آ.ای. اوستروسکی
ا.ب. دینکین
س.آ. مالچانوف
آ.ل. روزنتال
آ.ک. تولپیگو

مسأله‌های ریاضی: آسان، ولی...

ترجمهٔ پرویز شهریاری

دهها سال است که آموزش ریاضی در برنامه‌های درسی ، جای نمایانی را گـرفته است . و این کاملا طبیعی است ، زیرا علاوه بر آنکه نظریه‌های ریاضی ، عامل اساسی پیشرفت دانش وصنعت در زمان ماست، روشهایی که در ریاضیات به کارمی‌رود، می‌تواند در سایر زمینه‌های تفکر انسانی، نمونه قرارگیرد و آدمی را ازکج اندیشی دورکند. ولی آیا آنچه‌که دربرنامه‌های درسی ، به آموزش ریـاضی اختصاص داده شده است، برای این منظورکافی است؟ اگر ازنارساییهای برنامه و کتاب و معلم بگذریم و اگر وجود کتابهای سطحی و ویران‌کنندهٔ «حل‌المسائل» را ندیده بگیریم و فرض را براین بگذاریم که همهٔ اینها در مرز بـالای درستی و دقت و شایستگی باشد ، باز هم به سادگی می‌توان احساس کرد که آموزش مدرسه‌ای نمی‌تواند جوابگوی نیازهای امروزی باشد ، زیرا اولا آموزش مدرسه‌ای تنگ ومحدود است : برنامه وکتاب ومعلم، باید بـا ساعتهای محدود درس کلاسی تطبیق کند و

فرصت تفکر و کاوش را از همه می‌گیرد . ساعتهای محدودی هم که در هفته به درس ریاضی مربوط می‌شود ، باید صرف بازرسی شاگردان، گفت وشنود در زمینه‌های بی‌معنی مربوط به مطالب غیر ریاضی و احیاناً یك «سخنرانی» کوتاه معلم در بارهٔ درس تازه بشود. تعداد زیاد شاگردان ونبودن محیط مناسب کار، امکان هرگونه تفکر سالم را در کلاس ، از شاگرد و معلم می‌گیرد و کار آنها را تبدیل به نوعی «کار تشریفاتی» می‌کند. این وضع نتیجهٔ طبیعی کار مدرسه‌ای است و تنها با تلاش فراوان ، ممکن است بتوان تا حدی آنرا تعدیل کرد . ثانیاً آموزش مدرسه‌ای هدفی غیر علمی را دنبال می‌کند : وجود نمره و امتحان و بالاخره مدرك تحصیلی و «مزایای قانونی» آن، به‌طور طبیعی آموزش مدرسه‌ای را از کار سالم و عمیق دور می‌کند و آنرا به صورت مرکزی درمی‌آورد، که همه برای رسیدن به دیپلم ولیسانس و غیرآن، با هم مسابقه می‌دهند. خود این‌صورت امتحان‌ونمره‌دادن وبازرسی کارهای شبانهٔ دانش‌آموز ودانشجوهم داستان شگفتی است که نمی‌دانم چگونه می‌خواهند به کمك آنها استعدادها را بشناسند وشور وشوق علاقه‌مندان را زیاد کنند . در همه جای دنیا ثابت شده است که این شیوهٔ ارزشیابی نادرست است وهرگزنمی‌تواند معیاری برای

شناسایی استعدادها و یا وسیله‌ای برای پیشرفت اندیشهٔ جوانان باشد. ثالثاً حرفهٔ معلمی، به صورتی که وجود دارد، خود نابود کنندهٔ استعدادها است. تجربه نشان داده است که قریب بـه اتفاق معلمین، با شروع کار خود، دست از مطالعه و تحقیق برمی‌دارند و چون خود را از «رقبای» خـود در حـرفه‌های دیگـر، از نظر مـالـی و حیثیت اجتماعی، «عقب‌تر» می‌بینند، می‌کوشند تا با «تدریس» زیادتر، «عقب‌ماندگی» خود را اجبران کنند. اینها بعد از مدتی، به‌صورت آدمهایی درمی‌آیند که به‌طور طبیعی از خصلتهای یك مربی (به مفهومی که تعریف می‌کنند) دور شده‌اند. اینها «روضه‌خوانهایی» می‌شوند که به خاطر کار زیاد و به خاطر تکرار یکنواخت مطالب در سالهای متوالی، قدرت خلاقـهٔ ذهنی را به تدریج از دست مـی‌دهند و جز در چهارچوب «درس تخصصی» خود، آن‌هم تنها برروالی که بارها تکرار کرده‌اند، از تفکر در زمینه‌های دیگر، باز می‌مانند. تنها آنها که به این درد واقفند و دائماً با آن می‌جنگند، می‌توانند آن‌هم تا حدی، در تسکین آن مـوفق شوند. این گناه معلم نیست، بلکه نتیجهٔ حرفهٔ معلمی به شیوهٔ امروزی آن است. من خود معلمم و به این بلیه گرفتار.

چه باید کرد؟ آیا، این به معنای آن است که باید آموزش مدرسه‌ای را رها کرد؟ من نمی‌دانم! این

چیزی است که باید آنهایی که صلاحیت این بحث را دارند، به آن بپردازند. ولی راههایی وجود دارد که می‌تواند تا حدی این نارساییها را برطرف کند که یکی از آنها، وجود کتابهای غیر درسی است. اگر این کتابها درست انتخاب شود و اگر به خوبی دردسترس جوانان ما باشد، می‌تواند ذوقها و استعدادها را به طرف خود جلب کند و با پیداکردن نیروی ذهنی نهفتهٔ آنها، درکار بارورکردن اندیشه‌هایشان، مؤثر افتد.

* * *

ریاضیات دو جهت به ظاهر متفاوت دارد: از یکطرف بیش ازحد انتزاعی است و رابطه‌ها و نظریه‌های آن، تنها در ارتباط با هم، شناخته می‌شود؛ ولی از طرف دیگر پیشاهنگ همهٔ دانشها است و همهٔ آنها، و به طبع آنها، صنعت و زندگی امروزی، وابسته به ریاضیات است.

ناچیزگرفتن هرکدام از این دو طرف، زیانهای جبران‌ناپذیری به‌بار می‌آورد. کسی که می‌خواهد با ریاضیات کار کند، باید هم به نیروی درونی آن (رابطه‌ها، قضیه‌ها، نظریه‌ها و به خصوص روشهای استدلال) توجه کند و هم به نیروی بیرونی آن (کاربرد آن در دیگر دانشها و در صنعت، رابطهٔ عمیق و جدی آن با عمل و زندگی روزانه، پیوستگی تاریخی آن و

بالاخره ، رابطه‌ای که با نیازهای زمان دارد) .

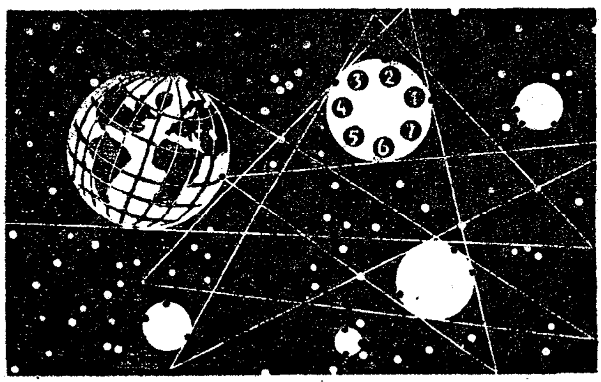
مطالعهٔ تاریخ ریاضیات (قصدم تاریخ ریاضیات است نه‌زندگینامهٔ ریاضی‌دانان ـ اگرچه آن‌هم به‌جای خود بی‌فایده نیست)، تطبیق مسأله‌های‌نظری ریاضی با عمل و زندگی روزانه ، جستجوی راه‌حلهای متفاوت وناآشنا برای مسأله‌های ریاضی، توجه به‌سرگرمیها و معماهایی که از دنیای دور برما فـراهم شده‌اند و... می‌تواند به‌هدف بارورکردن اندیشهٔ ریاضی‌و شکفتگی استعدادها کمك کند . و تـرجمهٔ این کتاب هم قدمی است که در این راه برداشته می‌شود .

مسأله‌های این کتاب ، از دو کتاب «مسأله‌های ریاضی» تألیف ا. ب. دینکین ، س. آ. مالچانوف ، آ. ل. روزنتال و آ. ك. تولپیگو (۱۷۰ مسألهٔ اول) و«۷۵مسأله ازریاضیات مقدماتی، آسان ولی...»تألیف آلکساندرایساآکوییچ اوستروسکی(ازمسألهٔ۱۷۰تامسألهٔ ۲۴۲)، برداشته‌شده است وجزدربعضی مواردوبه‌ندرت، که‌راه‌حلهایی‌ازطرف‌مترجم‌داده‌شده‌ویاراه‌حلهای کتاب اصلی مختصری تفاوت پیدا کرده است ، همه‌جا نوع استدلال و روش کار مؤلفین رعایت شده است .

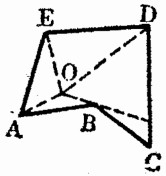
تمام صورت مسأله‌ها درابتدای‌کتاب (از صفحهٔ ۹ تا ۷۰) آمده است و سپس حل آنها در آخر کتاب (از صفحهٔ ۷۱ تا صفحهٔ ۲۴۷) ، اضافه شده است .

مترجم

مسأله‌ها



۱. از نقطهٔ O واقع در داخل چند ضلعی $ABCDE$ تمامی ضلعهای AB، DE و EA و فقط قسمتی از ضلع CD دیده می‌شود (شکل۱) .



شکل ۱

یك چند ضلعی رسم کنید که از نقطهٔ O واقع در داخل آن، هیچیك از ضلعها بطور کامل دیده نشود . یك چند ضلعی رسم کنید که از نقطهٔ O واقع در خارج آن، هیچیك از ضلعها بطور کامل دیده نشود .

۲. a) شما می‌خواهید شمارهٔ تلفن دوستتان را بدانید . دوست شما در برابر پرسشهای شما تنها «بله» یا «نه» می‌گوید . اگر شمارهٔ تلفن دوست شما پنج رقمی باشد، کمترین تعداد پرسشهای شما چقدر است ؟

b) حالا فرض کنید که دوست شما شرط کرده باشد که بتواند به یکی از پرسشها جواب نادرست بدهد ؛ در این صورت کمترین تعداد پرسشهای شما چقدر است ؟

۳. فاصلهٔ بین دو دهکدهٔ A و B مساوی ۳ کیلومتر است . ۱۰۰ دانش‌آموز در دهکدهٔ A و ۵۰ دانش‌آموز در دهکدهٔ B وجود دارد . در چه فاصله‌ای از دهکدهٔ A یك دبستان ساخته شود تا مجموع راهی که ۱۵۰ دانش‌آموز روی‌هم می‌پیمایند کمترین مقدار ممکن باشد ؟

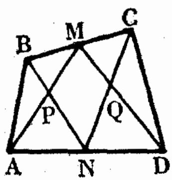
۴. a) با استفاده از یك پرگار، رأسهای مربع محاط در یك دایرهٔ مفروض را معین کنید (مرکز دایره معلوم است .)

b) دایرهٔ به قطر AB و نقطهٔ M واقع درخارج آن مفروض است . تنها با استفاده از یك خط‌کش، می‌خواهیم از نقطهٔ M عمودی بر AB یا امتداد آن رسم کنیم .

۵. مسافری به‌یك مهمانخانه وارد شد . اوپول نداشت ولی یك زنجیر نقره‌ای در اختیار داشت که شامل ۶ حلقه بود و به‌مدیرمهمانخانه پیشنهاد کرد که برای هرروز اقامت خود یکی از حلقه‌های زنجیر را به او بدهد . مدیر مهمانخانه پیشنهاد او را به این شرط قبول می‌کند که اولاً هرروز یکی از حلقه‌های زنجیر را از او بگیرد ، ثانیاً زنجیر تنها از یك نقطه پاره شود .

مسافر کدام حلقه را پاره کرد و چگونه پرداخت روزانهٔ خود را انجام داد ؟

۶. M و N را وسط ضلعهای روبرو در چهارضلعی $ABCD$ فرض کنید (شکل ۲) . ثابت کنید مساحت چهار ضلعی $MQNP$ برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث APB و CDQ .



شکل ۲

۷. هر یك از دو ضلع روبرو را در یك چهار ضلعی محدب به پنج قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم . خطهای راستی که نقطه های متناظر دوضلع را به هم وصل می‌کنند ، چهار ضلعی مفروض را به پنج چهارضلعی متوالی تقسیم می‌کنند . ثابت کنید مساحت چهارضلعی وسط یك‌پنجم مساحت چهارضلعی مفروض است .

۸. از رأس A در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، خطی رسم کنید که چهارضلعی را به دو شکل هم‌ارز (با مساحتهای مساوی) تقسیم کند .

۹. دنبالهٔ مسألهٔ ۵ : اگر مسافر ۱۰۰ روز در مهمانخانه بماند و زنجیری با ۱۰۰ حلقه در اختیار داشته باشد ، برای اینکه هرروز یك حلقه به مدیر مهمانخانه بدهد ، زنجیر را لااقل از چند نقطه باید پاره کند ؟ جواب را در حالت کلی (یعنی برای n روز با

یك زنجیر n حلقه‌ای) هم پیدا کنید .

۱۰ عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت ۱۲ کاملاً بر هم منطبق اند . بعد از چه مدتی که از ساعت ۱۲ بگذرد ، این دو عقربه دوباره روی هم قرار می‌گیرند ؟

۱۱. در یك فنجان ۵ قاشق چای و در فنجان دیگر ۵ قاشق شیر وجود دارد . یك قاشق شیر از فنجان دوم بر می‌داریم و در فنجان اول می‌ریزیم ؛ سپس آنرا با دقت به هم می‌زنیم و یك قاشق چای مخلوط با شیر به فنجان دوم برمی‌گردانیم . کدام بیشتر خواهد بود : مقدار چایی که در فنجان شیر است یا مقدار شیری که در فنجان چای است ؟

اگر این عمل را ۱۰ بار متوالی انجام دهیم ، جواب چه تفاوتی می‌کند ؟

اگر عمل به‌هم زدن را بادقت انجام ندهیم چه وضعی پیش می‌آید ؟

اگر مقدار چای در فنجان اول کمی بیشتر از مقدار شیر در فنجان دوم باشد ، جواب مسأله چگونه است ؟

۱۲. ته لامپی هفت شاخ داردکه روی محیط یك دایره و به فاصله‌های مساوی از یکدیگر قرار گرفته اند . پریز هم دارای هفت سوراخ است که به فاصله‌های مساوی از یکدیگر روی محیط دایره‌ای واقع اند . می‌خواهیم شاخهای لامپ وسوراخهای پریز را به‌ترتیب با عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و ۷ طوری نامگذاری کنیم که به‌هر ترتیبی لامپ را به پریز وصل کنیم ، تنها یکی ازشماره‌های شاخهای لامپ داخل شمارهٔ هم نام خود در پریز بشود .

۱۳. در کسر اعشاری

۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰۲۱۲۲...

همهٔ عددهای طبیعی پشت سرهم نوشته شده است . ثابت کنید که

این کسر غیر متناوب است .

۱۴. هواپیما از عشق‌آباد روی کوتاهترین مسیر به‌طرف سانفرانسیسکو پرواز می‌کند . مختصات جغرافیایی این دوشهر چنین است :

عشق‌آباد ≈ ۵۸ درجه طول شرقی ، ۳۸ درجه عرض شمالی .

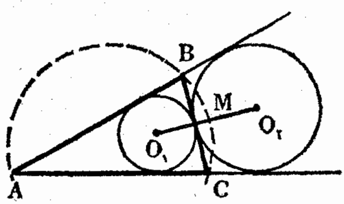
سان فرانسیسکو ≈ ۱۲۲ درجه طول غربی ، ۳۸ درجه عرض شمالی .

وقتی که هواپیما از فرودگاه عشق‌آباد حرکت می‌کند ، در چه جهتی پرواز می‌کند (به طرف جنوب ، یا جنوب غربی یا غرب و غیره ؟)

۱۵. ثابت کنید که حاصلضرب رقمهای یك عدد چند رقمی کوچکتر از خود عدد است .

۱۶. پنج تکه کاغذ داریم . بعضی از آنها را به پنج قسمت کرده‌ایم ، بعضی از تکه‌های بدست آمده را دوباره به پنج قسمت کرده‌ایم و غیره . این عمل را چند مرتبه تکرار کرده‌ایم و سپس تکه‌کاغذ‌های بدست آمده را شمرده ایم : ثابت کنید که نمی‌توان از این راه ۱۳۵۲ تکه بدست آورد .

۱۷. در یك مثلث غیر مشخص دایرهٔ محاط داخلی و یکی از دایره‌های محاط خارجی را رسم کرده‌ایم . ثابت کنید پاره خطی که مرکزهای این دودایره را به‌هم وصل می‌کند به وسیلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث نصف می‌شود (شکل ۳) .



شکل ۳

۱۸. a) دو تودهٔ سنگریزه داریم . دو نفر قرار می‌گذارند که به نوبت هرکدام هرچند سنگریزه که مایل باشند تنها از یکی از توده‌ها

بردارند . کسی برنده است که آخرین سنگریزه را بردارد . اگر شما بخواهید حتماً برنده باشید ، طرح بازی را چگونه می‌ریزید ؟

b) اگر سه تودهٔ سنگریزه داشته باشیم و تعداد سنگریزه‌ها در هر سه توده یکی باشد . شما که بازی را با همان شرطهای قبل شروع می‌کنید ، به‌چه ترتیب حتماً برنده خواهید شد ؟

۱۹. a) روی یك کاغذ شطرنجی یك چند ضلعی رسم کرده‌ایم (محدب بودن آن لازم نیست) ، به‌نحوی که ضلعهای آن روی خطهای کاغذ قرار گرفته باشد . ثابت کنید مرکز ثقل این چند ضلعی را می‌توان به کمك خط‌کش بدست آورد .

b) همین مسأله را در مورد مثلثی حل کنید که راسهای آن در محل برخورد خطهای کاغذ باشد .

c) همین مسأله را در مورد چند ضلعی حل کنید (محدب یا مقعر) که رأسهای آن در محل برخورد خطهای کاغذ باشد .

۲۰. روی ۴۴ درختی که روی محیط یك دایره قرارگرفته‌اند ، ۴۴ گنجشك نشسته است (روی هردرخت یك‌گنجشك) . هرچند لحظه یکبار دو تا از گنجشکها پرواز می‌کنند و هرکدام روی درخت مجاور خود می‌نشینند ، منتهی پرواز آنها در جهت مخالف هم است (یکی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و دیگری در خلاف جهت آن) . آیا این احتمال وجود داردکه پس از مدتی گنجشکها روی یك درخت جمع شوند ؟

۲۱. یکی از سه نفر براون ، جون و سمیت مرتکب اشتباهی می‌شوند . ضمن سؤال و جواب هریك از آنها دو جمله به این ترتیب بیان کردند :

براون : من این اشتباه را نکرده‌ام .

جون هم مرتکب این اشتباه نشده است .

جون : براون این کار را نکرده است .
سمیت مقصر بوده است .
سمیت : من خلافی نکرده‌ام .
براون اشتباه کرده است .

معلوم شد کـه یکی از این سه نفر هر دو جواب را نادرست داده است، دیگری هر دو جواب را صحیح گفته است و سومی یکی از جوابها را درست و جواب دیگر را نادرست داده است . کار اشتباه را کدامیك کرده است ؟

۲۲. ۳۱ دانش آموز روی هم ۴۳۴ سال دارند . ثابت کنید که می‌توان از بین آنها ۲۰ دانش‌آموز جدا کرد که روی هم کمتر از ۲۸۰ سال نداشته باشند .

۲۳. a) عددهای طبیعی را از ۱ تا ۶۰ روی یك سطـر پشت سر هم نوشته‌ایم :

۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷ . . . ۵۹۶۰

از عددی که بدست می‌آید صد رقم خط بـزنید، به‌نحوی که عدد باقیمانده کوچکترین باشد .

b) از همین عدد صد رقم خط بزنید، به نحوی که عدد باقیمانده بزرگترین باشد.

۲۴. a) روی یك صفحه پنج نقطه داده شده به‌نحوی که هیچ سه نقطه‌ای از آن روی یك خط راست نیستند . ثابت کنید که می‌توان از بین آنها چهار نقطه انتخاب کرد که رأسهای یك چهار ضلعی محدب را تشکیل دهند .

b) روی یك صفحه ۴۰۰۰ نقطه داده شده است ، به‌نحوی که هیچ سه نقطه‌ای از آنها روی یك خط راست نیستند . ثابت کنید کـه می‌توان ۱۰۰۰ چهار ضلعی ساخت که رأسهای آنها از بین ایـن

نقطه‌ها انتخاب شده باشد وهیچکدام ازآنها یکدیگر را قطع نکرده باشند .

۲۵. a) به کمك پرگار و خط کش، زاویهٔ ۵۴ درجـه را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید .

b) به کمك پرگار و خط کش زاویهٔ ۱۹ درجه را بـه ۱۹ قسمت مساوی تقسیم کنید .

۲۶. ثابت کنید کـه مجموع همهٔ کسرهای با صورت ۱ و مخرجهای ۲ ، ۳ ، ۴ ، . . . ، n نمی‌تواند مساوی عددی صحیح بشود.

۲۷. در یك کنگرهٔ جهانی ۶ هیئت نمایندگی شرکت کرده‌اند . معلوم شد که بین هر سه هیئت ، دو هیئت می‌توانند زبان مشترکی بین خود داشته باشند . ثابت کنید که می‌توان سه هیئت نمایندگی از بین این ۶ هیئت جدا کرد، به‌نحوی که هرکدام از آنها بتواند با هر یك از دو هیئت دیگر با زبان مشترکی صحبت کند .

۲۸. اگر یکی از قطرهای یك چهارضلعی محدب بر قطر دایرهٔ محیطی آن منطبق باشد ، ثابت‌کنید تصویرهای ضلعهای روبروی چهار ضلعی بر قطر دیگر ، با هم برابرند .

۲۹. آیا می‌توان با ۱۰ اسکناس یك روبلی ، سه روبلی و پنج روبلی ۲۵ روبل پرداخت؟

۳۰. a) شش نقطه روی یك صفحه وجود دارد ، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای ازآن بر یك امتداد نیستند . ثابت‌کنید بین آنها سه نقطه وجود دارد که از وصل آنها به یکدیگر مثلثی بدست می‌آید که زاویهٔ بزرگتر آن کمتر از ۱۲۰ درجه نیست .

b) اگر روی یك صفحه پنج نقطه وجود داشته باشد، بـا در نظـر گرفتن هرسه نقطهٔ آن ، روی‌هم می‌توان ۳۰ زاویه تشکیل داد . کوچکترین این زاویه‌ها را α می‌نامیم . این نقطه‌ها چگونه باشند

که زاویهٔ α حداکثر مقدار ممکن شود؟

۳۱. عددهای صحیح x ، y و z را از معادلهٔ زیر پیدا کنید:

$$x^۲+y^۲+z^۲=۲xyz$$

۳۲. ازچهار ضلعی $ABCD$ ، چهار ضلع و زاویهٔ بین دو ضلع AB و CD معلوم است ، آنرا رسم کنید .

۳۳. در یك شهر چند خط اتوبوسرانی وجود دارد (تعداد خطها بیش از یکی است) و ضمناً :

a) هر خط درست سه ایستگاه دارد .

b) در هر خط فقط در یك ایستگاه می‌توان بـه اتوبوس خط دیگر سوار شد.

c) برای تمام ایستگاههای شهر، از هر ایستگاه به ایستگاه دیگر می‌توان بدون عوض کردن اتوبوس و فقط با یك خط رفت .

چند خط اتوبوس در این شهر وجود دارد؟

۳۴. روی یك میزگرد دوازده نفری ، ۱۲ کارت با نام مهمانها گذاشته شده است . مهمانها آمدند و نشستند ولی نه به ترتیبی که معین شده بود . ثابت کنید کـه می‌توان میز را به نحوی چرخاند کـه لااقل دو نفر از مهمانها جلو کارت نام خود قرار گـرفته باشند.

۳۵. مثلث متساوی‌الساقین ABC داده شده است . زاویه‌های BAC و BCA هرکدام مساوی ۸۰ درجه است. از رأسهای A و C دوخط در داخل مثلث رسم کرده‌ایم تاضلعهای مقابل را به‌ترتیب درنقطه‌های D و E قطع کنند . زاویهٔ CAD مساوی ۶۰ درجه و زاویهٔ ACE مساوی ۵۰ درجه است . مقدار زاویهٔ ADE را بدست آورید.

۳۶. چادری روی چهار پایه ، که در بالا به هم جفت شده‌اند ، کشیده شده است (به صورت یك هرم) . ثابت کنید که می‌توان به‌هر پایه قلابی آویزان کرد ، به‌نحوی که این قلابها رأسهای یك متوازی-

الاضلاع را تشکیل دهند .

۳۷. ثابت کنید کـه اگر در مثلثی دو نیمساز داخلی برابر بـاشند ، مثلث متساوی الساقین است .

۳۸. شش مدادگرد تیز نشده را طوری روی میز بگذاریدکه هر دو مداد دلخواه بر هم مماس باشند .

۳۹. ثابت کنید که نمی‌توان خط راستی رسم کرد که همه ضلعهـای یك ۱۰۰۱ ضلعی را قطع کند .

۴۰. مجموع رقمهای عددی بعد از ضرب عدد در ۵ ، تغییر نمی‌کند . ثابت کنیدکه این عدد بر ۹ قابل قسمت است .

۴۱. روی محیط دایره‌ای چهارتا عدد ۱ و پنج‌تا عـدد ۰ را به ترتیب دلخواه قرار می‌دهیم. سپس بین هردوعدد مساوی ، عدد ۱ و بین هر دو نامساوی ، عدد ۰ می‌گذاریم و عددهای اولیه را پاك می‌ـ کنیم . ثابت‌کنید هر چند بار که این‌کار را ادامه دهیم، هرگز هر ۹ عدد مساوی ۱ نمی‌شود .

۴۲. یك کارخانه، محصول شیر خود را در پاکتهای هرمی با وجه‌های مثلثی عرضه می‌کند . مدیر کارخانه کـه به ریاضیات علاقمند است ، آگهی می‌کند کـه اگـر کسی بتواند پاکتی به ایـن شکل بسازد ، به‌نحوی‌که هر یال آن لااقل مجاور به‌یك زاویهٔ منفرجه باشد ، جایزه‌ای خواهد گرفت . آیا شما می‌توانید چنین هـرمی بسازید ؟

۴۳. ثابت کنید که از هرصد عدد صحیح دلخواه ، می‌توان یك یا چند عدد انتخاب کرد به‌نحوی که مجموع آنها به دو صفر ختم شده باشد .

۴۴. در یك دور بازی شطرنج ۸ نفر بازی کردند (هر دو نفر بـا هم یکبار) و امتیازهـای مختلفی بدست آوردند . تعداد امتیازهای

نفر دوم مساوی تعداد امتیازهای نفر پنجم تا هشتم روی هم شد.
در بازی نفرهای سوم و پنجم کدامیك برده‌اند؟

۴۵. به چند طریق می‌توان عدد ۱۰۰۰۰۰۰ را به سه عامل تجزیه کرد (عاملها رامخالف واحد بگیرید، ضمناً اگرجای عاملها درتجزیه تغییر کند، تجزیهٔ جدیدی به حساب نیاورید.)

۴۶. a) عددی پیدا کنید که بر ۲ و ۹ قابل قسمت باشد و بجز خودش و واحد، روی هم ۱۴ مقسوم علیه داشته باشد.
b) ثابت کنید که اگر در این مسأله، تعداد مقسوم علیه‌ها را از ۱۴ به ۱۵ تغییر دهیم بیش ازیك جواب خواهیم داشت و اگر۱۴ را به ۱۷ تغییر دهیم، مسأله بدون جواب است.

۴۷. نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن از چهار رأس یك چهار ضلعی محدب حداقل مقدار ممکن باشد.

۴۸. حلزونی ازنقطهٔ A روی یك خط راست شروع به‌حرکت می کند و بعد از هر ۱۵ دقیقه به‌اندازهٔ ۹۰ درجه به‌یك طرف می‌پیچد. بعد ازچه مدت دوباره به‌نقطهٔ A می‌رسد (سرعت حلزون را یکنواخت به حساب آورید.)

۴۹. ثابت کنید که معادلهٔ $15x^2 - 7y^2 = 9$ جواب صحیح برای x و y ندارد؟

۵۰. در اطاقی به مساحت ۶ متر مربع سه قالی با شکلهای دلخواه و هر یك به مساحت سه متر مربع انداخته ایم. ثابت کنید دو قالی طوری روی هم قرار می‌گیرند که سطح مشترك آنها کمتر از یك متر مربع نیست.
اگر در همین اطاق ۴ قالی و هر یك به مساحت ۲ متر مربع پهن کنیم، جواب به‌چه صورت در می‌آید؟

۵۱. صفحهٔ کاغذ را به خانه های مربعی شکل تقسیم کرده‌ایم و در هر

خانه یك عدد مثبت نوشته‌ایم، به‌نحوی که هرعدد برابر است با واسطهٔ عددی عددهای چهارخانهٔ مجاور آن: بالا، پایین، راست و چپ (واسطهٔ عددی چهار عدد a، b، c و d یعنی عدد $\frac{a+b+c+d}{۴}$). ثابت کنید همهٔ عددهای این جدول با هم برابرند.

۵۲. عددی در دستگاه به مبنای ۱۰، شامل ۳۰۰ رقم مساوی واحد و تعدادی رقم مساوی صفر است. آیا این عدد می‌تواند مربع کامل باشد؟

۵۳. به‌سادگی می‌توان ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج را با ۳۲ سنگ دومینو پوشاند، به‌نحوی که هرسنگ دومینو روی دوخانهٔ صفحهٔ شطرنج قرار گرفته باشد (البته با این شرط که اندازهٔ هرسنگ دومینو درست مساوی دوخانهٔ شطرنج باشد). آیا می‌توان با ۳۱ سنگ دومینو ۶۲ خانهٔ صفحهٔ شطرنج را طوری پوشاند که دو خانه‌ای که در دو گوشهٔ مقابل صفحهٔ شطرنج قرار گرفته‌اند، خالی بماند؟

۵۴. بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱ و ۱۱۱ ... ۱۱۱۱۱۱۱ (دارای صد رقم) را پیدا کنید.

۵۵. در داخل یك ۱۰۰ ضلعی محدب ۳۰ نقطه طوری انتخاب کرده‌ایم که از ۱۳۰ نقطه (۱۰۰ نقطه مربوط به‌رأسها و ۳۰ نقطهٔ انتخابی)، هیچ سه نقطه‌ای روی یك خط راست نباشند. ۱۰۰ ضلعی را به مثلثهایی چنان تقسیم می‌کنیم که مجموعهٔ راسهای آنها از ۳۰ نقطهٔ انتخابی و ۱۰۰ رأس چند ضلعی تشکیل شده باشد. چند مثلث بدست می‌آید؟

۵۶. a) پاره‌خط AB و خط دلخواهی که آنرا قطع کرده است، داده شده. مثلث ABC را چنان بسازید که این خط نیمساز زاویهٔ C

از آن باشد .

b) سه خط راست متقارب در صفحه‌ای داده شده است . روی یکی ازاین خطها نقطه‌ای مشخص می‌کنیم . مثلثی بسازیدکه این نقطه یکی از رأسهای آن و سه خط متقارب سه نیمساز آن باشد .

۵۷. در یك جعبه ۱۰۰ گلوله با رنگهای مختلف وجود دارد: ۲۸ تا قرمز ، ۲۰ تا سبز ، ۱۲ تا زرد ، ۲۰تا آبی ، ۱۰ تا سفید و ۱۰ تا سیاه . حداقل چندگلوله باید از جعبه خارج کرد (بدون اینکه به آنها نگاه کنیم) تا بین آنها ۱۵ گلولهٔ همرنگ وجود داشته باشد ؟

۵۸. مربعی بسازید که از هرضلع آن یك نقطه معلوم باشد .

۵۹. آیا ممکن است مجموع مربعهای دو عدد متوالی مساوی مجموع توانهای چهارم دو عدد متوالی دیگر باشد ؟
به عبارت دیگر آیا عددهای صحیح و مثبت m و n وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم :

$$m^{2}+(m+1)^{2}=n^{4}+(n+1)^{4}$$

۶۰. در یك مسابقهٔ شطرنج دو نفر از کلاس چهارم و چند نفر ازکلاس پنجم دبیرستان شرکت کردند . دو نفر کلاس چهارم روی هم ۸ امتیاز آوردند و با دانش‌آموزان بازیکن کلاس پنجم امتیازهای مساوی پیدا کردند . از کلاس پنجم چند نفر در مسابقه شرکت داشته‌اند ؟ (هرنفر با هرکدام از دیگران یکبار مسابقه داده است.) همهٔ جوابها را پیدا کنید .

۶۱. می‌دانیم که در یك مثلث ، میانه ، ارتفاع و نیمسازی‌که از یك رأس‌گذشته‌اند ، زاویهٔ این رأس را به‌چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند . مقدار هریك از زاویه‌های این مثلث را پیدا کنید .

۶۲. با شرط $a+b+c=1$ ثابت کنید :

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$$

۶۳. روی میزگردی به شعاع R توانسته‌ایم n سکهٔ به شعاع r قرار دهیم ، به نحوی که حتی یك سکهٔ دیگر هم نمی‌توان قرار داد . ثابت کنید :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right)<\sqrt{n}<\frac{R}{r}$$

۶۴. از بین عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . ، ۲۰۰، بطور دلخواه ۱۰۱ عدد انتخاب کرده‌ایم . ثابت کنید که بین این عددهای انتخاب شده می‌توان دو عدد پیدا کرد که یکی بر دیگری قابل قسمت باشد .

۶۵. ثابت کنید که برای هرعدد طبیعی N می‌توان عدد n رقمی پیدا کرد که همهٔ رقمهای آن از صفر و واحد تشکیل شده باشد وضمناً بر N قابل‌قسمت باشد (کمترین تعداد رقمهای این عدد را چگونه می‌توان بدست آورد ؟)

۶۶. در مثلث ABC ، دو ارتفاع AK و BH را رسم کرده‌ایم . اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد ، ثابت کنید OC بر KH عمود است .

۶۷. از رأس A در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به نقطه‌های E و F وسط ضلعهای مقابل A ، یعنی BC و CD وصل کرده‌ایم . این دو خط قطر BD را در نقطه‌های M و N قطع کرده‌اند . ثابت کنید M و N قطر BD را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند .

۶۸. اگر طول یك چوب‌کبریت را واحد فرض کنیم ، با ۱۲ چوب کبریت چند ضلعی بسازید که مساحت آن مساوی ۴ واحد مربع باشد .

۶۹. بین عددهایی که تمام رقمهای آن واحد است ، کوچکترین عددی

را پیدا کنید که بر ۳۳ ... ۳۳ (شامل ۱۰۰ رقم) قابل قسمت باشد .

۷۰. یك جدول مربع شکل ۱۶ خانه‌ای داریم و در هر یك از خانه‌های آن یك علامت مثبت یا منفی گذاشته‌ایم . علامتهای خانه‌های یك سطر یا یك ستون را با هم به علامتهای مخالف خود تبدیل می‌کنیم . این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تـا تعداد علامتهای منفی به‌حداقل خود برسد . حداقل تعداد علامتهای منفی راکه از یك حالت مفروض جدول به آن می‌رسیم ، مفسر آن می‌نامند . مفسر ، چه مقادیری را می‌تواند اختیارکند ؟ (همهٔ مقادیر ممکن را پیدا کنید .)

۷۱. در یك ۲۰ ضلعی محدب تمام قطرها را رسم‌کرده‌ایم . اگر هیچ سه قطری از یك نقطه نگذرد ، ۲۰ ضلعی بـه چند قسمت تقسیم می‌شود ؟

۷۲. طول ضلع یك مربع برابر است با واحد . از مرکز این مربع خط راست دلخواهی عبور داده‌ایم . مطلوب است مجموع مربعهای فاصله‌های چهار رأس مربع از این خط .

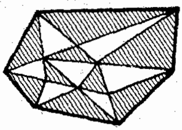
۷۳. عبارت زیر را به ضرب چهار عامل تجزیه کنید :

$$x^{۸} + x^{۴} + ۱$$

۷۴. دریك اجتماع از دانش‌آموزان ریاضی ۱۰۰ نفر شرکت‌کرده‌اند . می‌دانیم که بین هر چهار نفر شرکت کنندهٔ اجتماع لااقل یکنفر با سه نفر دیگر آشناست . ثابت کنید که می‌توان یکنفر را پیدا کرد که با هر ۹۹ نفر بقیه آشنا باشد . لااقل چند نفر از شرکت کنندگان این اجتماع با همهٔ ۹۹ نفر دیگر آشنا هستند ؟

۷۵. درشکل ۴ یك شش ضلعی‌را به مثلثهای سیاه و سفید چنان تقسیم کرده‌ایم که a) هردو مثلث یا یك ضلع مشترك دارند (که دراین

صورت با رنگهای مختلف‌اند) یا یك رأس مشترك دارند و یا نقطهٔ مشترکی ندارند. b) هر ضلع شش ضلعی درعین حال ضلع یکی از مثلثهای سیاه است.



شکل ۴

ثابت کنید که ده ضلعی را نمی‌توان به این ترتیب تقسیم بندی کرد.

۷۶. در دایره‌ای به شعاع واحد، یك ده ضلعی منتظم محاط کرده‌ایم. مطلوب است مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ دلخواهی ازمحیط دایره تا رأسهای این ده ضلعی.

۷۷. یك عدد چهار رقمی را درمقلوب خودش (یعنی عددی که از همان رقمها منتهی درجهت عکس درست شده است) ضرب کرده‌ایم؛ حاصلضرب، عددی ۸ رقمی شده است که به سه رقم صفر ختم می‌شود. این عدد را پیدا کنید.

۷۸. مثلثی بسازید که از آن قاعده، زاویهٔ رأس و میانهٔ ضلع مجاور معلوم باشد.

۷۹. شش دایره در یك نقطه مشترکند. ثابت کنید لااقل مرکز یکی از این دایره‌ها در داخل دایرهٔ دیگر قرار گرفته است.

۸۰. از۷ رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ همهٔ انواع ممکن عددهای هفت رقمی را ساخته‌ایم. ثابت کنید در بین آنها نمی‌توان دوعدد پیدا کرد که یکی بردیگری قابل قسمت باشد.

۸۱. سه زاویهٔ مثلث ABC حاده است. از رأس A به نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث وصل و ارتفاع AH را نیز رسم کرده‌ایم. ثابت کنید دو زاویهٔ BAH و OAC برابرند.

۸۲. ثابت کنید به ازای همهٔ مقادیر x داریم:

$$x^{12}-x^{9}+x^{4}-x+1>0$$

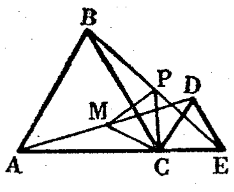
۸۳. ثابت کنید :

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۱۹۹}-\frac{۱}{۲۰۰}=\frac{۱}{۱۰۱}+\frac{۱}{۱۰۲}+\dots+\frac{۱}{۲۰۰}$$

۸۴. وجه‌های یك مکعب را می‌توان تماماً با رنگ سفید یا تماماً با رنگ سیاه و یا بعضی را با رنگ سفید و بعضی را با رنگ سیاه رنگ کرد . به چند طریق مختلف می‌توان مربع را رنگ کرد ؟ (دو مکعب را با رنگهای مختلف به حساب می‌آوریم به شرطی با چرخاندن یکی نتوان آنرا به وضع دیگری در آورد .)

۸۵. روی تخته‌ای که ۱۰۰ × ۴ خانهٔ مربعی شکل دارد ، قطعه‌های مستطیل شکل استخوانی گذاشته‌ایم ، به نحوی که هریك از آنها درست دو خانهٔ تخته را می‌پوشاند ، و هیچکدام از آنها روی دیگری قرار نگرفته است و ضمناً هیچیك از خانه‌های تخته هم خالی نیست . ثابت‌کنیدکه می‌توان تخته را روی یکی از خطهای طولی یا عرضی برید ، طوری که هیچکدام از استخوانها جابجا و یا بریده نشود .

۸۶. روی CE که از امتداد ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بدست آمده است ، مثلث متساوی‌الاضلاع CDE را ساخته‌ایم (آنطور که در شکل ۵ دیده می‌شود.) M را وسط AD و P را وسط BE گرفته‌ایم، ثابت‌کنید مثلث CMP متساوی‌الاضلاع است .



شکل ۵

۸۷. به بیست دانش‌آموز ۲۰ مسأله داده شد . هردانش‌آموز ۲ مسأله را حل کرد و هر مسأله به وسیلهٔ ۲ دانش‌آموز حل شد . ثابت کنید که کار را می‌توان طوری تقسیم کرد که هردانش‌آموز حل

یك مسأله را شرح دهد و همهٔ مسأله‌ها هم توضیح داده شود .

۸۸. می‌دانیم که در یك ده ضلعی می‌توان دایره‌ای محاط کرد . از این ده ضلعی تمام زاویه‌ها و یك ضلع معلوم است ، آنرا رسم کنید .

۸۹. ثابت کنید رقمهای آخر عددهای

$$\frac{۱ \times ۲}{۲} \text{ و } \frac{۲ \times ۳}{۲} \text{ و } \frac{۳ \times ۴}{۲} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{n(n+۱)}{۲}$$

بطور متناوب تکرار می‌شود .

۹۰. در ۶۴ خانـهٔ صفحهٔ شطرنج ، عددهای از ۱ تـا ۶۴ را نوشته‌ایم (در سطر بالا از چپ به راست عددهای ۱ تا ۸ ، سپس در سطر دوم از چپ به راست عددهای از ۹ تا ۱۶ و غیره .) هشت رخ را در خانه‌های صفحهٔ شطرنج طوری گذاشته‌ایم کـه هیچیك از آنها نمی‌تواند دیگری را بزند . مطلوب است مجموع عددهای خانه‌هایی که رخها درآنها قرار گرفته‌اند . همهٔ مقادیری را که این مجموع می‌تواند داشته باشد پیدا کنید.

۹۱. در تجزیهٔ حاصلضرب زیر به عاملهای اول چه توانی از ۲ وجود دارد ؟

$$(n+۱)(n+۲)(n+۳)\ldots(۲n-۱)۲n$$

۹۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC از نقطهٔ H وسط قاعدهٔ BC عمود HE را برضلع AC فرود آورده‌ایم . اگر O وسط پاره‌خـط HE باشد ، ثابت کنید خطهای AO و BE برهم عمودند .

۹۳. نقطهٔ A را داخل دایره‌ای انتخاب کرده‌ایم (غیر از مرکز.) آیـا همیشه می‌توان ازنقطهٔ A شعاع نور راطوری فرستادکه بعدازچند بازتاب در محیط دایره ، دوباره به نقطهٔ A برگردد؟ (در بازتاب نور ، همیشه زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است .)

۹۴. خط شکستهٔ بسته‌ای از ۲۰۳ پـاره‌خط تشکیل شده است کـه هیچ

دوپاره خطی از آن روی یك خط راست نیستند. حداکثر تعداد نقطه‌های تلاقی این خطها (بجز نقطه‌های تلاقی دوپاره‌خط متوالی) چقدر است؟

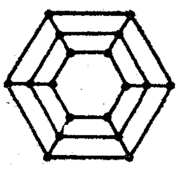
۹۵. از پنج دایره هر چهار دایره یك نقطهٔ مشترك دارند. ثابت کنید که هرپنج دایره دارای نقطهٔ مشترکند.

۹۶. دو متحرك از نقطه‌های A و B، واقع روی دو خطی که در نقطهٔ O متقاطع‌اند، با یك سرعت حرکت کردند. پاره‌خطی رسم کنید که مساوی کوتاهترین فاصلهٔ بین دو متحرك باشد. به شرطی که زاویهٔ ADB مساوی ۹۰ درجه، $OA=a$ و $OB=b$ و سرعت متحرکها مساوی V باشد، پس از چه مدتی از شروع حرکت، این دو متحرك به حداقل فاصله می‌رسند؟

۹۷. a) هر قطر چهار ضلعی آنرا به دو مثلث با مساحتهای مساوی تقسیم می‌کند. ثابت کنید که این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

b) ثابت کنید که اگر در یك شش ضلعی محدب، هریك از سه قطری که رأسهای روبرو را به هم وصل می‌کنند، مساحت شش ضلعی را نصف کند، این سه قطر در یك نقطه یکدیگر را قطع خواهند کرد.

۹۸. روی ۱۸ نقطه‌ای که در شکل ۶ نشان داده شده است، عددهای از ۱ تا ۱۸ را نوشته‌ایم. ثابت کنید می‌توان پاره‌خطی پیدا کرد که در دو انتهای آن عددهایی با اختلاف بزرگتر از ۳ وجود داشته باشد.



شکل ۶

۹۹. a) ثابت کنید که با شرط $m \neq n$، عددهای $۲^{۲^m}+۱$ و $۲^{۲^n}+۱$

مقسوم‌علیه مشترکی ندارند .

b) ثابت کنید که عددهای $۲^m - ۱$ و $۲^n - ۱$ (m و n عددهای طبیعی‌اند) تنها و تنها وقتی نسبت به‌هم اولند که m و n نسبت به‌هم اول باشند .

۱۰۰. ذوزنقه‌ای را با خط مستقیم چنان قطع کنید که دو چهار ضلعی متشابه بدست آید .

۱۰۱. سه نقطهٔ A ، B و C مفروض‌اند، به‌نحوی‌که روی یك خط راست قرار نگرفته‌اند . خط راستی رسم کنید ، طوری که AC را در X و BC را در Y قطع کند و داشته باشیم : $AX = XY = YB$.

۱۰۲. ثابت کنید که برای سه عدد مثبت a ، b و c نمی‌توانند سه نامساوی زیر با هم برقرار باشد :

$$a(۱-b) > \frac{۱}{۴} \quad و \quad b(۱-c) > \frac{۱}{۴} \quad و \quad c(۱-a) > \frac{۱}{۴}$$

۱۰۳. ثابت کنید :

$$(a \quad (a+b)^۴ \leqslant ۸(a^۴+b^۴)$$

$$(b \quad (a+b)^{۱۰۰} < ۲^{۱۰۰}(a^{۱۰۰}+b^{۱۰۰})$$

۱۰۴. دو میلهٔ AB به طول a و BC به طول b در نقطهٔ B به هم لولا شده‌اند . روی پاره خط AC مثلث متساوی‌الاضلاع ACE را می‌سازیم ، میله‌ها را چگونه قرار دهیم که فاصلهٔ BE حداکثر مقدار ممکن باشد ؟

۱۰۵. ثابت‌کنید بین مستطیلهای محاط دریك نیم‌دایره ، محیط بزرگتر متعلق به مستطیلی است که طول آن چهار برابر عرض آن باشد .

۱۰۶. ثابت کنید ، سطح یك مثلث غیر مشخص (غیر متساوی‌الاضلاع) را می‌توان بطورکامل به وسیلهٔ دومثلث متشابه با آن وکوچکتر از آن پوشاند .

۱۰۷. از نقطهٔ P واقع در داخل یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به چهار رأس آن وصل کرده‌ایم . ثابت کنید با چهار پاره خطی که بدست می‌آید می‌توان یك چهار ضلعی قابل محاط در ذوزنقه ساخت (یعنی چهارضلعی که بتواند هر رأس آن روی یکی از ضلعهای ذوزنقه باشد .)

۱۰۸. از مقوا دو دایره بریده‌ایم که یکی کوچکتر از دیگری است . هر یك از دایره‌ها را با رسم شعاع به ۲۰۰ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم، ضمناً صد قطاع دلخواه از هردایره را سیاه و صد قطاع باقیمانده را سفید کرده‌ایم . دایره‌ها راطوری روی‌هم قرار داده‌ایم که مرکزهای آنها برهم واقع باشد . ثابت کنید ، دایرهٔ کوچکتر را می‌توان طوری بر دایرهٔ بزرگتر قرار داد که لااقل صد قطاع همرنگ از دو دایره بر هم منطبق شود .

۱۰۹. ثابت کنید که اگر سه عدد x ، y و z در دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a} \end{cases}$$

صدق کنند ، لااقل یکی از این عددها مساوی a خواهد بود .

۱۱۰. سه نقطهٔ A ، B و K داده شده است . می‌خواهیم از نقطهٔ K خط راستی عبور دهیم که مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ A و B از آن :
a) حداقل باشد ؛ b) حداکثر باشد .

۱۱۱. a) سه عدد مثبت ، صحیح و متمایز پیدا کنید که مجموع هر دو عدد از آن بر عدد سوم قابل قسمت باشد (همهٔ جوابها را پیدا کنید .)

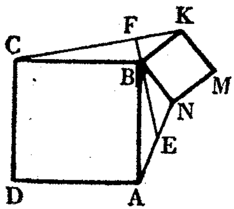
b) سه عدد ۱ ، ۲ و ۳ دارای این خاصیت هستند که اگر به حاصلضرب دوتا ازآنها یك واحد اضافه‌کنیم ، حاصل برعدد سوم

قابل قسمت است . همهٔ گروه عددهای سه‌تایی را پیدا کنید که این خاصیت را داشته باشند .

۱۱۲. جدول مربعی شکلی را بـه ۲۵ × ۲۵ خانه تقسیم کرده‌ایم و در ۶۲۵ خانه‌ای که بدست می‌آید ۲۵ عدد اولیه ، یعنی ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۲۵ را نوشته‌ایم . ضمناً : a) در خانه‌هایی که نسبت به‌قطر اصلی مربع قرینه‌اند، عددهای مساوی گذاشته‌ایم ؛ b) دریك سطر یا یك ستون ، ۲۵ عدد مختلف قـرار داده‌ایم . ثابت کنید تمام عددهایی که روی قطر اصلی مربع قرار دارند مختلف‌اند .

۱۱۳. سه‌نقطهٔ A ، B و C وسه زاویهٔ $\hat{H}$ ، $\hat{K}$ و $\hat{M}$ روی یك صفحه داده شده است . هریك از زاویه‌ها کوچکتر از ۱۸۰ درجه و مجموع آنها مساوی ۳۶۰ درجه است . به‌کمك خط‌کش ونقاله ، نقطهٔ O را طوری پیدا کنید کـه $\widehat{AOB}=\hat{H}$ ، $\widehat{BOC}=\hat{K}$ و $\widehat{COA}=\hat{M}$ (به کمك نقاله می‌توان زاویه را طوری جابجا کرد که یك ضلع آن برامتدادی که از قبل معلوم است ، قرار گیرد) .

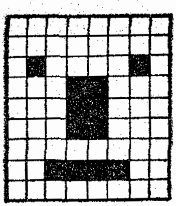
۱۱۴. $ABCD$ و $BKMN$ دو مربع‌اند . ثابت کنید که اگر میانهٔ BE از مثلث ABN را از طرف رأس B امتداد دهیم ، ارتفاع مثلث KBC بدست می‌آید (شکل ۷) .

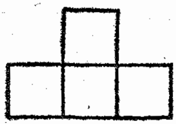


شکل ۷

۱۱۵. ثابت کنید شکل ۶۰ خانه‌ای شکل ۸ را نمی‌توان به مستطیلهای سه خانه‌ای تقسیم کرد .

۱۱۶. ثابت کنید که صفحهٔ شطرنجی ۱۰×۱۰ خانه‌ای را نمی‌توان به‌طور کامل به‌کمك شکلهای شبیه شکل ۹ پوشانید (این شکلها را روی صفحهٔ شطرنجی باید طوری قرار داد که درست هر خانهٔ آن یکی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را بپوشاند. فرض براین است که هرخانهٔ شکل ۹ با هرخانهٔ صفحهٔ شطرنجی برابر باشد.)


شکل ۸


شکل ۹

۱۱۷. روی یك صفحه، به‌اندازهٔ $n > ۳$ نقطه داده شده است، به‌نحوی که هیچ سه نقطهٔ آن روی یك خط راست واقع نیستند. آیا همیشه می‌توان از بین این نقطه‌ها، سه نقطه پیدا کرد، طوری که وقتی دایره‌ای از آنها عبور می‌دهیم شامل هیچیك از نقطه‌های دیگر نباشد؟ (یعنی هیچکدام از $n - ۳$ نقطهٔ دیگر در داخل این دایره قرار نگیرند.)

۱۱۸. ثابت کنید که روی صفحهٔ شطرنجی $۴ \times n$، اسب نمی‌تواند طوری حرکت کند که از هر خانه یکبار عبور کرده باشد و در آخرین حرکت به خانهٔ اولیه بازگردد.

۱۱۹. n نقطه روی یك صفحه چنان قرار گرفته‌اند که هر چهارتا از آنها چهار رأس یك چهارضلعی محدب را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که همهٔ این نقطه‌ها رأسهای یك n ضلعی محدب‌اند.

۱۲۰. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی می‌توان پیدا کرد که نشود آنها را به صورت مجموع مکعبهای سه عدد طبیعی نوشت.

۱۲۱. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، عدد $۱۰^n + ۱۸n - ۱$ بر ۲۷ قابل قسمت است.

۱۲۲. N عددی است طبیعی که از ۱۰ کوچکتر نیست. رقم سمت راست این عدد را حذف کرده‌ایم، عددی را که بدست می‌آید به‌دو برابر رقم حذف شده، اضافه کرده‌ایم تا عدد N_{1} بدست‌آید. ثابت کنید دو عدد N و N_{1} یا هردو بر ۱۹ قابل قسمت‌اند و یا هیچکدام بر ۱۹ قابل قسمت نیستند.

۱۲۳. ثابت کنید در هر مثلث غیرمشخص، مجموع طولهای میانه‌ها کمتر از محیط آن است.

۱۲۴. ثابت‌کنید مساحت یك چهارضلعی به ضلعهای a، b، c و d از $\frac{ac+bd}{2}$ تجاوز نمی‌کند.

۱۲۵. به جای ستاره‌ها، در عدد زیر، چه رقمهایی قرار دهیم تا عدد حاصل بر ۱۳ قابل قسمت باشد:

۳*****۳

۱۲۶. می‌دانیم که $n!$ یعنی حاصلضرب $n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. اگر !۳۵ چنین باشد:

۱۰۳۳۳۱۴۷۹۶۶۳۸۶۱۴۴۹۲۹*۶۶۶۵۱۳۳۷۵۲۳۲۰۰۰۰۰۰۰۰

رقمی را که با ستاره مشخص شده است، پیدا کنید.

۱۲۷. مطلوب است محاسبهٔ خارج قسمت تقسیم $a+a^{2}+\ldots+a^{100}$ بر $a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-100}$.

۱۲۸. a) ثابت کنید که نمی‌توان در یك سطر ۵۰ عدد حقیقی طوری نوشت که مجموع هر ۷ عدد پشت سرهم مثبت و مجموع هر ۱۱ عدد پشت سر هم منفی باشد.

b) در یك سطر، ۵۰ عدد طوری بنویسید که مجموع هر ۴۷ عدد پشت سر هم آن مثبت و مجموع هر۱۱ عدد پشت سرهم آن منفی باشد.

