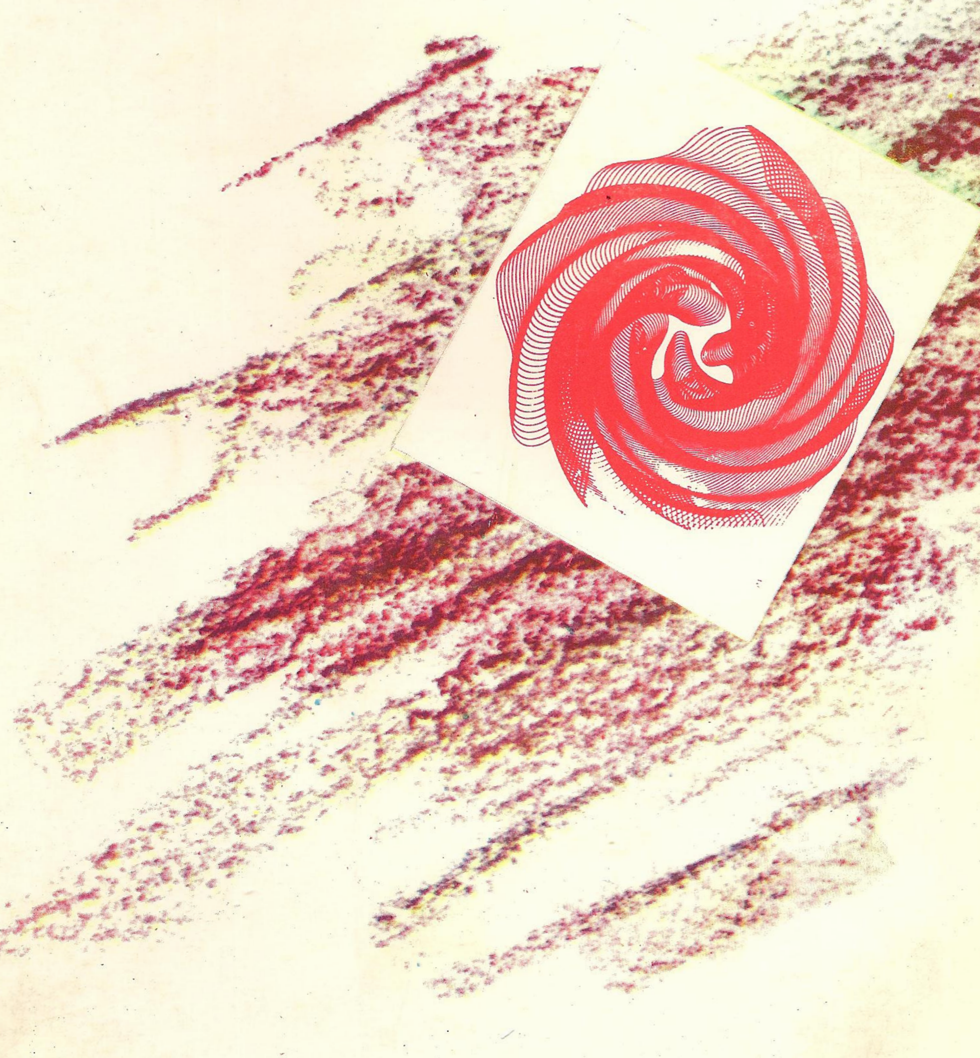
مسأله‌های المپیادهای ریاضی

در کشورهای مختلف

(با حل مسأله‌ها)

ترجمهٔ پرویز شهریاری



مسأله‌های المپیادهای ریاضی

(در کشورهای مختلف)

ترجمه: پرویز شهریاری

فهرست

پیش گفتار

دربسیاری از کشورهای جهان، برای علاقه‌مند کردن دانش آموزان به‌ریاضیات، المپیادهای ریاضی به‌طور منظم برگزار می‌شود. تجربه نشان داده است که، برگزاری المپیادها، نقش جدی‌در تبلیغ دانش ریاضی دربین جوانان داشته است. به جز این، المپیادهای بین‌المللی ریاضی را، باید شکلی از همکاری دانشمندان کشورهای مختلف دانست. به‌همین مناسبت است که جنبش المپیادی، درتمامی جهان در زمان ما، روبه گسترش و تکامل است.

تعداد کشورهایی که المپیادهای ملی خود را تدارك می‌بینند، سال به سال رو به افزایش است و المپیادهای بین‌المللی ریاضی هم، از سال ۱۹۵۹ برگزار می‌شوند. تعداد کشورهایی که در المپیادهای بین‌المللی شرکت می‌کنند، مرتباً روبه‌افزایش است و از ۵ تا ۷ کشوری که در سال‌های نخست شرکت داشتند، به‌بیش از ۳۰ کشور رسیده است. در دهۀ اخیر، انجام مسابقه‌های ریاضی

منطقه‌ای هم، مورد توجه قرار گرفته است و مرتباً به تعداد آن‌ها افزوده می‌شود. المپیادهای ریاضی، در برنامه‌های درسی بسیاری از کشورها هم اثر گذاشته است و موجب پیدایش نشریه‌های ریاضی در کشورهای مختلف شده‌است.

در کشور شوروی، چه در زمینهٔ برگزاری المپیادهای ریاضی دبیرستانی و چه در زمینهٔ چاپ کتاب‌ها و نشریه‌های مناسب، سنتی دیرینه و پربار وجود دارد و کشور شوروی، همیشه یکی از موفق‌ترین کشورها، در المپیادهای بین‌المللی بوده است.

در کتاب حاضر، جالب‌ترین (به عقیدهٔ نویسندگان) و یا نمونه‌ای‌ترین مسأله‌های المپیادهای کشورهای مختلف (به جز اتحاد شوروی) جمع‌آوری شده است. در این کتاب، از مسأله‌های المپیادهای ملی ۱۹ کشور و، همچنین، مسأله‌های پیشنهادی هیأت داوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی در سال‌های ۱۹۷۶، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹ و ۱۹۸۱ تا ۱۹۸۳ مسابقه‌های بین‌المللی ریاضی در لوکزامبورگ و فنلاند، المپیادهای کشورهای شبه جزیرهٔ بالکان در سال ۱۹۸۴ و المپیادهای سنتی «اطریش ـ لهستان» استفاده شده است. بیش از همه، به مسأله‌های المپیادهای انگلستان، امریکا، بلغارستان، چکوسلواکی، رومانی و یوگسلاوی توجه داشته‌ایم. در مورد المپیادهای مجارستان و لهستان، بیشتر به مسألهٔهای سال‌های اخیر توجه داشته‌ایم، چرا که

مسأله‌های المپیادهای سال‌های قبل، قبلاً چاپ شده است؛ به‌طور کلی، درمورد همهٔ کشورها، بیشترین استفاده را از المپیادهای سال‌های اخیر آن‌ها کرده‌ایم.

این کتاب بیشتر برای دانش آموزان کلاس‌های آخر دبیرستان تنظیم شده است و هدف آن، بالابردن سطح دانش و آگاهی ریاضی آن‌هاست. بسیاری از مسأله‌های این کتاب، چندان دشوار نیستند، ولی روی‌هم، همهٔ اندیشه‌های مطرح‌شده در المپیادها را شامل می‌شوند. به‌همین مناسبت، امیدواریم، دانش آموزانی که در المپیادهای ریاضی تجربه‌ای ندارند، بتوانند بهرهٔ زیادی از این کتاب ببرند. مسأله‌های دشوارتر را با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم و دانش آموزان می‌توانند با پرداختن به آن‌ها، نیروی خود را در حل مسأله‌ها بیازمایند. بیش از همه، باید مسأله‌هایی را مورد توجه قرار داد که موضوع آن‌ها، در کتاب‌های درسی به صورتی گذرا مطرح شده است و یا اصولاً در کتاب‌های درسی دبیرستانی وجود ندارند.

همهٔ مسأله‌ها را حل کرده‌ایم: حل بعضی از مسأله‌ها را از کتاب‌هایی برداشته‌ایم که در کشورهای دیگر چاپ شده‌اند و برخی دیگر (به‌خصوص حل مسأله‌های هندسی) را، خودمان حل کرده‌ایم. ولی توصیهٔ ما به‌خواننده این است که، خود به طور مستقل و بدون مراجعه به راه‌حل‌های کتاب، تمامی تلاش را در حل مسأله‌ها به‌کار برد و تنها

برای مقایسهٔ راه‌حل خود با راه‌حل کتاب، به‌آن‌ها مراجعه کند. درضمن، خواننده باید دربرخی‌موردها، راه‌حل‌هایی راکه به‌تفصیل داده نشده است، خود کامل کند.

درهربند مسأله‌ها به‌ردیفی آمده است که، به‌تقریب، از ساده به دشوار باشد و، درضمن، از اندیشه‌ای‌که برای یك مسأله به‌کار رفته است، بتوان برای برخی ازمسأله‌های بعدی استفاده کرد.

ضمن انتخاب مسأله‌ها، نویسندگان به این جنبهٔ کار توجه داشته‌اند که خواننده را با روش‌های نامتعارف حل مسأله‌ها که اغلب با آن‌ها رو به رو می‌شوند، آشنا کنند، اندیشه‌ها و حقیقت‌های تازه‌ای را برای آن‌ها روشن کنند وقدرت تفکر آن‌ها را بالا ببرند. به همین مناسبت، در برخی جاها، از اندیشه‌هایی استفاده شده‌است که، تاحدی، از برنامهٔ ریاضی دبیرستانی خارج می‌شود. این اندیشه‌ها را، با تفصیل بیشتری، درضمیمهٔ آخر کتاب آورده‌ایم.

ساختار کتاب

کتاب از سه بخش تشکیل شده است.

دربخش اول، صورت مسأله‌ها داده شده است. این بخش شامل هفت فصل و، هرفصل، شامل چند بند است. فصل‌ها و بندها، برحسب موضوع‌ها تنظیم شده‌اند. البته، این تقسیم‌بندی را باید مشروط دانست، زیرا بسیاری از

مسأله‌ها را می‌توان دربندها یا فصل‌های مختلفی جا داد.

درآغاز هربند، به‌آگاهی‌هایی اشاره شده است که درضمیمهٔ ج آمده و آشنائی با آن‌ها، بـرای درك صورت مسأله‌ها ویا حل آن‌ها، ضروری است.

بعد ازشمارهٔ هرمسأله، نام‌کشوری که مسأله دریکی از المپیادهـای آن طرح شده است (همراه بـا سال آن) آمده است، درکنار شمارهٔ مسأله‌هـای دشوارتر، علامت ستاره را گذاشته‌ایم. «پکن» به‌معنای المپیادی است که در پکن جریان داشته و «نیویورك» به معنـای مجلهٔ نیویورك است که برای کالج‌های دو ساله منتشر می‌شود. مسأله‌های مسابقه‌هـای بین‌المللی، بـا نـام‌هـای «اتریش ــ لهستان» (مسابقه‌هـای مشترك دانش‌آموزان لهستـان و اتـریش)، «بالکان» (مسابقه‌های بین دانش‌آموزان کشورهای بالکان)، «مسابقهٔ بین‌المللی» (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضی سال ۱۹۸۰) آمده است. سرانجام، مسأله‌هایی که به‌وسیلهٔ هیأت‌داوران المپیادهای بین‌المللی ریاضیات طـرح شده‌اند، بـا عنوان «هیأت داوران» ذکـر شده است؛ نام‌کشور طرح‌کننده و سال طرح آن‌هم، به‌دنبال این عنوان یادآوری شده‌است. با کمال تأسف، نویسندگان کتاب، از نـام‌کشورهایی کـه مسأله‌هایی برای‌المپیاد بین‌المللی ریاضی سال ۱۹۸۱ طرح کرده‌اند، اطلاعی ندارند.

دربخش دوم، مسأله‌های بخش اول حل شده‌است.

بخش سوم هم، شامل چند ضمیمه است.

صورت برخی از مسأله‌ها، با صورت اصلی آن‌ها، اندکی تفاوت دارد. این تغییرها را، درضمیمهٔ الف منعکس کرده‌ایم.

درضمیمهٔ ب، به‌صورتی کوتاه، ازمسابقه‌های ریاضی مختلفی که در کشورهای گوناگون در جریان است، گفت و گو کرده‌ایم؛ همچنین، صورت مسأله‌هائی از المپیادهای سال ۱۹۸۵-۱۹۸۶ را که در اختیار مؤلفان بوده است آورده‌ایم. حل این مسأله‌ها دراین کتاب نیست و از خواننده می‌خواهیم، خود به حل آن‌ها بپردازد.

در ضمیمهٔ ج، مفهوم‌ها و گزاره‌های اصلی را که برای درك دو بخش اول و دوم لازم است، آورده‌ایم و، سرانجام، درضمیمهٔ آخر، فهرستی ازنمادهای مورداستفادهٔ کتاب، آمده است.

مسأله‌ها

فصل اول

حساب

§۱. بخش‌پذیری. عددهای اول و عددهای مرکب

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱ تا ۱۶ و ۱۹ و
قضیه‌های ۱، ۴، ۹ تا ۱۲، ۱۴، ۱۸، ۱۹،
۲۱، ۲۳ و ۲۵ را ببینید)

۰۱ (انگلستان، ۱۹۶۸). a_1، a_2، …، a_7 عددهایی درست‌اند؛ b_1، b_2، …، a_7 هم همان عددها، منتهی به‌ردیف دیگری هستند. ثابت کنید، عدد

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_7-b_7)$$

عددی زوج است.

۰۲ (نیویورک، ۱۹۷۶). a، a_0، a_1، …، a_n را عددهای درست دلخواهی فرض کنید. آیا این حکم درست است که، عدد درست

$$\sum_{k=0}^{n}(a^2+1)^{3k}a_k$$

وقتی و تنها وقتی بر a^2+a+1 (یا بر a^2-a+1) بخش‌پذیر است که عدد

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

بر a^2+a+1 (و یا بر a^2-a+1) بخش‌پذیر باشد؟

۳. (چکوسلواکی، ۱۹۵۲؛ انگلستان، ۱۹۶۵). در جدول «مثلثی» بی‌پایان

$$a_{1,0}$$

$$a_{2,-1} \quad a_{2,0} \quad a_{2,1}$$

$$a_{3,-2} \quad a_{3,-1} \quad a_{3,0} \quad a_{3,1} \quad a_{3,2}$$

$$a_{4,-3} \quad a_{4,-2} \quad a_{4,-1} \quad a_{4,0} \quad a_{4,1} \quad a_{4,2} \quad a_{4,3}$$

. . . .

$a_{1,0}=1$ و هر عدد $a_{n,k}$ در n امین سطر ($n\in\mathbf{N}$، $n>1$) و k امین جا ($k\in\mathbf{Z}$، $|k|<n$)، برابر است با مجموع

$$a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1}$$

یعنی سه عدد از سطر قبل (اگر یکی از این عددها در جدول وجود ندارد، به‌جای آن، صفر به حساب می‌آوریم). ثابت‌کنید در هر سطر، با آغاز از سطر سوم، دست‌کم یك عدد زوج وجود دارد.

۴. (چکوسلواکی، ۱۹۷۱). ثابت کنید، برای هر عدد اول $p>2$، صورت m از کسر

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p-1} \quad (m, n\in\mathbf{N})$$

بر p بخش‌پذیر است.

۵. (نیویورك، ۱۹۷۵). ثابت‌کنید، برای هرعدد درست $n>1$، عدد n^n-n^2+n-1 بر $(n-1)^2$ بخش‌پذیر است.

۶. (بلغارستان، ۱۹۶۵). ثابت کنید، در بین عددهای طبیعی بزرگتر از واحد تنها یك «سه تائی» می‌توان پیدا کرد که، حاصل‌ضرب هر دو عدد

از آن‌ها به‌اضافهٔ ۱، بر سومی بخش‌پذیر باشد.

۰۷ (انگلستان، ۱۹۷۶). ثابت کنید، به‌ازای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}^+$، عدد $17+19\times 8^n$، عددی مرکب (غیراول) است.

۰۸ (کانادا، ۱۹۸۳). ثابت کنید، برای هر عدد اول p، بی‌نهایت عدد به‌صورت 2^n-n $(n\in\mathbf{N})$ وجود دارد که بر p بخش‌پذیر است.

۰۹ (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، بی‌نهایت مقدار برای $n\in\mathbf{N}$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که هر عدد به‌صورت m^4+n $(m\in\mathbf{N})$، عددی مرکب باشد.

۰۱۰ (چکوسلواکی، ۱۹۷۹)، همهٔ عددهای طبیعی $n>2$ را پیدا کنید که از عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰ تجاوز نکنند و دارای ویژگی زیر باشند: هر عدد m، که نسبت به n اول است و درنابرابری $1<m<n$ صدق می‌کند، عددی اول است.

۰۱۱ (جمهوری فدرال آلمان، ۱۹۷۷). $a>1$، عددی طبیعی است. عددهایی را پیدا کنید که مقسوم‌علیه‌های دست‌کم یکی از عددهای زیر باشند:

$$a_n=\sum_{k=0}^{n} a^k \quad (n\in\mathbf{N})$$

۰۱۲ (نیویورک، ۱۹۷۴). برای دو عدد طبیعی مفروض $m<n$، ثابت کنید، هر مجموعه‌ای از n عدد درست متوالی، شامل دو عدد مختلف است، به‌نحوی که حاصل‌ضرب آن‌ها بر mn بخش‌پذیر است.

۰۱۳ (نیویورک، ۱۹۷۶). فرض کنید $f(n)\in\mathbf{N}$، کوچکترین عددی باشد که، برای آن، مجموع $\sum_{k=1}^{f(n)} k$، بر n بخش‌پذیر است. ثابت کنید، برابری $f(n)=2n-1$، برای عددهای به‌صورت $n=2^m$ $(m\in\mathbf{Z}^+)$، و تنها برای آن‌ها، برقرار است.

۰۱۴ (هیأت داوران، جمهوری فدرال آلمان ۱۹۷۹؛ بلغارستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر عدد $1+2^n+4^n$، به‌ازای مقداری از $n\in\mathbf{N}$، اول باشد، آن وقت $n=3^k$ $(k\in\mathbf{Z}^+)$.

۰۱۵ (رومانی، ۱۹۷۸). فرض کنید، عـددهای طبیعی m و n چنانند که، برای هر مقدار $k\in\mathbf{N}$، بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد ۱ $-$ $11k$ و m، با بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد ۱ $-$ $11k$ و n، برابر باشند. ثابت کنید، برای مقداری مثل $l\in\mathbf{Z}$، برابری $m=11^l n$ برقرار است.

۰۱۶ (نیویورك، ۱۹۷۵). بـزرگتریـن مقسوم علیه مشترك چهار عدد درست a، b، c و d بـرابـر است با ۱. آیا این حکم درست است که: هر مقسوم‌علیه اول عدد $ad-bc$، وقتی و تنها وقتی مقسوم علیهی از عددهای a و c است که، به‌ازای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}$، عددهای $an+b$ و $cn+d$، نسبت به‌هم اول باشند؟

*۰۱۷ (امریکا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، می‌تـوان عـدد $k\in\mathbf{N}$ را طوری پیدا کرد که، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، عدد $k.2^n+1$، عددی مرکب باشد.

*۰۱۸ (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هـر عدد طبیعی $a>2$، بی‌نهایت عدد $n\in\mathbf{N}$ می‌توان پیدا کـرد، به نحوی a^n-1 بر n بخش‌پذیر باشد. آیا همین گزاره در مورد $a=2$ هم درست است؟

۰۱۹ (هیأت داوران، بلژیك، ۱۹۸۳). ثابت کنید، بی‌نهایت عدد $n\in\mathbf{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که به‌ازای همهٔ مقدارهای $k=1, 2, \ldots, n-1$، در نابرابری

$$\frac{\sigma(n)}{n}>\frac{\sigma(k)}{k}$$

صدق کنند، منظور از $\sigma(n)$، مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های عدد n است.

*۰۲۰ (مجارستان، ۱۹۸۲). برای عدد طبیعی مفروض $k>1$، کوچکترین مضرب مشترك عددهای n، $n+1$، ...، $n+k$ را $(n\in\mathbf{N})$ با $Q(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید، بی‌نهایت عدد $n\in\mathbf{N}$ می‌توان پیدا کـرد، بـه‌نحوی که نابرابری $Q(n)>Q(n+1)$ برقرار باشد.

*۰۲۱ (اتـریش، ۱۹۷۳). ثابت کنید، برای هـر مقدار $n\in\mathbf{N}$، این نابرابری برقرار است:

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{k}-\frac{2n}{3}<\frac{2}{3}$$

که در آن، $g(k)$، عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه فرد عدد k.

۰۲۲* (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۹). $h(n)$ را بزرگترین مقسوم علیه اول عدد $n\in\mathbf{N}$ $(n\geqslant ۲)$ می‌گیریم. آیا مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای n وجود دارد که با شرط زیر سازگار باشند:

$$h(n)<h(n+۱)<h(n+۲)$$

۰۲۳* (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۰) تعدادمقسوم علیه‌های اول عدد طبیعی $n>۱$ را با $w(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید، برای مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای n، داریم:

$$w(n)<w(n+۱)<w(n+۲)$$

§۴. ریشه‌های درست و گویا در معادله‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱، ۱۲، ۱۴ تا ۱۶ و قضیه‌های ۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۶، ۱۸، ۲۱ تا ۲۳، ۲۵، ۶۰، ۶۱ را ببینید).

۰۲۴ (نیویورك، ۱۹۷۷). ریشه‌های طبیعی معادلهٔ $y^۲=۱+۲^x$ را پیدا کنید.

۰۲۵ (انگلستان، ۱۹۷۲). ثابت کنید، برای عددهای درست a، b، c، d $(a\neq b)$، معادلهٔ

$$(x+ay+c)(x+by+d)=۲$$

بیش از چهار جواب، در مجموعهٔ عددهای درست، ندارد. بەازای چه مقدارهایی از a، b، c و d، چهار جواب مختلف دارد؟

۰۲۶ (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۷۳). جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x(x+۱)(x+۷)(x+۸)=y^۲$$

۰۲۷ (رومانی، ۱۹۸۱). جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x^۶+۳x^۳+۱=y^۴$$

۲۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). معادلهٔ

$$x^۲+xy+y^۲=x^۲y^۲$$

را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید.

۲۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). این معادله را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید:

$$(x+۲)^۴-x^۴=y^۳$$

۳۰. (امریکا، ۱۹۷۹). جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x_۱^۴+x_۲^۴+\dots+x_{۱۴}^۴=۱۵۹۹$$

۳۱. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰؛ رومانی، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای عددهای درست و فرد a، b و c، معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، جواب‌های گویا ندارد.

۳۲. (انگلستان، ۱۹۷۰). این معادله را، در مجموعهٔ عددهای گویا، حل کنید:

$$\sqrt{۲\sqrt{۳}-۳}=\sqrt{x\sqrt{۳}}-\sqrt{y\sqrt{۳}}$$

۳۳. (برزیل، ۱۹۸۳). ثابت کنید، معادلهٔ

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۱}{۱۹۸۳}$$

در مجموعهٔ عددهای طبیعی، تعداد محدودی جواب دارد.

۳۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای عددهای درست a و b، که با شرط $۵a\geqslant ۷b\geqslant ۰$ سازگار باشند، دستگاه

$$\begin{cases} x+۲y+۳z+۷u=a \\ y+۲z+۵u=b \end{cases}$$

در مجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، دارای جواب است.

۳۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۷). چند جفت عدد طبیعی p و q می‌توان پیدا کرد که از ۱۰۰ تجاوز نکنند و، به‌ازای آن‌ها، معادلهٔ

$$x^5+px+q=0$$

در مجموعهٔ عددهای گویا، دارای جواب باشد؟

۳۶. (چکوسلواکی، ۱۹۷۶). معادلهٔ $x^2+y^2=3z^2$ را، درمجموعهٔ عددهای درست، حل کنید.

۳۷. (مجارستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید معادلهٔ

$$x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$$

در مجموعهٔ عددهای گویا، تنها یك جواب دارد: $x=y=z=0$.

۳۸. (امریکا، ۱۹۷۶). جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x^2+y^2+z^2=x^2y^2$$

۳۹. (انگلستان، ۱۹۷۰). برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ

$$n^2+x^2=y^2$$

را، که بزرگتر از n باشد، با $a_n\in\mathbf{Z}^+$ نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید، برای هر عدد M، نابرابری $a_n>M$، دست کم برای یك مقدار $n\in\mathbf{N}$ برقرار است.

ب) آیا درست است که $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$؟

۴۰. (مجارستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر عدد اول $p>5$، معادلهٔ

$$x^4+4^x=p$$

درمجموعهٔ عددهای درست، جواب ندارد.

۴۱. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰)، ثابت کنید معادلهٔ

$$(2x)^{2x}-1=y^{z+1}$$

درمجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب ندارد.

۴۲. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، معادلهٔ

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=y^2$$

درمجموعهٔ عددهای طبیعی، دارای جواب است.

۴۳. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۷). عددهای طبیعی a_1، a_2، a_n، ...، a_{n+1} مفروض‌اند. در ضمن، به ازای هر مقدار $i=1, 2, \dots, n$، عددهای a_i و a_{i+1} نسبت به‌هم اول‌اند. ثابت کنید معادلهٔ

$$x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\dots+x_n^{a_n}=x_{n+1}^{a_{n+1}}$$

در مجموعهٔ عددهای طبیعی، بی‌نهایت جواب دارد.

۴۴. (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر دوعدد طبیعی a و b، که نسبت به‌هم اول‌اند، وهرعددطبیعی $c\geqslant(a-1)(b-1)$، معادلهٔ $c=ax+by$، در مجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، جواب دارد.

۴۵. (مجارستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هر مقدار گویای a و b، معادلهٔ $ax^2+by^2=1$، در مجموعهٔ عددهای گویا، یا جواب ندارد و یا بی‌نهایت جواب دارد.

۴۶. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر دو عدد درست a و b، که نسبت به هم اول باشند، معادلهٔ $ax^2+by^2=z^3$، در مجموعهٔ عددهای درست، دارای بی‌نهایت جواب است که در شرط $(x, y)=1$ صدق می‌کنند.

۴۷. (انگلستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی $n>1$، معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$، در مجموعهٔ عددهای طبیعی و به شرط $x\leqslant n$ و $y\leqslant n$، جواب ندارد.

۴۸*. (اتریش، ۱۹۷۲). ثابت کنید، برای‌هرعددطبیعی $n>2$، معادلهٔ

$$x^n+(x+1)^n=(x+2)^n$$

درمجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب ندارد.

۴۹*. (نیویورك، ۱۹۸۱). معادلهٔ

$$x^{x+y}=(x+y)^{y}$$

را، درمجموعهٔ عددهای گویای مثبت، حل کنید.

۵۰*. (مجارستان، ۱۹۸۰؛ بلغارستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر عدد $n\in\mathbf{N}$، فرد باشد، آن وقت معادلهٔ

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۴}{n}$$

وقتی وتنها وقتی درمجموعهٔ عددهای طبیعی جواب داردکه داشته باشیم:

$$n=m(۴k-۱) \qquad (m، k\in\mathbf{N})$$

۵۱*. (هیأت داوران، کانادا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، مجموعهٔ همهٔ مقدارهایی از $n\in\mathbf{N}$ را، که برای آن‌ها، معادلهٔ

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۳}{n}$$

در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد، نمی‌توان به صورت اجتماع مجموعه‌ای متناهی از تصاعدهای حسابی (متناهی یا نامتناهی) نشان داد.

۵۲*. (بلغارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، معادلهٔ $x^{۲}+۵=y^{۳}$، در مجموعهٔ عددهای درست جواب ندارد.

§۳. فاکتوریل‌ها و ضریب‌های دوجمله‌ای

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱، ۱۲، ۱۴ تا ۱۸
وقضیه‌های ۲، ۴، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۵ تا ۱۷،
۲۰، ۲۱، ۲۶ را ببینید)

۵۳. (هلند، ۱۹۸۲). کدام بزرگتر ند:

$$۱۷۰۹۱۹۸۲^{۱۷۰۹۱۹۸۲} \quad \text{یا} \quad (۱۷۰۹۱۹۸۲!)^{۲}$$

۵۴. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). همهٔ عددهای $n\in\mathbf{N}$ را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، برای مقداری از

$$k \in \{۱، ۲، \ldots، n-۱\}$$

برابری زیر برقرار باشد:

$$۲C_n^k = C_n^{k-۱} + C_n^{k+۱}$$

۵۵. (کانادا، ۱۹۸۳). این معادله را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی، حل کنید:

$$x! + y! + z! = u!$$

۵۶. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbf{N}$، برابری زیر برقرار است:

$$\sum_{k=۰}^{n} \frac{(۲n)!}{(k!)^۲[(n-k)!]^۲} = (C_{۲n}^n)^۲$$

۵۷. (هیأت داوران، استرالیا، ۱۹۸۲). برای مقدار مفروض $n \in \mathbf{N}$:

الف) ثابت کنید، عدد $\frac{۱}{m+۱} C_{۲m}^m$، عددی طبیعی است؛

ب) کمترین مقدار $k \in \mathbf{N}$ را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن، عدد $\frac{k}{n+m+۱} C_{۲n}^{n+m}$، برای هرمقدار طبیعی $n \geqslant m$، عددی طبیعی باشد.

۵۸. (نیویورك، ۱۹۷۴). ثابت کنید، برای هرمقدار طبیعی $n \geqslant k$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای C_n^k، $C_{n+۱}^k$، ...، C_{n+k}^k، برابر است با واحد.

۵۹. (انگلستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای هرمقدار طبیعی m و n، عدد

$$S_{m,n} = ۱ + \sum_{k=۱}^{m} (-۱)^k \frac{(n+k+۱)!}{n!\,(n+k)}$$

بر $m!$ بخش‌پذیر است، ولی به‌ازای بعضی از مقدارهای طبیعی m و n، بر $m!\,(n+۱)$ بخش‌پذیر نیست.

۶۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۰). ثابت کنید، اگر p عددی اول باشد، عدد $C_{۲p}^p - ۲$ بر $p^۲$ بخش‌پذیر است.

۶۱. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). این معادله را درمجموعهٔ عددهای طبیعی، حل کنید:

$$۱!+۲!+\dots+(x+۱)!=y^{x+۱}$$

۶۲. (بلغارستان، ۱۹۸۲؛ استرالیا، ۱۹۸۳). این معادله را، درمجموعهٔ عددهای طبیعی، حل کنید:

$$(y+۱)^x-۱=y!$$

۶۳. (اتریش، ۱۹۷۳؛ یوگسلاوی، ۱۹۷۷؛ جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۹). برای عدد طبیعی مفروض $n>۱$، فرض می‌کنیم:

$$m_k=n!+k \quad (k\in\mathbf{N})$$

ثابت کنید، برای هرمقدار $k\in\{۱، \dots، n\}$، عدد اول p وجود دارد، به‌نحوی که عدد m_k بر آن بخش‌پذیر است و هیچ کدام از عددهای زیر، بر آن، بخش‌پذیر نیستند:

$$m_۱، \dots، m_{k-۱}، m_{k+۱}، \dots، m_n$$

*۶۴. (بلغارستان، ۱۹۶۸). ثابت کنید، عدد C_n^k وقتی، و تنها وقتی، فرد است که عددهای طبیعی n و k با این شرط سازگار باشند: اگرعددهای k و n را در دستگاه عددنویسی به مبنای ۲ بنویسیم، در هر مرتبه‌ای ازعدد k که رقم ۱ قرار دارد، درهمان مرتبه‌ازعدد n هم، رقم ۱ وجود داشته‌باشد.

*۶۵. (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضی، لوکزامبورگ، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$ و عددی مثل p، دوگزارهٔ زیر هم‌ارزند:

الف) هیچ کدام ازعددهای C_n^k $(k=۰، ۱، \dots، n)$ بر p بخش‌پذیر نیستند.

ب) $n=p^s m-۱$، که در آن $s\in\mathbf{Z}^+$، $m\in\mathbf{N}$ و $m<p$.

*۶۶. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۳). آخرین رقم مخالف صفر را دربیان دهدهی عدد $n!$، با h_n نشان می‌دهیم. ثابت کنید کسر دهدهی نامتناهی

$$0/h_1h_2h_3\cdots$$

عددی گنگ است.

§۴. مجموعه‌های عددی

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱، ۲، ۱۱، ۱۲ و قضیه‌های ۱، ۲، ۱۰، ۱۳، ۱۸، ۲۳، ۵۵، ۹۵، ۹۶ را ببینید).

۶۷. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هر تقسیمی از مجموعهٔ

$$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

به دو زیرمجموعه، دست کم یکی از زیرمجموعه‌های حاصل، شامل ۳ عدد است که مجموع دو تا از آن‌ها، با دو برابر سومی برابر است.

۶۸. (بلژیك، ۱۹۷۹). مجموع هر !۷ عددی را پیدا کنید که از راه همهٔ تبدیل‌های ممکن در رقم‌های عدد ۱۲۳۴۵۶۷ به دست می‌آید.

۶۹. (انگلستان، ۱۸۶۶). ثابت کنید، از بین ۵۲ عدد درست دلخواه، همیشه می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که مجموع یا تفاضل آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.

۷۰. (انگلستان، ۱۹۷۰). ثابت کنید، از هر مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای (غیرتهی) چنان جدا کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

۷۱. (لهستان، ۱۹۷۹). در تقسیم عددهای طبیعی a_1، a_2، …، a_n بر عددی مثل $m\in\mathbf{N}$، باقی مانده‌های مختلفی به دست آمده است؛ در ضمن، $n>\frac{m}{2}$. ثابت کنید، برای هر عدد $k\in\mathbf{Z}$، چنان اندیس‌های

$$i, j\in\{1,\dots,n\}$$

پیدا می‌شود (لزومی ندارد با هم فرق داشته باشند) که، عدد a_i+a_j-k بر m بخش‌پذیر باشد.

۷۲. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). ۲۰ عدد طبیعی

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$$

که از ۷۰ تجاوز نمی‌کنند، داده شده است. ثابت کنید، در بین تفاضل‌های $a_j - a_k$ $(j > k)$، دست‌کم ۴ عدد برابر پیدا می‌شود.

۷۳. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). مجموعهٔ عددهای ۱، ۲، ...، ۱۰۰ را، به ۷ زیرمجموعه، افراز کرده‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم در یکی از این زیرمجموعه‌ها، یا ۴ عدد a، b، c، d وجود دارد به‌نحوی که $a+b=c+d$ و یا ۳ عدد e، f، g وجود دارد به‌نحوی که $e+f=2g$.

۷۴. (امریکا، ۱۹۸۳). روی محور عددی، بازه‌ای به طول $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، این بازه، شامل حداکثر $\frac{n+1}{2}$ کسر ساده‌نشدنی به‌صورت $\frac{p}{q}$ است که، در آن، $p, q \in \mathbf{Z}$ و $1 \leqslant q \leqslant n$.

۷۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). برای مقدار مفروض $n \in \mathbf{N}$، چند سه تائی از عددهای طبیعی وجود دارد که، مجموع آن‌ها، برابر $6n$ باشد.

۷۶. (بلغارستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، تعداد روش‌های انتخاب شش عدد مختلف از بین عددهای ۱، ۲، ...، ۴۹، به‌نحوی که دست‌کم دو تا از آن‌ها دو عدد متوالی باشند، برابر است با

$$C_{49}^{6} - C_{44}^{6}$$

۷۷. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). برای مقدار مثبت و گویای $c \neq 1$، ثابت کنید مجموعهٔ عددهای طبیعی را می‌توان به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ جدا از هم A و B نشان داد، به نحوی که، نسبت هر دو عدد از مجموعهٔ A و، همچنین، نسبت هر دو عدد از مجموعهٔ B، برابر عدد c نباشد.

۷۸. (هیأت داوران، اسپانیا، ۱۹۷۷). مجموع عددهای درست a_1، a_2، ...، a_n برابر است با واحد. ثابت کنید، بین عددهای

$$b_i = a_i + 2a_{i+1} + 3a_{i+2} + \cdots + (n-i+1)a_n +$$
$$+ (n-i+2)a_1 + (n-i+3)a_2 + \cdots + na_{i-1}$$

($i=۱، ۲، ...، n$)، عددهای برابر وجود ندارد.

۷۹. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۲). همهٔ مقدارهای $n\in\mathbf{N}$ را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، سطری شامل $۲n$ عدد وجود داشته باشد که دارای این ویژگی باشد: برای هر مقدار $k=۱، ...، n$، دو عدد درسطر وجود داشته باشد که برابر k باشند و، بین آن‌ها، درست k عدد قرار گرفته باشد.

۸۰. (اتریش، ۱۹۷۵). مجموعهٔ غیرتهی $M\subset\mathbf{Q}$، با دو شرط زیرسازگار است:

۱) اگر $a\in M$ و $b\in M$، آن‌گاه $a+b\in M$ و $ab\in M$؛

۲) اگر $r\in\mathbf{Q}$، آن‌گاه دقیقاً یکی از سه گزارهٔ زیر درست است:

$r\in M$، $-r\in M$، $r=۰$.

ثابت کنید، مجموعهٔ M، برمجموعهٔ همهٔ عددهای‌مثبت گویا منطبق است.

۸۱. (نیویورک، ۱۹۷۳). مجموعهٔ متناهی $B\subset\mathbf{R}$ را پایهٔ مجموعهٔ $M\subset\mathbf{R}$ می‌نامیم، وقتی که، هرعدد از مجموعهٔ M را بتوان، به‌صورت منحصر به‌فردی، به‌صورت حاصل‌ضرب توان‌های درست عددهایی‌ازمجموعهٔ B نشان داد. آیا این حکم درست است که، برای هرمجموعهٔ متناهی از عددهای مثبت، پایه‌ای وجود دارد؟

۸۲. (اتریش، لهستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید که، برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، این برابری برقرار است:

$$\sum_{۱\leqslant i_۱<i_۲<\ldots<i_k\leqslant n}\frac{۱}{i_۱ i_۲\cdots i_k}=n$$

که درآن، مجموع به معنای همهٔ انتخاب‌های ممکن عددهای

$$i_۱<i_۲<\cdots<i_k \quad (k=۱، ۲، ...، n)$$

از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ...، n\}$ است.

۸۳*. (بلغارستان، ۱۹۸۳). مطلوب است همهٔ مقدارهای $n\in\mathbf{N}$، به‌نحوی که برای هر کدام از آن‌ها، تبدیلی مثل

$$(a_۱، a_۲، ...، a_n)$$

از عددهای ۰، ۱، ...، $n-1$ وجود داشته باشد که، در آن، همهٔ عددهای

$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2\cdots a_n$$

در تقسیم بر n، به باقی‌مانده‌های مختلف برسند.

*۸۴. (هیأت داوران، سوئد، ۱۹۸۳). ثابت کنید، اگر $n\in\mathbf{N}$ توان درستی از یک عدد اول نباشد، آن وقت، تبدیل

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

از عددهای ۱، ۲، ...، n وجود دارد که، برای آن، این برابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2\pi i_k}{n}=0$$

*۸۵. (هیأت داوران، فنلاند، ۱۹۸۲). مجموع همهٔ آن عددهای طبیعی را پیدا کنید که، رقم‌های هر کدام از آن‌ها، در عددنویسی دهدهی، تشکیل دنباله‌ای صعودی یا نزولی بدهند.

*۸۶. (هیأت داوران فنلاند، ۱۹۷۹). گروه عددهای طبیعی a_1، ...، a_n در این برابری صدق می‌کنند:

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=1979$$

وقتی n زوج باشد، این گروه را زوج؛ و وقتی n فرد باشد، این گروه را فرد می‌نامیم. ثابت کنید، گروه‌های زوج به همان اندازه وجود دارند که گروه‌های فرد.

*۸۷. ثابت کنید، برای عددهای طبیعی دلخواه a_1، ...، a_m.

الف) (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۹) چنان گروهی از $n<2^m$ عدد وجود دارد، که در آن، همهٔ زیرمجموعه‌ها، مجموع‌های مختلفی داشته باشند و، درضمن، بین این مجموع‌ها همهٔ عددهای a_1، ...، a_m، پیدا شود.

ب) چنان گروهی از $n\leqslant m$ عدد وجود دارد که، در آن، همهٔ زیرمجموعه‌ها، مجموع‌های مختلفی داشته باشند و، در ضمن، همهٔ عددهای a_1، ...، a_m، دربین این مجموع‌ها پیدا شود.

*۸۸. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۸۳). آیا می‌توان مجموعهٔ $M\subset\mathbf{N}$

را طوری پیدا کرد که با دو شرط زیر سازگار باشد:

۱) هرعدد $n\in\mathbf{N}$ و بزرگتر از واحد را بتوان به‌صورت $n=a+b$ نوشت که درآن، $a، b\in M$؛

۲) اگر هرکدام از عددهای $a، b، c، d\in M$، بزرگتر از ۱۰ باشند، برابری $a+b=c+d$، تنها درحالتی برقرار باشد که داشته باشیم: $a=c$ یا $a=d$؟

§۵. ویژگی‌های مختلف عددها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱ تا ۱۹ و
قضیه‌های، ۱، ۲، ۴، ۱۰، ۱۳، ۱۸، ۲۳،
۵۵، ۵۹، ۹۶ را ببینید)

۸۹. (چکوسلواکی، ۱۹۵۲). ثابت کنید، اگرعددهای مثبت وگویای a، b و c، در برابری $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$ صدق کنند، آن وقت، $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ هم، عددهای گویائی خواهند بود.

۹۰. (رومانی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، عددهای مثبت وگنگ a و b وجود دارند که، به‌ازای آن‌ها، a^b؛ عددی طبیعی باشد.

۹۱. (برزیل، ۱۹۸۳). ثابت کنید، مجموع

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}$$

به‌ازای هیچ عدد طبیعی $n>۱$، عددی درست نیست.

۹۲. (امریکا، ۱۹۷۸). ثابت کنید، هرعدد طبیعی $n>۳۲$ را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت، به نحوی که مجموع عکس این عددها، برابر واحد باشد.

راهنمائی: عددهای ۳۳، ۳۴، ۳۵، ...، ۷۳، باشرط‌های مسأله‌سازگارند.

۹۳. (انگلستان، ۱۹۸۲). عدد $n\in\mathbf{N}$، که مضربی است از ۱۷، در دستگاه عددنویسی به‌مبنای ۲، درست شامل ۳رقم ۱ می‌باشد. ثابت کنید، این

عدد در همین دستگاه عددنویسی، دست‌کم ۶ رقم برابر ۰ دارد و اگر تعداد این رقم‌ها برابر ۷ باشد، n عددی زوج است.

۹۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). همهٔ عددهای $n\in\mathbf{N}$ را طوری پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: اگر عددهای $n^۳$ و $n^۴$ را (در دستگاه دهدهی عددنویسی) درکنار هم بنویسیم، عدد حاصل از ده رقم ۰، ۱، ...، ۹، و از هرکدام تنها یکبار، تشکیل شده باشد.

۹۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: توان پنجم مجموع رقم‌های عدد n (در دستگاه دهدهی عددنویسی)، برابر با $n^۲$ باشد.

۹۶. (انگستان، ۱۹۷۸)، ثابت کنید، اگرمخرج یك کسر ساده نشدنی، از ۱۰۰ تجاوز نکند، در نمایش دهدهی آن نمی‌توان به سه رقم ۱، ۶ و ۷، برخورد، به‌نحوی که به‌همین ردیف پشت سرهم آمده باشند.

۹۷. (نیویورك، ۱۹۷۸). ثابت کنید، هر عدد اول به‌صورت

$$۲^{۲^n}+۱ \quad (n\in\mathbf{N})$$

را نمی‌توان به‌صورت تفاضل توان‌های پنجم دو عدد طبیعی نشان داد.

۹۸. (نیویورك، ۱۹۷۷). آیا عدد $n\in\mathbf{N}$ را می‌توان پیدا کرد به‌نحوی که عددهای

$$۲^{n+۱}-۱ \quad \text{و} \quad ۲^{n-۱}(۲^n-۱)$$

هر دو، مکعب عددهای درستی باشند؟

۹۹. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اگر عددهای طبیعی m و n، در نابرابری $\sqrt{۷}-\frac{m}{n}>۰$ صدق کنند، آن وقت داریم:

$$\sqrt{۷}-\frac{m}{n}>\frac{۱}{mn}$$

۱۰۰. (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضیات، فنلاند، ۱۹۸۰). در عدد نویسی دهدهی عدد

$$(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۱۹۸۰}$$

رقم مرتبهٔ یکان و رقم مرتبهٔ دهگان را پیدا کنید.

۱۰۱. (رومانی، ۱۹۷۰). ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی m و n، عدد $k\in\mathbf{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که برابری زیر برقرار باشد:

$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-۱})^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-۱}$$

۱۰۲. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر مقدار $a, b\in\mathbf{R}$ و $\varepsilon>۰$، عددهای $k, m\in\mathbf{Z}$ و $n\in\mathbf{N}$ وجوددارند، که در نابرابری‌های زیر صدق کنند:

$$|na-k|<\varepsilon \quad و \quad |nb-m|<\varepsilon$$

۱۰۳. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۶). ثابت کنید، بی‌نهایت عدد به‌صورت $۵^n\ (n\in\mathbf{N})$ وجود دارد، به‌نحوی که در شکل دهدهی هرکدام از آن‌ها، بتوان دست‌کم ۱۹۷۶ رقم ۰ جدا کرد که پشت سرهم آمده باشند.

۱۰۴*. (هیأت داوران، انگلستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هرمقدار $m\in\mathbf{N}$، بی‌نهایت عدد به صورت $۵^n\ (n\in\mathbf{N})$ وجود دارد، به‌نحوی که، در هر کدام آن‌ها، هر یك از m رقم متوالی در عددنویسی دهدهی، از نظر زوج وفردبودن، با رقم‌های مجاورخود، فرق داشته باشند.

۱۰۵*. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، اگـر طول ضلع‌های یك مستطیل، عددهایی فرد باشند، در درون مستطیل، نمی‌توان نقطه‌ای پیدا کرد که، فاصلهٔ آن تا هریك از چهار رأس مستطیل، عددهایی درست باشد.

۱۰۶*. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). ثابت‌کنید، هرم منتظم با قاعدهٔ مربع وجود ندارد که طول همهٔ یال‌ها، مساحت سطح کل و حجم آن را بتوان با عددهایی درست بیان کرد.

۱۰۷*. (انگلستان، ۱۹۸۱). برای عـددهـای مختلف و طبیعی $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_n\ (n>۱)$، وهریك ازمقدارهای $i=۱, ۲, \ldots, n$؛ قرارمی‌گذاریم:

$$p_i=\prod_{\substack{۱\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)$$

ثابت کنید، برای هر مقدار $k\in\mathbf{N}$، عدد

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i}$$

عددی درست است.

فصل دوم

معادله و نامعادله

§۶. معادله‌ها و دستگاه‌ها

(ضمیمهٔ ج. تعریف‌های ۲ و ۱۹ و قضیه‌های
۶، ۷، ۱۸، ۵۵، ۵۶ را ببینید)

۱۰۸. (نیویورک، ۱۹۷۸). معادلهٔ $8^x(3x+1)=4$ را حل کنید.

۱۰۹. (انگلستان، ۱۹۷۴). ثابت کنید، برای هر مقدار حقیقی a، b و c، معادلهٔ

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

دست‌کم یك جواب دارد.

۱۱۰. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، معادلهٔ

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-16=0$$

درست دوجواب دارد.

۱۱۱. (نیویورك، ۱۹۸۰). همهٔ زوج عددهای $a>1$ و $b>0$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ $a^x=x^b$، درست یك جواب مثبت داشته باشد. برای هر زوج مقدار a و b، که پیدا کرده‌اید، جواب معادله را مشخص کنید.

۱۱۲. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). برای هر مقدار $a\in\mathbf{R}$، ایـن معادله را حل کنید:

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=2$$

۱۱۳. (نیـویـورك، ۱۹۷۳). مطلـوب اسـت همـهٔ مقـدارهـای $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، که در معادلهٔ $\cos^8 x+\sin^8 x=\frac{97}{128}$ صدق کنند.

۱۱۴. (نیویورك، ۱۹۷۸). همهٔ زوج عـددهـای طبیعی $A\neq B$ را طوری پیدا کنیدکه، برای آن‌ها، دستگاه زیر، دارای جواب باشد:

$$\begin{cases}\cos Ax+\cos Bx=0\\ A\sin Ax+B\sin Bx=0\end{cases}$$

۱۱۵. (چکوسلواکی، ۱۹۵۶). همهٔ زوج عددهای $x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ را که در دستگاه زیر صدق کنند، پیدا کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=2\cos^2 y\\[2ex] \dfrac{\sin x}{\sin y}=2\sin^2 y\end{cases}$$

۱۱۶. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۶۶). این‌معادله را حل کنید:

$$[\sin(x-y)+1][2\cos(2x-y)+1]=6$$

۱۱۷. (رومانی، ۱۹۷۸). برای‌هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، این‌معادله‌را حل کنید:

$$\sin x\sin 2x\cdots\sin nx+\cos x\cos 2x\cdots\cos nx=1$$

۱۱۸. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۶۶). برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، این معادله را حل کنید:

$$(x+y)^n=x^n+y^n$$

۱۱۹. (جمهوری‌دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۸). این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}x+xy+y=۲+۳\sqrt{۲}\\ x^۲+y^۲=۶\end{cases}$$

۱۲۰. (انگلستان، ۱۹۷۵). ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbb{N}$، تنها یك انتخاب برای عددهای $x_۱$، ...، x_n وجود دارد، به‌نحوی که در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$(۱-x_۱)^۲+(x_۱-x_۲)^۲+\dots+(x_{n-۱}-x_n)^۲+x_n^۲=\frac{۱}{n+۱}$$

۱۲۱. (بلغارستان، ۱۹۶۸). همهٔ مقدارهای $n\in\mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، انتخابی ازعددهای مثبت $x_۱$، ...، x_n وجود داشته باشد که در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲+\dots+x_n=۹\\ \dfrac{۱}{x_۱}+\dfrac{۱}{x_۲}+\dots+\dfrac{۱}{x_n}=۱\end{cases}$$

برای هر مقدار n که به‌دست می‌آورید، همهٔ این گونه انتخاب‌ها را مشخص کنید.

۱۲۲*. (چکوسلواکی، ۱۹۸۲). برای هر زوج از مقدارهای طبیعی n و k، همهٔ عددهای غیرمنفی $x_۱$، ...، x_n را پیدا کنید که با دستگاه زیر سازگار باشند:

$$\begin{cases}x_۱^k+x_۲^k+\dots+x_n^k=۱\\ (۱+x_۱)(۱+x_۲)\dots(۱+x_n)=۲\end{cases}$$

۱۲۳*. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰). این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}۲x+x^۲y=y\\ ۲y+y^۲z=z\\ ۲z+z^۲x=x\end{cases}$$

۱۲۴*. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۹). برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$ و $a\in\mathbf{R}$، این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=a \\ x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=a^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n+x_2^n+\dots+x_n^n=a^n \end{cases}$$

§۷. نابرابری‌ها

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱۸، ۳۰، ۳۲ و
قضیه‌های ۴،۲ تا ۷، ۳۴، ۵۵، ۵۶ را ببینید)

۱۲۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). کدام بزرگترند:

$$0 \quad \text{یا} \quad \sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$$

۱۲۶. (بلژیك، ۱۹۷۹)، اگر بدانیم $a<b<c<d$، عددهای زیر را به‌ترتیب صعودی بنویسید:

$$x=(a+b)(c+d),$$
$$y=(a+c)(b+d),$$
$$z=(a+d)(b+c)$$

۱۲۷. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، اگر حاصلضرب سه عدد برابر واحد، و مجموع آن‌ها بزرگتر از مجموع عکس آن‌ها باشد، آن وقت، درست یکی از این عددها، از واحد بزرگتر است.

۱۲۸. (نیویورك، ۱۹۷۵). ثابت کنید، برای واسطهٔ حسابی $A=\frac{a+b}{2}$ و واسطهٔ هندسی $B=\sqrt{ab}$ از دو عدد مثبت $a\neq b$، داریم:

$$B<\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A$$

۱۲۹. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، برای هر سه عدد a، b و c بزرگتر از واحد، این نابرابری برقرار است.

$$۲\left(\frac{log_b a}{a+b}+\frac{log_c b}{b+c}+\frac{log_a c}{c+a}\right)\geqslant\frac{۹}{a+b+c}$$

۱۳۰. (اتریش، ۱۹۷۱). ثابت کنید، برای عددهای مثبت a، b و c، این نابرابری برقرار است:

$$a^۲(b+c-a)+b^۲(a+c-b)+a^۲(a+b-c)\leqslant ۳abc$$

۱۳۱. (امریکا، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای هر سه عدد a، b و c، از بازهٔ [۰، ۱]، این نابرابری برقرار است:

$$\frac{a}{b+c+۱}+\frac{b}{c+a+۱}+\frac{c}{a+b+۱}+$$
$$+(۱-a)(۱-b)(۱-c)\leqslant ۱$$

۱۳۲. (چکوسلواکی، ۱۹۵۹). ثابت کنید، اگر عددهای حقیقی a، b و c، در این نابرابری‌ها صدق کنند:

$$a+b+c>۰,\quad ab+bc+ca>۰,\quad abc>۰$$

آن وقت، این عددها، مثبت‌اند.

۱۳۳. (بلژیك، ۱۹۷۶). ثابت کنید، برای هر $\alpha\in\mathbf{R}$ داریم:

$$sin(cos\alpha)<cos(sin\alpha)$$

۱۳۴. (بالکان، ۱۹۸۴). ثابت کنید، برای عددهای مثبت $\alpha_۱$، ...، α_n $(n\geqslant ۲)$، که مجموعی برابر واحد دارند، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{\alpha_i}{۲-\alpha_i}\geqslant\frac{n}{۲n-۱}$$

۱۳۵. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۶۷، انگلستان، ۱۹۷۶). ثابت کنید برای عددهای مثبت $a_۱$، ...، a_n $(n\geqslant ۲)$، داریم:

$$\sum_{i=1}^{u}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1}\left(s=\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

۱۳۶. (نیویورك، ۱۹۷۵). آیا برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n و $a_{n+1}=a_1$، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}$$

۱۳۷. (هیأت داوران کانادا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای عددهای مثبت $x\neq 1$ و $a<1$، همیشه داریم:

$$\frac{1-x^a}{1-x}<(1+x)^{a-1}$$

۱۳۸. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۸۸۲). ثابت کنید، برای هر مقدار $\alpha\leqslant 1$ و عددهای دلخواه x_1، ...، x_n با شرط

$$1\geqslant x_1\geqslant x_2>\dots\geqslant x_n>0$$

نابرابری زیر درست است

$$(1+x_1+x_2+\dots+x_n)^\alpha\leqslant 1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+\dots+$$
$$+n^{\alpha-1}x_n^\alpha$$

۱۳۹. (بلغارستان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای عددهای a_1،...،a_n $(n\geqslant 2)$ از بازهٔ [۰، ۲]، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j|\leqslant n^2$$

برای چه مقدارهایی از a_1، ...، a_n، به برابری می‌رسیم؟

۱۴۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). ثابت کنید، اگر عدد M و گروه عددهای

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n},$$
$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$$

در نابرابری زیر صدق کنند:

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n|\leqslant M$$

که در آن، $x_1, \ldots, x_n\in\{-1, 1\}$، آن وقت داریم:

$$|a_{11}|+|a_{22}|+\cdots+|a_{nn}|\leqslant M$$

۰۱۴۱ (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای هر گروهی از عددهــای حقیقی a_1، ...، a_n، می‌توان مقدار $k\in\{1, \ldots, n\}$ را طوری انتخاب کرد که، عددهای غیرمنفی $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ (که از واحد تجاوز نمی‌کنند)، در این نابرابری صدق کنند:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{k}a_i\right|$$

۰۱۴۲* (بلغارستــان، ۱۹۸۴). عــددهــای طبیعی دلخواه m و n، و عــددهــای دلخواه x_1، ...، x_n، y_1، ...، y_n از بــازهٔ $[0, 1]$ بــا شرط $x_i+y_i=1$ $(i=1, \ldots, n)$ مفروض‌اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$(1-x_1\cdots x_n)^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_n^m)\geqslant 1$$

۰۱۴۳* (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای عددهــای مثبت $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ همیشه داریم:

$$a^bb^cc^dd^a\geqslant b^ac^bd^ca^d$$

۰۱۴۴* (جمهوری دموکراتیك آلمــان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، بــرای عددهای طبیعی و بزرگتر از واحد n و k، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}>k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}$$

۰۱۴۵* (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای عددهــای مثبت و دلخواه a_1، ...، a_n، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leqslant e \sum_{k=1}^{n} a_k$$

که در آن، e، عدد نپر (مبنای طبیعی لگاریتم‌ها) است.

۱۴۶*. (امریکا، ۱۹۷۷). p و q دوعدد مثبت ومفروض‌اند و $p<q$. ثابت‌کنید، بـرای عددهـای دلخواه α، β، γ، δ و ε از بازهٔ $[p, q]$، این نابرابری همیشه برقرار است:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

به‌ازای چه مقدارهایی از α، β، γ، δ و ε، به برابری می‌رسیم؟

۱۴۷*. (جمهوری دموکراتیک‌آلمان، ۱۹۷۰). درستی نابرابری زیر را، برای عددهای مثبت و دلخواه a، b، c و d، ثابت‌کنید:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

به‌ازای چه مقدارهایی از a، b، c و d، نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود؟

§۸. بخش درست عدد

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱، ۱۵، ۱۸، ۱۹
و قضیه‌های ۲، ۶، ۸، ۱۸، ۲۰ را ببینید)

۱۴۸. (اتریش، ۱۹۷۳). این معادله را حل کنید:

$$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}$$

۱۴۹. (انگلستان، ۱۹۷۵). این معادله را حل کنید:

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\cdots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$$

۱۵۰. (کانادا، ۱۹۸۱). ثابت کنید، معادلهٔ زیر جواب ندارد:

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

۱۵۱. (سوئد، ۱۹۸۲). برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$. تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر را، در بازهٔ $[1, n]$، پیدا کنید:

$$x^2-[x^2]=\{x\}^2$$

۱۵۲. (اتریش، ۱۹۷۴). ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، این برابری برقرار است:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$$

۱۵۳. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹). کدام عددهای طبیعی را، نمی‌توان به‌صورت $\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$ نشان داد $(n\in\mathbf{N})$؟

۱۵۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). ثابت کنید، بین جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$، با تعریف زیر

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\left[\frac{3}{2}a_n\right](n\in\mathbf{N})$$

بی‌نهایت عدد زوج و بی‌نهایت عدد فرد وجود دارد.

۱۵۵. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۹). برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، بیشترین مقدار $k\in\mathbf{Z}^+$ را پیدا کنید، به‌نحوی که عدد $[(3+\sqrt{11})^{2n-1}]$، بر 2^k بخش‌پذیر باشد.

۱۵۶. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$\{n\sqrt{2}\}>\frac{1}{2n\sqrt{2}}$$

در ضمن، برای هر $\varepsilon>0$، عدد $n\in\mathbf{N}$ را می‌توان پیدا کرد، که نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\{n\sqrt{2}\}<\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}}$$

۱۵۷*. (امریکا، ۱۹۷۵). الف) ثابت کنید، برای عددهای غیرمنفی و دلخواه x و y، این نابرابری برقرار است:

$$[۵x]+[۵y]\geqslant[۳x+y]+[۳y+x]$$

ب) ثابت کنید، عدد زیر، برای همهٔ مقدارهای طبیعی m و n، عددی درست است:

$$\frac{(۵m)!(۵n)!}{m!n!(۳m+n)!(۳n+m)!}$$

۱۵۸*. (امریکا، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای عددهای دلخواه $x\geqslant ۰$ و $n\in\mathbf{N}$، این نابرابری برقرار است:

$$[nx]\geqslant\frac{[x]}{۱}+\frac{[۲x]}{۲}+\dots+\frac{[nx]}{n}$$

۱۵۹*. (بلغارستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، اگر عددهای a و b و c، به‌ازای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، در برابری

$$[na]+[nb]=[nc]$$

صدق کنند، آن وقت، دست‌کم یکی از دو عدد a و b، عددی درست است.

فصل سوم

هندسهٔ روی صفحه

---

§۹. مثلث

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۳۶، ۴۰، ۴۱ و قضیه‌های ۶۴، ۶۷، ۷۴، ۷۵، ۷۷، ۸۲، ۸۳ را ببینید).

۱۶۰. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). در مثلثی با زاویه‌های حاده و ضلع‌های

نابرابر، از یك رأس ارتفاع، از رأس دوم میانــه، و از رأس سوم نیمساز زاویه را گذرانده‌ایم. ثابت کنید، اگر ایــن سه خط راست، ضمن برخورد باهم، مثلثی را تشکیل دهند، این مثلث، نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۶۱. (بلژیك، ۱۹۷۷). ثابت کنید، اگر برای عددهای حقیقی a و b و c، و برای هــر مقدار $n\in\mathbf{N}$، مثلثی بــه ضلع‌های a^n و b^n و c^n وجود داشته باشد، آن وقت، همهٔ این مثلث‌ها، متساوی‌الساقین‌اند.

۱۶۲. (سوئد، ۱۹۸۲). همهٔ مقدارهای $n\in\mathbf{N}$ را پیدا کنید‌که، برای هرکدام از آن‌ها، عدد $m\in\mathbf{N}$، مثلث ABC باضلع‌های $AB=۳۳$، $AC=۲۱$، $BC=n$ و نقطه‌های D و E، به ترتیب، روی ضلع‌های AB و AC وجود داشته باشند، به‌نحوی که شرط زیر برقرار باشد:

$$AD=DE=EC=m$$

۱۶۳. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۹). همهٔ گــروه‌هــای سه‌تایی از عددهای طبیعی a و b و c را پیدا کنید که بتوانند ضلع‌های مثلثی با دایرهٔ محیطی به‌قطر ۶/۲۵ باشند.

۱۶۴. (نیویورك، ۱۹۷۸). مثلث‌های ABC و DEF، در یك دایره محاط شده‌اند. ثابت کنید، برابری محیط‌های این دو مثلث، هم‌ارز با شرط زیر است:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin D+\sin E+\sin F$$

۱۶۵. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). خط راستی، مثلث را به‌دو بخش تقسیم کرده است که هم مساحت‌ها وهم محیط‌های این دوبخش، باهم برابرشده‌اند، ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، روی این خط راست است.

۱۶۶. (اتریش، ۱۹۸۳). روی ضلع‌های AB، AC و BC از مثلث ABC، نقطه‌های C'، B' و A' را طوری انتخاب کرده‌ایم که، پاره‌خط‌های راست AA'، BB' و CC'، در یك نقطه به‌هم رسیده‌اند. نقطه‌های A''، B'' و C'' را، به‌ترتیب، قرینهٔ نقطه‌های A، B و C، نسبت به‌نقطه‌های A'، B' و C' می‌گیریم. ثابت کنید:

$$S_{A''B''C''}=۳S_{ABC}+۴S_{A'B'C'}$$

۱۶۷. (اتریش، ۱۹۷۱). میانه‌های مثلث ABC، در نقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند. ثابت کنید:

$$AB^۲+BC^۲+CA^۲=۳(OA^۲+OB^۲+OC^۲)$$

۱۶۸. (نیویورک، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر مرکز ثقل مثلثی بر مرکز ثقل مرزهای آن منطبق باشد، این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۱۶۹. (انگلستان، ۱۹۸۳)، O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، D را وسط ضلع AB، و E را نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ACD فرض می‌کنیم. ثابت کنید، اگر $AB=AC$، آن وقت $OE\perp CD$.

۱۷۰. (چکوسلواکی، ۱۹۷۲). همهٔ زوج عددهای مثبت a و b را پیدا کنید، که برای آن‌ها، مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE و نقطه‌های A و B واقع بر وتر آن DE وجود داشته باشند که در شرط‌های زیر صدق کنند:

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE} \quad و \quad AC=a، \ BC=b$$

۱۷۱. (نیویورک، ۱۹۷۶). دست کم یک مثلث قائم‌الزاویه پیدا کنید، به‌نحوی که طول هر ضلع آن عددی درست باشد و، در ضمن، بتوان هر یک از زاویه‌های آن را به‌کمک پرگار و خط‌کش به‌سه بخش برابر تقسیم کرد.

۱۷۲. (فنلاند، ۱۹۸۰). عمودهایی که از وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC، بر این ضلع‌ها رسم شده‌اند، خط راست BC را، به ترتیب، در نقطه‌های X و Y قطع کرده‌اند. ثابت کنید، برابری $BC=XY$.

الف) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$tgB\cdot tgC=۳$$

ب) همچنین می‌تواند وقتی برقرار باشد که داشته باشیم:

$$tg\,B\cdot tg\,C\neq ۳$$

مجموعهٔ $M\subset\mathbf{R}$ را طوری پیدا کنید که، برای آن، برابری مذکور هم ارز

شرط زیر باشد:

$$tg\,B\cdot tg\,C\in M$$

۱۷۳. (نیویورك، ۱۹۷۶). ارتفاع‌های مثلث ABC، که زاویه‌هایی حاده دارد، در نقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند. روی پاره‌خط‌های راست OB و OC، نقطه‌های B_1 و C_1 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\widehat{AB_1C}=\widehat{AC_1B}=90^\circ$$

ثابت کنید: $AB_1=AC_1$.

۱۷۴. (انگلستان، ۱۹۸۱). ارتفاع‌های مثلث ABC در نقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند و A_1، B_1، C_1، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های BC، CA، AB هستند. دایرهٔ به‌مرکز O، خط راست B_1C_1 را در نقطه‌های D_1 و D_2، خط راست C_1A_1 را در نقطه‌های E_1 و E_2، و خط راست A_1B_1 را در نقطه‌های F_1 و F_2 قطع کرده است. ثابت کنید:

$$AD_1=AD_2=BE_1=BE_2=CF_1=CF_2$$

۱۷۵. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). نقطهٔ P را درون مثلث ABC و نقطه‌های M و L را، به‌ترتیب بر ضلع‌های AC و BC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\widehat{PAC}=\widehat{PBC};\ \ \widehat{PLC}=\widehat{PMC}=90^\circ$$

ثابت کنید، اگر D وسط ضلع AB باشد، داریم: $DM=DL$.

۱۷۶. (رومانی، ۱۹۷۸). مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M، واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و سازگار با شرط

$$\widehat{MAB}+\widehat{MBC}+\widehat{MCA}=90^\circ$$

۱۷۷. (بلغارستان، ۱۹۸۲). $B_{ij}\,(i,\ j\in\{1,\ 2,\ 3\})$ را قرینهٔ رأس A_i از مثلث غیر متساوی‌الساقین $A_1A_2A_3$ نسبت به نیمسازی که از رأس A_j گذاشته‌است، فرض می‌کنیم. ثابت کنید، خط‌های راست $B_{12}B_{21}$، $B_{13}B_{31}$

و $B_{۲۳}B_{۳۲}$ موازی‌اند.

۱۷۸. (بلغارستان، ۱۹۸۱). نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ C از مثلث ABC، خط راست AB را، به‌ترتیب، در نقطه‌های L و M قطع کرده‌اند. ثابت کنید، به‌شرط $CL=CM$، داریم:

$$AB^{۲}+BC^{۲}=۴R^{۲}$$

که در آن، R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

۱۷۹. (یوگسلاوی،۱۹۸۳). درون مثلث ABC، نقطهٔ M را درنظر گرفته‌ایم و، برای آن، داریم: $\widehat{MBA}=۳۰^\circ$ و $\widehat{MAB}=۱۰^\circ$. به‌شرط $\widehat{ACB}=۸۰^\circ$ و $AC=BC$، مقدار زاویهٔ AMC را پیدا کنید.

۱۸۰. (انگلستان، ۱۹۷۰). نقطه‌های D و E را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های BC و AC از مثلث ABC، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $\widehat{BAD}=۵۰^\circ$ و $\widehat{ABE}=۳۰^\circ$. به شرطی که هریك از دو زاویهٔ ABC و ACB برابر ۵۰ درجه باشند، مقدار زاویهٔ BED را پیدا کنید.

۱۸۱. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۶۴). نقطهٔ P را روی ضلع BC ازمثلث ABC، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $PC=۲BP$. زاویهٔ ACB را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم

$$\widehat{ABC}=۴۵^\circ \quad و \quad \widehat{APC}=۶۰^\circ$$

۱۸۲*. (هیأت داوران، هلند، ۱۹۷۹). نقطه‌های K، L و M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کرده‌ایم و می‌دانیم:

$$\widehat{KAB}=\widehat{LBA}=۱۵^\circ,\quad \widehat{MBC}=\widehat{KCB}=۲۰^\circ,$$

$$\widehat{LCA}=\widehat{MAC}=۲۵^\circ$$

زاویه‌های مثلث KLM را محاسبه کنید.

§۱۰. دایره

(ضمیمهٔ ج. تعریف‌های ۳۵ و۳۶ وقضیه‌های
۶۶ تا ۷۵ و ۷۹ را ببینید)

۱۸۳. (برزیل، ۱۹۸۳). ثابت کنید، همهٔ نقطه‌های محیط دایره را، می‌توان به‌دو مجموعه چنان تقسیم کرد که، بین رأس‌های هرمثلث قائم‌الزاویه محاط در این دایره، نقطه‌های هر دو مجموعه وجود داشته باشد.

۱۸۴. (نیویورك، ۱۹۷۵). ثابت کنید، چهار فاصلهٔ هر نقطه از محیط دایره، تا چهار رأس مربع محاط در آن، نمی‌توانند، به طور هم زمان گویا باشند.

۱۸۵. (هیأت داوران، بلژیك، ۱۹۷۶). نیمسازهـای AA_1، BB_1 و CC_1 ازمثلث ABC، درنقطهٔ M به‌هم رسیده‌اند. ثابت کنید، اگر شعاع‌های دایره‌های محاط درمثلث‌های MB_1A، MC_1A، MC_1B، MA_1B، MA_1C و MB_1C باهم برابر باشند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۸۶. (انگلستان، ۱۹۷۵). هفت نقطه در سطح دایرهٔ به شعاع واحد چنان قرار گرفته‌انـد کـه، فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای از آن‌ها، از واحد کوچکتر نیست. ثابت کنید، یکی از نقطه‌ها بر مرکز دایره واقع است.

۱۸۷. (پکن، ۱۹۶۲). شش دایره روی یك صفحه چنان رسم شده‌اند که، مرکز هرکدام، بیرون از سایر دایره‌ها قرار دارد. ثابت کنید، همهٔ این شش دایره، نقطهٔ مشترکی ندارند (یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که در درون یا روی محیط هر شش دایره باشد).

۱۸۸. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). روی یك صفحه، دایـره‌های غیر-متقاطعی قرار دارند، به‌نحوی که، هر یك از آن‌ها، دست‌کم، بر شش دایرهٔ دیگر مماس است. ثابت کنید، ایـن دایره‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

۱۸۹. (بلغارستان، ۱۹۸۴). ثابت کنید، بـرای هر مثلث ABC، سه دایره با شعاع‌های برابر وجود دارد کـه، یکی ازآن‌ها بر ضلع‌های AB و BC، دومی بر ضلع‌های BC و AC و سومی بر ضلع‌های AC و AB مماس باشند و سه دایره، درست یك نقطهٔ مشترك داشته باشند.

۱۹۰. (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضیات، لوکزامبورگ، ۱۹۸۰). دو دایره، در نقطهٔ P، برهم مماس‌اند، خط راستی، مماس بر یکی از دایره‌ها در نقطهٔ A، دایرهٔ دیگر را دردو نقطهٔ B و C قطع کرده است. ثابت کنید، خط راست PA، نیمساز زاویهٔ BPC و یا زاویهٔ مجانب آن است.

۱۹۱. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۹). دایره‌ای که مرکز آن روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد، بر دو ضلع برابر AB و AC مماس است. ثابت کنید، پاره‌خط PQ که دو انتهای آن، به‌ترتیب، بر ضلع‌های AB و AC قرار دارد، وقتی و تنها وقتی بر دایره مماس است که داشته باشیم:

$$BP \cdot CQ = \frac{۱}{۴} BC^{۲}$$

۱۹۲. (انگلستان، ۱۹۸۰). روی قطر AB از نیم دایره‌ای، نقطه‌های K و L و روی کمان نیم‌دایره، نقطه‌های M و N و C را طوری انتخاب کرده‌ایم که چهارضلعی $KLMN$ مربعی بشود با مساحتی برابر مساحت مثلث ABC. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر نقطهٔ برخورد یکی از ضلع‌های مربع با یکی از خط‌های راستی که رأس N یا M را به رأس A یا B وصل می‌کند، منطبق است.

۱۹۳. (هیأت داوران ویتنام، ۱۸۷۹). نقطهٔ M روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. ثابت کنید، مقدار

$$MA^{۴} + MB^{۴} + MC^{۴}$$

به‌جای نقطهٔ M بستگی ندارد.

۱۹۴. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۳). چهارضلعی محدب $ABCD$ داده شده است و می‌دانیم: $AB = AD$ و $CB = CD$. ثابت کنید:

الف) می‌توان دایره‌ای درآن محاط کرد؛

ب) وقتی، و تنها وقتی، می‌توان دایره‌ای بر آن محیط کرد که داشته باشیم: $AB \perp BC$.

ج) در حالت $AB \perp BC$، مجذور فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محاطی

(به‌شعاع r) تا مرکز دایرهٔ محیطی (به‌شعاع R)، برابر است با

$$R^2+r^2-r\sqrt{r^2+4R^2}$$

۱۹۵. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، نمی‌توان مربعی رسم کرد که چهار رأس آن، به‌ترتیب، بر محیط چهار دایرهٔ هم مرکزی قرار داشته باشند که شعاع‌های آن‌ها، به تصاعد حسابی هستند.

۱۹۶. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). روی کمان AB ازدایرهٔ محیطی مستطیل $ABCD$، نقطهٔ M را (به جز A یا B) درنظر گرفته‌ایم. تصویر نقطهٔ M را، برخطهای راست AD، AC، BC و CD، به‌ترتیب، P، Q، R و S می‌نامیم. ثابت کنید، خطهای راست PQ و RS برهم عمودند وروی یکی ازقطرهای مستطیل، یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۹۷. (انگلستان،۱۹۷۷). ضلع BC ازمثلث ABC، بردایرهٔ محاطی آن، در نقطهٔ D مماس است. ثابت کنید، مرکز دایره، بر خط راستی قرار دارد که از وسط پاره‌خطهای راست BC و AD می‌گذرد.

۱۹۸. (اتریش، ۱۹۷۲). دودایره برهم مماس‌اند. در دایرهٔ بزرگتر، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط کرده‌ایم و، سپس، از رأس‌های این مثلث، مماس‌هایی بر دایرهٔ کوچکتر کشیده‌ایم. ثابت کنید، از بین این سه مماس، طول یکی، برابر است با مجموع طول‌های دو مماس دیگر.

۱۹۹. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۹). ازنقطهٔ P واقع بر کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، عمودهای PK، PL و PM را، به‌ترتیب، بر خطهای راست BC، AC و AB رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$\frac{BC}{PK}=\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}$$

۲۰۰. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). الف) O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D را نقطهٔ برخورد AO با دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم ($D\neq A$). ثابت کنید:

$$DB=DC=DO$$

ب) ثابت کنید، اگر $ABCD$، یك چهارضلعی محاطی باشد، آن‌وقت، نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1، بـه ترتیب، مـرکـزهای دایـره‌های محاطی مثلث‌های BCD، CDA، DAB و ABC، رأس‌های یك مستطیل‌اند.

*۲۰۱. (بالکان، ۱۹۸۴). ثابت کنید، چهارضلعی محاطی $A_1A_2A_3A_4$، برابر است با چهارضلعی که رأس‌های آن H_1، H_2، H_3 و H_4، عبارتند از نقطه‌های برخورد ارتفاع‌ها در مثلث‌های

$$A_2A_3A_4,\quad A_1A_3A_4,\quad A_1A_2A_4,\quad A_1A_2A_3$$

*۲۰۲. الف) (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۸۲). قطر یك چهـارضلعی محاطی، آن را بـه دو مثلث تقسیم می‌کند. ثابت‌کنید، مجموع طول‌های دو شعاع دایره‌های محاطی این دو مثلث، بستگی به انتخاب قطر ندارد.

ب) (مجارستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، بزرگترین ارتفاع در مثلثی که زاویهٔ منفرجه ندارد، کمتر از مجموع دو شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلث نیست. در چه حالتی، این ارتفاع، برابر با مجموع دو شعاع می‌شود؟

*۲۰۳. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). ۱۰۰ نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند. ثابت کنید، مجموعه‌ای متناهی از دایره‌هـا وجود دارد کـه بـا سه شرط زیرسازگار باشد: ۱) هریك از نقطه‌های مفروض، در داخل یکی از دایره‌ها باشد؛ ۲) هر دو نقطه از سطح دایره‌هـای مختلف، فاصله‌ای بیش از واحد داشته باشند؛ ۳) مجموع قطرهای همهٔ دایره‌ها، کمتر از ۱۰۰ باشد.

*۲۰۴. (پکن، ۱۹۶۳). $2n+3$ نقطه روی صفحه‌ای قـرار دارند؛ هیچ سه نقطه‌ای بریك خط راست و هیچ چهـار نقطه‌ای برمحیط یك دایره واقع نیستند. آیا دایره‌ای وجود دارد که ازسه نقطه از این نقطه‌ها بگذرد و درست نیمی از بقیهٔ نقطه‌ها را در درون خود جا دهد؟

*۲۰۵. (بلغارستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هرچند ضلعی محدب، می‌توان سه رأس مجاور پیدا کرد، به نحوی کـه اگـر دایـره‌ای از آن‌ها بگذرانیم، سطح دایره، تمامی چندضلعی را بپوشاند.

*۲۰۶. (فنلاند، ۱۹۸۰). بین n زوج ضلع‌هـای رو بـه رو، در $2n$ ضلعی محاطی $(n>1)$، $n-1$ زوج را با هم موازی گرفته‌ایم. مطلوب است

همهٔ مقدارهای n، کـه به‌ازای آن‌ها، زوج ضلع‌های باقی مانده، به ناچار، با هم موازی باشند.

۲۰۷*. (بلغارستان، ۱۹۸۲). n دایـرهٔ مختلف، و هر کـدام به شعاع واحد، روی صفحه‌ای رسم‌شده‌اند. ثابت کنید، دست‌کم روی محیط یکی از دایره‌ها، می‌توان کمانی پیدا کرد که طولی کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نداشته بـاشد و، در ضمن، شامل هیچ نقطه‌ای ازمحیط دایره‌های دیگر نباشد.

§۱۱. چندضلعی

ضمیمهٔ ج: تعریف‌هـای ۱، ۲، ۳۵، ۳۷ و قضیه‌هـای ۲، ۶۵، ۷۰، ۷۳، ۷۴، ۸۰ را ببینید).

۲۰۸. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱؛ سوئد، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر برای نقطهٔ O، واقع در درون چهـار ضلعی $ABCD$، مساحت مثلث‌هـای ABO، BCO، CDO و DAO، با هم برابر باشند، آن‌گاه این نقطه، دست‌کم روی یکی از قطرهای AC و BD قرار دارد.

۲۰۹. (کانـادا، ۱۹۸۲). مساحت چهـار ضلعـی‌هـای $ABCD$ و $A'B'C'D'$، به ترتیب، برابرند بـا S و S'. ثابت کنید، اگـر در درون چهـار ضلعی $ABCD$، نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد کـه بـرای آن داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{D'A'}$$

آن وقت $S=2S'$.

۲۱۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). از هـر رأس متوازی‌الاضلاع به وسط دوضلع غیرمجاور خود رسم کرده‌ایم؛ این هشت خط راست، یك هشت‌ضلعی بـه وجـود می‌آورند. ثابت کنید، مساحت ایـن هشت ضلعـی، $\frac{1}{6}$ مساحت

متوازی‌الاضلاع است.

۲۱۱. (یوگسلاوی، ۱۹۷۰). قطرهای پنج ضلعی محدب $ABCDE$، ضمن برخورد با هم، پنج ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ و یك پنج ضلعی ستاره‌ای را به‌وجود آورده‌اند:

الف) مجموع زاویه‌های پنج ضلعی ستاره‌ای را در رأس‌های A، B، C، D و E پیدا کنید.

ب) نسبت مساحت پنج ضلعی $A_1B_1C_1D_1$ را بـه مساحت پنج ضلعی $ABCD$ پیدا کنید، به‌شرطی که پنج ضلعی اخیر، منتظم باشد.

۲۱۲. (هیـأت داوران، فرانسه، ۱۹۷۹). ضلع‌هـای متناظر در دو چهار ضلعی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ برابرند. ثابت کنید، یکی از دوگزارهٔ زیر درست است:

الف) $BD \perp AC$ و $B'D' \perp A'C'$؛

ب) نقطه‌های M و M' که از برخورد خط‌های‌راست AC و $A'C'$، به ترتیب، با عمودهایی کـه از وسط پاره‌خط‌های BD و $B'D'$ می‌گذرند، در برابری

$$MA \cdot M'C' = MC \cdot M'A'$$

صدق می‌کنند و، در ضمن، یا با هم بر پاره‌خط‌هـای راست AC و $A'C'$ و یا با هم برامتداد آن‌ها قرار دارند.

۲۱۳. (اتریش، ۱۹۷۳). در یك هشت ضلعی محـدب، مـی‌دانیـم، زاویه‌ها بـا هم برابرند و، در ضمن، نسبت طول‌هـای هر دو ضلع مجاور، عـددی گویاست. ثابت کنید، در این هشت ضلعی، هـر دو ضلع رو به رو، با هم برابرند.

۲۱۴. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). یك شش ضلعی منتظم بـه ضلع a، در صفحه‌ای رسم کرده‌ایم. برای هر مقدار $n \in \mathbf{N}$، بزرگتر از واحـد، پاره‌خطی به‌طول $\frac{a}{n}$ را، تنها به‌کمك خط کش، بسازید.

۲۱۵. (هیأت داوران، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر برای زاویه‌های یك

پنج ضلعی محدب $ABCDE$ با ضلع‌های برابر، داشته باشیم:

$$\hat{A} \geqslant \hat{B} \geqslant \hat{C} \geqslant \hat{D} \geqslant \hat{E}$$

این پنج ضلعی، منتظم است.

۲۱۶. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۷۴ و ۱۹۷۹). الف) ثابت کنید، اگر رأس‌های یك nضلعی محدب در n ضلعی محدب دیگری که با اولی برابر است، قرار گیرد، رأس‌های این دو n ضلعی برهم منطبق می‌شوند.

ب) آیا حکم الف) برای چند ضلعی‌های غیرمحدب هم درست است؟

ج) آیا برای همهٔ چند ضلعی‌های غیرمحدب، حکم الف) نادرست است؟

۲۱۷. (هیأت داوران، بلژیك، ۱۹۷۹). آیا هر $2n$ ضلعی منتظم را، می‌توان به لوزی‌ها، تقسیم کرد؟

۲۱۸. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۶۴). نقطهٔ O را در بیرون لوزی $ABCD$ به ضلع مفروض a، طوری انتخاب کرده‌ایم که از دو رأس A و C، به فاصلهٔ $b>a$ باشد. ثابت کنید، حاصل‌ضرب $OB.OD$، به‌اندازهٔ زاویهٔ BAD بستگی ندارد.

۲۱۹. (مجارستان، ۱۹۷۶). نقطهٔ P را در بیرون متوازی‌الاضلاع $ABCD$ طوری انتخاب کرده‌ایم که دو زاویهٔ PAB و PCB با هم برابر باشند و، درضمن، رأس‌های A و C در دو نیم صفحهٔ مختلف نسبت به خط راست PB قرار گیرند. ثابت کنید، دو زاویهٔ APB و DPC باهم برابرند.

۲۲۰. (هیأت داوران، بلژیك، ۱۹۸۳). در شش ضلعی $ABCDEF$، زاویه‌های رأس‌های A، C و E با هم برابرند و، هیچ کدام، از ۱۸۰ درجه تجاوز نمی‌کنند. درضمن، می‌دانیم:

$$\widehat{ABF} = \widehat{CBD},\ \widehat{AFB} = \widehat{EFD}$$

ثابت کنید، اگر A' قرینهٔ A نسبت به قطر BF باشد و برخط راست CE قرار نگیرد، آن وقت، چهار ضلعی $A'CDE$، متوازی‌الاضلاع است.

۲۲۱. (بلغارستان، ۱۹۷۹). رأس‌های پنج ضلعی محدب $ABCDE$، طوری قرار دارند که، مثلث‌های ABC و CDE، متساوی‌الاضلاع از آب

درآمده‌اند. ثابت کنید، اگر O مرکز مثلث ABC و نقطه‌های M و N، به‌ترتیب، وسط پاره‌خط‌های راست BD و AE باشند، آن وقت، دو مثلث OME و OND متشابه‌اند.

۰۲۲۲ (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۲). در پنج ضلعی محدب $ABCDE$ می‌دانیم: زاویه‌های دو رأس B و E قائمه و، درضمن، دو زاویهٔ BAC و EAD با هم برابرند. ثابت کنید، اگر قطرهای BD و CE در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند، خط‌های راست AO و BE برهم عمودند.

۰۲۲۳ (انگلستان، ۱۹۶۶). مطلوب است، تعداد ضلع‌های چند ضلعی منتظمی که برای چهار رأس متوالی A، B، C، D از آن، داشته باشیم:

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$$

۰۲۲۴* (انگلستان، ۱۹۷۱). روی محیط دایرهٔ محاطی یك $2n$ ضلعی منتظم، دو نقطهٔ A و B را درنظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، اگر قطرهایی از $2n$ ضلعی که رأس‌های رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ A به زاویه‌های α_1، ...، α_n و از نقطهٔ B، به زاویه‌های β_1، ...، β_n دیده شوند، آن وقت

$$tg^2\alpha_1+\dots+tg^2\alpha_n=tg^2\beta_1+\dots+tg^2\beta_n$$

۰۲۲۵* (مجارستان، ۱۹۷۸). رأس‌های یك چند ضلعی محدب با تعداد ضلع‌های فرد را، به‌نحوی رنگ کرده‌ایم که، هیچ دو رأس مجاوری، هم‌رنگ نباشند. ثابت کنید، برای هرنوع رنگ آمیزی که با این شرط انجام شود، می‌توان چند ضلعی را، به وسیلهٔ قطرهای غیرمتقاطع آن، طوری به مثلث‌ها تقسیم کرد که، دو انتهای هر قطر، رنگ‌های مختلفی داشته باشند.

۱۲§. نقطه‌ها، پاره‌خط‌ها و خط‌های راست

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱ تا ۳، ۱۸، ۳۴،
۳۵، ۳۷ و قضیه‌های ۱، ۲، ۶۵، ۹۶ را
ببینید).

۰۲۲۶ (نیویورك، ۱۹۸۰). وسط ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC، آن را به‌چهار مثلث ADE، BDF، DEF و CEF تقسیم می‌کنند، وسط ضلع‌های مثلث‌های اخیر را K، L، M، N، O، P، Q، R، S می‌نامیم. هریك از ۱۵ نقطهٔ حاصل را با یکی از دو رنگ موجود، رنگ می‌کنیم. ثابت کنید، می‌توان ۳ نقطه از یك رنگ پیدا کرد، به‌نحوی که رأس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.

۲۲۷. (امریکا، ۱۹۸۱). روی صفحه، زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{180}{n}$ درجه رسم کرده‌ایم، که در آن، $n\in\mathbf{N}$، بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید، به‌کمك پرگار و خط‌کش، می‌توان این زاویه را به سه بخش برابر تقسیم کرد.

۲۲۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). ثابت کنید، هردوقطر یك‌مجموعهٔ محدب درصفحه، دست‌کم یك نقطهٔ مشترك دارند.

۲۲۹. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۸۲). آیا هرچهارضلعی محدب را، می‌توان با یك خط شکسته، به دو بخش چنان تقسیم کرد که، قطر هرکدام از آن‌ها، کوچکتر ازقطر چهارضلعی اصلی باشد؟

۲۳۰. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۷۲). ثابت‌کنید، اگر n نقطه برصفحه، طوری قرار گرفته باشند که، هرخط راستی که از دو تا از آن‌ها بگذرد، دست‌کم شامل یکی دیگر از نقطه‌ها باشد، آن‌وقت، همهٔ نقطه‌ها روی یك خط راست واقع‌اند.

۲۳۱. (چکوسلواکی، ۱۹۶۸). پاره‌خط‌های راست AB و CD برابرند، ولی موازی نیستند. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ O، که دارای این ویژگی باشد: قرینهٔ پاره‌خط AB نسبت به‌نقطهٔ O؛ درضمن، قرینهٔ پاره‌خط CD نسبت به یك خط راست باشد.

۲۳۲. (بلژیك، ۱۹۷۷). ثابت کنید، اگر مجموعه‌ای واقع برصفحه، بیش از یك مرکز تقارن داشته باشد، آن‌وقت، دارای بی‌نهایت مرکز تقارن است.

۲۳۳. (بلژیك، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اجتماع L، محورهای تقارن مجموعهٔ M درصفحه، زیرمجموعه‌ای از اجتماع محورهای تقارن مجموعهٔ L است.

۲۳۴. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۹). مجموعهٔ واقع برصفحه، دارای دومحور تقارن است که تحت زاویهٔ α یکدیگر را قطع کرده‌اند و، درضمن، $\frac{\alpha}{\pi}$، عددی گنگ است. ثابت کنید، اگراین مجموعه شامل بیش از یك نقطه باشد، شامل بی‌نهایت نقطه است.

۲۳۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). همهٔ مقدارهای طبیعی $n>2$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، بتوان درصفحه، n نقطه را طوری انتخاب کرد که، هر دو نقطه از آن‌ها، رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی باشند که، رأس سوم آن هم، یکی از $(n-2)$ نقطهٔ دیگر باشد.

۲۳۶. (چکوسلواکی، ۱۹۸۰). مجموعهٔ M، از یك صفحه، با کنار گذاشتن سه نقطهٔ A، B و C از آن، به دست آمده است. کمترین تعداد مجموعه‌های محدبی را پیدا کنید که، اجتماع آن‌ها، همان مجموعهٔ M باشد.

۲۳۷. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n>n_0$، می‌توان تمامی صفحه را، با رسم چند خط راستی که در بین آن‌ها، خط‌های راست متقاطع هم حتماً وجود دارند، به n بخش تقسیم کرد. کمترین مقدار n_0 چقدر است؟

۲۳۸. (چکوسلواکی، ۱۹۸۲). روی صفحهٔ محورهای مختصات، مجموعهٔ محدبی را پیدا کنید که شامل بی‌نهایت نقطه بامختصات درست باشد، ولی در برخورد با هرخط راست، مجموعه‌ای متناهی (یا تهی) ازاین نقطه‌ها پیدا شود.

۲۳۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). همهٔ زوج بردارهای غیرصفر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، دنبالهٔ عددهای

$$a_n=|\mathbf{x}-n\mathbf{y}| \quad (n\in\mathbf{N})$$

الف) صعودی؛ ب) نزولی باشد.

۲۴۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). چند نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، فاصلهٔ بین هر دو تا از آن‌ها، از ۲ بزرگتر باشد. ثابت کنید،

هر مجموعهٔ بـا مساحت کمتر از π را، می‌توان بـا انتقال موازی، به‌اندازهٔ برداری کوچکتر از واحد، طوری جابه‌جا کرد کـه شامل هیچ کدام از این نقطه‌ها نباشد.

۰۲۴۱ (بلژیك، ۱۹۷۷). در درون دایرهٔ به‌شعاع $n\in\mathbf{N}$، به‌تعداد $4n$ پاره‌خط، که طول هرکدام برابر واحد است، قرار داده‌ایم. ثابت کنید، اگر خط راستی مفروض باشد، خط راست دیگری را می‌توان پیدا کرد کـه یـا موازی با آن و یـا عمود برآن است و، در ضمن، دست‌کم دو پاره‌خط را قطع می‌کند.

۰۲۴۲* (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). درمربعی به‌ضلع ۵۰، خط شکسته‌ای قرار دارد. ثابت کنید، اگـر فاصلهٔ هر نقطه از مربع تـا، دست‌کم، یکی از نقطه‌های خط شکسته، بیشتر از واحد نباشد، آن وقت، طول خط شکسته، از ۱۲۴۸ بزرگتر است.

۰۲۴۳* (هیـأت داوران، چکوسلواکی، ۱۹۷۹). روی خط راستی، n^2+1 پاره‌خط قرار گرفته‌است ($n\in\mathbf{N}$). ثابت کنید، یا بین این پاره‌خط‌ها می‌توان، $n+1$ پاره‌خط غیرمتقاطع پیدا کـرد و یا برای $n+1$ پاره‌خط، یك نقطهٔ مشترك وجود دارد.

۰۲۴۴* (امریکا، ۱۹۸۳). روی خط راستی، چند مجموعه وجود دارد که، هرکدام از آن‌ها، اجتماعی از دو پاره‌خط است. ثابت کنید، اگر هرسه مجموعه، از این مجموعه‌هـا، نقطهٔ مشترکی داشته باشند، آن وقت، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست کم، متعلق به‌نیمی از همهٔ مجموعه‌هاست.

۰۲۴۵* (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). $n+4$ نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، چهار نقطه از آن‌ها، درچهار رأس یك مربع و بقیهٔ نقطه‌ها در درون این مربع واقع‌اند. این نقطه‌ها را، با این شرط، به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌های راستی به‌هم وصل کرده‌ایم که، اولاً، هیچ پاره‌خطی، جز در دوانتهای خود، شامل این نقطه‌ها نباشد و ثانیاً، هیچ دو پاره‌خطی، به‌جز احتمالاً دریکی از دو انتهـای خود، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. حداکثر تعداد پاره‌خط‌هـای راستی را که، به این ترتیب، می‌توان رسم کرد، پیدا کنید.

§۱۳. نابرابری‌های هندسی

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱، ۳۵، ۳۸ و
قضیه‌های ۱، ۶، ۶۴، ۶۹، ۷۰، ۷۴، ۷۵،
۷۷، ۸۰ را ببینید).

۲۴۶. (انگلستان، ۱۹۶۷). دو ضلع به طول‌های a و b از مثلثی، در شرط $a>b$ صدق می‌کنند. اگر طول ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر h_a و h_b باشد، ثابت کنید:

$$a+h_a \geqslant b+h_b$$

درچه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۲۴۷. (چکوسلواکی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، اگر یك چند ضلعی محدب در داخل چند ضلعی محدب دیگری باشد، محیط چند ضلعی داخلی، از محیط چند ضلعی خارجی، کمتر است.

۲۴۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، اگر وسط ضلع‌های یك n ضلعی محدب را ($n \geqslant ۴$)، پشت سرهم به یکدیگر وصل کنیم، مساحت چند ضلعی حاصل، کمتر از نصف مساحت چند ضلعی اصلی نیست.

۲۴۹. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). در یك شش ضلعی منتظم، متوازی‌الاضلاعی محاط کرده‌ایم که، مرکز تقارن آن، بر مرکز تقارن شش ضلعی واقع است. ثابت کنید، مساحت متوازی‌الاضلاع، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت شش ضلعی تجاوز نمی‌کند.

۲۵۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). ثابت کنید، مساحت هر مربعی که در داخل یك مثلث باشد، از نصف مساحت این مثلث تجاوز نمی‌کند.

۲۵۱. (پکن، ۱۹۶۴). درمثلث ABC، که درآن، زاویهٔ رأس A حاده نیست، مربع B_1C_1DE را محاط کرده‌ایم (به‌نحوی که ضلع DE از آن، برپاره‌خط BC و رأس‌های B_1 و C_1، به‌ترتیب، برپاره‌خط‌های AB و AC قرار داشته باشند). سپس، به همین ترتیب، مربع $B_2C_2D_1E_1$ را در مثلث AB_1C_1 محاط کرده‌ایم وغیره. این ساختمان را، چند بار انجام داده‌ایم.

ثابت کنید، مجموع مساحت‌های همهٔ مربع‌هـای محاطی، از نصف مساحت مثلث ABC کمتر است.

۲۵۲. (چکوسلواکی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، هرمثلث با زاویه‌های حاده و به مساحت واحد را، می‌توان در مثلث قائم‌الزاویه‌ای جا داد کـه مساحتی بیش از $\sqrt{۳}$ نداشته باشد.

۲۵۳. (هیأت داوران، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر روی محیط نیم‌دایرهٔ به شعاع واحد، نقطه‌های A، B، C، D و E را، پشت سرهم قرار دهیم، این نابرابری برقرار است:

$$AB^۲+BC^۲+CD^۲+DE^۲+AB\cdot BC\cdot CD+BC\cdot CD\cdot DE<۴$$

۲۵۴. (چکوسلواکی، ۱۹۸۳). ثابت کنید، بـرای هر نقطهٔ O واقع برضلع AB از مثلث ABC (و غیر واقع بر رأس‌های مثلث)، این نابرابری برقرار است:

$$OC\cdot AB<OA\cdot BC+OB\cdot AC$$

۲۵۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۲). ثابت کنید، برای هر چهارضلعی محدب، نسبت بـزرگترین فاصلهٔ بین دو رأس آن، به کوچکترین فاصلهٔ بین دو رأس، از $\sqrt{۲}$ کمتر نیست.

۲۵۶. (اتریش، ۱۹۷۵). ۶ نقطهٔ مختلف بر یک صفحه قـرار دارند. ثابت کنید، نسبت بزرگترین فاصلهٔ بین این نقطه، بـر کوچکترین فاصلهٔ بین آن‌ها، از $\sqrt{۳}$ کمتر نیست.

۲۵۷. (نیویورک، ۱۹۷۷ تا ۱۹۷۹). a، b و c را طول ضلع‌ها، P را مقدارمحیط و S را مساحت مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

۱) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\geqslant\frac{۹}{P}$؛

۲) $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant\frac{۱}{۳}P^۲$؛

۳) $P^۲\geqslant ۱۲\sqrt{۳}\,S$؛

۴) $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۴\sqrt{۳}\,S$.

۵) $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{9}P^3$.

۶) $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}SP$.

۷) $a^4+b^4+c^4\geqslant 16S^2$.

۲۵۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، اگر نقطهٔ O در درون مثلث ABC، با نصف محیط p، واقع باشد، این نابرابری برقرار است:

$$OA\cdot\cos\frac{\widehat{BAC}}{2}+OB\cdot\cos\frac{\widehat{ABC}}{2}+OC\cdot\cos\frac{\widehat{ACB}}{2}\geqslant p$$

درچه حالتی، به علامت برابری می‌رسیم؟

۲۵۹. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۶۵). ثابت کنید، برای زاویه‌های α، β و γ از هرمثلث، همیشه داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$$

درچه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۲۶۰. (انگلستان، ۱۹۶۷). ثابت کنید، برای زاویه‌های α، β و γ از هر مثلث، این نابرابری برقرار است:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{3}{4}$$

چه‌موقع، به‌علامت برابری‌می‌رسیم؟ ثابت کنید، مقدار $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$، حداکثر مقدار ندارد.

۲۶۱. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، برای زاویه‌های α، β و γ از مثلثی که زاویهٔ منفرجه ندارد، داریم:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

۲۶۲. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر مثلث با ضلع‌های a، b و c و مساحت S این نابرابری برقرار است:

$$\frac{ab+ac+bc}{۴S} \geqslant \sqrt{۳}$$

۲۶۳. (چکوسلواکی، ۱۹۷۴). ثابت کنید، اگر ضلع‌های شش‌ضلعی محاطی $ABCDEF$ در برابری

$$AB=BC،\ CD=DE،\ EF=FA$$

صدق کنند، آن وقت، مساحت مثلث ACE از مساحت مثلث BDF تجاوز نمی‌کند.

۲۶۴. (استرالیا، ۱۹۱۲). امتداد نیمسازهای زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC، دایرهٔ محیطی مثلث را، به‌ترتیب، در نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$AA_۱+BB_۱+CC_۱>AB+BC+AC$$

۲۶۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر AD، BE و CF، نیمسازهای مثلث ABC باشند، مساحت مثلث DEF از یک‌چهارم مساحت مثلث ABC تجاوز نمی‌کند.

۲۶۶. (امریکا، ۱۹۸۲). نقطهٔ $A_۱$ را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، و نقطهٔ $A_۲$ را در درون مثلث $A_۱BC$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$S_۱ : P_۱^۲ > S_۲ : P_۲^۲$$

که در آن، $S_۱$، $S_۲$، $P_۱$ و $P_۲$، به‌ترتیب، مساحت‌ها و محیط‌های دو مثلث $A_۱BC$ و $A_۲BC$ هستند.

۲۶۷. (انگلستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، اگر ۱۰ نقطه را روی سطح دایرهٔ به‌قطر ۵ انتخاب کنیم، فاصلهٔ بین دو نقطه (از این ۱۰ نقطه) از ۲ کمتر است.

۲۶۸. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۸۲) نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، ....، A_n محیط دایرهٔ به‌مرکز O و شعاع واحد، چنان قرار گرفته‌اند که داریم:

$$\overrightarrow{OA_۱}+\overrightarrow{OA_۲}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=۰$$

ثابت کنید، برای هر نقطهٔ B داریم:

$$BA_1+BA_2+\cdots+BA_n\geqslant n$$

۲۶۹*. (مجارستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای نقطه‌های دلخواه A، B، C، D و E واقع بر یك صفحه، همیشه داریم:

$$AB+CD+DE+EC\leqslant AC+AD+AE+BC+BD+BE$$

§۱۴. مسأله‌های هندسی مربوط به اکسترمم

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۳۵، ۳۷ و قضیه‌های
۱، ۶، ۶۴، ۷۵ را ببینید).

۲۷۰. (چکوسلواکی، ۱۹۸۰). طول بزرگترین ضلع یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین برابر ۱۳ و محیط آن برابر ۲۸ می‌باشد.

الف) اگر مساحت ذوزنقه برابر ۲۷ باشد، طول ضلع‌های آن را پیدا کنید؛

ب) آیا مساحت این ذوزنقه، می‌تواند برابر ۲۷/۰۰۱ باشد؟

۲۷۱. (هیأت داوران، بلژیك، ۱۹۸۲). از بین همهٔ مثلث‌های با محیط برابر، آن را پیدا کنید که، در آن، شعاع دایرهٔ محاطی، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۷۲. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۷). از نقطه‌ای به‌فاصلهٔ $k<1$ از مرکز دایرهٔ به‌شعاع واحد، دو وتر عمود برهم گذرانده‌ایم. حداکثر وحداقل مجموع طول‌های این دو وتر را پیدا کنید.

۲۷۳. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، مجموع فاصله‌های بین وسط‌های ضلع‌های روبه‌رو در یك چهارضلعی، وقتی و تنها وقتی برابر نصف محیط آن است که، چهارضلعی مفروض، متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۷۴. (انگلستان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر برای نقطهٔ O واقع در درون چهارضلعی $ABCD$، مساحت S چهارضلعی، در برابری زیر صدق کند:

$$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$$

آن وقت، چهارضلعی $A\acute{B}CD$ یك مربع و، نقطهٔ O، مرکز آن است.

۲۷۵. (نیویورك، ۱۹۸۰). A_iH_i $(i=1, 2, 3)$ را ارتفاع‌های مثلث $A_1A_2A_3$، که مساحتی برابر S دارد، می‌گیریم. ثابت کنید این مثلث، وقتی و تنها وقتی متساوی‌الاضلاع است که داشته باشیم:

$$S=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}A_iA_{i+1}\cdot A_iH_i \quad (A_4=A_1)$$

۲۷۶. (بلغارستان، ۱۹۶۸). نسبت بین ضلع‌های مثلثی را پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{a\sin\beta+b\sin\gamma+c\sin\alpha}=\frac{P}{9R}$$

که درآن، a و b و c ضلع‌ها، α و β و γ زاویه‌های مقابل به‌آن ضلع‌ها، P محیط و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث‌اند.

۲۷۷. (نیویورك، ۱۹۷۹). nضلعی منتظمی رادر nضلعی منتظم مفروضی محاط کرده‌ایم $(n>3)$. ثابت کنید، برای این‌که، مساحت nضلعی محاطی کمترین مقدار ممکن باشد، باید رأس‌های آن را در وسط ضلع‌های nضلعی محیطی انتخاب کرد.

۲۷۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). $n\geqslant 3$ نقطهٔ دلخواه A_1، A_2، ...، A_n را، روی صفحه‌ای درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای روی یك خط راست نباشند. زاویهٔ $A_iA_jA_k$ را، که به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ مختلف A_i، A_j و A_k به‌وجود می‌آید، α می‌نامیم. برای هر مقدار n، حداکثر مقدار α را پیدا کنید. نقطه‌ها، چگونه برصفحه واقع باشند، تا به‌این مقدار برسیم؟

۲۷۹. (بلغارستان، ۱۹۸۳). مربعی با حداقل اندازه‌ها را پیدا کنید، به‌نحوی که بتوان ۵ دایرهٔ به‌شعاع واحد درآن جا داد و، در ضمن، هیچ دو دایره‌ای، دارای نقطه‌های مشترك درونی نباشند.

۲۸۰. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلثی، برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن باشد، این مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

۲۸۱. (امریکا، ۱۹۷۹). زاویه‌ای را روی صفحه رسم و نقطهٔ O را درون آن، علامت می‌گذاریم. از نقطهٔ O، پاره‌خط راست BC را طوری رسم کنید که، دو انتهای آن، بر ضلع‌های زاویه قرار گیرند و، در ضمن، مقدار

$$\frac{۱}{BO}+\frac{۱}{CO}$$

حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۸۲*. برای نقطهٔ T از مثلث مفروض ABC، $m(T)$ و $M(T)$ را، به‌ترتیب، کوچکترین و بزرگترین مقدار، از بین سه مقدار TA، TB و TC فرض می‌کنیم.

الف) (چکوسلواکی، ۱۹۷۴). همهٔ نقطه‌های T از مثلث ABC را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، $m(T)$ حداکثر، مقدار ممکن باشد.

ب) (رومانی، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر زاویهٔ ABC، حاده نباشد، برای هر نقطهٔ T از مثلث ABC، داریم:

$$m(T)\leqslant\frac{۱}{۲}BC\leqslant M(T)$$

فصل چهارم

هندسهٔ فضائی

۱۵§. چهاروجهی‌ها

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱۰، ۴۲ و قضیه‌های ۶، ۶۴، ۸۴، ۸۶ تا ۸۹، ۹۱، ۹۲را ببینید)

۲۸۳. (بلغارستان،۱۹۶۶). ثابت کنید، برای هرچهاروجهی، می‌توان مثلثی ساخت که، ضلع‌های آن، سه یالی از چهاروجهی باشند که از یك رأس

می گذرند.

۲۸۴. (چکوسلواکی، ۱۹۶۷). ثابت کنید، اگر یال‌های یك چهاروجهی، در برابری‌های

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

صدق کنند، دست کم یکی از وجه‌های آن، مثلثی است با زاویه‌های حاده.

۲۸۵. (کانادا، ۱۹۸۳). آیا درست است که، اگر مساحت چهار وجه یك چهاروجهی، به‌ترتیب با مساحت وجه‌های چهاروجهی دیگری برابر باشد، دو چهاروجهی حجمی برابر دارند؟

۲۸۶. (چکوسلواکی، ۱۹۷۱). ثابت کنید، چهاروجهی $ABCD$ وجود دارد که همهٔ وجه‌های آن، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ متشابهی با زاویه‌های حاده مجاور به رأس‌های A و B باشند. کدام یك از یال‌های این چهاروجهی بزرگترین طول و کدام یك کوچکترین طول را دارد؟ اگر طول بزرگترین یال برابر واحد باشد، طول کوچکترین یال چقدر است؟

۲۸۷. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۷۴). اگر شش صفحه را طوری در نظر بگیریم که هر کدام از آن‌ها از یك یال چهاروجهی منتظم و نقطهٔ وسط یال مقابل آن گذشته باشد، چهاروجهی، به‌چند بخش تقسیم می‌شود؟ اگر حجم چهاروجهی منتظم برابر واحد باشد، حجم هر یك از این بخش‌ها را پیدا کنید.

۲۸۸. (چکوسلواکی، ۱۹۷۶). چهار وجهی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ طوری قرار گرفته‌اند که خط‌های راست AA'، BB'، CC' و DD' باهم موازی‌اند. در ضمن، وجه‌های ABC و $A'B'C'$، نقطهٔ مشترکی ندارند و رأس‌های D و D'، به‌ترتیب، برصفحه‌های $A'B'C'$ و ABC واقع شده‌اند. ثابت کنید، این دو چهاروجهی، حجمی برابر دارند.

۲۸۹. (بلغارستان، ۱۹۶۸). نقطهٔ O در درون چهاروجهی $ABCD$ است؛ خط‌های راست AO، BO، CO، DO، وجه‌های BCD، ACD، ABD و ABC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 قطع کرده‌اند. در ضمن، نسبت‌های

$$\frac{AO}{A_1O},\ \frac{BO}{B_1O},\ \frac{CO}{C_1O},\ \frac{DO}{D_1O}$$

همگی برابر با یك عددند. همهٔ مقدارهای ممکن، برای این عدد را، پیدا کنید.

۲۹۰. (بلغارستان، ۱۹۶۶). روی یال‌های AB، AC و AD از چهاروجهی مفروض $ABCD$، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، به ترتیب، نقطه‌های K_n، L_n و M_n را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$AB=nAK_n,\ \ AC=(n+1)AL_n,\ \ AD=(n+2)AM_n$$

ثابت کنید، همهٔ صفحه‌های $K_nL_nM_n$ از یك خط راست می‌گذرند.

۲۹۱. (لهستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، همهٔ خط‌های راستی که رأس‌های یك چهاروجهی را به مرکز دایرهٔ محاطی وجه‌های روبه‌رو وصل می‌کنند، تنها وقتی از یك نقطه می‌گذرند که، سه حاصل‌ضرب طول‌های یال‌های روبه‌رو، باهم برابر باشند.

۲۹۲. (بلغارستان، ۱۹۷۶). صفحه‌ای سه وجه یك چهاروجهی را، که از یك رأس گذشته‌اند، قطع کرده است. این صفحه، چهاروجهی را به‌دو بخش تقسیم می‌کند. ثابت کنید، این صفحه، وقتی و تنها وقتی، سطح چهاروجهی را به‌دو بخش متناسب با حجم‌های دو بخش متناظر تقسیم می‌کند که ازمرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی گذشته باشد.

۲۹۳. (چکوسلواکی، ۱۹۶۸). ثابت کنید، اگر چهاروجهی، دوجفت یال روبه‌روی عمودبرهم‌داشته باشد، آن‌وقت، وسط همهٔ یال‌های چهاروجهی، بریك کره قرار دارند.

۲۹۴. (هیأت داوران، یونان، ۱۹۷۹). یك چهاروجهی منتظم به یال aرا درچهاروجهی منتظم دیگری به‌یال b، طوری محاط کرده‌ایم که، هررأس چهاروجهی محاطی، درست بریك وجه چهاروجهی محیطی قرار گرفته است. ثابت کنید. $3a\geqslant b$.

۲۹۵. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۸۳).درچهاروجهی $ABCD$، یال‌های AD، BD و CD، دو به‌دو برهم عمودند و، به ترتیب، طول‌هایی

برابر a، b و c دارند. ثابت کنید، بـرای هر نقطهٔ M واقع بـر یکـی از ضلع‌های مثلث ABC، مجموع S، فاصله‌هـای رأس‌های A، B و C تا خط راست DM، در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$S \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$$

در چه حالتی، به‌علامت برابری می‌رسیم؟

۲۹۶. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳؛ اتریش و لهستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای هر نقطهٔ واقع در درون چهاروجهی، مجموع زاویه‌هایی که یال‌های چهاروجهی، از این نقطه، تحت آن‌ها دیده‌می‌شوند، از ۵۴۰ درجه بیشتر است.

۲۹۷. (بلغارستان، ۱۹۷۶). ثابت کنید، همهٔ فاصله‌های یك نقطهٔ فضا تا هریك از چهار رأس چهاروجهی منتظم با یال برابر ۲، تنها وقتی به‌وسیلهٔ عددهای درست بیان می‌شوند که، این نقطه، بریکی از رأس‌های چهاروجهی منطبق باشد.

۲۹۸. (چکـوسلواکـی، ۱۹۷۳). ثابـت کنید، بـرای ارتفاع‌های h_i $(i=1, 2, 3, 4)$، هر چهاروجهی و شعاع r_i، کره‌های محاطی خارجی آن، همیشه داریم:

$$2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$$

۲۹۹*. (لهستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای ارتفاع‌های h_1، h_2، h_3 و h_4 هرچهاروجهی وفاصله‌های d_1، d_2، d_3، بین‌هردویال روبه‌رو درآن، داریم:

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}$$

۳۰۰*. (هیأت داوران، بلغارستان، ۱۹۸۱). کره‌ای بر یال‌های AB، BC، CD و DA ازچهاروجهی $ABCD$ در چهار نقطه مماس است و، این چهار نقطه، رأس‌های یك مربع را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید اگر این کره، در ضمن، بر یـال AC مماس باشد، درآن صورت، بـر یال BD هم مماس خواهد بود.

۳۰۱*. (بلغارستان، ۱۹۸۱). صفحه‌های α، β، γ و δ بر کرهٔ محیطی چهاروجهی $ABCD$، به‌ترتیب، در نقطه‌های A، B، C و D مماس‌اند. ثابت کنید، اگر خط راست فصل مشترك صفحه‌های α و β با خط راست CD در یك صفحه باشند، آن وقت، خط راست فصل مشترك صفحه‌های γ و δ هم با خط راست AB در یك صفحه قرار می گیرند.

§۱۶. چندوجهی، کره و مجموعه‌های دیگر

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱۱، ۱۶ و قضیه‌های ۲، ۱۰، ۸۵، ۸۷ تا ۸۹ را ببینید).

۳۰۲. (چکوسلواکی، ۱۹۷۹). مکعب‌هایی را درنظر می گیریم که، مرکزهای آن‌ها، برمرکز تقارن مکعب‌مستطیل مفروضی، با یال‌های $a<b<c$ واقع و وجه‌های آن‌ها با وجه‌های مکعب‌مستطیل موازی باشند. طول یال مکعبی را پیدا کنید که، برای آن، اجتماع حجم‌های مکعب و مکعب‌مستطیل، با اشتراك آن‌ها، حداقل تفاضل را داشته باشد.

۳۰۳. (جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، در درون مکعب به‌یال a، می‌توان دو چهاروجهی منتظم به یال a، به نحوی جا داد که نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

۳۰۴. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). ۵ نقطه، در فضا، طوری قرار گرفته‌اند که، هیچ چهارتایی از آن‌ها، بر یك صفحه واقع نیستند. ثابت کنید، خط راستی که از دو تا از این نقطه‌ها بگذرد، صفحهٔ شامل سه نقطهٔ دیگر را، در نقطه‌ای قطع می کند که دردرون مثلث با رأس‌های ۳ نقطهٔ اخیر، واقع است.

۳۰۵. (مجارستان، ۱۹۸۰). فضا، به‌وسیلهٔ ۵ مجموعهٔ غیر تهی و جدا ازهم، تقسیم شده است. ثابت کنید، صفحه‌ای وجود دارد که، دست کم، با ۴ مجموعه، دارای نقطه‌های مشترك باشد.

۳۰۶. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۳). ثابت کنید. ضمن تقسیم دلخواه فضا به‌وسیلهٔ ۳ مجموعه، دست کم، یکی از مجموعه‌ها دارای این ویژگی است: برای هر مقدار $a>0$، می‌توان دو نقطه در این مجموعه

پیدا کرد، به‌نحوی که فاصلهٔ بین آن‌ها، برابر a باشد.

۳۰۷. (رومانی، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای هرسه بردار $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$، این برابری برقرار است:

$$\sum(\varepsilon_1\mathbf{a}_1+\varepsilon_2\mathbf{a}_2+\varepsilon_3\mathbf{a}_3)^2=8\sum_{k=1}^{3}\mathbf{a}_k^2$$

که در آن، در مجموع سمت چپ، هر ۸ انتخاب ممکن برای عددهای

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\in\{-1, +1\}$$

در نظر گرفته شده است. این گزاره را، برای هر تعداد $n\in\mathbf{N}$ بردار $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$، ...، $\mathbf{a}_n$ تعمیم دهید.

۳۰۸. (چکوسلواکی، ۱۹۶۲). از دوانتهای A و B از پاره‌خط AB به‌طول a، خط‌های راستی عمود برهم و عمود برپاره‌خط AB رسم کرده‌ایم. روی این خط‌های راست، به‌ترتیب، نقطه‌های C و D را طوری در نظر گرفته‌ایم که، نقطهٔ برخورد پاره‌خط CD با صفحه‌ای که از نقطه O وسط AB عمود بر AB رسم شده است، به‌فاصله r از نقطهٔ O باشد. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست CD را می‌توان برحسب a و r محاسبه کرد. مکان هندسی نقطهٔ C را پیدا کنید.

۳۰۹. (بلغارستان، ۱۹۸۲). کرهٔ s به‌شعاع r، از مرکز کرهٔ S به‌شعاع R گذشته است. ثابت کنید، اگر وتر AB از کرهٔ S، بر کرهٔ s، در نقطهٔ C مماس باشد، آن گاه

$$AC^2+BC^2\leqslant 2R^2+r^2$$

۳۱۰. (امریکا، ۱۹۸۲). دو کرهٔ به‌شعاع‌های r_1 و r_2، که برهم منطبق نیستند، در درون کرهٔ S به‌شعاع R قرار دارند و بر آن مماس‌اند. هر یك از دو کرهٔ درونی ازسه نقطهٔ A، B و C می‌گذرند و می‌دانیم که، عمود برصفحهٔ ABC در نقطهٔ A، از مرکز کرهٔ S عبور می‌کند. ثابت کنید: $r_1+r_2=R$.

۳۱۱. (رومانی، ۱۹۵۸). مساحت سطح کل و حجم هرم منتظم با قاعدهٔ nضلعی را، به‌ترتیب، S و V می‌نامیم.

الف) برای مقدارهای مفروض n و S، حداکثرمقدار V را پیدا کنید.
ب) طول ضلع قاعده و طول ارتفاع همهٔ هرم‌هایی را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $n=۴$، $S=۱۴۴$ و $V=۶۴$.

۰۳۱۲ (بلغارستان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای هرمقدار طبیعی $n>۱$، بین همهٔ منشورهای منتظم با قاعدهٔ $۲n$ ضلعی

$$A_۱A_۲\cdots A_{۲n}A'_۱A'_۲\cdots A'_{۲n}$$

به‌شرط ثابت بودن شعاع R از دایرهٔ محیطی قاعده، بزرگترین زاویهٔ بین‌قطر $A_۱A'_{n+۱}$ و صفحهٔ $A_۱A_۳A'_{n+۲}$، متعلق به منشوری است که، برای آن، داشته باشیم:

$$A_۱A'_۱=۲R\cos\frac{۱۸۰^\circ}{۲n}$$

۰۳۱۳ (مجارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر در هرمی که یال‌های جانبی برابر دارد، زاویه‌های دووجهی بین هر دو وجه مجاور جانبی باهم برابر باشند و، درضمن، تعداد ضلع‌های قاعدهٔ هرم، عددی فرد باشد، آن‌وقت، این هرم منتظم است.

۰۳۱۴ (بلغارستان، ۱۹۸۴). متوازی‌الاضلاع $ABCD$، قاعدهٔ هرم $SABCD$ را تشکیل داده است. صفحهٔ α، خط‌های راست AD، SA و SC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های P، Q و R طوری قطع کرده است که داریم:

$$\frac{AP}{AD}=\frac{SQ}{SA}=\frac{RC}{SC}$$

در ضمن، نقطه‌های A، S و C، یا هر سه به ترتیب، متعلق به پاره‌خط‌های راست PD، QA و SR هستند و یا هیچ کدام از آن‌ها متعلق به پاره‌خط متناظر نیستند. نقطهٔ N وسط پاره‌خط CD است و نقطهٔ M برخط راست SB طوری قرار گرفته است که خط راست MN با صفحهٔ α موازی شده است. ثابت کنید، مکان هندسی نقطهٔ M، برای هروضع ممکن صفحهٔ α، عبارت است از پاره‌خط راستی به‌طول $\frac{\sqrt{۵}}{۲}SB$.

۳۱۵. (بلغارستان، ۱۹۷۷). مساحت قاعده‌های یک هرم ناقص، به‌ترتیب، برابر S_1 و S_2 و مساحت سطح جانبی آن، برابر S است. ثابت کنید، اگر صفحه‌ای موازی با قاعده، هرم ناقص را به‌دو هرم ناقص دیگر تقسیم کند که، در هر کدام از آن‌ها، بتوان کره‌ای محاط کرد، آن وقت

$$S=(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})(\sqrt[4]{s_1}+\sqrt[4]{s_2})^2$$

۳۱۶. (انگلستان، ۱۹۶۸). حداکثر تعداد نقطه‌هایی را پیدا کنید که بتوان روی کرهٔ به‌شعاع واحد قرار داد، به نحوی که فاصلهٔ بین هر دو تا از آن‌ها: الف) کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد؛ ب) بیشتر از $\sqrt{2}$ باشد.

۳۱۷. (چکوسلواکی، ۱۹۷۰). مطلوب است همهٔ مقدارهای $n\in\mathbf{N}$ بزرگتر از واحد و $r_n>0$ که، برای آن‌ها، بتوان روی سطح کرهٔ به‌شعاع واحد، دایره‌های غیر متقاطع C_0، C_1، ...، C_n به شعاع r_n را طوری رسم کرد که، به ازای هر مقدار $i=1$، ...، n، دایرهٔ C_i بر دایره‌های C_0 و C_{i+1} مماس باشد ($C_{n+1}=C_1$).

۳۱۸. (امریکا، ۱۹۷۹). سه دایره، روی سطح کره‌ای قرار دارند؛ مرکز این سه دایره همان نقطهٔ O، مرکز کره است و، در ضمن، هر سه دایره، از نقطهٔ A می‌گذرند. روی محیط این دایره‌ها، به‌ترتیب، نقطه‌های B، C و D را، طوری انتخاب کرده‌ایم که زاویهٔ AOB برابر ۹۰ درجه و خط راست OB، نیمساز زاویهٔ COD شده است. ثابت کنید، اگر نیم خطهای راست AB'، AC' و AD'، به‌ترتیب، بر کمان‌های AB، AC و AD از دایره‌های مربوط، مماس باشند، آن گاه، نیم‌خط راست AB' نیمساز زاویهٔ $C'AD'$ می‌شود.

۳۱۹. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۲). دو انتهای یک‌قطر از دایرهٔ مربوط به‌قاعدهٔ استوانهٔ مستدیر قائم را A و B می‌نامیم و روی محیط دایرهٔ قاعدهٔ دوم، نقطهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که بر صفحهٔ ABO منطبق نباشد (O، وسط محور استوانه است). ثابت کنید، مجموع زاویه‌های دووجهی از کنج به رأس O و یال‌های OA، OB و OC، برابر ۳۶۰ درجه است.

۳۲۰. (امریکا، ۱۹۸۱). در یک کنج محدب، مجموع زاویه‌های مسطحه، برابر با مجموع زاویه‌های دووجهی است. ثابت کنید، این کنج، یک کنج سه‌وجهی است.

۳۲۱. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹). آیا می‌توان فضا را، به ۱۹۷۹ زیرمجموعهٔ جدا ازهم و برابر تقسیم کرد؟

۳۲۲*. (انگلستان، ۱۹۷۰). حداقل چندصفحه لازم است تا، به‌کمك آن‌ها، بتوان مکعب را دست‌کم، به ۳۰۰ بخش تقسیم کرد؟

۳۲۳*. (رومانی، ۱۹۷۸). صفحه‌های α و α' روی خط راست l یکدیگر را قطع کرده‌اند. سه نقطهٔ A، B و C را روی α و سه نقطهٔ A'، B' و C' را روی α' انتخاب کرده‌ایم. صفحهٔ α' دور خط راست l، دوران می‌کند. ثابت کنید، اگر در موقعیتی از صفحهٔ α'، خط‌های راست AA'، BB' و CC' از یك نقطه بگذرند، آن وقت، در هر موقعیتی از صفحهٔ α' (به‌جز وقتی‌که بر α منطبق باشد)، این سه‌خط راست، ازیك نقطه می‌گذرند. مکان هندسی نقطهٔ برخورد این سه‌خط راست را پیداکنید.

۳۲۴*. (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). همهٔ دوران‌هایی را که دورمحورهای مختلف در فضا انجام می‌گیرند و رأس A از مکعب $ABCDA'B'C'D'$ را بر رأس B ازآن منطبق می‌کنند، در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای از سطح این مکعب که، ضمن این دوران‌ها، از دوران نقطهٔ C به‌دست می‌آید.

۳۲۵*. (مجارستان، ۱۹۸۲). مکعبی، در دستگاه مختصات قائم فضائی چنان قرار گرفته است که، مختصات چهار رأسی ازآن که بریك صفحه واقع نیستند، عددهای درستی شده‌اند. ثابت کنید، در این صورت، مختصات همهٔ رأس‌های این مکعب، عددهای درستی هستند.

۳۲۶*. (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر بتوان مکعب مستطیلی را به‌مکعب مستطیل‌هائی تقسیم کرد که طول‌هائی ازهرکدام ازآن‌ها عدد درستی باشد، آن وقت، طول‌هایی ازمکعب‌مستطیل اصلی هم، عدددرستی خواهدبود.

فصل پنجم
آنالیز

§۱۷. دنباله‌ها

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۲، ۱۲، ۱۴، ۱۵،
۱۸، ۱۹ وقضیه‌های ۱، ۲، ۱۰، ۱۶، ۱۸،
۲۱ را ببینید)

۳۲۷. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶) مطلوب است محاسبهٔ مجموع $a_1+a_2+\cdots+a_{99}$، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

۳۲۸. (چکوسلواکی، ۱۹۷۲). ثابت کنید، عددهای A و B وجود دارند که، به‌ازای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، در برابری

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=A\,tg\,n+Bn$$

صدق کنند، با این شرط که

$$a_k=tg\,k\,tg(k-1)$$

۳۲۹. (نیویورك، ۱۹۷۴). فرض کنید

$$a_n=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}(n\in\mathbf{N})$$

مطلوب است: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

۳۳۰. (نیویورك، ۱۹۷۴). در دنبالهٔ عددهای مثبت

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

هر جملهٔ $a_n\ (n\in\mathbf{N})$ یا برابر $\frac{1}{2}a_{n-1}$ و یا برابر $\sqrt{a_{n-1}}$ است. آیا ممکن است، این دنباله، حدی در بازهٔ $(0, 1)$ داشته باشد؟

۰.۳۳۱ (امریکا، ۱۹۸۰؛ یوگسلاوی ۱۹۸۱). برای عدد طبیعی و مفروض $n\geqslant 3$ مطلوب است بیشترین تعداد ممکن تصاعدهای حسابی صعودی، که از سه جمله تشکیل شده باشند و بتوان آن‌ها را، از بین n عدد مختلف دلخواه، انتخاب کرد.

۰.۳۳۲ (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). عددهای ۱، ۹، ۸، ۱، به همین ردیف، چهار جملهٔ اول یك دنباله را تشکیل می‌دهند در این دنباله، از جملهٔ پنجم به‌بعد، هر جمله برابر است با آخرین رقم مجموع چهار جملهٔ قبل. آیا ممکن است، در این دنباله، به‌عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، پشت سرهم، برخورد کنیم؟

۰.۳۳۳ (اتریش، لهستان، ۱۹۸۰). دنبالهٔ عددهای طبیعی

$$a_1<a_2<a_3<\cdots$$

در شرط‌های $a_1=1$ و $a_{n-1}\leqslant 2n$، برای $n\in\mathbf{N}$، صدق می‌کنند. ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، جمله‌های a_p و a_q از این دنباله وجود دارند که برای آن‌ها، برابری $a_q-a_p=n$ برقرار باشد.

۰.۳۳۴ (لهستان، ۱۹۷۹). عددهای $A>1$ و $B>1$ مفروض‌اند. دنبالهٔ $\{a_n\}(n\in\mathbf{N})$، با عددهایی از بازهٔ $[1, AB]$ ساخته شده است. ثابت کنید، دنباله‌ای مثل $\{b_n\}$ وجود دارد که با عددهایی از بازهٔ $[1, A]$ ساخته شده باشد و، برای هر $m, n\in\mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$a_m:a_n\leqslant Bb_m:b_n$$

۰.۳۳۵ (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۸۲). همهٔ جمله‌های دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از عددهای طبیعی انتخاب‌شده‌اند. ثابت کنید، زوج‌شماره‌های $p<q$ وجود دارد، به نحوی که برای آن‌ها داشته باشیم: $a_p\leqslant a_q$ و $b_p\leqslant b_q$.

۰.۳۳۶ (پکن، ۱۹۶۴). دنبالهٔ عددهای مثبت a_1، a_2، ... مفروض است و می‌دانیم: $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N})$. ثابت کنید، برای هر $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$.a_n<\frac{1}{n}$

۳۳۷. (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضی، فنلاند، ۱۹۸۰). دنبالهٔ عددهای a_0، a_1، ...، a_n، به این صورت داده شده است:

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_k=a_{k-1}+\frac{1}{n}\ a_{k-1}^2\quad (k=1, \dots, n)$$

ثابت کنید: $.1-\frac{1}{n}<a_n<1$

۳۳۸. (اتریش، لهستان، ۱۹۸۰). برای دنبالهٔ عددی $\{a_n\}$ داریم:

$$|a_{k+m}-a_k-a_m|\leqslant 1\quad (k, m\in\mathbf{N})$$

ثابت کنید، برای هر $p, q\in\mathbf{N}$، داریم:

$$\left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_q}{q}\right|<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

۳۳۹. (لهستان، ۱۹۷۸). برای عدد مفروض $a_1\in\mathbf{R}$، دنبالهٔ a_1، a_2، ... را به این ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right) & (a_n\neq 0)\\ 0 & (a_n=0)\end{cases}$$

$(n\in\mathbf{N})$. ثابت کنید، در این دنباله، بی‌نهایت جملهٔ غیرمثبت وجود دارد.

۳۴۰. (انگلستان، ۱۹۸۰). همهٔ مقدارهای $a_0\in\mathbf{R}$ را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، دنبالهٔ a_0، a_1، ...، با تعریف

$$a_{n+1}=2^n-3a_n$$

$(n\in\mathbf{Z}^+)$، دنباله‌ای صعودی باشد.

۳۴۱. (اتریش، ۱۹۷۲؛ بلغارستان، ۱۹۷۸). دنبالهٔ عددهای غیرصفر a_1، a_2، ...، برای عددی مثل a، با این شرط‌ها سازگار است:

$$a_1, a_2 \in \mathbf{Z};\ \frac{a_1^2+a_2^2+a}{a_1 a_2} \in \mathbf{Z};\ a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+a}{a_n}$$

ثابت کنید، این دنباله، ازعددهای درست ساخته شده است.

۳۴۲. (چکوسلواکی، ۱۹۶۸). ثابت کنید، هرجمله از دنبالهٔ

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \quad (n\in\mathbf{Z})$$

عددی درست است. همهٔ مقدارهای $n\in\mathbf{Z}$ را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، عدد a_n بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۳۴۳. (چکوسلواکی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، هریك از جمله‌های دنبالهٔ

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2 \quad (n\in\mathbf{N})$$

عددی طبیعی به‌صورت m^2 یا $5m^2$ است $(m\in\mathbf{N})$، بسته به‌این‌که n، عددی زوج باشد یا فرد.

۳۴۴*. (هیأت داوران، انگلستان، ۱۹۸۲). دنبالهٔ a_0، a_1، ...، برای پارامتری مثل $a\in\mathbf{N}$، با این شرطها سازگار است:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+(a-1)a_{n-1} \quad (n\in\mathbf{N})$$

برای عدد اول و ثابت $p_0>2$، کوچکترین مقدار a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن، این دوگزاره درست باشد:

الف) اگر p عددی اول و $p\leqslant p_0$، آن‌وقت a_p بر p بخش‌پذیراست؛

ب) اگر p عددی اول و $p>p_0$، آن‌وقت، عدد a_p بر p بخش‌پذیر نیست.

۳۴۵*. (انگلستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، تنها یك دنباله از عددهای درست وجود دارد (a_1، a_2، ...) که با شرطهای زیر سازگار است:

$$a_1=1,\ a_2>1,\ a_{n+1}^3+1=a_n a_{n+2} \quad (n\in\mathbf{N})$$

۳۴۶*. (چکوسلواکی، ۱۹۷۵). بـرای عدد اول مفروض p، تعداد دنباله‌های‌متفاوت‌عددهای طبیعی a_0، a_1، ...، را پیداکنیدکه، برای‌هرکدام

از آن‌ها، داشته باشیم:

$$\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_0}{a_2}+\dots+\frac{a_0}{a_n}+\frac{p}{a_{n+1}}=1 \quad (n\in\mathbf{N})$$

۳۴۷*. (انگلستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، برای دنبالهٔ عددهای (فیبوناچی) a_1، a_2، ...، که به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1=a_2=1, \quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\in\mathbf{N})$$

سه عدد منحصر به‌فرد و طبیعی a، b و c وجود دارد که با شرط‌های $b<a$ و $c<a$ سازگارند و، برای هر $n\in\mathbf{N}$، عدد a_n-nbc^n بر a بخش‌پذیر است.

§۱۸. اکسترمم‌ها

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۹، ۱۵، ۱۶ و
قضیه‌های ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۳۶ را ببینید)

۳۴۸. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۳). همهٔ زوج عددهای مثبت (x, y) را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، مقدار تابع

$$f(x, y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

به حداقل خود برسد؛ این مقدار حداقل را پیدا کنید.

۳۴۹. (هیأت داوران، سوئد، ۱۹۷۹). حداکثر مقدار حاصل‌ضرب $x^2y^2z^2u$ را پیدا کنید، به شرطی که x، y، z و u عددهایی غیرمنفی باشند و، درضمن، بدانیم

$$2x+xy+z+yzu=1$$

۳۵۰. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۸؛ چکوسلواکی، ۱۹۸۰).
برای عددهای مفروض $a_1<a_2<\dots<a_n$، آیا نقطهٔ $x\in\mathbf{R}$ وجود دارد که، در آن‌جا، تابع

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$$

به حداقل مقدار خود برسد؟ اگر وجود دارد، همهٔ این نقطه‌ها را پیدا کنید و، درضمن، مقدارحداقل تابع $f(x)$ را هم به‌دست آورید.

۳۵۱. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیك آلمان، ۱۹۷۹). برای عدد مفروض $n\geqslant 2$، مطلوب است حداکثر و حداقل حاصل‌ضرب

$$x_1x_2\cdots x_n$$

به شرطی که بدانیم:

$$x_i\geqslant\frac{1}{n}(i=1, 2, \dots, n);\ x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$$

۳۵۲. (هیأت داوران، سوئد، ۱۹۷۹). برای عددهای مفروض $n\geqslant 2$ و $a>0$، حداکثر مقدار مجموع $\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ را، با شرطهای $x\geqslant 0$ $(i=1, \dots, n)$ و $x_1+\dots+x_n=a$ پیدا کنید.

۳۵۳. (رومانی، ۱۹۷۹). $a_1<a_2<\dots<a_n$، عددهای مثبت مفروضی‌اند. برای کدام تبدیل $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ از این عددها، حاصل‌ضرب

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$$

حداکثر مقدار ممکن است؟

۳۵۴. (چکوسلواکی، ۱۹۶۳). برای هرمقدار $k\in\mathbf{N}$، عدد $2k$ را به‌صورت مجموع دو عدد نسبت به هم اول x و y درنظر بگیرید، به‌نحوی که حاصل‌ضرب xy، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۳۵۵. (چکوسلواکی، ۱۹۸۳). برای عددهای مفروض $n\in\mathbf{N}$ و $a\in[0, n]$، مطلوب است حداکثر مقدار $\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$، با این شرط که

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$$

۳۵۶. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). برای هر عدد $n\in\mathbf{N}$، حداکثر مقداری را پیدا کنید که، حاصل‌ضرب عددهای طبیعی بامجموع ثابت n، قبول می‌کند.

۳۵۷*. (انگلستان، ۱۹۸۱). حداقل مقدار $|12^m-5^n|$ را، با شرط طبیعی بودن عددهای m و n، پیدا کنید.

§ ۱۹. ویژگی‌های مختلف تابع

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۲، ۳، ۶ و قضیه‌های ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۳، ۳۴ را ببینید)

۳۵۸. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). دو عدد مثبت x_1 و x_2 مفروض‌اند و، برای تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، این دستور داده شده است:

$$f(x)=ax^4+bx^2+c \quad (a،\ b،\ c\in\mathbf{R} \text{ و } a\neq 0)$$

می‌دانیم $f(0)=f(x_1)=1$ و $f'(x_2)=0$. مطلوب است محاسبهٔ ضریب‌های a و b و c.

۳۵۹. (رومانی، ۱۹۸۱). آیا تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ وجود دارد که، در مورد آن، برای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$f(x^2)-(f(x))^2\geqslant\frac{1}{4}$$

و درضمن، در دو نقطهٔ مختلف، مقدارهای برابر را قبول نکند؟

۳۶۰. (مجارستان ۱۹۷۹؛ هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، برای هر $x،\ y\in\mathbf{R}$، در نابرابری‌های

$$f(x)\leqslant x \quad \text{و} \quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

صدق کند، آن وقت، اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x)\equiv x \quad (x\in\mathbf{R})$$

۳۶۱. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۲). این تابع داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \left(x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right) \\ \dfrac{1}{2+tg^2 x} & (\text{بقیهٔ مقدارهای } x) \end{cases}$$

ثابت کنید، تابع $g(x)=f(x)+f(ax)$ وقتی، و تنها وقتی، متناوب است که داشته باشیم: $a\in\mathbf{Q}$.

۳۶۲. (کانادا، ۱۹۸۱). تابع‌های پیوستهٔ $f(x)$ و $g(x)$ در اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$f(g(x))=g(f(x)),\ x\in\mathbf{R}$$

ثابت کنید، اگر معادلهٔ $f(x)=g(x)$ دارای جواب‌های حقیقی نباشد، معادلهٔ $f(f(x))=g(g(x))$ هم جواب حقیقی ندارد.

۳۶۳. (رومانی، ۱۹۸۱). تابع پیوستهٔ زیر مفروض است:

$$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$$

ثابت کنید:

الف) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب) نتیجهٔ بخش الف) برای تابع زیر درست نیست:

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$$

۳۶۴. (رومانی، ۱۹۸۹). ثابت کنید، تابع پیوستهٔ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ وجود ندارد که دارای این ویژگی باشد: عدد $f(x)$ تنها به ازای مقدارهایی از $x\in\mathbf{R}$ گویا باشد، که به‌ازای آن‌ها، عدد $f(x+1)$ گنگ است.

۳۶۵. (نیویورک، ۱۹۷۹). آیا تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ وجود دارد تا، به شرطی که متحد با مقدار ثابتی نباشد، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی x و y، در این نابرابری صدق کند:

$$(f(x)-f(y))^2\leqslant|x-y|^3$$

۳۶۶. (نیویورک، ۱۹۷۶). فرض کنید، تابع پیوستهٔ

$$f:[0, 1] \to [0, 1]$$

در بازهٔ $(0, 1)$ مشتق‌پذیر باشد؛ در ضمن $f(0)=0$ و $f(1)=1$. ثابت کنید، چنان عددهایی برای $a, b\in(0, 1)$ وجود دارد، به‌نحوی که

$$a\neq b \quad و \quad f'(a)\cdot f'(b)=1$$

۳۶۷*. (استرالیا، ۱۹۸۲). همهٔ عددهای $d\in[0, 1]$ را طوری پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: اگر $f(x)$، تابعی پیوسته و دلخواه با دامنهٔ تعریف $a\in[0, 1]$ و، درضمن $f(0)=f(1)$، عدد $x_0\in[0, 1-d]$ وجود دارد که به‌ازای آن

$$f(x_0)=f(x_0+d)$$

۳۶۸*. (رومانی، ۱۹۷۸). تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به این ترتیب تعریف شده است: اگر x عددی گنگ باشد، $f(x)=0$؛ و اگر $p\in\mathbf{Z}$ و $q\in\mathbf{N}$ و کسر $\frac{p}{q}$ ساده نشدنی باشد، $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^3}$. ثابت کنید، این تابع، در هر نقطهٔ $x=\sqrt{k}$ مشتق‌پذیر است که، در آن، k عددی طبیعی است، ولی مجذور کامل نیست.

۳۶۹*. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۶). $\mathbf{I}=(0, 1]$ می‌گیریم. برای مقدار مفروض $a\in(0, 1)$، تابع $f:\mathbf{I}\to\mathbf{I}$ را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+(1-a) & (0<x\leqslant a)\\ x-a & (a<x\leqslant 1)\end{cases}$$

ثابت کنید، برای هر بازهٔ $\mathbf{J}\subset\mathbf{I}$، عدد $n\in\mathbf{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که اشتراک $\mathbf{J}\bigcap f^n(\mathbf{J})$، مجموعه‌ای تهی نباشد.

۳۷۰*. (هیأت داوران، سویس، ۱۹۷۷). برای تابع صعودی و مفروض $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، تابع $g(x, y)$ را طوری پیدا کرده‌ایم که داریم:

$$g(x, y)=\frac{f(x+y)-f(x)}{f(x)-f(x-y)} \quad (x\in\mathbf{R}, y>0)$$

فرض کنید، برای هر مقدار $y>0$ به‌ازای $x=0$، و برای هر مقدار $y\in(0, |x|]$ به‌ازای $x\neq 0$، این نابرابری برقرار باشد:

$$2^{-1}<g(x, y)<2$$

ثابت کنید، در این صورت، به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$ و $y>0$، داریم:

$$14^{-1}<g(x, y)<14.$$

§۲۰. معادله‌های تابعی

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۵، ۶، ۱۸، ۲۰ و
قضیه‌های ۱، ۳، ۷، ۱۶، ۲۷، ۲۸ را ببینید)

۳۷۱. (نیویورک، ۱۹۷۸). تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در این اتحاد صدق می‌کند:

$$f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}, (x, y\in\mathbf{R}, x+y\neq 0)$$

آیا می‌توان مقداری برای $x\in\mathbf{R}$ پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم: $f(x)\neq 0$؟

۳۷۲. (بلغارستان، ۱۹۶۸). همهٔ تابع‌های $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، این اتحاد برقرار باشد:

$$xf(y)+yf(y)\equiv(x+y)f(y)f(y)$$

۳۷۳. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۲). M را مجموعهٔ تابع‌های $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ می‌گیریم که، برای آن‌ها، $f(0)\neq 0$ و درضمن

$$f(n)f(m)\equiv f(n+m)+f(n-m) \quad (m, n\in\mathbf{Z})$$

مطلوب است: الف) همهٔ تابع‌های $f(n)\in M$ که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$f(1)=\frac{5}{2}$؛ ب) همهٔ تابع‌های $f(n)\in M$ که، بـرای آن‌ها، داشته باشیم: $f(1)=\sqrt{3}$.

۳۷۴. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۹). همهٔ تابع‌هـای $f:\mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$ را پیدا کنید که در این اتحاد صدق کنند:

$$f(n+m)+f(n-m)\equiv f(3n)\quad (n, m\in\mathbf{Z}, n\geqslant m)$$

۳۷۵. (نیویورك، ۱۹۷۶). تابع‌های $f, g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، غیر ثابت‌اند و در دو اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$f(x+y)\equiv f(x)g(y)+g(x)f(y),$$
$$g(x+y)\equiv g(x)g(y)-f(x)f(y)$$

$(x, y\in\mathbf{R})$. همهٔ مقدارهای ممکن $f(0)$ و $g(0)$ را پیدا کنید.

۳۷۶. (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضی، لـوکـزامبورگ، ۱۹۸۰). همهٔ تابع‌های $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ را پیدا کنیدکـه، برای آن‌ها، $f(1)=2$ باشد و، درضمن، داشته باشیم:

$$f(xy)\equiv f(x)f(y)-f(x+y)+1\quad (x, y\in\mathbf{Q})$$

۳۷۷. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). برای تابع $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases} n-10 & (n>100) \\ f(f(n+11)) & (n\leqslant 100)\end{cases}$$

$(n\in\mathbf{Z})$. ثابت کنید، برای هرمقدار $n\leqslant 100$، داریم:

$$f(n)=91$$

۳۷۸. (رومانی، ۱۹۷۹). تابع‌های $f, g, h:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ بـا سه شرط زیر سازگارند:

الف) تابع $f(n)$، هیچ مقداری را بیش از یك‌بار قبول نمی‌کند؛

ب) مجموعهٔ مقدارهای تابع $g(n)$، عبارت است از $\mathbf{N}$؛

ج) $f(n)\equiv g(n)-h(n)+1$ $(n\in\mathbf{N})$.

ثابت کنید، اتحاد $f(n)\equiv 1$ $(n\in\mathbf{N})$ برقرار است.

۳۷۹. (رومانی، ۱۹۷۸). تابع $f\to\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ را پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کند:

$$f(f(n))\equiv n^2 \quad (n\in\mathbf{N})$$

۳۸۰. (رومانی، ۱۹۷۸). تابع‌های غیر ثابت $f(n, m)$، که در مجموعهٔ همهٔ زوج عددهای درست، تعریف شده‌اند، مقدارهای درست را می‌پذیرند و در اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$f(n, m)=\frac{1}{4}[f(n-1, m)+f(n+1, m)+f(n, m-1)+$$
$$+f(n, m+1)]$$

$(n, m\in\mathbf{Z})$. ثابت کنید: الف) چنین تابع‌هایی وجود دارند؛ ب) برای هر مقدار $k\in\mathbf{Z}$، هریك از این گونه تابع‌ها، هم مقدارهای بزرگتر از k و هم مقدارهای کوچکتر از k را قبول می‌کند.

۳۸۱. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). برای زیرمجموعهٔ مفروض S، از مجموعهٔ زوج عددهای درست، تابع $f:S\to S$ را تابع عمومی می‌نامیم، وقتی که برای هر زوج $(n, m)\in S$، این شرط برقرار باشد:

$$f(n, m)\in\{(n-1, m), (n+1, m), (n, m-1), (n, m+1)\}$$

ثابت کنید، اگر دست کم یك تابع عمومی وجود داشته باشد، آن وقت، تابع عمومی $f(n, m)$ وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$f(f(n, m))=(n, m), \qquad (n, m)\in S$$

۳۸۲*. (امریکا، ۱۹۸۲). همهٔ مقدارهای درست و غیر صفر $m\leqslant n$ را پیدا کنید که در نابرابری $m+n\neq 0$ و اتحاد زیر صدق کنند:

$$f_m(x, y)f_n(x, y)\equiv f_{m+n}(x, y), \qquad x, y\in\mathbf{R}, xy(x+y)\neq 0$$

که در آن، فرض کرده‌ایم:

$$f_k(x, y)=\frac{x^k+y^k+(-1)^k(x+y)^k}{k}$$

راهنمایی: زوج عـددهـای $m=2$، $n=3$ و $m=2$، $n=5$، در شرطهای موردنظر صدق می‌کنند.

۳۸۳*. (هیـأت داوران، لهستان، ۱۹۷۷). ثابت‌کنید، اگـر تـابع $f(x, y)$ در مجموعهٔ زوج عددهای گویا تعریف شده باشد و تنها مقدارهای مثبت را قبول‌کند؛ درضمن در سه اتحاد زیر صادق باشد:

$$f(xy, z)\equiv f(x, z)f(y, z),$$

$$f(z, xy)\equiv f(z, x)f(z, y),$$

$$f(x, 1-x)\equiv 1; \qquad x, y, z\in \mathbf{Q}$$

آن‌وقت، این اتحادها برقرارند $(x, y\in \mathbf{Q})$:

$$f(x, x)\equiv 1, \quad f(x, -x)\equiv 1, \quad f(x, y)f(y, x)\equiv 1$$

۳۸۴*. (هیأت داوران، یـوگسلاوی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، هو تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، که با یکی از اتحادهای زیر سازگار باشد:

$$f(x+y)\equiv f(x)+f(y), \quad x, y\in\mathbf{R}$$

$$f(xy+x+y)\equiv f(xy)+f(x)+f(y), \quad x, y\in\mathbf{R}$$

آن وقت، با اتحاد دیگر هم‌سازگار است.

۳۸۵*. (اتریش، ۱۹۷۵). همهٔ تابع‌های پیوسته

$$f:(1, +\infty)\to\mathbf{R}$$

را پیدا کنیدکه در اتحاد زیر صدق‌کنند:

$$f(xy)=xf(y)+yf(x) \quad (x, y>1)$$

۳۸۶*. (رومانی، ۱۹۸۲). الـف) ثـابت کنید، اگـر تابع پیوستهٔ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در اتحاد زیر صدق‌کند:

$$f(f(f(x)))=x, \quad x\in\mathbf{R}$$

آن وقت، به‌ازای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$، برابری $f(x)=x$ برقرار است.

ب) نمونه‌ای از تابع (ناپیوستهٔ) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را پیدا کنید که با این شرط‌ها سازگار باشد:

$$g(x) \not\equiv x, \quad g(g(g(x)))=x, \quad x \in \mathbf{R}$$

۳۸۷*. (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۷۹). مطلوب است همهٔ تابع‌های یکنوای $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f(x)+f^{-۱}(x)=۲x$$

۳۸۸*. (نیویورک، ۱۹۷۷). همهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f'\left(\frac{x+y}{۲}\right) \equiv \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \qquad (x, y \in \mathbf{R}, x \neq y)$$

۳۸۹*. (بلژیک، ۱۹۷۷). همهٔ تابع‌های $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را پیدا کنید که، به‌طور نامتناهی مشتق‌پذیر باشند و، در ضمن، در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(x+y) \equiv f(x)+f(y)+۲xy \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

۳۹۰*. (انگلستان، ۱۹۶۹). ثابت کنید، اگر تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ متحد با صفر نباشد، در اتحاد

$$f(x)f(y) \equiv f(x+y)$$

صدق کند و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد، آن وقت، در هر نقطهٔ $x \in \mathbf{R}$، به‌طور نامتناهی مشتق‌پذیر خواهد بود.

فصل ششم

چند جمله‌ای‌ها

§۲۱. ریشه‌های چندجمله‌ای

(ضمیمهٔ ج، ۱۸، ۲۰، ۲۲ تا ۲۴، ۲۶،۲۸ تا ۳۰، ۳۲ و قضیه‌های ۲، ۶، ۲۸، ۳۵، ۳۸، ۴۰، ۴۱، ۴۵ تا ۵۱، ۵۳، ۵۵ تا ۵۷، ۵۹ تا ۶۱، ۶۳ را ببینید)

۳۹۱. (بلغارستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای ریشه‌های x_1 و x_2 چندجمله‌ای

$$x^2+px-\frac{1}{2p^2}, \quad (p\in\mathbf{R}, p\neq 0)$$

نابرابری $x_1^4+x_2^4\geqslant 2+\sqrt{2}$ برقرار است.

۳۹۲. (بلغارستان، ۱۹۵۱). همهٔ زوج عددهای حقیقی p و q را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، چندجمله‌ای x^4+px^2+q، دارای ۴ ریشهٔ حقیقی باشد که تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند.

۳۹۳. (انگلستان، ۱۹۶۷). ریشه‌های چندجمله‌ای x^2+px+1 را α و β و ریشه‌های چندجمله‌ای x^2+qx+1 را γ و δ فرض می‌کنیم. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$$

۳۹۴. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). ثابت کنید، برای هر مقدار غیرصفر α و β، ریشه‌های x_1، x_2 و x_3 چندجمله‌ای

$$\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$$

در این برابری صدق می‌کنند:

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1$$

۳۹۵. (اتریش، ۱۹۸۳). همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، ریشه‌های x_1، x_2 و x_3 چندجمله‌ای x^3-6x^2+ax+a در برابری زیر صدق کنند:

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$$

۳۹۶. (هیأت داوران، کانادا، ۱۹۸۲). فرض کنید، یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای

$$p(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad (a, b, c\in\mathbf{Z})$$

برابر حاصل‌ضرب دو ریشهٔ دیگر باشد. ثابت کنید، عدد $2p(-1)$، بر عدد

$$p(1)+p(-1)-2(1+p(0))$$

بخش‌پذیر است.

۳۹۷. (امریکا، ۱۹۷۷). دو ریشه از چهار ریشهٔ چندجمله‌ای

$$x^4+x^3-1$$

را a و b می‌نامیم. ثابت کنید، ab، ریشهٔ چندجمله‌ای زیر است:

$$x^6+x^4+x^3-x^2-1$$

۳۹۸. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). دربارهٔ عددهای درست a و b و c، می‌دانیم $a>0$، و چندجمله‌ای ax^2+bx+c دارای دو ریشهٔ مختلف، در بازهٔ $(0, 1)$ است. ثابت کنید: $a\geqslant 5$. دست‌کم یک زوج عدد b و c را به‌ازای $a=5$ پیدا کنید.

۳۹۹. (چکوسلواکی، ۱۹۶۷). a و b و c را سه ریشه از چهار ریشهٔ چندجمله‌ای

$$x^4-ax^3-bx+c$$

می‌گیریم. همهٔ عددهای سه‌گانهٔ ممکن (a, b, c) را پیدا کنید.

۴۰۰. (چکوسلواکی، ۱۹۵۴). ثابت کنید، تنها وقتی عددهای مختلط a و b با شرط $a^2=2b\neq 0$ سازگارند که، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^2+ax+b$$

در صفحهٔ مختلط، در دو رأس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی باشند که، رأس زاویهٔ قائمهٔ آن، در مبداء مختصات است.

۴۰۱. (مجارستان، ۱۹۸۳). چندجمله‌ای

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+1$$

با ضریب‌های غیرمنفی a_1، a_2، ...، a_{n-1}، دارای n ریشهٔ حقیقی است. ثابت کنید:

$$P(2)\geqslant 3^n$$

۴۰۲. (بلغارستان، ۱۹۸۴). چندجمله‌ای

$$ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\dots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$$

دارای n ریشهٔ مثبت است. ثابت کنید، همهٔ این ریشه‌ها، باهم برابرند.

۴۰۳. (بلغارستان، ۱۹۸۳). آیا چندجمله‌ای‌های

$$x^5-x-1 \quad \text{و} \quad x^2+ax+b \quad (a, b\in\mathbf{Q})$$

می‌توانند ریشه‌های مختلط مشترک داشته باشند؟

۴۰۴. (سنگاپور، ۱۹۷۸). برای یک چندجمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ n و عددهای $a<b$، این نابرابری‌ها برقرارند:

$$P(a)<0, \quad -P'(a)\leqslant 0, \quad P''(a)\leqslant 0, \dots, (-1)^nP^{(n)}(a)\leqslant 0,$$

$$P(b)>0, \quad P'(b)\geqslant 0, \quad P''(b)\geqslant 0, \dots, P^{(n)}(b)\geqslant 0$$

ثابت کنید، همهٔ ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای $P(x)$، به‌بازهٔ (a, b) تعلق دارند.

۴۰۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}^+$، چندجمله‌ای

$$f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

بیش از یک ریشهٔ حقیقی ندارد.

۴۰۶*. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۹ و ۱۹۷۱). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n و با ضریب‌های حقیقی، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، آن وقت، چندجمله‌ای

$$Q(x)=P(x)+aP'(x)+\cdots+\alpha^n P^{(n)}(x)$$

هم، به‌ازای هر مقدار $\alpha\in\mathbf{R}$، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۴۰۷*. (لهستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ $n>1$، که دارای n ریشهٔ حقیقی و مختلف x_1، x_2، ...، x_n باشد، برابری زیر برقرار است:

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\dots+\frac{1}{P'(x_n)}=0$$

۴۰۸*. (نیویورک، ۱۹۷۵). $P(x)$ را یک چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی می‌گیریم که، همهٔ ریشه‌های آن، عددهای موهومی خالص باشند. ثابت کنید، همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای $P'(x)$، به جز یکی، عددهای موهومی خالص‌اند.

۴۰۹*. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، چندجمله‌ای‌های غیر صفر P و Q با ضریب‌های مختلط، تنها وقتی دارای ریشه‌های یکسان هستند که تابع

$$f(z)=|P(z)|-|Q(z)|$$

در همهٔ نقطه‌های $z\in\mathbf{C}$، به‌شرطی که مخالف صفر باشد، علامت ثابتی داشته باشد.

§۲۲. بخش‌پذیری و برابری چندجمله‌ای‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریفهای ۱۱، ۲۲ تا ۳۳ و
قضیه‌های ۲، ۴، ۲۴، ۳۵ تا ۴۷، ۴۹ تا
۵۵، ۵۷، ۵۸ تا ۶۳ را ببینید)

۴۱۰. (نیویورک، ۱۹۷۳؛ بلژیک، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}^+$، چندجمله‌ای $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ بر چندجمله‌ای x^2+x+1

بخش‌پذیر است.

۴۱۱. (رومانی، ۱۹۶۲). ثابت کنید، به‌ازای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$ و $\alpha\in\mathbf{R}$ با شرط $n\neq 1$ و $\sin\alpha\neq 0$، چندجمله‌ای

$$P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$$

بر چندجمله‌ای زیر بخش‌پذیر است:

$$Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$$

۴۱۲. (رومانی، ۱۹۶۶). همهٔ چند جمله‌ای‌های $R(x)$ با درجهٔ کمتر از ۴ را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، چندجمله‌ای $P(x)$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که در اتحاد زیر صدق کند:

$$7\sin^{31}t+8\sin^{13}t-5\sin^5t\cos^4t-10\sin^7t+5\sin^5t-2\equiv$$
$$\equiv P(\sin t)[\sin^4t-(1+\sin t)(\cos^2t-2)]+R(\sin t),\ (t\in\mathbf{R})$$

۴۱۳. (امریکا، ۱۹۷۷). همهٔ زوج عددهای طبیعی m و n را پیدا کنید که، برای آن‌ها، چندجمله‌ای

$$1+x^n+x^{2n}+\dots+x^{mn}$$

بر چندجمله‌ای $1+x+x^2+\dots+x^m$ بخش‌پذیر باشد.

۴۱۴. (امریکا، ۱۹۷۶). چندجمله‌ای‌های $P(x)$، $Q(x)$، $R(x)$ و $S(x)$، در اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)\equiv(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(x)$، بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

۴۱۵. (نیویورک، ۱۹۷۵). همهٔ چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را پیدا کنید که در شرط $P(0)=0$ و اتحاد زیر صدق کنند:

$$P(x)\equiv\frac{1}{2}[P(x+1)+P(x-1)]\quad(x\in\mathbf{R})$$

۴۱۶. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۷). همهٔ چندجمله‌ای‌های

$P(x)$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها داشته باشیم:

$$xP(x-1)\equiv(x-2)P(x)\quad(x\in\mathbf{R})$$

۰۴۱۷ (نیویورك، ۱۹۷۶). همهٔ چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را پیدا کنید که برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)\equiv 0\quad(x\in\mathbf{R})$$

۰۴۱۸ (رومانی، ۱۹۸۰). همهٔ چندجمله‌ای‌های غیر صفر $P(x)$ را پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$P(x^2)\equiv[P(x)]^2\quad(x\in\mathbf{R})$$

۰۴۱۹ (بلغارستان، ۱۹۷۶). همهٔ چندجمله‌ای‌های غیر صفری را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P(x^2-2x)\equiv[P(x-2)]^2\quad(x\in\mathbf{R})$$

۰۴۲۰ (هیأت داوران، بلغارستان، ۱۹۷۹). همهٔ چندجمله‌ای‌های غیر-صفر با ضریب‌های حقیقی را پیدا کنید، که در این اتحاد صدق کنند:

$$P(x)P(2x^2)\equiv P(2x^3+x)\quad(x\in\mathbf{R})$$

۰۴۲۱ (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای چندجمله‌ای $P(x)\not\equiv x$ و هر عدد $n\in\mathbf{N}$، چندجمله‌ای

$$Q_n(x)=\underbrace{P(P(\dots P}_{n}(x)))-x$$

بر چندجمله‌ای $Q_1(x)=P(x)-x$ بخش‌پذیر است.

