتر از h هستند و در نتیجه، کوچکترین زاویه از $\angle B_۴AC > \frac{۱}{۲}\angle B_۱AC \geq \frac{۱}{۲}\angle BAC$ کمتر نیست، نتیجه می‌شود.

۳۸۱ـ نتیجه‌ای را، که م. د. کوالِف به‌دست آورده، بیان و اثبات می‌کنیم که از خواستهٔ مسأله قویتر است. از میان همهٔ شکلهای محدب که هر مثلث با طول ضلعهای نابیشتر از واحد را می‌پوشانند، کمترین مساحت را مثلث ABC داراست، که در آن $\angle A = ۶۰^\circ$، $|AB| = ۱$ و ارتفاع مرسوم بر AB، برابر با $\cos ۱۰^\circ$ است. مساحت این مثلث، برابر $\frac{۱}{۲}\cos ۱۰^\circ \approx ۰{,}۴۹۲۴$ است.

(۱) توجه کنید که کافی است مثلثی پیدا کنیم که هر مثلث متساوی‌الساقین را که طول ساقهایش برابر ۱ است و φ، زاویهٔ بین آنها، از ۶۰° تجاوز نمی‌کند، می‌پوشاند. این مطلب، از این حقیقت نتیجه می‌شود که هر مثلث با طول ضلعهای نابیشتر از ۱ را می‌توان با مثلثی متساوی‌الساقین از نوع ذکر شده پوشاند.

(۲) ثابت می‌کنیم که هر مثلث متساوی‌الساقین مذکور در قسمت (۱) را می‌توان با مثلث ABC پوشاند. دایره‌ای به‌شعاع ۱ و مرکز نقطهٔ C رسم می‌کنیم. فرض کنید K، L، M و N نقطه‌های برخورد متوالی آن با CB، BA و AC باشند (L و M بر BA واقع‌اند)، $\angle LCM = \angle MCN = ۲۰^\circ$. بنابراین، مثلثهای متساوی‌الساقین با شرط $۰ \leq \varphi \leq ۲۰^\circ$ را قطاع CMN می‌پوشاند، در حالی که مثلثهایی را که در آنها $۲۰^\circ < \varphi \leq \angle C$، مثلث ABC می‌پوشاند، به‌شرط اینکه نقطه‌های انتهایی قاعده، روی کمانهای KL و MN، و رأس سوم در نقطهٔ C اختیار شود. اکنون، دایره‌ای به‌شعاع واحد و مرکز نقطهٔ A رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B می‌گذرد و BC را دوباره در نقطهٔ P و ضلع AC را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. به‌دست می‌آوریم: $\angle PAB = ۱۸۰^\circ - ۲\angle B < \angle C$، زیرا B بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC است. بنابراین، با گرفتن رأس مثلث متساوی‌الساقین در نقطهٔ A و نقطه‌های انتهایی قاعده در نقطهٔ B و روی کمان PQ، می‌توانیم هر مثلث متساوی‌الساقین را که برای آن $\angle C < \varphi \leq ۶۰^\circ$ (حتی $۱۸۰^\circ - ۲\angle B \leq \varphi \leq ۶۰^\circ$)، بپوشانیم.

(۳) ثابت می‌کنیم در هر ترتیب (در صفحه) از مثلث متساوی‌الساقین DEF، که در آن، $\angle DEF = ۲۰^\circ$، $|DE| = |EF| = ۱$، و مثلث متساوی‌الاضلاع XYZ به‌ضلع ۱، مساحت

کوچکترین‌شکل محدب شامل مثلثهای DEF و XYZ، از $0.5\cos 10^\circ$ کمترنیست. نخست، توجه کنید که ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع شامل DEF، برابر است با $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10^\circ$. (حکم زیر درست است: اگر مثلثی بتواند در درون مثلث دیگری جا بگیرید، آن وقت می‌تواند چنان قرار بگیرد که دو تا از رأسهایش بر ضلعهای مثلث بزرگتر قرار گیرد. این حکم کلی را ثابت نمی‌کنیم. کافی است درستی آن را در حالتی که یکی از آنها مثلث DEF و دیگری مثلثی متساوی‌الاضلاع است، ببینید. این کار را می‌توان به‌سادگی انجام داد.) اکنون، کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع، $X_1Y_1Z_1$، را با ضلعهای به‌موازات ضلعهای مثلث XYZ و شامل مثلثهای DEF و XYZ، در نظر بگیرید. طول ضلع $\triangle X_1Y_1Z_1$، از $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 10^\circ$ و ارتفاع آن از $\cos 10^\circ$ کمتر نیست. رأسهای مثلث DEF باید بر ضلعهای مثلث $X_1Y_1Z_1$ که شامل ضلعهای مثلث XYZ نیستند، قرار بگیرند. در نتیجه، مجموع فاصلهٔ رأسهای مثلث DEF، که بیرون مثلث XYZ هستند، تا ضلعهای نظیر مثلث XYZ، دست کم $\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}$ است و مساحت کوچکترین چندضلعی محدب شامل مثلثهای DEF و XYZ، از

$$0.5\left(\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.5\cos 10^\circ$$

کمتر نیست.

(م. د. کوالف همچنین ثابت کرد که کوچکترین (از نظر مساحت) پوشش محدب پیدا شده برای مثلثهای با طول ضلعهای نابیشتر از واحد، یکتاست).