۱۲۹. عدد دو رقمی پیدا کنید که مجذور آن مساوی مکعب مجموع رقمهای آن باشد.

۱۳۰. این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} x^۳-۳x^۲y-xy+۲x-۲=۰ \\ x^۳y-۳x^۲y^۲-xy^۲+۲xy+x-۲y-۲=۰ \end{cases}$$

۱۳۱. ثابت کنید که ضمن تقسیم یك عدد اول بر ۳۰ ، برای باقیمانده یا ۱ و یا یك عدد اول بدست می‌آید .

۱۳۲. مطلوب است بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هزارمین و هفتصد و هفتادمین عدداز رشتهٔ فیبوناچی. (رشتهٔفیبوناچی‌عبارت‌است از:

۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۳ ، ۲۱ ، ۳۴ ، ۵۵ ، . . .

که در آن ، از عدد سوم به بعد ، هر عدد برابر است با مجموع دو عدد قبلی آن .)

۱۳۳. اگر دو زاویهٔ روبرو از یك چهارضلعی منفرجه باشد، ثابت‌کنید قطر بزرگتر، مقابل به این دو زاویه است .

۱۳۴. ثابت‌کنید‌که هیچ عدد اولی را نمی‌توان به‌دو صورت مختلف به مجموع مربعهای دو عدد طبیعی تبدیل‌کرد.

۱۳۵. عددی چند رقمی پیدا کنید که اگر رقمهای آنرا به‌ترتیب عکس بنویسیم، مقسوم‌علیهی از عدد اصلی باشد وخارج قسمت مساوی واحد نشود .

۱۳۶. مطلوب است‌کوچکترین عدد مثبتی که نصف آن مجذور کامل ، ثلث آن مکعب‌کامل و یك پنجم آن توان پنجم کامل یك عدد صحیح باشد .

۱۳۷. $n \geqslant ۲$ عددی است صحیح و مثبت . حاصلضرب همهٔ عددهای اولی را که از n بزرگتر نباشند ، به صورت $n?$ نشان می‌دهیم . مطلوب است همهٔ مقادیر n که برای آنها $n? \leqslant n$ باشد .

۱۳۸. یك چهار ضلعی محدب داده شده است. نقطه‌ای در داخل این چهارضلعی پیدا کنید که اگر از آنجا به وسط چهار ضلع وصل کنیم، چهارضلعی به چهار قسمت با مساحتهای مساوی تقسیم شود.

۱۳۹. رأس P از مثلث متساوی‌الاضلاع PKM ثابت و رأس K روی محیط مربعی مثل Q حرکت می‌کند، مکان هندسی M، رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۱۴۰. دو پاره‌خط AB و CD روی یك صفحه مفروض است. نقطهٔ O را طوری پیدا کنید که زاویه‌های AOB و COD مساوی و مثلثهای AOB و COD متشابه باشند.

۱۴۱. در خانه‌های یك جدول مربعی که شامل $n \times n$ خانه است، عددهایی قرار داده‌ایم. مجموع عددهایی که در هریك از «صلیبها» قرار گرفته است کمتر از a نیست («صلیب» را به شکلی می‌گوییم که از یك سطر کامل و یك ستون کامل درست شده باشد.) حداقل مجموع همهٔ عددهای جدول چقدر است؟

۱۴۲. در یك صفحه ۱۰۰۰۰۰۰ خط غیرموازی قرار داده‌ایم. می‌دانیم که از نقطهٔ برخورد هردوخط دلخواه لااقل یك خط دیگرمی‌گذرد. ثابت کنیدکه همهٔ این خطها از یك نقطه می‌گذرند.

۱۴۳. خورشید در استوا در اوج (سمت‌الرأس) است. قوطی کبریت را روی میزچگونه بگذاریم تا سایهٔ آن حداکثر مساحت را داشته باشد؟ همین مسأله را در مورد پاکت شیر (هرم مثلث‌القاعده) هم حل کنید.

۱۴۴. روی شش وجه یك مکعب شش عدد نوشته‌ایم، که در بین آنها ۰ و ۱ هم وجود دارد. هرعدد را با واسطهٔ عددی چهار عدد وجه‌های مجاور عوض کرده‌ایم. در مورد عددهای جدید همان عمل را

تکرار کرده‌ایم و به همین ترتیب با عددهای جدید عمل کرده‌ایم تا ۲۵ مرتبه . در پایان کار ، روی هر وجه همان عددی وجود داشت که در ابتدا نوشته بودیم . ثابت کنید که در محاسبه‌ها اشتباهی رخ داده است .

۱۴۵. در هر يك از هشت رأس يك مکعب عددی قرار داده‌ایم که در بین آنها ۱۰ هم وجود دارد. هریك ازهشت عدد را با واسطهٔ حسابی سه‌عددی که درسه‌رأس مجاورآن قرارگرفته‌اند ، عوض کرده‌ایم . بعداز آنکه این عمل را ده بار تکرار کردیم ، در هر رأس همان عددهایی که در ابتدا وجود داشتند ، پیدا شد . این هشت عدد را پیدا کنید .

۱۴۶. در داخل يك ذوزنقهٔ غیرمشخص ، نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا ضلعها (یا امتداد آنها) حداقل باشد .

۱۴۷. در داخل يك مثلث نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن از سه ضلع : a) حداقل ، b) حداکثر باشد .

۱۴۸. سه عدد متفاوت k ، l و m را طوری پیدا کنید که مجموع $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}$ کمتر از $\frac{1}{2}$ و تا حد امکان به $\frac{1}{2}$ نزدیك باشد .

چهار عدد متفاوت k ، l ، m و n را طوری پیدا کنید که مجموع $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ کمتر از ۱ و تا حد امکان به ۱ نزدیك باشد .

۱۴۹. شعاع نور حداکثر چند مرتبه می‌تواند از ضلعهای زاویهٔ ۱ درجه منعکس شود ؟ (در هر انعکاس زاویهٔ فرود با زاویهٔ انعکاس برابر است .)

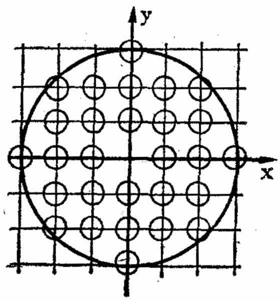
۱۵۰. شعاع نوربارها ازضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC منعکس می‌شود . فرض می‌کنیم که در يك فاصلهٔ زمانی ، شعاع نور ۴ مرتبه از ضلع AB ، x مرتبه ازضلع AC و y مرتبه از ضلع BC

منعکس شده باشد . x و y چه عددهایی می‌توانند باشند ؟ (همهٔ حالتهای ممکنه را پیدا کنید .)

۱۵۱. در یك صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ خانه‌ای شکلی‌را در نظرمی‌گیریم (و مثلاً نام آنرا «شیر» می‌گذاریم) که می‌تواند یك حرکت به راست ، یك حرکت به زیر ویك حرکت روی قطر به‌سمت چپ و بالا بکند . آیا شیر می‌تواند از خانه‌ای شروع به حرکت کند و از هرخانه یکبار بگذرد و دوباره به خانهٔ اول برگردد ؟

۱۵۲. دو نفر با هم شطرنج بازی می‌کنند و قرار می‌گذارند که هرکدام از آنها بتواند دو حرکت پشت سرهم انجام دهد . ثابت کنید که در این بازی سفید می‌تواند همیشه برنده باشد و یا لااقل مساوی کند .

۱۵۳. دریك پارك درختها را طوری کاشته‌اند که مرکزهای آنها روی رأسهای مربعهایی به ضلع ۱ قرار گرفته‌اند. تمام پارك به‌شکل دایره‌ای به‌شعاع مساوی s است (شکل ۱۰) . ساقهٔ درختها به چه قطری باید برسد ، تا دید ناظری را که در مرکز دایره قرار گرفته است ، بطور کامل بپوشانند ؟



شکل ۱۰

ثابت کنید که اگر شعاع همهٔ درختها از $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ کمتر باشد ، دید پوشیده نیست و اگر شعاع همهٔ درختها از $\frac{1}{s}$ بزرگتر باشد ، دید پوشیده است .

۱۵۴. روی سیاره‌ای که به‌شکل کره است ، تعدادی کشور وجود دارد .

هرکشور یا از یك قطعه تشکیل شده است و یا از دو قطعه‌ای که به‌هم متصل نیستند .
می‌خواهیم نقشهٔ این سیاره را به این ترتیب رنگ کنیم که اولاً قلمرو هرکشور یك رنگ داشته باشد ، ثانیاً هر دو کشور مجاور که مرز مشترك دارند با دو رنگ مختلف نشان داه شده باشد . ثابت کنید که دوازده رنگ مختلف همیشه کافی است، ولی یازده رنگ ممکن است کافی نباشد .

۱۵۵. چند کشور روی دو سیاره وجود دارد ، ضمناً قلمرو بعضی از کشورها تنها روی یکی از سیاره‌ها و قلمرو بعضی کشورهای دیگر روی هردوسیاره است (قلمرو هرحکومت دریك سیاره ازقسمتهای بدون ارتباط با هم تشکیل نشده است .)
ثابت کنید که اگر بخواهیم نقشهٔ این کشورها را طبق شرایط مسألهٔ ۱۵۴ رنگ کنیم ، ۱۲ رنگ همیشه کافی است . ثابت کنید که هفت رنگ ممکن است کافی نباشد .

۱۵۶. یك تودهٔ سنگریزه وجود دارد . دو طرف بازیکن هرکدام به‌نوبت از سنگریزه‌ها بر می‌دارند . در هر نوبت می‌شود یك ، دو یا سه سنگریزه برداشت. کسی برنده است که آخرین سنگریزه‌ها رابردارد. تعداد سنگریزه‌ها چقدر باشد تا آن‌که بازی را شروع کرده است برنده شود (یعنی طرف هرطور بازی کند، او بتواند پیروز شود.)

۱۵۷. a) دو نفر روی صفحهٔ شطرنج بازی می‌کنند و به نوبت یك شاه را حرکت می‌دهند . حرکت می‌تواند یك خانه به طرف چپ ، پایین و درجهت قطری به‌طرف پایین وچپ باشد . کسی بازی را می‌بردکه موفق شود شاه را درخانهٔ چپ وپایین جدول قرار دهد. شاه دروضع اولیه درکدام خانه‌ها باشد، تاکسی‌که بازی راشروع کرده است برنده شود ؟

b) دو تودهٔ سنگریزه داریم . دو بازیکن به نوبت از سنگریزه‌ها برمی‌دارند . هربازیکن درنوبت خود می‌تواند یك سنگریزه از یك توده یا از هرتوده یك سنگریزه بردارد . کسی بازی را می‌برد که آخرین سنگریزه‌ها را بردارد . در توده‌ها چند سنگریزه باشد تا آن‌که بازی را شروع کرده است برنده شود ؟

۱۵۸. درذوزنقهٔ $ABCD$ با قاعده‌های $AD=a$ و $BC=b$ $(a>b)$ وسط قطرها را B_1 و C_1 می‌گیریم . در چهار ضلعی AB_1C_1D دوباره وسط قطرها را B_2 و C_2 می‌نامیم. بعداز n مرحله ، نقطه‌های B_n و C_n بدست می‌آید.

a) طول B_nC_n را پیدا کنید .

b) اگر $n\to\infty$ حد B_nC_n چقدر است ؟

c) برای چه ذوزنقه‌ای پاره خطهای B_nC_n با هم برابرند ؟

۱۵۹. تعدادی سنگ ترازو داریم که وزن هیچکدام از آنها از ۵۰۰ گرم تجاوز نمی‌کند . می‌دانیم که نمی توان این سنگها را طوری به دو قسمت کرد که وزن هر دو دسته از ۵۰۰ گرم تجاوز کند . حداکثر وزن کلی این سنگها چقدر است ؟

۱۶۰. چهار خط راست روی یك صفحه چنان قرارگرفته‌اند که هیچ دو خطی با هم موازی و هیچ سه خطی متقارب نیستند . روی هر یك از خطها پیاده‌ای با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند (سرعت دو پیادهٔ مختلف می‌تواند با هم فرق داشته باشد .) می‌دانیم که پیادهٔ اول با هر یك از پیاده‌های دوم ، سوم و چهارم و پیادهٔ دوم با هر یك از پیاده‌های سوم و چهارم برخورد می‌کند . ثابت کنید پیادهٔ سوم با پیادهٔ چهارم برخورد خواهد داشت .

۱۶۱. در یك دور بازی فوتبال سه تیم ردیف اول به ترتیب ۷ ، ۵ و ۳ امتیاز آوردند . دراین دور چند تیم بازی کرده است و تیمهای

ردیف آخر هرکدام چند امتیاز آورده‌اند؟ (در هربازی برای بردن ۲ امتیاز ، برای مساوی ۱ امتیاز به حساب می‌آید و برای باخت امتیازی وجود ندارد . اگر تعداد امتیازهای دو تیم مساوی باشد، ردیف آنها برحسب تعداد گلهای رد و بدل شده معین می‌شود .)

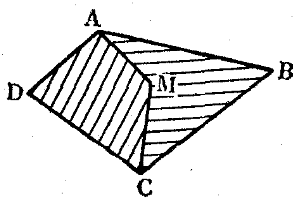
۱۶۲. n سنگ ترازو به وزنهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، . . . ، n گرم داریم. می‌خواهیم آنها را به سه قسمت با وزنهای مساوی تقسیم کنیم . به ازای چه مقادیری از n این تقسیم ممکن است ؟

۱۶۳. روی نیمساز یك زاویه ، نقطه‌ای مانند P اختیار کرده‌ایم . ازاین نقطه خطی رسم کرده‌ایم تا روی دو ضلع زاویه قطعه‌هایی مساوی a و b جدا کند . ثابت کنید که مقدار $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ به انتخاب خطی که از P می‌گذرد مربوط نیست .

۱۶۴. ۱۷ ضلعی محدبی را به وسیلهٔ قطرهایش به‌چندضلعیهای کوچکتر تقسیم کرده‌ایم . حداکثر تعداد ضلعهایی که یکی از این چند ضلعیهای کوچکتر می‌تواند داشته باشد چقدر است ؟

۱۶۵. همهٔ عددهای طبیعی را در نظر می‌گیریم که تنها از رقمهای ۰ و۱ تشکیل شده باشند . این عددها را به دو گروه چنان تقسیم کنید که مجموع هر دو عدد دلخواه از یك گروه شامل لااقل دو رقم مساوی ۱ باشد .

۱۶۶. چهارضلعی‌محدب $ABCD$ داده شده (شکل ۱۱) . مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M ، به نحوی که مساحتهای‌دوشکل $ABCM$ و $ADCM$ برابر باشند .



شکل ۱۱

۱۶۷. ۷ سکه داریم که از لحاظ ظاهر هیچ تفاوتی با هم نـدارند، ولی می‌دانیم که ۵ سکه حقیقی و ۲ سکـه تقلبی است . سکـهٔ حقیقی ۱۰ گرم و سکهٔ تقلبی ۹/۸ گرم وزن دارد . به کمك يك ترازو و بدون در دست داشتن هیچ وزنه‌ای ، حداقل چندبار باید آزمایش کرد تا سکه‌های تقلبی پیدا شود ؟

۱۶۸. يك چهارضلعی محدب به وسیلهٔ قطرهایش به چهار مثلث تقسیم شده است ، که مساحت هرکدام از آنها با يك عدد صحیح بیان می‌شود. ثابت‌کنید حاصلضرب این چهار عدد مجذورکامل است.

۱۶۹. دريك قوطی ۲۷ چوب‌کبریت وجود دارد. دونفر به‌نوبت هرکدام يك یا دو یا سه یا چهار چوب کبریت می‌توانند بـردارند . بازی را کسی برده است که تعداد چوب کبریتهایش پس از پایان کار زوج باشد :

a) با بازی صحیح کدامیك برنده‌اند : آنکه بازی را شروع کرده است یا رقیب او ؟

b) اگر بطورکلی در قوطی $۲n+۱$ چوب کبریت وجـود داشته باشد و بتوان بین ۱ تا m چوب کبریت برداشت کرد ، جواب چگونه است ؟

۱۷۰. صد مهرهٔ مختلف راکنار هم، در يك ردیف، چیده‌ایم. می‌توانیم جای هردو مهره‌ای را که يك مهره بین آنها قرار گرفته باشد ، عوض کنیم . آیا می‌توانیم به این ترتیب، مهره‌هـا را به ردیف عکس در آوریم ؟

*

۱۷۱. در چهارم تیرماه سال ۱۳۴۴ ، تاریخ را می‌توان اینطور نوشت :

۴۴/۴/۴

در این نوشته ، تنها از يك رقم برای نوشتن تاریخ روز استفاده

شده است .

حالا به این پرسش پاسخ دهید : درطول یك قرن چند مرتبه چنین وضعی پیش می‌آید که با نوشتن عددهای روز ، ماه و دو رقم سمت راست قرن ، تنها از یك رقم استفاده شده باشد ؟ در جواب دادن عجله نکنید ! فکر کنید !

۱۷۲. قطاری در چند شبانه روز از A به B می‌رود و سپس از B به A برمی‌گردد ، برنامهٔ حرکت قطار را در رفت و برگشت چگونه تنظیم کنیم ، تا هرفاصله‌ای از مسیر را که قطار ضمن رفتن در روز (یعنی ۶ صبح تا ۶ عصر) طی می‌کند ، ضمن برگشتن درشب (۶ عصر تا ۶ صبح) طی نماید ؟ سرعت حرکت قطار در هردو جهت یکنواخت است .

۱۷۳. وزن یك تراورس کاج $۲۷\frac{۴}{۵}$ کیلوگرم و یك تراورس بلوط $۴۵\frac{۱}{۲}$ کیلوگرم است. وزن ۱۰ تراورس از این دو نوع روی‌هم $۳۸۴\frac{۱}{۵}$ کیلوگرم شده است . بین آنها چند عدد از چوب کاج و چند عدد از چوب بلوط بوده است ؟

البته این مسأله به کمك یك دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی بطور عادی قابل حل است . ولی با عددهای این مسأله راه حل ساده‌ای وجود دارد که حتی بدون محاسبه و به‌کمك فکر می‌توان به آن رسید .

۱۷۴. پستچی نقل می‌کرد :

من امروز پنج مرتبه به‌طبقهٔ دهم و ده مرتبه به‌طبقهٔ پنجم رفته‌ام. اگر من بعد از هر تحویل نامه پایین نمی‌آمدم و در تمام مدت به طرف بالا می‌رفتم ، به طبقهٔ ... می‌رسیدم !

به کدام طبقه ؟

۱۷۵. در یك واحد مسکونی که از سه ساختمان چهارطبقه تشکیل شده است ، چند نفر زندگی می‌کنند ، به شرطی که بدانیم :

۱) در ساختمان A ، ۳۹ نفر بیشتر از ساختمان B و ۷۷نفر کمتر از ساختمان C زندگی می‌کنند .

۲) از هر۱۳ بچه ۷ نفر تحصیل می‌کنند .

۳) در اول ماه مهر مسئولین ادارهٔ واحد مسکونی ۱۴۰۰ کارت تبریك خریدند ، بیش از نیمی از کارتها به واحدهای دیگر مسکونی فرستاده شد و بقیه بین ساکنین واحد ما تقسیم شد : به هر نفر یك کارت .

۴) بزرگها ۲۰٪ بیشتر از بچه‌ها هستند .

۵) اگر به طبقه‌های اول ۱۷ نفر جدید وارد شود و از طبقه‌های دوم ۱۱ نفر به طبقه‌های سوم برود و از طبقه‌های چهارم ۱۵ نفر خارج بشود ، در تمام چهار طبقه عدهٔ ساکنین مساوی می‌شود .

۱۷۶. چند عدد پنج رقمی مختلف وجود داردکه لااقل یکی از رقمهای ، آن مساوی پنج باشد ؟

۱۷۷. a) در عدد ۱۲۵۷۸، هررقم از رقم قبل از خودش بزرگتر است . روی هم چندتا از این عددها وجود دارد؟ ابتدا جواب را به‌تقریب بگویید و سپس محاسبه کنید .

b) شرط را «عکس» حالت قبل می‌گیریم : می‌خواهیم تعداد عددهایی را پیدا کنیم که در آن هر رقم از رقم قبل از خودش کوچکتر باشد .

۱۷۸. عدد π را به تقریب در دستگاه عدد شماری به مبنای ۷ بنویسید .

۱۷۹. امروز من باید به پنج جا بروم : داروخانه ، آرایشگاه ، کتابفروشی ، بانك و پستخانه . برای اینکه کوتاهترین مسیر را پیداکنم ، تصمیم گرفتم قبل ازخارج شدن از منزل تمام مسیرهای

ممکن را مقایسه کنم .

اگر بانك و پستخانه در یك ساختمان واقع باشند و این ساختمان نسبت به بقیهٔ جاها از منزل من دورتر باشد ، چند مسیر مختلف را باید با هم مقایسه کنم ؟

۱۸۰. تاجری هر سال ۱۰۰ فونت از دارایی خود را برای مخارج خانواده‌اش برمی‌داشت و یك سوم آنچه که برایش می‌ماند ، به سرمایه‌اش اضافه می‌کرد. بعد از سه سال سرمایه‌اش دوبرابر شد. دارایی اولیهٔ او چقدر بوده است ؟ (مسألهٔ نیوتون از کتاب حساب عمومی سال ۱۷۰۷) .

۱۸۱. دو آلیاژ از نقره و طلا داریم . در یکی مقدار نقره ۴۰٪ و در دیگری مقدار طلا $۱\frac{۱}{۲}$ برابر نقره است .

از هرآلیاژ چقدر برداریم تا $۱۷\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم آلیاژ بدست آید که در آن نسبت مقدار طلا به مقدار نقره مثل ۲ : ۳ باشد ؟

۱۸۲. چهار مسافر که مسیرشان یکی بود یك تاکسی سوار شدند . وقتی که اولی پیاده شد، a_1 ریال پرداخت که مساوی یك چهارم مبلغی بود که تاکسی‌متر نشان می‌داد . بعد از مدتی دومی پیاده شد ، مبلغی که او پرداخت مساوی بود با پولی که اولی پرداخته بود (a_1 ریال) به اضافهٔ ثلث مبلغی که تاکسی‌متر بعد از پیاده شدن اولی کار کرده بود : روی هم a_2 ریال. بعد مسافر سوم پیاده شد ، او به اندازهٔ مبلغی که دومی داده بود (a_2 ریال) به اضافهٔ نصف مبلغ اضافه کار تاکسی‌متر بعد از پیاده شدن دومی ، پرداخت : روی هم a_3 ریال . بالاخره مسافر چهارم پیاده شد ، او به اندازهٔ پول سومی (a_3 ریال) به اضافهٔ تمام مبلغی که تاکسی متر بعد از پیاده شدن سومی نشان داده بود ، پرداخت : روی هم a_4 ریال .

می‌خواهیم مسافتی را که تاکسی پیموده است پیدا کنیم، به‌شرطی که تاکسی‌متر موقع شروع کار ۱۰ ریال را نشان دهد و برای هر ۳۰۰ متر یك ریال به آن اضافه شود .

۱۸۳. قایق موتوری از نقطهٔ A در جهت حرکت آب رودخانه ، با سرعت اختصاصی ۱۲ کیلومتر در ساعت ، حرکت کرد . در همان زمان قایق دیگری از نقطهٔ B در خلاف جهت حرکت آب (سرعت جریان آب ۲ متر در ثانیه است) با سرعت اختصاصی ۳۰۰ متر در دقیقه حرکت کرد . این دو قایق در نقطهٔ C ، که ۱۶ کیلومتری A بود ، در ساعت ۱۶ و ۴۵ دقیقه به‌هم رسیدند . اگر سرعت جریان آب ۳ متر در ثانیه باشد ، این دو قایق کی و کجا به هم می‌رسند ؟

۱۸۴. سنگی از ارتفاع h سانتیمتری به صورت آزاد رها شده است . در همان زمان از سطح زمین ، سنگ دیگری با سرعت اولیهٔ v_0 سانتیمتر درثانیه به‌طرف بالا پرتاب شده است . شتاب نیروی ثقل g سانتیمتر برثانیه است . کی این دو سنگ به هم می‌رسند ؟

۱۸۵. ساعت ۱۲ و ۳۰ دقیقه ، خانم سمیت به اطاق کاپیتان کشتی تفریحی ، که به طرف بالای رودخانه می‌رفت ، پرید :

ـ جواهرات مرا از اطاقم در کشتی به سرقت برده‌اند !

ـ بیشتر توضیح بفرمایید !

ـ در ساعت ۱۰ و ۳۰ دقیقه مستخدم ، بعد از آنکه چند دقیقه در اطاق دوم من که جواهرات من در آنجاست ماند ، برای من قهوه آورد . سپس در همان اطاق تا چند دقیقه به ۱۲ باقی ماند .

ـ در اطاق شما دیگر چه کسی بود ؟

ـ دوست من خانم براون که برای پیانو زدن پیش من آمده بود ، ولی البته او خارج از هر سوءظنی است. در ساعت ۱۲ و ۵ دقیقه

مهماندار تمرین او را قطع کرد و از او خواهش کرد از اطاق خارج شود تا بتواند چراغ رومیزی را درست کند. در ساعت ۱۲ و ۱۰ دقیقه من سرزده به اطاقم برگشتم و دیدم که مهماندار اشیای مرا جستجو می‌کند. من شروع به سرزنش او کردم و این کار تا ساعت ۱۲ و ۲۵ دقیقه طول کشید، در این موقع دوست من دوباره برگشت. همان موقع هم من به سرقت پی بردم و پیش شما آمدم.

کاپیتان متوجه شد کـه مستخدم از ساعت ۱۲ و ۱۰ دقیقه تا ۱۲ و ۲۰ دقیقه درپستوی لباسها بوده است. ولی هیچکس نتوانست بگوید که او از ساعت ۱۲ تا ۱۲ و ۱۰ دقیقه و از۱۲ و ۲۰ دقیقه تا ۱۲ و ۳۰ دقیقه کجا بوده است. ازآنجا که کاپیتان نتوانست به نتیجهٔ مشخصی برسد، در ساعت ۱۳ و ۳۰ دقیقه کشتی را به عقب برگرداند. در ساعت ۱۴ و ۴۵ دقیقه کشتی در مقـابـل جعبه‌ای قرارگرفت که روی آب شناور بود و خانم سمیت قوطی جواهرات خود را در داخل آن شناخت.

دیگر برای کاپیتان روشن شده بود که چه کسی جواهرات را بـه سرقت برده بود. چه‌کسی؟

۱۸۶. اتوبوسی بین دونقطهٔ A و B با سرعت ثابت در رفت وآمداست و فقط در هریك از این دو نقطه ۳ دقیقه توقف می‌کند. می‌دانیم:

در ساعت ۹ و ۸ دقیقه اتوبـوس از کنار نقطهٔ C و به طرف B گذشته است.

در ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه اتوبوس از نقطهٔ A خارج شده است.

در ساعت ۱۳ و ۱۶ دقیقه اتوبوس به نقطهٔ B رسیده است.

در ساعت ۱۴ و ۴ دقیقه از نقطهٔ C و به‌طرف B عبورکرده است.

کارمند صندوق پس‌انداز، که در مسیر AB بود، در فاصلهٔ ۵۴

دقیقه ناهار در بالکون اطاق خود نشسته بود . در این فاصله اتوبوسی از جلو او عبور نکرد .

کارمند پست که ۲۰ دقیقه به خیابان آمده بود ، دوبار اتوبوس را دید .

نقطهٔ C ، صندوق پس‌انداز و پستخانه در چه نقطه‌هایی از مسیر AB قرار دارند ؟

۱۸۷. دو نامه‌رسان یکی از A ودیگری از B به طرف یکدیگر در یك زمان حرکت کردند . سرعتهای آنها متفاوت ، ولی برای هرکدام یکنواخت بود . بعد از آنکه به‌یکدیگر رسیدند ، اولی ۱۶ ساعت و دومی ۹ ساعت دیگر تا مقصد فاصله داشتند . هرکدام از نامه رسانها برای پیمودن فاصلهٔ A و B چقدر وقت لازم دارند ؟

۱۸۸. عدد ۲۲ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که اگر به‌یکی از عددهایی که بدست می‌آید ۰/۵ اضافه و از دومی ۱/۵ را کم و سومی را در ۲/۵ ضرب کنیم ، سه عدد مساوی پیدا شود .

۱۸۹. دستگاه هفت معادلهٔ هفت مجهولی درجهٔ اول زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+11y+21z+31t+41u+51v+61w=77 \\ 2x+12y+22z+32t+42u+52v+62w=84 \\ 3x+13y+23z+33t+43u+53v+63w=91 \\ 4x+14y+24z+34t+44u+54v+64w=98 \\ 5x+15y+25z+35t+45u+55v+65w=105 \\ 6x+16y+26z+36t+46u+56v+66w=112 \\ 7x+17y+27z+37t+47u+57v+67w=119 \end{cases}$$

۱۹۰. سه دوندهٔ A ، B و C در یك مسابقهٔ دو ۱۰۰ یاردی شرکت کردند . وقتی که A به پایان خط رسید ، B در ۱۰ یاردی او بود و وقتی که B به پایان خط رسید ، C در ۱۰ یاردي او بود . وقتی که A به پایان خط رسید ، C در چند یاردی او واقع بود؟

فرض را براین می‌گیریم کـه هرسه با سرعتهای یکنواخت می‌دویده‌اند .

۱۹۱. مسافری از ده خود به طرف ایستگاه راه‌آهن حرکت کرد . ساعت اول ۳ کیلومتر رفت ، ولی حساب کـرد که اگر بـا همین سرعت به راه خود ادامه دهد ۴۰ دقیقه به‌قطار دیر می‌رسد . بنابـراین بقیهٔ راه را با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت حـرکت کـرد و ۴۵ دقیقه قبل از حرکت قطار به ایستگاه رسید . فاصلهٔ بین ایستگاه و قطار را پیدا کنید .

حل این مسأله به‌کمك جبر ساده است و جواب آن از معادلهٔ

$$\frac{x}{۳}-\frac{۲}{۳}=۱+\frac{x-۳}{۴}+\frac{۳}{۴}$$

بدست می‌آید. شما این مسأله را تنها به‌کمك حساب حل‌کنید .

۱۹۲. قایقی بدون پارو وموتور ، از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B ، با جریان آب حرکت کرد . بعد از ۲/۴ ساعت قایـق موتوری (بـا سرعت اختصاصی ۲۰ کیلومتر در ساعت) به‌دنبال اولـی به راه افتاد . به‌محض‌اینکه قایق موتوری به‌قایق‌اولی رسید به‌طرف A برگشت. ۳/۶ ساعت بعد از شروع حرکت ، قایق موتـوری بـه نقطهٔ A و قایق اول به نقطهٔ B رسیدند . سرعت جریان آب را پیدا کنید .

۱۹۳. در یك حوض خالی بطوریکنواخت آب می‌ریزد (v لیتر درثانیه). به‌محض اینکه مقداری آب وارد حوض شود ، تبخیر آن شروع می‌شود ؛ تبخیر آب هـم یکنواخت است و بعـد از m ثانیه از مقدار مفروض آب چیزی باقی نمی‌ماند . مـی‌خواهیم w ، مقدار لیتر آبی که بعد از t ثانیه در حوض می‌ماند پیدا کنیم .

برای حل مسأله به این ترتیب استدلال می‌کنیم . از یکطرف بعد از t ثانیه vt لیتر آب وارد حوض می‌شود . از طرف دیگر آب

تبخیر می‌شود . مقدار تبخیر آب در هرلحظه متناسب با مقدارآبی است که در آن لحظه در حوض وجود دارد . چون هرثانیه v لیتر آب به حوض وارد می‌شود ، متناسب با آن شدت تبخیر هم زیاد می‌شود ، یعنی به شدت تبخیر هرثانیه به اندازهٔ $\frac{v}{m}$ لیتر در ثانیه اضافه می‌شود. به‌این ترتیب «نمو» تبخیر عبارت است از $\frac{v}{m}$ لیتر درثانیه . این وضع کاملاً شبیه وضع حرکت متشابه‌التغییر است که به این ترتیب بیان می‌شود :

$$s=v.t+\frac{۱}{۲}a.t^{۲}$$

که در آن s ـ مسافت ،

t ـ زمان ،

v ـ سرعت اولیه ،

a ـ شتاب حرکت است .

برای مسألهٔ ما ، این رابطه را خواهیم داشت :

$$w=v.t-\frac{۱}{۲}.\frac{v}{m}.t^{۲} \qquad \text{(لیتر)}$$

برای یك نمونهٔ عددی این رابطه را بررسی کنیم . فرض کنید $v=۲۰$ (لیتر در ثانیه) و $m=۱۰$ (ثانیه) باشد ، در این‌صورت داریم :

$$w=۲۰t-\frac{۱}{۲}.\frac{۲۰}{۱۰}.t^{۲}=۲۰t-t^{۲}$$

مقادیر مختلف را حساب کنیم :

$$t=۰\ ...\ ۲\ ...\ ۶ \quad \text{(ثانیه)}$$

$$w=۰\ ...\ ۳۶\ ...\ ۸۴ \quad \text{(لیتر)}$$

همانطورکه می‌بینیم مقدار آب در حوض رو به افزایش است .

جدول را ادامه می‌دهیم :

$$t = \ldots\ ۸ \ldots\ ۱۰\ \ ۱۱ \quad \text{(ثانیه)}$$

$$w = \ldots\ ۹۶ \ldots\ ۱۰۰\ \ ۹۹ \quad \text{(لیتر)}$$

مقدار آب در حوض رو به‌کاهش می‌رود . بعد چه خواهد شد ؟

$$t = \ldots\ ۱۵ \ldots\ ۲۰ \quad \text{(ثانیه)}$$

$$w = \ldots\ ۷۵ \ldots\ ۰ \quad \text{(لیتر)}$$

بعد از ۲۰ ثانیه هیچ آبی در حوض نمی‌ماند ! ولی این نتیجه بی‌معنی است ! مگر نه این است که در هرثانیه ۲۰ لیترآب وارد حوض می‌شود ؟ اشتباه محاسبه در کجاست ؟

۱۹۴. a) کنارهٔ بالای یك در، در دومتری زمین قرار دارد؛ در یك نقطه از آن سه مگس نشسته است. درست در ساعت ۴ ، هرسه مگس در سه جهت مختلف پرواز می‌کنند . در چه ساعتی این مگسها روی یك صفحه قرار می‌گیرند ؟

b) درکنار حیاط، چوبی به‌ارتفاع دو متر وجود دارد؛ درست در ساعت ۳ از انتهای بالایی آن چهار مگس در جهتهای مختلف پریدند : هرکدام از آنها روی یك خط راست و با سرعت ثابت می‌پرید ، اولی با سرعت ۵۰ متر در دقیقه ، دومی ۶۰ متر در دقیقه ، سومی ۷۰ متر در دقیقه و چهارمی ۸۰ متر در دقیقه . بعد از ۹ دقیقه چهار مگس روی یك صفحه قرار داشتند . این چهار مگس کی دوباره روی یك صفحه قرار می‌گیرند ؟

۱۹۵. دو پاره خط داده شده است ومی‌دانیم یکی از آنها قاعده ودیگری یکی از ساقهای مثلث متساوی‌الساقین است ؛ ولی نمی‌دانیم کدامیك قاعده و کدامیك ساق است . آیا با همین مفروضات می‌توان مثلث متساوی‌الساقین را ساخت ؟

۱۹۶. روی میزها را برای باغ کودکان به‌شکل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

می‌سازند، به نحوی که اگر آنها را چسبیده به‌هم قرار دهند، یك دایره (ویا دقیقتر یك حلقه) تشکیل دهند، ضمناً اگر میزها را یك در میان به اندازهٔ ۱۸۰ درجه بچرخانند، در ردیف هم و روی یك خط راست قرار گیرند. آیا ضلع آزاد میز آخر در این حالت (روی شکل ۱۲ ضلع میز سمت راست) می‌تواند موازی ضلع آزاد میزاول (روی شکل سمت چپ) باشد؟

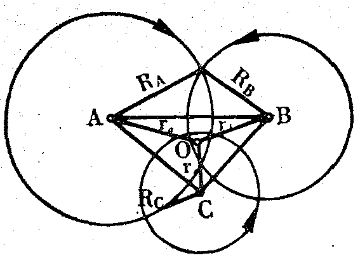
شکل ۱۲

۱۹۷. مکعبی که از آلیاژی با وزن مخصوص ۲/۴ تهیه شده است $41\frac{2}{3}$ گرم وزن دارد. مکعب دیگری از آلیاژی دیگر به وزن مخصوص ۴/۶ درست کرده‌ایم و می‌دانیم که سطح کرهٔ محیطی مکعب دوم ۴ برابر سطح کرهٔ محیطی مکعب اول است. وزن مکعب دوم چقدر است؟

۱۹۸. a) سه نقطهٔ A ، B و C مفروض است. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی رسم کنید که این سه نقطه، سه رأس آن باشد.

b) سه نقطهٔ D_1 ، D_2 و D_3 مفروض است. سه ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بسازید که در سه رأس A ، B و C (که پیدا خواهید کرد) مشترك باشند و D_1 ، D_2 و D_3 به‌ترتیب رأس چهارم آنها باشد.

۱۹۹. a) سه صفحهٔ دایره‌ای شکل دور سه محور متوازی A ، B و C بطور یکنواخت دوران می‌کنند (جهت دوران روی شکل ۱۳ نشان داده شده است.) قبل از شروع دوران، سوراخ O را درسه صفحه به‌وجود آورده‌اند. می‌دانیم:



شکل ۱۳

$AB = ۵۳$ (میلیمتر) ،
$BC = ۳۴$ (میلیمتر) ،
$CA = ۴۰$ (میلیمتر) ،
$r_a = ۳۲$ (میلیمتر) ،
$r_b = ۴۵$ (میلیمتر) ،
$w_A = ۷/۵$ (دور در دقیقه) ،
$w_b = ۱۰$ (دور در دقیقه) ، $w_c = ۶\frac{۲}{۳}$ (دور در دقیقه)

بعد از چه مدتی دوباره سوراخهای سه صفحه روی هم قرار می‌گیرند ؟

b) دو صفحهٔ دایره‌ای شکل بطور یکنواخت دور دو محورمتوازی A و B دوران می‌کنند. سرعت دوران اولی (w_A) ۵ دور دردقیقه و سرعت دوران دومی (w_B) ۱۲ دور در دقیقه است . قبل از شروع دوران سوراخ O را در جایی از دو صفحه به وجود آورده‌اند . بعد از چه مدتی دوباره سوراخ دیده می‌شود ؟

۲۰۰. چهارضلعی $ABCD$ مفروض است. می‌خواهیم این چهارضلعی را به چهار قسمت چنان تقسیم کنیم که بتوانیم از آنها چهارضلعی $KLMN$ را هم‌ارز چهارضلعی $ABCD$ با معلوم بودن دو جزء آن (مثلاً دوضلع، یا دو زاویه، یا یك ضلع‌ویك زاویه) بسازیم.

۲۰۱. دریك کتاب، شکل ۱۴ داده شده است . در این شکل دو ستون قائم و سایهٔ آنها روی صفحهٔ افقی رسم شده است. با این فرض می‌خواهیم : ۱) جای منبع نور (لامپ، چراغ) ، ۲) «پایهٔ» آن (یعنی تصویر منبع نور روی صفحهٔ افقی) را پیدا کنیم .

شکل ۱۴

این مسأله را حل کنید و به‌این پرسشهای اضافی هم جواب بدهید:

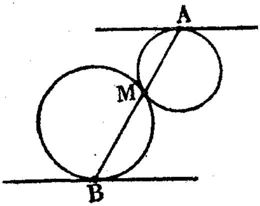
۱) آیا قائم بودن ستونها مهم است ؟

۲) آیا افقی بودن صفحه‌ای کـه سایـه روی آن می‌افتِد ، اساسی است ؟

۳) آیا همهٔ آنچه که در شکل داده شده است لازم است ؟

۲۰۲. مخروط قائم مستدیری روی یك صفحهٔ افقی قرارگـرفته است ، به‌نحوی که در مولد SA برصفحه مماس است . مخروط بدون لغزش روی صفحه به‌اندازهٔ ۳۶۰ درجه ، دور رأس خـود S ، می‌غلتد و در وضع اولیهٔ خود قرارمی‌گیرد . این مخروط چگونه باید باشد تا مولد SA هم در وضع اولیهٔ خود قرارگیرد ؟

۲۰۳. دو دایره با اندازه‌های دلخواه در نقطهٔ M برهم مماس‌اند . از نقطهٔ M قاطع دلخواه AMB را کشیده‌ایم (A و B روی محیط دو دایره‌اند) . ثابت کنید مماسهایی که بردودایره درنقطه‌های A و B رسم می‌کنیم با هم موازی‌اند (شکل ۱۵) .



شکل ۱۵

۲۰۴. مژده از رأسهای مربع $ABCD$ چهار خط راست به‌موازات قطرهای آن رسم کرد و مربع محیطی را بدست آورد . بعد از اندازه‌گیری و محاسبه گفت :

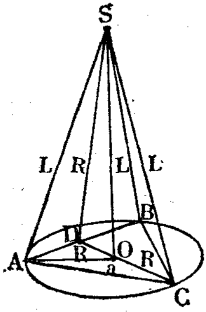
عددی که مساحت مربع $ABCD$ را نشان می‌دهد برابر است بـا عددی که محیط مربع محیطی را نشان می‌دهد !

خواهر او توکا ، وسط ضلعهای همان مربع $ABCD$ را به‌هم وصل کرد ومربع محاطی رابدست آورد. بعد از اندازه‌گیری ومحاسبه گفت :

عددی که مساحت مربع $ABCD$ را نشان می‌دهد برابر است با عددی که محیط مربع محاطی را نشان می‌دهد !

چطور چنین چیزی ممکن است ؟ در هردو حالت مربع $ABCD$ یکی است ، بنابراین مساحت آن تغییر نمی‌کند ، در حالی‌که مربعهای محیطی و محاطی با هم فرق دارند و محیط مربع محیطی دوبرابر محیط مربع محاطی است . چطور دو مقدار نامساوی با یك مقدار، مساوی شده‌اند؟ مطلب را چگونه می‌توان روشن کرد؟

۲۰۵. حلقه‌ای به شعاع مساوی R به وسیلهٔ سه نخ SA ، SB و SC به قلاب S آویخته شده‌است $(\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CA})$. اگر این سه‌نخ به‌یك طول باشند $(SA=SB=SC=L)$ ، صفحهٔ حلقه افقی خواهد بود . ولی اگر این سه طول برابر نباشند مثلاً $(SA=SB=L\neq SC=l)$ ، صفحهٔ حلقه افقی نخواهد بود .



شکل ۱۶

اگر L و R معلوم باشد، حدود تغییرات l چیست ؟ اگر $l\neq L$ باشد ، صفحهٔ حلقه چه زاویه‌ای با صفحهٔ افقی می‌سازد ؟

آیا R و L را می‌توان به‌دلخواه اختیار کرد یا بین آنها ارتباطی وجود دارد ؟ اگر جواب مثبت است ، این ارتباط را پیدا کنید (شکل ۱۶) .

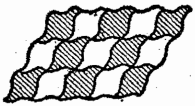
۲۰۶. قوطی مکعب مستطیل شکل درازی، به‌مقطع $a\times b$ مفروض است. نخی به‌طول $۲(a+b)$ از وسط دور قوطی پیچیده‌ایم ، به‌نحوی که پاره خطهای راستی که به‌وسیلهٔ نخ به وجود آمده بر یالهای قوطی عمود باشد . نقطه‌های مشترك نخ و یالهای مکعب مستطیل

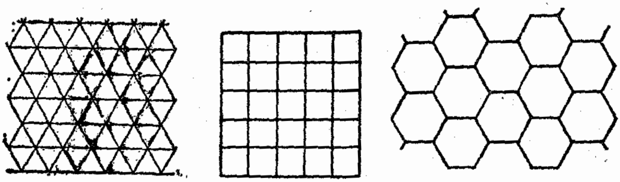
را $A_\circ$، $B_\circ$، $C_\circ$ و $D_\circ$ می‌نامیم ؛ یکی از این نقطه‌ها و مثلاً $A_\circ$ را ثابت می‌گیریم ، نخ دیگری با طول بزرگتر (و مثلاً به طول l) انتخاب می‌کنیم؛ این نخ را می‌توان دورسطح قوطی پیچید ، به نحوی که خط شکستهٔ $A_\circ BCDA_\circ$ بدست آید که دیگر پاره خطهای آن عمود بریالهای مکعب مستطیل نیستند .

۱) حداکثر فاصلهٔ نقطهٔ B از $B_\circ$ چقدر است ؟ همچنین C از $C_\circ$ و D از $D_\circ$ ؟

۲) ثابت کنید خط شکستهٔ $A_\circ B'CD'A_\circ$ که به این ترتیب بدست می‌آید ، مسطح است .

۲۰۷. در شکل ۱۷ کف پوشهای چوبی نشان داده شده است که با شکلهای مساوی تمام سطح را پوشانده‌اند (بدون اینکه جایی خالی بماند و یاکف‌پوشها روی‌هم





شکل ۱۷

قرارگرفته باشند) . روشن است که هرجزء کف‌پوش را می‌توان با حرکت انتقالی به هر جزء دلخواه دیگری از همین کف‌پوش منطبق کرد . مبنای اصلی همهٔ کف‌پوشها یکی از این دو طرح است: ۱) متوازی‌الاضلاعها (و درحالت خاص مستطیل و مربع)، ۲) شش ضلعیها با ضلعهای متوازی (و در حالت خاص شش ضلعیهای منتظم) . همچنین روشن است که کف‌پوش را با مثلثهای غیرمشخص هم می‌توان ساخت .

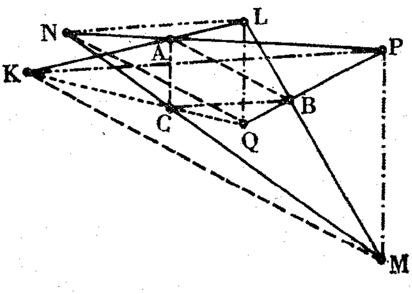
به‌این ترتیب ازشکلهای منتظم تنها با مثلثهای متساوی‌الاضلاع، مربعها و شش ضلعیهای منتظم می‌توان کفها را فرش کرد . این مثلثها (یا مربعها و یا شش ضلعیها) را طوری ازهم جدا می کنیم که بین شکلها نوارهایی به عرض d به وجود آید . عرض نوارهای d را چقدربگیریم که مثلثهای منتظم (یا مربعها ویا شش ضلعیهای منتظم) به اندازهٔ $\frac{1}{n}$ تمام سطح کف را پوشانده باشند ؟

۲۰۸. رومیزی مربع شکلی از پارچهٔ نازك ، روی میز دایـره‌ای شکـل قرار دارد . مرکز مربع برمرکز دایره منطبق است . رأسهای هر مـربع رومیزی نسبت بـه وسط ضلعهای آن چقدر بـه‌کف اطاق نزدیکتر است ؟

۲۰۹. a) سه نقطهٔ دلخواه C ، B و A را کـه بـریك امتداد نیستند ، روی یك صفحه انتخاب کرده‌ایم ؛ در همین صفحه نقطهٔ دلخواه K را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ L قرینهٔ K را نسبت بـه A پیدا می‌کنیم ؛ سپس M قرینهٔ L را نسبت به B را بدست می‌آوریم؛ بعد نقطهٔ N قرینهٔ M را نسبت به C ونقطهٔ P قرینهٔ N را نسبت به A پیدا می‌کنیم. بالاخره نقطهٔ Q قرینهٔ P نسبت به‌B رابدست می‌آوریم .

ثابت کنید نقطه‌هـای Q و K نسبت به نقطهٔ C قرینهٔ یکدیگرنـد .

b) ثابت کنید می‌توان همین نتیجه را در حالت کلی‌ترهم بدست آورد ، وقتی که برای



شکل ۱۸

بدست آوردن هریك از نقطه‌های قرینهٔ ردیف فرد (یعنی نقطه‌های اول ، سوم و پنجم: L ، N و Q) فاصلهٔ نقطهٔ مبدأ تا مرکز تقارن را φ برابر ($\varphi > ۱$) فاصلهٔ مرکزتقارن تا نقطهٔ قرینه بگیریم وبرای نقطه‌های قرینهٔ ردیف زوج (یعنی نقطه‌های دوم ، چهارم وششم : M ، P و K) فاصلهٔ نقطهٔ قرینه تا مرکز تقارن را α برابر فاصلهٔ نقطهٔ اصلی تا مرکز تقارن فرض کنیم ، یعنی :

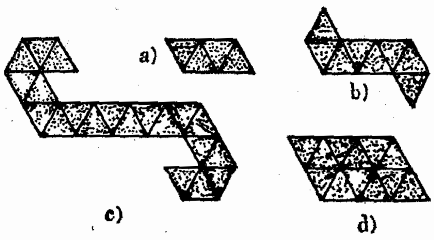
$$\frac{KA}{AL}=\frac{MC}{CN}=\frac{PB}{BQ}=\varphi\ ,\ \frac{LB}{BM}=\frac{NA}{AP}=\frac{1}{\varphi}$$

در این حالت باید $\frac{1}{\varphi}=\frac{QC}{CK}$ باشد (شکل ۱۸ را ببینید.)

۲۱۰. پارامترهایی که شکل واندازه‌های لیوان تاشو را معین‌می‌کند چند وکدامند؟ (شبیه‌آن می‌توان ازآنتن‌تاشو رادیوهای دستی‌نام‌برد.)

۲۱۱. نقطه‌های A ، B و C روی سه یالی‌که در رأس O مکعبی به هم رسیده‌اند، قرار دارند ومی‌دانیم $OA=OB=OC=a$ (اگر یال مکعب مساوی l باشد : $l>a$) . از هریك از نقطه‌های A و B که روی یکی از وجه‌های مکعب قرار دارند، صفحه‌ای عمود بر این وجه و موازی OO' (قطر مکعب) عبور می‌دهیم . به همین ترتیب دوصفحه از نقطه‌های B و C و دو صفحه از نقطه‌های C و A . در نتیجه سه جفت صفحهٔ متوازی مکعب را قطع می‌کند . شکل چند وجهی که بدست می‌آید و حجم آنرا پیدا کنید .

۲۱۲. در شکل ۱۹ ـ a یك چند ضلعی نشان داده شده است که از ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع درست شده است: این گستردهٔ یك چهار وجهی منتظم



شکل ۱۹

است . درشکل ۱۹ـb یك چندضلعی وجود داردکه ازهشت مثلث متساوی‌الاضلاع درست شده است : این گستردهٔ یك هشت وجهی منتظم است . در شکل ۱۹ـc بیست مثلث متساوی‌الاضلاع یك چند ضلعی را به‌وجود آورده‌اند . این گستردهٔ یك بیست وجهی منتظم است . در شکل ۱۹ـd چندضلعی وجود داردکه از دوازده مثلث متساوی‌الاضلاع درست شده است. این هم گستردهٔ یك چندوجهی است ،که البته به‌اندازهٔ چهار وجهی، هشت وجهی و بیست وجهی منتظم مشهور نشده است . شکل گسترده را روی یك صفحهٔ کاغذ رسم کنید ، سپس آنرا ببرید و کوشش کنید چند وجهی مربوطه را بسازید .

۲۱۳. یك تیر چوبی را اره کنید (جهت برش با محور چوب می‌تواند زاویه‌ای دلخواه داشته‌باشد) . در سطح برش قشرهایی را می‌بینید که سالهای عمر درخت را نشان می‌دهند . به زبان هندسه ، این قشرها چه منحنیهایی را تشکیل می‌دهند ؟

۲۱۴. a) مجموع حجم سه متوازی‌السطوح برابـر است با v . مطلوب است حجم هریك از سه متوازی‌السطوح به شرطی که بدانیم :

نسبت طول آنها به یکدیگر $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ است ،

نسبت عرض آنها به یکدیگر $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ است ،

نسبت ارتفاع آنها به‌یکدیگر $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$ است .

b) همین مسأله را برای حالتی حل کنید که داشته باشیم :

نسبت طولها : $a : b : c$

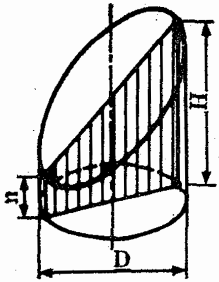
نسبت عرضها : $b : c : a$

نسبت ارتفاعها : $c : a : b$

۲۱۵. یـك چهار ضلعی محدب بـه صورت کلی خود در نظر می‌گیریم (یعنی چهارضلعی که ضلعهای آن طولهای مختلفی داشته باشند) .

فرض کنید ضلعهای آن a ، b ، c ، d میله‌هایی باشند که در رأسهای چهار ضلعی به هم لولا شده‌اند . ایـن چهار ضلعی را می‌توان با حفظ اندازهٔ ضلعهای آن تغییر شکل داد . می‌خواهیم مجموعهٔ این چهار ضلعیها را که می‌توان به‌کمك «چهار ضلعی» لولایی بدست آورد ، بررسی کنیم .

۲۱۶. استوانهٔ قائم دواری باقطرقاعدهٔ مساوی D مفروض است . از نقطـه‌ای واقـع بر محور استوانـه ، صفحهٔ دلخواهـی گذرانده‌ایم تا یك استوانهٔ ناقص بدست آید . مولدهای اصلی این استوانهٔ ناقص مساوی H و h شده است . اگر سطح جانبی این استوانهٔ ناقص راروی صفحه گسترش دهیم، چه شکلی بدست می‌آید؟ مساحت این شکل را محاسبه کنید (شکل ۲۰) .



شکل ۲۰

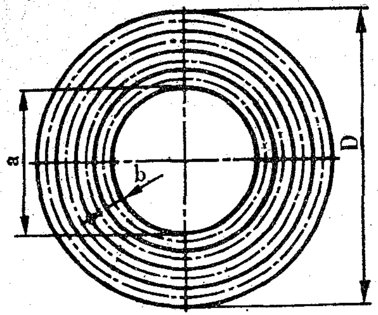
۲۱۷. یك صفحهٔ کاغذ انتخاب کنید و آنرا از وسط روی ضلع بزرگتر تا کنید. سپس دوباره آنرا به‌همین ترتیب تاکنید وغیره . در هر عمل طول ضلع کوچکتر ثابت می‌ماند وطول ضلع بزرگترنصف می‌شود .

شکل صفحهٔ کاغذ چگونه باشد تا نصف آن ، یك‌چهارم آن ، یك هشتم آن ، یك شانزدهم آن وغیره شکلهایی متشابه باشند ؟

۲۱۸. دور یك میله (استوانه) بـه قطـر مساوی d نواری را n دور (n عددی صحیح است) محکم پیچیده‌ایـم . قطر خارجی لوله‌ای که بدست می‌آید مساوی D شده است. می‌دانیم که اگر لوله را روی امتداد شعاع ، از ابتدا تا انتهای نوار ، ببریم ، نوار به n قطعه تقسیم می‌شود که طول آنها تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند ،

هریك از n قطعه را چگونه به دو قسمت تقسیم کنیم تا طول $2n$ قطعه‌ای که بدست می‌آید یك تصاعد حسابی جدید درست کنند ؟

برای سهولت کار قبول می کنیم که هر دور (پیچ) نوار یك حلقه درست کند (یعنی یك استوانهٔ دوار کامل) ، و طول گستردهٔ آن مساوی قطر متوسط آن باشد (شکل ۲۱) .