۰۴۲۲ (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای‌های $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ از درجهٔ سوم و با ضریب‌های حقیقی، به‌ازای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{R}$، در نابرابری‌های

$$P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$$

صدق کنند و، دست‌کم، در یك نقطهٔ $x_0\in\mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$P(x_\circ)=R(x_\circ)$$

آن وقت، برای عددی مثل $k\in[\circ ,\text{۱}]$، این اتحاد برقرار است:

$$Q(x)\equiv kP(x)+(\text{۱}-k)R(x) \quad (x\in \mathbf{R})$$

آیا همین گزاره را دربارهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ چهارم هم، می‌توان تنظیم کرد؟

۴۲۳. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). این چندجمله‌ای، باشرط $a\neq\circ$، داده شده است:

$$P(x)=ax^{\text{۲}}+bx+c$$

ثابت کنید، برای هر عدد $n\in\mathbf{N}$، نمی‌توان بیش از یك چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ n پیدا کرد که در اتحاد زیر صدق کند:

$$Q(P(x))\equiv P(Q(x)) \quad (x\in\mathbf{R})$$

۴۲۴. (رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(z)$، تنها وقتی تابعی زوج از $z\in\mathbf{C}$ است که چندجمله‌ای $Q(z)$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$P(z)\equiv Q(z)Q(-z) \quad (z\in\mathbf{C})$$

۴۲۵. (هیأت‌داوران،مجارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های حقیقی، به ازای هر $x\in\mathbf{R}$، تنها مقدارهای غیر منفی را بپذیرد،آن وقت، به‌صورت زیر است:

$$P(x)=Q_{\text{۱}}^{\text{۲}}(x)+\cdots+Q_n^{\text{۲}}(x)$$

که‌در آن، $Q_{\text{۱}}(x)$، ...، $Q_n(x)$، چندجمله‌ای‌هایی باضریب‌های حقیقی‌هستند.

***۴۲۶.** (مجارستان،۱۹۷۶؛ هیأت‌داوران،سوئد،۱۹۷۶). چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های حقیقی، بـه ازای همهٔ مقدارهای $x>\circ$، در نابرابری $P(x)>\circ$ صدق مـی‌کند. ثابت کنید، چند جمله‌ای‌های $Q(x)$ و $R(x)$ با ضریب‌های غیرمنفی وجود دارند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P(x)=Q(x)R(x)$$

*۴۲۷. (هیأت‌داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). $A(n)$ را، مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

که در آن

$$0\leqslant a_0=a_n\leqslant a_1=a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{\left[\frac{n}{2}\right]}=a_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

ثابت کنید، اگر $P(x)\in A(n)$ و $Q(x)\in A(m)$، آن وقت، چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ به‌مجموعهٔ $A(m+n)$ تعلق دارد.

*۴۲۸. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۷). برای چه مقدارهایی از $n\in\mathbf{N}$، چندجمله‌ای‌های P و Q از n متغیر با ضریب‌های درست وجود دارند که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv Q(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2),$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{R}$$

*۴۲۹. (هیأت داوران، ۱۹۸۱). برای چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$، که درجه‌ای بالاتر از 0 دارند، قرار می‌گذاریم:

$$P_c=\{z\in\mathbf{C}|P(z)=c\}, Q_c=\{z\in\mathbf{C}|Q(z)=c\}$$

ثابت کنید، اگر $P_0=Q_0$ و $P_1=Q_1$، آن وقت $P(x)\equiv Q(x)(x\in\mathbf{R})$.

*۴۳۰. (لهستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای‌های $P(x, y)$، $Q(x, y)$ و $R(x, y)$ با درجهٔ کمتر از $m\in\mathbf{N}$، با اتحاد

$$x^{2m}P(x, y)+y^{2m}Q(x, y)\equiv(x+y)^{2m}R(x, y)$$

$(x, y\in\mathbf{R})$ سازگار باشند، آن وقت

$$P(x, y)\equiv Q(x, y)\equiv R(x, y)\equiv 0$$

§۲۳. ویژگی‌های گوناگون چندجمله‌ای‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۰، ۱۸ تا ۲۰، ۲۸ تا ۳۲ و قضیه‌های ۲، ۴، ۱۷، ۱۸، ۲۷، ۴۵ تا ۵۰، ۵۲ و ۶۲ را ببینید)

۴۳۱. (رومانی، ۱۹۶۲). به‌ازای چه مقدارهایی از عددهای درست p و q:

الف) چندجمله‌ای $P(x)=x^{2}+px+q$، بـه ازای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{Z}$، مقدارهای زوج (فرد) را قبول می‌کند؛

ب) چنـدجملـه‌ای $Q(x)=x^{3}+px+q$، بـه‌ازای همـهٔ $x\in\mathbf{Z}$، مقدارهای بخش‌پذیر بر ۳ را قبول می‌کند؟

۴۳۲. (جمهوری‌دموکراتیک‌آلمان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، چندجمله‌ای

$$P(x)=\frac{1}{630}x^{9}-\frac{1}{21}x^{7}+\frac{13}{30}x^{5}-\frac{82}{63}x^{3}+\frac{32}{35}x$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{Z}$، مقدارهای درست را می‌پذیرد.

۴۳۳. (چکوسلواکی، ۱۹۶۲). همـهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{Z}$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، چندجمله‌ای

$$P(x)=2x^{2}-x-36$$

مقدارهایی برابر با مجذور عددهای اول را بپذیرد.

۴۳۴. (رومانی، ۱۹۷۵). برای عـددهـای مفروض $p, q\in\mathbf{R}$، همهٔ مقدارهایی را پیدا کنید که چندجمله‌ای

$$P(x)=x^{2}+px+q$$

به‌ازای $x\in[-1, 1]$، قبول می‌کند.

۴۳۵. (پکن، ۱۹۶۳). چنـدجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌هـای درست، به‌ازای ۴ مقدار مختلف $x\in\mathbf{Z}$، مقدار ۲ را قبول مـی کند. ثابت کنید، ایـن چندجمله‌ای، به‌ازای هیچ مقداری از $x\in\mathbf{Z}$، نمی‌تواند برابر ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ شود.

۴۳۶. (انگلستان، ۱۹۸۰). دست‌کم یک مجموعهٔ M، شامل ۷ عدد طبیعی متوالی، پیدا کنید که، برای آن، چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ پنجم با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد:

الف) همهٔ ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x)$، عددهایی درست باشند؛

ب) برای پنج عدد $k \in M$، که شامل بزرگترین و کوچکترین عددهاست، برابری $P(k)=k$ برقرار باشد؛

ج) $P(k)=0$، برای یکی از عددهای $k \in M$.

۴۳۷. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). الف) ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(x)$ وجود ندارد که، برای آن، به‌ازای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$، این نابرابری‌ها برقرار باشند: ۱) $P'(x) > p''(x)$ و ۲) $P(x) > P''(x)$.

ب) آیا حکم الف) درست است، اگر نابرابری ۱) را به نابرابری ′۱) به‌صورت $p(x) > P'(x)$ تبدیل کنیم؟

۴۳۸. (رومانی، ۱۹۸۲). چندجمله‌ای‌های $P_0(x)$، $P_1(x)$، ...، $P_n(x)$ با ضریب‌های حقیقی، و عددهای حقیقی a_1، ...، a_n مفروض‌اند. ثابت کنید، اگر تابع

$$f(x)=P_0(x)+\sum_{k=1}^{n} a_k |P_k(x)|$$

هیچ مقداری را، بیشتر ازمقدار خود در یک نقطهٔ $x \in \mathbf{R}$ تبون نکند، آن وقت، مجموعهٔ همهٔ مقدارهای آن، $\mathbf{R}$ است.

۴۳۹. (هیأت‌داوران، رومانی، ۱۹۸۳). $\{a_n\}$ را دنباله‌ای با تعریف زیر فرض می‌کنیم (دنباله فیبوناچی):

$$a_1=a_2=1, \quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ ۹۹۰، در شرط $P(k)=a_k$، به‌ازای

$$k=992, \ldots, 1982$$

صدق کند، آن وقت: $P(1983)=a_{1983}-1$.

۴۴۰. (انگلستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید:

الف) برای هر $n\in\mathbf{N}$، چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجهٔ n و با ضریب‌های درست وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$2\cos nt \equiv P_n(2\cos t) \quad (t\in\mathbf{R})$$

ب) برای هر $\alpha\in\mathbf{Q}$، عدد $\cos\alpha\pi$، یا برابر یکی از عددهای 0، $\pm\frac{1}{2}$، ± 1 است و یا عددی گنگ است.

۴۴۱. (فنلاند، ۱۹۸۰). روی صفحهٔ مختصات، یك منحنی داده شده است که نمودار یك چندجمله‌ای به‌صورت

$$P(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s \quad (p،\ q،\ r،\ s\in\mathbf{R})$$

است. خط راستی را، روی این صفحه، افقی می‌نامیم که موازی محور طول باشد و، در ضمن، منحنی را در چهار نقطهٔ A، B، C، D (به همین ردیف، نقطه‌های روی خط راست را از چپ به‌راست مشخص می‌کنند)، قطع کرده باشد. اگر، به‌جز این‌ها، طول پاره‌خط‌های راست AB، AC و AD بتوانند ضلع‌های یك مثلث باشند، آن وقت، خط راست را، مثلثی می‌نامیم. ثابت کنید، تنها دو حالت ممکن است: یا همهٔ خط‌های راست افقی، مثلثی‌اند، و یا هیچ کدام از آن‌ها مثلثی نیستند.

۴۴۲. (بلغارستان، ۱۹۷۷). $Q(x)$ را یك چندجمله‌ای غیر صفر می‌گیریم. ثابت کنید، برای هر $n\in\mathbf{Z}^+$، چندجمله‌ای

$$P(x)=(x-1)^n Q(x)$$

دست کم، دارای $n+1$ ضریب غیرصفر است.

۴۴۳*. (چکوسلواکی، ۱۹۷۴). M را مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌های به‌صورت

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a،\ b،\ c،\ d\in\mathbf{R})$$

می‌گیریم که، برای $x\in[-1،1]$ در نابرابری $|P(x)|\leqslant 1$ صدق می‌کنند. ثابت کنید، عددی مثل k وجود دارد که، به‌ازای آن، برای همهٔ چندجمله‌ای‌های

$P(x)\in M$ داریم: $|a|\leqslant k$. حداقل مقدار k را پیدا کنید.

۴۴۴*. (هیأت داوران، فنلاند، ۱۹۸۳). p و q را دو عدد طبیعی دلخواه می‌گیریم. ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های درست وجود دارد، به‌نحوی که، به‌ازای همهٔ مقدارهای بازه‌ای مثل $I\subset\mathbf{R}$، نابرابری زیر برقرار است:

$$\left|P(x)-\frac{p}{q}\right|<\frac{۱}{q^{۲}}$$

۴۴۵. (جمهوری‌دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰). همهٔ زوج چندجمله‌ای‌های درجهٔ سوم $P(x)$ و $Q(x)$ با ضریب‌های حقیقی را پیدا کنید که با چهار شرط زیر سازگار باشند:

الف) هر دو چندجمله‌ای در هر یك از نقطه‌های $x=۱، ۲، ۳، ۴$، یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را قبول کنند؛

ب) اگر $P(۱)=۰$ یا $P(۲)=۱$، آن‌گاه $Q(۱)=Q(۳)=۱$.

ج) اگر $P(۲)=۰$ یا $P(۴)=۰$، آن‌گاه $Q(۲)=Q(۴)=۰$؛

د) اگر $P(۳)=۱$ یا $P(۴)=۱$، آن‌گاه $Q(۱)=۰$.

۴۴۶. (امریکا، ۱۹۷۵). چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n، در برابری $P(k)=\frac{k}{k+۱}$ صدق می‌کند $(k=۰، ۱، \ldots، n)$. مطلوب است $P(n+۱)$.

۴۴۷. (هیأت داوران، ۱۹۸۱). چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n، در برابری $P(k)=\frac{۱}{C_{n+۱}^{k}}$ صدق می‌کند $(k=۰، ۱، \ldots، n)$. مطلوب است $P(n+۱)$.

۴۴۸*. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۷). این عددهای درست داده شده‌اند:

$$x_{۰}<x_{۱}<\cdots<x_{n}$$

ثابت کنید، بین مقدارهای چندجمله‌ای

$$x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{n}$$

در نقطه‌های x_0، x_1، ...، x_n، می‌توان عددی پیدا کرد که قدرمطلق آن، از $\frac{n!}{2^n}$ کمتر نباشد.

۴۴۹*. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ از $2n$ تجاوز نمی‌کند. می‌دانیم، برای هر عدد درست $k\in[-n, n]$، نابرابری $|P(k)|\leqslant 1$ برقرار است. ثابت کنید، برای هر عدد حقیقی $x\in[-n, n]$، داریم: $|P(x)|\leqslant 2^{2n}$.

فصل هفتم

گوناگون

---

§ ۲۴. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱ تا ۴، ۱۱ وقضیه‌های ۱، ۹۷ را ببینید)

۴۵۰. (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). مجموعه‌ای که دارای n عضو است، چند جفت زیرمجموعهٔ غیرمتقاطع دارد؟

۴۵۱. (لهستان، ۱۹۷۸). مجموعهٔ X، شامل n عضو است. برای هر دو زیرمجموعهٔ $A_1, A_2\subset X$، تعداد عضوهای مجموعهٔ $A_1\bigcap A_2$ رامحاسبه کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای حاصل، برابر $n\times 4^{n-1}$ است.

۴۵۲. (نیویورک، ۱۹۷۸). دربارهٔ عددهای $n>4$ و $k=\left[\frac{1}{6}n(n+1)\right]$، و مجموعهٔ X_n شامل $\frac{1}{2}n(n+1)$ عضو، می‌دانیم: k عضو این مجموعه به‌رنگ آبی، k عضو به‌رنگ قرمز و بقیهٔ عضوها به‌رنگ سفیدند. ثابت کنید، مجموعهٔ X_n را می‌توان به n زیرمجموعهٔ دوبه‌دو

جدا ازهم A_1، ...، A_n تقسیم کرد، به‌نحوی که، برای هر مقدار

$$m = ۱، ۲، ...، n$$

زیر مجموعهٔ A_m، درست m عضو داشته باشد و، در ضمن، هم رنگ.

۴۵۳. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$، بزرگترین عدد $k \in \mathbb{N}$ را پیدا کنید که دارای ویژگی زیر باشد: در مجموعه‌ای که دارای n عضو است، بتوان k زیرمجموعهٔ مختلف انتخاب کرد، به‌نحوی که هر دو تا از آن‌ها، اشتراکی غیرتهی داشته باشند.

۴۵۴. (انگلستان، ۱۹۷۶). در مجموعهٔ متناهی X، به تعداد ۵۰ زیرمجموعهٔ A_1، ...، A_{50} انتخاب کرده‌ایم، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها، شامل بیش از نصف عضوهای مجموعهٔ X باشد. ثابت کنید، می‌توان زیرمجموعهٔ $B \subset X$ را پیدا کرد که بیش از ۵ عضو نداشته باشد و با هریك از زیرمجموعه‌های A_1، ...، A_{50}، دست‌کم، یك عضو مشترك داشته باشد.

۴۵۵. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). ۱۹۷۸ مجموعه داریم که، هرکدام از آن‌ها، ۴۰ عضو دارد. می‌دانیم، هر دو تا از این مجموعه‌ها، درست یك عضو مشترك دارند. ثابت کنید، عضوی وجود دارد که متعلق به هر ۱۹۷۸ مجموعه است.

۴۵۶. (پکن، ۱۹۶۳). مجموعه‌ای با ۲^n عضو را به زیرمجموعه‌هایی تقسیم کرده‌ایم که دو به دو غیر متقاطع‌اند. این عمل را درنظر می‌گیریم: چند عضو از یك زیرمجموعه را به زیرمجموعهٔ دیگر منتقل می‌کنیم؛ در ضمن، تعداد عضوهای انتقالی باید برابر با تعداد عضوهای مجموعهٔ دوم باشد (که البته، باید شامل عضوهایی باشد که، تعداد آن‌ها، از اولی بیشتر نیست). ثابت کنید، به کمك تعداد محدودی از این عمل، می‌توان به زیرمجموعه‌ای رسید که بر مجموعهٔ اصلی منطبق باشد.

۴۵۷. (هیأت داوران، چکوسلواکی، ۱۹۷۹). M را، زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ همهٔ زوج‌عددهای طبیعی $(i، k)$ می‌گیریم $(i < k)$؛ i و k، ازعدد مفروض طبیعی $n \geqslant ۲$ تجاوز نمی‌کنند. در ضمن، اگر زوج عدد $i < k$، متعلق به مجموعهٔ M باشد، آن وقت، هیچ زوج $k < m$ متعلق به آن نیست. در

مجموعهٔ M، حداکثر، چند عضو وجود دارد؟

۴۵۸*. (هیأت داوران، بلژیك، ۱۹۷۹). مجموعهٔ X، دارای n عضو است. حداکثر، چندزیرمجموعهٔ سه عضوی می‌توان از X جدا کرد، به‌نحوی که هر دو تا ازآن‌ها، درست یك عضو مشترك داشته باشند.

۴۵۹*. (امریکا، ۱۹۷۹). از مجموعه‌ای‌که شامل $n \geqslant 5$ عضو است، $n+1$ زیرمجموعهٔ مختلف سه‌عضوی را جدا کرده‌ایم. ثابت‌کنید، بین این زیرمجموعه‌ها، دوزیرمجموعه پیدا می‌شودکه درست یك عضو مشترك‌دارند.

۴۶۰*. (رومانی، ۱۹۷۸). مجموعهٔ X را به‌زیرمجموعه‌های جدا ازهم (غیر متقاطع) A_1، ...، A_n تقسیم کرده‌ایم؛ سپس همان مجموعهٔ X را به زیرمجموعه‌های دو به‌دو جدا ازهم B_1، ...، B_n تقسیم کرده‌ایم. می‌دانیم، اجتماع $A_i \bigcup B_j$ هر دو زیرمجموعهٔ جدا ازهم A_i و B_j ($1 \leqslant i \leqslant n$ و $1 \leqslant j \leqslant n$)، دست کم، n عضو دارد. ثابت‌کنید، تعداد عضوهای مجموعهٔ X، از $\frac{1}{2}n^2$ کمتر نیست. آیا می‌تواند برابر $\frac{1}{2}n^2$ باشد؟

§۲۵. مسأله‌هایی با استفاده ازگراف‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریف ۴۳ و قضیه‌های ۱ و ۲
را ببینید)

۴۶۱. (انگلستان، ۱۹۷۲). در مجموعهٔ S، رابطهٔ $\rightarrow$ را در نظر می‌گیریم که بین دو عضو مجموعهٔ S وجود دارد و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) برای هر دو عضو مختلف a، $b \in Z$، درست یکی از رابطه‌های $a \rightarrow b$ یا $b \rightarrow a$ برقرار است؛

۲) برای هر سه عضو مختلف a، b، $c \in S$، برقرار بودن رابطه‌های $a \rightarrow b$ و $b \rightarrow c$ به‌معنای برقراری رابطهٔ $c \rightarrow a$ است.

حداکثر تعداد عضوهای مجموعهٔ S، چقدر می‌تواند باشد؟

۴۶۲. (امریکا، ۱۹۸۲). در اجتماعی که از ۱۹۸۲ نفر تشکیل شده

است، در بین هر چهار نفر، می‌توان دست‌کم یك نفر را پیدا کرد که با سه نفر دیگر آشنا باشد. حداقل تعداد کسانی که با همهٔ دیگران آشنا هستند، چند نفر است؟

۴۶۳. (بلغارستان، ۱۹۷۸). در گروهی که از پنج نفر تشکیل شده است، بین هر سه نفر، دو نفر پیدا می‌شوند که یکدیگر را می‌شناسند و دو نفرهم، ناآشنای با یکدیگر پیدا می‌شود. ثابت کنید، این پنج نفر رامی‌توان دور یك میز طوری نشانید که درهر دو طرف‌هرنفر، آشناهای او نشسته باشند.

۴۶۴. (امریکا، ۱۹۷۸). نه ریاضی‌دان در کنفرانس بین‌المللی ریاضیات به‌هم رسیدند و معلوم شد که، بین هر سه تا از آن‌ها، دست‌کم دو نفر، به‌یك زبان صحبت می‌کنند. در ضمن، تعداد زبان‌هایی که هر ریاضی‌دان می‌تواند به‌آن‌ها صحبت کند، از سه بیشتر نیست. ثابت کنید، دست‌کم، سه نفر از ریاضی‌دانان، با یك زبان صحبت می‌کنند.

۴۶۵. الف) (انگلستان، ۱۹۸۰). در اطاقی ۱۰ نفر وجود دارند، درضمن، بین هر سه نفر از آن‌ها، دو نفر باهم آشنا هستند. ثابت کنید، چهار نفر پیدا می‌شوند، که هر دو نفرآن‌ها باهم آشنا باشند.

ب) (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۷). اگر در بخش الف)، به‌جای ۱۰ نفر، با ۹ نفر سروکار داشته باشیم، آیا بازهم گزارهٔ الف درست است؟

۴۶۶. (بلغارستان، ۱۹۸۱؛ امریکا، ۱۹۸۱). در یك کشور، هر دو شهر، به طور مستقیم، با یکی از سه وسیلهٔ اتوبوس، قطار یا هواپیما، به هم مربوط‌اند. می‌دانیم، هیچ شهری، باهرسه‌وسیله تأمین نشده‌است و، درعین‌حال، سه‌شهر نمی‌توان پیدا کرد که تنها یکی‌از این سه‌وسیله، هر دوشهردلخواه آن را به‌هم مربوط کند. این کشور، حداکثر، چند شهر می‌تواند داشته باشد؟

۴۶۷. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). در اجتماعی، هر دو نفری که باهم آشنا هستند، آشنای مشترك دیگری ندارند؛ ولی هر دو نفری که باهم آشنا نیستند، درست دوآشنای مشترك دارند. ثابت کنید، در این اجتماع، همهٔ افراد، به‌تعداد مساوی آشنا دارند.

۴۶۸. (مجارستان، ۱۹۷۷). در هر یك از سه مدرسه، n دانش‌آموز تحصیل می‌کنند. هر دانش‌آموز، درمجموع، $n+1$ آشنا بین دانش‌آموزان

دو مدرسهٔ دیگر دارد. ثابت کنید، می‌توان از هر مدرسه یك دانش‌آموز، به‌نحوی انتخاب کرد که، سه دانش‌آموز انتخابی، باهم آشنا باشند.

*۴۶۹. (اتریش، ۱۹۷۳). $2n$ نقطهٔ مختلف $(n>1)$ A_1، A_2، ...، A_{2n}، درفضا داده شده است. هیچ سه‌تایی از آن‌ها بریك خط راست، واقع نیستند. M را مجموعه‌ای از (n^2+1) پاره‌خط راست می‌گیریم که دو انتهای هر کدام از آن‌ها، در نقطه‌های مفروض باشند. ثابت‌کنید، دست‌کم یك مثلث با رأس‌های در نقطه‌های A_r، A_s، A_t وجود دارد، به نحوی که ضلع‌های آن به‌مجموعهٔ M تعلق داشته باشد. ثابت‌کنید، اگر تعداد عضوهای مجموعهٔ M، از n^2 تجاوز نکند، ممکن است چنین مثلثی وجود نداشته باشد.

*۴۷۰. (رومانی، ۱۹۷۸). هنگام عصر، چند دختر و پسر باهم جمع شدند. درضمن معلوم شد، اگر گروهی از پسرها را انتخاب کنیم، تعداد دخترهایی که دست‌کم با یکی از پسرهای گروه آشنا باشند، کمتر از تعداد پسرهای این گروه نیست. ثابت کنید، همهٔ پسرها، می‌توانند به طور هم‌زمان، هر کدام با دختر آشنای خود، در رقص شرکت کنند.

*۴۷۱. (استرالیا، ۱۹۸۳). بعضی ازشهرهای P_1، ...، P_{1983}، دوبه‌دو با برخی از خطهای هوائی شرکت‌های A_1، ...، A_{10} به‌هم مربوط‌اند. می‌دانیم، از هرشهر می‌توان به‌شهر دیگر، بدون عوض کردن هواپیما، پرواز کرد؛ در ضمن، هر خط هوائی در هر دو جهت مسیر، وجود دارد. ثابت کنید، دست‌کم یك شرکت وجود دارد که می‌تواند مسافرت به مقصد و مبداء را (به‌شرطی که مسافرت از یك شهر آغاز وسرانجام به‌همان شهر ختم‌شود)، با تعداد فردی خط هوائی تأمین کند.

§ ۲۶. مسأله‌های مختلف

(ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱۶، ۱۸، ۳۵، ۴۳، ۴۴ وقضیه‌های ۱، ۲، ۶، ۱۰، ۹۳تا ۹۷ را ببینید)

۴۷۲. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). روی محیط دایره‌ای، به دلخواه، چهار

واحدو پنج صفر را نوشته‌ایم. سپس، این عمل را روی آن‌ها انجام می‌دهیم: بین هر دو رقم مساوی، صفر می‌گذاریم و بین هر دو رقم مختلف، واحد را قرار مـی‌دهیم و، بعد از آن، رقم‌هـای نخستین را پاك می‌کنیم. دوباره، در مورد رقم‌های موجود همان عمل را ادامه می‌دهیم و غیره. ثابت کنید، بعد از انجام تعداد محدودی از این عمل، نمی‌توان به ۹ رقم صفر رسید.

۴۷۳. (هیأت داوران، بلغارستان، ۱۹۷۹). روی یك کاغذ شطرنجی، n خانه را به‌تصادف علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم $\frac{n}{۴}$ خانه‌می‌توان از بین آن‌ها، طوری انتخاب کرد که، دو به دو، مماس بر یکدیگر نباشند (دو خانه را مماس برهم گوییم، وقتی که، دست‌کم در یك رأس، مشترك باشند).

۴۷۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱)، موش با دندان‌هـای خود، مکعب پنیر به‌یال ۳ را به ۲۷ مکعب به‌یال واحد تقسیم کرد. موش، بعد از خوردن یکی از مکعب‌های واحد، به‌سراغ مکعبی می‌رود که با قبلی یك وجه مشترك داشته باشد. آیا موش می‌تواند همه مکعب‌ها را، به‌جز مکعب وسطی بخورد؟

۴۷۵. (چکـوسلواکـی، ۱۹۷۷). روی خط راست، n نقطهٔ مختلف $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n را علامت گذاشته‌ایم ($n \geqslant ۴$). هر نقطه را، با یکی از ۴ رنگ موجود، رنگ کـرده‌ایم؛ درضمن، از هر چهار رنگ هم استفاده شده است. ثابت کنید، پاره‌خط راستی وجود دارد که درست یکی از نقطه‌های آن، یکی ازدو رنگ و، دست‌کم، یکی از نقطه‌های آن، ازدو رنگ بقیّه رادارد.

۴۷۶. (رومانی، ۱۹۷۸). مجموعـهٔ M، شامل n نقطه روی صفحه داده شده است؛ در ضمن، هیچ سه نقطه‌ای روی یك خط راست نیستند. هر پاره‌خطی را، که دوانتهای آن در M است، یا متناظر با عدد ۱+ و یا متناظر با عدد ۱ — قـرار داده‌ایـم؛ در ضمن، تعداد پاره‌خط‌های متناظر با ۱ —، برابر m شده است. مثلثی را، کـه رأس‌هـای آن در M باشد، وقتی «منفی» می‌نامیم که حاصل‌ضرب سه ضلع آن بـرابـر ۱ — شود. ثابت کنید، تعداد مثلث‌های منفی، وقتی زوج (فرد) است که حاصل‌ضرب nm زوج (فرد) باشد.

۴۷۷. (پکن، ۱۹۶۴). در یك جادهٔ کمربندی، n مرکز بنزین وجود دارد و، در آن‌ها، روی‌هم، آن‌قدر بنزین ذخیره‌شده است که بتوان، بامصرف

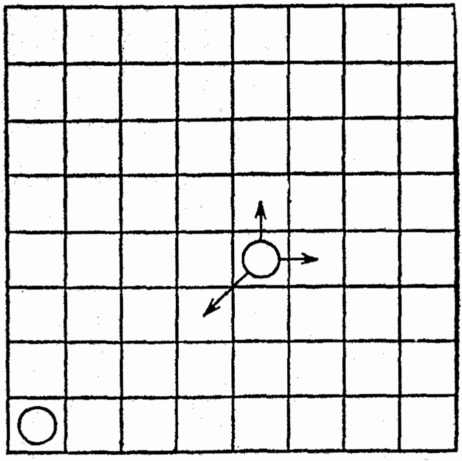
کردن آن‌ها، با یك اتـومبیل، یکبار، جادهٔ کمربندی را دور زد. ثابت کنید، اتومبیل با باك خالی، می‌تواند حرکت خود را، با آغاز از یك مرکز ذخیرهٔ بنزین آغاز کند و تمامی جادهٔ کمربندی را دور بزند.

۰۴۷۸ (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). روی صفحهٔ شطرنج ۸×۸، ۸ سرباز سفید روی ردیـف اول افقی و ۸ سرباز سیاه روی ردیف هشتم افقی چیده شده‌اند. بازی را سفید آغاز می‌کند و، بازی‌کنان به نوبت، حرکت خود را انجام می‌دهند. هرحرکت عبارت است از جابه‌جا کردن سرباز روی ردیف قائم، به تعداد یك یا چند خانه به‌جلو یا به عقب. اگر سرباز حریف در خانهٔ روبه‌رو قرار گرفته باشد، نمی‌توان آن را از سر راه برداشت و یا از روی آن پرید. کسی بازی را باخته است که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد. ثابت کنید، سیاه می‌تواند طوری حرکت کند که بازی را ببرد.

۰۴۷۹ (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). نـوار مستطیل شکل $n\times 1$ داده شده است ($n\geqslant 4$) و n خانهٔ آن را، به‌ترتیب، از ۱ تا n، شماره‌گذاری کرده‌ایم. درخانه‌های باشماره‌های $n-2$، $n-1$ و n، درهرکدام یك مهره گذاشته‌ایم. دو نفر، به‌این ترتیب، باهم بازی می‌کنند؛ هر نفر، در نوبت خود، می‌تواند هر مهره را بـه هر خانه‌ای که‌آزاد باشد و شمارهٔ کمتری داشته باشد، منتقل کند. کسی بازی را می‌بازد کـه نتواند حرکت نوبتی خـود را انجام دهد. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کـرده است، می‌تواند طوری حرکت کند که برد او حتمی باشد.

۰۴۸۰ (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). مهره‌ای را می‌توان یك خانه بـه طرف بالا، یك خانه به طرف راست و یا یك خانه در جهت قطری به‌سمت چپ و پایین حرکت داد (شکل ۱). مهره را در پایین‌تـریـن خانهٔ گوشهٔ چپ صفحهٔ شطرنج (۸×۸) قرارداده‌ایم. آیا، این مهره، می‌تواند از تمام‌خانه‌های صفحهٔ شطرنج عبور کند، به‌نحوی که، در هر خانه، درست یکبار قرار گیرد؟

۰۴۸۱ (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۸۲). دریك صفحهٔ کاغذ شطرنجی، که از هر طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد، همهٔ خانه‌های یك مستطیل $3k\times n$ را با مهره‌هایی پوشانده‌ایم. بازی را به‌این ترتیب، انجام می‌دهیم: هرمهره می‌تواند از روی هر مهرهٔ دیگر مجاور خود بجهد (در جهت قائم یا افقی)



شکل ۱

و در خانهٔ مجاور آن، به‌شرطی که آزاد باشد، بنشیند. بعد از چنین حرکتی، باید مهره‌ای را، که از روی آن پرش انجام گرفته است، از صفحه خارج کرد. ثابت کنید، هرگز به‌وضعی نمی‌رسیم که، در روی صفحه، تنها یك مهره باقی مانده باشد.

۴۸۲. (رومانی، ۱۹۷۸). چندوجهی محدبی با $n \geqslant 5$ وجه داده شده است و می‌دانیم، از هر رأس آن، درست سه یال می‌گذرد. دو نفر، به‌این ترتیب، باهم بازی می‌کنند: هر نفر، به نوبت، نام خود را روی یکی از وجه‌های آزاد چندوجهی می‌نویسد. برای بردن بازی، باید بازی‌کن نام‌خود را بر سه‌وجهی که رأس مشترك دارند، نوشته باشد. ثابت کنید،کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند برنامه‌ای برای برد خود بریزد.

۴۸۳. (هیأت‌داوران، رومانی، ۱۹۷۷)، $A=(a_1,\dots,a_m)$ را انتخابی از $m=2^n$ $(n\in\mathbf{N})$ عدد $a_i\in\{1, -1\}$ فرض می‌کنیم که، در آن، $i=1, 2, \dots, m$. عمل S را با دستور زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(A)=(a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_ma_1)$$

ثابت کنید، برای هر نوع انتخاب A، در دنبالهٔ

$$A، S(A)، (S(A))، \dots$$

انتخابی از m واحد وجود دارد.

۴۸۴. (نیویورك، ۱۹۷۶). صفحهٔ‌مربعی $2n \times n$ را به‌خانه‌های مربعی به‌ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم و می‌دانیم، n بر ۳ بخش‌پذیر نیست؛ سپس، یکی از خانه‌های صفحه را، به دلخواه، از صفحه جدا کرده‌ایم. ثابت‌کنید، می‌توان این صفحه را با «مربع‌های سه خانه‌ای» به‌طورکامل پوشاند (منظور از «مربع سه‌خانه‌ای»، مربعی ۲ × ۲ است که یکی از خانه‌ها را از آن جدا کرده باشیم).

۴۸۵. (امریکا، ۱۹۷۶). الف) فرض کنید، هریك از خانه‌های صفحهٔ مستطیلی ۷ × ۴ را، سفید یا سیاه، رنگ‌کرده باشیم. ثابت کنید، روی‌صفحه می‌توان مستطیلی پیدا کرد که خانه‌های هر چهار گوشهٔ آن، یك رنگ داشته باشند.

ب) نمونه‌ای از رنگ‌آمیزی صفحهٔ مستطیلی ۶ × ۴ را بیاورید که، برای‌آن، مستطیل مذکور در بخش الف)، وجود نداشته باشد.

۴۸۶. (سوئد، ۱۹۸۲). روی صفحهٔ دستگاه قائم مختصات، مجموعهٔ M، شامل نقطه‌های $(x، y)$ را درنظر می‌گیریم که، درآن، $x، y \in \mathbf{N}$ و $x \leqslant 12$ و $y \leqslant 12$. هریك ازاین ۱۴۴ نقطه را با یکی ازرنگ‌های سفید، قرمز یا آبی رنگ‌کرده‌ایم. ثابت کنید، مستطیلی (با ضلع‌های موازی محورهای مختصات) وجود دارد، به‌نحوی که رأس‌های آن متعلق به‌مجموعهٔ M باشند و، در ضمن، هر چهار رأس از یك رنگ باشند.

۴۸۷. الف) (هیأت داوران ویتنام، ۱۹۷۷). روی صفحهٔ‌دستگاه قائم مختصات، به‌تعداد $n \geqslant 3$ نقطه با مختصات درست طوری انتخاب کرده‌ایم که، هرسه نقطه ازآن‌ها، تشکیل مثلثی می‌دهند که، محل برخورد میانه‌های آن، مختصات درست ندارد. حداکثر مقدار n را، برای شدنی بودن چنین عملی، پیدا کنید.

ب) (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۷). ۳۷ نقطهٔ مختلف، با مختصات درست، در فضا در نظر گرفته‌ایم، به‌نحوی که هیچ سه‌نقطه‌ای روی یك خط

راست نباشند. ثابت کنید، از بین ایـن نقطه‌ها، می‌توان سه نقطه را طوری انتخاب کرد که مختصات محل برخورد میانـه‌های مثلثی کـه از آن‌ها تشکیل می‌شود، عددهای درستی باشند.

۰۴۸۸* (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). حداکثر چند رخ می‌تـوان در صفحهٔ شطرنج $3n\times 3n$ قرار دادکـه، هرکدام ازآن‌ها، در معرض خطر بیش از یك رخ دیگر نباشد؟

۰۴۸۹* (مجارستان، ۱۹۸۱). خانه‌های صفحهٔ شطرنج با اندازه‌های $n\times n$ را (n، عددی زوج و بزرگتر از ۲)، با $\frac{1}{2}n^2$ رنگ‌مختلف، به‌نحوی رنگ کرده‌ایم که، هر رنگ درست برای دو خانه بـه‌کار رفته است. ثابت کنید، می‌توان n رخ را طوری قرارداد که درخانه‌های با رنگ‌های مختلف قرار داشته باشند و، درضمن، یکدیگر را تهدید نکنند.

۰۴۹۰* (مجارستان، ۱۹۷۹؛ استرالیا، ۱۹۸۲). در هر خانه ازجدول $n\times n$ $(n\geqslant 2)$، حرفی قرار داده شده است. می‌دانیم، همهٔ سطرهای جدول، باهم فرق دارند. ثابت کنید، ستونی وجـود داردکـه، بعد از پاك کردن آن، جدولی باقی می‌ماندکه، بازهم، سطرهای یکسان، درآن پیدا نمی‌شود.

۰۴۹۱* (هیأت داوران، لوکزامبورگ، ۱۹۸۳). در فضا، با دستگاه مختصات قائم فضائی، مجموعـهٔ E شامل نقطه‌هایی با مختصات درست، که مقدارهای از ۰ تا ۱۹۸۲ را قبول می‌کنند، در نظرگرفته‌ایم. هریك از این نقطه‌ها را یا با قرمز و یا با آبی رنگ کـرده‌ایم. به‌چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد تا ویژگی زیر به‌دست آید: تعداد رأس‌های قرمز در هـر مکعب‌مستطیل (با رأس‌هایـی از E و یال‌هایـی موازی محورهای مختصات)، عددی بخش‌پذیر بر۴ باشد؟

حل مسأله‌ها

فصل اول
حساب

§۱. بخش‌پذیری. عددهای اول و عددهای مرکب

۱. حاصل‌ضرب عـددهای $c_i = a_i - b_i$ $(i = ۱, ۲, \ldots, ۷)$، عددی زوج است، زیرا دست‌کم یکی از آن‌ها، عددی زوج است. در واقع، اگر همهٔ عددهای c_i، فرد باشند؛ آن وقت، مجموع آن‌ها هم، عددی فرد می‌شود؛ درحالی‌که داریم:

$$c_۱ + c_۲ + \cdots + c_۷ = (a_۱ - b_۱) + (a_۲ - b_۲) + \cdots + (a_۷ - b_۷) =$$
$$= (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۷) - (b_۱ + b_۲ + \cdots + b_۷) = ۰$$

۲. فرض می‌کنیم $b_\varepsilon = a^۲ + \varepsilon a + ۱$ کـه، در آن، $\varepsilon^۲ = ۱$. دراین صورت، از برابری‌های

$$(a^۲ + ۱)^۳ = (b_\varepsilon - \varepsilon a)^۳ \equiv -\varepsilon a^۳ (\mathrm{mod}\, b_\varepsilon),$$
$$-\varepsilon a^۳ = -\varepsilon a b_\varepsilon + a^۲ + \varepsilon a = b_\varepsilon(-\varepsilon a + ۱) - ۱ \equiv -۱ (\mathrm{mod}\, b_\varepsilon)$$

به‌این رابطه می‌رسیم:

$$(a^2+1)^3 \equiv -1 \pmod{b_\varepsilon}$$

بنا بر این

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(a^2+1)^{3k} \equiv \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \pmod{(a^2 \pm a+1)}$$

یعنی، باید به‌پرسش مسأله، پاسخ مثبت داد.

۳. تابعی را درنظر می‌گیریم که، در مجموعهٔ عددهای درست، به این ترتیب، تعریف شده باشد:

$$f(m)=\begin{cases} 0 & (m\text{، عددی زوج}) \\ 1 & (m\text{، عددی فرد}) \end{cases}$$

و جدولی از عددها می‌سازیم که با دستور $b_{n,k}=f(a_{n,k})$، عددهای آن مشخص شده باشند. در این صورت، برای $n>1$، داریم:

$$\begin{aligned} b_{n,k}&=f(a_{n,k})=f(a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1})= \\ &=f(f(a_{n-1,k-1})+f(a_{n-1,k})+f(a_{n-1,k+1}))= \\ &=f(b_{n-1,k-1}+b_{n-1,k}+b_{n-1,k+1}) \end{aligned}$$

درضمن، جای خالی جدول، صفر به‌حساب می‌آید. محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که، گروه چهار عدد نخستین $b_{n,1-m}$، $b_{n,2-m}$، $b_{n,3-m}$، $b_{n,4-m}$ از nامین سطر، به‌طوریك ارزشی، گروه چهار عدد نخستین را در $(n+1)$امین سطر معین می‌کند؛ در ضمن، در سطرهای هشتم و چهارم، این گروه‌ها برهم منطبق‌اند. بنابراین، در سطرهای نهم و پنجم، همچنین در سطرهای دهم و ششم و غیره هم، این گروه‌ها، برهم منطبق‌اند. ازآن‌جا که، با آغاز از سطر سوم، در هر سطر، این گروه‌ها شامل صفر هستند، بنابراین، در همین سطرها ازجدول مجهول، عددهای‌زوج وجود دارد؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴. توجه کنیم که، عدد $p-1$، زوج است. کسر $\frac{m}{n}$ را به‌این‌صورت می‌نویسیم،

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}=$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)=\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+\frac{p}{3(p-3)}+\ldots+$$
$$+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}=p\left(\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right)$$

مخرج مشترك کسرهای داخل پرانتز، چنین است:

$$1\cdot(p-1)\cdot 2\cdot(p-2)\cdot 3\cdot(p-3)\ldots\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}=(p-1)!$$

به‌این ترتیب، به‌دست می آید:

$$\frac{m}{n}=p\cdot\frac{q}{(p-1)!}\quad(q\in\mathbf{N})$$

که‌از آن، به‌برابری $m(p-1)!=pqn$ می‌رسیم. چون، هیچ یك از عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $p-1$، بر عدد اول p بخش‌پذیر نیستند، بنابراین، برابری اخیر، تنها وقتی برقرار است که، m، بر p بخش‌پذیر باشد. حکم مسأله، ثابت شد.

۵. به ازای $n=2$، بخش‌پذیری n^n-n^2+n-1 بر $(n-1)^2$، روشن است. $n>2$ می گیریم. داریم:

$$n^n-n^2+n-1=(n^{n-2}-1)n^2+(n-1)=$$
$$=(n-1)(n^{n-3}+\ldots+1)n^2+(n-1)n^0=$$
$$=(n-1)(n^{n-1}+n^{n-2}+\ldots+n^2+n^0)$$

چون، باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر $n-۱$ برابر واحد است، یعنی

$$n \equiv ۱ \pmod{(n-۱)}$$

بنابراین، برای هر مقدار $k = ۰, ۲, ۳, \ldots, n-۱$ داریم

$$n^k \equiv ۱ \pmod{(n-۱)}$$

یعنی

$$n^{n-۱} + \ldots + n^۲ + n^۰ \equiv ۰ \pmod{(n-۱)}$$

(تعداد جمله‌ها، درسمت چپ این برابری، برابر $n-۱$ است). درنتیجه، عدد

$$(n-۱)(n^{n-۱} + \ldots + n^۲ + n^۰)$$

بر $(n-۱)^۲$ بخش‌پذیر است.

۶. فرض کنید، برای سه عدد طبیعی a، b و c داشته باشیم:

$$(ab+۱) \vdots c, \quad (ac+۱) \vdots b, \quad (bc+۱) \vdots a$$

ابتدا توجه می‌کنیم کــه، عددهای a، b و c دو به دو نسبت به هم اول‌اند. درواقع، اگر داشته باشیم: $(a, b) > ۱$، آن وقت $(ac, b) = d > ۱$ و، در نتیجه، عدد $ac+۱$ بر d و، بــه‌طور مسلم، بر b بخش‌پــذیر نخواهد بود. بنابراین، بین این سه عدد، عددهای برابر وجود ندارد. عدد

$$s = ab + ac + bc + ۱ = (ab+۱) + c(a+b)$$

بر c و، به‌همین، ترتیب بر a و b بخش‌پذیر است وچون این‌سه‌عدد دوبه‌دو نسبت به‌هم اول‌اند، عدد s بر حاصل‌ضرب آن‌ها بخش‌پذیر است، یعنی $s \geqslant abc$.

بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$۲ \leqslant a < b < c$$

ثابت می‌کنیم، b نمی‌تواند از ۳ بزرگتر باشد. $b \geqslant ۴$ فرض می‌کنیم، دراین صورت،

$$c \geqslant ۵ \quad \text{و} \quad abc \geqslant ۲ \times ۴ \times ۵ = ۴۰ \quad \text{و}$$

$$s = ab + ac + bc + ۱ \leqslant \frac{abc}{۵} + \frac{abc}{۴} + \frac{abc}{۲} + ۱ =$$

$$= abc - \frac{abc}{۲۰} + ۱ \leqslant abc - \frac{۴۰}{۲۰} + ۱ < abc$$

تناقض حاصل به‌معنای آن است که $b<۴$. به‌ایـن ترتیب، $a=۲$ و $b=۳$.
چون $ab+۱=۷$ باید بر c بخش‌پذیر باشد، بنابراین $c=۷$. شرط مسأله، تنها در مورد سه عدد ۲، ۳ و ۷ صدق می‌کند.

۷. اگر $n=۲k$ (همه جا $k\in\mathbf{Z}^+$)، آن وقت

$$۱۹\times ۸^{۲k}+۱۷=۱۸\times ۸^{۲k}+(۱+۶۳)^k+(۱۸-۱)\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۳)$$

اگر $n=۴k+۱$، آن وقت

$$۱۹\times ۸^{۴k+۱}+۱۷=۱۳\times ۸^{۴k+۱}+۶\times ۸\times ۶۴^{۲k}+۱۷=$$
$$=۱۳\times ۸^{۴k+۱}+۳۹\times ۶۴^{۲k}+۹(۱-۶۵)^{۲k}+$$
$$+(۱۳+۴)\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۱۳)$$

و سرانجام، اگر $n=۴k+۳$، آن وقت

$$۱۹\times ۸^{۴k+۳}+۱۷=۱۵\times ۸^{۴k+۳}+۴\times ۸^۳\times ۶۴^{۲k}+۱۷=$$
$$=۱۵\times ۸^{۴k+۳}+۴\times ۵۱۰\times ۶۴^{۲k}+۴\times ۲(۱-۶۵)^{۲k}+$$
$$+(۲۵-۸)\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۵)$$

به‌این ترتیب، عدد $۱۹\times ۸^n+۱۷$، به‌ازای هر مقداری از $n\in\mathbf{Z}^+$، عددی است مرکب و بر یکی از عددهای ۳، ۱۳ یا ۵ بخش‌پذیر است.

۸. در حالت $p=۲$، هر عـدد بـه‌صورت $۲^{۲k}-۲k\ (k\in\mathbf{N})$ بر p بخش‌پذیر است. برای $p>۲$، با در نظر گـرفتن قضیهٔ کوچك فرما (قضیهٔ ۲۵)، داریم:

$$۲^{p-۱}\equiv ۱(\mathrm{mod}\,p)\cdot\ \ ۲^{m(p-۱)}\equiv ۱(\mathrm{mod}\,p)\quad (m\in\mathbf{N})$$

و درحالتی که داشته باشیم: $m\equiv -۱(\mathrm{mod}\,p)$، آن وقت خواهیم داشت:

$$۲^{m(p-۱)}-m(p-۱)=۲^{m(p-۱)}+m-mp\equiv ۰(\mathrm{mod}\,p)$$

بنابرایـن با شرط $n=(kp-۱)(p-۱)\ (k\in\mathbf{N})$، هـریـك از عددهای ۲^n-n بر p بخش‌پذیر است ($p>۲$).

۹. اگر $n=۴k^۴$ بگیریم $(k=۲, ۳, \ldots)$، داریم (برای هر $m\in\mathbf{N}$):

$$m^4+n=m^4+4k^4=(m^4+4m^2k^2+4k^4)-4m^2k^2=$$
$$=(m^2+2k^2)^2-(2mk)^2=(m^2+2mk+$$
$$+2k^2)(m^2-2mk+2k^2)=[(m+k)^2+k^2][(m-k)^2+k^2]$$
و چون $k>1$، بنابراین هر یك از این عامل‌ها بزرگتر از واحد می‌شوند، یعنی m^4+n، عددی مرکب است.

۱۰. فرض می‌کنیم، n، دارای ویژگی موردنظر باشد. اگر n بر ۲ بخش‌پذیر نباشد، باید داشته باشیم $n\leqslant 2^2$ (زیرا، در غیر این‌صورت، عدد ۴ نسبت به‌عدد n اول می‌شود، درحالی‌که خود عدد ۴، عددی اول نیست). بنابراین $n=3$. اگر n بر ۲ بخش‌پذیر، ولی بر ۳ بخش‌ناپذیر باشد، باهمان استدلال، باید داشته باشیم: $n\leqslant 3^2$، یعنی $n\in\{4, 8\}$. اگر n بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، آن وقت $n\leqslant 5^2$، یعنی

$$n\in\{6, 12, 18, 24\}$$

اگر n بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر، ولی بر ۷ بخش‌ناپذیر باشد، آن وقت $n\leqslant 7^2$، یعنی $n=30$. اکنون، فرض کنید، برای مقداری از $k>4$، عدد n، بر هریك از عددهای p_1، p_2، ...، p_k بخش‌پذیر، ولی بر p^{k+1} بخش‌ناپذیر باشد، که در آن

$$2=p_1<p_2<\cdots<p_k<p_{k+1}$$

عددهای متوالی اولی هستند. در این صورت

$$n\leqslant p_{k+1}^2 \quad و \quad n \vdots p_1p_2\cdots p_k$$

از نابرابری‌های

$$p_1p_2\cdots p_k\leqslant n\leqslant 10000000$$

به‌دست می‌آید: $k\leqslant 8$، ازطرف دیگر، برای هریك ازمقدارهای $4\leqslant k\leqslant 8$، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$p_1p_2\cdots p_k>p_{k+1}^2$$

که با شرط $p_1p_2\cdots p_k\leqslant n\leqslant p_{k+1}^2$ متناقض است. به‌این ترتیب، برای

$$k=۴،\ ۵،\ ۶،\ ۷،\ ۸$$

جوابی به‌دست نمی‌آید. همهٔ مقدارهای n، که با شرط مسأله سازگار باشند، متعلق به‌مجموعهٔ زیر هستند:

$$\{۳،\ ۴،\ ۶،\ ۸،\ ۱۲،\ ۱۸،\ ۲۴،\ ۳۰\}$$

و آزمایش نشان می‌دهد که، هر عضو این مجموعه، دارای ویژگی مورد نظر است.

۱۱۰. ثابت می‌کنیم، مجموعهٔ مجهول M، شامل همهٔ عددهای $m\in\mathbf{N}$ است که نسبت به a اول باشند. اگر عددی مثل $m\in\mathbf{N}$ و عدد a، مقسوم‌علیه مشترك $d>۱$ را داشته باشند، آن وقت $m\notin M$. در واقع، برای هر عدد $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$(a_n،\ a)=\left(\sum_{k=۰}^{n} a^k،\ a\right)=\left(۱+a\sum_{k=۰}^{n-۱} a^k،\ a\right)=(۱،\ a)=۱$$

بنابراین، عدد a_n بر d بخش‌پذیر نیست، یعنی m هم بر d بخش‌پذیر نیست. اکنون، فرض می‌کنیم $m>۱$ و $(m،\ a)=۱$. بین عددهای

$$a_۱،\ a_۲،\ \dots،\ a_m،\ a_{m+۱}$$

می‌توان دو عدد پیدا کرد که، در تقسیم بر m، باقی‌مانده‌های برابر داشته باشند، زیرا تعداد این باقی‌مانده‌ها، بیشتر از m نیست. در این صورت، اگر این دو عدد را a_i و a_j $(i>j)$ بنامیم، تفاضل آن‌ها

$$a_i-a_j=\sum_{k=۰}^{i} a^k-\sum_{k=۰}^{j} a^k=\sum_{k=j+۱}^{i} a^k=a^{j+۱}\sum_{k=۰}^{i-j-۱} a^k$$

بر m بخش‌پذیر است. ولی عدد $a^{j+۱}$ نسبت به m اول است، بنابراین عدد

$$a_{i-j-۱}=\sum_{k=۰}^{i-j-۱} a^k$$

بر m بخش‌پذیر خواهد بود (حالت $i-j-۱=۰$ ممکن نیست، زیرا $m\neq ۱$). به‌این ترتیب، $m\in M$. سرانجام، به‌این نکته هم توجه می‌کنیم که $۱\in M$.

۱۲۰ a_1، a_2، ...، a_n را، n عدد درست متوالی می‌گیریم. در این صورت، از نابرابری

$$m < n \leqslant a_n - (a_1 - 1)$$

نتیجه می‌شود که، در بین آن‌ها، عدد a_i به‌عنوان مضربی از n، و عدد a_j به‌عنوان مضربی از m وجود دارد. اگر $i \neq j$، آن وقت، حاصل‌ضرب $a_i a_j$ بر عدد mn بخش‌پذیر است. به‌حالت $i = j$ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم: $d = (m, n)$ و $q = [m, n]$. در این صورت

$$mn = dq;\ a_i \vdots d \quad \text{و} \quad a_j \vdots q$$

ثابت می‌کنیم، دست کم، یکی از دو عدد $a_i + d$ یا $a_i - d$، که مضربی از d هستند، به‌مجموعهٔ $\{a_1, \ldots, a_n\}$ تعلق دارد. اگر این طور نباشد، باید داشته باشیم: $a_i + d > a_n$ و $a_i - d < a_1$، که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$i + d \geqslant n + 1,\ i - d < 1,\ 2d > n$$

ولی n بر d بخش‌پذیر است، بنابراین $d = n > m$ که شرط بخش‌پذیری m بر d را نقض می‌کند. به‌این ترتیب، a_i و $a_i + d$ (یا $a_i - d$)، همان عددهای مجهول‌اند، زیرا حاصل‌ضرب

$$a_i(a_i + d) \ \text{یا}\ a_i(a_i - d)$$

بر $dq = mn$ بخش‌پذیر است.

۱۳۰ ابتدا ثابت می‌کنیم، اگر $n = 2^m$، که درآن $m \in \mathbf{Z}^+$ آن‌گاه داریم: $f(n) = 2n - 1$. درواقع، از یك طرف، مجموع

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k = \frac{(2n-1).2n}{2} = (2^{m+1} - 1).2^m$$

بر $n = 2^m$ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر، با فرض $l \leqslant 2n - 2$، مجموع

$$\sum_{k=0}^{l} = \frac{1}{2} l(l+1)$$

بر 2^m بخش‌پذیر نیست، زیرا یکی از دو عدد l یا $l+1$، فرد است ودیگری

ازعدد $2n-1=2^{m+1}-1$ تجاوز نمی‌کندو، بنا براین، بر 2^{m+1} بخش‌پذیر نیست. اکنون، فرض کنید، عدد n، توانی از ۲ نباشد، یعنی $n=2^m\cdot p$، که در آن $m\in\mathbb{Z}^+$، و $p>1$، عددی است فرد. ثابت می‌کنیم، عدد طبیعی $l<2n-1$ وجوددارد که، برای آن، l بر 2^{m+1} و $(l+1)$ بر p بخش‌پذیر می‌شود (و در این صورت، مجموع

$$\sum_{k=1}^{l} k=\frac{1}{2}l(l+1)$$

بر $n=p\cdot 2^m$ بخش‌پذیر می‌شود و، از آن‌جا $f(n)<2n-1$).

چون دو عدد 2^{m+1} و p، نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین، بنابر قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، عدد l وجود داردکه با این شرط‌ها، ساز گار باشد:

$$l\equiv 0 \pmod{2^{m+1}};\quad l\equiv p-1 \pmod{p}$$
$$(0<l\leqslant 2^{m+1}\cdot p=2n)$$

درواقع، این‌عدد، باشرط نیرومندتر $l<2n-1$ هم سازگاراست؛ زیرا اگر

$$l=2n-1=2^{m+1}\cdot p-1$$

آن وقت، l، بر 2^{m+1} بخش‌پذیر نیست، و اگر

$$l=2n=2^{m+1}\cdot p$$

آن‌وقت، $l+1$، بر $p>1$ بخش‌پذیر نیست؛ در نتیجه $l<2n-1$، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۴. $n=3^k\cdot r$ می گیریم که، در آن، $k\in\mathbb{Z}^+$ وعدد $r\in\mathbb{N}$ بخش‌ناپذیر بر ۳ می‌باشد. ثابت می کنیم، عدد

$$p=1+2^n+4^n$$

بر عدد زیر بخش‌پذیر است:

$$q=1+2^{3^k}+4^{3^k}$$

دو حالت درنظر می‌گیریم:

حالت اول: $r=3s+1$ $(s\in\mathbf{Z}^+)$. با استفاده از قضیهٔ ۱۱، داریم:

$$p-q=(2^n-2^{3^k})+(4^n-4^{3^k})=$$

$$=2^{3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)+4^{3^k}(2^{3^k\cdot 6s}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}(2^{3^k\cdot 3}-1))$$

و چون

$$2^{3^k\cdot 3}-1=(2^{3^k}-1)(1+2^{3^k}+4^{3^k})=(2^{3^k}-1)q$$

بنا براین، عدد $p-q$ بر q بخش‌پذیر و، از آن‌جا، p بر a بخش‌پذیر است.

حالت‌دوم: $r=3s+2$ $(s\in\mathbf{Z}^+)$. بااستفاده ازهمان‌قضیهٔ ۱۱،داریم:

$$p-q=(4^n-2^{3^k})+(2^n-4^{3^k})=$$

$$=2^{3^k}(2^{3^k\cdot 2(2s+1)}-1)+2^{2\cdot 3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}(2^{3^k\cdot 3}-1)$$

که از آن‌جا، مثل حالت اول، p بر q بخش‌پذیر می‌شود.

به‌این ترتیب، تنها $n=3^k$ با شرطهای مسأله سازگار است.

۱۵. فرض کنید: $m=11^i\cdot p$ و $n=11^j\cdot q$ که، در آن، i، $j\in\mathbf{Z}^+$ و عددهای p، $q\in\mathbf{N}$، بخش‌ناپذیر بر ۱۱ باشند. ثابت می‌کنیم $p=q$ (که درآن‌صورت، به‌دست می‌آید: $m=11^{i-j}\cdot n$). $p\neq q$ می‌گیریم‌و، درضمن، فرض می‌کنیم $p>q$ (حالت $p<q$ هم، شبیه این حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد). چون، عددهای p و ۱۱ نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، عدد $a>0$ وجود دارد که برای‌آن داشته باشیم:

$$a\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)،\ a\equiv -1(\mathrm{mod}\ 11)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$a=11k-1\ \ (k\in\mathbf{N})،$$

$$(11k-1، m)=(a، 11^ip)=p,$$

$$(11k-1، n)=(a، 11^jq)\leqslant q<p$$

که با شرط

$$(۱۱k-۱، m)=(۱۱k-۱، n)$$

متناقض است. اثبات تمام شد.

۱۶. ثابت می‌کنیم، حکم درست است. فرض می‌کنیم، هر مقسوم‌علیه اول عدد $ad-bc$، مقسوم‌علیهی از عددهای a و c باشد، ولی برخلاف حکم مسأله، برای مقداری از $n\in\mathbf{Z}$، عددهای $an+b$ و $cn+d$، بر عدد اول p بخش‌پذیر باشند. در این صورت، عدد

$$ad-bc=a(cn+d)-c(an+b)$$

و بنابراین، عددهای a و c هم، بر p بخش‌پذیرند. در نتیجه، دو عدد

$$b=(an+b)-an \quad \text{و} \quad d=(cn+d)-cn$$

هم بر p بخش‌پذیر می‌شوند و داریم:

$$(a، b، c، d)\geqslant p>۱$$

که با شرط مسأله متناقض است. اکنون فرض کنید، برای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}$

$$(an+b، \ cn+d)=۱$$

ولی برخلاف حکم مسأله، برای عدد اولی مثل p داشته باشیم:

$$ad-bc\equiv ۰ \pmod p)، \ a\not\equiv ۰ \pmod p)$$

(حالت $c\not\equiv ۰ \pmod p)$ را هم، به‌صورت‌مشابهی می‌توان بررسی کرد). در این صورت، با توجه به قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، عدد $n\in\mathbf{Z}$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم:

$$an\equiv -b \pmod p)$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$an+b\equiv ۰ \pmod p)،$$

$$a(cn+d)=c(an+b)+(ad-bc)\equiv ۰ \pmod p)$$

و چون $(a, p)=1$، بنابراین

$$(an+b, cn+d)\geqslant p>1 \quad و \quad cn+d\equiv 0 \pmod p$$

تناقض حاصل، اثبات حکم را کامل می‌کند.

۱۷. a_m را، به‌ازای $m=0, 1, 2, 3, 4$، برابر $2^{2^m}+1$ می‌گیریم. این، پنج عدد، عددهایی اول‌اند. از طرف دیگر، عدد

$$2^{32}+1=(2^{32}-1)+2=$$

$$=(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)+2=$$

$$=a_0a_1a_2a_3a_4+2\equiv 2 \pmod{a_m}$$

نسبت بـه‌هریك از عددهای فرد a_0، a_1، a_2، a_3، a_4، اول است؛ درضمن، عدد $2^{32}+1$ بر $a_5=641$ بخش‌پذیر است، ولی بر مجذور آن بخش‌پذیر نیست؛ یعنی، عدد $\frac{2^{32}+1}{641}$ بر a_5 بخش‌پذیر نیست. به این ترتیب، عددهای a_0، a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 و a_6 دو به دو نسبت به هم‌اول‌اند. بنا برقضیهٔ چینی درمورد باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، عدد درست

$$k>\max\{a_0, a_1, \ldots, a_6\}$$

وجود دارد که برای‌آن داریم:

$$k\equiv(\bmod a_m) \quad (m=0, 1, \ldots, 5)$$

$$k\equiv -1 \pmod{a_6}$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، هر عدد به‌صورت $k\cdot 2^n+1$ $(n\in \mathbf{N})$، یك‌عدد مرکب است. $n=2^m\cdot p$ می‌گیریم که، درآن، p عددی فرد و

$$m\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

داریم:

$$k\cdot 2^n+1\equiv 2^n+1 \pmod{a_m},$$

$$2^n+1=2^{2^m\cdot p}+1=(a_m-1)^p+1\equiv(-1)^p+1 \pmod{a_m}$$

$$k\cdot 2^n+1\equiv 0 \pmod{a_m})$$

$n=2^5\cdot p$ فرض کنید (p، عددی است فرد)، در آن صورت

$$k\cdot 2^n+1\equiv 2^n=1 \pmod{a_5},$$

$$2^n+1=(2^{32})^p+1\equiv(-1)^p+1 \pmod{a_5},$$

$$k\cdot 2^n+1\equiv 0 \pmod{a_5}$$

بالاخره فرض کنید $n=2^6.p$ که، در آن $p\in\mathbf{N}$، درآن صورت

$$k\cdot 2^n+1\equiv -2^n+1 \pmod{a_6},$$

$$2^n-1=2^{64p}-1\equiv(-1)^{2p}-1 \pmod{a_6},$$

$$k\cdot 2^n+1\equiv 0 \pmod{a_6}$$

چون عدد $k\cdot 2^n+1>k$، از همهٔ عددهای اول a_0، a_1، ...، a_6 بزرگتر و، دست‌کم، بر یکی از آن‌ها بخش‌پذیر است، بنابراین، عددی است مرکب.

۱۸۰. عدد $a\geqslant 3$ را مفروض می‌گیریم، و دنبالهٔ $\{n_k\}$ را، با تعریف زیر، تشکیل می‌دهیم:

$$n_1=1,\ n_{k+1}=a^{n_k}-1,\ k\in\mathbf{N}$$

با روش استقرای ریاضی، نسبت به $k\in\mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم، عدد $a^{n_k}-1$، بر n_k بخش‌پذیر است. برای $k=1$، باید $a-1$ بر ۱ بخش‌پذیر باشد که روشن است.

اکنون، فرض می‌کنیم، به ازای مقداری از $k\in\mathbf{N}$، عدد $a^{n_k}-1$ بر n_k بخش‌پذیر باشد، یعنی

$$a^{n_k}-1=n_kq \quad (q\in\mathbf{N})$$

در این صورت، با توجه به‌قضیهٔ ۱۱، عدد

$$a^{n_{k+1}}-1=a^{n_kq}-1$$

بر $a^{n_k}-1=n_{k+1}$ بخش‌پذیر است. چون دنبالهٔ $\{a_n\}$ بــه طور یکنوا صعودی است، همهٔ مقدارهای $n=n_k$، متمایزند و، به‌این ترتیب، حکم مسأله ثابت می‌شود.

ثابت می‌کنیم، این حکم، برای $a=2$ درست نیست؛ جدی‌تر از آن، ثابت می‌کنیم، به‌ازای هیچ عدد طبیعی $n>1$، عدد 2^n-1 بر n بخش‌پذیر نیست. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، عدد 2^n-1، برای عددی مثل $n>1$، بر n بخش‌پذیر باشد. n، عددی است فرد (زیرا 2^n-1 فرد است) و کوچکترین مقسوم‌علیه اول n هم (که آن را p می‌نامیم)، باید عددی فرد باشد. بنابراین، با توجه بــه‌قضیهٔ کوچك فرما، $2^{p-1}-1$ بر p بخش‌پذیر است. $d\in\mathbf{N}$ را، کوچکترین عددی می‌گیریم کــه، بــه‌ازای آن، 2^d-1 بــر p بخش‌پذیر است و ثابت مــی کنیم، بــرای هــر $m\in\mathbf{N}$ از بخش‌پذیری 2^m-1 بر p به‌نتیجهٔ بخش‌پذیر بودن m بر d می‌رسیم.

درواقع، اگــر فــرض کنیم: $m=dq+r$ کــه، در آن $q,r\in\mathbf{Z}^+$ و $r<d$، آن وقت، با توجه به‌قضیهٔ ۱۱، عدد

$$(2^m-1)-(2^r-1)=2^r(2^{dq}-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (2^d-1))$$

بر p بخش‌پذیراست. بنابراین، از بخش‌پذیری 2^m-1 بر p، بخش‌پذیری 2^r-1 بر p نتیجه می‌شود که، از آن‌جا، به دست می‌آید: $r=0$ (با توجه به‌انتخاب d و نابرابری $d>r$). بنابراین، از شرطهای

$$(2^n-1)\vdots p \quad \text{و} \quad (2^{p-1}-1)\vdots p$$

به‌دست می‌آید: $n\vdots d$ و $(p-1)\vdots d$. ولی دو عدد n و $p-1$، نسبت‌به‌هم اول‌اند، زیرا عدد n، مقسوم‌علیهی کــوچکتر از p و مخالف واحد ندارد. به این تــرتیب $d=1$ کــه، از آن‌جا، نتیجه می‌شود، عدد $2^1-1=1$ بر $p>2$ بخش‌پذیر است. تناقض حاصل، به‌این معناست که، به‌پرسش مسأله، باید پاسخ منفی داد.

۱۹. $a_n=\dfrac{\sigma(n)}{n}$ می‌گیریم و فــرض می‌کنیم، برخلاف حکم مسأله،

تنها مجموعه‌ای متناهی از مقدارهای $n\in\mathbf{N}$ وجود داشته باشد که با نابرابری $a_n>a_k$ سازگار باشد ($k=1, 2, \ldots, n-1$). N را بزرگترین عدد، از این مقدارهای n می‌گیریم. در این صورت، دنبالهٔ عددهای

$$A_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$$

از بالا، به‌عدد A_N محدود است، زیرا

$$A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_N$$

و برای هر عدد $n>N$ داریم:

$$A_n=\max\{A_{n-1}, a_n\}=A_{n-1}$$

(زیرا، برای عددی از $k\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$، نابرابری $a_k\geqslant a_m$ برقرار است). از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$A_N=A_{N+1}=A_{N+2}=\cdots$$

بنابراین، دنبالهٔ $\{a_n\}$ هم، از بالا، به‌عدد A_N برابر عدد a_N محدودمی‌شود، زیرا $a_i<a_N$ ($i=1, \ldots, N-1$). از طرف دیگر، بین مقسوم‌علیه‌های عدد $2N$، همهٔ عددهای به‌صورت $2d$ وجود دارند $(n:d)$ و همچنین، عدد ۱؛ بنابراین

$$\sigma(2N)\geqslant 2\sigma(N)+1$$

$$a_{2N}\geqslant\frac{2\sigma(N)+1}{2N}=a_N+\frac{1}{2N}>a_N=A_N$$

تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۲۰. ثابت می‌کنیم، نابرابری $Q(n)>Q(n+1)$، برای هر عدد به‌صورت

$$n=r.k!-1\quad(r\in\mathbf{N}, r\geqslant 3)$$

برقرار است. کوچکترین مضرب مشترک عددهای $n+1$، ...، $n+k$ را m می‌نامیم:

$$m=[n+1, n+2, \dots, n+k]$$

برای k ،... ،$j=1$ داریم: $n\equiv -1 \pmod{j}$، از آن‌جا

$$(n, j)=1 \quad \text{و} \quad (n, n+j)=1$$

بنا بر این

$$(n, m)=1 \text{ و } Q(n)=[n, n+1, \dots, n+k]=(n, m)=nm$$

از طرف دیگر، عدد

$$n+k+1=r.k!+k$$

بر k بخش‌پذیر است. عدد m بر $n+1=r.k!$ و، بنا بر این، بر k بخش‌پذیر است. به‌این ترتیب، عدد $\dfrac{m(n+k+1)}{k}$ هم بر m و هم بـر $n+k+1$ بخش‌پذیر می‌شود. یعنی

$$Q(n+1)=[n+1, \dots, n+k, n+k+1]=$$

$$=[m, n+k+1]\leqslant\frac{m(n+k+1)}{k}$$

از این‌جا، و با توجه به‌شرط‌های $k\geqslant 2$ و $r\geqslant 3$، به‌دست می‌آید:

$$Q(n+1)\leqslant\frac{m(n+k+1)}{2}=\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{3k-1}\right)<\frac{mn}{2}\times 2=mn=Q(n)$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۰۲۱. اگر توان ۲ را در تجزیهٔ عدد $k\in\mathbf{N}$ با $m(k)$ نشان می‌دهیم، به‌برابری $k=2^{m(k)}.g(k)$ می‌رسیم و

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{m(k)}}$$

یادآوری می‌کنیم، در بین عددهای ۱، ۲، ...، n، به‌تعداد $\left[\frac{n}{2}\right]$ عدد

زوج، $\left[\frac{n}{2^2}\right]$ عدد مضرب چهار، $\left[\frac{n}{2^3}\right]$ عددمضرب‌هشت و، به‌طور کلی، $\left[\frac{n}{2^m}\right]$ عدد مضرب 2^m وجود دارد. درضمن، عدد m می‌تواند هر مقدار درست غیر منفی باشد، ولی با آغاز از عدد M که در نابرابری $2^M>n$ صدق کند، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{n}{2^M}\right]=\left[\frac{n}{2^{M+1}}\right]=\ldots=0$$

بنابراین، تعداد عددهای $k\in\{1، 2، ...، n\}$ که، برای آن‌ها، مقدار $m(k)$ برابر مقدار m می‌شود، برابر است با $\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{n}{2^{m+1}}\right]$؛ به این ترتیب، داریم:

$$S=\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{2^m}\left(\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{n}{2^{m+1}}\right]\right)=\sum_{m=0}^{M}\frac{2}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]-$$

$$-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{n}{2^m}\right]=\left[\frac{n}{2^0}\right]+\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m-1}}\right)\left[\frac{n}{2^m}\right]=$$

$$=n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]$$

زیرا $\left[\frac{n}{2^{M+1}}\right]=0$. از آن‌جا که، برای هر مقدار $x\in\mathbf{R}$، نابرابری $[x]\leqslant x$ برقرار است، به‌نخستین ارزیابی می‌رسیم:

$$S\geqslant n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{n}{2^m}=n-n\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{4^m}=$$

$$=n-\frac{n}{3}\left(1-\frac{1}{4^M}\right)=\frac{2}{3}n+\frac{n}{3\times 4^M}>\frac{2}{3}n$$

برای اثبات سمت دیگر نابرابری حکم، توجه می‌کنیم که، برای هر مقدار $p، q\in\mathbf{N}$، همیشه داریم:

$$\left[\frac{p}{q}\right] \geqslant \frac{p+۱}{q}-۱$$

درواقع، اگر فرض کنیم $r=\left[\frac{p}{q}\right]$، آن وقت

$$p=rq+s,\quad s\in\{۰, ۱, ۲, \ldots, q-۱\}$$

که از آن‌جا، به‌دست می آید:

$$\left[\frac{p}{q}\right]=r=\left[\frac{p-s}{q}\right] \geqslant \frac{p-(q-۱)}{q}=\frac{p+۱}{q}-۱$$

با استفاده از این نابرابری، که در بالا اثبات کردیم، به‌دست می آید:

$$S=n-\sum_{m=۱}^{M}\frac{۱}{۲^m}\left[\frac{n}{۲^m}\right] \leqslant n-\sum_{m=۱}^{M}\frac{۱}{۲^m}\left(\frac{n+۱}{۲^m}-۱\right)=$$

$$=n-(n+۱)\sum_{m=۱}^{M}\frac{۱}{۴^m}+\sum_{m=۱}^{M}\frac{۱}{۲^m}=n-\frac{n+۱}{۳}\left(۱-\frac{۱}{۴^M}\right)+$$

$$+\left(۱-\frac{۱}{۲^M}\right)=\frac{۲}{۳}n+\frac{۲}{۳}+\frac{n+۱}{۳\times ۴^M}-\frac{۱}{۲^M}$$

و چون $\frac{n+۱}{۳}<n<۲^m$، بنابراین

$$\frac{n+۱}{۳\times ۴^M}<\frac{۱}{۲^M}$$

که از آن، دومین ارزیابی موردنظر نتیجه می‌شود:

$$S<\frac{۲}{۳}n+\frac{۲}{۳}$$

۰۲۲ عدد اول فرد p را درنظر می گیریم. ثابت می‌کنیم، هر دو عدد از دنبالهٔ صعودی عددهای زوج $a_m=p^{۲^m}+۱$ $(m\in\mathbf{Z}^+)$، مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از ۲ ندارند. درواقع، اگر $۰\leqslant l<m$، آن‌وقت، عدد

$$p^{2^m}-1=(p^{2^{m-1}}+1)(p^{2^{m-1}}-1)=\dots=$$
$$=(p^{2^{m-1}}+1)(p^{2^{m-2}}+1)\cdots(p^{2^l}+1)(p^{2^l}-1)$$

بر $p^{2^l}+1$ بخش‌پذیر است و بنابراین

$$(a_m, a_l)=(2+(p^{2^m}-1), p^{2^l}+1)=(2, p^{2^l}-1)=2$$

مجموعهٔ جمله‌هایی از دنباله را در نظر می‌گیریم که، دست‌کم، بر یك عدد اول بزرگتر از p، بخش‌پذیر باشند. این مجموعه، تهی نیست، زیرا براساس ویژگی دنبالهٔ $\{a_m\}$، که در بالا ثابت کردیم، تنها مجموعه‌ای متناهی از جمله‌های آن، می‌توانند مقسوم‌علیهی بزرگتر از p نداشته باشند. a_m را، کوچکترین عدد در این مجموعه می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$h(a_m)>p,\ h(a_m-1)=h(p^{2^m})=p,$$
$$h(a_m-2)=h(p^{2^m}-1)=\max\{h(p^{2^{m-1}}+1), h(p^{2^{m-1}}-1)=$$
$$=\dots=\max\{h(p^{2^{m-1}}+1), h(p^{2^{m-2}}+1), \dots, h(p+1),$$
$$h(p-1)\}=\max\{h(a_{m-1}), h(a_{m-2}), \dots, h(a_0),$$
$$h(p-1)<p$$

از آن‌جا که $h(p-1)<p$ و به‌ازای هرمقدار $(l=0, 1, \dots, m-1)$، بنابر انتخاب عدد m: $h(a_l)\leqslant p$ و، به‌جز آن، $a_l\equiv 1 \pmod p$، نتیجه می‌شود: $h(a_l)<p$. به‌این ترتیب، برای عدد اول فرد و مفروض p، عددی به‌صورت $n=p^{2^m}-1$ وجود دارد که در نابرابری

$$h(n)<h(n+1)<h(n+2)$$

صدق می‌کند. چون، برای عددهای مختلف p، مقدارهای مختلفی برای n به‌دست می‌آید، بنابراین، مجموعهٔ این گونه مقدارها، نامتناهی است.

۲۳. ابتدا ثابت می‌کنیم، بین عددهای به صورت $n=2^k$ $(k\in\mathbf{N})$، بی‌نهایت عدد وجود دارد که درنابرابری $w(n)<w(n+1)$ صدق می‌کنند.

فرض می‌کنیم، برای مقداری از n، نابرابری مخالف $w(n) \geqslant w(n+1)$ برقرار باشد. در این صورت داریم:

$$1 = w(2^k) \geqslant w(2^k+1) \geqslant 1$$

از آن‌جا

$$w(2^k+1) = 1 \quad \text{و} \quad 2^k+1 = p^m \quad (m \in \mathbf{N})$$

(p، عددی است اول). اگر $m = 2l$، آن‌وقت

$$2^k = p^{2l} - 1 = (p^l - 1)(p^l + 1)$$

یعنی، هر دو عدد p^l+1 و p^l-1 توانی از ۲ هستند؛ کـه تنها در حالت $p^l+1=4$ و $p^l-1=2$ ممکن است، یعنی بـه ازای $p=3$، $l=1$ و $k=3$. درحالت فردبودن عدد m، به‌دست می‌آید: $m=1$، زیرا درحالت $m>1$، با توجه به‌بسط

$$2^k = p^m - 1 = (p-1)(p^{m-1} + \cdots + p + 1)$$

باید عدد فرد

$$p^{m-1} + \cdots + p + 1 > 1$$

توانی از ۲ باشد که ممکن نیست. ولی برابری $p = 2^k+1$، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $k = 2^q$ $(q \in \mathbf{Z}^+)$. درواقع، اگر $k = 2^q.r$، که در آن، $r>1$ عددی فرد باشد، بنابر قضیهٔ ۱۱، باید عدد اول

$$p = 2^k + 1 = 2^{2^q.r} + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}(2^{2^q}+1))$$

بر عدد $p > 2^{2^q}+1$ بخش‌پذیر باشد. بـه‌ایـن ترتیب ثابت شد که، برای مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای $k \in \mathbf{N}$ (مخالف با ۳ و توان‌های ۲)، این نابرابری برقرار است:

$$w(2^k) < w(2^k+1)$$

اکنون فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد، یعنی بین مقدارهایی

از k که در نابرابری

$$w(2^k)<w(2^k+1)$$

صدق می‌کنند، تنها تعداد محدودی در نابرابری زیرهم صدق کنند:

$$w(2^k+1)<w(2^k+2)$$

بنابراین، باید عددی (به‌اندازهٔ کافی بزرگ) مثل $k_0=2^{q_0}>5$ وجود داشته باشدکه، به‌ازای همهٔ مقدارهای

$$k=k_0+1،\ k_0+2،\ \dots،\ 2k_0-1<2^{q_0+1}$$

رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$w(2^k+1)\geqslant w(2^k+2)=w(2(2^{k-1}+1))=1+w(2^{k-1}+1)$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$w(2^{2k_0-1}+1)\geqslant 1+w(2^{2k_0-2}+1)\geqslant\dots\geqslant(k_0-1)+$$
$$+w(2^{k_0}+1)\geqslant k_0$$

بنابراین، اگر $p_1<p_2<p_3<\dots$ را دنبالهٔ عددهای اول بگیریم، خواهیم داشت:

$$2^{2k_0-1}+1\geqslant p_1p_2\cdots p_{k_0}=(2\times3\times5\times7\times11)(p_6\cdots p_{k_0})>$$
$$>4^5\times4^{k_0-5}=2^{2k_0}>2^{2k_0-1}+1$$

و تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را تأیید می‌کند.

۲§. ریشه‌های درست و گویا در معادله‌ها

۲۴. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$2^x=(y-1)(y+1)$$

برای مقدارهای x، $y\in\mathbb{N}$، باید عددهای درست و مثبت $y-1$ و $y+1$، مقسوم‌علیه‌هایی از 2^x باشند، یعنی

$$y-۱=۲^p,\ y+۱=۲^q \quad (p, q\in \mathbf{Z}^+, p<q)$$

از این‌جا داریم:

$$۲^q-۲^p=(y+۱)-(y-۱)=۲ \Rightarrow ۲^p(۲^{p-q}-۱)=۲$$

و روشن است که باید داشته باشیم: $q-p=۱$ (اگر $q-p>۱$، آن‌وقت، عدد فرد $۲^{p-q}-۱$ مقسوم‌علیهی از ۲ می‌شود). به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید: $p=۱$ و $q=۲$.

معادله، تنها یك جواب طبیعی دارد: $x=۳$، $y=۳$.

۲۵. چون x، y، a، b، c و d، عددهای درست‌اند. بنابراین معادلهٔ

$$(x+ay+c)(x+by+d)=۲$$

هم‌ارز است با مجموعهٔ همهٔ دستگاه‌های به‌صورت

$$\begin{cases}x+ay+c=p\\ x+by+d=q\end{cases}$$

که در آن، عددهای $p, q\in \mathbf{Z}$، در برابری $qp=۲$ صدق کنند. هریك از این دستگاه‌ها، نمی‌توانند بیش ازیك جواب داشته باشند. این‌جواب، به‌صورت زیر است (به‌یاد بیاوریم که $a\neq b$).

$$\begin{cases}y=\dfrac{p-q+d-c}{a-b}\\ \\ x=p-c-ay\end{cases}$$

برای زوج عددهای درست (p, q)، روی‌هم، چهار حالت وجود دارد:

$$(۱, ۲), (-۱, -۲), (۲, ۱), (-۲, -۱)$$

که هر زوج، متناظر با یك جواب برای (x, y) است. بنابراین، معادلهٔ مفروض، نمی‌تواند بیش از چهار جواب داشته باشد؛ در ضمن، تنها وقتی تعداد این جواب‌ها، برابر چهار می‌شود که هریك از عددهای به صورت

$\frac{p-q+d-c}{a-b}$، عددی درست باشد، یعنی وقتی که

$$\frac{\pm۱+d-c}{a-b}\in\mathbf{Z}$$

برای این منظور، باید تفاضل

$$\frac{۱+d-c}{a-b}-\frac{-۱+d-c}{a-d}=\frac{۲}{a-b}$$

عددی درست، یعنی ۲ بر $(a-b)$ بخش‌پذیر باشد. اگـر $a-b=\pm۱$، آن وقت، $\frac{\pm۱+d-c}{a-b}$، عددی درست است. اگـر $a-b=\pm۲$، این کسر وقتی، و تنها وقتی، عددی درست است کـه $d-c$، عددی فرد باشد. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، در حالت‌های زیر، درست چهار جواب دارد: یا $|a-b|=۱$ و یا $|a-b|=۲$ و $c-d=۲k+۱$، که در آن $k\in\mathbf{Z}$.

۲۶. فرض می‌کنیم x، $y\in\mathbf{Z}$ در معادله صدق کنند، در این صورت

$$y^{۲}=[x(x+۸)][(x+۱)(x+۷)]=$$
$$=(x^{۲}+۸x)(x^{۲}+۸x+۷)=z^{۲}+۷z$$

$(z=x^{۲}+۸x)$. اگر $z>p$، آن‌وقت

$$(z+۳)^{۲}=z^{۲}+۶z+۹<z^{۲}+۷z=y^{۲}<z^{۲}+۸z+۱۶=(z+۴)^{۲}$$

یعنی $y^{۲}$، باید بین دو عدد مجذور کامل متوالی واقع شود کـه ممکن نیست. بنابراین

$$x^{۲}+۸x=z\leqslant۹\ \Rightarrow\ -۹\leqslant x\leqslant۱$$

با انتخاب متوالی مقدارهای

$$x=-۹، -۸، \ldots، ۱$$

معلوم می‌شود کـه، عدد $x(x+۱)(x+۷)(x+۸)$، تنها وقتی مجذور یك

عدد درست می‌شود که x برابر ۹ —، ۸ —، ۴ —، ۱ —، ۰ یا ۱ باشد. به‌این ترتیب، همهٔ جواب‌های درست معادله، چنین‌اند:

$$(-9, 12); (-9, -12); (-8, 0); (-7, 0); (-4, 12);$$
$$(-4, -12); (-1, 0); (0, 0); (1, 12); (1, -12)$$

۲۷. فرض می‌کنیم x، $y \in \mathbf{Z}$ در معادله صدق کند. $x > 0$ می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$(x^3+1)^2 = x^6+2x^3+1 < x^6+3x^3+1 =$$
$$= y^4 < x^6+4x^3+4 = (x^3+2)^2$$

از این‌جا معلوم می‌شود که y^2 نمی‌تواند عددی درست باشد، زیرا

$$x^3+1 < y^2 < x^3+2$$

به‌ازای $x \leqslant -2$ هم، به‌همین نتیجه می‌رسیم. درواقع، دراین حالت داریم: $x^3+3 < 0$، یعنی

$$(x^3+2)^2 = x^6+4x^3+4 < x^6+3x^3+1 =$$
$$= y^4 < x^6+2x^3+1 = (x^3+1)^2$$

که از این‌جا، به‌دست می‌آید:

$$-(x^3+2) = |x^3+2| < y^2 < |x^3+1| = -(x^3+1)$$

که برای هیچ مقدار درستی از y برقرار نیست.

به‌ازای $x = -1$، معادلهٔ مفروض، به صورت $y^4 = -1$ درمی‌آید که ممکن نیست. سرانجام، به‌ازای $x = 0$ به دست می‌آید: $y^4 = 1$. به‌این ترتیب، جواب چنین است: $x = 0$، $y = \pm 1$.

۲۸. فرض می‌کنیم x، $y \in \mathbf{Z}$، در معادله صدق کند؛ در این صورت

$$x^2+2xy+y^2 = x^2y^2+xy \Rightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$$

با شرط $xy > 0$، داریم:

$$xy+1 > \sqrt{xy(xy+1)} > xy$$

در این حالت، عدد

$$|x+y|=\sqrt{xy(xy+1)}$$

بین دو عدد درست متوالی xy و $xy+1$ قرار می‌گیرد که، در نتیجه، نمی‌تواند عدد درستی باشد. به‌همین ترتیب، با شرط $xy<-1$ به‌دست می‌آید:

$$-xy-1<\sqrt{xy(xy+1)}<-xy$$

یعنی بازهم، عدد $|x+y|$، نمی‌تواند عددی درست باشد. به‌این ترتیب، یا $xy=0$ و یا $xy=-1$. درهردو حالت، به‌برابری $x+y=0$ می‌رسیم، بنابراین $x=y=0$ یا $x=-y=\pm 1$. معادله، سه جواب دارد:

$$(0, 0);\ (1, -1);\ (-1, 1)$$

۰۳۹. فرض می‌کنیم x، $y\in\mathbf{Z}$ در معادله صدق کند. $x\geqslant 0$ می‌گیریم، در این صورت

$$y^3=8x^3+24x^2+32x+16=8(x^3+3x^2+4x+2)$$

بنابراین $y=2z\ (z\in\mathbf{Z})$ و

$$z^3=x^3+3x^2+4x+2$$

توجه می‌کنیم که

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1<z^3<x^3+6x^2+$$
$$+12x+8=(x+2)^3$$

یعنی $x+1<z<x+2$، که ممکن نیست. اکنون $x\leqslant -2$، می‌گیریم، در این صورت، زوج عددهای $x_1=-x-2\geqslant 0$ و $y_1=-y$ هم، در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، زیرا

$$(x_1+2)^4-(x_1)^4=x^4-(x+2)^4=-y^3=(y_1)^3$$

ولی، همان طور که در بالا دیدیم، فرض $x_1\geqslant 0$، به‌تناقض می‌انجامد.

بنابراین، باید داشته باشیم: $0 > x > -2$، کـه از آن‌جا، تنها یك جواب به‌دست می‌آید، $x = -1$، $y = 0$.

۳۰. یادآوری می‌کنیم، اگر n عددی زوج باشد، $n = 2k$، آن‌وقت

$$n^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{16}$$

و اگر n عددی فرد باشد، آن‌وقت عدد

$$n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$$

بر ۱۶ بخش‌پذیر است (زیرا، عددهای $n-1$، $n+1$ و n^2+1، زوج‌اند و از بین دو عدد $n-1$ و $n+1$، یکی بر ۴ بخش‌پذیر است)، یعنی

$$n^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

به‌این ترتیب، باقی‌ماندهٔ تقسیم سمت چپ معادله

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4$$

بستگی به‌تعداد عددهای زوج، در گروه عددهای x_1، …، x_{14} دارد و، به‌هر حال، این باقی‌مانده از ۱۴ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، داریم:

$$1599 = 1600 - 1 \equiv 15 \pmod{16}$$

یعنی، برابری سمت چپ وسمت راست معادله، به‌ازای هیچ مقدار درستی‌از مجهول‌ها، نمی‌تواند برقرار باشد.

۳۱. فرض‌کنید، دست‌کم، یکی از جواب‌های ممکن

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عددی‌گویا باشد. در این صورت $\sqrt{b^2-4ac}$ عددی گـویـا و، بنابراین (قضیهٔ ۶۱ را ببینید). عدد b^2-4ac مجذور عددی مثل $d \in \mathbf{Z}$ است. چون a، b و c، عددهایی فرد هستند، dهم عددی فرد می‌شود و به‌جز آن

$$ac \equiv 1 \pmod 2,\quad -4ac \equiv 4 \pmod 8,$$

$$b^2 \equiv 1 \pmod 8,\quad d^2 \equiv 1 \pmod 8$$

زیرا $(۲n+۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱=۴n(n+۱)+۱$. به ایـن ترتیب داریم:

$$b^۲-۴ac\equiv ۵ (\mathrm{mod}\ ۸)$$

یعنی، برابری $d^۲=b^۲-۴ac$ ممکن نیست.

۳۲. فرض می‌کنیم $y\in\mathbf{Q}$ ،x در معادله صدق کنند. در این صورت، این برابری‌ها برقرار است:

$$۲\sqrt{۳}-۳=x\sqrt{۳}+y\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳xy},$$

$$\sqrt{۳}(x+y-۲)=۲\sqrt{۳xy}-۳$$

از آن‌جا که

$$۳(x+y-۲)^۲=۹+۱۲xy-۱۲\sqrt{۳xy}$$

بنابراین، $\sqrt{۳xy}$، عددی است گویا، یعنی باید داشته باشیم:

$$x+y-۲=۰$$

$$۲\sqrt{۳xy}-۳=۰$$

(در غیر این صورت، باید عدد $\sqrt{۳}=\dfrac{۲\sqrt{۳xy}-۳}{x+y-۲}$، عددی گویا باشد).

به‌این ترتیب، x و y در معادله‌های $x+y=۲$ و $xy=\frac{۳}{۴}$ صدق می‌کنند، یعنی ریشه‌های این معادله‌اند:

$$t^۲-۲t+\frac{۳}{۴}=۰$$

چون $x>y$، بنابرایـن معادلـهٔ مفروض، تنها یك جواب دارد: $x=\frac{۳}{۲}$ ، $y=\frac{۱}{۲}$ که در واقع هم، در معادله صدق می‌کند.

۳۳. توجه کنیم که این معادله، جواب دارد؛ به‌عنوان نمونه

$$x=y=z=۳\times ۱۹۸۳$$

اکنون ثابت می‌کنیم، تعداد محدودی از گروه عددهای x، y، $z\in\mathbf{N}$ وجود دارد که درمعادلهٔ اصلی ونابرابری‌های $x\leqslant y\leqslant z$ صدق می‌کنند. درواقع، برای هریك از این گروه‌ها، باید داشته باشیم:

$$۰<\frac{۱}{z}\leqslant\frac{۱}{y}\leqslant\frac{۱}{x}, \frac{۱}{x}<\frac{۱}{۱۹۸۳}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\leqslant\frac{۳}{x}$$

که از آن‌جا بـه دست می‌آید. $۱۹۸۳<x\leqslant ۳\times ۱۹۸۳$. بنابراین، مقدار مجهول x، نمی‌تواند بیش از ۲×۱۹۸۳ عدد قبول کند. برای هر مقدار x به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱۹۸۳}-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}\leqslant\frac{۲}{y}$$

از آن‌جا $y\leqslant ۲\times\frac{۱۹۸۳x}{x-۱۹۸۳}\leqslant ۲^۲\times ۱۹۸۳^۲$، یعنی y نمی‌تواند بیش‌از $۲^۲\times ۱۹۸۳^۲$ مقدارقبول کند. بالاخره، اگر مقدارهای x و y معلوم باشند، مقدار z بـه طور یك ارزشی از معادله بـه‌دست می‌آید. بنابراین، بیش از $۲^۳\times ۱۹۸۳^۳$ جواب، با شرط $x\leqslant y\leqslant z$، برای معادله وجود ندارد. از آن‌جا که، با تبدیل مجهول‌ها، می‌توان همهٔ بقیهٔ جواب‌ها را پیداکرد، تعداد جواب‌های معادله، از $۶\times ۲^۳\times ۱۹۸۳^۳$ تجاوز نمی‌کند.

۳۴. فرض می‌کنیم. عددهای a، $b\in\mathbf{Z}$، در نابرابری $۵a\geqslant ۷b\geqslant ۰$ صدق کنند. $u=\left[\frac{b}{۵}\right]$ می‌گیریم؛ در این صورت، مقدار $v=b-۵u$، تنها یکی از مقدارهای زیر را می‌تواند قبول کند:

$$\{۰، ۱، ۲، ۳، ۴\}$$

با استفاده از رابطهٔ

$$۷b=۷(۵u+v)=۳۵u+۷v$$

به‌این رابطه می‌رسیم:

$$a-7u \geqslant \frac{7b}{5}-7u=\frac{7v}{5}$$

در حالت $v=0$، فرض می‌کنیم:

$$y=z=0,\quad x=a-7u$$

در این صورت $x \geqslant \frac{7v}{5}=0$. در حالت $v=1$ فرض می‌کنیم:

$$y=1,\quad z=0,\quad x=a-7v-2$$

در این صورت $x \geqslant \frac{7}{5}-2>-1$، یعنی $x \geqslant 0$ (زیرا $x\in\mathbf{Z}$). در حالت $v=2$ فرض می‌کنیم:

$$y=0,\quad z=1,\quad x=a-7u-3$$

در این صورت $x \geqslant \frac{14}{5}-3>-1$، یعنی $x \geqslant 0$. درحالت $v=3$ فرض می‌کنیم:

$$y=z=1,\quad x=a-7u-5$$

در این صورت $x \geqslant \frac{21}{5}-5>-1$، یعنی $x \geqslant 0$. سرانجام، در حالت $v=4$ فرض می‌کنیم:

$$y=0,\quad z=2,\quad x=a-7u-6$$

در این صورت $x \geqslant \frac{28}{5}-6>-1$، یعنی $x \geqslant 0$.

به‌این ترتیب، در هریك از حالت‌ها، عددهای

$$x,\ y,\ z,\ u\in\mathbf{Z}^+$$

در برابری‌های

$$x=a-۷u-۳z-۲y،\quad ۵u=b-v=b-۲z-y$$

و، بنابراین، در دستگاه اصلی، صدق می‌کنند.

۳۵. فرض کنید، برای مقدارهایی از

$$p، q\in\{۱، ۲، \ldots، ۱۰۰\}$$

عدد $x\in\mathbf{Q}$ در این معادله صدق کند:

$$x^۵+px+q=۰$$

چون ضریب‌های چندجمله‌ای سمت چپ برابری، عددهایی درست‌اند، وچون ضریب جملهٔ بزرگتر برابر واحد است، بنابراین، بنابر قضیهٔ ۶۰، هر ریشهٔ گویای این معادله، باید عددی درست باشد. ثابت می‌کنیم $-۳<x<۰$. درواقع، برای $x\geqslant ۰$ داریم:

$$x^۵+px+q\geqslant q\geqslant ۱>۰$$

و برای $x\leqslant -۳$

$$x^۵+px+q\leqslant -۳^۵-۳p+q\leqslant -۳^۵-۳+۱۰۰<۰$$

به ایـن ترتیب، تنها دو حالت ممکن است: $x=-۱$ و $x=-۲$.

اگر $x=-۱$ را درمعادله‌قراردهیم، برای ضریب‌ها، به‌برابری $q=p+۱$ می‌رسیم که، درست،برای ۹۹زوج ازعددهای p و q (با توجه به محدودیت آن‌ها) برقراراست. به‌همین‌ترتیب، برای $x=-۲$، به‌شرط $q=۲p+۳۲$ می‌رسیم که برای ۳۴ زوج از عددهای p و q برقرار است. ازآن‌جا که شرط‌های $q=p+۱$ و $p=۲p+۳۲$ نمی‌توانندباهم برقرارباشند (زیرا $p>۰$)، همـهٔ زوج‌ها متمایزنـد و تعداد آن‌ها، بـرابـر $۹۹+۳۴$، یعنی ۱۳۳ می‌شود.

۳۶. گروه عددهای $x=y=z=۰$، جوابی از معادله است. فرض می‌کنیم، معادلهٔ جواب‌های دیگری‌هم داشته باشد. از بین‌آن‌ها، جواب‌هایی را درنظر می‌گیریم که، برای آن‌ها، مقدار

$$\alpha=|x|+|y|+|z|$$

حداقل مقدار (طبیعی) ممکن باشد. توجه می‌کنیم که، برای هر عدد $n\in\mathbf{Z}$،
برای $n=۲k$ $(k\in\mathbf{Z})$ داریم:

$$n^۲=۴k^۲\equiv ۰ \pmod ۴$$

و برای $n=۲k+۱$:

$$n^۲=۴k^۲+۴k+۱\equiv ۱ \pmod ۴$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۲+y^۲$ بر ۴ (که برابر ۰، ۱ یا ۲ است)، وقتی که بر باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳z^۲$ بر ۴ (که برابر ۰ یا ۳ است) منطبق می‌شود که، هر سه عدد x و y و z، زوج باشند، یعنی

$$x=۲x_۱,\ y=۲y_۱,\ z=۲z_۱\ (x_۱, y_۱, z_۱\in\mathbf{Z})$$

در ضمن از $x^۲+y^۲=۳z^۲$ نتیجه می‌شود: $x_۱^۲+y_۱^۲=۳z_۱^۲$. اکنون اگر فرض کنیم:

$$\alpha_۱=|x_۱|+|y_۱|+|z_۱|$$

به شرط $\alpha<\alpha_۱=\frac{\alpha}{۲}<۰$ می‌رسیم که با فرض حداقل بودن مقدار α متناقض است. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، تنها یك جواب دارد:

$$x=y=z=۰$$

۳۷. یادآوری می‌کنیم که، اگر گروه عددهای x، y، z، جوابی از معادله باشد، هر گروه از عددهای tx، ty، tz $(t\in\mathbf{Q})$ هم، جواب معادله خواهد بود. بنابراین، اگر معادلهٔ مفروض به‌جز $x=y=z=۰$، جواب گویای دیگری مثل

$$x=\frac{m}{n},\ y=\frac{l}{k},\ z=\frac{p}{q}$$

داشته باشد $(n, k, q\in\mathbf{N}$ و $m, l, p\in\mathbf{Z})$، گروه عددهای درست $(t_۱=mkq)$ $x_۱=t_۱x,\ y_۱=t_۱y,\ z_۱=t_۱z$ هم درمعادله صدق خواهند کرد. اگر d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای $x_۱$، $y_۱$، $z_۱$ فرض کنیم، آن وقت، گروه

عددهای درست $x_2=t_2x_1,\ y_2=t_2y_1, z_2=t_2z_1\ \left(t_2=\frac{1}{d}\right)$ هم جوابی از معادله است و، در ضمن، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این عددها، برابر

$$x_2^3=3(-y_2^3-3z_2^3+3x_2y_2z_2)$$

بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین $x_2=3x_3\ (x_3\in Z)$. سپس

$$y_2^3+3z_2^3+9x_3^3-9y_2z_2x_3=0$$

به‌ایـن معناست که گروه عددهای $x=y_2$، $y=z_2$، $z=x_3$ هم، در معادله صدق‌می کند. بنابراین $y_2=3y_3\ (y_3\in Z)$ و گروه‌عددهای $x=z_2$، $y=x_3$، $z=y_3$ درمعادله صدق می کند. از آن‌جا $z_2=3z_3\ (z_3\in Z)$. به‌این ترتیب، هریك از عددهای x_2، y_2، z_2 بر ۳ بخش‌پذیرند کـه با نوع انتخاب این عددها، متناقض است. حکم مسأله، ثابت شد.

۳۸. $x=y=z=0$، جوابی ازمعادله است. فرض می کنیم. معادله، جواب دیگر (x, y, z) را هم داشته باشد. در این صورت، باید x^2y^2 بر ۴ بخش‌پذیر باشد، زیرادرغیراین‌صورت، xو y عددهای‌فردی می‌شوند وداریم:

$$x^2\equiv 1 \pmod 4,\ y^2\equiv 1 \pmod 4,\ x^2y^2\equiv 1 \pmod 4$$

درحالی‌که، اگر z زوج باشد

$$x^2+y^2+z^2\equiv 2 \pmod 4$$

و اگر z فرد باشد

$$x^2+y^2+z^2\equiv 3 \pmod 4$$

یعنی، برابری $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ ناممکن می‌شود.

به‌این ترتیب، x و y عددهایی زوج‌اند و در نتیجه با توجه به‌معادلهٔ

$$x^2+y^2+z^2=x^2y^2$$

باید z هم عددی زوج باشد؛ یعنی $x=2x_1$، $y=2y_1$، $z=2z_1$، درضمن

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1^2y_1^2$$

سمت راست این معادله، بر ۴ بخش‌پذیر است؛ بنابراین، با استدلالی شبیه قبل به‌دست می‌آید: $x_1=2x_2$، $y_1=2y_2$، $z_1=2z_2$ و

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=16x_2^2y_2^2$$

اگر این روند استدلال را ادامه دهیم، به‌این گروه عددی درست می‌رسیم:

$$x_k=\frac{x}{2^k},\ \ y_k=\frac{y}{2^k},\ \ z_k=\frac{z}{2^k}\quad (k\in\mathbf{N})$$

ولی، هیچ عدد درستی، به‌جز صفر، نمی‌تواند بر هر توان دلخواهی از ۲ بخش‌پذیر باشد، بنابراین، هریك از عددهای x، y و z برابر صفر است؛ و این، تنها جواب معادلهٔ مفروض است.

۳۹۰. هر زوج‌عددهای x، $y\in\mathbf{N}$، که در معادلهٔ $n^2=y^2-x^2$ صدق کند، متناظر است با زوج عددهای $p=y+x$ و $q=y-x$، که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر n^2 باشد. بنابراین، تعداد a_n این زوج‌ها، نمی‌تواند از تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n^2 تجاوز کند. به‌این ترتیب، برای هر عدد اول n، داریم $a_n\leqslant 3$، زیرا وقتی n عدد اول باشد، n^2 تنها دارای ۳ مقسوم‌علیه طبیعی است. بنابراین، به‌پرسش ب) باید پاسخ منفی داد.

سپس، اگر هر زوج از عددهای p و q، از نظر زوج و فرد بودن، یکی باشند و در برابری $pq=n^2$ صدق کنند، متناظر با این دو عددند:

$$y=\frac{p+q}{2},\ x=\frac{p-q}{2}$$

درضمن، نابرابری $x>n$، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$2x=p-q=\frac{n^2}{q}-q>2n\ \Rightarrow\ q<\frac{n}{1+\sqrt{2}}$$

برای همهٔ مقدارهای $n=3^l\,(l\in\mathbf{N})$، عدد q به‌صورت $3^i\,(i\in\mathbf{Z}^+)$ و عدد $p=3^{2l-i}$، هردوفردند. درضمن نابرابری $3^i<\frac{3^l}{1+\sqrt{2}}$، برای مقدارهای $i=0, 1, \ldots, l-1$ برقرار است، بنابراین، $a_n=l$ که، از آن‌جا، درستی

حکم الف) ثابت می‌شود.

۴۰. ثابت می کنیم، اگر برای $x\in\mathbf{Z}$، عدد

$$f(x)=x^{۴}+۴^{x}$$

درست باشد، آن وقت، این عدد. یا از ۵ تجاوز نمی‌کند و یا عددی مرکب است. درواقع، به‌ازای $x<۰$، عدد $f(x)$ درست نیست. به‌ازای $x=۰$ و $x=۱$، داریم:

$$f(۰)=۰^{۴}+۴^{۰}<۵،\ f(۱)=۱^{۴}+۴^{۱}=۵$$

برای $x=۲k\ (k\in\mathbf{N})$، عدد

$$f(x)=۲^{۴}k^{۴}+۴^{۲k}=۲^{۴}[k^{۴}+۴^{۲(k-۱)}]$$

مرکب است. سرانجام، برای $x=۲k+۱\ (k\in\mathbf{N})$، عدد

$$f(x)=x^{۴}+۴\times ۴^{۲k}=[x^{۴}+۴x^{۲}(۲^{k})^{۲}+۴(۲^{k})^{۴}]-$$

$$-۴x^{۲}(۲^{k})^{۲}=[x^{۲}+۲(۲^{k})^{۲}]^{۲}-(۲x۲^{k})^{۲}=$$

$$=[x^{۲}+۲x۲^{k}+۲(۲^{k})^{۲}][x^{۲}-۲x۲^{k}+۲(۲^{k})^{۲}]=$$

$$=[(x+۲^{k})^{۲}+۲^{۲k}][(x-۲^{k})^{۲}+۲^{۲k}]$$

بازهم عددی مرکب است، زیرا هریک از عامل‌ها از واحد بزرگترند ($۲^{۲k}>۱$ به‌ازای $k>۰$). به این ترتیب، اگر $p>۵$ عددی اول باشد، معادلهٔ مفروض به‌ازای هیچ مقداری از $x\in\mathbf{Z}$ برقرار نیست.

۴۱. فرض‌می‌کنیم، گروه عددهای x، y، $z\in\mathbf{N}$ درمعادله مفروض‌صدق کند، داریم:

$$[(۲x)^{x}+۱][(۲x)^{x}-۱]=y^{z+۱}$$

درضمن، عددهای

$$k=(۲x)^{x}+۱،\ m=(۲x)^{x}-۱$$

نسبت به‌هم اول‌اند، زیرا عددهایی فرد هستند و

$$(k, m)=(k, k-m)=(k, ۲)=۱$$

بنا براین، با توجه به‌قضیهٔ ۲۲، عددهای $p, q\in\mathbf{N}$ وجود دارند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$k=p^{z+۱}, \quad m=q^{z+۱}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$۲=p^{z+۱}-q^{z+۱}=(p-q)(p^{z}+p^{z-۱}q+\cdots+q^{z}) \quad (p\geqslant q+۱)$$

به‌این ترتیب

$$۲\geqslant p^{z}+p^{z-۱}q+\cdots+q^{z}\geqslant p^{z}+q^{z}\geqslant p+q>۲q\geqslant ۲$$

و تناقض حاصل، حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴۲. با روش استقرای ریاضی، روی n، قضیهٔ نیرومندتری را ثابت می‌کنیم: برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، عددهای

$$x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_{n}\in\mathbf{N}$$

و عدد فرد $y_{n}>۱$ وجود دارند، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+\cdots+x_{n}^{۲}=y_{n}^{۲}$$

درستی حکم به‌ازای $n=۱$ روشن است (کافی است فرض کنیم $x_{۱}=y_{۱}=۳$). فرض کنید، حکم برای مقداری از $n>۱$ درست باشد. گروه عددهای $x_{۱}$، ...، x_{n}، y_{n} را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$x_{n+۱}=\frac{y_{n}^{۲}-۱}{۲}, \quad y_{n+۱}=\frac{y_{n}^{۲}+۱}{۲}$$

چون $y_{n}>۱$ عددی فرد است، پس $x_{n+۱}$ و $y_{n+۱}$ عددهائی طبیعی‌اند و، درضمن $y_{n+۱}>۱$. در این صورت، برای گروه عددهای

$$x_{۱}, \ldots, x_{n}, x_{n+۱}, y_{n+۱}$$

داریم:

$$x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=y_n^2+x_{n+1}^2=y_n+\frac{y_n^4-2y_n^2+1}{4}+$$

$$+(y_{n+1})^2$$

$$y_{n+1}=\frac{y_n^2+1}{2}\equiv 1 \pmod 2$$

زیرا $y_n^2\equiv 1 \pmod 4$، یعنی حکم، برای $n+1$ هم درست است.

۴۳. اگر $n=1$، آن وقت به‌ازای هر مقدار $z\in\mathbf{N}$، دو عدد

$$x_1=z^{a_2},\ x_2=z^{a_1}$$

در معادله صدق می‌کنند. اکنون $n>1$ می‌گیریم. بنا بر قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، بی‌نهایت عدد طبیعی z وجود دارد که با دو شرط زیر سازگار باشند:

$$z\equiv 0 \pmod{a_1\cdots a_n},\ z\equiv -1 \pmod{a_{n+1}}$$

هریك از این مقدارهای z متناظر است با عددهای طبیعی

$$y_1=\frac{z}{a_1},\ \ldots,\ y_n=\frac{z}{a_n},\ y_{n+1}=\frac{z+1}{a_{n+1}}$$

که به‌نوبهٔ خود، به‌وسیلهٔ آن‌ها، گروه عددهای

$$x_i=n^{y_i}\in\mathbf{N},\ i=1,2,\ldots,n,n+1$$

ساخته می‌شود و، هریك از این گروه عددها، در معادله صدق می‌کند، زیرا

$$x_1^{a_1}+\cdots+x_n^{a_n}=(n^{y_1})^{a_1}+\cdots+(n^{y_n})^{a_n}=n^z+\cdots+n^z=$$

$$=n\cdot n^z=n^{z+1}=(n^{y_{n+1}})^{a_{n+1}}=x_{n+1}^{a_{n+1}}$$

چون، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، مقدارهای برابر z متناظر با گروه‌های مختلف مجهول‌هاست، بنابراین، معادلهٔ مفروض، دارای بی‌نهایت جواب در مجموعهٔ عددهای طبیعی است.

۴۴. با توجه به قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، عدد

درست $n\in[0, ab)$ وجود دارد که، برای آن، داریم:

$$n\equiv 0 \pmod b,\quad n\equiv c \pmod a$$

بنابراین $n=by=c-ax$ کــه، در آن $x, y\in\mathbf{Z}$. چون $0\leqslant by<ab$، در نتیجه

$$0\leqslant y\leqslant a-1 \quad \text{و} \quad n\leqslant(a-1)b$$

سرانجام، از نابرابری‌های

$$c-ax\leqslant(a-1)b,\quad c\geqslant(a-1)(b-1)$$

به‌دست می آید:

$$ax\geqslant(a-1)(b-1)-(a-1)b=1-a>-a$$

یعنی $x>-1$. بــه‌ایــن ترتیب، زوج عددهای $x, y\in\mathbf{Z}^+$، جواب معادله مفروض است.

۴۵. $x_0, y_0\in\mathbf{Q}$ را جوابی از معادله و عدد $k\in\mathbf{Q}$ را، سازگار با شرط $ak^2+b\neq 0$ می گیریم (این گــونه مقدارهای k، بی‌نهایت زیادند، زیرا $a^2+b^2>0$، یعنی برابری $ak^2+b=0$، برای بیش از دو مقدار از بی‌نهایت مقدار k، برقرار نیست). در این صورت، عددهای

$$x_k=\frac{(b-ak^2)x_0-2bky_0}{ak^2+b},\quad y_k=\frac{(b-ak^2)y_0+2akx_0}{ak^2+b}$$

هم، در معادله صدق می کنند، زیرا

$$ax_k^2+by_k^2=\frac{(b-ak^2)^2(ax_0^2+by_0^2)+4abk^2(ax_0^2+by_0^2)}{(ak^2+b)^2}=$$

$$=ax_0^2+by_0^2=1$$

یادآوری می کنیم، اگــر دو عدد x_k و y_k را بتوان از دستورهایی که آوردیم، به‌دست آورد، انجام آن، برای بیش از دو مقدار k، که در دستگاه

$$\begin{cases}a(x_k+x_0)k^2+2by_0k+b(x_k-x_0)=0\\ a(y_k+y_0)k^2-2ax_0k+b(y_k-y_0)=0\end{cases}$$

صدق می‌کنند، ممکن نیست (زیرا $ax_0^2+by_0^2=1$ و، بنابراین، دست‌کم در یکی از این برابری‌ها، ضریب k مخالف صفر است و، در نتیجه، در مورد این برابری، بیش از دو مقدار k، نمی‌تواند صدق کند). به‌این ترتیب، معادلهٔ اصلی، بی‌نهایت جواب دارد. درواقع، اگر تعداد همهٔ جواب‌های معادله، برابر n باشد، آن وقت، مقدارهای مختلف $k\in\mathbf{Q}$ که با شرط $ak^2+b\neq 0$ سازگارند، بیشتر از $2n$ نمی‌شود که، البته، درست نیست. حکم ثابت شد.

یادداشت. راه‌حلی که برای مسأله آوردیم، مفهوم هندسی مشخصی دارد: در صفحهٔ دستگاه محورهای مختصات قائم، نقطه‌های (x_0, y_0) و (x_k, y_k)، عبارتند از نقطه‌های برخورد خط راست $x-x_0=k(y-y_0)$ بامنحنی $ax^2+by^2=1$. گویا بودن مقدارهای x_k و y_k را می‌توان بدون محاسبهٔ مقدارهای آن‌ها ثابت کرد. در واقع، عددهای y_0 و y_k، با شرط $ak^2+b\neq 0$، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (نسبت به y)

$$a[x_0+k(y-y_0)]^2+by^2=1$$

هستندکه، ضریب‌های گویا دارد. بنابر قضیهٔ **ویت**، y_0+y_k، عددی است گویا، یعنی

$$y_k\in\mathbf{Q} \quad \text{و} \quad x_k=x_0+k(y_k-y_0)\in\mathbf{Q}$$

۴۶. برای عددهای دلخواه k، m، a، b، این برابری برقرار است:

$$(ak^2+bm^2)^3=a(ak^3-3bkm^2)^2+b(3ak^2m-bm^3)^2$$

بنا براین، اگر فرض کنیم:

$$x=ak^3-3bkm^2,\quad y=3ak^2m-bm^3,\quad z=ak^2+bm^2$$

آن وقت، برابری زیر برقرار خواهد بود:

$$ax^2+by^2=z^3$$

ثابت می‌کنیم، بی‌نهایت زوج عدد $k, m\in\mathbf{Z}$ وجود داردکه متناظر با گروه‌های مختلف سه عدد $x, y, z\in\mathbf{Z}$ هستند که، در ضمن، با شرط

$1 = (x, y)$، سازگار باشند. توجه می‌کنیم که، اگر همهٔ عددهای k، m، a، b دو به‌دو نسبت به هم اول باشند (عددهای a و b، بنا بر فرض، نسبت به‌هم اول‌اند)، درضمن، تنها یکی از آن‌ها زوج باشد و هیچ کدام از دو عدد k و m بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، آن‌وقت، عددهای x و y، نسبت به‌هم اول‌اند. درواقع، به‌ازای این شرط‌ها، داریم:

$$(k, y) = (k, 3ak^2m - bm^3) = (k, bm^3) = 1,$$

$$(m, x) = (m, ak^3 - 3bkm^2) = (m, ak^3) = 1$$

درضمن، دست‌کم یکی از عددهای a یا b، و مثلاً b، بر ۳ بخش‌پذیر نیست (حالتی‌که a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، بـه‌صورت مشابهی مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ حالتی که هر دو عدد a و b بر ۳ بخش‌پذیر باشند، ممکن نیست، زیرا $(a, b) = 1$).

به‌این ترتیب، داریم:

$$(x, y) = (k(ak^2 - 3bm^2), m(3ak^2 - bm^2)) =$$

$$= (ak^2 - 3bm^2, 3ak^2 - bm^2) \leqslant (3ak^2 - 9bm^2, 3ak^2 - bm^2) =$$

$$= (8bm^2, 3ak^2 - bm^2) = (bm^2, 3ak^2 - bm^2) = (bm^2, 3ak^2) = 1$$

زیرا، عدد $3ak^2 - bm^2$ فرد است و عدد bm^2 بر ۳ بخش‌پذیر نیست. هر دو عدد a و b را غیرصفر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$k = 3|ab| + 1$$

آن وقت، هر مقدار

$$m = (6|ab| + 1)^l \quad (l \in \mathbf{N})$$

متناظر است با گروهی از عددهای x، y، z که با شرط مسأله سازگار است (زیرا، برای عددهای k، m، a، b، شرط‌های بالا صادق‌اند). درضمن، همهٔ گروه‌های حاصل، باهم فرق دارند، زیرا همهٔ مقدارهای

$$z = ak^2 + bm^2$$

مختلف‌اند. سرانجام، فرض کنید یکی از عددهای a یا b، و مثلاً b، برابر صفر باشد (حالت $a=0$ هم، مشابه‌آن مورد بررسی قرار می‌گیرد). دراین صورت، اگر فرض کنیم $a=z=x$، و برای y عددهای مختلفی، که نسبت به a اول باشند، درنظر بگیریم،آن وقت، این برابری‌ها برقرار است:

$$ax^2+by^2=a.a^2+0y^2=a^3=z^3$$

۴۷. فرض می‌کنیم، گروه سه عدد $x, y, z\in\mathbf{N}$، به‌ازای $n>1$ و $x\leqslant n$ و $y\leqslant n$، درمعادله صدق کند. بدون‌این‌که به‌کلی‌بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد $x\leqslant y$. در این صورت، با استفاده از بسط دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$(y+1)^n=y^n+ny^{n-1}+\dots+1>y^n+xy^{n-1}\geqslant$$

$$\geqslant y^n+x^n=z^n>y^n$$

بنابراین $y+1>z>y$ که به‌ازای‌هیچ مقداری از $y,z\in\mathbf{Z}$، برقرار نیست.

۴۸. فرض کنید، به ازای مقدارهایی از $x, n\in\mathbf{N}$ و $n>2$، معادلهٔ مفروض، به برابری درستی منجر شود. $y=x+1\geqslant 2$ می‌گیریم، در این صورت، داریم:

$$(y-1)^n+y^n=(y+1)^n$$

که ازآن، به‌دست می‌آید:

$$0=(y+1)^n-y^n-(y-1)^n\equiv 1-(-1)^n(\mathrm{mod}\ y)$$

بنابراین، n عددی زوج است، زیرا اگر $n>2$ فرد باشد، به دست می‌آید، $2\equiv 0(\mathrm{mod}\ y)$ و ازآن‌جا

$$y=2 \quad \text{و} \quad 0=3^n-1-2^n>0$$

که ممکن نیست. سپس، بنابر بسط دوجمله‌ای، وقتی که n عددی زوج باشد، داریم:

$$(y\pm ۱)^n\equiv\frac{n(n-۱)}{۲}y^۲\pm ny+۱ \pmod{y^۳},$$

$$۰=(y+۱)^n-y^n-(y-۱)^n\equiv ۲ny \pmod{y^۳}$$

بنابراین، $۲n\equiv ۰ \pmod{y^۲}$؛ از آن جا $۲n\geqslant y^۲$. با تقسیم برابری اصلی (برای y) بر y^n، به‌دست می‌آید:

$$\left(۱+\frac{۱}{y}\right)^n=۱+\left(۱-\frac{۱}{y}\right)^n<۲$$

از طرف دیگر، با توجه به‌نابرابری **برنولی** (قضیهٔ ۵) داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{y}\right)^n>۱+\frac{n}{y}=۱+\frac{۲n}{۲y}\geqslant ۱+\frac{y^۲}{۲y}=۱+\frac{y}{۲}\geqslant ۲$$

تناقض حاصل، به‌این معناست که، معادلهٔ اصلی، جواب ندارد.

۰۴۹. فرض می‌کنیم، عددهای مثبت $y\in\mathbf{Q}$، x درمعادلهٔ مفروض، صدق کنند. ثابت می‌کنیم، در این صورت، عدد مثبت

$$z=\frac{y}{x}\in\mathbf{Q}$$

عددی طبیعی است. از معادله به‌دست می‌آید:

$$x^{x+xz}=(x+xz)^{xz}\Rightarrow x^{۱+z}=x^z(۱+z)^z$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $x=(۱+z)^z$. قرار می‌گذاریم:

$$z=\frac{p}{q},\ x=\frac{m}{n}$$

که در آن $p, q, m, n\in\mathbf{N}$ و $(p, q)=(m, n)=۱$. به‌این‌رابطه‌می‌رسیم:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^q=\left(\frac{p+q}{q}\right)^p\Rightarrow m^q q^p=n^q(p+q)^p$$

چون $(m^q, n^q)=۱$، بنابراین باید q^p بر n^q بخش‌پذیر باشد. از طرف‌دیگر

$$((p+q)^p, q^p)=(p+q, q)^q=(p, q)^p=1$$

بنابراین، باید n^q بر q^p بخش‌پذیر باشد. در نتیجه $q^p=n^q$ که از آن‌معلوم می‌شود که اگر $q>1$، آن وقت، در تجزیهٔ عدد q^p، به عددهای اول، باید هریك ازمقسوم‌علیه‌های اول توانی‌را داشته‌باشدکه هم مضرب p و هم مضرب q، یعنی مضربی از حاصل‌ضرب آن‌ها، pq، باشد (زیرا p و q، نسبت به‌هم، اول‌اند). به این ترتیب، در تجزیهٔ عدد q به عامل‌های اول، هریك از مقسوم‌علیه‌های اول، توانی دارد که مضربی از q است و این، ممکن نیست (زیرا، به‌ازای هر $q\in\mathbf{N}$، داریم: $q<2^q$). در نتیجه، ثابت شد که $q=1$.
بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$x=(1+z)^z, \quad y=z(1+z)^z \quad (z\in\mathbf{N})$$

آزمایش ثابت می‌کند که، همهٔ زوج مقدارهای $x, y\in\mathbf{N}$، در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند.

۵۰. اگر داشته باشیم:

$$n=m(4k-1) \quad (m, k\in\mathbf{N})$$

آن وقت، این برابری برقرار است:

$$\frac{1}{km}+\frac{1}{km(4k-1)}=\frac{1}{m(4k-1)}=\frac{4}{n}$$

یعنی، جواب معادله، چنین است:

$$x=km, \quad y=km(4k-1)$$

اکنون، فرض می‌کنیم عددهای

$$x=2^q x_1, \quad y=2^r y_1 \quad (q, r\in\mathbf{Z}^+)$$

(x_1 و y_1، عددهایی درست‌اند)، در معادله صدق کنند، دراین صورت، اگر $q<r$، آن وقت عدد

$$n=\frac{4xy}{x+y}=\frac{2^{q+r+2}x_1 y_1}{2^q(x_1+2^{r-q}y_1)}$$

تنها وقتی فرد است که داشته باشیم: $q=q+r+2$، که ممکن نیست، به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که حالت $q>r$ هم ممکن نیست. به‌این ترتیب، $q=r$، و عدد

$$n=\frac{2^{q+2}x_1y_1}{x_1+y_1}$$

عددی فرد است. بنابراین، مجموع عددهای فرد x_1 و y_1 بر ۴ بخش‌پذیر است، یعنی این‌دوعدد، در تقسیم بر۴، به‌باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند. توجه کنیم، اگر در تجزیهٔ عددهای x و y به‌عامل‌های اول به‌صورت $4k-1$ $(k\in\mathbf{N})$ دارای توان یکسان باشند (که می‌تواند صفر هم بشود)، آن وقت، باید داشته باشیم:

$$x_1\equiv y_1 \pmod 4$$

که درست نیست. بنابراین، عدد اول $p=4k-1$ $(k\in\mathbf{N})$ وجود دارد، به‌نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$x_1=p^u x_2,\ y_1=q^v y_2,\ (u,\ v\in\mathbf{Z}^+,\ u\neq v)$$

که در آن‌ها، x_2 و y_2، بر p بخش‌پذیر نیستند. $u<v$ می‌گیریم (بررسی حالت $u>v$ هم به‌طریق مشابهی انجام می‌گیرد). دراین صورت $u+v>u$ و عدد

$$n=\frac{2^{q+2}p^{u+v}x_2y_2}{p^u(x_2+p^{v-u}y_2)}$$

بر p بخش‌پذیر است، یعنی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$n=mp=m(4k-1)$$

۵۱. مجموعهٔ عددهای موردنظر مسأله را با M نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم، بتوان آن را بــه صورت اجتماع مجموعه‌ای متناهی از تصاعدهای حسابی نشان داد. ثابت می‌کنیم، حتی یکی ازاین تصاعدها، نامتناهی نیست. فرض کنید، به‌ازای مقدارهایی از $a,\ d\in\mathbf{N}$، مجموعهٔ M شامل همهٔ عددهای

به‌صورت $a+jd$ باشد $(j\in \mathbf{Z}^+)$. توجه می‌کنیم که $۳d-۱$ عضو M نیست، زیرا به‌ازای $n=۳d-۱$ و $x=d$ و $y=d(۳d-۱)$، داریم:

$$\frac{۳}{n}=\frac{۳}{۳d-۱}=\frac{۱}{d}+\frac{۱}{d(۳d-۱)}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$$

سپس، اگر $n\notin M$، آن وقت، برای هر مقدار $m\in \mathbf{N}$ داریم: $mn\notin M$، زیرا از برابری

$$\frac{۳}{n}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{۳}{mn}=\frac{۱}{mx}+\frac{۱}{my}$$

m را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط‌های

$$m\equiv -a(\mathrm{mod}\ d)،\ m\geqslant \frac{۱}{۳d-۱}$$

صدق کند، در این صورت عدد

$$m(۳d-۱)\equiv a(\mathrm{mod}\ d)$$

از یک طرف، بـه صورت $a+jd$ $(j\in \mathbf{Z}^+)$ است و، از طرف دیگـر، در مجموعهٔ M نیست. تناقض اخیر نشان می‌دهد، مجموعهٔ M، اجتماع مجموعه‌ای متناهی از تصاعـدهای حسابی متناهی است. یعنی M، مجموعـه‌ای متناهـی است. ثابت می‌کنیم کـه، این هـم، ممکن نیست. برای این‌منظور، تـوجه می‌کنیم که، هر عدد به‌صورت $n=۷^k$ $(k\in \mathbf{Z}^+)$، به‌مجموعهٔ M تعلق دارد. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد، یعنی برابری

$$\frac{۳}{۷^k}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$$

برای بعضی از مقدارهای $x، y\in \mathbf{N}$ و $k\in \mathbf{Z}^+$ بـرقرار باشد. $q=(x، y)$ می‌گیریم، در این صورت داریم: $x=qx_۱$، $y=qy_۱$، $(x_۱، y_۱)=۱$ و

$$\frac{۳}{۷^k}=\frac{x+y}{xy}=\frac{x_۱+y_۱}{qx_۱y_۱}$$

یعنی $۷^k(x_۱+y_۱)=۳qx_۱y_۱$.

توجه‌کنیم که $(x_۱+y_۱ ، x_۱y_۱)=۱$، زیرا اگر $x_۱y_۱$ بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد، باید یکی از عددهای $x_۱$ یا $y_۱$ بر p بخش‌پذیر باشد و دیگری بر آن بخش‌پذیر نباشد، یعنی مجموع $x_۱+y_۱$ هم بر p بخش‌پذیر نیست. ولـی عـدد $۷^k(x_۱+y_۱)$ باید بر $x_۱y_۱$ بخش‌پذیر باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$x_۱=۷^u \text{ و } y_۱=۷^v \quad (u ، v\in\mathbf{Z}^+)$$

$$x_۱=(۲\times۳+۱)^u\equiv۱(\mathrm{mod}۳) ، y_۱=(۲\times۳+۱)^v\equiv۱(\mathrm{mod}۳) ،$$

$$x_۱+y_۱\equiv۲(\mathrm{mod}\ ۳)$$

یعنی $۷^k(x_۱+y_۱)$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست که با برابری

$$۷^k(x_۱+y_۱)=۳qx_۱y_۱$$

متناقض است، و به‌این ترتیب، اثبات را کامل می‌کند.

۵۲. فرض می‌کنیم، برخلاف ادعای مسألـه، عددهای $x ، y\in\mathbf{Z}$، در معادله صدق کنند. در این صورت، x باید عـددی زوج باشد، زیرا درغیر-این صورت

$$x^۲=(۲k+۱)^۲=۴k(k+۱)+۱\equiv۱(\mathrm{mod}\ ۴)$$

و از آن‌جا

$$y^۳=x^۲+۵\equiv۲(\mathrm{mod}\ ۴)$$

که ممکن نیست (زیـرا، بـا فـرد بودن x، مقدار y زوج و بر ۴ بخش‌پذیر است). از زوج بودن عدد x، نتیجه می‌شود:

$$y^۳=x^۲+۵\equiv۱(\mathrm{mod}\ ۴)$$

و بنابراین $\quad y\equiv۱(\mathrm{mod}\ ۴)$

فرض می‌کنیم

$$x=2n,\ y=4m+1\ (n,\ m\in\mathbf{Z})$$

در این صورت، از معادله به‌دست می‌آید:

$$4(n^2+1)=x^2+4=(y^3-1)=(y-1)(y^2+y+1)=$$
$$=4m(16m^2+12m+3)$$

و از آن‌جا

$$n^2+1=md \quad \text{و} \quad d=16m^2+12m+3\equiv 3 \pmod 4$$

توجه‌کنیم کـه، دست‌کم یکی از مقسوم‌علیه‌هـای اول عدد d، باید به‌صورت $p=4l+3$ $(l\in\mathbf{Z}^+)$ باشد. در واقع، چون d عددی فرد است، همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول آن، عددهایی فردند. ولی اگر همهٔ آن‌ها، در تقسیم بر ۴، به‌باقی‌ماندهٔ واحد برسند، آن وقت، عدد d هم (که برابر حاصل‌ضرب توان‌هایی از ایـن مقسوم‌علیه‌هاست)، در تقسیم بر ۴ بـه باقی‌مانـدهٔ واحد می‌رسد. به‌این ترتیب، داریم:

$$n^2+1=md\equiv 0 \pmod p$$

و بنابراین

$$n^2\equiv -1 \pmod p \quad \text{و} \quad n^{p-1}=n^{4l+2}=(n^2)^{2l+1}\equiv -1 \pmod p$$

که با قضیهٔ کوچك فرما (قضیهٔ ۲۵) متناقض است، زیرا بنابراین قضیه

$$n^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

حکم مسأله به‌طور کامل ثابت شد.

§۳. فاکتوریل‌ها و ضریب‌های دوجمله‌ای

۵۳. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار طبیعی $n>2$، داریم:

$$(n!)^2>n^n$$

درواقع، داریم:

$$n!.n!=(1\times 2\times\cdots\times n)[n(n-1)\cdots 1]=(1\times n)[2\times$$
$$\times(n-1)]\cdots(n\times 1)>n^n$$

زیرا به‌ازای $k=2, \ldots, n-1$ داریم

$$1\times n=n\times 1=n,\ k(n-k+1)=(n-k)(k-1)+n>n$$

اگر در نابرابری ثابت شده، فرض کنیم $n=1709198۲$، به‌دست‌می‌آید:

$$(17091982!)^2>17091982^{17091982}$$

۵۴. چون، برای هر مقدار $k=1, 2, \ldots, n-1$ داریم:

$$C_n^{k-1}=C_n^k.\frac{k}{n-k+1},\ C_n^{k+1}=C_n^k.\frac{n-k}{k+1}(C_n^k\neq 0)$$

بنابراین، برابری

$$2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}$$

با برابری زیر هم‌ارز است:

$$2=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1}\Rightarrow (n-2k)^2=n+2 \qquad (*)$$

بنابراین، مقدارمجهول $n\in\mathbf{N}$ باید به‌صورت $n=m^2-2$ باشدکه، در آن، $m\geqslant 2$ عددی طبیعی است. ولی، برای $m=2$، برابری $(*)$ نمی‌تواند به‌ازای تنها مقدار ممکن $k=1$ برقرار باشد. برای $m>2$، این برابری مثلاً به‌ازای $k=\frac{m(m-1)}{2}-1$ برقرار است (این مقدار k، عددی درست است و در نابرابری $0<k<n$ صدق می‌کند، زیرا یکی از عددهای m یا $m-1$ زوج است و، درضمن، برای $m>2$، نابرابری

$$0<\frac{m(m-1)}{2}-1<m^2-2$$

برقرار است). به این ترتیب، مقدارهای مجهول n، عبارتند از همهٔ عددهای

به‌صورت $n=m^2-2$ به‌ازای $m=3, 4, \ldots$.

۵۵. $u\in\mathbf{N}$، z، y، x را عددهایی می‌گیریم که در معادله صدق کنندو از بین x و y و z، بزرگترین عدد را v می‌نامیم. در این صورت $1\leqslant v<u$ و

$$uv!\leqslant u(u-1)!=u!=x!+y!+z!\leqslant 3v!$$

یعنی $uv!\leqslant 3v!$، و، بنابراین $u\leqslant 3$. برای $u=3$ داریم:

$$3!=3v!=x!+y!+z!$$

که تنها برای $x=y=z=v=2$ برقرار است. به‌ازای $u=2$، برای معادله، ریشه‌ای به‌دست نمی‌آید، زیرا در این حالت

$$u!=2<3\leqslant x!+y!+z!$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، تنها یك جواب دارد:

$$x=y=z=2, u=3$$

۵۶. از اتحاد

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای به‌دست می‌آید:

$$C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}=$$

$$=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)$$

با برابر قراردادن ضریب‌های x^n و به‌حساب آوردن برابری

$$C_n^k=C_n^{n-k}(k=0, 1, \ldots, n)$$

به‌این رابطه می‌رسیم:

$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$$

بنابراین

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2}=\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2[(n-k)!]^2}=$$

$$=C_{2n}^{n}[(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\dots+(C_n^n)^2]=(C_{2n}^{n})^2$$

۵۷. الف) عدد مثبت

$$\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}=\left(1-\frac{m}{m+1}\right)C_{2m}^{m}=C_{2m}^{m}-\frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!}=$$

$$=C_{2m}^{m}-C_{2m}^{m-1}$$

عددی درست است، زیرا C_{2m}^{m} و C_{2m}^{m-1}، برای $m\in\mathbf{N}$، عددهایی طبیعی اند.

ب) عدد $m\in\mathbf{N}$ را مفروض می گیریم. چون به ازای $n=m$، عدد

$$\frac{k}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}=\frac{k}{2m+1}$$

باید عددی طبیعی باشد، بنا براین، مقدار مجهول $k\in\mathbf{N}$ باید بر $2m+1$ بخش‌پذیر باشد و، بنا براین $k\geqslant 2m+1$. اگر $k=2m+1$، آن وقت، برای $n=m$، عدد مثبت

$$\frac{k}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}$$

عددی طبیعی است و، برای $n>m$، برابر است با

$$\frac{2m+1}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}=\left(1-\frac{n-m}{n+m+1}\right)C_{2n}^{n+m}=$$

$$=C_{2n}^{n+m}-\frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!}=C_{2n}^{n+m}-C_{2n}^{n+m+1}$$

یعنی، عددی است درست؛ زیرا C_{2n}^{n+m} و C_{2n}^{n+m+1} عددهایی طبیعی اند. بنا براین، حداقل مقدار k، برابر است با $2m+1$.

۵۸. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای C_n^k، C_{n+1}^k، ...، C_{n+k}^k را $d\in\mathbf{N}$ می گیریم. در این صورت، عددهای

$$C_n^{k-1}=C_{n+1}^k-C_n^k,\ C_{n+1}^{k-1}=C_{n+2}^k-C_{n+1}^k,\ \ldots,$$
$$C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k}^k-C_{n+k-1}^k$$

هم، همان مقسوم‌علیه مشترك d را دارند. بـه همین ترتیب، معلوم می‌شود که عددهای

$$C_n^{k-2},\ \ldots,\ C_{n+k-2}^{k-2}$$

دارای مقسوم‌علیه مشترك d هستند. اگر استدلال را، به‌همین شیوه ادامه‌دهیم، سرانجام بـه ایـن نتیجه می‌رسیم کـه $C_n^0=1$ باید بر d بخش‌پذیر باشد. بنابراین $d=1$.

۵۹. با استقرای ریاضی روی $m\in\mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$S_{m,n}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}$$

برای $m=1$، برابری برقرار است:

$$S_{1,n}=1-\frac{(n+2)!}{n!(n+1)}=1-(n+2)=-\frac{(n+1)!}{n!}$$

اکنون، فرض می‌کنیم، برابری، برای مقداری از $m\in\mathbf{N}$ برقرار باشد، در این صورت داریم:

$$S_{m+1,n}=S_{m,n}+(-1)^{m+1}\frac{(n+m+2)!}{n!(n+m+1)}=$$
$$=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}+(-1)^{m+1}\frac{(n+m)!(n+m+2)}{n!}=$$
$$=(-1)^{m+1}\frac{(n+m)!}{n!}(-1+n+m+2)=(-1)^{m+1}\frac{(n+m+1)!}{n!}$$

یعنی، برابری، برای مقدار $m+1$ هم برقرار است. بنابراین، عدد

$$S_{m,n}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!m!}\cdot m!=(-1)^m C_{n+m}^m\cdot m!$$

بر $m!$ بخش‌پذیر است، زیرا C_{n+m}^m عددی است طبیعی.

سرانجام، توجه می‌کنیم که $S_{m,n}$ به‌ازای $n=2$، $m=3$ برابر -60 می‌شود که بر $m!(n+1)=18$ بخش‌پذیر نیست. مسأله حل شد.

۶۰. عدد اول $p>2$ را درنظر می‌گیریم (به‌ازای $p=2$، حکم مسأله درست است، زیرا، عدد C_4^2-2 یعنی ۴، بر 2^2 بخش‌پذیر است).

قبل از همه، داریم:

$$C_{2p}^p=\frac{(2p)}{(p!)^2}=\frac{2p(2p-1)!}{p(p-1)!p!}=2C_{2p-1}^{p-1}$$

اگر هم‌نهشتی

$$(2p-k)(p+k)\equiv k(p-k)(\mathrm{mod}\ p^2)$$

را برای هریك از مقدارهای $k=1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ بنویسیم ($\frac{p-1}{2}$، عددی درست است)، معلوم می‌شود که حاصل‌ضرب

$$(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)=$$

$$=[(2p-1)(p+1)][(2p-2)(p+2)]\cdots$$

$$\cdots\left[\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right]\equiv[1(p-1)][2(p-2)]\cdots$$

$$\left[\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\right](\mathrm{mod}\ p^2)$$

نسبت به‌مدول p^2 با $(p-1)!$ هم‌نهشت است. بنابراین، برای عددی مثل $m\in\mathbf{Z}$، داریم:

$$C_{۲p-۱}^{p-۱}=\frac{(۲p-۱)(۲p-۲)\cdots(p+۱)}{(p-۱)!}=\frac{mp^۲+(p-۱)!}{(p-۱)!}=$$

$$=\frac{mp^۲}{(p-۱)!}+۱$$

چون عدد $\frac{mp^۲}{(p-۱)!}=C_{۲p-۱}^{p-۱}-۱$ ، عـددی درست است و، درضمن، دو عدد $p^۲$ و $(p-۱)!$ نسبت به‌هم اول‌اند، بنا براین

$$m=l(p-۱)! \quad (l\in\mathbf{Z})$$

به‌این ترتیب، داریم:

$$C_{۲p-۱}^{p-۱}=\frac{l(p-۱)!p^۲}{(p-۱)!}+۱=lp^۲+۱\equiv۱(\mathrm{mod}\ p^۲),$$

$$C_{۲p}^{p}=۲C_{۲p-۱}^{p-۱}\equiv۲(\mathrm{mod}\ p^۲)$$

که از آن‌جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

۶۱. فرض می‌کنیم:

$$f(x)=۱!+۲!+\cdots+(x+۱)!$$

در این صورت

$$f(۱)=۳,\ \ f(۲)=۹=۳^{۱+۱},\ \ f(۳)=۳۳=۳\times۱۱$$

به‌ازای $x>۳$، معلوم می‌شود که مقدار

$$f(x)=f(۳)+۵!+\cdots+(x+۱)!\equiv۳(\mathrm{mod}\ ۵)$$

نمی‌تواند مجذور یك عدد درست باشد، زیرا به‌ازای هر $k\in\mathbf{Z}$ داریم:

$$(۵k)^۲=۲۵k^۲\equiv۰(\mathrm{mod}\ ۵),$$

$$(۵k\pm)^۲=۲۵k^۲\pm۱۰k+۱\equiv۱(\mathrm{mod}\ ۵),$$

$$(۵k\pm۲)^۲=۲۵k^۲\pm۲۰k+۴\equiv۴(\mathrm{mod}\ ۵)$$

بنا براین، $z=۱$، به‌ازای هیچ مقدار $x\neq۲$ و y، در معادله صدق نمی‌کند،

ثابت می کنیم کــه بــه‌ازای بقیهٔ مقدارهای $z \geqslant ۲$ هم، این برابری برقرار نیست. آزمایش نشان می‌دهد که هریك از عددهای $f(x)$، وقتی که x برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷ باشد، بر ۳ بخش‌پــذیــر است، ولی بر ۲۷ بخش‌پذیر نیست، یعنی نمی‌تواند به‌صورت

$$f(x)=y^{z+۱},\ \ z\geqslant ۲$$

باشد برای $x>۷$ هم به‌همین نتیجه می‌توان رسید، زیرا در این حالت

$$f(x)=f(۷)+۹!+\ldots+(x+۱)!\equiv f(۷)(\text{mod } ۲۷)$$

سرانجام، به‌ازای $x=۶$ به‌دست می‌آید که عدد

$$f(۶)=۵۹۱۳=۳^۴\times ۷۳$$

نمی‌تواند به‌صورت موردنظر باشد. به‌این ترتیب، مسأله تنها یك جواب‌دارد.

$$x=۲،\ y=۳،\ z=۱$$

۶۴. فرض می‌کنیم x، $y\in\mathbf{N}$ در معادله صدق کند. عدد $p=y+۱$ باید عددی اول باشد. درواقع، اگــر p بر عددی مثل $(۱<d<y+۱)$ بخش‌پذیر باشد، آن وقت $y!$ هم بر d بخش‌پذیر است و باید داشته باشیم:

$$۱=(y+۱)^x-y!\equiv ۰(\text{mod } d)$$

که ممکن نیست. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$p^x-۱=(p-۱)!$$

و از آن نتیجه می‌شود: $p<۷$. در واقع، اگر فرض کنیم $p\geqslant ۷$، آن وقت، با ساده‌کردن دو طرف معادله بر $p-۱$، به‌این برابری می‌رسیم:

$$p^{x-۱}+p^{x-۲}+\ldots+۱=(p-۲)!$$

که در آن، سمت راست برابری، بر $\frac{p-۱}{۲}\times ۲$، یعنی $p-۱$ بخش‌پذیر است (زیرا به‌ازای $p\geqslant ۷$ داریم: $۲<\frac{p-۱}{۲}\leqslant p-۲$ و $\frac{p-۱}{۲}\in\mathbf{Z}$)،

درحالی‌که سمت چپ آن، عبارت است از مجموع x عدد به‌صورت

$$p^i \equiv ۱^i \equiv ۱ (\mod (p-۱)) \quad (i = ۰, ۱, \ldots, x-۱)$$

بنابراین باید داشته باشیم: $x \equiv ۰ (\mod (p-۱))$، یعنی $x \geqslant p-۱$. ولی این ممکن نیست، زیرا

$$p^{x-۱} < p^{x-۱} + \ldots + ۱ = (p-۲)! < (p-۲)^{p-۲} < p^{p-۲}$$

یعنی $x < p-۱$. به‌این ترتیب، عدد اول $p < ۷$ می‌تواند تنها یکی از عددهای ۲، ۳ یا ۵ باشد. اگر $p = ۲$، آن وقت

$$۲^x - ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۱, y = ۱$$

اگر $p = ۳$، آن وقت

$$۳^x - ۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱, y = ۲$$

اگر $p = ۵$، آن وقت

$$۵^x - ۱ = ۲۴ \Rightarrow x = ۲, y = ۴$$

معادله، سه جواب برای (x, y)، در مجموعهٔ عددهای طبیعی دارد:

$$(۱, ۱); \ (۱, ۲); \ (۲, ۴)$$

۶۳. فرض کنید:

$$l_k = \frac{m_k}{k} = \frac{n!}{k} + ۱, \ (k = ۱, \ldots, n)$$

ثابت می‌کنیم، اگر p مقسوم‌علیه اولی از l_k باشد، آن‌وقت عدد p، مقسوم‌علیه هیچ‌یك از عددهای $m_j \ (j \neq k)$ نیست. اگر این اثبات انجام گیرد، به‌معنای آن است که $m_k = k \cdot l_k$ هم بر p بخش‌پذیر است و، بنابراین، p همان عدد مجهول است.

فرض می‌کنیم l_k بر p بخش‌پذیر باشد و، در ضمن، m_j هم به‌ازای مقداری از $j \neq k$، بر p بخش‌پذیر شود. در این صورت، یا l_j بر p بخش‌پذیر است و یا j بر p. حالت $j : p$ ممکن نیست، زیرا عدد j، یکی

از عامل‌ها در ضرب زیر است:

$$۱\times۲\times\cdots\times(k-۱)(k+۱)\cdots n=l_k-۱$$

یعنی باید $(l_k-۱)$ بر j بخش‌پذیر باشد و

$$(j، l_k)=(j، ۱)=۱$$

این باقی می‌ماند که حالت $p \vdots l_k$، $p \vdots l_j$ $(k\neq j)$ را بررسی کنیم: $k\leqslant n$ می‌گیریم. آن وقت، اگر $p\neq k$، آن‌گاه دو عدد p و l_k نسبت به‌هم اول خواهند بود (اثبات این حقیقت، شبیه استدلالی است که در بالا برای j آوردیم)؛ و اگر $p\neq j$، آن‌گاه دو عدد p و l_j نسبت به‌هم اول‌اند (اثبات به همان ترتیب). به‌این ترتیب، در هر حالتی، عدد p، نسبت به‌یکی از دو عدد l_k یا l_j اول است و، در نتیجه، نابرابری $p\leqslant n$ ممکن نیست. $p>n$ می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$k-j=m_k-m_j=kl_k-jl_j\equiv ۰(\mathrm{mod}\ p)$$

یعنی $(k-j)$ بر p بخش‌پذیر است، که ممکن نیست، زیرا

$$۰<|k-j|<n<p$$

حکم به‌طور کامل ثابت شد.

۶۴. توان عدد ۲، در تجزیهٔ عدد $l!$ به‌عامل‌های اول، برابر است با

$$\left[\frac{l}{۲}\right]+\left[\frac{l}{۴}\right]+\left[\frac{l}{۸}\right]+\cdots$$

(قضیهٔ ۲۰ را ببینید). بنابراین، عدد $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$، تنها وقتی فرد است که، در تجزیهٔ عدد C_n^k به‌عددهای اول، بزرگترین توان ۲، یعنی

$$d=\left(\left[\frac{n}{۲}\right]-\left[\frac{k}{۲}\right]-\left[\frac{n-k}{۲}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{۴}\right]-\left[\frac{k}{۴}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{n-k}{۴}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{۸}\right]-\left[\frac{k}{۸}\right]-\left[\frac{n-k}{۸}\right]\right)+\cdots$$

... صفر باشد (وقتی که $m\in\mathbf{N}$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، عددهای $\left[\frac{n}{2^m}\right]$، $\left[\frac{k}{2^m}\right]$ و $\left[\frac{n-k}{2^m}\right]$، برابر صفر می‌شوند). از برابری

$$\frac{n}{2^m}=\frac{k}{2^m}+\frac{n-k}{2^m}=\left[\frac{k}{2^m}\right]+\left[\frac{n-k}{2^m}\right]+\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}$$

نتیجه می‌شود که، هریك از عددهای

$$\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{k}{2^m}\right]-\left[\frac{n-k}{2^m}\right]=\left[\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}\right]$$

برای $m\in\mathbf{N}$، غیر منفی‌اند. بنابراین، برابری $d=0$، تنها وقتی ممکن است که، برای همهٔ مقدارهای $m\in\mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}<1$$

ثابت می‌کنیم که، شرط اخیر، هم‌ارز شرطی است که درصورت‌مسأله، برای عددهای n و k در عددنویسی به مبنای ۲، آمده است. فرض می‌کنیم، در هر مرتبهٔ عدد n، درعددنویسی به‌مبنای ۲، با رقمی سروکار داشته باشیم، که از رقم همان مرتبه در عدد k، کوچکتر نباشد. در این صورت، برای‌هر $m\in\mathbf{N}$ داریم:

$$\left\{\frac{n}{2^m}\right\}\geqslant\left\{\frac{k}{2^m}\right\}$$

بنابراین

$$\left\{\frac{m-k}{2^m}\right\}=\left\{\frac{n}{2^m}\right\}-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}<1-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}$$

اکنون، فرض می‌کنیم، درمرتبه‌ای ازعدد n، با رقمی کوچکتر از رقم همان مرتبه در عدد k، سروکار داشته باشیم (که تنها می‌تواند متناظر با رقم‌های ۰ و ۱ باشد). در این صورت، برای مقداری از $m\in\mathbf{N}$، داریم:

$$\left\{\frac{n}{۲^m}\right\}<\left\{\frac{k}{۲^m}\right\}$$

بنابراین

$$\left\{\frac{n-k}{۲^m}\right\}=\left\{\frac{n}{۲^m}\right\}-\left\{\frac{k}{۲^m}\right\}+۱\geqslant ۱-\left\{\frac{k}{۲^m}\right\}$$

به‌این ترتیب، هم‌ارزی دو حکم مذکور و، در نتیجه، حکم مسأله، ثابت شد.

۶۵. ثابت می‌کنیم، شرط ب)، با شرط زیر هم‌ارز است:

ج) $n=p^t l+(p^t-۱)$ که در آن، $t\in\mathbf{Z}^+$، $l\in\mathbf{N}$ و $l<p$. درواقع، از شرط ب) به‌دست می‌آید:

$$n=p^s m-۱=p^s(m-۱)+(p^s-۱)$$

که در آن $s\in\mathbf{Z}^+$، $m\in\mathbf{N}$ و $m<p$. اگر $m>۱$، فرض می‌کنیم:

$$t=s،\ l=m-۱>۰$$

اگر $m=۱$، آن وقت $s>۰$، زیرا در غیراین صورت

$$n=p^{\circ}.۱-۱=۰\notin\mathbf{N}$$

بنابراین

$$n=p^{s-۱}.p-۱=p^{s-۱}(p-۱)+(p^{s-۱}-۱)$$

و می‌توان فرض کرد: $t=s-۱\geqslant ۰$، $l=p-۱<p$. در هر دو حالت، شرط ج) برقرار است. از طرف دیگر، از شرط ج) داریم:

$$n=p^t l+(p^t-۱)=p^t(l+۱)-۱$$

اگر $l+۱<p$، آن‌گاه

$$m=l+۱،\ s=t$$

و اگر $l+۱=p$، آن‌گاه

$$m=۱،\ s=t+۱$$

برای عدد مفروض $n\in\mathbf{N}$، عددی مثل $t\in\mathbf{Z}^+$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که

$$p^t \leqslant n < p^{t+1}$$

از آن‌جا

$$n = p^t l + r \quad (0 \leqslant r < p^t, \ 1 \leqslant l < p)$$

از آن‌جا که، بزرگتریـن توان عدد اول p، که $q!$ بر آن بخش‌پذیر باشد، برابر است با

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{q}{p^2}\right] + \left[\frac{q}{p^3}\right] + \cdots$$

آن وقت، بزرگترین توان p، که عدد

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

بر آن بخش‌پذیر باشد، برابر است با

$$d_k = \left(\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{k}{p}\right] - \left[\frac{n-k}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{p^2}\right] - \left[\frac{k}{p^2}\right] - \left[\frac{n-k}{p^2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{p^3}\right] - \left[\frac{k}{p^3}\right] - \left[\frac{n-k}{p^3}\right]\right) + \cdots$$

(بـه‌ازای $i > t$، هـریك از عددهـای $\left[\frac{n}{p^i}\right]$، $\left[\frac{k}{p^i}\right]$ و $\left[\frac{n-k}{p^i}\right]$، برابر صفرند). از رابطهٔ

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{k}{p^i} + \frac{n-k}{p^i}\right] \geqslant \left[\left[\frac{k}{p^i}\right] + \left[\frac{n-k}{p^i}\right]\right] = \left[\frac{k}{p^i}\right] + \left[\frac{n-k}{p^i}\right]$$

معلوم می‌شود که، تنها وقتی $d_k = 0$ می‌شود که داشته باشیم:

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = \left[\frac{k}{p^i}\right] + \left[\frac{n-k}{p^i}\right] \quad (i = 0, 1, \ldots, t)$$

ثابت می‌کنیم، این برابری، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$r = p^t - ۱$$

یعنی همان شرط ج). در واقع، اگر $r \leqslant p^t - ۲$، فرض می‌کنیم: $k = p^t - ۱$، $i = t$. در این صورت داریم:

$$\left[\frac{k}{p^t}\right] = \left[\frac{p^t - ۱}{p^t}\right] = ۰، \left[\frac{n-k}{p^t}\right] \leqslant \left[\frac{p^t - ۱}{p^t}\right] = l - ۱،$$

$$\left[\frac{n}{p^t}\right] = \left[\frac{p^t l + r}{p^t}\right] = l، \; l > ۰ + (l - ۱)$$

بنابراین، برابری بالا و، همراه با آن، شرط الف) برقرار نمی‌شود. اکنون، فرض کنید شرط ج) برقرار باشد،آن وقت برای همهٔ مقدارهای

$$i = ۰، ۱، \ldots، t؛ \; k = ۰، ۱، \ldots، n$$

به‌دست می‌آید:

$$n = p^i\left[\frac{n}{p^i}\right] + (p^i - ۱)،$$

$$k = p^i\left[\frac{k}{p^i}\right] + q، \; ۰ \leqslant q < p^i،$$

$$\left[\frac{n-k}{p^i}\right] = \left[\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{k}{p^i}\right] + \frac{p^i - (q+۱)}{p^i}\right] = \left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{k}{p^i}\right]$$

زیرا $۰ \leqslant p^i - (q+۱) < p^i$. به‌این ترتیب، به ازای $k = ۰، ۱، \ldots، n$، داریم: $d_k = ۰$، یعنی شرط (الف) برقرار است. اثبات به‌پایان می‌رسد.

۶۶. فرض می‌کنیم، عدد

$$۰/h_۱h_۲h_۳\ldots$$

گویا باشد. بنابراین باید عددهای $N، T \in \mathbf{N}$ وجود داشته باشند که، برای آن‌ها، برابری $h_{n+T} = h_n$ بـه ازای همهٔ مقدارهای $n \geqslant N$ برقرار باشد.

ثابت می‌کنیم، عدد $T_۱$ وجود دارد که بر T بخش‌پذیر و آخرین رقم غیرصفر آن برابر واحد است. درواقع، فرض کنید:

$$T=۲^{\alpha}.۵^{\beta}.p \quad (\alpha، \beta\in\mathbf{Z}^{+})$$

(عدد p، بر ۲ یا ۵ بخش‌پذیر نیست). در ایـن صورت، آخرین رقم غیر-صفر عدد

$$T_{\circ}=۲^{\beta}.۵^{\alpha}.T=۲^{\alpha+\beta}.۵^{\alpha+\beta}.p=۱۰^{\alpha+\beta}.p$$

فرد و مخالف با ۵ است. اگراین رقم برابر واحد باشد، آن وقت $T_۱=T_{\circ}$ می‌گیریم؛ اگر برابر ۳ باشد، فرض می‌کنیم $T_۱=۷T_{\circ}$؛ اگر برابر ۷ باشد $T_۱=۳T_{\circ}$ می‌گیریم و، سرانجام، اگـر بـرابـر ۹ باشد، فرض می‌کنیم $T_۱=۹T_{\circ}$. در این حالت‌ها، آخرین رقم غیرصفر عدد $T_۱$، بـه ترتیب، بر آخرین رقم غیرصفر عددهای ۱، ۲۱، ۲۱ و ۸۱ منطبق می‌شود. به‌این‌ترتیب، به عدد

$$T_۱=۱۰^{m}(۱۰a+۱) \quad (m، a\in\mathbf{Z}^{+})$$

می‌رسیم کـه در بـرابـری $h_{n+T_۱}=h_n$ صـدق می‌کند $(n\geqslant N)$. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، داریم: $h_n\neq ۵$. درواقع، توان عدد ۲، در تجزیه عدد $n!$ به‌عامل‌های اول، برابر است با

$$\gamma=\left[\frac{n}{۲}\right]+\left[\frac{n}{۲^۲}\right]+\left[\frac{n}{۲^۳}\right]+\cdots$$

و توان ۵ در این تجزیه:

$$\delta=\left[\frac{n}{۵}\right]+\left[\frac{n}{۵^۲}\right]+\left[\frac{n}{۵^۳}\right]+\cdots$$

(قضیهٔ ۲۰ را ببینید). چـون برای هـر $i\in\mathbf{N}$ داریم: $\left[\frac{n}{۵^i}\right]\geqslant\left[\frac{n}{۲^i}\right]$، بنابراین

$$n!=۲^{\gamma}.۵^{\delta}.q=۱۰^{\delta}.۲^{\gamma-\delta}.q \quad و \quad \gamma\geqslant\delta$$

که درآن، عدد q بر ۲ و بر ۵ بخش‌پذیر نیست، یعنی آخرین رقم غیرصفر عدد $n!$، برآخرین رقم عدد $2^{\gamma-\delta}.q$ منطبق و درضمن مخالف ۵ است. عدد $b\in\mathbf{N}$ را آن‌قدر بزرگ می‌گیریم که نابرابری

$$M=10^m(10b+1)>N$$

برقرار باشد و h_{M-1} را h می‌نامیم. در این صورت

$$(M-1)!=10^k(10c+h),\quad (h, c\in\mathbf{Z}^+)$$

و از آن‌جا، به‌این برابری می‌رسیم:

$$M!=(M-1)!M=10^k(10c+h).10^m(10b+1)=$$

$$=10^{k+m}[10(10bc+hb+c)+h]$$

و بنابراین $h_M=h$. سپس $h_{M-1+T_1}=h_{M-1}=h$؛ از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$(M-1+T_1)!=10^l(10d+h),\quad (l, d\in\mathbf{Z}^+)$$

بنابراین داریم:

$$(M+T_1)!=(M-1+T_1)!(M+T_1)=$$

$$=10^l(10d+h)[10^m(10b+1)+10^m(10a+1)]=$$

$$=10^{m+l}(10d+h)[10(a+b)+2]=$$

$$=10^{m+l}[10(10ad+10bd+ah+bh+2d)+2h]$$

یعنی مقدار h_{M+T_1}، منطبق بر آخرین رقم عدد $2h$ و مخالف صفر است (زیرا $h\neq 0$ و $h\neq 5$). ازطرف دیگر، این رقم باید برابر $h_M=h$ باشد، که به‌ازای هیچ یك از مقدارهای

$$h=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$$

ممکن نیست، تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۶۷. $X=A\bigcup B$ می‌گیریـم و برای مشخص بـودن وضع، فرض می‌کنیم $۵\in A$. فرض می‌کنیم در هیچ یك از دو مجموعهٔ A و B، نتوان سه عدد پیدا کرد، به نحوی که، مجموع دو تا از آن‌ها، مساوی دوبرابر دیگری باشد. اگر $۳\in A$، آن وقت $۱\in B$، $۴\in B$ و $۷\in B$ که فرض ما را نقض می‌کند، زیرا ۷+۱ دوبرابر ۴ است. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد کـه ۷ هم نمی‌تواند عضو A باشد. پس $۳\in B$ و $۷\in B$. یکی از دو عدد ۴ یا ۶ باید به مجموعهٔ B تعلق داشته باشد، زیرا ۴ و ۵ و ۶ نمی‌توانند باهم متعلق به A باشند (۴+۶ دوبرابر ۵ است).

فرض کنید $۴\in B$ (حالت $۶\in B$ هم، به‌همین ترتیب مورد بررسی قرار می‌گیرد)، در این صورت

$$۲\in A \qquad (\text{در غیر این صورت } \{۲،۳،۴\}\subset B)$$

$$۸\in B \qquad (\text{در غیر این صورت } \{۲،۵،۸\}\subset A)$$

$$۶\in A \qquad (\text{در غیر این صورت } \{۴،۶،۸\}\subset B)$$

$$۹\in A \qquad (\text{در غیر این صورت } \{۷،۸،۹\}\subset B)$$

اگر $۱\in A$، آن وقت

$$\{۱،۵،۹\}\subset A$$

و اگر $۱\in B$، آن وقت

$$\{۱،۴،۷\}\subset B$$

و در هر حال، فرض ما نقض می‌شود.

۶۸. برای هر مقدار $i،j\in\{۱،۲،...،۷\}$، تعداد عددهایی کـه، در آن‌ها، رقم j در iامین ردیف قرار گرفته باشد، برابر است با !۶. درنتیجه، مجموع همهٔ عددها، برابر است با

$$(6!\times 1+\dots+6!\times 7)+(6!\times 1+\dots+6!\times 7)10+$$
$$+(6!\times 1+\dots+6!\times 7)10^{2}+\dots+(6!\times 1+\dots+6!\times$$
$$\times 7)10^{6}=6!(1+2+\dots+7)(1+10+\dots+10^{6})=270\times$$
$$\times 28\times 1111111=22399997760$$

۶۹. همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم بر ۱۰۰ را، به این ترتیب، گروه‌بندی می‌کنیم:

$$\{0\},\ \{1, 99\},\ \{2, 98\},\ \dots,\ \{49, 51\},\ \{50\}$$

از آن‌جاکه تعداد گروه‌ها برابر ۵۱ و تعداد عددهای مفروض برابر ۵۲ است، بنابراصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دست کم دوعدد پیدا می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۱۰۰، با یکی از این گروه‌ها تطبیق می‌کند. همین دو عدد، عددهای مطلوب‌اند (اگر باقی‌ماندهٔ دوعدد بر ۱۰۰ یکی باشد، تفاضل آن‌ها و اگر باقی‌ماندهٔ دو عدد بر ۱۰۰ مختلف باشد، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است).

۷۰. فرض کنید، برای مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی a_1، a_2، ...، a_n است، حکم مسأله درست نباشد. در این صورت، هیچ کدام از عددهای

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \dots,\ S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

بر n بخش‌پذیر نیستند. از آن‌جا که، در تقسیم بر عدد n، به تعداد $(n-1)$ باقی‌ماندهٔ ممکن وجود دارد، بنابراین، طبق اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دو عدد S_i و S_j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ پیدا می‌شود که، در تقسیم بر n، باقی‌مانده‌های برابر داشته باشند. بنابراین، تفاضل

$$S_j-S_i=a_{i+1}+\dots+a_j$$

بر n بخش‌پذیر است، چیزی که فرض ما را نقض، و درستی حکم را ثابت می‌کند.

۷۱. $2n$ عدد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, k-a_1, k-a_2, \dots, k-a_n$$

چون $2n>m$، بنابراین، دست‌کم دو تا از آن‌ها، در تقسیم بر m، به باقی‌مانده‌های برابر می‌رسند. با توجه به‌فرض مسأله، a_1، ...، a_n، در تقسیم بر m، باقی‌مانده‌های مختلف دارند؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که عددهای

$$k-a_1, k-a_2, \dots, k-a_n$$

هم، درتقسیم بر n، به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند. بنابراین، دو عددی که درتقسیم بر m، دارای یك باقی‌مانده هستند، باید به‌صورت a_i و $k-a_j$ باشند (برای اندیس‌هایی مثل i و j)، دراین‌صورت، تفاضل این دو عدد، یعنی a_i+a_j-k، باید بر m بخش‌پذیر باشد. حکم مسأله ثابت شد.

۷۲. از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، حکم مسأله، نادرست باشد. دراین‌صورت، بین ۱۹ عدد طبیعی

$$a_{20}-a_{19}, a_{19}-a_{18}, \dots, a_2-a_1$$

چهار عدد برابر، پیدا نمی‌شود. بنابراین، دربین آن‌ها، از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، نمی‌توان بیش از سه بار پیدا کرد. درنتیجه، دست‌کم یکی از این عددها، از ۶ بزرگتر است (زیرا، تعداد عددهایی که از ۶ تجاوز نمی‌کنند)، حداکثر برابر ۱۸ است؛ دست‌کم سه تا از ۱۸ عدد بقیه، از ۵ بزرگترند، دست‌کم سه تا از ۱۵ عدد بقیه از ۴ بزرگترند و غیره. بنابراین، مجموع آن‌ها

$$(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\dots+(a_2-a_1)\geqslant$$
$$\geqslant 7+(6+6+6)+(5+5+5)+\dots+(1+1+1)=70$$

درحالی‌که $a_{20}-a_1\leqslant 70-1=69$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۷۳. دست‌کم دریکی از این ۷ زیرمجموعه، تعداد عضوها کمتر از ۱۵ نیست (در غیر این‌صورت، در همهٔ زیرمجموعه‌ها، نمی‌تواند بیش از 14×7، یعنی ۹۸ عضو وجود داشته باشد). هردو عدد a و b $(a>b)$ از

این زیرمجموعه را، با تفاضل $a-b$ متناظر می‌کنیم. در این صورت، دست کم به تعداد

$$C_{۱۵}^{۲}=\frac{۱۵\times۱۴}{۲}=۱۰۵$$

تفاضل به دست می‌آید که، در بین آن‌ها، به ناچار تفاضل‌های برابر وجود دارد (زیرا، مقدار تفاضل‌ها، بیش از ۹۹ مقدار ۱، ۲، ...، ۹۹ را نمی‌توانند قبول کنند). فرض کنید، برای دو زوج عدد $a>b$ و $c>d$ داشته باشیم:

$$a-b=c-d \Longrightarrow a+d=b+c$$

($a\neq c$، $b\neq d$). درحالتی هم که $a=d$ (یا $b=c$؛ برابری دیگری ممکن نیست)، آن وقت $b+c=۲a$ (یا $a+d=۲b$). حکم ثابت شد.

۷۴. فرض می‌کنیم، برخلاف ادعای مسأله، در بازه‌ای به طول $\frac{۱}{n}$، بیش از $\frac{n+۱}{۲}$ کسر ساده نشدنی $\frac{p}{q}$ وجود داشته باشد که، در آن، q می‌تواند برابر ۱، ۲، ... یا n باشد. ثابت می‌کنیم، بین مخرج‌های این کسرها، دو مخرج وجود دارد که یکی از آن‌ها بر دیگری بخش‌پذیر است. هر یك از مخرج‌ها را، به‌صورت $۲^r s$ درنظر می‌گیریم که، در آن، s عددی فرد و $r\in\mathbf{Z}^+$. تعداد عددهای فرد، بین عددهای ۱، ۲، ...، n، برابر است با $\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$ (یعنی، کمتر از تعداد مخرج‌ها). بنابراین، دو مخرج

$$q=۲^{r}\cdot s \text{ و } q_۱=۲^{r_۱}\cdot s_۱$$

پیدا می‌شود که، برای آن‌ها، $s=s_۱$ و $r\leqslant r_۱$. در این صورت، یکی از آن‌ها، بر دیگری بخش‌پذیر است، یعنی $q_۱=kq$. به این ترتیب، بین کسرها، می‌توان دو کسر مختلف به‌صورت $\frac{m}{q}$ و $\frac{l}{kq}$ انتخاب کرد ($kq\leqslant n$).

در این صورت

$$\left|\frac{m}{q}-\frac{l}{kq}\right|<\frac{۱}{n}$$

زیرا، هر دو عدد دربازهٔ به طول $\frac{1}{n}$ قرار دارند. بنابراین $km-l=0$،
زیرا، اگر چنین نباشد، به دست می‌آید:

$$\left|\frac{m}{q}-\frac{l}{kq}\right|=\frac{|km-l|}{kq}\geqslant\frac{1}{kq}\geqslant\frac{1}{n}$$

به این ترتیب

$$\frac{l}{kq}=\frac{km}{kq}=\frac{m}{q} \quad \text{و} \quad km=l$$

یعنی، دو کسر انتخابی، برهم منطبق‌اند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۷۵. تعداد سه تایی‌های $x\leqslant y\leqslant z$ را، از بین عددهای طبیعی، پیدا می‌کنیم، به‌نحوی که مجموعی برابر $6n$ داشته باشند.

به ازای هرمقدار $k=1, 2, \ldots, n$، همهٔ سه تایی‌هایی را می‌نویسیم که، برای آن‌ها $x=2k-1$ و، متناظر با آن‌ها، $x=2k$ باشد:

$$(2k-1,\ 2k-1,\ 6n-4k+2),$$
$$(2k-1,\ 2k,\ 6n-4k+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2k-1,\ 3n-k,\ 3n-k+1),$$

و متناظر با آن‌ها

$$(2k,\ 2k,\ 6n-4k),$$
$$(2k,\ 2k+1,\ 6n-4k-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2k,\ 3n-k,\ 3n-k)$$

بنابراین، تعداد همهٔ این سه تایی‌ها، برابر است با

$$S_k=(۳n-k)-(۲k-۲)+(۳n-k)-(۲k-۱)=$$
$$=۶n-۶k+۳$$

و تعداد همهٔ سه‌تایی‌های موردنظر مسأله

$$\sum_{k=۱}^{n} S_k=\sum_{k=۱}^{n}(۶n-۶k+۳)=\frac{(۶n-۳)+۳}{۲}.n=۳n^۲$$

۷۶. هر گروه از ۶ عدد طبیعی مختلف از ۱ تا ۴۹ (که بدون لطمه‌خوردن به کلیت مسأله، می‌توان آن‌ها را به‌صورت صعودی درنظر گرفت)

$$a_۱<a_۲<a_۳<a_۴<a_۵<a_۶$$

را، متناظر با گروه عددهای به‌صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$a_۱،\ a_۲-۱،\ a_۳-۲،\ a_۴-۳،\ a_۵-۴،\ a_۶-۵$$

در گروه اخیر، تنها وقتی عددهای مختلف وجود دارد که در گروه نخستین عددهای متوالی وجود نداشته باشند و به‌ردیف غیرنزولی نوشته شده باشند. به‌این ترتیب، توانستیم بین مجموعه‌ای شامل ۶ عدد مختلف از ۱ تا ۴۹ که بین آن‌ها عددهای متوالی وجود ندارد، با مجموعهٔ شامل ۶ عدد مختلف از ۱ تا ۴۴، تناظر یك‌به‌یك برقرار کنیم. ۶ عدد مختلف را، از بین عددهای از ۱ تا ۴۴ به $C_{۴۴}^{۶}$ طریق ممکن می‌توان انتخاب کرد. بنابر آن‌چه ثابت کردیم، این تعداد، برابر است با تعداد گروه‌های ۶ عددی ممکن از بین عددهای از ۱ تا ۴۹ که در بین آن‌ها عددهای متوالی وجود نداشته باشد. تعداد همهٔ گروه‌های شامل ۶ عدد مختلف که از بین عددهای از ۱ تا ۴۹ انتخاب شوند، برابر $C_{۴۹}^{۶}$ است، بنابراین، تعداد گروه‌هایی که، در آن‌ها، عددهای متوالی وجود داشته باشد، برابر $C_{۴۹}^{۶}-C_{۴۴}^{۶}$ می‌شود.

۷۷. زیرمجموعه‌های A و B را، با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$ می‌سازیم. $۱\in A$ می‌گیریم وفرض می کنیم توانسته باشیم عددهای از ۱ تا $n-۱$ را به دو زیرمجموعهٔ مطلوب A و B تقسیم کنیم. اکنون، عدد n را درنظر می‌گیریم. اگر عددی مثل

$$k_1 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

پیدا شود که برای آن، داشته باشیم: $c = \frac{k_1}{n}$، آن‌وقت عدد n را در زیرمجموعه‌ای قرار می‌دهیم که شامل عدد k_1 نیست. و اگر عددی مثل

$$k_2 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

وجود داشته باشد که در برابری $c = \frac{n}{k_2}$ صدق کند، آن وقت n را در زیرمجموعه‌ای که شامل k_2 نیست، قرار می‌دهیم. یادآوری می کنیم که، برابری‌های $c = \frac{k_1}{n}$ و $c = \frac{n}{k_2}$ نمی‌توانند به طور هم‌زمان برقرار باشند، زیرا در غیر این صورت، به برابری $k_1 k_2 = n^2$ می‌رسیم که ممکن نیست. بالاخره، اگر عددهای k_1 و k_2 در هیچ کدام از دو زیر مجموعه نباشند، فرض می کنیم $n \in A$.

به‌این‌ترتیب، سرانجام، مجموعهٔ $\mathbf{N}$، به دو زیرمجموعه تقسیم می‌شود که با شرط مسأله سازگارند.

۷۸. چون به‌ازای هرمقدار $i = 1, \dots, n-1$ داریم:

$$b_i - b_{i+1} = (1-n)a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_n +$$
$$+ a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} = 1 - na_i \equiv 1 \pmod n$$

بنابراین،

$$b_{n-1} \equiv b_n + 1 \pmod n,$$
$$b_{n-2} \equiv b_{n-1} + 1 \pmod n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_1 \equiv b_2 + 1 \pmod n$$

در نتیجه، عددهای

$$b_{n-i} \equiv b_n + i \pmod n, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

در تقسیم بر n، باقی‌مانده‌های مختلفی می‌دهند، یعنی با هم برابر نیستند.

۷۹. فرض می‌کنیم، برای مقداری از n، سطری با ویژگی مورد نظر وجود داشته باشد، شمارهٔ ردیف نخستین عدد (از سمت چپ)، از دو عددی را که برابر k هستند، m_k می‌نامیم. دراین صورت، شمارهٔ ردیف عدد دوم، از این دو عدد، برابر m_k+k+1 و مجموع شماره‌های همهٔ $2n$ عدد در سطر، برابر

$$\sum_{k=1}^{n}[m_k+(m_k+k+1)]=2\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{n(n+3)}{2}$$

می‌شود. ازطرف دیگر، مجموع همین $2n$ شماره، برابر است با

$$\sum_{i=1}^{2n} i=n(2n+1)$$

بنابراین

$$2\sum_{k=1}^{n}m_k=n(2n+1)-\frac{n(n+3)}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

در نتیجه، $\frac{n(3n-1)}{4}$ باید عددی درست باشد. از آن‌جاکه، تنها یکی از دو عدد n یا $3n-1$ می‌تواند زوج باشد، بنابراین، همان عدد باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. به‌این‌ترتیب، تنها دو حالت ممکن است: یا $n=4l$ و یا $3n-1=4l'$، یعنی

$$n=4\times\frac{l'+1}{3}-1=4l-1 \quad \text{و} \quad (l, l'\in \mathbb{N})$$

ثابت‌می‌کنیم، هرعدد n که به‌صورت $4l$ یا $4l-1$ باشد، باشرطهای مسأله سازگار است. برای $n=4l$ و $l\geqslant 2$، مثلاً سطر زیر دارای ویژگی مورد نظر است:

$$(4l-4, \ldots, 2l, 4l-2, 4l-3, \ldots, 1, 4l-1, 1, \ldots, 2l-3,$$
$$2l, \ldots, 4l-4, 4l, 4l-3, \ldots, 2l+1, 4l-2, 2l-2, \ldots, 2,$$
$$2l-1, 4l-1, 2, \ldots, 2l-2, 2l+1, \ldots, 4l-3, 2l-1, 4l)$$

نقطه‌ها به معنای یک تصاعد حسابی است با قدر نسبت ۲ یا ۲ — که از جملهٔ قبل از نقطه‌ها آغاز و به‌جملهٔ بعد از نقطه‌ها ختم شده‌است. به‌همین‌ترتیب، برای $n=۴l-۱$ و $l\geqslant ۲$، می‌توان مثلاً این سطر را نوشت:

$$(۴l-۴، \ldots، ۲l، ۴l-۲، ۲l-۳، \ldots، ۱، ۴l-۱، ۱، \ldots، ۲l-۳،$$
$$۲l، \ldots، ۴l-۴، ۲l-۱، ۴l-۳، \ldots، ۲l+۱، ۴l-۲، ۲l-۲، \ldots، ۲،$$
$$۲l-۱، ۴l-۱، ۲، \ldots، ۲l-۲، ۲l+۱، \ldots، ۴l-۳)$$

سرانجام، برای $n=۴$ و $n=۳$، این سطرها را داریم:

$$۲، ۳، ۴، ۲، ۱، ۳، ۱، ۴;$$

$$۲، ۳، ۱، ۲، ۱، ۳$$

به‌این‌ترتیب، شرط‌مسأله، باعددهای به‌صورت $n=۴l$ و $n=۴l-۱$ $(l\in\mathbf{N})$ و تنها با همین عددها، سازگار است.

۸۰. از شرط ۲) نتیجه می‌شود که یا $۱\in M$ یا $(-۱)\in M$. ولی ۱ — عضو M نیست، زیرا، اگر ۱ — عضو M باشد، بنا بر شرط ۱)

$$(-۱)(-۱)=۱\in M$$

که آن‌وقت، با شرط ۲) متناقض می‌شود. بنابراین $۱\in M$. از شرط ۲) نتیجه می‌شود:

$$۱+۱\in M، ۲+۱\in M، ۳+۱\in M، \ldots$$

یعنی $M\supset\mathbf{N}$. اکنون، اگر $\left(-\frac{۱}{m}\right)\in M$ که در آن $m\in\mathbf{N}$، آن وقت، با توجه به شرط ۱)

$$\left(-\frac{۱}{m}\cdot m\right)=(-۱)\in M$$

که درست نیست. بنابراین $\left(-\frac{۱}{m}\right)\notin M$ و $\frac{۱}{m}\in M$ (برای هر $m\in\mathbf{N}$). در این‌جا، از شرط ۱) معلوم می‌شود:

$$n\times\frac{1}{m}=\frac{n}{m}\in M, \quad (n, m\in\mathbf{N})$$

در این صورت $\left(-\frac{n}{m}\right)\notin m$ ، برای $n, m\in\mathbf{N}$. به‌جز این‌ها، از شرط ۲) برمی‌آید که $0\notin M$. حکم ثابت شد.

۸۱. ثابت می‌کنیم، برای مجموعهٔ متناهی M از عددهای مثبت، پایهٔ B وجود دارد. مجموعهٔ S ازعددهای مثبت را، «روپایه» برای M می‌نامیم، وقتی‌که هر عدد از M، به‌صورت حاصل‌ضرب

$$\alpha_1^{i_1}\dots\alpha_m^{i_m}, (\alpha_1, \dots, \alpha_m\in S, i_1, \dots, i_m\in\mathbf{Z})$$

نشان داده شود. مثلاً، خود مجموعهٔ M، یك «روپایه» برای M است. بین همهٔ «روپایه»های M، مجموعهٔ

$$S_0=\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

را انتخاب می‌کنیم که حداقل تعداد عضوها را داشته باشد. ثابت می‌کنیم، اگر $n\geqslant 2$، آن وقت S_0، «پایهٔ» M است. فرض می‌کنیم، برای عضوی‌مثل $u\in M$، بتوانیم نمایش‌های مختلفی به صورت حاصل‌ضرب توان‌های درست عضوهایی از S_0 داشته باشیم:

$$u=\beta_1^{i_1}\dots\beta_n^{i_n}=\beta_1^{j_1}\dots\beta_n^{j_n}$$

یعنی $\beta_1^{k_1}\dots\beta_n^{k_n}=1$ و عددهای درست $k_l=i_l-j_l$، برای همهٔ مقدارهای $l=1, \dots, n$، باهم برابر صفر نیستند. بدون این‌که لطمه‌ای به‌کلی بودن مسأله وارد شود، می‌توان فرض کرد $k_n\neq 0$. فرض کنید:

$$S_1=\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\}, \left(\gamma_l=\beta_l^{\frac{1}{k_n}}, l=1, \dots, n-1\right)$$

در این صورت، هر عضو مجموعهٔ S_0، به‌صورت حاصل‌ضربی از توان‌های درست عضوهای مجموعهٔ S_1 قابل بیان است:

$$\beta_l=\gamma_l^{k_n}(l=1, \dots, n-1); \beta_n=\gamma_1^{-k_1}\dots\gamma_{n-1}^{-k_{n-1}}$$

به‌این ترتیب، مجموعهٔ S_1 «روپایه»ای برای M است و، در ضمن، $n-1$ عضو دارد، که با نوع انتخاب S_0 متناقض است. یعنی S_0، پایهٔ M است. اگر «روپایهٔ» S_0 برای M، شامل یك عضو $\beta\neq 1$ باشد، آن وقت S_0 پایهٔ M خواهد بود، زیرا برابری $\beta^i=\beta^j$ برای $i\neq j$ ممکن نیست. سرانجام، اگر مجموعهٔ $S_0=\{1\}$ «روپایهٔ» M باشد، آن وقت $M=\{1\}$ ومجموعهٔ $S_1=\{2\}$، پایهٔ M است.

۸۲. راه حل اول. چندجمله‌ای

$$P(x)=\left(x+\frac{1}{1}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\dots\left(x+\frac{1}{n}\right)$$

را در نظر می‌گیریم که، با توجه به‌قضیهٔ ویت، به‌این صورت درمی‌آید:

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n$$

که در آن داریم:

$$a_1=\sum_{i_1=1}^{n}\frac{1}{i_1},\ a_2=\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\frac{1}{i_1i_2},\ \dots,\ a_n=\frac{1}{1\times 2\times\dots\times n}$$

در این صورت، مجموع موردنظر مسأله، چنین می‌شود:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=P(1)-1=$$

$$=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{2\times 3\times\dots\times(n-1)}{1\times 2\times\dots\times n}-1=$$

$$=(n+1)-1=n$$

راه حل دوم. فرض می‌کنیم:

$$\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n}\frac{1}{i_1\cdots i_k}=S_n$$

و با استقرای روی n، ثابت می‌کنیم: $S_n=n$.

به‌ازای $n=1$، برابری درست است: $S_1=1$، $n\geqslant 2$ و $S_{n-1}=n-1$ می‌گیریم، در این صورت

$$S_n-S_{n-1}=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k=n}\frac{1}{i_1\ldots i_k}=$$

$$=\frac{1}{n}+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n-1}\frac{1}{i_1\ldots i_l\cdot n}=\frac{1}{n}+\frac{S_{n-1}}{n}$$

یعنی

$$S_n=S_{n-1}+\frac{S_{n-1}}{n}+\frac{1}{n}=(n-1)+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}=n$$

۸۳. بـه ازای $n=1$، تبدیـل $(a_1)=(0)$، با شرط مسأله سازگار است. به‌ازای $n=4$، تبدیل زیر، دارای ویژگی موردنظر است:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 3, 2, 0)$$

n را عددی اول فرض می‌کنیم. بنابر قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، بـرای هر مقدار $k=2, \ldots, n$، عدد b_k وجود دارد کـه، برای آن، داشته باشیم:

$$b_k\equiv 0(\mathrm{mod}\ k-1), \quad b_k\equiv k(\mathrm{mod}\ n)$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $c_k=\dfrac{b_k}{k-1}$ بر n را با a_k نشان می‌دهیم، در این صورت

$$b_k=c_k(k-1)\equiv a_k(k-1)(\mathrm{mod}\ n)$$

$a_1=1$ می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، همهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، باهم فرق دارند. درواقع داریم: $a_n=0$ و $a_k\neq a_n\ (k=1, \ldots, n-1)$، زیرا

$$a_n(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ n), \quad a_1=1, \quad a_k(k-1)\equiv k(\mathrm{mod}\ n)$$

$(k=2, \ldots, n-1)$. سپس، اگـر برابری $a_l=a_k=a$ برقرار باشد، که در آن، $n>k>l>1$، آن وقت داریم:

$$a(kl-k)=a_l(l-1)k\equiv kl(\mathrm{mod}\ n),$$

$$a(kl-l)=a_k(k-1)l\equiv kl(\mathrm{mod}\ n)$$

و از آن‌جا

$$a(k-l)=a(kl-l)-a(kl-k)\equiv 0 \pmod n$$

که ممکن نیست، زیرا

$$(a, n)=(k-l, n)=1$$

سرانجام، در حالت $a_k=a_1$ ($1<k<n$)، بازهم دچار تناقض می‌شویم:

$$k-1=a_k(k-1)\equiv k \pmod n$$

به‌این ترتیب، مجموعهٔ

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

از n عدد مختلف تشکیل شده است و در مجموعهٔ

$$\{0, 1, \dots, n-1\}$$

واقع‌است و، بنابراین، بر آن منطبق‌است. ثابت می‌کنیم، تبدیل حاصل، یعنی

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

با شرط مسأله سازگار است. درواقع، داریم:

$$a_1=1, \quad a_1a_2\cdots a_n=0$$

و به‌ازای $k=2, \dots, n-1$، عددهای

$$a_1a_2a_3\cdots a_k, \ 1\times a_2a_3\cdots a_k, \ 2a_3\cdots a_k, \ (k-1)a_k, \ k$$

در تقسیم بر n، به‌یك باقی‌مانده، یعنی

$$a_1a_2\cdots a_k\equiv k \pmod n$$

می‌رسند. بنابراین، مجموعهٔ باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم عددهای a_1، a_1a_2، $a_1a_2a_3$، ...، $a_1a_2\dots a_n$ بر n، منطبق است بر مجموعهٔ

$$\{1, 2, \dots, n-1, 0\}$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، هیچ‌کدام از عددهای مرکب $n>4$، با شرط

مسأله‌سازگار نیستند. اگرداشته باشیم: $n=p^2$، فرض می‌کنیم $q=2p<n$؛ و در حالت $n\neq p^2$، می‌توان عدد n را بــه‌صورت pq $(1<p<q<n)$ نشان داد در هر دو حالت

$$pq\equiv 0 \pmod n$$

فرض می‌کنیم، تبدیل $(a_1a_2, \dots, a_n)$ وجود داشته باشد، به نحوی کــه با شرط مسأله سازگار باشد. در این صورت

$$a_k\neq 0, \quad (k=1, \dots, n-1)$$

زیرا در غیراین‌صورت

$$a_1\cdots a_k\equiv 0 \pmod n$$

و
$$a_1\cdots a_k a_{k+1}\equiv 0 \pmod n$$

مقدارهای $k,l<n$ را طوری انتخاب می‌کنیم کــه داشته باشیم: $a_k=p$ و $a_l=q$ و فرض می‌کنیم:

$$m=\max(k, l)$$

در این صورت

$$a_1a_2\cdots a_m \vdots a_k a_l$$

و بنابراین

$$a_1a_2\cdots a_m\equiv 0 \pmod n$$

و
$$a_1a_2\cdots a_m a_{m+1}\equiv 0 \pmod n$$

که مخالف با فرض است. بــه‌این ترتیب، شرط مسأله، برای عددهای ۱، ۴ و، همچنین، همهٔ عددهای اول، صادق است.

۸۴. عدد n به‌صورت حاصل‌ضرب $p\cdot q$ از دو عدد $p>1$ و $q>1$ است، که نسبت به‌هم اول‌اند. برای هر $k=1, 2, \dots, n$،

$$m\in\{0, 1, \dots, p-1\}, l\in\{1, 2, \dots, q\}$$

را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن‌ها، برابری $k=mq+l$ برقرار باشد و فرض می‌کنیم: $i_k=r+1$ که در آن، r، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(mq+lp-1)$ بر n است. به‌این ترتیب، گروه عددهای

$$i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$$

به‌دست می‌آید. ثابت می‌کنیم، بین‌این عددها، عددهای یکسان وجود ندارد. فرض کنید، برعکس، دو اندیس مختلف

$$k_1=m_1q+l_1 \quad و \quad k_2=m_2q+l_2$$

وجود داشته باشد که، برای آن‌ها، برابری $i_{k_1}=i_{k_2}$ برقرار باشد. در این صورت، عدد

$$(m_1q+l_1p)-(m_2q+l_2p)=(m_1-m_2)q+(l_1-l_2)p$$

بر $n=pq$ بخش‌پذیر است؛ ولی عددهای p و q نسبت به‌هم اول‌اند. بنابراین، عدد (m_1-m_2) بر p و عدد (l_1-l_2) بر q بخش‌پذیر است. چون

$$|m_1-m_2|<p \quad و \quad |l_1-l_2|<q$$

بنابراین باید داشته باشیم: $m_1-m_2=l_1-l_2=0$؛ از آن جا $k_1=k_2$، که مخالف با فرض ماست. به‌این ترتیب، گروه

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

تبدیلی از عددهای ۱، ۲، ...، n است. با توجه به متناوب بودن تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$، اگر مجموع

$$S=\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2\pi i_k}{n}$$

را به‌ترتیب خاصی گروه‌بندی کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S=\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{q}(mq+l)\cos\frac{2\pi(mq+lp)}{pq}=$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1}mq\sum_{l=1}^{q}\cos\left(\frac{2\pi m}{p}+\frac{2\pi l}{q}\right)+\sum_{l=1}^{q}l\sum_{m=0}^{p-1}\cos\left(\frac{2\pi m}{p}+\frac{2\pi l}{q}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1} mq\left(\cos\frac{2\pi m}{p}\sum_{l=1}^{q}\cos\frac{2\pi l}{q}-\sin\frac{2\pi m}{p}\sum_{l=1}^{q}\sin\frac{2\pi l}{q}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{q} l\left(\cos\frac{2\pi l}{q}\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}-\sin\frac{2\pi l}{q}\sum_{m=0}^{p-1}\sin\frac{2\pi m}{p}\right)=0$$

زیرا داریم:

$$\sum_{l=1}^{q}\cos\frac{2\pi l}{q}=\sum_{l=1}^{q}\sin\frac{2\pi l}{q}=0,$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}=\sum_{m=0}^{p-1}\sin\frac{2\pi m}{p}=0$$

[برای اثبات دوبرابری اخیر، کافی است توجه کنیم که، بنابر قضیهٔ ویت، مجموع عددهای مختلط

$$x_l=\cos\frac{2\pi l}{q}+i\sin\frac{2\pi l}{q},\quad (l=1, \dots, q)$$

$$y_m=\cos\frac{2\pi m}{p}+i\sin\frac{2\pi m}{p},\quad (m=0, \dots, p-1)$$ و

که ریشه‌های دوچندجمله‌ای x^q-1 و x^p-1 هستند، برابر صفر است. این دوبرابری را با روش مقدماتی‌تری هم می‌توان ثابت کرد، اگر دستگاه مختصات را روی صفحه درنظر بگیریم، آن وقت نقطه‌های

$$\left(\cos\frac{2\pi j}{N}, \sin\frac{2\pi j}{N}\right),\quad (j=1, 2, \dots, N)$$

$(N\geqslant 2)$، رأس‌های یك Nضلعی منتظم به مرکز مبداء مختصات را تشکیل می‌دهند. اگر N برداری را درنظر بگیریم که از مرکز Nضلعی منتظم به‌سمت رأس‌های آن آمده باشند، مجموعی برابر صفر پیدا می‌کنند.]

به‌این ترتیب، ثابت شد: تبدیل

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

که در بالا پیدا کردیم، در برابری مطلوب، صدق می‌کند.

۸۵. A و B را، به ترتیب، مجموعه‌هایی از عددهای طبیعی می‌گیریم که، رقم‌های آن‌ها، اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند. مجموع همهٔ عددهای مجموعه‌ای مثل M را با $S(M)$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ B را به‌دو زیرمجموعهٔ جدا ازهم B_0 و B_1 تقسیم می‌کنیم، به نحوی که عددهای زیرمجموعهٔ B_0 به‌صفر ختم شده باشند و عددهای زیرمجموعهٔ B_1 به صفر ختم نشده باشند. درضمن

$$S(B)=S(B_0)+S(B_1)$$

اگر عددهای $b\in B_1$ و $(10b)\in B_0$ را نظیر هم بگیریم، آن وقت، بین مجموعه‌های B_1 و B_0، تناظر یك به‌یك برقرار خواهد شد؛ در ضمن

$$S(B_0)=10S(B_1)$$

یعنی

$$S(B)=11S(B_1)$$

اکنون، اگر عددهای

$$a=\overline{a_1\ldots a_k}\in A,\ \ b=\overline{(10-a_1)\ldots(10-a_k)}\in B_1$$

را نظیر هم قرار دهیم که، درضمن، داریم:

$$a+b=\frac{10}{9}(10^k-1)$$

آن وقت، بین دو مجموعهٔ A و B_1، تناظر یك به یك برقرار می‌شود. چون، هر عدد متعلق به‌مجموعهٔ A، از عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹، با حذف برخی از رقم‌های آن، به‌دست می‌آید؛ و برای هرمقدار $k=1, 2, \ldots, 9$ درمجموعهٔ A، درست به‌مقدار C_9^k عدد k رقمی داریم، بنابراین

$$l=S(A)+S(B_1)=\sum_{k=1}^{9}C_9^k\cdot\frac{10}{9}(10^k-1)=$$

$$=\frac{10}{9}\Big(\sum_{k=0}^{9}C_9^k10^k-\sum_{k=0}^{9}C_9^k\Big)=\frac{10}{9}[(1+10)^9-(1+1)^9]=$$

$$=\frac{10}{9}(11^9-2^9)$$

$B_۲$ را زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ B می‌گیریم که، عددهای آن، با رقم ۹ آغاز شده باشند، و مجموعهٔ همهٔ بقیهٔ عددهای مجموعهٔ B را، همراه با عدد ۰، با $B_۳$ نشان می‌دهیم که، البته، خواهیم داشت:

$$S(B)=S(B_2)+S(B_3)$$

در این صورت، بین عددهای

$$a=\overline{a_1\cdots a_k}\in A \quad \text{و} \quad b=\overline{(9-a_1)\cdots(9-a_k)}\in B_3$$

تناظر یك به‌یك برقرار می‌شود و، درضمن $a+b=10^k-1$. بنابراین

$$m=S(A)+S(B_3)=\sum_{k=1}^{9} C_9^k(10^k-1)=11^9-2^9$$

سرانجام، اگر عدد

$$b=\overline{9b_1\cdots b_k}\in B_2$$

را متناظر با عدد

$$a=\overline{(9-b_1)\cdots(9-b_k)}\in A$$

به‌ازای $k\geqslant 1$ وعدد ۰ به‌ازای $k=0$ قراردهیم، آن وقت، بین مجموعه‌های $B_۲$ و $A\bigcup\{0\}$، تناظر یك به‌یك برقرار می‌شود و درضمن

$$a+b=10^{k+1}-1$$

بنابراین

$$n=S(A)+S(B_2)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k(10^{k+1}-1)=10\times 11^9-2^9$$

و

$$m+n=S(A)+S(B_3)+S(A)+S(B_2)=2S(A)+S(B)$$

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S(A)+\frac{1}{11}S(B)=l=\frac{10}{9}(11^9-2^9), \\ 2S(A)+S(B)=m+n=11^{10}-2^{10} \end{cases}$$

که از آن، به‌دست می‌آید:

$$S(A)=\frac{۱}{۹}(۱۱l-m-n)،\quad S(B)=\frac{۱۱}{۹}(m+n-۲l)$$

در بین مجموعه‌های A و B، ۹ عضو مشترك وجود دارد که همان عددهای یك رقمی هستند و مجموعی برابر ۴۵ دارند. بنابراین، مجموع مطلوب، برابر است با

$$S(A)+S(B)-۴۵=\frac{۱۰}{۹}(m+n)-\frac{۱۱}{۹}l-۴۵=$$

$$=\frac{۱۰}{۹}(۱۱^{۱۰}-۲^{۱۰})-\frac{۱۰}{۸۱}\times ۱۱^{۱۰}+\frac{۵۵}{۸۱}\times ۲^{۱۰}-۴۵=\frac{۸۰}{۸۱}\times$$

$$\times ۱۱^{۱۰}-\frac{۳۵}{۸۱}\times ۲^{۱۰}-۴۵$$

۸۶. هر گروه عددهای $(a_۱، \ldots، a_n)$، متناظر است با گروه عددهای

$$b=(b_۱، \ldots، b_n)$$

از عددهای طبیعی که با برابری‌های زیر تعریف شده باشند:

$$b_i=a_i+a_{i+۱}+\cdots+a_n،\quad i=۱، \ldots، n$$

بنابراین، بین مجموعهٔ گروه‌های مطلوب و مجموعهٔ B گروه‌های b با شرط

$$b_۱>b_۲>\cdots>b_n$$

$$b_۱+b_۲+\cdots+b_n=۱۹۷۹$$

تناظر یك به‌یك برقرار است. آخرین عدد b_n در گروه b را با $\pi(b)$، و بزرگترین عدد s را که برای آن داشته باشیم:

$$b_s=b_۱-s+۱ \qquad (*)$$

با $\sigma(b)$ نشان می‌دهیم (توجه کنیم: $۱\leqslant s\leqslant n$)؛ برابری $(*)$، به معنای برابری‌های زیر است:

$$b_2=b_1-1,\ b_3=b_2-1,\ \dots,\ b_s=b_{s-1}-1$$

α و β را عمل‌هایی، در مجموعهٔ B، تعریف می‌کنیم، کـه نتیجه‌هـای آن‌ها برگروه $b\in B$، گروه‌هـای تـازهٔ $\alpha(b)$ و $\beta(b)$ از مجموعهٔ B باشند. فرض می‌کنیم: $\pi(b)\leqslant\sigma(b)$. دراین صورت $b_n\leqslant n-1$ [درغیراین صورت

$$n-1<b_n\leqslant\sigma(b)\leqslant n\Longrightarrow\sigma(b)=b_n=n$$

یعنی

$$1979=b_n+b_{n-1}+\dots+b_1=n+(n+1)+\dots+(2n-1)=$$
$$=\frac{n(3n-1)}{2}$$

کـه بـرای هیچ مقداری از $n\in\mathbf{N}$ بـرقـرار نیست]، بنابراین، عمل زیـر ممکن است:

$$\alpha(b_1,\dots,b_n)=(b_1+1,b_2+1,\dots,b_{\pi(b)}+1,b_{\pi(b)+1},\dots,b_{n-1})$$

در ضمن

$$\pi(\alpha(b))=b_{n-1}>b_n=\pi(b)=\sigma(\alpha(b))$$

$\pi(b)>\sigma(b)$ می‌گیریم. دراین‌صورت، این عمل را داریم:

$$\beta(b_1,\dots,b_n)=$$
$$=(b_1-1,b_2-1,\dots,b_{\sigma(b)}-1,b_{\sigma(b)+1},\dots,b_n,\sigma(b))$$

یادآوری کنیم کـه در حالت $\sigma(b)=n$، باید نابرابری $b_n-1>\sigma(b)$ برقرار باشد [درغیر این‌صورت، داریم:

$$n=\sigma(b)<b_n\leqslant\sigma(b)+1=n+1$$

یعنی

$$b_n=n+1,\ b_{n-1}=n+2,\ \dots,\ b_1=2n$$

و از آن‌جا

$$1979=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1=\frac{n(3n+1)}{2}$$

که برای هیچ مقداری از $n\in\mathbf{N}$ ممکن نیست]. درضمن

$$\pi(\beta(b))=\sigma(b)\leqslant\sigma\beta(b))$$

مجموعه B را به‌زوج جمله‌ها تقسیم می‌کنیم: به هر گروه b، گروه b' را مربوط می‌کنیم، به نحوی که، این گروه b'، بسته به این‌که نابرابری $\pi(b)\leqslant\sigma(b)$ یا $\pi(b)>\sigma(b)$ برقرار باشد، برابر گروه $\alpha(b)$ یا $\beta(b)$ (درضمن، برقراری شرط

$$\beta(\alpha(b))=b \quad \text{یا} \quad \alpha(\beta(b))=b$$

تضمین می‌کند که گروه b'، همان زوج گروه‌های b، b' را تشکیل می‌دهد). چون درهر زوج، یکی از گروه‌ها زوج و دیگری فرد است (درنتیجه هریك از عمل‌های α یا β، گروه زوج به‌گروه فرد و برعکس، تبدیل می‌شود)، بنابراین، درمجموعهٔ B، تعدادگروه‌های زوج، برابراست با تعدادگروه‌های فرد. درنتیجه، همین نتیجه را دربارهٔ مجموعهٔ گروه‌های اصلی

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

هم می‌توان به‌دست آورد.

۸۷. الف) عددهای a_1، ...، a_m را در عدد نویسی به مبنای ۲ می‌نویسیم و برخی از آن‌ها را، با اضافه‌کردن رقم‌های صفر در سمت چپ، به‌نحوی تکمیل می‌کنیم که همهٔ آن‌ها، طولی برابر k داشته باشند. جدول مستطیلی $m\times k$ را، شامل صفرها و واحدها، طوری تنظیم می‌کنیم که، در آن، به‌ازای‌هرمقدار $i=1$، ...، m، عدد a_i (درمبنای ۲) درسطر iام واقع باشد. چون هرستون این جدول، شامل m رقم است. بنابراین تعداد n، ستون‌های غیرصفر مختلف آن، از 2^m-1 تجاوز نمی‌کند. هریك از این n ستون را درتناظر با عددی قرار می‌دهیم که، بیان دودوئی آن، تنها در مرتبه‌هائی شامل رقم ۱ باشد که، درآن مرتبه‌ها، جدول شامل ستون‌هایی منطبق برستون مفروض باشد. گروه عددهای b_1، ...، b_n به دست می‌آید که

با شرط مسأله سازگار است. درواقع، چون درهریك از k مرتبه، رقم ۱ در بیش ازیك عدد از گروه

$$(b_1, \dots, b_n)$$

وجود ندارد، هر زیرمجموعهٔ عددهای این گروه، به‌صورت یك ارزشی، با بیان دودوئی مجموع آن‌ها معین می‌شود. بنابراین، زیرمجموعه‌های مختلف این گروه عددها، مجموع‌های مختلفی دارند. سرانجام، اگر برای هر مقدار

$$i \in \{1, \dots, m\}$$

عددهایی از گروه $(b_1, \dots, b_n)$ را جمع کنیم که، درآن‌ها، رقم ۱، تنها در مرتبه‌هایی باشد که عدد a_i درآن مرتبه‌ها شامل رقم ۱ است، آن وقت، مجموع، برابر همین عدد a_i می‌شود (توجه کنیم، در همهٔ مرتبه‌هایی که در آن‌ها، عددی از این گروه دارای رقم ۱ است، عدد a_i یا فقط رقم ۱ را دارد ویا فقط رقم ۰ را). چون $n < 2^m$، بنابراین، اثبات حکم کامل می‌شود.

ب) اثبات را، با استقرا روی مجموع عددهای مفروض

$$N = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

می‌دهیم. اگر $N = 1$، آن وقت $m = 1$، $a_1 = 1$ و می‌توان فرض کرد $b_1 = 1$. اکنون فرض می کنیم، حکم مسأله برای همهٔ گروه عددهایی که مجموعی کمتر از N دارند، درست باشد؛ و $(a_1, \dots, a_m)$ را گروهی از عددها می گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$a_1 + \dots + a_m = N$$

گروه عددهای $(b_1, \dots, b_n)$ را، برای گروه $(a_1, \dots, a_m)$ «قابل قبول» می نامیم، به‌شرطی که $n \leqslant m$ و، درضمن، همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ

$$\{b_1, \dots, b_n\}$$

مجموع‌های مختلفی داشته باشند و، در بین این مجموع‌ها، همهٔ عددهای a_1، ...، a_m به دست آید. باید ثابت کنیم، دست کم، یك گروه «قابل قبول» وجود دارد. اگر همهٔ عددهای a_1، ...، a_m زوج باشند، گروه جدید

a'_1، ...، a'_m را طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$a'_i=\frac{1}{2}a_i \qquad (i=1, \ldots, m)$$

از آن‌جا که

$$a'_1+\ldots+a'_m=\frac{1}{2}N<N$$

بنابر فرض استقرا، گروه عددهای «قابل قبول»

$$(b'_1, \ldots, b'_n)$$

برای گروه $(a'_1, \ldots, a'_m)$ وجود دارد. دراین‌صورت، گروه

$$(2b'_1, \ldots, 2b'_n)$$

برای گروه $(2a'_1, \ldots, 2a'_m)$ «قابل قبول» خواهد بود.

اکنون فرض می‌کنیم، در گروه عددهای $(a_1, \ldots, a_m)$، دست‌کم یك عدد فرد وجود داشته باشد. بین عددهای فرد این گروه، کوچکترین عدد را درنظر می‌گیریم. روشن است که، اگر جمله‌های گروه $(a_1, \ldots, a_m)$ را شماره‌گذاری کنیم، تغییری در آن ایجاد نمی‌شود، می‌توان این عدد را a_m به حساب آورد. گروه عددهای a'_i را $(i=1, \ldots, m-1)$ به این ترتیب درنظر می‌گیریم که

$$a'_i=\begin{cases}\frac{1}{2}a_i & (\text{وقتی } a_i \text{ زوج باشد})\\ \frac{1}{2}(a_i-a_m) & (\text{وقتی } a_i \text{ فرد باشد})\end{cases}$$

گروه $\{a'_i\}$ بیش از $m-1$ عضو ندارد (تعداد عضوهای آن می‌تواند کمتر از $m-1$ هم باشد، وقتی‌که برای مقدارهایی از $i\neq j$ داشته باشیم: $a'_i=a'_j$). یادآوری می‌کنیم که، همهٔ عضوهای a'_i، عددهایی طبیعی‌اند. برای مجموع عددهای گروه $\{a'_i\}$ داریم:

$$a'_1+\ldots+a'_{m-1}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+\ldots+a_{m-1})\leqslant a_1+\ldots+a_{m-1}<N$$

بنابراین، طبق فرض استقرا، گروه «قابل قبول» $(b'_1, \dots, b'_k)$ برای گروه $\{a'_i\}$ وجود دارد. ثابت می‌کنیم، گروه

$$(b_1, \dots, b_{k+1}),$$

که در آن $b_i = 2b'_i$ $(i = 1, \dots, k)$ و $b_{k+1} = a_m$، برای گروه

$$(a_1, \dots, a_m)$$

«قابل قبول» است. برای تعداد عضوهای گروه $(b_1, \dots, b_{k+1})$ داریم:

$$k+1 \leqslant m-1+1 = m$$

سپس، توجه می‌کنیم که، b_{k+1}، تنها عدد فرد در گروه

$$(b_1, \dots, b_{k+1})$$

است؛ همهٔ زیرمجموعه‌های این گروه، مجموع‌های مختلفی دارند. در واقع، فرض کنید، مجموع عددهای دو تا از زیرمجموعه‌ها برابر باشند. اگر هردومجموع زوج باشند، به‌معنای آن است که، هیچ کدام از دو زیرمجموعه، شامل عضو b_{k+1} نیستند، و اگر همهٔ عضوهای این زیرمجموعه‌ها را بر ۲ بخش کنیم، به دو زیرمجموعه از مجموعهٔ

$$\{b'_1, \dots, b'_k\}$$

می‌رسیم که مجموعی برابر دارند و این، مخالف با «قابل قبول» بودن گروه

$$(b'_1, \dots, b'_k)$$

است. اگرهم، مجموع عددهای دو زیرمجموعه از مجموعهٔ

$$\{b_1, \dots, b_{k+1}\}$$

با هم برابر و، در ضمن، برابر عددی فرد باشند، آن وقت، هر دوی آن‌ها باید شامل عضو b_{k+1} باشند واگر این عضو را از آن‌ها کنار بگذاریم، به دو زیرمجموعه از گروه

$$(b_1, \dots, b_k)$$

می‌رسیم که مجموعی برابر پیدا می‌کنند که بازهم، فرض استقرا را نقض خواهد کرد.

این می‌ماند که تحقیق کنیم، هر عدد a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$، به صورت مجموعی ازعضوهای مختلف گروه

$$(a_1, \dots, b_{k+1})$$

ظاهر می‌شود. عدد a_m، خود یکی از عضوهای این گروه است. اگر $i<m$ و a_i عددی زوج باشد، آن‌وقت

$$\frac{1}{2}a_i=a'_i=b'_l+\dots+b'_p$$

که در آن، عضوهای b'_l، ...، b'_p از گروه

$$(b'_1, \dots, b'_k)$$

هستند. بنابراین

$$a_i=2b'_l+\dots+2b'_p=b_l+\dots+b_p$$

درحالتی که $i<m$ و a_i عددی فرد باشد، داریم:

$$a_i=a_m+2a'_i=b_{k+1}+2(b'_l+\dots+b'_p)=b_{k+1}+b_l+\dots+b_p$$

و به‌این‌ترتیب، حکم مسأله، به‌طور کامل ثابت شد.

۸۸. فرض می کنیم، مجموعهٔ M، که درصورت مسأله از آن صحبت شده است، وجود داشته باشد. تعداد عددهایی ازمجموعهٔ M را که از $k\in\mathbf{N}$ تجاوز نمی‌کنند، m_k می‌نامیم. دراین‌صورت، تعداد عددهای $a\in M$، که در نابرابری $10<a\leqslant k$ صدق کنند، برابر m_k-m_{10} وتعداد زوج عددهای مختلف ازاین‌گونه، برابر

$$C^2_{m_k-m_{10}}=\frac{1}{2}(m_k-m_{10})(m_k-m_{10}-1)$$

است. اگر هر زوج ازاین‌گونه عددهای $a>b$ را، متناظر با تفاضل آن‌ها، $a-b$، قرار دهیم، آن‌وقت، همهٔ تفاضل‌های حاصل، مختلف خواهند بود.

درواقع، اگر برای دو زوج $a>b$ و $c>d$، برابری

$$a-b=c-d$$

برقرار باشد، آن‌وقت $a+d=c+b$ و، بنا برشرط ۲)، یا $a=b$ (که درست‌نیست، زیرا $a>b$)، یا $a=c$ (که از آن‌جا به‌دست می‌آید $b=d$، یعنی دو زوج برهم منطبق‌اند). از آن‌جا که، همهٔ تفاضل‌های حاصل، از k کوچکترند، باید داشته باشیم:

$$k>C^{۲}_{m_k-m_{۱۰}}>\frac{۱}{۲}(m_k-m_{۱۰}-۱)^{۲}$$

ولی $m_{۱۰}\leqslant ۱۰$، بنابراین

$$m_k<\sqrt{۲k}+m_{۱۰}+۱\leqslant\sqrt{۲k}+۱۱$$

(برای هرمقدار $k=۱۱،۱۲،\ldots$). سپس، هرعدد

$$n\in\{۲،۳،\ldots،۲k\}$$

باید، بنا برشرط ۱)، به‌صورت مجموع دوعدد ازمجموعهٔ M باشد، درضمن، یا هیچ‌کدام ازاین دو عدد از k تجاوز نمی‌کنند و یا درست یکی از آن‌ها، بزرگتر از k، ولی کوچکتر از $۲k$ است. بنابراین، تعداد این‌گونه زوج عددها، ازیك طرف، کمتر از $۲k-۱$ نیست و، ازطرف دیگر، از

$$\frac{m_k(m_k-۱)}{۲}+m_k(m_{۲k}-m_k)=\frac{۱}{۲}m_k(۲m_{۲k}-m_k-۱)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{۱}{۲}m_k(۲m_{۲k}-m_k)$$

به‌این‌ترتیب، به‌ازای هرمقدار $k>۱۰$ داریم:

$$m_k(۲m_{۲k}-m_k)\geqslant ۴k-۲$$

و اگر درنظر بگیریم که

$$m_{۲k}<\sqrt{۴k}+۱۱=\alpha \quad \text{و} \quad m_k<\sqrt{۲k}+۱۱=\beta<\alpha$$

به دست می‌آید:

$$۴k-۲\leqslant m_k(۲\alpha-m_k)=[\alpha-(\alpha-m_k)][\alpha+(\alpha-m_k)]=$$

$$=\alpha^۲-(\alpha-m_k)^۲\leqslant ۴k+۴۴\sqrt{k}+۱۲۱-k(۲-\sqrt{۲})^۲$$

بنابراین، به‌ازای هرمقدار $k>۱۰$، سه جمله‌ای درجهٔ دوم

$$f(\sqrt{k})=(۲-\sqrt{۲})^۲k-۴۴\sqrt{k}-۱۲۳$$

باید تنها مقدارهای مثبت را قبول کندکه، البته، درست‌نیست. تناقض حاصل، نشان می‌دهدکه، مجموعهٔ M، با شرط‌هایی که داده شده است، وجود ندارد.

§۵. ویژگی‌های مختلف عددها

۸۹. چون a، b، $c\in\mathbf{Q}$ بنابراین عدد

$$d=\frac{a-b}{c}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

هم، عددی گویاست، درنتیجه، عددهای

$$\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}(c+d)،\ \sqrt{b}=\frac{۱}{۲}(c-d)$$

هم، عددهایی گویا هستند.

۹۰. این دو عدد مثبت را درنظر می‌گیریم:

$$a=\sqrt{۲}\ \text{و}\ b=\log_{\sqrt{۲}}۳$$

در این صورت، عدد

$$a^b=\sqrt{۲}^{\log_{\sqrt{۲}}۳}=۳$$

عددی طبیعی می‌شود. ثابت می‌کنیم، عدد b، گنگ است. درواقع، اگر b عددی گویا باشد، باید داشته باشیم: $b=\frac{p}{q}$ که، درآن، p، $q\in\mathbf{N}$. از آن‌جا

$$\frac{p}{q}=۲\ \log_۲ ۳ \Longrightarrow ۲^p=۳^{۲q}$$

که ممکن نیست.

۹۱. k را عددی طبیعی می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$۲^k \leqslant n < ۲^{k+۱}$$

وسپس، M را حاصل‌ضرب همهٔ عددهای فردی فرض می‌کنیم که از n تجاوز نمی‌کنند. اکنون هرجمله از مجموع

$$S=۱+\frac{۱}{۲}+\ldots+\frac{۱}{n}$$

را، در $M.۲^{k-۱}$ ضرب می‌کنیم. هر عدد $m\in\mathbf{N}$ را می‌توان به صورت $m=۲^p.q$ نوشت که، در آن، $p\in\mathbf{Z}^+$ ، q عددی فرد است. در ضمن، اگر $m\leqslant n$، آن‌گاه $q\leqslant n$ (زیرا $q=\frac{m}{۲^p}\leqslant n$)، علاوه براین، اگر $m\neq ۲^k$، آن‌گاه $p<k$؛ درواقع، درحالت $p>k$ داریم:

$$m=۲^p.q\geqslant ۲^{k+۱}>n$$

و درحالت $p=k$

$$q\neq ۱ ، m=۲^p.q\geqslant ۲^k\times ۳>۲^{k+۱}>n$$

به‌این ترتیب، عدد

$$a_m=\frac{۱}{m}.۲^{k-۱}.M$$

به ازای هرمقدار $m=۱ ، ۲ ، \ldots ، n$، به جز یکی (که برابر ۲^k است)، عددی درست است، بنابراین، عدد

$$S.۲^{k-۱}.M=a_۱+a_۲+\ldots+a_n$$

عددی درست‌نیست؛ یعنی، مجموع S هم نمی‌تواند برابرعددی درست‌باشد.

۹۲. اگر عدد n، با شرط مسأله سازگار باشد، آن‌وقت، عددهای $۲n+۲$ و $۲n+۹$ هم با آن شرط سازگار خواهند بود. درواقع، اگر

داشته باشیم:

$$n=a_1+a_2+\dots+a_k$$

که درآن

$$a_1, a_2, \dots, a_k\in \mathbf{N} \quad \text{و} \quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_k}=1$$

آن وقت داریم:

$$2n+2=2a_1+2a_2+\dots+2a_k+2$$

درضمن

$$\frac{1}{2a_1}+\dots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

و به همین ترتیب

$$2n+9=2a_1+\dots+2a_k+3+6$$

و درضمن

$$\frac{1}{2a_1}+\dots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

اکنون، با استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم که، هر عدد $n\geqslant 33$، را می‌توان به‌صورتی نوشت که مسأله خواسته است. عددهای ۳۳، ...، ۷۳ دارای این ویژگی هستند. فرض می‌کنیم، همهٔ عددهای از ۳۳ تا $n-1$ دارای این ویژگی باشند که، در آن، $n>73$. اگر n عددی زوج باشد، می‌توان آن‌را به‌صورت $2m+2$ و اگر عددی فرد باشد، به صورت $2m+9$ نوشت که، درآن، $m\in\mathbf{N}$ و

$$n>m\geqslant\frac{74-9}{2}>32$$

درهر دوحالت، با توجه به‌آن‌چه درابتدا ثابت کردیم، عدد n با شرط مسأله سازگار است، زیرا عدد m با این شرط سازگار است. حکم، ثابت شد.

۹۳. چون عدد n، که بر ۱۷ بخش‌پذیر است، در دستگاه عددنویسی به مبنای ۲، درست سه رقم برابر ۱ دارد (و بقیهٔ رقم‌ها، برابر صفرند)، بنا براین، می‌توان آن را به‌این‌صورت نوشت:

$$n=۲^k+۲^l+۲^m$$

که درآن، $k, l, m\in\mathbf{Z}^+$، در نابرابری $k<l<m$ صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم، عدد n، در مبنای ۲، کمتر از ۶ رقم برابر صفر داشته باشد. در این‌صورت $m\leqslant ۷$ و هم‌نهشتی

$$n\equiv ۰(\mathrm{mod}\ ۱۷)$$

نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا عدد به‌صورت ۲^i در تقسیم بر ۱۷، وقتی‌که داشته باشیم: $۷\geqslant i\geqslant ۰$، به ترتیب، به باقی‌مانده‌های ۱، ۲، ۴، ۸، ۱ —، ۲ —، ۴ —، ۸ — می‌رسد و آزمایش نشان می‌دهد که، مجموع هر سه عدد مختلف از این باقی‌مانده‌ها، نمی‌تواند برابر صفر باشد و این، به‌معنای آن است که عدد n بر ۱۷ بخش‌پذیر نیست. به‌این ترتیب، عدد n، در مبنای ۲، دست‌کم شش رقم برابرصفر دارد. اگر تعداد رقم‌های صفر، برابر ۷ باشد، آن وقت $m=۹$. دراین‌صورت، عدد n، نمی‌تواند فرد باشد، زیرا در غیر-این‌صورت $k=۰$ و

$$۲^k+۲^m\equiv ۳(\mathrm{mod}\ ۱۷)$$

درحالی‌که، هم‌نهشتی

$$۲^l\equiv -۳(\mathrm{mod}\ ۱۷)$$

به‌ازای هیچ‌کدام ازمقدارهای $l\in\{۱, \ldots, ۸\}$ برقرار نیست. بنابراین، دراین‌حالت، n، عددی‌زوج است (چنین عددی، مثلاً برای $k=۱$، $l=۶$، $m=۹$، بر ۱۷ بخش‌پذیر است).

۹۴. تعداد رقم‌های عدد $m\in\mathbf{N}$ را، در عددنویسی به مبنای ده، با

$f(m)$ نشان می‌دهیم؛ دراین‌صورت، برای عدد مجهول n، باید داشته‌باشیم:

$$f(n^۳)+f(n^۴)=۱۰$$

علاوه براین $f(n^۳)\geqslant ۴$، زیرا در غیر این صورت $n^۳<۱۰۰۰$، $n<۱۰$ و $n^۴<۱۰۰۰۰$ و ازآن‌جا

$$f(n^۳)+f(n^۴)<۴+۵<۱۰$$

ازطرف دیگر، اگر $f(n^۳)>۴$، آن‌وقت $n>۱۰$ و $n^۴>۱۰n^۳$، یعنی

$$f(n^۳)\geqslant ۵،\ f(n^۴)\geqslant f(n^۳)+۱؛$$

$$f(n^۳)+f(n^۴)\geqslant ۵+۶>۱۰$$

بنابراین $f(n^۳)=۴$ و $f(n^۴)=۶$.

سپس، از نابرابری $n^۳<۱۰۰۰۰$ به دست می‌آید: $n<۲۲$، زیرا $۲۲^۳>۱۰۰۰۰$. بـه همین ترتیب، از نـابـرابـری $n^۴\geqslant ۱۰۰۰۰۰$، نتیجه می‌شود $n>۱۷$، زیرا $۱۷^۴<۱۰۰۰۰۰$. به‌این ترتیب

$$۱۸\leqslant n\leqslant ۲۱$$

چون باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع رقم‌های آن عدد بر ۹، بنابراین

$$n^۴+n^۳\equiv(۰+۱+\cdots+۹)(\mathrm{mod}\ ۹)$$

بنابراین

$$n(n^۳+۱)\equiv ۰(\mathrm{mod}\ ۹)$$

شرط اخیر، برای عددهای $n=۱۹$ و $n=۲۰$ برقرار نیست. عدد $n=۲۱$ ویژگی مورد نظر مسأله را ندارد، زیـرا هر دو عدد $۲۱^۳$ و $۲۱^۴$ به رقم ۱ ختم می‌شوند. سرانجام، آزمایش نشان می‌دهد‌که تنها عدد $n=۱۸$ با شرط مسأله سازگار است:

$$۱۸^۳=۵۸۳۲،\qquad ۱۸^۴=۱۰۴۹۷۶$$

۹۵. n را عدد مجهول، s را مجموع رقم‌های آن و k را تعداد این رقم‌ها می‌گیریم. در این‌صورت، باید داشته باشیم:

$$s^۵=n^۲,\ s\leqslant ۹k,\ n\geqslant ۱۰^{k-۱}$$

که از آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$۹^۵k^۵\geqslant s^۵=n^۲\geqslant ۱۰^{۲k-۲}$$

قرار می‌گذاریم:

$$\frac{۹^۵k^۵}{۱۰^{۲k-۲}}=a_k$$

در این صورت، از رابطهٔ

$$\frac{۹^۵(k+۱)^۵}{۹^۵k^۵}=\frac{(k+۱)^۵}{k^۵}\leqslant ۲^۵<۱۰^۲=\frac{۱۰^{۲(k+۱)-۲}}{۱۰^{۲k-۲}}$$

که برای هر مقدار $k\in\mathbf{N}$ برقرار است، نتیجه می‌شود $a_{k+۱}<a_k$، یعنی، دنبالهٔ عددهای a_k، نزولی است. چون $a_۶<۱$، بنابراین، به ازای $k\geqslant ۶$، داریم:

$$۹^۵k^۵<۱۰^{۲k-۲}$$

یعنی k، نمی‌تواند مقدارهای بزرگتر از ۵ را قبول کند. بنابراین

$$s\leqslant ۹\times ۵=۴۵$$

از برابری $s^۵=n^۲$ نتیجه می‌شود که، عدد s، باید برابر مجذور یک عدد طبیعی باشد، زیرا همهٔ عامل‌های اول در تجزیهٔ $s^۵$ (و بنابراین، در تجزیهٔ s) باید توانی زوج داشته باشند. به‌این ترتیب، عدد s، تنها یکی از عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ یا ۳۶ می‌تواند باشد. آزمایش نشان می‌دهد که، تنها برای دو مقدار $s=۱$ و $s=۹$، مجموع رقم‌های عدد $n=\sqrt{s^۵}$ برابر s می‌شود. عدد مجهول، یکی از دو عدد $n=۱$ یا $n=۲۴۳$ است.

۹۶. فرض می‌کنیم، کسر $\frac{m}{n}$ وجود داشته باشد که، در آن، $m, n\in\mathbf{Z}$ و

$m < n \leqslant ۱۰۰$ و، درضمن، بیان دهدهی آن، به‌این صورت باشد:

$$\frac{m}{n} = ۰/a_۱ a_۲ \cdots a_k ۱۶۷ a_{k+۱} \cdots$$

که در آن، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k، $a_{k+۱}$، ... رقم‌هایی دلخواهند. دراین صورت، برای عدد $p = ۱۰^k . \frac{m}{n}$ داریم:

$$p - [p] = ۰/۱۶۷ a_{k+۱} \cdots$$

و بنابراین

$$۰/۱۶۷ \leqslant \frac{۱۰^k m - [p] n}{n} < ۰/۱۶۸$$

قرار می‌گذاریم:

$$q = ۱۰^k m - [p] n \in \mathbf{Z}$$

در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$۱/۰۰۲ \leqslant \frac{۶q}{n} < ۱/۰۰۸$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۰ < ۰/۰۰۲ \leqslant \frac{۶q}{n} - ۱ = \frac{۶q - n}{n} < ۰/۰۰۸ < \frac{۱}{۱۰۰}$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$۰ < ۶q - n < \frac{n}{۱۰۰} \leqslant ۱$$

یعنی، عدد $۶q - n$، نمی‌تواند عددی درست باشد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۹۷. برخلاف حکم مسأله، فرض می‌کنیم، عددهای طبیعی n و m و k

وجود داشته باشند، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$۲^{۲^n}+۱=m^۵-k^۵$$

و درضمن، عدد

$$m^۵-k^۵=(m-k)(m^۴+m^۳k+m^۲k^۲+mk^۳+k^۴)$$

عددی اول باشد. در این صورت $m-k=۱$ و

$$۲^{۲^n}+۱=(k+۱)^۵-k^۵=۵k^۴+۱۰k^۳+۱۰k^۲+۵k+۱$$

به‌این ترتیب، باید عدد

$$۲^{۲^n}=۵(k^۴+۲k^۳+۲k^۲+k)$$

بر ۵ بخش‌پذیر باشد، که ممکن نیست. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله‌را، ثابت می‌کند.

۹۸. فرض می‌کنیم، به‌ازای مقداری از $n\in\mathbf{Z}$، عدد

$$۲^{n-۱}(۲^n-۱)$$

برابر مکعب یك عدد درست باشد. توجه می‌کنیم که، در این عدد، توان ۲، برابر است با $n-۱$ (زیرا عامل $(۲^n-۱)$ بر ۲ بخش‌پذیر نیست). بنابراین، باید داشته باشیم:

$$n-۱=۳k\Rightarrow n=۳k+۱\quad(k\in\mathbf{Z}^+)$$

ولی، در این صورت، عدد

$$۲^{n+۱}-۱=۲^{۳k+۲}-۱=۴(۷+۱)^k-۱\equiv۳(\mathrm{mod}\ ۷)$$

نمی‌تواند برابر با مکعب یك عدد درست باشد، زیرا باقی‌ماندهٔ مکعب هر عدد درست بر ۷، تنها می‌تواند یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۶ باشد. در واقع

$$(۷m)^۳\equiv۰(\mathrm{mod}\ ۷);\ (۷m\pm۱)^۳\equiv\pm۱(\mathrm{mod}\ ۷);$$

$$(۷m\pm۲)^۳\equiv\pm۱(\mathrm{mod}\ ۷);\ (۷m\pm۳)^۳\equiv\mp۱(\mathrm{mod}\ ۷)$$

به‌این ترتیب، نمی‌توان عدد $n\in\mathbf{Z}$ را طوری پیدا کرد که، به‌ازای آن، هردوعدد $2^{n+1}-1$ و $(2^n-1)^{2^{n-1}}$، مکعب عددهایی درست باشند.

۹۹. باید ثابت کنیم، از نابرابری $n\sqrt{7}-m>0$، می‌توان نابرابری $n\sqrt{7}-m>\frac{1}{m}$ را نتیجه گرفت $(n, m\in\mathbf{N})$. اگر

$$n\sqrt{7}-m>1$$

آن وقت، به‌طور مسلم، نابرابری $n\sqrt{7}-m>\frac{1}{m}$ برقرار خواهد بود. حالت

$$0<n\sqrt{7}-m<1$$

را درنظرمی‌گیریم (برابری $n\sqrt{7}-m=1$ ممکن‌نیست، زیرا، با برقراری این برابری، باید عدد $\sqrt{7}=\frac{1+m}{n}$، عددی گویا باشد). توجه می‌کنیم که، عدد طبیعی

$$7n^2-m^2=(n\sqrt{7}-m)(n\sqrt{7}+m)$$

نمی‌تواندبرابر ۱ یا ۲ باشد، زیرا درتقسیم m^2 بر ۷، نمی‌توان به‌باقی‌مانده‌ای برابر ۶ یا ۵ رسید؛ درواقع

$$(7k)^2\equiv 0 \pmod 7;\ (7k\pm 1)^2\equiv 1 \pmod 7;$$
$$(7k\pm 2)^2\equiv 4 \pmod 7;\ (7k\pm 3)^2\equiv 2 \pmod 7)$$

بنابراین $7n^2-m^2\geqslant 3$ و بنابراین

$$n\sqrt{2}-m\geqslant\frac{3}{n\sqrt{7}+m}>\frac{1}{m}$$

زیرا

$$3m\geqslant 2m+1>2m+(n\sqrt{7}-m)=n\sqrt{7}+m$$

حکم مسأله، به‌طورکامل ثابت شد.

۱۰۰. ثابت می‌کنیم، عدد

$$m=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۱۹۸۰}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۱۹۸۰}$$

عددی است درست و رقم آخر آن (رقم یکان) را پیدا می‌کنیم. قرار می‌گذاریم:

$$a_n=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۲n}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲n}=(۵+۲\sqrt{۶})^n+(۵-۲\sqrt{۶})^n$$

در این صورت، به‌ازای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}^+$ داریم:

$$a_{n+۲}=۱۰a_{n+۱}-a_n$$

درواقع، اگر فرض کنیم:

$$(۵+۲\sqrt{۶})^n=\alpha,\quad (۵-۲\sqrt{۶})^n=\beta$$

آن وقت، به‌دست می‌آید:

$$a_n=\alpha+\beta,\ a_{n+۱}=(۵+۲\sqrt{۶})\alpha+(۵-۲\sqrt{۶})\beta,$$

$$a_{n+۲}=(۵+۲\sqrt{۶})^۲\alpha+(۵-۲\sqrt{۶})^۲\beta=(۴۹+۲۰\sqrt{۶})\alpha+$$

$$+(۴۹-۲۰\sqrt{۶})\beta=(۵۰+۲۰\sqrt{۶})\alpha+(۵۰-۲۰\sqrt{۶})\beta-$$

$$-(\alpha+\beta)=۱۰a_{n+۱}-a_n$$

ازآن‌جا که، عددهای $a_۰=۲$ و $a_۱=۱۰$، عددهایی درست‌اند، بنابراین به‌ازای $n\in\mathbf{Z}^+$ داریم: $a_n\in\mathbf{Z}$ و، به‌جز آن، هریك از عددهای

$$a_n+a_{n+۲}=۱۰a_{n+۱}$$

بر ۱۰ بخش‌پذیر است. بنابراین، هریك از عددهای

$$a_{n+۴}-a_n=(a_{n+۴}+a_{n+۲})-(a_{n+۲}+a_n)$$

هم بر ۱۰ بخش‌پذیر است، یعنی عددهای

$$a_۲,\ a_۶,\ a_{۱۰},\ \ldots,\ a_{۸۹۰}$$

در تقسیم بر ۱۰، بـه یك باقی‌مانده می‌رسند. چون $a_۲=۹۸$، بنابراین عدد $a_{۸۹۰}$ هم، در مبنای عددنویسی دهدهی، به‌رقم ۸ ختم می‌شود.

سرانجام، از برآورد

$$m=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}>(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}>$$
$$>m-(0/5)^{1890}>m-0/1$$

معلوم می‌شود که رقم‌های یکان و دهگان عدد

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}$$

در عددنویسی دهدهی، به‌ترتیب، برابر ۷ و ۹ است.

۱۰۱. اگر از بسط دوجمله‌ای استفاده کنیم، داریم:

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\sqrt{m})^{n-i}(\pm\sqrt{m-1})^i$$

در حالت $n=2j$ $(j\in\mathbf{N})$ به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sum_{i=0}^{j}C_n^i(\sqrt{m})^{2j-2i}(\sqrt{m-1})^{2i}\pm$$

$$\pm\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}(\sqrt{m})^{2j-2i+1}(\sqrt{m-1})^{2i-1}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j}C_n^{2j}m^{j-i}(m-1)^i\pm\sqrt{m(m-1)}\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}m^{j-i}(m-1)^{i-1}$$
$$=a\pm b\sqrt{m(m-1)}$$

که در آن $a, b\in\mathbf{Z}^+$. در حالت $n=2j-1$ $(j\in\mathbf{N})$، داریم:

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sum_{i=0}^{j-1}C_n^{2i}(\sqrt{m})^{2j-1-2i}(\sqrt{m-1})^{2i}\pm$$

$$\pm\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}(\sqrt{m})^{2j-2i}(\sqrt{m-1})^{2i-1}=$$

$$=\sqrt{m}\sum_{i=0}^{j-1}C_n^{2i}m^{j-i-1}(m-1)^i\pm$$

$$\pm\sqrt{m-1}\sum_{i=1}^{j}C_n^{2i-1}m^{j-1}(m-1)^{i-1}=c\sqrt{m}\pm d\sqrt{m-1}$$

که در آن $c, d\in\mathbf{Z}^+$. در هر دو حالت داریم:

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}\pm\sqrt{l}$$

که درآن $k، l\in\mathbf{Z}^+$. درضمن

$$k-l=(\sqrt{k}+\sqrt{l})(\sqrt{k}-\sqrt{l})=$$

$$=(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})^n=$$

$$=[(\sqrt{m})^2-(\sqrt{m-1})^2]^n=1$$

بنا براین

$$l=k-1 \quad \text{و} \quad (\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$$

۱۰۲. عدد درست $N>\frac{1}{\varepsilon}$ را انتخاب می کنیم و هر زوج عدد

$$x، y\in[0، 1]$$

را، متناظر با زوج عدد u و v قرار می‌دهیم کـه با دستورهای زیر تعریف شده باشند:

$$u=[Nx]، \quad v=[Ny]$$

در این صورت، اگـر دو زوج $(x_1، y_1)$ و $(x_2، y_2)$، متناظر با یك زوج $(u، v)$ باشند، آن وقت

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{N}(u+\{Nx_1\}-\frac{1}{N}(u+\{Nx_2\})\right|=$$

$$=\frac{1}{N}\left|\{Nx_1\}-\{Nx_2\}\right|<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

به‌همین ترتیب: $|y_1-y_2|<\varepsilon$. چون

$$u، v\in\{0، \ldots، N-1\}$$

بنا براین، تعداد همهٔ زوج‌های $(u، v)$، برابراست با N^2. مجموعهٔ (N^2+1) زوج مقدارهای

$$x=\{la\},\ y=\{lb\},\ (l=0, 1, \ldots, N^2)$$

را در نظر می گیریم. بنا بر اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دست‌کم دو زوج از این مجموعه (مثلاً، به‌ازای $l=i$ و $l=j$ و $i>j$)، متناظر با یك زوج (u, v) خواهند بود. بنابراین، اگر فرض کنیم:

$$n=i-j,\ k=[ia]-[ja],\ m=[ib]-[jb]$$

آن وقت، به‌نابرابری‌های موردنظر می‌رسیم:

$$|na-k|=|(ia-[ia])-(ja-[ja])|=|\{ia\}-\{ja\}|<\varepsilon,$$

$$|nb-m|=|(ib-[ib])-(jb-[jb])|=|\{ib\}-\{jb\}|<\varepsilon$$

یادداشت. جواب، تعبیر هندسی جالبی دارد. مربع

$$K=\{(x, y)|0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1\}$$

را در صفحهٔ مختصات درنظر می‌گیریم وآن را، به N^2 مربع به‌ضلع $\frac{1}{N}$ تقسیم می‌کنیم، با توجه به راه حل، دو زوج مقدارهای x_1، y_1 و x_2، y_2، وقتی با یك زوج عددهای درست u، v متناظرند که، نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در یکی از این مربع‌های جزئی قرار گیرند.

۱۰۳. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $k\in\mathbf{N}$، بی‌نهایت عدد $m\in\mathbf{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$5^m\equiv 1 \pmod{2^k}$$

درواقع، بین عددهای

$$5^0, 5^1, 5^2, \ldots, 5^{2^k}$$

می‌توان دو عدد 5^p و 5^q $(p>q)$ پیدا کرد، به‌نحوی که در تقسیم بر 2^k، به‌یك باقی‌مانده برسند. در این صورت، تفاضل آن‌ها

$$5^p-5^q=5^q(5^{p-q}-1)$$

بر 2^k بخش‌پذیر می‌شود، یعنی $5^{p-q}-1$ و همهٔ عددهای به‌صورت

$$5^{r(p-q)}-1, \ (r\in \mathbf{N})$$

بر 2^k بخش‌پذیرند. به این ترتیب، برای هر مقدار $m=r(p-q)$ و $r\in\mathbf{N}$ داریم:

$$5^m \equiv 1 \pmod{2^k}$$

و از آن‌جا

$$5^{m+k} \equiv 5^k \pmod{10^k}$$

یعنی، k رقم آخر عدد 5^{m+k}، در عددنویسی دهدهی، عدد 5^k را تشکیل می‌دهند. فرض کنید، عدد k، در نابرابری

$$2^k > 10^{1976}$$

صدق کند، در این صورت، عدد

$$5^k = \frac{10^k}{2^k} < 10^{k-1976}$$

شامل رقم‌هائی است که، تعداد آن‌ها، از $k-1976$ بیشتر نیست. بنابراین، بین k رقم آخر عدد 5^{m+k}، تنها $k-1976$ رقم آخر، می‌توانند غیرصفر باشند، و بقیهٔ ۱۹۷۶ رقم (که درردیف هم قراردارند) برابر صفرند. حکم، ثابت شد.

۱۰۴. ابتدا، با استقرای روی $j\in\mathbf{Z}^+$، ثابت می‌کنیم، عدد $5^{2^j}-1$ بر 2^{j+2} بخش‌پذیر، ولی بر 2^{j+3} بخش‌ناپذیر است. برای $j=0$ داریم:

$$5^{2^0}-1=5-1=4$$

یعنی، برای $j=0$، حکم مطلوب درست است.

اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از $j\geqslant 0$، عدد $5^{2^j}-1$ بر 2^{j+2} بخش‌پذیر و بر 2^{j+3} بخش‌ناپذیر باشد، در این صورت، عدد

$$5^{2^{j+1}}-1=(5^{2^j}-1)(5^{2^j}+1)$$

بر 2^{j+3} بخش‌پذیر و بر 2^{j+4} بخش‌ناپذیر است، زیرا

$$5^{2^j}+1=(4+1)^{2^j}+1\equiv 2 \pmod 4$$

حالا، حکم مسأله را، با استقرا روی $m\in \mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم. به ازای $m=۱$، حکم درست است، زیرا آخرین رقم فرد ۵، در عدد ۵^n، برای $n>۱$، همیشه متناظر است با رقم زوج ۲ که قبل ازآن واقع است.

اکنون، فرض کنید، حکم مسأله، برای مقداری از $m\geqslant ۱$ درست باشد، یعنی بی‌نهایت عدد $n\in \mathbf{N}$ وجود داشته باشد که، به ازای هرکدام از آن‌ها، عدد ۵^n به $m+۱$ رقم ختم شده باشد که یک‌درمیان فرد و زوج باشند. اگر رقم‌های $(m+۲)$امین و $(m+۱)$امین (از طرف راست)، در عدد ۵^n، یکی فرد و دیگری زوج باشد، آن وقت فرض می‌کنیم $k=n$. در غیر این صورت $k=n+۲^{m-۱}$ می‌گیریم که، در این صورت، داریم:

$$۵^{k-(m+۲)}-۵^{n-(m+۲)}=۵^{n-(m+۲)}(۵^{۲^{m-۱}}-۱)\equiv ۲^{m+۱} (\mathrm{mod}\ ۲^{m+۲})$$

چون عدد $۵^{۲^{m-۱}}-۱$ بر $۲^{m+۱}$ بخش‌پذیر و بر $۲^{m+۲}$ بخش‌ناپذیر است، بنا بر این

$$۵^k-۵^n\equiv ۵\times ۱۰^{m+۱} (\mathrm{mod}\ ۱۰^{m+۲})$$

یعنی $(m+۱)$ رقم آخر در دو عدد ۵^k و ۵^n برهم منطبق‌اند. ولی رقم $(m+۲)$ام آن‌ها، ازنظر فرد و زوج بودن، باهم فرق دارند. به‌این ترتیب، عدد ۵^k ساخته شد (و چون $۵^k\geqslant ۵^n$، تعداد این‌گونه عددها، بی‌نهایت است)، یعنی حکم، برای $m+۱$ هم، درست است. مسأله حل شد.

۱۰۵. نقطه‌ای دردرون مستطیل درنظر می‌گیریم، فاصلهٔ آن را تا دو ضلع روبه‌روی مستطیل، $x_۱$ و $x_۲$ و فاصلهٔ آن را تا دو ضلع دیگر روبه‌رو، $y_۱$ و $y_۲$ می‌نامیم. در این صورت، با توجه به‌فرض

$$A=x_۱+x_۲ \quad و \quad B=y_۱+y_۲$$

عددهایی فرد هستند. فرض می‌کنیم، عددهای

$$a_{۱۱}, a_{۱۲}, a_{۲۱}, a_{۲۲}\in \mathbf{Z}$$

وجود داشته باشند، به‌نحوی که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$x_i^۲+y_j^۲=a_{ij}^۲$$

(چه این‌جا و چه بعد از این: $i, j = ۱, ۲$). قرار می‌گذاریم:

$$u_i = x_i^{۲} A \cdot B, \quad v_j = y_j \cdot A \cdot B$$

در این صورت داریم:

$$u_۱ - u_۲ = (x_۱ - x_۲)AB = (x_۱^۲ - x_۲^۲)B =$$

$$= [(x_۱^۲ + y_۱^۲) - (x_۲^۲ + y_۱^۲)]B = (a_{۱۱}^۲ - a_{۲۱}^۲)B = C,$$

$$u_۱ + u_۲ = (x_۱ + x_۲)AB = A^۲B = D$$

به‌همین ترتیب

$$v_۱ - v_۲ - (a_{۱۱}^۲ - a_{۱۲}^۲)A = E, \quad v_۱ + v_۲ = AB^۲ = F$$

و سرانجام

$$u_i^۲ + v_j^۲ = (x_i^۲ + y_j^۲)A^۲B^۲ = a_{ij}^۲ A^۲ B^۲ = b_{ij}^۲$$

درضمن، عددهای C، E و b_{ij} درست و عددهـای D و F فرد هستند. فرض می‌کنیم، همهٔ عددهای u_i و v_j، درست باشند. در ایـن صورت، یکی از دو عدد $u_۱$ و $u_۲$ و، همچنین، یکی ازدوعدد $v_۱$ و $v_۲$، فرد است (زیرا، مجموع آن‌ها، عددی است فرد). ایـن دو عدد فرد را u و v و مجموع مجذورهای آن‌ها را $b^۲$ می‌نامیم. داریم:

$$u^۲ \equiv ۱ \pmod{۴}, \quad v^۲ \equiv ۱ \pmod{۴}$$

در نتیجه، برابری

$$u^۲ + v^۲ = b^۲$$

ممکن نیست، زیرا

$$b^۲ \not\equiv ۲ \pmod{۴}$$

تناقض حاصل، نشان می‌دهد کـه، همهٔ عددهای u_i و v_j نمی‌توانند عددهایی درست باشند. بنابراین، دست‌کم، یکی از عددهای درست

$$U_i = ۲u_i, \quad V_j = ۲v_j (۲u_i = D \pm C, \quad ۲v_j = F \pm E)$$

فرد است. مثلاً U_1 را عددی فردمی گیریم (حالت‌های دیگر را هم، به‌همین ترتیب، می‌توان بررسی کرد). در این صورت، از برابری

$$u_1^2+v_1^2=b_{11}^2$$

به‌دست می‌آید:

$$U_1^2+V_1^2=4b_{11}^2$$

که ممکن نیست، زیرا

$$U_1^2\equiv 1 \pmod 4),\quad 4b_{11}^2\equiv 0 \pmod 4),$$

در حالی که $V_1^2\not\equiv 3 \pmod 4)$.

اثبات کامل شد.

۱۰۶. فرض می‌کنیم، چنین هرمی وجودداشته باشد. ضلع مربع قاعده را g و ارتفاع هرم را h می‌گیریم. در این صورت، طول هریك از یال‌ها، مقدار مساحت کل و اندازهٔ حجم هرم، به‌ترتیب برابرند با

$$f=\sqrt{h^2+2\left(\frac{g}{2}\right)^2},\ s=g^2+2g\sqrt{h^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2},\ v=\frac{1}{3}g^2h$$

چون g، f، s و v، عددهایی طبیعی هستند، بنابراین عددهای

$$x=g^3,\quad y=6v,\quad z=g(s-g^2),\quad u=2g^2f$$

هم باید طبیعی باشند و، درضمن، داشته باشیم:

$$x^2+y^2=g^6+36v^2=4g^4\left[h^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2\right]=g^2(s-g^2)^2=z^2,$$

$$x^2+z^2=g^6+4g^4\left[h^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2\right]=4g^4\left[h^2+2\left(\frac{g}{2}\right)^2\right]=u^2$$

بنابراین، باید دستگاه

$$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ x^2+z^2=u^2\end{cases}$$

درمجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب داشته باشد. (x_0, y_0, z_0, u_0) را، یکی از این جواب‌ها فرض می‌کنیم، به‌نحوی که x_0، کمترین مقدار ممکن برای $x\in\mathbf{N}$ باشد. دراین صورت، عددهای x_0، y_0، z_0 و u_0، دو به‌دو نسبت به‌هم اول می‌شوند. درواقع، اگردو تا از این عددها، بر عددی مثل p بخش‌پذیر باشند، آن وقت از برابری‌های

$$x_0^2+y_0^2=z_0^2,\ x_0^2+z_0^2=u_0^2,\ y_0^2+u_0^2=2z_0^2$$

نتیجه می‌شود که دو عدد دیگر هم، باید بر p بخش‌پذیر باشند. ولی دراین صورت

$$\left(\frac{x_0}{p}, \frac{y_0}{p}, \frac{z_0}{p}, \frac{u_0}{p}\right)$$

هم، جوابی از دستگاه است و، درضمن، $\frac{x_0}{p}<x_0$، که نوع انتخاب x_0 را نقض می‌کند. به جز این‌ها، عدد x_0 زوج و، بنابراین، عددهای y_0، z_0، u_0 فردند. درواقع، اگر x_0 فرد باشد؛ آن‌گاه

$$x_0^2\equiv 1 \pmod 4$$

و عدد $u_0^2=2x_0^2+y_0^2$، در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ ۲ یا ۳ می‌رسد (با توجه به زوج بودن عدد y_0) که ممکن نیست. از برابری

$$x_0^2=z_0^2-y_0^2$$

به دست می‌آید:

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2=\frac{z_0+y_0}{2}\cdot\frac{z_0-y_0}{2}$$

درضمن، عددهای طبیعی $\frac{1}{2}(z_0+y_0)$ و $\frac{1}{2}(z_0-y_0)$ نسبت به‌هم اول‌اند، زیرا درغیر این‌صورت، باید داشته باشیم:

$$(z_\circ, y_\circ)=(z_\circ, z_\circ-y_\circ)\geqslant\left(z_\circ, \frac{z_\circ-y_\circ}{۲}\right)=$$

$$=\left(z_\circ-\frac{z_\circ-y_\circ}{۲}, \frac{z_\circ-y_\circ}{۲}\right)=\left(\frac{z_\circ+y_\circ}{۲}, \frac{z_\circ-y_\circ}{۲}\right)>۱$$

یعنی، باید $z_\circ$ و $y_\circ$ نسبت به‌هم، اول نباشند. بنا بر این، عددهای $\frac{۱}{۲}(z_\circ+y_\circ)$ و $\frac{۱}{۲}(z_\circ-y_\circ)$، به‌ترتیب، مجذور دو عدد $k، l\in\mathbf{N}$ هستند که نسبت به هم اول‌اند، در نتیجه

$$x_\circ=۲kl، \quad y_\circ=k^۲-l^۲، \quad z_\circ=k^۲+l^۲$$

به‌همین ترتیب، از برابری

$$x_\circ^۲=u_\circ^۲-z_\circ^۲$$

به‌دست می‌آید:

$$x_\circ=۲mn، \quad z_\circ=m^۲-n^۲، \quad u_\circ=m^۲+n^۲$$

برای عددهایی مثل $m، n\in\mathbf{N}$. به‌این ترتیب، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} kl=mn \\ k^۲+l^۲=m^۲-n^۲ \end{cases}$$

اگر فرض کنیم $(k، m)=a$، آن وقت

$$k=ab، \quad m=ac، \quad a، b، c\in\mathbf{N}، \quad (b، c)=۱$$

برابری $kl=mn$ به صورت $abl=acn$ درمی‌آید، از آن‌جا $bl=cn$، $l=ad$ $(d\in\mathbf{N})$، زیرا bl بر c بخش‌پذیر است، ولی $(b، c)=۱$. در نتیجه $bcd=cn$ و $n=bd$؛ درضمن، از شرط

$$۱=(k، l)=(ab، cd)$$

به‌دست می‌آید: $(a، d)=۱$. سپس، داریم:

$$a^2b^2+c^2d^2=a^2c^2-b^2d^2$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(a^2+d^2)(b^2+c^2)=2a^2c^2$$

و چون

$$(a^2+d^2, a^2)=(d^2, a^2)=1; \quad (b^2+c^2, c^2)=(b^2, c^2)=1$$

بنابراین، شرط اخیر، تنها در دوحالت زیر برقرار است:

$$\begin{cases}a^2+d^2=2c^2\\ b^2+c^2=a^2\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}a^2+d^2=c^2\\ b^2+c^2=2a^2\end{cases}$$

دراین حالت‌ها، به‌ترتیب، داریم:

$$\begin{cases}b^2+d^2=c^2\\ b^2+c^2=a^2\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}d^2+b^2=a^2\\ d^2+a^2=c^2\end{cases}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که، یکی از گروه‌های

$$(b, d, c, a) \quad \text{یا} \quad (d, b, a, c)$$

همراه با گروه

$$(x_0, y_0, z_0, u_0)$$

در دستگاه اصلی صدق می‌کند. چون $x_0=2mn=2mbd$، بنابراین $b<x_0$ و $d<x_0$ که با انتخاب x_0 متناقض است. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۱۰۷. ابتدا حکم مورد نظر را، برای مقدارهای

$$k=0, 1, \ldots, n-1$$

ثابت می‌کنیم، یك چند جمله‌ای می‌سازیم که درجهٔ آن، از $(n-1)$ تجاوز نکند ودرهر نقطهٔ a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$، مقدار a_i^k را قبول کند. بنابردستور لاگرانژ (قضیهٔ ۶۲ را ببینید)، این چندجمله‌ای، به‌این صورت است:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i^k \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}=\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (x-a_j)$$

که ضریب x^{n-1} درآن، برابر $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$ است. از طرف دیگر، چند جمله‌ای $P(x)$ بر چند جمله‌ای x^k منطبق است، بنابراین، برای $k<n-1$، این ضریب برابر صفر و به‌ازای $k=n-1$، برابر واحد است. به این ترتیب، ثابت شد که، عدد $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$، برای‌هریك ازمقدارهای $k=0, 1, \ldots, n-1$، عددی درست است.

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر برای عدد $k\geqslant n$ و عددهای درست b_1، b_2، ...، b_n داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1^{k-1}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-1}}{p_2}+\ldots+\dfrac{a_n^{k-1}}{p_n}=b_1 \\ \dfrac{a_1^{k-2}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-2}}{p_2}+\ldots+\dfrac{a_n^{k-2}}{p_n}=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_1^{k-n}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-n}}{p_2}+\ldots+\dfrac{a_n^{k-n}}{p_n}=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

آن وقت، عدد

$$b_0=\frac{a_1^k}{p_1}+\frac{a_2^k}{p_2}+\ldots+\frac{a_n^k}{p_n}$$

عددی درست‌است. دراین‌صورت، بنابرنظام استقرای ریاضی، حکم مطلوب، برای هرمقدار $k\in\mathbf{N}$ ثابت می‌شود. چندجمله‌ای

$$x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_n$$

را درنظر می‌گیریم که، ریشه‌های آن، عبارتند از عددهای a_1، a_2، ...، a_n.

ضریب‌های c_1، ...، c_n این چند جمله‌ای، بنا به‌قضیهٔ ویت، عددهایی درست هستند؛ درضمن، برای هر $j = 1$، ۲، ...، n داریم:

$$a_j^n = -\sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{n-i}$$

اگر در دستگاه (۱)، برابری اول را در c_1، برابری دوم را، در c_2، ... و برابری آخر را در c_n ضرب و، سپس، برابری‌های حاصل را، با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \frac{a_j^{k-i}}{p_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k-n}}{p_j}\sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{n-i} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k-n}}{p_j} a_j^n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^k}{p_j} = -b_0$$

یعنی، عدد

$$b_0 = -\sum_{i=1}^{n} c_i b_i$$

عددی درست است.

فصل دوم

معادله و نامعادله

---

§ ۶. معادله‌ها و دستگاه‌ها

۱۰۸. عدد $x = \frac{1}{3}$، جوابی از معادلهٔ مفروض است. ثابت می‌کنیم، این معادله، جواب دیگری ندارد. تابع‌های

$$y_1(x)=8^x \quad \text{و} \quad y_2(x)=3x+1$$

به‌ازای $x>-\frac{1}{3}$، مقدارهای مثبت را می‌پذیرند وصعودی هستند، بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها هم، تابعی صعودی است. به این ترتیب، معادلهٔ مفروض، در بازهٔ $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد. سپس، به‌ازای $x\leqslant -\frac{1}{3}$ داریم:

$$y_1(x)>0 \quad \text{و} \quad y_2(x)\leqslant 0$$

یعنی $y_1(x)y_2(x)\leqslant 0$. بنابراین، معادلهٔ مفروض، در بازهٔ $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ جواب ندارد. تنها جواب معادله، $x=\frac{1}{3}$ است.

۱۰۹. فرض می‌کنیم:

$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

بدون این‌که به کلی بودن مطلب، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان درنظر گرفت:

$$a\leqslant b\leqslant c$$

اگر $a=b$ یا $b=c$، آن وقت $f(b)=(b-a)(b-c)=0$. اگر $a<b<c$، آن وقت

$$f(b)<0 \quad \text{و} \quad f(a)=(a-b)(a-c)>0$$

چون $f(x)$، تابعی پیوسته است، بنابراین، عدد $x_0\in(a, b)$ پیدا می‌شود که برای آن داشته باشیم: $f(x_0)=0$.

۱۱۰. ثابت می‌کنیم، تابع

$$f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-16$$

درست در دو نقطه، برابر صفر می‌شود. مشتق این تابع، چنین است:

$$f'(x)=4x^3+15x^2+12x-4=(x+2)^2(4x-1)$$

این مشتق، به‌ازای $-2 < x < \frac{1}{4}$ و $x < -2$ منفی، و به ازای $x > \frac{1}{4}$ مثبت است. بنابراین، تابع $f(x)$، دربازهٔ $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ نزولی و دربازهٔ $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ صعودی است. چون

$$f(-10) > 0, \quad f(10) > 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) < f(0) < 0$$

بنابراین، تابع $f(x)$، در هریك از این بازه‌ها، یکبار برابر صفر می‌شود و معادلهٔ $f(x) = 0$ درست دو جواب دارد.

۱۱۱. اگر فرض کنیم $c = a^{\frac{1}{b}} > 1$، معادلهٔمفروض، به‌صورت معادلهٔ $c^x = x$ درمی‌آید. مشتق تابع $f(x) = c^x - x$، یعنی

$$f'(x) = c^x \ln c - 1$$

به‌ازای $c^x > \log_c e$ مثبت و به ازای $c^x < \log_c e$ منفی است، بنابراین، تابع $f(x)$، درنقطهٔ $x_0 > 0$، با شرط

$$c^{x_0} = \log_c e$$

دارای می‌نیمم است. اگر $f(x_0) > 0$، آن وقت معادلهٔ مفروض جواب ندارد؛ اگر $f(x_0) = 0$، آن‌گاه معادله دارای تنها جواب مثبت $x = x_0$ است؛ اگر $f(x_0) < 0$، معادله دو جواب مثبت دارد [در هریك از بازه‌های $(0, x_0)$ و $(x_0, +\infty)$ یك جواب، زیرا $f(0) > 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$].

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض تنها وقتی با شرطهای مورد نظر سازگار است که داشته باشیم:

$$x_0 = c^{x_0} = \log_c e = c^{\log_c e} = e \quad \text{و} \quad c = e^{\frac{1}{e}}$$

بنابراین، مقدارهایی از a و b که در برابری $a^e = e^b$ صدق کنند، با

شرط مسأله سازگارند که، در آن، $b>0$؛ یعنی

$$a=t,\ b=e\ln t,\ \ t\in(1,\infty)$$

درضمن، تنها جواب مثبت معادله، عبارت است از $x=e$.

۱۱۴. سمت چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=$$

$$=(a-1)\left(\frac{\cos x+\sin x+1}{\sin x\cos x}\right)=$$

$$=(a-1)\cdot\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}};\quad \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq\frac{1}{2}$$

بنا براین

$$\frac{2(a-1)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}=2\Longrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

معادلهٔ اخیر، به‌ازای $|a|>\sqrt{2}$ و $|a|=1$ جواب ندارد، ولی به‌ازای بقیهٔ مقدارهای a، دارای جواب است.

به‌این‌ترتیب، درحالت $|a|\in\{1\}\cup(\sqrt{2},\infty)$، معادلهٔ مفروض، جواب‌ندارد. درحالت $|a|\in[0,1)\cup(1,\sqrt{2}]$، معادله‌دارای‌جواب‌است:

$$x=(-1)^n\operatorname{arc}\sin\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}+n\pi$$

که در آن، برای $|a|\in[0,1)\cup(1,\sqrt{2}]$ داریم $n\in\mathbf{Z}$، و برای $|a|=\sqrt{2}$ داریم: $\frac{n}{2}\in\mathbf{Z}$.

۱۱۳. سمت چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$\cos^8 x+\sin^8 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4=$$

$$=\frac{1}{16}(2+12\cos^2 2x+2\cos^4 2x)=$$

$$=\frac{1}{32}(\cos^2 4x+14\cos 4x+17)$$

بنابراین، به معادلهٔ زیر که هم ارز معادلهٔ مفروض است، می‌رسیم:

$$\cos^2 4x+14\cos 4x=\frac{97}{4}-17=\frac{29}{4}$$

و از آن‌جا

$$\left(\cos 4x+\frac{29}{2}\right)\left(\cos 4x-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}$$

با توجه به‌این‌که $4x\in[0, 2\pi]$، به‌دست می‌آید:

$$4x\in\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} \Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$$

۱۱۴. فرض می‌کنیم، دستگاه مفروض، به‌ازای مقدارهایی از A و B، دارای جواب x باشد. از معادلهٔ اول دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$\cos Bx=-\cos Ax \Rightarrow \sin Bx=\varepsilon\sin Ax$$

که در آن $\varepsilon\in\{-1, 1\}$. در این صورت، با توجه به‌معادلهٔ دوم دستگاه:

$$(A+\varepsilon B)\sin Ax=0$$

چون $A, B\in\mathbf{N}$ و $A\neq B$، بنابراین $A+\varepsilon B\neq 0$. در نتیجه

$$\sin Ax=0=\sin Bx \Rightarrow Ax=k\pi, Bx=n\pi$$

$(k, n\in\mathbf{Z})$. اگر این مقدارهای Ax و Bx را در معادلهٔ اول دستگاه قرار دهیم، معلوم می‌شود که از دو عدد k و n، باید یکی زوج و دیگری فرد باشد. با حذف متغیر x، به‌دست می‌آید: $Bk=An$. چون k و n، یکی زوج

و دیگری فرد است، بنابراین، در تجزیه عددهای طبیعی A و B به‌عامل‌های اول، برای ۲، توان‌های مختلفی به‌دست می‌آید. برعکس، اگر $A=۲^l p$ و $B=۲^m q$، که در آن $l، m\in\mathbb{Z}^+$، $l\neq m$، $p، q\in\mathbb{N}$ و p و q عددهایی فردند؟ آن وقت، دستگاه مفروض، جواب $x=\frac{\pi}{۲^s}$ را دارد که در آن، $s=\min(l، m)$.

۱۱۵. از مجموع دو معادلهٔ دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\cos x\sin y+\sin x\cos y}{\cos y\sin y}=۲ \Rightarrow \frac{\sin(x+y)}{\sin ۲y}=۱$$

بنابراین

$$\sin\frac{x-y}{۲}\cos\frac{x+۳y}{۲}=۰$$

چون $۰<x، y<\frac{\pi}{۲}$، پس یا $x=y$ و یا $x+۳y=\pi$.

سپس، از تفاضل دو معادلهٔ دستگاه، داریم:

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin ۲y}=\cos ۲y \Rightarrow \sin(y-x)=\frac{۱}{۲}\sin ۴y$$

اگر $x=y$، آن‌گاه $\sin ۴y=۰$ و $y=\frac{\pi}{۴}$. از آن‌جا، نتیجه می‌شود: $x=y=\frac{\pi}{۴}$. اگر $x=\pi-۳y$، آن وقت

$$\sin(۴y-\pi)=\frac{۱}{۲}\sin ۴y \Rightarrow \sin ۴y=۰$$

بنابراین، دوباره به‌دست می‌آید: $y=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\pi-\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$. دستگاه تنها یك جواب دارد: $x=y=\frac{\pi}{۴}$. آزمایش نشان می‌دهد که، این مقدارهای x و

y، در معادله‌های دستگاه صدق می‌کنند.

۱۱۶. با توجه به این‌که $-۱ \leqslant \sin\alpha \leqslant ۱$ و $-۱ \leqslant \cos\alpha \leqslant ۱$، داریم:

$$[\sin(x-y)+۱][۲\cos(۲x-y)+۱] \leqslant ۶$$

که در آن، حالت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$\sin(x-y)=۱ \quad \text{و} \quad \cos(۲x-y)=۱$$

بنا براین، معادلهٔ مفروض، با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} \sin(x-y)=۱ \\ \cos(۲x-y)=۱ \end{cases}$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x-y=۲m\pi+\frac{\pi}{۲} & (m\in\mathbf{Z}) \\ ۲x-y=۲n\pi & (n\in\mathbf{Z}) \end{cases}$$

بنا براین

$$x=۲(n-m)\pi-\frac{\pi}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \quad (k\in\mathbf{Z})$$

$$y=[۲(n-۲m)-۱]\pi=[۲(k-m)-۱]\pi=(۲l+۱)\pi(l\in\mathbf{Z})$$

۱۱۷. در حالت $n=۱$ داریم:

$$۱=\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$$

یعنی

$$x=۲m\pi \quad \text{یا} \quad x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \ (m، k\in\mathbf{Z})$$

اگر $n=۲$، آن‌گاه

$$۱ = \sin x \sin ۲x + \cos x \cos ۲x = \cos(۲x - x) = \cos x$$

یعنی

$$x = ۲m\pi \quad (m \in \mathbf{Z})$$

اکنون $n > ۲$ می‌گیریم. داریم:

$$۱ = \sin x \sin ۲x \cdots \sin nx + \cos x \cos ۲x \cdots \cos nx \leqslant$$

$$\leqslant |\sin x \sin ۲x \cdots \sin nx| + |\cos x \cos ۲x \cdots \cos nx| \leqslant$$

$$\leqslant |\sin x \sin ۲x| + |\cos x \cos ۲x| =$$

$$= \max(|\sin x \sin ۲x + \cos x \cos ۲x|, |\sin x \sin ۲x - \cos x \cos ۲x|) =$$

$$= \max(|\cos x|, |\cos ۳x|)$$

بنابراین، اگر مقداری از x جواب معادلهٔ مفروض باشد، باید داشته باشیم:

$$\cos|۳x| = ۱ \quad \text{یا} \quad |\cos x| = ۱$$

ولی در حالت $|\cos ۳x| = ۱$، به‌دست می‌آید $\sin ۳x = ۰$ و از آن‌جا

$$\cos x \cos ۲x \cdots \cos nx = ۱ \quad \text{و} \quad |\cos x| = ۱$$

بنابراین،کافی‌است حالت $|\cos x| = ۱$ را بررسی کنیم. آزمایش نشان می‌دهد که، همهٔ مقدارهای $x = ۲m\pi\ (m \in \mathbf{Z})$، برای $n \geqslant ۳$، در معادلـهٔ مفروض صدق می‌کنند. اگر داشته باشیم: $x = (۲k + ۱)\pi\ (k \in \mathbf{Z})$،آن وقت

$$\sin rx = ۰, \ \cos rx = (-۱)^r, \ (r = ۱, \ldots, n)$$

بنابراین، مقدارهای $x = (۲k + ۱)\pi\ (k \in \mathbf{Z})$، تنها وقتی در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند که داشته باشیم:

$$۱ = \sin x \cdots \sin nx + \cos x \cdots \cos nx = (-۱)^{\frac{۱}{۲}n(n+۱)}$$

یعنی، وقتی که $\frac{۱}{۲} n(n + ۱)$، عـددی زوج باشد. ولی، عدد $\frac{۱}{۲}n(n + ۱)$ تنها وقتی زوج است که یکی از دو عدد n یا $n + ۱$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

به‌این ترتیب، سرانجام، جواب، به‌این صورت درمی‌آید:

$$n=1: x=2m\pi \text{ یا } x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (m, k\in\mathbf{Z}),$$

$$n=4l-2 \text{ یا } n=4l+1 (l\in\mathbf{N}): x=2m\pi \quad (m\in\mathbf{Z}),$$

$$n=4l \text{ یا } n=4l-1 (l\in\mathbf{N}): x=m\pi \quad (m\in\mathbf{Z})$$

۱۱۸. برای $n=1$، x و y، دو عدد دلخواهند. سپس، برای هر $n\in\mathbf{N}$، یا $x=0$ و y عددی دلخواه، یا $y=0$ و x عددی دلخواه، زوج (x, y)،که برای آن‌ها $xy\neq 0$ و $x+y=0$، به‌ازای هر مقدار فرد n، در معادله صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم، برای $n\geqslant 2$، هیچ زوجی از (x, y)، که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$xy(x+y)\neq 0$$

در معادله، صدق نمی‌کند. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $|y|\geqslant|x|$؛ اگر $z=\frac{y}{x}\neq -1$، آن‌گاه $|z|\in(0, 1]$ ومعادله به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(1+z)^n=1+z^n$$

برای $z>0$ داریم:

$$(1+z)^n=1+nz+\dots+z^n>1+z^n$$

و برای $z<0$

$$(1+z)^n=(1-|z|)^n<1-|z|<1-|z|^n\leqslant 1+z^n$$

و در هردو حالت

$$(1+z)^n\neq 1+z^n$$

به‌این ترتیب، این جواب‌ها را، برای معادله داریم:

$$n=1:\ (x, y)\in\mathbf{R};$$

$$n=2k(k\in\mathbf{N}):$$

$$(x, y)\in\{(0, t)|t\in\mathbf{R}\}\cup\{(t, 0)|t\in\mathbf{R}\};$$

$$n=2k+1(k\in\mathbf{N}):$$

$$(x, y)\in\{(0, t)|t\in\mathbf{R}\}\cup\{(t, 0)|t\in\mathbf{R}\}\cup\{|(t, -t|t\in\mathbf{R}\}$$

۰۱۱۹. اگر دو طرف معادلهٔ اول را در ۲ ضرب و، سپس، آن را با معادلهٔ دوم جمع کنیم، باید برای هر جواب دستگاه داشته باشیم:

$$x^2+2xy+y^2+2(x+y)=(x+y)^2+2(x+y)=10+6\sqrt{2}$$

یعنی

$$(x+y+1)^2=(3+\sqrt{2})^2\ \Rightarrow\ x+y+1=\pm(3+\sqrt{2})$$

اگر $x+y=-4-\sqrt{2}$، آن وقت $xy=6+4\sqrt{2}$ و

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(4+\sqrt{2})^2-2(6+4\sqrt{2})=$$

$$=-6-8\sqrt{2}<0$$

که ممکن نیست. بنابراین $x+y=2+\sqrt{2}$ و $xy=2\sqrt{2}$، که از آن‌جا دو جواب به‌دست می‌آید:

$$(x_1=2, y_1=\sqrt{2})\ \text{و}\ (x_2=\sqrt{2}, y_2=2)$$

و آزمایش نشان می‌دهد که، این هر دو جواب، در دستگاه صدق می‌کنند.

۰۱۲۰. بنابر قضیهٔ واسطه‌ها (قضیهٔ ۶)، داریم:

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n+1}[(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)+x_n]^2=$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

درضمن، علامت برابری، تنها برای وقتی است که داشته باشیم:

$$1-x_1=x_1-x_2=\ldots=x_{n-1}-x_n=x_n=\frac{1}{n+1}$$

یعنی، وقتی‌که داشته باشیم: $x_i=1-\frac{i}{n+1}$. بنابراین، تنها یک گروه از عددهای x_1، ...، x_n وجود دارد که درمعادلهٔ مفروض صدق می‌کند.

۱۲۱. $R=\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ می‌گیریم و $(x_1, \ldots, x_n)$ را جوابی از دستگاه فرض می‌کنیم. اگر از قضیهٔ واسطه‌ها استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\geqslant\frac{n}{R};\quad 9=x_1+\ldots+x_n\geqslant nR$$

از آن‌جا $R\geqslant n$ و $R\leqslant\frac{9}{n}$. بنابراین $n^2\leqslant 9$ و $n\leqslant 3$. در ضمن، به‌ازای $n=3$، همه نابرابری‌های بالا، به برابری تبدیل می‌شوند و این، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=x_3=R=3$$

یعنی $n=3$ با شرط مسأله سازگار است و دستگاه، در مجموعهٔ عددهای مثبت، تنها یک جواب دارد: (۳، ۳، ۳).

چون به‌ازای $n=1$، به دستگاهی ناسازگار می‌رسیم، به بررسی حالت $n=2$ می‌پردازیم. دراین حالت، داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=9\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1\end{cases}$$

که با توجه به برابری

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

با دستگاه زیر، هم‌ارز است:

$$\begin{cases} x_1+x_2=9 \\ x_1x_2=9 \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، x_1 و x_2، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم‌اند:

$$t^2-9t+9=0$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$t_{1,2}=\frac{1}{2}(9\pm 3\sqrt{5})$$

بنابراین، برای‌دستگاه، دوجواب (t_1, t_2) و (t_2, t_1) به‌دست می‌آید. چون t_1 و t_2 عددهایی مثبت‌اند، $n=2$ با شرط مسأله سازگار است.

۱۲۲. روشن است، برای هر اندیس $i\in\{1, \dots, n\}$، گروه عددهای

$$x_i=1,\ x_1=\dots=x_{i-1}=x_{i+1}=\dots=x_n=0$$

در دستگاه مفروض صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم، انتخاب دیگری از n عدد غیرمنفی، که در دستگاه صدق کند، وجود ندارد.

اگر $x_i\geqslant 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$، در برابری

$$x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k=1$$

صدق کند، باید $x_i\in[0, 1]$ باشد. بنابراین، برای مقدارهای مورد نظر مجهول‌ها، داریم:

$$2=(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)=$$

$$=1+(x_1+x_2+\dots+x_n)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\dots+x_1\dots x_n\geqslant$$

$$\geqslant 1+(x_1^k+\dots+x_n^k)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$

بنابراین $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=0$. از این‌جا نتیجه می‌شود که، همهٔ مقدارهای مجهول‌ها، به استثنای احتمالاً یکی، باید برابر صفر باشند، زیرا اگر دو تا از مجهول‌ها، مثل x_p و x_q مخالف صفر باشند، آن وقت به‌دست می‌آید:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \geqslant x_p x_q > 0$$

سرانجام، اگر برای اندیسی از $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$، همهٔ متغیرهای $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ برابر صفر باشند، آن‌وقت، با توجه به‌دستگاه، باید داشته باشیم: $x_i = 1$.

۱۲۳. (x, y, z) را جوابی از دستگاه می‌گیریم. اگر فرض کنیم:

$$x = tg\, a, \quad -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

آن‌وقت، از معادلهٔ اول دستگاه داریم:

$$y = \frac{2x}{1-x^2} = tg\, 2a$$

و از معادله‌های دوم و سوم دستگاه، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$z = tg\, 4a, \quad x = tg\, 8a$$

از این‌جا، به برابری $tg\, a = tg\, 8a$ می‌رسیم، یعنی $a = \frac{1}{7}k\pi$؛ درضمن

$$x = tg\frac{k\pi}{7}, \quad y = tg\frac{2k\pi}{7}, \quad z = tg\frac{4k\pi}{7}$$

آزمایش، روشن می‌کند که به‌ازای

$$k\in\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

۷ جواب حاصل، با هم فرق دارند و در دستگاه مفروض هم صدق می‌کنند.

۱۲۴. روشن است که، برای هر اندیس $i\in\{1, \ldots, n\}$، گروه‌عددهای

$$x_i = a, \quad x_1 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$$

جوابی از دستگاه است. ثابت می‌کنیم، این دستگاه، جواب دیگری ندارد.

۱) به‌ازای $n = 1$، با تنها معادلهٔ $x_1 = a$ سروکار داریم.

۲) به‌ازای $n=2$ داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=a\\x_1^2+x_2^2=a^2\end{cases}$$

که از آن، به‌این معادله می‌رسیم:

$$(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2=0$$

بنابراین، یا $x_1=a$، $x_2=0$ و یا $x_1=0$، $x_2=a$.

۳) $n\geqslant 3$ می‌گیریم، در این‌صورت، برای هرجواب دستگاه، باید دست‌کم، این دوشرط را داشته باشیم:

$$\begin{cases}x_1^2+\dots+x_n^2=a^2\\x_1^3+\dots+x_n^3=a^3\end{cases}$$

اگر $a=0$، از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$x_1=x_2=\dots=x_n=0$$

اگر $a\neq 0$، آن‌وقت

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2+\dots+\left(\frac{x^n}{a}\right)^2=1$$

بنابراین، برای هر $i\in\{1, \dots, n\}$ داریم: $\left|\frac{x_i}{a}\right|\leqslant 1$، یعنی $\left(\frac{x_i}{a}\right)^3\leqslant\left(\frac{x_i}{a}\right)^2$. سپس

$$1=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^3\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^2=1$$

بنابراین، برای هرمقدار i، باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\left(\frac{x_i}{a}-1\right)=0$$

یعنی یا $x_i=0$ و یا $x_i=a$. درضمن روشن است که، اگر $x_i=a$، آن‌گاه با توجه به‌دستگاه، همهٔ متغیرهای دیگر x_1، ...، x_{i-1}، x_{i+1}، ...، x_n برابر صفر می‌شوند، و برعکس. بنابراین، درهرسه حالت، همان گروه عددهایی که آوردیم، در دستگاه صدق می‌کنند و، دستگاه، به جز آن‌ها، جواب دیگری ندارد. [اثبات این مطلب جالب است که، در حالت $n\geqslant 3$، می‌توان از معادله‌های دوم و سوم دستگاه، همهٔ بقیهٔ معادله‌ها را به‌دست آورد.]

§۷. نابرابری‌ها

۱۲۵. با استفاده ازقضیهٔ ۴، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-$$

$$-\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-\sqrt{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}=0$$

یعنی، این دو عدد، با هم برابرند.

۱۲۶. چون $a<b<c<d$، بنابراین

$$y-x=ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)>0$$

$$z-y=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)>0$$

بنابراین $x<y<z$.

۱۲۷. فرض کنید، برای a و b و c داشته باشیم:

$$abc=1 \text{ و } a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

در این صورت

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=$$

$$=(abc-1)+(a+b+c)-abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>0$$

به این ترتیب، حاصل‌ضرب سه عامل $a-1$، $b-1$، $c-1$ مقداری است مثبت، یعنی یا هر سه آن‌ها مثبت‌اند و یا، تنها یکی از آن‌ها مثبت است. ولی، هر سهٔ آن‌ها نمی‌توانند مثبت باشند، زیرا، اگر داشته باشیم: $a>1$، $b>1$، $c>1$، آن وقت داریم: $abc>1$ که شرط $abc=1$ را نقض می‌کند.

۱۲۸. نابرابری‌های موردنظر مسأله، هم‌ارز است با نابرابری‌های

$$B<\frac{A+B}{2}<A$$

(زیرا $B<A$). در واقع، داریم:

$$\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}=\frac{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}=\frac{A+B}{2}$$

۱۲۹. اگر از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها استفاده کنیم و درنظر بگیریم که عددهای $\log_b a$، $\log_c b$ و $\log_a c$، مقدارهایی مثبت‌اند و حاصل‌ضربی برابر واحد دارند، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{a+c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}\geqslant\frac{9}{(a+b)+(b+c)+(a+c)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c}$$

که از آن‌جا، درستی نابرابری مورد نظر ثابت می‌شود.

۱۳۰. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $a\geqslant b\geqslant c>0$. تفاضل بخش سمت راست نابرابری و سمت چپ آن را، به‌این‌ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$3abc+a^2(a-b-c)+b^2(b-a-c)+c^2(c-a-b)=$$

$$=3abc+a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2a-a^2c-b^2c-c^2a-c^2b=$$

$$=a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+$$

$$+c(c^2-bc+ab-ac)=$$

$$=(a-b)(a^2-b^2)-c(a-b)^2+c(c-a)(c-b)=$$

$$=(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c)$$

اکنون، برای اثبات درستی نابرابری، کافی است توجه کنیم که، این مقدار، غیرمنفی است، زیرا

$$a+b>c,\ b\geqslant c,\ a\geqslant c,\ c>0$$

۱۳۱. در حالت $a=b=c=0$، نابرابری برقرار است (به‌برابری تبدیل می‌شود). فرض می‌کنیم $s=a+b+c>0$. در این صورت

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)=$$

$$=\frac{a}{s}-\frac{a(1-a)}{s(b+c+1)}+\frac{b}{s}-\frac{b(1-b)}{s(a+c+1)}+\frac{c}{s}-\frac{c(1-c)}{s(a+b+1)}+$$

$$+(1-a)(1-b)(1-c)\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)=\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)-$$

$$-\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)-$$

$$-\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)-$$

$$-\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-b)(1-a)\right)\leqslant 1$$

زیرا

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=1,\ \frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)\geqslant 0,$$

$$\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)\geqslant 0,$$

$$\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-b)(1-a)\right)\geqslant 0$$

برای اثبات نابرابری اول، از این سه نابرابری، کافی است توجه کنیم:

$$\frac{a(1-a)}{s}\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)=\frac{(b+c)^2-(b+c+1)bc}{b+c+1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(b+c)^2-3bc}{b+c+1}=\frac{(b-c)^2+bc}{b+c+1}\geqslant 0$$

دو نابرابری دیگر هم، به‌همین ترتیب، ثابت می‌شوند.

۱۳۲. فرض می‌کنیم:

$$p=a+b+c>0,\ q=ab+bc+ac>0,\ r=abc>0$$

عددهای a، b و c، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ سوم‌اند:

$$P(x)=x^3-px^2+qx-r$$

$P(x)$، به‌ازای مقدارهای $x\leqslant 0$ منفی است. بنابراین، ریشه‌های $P(x)=0$، یعنی a، b و c، مقدارهایی مثبت‌اند.

۱۳۳. $\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ فرض می‌کنیم. در این صورت، اگر $x=\cos\alpha$ را در نابرابری $\sin x<x$ (که برای $x>0$ درست‌است) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin(\cos\alpha)<\cos\alpha$$

به‌همین ترتیب، از نابرابری $\alpha\geqslant\sin\alpha$، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha\leqslant\cos(\sin\alpha)$$

زیرا تابع $\cos x$، در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، نزولی است. به‌این ترتیب، برای $\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ به‌دست می‌آید:

$$\sin(\cos\alpha)<\cos\alpha\leqslant\cos(\sin\alpha)$$

سپس، در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ داریم:

$$\sin(\cos\alpha)\leqslant 0<\cos(\sin\alpha)$$

یعنی نابرابری، برای $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ هم درست است. با توجه به‌زوج‌بودن تابع‌های $\sin(\cos x)$ و $\cos(\sin x)$، به‌نابرابری مطلوب در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ می‌رسیم؛ و چون 2π دورهٔ تناوب این تابع‌هاست، بنابراین، نابرابری مفروض، برای همهٔ مقدارهای $\alpha\in\mathbf{R}$ درست است.

۱۳۴. $\beta_i=2-\alpha_i>0$ می‌گیریم $(i=1, \ldots, n)$. دراین‌صورت، با درنظر گرفتن $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=2n-1$ وقضیهٔ‌مربوط به‌واسطه‌ها، به‌دست‌می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\beta_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}+1\right)-n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i+\beta_i}{\beta_i}-n=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}-n\geqslant$$

$$\geqslant 2\frac{n}{\sqrt[n]{\beta_1\cdots\beta_n}}-n\geqslant\frac{2n^2}{\beta_1+\cdots+\beta_n}-n=\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}$$

۱۳۵. فرض می‌کنیم: $b_i = s - a_i > 0 \ (i = 1, \dots, n)$. در این صورت، با توجه به برابری $\sum_{i=1}^{n} b_i = (n-1)s$ و قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i} + 1\right) - n = \sum_{i=1}^{n} \frac{s}{b_i} - n = s\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} - n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{s \cdot n}{\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n}} - n \geqslant s \cdot \frac{n^2}{b_1 + \dots + b_n} - n = \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}$$

۱۳۶. $\frac{a_i}{a_{i+1}} = b_i$ می‌گیریم $(i = 1, \dots, n)$ و فرض می‌کنیم: $b_{n+1} = 1$. در این صورت، داریم: $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$، و اگر به قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها توجه داشته باشیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} b_j \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n} \prod_{j \neq i} b_j^n\right) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i^n$$

که از آن، درستی نابرابری $\sum_{i=1}^{n} b_i^n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{b_i}\right)$ نتیجه می‌شود. به‌این ترتیب، به‌پرسش مسأله، باید پاسخ مثبت داد.

۱۳۷. $b = a - 1$ فرض می‌کنیم. ابتدا، حالت $0 < x < 1$ رادرنظر می‌گیریم. باتوجه به‌نابرابری برنولی (قضیهٔ ۵) و درنظرگرفتن $0 < b < 1$ به‌دست می‌آید:

$$(1+x)^b \leqslant 1 + bx \Rightarrow (1+x)^{-b} \geqslant \frac{1}{1+bx}$$

دوباره، از نابرابری برنولی استفاده می‌کنیم:

$$(1+b)x^b = (1+b)[1-(1-x)]^b \leqslant (1+b)[1-b(1-x)] =$$

$$= 1 + bx + b^2(x-1) < 1 + bx$$

از آن‌جا

$$1+bx>(1+b)x^b \quad \text{یا} \quad x^a+bx^{a+1}>(1+b)x$$

اکنون داریم:

$$(1+x)^{-b}-\frac{1-x^a}{1-x}\geqslant\frac{1}{1+bx}-\frac{1-x^a}{1-x}=$$

$$=\frac{1-x+(x^a-1)(1+bx)}{(1+bx)(1-x)}=\frac{x^a+bx^{a+1}-(1+b)x}{(1+bx)(1-x)}>0$$

زیرا $(1+bx)(1-x)>0$. بنابراین

$$(1-x)^{-b}>\frac{1-x^a}{1-x} \qquad (0<x<1)$$

حالت $x>1$، با قراردادن $x=\frac{1}{t}$، بــه حالت بالا منجر می‌شود. در این‌صورت، $0<t<1$ و

$$\frac{1-x^a}{1-x}=\frac{1-\frac{1}{t^a}}{1-\frac{1}{t}}=t^b\cdot\frac{1-t^a}{1-t}<t^b(1+t)^{-b}=\left(\frac{1}{t}+1\right)^{-b}=$$

$$=(1+x)^{-b}$$

۱۳۸. اثبات را، با استقـرای روی $n\in\mathbf{Z}^+$ می‌دهیم. برای $n=0$، به رابطهٔ درست $1^\alpha\leqslant 1$ می‌رسیم. فـرض می‌کنیم، نابرابری، برای عددی مثل n برقرار باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $n+1$ برقرار است. داریم:

$$(1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})^\alpha-(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha=$$

$$=(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha\left[\left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n}\right)^\alpha-1\right]\leqslant$$

$$\leqslant (1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}\leqslant [(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}=$$
$$=(n+1)^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}^{\alpha}$$

(درستی نابرابری

$$(1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}\leqslant [(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}$$

از شرط‌های $1+x_1+\cdots+x_n\geqslant(1+n)x_{n+1}$ و $\alpha-1\leqslant 0$ نتیجه می‌شود.)

از این نابرابری و فرض استقرا، به‌دست می‌آید:

$$(1+x_1+\cdots+x_{n+1})^{\alpha}\leqslant(1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha}+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^{\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant 1+1^{\alpha-1}x_1^{\alpha}+2^{\alpha-1}x_2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha-1}x_n^{\alpha}+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^{\alpha}$$

۱۳۹. بدون این‌که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$$

در این صورت، داریم:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}|a_i-a_j|=$$
$$=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|=2\sum_{1\leqslant i<m\leqslant n}a_m-2\sum_{1\leqslant m<j\leqslant n}a_m=$$
$$=2\sum_{m=1}^{n}(2m-n-1)a_m$$

مقدار S، تنها وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، هریك از عددهای a_m، به‌ازای $2m-n-1>0$ برابر ۲، و به‌ازای $2m-n-1<0$ برابر صفر شوند. به‌این ترتیب، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$S\leqslant 4\sum_{\frac{n+1}{2}<m\leqslant n}(2m-n-1)$$

به‌ازای $n=2k+1\ (k\in\mathbf{N})$ داریم:

$$S \leqslant ۴\sum_{m=k+۲}^{۲k+۱}(۲m-۲k-۲)=۸(۱+۲+\cdots+k)=۴k(k+۱)=$$
$$=(۲k+۱)^۲-۱<n^۲$$

درضمن، برابری $S=n^۲$ ممکن نیست. در حالت $n=۲k$ $(k\in\mathbf{N})$ داریم:

$$S \leqslant ۴\sum_{m=k+۱}^{۲k}(۲m-۲k-۱)=۴[۱+۳+\cdots+(۲k-)]=$$
$$=۴k^۲=n^۲$$

در ضمن، برابری $S=n^۲$، تنها وقتی برقرار است که، بین عددهای $a_۱$، $a_۲$، …، $a_{۲k}$، درست k عدد برابر ۲ و k عدد بقیه برابر صفر باشند.

۱۴۰. چون برای هر انتخابی از عددهای $\{۱، -۱\}$ $x_۱، \ldots، x_n\in$ داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n}|a_{j۱}x_۱+\cdots+a_{jn}x_n| \leqslant M$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲^n}\sum_{(x_۱,\ldots,x_n)}\Big(\sum_{j=۱}^{n}|a_{j۱}x_۱+\cdots+a_{jn}x_n|\Big) \leqslant M$$

که می‌توان آن را، به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=۱}^{n}\Big(\frac{۱}{۲^n}\sum_{(x_۱,\ldots,x_n)}|a_{j۱}x_۱+\cdots+a_{jn}x_n|\Big) \leqslant M$$

برای هر مقدار ثابتی از $j\in\{۱، \ldots، n\}$، در مجموع

$$S_j=\sum_{(x_۱,\ldots,x_n)}|a_{j۱}x_۱+\cdots+a_{jn}x_n|$$

همهٔ ۲^n جمله را، به $۲^{n-۱}$ زوج چنان تقسیم می‌کنیم که، در هر زوج، مقدارهای $x_۱$، …، $x_{j-۱}$، $x_{j+۱}$، …، x_n برهم‌منطبق و با مقدار x_j متفاوت باشند. در این صورت، مجموع جمله‌ها در هر زوج، به‌صورت

$$|A+a_{jj}|+|A-a_{jj}|$$

درمی‌آید، که در آن

$$A=a_{j1}x_1+\cdots+a_{j(j-1)}x_{j-1}+a_{j(j+1)}x_{j+1}+\cdots+a_{jn}a_n,$$

ولی

$$|A+a_{jj}|+|A-a_{jj}|\geqslant|(A+a_{jj})-(A-a_{jj})|=2|a_{jj}|$$

بنابراین

$$S_j\geqslant 2^{n-1}.2|a_{jj}|=2^n|a_{jj}|$$

به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$|a_{11}|+\cdots+|a_{nn}|=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\cdot 2^n|a_{jj}|\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}S_j\right)\leqslant M$$

۱۴۱. مجموع $S=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ia_i$ را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$S=b_1a_1+\sum_{i=2}^{n}b_i(a_1+\cdots+a_i)-\sum_{i=2}^{n}b_i(a_1+\cdots+a_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_1+\cdots+a_i)b_i-\sum_{i=1}^{n-1}(a_1+\cdots+a_i)b_{i+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_1+\cdots+a_i)(b_i-b_{i+1})$$

که در آن $b_{n+1}=0$ به‌حساب می‌آوریم. سپس، بین عددهای

$$A_i=|a_1+\cdots+a_i|,\ (i=1, 2, \ldots, n)$$

بزرگترین عدد A_k را انتخاب می‌کنیم. در این صورت، برای این مقدار k داریم:

$$|S|=\sum_{i=1}^{n}|a_1+\cdots+a_i|\cdot|b_i-b_{i+1}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}A_k(b_i-b_{i+1})=A_k\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})=A_k(b_1-b_{n+1})\leqslant A_k$$

۱۴۲. اثبات را، با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$ می‌دهیم. چون

$$(1-x_1)^m+(1-y_1^m)=y_1^m+(1-y_1^m)=1$$

بنابراین، بـه ازای $n=1$، حکم درست است. فرض می‌کنیم، حکم، برای $n-1$ برقرار باشد، در این صورت، داریم:

$$(1-x_1\cdots x_n)^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_n^m)=$$

$$=[1-x_1\cdots x_{n-1}(1-y_1)]^m+(1-y_1^m)\cdots(1-y_{n-1}^m)(1-y_n^m)\geqslant$$

$$\geqslant(1-x_1\cdots x_{n-1}+x_1\cdots x_{n-1}y_n)^m+[1-(1-x_1\cdots$$

$$\cdots x_{n-1})^m(1-y_n^m)=[a+(1-a)y_n]^m+(1-a^m)(1-y_n^m)=$$

$$=(a+b-ab)^m+(1-a^m)(1-b^m)$$

که در آن: $a=1-x_1\cdots x_{n-1}$ و $b=y_n$. با استقرای روی $m\in\mathbf{N}$ ثابت می‌کنیم که، برای عددهای دلخواه $a, b\in[0, 1]$، نابرابری

$$(a+b-ab)^m\geqslant a^m+b^m-a^m b^m$$

برقرار است. نابرابری، برای $m=1$، بـه بـرابـری تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم، نابرابری، برای $m-1$ برقرار باشد، یعنی

$$(a+b-ab)^{m-1}\geqslant a^{m-1}+b^{m-1}-a^{m-1}b^{m-1}$$

در این صورت (با توجه به اینکه $a+b-ab\geqslant 0$)، نابرابری، برای m هم برقرار خواهد بود. درواقع

$$(a+b-ab)^m-a^m-b^m-a^m b^m\geqslant$$

$$\geqslant(a^{m-1}+b^{m-1}-a^{m-1}b^{m-1})(a+b-ab)-a^m-b^m+a^m b^m=$$

$$=2a^m b^m+ab^{m-1}+ba^{m-1}-a^m b^{m-1}-b^m a^{m-1}-a^m b-b^m a=$$

$$=a^m(b^m-b^{m-1})+a(b^{m-1}-b^m)+b^m(a^m-a^{m-1})+$$

$$+b(a^{m-1}-a^m)=(b^{m-1}-b^m)(a-a^m)+$$

$$(a^{m-1}-a^m)(b-b^m)\geqslant 0$$

زیرا

$$a \geqslant a^{m-1} \geqslant a^m \quad \text{و} \quad b \geqslant b^{m-1} \geqslant b^m$$

به‌این ترتیب، ثابت شد که، برای هر عدد $m \in \mathbf{N}$، نابرابری زیر برقرار است:

$$(a+b-ab)^m+(1-a^m)(1-b^m) \geqslant 1$$

که از آن‌جا، با توجه به‌مقدارهای a و b، نابرابری مطلوب، برای n، به‌دست می‌آید. استقرا کامل و حکم ثابت شد.

۱۴۳. $b=ax$، $c=ay$، $d=az$ می‌گیریم که، در این صورت، باید داشته باشیم: $z \geqslant y \geqslant x \geqslant 1$ و نابرابری مطلوب، به صورت زیر درمی‌آید:

$$a^{ax}(ax)^{ay}(ay)^{az}(az)^{a} \geqslant (ax)^{a}(ay)^{ax}(az)^{ay}a^{az}$$

که اگر دو طرف آن (که مقدارهایی مثبت‌اند) بر $a^a a^{ax} a^{ay} a^{az}$ تقسیم و سپس، دو طرف را به‌توان $\frac{1}{a}$ برسانیم، به‌نابرابری زیر، هم‌ارز با آن، می‌رسیم:

$$x^y y^z z \geqslant x y^x z^y$$

$y=xs$ و $z=xt$ می‌گیریم، در این صورت $t \geqslant s \geqslant 1$ و $s \leqslant y$ (زیرا $x \geqslant 1$) می‌رسیم و نابرابری چنین می‌شود:

$$x^{xs} y^{xt} xt \geqslant x y^x (xt)^{xs}$$

دو طرف را به $x^{xs} y^x xt$ ساده می‌کنیم و، سپس، دو طرف را به توان $\frac{1}{x}$ می‌رسانیم، به دست می‌آید:

$$y^{t-1} \geqslant t^{s-\frac{1}{x}}$$

درحالت $y=1$، نابرابری برقرار است، زیرا دراین حالت

$$x=1,\ s=\frac{y}{x}=1,\ y^{t-1}=1=t^{1-1}=1$$

درحالت $t=1$ هم، نابرابری برقرار است:

$$y^{t-1}=y^{0}=1=1^{s-\frac{1}{x}}=1$$

اکنون $y>1$ و $t>1$ فرض می‌کنیم. دراین‌صورت، اگر دو طرف نابرابری را به توان $\frac{1}{t-1}\cdot\frac{y}{y-1}>0$ برسانیم، به نابرابری هم ارز آن می‌رسیم:

$$y^{\frac{y}{y-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}},\ (1\leqslant s\leqslant t,\ s\leqslant y)$$

و دو حالت درنظر می‌گیریم:

الف) $y\geqslant t$. ثابت‌می‌کنیم، تابع $f_1(\alpha)=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$، برای $\alpha>1$، صعودی است. داریم:

$$f_1(\alpha)=\left(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\ln\alpha}\right)'=e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\ln\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-1}-\frac{\ln\alpha}{(\alpha-1)^2}\right)=$$

$$=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\frac{1}{(\alpha-1)^2}(\alpha-1-\ln\alpha)>0$$

(زیرا نابرابری $g_1(\alpha)=\alpha-1-\ln\alpha>0$، برای $\alpha>1$ برقرار است. درواقع، $g_1'(\alpha)=1-\frac{1}{\alpha}>0$ و $g_1(1)=0$). بنابراین، نابرابری‌مطلوب، از رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$y^{\frac{y}{y-1}}=f_1(y)\geqslant f_1(t)=t^{\frac{t}{t-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}}$$

ب) $y<t$. ثابت می‌کنیم، تابع $f_2(\alpha)=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$، برای $\alpha>1$، نزولی است. داریم:

$$f'_2(\alpha)=\left(e^{\frac{1}{\alpha-1}\ln\alpha}\right)'=e^{\frac{1}{\alpha-1}\ln\alpha}\left(\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\ln\alpha}{(\alpha-1)^2}\right)=$$

$$=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}\ (\alpha-1-\alpha\ln\alpha)<0$$

(زیرا نابرابری $g_2(\alpha)=\alpha-1-\alpha\ln\alpha<0$ برای $\alpha>1$ برقرار است. درواقع، $g'_2(\alpha)=1-\ln\alpha-1<0$ و $g_2(1)=0$).

بنابراین، دراین حالت هم، نابرابری برقرار است، زیرا

$$y^{\frac{y}{y-1}}=[f_2(y)]^y\geqslant[f_2(t)]^y=t^{\frac{y}{t-1}}\geqslant t^{\frac{s}{t-1}}$$

۱۴۴. سمت چپ نابرابری را تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}=\left(\frac{1}{1+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{n^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^i}\right)$$

و توجه می‌کنیم که، برای هر $i\in\mathbf{N}$، داریم:

$$\frac{1}{n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^i}=\left(\frac{1}{1n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2n^{i-1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{3n^{i-1}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{(n-1)n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n\cdot n^{i-1}}\right)=$$

$$=\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{(m-1)n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{mn^{i-1}}\right)>$$

$$>\sum_{m=2}^{n}\left(n^{i-1}\frac{1}{mn^{i-1}}\right)=\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}$$

که از آن‌جا، به نابرابری مطلوب می‌رسیم:

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}>k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}$$

۱۴۵. قرار می‌گذاریم:

$$b_k=\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}=k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\ (k=1,\ldots,n)$$

با توجه به نابرابری $b_k\leqslant ke$ (قضیهٔ ۷ را ببینید) و

$$b_1\cdots b_k=(k+1)^k$$

و همچنین، قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}=\frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1b_1)\cdots(a_kb_k)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(a_1b_1+\cdots+a_kb_k)=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_j\,b_j$$

سپس

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j=\right.$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[a_jb_j\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{j=1}^{n}(a_jb_j)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{j}\leqslant e\sum_{j=1}^{n}a_j$$

۱۴۶. فرض می‌کنیم، عددهای α، β، γ، δ، ε (با تقریب ردیف آن‌ها)، بر عددهای $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$ منطبق باشند. داریم:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}\right)=$$

$$=5+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)=25+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right)$$

که در آن، مجموع، بـرای همهٔ $C_5^2=10$ زوج انـدیس $1\leqslant i<j\leqslant 5$ درنظر گرفته شده است. سپس، داریم:

$$\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2$$

اگر فرض کنیم: $f(x, y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2$، کافی است نابرابری زیر راثابت کنیم:

$$\sum_{i<j} f(x_i, x_j)\leqslant 6f(p, q)$$

ثابت می‌کنیم، برای عددهای مثبت $x\leqslant y\leqslant z$، نابرابری

$$f(x, y)+f(y, z)\leqslant f(x, z)$$

یعنی نابرابری

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\leqslant\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2$$

برقرار است. توجه می‌کنیم که

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{x}{z}-1=\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\leqslant 0$$

زیرا $\frac{x}{y}\leqslant 1$ و $\frac{y}{z}\leqslant 1$. به‌همین ترتیب داریم:

$$\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\frac{z}{x}-1\leqslant 0$$

که اگر آن را با نابرابری قبلی جمع کنیم، نابرابری لازم را می‌دهد. به‌جز این،علامت برابری، تنها وقتی برقراراست که داشته باشیم: $x=y$ یا $y=z$.

با استفاده از نابرابری که ثابت کردیم، رشته نابرابری‌های زیر را، به‌دست می‌آوریم:

$$f(p, x_1)+f(x_1, x_2)+f(x_2, x_3)+f(x_3, x_4)+$$
$$+f(x_4, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_1)+f(x_1, x_3)+f(x_3, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_1)+f(x_1, x_4)+f(x_4, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_2)+f(x_2, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_2)+f(x_2, x_4)+f(x_4, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_1)+f(x_1, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q)$$

که از مجموع آن‌ها و حذف جمله‌های مثبت به صورت $f(p, x_i)$ و $f(x_i, q)$، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید.

اکنون ببینیم، علامت برابری، در چه حالتی برقرار است. اگر $p<x_2$ یا $x_4<q$، آن وقت، به علامت برابری نمی‌رسیم، زیرا در آن صورت، بین جمله‌های $f(p, x_2)$ یا $f(x_4, q)$، که حذف کردیم، جملهٔ غیرصفر وجود دارد. بنابراین، برای برقراری برابری، باید داشته باشیم:

$$x_1=x_2=p \quad و \quad x_4=x_5=q$$

دراین صورت از نابرابری دوم، دربین شش نابرابری فوق، به‌دست‌می‌آید:

$$f(p, x_3)+f(x_3, q)\leqslant f(p, q)$$

چون، این نابرابری هم، باید به برابری تبدیل شود، بنابراین یا $p=x_3$ و یا $x_3=q$. اگر به‌تنظیم اولیهٔ نابرابری مراجعه کنیم، معلوم می‌شود که، تنها وقتی علامت برابری برقرار است که دو عدد از پنج عدد α، β، γ، δ، ε بر یکی از دو انتهای بازهٔ $[p, q]$ و سه عدد دیگر بر انتهای دیگر این بازه منطبق باشند.

۱۴۷. فرض می‌کنیم، چهار عدد a، b، c، d (با تقریب ردیف خود) بر چهار عدد $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3<x_4$ منطبق باشند. مشتق چندجمله‌ای زیر را پیدا می‌کنیم:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

از یك طرف، بنا بر قضیهٔ ویت

$$P'(x)=\Big[x^4-\Big(\sum_{i=1}^{4}x_i\Big)x^3+\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\Big)x^2+$$

$$+\Big(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k\Big)x+(x_1x_2x_3x_4)\Big]'=$$

$$=4x^3-\Big(3\sum_{i=1}^{4}x_i\Big)x^2+\Big(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j\Big)x-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}x_ix_jx_k$$

از طرف‌دیگر، بنا بر قضیهٔ رول، اگر برای مقداری از $i\in\{1, 2, 3\}$ داشته باشیم $x_i<x_{i+1}$، آن وقت، مشتق $P'(x)$، در نقطه‌ای مثل $y\in(x_i, x_{i+1})$، برابر صفر می‌شود. اگر هم، چندجمله‌ای $P(x)$ دارای ریشهٔ تکراری باشد، آن وقت چندجمله‌ای $P'(x)$، همان ریشه را، با تکراری به‌اندازهٔ یك‌واحد کمتر، خواهد داشت. بـه ایـن ترتیب، چندجمله‌ای $P'(x)$ از درجهٔ سوم، دارای سه ریشهٔ y_1، y_2، y_3 است که، در نابرابری

$$x_1\leqslant y_1\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant x_4$$

صدق می‌کنند و بنابراین

$$P'(x)=4(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)=$$

$$=4x^3-4(y_1+y_2+y_3)x^2+4(y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)x-$$

$$-4y_1y_2y_3$$

بنا بر قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌ها، داریم:

$$\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2}\leqslant\frac{y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3}{3}$$

ازآن‌جا $\sqrt[3]{A}\leqslant\sqrt{B}$ که درآن

$$A=y_1y_2y_3=\frac{1}{4}(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4),$$

$$B=\frac{۱}{۳}(y_۱y_۲+y_۲y_۳+y_۱y_۳)=\frac{۱}{۶}(x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۱x_۴+x_۲x_۳+$$
$$+x_۲x_۴+x_۳x_۴)$$

به‌این‌ترتیب، نابرابری مطلوب ثابت شد، درضمن، علامت برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$y_۱y_۲=y_۲y_۳=y_۱y_۳ \Rightarrow y_۱=y_۲=y_۳$$

و شرط اخیر، تنها وقتی برقرار است که

$$x_۱=x_۲=x_۳=x_۴$$

یعنی وقتی که $a=b=c=d$.

§۸. بخش درست عدد

۱۴۸. معادلهٔ مفروض، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است

$$|x-۱|(|x+۱|-۱)=\{x\} \quad (x\neq ۱)$$

این حالت‌ها را درنظر می‌گیریم: $x>۱$، $-۱\leqslant x<۱$ و $x<-۱$. در حالت $x>۱$، معادله، به‌صورت

$$x(x-۱)=\{x\}$$

درمی‌آید که جواب ندارد، زیرا $x(x-۱)>x-۱\geqslant\{x\}$.

برای $-۱\leqslant x<۱$، به‌این معادله می‌رسیم:

$$x(۱-x)=\{x\}$$

چون $\{x\}\geqslant ۰$ و $۱-x>۰$، پس $x\geqslant ۰$ ولی برای $۰\leqslant x<۱$، داریم $\{x\}=x$، بنابراین، در این حالت داریم:

$$x(۱-x)=x \Rightarrow x=۰$$

برای $x<-۱$، داریم:

$$(۲+x)(x-۱)=\{x\}$$

چون $x-۱<۰$ و $\{x\}\geqslant ۰$، بنابراین $x+۲\leqslant ۰$، یعنی $x\leqslant -۲$. عدد $x=-۲$ در معادله صدق می‌کند. اگر $-۳\leqslant x<-۲$، آن وقت $\{x\}=x+۳$ و معادله، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(۲+x)(x-۱)=۳+x$$

که از آن‌جا، جواب $-\sqrt{۵}$ در بازهٔ $[-۳، -۲)$ به‌دست می‌آید.

سرانجام، هیچ‌مقدار $x<-۳$ درمعادله صدق نمی‌کند، زیرا به‌ازای $x<-۳$ داریم:

$$|(۲+x)(۱-x)|=|۲+x|\cdot|۱-x|>۱\times ۴>|\{x\}|$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، سه جواب دارد: ۰، -۲، $-\sqrt{۵}$.

۱۴۹. روشن است که برابری $[\sqrt[۳]{m}]=k$ که، در آن، m و k عددهایی طبیعی باشند، با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$k^۳\leqslant m\leqslant (k+۱)^۳-۱$$

تعداد عددهای طبیعی m (با ثابت بودن عدد k)، که در این نابرابری صدق کند، برابر است با

$$(k+۱)^۳-k^۳=۳k^۲+۳k+۱$$

بنابراین، اگر فرض کنیم:

$$S_k=k(۳k^۲+۳k+۱)$$

مجموع سمت چپ معادله، برابر $\sum_{k=۱}^{x-۱}S_k$ می‌شود.

روشن است که، برای $k\in\mathbf{N}$، داریم $S_k>۰$ و

$$S_۱=۱\times ۷=۷،\ S_۲=۲\times ۱۹=۳۸،\ S_۳=۳\times ۳۷=۱۱۱،$$

$$S_۴=۴\times ۶۱=۲۴۴،\ S_۱+S_۲+S_۳+S_۴=۴۰۰$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض در مجموعهٔ عددهای طبیعی، تنها یك جواب دارد: $x=5$.

۱۵۰. ثابت می‌کنیم، برای هر $k\in\mathbf{N}$ داریم:

$$k[x]\leqslant[kx]\leqslant k[x]+k-1$$

$[x]=m$ و $\{x\}=\alpha$ می‌گیریم، در این صورت، داریم:

$$x=m+\alpha,\quad m\in\mathbf{Z},\quad 0\leqslant\alpha<1;$$

$$km=[km]\leqslant[kx]=[km+k\alpha]\leqslant km+k\alpha<km+k$$

به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$S=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]\leqslant$$

$$\leqslant 63[x]+(1+3+7+15+31)=63[x]+57$$

و $S\geqslant 63[x]$، یعنی برای هر $m\in\mathbf{Z}$ داریم:

$$63m\leqslant S\leqslant 63m+57$$

از طرف دیگر، $12345=63\times195+60$، بنابراین، $S=12345$، برای هیچ مقداری از x ممکن نیست.

۱۵۱. فرض می‌کنیم: $m=[x]$ و $\alpha=\{x\}$. در این صورت $x=m+\alpha$ و معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$(m+\alpha)^2-[m^2+2m\alpha+\alpha^2]=\alpha^2$$

از آن‌جا

$$m^2+2m\alpha=[m^2+2m\alpha+\alpha^2]$$

چون $0\leqslant\alpha<1$، بنابراین معادلهٔ اخیر، وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $2m\alpha\in\mathbf{Z}$ و برعکس. در نتیجه

$$\alpha=\frac{k}{2m}\quad k\in\{0, 1, \ldots, 2m-1\}$$

به‌این ترتیب، برای هریك از مقدارهای $m=1,\ldots,n-1$، برای α، درست

$۲m$ مقدار پیدا می‌شود (بــه‌ازای $n=۱$، چنین مقدارهایی برای m وجود ندارد) و به‌ازای $m=n$، داریم $\alpha=۰$ (زیرا $x\leqslant n$)، یعنی تعدادجواب‌ها برابر است با

$$۲+۴+\dots+۲(n-۱)+۱=n(n-۱)+۱=n^۲-n+۱$$

۱۵۲. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}<\sqrt{۴n+۲}$$

درواقع، از نابرابری روشن $۴n(n+۱)<(۲n+۱)^۲$، نتیجه می‌شود

$$۲\sqrt{n(n+۱)}<۲n+۱$$

و بنابراین

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+۱})^۲=۲n+۱+۲\sqrt{n(n+۱)}<۴n+۲$$

که از آن‌جا، نابرابری موردنظر ما، به‌دست می‌آید کــه، بلافاصله ما را به نابرابری زیر می‌رساند:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}]\leqslant[\sqrt{۴n+۲}]$$

اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n\in\mathbf{N}$، نابرابری اکید

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}]<[\sqrt{۴n+۲}]$$

برقرار باشد. در این صورت، عددی مثل $m\in\mathbf{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}<m\leqslant\sqrt{۴n+۲}$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{n(n+۱)}<m^۲-(۲n+۱)\leqslant ۲n+۱$$

یعنی

$$۴n(n+۱)<(m^۲-(۲n+۱))^۲\leqslant ۴n(n+۱)+۱$$

چون عدد $(m^۲-(۲n+۱))^۲$ طبیعی است، بنابراین

$$m^2-(2n+1)=2n+1$$

و $m^2=2(2n+1)$ بر ۲ بخش‌پذیر و بر ۴ بخش‌ناپذیر است، که ممکن نیست. تناقض حاصل، درستی برابری حکم را ثابت می‌کند.

۱۵۳. فرض می‌کنیم:

$$f(n)=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right],\ n\in\mathbf{N}$$

در این صورت، تفاضل

$$f(n+1)-f(n)=\left[n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-$$

$$-\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=1+\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

تنها وقتی بزرگتر از واحد است که داشته باشیم:

$$\left[\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right]<\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$$

یعنی وقتی که، برای عددی مثل $m\in\mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$\sqrt{n}+\frac{1}{2}<m\leqslant\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}$$

که با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$n<m^2-m+\frac{1}{4}\leqslant n+1$$

یعنی داشته باشیم: $n=m^2-m$.

از طرف دیگر، برای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$f(n+1)=n+2+$$

$$+\left[\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\right]\leqslant n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]+2=f(n)+2$$

زیرا $\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}<\sqrt{n}+\frac{1}{2}$. به‌این ترتیب، به‌دست می آید:

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases}2 & (n=m^2-m،\ \ m=2، 3، \dots)\\ 1 & (\text{برای بقیهٔ مقدارهای } n\in\mathbf{N})\end{cases}$$

بنابراین، $f(n)$ می‌تواند همهٔ مقدارهای طبیعی را قبول کند، به‌جز مقدارهای به‌صورت

$$f(m^2-m)+1=m^2+\left[\sqrt{m^2-m}+\frac{1}{2}\right]-m+1=m^2$$

(برابری آخر از این‌جا نتیجه می‌شود که نابرابری

$$m-1<\sqrt{m^2-m}+\frac{1}{2}<m$$

برای هر $m\geqslant 2$ برقرار است) و عددهای کوچکتر از $2=f(1)$.

به‌این ترتیب، روشن شد که، تنها وقتی نمی‌توان عدد طبیعی را به صورت $\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$، برای $n\in\mathbf{N}$، نشان داد که، این عدد طبیعی، مجذور یك عدد طبیعی باشد.

۱۵۴. فرض می‌کنیم، در بین جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$، تعداد محدودی عددهای فرد وجود داشته باشد. در این صورت، اگر عدد فرد a_m را، با بزرگترین اندیس m در نظر بگیریم، باید همهٔ عددهای a_{m+n}، $n\in\mathbf{N}$، عددهایی زوج باشند.

$a_{m+1}=2^pq$ می گیریم که، در آن، q عددی فرد و $p\in\mathbf{N}$ (عدد a_{m+1} مخالف صفر است، زیرا $a_1>0$ و درضمن، دنبالهٔ مفروض، صعودی است). در این صورت

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=2^{p-1}\times 3q$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید: $a_{m+3}=2^{p-2}\times 3^2q$ و غیره؛ و سرانجام

$$a_{m+p+1}=3^p q$$

که عددی فرد است. این نتیجه، فرض ما را که a_m آخریــن عدد فرد بود، نقض می‌کند.

اکنون، فرض می‌کنیم، بین جمله‌های دنبالــه، مجموعــه‌ای متناهی از عددهای زوج وجود داشته باشد. a_m را عددی زوج، با بزرگترین اندیس m می‌گیریم؛ در این صورت، a_{m+1} عــددی فرد و $a_{m+1}-1=2^p q$ که، درآن، q عددی فرد و $p\in\mathbf{N}$. داریم:

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=\left[\frac{3}{2}\left(a_{m+1}-1\right)+\frac{3}{2}\right]=2^{p-1}\times 3q+1$$

یعنی

$$a_{m+2}-1=2^{p-1}\times 3q$$

به‌همین‌ترتیب، به‌دست‌می‌آید: $a_{m+3}-1=2^{p-2}\times 3^2 q$ وغیره؛ سرانجام

$$a_{m+p+1}-1=3^p q \Rightarrow a_{m+p+1}=3^p q+1$$

که عددی زوج است. در ایــن‌جا هم، فرض ما، مبنی بر ایــن‌که a_m عددی زوج با بزرگترین اندیس m است، نقض می‌شود. حکم، ثابت شد.

۱۵۵. فرض می‌کنیم:

$$a_n=(3+\sqrt{11})^n+(3-\sqrt{11})^n$$

در این صورت، داریم:

$$a_{n+2}=6a_{n+1}+2a_n, \quad n\in\mathbf{Z}^+$$

درواقع، اگرفرض‌کنیم: $\alpha=(3+\sqrt{11})^n$ و $\beta=(3-\sqrt{11})^n$، آن‌وقت، به‌دست می‌آید:

$$a_n=\alpha+\beta,$$

$$a_{n+1}=(3+\sqrt{11})\alpha+(3-\sqrt{11})\beta,$$

$$a_{n+2}=(3+\sqrt{11})^2\alpha+(3-\sqrt{11})^2\beta=(20+6\sqrt{11})\alpha+$$
$$+(20-6\sqrt{11})\beta=(18+6\sqrt{11})\alpha+(18-6\sqrt{11})\beta+$$
$$+(2\alpha+2\beta)=6a_{n+1}+2a_n$$

از این‌جا، و از برابری‌های $a_0=2$، $a_1=6$، نتیجه می‌شود که، عدد a_n، برای‌هر $n\in\mathbf{Z}^+$، عددی‌درست است. چون $-1<3-\sqrt{11}<0$، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$a_{2n-1}=(3+\sqrt{11})^{2n-1}+(3-\sqrt{11})^{2n-1}<(3+\sqrt{11})^{2n-1}<$$
$$<a_{2n-1}+1,\ a_{2n-1}=[(3+\sqrt{11})^{2n-1}]$$

اکنون، با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم: عــدد a_{2n-2} بر 2^n بخش‌پذیراست، ولی عدد a_{2n-1} بر 2^n بخش‌پذیر، ولی بر 2^{n+1} بخش‌ناپذیر است. حکــم، برای $n=1$ درست است، زیــرا $a_0=2$ و $a_1=6$. فرض می‌کنیم، حکم، برای $n\in\mathbf{N}$ درست باشد. در این صورت عدد

$$a_{2n}=6a_{2n-1}+2a_{2n-2}$$

بر 2^{n+1} بخش‌پــذیــر است، زیــرا هــر دو عــدد a_{2n-1} و a_{2n-2} بر 2^n بخش‌پذیرند. سپس، عدد

$$a_{2n+1}=6a_{2n}+2a_{2n-1}$$

بر 2^{n+1} بخش‌پذیر است (زیرا هردو عدد a_{2n} و a_{2n-1} بر 2^n بخش‌پذیرند)، ولی بر 2^{n+2} بخش‌پذیر نیست (زیرا عــدد a_{2n} بر 2^{n+1} بخش‌پذیر و عدد a_{2n-1} بر آن بخش‌ناپذیر است). حکم ثابت شد.

به این ترتیب، بزرگتریــن توان ۲، که مقسوم‌علیهی از a_{2n-1} باشد، برابر است با 2^n، یعنی $k=n$.

۱۵۶. برای مقدار مفروض $n\in\mathbf{N}$، فرض می‌کنیم:

$$m=[n\sqrt{2}]$$

چون $m\neq n\sqrt{2}$ (زیــرا $\sqrt{2}$ عددی است گنگ)، بنابرایــن $m<n\sqrt{2}$ و

$m^2 < 2n^2$. بنا بر این

$$1 \leqslant 2n^2 - m^2 = (n\sqrt{2} - m)(n\sqrt{2} + m) =$$
$$= \{n\sqrt{2}\}(n\sqrt{2} + m) < \{n\sqrt{2}\} 2n\sqrt{2}$$

که از آن‌جا، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید.

اکنون $\varepsilon > 0$ را مفروض می‌گیریم. دنباله‌های $\{n_i\}$ و $\{m_i\}$ را، با تعریف زیر درنظر می‌گیریم: $n_1 = m_1 = 1$ و

$$n_{i+1} = 3n_i + 2m_i, \; m_{i+1} = 4n_i + 3m_i, \; i \in \mathbf{N}$$

در آن صورت، برای هر $i \in \mathbf{N}$: $2n_i^2 - m_i^2 = 1$. در واقع، برای $i = 1$، به‌برابری درست $2n_1^2 - m_1^2 = 1$ می‌رسیم. اگر برابری برای مقداری مثل $i \in \mathbf{N}$ برقرار باشد، آن وقت

$$2n_{i+1}^2 - m_{i+1}^2 = 2(9n_i^2 + 12n_i m_i + 4m_i^2) -$$
$$-(16n_i^2 + 24n_i m_i + 9m_i^2) = 2n_i^2 - m_i^2 = 1$$

یعنی، برابری برای $i+1$ هم درست است. چون دنبالهٔ $\{n_i\}$ صعودی است، بنا بر این مقدار $n = n_{i_0}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که، برای آن، داشته باشیم:

$$n > \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$\varepsilon(2n\sqrt{2} - 1) > 1, \; (1 + \varepsilon)(2n\sqrt{2} - 1) > 2n\sqrt{2}$$

که از آن، برای $m = m_{i_0}$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}} > \frac{1}{2n\sqrt{2} - 1} > \frac{1}{n\sqrt{2} + m} = n\sqrt{2} - m = \{n\sqrt{2}\}$$

زیرا $1 > \frac{1}{n\sqrt{2} + m} = n\sqrt{2} - m > 0$. مسأله حل شد.