شکل ۲۱

۲۱۹. a) یك ضلع مستطیلی a واحد و ضلع دیگر آن b واحد است (a و b عددهای صحیحی هستند) . از انتهای هر پاره خط واحد خطی به موازات ضلع مستطیل رسم کرده‌ایم . به این ترتیب مستطیل مفروض به ab مربع واحد تقسیم می‌شود. روی‌هم از دو دستگاه خطهای موازی چند مربع درست می‌شود ؟

b) همین مسأله را برای وقتی که مکعب مستطیل به بعدهای a ، b و c را به مکعبهایی تقسیم می کنیم ، حل کنید .

c) همین مسأله را برای متوازی‌السطوح n بعدی که بعدهای آن به طولهای a ، b ، c ، . . . ، h ، l و m هستند ، حل کنید .

۲۲۰. a) در یك مثلث متساوی‌الساقین دایره‌ای محاط کرده‌ایم ، سپس دایرهٔ دومی رسم کرده‌ایم که بر دایرهٔ اول و دو ساق مثلث مماس باشد ، بعد دایرهٔ سوم را و غیره .

مساحت هر دایرهٔ محاطی از مساحت دایرهٔ محاطی قبل از خود کمتر است . بنابراین مساحتهای این دایره‌ها یك رشتهٔ عددی نزولی تشکیل می‌دهند. حد مجموع جمله‌های این رشته «مجموع

مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی» نامیده می‌شود . مـی‌خواهیم دایره‌ای پیدا کنیم کـه مساحت آن مساوی مجموع مساحتهـای همهٔ دایره‌های محاطی باشد . مسأله را هم به‌طریق محاسبه و هم به‌طریق ترسیم حل کنید .

b) در یك مثلث متساوی‌الساقین دایره‌ای محاط کرده‌ایم ، سپس دایرهٔ دوم وبعد دایرهٔ سوم و غیره . فرض‌کنید قاعدهٔ این مثلث ثابت و ارتفـاع آن متغیر بـاشد . آیـا در این صورت نسبت مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی به‌مساحت مثلث تغییر می‌کند ؟ اگرجواب مثبت است ، در چه حالتی این نسبت نزولی است ؟ به این سؤال بدون هیچ محاسبه‌ای و بـدون استفاده از رابطه‌هایی که در قسمت قبل پیدا کرده‌اید جواب بدهید .

c) در مخروط دوار قائمی یك کره محاط‌کرده‌ایم (قطر قـاعدهٔ مخروط d و ارتفاع آن H است) . سپس کرهٔ دیگری در مخروط محاط کرده‌ایم که برکرهٔ اول و همهٔ مولدهای مخروط مماس باشد و غیره . حجم هر یك از این کره‌ها از حجم کرهٔ قبلی‌کمتر است . بنابراین حجم این کره‌ها یك رشته عددی نزولی تشکیل می‌دهند . حدی که مجموع حجمهای این کره‌ها به‌سمت آن میل می‌کند «مجموع حجمهای کره‌های محاطی» نامیده می‌شود .

می‌خواهیم شعاع کره‌ای را پیدا کنیم که حجم آن مساوی مجموع حجمهای کره‌های محاطی باشد .

۲۲۱. a) دایره‌ای انتخاب می‌کنیم و آنرا «هسته» می‌نامیم . دور این «هسته» کمربندی از دایره‌هایی با همان قطر دایرهٔ «هسته» قـرار می‌دهیم ، به‌نحوی که هریك از این دایره‌ها بر «هسته» و دو دایرهٔ مجاورکمربند مماس باشد . به همین ترتیب کمربند دوم را با دایره‌هایی به همان قطر قرار می‌دهیم و غیره .

اگر n کمربند درست کرده باشیم ، روی‌هم چند دایره در تمام شکل وجود خواهد داشت ؟

b) همین مسأله را برای حالتی حل کنید که به عنوان هستهٔ سه دایره مساوی انتخاب کرده باشیم که هرکدام از آنها بر دو دایرهٔ دیگر مماس باشد . در این حالت چه رابطه‌ای بدست می‌آید ؟

۲۲۲. کسرهای زیر را به ترتیب صعودی بنویسید :

$$\frac{۴}{۵}, \frac{۵۳}{۶۷}, \frac{۳۲۱}{۴۴۹}, \frac{۳۶۰}{۴۹۱}, \frac{۴۵۷}{۶۱۳}, \frac{۵۰۹}{۶۵۳}, \frac{۶۰۱}{۷۸۷}$$

۲۲۳. من شیر برنجی‌ام ، دو جریان آب از چشمهایم ، یك جریان از دهانم و یك جریان از دماغم بیرون می‌آید . چشم راست من ، حوض را در دو روز پر می‌کند ؛ چشم چپ من در سه روز ، دماغم در چهار روز و دهانم در شش روز حوض را پر می‌کند . اگر با هم تمام چشمها ، دهان و دماغ من باز باشد ، در چند ساعت حوض پرمی‌شود؟ (مسألهٔ یونانی). مسأله‌را با روش‌ترسیم حل کنید .

۲۲۴. از نقطهٔ A در فاصله‌های زمانی مساوی سه اتومبیل در یك راه به‌طرف نقطهٔ C حرکت‌کردند . بعد از مدتی هرسه اتومبیل با هم از نقطهٔ B ، که بین A و C واقع بود ، گذشتند ، اتومبیل اول یك ساعت بعد از اتومبیل دوم به نقطهٔ C رسید . اتومبیل سوم بعد از آنکه به C رسید بلافاصله برگشت و در ۴۰ کیلومتری نقطهٔ C به‌اتومبیل اول رسید. سرعت اتومبیل اول را پیداکنید، به‌شرطی که فاصلهٔ B تا C مساوی ۱۲۰کیلومتر باشد . کوشش کنید این مساله را مثل یك مسألهٔ حساب حل کنید.

۲۲۵. a) دو دوچرخه سوار در یك لحظه از نقطه‌های A و B به طرف یکدیگر حرکت کردند . هرکدام از آنها وقتی که به نقطهٔ مقابل

رسید ، بلافاصله به‌طرف مبداءِ خود برگشت. اولین ملاقات آنها در ۵ کیلومتری A و دومین ملاقات آنها در ۳ کیلومتری B بود. فاصلهٔ AB را پیدا کنید .

b) شرطهای مسأله رابه‌همان ترتیب می‌گیریم، منتهی فرض می‌کنیم دوچرخه سوارها حرکت بین A و B را همچنان ادامه دهند، در این‌صورت به این سؤالها هم جواب بدهید :

۱) ملاقات سوم ، چهارم و غیره کی پیش می‌آید ؟

۲) آیا ممکن است یکی از دوچرخه سوارها وقتی که از A به B (یا از B به A) می‌رود ، دیگری را دوبار ملاقات کند ؟

۳) آیا ممکن است یکی از دوچرخه سوارها وقتی از A به B (یا از B به A) می‌رود حتی یکبار هم دیگری را ملاقات نکند ؟

۲۲۶. دو نفرمبلغهای مساوی به‌صندوق پس‌انداز سپردند . اولی بعداز m ماه p ریال و دومی بعد از n ماه q ریال سپردهٔ خود را گرفتند. . هرکدام در ابتدا چه مبلغی به صندوق پس‌انداز سپرده بودند و نرخ بهرهٔ صندوق پس‌انداز چقدر است ؟ مسأله را با روش ترسیم حل کنید .

۲۲۷. در یك چمنزار به مساحت $۳\frac{۱}{۳}$ آکر ۱۲ گاو به‌چرا مشغول شدند. ضمن ۴ هفته آنها تمام علفهایی را که درچمنزار بود وآنچه که در این مدت ، علفها رشد کرده بودند ، خوردند . در چمنزار دیگری به مساحت ۱۰ آکر ۲۱ گاو رها شدند . آنها در ۹ هفته تمام علفها به اضافهٔ آنچه را که در این مدت رشد کرده بود ، خوردند . چند گاو می‌توان در چمنزاری به مساحت ۲۴ آکر رها کرد تا بتوانند ۱۸ هفته در آن چرا کنند ؟ (مسالهٔ نیوتون) .

۲۲۸. از دو نقطهٔ A و B ، که درکنار رودخانه‌ای قرار دارند ، دو قایق

موتوری با سرعتهای اختصاصی مساوی به‌طرف هم حرکت کردند. اگر قایق اول سرعت خود را x کیلومتر درساعت بیشتر می‌کرد و قایق دوم به‌همین اندازه سرعت خود راکم می‌کرد ، قایق اول همانقدر ساعت زودتر به B می‌رسید که قایق دوم دیرتر به A می‌رسید . اگر سرعت جریان آب را یکنواخت فرض کنیم ، x را پیدا کنید .

۲۲۹. تعداد سالهای عمر پدری ۵ واحد بیشتر از مجموع سالهای عمر سه پسر اوست. بعد از ده سال ، سن پدر دو برابر سن پسربزرگتر خود می‌شود ، بعد از بیست سال سن پدر دو برابر سن پسر دوم خواهد شد و بالاخره بعد از سی سال سن پدر دو برابر سن پسر کوچکتر خود می‌شود . سن پدر و هریك از سه فرزندش چقدر است ؟

۲۳۰. خریداری می‌خواهد ۱۲ تن از محصولی‌که در سه دهستان وجود دارد ، بخرد و آنها را به شهر بیاورد ؛ این خریدار اتومبیلی را برای ۴۰ ساعت در اختیار دارد و می‌دانیم :

دهستان	مقدار محصول (برحسب تن)	قیمت محصول(به هزار تومان برای هرتن)	زمان دسترسی به محصول (به ساعت برای هرتن)
I	۱۰	۴	۱
II	۸	۳	۴
III	۶	۱	۳

چگونه خرید محصول را بین سه دهستان تقسیم کنیم ، تا حداقل

پول پرداخت شود ؟

۲۳۱. چهار نفر می‌خواهند از A به B ، که ۳۹٫۶ کیلومتر راه دارد ، بروند . آنها اتومبیلی را کرایه کردند که می‌توانست با سرعت ۳۶ کیلومتر درساعت حرکت کند. در این اتومبیل، بجز راننده، تنها دو نفر می‌توانست سوار شود . دو نفر از مسافرها جوان بودند و می‌توانستند ساعتی ۶ کیلومتر راه بروند؛ دو نفر دیگر، که مسن‌تر بودند ، تنها ساعتی ۴ کیلومتر می‌توانستند پیاده‌روی کنند . اتومبیل دو نفر مسن تر را سوار کرد و آنها را در نقطهٔ M که در راه A و B قرار داشت ، پیاده کرد ، تا بقیهٔ راه را به طرف B پیاده بروند . سپس اتومبیل بلافاصله برگشت و در نقطهٔ P به دو نفر جوانتر رسید ، آنها را سوار کرد و به شهر A برد . اگر هرچهار نفر از شهر A با هم حرکت کرده باشند و با هم به شهر B رسیده باشند ، جای نقطه‌های M و P را معین کنید .

۲۳۲. دهقانی به بازار می‌رفت که مرغهای خود را بفروشد . در راه به امپراطور برخورد کرد . امپراطور از دهقان پرسید، قیمت کالای تو چند است . دهقان جواب داد :

ـ هر خروس پنج پشیز، هرمرغ سه پشیز و هرسه جوجه یك پشیز می‌ارزد .

امپراطور فکری کرد و دستور داد :

ـ فردا روی‌هم صد خروس‌ومرغ وجوجه برای من بیاور ، منتهی از هرنوع به‌تعدادی باید انتخاب کنی که همه روی‌هم درست صد پشیز قیمت داشته باشند . اگر دستور مرا درست انجام ندهی سرت را به باد خواهی داد .

دهقان ناراحت و دلواپس به خانه برگشت . پسر هیجده سالهٔ

دهقان ، وقتی که ماجرا را شنید ، گفت :

ـ پدر نگران نباش ، و به سرعت مسأله را حل کرد .

روز بعد دهقان نزد امپراطور رفت . امپراطور از اینکه دهقان مسأله را حل کرده بود ، خشمگین شد و به او دستور داد :

ـ فردا هم دوباره صد پرنده برای من بیاور، تعداد هرنوع ازآنها باید با امروز فرق داشته باشد، ولی روی‌هم بازهم صد پشیزقیمت داشته باشد .

پسر دوباره به پدر کمك کرد .

وقتی‌که دهقان، دستور دوم امپراطور را هم انجام‌داد، امپراطور با خشم زیاد برای سومین بار از او خواست‌که صد خروس، مرغ و جوجه برای او بیاورد که صد پشیز قیمت داشته باشند ، ولی تعداد هرکدام از آنها با دو روز قبل فرق داشته باشد .

دهقان برای بار سوم، به‌کمك پسرش ، دستور امپراطور را انجام داد .

تعداد خروس ، مرغ و جوجه را که دهقان هربار برای امپراطور برده است ، پیدا کنید (یك مسالهٔ قدیمی) .

۲۳۳. a) سه جسم در یك جهت و از یك نقطه بـا سرعتهـای ۴، ۵ و ۶ سانتیمتر در ثانیه حرکت کرده‌اند . جسم دوم ، حرکت خود را دو ساعت بعد از اولی شروع کرد. چه مدت بعد از حرکت دومی، جسم سوم شروع به حرکت‌کند تا همراه جسم دوم به اولی برسد ؟ مسأله را به کمك شکل حل کنید .

b) از نقطهٔ A در یك جهت و دریك زمان، دوجسم شروع به‌حرکت کردند . اولی با سرعت $۳\frac{۷}{۹}$ متر در دقیقـه و دومـی بـا سرعتی کمتر از آن ؛ هردو جسم حرکت متشابه‌التغییر دارند ؛ شتاب

دومی $9\frac{3}{7}$ متر در دقیقه . بعد از ۱ ساعت و ۳۷ دقیقه و ۳۹ ثانیه ، متحرك دوم بـه اولی می‌رسد . ضمناً می‌دانیم در لحظه‌ای کـه سرعت جسمها مساوی می‌شود ، فاصلهٔ بین آنها ۳۷۹ متر است.
بعد از چه مدتی جسم دوم ۱۱۳۷ متر از اولی جلو می‌افتد ؟

۲۳۴. قطار فاصلهٔ بین شهـر A و شهـر B را در ۱۰ ساعت و ۴۰ دقیقه طی می‌کند . اگر سرعت قطار ۱۰ کیلومتر در ساعت کمتر باشد، ۲ ساعت و ۸ دقیقه دیرتر به B می‌رسد. مطلوب است فاصلهٔ بین دو شهر و سرعت قطار .

۲۳۵. a) در سه ظرف ، یك نوع مایع ولی بطور نامساوی قرار دارد . اگر نیمی از مایع ظرف اول (از لحاظ حجم) را برداریم وبطور مساوی در دو ظرف دیگر بریزیم ، سپس نیمی از مایع ظرف دوم را بطور مساوی در دوظرف دیگر بریزیم وبالاخره نیمی از مایع ظرف سوم را بطور مساوی در دوظرف دیگر بریزیم ، درهرظرف ۱۶لیتر مایع خواهد بود. درهرظرف چند لیتر مایع در ابتدا بوده است ؟

b) پنج راهزن از سبد یك رهگذر تعدادی سکهٔ طلا دزدیدند . قویترین آنها ۸۱ سکه برداشت و بقیهٔ سکه‌ها را بطور نامساوی بین چهارنفر دیگر تقسیم کرد . به‌خاطر تقسیم نامناسب بین آنها اختلاف به وجود آمد، تا اینکه سرکردهٔ آنها دستور داد آنکه بیش از همه سکهٔ طلا دارد، سکه‌های چهار نفر دیگر را دو برابر کند ، سپس دومین نفر ، کـه تعداد سکه‌هایش نسبت بـه بقیه زیادتر است ، سکه‌های چهارنفر دیگر را دو برابر کند ؛ بعد از او نفر سوم و بعد چهارم و بالاخره نفرپنجم به‌همین ترتیب عمل کنند . در نتیجه معلوم شد که سکه‌های هر پنج راهزن مساوی

شده است . مطلوب است تعداد سکه‌هایی که درسبد بوده است و سهم اولیهٔ هریك از پنج راهزن .

۲۳۶. یك نفر از نقطهٔ A با سرعت معینی به‌طرف نقطهٔ B حرکت کرد ؛ وقتی که نصف راه را طی کرد ، سرعت خود را دو برابر کرد و به B رسید .

دفعهٔ دوم نیمی ازکل زمانی که در راه بود با همان سرعت اولیه رفت و نیم دوم زمان را با سرعت دو برابر .

روشن است که دفعهٔ دوم ، نسبت به دفعهٔ اول ، راه بیشتری با سرعت دو برابر رفته است و بنابراین وقت‌کمتری صرف‌کرده است . چقدر وقت کمتر صرف کرده است ؟

۲۳۷. از نقطهٔ A هرساعت یك قایق به‌طرف بالا درخلاف جهت جریان آب ، حرکت می‌کند ؛ همزمان باآنها، از نقطهٔ B به‌طرف پایین در جهت جریان آب، قایقهایی حرکت می‌کنند. تعداد ساعتهایی که در هرجهت طول می‌کشد تا قایقی از A به B یا از B بـه A برسد ، با عدد صحیح بیان می‌شود ، هرقایقی‌که درخلاف جریان آب حرکت می‌کند، تا رسیدن به B با هفت قایقی‌که از B حرکت کرده‌اند ، برخورد می‌کند (دو قایقی را که در نقطه‌های A وB ملاقات می‌کنند ، بـه حساب نیاورده‌ایم) . می‌خواهیم ببینیم ، قایقی که در جهت جریان آب از B به A می‌رسد، در راه با چند قایق برخورد می‌کنند ، به‌شرطی‌که بدانیم سرعت قـایق در آب ساکن دو برابر سرعت جریان آب است .

۲۳۸. از نقطهٔ O در یك زمان در جهت جریان آب رودخانه یك قایق و یك‌کلك*، حرکت‌کردند. بعد ازآنکه قایق $۱۳\frac{۱}{۳}$ کیلومتر به‌پیش

*) قایق‌گونه‌ای‌که ازچوب ونی می‌سازند وبه‌آب می‌اندازند و درجهت جریان‌آب رودخانه کالایی‌را اجابجا می‌کنند. طبیعی است‌که‌کلك با همان سرعت جریان آب حرکت می‌کند.

رفت، برگشت و بعد از آنکه $9\frac{1}{3}$ کیلومتر دیگر در خلاف جهت جریان آب حرکت کرد، به‌کلك رسید. سرعت اختصاصی قایق چقدر بوده است ، به شرطی که سرعت جریان آب ۴ کیلو متر در ساعت است .

۲۳۹. کسی که از جلو یك سینما رد می‌شد، توانست ساعتهای شروع چهار سئانس (و نه دقیقه‌های آنرا) ببیند:

سئانس اول : ساعت ۱۲ و . . . دقیقه

سئانس دوم : ساعت ۱۳ و . . . دقیقه

. . . .

سئانس هفتم : ساعت ۲۳ و . . . دقیقه

سئانس هشتم : ساعت ۲۴ و . . . دقیقه

با همین معلومات می‌خواهیم ساعت دقیق شروع هریك از هشت سئانس را پیدا کنیم .

فرض می‌کنیم که:

۱) فاصلهٔ زمانی بین شروع هردو سئانس متوالی (یعنی مدتی که یك سئانس و تنفس بعد از آن طول می‌کشد) ، مقدار ثابتی است .

۲) هرسئانس می‌تواند در ساعت n و $5m$ دقیقه شروع شود ،که در آن m و n عددهایی صحیح‌اند .

۲۴۰. دودانش‌آموز برای صرف ناهاربه‌رستوران رفتند. آنها پالتوهای خود را به محافظ سپردند و دوشماره دریافت کردند. دانش‌آموز اول هردو شماره را در جیب خود گذاشت . درپایان ناهار دانش آموز سوم که در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کرد، به‌آنها پیوست، یکدفعه دانش‌آموز دوم متوجه شد که موقع کلاسش رسیده است

و از دانش‌آموز اول خواست ، شمارهٔ پالتو او را بدهد ، ولی دانش‌آموز اول نمی‌دانست کدام شماره متعلق به‌دوستش است ، هردو شماره را به او داد و گفت پالتو خودت را بگیر و شمارهٔ مرا به اینجا برگردان . در این موقع دانش‌آموز ریاضی دخالت کرد و گفت: «ممکن است لازم نباشد به‌اینجا برگردی ، به‌شرطی که . . .» . شما چه فکرمی‌کنید ، دانش‌آموز ریاضی چه مطلبی به آنها گفت ؟

۲۴۱. a) در سه کیسه ، n عدد گردو وجود دارد. احتمال اینکه تعداد گردوها در هرسه کیسه مساوی باشد ، چقدر است ؟

b) در سه‌کیسه ، n کیلوگرم آرد وجود دارد . احتمال اینکه در هر کیسه $\frac{n}{۳}$ کیلوگرم آرد وجود داشته باشد ، چقدر است ؟

۲۴۲. در ایستگاه اعلام شده است : «اتوبوس هر ۶ دقیقه یکبار و ترولیبوس هر ۸ دقیقه یکبار حرکت می‌کنند» .

دو نفر در ایستگاه با هم صحبت می‌کردند:

ـ بطور متوسط مسافرها چقدر باید انتظار بکشند ؟

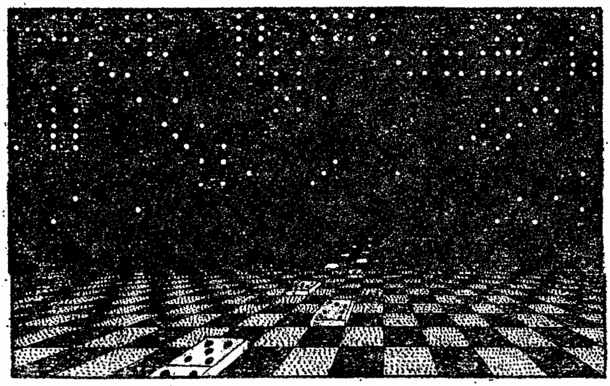
ـ اگر فقط اتوبوس بود، بطورمتوسط $۶:۲=۳$ دقیقه انتظار لازم بود ؛ و اگر فقط ترولیبوس بود ، زمان متوسط انتظار $۸:۲=۴$ دقیقه می‌شد ؛ ولی چون مسافر می‌تواند هم به اتوبوس و هم به ترولیبوس سوار شود ، زمان متوسط انتظار $\frac{۳+۴}{۲}=۳\frac{۱}{۲}$ دقیقه می‌شود .

ـ نه ! این درست نیست ! باید طور دیگری محاسبه‌کرد . کوچکترین مضرب مشترك ۶ و ۸ می‌شود ۲۴ . در هر ۲۴ دقیقه $۲۴:۶=۴$ اتوبوس و $۲۴:۸=۳$ ترولیبوس رد می‌شود . بنابر این در هر ۲۴ دقیقه روی‌هم $۴+۳=۷$ وسیله از اینجا عبور

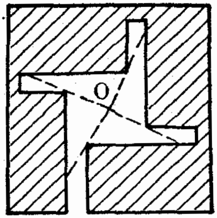
می‌کند . در نتیجه فاصلهٔ زمانی بین هردو وسیلهٔ متوالی $24:7=3\frac{3}{7}$ دقیقه و زمان انتظار متوسط $3\frac{3}{7}:2=1\frac{5}{7}$ دقیقه می‌شود .

حق با کدام است ؟ (البته فرض براین است که فاصله‌های زمانی دقیقاً رعایت شود .)

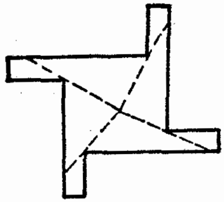
حل مسأله‌ها



۱. یکی از جوابهای ممکن در شکل ۲۲ داده شده است . با مختصری تغییر در این شکل می‌توان جواب قسمت دوم مسأله را بدست آورد (شکل ۲۲ را ببینید).



شکل ۲۳



شکل ۲۲

۲. a) باید پرسشها را طوری کرد که در هر پرسش، انواع ممکنهٔ عددها نصف شود . در این صورت اگر 2^n عدد ممکن باشد ، n پرسش کافی خواهد بود . چون طبق شرط روی هم $2^{17} > 10^5$ شمارهٔ مختلف تلفن وجود دارد ، ۱۷ پرسش کافی است . پرسشها را با روشهای متفاوت می‌توان کرد . مثلاً می‌توان پرسید : «آیا درست است که شمارهٔ تلفن شما از ۵۰۰۰۰ بزرگتر است ؟» واگر جواب داد «بله»، پرسش دوم را به این صورت که : «آیا از ۷۵۰۰۰ بزرگتر است ؟» و غیره . ولی ساده‌تر این است که از دستگاه عدد شماری به مبنای ۲ استفاده کنیم، که در آن تنها از دو رقم ۰ و ۱ استفاده شده است. هر عدد کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰ در این دستگاه ، حداکثر با ۱۷ رقم ۰ یا ۱ نوشته می‌شود . می‌توان پرسشها را این طور کرد :

۱) آیا درست است که آخرین رقم شمارهٔ تلفن در دستگاه عدد شماری به مبنای ۲ مساوی واحد است ؟

۲) آیا رقم ماقبل آخر شمارهٔ تلفن واحد است ؟ و غیره .

حالا ثابت می‌کنیم که ۱۶ پرسش کافی نیست . در حقیقت ترکیبهای مختلف ۱۶ کلمه «بله» و «نه» برابر است با 2^{16}. چون $2^{16} < 100000$، دو شمارهٔ مختلف تلفن ، منجر به یك نوع جواب می‌شود و برای ما هیچ امکانی وجود ندارد که بدانیم کدامیك از آنها درست‌اند .

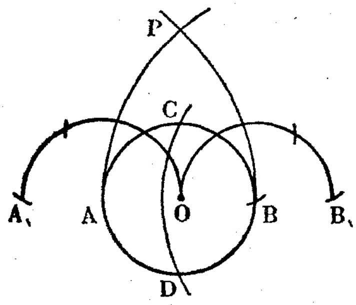
روش «نصف کردن» که در اینجا از آن استفاده کردیم ، برای بسیاری

از مسأله‌ها به‌کار می‌رود ، مثلاً وقتی‌که بخواهیم فرد مشخصی را در مقابل پاسخهای «بله» و «نه» پیدا کنیم ، باید پرسش را طوری کرد که احتمال پاسخ مثبت یا منفی یکی باشد . مثلاً نباید از این پرسش شروع کرد که آیا این شخص زیست‌شناس است ؟ بلکه خیلی بهتر است که بپرسیم : «آیا دانشمند است ؟ »

b) در این حالت برای حل مسأله ۲۲ پرسش کافی است . برای این منظور می‌توان مثلاً این طور عمل کرد . ابتدا با ۱۵ پرسش ، ۱۵ رقم پشت سرهم از ۱۷ رقم را معین می‌کنیم (رقمها را در عدد شماری به مبنای ۲ گرفته‌ایم) . سپس می‌پرسیم : «آیا در یکی از ۱۵ پاسخ قبلی دروغ گفته‌اید ؟» اگر بگوید «بله» ، یا یکی از ۱۵ پاسخ قبلی ویا پاسخ آخر او درست نیست. با روش «نصف‌کردن» با چهار پرسش می‌فهمید ، کدامیك از ۱۶ پاسخ قبلی درست نبوده است و سپس با دوپرسش ، دو رقم آخر عدد را معین می‌کنید . اگر در مقابل پرسش شانزدهم بگوید «نه» ، مطمئن می‌شویدکه این پاسخ او دروغ نیست وشما ۱۵رقم درست عدد را می‌دانید (اگرقرارباشدکه پاسخ شانزدهم او دروغ باشد ، به این معنی است که دوباره دروغ گفته است و این با فرض مسأله مخالف است .) برای اینکه دو رقم بقیه را بدانیم ، پنج پرسش کافی است . مثلاً می‌توان برای هررقم دوبار پرسید واگر پاسخها متناقض یکدیگر بود، پرسش را برای بار سوم بایدتکرارکرد.

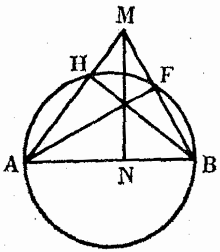
۳. باید دبستان را در دهکدهٔ A ساخت .

۴. a) O را مرکز دایرهٔ مفروض به شعاع R و A را نقطه‌ای از محیط دایره فرض می‌کنیم (شکل ۲۴) . پرگار را به اندازهٔ R باز می‌کنیم و با شروع از نقطهٔ A به عنوان مرکز (و با استفاده از اینکه ضلع ۶ ضلعی منتظم محاط در



شکل ۲۴

دایره برابر است با R) ، نقطهٔ B ، انتهای دیگر قطری را که از A می‌گذرد ، پیدا می‌کنیم . سپس دایره‌هایی بـه مرکزهای A و B رسم می‌کنیم و روی آنها نقطه‌های $A_۱$ و $B_۱$ ، قرینه‌های O نسبت به A و B را پیدا می‌کنیم. حالا به مرکزهای $A_۱$ و $B_۱$ و شعاع $۳R$، قوسهایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند . به‌سادگی معلوم می‌شود که $OP = R\sqrt{۵}$. حالا به مرکز $B_۱$ و شعاع مساوی $R\sqrt{۵}$ قوسی رسم می‌کنیم تا محیط دایرهٔ مفروض را در C و D قطع کند . به سادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A ، B ، C و D رأسهای یك مربع‌اند .



شکل ۲۵

b) راه حل در شکل ۲۵ داده شده است.

۵. اگر زنجیر را در حلقهٔ سوم آن پاره کنیم (شکل ۲۶) ، زنجیر به سه قسمت جدا از هم تقسیم می‌شود. با این سه قسمت می‌توان پرداخت


شکل ۲۶

روزانه را به سهولت انجام داد .

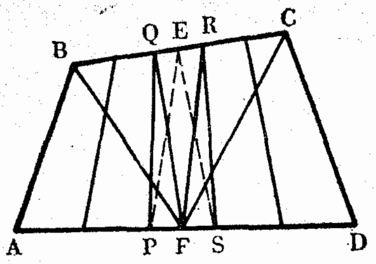
۶. ابتدا ثابت کنیدکه ارتفاع وارد بر AD از مثلث AMD برابر است با نصف مجموع ارتفاعهای مثلثهای ABN و NCD . از آنجا نتیجه بگیرید که مساحت مثلث AMD برابراست بامجموع مساحتهای دو مثلث ABN و NCD .

۷. قبلا ثابت کنید که لم زیر درست است :

لم . اگر E و F وسط ضلعهای BC و AD از یك چهار ضلعی محدب $ABCD$ باشد، مساحت مثلث AED برابراست با مجموع مساحتهای مثلثهای ABF و FCD .

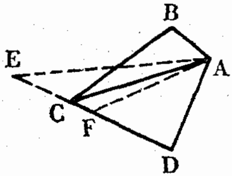
حالا $ABCD$ را چهارضلعی مفروض (شکل ۲۷) و $PQRS$ را چهار ضلعی بگیرید که وسط پنج چهار ضلعی مورد نظر قرار گرفته باشد ،

ضمناً ضلع PS بـر ضلع AD واقع است . E و F را بـه ترتیب وسط ضلعهای BC و AD می‌گیریم . ثابت کنید که مساحت مثلث QFR مساوی یك پنجم مساحت مثلث BFC است . سپس لم را در مورد دو مثلث ABF و FCD و همچنین در مورد دو مثلث PQF و FRS به کار ببرید .



شکل ۲۷

۸. فرض می‌کنیم کـه مساحت مثلث ABC کوچکتر از مساحت مثلث ACD بـاشد . مثلث ACE راهم‌ارزمثلث ABC می‌سازیم، به‌نحوی که ضلع CE از آن در امتداد DC قرار گرفته بـاشد . حالا در مثلث AED میانهٔ AF را رسم می‌کنیم (شکل ۲۸) .



شکل ۲۸

۹. اگر مسافر زنجیری داشته باشد که از $n = (k+۱)۲^{k+۱} - ۱$ حلقه، درست شده باشد ، می‌تواند آنرا در k نقطه طوری پاره کند که قطعه زنجیرهایی شامل $(k+۱)$، $۲(k+۱)$، $۲^۲(k+۱)$، ... و $۲^k(k+۱)$ حلقه بدست آورد. مسافر با در دست داشتن این قطعه زنجیرها و k حلقه زنجیر جداگانـه ، خواهد توانست پرداخت خودرا در n روز به‌ترتیب انجام دهد. اگر تعداد حلقه‌های زنجیر ، یعنی n ، به‌صورت $(k+۱)۲^{k+۱} - ۱$ نباشد ، بـاید کوچکترین عدد صحیح k را پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم: $n < (k+۱)۲^{k+۱} - ۱$. درحالت خاص $n = ۱۰۰$ ، کافی‌است زنجیر را در $k = ۴$ حلقهٔ آن پاره کنیم.

۱۰. عقربه‌ها برای نخستین بار در ساعت ۱۳ و ۵ دقیقه و $۲۷\frac{۳}{۱۱}$ ثانیه برهم منطبق می‌شوند .

۱۱. مسأله به هیچگونه محاسبه‌ای نیاز ندارد . روشن است که هر قدر

چای از فنجان کم شود به‌همان اندازه شیر به‌آن اضافه شده است . بنابراین همیشه مقدار چای در فنجان شیر ، به همان اندازهٔ مقدار شیر در فنجان چای است واین امر هیچگونه بستگی به تعداد جابجا کردن ویا نوع به‌هم زدن ندارد.

۰۱۲ می‌توان شاخهای لامپ را به‌ترتیب و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت از ۱ تا ۷ وسوراخهای پریز را به‌ترتیب، ولی درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت از ۱ تا ۷ نام‌گذاری کرد . اگر فکر کنید ، ممکن است راه حلهای دیگری هم پیدا کنید .

۰۱۳ فرض می‌کنیم که دورهٔ تناوب وجود داشته باشد و از n رقم تشکیل شود . در رشتهٔ طبیعی عددها ، وقتی‌که به اندازهٔ کافی جلو برویم، می‌توانیم به عددی برسیم که درآن n رقم متوالی مساوی صفر باشند، و بنابراین دورهٔ تناوب باید از رقمهای مساوی صفر تشکیل شده باشد . به‌همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که دورهٔ تناوب باید از رقمهای مساوی واحد تشکیل شده باشد . واین دو نتیجه متناقض یکدیگرند .

۰۱۴ هواپیما باید به طرف شمال پرواز کند . در حقیقت کوتاهترین راه بین دو نقطه‌ای که روی کرهٔ زمین قرار گرفته‌اند ، روی قوس دایرهٔ عظیمه‌ای قرار دارد که این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند . چون عشق‌آباد تقریباً در ۵۸ درجهٔ طول شرقی و سان‌فرانسیسکو تقریباً در ۱۲۲ درجهٔ طول غربی قرار گرفته است، و $۵۸^\circ + ۱۲۲^\circ = ۱۸۰^\circ$، دایرهٔ عظیمه‌ای که ازاین دوشهر می‌گذرد، منطبق برنصف‌النهارهای عشق‌آباد و سان‌فرانسیسکو است .

متذکر می‌شویم که عشق‌آباد وسان‌فرانسیسکو ، تقریباً روی یك مدار قرار دارند (۳۸ درجهٔ عرض شمالی) . حالا امتحان کنید که راه در طول مدار چقدر طولانی‌تر از راه در طول نصف‌النهار ، و از طریق قطب شمال ، است ؟

۰۱۵ عدد را به این صورت بنویسید :

$$N = a_۰ ۱۰^n + a_۱ ۱۰^{n-۱} + \dots + a_n$$

که در آن a_i عبارت‌است از رقمهای عدد . ضمناً به نامساوی زیرهم توجه کنید :

$$a_0 \cdot a_1 \dots a_n \leqslant a_n \cdot 9^n$$

۱۶. ثابت کنید که بعد از هرتقسیم $4k+5$ قطعه کاغذ بدست می‌آید .

۱۷. نقطهٔ M را وسط پاره خط O_1O_2 فرض کنید . در شکل ۳، پاره خطهای O_1B ، O_1C ، O_2B ، O_2C را رسم کنید . با استفاده از این مطلب که مثلثهای O_1BO_2 و O_1CO_2 قائم‌الزاویه‌اند ، زاویه‌های BMO_1 و CMO_1 را بر حسب زاویه‌های مثلث اصلی بنویسید .

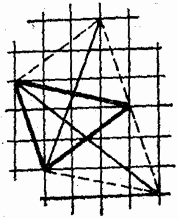
بالاخره ثابت کنید : $\widehat{BAC} + \widehat{BMC} = 180°$.

۱۸. a) کسی که می‌خواهد برنده باشد ، باید در هرحرکت آنقدر سنگریزه از تودهٔ بزرگتر بردارد ، که تعداد سنگریزه‌های دو توده برابر شوند . اگر در ابتدا تعداد سنگریزه‌های دو توده برابر است ، باید حرکت اول را به طرف مقابل داد .

b) ابتدا باید با یك حرکت ، تمام سنگریزه‌های یکی از توده‌ها را بردارید . سپس در هر حرکت بعدی ، تعداد سنگریزه‌های دو تودهٔ باقی‌مانده را مساوی کنید .

۱۹. a) اثبات را براساس استقراء روی تعداد خانه‌های واقع در داخل چند ضلعی ، که آنرا n می‌نامیم ، می‌دهیم . بـه ازای $n=1$ و $n=2$ ، حکم مسأله روشن است . فرض کنیدکه حکم برای $n=k$ $(k \geqslant 2)$ درست باشد . چند ضلعی M_{k+1} را در نظر می‌گیریم که از $k+1$ خانه تشکیل شده است . این چند ضلعی را به‌نحوی به دو چندضلعی M_k و t تقسیم می‌کنیم، که اولی از k خانه ودومی از یك خانه تشکیل شده باشد . مرکز ثقل چند ضلعی M_{k+1} روی خط l قرار دارد که از مرکز ثقلهای M_k و t گذشته است ، دو مرکز ثقل اخیر هم طبق فرض استقراء ، تنها بـه‌کمك خط‌کش قابل جستجو است .

حالا M_{k+1} را به‌نحو دیگری بـه $\overline{M}_k$ و $\overline{t}$ تقسیم می‌کنیم وخانهٔ $\overline{t}$ را طوری انتخاب می‌کنیم‌که مرکز ثقل آن روی خط l ، که قبلا ساخته‌ایم ، قرار نگیرد . به سادگـی معلوم می‌شودکه این انتخاب همیشه ممکن است. خط $\overline{l}$ که مرکز ثقلهـای $\overline{M}_k$ و $\overline{t}$ را بـه‌هم وصل می‌کند، می‌سازیم. مرکز ثقل M_{k+1} ، عبارت است از محل برخورد l و $\overline{l}$.



شکل ۲۹

b) برای پیدا کردن مرکز ثقل مثلث ، باید میانه‌های آنرا رسم‌کنیم، رسم میانه‌ها هم به‌سادگی و با تبدیلهای مختلف مثلث به متوازی‌ـ الاضلاع ، ممکن است (شکل ۲۹) .

c) ابتدا باید ثابت‌کردکه هر چند ضلعی را می‌توان با رسم قطرهایی از آن به مثلثهـایی تبدیل کرد . سپس با استفاده از حالت b) و بـا استدلالی شبیه حالت a) ، می‌توان حکم را ثابت کرد .

۲۰. ثابت می‌کنیم‌که ممکن نیست. درختها رابه‌ترتیب از ۱ تا ۴۴ شماره گذاری می‌کنیم . فرض می‌کنیم‌که در لحظه‌ای ، تعداد گنجشکهای روی درخت اول مساوی n_1 ، تعداد گنجشکهای روی درخت دوم مساوی n_2 و غیره باشد . مجموع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$S = 1n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + 44n_{44}$$

وقتی‌که دو گنجشك به درختهای مجاور خود، در دو جهت مختلف ، پرواز کنند ، یـا این مجموع هیچ تغییری نمی‌کند و یا یکباره ۴۴ واحد تغییر می‌کند، بنابراین باقیماندهٔ تقسیم S بر ۴۴ تغییر نخواهد کرد . در لحظهٔ اول داریم :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 44 = \frac{44 \times 45}{2} = 990$$

و باقیماندهٔ تقسیم S بر ۴۴ مساوی ۲۲ می‌شود . اگر در زمانی هر ۴۴ گنجشك روی یك درخت قرار گرفته باشند ، باقیماندهٔ تقسیم S بر ۴۴ مساوی صفر می‌شود ، که ممکن نیست .

همین مسأله را برای حالتی حل کنید که تعداد گنجشکها، به‌جای ۴۴، عدد طبیعی دلخواهی باشد.

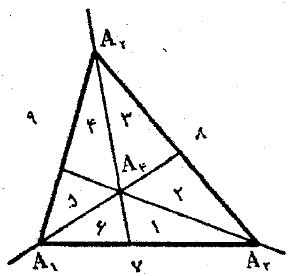
۲۱. براون مرتکب اشتباه شده است، چون هردو بار دروغ گفته است، سمیت هر دوبار راست گفته است.

۲۲. ثابت می‌کنیم که مجموع سالهای سن ۲۰ دانش‌آموز بزرگتر، از ۲۸۰ سال کمتر نیست. اگر کوچکترین فرد این بیست نفر کمتر از ۱۴ سال نداشته باشد، در این صورت هیچیك از ۱۹ نفر بقیه هم کمتر از ۱۴ سال نخواهند داشت و درنتیجه مجموع سالهای سن آنها روی‌هم، کمتر از $۲۸۰ = ۲۰ \times ۱۴$ سال نخواهد بود. اگر هم جوانترین فرد این بیست نفر کمتر از ۱۴ سال داشته باشد، هریك از ۱۱ نفر بقیه هم کمتر از ۱۴ سال و روی هم کمتر از $۱۵۴ = ۱۱ \times ۱۴$ سال خواهند داشت و سهم بیست نفر از $۲۸۰ = ۱۵۴ - ۴۳۴$ سال کمتر نخواهد بود.

۲۳. a) معلوم است که اگر صد رقم را حذف کنیم، یازده رقم باقی می‌ماند. می‌توان رقمها را طوری حذف کرد که عدد ۰۰۰۰۰۱۲۳۴۵۰ باقی بماند. ثابت کنید که کوچکتر از این عدد نمی‌توان بدست آورد.

b) باید رقمها را طوری حذف کرد که عدد ۹۹۹۹۹۷۸۵۹۶۰ باقی بماند.

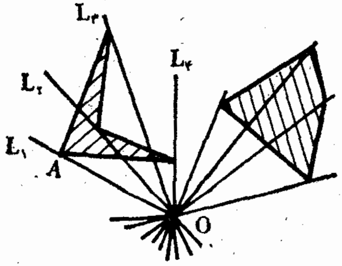
۲۴. a) چهار نقطهٔ دلخواه از پنج نقطه انتخاب کنید: یا این چهار نقطه یك چهار ضلعی محدب می‌سازند و یا یکی از نقطه‌ها داخل مثلثی قرار می‌گیرد که از سه نقطهٔ دیگر به‌وجود آمده است (ثابت کنید). در حالت اخیر، نقطهٔ پنجم می‌تواند در



شکل ۳۵

یکی از ۹ منطقه‌ای که درشکل ۳۰ نشان داده شده است، قرار گیرد. تحقیق کنید که برای هر یك از این نه حالت ممکن، می‌توان چهار

ضلعی مورد نظر را ساخت .



شکل ۳۱

b) از هر دو نقطهٔ دلخواه از این ۴۰۰۰ نقطه ، می‌توان خط راستی عبور داد. همهٔ این خطهای ممکنه را رسم می‌کنیم و سپس نقطهٔ O را روی صفحهٔ نقطه‌ها طوری انتخاب می‌کنیم که روی هیچیك ازاین خطها قرار نگیرد . از نقطهٔ O نیم خطهایی رسم می‌کنیم که هر کدام از آنها از یکی از این ۴۰۰۰ نقطه عبور کند . نقطهٔ O را طوری اختیار می‌کنیم که هیچ دو نیم خطی از این نوع برهم منطبق نباشد . نیم خطها را ، مثلا با شروع از OA ، و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به ترتیب L_1 ، L_2 ، L_3 ، ... ، L_{4000} نام‌گذاری می‌کنیم (شکل ۳۱).

حالا نیم خطها را به گروههای چهار تایی تقسیم می‌کنیم : در گروه اول ، نیم خطهای L_1 ، L_2 ، L_3 ، L_4 ؛ در گروه دوم L_5، L_6، L_7 و L_8 وغیره . به‌سادگی معلوم می‌شود که هر چهار ضلعی که رأسهای آن برنیم خطهای یکی از این گروه‌ها واقع باشد ، هرچهار ضلعی دیگری راکه رأسهایش برنیم خطهای گروه دیگری قرار دارد، قطع نمی‌کند .

۲۵. a) زاویه را تا زاویهٔ قائمه کامل کنید .

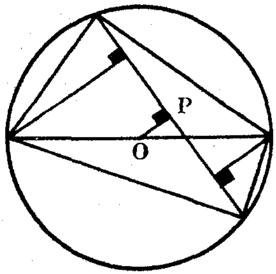
b) زاویهٔ ۱۹ درجه را ۱۹ برابر کنید، زاویه‌ای مساوی ۳۶۱ درجه بدست می‌آید ، که از آنجا می‌توانید زاویه‌ای مساوی ۱ درجه بسازید .

۲۶. کوچکترین عدد به صورت $\frac{1}{2^m}$ را که در مجموع $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ وجوددارد، درنظر بگیرید. وقتی که جمله‌های این‌مجموع را به‌یك‌مخرج تبدیل کنیم ، صورت کسری که معادل $\frac{1}{2^m}$ است عددی فرد وصورت

هر یك از کسرهای معادل جمله‌های دیگر مجموع ، عددی زوج و بنابراین مجموع صورتها عددی فرد خواهد شد و نمی‌تواند بر مخرج مشترك ، که عددی زوج است ، قابل قسمت باشد .

۲۷. فرض می کنیم هیئت نمایندگی A با سه هیئت نمایندگی دیگر ، به نامهای B ، C و D ، زبان مشترکی داشته باشد . بین سه هیئت نمایندگی اخیر ، لااقل دو هیئت نمایندگی ، و مثلاً B و C ، زبان یکدیگر را می‌فهمند. دراین صورت A ، B و C سه هیئت نمایندگی مورد نظرند . در حالتی هم که A با بیش از دو هیئت نمایندگی زبان مشترك نداشته باشد، می‌توان سه‌هیئت نمایندگی E ، F و G راپیدا کرد که هیچکدام از آنها با A زبان مشترك نداشته باشند . در این صورت E ، F و G ، سه هیئت نمایندگی مورد نظرند (ثابت کنید).

۲۸. ازنقطهٔ O، مرکزدایرهٔ محیطی چهار ضلعی ، عمود OP را برقطری از چهارضلعی که از مرکز دایره نمی‌گذرد ، فرود آورید (شکل ۳۲) .



شکل ۳۲

۲۹. ثابت کنیدکه برای تبدیل ۲۵ روبل به اسکناسهای ۱، ۳ و ۵ روبلی، باید تعداداسکناس‌های خرد . عددی فرد باشد .

۳۰. a) فرض کنید که نقطه‌های مفروض ، رأسهای یك شش ضلعی محدب باشند. درچنین حالتی، جواب به‌سادگی بدست می‌آید، زیرا مجموع زاویه‌های داخلی یك شش ضلعی محدب مساوی ۷۲۰ درجه است و بنابراین لااقل یکی از آنها از ۱۲۰ درجه بیشتر است . حالتی می‌ماندکه ۵ ، ۴ یا ۳ نقطه ازاین شش نقطه بررأسهای یك‌چند ضلعی محدب واقع باشند و بقیهٔ این نقطه‌ها در داخل این چند ضلعی واقع شده باشند. قطرهایی راکه از یك رأس این چندضلعی می گذرد، رسم می‌کنیم . این قطرها، چند ضلعی را به مثلثهایی تبدیل می کنند . در

داخل یکی ازاین مثلثها، لااقل یکی از نقطه‌های مفروض قرار دارد. این نقطه را به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم، سه زاویه بدست می‌آید که مجموع آنها مساوی ۳۶۰ درجه است. بنابراین لااقل یکی از آنها کمتر از ۱۲۰ درجه نیست.

b) دو حالت در نظر می‌گیریم:

I. فرض می‌کنیم $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۴$ و $A_۵$ رأسهای یك پنج ضلعی محدب باشد. کوچکترین زاویهٔ داخلی این پنج ضلعی از ۱۰۸ درجه تجاوز نمی‌کند. برای سهولت کار فرض می‌کنیم که این زاویه در رأس $A_۱$ باشد، قطرهای $A_۱A_۳$ و $A_۱A_۴$، این زاویه رابه‌سه قسمت‌تقسیم می‌کنند، که کوچکترین آنها نمی‌توانـد از ۳۶ درجه تجاوز کند. بنابراین دراین حالت $\alpha \leqslant ۳۶^\circ$. تساوی $\alpha = ۳۶^\circ$، وقتی پیش می‌آید که پنج ضلعی منتظم باشد.

II. فرض می‌کنیم که $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۴$ و $A_۵$ رأسهای یك پنج ضلعی محدب نباشند. ابتدا ثابت‌کنیدکه دراین حالت یکی ازاین پنج نقطه داخل مثلثی است‌که از سه‌نقطهٔ دیگر درست شده است. مثلاً فرض کنید، نقطهٔ $A_۴$ داخل مثلث $A_۱A_۲A_۳$ واقع باشد. $A_۴$ را به $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ وصل می‌کنیم، هریك از زاویه‌های مثلث به دو قسمت تقسیم می‌شود که کوچکترین آنها نمی‌توانـد از $۱۸۰ : ۶ = ۳۰^\circ$ تجاوزکند. بنابراین دراین حالت $\alpha \leqslant ۳۰^\circ$. به این ترتیب ماکزیمم مقدار α، همان $\alpha = ۳۶^\circ$ است.

۳۱. اگر یکی از عددهای x ، y و z مساوی صفر باشد، بقیه هم مساوی صفر می‌شوند. فرض می‌کنیم x و y و z مساوی صفر نباشند، در این‌صورت فرض می‌کنیم: $x = ۲^m x_۱$ ، $y = ۲^n y_۱$ ، $z = ۲^p z_۱$ ، که در آنها عددهای $x_۱$ ، $y_۱$ و $z_۱$ ، عددهایی فرد هستند. مثلاً $m \leqslant n \leqslant p$ درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت دوطرف تساوی مفروض را می‌توان به $(۲^m)^۲$ تقسیم کرد؛ تساوی که بدست می‌آید، می‌توان به این‌صورت نوشت:

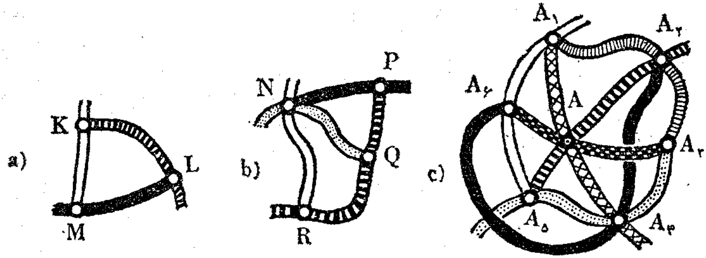
$$u^۲ + v^۲ + w^۲ = ۲^{s+۱} uvw \quad (s \geqslant ۰)$$

که در آن عددهای u و v فرد و عدد w زوج است. ثابت کنید که سمت راست این تساوی بر ۴ قابل قسمت است، درحالی که سمت چپ آن بر۴ قابل قسمت نیست. یعنی معادلهٔ مفروض برای عددهای x، y و z (به استثنای صفر)، جوابی ندارد.

۳۲. از نقطهٔ C، پاره خط CF را مساوی و موازی AB رسم کنید ومثلث CFD را مورد مطالعه قرار دهید.

۳۳. ابتدا دو لم ثابت می‌کنیم.

لم ۱. برای هرایستگاه، خط سیری وجود دارد که از آن عبور نمی‌کند.



شکل ۳۳

اگر ازایستگاه مفروض K (شکل ۳۳ ـ a)، فقط یك خط سیرعبور کند، در این‌صورت همهٔ خطهای دیگر از آن عبور نخواهند کرد. فرض می‌کنیم‌که از ایستگاه K، دو خط سیر، و مثلا KL و KM عبور کند (L و M ایستگاههایی غیر از K، روی این خط سیرها هستند). با توجه به شرط c)، خط سیری مثل LM وجود داردکه از L و M می‌گذرد. این خط سیر نمی‌تواند از K عبور کند، زیرا خط سیر LM غیراز KL یا KM است و با توجه به شرط b)، برای خط سیرهای مختلف تنها یك ایستگاه مشترك وجود دارد. لم ۱ ثابت شد.

لم ۲. از هرایستگاه سه خط سیر عبور می‌کند.

از ایستگاه N (شکل ۳۳ ـ b) به ایستگاه P از خط سیر PQR (که از N عبور نمی‌کند)، می‌توان از طریق خط سیری مثل NP رسید (شرط c)، این خط سیر NP (طبق شرط b) از Q و R عبورنمی‌کند.

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که باید خط سیرهای متفاوت NQ و NR هم ، غیر از NP ، وجود داشته باشد . همهٔ این خط سیرها که از N عبور می‌کنند، بنابر شرط b) ، روی خط سیر PQR، ایستگاه مشترکی دارند که روی یکـی از خط سیرهای NP ، NQ و NR قرار گرفته‌اند . لم ۲ ثابت شد .

روی هریك از سه خط سیری که از N عبور می‌کند ، دو ایستگاه دیگر وجود دارد. طبق شرط c) ، از ایستگاه N به هرایستگاه دیگر می‌توان با یکی از این سه خط رسید . بنابراین در شهر روی هم ۷ ایستگاه وجود دارد . از این ۷ ایستگاه روی هم ۲۱ $= ۳ \times ۷$ خط عبور می‌کند ، ولی ضمناً هر خط سه بار به حساب آمده است . در نتیجه تعداد کل خط سیرها مساوی هفت است . در شکل ۳۳ ـ c ، طرحی از این هفت خط سیر داده شده است .

۳۴. فرض می‌کنیم که ممکن نباشد . کارتها را از ۱ تا ۱۲ نـام‌گذاری می‌کنیم وآنها را درجهت حرکت عقربه‌های ساعت دور میز می‌چینیم (نقطهٔ شروع می‌تواند دلخواه باشد.)به‌هر کدام ازمهمانها هم‌شماره‌ای که روی کارت اونوشته شده‌است، می‌دهیم. میز را طوری‌می‌چرخانیم که کارت اول در مقابل مهمان اول قرارگیرد . فرض کنیم‌که در این لحظه در مقابل مهمان iام ، کارت a_iام قرارگرفته باشد (۱۲و... و ۲ و ۱ $= a_i$). برای اینکه مهمان iام در مقابل کارت خودش قرار گیرد، باید میز را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌اندازهٔ زاویهٔ $۳۰^\circ \cdot b_i$ بچرخانیم ، که در آن

$$b_i = \begin{cases} i - a_i & (i > a_i) \\ i - a_i + ۱۲ & (i \leqslant a_i) \end{cases}$$

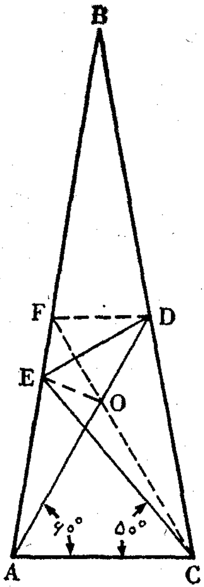
ثابت کنیدکه b_i همهٔ عددهای از ۱ تا ۱۲را قبول می‌کند . b_i ها را جمع می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$b_۱ + b_۲ + \ldots + b_{۱۲} = (۱ + ۲ + \ldots + ۱۲) - (a_۱ + a_۲ + \\ + \ldots + a_{۱۲}) + ۱۲k = ۱۲k$$

که در آن k عددی صحیح است . ولی

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_{۱۲} = b_۱ + b_۲ + \ldots + b_{۱۲} = ۱ + ۲ + \ldots + ۱۲ = ۷۸$$

و چون ۷۸ بر ۱۲ قابل قسمت نیست ، منجر به تناقض می‌شود.

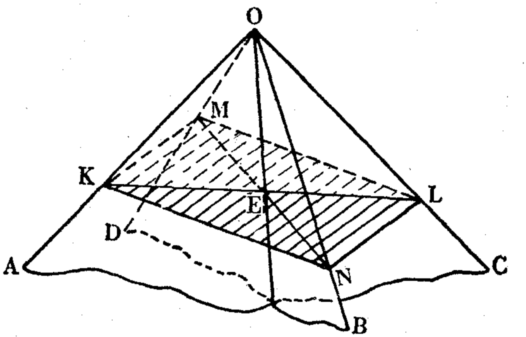


شکل ۳۴

۳۵. از رأس C ، خطی در داخل مثلث رسم می‌کنیم که با قاعدهٔ AC زاویه‌ای مساوی ۶۰ درجه بسازد. این خط ضلع AB را در F و خط AD را در O قطع می‌کند (شکل ۳۴). ثابت کنید که دو مثلث EFD و EOD برابرند و از آنجا بلافاصله نتیجه بگیرید که زاویهٔ ADE مساوی ۳۰ درجه است .

۳۶. OE را خط فصل مشترک دو صفحهٔ AOC و DOB فرض کنید . از نقطهٔ دلخواهی واقع بر OE ، خط KL را در صفحهٔ AOC و خط MN را در صفحهٔ DOB طوری رسم می‌کنیم که OE میانهٔ دو مثلثی باشد ، که بدست می‌آید (شکل ۳۵).

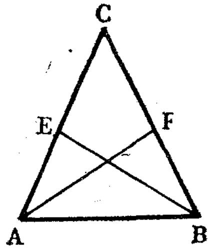
روش دیگر : صفحه‌ای موازی فصل مشترک



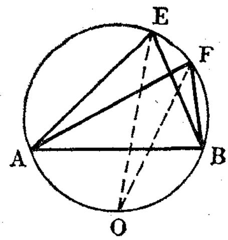
شکل ۳۵

دو وجه روبرو رسم کنید و برخورد این صفحه را با چادر مورد مطالعه قرار دهید .

۳۷. ابتدا این لم را ثابت کنید : اگر دو مثلث در قاعده ، زاویهٔ رأس و نیمساز این زاویه برابر باشند، دومثلث برابرند . برای این منظور، قاعده‌های دو مثلث را برهم منطبق کنید و نیمسازهای آنها را ادامه دهید تا دایرهٔ محیطی را قطع کنند (شکل ۳۶ ـ a) .



b)



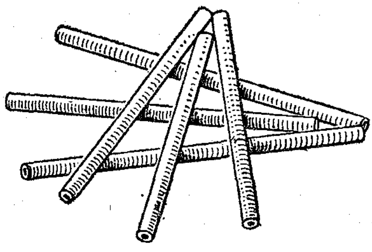
a)

شکل ۳۶

با استفادهٔ از این لم ثابت کنید که اگـر در مثلث ABC دو نیمساز AF و BE برابر باشند ، مثلثهـای AFC و BEC برابر می‌شوند (شکل ۳۶ ـ b) .

۳۸. جواب در شکل ۳۷ داده شده است .

۳۹. به این نکته توجه می‌کنیم که اگر چنین خطی وجود داشته بـاشد ، بـاید تعداد رأسهای چند ضلعی که در یك طرف این خط قرار دارد، باتعداد رأس‌هایی که در طرف دیگـر خط قرار دارد ، برابر باشد .



شکل ۳۷

۴۰. ثابت کنید که باقیماندهٔ تقسیم هرعدد بر۹ ، برابر است با باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر۹ . از اینجا نتیجه بگیرید که اگر مجموع رقمهای دو عدد با هم برابر شود ، تفاضل آنها بر ۹ قابل قسمت است .

۴۱. اگر در مرحله‌ای ، هر ۹ عدد ، مساوی واحد شود، به این معناست

که قبل ازآن هر ۹ عدد ، یـا مساوی واحد و یا مساوی صفر بوده است . فرض کنید ، در مرحلهٔ n ام ، برای نخستین‌بار هر ۹ عدد ، مساوی واحد شده باشد. در این‌صورت در مرحلهٔ $(n-۱)$ام، هر ۹ عدد، باید مساوی صفر باشند. بنابراین در مرحلهٔ $(n-۲)$ام، باید هر دو عدد متوالی با هم فرق داشته بـاشند ، یعنی عددهای ردیف اول، سوم ، پنجم ، هفتم و نهم (با شروع از هرجا ومثلاً در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) باید یکی باشند . ولی جای عددهای اول و نهم در کنار یکدیگر است و نمی‌توانند مساوی باشند . بـه این ترتیب به تناقض می‌رسیم .

۴۲. بزرگترین یال پاکت را درنظر بگیرید وثابت کنیدکه این یال نمی‌تواند مجاور به یك زاویهٔ منفرجه باشد .

۴۳. عددها را به $n_۱$ ، $n_۲$ ،...، $n_{۱۰۰}$ نشان می‌دهیم ومجموعهای زیر را در نظر می‌گیریم :

$$S_۱=n_۱ \,,\, S_۲=n_۱+n_۲ \,,\, S_۳=n_۱+n_۲+n_۳ \,,\, \ldots,$$
$$S_{۱۰۰}=n_۱+n_۲+\ldots+n_{۱۰۰}$$

اگر هیچکدام از عددهای $S_۱$ ، $S_۲$ ،...، $S_{۱۰۰}$ بر ۱۰۰ قابل قسمت نباشند ، چون در تقسیم هرعدد بر ۱۰۰ ، یکی از ۹۹ عدد ۱ ، ۲ ، ۳ ،...، ۹۹ به عنوان باقیمانده بدست می‌آید ، لااقل در دو مورد باقیمانده‌ها با هم مساوی می‌شوند .

فرض کنید این دو عدد مثلاً $S_{۲۱}$ و $S_{۸۷}$ باشد، در این‌صورت عدد

$$n_{۲۲}+n_{۲۳}+\ldots+n_{۸۶}+n_{۸۷}=S_{۸۷}-S_{۲۱}$$

بر ۱۰۰ قابل قسمت خواهد بود .

۴۴. حساب کنید ، حداکثر تعداد امتیازی که نفر دوم می‌تواند بیاورد و حداقل تعداد امتیازی کـه نفرهای پنجم تا هشتم روی هم می‌توانند داشته باشند، چقدر است. ثابت‌کنید شطرنج‌بازهایی‌که در ردیفهای پنجم تا هشتم قرار گرفته‌اند ، همه از ۴ شطرنج‌بازی که در ردیف اول تا چهارم‌اند ، باخته‌اند .

۴۵. به ۱۶۲ طریق .

۴۶. ابتدا لم زیر را ثابت کنید (به طریق استقراء ریاضی) :

لم . فرض کنید ، در تجزیهٔ عدد m به عاملهای اول، بدست آید :

$$m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$$

در این‌صورت تعداد مقسوم علیه‌های m (با به حساب‌آوردن ۱ و m) چنین است :

$$(p_1 + 1)\ (p_2 + 1)\ \ldots\ (p_s + 1)$$

عددی را که مورد نظر مسأله است به k نشان می‌دهیم ، چون بر ۲ و ۹ قابل قسمت است ، داریم :

$$k = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \ldots p_s^{n_s}$$

به ضمناً $n_1 \geqslant 1$ و $n_2 \geqslant 2$. بنابر لم ، بدست می‌آید :

$$14 = (n_1 + 1)\ (n_2 + 1)\ (n_3 + 1)\ \ldots\ (n_s + 1)$$

که در آن $n_1 + 1 \geqslant 2$ و $n_2 + 1 \geqslant 3$. از آنجا بدست می‌آید : $n_1 + 1 = 2$ و $n_2 + 1 = 7$ ، عدد k مقسوم‌علیه اولی جز ۲ و ۳ ندارد . یعنی $k = 2 \times 3^6$.

b) در این‌حالت هم استدلال به‌همان ترتیب است، درحالتی که تعداد مقسوم علیه‌های k مساوی ۱۵ باشد، دو جواب خواهیم داشت :

$$k = 2^2 \times 3^4 \quad ; \quad k = 2^4 \times 3^2$$

و واضح است که عدد k نمی‌تواند ۱۷ مقسوم‌علیه داشته باشد (در این مسأله اگر تعداد مقسوم‌علیه‌ها، عددی اول باشد، جوابی بدست نمی‌آید) .

۴۷. نقطهٔ برخورد قطرهای آن .

۴۸. ثابت‌کنید ، برای اینکه حلزون بتواند به نقطهٔ اولیه برگردد ، باید در هر یك از چهار جهت ، زمانی مساوی حرکت‌کند .

۴۹. اگر تساوی $7y^2 = 15x^2 - 9$ برقرار باشد، باید y^2 و بنابراین y، بر ۳ قابل قسمت باشد . فرض کنید $y = 3u$ ، در این‌صورت

$$5x^2 = 3 + 21u^2$$

و از اینجا نتیجه‌می‌شود $x = 3v$. ولی‌در این‌حالت به‌تساوی‌زیرمی‌رسیم:

$$7u^2+1=15v^2$$

ثابت کنید که عدد به صورت $7u^2+1$ ، هرگز بر ۳ قابل قسمت نیست .

۵۰. فرض کنید قالی اول ودوم درمساحت S_1 روی هم قرار گرفته باشند، همچنین سطح مشترك قالی اول وسوم را S_2 وسطح مشترك قالیهای دوم وسوم را S_3 وسطح مشترك سه قالی را S_4 می‌نامیم. ثابت کنید:

$$6=9-(S_1+S_2+S_3)+S_4$$

۵۱. a را کوچکترین عدد این جدول و p ، q و r و s را عددهای چهار خانهٔ مجاور آن بگیرید . از تساوی $4a=p+q+r+s$ نتیجه می‌شود :

$$(p-a)+(q-a)+(r-a)+(s-a)=0$$

چون در هریك از این پرانتزها، عددی غیرمنفی قرار دارد، بنابراین

$$a=p=q=r=s$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که همهٔ عددهای جدول با هم برابرند .

۵۲. عددی که شامل ۳۰۰ رقم واحد و تعداد دلخواهی صفر است ، بر ۳ قابل قسمت است ، ولی بر ۹ قابل قسمت نیست و بنابراین چنین عددی نمی‌تواند مجذور کامل باشد .

۵۳. ممکن نیست ، زیرا هرسنگ دومینو یك خانهٔ سفید و یك خانهٔ سیاه را می‌پوشاند و بنابراین ممکن نیست در صفحهٔ شطرنج دو خانهٔ سیاه باقی بماند .

۵۴. برای سهولت کار ، عدد بزرگتر را a وعددکوچکتر را b می‌نامیم. روشن است که از تقسیم a بر b به باقیمانده‌ای مساوی ۱۱۱۱ می‌رسیم ، یعنی اگر خارج قسمت تقسیم را q فرض کنیم ، داریم : $a-bq=1111$. این تساوی را به صورت $a=bq+1111$ می‌نویسیم . روشن است که هرمقسوم علیهی از a و b باید مقسوم علیه ۱۱۱۱ هم باشد. ولی عدد ۱۱۱۱ مقسوم علیه هر دو عدد a و b است ، بنابراین بزرگترین مقسوم علیه آنها هم خواهد بود . مسأله را در حالت کلی هم می‌توان حل کرد . فرض می‌کنیم که

عدد a شامل n واحد وعدد b شامل m واحد باشد . با انجام تقسیم‌های متوالی (آلگوریتم اقلیدس) ، می‌توان ثابت کرد که بزرگترین مقسوم علیه‌مشترك دوعدد موردنظر براست با عددی که از d واحد تشکیل شده باشد، که درآن d عبارت است از بزرگترین مقسوم‌علیه m و n.

۵۵. مجموع زاویه‌های داخلی همهٔ مثلثها را محاسبه مــی‌کنیم . زاویه‌هایی از این مثلثها که رأسشان یکی از نقطه‌های داخلــی باشد، در مجموع ۳۶۰ درجه می‌شوند . چون روی‌هم ۳۰ نقطهٔ داخلی وجود دارد ، زاویه‌های به رأس آنها ، مجموعاً $۳۶۰^\circ \times ۳۰ = ۱۰۸۰۰^\circ$ می‌شود ، آنچه که باقی می‌ماند ، عبارت است از زاویه‌هایی که رأس آنها بریکی از رأسهای صدضلعی منطبق است. روشن است که مجموع زاویه‌های داخلی یك صد ضلعی برابر است با :

$$۱۸۰^\circ(۱۰۰ - ۲) = ۱۷۶۴۰^\circ$$

به‌این ترتیب، مجموع زاویه‌های داخلی همهٔ مثلثها چنین می‌شود :

$$۱۰۸۰۰^\circ + ۱۷۶۴۰^\circ = ۲۸۴۴۰^\circ$$

مجموع زاویه‌های داخلی هرمثلث برابربا ۱۸۰ درجه است وبنابراین تعداد مثلثها برابر $۱۵۸ = \frac{۲۸۴۴۰}{۱۸۰}$ می‌شود .

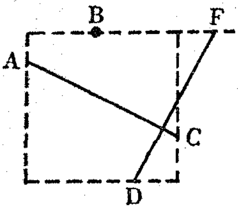
در مورد این مسأله ، این پرسش پیش می‌آید که آیا همیشه می‌توان يك صد ضلعی محدب راکه ۳۰ نقطه در داخل آن قرار گرفته است، به مثلثهایی تقسیم کرد ؟ اگر کوشش کنید ، می‌توانید ثابت کنید که این عمل همیشه ممکن است .

۵۶. a) چون دو ضلع يك زاویه نسبت به نیمساز آن قرینهٔ یکدیگرند ، اگر قرینهٔ B را نسبت به خطی که پاره خط AB را قطع کرده است، پیدا کنیم ، یکی از نقطه‌های ضلع AC بدست می‌آید .

b) اگر قرینهٔ رأس مفروض را نسبت به دونیمساز دیگر پیدا کنیم ، دونقطه از ضلع روبروی به‌این رأس بدست می‌آید ودیگر رسم مثلث مشکل نیست . بحث در بارهٔ امکان وجود مثلث را به عهدهٔ خواننده

می گذاریم .

۵۷. ۷۵ گلوله.



شکل ۳۸

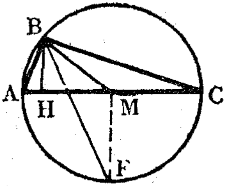
۵۸. A ، B ، C و D را نقطه‌های مفروض بگیرید (شکل ۳۸). پاره خط DF را عمود برپاره خط AC و مساوی آن رسم کنید. ثابت کنید که نقطهٔ F روی ضلع مربع مورد نظر قرار دارد.

۵۹. رابطهٔ $m^۲ + (m+۱)^۲ = n^۴ + (n+۱)^۴$ ، به‌سادگی به‌این صورت در می‌آید:

$$m(m+۱) = n(n+۱)\,[n(n+۱)+۲]$$

و حالا به سادگی می‌توان ثابت کرد که حاصلضرب دو عدد متوالی نمی‌تواند مساوی حاصلضرب دوعدد طبیعی به تفاضل ۲ باشد.

۶۰. تعداد دانش آموزان کلاس پنجم را که در بازی شرکت کرده‌اند، x می‌گیریم. با استفاده از شرط اول مسأله، ثابت کنید که مجموع امتیازهای این x نفر مساوی $۷ - ۲x + \frac{x(x-۱)}{۲}$ است. ازآنجا، با استفاده از شرط دوم مسأله، ثابت کنید که ۱۴ بر x قابل قسمت است. بالاخره ثابت کنید که برای x ، تنها مقادیر ۷ و ۱۴ بدست می‌آید.



شکل ۳۹

۶۱. ABC را مثلث مفروض، AH — ارتفاع، AM — میانه و AF را نیمساز آن فرض کنید (F روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است). ثابت کنید، مثلث BMF متساوی‌الساقین است و از آنجا نتیجه بگیرید که زاویهٔ B مساوی ۹۰ درجه‌است (شکل ۳۹).

۶۲. دو طرف رابطهٔ فرض را مجذورکنید و از این نامساوی استفاده‌کنید که برای هرمقدار a و b داریم: $۲ab \leqslant a^۲ + b^۲$.

۶۳. چون مجموع مساحتهای سکه‌ها ، از مساحت سطح میز کمتر است، داریم :

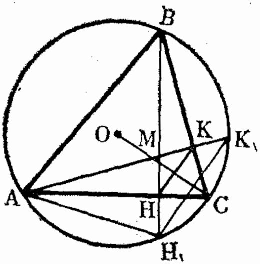
$$n\pi r^{۲} < \pi R^{۲} \implies \sqrt{n} < \frac{R}{r}$$

برای اثبات نامساوی دوم ، هر سکه را دو برابر در نظر بگیرید و ثابت‌کنید ، این سکه‌های بزرگ شده بطور کامل سطح دایرهٔ به‌شعاع $R-r$ را می‌پوشانند (برای‌این منظور باید بعضی سکه‌ها را روی‌هم قرار داد) . از اینجا نتیجه بگیرید که این نامساوی درست است :

$$\sqrt{n} > \frac{۱}{۲}\left(\frac{R}{r} - ۱\right) \text{ و یا } ۴n\pi r^{۲} > \pi(R-r)^{۲}$$

۶۴. هرعدد صحیح a را می‌توان به صورت $a = ۲^{k}.b$ نشان داد، که در آن b عددی است فرد . ضمناً بین ۱۰۱ عدد فردکه کوچکتر از ۲۰۰ باشند ، لااقل دو عدد با هم برابر می‌شوند .

۶۵. عددهای $۱۰^{k_۱}$ و $۲۰^{k_۲}$ را می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی‌که در تقسیم بر $۹N$ ، باقیمانده‌های مساوی داشته باشند. تفاضل این دوعدد، تنها از رقمهای ۹ و صفر تشکیل می‌شود. اگر این تفاضل را بر ۹ تقسیم کنیم، عددی‌بدست می‌آیدکه تنها شامل رقمهای مساوی واحد وصفر وبر N هم قابل قسمت است .



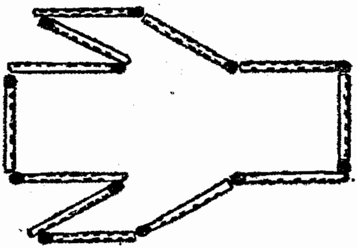
شکل ۴۰

۶۶. AK و BH را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در $K_۱$ و $H_۱$ قطع کنند (شکل ۴۰) . قوسهای $CH_۱$ و $CK_۱$ با هم‌برابرند،زیرا به‌ترتیب‌روبروی‌زاویه‌های HBC و KAC قرار دارند ، بنابراین شعاع OC بر وتر $K_۱H_۱$ عمود است. حالا دیگر کافی است، ثابت‌کنیم پاره‌خطهای KH و $K_۱H_۱$ موازی‌اند . برای این منظور ثابت می‌کنیم‌که KH وسط دوضلع را در مثلث $K_۱MH_۱$ به هم وصل کرده است . زاویه‌های $K_۱AC$ و $CAH_۱$ ،که روبرو به‌کمانهای مساوی‌اند، با هم برابرند

و بنابراین دو مثلث MAH و HAH_1 برابر مـی‌شوند و از آنجا $MH = HH_1$. به‌همین ترتیب بدست می‌آید: $MK = KK_1$.
ما مسأله را در حالتی‌که هرسه زاویهٔ مثلث حاده باشد ، ثابت‌کردیم وحالتی راکه یکی از زاویه‌های مثلث منفرجه باشد، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .
ضمن این مسأله، حکم جالب زیرهم ثابت شد: اگریکی‌از ارتفاعهای مثلث را ازطرف ضلع، به‌اندازهٔ فاصلهٔ محل برخورد ارتفاعها تاضلع، ادامه دهیم ، یکی از نقطه‌های دایرهٔ محیطی مثلث بدست می‌آید .

۶۷. از خاصیت میانه‌های مثلث استفاده کنید .

۶۸. یکی از جوابهای ممکن ، در شکـل ۴۱ داده شده است . (چوب کبریتهـای مایل بـا چوب‌کبریتهای افقی،زاویه‌ای مساوی ۳۰ درجه می‌سازند.)



شکل ۴۱

۶۹. فرض می‌کنیم، عدد موردنظر دارای n رقم باشد (همهٔ رقمها مساوی واحدند) . چون این عدد بر ۳۳...۳۳ ، که دارای صد رقم است، قابل قسمت است ، باید بر ۳ و ۱۱...۱۱ (شامل صد رقـم مساوی واحد) ، قابل قسمت باشد . به این ترتیب ، از یك طرف ، n مضربی است از ۳ و از طرف دیگر ، n بـاید مضربی از n باشد (مسألهٔ ۵۴ را ببینید.) کوچکترین عددی‌که با این شرطها می‌سازد، عبارت است از $n = ۳۰۰$. یعنی، عدد مورد نظربا ۳۰۰ رقم مساوی واحد نوشته می‌شود .

۷۰. فـرض کنید ، جـدول T_1 بعـد از چند تبدیل ، با شرط مسأله ، به جدول T_2 تبدیل شود ، که درآن تعداد علامتهای منفی، حداقل باشد . یعنی با تبدیل جدول T_2 ، تعداد علامتهای منفی آن نتواند کمتر شود. چنین جدولهایی را کمترین می‌نامیم. ثابت مـی‌کنیم که تعداد علامتهای منفی درکمترین، نمی‌تواند بیشتر از چهار باشد. در

حقیقت ، در هرستون و هرسطر جدول کمترین ، حداکثر دو علامت منفی وجود دارد (در غیر این‌صورت، علامتهای آن سطر یا ستون را به‌مخالف خود تبدیل‌می‌کنیم، تا تعداد علامتهای‌منفی کمترشود). فرض می‌کنیم ، جدول کمترینی وجود داشته باشد که در آن بیش از چهار علامت منفی وجود داشته باشد . در سطری از آن، که‌آنرا سطر A می‌نامیم ، دو علامت منفی قرار دارد . ستونهایی راکه این علامتهای منفی ، در آنها قرار دارد ، P و Q می‌نامیم . دوتا از علامتهای منفی باقیمانده، یا در ستونهای P و Q ویا در دوستون دیگر قرارگرفته است . در صورت لزوم ، می‌توان با تغییرعلامتها در سطر A ، ترتیبی داد که در دوستون جدول ، دو علامت منفی قرار گرفته باشد . حالا علامت منفی پنجم را در نظر می گیریم. این علامت نمی‌تواند در هیچکدام از ستونهای فوق قرار گرفته باشد ، زیرا جدول‌کمترین است . فرض کنیم‌که این علامت منفی ، در سطر B واقع باشد . با تغییر علامتها ، در یك یا دو ستون فوق، می‌توان ترتیبی داد که در این سطر ۳ علامت منفی قرار گیرد.

جدولی‌که روی قطرآن ۱، ۲ ، ۳یا ۴ علامت منفی ودربقیهٔ خانه‌ها، علامت مثبت قرار داشته باشد، یك جدول‌کمترین است (یعنی مفسر می‌تواند مقادیر ۰ ، ۱ ، ۲، ۳و ۴ را قبول کند .) برای اثبات این مطلب، توجه می‌کنیم‌که تبدیل جدول T_1 به T_2 ، به تعداد تبدیل یك سطر یا ستون مربوط نیست ، بلکه تنها به زوج بودن این تعداد مربوط است. در حقیقت، فرض‌کنید، مثلا سطراول a مرتبه وستونها به‌ترتیب b_1، b_2، b_3 و b_4 مرتبه تغییر کرده باشند . در این‌صورت علامتی که در گوشهٔ چپ و بالای جدول قرار دارد ، $a+b_1$ مرتبه وعلامتهای سه‌خانهٔ دیگربه‌ترتیب $a+b_2$ و $a+b_3$ ، $a+b_4$مرتبه تغییرکرده‌اند . درحالتی‌که a زوج باشد ، می‌توان به‌جای آن صفر ، و در حالتی‌که فرد باشد ، به‌جای آن واحد را انتخاب کرد ، بدون آنکه نتیجهٔ کار تفاوت‌کند . به این ترتیب ، می‌توان تنها تبدیلهایی را در نظرگرفت ، که در آنها هر سطر و هر ستون ، بیش از یکبار

تغییر نکرده باشد . با توجه به‌این نکته، می‌توان به‌سادگی درستی جدول کمترین را ، که قبلا گفتیم ، تحقیق کرد .

۷۱. یك n ضلعی محدب در نظر می‌گیریم ، به‌نحوی‌که هیچ سه قطر آن، در یك نقطهٔ داخلی متقاطع نباشند ، اگر در آن تمام قطرها را رسم کنیم ، n ضلعی به جزءهای کوچکتری تقسیم می‌شود . فرض کنید، تعداد سه ضلعیهایی که بدست می‌آید مساوی $P_۳$، تعداد چهارضلعیها مساوی $P_۴$ ،... و تعداد k ضلعیها مساوی P_k باشد. مسأله به‌اینجا منجر می‌شود که حاصلجمع زیر را بدست آوریم :

$$N = P_۳ + P_۴ + \dots + P_k$$

ابتدا تعداد کلی نقطه‌های داخلی را ، که محل برخورد قطرهای یك n ضلعی محدب هستند، معین می‌کنیم. برای این منظور توجه‌می‌کنیم که هرچهار رأس n ضلعی، یك چهارضلعی محدب تشکیل می‌دهدکه قطرهای آن در داخل n ضلعی یکدیگر را قطع می‌کنند . ازآنجا که از n رأس می‌توان، چهار نقطه را به $\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲۴}$ طریق جدا کرد (امتحان کنید!) ، بنابراین همهٔ قطرهای n ضلعی به اندازهٔ $\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲۴}$ نقطهٔ برخورد داخلی می‌دهند.

حالا مجموع کل زاویه‌های چندضلعیهایی را که در تقسیم n ضلعی بدست مـی‌آید ، پیدا می‌کنیم. معلوم است کـه در هرنقطهٔ داخلی برخورد قطرها، ۴ زاویه به‌وجود می‌آیدکه روی‌هم ۳۶۰ درجه‌اند؛ علاوه بر آنها ، باید زاویه‌هایی را هم به حساب آورد که رأس آنها بر یکی از رأسهای n ضلعی منطبق است . بنابراین داریم :

$$[P_۳(۳-۲) + P_۴(۴-۲) + \dots + P_k\,(k-۲)] \times ۱۸۰^\circ = \quad (۱)$$

$$= \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲۴} \times ۳۶۰^\circ + (n-۲) \times ۱۸۰^\circ$$

تعداد کلی رأسهای چند ضلعیهای تقسیم را پیدا می‌کنیم . هر نقطهٔ

داخلی برخورد قطرها ، رأس چهار چند ضلعی تقسیم است، و هریك از رأسهای n ضلعی مفروض ، برای $(n-۲)$ چند ضلعی، بنابراین :

$$۳P_۳+۴P_۴+\ldots+kP_k=$$

(۲)

$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲۴}\times ۴+n(n-۲)$$

از رابطهٔ (۱) بدست می‌آید :

$$۳P_۳+۴P_۴+\ldots+kP_k-۲N=$$

(۳)

$$=\frac{n\,(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲۴}\times ۲+(n-۲)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و (۳) ، بعد از تبدیلهای ساده ، بدست می‌آید :

$$N=\frac{(n-۱)(n-۲)(n^۲-۳n+۱۲)}{۲۴}$$

و در حالت خاص ، وقتی که $n=۲۰$ باشد ، داریم : $N=۵۰۱۶$.

۷۲. قطرهای مربع را رسم‌کنید و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث ثابت‌کنید که مجموع موردنظر مساوی واحد است.

۷۳. به ترتیب داریم:

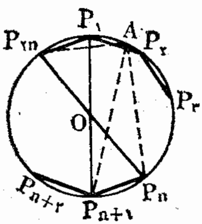
$$x^۸+x^۴+۱=(x^۸+۲x^۴+۱)-x^۴=$$
$$=(x^۴+x^۲+۱)(x^۴-x^۲+۱)=$$
$$=(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)(x^۲+$$
$$+\sqrt{۳}\,x+۱)(x^۲-\sqrt{۳}\,x+۱)$$

۷۴. ثابت می‌کنیم، لااقل ۹۷ نفر ازدانش‌آموزان وجود دارد، که هرکدام از آنها با ۹۹ شرکت کنندهٔ بقیه آشنا است . فرض کنیم که هر ۱۰۰ دانش‌آموز بـا هم آشنا نباشند. در این‌صورت دو نفـر A و B پیدا می‌شود که یکدیگر را نمی‌شناسند . چهار نفر از شرکت‌کنندگان را درنظر می‌گیریم که A و B هم بین آنها باشند، مثل A، B، X و Y .

طبق شرط، بین این چهارنفر یك‌نفروجود داردکه باسه‌نفر دیگرآشنا است. این یك نفر یا X است و یا Y ، زیرا A و B همدیگـر را نمی‌شناسند . مثلاً فرض می‌کنیم که X با A ، B و Y آشنا باشد . همین استدلال را درموردگروه چهار نفری A ، B ، X و Z به‌کار می‌بریم ، معلوم می‌شود که یا X با A ، B و Z آشناست ویا Z با A ، B و X؛ یعنی به‌هرصورت X با Z آشنایی دارد. بنابراین X با همهٔ شرکت‌کنندگان در اجتماع آشناست . به این ترتیب در هرگروه چهارنفری که شامل A و B باشد ، دانش‌آموزی وجود دارد که با همهٔ شرکت‌کنندگان دیگر آشناست . از اینجا نتیجه می‌شودکه به‌جز A و B حداکثر یك دانش‌آموز دیگر پیدا می‌شود که با همهٔ شرکت کنندگان در اجتماع ریاضی، آشنا نیست.

۷۵. اگر چنین تقسیم‌بندی ممکن باشد ، تعداد کل ضلعهای مثلثهای سیاه به اندازهٔ ۱۰ واحد از تعداد ضلعهای مثلثهای سفید بیشتر می‌شود ، از طرف دیگر هردوی این عددها ، باید مضربـی از ۳ باشند و این دو وضع متناقض یکدیگرند .

۷۶. مسأله‌رادرحالت کلی‌و برای‌چندضلعی‌منتظمی که‌تعداد ضلعهایش زوج باشد، حل می کنیم. برای هررأس چندضلعی، رأس دیگری‌وجود دارد کـه با مرکز دایره در یك امتدادند (شکل ۴۲). بنابراین



شکل ۴۲

$$AP_1^2+AP_2^2+\dots+AP_{2n}^2=$$
$$=(AP_1^2+AP_{n+1}^2)+(AP_2^2+$$
$$+AP_{n+2}^2)+\dots+(AP_n^2+AP_{2n}^2)=$$
$$=(2R)^2+\dots+(2R)^2=4nR^2$$

برای چندضلعیهای منتظمی‌هم،که تعداد ضلعهای‌آنها فردباشد، همین نتیجه بدست‌می‌آید: مجموع مربعهای‌وترهایی که‌نقطه‌ای‌ازدایرهٔ‌محیطی را به رأسهای nضلعی منتظم وصل می‌کند ، برابر است با $2nR^2$ ،

ولی اثبات حکم در این‌حالت، مشکل‌تر است.

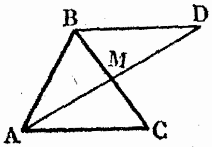
۷۷. چون حاصلضرب هشت رقمی است، عدد مفروض نمی‌تواند به صفر ختم شده باشد. حاصلضرب به ۱۰۰۰ قابل قسمت است، بنابراین یکی از عددها به ۱۲۵ و دیگری به ۸ قابل قسمت است. عددهای مضرب ۱۲۵، که به صفر ختم نشده باشند، به یکی از عددهای سه رقمی ۱۲۵، ۳۷۵، ۶۲۵، ۸۷۵ ختم می‌شوند و جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$\overline{abcd} = ۶۱۲۵ \quad ۶۳۷۵ \quad ۴۶۲۵ \quad ۴۸۷۵$$

$$\overline{dcba} = ۵۲۱۶ \quad ۵۷۳۶ \quad ۵۲۶۴ \quad ۵۷۸۴$$

چهار جواب دیگر هم، با تبدیل $abcd$ و $dcba$ به یکدیگر بدست می‌آید.

۷۸. در مثلث ABC، میانهٔ AM را از طرف M، به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ D برسد. توجه می‌کنیم که داریم: $BD = AC$. حالا می‌توانید مثلث ABM را بسازید (شکل ۴۳).



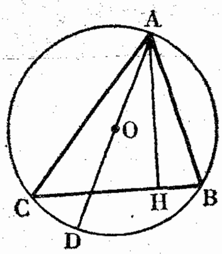
شکل ۴۳

۷۹. فرض‌کنید، A نقطهٔ مشترك دایره‌ها باشد. A را به‌مرکز همهٔ دایره‌ها وصل‌کنید و کوچکترین زاویه‌ای که تشکیل می‌شود، در نظر بگیرید. اگر این زاویه O_1AO_2 باشد، ثابت‌کنید، پاره خطی‌که مرکزهای O_1 و O_2 را به‌هم وصل می‌کند، بطور کامل داخل یکی از دایره‌ها قرار دارد.

۸۰. فرض‌کنید عدد m_1، که از رقمهای مفروض تشکیل شده است، برعدد m_2، ازهمین نوع، قابل قسمت باشد $(m_2 < m_1)$. در این‌صورت $m_1 - m_2$ هم بر m_2 قابل قسمت می‌شود. از طرف دیگر می‌دانیم که اگر مجموع رقمهای دوعدد با هم برابر باشند، تفاضل آنها بر ۹ قابل قسمت است؛ بنابراین باید $m_1 - m_2$ بر $9m_2$ قابل قسمت باشد. ولی $9m_2$ عددی هشت رقمی است وتفاضل دو عدد هفت رقمی

نمی‌تواند بر آن قابل قسمت باشد .

۸۱. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم کنید ، AO را امتداد دهید تا این دایره را در D قطع کند و توجه کنید که دو زاویهٔ ADC و ABC برابرند (شکل ۴۴).



شکل ۴۴

۸۲. سه حالت درنظر می گیریم:

۱) $x \leqslant 0$. در این حالت همهٔ جمله‌هایی که چند جمله‌ای را تشکیل داده‌اند ، غیر منفی‌اند و بنابراین :

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 \geqslant 1 > 0$$

۲) $0 < x < 1$. در این حالت داریم :

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1 - x) + x^4(1 - x^5) + x^{12} > 0$$

۳) $x \geqslant 1$. داریم :

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 =$$
$$= x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 \geqslant 1 > 0$$

۸۳. سمت راست تساوی را تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{100} = 1 + \frac{1}{3} +$$
$$+ \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{200} -$$
$$- 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{200}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{199} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \ldots - \frac{1}{200}$$

۸۴. به ۱۰ طریقه .

۸۵. یکی از خطهای طولی یا عرضی تخته را در نظر می گیریم. این خط،

تخته را به دو قسمت تقسیم می‌کند، که درهرکدام از آنها ، تعداد خانه‌ها، عددی زوج است . تعداد زوجـی از این خانه‌ها، به وسیلهٔ استخوانهایی پوشیده شده‌اند (ممکن است این تعداد صفر باشد)، که خط مرزی را قطع نمی‌کنند. بنابراین خط مرزی، تنها می‌تواند تعداد زوجی از استخوانها را : ۰، ۲، ۴، ویا بیشتر ، قطع کند. تعدادکل اینگونه خطهای طولی و یا عرضی مساوی ۱۰۲ است ، وبرای آنکه هریك از استخوانها را قطع کنند ، لااقل ۲۰۴ استخوان لازم است. ولی روی تختهٔ ما بیش از ۲۰۰ استخوان وجود ندارد .

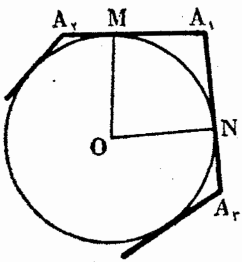
۸۶. مثلث ACD را دور نقطهٔ C به اندازهٔ ۶۰ درجه دوران می‌دهیم ، به‌نحوی که نقطهٔ D برنقطهٔ E قرار گیرد .

۸۷. دانش‌آموز A_1 را در نظر می‌گیریم . فرض کنید او مسأله‌های a_1 و a_2 را حل‌کرده باشد. از او می‌خواهیم‌که مثلاً مسألهٔ a_2 را توضیح دهد. تنها یك دانش‌آموز دیگر ، مثلاً A_2، پیدا می‌شودکه همراه با A_1 مسألهٔ a_2 را حل کرده است. از او می‌خواهیم ، مسألهٔ دیگری را که حل کـرده است، مثلا a_3 ، شرح دهـد . این روش را ادامه می‌دهیم. ثابت کنیدکه دیر یا زود به‌دانش‌آموزی می‌رسیم‌که همراه با A_1، مسألهٔ a_1 را حل‌کرده باشد. اگر بعد ازآن، بازهم دانش‌آموزانی باقی‌مانده باشند، چگونه باید ادامه دهیم ؟

۸۸. نقطهٔ A_1 را رأسی از ده ضلعی و M و N را نقطه‌های تماس ضلعهای A_1A_2 و A_1A_3 با دایرهٔ محاطی می‌گیریـم (شکل ۴۵). ثابت کنید :

$$\widehat{MON} = 180^\circ - \widehat{A_1}$$

با استفاده از این مطلب، ده ضلعی متشابه با ده ضلعی مفروض رسم کنید .

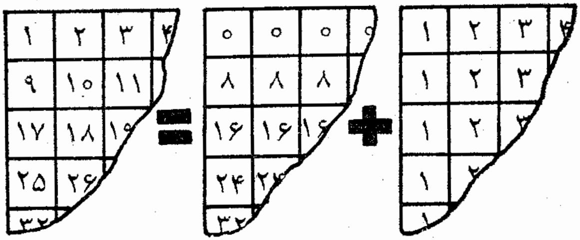


شکل ۴۵

۸۹. دو عـدد $\frac{n(n+1)}{2}$ و $\frac{(n+20)(n+21)}{2}$، به یك رقم ختم

می‌شوند، زیرا تفاضل آنها بر ۱۰ قابل قسمت است.

۹۰. هریك از عددهایی راکه درخانه‌های صفحهٔ شطرنج نوشته شده است، به صورت مجموع دو عدد دیگر ، به‌نحوی که در شکل ۴۶ دیده می‌شود ، می‌نویسیم . اگر ۸ رخ به‌نحوی باشند ، که یکی دیگری را نزند ، در هر ردیف افقی و در هر ردیف قائم ، تنها یك رخ قرار خواهد گرفت . بنابراین مجموع عددهای خانه‌هایی‌که شامل رخها



شکل ۴۶

هستند، همیشه برابر است با :

$$(۱+۲+۳+\ldots+۸)+(۰+۸+۱۶+\ldots+۵۶)=۲۶۰$$

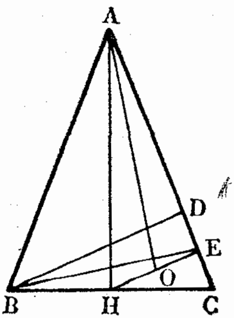
۹۱. به‌ترتیب داریم :

$$(n+۱)(n+۲)\ldots(۲n-۱)۲n=\frac{۱\times۲\times\ldots\times۲n}{۱\times۲\times\ldots\times n}=$$

$$=۱\times۳\times۵\times\ldots\times(۲n-۱)\times\frac{۲\times۴+۶\times\ldots\times۲n}{۱\times۲\times۳\times\ldots\times n}=$$

$$=۱\times۳\times۵\times\ldots\times(۲n-۱)\times۲^{n}$$

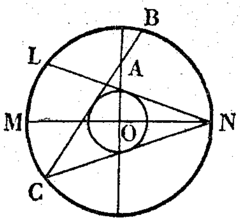
۹۲. ازنقطهٔ B، عمودی بر AC فرود می‌آوریم (شکل ۴۷) ؛ مثلثهای CBD ، CEH و AHE متشابه‌اند . با توجه به اینکه نقطه‌های E و O به‌ترتیب وسط ضلعهای CD و HE هستند، مثلثهای BEC و AHO متشابه می‌شوند. چون AH بر BC عمود است، AO هم بر BE عمود می‌شود.



شکل ۴۷

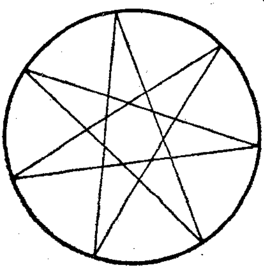
۹۳. اگر طول محیط دایره را واحد بگیریم ، هیچ تغییری درکلی بودن مسأله نخواهد

کرد. ابتدا ثابت می‌کنیم که همیشه می‌توان از نقطهٔ A وتری رسم کرد که طول قوس آن مساوی عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد. برای این منظور (شکل ۴۸)، قطر MN را عمود بر پاره خط OA رسم می‌کنیم؛ سپس از نقطهٔ N، قوس NL را مساوی طول گویای $\frac{p}{q}$ جدا می‌کنیم. $\frac{p}{q}$ را مقداری نزدیک به $\frac{۱}{۲}$، به‌نحوی انتخاب می‌کنیم که وتر NL از بین دو نقطهٔ O و A عبور کند. حالا دایره‌ای به مرکز O و مماس بر NL رسم می‌کنیم و وتر CB را مماس بر این دایره، طوری می‌کشیم که از A بگذرد. در این صورت قوس CB هم طولی مساوی مقدار گویای $\frac{p}{q}$ خواهد داشت، زیرا با قوس NL برابر است. اگر از نقطهٔ A، شعاع نوری درجهت BC حرکت کند، بعدازهر بازتاب، قوسی مساوی $\frac{p}{q}$ از محیط دایره جدا می‌کند، و بنابراین بعداز q مرتبه (و ممکن است زودتر)، به نقطهٔ مبداء خود برمی‌گردد (این مطلب را امتحان کنید و شکل مربوطه را رسم نمایید.) به این ترتیب مسأله همیشه قابل حل است و بی‌نهایت جواب مختلف دارد.



شکل ۴۸

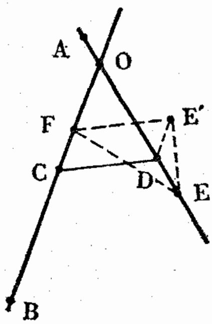
۹۴. هریک از پاره خطهای این خط شکسته، نمی‌تواند با بیش از ۲۰۰ پاره خط دیگر، نقطهٔ مشترک داشته باشد. (خود آن پاره خط و دو پاره خط مجاورآنرا استثنا کردیم.) بنابراین تعداد کلی نقطه‌های برخورد نمی‌تواند از $\frac{۲۰۳ \times ۲۰۰}{۲} = ۲۰۳۰۰$ تجاوز کند. مثلاً برای ۲۰۳ ضلعی منتظم ستاره‌ای، درست همین ۲۰۳۰۰ نقطهٔ برخورد پیدا می‌شود. شکل ۴۹، که درآن یك ۷ ضلعی


شکل ۴۹

منتظم ستاره‌ای رسم شده است، تصور ۲۰۳ ضلعی منتظم ستاره‌ای را هم بدست می‌دهد. ثابت کنید که در یك چنین شکلی، هیچ سه ضلعی از یك نقطه عبور نمی‌کند.

۹۵. دایره‌ها را C_1 ، C_2 ، C_3 ، C_4 و C_5 می‌نامیم. فرض کنید دایره‌های C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 در نقطهٔ A، دایره‌های C_1 ، C_2، C_3، و C_5 در نقطهٔ B ؛ دایره‌های C_1 ، C_2 ، C_4 و C_5 در نقطهٔ C متقاطع باشند. اگر A ، B و C سه نقطهٔ متمایز باشند، به این معناست که دایره‌های C_1 و C_2 ، سه نقطهٔ مشترك دارند؛ و دراین صورت باید این دودایره برهم منطبق باشند. ولی درچنین حالتی، نقطهٔ برخورد دایره‌های C_1 ، C_3 ، C_4 و C_5 متعلق به‌دایرهٔ C_2 خواهد بود . و اگرمثلا نقطه‌های A و C برهم منطبق باشند، در این‌صورت نقطهٔA برای همهٔ دایره‌ها مشترك خواهد بود .

۹۶. ثابت می‌کنیم نزدیکترین موضع دومتحرك، نسبت به‌هم، وقتی است که در نقطه‌های C و D، که به‌یك فاصله از O قراردارند، واقع باشند (شکل ۵۰). فرض کنید دو متحرك در نقطه‌های دیگری ، مثل E و F واقع باشند. پاره‌خط DE'، قرینهٔ DE نسبت به CD ، را می‌سازیم . می‌بینیم که : $EF > FE' = CD$ (زیرا EF، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $FE'E$ است.)

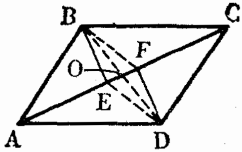


شکل ۵۰

اگر $\widehat{AOB} = 90^\circ$ ، $AO = a$ و $BO = b$ و $a > b$ باشد ، حداقل فاصلهٔ بین دو متحرك بعد از $\frac{a+b}{2v}$ واحد زمان بعد از شروع حرکت ، بدست می‌آید واین فاصله برابر است با $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

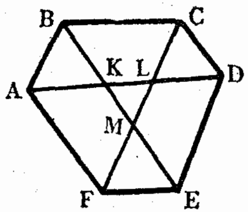
۹۷. (a) چون مساحت دو مثلث ABC و ACD برابر است ، BE و DF دو ارتفاع این مثلثها برابرند (شکل ۵۱) . بنابر این ، چهار ضلعی

$BEDF$ متوازی‌الاضلاع است و قطرهای آن در نقطهٔ O ، یکدیگر را نصف می کنند، یعنی $BO=OD$. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $AO=OC$ بنابراین قطرهای چهارضلعی $ABCD$، در نقطهٔ تلاقی یکدیگر را نصف می کنند و چهار ضلعی مفروض ، متوازی‌الاضلاع است .



شکل ۵۱

b) فرض می کنیم ، قطرهای AD ، BE و CF دریك نقطه به‌هم نرسند. نقطه‌های K، L، M را، به‌ترتیب نقطه‌های تلاقی AD و BE ، AD و FC و BE و FC باشند . برای مشخص بودن وضع ، حالتی را در نظر می گیریم که قطر FC، مثلث KDE را قطع کند (همین حالت در شکل ۵۲ نشان داده شده است .) اگر مساحت شش‌ضلعی $ABCDEF$ را S بگیریم،



شکل ۵۲

مساحت هریك از چهار ضلعیهای $ABEF$ و $ABCD$ ، طبق شرط ، مساوی $\frac{S}{۲}$ می‌شود؛ از اینجا به‌سادگی دیده می‌شود که مساحت دو مثلث ABK و KDE برابرند . به‌همین ترتیب مساحت دو مثلث CLD و ALF و همچنین مساحت دو مثلث FME و BMC هم برابر می‌شود.

می‌دانیم، مساحت دو مثلثی که دریك زاویه برابرند، برنسبت حاصل‌ضرب دو ضلع این زاویه است، بنابراین :

$$AK.BK=DK.EK\ ,$$
$$CL.DL=AL.FL\ ,$$
$$LM.EM=BM.CM$$

از ضرب این تساویها، دریکدیگر، بعداز جابجاکردن بعضی عاملهای طرف دوم، بدست می‌آید :

$$AK.BK.CL.DL.FM.EM = AL.BM.CM.DK.FL.EK$$

ولی هریك از عاملهای سمت راست این تساوی، از عامل نظیرش در سمت چپ، بزرگتر است وبنابراین این تساوی ممکن نیست .

۹۸. به سادگی دیده می‌شود که هردو نقطهٔ روی شکل ۶ را می‌توان به وسیلهٔ خط شکسته‌ای به‌هم وصل‌کرد که بیش از ۵ پاره خط نداشته باشد. خط شکسته‌ای را درنظر بگیرید که دونقطهٔ مربوط به‌عددهای ۱ و ۱۸ را به‌هم وصل‌کرده باشد. ثابت کنید که در دو انتهای یکی ازپاره‌خطهای این خط شکسته، عددهایی قرار دارد، که اختلاف آنها از ۳ بزرگتر است .

۹۹. a) $m>n$ فرض کنید. عدد $۲^{۲^m}-۱$ را تجزیه کنید و ثابت کنید‌که بر $۲^{۲^n}+۱$ قابل قسمت است .

b) شرط لازم. فرض‌کنید ، عددهای $۲^m-۱$ و $۲^n-۱$ نسبت به‌هم اول‌باشند. ثابت می‌کنیم‌که دراین‌صورت m و n نسبت به‌هم اولند. ازبرهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم‌که m و n مقسوم‌علیه مشترك $d\neq ۱$ داشته باشند ، به‌نحوی که داشته باشیم: $m=dm_۱$ و $n=dn_۱$. در این صورت ، دو عدد مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$۲^{dm_۱}-۱=(۲^d)^{m_۱}-۱ ,$$
$$۲^{dn_۱}-۱=(۲^d)^{n_۱}-۱$$

یعنی هر دو عدد بر $۲^d-۱$ قابل قسمت‌اند و این متناقض با شرط ماست .

لم. اگر m و n نسبت به‌هم اول باشند، می‌توان عددهای طبیعی u و v را طوری پیدا کرد که داشته باشیم :

$$mu=nv+۱$$

اثبات. باقیماندهٔ عددهای

$$m , ۲m , ۳m ,..., (n-۱)m$$

را بر n پیدا می‌کنیم. هیچکدام ازاین عددها بر n قابل قسمت نیستند و بنابراین ، باقیمانده‌ها مخالف صفرند . ثابت مـی‌کنیم بین ایـن

باقیمانده‌ها، دو عدد مساوی هم وجود ندارد. در حقیقت، اگر مثلاً عددهای pm و qm $(p<q)$، در تقسیم بر n، باقیمانده‌های مساوی بدهند، باید تفاضل آنها $(q-p)m$ بر n قابل قسمت باشد، که ممکن نیست، زیرا $q-p<n$. بنابراین بین باقیمانده‌ها، همهٔ عددهای از ۱ تا $n-1$ وجود دارد و همین مطلب هم، درستی لم را ثابت می‌کند.

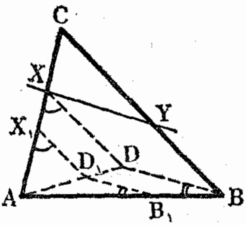
به مسألهٔ خود بر می‌گردیم. اثبات کافی بودن شرط را بـه طریق «برهان خلف» می‌دهیم. فرض می‌کنیم، عددهای m و n نسبت به‌هم اول باشند، ولی دو عدد 2^m-1 و 2^n-1 مقسوم‌علیه مشترکی مثل $D\neq 1$ داشته باشند. با توجه به حکم لم، می‌توان دو عدد u و v را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $mu=nv+1$. بنابراین

$$2^{mu}-1=2^{nv+1}-1=2\times 2^{nv}-1=2(2^{nv}-1)+1$$

عدد $2^{mu}-1=(2^u)^m-1$ بر 2^u-1، یعنی بر D، قابل‌قسمت است. به‌همین ترتیب، عدد $2^{nv}-1$ هم بر D قابل قسمت می‌شود. به این تـرتیب در تساوی $2^{mu}-1=2(2^{nv}-1)+1$، مقدار سمت چپ بر D قابل قسمت‌است، ولی عدد سمت راست بر D قابل قسمت نیست. و این، فرض را نقض می‌کند.

۱۰۰. یکی از جوابها را می‌توان به این طریق بدست آورد که پاره خطی موازی دو قاعده و محدود به دوساق طوری رسم کنیم، که طول آن واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ اصلی باشد.

۱۰۱. X و Y را، نقطه‌های مطلوب می‌گیریم (شکل ۵۳). لوزی $XYBD$ را می‌سازیم و A را به D وصل می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود کـه مثلث AXD متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن $X=C$.



شکل ۵۳

بنابراین برای رسم XY می‌توان اینطور عمل کرد: نقطهٔ X_1 را به‌دلخواه، روی AC انتخاب‌می‌کنیم ومثلث

متساوی‌الساقین AX_1D_1 را، باشرط زاویهٔ رأس $C = X_1$، می‌سازیم.
سپس روی AB ، نقطهٔ B_1 را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:
$D_1B_1 = X_1D_1$.
BD را موازی B_1D_1 رسم می‌کنیم تا خط AD_1 را در D قطع کند، سپس DX را موازی D_1X_1 مـی‌کشیم تا AC را در X قطع کند . بالاخره XY را موازی DB رسم می‌کنیم تابه CB در Y برخورد کند. ازتشابه دومثلث AD_1B_1 و ADB وهمچنین دومثلث AD_1X_1 و ADX ، ثابت می‌شودکه : $AX = XY = YB$.

۱۰۲. توجه‌کنیدکه باید $a \leqslant 1$ ، $b \leqslant 1$ ، $c \leqslant 1$ باشد. ثابت‌کنیدکه برای هر مقدار x ، نامساوی $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ بـرقرار است ، از آنجا نتیجه بگیرید :

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) \leqslant \frac{1}{64}$$

ولی اگر سه نامساوی مفروض را در هم ضرب کنیم (چرا این ضرب ممکن است؟) ، بدست می‌آید :

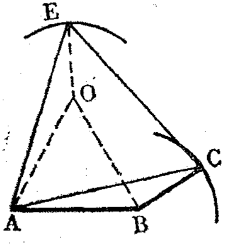
$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}$$

۱۰۳. a) پـرانتز سمت چپ را بـاز کنید و از نامساوی $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ استفاده کنید .

b) برای مشخص بودن وضع ، فرض‌کنید $|a| \geqslant |b|$ ، دراین‌صورت $|a+b| \leqslant 2|a|$ ، یعنی

$$(a+b)^{100} \leqslant 2^{100} \times a^{100} < 2^{100}(a^{100} + b^{100})$$

۱۰۴. اگر میلهٔ BC را دور نقطهٔ B بچرخانیم ، نقطهٔ C روی محیط یك دایـره حرکت می‌کند. با استفاده از این مطلب کـه اگر AC را بـه اندازهٔ ۶۰ درجه دور نقطهٔ A دوران دهیم، نقطهٔ E بدست می‌آید، ثابت کنید که نقطهٔ E هم روی دایره‌ای حرکت مـی‌کند . روی این دایـره ، نقطه‌ای پیدا



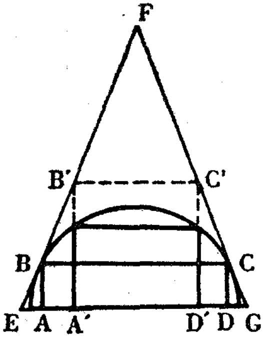
شکل ۵۴

کنید که بیشترین فاصله را از B داشته باشد (شکل ۵۴).