۱۵۷. الف) این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$f(x, y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]-[x]-[y]$$

و ثابت می‌کنیم، برای هر $x, y\in\mathbf{R}$ داریم: $f(x, y)\geqslant 0$. فرض کنید، برای مقدارهایی از $x, y\in[0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(x, y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]<0$$

درضمن، بدون این‌که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $y\leqslant x$. در این صورت $f(x, y)\leqslant -1$ (زیرا $f(x, y)\in\mathbf{Z}$) و

$$f(x, y)>(5x-1)+(5y-1)-$$
$$-(3x+y)-(3y+x)=x+y-2$$

یعنی $x+y-2<-1$ یا $x+y<1$. چون

$$[5y]-[3y+x]\geqslant[5y]-[4y]\geqslant 0$$

بنابراین

$$[5x]-[3x+y]=f(x, y)-([5y]-[3y+x])\leqslant -1$$

از طرف دیگر

$$[5x]-[3x+y]\geqslant[5x]-[3x+1-x]=[5x]-[2x+1]$$

یعنی $[5x]<[2x+1]$ که از آن‌جا $5x<2x+1$ یا $x<\frac{1}{3}$ به دست می‌آید. ولی در این صورت

$$[2x+1]\leqslant\left[2\times\frac{1}{3}+1\right]=1$$

یعنی $[5x]<1$ یا $x<\frac{1}{5}$. چون

$$[3x+y]\geqslant 1+[5x]=1$$

بنابراین $y\geqslant 1-3x>\frac{2}{5}$ و $[5y]\geqslant 2$. توجه می‌کنیم که:

$$[3x+y]\leqslant\left[3\times\frac{1}{5}+1\right]=1$$

اگر $y<\frac{3}{5}$، آن وقت $2=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\times3>3y+x$، $1\geqslant[3y+x]$ و

$$f(x, y)=[5x]+[5y]-[3x+y]-$$
$$-[3y+x]\geqslant 0+2-1-1=0$$

و اگر $y\geqslant\frac{3}{5}$، آن وقت $[5y]\geqslant 3$،

$$[3y+x]=[y+x+2y]\leqslant[y+x]+2\leqslant 2$$

و $$f(x, y)\geqslant 0+3-1-2=0$$

به این ترتیب، نابرابری $f(x, y)\geqslant 0$، برای $x, y\in[0, 1)$ ثابت شد. ولی از آن‌جا که، عدد ۱، دورهٔ تناوب تابع $f(x, y)$، برای هریك از آوندهای x و y است، بنابراین، این نابرابری، برای هر مقدار $x, y\in\mathbf{R}$ برقرار است. سرانجام، برای $x, y\geqslant 0$ داریم:

$$[5x]+[5y]=f(x, y)+[3x+y]+[3y+x]+$$
$$+[x]+[y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

ب) ثابت می‌کنیم، توان عدد اول و دلخواه p که در تجزیهٔ مخرج کسر، یعنی

$$m!n!(3n+m)!(n+3m)!$$

به‌دست می‌آید، از توان همین عدد در تجزیهٔ صورت کسر، تجاوز نمی‌کند.

می‌دانیم، اگر عدد $q!$ را به‌عامل‌های اول تجزیه کنیم، توان عدد اول p، در این تجزیه، برابر است با

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{q}{p^2}\right]+\left[\frac{q}{p^3}\right]+\cdots$$

بنابراین، توان عدد اول p، در تجزیهٔ صورت کسر، چنین می‌شود:

$$\left[\frac{5m}{p}\right]+\left[\frac{5m}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{5n}{p}\right]+\left[\frac{5n}{p^2}\right]+\dots$$

و در مخرج کسر

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{3m+n}{p}\right]+$$
$$+\left[\frac{3m+n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{3n+m}{p}\right]+\left[\frac{3n+m}{p^2}\right]+\dots$$

اگر فرض کنیم: $\frac{m}{p^k}=x_k$ و $\frac{n}{p^k}=y_k$ $(k\in\mathbf{N})$، با توجه به بخش الف) مسأله داریم:

$$[5x_k]+[5y_k]\geqslant[x_k]+[y_k]+[3x_k+y_k]+[x_k+3y_k]$$

که اگر آن‌ها را، به‌ازای همهٔ مقدارهای $k\in\mathbf{N}$، باهم جمع کنیم (وقتی k به‌اندازهٔ کافی بزرگ شود، هر دو طرف نابرابری، برابر صفر می‌شوند)، به نابرابری مطلوب می‌رسیم.

۱۵۸. $x=m+\alpha$ می‌گیریم که، در آن، $m=[x]$ و $\alpha=\{x\}$.
در این صورت، برای هر $k\in\mathbf{N}$، می‌توان نوشت:

$$[kx]=[km+k\alpha]=km+[k\alpha]$$

بنابراین، نابرابری مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$[n\alpha]\geqslant\frac{[\alpha]}{1}+\frac{[2\alpha]}{2}+\dots+\frac{[n\alpha]}{n}$$

در نتیجه، کافی است حالت $0\leqslant x<1$ را مورد بررسی قرار دهیم. سمت چپ و سمت راست نابرابری، به‌ازای $x\in[0, 1)$، تابع‌هایی هستند، قطعه به‌قطعه ثابت و غیر نزولی و مقدار خود را، تنها در نقطه‌هایی به صورت $x=\frac{p}{q}$ تغییر می‌دهند که، درآن، عددهای $p, q\in\mathbf{N}$ نسبت به‌هم اول‌اند،

یعنی $(p, q)=1$، $2 \leqslant q \leqslant n$، $1 \leqslant p \leqslant q-1$. بنا برایـن، کافی است، درستی نابرابری را، تنها در چنین نقطه‌هایی ثابت کنیم (نابرابری، در نقطهٔ $x=0$، به‌روشنی برقرار است). درضمن، اگر فرض کنیم:

$$\left[k \cdot \frac{p}{q}\right]=a_k, \; q\left\{k \cdot \frac{p}{q}\right\}=b_k \quad (k=1, \ldots, n)$$

آن وقت

$$0 \leqslant b_k < q, \; kp=a_k q+b_k$$

و نابرابری مورد بررسی، به‌این صورت درمی‌آید:

$$a_n \geqslant \frac{a_1}{1}+\ldots+\frac{a_n}{n}$$

یادآوری می‌کنیم که، عددهای b_1، ...، b_{q-1} مخالف صفر و دو بـه‌دو باهم متفاوت‌اند (اگر برای $i>j$ داشته باشیم $b_i=b_j$، آن وقت

$$ip-a_i q=jp-a_j q$$

و ازآن‌جا

$$(i-j)p=(a_i-a_j)q, \; 0<i-j<q$$

که ممکن نیست، زیرا p و q نسبت به‌هم اول‌اند). به‌این ترتیب

$$\{b_1, \ldots, b_{q-1}\}=\{1, \ldots, q-1\}$$

و از قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\ldots+\frac{b_{q-1}}{q-1}}{q-1} \geqslant \sqrt[q-1]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_{q-1}}{1 \times 2 \times \cdots \times (q-1)}}=$$

$$=\sqrt[q-1]{\frac{(q-1)!}{(q-1)!}}=1$$

و ازآن‌جا

$$\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\dots+\frac{b_n}{n}\geqslant\frac{b_1}{1}+\dots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\geqslant q-1$$

بنا براین

$$a_n+\frac{q-1}{q}\geqslant a_n+\frac{b_n}{q}=\frac{np}{q}=\frac{p}{q}+\frac{2p}{2q}+\dots+\frac{np}{nq}=$$

$$=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\dots+\frac{a_n}{n}+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1}{1}+\dots+\frac{b_n}{n}\right)\geqslant a_1+\frac{a_2}{2}+$$

$$+\dots+\frac{a_n}{n}+\frac{q-1}{q}$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۵۹. از شرط مسأله، نتیجه می‌شود: $c=a+b$، زیرا در غیر این صورت، به‌ازای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ $n\in\mathbb{N}$، برابری

$$[an]+[bn]=[cn]$$

برقرار نمی‌شود. درواقع، اگر $c>a+b$ و $n\geqslant\frac{1}{c-a-b}$، آن وقت

$$[nc]>nc-1\geqslant na+nb\geqslant[na]+[nb]$$

و اگر $c<a+b$ و $n\geqslant\frac{2}{a+b-c}$، آن‌وقت

$$[nc]\leqslant nc\leqslant na-1+nb-1<[na]+[nb]$$

علاوه براین، به‌ازای $n=1$، به‌دست می‌آید: $[a]+[b]=[c]$.

می‌توان، بدون‌این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای واردشود،فرض کرد:

$$0\leqslant a<1،\ 0\leqslant b<1،\ c=a+b<1$$

درواقع، اگر $a=[a]+\alpha$، $b=[b]+\beta$ و $c=[c]+\gamma$ فرض کنیم، آن وقت، برای عددهای $\alpha، \beta، \gamma\in[0، 1)$، از برابری

$$[an]+[bn]=([a]n+[\alpha n])+([b]n+[\beta n])=$$

$$=([a]+[b])n+[\alpha n]+[\beta n]=[c]n+[\gamma n]$$

نتیجه می‌شود:

$$[\alpha n]+[\beta n]=[\gamma n]$$

$a\neq ۰$ و $b\neq ۰$ فرض می‌کنیم و دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) a و b عددهایی گویا هستند، یعنی $a=\frac{k}{m}$، $b=\frac{l}{m}$، $c=\frac{k+l}{m}$ که، در آن‌ها، $k، l، m\in\mathbf{N}$ و $k+l<m$. در این صورت، اگر $n=m-۱$، آن وقت

$$[an]=\left[k.\frac{m-۱}{m}\right]=\left[k-\frac{k}{m}\right]=[k-a]=k-۱$$

و به‌همین ترتیب

$$[bn]=l-۱،\ [cn]=k+l-۱$$

بنابراین، برابری $[an]+[bn]=[cn]$، به‌ازای این n برقرار نیست.

ب) فرض کنیم، دست‌کم یکی از عددهای a و b، و مثلاً عدد a، گنگ باشد. عدد $p\in\mathbf{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته‌باشیم:

$$a+pb<۱\leqslant a+(p+۱)b$$

و ثابت می‌کنیم که، برای عددی مثل $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$a+pb<\{na\}$$

درواقع، اگر فرض کنیم $\varepsilon=۱-(a+pb)$ و عددهای $\{a\}$، $\{۲a\}$، $\{۳a\}$، ...، $\{ta\}$ را در نظر بگیریم $\left(t>\frac{۱}{\varepsilon}+۱\right)$، ازآن‌جا که همهٔ این عددها به بازهٔ $(۰، ۱)$ تعلق دارند، بنابراین، بین‌آن‌ها، دست‌کم دو عدد $\{ra\}$ و $\{qa\}$ $(r<q)$ پیدا می‌شود که اختلافی کمتر از ε دارند (در غیر این صورت، اختلاف کوچکترین و بزرگترین این عددها، از

$$\varepsilon(t-۱)>\varepsilon\left(\frac{۱}{\varepsilon}\right)=۱$$

کمتر نمی‌شود). بنابراین، دو امکان وجود دارد:

$$\{(q-r)a\}>۱-\varepsilon \quad \text{یا} \quad \{(q-r)a\}<\varepsilon$$

در حالت اول، فرض می‌کنیم $n=q-r$ که در نتیجه

$$a+pb=۱-\varepsilon<\{na\}$$

در حالت دوم $\delta=\{(q-r)a\}<\varepsilon$ می‌گیریم و عدد $s\in\mathbf{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\delta s<۱\leqslant\delta(s+۱)$$

در این صورت، با فرض $n=s(q-r)$ به‌دست می‌آید:

$$\{na\}=s\{(q-r)a\}=\delta s>۱-\varepsilon$$

بنابراین، در این حالت هم داریم: $a+pb<\{na\}$. برای این مقدار n، باید داشته باشیم:

$$[na]+[nb]=[nc]،$$

$$\{na\}+\{nb\}=n(a+b)-([na]+[nb])=\{nc\}$$

که در نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\{na\}>a،$$

$$\{nc\}=\{na\}+\{nb\}\geqslant\{na\}>a+pb>a+b=c$$

$$\{nb\}=\{nc\}-\{na\}<۱-(a+pb)=۱-$$

$$-(a+(p+۱)b-b)\leqslant۱-(۱-b)=b$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید: $n>۱$ و

$$[(n-۱)a]=[na]،\ [(n-۱)c]=[nc]،$$

$$[(n-۱)b]=[nb]-۱$$

یعنی، برابری

$$[(n-۱)a]+[(n-۱)b]=[(n-۱)c]$$

برقرار نیست. به‌این ترتیب، ثابت شدکه، دست‌کم یکی از عددهای a یا b باید برابر صفر باشند. تناقض حاصل، اثبات حکم مسأله را کامل می‌کند.

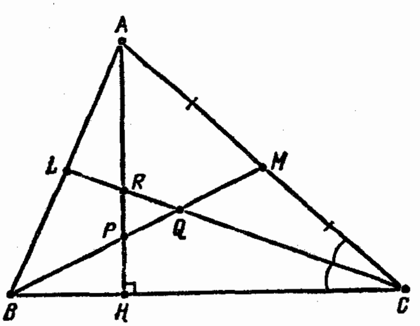
فصل سوم

هندسهٔ روی صفحه

§۹. مثلث

۱۶۰. از برهان خلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم در مثلث BBC،که زاویه‌هایـی حاده و ضلع‌هایی نابرابر دارد، ارتفاع AH، میانه BM و نیمساز CL، ضمن بـرخـورد باهم، مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخته باشند. نقطه‌های برخـورد پاره‌خطهای راست AH و BM، BM و CL، CL و AH را، به ترتیب، P، Q، R می‌نامیم (شکل ۲). در مثلث CRH داریم:

$$\widehat{CHR}=۹۰^\circ ،\ \widehat{CRH}=۶۰^\circ$$



شکل ۲

از آن‌جا $\widehat{RCH}=30^\circ$. سپس، در مثلث CMQ داریم:

$$\widehat{QCM}=\widehat{RCM}=30^\circ,\quad \widehat{MQC}=60^\circ$$

(برابری $\widehat{BQC}=60^\circ$ ممکن نیست، زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم:

$$\widehat{ABC}>\widehat{QBC}=180^\circ-\widehat{BQC}-\widehat{QCB}=90^\circ$$

یعنی مثلث ABC، زاویه‌ای منفرجه دارد)، از آن‌جا $BM\perp AC$. به‌این ترتیب، میانهٔ BM، در عین حال، بر قاعده عمود می‌شود و از آن‌جا

$$\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=\widehat{ACL}+\widehat{BCL}=60^\circ$$

یعنی، مثلث مفروض، باید متساوی‌الاضلاع باشد که فرض مسأله را نقض می‌کند.

۱۶۱. بدون این‌که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $a\leqslant b\leqslant c$. اگر $c>b$، آن وقت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{c^n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{c^n}=0$$

و برای مقدارهای بـه قدر کافـی بزرگ $n\in\mathbf{N}$، نابرابری $a^n+b^n>c^n$ نمی‌تواند برقرار باشد. بنابراین $b=c$ و همهٔ مثلث‌ها، متساوی‌الساقین‌اند.

۱۶۲. فرض می‌کنیم، عددهای طبیعی m و n با شرط مسأله سازگار باشند. در این صورت

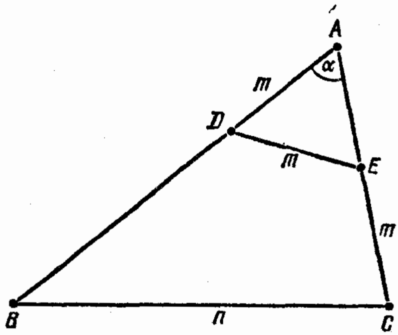
$$m=CE<AC=21$$

و از مثلث ADE (شکل ۳)، داریم:

$$21-m=AE<AD+DE=2m$$

یعنی $7<m<21$.

چون $AD=DE$، برای زاویهٔ $\alpha=\widehat{BAC}$ داریم:



شکل ۳

$$cos\alpha=\frac{AE}{۲AD}=\frac{۲۱-m}{۲m}$$

سرانجام، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، در مثلث ABC به‌دست می‌آید:

$$n^۲=BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB\cdot AC cos\alpha=۳۳^۲+۲۱^۲-$$

$$-۲\times۳۳\times۲۱\cdot\frac{۲۱-m}{۲m}=۲۲۲۳-\frac{۲۷\times۴۹\times۱۱}{m}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که m، باید مقسوم‌علیهی از عدد $۱۱\times۴۹\times۲۷$ باشد، از دو جواب ممکن $m=۹$ و $m=۱۱$ (با توجه به شرط $۷<m<۲۱$)، جواب اول مناسب نیست (زیرا $n^۲=۶۰۶$ مجذور کامل نمی‌شود). برای $m=۱۱$ به دست می‌آید: $n^۲=۹۰۰$، یعنی $n=۳۰$.
آزمایش نشان می‌دهد که، به‌ازای این مقدار n، همهٔ شرط‌های مسأله برقرارند.

۱۶۳. عددهای طبیعی a و b و c را طول ضلع‌های مثلثی می‌گیریم که قطر دایرهٔ محیطی آن $۲R=۶/۲۵$، مساحت آن S و نصف محیط آن p باشد. چون طول هر ضلع مثلث نمی‌تواند از طول قطر دایرهٔ محیطی آن، تجاوز کند، بنابراین

$$a، b، c\in\{۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶\}$$

سپس، داریم:

$$(abc)^۲=(۴SR)^۲=p(p-a)(p-b)(p-c)(۴R)^۲$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$64a^2b^2c^2=625(a+b+c)(c+b-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

بنابراین، باید عدد $64a^2b^2c^2$ بر ۶۲۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی دست‌کم، دو عدد از سه عدد a و b و c برابر ۵ باشند. فرض کنیم، مثلاً $a=b=5$، آن وقت

$$64c^2=(10+c)c^2(10-c)$$

یعنی $100-c^2=64$ و $c=6$. بنابراین، ضلع‌های مثلث، تنها می‌توانند ۵ و ۵ و ۶ باشند و آزمایش هم نشان می‌دهد که با شرط‌های مسأله سازگارند.

۱۶۴. R را شعاع دایره‌ای می‌گیریم که دو مثلث ABC و DEF درآن محاط شده‌اند. بنابر قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{BC+AC+AB}{2R}=\frac{p_1}{2R}$$

(p_1، محیط مثلث ABC است). و در مثلث DEF:

$$\sin E+\sin D+\sin F=\frac{p_2}{2R}$$

(p_2، محیط مثلث DEF است). بنابراین، دو برابری زیر هم ارزند:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin E+\sin D+\sin F،$$

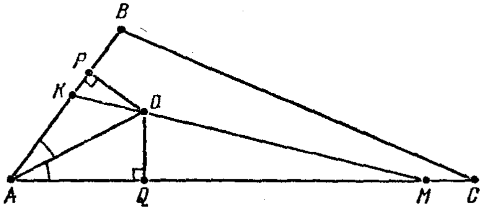
$$p_1=p_2$$

۱۶۵. فرض کنید، خط راست ضلع‌های مثلث ABC را در K و M قطع کرده باشد که، برای مشخص بودن وضع، آن‌ها را به‌ترتیب، روی ضلع‌های AB و AC می‌گیریم (شکل ۴).

ثابت می‌کنیم، برابری

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}}=\frac{AK+AM}{AB+AC+BC} \qquad (1)$$

تنها وقتی برقرار است که، خط راست KM، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث



شکل ۴

بگذرد. آنچه مسأله خواسته است، حالت خاصی از حکم بالاست، با این شرط اضافی که

$$S_{AKM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

[زیرا، شرط اخیر، به‌معنای برابری $S_{AKM}=S_{KBCM}$ است، و شرط

$$AK+AM=\frac{۱}{۲}(AB+AC+BC)$$

به‌معنای درستی برابری

$$AK+AM+KM=KB+MC+BC-KM)$$

است.]

شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را، r می‌گیریم. در این صورت

$$۲S_{ABC}=r(AB+AC+BC)$$

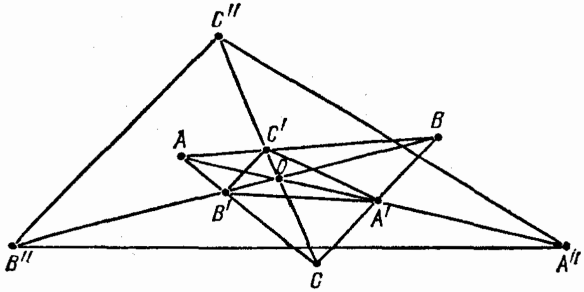
از طرف دیگر، اگر ρ شعاع دایره‌ای باشد که مرکز آن بر خط راست KM و خود دایره بر ضلع‌های AK و AM مماس است، داریم:

$$۲S_{AKM}=\rho(AK+AM)$$

بنابراین، برابری (۱)، با برابری $r=\rho$ هم‌ارزاست و، برابری اخیر، تنها وقتی برقرار است که، مرکزهای دو دایره، برهم منطبق باشند.

۱۶۶. نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های راست AA'، BB' و CC' را O، و زاویهٔ AOB را برابر φ می‌گیریم (شکل ۵).

این برابری‌ها روشن است:



شکل ۵

$$۲S_{AOB}=AO.BO\sin\varphi،$$

$$۲S_{AOB'}=AO\cdot B'O\sin\varphi،$$

$$۲S_{BOA'}=BO\cdot A'O\sin\varphi،$$

$$۲S_{A'OB'}=A'O\cdot B'O\sin\varphi$$

از آن‌جا

$$S_{A''OB''}=\frac{۱}{۲}A''O\cdot B''O\sin\varphi=\frac{۱}{۲}(AO+۲A'O)(BO+۲B'O)\sin\varphi=$$

$$=S_{AOB}+۲S_{AOB'}+۲S_{BOA'}+۴S_{A'OB'}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$S_{A''OC''}=S_{AOC}+۲S_{AOC'}+۲S_{COA'}+۴S_{A'OC'}\text{ و}$$

$$S_{B''OC''}=S_{BOC}+۲S_{BOC'}+۲S_{COB'}+۴S_{B'OC'}$$

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$S_{A''B''C''}=S_{A''OB''}=S_{A''OC''}+S_{B''OC''}=$$

$$=S_{ABC}+۲(S_{AOB'}+S_{B'OC}+S_{COA'}+S_{A'OB}+S_{BOC'}+$$

$$+S_{C'OA})+۴S_{A'B'C'}=۳S_{ABC}+۴S_{A'B'C'}$$

۱۶۷. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$، $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{CA}=\mathbf{b}$. داریم:

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\mathbf{c}-\mathbf{b}),\ \overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}-\mathbf{c}),\ \overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

و

$$(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2)-3(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2)=$$

$$=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-\frac{1}{3}[(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2]=$$

$$=\frac{1}{3}(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{ab}+2\mathbf{bc}+2\mathbf{ac})=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=0$$

۱۶۸. فرض کنید، مرکز ثقل مرزهای مثلث ABC، بر مـرکـز ثقل خود مثلث، یعنی بر نقطهٔ O محل برخورد میانه‌هـای آن، منطبق باشد. طول ضلع‌های BC، CA، AB را به‌تـرتیب a، b، c و وسط این ضلع‌ها را A_1، B_1، C_1 می‌نامیم (A_1، B_1، C_1، مرکزهای ثقل ضلع‌های متناظرند). در این صورت داریم:

$$a\cdot\overrightarrow{OA_1}+b\cdot\overrightarrow{OB_1}+c\cdot\overrightarrow{OC_1}=0$$

از آن‌جا که

$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-$$

$$-\frac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB_1}$$

به‌دست می‌آید:

$$(a-c)\overrightarrow{OA}+(b-c)\overrightarrow{OB_1}=a\overrightarrow{OA_1}+b\overrightarrow{OB_1}+c\overrightarrow{OC_1}=0$$

و چون بردارهای $\overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{OB_1}$ هم راستا نیستند، باید داشته باشیم:

$$a=b=c$$

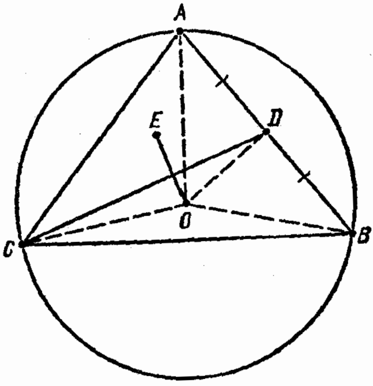
یعنی، مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

۱۶۹. داریم (شکل ۶):

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}),$$

$$AB=AC,\ \overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{BC}$$



شکل ۶

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$12\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=(2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=$$

$$=3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-4\overrightarrow{OC}^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=$$

$$=3R^2+R^2-4R^2+4\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

که در آن، $R=OA=OB=OC$، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است؛

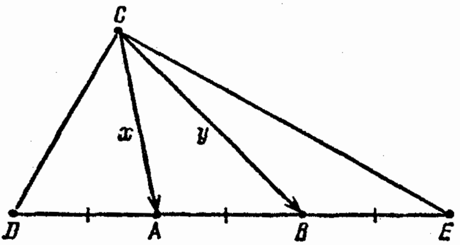
از این‌جا نتیجه می‌شود: $OE \perp CD$.

۱۷۰. $\overrightarrow{CA}=\mathbf{x}$ و $\overrightarrow{CB}=\mathbf{y}$ می‌گیریم، در این صورت (شکل ۷):

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{y}-\mathbf{x},\ \overrightarrow{CE}=2\mathbf{y}-\mathbf{x},\ \overrightarrow{CD}=2\mathbf{x}-\mathbf{y}$$

و شرط $CD \perp CE$، با برابری زیر هم‌ارز است:

$$(2\mathbf{x}-\mathbf{y})(2\mathbf{y}-\mathbf{x})=0 \text{ یا } 5(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2=\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2$$



شکل ۷

شرط اخیر به این معناست که، برای ضلع‌های $BC=a$، $AC=b$ و $AB=c$ از مثلث ABC، باید داشته باشیم:

$$5c^2=a^2+b^2$$

دراین صورت، مثلث تنها به‌ازای مقدارهایی از a و b وجود دارد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$|a-b|<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}<a+b$$

یعنی

$$5(a-b)^2<a^2+b^2<5(a+b)^2$$

نابرابری سمت راست، برای همهٔ مقدارهای مثبت a و b برقرار است و برای برقراری نابرابری سمت چپ، باید داشته باشیم:

$$(2a-b)(2b-a)>0$$

که ازآن‌جا، جواب به‌دست می‌آید: $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2$.

۱۷۱. زاویهٔ α را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $6\alpha<90^\circ$ و $tg\alpha\in \mathbf{Q}$ (مثلاً، مناسب است $tg\,\alpha=\frac{1}{4}$ بگیریم). در این صورت، هر یك از عددهای

$$tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad tg\,3\alpha=\frac{tg\,2\alpha+tg\alpha}{1-tg\,2\alpha tg\alpha},$$

$$cos\,2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha},\quad sin\,2\alpha=\frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha},$$

$$cos\,6\alpha=\frac{1-tg^2 3\alpha}{1+tg^2 3\alpha},\quad sin\,6\alpha=\frac{2\,tg 3\alpha}{1+tg^2 3\alpha}$$

عددهایی گویاهستند. بنابراین، اگرمثلث قائم‌الزاویهٔ $A_1B_1C_1$ را بافرض‌های

$$\hat{C}_1=90^\circ،\ \hat{A}_1=6\alpha،\ A_1B_1=1،\ A_1C_1=cos\,6\alpha،\ B_1C_1=sin\,6\alpha$$

بسازیم، طول ضلع‌های آن، عددهایی گویا می‌شود و، در نتیجه، مثلث ABC، متشابه با $A_1B_1C_1$ وجود دارد که طول ضلع‌های آن، عددهایی درست باشند (مثلاً، برای $tg\,\alpha=\frac{1}{4}$، ضلع‌های مثلث ABC را می‌توان $AB=4913$، $AC=495$، $BC=4888$ گرفت). از طرف دیگر، در مثلث $A_2B_2C_2$ هم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\hat{C}_2=90^\circ،\ \hat{A}_2=2\alpha،\ A_2B_2=1،\ A_2C_2=cos\,2\alpha،\ B_2C_2=sin\,2\alpha$$

طول همهٔ ضلع‌ها، عددهایی گویا هستند. بنابراین، می‌توان، به‌کمك پرگار و خط‌کش، زاویهٔ $2\alpha=\frac{1}{3}\hat{A}_1$ را ساخت، یعنی زاویهٔ A از مثلث ABC را به سه بخش برابر تقسیم کرد. ازآن‌جا که، زاویهٔ ۳۰ درجه را، می‌توان ساخت، در نتیجه

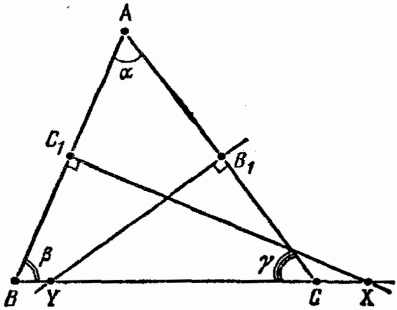
$$\frac{1}{3}\hat{B}=\frac{1}{3}(\hat{C}-\hat{A})=30^\circ-2\alpha$$

را هم می‌توان به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم کرد. به‌این ترتیب، هریك از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را می‌توان، به کمك پرگار و خط‌کش، به سه بخش برابر تقسیم کرد. مثلث ABC، جوابی برای مسأله است.

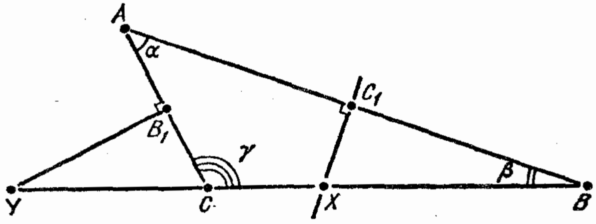
۱۷۲. در مثلث ABC فرض می‌کنیم:

$$\alpha=\hat{A},\ \beta=\hat{B},\ \gamma=\hat{C},\ a=BC,\ b=AC,\ c=AB$$

و R را شعاع دایرهٔ محیطی مثلث می‌گیریم.



شکل ۸



شکل ۹

برابری $BC=XY$، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{YX}\ \text{ یا }\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{XY}$$

که با توجه به برابری‌های

$$|\overrightarrow{XY}\pm\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CY}\pm\overrightarrow{BC}|=$$

$$=\left|-\frac{c}{۲\cos\beta}+a-\frac{b}{۲\cos\gamma}\pm a\right|=R\left|-\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}+۲(۱\pm۱)\sin\alpha\right|$$

هم‌ارز با شرط زیر است:

$$۲(۱\pm۱)\sin\alpha=\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$$

(علامت «+»، متناظر با حالتی است که در شکل ۸ نشان داده شده است، و علامت «−» متناظر با حالت شکل ۹). اگر به‌حساب بیاوریم که

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin ۲\gamma+\sin ۲\beta}{۲\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=$$

$$=\sin\alpha(۱+tg\gamma tg\beta)$$

به این ترتیب، برای برابری طول‌های BC و XY، به‌دست می‌آید:

$$۲(۱\pm۱)=۱+tg\gamma tg\beta$$

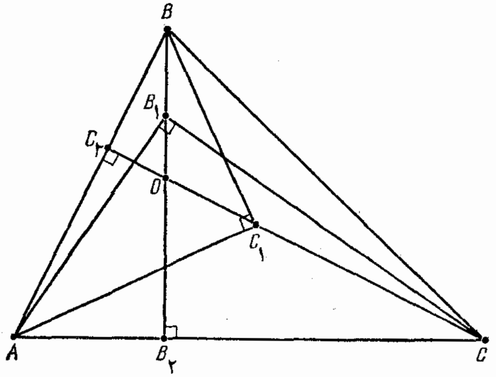
و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$tg\gamma tg\beta=۳ \quad \text{یا} \quad tg\gamma tg\beta=-۱$$

به این ترتیب $M=\{۳،-۱\}$ و حکم الف) ثابت شد. برای اثبات حکم ب) کافی است توجه کنیم که حالت $tg\beta tg\gamma=-۱$، مثلاً، برای $\alpha=\beta=۳۰^\circ$ و $\gamma=۱۲۰^\circ$ صدق می‌کند.

۱۷۳. پای ارتفاع‌های وارد بر AC و AB را، به‌ترتیب، $B_۲$ و $C_۲$ می‌نامیم. (شکل ۱۰).

مثلث‌های $AB_۱C$ و $AB_۲B_۱$؛ $ABB_۲$ و $ACC_۲$؛ $AC_۱B$ و $AC_۲C_۱$ متشابه‌اند (در هر مورد از دو مثلث قائم‌الزاویه، یك زاویهٔ حادهٔ مشترك وجود دارد). بنابراین



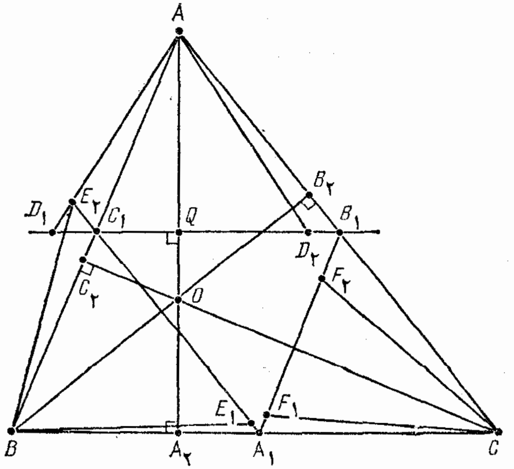
شکل ۱۰

$$AB_1^2 = AB_2 \cdot AC = AC_2 \cdot AB = AC_1^2$$

که از آن‌جا، برابری $AB_1 = AC_1$، به‌دست می‌آید.

۱۷۴. پای ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های BC، CA، AB را، به‌ترتیب، A_2، B_2، C_2 می‌گیریم. (شکل ۱۱). در این صورت داریم:

$$AO \cdot A_2O = BO \cdot B_2O = CO \cdot C_2O$$



(برابری اول، از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB_2 و BOA_2، و برابری دوم، از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ COB_2 و BOC_2 به‌دست می‌آید.)

چون B_1C_1 وسط دو ضلع از مثلث ABC را به‌هم وصل کرده است، بنابراین، نقطهٔ Q، محل برخورد آن با ارتفاع AA_2، این ارتفاع را نصف می‌کند و، در ضمن $OQ \perp D_1D_2$ و، بنابر قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$AD_i^2 = AQ^2 + (R^2 - OQ^2) = R^2 +$$
$$+ (AQ - OQ)(AQ + OQ), \ (i = 1, 2)$$

که درآن، R را شعاع دایره گرفته‌ایم. اگر حالت‌های مختلف جای نقطهٔ O را بر خط راست AA_2 در نظر بگیریم، به برابری زیر می‌رسیم:

$$AD_i^2 = R^2 \pm AO \cdot A_2O$$

در ضمن، اگر نقطهٔ O در درون مثلث ABC باشد، باید علامت «+» و در حالتی‌که در بیرون مثلث ABC باشد، باید علامت «−» را در نظر گرفت؛ مثلاً، در حالتی که روی شکل ۱۱ نشان داده شده است، داریم:

$$AQ - OQ = A_2Q - OQ = A_2O; \ AQ + OQ = AO$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$BE_i^2 = R^2 \pm BO \cdot B_2O; \ CF_i^2 = R^2 \pm CO \cdot C_2O$$

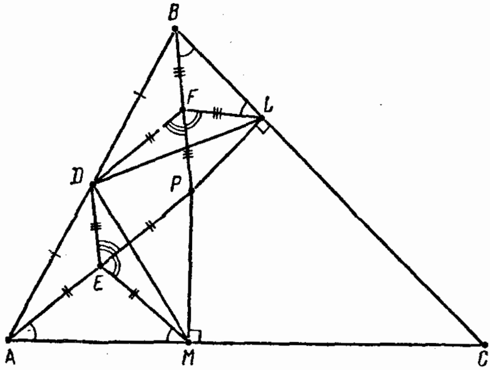
که ازآن‌ها، می‌توان حکم مسأله را نتیجه گرفت.

۱۷۵. وسط پاره‌خط‌های راست AP و BP را، به ترتیب، E و F می‌نامیم. چون DE و DF وسط ضلع‌های مثلث APB را به هم وصل کرده‌اند، چهارضلعی $DFPE$ متوازی‌الاضلاع می‌شود و از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ APM و BPL به‌دست می‌آید:

$$ME = \frac{1}{2}AP = DF; \ LF = \frac{1}{2}BP = DE$$

سپس

$$\widehat{PEM} = 2\widehat{EAM} = 2\widehat{FBL} = \widehat{PFL}; \ \widehat{PED} = \widehat{PFD}$$



شکل ۱۲

به‌این ترتیب، مثلث‌های DEM و DFL، در دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، با یکدیگر برابر می‌شوند. درواقع، اگر $\alpha < 180^\circ$، آن‌طور که در شکل ۱۲ می‌بینیم، داریم:

$$\alpha = \widehat{PEM} + \widehat{PED} = \widehat{PFL} + \widehat{PFD}$$

و اگر $\alpha > 180^\circ$، آن وقت بـه جای α باید $360^\circ - \alpha$ گرفت؛ درحالت $\alpha = 180^\circ$، به طور مستقیم به دست می‌آید:

$$DM = ME + DE = DF + LF = DL$$

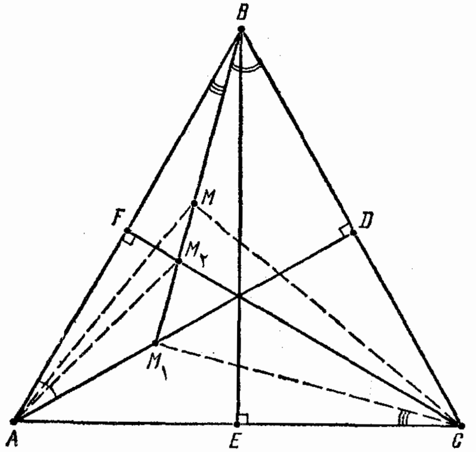
و به هر حال، برابری $DM = DL$ به دست می‌آید.

۱۷۶. همهٔ نقطه‌های واقع بـر ارتفاع‌هـای مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای ویژگی مورد نظر مسألـه هستند. مثلاً، اگـر M_1، نقطه‌ای واقع بر ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد (شکل ۱۳)، داریم:

$$\widehat{M_1AB} + \widehat{M_1BC} + \widehat{M_1CA} = \widehat{M_1AB} + \widehat{M_1BC} + \widehat{M_1BA} =$$

$$= \widehat{M_1AB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$$

ثابت می‌کنیم، در درون مثلث، نقطه‌های دیگری با این ویژگی پیدا نمی‌شود. برعکس، فرض می‌کنیم، نقطهٔ M، که روی هیچ‌کدام ازارتفاع‌های



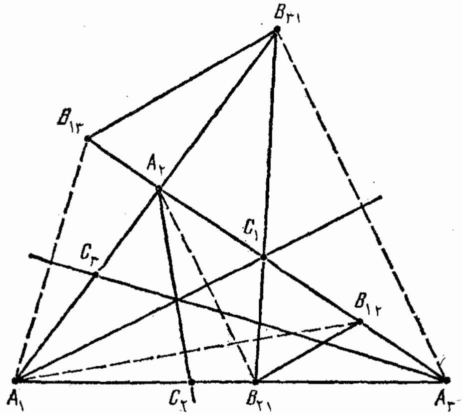
شکل ۱۳

مثلث نیست، این ویژگی را داشته باشد. BM را وصل می‌کنیم و محل برخوردآن را، با ارتفاع‌های وارد برضلع‌های BC و AB، به‌ترتیب، M_1 و M_2 می‌نامیم. اگر برای هر سه نقطهٔ M، M_1 و M_2 (که قطعاً متمایزند)، شرط مسأله برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$\widehat{MAM_1}=\widehat{MCM_1}, \quad \widehat{MAM_2}=\widehat{MCM_2}$$

ولی در این صورت، نقطهٔ C'، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به‌خط راست BM، باید هم روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث AMM_1 وهم روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث AMM_2 واقع شود. بنابراین، دو دایره‌ای که هر دو از نقطه‌های A، M و C' می‌گذرند ($C' \neq A$، زیرا خط راست BM بر ضلع AC عمود نیست)، باید منطبق باشند. و این، ممکن نیست، زیرا نقطه‌های M، M_1 و M_2 نمی‌توانند روی یك دایره باشند.

۱۷۷. A_1C_1 را نیمساز مثلث $A_1A_2A_3$ می‌گیریم (شکل ۱۴). چون ازقرینهٔ پاره‌خط راست A_2A_3، نسبت به‌خط راست A_1C_1، پاره‌خط راست $B_{21}B_{31}$ بـه دست می‌آید، بنابراین دو خط راست A_2A_3 و $B_{21}B_{31}$، در نقطهٔ C_1 به هم می‌رسند. بنابر ویژگی نیمساز داریم:



شکل ۱۴

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3}=\frac{C_1A_2}{C_1A_3}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1}=\frac{B_{12}A_2-C_1A_2}{B_{13}A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2-C_1A_2}{A_1A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

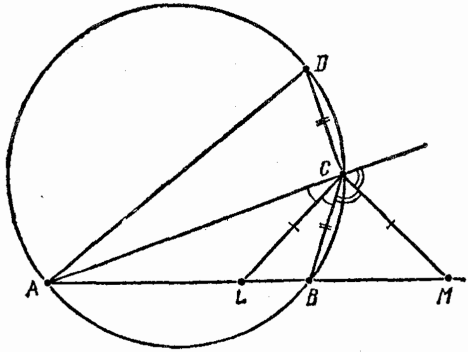
زیرا $A_1A_2=B_{12}A_2$ و $A_1A_3=B_{13}A_3$. به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\frac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

یعنی مثلث‌های $B_{12}C_1B_{21}$ و $B_{13}C_1B_{31}$ متجانس و دوخط راست $B_{12}B_{21}$ و $B_{13}B_{31}$ باهم موازی‌اند. به‌همین ترتیب، موازی بودن دوخط راست $B_{23}B_{32}$ و $B_{13}B_{31}$ هم ثابت می‌شود.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که، سه خط راست $B_{12}B_{21}$، $B_{13}B_{31}$ و $B_{23}B_{32}$ بر خط راستی که از مرکزهای دو دایرهٔ محاطی و محیطی مثلث $A_1A_2A_3$ می‌گذرد، عمودند.

۱۷۸. فرض می‌کنیم، نقطه‌های A، L، B، M، به همین ردیف، روی خط راست AB واقع باشند (شکل ۱۵؛ حالتی که نقطه‌ها به ردیف M، A،



شکل ۱۵

L، B واقع باشند، به صورتی مشابه، مورد بررسی قرار می‌گیرد).

داریم:

$$\widehat{LCM}=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ, \widehat{CLM}=45^\circ$$

(زیرا $CL=CM$). بنابراین

$$2\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=2(\widehat{LAC}+\widehat{LCA})=2\widehat{CLM}=90^\circ,$$

$$\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=180^\circ-\widehat{ABC}$$

از آن‌جا

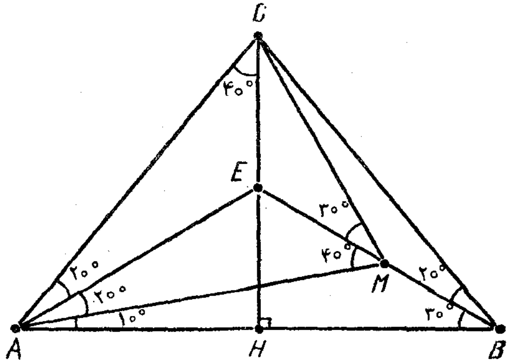
$$\widehat{BAC}=\widehat{ABC}-90^\circ$$

چون زاویهٔ ABC منفرجه است. قطر AD از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، در بیرون این مثلث قرار می‌گیرد، یعنی

$$\widehat{DAC}=(180^\circ-\widehat{ADC})-\widehat{ACD}=\widehat{ABC}-90^\circ=\widehat{BAC}$$

(زیرا زاویه‌های ABC و ADC، زاویه‌های روبه‌رو، در چهارضلعی محاطی $ABCD$ هستند). بنابراین $DC=BC$ و

$$4R^2=AD^2=AC^2+CD^2=AC^2+BC^2$$



شکل ۱۶

۱۷۹. محل برخورد ارتفاع CH از مثلث ABC را بـا خط راست BM، نقطهٔ E فرض می‌کنیم (شکل ۱۶).
به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، داریم: $AE = BE$ و

$$\widehat{EAM} = \widehat{EAB} - \widehat{MAB} = ۳۰^\circ - ۱۰^\circ = ۲۰^\circ،$$

$$\widehat{ACE} = \frac{۱}{۲}\widehat{ACB} = ۴۰^\circ،$$

$$\widehat{EAC} = \widehat{CAH} - \widehat{EAB} = (۹۰^\circ - ۴۰^\circ) - ۳۰^\circ = ۲۰^\circ،$$

$$\widehat{AME} = \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = ۱۰^\circ + ۳۰^\circ = ۴۰^\circ$$

یعنی مثلث‌های AME و ACE برابرند (یك‌ضلع مشترك و دوزاویهٔ برابر). در نتیجه

$$AM = AC، \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \widehat{CAM}) = ۷۰^\circ$$

۱۸۰. O را محل برخورد خطهای راست AD و BE فرض می‌کنیم (شکل ۱۷). در این صورت

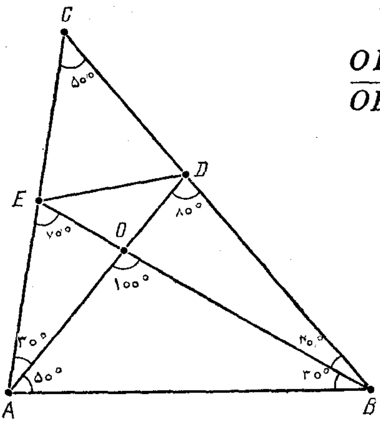
$$\widehat{AOB} = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ،$$

$$\widehat{BDA}=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ,$$

$$\widehat{CBE}=50^\circ-30^\circ=20^\circ,$$

$$\widehat{AEB}=\widehat{CBE}+\widehat{ECB}=70^\circ$$

$$\widehat{CAD}=180^\circ-\widehat{ACB}-\widehat{ABC}-\widehat{BAD}=30^\circ$$



شکل ۱۷

بنا بر قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OD}{OB}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ},\ \frac{OB}{OA}=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ},$$

$$\frac{OA}{OE}=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{OD}{OE}=\frac{OD}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{OE}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ \sin^2 30^\circ}=$$

$$=\frac{4\sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=1$$

یعنی $OD=OE$ و

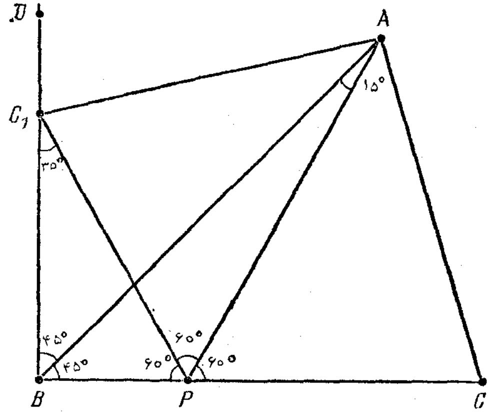
$$\widehat{BED}=\widehat{ODE}=\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{EOD})=\frac{1}{2}(180^\circ-100^\circ)=40^\circ$$

۱۸۱. نقطهٔ C_1 را، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط راست AP می‌گیریم (شکل ۱۸).

داریم: $C_1P=CP=2BP$ و

$$\widehat{C_1PB}=180^\circ-\widehat{APC}-\widehat{APC_1}=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$$

بنابراین $\widehat{C_1BP}=90^\circ$ (زیرا مثلث C_1PB، متشابه با مثلث قائم‌الزاویهٔ



شکل ۱۸

به وتر ۲ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ ۱ است)، یعنی BA، نیمساز زاویهٔ C_1BP است. بــه‌این ترتیب، نقطهٔ A، که از خطهای راست PC ،C_1P و C_1B به یك فاصله است، بر نیمساز زاویهٔ PC_1D قرار دارد (D، بر امتداد پاره‌خط راست BC_1 و بعد از C_1 قرار گرفته است). بنابراین

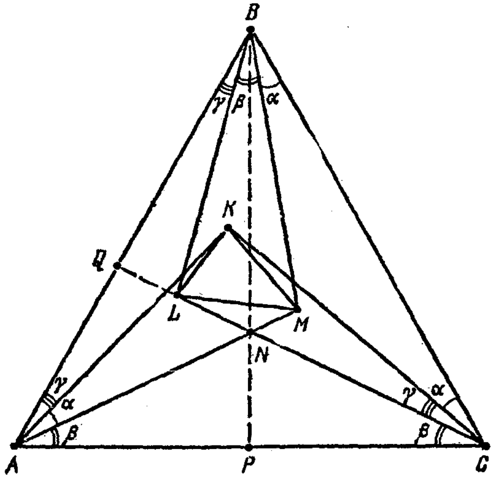
$$\widehat{ACB}=\widehat{AC_1P}=\frac{1}{۲}(۱۸۰^\circ-\widehat{BC_1P})=\frac{1}{۲}(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=۷۵^\circ$$

۱۸۲. قرارمی‌گذاریم: $\alpha=۲۰^\circ$، $\beta=۲۵^\circ$؛ $\gamma=۱۵^\circ$ (شکل ۱۹). در این صورت $\alpha, \beta, \gamma<۳۰^\circ$، $\alpha+\beta+\gamma=۶۰^\circ$ و

$$\widehat{KAM}=۶۰^\circ-\widehat{MAC}-\widehat{KAB}=\alpha.$$

و به همین ترتیب: $\widehat{LBM}=\beta$ و $\widehat{KCL}=\gamma$.

فرض مــی کنیــم، پــاره‌خطهــای راست AM و CL، در نقطهٔ N؛ خطهای راست BN و AC در نقطهٔ P و خطهــای راست CL و AB در نقطهٔ Q، یکدیگررا قطع کرده باشند. چون $AB=BC$ و $AN=NC$ (زیرا هر یك از زاویه‌های NAC و NCA برابر β هستند)، بنابراین BP، نیمساز زاویهٔ ANC و، درنتیجه، نیمساز زاویهٔ LNM است. نقطهٔ B' را داخل زاویهٔ LNM، بیرون مثلث LMN و به یك فاصله از سه خط راست LN ،LM و MN انتخاب می کنیم. ایــن نقطه، روی خط راست NB و نیمسازهای



شکل ۱۹

خارجی زاویه‌های L و M از مثلث LMN قرار دارد، بنابراین

$$\widehat{LB'M}=۱۸۰^\circ-\widehat{B'LM}-\widehat{B'ML}=$$

$$=۱۸۰^\circ-\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{MLN}}{۲}-\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{NML}}{۲}=\frac{\widehat{NLM}+\widehat{NML}}{۲}=$$

$$=\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{LNM}}{۲}=\frac{\widehat{NAC}+\widehat{NCA}}{۲}=\beta=\widehat{LBM}$$

یعنی B' بر B، منطبق است و

$$\widehat{BLM}=\widehat{BLQ}=۱۸۰^\circ-\widehat{CQB}-\widehat{ABL}=$$

$$=\widehat{ABC}+\widehat{BCQ}-\widehat{ABL}=۶۰^\circ+\alpha+\gamma-\gamma=۶۰^\circ+\alpha$$

چون

$$\widehat{BLC}=۱۸۰^\circ-\widehat{LBC}-\widehat{LCB}=۱۸۰^\circ-(\beta+\alpha)-(\alpha+\gamma)=$$

$$=۱۲۰^\circ-\alpha$$

بنابراین

$$\widehat{MLC}=\widehat{BLC}-\widehat{BLM}=۱۲۰^\circ-\alpha-(۶۰^\circ+\alpha)=۶۰^\circ-۲\alpha$$

(به یاد بیاوریم که $\alpha<۳۰^\circ$). به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$\widehat{KLB}=۶۰^\circ-۲\alpha$$

به این ترتیب، داریم:

$$\widehat{KLM}=\widehat{BLC}-\widehat{KLB}-\widehat{MLC}=$$

$$=(۱۲۰^\circ-\alpha)-(۶۰^\circ-۲\alpha)-(۶۰^\circ-۲\alpha)=۳\alpha$$

یعنی $\widehat{KLM}=۳\alpha=۶۰^\circ$.

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$\widehat{LKM}=۳\beta=۷۵^\circ،\ \widehat{KML}=۳\gamma=۴۵^\circ$$

§ ۱۰. دایره

۱۸۳. همهٔ نقطه‌های محیط دایره را به زوج نقطه‌هایی تقسیم می‌کنیم، به نحوی که هر زوج، دو سر یك قطر دایـره را تشکیل دهند. در هر زوج، یکی از نقطه‌ها را (به دلخواه) در مجموعهٔ اول و نقطهٔ دیگر را در مجموعهٔ دوم، قرار می‌دهیم. از آن‌جا، که وتر هر مثلث قائم‌الزاویـهٔ محاط در دایره، قطری از این دایره است، بنابراین، رأس‌های زاویـه‌های حادهٔ این مثلث، متعلق به دو مجموعهٔ مختلف خواهند بود.

۱۸۴. مربع $ABCD$ را محاط در دایرهٔ به قطر d، و نقطهٔ P را واقع برکمان AD در نظر می‌گیریم (شکل ۲۰). زاویهٔ ACP را α می‌نامیم. در این صورت، اگر عددهای

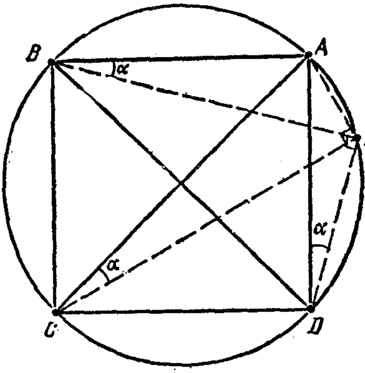
$$AP=d\sin\alpha،\ CP=d\cos\alpha$$

گویا باشند، آن وقت عدد

$$BP = d\sin(\widehat{PDB}) = d\ \sin(\widehat{ADB} + \widehat{ADP}) =$$

$$= d\ \sin(۴۵^\circ + \alpha) = d(\sin\alpha + \cos\alpha)\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(AP + CP)$$

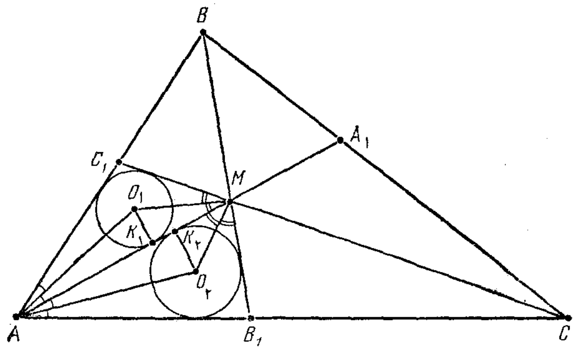
عددی گنگ می‌شود.



شکل ۲۵

۱۸۵. دایره‌های برابر به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$، محاط درمثلث‌های $AB_۱M$ و $AC_۱M$ را درنظرمی گیریم. نقطه‌های تماس این دایره‌ها را با پاره‌خط راست AM، با $K_۱$ و $K_۲$ نشان می‌دهیم (شکل ۲۱).

مثلث‌های قائم‌الزوایهٔ $AO_۱K_۱$ و $AO_۲K_۲$ باهم برابرند. زیرا



شکل ۲۱

$$O_۱K_۱ = O_۲K_۲ \text{ و } \widehat{O_۱AK_۱} = \frac{۱}{۲}\widehat{C_۱AM} = \frac{۱}{۲}\widehat{B_۱AM} = \widehat{O_۲AK_۲}$$

پس $K_۱ = K_۲$ و مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $O_۱K_۱M$ و $O_۲K_۲M$ هم، با یکدیگر برابر می‌شوند (دردو ضلع مجاور به زاویهٔ مجاور به زاویهٔ قائمه)،

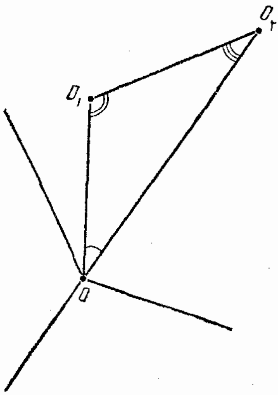
از آن جا

$$O_1\widehat{MK_1}=O_2\widehat{MK_2} \text{ و } C_1\widehat{MA}=B_1\widehat{MA}$$

بنابراین، با توجه به دو مثلث AB_1M و AC_1M (که دو زاویهٔ متناظر برابر دارند)، به دست می‌آید: $\widehat{AC_1C}=\widehat{AB_1B}$؛ و با توجه به مثلث‌های ABB_1 و ACC_1: $\widehat{ABB_1}=\widehat{ACC_1}$، که از آن‌ها نتیجه می‌شود $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$.

به همین ترتیب، می‌توان برابری دو زاویهٔ ACB و BAC را هم، ثابت کرد.

۱۸۶. برخلاف حکم مسأله، فرض می‌کنیم، هیچ کدام از نقطه‌های O_1،...،O_7 که به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دور مرکز O از دایرهٔ مفروض قرار گرفته‌اند، بر O واقع نباشد.



شکل ۲۲

چون مجموع زاویه‌های O_1OO_2، O_2OO_3،...، O_7OO_1 برابر با ۳۶۰ درجه است، بنابراین، دست کم یکی از آن‌ها، از ۶۰ درجه کوچکتر است. مثلاً فرض کنید، زاویهٔ O_1OO_2 از ۶۰ درجه کمتر باشد؛ از دو زاویهٔ باقی‌مانده در مثلث OO_1O_2، زاویهٔ OO_1O_2 را بزرگتر می‌گیریم (اگر زاویهٔ O_1OO_2 برابر صفر باشد، به معنای آن است که فاصلهٔ O_1O_2 از واحد کوچکتر است). در این صورت داریم:

$$\widehat{OO_1O_2}>60^\circ>\widehat{O_1OO_2}$$

که از آن‌جا، نتیجه می‌شود: $1\leqslant O_2O<O_1O_2$، که با فرض مسأله متناقض است.

۱۸۷. فرض کنید، برخلاف حکم مسأله، نقطه‌ای مانند O، متعلق به‌هر

شش دایره وجود داشته باشد، مرکز دایره‌ها را، به ترتیب و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دور نقطهٔ O، با O_1، ...، O_6 نشان می‌دهیم (شکل ۲۲ را ببینید؛ بنابر شرط مسأله، نقطهٔ O نمی‌تواند مرکز هیچ کدام از دایره‌ها باشد). چون مجموع زاویه‌های O_1OO_2، O_2OO_3، ...، O_6OO_1 برابر با ۳۶۰ درجه است، دست کم یکی از آن‌ها، از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کند. مثلاً، فرض می‌کنیم: $\widehat{O_1OO_2} \leqslant 60°$؛ و از بین دو زاویهٔ باقی‌مانده در مثلث OO_1O_2، زاویهٔ OO_1O_2 بزرگتر باشد (اگر زاویهٔ O_1OO_2 برابر صفر باشد، بلافاصله نتیجه می‌شود: $O_2O_1 \geqslant O_2O$). در این صورت، داریم:

$$\widehat{OO_1O_2} \geqslant 60° \geqslant \widehat{O_1OO_2}$$

از آن جا $O_2O_1 \geqslant O_2O$. به این ترتیب، دایرهٔ به مرکز O_2، که شامل نقطهٔ O است، شامل نقطهٔ O_1، مرکز دایرهٔ دیگر هم می‌شود، که شرط مسأله را نقض می‌کند.

۱۸۸. مجموعهٔ دایره‌ها را متناهی فرض می‌کنیم. در این صورت، دایرهٔ به مرکز O با کمترین شعاع r، بر شش دایره به مرکزهای O_1،...،O_6 (که دور نقطهٔ O، به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار دارند؛ شکل ۲۲ را ببینید) و شعاع‌های r_1، ...، r_6 مماس است. در مثلث O_1OO_2، ضلع $O_1O_2 = r_1 + r_2$، بزرگترین ضلع است، از آن جا زاویهٔ O_1OO_2 از ۶۰ درجه کمتر نیست. به همین ترتیب، به دست می‌آید:

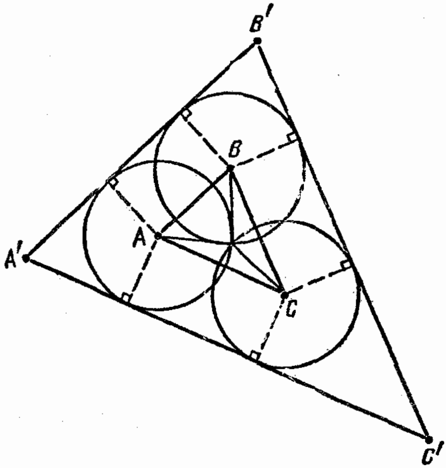
$$\widehat{O_2OO_3} \geqslant 60°, \ \ldots, \ \widehat{O_6OO_1} \geqslant 60°$$

ولی مجموع این شش زاویهٔ غیر متقاطع، برابر ۳۶۰ درجه است، بنابراین، هر یك از آن‌ها برابر ۶۰ درجه و هر یك از زاویه‌های دیگر مثلث‌های O_1OO_2، O_2OO_3، ...، O_6OO_1 (که از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کنند)، برابر ۶۰ درجه می‌شود، یعنی همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع‌اند و

$$r = r_1 = \cdots = r_6$$

چون دایرهٔ به مرکز O_1؛ مثلاً، کوچکترین شعاع را دارد، اگرهمین‌استدلال را در موردآن به‌کار بریم، نتیجه می‌شود کــه بر دایره‌ای به همین شعاع و مرکز $O_7 \neq O$ مماس است،کــه بر خط راست OO_1 قــرار دارد. به همین ترتیب، دایرهٔ اخیر هم، بر دایره‌ای به همین شعاع و به مــرکــز $O_8 \neq O_1$ مماس می‌شود که بر همان خط راست قرار دارد و غیره. بنابراین، مجموعهٔ دایره‌ها، نامتناهی، و حکم مسأله درست است.

۱۸۹. مثلث ABC را مفروض می‌گیریم.



شکل ۲۳

مثلث $A'B'C'$ را، متشابه با مثلث ABC، جست‌وجو می‌کنیم که، برای آن، دایره‌های مورد نظر مسأله، وجود داشته باشد (کــه در ایــن صورت، وجود چنین دایره‌هایی، برای مثلث ABC هم، ثابت خواهد شد).

برای این منظور، به مرکز نقطه‌های A، B و C، سه دایره با شعاع‌های برابر، وبرابربا شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، رسم می‌کنیم. این‌دایره‌ها، تنها یك نقطهٔ مشترك دارند (که ازسه رأس، A، B و C، به یك فاصله‌است). اگر سه مماس مشترك دوبه‌دوی دایره‌ها را رسم کنیم، از برخوردآن‌ها، مثلث مورد نظر $A'B'C'$ بــه دست می‌آید که با مثلث ABC متشابه است (زیرا $A'B' \| AB$، $B'C' \| BC$، $A'C' \| AC$؛ (شکل ۲۳ را ببینید).

۱۹۰. تجانس به مرکز P را در نظر می گیریم که، به ازای آن، دایرهٔ شامل نقطه‌های B و C، به دایرهٔ دیگر تبدیل شود. در این تجانس، نقطه‌های B و C، به نقطه‌های B' و C'، به ترتیب، روی خطهای راست BP و CP، و خط راست BC به خط راست موازی آن $B'C'$ تبدیل می‌شود. بنابراین، دو کمان $B'A$ و $C'A$ برابرند، در نتیجه، دو زاویهٔ $B'PA$ و $C'PA$، یا برابرند (درحالتی که دودایره، مماس داخل باشند؛ شکل ۲۴) و یا مجموعی برابر ۱۸۰ درجه دارند (در حالتی کـه دو دایره مماس خارج باشند؛ شکل ۲۵). بنابراین، دوزاویهٔ BPA و $C'PA$ برابر می‌شوند. در هر دو حالت، خط راست PA، نیمساز یکی از دو زاویهٔ BPC یا BPC' است.

۱۹۱. پاره‌خط راست PQ را مماس بر دایرهٔ مورد نظر مسأله می گیریم. نقطهٔ O، مرکز این دایره، در وسط قاعدهٔ BC، از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد. قرار می گذاریم:

$$\widehat{PBO}=\widehat{QOC}=\alpha،\ \widehat{BPO}=\widehat{QPO}=\beta،\ \widehat{CQO}=\widehat{PQO}=\gamma$$

(شکل ۲۶). در این صورت، با توجه به چهار ضلعی $CBPQ$، داریم:

$$۲\alpha+۲\beta+۲\gamma=۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$$

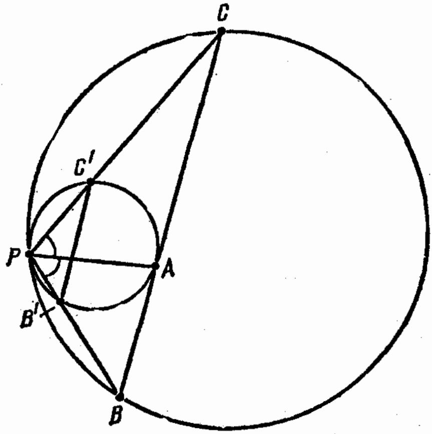
بنابراین، مثلث‌های BPO و COQ متشابه‌اند و داریم:

$$BP\cdot CQ=BO\cdot OC=\frac{۱}{۴}BC^{۲}$$

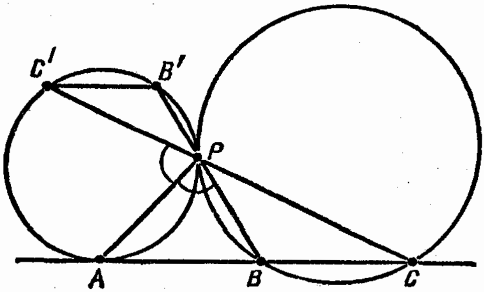
اکنون، پاره‌خط راست $P'Q'$ را درنظرمی گیریم که، بر دایرهٔ به‌مرکز O، مماس نباشد. پاره‌خط PQ را موازی $P'Q'$ و مماس بر دایره طوری رسم می کنیم کـه P روی AB و Q روی AC باشد. در این صورت، بنابر آن چه ثابت کردیم، داریم:

$$\frac{۱}{۴}BC^{۲}=BP\cdot CQ\neq BP'\cdot CQ'$$

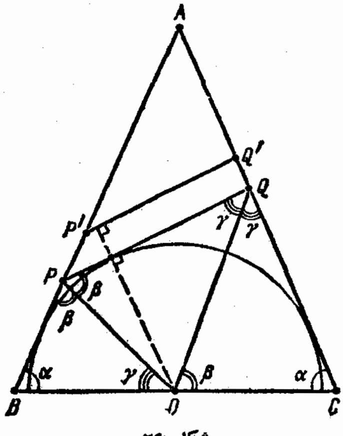
حکم مسأله، به طورکامل، ثابت شد.



شکل ۲۴



شکل ۲۵



شکل ۲۶

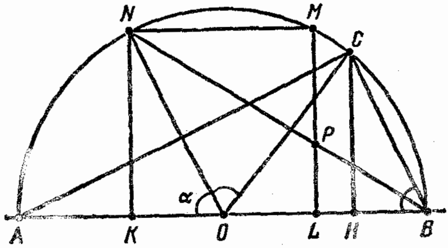
۱۹۲. a را ضلع مربع، R را شعاع نیم‌دایرهٔ به مرکز O و r را شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گیریم؛ همچنین فرض می‌کنیم:

$$\alpha = \widehat{AON} < ۹۰^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{COB} \leqslant ۹۰^\circ$$

(شکل ۲۷). در این صورت، داریم:

$$a^۲ = NK^۲ = ON^۲ - KO^۲ = R^۲ - \left(\frac{a}{۲}\right)^۲$$

که از آن جا، به دست می‌آید: $a = \frac{۲R}{\sqrt{۵}}$.



شکل ۲۷

از برابری مساحت مربع با مساحت مثلث ABC و با توجه به مقدار a، که به دست آوردیم، معلوم می‌شود که ارتفاع CH در مثلث ABC، باید برابر $\frac{۴R}{۵}$ باشد. ثابت می‌کنیم که، ON، نیمساز زاویهٔ AOC است. درواقع، چون $\sin\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$ (یعنی $\alpha > ۴۵^\circ$)، داریم:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۲ \times \frac{۲}{\sqrt{۵}} \times \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{۴}{۵} = \sin(\widehat{COB}) = \sin(\widehat{AOC})$$

که در آن، $۲\alpha > ۹۰^\circ$ و $\widehat{AOC} > ۹۰^\circ$. بنابراین

$$\widehat{AOC} = ۲\alpha، \quad \widehat{AON} = \widehat{CON}$$

چون، زاویه‌های محاطی ABN و CBN، رو به روی به‌کمان‌های برابرند، بنابراین BN، نیمساز زاویهٔ ABC (برابر α) است و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC روی آن قرار دارد؛ شعاع این دایرهٔ محاطی برابر است با

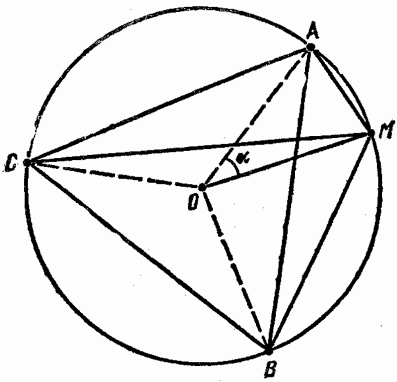
$$r=\frac{۱}{۲}(AC+BC-AB)=\frac{۱}{۲}\cdot ۲R(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)=R\left(\frac{۳}{\sqrt{۵}}-۱\right)$$

ولی، در این صورت، نقطهٔ P، محل برخورد خط‌های راست BN وُ LM، مرکز این دایرهٔ محاطی است، زیرا از تشابه دو مثلث NKB و PLB، به دست می‌آید:

$$PL=\frac{NK.LB}{KB}=R\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)}{۱+\frac{۱}{\sqrt{۵}}}=$$

$$=R.\frac{۲}{\sqrt{۵}}\cdot\frac{(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۴}=R\left(\frac{۳}{\sqrt{۵}}-۱\right)=r$$

۱۹۳. دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بـه مرکز O و شعاع R می‌گیریم و، بدون این‌که بـه‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، نقطهٔ M را روی کمان AB از ایـن دایره، انتخاب می‌کنیم. (شکل ۲۸).



شکل ۲۸

اگر قرار بگذاریم: $\widehat{AOM}=\alpha$،

$$MA=۲R\sin\frac{\alpha}{۲},$$

$$MB=۲R\sin\frac{۱}{۲}(\widehat{AOB}-\widehat{AOM})=$$

$$=۲R\sin\left(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right),$$

$$MC=۲R\sin\frac{۱}{۲}(\widehat{AOC}+\widehat{AOM})=۲R\sin\left(۶۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}\right)$$

بنا براین، مقدار

$$\frac{MA^۴+MB^۴+MC^۴}{R^۴}=۱۶\left[\sin^۴\frac{\alpha}{۲}+\sin^۴\left(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin^۴\left(۶۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}\right)\right]=$$

$$=۴[(۱-\cos\alpha)^۲+(۱-\cos(۱۲^\circ-\alpha))^۲+(۱+\cos(۱۲۰^\circ+\alpha))^۲]=$$

$$=۱۲-۸[\cos\alpha+\cos(۱۲۰^\circ-\alpha)+\cos(۱۲۰^\circ+\alpha)+$$

$$+۴[\cos^۲\alpha+\cos^۲(۱۲۰^\circ-\alpha)+\cos^۲(۱۲۰^\circ+\alpha)]=۱۲-۸\cos\alpha-$$

$$-۱۶\cos\alpha\cos۱۲۰^\circ+۲[(۱-\cos۲\alpha)+(۱-\cos(۲۴۰^\circ-۲\alpha))+$$

$$+(۱-\cos(۲۴۰^\circ+۲\alpha))]=۱۲-۸\cos\alpha+۸\cos\alpha+۶-۲\cos۲\alpha-$$

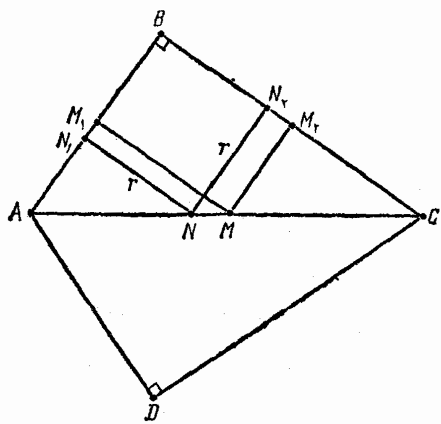
$$-۴\cos۲\alpha\cos۲۴۰^\circ=۱۸-۲\cos۲\alpha+۲\cos۲\alpha=۱۸$$

بستگی به جای نقطهٔ M ندارد.

۱۹۴. الف) بنا بر شرط مسأله داریم:

$$AB+CD=AD+BC$$

بنا براین، در چهارضلعی $ABCD$، می‌توان دایره‌ای محاط کرد.



ب) از برابری مثلث‌های ABC و ADC نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ B و D باهم برابرند. بنابراین، تنها وقتی می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی $ABCD$ محیط کرد که داشته باشیم:

$$\hat{B}=\frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{D})=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

یعنی $AB\perp BC$.

ج) فرض می‌کنیم، دایرهٔ محاطی به مرکز N، در نقطه‌های $N_۱$ و $N_۲$، بر ضلع‌های AB و BC مماس باشد؛ در ضمن، تصویرهای نقطهٔ M، مرکز دایرهٔ محیطی، بر ضلع‌های AB و BC، در وسط این ضلع‌ها قرار می‌گیرند (شکل ۲۹؛ یادآوری می‌کنیم که نقطه‌های N و M، روی AC، محور تقارن چهار ضلعی $ABCD$ قرار دارند). $AB=x$ و $BC=y$ می‌گیریم، در این صورت، از تشابه مثلث‌های $AN_۱N$ و ABC به دست می‌آید:

$$\frac{x}{y}=\frac{AB}{BC}=\frac{AN_۱}{N_۱N}=\frac{x-r}{r}\Rightarrow xy=r(x+y)$$

سپس، اگر به حساب آوریم که

$$x^۲+y^۲=AB^۲+BC^۲=AC^۲=۴R^۲$$

خواهیم داشت:

$$(x+y)^۲=x^۲+y^۲+۲xy=۴R^۲+۲r(x+y)$$

از آن جا

$$x+y=r+\sqrt{r^۲+۴R^۲}$$

سرانجام، با توجه به ویژگی تصویرها، داریم:

$$NM^۲=N_۱M_۱^۲+N_۲M_۲^۲=\left(BN_۱-\frac{AB}{۲}\right)^۲+\left(BN_۲-\frac{BC}{۲}\right)^۲=$$

$$=\left(r-\frac{x}{۲}\right)^۲+\left(r-\frac{y}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}(x^۲+y^۲)-r(x+y)+۲r^۲=$$

$$=R^۲-r(r+\sqrt{r^۲+۴R^۲})+۲r^۲=R^۲+r^۲-r\sqrt{r^۲+۴R^۲}$$

یادداشت. برابری بخش ج)، برای هر چهارضلعی، که در عین حال، هم محیطی و هم محاطی باشد، درست است.

۱۹۵. اگر رأس‌های مربعی بر محیط‌های چهار دایرهٔ هم مرکز به شعاع‌های a، $a+d$، $a+۲d$، $a+۳d$ قرار داشته باشند، آن وقت، بنا به قضیهٔ ۷۹، باید یکی از برابری‌های زیر برقرار باشد:

$$a^۲+(a+d)^۲=(a+۲d)^۲+(a+۳d)^۲,$$
$$a^۲+(a+۲d)^۲=(a+d)^۲+(a+۳d)^۲,$$
$$(a+d)^۲+(a+۲d)^۲=a^۲+(a+۳d)^۲$$

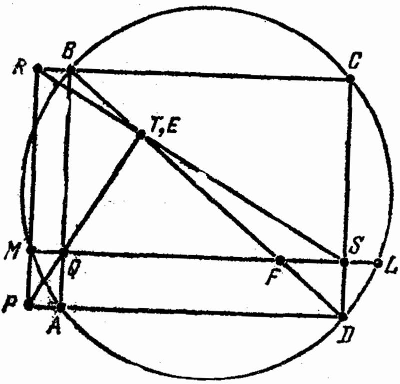
درحالی‌که، در هرسه حالت، بخش سمت چپ برابری، به ازای $a,d>۰$، از بخش سمت راست آن کوچکتر است.

۱۹۶. خط راست QS، دایره را، به جز M، در نقطهٔ دیگری هم قطع می‌کند، که آن را L می‌نامیم (شکل ۳۰)، داریم:

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{MS}-\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{QB},\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MQ}$$

از آن جا، با استفاده از قضیهٔ ۷۱، داریم:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QB}=$$
$$=ab-cd=۰$$



شکل ۳۰

که در آن، $MQ=a$، $QL=b$، $AQ=c$، $QB=d$ فرض کرده‌ایم. به‌این ترتیب، ثابت شدکه PQ بر RS عمود است.

اکنون، فرض مـی‌کنیم، خط راست RS، خطهای راست PQ، BD را، به ترتیب، در نقطه‌های T و E قطع کند، و F را نقطهٔ برخورد خطهای راست BD و QS می‌گیریم. در این صورت، از تشابـه مثلث‌های متفاوت، به دست می آید:

$$QF=\frac{BQ\cdot AD}{BA}=\frac{d(b-a)}{c+d},$$

$$FS=QS-QF=(b-a)-\frac{d(b-a)}{c+d}=\frac{c(b-a)}{c+d},$$

$$\frac{RE}{ES}=\frac{RB}{FS}=\frac{a(c+d)}{c(b-a)}$$

از طرف دیگر، داریم:

$$RT\cdot RS=RM\cdot RP،$$

$$TS\cdot RS=QS\cdot MS$$

و از آن جا

$$\frac{RT}{TS}=\frac{RM\cdot RP}{MS\cdot QS}=\frac{d(c+d)}{b(b-a)}=\frac{a(c+d)}{c(b-a)}=\frac{RE}{ES}$$

(زیرا $d:b=a:c$). به این ترتیب، نقطه‌های T و E، پاره‌خط‌راست RS را به‌نسبت‌های برابر تقسیم می کنند، یعنی این دونقطه، برهم منطبق‌اند. ثابت شدکه خطهای‌راست PQ، RS، BD، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

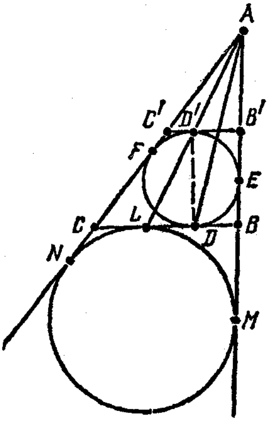
۱۹۷. فرض می‌کنیم، دایـرهٔ محاطی، بـر ضلع‌های AB و AC، به ترتیب، در نقطه‌های E و F، و دایره محاطی خارجی بر ضلع BC در نقطهٔ L و بر امتداد ضلع‌های AB و AC، به ترتیب، در نقطه‌های M و N مماس باشند (شکل ۳۱). داریم:

$$۲DB = DB + BE = CB - CD + AB -$$
$$- AE = CB + AB - CF - AF = CB + AB - AC،$$
$$۲CL = CL + CN = CB - LB + AN - AC = CB -$$
$$- BM + AM - AC = CB + AB - AC$$

ازآن جا

$$DB = \frac{۱}{۲}(CB + AB - AC) = CL$$

یعنی وسط پاره‌خط BC بـر وسط پاره‌خط LD منطبق است.

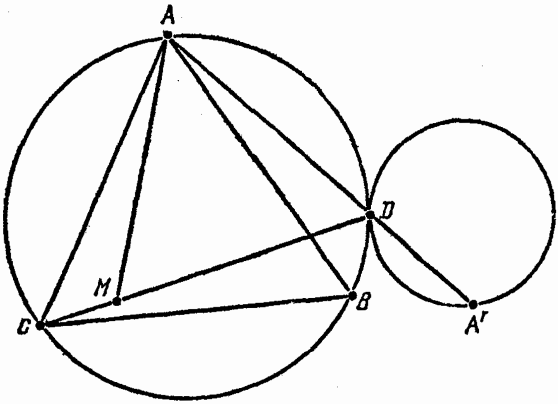


شکل ۳۱

D' را سر دیگر قطری از دایرهٔ محاطی می‌گیریم که از D گذشته است و $C'B'$ را مماس براین دایره در نقطهٔ D' فرض می‌کنیم. تجانس به مرکز A را، طوری درنظر می‌گیریم که، دایرهٔ محاطی خارجی را، بـه دایـرهٔ محاطی داخلی تبدیل کند. در این تجانس، نقطهٔ L به نقطهٔ D' تبدیل می‌شود. بنابراین، نقطه‌های L، D' و A روی یك خط راست‌انـد، درنتیجه، وسط پاره‌خط‌های راست LD، $D'D$ و AD هم، روی یك خط راست‌اند (خط راستی که وسط دو ضلع از مثلث ADL را به هم وصل می‌کند)، واین، همان چیزی است که‌می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۹۸. D را نقطهٔ تماس دو دایره و ABC را مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ بزرگتر فرض می‌کنیم. بـدون ایـن‌کـه به‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای بخورد، می‌توان نقطهٔ D را روی کمان AB درنظر گرفت (شکل ۳۲). ثابت می‌کنیم $DC = DA + DB$.

نقطهٔ M را روی پـاره‌خط راست DC طوری انتخاب مـی‌کنیم که



شکل ۳۲

داشته باشیم: $DA=DM$؛ یادآوری می کنیم که

$$DC \geqslant BC = AB \geqslant AD$$

مثلث ADM، متساوی‌الاضلاع است، زیرا متساوی‌الساقین است و، درضمن، زاویهٔ ADM، که با زاویهٔ ABC برابر است، ۶۰ درجه می‌شود. بنابراین، ضمن دوران به اندازهٔ ۶۰ درجه، دور نقطه A، نقطهٔ D بر M، و نقطهٔ B بر C منطبق می‌شود، یعنی $BD=MC$ و

$$DC = DM + MC = AD + DB$$

R و r را، به‌ترتیب، شعاع‌های دو دایرهٔ بزرگتر وکوچکتر و l_A، l_B، l_C را، به ترتیب، طول مماس‌هایی می گیریم کـه از نقطه‌های A، B، C، بر دایرهٔ کوچکتر رسم شده‌اند؛ در ضمن، نقطهٔ برخورد دیگر خط راست AD را با دایرهٔ کوچکتر، A' می‌نامیم (در حالتی که D بر A منطبق باشد، A'هم بر D منطبق می‌شود). نقطهٔ A' از نقطهٔ A، در تجانس به مرکز D و ضریب $\pm\frac{r}{R}$ به دست می آید (اگردودایره مماس خارج باشند، باید علامت «$-$»، و در حالت مماس داخل، علامت «$+$» را در نظر گرفت). به این ترتیب

$$AA' = AD \pm DA' = AD\left(۱ \pm \frac{r}{R}\right)$$

و بنابر قضیهٔ مماس و قاطع، داریم:

$$l_A=\sqrt{AD\cdot AA'}=AD\sqrt{۱\pm\frac{r}{R}}$$

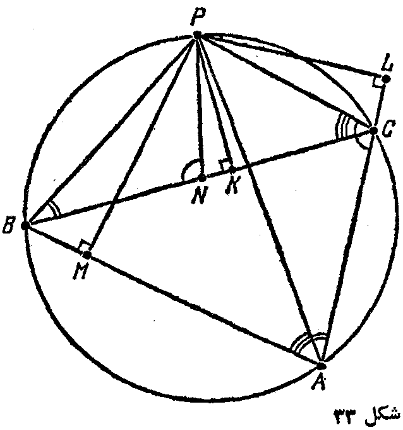
به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$l_B=BD\sqrt{۱\pm\frac{r}{R}},\quad l_C=CD\sqrt{۱\pm\frac{r}{R}}$$

که از آن جا، برابری مورد نظر $l_C=l_A+l_B$ به دست می‌آید.

۱۹۹. روی پاره‌خط راست BC، می‌توان نقطهٔ N را طوری پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم: $\widehat{PNB}=\widehat{PCA}$، زیرا

$$\widehat{PCB}<\widehat{PCA}=۱۸۰^\circ-\widehat{PBA}<۱۸۰^\circ-\widehat{PBC}$$



شکل ۳۳

(شکل ۳۳). در این صورت، دو مثلث BPN و APC و، همچنین، دو مثلث CPN و APB با هم متشابه‌اند، زیرا

$$\widehat{PBC}=\widehat{PAC},\quad \widehat{PCB}=\widehat{PAB},$$

$$\widehat{PNC}=۱۸۰^\circ-\widehat{PNB}=\widehat{PBA}$$

اگر توجه کنیم که PK، ارتفاع مثلث‌های BPN و CPN؛ و PL و PM، به ترتیب، ارتفاع‌های مثلث‌های متشابه با آن‌ها، یعنی APC و APB هستند، به دست می‌آید:

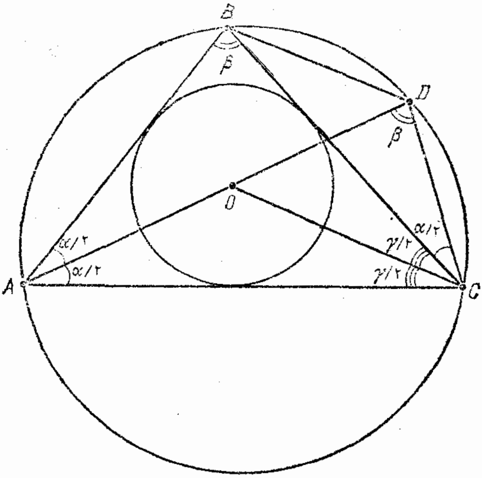
$$\frac{AC}{PL}=\frac{BN}{PK},\ \frac{AB}{PM}=\frac{CN}{PK}$$

از آن جا

$$\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}=\frac{BN+CN}{PK}=\frac{BC}{PK}$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۰۰. الف) $\widehat{BAC}=\alpha$، $\widehat{ABC}=\beta$ و $\widehat{BCA}=\gamma$ می‌نامیم (شکل ۳۴)، در این صورت، داریم: $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}=\frac{\alpha}{۲}$ که از آن جا، به دست می‌آید $BD=DC$.



چون

$$\widehat{ODC}=\widehat{ABC}=\beta،$$

$$\widehat{COD}=\widehat{OCB}+\widehat{BCD}=\frac{۱}{۲}\widehat{ACB}+\widehat{BAD}=\frac{\alpha+\gamma}{۲}$$

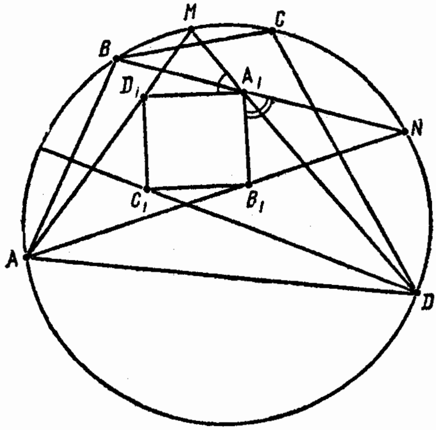
بنابراین

$$\widehat{COD}=۱۸۰^\circ-\beta-\frac{\alpha+\gamma}{۲}=\alpha+\gamma-\frac{\alpha+\gamma}{۲}=\frac{\alpha+\gamma}{۲}=\widehat{OCD}$$

به نحوی که $DO=DC$.

ب) $\widehat{AD}=۲\alpha$، $\widehat{AB}=۲\beta$، $\widehat{BC}=۲\gamma$ و $\widehat{CD}=۲\delta$ می‌نامیم و

وسط کمان‌های BC و CD را، به ترتیب، M و N می گذاریم (شکل ۳۵). دراین صورت، نقطه‌های D_1 و B_1، به ترتیب، بر پاره‌خط‌های راست AM و AN، و A_1 در نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های BN و DM واقع می‌شوند.



شکل ۳۵

با توجه به بخش الف) داریم:

$$MD_1 = MB = MC = MA_1$$

بنابراین، مثلث D_1MA_1 متساوی‌الساقین است و

$$\widehat{D_1A_1M} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AMD}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\widehat{B_1A_1N} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

از آن جا که

$$\widehat{DA_1N} = \widehat{BA_1M} = \frac{\gamma + \delta}{2}$$

بنا بر این

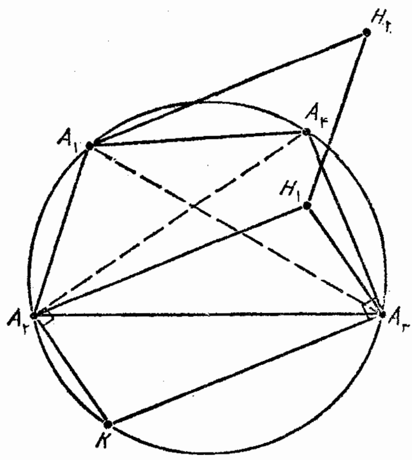
$$D_1\widehat{A_1}B_1=180^\circ-D_1\widehat{A_1}M-(B_1\widehat{A_1}N-D\widehat{A_1}N)=$$

$$=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\gamma+\delta}{2}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=90^\circ$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، سه‌زاویهٔ دیگر چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ هم، قائمه‌اند.

۲۰۱. ابتدا ثابت می‌کنیم، وسط پاره‌خطهای راست A_1H_1 و A_2H_2 برهم منطبق‌اند. برای این منظور، از نقطهٔ A_3، خط راستی عبور می‌دهیم که بر پاره‌خط راست A_3A_4 عمود باشد و محل برخورد دوم ایـن عمود را با



شکل ۳۶

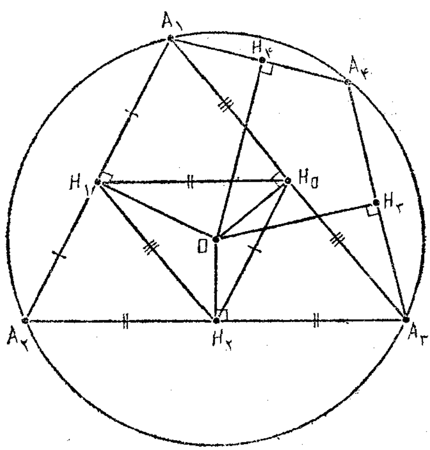
دایرهٔ محیطی چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، با K نشان می‌دهیم (شکل ۳۶). در این صورت، A_2H_1 با KA_3 موازی می‌شود، زیرا

$$A_2H_1\perp A_2A_4 \quad \text{و} \quad K\widehat{A_2A_4}=90^\circ$$

(KA_4 قطر دایره است). بنا بر این، چهارضلعی $KA_2H_1A_3$ متوازی‌الاضلاع

است؛ از آن جا $\overrightarrow{A_۲H_۱}=\overrightarrow{KA_۳}$. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که چهارضلعی $A_۱H_۲A_۳K$ متوازی‌الاضلاع است و $\overrightarrow{H_۱H_۲}=\overrightarrow{KA_۳}$. به این ترتیب، $\overrightarrow{A_۲H_۱}=\overrightarrow{A_۱H_۲}$، و پاره‌خط‌های راست $A_۱H_۱$ و $A_۲H_۲$، قطرهای متوازی‌الاضلاع $A_۱H_۲H_۱A_۲$ هستند، یعنی یکدیگر را نصف می‌کنند. با روشی مشابه ثابت می‌شود که وسط پاره‌خط $A_۲H_۲$ بر وسط پاره‌خط $A_۳H_۳$ منطبق است، که به نوبهٔ خود، بر وسط پاره‌خط $A_۴H_۴$ منطبق می‌شود. بنابراین، اگر با توجه به تقارن، این بحث را برای موردهای لازم دیگر ادامه دهیم، چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ بر چهارضلعی $H_۱H_۲H_۳H_۴$ منتقل می‌شود و این، همان، چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳۰۲. الف) چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$ را محاط در دایرهٔ به مرکز O و شعاع R در نظر می‌گیریم و تصویر نقطهٔ O بر وترهای $A_۱A_۲$، $A_۱A_۳$، $A_۲A_۳$، $A_۳A_۴$ و $A_۴A_۱$، به ترتیب، $H_۰$، $H_۱$، $H_۲$، $H_۳$، $H_۴$ می‌نامیم. h_i را طول OH_i $(i=۰, \ldots, ۴)$، $S_۱$، $S_۲$ و $p_۱$، $p_۲$ را مساحت‌ها و نصف محیط‌های مثلث‌های $A_۱A_۲A_۳$، $A_۳A_۴A_۱$ و $r_۱$، $r_۲$ را شعاع‌های دایره‌های محاطی این دو مثلث فرض می‌کنیم.



مثلثی را در نظر می‌گیریم کــه شامل نقطهٔ O باشد (اگر چنین مثلثی وجود داشته باشد، یعنی اگر نقطهٔ O دردرون چهارضلعی اصلی باشد). برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، نقطهٔ O، در مثلث $A_1A_2A_3$ واقع باشد (شکل ۳۷). با استفاده ازقضیهٔ بطلمیوس (قضیهٔ ۶۹)، برای چهارضلعی‌های محاطی $A_3H_0OH_2$، $A_1H_1OH_0$، $A_2H_2OH_1$ و با تــوجــه به این که H_0H_2، H_0H_1، H_1H_2 وسط ضلع‌های مثلث $A_1A_2A_3$ را بــه هم وصل کرده‌اند، به دست می‌آید.

$$(R+r_1)p_1=R\cdot H_0H_2+R\cdot H_0H_1+R\cdot H_1H_2+S_1=$$

$$=(h_0\cdot H_2A_3+h_2\cdot H_0H_3)+(h_0\cdot H_1A_1+h_1\cdot H_0A_1)+(h_2\cdot H_1A_2+$$

$$+h_1\cdot H_2A_2)+\frac{1}{2}(h_1\cdot A_1A_2+h_2\cdot A_2A_3+h_0\cdot A_3A_1)=$$

$$=(h_1+h_2+h_0)p_1$$

و از آن‌جا

$$R+r_1=h_1+h_2+h_0$$

اکنون به حالتی می‌پردازیم که، نقطهٔ O، مــرکــز دایرهٔ محیطی، در بیرون مثلث باشد. دراین حالت، درست یکی از رأس‌های مثلث با نقطهٔ O، در دو نیم صفحهٔ مختلف نسبت به ضلع مقابل به این رأس، قــرار گرفته‌اند. برای مشخص بودن وضع، ایــن رأس را A_4 در مثلث $A_3A_4A_1$ می‌گیریم (شکل ۳۷ را ببینیــد). در ایــن صورت، چهــارضلعی‌هــای $A_1H_4H_0O$، $A_3H_3H_0O$، $A_4H_4OH_3$، محاطی‌اند و بنابراین

$$(R+r_2)p_2=R\cdot H_0H_4+R\cdot H_0H_3+R\cdot H_3H_4+S_2=$$

$$=(h_4\cdot H_0A_1-h_0\cdot H_4A_1)+(h_3\cdot H_0A_3-h_0\cdot H_3A_3)+$$

$$+(h_4\cdot H_3A_4+h_3\cdot H_4A_4)+\frac{1}{2}(h_3\cdot A_3A_4+h_4\cdot A_4A_1-h_0\cdot A_1A_3)=$$

$$=(h_3+h_4-h_0)p_2$$

و از آن‌جا

$$R+r_2=h_3+h_4-h_0$$

به این ترتیب، در حالتی‌که روی شکل ۳۷ نشان داده‌ایم، داریم:

$$r_1+r_2=h_1+h_2+h_3+h_4-2R$$

درحالت کلی هم، مجموع r_1+r_2، مجموعی از مقدارهای h_1، h_2، h_3، h_4 و $2R$ خواهد بود که، علامت‌های بین آن‌ها، تنها بستگی به جای نقطهٔ O نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ دارد. بنابراین، مجموع شعاع‌های دایره‌های محاطی، بستگی به این ندارد که کدام قطر را رسم کرده‌ایم.

ب) $A_1A_2A_3$ را مثلثی می‌گیریم که زاویهٔ منفرجه ندارد و k_1، k_2، k_3، طول ارتفاع‌های مثلث، که به‌ترتیب از رأس‌های A_1، A_2، A_3 رسم شده‌اند، باشند. برای بقیهٔ عنصرها و پارامترهای مثلث $A_1A_2A_3$، همان نام‌گذاری‌های بخش الف) را حفظ می‌کنیم. بدون این‌که لطمه‌ای به‌کلی بودن وضع وارد شود، فرض می‌کنیم: $k_3 \leqslant k_2 \leqslant k_1$. چون

$$k_1\cdot A_2A_3+k_2\cdot A_1A_3=k_3\cdot A_1A_2=2S_1$$

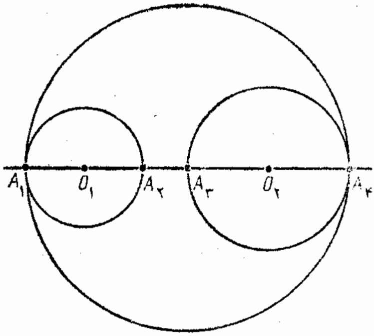
بنابراین $A_1A_2 \geqslant A_1A_3 \geqslant A_2A_3$. به این ترتیب داریم:

$$k_3=\frac{2S_1}{A_1A_2}=\frac{h_2\cdot A_2A_3+h_0\cdot A_1A_3+h_1\cdot A_1A_2}{A_1A_2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{h_2\cdot A_1A_2+h_0\cdot A_1A_2+h_1\cdot A_1A_2}{A_1A_2}=h_1+h_2+h_0=R+r_1$$

[برابری آخر را، در بخش الف) ثابت کردیم]. بنابراین، نابرابری مورد نظر ثابت شد. در ضمن، اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، نقطهٔ O در درون آن واقع می‌شود و $h_2>0$؛ و علامت برابری وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم: $h_1=h_3$، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. در حالت مثلث قائم‌الزاویه، داریم: $A_1=90^\circ$، $h_2=0$، $h_1>0$ و برابری به شرط $h_2=h_3$ پیش می‌آید، یعنی برای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین.

۲۰۳. فرایند زیر را، که شامل چند گام است، در نظر می‌گیریم. در گام اول، هر یك از نقطه‌های مفروض را با دایره‌ای به قطر $\frac{1}{200}$ می‌پوشانیم. فرض کنید، بعداز kامین گام $(k\in \mathbf{N})$، دو دایره وجود داشته باشد که، فاصلهٔ بین آن‌ها، بیشتر از واحد نباشد. O_1 و O_2 را مرکزهای این دو دایره و A_1، A_2، A_3، A_4را، نقطه‌های برخورد خط‌راست O_1O_2 با محیط این‌دایره‌ها



شکل ۳۸

می‌گیریم (نقطه‌های A_2 و A_3، بین دونقطهٔ A_1 وA_4 قرار دارند و، درضمن، $A_2A_3\leqslant 1$؛ شکل ۳۸). در این صورت، گام $(k+1)$ام را به این ترتیب برمی‌داریم که، به جای دو دایرهٔ مفروض، دایرهٔ به قطر A_1A_4 را در نظر می‌گیریم. این روند را تا آن جا که ممکن است، یعنی تا آن جا که شرط ۲) کاملاً برقرار شود، ادامه می‌دهیم. چون بعد از نخستین گام، تعداد دایره‌ها برابر ۱۰۰ بود و، در هر گام، از تعداد دایره‌ها، یکی کم می‌شود، بنابراین، تعدادگام‌ها، از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، روندکار درجائی به پایان می‌رسد و، شرط ۱)، که در هر گام برقرار شده است، در پایان روند هم برقرار خواهد بود. از طرف دیگر، با برداشتن گام نخست، مجموع قطر دایره‌ها برابر $\frac{100}{200}$، یعنی $\frac{1}{2}$ می‌شود و، با برداشتن هر گام بعدی، این مجموع به اندازه‌ای که بیشتر از واحد نیست، بزرگ می‌شود، بنابراین، مجموع قطرها، در پایان همهٔ گام‌ها، از $99+\frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کند، یعنی از ۱۰۰ کوچکتر است؛ به این ترتیب، شرط ۳) هم، برقرار است.

۲۰۴. خط راستی در نظر می‌گیریم که، همهٔ نقطه‌ها، نسبت به‌آن، در یك نیم صفحه قرار گیرند؛ سپس، این خط راست را به‌موازات خود، آن‌قدر

جا به‌جا می‌کنیم تا از اولین نقطهٔ A_1 بگذرد. بعد، همین خط راست را، دور نقطهٔ A_1، آن قدر دوران می‌دهیم، تا برای نخستین بار، بر نقطهٔ دیگر A_2 بگذرد. در این صورت، همهٔ بقیهٔ نقطه‌ها، در یك نیم صفحه، نسبت به خط راست A_1A_2 واقع می‌شوند. این نقطه‌ها را، به صورت A_3، ...، A_{2n+3} طوری شماره گذاری می‌کنیم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$A_1\widehat{A_i}A_2 \leqslant A_1\widehat{A_{i+1}}A_2, \quad (i=3, \dots, 2n+2)$$

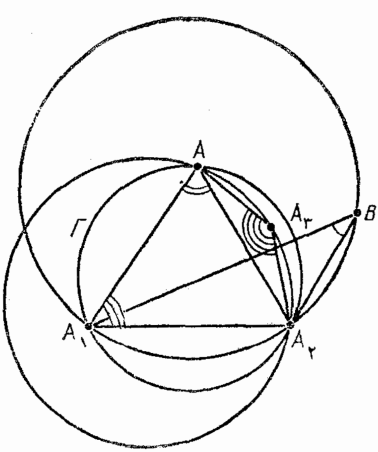
در ضمن، برابری دو زاویهٔ $A_1A_iA_2$ و $A_1A_{i+1}A_2$، برای هیچ مقداری از i، ممکن نیست. (زیرا، نقطه‌های A_1، A_i، A_{i+1}، A_2، بر محیط یك دایره واقع نیستند). بنابراین، نابرابری

$$A_1\widehat{A_{n+3}}A_2 < A_1\widehat{A_i}A_2$$

درست برای n نقطهٔ A_{n+4}، ....، A_{2n+3} برقرار است و همین نقطه‌ها (و تنها همین نقطه‌ها) هستند که دردرون دایره‌ای قرار گرفته‌اند که از A_1،A_{n+3}،A_2 می‌گذرد.

۴۰۵. مجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم که هر عضو آن، شامل سه رأس دلخواه از چند ضلعی مفروض باشد، به نحوی که دو تا از این رأس‌ها در مجاور هم باشند و، در ضمن، ضلع بین این دو رأس، از رأس سوم با زاویه‌ای که از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند دیده شود (این مجموعه، تهی نیست، زیراهرسه رأس مجاور چند ضلعی هم، یك عضو آن است). از بین دایره‌هایی که از سه رأس با این فرض‌ها می‌گذرند، دایرهٔ Γ را انتخاب می‌کنیم که بزرگترین شعاع R را داشته باشد.

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، این دایره، از رأس‌های مجاور A_1 و A_2 و رأس



شکل ۳۹

دیگری از چند ضلعی مثل A گذشته باشد؛ در ضمن زاویهٔ A_1AA_2 از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند (شکل ۳۹). ثابت می‌کنیم، این دایره، همهٔ رأس‌های چند ضلعی مفروض را محصور می‌کند، فرض کنید، رأسی مثل B در بیرون دایرهٔ Γ واقع باشد. چون نقطهٔ B، نسبت به خط راست A_1A_2، در همان نیم صفحه‌ای قرار دارد که نقطهٔ A واقع است، بنابراین

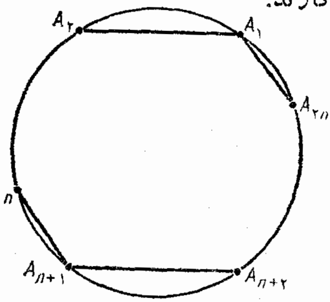
$$\widehat{A_1BA_2} < \widehat{A_1AA_2} \leqslant 90^\circ$$

و (بنا بر قضیهٔ سینوس‌ها)، شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث A_1A_2B، از R بزرگتر می‌شود که مخالف با فرض ما، مبنی بر نوع انتخاب دایرهٔ Γ است. بنابراین، دایرهٔ Γ، تمامی چند ضلعی را می‌پوشاند.

ثابت می‌کنیم که، رأس A_3، مجاور رأس A_2 (و غیر از رأس A_1)، برمحیط همین دایرهٔ Γ قرار دارد. فرض کنیم، چنین نباشد. یعنی نقطهٔ $A_3 \neq A$ در داخل قطعه‌ای از دایرهٔ Γ باشد که متناظر با وتر A_2A است (شکل ۳۹). در این صورت داریم:

$$\widehat{A_2A_3A} > 180^\circ - \widehat{A_2A_1A} \geqslant 90^\circ$$

و (بنا بر قضیهٔ سینوس‌ها)، دوباره شعاع دایرهٔ محیطی مثلث A_2A_3A از R بزرگتر می‌شود، که نوع انتخاب دایرهٔ Γ را نقض می‌کند. به این ترتیب، سه رأس A_1، A_2، A_3 با شرط مسأله سازگارند.



شکل ۴۰

۲۰۶. ثابت می‌کنیم. مقدار مجهول n، عبارت است از همهٔ عددهای فرد $n>1$. n را عددی فرد می‌گیریم و فرض می‌کنیم، در $2n$ ضلعی $A_1\ldots A_{2n}$، همهٔ زوج ضلع‌های روبه رو، به جز احتمالاً، A_1A_{2n} و A_nA_{n+1}، پاره‌خط‌های راستی، موازی هم باشند. اگر داشته باشیم (شکل ۴۰):

$$\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}}=180^\circ+\alpha$$

آن وقت

$$\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}=\overset{\frown}{A_2A_nA_{n+1}}+\overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}}=\overset{\frown}{A_1A_{2n}A_{n+2}}+$$
$$+\overset{\frown}{A_{n+2}A_{n+1}}=360^\circ-\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}}=180^\circ-\alpha$$

(زیرا $A_1A_2 \| A_{n+1}A_{n+2}$). به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد که:

$$\overset{\frown}{A_3A_{n+2}A_{n+3}}=180^\circ+\alpha, \ldots, \overset{\frown}{A_nA_{n+1}A_{2n}}=$$
$$=180^\circ+(-1)^{n+1}\alpha=180^\circ+\alpha$$

بنابراین

$$\overset{\frown}{A_1A_2A_n}=180^\circ+\alpha-\overset{\frown}{A_nA_{n+1}}=\overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}A_{2n}}$$

که از آن جا $A_nA_{n+1} \| A_1A_{2n}$.

اکنون ثابت می‌کنیم که برای همین مقدارهای n (یعنی وقتی n، عددی فرد باشد)، $2(n-1)$ ضلعی وجود دارد، به نحوی که با شرط مسأله نسازد. $2n$ ضلعی $A_1\ldots A_{2n}$ را طوری در نظر می‌گیریم که، در آن، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی باشند، ولی داشته باشیم:

$$\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}}\neq 180^\circ$$

برای این منظور، کافی است کمان $\overset{\frown}{A_1A_{n+1}}<180^\circ$ را به وسیلهٔ نقطه‌های A_2، ...، A_n، به n کمان برابر تقسیم و، پشت‌سر هم، این وترها را رسم کنیم:

$$A_{n+1}A_{n+2} \| A_1A_2, \ldots, A_{2n-1}A_{2n} \| A_{n-1}A_n$$

که در این صورت، بنابر آن چه ثابت کردیم، شرط $A_{2n}A_1 \| A_nA_{n+1}$ برقرار خواهد بود و در ضمن

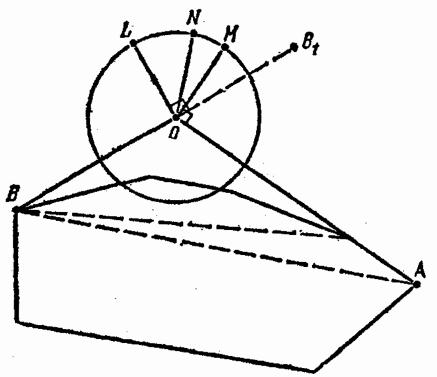
$$\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}=\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}}=\overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n}\neq 180^\circ$$

بنابراین

$$\overset{\frown}{A_2A_3A_n}-\overset{\frown}{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}}=\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}-$$
$$-\overset{\frown}{A_{2n}A_{n+1}A_n}=\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}-(360^\circ-\overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n})\neq 0$$

یعنی پاره‌خط‌های راست $A_{2}A_{2n}$ و $A_{n}A_{n+2}$ موازی نیستند و $2(n-1)$ ضلعی $A_{2}\cdots A_{n}A_{n+2}\cdots A_{2n}$، درست دارای $n-2$ ضلع روبه‌روست که باهم موازی‌اند.

۲۰۷. به ازای $n=1$، محیط دایرهٔ به شعاع واحد، طولی برابر $2n \geqslant \frac{2\pi}{n}$ دارد، یعنی حکم مسأله، برای $n=1$، درست است. اکنون، $n \geqslant 2$ می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم، مرکزهای همهٔ دایره‌ها، روی یك خط راست باشند. مرکزی را در نظر می‌گیریم که، همهٔ مرکزهای دیگر، نسبت به آن، روی یك نیم خط راست واقع باشند. در این صورت، عمودی که از این مرکز انتخابی، بر خط راست مفروض رسم کنیم، کمانی از دایرهٔ متناظر را جدا می‌کند که، برای طول آن، داریم: $n \geqslant \frac{2\pi}{n}$ و روشن است که، این کمان، با هیچ‌کدام از دایره‌های دیگر، برخوردی ندارد.



شکل ۴۱

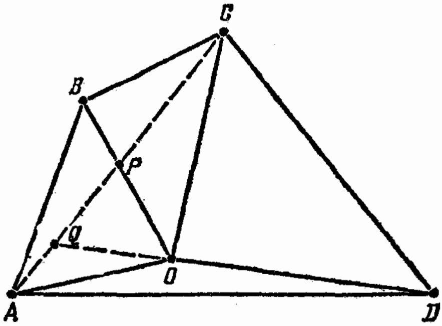
اکنون، به حالتی می‌پردازیم که، مرکزهای دایره‌ها، روی یك خط راست نباشند. از بین همهٔ چند ضلعی‌های محدبی که رأس‌های آن بر مرکزهای دایره‌ها منطبق باشند (مجموعهٔ این گونه چند ضلعی‌ها، تهی نیست، زیرا دست‌کم می‌توان یك مثلث پیدا کرد)، آن را در نظر می‌گیریم که، در

خارج آن، حداقل تعداد ایـن نقطه‌ها، واقع باشند. ثابت می‌کنیم کـه، در بیرون این چند ضلعی، هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. در واقع، اگـر نقطه‌ای مثل D، درخارج این چند ضلعی باشد، از این نقطه، خط راستی می‌گذرانیم که چند ضلعی را قطع نکند و آن را، دور نقطهٔ O دوران مـی‌دهیم تا ابتدا، ازرأس اول A و، سپس، از رأس آخر B (از چندضلعی) بگذرد (شکل ۴۱). سرانجام. همه رأس‌هایی از چند ضلعی را که در مثلث AOB قرار دارند، تنها با سه رأس A، O، B عوض می‌کنیم، در ایـن صورت، یك چند ضلعی جدید به دست می‌آید کـه، در بیرون آن، تعداد کمتری نقطه، نسبت به چند- ضلعی انتخابی، واقع شده‌اند. تناقض حاصل، نشان می‌دهد کـه، می‌توان k ضلعی محدبی پیدا کرد $(k \leqslant n)$، که رأس‌های آن بـر مرکزها منطبق باشد و، در ضمن، همهٔ مرکزها را در بر گـرفته باشد. چـون، مجموع زاویه‌های خارجی k ضلعی، برابر ۳۶۰ درجه است، بنابراین، دست‌کم یکی‌از زاویه‌های خارجی، اندازه‌ای دارد که از $\frac{۳۶۰^\circ}{n} \leqslant \frac{۳۶۰^\circ}{k}$ کمتر نیست. این زاویه را، زاویهٔ B_1OA از زاویهٔ O مربوط به k ضلعی فرض می‌کنیم (شکل ۴۱ را ببینید). در ایـن صورت، اگـر عمودهای OL و OM را، بـه ترتیب، بر ضلع‌های OB و OA رسم کنیم، کمان LM را از دایرهٔ به مـرکـز O جدا می‌کنند که طول آن، کمتر از $\frac{۲\pi}{n}$ نیست، زیرا زاویهٔ LOM با زاویهٔ B_1OA برابر است. ثابت می‌کنیم، این کمان، با دایره‌های دیگر، برخوردی ندارد. N را نقطهٔ دلخواهی از کمان LM می‌گیریم: چون

$$\widehat{NOA} > ۹۰^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{NOB} > ۹۰^\circ$$

بنابراین، دایرهٔ به مـرکـز N و شعاع واحد، با k ضلعی، تنها در نقطهٔ O مشترك است. و این، به معنای آن است که، مرکز هر دایره‌ای که از نقطهٔ N گذشته باشد، باید بر نقطهٔ O منطبق باشد. حکم ثابت شد.

۲۰۸. فرض مـی کنیم، قطر AC، خطهای راست OB و OD را، به ترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کرده باشد (شکل ۴۲).



شکل ۴۲

چون مساحت مثلث‌های AOB و COB باهم بـرابـرنـد، بنابراین، ارتفاع‌های وارد بر ضلع مشترك آن‌ها، یعنی OB، باهم برابر می‌شوند، یعنی $AP=PC$. بـه همین ترتیب، بـه دست می‌آیـد: $AQ=QC$؛ از آن جا $P=Q$، به این ترتیب، اگـر داشته باشیم: $O\neq P$، آن وقت، نقطه‌های B، P، O، D روی یك خط راست قرار می‌گیرنـد، یعنی نقطهٔ O بر قطر BD واقع می‌شود؛ و اگر $O=P$، آن وقت، نقطهٔ O بر قطر AC قرار دارد.

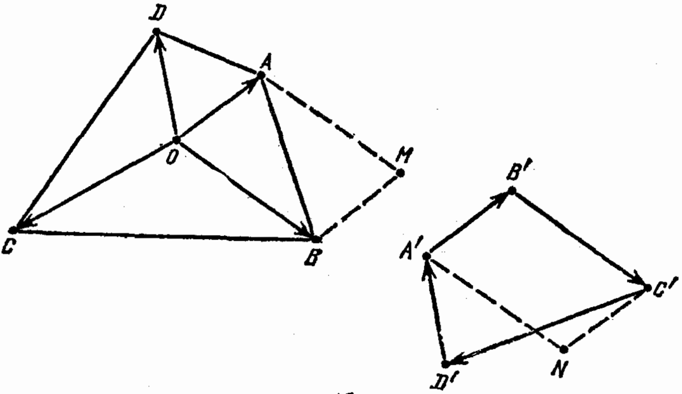
۲۰۹. متـوازی‌الاضلاع‌هـای $OAMB$ و $A'B'C'N$، کـه روی بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$، $\overrightarrow{B'C'}$ ساخته شده‌اند، برابرند (شکل ۴۳)، بنابراین داریم:

$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}S_{OAMB}=\frac{۱}{۲}S_{A'B'C'N}=S_{A'B'C'}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$S_{BOC}=S_{B'C'D'},\ S_{COD}=S_{C'D'A'},\ S_{DOA}=S_{D'A'B'}$$

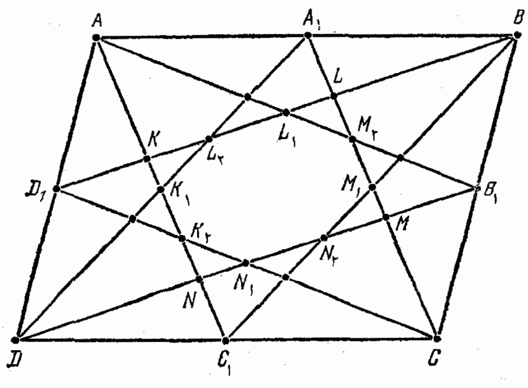
از آن جا



شکل ۴۳

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = (S_{A'B'C'} +$$
$$+ S_{A'D'C'}) + (S_{B'C'D'} + S_{B'A'D'}) = 2S'$$

۲۱۰. وسط ضلع‌های AB، BC، CD، DA را، به ترتیب، A_1، B_1، C_1، D_1 می‌نامیم؛ مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را S، و نقطه‌های برخورد خط‌راست AC_1 را به‌خط‌های راست BD_1، A_1D، CD_1 به‌ترتیب، K، K_1 و K_2 می‌گیریم. به همین ترتیب، نقطه‌های L, L_1، L_2، M، M_1، M_2، N، N_1، N_2 را به دست می‌آوریم (شکل ۴۴).



شکل ۴۴

چون متوازی‌الاضلاع AA_1CC_1 ($AA_1 \| CC_1$ و $AA_1 = CC_1$)، ارتفاعی برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و قاعده‌ای برابر نصف قاعدهٔ آن دارد $\left(AA_1 = \frac{1}{2}AB\right)$، بنابراین مساحت آن برابر $\frac{1}{2}S$ است. سپس، متوازی‌الاضلاع $KLMN$ ($LM \| KN$ و $KL \| MN$) ارتفاعی برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع AA_1CC_1 و قاعدهٔ $KN = \frac{2}{5}AC_1$ دارد (زیرا از تشابه دو مثلث AKD_1 و AND داریم: $AK = KN$، در ضمن: $KN = LM = MC = 2NC_1$)؛ بنابراین

$$S_{KLMN} = \frac{2}{5}S_{AA_1CC_1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}S = \frac{1}{5}S$$

K_1 نقطهٔ برخورد قطرهای AC_1 و DA_1 ازمتوازی‌الاضلاع AA_1C_1D است، بنابراین $AK_1 = K_1C_1$؛ K_2 نقطهٔ برخورد میانه‌های CD_1 و AC_1 از مثلث ACD است، پس $AK_2 = 2K_2C_1$. بنابراین داریم:

$$KK_1 = AK_1 - AK = \frac{1}{2}AC_1 - \frac{2}{5}AC_1 = \frac{1}{10}AC_1 = \frac{1}{4}KN،$$

$$NK_2 = C_1K_2 - C_1N = \frac{1}{3}AC_1 - \frac{1}{5}AC_1 = \frac{2}{15}AC_1 = \frac{1}{3}KN$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$KL_2 = \frac{1}{3}KL$$

از آن‌جا

$$S_{KK_1L_2} = \frac{1}{2}KK_1\cdot KL_2\cdot \sin(K_1KL_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}KN\cdot\frac{1}{3}KL\cdot \sin(NKL) =$$

$$=\frac{۱}{۱۲}S_{NKL}=\frac{۱}{۲۴}S_{KLMN}=\frac{۱}{۱۲۰}S$$

و با روشی مشابه ثابت می‌شود که:

$$S_{LL_۱M_۲}=S_{MM_۱N_۲}=S_{NN_۱K_۲}=\frac{۱}{۱۲۰}S$$

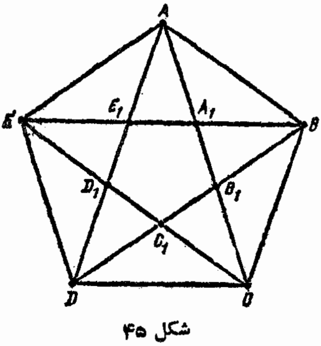
بنابراین

$$S_{K_۱L_۲L_۱M_۲M_۱N_۲N_۱K_۲}=\frac{۱}{۵}S-۴\times\frac{۱}{۱۲۰}S=\frac{۱}{۶}S$$

۲۱۱. الف) مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی $A_۱B_۱C_۱{}_۱D_۱E_۱$ و ده ضلعی $AA_۱BB_۱CC_۱DD_۱EE_۱$، به ترتیب، برابر $۳\times۱۸۰^\circ$ و $۸\times۱۸۰^\circ$ است. علاوه براین، اگر هر زاویهٔ این پنج ضلعی را با زاویهٔ ده ضلعی در همان رأس، جمع کنیم، ۳۶۰ درجه به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\widehat{A_۱BB_۱}+\widehat{B_۱CC_۱}+\widehat{C_۱DD_۱}+\widehat{D_۱EE_۱}+\widehat{E_۱AA_۱}=$$

$$=۸\times۱۸۰^\circ+۳\times۱۸۰^\circ-۵\times۳۶۰^\circ=۱۸۰^\circ$$



شکل ۴۵

ب) اگر $ABCDE$، یك پنج‌ضلعی منتظم باشد، با توجه تقارن (نسبت به نیمساز هر یك از زاویه‌های آن) داریم:

$$AC\|ED\text{،}\quad AA_۱=AE_۱=EE_۱$$

از آن جا

$$\widehat{AA_۱E}=\widehat{A_۱ED}=\widehat{CEA}=\widehat{EAA_۱}$$

یعنی، مثلث $AEA_۱$ متساوی‌الساقین است. $a=AE$ و $x=A_۱E_۱$ می گیریم.

در این صورت، از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین A_1AE_1، A_1EA (که در زاویهٔ مجاور به قاعده، مشترک‌اند)، به دست می‌آید:

$$\frac{AA_1}{A_1E_1}=\frac{A_1E}{AA_1} \Rightarrow \frac{a-x}{x}=\frac{a}{a-x}$$

از آن‌جا

$$x^2-3ax+a^2=0$$

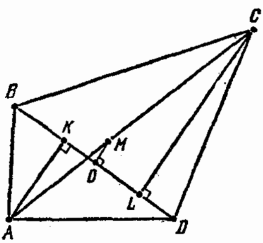
بنابراین

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \quad (\text{زیرا } x<a)$$

و در نتیجه

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}}=\left(\frac{x}{a}\right)^2=\left[\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\right]^2=\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})$$

۲۱۲. O را وسط پاره‌خط راست BD از چهارضلعی $ABCD$، و نقطه‌های K و L را، به ترتیب، تصویر رأس‌های A و C بر خط راست BD می‌گیریم؛ در ضمن $\overrightarrow{OK}=x\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{OL}=y\overrightarrow{BD}$ (همین‌ها را در چهارضلعی $A'B'C'D'$ باعلامت «پریم» درنظر می‌گیریم).



شکل ۴۶

در این صورت داریم (شکل ۴۶):

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD},$$

$$AB^2-AD^2=AK^2+KB^2-AK^2-KD^2=$$

$$=(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD})(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KD})=$$

$$=[(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DO})](\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KB})=$$

$$=2\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB}=2xBD^2$$

و به همین ترتیب

$$CB^{2}-CD^{2}=2yBD^{2},$$

$$2x'B'D'^{2}=A'B'^{2}-A'D'^{2}=2xBD^{2},$$

$$2y'B'D'^{2}=C'B'^{2}-C'D'^{2}=2yBD^{2}$$

اگر $y=x$، آن وقت $x'=y'$ و $K=L$، $K'=L'$، یعنی گـزارهٔ الف) درست است. اگر $x\neq y$، آن وقت، یکـی از عددهای x و y، و مثلاً x، برابر صفر نیست و بنابراین

$$\overrightarrow{MC}=\left(\frac{y}{x}\right)\overrightarrow{AM} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{M'C'}=\left(\frac{y'}{x'}\right)\overrightarrow{A'M'}=\left(\frac{y}{x}\right)\overrightarrow{A'M'}$$

که از آن جا، گزارهٔ ب) نتیجه می‌شود.

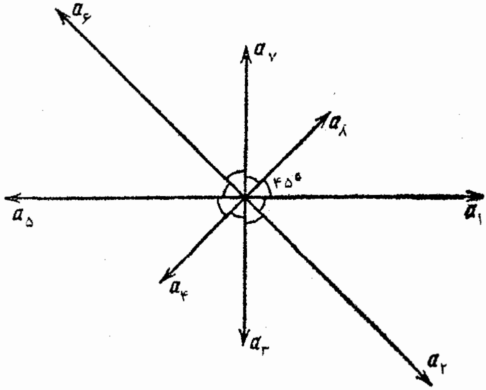
۲۱۳. بدون این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای بخورد، می‌توان فرض کرد که طول ضلع‌های هشت ضلعی $A_1A_2\ldots A_8$، عددهایی گویا هستند (اگر چنین نباشد، قضیـه را بـرای هشت ضلعی متشابـه $A'_1A'_2\ldots A'_8$ بـا ضلع $A'_1A'_2=1$ ثابت می‌کنیم کـه همهٔ ضلع‌های آن، عددهایی گویا هستند؛ در نتیجه، حکم قضیهٔ اصلی هم ثابت خواهد شد). بردارهای

$$\mathbf{a}_i=\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \quad (i=1, \ldots, 8, A_9=A_1)$$

را در نظر می‌گیریم که، مجموع آن‌ها، برابر صفر است. چون همهٔ زاویه‌های هشت ضلعی برابر، و در مجموع برابر 180×6 درجه‌انـد، بنابراین، هر زاویهٔ هشت ضلعی برابر $180\times\frac{3}{4}$ درجه وزاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{a}_i$ و $\mathbf{a}_{i+1}$

($\mathbf{a}_9=\mathbf{a}_1$)، برابر $180\times\frac{1}{4}$، یعنی ۴۵ درجه می‌شود (شکل ۴۷).

همهٔ بردارها را روی محوری، مثلاً موازی $\mathbf{a}_1$ تصور می‌کنیم و طول تصویر مجموع $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_5$ را x، وطول تصویرمجموع $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_6+\mathbf{a}_8$ را y می‌نامیم. چون تصویر مجموع $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_7$ برابر صفر است (زیرا $\mathbf{a}_3$ و



شکل ۴۷

$\mathbf{a}_7$ بر $\mathbf{a}_1$ عمودند)، بنابراین $x-y=0$، از طرف دیگر، طول تصویر هریک از بردارهای $\mathbf{a}_2$، $\mathbf{a}_4$، $\mathbf{a}_6$، $\mathbf{a}_8$، برابر با حاصل‌ضرب عددی گویا در $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است. بنابراین، داریم:

$$x = y = z\sqrt{2}$$

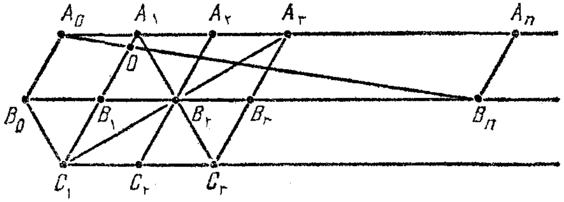
که در آن $x, z \in \mathbf{Q}$. از آن جا $x = 0$ و $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1$. به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\mathbf{a}_6 = -\mathbf{a}_2, \ \mathbf{a}_7 = -\mathbf{a}_3, \ \mathbf{a}_8 = -\mathbf{a}_4$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$A_1A_2 = A_5A_6, \ A_2A_3 = A_6A_7, \ A_3A_4 = A_7A_8, \ A_4A_5 = A_8A_1$$

۲۱۴. به کمک شش‌ضلعی منتظم مفروض $A_0A_1B_2C_2C_1B_0$ و به کمک خط‌کش، این نقطه‌ها را پیدا می‌کنیم: نقطه‌های A_2 و A_3، از برخورد خط راست A_0A_1، به ترتیب، با خط‌های راست C_2B_2 و C_1B_2؛ نقطهٔ C_3 از برخورد خط راست C_1C_2 با خط راست A_1B_2؛ نقطه‌های B_1 و B_3، از برخورد خط راست B_0B_2، به ترتیب، با خط‌های راست A_1C_1 و A_3C_3 (شکل ۴۸). در این صورت، خواهیم داشت:



شکل ۴۸

$$A_1A_2=C_1C_2=a$$

(زیرا $A_1A_2C_2C_1$، متوازی‌الاضلاع است)،

$$A_2A_3=C_1C_2=a$$

(زیرا دو مثلث $A_2A_3B_2$ و $C_2C_1B_2$ برابرند)،

$$C_2C_3=A_1A_2=a$$

(از برابری دو مثلث $C_2C_3B_2$ و $A_2A_1B_2$)، و سرانجام

$$B_1B_2=B_2B_3=a$$

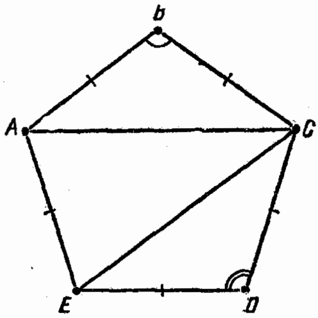
(زیرا، چهار ضلعی‌های $A_1A_2C_2C_1$ و $A_2A_3C_3C_2$ متوازی‌الاضلاع‌اند و $B_0B_2 \| A_0A_1$).

اکنون، همین‌ساختمان را درمورد شش‌ضلعی‌منتظم $A_1A_2B_3C_3C_2B_1$، که نتیجه‌ای از انتقال شش ضلعی اصلی به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ است، انجام می‌دهیم و بـه اندیس هرکدام از حرف‌ها، یـك واحد اضافـه می‌کنیم؛ به نقطه‌های A_4، B_4، C_4 می‌رسیم، سپس به‌همین ترتیب، نقطه‌های A_5، B_5، C_5 را به دست می‌آوریم و غیره. وقتی بـه نقطهٔ B_n رسیدیـم، نقطهٔ O، محل برخورد خط‌های راست A_0B_n و A_1B_1 را پیدا می‌کنیم. از تشابه دو مثلث A_0A_1O و $A_0A_nB_n$، داریم:

$$A_1O=\frac{A_nB_n \cdot A_0A_1}{A_0A_n}=\frac{a \cdot a}{na}=\frac{a}{n}$$

و این، همان پاره‌خط راستی است که می‌خواستیم بسازیم.

یادداشت. این حکم کلی درست است: اگر یك پاره‌خط راست و یك خط راست موازی با آن داده شده باشد، آن وقت می‌توان، تنها به کمك یك خط کش، این پاره‌خط راست را، به n بخش برابر تقسیم کرد.



شکل ۴۹

۲۱۵. چون

$$AC = ۲AB\sin\frac{B}{۲} \geqslant ۲CD\sin\frac{D}{۲} = CE$$

(شکل ۴۹)، بنابراین در مثلث ACE، دو زاویهٔ AEC و EAC برابر می‌شوند. از طرف دیگر، داریم:

$$\widehat{EAC} = \hat{A} - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{B}) = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{۲} - ۹۰^\circ \geqslant \hat{E} + \frac{\hat{D}}{۲} -$$

$$-۹۰^\circ = \hat{E} - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{D}) = \widehat{AEC}$$

بنابراین، باید برابری $\widehat{EAC} = \widehat{AEC}$ برقرار باشد که تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

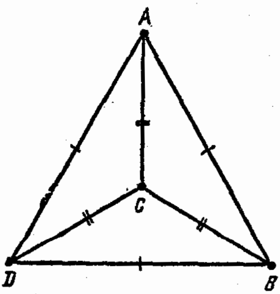
$$\hat{A} = \hat{E},\ \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{D}}{۲}$$

یعنی

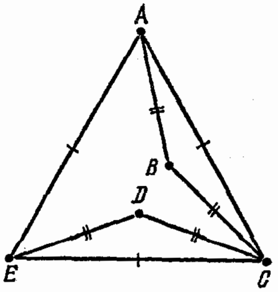
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E}$$

و بنابراین، پنج ضلعی $ABCDE$، منتظم است.

۲۱۶. الف) اگر رأس‌های چند ضلعی اول، در چندضلعی محدب دوم که برابر با آن است، قرار گیرد، آن وقت چند ضلعی اول، به طور کامل در دومی قرار می‌گیرد و از برابری مساحت‌های آن‌ها نتیجه می‌شود که دو چندضلعی برهم منطبق‌اند.



شکل ۵۱

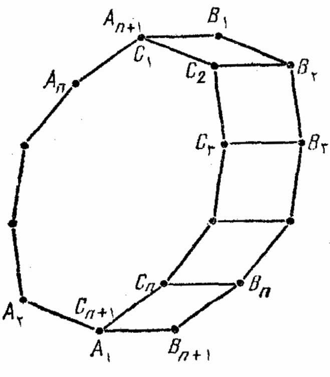


شکل ۵۰

ب) درست نیست (شکل ۵۰ را ببینید کــه، در آن، چهار ضلعی‌های غیرمحدب $ABCE$ و $ACDE$ نشان داده شده است).

ج) چهار ضلعی مقعر $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که، در آن، رأس C، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABD است (شکل ۵۱). در این صورت، اگر رأس‌های چهار ضلعی بــرابــر با آن، $A'B'C'D'$، در چهارضلعی $ABCD$ قرار گیرد، آن وقت، رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'D'$ در مثلث ABD قرار می‌گیرد و، بنابرحکم بخش الف)، رأس‌های این دومثلث برهم منطبق می‌شونــد کــه، در نتیجه، رأس‌های C و C' هم روی هم قرار می‌گیرند. بنابراین، پاسخ به پرسش ج)، منفی است.

۲۱۷. حکــم کلی‌تــری را ثــابت می‌کنیم: هر $2n$ ضلعی را که ضلع‌هایی برابر داشته باشد و، درضمن، هر دو ضلع روبــه رو در آن، باهــم مــوازی باشند، می‌توان به لوزی‌ها تقسیم کرد.



شکل ۵۲

برای $n=2$، درستی حکم روشن است، زیرا چهارضلعی با ضلع‌های برابر، خود یك لوزی است.

اکنون فرض می‌کنیم، حکم برای $n \geqslant 2$ درست باشد، و $2(n+1)$ضلعی

را با همان ویژگی در نظر می‌گیریم:

$$A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1\cdots B_nB_{n+1}$$

فرض می‌کنیم، نقطه‌های

$$C_1=A_{n+1},\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ C_{n+1}=A_1$$

نتیجهٔ انتقال موازی نقطه‌های B_1، ...، B_n و B_{n+1}، به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{B_{n+1}A_1}$ باشند (شکل ۵۲). در این صورت داریم:

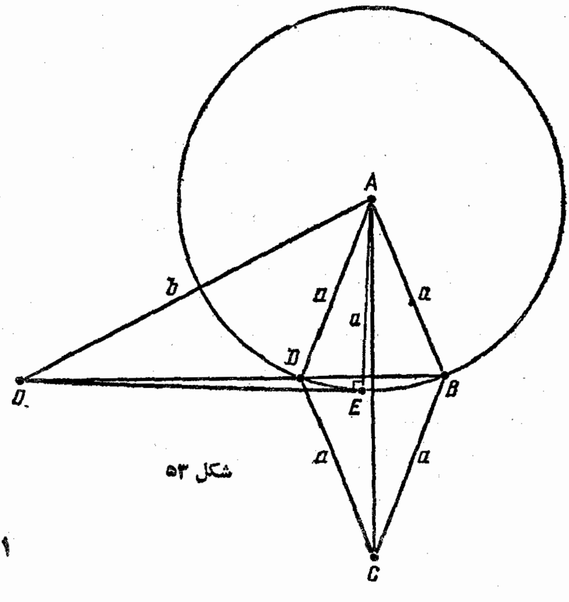
$$B_iC_i=B_{n+1}A_1=B_iB_{i+1},\quad (i=1,\ldots,n)$$

که از آن جا، با توجه به این که همهٔ خط‌های راست B_iC_i باهم موازی‌اند، نتیجه می‌شود که همهٔ چهارضلعی‌های $C_iB_iB_{i+1}C_{i+1}$، لوزی‌اند؛ در ضمن

$$A_nC_1=C_1C_2=\ldots=C_nA_1 \text{ و } C_iC_{i+1}\|B_iB_{i+1}\|A_iA_{i+1}$$

بنا بر این، $2n$ ضلعی $A_1\ldots A_nC_1\ldots C_n$ هم، به همان شکل مورد نظر است و، بنا بر فرض استقرا، می‌توان آن را به لوزی‌هایی تقسیم کرد. حکم ثابت شد. بنا بر این به پرسش مسأله، باید پاسخ مثبت داد.

۳۱۸. چون، هریك از نقطه‌های O و D و B، از رأس‌های A و C



شکل ۵۳

به یك فاصله‌اند، بنا براین، این سه نقطه، روی یك خط راست‌اند.

دایرهٔ به مرکز A و به‌شعاع a را در نظر می‌گیریم (شکل ۵۳). بنا بر قضیهٔ ۷۳، حاصل‌ضرب $OB.OD$، برابر است با مجـذور طول مماس OE، که از نقطهٔ O بر این دایره رسم شده است. طول این مماس، برابر است با b^2-a^2، که به مقدار زاویهٔ BAD بستگی ندارد.

۲۱۹. نقطهٔ Q را طوری انتخاب می‌کنیم کـه، چهار ضلعی $QPAB$، متوازی‌الاضلاع باشد(شکل ۵۴). دراین‌صورت $QPDC$ هم‌متوازی‌الاضلاع است، زیرا

$$CD=BA=QP،\ CD\|BA\|QP$$

چون رأس‌های دو زاویهٔ برابر PQB و PCB در یـك طرف خط راست PBقرار گرفته‌اند، نقطه‌های Q، P، B، C، روی محیط یك دایره‌اندوداریم:

$$\widehat{APB}=\widehat{PBQ}=\widehat{PCQ}=\widehat{DPC}$$

که از آن جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

۲۲۰. توجه می‌کنیم که، دومثلث BDFو$A'EF$ متشابه‌اند. درواقع، داریم (شکل ۵۵):

$$\widehat{EFD}=\widehat{BFA}=\widehat{BFA'}،\ \widehat{FED}=\widehat{FAB}=\widehat{FA'B}$$

بنا براین

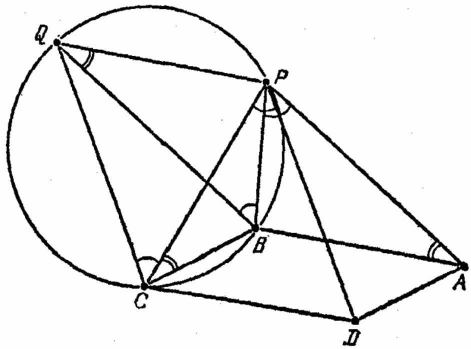
$$\widehat{A'FE}=|\widehat{EFB}-\widehat{A'FB}|=|\widehat{EFB}-\widehat{EFD}|=\widehat{DFB}$$

و از تشابه مثلث‌های EDF و $A'BF$ به دست می‌آید:

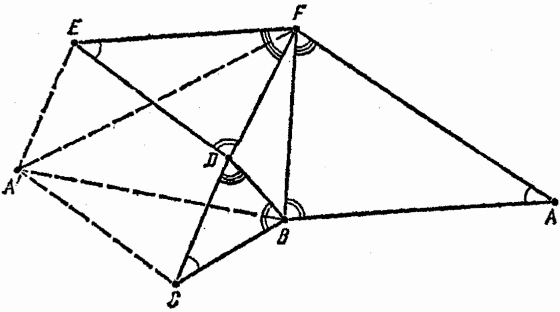
$$EF:FD=A'F:BF$$

به همین ترتیب، می‌توان تشابه مثلث‌های $A'CB$ و BDF را ثابت کرد. در نتیجه، دو مثلث $A'EF$ و BCA' هم، با یکدیگر متشابه می‌شوند و

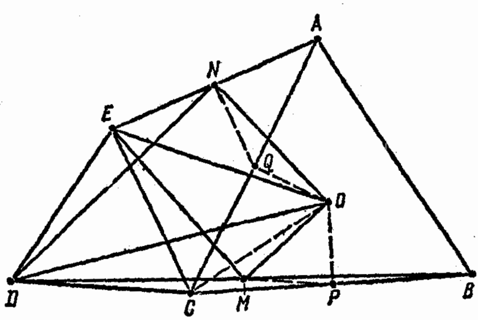
$$\frac{A'C}{EF}=\frac{A'B}{A'F}=\frac{DE}{EF}\Rightarrow A'C=DE$$



شکل ۵۴



شکل ۵۵



شکل ۵۶

به همین ترتیب $A'E = CD$ یعنی $A'CDE$، متوازی‌الاضلاع است.

۲۲۱. وسط پاره‌خطهای راست BC و AC را، بـه ترتیب، P و Q می‌نامیم. اگر مثلث OPM را دور نقطهٔ O و بـه اندازهٔ ۶۰ درجه دوران دهیم (در جهت حرکت عقربـه‌های ساعت؛ شکل ۵۶) و، سپس، از تجانس به مرکز O و ضریب ۲، درمورد آن استفاده کنیم، آن وقت، بر مثلث OCE منطبق می‌شود. در واقع، از آن جا که

$$\widehat{COP} = ۶۰^\circ \quad \text{و} \quad CO = ۲OP$$

(زیرا، نقطهٔ O، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است)، آن وقت، نقطهٔ P، در اثر این تبدیلها، بر نقطهٔ C منطبق می‌شود. سپس، چون

$$PM \| DC، \widehat{DCE} = ۶۰^\circ \quad \text{و} \quad EC = DC = ۲PM$$

(زیرا PM، وسط دو ضلع از مثلث BCD را بـه هم وصل کـرده است)، بنابراین، در این تبدیلها، پاره‌خط راست PM به پاره‌خط راست CE، و مثلث OPM به مثلث OCE منجر می‌شود. به این ترتیب، داریم:

$$\widehat{EOM} = ۶۰^\circ \quad \text{و} \quad EO = ۲MO$$

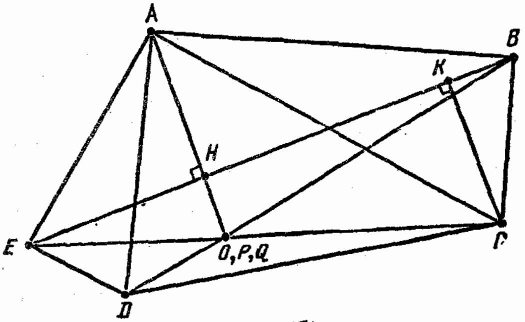
به همین ترتیب، ثابت می‌شود کـه، در نتیجهٔ دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ ۶۰ درجه (و در جهت مثلثاتی)، و تجانس بـه مرکز O و ضریب ۲، مثلث OQN منجر به مثلث OCD می‌شود. از آن جا

$$\widehat{NOD} = ۶۰^\circ \quad \text{و} \quad DO = ۲NO$$

بنابراین دو مثلث MOD و MOE متشابه‌اند.

۲۲۲. AH را بر خط راست BE عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خطهای راست CE و BD را، بـه ترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کند. ثابت می‌کنیم $AP = AQ$ که، از آن‌جا، روشن می‌شود که سه نقطهٔ Q، P و Q برهم منطبق‌اند.

عمود CK را برخط راست BE رسم می‌کنیم (شکل ۵۷)، آن‌وقت،



شکل ۵۷

از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ CKB و BHA (که در آن‌ها، ضلع‌های AB و CK، به ترتیب، بر ضلع‌های BC و BH عمودند) داریم:

$$\frac{CK}{BH}=\frac{BK}{AH}=\frac{BC}{AB}=tg(\widehat{BAC})$$

و از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ EHP و EKC به دست می‌آید:

$$PH=\frac{EH\cdot CK}{EK}=\frac{EH\cdot BH\cdot tg(BAC)}{EB-BK}=\frac{EH\cdot BH\cdot tg(BAC)}{EB-AH\cdot tg(BAC)}$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$QH=\frac{BH\cdot EH\cdot tg(EAD)}{EB-AH\cdot tg(EAD)}$$

ازآن جا، و با توجه بـه برابری دو زاویهٔ BAC و EAD، نتیجه می‌شود: $PH=QH$. حکم ثابت شد.

۲۲۳. دایرهٔ محیطی چند ضلعی را، به مرکز O و به شعاع R، درنظر می‌گیریم (شکل ۵۸). $\widehat{AOB}=\alpha$ فرض می‌کنیم؛ $0<\alpha<120^\circ$ و

$$AB=2R\sin\frac{\alpha}{2},\ AC=2R\sin\alpha,\ AD=2R\sin\frac{3\alpha}{2}$$

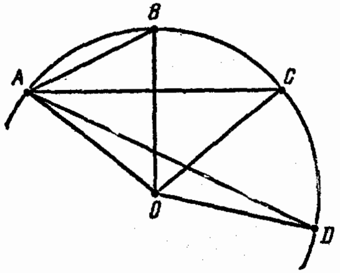
ازآن جا، به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{sin\alpha}+\frac{۱}{sin\frac{۳\alpha}{۲}}$$

بنا براین، به دست می‌آید:

$$\circ = sin\,\alpha sin\frac{۳\alpha}{۲}-\left(sin\alpha+sin\frac{۳\alpha}{۲}\right)\times$$

$$\times sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(cos\frac{\alpha}{۲}-cos\frac{۵\alpha}{۲}\right)-$$



شکل ۵۸

$$-\frac{۱}{۲}\left(cos\frac{\alpha}{۲}-cos\frac{۳\alpha}{۲}\right)-\frac{۱}{۲}(cos\alpha-cos۲\alpha)=\frac{۱}{۲}\left[\left(cos\frac{۳\alpha}{۲}+cos۲\alpha\right)-\right.$$

$$\left.-\left(cos\alpha+cos\frac{۵\alpha}{۲}\right)\right]=cos\frac{۷\alpha}{۴}\left(cos\frac{\alpha}{۴}-cos\frac{۳\alpha}{۴}\right)=۲\,cos\frac{۷\alpha}{۴}sin\frac{\alpha}{۴}sin\frac{\alpha}{۲}$$

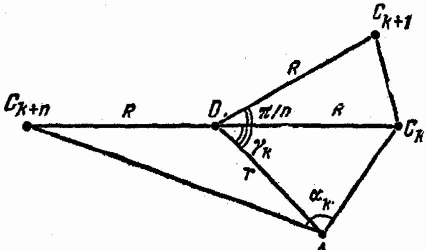
از آن‌جا

$$\frac{۷\alpha}{۴}=۹\circ^{\circ}\Rightarrow \alpha=\frac{۳۶\circ^{\circ}}{۷}$$

یعنی، چندضلعی منتظم مجهول دارای ۷ ضلع است.

۲۲۴. O را مرکز $۲n$ ضلعی منتظم $C_{\circ}C_{۱}\ldots C_{۲n-۱}$، و R را شعاع دایرهٔ محیطی آن می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه A را به فاصلهٔ $r\neq R$ از نقطهٔ O انتخاب می‌کنیم و قرار می‌گذاریم:

$$\alpha_k=\widehat{C_kAC_{k+n}}،\ \gamma_k=\widehat{AOC_k}$$



شکل ۵۹

(برای $k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$). در ایـن صورت، بنا به قضیهٔ کسینوس‌ها، داریم (شکل ۵۹):

$$AC_k^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma_k,$$

$$AC_{k+n}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\gamma_k,$$

$$\cos\alpha_k = \frac{AC_k^2 + AC_{k+n}^2 - C_kC_{k+n}^2}{2AC_k \cdot AC_{k+n}} = \frac{r^2 - R^2}{\sqrt{(R+r)^2 - 4R^2r^2\cos^2\gamma_k}}$$

که از آن جا، به دست می‌آید:

$$tg^2\alpha_k = \frac{1}{\cos^2\alpha_k} - 1 =$$

$$= \frac{1}{(R^2 - r^2)^2}\left[(R^2 + r^2)^2 - (R^2 - r^2)^2 - 4R^2r^2\cos^2\gamma_k\right] =$$

$$= \frac{4R^2r^2}{(R^2 - r^2)^2}\sin^2\gamma_k$$

بدون‌این‌که لطمه‌ای به‌کلی‌بودن مسأله وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$\gamma_k = \gamma_0 + \frac{k\pi}{n}$$

(در ضمن، تنها ممکن است لازم شود کـه رأس‌هـای $2n$ ضلعی مفروض را، به ردیف دیگری شماره‌گذاری کنیم). بنابراین داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1} tg^2\alpha_k = \frac{2R^2r^2}{(R^2 - r^2)^2}\sum_{k=0}^{n-1}(1 - \cos 2\gamma_k) = \frac{2R^2r^2n}{(R^2 - r^2)^2}$$

زیرا، $\sum_{k=0}^{n-1}\cos 2\gamma_k = 0$. برای اثبات برابری آخر، بردارهای واحد $\mathbf{d}_k$ را با مختصات

$$(\sin 2\gamma_k, \cos 2\gamma_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

در نظر می‌گیریم و توجه‌می‌کنیم که زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{d}_k$ و $\mathbf{d}_{k+1}$ $(\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_0)$

برابر $\frac{2\pi}{n}$ است. بنابرایـن، n ضلعی منتظم $D_0D_1\cdots D_{n-1}$ وجود دارد که، برای آن

$$\overrightarrow{D_kD_{k+1}} = \mathbf{d}_k \quad (D_n = D_0)$$

یعنی، مجموع بردارهای $\mathbf{d}_0$، $\mathbf{d}_1$، ...، $\mathbf{d}_k$، که برابر مجموع تصویرهای آن‌ها بر محور دلخواهی است، برابر صفر است. به این ترتیب، ثابت شد، برای هر دو نقطهٔ A و B کـه از نقطهٔ O بـه فاصله‌ای غیر از R باشند، مجموع موردنظر، یکی است و، از این جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود (زیرا، شعاع‌های دو دایرهٔ محاطی و محیطی، برابر نیستند).

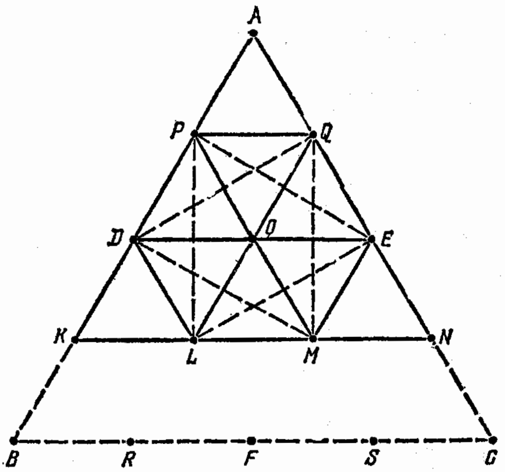
۲۲۵٫ اثبات را، بـا استقرای روی n، تعـداد ضلع‌های چند ضلعی، می‌دهیم.

حکم، برای $n=3$، درست است، زیرا سه ضلعی قطر ندارد. اکنون، فرض‌می‌کنیم حکم، برای عدد$3 \leqslant n$ درست باشد، و $(n+2)$ضلعی محدبی را در نظر می‌گیریم که، رأس‌های آن، با روشی که در مسأله گفته شده است، رنگ شده باشند. در ایـن صورت، چنان رأسی مثل A وجود دارد که، دو رأس‌مجاور آن، دارای رنگ‌های مختلف هستند. درواقع، درغیراین‌صورت، باید هر دو رأسی کـه یك درمیان قـرار گرفته‌اند، رنگ‌های یکسانی داشته باشند و، به خاطر فرد بودن تعداد $n+2$، همهٔ رأس‌ها هم رنگ می‌شوند که شرط مسأله را نقض می‌کند. در این صورت، قطری که دو رأس مجاور رأس A را بـه هم وصل می‌کند، $(n+2)$ ضلعی را بـه یـك مثلث و یك $(n+1)$ ضلعی تقسیم می‌کند. اگـر در این $(n+1)$ ضلعی، بازهم رأسی پیدا شودکه در همسایگـی خود، دو رأس با رنگ‌های مختلف داشته باشد، آن وقت با وصل این دو رأس نا هم‌رنگ، $(n+1)$ ضلعی، به یك مثلث و یك n ضلعی تبدیـل می‌شود و برای n ضلعی حاصل، بنا بـر فرض استقرا، تقسیم مطلوب وجود دارد. ولی اگـر چنین رأسی در $(n+1)$ ضلعی وجود نداشته باشد، آن وقت، هردو رأس دلخواه‌آن که، تنها یك رأس در بین خود داشته باشند، هم رنگ‌اند، یعنی تمامـی رأس‌ها با دو رنگ و بـه صورت

یک درمیان، رنگ شده‌اند. چون رنگ رأس A با رنگ هریک از دو رأس مجاورخود فرق دارد، بنابراین، باید با رنگ همه رأس‌های دیگر $(n+۲)$ ضلعی اصلی فرق داشته باشد. بنابراین، اگر از همان ابتدا، همهٔ قطرهایی‌از $(n+۲)$ ضلعی را، که از A گذشته‌اند، رسم کنیم، به تقسیم مطلوب می‌رسیم به این ترتیب، درستی حکم برای $(n+۲)$ ضلعی هم ثابت شد.

§ ۱۲. نقطه‌ها، پاره‌خط‌ها و خط‌های راست

۲۲۶. حکم نیرومندتری را، ثابت می‌کنیم: بین ۱۰ نقطهٔ A، D، E، K، L، M، N، O، P، Q، به نحوی که در شکل ۶۵ نشان داده شده است، می‌توان سه‌نقطه از یک رنگ پیدا کرد که‌رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.



شکل ۶۵

فرض می‌کنیم، این طور نباشد. بدون این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان O را به رنگ سیاه گرفت؛ در ضمن، دست‌کم یکی ازسه نقطهٔ P، E، L، ومثلاً P، بایدسیاه باشد (این سه نقطه نمی‌توانند هم رنگ باشند، زیرا رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند). همین طور،

از بین سه نقطهٔ Q، D، M، دست کم یکی سیاه است، ولی نقطه‌های Q و D به ناچار باید سفید باشند (تا رأس‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع OPQ و OPD هم رنگ نشوند). به‌این ترتیب، M سیاه و Q و D سفیدند. به‌همین ترتیب، معلوم می‌شود که، نقطه‌های E و L هم باید سفید باشند (به ترتیب، از مثلث‌های OME و OML). اکنون، اگر مثلث‌های DEA، QLN و DLK را در نظر بگیریم، به این جا می‌رسیم که رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع AKN سیاه‌اند. تناقض حاصل، درستی حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.

۲۲۷. اگر $n=۳k+۱$ $(k\in\mathbf{Z}^+)$، آن‌وقت به‌کمك پرگار وخط‌کش، زاویهٔ

$$۶۰^\circ-k\times\frac{۱۸۰^\circ}{n}=\frac{(۳k+۱)\times ۱۸۰^\circ-۳k\times ۱۸۰^\circ}{۳n}=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

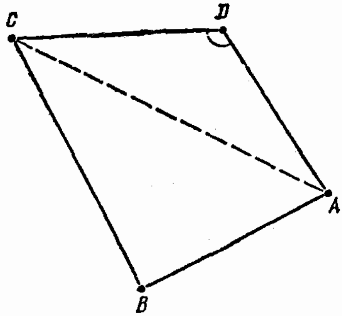
را می‌سازیم و اگر $n=۳k-۱$ $(k\in\mathbf{N})$، این زاویه را

$$k\cdot\frac{۱۸۰^\circ}{n}-۶۰^\circ=\frac{۳k\times ۱۸۰^\circ-(۳k-۱)\times ۱۸۰^\circ}{۳n}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

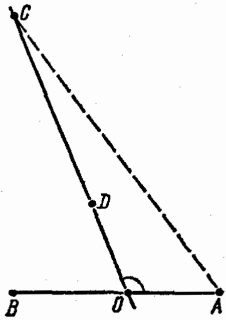
در هر دو حالت، یك سوم زاویهٔ مفروض ساخته می‌شود.

۲۲۸. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و دو پاره‌خط غیر متقاطع را در نظر می‌گیریم که قطرهای یك مجموعهٔ محدب باشند. دو حالت ممکن است: ۱) هیچ کدام از پاره‌خط‌ها با امتداد دیگری نقطهٔ مشترك ندارد؛ ۲) یکی از پاره‌خط‌ها، امتداد دیگری را قطع می‌کند.

در حالت اول، چهار ضلعی محدب $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که، ضلع‌های AB و CD آن، قطر باشند (شکل ۶۱). ازآن جا که، دست‌کم یکی از زاویه‌های چهارضلعی، و مثلاً زاویهٔ D، از ۹۰ درجه کمتر نیست، بنابراین $AC>CD$، یعنی CD قطر نیست. در حالت دوم، نقطهٔ O محل برخورد قطر AB با امتداد قطر CD (از طرف D) را در نظر می‌گیریم (شکل ۶۲). چون دست‌کم یکی ازدو زاویهٔ AOC یا BOC، و مثلاً اولی، کمتر از ۹۰ درجه نیست، بنابراین



شکل ۶۱



شکل ۶۲

$$AC > OC > CD$$

یعنی CD قطر نیست. بـه ایـن ترتیب، در هر دو حالت، مواجه با تناقض می‌شویم.

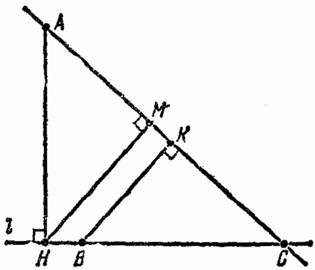
۲۲۹. پاسخ به پرسش مسأله، منفی است. چهارضلعی محدب $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که، در آن، داشته باشیم:

$$AB = AC = BC = d \quad و \quad BD < d$$

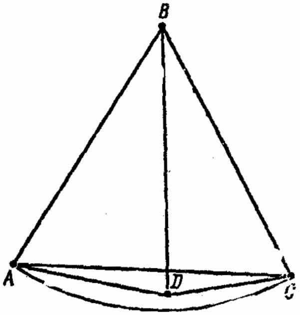
(شکل ۶۳). قطر آن، برابر d است. از طرف دیگر، دست‌کـم دو رأس از سه رأس A، B، C در یکـی از دو بخشی قـرار می‌گیرنـد کـه از تقسیم چهارضلعی به وسیلهٔ خط شکسته بـه دست‌آمده است. در این صورت، قطر این بخش، برابر d می‌شود.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد، اگر بین رأس‌های چهار ضلعی محدب مفروض، نتوان سه رأس را طوری انتخاب کرد که، فاصلهٔ دو به دوی آن‌ها، برابر قطر آن باشند، آن وقت، تقسیم مورد نظر مسأله را می‌توان انجام داد؛ در ضمن، به جای خط شکسته می‌توان از خط راست استفاده کرد.

۲۳۰. فرض می‌کنیم، همهٔ نقطه‌ها، روی یك خط راست نباشند. همهٔ خطهای راست ممکن را، از دو به‌دوی نقطه‌ها می‌گذرانیم و همهٔ فاصله‌های غیر صفر بین نقطه‌ها و خطهای راست را در نظر می‌گیریم. چون تعداد این فاصله‌ها، محدود است، می‌تـوان نقطهٔ A و خط l را طوری پیدا کـرد که،



شکل ۶۴



شکل ۶۳

فاصلهٔ بین‌آن‌ها، کمتریـــن مقدار باشد. عمود AH را بر خط راست l فرود می‌آوریم (شکل ۶۴). چـــون خط راست l، دست‌کـــم شامـــل سه نقطه، از نقطه‌های مفروض است، بنابراین، دست‌کم دوتا از آن‌ها، در یك طرف نقطهٔ H قرار دارنـــد. آن‌ها را B و C می‌گیریم و، در ضمن، B را بین H و C فرض می‌کنیم. در ایـــن صورت، اگر BK و HM را بر خط راست AC عمود کنیم، از تشابه دو مثلث BKC و HMC به دست می‌آید:

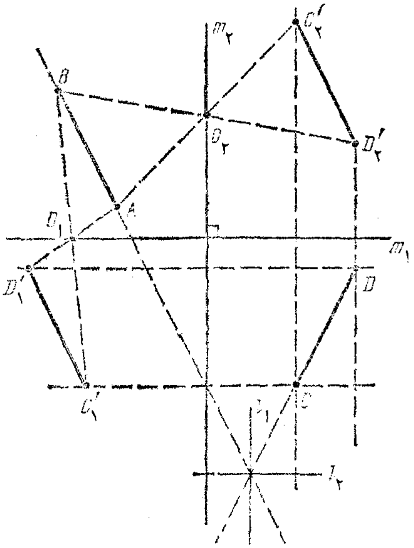
$$BK=\frac{HM\cdot BC}{HC}\leqslant HM<HA$$

(اگر $A=M$، آن وقت $AC\|HC$، که درست نیست)؛ یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط راست l، کمتریـــن مقدار نیست. تناقض حاصل، نشان می‌دهد کـــه همهٔ نقطه‌ها، روی یك خط راست‌اند.

۲۳۱. قرینهٔ پاره‌خط راست AB، نسبت به نقطهٔ مجهول O را $A'B'$ می‌نامیم. خط راست دلخواه l را طوری در نظر می‌گیریم که $C'D'$، قرینهٔ پاره‌خط راست CD نسبت به l، موازی $A'B'$ باشد. چون

$$C'D'\|A'B'\|AB$$

بنابراین، خط راست l موازی یکی از نیمسازهای (عمود برهم) l_1 و l_2 بین خط‌های راست AB و CD می‌باشد (شکل ۶۵). قرینهٔ پاره‌خط راست CD نسبت به خط راست l را، در حالت $l\|l_1$ بـــا $C_1'D_1'$ و در حالت $l\|l_2$ با



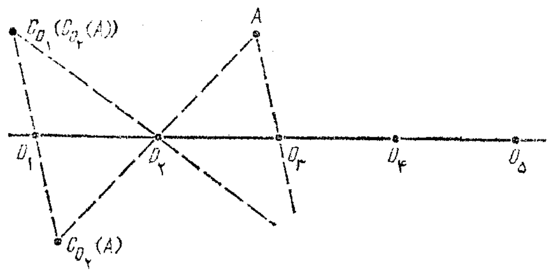
شکل ۶۵

$C'_2D'_2$ نشان می‌دهیم.

چون $\overrightarrow{C'_1D'_1} = -\overrightarrow{C'_2D'_2}$، بنابراین یکی از دو بردار $\overrightarrow{C'_1D'_1}$ یا $\overrightarrow{C'_2D'_2}$، و مثلاً اولی، برابر بردار $\overrightarrow{AB}$ است. در این حالت، دو پاره‌خط راست $A'B'$ و $C'_1D'_1$ تنها وقتی برهم منطبق‌اند (با انتخاب متناظر خط راست $l \| l_1$) که نقطهٔ $O = O_1$ روی خط راست $m_1 \perp l_1$، به یک فاصله از نقطه‌های A و D، باشد. بـه همین تـرتیب، پاره‌خط‌های راست $A'B'$ و $C'_2D'_2$ (با انتخاب متناظر $l \| l_2$) وقتی، و تنها وقتی، برهم منطبق‌اند که $O = O_2$ بر خط راست $m_2 \perp l_2$، بـه یک فاصله از نقطه‌های A و C، باشد. به ایـن ترتیب، مکان مطلوب نقطهٔ O، عبارت است از اجتماع این دو خط راست m_1 و m_2.

۲۳۲. فرض می کنیم، مجموعهٔ M، دارای دو مرکز تقارن مختلف O_1 و O_2 باشد. در این صورت نقطهٔ O_3، قرینهٔ نقطهٔ O_1 نسبت به نقطهٔ O_2 هم، مرکز تقارن مجموعهٔ M است.

در واقع اگـر $C_O(A)$ را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O بگیـریم،



شکل ۶۶

آن وقت، از این حقیقت که هم دو نقطهٔ A و $C_{O_2}(A)$ و هم دو نقطهٔ O_3 و O_1 نسبت به نقطهٔ O_2 قرینهٔ یکدیگرند، نتیجه می‌شود که دو نقطهٔ $C_{O_3}(A)$ و $C_{O_1}(C_{O_2}(A))$ هم نسبت بـه همان نقطهٔ O_2 قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۶۶). بنابراین، برای هر نقطهٔ A، داریم:

$$C_{O_3}(A)=C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(A)))$$

و از آن جا

$$C_{O_3}(M)=C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(M)))=C_{O_2}(C_{O_1}(M))=C_{O_2}(M)=M$$

و به همین ترتیب، نقطه‌های

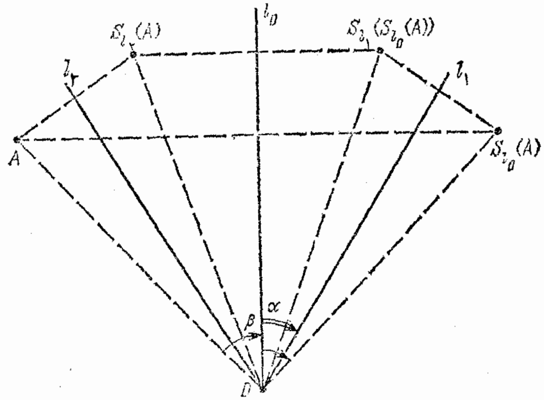
$$O_4=C_{O_3}(O_2),\ O_5=C_{O_4}(O_3),\ \dots$$

مرکزهای تقارن مجموعهٔ M هستند. از آن جا که

$$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_2O_3}=\overrightarrow{O_3O_4}=\dots$$

بنابراین، همهٔ این مرکزهای تقارن متمایزند، یعنی تعداد آن‌ها، بی‌نهایت است.

۲۳۳. فرض کنیم، مجموعهٔ M، دارای محورهای تقارن l_0 و l_1 باشد (الزامی ندارد کـه متمایز باشند). در این صورت، خط راست l_2، قرینهٔ l_1 نسبت به l_0 هم، محور تقارن مجموعهٔ M است. درواقع، اگر قرینهٔ نقطهٔ A، نسبت به خط راست l را، $S_l(A)$ بنامیم، آن وقت، از قرینه بودن نقطه‌های A و $S_{l_0}(A)$ و، همچنین l_2 و l_1، نسبت به خط راست l_0، نتیجه می‌شود که، دو نقطهٔ $S_{l_2}(A)$ و $S_{l_1}(S_{l_0}(A))$ هم، نسبت بـه همان خط راست l_0، قرینهٔ



شکل ۶۷

یکدیگرند. (شکل ۶۷). بنابراین برای هر نقطهٔ A داریم:

$$S_{l_2}(A)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(A))$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$S_{l_2}(M)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(M)))=S_{l_0}(S_{l_1}(M))=S_{l_0}(M)=M$$

به این ترتیب، هر محور تقارن l_0 مجموعهٔ M، محور تقارن مجموعهٔ L هم می‌باشد که، از آن جا، درستی حکم مسأله روشن می‌شود.

۲۳۴. فرض می‌کنیم l_0 و l_1، محورهای تقارن مجموعهٔ M، در نقطهٔ O به هم رسیده باشند و، در ضمن، اگر محور l_0 را به اندازهٔ زاویهٔ α، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دوران دهیم، بر محور l_1 منطبق شود. در این صورت، اگر قرینهٔ نقطهٔ A را، نسبت به خط راست l، با $S_l(A)$ نشان دهیم، آن وقت، هر نقطهٔ A، ضمن دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ 2α و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به نقطهٔ

$$R(A)=S_{l_1}(S_{l_0}(A))$$

می‌رسد. در واقع، فاصلهٔ نقطهٔ O تا هریک از نقطه‌های A، $S_{l_0}(A)$، $S_{l_1}(S_{l_0}(A))$ یکی است (شکل ۶۷ را ببینید) و اگر زاویهٔ β، بین خط‌های

راست OA و l_0 $(O\neq A)$ را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیریم، آن وقت، زاویهٔ بین خط‌های راست OA و $OS_{l_1}(S_{l_0}(A))$ برابر

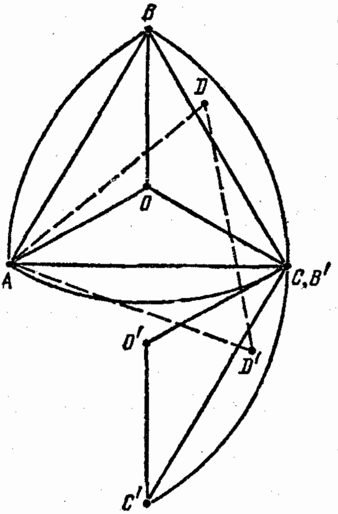
$$۲\beta-۲(\beta-\alpha)=۲\alpha$$

می‌شود. چون مجموعهٔ M، شامل بیش از یك نقطه است، بنا براین، شامل نقطهٔ $A_0\neq O$ است. به این ترتیب، داریم:

$$R(M)=S_{l_1}(S_{l_0}(M))=S_{l_1}(M)=M$$

به این ترتیب، هریك از نقطه‌های

$$A_0،\ A_1=R(A_0)،\ A_۲=R(A_1)،\ A_۳=R(A_۲)،\ \dots$$



شکل ۶۸

عضوی از مجموعـهٔ M هستند. در ضمن، همهٔ این نقطه‌ها متمایزند، زیرا اگـر به ازای مقدارهای $i>j$، نقطه‌های A_i و A_j برهم منطبق باشند، آن وقت، باید داشته

$$۲\alpha(i-j)=۲k\pi،\ (k\in\mathbf{N})$$

یعنی، عدد $\frac{\alpha}{\pi}$، عددی گویاست. بنا براین، مجموعهٔ M نامتناهی است.

۲۳۵. ثابت می‌کنیم، شرط مسأله، تنها برای $n=۳$ برقرار است (کـه در مورد آن کافی است، این نقطه‌ها، رأس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده باشند).

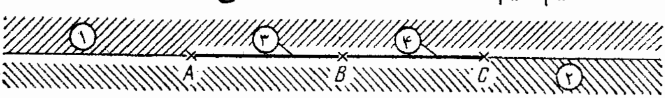
فرض کنید، مجموعـهٔ مورد نظر مسأله، دارای $n\geqslant ۴$ نقطه باشد. دو نقطهٔ A و B را طوری انتخاب می‌کنیم که، فاصلهٔ بین آن‌ها، حداکثر باشد و، سپس، نقطهٔ C را درنظر می‌گیریم که با دو نقطهٔ A و B، رأس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده‌اند. در این صورت، همهٔ نقطه‌های دیگر، در

داخل شکل M قرار می‌گیرند که از اشتراك سطح سه دایرهٔ به شعاع AB و به مرکزهای A، B و C (شکل ۶۸) به دست آمده است. اگر نقطهٔ O، مرکز مثلث ABC باشد؛ پاره‌خط‌های راست AO، BO، CO مجموعهٔ M را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند که، در هیچ کدام از آن‌ها نمی‌توانند نقطه‌ای از n نقطه، به‌جز آن‌چه نام برده‌ایم، واقع باشد. در واقع، اگر مثلاً در بخش M_{BC}، که از مثلث BOC و قطعهٔ دایرهٔ به مرکز A و کمان BC تشکیل شده است، نقطه‌ای مثل D وجود داشته باشد، آن وقت، نقطهٔ D' هم وجود دارد که، برای آن، مثلث ADD' متساوی‌الاضلاع است، بنا براین، اگر نقطهٔ D را دور نقطهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه (در جهت معینی) دوران دهیم، باید تبدیل آن، نقطهٔ D'، در عین حال، هم در بخش M'_{BC}، تبدیل M_{BC}، قرار گیرد و هم در مجموعهٔ M. ولی چون زاویهٔ BAC برابر ۶۰ درجه است، یا $C'=B$ و یا $B'=C$. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $B'=C$. دراین‌صورت، مجموعه‌های M'_{BC} و M، نسبت بـه خط راست $B'O'$، در دو نیـم صفحهٔ مختلف قرار می‌گیرند، زیرا

$$\widehat{BB'O'}=\widehat{BCA}+\widehat{AB'O'}=۶۰^\circ+۳۰^\circ=۹۰^\circ$$

یعنی، خط راست $B'O'$، بر کمان AC مماس است. در نتیجه، M'_{BC} و M، تنها درنقطهٔ B' مشترك‌اند؛ از آن‌جا $D'=B'$ و $D=B$، که با نوع انتخاب نقطهٔ D متناقض است.

۲۳۶. ابتدا فرض مـی‌کنیم، نقطه‌های A و B و C، روی یـك خط راست باشند. در این صورت، این نقطه‌ها، خط راست را بـه ۴ بازه تقسیم می‌کنند که، در ضمن، هیچ دو نقطه‌ای از دو بازهٔ مختلف، نمی‌تـوانند متعلق به‌یك مجموعهٔ محدب باشند. بنا براین، تعدادمجموعه‌های مطلوب، نمی‌تواند از ۴ کمتر باشد. اگر مجموعهٔ M را، آن طور کـه در شکل ۶۹ نشان داده شده است، تقسیم کنیم، همان تعداد ۴ به دست می‌آید.



شکل ۶۹

اکنون، فرض می‌کنیم، نقطه‌های A و B و C روی یك خط راست نباشند، در این صورت، نقطه‌های B و C، خط راست BC را به سه بازه تقسیم می‌کنند و، در ضمن، بازه‌های جداگانه باید در دو مجموعهٔ محدب جداگانه قرار گیرند. بنابراین، تعداد مجموعه‌های مطلوب، نمی‌تواند از ۳ کمتر باشد. و ۳ مجموعه را می‌توان به صورتی که در شکل ۷۰ نشان داده شده است، انتخاب کرد.

۲۳۷. بین خط‌های راستی که رسم می‌کنیم، بنابر شرط، حتماً دو خط راست متقاطع وجود دارد که صفحه را به ۴ بخش تقسیم می‌کنند. اگر یك خط راست دیگر هم رسم کنیم، به سادگی و با آزمایش در حالت‌های مختلف، معلوم می‌شود که، دست کم، به تعداد بخش‌ها، ۲ واحد اضافه می‌شود. بنابراین، هرگز نمی‌توان، درست به ۵ بخش رسید، پس $n_0 \geqslant 5$.

از طرف دیگر، هر تعداد $n > 5$ بخش را، می‌توان با روش موردنظر به دست آورد: اگر $n = 2k$ $(k \in \mathbf{N})$، آن وقت تقسیم صفحه را می‌توان به صورتی که درشکل ۷۱ نشان داده شده است، انجام داد؛ اگر $n = 4k + 3$، شبیه شکل ۷۲ ودر حالت $n = 4k + 5$، شبیه شکل ۷۳، تقسیم صفحه انجام می‌گیرد. به این ترتیب، کمترین مقدار n_0، برابر ۵ است.

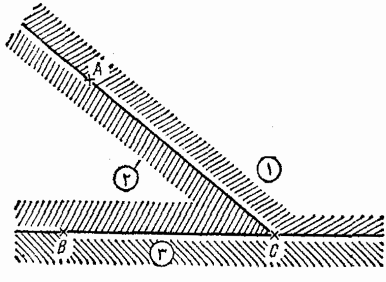
۲۳۸. مجموعهٔ مورد نظر، مثلاً، عبارت است از نوار

$$M = \{(x, y) | x\sqrt{2} - 1 \leqslant y \leqslant x\sqrt{2}\}$$

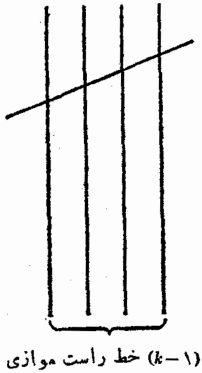
در واقع، این مجموعه، شامل بی‌نهایت نقطهٔ با مختصات درست به صورت $(x, [\sqrt{2}x])$ $(x \in \mathbf{Z})$ است. از طرف دیگر، هر خط راست $y = kx + b$ در حالت $k = \sqrt{2}$، شامل بیش ازیك نقطهٔ با مختصات درست نیست (زیرا، در غیر این صورت، عدد

$$|(\sqrt{2}x_1 + b) - (\sqrt{2}x_2 + b)| = \sqrt{2}|x_1 - x_2|$$

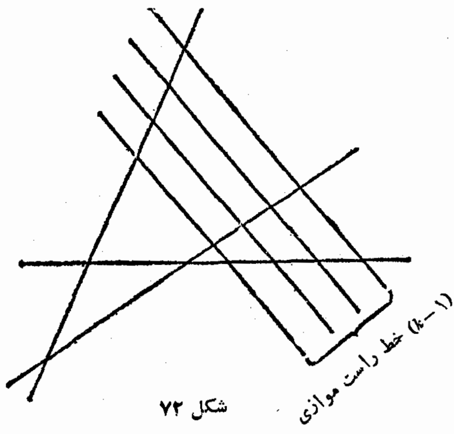
باید به‌ازای $|x_1 - x_2| \in \mathbf{N}$، عددی درست باشد، که با گنگ بودن عدد $\sqrt{2}$ متناقض است). و در حالت $k \neq \sqrt{2}$، مجموعهٔ M را در پاره‌خط راستی قطع می‌کند که نمی‌تواند شامل بی‌نهایت نقطهٔ با مختصات درست باشد.



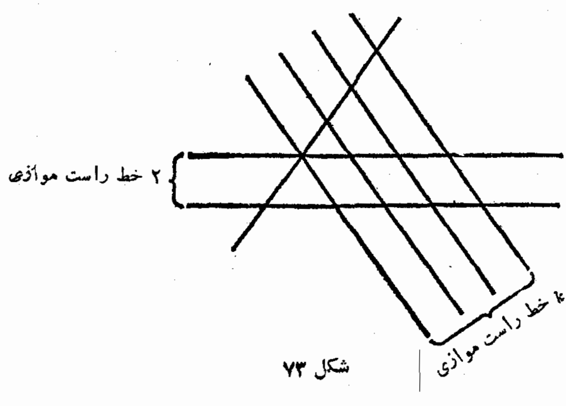
شکل ۷۵



شکل ۷۱



شکل ۷۲



شکل ۷۳

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که، هر نوار واقع بین دو خط راست موازی $y=kx+b_1$ و $y=kx+b_2$، بـه شرط گنگ بـودن مقدار k، همیشه شامل بی‌نهایت نقطهٔ با مختصات درست است (هرچقدر کـه تفاضل $|b_1-b_2|$ کوچك باشد). بنابراین، هر نواری از این گونه، با شرط مسأله سازگار است.

۲۳۹. چون $a_n \geqslant 0$ (برای هر مقدار n)، بنابراین صعودی یا نزولی‌بودن دنبالهٔ $\{a_n\}$، هم‌ارز است با صعودی یا نزولی بودن دنبالهٔ عددهای

$$a_n^2=(\mathbf{x}-n\mathbf{y})^2=\mathbf{x}^2-2n\mathbf{x}\mathbf{y}+n^2\mathbf{y}^2$$

که عبارت است از دنبالـهٔ مقدارهـای سه جملـه‌ای درجـهٔ دوم با ضریب بزرگترین درجهٔ مثبت، درنقطه‌های $n\in\mathbf{N}$. با توجه به‌ویژگی سه‌جمله‌ای‌های درجهٔ دوم، روشن می‌شود که، این دنباله، نمی‌تواند نزولی باشد و تنها وقتی صعودی است که داشته باشیم: $a_1^2<a_2^2$، یا

$$\mathbf{x}^2-2\mathbf{x}\mathbf{y}+\mathbf{y}^2<\mathbf{x}^2-4\mathbf{x}\mathbf{y}+4\mathbf{y}^2$$

بنابراین، شرط الف) هم‌ارز است با شرط

$$3\mathbf{y}^2>2\mathbf{x}\mathbf{y} \quad \text{یا} \quad 3|\mathbf{y}|>2|\mathbf{x}|\cos\varphi$$

که در آن، φ، زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ است. شرط ب) هم، هرگز برقرار نیست.

۲۴۰. M را مجموعهٔ به مساحت کـوچکتر از π، و U_1، ...، U_n را دایره‌های به شعاع واحد و به مرکز نقطه‌های مفروض A_1، ...، A_n و

$$V_i=U_i\cap M,\ (i=1,\ldots,n)$$

فرض می‌کنیم. چون فاصلهٔ بین مرکزهای دایره‌ها، از ۲ بیشتر است، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی مجموعه‌های V_1،...،V_n را هم قطع نمی‌کنند. از طرف دیگر داریم: $V_i\subset M$، بنابراین، مساحت مجموعهٔ

$$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n\subset M$$

از π کمتر است. بنابراین، اگر در ذهن خود، بـه‌کمك انتقال موازی، همهٔ

دایره‌های U_i را (همراه با مجموعه‌های V_i که جزئی از آن‌ها هستند) بر یك دایرهٔ به مرکز O منطبق کنیم، آن وقت در درون آن، می‌توان نقطهٔ B را طوری پیدا کرد که متعلق به هیچ یك از تبدیل‌های مجموعه‌های V_i نباشد. در این صورت، بعد از انتقال موازی مجموعهٔ M به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BO}$، با طول کوچکتر از واحد، مرکزهای A_i همهٔ دایره‌های U_i هم، متعلق بداین مجموعه نخواهند بود.

۲۴۱. توجه می‌کنیم که، مجموع طول‌های دو تصویر یك پاره‌خط، بر خط راست مفروض l و خط راست l' عمود بر آن، کمتر از واحد نیست. درواقع، اگر بردار $\mathbf{a}$ به طول واحد، با یکی از پاره‌خطها موازی باشد، و بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، تصویرهای بردار $\mathbf{a}$ بر خطهای راست l و l' باشند، آن وقت

$$\mathbf{a}=\mathbf{x}+\mathbf{y} \Rightarrow |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|\geqslant|a|=۱$$

ولی طول تصویرهای پاره‌خط، برابر $|\mathbf{x}|$ و $|\mathbf{y}|$ است، بنابراین مجموع آن‌ها هم، از واحد کوچکتر نیست. به این ترتیب، مجموع طول تصویرهای همهٔ پاره‌خطها، از $۴n$ کمتر نیست. یعنی، از بین دو خط راست l و l' می‌توان خط راستی را انتخاب کرد که، مجموع طول تصویرهای پاره‌خطها بر آن، از $۲n$ کمتر نباشد. در نتیجه، روی خط راست انتخابی، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست کم، متعلق به تصویر دو تا از پاره‌خطهاست. اگر از این نقطه، خط راستی عمود بر خط راست انتخابی رسم کنیم، دست کم، این دو پاره‌خط را قطع می‌کند. چون این خط راست، یا موازی خط راست l و یا عمود بر آن است، همان خط راستی است که مسأله می‌خواهد.

۲۴۲. اجتماع همهٔ دایره‌های به شعاع واحد را، که مرکزهای آن‌ها متعلق به مجموعهٔ M واقع بر صفحه باشند، با $U(M)$ نشان می‌دهیم. با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم، برای هر خط شکسته $A_۰A_۱\cdots A_n$، این نابرابری برقرار است:

$$S_{U(A_۰\ldots A_n)}\leqslant ۲\sum_{i=۱}^{n}A_{i-۱}A_i+\pi$$

به ازای $n=1$، مجموعهٔ $U(A_0A_1)$، به دو نیم دایره به شعاع واحد و یك مستطیل به بعدهای A_0A_1 و ۲ تقسیم می‌شود، بنا بر این

$$S_{U(A_0A_1)}=2A_0A_1+\pi$$

یعنی حکم، برای $n=1$ درست است.

اکنون، فرض می‌کنیم، حکم، برای $(n-1)\in\mathbf{N}$ درست باشد. قرار می‌گذاریم:

$$X=U(A_0\cdots A_{n-1}),\ Y=U(A_{n-1}A_n),\ Z=X\bigcap Y$$

در این صورت $S_Z\geqslant\pi$ (زیرا $(Z\supset U(A_{n-1})$) و، با در نظر گرفتن فرض استقرا، داریم:

$$S_{U(A_0\ldots A_{n-1}A_n)}=S_{X\bigcup X}=S_{X\setminus Z}+S_{Y\setminus Z}+S_Z=$$

$$=(S_{X\setminus Z}+S_Z)+(S_{Y\setminus Z}+S_Z)-S_Z=S_X+S_Y-S_Z\leqslant$$

$$\leqslant\left(2\sum_{i=1}^{n-1}A_{i-1}A_i+\pi\right)+(2A_{n-1}A_n+\pi)-\pi=2\sum_{i=1}^{n}A_{i-1}A_i+\pi$$

که اثبات نابرابری را به پایان می‌رساند.

برای خط شکسته‌ای که در صورت مسأله داده شده است، مجموعهٔ $U(A_0\cdots A_n)$ شامل تمامی مربع به ضلع ۵۰ است، بنابراین، طول آن از

$$\frac{1}{2}S_{U(A_0\ldots A_n)}-\frac{\pi}{2}>\frac{1}{2}(50^2-4)=1248$$

کمتر نیست؛ و این، همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

۲۴۳. سمت چپ را روی خط راست مشخص می‌کنیم و یك پاره‌خط را وقتی در سمت چپ دیگری به حساب می‌آوریم که، انتهای چپ اولی در سمت چپ انتهای چپ دومی باشد (دقیق‌تر: و انتهای چپ پاره‌خط اول، در سمت راست انتهای چپ پاره‌خط دوم نباشد). هر پاره‌خط را متناظر با یکی از n شمارهٔ ۱، ۲، ...، n، به ترتیب زیر، قرار می‌دهیم. در گام اول، در بین همهٔ پاره‌خط‌ها، چپ‌ترین آن‌ها را، شمارهٔ ۱ می‌نامیم (اگر از این-

گونه پاره‌خطها، چند تا وجود داشته باشد، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم). سپس، در هر گام بعدی، چپ‌ترین پاره‌خطی را که شماره‌گذاری نشده است، متناظر با شمارهٔ خود (که با شماره‌های قبلی فرق دارد) قرار می‌دهیم (در هر مورد، اگر چند پاره‌خط قابل انتخاب باشند، یکی را به دلخواه درنظرمی گیریم). اگر درمرحله‌ای، به پاره‌خطی برسیم که، برای آن، شمارهٔ نوبتی نگذاریم، به معنای آن است که، این پاره‌خط، با n پاره‌خط قبلی که در سمت چپ آن قرار گرفته‌اند و شماره‌های مختلفی دارند، متقاطع است. در این حالت، انتهای چپ این پاره خط، متعلق به $(n+1)$ پاره خط است. ولی اگر، در مرحله‌ای، پاره‌خط آخر را شماره‌گذاری کنیم، آن وقت بنا به اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دست‌کم یکی از n شمارهٔ متناظر با بیشتر از n پاره‌خط است که، بنا بر نوع شماره‌گذاری ما، غیر متقاطع‌اند. اثبات به پایان رسید.

۲۴۴. هرمجموعهٔ $A_i(i=1, \ldots, n)$، اجتماعی از دو پاره‌خط راست است (که با توجه به «چپ» و «راست» بودن آن‌ها، ازهم جدا شده‌اند). مجموعهٔ A_i را در تناظر با پاره‌خط B_i قرار می‌دهیم که انتهای چپ آن، بر نقطهٔ سمت چپ مجموعهٔ A_i وانتهای راست آن برنقطهٔ سمت راست مجموعهٔ A_i منطبق باشد. چون $B_i \supset A_i$، بنا براین هر دو پاره‌خط (و حتی هر سه پاره‌خط) از پاره خطهای B_1، ...، B_n، نقطهٔ مشترکی دارند. ثابت می‌کنیم، پاره‌خطهای B_k و B_m وجود دارند (که ممکن است $k=m$)، به نحوی که، اشتراك C آن‌ها، متعلق به هریك از پاره‌خطهای B_i است. درواقع، فرض کنید، انتهای چپ پاره‌خط B_k، سمت راست‌ترین نقطه از بین انتهاهای چپ پاره‌خطهای B_i و، انتهای راست پاره‌خط B_m، سمت چپ‌ترین نقطه از بین انتهاهای راست پاره‌خطهای B_i باشد. در این صورت، اشتراك

$$C=B_k \bigcap B_m$$

نه در «چپ‌ترین» انتهای چپ هریك از پاره‌خطهای B_i قرار دارد و نه در «راست‌ترین» انتهای راست آن، یعنی $C \subset B_i$. توجه می‌کنیم که

$$C \bigcap A_i = B_k \bigcap B_m \bigcap A_i \supset A_k \bigcap A_m \bigcap A_i \neq \phi$$

بنا براین، هر مجموعهٔ A_i، یا شامل «چپ‌ترین» نقطهٔ a از مجموعهٔ C است و یا شامل «راست‌ترین» نقطهٔ b آن (ممکن است $a=b$). درواقع، درغیر-این صورت، داریم:

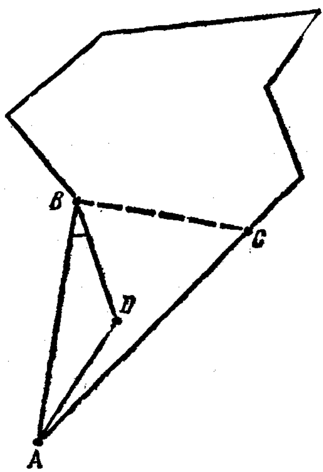
$$a، b\in B_i\setminus A_i \quad و \quad C\subset B_i\setminus A_i$$

و از آن جا

$$C\cap A_i=\phi$$

که درست نیست. بنا بر اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دست‌کم یکی از دو نقطهٔ a یا b، حداقل متعلق به‌نیمی ازمجموعهٔ A_i است، چیزی که باید ثابت‌می‌کردیم.

۲۴۵. فرض می‌کنیم، با $n+4$ نقطهٔ مفروض، شبکه‌ای از پاره‌خط‌ها را ساخته باشیم که با شرط مسأله سازگار باشند (چنین شبکه‌هائی، که آن‌ها را شبکه‌های‌ماکزیمال می‌نامیم، وجود دارند، زیرا تعداد همهٔ پاره‌خط‌های راست ممکن، محدود به عدد C_{n+4}^{2} است). چندضلعی را که، رأس‌های آن بر نقطه‌های مفروض واقع‌اند و، هر ضلع آن، یا پاره‌خطی از شبکه است و یا اجتماعی از چند پاره‌خط شبکه که روی یك خط راست قرار دارند، چندضلعی شبکه‌ای می‌نامیم. مربع K با رأس‌های درچهار نقطهٔ مفروض، که n نقطهٔ بقیه در درون آن قراردارند، همیشه متعلق به شبکه ماکزیمال است، به‌نحوی که این مربع، یك چندضلعی شبکه‌ای است. ثابت می‌کنیم، شبکهٔ ماکزیمال، مربع K را به چنان مثلث‌های شبکه‌ای تقسیم می‌کند که، هریك از آن‌ها، درست شامل سه نقطهٔ مفروض است که در رأس‌های آن قرار گرفته‌اند.



شکل ۷۴

نقطهٔ دلخواه O ازمربع را درنظرمی گیریم. از بین همهٔ چندضلعی‌های شبکه‌ای که شامل این نقطه هستند (مجموعهٔ این چندضلعی‌ها، تهی نیست،

زیرا شامل مربع K است)، m ضلعی M را انتخاب می‌کنیم که حداقل مساحت را داشته باشد. چون مجموع زاویه‌های چندضلعی M، برابر است با

$$180^\circ(m-2)$$

بنابراین، بین رأس‌های آن، می‌توان رأس A را پیدا کرد که زاویهٔ متناظر آن، از ۱۸۰ درجه کمتر باشد. روی هریك از دو ضلع این زاویه، نزدیك‌ترین نقطه (از نقطه‌های مفروض) به رأس A را انتخاب می‌کنیم، به نقطه‌های B و C می‌رسیم (شکل ۷۴). مثلث ABC، به جز دو نقطهٔ A و B، شامل نقطه‌های مفروض دیگری است، مثلاً نقطهٔ C. از بین آن‌ها، نقطهٔ D راانتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویهٔ ABD، کمترین مقدار باشد (اگر چند نقطه از این گونه وجود داشته باشد، آن‌را در نظر می‌گیریم که به B نزدیك‌تر است). دراین صورت، در مثلث ABD، به جز رأس‌های A و B و D، نقطهٔ دیگری از نقطه‌های مفروض وجود ندارد، یعنی هیچ کدام از پاره‌خط‌های شبکه، نقطهٔ مشترکی با ضلع‌های AD و BD (به جز احتمالاً خود این رأس‌ها) ندارد، ولی پاره‌خط‌های AD و BD متعلق به شبکهٔ ماکزیمال هستند. به این ترتیب، مثلث ABD، یك چندضلعی شبکه‌ای است. اگر این مثلث بر چند-ضلعی M منطبق نباشد، آن وقت، چندضلعی M، به دو بخش تقسیم می‌شود که، هرکدام ازآن‌ها، خود یك چندضلعی شبکه‌ای است و این، نوع انتخاب چندضلعی M را نقض می‌کند. در نتیجه، مثلث ABD، همان چند ضلعی M است. به این ترتیب، نقطهٔ O، که جزو نقطه‌های مفروض نیست، در داخل مثلث ABD قرار می‌گیرد و با رأس‌های آن فرق دارد. اکنون، به محاسبهٔ k، تعداد پاره‌خط‌های شبکهٔ ماکزیمال می‌پردازیم. برای این منظور، مجموع زاویه‌های همهٔ مثلث‌هایی را محاسبه می‌کنیم که، مربع K، به آن‌ها تقسیم‌شده است. این مجموع، از یك طرف، برابر است با $180l$ درجه که، درآن، l معرف تعداد مثلث‌هاست؛ از طرف دیگر، از مجموع زاویه‌های رأس‌های مربع وهمهٔ زاویه‌های کاملی که به رأس نقطه‌های مفروض داخل مربع به‌وجود آمده‌اند، تشکیل شده است، یعنی برابراست با $360(n+1)$ درجه. بنا براین

$$180l = 360(n+1)$$

از آن جا $l=۲(n+۱)$. سرانجام، هر ضلع مربع K، یکی از ضلع‌های این مثلث‌هاست، و هر ضلع شبکه، که غیر از ضلع این مربع باشد، ضلع مشترکی برای دو مثلث است. بنابراین، به برابری

$$۴+۲(k-۴)=۳l$$

می‌رسیم، که از آن جا به دست می‌آید:

$$k=\frac{۳}{۲}l+۲=۳n+۵$$

§ ۱۳. نابرابری‌های هندسی

۲۴۶. داریم:

$$۲S=ab\sin\gamma\leqslant ab$$

که در آن، S مساحت مثلث، و γ، زاویهٔ بین دوضلع مفروض است. بنابراین با شرط $a>b$ به دست می‌آید:

$$(a+h_a)-(b+h_b)=\left(a+\frac{۲S}{a}\right)+\left(b+\frac{۲S}{b}\right)=$$

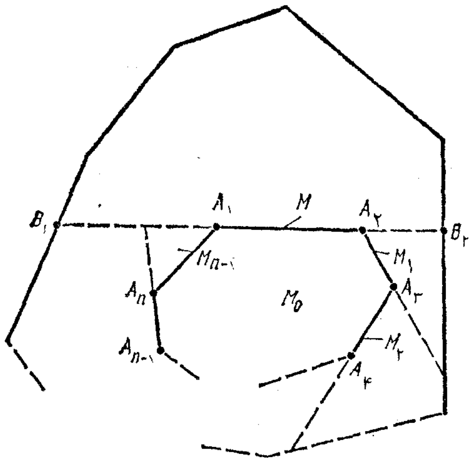
$$=(a-b)\left(۲-\frac{۲S}{ab}\right)\geqslant ۰$$

در ضمن، تنها وقتی به علامت برابری می‌رسیم که داشته باشیم $S=ab$، یعنی وقتی که، زاویهٔ بین ضلع‌های مفروض، قائمه باشد.

۲۴۷. فرض می‌کنیم، چندضلعی محدب

$$M_۰=A_۱A_۲\cdots A_n$$

در درون چندضلعی محدب M واقع باشد. خط راست $A_۱A_۲$، چندضلعی M را به دو بخش تقسیم می‌کند که، یکی از آن‌ها، چند ضلعی محدب $M_۱$ را تشکیل می‌دهد که شامل چندضلعی $M_۰$ است (شکل ۷۵)؛ در ضمن، ضلع



شکل ۷۵

B_1B_2 از چندضلعی M_1، که پاره‌خط راست A_1A_2 را در بر می‌گیرد، ضلع چندضلعی M نیست؛ بنابراین $P_{M_1} < P_M$ (زیرا پاره‌خط راست B_1B_2، از هر خط شکسته‌ای که دو انتهای آن را به هم وصل کند، کوچکتر است). خط راست A_2A_3 از چندضلعی M_1، چندضلعی محدب M_2، را جدا می‌کند که شامل چند ضلعی M_0 است و، در ضمن، $P_{M_2} \leqslant P_{M_1}$. اگر استدلال را، به همین ترتیب، ادامه دهیم، به دنبالهٔ این چندضلعی‌ها می‌رسیم:

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$$

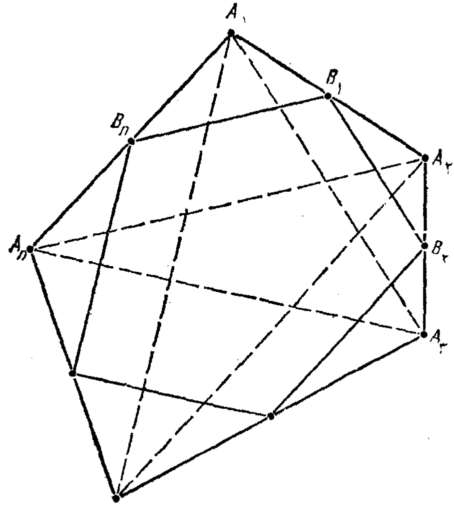
که آخرین آن‌ها، بر چند ضلعی M_0 منطبق است و، در ضمن، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$P_M > P_{M_1} \geqslant P_{M_2} \geqslant \cdots \geqslant P_{M_n} = P_{M_0}$$

که از آن جا، نابرابری مورد نظر، به دست می‌آید.

۲۴۸. مساحت n ضلعی محدب $A_1A_2 \ldots A_n$ را S، و وسط ضلع‌های A_1A_2، A_2A_3، …، A_nA_1 آن را، به ترتیب، B_1، B_2، …، B_n می‌نامیم. اگر فرض کنیم $A_{n+1} = A_1$ و $A_{n+2} = A_2$، آن وقت، هر مثلث

$$A_iA_{i+1}A_{i+2}, \ (i = 1, \ldots, n)$$



شکل ۷۶

هیچ نقطهٔ مشترك درونی با یکی دیگر از مثلث‌ها ندارد، مگر دو مثلثی که در رأس A_{i+1} مشترك‌اند (شکل ۷۶). بنابراین، هر نقطهٔ n ضلعی، نقطهٔ درونی بیش از دو تا از این مثلث‌ها نیست. از آن جا

$$2S \geqslant \sum_{i=1}^{n} S_{A_i A_{i+1} A_{i+2}}$$

هر پاره خط راست $B_i B_{i+1}$ $(B_{n+1}=B_1)$، وسط دو ضلع از مثلث $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ را به هم وصل کرده است، بنابراین

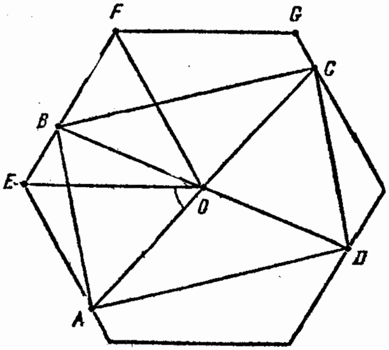
$$S_{B_i A_{i+1} B_{i+1}} = \frac{1}{4} S_{A_i A_{i+1} A_{i+2}}$$

یعنی، می‌توان نوشت:

$$S_{B_1 B_2 \ldots B_n} = S - \sum_{i=1}^{n} S_{B_i A_{i+1} B_{i+1}} =$$

$$= S - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} S_{A_i A_{i+1} A_{i+2}} \geqslant S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S$$

که از آن جا، نابرابری مطلوب، به دست می‌آید.



شکل ۷۷

۳۴۹. فرض می‌کنیم، متوازی‌الاضلاع $ABCD$، درشش‌ضلعی منتظم M محاط شده باشد و، درضمن، نقطهٔ O، مرکز شش‌ضلعی، بر محل برخورد قطرهای متوازیالاضلاع منطبق باشد. رأس‌های E و F از شش ضلعی را طوری انتخاب می‌کنیم که، همراه با نقطهٔ B، نسبت به خط راست OA، در یك نیم صفحه باشند و، در ضمن، داشته باشیم:

$$\widehat{AOE} < ۶۰^\circ ، \widehat{AOF} < ۱۲۰^\circ$$

(شکل ۷۷) [یادآوری می‌کنیم که، با این شرطها، رأس‌های E و F، به صورت یك ارزشی معین می‌شوند]. در این صورت، داریم:

$$۶۰^\circ \leqslant \widehat{AOF} < ۱۲۰^\circ$$

به نحوی که، رأس‌های E و G از شش ضلعی (و همراه با آن‌ها، نقطهٔ B)، که در یك نیم صفحه قرار دارند، از خط راست AO، فاصله‌ای بیشتر از فاصلهٔ رأس F از این خط راست، ندارند. بنابراین

$$S_{AOB} \leqslant S_{AOF} = S_{EOF}$$

چون نقطه‌های A و E بر یك ضلع شش‌ضلعی، که موازی OF است، قرار دارند، از خط راست OF به یك فاصله‌اند. با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم، داریم:

$$S_{AOB} = S_{BOS} = S_{COD} = S_{DOA} = \frac{۱}{۴} S_{ABCD};$$

$$S_{EOF} = \frac{۱}{۶} S_M$$

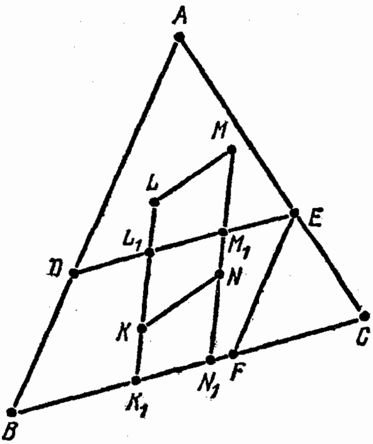
بنا بر این، به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۴}S_{ABCD} \leqslant \frac{۱}{۶}S_M$$

و از آن جا

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{۲}{۳}S_M$$

۳۵۰. این حکم کلی‌تر را ثابت می‌کنیم: مساحت هر متوازی‌الاضلاع $KLMN$، که در مثلث ABC واقع باشد، از نصف مساحت این مثلث تجاوز نمی‌کند. هر یك از خط‌های راست KL و MN، دو ضلع مثلث ABC را قطع می‌کنند (و ممکن است، در رأس‌ها)، یعنی دست کم دو نقطه از چهار نقطهٔ برخورد، بنا به اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، روی یك ضلع قرار می‌گیرند. مثلاً فرض کنید، خط‌های راست KL و MN، ضلع BC را، به ترتیب، در نقطه‌های $K_۱$ و $N_۱$ قطع کنند. روی



شکل ۷۸

ضلع‌های AB، AC و BC، به ترتیب، نقطه‌های D، E و F را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای نقطه‌های $L_۱$ و $M_۱$، برخورد خط‌های راست KL و LM با پاره‌خط DE، داشته باشیم:

$$K_۱L_۱ = KL \quad و \quad L_۱M_۱ \| K_۱N_۱$$

در ضمن $EF\|BD$ (شکل ۷۸). در این صورت، متوازی‌الاضلاع‌های $KLMN$ و $K_۱L_۱M_۱N_۱$، ارتفاع‌ها و قاعده‌هایی برابر دارند، ولی در متوازی‌الاضلاع‌های $BDEF$ و $K_۱L_۱M_۱N_۱$، قاعدهٔ DE کمتر از قاعدهٔ

L_1M_1 نیست، در حالی که ارتفاع‌های برابر دارند؛ بنا براین

$$S_{KLMN}=S_{K_1L_1M_1N_1}\leqslant S_{BDEF}$$

$AE=x\cdot AC$ می‌گیریم؛ پس $EC=(1-x)AC$، و از تشابه مثلث‌های ABC، ADE و EFC به دست می‌آید:

$$S_{BDEF}=S_{ABC}-S_{ADE}-S_{FEC}=S_{ABC}-x^2S_{ABC}-(1-x)^2S_{ABC}=$$

$$=2x(1-x)S_{ABC}\leqslant\frac{1}{2}S_{ABC}$$

زیرا، برای هر مقدار x، داریم: $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$. در نتیجه

$$S_{KLMN}\leqslant\frac{1}{2}S_{ABC}$$

۲۵۱. چون $A\geqslant 90^\circ$، پس نقطهٔ A در دایرهٔ به قطر BC و یا روی محیط آن قرار می‌گیرد؛ مرکز این دایره را O می‌نامیم. اگر ارتفاع مثلث ABC را AH بگیریم، داریم:

$$AH\leqslant AO\leqslant BO=\frac{1}{2}BC$$

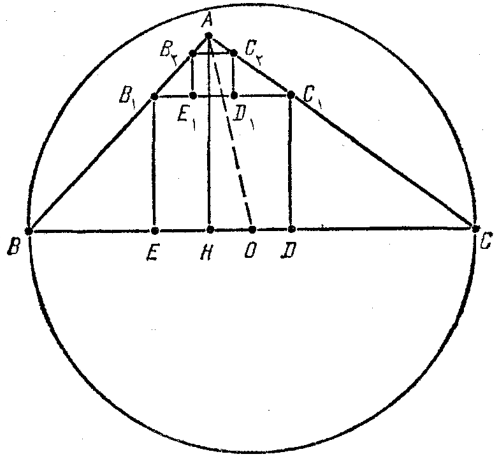
(شکل ۷۹)، یعنی $BC\geqslant 2AH$. از این جا و از تشابه مثلث‌های BB_1E و BAH و، همچنین، دو مثلث CC_1D و CAH، به دست می‌آید:

$$\frac{S_{BB_1C_1C}}{S_{B_1C_1DE}}=\frac{S_{B_1C_1DE}}{S_{B_1C_1DE}}+\frac{S_{BB_1E}}{S_{B_1C_1DE}}+\frac{S_{CC_1D}}{S_{B_1C_1DE}}=$$

$$=1+\frac{BE}{2B_1E}+\frac{CD}{2C_1D}=1+\frac{BH}{2AH}+\frac{CH}{2AH}=1+\frac{BC}{2AH}\geqslant 2$$

یعنی $S_{B_1C_1DE}\leqslant\frac{1}{2}S_{BB_1C_1C}$. به همین ترتیب، داریم:

$$S_{B_2C_2D_1E_1}\leqslant\frac{1}{2}S_{B_1B_2C_2C_1},\ \ldots,\ S_{B_nC_nD_{n-1}B_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}S_{B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}}$$

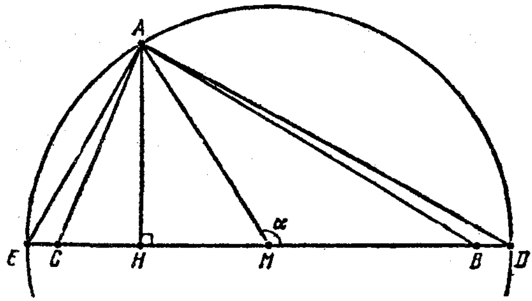


شکل ۷۹

که در آن، n، عبارت است از تعداد مربع‌هایی که ساخته‌ایم. از مجموع این نابرابری‌ها، معلوم می‌شود کــه، مجموع مساحت مربع‌ها، از نصف مساحت چهار ضلعی BB_nC_nC تجاوز نمی‌کند، یعنی از نصف مساحت مثلث ABC کمتر است.

۳۵۴. مثلث ABC را با زاویه‌های حاده در نظر می‌گیریــم و فرض می‌کنیم، A، بزرگترین زاویهٔ مثلث باشد.

دایره‌ای به مرکز نقطهٔ M، وسط BC، و بــه شعاع $R = MA$ رسم می‌کنیم. ایــن دایره، امتداد ضلع BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند



شکل ۸۰

(شکل ۸۰). در این صورت، زاویهٔ DAE قائمه است و

$$a=MB=MC<R$$

(اگر غیر از این باشد، باید داشته باشیم $MB\geqslant MD$ و $MC\geqslant ME$ و از آن جا

$$\widehat{BAC}\geqslant\widehat{DAE}=۹۰^\circ$$

که با فرض ما مبنی بر حاده بودن زاویه‌های مثلث ABC متناقض است).
دست کم، یکی از دو زاویهٔ AMC یا AMB حاده نیست، مثلاً

$$\widehat{AMB}=\alpha\geqslant۹۰^\circ$$

چون $AB\leqslant BC=۲a$ (زیرا $\widehat{BAC}\geqslant\widehat{ACB}$)، بنابراین، طبق قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$R^۲+a^۲=MA^۲+MB^۲\leqslant MA^۲+MB^۲-۲MA\cdot MB\cos\alpha=$$
$$=AB^۲\leqslant۴a^۲$$

از آن جا $R\leqslant\sqrt{۳}a$ و

$$S_{ADE}=\frac{۱}{۲}DE\cdot AH=R\cdot AH\leqslant\sqrt{۳}a\cdot AH=$$

$$=\sqrt{۳}\cdot\frac{۱}{۲}\cdot BC\cdot AH=\sqrt{۳}$$

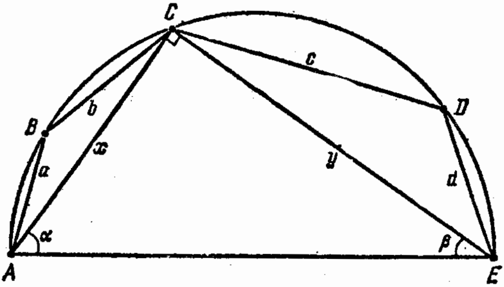
(که درآن، AH، بر BC عمود است). حکم ثابت شد.

۲۵۳. قرار می‌گذاریم:

$$AB=a،\ BC=b،\ CD=c،\ DE=d،\ AC=x،\ CE=y،$$

$$\widehat{CAE}=\alpha،\ \widehat{AEC}=\beta$$

بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان A و E را دوسر قطر نیم‌دایره به حساب آورد (شکل ۸۱)، زیرا وقتی که این دو نقطه را، دو



شکل ۸۱

سر قطر نیم دایره به حساب آوریم، تنها ممکن است عبارت

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+abc+bcd$$

را بزرگتر کرده باشیم. چون $\widehat{ACE}=۹۰^\circ$ پس $x^۲+y^۲=۴$. سپس

$$\widehat{ABC}=۱۸۰^\circ-\widehat{AEC}=۱۸۰^\circ-\beta،$$

$$\widehat{CDE}=۱۸۰^\circ-\widehat{CAE}=۱۸۰^\circ-\alpha$$

در نتیجه، بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها

$$x^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos(ABC)=a^۲+b^۲+۲ab\cos\beta،$$

$$y^۲=c^۲+d^۲-۲cd\cos(CDE)=c^۲+d^۲+۲cd\cos\alpha$$

و سرانجام، از رابطه‌های

$$۲\cos\alpha=x>b، \quad ۲\cos\beta=y>c$$

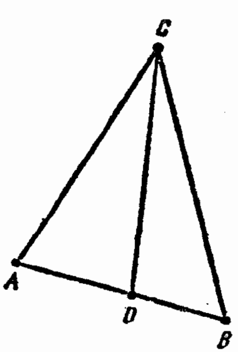
به دست می‌آید:

$$۴=x^۲+y^۲=a^۲+b^۲+aby+c^۲+d^۲+$$
$$+cdx>a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+abc+bcd$$

۲۵۴. چون

$$\overrightarrow{AO}=x\cdot\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{OB}=(۱-x)\cdot\overrightarrow{AB}$$

که‌درآن $x\in(۰،۱)$، بنابراین‌داریم (شکل ۸۲):



شکل ۸۲

$$OC=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{CA}+x(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})|=$$
$$=|(۱-x)\overrightarrow{CA}+x\cdot\overrightarrow{CB}|<CA(۱-x)+CBx$$

(زیرا، بردارهای $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ موازی نیستند)، از آن جا به دست می آید:

$$OC\cdot AB<CA(۱-x)AB+CBxAB=CA\cdot OB+CB\cdot OA$$

۲۵۵. بزرگترین فاصلهٔ بین رأس‌های چهارضلعی را M و کوچکترین این فاصله‌ها را m می‌نامیم. از آن جا که، دست کم یکی از زاویه‌های چهارضلعی، و مثلاً زاویهٔ ABC، زاویه‌ای حاده نیست، بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها، داریم:

$$M^۲\geqslant AC^۲\geqslant AB^۲+BC^۲\geqslant m^۲+m^۲=۲m^۲$$

و از آن جا

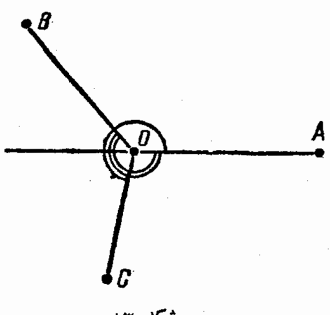
$$M\geqslant\sqrt{۲}m \Rightarrow \frac{M}{m}\geqslant\sqrt{۲}$$

۲۵۶. یادآوری می کنیم که، اگر بین نقطه‌های مفروض، بتوان سه نقطهٔ A، B و C را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، $\widehat{ABC}\geqslant ۱۲۰^\circ$، آن‌وقت، حکم مسأله درست است. درواقع، اگر M را بزرگترین و m را کوچکترین فاصلهٔ بین نقطه‌ها بگیریم، بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها (که برای حالت $\widehat{ABC}=۱۸۰^\circ$ هم درست است)، داریم:

$$M^۲\geqslant AC^۲=AB^۲+BC^۲-$$
$$-۲AB\cdot BC\cos(ABC)\geqslant$$
$$\geqslant m^۲+m^۲+۲m^۲\times\frac{۱}{۲}=۳m^۲$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $M\geqslant\sqrt{۳}m$.

اگر ۶ نقطه، در رأس‌های یك شش‌ضلعی محدب قرار گرفته باشند،



شکل ۸۳

آن وقت، دست‌کم یکی از زاویه‌های داخلی آن از ۱۲۰ درجه‌کمتر نیست (زیرا، مجموع زاویـه‌های داخلی یك شش‌ضلعی محدب، برابر ۱۲۰ × ۶ درجه است). اگر هم، این طور نباشد، دست‌کـم یك نقطهٔ O، دارای این ویژگی است: نسبت به هر خط راستی که، از نقطهٔ O و یکی دیگر از نقطه‌ها بگذرد، همهٔ بقیهٔ نقطه‌ها، دریك‌نیم صفحه قرار نمی‌گیرند. در این‌صورت، با درنظر گرفتن نقطهٔ A و هر یك از دو نیم صفحهٔ حاصل نسبت به خط راست OA، نقطه‌های B و C را، در دو نیم صفحهٔ مختلف، طوری انتخاب می‌کنیم که زاویه‌های AOB و AOC، حداکثر باشند (شکل ۸۳). آن وقت

$$\widehat{AOB}+\widehat{AOC}\geqslant ۱۸۰^\circ$$

(درغیر این صورت، همهٔ نقطه‌ها، نسبت به‌خط راست OB، در یك نیم‌صفحه واقع می‌شوند)؛ بنابراین، سه حالت ممکن است:

$$\widehat{AOB}\geqslant ۱۲۰^\circ \quad \text{یا} \quad \widehat{AOC}\geqslant ۱۲۰^\circ \quad \text{یا} \quad \widehat{BOC}=۳۶۰^\circ-$$

$$-\widehat{AOB}-\widehat{AOC}>۱۲۰^\circ$$

یعنی، در هر سه حالت، می‌توان سه نقطه را طوری پیدا کرد کـه زاویه‌ای بزرگتر یا برابر ۱۲۰ درجه بسازند. بنابراین، حکم مسأله درست است.

۲۵۷. ۱) بنابر قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=$$

$$=a^۲b+b^۲a+c^۲a+a^۲c+b^۲c+$$

$$+c^۲b+۳abc\geqslant ۶abc+۳abc=۹abc$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\geqslant\frac{q}{p}$$

۲) نابرابری

$$a^۲+b^۲+c^۲\geqslant\frac{۱}{۳}P^۲$$

از زنجیرهٔ این رابطه‌ها به دست می‌آید:

$$P^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\leqslant$$
$$\leqslant a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)=$$
$$=3(a^2+b^2+c^2)$$

(۳ بنا بر قضیهٔ هرون و قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌ها، داریم:

$$27S^2=27\cdot\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-c\right)\leqslant$$

$$\leqslant 27\cdot\frac{P}{2}\left[\frac{\left(\frac{P}{2}-a\right)+\left(\frac{P}{2}-b\right)+\left(\frac{P}{2}-c\right)}{3}\right]^3=\frac{1}{16}P^4$$

یعنی $P^2\geqslant 12\sqrt{3}S$.

۴) با توجه به ۲) و ۳) داریم:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}P^2\geqslant 4\sqrt{3}S$$

۵) نابرابری

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{9}P^3$$

از زنجیرهٔ رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$P^3=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab(a+b)+$$
$$+3bc(b+c)+3ca(c+a)\leqslant a^3+b^3+c^3+$$
$$+2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2-ab+b^2)(a+b)+$$
$$+3(a^2-ac+c^2)(a+c)+3(b^2-bc+c^2)(b+c)=$$
$$=9(a^3+b^3+c^3)$$

۶) بنابر نابرابری‌های ۳) و ۵) داریم:

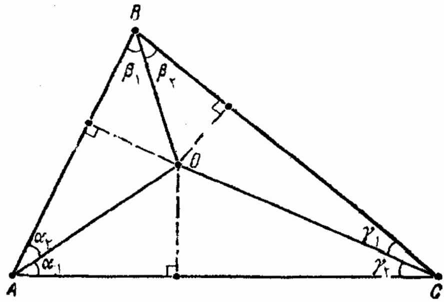
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{1}{9}P^3 \geqslant 12\sqrt{3}\times\frac{1}{9}SP=\frac{4\sqrt{3}}{3}SP$$

۷) از نابرابری ۴) به دست می‌آید:

$$16S^2 \leqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{3}\leqslant$$
$$\leqslant a^4+b^4+c^4$$

۲۵۸. فرض می‌کنیم:

$$\widehat{OAC}=\alpha_1,\ \widehat{OAB}=\alpha_2,\ \widehat{OBA}=\beta_1,\ \widehat{OBC}=\beta_2,$$
$$\widehat{OCB}=\gamma_1,\ \widehat{OCA}=\gamma_2,\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta=\beta_1+\beta_2,\ \gamma=\gamma_1+\gamma_2$$



شکل ۸۴

(شکل ۸۴). در این صورت، نابرابری مطلوب، از زنجیرهٔ رابطه‌های زیر، به دست می‌آید:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}(OC\cos\gamma_1+OC\cos\gamma_2+OB\cos\beta_1+OB\cos\beta_2+$$
$$+OA\cos\alpha_1+OA\cos\alpha_2)=OC\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}+$$
$$+OB\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+OA\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant$$
$$\leqslant OA\cos\frac{\alpha}{2}+OB\cos\frac{\beta}{2}+OC\cos\frac{\gamma}{2}$$

در ضمن، علامت برابری، وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\alpha_1=\alpha_2, \beta_1=\beta_2, \gamma_1=\gamma_2$$

یعنی، وقتی که نقطهٔ O، نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث ABC باشد.

۲۵۹. روشن است که، به ازای $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$، نابرابری مطلوب، به برابری تبدیل می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم، دست‌کم دو زاویهٔ α و β از مثلث، برابر نباشند، در این صورت

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)<2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2}$$

یعنی، نابرابری، به صورت اکید خود، برقرار است. بنابراین، علامت برابری، تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است.

۲۶۰. قرار می‌گذاریم:

$$f(\alpha, \beta, \gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

که درآن، α و β و γ، زاویه‌های مثلث‌اند. با توجه به این‌که مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است، داریم:

$$4\left[f(\alpha, \beta, \gamma)-\frac{3}{4}\right]=$$

$$=4\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}+\frac{1+\cos2\gamma}{2}-\frac{3}{4}\right)=$$

$$=2\cos2\alpha+2\cos2\beta+2\cos2\gamma+3=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$$
$$+4\cos^2(\alpha+\beta)+1=[2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]^2+$$
$$+1-\cos^2(\alpha-\beta)\geqslant 0$$

که ازآن جا، نابرابری موردنظر به دست می‌آید:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant \frac{۳}{۴}$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$\cos(\alpha-\beta)=۱, \cos(\alpha+\beta)=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=۶۰^\circ$$

مقدار $f(\alpha, \beta, \gamma)$، حداکثر ندارد، زیرا برای هر انتخابی از زاویه‌های α، β و γ، به ازای هر مقدار مثبت و به دلخواه کوچك ε، داریم:

$$\varepsilon<\alpha, \beta, \gamma<۱۸۰^\circ-۲\varepsilon$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$|\cos\alpha|<\cos\varepsilon, |\cos\beta|<\cos\varepsilon, |\cos\gamma|<\cos\varepsilon$$

و در نتیجه

$$f(\alpha, \beta, \gamma)<f(\varepsilon, \varepsilon, ۱۸۰^\circ-۲\varepsilon)$$

۲۶۱. برای $\alpha, \beta, \gamma \leqslant ۹۰^\circ$ در مثلث، داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{۲}\cos\frac{\alpha-\gamma}{۲}+$$

$$+\cos\frac{\beta+\gamma}{۲}\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}<۲\sin\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}+۲\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}+$$

$$+۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}=\cos\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

که درآن‌ها، از این نابرابری‌ها استفاده کرده‌ایم:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}<۲\cos\frac{\gamma}{۲},$$

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{۲}<۲\cos\frac{\beta}{۲},$$

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}<۲\cos\frac{\alpha}{۲}$$

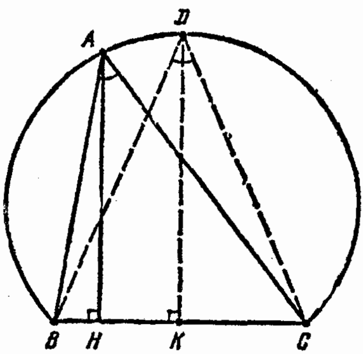
مثلاً، برای اثبات نابرابری اول از این نابرابری‌ها، کافی است توجه کنیم $\frac{\gamma}{۲}<۶۰^\circ$، از آن جا

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant ۱=۲\cos ۶۰^\circ<۲\cos\frac{\gamma}{۲}$$

دو نابرابری دیگر هم، به همین ترتیب، ثابت می‌شوند.

۲۶۲. قرار می‌گذاریم:

$$AB=c،\ AC=b،\ BC=a،\ \widehat{BAC}=\alpha$$



شکل ۸۵

کمان BAC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم (شکل ۸۵). چون نقطهٔ D وسط این کمان، نسبت به همهٔ نقطه‌های دیگر آن، فاصلهٔ بیشتری از وتر BC دارد، بنابراین، برای $AH=h$، ارتفاع مثلث ABC، و DK، ارتفاع مثلث DBC، داریم:

$$h\leqslant DK=BK\cdot cotg\left(\frac{BDC}{۲}\right)=$$

$$=\frac{a}{۲}cotg\frac{\alpha}{۲}$$

بنا بر قضیهٔ واسطه‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{ab+ac+bc}{۴S}\geqslant\frac{۳}{۴S}\sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲}=\frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{\frac{a^۲b^۲c^۲}{\left(\frac{۱}{۲}bc\sin\alpha\right)^۲\cdot\frac{۱}{۲}ah}}=$$

$$=\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{\frac{a}{h\sin^۲\alpha}}\geqslant\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{\frac{۲}{\sin^۲\alpha\, cotg\frac{\alpha}{۲}}}$$

دوباره از قضیهٔ واسطه‌ها استفاده می‌کنیم؛ اگر $x=\cos\alpha$ بنامیم، داریم:

$$\frac{1}{2}\sin^2\alpha \cot g\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha(1+\cos\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(1+x)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+x)^3(1-x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{27\left(\frac{1+x}{3}\right)^3(1-x)}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{27}\left[\frac{1}{4}\left(3\times\frac{1+x}{3}+(1-x)\right)\right]^2=$$

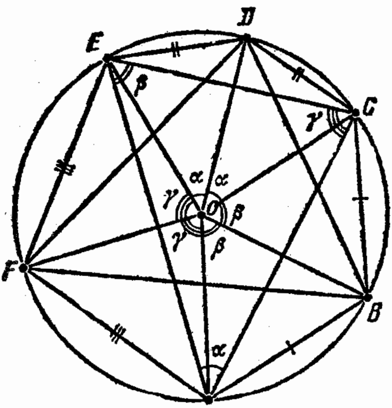
$$=\frac{1}{2}\sqrt{27}\left(\frac{2}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

به نحوی که

$$\frac{ab+ac+bc}{4S}\geqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

۲۶۳. O را مرکز دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی $ABCDEF$ و R را شعاع آن می‌گیریم (شکل ۸۶) و فرض می‌کنیم:

$$\alpha=\widehat{CAE},\ \beta=\widehat{AEC},\ \gamma=\widehat{ACE}$$



شکل ۸۶

با توجه به برابری ضلع‌هایی که در مسأله آمده است، داریم:

$$\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\beta,\ \widehat{COD}=$$

$$=\widehat{DOE}=\alpha,\ \widehat{EOF}=\widehat{FOA}=\gamma$$

مساحت‌های مثلث‌های ACE و BDF را به دست می‌آوریم:

$$S_{ACE}=\frac{EC\cdot CA\cdot AE}{4R}=$$

$$=\frac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma}{4R}=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

و به همین ترتیب

$$S_{BDF}=2R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

از طرف دیگر، برای مقدارهای مثبت α، β و γ، که مجموعی برابر ۱۸۰ درجه داشته باشند، داریم:

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma=(\sin\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\sin\gamma)(\sin\beta\sin\gamma)=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\cdot\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)]\times$$

$$\times\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[1-\cos(\alpha+\beta)]\cdot\frac{1}{2}[1-\cos(\alpha+\gamma)]\cdot\frac{1}{2}[1-\cos(\beta+\gamma)]=$$

$$=\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

یعنی

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma<\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

که از آن‌جا، نابرابری مطلوب، نتیجه می‌شود.

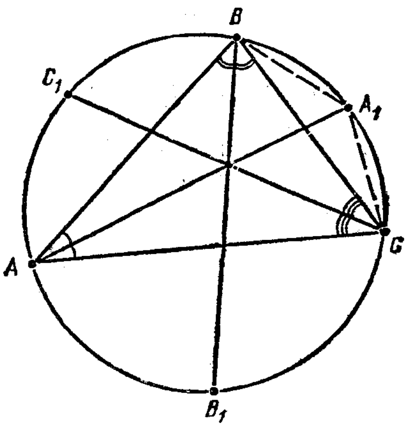
۲۶۴. ثابت می‌کنیم: $AA_1>\frac{1}{2}(AB+AC)$. در واقع، بنابر قضیهٔ بطلمیوس (قضیهٔ ۶۹)، داریم:

$$AA_1\cdot BC=AB\cdot A_1C+AC\cdot A_1B$$

(شکل ۸۷) و، با در نظر گرفتن برابری BAA_1 و CAA_1 (دو زاویهٔ محاطی) به‌دست می‌آید: $A_1B=A_1C=x$ و

$$2AA_1=2\times\frac{AB\cdot x+AC\cdot x}{BC}=$$

$$=(AB+AC)\cdot\frac{2x}{BC}>AB+AC$$



شکل ۸۷

زیرا $BC < 2x = A_1B + A_1C$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$BB_1 > \frac{1}{2}(BA+BC),\ CC_1 > \frac{1}{2}(CA+CB)$$

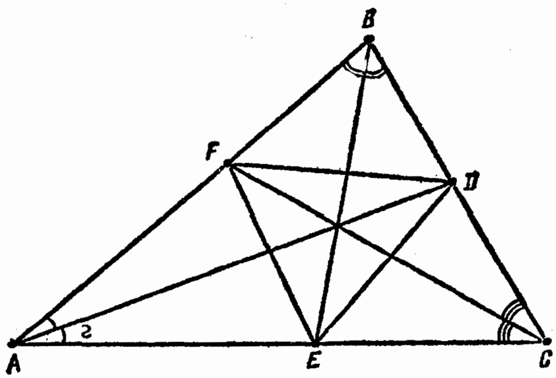
که از مجموع آن‌ها، به نابرابری موردنظر می‌رسیم:

$$AA_1+BB_1+CC_1 > \frac{1}{2}(AB+AC+AB+BC+AC+BC) =$$

$$= AB+BC+AC$$

۲۶۵. قرار می‌گذاریم:

$$a=BC,\ b=AC,\ c=AB,\ S=S_{ABC},\ S_0=S_{DEF}$$



شکل ۸۸

با توجه به ویژگی نیمسازهای مثلث (شکل ۸۸) داریم:

$$\frac{AF}{b}=\frac{BF}{a}=\frac{AF+BF}{a+b}=\frac{c}{a+b}$$

از آن جا

$$AF=\frac{bc}{a+b}$$

به همین ترتیب:

$$AE=\frac{bc}{a+c}$$

بنابراین

$$S_{ABF}=\frac{۱}{۲}AF\cdot AE\sin(BAC)=$$

$$=\frac{bc\sin(BAC)}{۲}\cdot\frac{bc}{(a+b)(a+c)}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\cdot S$$

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$S_{BDF}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}\cdot S،\ S_{CDE}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)}\cdot S$$

و ضمن استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، نتیجه می‌شود:

$$S-S_۰=S_{ABF}+S_{BDF}+S_{CDE}=$$

$$=\left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)\cdot S=$$

$$=\frac{a^۲b+b^۲c+a^۲c+c^۲a+b^۲a+a^۲b}{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot S\geqslant\frac{۶abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot S=$$

$$=۳\left(۱-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ac}{(a+b)(c+b)}-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right)\cdot S=$$

$$=۳(S-S_{AEF}-S_{BDF}-S_{CDE})=۳S_۰$$

به این ترتیب

$$S-S_۰\geqslant ۳S_۰\ \Rightarrow\ S_۰\leqslant\frac{۱}{۴}S$$

۲۶۶. در هر مثلث به ضلع‌های a، b و c، با زاویه‌های رو به رو به آن‌ها α، β و γ، محیط P، مساحت S و شعاع دایره محاطی r داریم:

$$a=r\left(cotg\frac{\beta}{۲}+cotg\frac{\gamma}{۲}\right)،\ b=r\left(cotg\frac{\alpha}{۲}+cotg\frac{\gamma}{۲}\right)،$$

$$c=r\left(cotg\frac{\alpha}{۲}+cotg\frac{\beta}{۲}\right).$$

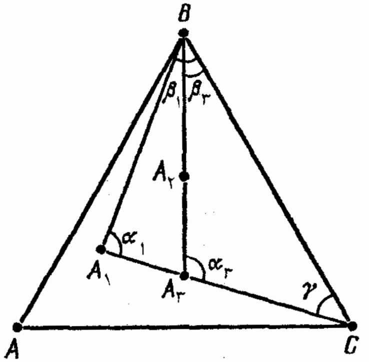
$$\frac{P^۲}{S}=\frac{۲P^۲}{Pr}=\frac{۲(a+b+c)}{r}=۴\left(cotg\frac{\alpha}{۲}+cotg\frac{\beta}{۲}+cotg\frac{\gamma}{۲}\right)$$

بنا براین، برای حل مسأله، کافی است ثابت کنیم:

$$cotg\frac{\alpha_۱}{۲}+cotg\frac{\beta_۱}{۲}+cotg\frac{\gamma}{۲}<$$

$$<cotg\frac{\alpha_۲}{۲}+cotg\frac{\beta_۲}{۲}+cotg\frac{\gamma_۲}{۲}$$

که در آن، فرض کرده‌ایم:



شکل ۸۹

$$\alpha_j=\widehat{BA_jC}،\ \beta_j=\widehat{A_jBC}،\gamma_j=\widehat{A_jCB}$$

نقطهٔ $A_۳$ را روی یکی از ضلع‌های مثلث $A_۱BC$ و مثلاً در برخورد خط راست $BA_۲$ با ضلع $A_۱C$، درنظرمی گیریم (شکل ۸۹). دراین‌صورت $\gamma_۱=\gamma_۳=\gamma$ و، نابرابری متناظر، برای مثلث‌های $A_۱BC$ و $A_۳BC$، به‌این صورت درمی آید:

$$cotg\frac{\alpha_۱}{۲}+cotg\frac{\beta_۱}{۲}<cotg\frac{\alpha_۳}{۲}+cotg\frac{\beta_۳}{۲}$$

برای اثبات آن، توجه می کنیم که

$$cotg\frac{\alpha_j}{۲}+cotg\frac{\beta_j}{۲}=\frac{sin\left(\frac{\alpha_j}{۲}+\frac{\beta_j}{۲}\right)}{sin\frac{\alpha_j}{۲}sin\frac{\beta_j}{۲}}=\frac{۲\,cos\frac{\gamma}{۲}}{cos\left(\frac{\alpha_j}{۲}-\frac{\beta_j}{۲}\right)-sin\frac{\gamma}{۲}}$$

بنا براین، از نابرابری

$$\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}>\cos\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}$$

که نتیجه‌ای است از نابرابری‌های

$$\alpha_3>\alpha_1>\frac{\pi}{3}>\beta_1>\beta_3,\ 0<\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}<\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}<\frac{\pi}{2}$$

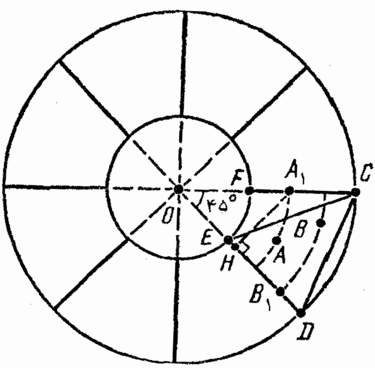
به دست می‌آید:

$$S_1:P_1^2>S_3:P_3^2$$

که در آن، S_j و P_j، مساحت و محیط مثلث A_jBC است. اگر از همین استدلال، در مورد مثلث‌های A_3BC و A_2BC استفاده کنیم (یادآوری می‌کنیم که، نقطهٔ A_2، روی ضلع A_3B از مثلث A_3BC قرار دارد)، به‌دست خواهیم آورد:

$$S_3:P_3^2>S_2:P_2^2$$

که از آن‌ها، نابرابری مطلوب، به دست می‌آید.



شکل ۹۰

۲۶۷. دایره‌ای به مرکز O (مرکز دایرهٔ مفروض) و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم. در این صورت، اگر دو نقطه از نقطه‌های مفروض، در درون این دایره واقع باشد، آن وقت، فاصلهٔ بین آن‌ها، از ۲ کمتر می‌شود و حکم مسأله درست است. اگر نتوان دو نقطه از نقطه‌های مفروض دراین دایره پیدا کرد، دست‌کم ۹ نقطه درداخل حلقه بین دو دایره وجود دارد. با رسم شعاع‌های دایرهٔ بزرگتر، این حلقه را به ۸ بخش برابر تقسیم می‌کنیم (زاویهٔ بین هر دو شعاع مجاور، برابر ۴۵ درجه است؛ شکل ۹۰). در این صورت، دست‌کم، دو نقطهٔ A و B، از نقطه‌های

مفروض در درون یکی از ایـن بخش‌ها، و مثلاً در درون بخش $CDEF$ قرار دارند. روی شعاع‌های OC و OD، نقطه‌های $A_۱$ و $B_۱$ را، به ترتیب، انتخاب می‌کنیم، به نحوی که داشته باشیم:

$$OA_۱=OA، OB_۱=OB$$

یعنی $AB\leqslant A_۱B_۱$ (بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، زیـرا زاویـهٔ AOB از زاویهٔ $A_۱OB_۱$ تجاوز نمی‌کند). توجه می‌کنیم که

$$A_۱B_۱\leqslant \max(A_۱D، A_۱E)$$

درواقع، نقطهٔ $B_۱$ روی خط راست DE و بین نقطهٔ H (تصویر $A_۱$ بر DE) و یکی از دو نقطهٔ D یا E، و مثلاً D، قرار دارد. بنابرایـن HD، تصویر $A_۱D$، از $HB_۱$، تصویر $A_۱B_۱$ کوچکتر نیست، یعنی

$$A_۱B_۱\leqslant A_۱D$$

به همین علت، داریم:

$$DA_۱\leqslant \max(DF، DC);$$

$$EA_۱\leqslant \max\{EF، EC\}$$

از نابرابری‌های

$$EF^۲<CD^۲=OC^۲+OD^۲-۲OC\cdot OD\cos ۴۵^\circ=$$

$$=۲\times\frac{۲۵}{۴}-\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۴}<\frac{۲۵}{۲}-\frac{۲۵\times ۱/۴}{۲}=۳/۷۵<۴،$$

$$EC^۲=FD^۲=OF^۲+OD^۲-۲OF\cdot OD\cos ۴۵^\circ=$$

$$=۱+\frac{۲۵}{۴}-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}<۷/۲۵-\frac{۵\times ۱/۴}{۲}=۳/۷۵<۴$$

به دست می‌آید:

$$AB\leqslant A_۱B_۱\leqslant \max\{DF، DC، EF، EC\}<۲$$

۲۶۸. قرار می‌گذاریم:

$$\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{a}_i ،\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}، \quad (i=1، ...، n)$$

در این صورت، داریم:

$$|\mathbf{a}_i|=1، \overrightarrow{BA_i}=\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}_i-\mathbf{b}$$

و در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{BA_i}=\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{a}_i-\mathbf{b}|=\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{a}_i-\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}_i|\geqslant$$

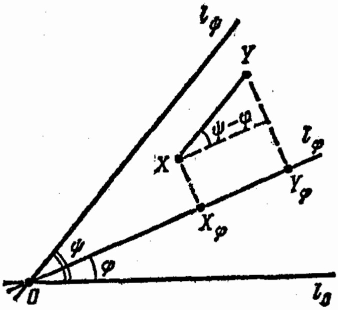
$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}_i-\mathbf{b})\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i^2-\mathbf{b}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i=n-\mathbf{b}\cdot 0=n$$

۲۶۹. در حالتی که نقطه‌های A، B، C، D، E روی یک خط راست باشند، نابرابری برقرار است. در واقع، اگر برای مشخص بودن وضع، نقطهٔ E را بین نقطه‌های C و D بگیریم، به دست می‌آید:

$$(AC+AD)+(BC+BD+AE+BE)\geqslant CD+CD+AB=$$

$$=(CE+ED)+CD+AB$$

خط راستی مثل l_0 واقع بر صفحه و نقطهٔ O را بر l_0، تثبیت می‌کنیم. l_φ را نتیجهٔ دوران l_0 دور نقطهٔ O، به اندازهٔ زاویهٔ φ و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، و X_φ را تصویر نقطهٔ دلخواه X بر l_φ می‌گیریم. دراین صورت، برای هر پاره‌خط راست XY که با خط راستی مثل l_φ موازی باشد، داریم:



شکل ۹۱

$$X_\varphi Y_\varphi=XY\cdot|\cos(\psi-\varphi)|$$

(شکل ۹۱). از این رابطه به دست می‌آید:

$$\int_{\circ}^{\pi} X_\varphi Y_\varphi d\varphi = XY\int_{\circ}^{\pi} |cos(\varphi-\psi)|d\varphi = XY\int_{-\psi}^{\pi-\psi} |cos\chi|d\chi =$$

$$= XY\int_{\circ}^{\pi}|cos\chi|d\chi = ۲XY\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} cos\chi d\chi = ۲XY$$

(زیرا انتگرال تابع $|cos\chi|$، با دورهٔ تناوب π، روی پاره‌خط راست به‌طول π، بستگی به وضع استقرار این پاره‌خط روی محور عددی ندارد). بنابراین، اگر از هر دو طرف نابرابری موردنظر، نسبت به φ و در فاصلهٔ از ۰ تا π، برای تصویرهای A_φ، B_φ، C_φ، D_φ، E_φ نقطه‌های مفروض برخط راست l_φ، یعنی از

$$A_\varphi B_\varphi + C_\varphi D_\varphi + D_\varphi E_\varphi + E_\varphi C_\varphi \leqslant A_\varphi C_\varphi + A_\varphi D_\varphi + \\ + A_\varphi E_\varphi + B_\varphi C_\varphi + B_\varphi D_\varphi + B_\varphi E_\varphi$$

انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$۲AB + ۲CD + ۲DE + ۲EC \leqslant ۲AC + ۲AD + ۲AE + ۲BC + \\ + ۲BD + ۲BE$$

که با نابرابری مطلوب، هم‌ارز است.

§۱۴. مسأله‌های هندسی مربوط به اکسترمم

۲۷۰. AD را قاعدهٔ بزرگتر و BH را ارتفاع ذوزنقهٔ مفروض $ABCD$ فرض می‌کنیم (شکل ۹۲). در این صورت

$$AD = ۱۳$$

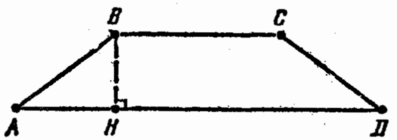
(اگر یکی از ساق‌ها را بزرگترین ضلع ذوزنقه بگیریم، یعنی $AB = CD = ۱۳$، آن وقت $AD + BC = ۲۸ - ۲ \times ۱۳ = ۲$ و مساحت ذوزنقه

$$S_{ABCD}=AH(AD+BC)\times\frac{۱}{۲}\leqslant ۱۳<۲۷$$

می‌شود که با فرض مسأله سازگار نیست)،

$$AB=x،$$

$$BC=۲۸-۱۳-۲x=۱۵-۲x، \; AH=\frac{۱۳-(۱۵-۲x)}{۲}=x-۱،$$



شکل ۹۲

$$BH=\sqrt{AB^۲-AH^۲}=\sqrt{۲x-۱}$$

ضمن استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها به دست می‌آید:

$$S_{ABCD}=\sqrt{۲x-۱}\times\frac{۲۸-۲x}{۲}=\sqrt{(۲x-۱)(۱۴-x)^۲}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{(۲x-۱)+(۱۴-x)+(۱۴-x)}{۳}\right)^۳}=\sqrt{\left(\frac{۲۷}{۳}\right)^۳}=۲۷$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$۲x-۱=۱۴-x \Rightarrow x=۵$$

و $AB=BC=CD=۵$. برابری

$$S_{ABCD}=۲۷/۰۰۱$$

ممکن نیست.

۲۷۱. a، b و c را ضلع‌ها، p را نصف محیط، S را مساحت و r را شعاع دایرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم. دراین صورت، با توجه به‌قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

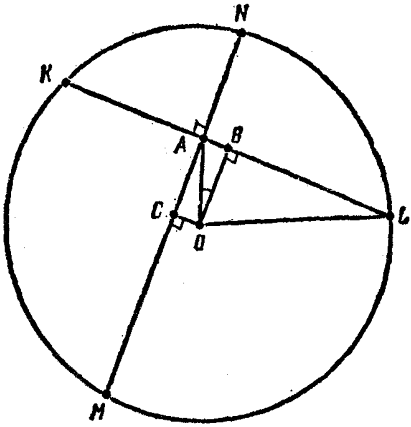
$$(rp)^۲=S^۲=p(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant$$

$$\leqslant p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{۳}\right)^۳=\frac{p^۴}{۲۷}$$

از آن جا $r \leqslant \frac{p}{\sqrt{۲۷}}$. درضمن، r وقتی بـه حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باش. م:

$$p-a=p-b=p-c$$

یعنی،وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.



شکل ۹۳

۲۷۲. فرض می کنیم ازنقطهٔ A، به فاصلهٔ k از نقطهٔ O مرکـز دایره، دو وتر عمود برهم KL و MN را رسم کرده باشیم. عمودهای OB و OC را، بـه ترتیب، بـر وترهای KL و MN رسم می کنیم و زاویـهٔ AOB را α می گیریـم (شکل ۹۳). دراین صورت

$$KL=۲BL=۲\sqrt{۱-k^۲cos^۲\alpha},$$

$$MN=۲MC=۲\sqrt{۱-k^۲sin^۲\alpha}$$

و ازآن جا

$$(KL+MN)^۲=۸-۴k^۲(cos^۲\alpha+sin^۲\alpha)+$$

$$+۸\sqrt{۱-k^۲(cos^۲\alpha+sin^۲\alpha)+k^۴cos^۲\alpha sin^۲\alpha}=$$

$$=۸-۴k^۲+۴\sqrt{۴-۴k^۲+k^۴sin^۲۲\alpha}$$

عبارت اخیر، به ازای $sin ۲\alpha=۱$، یعنی بـه ازای $\alpha=۴۵^\circ$ بـه حداکثر مقدار خود؛ و به ازای $sin ۲\alpha=۰$، یعنی $\alpha=۰^\circ$، بـه حداقل مقدار خود می‌رسد. بنابراین، حداکثر مقدار $KL+MN$ برابر است با

$$\sqrt{۸-۴k^۲+۴(۲-k^۲)}=۲\sqrt{۴-۲k^۲}$$

و حداقل آن

$$\sqrt{۸-۴k^۲+۸\sqrt{۱-k^۲}}=۲(۱+\sqrt{۱-k^۲})$$

۲۷۳. K، L، M، N را، به‌ترتیب، وسط‌ضلع‌های AB، AC، CE، DA از چهار ضلعی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۹۴). در این صورت،داریم:

$$\overrightarrow{KM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})+$$

$$+\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

و به همین ترتیب

$$\overrightarrow{ML}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$$

بنابراین

$$KM=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|\leqslant\frac{۱}{۲}(AD+BC),$$

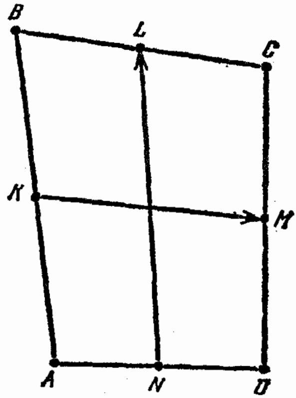
$$ML=\frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|\leqslant\frac{۱}{۲}(AB+DC)$$

و نابرابری زیر درست است:

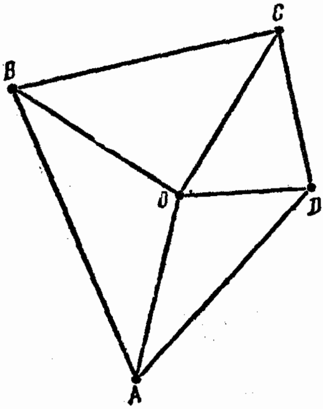
$$KM+LN\leqslant\frac{۱}{۲}(AB+BC+CD+DA)$$

که در آن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که بردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ و همچنین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ هم راستا باشند، یعنی وقتی که $ABCD$، متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۷۴. چون داریم (شکل ۹۵):



شکل ۹۴



شکل ۹۵

$$OA^{۲}+OB^{۲}+DC^{۲}+OD^{۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(OA^{۲}+OB^{۲})+\frac{۱}{۲}(OB^{۲}+OC^{۲})+\frac{۱}{۲}(OC^{۲}+OD^{۲})+$$

$$+\frac{۱}{۲}(OD^{۲}+OA^{۲})\geqslant OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA\geqslant$$

$$\geqslant ۲S_{AOB}+۲S_{BOC}+۲S_{COD}+۲S_{DOA}=۲S$$

و در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$OA=OB=OC=OD،\ \widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOA}$$

بنابراین، قطرهای AC و BD ازچهارضلعی مفروض $ABCD$ برهم عمودند ودرنقطهٔ O یکدیگررا نصف می کنند، یعنی $ABCD$، مربعی است به‌مرکز O.

۲۷۵. فرض می کنیم:

$$a_{۱}=A_{۲}A_{۳}،\ a_{۲}=A_{۱}A_{۳}،\ a_{۳}=A_{۱}A_{۲}،$$

$$h_{۱}=A_{۱}H_{۱}،\ h_{۲}=A_{۲}H_{۲}،\ h_{۳}=A_{۳}H_{۳}$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$a_{۳}h_{۱}+a_{۱}h_{۲}+a_{۲}h_{۳}=$$

$$=a_1h_1\cdot\frac{a_3}{a_1}+a_2h_2\cdot\frac{a_1}{a_2}+a_3h_3\cdot\frac{a_2}{a_3}=2S\left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\right)$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیهٔ واسطه‌ها، داریم:

$$\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\geqslant 3$$

که در آن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}\Rightarrow a_1=a_2=a_3$$

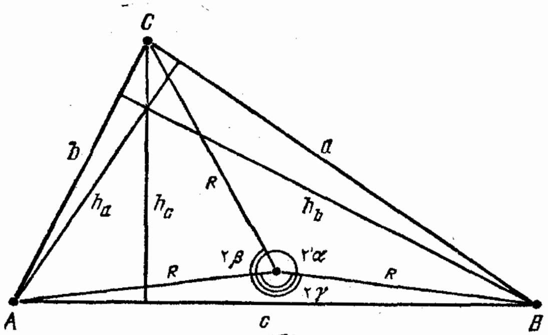
بنا بر این، شرط

$$a_3h_1+a_1h_2+a_2h_3=6S$$

با شرط $a_1=a_2=a_3$ هم‌ارز است.

۲۷۶. h_a، h_b و h_c را ارتفاع‌های مثلث و S را مساحت آن می‌گیریم؛ در این صورت (شکل ۹۶):

$$a\sin\beta=h_c,\ b\sin\gamma=h_a,\ c\sin\alpha=h_b$$



شکل ۹۶

بنا بر این، برابری فرض، هم‌ارز برابری زیر است:

$$P(h_a+h_b+h_c)=9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)$$

از طرف دیگر، بنا بر قضیهٔ ۷۵، داریم:

$$9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)=$$
$$=9R(2R\sin\alpha\cos\alpha+2R\sin\beta\cos\beta+2R\sin\gamma\cos\gamma)=$$
$$=9R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$$

و با توجه به قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها:

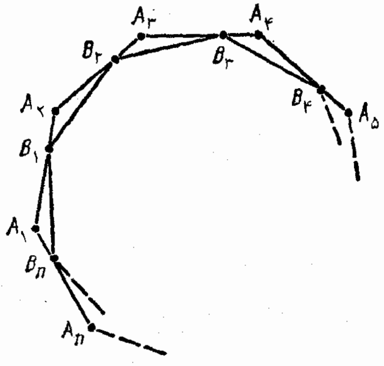
$$P(h_a+h_b+h_c)=(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)\geqslant$$
$$\geqslant 9\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{h_a h_b h_c}=9\sqrt[3]{ah_a\cdot bh_b\cdot ch_c}=9\sqrt[3]{(2S)^3}=18S$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a=b=c,\ \ h_a=h_b=h_c$$

یعنی، وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۲۷۷. فرض کنید، n ضلعی منتظم $B_1\ldots B_n$ به مساحت S_B را در n ضلعی منتظم $A_1\ldots A_n$ به مساحت S_A محاط کرده باشیم. در این صورت، اگر دو n ضلعی برهم منطبق نباشند، روی هر ضلع A_iA_{i+1} (برای $i=1,\ldots,n$؛ $A_{n+1}=A_1$)، درست یک رأس، و مثلاً B_i، قرار دارد. درواقع، در غیر این صورت، بنا بر اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دست کم روی یك ضلع، مثلاً A_1A_2، دو نقطهٔ B_1 و B_2 قرار می‌گیرد (برای درستی $A_1B_2>A_1B_1$)، در این صورت رأس B_3 (که در مثلث $A_1A_2A_3$، متشابه



شکل ۹۷

با مثلث $P_1B_2B_3$، قـرار دارد) و رأس B_n (در مثلـث $A_1A_2A_n$) تنهـا می‌توانند، به ترتیب، روی ضلع‌های A_2A_3 و A_1A_n قرار گیرنـد (با توجه به $n>3$، پاره خط‌های راست A_1A_3 و A_2A_n، قطرهای n ضلعی $A_1 \dots A_n$ هستند و نه ضلع‌های آن)، یعنی $B_1=A_1$ و $B_2=A_2$. ثابت می‌کنیم:

$$A_1B_1=A_2B_2=\dots=A_nB_n$$

درواقع، مثلث‌های $B_1A_2B_2$ و $B_2A_3B_3$ برابرند (شکل ۹۷)، زیرا

$$\widehat{B_1A_2B_2}=\widehat{B_2A_3B_3}=\widehat{B_1B_2B_3}=180^\circ\times\frac{n-2}{n},$$

$$\widehat{A_2B_1B_2}=180^\circ-\widehat{B_1A_2B_2}-\widehat{A_2B_2B_1}=$$

$$=180^\circ-\widehat{B_1B_2B_3}-\widehat{A_2B_2B_1}=\widehat{A_3B_2B_3},\ B_1B_2=B_2B_3$$

بنابراین $A_2B_2=A_3B_3$؛ به‌همین ترتیب، بقیهٔ برابری‌ها هم ثابت می‌شوند. مقدار

$$S_B=S_A-S_{B_1A_2B_2}-S_{B_2A_3B_3}-\dots-S_{B_nA_1B_1}=S_A-nS_{B_1A_2B_2}$$

وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد کـه، مساحت مثلث $B_1A_2B_2$، حداکثر مقدار ممکن باشد. فرض کنید

$$A_1A_2=a,\ A_1B_1=x$$

در این صورت، مقدار

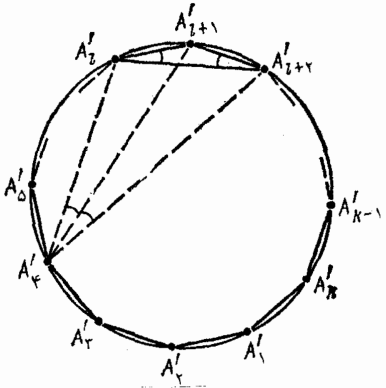
$$S_{B_1A_2B_2}=\frac{1}{2}B_1A_2\cdot A_2B_2\cdot\sin(B_1A_2B_2)=$$

$$=\frac{1}{2}(a-x)x\sin(B_1A_2B_2)=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]\sin(B_1A_2B_2)$$

به ازای $x=\frac{a}{2}$ به حداکثر خود می‌رسد، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$A_1B_1=B_1A_2$$

۲۷۸. ثابت می‌کنیم، حداکثر مقدار α، برابر $\frac{180^\circ}{n}$ است.



شکل ۹۸

فرض کنید، وضعی از نقطه‌ها در صفحه، متناظر با مقدار α باشد. خط راستی را، و مثلاً $A'_1A'_2$، طوری در نظر می‌گیریم که همهٔ نقطه‌ها، نسبت به آن، در یک نیم‌صفحهٔ واقع باشند و نقطهٔ A'_3 را به نحوی انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویهٔ $A'_1A'_2A'_3$، ماکزیمم باشد (شکل ۹۸). در این صورت، همهٔ نقطه‌های دیگر، در درون این زاویه قرار می‌گیرند و

$$\widehat{A'_1A'_2A'_3} \geqslant \alpha(n-2)$$

زیرا، هریک از $(n-2)$ زاویهٔ بین نیم خط‌های راست مجاور A'_2A_i $(A_i \neq A'_2)$، از α کمتر نیستند. سپس، نقطهٔ A'_4 را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویهٔ $A'_2A'_3A'_4$ ماکزیمم باشد. در این صورت همهٔ نقطه‌های

$$A_i \in \{A'_2, A'_3, A'_4\}$$

در داخل این زاویه‌اند و

$$\widehat{A'_2A'_3A'_4} \geqslant \alpha(n-2)$$

اگر $A'_4 \neq A'_1$ و $A'_4 \neq A'_2$، آن وقت، به همین ترتیب، نقطهٔ A'_5 را انتخاب می‌کنیم و غیره. چون تعداد نقطه‌ها برابر n است، بنابراین، یکی از نقطه‌های A'_1، A'_2، A'_3، …، به ناچار، برای نخستین بار تکرار می‌شود. فرض کنید، این وضع، بعد از انتخاب نقطهٔ A'_k اتفاق بیفتد، یعنی زاویهٔ $A'_{k-1}A'_kA_j$، برای نقطه‌ای مثل

$$A_j = A'_i \in \{A'_1, \dots, A'_{k-2}\}$$

به حداکثر خود می‌رسد. در این صورت، اگر $i\neq 1$، آن وقت نقطهٔ A'_1 در درون زاویهٔ $A'_{k-1}A'_kA'_i$، یعنی در درون چند ضلعی محدب $A'_iA'_{i+1}\dots A'_{k-1}A'_k$ قرار می‌گیرد که، نوع انتخاب آن را نقض می‌کند. در نتیجه $i=1$ و k ضلعی محدب $A'_1A'_2\dots A'_k$، زاویه‌هایی به مجموع زیر دارد:

$$180^\circ(k-2)\geqslant k\cdot\alpha(n-2)$$

از آن جا

$$\alpha\leqslant\frac{180^\circ(k-2)}{(n-2)k}=\frac{180^\circ}{n-2}\left(1-\frac{2}{k}\right)\leqslant\frac{180^\circ}{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{180^\circ}{n}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که $k=n$ و

$$A'_1\widehat{A'_2}A'_3=A'_2\widehat{A'_3}A'_4=\dots=A'_k\widehat{A'_1}A'_2=\alpha(n-2)$$

و همهٔ قطرهایی که از یك رأس دلخواه n ضلعی $A'_1\dots A'_n$ رسم می‌شوند، این زاویه را به زاویه‌های برابر α تقسیم کنند. چنین n ضلعی، تنها می‌تواند منتظم باشد، زیرا برای هر مقدار $l=1,\dots,n$ داریم:

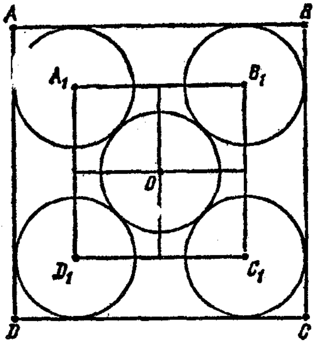
$$A'_l\widehat{A'_{l+2}}A'_{l+1}=A'_{l+2}\widehat{A'_l}A'_{l+1}\Rightarrow A'_lA'_{l+1}=A'_{l+1}A'_{l+2}$$

($A'_{n+1}=A'_1$ و $A'_{n+2}=A'_2$ به حساب آورده‌ایم). (شکل ۹۸)، بنابراین، چند ضلعی باید نه تنها زاویه‌های برابر، بلکه ضلع‌های برابرهم داشته باشد.

سرانجام، رأس‌های nضلعی منتظم، درشرط $\alpha=\frac{180^\circ}{n}$ صدق می‌کنند.

این مطلب، وقتی روشن می‌شود که دایرهٔ محیطی n ضلعی را رسم کنیم و به این نکته توجه کنیم که، زاویهٔ بین قطرهای مجاوری که از یك رأس رسم شوند، مقابل به زاویهٔ $\frac{360^\circ}{n}$، یعنی برابر $\frac{180^\circ}{n}$ اند.

۲۷۹. مربع $ABCD$ را به مرکز O و به ضلع a درنظر می‌گیریم که شامل ۵ دایرهٔ غیرمتقاطع و به‌شعاع واحد باشد. دراین‌صورت، مرکز دایره‌ها، در مربع درونی $A_1B_1C_1D_1$ به مرکز O و به‌ضلع $a-2$ قرار می‌گیرند.



شکل ۹۹

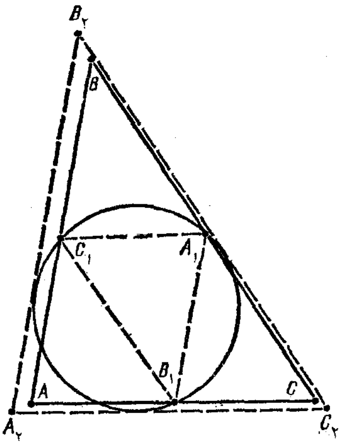
($A_1B_1 \| AB$؛ شکل ۹۹). اگر وسط ضلع‌های رو به‌رو را، در مربع $A_1B_1C_1D_1$ به هم وصل کنیم، آن را به چهار مربع کوچکتر تقسیم می‌کند که، بنا بر اصل دیریکله، در یکی از آن‌ها، دست کم دو تا از مرکزها قرار دارد. در این صورت، فاصلهٔ بین آن‌ها، از یك طرف، از قطر مربع کوچك تجاوز نمی‌کند و، از طرف دیگر، کمتر از ۲ نیست. چون

$$۲ \leqslant OA_۱ = \frac{A_۱B_۱}{۲} \cdot \sqrt{۲} = \frac{a-۲}{۲}\sqrt{۲}$$

بنا بر این

$$a \geqslant ۲\sqrt{۲}+۲$$

در ضمن، اگر $a = ۲\sqrt{۲}+۲$ و مرکز دایره‌ها بر نقطه‌های O، A_1، B_1، C_1، D_1 منطبق باشند، آن گاه همهٔ شرط‌های مورد نظر برقرارند. به این ترتیب، مربع مجهول، ضلعی برابر $۲\sqrt{۲}+۲$ دارد.



شکل ۱۰۰

۲۸۰. A_1، B_1 و C_1 را وسط ضلع‌های BC، AC و AB ازمثلث مفروض ABC می‌گیریم. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را r و شعاع دایرهٔ محیطی آن را R می‌نامیم و فرض می‌کنیم $R = ۲r$. روشن است که ρ، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است (زیرا $A_1B_1C_1$ با ABC متشابه و نسبت تشابه برابر $\frac{۱}{۲}$ است). اگر این دایره بر ضلع‌های مثلث ABC مماس نباشد، مماس‌هایی

موازی با ضلع‌های مثلث ABC بر کمان‌های متناظر این دایره رسم می‌کنیم (شکل ۱۰۰). به این ترتیب، دایره‌ای به شعاع ρ به دست می‌آید که در مثلث $A_2B_2C_2$، که با ABC متشابه است و مساحتی بیشتر از مساحت مثلث ABC دارد، محاط است. بنابراین داریم:

$$r<\rho=\frac{R}{2}$$

که فرض ما را نقض می‌کند. پس باید دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$، بر ضلع‌های AB، BC و AC مماس باشد و، بنا به ویژگی خط‌های راست مماس بر دایره داشته باشیم:

$$AB_1=AC_1,\ \ BC_1=BA_1,$$

یعنی $AC=BC=AB$ و مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است.

۳۸۱. پاره‌خط‌های راست B_1C_1 و B_2C_2 را از نقطهٔ O طوری می‌گذرانیم که، در آن‌ها، دو انتهای B_1 و B_2 روی ضلع AB و دو انتهای C_1 و C_2 روی ضلع AC از زاویهٔ مفروض BAC باشند. ثابت می‌کنیم، اگر داشته باشیم:

$$\widehat{AOB_2}>\widehat{AOB_1}\geqslant 90^\circ$$

(شکل ۱۰۱)، آن وقت داریم:

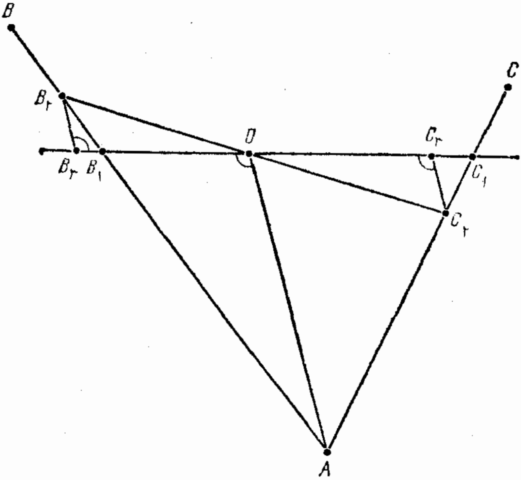
$$\frac{1}{B_1O}+\frac{1}{C_1O}>\frac{1}{B_2O}+\frac{1}{C_2O}$$

از نقطه‌های B_2 و C_2، خط‌های راستی موازی AO رسم می‌کنیم تا، به ترتیب، B_1C_1 را در نقطه‌های B_3 و C_3 قطع کنند. چون

$$\widehat{B_2B_3O}=\widehat{AOB_3}\geqslant 90^\circ$$

بنابراین $OB_2>OB_3$ و

$$\frac{1}{B_1O}-\frac{1}{B_2O}=\frac{B_2O-B_1O}{B_1O\cdot B_2O}>\frac{B_3O-B_1O}{B_1O\cdot B_2O}=\frac{B_1B_3}{B_1O\cdot B_2O}=\frac{B_2B_3}{AO\cdot B_2O}$$



شکل ۱۰۱

(زیرا، دو مثلث $B_1B_3B_2$ و B_1OA متشابه‌اند). به همین ترتیب

$$\frac{1}{C_1O}-\frac{1}{C_2O}>-\frac{C_2C_3}{AO\cdot C_2O}$$

اگر این دونابرابری را باهم جمع کنیم، با توجه به‌تشابه مثلث‌های B_2B_3O و C_2C_3O، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{B_1O}+\frac{1}{C_1O}-\left(\frac{1}{B_2O}+\frac{1}{C_2O}\right)>\frac{B_2B_3}{AO\cdot B_2O}-\frac{C_2C_3}{AO\cdot C_2O}=$$

$$=\frac{1}{AO}\left(\frac{B_2B_3}{B_2O}-\frac{C_2C_3}{C_2O}\right)=0$$

اگر خط راستی که از O می‌گذرد، بر خط راست AO عمود باشد و نیم خطهای راست AB و AC را، به ترتیب، در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع کند، آن وقت، B_1C_1، همـان پاره‌خط مجهـول است. در واقع، برای هر پاره‌خط راست دیگر B_2C_2، که از نقطهٔ O گذشته است، یکی ازدونابرابری زیر را داریم:

$$\widehat{AOB_2}>90^\circ \quad \text{یا} \quad \widehat{AOC_2}>90^\circ$$

برای مشخص بودن وضع، می‌توان نقطه‌های $B_۲$ و $C_۲$ را، به ترتیب، بر نیم خط‌های راست AB و AC گرفت و، مثلاً، نابرابری اول را در نظر گرفت). در این صورت، نابرابری که در بالا ثابت کردیم، برقرار می‌شود.

اگر خط راست عمود بر AO در نقطهٔ O، یکی از ضلع‌های زاویهٔ BAC، و مثلاً AC را قطع نکند، آن وقت پاره‌خط مجهول را نمی‌توان ساخت. فرض می‌کنیم، پاره‌خط راست مجهول، $B_۲C_۲$ باشد که دو انتهای $B_۲$ و $C_۲$ آن، به ترتیب، بر نیم خط‌های AB و AC قرار گرفته باشند. در این صورت

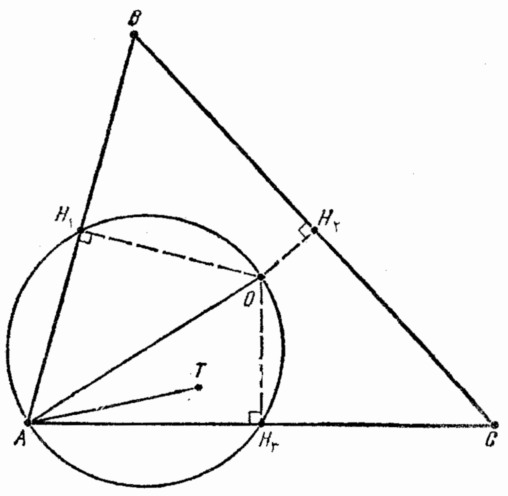
$$\widehat{AOB_۲} > ۹۰^\circ$$

یعنی، اگر نقطهٔ $C_۱$ را در امتداد پاره‌خط $AC_۲$، از طرف نقطهٔ $C_۲$ در نظر بگیریم و خط راست $C_۱B_۱$ را از نقطهٔ O بگذرانیم، دوباره

$$۹۰^\circ < \widehat{AOB_۱} < \widehat{AOB_۲}$$

و با توجه به نابرابری که در بالا ثابت کردیم، $B_۲C_۲$ با شرط مسأله نمی‌سازد.

۲۸۲. الف) فرض می‌کنیم، مثلث ABC، زاویهٔ منفرجه نداشته باشد.



شکل ۱۵۲

در این صورت، نقطهٔ مجهول T، بر نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث (به شعاع R) منطبق است.

اگر از نقطهٔ O، عمودهای OH_1، OH_2، OH_3 را، به ترتیب، بر ضلع‌های AB، BC، AC رسم کنیم، مثلث ABC، به سه چهارضلعی

$$OH_1AH_3,\ OH_1BH_2,\ OH_2CH_3$$

تقسیم می‌شود (شکل ۱۰۲). اگر نقطهٔ $T\neq O$ مثلاً درچهارضلعی اول واقع باشد، آن وقت

$$m(T)\leqslant AT<AO=R=m(O)$$

زیرا نقطهٔ T درسطح دایرهٔ به قطر AO قرار دارد (این دایره، از چهاررأس چهارضلعی OH_1AH_3 می‌گذرد، زیرا به‌دلیل قائمه بودن دو زاویهٔ OH_1A و OH_3A، یك چهارضلعی محاطی است).

اکنون، فرض می‌کنیم، زاویهٔ رأس A ازمثلث ABC منفرجه باشد و، در ضمن، داشته باشیم: $\hat{C}\leqslant\hat{B}$. از نقطه‌های D و E، وسط ضلع‌های AB و AC، عمودهایی بر این ضلع‌ها رسم می‌کنیم تا ضلع BC را، به ترتیب، در نقطه‌های F و G قطع کنند و $BF=b$ و $CG=c$ می‌نامیم. توجه می‌کنیم که $c\leqslant b$؛ در ضمن، برابری $b=c$ تنها وقتی برقرار است که دو زاویهٔ B و C برابر باشند. درواقع، از مثلث‌های BDF، CEG و ABC (بنا برقضیهٔ سینوس‌ها) داریم:

$$\frac{b}{c}=\frac{BD}{\cos B}\cdot\frac{\cos C}{CE}=\frac{AB\cos C}{AC\cos B}=\frac{\sin C\cos C}{\sin B\cos B}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}\leqslant 1$$

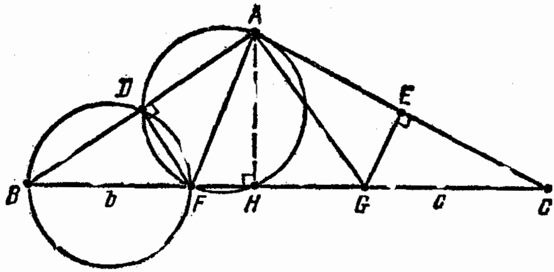
زیرا $180^\circ-2C<2B\leqslant 2C<0$.

سپس، توجه می‌کنیم که $BG>c$ (و همچنین $FC>b$)، چون

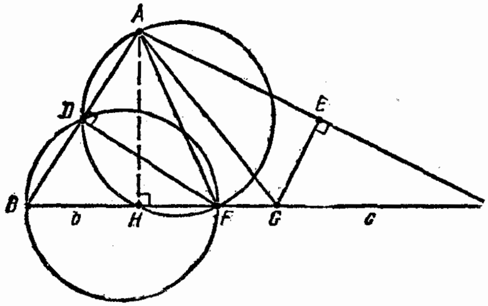
$$\hat{B}+\hat{C}<90^\circ<\widehat{BAC}$$

یعنی

$$\hat{B}<\widehat{BAC}-\hat{C}=\widehat{BAG} \quad \text{و} \quad BG>AG=GC=c$$



شکل ۱۰۳



شکل ۱۰۴

سرانجام، ارتفاع AH از مثلث ABC، آن را به دو مثلث ABH و ACH تقسیم می‌کند. اگر $T \neq F$، در مثلث ABH باشد، آن وقت

$$m(T) < m(F) = b$$

زیرا، یا دردایرهٔ به قطر BF و یا دردایرهٔ به قطر AF قرار دارد (شکل‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ کــه، درآن‌ها، به ترتیب، حالت‌های $\hat{B} < 45^\circ$ و $\hat{B} > 45^\circ$ نشان داده شده است). به همین ترتیب، اگر نقطهٔ $T \neq G$، در مثلث AGH باشد، آن وقت

$$m(T) < m(G) = c$$

به این ترتیب، اگر مثلث ABC، متساوی‌الساقین باشد، هر دو نقطهٔ F و G، جواب مسأله‌اند، ولی اگر متساوی‌الساقین نباشد، آن وقت

$$m(F) < m(G)$$

و نقطهٔ مجهول، بر نقطهٔ G منطبق است.

ب) برای هر نقطهٔ T از مثلث ABC داریم:

$$M(T) \geqslant TB،\ \ M(T) \geqslant TC$$

ازآن جا

$$۲M(T) \geqslant TB+TC \geqslant BC \Rightarrow \frac{۱}{۲}BC \leqslant M(T)$$

سرانجام، بنا بر استدلالی که در بخش الف) داشتیم، مقدار $m(T)$، درحالت $A \geqslant ۹۰^\circ$، در نقطه‌ای مانند G از پاره‌خط BC، بـه حداکثر خود می‌رسد. در نتیجه، برای هر نقطهٔ T از مثلث ABC، داریم:

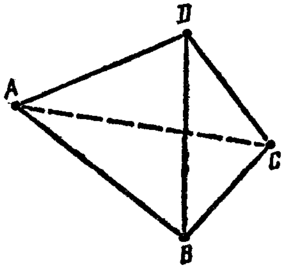
$$m(T) \leqslant m(G) \leqslant \min\{GB، GC\} \leqslant \frac{۱}{۲}BC$$

فصل چهارم

هندسهٔ فضائی

---

§۱۵. چهاروجهی‌ها



شکل ۱۰۵

۲۸۳. AB را بزرگترین یال چهاروجهی $ABCD$ می گیریم. دراین صورت داریم (شکل ۱۰۵):

$$(AC+AD-AB)+(BC+BD-BA)=$$
$$=(AC+CB-AB)+$$
$$+(AD+DB-AB)>۰$$

بنا براین، دست‌کم، یکی از دو نابرابری

$$AC+AD>AB \quad \text{یا} \quad BC+BD>BA$$

برقرار است و این، به معنای آن است که با یال‌های AC، AD، AB، و یا با یال‌های BC، BD، BA می‌توان یك مثلث ساخت (بقیهٔ نابرابری‌های لازم، را، می‌توان، از نوع انتخاب AB، نتیجه گرفت).

۲۸۴. برای چهاروجهی مفروض $ABCD$، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، داریم (شکل ۱۰۵ را ببینید):

$$2AB\cdot AC\cos(BAC)=AB^2+AC^2-BC^2=$$
$$AB^2+AD^2-BD^2=2AB\cdot AD\cos(BAD)$$

که از آن جا، نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{sign}\cos(BAC)=\operatorname{sign}\cos(BAD)$$

یعنی، زاویه‌های BAC و BAD، یا هر دو حاده و یا هر دو غیر حاده‌اند. همین نتیجه را، می‌توان، برای هر دو زاویهٔ مسطحهٔ این چهاروجهی، که رأسی مشترك داشته باشند، به دست آورد. اگر همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ چهار-وجهی $ABCD$ حاده باشند، آن‌وقت، هر وجه آن، مثلثی با زاویه‌های حاده است. اگر هم، یکی از زاویه‌های مسطحه، مثلاً در رأس A، حاده نباشد، آن‌وقت، هرسه زاویهٔ مسطحهٔ این رأس غیرحاده‌اند، یعنی همهٔ بقیهٔ زاویه‌های مسطحهٔ چهاروجهی، حاده می‌شوند (زیرا، هر وجه، دست‌کم دو زاویهٔ حاده دارد). دراین حالت، مثلث BCD، با زاویه‌های حاده خواهد بود.

۲۸۵. از دو انتهای پاره‌خط راست AB به طول d، خط‌های راستی عمود برهم وعمود بر AB رسم می‌کنیم. روی این خط‌های راست، پاره‌خط‌هایی به طول a به نحوی جدا می‌کنیم که، نقطه‌های A و B، وسط این پاره‌خط‌ها باشند. دوانتهای این پاره‌خط‌ها، رأس‌های یك چهاروجهی هستند که مساحت هر وجه آن، برابر است با

$$\frac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{a^2+4d^2}$$

و حجمی برابر $\frac{1}{6}a^2d$ دارد. به این ترتیب، اگر دو چهاروجهی، به ترتیب، متناظر با $a_1=3$، $d_1=2$ و $a_2=1$، $d_2=\sqrt{56}$ در نظر بگیریم، دارای وجه‌هایی با مساحت برابرند، زیرا

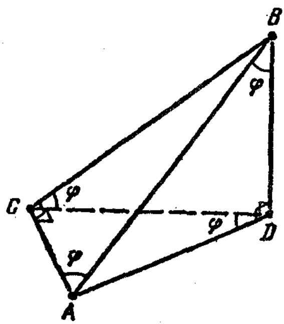
$$a_1\sqrt{a_1^2+4d_1^2}=15=a_2\sqrt{a_2^2+4d_2^2}$$

در حالی‌که حجم‌های متفاوت دارند، زیرا

$$a_1^2d_1=18\neq\sqrt{56}=a_2^2d_2$$

به این ترتیب، باید به پرسش مسأله، پاسخ منفی داد.

۲۸۶. فرض می‌کنیم، چهاروجهی $ABCD$، به صورتی که در مسأله آمده است، وجود داشته باشد و ثابت می‌کنیم، AB بزرگترین و CD کوچکترین یال است. در شرط مسأله روشن می‌شود که هریك از زاویه‌های ACB و ADB وهمچنین، یکی از دوزاویهٔ ACD یا ADC ــ ومثلاً ACD ــ قائمه‌اند (شکل ۱۰۶). زاویهٔ BAC را برابر φ می‌گیریم. دراین‌صورت، زاویهٔ ABD هم برابر φ می‌شود، زیرا درغیراین‌صورت، باید زاویهٔ BAD برابر φ باشد، یعنی $AC=AD$، که ممکن نیست، (زیرا AD وتر مثلث ACD است). به همین ترتیب $\widehat{CDA}=\varphi$ (در غیر این صورت، زاویهٔ CAD برابر φ می‌شود، یعنی $AB=AD$، که ممکن نیست). به این ترتیب، داریم:



شکل ۱۰۶

$$BD=AC=AB\cos\varphi,\quad BC=AD=AB\sin\varphi,$$

$$CD=AD\cos\varphi=AB\sin\varphi\cos\varphi,\quad AC=AD\sin\varphi=AB\sin^2\varphi$$

از آن جا به دست می‌آید:

$$\cos\varphi=\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$$

یعنی

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

بنابراین، اگر یال بزرگتر AB طولی برابر واحد داشته باشد، طول کوچکتر یال CD برابر

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{\cos\varphi}\cdot\cos\varphi = \left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

می‌شود. برای اثبات وجود چنین چهاروجهی، کافی‌است توجه کنیم که، اگر چهاروجهی $ABCD$ را با یال‌های

$$CA = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}،\ CB = \left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}،\ CD = \left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

در نظر بگیریم و، برای زاویه‌ها، فرض کنیم:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DCA} = ۹۰^\circ،\ \widehat{BCD} = \arccos\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$AB = ۱،\ AD = CB،\ BD = AC،\ \widehat{CAB} = \widehat{BCD}$$

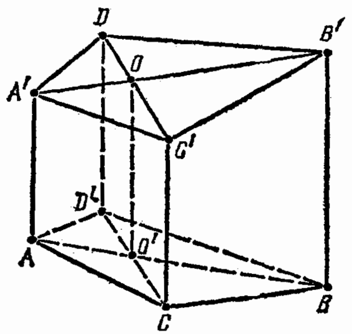
که از آن جا، برابری مثلث‌های

$$\triangle BAD = \triangle BAC،\ \triangle CBD = \triangle DAC$$

و تشابه همهٔ وجه‌های چهاروجهی نتیجه می‌شود.

۲۸۷. از آن‌جا که هریك از صفحه‌های رسم شده، شامل یکی از پاره‌خط‌هایی‌است که وسط دو یال‌مقابل‌چهاروجهی را به‌هم‌وصل‌می‌کنند، بنابراین همهٔ صفحه‌ها، از نقطهٔ برخورد این پاره‌خط‌های راست، که در درون چهار وجهی واقع است، می‌گذرند. (قضیهٔ ۹۲ را ببینید). بنابراین، شش صفحه‌ای که‌رسم کرده‌ایم، تمامی فضا را به‌کنج‌هایی‌تقسیم می‌کنند که در رأس

خود مشترک‌اند، یعنی هریک از بخش‌های چهاروجهی، دست‌کم یک وجه‌دارد که متعلق بــه وجه چهار وجهی است. از طرف دیگــر، هیچ دو وجهی از چهار وجهی، نمی‌توانند وجه‌های یکی از بخش‌ها باشند، زیرا هر دو وجه چهار وجهی، به وسیله صفحه‌ای که از یال مشترک آن‌ها گذشته است، از هم جدا شده‌اند. بنابرایــن، تعداد بخش‌های چند وجهی، برابر است با تعداد بخش‌های سطح آن (که به‌وسیلهٔ صفحه‌ها تقسیم شده است)، و چون هر وجه چهاروجهی، به‌شش‌بخش تقسیم می‌شود (برابر تعداد بخش‌های یک مثلث که به وسیلهٔ میانه‌های آن تقسیم شده باشد)، تعداد همهٔ بخش‌ها، برابر ۴×۶، یعنی ۲۴ می‌شود. با تــوجــه به تقارن (نسبت بــه شش صفحه‌ای کــه رسم کرده‌ایم)، همهٔ بخش‌های چهاروجهی باهم برابرندو حجم هرکدام از آن‌ها، برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است.



شکل ۱۵۷

۲۸۸. نقطهٔ D وصفحهٔ مثلث $A'B'C'$ به هر ترتیبی قرار گرفته باشند، دست‌کم یکــی از ضلع‌های این مثلث، باخط راستی که ازرأس مقابــل بــه ایــن ضلع و نقطهٔ D می‌گذرد، یکدیگر را قطع‌می‌کنند. برای مشخص بودن وضع، فــرض کنید، نقطهٔ O، محل برخورد ضلع $A'B'$ با خط راست $C'D$ باشد؛ خطِ راستی‌که از نقطهٔ O موازی خط راست DD' رسم کنیم، صفحهٔ ABC را در نقطهٔ O' قطع می‌کند (شکل ۱۵۷). در این صورت، از موازی بودن خط‌های راست AA'، BB'، CC'، DD'، OO' نتیجه می‌شود که، پاره‌خط راست AB، خط راست DD' را در نقطهٔ O' قطع می‌کند.

زاویهٔ بین‌خط راست OO' وصفحهٔ ABC را φ می‌نامیم، آن‌وقت‌داریم:

$$V_{ABCD}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}\cdot DD'\cdot \sin\varphi=\frac{DD'}{OO'}\cdot\frac{۱}{۳}S_{ABC}\cdot OO'\cdot \sin\varphi=$$

$$=\frac{DD'}{OO'}V_{ABCO}$$

به همین ترتیب

$$V_{A'B'C'D'}=\frac{DD'}{OO'}V_{A'B'C'O'}$$

اکنون، اگر فاصلهٔ بین خطهای راست AA' و BB' را a بگیریم، داریم:

$$S_{ABO}=\frac{۱}{۲}AB.OO'\sin(OO'B)=\frac{۱}{۲}a\cdot OO'$$

و به همین ترتیب

$$S_{A'B'C'}=\frac{۱}{۲}a\cdot OO'$$

اگر فاصلهٔ بین صفحهٔ ABB' و خط راست CC' را b فرض کنیم، به دست می‌آید:

$$V_{ABCO}=\frac{۱}{۳}S_{ABO}\cdot b=\frac{۱}{۳}S_{A'B'O'}\cdot b=V_{A'B'C'O'}$$

و از آن جا

$$V_{ABCD}=\frac{DD'}{OO'}V_{ABCO}=\frac{DD'}{OO'}V_{A'B'C'O'}=V_{A'B'C'D'}$$

۲۸۹. V را حجم چهاروجهی مفروض و k را عدد مجهول می‌گیریم.

$$\frac{V}{V_{OBCD}}=\frac{AA_۱}{OA_۱}=\frac{AO}{A_۱O}+\frac{OA_۱}{OA_۱}=k+۱$$

به همین ترتیب

$$\frac{V}{V_{OACD}}=\frac{V}{V_{OABD}}=\frac{V}{V_{OABC}}=k+۱$$

از آن جا

$$k+۱=\frac{۴V}{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}=\frac{۴V}{V}=۴$$

یعنی $k=۳$.

۲۹۰. ثابت می‌کنیم، همـهٔ خط‌های راست K_nL_n، برای $n\in\mathbf{N}$، از نقطهٔ ثابت O می‌گذرند؛ و این نقطهٔ O، بر خط راستی واقع است که از رأس A موازی خط راست BC رسم شده باشد. درواقع، اگرخط راست K_nL_n، خط راست BC را در نقطهٔ P (واقع بـر نیم خط CB؛ شکل ۱۰۸) قطع کند، از تشابه مثلث‌های متناظر به دست می‌آید:

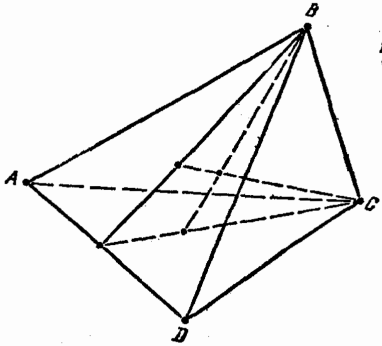
$$\frac{PB}{OA}=\frac{BK_n}{AK_n}=n-۱،\quad \frac{PC}{OA}=\frac{CL_n}{AL_n}=n$$

که از آن جا به دست می‌آید:

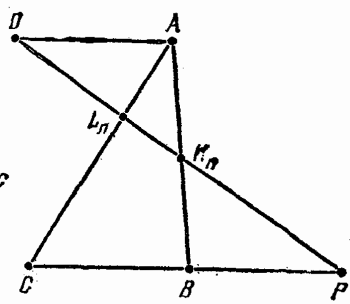
$$OA=nOA-(n-۱)OA=PC-PB=BC$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود کـه همهٔ خط‌های راست L_nM_n $(n\in\mathbf{N})$، از نقطهٔ ثابت Q واقع برخط راستی که از رأس A موازی CD رسم شده‌باشد، می‌گذرد. بنابراین، همهٔ صفحه‌های $K_nL_nM_n$، برای $n\in\mathbf{N}$، از خط راست OQ می‌گذرند.

۲۹۱. اگر بخواهیم دو خط راستی که نقطه‌های B و C را به مرکز



شکل ۱۰۹



شکل ۱۰۸

دایرهٔ محاطی مثلث‌هـای ACD و ABD وصل می‌کنند، یکدیگـر را قطع کنند، لازم و کافی است که بر یك صفحه واقع باشند. و این، بـه نوبهٔ خود، هم‌ارز با آن است کـه نیمسازهای دو زاویهٔ ABD و ACD، یال AD را دریك نقطه قطع کنند (شکل ۱۰۹). و شرط اخیر، بنابر ویژگی نیمسازهای مثلث، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD} \Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BD$$

بنابراین، اگر چهار خط راستی کـه در صورت مسأله ازآن‌ها صحبت شده است، در یك نقطه یکـدیگر را قطع کنند، آن وقت، حاصل‌ضرب طول‌های یال‌های روبه‌رو برابر می‌شوند.

برعکس، اگر این سه حاصل‌ضرب برابر باشند، هـر دو تا از چهار خط راست، یکدیگر را قطع می‌کنند و، در ضمن، هیچ سه‌تایی از آن‌ها بر یك صفحه واقع نیستند، یعنی همهٔ آن‌ها، در یك نقطه به‌هم می‌رسند.

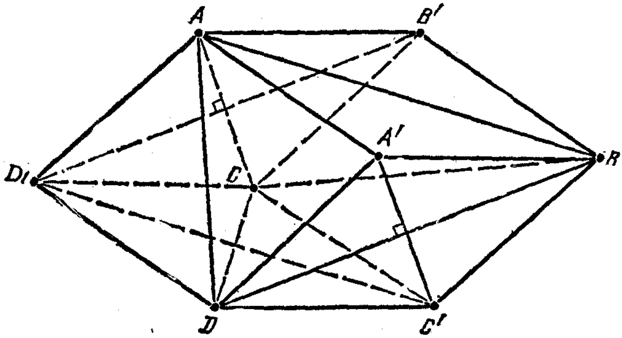
۲۹۲. V، S و r را، به ترتیب، حجم، سطح کل و شعاع کرهٔ محاطی چهاروجهی می‌گیریم، یکی از بخش‌های چهاروجهی، کـه بـه وسیلهٔ صفحهٔ قاطع پدید می‌آید، هرمی است که قاعدهٔ آن روی این صفحه است. V_1، S_1 و r_1 را، به‌ترتیب: حجم، مساحت سطح جانبی هرم وشعاع کره‌ای می‌گیریم که بروجه‌های جانبی هرم مماس و مرکز آن برقاعدهٔ هرم واقع باشد. قاعدهٔ هرم، تنها وقتی از مرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی می‌گذردکـه داشته باشیم: $r=r_1$. برابری اخیر، با توجه به دستورهای

$$V=\frac{1}{3}Sr;\ V_1=\frac{1}{3}S_1r_1$$

با برابری زیر هم‌ارز است:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{S}{S_1} \Rightarrow \frac{V-V_1}{V_1}=\frac{S-S_1}{S_1}$$

که درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.



شکل ۱۱۵

۲۹۳. فرض می‌کنیم، در چهاروجهی $ABCD$، دو یـال AC و BD برهم، و دو یال AD و BC بـرهم عمود باشند. از هـر یال چهار وجهی، صفحه‌ای موازی با یال روبه‌رورسم می‌کنیم، سه زوج صفحه موازی حاصل، متـوازی‌السطـوح $AB'CD'A'BC'D$ را مـی‌سازنـد. (شکـل ۱۱۵). متوازی‌الاضلاع‌های $AB'CD'$ و $A'BC'D$، لوزی هستند، زیـرا قطرهای آن‌ها، با خط‌هـای راست عمود برهم AC و BD، موازی‌انـد. بـه همین ترتیب، $AA'DD'$ و $BC'CB'$ هم، لوزی‌انـد. بنا بـرایـن، همهٔ یال‌های متوازی‌السطوح باهم برابرند. سرانجام، نقطهٔ O، مرکز تقارن متوازی‌السطوح تا وسط هر یك از یـال‌هـای چهار وجهـی، بـرابـر است با نصف یـال متوازی‌السطوح (مثلاً، فاصلهٔ نقطهٔ O تا وسط یال AB، برابراست بافاصلهٔ مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع $ABC'D'$ تا وسط ضلع AB ازآن، یعنی نصف یال AD' ازمتوازی‌السطوح). ازهمین‌جا، درستی حکم مسأله ثابت‌می‌شود.

۲۹۴. فرض مـی‌کنیم، چهاروجهی منتظم T_1، در چهاروجهی منتظم T_2 محاط شده باشد. در این صورت، شعاع R_1 کـرهٔ محیطی چهاروجهی T_1 (که آن را کرهٔ S می‌نامیم)، از شعاع r_2 کرهٔ محاطی چهاروجهی T_2 کمتر نیست. در واقع، اگر برکـرهٔ S، صفحه‌های مماسی، موازی وجه‌های چهاروجهی T_2 رسم کنیم، چهاروجهی T_3 (متشابه با چهاروجهی T_2، یعنی یك چهاروجهی منتظم) به‌دست می‌آیدکه محیط برکرهٔS است وچهاروجهی

T_2 را دربر می‌گیرد. بنابراین، شعاع $r_3 = R_1$ از کرهٔ محاطی چهاروجهی T_3، کمتر از r_2 نیست. چون شعاع r_1 از کرهٔ محاط در چهار وجهی منتظم T_1، دوبار کوچکتر از R_1 است، در نتیجه

$$3r_1 = R_1 \geqslant r_2$$

که از آن جا، درستی نابرابری مورد نظر، ثابت می‌شود.

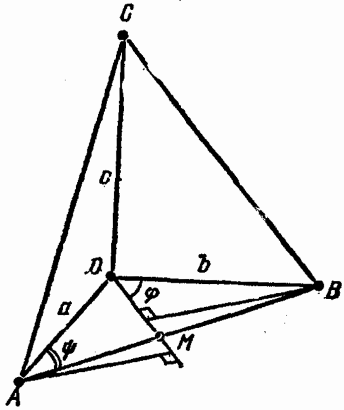
۲۹۵. برای مشخص بودن وضع، نقطهٔ M را بر ضلع AB از مثلث ABC می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\widehat{MDB} = \varphi$ (شکل ۱۱۱). در این صورت

$$S = c + a\cos\varphi + b\sin\varphi$$

قرار می‌گذاریم:

$$d = a\cos\varphi + b\sin\varphi,$$

$$\psi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



شکل ۱۱۱

به دست می‌آید:

$$d = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi - \psi) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $\varphi = \psi$، یعنی

$$\cos\varphi = \frac{AD}{AB} = \cos(DAB) \quad \text{یا} \quad DM \perp AB$$

سپس، با استفاده از قضیهٔ واسطه‌ها (قضیهٔ ۶)، داریم:

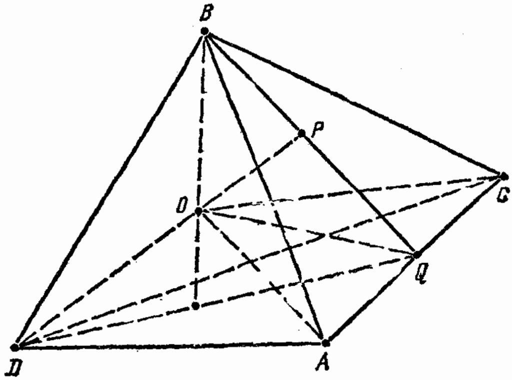
$$S = c + d \leqslant \sqrt{2(c^2+d^2)}$$

که درآن، علامت برابری، تنها برای وقتی است کـه داشته باشیم: $c=d$.
به این ترتیب، نابرابری موردنظر

$$S\leqslant\sqrt{۲(a^۲+b^۲+c^۲)}$$

ثابت شد. علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که، یال‌های AD و BD و CD را بتوان سه ضلع یك مثلث قائم‌الـزاویـه دانست، و DM ارتفاع وارد بر کوچکترین ضلع مثلث ABC باشد.

۲۹۶. نقطهٔ O را در درون چهاروجهی $ABCD$ در نظر مـی‌گیریم. نقطهٔ برخورد خط راست DO با صفحـهٔ ABC را P و نقطهٔ برخورد خط راست BP، با یال AC را Q می‌نامیم (شکل ۱۱۲).



شکل ۱۱۲

بنابر قضیهٔ ۸۴ داریم:

$$\widehat{AOB}+\widehat{AOC}=\widehat{AOB}+\widehat{AOQ}+\widehat{QOC}>\widehat{BOQ}+\widehat{QOC}=$$
$$=\widehat{BOP}+\widehat{POQ}+\widehat{QOC}>\widehat{BOP}+\widehat{POC}=$$
$$=۱۸۰^\circ-\widehat{BOD}+۱۸۰^\circ-\widehat{COD}$$

و از آن جا

$$\widehat{AOB}+\widehat{AOC}+\widehat{BOD}+\widehat{COD}>۳۶۰^\circ$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{AOD}+\widehat{COD}>۳۶۰^\circ,$$

$$\widehat{AOC}+\widehat{BOC}+\widehat{AOD}+\widehat{BOD}>۳۶۰^\circ$$

اکنون، اگر این سه نابرابری را جمع و دو طرف نابرابری حاصل را نصف کنیم، به نابرابری مجهول می‌رسیم.

۲۹۷. ثابت می‌کنیم، اگر فاصلهٔ از نقطهٔ M تا رأس‌های چهاروجهی منتظم $ABCD$ به ضلع ۲، عددهایی درست باشند، آن وقت، دست کم یکی ازاین فاصله‌ها، برابرصفر است (عکس حکم، تردیدی به وجود نمی‌آورد).
اگر نقطهٔ M، روی خط راستی باشدکه شامل یالی از چهار وجهی، و مثلاً یال AB است، و اگر H، وسط یال AB باشد، آن وقت، با فرض $MH=x$ و $MC=y$ داریم:

$$y>x\geqslant ۰ \quad \text{و} \quad x^۲+(\sqrt{۳})^۲=y^۲$$

ازآن جا

$$(y-x)(y+x)=۳ \quad \text{و} \quad y-x=۱,\ y+x=۳$$

بنابراین $x=۱$؛ و این، به معنای آن است که نقطهٔ M، بر یکی از دو رأس A یا B منطبق است.

اکنون، حالتی را در نظر می گیریم که، نقطهٔ M، بر هیچ یك ازاین‌گونه خطهای راست قرار نگیرد. در این حالت،کوتاه‌ترین فاصلهٔ از M تا رأس‌های چهاروجهی (که آن را $x>۰$ می گیریم)؛ نسبت به بقیهٔ فاصله‌ها، کمتر از ۲ واحد اختلاف دارد، یعنی هرکدام از این فاصله‌ها، یا x است و یا $x+۱$. چهار مورد را بررسی می‌کنیم.

۱) هر چهار فاصله، برابر xاند. در این صورت، M باید بر مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی، که شعاعی برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۶}$ دارد، منطبق باشد که ممکن نیست، زیرا $x\in\mathbb{N}$.

۲) سه تا از فاصله‌ها برابر x و یکی برابر $x+۱$ است. برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم:

$$MA=MB=MC=x،\ MD=x+۱$$

اگر مرکز مثلث ABC را O بگیریم، نقطهٔ M باید روی نیم‌خط راست DO باشد و، در ضمن، داشته باشیم: $x\geqslant AO=\frac{۲}{\sqrt{۳}}>۱$، یعنی

$$DM=x+۱>۲>۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}=$$

$$=DO=DM-MO=x+۱-\sqrt{x^۲-\frac{۴}{۳}}$$

از آن جا

$$x+۱=۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}+\sqrt{x^۲-\frac{۴}{۳}}=۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}+\sqrt{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲+x-\frac{۱۹}{۱۲}}>$$

$$>\frac{۳}{۲}+x-\frac{۱}{۲}=x+۱$$

که ممکن نیست.

۳) سه تا از فاصله‌ها برابر $x+۱$ و یکی برابر x است. مثل مورد ۲) فرض می کنیم:

$$MD=x\geqslant ۱،\ MA+MB+MC=x+۱\geqslant ۲$$

در این صورت، نقطهٔ M، روی خط راست OD قرار دارد و، در ضمن، نقطهٔ O نمی‌تواند بین نقطه‌های M و D واقع باشد، زیرا درغیراین‌صورت

$$x=۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}+\sqrt{(x+۱)^۲-\frac{۴}{۳}}>۱+x$$

بنابراین، نقطهٔ M، روی نیم خط راست OD است و

$$۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}=OD=OM-MD=\sqrt{(x+۱)^۲-\frac{۴}{۳}}-x<x+۱-x=$$

$$=۱<۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

که بازهم ممکن نیست.

۴) دو تا از فاصله‌ها برابر x و دو تای دیگـر برابر $x+۱$ هستند. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$MA=MB=x\geqslant ۱،\ MC=MD=x+۱\geqslant ۲$$

توجه کنیم که $x\neq ۱$، زیرا بنابرآن‌چه در بالا ثابت کردیم، نقطهٔ M نمی‌تواند روی خط راست AB باشد؛ بنابراین $x\geqslant ۲$. وسط پاره‌خط‌های راست AB و CD را، بـه ترتیب، E و F می‌نامیم. در ایـن صورت، نقطهٔ M روی نیم خط راست FE است و در ضمن

$$MF=\sqrt{(x+۱)^۲-۱}\geqslant\sqrt{۳}>\sqrt{۲}=EF$$

از آن جا، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{(x+۱)^۲-۱}-\sqrt{x^۲-۱}=MF-ME=EF=\sqrt{۲}$$

که ممکن نیست، زیرا به ازای $۱<x\in\mathbf{N}$ داریم:

$$\sqrt{(x+۱)^۲-۱}-\sqrt{x^۲-۱}>\sqrt{۲}$$

به این ترتیب، حکم مسأله، به طورکامل ثابت شد.

۲۹۸. حجم و مساحت سطح چهاروجهی را V و S و مساحت سطح وجهی از چهاروجهی را که متناظر با ارتفاع h_i است و برکرهٔ به شعاع r_i مماس است، S_i می‌نامیم. در این صورت، داریم:

$$۳V=h_۱S_۱=r_۱(S_۲+S_۳+S_۴-S_۱)=r_۱(S-۲S_۱)$$

به همین ترتیب

$$۳V=h_iS_i=r_i(S-۲S_i)$$

(برای بقیهٔ مقدارهای i). بنابراین، به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{r_۱}+\frac{۱}{r_۲}+\frac{۱}{r_۳}+\frac{۱}{r_۴}=\frac{۱}{۳V}\Big(S-۲S_۱+S-۲S_۲+S-۲S_۳+$$

$$+S-۲S_۴\Big)=\frac{۲S}{۳V}=\frac{۲}{۳V}(S_۱+S_۲+S_۳+S_۴)=$$

$$=۲\Big(\frac{۱}{h_۱}+\frac{۱}{h_۲}+\frac{۱}{h_۳}+\frac{۱}{h_۴}\Big)$$

۲۹۹. در چهار وجهی $A_۱A_۲A_۳A_۴$، فرض می‌کنیم: h_i، ارتفاعی که از رأس A_i گذشته است؛ S_i مساحت سطح وجه متناظر با آن: $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$، فاصلهٔ بین یال‌های $A_۲A_۳$، $A_۱A_۳$ و $A_۱A_۲$ از یال‌های متناظر رو بـه رو به آن‌ها در چهار وجهی: $Q_۱$، $Q_۲$ و $Q_۳$ مساحـت متوازی‌الاضلاع‌هـای با قطرهای موازی و مساوی هر دو یال روبه‌رو در چهاروجهی؛ $\varphi_۱$، $\varphi_۲$ و $\varphi_۳$، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های $A_۲A_۳$، $A_۱A_۳$ و $A_۱A_۲$، باشند.

حجم چهاروجهی، چنین است:

$$V=\frac{۱}{۳}h_iS_i=\frac{۱}{۳}d_ka_k$$

(قضیهٔ ۸۷ را ببینید؛ در ایـن جا $i=۱،۲،۳،۴$ و $k=۱،۲،۳$). سپس، داریم:

$$S_۴=S_۱cos\varphi_۱+S_۲cos\varphi_۲+S_۳cos\varphi_۳$$

(قضیهٔ ۹۰ را ببینید)، و سرانجام

$$S_۴^۲+S_k^۲-۲S_۴S_kcos\varphi_k=Q_k^۲ \qquad (*)$$

برابری اخیر را می‌توان ثابت کرد، اگر صفحه‌ای، مثلاً عمود بر یال $A_۲A_۳$ رسم کنیم و توجه کنیم که، برای طول تصویرهای a، b و c، به‌ترتیب، مربوط به یال‌های $A_۱A_۲$، $A_۲A_۴$ و $A_۱A_۴$ بر ایـن صفحه، بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها، داریم:

$$a^{2}+b^{2}-2ab\cos\varphi_{1}=c^{2}$$

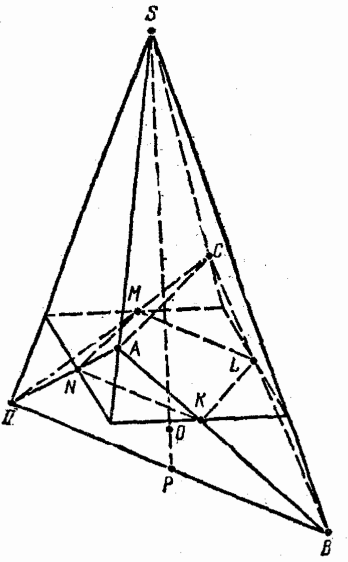
اگر دو طرف این برابری را در عدد $\left(\frac{A_{2}A_{3}}{2}\right)^{2}$ ضرب کنیم، برابری (*) به ازای $k=1$ به دست می‌آید. به همین ترتیب، می‌توان برابری (*) را، برای $k=2، 3$ هم به دست آورد. از آن جا

$$Q_{1}^{2}+Q_{2}^{2}+Q_{3}^{2}=3S_{4}^{2}+S_{1}^{2}+S_{2}^{2}+S_{3}^{2}-$$
$$-2S_{4}(S_{1}\cos\varphi_{1}+S_{2}\cos\varphi_{2}+S_{3}\cos\varphi_{3})=S_{1}^{2}+S_{2}^{2}+S_{3}^{2}+S_{4}^{2}$$

که در نتیجه

$$\frac{1}{d_{1}^{2}}+\frac{1}{d_{2}^{2}}+\frac{1}{d_{3}^{2}}=\frac{Q_{1}^{2}}{9V^{2}}+\frac{Q_{2}^{2}}{9V^{2}}+\frac{Q_{3}^{2}}{9V^{2}}=$$
$$=\frac{S_{1}^{2}}{9V^{2}}+\frac{S_{2}^{2}}{9V^{2}}+\frac{S_{3}^{2}}{9V^{2}}+\frac{S_{4}^{2}}{9V^{2}}=\frac{1}{h_{1}^{2}}+\frac{1}{h_{2}^{2}}+\frac{1}{h_{3}^{2}}+\frac{1}{h_{4}^{2}}$$

۳۰۰. نقطه‌های تماس کره را بر یال‌های AB، BC، CD و DA، به‌ترتیب، K، L، M و N می‌گیریم (شکل ۱۱۳). از نقطهٔ O، مرکز کره، خط راست l را، عمود بر صفحهٔ مربع $KLMN$ رسم می‌کنیم. چهار صفحهٔ مماس بر کره، در نقطه‌های K، L، M و N، زاویه‌های دو وجهی برابری، با صفحهٔ مربع می‌سازند؛ یعنی یا باهم موازی‌اند و یا در نقطه‌ای مثل S روی خط راست l، یکدیگر را قطع می‌کنند. درحالت اخیر، این صفحه‌ها، هرم منتظمی را به رأس S و قاعدهٔ مربعی $KLMN$ تشکیل می‌دهند که SK، SL، SM



شکل ۱۱۳

و SN سهم‌های آن هستند. چون یال‌های AB، BC، CD و DA، به‌ترتیب، بر وجه‌های این هرم قرار دارند، بنابراین، نقطه‌های A، B، C و D روی یال‌های آن قرار می‌گیرند. از برابری نیمسازهای SK، SL، SM و SN، از زاویه‌های برابر ASB، BSC، CSD و DSA، برابری مثلث‌های ASB، BSC، CSD و DSA نتیجه می‌شود و، از آن جا، به دست می‌آید:

$$SA=SC,\ SB=SD,\ AK=CL=CM=AN$$

و اگر یال AC هم، بر کره مماس باشد، باید داشته باشیم:

$$AC=AK+CL=۲AK$$

از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ASC و BSD، با توجه به ویژگی نیمسازهای مثلث، داریم:

$$\frac{BD}{AC}=\frac{SB}{SA}=\frac{KB}{AK}$$

و از آن‌جا

$$BD=\frac{AC}{AK}.KB=۲KB$$

به این ترتیب، برای نقطهٔ P، وسط یال BD، که برخط راست l واقع‌است، برابری $OP=OK$ برقرار است (زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BOK و BOP، با وتر مشترك BO، دارای ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ برابر BK و BP هستند)، یعنی یال BD در نقطهٔ P، بر کره مماس است.

سرانجام، در حالتی که چهار صفحهٔ مماس، موازی با خط راست l باشند، آن وقت، صفحهٔ مربع $KLMN$ را در ضلع‌های یك مربع قطع می‌کنند که، در ضمن، وسط ضلع‌های آن، همان نقطه‌های K، L، M و N هستند. در این حالت

$$AK=KB=BL=LC=CM=MD=DN=AN$$

و مرکز O، که برمرکز مربع $KLMN$ منطبق است، از یال‌های AC و BD

به یك فاصله است؛ یعنی کره تنها می‌تواند به طور هم زمان بر این یال‌ها مماس باشد. درستی حکم، به طور کامل، ثابت شد.

۳۰۱. فرض کنیم، کرهٔ به‌مرکز O و شعاع R، بر چهاروجهی $ABCD$ محیط باشد. قرار می گذاریم:

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}،\ \mathbf{b}=\overrightarrow{OB}،\ \mathbf{c}=\overrightarrow{OC}،\ \mathbf{d}=\overrightarrow{OD}$$

و به طور کلی، برای هر نقطهٔ X از فضا: $\mathbf{x}=\overrightarrow{OX}$. در این صورت

$$\mathbf{a}^۲=\mathbf{b}^۲=\mathbf{c}^۲=\mathbf{d}^۲=R^۲$$

چون $OA\perp\alpha$، پس برای نقطهٔ X از صفحهٔ α داریم:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{a})=۰\ \Rightarrow\ \mathbf{ax}=R^۲$$

به همین ترتیب، اگر نقطهٔ X متعلق به صفحه‌های β، γ یا δ باشد، بـه‌دست می‌آید:

$$\mathbf{bx}=R^۲،\ \mathbf{cx}=R^۲،\ \mathbf{dx}=R^۲$$

توجه می کنیم که، معادلهٔ

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\mathbf{x}=(\lambda+\mu)R^۲$$

برای هر مقدار λ و μ (به شرطی که باهم، برابر صفر نباشند)، صفحه‌ای را می‌دهدکه ازخط راست l، فصل مشترك صفحه‌های α وβ، گذشته است (زیرا $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}\neq۰$ و برای هر نقطهٔ $x\in l$ داریم: $\mathbf{ax}=\mathbf{bx}=R^۲$). به جزاین، برای هر نقطهٔ X فضا، می‌توان عددهای λ و μ را طوری پیدا کردکه‌به‌طور هم‌زمان صفر نباشند و، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\lambda(\mathbf{ax}-R^۲)+\mu(\mathbf{bx}-R^۲)=۰$$

یعنی ازهر نقطهٔ X، صفحه‌ای با مقدارهای متناظر λ و μ می گذرد. بنابراین، خط‌راست CD باخط‌راست l، تنها وقتی‌دریك‌صفحه‌قرارمی گیرندکه‌دستگاه

$$\begin{cases}\lambda(\mathbf{ac}-R^۲)+\mu(\mathbf{bc}-R^۲)=۰\\ \lambda(\mathbf{ab}-R^۲)+\mu(\mathbf{bd}-R^۲)=۰\end{cases}$$

جـوابی مخـالف صفر داشته بـاشد (نسبت بـه دو مجهول λ و μ)، یعنی وقتی که

$$(\mathbf{ac}-R^2)(\mathbf{bd}-R^2)=(\mathbf{ad}-R^2)(\mathbf{bc}-R^2)$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، فصل مشترك صفحه‌های γ و δ، تنها وقتی با خط راست AB در یك صفحه قرار می گیرند که داشته باشیم:

$$(\mathbf{ac}-R^2)(\mathbf{db}-R^2)=(\mathbf{eb}-R^2)(\mathbf{da}-R^2)$$

از آن‌جا که، دو شرط به‌دست آمده، هم‌ارزند، بنا براین حکم‌مسأله درست‌است.

§ ۱۶. چند وجهی، کره و مجموعه‌های دیگر

۳۰۲. اگر طول ضلع مکعب را x بگیریم، آن وقت تفاضل حجم‌های موردنظر مسأله، چنین است:

$$f(x)=\begin{cases} abc-x^3 & (0<x\leqslant a)\\ abc+(x-a)x^2-ax^2 & (a<x\leqslant b)\\ x^3+ab(c-x)-abx & (b<x\leqslant c)\\ x^3-abc & (c<x)\end{cases}$$

تابع $f(x)$، برای $x>0$ پیوسته و مشتق آن برابر است با

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & (0<x<a)\\ 3x^2-4ax & (a<x<b)\\ 3x^2-2ab & (b<x<c)\\ 3x^2 & (c<x)\end{cases}$$

بنابراین، تابع $f(x)$، برای $0<x<a$، نـزولـی؛ برای $x>b$ صعودی (زیرا $3x^2-2ab>3b^2-2ab>0$)؛ و در بازهٔ $(a، b)$ نزولی است، اگر داشته باشیم $b\leqslant\frac{4}{3}a$ (زیرا $3x^2-4ax$ از $3b^2-4ab$، که مقداری

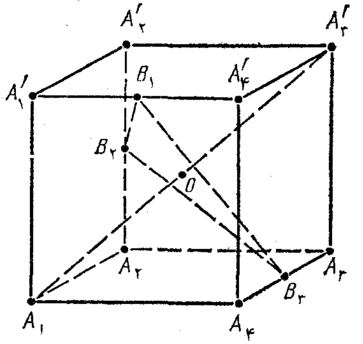
غیر مثبت است، کوچکتر است) و یا در نقطهٔ $x=\frac{۴}{۳}a$ می‌نیم دارد، وقتی

که داشته باشیم: $b>\frac{۴}{۳}a$. به این ترتیب، حداقل مقدار تابع $f(x)$، یا

به ازای $x=b$ به دست می‌آید (اگر $b\leqslant\frac{۴}{۳}a$) و یا به ازای: $x=\frac{۴}{۳}a$

(اگر $b>\frac{۴}{۳}a$)، و مقدار مجهول x برابر است با

$$\min\left\{b، \frac{۴}{۳}a\right\}$$



شکل ۱۱۴

۳۰۴. از نقطهٔ O مرکز مکعب $A_۱A_۲A_۳A_۴A'_۱A'_۲A'_۳A'_۴$، صفحه‌ای عمود بر قطر $A_۱A'_۳$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۱۴) این صفحه، از نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$، وسط یال‌های $A'_۱A'_۴$، $A_۲A'_۲$ و $A_۳A_۴$ می‌گذرد، زیرا هر یك از نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ از رأس‌های $A_۱$ و $A'_۳$ به یك فاصله‌اند (برابر $\frac{a}{۲}\sqrt{۵}$). چون داریم:

$$B_۱O=B_۲O=B_۳O،$$

$$B_۱B_۲=B_۲B_۳=B_۳B_۱=a\sqrt{\frac{۳}{۲}}>\frac{a}{۲}\sqrt{۵}$$

بنابراین، هر یك از دو هرم منتظم $A_۱B_۱B_۲B_۳$ و $A'_۳B_۱B_۲B_۳$ (که نقطهٔ مشترك درونی ندارند) شامل چهاروجهی منتظمی با ارتفاع‌های

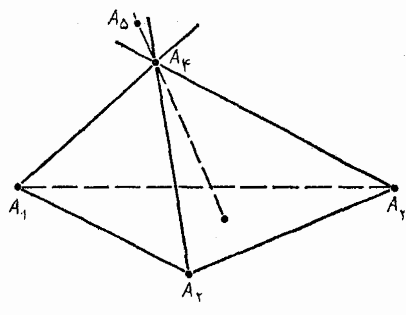
$$\frac{a}{۲}\sqrt{۳}=A_۱O=A'_۳O$$

و قاعدهٔ $B'_1B'_2B'_3$، متجانس با مثلث $B_1B_2B_3$ نسبت به مرکز O هستند. بالاخره، در درون این چهاروجهی‌های

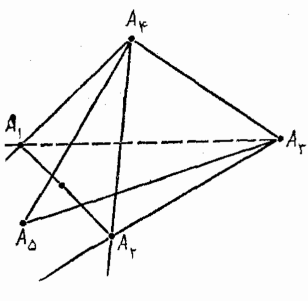
$$A_1B'_1B_2B'_3 \quad \text{و} \quad A'_3B'_1B_2B'_3$$

چهاروجهی‌های منتظم مجهول قرار گرفته‌اند که متجانس با آن‌ها نسبت به مرکز ند، با ضریب تجانس $\frac{2}{3}\sqrt{2} < 1$، با ارتفاعی برابر $a\sqrt{\frac{2}{3}}$، یعنی با یالی برابر a.

۳۰۴. چهاروجهی با رأس‌های نقطه‌های مفروض A_1، A_2، A_3 و A_4 را در نظر می‌گیریم. به این ترتیب، فضا، به وسیلهٔ صفحه‌های وجه‌های این چهاروجهی، به دو مجموعه تقسیم می‌شود. مجموعهٔ اول اجتماعی از ۴ حوزهٔ شبیه هم است که، هر یك از آن‌ها، شامل یك کنج سه وجهی در یك رأس چهاروجهی و قرینهٔ این کنج نسبت به رأس آن است. اگر نقطهٔ A_5، مثلاً، در حوزه‌ای باشد که شامل رأس A_4 است، آن وقت، خط راست A_5A_4، مثلث $A_1A_2A_3$ را قطع می‌کند (شکل ۱۱۵).



شکل ۱۱۵



شکل ۱۱۶

مجموعهٔ دوم، اجتماعی از ۶ حوزهٔ شبیه به هم است که، هر کدام از آن‌ها، عبارت است از اشتراك زاویهٔ دووجهی مربوط به یالی از چهاروجهی، با زاویه‌ای که قرینهٔ زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال روبه‌رو نسبت به این یال است. اگر A_5، مثلاً، در حوزهٔ شامل یال A_3A_4 باشد، آن‌وقت، خط راست A_1A_2، مثلث $A_3A_4A_5$ را قطع می‌کند (شکل ۱۱۶).

۳۰۵. برخلاف ادعای مسأله، فرض می‌کنیم، هر صفحه‌ای، بیش از ۳ مجموعه را قطع نکند. نقطه‌های A، B، C، D و E را از مجموعه‌های مختلف درنظر می‌گیریم. در این صورت، از این ۵ نقطه، هیچ ۴ نقطه‌ای بر یك صفحه وهیچ سه‌نقطه‌ای بر یك خط راست واقع نیستند. از ۳ نقطهٔ آن‌ها، صفحه‌ای می‌گذرانیم که، دو نقطهٔ دیگر، نسبت به‌آن، در دو نیم فضای مختلف قرار گیرند (دست‌کم، یکی از صفحه‌های ABC، ABD یا ABE، دارای این ویژگی هستند). فرض کنید، این صفحه، از نقطه‌های A، B و C گذشته باشد. نقطهٔ F، که خط راست DE با آن برخورد می‌کند، به یکی از مجموعه‌های شامل نقطه‌های A، B یا C، و مثلاً به مجموعهٔ شامل نقطهٔA، تعلق دارد. بنابراین، صفحه‌ای که از نقطه‌های D، E، F و B می‌گذرد، دست‌کم، ۴ مجموعه را قطع می‌کند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۰۶. برخلاف ادعای مسأله، فرض می‌کنیم فضا را به ۳ مجموعهٔ M_1، M_2 و M_3 طوری تقسیم کرده باشیم که بتوان، عددهای مثبت $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ را پیدا کرد، به نحوی‌که به ازای هر مقدار $i = 1, 2, 3$، بین نقطه‌های دلخواه مجموعه‌های M_i، فاصلهٔ a_i تحقق نپذیرد. چهاروجهی $ABCD$ را، با این یال‌ها در نظر می‌گیریم:

$$AB = a_1, \ AC = BC = a_2, \ AD = BD = CD = a_3$$

(این چهاروجهی وجود دارد، زیرا مرکز O از دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABC، که زاویه‌هایی حاده دارد، در درون آن واقع است، یعنی

$$OA = OB = OC < a_2 \leqslant a_3$$

و روی خط راستی که از O گذشته و بر صفحهٔ ABC عمود باشد، می‌توان نقطهٔ D را پیدا کرد). این چهاروجهی را در فضا طوری قرار می‌دهیم که

$$A, B, C \notin M_3 \quad \text{و} \quad A, B \notin M_2$$

برای این منظور، کافی است رأس D را در نقطه‌ای از مجموعهٔ M_3 قرار

دهیم (اگر $M_3 = \varnothing$، آن وقت به خودی خود $A، B، C \notin M_3$)، سپس رأس C را در نقطه‌ای از مجموعهٔ M_2، که از رأس D بـه فاصلهٔ a_3 باشد (اگر چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد، به خودی خود $A، B \notin M_2$). دراین‌صورت به دست می‌آید: $A، B \in M_1$ و $AB = a_1$ که فرض را نقض و درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۰۷. A_n را مجموعهٔ 2^n گروه ممکن

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

می‌گیریم کـه از عـددهای $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ تشکیل شده‌اند. همچنین قرار می‌گذاریم:

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \mathbf{a}_k$$

که در آن $\varepsilon \in A_n$ و $\mathbf{a}_1$، ...، $\mathbf{a}_n$، بردارهایی دلخواه‌اند. با استقرای روی n، ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{\varepsilon \in A_n} \mathbf{a}_\varepsilon^2 = 2^n \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k^2$$

برابری به ازای $n = 1$ درست است، زیرا

$$\sum_{\varepsilon \in A_1} \mathbf{a}_\varepsilon^2 = \mathbf{a}_1^2 + (-\mathbf{a}_1)^2 = 2\mathbf{a}_1^2 = 2^1 \sum_{k=1}^{1} \mathbf{a}_k^2$$

اکنون فرض می‌کنیم، برابری برای $(n-1) \in \mathbf{N}$ برقرار باشد. اگر در گروه

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$$

گروه زیر را جدا کنیم:

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$$

و قرار بگذاریم:

$$\mathbf{a}_{\varepsilon'} = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \mathbf{a}_k$$

آن وقت، با استفاده از برابری

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2=2\mathbf{b}^2+2\mathbf{c}^2$$

که برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ درست است (با برابری متوازی‌الاضلاع مقایسه کنید)، می‌توان برابری مطلوب را، برای مقدار n، به دست آورد:

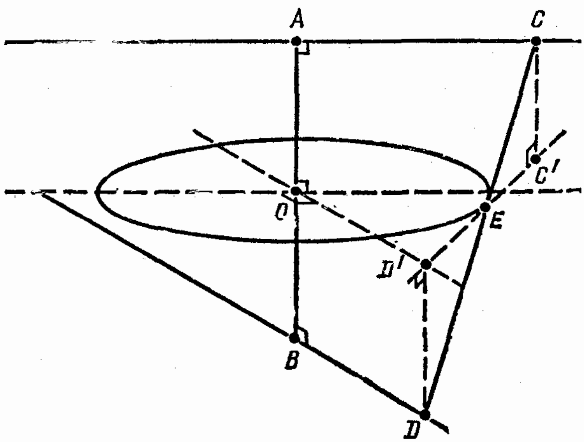
$$\sum_{\varepsilon\in A_n}\mathbf{a}_\varepsilon^2=\sum_{\varepsilon'\in A_{n-1}}[(\mathbf{a}_{\varepsilon'}+\mathbf{a}_n)^2+(\mathbf{a}_{\varepsilon'}-a_n)^2]=$$

$$=\sum_{\varepsilon'\in A_{n-1}}2(\mathbf{a}_{\varepsilon'}^2+\mathbf{a}_n^2)=2\times 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{a}_k^2+2\times 2^{n-1}\mathbf{a}_n^2=2^n\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k^2$$

حکم مسأله، در حالت کلی، ثابت شد.