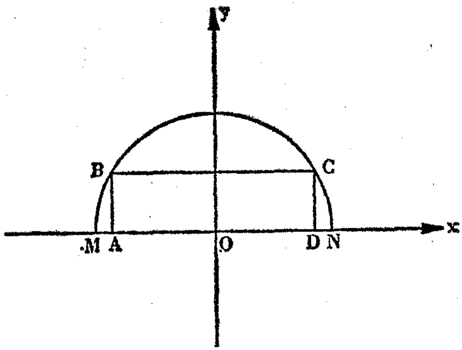
جواب: حداکثر مقدار BE برابراست با $a + b$ ودراین حالت داریم:

$\widehat{ABC} = ۱۲۰^{\circ}$.

۱۰۵. فرض کنید، در مستطیل $ABCD$، ضلع AD مساوی چهاربرابر ضلع AB باشد. از نقطه‌های B و C، مماسهایی بر نیمدایره رسم کنید، همهٔ مستطیلهای محاط در مثلث EFG، محیطهای مساوی دارند (شکل ۵۵) (مثلا $ABCD$ و $A'B'C'D'$ در شکل ۵۵). این مسأله را به طریق تحلیلی هم می‌توان حل کرد. مرکز نیمدایره را مبداء مختصات و امتداد قطر MN را محور طول می‌گیریم (شکل ۵۶). اگر مختصات یکی از



شکل ۵۵



شکل ۵۶

رأسهای مستطیل محاطی‌را $C\ (x،y)$ فرض‌کنیم، باید $p = ۲x + y$ حداکثر شود (p مساوی نصف محیط مستطیل است). از طرف دیگر $(x ، y)$ در معادلهٔ دایره، یعنی $x^{۲} + y^{۲} = R^{۲}$ صدق می‌کند، که با توجه به تساوی $y = p - ۲x$، به صورت زیر در می‌آید:

$$x^{۲} + (p - ۲x)^{۲} = R^{۲} \Longrightarrow ۵x^{۲} - ۴px + p^{۲} - R^{۲} = ۰$$

برای‌اینکه این‌معادلهٔ درجهٔ دوم، ریشه‌های حقیقی‌داشته‌باشد، داریم:

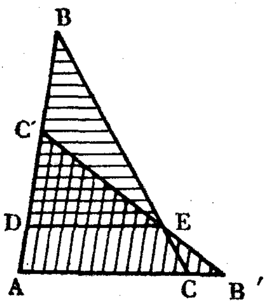
$$4p^2-5(p^2-R^2)\geqslant 0 \implies p\leqslant R\sqrt{5}$$

یعنی $2p$ ، محیط مستطیل محاط در نیمدایره ، حداکثر مساوی $2R\sqrt{5}$ می‌شود ، و این مقدار وقتی خواهد بود که داشته باشیم :

$$2x=\frac{4p}{5}\text{،}\ y=\frac{p}{5}$$

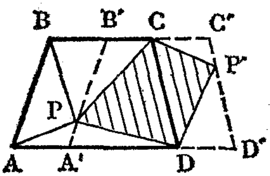
و همانطور که می‌بینیم طول مستطیل ، چهار برابر عرض آن است.

۱۰۶. فرض کنید $AB>AC$. مثلث $AB'C'$ را متشابه با مثلث ABC و به‌نحوی که $AC<AB'<AB$ باشد ، روی ضلع AC از مثلث ABC می‌سازیم (شکل ۵۷ را ببینید). از نقطهٔ E، محل برخورد BC و $B'C'$ ، خط DE را به‌موازات AC رسم می‌کنیم. مثلثهای $AB'C'$ و DBE، مثلثهای مورد نظر مسأله‌اند .



شکل ۵۷

۱۰۷. از نقطهٔ P، پاره‌خط $A'B'$ را مساوی و موازی AB رسم می‌کنیم (شکل ۵۸). متوازی‌الاضلاع $AA'B'B$ را روی ضلع CD به‌نحوی قرارمی‌دهیم که نقطهٔ A برنقطهٔ C و نقطهٔ B برنقطه D قرار گیرد .



شکل ۵۸

۱۰۸. فرض کنیم ، به‌هر ترتیبی که دایرهٔ کوچکتر را روی دایرهٔ بزرگتر قرار دهیم، کمتر از ۱۰۰ قطاع همرنگ برهم منطبق شوند، دراین صورت تعدادکل حالتهایی که دو قطاع همرنگ بریکدیگر منطبق شوند ، از 200×100 کمتر می‌شود. از طرف دیگر، اگر دایرهٔ کوچکتر را، یك دور کامل ، دور مرکزش بچرخانیم ، هر قطاع دایرهٔ کوچکتر صد بار قطاع همرنگ خود را می‌پوشاند و صد بار بر قطاع ناهمرنگ خود قرار می‌گیرد . بنابراین تعدادکل حالتهایی که یك قطاع دایرهٔ

کوچکتر بریك قطاع همرنگ خود در دایرهٔ بزرگتر ، قرار گیرد ، مساوی ۲۰۰ × ۱۰۰ می‌شود و این تناقض ، فرض اول را منتفی می‌کند .

۱۰۹. دستگاه مفروض را می‌توان به این صورت نوشت :

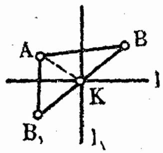
$$\begin{cases} x+y=a-z \\ \dfrac{a-z}{xy}=-\dfrac{a-z}{az} \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $z \neq a$ ، در این صورت ، دستگاه چنین می‌شود :

$$\begin{cases} x+y=a+(-z) \\ xy=a(-z) \end{cases}$$

در اینجا نتیجه می‌شود که عددهای a و $(-z)$ عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ دومی که ضمناً ریشه‌هایش مساوی x و y است . بنابراین یکی از عددهای x و y مساوی a می‌شود .

۱۱۰. B_1 را قرینهٔ B نسبت به K می‌گیریم و دو خط l و l_1 را عمود بر هم از نقطهٔ K می‌گذرانیم (شکل ۵۹). ثابت کنید مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ A و B از خط l برابر است با تصویر AB یا AB_1 بر l_1 (هرکدام که خط l_1 را قطع می‌کنند). حالا به سادگی معلوم می‌شود که اگر خط l را عمود برخط AB یا AB_1 (هرکدام که بزرگتر است) ، رسم کنیم، مجموع فاصله‌های A و B از آن حداکثر خواهد شد. همچنین اگر خط l را از یکی از ضلعهای AK یا BK از مثلث ABK (آنکه ارتفاع وارد برآن کوچکتر است)، بگذرانیم، مجموع فاصله‌های A و B از آن، حداقل می‌شود .



شکل ۵۹

۱۱۱. a) فرض کنیم x ، y و z یکی از سه عدد جواب باشد. ثابت کنید که اگر x و y ، مقسوم‌علیه مشترکی مثل h داشته باشند، z هم بر h قابل قسمت است . با استفاده از این مطلب، مسأله را درحالتی در نظر بگیرید که سه عدد x ، y و z دو به دو ، مقسوم علیه

مشترکی نداشته باشند ، در این صورت ، چون $x+y$ بر z قابل قسمت است ، $x+y+z$ هم بر z قابل قسمت می‌شود . به همین ترتیب $x+y+z$ بر x و بر y و در نتیجه بر xyz قابل قسمت می‌شود . برای سهولت امر ، فرض می‌کنیم $x \leqslant y \leqslant z$. ثابت کنید که $x=۱$ ، $y \leqslant ۲$ ، $z \leqslant ۳$. به این ترتیب مسأله دارای سه رشته جواب می‌شود :

$$A)\ x=k,\ y=k,\ z=k \qquad B)\ x=l,\ y=l,\ z=۲l \qquad C)\ x=m,\ y=۲m,\ z=۳m$$

که در آنها k ، l و m ، عددهای طبیعی دلخواهند .

b) می‌توان فرض کرد $a \geqslant b \geqslant c$. اگر $c=۱$ باشد ، به سادگی معلوم می‌شود که یا $a=b=۱$ ، یا $a=۲$ و $b=۱$ ، یا $a=۳$ و $b=۲$ است . حالا فرض می‌کنیم $c \geqslant ۲$. ثابت می‌کنیم که دراین حالت ، سه عدد بـا هم فرق دارند ، یعنی $a>b>c$. طبق شرط مسأله داریم .

$$ab+۱=Kc, \qquad ac+۱=Lb, \qquad bc+۱=Ma$$

(K ، L ، M ، عددهایی صحیح اند) . اگر این تساویها را در هم ضرب کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که می‌توان عدد صحیحی مثل N پیدا کرد ، به‌نحوی که داشته باشیم :

$$ab+bc+ac+۱=Nabc$$

یعنی در هرحالت داریم :

$$ab+bc+ac+۱ \geqslant abc$$

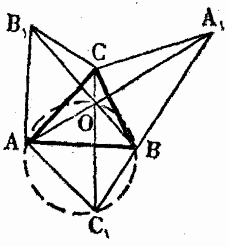
از طرف دیگر با توجه به شرط $a \geqslant b \geqslant c$ ، باید داشته باشیم :

$$abc \leqslant ab+bc+ac<۳ab$$

از آنجا $c<۳$ ، یعنی $c=۲$ بدست می‌آید . حالا دیگر می‌توان استدلال را ادامه داد و $a=۷$ ، $b=۳$ را بدست آورد .

۱۱۲. هریك از ۲۵ عدد، ۲۵ بار در جدول نوشته شده است، ضمناً هرعدد در خارج قطر اصلی به تعداد زوج تکرار شده است، بنابراین روی

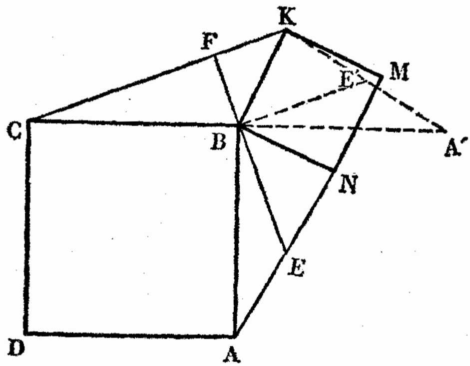
قطر افقی ، هریك از عددها باید به تعداد فرد تکرار شده باشد . این امر هم تنها وقتی ممکن است که هرعددی که روی قطر اصلی نوشته شده است ، تنها یکبار تکرار شود .



شکل ۶۰

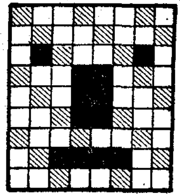
۱۱۳. روی ضلعهای مثلث ABC، مثلثهای متشابه ABC_1 ، BCA_1 و CAB_1 را بازاویه‌های $180^\circ - \hat{H}$ و $180^\circ - \hat{K}$ و $180^\circ - \hat{M}$ رسم می‌کنیم (شکل ۶۰) . ثابت کنید که نقطهٔ O بر محل برخورد خطهای CC_1 و BB_1 قرار دارد. برای این منظور، تحقیق کنید که نقطهٔ O بردایره‌های محیطی مثلثهای ABC_1 و AB_1C قرار دارد .

۱۱۴. مثلث ABN را دور نقطهٔ B به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهید تا BN بر BK قرار گیرد و ثابت کنید که شکل $CBA'K$ یك مثلث است که BE' وسط دوضلع آنرا بهم وصل‌کرده است. از اینجا نتیجه بگیرید که FBE یك خط راست است (شکل ۶۱).



شکل ۶۱

۱۱۵. بعضی از خانه‌های شکل را ، آنطور که درشکل ۶۲ نشان داده شده است، هاشور می‌زنیم. این خانه‌ها به‌نحوی انتخاب شده‌اند ، که هر



شکل ۶۲

مستطیل سه خانه‌ای ، تنها شامل یك خانهٔ هاشور خورده باشد. اگر تقسیم ۶۰ خانهٔشکل ، به مستطیلهای سه خانه‌ای ممکن باشد ، باید ۲۰ مستطیل بدست آید ، در حالی‌که تعداد خانه‌های هاشور خورده ، به جای ۲۰ عدد ، ۲۱ عدد است .

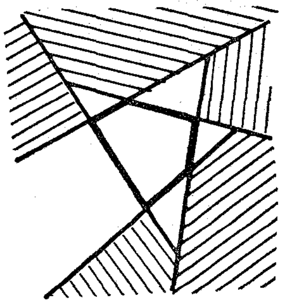
۱۱۶. توجه کنید که هر کدام از شکلهای نظیر شکل ۹ ، یا سه خانهٔ سفید را می‌پوشاند و یا سه خانهٔ سیاه را وتمام صفحهٔ شطرنجی هم باید شامل ۲۵ عدد ، از نوع شکل ۹ باشد .

۱۱۷. همیشه می‌توان دو نقطهٔ A و B پیدا کرد ، به‌نحوی که فاصلهٔ آنها حداقل باشد. کوچکترین دایره ازدایره‌های قابل رسم، از این دونقطهٔ A وB ویکی از $(n-۲)$ نقطهٔ دیگر می‌گذرد و در داخل آن هم ، هیچیك از بقیهٔ نقطه‌ها قرار نگرفته است. (ثابت کنید!)

۱۱۸. خانه‌هایی را که در دو ردیف افقی بالا و پایین قرار گرفته‌اند ، خانه‌های جانبی و خانه‌های دو ردیف دیگر را خانه‌های میانی می‌نامیم . اگر اسب از خانهٔ جانبی حرکت کند ، تنها می‌تواند در یکی ازخانه‌های میانی قرارگیرد. اگر اسب بتواند طبق شرط مسأله از همهٔ خانه‌ها عبورکند، $۲n$ حرکت ازخانه‌های میانی به‌طرف خانه های جانبی خواهد داشت. روشن است‌که $۲n$ حرکت بقیه را باید از خانه‌های جانبی به‌طرف خانه‌های میانی انجام دهد. درهرحرکت‌اسب، رنگ خانه عوض می‌شود، یعنی از خانهٔ سفید به خانهٔ سیاه وازخانهٔ سیاه به خانهٔ سفید می‌رود. به این ترتیب معلوم می‌شودکه دوردیف خانهٔ جانبی افقی باید از یك رنگ و دو ردیف خانهٔ میانی از رنگ دیگر باشند . و این ممکن نیست .

۱۱۹. با روش استقراء ریاضی عمل می‌کنیم . برای $n=۴$ ، حکم مسأله درست است . فرض می‌کنیم که حکم برای $n=k$ درست باشد . مجموعهٔ $k+۱$ نقطه را طبق فرض مسأله ، در نظر می‌گیریم . k

نقطه از این $k + ۱$ نقطه را، انتخاب می‌کنیم. طبق فرض استقراء، این k نقطه، رأسهای یك k ضلعی محدب را تشکیل می‌دهند، ثابت کنیدکه $(k+۱)$ امین نقطه، نمی‌تواند در داخل این k ضلعی واقع باشد. برای این منظور، k ضلعی را، به‌وسیلهٔ قطرهایی‌که از یك رأس آن عبور می‌کنند، به مثلثهایی تقسیم‌کنید.



شکل ۶۳

ضلعهای k را ضلعی، شبیه شکل ۶۳، ادامه می‌دهیم. برای سهولت کارحالت $k = ۵$ را روی شکل درنظر گرفته‌ایم. ثابت‌کنیدکه نقطهٔ $(k+۱)$ ام، نمی‌تواند، در هیچکدام از ناحیه‌های هاشور خورده قرار گیرد. و وقتی هم که این نقطه در یکی از ناحیه‌های هاشور نخورده واقع باشد، همهٔ نقطه‌ها، رأسهای یك $(k+۱)$ ضلعی محدب را تشکیل می‌دهند.

۱۲۰. ثابت کنیدکه مکعب هرعدد طبیعی را می‌توان به‌یکی از سه صورت $۹k$، $۹k+۱$ و $۹k-۱$ نوشت (k عددی طبیعی است). از اینجا نتیجه بگیریدکه عددهای به صورت $۹k+۴$ و $۹k+۵$ را نمی‌توان به صورت مجموع مکعبهای سه عدد متوالی نوشت.

۱۲۱. داریم:

$$۱۰^n - ۱ = \underbrace{۹۹ \ldots ۹}_{n \text{ مرتبه}} = ۹ \times \underbrace{۱۱ \ldots ۱}_{n \text{ مرتبه}}$$

و بنابراین:

$$۱۰^n + ۱۸n - ۱ = ۹(\underbrace{۱۱ \ldots ۱}_{n \text{ مرتبه}} + ۲n)$$

ثابت می‌کنیم‌که مقدار داخل پرانتز بر۳ قابل قسمت است، می‌دانیم که باقیماندهٔ تقسیم هرعدد بر۳ برابراست با باقیماندهٔ تقسیم مجموع

رقمهای آن عددبر ۳ . اگر باقیماندهٔ عدد n بر ۳ را مساوی α فرض کنیم ، می‌توان عدد $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ مرتبه}}$ را چنین نوشت :

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ مرتبه}}=3l+\alpha$$

و از آنجا

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ مرتبه}}+2n=3(l+2k+\alpha)$$

۱۲۲. $N=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$ فرض می‌کنیم و عددی را که از حذف رقم سمت راست N بدست می‌آید ، X می‌گیریم: $X=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$.
از آنجا بدست می‌آید :

$$N=10X+a_n \quad , \quad N_1=X+2a_n$$

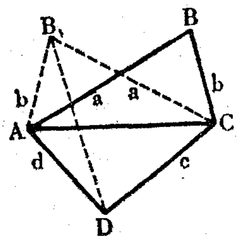
عدد N_1 را می‌توان چنین نوشت :

$$N_1=2(10X+a_n)-19X$$

حالا دیگر اثبات درستی حکم مسأله ، ساده است .

۱۲۳. از B و C به موازات AC و AB رسم کنید ، تا به کمك مثلث ABC متوازی‌الاضلاعی بدست آید و ثابت کنید $2m_a<b+c$ (m_a میانهٔ وارد برضلع a ، و b و c دو ضلع دیگر مثلث‌اند) .

۱۲۴. $ABCD$ را چهارضلعی مفروض، باضلعهای a ، b ، c و d فرض کنید (شکل ۶۴) . روی قطر AC ، مثلث AB_1C را ، با ضلعهای $AB_1=b$ و $CB_1=a$ می‌سازیم. مساحتهای چهار ضلعیهای $ABCD$ و AB_1CD با هم برابرند . از طرف دیگر مساحت AB_1CD از مجموع مساحتهای



شکل ۶۴

مثلثهای DAB_1 و DB_1C تشکیل شده است که به‌ترتیب نمی‌توانند از $\frac{1}{2}bd$ و $\frac{1}{2}ac$ تجاوزکنند (زیرا، مثلاً مساحت مثلث DAB_1

برابر است با $\left(\frac{۱}{۲}bd\ .\sin(B_۱AD)\right)$.

۱۲۵. این جوابها قابل قبول است :

۳۰۸۰۱۰۳، ۳۰۲۰۳۰۳، ۳۰۶۰۶۰۳، ۳۰۰۰۸۰۳،

۳۰۵۰۲۰۳، ۳۰۹۰۵۰۳، ۳۰۳۰۷۰۳

۱۲۶. از قانون محاسبهٔ باقیماندهٔ تقسیم بر ۹ استفاده کنید .

۱۲۷. مقسوم را به‌این صورت بنویسید :

$$a^{۱۰۱}(a^{-۱۰۰}+a^{-۹۹}+\ldots+a^{-۲}+a^{-۱})$$

۱۲۸. a) فرض می‌کنیم چنین سطری‌از ۵۰ عدد حقیقی، با شرطهای مسأله، وجود داشته باشد . از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که مجموع هرچهار عدد پشت سرهم، باید منفی باشد. گروهی از ۲۸ عدد پشت سرهم درنظر می‌گیریم. این ۲۸ عدد را می‌توان به‌۷ گروه چهارتایی تقسیم کرد ، که در این صورت باید مجموع آنها منفی باشد . از طرف دیگر اگر آنها را به ۴ گروه هفت‌تایی تقسیم کنیم ، باید مجموعی مثبت داشته باشند. و این دونتیجه، یکدیگر را نقض‌می‌کنند.

b) اگر مثلا یازده عدد زیر را چهارمرتبه پشت سرهم تکرارکنیم :

۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ۴، ‎−۵، ‎−۵، ‎−۵، ‎−۵، ‎−۵

وسپس به دنبال‌آنها شش‌بار عدد ۴ را بنویسیم ، در شرطهای مسأله صدق خواهد کرد.

۱۲۹. $۱۰a+b$ را عدد دو رقمی مورد نظر فرض کنید (a و b رقمهای این عددند : $a\neq b$) . باید این معادله را حل کنیم :

$$(۱۰a+b)^۲=(a+b)^۳$$

هر دوطرف این تساوی ، عددی مانند N را معین می‌کنند ، که هم مربع کامل وهم مکعب کامل‌است. اگر یکی ازعاملهای اول این‌عدد را با توان k در نظر بگیرید ، k باید به ۲ و ۳ قابل قسمت باشد. بنابراین می‌توان نوشت : $N=n^۶$ ، که در آن n عددی است صحیح . از اینجا نتیجه می‌شود که عدد دو رقمی $۱۰a+b$ باید مکعب کامل باشد و تنها یکی از دو ۲۷ و ۶۴ چنین خاصیتی دارد.

با آزمایش ساده ، معلوم می‌شود که ۶۴ با شرطهای مسأله نمی‌سازد و بنابراین تنها جواب مسأله ، عدد ۲۷ است .

۱۳۰. دو طرف معادلهٔ اول را در y ضرب ، وسپس دو معادله را از هم کم کنید .

۱۳۱. فرض کنید ، در تقسیم عـدد اول p بـر ۳۰، خارج قسمت مساوی a و بـاقیماندهٔ تقسیم مساوی عدد b شود ، یعنی داشته بـاشیم : $p = ۳۰a + b$. حالا، b را عددی غیر اول می گیریم . چون هرعدد غیر اول کـوچکتر از ۳۰ ، مقسوم علیه مشترکی با عدد ۳۰ دارد (امتحان کنید!) ، باید $p = ۳۰a + b$ برچنین مقسوم علیه مشترکی، قابل قسمت باشد؛ در حالی‌که ، طبق فرض ، p عددی است اول .

۱۳۲. nامین عدد رشتهٔ فیبوناچی را a_n می گیریم . دراین صورت ، طبق تعریف داریم :

$$a_۱ = ۱ \text{ و } a_۲ = ۱ \text{ ، } a_۳ = ۲ \text{ ،}\ldots\text{، } a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n \text{ ،}\ldots$$

و ما بطور اضافی فرض می‌کنیم $a_۰ = ۰$ ، که در این صورت خواهیم داشت : $a_۰ + ۱ = a_۲$. چند خاصیت از رشته عددهای فیبوماچی را ثابت می کنیم :

۱) برای هرمقدار k و l داریم :

$$a_{k+l} = a_{k+l-۱} + a_{k+۱}a_l \qquad (۱)$$

این اتحاد با روش استقراء ریاضی، روی k ، ثابت می‌شود . تساوی (۱) به ازای $k = ۰$ ، به تساوی واضح $a_l = a_l$ و به ازای $k = ۱$ به رابطهٔ اصلی $a_{l+۱} = a_{l-۱} + a_l$ منجر می‌شود .

فرض‌کنید، رابطهٔ (۱) برای $k - ۱$ و k درست باشد، دراین‌صورت:

$$a_{k+l+۱} = a_{k+l} + a_{k+l-۱} = a_k a_{l-۱} + a_{k+۱}a_l +$$
$$+ a_{k-۱}a_{l-۱} + a_k a_l = a_{l-۱}(a_k + a_{k-۱}) + a_l(a_{k+۱} +$$
$$+ a_k) = a_{l-۱}a_{k+۱} + a_l a_{k+۲}$$

۲) به ازای هرمقدار k و n ، عدد a_{kn} بر a_k قابل قسمت است.
این خاصیت را می‌توان به سادگی و با به کار بردن استقراء ریاضی روی n ، و با استفاده از رابطهٔ (۱) ثابت کرد .

۳) هر دو عدد متوالی ، در رشتهٔ فیبوناچی ، نسبت به هم اولند . زیرا ، اگر فرض کنیم دو عـدد مجاور a_k و a_{k+1} ، مقسوم علیه مشترك $l \neq 1$ را داشته باشند ، از رابطهٔ $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ نتیجه می‌شود که a_{k-1} هم بر l قابل قسمت است. به‌همین ترتیب ، چون a_k و a_{k-1} بر l قابل قسمت‌اند ، a_{k-2} هم بر l قابل قسمت می‌شود . اگر این استدلال را ادامه بدهیم ، بالاخره به این نتیجه می‌رسیم که a_1 و a_2 هم، باید بر $l \neq 1$ قابل قسمت باشند، که ممکن نیست .

حالا، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a_{1000} و a_{770} را پیدا می کنیم. طبق خاصیت ۱) :

$$a_{1000} = a_{770}a_{229} + a_{771}a_{230}$$

اگر a_{1000} و a_{770} ، مقسوم علیه مشترکی مساوی r داشته باشند، در این صورت (با توجه به خاصیت ۳) ، باید a_{230} هم بر r قابل قسمت باشد . از طرف دیگر داریم :

$$a_{770} = a_{690}a_{79} + a_{691}a_{80}$$

با توجه به خاصیت ۲) ، a_{690} بر a_{230} و بنابراین بر r قابل قسمت است ، به این ترتیب a_{80} هم باید بر r قابل قسمت باشد. از رابطهٔ

$$a_{240} = a_{230}a_9 + a_{231}a_{10}$$

می‌توان ، به‌همان ترتیب ، نتیجه گرفت که a_{10} هم بر r قابل قسمت است . ولی با توجه به خاصیت ۲) ، a_{1000} و a_{770} بر a_{10} قـابل قسمت‌اند، بنابراین a_{10} بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها می‌شود. به‌همین ترتیب ، می‌توان ثابت کرد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a_m و b_n برابراست با a_s، که درآن s عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد m و n . برای این منظور ، باید از یك رشته تساوی استفاده کرد ، که از راه پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعدد m و n به‌طریق اقلیدس (روش نردبانی)، بدست می‌آید .

۱۳۳. فرض کنید که A و C ، رأسهای زاویه‌های منفرجه ، در چهارضلعی

$ABCD$ باشند . قبلاً ثابت کنید که نقطه‌های A و C داخل دایره‌ای قراردارند که به قطر BD رسم شده است .

۱۳۴. از برهان خلف استفاده می‌کنیم . فرض می‌کنیم که بتوان، عدد اول p را به‌دونوع مختلف، به‌صورت مجموع مربعهای دو عدد نوشت:

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

که در آن $a > b$ ، $c > d$ و $a > c$ می گیریم . داریم :

$$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

که آنرا می‌توان به‌یکی از دو صورت زیر نوشت :

$$p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ ،}$$

$$p^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

و چون داریم :

$$(ac + bd)(ad + bc) = (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab =$$
$$= p(ab + cd)$$

بنابراین $ac + bd$ یا $ad + bc$ بر p قابل قسمت است. اگر $ac + bd$ بر p قابل قسمت باشد ، از اولین بیان p^2 ، نتیجه می‌شود :

$ad - bc = 0$ یـا $ad = bc$ و یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ، چون $a > c$ است، از تناسب اخیر نتیجه می‌شود که $b > d$ ، یعنی $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$ که متناقض با فرض است .

و اگر $ad + bc$ بر p قابل قسمت بـاشد ، از دومین بیان p^2 نتیجه می‌شود : $\frac{d}{c} = \frac{a}{b}$ و از آنجا $d > c$ ، درحالی که فرض کرده بودیم $c > d$. در این حالت هم به تناقض برخورد کردیم .

۱۳۵. a و b را به‌ترتیب رقمهای اول وآخر عدد مورد نظر می گیریم، در این‌صورت خود عدد را می‌توان به صورت $\overline{a\ldots b}$ و مقلوب آنرا به صورت $\overline{b\ldots a}$ نوشت . طبق فرض مسأله داریم : $\frac{\overline{a\ldots b}}{\overline{b\ldots a}} = k$ ، که در آن k عبارت است از عددی صحیح و مخالف واحد . از مفهوم

مسأله می‌توان فهمید که $a \neq 0$ و $b \neq 0$[1] روشن است که $k < 10$،
ببینیم چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد.

اولاً از رابطهٔ $\frac{\overline{a\ldots b}}{k} = \overline{b\ldots a}$ دیده می‌شود که: $b = \left[\frac{a}{k}\right]$ (اینجا

و از این به‌بعد، $\left[\frac{m}{n}\right]$ به معنی قسمت صحیح عدد $\frac{m}{n}$ است، یعنی

کوچکترین عدد صحیحی که از $\frac{m}{n}$ تجاوز نکند).

ثانیاً رقم آخر حاصلضرب ak برابر است با b.

چون $b \neq 0$ است، $a \geqslant k$ می‌شود (به‌عبارت دیگر $\left[\frac{a}{k}\right] \neq 0$).

جدول I را تشکیل می‌دهیم که در هرخانهٔ آن $\left[\frac{a}{k}\right]$ و رقم‌آخر

حاصلضرب a و k گذاشته شده است. ما تنها به مقادیری از a و k
احتیاج داریم که به ازای آنها، در خانه، دو رقم مساوی بدست آید.
جدول I نشان می‌دهد که، مسأله تنها در حالت $a = 8$، $k = 4$،

$b = \left[\frac{a}{k}\right] = 2$ یا در حالت $a = 9$، $k = 9$، $b = 1$ می‌تواند

جواب داشته باشد. هریك از این دو حالت را بطور جداگانه بررسی
می‌کنیم. (جدول I را در صفحهٔ ۱۲۱ به‌بینید).
$a = 8$، $b = 2$، $k = 4$ فرض می‌کنیم. c و d را به‌ترتیب رقم
دوم و رقم ماقبل آخر عدد می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{\overline{8c\ldots d2}}{\overline{2d\ldots c8}} = 4$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که $d = \left[\frac{c}{4}\right]$ و ضمناً رقم‌آخر عدد $4c + 3$

مساوی d است. جدول II را تشکیل می‌دهیم، که در آن، درسطر

---

۱. اگر شرط $b \neq 0$ را حذف‌کنیم، مسأله جوابهای زیادی ازنوع abaoabaoo پیدا
می‌کند و رده‌بندی همهٔ جوابها مشکل می‌شود.

جدول I

	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۴							
	۱							
۳	۶	۹						
	۱	۱						
۴	۸	۲	۶					
	۲	۱	۱					
۵	۰	۵	۰	۵				
	۲	۱	۱	۱				
۶	۲	۸	۴	۰	۶			
	۳	۲	۱	۱	۱			
۷	۴	۱	۸	۵	۲	۹		
	۳	۲	۱	۱	۱	۱		
۸	۶	۴	۲	۰	۸	۶	۴	
	۴	۲	۲	۱	۱	۱	۱	
۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	۴	۳	۲	۱	۱	۱	۱	۱

دوم، مقادیر $\left[\frac{c}{۴}\right]$ و در سطر سوم ، رقم آخر عدد $۴c+۳$ ، نوشته شده است .

جدول II

c	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
I	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲
II	۳	۷	۱	۵	۹	۳	۷	۱	۵	۹

جدول ، مقادیر $c=۷$ ، $d=۱$ بدست می‌دهد . رقم سوم را e و رقم سوم از آخر را f می‌نامیم ، بدست می‌آید :

$$\frac{۸۷e\ldots f۱۲}{۲۱f\ldots e۷۸}=۴$$

در اینجا $f=\left[\frac{۳۰+e}{۴}\right]$ و f رقم آخر عدد $۴e+۳$ است ، جدول III را تشکیل می‌دهیم :

جدول III

e	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
I	۷	۷	۸	۸	۸	۸	۹	۹	۹	۹
II	۳	۷	۱	۵	۹	۳	۷	۱	۵	۹

از این جدول دوجواب بدست می‌آید : $e=۱$ ، $f=۷$ یا $e=۹$، $f=۹$. اگر جواب اول را در نظر بگیریم و بحث را ادامه دهیم، عددی به صورت ۲۱۷۸...۲۱۷۸ بدست می‌آید. ازآنجاکه داریم : $۲۱۷۸\times۴=۸۷۱۲$ ، عدد ۲۱۷۸...۲۱۷۸ ، تنها در صورتی در شرط مسأله صدق می‌کند، که رقمهای وسط با این شرط بسازد (مثلاً اگر چند صفر در وسط قرار دهیم) .

حالت دوم: $e=۹$، $f=۹$ را درنظرمی‌گیریم. در این‌حالت داریم:

$$\frac{۸۷۹k\ldots l۹۱۲}{۲۱۹l\ldots k۹۷۸}=۴$$

به سادگی دیده می‌شود که از یك طرف $l=\left[\frac{۳۰+k}{۴}\right]$ و ازطرف دیگر l برابراست با رقم‌آخر $۴k+۳$. به‌این ترتیب برای k و l همان دو امکانی بدست می‌آیدکه برای e و f وجود داشت (یعنی $k=۱$، $l=۷$ یا $k=۹$ ، $l=۹$) .

از آنچه گفتیم ، نتیجه می‌شود که این عددهـا به عنوان ساده‌ترین جوابها می‌تواند مورد قبول باشد :

$$۸۷۱۲ ، ۸۷۹۱۲ ، ۸۷۹۹۱۲ ، \ldots ، ۸۷\underbrace{۹۹ \ldots ۹}_{s \text{ مرتبه}}۱۲ ، \ldots$$

اگر عددی با یکی از عددهای فوق شروع شود ، باید به همان عدد ختم شود ، مثلا :

$$۸۷۹۱۲۰۰۸۷۱۲۸۷۱۲۰۰۸۷۹۱۲$$

درست به‌همین ترتیب می‌توان در مورد حالتی‌که $a = ۹$ ، $b = ۱$ ، $k = ۹$ باشد، استدلال کرد. دراین‌حالت ساده‌ترین ترکیبها چنین‌است:

$$۹۸۰۱ ، ۹۸۹۰۱ ، ۹۸۹۹۰۱ ، \ldots ، ۹۸\underbrace{۹۹ \ldots ۹}_{s \text{ مرتبه}}۰۱ ، \ldots$$

مثلا عدد زیر :

$$۹۸۹۹۹۰۱۰۰۰۰۹۸۰۱۰۰۰۰۹۸۹۹۹۰۱$$

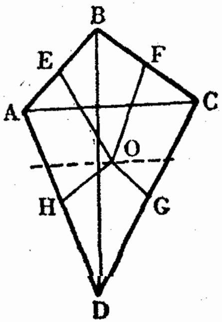
۱۳۶. کوچکترین عددی‌که در شرطهای مسأله صدق می‌کند ، عبارت است از $۲^{۱۵} \times ۳^{۱۰} \times ۵^{۶}$.

۱۳۷. روشن است‌که $۲ = ?۲$. ثابت می‌کنیم که اگر $n > ۲$ باشد، $n? > n$ است . عدد زیر را در نظر می‌گیریم :

$$n? - ۱ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times p - ۱$$

که در آن p ، بزرگترین عدد اولی است که از n تجاوز نمی‌کند . این عدد برعدد اولی که کوچکتر یا مساوی p باشد ، قابل قسمت نیست ؛ یعنی یا این عدد اول است ، و یا بر عدد اولی بزرگتر از p قابل قسمت است ، یعنی این عدد از n بزرگتر است: $n? - ۱ > n$ و $n? > N$.

۱۳۸. ثابت کنید ، خطی که از وسط قطر BD ، موازی قطر AC رسم شود (شکل ۶۵) ، عبارت است از مکان هندسی نقطهٔ O ، که برای آن، مساحت هریك از چهارضلعیهای $HOGD$ و $EOFB$ برابراست با یك چهارم مساحت چهارضلعی اصلی .



شکل ۶۵

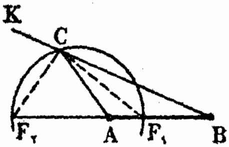
۱۳۹. متذکر می‌شویم که نقطهٔ M را می‌توان ،

با دوران PK به اندازهٔ ۶۰ درجه، دور نقطهٔ P بدست آورد.

مکان هندسی مطلوب، عبارت است از مربعی مساوی مربع Q که از دوران آن به‌اندازهٔ ۶۰ درجه، نسبت به‌نقطهٔ P بدست آمده است.

۱۴۰. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم. مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ مفروض A و B، برابر مقدار ثابت k باشد، عبارت است از یك دایره (که دایرهٔ آپولونیوس نامیده می‌شود).



شکل ۶۶

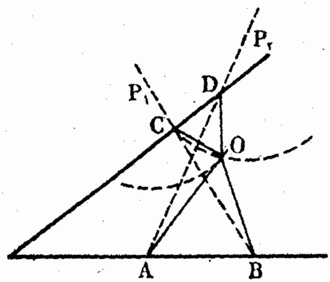
در حقیقت، فرض کنید، C نقطه‌ای از مکان هندسی مطلوب باشد. CF_1، نیمساز زاویهٔ ACB را رسم می‌کنیم (شکل ۶۶)، روشن است که‌دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$k=\frac{AF_1}{F_1B}=\frac{AC}{CB}$$. به این ترتیب،

نیمساز زاویهٔ ACB، همیشه ازنقطهٔ ثابت F_1 عبور می‌کند. به‌همین ترتیب، نیمساز زاویهٔ KCA (زاویهٔ خارجی مثلث ACB، در رأس C)، همیشه از نقطهٔ ثابت F_2 می‌گذرد، زیراکه برای آن داریم:

$$k=\frac{CA}{CB}=\frac{F_2A}{F_2B}$$. از طرف دیگر، زاویهٔ F_2CF_1 قائمه است.

بنابراین مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دایره‌ای به‌قطر F_1F_2



شکل ۶۷

با استفاده ازاین‌لم، به‌سادگی می‌توان، مسأله را حل‌کرد. در حقیقت، نقطهٔ O جایی است‌که برای آن‌داشته باشیم (شکل ۶۷):

$$\frac{CO}{OB}=\frac{DO}{AO}=\frac{CD}{AB}=k$$

بنا براین، نقطهٔ مجهول O عبارت است از محل برخورد

دایره‌های آپولونیوس برای زوج نقطه‌های D ، A و C ، B ، با نسبت معلوم $k=\frac{CD}{AB}$. مسأله چهار جواب دارد.

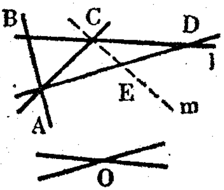
۱۴۱. سطری را در نظر می‌گیریم، که مجموع عددهای آن ، حداقل باشد و مجموع عددهای همهٔ «صلیبهایی» را در نظر می‌گیریم که با این سطر، درست شده‌اند. مجموع همهٔ این مجموعها از na کمتر نیست. ازطرف دیگر، مجموع همهٔ عددهای جدول را N ومجموع عددهای این سطر را m می‌گیریم ، بدست می‌آید : $N+(n-1)m \geqslant na$؛ ولی طبق فرض $m \leqslant \frac{N}{n}$ ، به این ترتیب :

$$N(1+\frac{n-1}{n}) \geqslant na \Longrightarrow N \geqslant a\frac{n^2}{2n-1}$$

به این ترتیب، مجموع عددهای جدول، از $a\frac{n^2}{2n-1}$ کمتر نیست.

حالا باید در این باره تحقیق کرد که چگونه می‌توان ، عددها را در جدول قرار داد، تا این مجموع مساوی $a\frac{n^2}{2n-1}$ شود . وما این مطلب را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

۱۴۲. O را محل برخورد دو خط می‌گیریم و فرض می‌کنیم که همهٔ خطهـا از این نقطه عبور نکنند . مثلاً فرض‌کنید که خط l ، از نقطهٔ O نگذرد . بین نقطه‌های تلاقی خطها ، که بر l واقع نیستند ، نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به l نزدیکتراز دیگران

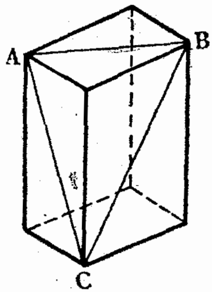


شکل ۶۸

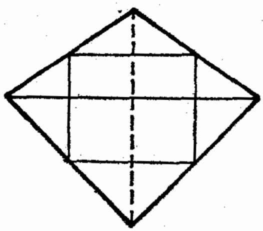
باشد ، این نقطه را A می‌نامیم (شکل ۶۸) . طبق شرط مسأله ، از نقطهٔ A، لااقل سه خط عبور می‌کند. فرض‌کنیدکه این خطها، خط l را درنقطه‌های B ، C و D قطع کنند، ضمناً C بین دو نقطهٔ B و D واقع باشد . از نقطهٔ C ، بجز l و AC ، باید یك خط دیگر ، مثل m ، عبورکند . این خط ، یکی از دوضلع مثلث ABD را در نقطهٔ E

قطع می‌کند که از A به l نزدیکتر است. ولی ما فرض کردیم که نقطهٔ A ، نزدیکترین نقطهٔ برخورد به l است .

۱۴۳. ثابت کنید که مساحت همهٔ تصویرها ، برابر است با دو برابر مساحت



شکل ۶۹



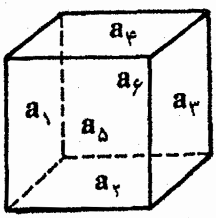
شکل ۷۰

تصویر مثلث ABC (شکل ۶۹) ، به‌نحوی که برای بدست آوردن حداکثر سطح در تصویر ، باید قوطی کبریت را طوری قرار داد که صفحهٔ ABC افقی باشد .

در حالت پاکت شیر، باید صفحه‌ای را که از وسط چهار یال دوبه دو متقاطع ، عبور می‌کند ، افقی قرار داد (شکل ۷۰). این وضع وقتی برقرار می‌شود که پاکت را روی یکی از یالها، طوری قرار دهیم که یال مقابل آن افقی باشد .

متذکر می‌شویم که رسم شکل قوطی یا پاکت روی صفحه، درحقیقت نمایندهٔ تصویر آن است .

۱۴۴. فرض می‌کنیم روی وجه‌های مکعب، عددهای a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 ، a_5 و a_6 نوشته شده باشد (شکل ۷۱). عملهایی را که در صورت مسأله ، نوشته شده است ، انجام می‌دهیم و عددهایی که بر روی وجه‌های مکعب دوم نوشته شده است ، بدست می‌آوریم. روی مکعب دوم هم همین عملها را انجام می‌دهیم و به مکعب سوم می‌رسیم تا آخر . به این ترتیب



شکل ۷۱

۲۶ مکعب بدست می‌آوریم که مثلاً روی مکعب دهم ، عددهایی نوشته شده است که از عددهای مکعب نهم ، با شرطهای مسأله ، بدست آمده است .

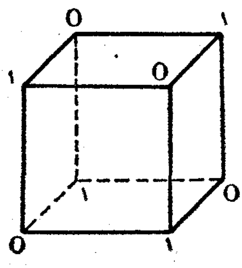
بزرگترین عددی که روی مکعب iام ($i = ۱ ، ۲ ، ... ، ۲۶$) نوشته شده است ، M_i می‌نامیم . ثابت کنید :

$$M_۱ \geqslant M_۲ \geqslant M_۳ \geqslant \ldots \geqslant M_{۲۶}$$

ولی از فرض مسأله ، معلوم می‌شود که $M_{۲۶} = M_۱$ و از آنجا بدست می‌آید :

$$M_۱ = M_۲ = M_۳ = \ldots = M_{۲۶}$$

مکعب سوم را درنظر می گیریم. روی یکی از وجه‌های آن، ومثلا روی وجه‌بالایی‌آن، بایدعدد $M_۱$ نوشته شده‌باشد. اگرشبیه استدلال مسألهٔ ۵۱ را تکرارکنیم ، به این نتیجه می‌رسیم که روی چهار وجه مکعب دوم، باید عددهای مساوی $M_۱$ واقع باشد . به‌همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که باید روی همهٔ وجه‌های مکعب اول ، عدد $M_۱$ قرار گرفته باشد . ولی طبق فرض ، همهٔ عددهایی که روی مکعب اول قرارگرفته‌اند، مساوی نیستند. تناقضی که پیدا می‌شود، به معنای این است که در محاسبهٔ مربوط به صورت مسأله، اشتباهی شده است .



شکل ۷۲

۱۴۵. فرض کنید ، روی رأسهای مکعب ، عددهایی گذاشته باشیم . عددهایی که طبق شرط مسأله بدست می‌آید ، در رأسهای مکعب دوم قرار می‌دهیم . با تکرار این عمل ، مکعب سوم را بدست می‌آوریم تا آخر. $m_۱$ ، $m_۲$ ، ... ، $m_{۱۱}$ راکوچکترین عدد مربوط به مکعب اول ، مکعب دوم، ...، مکعب یازدهم، می گیریم. بزرگترین عدد روی هریك از این مکعبها را به‌ترتیب $M_۱$ ، $M_۲$ ،...، $M_{۱۱}$ می گیریم . با تکرار استدلال مسألهٔ قبل نتیجه می گیریم :

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_{11}\ ;\ m_1 = m_2 = \ldots = m_{11}$$

با تکیه بر استدلال مسألهٔ ۵۱، ثابت کنید که $M_1 = 1$، $m_1 = 0$ و عددهای روی رأسهای مکعب به‌نحوی است که در شکل ۷۲ نشان داده شده است .

۱۴۶. محل برخورد دوساق AB و CD از ذوزنقه را E می‌نامیم . نقطهٔ مورد نظر یکی از دو رأس قاعدهٔ بالا (BC) است، که به E نزدیکتر است . برای اثبات ، از این مطلب استفاده کنید که ؛ مکان هندسی نقطه‌هایی ازداخل زاویهٔ A که مجموع فاصله‌های آنها ازدوضلع زاویه، مقداری ثابت باشد، عبارت است از پاره‌خطی عمود برنیمساز زاویه. در حالتی که ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد ، مسأله دو جواب دارد و هرکدام از رأسهای قاعدهٔ بالا را می‌توان به‌عنوان جواب، درنظر گرفت .

۱۴۷. a) مجموع فاصله‌ها از سه ضلع مثلث ، وقتی حداقل می‌شود که این نقطه بررأسی ازمثلث منطبق باشد، که ارتفاع کوچکتر ازآن می‌گذرد. b) حداکثر مجموع فاصله‌ها، وقتی است که این نقطه‌بررأسی ازمثلث واقع باشد، که ارتفاع بزرگتر ازآن می‌گذرد. (مسأله همیشه جواب منحصر ندارد . حالتهای مثلث متساوی‌الساقین و مثلث متساوی‌الاضلاع را بررسی کنید .)

۱۴۸. مسأله را می‌توان بطور ساده و با امتحان تمام حالتهای ممکن، حل کرد . دو نکتهٔ زیر می‌تواند حجم محاسبه را کم کند :

- بزرگترین کسر ، از بین $\frac{1}{k}$ ، $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$ ، می‌تواند مساوی $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{5}$ باشد .

- کسر $\frac{1}{l}$ وقتی نزدیکترین کسر به $\frac{1}{n}$ (و ضمناً کوچکتر از آن) است که داشته باشیم : $l = n + 1$.

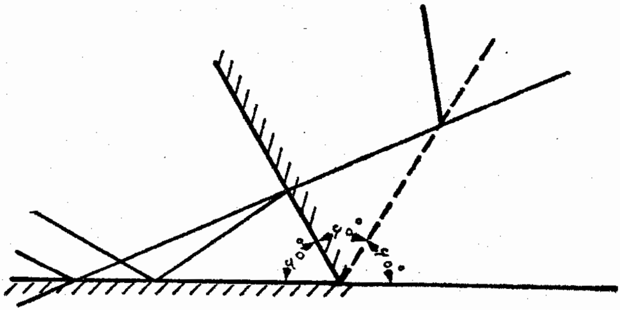
جواب : $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43}$.

قسمت دوم مسأله هم ، شبیه قسمت اول حل می‌شود .

جواب : بهترین تقریب نقصانی ۱ ، چنین است :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۴۳}$$

۱۴۹. از این مطلب استفاده کنید که وقتی نور از یك خط راست، منعکس می‌شود، قرینهٔ شعاع فرود نسبت به خط ، در امتداد مسیر نور بعد از انعکاس ، قرار می‌گیرد .



شکل ۷۳

جواب برای حالت زاویهٔ ۶۰ درجه ، در شکل ۷۳ داده شده است. نور می‌تواند از ضلعهای زاویهٔ ۱ درجه، ۱۸۰ مرتبه منعکس شود.

۱۵۰. از توضیح مسألهٔ قبل استفاده کنید . ثابت کنیدکه اگر a ، b و c ، تعداد انعکاسهای شعاع نور ، از سه ضلع مثلث باشد ، نامساویهای زیر درست است :

$$c-۱\leqslant a+b\leqslant ۳c+۳$$

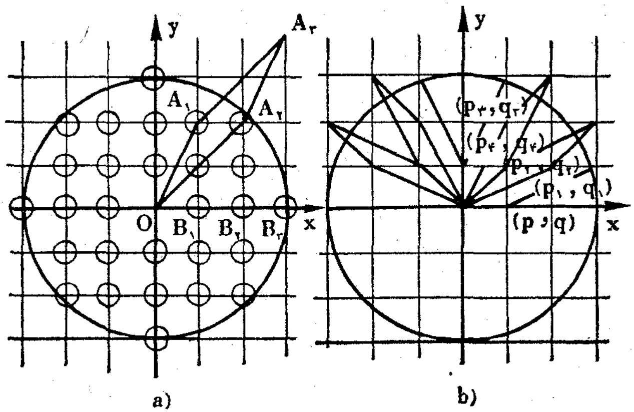
عددهای x و y ، می‌توانند مقادیری را انتخاب کنند کـه سه عدد x ، y و ۴ در نامساویهای فوق صدق کنند .

۱۵۱. ابتدا ثابت کنید ، برای اینکه شیر بتواند به خانهٔ اول بر گــردد ، باید به‌تعداد مساوی به‌راست ، پایین و چپ بالا ، یعنی روی هم $۳n$ حرکت انجام دهد. ولی روی صفحه ۱۰۰ خانه وجود دارد وبنابراین شیر نمی‌تواند از هرخانه ، تنها یکبار عبور کند .

۱۵۲. اگر برای سفید ، هیچ راهی برای بردن یا مساوی کردن ، وجود نداشته باشد، به‌این معنااست که به هرنحوی بازی شود ، همیشه (با بازی صحیح) ، سیاه برنده است ، در چنین صورتی ، سفید می‌تواند دو حرکت اول خود را با اسب ، به صورت $Kg۱-f۳$ و $Kf۳-g۱$ انجام دهد و نوبت بازی را ، در وضع اولیه ، به سیاه واگذار کند .

۱۵۳. در دستگاه مختصاتی که در شکل a-۷۴ نشان داده شده است، مرکز هر درخت با مختصات $(x ، y)$ معین می‌شود ، به نحوی که این مختصات عددهای صحیحی بوده و درنامساوی $x^۲+y^۲ \leqslant s^۲$ صدق می‌کند . هرنقطهٔ با مختصات صحیح را ، که از مبداء مختصات دیده شود ، نقطهٔ ساده ، نام می‌گذاریم . به‌سادگی معلوم می‌شود که نقطهٔ $(p ، q)$ ، تنها وقتی می‌تواند نقطهٔ ساده باشد ، که p و q نسبت به‌هم اول باشند . به لم زیر احتیاج داریم :

لم ۱. اگر عددهای p و q نسبت به‌هم اول باشند، می‌توان عددهای صحیح $u_\circ$ و $v_\circ$ راطوری پیداکردکه داشته باشیم: $pv_\circ - qu_\circ = ۱$.
دراین حالت ، جواب کلی معادلهٔ $pv - qu = ۱$ به صورت :
$u = u_\circ + kp$ و $v = v_\circ + kq$ در می‌آید ، که درآن k عدد دلخواه صحیحی است .



شکل ۷۴

از رابطهٔ $pv-qu=1$ نتیجه می‌شود که u و v نسبت به‌هم اولند. نقطهٔ (u , v) را «نقطهٔ مجاور چپ» نقطهٔ (p , q) می‌نامیم. هر نقطهٔ سادهٔ (p , q) دارای بی‌نهایت نقطهٔ مجاور چپ می‌باشد، ضمناً همهٔ آنها روی یك خط راست و به فاصله‌های مساوی قرار دارند.

روی نقطه‌های (p , q) و (u , v)، متوازی‌الاضلاعی می‌سازیم.

لم ۲. مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی نقطه‌های (p , q) و (u , v) ساخته می‌شود، برابر است با $pv-qu$.

اثبات این لم را هم به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم، می‌توانید از رابطهٔ زیر استفاده کنید:

$$S_{OA_1A_3A_2}=S_{OA_1B_1}+S_{B_1A_1A_3B_3}-S_{OB_2A_2}-$$
$$-S_{B_2A_2A_3B_3}$$

اگر (p , q) و (u , v)، در نقطهٔ «مجاور» باشند، با توجه به لم ۲، مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی آنها ساخته می‌شود، برابر است با واحد. قطر این متوازی‌الاضلاع را به طول d فرض کنید. (از این به بعد هر جا از قطر صحبت می‌کنیم، منظور قطری از متوازی‌الاضلاع است که از مبداء مختصات عبور می‌کند). در این صورت، نقطه‌های (p , q) و (u , v) از این قطر به‌یك فاصله‌اند، و این فاصله برابر است با $\frac{1}{d}$.

حداقل شعاع درخت را، که به‌ازای آن، جنگل «بدون نور» می‌شود، ρ می‌گیریم. باید ثابت کنیم که:

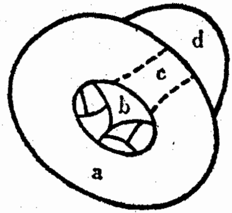
$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{s}$$

A. نقطه‌های $(1 , 0)$ و $(s-1 , 1)$ «مجاورند». قطر متوازی‌الاضلاعی که روی این دو نقطه ساخته می‌شود، برابر است با $\sqrt{s^2+1}$. این قطر ضمن ادامهٔ خود، تنها می‌تواند به‌وسیلهٔ درخت‌های به‌مرکزهای $(1 , 0)$ و $(s-1 , 1)$ متوقف شود، بنابراین باید

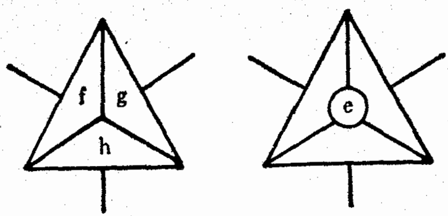
داشته باشیم : $\rho \geqslant \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

B . فرض می‌کنیم (p , q) ، نقطه‌ای از دایرهٔ $x^2+y^2 \leqslant s^2$ و (p , q) ، مرزی‌ترین نقطهٔ «مجاور چپ» آن باشد (و این مطلب به معنای آن است که نقطهٔ $(p+p_1 , q+q_1)$ درخارج دایرهٔ مورد بررسی ما قرار گرفته است). به‌همین ترتیب (p_2 , q_2) را مرزی‌ترین نقطهٔ «مجاور چپ» (P_1 , q_1) ، (p_3 , q_3) را مرزی‌ترین نقطهٔ «مجاور چپ» نقطهٔ (p_2 , q_2) و غیره می‌گیریم. بعد از چند مرحله به‌نقطهٔ (p_n , q_n) می‌رسیم که متوازی‌الاضلاعهایی که روی (p , q) و (p_1 , q_1)، (p_1 , q_1) و (p_2 , q_2)، ...، $(p_{n-1} , q_{n-1})(p_n , q_n)$ ساخته می‌شود، بطور کامل دایرهٔ به‌شعاع ۱ $(x^2+y^2 \leqslant 1)$ راپپوشاند [شکل ۷۴ ـ b را ببینید که درآن $s=3$ و $(p , q)=(1 , 0)$ است] . قطر هریك از این متوازی‌الاضلاعها ، بزرگتراز s و فاصلهٔ هر یك از رأسهایی که روی قطر واقع نیستند ، تا قطر ، کمتر از $\frac{1}{s}$ است . بنابراین ، درختهای به قطر $\frac{1}{s}$ ، که در نقطه‌های (p , q)، (p_1 , q_1)، ...، (p_n , q_n) واقع شده‌اند ، هر شعاع نوری راکه از نقطهٔ صفر حرکت کرده است ، متوقف می‌کند ، یعنی $\rho \leqslant \frac{1}{s}$.