۳۰۸. E را نقطهٔ برخورد پاره‌خط CD با صفحه‌ای که در صورت مسأله آمده است، و C' و D' را، تصویرهای دو نقطهٔ C و D بر این صفحه می‌گیریم. (شکل ۱۱۷).

از برابری مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $CC'E$ و $DD'E$ (که در آن‌ها، داریم: $CC'=DD'=\frac{1}{2}a$ و $\widehat{CEC'}=\widehat{DED'}$)، نتیجه‌می‌شود که OE،



شکل ۱۱۷

میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ $C'OD'$ است و از آن جا

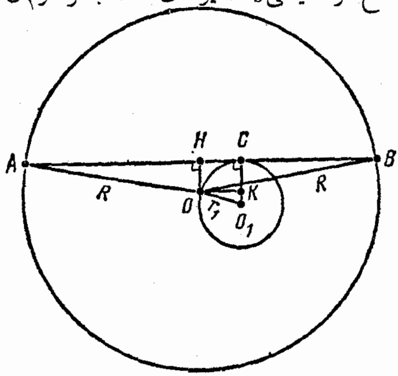
$$C'D' = ۲OE = ۲r$$

بنا بر این

$$CD = ۲\sqrt{C'C^۲ + C'E^۲} = \sqrt{۴r^۲ + a^۲}$$

و نقطهٔ C، پاره‌خط راست به طول $۴r$ و به مرکز نقطهٔ A را می‌پیماید.

۰۳۵۹. از نقطه‌های A و B و نقطهٔ O، مرکز کرهٔ S، صفحه‌ای می‌گذرانیم. مقطع کره، یعنی s، دایره‌ای است به‌مرکز $O_۱$ وشعاع $r \leqslant r_۱$، که



شکل ۱۱۸

بر خط راست AB مماس است. OK و OH را، به ترتیب، عمود بر خط‌های راست $O_۱C$ و AB فرض می‌کنیم (شکل ۱۱۸)، در این صورت با فرض

$$AB = ۲a،\ OH = h$$

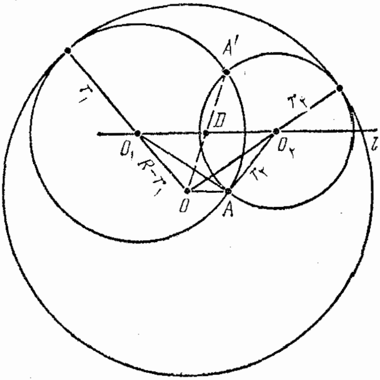
به دست می‌آید:

$$AC^۲ + BC^۲ = (a + HC)^۲ + (a - HC)^۲ = ۲a^۲ + ۲HC^۲ =$$

$$= ۲(R^۲ - OH^۲) + ۲(OO_۱^۲ - O_۱K^۲) =$$

$$= ۲(R^۲ - h^۲) + ۲[r_۱^۲ - (r_۱ - h)^۲] =$$

$$= ۲R^۲ - ۴h^۲ + ۴hr_۱ = ۲R^۲ + r_۱^۲ - (۲h - r_۱)^۲ \leqslant ۲R^۲ + r^۲$$



شکل ۱۱۹

۰.۳۱۵ خط راست d را از نقطهٔ A، عمود بر صفحهٔ ABC رسم می‌کنیم. در این صورت، مرکزهای O_1 و O_2 کره‌های مماس بر کرهٔ S، روی خط راست l قرار دارد که نقطه‌های آن از سه نقطهٔ A، B و C به یك فاصله‌اند، یعنی با خط راست d موازی است. A' را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط راست l، و D را نقطهٔ برخورد خطهای راست OA' و l می‌گیریم (شکل ۱۱۹). نقطهٔ A (و همچنین، نقطهٔ A') متعلق به هر دو کره است، بنابراین $O_1A=r_1$ و $O_2A=r_2$. ازشرط مماس بودن کره‌ها، به‌دست می‌آید:

$$O_1O=R-r_1, \quad O_2O=R-r_2$$

در نتیجه

$$O_1O+O_1A=R=O_2O+O_2A$$

ثابت می‌کنیم، نقطه‌های O_1 و O_2، نسبت به‌نقطهٔ D، قرینهٔ یکدیگرند. درواقع، اگر نقطهٔ O_1 را، که برای آن داریم:

$$O_1O+O_1A=R$$

تثبیت کنیم، برای نقطهٔ O_2، قرینهٔ O_1 نسبت به نقطهٔ D، داریم:

$$O_2O+O_2A=O_1A+O_1O=R$$

سپس، برای هر نقطهٔ O'_2، واقع بر خط راست l بین نقطه‌های D و O_2، داریم:

$$O'_2O+O'_2A=O'_2O+O'_2A'<O_2O+O_2A'=O_2O+O_2A=R$$

(زیرا، محیط مثلث درونی از محیط بیرونی، کمتر است)؛ و برای هر نقطهٔ

O''_2 واقع بر امتـداد پاره‌خط راست DO_2 (از طرف نقطهٔ O_2)، بـه همان ترتیب، به دست می‌آید:

$$O''_2O+O''_2A>R$$

نقطه‌های نیم‌خط راست DO_1 را هم، به همین ترتیب، می‌توان موردبررسی قرار داد، به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$R-r_1=O_1O=O_2A=r_2$$

و ازآن‌جا

$$R=r_1+r_2$$

۳۱۱. ایـن نمادهای تکمیلی را می‌پذیریم: Q، مساحت قاعده و h، ارتفاع هرم؛ x، کسینوس زاویهٔ دووجهی بین قاعده و وجه جانبی؛ a، ضلع قاعده؛ r، شعاع دایرهٔ محاطی قاعده. در این صورت، این بـرابـری‌ها را داریم:

$$a=2r\,tg\frac{180^\circ}{n},\quad Q=n\cdot\frac{1}{2}\cdot ra=nr^2tg\frac{180^\circ}{n},$$

$$h=r\,tg(\text{arc}\cos x)=\frac{r\sqrt{1-x^2}}{x},\quad S=Q+\frac{1}{x}Q$$

ازآن‌جا

$$Q=\frac{xS}{x+1},\quad r=\sqrt{\frac{Q}{n\,tg\frac{180^\circ}{n}}}=\sqrt{\frac{S}{n\,tg\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{x}{x+1}},$$

$$V=\frac{1}{3}hQ=\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\sqrt{\frac{S}{n\,tg\frac{180^\circ}{n}}\cdot\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{xS}{x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n\,tg\frac{180^\circ}{n}}}\cdot f(x)$$

که در آن

$$f(x)=\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}$$

الف) داریم:

$$f'(x)=\frac{1-3x}{2(1+x)^2\sqrt{x(1-x)}}$$

بنابراین، حداکثر مقدار تابع $f(x)$، برای $x\in(0, 1)$، برابر است با

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

(زیرا برای $x<\frac{1}{3}$ داریم $f'(x)>0$، و برای $x>\frac{1}{3}$: $f'(x)<0$)؛ و مقدار مجهول حجم V، چنین می‌شود:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n\,tg\frac{180^\circ}{n}}}$$

ب) اگر در رابطه‌ای که بین مقدارهای V، S، n و x به دست آورده‌ایم، مقدارهای مفروض n، S و V را قرار دهیم، به این معادله برای x می‌رسیم:

$$\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}=\frac{2}{9}$$

که دو ریشه دارد: $x_1=\frac{1}{17}$ و $x_2=\frac{4}{5}$. بنابراین $Q_1=8$ و $Q_2=64$؛ از آن جا $r_1=\sqrt{2}$ و $r_2=4$. بنابراین

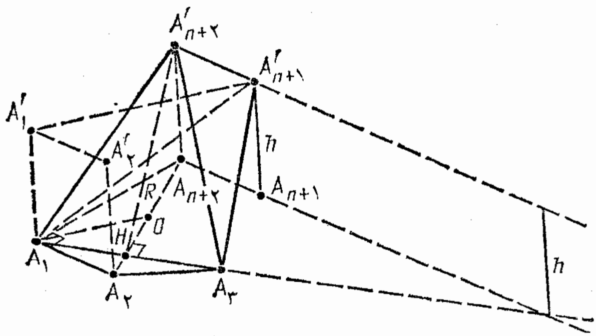
$$a_1=2\sqrt{2},\ h_1=24;\ a_2=8,\ h_2=3$$

۳۱۲. ارتفاع منشور را h می‌نامیم. در این صورت، در چهاروجهی

$$A_1A_3A'_{n+1}A'_{n+2}$$

(شکل ۱۲۰)، زاویهٔ بین یال‌های روبه‌روی A_1A_3 و $A'_{n+1}A'_{n+2}$، برابر است با

$$\widehat{A_3A_1A_2}=\frac{1}{2}\widehat{A_3OA_2}=\frac{180^\circ}{2n}$$



شکل ۱۲۰

(که در آن، O، مرکز چند ضلعی $A_1 \ldots A_{2n}$ است؛ توجه کنیم که خطهای راست $A'_{n+1}A'_{n+2}$، $A'_1A'_2$ و A_1A_2 باهم موازی‌اند). فاصلهٔ بین یال‌های A_1A_3 و $A'_{n+1}A'_{n+2}$ برابر h و طول آن‌ها، چنین است:

$$A_1A_3=2R\sin\frac{180^\circ}{n},\quad A'_{n+1}A'_{n+2}=2R\sin\frac{180^\circ}{2n}$$

بنابراین، حجم چهاروجهی ما، برابر است با

$$\frac{1}{6}A_1A_3\cdot A'_{n+1}A'_{n+2}\cdot h\cdot\sin\frac{180^\circ}{2n}=\frac{2}{3}R^2h\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n}$$

از طرف دیگر، اگر زاویهٔ بین خط راست $A_1A'_{n+1}$ و صفحهٔ $A_1A_3A'_{n+2}$ را، φ بگیریم، آن وقت، همین حجم، چنین می‌شود:

$$\frac{1}{3}S_{A_1A_2A'_{n+2}}\cdot A_1A'_{n+1}\cdot \sin\varphi$$

که در آن،

$$A_1A'_{n+1}=\sqrt{(A_1A'_1)^2+(A'_1A'_{n+1})^2}=\sqrt{h^2+4R^2},$$

$$S_{A_1A_2A'_{n+2}}=\frac{1}{2}A_1A_3\cdot A'_{n+2}H=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}\cdot\sqrt{h^2+\left(2R\cos^2\frac{180^\circ}{2n}\right)^2}$$

($A'_{n+2}H$، ارتفاع مثلث $A_1A_3A'_{n+2}$ است). بنابراین به دست می‌آید:

$$\frac{2}{3}R^2h\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n}=$$

$$=\frac{1}{3}R\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2+4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}\cdot\sqrt{h^2+4R^2}\cdot\sin\varphi$$

به این ترتیب، مقدار

$$\sin\varphi=2R\sin^2\frac{180^\circ}{2n}\left(h^2+\frac{16R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2}+\right.$$

$$\left.+4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}+4R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وقتی ماکزیمم می‌شود که نابرابری

$$h^2+\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2}\geqslant 2\sqrt{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}$$

به برابری تبدیل شود، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$h^2 = \frac{\frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{}}{h^2} \Rightarrow h = 2R\cos\frac{180^\circ}{2n}$$

۳۱۳. از برابری یال‌های جانبی هرم $SA_1 \dots A_n$ نتیجه می‌شود که نقطهٔ O، تصویر رأس S بر قاعدهٔ هرم، از رأس‌های A_1، ... ، A_n به یك فاصله است، یعنی، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی $A_1 \dots A_n$ می باشد. چون به ازای هر مقدار n ،... ،$k = 1$، هرم SOA_kA_{k+1} $(A_{n+1} = A_1)$، نسبت به صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال SO، متقارن است، بنابراین، زاویه‌های دووجهی این هرم، که مربوط به‌یال‌های SA_k و SA_{k+1} هستند، باهم برابر می‌شوند که مقدار هرکدام از آن‌ها را φ_k می‌نامیم. بنابر فرض مسأله

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_3 = \dots = \varphi_{n-1} + \varphi_n = \varphi_n + \varphi_1$$

و در ضمن، n، عددی است فرد، بنابراین

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \dots = \varphi_n = \varphi_2 = \dots = \varphi_{n-1}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که همهٔ هرم‌های SOA_kA_{k+1} باهم برابرند (زیرا، هر دو هرم مجاور، نسبت به وجه مشترکشان، قرینهٔ یکدیگرند)؛ یعنی همهٔ زاویه‌های A_kOA_{k+1} باهم برابرند. به این ترتیب، چندضلعی $A_1 \dots A_n$ منتظم است.

۳۱۴. فرض می‌کنیم:

$$\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}، \ \overrightarrow{SB} = \mathbf{b}، \ \overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$$

(شکل ۱۲۱)، در این صورت

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}، \ \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$$

و اگر، در ضمن، فرض کنیم:

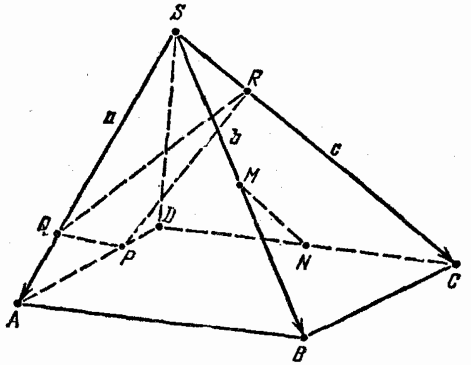
$$\overrightarrow{SQ} = x\mathbf{a}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{SR}=(۱-x)\mathbf{c}، \ \overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SA}+x\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}+x(\mathbf{c}-\mathbf{b})،$$

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{SQ}=(۱-x)\mathbf{c}-x\mathbf{a}،$$

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SQ}=(۱-x)\mathbf{a}+x(\mathbf{c}-\mathbf{b})$$



شکل ۱۲۱

در ضمن، بردارهای $\overrightarrow{QR}$ و $\overrightarrow{QP}$، بـه ازای هیچ مقـداری از x، مـوازی نیستند (که نتیجه‌ای است از تجزیهٔ آن‌ها به سه بردار **a**، **b** و **c** که در یك صفحه واقع نیستند). چون نقطهٔ M، در صفحه‌ای قـرار دارد کـه از نقطهٔ Nموازی‌صفحهٔ α رسم شده‌است، بنا براین، برای مقدارهایی از λ و μ داریم:

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SN}+\lambda\overrightarrow{QR}+\mu\overrightarrow{QP}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD})+\lambda[(۱-x)\mathbf{c}-x\mathbf{a}]+\mu[(۱-x)\mathbf{a}+x(\mathbf{c}-\mathbf{b})]=$$

$$=\left[\frac{۱}{۲}-\lambda x+\mu(۱-x)\right]\mathbf{a}+$$

$$+\left(-\frac{۱}{۲}-\mu x\right)\mathbf{b}+[۱+\lambda(۱-x)+\mu x]\mathbf{c}$$

بنابراین، نقطهٔ M، تنها وقتی بر خط راست SB قرار می‌گیرد که $\overrightarrow{SM}=y\mathbf{b}$، یعنی

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}-\lambda x+\mu(۱-x)=۰\\ ۱+\lambda(۱-x)+\mu x=۰\end{cases}$$

از این دستگاه، به دست می‌آید:

$$\mu=-\frac{x+۱}{۲(۲x^۲-۲x+۱)},\ \lambda=\frac{۳x-۲}{۲(۲x^۲-۲x+۱)}$$

[توجه کنیم که: $۴x^۲-۴x+۲=(۲x-۱)^۲+۱>۰$]. بنابراین، مقدارهای مجهول y، و تنها آن‌ها، در برابری

$$y=-\frac{۱}{۲}+\frac{x(x+۱)}{۲(۲x^۲-۲x+۱)}$$

دست‌کم به ازای یك مقدار x، صدق می‌کنند. به زبان دیگر، معادلهٔ

$$(۴y+۱)x^۲-(۴y+۳)x+(۲y+۱)=۰$$

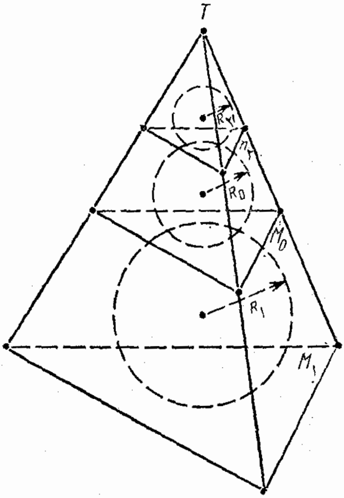
نسبت به x، به ازای مقدارهای مجهول y، یعنی به ازای

$$(۴y+۳)^۲-۴(۴y+۱)(۲y+۱)=-۱۶y^۲+۵\geqslant ۰$$

قابل حل است (از آن جمله به ازای $۴y-۱=۰$، $۴y+۳\neq ۰$). به این ترتیب، مقدارهای مجهول y، بازهٔ $\left[-\frac{\sqrt{۵}}{۴},\frac{\sqrt{۵}}{۴}\right]$ را پر می‌کنند.

۳۱۵. قاعدهٔ بزرگ $M_۱$ از هرم اصلی را به مساحت $S_۱$ و قاعدهٔ کوچك $M_۲$ آن را به مساحت $S_۲$ و قاعدهٔ مشترك $M_۰$ دو هرمی که از هرم اصلی به وجود آمده‌اند، به مساحت $S_۰$ می‌گیریم. یال‌های هرم ناقص را ادامه می‌دهیم تا در نقطهٔ T به هم برسند و هرم‌های به رأس T و قاعده‌های $M_۱$، $M_۲$ و $M_۰$ را، به ترتیب، $P_۱$، $P_۲$ و $P_۰$ می‌نامیم (شکل ۱۲۲). تجانس نسبت به نقطهٔ T، که قاعدهٔ $M_۱$ را به قاعدهٔ $M_۰$ تبدیل کند، کرهٔ

محاط در هرم P_1 را به کرهٔ محاط در هرم P_0 تبدیل می کند و، بنابراین در این تجانس، قاعدهٔ M_0 به قاعدهٔ M_2 و کرهٔ محاط در هرم P_0 به کرهٔ محاط در هرم P_2 تبدیل می‌شود. به این ترتیب، برای شعاع‌های R_1، R_2 و R_0 از کره‌های محاطی، و مساحت‌های Q_1، Q_2، Q_0، سطح جانبی‌هرم‌های P_1، P_2، P_0، خواهیم داشت:



شکل ۱۲۲

$$\frac{R_0}{R_1}=\frac{R_2}{R_0}, \frac{Q_2}{Q_1}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}$$

حجم هرم P_2، از یك طرف، برابر است با $\frac{1}{3}R_2(Q_2+S_2)$ و، از طرف دیگر $\frac{1}{3}R_0(Q_2-S_2)$ (زیرا، کرهٔ به شعاع R_0، نسبت به هرم R_2، محاطی بیرونی است)، بنابراین

$$R_2(Q_2+S_2)=R_0(Q_2-S_2)$$

ازآن‌جا

$$\frac{Q_2-S_2}{Q_2+S_2}=\frac{R_2}{R_0}=\frac{R_2}{\sqrt{R_1R_2}}=\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}}$$

در نتیجه

$$(Q_2-S_2)\sqrt[4]{S_1}=(Q_2+S_2)\sqrt[4]{S_2}$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$\frac{Q_2}{S_2}=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}$$

$$S=Q_1-Q_2=\frac{Q_2}{S_2}(S_1-S_2)=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}(S_1-S_2)=$$

$$=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2})^2$$

۰۳۱۶ الف) ثابت می‌کنیم، اگر نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n، روی سطح کرهٔ به مرکز O و شعاع واحد، طوری قرار گرفته باشند که، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه A_i و A_j $(i\neq j)$، کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد، آن وقت $n\leqslant 6$.

فرض می‌کنیم $n>6$. بنا به قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$A_iA_j^2=2-2\cos(A_iOA_j)\geqslant 2$$

از آن جا $\widehat{A_iOA_j}\geqslant 90^\circ$ و $\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}\leqslant 0$. دستگاه محورهای مختصات فضائی را به مبداء O، به این طریق، انتخاب می‌کنیم. قبل از همه، یادآوری می‌کنیم که، بین بردارهای $\overrightarrow{OA_i}$، حتماً سه بردار پیدا می‌شود که هم‌صفحه نیستند (در غیر این صورت، همهٔ $n>4$ بردار، روی یك صفحه قرار می‌گیرند و، بنابراین، زاویهٔ بین هر دو بردار دلخواه، حاده می‌شود). بدون این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض را بر این گرفت که: بردارهای $\overrightarrow{OA_1}$، $\overrightarrow{OA_2}$ و $\overrightarrow{OA_3}$، روی یك صفحه نیستند. محور OX را در طول خط راست OA_1 طوری درنظر می‌گیریم که، طول نقطهٔ A_1، برابر واحد شود. سپس، محور OY را طوری انتخاب می‌کنیم که، نقطهٔ A_2، درصفحهٔ XOY قرار گیرد وعرضی مثبت داشته باشد. سرانجام، جهت محور OZ را طوری درنظر می‌گیریم که ارتفاع نقطهٔ A_3، مقداری مثبت باشد. مختصات نقطهٔ A_i را $(x_i$ و y_i و $z_i)$ فرض می‌کنیم. در این صورت

$$\overrightarrow{OA_1}=(1, 0, 0) \text{ و } \overrightarrow{OA_2}=(x_2, y_2, 0), \overrightarrow{OA_3}=(x_3, y_3, z_3),$$

که درآن‌ها $y_2>0$ و $z_3>0$؛ بنابراین، برای هر مقدار $i>1$ داریم:

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}=x_i\leqslant 0$$

سپس، برای هر مقدار $i>2$ داریم:

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_2}=x_ix_2+y_iy_2\leqslant 0$$

از آن جا $y_i\leqslant 0$ (زیرا $x_2\leqslant 0$، $x_i\leqslant 0$، $y_2>0$)؛ سرانجام، برای همهٔ مقدارهای $i>3$ داریم:

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_3}=x_ix_3+y_iy_3+z_iz_3\leqslant 0$$

از آن جا $z_i\leqslant 0$ (زیرا $x_3\leqslant 0$، $x_i\leqslant 0$، $y_3\leqslant 0$، $y_i\leqslant 0$، $z_3>0$).

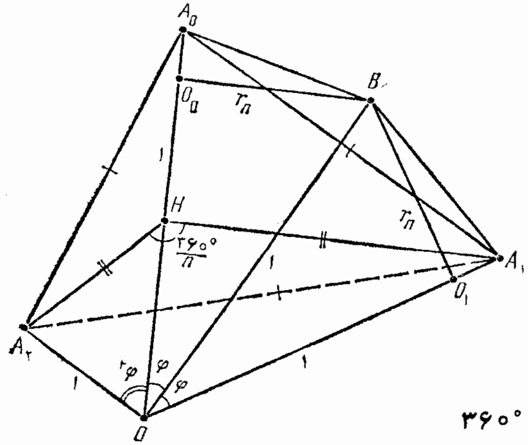
بین چهار بردار $\overrightarrow{OA_4}$، $\overrightarrow{OA_5}$، $\overrightarrow{OA_6}$، $\overrightarrow{OA_7}$، دست کم دو بردار، دارای مختص هم‌نام‌منفی هستند، یعنی، حاصل‌ضرب اسکالر آن‌ها، مثبت است. تناقض حاصل، ثابت می‌کند $n\leqslant 6$. چون شش نقطهٔ با مختصات

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1)$$

با شرط بخش الف) سازگارند، بنابراین، حداکثر تعداد نقطه‌ها، برابر است با ۶.

ب) ثابت می‌کنیم، اگر نقطه‌های A_1، A_2، …، A_n، روی همان کره، طوری قرارگرفته باشند که فاصلهٔ بین هردو نقطهٔ A_i و A_j $(i\neq j)$، بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد، آن وقت $n\leqslant 4$. فرض می‌کنیم $n>4$. در این صورت $\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j}<0$ و، اگرهمان دستگاه مختصات فضائی بخش الف) رادرنظر بگیریم، شبیه همان‌جا، برای $i>3$ خواهیم داشت: $x_i<0$، $y_i<0$، $z_i<0$. بنابراین، حاصل‌ضرب اسکالر بردارهای $\overrightarrow{OA_4}$ و $\overrightarrow{OA_5}$، مثبت، می‌شود. به این ترتیب، ثابت شد $n\leqslant 4$. چون ۴ رأس چهاروجهی منتظم محاط درکره، با شرط بخش ب) سازگارند، بنابراین، حداکثرتعداد نقطه‌ها برابر است با ۴.

۳۱۷. مرکز کره را O، مرکز دایره‌های C_i $(i=0, 1, \dots, n)$ را



۳۶۰°

شکل ۱۲۳

O_i، نقطهٔ برخورد نیم‌خط راست OO_i با کره را A_i و نقطهٔ تماس دایره‌های C_0 و C_1 را B می‌نامیم.

$\widehat{A_0OB}=\varphi$ می‌گیریم، در این صورت

$$\sin\varphi=r_n,\quad A_0A_i=2r_n$$

زیرا

$$OB=OA_0=OA_1=1,\quad O_0B=O_1B=r_n,$$

$$\widehat{OO_0B}=\widehat{OO_1B}=90^\circ$$

(شکل ۱۲۳). در هرم منتظم $OA_0A_1A_2$، زاویه‌های مسطحهٔ رأس O برابر 2φ و زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OA_0 برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است. اگر A_1H، بر یال OA_0 عمود باشد، آن وقت

$$A_1H=A_2H=\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi=2r_n\sqrt{1-r_n^2}$$

سپس، داریم:

$$2r_n = A_0A_1 = A_1A_2 = 2A_1H\sin\frac{180^\circ}{n} = 4r_n\sqrt{1-r_n^2}\sin\frac{180^\circ}{n}$$

ازآن‌جا

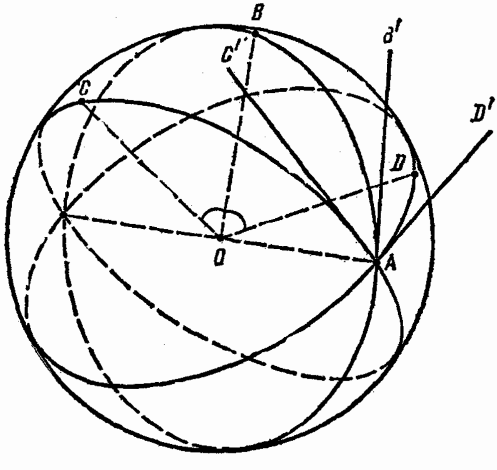
$$2\sqrt{1-r_n^2}\sin\frac{180^\circ}{n} = 1$$

بنا بر این

$$\sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2\sqrt{1-r_n^2}} > \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad n < 6$$

(نابرابری اخیر را، از این‌جا هم می‌توان به دست آورد که، زاویهٔ دووجهی $A_1HA_2 = \frac{360^\circ}{n}$ مربوط به یال جانبی OA_0، از زاویهٔ مسطحهٔ $A_0A_1A_2 = 60^\circ$ در قاعدهٔ هرم، بزرگتر است)؛ و برای بقیهٔ مقدارهای $n = 2، 3، 4، 5$، داریم:

$$r_n = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}$$

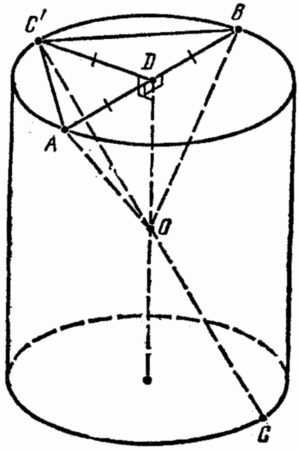


شکل ۱۲۴

۳۱۸. زاویهٔ بین $C'AB'$، برابر با زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OA و وجه‌هایی است که از نقطه‌های C و B می‌گذرند، زیرا نیم خطهای راست AC' و AB' بر شعاع مشترك OA عمودند (شکل ۱۲۴). به همین ترتیب، زاویهٔ $D'AB'$ برابر است با زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OA و وجه‌هایی که از نقطه‌های D و B می گذرند. ازآن‌جا که این زاویه‌های دووجهی، نسبت به خط راست OB قرینهٔ یکدیگرند (خط راست OA قرینهٔ خودش، و نقطهٔ C قرینهٔ نقطهٔ D است)، بنابراین، باهم برابرند، یعنی زاویه‌های خطی آن‌ها هم، با یکدیگر برابرند:

$$\widehat{C'AB'} = \widehat{D'AB'}$$

۳۱۹. C' را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به O، مرکز تقارن استوانه، می‌گیریم (شکل ۱۲۵). اگر در کنج سه وجهی $OABC$، زاویه‌های دووجهی مربوط به یال‌های OA، OB و OC برابر α، β و γ فرض کنیم، آن‌وقت، زاویه‌های دووجهی کنج $OABC'$، مربوط به یال‌های OA، OB و OC'، به ترتیب، برابر $180^\circ - \alpha$، $180^\circ - \beta$ و γ می‌شوند. اگر D را مرکز دایرهٔ به قطر AB فرض کنیم، در هرم $OADC'$، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های OA و OC' برابرند (زیرا، این هرم، نسبت به صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OD، متقارن است)؛ همچنین، در هرم $OBDC'$، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های OB و OC' برابرند (به همان علت). از آن جا



شکل ۱۲۵

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

چیزی که باید ثابت می‌کردیم.

۳۲۵. یادآوری می کنیم کــه، مجموع زاویــه‌هــای مسطحه در کنج مفروض، به رأس S و یال‌های SA_1، ...، SA_n، از ۳۶۰ درجه کمتر است. نقطهٔ O را در درون این کنج n وجهی انتخاب می‌کنیم و، از آن‌جا، عمودهای OH_i را برصفحه‌های SA_iA_{i+1} رسم می‌کنیم ($i = 1, ..., n$؛ $A_{n+1} = A_1$). کنج n وجهی حاصل، به رأس O و یــال‌هــای OH_i، کنجی محدب است، زیرا همهٔ یال‌های آن، نسبت به هر یك از وجه‌هایش، در همــان نیم فضایی واقع‌اند که نقطهٔ S قرار دارد. هر یك از زاویه‌های مسطحهٔ H_iOH_{i-1} آن ($H_0 = H_n$) درمجموع با زاویهٔ خطی زاویهٔ دو وجهی مربوط به‌یال SA_i (که برصفحهٔ H_iOH_{i-1} عموداست)، برابر ۱۸۰ درجه می‌شود. از آن‌جا که، مجموع زاویه‌هــای مسطحهٔ کنج n وجهی ساخته شده، کمتر از ۳۶۰ درجه است، بنابــراین، مجموع زاویــه‌هــای دو وجهی کنج n وجهی اونیــه، از $180^\circ \times n - 360^\circ$ بیشتر است و نمی‌توانند، برای مقدارهای $n \geqslant 2$، از ۳۶۰ درجــه کمتر شود. بنابراین، شرط مسأله، تنهــا در یك کنج سه وجهی صدق می‌کند.

۳۲۱. دستگاه مختصات فضائی را درنظر می‌گیریم و برای هر مقدار

$$i = 1, 2, ..., 1979$$

مجموعهٔ iام را شامل همهٔ نقطه‌هایی انتخاب می کنیم که، طول‌های آن‌ها، در برابری زیر صدق کنند:

$$[x] \equiv i \pmod{1979}$$

این نمونه، نشان می‌دهد که به پرسش مسأله، باید پاسخ مثبت داد.

۳۲۲. با استقرای روی n، ثابت می‌کنیم که n خط‌راست، نمی‌توانند صفحه را، به بیش از

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

بخش، تقسیم کنند؛ درضمن، وقتی می‌توان درست به $p(n)$ بخش رسید که، هیچ دو خط راستی موازی نباشند و هیچ سه‌خط راستی از یك نقطه‌نگذرند.

درواقع $p(۰)=۱$ و، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$p(n)\leqslant p(n-۱)+n=\frac{(n-۱)n}{۲}+۱+n=\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$$

درضمن، برابری هم، می‌تواند برقرار باشد (خط راست nام، ضمن برخورد با بقیهٔ خط‌های راست، خودش به‌بیش از n بخش تقسیم نمی‌شود و، هریك ازاین بخش‌ها، بخش تازه‌ای را درصفحه پدید می‌آورد).

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، n صفحه، فضا را به بیش از

$$q(n)=\frac{n^۳+۵n+۶}{۶}$$

بخش، تقسیم نمی‌کنند؛ در ضمن، $q(n)$ بخش وقتی به دست می‌آید که هیچ دو صفحه‌ای موازی نباشند، هیچ سه صفحه‌ای از یك خط راست نگذرند و هیچ چهار صفحه‌ای ازیك نقطه عبور نکنند. درواقع $q(۰)=۱$ و، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$q(n)\leqslant q(n-۱)+p(n-۱)=$$

$$=\frac{(n-۱)^۳+۵(n-۱)+۶}{۶}+\frac{(n-۱)n}{۲}+۱=\frac{n^۳+۵n+۶}{۶}$$

در ضمن، برابری هم ممکن است (صفحهٔ nام، ضمن برخورد با صفحه‌های دیگر، به‌بیش از $p(n-۱)$ بخش تقسیم نمی‌شود و، هریك ازاین بخش‌ها، بخش تازه‌ای ازفضا را معین می‌کند).

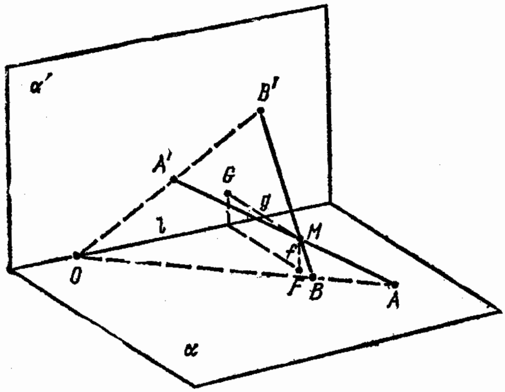
تعداد صفحه‌های لازم، برای تقسیم فضا، دست‌کم به ۳۰۰ بخش، برابر است با ۱۳، زیرا

$$q(۱۲)=۲۹۹<۳۰۰<۳۷۸=q(۱۳)$$

درواقع، ۱۲ صفحه کافی نیست و با ۱۳ صفحه، می‌توان فضا را به $q(۱۳)$ بخش تقسیم کرد؛ سپس، در داخل هر بخش فضا، نقطه‌ای درنظر می‌گیریم و مکعبی را انتخاب می‌کنیم که شامل همهٔ این $q(۱۳)$ نقطه باشد. اکنون، تنها این می‌ماند که تمامی ساختمان را، به ساختمانی متشابه خود، با انتخاب

ضریب مناسب، تبدیل کرد.

۳۲۳. ثابت می‌کنیم، با توجه به شرطهای مسأله، خطهای راست AA' و BB'، در هر موقعیتی از صفحهٔ α'، یکدیگر را قطع می‌کنند. چون درموقعیت اولیه، این خطهای راست، متقاطع‌اند، بنابراین نقطه‌های A، A'، B، B' روی یك صفحه‌اند. بنابراین، خطهای راست AB و $A'B'$، یا یکدیگر را قطع می‌کنند و یا با هم موازی‌اند. درحالت اول (شکل ۱۲۶)،



شکل ۱۲۶

نقطهٔ برخورد آن‌ها، O، روی خط راست l است و درضمن

$$OA\cdot OB' \neq OB\cdot OA'$$

(زیرا، در این حالت، خطهای راست AA' و BB' موازی نیستند). از آن‌جاکه، همین شرطها، برای موقعیت‌های دیگر α' هم، برقرار است، بنابراین، خطهای راست AA' و BB'، مثل قبل، یکدیگر را قطع می‌کنند.

درحالت دوم، خطهای‌راست $AB\|A'B'$ با خط‌راست l موازی‌اند، درضمن $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$ که، ضمن دوران صفحهٔ α'، به‌قوت‌خود باقی‌می‌ماند. بنابراین، در این حالت هم، خطهای راست AA' و BB'، در هر وصفی از صفحهٔ α'، یکدیگر را قطع می‌کنند.

اگر درلحظهٔ نخستین، خطهای راست AA'، BB' و CC'، روی یك

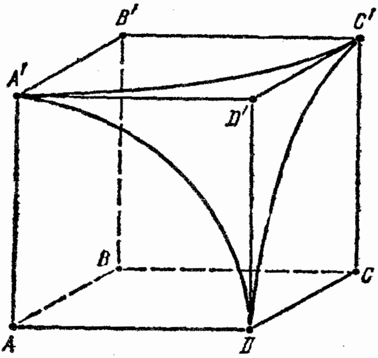
صفحه نباشند و دریك نقطه به‌هم برسند، آن وقت، برای هرموقعیتی ازصفحهٔ α'، به‌جز وقتی‌که بر α منطبق است، بازهم بریك صفحه قرار نمی گیرند و، بنا بر آن‌چه ثابت کردیم، دو به دو یکدیگر را قطع می کنند، یعنی دارای نقطهٔ برخورد مشترکی‌هستند. سرانجام، اگرخطهای راست AA'، BB' و CC'، در موقعیت نخستین صفحهٔ α'، روی یک صفحه واقع باشند، آن وقت، خط راست چهارم DD' را درنظر می گیریم که از نقطهٔ برخورد آن‌ها بگذرد، ولی برصفحهٔ آن‌ها واقع نباشد. دراین‌صورت، خطهای راست AA'، BB' و DD' دریك نقطه، و خطهای راست AA'، CC' و DD' هم، دریك نقطه به هم رسیده‌اند و، در ضمن، این نقطه‌ها، برنقطهٔ برخورد خطهای راست AA' و DD' منطبق‌اند. بنابراین، خطهای راست AA'، BB' و CC'، در هرموقعیتی ازصفحهٔ α' (به‌جز وقتی‌که بر α منطبق باشد)، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

ازنقطهٔ $M=M_\circ$، نقطهٔ برخورد خطهای راست مفروض در وضع نخستین، صفحهٔ β را عمود برخط راست l رسم می‌کنیم و توجه می کنیم که، نقطهٔ M، ضمن دوران صفحهٔ α'، از صفحهٔ β جدا نمی‌شود. در صفحهٔ β، خط‌راست f را ازنقطهٔ M موازی صفحهٔ α' رسم می‌کنیم وثابت می کنیم، نقطهٔ F، محل برخورد f با صفحهٔ α، بستگی به موقعیت صفحهٔ α' ندارد.

اگر این نقطه، درموقعیت‌نخستین، $F_\circ$ و درموقعیت دیگری F_1 باشد، آن وقت، در موقعیت اخیر صفحهٔ α'، خط راست $MF_\circ$ ($M\neq F_\circ$، در غیر این صورت $F_\circ=M=F_1$)، صفحهٔ α' را در نقطه‌ای مثل F' قطع می کند. در نتیجه، بنا بر آن‌چه قبلاً ثابت کردیم، درموقعیت نخستین هم، خط راست $F_\circ F'$ از نقطهٔ M می گذرد، یعنی برخط راست f منطبق است، در حالی‌که با صفحهٔ α' موازی نیست. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، نقطهٔ G، محل برخورد صفحهٔ α' با خط راست g (که از نقطهٔ M موازی صفحهٔ α رسم شده است)، جای ثابتی را درصفحهٔ α اشغال می کند. به این ترتیب، ضمن دوران صفحهٔ α'، نقطهٔ M دور نقطهٔ F دوران می کند و به فاصلهٔ ثابتی از آن باقی می‌ماند (برابر با فاصلهٔ نقطهٔ G تا خط راست l) و با صفحهٔ α،

همان زاویه‌ای را می‌سازد که صفحهٔ α' با آن ساخته است. به این ترتیب، مکان مجهول، عبارت است ازمحیط دایره‌ای درصفحهٔ β، به‌مرکز F وشعاع $FM_\circ$ (که ممکن است برابر صفر باشد)، که از آن، دو انتهای قطری کـه متعلق به صفحهٔ α هستند، جدا شده است.

۳۲۴. خط راست l، تنهـا وقتی می‌تواند، بـه عنوان محور دوران، نقطهٔ A را بـه نقطهٔ B تبدیل کند کـه، دو نقطهٔ A و B، براین خط راست، تصویـر مشترك O را داشته باشند و، در ضمن، از آن به یك فاصله باشند، یعنی وقتی که، خط راست l، برصفحهٔ α_1، صفحهٔ عمود منصف پـاره خـط راست AB واقـع باشد. دوران دور این خط راست l به‌اندازهٔ زاویهٔ φ، هم‌ارز است با نتیجهٔ استفادهٔ متوالی از تقارن نسبت به‌صفحهٔ α_1 و، سپس، نسبت بـه صفحهٔ α_2، مبدل صفحهٔ α_1 ضمن‌دوران دورخط‌راست l به‌اندازهٔ



شکل ۱۲۷

زاویهٔ $\frac{\varphi}{2}$ (درهمان جهت). بـرای اثبـات این حقیقت، کافی است یادآوری کنیم کـه، مثلاً، درصفحهٔ ABO (کـه برمحور l عمود است)، دوران دور نقطهٔ O به انـدازهٔ زاویـهٔ φ، بـر نتیجهٔ دو قرینه منطبق است: قرینهٔ نسبت به خطهای راست l_1 و l_2، فصل مشترك‌های صفحهٔ ABO با صفحه‌های α_1 و α_2. چون تقـارن نسبت به صفحهٔ α_1، نقطهٔ A را به نقطهٔ B تبدیل می‌کند، بنابراین، صفحهٔ α_2، برای دوران‌های مورد نظر مسأله (و تنها برای آن‌ها)، ازنقطهٔ B می‌گذرد. به‌این‌ترتیب، همهٔ تبدیل‌های نقطهٔ C را، در دوران‌های موردنظر، می‌توان به‌ترتیب زیر به‌دست آورد: ابتدا قرینهٔ رأس C را نسبت به صفحهٔ α_1 به‌دست می‌آوریم (که منجر به‌رأس D می‌شود) و، سپس، قرینهٔ نتیجه را نسبت به صفحهٔ دلخواه α_2، که از B_2 گذشته باشد و موازی‌صفحهٔ

α_1 نباشد، پیدا می‌کنیم. بنا بر این، تبدیل‌هـای نقطهٔ C، کـرهٔ بـه مرکز B و شعاع BD را پـر می‌کنند، بـه استثنای نقطه‌هایی کـه قرینهٔ نقطهٔ D نسبت بـه صفحهٔ BCC' باشند، یعنی نقطه‌هـایـی کـه روی سطح مکعب نیستند. به این ترتیب، مجموعهٔ مجهول، عبارت است از محل برخورد این کـره بـا وجه‌هـای مکعب و تشکیل شده است از سه کمان DA'، $A'C'$ و $C'D$ از محیط دایره‌های، به‌ترتیب، به مرکزهای A، B' و C و شعاع‌هایی بـرابـر طول یال مکعب (شکل ۱۲۷).

۳۲۵. ابتدا فرض می کنیم، سه رأس از چهار رأس مفروض مکعب

$$A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$$

(شکل ۱۱۴ را ببینید) بر یك وجه واقع باشند. بـرای مشخص بودن وضع، این رأس‌ها را A'_1، A_2 و A_3 می گیریم، دراین‌صورت، رأس A_4 هم دارای مختصات درست‌است، زیرا مختصات بردار $\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{A_2A_1}$، عـددهـایـی درست‌اند. بنا بر این، رأس‌چهارم، هر کدام از رأس‌های A'_1، A'_2، A'_3 یا A'_4 باشد، مختصات بقیهٔ رأس‌های مکعب، عددهایی درست‌اند، زیرا

$$\overrightarrow{A_1A'_1}=\overrightarrow{A_2A'_2}=\overrightarrow{A_3A'_3}=\overrightarrow{A_4A'_4}$$

اکنون فرض می‌کنیم، هیچ سه رأسی از چهـار رأس مفروض، واقع بر یك وجه نباشند. چون، بنا بر فرض، این رأس‌هـا روی یك صفحه نیستند، رأس‌های چهاروجهی منتظمی را تشکیل می‌دهند که، یال‌های آن، قطرهای وجه‌های مکعب است. بـرای مشخص بودن وضع، این رأس‌ها را A_1، A'_2، A_3وA'_4 می‌گیریم. ثابت‌می کنیم، بردار $\overrightarrow{A_1A'_3}$، مختصات درستی دارد. بردار

$$2\overrightarrow{A_1A'_3}=\overrightarrow{A_1A'_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A'_4}$$

را در نظر می‌گیریم کـه، دارای مختصات درست x، y و z است. قـرار می گذاریم:

$$(\overrightarrow{A_1A'_2})^2=(\overrightarrow{A_1A_3})^2=(\overrightarrow{A_1A'_4})^2=a,$$

$$\overrightarrow{A_1A'_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A'_2}\cdot\overrightarrow{A_1A'_4}=\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A'_4}=a\cos 60^\circ=\frac{a}{2}=b$$

در این صورت $a,b\in\mathbf{Z}$ و

$$x^2+y^2+z^2=(2\overrightarrow{A_1A_3})^2=3a+3\times 2b=12b\equiv 0 \pmod 4)$$

از آن‌جا که مجذور یك عدد زوج، در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ صفر، و مجذور یك عدد فرد، در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ واحد می‌رسد، بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^2+y^2+z^2$ بر ۴، برابر است با تعداد عددهای فرد در بین عددهای x، y و z. به این ترتیب، همهٔ مختصات x، y و z از بردار $2\overrightarrow{A_1A'_3}$، عددهایی زوج‌اند، و مختصات بردار $\overrightarrow{A_1A'_3}$، عددهایی درست‌اند. می‌بینیم، نقطهٔ A'_3، که با نقطه‌های A'_2 و A'_4 بر یك وجه واقع است، مختصات درستی دارد و، بنابر آن‌چه در ابتدای بحث ثابت کردیم، مختصات همهٔ رأس‌های مکعب، عددهایی درست‌اند.

۳۲۶. در ذهن خود، فضایی را که مکعب مستطیل در آن قرار دارد، به مکعب‌هایی با یال به طول $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم و آن‌ها را با دو رنگ سفید و سیاه، به ردیف «شطرنجی» رنگ می‌کنیم (یعنی به‌نحوی که، هر دو مکعب با وجه‌مشترك، با رنگ‌های متفاوت باشند). ثابت می‌کنیم، اگرمکعب‌مستطیلی یالی با طول عدد درست داشته باشد و همهٔ وجه‌های آن موازی با وجه‌های مکعب‌ها باشد، آن وقت، حجم بخش سفیدآن، با حجم بخش سیاه آن برابر است. درواقع، به‌کمك صفحه‌هایی که عمود بر یال به طول عدد درست است، تمامی مکعب مستطیل را به قشرهایی با عرض $\frac{1}{2}$ تقسیم وتوجه می‌کنیم، اگر با انتقال موازی، قشر مرزی را تا قشر مجاور آن انتقال دهیم تا بر آن قرار گیرد، بخش‌های سفید اولی، بر بخش‌های سیاه دومی قرار می‌گیرند و برعکس. همین وضع، برای دو قشر مجاور بعدی پیش می‌آید و غیره.

بنا بر این، حجم بخش‌های سفید در هر قشر، با حجم بخش‌های سیاه آن قشر، برابر می‌شود (تعداد این قشرها، عددی زوج است)، یعنی در کل مکعب‌مستطیل، حجم دو بخش سیاه و سفید، با هم برابرند. فرض کنید، وجه‌های مکعب‌مستطیل اصلی، با وجه‌های مکعب‌ها موازی باشند، در ضمن، رأس A از آن، بر رأس یکی از مکعب‌ها منطبق باشد و، بین یال‌های آن، یالی به طول عدد درست وجود نداشته باشد. آن وقت، همهٔ مستطیل‌هایی که، طبق فرض مسأله، از تقسیم آن به دست آمده‌اند، یالی به طول عدد درست‌دارند (و روشن است که وجه‌های این مکعب مستطیل‌ها، موازی با وجه‌های مکعب‌هاست، زیرا مجموعهٔ این مکعب مستطیل‌ها، مجموعه‌ای متناهی است و می‌توان آن‌ها را، به ترتیب زیر، پشت سرهم در نظر گرفت: ابتدا مکعب مستطیلی را کنار می‌گذاریم که در گوشهٔ مکعب مستطیل اصلی قرار گرفته است، سپس مکعب مستطیلی را که در گوشهٔ شکل باقی‌مانده قرار دارد و غیره) درنتیجه، بنا بر آن‌چه ثابت کردیم، حجم بخش سفید هر کدام از آن‌ها (و بنا بر این، بخش سفید مکعب مستطیل اصلی، به طور کلی) برابر با حجم بخش سیاه آن است. در مکعب مستطیل اصلی، می‌توان به‌کمك سه صفحهٔ موازی با وجه‌های آن، مکعب‌مستطیلی به‌رأس A ویال‌های به‌طول‌های درست، با حجم حداکثر ممکن، جدا کرد. در بین هفت مکعب مستطیل باقی‌مانده، که بعد از این برش باقی می‌ماند، شش مکعب مستطیل دارای یالی به طول عدد درست هستند و یکی از آن‌ها، یال‌هایی کوچکتر از واحد و رأس B، منطبق بر رأس یکی از مکعب‌ها دارد. این مکعب مستطیل را تا مکعبی به یال واحد و رأس B ادامه می‌دهیم. سه صفحه‌ای که، از این مکعب، مکعب‌مستطیل درونی را جدا می‌کنند، مکعب را به‌هشت مکعب‌مستطیل تقسیم می‌نمایند که، دربین آن‌ها، دست کم یکی، یال‌هایی دارد که طول آن‌ها از $\frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کنند و، بنا بر این، حجم بخش‌های سیاه وسفید آن، با هم برابر نیستند (زیرا، یکی از این حجم‌ها، برابر صفر است). همین وضع، دربارهٔ سه مکعب مستطیلی هم، که با آن وجه مشترك دارند (و هریك از آن‌ها، با

آن، مکعب مستطیلی به یال واحد می‌سازند)، صدق می کند؛ همچنین، در بارهٔ بقیهٔ مکعب مستطیل‌ها، و از آن جمله، آن که به رأس B است. به این ترتیب، مکعب مستطیل اصلی، به هشت مکعب مستطیل تقسیم شده است که درهفت‌تای آن‌ها، حجم بخش سفید با حجم بخش سیاه برابر است، ولــی در هشتمی، این دو بخش، حجمی بــرابــر ندارند. تناقض حاصل، ثابت می کند کــه، مکعب مستطیل اصلی، نمی‌تواند یالی به طول عدد درست نداشته باشد.

فصل پنجم

آنالیز

§۱۷. دنباله‌ها

۳۲۷. برای هر مقدار ۹۹ ،... ،۲ ،۱ $=n$، داریم:

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

و برای مجموع مجهول، به دست می‌آید:

$$a_1+a_2+\dots+a_{99}=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{9}{10}$$

۳۲۸. با استفاده از دستور

$$tg\,1=\frac{tg\,k-tg(k-1)}{1+tg\,k\,tg(k-1)}$$

(توجه کنیم کــه، بــه دلیل گنگ بودن عدد π، $tg\,k$ به ازای هر $k\in\mathbf{N}$ معین است)، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n}tg\,k\,tg(k-1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{tg\,k-tg(k-1)}{tg\,1}-1\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{tg\,k}{tg\,1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{tg\,k}{tg\,1}-n=\frac{tg\,n}{tg\,1}-n$$

بنا براین، عددهای $A=\frac{1}{tg\,1}$ و $B=-1$ با شرط مسأله سازگارند.

۳۲۹. برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$a_n^2=\frac{1^2.3^2.5^2\dots(2n-1)^2}{2^2.4^2\dots(2n)^2}=$$

$$=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1}$$

بنا براین

$$0<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

۳۳۰. فرض می‌کنیم $A\in(0,1)$ و $\lim_{n\to\infty}a_n=A$. در این صورت، عدد طبیعی N پیدا می‌شود که، برای هر اندیس $n\geqslant N$ داشته باشیم:

$$\frac{2A}{3}<a_n<\frac{4A}{3}$$

اگر برای هر $n>N$، برابری $a_n=\sqrt{a_{n-1}}$ برقرار باشد، آن وقت، ضمن عبور به حد به ازای $n\to\infty$، به دست می‌آید:

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{n-1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}a_{n-1}}=\sqrt{A}$$

بنابراین $A\in\{۰ ، ۱\}$، که شرط $a\in(۰ ، ۱)$ را نقض می‌کند. اگر هم، به‌ازای اندیسی از $n>N$ ، برابری $a_n=\sqrt{a_{n-۱}}$ برقرار نباشد، آن وقت

$$a_n=\frac{۱}{۲}a_{n-۱}<\frac{۱}{۲}\times\frac{۴A}{۳}=\frac{۲A}{۳}$$

و نابرابری $A<\frac{۲A}{۳}$، شرط انتخاب عدد N را نقض می‌کند. بنابراین، دنبالهٔ $\{a_n\}$ نمی‌تواند حدی در بازهٔ $(۰ ، ۱)$ داشته باشد.

۳۳۱. عدد a_i را از گروه عددهای $a_۱<a_۲<\cdots<a_n$ درنظر می‌گیریم. تعداد تصاعدهای سه جمله‌ای که، درآن‌ها، این عدد، جملهٔ وسط تصاعد باشد، نه از $i-۱$ تجاوز می‌کند و نه از $n-i$، زیرا جملهٔ اول تصاعد، تنها می‌تواند یکی از عددهای $a_۱$، ...، $a_{i-۱}$؛ و جمله سوم تصاعد، یکی از عددهای $a_{i+۱}$، $a_{i+۲}$، ...، a_n باشد. بنابراین، تعداد تصاعدها، نمی‌تواند ازمجموع

$$\sum_{i=۱}^{n}\min\{i-۱ ، n-i\}=S$$

تجاوز کند. اگر $n=۲l$ ($l\in\mathbf{N}\setminus\{۱\}$)، آن وقت

$$S=\sum_{i=۱}^{l}(i-۱)+\sum_{i=l+۱}^{n}(n-i)=l(l-۱)$$

و اگر $n=۲l+۱$ ($l\in\mathbf{N}$)، آن وقت

$$S=\sum_{i=۱}^{l}(i-۱)+\sum_{i=l+۱}^{n}(n-i)=l^۲$$

سرانجام، یادآوری می‌کنیم که، این حداکثر تعداد تصاعدها، درحالت دنبالهٔ $a_i=i$ (برای $i=۱ ، ... ، n$) به‌دست می‌آید.

۳۳۲. $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... را جمله‌های دنبالهٔ مفروض می‌گیریم. تابع زیر را، که در مجموعهٔ عددهای درست تعریف شده است، درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & (x\text{، عددی زوج}) \\ ۱ & (x\text{، عددی فرد}) \end{cases}$$

و دنباله $\{b_n\}$ را، با دستور $b_n=f(a_n)$، $n\in\mathbf{N}$ می‌دهیم. در این صورت، برای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$b_{n+۴}=f(a_{n+۴})=f(a_n+a_{n+۱}+a_{n+۲}+a_{n+۳})=$$
$$=f(f(a_n)+f(a_{n+۱})+f(a_{n+۲})+f(a_{n+۳}))=$$
$$=f(b_n+b_{n+۱}+b_{n+۲}+b_{n+۳})$$

زیرا عدد $b_{n+۴}$، تنها درحالتی زوج است که مجموع

$$a_n+a_{n+۱}+a_{n+۲}+a_{n+۳}$$

عددی زوج باشد. q جملهٔ اول دنبالهٔ $\{b_n\}$، چنین است:

$$۱،\ ۱،\ ۰،\ ۱،\ ۱،\ ۱،\ ۱،\ ۰،\ ۱$$

بنابراین $b_۶=b_۱$، $b_۷=b_۲$، $b_۸=b_۳$، $b_۹=b_۴$ و به طور کلی $b_{n+۵}=b_n$. به این ترتیب، دراین دنباله، عددصفر، در ردیف‌های به‌صورت $n=۳+۵k$ $(k\in\mathbf{Z}^+)$ قرار دارد. در نتیجه، در دنبالهٔ $\{a_n\}$، اختلاف شماره‌های هر دو عدد زوج، برابر است با ۵. یعنی نمی‌توان، دراین دنباله، پشت سرهم به عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ برخوردکرد.

۳۳۳. از شرط مسأله معلوم است که، برای عدد مفروض $n\in\mathbf{N}$، هر یك از عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n+۱}$، از $۲n$ تجاوز نمی‌کنند. مجموعهٔ عددهای ۱، ۲، ...، $۲n$ را به n زوج تقسیم می‌کنیم:

$$(۱، n+۱)، (۲، n+۲)، ...، (n، ۲n)$$

چون بین عددهای ۱، ۲، ...، $۲n$، دست‌کم، $(n+۱)$ جمله از دنباله وجود دارد، بنابراین، دو عدد مختلف a_p و a_q پیدا می‌شودکه متعلق به یکی از زوج‌ها هستند. برای پایان اثبات، کافی است توجه‌کنیم که، تفاوت بین عددهای هر زوج، برابر است با n.

۳۳۴. دنبالهٔ $\{b_n\}$ را به این ترتیب می‌سازیم:

$$b_n=\begin{cases}a_n & (a_n\leqslant A)\\ A & (a_n>A)\end{cases}$$

و نسبت $\frac{a_n}{b_n}$ را c_n می‌نامیم. دراین صورت، داریم:

$$1\leqslant c_n\leqslant B$$

(برای هر $n\in\mathbf{N}$). بنابراین، برای هر m ،$n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$\frac{c_m}{c_n}\leqslant B\Longrightarrow \frac{a_m}{a_n}\leqslant\frac{B\,b_m}{b_n}$$

۳۳۵. دنبالهٔ صعودی اندیس‌های $\{i_n\}$ را، به ترتیب زیر، می‌سازیم. فرض کنید a_{i_1}، کوچکترین عدد در بین عددهای a_1 ، a_2 ، ... باشد (چنین عددی وجود دارد، زیرا همهٔ جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$، عددهای طبیعی‌اند)؛ a_{i_2} را کوچکترین عدد از عددهای a_{i_1+1}، a_{i_1+2}، ...؛ را، کوچکترین عدد از عددهای a_{i_2+1}، a_{i_2+2}، ... می گیریم و غیره. در این‌صورت، دنبالهٔ نامتناهی $\{a_{i_n}\}$، غیرنزولی است. فرض کنید b_{i_k}، کوچکترین عدد از عددهای b_{i_1}، b_{i_2}، ... باشد. دراین صورت

$$i_k<i_{k+1},\ a_{i_k}\leqslant a_{i_{k+1}},\ b_{i_k}\leqslant b_{i_{k+1}}$$

یعنی به عنوان اندیس‌های p و q، می‌توان عددهای i_k و i_{k+1} را درنظر گرفت.

۳۳۶. حکم مسأله را، با استقرای روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ داریم:

$$a_1^2\leqslant a_1-a_2<a_1\Longrightarrow a_1<1$$

علاوه بر آن

$$a_2\leqslant a_1-a_1^2=\frac{1}{4}-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

یعنی $a_n<\frac{1}{n}$ به‌ازای $n=2$. اکنون، فرض می‌کنیم، حکم برای عدد $n\geqslant 2$ درست باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n+1$ هم درست است. چون تابع $f(x)=x-x^2$ در بازهٔ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ صعودی است و درضمن $a_n<\frac{1}{n}$، بنابراین

$$a_{n+1}\leqslant f(a_n)<f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n^2(n+1)}<\frac{1}{n+1}$$

و درستی حکم ثابت می‌شود.

۳۳۷. برابری $a_k=a_{k-1}+\frac{1}{n}a_{k-1}^2$، هم‌ارز است با برابری

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}$$

چون $\frac{1}{2}=a_0<a_1<\ldots<a_n$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n},\ (k=1, \ldots, n)$$

که اگر آن‌ها را باهم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1\Rightarrow\frac{1}{a_n}>2-1=1$$

یعنی $a_n<1$. بنابراین، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1},\ (k=1, \ldots, n)$$

که از مجموع آن‌ها، به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{a_۰}-\frac{۱}{a_n}>\frac{n}{n+۱}$$

بنا بر این

$$\frac{۱}{a_n}<۲-\frac{n}{n+۱}=\frac{n+۲}{n+۱}$$

یعنی

$$a_n>\frac{n+۱}{n+۲}>\frac{n-۱}{n}$$

۳۳۸. از شرط به دست می‌آید:

$$a_{k+m}-۱\leqslant a_k+a_m\leqslant a_{k+m}+۱،\ (k،\ m\in\mathbf{N})$$

با استقرای روی $q\in\mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم:

$$a_{pq}-(q-۱)\leqslant qa_p\leqslant a_{pq}+(q-۱)$$

به‌ازای $q=۱$، به‌نابرابری‌های درستی می‌رسیم. فرض می‌کنیم، نابرابری‌ها، برای عدد q برقرار باشند. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $q+۱$ هم برقرارند. در واقع، برای هر مقدار $p\in\mathbf{N}$، داریم:

$$(q+۱)a_p=qa_p+a_p\leqslant a_p+a_{pq}+(q-۱)\leqslant a_{p+pq}+q=$$
$$=a_{p(q+۱)}+q$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که

$$(q+۱)a_p\geqslant a_{p(q+۱)}-q$$

اگر جای p و q را باهم عوض کنیم، به دست می‌آید:

$$a_{pq}-(p-۱)\leqslant pa_q\leqslant a_{pq}+(p-۱)$$

به این ترتیب:

$$|pa_q-qa_p|\leqslant$$
$$\leqslant \max\{|a_{pq}+(p-1)-(a_{pq}-(q-1))|, |a_{pq}+(q-1)-$$
$$-(a_{pq}-(p-1))|\}=p+q-2<p+q$$

یعنی

$$\left|\frac{a_q}{q}-\frac{a_p}{p}\right|<\frac{1}{q}+\frac{1}{p}$$

۳۳۹. فرض می‌کنیم، مجموعهٔ جمله‌های غیر مثبت، متناهی باشد. در این صورت، می‌توان عدد طبیعی N را طوری پیدا کرد که، برای هر $n\geqslant N$، داشته باشیم: $a_n>0$. ولی، در چنین حالتی، برای هر $n\geqslant N$، باید داشته باشیم $a_n>1$ (اگر $a_n\leqslant 1$، آن وقت، نابرابری

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)\leqslant 0$$

برقرار می‌شود). از طرف دیگر

$$a_{N+1}=\frac{1}{2}\left(a_N-\frac{1}{a_N}\right)<\frac{1}{2}a_N,$$

$$a_{N+2}=\frac{1}{2}\left(a_{N+1}+\frac{1}{a_{N+1}}\right)<\frac{1}{2}a_{N+1}<\frac{1}{4}a_N$$

و به طور کلی

$$a_{N+k}<\frac{1}{2^k}a_N, \ (k\in\mathbf{N})$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $a_N<2^k$، آن وقت $a_{N+k}<1$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۴۰. برای $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}=2^{n-1}-3\times 2^{n-2}+9a_{n-2}=\dots$$
$$\dots=2^{n-1}-3^1\times 2^{n-2}+\dots+(-1)^{n-1}3^{n-1}+(-1)^n3^na_0$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$a_n=\frac{2^n+(-1)^{n+1}3^n}{5}+(-1)^n 3^n a_0$$

که برای $n=0$ هم برقرار است. اکنون، این تفاضل را پیدا می‌کنیم:

$$d_n=a_n-a_{n-1}=\frac{2^n+(-1)^{n+1}3^n}{5}+(-1)^n 3^n a_0-$$

$$-\frac{2^{n-1}+(-1)^n 3^{n-1}}{5}-(-1)^{n-1}3^{n-1}a_0=$$

$$=\frac{2^{n-1}}{5}+\frac{(-1)^{n+1}\times 4\times 3^{n-1}}{5}+(-1)^n\times 4\times 3^{n-1}a_0=$$

$$=\frac{2^{n-1}}{5}+(-1)^{n+1}\times 4\times 3^{n-1}\left(\frac{1}{5}-a_0\right)=$$

$$=\frac{2^{n-1}}{5}\left[1+4(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}(1-5a_0)\right]$$

اگر داشته باشیم $1-5a_0>0$، آن‌وقت، به‌ازای مقدارهای زوج و به‌اندازهٔ کافی بزرگ n، داریم $d_n<0$؛ و اگر داشته باشیم: $1-5a_0<0$، آن‌وقت، به ازای مقدارهای فرد و به اندازهٔ کافی بزرگ n، داریم: $d_n<0$.

بنابراین، به ازای $a_0\neq\frac{1}{5}$، دنبالهٔ $\{a_n\}$ نمی‌تواند صعودی باشد. ولی برای $a_0=\frac{1}{5}$ داریم:

$$d_n=\frac{2^{n-1}}{5}>0,\quad (n\in\mathbf{N})$$

یعنی، دنبالهٔ $\{a_n\}$، تنها وقتی صعودی است که داشته باشیم: $a_0=\frac{1}{5}$.

۳۴۱. برای دنباله‌ای که در مسأله داده شده است، داریم:

$$a_{n+1}a_{n+3}+a_{n+1}^2=a_{n+2}^2+a+a_{n+1}^2=a_{n+2}^2+a_na_{n+2}$$

$(n\in\mathbf{N})$، که از آن به دست می‌آید:

$$\frac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}$$

بنا بر این، اگر فرض کنیم: $b_n=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}$، خواهیم داشت:

$$b_1=b_2=b_3=\dots=b$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=b_n=b_1=\frac{a_3+a_1}{a_2}=\frac{1}{a_2}\cdot\left(\frac{a_2^2+a}{a_1}+a_1\right)=$$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+a}{a_1a_2}\in\mathbf{Z}$$

یعنی $a_{n+2}=ba_{n+1}-a_n$ که در آن $b\in\mathbf{Z}$ و $n\in\mathbf{N}$. از آن جا که $a_1a_2\in\mathbf{Z}$، بنا بر این، هریك از عددهای

$$a_3=ba_2-a_1,\ \ a_4=ba_3-a_2,\ \dots$$

عددی درست است.

۳۴۲. روشن است که $a_0=0$ و $a_1=1$. اکنون، برابری زیر را، برای هر مقدار $n\in\mathbf{Z}^+$، ثابت می‌کنیم:

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$$

که در این صورت، پشت سرهم معلوم می‌شود که هریك از عددهای a_2، a_3، a_4، ...، عددی درست است. فرض می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},\ \beta=\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

در این صورت، به دست می‌آید:

$$a_n=\alpha-\beta,$$

$$a_{n+1}=(2+\sqrt{3})\alpha-(2-\sqrt{3})\beta,$$

$$a_{n+۲}=(۲+\sqrt{۳})^۲\alpha-(۲-\sqrt{۳})^۲\beta=(۷+۴\sqrt{۳})\alpha-(۷-۴\sqrt{۳})\beta=$$
$$=(۸+۴\sqrt{۳})\alpha-(۸-۴\sqrt{۳})\beta-(\alpha-\beta)=۴a_{n+۱}-a_n$$

بنا بر این

$$a_{n+۲}\equiv a_{n+۱}-a_n \pmod{۳}$$

و باقی‌ماندهٔ تقسیم ۸ جملهٔ اول دنبالهٔ $\{a_n\}$ بر ۳، به ترتیب، چنین است:

۰، ۱، ۱، ۰، ۲، ۲، ۰، ۱

یعنی

$$a_۶\equiv a_۰ \pmod{۳}،\quad a_۷\equiv a_۱ \pmod{۳}$$

و به طور کلی

$$a_{n+۶}\equiv a_n \pmod{۳}$$

دراین دنباله، جمله‌های به‌صورت $a_{۳k}$ $(k\in\mathbf{Z}^+)$، درتقسیم بر ۳، به‌باقی‌ماندهٔ صفر می‌رسند (و تنها همین جمله‌ها). چون

$$(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=۱$$

بنا بر این، داریم:

$$a_n=\frac{(۲+\sqrt{۳})^n-(۲-\sqrt{۳})^n}{۲\sqrt{۳}}=\frac{(۲-\sqrt{۳})^{-n}-(۲+\sqrt{۳})^{-n}}{۲\sqrt{۳}}=$$
$$=-a_{-n}$$

که از آن نتیجه می‌شود: عدد a_n، بـه ازای مقدارهای منفی n هم، عددی درست است و، در ضمن، تنها وقتی $a_n\equiv ۰ \pmod{۳}$، کـه داشته باشیم: $n\equiv ۰ \pmod{۳}$.

۳۴۳. قرار می‌گذاریم:

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^n$$

در این صورت، برای $n\in\mathbf{N}$، داریم، $a_n>0$ و

$$a_{n+2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2}=$$

$$=\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}\right]\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-$$

$$-\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n}\right]\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}a_{n+1}-a_n$$

با استقرای روی $k\in\mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم که، عدد a_{2k-1}، عددی درست و،عدد a_{2k}، به صورت $m\sqrt{5}$ است $(m\in\mathbf{Z})$. در واقع، به ازای $k=1$ داریم:

$$a_1=1,\quad a_2=\sqrt{5}$$

اکنون فرض می‌کنیم، حکم، برای $k\in\mathbf{N}$ درست باشد. در این صورت

$$a_{2k+1}=\sqrt{5}a_{2k}-a_{2k-1}=5m-a_{2k-1},$$

$$a_{2k+2}=\sqrt{5}a_{2k+1}-a_{2k}=\sqrt{5}(a_{2k+1}-m)$$

یعنی، حکم، برای $k+1$ هم درست است. بنابراین، عددی کـه در صورت مسأله داده شده است:

$$-2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}-$$

$$-2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n}=\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n}\right]^{2}=a_n^2$$

به ازای مقدارهای فرد n، عبارت است از مجذور عدد $a_n\in\mathbf{N}$؛ و به ازای مقدارهای زوج n، به صورت

$$(m\sqrt{5})^2=5m^2\ (m\in\mathbf{N})$$

درمی‌آید.

۳۴۴. هرکدام از دو دنبالهٔ

$$a_n=(1+\sqrt{a})^n \quad \text{و} \quad a_n=(1-\sqrt{a})^n$$

در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$a_{n+1}=2a_n+(a-1)a_{n-1}, \quad (n\in\mathbf{N})$$

درواقع، داریم:

$$a_{n+1}-2a_n+(1-a)a_{n-1}=(1\pm\sqrt{a})^2a_{n-1}-$$
$$-2(1\pm\sqrt{a})a_{n-1}+(1-a)a_{n-1}=0$$

(برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$). بنابراین، برای هر دنبالهٔ به صورت

$$a_n=A(1+\sqrt{a})^n+B(1-\sqrt{a})^n$$

هم همان شرط برقرار است. در حالت خاص، و به ازای

$$A=-B=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

به این دنباله می‌رسیم:

$$a_n=\frac{(1+\sqrt{a})^n-(1-\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}}$$

که با شرطهای صورت مسأله سازگار است، زیرا $a_0=0$ و $a_1=1$.

با استفاده از بسط دوجمله‌ای، برای هر عدد اول $p\neq 2$ (و بنابراین عددی فرد)، به دست می‌آید:

$$a_p=\frac{1}{2\sqrt{a}}[(1+\sqrt{a})^p-(1-\sqrt{a})^p]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\sum_{i=0}^{p}C_p^i(\sqrt{a})^i-\sum_{i=0}^{p}C_p^i(-\sqrt{a})^i\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(p-1)}C_p^{2i+1}a^i\equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)}\pmod{p}$$

در مجموع آخر، همهٔ جمله‌های به صورت $C_p^{2i+1}a^i$، به ازای

$$i=0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}-1$$

بر p بخش‌پذیرند، زیرا برای $k=1, 2, \ldots, p-1$ داریم:

$$C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!}\equiv 0 \pmod p$$

و به ازای $i=\frac{1}{2}(p-1)$، جملهٔ باقی‌مانده برابر $C_p^p a^i=a^{\frac{1}{2}(p-1)}$ است.

به ازای $p=2$ به دست می‌آید:

$$a_p=\frac{(1+\sqrt{a})^2-(1-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}=2\equiv 0 \pmod p$$

به این ترتیب، برای این که شرطهای الف) و ب) برقرار باشند، لازم و کافی است که، عدد a بر هر عدد اول p، که در نابرابری $2<p\leqslant p_0$ صدق می‌کند، بخش‌پذیر باشد، ولی بر هیچ کدام از عددهای اول $p>p_0$ بخش‌پذیر نباشد. کوچکترین عدد $a\in\mathbf{N}$، که دارای این ویژگی باشد، برابر است با حاصلضرب همهٔ عددهای اول p، که در نابرابری $3\leqslant p\leqslant p_0$ صدق می‌کنند.

۳۴۵. فرض می‌کنیم، دنبالهٔ $\{a_n\}$، با شرطهای مسأله سازگار باشد. چون

$$a_1>0, a_2>0 \quad \text{و} \quad a_2^3+1=a_1a_3$$

بنابراین: $a_3>0$. به‌همین ترتیب، معلوم می‌شود که، به طور کلی، $a_n>0$. در نتیجه

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^3+1}{a_n}, \ (n\in\mathbf{N})$$

یعنی

$$a_3=\frac{a_2^3+1}{a_1}=a_2^3+1,$$

$$a_4=\frac{a_3^3+1}{a_2}=\frac{1}{a_2}[(a_2^3+1)^3+1]=\frac{1}{a_2}(a_2^9+3a_2^6+3a_2^3+2)=$$

$$=a_2^8+3a_2^5+3a_2^2+\frac{2}{a_2}$$

چون $a_4\in\mathbf{Z}$، بنابراین عدد ۱ $<a_2$، باید مقسوم علیهی از ۲ باشد، یعنی $a_2=2$. از آن‌جا که، همهٔ بقیهٔ جمله‌های دنباله، به‌صورتی یک‌ارزشی، به‌کمک دوجملهٔ اول آن معین می‌شوند، در نتیجه، دنبالهٔ مفروض، منحصر به فرد است.

با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$ ثابت می‌کنیم، همهٔ جمله‌های این دنباله، عددهایی درست‌اند (یعنی به واقع، در شرط‌های مسأله صدق می‌کنند). دیدیم، عددهای a_1، a_2، a_3، a_4، عددهایی درست‌اند. اکنون فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n\geqslant 5$ بدانیم

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\in\mathbf{Z}$$

در این صورت داریم:

$$a_n=\frac{a_{n-1}^3+1}{a_{n-2}}=\frac{\left(\frac{a_{n-2}^3+1}{a_{n-3}}\right)^3+1}{a_{n-2}}=$$

$$=\frac{a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3}{a_{n-2}\cdot a_{n-3}^3}$$

درضمن، صورت این کسر، بر a_{n-3}^3 بخش‌پذیر است، زیرا عدد

$$\frac{a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3}{a_{n-3}^3}=a_{n-1}^3+1$$

عددی است درست. این صورت کسر، بر a_{n-2} هم بخش‌پذیر است، زیرا

$$\frac{a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3}{a_{n-2}}=$$

$$=a_{n-2}^8+3a_{n-2}^5+3a_{n-2}^2+a_{n-4}$$

ثابت می‌کنیم، دوعدد a_{n-2} و a_{n-3}^3 نسبت به‌هم اول‌اند (که دراین‌صورت، ثابت می‌شود، صورت کسر مزبور، بر حاصل‌ضرب این دو عدد بخش‌پذیر است). درواقع، این حقیقت، نتیجه‌ای است از رابطهٔ

$$(a_{n-2}, a_{n-3})=\left(\frac{a_{n-3}^3+1}{a_{n-4}}, a_{n-3}\right)\leqslant(a_{n-3}^3+1, a_{n-3})=$$

$$=(1, a_{n-3})=1$$

به این ترتیب، a_n عددی درست است. حکم ثابت شد.

۳۴۶. قرار می‌گذاریم:

$$S_n=\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_0}{a_2}+\ldots+\frac{a_0}{a_n}+\frac{p}{a_{n+1}}$$

دراین‌صورت، دنبالهٔ S_1، S_2، ...، تنها درحالتی شامل جمله‌های یکسان است که، برای هر $n\in\mathbf{N}$، تفاضل

$$S_{n+1}-S_n=\frac{a_0}{a_{n+1}}+\frac{p}{a_{n+2}}-\frac{p}{a_{n+1}}=\frac{p}{a_{n+2}}-\frac{p-a_0}{a_{n+1}}$$

برابر صفر باشد، یعنی $a_{n+2}=\frac{p}{p-a_0}a_{n+1}$. فرض می‌کنیم، دنبالهٔ a_0، a_1، ... با شرط مسأله سازگار باشد، در این‌صورت، برای هر مقدار $n\geqslant 3$ داریم:

$$a_n=\frac{p}{p-a_0}a_{n-1}=\frac{p^2}{(p-a_0)^2}a_{n-2}=\ldots=\frac{p^{n-2}}{(p-a_0)^{n-2}}a_2$$

چون $a_n\in\mathbf{N}$ و دو عدد p و $p-a_0$ نسبت به هم اول‌اند (زیرا $p-a_0$ مقداری است مثبت و کوچکتر از p)، بنابراین، a_2 باید بر هر توان طبیعی

عدد $p-a_0$ بخش‌پذیر باشد، ازآن‌جا $p-a_0=1$. به‌این ترتیب، داریم:

$$a_0=p-1,\ \frac{p-1}{a_1}+\frac{p}{a_2}=1,\ a_n=p^{n-2}a_2$$

$(a_1, a_2\in\mathbf{N}$ و $n=3, 4, \ldots)$. برقراری این برابری‌ها، سازگار بودن دنباله را باشرط مسأله، تضمین می‌کند، زیرا دراین حالت داریم:

$$S_1=1,\ S_{n+1}=S_n,\ (n\in\mathbf{N})$$

به‌این ترتیب، مسأله به این‌جا منجر می‌شود که، با مفروض بودن عدد اول p، تعداد ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{p-1}{a_1}+\frac{p}{a_2}=1$$

را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی، پیدا کنیم. معادله را، به این صورت می‌نویسیم:

$$pa_1=a_2[a_1-(p-1)]$$

و توجه می‌کنیم که، سمت چپ این معادله، بر p بخش‌پذیر است. بنابراین، معادله تنها وقتی جواب دارد که یکی از دو شرط

$$a_2=kp \ \text{یا}\ a_1-(p-1)=mp,\ (k, m\in\mathbf{N})$$

برقرار باشد، زیرا $a_2>0$ و $a_1-(p-1)>0$. درضمن، این دو شرط، نمی‌توانند با هم برقرار باشند، زیرا اگر داشته باشیم:

$$a_1-(p-1)\equiv 0 \pmod p$$

آن وقت $a_1\equiv -1 \pmod p$؛ یعنی، سمت چپ معادله بر p^2 بخش‌پذیر نیست و، بنابراین، عدد a_2 نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد.

اکنون، فرض می‌کنیم $a_2=kp$، دراین‌صورت، معادله به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$a_1=k[a_1-(p-1)] \Longrightarrow p-1=(k-1)(a_1-p+1)$$

بنابراین، در این حالت، جواب‌ها، به این ترتیب به دست می‌آیند: به‌عنوان مقدار a_1-p+1، باید هر یك از مقسوم‌علیه‌های عدد $p-1$ را انتخاب کرد و، سپس، فرض کرد $a_2=kp$، که در آن

$$k=\frac{p-1}{a_1-p+1}+1$$

به حالت $a_1-(p-1)=mp$ می‌پردازیم. در این حالت، معادلهٔ مـا، تنها وقتی جواب داردکه داشته باشیم:

$$mp+p-1=a_2m \Longrightarrow p-1=(a_2-p)m$$

دراین حالت، جواب‌هـا، به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آیند: باید به عنوان m، هریك از مقسوم‌علیه‌های عدد $p-1$ را انتخاب کرد و، سپس، فرض کرد:

$$a_2=\frac{p-1}{m+p},\ a_1=mp+p-1$$

هیچ‌کدام ازجواب‌ها، نمی‌توانند به‌هردو رشته جواب (مربوط به دو حالت مختلف) تعلق داشته باشد، زیرا در غیر این‌صورت، باید در دوشرط متناقض با یکدیگر، صدق کند. بنابـراین، تعداد جواب‌هـای معادله، که برابر است با تعداد دنباله‌های مورد نظر، به اندازهٔ دو برابر تعداد مقسوم علیه‌های عدد $p-1$ می‌شود.

۳۴۷. ثابت می‌کنیم، سه‌عدد $a, b, c\in\mathbf{N}$، با شرط $b<a$ و $c<a$، تنها وقتی با شرط مسأله سازگارندکه داشته باشیم:

$$bc\equiv 1 \pmod{a} \qquad (1)$$

$$nbc^n+(n-1)bc^{n-1}\equiv(n+1)bc^{n+1} \pmod{a} \qquad (2)$$

فرض می‌کنیم، عددهای a و b و c، بـا شرط مسأله سازگار باشند. دراین صورت، شرط (۱) نتیجه‌ای است از رابطهٔ

$$bc\equiv a_1 \pmod{a},\ a_1=1$$

شرط (۲) هم، برای $n=1$، با توجه به رابطه‌های

$$2bc^2 \equiv a^2 \pmod a, \quad a_2 = a_1$$

به دست می‌آید که، در این حالت، چنین می‌شود:

$$bc \equiv 2bc^2 \pmod a \qquad (3)$$

شرط (۲)، برای بقیهٔ مقدارهای $n > 1$ هم برقرار است، زیرا

$$a_n \equiv nbc^n \pmod a,$$

$$a_{n-1} \equiv (n-1)bc^{n-1} \pmod a, \quad a_{n+1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod a$$

$$a_n + a_{n-1} = a_{n+1} \qquad (4)$$

اکنون فرض کنید، عددهای a و b و c، با شرطهای (۱) و (۲) سازگار باشند. با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$، ثابت می‌کنیم، هر یك از عددهای $a_n - nbc^n$ بر a بخش‌پذیرند. درستی حکم، به ازای $n = 1$ و $n = 2$، نتیجه‌ای است از شرطهای (۱) و (۳) [شرط (۳)، همان شرط (۲)، برای $n = 1$ است]، زیرا $a_1 = a_2 = 1$. فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n > 1$، عددهای

$$a_n - nbc^n \quad \text{و} \quad a_{n-1} - (n-1)bc^{n-1}$$

بر a بخش‌پذیر باشند. در این صورت، با توجه به شرطهای (۲) و (۴)، معلوم می‌شود که عدد

$$a_{n+1} - (n+1)bc^{n+1} \equiv [(a_n - nbc^n) + (a_{n-1} - \\ - (n-1)bc^{n-1})] \pmod a$$

هم بر a بخش‌پذیر است. توجه کنیم که، از شرط (۱)، نتیجه می‌شود:

$$(b, a) = (c, a) = 1$$

درضمن، شرط (۲)، هم‌ارز با این است که، هر یك از عددهای

$$d_n = (n+1)c^2 - nc - (n-1) = (n+1)(c^2 - c - 1) + (c+2)$$

$(n \in \mathbb{N})$، بر a بخش‌پذیرند که (به نوبهٔ خود)، به معنای آن است که هر یك از دو عدد

$$c^2-c-1=d_2-d_1 \quad \text{و} \quad c+2=d_1-2(c^2-c-1)$$

بر a بخش‌پذیرند. بنابراین، عدد

$$(c^2-c-1)-(c+2)(c-3)=5$$

باید بر a بخش‌پذیر باشد. چون $a>1$، پس $a=5$ و از رابطه‌های

$$c+2\equiv 0 \pmod 5)، \quad 1\leqslant c<5، \quad bc\equiv 1 \pmod 5)، \quad 1\leqslant b<5$$

به دست می‌آید: $c=3$ و $b=2$.

برای کامل شدن اثبات، کافی است توجه کنیم که، این مقدارهای a و b و c، با شرط (۱) سازگارند، و عددهای $c+2$ و c^2-c-1 بر a بخش‌پذیرند.

§۱۸. اکسترممم‌ها

۳۴۸. حداقل مقدار تابع $f(x، y)$، برای x و y مثبت، برابر است با ۲، زیرا داریم:

$$f(x، y)-2=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)\geqslant\frac{(x-y)^2}{xy}\geqslant 0$$

و برابری $f(x، y)=2$، تنها وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $x=y$.

۳۴۹. با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u}=\sqrt[4]{2x\cdot xy\cdot z\cdot yzu}\leqslant\frac{2x+xy+z+yzu}{4}=\frac{1}{4}$$

یعنی $x^2y^2z^2u\leqslant\frac{1}{512}$. و برابری، وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم:

$$2x=xy=z=yzu=\frac{1}{4}$$

یعنی به ازای $x=\frac{1}{8}$، $y=2$، $z=\frac{1}{4}$ و $u=\frac{1}{2}$. به‌این‌ترتیب، حداکثرمقدار $x^2y^2z^2u$، برابر است با $\frac{1}{512}$.

۳۵۰. ابتدا $n=2k$ می‌گیریم $(k\in\mathbf{N})$. با توجه به نابرابری مثلثی داریم:

$$\begin{cases} |x-a_1|+|x-a_n|\geqslant a_n-a_1, \\ |x-a_2|+|x-a_{n-1}|\geqslant a_{n-1}-a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ |x-a_k|+|x-a_{k+1}|\geqslant a_{k+1}-a_k \end{cases}$$

از آن‌جا

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|\geqslant\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j)$$

درضمن، اگر $x\in[a_k, a_{k+1}]$، آن وقت

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j)$$

از طرف دیگر، اگر $x\notin[a_k, a_{k+1}]$، آن وقت

$$|x-a_k|+|x-a_{k+1}|>a_{k+1}-a_k$$

و

$$f(x)>\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j)$$

بنابراین، حداقل مقدار تابع $f(x)$، برابر است با

$$\sum_{j=1}^{k}(a_{n-j+1}-a_j)$$

که به‌ازای هرمقدار $x\in[a_k, a_{k+1}]$ به‌دست می‌آید.

اکنون، فرض کنید $n=2k-1$ $(k\in\mathbf{N})$. داریم:

$$|x-a_1|+|x-a_n|\geqslant a_n-a_1,$$
$$|x-a_2|+|x-a_{n-1}|\geqslant a_{n-1}-a_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$|x-a_{k-1}|+|x-a_{k+1}|\geqslant a_{k+1}-a_{k-1},$$
$$|x-a_k|\geqslant 0$$

و از آن‌جا

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|\geqslant\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j)$$

درضمن، اگر $x=a_k$، آن وقت

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j)$$

و اگر $x\neq a_k$، آن وقت

$$f(x)\geqslant\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j)+|x-a_k|>\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j)$$

به‌این‌ترتیب، حداقل تابع $f(x)$ برابر است با

$$\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j)$$

که به‌ازای $x=a_k$ به‌دست می‌آید.

۳۵۱. الف) حداقل‌مقدارحاصل‌ضرب $x_1x_2\ldots x_n$ را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم، گروه عددهای $(x_1,\ldots,x_n)$ با شرط‌های مسأله سازگار باشد. گروه جدید عددهای

$$(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$$

را در نظر می‌گیریم که در آن

$$x_1^{(1)}=x_1,\ x_2^{(1)}=x_2,\ \ldots,\ x_{n-2}^{(1)}=x_{n-2},$$

$$x_{n-1}^{(1)}=\sqrt{x_{n-1}^{2}+x_{n}^{2}-\frac{1}{n^{2}}},\ x_{n}^{(1)}=\frac{1}{n}$$

این گروه عددها هم، با شرط‌های

$$x_i^{(1)}\geqslant\frac{1}{n}\,(i=1,\ldots,n)\ \text{و}\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(1)})^2=1$$

سازگار است. ثابت می‌کنیم:

$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant x_1^{(1)}x_2^{(1)}\cdots x_n^{(1)}$$

در واقع، داریم:

$$x_{n-1}^{2}x_{n}^{2}-(x_{n-1}^{(1)}x_{n}^{(1)})^{2}=$$

$$=x_{n-1}^{2}x_{n}^{2}-\left(x_{n-1}^{2}+x_{n}^{2}-\frac{1}{n^{2}}\right)\frac{1}{n^{2}}=\left(x_{n-1}^{2}-\frac{1}{n^{2}}\right)\left(x_{n}^{2}-\frac{1}{n^{2}}\right)\geqslant 0$$

سپس، فرض می‌کنیم:

$$x_1^{(2)}=x_1^{(1)},\ \ldots,\ x_{n-3}^{(2)}=x_{n-3}^{(1)},$$

$$x_{n-2}^{(2)}=\sqrt{(x_{n-2}^{(1)})^{2}+(x_{n-1}^{(1)})^{2}-\frac{1}{n^{2}}},\ x_{n-1}^{(2)}=x_{n}^{(2)}=\frac{1}{n}$$

و دوباره به دست می‌آوریم:

$$x_i^{(2)}\geqslant\frac{1}{n},\ \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(2)})^2=1,$$

$$x_1^{(1)}x_2^{(1)}\cdots x_n^{(1)}\geqslant x_1^{(2)}x_2^{(2)}\cdots x_n^{(2)}$$

اگر این روند را $(n-1)$ بار ادامه دهیم، به گروه عددهای

$$(x_1^{(n-1)},\ x_2^{(n-1)},\ \ldots,\ x_n^{(n-1)})$$

می‌رسیم که، برای آن‌ها، داریم:

$$x_1^{(n-1)}=\frac{\sqrt{n^{2}-n+1}}{n},\ x_2^{(n-1)}=\ldots=x_n^{(n-1)}=\frac{1}{n}$$

در ضمن

$$x_i^{(n-1)} \geqslant \frac{1}{n}, \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(n-1)})^2 = 1,$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant x_1^{(n-1)} x_2^{(n-1)} \cdots x_n^{(n-1)} = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$$

یعنی، برای هر انتخابی از عددهای $(x_1, \ldots, x_n)$، که در شرط مسأله صدق کند، این نابرابری برقرار است:

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$$

که به ازای

$$x_1 = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}, \ x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$$

به علامت برابری می‌رسد. به این ترتیب، حداقل مقدار حاصل‌ضرب، برابر است با

$$\frac{1}{n^n} \sqrt{n^2-n+1}$$

ب) حداکثر مقدار حاصل‌ضرب $x_1 x_2 \cdots x_n$ را پیدا می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}$$

یعنی

$$x_1 \cdots x_n \leqslant n^{-\frac{1}{2} n}$$

برابری وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

به این ترتیب، حداکثر مقدار این حاصل‌ضرب، برابر $\frac{1}{\sqrt{n^n}}$ است.

۳۵۲. فرض می‌کنیم:

$$\max(x_1, \ldots, x_n)=x_k$$

در این صورت، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}=\sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1}+\sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1} \leqslant$$

$$\leqslant x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i+x_k \sum_{i=k+1}^{n} x_i=x_k(a-x_k) \leqslant\left(\frac{x_k+a-x_k}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

و علامت برابری، مثلاً برای $x_1=x_2=\frac{a}{2}$ و $x_3=\ldots=x_n=0$ برقرار است. بنابراین، حداکثر مقدار موردنظر، برابر $\frac{1}{4}a^2$ است.

۳۵۳. برای عددهای $a_n>\ldots>a_1>0$، فرض می‌کنیم:

$$A=\prod_{i=1}^{n} a_i$$

در این صورت داریم:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)=\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i+1}{b_i}=\frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n}(a_i b_i+1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)$$

برای اثبات نابرابری اخیر، کافی است توجه کنیم که

$$(a_i b_i+1)^2=a_i^2 b_i^2+2 a_i b_i+1 \leqslant a_i^2+b_i^2+a_i^2+b_i^2+1=$$

$$=(a_i^2+1)(b_i^2+1)$$

و از آن‌جا

$$\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i+1)^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)(b_i^2+1)=\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)^2$$

علامت برابری، تنها وقتی است که، برای $i=1, \dots, n$، داشته باشیم:

$$2a_ib_i=a_i^2+b_i^2$$

به این ترتیب، حاصل‌ضرب مورد نظر مسأله، تنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$(b_1, \dots, b_n)=(a_1, \dots, a_n)$$

۳۵۴. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان $x \geqslant y$ گرفت. $p=x-k$ می‌نامیم، در این صورت

$$x=k+p,\ y=2k-x=k-p,\ p\geqslant 0$$

و حاصل‌ضرب

$$xy=(k+p)(k-p)=k^2-p^2$$

وقتی به حداکثرمقدارخود می‌رسد که، p، حداقل مقدارممکن باشد. $p=0$ می‌گیریم، در این صورت $x=y=k$ و دو عدد x و y تنها وقتی نسبت به‌هم اول می‌شوند که داشته باشیم: $k=1$. اگر فرض کنیم $p=1$، آن‌وقت $x=k+1$ و $y=k-1$ و برای این که x و y نسبت به هم اول باشند، باید k عددی زوج باشد (در غیر این صورت، هر دو عدد x و y بر ۲ بخش‌پذیر می‌شوند). زوج بودن k برای این که x و y نسبت به هم اول باشند، کافی است، زیرا هر مقسوم‌علیهی از x و y باید مقسوم‌علیهی از $x-y$ هم باشد و

$$x-y=(k+1)-(k-1)=2$$

و با زوج بودن k، x یا y بر ۲ بخش‌پذیر نیستند.

به ازای $p=2$ به دست می‌آید:

$$x=k+2,\ y=k-2$$

که برای مقدارهای فرد k، نسبت به هم اول‌اند، زیرا در این حالت x و y

عددهایی فردند و، در ضمن، نمی‌توانند مقسوم علیه مشترکی به جز یکی از مقسوم علیه‌های

$$x-y=(k+2)-(k-2)=4$$

داشته باشند. به این ترتیب، عددهای مجهول x و y را باید این طور انتخاب کرد:

اگر $k=1$، آن وقت $x=1$، $y=1$؛

اگر $k=2m\,(m\in\mathbf{N})$، آن وقت $x=k\pm 1$، $y=k\mp 1$،

اگر $k=2m+1\,(m\in\mathbf{N})$، آن وقت $x=k\pm 2$، $y=k\mp 2$.

۳۵۵. داریم:

$$a=\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(1-\cos 2x_i)$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i=n-2a$$

اکنون، بردارهای

$$(\cos 2x_i,\ \sin 2x_i)$$

به طول واحد را، در صفحه، در نظر می‌گیریم. طول مجموع این بردارها، از n تجاوز نمی‌کند، یعنی داریم:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|\leqslant\sqrt{n^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i\right)^2}=$$

$$=\sqrt{n^2-(n-2a)^2}=2\sqrt{a(n-a)}$$

که در آن وقتی به علامت برابری می‌رسیم که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=\dots=x_n=\arcsin\sqrt{\frac{a}{n}}$$

بنابراین، حداکثر مقدار مجهول، برابر $2\sqrt{a(n-a)}$ است.

۳۵۶. هر عدد ثابت $n\in\mathbf{N}$ را، تنها بــه چند طریق محــدود، می‌توان به‌صورت مجموع عددهای طبیعی نوشت (یعنی، تعداد این روش‌ها، نامتناهی نیست). بین این حالت‌ها، نمونه‌ای وجود دارد (کــه ممکن است، منحصر به فرد هم نباشد) که، برای آن، داشته باشیم:

$$n=m_1+m_2+\dots+m_k,\ m_1\leqslant m_2\leqslant\dots\leqslant m_k$$

و در ضمن، حاصل‌ضرب $m_1m_2\dots m_k$، حداکثر مقدار $f(n)$ را قبول کند؛ می‌توان فرض کرد کــه هیچ کدام از عددهای $m_i\,(i=1,\dots,k)$، برابر ۴ نیستند، زیرا ۴ را می‌توان به صورت ۲+۲ نوشت کــه هم مجموع و هم حاصل‌ضرب آن‌ها، ثابت می‌ماند. هر عدد m_i از ۴ هم تجاوز نمی‌کند، زیرا با فرض $m_k>4$، حاصل‌ضرب عــددهای m_1، m_2، ...، m_k-2 و ۲، از حاصل‌ضرب قبلی بیشتر می‌شود، زیرا

$$(m_k-2)2>m_k$$

برای $n=1$، تنهــا یك امكان وجــود دارد، یعنی $f(1)=1$. برای $n>1$، هر عدد m_i برابر واحد نیست، زیرا، اگر مثلاً $m_1=1$، آن وقت حاصل‌ضرب عددهای

$$m_1+m_2,\ m_3,\ \dots,\ m_k$$

که همان مجموع n را دارند، از حاصل‌ضرب قبلی بیشتر می‌شود، چرا که

$$m_1+m_2>m_1m_2$$

بالاخره، در بین عددهای m_i، سه عدد (یا بیشتر) نمی‌توانند برابر ۲ باشند، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم:

$$m_1=m_2=m_3=2$$

آن وقت، حاصل‌ضرب عــددهای ۳، ۳، m_4، ...، m_k، از حاصل‌ضرب قبلی بیشتر می‌شود (زیرا $2^3<3^2$). بــه ایــن ترتیب، برای $n>1$، هر یك از عددهای m_i بــرابــر ۳ هستند، به جز احتمالاً یك یا دو عدد برابر ۲. این نوع انتخاب عددهای m_i، برای هر عدد $n>1$، به صورتی منحصر به فرد

به دست می‌آید. بنابراین، برای مقدار $f(n)$ داریم:

$$f(1)=1،\ f(3l)=3^{l}،\ f(3l-1)=2\times 3^{l-1}$$

$$f(3l+1)=4\times 3^{l-1}\quad (l\in \mathbf{N})$$

۳۵۷. ثابت می‌کنیم، حداقل قدرمطلق عبارت

$$f(m، n)=12^{m}-5^{n}،\ (m، n\in \mathbf{N})$$

برابر است با ۷. قبل ازهمه داریم: $f(1، 1)=7$. اکنون، فرض می‌کنیم، برای عددهایی از $m، n\in \mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$f(m، n)<7$$

عدد $f(m، n)$ بر هیچ کدام از عددهای ۲، ۳، ۵ بخش‌پذیر نیست، بنابراین تنها برابری $|f(m، n)|=1$ ممکن است برقرار باشد. درنتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $f(m، n)$ بر ۱۳، باید برابر ۱ یا ۱۲ باشد. چون

$$12^{m}\equiv(-1)^{m}(\mathrm{mod}\ 13)$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 12^{m} بر ۱۳، در حالت زوج بودن m برابر ۱ و در حالت فردبودن m برابر ۱۲ می‌شود.

$n=4k+r$ می‌گیریم که، در آن، $k\in \mathbf{Z}^{+}$ و $r\in\{0، 1، 2، 3\}$. دراین صورت

$$5^{n}=625\times 5^{r}\equiv 5^{r}(\mathrm{mod}\ 13)$$

از این جا نتیجه می‌گیریم که، اگر r برابر ۰، ۱، ۴ یا ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم 5^{r} بر ۱۳، برابر ۱، ۵، ۱۲ یا ۸ می‌شود: به این ترتیب، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $12^{m}-5^{n}$ بر ۱۳، نمی‌تواند برابر ۱ یا ۱۲ باشد؛ یعنی نابرابری

$$|f(m، n)|<7$$

برای هیچ مقداری از $m، n\in \mathbf{N}$ برقرار نیست.

§ ۱۹. ویژگی‌های مختلف تابع

۳۵۸. بنابر فرض مسأله داریم:

$$f(0)=c=1,$$

$$f(x_1)=ax_1^4+bx_1^2+1=1,$$

$$f'(x_2)=4ax_2^3+2bx_2=0$$

که از آن‌ها، به دست می‌آید:

$$b=-2ax_2^2 \text{ و } ax_1^4-2ax_2^2x_1^2=ax_1^2(x_1^2-2x_2^2)=0$$

یعنی $x_1=x_2\sqrt{2}$ (زیرا عددهای a و x_1 مخالف صفرند). آزمایش نشان می‌دهد که، اگر $x_1=x_2\sqrt{2}$، آن وقت تابع

$$f(x)=ax^4-2ax_2^2x^2+1$$

با شرط‌های مسأله سازگار است. بنابراین، اگر $x_1\neq x_2\sqrt{2}$، آن وقت، تابع مطلوب وجود ندارد و اگر $x_1=x_2\sqrt{2}$، آن وقت، سه عدد (a, b, c) به صورت

$$(a, -2ax_2^2, 1)$$

درمی‌آیند که، در آن‌ها، a عددی دلخواه و مخالف صفر است.

۳۵۹. ثابت می‌کنیم، چنین تابعی وجود ندارد. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، در ضمن، باید داشته باشیم:

$$f(0)-(f(0))^2\geqslant\frac{1}{4} \Rightarrow \left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$$

یعنی $f(0)=\frac{1}{2}$. به همین ترتیب، به دست می‌آید: $f(1)=\frac{1}{2}$، یعنی

$$f(0)=f(1)$$

که مخالف فرض مسأله است.

۳۶۰. اگر در نابرابری

$$f(x+y)<f(x)+f(y)$$

قرار دهیم $x=y=0$، به دست می‌آید:

$$f(0)\leqslant 2f(0) \Rightarrow f(0)\geqslant 0$$

از این جا، با توجه به نابرابری مفروض $f(0)\leqslant 0$، نتیجه می‌شود $f(0)=0$، سپس، برای هر مقدار $x\in\mathbf{R}$ داریم:

$$f(x)\geqslant f(x+(-x))-f(-x)=-f(-x)\geqslant x$$

که از آن جا، با توجه به نابرابری مفروض $f(x)\leqslant x$، به دست می‌آید:

$$f(x)\equiv x,\ (x\in\mathbf{R})$$

۳۶۱. این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$g(x)=f(x)+f(ax)$$

اگر $a=\frac{p}{q}$ $(p\in\mathbf{Z}$ و $q\in\mathbf{N})$، آن وقت $T=q\pi$، دورهٔ تناوب $g(x)$ است، زیرا

$$g(x+q\pi)\equiv f(x+q\pi)+f(ax+p\pi)$$

و π، دورهٔ تناوب $f(x)$ است. ثابت می‌کنیم، اگر a عددی گنگ باشد، تابع $g(x)$، متناوب نیست. داریم:

$$g(0)=f(0)+f(0)=1$$

اگر برای مقداری مثل $x_0\neq 0$ داشته باشیم $g(x_0)=1$، آن وقت

$$tg^2x_0=0 \quad \text{و} \quad tg^2(ax_0)=0$$

یعنی

$$x_0=k\pi \quad \text{و} \quad ax_0=l\pi,\ (k, l\in\mathbf{Z})$$

و چون $x_0\neq 0$، بنابراین $a=\frac{l}{k}$ که با گنگ بودن عدد a متناقض است.

بنابراین، تابع $g(x)$، تنها درنقطهٔ $x=0$، برابر واحد می‌شود، یعنی دورهٔ

تناوب ندارد.

۳۶۲. از آن‌جا که معادلهٔ $f(x)=g(x)$، ریشهٔ حقیقی ندارد، بنابراین تابع

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

به ازای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{R}$، یا فقط مقدارهای مثبت را می‌پذیرد و یا فقط مقدارهای منفی را. بنابراین، تابع

$$f(f(x))-g(g(x))=f(f(x))-g(f(x))+$$
$$+f(g(x))-g(g(x))=h(f(x))+h(g(x))$$

نمی‌توانند، به‌ازای هیچ مقداری از $x\in\mathbf{R}$، برابر صفر شود.

۳۶۳. الف) تابع $f:[0, +\infty)\rightarrow[0, +\infty)$ را پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} f(f(x))=+\infty$$

به برهان خلف متوسل می‌شویم و فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد. دراین‌صورت، مقدار $N>0$ وجود دارد که، برای هر $n\in\mathbf{N}$، بتوان عدد $x_n>n$ را پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$f(x_n)\in[0, N]$$

چون تابع $f(x)$ پیوسته است، بنابراین، مقدار آن دربازهٔ $[0, N]$ محدود می‌ماند و، درنتیجه، می‌توان مقدار M را طوری پیدا کرد که از نابرابری $f(x)\leqslant N$ بتوان نابرابری $f(f(x))\leqslant M$ را نتیجه گرفت. به‌این‌ترتیب، برای هر $n\in\mathbf{N}$، عدد $x_n>n$ وجود دارد‌که، برای آن، داریم:

$$f(f(x_n))\leqslant M$$

که شرط مسأله، یعنی

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} f(f(x))=+\infty$$

را نقض می‌کند، پس

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$$

ب) $f(x)\equiv\frac{1}{x}$ می‌گیریم، دراین‌صورت

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty),$$

$$f(f(x))\equiv x,\quad \lim_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$$

درحالی که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

۳۶۴. فرض کنیم، این تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. تابع‌های پیوستهٔ زیر را درنظر می گیریم:

$$g(x)=f(x+1)-f(x),\quad h(x)=f(x+1)+f(x)$$

این دو تابع، نمی‌توانند به طور هم زمان، مقداری ثابت باشند، زیرا تابع

$$f(x)\equiv\frac{1}{2}[h(x)-g(x)]$$

مقدار ثابتی نیست. مثلاً، فرض می کنیم، $h(x)$، مقدار ثابتی نباشد، یعنی بتوان دو مقدار x_1 و x_2 را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$h(x_1)<h(x_2)$$

دراین‌صورت، عدد گویای $r\in[h(x_1), h(x_2)]$ وجود دارد، و با توجه به پیوستگی تابع $h(x)$، عددی مثل x_0 پیدا می‌شود که، برای آن، داشته باشیم: $h(x_0)=r$. به‌این‌ترتیب $f(x_0+1)+f(x_0)=r$ و این، به‌معنای آن است که دو عدد $f(x_0+1)$ و $f(x_0)$، یا هر دو گویا و یا هر دو گنگ‌اند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

۳۶۵. از نابرابری $[f(x)-f(y)]^2\leqslant|x-y|^3$، به ازای

$x\neq y$، نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant|x-y|^{\frac{۱}{۲}}$$

و از آن‌جا

$$\underset{x\to y}{\text{حد}}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=۰$$

زیرا: $\underset{x\to y}{\text{حد}}|x-y|^{\frac{۱}{۲}}=۰$. یعنی تابع $f(x)$، درهر نقطه، مشتق‌پذیر است و، درضمن، $f'(x)\equiv ۰\ (x\in\mathbf{R})$. بنابراین، تابع $f(x)$، تنها می‌تواند برابر مقداری ثابت باشد.

۴۶۶. $f(x)$ را تابع مورد نظر مسأله درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)+x-۱$$

که دربازهٔ $[۰، ۱]$ معین است. $g(x)$ تابعی است پیوسته (چون $f(x)$ پیوسته است) و در ضمن $g(۰)=-۱$ و $g(۱)=۱$؛ بنابراین عدد $c\in(۰، ۱)$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $g(c)=۰$، یعنی $f(c)=۱-c$. بنابرقضیهٔ لاگرانژ، عددهای $a\in(۰، c)$ و $b\in(c، ۱)$ وجود دارند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f'(a)=\frac{f(c)-f(۰)}{c},\ \ f'(b)=\frac{f(۱)-f(c)}{۱-c}$$

بنابراین

$$f'(a)\cdot f'(b)=\frac{۱-c}{c}\cdot\frac{c}{۱-c}=۱$$

۴۶۷. ثابت می‌کنیم، هرعدد $d=\frac{۱}{k}\ (k\in\mathbf{N})$، باشرط مسألهٔ سازگار

است. تـابـع پیوسته و دلخواه $f(x)$ و عـدد $k>۱$ را درنظر می‌گیریم (عدد $d=۱$، با شرط مسالهٔ سازگار است، زیرا $f(۱)=f(۰)$). تابع

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{k}\right)-f(x)$$

در بازهٔ $\left[۰، \frac{k-1}{k}\right]$ معین است. از آن‌جا که مجموع عددهای

$$g(0)=f\left(\frac{1}{k}\right)-f(0);\ g\left(\frac{1}{k}\right)=f\left(\frac{2}{k}\right)-f\left(\frac{1}{k}\right), \ldots,$$

$$g\left(\frac{k-1}{k}\right)=f(1)-f\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

برابر صفر است، بنابراین، دربین آن‌ها، هم‌عددهای غیرمثبت و هم‌عددهای غیرمنفی وجود دارند. درنتیجه، بـا توجه به پیوستگی تابع $g(x)$، عدد x_0 وجود داردکه، برای آن داشته باشیم: $g(x_0)=0$، یعنی

$$f\left(x_0+\frac{1}{k}\right)=f(x_0)$$

اکنون فرض کنید، عـدد مفروض $d\in(0, 1]$، بـه ازای هیچ مقدار $k\in\mathbf{N}$، برابر $\frac{1}{k}$ نباشد. بـرای این عدد d، عدد $k\in\mathbf{N}$ را طوری انتخـاب می‌کنیم‌که داشته باشیم:

$$kd<1<(k+1)d$$

و تابع پیوستهٔ دلخواه $f(x)$ را درنظر می‌گیریم کـه دربازهٔ $[0, d]$ معین باشد و دربرابری‌های زیر صدق کند:

$$f(0)=0,\ \ f(1-kd)=-k,\ \ f(d)=1$$

فرض می‌کنیم، این تابع، در بازهٔ $[0, 1]$، به نحوی باشد کـه به ازای هر $x\in[d, 1]$ داشته باشیم:

$$f(x)=f(x-d)+۱$$

تابع حاصل، پیوسته است و درضمن

$$f(۱)=f(۱-d)+۱=f(۱-۲d)+۲=\cdots=$$
$$=f(۱-kd)+k=۰=f(۰)$$

و برای هرمقدار $x\in[۰، ۱-d]$ داریم:

$$f(x+d)=f(x)+۱\neq f(x)$$

۳۶۸ $k\in\mathbf{N}$ را عدد درستی می‌گیریم که مجذور کامل نباشد. ثابت می‌کنیم $f'(\sqrt{k})=۰$. چون $\sqrt{k}\notin\mathbf{Q}$، پس $f(\sqrt{k})=۰$ وکافی‌است ثابت کنیم، حد

$$\lim_{x\to\sqrt{k}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}$$

وجود دارد و برابر صفر است. عـدد دلخواه $\varepsilon>۰$ را در نظر می‌گیریم. تنها تعداد محدودی عدد به‌صورت $\frac{p}{q}$ $(p\in\mathbf{Z}$ و $q\in\mathbf{N})$ وجـود دارد کـه، برای آن، داشته باشیم:

$$۰<q<\frac{۱}{\varepsilon} \quad \text{و} \quad \left|\frac{p}{q}-\sqrt{k}\right|<۱$$

بنابراین، $\delta\in(۰، ۱)$ وجود داردکه، به‌ازای آن، دربازهٔ

$$I_\delta=(\sqrt{k}-\delta، \sqrt{k}+\delta)$$

از این کسرها وجود نداشته باشد. اگر $x=\frac{p}{q}\in I_\delta$ و $\frac{p}{q}$، کسری ساده‌نشدنی باشد، آن وقت

$$q\geqslant\frac{۱}{\varepsilon} \quad \text{و} \quad \left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|<\sqrt{k}+(\sqrt{k}+\delta)<۲\sqrt{k}+۱$$

درضمن، $|kq^2-p^2|\geqslant 1$، زیرا

$$kq^2-p^2\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$$

بنا براین، داریم:

$$\left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{p}{q}-\sqrt{k}}\right|=\frac{1}{q^3}\cdot\frac{\left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|}{\left|k-\frac{p^2}{q^2}\right|}=$$

$$=\frac{1}{q}\cdot\frac{\left|\sqrt{k}+\frac{p}{q}\right|}{|q^2k-p^2|}<\varepsilon(2\sqrt{k}+1)$$

درحالتی هم که $x\in I_\delta\setminus\{\sqrt{k}\}$، عددی گنگ باشد، داریم:

$$f(x)=0,\quad \left|\frac{f(x)}{x-\sqrt{k}}\right|=0$$

حکم ثابت شد.

۳۶۹. فرض می‌کنیم، بازهٔ $\mathbf{j}\subset\mathbf{i}$ به طول d وجود داشته باشد که، برای آن، به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$ داشته باشیم:

$$f^n(\mathbf{j})\cap\mathbf{j}=\varphi$$

دراین‌صورت، برای هر $m,\ n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$f^{m+n}(\mathbf{j})\cap f^m(\mathbf{j})=f^m(f^n(\mathbf{j})\cap\mathbf{j})=f^m(\phi)=\phi$$

بنا براین، مجموعه‌های $f(\mathbf{j})$، $f^2(\mathbf{j})$، ...، $f^n(\mathbf{j})$، ...، دو به دو، دارای اشتراکی نیستند. از طرف دیگر، هرمجموعهٔ $f^n(\mathbf{j})$، برای $n\in\mathbf{N}$، اجتماعی از چند مجموعهٔ به طول d است که در $\mathbf{i}$ واقع‌اند. بنا براین، همهٔ آن‌ها، نمی‌توانند بدون اشتراك باشند. تناقض‌حاصل، درستی حکم را ثابت‌می‌کند.

۳۷۰. اگر فرض کنیم $h(x,\ y)=f(y)-f(x)$، آن وقت تابع $h(x,\ y)$، نسبت به‌متغیر y صعودی ونسبت به‌متغیر x نزولی است؛ درضمن،

برای همهٔ مقدارهای $y>x$ داریم: $h(x, y)>0$ و

$$g(x, y)\equiv\frac{h(x, x+y)}{h(x-y, x)}$$

ثابت می‌کنیم، بـرای هر $x\in\mathbf{R}$ و $y>0$، نـابـرابـری $g(x, y)<14$ بـرقـرار است. اگـر $x-y\geqslant 0$ یـا $x+y\leqslant 0$، آن وقت، بنابر شرط مسأله داریم:

$$h(x, x+y)<2h(x-y, x)$$

و به‌جز آن، برای هر $y>0$، این نابرابری برقرار است:

$$h(0, y)<2h(-y, 0)$$

به‌این‌ترتیب، برای بررسی، دو حالت باقی می‌ماند:

۱) $x-y<0<x$؛ ۲) $x<0<x+y$

توجه کنیم که، برای هر $x\geqslant 0$ و $y>0$ داریم:

$$h(x+y, x+3y)<6h(x, x+y) \qquad (1)$$

درواقع داریم:

$$h(x+y, x+2y)<2h(x, x+y),$$

$$h(x+2y, x+3y)<2h(x+y, x+2y)<4h(x, x+y)$$

و از آن‌جا

$$h(x+y, x+3y)=h(x+y, x+2y)+$$
$$+h(x+2y, x+3y)<6h(x, x+y)$$

به حالت ۱) می‌پردازیم. اگر $x-\frac{y}{2}\geqslant 0>x-y$، آن وقت، با استفاده از نابرابری (۱)، به دست می‌آید:

$$h(x, x+y)<6h\left(x-\frac{y}{2}, x\right)<6h(x-y, x)<$$

$$<14h(x-y, x)$$

و اگر $x<0<x-\frac{y}{2}$، آن وقت

$$x<y-x<x+y<3(y-x)$$

و با استفاده از نابرابری (۱)، به دست می‌آید:

$$h(y-x, x+y)<h(y-x, 3(y-x))<6h(0, y-x)$$

چون $h(x, y-x)<h(0, y-x)$، پس دوباره به دست می‌آید:

$$h(x, x+y)=h(x, y-x)+h(y-x, x+y)<$$

$$<7h(0, y-x)<14h(x-y, 0)<14h(x-y, x)$$

درحالت ۲) داریم:

$$h(x, 0)<2h(2x, x)<2h(x-y, x),$$

$$h(0, x+y)<2h(-x-y, 0)<2h(x-y, 0)=$$

$$=2h(x-y, x)+2h(x, 0)<6h(x-y, x)$$

بنابراین

$$h(x, x+y)<8h(x-y, x)$$

به‌این‌ترتیب، درهمهٔ حالت‌ها ثابت شد:

$$h(x, x+y)<14h(x-y, x)$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $g(x, y)<14$.

اکنون ثابت می‌کنیم: $g(x, y)>\frac{1}{14}$ (بـه ازای همهٔ مقدارهـای $x\in\mathbf{R}$ و $y>0$).

تابع صعودی $f_1(x)=-f(-x)$ را در نظر می‌گیریم و فـرض می‌کنیم:

$$g_1(x, y)=\frac{f_1(x+y)-f_1(x)}{f_1(x)-f_1(x-y)}$$

چون $g_1(x, y)=[g(-x, y)]^{-1}$، بنابراین

$$\frac{1}{2}<g_1(x, y)<2$$

(برای‌هر $y>0$ به‌ازای $x=0$، و برای هر $y\in(0, |x|]$ به‌ازای $x\neq 0$).
دراین‌صورت، بنابر آن‌چه در بالا ثابت کردیم، برای‌تابع $g_1(x, y)$، داریم: $g_1(x, y)<14$ ($x\in\mathbf{R}$ و $y>0$)، که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$g(x, y)=\frac{1}{g_1(-x, y)}>\frac{1}{14}$$

§۲۰. معادله‌های تابعی

۳۷۱. اگر در اتحاد مفروض، $y=1$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f(x)\equiv\frac{f(x)+f(1)}{x+1}, \quad (x\neq -1)$$

یعنی $xf(x)\equiv f(1)$. بـه‌ازای $x=0$ به‌دست می‌آید: $f(1)=0$، یعنی برای $x\notin\{-1, 0\}$، داریم: $f(x)=0$.

اکنون، اگـر در اتحاد اصلی، قرار دهیم $y=0$ و $x=2$، به‌دست می‌آید:

$$f(0)=\frac{f(2)+f(0)}{2}\Longrightarrow f(0)=f(2)=0$$

بالاخره، اگر $y=0$ و $x=-1$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f(0)=-f(-1)-f(0)\Longrightarrow f(-1)=-2f(0)=0$$

به‌این‌ترتیب، ثابت شد که: $f(x)\equiv 0$ ($x\in\mathbf{R}$).

۳۷۲. در اتحـاد مفـروض، $x=y=1$ می‌گیریم، در این صورت به دست می‌آید:

$$2f(1)=2[f(1)]^2 \Longrightarrow f(1)=0 \text{ یا } f(1)=1$$

هریك از این دو حالت را، بررسی می‌کنیم:

الف) $f(1)=0$. اگر در اتحاد $y=1$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f(x)\equiv 0$$

ب) $f(1)=1$. دوباره $y=1$ می‌گیریم، به‌این اتحاد می‌رسیم:

$$f(x)+x\equiv(x+1)f(x) \Longrightarrow x[f(x)-1]\equiv 0$$

از این‌جا، برای هر $x\neq 0$ داریم: $f(x)=1$

برای تابع $f(x)$، دو امکان وجود دارد: یا $f(x)\equiv 0$ و یا

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ a & (x=0،\ a\in\mathbf{R})\end{cases}$$

آزمایش نشان می‌دهد کـه، هـر یك از این دو تـابـع، بـا شرط مسألـه سازگار است.

۳۷۳. دراتحاد مفروض، قرارمی‌دهیم: $n=m=0$، به‌دست می‌آید:

$$[f(0)]^2=2f(0) \Longrightarrow f(0)=2$$

(زیرا $f(0)\neq 0$). سپس، $m=1$ را دراتحاد قرار می‌دهیم:

$$f(n)f(1)\equiv f(n+1)+f(n-1)،\ \ (n\in\mathbf{Z})$$

اگر مقدار تابع $f(n)$ درنقطه‌های $n=0$ و $n=1$ داده شده باشد، به‌کمك این‌اتحاد، می‌توان مقدارهای $f(2)$ و $f(-1)$ و، سپس، $f(3)$و$f(-2)$ وغیره‌را، به‌صورت یك ارزشی، پیدا کرد؛ یعنی همهٔ مقدارهای $f(n)$، برای $n\in\mathbf{Z}$، به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، تابع $f(n)$، به صورتی منحصر به فرد، با توجه به شرط‌هـای مسأله، معین می‌شود، زیرا $f(0)=2$ و $f(1)=\frac{5}{2}$

(در حالت الف) یا $f(\circ)=۲$ و $f(۱)=\sqrt{۳}$ (در حالت ب). از این‌جا، قانع می‌شویم که تابع‌های

$$f(n)=۲^n+۲^{-n} \quad و \quad f(n)=۲\cos\frac{n\pi}{۶}$$

به‌ترتیب، با شرط‌های دو حالت الف) و ب) سازگارند. درواقع، داریم:

الف) $f(\circ)=۲^\circ+۲^\circ\neq\circ$، $f(۱)=۲^۱+۲^{-۱}=\frac{۵}{۲}$،

$$f(n)f(m)=(۲^n+۲^{-n})(۲^m+۲^{-m})=(۲^{n+m}+۲^{-n-m})+$$
$$+(۲^{n-m}+۲^{m-n})=f(n+m)+f(n-m)،\ \ (n، m\in\mathbf{Z})$$

ب) $f(\circ)=۲\cos\circ\neq\circ$، $f(۱)=۲\cos\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$،

$$f(n)f(m)=۲\cos\frac{n\pi}{۶}\cdot۲\cos\frac{m\pi}{۶}=۲\cos\frac{(n+m)\pi}{۶}+$$
$$+۲\cos\frac{(n-m)\pi}{۶}=f(n+m)+f(n-m)،\ \ (n، m\in\mathbf{Z})$$

۴۷۴. اگر دراتحاد مفروض، $m=\circ$ قرار دهیم، برای تابع $f(n)$، به‌دست می‌آید:

$$۲f(n)\equiv f(۳n)،\ \ (n\in\mathbf{Z}^+)$$

و به‌ازای $m=n=\circ$، داریم: $f(\circ)=\circ$. سپس، $m=n$ می‌گیریم:

$$f(۲n)+f(\circ)\equiv f(۳n)\Longrightarrow f(۲n)\equiv f(۳n)$$

از این‌جا، از یک‌طرف، برای هرمقدار $m\in\mathbf{Z}^+$، داریم:

$$f(۴m)=f(۶m)=f(۹m)$$

و از طرف دیگر، از اتحاد مفروض، به‌ازای $n=۳m$ به‌دست می‌آید:

$$f(۴m)+f(۲m)\equiv f(۹m)$$

که تنها درحالت $f(m)\equiv ۰$ ممکن است. بنابراین، برای هرمقدار $n\in \mathbf{Z}^+$ داریم:

$$f(n)=\frac{۱}{۲}f(۳n)=\frac{۱}{۲}f(۲n)=۰$$

یعنی، اتحاد مفروض، تنها برای تابع $f(n)\equiv ۰$ برقرار است.

۳۷۵. در هر دو اتحاد مفروض، $x=y=۰$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$f(۰)=۲f(۰)g(۰) \quad \text{و} \quad g(۰)=[g(۰)]^۲-[f(۰)]^۲$$

$g(۰)\neq\frac{۱}{۲}$، زیرا، در غیر این صورت، از برابری دوم، نتیجه می‌شود:

$$[f(۰)]^۲=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}<۰$$

بنابراین، از برابری اول، به دست می‌آید: $f(۰)=۰$ و از برابری دوم، نتیجه می‌شود: یا $g(۰)=۱$ و یا $g(۰)=۰$ ولی $g(۰)=۰$ ممکن نیست، زیرا، در غیر این صورت، از اتحاد اول، به ازای $y=۰$، تابع

$$f(x)=f(x)g(۰)+g(x)f(۰)\equiv ۰$$

برابر مقداری ثابت می‌شود. به این ترتیب، به جواب منحصر به فرد

$$f(۰)=۰،\ g(۰)=۱$$

می‌رسیم که، مثلاً، در تابع‌های زیر صدق می‌کنند:

$$f(x)=\sin x،\ \ g(x)=\cos x$$

۳۷۶. در اتحاد مفروض $y=۱$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$f(x)\equiv f(x)f(۱)-f(x+۱)+۱،\ (x\in \mathbf{Q})$$

یعنی

$$f(x+۱)\equiv f(x)+۱$$

از این جا، برای هر $x\in\mathbf{Q}$ و $n\in\mathbf{Z}$ داریم:

$$f(x+n)=f(x)+n$$

که اگر در آن $x=۱$ بگیریم و n را به $n-۱$ تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$f(n)=f(۱)+n-۱=n+۱$$

اکنون، در اتحاد مفروض، $x=\frac{۱}{n}$ و $y=n$ قرار می‌دهیم $(n\in\mathbf{Z})$، به دست می‌آید:

$$f\left(\frac{۱}{n}\cdot n\right)=f\left(\frac{۱}{n}\right)f(n)-f\left(\frac{۱}{n}+n\right)+۱$$

از آن جا

$$۲=(n+۱)f\left(\frac{۱}{n}\right)-f\left(\frac{۱}{n}\right)-n+۱ \Rightarrow f\left(\frac{۱}{n}\right)=۱+\frac{۱}{n}$$

سرانجام، در اتحاد مفروض، قرار می‌دهیم: $x=p$ و $y=\frac{۱}{q}$، که در آن‌ها، $p\in\mathbf{Z}$ و $q\in\mathbf{N}$. داریم:

$$f\left(p\cdot\frac{۱}{q}\right)=f(p)\cdot f\left(\frac{۱}{q}\right)-f\left(p+\frac{۱}{q}\right)+۱$$

و از آن‌جا

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=(p+۱)\left(\frac{۱}{q}+۱\right)-\frac{۱}{q}-p=\frac{p}{q}+۱$$

به این ترتیب، همه‌جا به تابع $f(x)=x+۱$ می‌رسیم که با همه شرط‌های مسأله سازگار است.

۳۷۷. ابتدا فرض می‌کنیم $n\leqslant ۱۰۰$ و $n+۱۱>۱۰۰$، یعنی $۹۰\leqslant n\leqslant ۱۰۰$. در این صورت

$$f(n)=f(f(n+11))=f(n+11-10)=f(n+1)$$

بنا براین

$$f(90)=f(91)=\dots=f(100)=f(101)=91$$

اکنون، فرض می کنیم $n<90$. عدد $m\in\mathbf{N}$ را طوری انتخاب می کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$90\leqslant n+11m\leqslant 100$$

در این صورت، داریم:

$$f(n)=f^{2}(n+11)=\dots=f^{m+1}(n+11m)=$$
$$=f^{m}(f(n+11m))=f^{m}(91)=91$$

به این ترتیب، برابری $f(n)=91$، به ازای همهٔ مقدارهای $n\leqslant 100$ ثابت شد.

۳۷۸. ثابت می کنیم $g(n)\equiv h(n)$ $(n\in\mathbf{N})$، که در این صورت، با توجه به شرط ج) نتیجه می‌شود:

$$f(n)\equiv g(n)-h(n)+1\equiv 1,\ \ (n\in\mathbf{N})$$

به ازای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$h(n)=g(n)+1-f(n)\leqslant g(n)$$

(زیرا $f(n)\geqslant 1$). فرض می کنیم، برای مقداری از $n\in\mathbf{N}$، برابری $g(n)=h(n)$ برقرار نباشد. در این صورت $h(n)<g(n)=k$. با توجه به‌شرط ب) عددهای‌طبیعی n_1، ...، n_{k-1} پیدا می‌شوند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$g(n_i)=i,\ \ (i=1,\dots,k-1)$$

بنا براین، هر یك از k عدد $h(n_1)$، ...، $h(n_{k-1})$، $h(n)$، متعلق به مجموعهٔ $\{1,\dots,k-1\}$ است، درنتیجه، بنا بر اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، تابع $h(n)$، عددی را بیش از یك بار قبول می کند، که با شرط الف) متناقض است.

حکم ثابت شد.

۳۷۹. دنبالهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n_1=2،\ n_2=3،\ n_3=5،\ \dots$$

که ردیفی صعودی است از همهٔ عددهای طبیعی، به جز عددهایی که مجذور کامل یك عدد درست باشند. فرض می‌کنیم:

$$n_{k,m}=(n_k)^{2^m} \text{ و } (k\in\mathbf{N}،\ m\in\mathbf{Z}^+)$$

در این صورت $n_{k,m+1}=(n_{k,m})^2$، و هر مقدار $n>1$ متناظر است با یك زوج عددهای k و m، که برای آن‌ها $n=n_{k,m}$. تابع $f(n)$ را، بـه این ترتیب، تعریف می‌کنیم:

$$f(1)=1،\ f(n_{k,m})=\begin{cases}n_{k+1,m} & (\text{وقتی } k \text{ فرد است})\\ n_{k+1,m+1} & (\text{وقتی } k \text{ زوج است})\end{cases}$$

(برای $k\in\mathbf{N}$ و $m\in\mathbf{Z}^+$). در این صورت، خواهیم داشت:

$$f(f(n))\equiv n^2،\quad (n\in\mathbf{N})$$

۳۸۰. الف) مثلاً، تابع

$$f(n،\ m)=n،\quad (n،\ m\in\mathbf{Z})$$

در همهٔ شرط‌های مسأله صدق می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم، حکم درست نباشد، یعنی برای عددی مثل $k\in\mathbf{Z}$، همهٔ مقدارهای تابع $f(n،\ m)$، که با شرط‌های مسأله سازگار است، مثلاً، از k تجاوز نکنند. در ایـن صورت، بین مقدارهای $f(n،\ m)$ $(n،\ m\in\mathbf{Z})$، بزرگترین مقدار پیدا می‌شود که آن را $l=f(n_0،\ m_0)$ می‌نامیم. این مقدار، با همهٔ عددهای

$$f(n_0\pm1،\ m_0)،\ f(n_0،\ m_0\pm1)$$

برابر است، زیرا در غیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$f(n_0،\ m_0)=\frac{1}{4}[f(n_0-1،\ m_0)+f(n_0+1،\ m_0)+$$

$$+f(n_0،\ m_0-1)+f(n_0،\ m_0+1]<l$$

اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، می‌توان نوشت:

$$l=f(n_\circ, m_\circ)=f(n_\circ\pm ۱, m_\circ)=f(n_\circ\pm ۲, m_\circ)=\dots=$$
$$=f(n_\circ\pm n, m_\circ)=f(n_\circ\pm n, m_\circ\pm ۱)=f(n_\circ\pm n, m_\circ\pm ۲)=$$
$$=\dots=f(n_\circ\pm n, m_\circ\pm m)$$

برای هـر مقدار $n, m\in\mathbf{N}$. بنابـرایـن $f(n, m)=l$، کـه با شرط مسأله ناسازگار است.

۳۸۱. اگـر $n+m$ زوج بـاشد، نقطهٔ $(n, m)\in S$ را زوج و اگر $n+m$ فرد باشد، این نقطه را فرد می‌نامیم. فرض می‌کنیم، تـابع عمومی $g(n, m)$ وجود داشته باشد، در این صورت، تـابع $g^{-۱}(n, m)$ هم، یك تابع عمومی است. تابعی را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر داده شده باشد:

$$f(n, m)=\begin{cases} g(n, m) & (\text{وقتی نقطهٔ } (n, m) \text{ زوج باشد}) \\ g^{-۱}(n, m) & (\text{وقتی نقطهٔ } (n, m) \text{ فرد باشد}) \end{cases}$$

برای $(n, m)\in S$. دراین صورت، $g(n, m)$ و $g^{-۱}(n, m)$ از نظر زوج و فردبودن، مخالف (n, m) خواهند بود. بنابراین، برای‌هر نقطهٔ $(n, m)\in S$، به دست می‌آید:

$$f^{۲}(n, m)=\begin{cases} g^{-۱}(g(n, m))=(n, m) & \text{زوج: } (n, m) \\ g(g^{-۱}(n, m))=(n, m) & \text{فرد: } (n, m) \end{cases}$$

بنابراین، ثابت شد که

$$f^{۲}(n, m)\equiv(n, m),\quad (n, m)\in S$$

برای اثبات عمومی بودن این تابع، کافی است به یاد بیاوریم که $g(n, m)$ و $g^{-۱}(n, m)$ تابع‌هایی عمومی بودند.

۳۸۲. ثابت می‌کنیم، به جز دو زوج عددی که در راهنمایی صورت مسأله داده شده‌است، هیچ زوج دیگری از مقدارهای n، m، با شرط مورد‌نظر نمی‌سازد.

فرض می‌کنیم، زوج عددی درست $(m، n)$، به‌جز $(۲، ۳)$ و $(۲، ۵)$، در نابرابری‌های $m \leqslant n$، $mn(m+n) \neq ۰$ و اتحاد

$$f_m(x، y)f_n(x، y) \equiv f_{m+n}(x، y)، \ (x، y \in \mathbf{R}، \ xy(x+y) \neq ۰)$$

صدق کند و بدانیم

$$f_k(x، y) = \frac{x^k + y^k + (-۱)^k(x+y)^k}{k}، \quad (k \in \mathbf{Z}، \ \ k \neq ۰)$$

برای هر مقدار ثابت $y = y_۰ \neq ۰$، این حکم درست است. اگر $k < ۰$، آن وقت

$$\lim_{x \to \infty} x^k = \lim_{x \to \infty} (x+y_۰)^k = ۰$$

ازآن جا

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x، y_۰) = \frac{۱}{k} y_۰^k$$

اگر عدد $k \in \mathbf{N}$ زوج باشد، آن وقت

$$f_k(x، y) \equiv \frac{۱}{k}\left(۲x^k + ۲y^k + \sum_{i=۱}^{k-۱} C_k^i x^i y^{k-i} \right)$$

ازآن جا

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f_k(x، y_۰)}{x^k} = \frac{۲}{k}$$

بالاخره، $f_۱(x، y) \equiv ۰$، و اگر $k \in \mathbf{N}$ فرد و $k \neq ۱$، آن وقت

$$f_k(x، y) \equiv -\frac{۱}{k} \sum_{i=۱}^{k-۱} C_k^i x^i y^{k-i}$$

و ازآن جا

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f_k(x، y_۰)}{x^{k-۱}} = -\frac{y_۰}{k} C_k^{k-۱} = -y_۰$$

چند حالت را در نظر می‌گیریم.

الف) عددهای $m، n\in \mathbf{N}$ را زوج می‌گیریم. در این صورت، اگر اتحاد مفروض در صورت مسأله را در نظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$\frac{۲}{m+n}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x، y_{\circ})}{x^{m+n}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x، y_{\circ})}{x^m}\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x، y_{\circ})}{x^n}=\frac{۴}{mn}$$

از آن جا $\frac{m+n}{۲}=\frac{mn}{۴}$، یعنی $۱=\left(\frac{m}{۲}-۱\right)\left(\frac{n}{۲}-۱\right)$. و این شرط، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{n}{۲}=\frac{m}{۲}=۲ \Rightarrow m=n=۴$$

که ممکن نیست، زیرا

$$f_۴(۱، ۱)f_۴(۱، ۱)=\frac{(۲+۲^۴)^۲}{۴^۲}=\frac{۸۱}{۴}\neq\frac{۱۲۹۰}{۴}=\frac{۲+۲^۸}{۸}=f_۸(۱، ۱)$$

ب) عددهای $m، n\in \mathbf{N}$ را فرد می‌گیریم. در این صورت، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x، y_{\circ})f_n(x، y_{\circ})}{x^{m+n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x^۲}\frac{f_m(x، y_{\circ})}{x^{m-۱}}\frac{f_n(x، y_{\circ})}{x^{n-۱}}=\circ،$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x، y_{\circ})}{x^{m+n}}=\frac{۲}{m+n}$$

که با اتحاد اصلی مسأله، متناقض است.

ج) فرض می‌کنیم، یکی از عددهای $m، n\in \mathbf{N}$ (که آن را p می‌نامیم) زوج، و دیگری (که آن را q می‌نامیم) فرد باشد. در این صورت $q>۱$، زیرا اگر $q=۱$، آن‌گاه $f_q(۱، ۱)=\circ$ و با توجه به اتحاد داریم:

$$f_{p+q}(۱، ۱)=\frac{۲-۲^{p+q}}{p+q}=\circ$$

که ممکن نیست، زیرا $p+q>۱$. بنابراین، به دست می‌آید:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x, y_\circ)f_q(x, y_\circ)}{x^{p+q-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x, y_\circ)}{x^p}\,\frac{f_q(x, y_\circ)}{x^{q-1}}=$$

$$=-\frac{2y_\circ}{p},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{p+q}(x, y_\circ)}{x^{p+q-1}}=-y_\circ$$

از آن جا $p=2$. از اتحاد داریم:

$$\frac{3(2-2^q)}{q}=f_2(1, 1)f_q(1, 1)=f_{2+q}(1, 1)=\frac{2-2^{2+q}}{2+q}$$

یعنی

$$3(2+q)(1-2^{q-1})=q(1-2^{q+1}) \quad \text{یا} \quad 3+q=(6-q)2^{q-2}$$

بنابراین $q<6$ و چون q عددی فرد و بزرگتر از واحد است، پس $q\in\{3, 5\}$، که با فرض ما متناقض است.

د) $m<\circ$ و $n\in\mathbf{N}$ را زوج می‌گیریم. چون $n>m+n$، پس، بدون توجه به علامت، یا زوج و فرد بودن $m+n$، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x, y_\circ)}{x^n}=\circ$$

و در عین حال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x, y_\circ)f_n(x, y_\circ)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}f_m(x, y_\circ)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x, y_\circ)}{x^n}=$$

$$=\frac{2y_\circ^m}{mn}\neq\circ$$

هـ) $m<\circ$ و $n\in\mathbf{N}$ را فرد می‌گیریم. در این صورت $n\neq 1$، زیرا برای $n=1$ داریم $f_n(1, 1)=\circ$ و با توجه به اتحاد

$$f_{m+n}(1, 1)=\frac{2+(-1)^{m+n}\,2^{m+n}}{m+n}=\circ$$

که ممکن نیست، زیرا $m+n<0$. بنابراین، از یک طرف، به‌دست می‌آید.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x, y_0)f_n(x, y_0)}{x^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}f_m(x, y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x, y_0)}{x^{n-1}}=$$

$$=-\frac{y_0^{m+1}}{m}\neq 0$$

از طرف دیگر، اگر $m<-1$، آن وقت $m+n<n-1$ و، بدون توجه به علامت و زوج یا فرد بودن $m+n$ داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{n-1}}=0$$

بنابراین، عدد m، تنها می‌تواند برابر -1 باشد. در این صورت، عدد

$$m+n=n-1$$

عددی زوج می‌شود و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{n-1}}=\frac{2}{n-1}$$

به این ترتیب، به ازای هر مقدار $y_0\neq 0$، برابری $\frac{1}{y_0}=\frac{2}{n-1}$ برقرار است، که ممکن نیست.

و) $m<0$ و $n<0$ می‌گیریم. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty}f_m(x, y_0)f_n(x, x_0)=\frac{y_0^{m+n}}{mn},$$

$$\lim_{x\to\infty}f_{m+n}(x, y_0)=\frac{y_0^{m+n}}{m+n}$$

ولی برابری $\frac{y_0^{m+n}}{m+n}=\frac{y_0^{m+n}}{mn}$ ممکن نیست، زیرا $mn>0$، در حالی که $m+n<0$.

به این ترتیب، شرط مسأله، تنها برای دو زوج زیر صدق می‌کند:

$$(m, n): (۲, ۳) \text{ و } (۲, ۵)$$

۳۸۳. اگر در نخستین اتحاد، از اتحادهای مفروض، بزای تابع $f(x, y)$، مقدارهای $x=y=۰$ و $x=y=۱$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$f(۰, z)=۱, f(۱, z)=۱$$

سپس $x=y=-۱$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$۱=f(۱, z)=f(-۱, z)f(-۱, z)=[f(-۱, z)]^۲$$

بنابراین $(f-۱, z)=۱$. به همین ترتیب، از اتحاد دوم فرض، به دست می‌آید:

$$f(z, ۰)=f(z, ۱)=f(z, -۱)=۱$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$f(۰, ۰)=۱ \text{ و } f(۰, z)f(z, ۰)=۱$$

این می‌ماند که اتحاد مورد نظر را، برای مقدارهای غیر صفر x و y ثابت کنیم. به ازای $x\neq۰$ داریم:

$$۱=f(۱, z)=f(x, z)f\left(\frac{۱}{x}, z\right)$$

بنابراین

$$f(x, z)=\frac{۱}{f\left(\frac{۱}{x}, z\right)}$$

سپس، به دست می‌آید:

$$۱=\frac{۱}{f(x, ۱-x)}=f\left(\frac{۱}{x}, ۱-x\right)=f\left(\frac{۱}{x}, \frac{۱-x}{x}x\right)=$$

$$=f\left(\frac{۱}{x}, \frac{۱-x}{x}\right)=f\left(\frac{۱}{x}, x\right)$$

ولی از آن‌جا که

$$f\left(\frac{۱}{x}, \frac{۱-x}{x}\right)=f\left(\frac{۱}{x}, \frac{۱}{x}-۱\right)\times ۱=f\left(\frac{۱}{x}, \frac{۱}{x}-۱\right)f\left(\frac{۱}{x}-۱\right)=$$

$$=f\left(\frac{۱}{x}, ۱-\frac{۱}{x}\right)=۱$$

بنابراین $f\left(\frac{۱}{x}, x\right)=۱$، به این ترتیب داریم:

$$۱=f(x, ۱)=f\left(x, \frac{۱}{x}\right)=f(x, x)=f(x, x)f(x, -۱)=$$

$$=f(x, -x)$$

یعنی $f(x, x)=f(x, -x)=۱$. سرانجام، برای $x\neq ۰$ و $y\neq ۰$ داریم:

$$f(x, y)=f(x, y)\cdot f\left(\frac{۱}{y}, y\right)=f\left(\frac{x}{y}, y\right)=f\left(\frac{x}{y}, y\right)\cdot f\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{y}\right)=$$

$$=f\left(\frac{x}{y}, x\right)=f\left(\frac{x}{y}, x\right)\cdot f\left(\frac{۱}{x}, x\right)=f\left(\frac{۱}{y}, x\right)=\frac{۱}{f(y, x)}$$

بنابراین $f(x, y)f(y, x)=۱$.

۳۸۴. اگر تابع $f(x)$، در اتحاد اول صدق کند، آن وقت

$$f(xy+x+y)\equiv f(xy)+f(x+y)\equiv$$
$$\equiv f(xy)+f(x)+f(y)$$

$(x, y\in \mathbf{R})$، یعنی در اتحاد دوم هم صدق می‌کند.

اکنون فرض کنید، تابع $f(x)$، در اتحاد دوم صدق کند. در این تابع

$$y=u+v+uv$$

می‌گیریم، به دست می‌آید:

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)\equiv$$
$$\equiv f(x)+f(u+v+uv)+f(xu+xv+xuv)$$

که می‌توان‌آن را به این صورت نوشت:

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv)\equiv$$

$$\equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)+f(xu+xv+xuv) \quad (۱)$$

اگر در اتحاد (۱)، نقش x و u را باهم عوض‌کنیم، به دست می‌آید:

$$f(x+u+v+xu+xv+xuv)\equiv$$

$$\equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(xv)+f(xu+uv+xuv) \quad (۲)$$

با توجه به اتحادهای (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$f(uv)+f(xu+xv+xuv)\equiv f(xv)+f(xu+uv+xuv) \quad (۳)$$

در اتحاد (۳)، $x=۱$ می‌گیریم، داریم:

$$f(uv)+f(u+v+uv)\equiv f(v)+f(u+۲uv)$$

و یا

$$f(uv)+f(u)+f(v)+f(uv)\equiv f(v)+f(u+۲uv)$$

از آن جا

$$f(u)+۲f(uv)\equiv f(u+۲uv) \quad (۴)$$

در اتحاد (۴) فرض می‌کنیم $u=۰$، به دست می‌آید:

$$f(۰)=۳f(۰) \Rightarrow f(۰)=۰ \quad (۵)$$

اکنون، اگر در اتحاد (۴)، فرض‌کنیم $v=-۱$، به دست می‌آید:

$$f(-u)\equiv f(u)+۲f(-u)$$

بنابراین

$$f(-u)=-f(u) \quad (۶)$$

در اتحاد (۴)، $v=-\frac{۱}{۲}$ می‌گیریم:

$$f(\circ)\equiv f(u)+\text{۲}f\left(-\frac{u}{\text{۲}}\right)$$

که با استفاده از (۵) و (۶) به دست می‌آید:

$$f(u)=\text{۲}f\left(\frac{u}{\text{۲}}\right) \Rightarrow f(\text{۲}u)=\text{۲}f(u) \qquad (\text{۷})$$

با توجه به اتحادهای (۷) و (۴) داریم:

$$f(u+\text{۲}uv)\equiv f(u)+f(\text{۲}uv)$$

که اگر در آن، $t=\text{۲}v$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$f(u+ut)=f(u)+f(ut) \qquad (\text{۸})$$

به این ترتیب، بــه اتحاد $f(x+y)\equiv f(x)+f(y)$ می‌رسیم، زیــرا، به ازای $x=\circ$، این اتحاد منجر به برابری (۵) می‌شود و، به ازای $x\neq\circ$، از اتحاد (۸) به دست می‌آید:

$$f(x+y)\equiv f\left(x+x.\frac{y}{x}\right)=f(x)+f\left(x.\frac{y}{x}\right)=f(x)+f(y)$$

۳۸۵. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $k>\circ$، داریم:

$$f(x^k)=kx^{k-\text{۱}}f(x) \quad (x>\text{۱})$$

اثبات را، در سه مرحله، می‌آوریم.

۱) فرض کنید $k\in\mathbf{N}$. برای $k=\text{۱}$ داریم:

$$f(x)\equiv\text{۱}\times x^\circ\cdot f(x)$$

و اگر اتحاد، برای مقداری از $k\in\mathbf{N}$ برقرار باشد، آن وقت برای $k+\text{۱}$ هم برقرار است، زیرا

$$f(x^{k+\text{۱}})=f(x^k\cdot x)\equiv x^kf(x)+xf(x^k)\equiv$$
$$\equiv x^kf(x)+x^kx^{k-\text{۱}}f(x)\equiv(k+\text{۱})x^kf(x)$$

بنابراین، بنابر اصل استقرای ریاضی، اتحاد برای هر مقدار $k\in\mathbf{N}$ برقرار است.

۲) $k\in\mathbf{Q}$ و $k>0$ مـی گیریم، یعنی $k=\frac{p}{q}$ $(p, q\in\mathbf{N})$. بنابراثباتی که در ۱) داشتیم، این دو اتحاد را داریم:

$$f(x^p)\equiv px^{p-1}f(x),$$

$$f((x^{\frac{p}{q}})^q)\equiv q(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}f(x^{\frac{p}{q}})$$

اگر سمت راست این دو اتحاد را، برابر قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$f(x^{\frac{p}{q}})\equiv\frac{p}{q}x\,x^{\frac{p}{q}-1}f(x)$$

یعنی اتحاد، برای هرعددگویای $k>0$ برقرار است.

۳) $k\in\mathbf{R}$ و $k>0$ می‌گیریم. دنبالهٔ عددهـای مثبت و گـویـای k_1، k_2، ... را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, k_n=k$$

چون تابع $f(x)$، پیوسته است، بنابراین، برای هرمقدار $x>1$ داریم:

$$f(x^k)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, f(x^{k_n})=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, k_nx^{k_n-1}f(x)kx^{k-1}f(x)$$

به‌کمك اتحادی کـه ثابت‌کردیم، می‌توان به سادگی صورت صریح تابع $f(x)$ را پیدا کرد. درواقع، اگـر $t=\ln x$ بگیریم، یعنی $x=e^t$، به دست می‌آید:

$$f(x)=f(e^t)=te^{t-1}f(e)=(\ln x).\frac{x}{e}f(e)$$

ازطرف دیگر، به‌ازای هر مقدار $c\in\mathbf{R}$، تابع

$$f(x)=cx\ln x$$

با شرط مسأله سازگار است.

۳۸۶. الف) از شرط مسأله نتیجه می‌شود که، تابع $f(x)$، به‌ازای مقدارهای مختلف $x\in\mathbf{R}$، مقدارهای مختلفی را می‌پذیرد. درواقع، اگر داشته باشیم:

$$u=f(x)=f(y), \quad (x, y\in\mathbf{R})$$

آن وقت

$$x=f^3(x)=f^2(u)=f^3(y)=y$$

از این‌جا، و از پیوستگی تابع $f(x)$ نتیجه می‌شود که، این تابع، اکیداً یکنواست. در غیر این صورت، عددهای $x_1<x_2<x_3$ پیدا می‌شوند که در نابرابری‌های

$$f(x_1)<f(x_2), \quad f(x_2)>f(x_3)$$

یا

$$f(x_1)>f(x_2), \quad f(x_2)<f(x_3)$$

صدق کنند و این به معنای آن است که، مقداری مثل u، هم بین عددهای $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و هم بین‌عددهای $f(x_2)$ و $f(x_3)$ قرار دارد و، بنا به‌قضیهٔ مربوط به مقدارهای بینابینی برای تابع‌های پیوسته، مقدار تابع $f(x)$، در دو نقطهٔ مختلف $x_4\in(x_1, x_2)$ و $x_5\in(x_2$ و $x_3)$، برابر مقدار u می‌شود که ممکن نیست. به این ترتیب، تابع $f(x)$، درتمامی محور عددی، یا نزولی است و یا صعودی. در حالت اول، تابع $f^2(x)$ صعودی و تابع $f^3(x)$ نزولی است، بنابراین، اتحاد $f^3(x)\equiv x$ نمی‌تواند برقرار باشد.

$f(x)$ را صعودی می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به ازای مقداری مثل $x_0\in\mathbf{R}$، داشته باشیم: $f(x_0)\neq x_0$. در این صورت، اگر $f(x_0)>x_0$، آن‌گاه

$$f^2(x_0)>f(x_0), \quad f^3(x_3)>f^2(x_0) \text{ و } f^3(x_0)>x_0$$

و اگر $f(x_0)<x_0$، آن‌گاه

$$f^{۲}(x_{۰})<f(x_{۰})، \ f^{۳}(x_{۰})<f^{۲}(x_{۰}) \ \text{و} \ f^{۳}(x_{۰})<x_{۰}$$

هر دو حالت، برابری $x_{۰}=(x_{۰})^{۳}f$ را نقض می‌کند. به این ترتیب، ثابت شد، $f(x_{۰})\equiv x$ ،$x\in\mathbf{R}$.

ب) تابع

$$g(x)=\begin{cases} x & (x\notin\{۱، ۲، ۳\}) \\ ۲ & (x=۱) \\ ۳ & (x=۲) \\ ۱ & (x=۳) \end{cases}$$

با همهٔ شرط‌های مسأله سازگار است.

۳۸۷. تابع $g(x)=f(x)-x$ را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، برای هرمقدار $k\in\mathbf{Z}$، داریم:

$$f(x+kg(x))\equiv x+(k+۱)g(x)، \ (x\in\mathbf{R})$$

به‌ازای $k=۰$، به اتحاد درست $f(x)\equiv x+g(x)$ می‌رسیم. فرض می‌کنیم، برای مقداری از $k\in\mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$f(x+(k-۱)g(x)\equiv x+kg(x)،$$

$$f(x-(k-۱)g(x))\equiv x-kg(x)$$

دراین‌صورت، با استفاده از اتحادی که برای تابع $f(x)$ در صورت مسأله داده شده است، به دست می‌آید:

$$f(x\pm kg(x))\equiv ۲(x\pm kg(x))-f^{-۱}(x\pm kg(x))\equiv$$

$$\equiv ۲(x\pm kg(x))-(x\pm(k-۱)g(x))\equiv x\pm(k+۱)g(x)$$

به‌کمك اتحادی که ثابت کردیم، ثابت می‌کنیم، تابع $g(x)$، مقداری ثابت است. فرض کنید چنین نباشد و برای $x_{۱}، x_{۲}\in\mathbf{R}$ داشته باشیم: $g(x_{۱})<g(x_{۲})$. دراین صورت، عددی مثل $k\in\mathbf{N}$ پیدا می‌شود که

$$x_{۱}-kg(x_{۱})>x_{۲}-kg(x_{۲})$$

توجه می‌کنیم که، تابع $f(x)$، غیر نزولی است، زیرا درغیر این صورت، تابع $f^{-1}(x)$ و همراه با آن، تابع $f(x)+f^{-1}(x)=2x$، غیرصعودی می‌شود که درست نیست. بنا براین، به‌ازای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، تابع $f^n(x)$ هم، غیرنزولی است، درنتیجه داریم:

$$f^n(x_1-kg(x_1))\geqslant f^n(x_2-kg(x_2))$$

که از آن‌جا، با توجه به برابری‌های

$$f^n(x_i-kg(x_i))=f^{n-1}(x_i+(1-k)g(x_i))=$$
$$=\dots=x_i+(n-k)g(x_i)$$

$(i=1, 2)$ به دست می‌آید:

$$x_1+(n-k)g(x_1)\geqslant x_2+(n-k)g(x_2)$$

ولی، به‌ازای مقدارهای بزرگ n، نابرابری اخیر برقرار نیست، زیرا

$$g(x_1)<g(x_2)$$

به این ترتیب، تابع $g(x)\equiv c$، مقدار ثابتی است، یعنی

$$f(x)\equiv x+c$$

و این تابع، به‌ازای هرمقدار $c\in\mathbf{R}$ با همهٔ شرطهای مسأله سازگار است.

۳۸۸. چون، با توجه به شرط مسأله، برای هرمقدار $y\neq 0$، داریم:

$$f'(x)\equiv\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y},\ (x\in\mathbf{R})$$

سمت راست این اتحاد، نسبت به x مشتق‌پذیر است، بنا براین

$$f''(x)\equiv\frac{f'(x+y)-f'(x-y)}{2y}\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{2y}\left[\frac{f(x+2y)-f(x)}{2y}-\frac{f(x-2y)-f(x)}{(-2y)}\right]\equiv$$
$$\equiv\frac{f(x+2y)+f(x-2y)-2f(x)}{4y^2}$$

عبارت اخیرهم، نسبت به x مشتق‌پذیر است؛ بنابراین

$$f'''(x) \equiv \frac{f'(x+۲y)+f'(x-۲y)-۲f'(x)}{۴y^۲} \equiv$$

$$\equiv \frac{۱}{۴y^۲}\left[\frac{f(x+۴y)-f(x)}{۴y}+\frac{f(x-۴y)-f(x)}{(-۴y)}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(x+۴y)-f(x-۴y)}{۴y}\right] \equiv ۰$$

به این ترتیب، برای تابع مفروض، اتحاد $f'''(x) \equiv ۰$ برقرار است، یعنی

$$f''(x) \equiv f''(۰)\text{،}\quad f'(x) \equiv f''(۰)x+f'(۰)$$

$$f(x) \equiv f''(۰)\frac{x^۲}{۲}+f'(۰)x+f(۰)$$

یادآوری می‌کنیم، هر تابع به صورت

$$f(x)=ax^۲+bx+c\text{،}\quad (a\text{،}\ b\text{،}\ c \in \mathbf{R})$$

دارای همهٔ ویژگی‌های موردنظر می‌باشد.

۳۸۹. در اتحاد مفروض $x=y=۰$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$f(۰)=۲f(۰) \Longrightarrow f(۰)=۰$$

برای هر $x \in \mathbf{R}$، از اتحاد

$$f(x+y)-f(x) \equiv f(y)+۲xy\text{،}\quad (y \in \mathbf{R})$$

داریم:

$$f'(x)=\lim_{y\to۰}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to۰}\frac{f(y)+۲xy}{y}=$$

$$=۲x+\lim_{y\to۰}\frac{f(y)-f(۰)}{y}=۲x+f'(۰)$$

بنابراین، تابع اصلی، باید با این شرط سازگار باشد:

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(y)dy=x^2+f'(0)x$$

و درواقع به‌ازای هرمقدار $a\in\mathbf{R}$، تابع $f(x)=x^2+ax$، با اتحاد موردنظر مسأله، سازگار است.

۳۹۰. دراتحاد مفروض، قرارمی‌دهیم: $x=y=0$، به‌دست می‌آید:

$$f(0)(f(0)-1)=0 \Longrightarrow f(0)=0 \text{ یا } f(0)=1$$

ولی، اگر $f(0)=0$، آن وقت، از اتحاد

$$f(0)f(x)\equiv f(x), \quad (x\in\mathbf{R})$$

به اتحاد $f(x)\equiv 0$ می‌رسیم که با شرط مسأله متناقض است؛ $f(0)=1$. ثابت می‌کنیم، تابع $f(x)$، روی تمامی محور عددی، مشتق‌پذیر است. درواقع، برای هر $x\in\mathbf{R}$ داریم:

$$f(x+y)\equiv f(x)f(y), \quad (y\in\mathbf{R})$$

از آن‌جا

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\equiv f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

یعنی، در اتحاد اخیر، حد بخش سمت چپ وجود دارد و برابر است با

$$f'(x)=f(x)f'(0)$$

$f'(0)=a$ می‌گیریم، دراین صورت $f'(x)=af(x)$. تابع $f(x)$، تا هر مرتبه‌ای، مشتق‌پذیر است. درواقع

$$f''(x)=af'(x)=a^2f(x), \quad f'''(x)=a^2f'(x)=a^3f(x)$$

و غیره به این ترتیب، برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$f^{(n)}(x)=a^nf(x)$$

فصل ششم

چندجمله‌ای‌ها

§۲۱. ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها

۳۹۱. با استفاده از قضیهٔ ویت دربارهٔ رابطه بین ریشه‌ها و ضریب‌ها، یعنی

$$x_1+x_2=-p،\ \ x_1x_2=-\frac{1}{2p^2}$$

و نابرابری مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی دو عدد، داریم:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2[2(x_1+x_2)^2-x_1x_2]=$$

$$=p^4+\frac{1}{p^2}\left(2p^2+\frac{1}{2p^2}\right)=p^4+2+\frac{1}{2p^4}\geqslant 2\sqrt{p^4\cdot\frac{1}{2p^4}}=$$

$$=2+\sqrt{2}$$

۳۹۲. چند جمله‌ای x^4+px^2+q، تنها وقتی چهار ریشه حقیقی دارد که سه جمله‌ای درجهٔ دوم y^2+py+q (نسبت به y) دارای دو ریشهٔ غیرمنفی باشد، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$p^2\geqslant 4q،\ \ q\geqslant 0،\ \ p\leqslant 0$$

فرض می‌کنیم، معادلهٔ اصلی، دارای چهار ریشهٔ حقیقی $-x_1$، $-x_2$، x_1 و x_2 باشد و، بدون این‌که به‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان $x_1\geqslant x_2\geqslant 0$ گرفت. در این صورت، اگر این ریشه‌ها به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$-3x_2=-x_1+x_2،\ x_1^2+x_2^2=-p،\ x_1^2x_2^2=q$$

یعنی وقتی که $q=0/09p^2$. بنابراین همهٔ زوج عددهای مجهول p و q، با شرطهای زیر معین می‌شوند:

$$p\leqslant 0,\quad q=0/09p^2$$

(نابرابری‌های $p^2\geqslant 4q$ و $q\geqslant 0$، نتیجه‌ای از برابری اخیر است).

۳۹۳. بنابر قضیهٔ ویت داریم:

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=1,\quad \gamma+\delta=-q,\quad \gamma\delta=1$$

که از آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=$$
$$=[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2][\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2]=$$
$$=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2)=(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2)+$$
$$+p(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2)-p^2\gamma\delta=(\gamma+\delta)^2+$$
$$+p(\gamma-\delta)(1-\delta\gamma)-p^2=q^2-p^2$$

۳۹۴. برای x_1، x_2 و x_3، ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض، بنابر قضیهٔ ویت داریم:

$$x_1+x_2+x_3=1,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{\beta}{\alpha},\quad x_1x_2x_3=-\frac{\beta}{\alpha}$$

بنابراین

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=$$

$$=(x_1+x_2+x_3)\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=$$

$$=1\times\frac{\beta}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}=-1$$

۳۹۵. $y=x-3$ می‌گیریم. در این صورت، عددهای

$y_1=x_1-۳$، $y_۲=x_۲-۳$ و $y_۳=x_۳-۳$، ریشه‌های چند جمله‌ای

$$(y+۳)^۳-۶(y+۳)^۲+a(y+۳)+a=$$
$$=y^۳+۳y^۲+(a-۹)y+۴a-۲۷$$

هستند. بنا بر قضیهٔ ویت داریم:

$$y_1+y_۲+y_۳=-۳،$$
$$y_1y_۲+y_1y_۳+y_۲y_۳=a-۹،$$
$$y_1y_۲y_۳=۲۷-۴a$$

از طرف دیگر، داریم:

$$y_1^۳+y_۲^۳+y_۳^۳=(y_1+y_۲+y_۳)^۳-$$
$$-۳(y_1y_۲+y_1y_۳+y_۲y_۳)(y_1+y_۲+y_۳)+۳y_1y_۲y_۳=$$
$$=(-۳)^۳-۳(a-۹)(-۳)+۳(۲۷-۴a)=-۲۷-۳a$$

که با توجه به شرط مسأله به دست می‌آید:

$$-۲۷-۳a=۰\Longrightarrow a=-۹$$

۳۹۶. اگر ریشه‌های چند جمله‌ای مفروض را u، v و uv بگیریم، بنا بر قضیهٔ ویت داریم:

$$u+v+uv=-a،$$
$$uv(۱+u+v)=b،$$
$$u^۲v^۲=-c$$

که از آن‌ها، درحالت $a\neq ۱$ به دست می‌آید:

$$b-c=uv(۱+u+v+uv)=uv(۱-a)$$

یعنی $uv=\dfrac{b-c}{۱-a}$، عددی گویاست. چون $u^۲v^۲=-c$، عددی درست‌است، بنابراین، uv هم عددی درست خواهد بود (قضیهٔ ۶۱ را ببینید). بنابراین،

از برابری‌های

$$P(1)+P(-1)-2(1+P(0))=$$
$$=(1+a+b+c)+(-1+a-b+c)-2(1+c)=$$
$$=2(a-1)=-2(u+v+uv+1)=$$
$$=-2(1+u)(1+v)\neq 0,$$
$$2P(-1)=2(-1-u)(-1-v)(-1-uv)=$$
$$=-2(1+uv)(1+u)(1+v)$$

نتیجه می‌شود که عدد

$$\frac{2P(-1)}{P(1)+P(-1)-2(1+P(0))}=1+uv$$

عددی است درست.

درحالت $a=1$ داریم:

$$0=u+v+uv+1=(u+1)(v+1)$$

بنابراین، یکی از ریشه‌های معادله برابر $1-$ است، یعنی عدد $2P(-1)=0$، بر هرعدد درستی بخش‌پذیر است.

۳۹۷. a، b، c و d را ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(x)=x^4+x^3-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

می‌گیریم و ثابت می‌کنیم:

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=0 \qquad (*)$$

اگر این برابری ثابت شود، مسأله حل شده است، زیرا

$$(ab)^6+(ab)^4+(ab)^3-(ab)^2-1=$$
$$=(ab)^3\left[(ab)^3-\left(\frac{1}{ab}\right)^3+ab-\frac{1}{ab}+1\right]=0$$

(درواقع، با توجه به قضیهٔ ویت $abcd=-1$ گرفته‌ایم).

به اثبات برابری (*) می‌پردازیم. از برابری‌های $P(a)=P(b)=0$ داریم:

$$a^3=\frac{1}{a+1} \quad \text{و} \quad b^3=\frac{1}{b+1}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$(ab)^3=\frac{1}{(1+a)(1+b)}=\frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)}=$$
$$=-(1+c)(1+d)$$

به همین‌ترتیب، به دست می‌آید: $(cd)^3=-(1+a)(1+b)$. بنابراین،

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=$$
$$=-(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+ab+cd+1=$$
$$=-1-a-b-c-d=0$$

زیرا، بنابرقضیهٔ ویت

$$a+b+c+d=-1$$

۳۹۸. چون چند جمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ ($a>0$)، دارای دو ریشهٔ مختلف $0<x_1<x_2<1$ می‌باشد، بنابراین:

$$b^2>4ac،\ 0<\frac{c}{a}<1،\ \frac{b}{a}<0$$

یعنی

$$a>c>0،\ b<0$$

سپس $P(1)=a+b+c>0$، از آن‌جا $a+c>-b$. اگر دو طرف نابرابری اخیر را (که مقدارهایی مثبت‌اند) مجذور کنیم، به دست می‌آید:

$$a^2+2ac+c^2>b^2$$

از آن‌جا

$$(a-c)^2 > b^2 - 4ac > 0$$

که از آن نتیجه می‌شود: $a-c \geqslant 2$. اگر فرض کنیم $a \leqslant 4$، برای انتخاب ضریب‌های a و c، تنها سه حالت ممکن است:

$$a_1 = 4, \ c_1 = 2; \quad a_2 = 3, \ c_2 = 1; \quad a_3 = 4, \ c_3 = 1$$

و ضریب b باید، به‌ترتیب، با این سه شرط سازگار باشد:

$$4 > b_1^2 - 32 > 0; \ 4 > b_2^2 - 12 > 0; \ 9 > b_3^2 - 16 > 0$$

ولی، در هیچ‌کدام از این شرط‌ها، عدد درستی برای b به دست نمی‌آید. بنابراین $a \geqslant 5$.

سرانجام، معادلهٔ $5x^2 - 5x + 1 = 0$ دارای دو ریشه است:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad و \quad \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

که به بازهٔ $(0, 1)$ تعلق دارند.

۳۹۹. $c = 0$ می‌گیریم. دراین صورت، عدد c ریشه‌ای از معادلهٔ

$$x^4 - ax^3 - bx = 0$$

خواهد بود. بنابراین، باید a و b را طوری پیدا کنیم که، به‌ازای آن‌ها، چندجمله‌ای

$$x^3 - ax^2 - b$$

دارای دو ریشهٔ برابر a و b باشد. ریشهٔ سوم این چند جمله‌ای را d می‌گیریم، دراین صورت، باید داشته باشیم:

$$a + b + d = a \Longrightarrow d = -b,$$

$$ab + ad + bd = ab - b(a+b) = -b^2 = 0 \Longrightarrow b = 0$$

و به‌روشنی معلوم است که سه عدد $(a, 0, 0)$ با شرط مسأله سازگارند.

اکنون $c \neq 0$ می‌گیریم. در این صورت، هیچ یك از چهار ریشهٔ a،

b، c و d از چندجمله‌ای x^4-ax^3-bx+c، برابر صفر نیستند. بنابر قضیهٔ ویت داریم:

$$a+b+c+d=a \Longrightarrow d=-(b+c)$$

سپس

$$ab+ac+bc+ad+bd+cd=$$
$$=ab+ac+bc-(a+b+c)(b+c)=$$
$$=-b^2-bc-c^2=0;\ abc+abd+acd+bcd=$$
$$=abc-(ab+ac+bc)(b+c)=$$
$$=-a(b^2+bc+c^2)-b^2c-bc^2=-bc(b+c)=b،$$

یعنی

$$b^2=-c(b+c)=1،\ c^2+bc+1=0$$

و سرانجام

$$abcd=-abc(b+c)=ab=c$$

یعنی $\frac{c}{b}=a$. بنابراین، تنها چهار انتخاب برای عددهای a، b، c وجود دارد:

$$b_{1,2}=1،\ c_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ a_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$b_{3,4}=-1،\ c_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\ a_{3,4}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}$$

که هر کدام از آن‌ها، درشرط مسأله صدق می‌کند. به این ترتیب، سه عدد $(a، b، c)$ یا به‌صورت $(a، 0، 0)$ هستند که، درآن، a عدد مختلط دلخواهی است، و یا بریکی از نقطه‌های زیر منطبق‌اند:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right);\ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

۴۰۰. x_1 و x_2 را ریشه‌های چند جمله‌ای x^2+ax+b می‌گیریم. دراین صورت، x_1، x_2 و ۰، تنها وقتی رأس‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ موردنظر مسأله را تشکیل می‌دهند که $x_1 \neq 0$ باشد و عدد $\frac{x_2}{x_1}$ برابر i یا $-i$ شود (زیرا، مدول عددهای x_1 و x_2 بر هم منطبق‌اند و اختلاف آرگومان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}+2n\pi$ است که درآن، $n\in\mathbf{Z}$). و این به معنای آن است که $x_2=ix_1$ یا $x_1=ix_2$، یعنی ریشه‌های چند جمله‌ای مفروض، به صورت x_0 و ix_0 درمی‌آیند (درضمن $x_0\neq 0$). از آن‌جا، بنابر قضیهٔ ویت، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} (1+i)x_0=-a, \\ ix_0^2=b \\ x_0\neq 0 \end{cases}$$

و این دستگاه، تنها وقتی متوافق است که $a^2=2b\neq 0$، زیرا $2(ix_0^2)=[(1+i)x_0]^2$.

۴۰۱. ازآن‌جا که همهٔ ضریب‌های چند جمله‌ای $P(x)$ غیر منفی هستند، هیچ کدام از ریشه‌های α_1، ...، α_n آن، نمی‌توانند مثبت باشند. بنابراین، چندجمله‌ای را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x)=(x+\beta_1)\cdots(x+\beta_n)$$

که در آن $\beta_i=-\alpha_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها (قضیهٔ ۶)، داریم:

$$2+\beta_i=1+1+\beta_i\geqslant 3\sqrt[3]{1\times 1\times \beta_i}=3\sqrt[3]{\beta_i}, \ (i=1, \ldots, n)$$

و با توجه به‌این‌که $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=1$، به دست می‌آید:

$$P(2)=(2+\beta_1)\cdots(2+\beta_n)\geqslant 3^n\sqrt[n]{\beta_1\cdots\beta_n}=3^n$$

۴۰۲. چون چند جمله‌ای مفروض، n ریشهٔ مثبت دارد، درجهٔ آن از n کمتر نیست؛ یعنی $a\neq 0$ و، اگر x_1، ...، x_n را ریشه‌های آن بگیریم، داریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$

$$(-1)^n\sum_{i=1}^{n}x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n=n^2\frac{b}{a},$$

$$(-1)^n x_1x_2\cdots x_n=\frac{b}{a}$$

ازآن جا $b\neq 0$. با توجه به قضیهٔ مربوط و واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$n^2=1\times\frac{(-1)^n n^2\frac{b}{a}}{(-1)^n\frac{b}{a}}=(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(n\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right)\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_n}}\right)=n^2$$

و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$$

۴۰۳. فرض می‌کنیم، عدد α، ریشهٔ هر دو معادلهٔ مفروض باشد، یعنی

$$\alpha^5=\alpha+1 \text{ و } \alpha^2=-a\alpha-b$$

در این صورت

$$\alpha+1=\alpha^5=\alpha(\alpha^2)^2=\alpha(-a\alpha-b)^2=\alpha[a^2(-a\alpha-b)+2ab\alpha+$$

$$+b^2]=(2ab-a^3)(-a\alpha-b)+(b^2-a^2b)\alpha=$$

$$=(a^4-3a^2b+b^2)\alpha+(a^3b-2ab^2)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$(a^4-3a^2b+b^2-1)\alpha=-a^3b+2ab^2+1$$

که از آن، به دست می‌آید:

$$a^4-3a^2b+b^2-1=0,$$
$$-a^3b+2ab^2+1=0$$

(زیرا، درغیراین صورت، α باید ریشهٔ گویایی ازچندجمله‌ای x^5-x-1 باشد که، بنابر قضیهٔ ۵۹، ممکن نیست). اگر بین دو برابری اخیر، عدد

$$b=\frac{2a^5-2a-1}{5a^3}$$

را حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$a^{10}+3a^6-11a^5-4a^2-4a-1=0$$

که با گویا بودن عدد a متناقض است (زیرا، چندجمله‌ای

$$x^{10}+3x^6-11x^5-4x^2-4x-1$$

با توجه به قضیهٔ ۵۹، ریشهٔ گویا ندارد). بنابراین، چندجمله‌ای‌های

$$x^5-x-1 \quad \text{و} \quad x^2+ax+b$$

با فرض $a, b\in\mathbf{Q}$، ریشهٔ مشترکی ندارند.

۴۰۴. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$Q(x)=P(a-x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$$

در این صورت، داریم:

$$a_0=Q(0)=P(a)<0,$$
$$a_1=Q'(0)=-P'(a)\leqslant 0,$$
$$a_2=\frac{Q''(0)}{2!}=\frac{(-1)^2p''(a)}{2!}\leqslant 0 \text{ و}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n=\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^nP^{(n)}(a)}{n!}\leqslant 0$$

بنابراین، برای همهٔ مقدارهای $x\geqslant ۰$، داریم: $Q(۰)>۰$، یعنی چندجمله‌ای $P(x)$، ریشه‌ای در بازهٔ $(-\infty، a]$ ندارد. به همین ترتیب، برای چندجمله‌ای

$$R(x)=P(b+x)=b_n x^n+\cdots+b_۱ x+b_۰$$

داریم:

$$b_۰=R(۰)=P(b)>۰،$$

$$b_۱=R'(۰)=P'(b)\geqslant ۰،$$

$$b_۲=\frac{R''(۰)}{۲!}=\frac{P''(b)}{۲!}\geqslant ۰،$$

. . . .

$$b_n=\frac{R^{(n)}(۰)}{n!}=\frac{P^{(n)}(b)}{n!}\geqslant ۰$$

ازآن جا، برای $x\geqslant ۰$، داریم: $R(x)>۰$. بنابراین، چندجمله‌ای $P(x)$ ریشه‌ای در بازهٔ $[b، +\infty)$ ندارد. به این ترتیب، ثابت شد که، همهٔ ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای $P(x)$، در بازهٔ $(a، b)$ واقع‌اند.

۴۰۵. ثابت می‌کنیم، در حالت زوج بودن n، چند جمله‌ای $f_n(x)$، به ازای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{R}$، مقدارهای مثبت را می‌پذیرد (و در نتیجه، ریشهٔ حقیقی ندارد)؛ و در حالت فرد بودن n، چند جمله‌ای $f_n(x)$، تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد. اثبات را، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

برای $n=۰$ داریم: $f_۰(x)=۱>۰$ (برای همهٔ مقدارهای x).
فرض می‌کنیم، حکم، برای همهٔ مقدارهای کوچکتر از $n\in\mathbf{N}$ درست باشد. ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت، برای n هم درست است.

الف) n را عددی فرد می‌گیریم. بنابر فرض استقرا، برای هر $x\in\mathbf{R}$ داریم:

$$f'_n(x)=f_{n-۱}(x)>۰$$

بنا براین، تـابع $f_n(x)$ صعودی است و، بیش از یك بار، نمی‌تواند برابر صفر شود. چون $f_n(\circ)=1>\circ$ و $\lim_{x\to\infty} f_n(x)=-\infty$ (یعنی، تابع $f_n(x)$، دست‌کم دریك نقطهٔ x، مقداری منفی را می‌پذیرد)، بنا براین، تابع پیوستهٔ $f_n(x)$، دست‌کم در یك نقطه، بـرابـر صفر می‌شود (قضیهٔ ۲۸ را ببینید).

ب) n را زوج می‌گیریم. در این صورت، چندجمله‌ای

$$f'_n(x)=f_{n-1}(x)$$

درست یك‌ریشهٔ حقیقی $x_\circ\neq\circ$ را دارد. ازآن‌جا که، برای هر $x\in\mathbf{R}$داریم:

$$f''_n(x)=f_{n-2}(x)>\circ$$

بنا برایـن، برای $x>x_\circ$، $f'_n(x)>\circ$ و برای $x<x_\circ$، $f'_n(x)<\circ$. در نتیجه، به ازای هر $x\in\mathbf{R}$، داریم:

$$f_n(x)\geqslant f_n(x_\circ)=f_{n-1}(x_\circ)+\frac{x_\circ^n}{n!}=\frac{x_\circ^n}{n!}>\circ$$

حکم مسأله، به طور کامل، ثابت شد.

۴۰۶. داریم:

$$Q'(x)=P'(x)+\alpha P''(x)+\cdots+\alpha^{n-1}P^{(n)}(x)$$

(زیرا $P^{(n+1)}(x)=\circ$). بنابراین

$$Q(x)-\alpha Q'(x)=P(x)$$

بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای واردشود، می‌توان ضریب بزرگترین درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ را مثبت گـرفت. از آن جا که، این چندجمله‌ای ریشهٔ مثبت ندارد، درجهٔ آن، یعنی n، عددی زوج است، و برای هر $x\in\mathbf{R}$ داریم: $P(x)>\circ$.

فرض می‌کنیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ دارای این ریشه‌های حقیقی باشد:

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$$

$\alpha \geqslant 0$ می‌گیریم. چون ضریب بزرگترین درجهٔ $Q(x)$، که با ضریب بزرگترین درجهٔ $P(x)$ برابر است؛ عددی است مثبت، بنابراین

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)=+\infty$$

از آن جا، برای $x>x_k$ داریم: $Q(x)>0$. بنابراین $Q'(x_k)\geqslant 0$ و

$$P(x_k)=Q(x_k)-\alpha Q'(x_k)\leqslant 0$$

و اگر $\alpha<0$ بگیریم، به ازای $x<x_1$ داریم: $Q(x)>0$ (زیرا $Q(x)$ از درجهٔ n است که عددی است زوج). بنابراین $Q'(x_1)\leqslant 0$ و

$$P(x_1)=Q(x_1)-\alpha Q'(x_1)\leqslant 0$$

در هر دوحالت، نابرابری $P(x)>0$ نقض می‌شود؛ بنابراین، چندجمله‌ای $Q(x)$، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۴۰۷. با تجزیهٔ چندجمله‌ای به عامل‌ها، به دست می‌آید:

$$p(x)=a(x-x_1)\dots(x-x_n),\ \ (a\neq 0)$$

در این صورت

$$P'(x)=P_1(x)+\dots+P_n(x)$$

که در آن، $P_k(x)\ (k=1, 2, \dots, n)$، چند جمله‌ای است از درجهٔ $n-1$ با شرط

$$(x-x_k)P_k(x)\equiv P(x)$$

توجه می‌کنیم که، به شرط $k\neq i$، داریم: $P_k(x_i)=0$، یعنی

$$P'(x_i)=P_i(x_i)\neq 0$$

اکنون، این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$F(x)=-1+\frac{P_1(x)}{P'(x_1)}+\dots+\frac{P_n(x)}{P'(x_n)}$$

که درجهٔ آن (اگر $F(x)\not\equiv 0$) از $n-1$ تجاوز نمی‌کند. برای هر مقدار

$i = 1, 2, \ldots, n$ داریم:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)} - 1 = \frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$$

یعنی چندجمله‌ای $F(x)$ دارای n ریشهٔ مختلف است. بنابراین

$$F(x) \equiv 0$$

چون ضریب بزرگترین درجه، در هریك از چند جمله‌ای‌های $P_k(x)$، برابر است با a، بنابراین ضریب x^{n-1} در چندجمله‌ای $F(x)$ برابر می‌شود با

$$\frac{a}{P'(x_1)} + \cdots + \frac{a}{P'(x_n)}$$

ولی، این ضریب، برابر صفر است و، از آن جا، درستی حکم مسأله تأیید می‌شود.

۴۰۸. بنابر قضیهٔ ۵۷، وقتی یك چند جمله‌ای ضریب‌های حقیقی داشته باشد، تنها می‌تواند، به تعداد زوج، دارای ریشه‌های موهومی خالص باشد که، در ضمن، دو به دو، مزدوج یکدیگرند. بنابراین، چند جمله‌ای مفروض $P(x)$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x) = a(x - ia_1)\cdots(x - ia_{2n}) = a(x^2 + a_1^2)\cdots(x^2 + a_n^2)$$

که در آن، a، a_1، ...، a_{2n}، عددهای حقیقی غیر صفرند و، در ضمن، $a_{n+k} = -a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. چون در چند جمله‌ای $P(x)$، ضریب x^2 مخالف صفر، وضریب x^1 برابر صفر است، بنابراین، چند جمله‌ای $P'(x)$، درست یك ریشهٔ $x = 0$ دارد. ثابت می‌کنیم، بقیهٔ $n - 2$ ریشهٔ آن، موهومی خالص‌اند.

فرض کنید $P'(b+ic) = 0$، درضمن $b^2 + c^2 \neq 0$. اگر در عین حال $P(b+ic) = 0$، آن وقت $b+ic$، ریشهٔ چند جمله‌ای اصلی است، یعنی موهومی خالص است، ولی اگر $P(b+ic) \neq 0$، آن وقت

$$0 = \frac{P'(b+ic)}{P(b+ic)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{b + i(c - a_k)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{b - i(c - a_k)}{b^2 + (c - a_k)^2}$$

زیرا

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x-ia_k}$$

بنابراین، بخش حقیقی عبارت $\frac{P'(b+ic)}{P(b+ic)}$ برابر است با

$$b\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b^2+(c-a_k)^2}=0$$

یعنی $b=0$، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۰۹. فرض می‌کنیم، چندجمله‌ای‌های P و Q، ریشه‌هایی منطبق برهم داشته باشند، در این صورت داریم:

$$P(x)=a(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\dots(z-z_k)^{n_k}$$

$$Q(x)=b(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\dots(z-z_k)^{n_k}$$

که درآن‌ها، a و b، عددهای مختلط غیر صفر و $n_k\in\mathbf{N}$ ،... ،n_1. در نتیجه، تابع

$$f(z)=|P(z)|-|Q(z)|=(|a|-|b|)\cdot|(z-z_1)^{n_1}\dots(z-z_k)^{n_k}|$$

نمی‌تواند مقدارهایی با علامت‌های مختلف را بپذیرد. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم تابع $f(z)$، مقدارهای منفی را قبول نکند. در این صورت، $\deg P\geqslant\deg Q$، زیرا در غیراین‌صورت، برای مقدارهایی از z که مدولی به قدرکافی بزرگ دارند، باید داشته باشیم

$$|P(z)|<|Q(z)) \Rightarrow f(z)<0$$

سپس، فرض می‌کنیم:

$$P(z)=(z-z_0)^{n_0}P_0(z)$$

که درآن $z_0\in\mathbf{C}$، $n_0\in\mathbf{N}$، $P_0(z)$ یك چند جمله‌ای و $P_0(z_0)\neq 0$. فرض کنید:

$$Q(z)=(z-z_0)^{m_0}Q_0(z)$$

که در آن $m_\circ \in Z^+$، $Q_\circ(z)$ یك چند جمله‌ای و $Q_\circ(z_\circ) \neq \circ$. ثابت می‌کنیم $m_\circ \geqslant n_\circ$ در واقع اگر $\circ \leqslant m_\circ < n_\circ$، آن وقت عدد

$$f(z) = |z - z_\circ|^{m_\circ}[|(z - z_\circ)^{n_\circ - m_\circ} \cdot P_\circ(z)| - |Q_\circ(z)|]$$

برای بعضی ازمقدارهای z، که به قدرکافی به $z_\circ$ نزدیك باشند، منفی می‌شود. به این ترتیب، اگر چند جمله‌ای P دارای ریشه‌های z_1، ...، z_k، به ترتیب، با تکرارهای n_1، ...، n_k باشد، آن وقت چند جمله‌ای Q هم، همین ریشه‌ها را بـا تکراری که، به ترتیب، کمتر از m_1، ...، m_k نیست، خواهد داشت. سرانجام، از نابرابری‌های

$$n_1 \leqslant m_1, \ldots, n_k \leqslant m_k, n_1 + \ldots + n_k \geqslant m_1 + \ldots + m_k$$

نتیجه می‌شود:

$$n_1 = m_1, \ldots, n_k = m_k, \deg P = \mathrm{dog}\, Q$$

و چندجمله‌ای Q، ریشه‌های دیگری به‌جز z_1، ...، z_k ندارد؛ بنابراین، ریشه‌های چندجمله‌ای‌های P و Q، برهم منطبق‌اند.

§۲۲. بخش‌پذیری و برابری چندجمله‌ای‌ها

۴۱۰. اثبات را، با استقرای روی $n \in Z^+$ می‌دهیم. به ازای $n = \circ$، حکم درست است، زیرا در این حالت

$$(x+1)^{2n+1} + x^{n+2} \equiv x^2 + x + 1$$

فرض می‌کنیم، حکم، برای $n - 1$ بـرقـرار باشد، در این صورت چندجمله‌ای

$$(x+1)^{2n+1} + x^{n+2} \equiv (x+1)^2(x-1)^{2n-1} + x \cdot x^{n+1} \equiv$$
$$\equiv (x^2 + 2x + 1)(x+1)^{2n-1} + x \cdot x^{n+1} \equiv$$
$$\equiv (x^2 + x + 1)(x+1)^{2n-1} + x[(x+1)^{2n-1} + x^{n+1}]$$

نیز بر $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است؛ یعنی، حکم، برای n هم درست‌است.

۴۱۱. فرض می کنیم: $x_\varepsilon = cos\alpha + i\varepsilon sin\alpha$، که در آن، ε برابر ۱ — یا ۱ + است. در این صورت، چند جمله‌ای $Q(x)$ را می‌توان این طور نوشت:

$$Q(x) = (x - cos\alpha - isin\alpha)(x - cos\alpha + isin a) = (x - x_1)(x - x_{-1})$$

بنا به دستور موآور داریم:

$$x_\varepsilon^n = (cos\varepsilon\alpha + isin\varepsilon\alpha)^n = cos\varepsilon n\alpha + isin\varepsilon n\alpha =$$
$$= cosn\alpha + \varepsilon i sinn\alpha$$

بنا براین

$$P(x_\varepsilon) = (cosn\alpha + \varepsilon i sinn\alpha)^n sin\alpha - (cos\alpha + \varepsilon i sin\alpha) sinn\alpha +$$
$$+ sin(n-1)\alpha = cosn\alpha sin\alpha - cos\alpha sinn\alpha + sin(n-1)\alpha =$$
$$= sin(1-n)\alpha + sin(n-1)\alpha = 0$$

در نتیجه، بنا بر قضیه بزو، چندجمله‌ای $P(x)$ بر هریك از چندجمله‌ای‌های

$$x - x_1 \quad \text{و} \quad x - x_{-1}$$

(که باهم برابر نیستند، زیرا $sin\alpha \neq 0$)، بخش‌پذیر است و، بنابراین، بر حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی $Q(x)$ هم، بخش‌پذیر می‌شود.

۴۱۲. $cos^2 t$ را به $1 - sin^2 t$ تبدیل می کنیم و $sint = x$ می گیریم. معلوم می‌شود که چند جمله‌ای مجهول $R(x)$ با درجه‌ای کمتر از ۴، عبارت است از باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت

$$S(x) = 7x^{31} + 8x^{13} - 5x^9 - 2$$

بر چندجمله‌ای

$$Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

زیرا، برای همهٔ مقدارهای $x \in [-1, 1]$ اتحاد

$$S(x) \equiv P(x)Q(x) + R(x)$$

برقرار است، که در نتیجه، برای همهٔ مقدارهـای $x\in C$ هم برقرار خواهد بود (قضیهٔ ۵۲ را ببینید). چون

$$(x-1)Q(x)=x^5-1$$

بنابراین، ۴ مقدار مختلف برای متغیر x وجود دارد که با شرط $Q(x)=0$ سازگار است. برای هر یك از این مقدارها داریم $x^5=1$ و

$$R(x)=S(x)=7x^{31}+8x^{13}-5x^9-2=$$
$$=7x+8x^3-5x^4-2+5Q(x)=13x^3+5x^2+12x+3$$

به این ترتیب، چند جمله‌ای‌هـای $R(x)$ و $13x^3+5x^2+12x+3$، که درجهٔ آن از ۳ تجاوز نمی‌کند، در چهار نقطهٔ مختلف، مقدارهای برابر را قبول می‌کنند و، بنابراین، برهم منطبق‌اند.

۴۱۳. چندجمله‌ای‌های

$$P(x)=1+x+\dots+x^m,\ Q(x)=1+x^n+\dots+x^{mn}$$

دارای ریشه‌های تکراری نیستند، زیرا، چندجمله‌ای‌های زیر، ریشهٔ تکراری ندارند:

$$x^{m+1}-1=(x-1)P(x),\ x^{n(m+1)}-1=(x^n-1)Q(x)$$

بنـابراین، بـا توجه به قضیهٔ ۵۴، تنها وقتی چند جمله‌ای $Q(x)$ بر $P(x)$ بخش‌پذیر است که هرکدام از ریشه‌هـای چند جمله‌ای $P(x)$، ریشه‌ای از چند جمله‌ای $Q(x)$ باشد و یـا، هم ارزآن، هر یك ریشهٔ مخالف واحد در معادلهٔ $x^{m+1}=1$ (که به خودی خود، ریشه‌ای از معادلهٔ $x^{n(m+1)}=1$ نیز می‌باشد)، ریشه‌ای از معـادلهٔ $x^n=1$ نباشد. به این ترتیب، همهٔ زوج‌های مجهول m و n (و نه تنها آن‌ها)، باید طوری انتخـاب شوند که، به ازای آن‌ها، دستگاه

$$\begin{cases}x^{m+1}=1\\x^n=1\end{cases}$$

تنها یك جواب منحصر $x=1$ را داشته باشد. اگر داشته باشیم:

$$(m+1, n)=d>1$$

آن وقت، این دستگاه، به عنوان یکی از جواب‌ها، عدد

$$x=\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}\neq 1$$

را قبول می‌کند. و اگر $(m+1, n)=1$، آن وقت، با توجه به‌قضیهٔ ۲۴، عددهای درست k و l را می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$k(m+1)+l\cdot n=1$$

یعنی، برای هرجواب این دستگاه داریم:

$$x=x^{k(m+1)+l\cdot n}=(x^{m+1})^k(x^n)^l=1$$

بنابراین، زوج عددهای طبیعی m و n، تنها وقتی بـا شرط مسأله سازگارند که، عددهای $m+1$ و n، نسبت به‌هم اول باشند.

۴۱۴. این چندجمله‌ای را درنظر می‌گیریم:

$$S(x)=s_0+s_1(x)+\cdots+s_nx^n$$

اگر دو طرف اتحاد مفروض را، در $x-1$ ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$(x-1)[P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)]\equiv(x^5-1)S(x)$$

یا

$$P(x^5)+(x^5-1)S_1(x)\equiv-(x^5-1)S_2(x)+$$
$$+xP(x^5)+(x^2-x)Q(x^5)+(x^3-x^2)R(x^5)$$

که در آن، فرض کرده‌ایم:

$$S_1(x)=s_0+s_5x^5+s_{10}x^{10}+\cdots+s_{5m}x^{5m},$$

$$S_2(x)=S(x)-S_1(x), \qquad m=\left[\frac{n}{5}\right]$$

چون درسمت چپ اتحـاد اخیر، متغیر x، توان‌هایی مضرب ۵ دارد و، در

سمت راست، تنها بـا توان‌های مخالف مضرب ۵، بنابراین، هر دو طرف، باید برابر صفر باشند از آن‌جا به دست می‌آید:

$$P(x^5)\equiv-(x^5-1)S_1(x)$$

اگر دراین اتحاد $x=1$ قرار دهیم، به دست می‌آید $P(1)=0$، بنابراین، طبق قضیهٔ بِزو، $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

۴۱۵. هر چند جمله‌ای به‌صورت $P(x)=ax$، کـه درآن a عددی ثابت است، درشرط مسأله صدق می‌کند.

با استقـرای روی $n\in\mathbf{Z}^+$، ثابت می‌کنیم، بـرای هـر چند جمله‌ای مطلوب $P(x)$، برابری $P(n)=nP(1)$ بـرقـرار است. بـرای $n=0$ و $n=1$، این برابری درست است. فرض می‌کنیم، درستی برابری را، برای $n-1$ و n ثابت‌کرده باشیم $(n\in\mathbf{N})$. دراین‌صورت داریم:

$$P(n+1)=2P(n)-P(n-1)=(n+1)P(1)$$

یعنی بـرابـری، بـرای $n+1$ هـم بـرقـرار است. چـون چند جمله‌ای $P(x)-P(1)x$ دارای بی‌نهایت جواب

$$x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

است، بنابراین برابر صفر است. به‌این‌ترتیب، چند جمله‌ای مجهول، عبارت است از $P(x)=ax$.

۴۱۶. اگـر در اتحاد مفروض $x=0$ و $x=2$ قـرار دهیم، معلوم می‌شود که چند جمله‌ای مفروض، دارای ریشه‌هـای ۰ و ۱ می‌باشد، یعنی بر x^2-x بخش‌پذیر است:

$$P(x)=(x^2-x)Q(x) \qquad (*)$$

دراتحاد مفروض، به‌جای $P(x)$، مقدارش را از برابری (*) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$Q(x)=Q(x-1)$$

که ازآن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\ldots=Q(2)=Q(1)=Q(0)=Q(-1)=\ldots$$

بنا براین، $Q(x)$، مقداری ثابت است: $Q(x)\equiv a$ و داریم:

$$P(x)=a(x^2-x)$$

آزمایش نشان می‌دهد که، همهٔ تابع‌های به این صورت، با شرط مسأله سازگارند.

۴۱۷. اگر در اتحاد مفروض، به‌ترتیب $x=1$، $x=-2$ و $x=0$ قرار دهیم، معلوم می‌شود که، چند جمله‌ای مفروض، دارای ریشه‌های 0 و ± 1 است. درنتیجه، $P(x)$ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$P(x)=(x^3-x)Q(x)$$

اگر از این برابری، در اتحاد مفروض استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$Q(x+1)\equiv Q(x)$$

و از آن جا

$$Q(0)=Q(1)=Q(2)=\ldots$$

بنابراین $Q(x)\equiv a$ و برای چندجمله‌ای مجهول $P(x)$ داریم:

$$P(x)=a(x^3-x)$$

و آزمایش نشان می‌دهد که، این چندجمله‌ای، با شرط مسأله سازگار است.

۴۱۸. چندجمله‌ای مجهول را به‌این‌صورت درنظر می‌گیریم:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ (a_n\neq 0)$$

فرض می‌کنیم، دست‌کم یکی از ضریب‌های a_{n-1}، ...، a_1، a_0 مخالف‌صفر باشد. بزرگترین مقدار $k<n$ را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $a_k\neq 0$. در این صورت داریم:

$$P(x^2)\equiv a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+\ldots+a_1x^2+a_0\equiv$$
$$\equiv(a_nx^n+a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0)^2\equiv(P(x))^2$$

اگر ضریب x^{n+k} را در دو طرف اتحاد مقایسه کنیم، به دست می‌آید:

$$2a_n a_k = 0$$

که با شرط‌های $a_n \neq 0$ و $a_k \neq 0$ متناقض است. بنابراین

$$a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0 \quad \text{و} \quad P(x) = a_n x^n$$

سرانجام، ازشرط

$$a_n x^{2n} \equiv P(x^2) \equiv (P(x))^2 \equiv a_n^2 x^{2n}$$

به دست می‌آید $a_n = 1$، یعنی $P(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$.

۴۱۹. $y = x - 1$ و $P(y-1) = Q(y)$ می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$(P(x-2))^2 = (P(y-1))^2 = (Q(y))^2;$$

$$(P(x^2 - 2x) = P(y^2 - 1) = Q(y^2)$$

و در نتیجه، اتحاد مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$Q(y^2) = (Q(y))^2, \quad y \in \mathbf{R}$$

که همان مسأله **۴۱۸** است. بنابراین $Q(y) = y^n$ و

$$P(y) = (y+1)^n, \quad n \in \mathbf{Z}^+$$

۴۲۰. چندجمله‌ای مجهول را، به این‌صورت می‌گیریم:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

که اگر در اتحاد مفروض قرار دهیم و، سپس، ضریب‌های x^{3n} و x^0 را در دو طرف مقایسه کنیم، به دست می‌آید:

$$a_n^2 = a_n \quad \text{و} \quad a_0^2 = a_0 \Longrightarrow a_n = 1 \quad \text{و} \quad a_0 = 1$$

درواقع نمی‌توان $a_0 = 0$ گرفت، زیرا برای $a_0 = 0$ به‌دست می‌آید:

$$P(x) = x^l P_1(x)$$

که در آن $P_1(0) \neq 0$ و $l \in \mathbf{N}$؛ و از اتحاد

$$x^l P_1(x) \cdot (2x^2)^l P_1(2x^2) \equiv (2x^3 + x)^l P_1(2x^3 + x)$$

به این اتحاد می‌رسیم:

$$2^l x^{2l} P_1(x) P_1(2x^2) \equiv (2x^2+1)^l P_1(2x^3+x)$$

از آن‌جا $P_1(0)=0$ که فرض ما را نقض می‌کند.

$\alpha=\rho(\cos\varphi+i\cos\varphi)$ را، ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x)$ فرض می‌کنیم، در این صورت، عدد $2\alpha^3+\alpha$ هم ریشهٔ دیگری از آن خواهد بود، زیرا

$$P(2\alpha^3+\alpha)=P(\alpha)P(2\alpha^2)$$

سپس، داریم:

$$|2\alpha^3+\alpha|=|\alpha|\cdot|2\alpha^2+1|\geqslant|\alpha|\cdot(2|\alpha|^2-1)$$

بنابراین، اگر $|\alpha|=\rho>1$، آن وقت $|2\alpha^3+\alpha|>|\alpha|$ و چند جمله‌ای $P(x)$، که متحد با صفر نیست، بی‌نهایت ریشهٔ مختلف پیدا می‌کند:

$$\beta_1=\alpha,\ \ \beta_{j+1}=2\beta_j^3+\beta_j,\ \ j=1, 2, \dots$$

که ممکن نیست. بنابراین، هر ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ نمی‌تواند، از نظر قدر مطلق، از واحد تجاوز کند، ولی چون حاصل‌ضرب همهٔ ریشه‌های این چندجمله‌ای (بنابر قضیهٔ ویت) برابر واحد است، ممکن نیست که همهٔ ریشه‌های آن، از لحاظ قدر مطلق، کمتر از واحد باشند. به این ترتیب $\rho=1$ و از زنجیرهٔ برابری‌های

$$1=|2\alpha^3+\alpha|^2=|2\alpha^2+1|^2=4\cos 2\varphi+5$$

به دست می‌آید: $\varphi=m\pi+\frac{\pi}{2}$، $m\in\mathbf{Z}$ و $\alpha=\pm i$. چون چند جمله‌ای $P(x)$، دارای ضریب‌های حقیقی است، بنابراین

$$P(x)=(x^2+1)^k,\quad k\in\mathbf{Z}^+$$

و آزمایش نشان می‌دهد که، همهٔ چند جمله‌ای‌های به این صورت، با شرط مسأله سازگارند.

۴۲۱. اثبات را، با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$ می‌دهیم. چون چند جمله‌ای

$Q_1(x)$ بــرخودش بخش‌پذیر است، بنابراین حکم مسألــه، بــرای $n=1$ درست است.

اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n\in\mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$Q_n(x)\equiv R_n(x)\cdot Q_1(x)$$

که درآن، $R_n(x)$، یك چند جمله‌ای است. دراین‌صورت، داریم:

$$Q_{n+1}(x)\equiv P(Q_n(x)+x)-x\equiv P(R_n(x)Q_1(x)+x)-x\equiv$$
$$\equiv[P(R_n(x)Q_1(x)+x)-P(x)]+[p(x)-x]$$

فرض می‌کنیم: $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$، در این صورت

$$Q_{n+1}(x)\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k[(R_n(x)Q_1(x)+x)^k-x^k]+Q_1(x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)Q_1(x)S_k(x)+Q_1(x)\equiv$$

$$\equiv Q_1(x)\left[1+\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)S_k(x)\right]$$

که درآن فرض کرده‌ایم:

$$S_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}[R_n(x)Q_1(x)+x]^jx^{k-j-1}$$

درواقع، از برابری

$$a^k-b^k=(a-b)\sum_{j=0}^{k-1}a^jb^{k-j-1}$$

استفاده کرده‌ایم که درآن $a=Q_n(x)Q_1(x)+x$ و $b=x$.

به‌این‌ترتیب، حکم، برای $n+1$ هم ثابت شد.

۴۲۲. یــادآوری می‌کنیم، اگــر چند جمله‌ای $S(x)$ از درجــهٔ سوم تجــاوز نکند و، در ضمن، بــرای همهٔ مقدارهــای $x\in\mathbf{R}$ داشته بــاشیــم $S(x)\geqslant 0$ و $S(x_0)=0$، آن وقت، این چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$S(x)=a(x-x_0)^2, a\geqslant 0$$

بنا بر این

$$R(x)\equiv P(x)+a(x-x_0)^2,$$

$$Q(x)\equiv P(x)+b(x-x_0)^2\equiv$$

$$\equiv\frac{a-b}{a}P(x)+\frac{b}{a}[P(x)+a(x-x_0)^2]\equiv$$

$$\equiv kP(x)+(1-k)R(x)$$

که در آن $a\geqslant b\geqslant 0$ و $k=1-\frac{b}{a}\in[0, 1]$. در حالت $a=0$، به دست می‌آید: $P(x)\equiv Q(x)\equiv R(x)$، بنا بر این اتحاد مطلوب، مثلاً، برای $k=1$ برقرار است.

این حکم، برای چند جمله‌ای درجهٔ چهارم هم، درست نیست. مثلاً، چندجمله‌ای‌های

$$P(x)=x^4, Q(x)=x^4+x^2, R(x)=2x^4+x^2$$

با نابرابری‌های $P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$، برای $x\in\mathbf{R}$، سازگارند و، درضمن، $P(0)=R(0)$، ولی اتحاد

$$x^4+x^2\equiv kx^4+(1-k)(2x^4+x^2)$$

برای هیچ مقداری از k برقرار نیست، زیرا برای ثابت k، به برابری‌های متناقض $1=k+2(1-k)$ و $1=1-k$ می‌رسیم.

۴۲۳. فرض می‌کنیم، چندجمله‌ای

$$Q(x)=q_nx^n+\dots+q_0$$

با شرط $q_n\neq 0$، در اتحاد $Q(P(x))\equiv P(Q(x))$ صدق کند، آن وقت، اگر در این اتحاد، ضریب بزرگترین درجه (یعنی ضریب x^{2n}) را در دو طرف، برابر قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$q_n a^n = a q_n^2 \Rightarrow q_n = a^{n-1}$$

بنـا براین، اگر برخلاف حکم مسأله، برای مقداری از n، دو چند جمله‌ای مختلف $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ از درجهٔ n وجود داشته باشدکه در اتحادمفروض صدق کنند، آن‌وقت، چند جمله‌ای $R(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$ هم‌که با درجهٔ $k<n$ است (زیـرا، ضریب بزرگترین درجهٔ چند جمله‌ای‌هـای $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ باهم برابر ومساوی a^{n-1} است)، باید در اتحاد مفروض صدق کند:

$$R(P(x)) \equiv Q_1(P(x)) - Q_2(P(x)) \equiv P(Q_1(x)) - P(Q_2(x) \equiv$$

$$\equiv a(Q_1^2(x) - Q_2^2(x)) + b(Q_1(x) - Q_2(x)) \equiv$$

$$\equiv (Q_1(x) - Q_2(x)(a(Q_1(x) + Q_2(x)) + b) \equiv R(x)T(x)$$

که درآن $T(x) = aQ_1(x) + aQ_2(x) + b$، بنا براین

$$2k = \deg R(P(x)) = \deg (R(x)T(x)) = k + n$$

که نابرابری $k<n$ را نقض می‌کند. حکم مسأله ثابت شد.

۴۲۴. اگر $P(z) \equiv Q(z)Q(-z)$، آن‌وقت

$$P(-z) \equiv Q(-z)Q(z) \equiv P(z)$$

یعنی $P(z)$ تابع زوج است.

اکنون، فرض‌کنید، چند جمله‌ای غیرصفر $P(z)$، تابعی زوج باشد (در حالت $P(z) \equiv 0$، می‌توان فرض کرد $Q(z) \equiv 0$). بـا استقرای روی m، تعداد ریشه‌هـای غیرصفر چندجمله‌ای $P(z)$، ثـابت می‌کنیم، چندجمله‌ای $Q(z)$ وجود داردکه در اتحاد

$$P(z) \equiv Q(z)Q(-z)$$

صدق می‌کند. $m=0$ می‌گیریم؛ چندجمله‌ای $P(z)$ به‌صورت $P(z)=az^n$ درمـی‌آیـد ($a \neq 0$)، و از زوج بـودن تـابع $P(z)$ نتیجـه مـی‌شود: $n=2k$ ($k \in Z^+$). در این صورت، چندجمله‌ای

$$Q(z) = bz^k,\ \ b^2 = (-1)^k a$$

با اتحاد مفروض سازگار است، زیرا

$$az^n \equiv bz^k b(-z)^k$$

فرض می‌کنیم، حکم، برای همهٔ مقدارهای کوچکتر از $m\in\mathbf{N}$ ثابت شده باشد. ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای m هم درست است. درواقع، اگر α، ریشهٔ غیرصفرچندجمله‌ای $P(z)$ باشد، آن‌وقت $P(-\alpha)=P(\alpha)=0$، در نتیجه

$$P(z)\equiv(z-\alpha)(z+\alpha)R(z)$$

که در آن $R(z)$، تابعی زوج است، زیرا

$$R(-z)((-z)^2-\alpha^2)\equiv P(-z)\equiv P(z)\equiv R(z)(z^2-\alpha^2)$$

با توجه به فرض استقراء، چند جمله‌ای $S(z)$ وجود داردکه در اتحاد

$$R(z)\equiv S(z)S(-z)$$

صدق می‌کند. $Q(z)=i(z-\alpha)S(z)$ می‌گیریم، در این صورت

$$P(z)\equiv i(z-\alpha)S(z)i(-z-\alpha)S(-z)\equiv Q(z)Q(-z)$$

حکم ثابت شد.

۴۲۵. اثبات را، با استقرای روی m، تعداد ریشه‌های غیر صفر و غیرحقیقی چندجمله‌ای $P(x)$، می‌آوریم (در حالت $P(x)\equiv 0$، می‌توان فرض کرد $n=1$ و $Q_1(x)=0$).

به ازای $m=0$، چند جمله‌ای $P(x)$ با شرط مسأله سازگار است؛ زیرا در این حالت، هر ریشهٔ چند جمله‌ای، حقیقی و به تعداد زوج تکرار شده است. درواقع، اگر داشته باشیم:

$$P(x)=(x-\alpha)^l R(x),\quad \alpha\in\mathbf{R}$$

و l، عددی فرد باشد، آن وقت به ازای $x>\alpha$ داریم $R(x)\geqslant 0$، و به‌ازای $x<\alpha$: $R(x)\leqslant 0$، و، ازآن جا، α، ریشه‌ای از چند جمله‌ای $R(x)$ است. بنابراین، به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$P(x)\equiv a(x-\alpha_1)^{2l_1}(x-\alpha_2)^{2l_2}\dots(x-\alpha_k)^{2l_k}$$

که در آن $a>0$، $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbf{R}$ و $l_1,\dots,l_k\in\mathbf{Z}^+$، $n=1$ می‌گیریم و

$$Q_1(x)=\sqrt{a}(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k}$$

در این صورت $P(x)\equiv Q_1^2(x)$.

اکنون، فرض می‌کنیم، حکم، برای همهٔ مقدارهای کمتر از $m\in\mathbf{N}$ درست باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای m هم درست است. در واقع، اگر چند جمله‌ای $P(x)$، که با شرط مسأله سازگار است، دارای m ریشهٔ غیرحقیقی باشد، آن وقت، به این صورت است:

$$P(x)=(x^2+2px+q)R(x),\quad p^2<q$$

(یعنی $x^2+2px+q=(x+p)^2+(q-p^2)>0$، برای هر $x\in\mathbf{R}$)، و چند جمله‌ای $R(x)$، با توجه به فرض استقرا، برای چند جمله‌ای‌هایی مثل $Q_1(x)$، ...، $Q_n(x)$، در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$R(x)\equiv Q_1^2(x)+\cdots+Q_n^2(x)$$

در این صورت، از اتحاد

$$P(x)\equiv((x+p)^2+c^2)(Q_1^2(x)+\cdots+Q_n^2(x))$$

که در آن $c=\sqrt{q-p^2}$، نتیجه می‌شود که، چند جمله‌ای $P(x)$، به صورت مجموع مجذورهای چند جمله‌ای‌هایی با ضریب‌های حقیقی درمی‌آید.

۴۲۶. چند جمله‌ای $P(x)$ را می‌توان به این صورت نوشت (قضیهٔ ۵۸ را ببینید):

$$P(x)=aF_1(x)\cdots F_m(x)G_1(x)\cdots G_k(x)$$

که در آن، چندجمله‌ای‌های $F_i(x)$ و $G_j(x)$ به این صورت‌اند:

$$F_i(x)=x-\alpha_i,\ \alpha_i\leqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ m;$$

$$G_j(x)=(x-\beta_j)(x-\bar{\beta}_j),\ \beta_j\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R},\ j=1,\ \ldots,\ k$$

و $a>0$. توجه کنیم که، حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های غیرمنفی، بازهم یك چندجمله‌ای بـا ضریب‌های غیر منفی است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، هریك ازچندجمله‌ای‌های $F_i(x)$ و $G_j(x)$ را می‌توان به‌صورت

نسبت $\frac{Q(x)}{R(x)}$ از چند جمله‌ای‌های با ضریب‌های غیرمنفی نشان داد. برای چندجمله‌ای

$$F(x) = x - \alpha،\ \ \alpha \leqslant ۰$$

فرض می‌کنیم:

$$Q(x) = F(x) = x + |\alpha| \ \ و\ \ R(x) = ۱$$

سپس، اگر بخش حقیقی عدد β غیرمثبت باشد، برای چندجمله‌ای

$$G(x) = (x - \beta)(x - \bar{\beta})$$

فرض می‌کنیم:

$$Q(x) = G(x) = x^۲ + ۲|Re\,\beta|x + |\beta|^۲ \ \ و\ \ R(x) = ۱$$

و اگر $Re\,\beta > ۰$، آن وقت، بدون لطمه خوردن به کلیت مسأله، در نظر می‌گیریم: $\arg\beta \in \left(۰، \frac{\pi}{۲}\right)$. $n \in \mathbf{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$۲^n \arg\beta \in \left[\frac{\pi}{۲}، \pi\right) \ \ و\ \ ۲^s \arg\beta \in \left(۰، \frac{\pi}{۲}\right)،\ s = ۰، ۱، \ldots، n - ۱$$

ازآن جا که داریم:

$$\arg(\beta^{۲^r}) = ۲^r \arg\beta،\ \ (۰ \leqslant r \leqslant n)$$

آن وقت

$$Re(\beta^{۲^n}) \leqslant ۰ \ \ و\ \ Re(\beta^{۲^s}) > ۰،\ s = ۰، ۱، \ldots، n - ۱$$

به این ترتیب، داریم:

$$G(x) \equiv (x - \beta)(x - \bar{\beta}) \equiv \frac{(x^۲ - \beta^۲)(x^۲ - \bar{\beta}^۲)}{(x + \beta)(x + \bar{\beta})} \equiv$$

$$\equiv \frac{(x^۴-\beta^۴)(x^۴-\bar{\beta}^۴)}{(x+\beta)(x+\bar{\beta})(x+\beta^۲)(x+\bar{\beta}^۲)} \equiv \dots \equiv$$

$$\equiv \frac{(x^{۲^n}-\beta^{۲^n})(x^{۲^n}-\bar{\beta}^{۲^n})}{(x+\beta)(x+\bar{\beta})\cdots(x^{۲^{n-۱}}+\beta^{۲^{n-۱}})(x^{۲^{n-۱}}+\bar{\beta}^{۲^{n-۱}})} = \frac{Q(x)}{R(x)}$$

که در آن، چندجمله‌ای‌های

$$Q(x) = (x^{۲^n}-\beta^{۲^n})(x^{۲^n}-\bar{\beta}^{۲^n})$$

$$R(x) = (x+\beta)(x+\bar{\beta})\cdots(x^{۲^{n-۱}}+\beta^{۲^{n-۱}})(x^{۲^{n-۱}}+\bar{\beta}^{۲^{n-۱}})$$

دارای ضریب‌های غیرمنفی هستند. زیرا هریک از چندجمله‌ای‌های به‌صورت

$$(x^l+\gamma)(x^l+\bar{\gamma}) \equiv x^{۲l}+(۲R_e\,\gamma)x^l+|\gamma|^۲،\ l\in\mathbf{N}$$

$(R_e\,\gamma>۰)$ ضریب‌هایی غیرمنفی دارند.

۴۲۷. قرار می‌گذاریم:

$$R_{n,i}(x) = x^i+x^{i+۱}+\dots+x^{n-۱}،\ i=۰، ۱، \dots، \left[\frac{n}{۲}\right]$$

در این صورت، هر چندجمله‌ای $P(x)$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$P(x) = a_۰R_{n,۰}(x)+(a_۱-a_۰)R_{n,۰}(x)+\dots+$$

$$+\left(a_{[\frac{n}{۲}]}-a_{[\frac{n}{۲}]-۱}\right)R_{n,[\frac{n}{۲}]}(x) = \sum_{i=۰}^{[\frac{n}{۲}]} b_iR_{n,i}(x)$$

که در آن

$$b_۰=a_۰،\ b_i=a_i-a_{i-۱}،\ i=۱، \dots، \left[\frac{n}{۲}\right]$$

عددهایی غیرمنفی‌اند. به همین ترتیب، اگر $Q(x)\in A(m)$، آن‌گاه

$$Q(x) = \sum_{j=۰}^{[\frac{m}{۴}]} c_jR_{m,j}(x)$$

که در آن $c_j \geqslant 0$، $\left[\frac{m}{2}\right]$، ...، ۱، ۰ = j. سرانجام، اگر $P(x) \in A(n)$ و $Q(x) \in A(m)$، آن وقت، چندجمله‌ای

$$P(x)Q(x) = \sum_{i,j} b_i c_j R_{n,i}(x) R_{m,j}(x)$$

متعلق به مجموعهٔ $A(m+n)$ خواهد بود. برای اثبات، کافی است آزمایش کنیم که، برای هر مقدار $i \leqslant \frac{n}{2}$ و $j \leqslant \frac{m}{2}$ داریم:

$$R_{n,i}(x) R_{m,j}(x) \in A(m+n)$$

در واقع، اگر فرض کنیم $p = n - 2i$ و $q = m - 2j$ و، برای مشخص - بودن وضع، $p \leqslant q$ بگیریم، آن وقت، چندجمله‌ای

$$R_{n,i}(x) \cdot R_{m,j}(x) \equiv x^i(1 + x + \dots + x^p) x^j (1 + x + \dots + x^q) \equiv x^{i+j}(R_{p+q,0}(x) + R_{p+q,1}(x) + \dots + R_{p+q,p}(x)) \equiv R_{m+n,j+i}(x) + R_{m+n,j+i+1}(x) + \dots + R_{m+n,j+n-1}(x)$$

متعلق به مجموعهٔ $A(m+n)$ است. حکم ثابت شد.

۴۲۸. مجموعهٔ 2^n انتخاب ممکن از

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

را A_n می‌نامیم که، در آن، ε_i برابر یا ۱ و یا ۱ — است. فرض می‌کنیم:

$$x_\varepsilon = \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$$

و ثابت می‌کنیم حاصلضرب $\prod_{\varepsilon \in A_n} x_\varepsilon$، برای هر $n \in \mathbf{N}$، به صورت

$$Q_n(x_1^2, \dots, x_n^2)$$

است که، در آن، Q_n یك چند جمله‌ای با ضریب‌های درست است. برای $n = 1$، حکم درست است، زیرا

$$\prod_{\varepsilon \in A_1} x_\varepsilon = x_1(-x_1) = Q_1(x_1^2)$$

اکنون $n > 1$ و $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ می‌گیریم؛ اگر فرض کنیم

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\prod_{\varepsilon \in A_n} x_\varepsilon \equiv \prod_{\varepsilon' \in A_{n-1}} [(x_{\varepsilon'} + x_k)(x_{\varepsilon'} - x_k)] \equiv \prod_{\varepsilon' \in A_{n-1}} (x_{\varepsilon'}^2 - x_k^2)$$

اگر در حاصل‌ضرب اخیر، همهٔ پرانتزها را بازکنیم و جمله‌های متشابه را جمع نمائیم، به یك چند جمله‌ای (با ضریب‌های درست) از متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n می‌رسیم که، درضمن، متغیر x_k، در هر جمله، توانی زوج دارد. چون اندیس k دلخواه است، این حکم، برای هریك از متغیرهای x_1، ...، x_n درست است. به این ترتیب، ثابت شد

$$\prod_{\varepsilon \in A_n} x_\varepsilon = Q_n(x_1^2, \ldots, x_n^2)$$

یادآوری می‌کنیم که، چندجمله‌ای Q_n غیرصفر است، زیرا

$$|Q_n(1, 0, \ldots, 0)| = 1$$

اگر در حاصل‌ضرب

$$\prod_{\varepsilon \in A_n} (\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)$$

عامل $x_1 + \ldots + x_n$ را، که به‌ازای $\varepsilon = (1, \ldots, 1)$ به‌دست می‌آید، جدا کنیم و چند جمله‌ای (با ضریب‌های درست از n متغیر) را، که از حاصل‌ضرب همهٔ بقیهٔ عامل‌ها به دست می‌آید، P_n بنامیم، به اتحاد مطلوب می‌رسیم:

$$(x_1 + \cdots + x_n) P_n(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q_n(x_1^2, \ldots, x_n^2)$$

برای هرمقدار $n \in \check{\mathbb{N}}$.

۴۳۹. اگر چند جمله‌ای $P(x)$، دارای ریشه‌های α_1، ...، α_s،

به ترتیب، بـا تکرار k_1، ...، k_s باشد، آن وقت چند جمله‌ای $Q(x)$ هم، همان ریشه‌ها را دارد (که البته، ممکن است با تکراری دیگر)، زیرا $P_0=Q_0$. به همین ترتیب، اگر چند جمله‌ای $P(x)-1$ دارای ریشه‌های β_1، ...، β_r بـا تکرارهـای l_1، ...، l_r باشد، آن وقت چند جمله‌ای $Q(x)-1$ نیـز، دارای همان ریشه‌هاست، زیـرا $P_1=Q_1$. بنابراین، هر یك از عددهـای دو بـه دو مختـلف α_1، ...، α_s، β_1، ...، β_r، ریشه‌ای از چنـد جملـه‌ای $P(x)-Q(x)$ است. فرض می‌کنیم $P(x)-Q(x)\not\equiv 0$، دراین‌صورت

$$\deg(P(x)-Q(x))\geqslant s+r$$

بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان درنظر گرفت:

$$\deg P(x)\geqslant\deg Q(x)\geqslant 1$$

بنابراین

$$\deg P(x)=\deg(P(x)-1)\geqslant\deg(P(x)-Q(x))$$

سپس، اگر ریشه γ از چندجمله‌ای $P(x)-c$، به اندازهٔ $m>1$ بار تکرار شده باشد، آن وقت در چندجمله‌ای $P'(x)$، این ریشهٔ γ، به اندازهٔ $m-1$ بار تکرار می‌شود. درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\deg P'(x)&\geqslant(k_1-1)+\dots+(k_s-1)+(l_1-1)+\dots+\\&+(l_r-1)=(k_1+\dots+k_s)+(l_1+\dots+l_r)-(s+r)\geqslant\\&\geqslant\deg P(x)+\deg(P(x)-1)-\deg(P(x)-Q(x))\geqslant\\&\geqslant\deg P(x)\end{aligned}$$

که با نابرابری $\deg P'<\deg P(x)$ متناقض است. بنابراین

$$P(x)\equiv Q(x)$$

۴۳۰. چند جمله‌ای P و Q و R را سازگار با شرط مسأله می‌گیریم وفرض می‌کنیم، دست کم یکی از آن‌ها، متحد با صفر نباشد. دراین‌صورت، عددهای x_0 و $y_0\neq 0$ را می‌توان طوری پیدا کرد کـه، دست کم، یکی از

عـددهـای $P(x_\circ, y_\circ)$، $Q(x_\circ, y_\circ)$، $R(x_\circ, y_\circ)$ مخـالف صفـر باشد. چندجمله‌ای‌های با یك متغیر

$$P_\backslash(x)=P(x, y_\circ), \ Q_\backslash(x)=y_\circ^{\text{۲}m}Q(x, y_\circ), \ R_\backslash(x)=R(x, y_\circ)$$

را درنظر می گیریم. بنابر شرط مسأله داریم:

$$x^{\text{۲}m}P_\backslash(x)+Q_\backslash(x)\equiv(x+y_\circ)^{\text{۲}m}R_\backslash(x)$$

درضمن، چند جمله‌ای‌های $P_\backslash(x)$، $Q_\backslash(x)$ و $R_\backslash(x)$، از درجه‌ای کوچکتر از m هستند. قرار می گذاریم:

$$U(x)=x^{\text{۲}m}P_\backslash(x), \ T(x)=U(x)+Q_\backslash(x)\equiv(x+y_\circ)^{\text{۲}m}R_\backslash(x)$$

$$S(x)=T^{(m)}(x)$$

چون چند جمله‌ای $U(x)$ بر $x^{\text{۲}m}$ بخش‌پذیر است، بنابراین، عـدد ۰، ریشهٔ تکراری آن، دست‌کم ازمرتبهٔ $\text{۲}m$، است. بنابراین

$$U^{(m)}(\circ)=U^{(m+\backslash)}(\circ)=\dots=U^{(\text{۲}m-\backslash)}(\circ)=\circ$$

چون $\deg Q_\backslash(x)<m$، درنتیجه

$$Q_\backslash^{(m)}(\circ)=Q_\backslash^{(m+\backslash)}(\circ)=\dots=\circ$$

و از آن‌جا

$$T^{(m)}(\circ)=T^{(m+\backslash)}(\circ)=\dots=T^{(\text{۲}m-\backslash)}(\circ)=\circ$$

یعنی

$$S(\circ)=S'(\circ)=\dots=S^{(m-\backslash)}(\circ)=\circ$$

چون عدد $-y_\circ$، ریشهٔ چندجمله‌ای

$$T(x)=(y+y_\circ)^{\text{۲}m}R_\backslash(x)$$

با تکراری، دست‌کم، برابر $\text{۲}m$ است، پس

$$T^{(m)}(-y_\circ)=T^{(m+\backslash)}(-y_\circ)=\dots=T^{(\text{۲}m-\backslash)}(-y_\circ)=\circ$$

یعنی

$$S(-y_0)=S'(-y_0)=\dots=S^{(m-1)}(-y_0)=0$$

بنابراین، عددهای ۰ و $-y_0\neq 0$، عبارتند از ریشه‌های چندجمله‌ای $S(x)$، با تکراری که از m کمتر نیست. به این ترتیب، $S(x)$ بر $x^m(x+y_0)^m$ (که از درجهٔ $2m$ است) بخش‌پذیر است. ولی درجهٔ $T(x)$ از $3m$ و، بنابراین، درجهٔ $S(x)$ از $2m$ کوچکتر است؛ یعنی $S(x)\equiv 0$. از این‌جا نتیجه می‌شود که، چند جمله‌ای $T(x)$، که درجه‌ای کمتر از m دارد، بر چند جمله‌ای $(x+y_0)^{2m}$ بخش‌پذیر است، یعنی $T(x)\equiv 0$ و از آن‌جا $R_1(x)\equiv 0$. از اتحاد

$$x^{2m}P_1(x)+Q_1(x)\equiv T(x)\equiv 0$$

و نابرابری $\deg Q_1(x)<m$، به دست می‌آید:

$$P_1(x)\equiv Q_1(x)\equiv 0$$

بنابراین

$$P_1(x_0)=Q_1(x_0)=R_1(x_0)=0$$

که با نوع انتخاب عددهای x_0 و y_0 متناقض است. این تناقض، درستی حکم مسأله را، ثابت می‌کند.

§۲۳. ویژگی‌های گوناگون چندجمله‌ای‌ها

۴۳۱. الف) مقدارهای $P(x)$، به ازای همهٔ مقدارهای $x\in\mathbf{Z}$، تنها وقتی از نظر زوج و فرد بودن یکسان هستند که، هریک از عددهای

$$P(x+1)-P(x)=[(x+1)^2+P(x+1)+q]-$$
$$-(x^2+px+q)=2x+1+p$$

بر ۲ بخش‌پذیر باشد، یعنی وقتی که p، عددی فرد باشد. درضمن، همهٔ

مقدارهای $P(x)$، با زوج بودن $q=P(0)$، زوج و با فردبودن q، فردند. به این ترتیب، اگر p و q هر دو فرد باشند، همهٔ مقدارهـای $P(x)$ فرد. و اگر p فرد و q زوج باشد، همهٔ مقدارهای $P(x)$ زوج می‌شود.

ب) چون $Q(x)=x(x^2+p)+q$، بنابراین مقدارهای

$$Q(3x)=3x(9x^2+p)+q$$

به‌ازای هر $x\in\mathbf{Z}$، تنها وقتی بر ۳ بخش‌پذیرند کـه q، مضربی از ۳ باشد. درضمن، هریك از مقدارهای

$$Q(3x\pm 1)=(3x\pm 1)(9x^2\pm 6x+1+p)+q\equiv$$
$$\equiv\pm(1+p)(\mathrm{mod}\ 3)$$

تنها وقتی بر ۳ بخش‌پذیرند کـه $p+1$ بـر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین، وقتی همهٔ مقدارهای $Q(x)$ بر ۳ بخش‌پذیرند که داشته باشیم:

$$q\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3),\quad p\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$$

۴۳۲. چندجمله‌ای مفروض را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$P(x)=\frac{1}{2\times 5\times 7\times 9}\times$$
$$\times(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

بین ۹ عدد متوالی، عددهـایی پیدا می‌شوندکـه بـر ۲، ۵، ۷ و ۹ بخش‌پذیر باشند، بنابراین حاصل‌ضرب ۹ عدد متوالی، بر حاصل‌ضرب این عددهـا بخش‌پذیر است (این عددهـا، دو به دو نسبت به هم اول‌اند)؛ یعنی $P(x)$، عددی است درست.

۴۳۳. $2x^2-x-36=p^2$ و p را عددی اول می گیریم. داریم:

$$p^2=(x+4)(2x-9)=ab;\quad a=x+4,\quad b=2x-9$$

درضمن $a, b\in\mathbf{Z}$ و $2a-b=17$. چون a عـددی درست و p^2 بـر آن بخش‌پذیر است، تنها ۶ حالت زیر ممکن است:

۱) $a=p^۲$، $b=۱$؛ در این صورت $۲p^۲-۱=۱۷$ و $p=۳$.

بنابراین

$$x=a-۴=p^۲-۴=۵$$

۲) $a=p$، $b=p$؛ در این صورت $۲p-p=۱۷$ و $p=۱۷$.

بنابراین

$$x=a-۴=p-۴=۱۳$$

۳) $a=۱$، $b=p^۲$: در این صورت $۲-p^۲=۱۷$ و $p^۲=-۱۵$، که ممکن نیست؛

۴) $a=-p^۲$، $b=-۱$؛ یعنی $-۲p^۲+۱=۱۷$ و $p^۲=-۸$، که ممکن نیست؛

۵) $a=-p$، $b=-p$؛ یعنی $-۲p+p=۱۷$ و $p=-۱۷$، که ممکن نیست؛

۶) $a=-۱$، $b=-p^۲$؛ در این صورت $-۲+p^۲=۱۷$ و $p^۲=۱۹$، که ممکن نیست.

به این ترتیب، مقدارهای مجهول، عبارتند از $x=۵$ و $x=۱۳$.

۴۳۴. تابع $P(x)$، به‌ازای $x_۰=-\frac{p}{۲}$ می‌نیمم است. این تابع، برای $x<x_۰$ نزولی و برای $x>x_۰$ صعودی است. بنابراین، برای مجموعهٔ A، مقدارهای تابع $P(x)$ در بازهٔ $[-۱، ۱]$، داریم:

اگر $p<-۲$، آن وقت $x_۰>۱$ و

$$A=[P(۱)، P(-۱)]=[۱+p+q، ۱-p+q];$$

اگر $-۲\leqslant p\leqslant ۲$، آن وقت $-۱\leqslant x_۰\leqslant ۱$ و

$$A=[P(x_۰)، \max\{P(-۱)، P(۱)\}]$$

یعنی برای $-۲\leqslant p\leqslant ۰$

$$A=\left[q-\frac{۱}{۴}p^{۲}, ۱-p+q\right]$$

و برای $۰\leqslant p\leqslant ۲$

$$A=[q-\frac{۱}{۴}p^{۲}, ۱+p+q]$$

اگر $p>۲$، آن وقت $x_{۰}<-۱$ و

$$A=[P(-۱), P(۱)]=[۱-p+q, ۱+p+q]$$

۴۳۵. $Q(x)=P(x)-۲$ می‌گیریم و ثابت می‌کنیم: اگر چند جمله‌ای $Q(x)$ با ضریب‌های درست، چهار ریشهٔ درست متفاوت داشته باشد، آن وقت، به‌ازای هرمقدار $x\in\mathbf{Z}$، عدد درست $|Q(x)|$ یا برابر صفر است و یا عدد مرکب (و به‌خصوص نمی‌تواند برابر واحد باشد)، a، b، c و d را، ریشه‌های درست و متفاوت چند جمله‌ای $Q(x)$ فرض می‌کنیم. دراین صورت، بنا برقضیهٔ به‌زو داریم:

$$Q(x)=S(x)\cdot R(x)$$

که در آن

$$S(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

و $R(x)$، یك چند جمله‌ای است. چون ضریب بزرگترین درجه در $S(x)$ برابر واحد است، بنابراین چند جمله‌ای $R(x)$، بنا بر قضیهٔ ۴۸، دارای ضریب‌های درست است. $x_{۰}$ را عدد درستی، غیراز a، b، c و d می‌گیریم. در این صورت، $R(x_{۰})$ عددی درست، و عدد $Q(x_{۰})$ بر حاصلضرب چهار عدد درست و مختلف

$$(x_{۰}-a)(x_{۰}-b)(x_{۰}-c)(x_{۰}-d)$$

بخش‌پذیر است (از این چهارعدد، دست‌کم دو تا، غیر از ۱ و ۱ — هستند). بنابراین، یا $|Q(x_{۰})|$ برابر صفر و یا برابر عددی مرکب است. به خصوص، عدد $Q(x_{۰})$، به‌ازای هیچ مقداری از $x_{۰}\in\mathbf{Z}$ نمی‌تواند برابر یکی ازعددهای ۱ —، ۱، ۳، ۵ و۷شود؛ یعنی $P(x)=Q(x)+۲$ نمی‌تواند برابر با یکی از عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد.

۴۳۶. مجموعهٔ $M=\{۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱\}$ وچندجمله‌ای

$$P(x)=x+(x-۲۵)(x-۲۷)(x-۲۸)(x-۲۹)(x-۳۱)$$

با شرطهای مسأله سازگارند، زیرا شرط ب) برای

$$k=۲۵، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۱$$

و شرط ج) برای $k=۳۰$ برقرارند.

۴۳۷. الف) اگر $P(x)$ مقدار ثابتی باشد، آن وقت

$$P'(x)=P''(x)=۰$$

و نابرابری ۱) برقرار نیست. فرض می‌کنیم؛ درجهٔ $P(x)$ برابر $n\geqslant ۱$ باشد. اگر n را عددی فرد بگیریم، آن وقت

$$\deg(P(x)-P''(x))=n$$

عددی فرد می‌شود و، در این صورت، دست‌کم در یك نقطهٔ $x\in\mathbf{R}$ داریم:

$$P(x)-P''(x)\leqslant ۰$$

اگر n را عددی زوج بگیریم، آن وقت

$$\deg(P'(x)-P''(x))=n-۱$$

عددی فرد می‌شود و ازآن جا، دست‌کم در یك نقطهٔ $x\in\mathbf{R}$

$$P'(x)-P''(x)\leqslant ۰$$

به این ترتیب، برای هر تابع $P(x)$، یا نابرابری ۲) برقرار نیست و یا نابرابری ۱). حکم الف) ثابت شد.

ب) $P(x)=x^۲+۳$ می‌گیریم. در این صورت، برای هر $x\in\mathbf{R}$ داریم:

$$P(x)-P'(x)\equiv x^۲-۲x+۳>۰ \quad و \quad P(x)-P''(x)\equiv x^۲+۱>۰$$

بنابراین، می‌توان $P(x)$ را طوری پیدا کرد که برای‌آن، برای هر مقدار $x\in\mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$P(x)>P'(x) \quad و \quad P(x)>P''(x)$$

۰۴۳۸. می‌توان فرض کرد که، هیچ کدام از چند جمله‌ای‌های $P_1(x)$، ...، $P_n(x)$ متحد با صفر نیستند. عدد x^+ را بزرگتر از همهٔ ریشه‌های حقیقی هر یك از این چند جمله‌ای‌ها می‌گیریم. در این صورت، به ازای هر $x \geqslant x^+$، تابع $f(x)$، بر چندجمله‌ای زیر منطبق است:

$$P^+(x)=P_0(x)+\sum_{k=1}^{n} a_k(\operatorname{sign} P_k(x^+))P_k(x)$$

زیرا هریك از چندجمله‌ای‌های $P_1(x)$، ...، $P_n(x)$، در بازهٔ $[x^+, +\infty]$، علامت ثابتی دارند. به همین ترتیب، عدد x^- را طوری انتخاب می‌کنیم که، به ازای هر $x \leqslant x^-$، تابع $f(x)$، بر تابعی مثل $P^-(x)$ منطبق باشد. چون تابع $f(x)$، هیچ مقداری را دو بار قبول نمی‌کند، بنابراین، چندجمله‌ای‌های $P^+(x)$ و $P^-(x)$، ثابت نیستند، در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)|=\lim_{x\to-\infty}|f(x)|=\infty$$

از ویژگی‌های تابع $f(x)$ نتیجه می‌شود که، تنها دو امکان وجود دارد: یا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

و یا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

در هردو حالت، تابع $f(x)$، هر مقدار به دلخواه بزرگ (از نظر قدرمطلق) را، چه مثبت و چه منفی، قبول می‌کند. ثابت می‌کنیم، تابع $f(x)$، می‌تواند هر مقدار $c\in\mathbf{R}$ را بپذیرد. در واقع، می‌توان نقطه‌های x_1 و x_2 را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f(x_1)>c, \quad f(x_2)<c$$

چون $f(x)$، تابعی پیوسته است، بنابر قضیهٔ مربوط به مقدارهای بینابینی، نقطهٔ x وجود دارد، که بین x_1 و x_2 واقع است و، برای آن، داریم:

$$f(x)=c$$

۴۳۹. با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$، حکم کلی‌تری را ثابت می‌کنیم: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n، به ازای

$$k=n+۲, n+۳, \ldots, ۲n+۲$$

در شرط $P(k)=a_k$ صدق کند، آن وقت، داریم:

$$P(۲n+۳)=a_{۲n+۳}-۱$$

به ازای $n=۱$ داریم: $P(۳)=۲$، $P(۴)=۳$، از آن جا $P(x)=x-۱$ و $P(۵)=۴=a_۵-۱$. اکنون، فرض می‌کنیم، حکم، برای $n-۱$ درست باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای n هم درست است. چند جمله‌ای $P(x)$ را از درجهٔ n می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به ازای

$$k=n+۲, \ldots, ۲n+۲$$

داشته باشیم: $P(k)=a_k$. چندجمله‌ای

$$Q(x)=P(x+۲)-P(x+۱)$$

را با درجه‌ای که از $n-۱$ تجاوز نمی‌کند، در نظر می‌گیریم. این چندجمله‌ای، با شرط $Q(k)=a_k$، به ازای $k=n+۱, \ldots, ۲n$ سازگار است، زیرا

$$Q(k)=P(k+۲)-P(k+۱)=a_{k+۲}-a_{k+۱}=a_k$$

یعنی، با توجه به فرض استقرا، $Q(۲n+۱)=a_{۲n+۱}-۱$. ولی

$$P(۲n+۱)=P(۲n+۳)-P(۲n+۲)$$

و بنابراین

$$P(۲n+۳)=P(۲n+۲)+Q(۲n+۱)=$$
$$=a_{۲n+۲}+a_{۲n+۱}-۱=a_{۲n+۳}-۱$$

حکم به طور کامل ثابت شد.

۴۴۰. الف) $x\equiv ۲\cos t$ و $t\in\mathbf{R}$ می‌گیریم. در این صورت

$$۲\cos(۰\cdot t)\equiv ۲\equiv P_۰(x), \quad ۲\cos(۱\cdot t)\equiv ۲\cos t\equiv x\equiv P_۱(x)$$

در تابع

$$2\cos nt \equiv -2\cos(n-2)t + 2(\cos t)2\cos(n-1)t \equiv$$
$$\equiv P_{n-2}(x) + xP_{n-1}(x)$$

مقدار n را، ابتدا برابر ۲، سپس ۳ و غیره می گیریـم، در نتیجه، ابتدا به چند جمله‌ای $P_2(x)$، سپس $P_3(x)$ و غیره می‌رسیم. تـوجـه کنیم، ضریب بزرگترین درجـه، در هر یك از چند جمله‌ای‌هـای $P_n(x)(n\in\mathbf{N})$، برابر واحد است.

ب) $\alpha=\frac{m}{n}$ می گیریم که در آن، $m\in\mathbf{Z}$، $n\in\mathbf{N}$ و کسر $\frac{m}{n}$ ساده‌نشدنی است. در این صورت، مقدار

$$2\cos(n\alpha\pi) = 2\cos(m\pi)$$

یا برابر ۲ و یا برابر ۲ — است. با توجه به‌آن چه در الف) ثابت‌کردیم، مقدار $2\cos(nt)$، می‌توانند به‌صورت‌چندجمله‌ای $P_n(x)$ باضریب‌های‌درست از متغیر $x=2\cos t$ نوشته شود. در این صورت، عدد

$$x_0 = 2\cos\alpha\pi$$

ریشه‌ای ازچندجمله‌ای $Q(x)=P_n(x)-2\cos(m\pi)$ است، که‌ضریب‌هایی درست دارد و ضریب بزرگترین درجهٔ آن واحد است. بنابراین (قضیهٔ ۶۰ را ببینید)، عدد $2\cos(\alpha\pi)$، یا عددی درست است و یا عددی گنگ. فرض کنید $2\cos(\alpha\pi)$ عددی درست باشد. چون

$$|2\cos(\alpha\pi)| \leqslant 2$$

بنابراین، برابر یکی از عددهـای ۰، ۱± و ۲± است؛ یعنی، اگر عدد $\cos(\alpha\pi)$ $(\alpha\in\mathbf{Q})$ گویا باشد، با یکی‌از عددهای ۰، $\pm\frac{1}{2}$، ۱± بـرابـر است.

۴۴۱. $x_1<x_2<x_3<x_4$ را طول‌های نقطه‌های A، B، C و D، محل برخورد خط راست افقی $y=y_0$ با منحنی $y=P(x)$ می گیریم. این خط راست، تنها وقتی مثلثی است که داشته باشیم:

$$|AB|+|AC|>|AD|$$

یعنی وقتی که

$$(x_2-x_1)+(x_3-x_1)>(x_4-x_1)$$

و یا هم‌ارز آن

$$x_2-x_1>x_4-x_3$$

یا $|AB|>|CD|$. فرض می‌کنیم، برخلاف ادعای مسأله، دو خط راست افقی وجود داشته باشند که منحنی را در نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1 و A_2، B_2، C_2، D_2 قطع کنند و، در ضمن داشته باشیم:

$$|A_1B_1|>|C_1D_1| \quad \text{و} \quad |A_2B_2|\leqslant|C_2D_2|$$

با توجه به ویژگی چند جمله‌ای‌های درجهٔ چهارم، روشن می‌شود، هر خط راستی که موازی با این دو خط راست و واقع در بین آن‌ها باشد، بازهم منحنی را درچهارنقطه قطع می‌کند؛ در ضمن، دست‌کم یکی از این خط‌های راست، منحنی را در چهار نقطهٔ A، B، C و D طوری قطع می‌کند که، برای آن‌ها، داریم:

$$|AB|=|CD|$$

نقطهٔ E وسط پاره خط راست BC را (که در عین حال، وسط پاره خط راست AD هم هست)، با مختصات (x_0, y_0) می‌گیریم. در این صورت، چند جمله‌ای $Q(u)$، که نمودار آن، در دستگاه مختصات $u=x-x_0$ و $v=y-y_0$، همان منحنی مفروض است، دارای چهار ریشهٔ u_1، u_2، u_3، u_4 می‌شود که، به ترتیب، طول‌های نقطه‌های A، B، C، D هستند و، در ضمن، $u_1=-u_4$ و $u_2=-u_3$؛ و معادلهٔ منحنی، به این صورت درمی‌آید:

$$v=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)=(u^2-u_1^2)(u^2-u_2^2)$$

بنابراین $Q(u)=Q(-u)$، یعنی منحنی، نسبت به‌محور عرض، متقارن است. در این صورت، هر خط راست افقی که منحنی را در چهار نقطهٔ A، B، C، D قطع کند، ما را به برابری $|AB|=|CD|$ می‌رساند. تناقض حاصل،

درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴۴۲. اثبات را با استقرای روی $n\in\mathbf{Z}^+$ می‌دهیم. برای $n=0$، چند جمله‌ای $P(x)=Q(x)$، دست‌کم یك ضریب غیر صفر دارد، زیرا $Q(x)\not\equiv 0$.

اکنون فرض کنید، برای $n\geqslant 1$، ثابت شده باشد که، اگر چندجمله‌ای $R(x)$ غیر صفر باشد، آن وقت چند جمله‌ای $(x-1)^{n-1}R(x)$، دارای دست‌کم n ضریب غیرصفر باشد. فرض می‌کنیم، برای چندجمله‌ای غیر صفر

$$Q(x)=x^rQ_0(x)$$

$(r\in\mathbf{Z}^+$ و $Q_0(0)\neq 0)$، چندجمله‌ای

$$P(x)=(x-1)^nQ(x)=x^r(x-1)^nQ_0(x)$$

برخلاف ادعای مسأله، بیش از n ضریب غیر صفر نداشته باشد. در این‌صورت، چند جمله‌ای $P_0(x)=(x-1)^nQ_0(x)$ هم، بیش از n ضریب غیر صفر نخواهد داشت و، در نتیجه: مشتق آن، $P_0'(x)$، حداکثر $n-1$ ضریب غیرصفر خواهد داشت. ولی

$$P_0'(x)\equiv(x-1)^nQ_0'(x)+n(x-1)^{n-1}Q_0(x)\equiv(x-1)^{n-1}R(x)$$

که در آن $R(x)\not\equiv 0$ (زیرا $P_0(x)$، مقدار ثابتی نیست)؛ و این، فرض استقرا را نقض می‌کند.

۴۴۳. چند جمله‌ای $P_0(x)=4x^3-3x$، به مجموعهٔ M تعلق‌دارد، زیرا

$$P_0(-1)=-1,\ P_0(1)=1$$

و در نقطه‌های اکسترمم آن، داریم:

$$P_0\left(-\frac{1}{2}\right)=1,\ P_0\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

ثابت می‌کنیم، برای هرچندجمله‌ای $P(x)\in M$ داریم: $|a|\leqslant 4$. فرض کنید، برعکس، چندجمله‌ای

$$P(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$$

وجود داشته باشد که، برای آن، به‌ازای $|x|\leqslant ۱$، داشته باشیم:

$$|a|>۴،\ \ |P(x)|\leqslant ۱،$$

چندجمله‌ای غیرصفر زیر را درنظر می‌گیریم:

$$Q(x)=P_۰(x)-\frac{۴}{a}P(x)$$

به نحوی که، درجهٔ آن، از ۲ تجاوز نکند. چون به‌ازای $|x|\leqslant ۱$،

$$\left|\frac{۴}{a}P(x)\right|<۱$$

بنابراین

$$Q(-۱)<۰،\ \ Q\left(-\frac{۱}{۲}\right)>۰،\ \ Q\left(\frac{۱}{۲}\right)<۰،\ \ Q(۱)>۰$$

یعنی، چند جمله‌ای $Q(x)$، دست کم، سه ریشه دارد. تناقض حاصل، ثابت می‌کند که، مقدار مجهول k، برابر است با ۴.

۴۴۴. برای $q=۱$، فرض می‌کنیم $P(x)\equiv p$. $q>۱$ و بازهٔ به‌طول $\frac{۱}{q}$ را به صورت $I=\left(\frac{۱}{۲q}\ و\ \frac{۳}{۲q}\right)$ درنظرمی‌گیریم. چون داریم: $\frac{۳}{۲q}<۱$، بنابراین عددی مثل $m\in\mathbf{N}$ وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم: $\left(\frac{۳}{۲q}\right)^m<\frac{۱}{q}$؛ $a=۱-\left(\frac{۱}{۲q}\right)^m$ می‌گیریم، در این صورت، برای هر $x\in I$ داریم:

$$۰<۱-qx^m<a<۱$$

عدد $n\in\mathbf{N}$ را آن قدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$a^n<\frac{۱}{pq}$$

و فرض می‌کنیم:

$$P(x)=\frac{p}{q}[1-(1-q^m)^n]$$

چندجمله‌ای $P(x)$، ضریب‌هایی درست دارد، زیرا

$$P(x)\equiv\frac{p}{q}[1-(1-qx^m)]Q(x)\equiv px^mQ(x)$$

وضریب‌های چندجمله‌ای $Q(x)$، عددهایی درست‌اند. به‌ازای $x\in I$ داریم:

$$\left|P(x)-\frac{p}{q}\right|=\frac{p}{q}|(1-q^m)^n|<\frac{p}{q}a^n<\frac{1}{q^2}$$

چیزی که اثبات آن را لازم داشتیم.

۰۴۴۵ برای $k=1, 2, 3, 4$ فرض می‌کنیم

$$\alpha_k=P(k),\quad \beta_k=Q(k)$$

و چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را، سازگار با شرطهای مسأله می‌گیریم. در این صورت، عددهای چهار رقمی $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ و $\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$، برابر با هیچ‌کدام از عددهای

$$0000,\ 0110,\ 1001,\ 1111$$

نیستند، زیرا چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ از درجهٔ سوم‌اند.

از طرف دیگر، عدد $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$، نمی‌تواند به‌یکی از صورت‌های

$$\overline{0\alpha_2 1\alpha_4},\ \overline{0\alpha_2\alpha_3 1},\ \overline{\alpha_1 11\alpha_4},\ \overline{\alpha_1 1\alpha_3 1}$$

باشد، زیرا در غیر این صورت، با شرطهای ب) و د) متناقض می‌شوند (به تناقض $\beta_1=0$ و $\beta_1=1$ می‌رسیم). از این‌جا، با توجه به شرط ج)، شرطهای مسأله، برای زوج عدد $(\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4},\ \overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4})$، تنها با زوج عددهای زیر سازگار است:

$$(0100,\ 1010);\ (1000,0010);\ (1000,\ 1000);\ (1000,1010);$$

$$(1010,\ 0010);\ (1011,\ 0010);\ (1100,\ 1010)$$

توجه کنیم که هر شش عدد «چهار رقمی» مختلف، یعنی ۰۰۱۰ ،۰۱۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱ و ۱۱۰۰ مورد استفاده قرار گرفته است. با دنبال کردن دستور درون یابی لاگرانژ، برای هر عدد $\overline{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$، چندجمله‌ای $R(x)$ را درتناظر با برابری $R(k)=\gamma_k$، به‌ازای $k=1، 2، 3، 4$، قرار می‌دهیم. در این صورت، به‌ترتیب، به‌این شش چندجمله‌ای می‌رسیم:

$$R_1(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-7x+4,$$

$$R_2(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+\frac{19}{2}x-6,$$

$$R_3(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{3}x+4,$$

$$R_4(x)=-\frac{2}{3}x^3+5x^2-\frac{43}{3}x+8,$$

$$R_5(x)=-\frac{1}{2}x^3+4x^2-\frac{19}{2}x+7,$$

$$R_6(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{31}{6}x-2$$

به این ترتیب، زوج چند جمله‌ای‌های $(P(x)$ و $Q(x))$، با یکی از این زوج چندجمله‌ای‌ها، مطابق‌اند:

$$(R_2, R_4);\ (R_3, R_1):\ (R_3, R_3);\ (R_3, R_4);$$

$$(R_4, R_1);\ (R_5, R_1);\ (R_6, R_4)$$

۴۴۶. تنها یك چند جمله‌ای برای $P(x)$ پیدا می‌شود که با شرط مسأله سازگار باشد، زیرا اگر چند جمله‌ای $Q(x)\neq P(x)$ هم، با همان ویژگی‌ها وجود داشته باشد، آن وقت، چند جمله‌ای $P(x)-Q(x)$، که درجه‌ای بیش از n ندارد، باید دست‌کم، $n+1$ ریشه داشته باشد. چون، برای چندجمله‌ای

$$R(x)=x+\frac{۱}{(n+۱)!}(۰-x)(۱-x)\dots(n-x)$$

شرط $R(-۱)=۰$ وجود دارد، درنتیجه، بنا بر قضیهٔ بِه‌زو، این چندجمله‌ای بر $x+۱$ بخش‌پذیر است، یعنی

$$R(x)\equiv(x+۱)S(x)$$

که در آن، $S(x)$، چندجمله‌ای از درجهٔ n است. چون

$$R(k)=k،\ S(k)=\frac{k}{k+۱}،\ (k=۰،۱،\dots،n)$$

بنا بر این $S(x)$ با شرطهای مسأله سازگار است، یعنی $P(x)\equiv S(x)$ و

$$P(n+۱)=\frac{R(n+۱)}{n+۲}=\frac{n+۱+(-۱)^{n+۱}}{n+۲}$$

۴۴۷. با استفاده از دستور درون‌یابی لاگرانژ، به دست می‌آید (در اینجا به حساب آورده‌ایم $۱\leqslant i\leqslant n$):

$$P(x)=\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{C_{n+۱}^{k}}\prod_{i\neq k}\frac{x-i}{k-i}=$$

$$=\sum_{k=۰}^{n}\frac{\prod\limits_{i\neq k}(x-i)}{C_{n+۱}^{k}(-۱)^{n-k}(n-k)!k!}=$$

$$=\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{n-k}\frac{n+۱-k}{(n+۱)!}\prod_{i\neq k}(x-i);$$

$$P(n+۱)=\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{n-k}\frac{n+۱-k}{(n+۱)!}\prod_{i\neq k}(n+۱-i)=$$

$$=\sum_{k=۰}^{n}\frac{(-۱)^{n-k}}{(n+۱)!}\prod_{i=۰}^{n}(n+۱-i)=\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{n-k}$$

بنا بر این، اگر n عددی فرد باشد $P(n+۱)=۰$؛ و اگر n، عددی زوج باشد، $P(n+۱)=۱$.

۴۴۸. با توجه به دستور درون‌یابی لاگرانژ، چندجمله‌ای

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد ($0\leqslant i\leqslant n$):

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}\Big(\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\Big)P(x_j)$$

فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد و داشته باشیم:

$$P(x_j)<\frac{n!}{2^n},(j=0, 1, \ldots, n)$$

در این صورت، ضریب بزرگترین درجه، در چندجمله‌ای $P(x)$، برابر است با مجموع ضریب‌های بزرگترین درجه، در حاصل‌ضرب

$$\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

و از نظر قدرمطلق، از عدد

$$\left|\sum_{j=0}^{n}P(x_j)\prod_{i\neq j}\frac{1}{x_j-x_i}\right|<\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\prod_{i\neq j}\frac{1}{|x_j-x_i|}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i<j}(j-i)}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i>j}(i-j)}=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}C_n^j=1$$

تجاوز نمی‌کند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴۴۹. با توجه به دستور درون‌یابی لاگرانژ داریم ($-n\leqslant i\leqslant n$):

$$P(x)=\sum_{k=-n}^{n}P(k)\prod_{i\neq k}\frac{x-i}{k-i}$$

چون برای $k=-n, -n+1, \ldots, n$ داریم $|P(k)|\leqslant 1$، بنابراین

$$|P(x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |P(k)| \prod_{i \neq k} \left|\frac{x-i}{k-i}\right| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \prod_{i \neq k} \frac{|x-i|}{|k-i|}$$

برای هر عدد حقیقی $x \in [-n, n]$، این نابرابری برقرار است:

$$\prod_{i \neq k} |x-i| \leqslant (۲n)!$$

در واقع، در حالت $x \geqslant k$ داریم:

$$\prod_{i \neq k} |x-i| = [|x-(k+۱)| \cdots |x-n|][|x-(k-۱)| \cdots |x+n|] \leqslant$$

$$\leqslant (n-k)! \cdot [(n-k+۱) \cdots (۲n)] = (۲n)!$$

به‌همین ترتیب، می‌توان حالت $x < k$ را بررسی کرد. به‌این ترتیب، به دست می‌آید:

$$\prod_{i \neq k} \frac{|x-i|}{|k-i|} \leqslant (۲n)! \prod_{i \neq k} \frac{۱}{|k-i|} \leqslant (۲n)! \frac{۱}{(k+n)!(n-k)!}$$

$$|P(x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \frac{(۲n)!}{(k+n)!(n-k)!} = \sum_{k=۰}^{۲n} \frac{(۲n)!}{k!(۲n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=۰}^{۲n} C_{۲n}^{k} = ۲^{۲n}$$

فصل هفتم

گوناگون

---

§۲۴. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

۴۵۰. درهــر جفت زیرمجموعه، یکی را زیرمجموعهٔ اول و دیگری

را زیرمجموعهٔ دوم می‌نامیم، و تعداد جفت زیرمجموعه‌های غیرمتقاطـع را پیدا می‌کنیم. برای هر یك از n عضو، ۳ امکان وجود دارد: یـا عضوی از زیرمجموعهٔ اول است، یا عضوی از زیرمجموعهٔ دوم است و یا هیچ کدام‌از دو زیرمجموعهٔ اول و دوم، شامل آن نمی‌شود. بنـابراین، تعداد جفت‌هـای مذکور، برابر است با ۳^n. دربین آن‌ها، یك جفت وجود دارد که، در آن، هر دو زیرمجموعه، تهی هستند. $(۳^n - ۱)$ جفت باقی‌مانده، به‌نوبهٔ خود، به دو گروه جفت‌های یکسان تقسیم می‌شوند (اگر در یکی از جفت زیرمجموعه‌ها، جای زیرمجموعهٔ اول را با دومی عوض کنیم، به‌جفتی منطبق برخود، تبدیل می‌شود). به این ترتیب، به تعداد $\frac{۱}{۲}(۳^n - ۱)$ زوج زیرمجموعهٔ (نامرتب) به دست می‌آید که، در آن‌ها، دست‌کم یکی از زیرمجموعه‌هـا، تهی نیست. روی‌هم به تعداد

$$\frac{۱}{۲}(۳^n - ۱) + ۱ = \frac{۱}{۲}(۳^n + ۱)$$

جفت زیرمجموعهٔ مختلف وجود دارد که با شرط مسأله سازگارند.

۴۵۱. از آن جا که تعداد همهٔ زیرمجموعه‌هـای مختلف مجموعهٔ X برابر است با ۲^n، بنابراین، تعداد زوج زیرمجموعه‌های مرتب برابر است با $(۲^n)^۲$، یعنی ۴^n. همهٔ این زوج‌ها را، به $۴^{n-۱}$ چهارتـایی تقسیم می‌کنیم، به نحوی کـه هر زوج $(A_۱، A_۲)$ بـا زوج‌هـای $(\overline{A}_۱، A_۲)$، $(A_۱، \overline{A}_۲)$ و $(\overline{A}_۱، \overline{A}_۲)$ در یك چهـارتـایی قرار گیرد (در این جـا، $\overline{A}$ به معنای مکمل $X\backslash A$ نسبت بـه زیرمجموعهٔ $A \subset X$ است). در نتیجه، تقسیم مجموعهٔ همهٔ زوج‌ها، به چهارتایی‌ها به دست می‌آید. در واقع، مثلاً، زوج $(\overline{A}_۱، A_۲)$، این چهارتایی را تشکیل می‌دهد:

$$(\overline{A}_۱، A_۲);\ (\overline{\overline{A}}_۱، A_۲);\ (\overline{A}_۱، \overline{A}_۲);\ (\overline{\overline{A}}_۱، \overline{A}_۲)$$

که با چهارتایی تشکیل شده از زوج $(A_۱، A_۲)$ یکی است، زیرا $\overline{\overline{A}} = A$. به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد کـه، دو زوج $(A_۱، \overline{A}_۲)$ و $(\overline{A}_۱، \overline{A}_۲)$ هم، یك نوع چهارتایی تشکیل می‌دهند. چون هر عضو مجموعهٔ X، یـا به

زیرمجموعهٔ A تعلق دارد و یا به مکمل آن $\overline{A}$، بنابراین دقیقاً در یکی از مجموعه‌های چهارگانهٔ

$$A_۱\bigcap A_۲،\ \overline{A}_۱\bigcap A_۲،\ A_۱\bigcap \overline{A}_۲،\ \overline{A}_۱\bigcap \overline{A}_۲$$

وارد شده است. در نتیجه، تعدادکل عضوها در هر چهارتایی برابر n است. چون روی‌هم $۴^{n-۱}$ چهارتایی داریم، بنابراین مجموع تعداد عضوهای همهٔ مجموعه‌های به صورت $A_۱\bigcap A_۲$، برابر است با $n\cdot ۴^{n-۱}$.

۴۵۲. اثبات را با استقرای روی $n>۳$ می‌دهیم. برای

$$n=۴،\ ۵،\ ۶،\ ۷،\ ۸،\ ۹$$

تقسیم‌های ممکن مجموعهٔ X_n، به زیرمجموعه‌های $A_۱$، ...، A_n، درجدول ۱ نشان داده شده است که، درآن، برای هر مقدار n و هریك از سه رنگ، اندیس m، برای مجموعه‌هایی از A_m است که باید از عضوهای رنگ

جدول ۱

n	$\frac{n(n+۱)}{۲}$	k	آبی	قرمز	سفید
۴	۱۰	۳	۱، ۲	۳	۴
۵	۱۵	۵	۱، ۴	۲، ۳	۵
۶	۲۱	۷	۱، ۶	۲، ۵	۳، ۴
۷	۲۸	۹	۴، ۵	۳، ۶	۱، ۲، ۷
۸	۳۶	۱۲	۶، ۷	۴، ۸	۱، ۲، ۳، ۶
۹	۴۵	۱۵	۶، ۹	۷، ۸	۱، ۲، ۳، ۴، ۵

متناظر تشکیل شوند (مثلاً، برای $n=6$، عضوهای مجموعه‌های A_2 و A_5، باید به‌رنگ قرمز باشند).

اکنون فرض کنید $n\geqslant 10$، و حکم برای عددهای کوچکتر n و به‌خصوص، برای $n-6$ ثابت شده باشد. تقسیم مجموعهٔ X_n را به این ترتیب، انجام می‌دهیم: مجموعه‌های A_1، ...، A_{n-1} ازعضوهایی و با همان رنگ‌هایی می‌سازیم که در تقسیم مجموعهٔ X_{n-6} وجود دارند. مجموعه‌های A_{n-5} و A_n را با عضوهای به رنگ آبی، مجموعه‌های A_{n-3} و A_{n-2} را با عضوهای به رنگ قرمز و مجموعه‌های A_{n-4} و A_{n-1} را با عضوهای به‌رنگ سفید می‌سازیم. این تقسیم، با شرط مسأله سازگاراست، زیرا تعداد عضوهای آبی، قرمز و سفید (هرکدام به طور جداگانه) در مجموعهٔ X_n، نسبت به عضوهای متناظر در مجموعهٔ X_{n-6}، به یك اندازه، یعنی به تعداد $2n-5$ زیادتر شده‌اند.

۴۵۳. در مجموعهٔ $X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$، عضو a_1 را ثابت نگه می‌داریم و زیرمجموعه‌هایی را در نظر می‌گیریم که شامل a_1 باشند. تعداد این زیرمجموعه‌ها، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ

$$\{a_2, \ldots, a_n\}$$

یعنی 2^{n-1}. بنابراین $k\geqslant 2^{n-1}$. ازطرف دیگر، فرض کنید، بیش از 2^{n-1} زیرمجموعه از مجموعهٔ X را، انتخاب کرده باشیم. همهٔ زیرمجموعه‌های ممکن را، در مجموعهٔ X، به 2^{n-1} زوج تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در هر زوج، یك زیرمجموعه ومکمل آن وجود داشته باشد. با توجه به‌اصل دیریکله (قضیهٔ ۱)، دست کم، دو تا از زیرمجموعه‌های انتخابی، تشکیل یك زوج می‌دهند که، البته، جدا ازهم‌اند و اشتراکی ندارند. بنابراین $k=2^{n-1}$.

۴۵۴. تعداد عضوهای مجموعهٔ X را، برابر n می‌گیریم. هر یك از زیرمجموعه‌های A_1، ...، A_{50}، بیش از $\frac{n}{2}$ عضو دارد، یعنی مجموع عضوهای این مجموعه‌ها، از $50\times\frac{n}{2}$، یعنی $25n$ تجاوز می‌کند. بنابر اصل

دیریکله، عضوی از مجموعهٔ X وجود دارد که، دست‌کم، به ۲۶ تا از این زیرمجموعه‌های انتخابی متعلق است. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، به ازای هر مقدار $k<50$، بین مجموعه‌های A_{i_1}، ...، A_{i_k}، می‌توان دست‌کم،

به تعداد $\left[\frac{k}{2}\right]+1$ مجموعه پیدا کرد، که شامل عضوی مشترک باشند.

عضوی از مجموعهٔ X را در نظر می‌گیریم که، دست‌کم، به ۲۶ مجموعه تعلق داشته باشد (این عضو، یکی از عضوهای مجموعهٔ B است). این ۲۶ مجموعه را کنار می‌گذاریم. در این صورت، عضوی پیدا می‌شود که، دست‌کم، به ۱۳ تا از ۲۴ مجموعهٔ باقی‌مانده تعلق دارد. این ۱۳ مجموعه را هم کنار می‌گذاریم. برای ۱۱ مجموعهٔ باقی‌مانده، عضوی وجود دارد که، دست‌کم، منطبق به شش تا از آن‌ها باشد. برای پنج مجموعهٔ باقی‌مانده، می‌توان عضوی را پیدا کرد که، دست‌کم، منطبق به سه تا از آن‌ها باشد. و سرانجام، عضوی وجود دارد که به دو مجموعهٔ باقی‌مانده تعلق داشته باشد. به این ترتیب، حداکثر، پنج عضو از مجموعهٔ X وجود دارد (و ممکن است، کمتر از پنج عضو، چرا که احتمالاً بعضی از این عضوها برهم منطبق باشند) که مجموعهٔ B را تشکیل می‌دهند. در ضمن، هر یک از مجموعه‌های A_1، ...، A_{50}، شامل دست‌کم یکی از این عضوهاست.

۴۵۵. مجموعهٔ A، یکی از ۱۹۷۸ مجموعهٔ مفروض را در نظر می‌گیریم. این مجموعه، با هر یک از ۱۹۷۷ مجموعهٔ دیگر، یک عضو مشترک دارد، بنابراین عضو $a \in A$ وجود دارد که، دست‌کم، متعلق به ۵۰ تا از این مجموعه‌هاست. درواقع، اگر هریک از ۴۰ عضو مجموعهٔ A، به بیش از ۴۹ مجموعه، تعلق نداشته باشد، آن وقت، روی‌هم، حداکثر 49×40، یعنی ۱۹۶۰ مجموعه، غیر از A، می‌تواند وجود داشته باشد که درست نیست. فرض کنید، عضو a، مثلاً به مجموعه‌های A، A_1، A_2، ...، A_{50} متعلق باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، این عضو، به هر مجموعهٔ B، از ۱۹۷۸ مجموعهٔ مفروض تعلق دارد. در واقع، هر دو مجموعه‌ای از مجموعه‌های A، A_1، A_2، ...، A_{50}، هیچ عضو مشترک دیگری به جز a ندارند (زیرا

بنا بر فرض مسأله، هر دو مجموعه، تنها يك عضو مشترك دارند). فرض کنید: $a \notin B$. در این صورت، مجموعهٔ B، با هر یك از مجموعه‌های A، A_1، A_2، ...، A_{50}، عضو مشترکی دارد که غیر از a است، بنابراین، باهم فرق دارند. بنابراین، مجموعهٔ B، باید دست‌کم شامل ۵۱ عضو باشد که ممکن نیست. به این ترتیب، عضو a، به همهٔ مجموعه‌ها تعلق دارد.

۴۵۶. زیرمجموعه‌هایی را درنظرمی گیریم (اگرچنین زیرمجموعه‌هایی وجود داشته باشند) که شامل تعدادی فرد عضو باشند. ازآن جا که تعداد کل‌عضوها، عددی زوج است، بنابراین تعداد مجموعه‌های با تعداد عضوهای فردهم، عددی است زوج. این‌مجموعه‌ها را، به زوج مجموعه‌ها (به‌صورتی دلخواه) تقسیم می‌کنیم. با مجموعه‌های هر زوج، عملی را که در صورت مسأله گفته شده است، انجام می‌دهیم، یعنی از مجموعهٔ بزرگتر، عضوهایی به تعداد عضوهای مجموعهٔ کوچکتر، به مجموعهٔ کوچکتر منتقل می‌کنیم. بعد از این عمل، همهٔ مجموعه‌ها، شامل تعداد زوجی عضو خواهند بود. مجموعه‌هایی را در نظر می‌گیریم که، تعداد عضوهای آن‌ها، بر ۴ بخش‌پذیر نباشد (به ازای $n \geqslant 2$؛ اگر هم داشته باشیم: $n = 1$، آن وقت روی هم دو عضو داریم و هر دوی آن‌ها، متعلق به یك زیرمجموعه خواهند بود). چون تعدادکل عضوها، بر ۴ بخش‌پذیر است، بنابراین، تعداد این گونه زیرمجموعه‌ها، عددی زوج است. دوباره، این مجموعه‌ها را، به زوج‌هایی (به صورت دلخواه) تقسیم می‌کنیم و روی هر زوج، عمل مورد نظر مسأله را، انجام می‌دهیم. بعد از آن، تعداد عضوها در هر یك از مجموعه‌ها، بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود. اگر به همین ترتیب، جلو برویم به‌آن جا می‌رسیم که در هر مجموعه، تعداد عضوها (به ترتیب) بر ۸، ۱۶، ... بخش‌پذیر است. وقتی که تعداد عضوهای هریك ازمجموعه‌ها، بر 2^n بخش‌پذیرشود، به معنای آن است که، همهٔ عضوها، در يك مجموعه جمع شده‌اند.

۴۵۷. A و B را، به‌ترتیب، مجموعهٔ همه عددهای کوچکتر، ومجموعهٔ همهٔ عددهای بزرگتر زوج عددها، در مجموعهٔ A، فرض می‌کنیم. بنابرشرط مسأله، هیچ عضوی از B متعلق به مجموعهٔ A نیست، یعنی

$$A \bigcap B = \phi$$

تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B را، به ترتیب a و b می‌گیریم. در این صورت $a+b \leqslant n$ و، در هر زوج از M، عضو کوچکتر می‌تواند حداکثر a مقدار، و عضو بزرگتر حداکثر b مقدار را قبول کند. بنابراین، تعداد عضوهای M از عدد

$$ab \leqslant a(n-a) \leqslant \left(\frac{a+n-a}{۲}\right)^{۲} = \frac{n^{۲}}{۴}$$

تجاوز نمی‌کند. چون $ab \in \mathbf{Z}$، پس $ab \leqslant \left[\frac{n^{۲}}{۴}\right]$. اگر n زوج باشد، به حداکثر تعداد عضوها در مجموعهٔ M، در حالت

$$M = \left\{(j ، l) \mid j \leqslant \frac{n}{۲};\ l > \frac{n}{۲}\right\}$$

می‌رسیم که، در این صورت، مجموعهٔ M، شامل $\frac{n^{۲}}{۴}$ عضو است. اگر n عددی فرد باشد، آن وقت کافی است فرض کنیم:

$$M = \left\{(j ، l) \mid j < \frac{n}{۲};\ l > \frac{n}{۲}\right\}$$

که در این صورت، مجموعهٔ M، از

$$\frac{n-۱}{۲} \cdot \frac{n+۱}{۲} = \frac{n^{۲}}{۴} - \frac{۱}{۴} = \left[\frac{n^{۲}}{۴}\right]$$

عضو، تشکیل شده است. به این ترتیب، درهر حالت (n زوج باشد یا فرد)، حداکثر تعداد عضوهای مجموعهٔ M، برابر است با $\left[\frac{n^{۲}}{۴}\right]$

۴۵۸. تعداد مجهول را k_n می‌نامیم: در مجموعهٔ X، k_n زیرمجموعهٔ سه عضوی وجود دارد، به نحوی که هر دو زیرمجموعه، درست یك عضو مشترك دارند. سه حالت ممکن است:

الف) هر عضو مجموعهٔ X، تنها در دو مجموعهٔ سه عضوی وارد شده است. یکی ازاین مجموعه‌ها را $\{a، b، c\}$ می گیریم. هریك ازمجموعه‌های دیگر؛ در یك عضو (و تنها در یك عضو) بـا مجموعهٔ $\{a، b، c\}$ اشتراك دارند؛ در ضمن، دربین این مجموعه‌های دیگر، حداکثر یکی از مجموعه‌ها شامل a، حداکثر یکی شامل b وحداکثر یکی شامل c است. بنا براین، تعداد کل این این مجموعه‌های سه عضوی، از $۱ \times ۳ + ۱$، یعنی ۴ تجاوز نمی کند: $k_n \leqslant ۴$.

ب) عضوی از مجموعهٔ X وجود دارد که در سه تا از مجموعه‌هـای سه عضوی وارد شده است، ولی هیچ عضوی از مجموعهٔ X در بیش از سه مجموعهٔ سه عضوی وارد نشده است. $\{a، b، c\}$ را، یکی از این مجموعه‌ها می گیریم؛ بنا براین، هریك ازمجموعه‌های دیگر، دریك عضو با این مجموعه اشتراك دارند و، در ضمن، حداکثر دو تا از این مجموعه‌های دیگر شامل a وحداکثر دوتا شامل b وحداکثردو تا شامل c هستند. به‌این ترتیب، تعداد همهٔ مجموعه‌های سه‌عضوی، نمی‌تواند از $۲ \times ۳ + ۱$، یعنی ۷ تجاوز کند: $k_n \leqslant ۷$.

ج) عضو a از مجموعهٔ X وجود دارد که، دست‌کم، متعلق به چهـار مجموعهٔ سه عضوی است. دراین صورت، بقیهٔ عضوهای این چهار مجموعه، مختلف‌اند (زیرا، هیچ دو مجموعه‌ای نبـاید بیش از یك عضو مشترك داشته باشند)، و هر یك از مجموعه‌های دیگر هم، باید شامل a باشند (زیرا، اگر یکی از این مجموعه‌های سه عضوی باقی‌مانده را در نظر بگیریم، باید هر یك از چهار مجموعهٔ ما، عضو مشترکی داشته باشد و، اگر این عضو مشترك همان a نباشد، بناچار باید دست‌کم شامل ۴ عضو باشد). به این ترتیب،در این حالت، داریم:

$$۱ + ۲k_n \leqslant n \Rightarrow k_n \leqslant \left[\frac{n-۱}{۲}\right]$$

برای $n = ۱، ۲، ۳، ۴، ۵$ داریم:

$$k_۱ = k_۲ = ۰، k_۳ = k_۴ = ۱، \ k_۵ = ۲.$$

اکنون، $n = ۶$ می گیریم. در ایـن صورت، هیچ عضوی نمی‌تواند متعلق به سه مجموعه باشد، زیرا در غیر این صورت، اجتماع این مجموعه‌ها، شامل

۷ عضو می‌شود. بنا براین، باحالت الف) سروکار داریم و $k_6 \leqslant ۴$؛ درضمن، می‌توان نمونه‌ای برای $k_6 = ۴$ درست کرد. فرض کنید.

$$X = \{a، b، c، d، e، f\}$$

در این صورت، زیرمجموعه‌های سه عضوی، می‌توانند چنین باشند:

$$\{a، b، c\}؛ \{c، d، e\}؛ \{e، f، a\}، \{b، d، f\}$$

بنا براین $k_6 = ۴$. اکنون فرض کنید:

$$n \in \{۷، ۸، \ldots، ۱۶\}$$

اگر با حالت ج) سروکار داشته باشیم، آن وقت تعداد زیرمجموعه‌ها از

$$\left[\frac{۱}{۲}(۱۶ - ۱)\right] = ۷$$

تجاوز نمی‌کند؛ اگر هم با یکی از حالت‌های الف) و ب) سروکار داشته باشیم، باز هم این تعداد از ۷ تجاوز نمی‌کند. ازطرف دیگر، اگر مجموعهٔ X، دربین عضوهای خود، شامل ۷ عضو a، b، c، d، e، f، g باشد، آن‌وقت، نمونه‌ای برای هفت زیرمجموعهٔ سه عضوی وجود دارد:

$$\{a، b، c\}؛ \{c، d، e\}؛ \{e، f، a\}؛$$
$$\{b، d، f\}؛ \{a، g، d\}؛ \{b، g، e\}؛ \{e، g، f\}$$

بنا براین، برای $k = ۷، ۸، \ldots، ۱۶$ داریم: $k_n = ۷$.

بالاخره، اگر $n \geqslant ۱۷$، برای هر یك از حالت‌های الف)، ب) وج)، داریم:

$$k_n \leqslant \left[\frac{n - ۱}{۲}\right]$$

در ضمن، با روش زیر (برای انتخاب مجموعه‌های سه عضوی) می‌توان به خود عدد $\left[\frac{۱}{۲}(n - ۱)\right]$ رسید: یکی از عضوها را، برای همهٔ مجموعه‌ها مشترك می‌گیریم و بقیهٔ عضوها را (احتمالاً به جز یکی، درحالت زوج-

بودن n)، به گروه‌های دوتایی تقسیم می‌کنیم و هر گروه را با عضو مشترك، دریك مجموعهٔ سه عضوی قرار می‌دهیم. به‌این ترتیب، برای $n \geqslant ۱۷$ داریم:

$$k_n = \left[\frac{۱}{۲}(n-۱)\right]$$

۴۵۹. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، هر دو زیرمجموعه، یا اشتراکی ندارند و یا درست در دو عضو مشترك‌اند. حالتی را که مجموعه‌های A و D، درست در دو عضو مشترك باشند، به صورت $A \sim B$ نشان می‌دهیم.

A، B و C را سه زیرمجموعه می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، اگر $A \sim B$ و $B \sim C$، آن وقت $A \sim C$. فرض می‌کنیم:

$$A = \{a, b, c\};\ B = \{a, b, d\}$$

چون مجموعهٔ C، با مجموعهٔ B، در دو عضو مشترك است، به ناچار a یا b باید بین این عضوهای مشترك باشد. درنتیجه C با A اشتراك پیدا می‌کند، و چون فرض ما براین بودکه هر دو زیرمجموعه، یا اشتراکی نداشته باشند و یا در دو عضو مشترك باشند، بنابراین $A \sim C$. به این ترتیب، زیرمجموعه‌های انتخابی، به دسته‌هایی تقسیم می‌شودکه، درهرکدام از آن‌ها، هر دو مجموعهٔ مختلف، درست دو عضو مشترك دارند و مجموعه‌های دو دستهٔ متفاوت، اشتراکی ندارند. برای هر دسته از مجموعه‌ها، سه حالت ممکن است:

۱) دسته، درست ۳ عضو را دربرمی‌گیرد؛

۲) دسته، درست ۴ عضو را دربرمی‌گیرد؛

۳) دسته، شامل بیش از ۴ عضو است.

درحالت اول، دسته، ازیك مجموعه (وتنها یك مجموعه) تشکیل شده است؛ در حالت دوم، دسته، شامل حداکثر چهار مجموعه است (زیرا، یك مجموعهٔ ۴ عضوی، روی‌هم دارای ۴ زیرمجموعهٔ سه‌عضوی است). به‌حالت سوم می‌پردازیم. دو مجموعه از این دسته را درنظر می‌گیریم:

$$A=\{a, b, c\};\ \ B=\{a, b, d\}$$

عضو e وجود دارد که غیر از a، b، c، d است و متعلق به مجموعهٔ C از این دسته است. با توجه به شرطهای $A\sim C$ و $B\sim C$، به دست می‌آید:

$$C=\{a, b, e\}$$

بنابراین، هرمجموعهٔ D ازاین دسته، با توجه به‌شرطهای $A\sim D$، $B\sim D$ و $C\sim D$، شامل عضوهای a و b می‌شود. درنتیجه، تعداد مجموعه‌های این دسته، درست ۲ واحد کمتر از تعداد عضوهای موجود این دسته است (هرعضوی که غیراز a و b باشد، متناظر با یك مجموعه از این دسته است). بنابراین، درهردسته، تعداد مجموعه‌ها، ازتعداد عضوها تجاوز نمی‌کند. ولی تعدادکل مجموعه‌ها، بیشتر از تعدادکل عضوهاست. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴۶۰. k را تعداد عضوهای مجموعه‌ای ازمجموعه‌های A_1، ...، A_n، B_1، ...، B_n می‌گیریم که، در آن، این تعداد کمترین مقدار باشد. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، مجموعهٔ A_1، شامل k عضو باشد. مجموعه‌های B_1، ...، B_n با هم، اشتراکی ندارند. بنابراین، شرط

$$A_1\bigcap B_j\neq\phi$$

حداکثر، برای k مجموعه، ازمجموعه‌های B_1، ...، B_n برقرار است. مثلاً، فرض کنید، این شرط، برای مجموعه‌های B_1، ...، B_n برقرار باشد، که درآن، $m\leqslant k$. تعداد عضوها، درهریك از مجموعه‌های B_1، ...، B_m، از k کمتر نیست، بنابراین، اجتماع آنها، دست‌کم، شامل mk عضو است. تعداد عضوها، در هریك ازمجموعه‌های B_{m+1}، ...، B_n هم، از $n-k$ کمتر نیست (بنابرشرط، زیرا $A_1\bigcap B_j\neq\phi$، برای مقدارهای j، از $m+1$ تا n)، و تعداد چنین مجموعه‌هایی برابر $n-m$ است. درنتیجه، روی هم درمجموعهٔ

$$X=B_1\bigcup\cdots\bigcup B_n$$

حداقل به‌تعداد $l=km+(n-k)(n-m)$ عضو وجود دارد.

اگر $k \geqslant \frac{n}{2}$، آن وقت، هر یك از مجموعه‌هــای A_1، ...، A_n، حداقل شامل $\frac{n}{2}$ عضو است و تعداد همهٔ عضوها، حداقل برابر است با

$$n.\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$$

و اگر $k<\frac{n}{2}$ (به یاد داشته باشیم که $m \leqslant k$)، آن وقت

$$l=n(n-k)-m(n-2k) \geqslant n(n-k)-k(n-2k)=$$
$$=2\left(\frac{n}{2}\right)^2+2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$$

اکنون، نمونه‌ای می‌آوریم کــه، مجموعهٔ X، درست شامل $\frac{n^2}{2}$ عضو باشد. n را عددی زوج و $X=A_1 \cup \dots \cup A_n$ را تقسیم مجموعهٔ X به n زیرمجموعه (که دو به دو اشتراکی ندارند) می‌گیریم، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها، درست شامل $\frac{n}{2}$ عضو باشد. فرض می‌کنیم:

$$B_1=A_1, \dots, B_n=A_n$$

دراین‌صورت، همهٔ شرطهای مسأله، برقرارند.

§۲۵. مسأله‌هایی با استفاده از گراف‌ها

۴۶۱. فرض کنید، در مجموعهٔ S، سه عضو a، b و c وجــود داشته باشدکه درشرطهای $a \to b$، $a \to c$ صدق‌کنند. اگر $b \to c$، آن وقت از $a \to b$ و $b \to c$ نتیجه می‌شود $a \to c$ که شرط $c \to a$ را نقض می‌کند. و اگر $c \to b$، آن وقت، از $a \to c$ و $c \to b$ نتیجه می‌شود $a \to b$ کــه متناقض بــا شرط $b \to a$ است. به همین ترتیب، در S، عضوهای a، d، e

وجود ندارد، به نحوی که، برای آن‌ها داشته باشیم: $d \to a$ و $e \to a$.

اگر درمجموعه، ۴ عضو یا بیشتر وجود داشته باشد (که یکی از آن‌ها را a می‌نامیم)، آن وقت، از شرط اول مسأله نتیجه می‌شود که در S، یا عضوهای b و c پیدا می‌شود که $b \to a$، $c \to a$؛ یا عضوهای d و e وجود دارد که $a \to d$، $a \to e$. درهر دو حالت، مواجه با تناقض می‌شویم. بنابراین، درمجموعهٔ S، بیش از ۳ عضو نمی‌تواند وجود داشته باشد. مثلاً، مجموعهٔ S، با عضوهای a، b، c، می‌تواند به صورت

$$a \to b،\ b \to c،\ c \to a$$

با شرطهای مسأله سازگار باشد.

۴۶۲. اگر در این اجتماع، همه با هم آشنا باشند، آن وقت، تعداد کسانی که با همه آشنا هستند، برابر ۱۹۸۲ می‌شود. اکنون، فرض کنید، A و B با هم آشنا نباشند. در این صورت، همهٔ دیگران با هم آشنا هستند (اگر مثلاً C و D با هم آشنا نباشند، آن وقت، در گروه چهار نفری A، B، C، D، هیچ‌کس با همهٔ بقیهٔ سه نفر آشنا نیست). اگر A و B، با همهٔ بقیه آشنا باشند، به معنای آن است که ۱۹۸۰ نفر با همهٔ افراد آشنا هستند. اگر A، مثلاً با C آشنا نباشد ($C \neq B$)، آن وقت، A و B و C با همهٔ ۱۹۷۹ نفر دیگر آشنا هستند (زیرا درهر گروه شامل A، B، C و D، تنها D می‌تواند با سه نفر دیگر آشنا باشد)، که درعین حال با خودشان هم آشنا هستند. به این ترتیب، حداقل تعداد کسانی که با همهٔ بقیه آشنا هستند، برابر است با ۱۹۷۹.

۴۶۳. توجه می‌کنیم که، هر نفر، درست دو نفر از بقیه را می‌شناسد. درواقع، فرض می‌کنیم، A، با سه نفر B، C و D آشنا باشد. دراین‌صورت، اگر B و C با هم آشنا باشند، آن وقت بین A و B و C، ناآشنا وجود ندارد. بنابراین، B و C (و به همین ترتیب B و D، C و D) ناآشنایند و، آن وقت، بین B، C و D آشنائی پیدا نمی‌شود. به همین ترتیب، می‌توان حالتی را بررسی کرد که A، با سه نفر ناآشنا باشد.

اکنون، فرض کنید B و C، آشناهای A باشند. دراین‌صورت B و C

با هم آشنا نیستند و B، مثلاً، بـا D آشناست ($D \neq A$ و $D \neq C$). اگـر D با C آشنا باشد، در بین چهار نفر A، B، C، D، هر نفر با دو نفر دیگر آشناست، یعنی نفر پنجم E نمی‌تواند بـا هیچ‌کدام از آن‌هـا، آشنا باشد. به این ترتیب D با C آشنا نیست و چون بـا A هم آشنا نیست، و همچنین C با B آشنا نیست، بنابراین C و D آشنای E هستند.

بنابراین، این پنج نفر را می‌توان، مثلاً، به این ردیف نشانید

$$E، D، B، A، C$$

۴۶۴. فرض‌کنیم، نتوان سه ریاضی‌دان پیدا کـرد کـه به یك زبان صحبت‌کنند. ریاضی‌دان دلخواه A را درنظر می‌گیریم. او بـه بیش از سه زبان صحبت نمی‌کند، درضمن، بـا هریك از این زبان‌ها، حداکثر بـا یك ریاضی‌دان، می‌تواندحرف‌بزند (چراکه‌فرض‌کرده‌ایم، هیچ سه‌ریاضی‌دانی، با یك‌زبان حرف نمی‌زنند). به‌این ترتیب، پنج ریاضی‌دان وجود دارندکه، بـا A، زبـان مشترکی ندارند. یکی از این پنج نفـر را B می‌نامیم. شبیه استدلالی‌که بـرای A داشتیم، ریاضی‌دان B هم نمی‌تواند بـا بیش از سه ریاضی‌دان، زبان مشترکی داشته باشد. بنابراین، بین بقیهٔ چهار ریاضی‌دان، که با A زبان مشترك ندارند، ریاضی‌دان C پیدا می‌شودکـه با B هم زبان مشترکی ندارد. به این ترتیب، بین سه نفر A و B و C، نمی‌تـوان دو نفر پیدا کردکه بتوانند به یك زبان، با هم صحبت کنند؛ چیزی که شرط مسأله را نقض می‌کند.

۴۶۵. الف) فرض‌می‌کنیم، درهر گروه چهار نفری، بتوان دونفر ناآشنا پیداکرد. دراین‌صورت، مثلاً A، نمی‌تواند بیش از سه ناآشنا داشته باشد: اگر A بـا چهار نفر ناآشنا باشد، بـا توجه به فرض، بین آن‌هـا، دو نفر ناآشنای با هم می‌توان پیدا کردکه با A، یك‌گروه سه نفری تشکیل دهند و دربین آن‌ها، نتوان دو نفر را آشنای بـا هم پیدا کـرد. به‌این‌ترتیب، A، حداکثر با سه نفر ناآشناست، یعنی حداقل شش آشنا دارد. فرض کنید، A، بـا B_1، B_2، ...، B_6 آشنـا باشد. در این صورت، بین B_1، B_2، ...، B_6،

نمی‌توان سه نفر را پیدا کرد که، دو به دو با هم آشنا باشند (در غیر این صورت، این سه نفر، همراه با A، یك گروه چهار نفری تشکیل می‌دهند که، افراد آن، دو به دو با هم آشنا هستند، و این مخالف فرض است). یعنی بین هر سه نفر از B_1، B_2، ...، B_6، دو ناآشنا وجود دارد. درنتیجه، B_1 نمی‌تواند در بین B_2، ...، B_6 بیش از دو ناآشنا داشته باشد (اگر B_1، مثلاً، با B_2، B_3، B_4 ناآشنا باشد، آن وقت، B_2، B_3، B_4، دو به‌دو با هم آشنا می‌شود). بنابراین B_1، در بین B_2، ...، B_6، دست کم، سه آشنا دارد. دراین صورت، دراین گروه سه نفری، دو نفر آشنا پیدا می‌شوند که، همراه با B_1 و A، یك گروه چهار نفری تشکیل می‌دهند که دو به دو یکدیگر را می‌شناسند، چیزی که فرض ما را نقض می کند.

ب) ثابت می کنیم، در این حالت هم، گزارهٔ الف) درست است. اگر یك نفر با شش نفر دیگر آشنا باشد، استدلال به همان شیوهٔ بخش الف) انجام می‌گیرد. اگر، هر نفر، درست با ۵ نفر دیگر آشنا باشد، آن وقت، تعدادکل زوج‌های آشنا، برابر $\frac{۵}{۲} \times ۹$ می‌شود که، چون عدد درستی نیست، نمی‌تواند قابل قبول باشد. سرانجام، اگر بتوان کسی را پیدا کرد که، دست کم، با چهار نفر ناآشنا باشد، این چهار نفر دو به دو با هم آشنا هستند (در غیر این صورت، با گروه سه نفری سروکار پیدا می کنیم که، دو به دو، با هم ناآشنایند)؛ یعنی این چهار نفر، گروه مورد نظر مسأله را تشکیل می‌دهند. حکم ثابت شد.

۴۶۶. فرض می کنیم، پنج شهر وجود داشته باشد که به ترتیب مورد- نظر مسأله، به هم مربوط شده باشند. ابتدا ثابت می کنیم، به هیچ شهری، سه خط از یك نوع ارتباط وارد نمی‌شود. فرض کنید، مثلاً شهر A، با سه شهر B، C و D با هواپیما ارتباط داشته باشد. بنابراین، با توجه به شرط مسأله، از بین سه شهر B، C و D، هیچ دو شهری نمی‌توانند با هواپیما به هم مربوط شده باشند. فرض کنید، مثلاً، B و C، با قطار به هم مربوط باشند. شهرهای C و D نمی‌توانند با خط اتوبوس ارتباط داشته باشند،

زیرا درغیراین صورت، شهر C با هرسه نوع وسیلهٔ ارتباطی مجهز می‌شود. بنابراین، بین دو شهر C و D هم، باید خط قطار وجود داشته باشد. به‌همان دلیل، شهرهـای B و D هم، با قطـار به هم مربوط شده‌اند. به این ترتیب، سه شهر B، C و D، دو به دو، با قطار ارتباط دارند، که متناقض با فرض مسأله است.

بنابراین، ازهر شهر، دو وسیلهٔ از یك نوع، و دو وسیله از نوع دیگر خارج می‌شود (هر شهر، بـا چهار شهر دیگر رابطه دارد). به این ترتیب، هر شهر، درست بـا دو نوع وسیله تأمین می‌شود. از آن جـا، دست‌کم یك وسیلهٔ ارتباطی وجود داردکه بیش از سه‌شهر را تأمین نمی‌کند (درغیر این‌صورت، تعداد همهٔ شهرها، نمی‌تواند از $\frac{۳}{۲}\times ۴$، یعنی ۶ کمتر باشد). اگر این وسیله، درست دوشهر را تأمین‌کند، آن وقت از هر یك از این دو شهر، تنها یك خط ارتباطی از این نوع خارج می‌شود، که ممکن نیست. اگر این وسیله، درست سه شهر را تأمین‌کند، آن وقت، این سه شهر، دو به دو، بااین وسیله به هم مربوط شده‌اند، که بازهم ممکن نیست.

درنتیجه، ثابت شد که، شرطهای مسأله، نمی‌توانند برای پنج شهر، برقرار باشند. علاوه براین، روشن است که، اگر تعداد شهرها، بیش از پنج باشد، بازهم شرطهای مسأله برقرار نمی‌شوند.

اکنون، اگر تعداد شهرها را چهار بگیریم (A، B، C و D) و به این ترتیب، به‌هم مربوط شده باشند: A و B با قطار، C و D با اتوبوس و همهٔ بقیهٔ شهرها با هواپیما، آن‌وقت، همهٔ شرطهای مسأله‌رعایت شده‌اند. حداکثر تعداد شهرها، برابر است با ۴.

۴۶۷. ابتدا ثابت می‌کنیم، هردونفر آشنا، تعدادآشنایان برابردارند. فرض کنید، A و B باهم آشنا باشند، درضمن، A، به‌جز B، با A_1، A_2، ...، A_n هم‌آشنا باشد و، به جز این‌ها، آشنای دیگری نداشته باشد. در این صورت، بنابر شرط مسأله، بین B، A_1، A_2، ...، A_n، هیچ دونفری باهم‌آشنا نیستند. A_1 را در نظر می‌گیریم. چون A_1 با B آشنا نیست، بنـابراین دوآشنـای مشترك با B دارد: A و مثلاً B_1. چون B_1 و A باهم‌آشنا نیستند، به جز B

و A_1، آشنای مشترک دیگری ندارند، یعنی B_1 بـا A_2، ...، A_n آشنا نیست. به همین ترتیب، معلوم می‌شود که B_2، آشنای مشترک A_2 و B است (B_2 غیر از B_1 است، زیرا B_1، با A_2 آشنا نیست) و غیره. به این ترتیب، آشناهای A، (به‌جز B) در تناظر با آشناهای مختلف B (به جز A) قرار می گیرند، یعنی تعداد آشناهای A، از تعداد آشناهای B، تجاوز نمی کند. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، تعداد آشناهای B هم، از تعداد آشناهای A تجاوز نمی کند. بنابراین، A و B، تعداد آشنایان برابر دارند.

اکنون، فرض می کنیم، C و D باهم آشنا نباشند. در این صورت، هر دوی آن‌ها، مثلاً با E آشنا هستند. بنابر آن‌چه ثابت کردیم، تعداد آشنایان C و E و، همچنین، تعداد آشنایان D و E، یکی است. بنابراین، تعداد آشنایان C و D هم، یکی است (که همان تعداد آشنایان E است).

۴۶۸. از بین تمـامی $3n$ دانش‌آموز، دانش‌آمـوزی را انتخـاب می کنیم، که حداکثر تعداد آشنا را در یکی از دو مدرسهٔ دیگر داشته باشد؛ این تعداد را، k می‌گیریم (ممکن است، چند دانش‌آموز از این گونه وجود داشته باشد که، در این صورت، یکی از آن‌هـا را انتخاب می‌کنیم). برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم، دانش‌آموز A از مـدرسهٔ اول، بـا k دانش‌آموز مدرسهٔ دوم آشنا باشد. دراین صورت، A، به تعداد $n+1-k$ دانش‌آموز مدرسهٔ سوم را می‌شناسد و، در ضمن، $n+1-k \geqslant 1$، زیرا $k \leqslant n$. دانش‌آموزی از مدرسهٔ سوم را انتخاب می کنیم که با A آشنا باشد (دانش‌آموز B). اگر B با هیچ کدام از k آشنای A در مدرسهٔ دوم آشنا نبـاشد آن وقت، B بـاید در این مدرسه، با تعدادی که از $n-k$ تجـاوز نمی کند، آشنا باشد، یعنی در مدرسهٔ اول، دست کم، با

$$n+1-(n-k)=k+1$$

دانش‌آموز آشناست، که با نوع انتخاب k متناقض است: حکم ثابت شد.

۴۶۹. بـا استقرای روی $n\in\mathbb{N}$ ثابت می کنیم، اگر در گرافی که $2n$ رأس دارد، هیچ سه یالی تشکیل مثلث ندهند، آن وقت، تعداد یال‌ها، از n^2 تجاوز نمی کند. برای $n=1$، تعداد یال از $n^2=1$ تجاوز نمی کند. فرض

می‌کنیم، حکم، برای n ثابت شده باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $n+1$ هم درست است.

گرافی با $(n+1)$ رأس در نظر می‌گیریم که، هیچ سه یالی از آن‌ها، تشکیل مثلث ندهند. دورأسی راانتخاب می‌کنیم که، ازوصل آن‌ها به‌یکدیگر، یالی درست شده باشد (اگر در گراف، حتی یك یال وجود نداشته باشد، آن وقت، همه چیز ثابت شده است). در این صورت، هر یك از $2n$ رأس باقی‌مانده، به یالی مربوط می‌شودکه حداکثر، از یکی از دو رأس انتخابی گذشته است. بنابر فرض استقرا، این $2n$ رأس در بین خود، بیش از n^2 یال تشکیل نمی‌دهند. در نتیجه، تعدادکل یال‌ها، از

$$n^2+2n+1=(n+1)^2$$

تجاوز نمی‌کند. حکم ثابت شد.

سرانجام، اگر $2n$ رأس را، به دو مجموعه، و در هرکدام n رأس، تقسیم کنیم و، سپس، هر دو رأس واقع در دو مجموعهٔ مختلف را، با یالی به هم وصل کنیم، گرافی با n^2 یال به دست می‌آیدکه، درآن، هیچ مثلثی پیدا نمی‌شود.

۴۷۵. مسأله را، با استقرای روی n ــ تعداد پسرها ــ حل می‌کنیم. برای $n=1$، درستی حکم ازاین‌جا ناشی می‌شودکه، برای هرپسر، به‌ناچار یك دخترآشنا وجود دارد. فرض می‌کنیم، حکم، برای همهٔ عددهای کمتر از n درست باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای n هم درست است. دو حالت در نظر می‌گیریم.

۱) گروه A شامل $k<n$ پسر پیدا می‌شود، به نحوی که تعدادکل همهٔ دخترهای آشنا با آن‌ها، برابر k باشد. فرض کنید، هر یك از پسرهای این گروه، با دختر آشنای خود در رقص شرکت کند (که با توجه به فرض استقرا، این امر ممکن است). در این صورت، برای پسرها و دخترهای باقی‌مانده، شرط مسأله برقرار است. درواقع، اگر گروه B را شامل i پسری که در گروه A نیستند، فرض کنیم، آن وقت، برای پسرهایی که، از اجتماع مجموعه‌های B و A به دست می‌آیند، دست کم، به تعداد $i+k$ دختر آشنا

وجود دارد. پسرهای گروه A، در مجموع، حداکثر بـا k دختر آشنا هستند، یعنی i پسر از گروه B، دست‌کم با i دختر بقیه آشنایند. بنابراین، با توجه به فرض استقرا، هر یك از پسرهایی هم که در A نیستند، می‌توانند در رقص با دختر آشنای خود شرکت کنند.

۲) در هر گروه پسرها، از هر تعداد $k<n$، تعداد دخترهای آشنا، از k تجاوز می‌کند. در این صورت، اگر یك پسر با دختر آشنای خود مشغول به رقص شود، آن وقت، مجموعهٔ پسرهـا و دخترهای باقی‌مانده، مثل حالت قبل، بـا شرط مسأله سازگار می‌شوند. در واقع، هر گروه از $k\leqslant n-1$ پسر باقی‌مانده دست‌کم با $k+1$ دختر آشنا است (که ممکن است، یکی از آن‌ها، قبلاً مشغول به رقص شده باشد). یعنی، بنابر فرض استقرا، هر یك از پسرهای باقی‌مانده هم، می‌تواند دختر آشنای خود را پیدا کند.

۴۷۱. با استقرای روی $n\in\mathbf{N}$ ثابت می‌کنیم، اگر n شرکت A_1، ...، A_n و N شهر P_1، ...، P_N وجود داشته باشد و، در ضمن $N>2^n$ و هر دو شهر بـا خط هوایی به‌هم مربوط باشند، آن وقت، دست‌کـم یك شرکت هوائی می‌تواند، یك مسافرت رفت و برگشت را، با تعداد فردی خط هوائی تأمین کند. از آن‌جا که

$$1983>1024=2^{10}$$

بنابراین، آن چه در مسأله خواسته شده است، به عنوان حالتی خاص، ثابت خواهد شد.

به ازای $n=1$، داریـم $N\geqslant 3$ و $P_1P_2P_3P_1$، مسـافرت مطلوب است. فرض می‌کنیم. حکم، برای $n-1$ درست باشد؛ ثابت می‌کنیم، برای nهم درست است. فرض کنید، تمامی مسافرت کمربندی شرکت A_n، از تعداد زوجی خط هوائی تشکیل شده باشد (درغیر این صورت، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند). شهرها را به دو گروه

$$R\{R_1, \ldots, R_k\} \quad \text{و} \quad Q=\{Q_1, \ldots, Q_m\}$$

به ترتیب زیر تقسیم می‌کنیم. $P_1\in R$ می‌گیریم. سپس، همهٔ شهرهایی را که

می‌توان، از P_1 به‌آن‌ها، بـا هواپیماهـای شرکت A_n، بدون عوض کردن هواپیما پرواز کرد، در گروه Q می گذاریم. همهٔ شهرهایی راکه می‌توان از شهرهای Q، با هواپیماهای شرکت A_n، بدون عوض کردن، به‌آن‌ها پرواز کرد، در R قرار می‌دهیم و غیره. به این ترتیب، ایـن وضع پیش نمی آید که، دو شهر از یك گروه (R یا Q) با خط هوایی شرکت A_n به هم مربوط باشند (در غیر این صورت، مسافرت کمربندی، با تعداد فرد خط‌های هوایی ممکن می‌شود). اگر همهٔ شهرهایی را که، با آغاز از P_1 و با هواپیماهای شرکت A_n می‌توانیم پرواز کنیم، به پایان برسانیم، آن وقت، به R و دریکی از شهرهای باقی مانده داخل می‌شویم و همان روند قبلی را ادامه می‌دهیم. دست‌کم دریکی از گروه‌های R یا Q، بیش از $۲^{n-۱}$ شهر وجود دارد، زیرا

$$k+m=N>۲^n$$

ودرداخل هریك‌ازاین گروه‌ها، همهٔپروازها، باشرکت‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{n-۱}$ انجام می گیرد (زیرا شرکت A_n، تنها شهری از R را به شهرهـایی از Q مربوط می کند). اکنون، تنها این می‌ماندکه از فرض استقرا استفاده‌کنیم.

§۲۶. مسأله‌های مختلف

۴۷۲. فرض‌کنیم، بعد از انجام چند بـار عمل مورد نظر مسأله، تنها گروهی از صفرها بـاقی مانده باشد. فرض کنید، این وضع، برای نخستین بار، بعد از انجام عمل kام پیش آمده بـاشد. در این صورت، بعد از عمل $(k-۱)$ام، همهٔ رقم‌های روی‌دایره‌یکسان و، درضمن، غیراز صفربوده‌اند، بنابراین، همهٔ آن‌ها، واحد بوده‌اند. یعنی، بعد از عمل $(k-۲)$ ام، هر دو رقم متوالی در روی دایره، با هم اختلاف داشته‌اند؛ بنابراین، تعداد صفرها و واحدها، دراین‌مرحله، برابرو تعدادکل آن‌ها زوج است، که شرط را نقض می کند.

۴۷۳. تمامی صفحه را به مربع‌های برابر، طوری تقسیم می کنیم که، هر یك از مربع‌ها، شامل چهارخانه باشد. سپس، در هر یك از این مربع‌ها،

خانهٔ «چپ بالا» را سیاه، خانهٔ «راست بالا» را سفید، خانهٔ «چپ پایین» را قرمز و خانهٔ «راست پایین» را آبی می‌نامیم. دراین صورت، از یك طرف، هر دو خانهٔ هم رنگ، مماس نیستند و، از طرف دیگر، در بین خانه‌های علامت‌گذاری شده، می‌توان، دست‌کم، یك‌چهارم آن‌ها را طوری انتخاب کرد که هم‌رنگ باشند (در غیر این صورت، تعدادکل خانه‌های علامت‌دار، از $\frac{n}{4} \times 4$، یعنی n، کمتر می‌شود).

۴۷۴. هر یك از ۲۶ مکعب واحد را، به جز مکعب وسط، به ردیف شطرنجی یا سیاه و یا سفید می‌گیریم: ۱۲ مکعب کوچك را که درست، دارای دو وجه در سطح مکعب بزرگ هستند، سفید، و بقیه ۱۴ مکعب کوچك را، سیاه می‌نامیم. به این ترتیب، هر دو مکعب کوچکی که وجه مشترکی داشته باشند، رنگ‌های مختلف پیدا می‌کنند (یکی سیاه و دیگری سفید). موش نمی‌تواند این ۲۶ مکعب کوچك را بخورد، زیرا درغیر این صورت، می‌شد مکعب‌های کوچك را به ۱۳ زوج تقسیم کرد، به نحوی که، در هرزوج، یکی سیاه و دیگری سفید باشد، یعنی تعداد مکعب‌های کوچك سیاه و سفید برابر می‌شد.

۴۷۵. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_n$$

i را کوچکترین اندیسی می‌گیریم که، برای آن، بین نقطه‌های A_1، …، A_i، از هر چهار رنگ وجود داشته باشد. در این صورت، رنگ A_i، با رنگ‌های A_1، …، A_{i-1} فرق دارد. اکنون، بزرگترین اندیس $j < i$ را در نظر می‌گیریم که، برای آن، بین نقطه‌های A_j، …، A_i، نقطه‌های از هر چهار رنگ پیدا شود. در این صورت، رنگ A_j، با رنگ نقطه‌های A_{j+1}، …، A_i فرق دارد؛ و پاره خط راست $[A_j, A_i]$، پاره خط مطلوب است.

۴۷۶. تعداد مثلث‌های منفی را k می‌گیریم برای هر مثلث، عددهای

متناظر با ضلع‌های آن را درهم ضرب و، سپس، همهٔ حاصل‌ضرب‌های حاصل را دوباره در هم ضرب می کنیم. در نتیجه، به عدد $(-1)^k$ می‌رسیم. توجه کنیم که، عدد متناظر با هر پاره‌خط راست، در این حاصل‌ضرب، $n-2$ بار وارد شده است، زیرا هر پاره خط راست، به $n-2$ مثلث متعلق است. بنابراین، حاصل‌ضرب مذکور برابر $(-1)^{(n-2)m}$ است، یعنی، عدد k، از نظر زوج یا فرد بودن خود، با عدد

$$(n-2)m \equiv nm \pmod 2$$

یکی است.

۴۷۷. فرض کنید، اتومبیل دارای ذخیره‌ای از بنزین باشد که بتواند با آن، بدون بنزین گیری مجدد، تمامی جادهٔ کمربندی را دور بزند. همچنین، فرض کنید، این اتومبیل، از ایستگاهی آغاز به حرکت کند و، در جاده، همهٔ بنزین‌های ایستگاه‌ها را جمع کند و، حرکت خود را، در همان نقطه و با همان مقدار بنزین به‌پایان برساند. A را ایستگاهی می گیریم که، وقتی اتومبیل به آن‌جا می‌رسد، کمتر از نقطهٔ دیگری، در حرکت خود، بنزین داشته باشد. فرض کنید، مقدار بنزین داخل باك اتومبیل، در این لحظه، برابر x باشد. اگر اتومبیل، با مقدار ذخیرهٔ بنزین x، حرکت خود را از ایستگاه A آغاز کند، آن وقت، همیشه، در باك آن، مقدار بنزینی خواهد بود که از x کمتر نیست.

به‌این ترتیب، اگر اتومبیل، با باك خالی در ایستگاه A باشد، می‌تواند با ریختن بنزین موجود در این ایستگاه در باك خود و حرکت از آن جا، تمامی جادهٔ کمربندی را دور بزند (زیرا، این مقدار x بنزین را می‌توان در نظر نگرفت و حرکت را بدون آن به پایان رسانید).

۴۷۸. صفحهٔ شطرنج را به چهار بخش تقسیم می کنیم، به نحوی که در هر بخش، دو ردیف قائم وجود داشته باشد. فرض کنید، سیاه، در پاسخ به حرکت سفید در هر بخش، حرکت خود را در همان بخش انجام دهد. در این صورت، اگر سیاه، سفید را از امکان حرکت در هر بخش محروم کند، آن‌وقت، سفید نمی‌تواند حرکتی انجام دهد. بنابراین، کافی است، برنامه‌ریزی برد سیاه را، برای حالتی پیدا کنیم که، بسازی، در مرزهای دو ردیف قائم

انجام می‌گیرد. اگر سفید، سرباز خود را k خانه جلو ببرد، آن وقت سیاه، سرباز خود را در ردیف قائم دیگر، k خانه جلو می‌برد. ولی اگر سفید، سرباز خود را k خانه به عقب برد، سیاه، سرباز خود را در همان ردیف، k خانه جلو می‌برد. در این صورت، بعد از هر حرکت سیاه، فاصلهٔ بین سربازهای یك ردیف قائم، و سربازهایی که در ردیف قائم دیگرند، یکسان می‌مانند. بنابراین، در هر حرکت سفید، سیاه می‌تواند پاسخ بدهد، یعنی سیاه نمی‌تواند بازنده شود. از طرف دیگر، سیاه فقط به جلو می‌رود و، در نتیجه، بازی به ناچار، بعد از تعدادی حرکت به پایان می‌رسد و، بنابراین، سیاه برنده می‌شود.

۴۷۹. همهٔ عددهای درست از ۲ به بعد را به زوج‌های غیر متقاطع به صورت $(2k, 2k+1)$ تقسیم می‌کنیم $(k \in \mathrm{N})$. در این صورت، دو عدد از بین سه عدد n، $n-1$ و $n-2$، به‌طور حتم، یك زوج را تشکیل می‌دهند. کسی که بازی را آغاز می‌کند، باید مهره‌ای را بردارد که جزء این زوج نیست و آن را در خانهٔ با شمارهٔ ۱ بگذارد. این مهره، بعد از حرکت اول، دیگر قابل جابه‌جا کردن نیست. فرض کنید، نفر دوم، در حرکت خود، یکی ازمهره‌ها را به خانهٔ m ببرد. در این صورت، نفر اول، باید مهرهٔ باقی‌مانده را، در خانه $m-1$ یا $m+1$، بسته به این که کدام یك از آن‌ها با m تشکیل زوج داده‌اند، قراردهد. این عمل را همیشه می‌توان انجام داد، زیرا زوج‌ها، نه باهم و نه با ۱، متقاطع نیستند. اگربازی به همین ترتیب، ادامه پیدا کند، اولی نمی‌تواند بازنده باشد؛ و چون بازی، به هر حال، بعد از چند حرکت به پایان می‌رسد، بنابراین، دومی به طور حتم بازی را خواهد باخت.

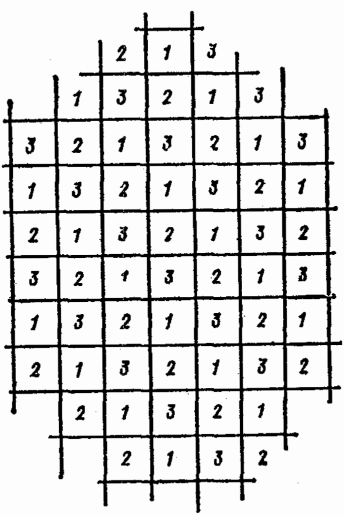
۴۸۰. ردیف‌های افقی را، از پایین به بالا، با عددهای ۰، ۱، ...، ۷ و ردیف‌های قائم را، از چپ به‌راست، با همین عددها، شماره‌گذاری می‌کنیم. هرخانهٔ صفحه شطرنج را متناظر با مجموع عددهای افقی و قائمی می‌گیریم که، این خانه، در محل برخورد آن‌ها واقع باشد. مهره، مسیر حرکت خود را، از خانهٔ متناظر با شمارهٔ ۰ آغاز می‌کند. در هر حرکت مهره، عدد x،

متناظر با خانه‌ای که مهره در آن واقع می‌شود، یا یک واحد اضافه و یا ۲ واحد کم می‌شود؛ بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد x بر ۳، به صورت دنبالهٔ زیر تغییر می‌کند:

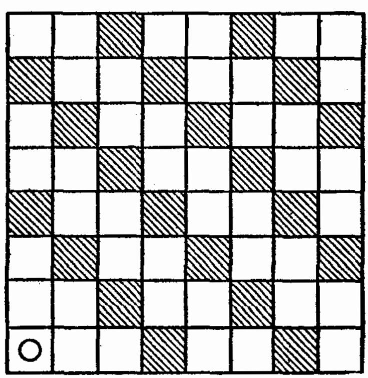
۰، ۱، ۲، ۰، ۱، ۲، ...

فرض می‌کنیم، مهره بتواند از تمامی صفحهٔ عبور کند، به‌نحوی که، در هر خانه، تنها یک بار قرار گرفته باشد. ۶۳ خانهٔ باقی‌مانده را (بعد از حذف خانهٔ آغازین) به ۲۱ خانهٔ سه تایی تقسیم می‌کنیم، به نحوی که این تقسیم، در ردیف حرکت مهره باشد. در هر گروه سه خانه‌ای، درست یک خانه، متناظر است با عددی مضرب ۳. ولی این خانه‌ها (که روی شکل ۱۲۸، هاشور خورده‌اند) تنها ۲۰ عددند. تناقض حاصل، ثابت می‌کند که، مهره، نمی‌تواند از تمامی خانه‌های صفحهٔ شطرنج عبور کند.

۴۸۱. تمامی خانه‌های صفحهٔ شطرنجی نامتناهی را، به ۳ مجموعه تقسیم می‌کنیم، آن‌طور که در شکل ۱۲۹ نشان داده شده است (عددهای



شکل ۱۲۹



شکل ۱۲۸

مختلف، معرف خانه‌های متعلق به مجموعه‌های مختلف‌اند). در هر حرکت، از تعداد مهره‌های دو مجموعه، هرکدام یك واحد کم، و به مهره‌های یکی از مجموعه‌ها، یك واحد اضافه می‌شود. درضمن، بعد از هر حرکت، زوج یا فرد بودن تعداد مهره‌های هرمجموعه، تغییر می‌کند. اگر مهره‌ها، در ابتدا، یك مستطیل $n \times (3k)$ را اشغال کرده باشند، به معنای آن است که، تعداد آن‌ها در هر مجموعه، برابر با تعداد آن‌ها در هر مجموعهٔ دیگر است. بنابراین، بعد از هرحرکت، باید تعداد مهره‌ها، درهر سه مجموعه، از لحاظ زوج یا فرد بودن یکی باشد. اگر بعد از حرکتی، روی صفحه تنها یك‌مهره باقی مانده باشد، به معنای این است که تعداد مهره‌های یکی از مجموعه‌ها فرد، وتعداد مهره‌های هریك از دو مجموعهٔ دیگر زوج است. بنابراین، چنین موقعیتی پیش نمی‌آید.

۴۸۲. ثابت می‌کنیم، دست‌کم یکی از وجه‌های این چند وجهی، مثلث نیست. برعکس، فرض کنید، همهٔ وجه‌ها، مثلث باشند. در این صورت، در این چندوجهی، تعداد یال‌ها برابر $\frac{3n}{2}$ (زیرا، هریك از سه یال هر وجه، متعلق به دو وجه است) و تعداد رأس‌ها برابر n است (زیرا، هر یك از سه رأس هر وجه، متعلق به سه وجه است). بنا بر دستور اولر (قضیهٔ ۳۹) داریم:

$$n+n-\frac{3n}{2}=2 \Longrightarrow n=4$$

که شرط مسأله را نقض می‌کند.

اکنون، نشان می‌دهیم، کسی که بازی را آغاز می‌کند، چگونه می‌تواند بازی را ببرد. حرکت اول را باید روی وجه A_1 انجام دهد که مثلث نیست. با حرکت دوم خود، باید وجه آزاد A_2 راکه مجاور وجه A_1 است و با دو وجه مجاور A_3 و A_4 (که باز هم مجاور A_1 هستند) یال‌های مشترکی دارد، اشغال کند (این حرکت، برای بازی‌کن اول ممکن است، زیرا بازی‌کن دوم، تنها می‌تواند یکی از وجه‌های مجاور A_1 را اشغال کند). سرانجام، درحرکت سوم، بازی‌کن اول می‌تواند یکی از دو وجه A_3 یا

A_4 را، که به‌وسیلهٔ دومی اشغال نشده‌است، پر کند. بازی کن اول، در حرکت سوم، برنده می‌شود.

۰۴۸۳ با استقرای روی $n\in\mathbf{Z}^+$، ثابت می‌کنیم که اگر پشت سر هم، 2^n عمل S را انجام دهیم، به‌گروهی از $m=2^n$ واحد می‌رسیم. برای $n=0$، داریم:

$$S(A)=(a_1a_1)=1$$

اکنون، فرض کنیم حکم، برای $n-1$ درست باشد؛ ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، برای n هم درست است. در انتخاب

$$T(A)=S(S(A))=S(a_1a_2,\ a_2a_3,\ \dots,\ a_ma_1)=$$
$$=(a_1a_3,\ a_2a_4,\ \dots,\ a_{m-1}a_1,\ a_ma_2)$$

عددهایی که در ردیف‌های زوج قرار دارند، به ترتیب، بر عددهایی منطبق‌اند که از انتخاب

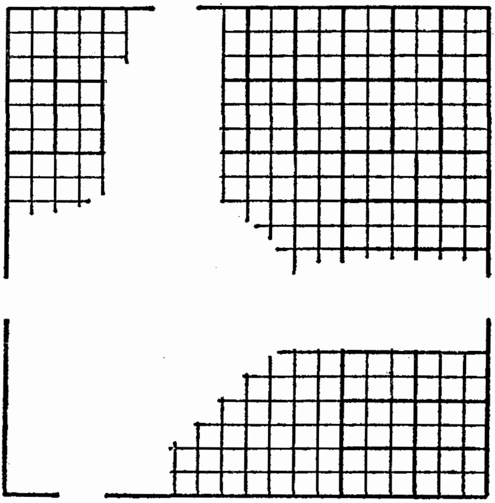
$$(a_2,\ a_4,\ \dots,\ a_m)$$

ضمن انجام عمل S به دست می‌آیند. به همین ترتیب، عددهای انتخاب $T(A)$، در ردیف‌های فرد خود، با انتخاب زیر منطبق‌اند:

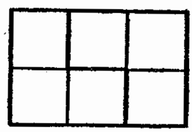
$$S(a_1,\ a_3,\ \dots,\ a_{m-1})$$

بنا بر فرض استقرا، بعد از $\frac{m}{2}=2^{n-1}$ عمل T، چه در ردیف‌های زوج و چه در ردیف‌های فرد، تنها واحدها قرار دارند. بنابراین، بعد از m عمل S، تمامی انتخاب، از واحدها تشکیل شده است.

۰۴۸۴ مستطیل 2×3 را می‌توان با «مربع‌های سه خانه‌ای» پوشاند (شکل ۱۳۰). شکلی را درنظر می‌گیریم که از اجتماع نوارهایی به عرض شش خانه و متصل به دو ضلع مجاور مربع، به دست آمده باشد. اگر خانه‌ای که از صفحه جدا کرده‌ایم، متعلق به این شکل نباشد، می‌توان، این شکل را، با مستطیل‌های 2×3 پوشاند (شکل ۱۳۱) و، سپس، به مربع



شکل ۱۳۱



شکل ۱۳۰

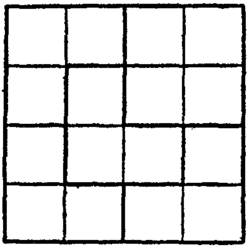
باقی‌ماندهٔ $(n-۳)۲ \times (n-۳)۲$، که خانه‌ای از آن جدا شده است، پرداخت. چون این عمل را، برای $n \geqslant ۷$، همیشه می‌توان انجام داد، بنابراین، بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد $n \leqslant ۵$. همهٔ حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم.

۱) $n = ۱$. مربع ۲×۲ را، که یک خانهٔ آن جدا شده باشد، می‌توان با یک «مربع سه خانه‌ای» پوشاند (تعریف «مربع سه خانه‌ای» را، درصورت مسأله، ببینید).

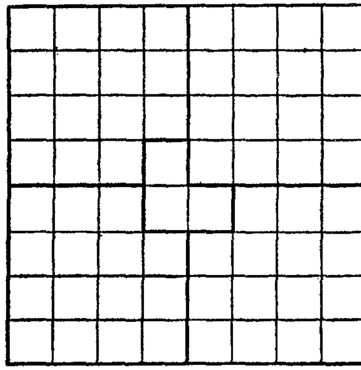
۲) $n = ۲$. خانهٔ جدا شده، دریکی‌ازچهار مربع ۲×۲ قرار دارد، که سه خانهٔ باقی‌ماندهٔ آن را می‌توان با یک «مربع سه خانه‌ای» پوشاند (شکل ۱۳۲).