۱۵۴. می‌توان تنها نقشه‌ای را در نظر گرفت که در رأسهای آن بیش از سه کشور به‌هم نرسیده باشند . همچنین می‌توان از نقشه‌ای که شامل کشورهای حلقه‌ای شکل است ، صرفنظر کرد . در حقیقت ، اگر کشور a، دارای قسمت حلقه‌ای (شکل ۷۵) وکشور b درداخل این حلقه باشد ، می‌توان قسمت c را از a جدا و به b وصل‌کردکه مرز آن به‌کشوری مثل d ، که خارج از حلقه است ، مربوط شود. اگر برای رنگ کردن این نقشهٔ جدید ، ۱۲ رنگ کافی باشد ، مسلماً برای نقشهٔ قدیم هم کافی خواهد بود. علاوه براینها، می‌توان فرض



شکل ۷۵



شکل ۷۶

کرد که هرکشور از دو قسمت تشکیل شده باشد . در حقیقت ، اگر کشور e تنها از یك قسمت تشکیل شده باشد ، مسأله را می‌توان به مسألهٔ رنگ آمیزی نقشهٔ دیگری منجر کرد ، که تفاوت آن با نقشهٔ ما، تنها در این است که منطقهٔ کوچکی در اطراف رأسی که کشورهای f و g و h به هم رسیده‌اند ، متعلق به کشور e است (شکل ۷۶) . فرض کنید ، روی نقشه ، به اندازهٔ $f_۴$ کشور داشته باشیم که تعداد رأسهای هرکدام از آنها مساوی ۴ باشد ، همچنین $f_۵$ کشور با پنج رأس و غیره (تعداد کل رأسها در هردو قسمت نقشه، در نظر گرفته شده است) .

تعداد کل کشورها $f = f_۴ + f_۵ + f_۶ + \ldots$ می‌شود . اگر تعداد مرزها را k و تعداد رأسها را l فرض می‌کنیم ، داریم :

$$۲k = ۴f_۴ + ۵f_۵ + ۶f_۶ + \ldots ; \quad ۳l = ۴f_۴ + ۵f_۵ + ۶f_۶ + \ldots$$

یعنی $۲k = ۳l$. «رابطهٔ اولر» در این حالت به این صورت درمی‌آید : $l + ۲f = k + ۲$ ، زیرا تعداد قسمتها مساوی $۲f$ است . دو طرف رابطهٔ اخیر را در ۶ ضرب می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$۶l + ۱۲f = ۶k + ۱۲$ ، یعنی $۱۲ = ۳l + ۱۲$ ،

یا

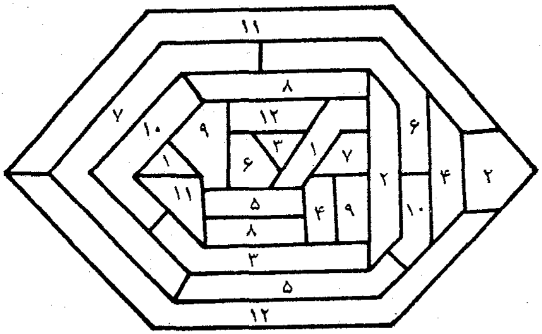
$$۱۲(f_۴ + f_۵ + f_۶ + \ldots) = (۴f_۴ + ۵f_۵ + ۶f_۶ + \ldots) + ۱۲$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$۸f_۴ + ۷f_۵ + \ldots + f_{۱۱} = ۱۲ + f_{۱۳} + f_{۱۴} + \ldots$$

بنابراین ، کشوری مانند a وجود دارد که بیش از ۱۱ رأس ندارد .

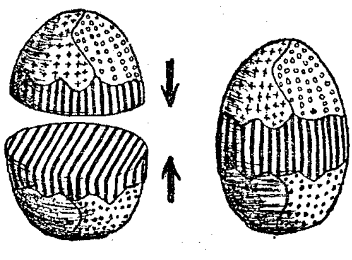
در کنار هر یك از دو قسمتی کـه کشور a را به وجود آورده‌اند ، کشوری وجود دارد ، کـه با قسمت مفروض یك مـرز دارد . هر قسمت کشور a را به کشور هم مرزش، که با آن مرز مشترك دارد، وصل می‌کنیم. نقشهٔ جدیدی بدست می‌آید که روی آن ، از تعداد کشورها ، یکی کم شده است . اگر بتوانیم این نقشهٔ جدید را با ۱۲ رنگ مختلف ، رنگ‌آمیزی کنیم ، برای نقشهٔ قدیم هم ، همین ۱۲ رنگ کافی خواهد بود . اگر این استدلال را ادامه دهیم ، می‌توان به نقشه‌ای رسید که در آن بیش از ۱۲ کشور نباشد. و روشن است که برای رنگ کردن چنین نقشه‌ای، ۱۲ رنگ کافی است. برای اینکه معلوم شود که همیشه ۱۱ رنگ کافی نیست، می‌توان نقشه‌ای از ۱۲ کشور



شکل ۷۷

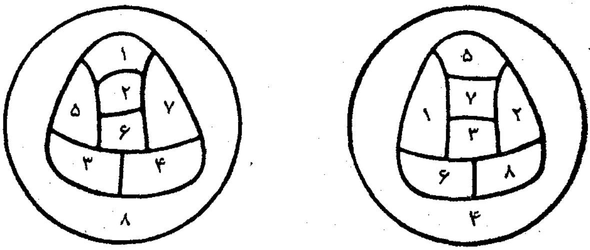
رسم کرد که در آن هریك ازکشورها با ۱۱ کشور دیگر مرز مشترك داشته باشد (شکل ۷۷).

۱۵۵. فرض می‌کنیم کـه نقشهٔ دو سیاره را روی دو کرهٔ مصنوعی، که با نوارهای لاستیکی درست شده است، نشان داده باشیم. این کره را می‌توان تغییرشکل داد، به‌نحوی که هریك ازآنها به نیمکره‌ای تبدیل شوند و



شکل ۷۸

ضمناً دور استوا و روی قاعدهٔ مسطح نیمکره‌ها ، تنها یکی از کشورها ، قرار گرفته باشد . روشن است که در این تغییر شکل ، جای کشورها ، نسبت به‌هم ، تغییری نمی‌کند (شکل ۷۸).
حالا اگر این دونیمکره را ، از طرف قاعده روی هم قرار دهیم، یك کره بدست می‌آید که برای رنگ‌کردن کشورهای مختلف آن، همان شرطهای مسألهٔ ۱۵۴ را خواهیم داشت؛ و بنابراین برای این عمل، ۱۲ رنگ کافی خواهد بود . از شکل ۷۹ دیده می‌شود که هفت



شکل ۷۹

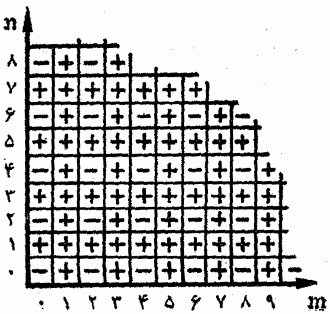
رنگ ممکن است کافی نباشد. در این شکل ۸ کشور، روی دوسیاره، نشان داده شده است که هریك ازآنها ، با هفت کشور دیگر ، مرز مشترك دارند .

۱۵۶. فرض کنید در توده ، n سنگریزه وجود داشته باشد . روشن است‌که اگر n مساوی ۱ ، ۲ یا ۳ باشد، آنکه بازی را شروع می‌کند، برنده است . اگر $n=$ ۴ باشد، آنکه بازی راشروع می‌کند ، به هرترتیبی عمل کند ، برای طرف مقابل ۱ یا ۲ یا ۳ سنگریزه باقی می‌ماند و در هرحال برنده است . وقتی n مساوی ۵ یا ۶ یا ۷ باشد، کسی‌که بازی را شروع می‌کند ، می‌تواند ترتیبی بدهدکه برای طرف مقابل او ، ۴ سنگریزه باقی بماند . به این ترتیب برای ۷ و ۶ و ۵ $=n$، برد با کسی است که بازی را شروع می‌کند . اگر این استدلال را ادامه بدهیم ، معلوم می‌شود که برای ۸ $=n$ ، شروع کنندهٔ بازی خواهد باخت و برای حالتی که n مساوی ۹ ، ۱۰ و ۱۱ باشد، برد با شروع‌کنندهٔ بازی است ، در حالت ۱۲ $=n$ ، شروع کنندهٔ بازی

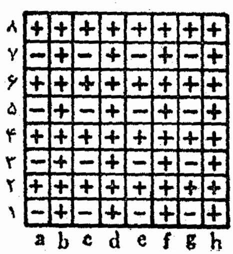
نمی‌تواند ببرد و غیره .

بطور کلی ، بـرای اینکه برد باکسی باشد ، باید در هربازی ترتیبی بدهد کـه تعداد باقیماندهٔ سنگریزه‌ها ، مضربی از ۴ باشد . شروع کنندهٔ بازی وقتی می‌تواند به این ترتیب عمل کند که تعداد اولیهٔ سنگریزه‌ها بر ۴ قابل قسمت نباشد .

۱۵۷• a) اگر شاه در خانهٔ a_1 واقع شود (شکل ۸۰)، شروع کننده، بازی را باخته است . در این خانه ، علامت « — » را قرار می‌دهیم. همهٔ خانه‌هایی راکه از آنها ، می‌شود با یك حرکت، به خانهٔ a_1 رسید، با علامت مثبت، مشخص می‌کنیم. روشن است که این خانه‌ها، برای شروع کنندهٔ بازی، خانه‌های برنده است. اگر حرکتی ازیك خانهٔ A ، شاه را به‌یکی از این خانه‌های برنده برساند، کسی که بازی راشروع می‌کند ، وضع را برای طرف مقابل خود، در حالت برد قرار خواهد داد . به‌همین مناسبت خانه‌های a_3 و c_1 را با علامت منفی مشخص می‌کنیم، که شروع حرکت ازآنها، برای شروع کننده، منجر به‌باخت می‌شود. سپس درهمهٔ خانه‌هایی که ازآنها می‌توان به‌یکی ازخانه‌های منفی رفت ، علامت مثبت قرار می‌دهیم . اگـر این علامتگذاری را ادامه دهیم، به وضع علامتهای مثبت ومنفی، درشکل ۸۰ می‌رسیم. برای اینکه ، شروع کنندهٔ بازی ، برنده شود ، باید در هرحرکت ، شاه را درخانهٔ منفی قرار دهد (یعنی طرف مقابل را، در وضع باخت



شکل ۸۱



شکل ۸۰

قرار دهد) . شروع کنندهٔ بازی ، وقتی می‌تواند چنین وضعی داشته باشد ،که از یك خانهٔ مثبت شروع به‌بازی کند.

b) به جای هرحرکت در بازی سنگریزه‌ها ، می‌توان یك حرکت در صفحهٔ شطرنج، با قانون زیر، انجام داد : اگر یك سنگریزه ، ازتودهٔ اول برمی‌داریم ، شکل را روی صفحهٔ شطرنج ، یك خانه به سمت چپ ببریم، و اگریك سنگریزه ، ازتودهٔ دوم برمی‌داریم ، شکل را روی صفحهٔ شطرنج ، یك خانه به طرف پایین ببریم . روشن است‌که اگر از هرتوده ، یك سنگریزه برداریم، شکل مربوطه ، روی صفحهٔ شطرنج، در جهت قطری به‌طرف پایین و چپ می‌رود. به‌این ترتیب، به‌همان بازی روی صفحهٔ شطرنج ، با شرطهای قسمت a ، می‌رسیم. وضعی که برای آن ، سنگریزه‌ای باقی نمی‌ماند ، متناظر می‌شود با وضعی که شکل، روی صفحهٔ شطرنج، درخانهٔ چپ پایین قرار گیرد. اگر در تودهٔ اول ، m سنگریزه، و درتودهٔ دوم، n سنگریزه، وجود داشته باشد ، به معنای این است که m خانهٔ افقی و n خانهٔ قائم داریم (شکل ۸۱) (روشن است که اگر در یکی از توده‌ها بیش از ۷ سنگریزه باشد، صفحهٔ شطرنجی دارای بیش از ۸ خانهٔ افقی یا قائم خواهد شد) . با قرار دادن علامتهای مثبت ومنفی (مثل حالت a)، به این نتیجه می‌رسیم : شروع کنندهٔ بازی ، وقتی برنده است که لااقل یکی از دو عدد m و n ، فرد باشد . در این صورت ، بازی را باید طوری انجام دهد، که هر بار برای طرف مقابل، در هرتوده تعداد سنگریزه‌ها ، زوج باشد .

۱۵۸. a) ثابت کنیدکه ، B_1C_1 ، قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقهٔ AB_1C_1D ، برابر است با $\frac{1}{2}(a-b)$. از این نتیجه می‌شودکه‌چهارضلعی AB_nC_nD، ذوزنقه‌ای است با قاعدهٔ کوچکتر B_nC_n،که ضمناً برابر است با : $\frac{1}{2}(a-B_{n-1}C_{n-1})$. حالا با روش استقراء ریاضی ثابت کنید :

$$B_nC_n=\frac{a}{3}+\frac{3b-a}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) روشن است که B_nC_n به سمت $\frac{a}{۳}$ میل می‌کند.

c) روشن است کـه همهٔ پاره‌خطهای B_nC_n با هم (وبا BC) ، وقتی برابرند که $a=۳b$ باشد .

۱۵۹. یکی از همین ترازوهای معمولی‌را انتخاب می‌کنیم و سنگ ترازوها را یکی پس از دیگری روی آن قرار می‌دهیم ، به نحوی که قبل از گذاشتن آخرین سنگ، از ۵۰۰ گرم بیشتر نباشد، ولی بعد از گذاشتن آن ، از ۵۰۰ گرم بیشتر شود . چون هیچکـدام از سنگها از ۵۰۰ گرم تجاوز نمی‌کنند . وزن کلی سنگهایی که در ترازو گذاشته‌ایم از یك کیلو گرم بیشتر نیست . طبق فرض مسأله، سنگهای باقی‌مانده از ۵۰۰ گرم تجاوز نمی‌کند . بنابراین وزن کل سنگها هـم از ۱۵۰۰ گرم‌تجاوز نمی‌کند . مثلاً سه‌سنگ ۵۰۰ گرمی با شرطهای مسأله می‌سازد .

۱۶۰. ابتدا به تعریف یك مفهوم مهم ، به‌نام «خط جهانی» می‌پردازیم . فرض کنید ، نقطهٔ A_t ، طبق قانونی ، روی یك صفحه حرکت کند ، این نقطه در لحظهٔ t ، در نقطه‌ای مثل A_t است. اگر روی نیم خط قائم به مبداء A_t ، پاره خطی به طول t ، به طرف بالا جدا کنیم ، نقطهٔ (A_t , t) بدست می‌آید . وقتی که نقطهٔ A_t حرکت کند، نقطهٔ (A_t , t) هم روی یك منحنی فضایی حرکت می‌کند، که «خط‌جهانی» برای حرکت A_t نامیده می‌شود . به‌سادگی ثابت می‌شود، که اگر روی یك صفحه ، حرکت مستقیم‌الخط متشابهی وجود داشته باشد، «خط جهانی» متناظر باآن هم، یك خط راست می‌شود . علاوه‌برآن، دو نقطهٔ متحرك ، تنهـا وقتی به هم می‌رسند ، کـه «خط جهانی» متناظر آنها ، با هم برخورد داشته باشند . با توجه به این دو نکتهٔ ساده ، خودتان اثبات مسأله را تمام کنید .

۱۶۱. تعدادتیمها را n می‌گیریم. ثابت‌کنید‌که n تیم، روی‌هم $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ بـازی بایـد انجام دهند، و بنابـراین تعدادکـل امتیازهـا ، مساوی

$n(n-۱)$ می‌شود . چون سه تیم ردیف اول روی هم ۱۵ امتیاز آورده‌اند، بنابراین باید داشته باشیم $n(n-۱) \geqslant ۱۵$ و از آنجا $n \geqslant ۵$. چون هریك از تیمهای ردیف سوم به‌بعد، بیش از سه امتیاز نیاورده‌اند، بنابراین بایدداشته باشیم: $n(n-۱) \leqslant ۳(n-۲)+۱۲$ و از آنجا : $(n-۲)^۲ \leqslant ۱۰$ و یا $n \leqslant ۵$.

به‌این ترتیب $n=۵$ و $n(n-۱)=۲۰$ می‌شود. دو تیم ردیف‌آخر، روی هم ۱۵ امتیاز دارند ، سه امتیاز متعلق به تیم ردیف چهارم و ۲ امتیاز متعلق به تیم ردیف پنجم است .

۱۶۲. مجموع وزنهای n سنگ ترازو برابراست با:

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

و برای اینکه بتوان آنها را به‌سه‌قسمت باوزنهای مساوی، تقسیم کرد، لازم است که یا n یا $n+۱$ بر۳ قابل قسمت باشد . ثابت کنید که این شرط ، برای مقادیر $n>۳$ ، کافی هم می‌باشد . طرح استدلال را می‌توان به این ترتیب ریخت :

برای حالتهای $n=۵$ ، $n=۸$ و $n=۹$ می‌توان به طور مستقیم ، آزمایش کرد . حالت کلی هم منجر به یکـی از این حالتهای خاص می‌شود، به شرطی‌که توجه‌کنیم که ۶عدد طبیعی متوالی را می‌توان به ۳ قسمت تقسیم کرد ، به نحوی که در هرقسمت ، ۲ عدد ، با مجموعهای مساوی ، وجود داشته باشد .

۱۶۳. از نقطهٔ P ، خطی موازی یکی از ضلعهای زاویه رسم‌کنید ، تا ضلع دیگر را در نقطهٔ Q قطع کند و به‌کمك مثلثهای متشابه ، ثابت کنید که مجموع $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}$ برابراست با $\frac{۱}{PQ}$.

با استفادهٔ از این حکم می‌توان ، رابطهٔ ساده‌ای برای محاسبهٔ β_c، نیمساز زاویهٔ C از مثلث ABC به‌ضلعهای $AC=b$ و $BC=a$ به دست آورد :

$$\beta_c = \frac{2abc\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

۱۶۴. رأسهای ۱۷ ضلعی را شماره‌گذاری می‌کنیم. یکی از چند ضلعیهای تقسیم را در نظر مـی‌گیریم و تعداد ضلعهای آنرا ، n می‌گیریم . ضلعهای این چندضلعی راادامه می‌دهیم؛ امتداد این ضلعها ازرأسهای ۱۷ضلعی می‌گذرند، فرض می‌کنیم n_i تعداد خطهایی باشدکه از رأس iام عبور می‌کند. روشن است که

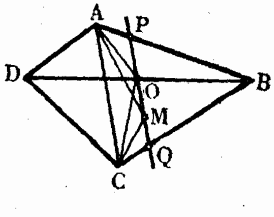
$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{17} = 2n$$

چون $n_i \leqslant 2$ ، پس $2n \leqslant 34$ و $n \leqslant 17$.

حالا فرض می‌کنیم $n = 17$. مثلاً یك ۱۷ ضلعی منتظم را در نظر می‌گیریم، که در دایره‌ای به‌مرکز O محاط شده باشد. تمام قطرهای این ۱۷ ضلعی را رسم می‌کنیم و آنرا به اندازهٔ $\frac{360}{17}$ درجـه دور نقطهٔ O دوران می‌دهیم . بعداز این دوران ، چندضلعی تقسیم ، که شامل نقطهٔ O است ، برخودش منطبق می‌شود و بنابراین یك ۱۷ ضلعی منتظم است .

۱۶۵. می‌توان ، در گروه اول ، عددهایی را قرار داد کـه تعداد رقمهای مساوی ۱ ، درآنها عددی فرد شود، و درگروه دوم بقیهٔ عددها را .

۱۶۶. نقطهٔ O (شکل ۸۲) ، وسط قطر DB ، یکی از نقطه‌های مکان است (زیرا دو مثلث DAO و AOB هم‌ارزند، همچنین دومثلث DOC و COBهم مساحتهای مساوی‌دارند).

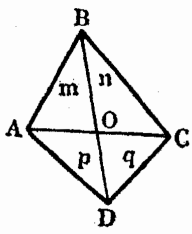


شکل ۸۲

از نقطهٔ O ، پاره خط PQ را موازی AC رسم مـی‌کنیم . چون مثلثهای با قاعدهٔ AC و رأس واقع بر PQ ، مساحتهای مساوی دارند؛ این پـاره‌خط ، مکان هندسی مطلوب خواهد بـود . ثابت کنید که هیچ

نقطه‌ای، خارج از این پاره‌خط ، نمی‌تواند جزو مکان باشد .
روشن است ، که اگر منظور ، پیداکردن مکان هندسی نقطه‌هایی از داخل چهارضلعی محدب باشد ، به نحوی که اگر ازآنجا به دو رأس دلخواه روبرو وصل کنیم، دو چهارضلعی هم‌ارز بدست آید، به‌عنوان جواب دو پاره خط بدست می‌آید : یکی پاره خطی که از وسط قطر BD، موازی قطر AC رسم شود و دیگری پاره‌خطی که از وسط قطر AC ، موازی قطر BD رسم شود .

۱۶۷. ابتدا ثابت کنید که اگر سه سکه داشته باشیم که یکی یا دوتا از آنها تقلبی باشد، تنها با یک‌بار وزن کردن می‌توان، سکه‌ها را از هم جدا کرد . همچنین ثابت کنید که اگر بین چهار سکه، دو سکهٔ تقلبی وجود داشته باشد، با دو بار وزن کردن، می‌توان آنها را از هم جدا کرد. با استفاده از این مطلب، ثابت کنید ، برای اینکه بتوانیم دو سکهٔ تقلبی را از بین ۷ سکه جدا کنیم ، سه‌بار وزن کردن کافی‌است (در اولین وزن کردن، سه سکه را در یک کفه و سه سکه را در کفهٔ دیگر ترازو بگذارید) . بالاخره با استدلالی ، شبیه مسألهٔ ۲ ، ثابت کنید که دوبار وزن کردن ، ممکن است کافی نباشد .


شکل ۸۳

۱۶۸. عدد نمایندهٔ مساحتها را به m، n، p و q نشان می‌دهیم (شکل ۸۳). دومثلث AOB و COB دارای یک ارتفاع‌اند و بنابراین مساحتهای آنها بـه نسبت قاعده‌های آنها است : $\frac{AO}{OC}=\frac{m}{n}$. به همین ترتیب به دست می‌آید : $\frac{AO}{OC}=\frac{p}{q}$ و از آنجا : $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$ و یا $mq=pn$ و در نتیجه :

$$m.n.p.q=(pn)^2$$

۱۶۹. وضع بازی را با تعداد چوب کبریتهایی که در قوطی باقی مانده و

زوج یا فردبودن تعداد چوب‌کبریتهای بازی‌کنی که نوبت حرکت با اوست، شرح می‌دهیم. جدولی را در نظر می‌گیریم (شکل ۸۴)، که از $(2n+2) \times 2$ خانه تشکیل شده باشد. وضع بازی را با قراردادن یك مهره درجدول نشان می‌دهیم، به این‌ترتیب که مهره را

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	
زوج	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	+
فرد	−	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+	+

شکل ۸۴

در یکی ازدوخانهٔ عمودی، که روی عدد مساوی تعدادچوب‌کبریتهای باقیمانده قرار گرفته‌اند، می‌گذاریم، اگر تعداد چوب کبریتهای کسی که نوبت‌بازی با اوست، زوج باشد، درخانهٔ ردیف زوج والا درخانهٔ‌ردیف فرد. مثلاً اگر مهره را درخانهٔ «۱۱؛ فرد» بگذاریم، به این معناست که ۱۱ چوب کبریت در قوطی مانده است و تعداد کبریتهای کسی که نوبت بازی با اوست، عددی فرد است. از آنجا که تعداد کل چوب‌کبریتها هم فرد است، طرف مقابل هم به‌تعداد فرد، چوب‌کبریت در اختیار دارد، وبنابراین به‌هرشکلی که حرکت انجام شود، مهره در همان ردیف فرد باقی می‌ماند. به‌طور کلی، اگر مهره روی یکی از دوخانهٔ عمودی بالای شمارهٔ فرد قرارگرفته باشد، بعد از یك حرکت در همان ردیف افقی باقی می‌ماند؛ ولی اگرمهره روی یکی از دوخانهٔ عمودی بالای شمارهٔ زوج واقع باشد، بعد از یك حرکت، ردیف افقی خود را عوض می‌کند (یعنی از زوج به فرد یا از فرد به زوج می‌رود). طبق شرط مسأله، بازی‌کنی که برای‌او، مهره روی خانه‌های عمودی بالای صفرقرار گرفته است، به شرطی برنده می‌شود که بعداز حرکت، مهره در زاویهٔ پایین واقع شود، و در غیر این‌صورت رقیب او برنده خواهد بود.

a) اگر علامتهای مثبت ومنفی را روی جدول، شبیه مسألهٔ ۱۵۷، قرار دهیم، معلوم می‌شود که خانه‌های به صورت «$6k-1$؛ فرد»، «$6k$؛ فرد»، «$6k+1$؛ زوج» (k عددی است طبیعی)، بازی را

می‌بازد و بقیهٔ خانه‌ها ، بازی را می‌برد .

b) با همین روش، می‌توان جواب را برای حالت کلی‌هم بدست‌آورد.

۱۷۰. طبق فرض مسأله ، تنهـا جای دو مهره‌ای را می‌توان با هم عوض کرد که یـا هردو در ردیفهای زوج ، و یا هردو در ردیفهای فرد، باشند. آیا به این ترتیب می‌توان ترتیبی داد که اولین‌مهره ، جای خود را با صدمین مهره عوض کند ؟

*

۱۷۱. ۹ جواب اول فوری بدست می‌آید :

۱۱/۱/۱	۶۶/۶/۶
۲۲/۲/۲	۷۷/۷/۷
۳۳/۳/۳	۸۸/۸/۸
۴۴/۴/۴	۹۹/۹/۹
۵۵/۵/۵	

علاوه برآنها ، این چهار جواب هم وجود دارد :

۱۱/۱/۱۱

۱۱/۱۱/۱

۱۱/۱۱/۱۱

۲۲/۲/۲۲

بنابراین ، در جریان یك سده ، روی هم ۱۳ بار ، این وضع پیش می‌آید .

۱۷۲. ... ساعت ۶ عصر؛ قطار از A به B می‌رود وبقیهٔ راه را درشب طی می‌کند . بنابراین قطاری که از B به A می‌آید، باید این قسمت راه را در روز طی‌کند . از اینجا نتیجه می‌شود که قطارها باید در۶ صبح و ۶ عصر به هم برسند . به این ترتیب : هـرچند ساعت که قطار دیرتر از ۶ صبح از A خارج شود ، قطار دیگر ، همان قدر ساعت زودتر از۶ صبح به A برمی‌گردد (یا هرچند ساعت‌که قطار زودتر از ۶ عصر به B برسد ، قطار دیگر همان قدر ساعت دیرتر از ۶ عصر بـاید از B خارج شود) . در این صورت ، از هرنقطه‌ای بین A و

B ، که قطار در یك جهت هنگام روز عبور کند ، موقع برگشتن ، هنگام شب از همان نقطه خواهد گذشت .

۱۷۳. اگر همهٔ تراورسها، کاج بود، وزن کلی آنها قریب ۲۷۰ کیلوگرم می‌شد . اگر همهٔ آنها بلوط بود ، وزن کلی آنها تقریباً مساوی ۴۵۰ کیلوگرم می‌شد .

اگرهم تعداد تراورسهای کاج و بلوط مساوی بود، وزن تقریبی کل آنها مساوی نصف مجموع ۲۷۰ و ۴۵۰ ، یعنی ۳۶۰ کیلوگرم می‌شد، که قریب ۲۴ کیلوگرم از وزن حقیقی کمتر است . ظاهراً باید یك تراورس کاج راکم‌کرد و به جای آن یك تراورس بلوط گذاشت. در این صورت ۴ تراورس کاج و ۶ تراورس بلوط بدست می‌آید و کافی است نتیجه را آزمایش‌کنیم :

$$۴ \times ۲۷\frac{۴}{۵} = ۱۰۸ + ۳\frac{۱}{۵} = ۱۱۱\frac{۱}{۵}$$

$$۶ \times ۴۵\frac{۱}{۲} = ۲۷۰ + ۳ = \underline{۲۷۳}$$

$$۳۸۴\frac{۱}{۵} \quad \text{(کیلوگرم)}$$

و می‌بینیم که نتیجه درست است .

البته ممکن بود که نتیجه درست نباشد ، در این صورت با توجه به نتیجه‌ای که بدست می‌آمد ، فرض را تصحیح می‌کردیم[۱].

۱۷۴. محاسبه ، بدون توضیح ، روشن است :

---

۱) اگر در این مسأله ، تعداد تراورسها هم داده نمی‌شد ، باز مسأله قابل حل بود . از وزن کل($۳۸۴\frac{۱}{۵}$ کیلوگرم) معلوم است که اولا تعداد تراورسهای بلوط باید زوج باشد (درغیر این صورت وزن کل کسری از ۱۰ می‌شود نه کسری از ۵) ، ثانیاً تعداد تراورسهای کاج باید عددی به صورت $5k-1$ باشد (تا وقتی که در $\frac{۴}{۵}$ ضرب می‌شود ، بعد از خارج کردن عدد صحیح ، $\frac{۱}{۵}$ بدست آید)، که دراین صورت تنها جوابهای ۴ و ۹ قابل آزمایش است، زیرا وزن ۱۴ تراورس کاج ، از وزن کلی‌که به‌ما داده‌اند ، زیادتر می‌شود . اگر دو عدد ۴ و ۹ را برای تعداد تراورسهای کاج آزمایش‌کنیم، می‌بینیم که تنها جواب ۴ قابل قبول است و در این صورت تعداد تراورسهای بلوط هم مساوی ۶ می‌شود . «مترجم»

$$\begin{array}{r} ۵ \times (۱۰ - ۱) = ۴۵ \\ ۱۰ \times (۵ - ۱) = ۴۰ \\ \hline ۸۵ \end{array} +$$

$$۸۵ + ۱ = ۸۶$$

بنابراین، پستچی روی هم برای بردن نامه به طبقهٔ هشتاد و ششم می‌رود.

این مطلب جالب است، که دربسیاری جاها (و منجمله فرانسویها)، طبقهٔ دوم را طبقهٔ اول به حساب مـی‌آورند (طبقهٔ اول را هم‌کف می‌گویند). در چنین صورتی، پستچی باید به طبقهٔ صد ویکم برود (حساب کنید!).

۱۷۵. بزرگها ۲۰٪ بیشتر از بچه‌ها هستند؛ بنابراین برای هر ۵ بچه، ۶ = ۵ × ۱/۲ بزرگ وجـود دارد؛ در نتیجه تعداد کل افراد بر ۶ + ۵ یعنی ۱۱ قابل قسمت است.

از هر۱۳ بچه، ۷ نفر تحصیل‌می‌کنند، بنابراین تعداد بچه‌ها بر ۱۳ قابل قسمت است. چون تعداد بچه‌ها بر۱۳ قابل قسمت است، تعداد کل افراد هم که $\frac{۱۱}{۵}$ تعداد بچه‌ها هستند، بر۱۳ قابل قسمت‌انـد (عددهای ۱۳ و ۵، همچنین عددهای ۱۳ و ۷ نسبت به‌هم اولند).

از اینجا نتیجه‌می‌شودکه تعداد تمام افراد بر۱۴۳ = ۱۳ × ۱۱ قابل قسمت است.

اگر ۱۷ نفر به طبقه‌های اول اضافه و ۱۵ نفـر از طبقه‌های چهارم کم شود، تعداد کل افراد به‌اندازهٔ ۲ = ۱۵ − ۱۷ نفر زیاد می‌شود و در آن حال باید مضربی از ۴ باشد؛ بنابـراین تعداد واقعی افراد بر ۲ قابل قسمت است، ولی بر۴ قابل قسمت نیست (عدد ۱۱، که در صورت مسأله داده شده است، مورد استفاده‌ای ندارد).

اگرتعدادافرادی‌راکه درساختمان A زندگی‌می‌کنند، به A نشان‌دهیم، درساختمان دوم $۳۹ - A$ نفرودرساختمان‌سوم $۷۷ + A$ نفرساکن‌خواهند بود، بنابراین تعداد کل افراد این واحد مسکونی چنین می‌شود:

$$A+(A-۳۹)+(A+۷۷)=۳A+۳۸$$

یعنی این تعداد بر ۳ قابل قسمت نیست .

تعداد، کل افراد ، از نصف ۱۴۰۰ ، یعنی ۷۰۰ ، کمتر است .

به این ترتیب، تعدادکل افراد این واحد مسکونی مساوی ۲×۱۴۳ یعنی ۲۸۶ نفر است .

۳×۱۴۳ قابل قبول نیست ، زیرا تعداد افراد بر ۳ قابل قسمت نیست .

۴×۱۴۳ قابل قبول نیست ، زیرا تعداد افراد بر ۴ قابل قسمت نیست .

۵×۱۴۳ قابل قبول نیست، زیرا ۵×۱۴۳ مساوی ۷۱۵ می‌شود، که از ۷۰۰ بیشتر است .

۱۷۶. باید تعداد عددهای پنج رقمی را پیدا کنیم ، که در هریك از آنها یك ، یا دو، یا سه، یا چهار ، و بالاخره پنج رقم مساوی ۵، وجود داشته باشد. تعداد عددهای پنج‌رقمی هریك ازاین‌مجموعه‌ها را پیدا می‌کنیم . عددهای هریك از این مجموعه‌ها ، ممکن است با ۵ رقم شروع شوند و یا با یکی ازهشت رقم دیگر ؛ به‌این ترتیب می‌توان هریك از این مجموعه‌ها را به دو زیر مجموعه تقسیم کرد.

فرض می‌کنیم: α نمایندهٔ یکی از نه رقم ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶، ۷ ، ۸ یا ۹ و β نمایندهٔ یکی از ۸ رقم ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۶ ، ۷ ، ۸ یا ۹ باشد .

I. مجموعهٔ اول : عددهای پنج رقمی که تنها شامل یك رقم مساوی ۵ هستند . زیر مجموعه‌های مورد نظر این مجموعه چنین‌اند :

رقم اول ۵ است صورت این‌عددها و تعداد آنهاچنین‌می‌شود:	رقم اول ۵ نیست صورت این عددها و تعداد آنها چنین می‌شود:
$۵\alpha\alpha\alpha\alpha$ $۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۶۵۶۱$	$\left.\begin{matrix}\beta\alpha\alpha\alpha۵\\ \beta\alpha\alpha۵\alpha\\ \beta\alpha۵\alpha\alpha\\ \beta۵\alpha\alpha\alpha\end{matrix}\right\}$ $۴ \times ۸ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۲۳۳۲۸$

II. مجموعهٔ دوم : عددهای پنج رقمی که شامل دو رقم مساوی ۵ هستند . دو زیر مجموعهٔ مورد نظر این مجموعه ، چنین است :

رقم اول ۵ است

صورت این عددها وتعداد آنها :

۵ααα۵
۵αα۵α
۵α۵αα
۵۵ααα

۴ × ۹ × ۹ × ۹ = ۲۹۱۶

رقم اول ۵ نیست

صورت این عددها وتعداد آنها :

βαα۵۵
βα۵α۵
βα۵۵α
β۵αα۵
β۵α۵α
β۵۵αα

۶ × ۸ × ۹ × ۹ = ۳۸۸۸

III. مجموعهٔ سوم ...، ولی این روش محاسبه خیلی مفصل شد ، آیا نمی‌شود راه ساده‌تری برای حل این مسأله پیدا کرد ؟

این مسأله را می‌توان خیلی سریع‌تر و ساده‌تر حل کرد ، به‌شرطی که قبلاً مسألهٔ دیگری را حل کنیم : «چند عدد پنج رقمی وجود دارد، که درهیچکدام ازآنها، حتی یك رقم مساوی ۵ وجود نداشته باشد؟». این عدد به صورت βαααα است . تعداد این عددها برابر است با ۸ × ۹^۴ = ۵۲۴۸۸ . بقیهٔ عددهای پنج رقمی ، شامل لااقل یك رقم مساوی ۵ هستند . تعداد کل عددهای پنج رقمی مساوی ۹۰۰۰۰ است و بنابراین تعداد عددهای پنج رقمی که لااقل یکی از رقمهای آنها ، مساوی ۵ باشد ، چنین می‌شود :

۹۰۰۰۰ − ۵۲۴۸۸ = ۳۷۵۱۲

یادآور می‌شویم ، که تعداد عددهای پنج رقمی شامل لااقل یك رقم مساوی ۱ ، یا یك رقم مساوی ۲و ... باشد ، نیز به همین اندازه می‌شود .

۱۷۷. *a*) قبلاً یادآورمی‌شویم، بزرگترین عددی که بافرض مسأله می‌سازد، عبارت است از ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ . این تنها عدد نه رقمی است که در آن ، هر رقم بزرگتر از رقم قبل خودش می‌باشد . بقیهٔ عددهای از

این نوع را می‌توان از همین عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ ، با حذف یك ، دو، ... ، یا هفت رقم‌آن بدست آورد (روشن است که دو ، کمترین تعداد رقمهای عددی است که می‌تواند شرط‌مسأله در مورد آن معنا داشته باشد .)

به این‌ترتیب برای تعیین تعداد عددهای n رقمی که با شرط مسأله تطبیق کند ، باید برای هرعدد صحیح n $(۲ \leqslant n \leqslant ۹)$ ، $۹-n$ رقم ازعدد نه‌رقمی حذف‌کرد ، که با $C_۹^{۹-n}$ طریق ممکن است :

$C_۹^{۹-n}$	$۹-n$	n
۱	۰	۹
۹	۱	۸
۳۶	۲	۷
۸۴	۳	۶
۱۲۶	۴	۵
۱۲۶	۵	۴
۸۴	۶	۳
۳۶	۷	۲
۵۰۲	رویهم	

با توجه به رابطهٔ $C_n^m = C_n^{n-m}$ ، می‌توان محاسبه را ساده‌تر کرد، به نحوی که نتیجهٔ مورد نظر را از مجموع زیر بدست‌آورد :

$$C_۹^۰ + C_۹^۱ + ۲C_۹^۲ + ۲C_۹^۳ + ۲C_۹^۴ = ۵۰۲$$

b) بزرگترین عددی که با شرط مسأله مـی‌سازد ، عبارت است از ۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ . بنابراین در اینجا داریم :

$$۲ \leqslant n \leqslant ۱۰$$

n	$۱۰-n$	$C_{۱۰}^{۱۰-n}$
۱۰	۰	۱
۹	۱	۱۰
۸	۲	۴۵
۷	۳	۱۴۴
۶	۴	۲۱۰
۵	۵	۲۵۲
۴	۶	۲۱۰
۳	۷	۱۴۴
۲	۷	۴۵
	رویهم	۱۰۶۱

$$C_{۱۰}^{۰}+C_{۱۰}^{۱}+۲C_{۱۰}^{۲}+۲C_{۱۰}^{۳}+۲C_{۱۰}^{۴}+C_{۱۰}^{۵}=۱۰۶۱$$

۱۷۸. می‌دانیم که مقدار عدد π در دستگاه عددشماری به مبنای ۱۰ ، به کسر سادهٔ $\frac{۲۲}{۷}$ بسیار نزدیک است . ولی داریم: $۲۲=۳\times۷+۱$.

بنابراین ، عدد π در دستگاه عددشماری به مبنای ۷ به صورت ۳/۱ نوشته می‌شود .

حالا روشن کنید که این عدد با عدد ۳/۱۴ (در مبنای ۱۰) ، چقدر کم اختلاف دارد؟

۱۷۹. ابتدا ، بانك و پستخانه را ، يك نقطه به حساب می‌آوریم . در این صورت تعداد مسیرها برابر است با تعداد تبدیلهای ۴ = ۱ − ۵ عنصر :

$$P=۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$$

و چون در هریك از این مسیرها ، می‌توان به دو صورت عمل کرد (اول به پستخانه یا اول به بانك)، باید $۴۸=۲\times۲۴$ نوع را باهم مقایسه کنیم .

۱۸۰. راه حل نیوتون چنین است : « برای اینکه به پرسش مسأله پاسخ بدهیم. بایدآنچه‌راکه مسأله داده است ، روشن و بیان کنیم .

به زبان عادی	به‌زبان جبری
سرمایه‌ای که تاجر داشته است .	x
از این سرمـایه ، در سال اول ۱۰۰ فونت برای‌مخارج‌خودبرمی‌دارد	$x - ۱۰۰$
یك‌سوم آنچه‌که می‌ماند، به سرمایه اضافه می‌کند	$x - ۱۰۰ + \frac{x - ۱۰۰}{۳} = \frac{۴x - ۴۰۰}{۳}$
در سال دوم ، دوباره ۱۰۰ فونت خرج‌می‌کند	$\frac{۴x - ۴۰۰}{۳} - ۱۰۰ = \frac{۴x - ۷۰۰}{۳}$
به آنچه که می‌ماند یك سوم آنرا اضافه می‌کند	$\frac{۴x - ۷۰۰}{۳} + \frac{۴x - ۷۰۰}{۹} = \frac{۱۶x - ۲۸۰۰}{۹}$
در سال سوم ، دوباره ۱۰۰فونت خرج می‌کند	$\frac{۱۶x - ۲۸۰۰}{۹} - ۱۰۰ = \frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۹}$
به‌باقیماندهٔ‌پولش‌یك‌سوم آنرا اضافه می‌کند	$\frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۹} + \frac{۱۶x - ۳۷۰۰}{۲۷} = \frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷}$
در این‌موقع، سرمایه‌اش دوبرابر سرمایهٔ اولیه می‌شود	$\frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷} = ۲x$

به این ترتیب ، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\frac{۶۴x - ۱۴۸۰۰}{۲۷} = ۲x$$

که با حل آن ، مقدار X بدست می‌آید.

با ضرب معادله در ۲۷ ، بدست می‌آید :

$$۶۴x - ۱۴۸۰۰ = ۵۴x$$

از دو طرف معادله ، $۵۴x$ کم می‌کنیم ، می‌شود ،

$$۱۰x - ۱۴۸۰۰ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۱۰x = ۱۴۸۰۰$$

بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم ، پیدا می‌شود : $x = ۱۴۸۰$. به این ترتیب سرمایهٔ اولیهٔ تاجر مساوی ۱۴۸۰فونت بوده است .»

واین هم راه‌حلی دیگر:

اگراین تاجر، از سرمایهٔ خود خرج نمی‌کرد و هرسال یك سوم‌آنچه داشت ، به سرمایه‌اش اضافه می‌شد ، در آخر سال $\frac{۴}{۳}$ سرمـایهٔ اولیه‌اش ، پول داشت . فرض کنید، سرمایهٔ اولیهٔ او x فونت باشد، در این صورت در آخرسال سوم ، باید روی هم این‌قدر داشته باشد:

$$\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۳} x = \frac{۶۴}{۲۷} x = ۲\frac{۱۰}{۲۷} x$$

ولی طبق فرض مسأله ، او در آخر سال ، تنها دو برابر سرمایه‌اش پول دارد ، که اختلاف آنها چنین می‌شود :

$$۲\frac{۱۰}{۲۷} x - ۲x = \frac{۱۰}{۲۷} x$$

از طرف دیگر در آخرسال اول، نه‌تنها۱۰۰ فونت خرج‌کرده است ، بلکه $\frac{۱}{۳}$ این ۱۰۰ فونت هم به سرمایه‌اش اضافه نشده است ، یعنی روی هم $۱۰۰ \times \frac{۴}{۳}$ فونت ، در محاسبهٔ بالا ، زیاد به حساب آمده است .

به‌همین ترتیب درآخرسال دوم $۱۰۰ \times \frac{۴}{۳} \times \frac{۴}{۳}$ فونت و در آخر

سال سوم $100 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}$ فونت زیادتر به‌حساب آورده‌ایم.

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{3} \times 100 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 100 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times 100 = \frac{10}{27}x$$

یا

$$\frac{4}{3}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right) \times 100 = \frac{10}{27}x$$

$$\frac{4}{27} \times 37 \times 100 = \frac{10}{27}x$$

$$x = \frac{4 + 37 \times 100}{10} = 1480$$

۱۸۱. هرسه آلیاژ از یک‌نوع هستند. (نسبت نقره و طلا، در هرسه، یکی است.)

۱۸۲. مسأله را می‌توان در ذهن حل کرد. کل پولی که مسافرها پرداخته‌اند، برابر است با $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ریال؛ بنابراین، فاصله‌ای که تاکسی طی کرده است برابر است با

$$300(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 10) \quad \text{(متر)}$$

۱۸۳. زمان برخورد دو قایق، ارتباطی به سرعت جریان آب ندارد؛ بنابراین، اگر سرعت جریان آب ۳ متر در ثانیه هم باشد، بازهم دو قایق در ساعت ۱۶ و ۴۵ دقیقه به هم می‌رسند.

جای برخورد دوقایق، با تغییر سرعت آب رودخانه تغییر می‌کند.

قایقی که از A حرکت می‌کند، سرعتی مساوی $19/2 = 12 + \frac{2 \times 3600}{100}$

کیلومتر درساعت دارد و بنابراین ۱۶ کیلومتر را در $\frac{16}{19/2} = \frac{5}{6}$ ساعت طی کرده است.

باردوم، این قایق تالحظهٔ ملاقات قایق‌دوم، به‌اندازهٔ همین $\frac{5}{6}$ ساعت

در راه‌بوده‌است، ولی سرعتی مساوی $22/8 = 12 + \frac{3 \times 3600}{100}$

کیلومتر درساعت داشته است و بنابراین به‌اندازهٔ $۱۹ = ۲۲/۸ \times \frac{۵}{۶}$ کیلومتر طی کرده است. یعنی، وقتی که سرعت جریان آب ۳ متر در ثانیه باشد، دو قایق در ۱۹ کیلو متری A یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

همانطور که دیده می‌شود، برای حل مسأله، احتیاجی به سرعت قایق دوم نیست. ولی با دردست داشتن سرعت قایق دوم، می‌توان، فاصلهٔ C را تا B بدست‌آورد، طبق‌حل قسمت اول، لحظهٔ ملاقات، $\frac{۵}{۶}$ ساعت، بعد از شروع حرکت دو قایق می‌باشد و دراین مدت، قایق دوم‌به‌اندازهٔ $۹ = ۱۰/۸ \times \frac{۵}{۶}$ کیلومتر راه، رفته است. بنابراین، ملاقات در ۹ کیلومتری B انجام می‌شود و ضمناً فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B هم مساوی $۲۵ = ۹ + ۱۶$ کیلومتر است (البته، قسمت اخیر را متکی براین فرض گرفتیم که دوقایق، یکی از A به‌طرف B ودیگری از B به طرف A، در یك زمان حرکت کرده باشند).

۱۸۴. در این مسأله، تنها دستگاه «سنگ ـ سنگ» مورد مطالعه است و وضع آنها نسبت به‌هم سنجیده می‌شود (نه نسبت به زمین)؛ بنابراین، مقدار شتاب ثقل و یا اصلاً وجود یا عدم وجود آن، برای حل مسأله بی‌تفاوت‌است. به‌این‌ترتیب، فاصلهٔ بین دو سنگ‌را h سانتیمتر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که یکی از آنها با سرعت v_0 سانتیمتر در ثانیه به طرف دیگری حرکت می‌کند. روشن است که بعداز $t = \frac{h}{v_0}$ ثانیه به آن می‌رسد.

ولی اگر بخواهیم، جای برخورد دو سنگ را پیدا کنیم، به تمام دستگاه مفروض احتیاج داریم؛ اگر شتاب دستگاه را g سانتیمتر بر ثانیه ثانیه، بگیریم، کافی است جای برخورد را با محاسبهٔ فاصله‌ای که سنگ آزاد در t ثانیه طی می‌کند، بدست آوریم، که برابراست با $\frac{۱}{۲}gt^۲$. بنابراین دوسنگ در ارتفاع $h - \frac{۱}{۲}gt^۲$ به‌هم‌می‌رسند.

این مسألـه ، اساساً شبیه مسألهٔ حرکت در رودخانه (مسألهٔ ۱۸۳) است ،که درآنجا هم دستگاه بطور متشابه جابجا می‌شود .

۱۸۵. در این مسأله هم ، سرعت جریان آب (اگـر جریانی وجود داشته باشد)، هیچ نقشی ندارد. از لحظه‌ای که جعبه به آب انداخته شد، کشتی ازآن دور شده است. ازساعت ۱۳ و ۳۰ دقیقه تا ساعت ۱۴ و ۴۵ دقیقه ، یعنی ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه طول‌کشید تا کشتی به جعبه برخورد. بنابراین، درلحظه‌ای‌که‌کشتی برگشت، همین ۱ ساعت و۱۵ دقیقه ازجعبه دور شده بود. به‌این ترتیب جعبه ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه قبل از ساعت ۱۳ و ۳۰ دقیقه ، یعنی ساعت ۱۲ و ۱۵ دقیقه به‌آب انداخته شده بود. و در این لحظه، از سه نفری‌که مورد ظن بودند، تنها خانم براون می‌توانست جعبه را به آب انداخته باشد.

۱۸۶. فـرض می‌کنیم : زمان حرکت در فـاصلهٔ AC ، مساوی t_A دقیقه و زمان حرکت در فاصلهٔ CB ، مساوی t_B دقیقه باشد. دراین صورت، زمان حرکت از A به B (یا از B به A) ، مساوی t_A+t_B دقیقه و زمان لازم برای یك رفت (یا برگشت)،که آنرا نیم دور می‌نامیم، مساوی $t=t_A+t_B+3$ دقیقه می‌شود .

اتوبوس از کنار نقطهٔ C به طرف B در ساعت ۹و ۸ دقیقه و یك‌بار دیگر در ساعت ۱۴ و ۴ دقیقه می‌گذرد؛ بنابراین در ۲۹۶ دقیقه (از ۹ و ۸دقیقه تا ۱۴و۴ دقیقه)، چند دور کامل زده است . اگر تعداد دورهای کامل را x بگیریم ، $2x$ مرتبه نیم دور (رفت یا برگشت) می‌شود و در نتیجه

$$2xt=296 \implies t=\frac{296}{2x}=\frac{148}{x}$$

اتوبوس ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه از Aخارج شده است وسپس درساعت ۱۳ و ۱۶ دقیقه بـه B رسیده است . بنابراین ، اگر به ۱۰۸ دقیقه (از ۱۱ و ۲۸ دقیقه تا ۱۳ و ۱۶ دقیقه) ، ۳ دقیقه‌ای راکه باید در B توقف کند ، اضافه کنیم، معلوم می‌شود که ۱۱۱ دقیقه ، زمان لازم برای تعداد فردی از نیم دورها است ، یعنی:

$$(۲y+۱)t=۱۱۱ \implies t=\frac{۱۱۱}{۲y+۱}$$

و از آنجا به این رابطه ، بین x و y می‌رسیم :

$$\frac{۱۴۸}{x}=\frac{۱۱۱}{۲y+۱} \implies ۳x=۸y+۴$$

چون x و y عددهایی صحیح‌اند ، بنابـراین x مضربی است از ۴ . این جدول را تشکیل می‌دهیم :

x	۰	۴	۸	۱۲	...
y	$\frac{۱}{۲}$	۱	$۲\frac{۱}{۲}$	۴	...
t	∞	۳۷	$۱۸\frac{۱}{۲}$	$۱۲\frac{۱}{۳}$	...

مقادیر $x=۰$ و $x=۸$ ، قـابل قبول نیست ، زیـرا به ازای آنها برای y ، مقادیر غیر صحیح بدست می‌آید . $x=۱۲$ ، و همچنین مقادیر بعد از آن برای x ، قابل‌قبول نیست ، زیرا در این‌حالت $t=۱۲\frac{۱}{۳}$ دقیقه برای نیم دور و $۲۴\frac{۲}{۳}$ دقیقه برای دور کامل بدست می‌آید. در حالی‌که کارمند صندوق پس‌انداز درفاصلهٔ زمانی ۵۴ دقیقه ندیده است که اتوبوسی ازجلواوعبورکند؛ بنابراین $x=۴$ ، $y=۱$ ، $t=۳۷'$ و $t_A+t_B=۳۴'$.

اتوبوس ، در ساعت ۹ و ۸ دقیقه از کنار نقطهٔ C عبور کرده است، سپس در ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه از A خارج شده است. دراین فاصلهٔ زمانی ، اتوبوس چنین عمل کرده است :

فاصلهٔ CB را طی کرده است : t_B دقیقه

در ایستگاه B توقف کرده است : ۳ دقیقه

$۲p+۱$ نیم‌دور را طی کرده است : $۳۷(۲p+۱)$ دقیقه

بنابراین باید داشته باشیم :

$$t_B + ۷۴p + ۴۰ = ۱۴۰$$

بالاخره ، اتوبوس در ساعت ۱۱ و ۲۸ دقیقه از A خارج شده است و سپس در ساعت ۱۴ و ۴ دقیقه از کنار نقطهٔ C به طرف B عبور کرده است .

در این فاصلهٔ زمانی (۱۵۶ دقیقه) ، اتوبـوس فاصلهٔ AC را در t_A دقیقـه و $۲q$ نیم دور را در $۷۴q$ دقیقه طی کرده است . بنابـراین داریم :

$$(t_B + ۷۴p + ۴۰) + (t_A + ۷۴q) = ۱۴۰ + ۱۵۶ = ۲۹۶ \;;$$

که از آنجا به‌سادگی بدست می‌آید:

$$p + q = ۳$$

این جدول را تشکیل می‌دهیم :

p	۰	۱	۲	۳
q	۳	۲	۱	۰
$t_A = ۱۵۶ - ۲۴q$	-۶۶	۸	۸۲	۱۵۶
$t_B = ۱۰۰ - ۷۴p$	۱۴۰	۲۶	-۴۸	-۱۲۲

به این ترتیب، تنها جواب قابل قبول چنین است : $p = ۱$ ، $q = ۲$ و از آنجا $t_A = ۸$ دقیقه و $t_B = ۲۶$ دقیقه .

بنابراین

$$\frac{AC}{CB} = \frac{۸}{۲۶} \Longrightarrow AC \# ۰/۲۳۵AB$$

حالا جای پستخانه را پیدامی‌کنیم. حداکثر فاصلهٔ پستخانه تایکی از دو نقطهٔ A و B ، چقدر باشد تـا اتوبوس در ۲۰ دقیقه ، دوباره از آنجا عبور کند ؟

$$۲۰ - ۳ = ۱۷ \;; \quad ۱۷ \div ۲ = ۸/۵ \;; \quad ۸/۵ \div ۳۴ = ۰/۲۵$$

یعنی ، پستخانه باید در یك چهارم فاصلهٔ AB ، در یکی از دو طرف

مسیر ، قرار گرفته باشد .

و اما برای صندوق پس‌انداز :

$$۵۴ - ۳ = ۵۱ \;;\quad ۵۱ \div ۲ = ۲۵/۵ \;;\quad ۲۵/۵ \div ۳۴ = ۰/۷۵$$

به این ترتیب ، صندوق پس‌انداز هم درنقطه‌هایی می‌تواند باشد، که برای پستخانه امکان دارد (حداکثر ۰/۷۵ فاصله تا A، یعنی حداقل ۰/۲۵ فاصله تا B و برعکس) .

از فرضهای مسأله ، نمی‌توان معلوم کرد که آیا پستخانه و صندوق پس‌انداز هردو در یکی از یك چهارم فاصله‌ها قرار دارند ، یا در دو طرف (یعنی آیا هردو مثلاً در طرف A هستند یا یکی در طرف A و دیگری در طرف B). حتی ممکن است که پستخانه وصندوق پس‌انداز در یك ساختمان باشند ؛ در این صورت ، وقتی که کارمند پست به خیابان آمده است ، غیر از فاصلهٔ زمانی است که کارمند صندوق پس‌انداز روی بالکن اطاق خود نشسته است .

۱۸۷. در کتاب ای. یا. دپمان به نام «داستانهایی در بارهٔ حل مسأله‌ها» (۱۹۵۷میلادی) ، این مسأله به این ترتیب حل شده است :

«سرعت نامه‌رسانها را به u و v و زمان لازم از شروع حرکت تالحظهٔ برخورد را t می‌گیریم . نامه‌رسان اول برای طی کردن تمام فاصله به $t + ۱۶$ ساعت ، و نامه‌رسان دوم به $t + ۹$ ساعت، وقت احتیاج دارد . فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را به سه طریق مـی‌توان نشان داد :

$$(t + ۱۶)u \,،\qquad (t + ۹)v \,،\qquad t(u + v)$$

و بنابراین به تساویهای زیر می‌رسیم :

$$(t + ۱۶)u = t(u + v) \implies t = \frac{۱۶u}{v} \,,$$

$$(t + ۹)v = t(u + v) \implies t = \frac{۹v}{u} \,,$$

از آنجا بدست می‌آید :

$$۱۶ \times \frac{u}{v} = ۹ \times \frac{v}{u} \implies \frac{u^۲}{v^۲} = \frac{۹}{۱۶} \implies \frac{u}{v} = \frac{۳}{۴}$$

این مقدار را در تساوی اول قرار می‌دهیم و t را بدست می‌آوریم :

$$t = \frac{۱۶ \times ۳}{۴} = ۱۲$$

نامه‌رسان اول برای تمام راه به ۲۸ = ۱۶ + ۱۲ ساعت ونامه‌رسان دوم به ۲۱ = ۹ + ۱۲ ساعت وقت ، احتیاج دارد» .

۲) شبیه این مسأله در کتاب ۱. م. پرژه‌والسکی به‌نام «مسأله‌های جبر» (۱۹۴۱ میلادی) وجود دارد :

«A و B در یك زمـان از مسکو و تولا به طرف یکدیگـر حرکت کردند و هرکدام از آنها در تمام راه ، سرعتی یك‌نواخت داشتند . A بعد از x ساعت از مسکو به‌تولا و B بعد از y ساعت از تولا به‌مسکو رسید. در راه ، m ساعت قبل از آنکه A به‌تولا برسد و n ساعت قبل از آنکه B به مسکو برسد ، یکدیگر را ملاقات کردند . از اینجا ثابت کنید : $x^2 \div y^2 = m \div n$» .

در کتاب مذکور ، این راه حل داده شده است :

«فرض کنید ، فـاصلهٔ بین مسکو و تولا ، a کیلومتر باشد ؛ در این صورت سرعتهای A و B به ترتیب مساوی $\frac{a}{x}$ و $\frac{a}{y}$ می‌شود. وقتی که به هم می‌رسند، A به اندازهٔ $x-m$ ساعت و B به اندازهٔ $y-n$ ساعت در راه بوده‌اند . بنابراین : $x-m=y-n$. در این مدت، A به‌اندازهٔ $\frac{a}{x}(x-m)$ کیلـومتر و B بـه انـدازهٔ $\frac{a}{y}(y-n)$ کیلومتر راه رفته‌اند، بنابراین :

$$\frac{a}{x}(x-m) + \frac{a}{y}(y-n) = a\,;$$

$$y(x-m) + x(y-n) = xy\,;$$

از آنجا بدست می‌آید :

$$(x+y)(x-m) = xy \qquad (۱)$$

$$(x+y)(y-n) = xy \qquad (۲)$$

زیرا $x-m$ و $y-n$ با هم برابرند .

از تساوی (۱) بدست می‌آید : $x^۲=m(x+y)$ و از تساوی (۲): $y^۲=n(x+y)$ ؛ از آنجا

$$x^۲ \div y^۲ = m \div n$$

(۳) به این ترتیب ، ثابت شد که

نسبت $m \div n$

(نسبت زمانی که طول می‌کشد تا A ، از لحظهٔ ملاقات به انتهای راه برسد، به زمانی که طول می‌کشد تا B، از لحظهٔ ملاقات به انتهای راه برسد) .

برابر است با نسبت $x^۲ \div y^۲$

(نسبت مربع زمانی که A برای تمام راه صرف کرده است ، به مربع زمانی که B برای تمام راه صرف کرده است) .

مفهوم فیزیکی «مربع زمان» در اینجا به چه معنی است ؟ می‌توان نسبت دو مربع را به صورت مربع نسبت به آنها نشان داد :

$$x^۲ \div y^۲ = (x \div y)^۲$$

نسبت $(x \div y)$ ، مفهوم فیزیکی معینی دارد : این همان نسبت سرعتها است . پس چرا این مطلب در مورد نسبت $m \div n$ صادق نیست ؟

فرض کنید $x > y$ باشد

I . A تمام راه را در x ساعت و B تمام راه را در y ساعت طی می‌کنند ، یعنی سرعت B به اندازهٔ $\frac{x}{y}$ سرعت A است . چون هردو با سرعتی یکنواخت حرکت می‌کنند ، B تا لحظهٔ ملاقات، به اندازهٔ $\frac{x}{y}$ متحرك A ، راه رفته است .

II. بعد از ملاقات ، A همانقدر راه در پیش دارد که B تا لحظهٔ ملاقات آمده است ، و B همانقدر راه در پیش دارد که A تا لحظهٔ ملاقات آمده است ؛ بنابراین A باید $\frac{x}{y}$ متحرك B در راه باشد ، تا به انتها برسد .

III. به این ترتیب ، بعداز ملاقات ، A باید $\frac{x}{y}$ برابرBراه برود،

در حالی که سرعت B به‌اندازهٔ $\frac{x}{y}$ سرعت A است ، بنابراین

$$m \div n = (x \div y).(x \div y) = x^۲ \div y^۲$$

حالا دیگر محاسبه‌ها به اندازهٔ کافی ساده می‌شود و در جوابی که بدست می‌آید ، به‌خوبی مفهوم اصلی دیده می‌شود .

۴) حالا مسألهٔ مورد نظر را می‌توان به این ترتیب حل کرد .

t را زمانی می گیریم که ازلحظهٔ حرکت دونامه‌رسان تا لحظهٔ ملاقات طول کشیده است. بعد از ملاقات ، متحرك A ، راهی راکه B در t ساعت رفته بود ، در m ساعت طی می‌کند، و متحرك B ، راهی را که A در t ساعت‌رفته بود، در n ساعت می‌رود . بنابراین

$$\frac{\text{سرعت } A}{\text{سرعت } B} = \frac{t}{m} = \frac{n}{t}$$

و از آنجا :
$$t = \sqrt{mn} = \sqrt{۱۶ \times ۹} = ۱۲ \quad (\text{ساعت})$$

$$T_A = ۱۲ + ۱۶ = ۲۸ ، \quad T_B = ۱۲ + ۹ = ۲۱$$

۵) در نوع دوم مسأله، جالب است که آنرا در حالت‌کلی به صورت رابطه‌هایی درآوریم ، یعنی باید ثابت کنیم :

$$m \div n = (x \div y)^۲$$

$$t = \sqrt{mn}$$

بهتر است که ابتدا رابطهٔ $t = \sqrt{mn}$ را ثابت کنیم و سپس

$$\frac{x^۲}{y^۲} = \frac{(t+m)^۲}{(t+n)^۲} = \frac{(\sqrt{mn}+m)^۲}{(\sqrt{mn}+n)^۲} = \frac{m}{n}$$

و یا ساده‌تر

$$\frac{\text{سرعت } A}{\text{سرعت } B} = \frac{t}{x} = \frac{\sqrt{mn}}{m} = \sqrt{\frac{n}{m}}$$

۱۸۸. مجموع سه عدد مجهول برابراست با ۲۲. اگر به اولی ۰٫۵ اضافه کنیم ، به مجموع هم ۰٫۵ اضافه می‌شود ؛ اگر از دومی ۱٫۵ کم

کنیم ، از مجموع هم ۱/۵ کم می‌شود . اگـر هردو عمل را انجام دهیم ، مجموع مساوی ۲۱ می‌شود .

به این ترتیب، مسألهٔ ما چنین می‌شود : «مجموع سه عدد برابراست با ۲۱ . دو عدد اول و دوم با هم برابرند و هرکدام از آنها ۲/۵ برابر سومی است». از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع دو عدد اول و دوم مساوی ۵ برابر سومی مـی‌شود ، یعنی عدد ۲۱ مساوی ۶ برابرسومی‌است وبنابراین عددسوم‌مساوی ۳/۵ (=۲۱:۶) خواهد بود . هریك از دو عدد دیگر مساوی ۸/۷۵ (=۲/۵ × ۳/۵) و عددهای مورد نظر مسأله چنین خواهند بود :

عدد اول : ۸/۲۵ = ۸/۷۵ − ۰/۵

عدد دوم : ۱۰/۲۵ = ۸/۷۵ + ۱/۵

۱۸۹. توجه کنیم‌که در تمام معادله‌های دستگاه ، مقدار ثابت برابر است با ۷برابرضریب y . بنابراین جواب دستگاه چنین است :

$$x = z = t = u = v = w = ۰ \text{ ، } y = ۷$$

همین جواب برای هرمقادیر دیگری که به جای ضریبهای x ، z ، t ، u ، v ، w قرار دهیم ، قابل قبول است ، مگر در حالت خاصی که این ضریبها ، متناسب با ضریب y باشند . در این حالت ، هفت معادلهٔ دستگاه ، تبدیل به یك معادلهٔ هفت مجهولی می‌شود ، یعنی معادلهٔ سیالی که دارای بی‌نهایت جواب است .

۱۹۰. وقتی که A به پایان خط رسیده بود ، یعنی ۱۰۰ یارد دویده بود ، B در ۱۰ یاردی او بود، یعنی ۹۰ یارد دویده بود. بنابراین سرعت B برابر با ۰/۹ سرعت A است . به همین ترتیب ، سرعت C برابر ۰/۹ سرعت B و یا ۰/۸۱ = ۰/۹ × ۰/۹ سرعت A است. به این ترتیب وقتی‌که A به اندازهٔ ۱۰۰ یارد دویده باشد، C تنها ۸۱یارد دویده است ، یعنی در ۱۹(= ۸۱ − ۱۰۰) یاردی خط پایان است .

۱۹۱. از فرضهای مسأله نتیجه می‌شود :

اگر مسافر بعد از یك ساعت ، سرعت خود را از ۳ کیلومتر به ۴ کیلومتر در ساعت بـرساند ، روی هم ۴۵ + ۴۰ ، یعنی ۸۵ دقیقه

زودتر می‌رسد .

از طرف دیگر ، وقتی که سرعت از ۳ کیلومتر به ۴ کیلومتر درساعت برسد ، برای هرسه کیلومتر به جای ۶۰ دقیقه ، $\frac{۳}{۴} \times ۶۰$ ، یعنی ۴۵ دقیقه وقت لازم است ، یعنی برای هر۳ کیلومتر ۱۵ دقیقه و برای هر کیلومتر ۵ دقیقه صرفه‌جویی می‌شود، بنابراین ۸۵ دقیقه در ۱۷ (= ۸۵ ÷ ۵) کیلومتر صرفه‌جویی شده است .

به این ترتیب ، فاصلهٔ بین دوتا ایستگاه راه‌آهن چنین می‌شود :

$$۱۷ + ۳ = ۲۰ \text{ (کیلومتر)}$$

۱۹۲ . ۱) این مسأله در یکی از کنکورها داده شده است و نویسندهٔ آن ، به این ترتیب آنرا حل کرده است .

سرعت جریان آب رودخانه را x کیلومتر در ساعت ، و فاصلهٔ از نقطهٔ A تا محل برخورد دو قایق را y کیلومتر می‌گیریم . قایق موتوری، این فاصله را درجهت جریان آب در $\frac{y}{۲۰ + x}$ ساعت و قایق بدون پارو در $\frac{y}{x}$ ساعت طی می‌کند . به این ترتیب معادلهٔ اول تشکیل می‌شود :

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{۲۰ + x} = ۲/۴$$

قایق از لحظهٔ ملاقات با قایق موتوری تا نقطهٔ B بازهم به اندازهٔ $(۳/۶x - y)$ کیلومتر تا نقطهٔ B ، و قایق موتوری در برگشت ، y کیلومتر تا نقطهٔ A ، حرکت می‌کنند . توجه می‌کنیم که آنها، این فاصله‌ها را در زمان مساوی طی می‌کنند وبنابراین معادلهٔ دوم بدست می‌آید :

$$\frac{y}{۲۰ - x} = \frac{۳/۶x - y}{x}$$

به این ترتیب ، دو معادلهٔ دو مجهولی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{۲۰+x}=\dfrac{۱۲}{۵} \\ \dfrac{y}{۲۰-x}=\dfrac{\frac{۱۸}{۵}x-y}{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۳x^۲+۶۰x=۲۵y \\ -۹x^۲+۱۸۰x=۵۰y \end{cases}$$

از تقسیم دو معادله بریکدیگر بدست می‌آید :

$$\frac{۳x+۶۰}{۱۸۰-۹x}=\frac{۱}{۲}$$

از آنجا $۵x=۲۰$ و $x=۴$ کیلومتر در ساعت بدست می‌آید .

۲) می‌توان ، به جای مساوی قراردادن زمانها، از تساوی فاصله‌ها استفاده کرد .

طبق فرض :

I. فاصله‌ای که قایق معمولی تا لحظهٔ برخورد طی کرده است ،

II. فاصله‌ای که قایق موتوری تا لحظهٔ برخورد طی کرده است و

III، فاصله‌ای که قایق موتوری ، بعداز برخورد طی کرده است ، با هم برابرند. z را فاصلهٔ زمانی از لحظهٔ حرکت قایق موتوری تا لحظهٔ برخورد می‌گیریم . در این صورت داریم :

$$(۲/۴+z)\,x=z(۲۰+x)=(۳/۶-۲/۴-x)(۲۰-x)$$

از آنجا

$$۲/۴x+zx=۲۰z+zx=۲۴-۱/۲x-۲۰z+zx\,,$$

$$۲/۴x=۲۰z=۲۴-۱/۲x-۲۰z\,,$$

$$z=\frac{۲/۴}{۲۰}x\,,$$

$$۱/۲x=۲۴-۴۰z=۲۴-۴/۸x\,,$$

$$۶x=۲۴\,,\quad x=۴ \quad (\text{کیلومتر در ساعت})$$

این راه حل ، هم از راه حل اول کوتاهتر است و هم شامل معادلـهٔ درجهٔ دوم نیست .

۳) حالا سعی می‌کنیم ، مسأله را با تحلیل آنچه که پیش آمده است،

حل کنیم .

طبق فرض، تا لحظهٔ حرکت قایق موتوری ، قایق معمولی با حرکت جریان آب ۲/۴ ساعت با سرعت ساعتی x کیلومتر جلو رفته است، یعنی وقتی که قایق موتوری حرکت می کند، به‌اندازهٔ $۲/۴x$ کیلومتر با قایق معمولی فاصله دارد. قایق موتوری و قایق معمولی روی یك رودخانه حرکت‌می کنند، سرعت‌قایق‌معمولی‌نسبت‌به‌آب مساوی‌صفر ، وسرعت قایق موتوری نسبت به‌آب مساوی ۲۰ کیلومتردرساعت است؛ بنابراین دوقایق با سرعت ساعتی ۲۰ کیلومتر به‌هم نزدیك می‌شوند (کاملاً بدون ارتباط با سرعت جریان آب) . به این ترتیب، قایق موتوری بعداز $z = ۲/۴x \div ۲۰ = ۰/۱۲x$ ساعت به‌قایق معمولی می‌رسد .

به این ترتیب ، با تحلیل سادهٔ آنچه‌که پیش آمده است، به‌رابطه‌ای رسیدیم ، که برای بدست آوردن آن از راه عادی و سنتی ، احتیاج به تشکیل و حل یك دستگاه معادله‌ها داشت . سپس

قایق موتوری در جهت جریان آب به انـدازهٔ $z(۲۰ + x)$ کیلومتر پیش می‌رود ؛

قایق‌موتوری‌درخلاف‌جریان‌آب‌به‌اندازهٔ$(۲۰ - x)(۳/۶ - ۲/۴ - z)$ کیلومتر پیش می‌رود ، از آنجا

$$۴۰z = ۲۴ - ۱/۲x ; ۴/۸x = ۲۴ - ۱/۲x ; ۶x = ۲۴ ; x = ۴$$

۴) بالاخره به‌راه‌حل خالص حسابی مسأله می‌پردازیم. قایق معمولی روی هم ۳/۶ ساعت در حرکت بـوده است ، از این مدت ، ۲/۴ ساعت تا لحظهٔ حرکت قایق موتوری طول کشیده است . بنابراین ، فاصلهٔ قایق موتوری (در لحظهٔ حرکت) ، تا قایق معمولی ، مساوی $۲/۴ \div ۳/۶$، یعنی $\frac{۲}{۳}$ فاصلهٔ AB است .

اگر جریان آب وجود نداشت ، قایق موتوری برای برگشتن هم ، همین فاصله را طی می‌کرد . ولی جریـان آب ، هم قایق معمولی و هم قایق موتوری رااز A به طرف B می‌کشد . از لحظه‌ای که قایق

موتوری حرکت می‌کند تا پایان کار، اثر جریان آب برقایق معمولی و قایق موتوری یکی است؛ جریان آب، در این مدت، قایق معمولی را به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}AB$ جابجا می‌کند ، بنابراین قایق موتوری هم در این فاصلهٔ زمانی به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}AB$ به طرف B کشیده می‌شود .

به این ترتیب قایق موتوری ، این فاصله را طی می‌کند :

ابتدا : $\frac{۲}{۳}AB$

در برگشت : $\frac{۲}{۳}AB$

فاصله‌ای که آب آنرا به‌طرف B کشاند : $\frac{۱}{۳}AB$

روی هم : $\frac{۵}{۳}AB$

در همین مدت، جریان آب به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}AB$ حرکت می‌کند ، یعنی سرعت قـایق موتوری $\frac{۵}{۳} \div \frac{۱}{۳}$ ، یعنی ۵ برابر سرعت جریان‌آب است . از اینجا سرعت جریـان آب ۵ ÷ ۲۰ ، یعنی ۴ کیلومتر در ساعت ، می‌شود .

۱۹۳. اشتباه در اینجاست کـه معادله‌ای که تشکیل داده‌ایـم ، تنها در فاصلهٔ زمانی معینی درست است ؛ در حقیقت ، اگر در هرثانیه $\frac{۱}{m}$ آبی که در حوض وجود دارد ، تبخیر می‌شود، بعداز m ثانیه، این قسمت آب بکلی ازبین می‌رود و رابطهٔ ما، از آن به‌بعد درستی‌خود را از دست می‌دهد .

m ثانیه بعداز شروع آزمایش ، مقدار آبی که تبخیر می‌شود، برابر است با مقدار آبی‌که داخل می‌شود و حجم‌آب حوض ثابت می‌ماند. این حجم (برای $t = m$) چنین است :

$$w = vt - \frac{۱}{۲} \cdot \frac{v}{m} t^{۲} = vm - \frac{۱}{۲} \cdot \frac{v}{m} m^{۲} = \frac{vm}{۲} \quad \text{(لیتر)}$$

پس مطلب در مورد حرکت متشابه‌التغییر کند شونده چگونه است. در آنجا، طبیعت کار چیز دیگری است:

برای $a<۰$ وبرای $t = m = \frac{v}{a}$، نقطهٔ متحرك به حداکثر فاصلهٔ خود از نقطهٔ شروع، می‌رسد و شروع به حرکت در جهت برگشت می‌کند و بعد از $t = ۲m = \frac{۲v}{a}$ به نقطهٔ اولیهٔ خود بازمی‌گردد و از آنجا، حرکت متشابه التغییر خود را تا بی‌نهایت ادامه می‌دهد.

۱۹۴. a) ازسه نقطه، همیشه‌می‌توان یك صفحه گذراند وبنابراین، سه مگس همواره بر یك صفحه قرار دارند.

b) طبق فرض، بعداز ۹دقیقه، هرچهار مگس روی یك صفحه قرار می‌گیرند، یعنی‌یك چهارضلعی مسطحه تشکیل می‌دهند. از هررأس این چهارضلعی مسطح مسیرهای مگسها عبورمی‌کند. این مسیرها، نیم‌خطهایی هستندکه مبداء آنها انتهای بالای چوب است. در این حالت می‌توان انتهای‌بالای چوب را به عنوان رأس یك هرم باقاعدهٔ چهارضلعی در نظر گرفت که یالهای آن مسیرهای مگسها و قاعدهٔ آن همین چهارضلعی مسطح مذکور است. بنابر فرض، همهٔ مگسها در یك زمان شروع به حرکت می‌کنند و سرعتهای ثابتی هم دارند؛ به این ترتیب بعداز ۹α دقیقه (α عددی است مثبت) از این پنج نقطه (انتهای چوب و هریك از مگسها)، هرمی متشابه با هرم یاد شده تشکیل می‌شود (نسبت تشابه برابر است با α)، بنابراین بعداز ۹α دقیقه، هرچهار مگس روی یك صفحه قرار خواهند داشت.

عددهایی که در فرض مسأله داده شده است، مورد استفاده‌ای ندارند. صفحه‌ای که در لحظهٔ مفروض، همهٔ مگسها روی آن قرار گرفته‌اند، به‌موازات خود حرکت می‌کند وبا سرعتی یك‌نواخت از نقطهٔ شروع (بالای چوب) دور می‌شود.

اگر سه تا از مگسها روی صفحه‌ای پرواز کنند که از رأس چوب می‌گذرد، مسیر مگس چهارم هم روی همان صفحه خواهد بود و این صفحه، ثابت باقی خواهد ماند.

۱۹۵. اگر طول پاره خط کوچکتر، از نصف طول پارهٔ خط بزرگتر، بیشتر نباشد، مسأله تنها یك جواب دارد: پاره خط کوچکتر، قاعده و پاره خط بزرگتر، یکی از ساقهای مثلث است.

در حالتی که پاره خط کوچکتر، بزرگتر از نصف پاره خط بزرگتر باشد، می‌توان هریك از دو پاره‌خط را قاعده و دیگری‌را ساق مثلث گرفت؛ بنابراین در این حالت، مسأله دو جواب دارد.

بالاخره اگر دو پاره‌خط مساوی باشند، فرقی نمی‌کندکه‌کدام پاره‌خط را قاعده وکدام پاره‌خط را ساق مثلث به حساب بیاوریم و درهرحال مثلثی متساوی‌الاضلاع بدست می‌آید.

۱۹۶. جواب مربوط است به مقدار زاویهٔ α، که دو ساق ذوزنقه با هم می‌سازند. برای اینکه بتوان با میزها یك حلقهٔ‌کامل ساخت، باید داشته باشیم: $\alpha=\frac{۳۶۰^\circ}{n}$. ($n$ عددی است صحیح). اگر n عددی زوج باشد، با قرار دادن میزها در کنار هم، هردو میز مجاوریك متوازی‌الاضلاع می‌سازند. دراین حالت ضلع‌آزادمیزآخر با ضلع آزاد میز اول موازی می‌شود. ولی اگر n عددی فرد باشد، ضلعهای آزاد دو طرف ناموازی می‌شوند.

۱۹۷. برای حل این مسأله به‌طریق مستقیم، باید به ترتیب این‌چیزها را پیدا کرد:

۱) حجم مکعب اول؛
۲) طول ضلع مکعب اول؛
۳) قطر کرهٔ محیطی مکعب اول؛
۴) مساحت این کره؛
۵) مساحت سطح کرهٔ دوم؛
۶) قطر کرهٔ دوم؛

۷) طول ضلع مکعبی که درکرهٔ دوم محاط شده است ؛
۸) حجم مکعب دوم ؛
۹) و بالاخره وزن آن .

ولی این مسأله را می‌توان، با در نظر گرفتن تشابهات، خیلی ساده‌تر حل کرد . در حقیقت مکعب اول همراه با کره‌ای که بر آن محیط شده است ، با مکعب دوم همراه با کرهٔ محیطی آن ، متشابه است. نسبت تشابه دوشکل را، به‌کمك نسبت مساحتهای شکلهای متشابه (دراینجا مساحت دوکره) پیدا می کنیم؛ می‌دانیم که نسبت مساحتهای دو شکل متشابه برابر است بامجذور نسبت اندازه‌های خطی آنها ، یعنی نسبت اندازه‌های خطی دو شکل متشابه (نسبت تشابه)، برابر است با جذر نسبت مساحتهای آنها .

طبق فرض ، نسبت مساحتهای دوکره چنین است :

$$S_۲ \div S_۱ = ۴$$

ازآنجا نسبت تشابه (یعنی نسبت اندازه‌های خطی) برابر است با

$$L_۲ : L_۱ = \sqrt{S_۲ : S_۱} = ۲$$

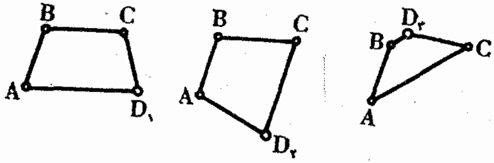
بنابراین، طول‌ضلع مکعب‌دوم ، دوبرابرطول ضلع مکعب اول‌است. درچنین حالتی حجم مکعب دوم $۲^۳$ ، یعنی ۸ برابر حجم مکعب اول می‌شود .

از طرف دیگر، وزن‌مخصوص آلیاژ مکعب دوم ۳/۶ ÷ ۲/۴، یعنی ۱/۵ برابر وزن مخصوص آلیاژ مکعب اول است ، در نتیجه وزن مکعب دوم چنین خواهد بود :

$$۴۱\frac{۲}{۳} \times ۸ \times ۱/۵ = ۵۰۰ \quad (\text{گرم})$$

۱۹۸. a) مسأله به اندازه‌ای مقدماتی است ، که ممکن است شما از حل آن منصرف شوید، ولی آیا فکر کرده‌ایدکه مسأله سه جواب دارد (شکل ۸۵) . درچه حالتی مسأله دو جواب دارد و درچه حالتی یك جواب ؟

b) می‌دانیم که‌یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین‌را می‌توان‌دردایره‌ای‌محاط



شکل ۸۵

کرد . بنابراین هریك ازگروه‌های چهارنقطه‌ای

$$A \text{ ، } B \text{ ، } C \text{ ، } D_1$$

$$A \text{ ، } B \text{ ، } C \text{ ، } D_2$$

$$A \text{ ، } B \text{ ، } C \text{ ، } D_3$$

برمحیط یك دایره قرار گرفته‌اند ، ولی چون این سه‌دایره، سه‌نقطهٔ مشترك (A ، B ، C) دارند ، برهم منطبق‌اند . بنابراین نقطه‌های مورد نظر A ، B و C برمحیط دایره‌ای که از D_1 ، D_2 و D_3 می‌گذرد، قرار دارند (شکل ۸۶-a) .

فرض کنید مسأله حل شده است ؛ A ، B و C نقطه‌های موردنظر (شکل ۸۶-b) و $ABCD_2$ و ABD_3C دو ذوزنقه ، از سه ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مطلوب ، باشند .

در این صورت اولاً ساقهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD_2$ باهم برابرند :

$$AD_2 = BC$$

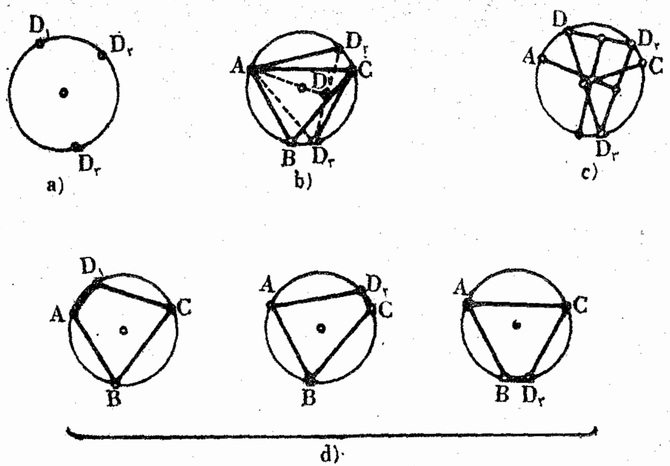
ثانیاً قطرهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABD_3C با هم برابرند :

$$AD_3 = BC$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$AD_2 = AD_3$$

از اینجا نتیجه می‌شود که برای پیدا کردن نقطهٔ A ، باید عمود منصف وتر D_2D_3 را رسم کرد و ادامه داد تا از مرکز دایره بگذرد و محیط دایره را قطع کند (شکل ۸۶-c) ، به همین ترتیب با رسم عمودمنصفهای D_1D_2 و D_1D_3 به ترتیب نقطه‌های B و C



شکل ۸۶

بدست می‌آید . در شکل d-۸۶ ، بطور جداگانـه این سه ذوزنقه رسم شده است .

نقطه‌هایی که از برخورد دوم عمود منصفها با دایره بدست می‌آید ، منجر به جواب درست نمی‌شود . چرا ؟

۱۹۹. a) همهٔ اندازه‌های خطی و همچنین جهتهای دوران ، که در صورت مسأله داده شده است ، بیفایده است و جواب مسأله تنها به سرعت دوران دایره‌ها مربوط می‌شود . کاملا روشن است که شرط لازم و کافی، برای اینکه سوراخهای سه دایره، دوباره برهم منطبق شوند، این است که هریك از سه صفحه، به وضع اولیهٔ خود برگشته باشند. زمانی که صفحهٔ A لازم دارد تا برای اولین‌بار به وضع اولیهٔ خود برگردد ، برابر است با :

$$۶۰ \div ۷/۵ = ۸ \quad \text{(ثانیه)}$$

زمانی که لازم است تا سوراخ صفحهٔ B به نقطهٔ O برگردد، برابر است با:

$$۶۰ \div ۱۰ = ۶ \quad \text{(ثانیه)}$$

زمان لازم برای اینکه سوراخ صفحهٔ C ، دوباره روی O قرار گیرد،

برابر است با :

$$۶۰ \div ۶\frac{۲}{۳} = ۹ \qquad \text{(ثانیه)}$$

کوچکترین مضرب مشترك سه عدد ۸ و ۶ و ۹ عبارت است از ۷۲. بنابراین ، هر ۷۲ ثانیه (۱/۲ دقیقه) یکبار ، سوراخهای سه صفحه روی هم قرار می‌گیرند .

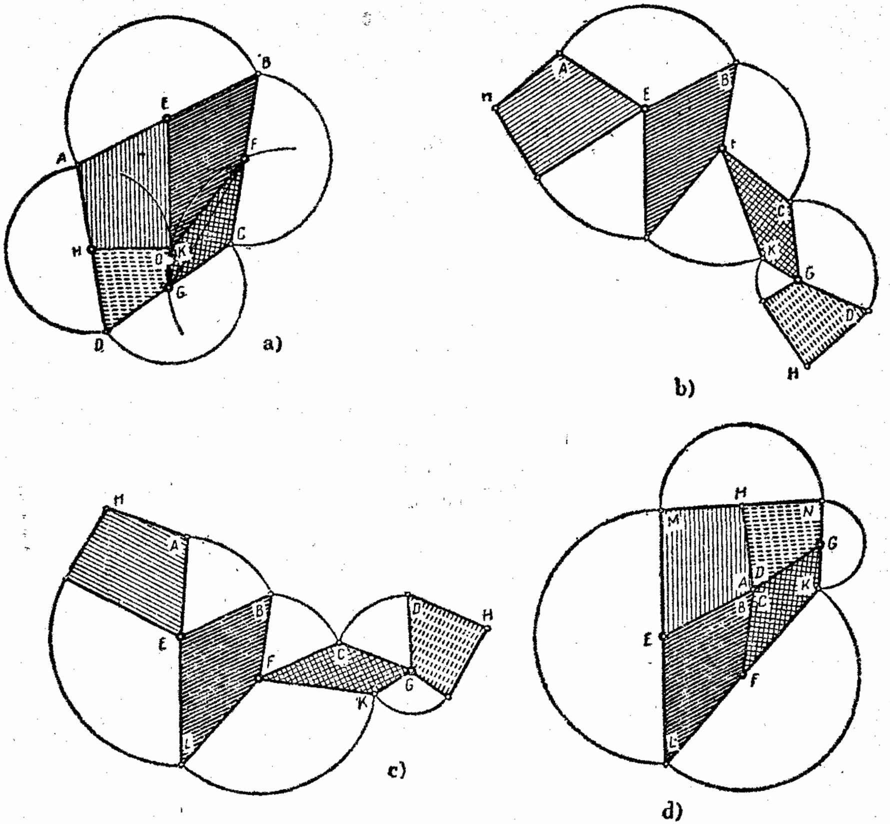
b) ۱۲ = ۵ ÷ ۶۰ ، ۵ = ۱۲ ÷ ۶۰. کوچکترین مضرب مشترك دو عدد ۱۲ و ۵ عبارت است از ۶۰ .

بنابراین ، هریك دقیقه یکبار ، دستگاه به وضع اول خود برمی‌گردد و سوراخهای دو صفحه برهم منطبق می‌شوند .

ولی، برخلاف حالت سه صفحه، مسألهٔ مربوط به دو صفحه، ممکن است جواب دیگری هم داشته باشد : دو سوراخی که روی دوصفحه ایجاد شده‌است، ممکن‌است‌درنقطهٔ O'،قرینهٔO نسبت به AB،نیز برهم منطبق شوند ، و این به شرطی است که در یك زمان به نقطهٔ O' برسند . برای اینکه بدانیم ، درحالت خاص این مسأله ، چنین وضعی‌پیش می‌آید یا نه، باید از وضع ومحل نقطهٔ O اطلاع داشته باشیم ؛ ولی چون صورت مسأله ، این اطلاع را به‌ما نمی‌دهد ، از بحث دربارهٔ امکان وجود انطباق دوم صرفنظر می‌کنیم .

۴۰۰. می‌دانیم که چهارضلعی‌را با معلوم‌بودن‌پنج جزء آن،می‌توان مشخص کرد ؛ در حالت مفروض، تنها سه جزء چهارضلعی $KLMN$ معلوم است : مساحت و دو جزء دیگر. به همین مناسبت ، در این مورد به اصطلاح، دو درجه‌آزادی داریم؛ و همین آزادی به‌ما امکان می‌دهد که بتوانیم چهارضلعی $KLMN$ را، از چهار قطعه‌ای‌که چهارضلعی $ABCD$ را تشکیل می‌دهند ، بسازیم .

از حالتهای مختلفی که برای مفروض بودن دو جزء چهارضلعی $KLMN$ می‌توان درنظر گرفت ، تنها یك حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم : فرض می‌کنیم که ضلع MN و زاویهٔ K معلوم باشد .



شکل ۸

E ، F ، G و H را وسط ضلعهای چهارضلعی مفروض $ABCD$ می‌گیریم. به مرکز H و شعاع مساوی $\frac{MN}{2}$ قوسی می‌زنیم، سپس روی پاره‌خط FG، قوسی درخور زاویهٔ مفروض K رسم می‌کنیم (دایره‌ای که از F و G بگذرد، به‌نحوی که ازهر نقطهٔ قوس FG به F و G وصل کنیم ، زاویه‌ای مساوی K بدست آید) .

O، نقطهٔ برخورد دوقوسی را که رسم کرده‌ایم به‌نقطه‌های E، F، G و H وصل می‌کنیم. چهارپاره‌خط OE ، OF ، OG و OH ، چهارضلعی مفروض $ABCD$ را به چهار قسمت تقسیم می‌کند ، به‌نحوی که از

آنها می‌توان چهارضلعی مطلوب $KLMN$ را ساخت .

فرض می‌کنیم در نقطه‌های E ، F ، G و H لولاهایی وجود داشته باشد ؛ چهارضلعی $EBFO$ را در جای خود نگه می‌داریم و سایر چهارضلعیها را به‌نحوی که در شکل ۸۷ (b ، c و d) دیده می‌شود، جابجا می‌کنیم. در نتیجه، چهارضلعی $KLMN$ بدست می‌آید که با شرطهای مسأله می‌سازد .

به این نکته‌ها هم توجه کنید :

۱) دو قسمت از چهارضلعی تنها منتقل می‌شوند (یکی از آنها ضمن راه به اندازهٔ ۳۶۰ درجه دوران می‌کند) و دو قسمت دیگر به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه دوران می‌کند .

۲) جوابی که پیدا کردیم ، تنها جـواب ممکن نیست . در حقیقت مرکز دایره‌ای‌را که به شعاع $\frac{MN}{۲}$ رسم‌کردیم ، می‌توان به‌جای H ، یکی از نقطه‌های E ، F یا G گـرفت . همچنین زاویهٔ K را به‌جای پاره‌خط FG، می‌توان روی‌پاره‌خط EF ساخت. علاوه‌بر اینها دو دایره ، در حالت کلی ، یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند . بنابراین ، در حالت کلـی ، ۲ × ۲ × ۴ ، یعنی ۱۶ حالت مختلف وجود دارد .

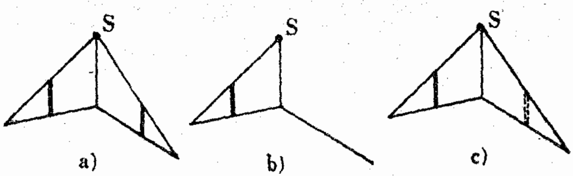
۳) ما از لولای نقطهٔ H استفاده نکردیم ؛ ولی می‌توان ازلولای H هم استفاده کرد و در عوض یکی از لولاهای دیگر را بدون استفاده گذاشت .

۲۰۱. روش پیدا کردن آنچه‌که مسأله خواسته است، در شکل ۸۸-a داده شده است .

و حالا به پاسخ پرسشهای اضافی می‌پردازیم :

۱) برای پیداکردن جای منبع نور، وضع قرارگرفتن ستونها، هیچگونه اهمیتی ندارد . برای پیداکردن جای «پایهٔ» منبع نور ، باید مطمئن باشیم که ستونها قائم‌اند .

۲) جواب به این پرسش هم کاملاً شبیه حالت قبل است: برای پیدا



شکل ۸۸

کردن جای منبع نور، وضع صفحه‌ای که سایهٔ ستونها بر آن می‌افتد، اهمیتی ندارد؛ ولی برای پیدا کردن جای «پایهٔ» منبع نور، باید صفحه‌ای که سایهٔ ستونهای قائم بر آن می‌افتد، افقی باشد.

۳) اگر همانطورکه در فرض مسأله گفته شده است، ستونها قائم و سایهٔ آنها روی یك صفحهٔ افقی قرار گرفته باشد، برای حل مسأله کافی است یکی از ستونها و سایهٔ آن و فقط امتداد سایهٔ ستون دوم داده شده باشد؛ در این صورت می‌توان ابتدا «پایهٔ» منبع نور و سپس‌خود منبع‌نوررا بدست‌آورد (شکلb-۸۸). اگرروی شکل، یکی از ستونها وسایهٔ آن وهمچنین سایهٔ ستون قائم دوم داده شده باشد، می‌توان نه تنها منبع نور و «پایهٔ» آنرا پیداکرد، بلکه ارتفاع ستون دوم هم قابل محاسبه است (شکل c-۸۸).

در حالتی که تنها امتداد سایه‌های دو ستون داده شده باشد، تنها می‌توان «پایهٔ» منبع‌نور را پیدا کرد. حتی اگردوسایه‌بطورکامل هم داده شده باشد، نمی‌توان جای منبع نور را، بدون در دست داشتن یکی از ستونها، پیدا کرد.

۲۰۲. شعاع‌قاعدهٔ مخروط را r وطول‌مولدآنرا a می‌گیریم. در این‌صورت محیط دایره‌ای‌که به وسیلهٔ نقطهٔ محیط قاعدهٔ مخروط، روی صفحهٔ افقی رسم می‌شود، برابر است با:

$$L = ۲\pi a$$

محیط قاعدهٔ مخروط برابر است با:

$$l = ۲\pi r$$

بعداز آنکه مخروط یك دور کامل دور رأس S بچرخد، به شرطی

مولد SA برجای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد که داشته باشیم:

$$L = ln \qquad \text{(n عددی‌است صحیح)}$$

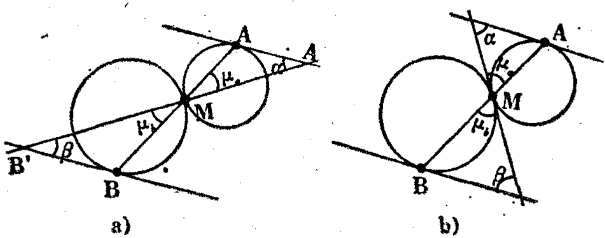
بنابراین باید داشته باشیم:

$$a = rn$$

یعنی باید طول مولد مخروط مضرب صحیحی از طول شعاع قاعدهٔ مخروط باشد.

اگر $n = ۱$ باشد، چه وضعی پیش می‌آید؟ مخروط چگونه باید باشد تا مولد SA برای نخستین بار بعد از آنکه مخروط، m دور کامل دور رأس آن دوران کند، در وضع اولیهٔ خود قرار گیرد (m عددی است صحیح)؟

۲۰۳. اثبات را بدون هیچگونه محاسبه‌ای می‌دهیم.



شکل ۸۹

خط‌المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم، این خط از نقطهٔ M می‌گذرد (شکل ۸۹-a).

ابتدا مماس در نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم. زاویهٔ $AA'M$ را، که این مماس با خط‌المرکزین می‌سازد، به α نشان می‌دهیم. مقدار زاویهٔ α بستگی به زاویهٔ $AMA' = \mu_a$ دارد، یعنی:

$$\alpha = f_a(\mu_a)$$

که در آن f_a عبارت است از یك تابع.

حالا به مماس در نقطهٔ B می‌پردازیم. زاویهٔ $BB'M$ را، که این مماس با خط‌المرکزین می‌سازد، β می‌نامیم، مقدار زاویهٔ β از روی

مقدار زاویهٔ $BMB' = \mu_b$ معین می‌شود ، به‌نحوی که

$$\beta = f_b(\mu_b)$$

به علت وضع کاملا مشابهی که این دو حالت دارند ، تابعهای f_a و f_b متحدند ، یعنی همانگونه که زاویهٔ α بـه صورت یك جوابی از روی مقدار زاویهٔ μ_a معین می‌شود؛ درست به‌همان ترتیب، زاویـهٔ β هم به صورت یك جوابی از روی زاویهٔ μ_b معین می‌شود:

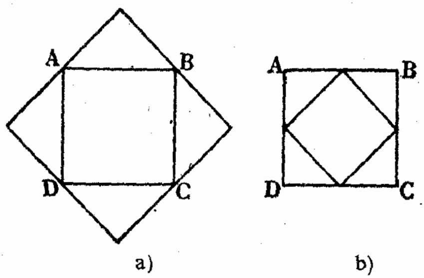
$$\mu_b \div \mu_a = f_b(\mu_b) \div f_a(\mu_a)$$

ولی $\mu_a = \mu_b$ ، بنابراین $f_a(\mu_a) = f_b(\mu_b)$ و از آنجا $\alpha = \beta$.

به جای خط کمکی خط‌المرکزین، می‌توان از مماس مشترك دو دایره استفاده‌کرد و استدلالی کاملا شبیه بالا، انجام داد (شکل ۸۹-b) .

۲۰۴. همهٔ مطلب این است که مژده و توکا ، با واحدهای مختلفی اندازه گیری کرده اند .

طول ضلع مربع $ABCD$ را a می‌گیریم، در این صورت مساحت‌آن با عدد $a^۲$ نشان داده می‌شود .



شکل ۹۰

ضلع مربع‌محیطی‌مساوی $a\sqrt{۲}$ ومحیط‌آن‌مساوی $۴a\sqrt{۲}$ می‌شود(شکل ۹۰-a). طبق اندازه‌گیری‌مژده $a^۲ = ۴a\sqrt{۲}$ و ازآنجا $a = ۴\sqrt{۲}$ ، یعنی ضلع مربع محیطی برابر است با $a\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ ، یعنی ۸ واحد انتخابی مژده .

ضلع مربع محاطی برابر است با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ و محیـط آن $۲a\sqrt{۲}$. طبق

اندازه‌گیری توکا $a^۲ = ۲a\sqrt{۲}$ و ازآنجا $a = ۲\sqrt{۲}$، یعنی ضلع مربع محاطی برابر است $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۲\sqrt{۲}$،یعنی۲واحدانتخابی‌توکا.

با واحدی که مژده انتخاب کرده است ، طول ضلع مـربع $ABCD$ مساوی $۴\sqrt{۲}$ و با واحدی که توکا انتخاب کرده است ، طول ضلع این مـربع مساوی $۲\sqrt{۲}$ شده است . بنابراین واحد انتخابـی مژده نصف واحد انتخابی توکا بوده است .

برای مژده عدد مساحت مربع $ABCD$ و عدد محیط مربع محیطـی آن یکی شده است :

$$۴\sqrt{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۳۲ \,; \quad ۴ \times ۸ = ۳۲$$

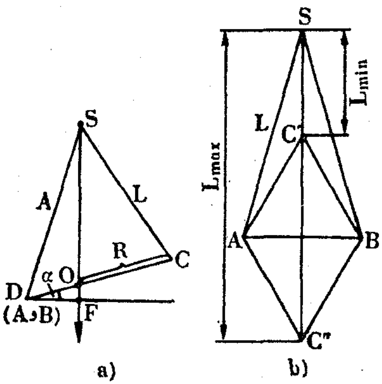
برای توکا هم عدد مساحت مربع $ABCD$ وعدد محیط مربع محاطی آن یکی شده است:

$$۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۸ \,; \quad ۴ \times ۲ = ۸$$

۲۰۵. به‌جای حلقهٔ به شعاع R ، مـی‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $a = R\sqrt{۳}$ را در نظر گرفت :

$$SD = \lambda = \sqrt{L^۲ - (\frac{a}{۲})^۲} = \sqrt{L^۲ - \frac{۳}{۴}R^۲}$$

با تغییر طول l نخ SC، وضع حلقـهٔ ABC در فضـا تغییر می‌کند؛ ضمناً (شکل ۹۱-a) طولهـای SA ، SB و SD بدون تغییر می‌مانـد و نقطهٔ O، مرکزحلقه ومثلث ، روی قائمی‌که ازنقطهٔS می‌گذرد ، باقی می‌ماند . محاسبه‌ها را انجام می‌دهیم :



شکل ۹۱

اگر از رابطهٔ $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ بـرای مساحت مثـلث

استفاده کنیم ، با توجه به مقدار λ ، داریم :

$$S_{DSC}=\frac{1}{4}\sqrt{6R^2L^2+3R^2l^2+2L^2l^2-9R^4-L^4-l^4}\ ;$$

$$cos(SDC)=\frac{\lambda^2+\left(\frac{3}{2}R\right)^2-l^2}{3\lambda R}\ ;$$

$$SO^2=\frac{2}{3}L^2-R^2+\frac{1}{3}l^2\ ;$$

$$S_{DSO}=\frac{1}{3}S_{DSC}=\frac{1}{2}DF\cdot SO\ ;$$

$$DF=\frac{2}{3}\cdot\frac{S_{DSC}}{SO}=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\frac{(L^2-l^2)^2}{6L^2+3l^2-9R^2}}\ ;$$

$$cos\alpha=\frac{DF}{DO}=\sqrt{1-\frac{(L^2-l^2)^2}{(6L^2+3l^2-9R^2)R^2}}\ ;$$

$$sin\alpha=\frac{L^2-l^2}{R\sqrt{3(2L^2+l^2-3R^2)}}$$

در مقدار $sin\alpha$ که به این ترتیب بدست آمده است بحث می‌کنیم :

۱) $sin\alpha=0$، وقتی‌است‌که $L^2-l^2=0$ باشد، یعنی وقتی $\alpha=0$ است که $L=l$ باشد ، نتیجه‌ای که برای ما روشن بود .

۲) وقتی $sin\alpha=1$ است که داشته باشیم :

$$L^2-l^2=R\sqrt{3(2L^2+l^2-3R^2)}$$

و یا:

$$l^2=L^2+\frac{3}{4}R^2\pm 3R\sqrt{L^2-\frac{3}{4}R^2}$$

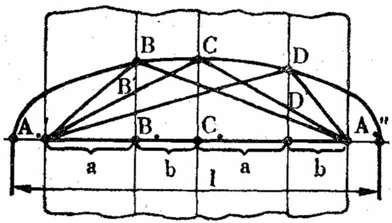
و از آنجا نتیجه می‌شود :

$$l=\sqrt{L^2-\frac{3}{4}R^2}\pm\frac{3}{2}R$$

البته این نتیجه را می‌توان مستقیماً و از بررسی شکل ۹۱ـb هم بدست آورد ؛ روشن است که اگر $SA=SB=SC=L$ باشد

$L \geqslant R$، واگر $SA = SB = L < SC$ باشد $R\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant L$ می‌شود.
نمونه‌ای بسازید و روی آن بـا تغییر طول نخ SC ، وضع حلقهٔ ABC را مطالعه کنید .

۲۰۶. ۱) مکعب مستطیل مفروض را روی‌یال A می‌بریم وشکل بازشدهٔ مستطیل را رسم می‌کنیم: پنج خط موازی بدست می‌آیدکه به ترتیب به‌فاصله‌های a، b، a و b از یکدیگر قرارگرفته‌اند (درازای مستطیل دراینجا هیچ‌اهمیتی ندارد). نقطه‌های $A'_{\circ}$ و $A''_{\circ}$، که‌روی عمودی بر خطهای موازی قرارگرفته است، دوانتهای نخ به‌طول $l > 2(a+b)$ را ثابت نگه می‌دارد . نخ به طول l ، در شکل باز شده ، به‌صورت خط شکسته‌ای است که دوانتهای آن درنقطه‌های $A'_{\circ}$ و $A''_{\circ}$ و رأسهـای آن روی سه خط موازی قـرار گرفته است (سه یال دیگـر قوطی).



شکل ۹۲

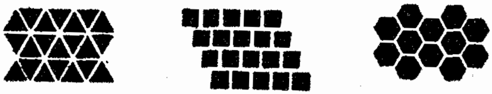
فاصلهٔ از $B_{\circ}$ تا نقطهٔ مجهول B (که روی یك یال قراردارند)، وقتی حداکثر است که هرسه ضلع خط شکسته ، از نقطهٔ B تا نقطهٔ $A''_{\circ}$ ، روی شکل باز شده ، برامتداد یك خط راست واقع باشند ($A'_{\circ}B$ را پاره‌خط راستی فرض می‌کنیم).
فاصلهٔ ازنقطهٔ $D_{\circ}$ تا نقطهٔ مجهول D (که روی همان یال قراردارد)، به شرطی حداکثر می‌شود که هرسه ضلع دیگر خط شکسته ، از D تا $A'_{\circ}$ روی یك خط راست واقع باشند ($A''_{\circ}D$ را پاره‌خط راستی در نظر می‌گیریم).
فاصلهٔ از نقطهٔ $C_{\circ}$ تا نقطهٔ مجهول C (که روی یك یال قراردارند)، وقتی حداکثر است که دو ضلع خط شکسته ، از C تا $A''_{\circ}$ روی یك خط راست و دو ضلع دیگر خط شکسته ، از C تا $A'_{\circ}$ هم روی یك

خط راست قرار داشته باشند (شکل ۹۲).

متذکر می‌شویم که این نقطه‌ها ، که روی شکل باز شده به A ، B و C نشان داده‌ایم، روی قوسی از یك بیضی قرار دارندکه کانونهای آن $A'_{\circ}$ و $A''_{\circ}$ و طول قطر بزرگترش مساوی l است .

۲) چون مثلث $A'_{\circ}CA''_{\circ}$ متساوی‌الساقین است و ضمناً داریم : $A'_{\circ}B_{\circ}=C_{\circ}D_{\circ}$ و $B_{\circ}C_{\circ}=D_{\circ}A''_{\circ}$ ، بنابراین خواهیم داشت: $A'_{\circ}B'=CD'$ و $B'C=D'A''_{\circ}$. یعنی‌ضلعهای‌روبرو درچهارضلعی $A_{\circ}B'CD'$ روی مکعب مستطیل ، دو به دو مساوی‌اند و بنابراین متوازی‌الاضلاع است.

۲۰۷. d را عرض نوار مجهول و b را فاصلهٔ مرکز شکل مفروض تا ضلع آن ، یعنی تا نزدیکترین ضلع نوار، می گیریم .



شکل ۹۳

روشن است که محورهای نوارها، شبکه‌ای درست مـی‌کنند که از شکلهایی (مثلث ، مربع یا شش ضلعی) متشابه با شکلهای مفروض تشکیل شده است .