۳) $n = ۴$. به حالت ۲) برمی‌گردد، زیرا در آن‌جا دیدیم. هر مربع ۴×۴ راکه یک‌خانهٔ آن جدا شده‌باشد، می‌توان با «مربع‌های سه‌خانه‌ای» پوشاند (شکل ۱۳۳).

۴) $n = ۵$. هر مربع ۱۰×۱۰ را، که یک خانهٔ آن‌جدا شده باشد،

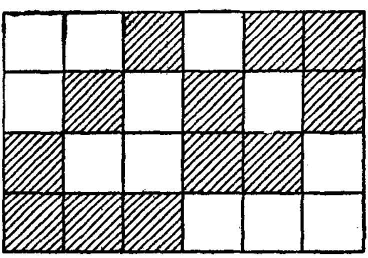


شکل ۱۳۳



شکل ۱۳۲

همیشه می‌توان به دو مستطیل ۱۰ × ۳ و یك مستطیل ۱۰ × ۴ طوری تقسیم کرد که، خانهٔ جدا شده، درمستطیل ۱۰ × ۴ قرار گیرد. مستطیل ۱۰ × ۳ را می‌توان با «مربع‌های سه خانه‌ای» پوشاند. مستطیل ۱۰ × ۴ را می‌توان به دو مستطیل ۴ × ۳ و یك‌مربع ۴ × ۴ طوری تقسیم کرد که خانهٔ جداشده، در مربع ۴ × ۴ قرار گیرد. هم مستطیل ۴ × ۳ و هم مربع ۴ × ۴، بدون یك خانه، را می‌توان با «مربع‌های سه خانه‌ای» پر کرد.



شکل ۱۳۴

۴۸۵. الف) همهٔ زوج خانه‌های هم رنگی را در نظر می‌گیریم که ممکن است در یك ستون واقع باشند (فرض می‌کنیم، هرستون به‌ارتفاع ۴، وهرسطر به‌طول ۷ باشد). درهرستون، دست‌کم، دو زوج از این‌گونه پیدا می‌شود، یعنی درتمامی صفحهٔ مستطیلی، دست‌کم، ۱۴ تا. بنابراین، رنگی‌وجود دارد که، برای آن، دست‌کم ۷ تا از این زوج‌ها پیدا می‌شود. از آن‌جا که، انواع این‌گونه زوج خانه‌ها، درهرستون برابراست با ۶، بنابراین، دوستون وجود دارد که، درآن‌ها، این‌گونه زوج‌ها، به یك رنگ و به یك ردیف

قرار گرفته‌اند. و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

ب) شکل ۱۳۴ را ببینید.

۴۸۶. همهٔ نقطه‌های مجموعهٔ M را به ۱۲ سطر (نسبت به مختص اول) و ۱۲ ستون (نسبت به مختص دوم) تقسیم می‌کنیم. رنگی وجود دارد که، دست‌کم به تعداد $\frac{۱۴۴}{۳}$، یعنی ۴۸ نقطه، با آن رنگ شده‌اند. از بین آن‌ها، درست ۴۸ نقطه را انتخاب می‌کنیم. تعداد این نقطه‌ها را درستون‌های از ۱ تا ۱۲ (نسبت به مختص دوم)، به‌ترتیب، $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{۱۲}$ می‌نامیم:

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۲}=۴۸$$

دراین صورت، تعداد نقطه‌های انتخابی، درستون iام، برابر $\frac{۱}{۲}a_i(a_i-۱)$، و تعداد کل زوج نقطه‌هایی که، مختص دوم آن‌ها برهم منطبق است، برابر با

$$A=\frac{a_۱(a_۱-۱)}{۲}+\frac{a_۲(a_۲-۱)}{۲}+\ldots+\frac{a_{۱۲}(a_{۱۲}-۱)}{۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(a_۱^۲+\ldots+a_{۱۲}^۲)-\frac{۱}{۲}(a_۱+\cdots+a_{۱۲})$$

می‌شود. با استفاده ازقضیهٔ مربوط به واسطه‌ها (قضیهٔ ۶)، به دست می‌آید:

$$A\geqslant\frac{۱}{۲}\cdot\frac{(a_۱+\cdots+a_{۱۲})^۲}{۱۲}-\frac{۱}{۲}(a_۱+\cdots+a_{۱۲})=$$

$$=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۴۸^۲}{۱۲}-\frac{۱}{۲}\cdot۴۸=۷۲$$

هر دو نقطهٔ انتخابی که دریك ستون واقع باشند، متناظر با دو سطری هستند که، این دو نقطه، در آن‌ها قرار دارند. چون تعداد زوج نقطه‌های مختلف، برابر $C_{۱۲}^۲=۶۶$، از A کمتر است، بنا بر این، دو زوج از نقطه‌های انتخابی پیدا می‌شوند که، متناظر با یك زوج سطرند. و این چهار نقطه، رأس‌های مستطیل موردنظر ما را تشکیل می‌دهند.

۴۸۷. الف) اگر مختصات سه رأس مثلثی را $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$

و (x_3, y_3) بگیریم، مختصات محل برخورد میانه‌های آن چنین است:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

نقطهٔ (x, y) را از نوع (r_1, r_2) می‌نامیم، وقتی که، در آن، r_1 و r_2، به‌ترتیب، عبارتند از باقی‌مانده تقسیم عددهای x و y بر ۳. می‌توان هشت نقطه پیدا کرد که با شرط مسأله سازگار باشند. کافی است، این هشت نقطه را، به این ترتیب، درنظر بگیریم: دو نقطه از نوع (۰، ۰)، دو نقطه از نوع (۰، ۱)، دو نقطه از نوع (۱، ۰) و، سرانجام، دو نقطه از نوع (۱، ۱). علاوه براین، هیچ سه نقطه‌ای، از این هشت نقطه، نباید بر یك خط راست واقع باشند. مثلاً، این شرطها، درمورد نقطه‌های زیر صدق می‌کنند:

(۰، ۰)؛ (۳، ۰)؛ (۱، ۳)؛ (۴، ۳)؛ (۰، ۱)؛ (۳، ۴)؛ (۱، ۱)؛ (۴، ۷)

اکنون، فرض می‌کنیم، ۹ نقطه وجود داشته باشد، به‌نحوی که درشرط مسأله صدق کنند. این ۹ نقطه را، به‌گروه‌های از یك نوع، تقسیم می‌کنیم. دراین‌صورت، درهیچ یك از گروه‌ها، نباید ۳ نقطه وجود داشته باشد (زیرا، درغیر این صورت، این سه نقطه، تشکیل مثلثی را می‌دهند که، محل برخورد میانه‌های آن، دارای مختصات درست می‌شود). بنابراین، به سادگی روشن می‌شود که تعداد گروه‌ها نمی‌تواند از ۵ کمتر باشد، یعنی از بین ۹ نقطهٔ مفروض، می‌توان ۵ نقطه پیدا کرد که متعلق به گروه‌های مختلف باشند. این ۵ نقطه را به سه دسته، بسته به باقی‌ماندهٔ مختص اول آن‌ها بر ۳، تقسیم می‌کنیم. در هیچ کدام از این دسته‌ها، نمی‌تواند ۳ نقطه وجود داشته باشد (درواقع، اگر چنین سه نقطه‌ای وجود داشته باشند، از نوع‌های $(0, r)$، $(1, r)$ و $(2, r)$، به‌ازای مقداری از r، خواهند بود و، درنتیجه، مثلثی را تشکیل می‌دهند، که مختصات محل برخورد میانه‌های آن، با عددهای‌درست بیان می‌شود). بنابراین، در دو دسته، هرکدام دو نقطه، و در دسته سوم، یك نقطه وجود دارد. بدون این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که، این یك نقطه، ازنوع (۰، ۰) است. در این صورت، بین ۵ نقطهٔ مفروض، نقطه‌های از نوع (۱، ۰) و (۲، ۰) وجود ندارد.

علاوه بر آن، در بین آن‌هـا، نمی‌توانند دو نقطهٔ از نوع $(۱ ،۱)$ و $(۲ ،۲)$ به طور هم‌زمان وجود داشته باشد (در غیر این صورت، این دو نقطه، همراه با نقطهٔ $(۰ ،۰)$، مثلثی را تشکیل می‌دهند کـه، در آن، میانه‌ها در نقطه‌ای با مختصات درست یکدیگر را قطع می‌کنند). به همین علت، دو نقطه از نـوع $(۲ ،۱)$ و $(۱ ،۲)$ و یـا از نوع $(۰ ،۱)$ و $(۰ ،۲)$ هم، به طور هم‌زمـان، نمی‌توانند در بین آن‌هـا وجود داشته باشد. به این ترتیب، بیش از ۴ نقطه برای ما، باقی نمی‌ماند. تناقض.

ب) هر نقطهٔ (x, y, z) با مختصات درست را، متناظر بـا عددهـای $g(x)$، $g(y)$، $g(z)$ قرار می‌دهیم کـه، به ترتیب، معرف باقی‌ماندهٔ عددهای x، y و z بـر ۳ هستند. چون $g(x)$ بیش از ۳ مقدار را قبـول نمی‌کند، بنابراین، دست‌کم ۱۳ نقطه از بین ۳۷ نقطهٔ مفـروض، دارای مقدار $g(x)$ برابر هستند (در غیر این صورت، تعداد کل عددهـا، از ۳×۱۲، یعنی ۳۶ تجـاوز نمی‌کند). به همین ترتیب، در بین این ۱۳ نقطه، دست‌کم ۵ نقطه، دارای $g(y)$ برابر هستند دراین‌صورت، اگر مثلثی را با رأس‌های

$$(x_۱, y_۱, z_۱);\ (x_۲, y_۲, z_۲);\ (x_۳, y_۳, z_۳)$$

در نظر بگیریم، مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌های آن، چنین می‌شود:

$$x_۰=\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳},\quad y_۰=\frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳},\quad z_۰=\frac{z_۱+z_۲+z_۳}{۳}$$

درضمن، اگر داشته باشیم:

$$g(x_۱)=g(x_۲)=g(x_۳) \quad \text{و} \quad g(y_۱)=g(y_۲)=g(y_۳)$$

آن وقت، $x_۰$ و $y_۰$، عددهایی درست‌اند، و $z_۰$ تنها وقتی عددی درست است که داشته باشیم:

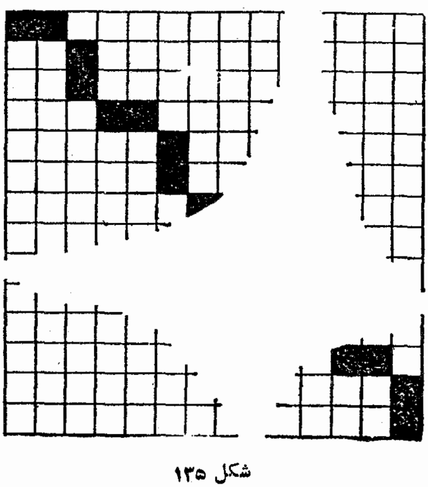
$$z_۱+z_۲+z_۳\equiv ۰ \pmod{۳}$$

ما، پنج نقطه داریم کـه، بـرای آن‌هـا، همهٔ عددهای $g(x)$ و همهٔ عددهای $g(y)$ برابرند. اگر در این پنج نقطه، ۳ نقطه وجود داشته باشد که، برای آن‌ها، $g(z)$، مقدارهای ۰، ۱ و ۲ را بپذیرد، آن وقت، برای این نقطه‌هـا

$$z_1+z_2+z_3\equiv g(z_1)+g(z_2)+g(z_3)\equiv 0+1+2\equiv 0 \pmod 3$$

و اگــر چنین نقطه‌هائی وجود نداشته باشد، آن وقت، عدد $g(z)$، درمورد ۵ نقطهٔ ما، بیش از دومقدار را قبول نمی‌کند، درنتیجه، ۳ نقطه پیدا می‌شود که، درآن‌ها، $g(z)$ مقدارهایی برابر یکدیگر را قبول می‌کندکه، از آن‌جا، عدد z_0 متناظر با آن‌ها، عددی درست ازآب درمی‌آید.

۴۸۸. فرض کنید، هر رخ، در روی صفحهٔ شطرنجی، درمعرض خطر بیش از یك رخ دیگــر نباشد. در این صورت، می‌تــوان چند زوج رخ را به نحوی جدا کرد که رخ‌های هر زوج یکدیگر را تهدید کنند، ولی‌هیچ‌کدام از رخ‌های دیگر را درمعرض تهدید قرار ندهند و، درضمن، رخ‌هایی‌که در زوج‌ها جمع نشده‌اند، اصلاً مورد تهدید یکدیگر نباشند. تعداد این زوج رخ‌ها را A، وتعداد رخ‌های تنها را B می‌گیریم. تعدادکل ردیف‌های افقی و ردیف‌های قائم، درصفحهٔ $3n\times 3n$، برابر است بـا $6n$. ازبین آن‌هـا، هر دو رخی‌که یکدیگر را تهدیدکنند، سه خط را اشغال می‌کنند (دو ردیف افقی و یك ردیف قائم، و دو ردیف قائم ویك ردیف افقی) که، روی آن‌ها، هیچ رخ دیگری نمی‌تواند قــرار گیرد؛ و هر رخ تنهــا، دو خط را اشغال می‌کند (یك ردیف افقی و یك ردیف قائم) که، درآن‌ها، رخ دیگری وجود



شکل ۱۳۵

ندارد. از این‌جا، باید داشته باشیم: $3A+2B\leqslant 6n$. به این ترتیب، برای تعداد رخ‌ها، داریم:

$$2A+B\leqslant\frac{2}{3}(3A+2B)\leqslant\frac{2}{3}\cdot 6n=4n$$

ازطرف دیگر، می‌توان $4n$ رخ را روی صفحه، با توجه به شرط‌های مسأله قرار داد، مثلاً، به‌ترتیبی که روی شکل ۱۳۵ نشان داده شده‌است (خانه‌هایی را سیاه‌کرده‌ایم که می‌توان، رخ‌هارا، درآن‌ها قرارداد). بنابراین، حداکثر تعداد رخ‌ها، برابر است با $4n$.

۴۸۹. دریك صفحهٔ شطرنجی $m\times m$، با $m!$ روش می‌توان m رخ‌را طوری قرار داد که یکدیگر را تهدید نکنند، زیرا رخ را به m طریق در ردیف افقی اول، $m-1$ طریق در ردیف افقی دوم، ...، و یك طریق در ردیف افقی آخر می‌توان قرار داد. فرض‌کنید، حکم مسأله درست نباشد. دراین صورت، اگر صفحهٔ شطرنجی را، به همان طریقی‌که در مسأله آمده است، رنگ‌کنیم، دراین‌صورت، درهر ترتیبی از رخ‌ها، باید دو تا از آن‌ها که یکدیگر را تهدید می‌کنند، در دو خانهٔ هم رنگ قرار گیرند. بنابراین، تعداد همهٔ گونه‌های استقرار رخ‌ها (یعنی $n!$)، از $\frac{n^2}{2}(n-2)!$ تجاوز نمی‌کند، زیرا هر دو رخ را به $\frac{n^2}{2}$ طریق می‌توان در خانه‌های هم رنگ قرار داد و، سپس، بقیهٔ $n-2$ رخ را به $(n-2)!$ طریق مستقر کرد. به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$n!\leqslant\frac{n^2}{2}(n-2)!\Longrightarrow n-1\leqslant\frac{n}{2}\Longrightarrow n\leqslant 2$$

که با شرط مسأله متناقض است.

۴۹۰. فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد. دراین‌صورت، برای هرمقدار $i=1, 2, \ldots, n$، دوسطر پیدا می‌شود که، درآن‌ها، تنها عنصر i ام با هم فرق می‌کند. برای هر i، چنین زوجی را تثبیت می‌کنیم و گراف زیر

را رسم می‌کنیم: هرسطر جدول را، رأسی از گراف، و هر دو رأسی را که متناظر با دو سطر تثبیت شده است، یك یال می‌نامیم. چون دراین گراف، n رأس و n یال داریم، بنا برقضیهٔ ۹۴، می‌توان دوری را در آن پیدا کرد که از رأس‌هایی (سطرهای جدول) مثل a_1، a_2، ...، a_k، a_1 بگذرد. در این صورت، سطرهای a_1 و a_2، تنها در عنصر iام (برای مقداری از i) اختلاف دارند و، در عین حال، سطرهای a_2 و a_3، a_3 و a_4، ...، a_k و a_1، درعنصر iام برهم منطبق‌اند. به این ترتیب، عنصر iام سطرهای a_1 و a_2، درعین‌حال، هم برهم منطبق‌اند و هم با یکدیگر فرق دارند. تناقض.

۴۹۱. قبل از همه، ثابت می‌کنیم، رنگ‌آمیزی نقطه‌های مجموعهٔ E، با شرطهای مسأله، تنها وقتی ممکن‌است که، هرمستطیل با رأس‌هایی از E و ضلع‌هایی موازی محورهای مختصات، دارای تعدادی زوج از رأس‌های قرمز باشد. فرض کنید، تعداد رأس‌های قرمز مستطیل π_0، فرد و مثلاً برابر واحد باشد (حالتی را هم که، تعداد این رأس‌ها برابر ۳ باشد، می‌توان به‌صورت مشابهی بررسی کرد). دو مکعب مستطیل درنظر می‌گیریم که در وجه π_0 مشترك باشند و وجه‌های مقابل به‌این وجه مشترك را، به‌ترتیب، π_1 و π_2 می‌نامیم. دراین‌صورت، اگر رنگ‌آمیزی، با شرطهای مسأله سازگار باشد، آن وقت، هر یك از وجه‌های π_1 و π_2 دارای ۳ رأس قرمزند و مکعب مستطیل با وجه‌های π_1 و π_2 دارای ۶ رأس قرمز می‌شود که با فرض متناقض است.

اکنون، فرض می‌کنیم، هر مستطیل، دارای تعداد زوجی رأس باشد. مکعب مستطیل دلخواهی را درنظر می‌گیریم. اگرهمهٔ رأس‌های آن همرنگ باشند، آن وقت، تعداد رأس‌های قرمز آن، بر ۴ بخش‌پذیر است. اگر همهٔ رأس‌ها ازیك رنگ نباشند، یالی وجود دارد که دو رأس آن، از دو رنگ متفاوت است و، درضمن، همهٔ یال‌های‌موازی با آن‌هم، رأس‌های ناهم‌رنگ دارند (زیرا، هروجه، تعداد زوجی رأس‌های قرمز دارد)، و تعداد رأس‌های قرمز مکعب مستطیل، برابر ۴ می‌شود. حکم ثابت شد.

فرض کنید، رنگ‌های $(1 + 3 \times 1982)$ نقطهٔ $(0, 0, 0)$،

$(x، ۰، ۰)$، $(۰، y، ۰)$، $(۰، ۰، z)$ داده شده باشد که، در آن‌ها، x و y و z، همهٔ عددهای درست از ۱ تا ۱۹۸۲ را قبول می‌کنند. ثابت می‌کنیم، تنها یك رنگ‌آمیزی منحصر برای بقیهٔ نقطه‌های مجموعهٔ E وجود دارد که با شرط‌های مسأله سازگار باشد. برای اثبات، این تابع را درنظر می‌گیریم:

$$f(x، y، z)=\begin{cases} ۰ & (\text{نقطهٔ } (x، y، z) \text{ قرمز}) \\ ۱ & (\text{نقطهٔ } (x، y، z) \text{ آبی}) \end{cases}$$

که مقدار $f(x، y، z)$، به صورت یك ارزشی، رنگ نقطهٔ $(x، y، z)$ را معین می‌کند. عمل $a \oplus b$ (جمع نسبت به مدول ۲) را، به صورت زیر می‌دهیم:

$$a \oplus b\begin{cases} ۰ & (a+b \text{ زوج}) \\ ۱ & (a+b \text{ فرد}) \end{cases}$$

و فرض می‌کنیم:

$$f(x، y، z)=f(x، ۰، ۰)\oplus f(۰، y، ۰)\oplus f(۰، ۰، z)$$

آزمایش نشان می‌دهد که، برای نقطه‌های مفروض قبلی، این دستورهم درست است و هرمستطیل با یال‌های موازی محورها، دارای تعداد زوجی رأس‌های قرمز است. مثلاً

$$f(x_۱، y_۱، z)\oplus f(x_۲، y_۱، z)\oplus f(x_۱، y_۲، z)\oplus f(x_۲، y_۲، z)=۰$$

یعنی، بنا بر حکمی که در بالا ثابت کردیم، رنگ‌آمیزی حاصل، با شرط‌های مسأله، سازگار است. با توجه به همان حکم، این رنگ‌آمیزی منحصربه‌فرد است، زیرا برای آن، باید شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$f(x، y، ۰)=f(۰، ۰، ۰)\oplus f(x، ۰، ۰)\oplus f(۰، y، ۰)،$$

$$f(x، ۰، z)=f(۰، ۰، ۰)\oplus f(x، ۰، ۰)\oplus f(۰، ۰، z)،$$

$$f(۰، y، z)=f(۰، ۰، ۰)\oplus f(۰، y، ۰)\oplus f(۰، ۰، z)،$$

$$f(x, y, z) = f(0, 0, z) \oplus f(x, 0, z) \oplus f(0, y, z) =$$

$$= f(0, 0, z) \oplus f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, 0, z) \oplus$$

$$\oplus f(0, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z) =$$

$$= f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z)$$

به‌این ترتیب، تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن، برابر است با

$$2^{1+3\times 1982} = 2^{5947}$$

ضمیمه‌ها

ضمیمهٔ الف

توضیح‌هایی دربارهٔ برخی مسأله‌ها

۰۳. در مسألهٔ اصلی مربوط به المپیاد چکوسلواکی، فرض شده است: در سطر اول ۳ عدد فرد وجود دارد و اثبات این مطلب خواسته شده است که، در هر سطر، با آغاز از سطر دوم، عددی زوج وجود دارد.

۰۶. در مسألهٔ اصلی، این سه عدد، تنها جواب مسأله، داده شده است.

۰۹. درمسألهٔ اصلی، خواسته شده است که ۵ عدد برای $n \in \mathbf{N}$، با توجه شرط، پیدا کنند.

۰۲۵. مسأله، به صورت هندسی تنظیم شده است: ثابت کنید، روی منحنی

$$(x+ay+c)(x+by+d)=۲$$

بیش از چهار نقطهٔ مختلف وجود ندارد که دارای مختصاتی درست باشند.

۳۰. در مسأله اصلی، جواب‌های درست و غیر منفی معادله خواسته شده است. در ضمن، اگر دو جواب، از تبدیل ردیف‌های $x_۱$، ...، $x_{۱۴}$ به دست آید، یک جواب به حساب آمده است.

۳۲. در مسألهٔ اصلی خواسته شده است که، عددهای گویای X و Y را طوری پیدا کنیم که در برابری زیر صدق کنند:

$$\sqrt{۲\sqrt{۳}-۳}=X^{\frac{۱}{۴}}-Y^{\frac{۱}{۴}}$$

یادآوری می کنیم که، حل مسأله که در کتاب داده شده است، پاسخ به این پرسش را می‌دهد، زیرا، به ازای $X=۳x^۲$ و $Y=۳y^۲$ داریم:

$$\sqrt{x\sqrt{۳}}=X^{\frac{۱}{۴}} \quad و \quad \sqrt{y\sqrt{۳}}=Y^{\frac{۱}{۴}}$$

۳۹. مسأله، در اصل، به صورت هندسی تنظیم شده است: تعداد مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ با ضلع‌های درست و حداقل ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه (برابر n) پیدا کنید (ما، این تعداد را a_n نامیده‌ایم). در بخش الف) دستوری برای a_n خواسته شده است. مسأله، دارای دو پرسش ب) و ج) است که ما آن‌ها را در بخش‌های الف) و ب) جمع کرده‌ایم.

۶۶. در مسألهٔ اصلی، اثبات این مطلب خواسته شده است که: دنبالهٔ $h_۱$، $h_۲$، ... نامتناوب است.

۸۷. بخش ب) که، در واقع، نیرومندتر از حکم بخش الف) است، به وسیلهٔ ل.آ. ایوانف، شرکت کنندهٔ المپیاد بین‌المللی سال ۱۹۸۵ حل شده است.

۱۰۲. مسأله، در اصل، به این صورت، تنظیم شده است: K را دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات می گیریم. ثابت کنید، برای هر بردار $\mathbf{u}$، عدد طبیعی n وجود دارد؛ به‌نحوی که تبدیل دایرهٔ K، ضمن انتقال به‌اندازهٔ بردار $n\mathbf{u}$، شامل نقطه‌ای با مختصات درست باشد. درواقع، این تنظیم، با آن‌چه درکتاب آمده، هم‌ارز است.

۱۲۷. در اصل، عددها را مثبت فرض کرده‌اند.

۱۲۹. خواسته شده است که حکم مسأله را در حالت

$$۰<a<۱،\quad ۰<b<۱،\quad ۰<c<۱$$

هم ثابت کنند.

۱۳۷. فرض شده است $1 \geqslant x > 0$ و $\infty > a > 0$، و اثبات نابرابری خواسته شده است.

۱۳۸. درمورد α، شرط اضافی و غیرلازم $0 \leqslant \alpha$ هم داده شده است.

۱۴۱. اثبات حکم، برای عددهای مختلط و دلخواه a_1، ...، a_n خواسته شده است.

۱۶۸. در اصل خواسته شده است: شرطی برای ضلع‌های مثلث پیدا کنید که، به ازای آن، مرکز ثقل مثلث بر مرکز ثقل مرزهای آن منطبق باشد.

۲۰۰. در المپیاد جمهوری دموکراتیک آلمان، تنها بخش الف) و با تنظیم زیر داده شده است: دو دایرهٔ مختلف K و K'، از رأس‌های A و B از مثلث ABC عبور کرده‌اند، که نقطه‌های M و M'، مرکزهای آن‌ها، روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع‌اند. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC روی K یا K' قرار دارد.

۲۲۰. بلژیک، مسأله را به صورت زیر تنظیم کرده است: روی ضلع‌های مثلث KLM، مثلث‌های متساوی‌الساقین و متشابه KPL $(KP=PL)$، LQM $(LQ=QM)$ و KRM $(KR=RM)$ ساخته شده‌اند. در ضمن، مثلث‌های KPL و KLM در دو سمت متفاوت خط راست KL، و مثلث‌های LQM و KLM، و مثلث KRM در همان سمت مثلث KLM نسبت به خط راست KM قرار دارند. ثابت کنید، $LPRQ$، متوازی‌الاضلاع است. در این جا، شرط متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های KPL، LQM و KRM، در واقع، اضافی است.

۲۲۶. ۱۵ نقطه‌ای را که در مسأله داده شده است، می‌توان به عنوان مرکز توپ‌های بیلیارد در نظر گرفت.

۲۳۰. این مسأله، به مسألهٔ سیلوستر معروف است.

۲۳۲. در اصل، به این صورت تنظیم شده است: دربارهٔ مجموعهٔ مرکزهای تقارن، به شرطی که بیش از یکی باشند، چه می‌توان گفت؟ به جز این، خواسته شده است، نمونه‌ای از یک مجموعه آورده شود که بیش از یک مرکز تقارن داشته باشد.

۲۳۳. علاوه براین، خواسته شده است، L را در حالت‌هایی که M، مربع یا مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، پیدا کنند.

۲۴۳. در اصل، اثبات این مطلب خواسته شده است که، طول خط شکسته، از ۱۲۴۸ کمتر نیست.

۲۷۶. در اصل مسأله، شکل مثلث خواسته شده است.

۲۷۷. دراصل مسأله، شرط شده است که، هر رأس چندضلعی کوچکتر، روی هرضلع ازچندضلعی بزرگتر قرار دارد. درضمن، شرط $n>3$ هم لازم نیست.

۲۸۷. در اصل، چهاروجهی منتظمی به ضلع a داده شده است.

۳۰۱. در اصل، گفته شده است که، فصل مشترك صفحه‌های α و β، خط راست CD را قطع می‌کند.

۳۰۹. برای R و r، شرط $R>2r$ داده شده است.

۳۱۵. هرم ناقص، با قاعده‌های مثلثی‌شکل در نظر گرفته شده است.

۳۵۰. در المپیاد چکوسلواکی، تنها می‌نیمم تابع f خواسته شده است.

۳۵۸. در اصل، مسأله شامل دو بخش است؛ تفاوت بخش ب) با آن‌چه درکتاب آمده، در این است که به جای شرط $f'(x_2)=0$، گفته شده است: تابع f در نقطهٔ x_2 دارای اکسترمم است و، درضمن $x_1<x_2$. بخش الف) حالت خاصی از بخش ب) متناظر با مقدارهای $x_2=1$ و $x_1=\sqrt{2}$ است.

۳۶۲. در اصل، $f(x)$ و $g(x)$، چندجمله‌ای فرض شده‌اند.

۳۶۶. در اصل خواسته شده است، مقدارهای متناظر a و b از بازهٔ $[0, 1]$ پیدا شود.

۳۷۸. در اصل، روی تابع‌های g و h، محدودیت‌های غیر لازمی قایل شده‌اند. گفته شده است که، هر دوی این تابع‌ها، برای مقدارهای $n\in\mathbf{N}$، هر مقدار را بیش از یك بار قبول نمی‌کنند و مجموعهٔ این مقدارها، بر $\mathbf{N}$ منطبق است.

۳۹۰. در ضمن، اثبات این برابری هم خواسته شده است:

$$\sum_{l=0}^{\infty} f(l)=\frac{1}{1-f(1)} \quad (f(1)<1 \text{ با شرط})$$

علاوه براین، مسأله، بخش دومی هم دارد که، درآن، حل معادلهٔ تابعی زیر خواسته شده است:

$$f(x)f(y)\equiv f(x-y) \quad x, y\in\mathbf{R}$$

۳۹۴. برای α و β، شرط غیرلازم $\alpha\neq\beta$ داده شده است.

۴۱۱. در اصل، خواسته شده است، خـارج قسمت $R(x)$، در تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ پیدا شود و بخش‌های زیر هم حل شود:

ب) فرض کنید $E(t)$ به معنای عبارتی باشد که از $R(x)$، بـا تبدیل x^k به $\cos kt$ به دست آمده است $(k=1, \dots, n-2)$. معادلهٔ $E(t)=0$ را حل کنید.

ج) مجموع مجذورهای ضریب‌های $R(x)$ را به دست آورید.

۴۴۹. در اصل، اثبات این نابرابری خواسته شده است:

$$|P(x)|\leqslant(2n+1)C_{2n}^{n}$$

آن‌چه در کتاب آورده‌ایم، قوی‌تر از این حکم است، زیرا

$$C_{2n}^{k}=C_{2n}^{n}\frac{n}{n+1}\cdots\frac{(k+1)}{2n-k}<C_{2n}^{n}, \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

$$C_{2n}^{k}=C_{2n}^{2n-k}<C_{2n}^{n} \quad (k=n+1, \dots, 2n)$$

یعنی

$$(2n+1)C_{2n}^{n}>C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+\dots+C_{2n}^{n}+\dots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=2^{2n}$$

ضمیمهٔ ب

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف

I

المپیادهای ریاضی دانش‌آموزان درکشورهای مختلف

۱. آرژانتین

در آرژانتین، المپیادهای ریاضی را برگزار نمی‌کنند، ولی در سال ۱۹۶۵، دانشگاه کوردوب، مسابقه‌ای زیر نام «جشن دانش» ترتیب داد. دانش‌آموزان دبیرستان‌های سراسر کشور، هر سال، کارهای علمی بکر و تازهٔ خود را، به این دانشگاه می‌فرستند. این کارها می‌توانند کار انفرادی و یا کار دسته‌جمعی دانش‌آموزان باشند. درکشور، مجلهٔ «بولتن ریاضی»، که از سال ۱۹۲۸ پایه‌گذاری شده، منتشر می‌شود.

۲. اسپانیا

ازسال ۱۹۶۴، دراسپانیا، به‌طور منظم، المپیادهای ریاضی‌دبیرستانی در دو نوبت، انجام می‌گیرد. در هر نوبت، به شرکت کنندگان، ۸ مسأله، در جریان ۲ روز داده می‌شود. مسأله‌ها، بین ساده‌ترین تا دشوارترین نوع وجود داردکه شامل برخی عنصرهای آنالیز هم می‌شوند.

۳. استرالیا

نخستین مسابقهٔ ریاضی در استرالیا، در سال ۱۹۷۶، در چارچوب پایتخت کشور انجام شد. این مسابقه، ۳۳ مدرسه و ۱۳۰۰ دانش‌آموز را دربرگرفت. مسابقه به صورت آزمایش کتبی در زمینهٔ ریاضیات دبیرستانی برگزار شد. ازسال ۱۹۷۸، به مسابقه شکل عمومی داده شد و به نام مسابقهٔ ریاضی استرالیا، سراسر کشور را دربرگرفت. در سال ۱۹۸۱، نخستین المپیاد ریاضی استرالیا سازمان داده شد.

۴. اطریش

المپیادهای ریاضی دبیرستانی، در اطریش، از سال ۱۹۷۰ آغازشد.

این المپیادها، به صورت خاصی برگزار می‌شود: تنها دانش‌آموزانی (حتی برای یك نوبت) حق شرکت در المپیاد را دارند که دوره‌های آمادگی خاصی را گذرانده باشند. این دوره‌ها، در دو سطح مختلف‌اند:

۱) دورهٔ مقدماتی، که هر دانش‌آموزی حق دارد، یك سال در آن شرکت کند. این دوره را، همهٔ دانش‌آموزان سال‌های نهم تا یازدهم، در صورت تمایل آن‌ها، می‌توانند ببینند (دورهٔ دبیرستانی، در اطریش، در سال دوازدهم تحصیل تمام می‌شود)؛ گاهی، دانش‌آموزان کوچکتر هم، استثنائاً، حق ورود پیدا می‌کنند؛

۲) در دورهٔ بعدی، که در سطح بالاتری است، تنها کسانی می‌توانند وارد شوند، که توانسته باشند، دورهٔ اول را با موفقیت پشت سر بگذارند. در دورهٔ دوم، بعد ازمصاحبهٔ ورودی، بقیهٔ دانش‌آموزان کلاس‌های ۱۱ و ۱۲ هم پذیرفته می‌شوند.

از سال ۱۹۷۵، المپیادهای اطریش، برای دانش‌آموزان دورهٔ اول در ۲ نوبت و برای دانش‌آموزان سطح بالا (دورهٔ دوم) در ۳ نوبت انجام می‌شود. نوبت اول، آزمایشی مسابقه‌ای است که همهٔ دانش‌آموزان در دوره‌های آمادگی می‌توانند در آن شرکت کنند. کسانی که در این دوره موفق شوند، به دور دوم المپیاد راه می‌یابند. در این مرحلهٔ دوم، قریب ۳۰ نفراز بهترین‌ها انتخاب می‌شوند که حق شرکت در المپیاد نهائی را دارند در اطریش، مجله‌ای منتشر می‌شود که به‌موضوع‌ها ومسأله‌های رشتهٔ فیزیك-ریاضی دبیرستانی می‌پردازد.

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیاد اطریش (سال ۱۹۸۶)

روز اول

۰۱ ثابت کنید، برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$ بزرگتر از ۲، می‌توان در n ضلعی منتظم، یك دایره محاط کرد.

۰۲ در صفحهٔ مختصات، برای مقدارهای مفروض k، $l\in\mathbf{N}$، مطلوب است تعداد لوزی‌هایی که، رأس‌های آن‌ها، مختصات x، $y\in\mathbf{N}$ را، با شرط $x\leqslant k$ و $y\leqslant l$ داشته باشند و قطرهای آن‌ها، موازی محورهای مختصات باشد.

۳. همهٔ مقدارهای $a_1 \in \mathbf{R}$، a_0 را پیدا کنید که، برای آن‌ها، دنبالهٔ $\{a_n\}$، که در برابری زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+1}=\frac{a_n a_{n-1}}{3a_{n-1}-2a_n},\ (n\in\mathbf{N})$$

شامل بی‌نهایت جمله از عددهای درست باشد.

روز دوم

۴. بزرگترین مقدار $n\in\mathbf{N}$ را پیدا کنید که، برای آن، عدد n رقمی (در دستگاه دهدهی) $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ وجود داشته باشد، به نحوی که همهٔ رقم‌های آن با هم فرق داشته باشند و، در ضمن، به ازای هر $i=1,\ldots,n$، عدد $\overline{a_1a_2\ldots a_i}$ بر i بخش‌پذیر باشد. برای این مقدار n، همهٔ عددهای n رقمی را معین کنید.

۵. ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی $n>3$، واسطهٔ حسابی طول‌های همهٔ ضلع‌های یك n ضلعی محدب، از واسطهٔ حسابی طول‌های همهٔ قطرهای آن، کوچکتر است.

۶. همهٔ تابع‌های $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ را پیدا کنید که، برای مقدار مفروض $n\in\mathbf{N}$، در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(m+k)\equiv f(mk-n),\ \ m,\ k\in\mathbf{N},\ \ mk>n$$

۵. امریکا

در امریکا، هر سال، مسابقه‌های ریاضی متعددی، با خصلت‌ها و هدف‌های متفاوت، بین دانش‌آموزان دبیرستانی برگزار می‌شود. مثلاً در سال ۱۹۵۵، دست کم، ۶۰ مسابقه جریان داشت.

بسیاری از این مسابقه‌ها را دانشگاه‌ها ترتیب می‌دهند تا بچه‌های با استعداد را، به‌عنوان دانشجویان آینده، کشف کنند. بیشترین تعداد این گونه مسابقه‌ها، مربوط به‌کنکورهای ریاضی دانشگاه استانفورد است که از سال ۱۹۴۶ به بعد، هر ساله، انجام می‌گیرد. این کنکورها، به ابتکار جرج پولیا، استاد دانشگاه استانفورد، برنامه‌ریزی شد. این کنکورها، خیلی شبیه مسابقه‌های

مجارستانی آتووش است که، جرج پولیا، زمانی خود درآن شرکت کرده و موفق شده بود.

مسابقه‌های دیگر را، انجمن ریاضی امریکا[1] و گروه ریاضی امریکا[2] سازمان‌دهی می‌کنند.

از سال ۱۹۵۸، به‌کمك MAA و یك شرکت امریکایی، هر سال، مسابقه‌های ملی انجام می‌شود که دانش‌آموزان کانادایی هم در آن شرکت می‌کنند. در این مسابقه‌ها، ۵۰ مسأله با ۸۰ دقیقه وقت به‌دانش‌آموزان داده می‌شود که بیشتر آن‌ها، خصلت پرسش‌های کوتاه را دارند.

نمی‌توان از مسابقهٔ بزرگی که در سال ۱۹۵۰ در نیویورك انجام گرفت یاد نکرد. دراین مسابقه، که بزرگترین مسابقهٔ آن سال بود و به‌وسیلهٔ بخش نیویورك MAA سازمان داده شده بود، علاوه بر ایالت نیویورك، دانش‌آموزان بسیاری از ایالت‌های دیگر هم، شرکت‌کرده بودند.

از سال ۱۹۷۲، المپیادهای ریاضی ملی در امریکا برگزار می‌شود که به‌وسیلهٔ AMS ترتیب داده شده است. برای شرکت در المپیاد، به‌کسانی اجازه داده می‌شود که از عهدهٔ آزمایش در سال گذشتهٔ تحصیلی برآمده و یا درالمپیادهای ریاضی‌دبیرستانی به‌موفقیت‌رسیده‌باشند. تعدادشرکت‌کنندگان، از ۱۰۰ تجاوزنمی‌کند. هر شرکت‌کننده، ورقهٔ المپیاد را در مدرسهٔ خودش می‌نویسد. در المپیاد ۵ مسأله داده می‌شود که باید در ۳ ساعت آن‌ها را حل کنند. تصحیح ورقه‌ها، در یك مرکز انجام می‌گیرد. هیأت نمایندگی امریکا، در المپیاد بین‌المللی ریاضی، از بین کسانی انتخاب می‌شوند که در المپیاد ملی موفق شده‌اند.

در ایالت‌های جداگانهٔ امریکا هم، مسابقه‌های ریاضی عام‌تری وجود دارد. مثلاً، مسابقه‌های ریاضی ایالت ویسکانسین، از سال ۱۹۶۵ به بعد جریان‌دارد. دراین‌مسابقه‌ها، بیش‌ازهمه، به‌سرعت حل‌مسأله‌ها، توجه‌می‌شود.

در سال‌های اخیر، کنکورهای کالج دو ساله، شهرت زیادی در امریکا

---

1. The American Mathematical Society – AMS.
2. The Mathematical Association of America – MAA.

به دست آورده است. مسأله‌های مسابقه‌های ریاضی امریکا، در مجله‌های زیر منعکس می‌شوند:

«The Mathematics, Teacher», «American Mathematical Monthly», «Mathematics Magazine»

۶. انگلستان

در آغاز سال‌های ۶۰، تقریباً در ۳۰۰ مدرسهٔ انگلستان، تست‌های ریاضی داده می‌شد که، اقتباسی بود از مسابقه‌های ملی امریکا (که به وسیلهٔ MAA برگزار می‌شد). در سال ۱۹۶۵، نخستین المپیاد ریاضی بریتانیا برگزارشدکه مسأله‌های آن‌را، ک.هیمان، استاد دانشگاه لندن‌طرح کرده بود. برای حل مسأله‌ها، ۳ ساعت وقت به دانش‌آموزان داده شد. از آن سال به بعد، المپیادهای ریاضی بریتانیا، به طور منظم برگزار می‌شود. مجله‌های زیر در انگلستان، به موضوع‌های مربوط به‌آموزش ریاضی می‌پردازند.

«The Mathematical Gazette», «Mathematics in School», «Mathematical Teacher»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای انگلستان (سال ۱۹۸۶)

۰۱ کسر $\frac{m}{n}$ را، به‌کسری ساده نشدنی تبدیل کنید، به شرطی که

$$m = ۲۲۴۴۸۵۱۴۸۵۱۴۸۵۱۴۶۲۷$$

$$n = ۸۱۱۸۸۱۱۸۸۱۱۸۸۱۱۸۰۰۰$$

۰۲ دو خط راست موازی $l_۱$ و $l_۲$ را بر دایرهٔ S مماس کرده‌ایم. دایرهٔ $S_۱$ به شعاع $r_۱$، بر دایرهٔ S و خط راست $l_۱$ مماس است. دایرهٔ $S_۲$ به شعاع $r_۲$، بر دایره‌های S و $S_۱$ و خط راست $l_۲$ مماس است. همهٔ دایره‌ها، نسبت به هم، مماس بیرونی‌اند. شعاع دایرهٔ S را پیدا کنید.

۰۳ ثابت‌کنید، اگر عددهای طبیعی m و n و k، در این برابری صدق کنند:

$$۱+m+n\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^{۲k-۱}$$

آن وقت، عدد m، مجذور یك عدد درست است.

۴. a و b و c، ضلع‌های مثلثی با یك زاویهٔ منفرجه‌اند. حداکثر مقدار D را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{(a+b+c)^۲}>D$$

۵. مطلوب است تعداد تبدیل‌های $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$، از گروه عددهای $(۱, ۲, \ldots, n)$، که در این شرطها صدق کنند:

$$a_i<a_{i+۲}, \quad (۱\leqslant i\leqslant n-۲)$$

$$a_i<a_{i+۳}, \quad (۱\leqslant i\leqslant n-۳)$$

۶. AB، AC و AD را، سه یال یك مکعب می‌گیریم. نقطهٔ E را روی نیم خط راست AC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AE=۲AC$؛ همچنین نقطهٔ F را روی نیم خط راست AD، طوری در نظر گرفته‌ایم که $AF=۳AD$. ثابت کنید، مساحت مقطع مکعب با هر صفحهٔ موازی صفحهٔ BCD ، برابر است با مساحت مقطع چهاروجهی $ABEF$ با همان صفحه.

۷. ایتالیا

انجمن ریاضی ایتالیا، در سال‌های ۱۹۶۲ــ۱۹۶۸، مسابقه‌های محلی (در محدودهٔ یك شهر) و در سال‌های ۱۹۶۳ــ۱۹۶۷، مسابقه‌های ملی دبیرستان‌ها را سازمان داد. مسأله‌هایی که در این مسابقه‌ها داده می‌شد، از مسأله‌های محدود برنامهٔ دبیرستانی تا مسأله‌هایی در سطح المپیادها، نوسان داشت. مسأله‌های ریاضی مسابقه‌ها، در مجله «Archimedes» (ارشمیدس) چاپ شده است.

۸. بلژیك

در آغاز سال‌های ۶۰، در بلژیك، برای مسابقه‌های ریاضی، از مسأله‌هایی استفاده می‌کردند که در امریکا، درمسابقه‌هایی که به‌وسیلهٔ MAA

سازمان یافته بود، مطرح شده بود. از سال ۱۹۶۵، مسأله‌های مجلهٔ «L'enseignement» هم، استفاده می‌کردند. از سال ۱۹۷۶ بود که، بلژیك، المپیادهای ریاضی خاص خود را، آغاز کرد. از سال ۱۹۸۲، المپیاد در ۳ دور (دور دبیرستانی، دور نیمه نهائی، دور نهائی)، به طور جداگانه، برای دو گروه سنی انجام می‌گیرد. دور المپیاد دبیرستانی به صورت کنترل کارهاست، به این معنا که، برای هر مسأله، چند جواب داده می‌شود که دانش‌آموز باید جواب درست را از بین آن‌ها پیدا کند. در بلژیك، دو مجله برای دانش‌آموزان و معلمان وجود دارد: «Mathesis» و «Nico» (از نام «نیکلا بورباکی»). مجله‌ای هم وجود دارد که به آموزش ریاضی می‌پردازد:

«Les mathématiques et la pedagogie»

۹. بلغارستان

المپیادهای ریاضی، از سال ۱۹۵۰ به‌طور مرتب هرسال در بلغارستان برگزار می‌شود. در حال حاضر، المپیاد، برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۸ تا ۱۱ دبیرستان‌های عمومی در ۳ دور و برای مدرسه‌های حرفه‌ای ۳ تا ۵ دور؛ و برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۵ تا ۷ دبیرستان‌ها ۲ دور و برای مدرسه‌های حرفه‌ای ۱ـ۲ دور انجام می‌شود. برای انتخاب هیأت نمایندگی المپیاد بین‌المللی ریاضی، یك دور دیگر مسابقه، بین دانش‌آموزان کلاس ۱۱ و سال آخر مدرسه‌های حرفه‌ای ترتیب داده می‌شود. دو مجلهٔ زیر، در آماده کردن دانش‌آموزان نقش عمده‌ای دارند: «آموزش ریاضی» (از سال ۱۹۵۸) و «ریاضیات» (از سال ۱۹۶۲).

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیاد بلغارستان (سال ۱۹۸۶)

۱. کمترین مقدار $n\in\mathbf{N}$ را پیدا کنید که، به ازای آن، عدد $n^۲-n+۱۱$ به صورت ضرب چهار عدد اول درآید (لزومی ندارد، این عددها، مختلف باشند).

۲. ثابت کنید، اگر ریشه‌های چند جمله‌ای درجهٔ دوم $P(x)$، به بازهٔ $[-۱, ۱]$ تعلق داشته باشند، و درضمن $\max\limits_{|x|\leqslant ۱}|P(x)|=۱$، آن وقت، این نابرابری برقرار است:

$$\max|P'(x)|\geqslant ۱، \ (|x|\leqslant ۱)$$

۰۳ حداکثر مقدار حجم مکعبی را پیدا کنید که بتوان آن را در یك چهار وجهی منتظم به یال واحد جا داد، به‌نحوی‌که یکی ازقطرهای مکعب، برارتفاع چهاروجهی واقع باشد.

۰۴ کمترین مقدار عدد طبیعی $n>۲$ را پیدا کنید‌که، به ازای آن، چنان n ضلعی با نقطهٔ A در درون آن وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که بتوان روی هرضلع n ضلعی نقطه‌ای انتخاب کرد‌که ازنقطهٔ A دیده نشود. ثابت کنید، این مقدار n، دارای ویژگی زیر است: درون هر n ضلعی، می‌توان دو نقطهٔ B و C را طوری پیدا کرد که هرنقطهٔ n ضلعی، از نقطهٔ B یا نقطهٔ C، دیده شود.

۰۵ برای مقدارهای مفروض $a>۰$، $\varphi\in(۰، ۱۸۰^\circ)$ و نقطهٔ A غیر واقع بر محیط دایرهٔ مفروض، مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید که، برای آن، بتوان روی محیط دایره نقطهٔ B را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$\frac{AM}{AB}=a، \quad \widehat{BAM}=\varphi$$

۰۶ ثابت کنید، در دنبالهٔ عددهای $a_۱$، $a_۲$، ... که به ازای مقداری از $b\in(۰، ۱)$، در نابرابری

$$a_{n+۱}\leqslant\left(۱+\frac{b}{n}\right)a_n-۱، \ n\in\mathbf{N}$$

صدق می‌کند، دست‌کم، یك عدد منفی وجود دارد.

۱۰. جمهوری دموکراتیك آلمان

از سال ۱۹۵۶، مسابقه‌های ریاضی جداگانه‌ای، بین دانش‌آموزان هر شهر، در جمهوری دموکراتیك آلمان برگزار می‌شد. در سال ۱۹۶۰، نخستین المپیاد در لایپزیگ و در سال ۱۹۶۱، نخستین المپیاد عمومی‌تر در برلن‌سازمان داده‌شد. نخستین المپیاد سراسری‌کشور، درسال۱۹۶۲ برگزار

شد. از این زمان، المپیادهای ریاضی دانش‌آموزان کلاس‌های ۱۱ و ۱۲، در جمهوری دموکراتیك آلمـان، در ۴ دور جـریـان دارد (دبیرستانی، ناحیه‌ای، نیمه نهائی و نهائی)؛ بـرای دانش‌آموزان کلاس‌های ۷ تا ۱۰ در ۳ دور و برای کلاس‌های ۵ و ۶ در ۲ دور انجام می‌شود. در المپیادهـای محلی ۴ مسأله و در المپیادهای ناحیه‌ای، شش مسأله به دانش‌آموزان داده می‌شود. مسأله‌های المپیادهای داخلی و المپیادهای بین‌المللی، و راه‌حل‌های آن‌هـا، در مجلهٔ «Alpha» (با آغاز ازسال ۱۹۶۷) به طور منظم چـاپ می‌شود. در جمهوری دموکراتیك آلمان، مجلهٔ «ریاضیات در دبیرستان» هم برای دبیران دبیرستان‌ها، وجود دارد.

۱۱. جمهوری فدرال آلمان

نخستین کنکور ریاضی را «انجمن علمی آلمـان» درسال ۱۹۷۰، در جمهوری فدرال آلمان سازمان داد. همهٔ دانش‌آموزان کلاس‌هـای ۱۱ تا ۱۳، حق شرکت درکنکور را داشتند. کنکور از ۳ دور تشکیل می‌شد. در دو دور اول ۴ مسأله داده می‌شدکه به‌صورت کتبی بود، و دور سوم به‌صورت شفاهی انجام می‌گرفت، درجمهوری فدرال آلمان، مجله‌های زیر به‌بحث‌های مربوط به ریاضیات و آموزش ریاضی می‌پردازند.

«Praxis der Mathematik», «Arximedes», «Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht»

۱۲. چکوسلواکی

المپیادهای ریاضی، ازسال ۱۹۵۱، سالیانه در چکوسلواکی برگزار می‌شود. در حال حاضر، شرکت‌کنندگان در المپیاد به ۴ گروه سنی، به نام گروه‌های A، B، C و D تقسیم می‌شوند (به‌ترتیب، دانش‌آموزان ۱۸ ساله، ۱۷ ساله، ۱۶ ساله و ۱۴ یا ۱۵ ساله). المپیاد، برای گروه A در ۳ مرحله و برای گروه‌های دیگر در دو مرحله انجـام می‌گیرد. مرحلهٔ اول به صورت غیابی است و شرکت‌کنندگان باید مسأله‌هایی را که، به طور متناوب چاپ می‌شود، در منزل حل کنند. مـرحلهٔ دوم و مرحلهٔ سوم (برای گـروه A)

حضوری است.

مجلهٔ «Matematika ve skole» از سال ۱۹۵۱ در چکوسلواکی منتشر می‌شود که مخصوص دبیران ریاضی دبیرستان است. علاوه بر آن، مجلهٔ زیرهم، درچکوسلواکی، برای دانش‌آموزان چاپ می‌شود:

«Rozledy matematicko – fysikolni»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای چکوسلواکی (سال ۱۹۸۶)

۰۱ برای هر مقدار $n\in\mathbb{N}$، مطلوب است حداکثر تعداد ممکن برای جمله‌های مجموعهٔ A، که از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱، ۲، ...، n\}$ تشکیل شده و ویژگی زیر را دارد: برای هر دو مجموعهٔ $B\in A$ و $C\in A$، مجموعهٔ

$$(B\bigcup C)\diagdown(B\bigcap C)$$

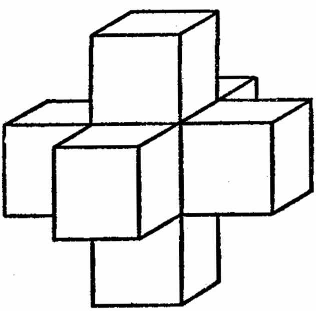
دارای تعداد زوجی عضو باشد.

۰۲ ثابت کنید، اگر چند جمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های درست و درجهٔ $n\geqslant ۳$، به‌ازای بعضی مقدارهای $m\geqslant ۳$، برای عددهای درست و مختلف $x_۱$، ...، x_m، در برابری‌های زیر صدق کنند:

$$P(x_۱)=P(x_۲)=...=P(x_m)=۱$$

درآن صورت، $P(x)$، ریشهٔ درست ندارد.

۰۳ ثابت کنید، تمامی فضا را می‌توان به «صلیب‌هائی» که هر کدام از آن‌ها شامل ۷ مربع واحد باشد، تقسیم کرد. نمونه‌ای از این «صلیب‌ها»، درشکل ۱۳۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۳۶

۰۴ روی مجموعهٔ محدب ومحدود M واقع برصفحه، سه نقطهٔ $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ را انتخاب کرده‌ایم. نیم‌خط‌های غیرمتقاطع $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$، به‌ترتیب، با رأس‌های $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$، مکمل مجموعهٔ $M\bigcup l_۱\bigcup l_۲\bigcup l_۳$ را، به سه حوزهٔ $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ تقسیم می‌کنند. ثابت کنید، اگر مجموعه‌های محدب A و B با شرط‌های

$$A\cap l_j=\varnothing=B\cap l_j,\ A\cap D_j\neq\varnothing\neq B\cap D_j,\ (j=۱،۲،۳)$$

سازگار باشند، آن وقت $A\cap B\neq\varnothing$.

۵. برای دنبالهٔ عددهای طبیعی a_1، a_2، ...، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، داریم:

$$a_1=1,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$$

ثابت کنید، برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، می‌توان عدد $m\in\mathbf{N}$ را پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$a_na_{n+1}=a_m$$

۶. برای هر m و n ازمجموعهٔ $M\subset\mathbf{N}$، داریم:

$$|m-n|\geqslant\frac{1}{25}mn$$

ثابت کنید، مجموعهٔ M، شامل بیش از ۹ عضو نیست. آیـا این مجموعـه می‌تواند شامل ۹ عضو باشد؟

۱۳. چین

مسابقه‌های ریاضی، برای نخستین بار در چین، در سال ۱۹۵۶، در ۴ شهر انجام گرفت. در سال بعد، مسابقه‌هـا را، به بسیاری شهرهای دیگر گسترش دادند. نمونهٔ مشخص این مسابقه‌ها، المپیادهای سال‌های ۱۹۵۶ و ۱۹۵۷ درشانگهای بود. این مسابقه‌ها، در دو گروه سنی انجام گرفت: برای سال‌ماقبل آخر، وسال آخر دبیرستان (سال‌های‌دبیرستانی درچین، با ۱۲ سال تحصیل تمام می‌شود). هرکدام از این مسابقه‌ها، سه مرحله داشت.

درسال‌های اخیر، المپیادهای ریاضی سراسری ترتیب داده‌شده‌است. مجله‌ای جالب، در زمینهٔ ریاضیات دبیرستانی، بـرای معلمان و علاقه‌مندان به ریاضیات، بـه طور منظم، در چین منتشر می‌شود کـه، بـه طور مرتب، مسابقه‌هایی را برای حل مساله‌ها ترتیب می‌دهد.

۱۴. رومانی

نخستین مسابقه‌های‌ریاضی، برای سال‌های‌آخر دبیرستان، در رومانی،

درسال ۱۸۸۹، ترتیب داده شد. از سال ۱۹۰۲، این مسابقه‌ها، به طور منظم و به وسیلهٔ مجلهٔ «Gazeta Matematică» برگزار می‌شد (چاپ این مجله، ازسال ۱۸۹۵ آغاز شده‌است). شکل مسابقه‌ها، درجریان زمان تغییر می‌کرد. تا سال ۱۹۴۸، به‌طورمعمول، در دومرحله انجام می‌گرفت. ازسال ۱۹۵۰، دورهٔ دوم برگزاری المپیادهــای ریاضی آغــاز شد. ازسال ۱۹۶۱، کار برگزاری المپیادها را، وزارت آموزش رومانی به‌عهده گرفت. درحال‌حاضر، المپیادهای رومانی در ۳ مرحلهٔ انجام می‌گیرد، که تنها دانش‌آموزان کلاس ۱۱ می‌توانند در آن شرکت کنند. مسأله‌هــای المپیادهــا، به طور منظم، در مجله‌ای که نام بردیم، چاپ می‌شود.

۱۵. سوئد

از سال ۱۹۶۱، «انجمن ریاضی سوئد» و مجلهٔ «Svenska Dagbladet» هر سال، مسابقه‌های ریاضی را، بــرای دانش‌آموزان دبیرستانی، سازمــان می‌دهند. این مسابقه‌ها، در دو مرحله انجام می‌گیرد. مرحلهٔ اول برای ۳۰۰ دانش‌آموز، ومرحلهٔ دوم، برای ۱۲ تا ۱۵ نفر از بهترین‌ها.

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای سوئد (نوامبر سال ۱۹۸۵)

۱. ثابت کنید، برای‌هرمقدار $a>b>0$، نابرابری‌زیر برقرار است:

$$\frac{(a-b)^{2}}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^{2}}{8b}$$

۲. کوچکترین عددطبیعی را پیدا کنید که دارای ویژگی زیر باشد: اگر رقم اول آن را، در عدد نویسی دهدهی، به‌آخر ببریم، عــدد مفروض $\frac{7}{2}$ برابر شود.

۳. نقطه‌های A و B و C روی محیط دایرهٔ به شعاع r، و نقطهٔ D در درون این دایــره طــوری قــرار گرفته‌اند کــه $AB=BC$ و مثلث BCD متساوی‌الاضلاع شده است. نیم‌خط راست AD، محیط دایره را در E قطع می‌کند. ثابت کنید $DE=r$.

۴. چند جمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های حقیقی، با شرط $P(x) \geqslant ۰$ به ازای همهٔ مقدارهای $x \in \mathbf{R}$ سازگار است. درستی نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$P(x)+P'(x)+P''(x)+\dots+P^{(n)}(x) \geqslant ۰، \quad x \in \mathbf{R}$$

۵. $(a، ۰)$، $(۰، b)$ و $(c، d)$ را، مختصات رأس‌های مثلث ABC می‌گیریم که، در آن، a، b، c و d عددهای مثبتی‌هستند. اگر O، مبدأ مختصات باشد، درستی نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$AB+BC+CA \geqslant ۲CO$$

۶. درشهر چند انجمن وجود دارد که، در هر کدام از آن‌ها، دست‌کم ۳ نفر جمع شده‌اند. برای هر دو نفر از ساکنان شهر، درست یك انجمن وجود دارد که، این دو نفر، درآن شرکت دارند. برای هر دو انجمن، درست یکی از ساکنان شهر وجود دارد که در هر یك از آن‌ها شرکت می‌کنند. دست‌کم یکی از انجمن‌ها، درست شامل ۱۷ نفر است. در این شهر چند نفر زندگی می‌کنند؟

۱۶. فرانسه

درفرانسه، المپیادهای ریاضی برگزار نمی‌شود. با وجود این، نزدیك به یك سده است که درفرانسه، مسابقه‌های غیابی «کنکور عمومی» برگزار می‌شود. فرانسه، در سال‌های اخیر، در المپیادهای بین‌المللی ریاضیات هم شرکت می‌کند. مجلهٔ
«Bulletin association des professors de mathématiques de l'enseignement public»
در زمینهٔ روش‌های آموزش ریاضی بحث می‌کند. مجله‌های
«Journal de mathématiques elémentaires»,
«Revue de mathématiques spécialies»,
«L'education mathématique»
به‌ترتیب، از سال‌های ۱۸۷۵، ۱۸۸۷ و ۱۸۹۰ درفرانسه منتشر می‌شوند.

نمونه‌ای از مسأله‌های «کنکور عمومی» در فرانسه (سال ۱۹۸۶)

۰۱ چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.

الف) ثابت کنید وسط یال‌های AB، AC، BD و CD، روی یک صفحه قرار دارند؛

ب) در این صفحه، نقطه‌ای پیدا کنید که، مجموع فاصله‌های آن تا خط‌های راست AD و BC، حداقل مقدار ممکن باشد.

۰۲ نقطه‌های A، B، C و M روی یک صفحه‌اند.

الف) D را نقطه‌ای از صفحه می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم: $CA \leqslant DA$ و $CB \leqslant DB$. ثابت کنید، نقطهٔ N وجود دارد که در نابرابری‌های زیر صدق می‌کند:

$$NA \leqslant MA، \quad NB \leqslant MB، \quad ND \leqslant MC$$

ب) A'، B' و C' را نقطه‌هایی ازصفحه می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$A'B' \leqslant AB، \quad A'C' \leqslant AC، \quad B'C' \leqslant BC$$

آیا نقطهٔ M' وجود داردکه در نابرابری‌های زیر صدق کند:

$$M'A' \leqslant MA، \quad M'B' \leqslant MB، \quad M'C' \leqslant MC$$

۰۳ الف) آیا برای هر $z، w \in \mathbb{C}$، این نابرابری درست است:

$$|z| + |w| \leqslant |z+w| + |z-w|$$

ب) ثابت کنید، برای مقدارهای $z_۱، z_۲، z_۳، z_۴ \in \mathbb{C}$، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{k=۱}^{۴} |z_k| \leqslant \sum_{۱ \leqslant i < j \leqslant ۴} |z_i + z_j|$$

مسأله‌هایی که نیاز به بحث و بررسی دارند

۰۱ برای هر دنبالهٔ $\{a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$، دنباله‌های $\{\Delta a_n\}$ و $\{\Delta^۲ a_n\}$ را، به این ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,$$
$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$$

به جز این، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، که بـرای آن داشته باشیم $\Delta^2 a_n \neq 0$، فرض می‌کنیم:

$$a'_n = a_n - \frac{(\Delta a_n)^2}{\Delta^2 a_n}$$

۱) به‌ازای کدام دنبالهٔ $\{a_n\}$، دنبالهٔ $\{\Delta^2 a_n\}$، ثابت است؟

۲) همهٔ دنباله‌های $\{a_n\}$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، عدد a'_n، به‌ازای همهٔ مقدارهـای $n\in\mathbf{N}$ معین، و دنبالهٔ $\{a'_n\}$ ثابت باشد (بـه طور جداگانه، حالت $a'_n \equiv 0$ را بررسی کنید).

۳) فرض کنید، دنباله $\{a_n\}$، به‌سمت $a=0$ متقارب باشد و، درضمن، برابر هر $n\in\mathbf{N}$ داشته باشیم: $a_n \neq a$ و دنبالهٔ $\left\{\frac{a_{n+1}-a}{a_n-a}\right\}$ به‌سمت $\lambda \neq 1$ متقارب باشد:

الف) ثابت کنید $\lambda\in[-1, 1)$؛

ب) ثابت کنید برای هرمقدار $n\in\mathbf{N}$، بـا آغـاز از اندیسی مثل n_0، داریم: $\Delta^2 a_n \neq 0$؛

ج) $\lambda \neq 0$ می‌گیریم. بـرای هرمقدار $k\in\mathbf{Z}^+$، دربارهٔ تقارب دنبالهٔ $\left\{\frac{a'_n}{a_{n+k}}\right\}$ بحث کنید (حالت $k=0$ را، بـه طور جداگانه، مورد بررسی قرار دهید).

د) $\lambda = 0$ می‌گیریم. ثابت کنید، دنباله‌های $\left\{\frac{a'_n}{a_n}\right\}$ و $\left\{\frac{a'_n}{a_{n+1}}\right\}$ به‌سمت صفر متقاربند. نمونه‌ای برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ پیدا کنید که، به ازای آن، دنبالهٔ $\left\{\frac{a'_n}{a_{n+2}}\right\}$، حدی مخالف صفر داشته باشد.

ه) اگر شرط $a=0$ را در ۳) حذف کنیم، نتیجه‌ها، چه تغییری می‌کنند؟

۲. تابع‌های $f, g:[0, 1] \to \mathbf{R}$، با این ضابطه‌ها داده شده‌اند:

$$f(x)=\sqrt[4]{1-x},\quad g(x)=f(f(x))$$

و c را ریشه‌ای از معادلهٔ $x=f(x)$ می‌گیریم.

۱) الف) تابع $f(x)$ را بررسی و نمودار آن را رسم کنید. ثابت کنید، معادلهٔ $x=f(x)$، ریشه‌ای منحصر به فرد دارد، در ضمن، مقدار c، دربازهٔ $[0/72, 0/73]$ واقع است؛

ب) تابع $f'(x)$ را بررسی کنید. نقطه‌های M_1 و M_2 را روی نمودار تابع $f(x)$ طوری انتخاب کرده‌ایم که طول‌های برابر داشته باشند. کمان M_1M_2 از این نمودار، نسبت به پاره خط راست M_1M_2 چگونه قرار گرفته است؟

ج) تابع $g(x)$ را بررسی و نمودار آن را رسم کنید. این نمودار نسبت به خط راست $y=x$ چه وضعی دارد؟ مماس‌های بر نمودار را در نقطه‌های به‌طول ۰ و ۱ پیدا کنید.

د) ثابت کنید، هر دنبالهٔ $\{a_n\}$، با شرط‌های $a_1\in(0, 1)$ و $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\in\mathbf{N})$، متقارب است. (دنباله‌های $\{a_{2n-1}\}$، $\{a_{2n}\}$ $(n\in\mathbf{N})$ و تابع $g(x)$ را در نظر بگیرید و دربارهٔ توضیح نموداری فکر کنید).

۲) روی نمودار تابع $f(x)$، نقطه‌های M و M' را به طول‌های x و $f(x)$ درنظر می‌گیریم که درآن $x\neq c$.

الف) ثابت کنید، خط راست MM'، خط راست $y=x$ را، درنقطه‌ای به طول

$$h(x)=x-\frac{(f(x)-x)^2}{g(x)+x-2f(x)}$$

قطع می‌کند؛

ب) ثابت کنید، اگر $x\in(0, c)$، آن‌گاه $h(x)\in(x, c)$؛

ج) دنبالهٔ $\{a_n\}$ را، ازنظر تقارب، مورد بررسی قرار دهید، به‌شرطی که

$$a_1 \in (0, c), \quad a_{n+1} = h(a_n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

ثابت کنید، دنبالهٔ $\left\{\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}\right\}$ متقارب است و حد آن را پیدا کنید.

۳) فرض کنید، هر عدد $b \in [-2, 2]$ را به صورت مقدار $\widetilde{b}$، با p رقم بعد از ممیز، گردکرده باشیم. در این صورت و با این شیوهٔ گردکردن، مقدارهای تقریبی زیر را پیدا کنید:

الف) فرض کنید $a = 0/72$؛

ب) مقدار $\delta(a) = \widetilde{f(a)} - a$ را محاسبه کنید؛

ج) اگر $|\delta(a)| > 0/5 \times 10^{-p}$، آن‌وقت $\widetilde{h(a)}$ را محاسبه کنید و، با توجه به تعریف ب)، با مفروض بودن a، $\widetilde{h(a)}$ را به دست آورید؛

د) اگر $|\delta(a)| \leqslant 0/5 \times 10^{-p}$، آن وقت محاسبه را تمام کنید.

$\bar{c}$ را آخرین مقدار $\widetilde{h(a)}$ درمحاسبه‌ها می‌گیریم. با استفاده از این که برای هرمقدار $x \in [0/72, 0/73]$، داریم:

$$|\widetilde{f(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

برحسب مقدار $\delta(\bar{c})$ معین کنید، با چه دقتی (نسبت به ε) عدد c به وسیله $\bar{c}$ پیدا می‌شود؟

۴) فرض کنید، برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ داشته باشیم:

$$a_1 = 0/72, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

مطلوب است، حداقل اندیس $n_0 \in \mathbf{N}$ که، با آغاز آن، برای هرمقدار $n \in \mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$|a_n - c| < 10^{-6}$$

۱۷. کانادا

دانش‌آموزان کانادائی درمسابقه‌های ملی امریکا، که به‌وسیلهٔ MAA برنامه‌ریزی می‌شود، ازسال ۱۹۵۸ به‌این‌طرف، شرکت‌می‌کنند. المپیادهای ریاضی داخلی کانادا، از سال ۱۹۶۹ آغاز شده است. مسأله‌های المپیادها،

درمجلهٔ زیر چاپ می‌شوند.

«Crux Mathematicorum»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای کانادا (سال ۱۹۸۶)

۰۱ نقطهٔ D را روی ضلع AC از مثلث ABC طوری درنظر گرفته‌ایم که داریم:

$$CD = AB = ۱,\qquad \widehat{ABD} = ۹۰^\circ,\qquad \widehat{CBD} = ۳۰^\circ$$

مطلوب است طول AD.

۰۲ مسابقهٔ قهرمانی، بین ۳ شرکت کنندهٔ A و B و C، شامل n مسابقه است. درهرمسابقه، به‌نفر اول $m_۱$، به‌نفر دوم $m_۲$ و به نفر سوم $m_۳$ امتیاز داده می‌شود که، در آن‌ها، $m_۱$ و $m_۲$ و $m_۳$ عددهایی طبیعی و $m_۱ > m_۲ > m_۳$. در انتهای مسابقه‌ها، A به تعداد ۲۲ امتیاز و B و C هریك ۹ امتیاز آوردند. شرکت کنندهٔ B، درمسابقهٔ دو ۱۰۰ متر برنده بود. مقدار n را پیدا کنید و معلوم کنید چه کسی درپرش ارتفاع دوم شده است.

۰۳ وتر CD از نیم دایرهٔ به قطر AB، طول مفروضی دارد. M را وسط وتر CD و H را پای عمود وارد از نقطهٔ C بر قطر AB گرفته‌ایم. ثابت کنید، مقدار زاویهٔ CHM، به‌جای وتر CD بستگی ندارد.

۰۴ برای عددهای طبیعی m و n فرض می‌کنیم:

$$f(m, n) = \sum_{k=۱}^{m} k^{۲n-۱}$$

ثابت کنید، برای هرمقدار $m, n \in \mathbf{N}$، عدد $f(m, n)$، برعدد $f(m, ۱)$ بخش‌پذیر است.

۰۵ ثابت کنید، اگر برای دنبالهٔ عددهای درست $a_۱$، $a_۲$، ... داشته باشیم:

$$a_۱ = ۳۹,\ a_۲ = ۴۵,\ a_{n+۲} = a_{n+۱}^۲ - a_n,\ (n \in \mathbf{N})$$

آن‌وقت، بی‌نهایت جمله دراین دنباله وجود داردکه بر ۱۹۸۶ بخش‌پذیرند.

۱۸. کوبا

ازسال ۱۹۶۲، مسابقه‌های جداگانه‌ای برای دانش‌آموز [illegible] آغاز شد. نخستین المپیاد ریاضی سراسری در سال ۱۹۷۰ سازمان داده شد. المپیادها در سه مرحله انجام می‌گیرند. در هر مرحله، ۴ ساعت وقت داده می‌شود، در دو مرحلهٔ اول و دوم ۳ مسأله، و در مرحلهٔ سوم ۴ مسأله برای حل به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌شود.

۱۹. لوکزامبورگ

در لوکزامبورگ، المپیادهای داخلی ریاضی وجود ندارد. از سال ۱۹۶۳، هرسال، قریب ۸۵ دانش‌آموز کلاس‌های ۱۱ تا ۱۳، در مسابقه‌ای شرکت می‌کنند که، مسأله‌های آن، از مسأله‌های مسابقهٔ ملی امریکا، که به وسیله MAA برگزار می‌شود، اقتباس شده است.

۲۰. لهستان

از سال ۱۹۴۹ به‌این طرف، هرسال، المپیاد ریاضی، به‌وسیلهٔ انجمن ریاضی لهستان، برگزار می‌شود. هر المپیاد ۳مرحله دارد. مرحلهٔ اول سه ماه طول‌می‌کشد وخصلت غیابی‌دارد: درابتدای هرماه، ۴مسأله به دانش‌آموزان داده می‌شود که باید آن‌ها در خانه، درطول یك ماه، حل‌کنند. مرحلهٔ دوم (که حضوری است) ۲ روز طول می‌کشد: هر روز سه مسأله و چهارساعت وقت به دانش‌آموزان داده می‌شود. مرحلهٔ سوم، که در ورشو برگزار می‌شود، کاملاً شبیه مرحلهٔ دوم است. به‌این ترتیب، درمرحلهٔ اول ۱۲ مسأله با سه ماه وقت و در هر یك از دو مرحلهٔ بعدی، ۶ مسأله با ۱۰ ساعت وقت به دانش‌آموزان عرضه می‌شود. مسأله‌های المپیادها و راه حل‌های آن‌ها، در مجلهٔ «Matematyka» چاپ می‌شود که از سال ۱۹۴۸، آغاز به انتشار کرده است.

نمونه‌ای از مسأله‌های مرحلهٔ سوم المپیادهای لهستان (سال ۱۹۸۶)

۱. مطلوب است همهٔ مقدارهای $n \in \mathbf{N}$ که، برای هر کدام آن‌ها، چند جمله‌ای درجهٔ n با ضریب‌های حقیقی وجود داشته باشد، به نحوی که

نابرابری $f(x) \geqslant f'(x)$، برای هرمقدار $x \in \mathbf{R}$ برقرار باشد.

۲. $2n$ نفر ($n > 1$)، درمسابقهٔ شطرنج شرکت کرده‌اند؛ درضمن، هر دو نفر از آن‌ها، بیش ازیك دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت‌کنید، با این شرط‌ها، تمامی مسابقه، درحالتی‌که هیچ سه بازی‌کنی سه بار بین خود بازی نکرده باشند، تنها وقتی ممکن است که، تعداد همهٔ دورهای بازی مسابقه، از n^2 تجاوز نکند.

۳. AK، BL و CM را ارتفاع‌های مثلث ABC و نقطهٔ N را وسط ضلع AC می‌گیریم؛ ثابت کنید، چهار نقطهٔ K، L، M و N روی محیط یك دایره واقع‌اند.

۲۱. مجارستان

تاریخ برگزاری المپیادهای ریاضی در مِجارستان، به سدهٔ قبل برمی‌گردد، وقتی‌که، انجمن ریاضی‌فیزیك مجارستان، درسال ۱۸۹۴، تصمیم گرفت، المپیادها را، برای فارغ‌التحصیلان دبیرستان‌ها برگزار کند. این المپیادها، نام اتووش را (ازنام رئیس‌انجمن‌فیزیك: لورنتس اتووش) به‌خود گرفت که‌هرساله‌تاسال ۱۹۴۳ انجام می‌شد (باسه‌سال وقفه‌در وسط). ازسال ۱۹۴۷، به ابتکار انجمن ریاضی مجارستان، المپیادها تجدید شد. در سال ۱۹۴۹، نام ژوزف کورشاك، استاد دانشگاه بوداپست را به خود گرفت. المپیادهای کورشاك، تا به امروز ادامه دارد. به شرکت کنندگان مسابقهٔ کورشاك، ۳ مسألهٔ و ۴ ساعت وقت داده می‌شود. در المپیادهای زمان‌حاضر، علاوه بر فارغ‌التحصیلان دبیرستان‌ها، دانش‌آموزان کلاس‌های پایین‌تر هم شرکت می‌کنند. به جز مسابقهٔ کورشاك، ۱۳ المپیاد دیگر هم در مجارستان، هرسال انجام می‌شود که، دربین‌آن‌ها، می‌توان ازمسابقهٔ ملی به نام د.آرانی، مؤسس مجلهٔ ریاضی

«Közepiskolai Matematikai Lapok»

که از سال ۱۸۹۴ چاپ می‌شود، نام برد. این مسابقه، برای نخستین بار، در سال ۱۹۲۳ سازمان داده شد. در حال‌حاضر، این مسابقه، در ۲ مرحله

برای کلاس‌های ۹ و ۱۰ و در ۴ مرحله برای کلاس‌های ۷ و ۸ برگزار می‌شود.

مسأله‌های المپیادهای ریاضی، به‌طور منظم، در مجله‌ای که در بالا نام بردیم، چاپ می‌شوند.

۲۲. مغولستان

المپیاد ریاضی دبیرستان‌های مغولستان، از سال ۱۹۶۳، در ۴ مرحله برای کلاس‌های ۱۰، در ۳ مرحله برای کلاس‌های ۷ تا ۹ و در دو مرحله برای کلاس‌های ۱ تا ۶ انجام می‌شود. از بین ۱۴ نفر کلاس دهم، که در مرحلهٔ چهارم موفق شده‌اند، تعدادی که برای شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی لازم است، انتخاب می‌شوند.

۲۳. ویتنام

نخستین المپیاد ریاضی در ویتنام، درسال ۱۹۶۲ برگزار شد و از آن زمان، هر سال، جریان دارد و از سال ۱۹۷۵، که کشور متحد شد، المپیاد سراسری انجام می‌گیرد. در ویتنام، دوران تحصیلی تا پایان دبیرستان، سه مرحله دارد: کلاس‌های ۱ تا ۵؛ کلاس‌های ۶ تا ۹ و کلاس‌های ۱۰ تا ۱۲. در سال‌های اخیر، المپیاد ریاضی ویتنام، در ۴ مرحله انجام می‌گیرد و مسابقهٔ نهائی ۲ روز طول می‌کشد. هر روز ۳ تا ۴ مسأله با ۴ ساعت وقت داده می‌شود. بین حدود ۲۰ نفرکه در مرحلهٔ نهائی المپیادهای کلاس‌های ۱۱ و ۱۲ موفق شده‌اند، یك مسابقهٔ انتخابی برگزار می‌شود و، از میان آن‌ها، هیأت شرکت کننده درالمپیاد بین‌المللی‌ریاضیات، برگزیده می‌شود.

۲۴. هلند

المپیادهای ریاضی، از سال ۱۹۶۲، در هلند سازمان داده شده است، که در دو مرحله انجام می‌شوند. قریب ۶۰ نفر ازکسانی که در مرحلهٔ اول موفق شده‌اند، به مرحلهٔ دوم راه می‌یابند. مجلهٔ «Pythagoras» (فیثاغورث) هم مسابقه‌های ریاضی خاص خود را در هلند ترتیب می‌دهد.

مجلهٔ «Euclid» (اقلیدس)، از سال ۱۹۲۵ در هلند منتشر مـی‌شود. بخش مسأله‌های مربوط به ریاضیات مقدماتی و آنالیز ریاضی، درمجلهٔ زیر چاپ می‌شود که ازسال ۱۹۱۳ پایه‌گذاری شده است:

«Nieuw tijdschrift voor Wiskunde»

۲۵. هندوستان

در هندوستان، هـر سال، المپیـادهـای غیابی، بین فارغ‌التحصیلان رشته‌های ریاضی دانشگاه‌ها برگزار می‌شود. در یك رشته از ایالت‌ها هم، المپیادهـایی بـرای دانش‌آموزان دبیرستانی وجود دارد (نخستین بار، از این‌گونه المپیادها، درسال ۱۹۵۸، در بنگال انجام گرفت) مجلهٔ

«The mathematical student»

هم درهندوستان منتشرمی‌شود که مسابقه‌هایی برای حل‌مسأله‌ها برگزار می‌کند.

۲۶. یوگسلاوی

ازسال ۱۹۵۰، المپیادهای ریاضی یوگسلاوی، درچارچوب یك‌شهر، یك منطقه یا یك جمهوری انجام می‌شد. از سال ۱۹۶۰، مسابقه‌های ریاضی سراسر یوگسلاوی سازمان داده شد که در چهار مرحله (مدرسه‌ای، منطقه‌ای، جمهوری و سراسر یوگسلاوی) در هرسال انجام می‌گیرد. از سال ۱۹۶۳ برای تعیین هیأت نمایندگی یوگسلاوی در المپیاد بین‌المللی ریاضی، یك مرحلهٔ دیگر به‌مرحله‌های قبلی اضافه شده است. مسأله‌های المپیادهای‌ریاضی یوگسلاوی، مرتباً در مجلهٔ زیر کـه برای دانش‌آموزان و دبیران دبیرستان منتشر می‌شود چاپ و راه‌حل‌های آن‌ها ارائه می‌شود:

«Matematicko ftzički list»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای ریاضی یوگسلاوی (سال ۱۹۸۶)

(دانش‌آموزان، بسته به‌این‌کـه متعلق به‌کدام کلاس باشند، می‌توانند یکی از سه مسأله را از هرگروه مسأله‌هـا (از ۱ تا ۴، از ۵ تا ۹ و از ۱۰ تا ۱۲) انتخاب کنند).

۱. ثابت کنید، می‌توان بی‌نهایت مقدار برای $n\in\mathbf{N}$ پیدا کـرد کـه،

به‌ازای هر کدام از آن‌ها، هر یك از عددهای n، $n+1$ و $n+2$ به‌صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست باشند.

۲. ثابت کنید، اگر برای چهارضلعی محدب $ABCD$ داشته باشیم:

$$AB+BD \leqslant AC+CD$$

آن وقت $AB \leqslant AC$.

۳. هر یك از زاویه‌های دو رأس B و C از مثلث ABC برابر ۴۰ درجه است. نقطهٔ D را روی امتداد ضلع AB (از طرف A) طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AD=BC$. زاویه‌های مثلث ADC را پیدا کنید.

۴. در هر خانه از صفحهٔ شطرنجی ۵×۵، یك سکه گذاشته‌ایم. می‌خواهیم چند بار، عمل زیر را انجام دهیم: دو سکهٔ دلخواه را انتخاب و هر کدام را درخانهٔ مجاور خود (که با آن ضلعی مشترك دارد) منتقل می‌کنیم. آیا می‌توان با چندبار انجام این‌عمل، همهٔ ۲۵ سکه را درخانه‌ای که ازقبل معین شده است، جمع کرد؟

۵. ثابت کنید، اگر برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم:

$$۲m^۲+m=۳n^۲+n$$

آن وقت، عددهای $m-n$، $۲m+۲n+۱$ و $۳m+۳n+۱$، مجذورهای عددهای درستی هستند.

۶. ثابت کنید، برای عددهای حقیقی و دلخواه a و b و c، همیشه داریم:

$$\frac{a^۳}{a^۲+ab+b^۲}+\frac{b^۳}{b^۲+bc+c^۲}+\frac{c^۳}{c^۲+ca+a^۲} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{۱}{۳}(a+b+c)$$

۷. روی محیط دایرهٔ به قطر AD، نقطهٔ B، و روی قطر AD، نقطهٔ C

را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AB=CD$. ثابت کنید، درمثلث ABC، نیمساز رأس A، میانهٔ رأس B و ارتفاع رأس C، از یك نقطه می‌گذرند.

۸. ثابت کنید، از بین ۵ عدد مثبت دلخواه، ولی مختلف، می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که، نه مجموع و نه تفاضل آن‌ها، برابر هیچ کدام از ۳ عدد دیگر نباشند.

۹. همهٔ تابع‌های صعودی $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را طوری پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(x+f(y))\equiv f(x+y)+۱،\ (x، y\in\mathbf{R})$$

۱۰. ثابت کنید، اگر عددهای حقیقی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n در برابری

$$(n-۱)(x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲)=(x_۱+x_۲+\dots+x_n)^۲$$

صدق کنند، آن وقت، یا همهٔ آن‌ها غیرمنفی و یا همهٔ آن‌ها غیرمثبت‌اند.

۱۱. از وسط هرضلع یك چهارضلعی محاطی، عمودی برضلع روبه‌رو رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، همهٔ این عمودها از یك نقطه می‌گذرند.

۱۲. بزرگترین عدد $n\in\mathbf{N}$ را طوری پیدا کنید که ویژگی زیر را داشته باشد: برای هرگونه شماره‌گذاری خانه‌های صفحه شطرنج باعددهای ۱، ۲، ...، ۶۴، دو خانهٔ مجاور وجود داشته باشد که تفاضل شماره‌های آن‌ها، از n کمتر نباشد (دو خانه را مجاور گوییم که در یك ضلع مشترك باشند).

II

المپیادهای ریاضی منطقه‌ای

۱. المپیاد اطریش - لهستان

المپیادهای ریاضی اطریش - لهستان، ازسال ۱۹۸۲ برگزار می‌شود. از هرکشور، ۶ شرکت کنندهٔ دانش آموز به المپیاد می‌فرستند. مسابقه ۳ روز

ادامه پیدا می‌کند. در دو روز اول برندگـان انفرادی و در روز سوم تیم برنده تعیین می‌شود.

۲. المپیاد بالکان

نخستین المپیـاد ریاضی بالکان در سال ۱۹۸۴ برگزار شد. در این المپیادها، کشورهای بلغارستان، یونان و رومانی شرکت می‌کنند. المپیادها را، انجمن ریاضی یونان و وزارت ورزش یونان سازمان داده‌اند. از هـر کشور، ۶ دانش‌آموز کلاس‌های ۱۱ و ۱۲ در المپیاد شرکت می‌کنند. در المپیاد ۴ مسأله به دانش‌آموزان داده می‌شود.

مسأله‌های سومین المپیاد ریاضی بالکان (بخارست، سال ۱۹۸۶)

۱. (یونان). خط راستی که از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محاطی‌مثلث ABC گذشته، محیط این دایره را در نقطه‌های D و E و محیط دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC را درنقطه‌های F و G قطع کرده است؛ درضمن، نقطهٔ D بین دو نقطهٔ O و F قـرار دارد. ثابت کنید $DF\cdot FG \geqslant r^2$. چـه مـوقـع، به علامت برابری می‌رسیم؟

۲. (بلغارستان). روی یال‌های AB، BC، AC، AD، BD و CD از چهاروجهی $ABCD$، به‌ترتیب، نقطه‌های E، F، G، H، K و L را انتخاب کرده‌ایم. ثابت‌کنید، اگر داشته باشیم:

$$AE\cdot BE = BF\cdot CF = AG\cdot CG = AH\cdot DH =$$

$$= BK\cdot DK = CL\cdot DL$$

آن وقت، نقطه‌های E، F، G، H، K و L، روی سطح یك کره‌اند.

۳. (بلغارستان). جمله‌های دنبالهٔ a_1، a_2، ...، برای مقدارهای حقیقی a و b و c، $ab\neq 0$ و $c>0$، در برابرهای

$$a_1 = a,\ \ a_2 = b,\ \ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + c}{a_n},\ \ (n\in\mathbf{N})$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید، همهٔ جمله‌هـای این دنباله وقتی، و تنهـا وقتی،

درست‌اندکه عددهای a، b و $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$، درست باشند.

۰۴ (رومانی). نقطهٔ M و صفحهٔ مثلث ABC طوری قرار گرفته‌اند که مثلث‌های MAB، MBC و MAC، محیط‌هایی برابر و مساحت‌هایی برابر دارند. ثابت کنید، اگر نقطهٔ M در درون مثلث ABC باشد، آن وقت این مثلث متساوی‌الاضلاع است، در غیر این صورت، مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود.

۰۳ المپیاد کشورهای اسکاندیناوی

در سال‌های اخیر، مسابقهٔ غیابی، در بین کشورهای اسکاندیناوی برگزار می‌شود. در این مسابقه، دانش‌آموزان کشورهای دانمارك، ایسلند، نروژ، فنلاند و سوئد شرکت می‌کنند.

۰۴ المپیادکشورهای مغرب

مغرب به قلمروی از افریقا گفته می‌شودکه در غرب اروپا قرار دارد (و در زمان ما، شامل کشورهای لیبی، تونس، الجزایر و مراکش می‌شود). این کشورهای شمالی افریقا، درابتدای سال‌های ۸۰، نخستین المپیاد ریاضی خود را، برای دانش‌آموزان، برگزارکردند.

مسأله‌های المپیاد مغرب (سال ۱۹۸۶)

۰۱ رقم‌های x و y و z را طوری پیدا کنید که، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، داشته باشیم:

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\cdots x}}_{\text{رقم } 2n} - \underbrace{\overline{yy\cdots y}}_{\text{رقم } n}} = \underbrace{\overline{zz\cdots z}}_{\text{رقم } n}$$

۰۲ خط راست موازی قطر AC از چهارضلعی محدب $ABCD$، از وسط قطر BD گذشته و خط راستی را که از وسط AC موازی BD رسم شده، در نقطهٔ O قطع کرده است. ثابت کنید، چهار ضلعی‌های $OABC$، $OBCD$، $OCDA$ و $ODAB$، مساحت‌هایی برابر دارند.

۰۳ ثابت کنید دنباله‌ای، و در ضمن تنها یك دنباله از عددهای

a_1، a_2، ... وجود دارد که با شرطهای زیر سازگار است:

$$-2<a_n<-1,\ n\ln\left(1+\frac{a_n}{n+1}\right)=a_n,\ (n\in\mathbf{N})$$

۴. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1، a_2، a_3، همیشه داریم:

$$3\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_1}\right)\geqslant 4\left(\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1}\right)^2$$

۵. دودایره در مرکز O مشترک‌اند. دو خط راستی که از O گذشته‌اند، دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های A و B و دایرهٔ کوچکتر را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند؛ در ضمن، O بین نقطه‌های A و C، و D بین نقطه‌های B و O قرار دارند. ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث AOB، دایرهٔ محیطی مثلث COD، دایرهٔ به قطر AC و دایرهٔ به قطر BD یکدیگر را در یك نقطه قطع می‌کنند.

۶. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$5^{2x}-3\times 2^{2y}+5^x\times 2^{y-1}-2^{y-1}-2\times 5^x+1=0$$

ضمیمهٔ ج

آگاهی‌های کمکی

در این ضمیمه، از مفهوم‌ها و حقیقت‌هایی یاد می‌کنیم که برای حل مسأله‌ها مفیدند (و گاهی‌هم، از چارچوب برنامهٔ دبیرستانی خارج می‌شوند). در این‌جا، برای این‌که گرفتار تفصیل نشویم، از اثبات قضیه‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم. خواننده می‌تواند، خود به‌عنوان تمرین به‌آن‌ها بپردازد و یا اثبات آن‌ها را درکتاب‌های مربوط پیدا کند.

*

تعریف ۱. مجموعهٔ A را، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B گویند (و می‌نویسند $A\subset B$)، وقتی که هر عضو مجموعهٔ A، متعلق به مجموعهٔ B باشد.

تعریف ۲. اجتماع $A\bigcup B$ از مجموعه‌های A و B، به مجموعه‌ای گفته می‌شود که شامل عضوهایی باشد که دست کم متعلق به‌یکی از دومجموعهٔ A و B باشند. اشتراك یا تقاطع $A\bigcap B$ ازمجموعه‌های A و B به‌مجموعه‌ای گفته می‌شود که، هر عضوآن، هم متعلق به A و هم متعلق به B باشد.

اجتماع و اشتراك چند مجموعه هم، به همین ترتیب تعریف می‌شوند.

تعریف ۳. تفاضل $A\setminus B$ از مجموعه‌های A و B، به زیرمجموعه‌ای‌از مجموعهٔ A گفته می‌شود که شامل همهٔ عضوهایی از آن باشد که به مجموعهٔ B تعلق ندارند.

سرانجام، مجموعه‌هایی که از عضوهای یکسان، ولی با ردیف‌های مختلف تشکیل شده باشند، یك مجموعه به حساب می‌آیند، مثلاً

$$\{۱، ۲، ۳\}=\{۲، ۳، ۱\}$$

در حالت‌هایی که، ردیف جمله‌های یك مجموعه، مورد نیاز باشد، به آن مجموعهٔ مرتب گویند.

تعریف ۴. حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ از مجموعه‌های A و B، به مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب $(x، y)$ گفته می‌شود که، درآن، $x\in A$ و $y\in B$.

به همین ترتیب، حاصل‌ضرب دکارتی چندمجموعه هم تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۱. (اصل دیریکله)، اگر مجموعه‌ای را که شامل n عضو است، به‌صورت اجتماع k زیرمجموعه نشان دهیم، آن وقت، دست کم یکی از این زیرمجموعه‌ها، شامل حداقل $\frac{n}{k}$ عضو است.

این قضیه، معمولاً در موقعیتی مورد استفاده قرار می‌گیرد که $k<n$ و، زیرمجموعه‌ها، دو به‌دو غیر متقاطع باشند.

قضیهٔ ۲. (اصل استقرای ریاضی). فرض کنید، برای گزاره $U(n)$، که به پارامتر n بستگی دارد، بدانیم:

الف) گزارهٔ $U(۱)$ درست است؛

ب) اگر برای مقداری از n، گزاره‌های $U(1)$، ...، $U(n)$ درست باشند، گزارهٔ $U(n+1)$ هم درست باشد؛

در این صورت، گزاره $U(n)$، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، درست است.

$f: A \to A$ به معنای تابعی است با دامنهٔ A و برد B.

تعریف ۵. تابع $f: A \to B$ مفروض است. تابع $g: B \to A$ را معکوس تابع f گویند (و به صورت $g=f^{-1}$ نشان می‌دهند)، وقتی که، این اتحادها برقرار باشند:

$$g(f(x))\equiv x،\ \ f(g(y))\equiv y،\ \ (x\in A،\ y\in B)$$

قضیهٔ ۳. تابع $f: A \to B$، تنها وقتی معکوس دارد که برای هر $y\in B$، مقدار $x\in A$، سازگار با شرط $f(x)=y$ وجود داشته باشد، و برای هر دو مقدار مختلف $x_1،x_2\in A$، مقدارهای $f(x_1)$ و $f(x_2)$ هم مختلف باشند.

تعریف ۶. انطباق دو تابع $f: A \to B$ و $g: B \to C$، به تابع $h: A \to C$ گفته می‌شود که با اتحاد زیر تعریف شده باشد:

$$h(x)\equiv g(f(x))،\ \ x\in A$$

به همین ترتیب، انطباق چند تابع

$$f_1: A_1 \to A_2،\ \ f_2: A_2 \to A_3،\ \ldots،\ f_n: A_n \to A_{n+1}$$

تعریف می‌شود. انطباق n تابع یکسان $f: A \to A$ را با نماد f^n نشان می‌دهند. اگر تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ مفروض باشد، انطباق

$$f^n(x)=f(f(f(\cdots(x)\ldots))))$$

یا تابع معکوس $f^{-1}(x)$ را نباید با تابعی که، در هر نقطهٔ x، برابر $(f(x))^n$ یا $(f(x))^{-1}$ است، اشتباه کرد. تابع‌های لگاریتمی و مثلثاتی استثنا هستند (مثلاً sin^2x برابر $sinx\cdot sinx$ است و نه $sin(sin(x))$).

*

تعریف ۷. تابع $f: A \to \mathbf{R}$ را

ــ از بالا کران‌دار (یا محدود) گویند، وقتی که عدد $M\in\mathbf{R}$ وجود داشته

باشد، به نحوی که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(x) < M$؛

ــ از پایین کران‌دار (یا محدود) گویند، وقتی که عدد $m \in \mathbf{R}$ وجود داشته باشد، به نحوی که، برای هر $x \in A$ داشته باشیم $f(x) > m$.

تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را که هم از بالا و هم از پایین کران‌دار باشد، تابع محدود گویند.

تعریف ۸. $A \subset \mathbf{R}$ می‌گیریم. تابع $f : A \to \mathbf{R}$.

صعودی است، اگر $f(x_1) > f(x_2)$؛

نزولی است، اگر $f(x_1) > f(x_2)$؛

غیرصعودی است، اگر $f(x_1) \geqslant f(x_2)$؛

غیرنزولی است، اگر $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

هر کدام از این شرط‌ها، برای عددهای دلخواه $x_1, x_2 \in A$ و $x_1 < x_2$ برقرارند. اگر تابع $f : A \to \mathbf{R}$، تنها یکی از این چهار ویژگی را داشته باشد، یکنوا (مونوتون) نامیده می‌شود. به تابعی که همیشه صعودی یا همیشه نزولی باشد، اکیداً یکنوا گویند.

به حالت خاصی از تابع $f : A \to \mathbf{R}$ که دامنهٔ تعریف آن زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد، یعنی نگاشت $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ یا $a : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ را دنبالهٔ عددی گویند و مقدارهای آن را با a_n نشان می‌دهند.

با توجه به تعریف‌های ۷ و ۸، مفهوم‌های دنبالهٔ کران‌دار از بالا یا پایین، دنبالهٔ محدود، دنبالهٔ صعودی یا نزولی، غیرصعودی یا غیرنزولی، یکنوا و اکیداً یکنوا هم روشن می‌شود.

*

قضیهٔ ۴ . برای عددهای دلخواه $a, b \in \mathbf{R}$ و $n \in \mathbf{N}$، همیشه داریم:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}),$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad (a \geqslant \sqrt{b},\ b > 0)$$

*

قضیهٔ ۵. (نابرابری برنولی). برای مقدارهـای دلخواه a، $b\in\mathbf{R}$ با شرطهای $a>-1$، $a\neq 0$، $b\neq 0$، $b\neq 1$، همیشه داریم:

$$(1+a)^b<1+ab \quad (0<b<1)$$

$$(1+a)^b>1+ab \quad (b\notin[0, 1])$$

تعریف ۹. واسطهٔ حسابی عددهای حقیقی a_1، …، a_n به عدد

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n},$$

واسطهٔ هندسی عددهای غیرمنفی a_1، …، a_n، به عدد

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n},$$

واسطهٔ توافقی عددهای مثبت a_1، …، a_n به عدد

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$$

و بالاخره، واسطهٔ مربعی عددهای حقیقی a_1، …، a_n به عدد

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$$

گفته می‌شود.

قضیهٔ ۶. (قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها). برای عددهای مثبت a_1، …، a_n، همیشه داریم:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$$

در ضمن، اگر بین این عددهـا، دست‌کم دو عدد مختلف وجود داشته باشد، همهٔ نابرابری‌ها اکید خواهند بود.

بیش از همه، نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی کاربرد دارد

که برای عددهای غیرمنفی هم درست است.

قضیهٔ ۷. دنبالهٔ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n\in\mathbf{N})$، صعودی و دارای حد است. حد این دنباله را با e نشان می‌دهند و، برای هر مقدار $n\in\mathbf{N}$، همیشه داریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

لگاریتم درمبنای e را لگاریتم طبیعی گویند و با نماد $\ln$ نشان می‌دهند ($x>0$ ،$log_e x=\ln x$).

تعریف ۱۰. تابع

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

را تابع علامت گویند.

تعریف ۱۱. بخش درست $[x]$ از عدد $x\in\mathbf{R}$، بـه بزرگتریـن عدد درستی گفته می‌شود که از x تجاوز نکند. بخش کسری عدد $x\in\mathbf{R}$ را با نماد $\{x\}$ نشان می‌دهند: $\{x\}=x-[x]$.

قضیهٔ ۸. بخش درست، تـابعی غیر نزولی است؛ ولی بخش کسری، تابعی متناوب است با دورهٔ تناوب ۱.

*

تعریف ۱۲. عددهای $a، b\in\mathbf{Z}$ $(b\neq 0)$ را مفروض می‌گیریم. دراین صورت، عددهای

$$q\in\mathbf{Z} \quad \text{و} \quad r\in\{0, 1, \ldots, |b|-1\}$$

را، به ترتیب، خارج قسمت و باقی‌مانده، در تقسیم a بر b گویند، وقتی‌که داشته باشیم:

$$a=qb+r$$

درحالتی کـه r بـرابـر صفر باشد، گویند: a بر b بخش‌پذیر است، یـا a

مضربی است از b، یا b مقسوم علیهی از a است (و به این صورت نشان می‌دهند: $a \vdots b$).

تعریف ۱۳. کوچکترین مضرب مشترک عددهای غیرصفر

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$$

به کوچکترین عدد طبیعی گفته می‌شود که بر هر یك از این عددها بخش‌پذیر باشد و به‌صورت $[a_1, \dots, a_n]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۴. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$$

که دربین آن‌ها، دست کم یکی مخالف صفر است، به بزرگترین عدد طبیعی گفته می‌شود که بر هر یك از این عددها بخش‌پذیر باشد و به این صورت نشان می‌دهند.

$$(a_1, \dots, a_n)$$

قضیهٔ ۹. برای هر دو عدد طبیعی a و b، همیشه داریم:

$$(a, b)\cdot[a, b] = ab$$

تعریف ۱۵. عددهای $a, b \in \mathbf{Z}$ را نسبت به هم اول گویند، وقتی که داشته باشیم: $(a, b) = 1$.

تعریف ۱۶. عددهای $a, b, c \in \mathbf{Z}$ را در نظر می‌گیریم؛ در ضمن $c \neq 0$. گویند عدد a نسبت به مدول c با عدد b هم‌نهشت است، وقتی که $(a-b)$ بر c بخش‌پذیر باشد و این‌طور می‌نویسند:

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, c)$$

در غیراین‌صورت، گویند عدد a نسبت به‌مدول c با b هم‌نهشت نیست و می‌نویسند:

$$a \not\equiv b\ (\mathrm{mod}\, c)$$

قضیهٔ ۱۰. عددهای درست a، b، c، d، m و k را، با شرط $m \neq 0$

و $k\neq 0$ درنظر می‌گیریم. دراین صورت، گزاره‌های زیر درست است:

الف) اگر $a\equiv b(\bmod m)$ و $b\equiv c(\bmod m)$، آن‌گاه $a\equiv c(\bmod m)$؛

ب) اگر $a\equiv b(\bmod m)$ و $c\equiv d(\bmod m)$، آن وقت

$$a+c\equiv b+d(\bmod m)،\ ac\equiv bd(\bmod m);$$

ج) اگر $a\equiv b(\bmod m)$، آن وقت برای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$a^n\equiv b^n(\bmod m);$$

د) اگر $a\equiv b(\bmod m)$، آن‌گاه $ak\equiv bk(\bmod mk)$؛

ه) اگر $a\equiv b(\bmod m)$ و $a\,\vdots\,k$، $b\,\vdots\,k$، $m\,\vdots\,k$، آن وقت

$$\frac{a}{k}\equiv\frac{b}{k}\left(\bmod\frac{m}{k}\right)$$

قضیهٔ ۱۱. برای هر $a، b\in\mathbf{Z}$ و $n\in\mathbf{N}$، این گزاره‌ها درست است:

الف). اگر $a\neq b$، آن‌گاه $(a^n-b^n)\,\vdots\,(a-b)$؛

ب) اگر $a\neq -b$، آن‌گاه $(a^{2n-1}+b^{2n-1})\,\vdots\,(a+b)$؛

ج) اگر $a\neq -b$، آن‌گاه $(a^{2n}-b^{2n})\,\vdots\,(a+b)$.

این قضیه نتیجه‌ای از قضیهٔ ۴، یا قضیهٔ ۱۰، ج) است.

m را عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ می‌گیریم. در تقسیم عددهای درست مختلف به‌عدد m، می‌توان به‌هریك از باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ...، $m-1$ رسید. با وجود این، توان nام عددهای درست، با تثبیت $n>1$، ممکن‌است همهٔ این باقی‌مانده‌ها را نداشته باشند.

قضیهٔ ۱۲. اگر توان nام عددها را ($2\leqslant n\leqslant 5$)، بر m تقسیم کنیم ($3\leqslant m\leqslant 10$)، تنها می‌توان به یکی از باقی‌مانده‌هایی رسید که درجدول ۲ (صفحهٔ ۶۱۸) داده شده‌اند.

معمولاً عدد را در دستگاه عددنویسی دهدهی در نظر می‌گیرند که می‌توان، به ترتیب زیر، آن را تعمیم داد.

تعریف ۱۷. گویند، عدد $n\in\mathbf{N}$ در عددنویسی به‌مبنای k ($k\in\mathbf{N}$، $k>1$) به صورت

جدول ۲

m \ n	۲	۳	۴	۵
۳	۰، ۱	۰، ۱، ۲	۰، ۱	۰، ۱، ۲
۴	۰، ۱	۰، ۱، ۳	۰، ۱	۰، ۱، ۳
۵	۰، ۱، ۴	۰، ۱، ۲، ۳، ۴	۰، ۱	۰، ۱، ۲، ۳، ۴
۶	۰، ۱، ۳، ۴	۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵	۰، ۱، ۳، ۴	۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵
۷	۰، ۱، ۲، ۴	۰، ۱، ۶	۰ ۱، ۲، ۴	۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶
۸	۰، ۱، ۴	۰ ۱، ۳، ۵، ۷	۰، ۱	۰، ۱، ۳، ۵، ۷
۹	۰، ۱، ۴، ۷	۰، ۱، ۸	۰، ۱، ۴، ۷	۰، ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸
۱۰	۰، ۱، ۴، ۵، ۶، ۹	۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹	۰، ۱، ۵، ۶	۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ۶، ۷، ۸، ۹

$$\overline{a_1 \cdots a_m}$$

نوشته می‌شود، به شرطی که داشته باشیم:

$$n = a_1 k^{m-1} + \cdots + a_{m-1} k^1 + a_m k^0$$

که در آن، a_1، ...، a_m، عددهای درست غیر منفی کوچکتر از k و، درضمن $a_i > 0$.

قضیهٔ ۱۳. برای هرعدد طبیعی و مفروض $k > 1$، می توان عدد $n \in \mathbf{N}$ را در عددنویسی به مبنای k نوشت و، درضمن، تنها به یك صورت.

قضیهٔ ۱۴. هرعدد طبیعی، نسبت به‌مدول ۹، با مجموع رقم‌های‌خودش در دستگاه دهدهی، هم‌نهشت است.

تعریف ۱۸. $n, m \in \mathbf{Z}$ و $n \geqslant m \geqslant 0$ می گیریم. ضریب دوجمله‌ای به عدد C_n^m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

گفته می‌شود که، در آن، فرض شده است:

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times n & (n \in \mathbf{N}) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

($n!$ را «فاکتوریل n» یا «n فاکتوریل» می‌خوانند).

قضیهٔ ۱۵. برای هر $n, m \in \mathbf{Z}^+$، رابطه‌های زیر برقرارند:

الف) $C_n^0 = C_n^1 = 1$؛

ب) $C_n^m = C_n^{n-m}$، با شرط $n \geqslant m \geqslant 0$؛

ج) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$، با شرط $n > m > 0$.

قضیهٔ ۱۶. (دوجمله‌ای نیوتون). برای هر $a, b \in \mathbf{R}$ و $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m +$$
$$+ \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

از این قضیه‌ها، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۱۷. همهٔ ضریب‌های بسط دوجمله‌ای، عددهای طبیعی هستند و، درضمن، این برابری‌ها برقرارند:

الف) $C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^n=2^n$؛

ب) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\dots+(-1)^nC_n^n=0$.

برابری‌های الف) و ب)، به ترتیب، از اتحاد قضیهٔ ۱۶ و با قرار-دادن $a=b=1$ و $a=-b=1$ به دست می‌آیند.

تعریف ۱۹. هرعدد طبیعی بزرگتر ازواحد،که به‌جز واحدو خودش، مقسوم‌علیه دیگری نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. عدد۱، نه اول است و نه مرکب.

قضیهٔ ۱۸. (قضیهٔ اصلی حساب). هرعدد مرکب را می‌توان به‌صورت ضرب چند عدد اول (که لزومی ندارد مختلف باشند) تجزیه کرد؛ در ضمن، اگر به ردیف عامل‌ها توجه نداشته باشیم، این تجزیه منحصر به فرد است.

قضیهٔ ۱۹. دنبالهٔ عددهای اول، نامتناهی است.

قضیهٔ ۲۰. (قضیهٔ لژاندر). اگر عدد $n!$ را به عامل‌های اول تجزیه کنیم، توان عدد اول p در این تجزیه، برابر است با

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\dots$$

(برای مقدارهای به قدر کافی بزرگ k، داریم: $\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$).

سه قضیهٔ زیر، مربوط به ویژگی‌های عددهایی است که نسبت به هم اول‌اند.

قضیهٔ ۲۱. a، b، $c\in\mathbb{Z}$ و $c\neq0$ می‌گیریم. اگر ab بر c بخش‌پذیر و b و c نسبت به هم اول باشند، آن وقت a بر c بخش‌پذیر است.

قضیهٔ ۲۲. a، b، c و m را عددهایی طبیعی می‌گیریم. اگر داشته باشیم:

$$ab=c^m \quad \text{و} \quad (a, b)=1$$

آن‌وقت $a=a_1^m$ و $b=b_1^m$، که در آن $a_1, b_1 \in \mathbf{N}$، در ضمن $(a_1, b_1)=1$ و $a_1 b_1 = c$.

قضیهٔ ۲۳. (قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها). اگر عددهای درست و غیر صفر m_1، ...، m_k، دو به دو نسبت به هم اول باشند، آن وقت، برای عددهای‌درست و دلخواه a_1، ...، a_k، عدد درست x وجود دارد که، به‌ازای $i=1$، ...، k، با شرط زیر سازگار است:

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

درضمن، عدد x می‌تواند متعلق به هر نیم بازهٔ به طول $m_1 m_2 \dots m_k$ باشد.

قضیهٔ ۲۴. برای هر دو عدد $a, b \in \mathbf{Z}$، که دست‌کم یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، عددهای $p, q \in \mathbf{Z}$ وجود دارند، به نحوی که در برابری زیر صدق کنند:

$$pa + qb = (a, b)$$

قضیهٔ ۲۵. (قضیهٔ کوچك فرما). اگر $a \in \mathbf{Z}$ بر عدد اول p بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت عدد $a^{p-1} - 1$ بر p بخش‌پذیر است. از قضیهٔ کوچك فرما، به سادگی قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲۶. p را عددی اول می گیریم. دراین صورت، برای هر مقدار $a \in \mathbf{Z}$، داریم:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

*

قضیهٔ ۲۷. (دربارهٔ مقدارهای بینابینی تابع‌های پیوسته). تابع $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ را در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته می‌گیریم. در ضمن، $A=f(a)<f(b)=B$. در این صورت، برای هر عدد $C \in (A, B)$، می‌توان عدد $c \in (a, b)$ را طوری پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم: $f(c)=C$.

گزارهٔ زیر، حالت خاصی ازقضیهٔ ۲۷ است.

قضیهٔ ۲۸ (دربارهٔ میل به سمت صفر). اگر تابع $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ دربازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، و در دو انتهای این بازه، مقدارهای غیرصفری

را، با علامت‌های مختلف، قبول کند، آن وقت، نقطهٔ $c\in(a, b)$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم: $f(c)=0$.

قضیهٔ ۲۹. اگر تابع $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، نقطه‌های $c, d\in[a, b]$ وجود دارند که برای آن‌ها و برای هر مقدار $x\in[a, b]$ داشته باشیم:

$$f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$$

از قضیهٔ ۲۹، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۳۰. هر تابع پیوسته در یک بازهٔ بسته، تابعی محدود است.

در زیر، I را به معنای بازه‌ای از محور عددی $\mathbf{R}$ گرفته‌ایم.

تابع $f:I\to\mathbf{R}$ را درنظر می گیریم. فرض می‌کنیم، این تابع، در هر نقطهٔ $x\in I$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی مشتق $f'(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت، تابع جدید $f':I\to\mathbf{R}$ به دست می‌آید که، مقدارهای آن در هر نقطهٔ $x\in I$، عدد $f'(x)$ است. این تابع را، مشتق اول f گویند که می‌تواند، به نوبهٔ خود، در هر نقطهٔ بازهٔ I، مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، مشتق آن را، مشتق دوم تابع اصلی f گویند. به همین ترتیب، می‌توان مشتق nام تابع f را، که به صورت $f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهند، تعریف کرد ($n=3, 4, \ldots$). معمولاً مشتق‌های اول و دوم وسوم را، به‌ترتیب، به‌صورت f'، f'' و f''' و گاهی مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر را به صورت f^{IV}، f^{V}، ... نشان می‌دهند.

تعریف ۲۰. تابع $f:I\to\mathbf{R}$ را

n بار مشتق‌پذیر گویند، وقتی که n عددی طبیعی باشد و تابع f، در هر نقطه از بازهٔ I، دارای مشتق مرتبهٔ nام باشد؛

n بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گویند، وقتی بتوان n بار متوالی از آن مشتق گرفت و، درضمن، $f^{(n)}$ دربازهٔ I پیوسته باشد؛

به طور نامتناهی مشتق‌پذیر گویند، وقتی که بتوان nامین مشتق آن را، به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، به دست آورد.

قضیهٔ ۳۱. (معیار یکنوا بودن). تابع $f:I\to\mathbf{R}$ را دربازهٔ I،

مشتق‌پذیر می گیریم. در این صورت، تابع f، تنها وقتی غیر نزولی (غیرصعودی) است که، درهر نقطهٔ $x\in I$ داشته باشیم $f'(x)\geqslant \circ$ ($f'(x)\leqslant \circ$).
اگر درهر نقطهٔ $x\in I$، نابرابری $f'(x)>\circ$ ($f'(x)<\circ$) برقرار باشد، آن وقت، تابع f را صعودی (نزولی) گویند.

تعریف ۲۱. تابع $f: I \to \mathbf{R}$ را محدب به طرف پایین در بازهٔ I گویند، وقتی که برای هر x، $y\in I$ و $\alpha\in[\circ، ۱]$ داشته باشیم:

$$f(\alpha x+(۱-\alpha)y)\leqslant \alpha f(x)+(۱-\alpha)f(y)$$

تابع $f:I \to \mathbf{R}$ را، در بازهٔ I، محدب به طرف بالا گویند، وقتی که تابع $g(x)=-f(x)$، درهمین بازه، محدب به‌طرف پایین باشد.

قضیهٔ ۳۲ (معیار تحدب). تابع $f:I \to \mathbf{R}$ را دربازهٔ $[a، b]$، دوبار مشتق‌پذیر می گیریم. در این صورت، تابع f، در این بازه، تنها وقتی تحدبی به‌طرف پایین (بالا) دارد که درهر نقطهٔ $x\in I$ داشته باشیم $f''(x)\geqslant \circ$ ($f''(x)\leqslant \circ$).

قضیهٔ ۳۳ (قضیهٔ لاگرانژ). تابع $f:[a، b] \to \mathbf{R}$ را، دربازهٔ $[a، b]$ پیوسته و دربازهٔ $(a، b)$ مشتق‌پذیر فرض می کنیم. در این صورت، عدد $c\in(a، b)$ وجود دارد، به‌نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

گزارهٔ زیر، حالت خاصی ازقضیهٔ لاگرانژ است.

قضیهٔ ۳۴ (قضیهٔ رول). تابع $f:[a، b] \to \mathbf{R}$ را در بازهٔ $[a، b]$ پیوسته و دربازهٔ $(a، b)$ مشتق‌پذیر می گیریم؛ درضمن $f(a)=f(b)$. در این صورت، عدد $c\in(a، b)$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم: $f'(c)=\circ$.

*

تعریف ۲۲. مجموعهٔ $\mathbf{C}$ از عددهای مختلط، به مجموعهٔ زوج‌های مرتبی ازعددهای حقیقی گفته می‌شود که بتوان، دربارهٔ آن‌ها، عمل‌های جمع و ضرب را، به‌ترتیب زیر، انجام داد:

$$(a، b)+(c، d)=(a+c، b+d)،$$

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$$

که در آن‌ها، a، b، c و d، عددهایی حقیقی‌اند. یادآوری می‌کنیم که

$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0) \quad \text{و} \quad (a, 0)(b, 0)=(ab, 0)$$

به همین مناسبت، عدد مختلط $(a, 0)$ را، معمولاً، با عدد حقیقی a، یکی می‌دانند. عددمختلط $(0, 1)$ را، واحد موهومی می‌نامند و با i نشان می‌دهند. برای واحد موهومی، داریم:

$$i^2=-1$$

هرعدد مختلط (a, b) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(a, b)=(a, 0)+(b, 0)(0, 1)$$

به همین دلیل، عدد مختلط (a, b) را به‌صورت $a+bi$ می‌نویسند.

تعریف ۲۳. $a\in\mathbf{R}$ را بخش حقیقی عدد مختلط $z=a+bi$ می‌نامند (و با نماد $a=\operatorname{Re} z$ نشان می‌دهند)؛ همچنین $b\in\mathbf{R}$ را بخش موهومی آن می‌نامند (و با نماد $b=\operatorname{Im} z$ نشان می‌دهند). عدد مختلطی را که بخش حقیقی آن صفر باشد (یعنی عدد bi)، موهومی خالص می‌گویند.

عمل‌های روی عددهای مختلط، از همان قانون‌های عمل‌های روی عددهای حقیقی پیروی می‌کنند: جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای جمع و ضرب، و همچنین قانون پخشی برای ضرب نسبت به جمع.

عددهای مختلط را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌های واقع بر صفحه نشان داد، به این ترتیب که، محور طول را برای بخش حقیقی و محور عرض را برای بخش موهومی عدد مختلط درنظر بگیریم.

تعریف ۲۴. بـه $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$، مدول (یا قدر مطلق) عدد مختلط $z=a+bi$ گویند.

قضیهٔ ۳۵. بـرای هرعدد $z\in\mathbf{C}$، نابرابری $|z|\geqslant 0$ بـرقـرار است، درضمن، برابری $|z|=0$ تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $z=0$.
برای هر $z, w\in\mathbf{C}$، همیشه داریم:

$$|zw|=|z|\cdot|w|$$

قضیهٔ ۳۶. (نابرابری مثلثی). برای هر دوعدد z، $w\in\mathbf{C}$، همیشه داریم:

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|$$

درضمن، علامت برابری تنها برای وقتی است کـه یا $z=0$ و یا $w=kz$ ($k\geqslant 0$).

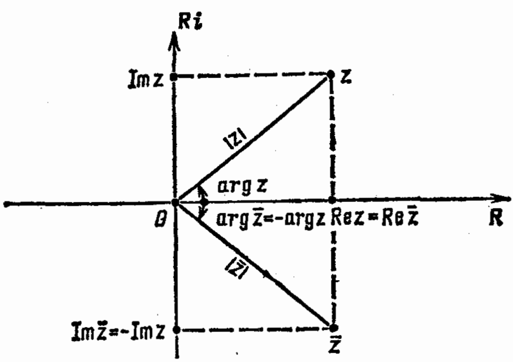
تعریف ۲۵. وقتی که عدد مختلط $z=a+bi$، بـرابـر صفر نباشد، به زاویهٔ φ را، که با رابطه‌های

$$\cos\varphi=\frac{a}{r},\quad \sin\varphi=\frac{b}{r},\quad (r=|z|)$$

تعریف می‌شود، آرگومان (یا آوند) عدد مختلط z گویند که با دقت تا جملهٔ $2\pi n$ معین می‌شود. مقدار زاویهٔ φ، در بازهٔ $[-\pi, \pi)$ به طور یك ارزشی معین می‌شود و، در این صورت، بـه آن، مقدار اصلی آرگـومـان گویند (و می‌نویسند: $\varphi=\arg z$).

مدول و آرگومان عدد مختلط را، در دستگـاه محورهـای مختصات، روی شکل ۱۳۷ نشان داده‌ایم.

قضیهٔ ۳۷ (شکل مثلثاتی عـدد مختلط). هـرعـدد غیر صفر $z\in\mathbf{C}$ را



شکل ۱۳۷

می‌توان به این صورت نوشت:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)، \quad (r=|z|، \varphi=\arg z)$$

تعریف ۲۶. عدد مختلط $\bar{z}=a-bi$ را مزدوج عدد مختلط $z=a+bi$ گویند.

قضیهٔ ۳۸. برای هرعدد $z\in\mathbf{C}$ داریم:

$$\operatorname{Re}\bar{z}=\operatorname{Re}z، \quad \operatorname{Im}\bar{z}=-\operatorname{Im}z، \quad (\bar{\bar{z}})=z$$

عدد z

الف) تنها وقتی حقیقی است که $\bar{z}=z$؛

ب) تنها وقتی موهومی است که $\bar{z}=-z$.

روی صفحهٔ مختلط، دو عدد مختلط مزدوج، نسبت به محور حقیقی، قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۱۳۷ را ببینید).

قضیهٔ ۳۹. برای هر $z، w\in\mathbf{Z}$ داریم:

$$|\bar{z}|=|z|، \quad z\bar{z}=|z|^{2}، \quad \overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}، \quad \overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$$

و اگر $z\neq 0$، آن وقت $\arg\bar{z}=-\arg z$، یا اگر $z<0$، آن وقت $\arg\bar{z}=\arg z=\pi$.

عمل‌های تفریق و تقسیم، به ترتیب، به عنوان عکس عمل‌های جمع و ضرب تعریف می‌شوند.

قضیهٔ ۴۰. اگر $z=a+bi$ و $w=c+di$ دو عدد مختلط دلخواه باشند، آن وقت، معادلهٔ $z+x=w$، درمجموعهٔ عددهای مختلط، یك جواب منحصر دارد (که آن را تفاضل عددهای w و z گویند):

$$x=c-a+(d-b)i$$

قضیهٔ ۴۱. $z=a+bi$ و $w=c+di$ را دو عدد مختلط می گیریم و، در ضمن $z\neq 0$. در این صورت، معادلهٔ $zx=w$، در مجموعهٔ عددهای مختلط، یك جواب منحصر دارد (که آن را خارج قسمت w بر z گویند):

$$x=\frac{w\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{ac+bd}{a^{2}+b^{2}}+\frac{ad-bc}{a^{2}+b^{2}}i$$

قضیهٔ ۴۲. اگر عددهای مختلط به صورت مثلثاتی داده شده باشند، ضرب و تقسیم آن‌ها، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

از این قضیه، می‌توان دو گزارهٔ زیر را نتیجه گرفت.

قضیهٔ ۴۳ (دستور مووار). توان nام $(n\in\mathbf{N})$ یك‌عدد مختلط، با دستور زیر بیان می‌شود:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

قضیهٔ ۴۴. برای هر عدد غیرصفر $z\in\mathbf{C}$ و هر عدد طبیعی n، معادلهٔ $x^n=z$، درمجموعهٔ عددهای مختلط، درست n ریشهٔ مختلف دارد، که آن‌ها را، ریشه‌های nام عدد z گویند.

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k\in\{0, 1, \dots, n-1\}$$

تعریف ۲۷. تابع عددی f، از آوند حقیقی یا مختلط x، وقتی زوج (فرد) است که با اتحاد $f(-x)\equiv f(x)$ (و برای تابع فرد $(f(-x)\equiv -f(x)$) سازگار باشد، $x\in\mathbf{R}$ یا $x\in\mathbf{C}$.

*

تعریف ۲۸. چند جمله‌ای (از یك متغیر) به تابعی از آوند حقیقی یا مختلط x گفته می‌شود که بتوان آن را به‌این صورت نشان داد:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

که‌درآن $n\in\mathbf{Z}^+$ و $a_0, a_1, \dots, a_n\in\mathbf{C}$، درضمن $a_n\neq 0$ (به‌شرط $n\geqslant 1$).

قضیهٔ ۴۵. دو چندجمله‌ای

$$P(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0,$$

$$Q(x)=b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0$$

باهم برابرند (یعنی، مثل دو تابع منطبق برهم‌اند)، تنها وقتی که داشته باشیم:

$$n=m,\ a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \ldots,\ a_n=b_n$$

تعریف ۲۹. عددهای a_0، a_1، ...، a_n را، ضریب‌های چندجمله‌ای

$$P(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$$

گویند. a_0 را جملهٔ آزاد یا مقدار ثابت چندجمله‌ای و a_n را ضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ چندجمله‌ای می‌نامند. در حالت $n\geqslant 1$، عدد n را درجهٔ چندجمله‌ای گویند (و با $\deg P$ نشان می‌دهند). درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)=a_0$ برابر صفر است اگر $a_0\neq 0$؛ و برابر -1 است، اگر $a_0=0$.

قضیهٔ ۴۶. $P(x)$ و $Q(x)$ را، دوچندجمله‌ای می‌گیریم. دراین‌صورت

الف) تابع $T(x)=P(x)+Q(x)$ هم یك چندجمله‌ای است، در ضمن

$$\deg T\leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

و اگر $\deg P\neq \deg Q$، آن وقت

$$\deg T=\max(\deg P, \deg Q)$$

ب) تابع $W(x)=P(x)Q(x)$ هم یك چندجمله‌ای است، در ضمن اگر $P(x)\not\equiv 0$ و $Q(x)\not\equiv 0$، آن‌وقت $W(x)\not\equiv 0$ و

$$\deg W=\deg P+\deg Q$$

تعریف ۳۰. ریشهٔ چند جمله‌ای $P(x)$، به جواب معادلهٔ $P(x)=0$ گفته می‌شود.

چندجمله‌ای‌ها را هم، مثل عددهای درست، می‌توان برهم تقسیم کرد (تقسیم با باقی‌مانده).

قضیهٔ ۴۷. چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را مفروض می‌گیریم، درضمن $Q(x)\not\equiv 0$. دراین‌صورت، چند جمله‌ای‌های منحصر به فرد $S(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که با این دو شرط سازگار باشند:

الف) $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$؛

ب) $\deg R < \deg Q$.

تعریف ۳۱. با توجه به شرط‌های قضیهٔ ۴۷، چند جمله‌ای $R(x)$ را، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ گویند. اگر $R(x) \equiv 0$، آن وقت، گویند چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ بخش‌پذیر است.

قضیهٔ ۴۸. اگر ضریب‌های چند جمله‌ای‌های P و Q، با توجه به شرط‌های قضیهٔ ۴۷، حقیقی باشند، آن وقت، ضریب‌های چند جمله‌ای‌های S و R هم حقیقی خواهند بود؛ اگر ضریب‌های P و Q گویا باشند، ضریب‌های S و R هم گویا هستند و، سرانجام، اگر ضریب‌های P و Q عددهایی درست باشند و، درضمن، ضریب بزرگترین درجه چند جمله‌ای Q برابر ۱ یا ۱ — باشد، آن وقت ضریب‌های S و R هم، عددهایی درست خواهند بود.

قضیهٔ ۴۹ (قضیهٔ بِزو). باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - x_0$، برابراست با $P(x_0)$.

گزارهٔ زیر، نتیجه‌ای از قضیهٔ بِزو است.

قضیهٔ ۵۰. چندجمله‌ای $P(x)$، تنها وقتی بر $x - x_0$ بخش‌پذیر است که، x_0، یکی از ریشه‌های آن باشد.

تعریف ۳۲. عدد x_0 را، ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ k $(k \in \mathbf{N})$ برای چندجمله‌ای $P(x)$ گویند، وقتی که $P(x)$ بر $(x - x_0)^k$ بخش‌پذیر و بر $(x - x_0)^{k+1}$ بخش‌ناپذیر باشد.

قضیهٔ ۵۱ (قضیهٔ اصلی جبر). هرچند جمله‌ای از درجهٔ $n \geqslant 1$، درست n ریشهٔ مختلط دارد.

به عنوان نتیجهٔ قضیه‌های ۵۲ تا ۵۴ به دست می‌آیند.

قضیهٔ ۵۲. اگر مقدارهای دو چندجمله‌ای، که درجهٔ هیچ کدام از آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند، در $n+1$ نقطهٔ مختلف بر هم منطبق باشند، آن وقت، این دو چندجمله‌ای، با هم برابرند.

قضیهٔ ۵۳. هر چندجمله‌ای $P(x)$ با درجهٔ $n \geqslant 0$ را، به صورتی منحصر به‌فرد می‌توان این‌طور نوشت:

$$P(x)=a_n(x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)$$

که‌در آن a_n، ضریب بزرگترین درجه، و $x_۱$، …، x_n، ریشه‌های چندجمله‌ای هستند.

قضیهٔ ۵۴. چند جمله‌ای $P(x)$، تنها وقتی بر چند جمله‌ای $Q(x)\not\equiv ۰$ بخش‌پذیر است که، هر ریشهٔ $Q(x)$، ریشه‌ای از $P(x)$ باشد و، در ضمن، اگر ریشه‌ای تکراری است، تکرار آن در $P(x)$ کمتر از تکرار آن در $Q(x)$ نباشد.

قضیهٔ ۵۵ (قضیهٔ ویت). $x_۱$، …، x_n را ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_۱x+a_۰$$

می‌گیریم. در این صورت، برابری‌های زیر برقرارند:

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-۱}}{a_n},$$

$$x_۱x_۲+x_۱x_۳+\cdots+x_{n-۱}x_n=\frac{a_{n-۲}}{a_n},$$

$$x_۱x_۲x_۳+x_۱x_۲x_۴+\cdots+x_{n-۲}x_{n-۱}x_n=-\frac{a_{n-۳}}{a_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_۱x_۲\cdots x_n=(-۱)^n\frac{a_۰}{a_n}$$

قضیهٔ عکس هم درست است.

قضیهٔ ۵۶. عددهای مختلط $x_۱$، …، x_n در دستگاه برابری‌های قضیهٔ ۵۷ صدق می‌کنند، در این صورت، این عددها، ریشه‌های چندجمله‌ای زیر هستند:

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_۱x+a_۰$$

قضیهٔ ۵۷. اگر چندجمله‌ای $P(x)$، ضریب‌هایی حقیقی داشته باشد،

و عدد مختلط z، با بخش موهومی غیرصفر، ریشهٔ آن باشد، آن‌وقت، مزدوج این عدد، یعنی عدد مختلط $\bar{z}$ هم، ریشه‌ای از آن خواهد بود. و، درضمن، با همان مرتبهٔ تکرار. درحالت خاص، چندجمله‌ای $P(x)$، بر چندجمله‌ای

$$(x-g)^k\cdot(x-\bar{z})^k=(x^2-2x\cdot\mathrm{Re}\,z+|z|^2)^k$$

بخش‌پذیر است که، درآن، k عبارت است ازمرتبهٔ تکرار ریشه‌های z و $\bar{z}$.

به عنوان نتیجه، می‌توان مشابه قضیهٔ ۵۳ را، برای چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های حقیقی، به دست آورد.

قضیهٔ ۵۸. هر چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های حقیقی و از درجهٔ n را، تنها به‌یك صورت منحصر، می‌توان تجزیه کرد:

$$P(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_m)\times$$
$$\times(x^2+2b_1x+c_1)\cdots(x^2+2b_lx+c_l)$$

که در آن، $m, l\geqslant 0$، $m+2l=n$، a_n ضریب بزرگترین درجهٔ $P(x)$، x_1، ...، x_m ریشه‌های حقیقی $P(x)$ و b_1، ...، b_l، c_1، ...، c_l عددهایی حقیقی‌اند؛ در ضمن، چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم

$$x^2+2b_1x+c_1, \ldots, x^2+2b_lx+c_l$$

دارای ریشه‌های حقیقی نیستند (یعنی $b_1^2<c_1$، ...، $b_l^2<c_l$).

قضیهٔ ۵۹. اگر عددگویای $\frac{p}{q}$، با شرط $(p, q)=1$، ریشه‌ای از چندجمله‌ای با ضریب‌های درست

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

باشد، آن وقت a_0 بر p و a_n بر q بخش‌پذیرند.

دوگزاره زیر، نتیجه‌ای از این قضیه است.

قضیهٔ ۶۰. هر ریشهٔ چندجمله‌ای با ضریب‌های درست

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

یا عددی است درست و یا عددی گنگ.

قضیهٔ ۶۱. اگر $a, n\in\mathbf{N}$، آن وقت عدد $\sqrt[n]{a}$، یا درست است و یا گنگ.

قضیهٔ ۶۲ (دستور درون یابی لاگرانژ). عددهای مختلف و مختلط $b_۰$، $b_۱$، ...، b_n و عددهای دلخواه و مختلط $c_۰$، $c_۱$، ...، c_n $(n\in\mathbf{Z}^+)$ را درنظر می‌گیریم. یك چند جمله‌ای منحصر به فرد $P(x)$، با درجه‌ای که از n تجاوز نمی‌کند، وجود دارد که در برابری‌های زیر صدق می‌کند.

$$P(b_۰)=c_۰, P(b_۱)=c_۱, \ldots, P(b_n)=c_n$$

این چندجمله‌ای، به‌این صورت است:

$$P(x)=\sum_{i=۰}^{n} c_i \prod_{\substack{۰\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{x-b_j}{b_i-b_j}$$

بستگی بین ضریب‌های چندجمله‌ای ومشتق‌های آن را مشخص می‌کنیم.

قضیهٔ ۶۳. این چندجمله‌ای را درنظر می‌گیریم:

$$P(x)=a_n x^n+\cdots+a_۱ x+a_۰$$

در این صورت

$$P(۰)=a_۰, \ P'(۰)=a_۱, \ P''(۰)=۲a_۲, \ldots, P^{(n)}(۰)=n!a_n$$

و چندجمله‌ای اصلی را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x)=\frac{P(۰)}{۰!}+\frac{P'(۰)}{۱!}x+\frac{P''(۰)}{۲!}x^۲+\cdots+\frac{P^{(n)}(۰)}{n!}x^n$$

تعریف ۳۳. $n\in\mathbf{N}$ فرض می‌کنیم. چندجمله‌ای با n متغیر، به مجموع محدودی از تابع‌های با آوندهای حقیقی یا موهومی $x_۱$، ...، x_n گفته می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، به این صورت باشند:

$$ax_۱^{k_۱}\ldots x_n^{k_n}, \ a\in\mathbf{C}, \ k_۱, \ldots, k_n\in\mathbf{Z}^+$$

*

قضیهٔ ۶۴ (نابرابری‌مثلث). برای‌هر سه نقطهٔ A، B و C، این نابرابری درست است:

$$AB \leqslant AC + BC$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که نقطهٔ C روی پاره‌خط راست AB و یا سه نقطه برهم منطبق باشند.

در دو تعریف زیر، مجموعه را به معنای مجموعه‌ای دلخواه از نقطه‌ها به‌کار برده‌ایم.

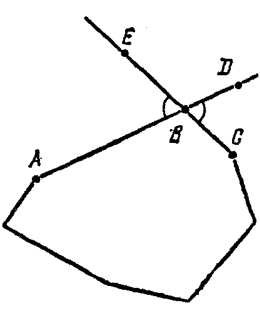
تعریف ۳۴. قطر مجموعه، به پاره‌خط راستی گفته می‌شود که بیشترین طول را داشته باشد و دو انتهای آن متعلق به این مجموعه باشد.

یادآوری می‌کنیم که، یك مجموعه، ممکن است بیش‌ازیك قطر داشته باشد و یا اصلاً قطری نداشته باشد.

تعریف ۳۵. یك مجموعه را وقتی محدب می‌گوییم که، علاوه بر نقطه‌های خود، شامل همهٔ پاره‌خط‌های راستی باشدکه دو انتهای هر یك از آن‌ها، متعلق به‌این مجموعه است.

دراین‌کتاب، هرجا ازچندضلعی نام برده شده‌است، منظور یك‌چندضلعی دلخواه است (که لزومی ندارد محدب باشد). هر وقت با چندضلعی محدب سروکار داشته‌ایم، واژهٔ «محدب» را ذکر کرده‌ایم.

قضیهٔ ۶۵. مجموع زاویه‌های هر n ضلعی $(n \geqslant ۳)$، برابر است با $۱۸۰^\circ(n-۲)$.



شکل ۱۳۸

تعریف ۳۶. A، B و C را سه رأس متوالی یك چند ضلعی محدب، و D و E را نقطه‌های دلخواهی، به ترتیب واقع برامتداد ضلع‌های AB و BC (از طرف B) می‌گیریم. در این صورت، زاویه‌های ABE و CBD (شکل ۱۳۸) را، زاویه‌های خارجی این چند ضلعی در رأس B می‌گویند (که با زاویهٔ ABC ـ زاویهٔ داخلی چند ضلعی ـ فرق دارند).

قضیهٔ ۶۶. مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی، به شرطی که در هر رأس یکی از آن‌ها را درنظر بگیریم، برابر ۳۶۰ درجه است.

تعریف ۳۷. می‌گویند چندضلعی M، به چندضلعی‌های M_1، ...، M_n تقسیم شده‌است، وقتی که داشته باشیم:

$$M = M_1 \cup \cdots \cup M_n$$

درضمن، چند ضلعی‌های M_i و M_j، برای $i \neq j$، نقطه‌های مشترك درونی نداشته باشند.

تعریف ۳۸. چند ضلعی m را محاط درچند ضلعی M گویند، وقتی که رأس‌های چند ضلعی m برضلع‌های چند ضلعی M واقع باشند.

قضیه ۶۷. چهار ضلعی محدب $ABCD$ را، تنها وقتی می‌توان در یك دایره محاط کرد که داشته باشیم:

$$\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \widehat{BAD} + \widehat{DCB} = 180^\circ$$

قضیه ۶۸. تنها وقتی درچهار ضلعی محدب $ABCD$ می‌توان دایره‌ای محاط کرد که داشته باشیم:

$$AB + CD = BC + AD$$

قضیه ۶۹. (قضیهٔ بطلمیوس). اگر $ABCD$ یك چهار ضلعی محاطی باشد، آن وقت

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

A و B را دو رأس مجاور یك چند ضلعی محاط در دایره فرض می‌کنیم. در این‌صورت، وقتی از کمان AB صحبت می‌کنیم، به معنای کمانی است که دو انتهای آن A و B باشند و، درضمن، شامل هیچ رأس دیگری از چندضلعی نباشد (مگر این‌که، برخلاف آن تأکید شده باشد).

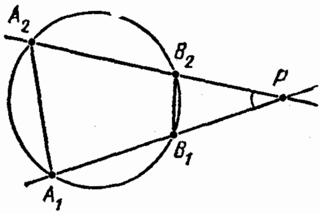
قضیه ۷۰ (قضیهٔ مربوط به زاویه‌های محاطی). برای هر مثلث ABC که در دایره‌ای محاط باشد، داریم:

$$\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\widehat{AC}$$

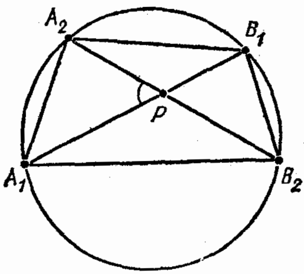
قضیهٔ ۷۱. محل برخورد قطرهـای چهار ضلعی محاطی $A_1A_2B_1B_2$ را P می‌گیریم. دراین‌صورت (شکل ۱۳۹) داریم:

الف) $A_1P \cdot B_1P = A_2P \cdot B_2P$؛

ب) $\widehat{A_1PA_2}=\frac{1}{2}(\widehat{A_1A_2}+\widehat{B_1B_2})$.



شکل ۱۴۰



شکل ۱۳۹

قضیهٔ ۷۲. $A_1B_1B_2A_2$ را یك چهـارضلعی محـاطـی می گیـریم. در این‌صورت

۱) خطهای راست A_1B_1 و A_2B_2، تنها وقتی بـا هم موازی‌اند که داشته باشیم: $A_1A_2=B_1B_2$؛

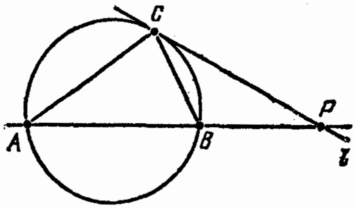
۲) پاره خطهای راست A_1B_2 و A_2B_2، تنها وقتی در نقطهٔ P، واقع در نیم صفحه‌ای که B_1B_2 نسبت به خط راست A_1A_2 قرار دارد، یکدیگر را قطع می‌کنند کـه داشته باشیم: $\widehat{A_1A_2}>\widehat{B_1B_2}$. درضمن (شکل ۱۴۰)، این برابری‌ها را داریم:

الف) $A_1P \cdot B_1P = A_2P \cdot B_2P$؛

ب) $\widehat{A_1PA_2}=\frac{1}{2}(\widehat{A_1A_2}-\widehat{B_1B_2})$.

وقتی از طول مماس مرسوم از نقطهٔ P بـر دایـره صحبت می‌کنیم، منظورمان، فاصلهٔ نقطهٔ P تا نقطهٔ تماس است. اگـر در قضیهٔ ۷۲ مماس را

به عنوان قاطعی در نظر بگیریم که دو نقطهٔ برخورد آن با دایره، بر هم منطبق‌اند، آن وقت، به قضیهٔ زیر می‌رسیم.



شکل ۱۴۱

قضیهٔ ۷۳. ABC را مثلثی محاط در دایره و خط راست l را مماس بر دایره در نقطهٔ C می‌گیریم. در این صورت

۱) خطهای راست l و AB، تنها وقتی باهم موازی‌اند که داشته باشیم: $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$؛

۲) خطهای راست l و AB، تنها وقتی در نقطهٔ P، واقع در همان نیم صفحه‌ای که نقطهٔ B نسبت به خط راست AC واقع است، یکدیگر را قطع می‌کنند که داشته باشیم: $\overset{\frown}{AC}>\overset{\frown}{BC}$. در ضمن (شکل ۱۴۱)، این برابری‌ها برقرارند:

الف) $AP\cdot BP=CP^{۲}$؛

ب) $\widehat{APC}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC})$.

از قضیه‌های ۷۰؛ ۷۱، ب)؛ ۷۲، ۲، ب)؛ ۷۳، ۲، ب)، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۷۴. AB را یك پاره خط راست، و α را یکی از دونیم‌صفحه، نسبت به خط راست AB، فرض می‌کنیم. دراین‌صورت، اگر φ، مقداری از بازهٔ $(۰^\circ ، ۱۸۰^\circ)$ باشد، آن‌وقت، مجموعهٔ نقطه‌های M از نیم صفحهٔ α که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $\widehat{AMB}=\varphi$، عبارت است از کمان دایره‌ای با دو انتهای A و B. اگر نقطهٔ $N\in\alpha$ در درون این دایره باشد، آن‌وقت $\widehat{ANB}>\varphi$ و در حالتی که در بیرون دایره باشد، آن وقت $\widehat{ANB}<\varphi$.

قضیهٔ ۷۵. درمثلث ABC، طول ضلع‌ها را

$$a=BC،\ b=AC،\ c=AB$$

اندازهٔ زاویه‌ها را

$$\alpha=\widehat{BAC}،\ \ \beta=\widehat{ABC}،\ \ \gamma=\widehat{ACB}$$

نصف محیط را $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$، شعاع دایرهٔ محاطی را r، شعاع دایره محیطی را R، طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را h_a و شعاع دایـرهٔ مماس بـر ضلع BC و امتدادهـای دو ضلع AB و AC را r_a فـرض می‌کنیم. در این صورت، مساحت S از مثلث ABC را، با هر یك از دستورهای زیر، می‌توان بیان کرد:

الف) $S=\frac{1}{2}ah_a$؛

ب) $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$؛

ج) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (دستور هرون)؛

د) $S=\frac{abc}{4R}$؛

ه) $S=rp$؛

و) $S=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$؛

ز) $S=\frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$.

دستور ه)، برای مساحت S از هر چند ضلعی با نیم محیط p و شعاع دایرهٔ محاطی r درست است.

قضیهٔ ۷۶. اگر a و b ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه، c وتر، r شعاع دایرهٔ محاطی و R شعاع دایرهٔ محیطی یك مثلث قائم‌الزاویه باشند، آن‌وقت

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)،\ \ R=\frac{1}{2}c$$

قضیهٔ ۷۷. اگر AL نیمساز مثلث ABC باشد، آن وقت

$$\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$$

قضیهٔ ۷۸ (برابری متوازی‌الاضلاع). برای هر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم:

$$AB^{2}+BC^{2}+CD^{2}+AD^{2}=AC^{2}+BD^{2}$$

قضیهٔ ۷۹. برای هر نقطهٔ P و هر مستطیل $ABCD$ داریم:

$$PA^{2}+PC^{2}=PB^{2}+PD^{2}$$

همهٔ تصویرهای برخط راست، در این کتاب، به معنای تصویرهای قائم‌اند.

قضیهٔ ۸۰. اگر A_1B_1 را تصویر پاره خط راست AB، برخط راستی که با AB زاویه‌ای (غیرصفر) برابر φ می‌سازد، فرض کنیم، آن‌وقت داریم:

$$A_1B_1=AB\cdot\cos\varphi$$

قضیهٔ ۸۱. $\mathbf{a}$ را برداری غیرصفر واقع بر صفحه، و O را نقطه‌ای از همین صفحه می‌گیریم، در این صورت، برای هر مقدار $k\in\mathbf{R}$، مجموعهٔ نقطه‌های X ازصفحه، که در برابری $\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{OX}=k$ صدق کنند، عبارت است از یك خط راست.

قضیهٔ ۸۲. برای هر گروه نقطه‌های A_1، ...، A_n و هر گروه عددهای حقیقی k_1، ...، k_n، که مجموع آن‌ها برابر صفر نباشد، نقطهٔ منحصر به فرد O وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{OA_i}=0$$

درضمن، برای هر نقطهٔ دلخواه P داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\cdot\overrightarrow{PO}=\sum_{i=1}^{n}(k_iPA_i)$$

سه تعریف، زیر، براساس همین قضیه تنظیم شده‌اند:

تعریف ۳۹. مرکز ثقل دستگاه نقطه‌های A_1، ...، A_n، به نقطهٔ O گفته می‌شود که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = 0$$

تعریف ۴۰. مرکز ثقل دستگاه پاره‌خطهای راست A_1B_1، ...، A_nB_n، به نقطهٔ O گفته می‌شود که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \overrightarrow{OM_i} = 0$$

که در آن l_i $(i = 1, \ldots, n)$، طول پاره‌خط راست A_iB_i و M_i، نقطهٔ وسط آن است.

تعریف ۴۱. مرکز ثقل دستگاه مثلث‌های $A_1B_1C_1$، ...، $A_nB_nC_n$، به نقطهٔ O گفته می‌شود که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot \overrightarrow{OM_i} = 0$$

که در آن S_i $(i = 1, \ldots, n)$، مساحت مثلث $A_iB_iC_i$ و M_i، نقطه برخورد میانه‌های آن است.

قضیهٔ ۸۳. اگر M، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، آن‌وقت برای هر نقطهٔ P (که لازم نیست حتماً درصفحهٔ مثلث باشد)، داریم:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

برای زاویه‌های مسطحهٔ یک کنج سه وجهی، نابرابری مثلثی زیر برقرار است.

قضیهٔ ۸۴. زاویه‌های مسطحه φ، ψ، χ در هر کنج سه وجهی، در نابرابری $\varphi < \psi + \chi$ صدق می‌کنند.

قضیهٔ ۸۵. مجموع زاویه‌های مسطحه، درهر کنج محدب، از ۳۶۰ درجه کمتر است.

تعریف ۴۲. چندوجهی m را محاط در چندوجهی M گویند، وقتی که هر رأس m بر وجهی از M واقع باشد.

قضیهٔ ۸۶. فرض کنید، سه خط راست که بر یك صفحه واقع نیستند، از نقطهٔ A گذشته باشند. روی این سه خط راست، به جز نقطهٔ A، به‌ترتیب، روی اولی نقطه‌های B_1 و B_2، روی دومی نقطه‌های C_1 و C_2 و روی سومی نقطه‌های D_1 و D_2 را در نظر می‌گیریم. در این صورت، برای نسبت V_1 به V_2، حجم‌های چهاروجهی‌های $AB_1C_1D_1$ و $AB_2C_2D_2$ داریم:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1}{AB_2\cdot AC_2\cdot AD_2}$$

قضیهٔ ۸۷. S_1 و S_2 را مساحت‌های دو وجه یك چهار وجهی، φ را زاویهٔ دو وجهی بین آن‌ها، a را طول یال مشترك آن‌ها، b را طول یال متقابل آن، d را فاصلهٔ بین این دو یال و ψ را زاویهٔ بین آن‌ها فرض می‌کنیم. در این صورت، برای V، حجم چهاروجهی داریم:

$$V=\frac{2S_1S_2\sin\varphi}{3a}=\frac{1}{6}abd\sin\psi$$

اگر در چهار وجهی $ABCD$، نقطه‌های E، F، G، H را وسط یال‌های AB، BC، CD، DA و S را مساحت متوازی‌الاضلاع $EFGH$ و d را فاصلهٔ بین یال‌های AC و BD فرض کنیم، آن وقت، برای حجم این چهاروجهی داریم:

$$V=\frac{2}{3}Sd$$

قضیهٔ ۸۸. حجم V هرم برابر است با

$$V=\frac{1}{3}hS_0$$

که در آن، S_0 مساحت قاعدهٔ هرم و h ارتفاع آن است. اگر کره‌ای وجود داشته باشد که برقاعدهٔ هرم و امتداد وجه‌های آن مماس باشد، آن وقت،

حجم هرم برابر است با

$$V=\frac{۱}{۳}r_{\circ}(Q-S_{\circ})$$

که در آن $r_{\circ}$، مساحت این کره و Q، مساحت سطح جانبی هرم است.

قضیهٔ ۸۹. حجم یك چند وجهی محیط بر کرهٔ به شعاع r، برابر است با

$$V=\frac{۱}{۳}rS$$

که در آن، S، مساحت سطح این چند وجهی است.

درحالت خاص، دو دستور قضیه‌های ۸۸ و ۸۹، برای چهاروجهی‌هم درست است.

در این کتاب، هرجا از تصویر بریك صفحه صحبت شده باشد، منظور تصویر قائم است.

قضیهٔ ۹۰. فرض کنید، دو صفحهٔ α و β، یکدیگر را تحت زاویهٔ φ قطع کرده‌باشند و درصفحهٔ α، شکلی به‌مساحت S واقع باشد. دراین‌صورت، مساحت تصویر این شکل برصفحهٔ β، برابر است با $S\cos\varphi$.

قضیهٔ ۹۱. $\mathbf{a}$ را برداری غیر صفر در فضا و O را نقطه‌ای دلخواه می‌گیریم. دراین‌صورت، برای هرمقدار $k\in\mathbf{R}$، مجموعهٔ نقطه‌های X از فضا، که در برابری $\mathbf{a}.\overrightarrow{OX}=k$ صدق کنند، عبارت است ازیك صفحه.

قضیهٔ ۹۲. سه پاره خط راستی که نقطه‌های وسط یال‌های رو به رو را در یك چهار وجهی $ABCD$ به هم وصل کنند، در یك نقطهٔ M به هم می‌رسند و M، وسط هریك ازاین پاره‌خط‌های راست است؛ درضمن، برای هر نقطهٔ P داریم:

$$\overrightarrow{PM}=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$$

قضیهٔ ۹۳ (دستور اولر). l را تعداد رأس‌های یك چندوجهی محدب،

m را تعداد یال‌ها و n را تعداد وجه‌های آن فرض می‌کنیم. دراین‌صورت، این برابری همیشه برقرار است:

$$l-m+n=۲$$

*

تعریف ۴۳. می‌گویند یك گراف مفروض است، وقتی‌که: اولاً مجموعه‌ای مثل $A=\{a_۱, \ldots, a_n\}$ تثبیت شده باشد، که هر عضو آن را یك‌رأس می‌نامند؛ ثانیاً مجموعهٔ زوج‌هایی‌که ازعضوهای مجموعه A تشکیل شده است، مشخص شده باشد، که هرعضو آن را یك یال می‌نامند. گراف را توجیه شده (یا جهت‌دار) گویند، وقتی که، یال‌های آن، زوج‌های مرتبی از رأس‌ها باشند.

به عنوان نمونه‌ای از گراف توجیه نشده، می‌توان ازگرافی نام برد که مجموعهٔ رأس‌های آن، گروهی از آدم‌ها، و یال‌های آن، زوج آدم‌های آشنای با هم باشند. درضمن، رابطهٔ آشنایی را متقارن به حساب می‌آورند، یعنی وقتی a با b آشنا باشد، به معنای آن است‌که b هم با a آشناست.

برای کار با گراف، بهتر است از مدل هندسی آن استفاده شود که به‌این ترتیب ساخته می‌شود: هر رأس‌گراف را متناظر با نقطه‌ای ازصفحه یا فضا، و هریال‌آن را متناظر با پاره‌خط راست یا یك منحنی می‌گیریم که دو انتهای آن بر دو رأس مربوط منطبق باشد (درحالتی‌که‌گراف توجیه شده باشد، باید جهت را روی یال‌ها مشخص‌کنیم).

تعریف ۴۴. دور (یا سیکل) به طول $k \geqslant ۲$ در گراف با رأس‌های $a_۱$، ...، a_n، به دنبالهٔ یال‌های مختلف به‌صورت زیر گفته می‌شود:

$$(a_{i_۱}, a_{i_۲}), (a_{i_۲}, a_{i_۳}), \ldots, (a_{i_{k-۱}}, a_{i_k}), (a_{i_k}, a_{i_۱})$$

قضیهٔ ۹۴. در گرافی که درست n رأس و n یال داشته باشد، دست‌کم یك دور وجود دارد.

*

تعریف ۴۵. اگر دو گروه عنصرهای

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ و } (b_1, \ldots, b_n)$$

از عنصرهایی یکسان تشکیل شده باشند و، اختلاف آن‌ها، تنها در ردیف عنصرها باشد، آن وقت، یکی از آن‌ها را تبدیل (یا جای‌گشت) دیگری گویند.

قضیهٔ ۹۵. تعداد تبدیل‌های گروهی که شامل n عنصر مختلف باشد، برابر است با $n!$.

قضیهٔ ۹۶. تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی از یك مجموعهٔ n عضوی $(0 \leqslant m \leqslant n)$ برابر است با C_n^m.

عدد C_n^m را، تعداد ترکیب‌های m به m از n عنصر هم می‌نامند.

از قضیهٔ ۱۷، الف) و قضیهٔ ۹۶، گزارهٔ زیر نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۹۷. تعداد همهٔ زیرمجموعه‌ها، در یك مجموعهٔ n عضوی، برابر است با 2^n.

ضمیمهٔ د

فهرست نمادها

$\varnothing$ ــ مجموعهٔ تهی

N ــ مجموعهٔ عددهای طبیعی

Z ــ مجموعهٔ عددهای درست

Z$^+$ ــ مجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی

Q ــ مجموعهٔ عددهای گویا

R ــ مجموعهٔ عددهای حقیقی

$\mathbf{C}$ ــ مجموعهٔ عددهای مختلط

∞ ــ نماد بی‌نهایت

$a \in A$ ــ عضو a متعلق به مجموعهٔ A است

$a \notin A$ ــ عضو a متعلق به مجموعهٔ A نیست

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ ــ مجموعه‌ای شامل عضوهای a_1، …، a_n

$(a_1, \ldots, a_n)$ ــ گروه مرتبی از عنصرهای a_1، …، a_n

$\{a_n\}$ ــ دنبالهٔ عددهای a_n بەازای $n \in \mathbf{N}$ یا $n \in \mathbf{Z}^+$

$\{a | \alpha\}$ ــ مجموعهٔ همهٔ عضوهای a، که دارای ویژگی α هستند

$B \subset A$ ــ B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A است

$A \bigcup B$ ــ اجتماع مجموعه‌های A و B

$\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$ ــ اجتماع همهٔ مجموعه‌های B_α، بەازای $\alpha \in A$

$A \bigcap B$ ــ اشتراک مجموعه‌های A و B

$\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$ ــ اشتراک همهٔ مجموعه‌های B_α بەازای $\alpha \in A$

$A \setminus B$ ــ تفاضل مجموعه‌های A و B

$A \times B$ ــ حاصل‌ضرب (دکارتی) مجموعه‌های A و B

$[a, b]$ ــ بازهٔ بستهٔ عددی با دو انتهای a و b

(a, b)ــ بازهٔ باز عددی با دو انتهای a و b

$(a, b]$ بازهٔ عددی $\{x | a < x \leqslant b\}$

$[a, b)$ ــ بازهٔ عددی $\{x | a \leqslant x < b\}$

$f: A \rightarrow B$ ــ تابع f با دامنهٔ تعریف A و برد B

f^{-1} ــ معکوس تابع f

f^n ــ انطباق مرتبهٔ n تابع f: $f^n(x) = \underbrace{f(f \ldots f}_{n \text{ بار}}(x))$

f' ــ مشتق اول تابع f

f'' ــ مشتق دوم تابع f

f''' ــ مشتق سوم تابع f

$\deg P$ ــ درجهٔ چندجمله‌ای P

i ــ واحد موهومی (فقط در فصل ششم)

π ــ طول نیم دایرهٔ به شعاع واحد

e ــ مبنای لگاریتم طبیعی

$\ln$ ــ لگاریتم طبیعی

$\operatorname{sig} n$ ــ تابع علامت (تعریف ۱۰)

$[x]$ ــ بخش درست عدد x

$\{x\}$ ــ بخش کسری عدد x

$\operatorname{Re} z$ ــ بخش حقیقی عدد z

$\operatorname{Im} z$ ــ بخش موهومی عدد z

$|z|$ ــ قدرمطلق (مدول) عدد z

$\arg z$ ــ آوند (آرگومان) عدد z

$\bar{z}$ ــ مزدوج عدد مختلط z

$\max\{x_1, \dots, x_n\}$ ــ بزرگترین عدد از بین عددهای x_1، ...، x_n

$\max\limits_{\alpha \in A}\{x_\alpha\}$ ــ بزرگترین عدد از بین عددهای x_α، برای $\alpha \in A$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ ــ مجموع عددهای x_1، ...، x_n

$\sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ ــ مجموع همهٔ عددهای x_α، برای $\alpha \in A$

$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ ــ حاصل‌ضرب عددهای x_1، ...، x_n

$\prod\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ ــ حاصل‌ضرب همهٔ عددهای x_α، برای $\alpha \in A$

$n!$ ــ فاکتوریل n (تعریف ۱۸)

C_n^m ــ ضریب دوجمله‌ای (تعریف ۱۸)

$\overline{a_1 \dots a_n}$ ــ عدد n رقمی

$a \vdots b$ ــ a بر b بخش‌پذیر است

$a \equiv b \pmod c$ ــ عدد a، نسبت به مدول c، بـا b هم نهشت است (تعریف ۱۶)

$a \not\equiv b \pmod{c}$ ـ عدد a نسبت به مدول c، با b هم نهشت نیست

$[a_1, \dots, a_n]$ ـ کوچکترین مضرب مشترك عددهای a_1، …، a_n

$(a_1, \dots, a_n)$ ـ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای a_1، …، a_n

AB ـ پاره خط راست با دو انتهای A و B، و یا طول آن

AB ـ خط راستی که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد

AB ـ نیم خط راست به مبدأ A که از B گذشته است

$\overset{\frown}{AB}$ ـ کمان با دو انتهای A و B و یا طول آن

ABC ـ صفحه‌ای که از سه نقطهٔ A و B و C گذشته است

$\overset{\frown}{ABC}$ ـ کمان با دو انتهای A و C و شامل نقطهٔ B

$\hat{A}$ ـ زاویهٔ به رأس A و یا اندازهٔ آن

$\widehat{ABC}$ ـ زاویهٔ به رأس B و ضلع‌های BA و BC، یا اندازهٔ آن

ΔABC ـ مثلث با رأس‌های A و B و C

$A_1 \dots A_n$ ـ چندضلعی با رأس‌های A_1، …، A_n.

P_M ـ محیط چندضلعی M

S_M ـ مساحت چندضلعی M

V_M ـ حجم چندوجهی M

$M_1 = M_2$ ـ چندوجهی‌های M_1 و M_2 برابرند

$M_1 \sim M_2$ ـ چندوجهی‌های M_1 و M_2 متشابه‌اند

$\overrightarrow{AB}$ ـ بردار با ابتدای A و انتهای B

$|\mathbf{a}|$ ـ طول بردار $\mathbf{a}$

$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ـ حاصل‌ضرب اسکالر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.