B را فاصلهٔ مرکز یکی ازشکلهای شبکه تا ضلع آن می گیریم. دراین صورت : $B=b+\frac{d}{۲}$. طبق شرط مسأله ، باید داشته باشیم :

$$S_b \div S_B = ۱ \div n$$

ولی داریم :

$$S_b \div S_B = b^۲ \div B^۲$$

واز آنجا :

$$۱ \div n = b^۲ \div B^۲ = b^۲ \div \left(b+\frac{d}{۲}\right)^۲$$

وسپس

$$nb^۲ = b^۲ + bd + \frac{d^۲}{۴}$$

ویا:

$$d^۲ + ۴bd + ۴(۱-n)b^۲ = ۰$$

و ازآنجا:
$$d = 2b(\sqrt{n} - 1)$$
آیا این رابطه برای حالتی که کفپوش از لوزیهایی به زاویهٔ ۶۰ درجه درست شده است، صحیح است؟ برای لوزیهای غیر مشخص چطور ؟

۲۰۸. درمسأله هیچ اندازه‌ای مشخص نشده است، به‌همین مناسبت طول ضلع مربع (رومیزی) را a می گیریم و ... بیشتر از این هیچ چیز لازم نیست . فرض می کنیم میز گردی در مقابل ما باشد که رومیزی مربع شکلی روی آن انداخته باشند ؛ ببینیم اگر قطر میز شروع به‌بزرگ شدن کند ، چه وضعی پیش می‌آید ؟ فاصلهٔ رأسهای مربع رومیزی اززمین مرتباً کم می‌شود ، در عین حال فاصلهٔ مرکز ضلعهای رومیزی از زمین هم به‌همان اندازه کم می‌شود. در این صورت اختلاف این دو فاصله ، تغییری نمی کند .

به این ترتیب، اختلاف فاصله‌ای که باید محاسبه کنیم، به اندازه‌های میز هیچگونه ارتباطی ندارد .

حالا ، برای اینکه بتوانیم مسأله را ساده‌تر حل کنیم ، قطر میز را مساوی ضلع مربع رومیزی می گیریم. در این حالت ، وسط ضلعهای مربع روی میز قرارمی گیرند (یعنی آویزان نیستند)، و هررأس مربع رومیزی به اندازهٔ اختلاف نصف قطر رومیزی و شعاع میز (که در اینجا مساوی نصف ضلع رومیزی است) آویزان می‌شود . به این ترتیب مقدار مجهول مسأله ، برابر است با نصف اختلاف بین قطر و ضلع مربع ، یعنی:

$$\frac{1}{2}(a\sqrt{2} - a) = (\sqrt{2} - 1)\frac{a}{2} \# 0/207a$$

برای حل مسأله ، فرض کردیم که شعاع میز مرتباً بزرگ شود ؛ می‌توان شعاع میز را ثابت گرفت و فرض کرد که رومیزی مرتباً کوچك شود .

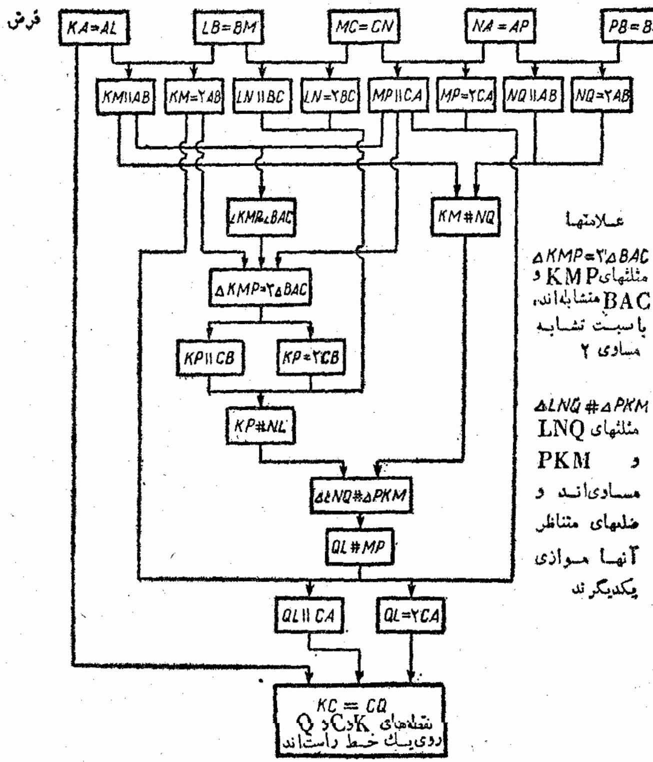
اگر اندازهٔ رومیزی را ثابت فرض کنیم و شعاع میز را مرتباً کوچك کنیم تا به یك نقطه تبدیل شود، چه پیش می‌آید ؟ در این صورت هم ، اختلاف مورد نظر برابر است با نصف اختلاف قطر و ضلع

رومیزی ، یعنی همان جواب قبلی را بدست می‌آوریم . پارچهٔ مربع شکل پرچم، در هوای بدون باد، به‌منزلهٔ «یك چهارم رومیزی است که روی میز دایره‌ای به قطر صفر قرار گرفته باشد».

مسأله. شرطهای همین مسأله را در نظر بگیرید ، با این تفاوت که دیگر مرکز رومیزی بر مرکز سطح میز قرار نگرفته است. در این صورت مجموع پاره‌خطهایی که چهار رأس آویزان رومیزی تشکیل داده‌اند ، با مجموع پاره‌خطهایی که وسط چهارضلع آویزان تشکیل داده‌اند ، چقدر اختلاف دارد ؟

مسأله. همین شرطها را درنظر بگیرید ، با این تفاوت که رومیزی، مستطیلی به بعدهای $a \times b$ باشد .

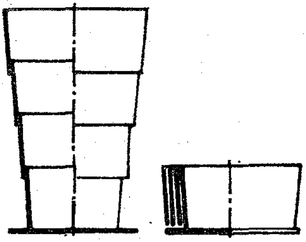
۲۰۹. برای اینکه اثبات ساده‌تر انجام گیرد و معلوم شود ، از شرطهای



شکل ۹۴

مسأله چه نتیجه‌هایی بدست می‌آید و سپس از آنها چه نتیجه‌های دیگری پیدا می‌شود و غیره ، فرضها را در یك سطر قرار می‌دهیم و سپس به کمك پیکان نتیجه‌هایی که از آنها بدست می‌آیدنشان می‌دهیم و این روش را ادامه می‌دهیم تا به‌نتیجهٔ مورد نظر برسیم . این‌روش بخصوص برای‌این مسأله‌مفید است و کار نتیجه‌گیری را ساده می‌کند.

۲۱۰. به‌خاطر می‌آوریم که شکل و اندازه‌های هرتصویر هندسی، به وسیلهٔ چند پارامتر مستقل ازهم معین می‌شود؛ لااقل یکی از این پارامترها، باید خطی باشد (و یا کلی‌تر ، درجهٔ خطی لااقل یکی از پارامتر ، صفر نباشد) ؛ مثلا مثلث با سه پارامتر، چهارضلعی مسطح با پنج پارامتر ، مکعب با یك پارامتر ، هرم مثلث‌القاعده با شش پارامتر و غیره مشخص می‌شود . پارامتر ، می‌تواند به طریقه‌های مختلف انتخاب شود ؛ مثلا برای مکعب می‌توان ضلع ، یا قطر وجه، یا قطر کرهٔ محاطی ، یا مساحت یکی از وجه‌ها ، یا مساحت کل ، یا حجم ، یا حجم کرهٔ محاطی ، یا تفاضل ضلع از قطر ، یا حاصلضرب قطر در حجم ، یا خارج قسمت حجم بر حاصلضرب قطر مکعب در قطر وجه ، و غیره را به عنوان پارامتر انتخاب کرد .



شکل ۹۵

وابسته نبودن پارامترها به یکدیگر، که برای مشخص کردن شکل لازم است، ارتباطی به نوع انتخاب پارامتر ندارد . وابسته نبودن پارامتر را با روشهای مختلف می‌توان معین کرد که ساده‌تر از همه، استفادهٔ از پارامترها، بطور متوالی، برای ساختن شکل است .

لیوان تاشو ، مجموعه‌ای از چند جسم دوار است : صفحهٔ گرد (استوانهٔ قائم دوار) و چند مخروط ناقص توخالی .

مخروطهای توخالی ، پارامترهای مشترکی دارند : ارتفاع ، زاویهٔ رأس و ضخامت جدار.

برای معین بودن کف، دو پارامتر لازم است (مثلاً قطر وضخامت).

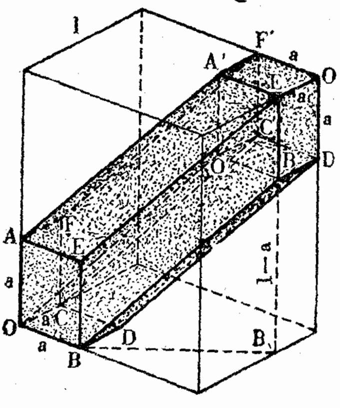
برای معین بودن حلقهٔ پایینی ، چهار پارامتر لازم است (مثلاً قطر داخلی و قطر بیرونی قاعدهٔ پایین، ارتفاع و حجم داخلی).

برای مشخص کردن حلقه‌های بعدی، تنها به‌یك‌پارامتراحتیاج داریم (مثلاً ارتفاع) .

بالاخره باید تعداد حلقه‌ها (یا ارتفاع مشترك آنها، یا گنجایش لیوان، با حجم ماده‌ای کـه برای ساختن لیوان بکار رفته است و غیره) را بدانیم .

به این ترتیب ، روی‌هم ۱ + ۱ + ۴ + ۲ ، یعنی ۸ پـارامتر لازم داریم .

۲۱۱. چند وجهی مورد نظر، یك دوازه وجهی است. شش (سه زوج) صفحهٔ قاطع (همهٔ آنها با قطر OO_1 مکعب موازی‌اند) ، یك منشور شش وجهی تشکیل می‌دهند . این منشور ، به وسیلهٔ شش وجه مکعب ، بریده می‌شود . بنابراین ، شش وجه این دوازده وجهی ، متوازی‌الاضلاعهایی هستند که دو ضلع از هرکدام آنها موازی قطر مکعب است، و شش وجه دیگر، مربعهایی به ضلع a.



شکل ۹۶

حجـم چند وجهـی را معین می‌کنیم . بـرای این منظور آنرا به‌چهارقسمت، می‌کنیم. $OBDCO'B'D'C'$ منشـور مایلـی است با قاعدهٔ مـربع شکـل ؛ ارتفاع این منشور مساوی $l-a$ و حجـم آن مساوی $a^2(l-a)$ می‌شود . چند وجهـی مورد نظر مـا تشکیل‌شده است از سه‌منشور مایل ، مساوی منشور فوق و یك مکعب $O'B'D'C'A'E'O_1F'$.

بنابراین حجم آن چنین می‌شود :

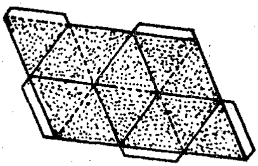
$$V = ۳a^۲(l-a) + a^۳ = ۳a^۲l - ۳a^۳ + a^۳ =$$
$$= ۳a^۲l - ۲a^۳ = (۳l - ۲a)a^۲$$

۲۱۲. چند ضلعی که درشکل ۱۹-d ، نشان داده‌شده است، گستردهٔ یك چند وجهی مقعر است که به این ترتیب درست شده است: روی هروجه یك چهار وجهی منتظم، چهار وجهی منتظمی مساوی خود آن قرار دهید، یك چند وجهی ستاره‌ای بدست می‌آید که تعداد وجه‌های آن مساوی: ۱۲ = ۳ × ۴ است، همچنین تعداد یالهای آن مساوی :

$$۱۸ = \frac{۴ \times ۳}{۲} + ۳ \times ۴ \text{ وتعداد رأسهای آن‌مساوی } ۸ = \frac{۳ \times ۴}{۳} + ۴$$

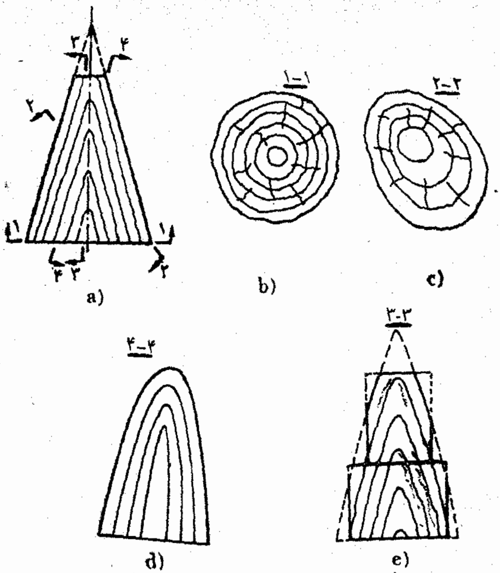
می‌باشد.

توضیح. فرض می‌کنیم، چند ضلعی گسترده را روی یك کاغذ کلفت ، یاروی یك مقوا رسم کرده باشیم. برای اینکه بتوانیم‌راحت‌تر آنرا تا کنیم ، بهتراست، مقوارا روی همهٔ قطرهای شکل گسترده ، یعنی یالهای چند وجهی، مختصری ببریم. طبیعی‌است که‌وقتی چندوجهی محدب‌باشد، روی یالهارا ازیك طرف مقوا می‌بریم، و اگر (مثل مسألهٔ ما) با چندوجهی مقعر سروکار داشته باشیم، از دوطرف مقوا و ما این وضع را در شکل ۹۷، روی قطرها، نشان داده‌ایم.



شکل ۹۷

۲۱۳. تیرچوبی را می‌توان مخروط قائمی دانست، که موازی قاعده‌اش قطع شده است؛ روی قاعده‌های بالا و پایین این مخروط ناقص ، می‌توان به روشنی سالهای عمر درخت را شمرد (اگر دقیقتر بخواهیم، تعداد زمستانهایی را که درخت گذرانده است). به‌این ترتیب، تیر چوبی را می‌توان دستگاهی ازمخروطهای ناقص دانست (شکل ۹۸ — a)، به‌نحوی که تعدادمخروطها، برابر است باتعداد سالهای عمردرخت. به همین مناسبت ، اگر آنرا در جهت عمود برمحور قطع کنیم ، دایره‌هایی ظاهر می‌شود (شکل ۹۸-b)؛ در مقطعی که عمود برمحور نباشد، بیضی‌ها (شکل۹۸-c)؛ درمقطع‌طولی (مثلادرسطح‌تخته‌ها)،



شکل ۹۸

هذلولیها (شکل d–۹۸) ؛ در مقطع محوری ، یعنی وقتی‌که صفحهٔ مقطع ازمحورتیر بگذرد، خطهای راستی که‌درراًس تنهٔ درخت به‌هم می‌رسند (شکل a–۹۸) و بالاخره ، وقتی که مقطع موازی با یکی ازمولدهای‌مخروط‌باشد، قشرهای‌نمایندهٔ‌سالهای‌عمر درخت سهمیهایی نشان خواهند داد (شکل e–۹۸).

۲۱۴. a) داریم:

$$v_1:v_2:v_3=\lambda_1\mu_1\gamma_1:\lambda_2\mu_2\gamma_2:\lambda_3\mu_3\gamma_3$$

و از آنجا:

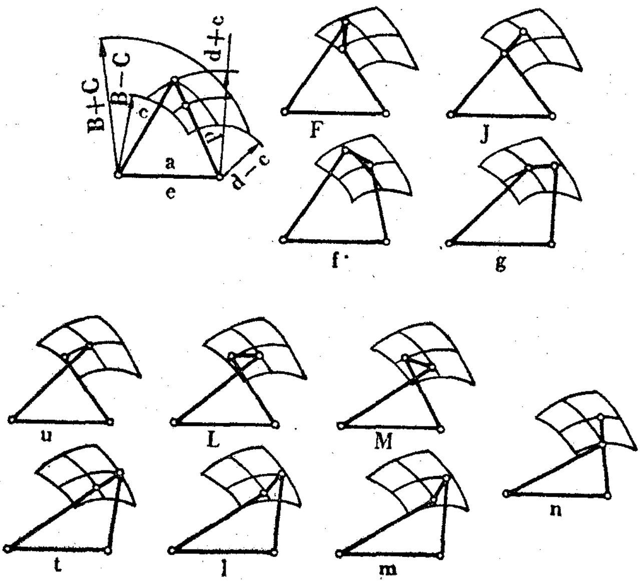
$$v_1=\frac{\lambda_1\mu_1\gamma_1}{\lambda_1\mu_1\gamma_1+\lambda_2\mu_2\gamma_2+\lambda_3\mu_3\gamma_3}v$$

$$v_2=\frac{\lambda_2\mu_2\gamma_2}{\lambda_1\mu_1\gamma_1+\lambda_2\mu_2\gamma_2+\lambda_3\mu_3\gamma_3}v$$

$$v_3=\frac{\lambda_3\mu_3\gamma_3}{\lambda_1\mu_1\gamma_1+\lambda_2\mu_2\gamma_3+\lambda_3\mu_3\gamma_3}v$$

b) $v_1 = v_2 = v_3 = \frac{v}{3}$ (در این باره فکر کنید که، بدون استفاده از حالت کلی a)، چگونه می‌توان مستقیماً این جواب را پیدا کرد).

۲۱۵. پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم. دو انتهای این پاره‌خط، دو رأس ازهمهٔ چهارضلعیهای‌مورد بررسی است. دایره‌هایی به‌مرکز دوانتهای این پاره‌خط، و یکی به شعاع مساوی b و دیگری به‌شعاع مساوی d رسم می‌کنیم. رأسهای سوم وچهارم این‌چهارضلعیها، تنها می‌تواند روی این دایره‌ها باشد. ولی کجا ؟



شکل ۹۹

فرض می‌کنیم داشته باشیم: $b>c<d$. علاوه بردایرهٔ به شعاع b، به‌همان مرکز، دایره‌هایی به‌شعاعهای $b+c$ و $b-c$ رسم‌می‌کنیم؛ این قوسها حدودی راکه انتهای دوم ضلع d می‌تواند روی‌آن قرار گیرد، مشخص می‌کند.

به همین ترتیب، علاوه بردایرهٔ به شعاع d، به همان مرکز، دایره-

هایی بـه شعاعهای $d+c$ و $d-c$ رسم می‌کنیم ، این قوسها هم ، حدودی را کـه انتهای دوم ضلع b می‌تواند روی آن قرار گیرد ، مشخص می‌کند.

با توجه به ضلع d ، پاره‌خط c می‌تواند یکی از دو نقطهٔ انتهایی را اشغال کند، ضمناً در این دو حالت، پاره‌خطهای d و c روی یك خط راست قرار می‌گیرند؛ در حالت اول ضلع چهارضلعی مـورد نظر در امتداد ضلع d خواهد بود، ودر حالت دوم ، ضلع c کاملا روی ضلع d واقع می‌شود. در حالت اول ، چهارضلعی به مثلث تبدیل می‌شود (شکل ۹۹-e).

همین شکل را مبنا قـرار می‌دهیم و شکلهای ممکنهٔ چهارضلعی را بررسی می‌کنیم. انتهای آزاد پاره‌خط d می‌تواند یا در داخل مثلث ویا در خارج مثلث تغییر کند.

با تغییر انتهای آزاد پاره‌خط d ، حالتهای مختلفی که در شکل ۹۹ نشان داده شده است، به وجود می‌آید.

۲۱۶. گستردهٔ سطح جانبی استوانهٔ قائم دواری که به‌وسیلهٔ صفحهٔ ناموازی با قاعده‌اش، قطع شده است، در شکل ۱۰۰-a نشان داده شده است. این، یك منحنی سینوسی است. در حقیقت داریم (شکل ۱۰۰-b):

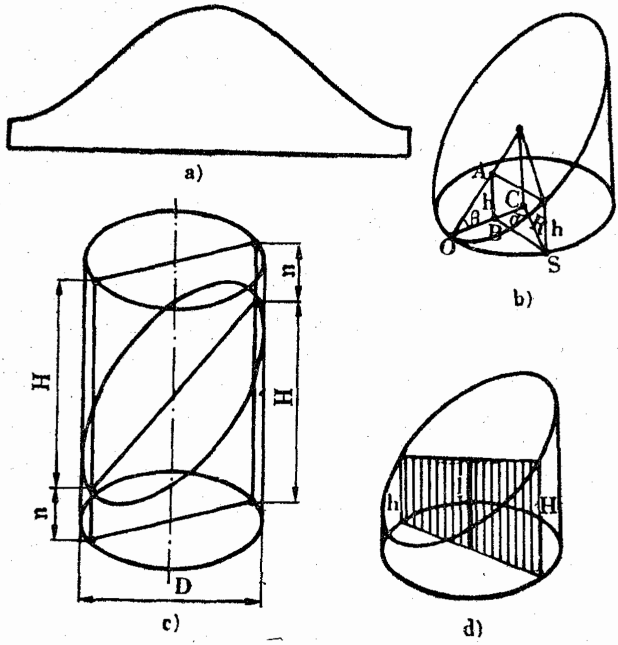
$$OB = R - BC = R - R\cos\alpha = (1 - \cos\alpha)R ,$$

$$h = OB . tg\beta = tg\beta(1 - \cos\alpha)R$$

مساحت گستردهٔ سطح جانبی را، با دو روش می‌توان بدست آورد.

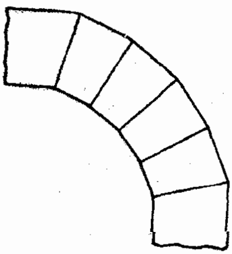
روش اول. استوانهٔ ناقص مفروض را تا استوانهٔ کاملی به ارتفاع $H+h$ بزرگ می‌کنیم (شکل ۱۰۰-c). کاملا روشن است که قسمت اضافی هم، یك استوانهٔ ناقص است که ضمناً با استوانهٔ ناقص مفروض متقارن است (قرینهٔ مرکزی). به‌این ترتیب، دواستوانهٔ ناقص باهم برابرند؛ بنابراین، سطح جانبی استوانهٔ ناقص برابراست با نصف سطح جانبی استوانهٔ کامل. سطح جانبی استوانهٔ دواری که بدست آورده‌ایم، برابر است با : $S_0 = \pi D(H+h)$ ؛ درنتیجه، سطح جانبی استوانهٔ ناقص مفروض ، چنین می‌شود:

$$S = \frac{۱}{۲}S_{\circ} = \frac{۱}{۲}\pi D(H+h)$$



شکل ۱۰۰

روش دوم. هرمقطع محوری ازهراستوانهٔ دواری (حتی غیرقائم)، که به وسیلهٔ صفحه‌ای ناموازی با قاعده، بریده شده باشد ، عبارت است از یك ذوزنقه (شکل d–۱۰۰) ؛ بنابراین مجموع طولهای دومولد اصلی ، یعنی مجموع دو قاعدهٔ ذوزنقه ، برابر است با دو برابر خط میانهٔ ذوزنقه (η۳) : بنابـراین ، ارتفاع متوسط گسترده برابراست با $\eta = \frac{H+h}{۲}$.



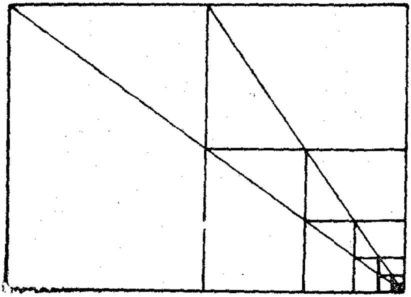
شکل ۱۰۱

از آنجا $S = \pi D\eta = \pi D\frac{H+h}{۲}$

این رابطه، برای هراستوانه‌ای که قاعدهٔ آن، نسبت به‌مرکز متقارن باشد، درست است.

توضیح . استوانهٔ ناقص ، در عمل مورد استفادهٔ زیاد دارد، مثلاً در زانوهای لوله‌های آب، که از قطعه‌های جدا از هم درست شده است (شکل ۱۰۱) .

۲۱۷. بنابرفرض مسأله ، هر برگ متشابه با برگ قبلی است و ضمناً مساحت آن نصف مساحت برگ کاغذ قبلی است . از اینجا نتیجه می‌شود که ضلع هر مستطیل باید $\sqrt{۲}$



شکل ۱۰۲

برابر ضلع نظیرش در مستطیل بعدی باشد؛ و چون در دو مستطیل پشت سرهم، یکی از ضلعها، تغییر نمی‌کند (شکل ۱۰۲)، نسبت دو ضلع هر مستطیل مساوی $\sqrt{۲}$ می‌شود (معمولاً نسبت طول ضلعهای برگهای کاغذ ، به همین اندازه است ، مثلا در مورد کاغذ به قطع ۲۱۰ × ۲۹۷ میلیمتر داریم: $۲۹۷ \div ۲۱۰ \approx \sqrt{۲}$).

۲۱۸. ابتدا ، تصاعدی راکه از بریدن نوار ، روی امتداد شعاع ، بدست می‌آید، بررسی می‌کنیم.

ضخامت هر قشر (نوار) : $\delta = \frac{D-d}{۲n}$؛

مساحت حلقه‌ای که از نوار درست شده است :

$$S = \frac{\pi}{۴}(D^۲ - d^۲)$$

طول نوار : $L = \frac{S}{\delta} = \frac{\pi(D+d)(D-d)}{۴(D-d)} ۲n = \frac{D+d}{۲}\pi n$

طول نوار قشر اول :

$$l_۱ = \pi\left(d + \frac{D-d}{۲n}\right) = \frac{(۲n-۱)d + D}{۲n}\pi$$

طول نوار قشر آخر :

$$l_{\mathrm{n}} = \pi\left(D - \frac{D-d}{۲n}\right) = \frac{(۲n-۱)D+d}{۲n}\pi$$

قدر نسبت تصاعد :

$$q = \frac{l_{\mathrm{n}} - l_۱}{n-۱} = \frac{\pi}{۲n(n-۱)} \times$$

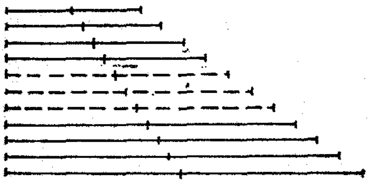
$$\times\left[\, (۲n-۱)D + d - (۲n-۱)d - D \,\right] = \frac{D-d}{n}\pi$$

به دو طریق می‌توان؛ تصاعدی با $۲n$ جمله بدست آورد.

طریق اول . دوقطعهٔ هردور، دوجملهٔ متوالی ازتصاعد باشند (شکل ۱۰۳). در این صورت، مجموع دو جملهٔ دور kام برابر است با :

$$l'_{۲\mathrm{k}} + l'_{۲\mathrm{k}+۱} = l'_{۲\mathrm{k}} + $$
$$+ l'_{۲\mathrm{k}} + q' = ۲l'_{۲\mathrm{k}} + q'$$

و مجموع دو جملـهٔ بعدی ، $(k+۱)$ امین دور برابراست با :



شکل ۱۰۳

$$l'_{۲\mathrm{k}+۲} + l'_{۲\mathrm{k}+۳} =$$
$$= (l'_{۲\mathrm{k}} + ۲q') + (l'_{۲\mathrm{k}} + ۳q') = ۲l'_{۲\mathrm{k}} + ۵q'$$

بنابراین طول دور $(k+۱)$ام به اندازهٔ $۵q' - q' = ۴q'$ ، از طول دور k ام بیشتر است. از طرف دیگر می‌دانیم‌که طول هردور ، از طول دور قبلی به‌اندازهٔ q بزرگتر است. به‌این ترتیب:

$$q' = \frac{۱}{۴}q = \frac{D-d}{۴n}\pi \;,$$

$$l'_۱ = \frac{۱}{۲}(l_۱ - q') = \frac{۱}{۲}\left[\frac{(۲n-۱)d+D}{۲n}\pi - \frac{D-d}{۴n}\pi\right] =$$

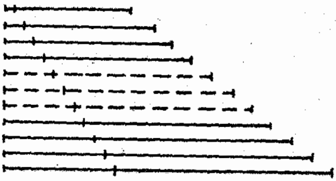
$$= \frac{\pi}{۸n}[(۴n-۱)d + D]$$

حالا دیگر به‌سادگی طول هرقطعه از نوار جدید، بدست می‌آید.

سؤالی پیش می‌آید : بریدگیهای جدید نوار، روی‌میله چگونه قرار گرفته‌اند؟آیا آنها هم‌روی‌یك شعاع‌قراردارند؟ نه!زیرا، بعد ازبرش اول (روی شعاع)، هربرش دیگری که روی شعاع به‌وجود آید، هر

دور را به دو قسمت می‌کند، که البته نسبت آنها به‌یکدیگر، بستگی به‌جای برش دوم دارد، ولی این نسبت، برای همهٔ دورها یکی است؛ درحالی‌که برای‌ما باید تفاضل این دوقطعه، مقدارثابتی‌باشد (مساوی q')، بنا براین نسبت آنها نمی‌تواند مقدارثابتی شود. برش دوم روی یك منحنی (شبیه یك پیچ) قرار دارد.

طریق دوم . n جملهٔ اول تصاعد مورد نظر، به‌ترتیب مساوی یکی ازقطعه‌های دور اول، دور دوم،... ودور nام است ؛ جملهٔ $(n+1)$ ام تصاعد مورد نظر مساوی



شکل ۱۰۴

باقیماندهٔ نوار دور اول ، جملهٔ $(n+2)$ام مساوی باقیماندهٔ نوار دور دوم وغیره (شکل ۱۰۴).

دراین حالت، جملهٔ kام تصاعد (که در آن $k \leqslant n$)، به‌اندازهٔ q'' از جملهٔ $(k-1)$ام بزرگتر است (q'' قدر نسبت تصاعد مجهول است). به‌همین ترتیب جملهٔ $(k+n)$ام به‌اندازهٔ q'' از جملهٔ $(k+n-1)$ ام بزرگتراست. به این ترتیب:

$$\left(a_k + a_{k+n}\right) - \left(a_{k-1} + a_{k+n-1}\right) = 2q''$$

ولی $a_k + a_{k+n}$، طول kامین دور نوار؛ $a_{k-1} + a_{k+n-1}$،طول $(k-1)$ امین دور نوار است، از اینجا نتیجه می‌شود که قدر نسبت تصاعد مجهول، مساوی نصف قدر نسبت تصاعد اول است، یعنی

$$q'' = \frac{1}{2}q = \frac{D-d}{2n}\pi$$

جملهٔ اول‌تصاعدجدیدرا l''_1می‌نامیم،چون‌داریم: $l''_1 + l''_{n+1} = l_1$،

یعنی $\dfrac{(2n-1)d+D}{2n}\pi = l''_1 + l''_1 + nq''$،

بنابراین :

$$2l''_1=\frac{\pi}{2n}[(2n-1)d+D-nD+nd]\,;$$

$$l''_1=\frac{\pi}{4n}[(3n-1)d-(n-1)D]\,;$$

$$l''_n=l''_1+(n-1)q''=\frac{\pi}{4n}[(3n-1)d-(n-1)D]+$$

$$+\frac{n-1}{2n}(D-d)\pi=\frac{\pi}{4n}[(n-1)d+(n-3)D]\,;$$

$$l''_{n+1}=l''_1+nq''=\frac{\pi}{4n}[(n-1)d+(n+1)D]$$

ولی این جواب، برای هرمقدار دلخواه d، D و n قابل قبول نیست. شرط وجود جواب این است‌که $q''.n\leqslant l_1$ باشد، یعنی :

$$\frac{D-d}{2n}\pi n\leqslant\frac{(2n-1)d+D}{2n}\pi\,;$$

$$(D-d)n\leqslant(2n-1)d+D\,;$$

$$(n-1)D\leqslant(3n-1)d\implies d\geqslant\frac{n-1}{3n-1}D$$

برای $q''.n=l_1$ ، باید داشته باشیم : $l''_1=0$ ، یعنی :

$$\frac{\pi}{4n}[(3n-1)d-(n-1)D]=0$$

ویا $(3n-1)d=(n-1)D$. این شرط ، از رابطهٔ زیر هم نتیجه می‌شد :

$$d=\frac{n-1}{3n-1}D$$

برای حالتهای خاصی‌که n مساوی ۲ یا ۳ یا ۴ است، باید به‌ترتیب داشته باشیم : $d\geqslant\frac{1}{5}D$ یا $d\geqslant\frac{1}{4}D$ یا $d\geqslant\frac{3}{11}D$.

شرط وجود جواب را، به این صورت هم می‌توان نوشت :

$$n\leqslant\frac{D-d}{D-3d}\quad(\text{n عددی است صحیح})$$

دو پاره‌خطی که از برش هردور نوار ، در این حالت بدست می‌آید ،

به اندازهٔ مقدار ثابت $nq''=\frac{D-d}{۲}\pi$ بـا هم اختلاف دارند ، و

بنابراین مثل حالت اول، دراینجا هم برش دوم روی شعاع نمی‌تواند باشد و روی یك منحنی قرار گرفته است.

۲۱۹. a) فرض می‌کنیم $a \leqslant b$ باشد، در این صورت بزرگترین مربعی که می‌تواند وجود داشته باشد، به ضلع مساوی a است. بنابراین ، در داخل مستطیل مفروض (با خطهایی که موازی ضلعهای آن رسم کرده‌ایم)، مربعهایی با ضلعهای مساوی ۱، ۲ ، ۳ ، ... و a واحد به وجود می‌آید. روی‌هم چند مربع خواهد بود؟جدول زیررا تشکیل می‌دهیم :

تعداد مربعهای به ضلع واحد $=a.b$ ،

تعداد مربعهای به ضلع ۲ واحد $=(a-۱)(b-۱)=$
$=ab-(a+b)+۱$ ،

تعداد مربعهای به ضلع ۳ واحد $=(a-۲)(b-۲)=$
$=ab-۲(a+b)+۲^۲$ ،

. . . .

تعداد مربعهای به ضلع a واحد $=[a-(a-۱)][b-(a-۱)]=$
$=ab-(a-۱)(a+b)+(a-۱)^۲$

و اگر تعداد همهٔ مربعها را Σ بنامیم، داریم:

$$\Sigma=ab.a-[۰+۱+۲+\ldots+(a-۱)].(a+b)+$$
$$+[۰^۲+۱^۲+۲^۲+\ldots+(a-۱)^۲]=$$
$$=a^۲b-\frac{a-۱}{۲}a(a+b)+\frac{۲a^۲-۳a+۱}{۶}a=$$
$$=a\left[ab-\frac{a-۱}{۲}(a+b)+\frac{۲a^۲-۳a+۱}{۶}\right]=$$
$$=\frac{a}{۶}(۶ab-۳a^۲-۳ab+۳a+۳b+۲a^۲-۳a+۱)=$$
$$=\frac{a(a+۱)}{۶}(۳b-a+۱)$$

این رابطه، برای موقعی هم که متوازی‌الاضلاع را به لوزیهایی تقسیم کنیم، درست است.

b) جواب برای $a \leqslant b$ ، $a \leqslant c$:

$$\Sigma = \frac{a(a+1)}{12}\{6bc-(a-1)[2(b+c)-a]\}$$

c) فرض می‌کنیم a ، کوچکترین عدد، بین عددهای a، b، c، ...، k، l، m باشد. جدول را تشکیل می‌دهیم:

تعداد شکلهای به ضلع واحد $= abc \ldots klm$ ،

تعداد شکلهای به ضلع ۲ واحد $= (a-1)(b-1)(c-1)\ldots(k-1)(l-1)(m-1)$ ،

تعداد شکلهای به ضلع ۳ واحد $= (a-2)(b-2)(c-2)\ldots(k-2)(l-2)(m-2)$ ،

تعداد شکلهای به ضلع (a−2) واحد $= [a-(a-3)][b-(a-3)] \times [c-(a-3)]\ldots[k-(a-3)] \times [l-(a-3)][m-(a-3)]$ ،

تعداد شکلهای به‌ضلع(a−1) واحد $= [a-(a-2)][b-(a-2)] \times [c-(a-2)]\ldots[k-(a-2)] \times [l-(a-2)][m-(a-2)]$

تعداد شکلهای به ضلع a واحد $= [a-(a-1)][b-(a-1)] \times [c-(a-1)]\ldots[k-(a-1)] \times [l-(a-1)][m-(a-1)]$

حاصلضرب $abc \ldots klm$ را s وتعدادکل همهٔ شکلهارا Σ_n می‌نامیم، داریم:

$$\Sigma_n = as - \left[1+2+\ldots+(a-1)\right]\left[\frac{s}{a}+\frac{s}{b}+\ldots+\frac{s}{l}+\frac{s}{m}\right]+\left[1^2+2^2+\ldots+(a-1)^2\right]\left[\frac{s}{ab}+\frac{s}{ac}+\ldots+\frac{s}{lm}\right]-\left[1^3+2^3+\ldots+(a-1)^3\right]\times$$

$$\times\left[\frac{s}{abc}+\frac{s}{abd}+\ldots+\frac{s}{klm}\right]+\ldots+(-۱)^{n-۱}\times$$

$$\times\left[۱^{n-۱}+۲^{n-۱}+\ldots+(a-۱)^{n-۱}\right](a+b+\ldots+$$

$$+m)+(-۱)^{n}\left[۱^{n}+۲^{n}+\ldots+(a-۱)^{n}\right]=$$

$$=as-\frac{a(a-۱)}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\ldots+\frac{۱}{m}\right)s+$$

$$+\frac{a(a-۱)}{۲}\cdot\frac{۲(a-۱)}{۲}\times\left[\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{ac}+\ldots+\frac{۱}{lm}\right]s-$$

$$-\frac{a(a-۱)}{۲}\cdot\frac{a(a-۱)}{۲}\left]\frac{۱}{abc}+\ldots+\frac{۲}{klm}\right]s+$$

$$+\ldots+(-۱)^{n}\left[۱^{n}+۲^{n}+\ldots+(a-۱)^{n}\right]=$$

$$a\left[۱-\frac{a-۱}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\ldots+\frac{۱}{m}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a(a-۱)}{۲}\cdot\frac{۲a-۱}{۳}\left(\frac{۱}{ab}+\ldots+\frac{۱}{lm}\right)-\ldots\right]s+$$

$$+(-۱)^{n}\left[۱^{n}+۲^{n}+\ldots+(a-۱)^{n}\right]$$

برای حالت خاص $a=b=c\ldots=k=l=m$ داریم:

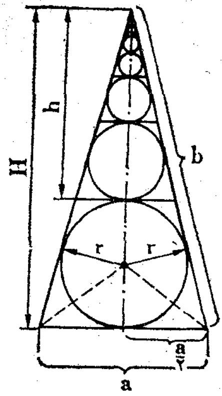
$$\Sigma_n=۱^{n}+۲^{n}+\ldots+a^{n}$$

۲۲۰. شعاع دایرهٔ محاط در مثلث متساوی‌الساقین (منظور اولین دایره است)، برابر است با (شکل ۱۰۵):

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)^{۲}}{p}}=(p-b)\sqrt{\frac{p-a}{p}}=$$

$$=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

و مساحت این دایرهٔ محاطی چنین می‌شود:



شکل ۱۰۵

$$S_{\circ} = \pi r^{۲} = \frac{\pi}{۴}\cdot\frac{p-a}{p}\cdot a^{۲}$$

سپس

$$h = H - ۲r = H - a\sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

و بالاخره

$$h \div H = ۱ - \frac{a^{۲}\sqrt{p-a}}{۲\sqrt{p}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)^{۲}}} =$$

$$= ۱ - \frac{a^{۲}}{۲p(p-b)} = ۱ - \frac{a^{۲}}{p\cdot a} =$$

$$= ۱ - \frac{a}{p} = \frac{p-a}{p}$$

مثلثهای متساوی‌الساقینی که از مثلث متساوی‌الساقین مفروض، با رسم مماس بر دایرهٔ محاطی آن به موازات قاعده، بدست می‌آیند، با هم متشابه‌اند. عنصرهای خطی هرمثلث بعدی، نسبت به هنصرهای نظیر درمثلث قبلی، به نسبت $h \div H$ هستند، یعنی عنصرهای متناظر مثلثها، یك تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبت: $q = \frac{p-a}{p}$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، مساحتهای این مثلثها (همچنین دایره‌های محاطی آنها)، یك‌تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبت $q_{\circ} = q^{۲} = \frac{(p-a)^{۲}}{p^{۲}}$ تشکیل می‌دهند . به این‌ترتیب باید مجموع بی‌نهایت جمله از یك تصاعد هندسی نزولی را که جملهٔ اول آن $a_{۱}$ است محاسبه می‌کنیم:

$$a_{۱} = S_{\circ} = \frac{\pi}{۴}\cdot\frac{p-a}{p}a^{۲}\ .$$

$$\Sigma = \frac{a_{۱}}{۱-q_{\circ}} = \frac{\pi(p-a)a^{۲}}{۴p\left[۱-\frac{(p-a)^{۲}}{p^{۲}}\right]} =$$

$$= \frac{\pi(p-a)a^{۲}p}{۴[p^{۲}-p^{۲}+۲ap-a^{۲}]} = \frac{\pi(p-a)ap}{۴(۲p-a)} =$$

$$= \frac{\pi(p-a)ap}{۸b}$$

اگر شعاع دایرهٔ مطلوب را $R_۰$ بگیریم، داریم :

$$\pi R_۰^۲ = \frac{\pi(p-a)ap}{۸b} \Longrightarrow R_۰ = \sqrt{\frac{(p-a)pa}{۸b}}$$

راه‌حل دیگر. مساحت اولین ذوزنقه :

$$S_T = \left[۱ - \left(\frac{h}{H}\right)^۲ \right] S_\Delta = \left[۱ - \left(\frac{p-a}{p}\right)^۲ \right] S_\Delta =$$

$$= \frac{۲ab}{p^۲} S_\Delta$$

آن قسمت از مساحت ذوزنقه، که به وسیلهٔ دایره اشغال می‌شود :

$$\sigma = \frac{S_۰}{S_T} = \frac{\pi(p-a)a^۲ p^۲}{۴p.۲ab.S_\Delta} = \frac{\pi(p-a)ap}{۸b.S_\Delta}$$

چون همهٔ ذوزنقه‌های متوالی با دایرهایی که در آنها محاط هستند، با ذوزنقهٔ اول و دایرهٔ محاط در آن متشابه‌اند ، این نسبت برای همهٔ ذوزنقه‌ها، و درنتیجه برای مجموع آنها، درست است. به‌این ـ ترتیب مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی برابر است با :

$$\sigma.S_\Delta = \frac{\pi(p-a)p}{۸} \cdot \frac{a}{b}$$

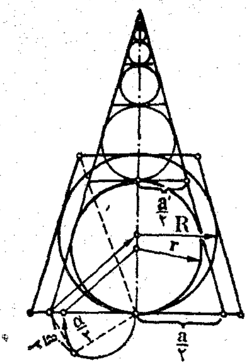
واز آنجا :

$$R_۰ = \sqrt{\frac{\sigma S_\Delta}{\pi}} = \sqrt{\frac{(p-a)p}{۸} \cdot \frac{a}{b}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(b^۲ - \frac{a^۲}{۴}\right)a}{۸b}} = \frac{H}{۲}\sqrt{\frac{a}{۲b}}$$

روش ساختن دایرهٔ مطلوب. به این ترتیب ، مثلث متساوی‌الساقین مفروض، به‌وسیلهٔ یك دستگاه خطهای موازی با قاعده، به‌ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی تقسیم می‌شود ، که در هرکدام از آنها دایره‌ای محاط شده است و مساحت هریك از این دایره‌ها قسمت مشخصی از مساحت ذوزنقهٔ مربوطه را اشغال می‌کند و این نسبت ارتباطی به

اندازه‌های ذوزنقه‌ندارد. بنابراین، مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطدر ذوزنقه‌ها، برابر است با مساحت دایره‌ای که در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی متشابه با این ذوزنقه‌ها محاطباشد و بخصوص مساحت این ذوزنقه برابر با مساحت همهٔ ذوزنقه‌ها، یعنی مساوی مساحت مثلث مفروض باشد.



شکل ۱۰۶

مساحت اولین ذوزنقه (φ) برابر است با مساحت مثلث مفروض(F)، منهای‌مساحت دومین مثلث(f) . مثلث مفروض با دومین مثلث متشابه است و بنابراین مساحتهای آنها برنسبت مجذور نسبت عنصرهای خطی آنهاست :

$$\left.\begin{aligned} F &= \psi L^2 \\ f &= \psi l^2 \end{aligned}\right\} \varphi = F - f = \psi(L^2 - l^2) = \psi\lambda^2 \quad (\lambda^2 = L^2 - l^2)$$

شعاع دایره‌ای راکه درذوزنقهٔ مجهول محاط است R ، وشعاع دایرهٔ محاط در اولین ذوزنقه را r می‌گیریم. در این صورت داریم :

$$F \div \varphi = R^2 \div r^2 \;;\; R^2 = \frac{F}{\varphi} r^2 = \frac{L^2}{\lambda^2} r^2 \;;\; R = \frac{R}{\lambda} r$$

به عنوان عنصر خطی نزولی، نصف قاعدهٔ مثلثهای متشابه راانتخاب می‌کنیم ($\frac{a}{2}$ و $\frac{a'}{2}$) ، در این صورت :

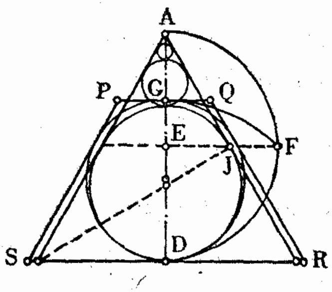
$$R = \frac{a \div 2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2}} r$$

از اینجا روش رسم روشن می‌شود (شکل ۱۰۶) . روی نصف قاعدهٔ مثلث مفروض ($\frac{a}{2}$) ، نیمدایره‌ای می‌سازیم. دراین نیمدایره، مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط می‌کنیم که یکی ازضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ

آن مساوی $\frac{a}{2}$ و ضلع دیگر مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی $\frac{\alpha}{2}$ باشد (α قـاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که متشابه بـا مثلث مفروض ومعادل اولین ذوزنقه است). ازمرکز قاعدهٔ مثلث، پاره‌خطی مساوی $\frac{a}{2}$ جدا می‌کنیم و از نقطه‌ای که بدست می‌آید بـه مرکز اولین دایرهٔ محاطی وصل می‌کنیم ، از رأس مجاور به قاعدهٔ مثلث مفروض، نیم خطی موازی این خط رسم می‌کنیم، مرکز دایرهٔ مورد نظر بدست می‌آید ، که از آنجا به سادگی شعاع و خود دایره پیدا می‌شود.

در شکل ۱۰۶، علاوه برآن، ذوزنقهٔ معادل مثلث مفروض هم رسم شده است.

حالت خاص . حالت خاصی را ، که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد ، بررسی می‌کنیم . از نقطهٔ تماس هر دو دایرهٔ محاطی متوالی، مماس مشترك دو دایـره را ، کـه موازی با قاعدهٔ‌مثلث‌می‌شود، رسم می‌کنیم؛ در این صورت مثلث‌متساوی‌الاضلاع مفروض به‌ذوزنقه‌های‌متساوی الساقینی تقسیم می‌شود، که درهر کدام از آنها ، دایره‌ای محاط شده است . چون این ذوزنقه‌ها



شکل ۱۰۷

همراه با دایره‌های محاطی آنها ، شکلهای متشابهی هستند ، نسبت مساحت هردایره به مساحت ذوزنقهٔ محیطی آن ، برای همهٔ شکلها مقدار ثابتی است.

بنابراین نسبت مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌ها به‌مجموع مساحتهای ذوزنقه‌ها (یعنی مساحت مثلث مفروض) هم مساوی همین مقدارثابت می‌شود. ازطرف دیگر، مساحت هریك ازذوزنقه‌ها، برابر است با دو

برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که ارتفاعش برابر با ارتفاع ذوزنقه (یعنی قطر دایرهٔ محاطی) باشد(چرا؟). مساحت ذوزنقه‌ای که بر دایرهٔ مورد جستجو محیط باشد(وضمناً با بقیهٔ ذوزنقه‌ها متشابه هم باشد)، باید مساوی مساحت مثلث مفروض باشد؛ پس نصف مساحت ذوزنقهٔ مجهول (شکل این نصف مساحت، یك مثلث متساوی‌الاضلاع است)، باید مساوی نصف مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض باشد. در این صورت ، نسبت ارتفاع ذوزنقهٔ مجهول به ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض ، برابر است با $\sqrt{۲} \div ۱$. طریقهٔ رسم، از شکل ۱۰۷ معلوم است :

$$۱ \div \sqrt{۲} = \sqrt{۲} \div ۲$$

به قطر ارتفاع AD ، نیمدایرهٔ AFD را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ E، عمود EF را بر AD اخراج می‌کنیم (این عمود، از نقطهٔ j، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث می‌گذرد) . روی ارتفاع AD ، نقطهٔ G را به فاصلهٔ DF از نقطهٔ D ، معین می‌کنیم . DG ارتفاع ذوزنقهٔ $PQRS$ است، که مساحت آن برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض. بنابراین، دایرهٔ مورد نظر، دایره‌ای به قطر DG است (مساحت این دایره برابر است با مجموع مساحتهای بی‌نهایت دایره‌ای که در مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض محاط شده‌اند). برای مثلث متساوی‌الاضلاع داریم :

$$R_{\circ} = \frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۳}{۲}}a \;;\; S_{\circ} = \pi R^{۲} = \frac{۳\pi}{۳۲}a^{۲} \;;\; S_{\Delta} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \;;$$

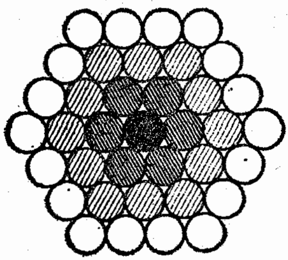
$$\sigma = \frac{S_{\circ}}{S_{\Delta}} = \frac{۳\pi \times ۴}{۳۲\sqrt{۳}} = \frac{۳\pi}{۸\sqrt{۳}} \approx ۰/۷$$

b) برای پاسخ به سؤال مسأله ، کافی است مجموعهٔ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی را بررسی کنیم ، که بریك دایره محیط هستند ؛ مساحت هریك ازاین ذوزنقه‌ها، برابراست با حاصلضرب ارتفاع (یعنی قطر دایره) ، در خط میانهٔ ذوزنقه (یعنی خطی که وسط دو ساق را به‌هم وصل می‌کند) ؛ از آنجا که ارتفاع همهٔ ذوزنقه‌ها یکی است ،

نسبت مساحت ذوزنقه‌ها مساوی نسبت خط میانهٔ آنها می‌شود.
کوچکترین خط میانه ، مربوط به حالتی است که ذوزنقه به مربع تبدیل شود؛ در این حالت، مساحت ذوزنقهٔ محیط بر دایره، به‌حداقل خود می‌رسد و بنابراین نسبت مساحت ذوزنقه ، حداکثر می‌شود : این نسبت برابر است با ... $\pi \div ۴ = ۰/۷۸۵$. با بزرگ شدن زاویهٔ رأس، خط میانهٔ ذوزنقه و بنابراین مساحت‌آن بزرگ می‌شود؛ و در این وضع، «اشغال» مساحت ذوزنقه ، بـه وسیلهٔ دایره (یعنی «اشغال» مساحت مثلث ، به وسیلهٔ دایره‌های محاطی) ، رو به‌کاهش می‌رود (و به سمت صفر میل می‌کند).

c) بررسی این حالت به حالتهای قبل منجر می‌شود.

۲۲۱. a) هر کمربند، از دایره‌هایی تشکیل شده است، که مرکزهای آنها، برضلعهای یك شش‌ضلعی منتظم، قرار گرفته‌اند. تعداد دایره‌هایی‌که در هـر ضلع یکی از شش ضلعیها قرار دارد ، یکـی بیشتر از تعـداد دایره‌هایی است که در یك ضلع شش ضلعی قبلی ، قرار گرفته است (شکل ۱۰۸)



شکل ۱۰۸

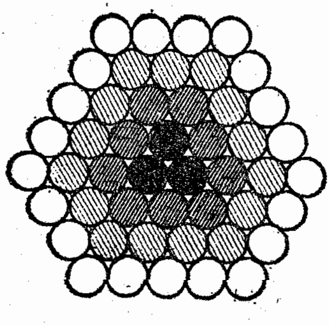
بنابراین ، تعداد دایره‌ها ، در کمربندهـای متوالی ، تشکیل یك تصاعد عددی، باقدر نسبت $d = ۶$ و جملهٔ اول $a_۱ = ۶$ ، می‌دهند. در نتیجه :

$$a_n = ۶ + (n - ۱)۶ = ۶n,$$

$$\Sigma = \frac{a_۱ + a_n}{۲} n = ۳(n + ۱)n$$

که با اضافه کردن یك دایرهٔ «هسته» بدست می‌آید :

$$N_n + ۳n^۲ + ۳n + ۱$$



شکل ۱۵۹

b) در هسته : ۱ × ۳ دایره

کمربند اول : ۳ × ۳ دایره

کمربند دوم : ۵ × ۳ دایره

. . . .

و ازآنجا بدست می‌آید :

$$\Sigma = ۳[۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲n + ۱)] =$$

$$= ۳ \times \frac{۱ + ۲n + ۱}{۲}(n + ۱) = ۳(n + ۱)^۲$$

اگر به‌عنوان «هسته»، چهار دایره انتخاب‌کنیم، به‌نحوی‌که مرکزهای آنها، رأسهای یك مربع و هر دایره بر دو دایرهٔ دیگر مماس باشد ، شکل حاصل ازکمربندها، چگونه می‌شود؟

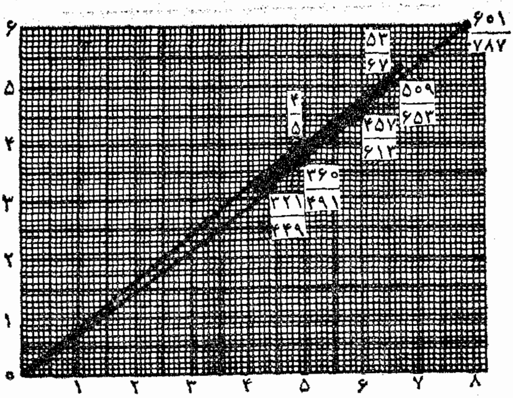
۲۲۲. می‌دانیم که برای مقایسهٔ دوکسر ، می‌توان آنها را به یك مخرج تبدیل کرد؛ ولی دراینجا، برای این ۷کسر، چه راهی ساده‌تر است: آیا ابتدا ، آنها را دو به دو با هم مقایسه کنیم ، سپس دو به دوی بعدی را، یا یکی ازکسرها را با همهٔ کسرها، بطور جداگانه مقایسه کنیم وبعدکسر دوم را با بقیهٔ کسرها و غیره)، یا همهٔ کسرها رابه‌یك مخرج تبدیل کنیم و یکباره ، همه را با هم مقایسه کنیم ؟ ضمناً ، خوب است بدانیم که در حالت اخیر ، کوچکترین مخرج مشترك کسرها، چنین است :

$$۵ \times ۶۷ \times ۴۴۹ \times ۴۹۴ \times ۶۱۳ \times ۶۵۳ \times ۷۸۷ =$$

$$= ۲۳\ ۲۶۵\ ۹۶۲\ ۷۴۳\ ۸۷۲\ ۸۹۵$$

ما در اینجا، برای مقایسهٔ کسرها، از روش نمودار، استفاده می‌کنیم (شکل ۱۱۰) .

اگر در صفحهٔ محورهای مختصات ، نقطه‌ای پیدا کنیم که طول و عرض آن به‌ترتیب مساوی مخرج و صورت یك‌کسر باشد ، ضریب زاویهٔ خطی که از مبداء مختصات و این نقطه می‌گذرد ، برابر با کسرمفروض می‌شود. هرچه زاویهٔ بین این خط ومحور طول بزرگتر باشد (از ۹۰ درجه‌تجاوزنمی‌کند)، تانژانت این زاویه بزرگترمی‌شود،



شکل ۱۱۵

و در نتیجه کسر مفروض هم بزرگتر خواهد شد. ما هم مسأله را، برهمین اساس حل می‌کنیم.

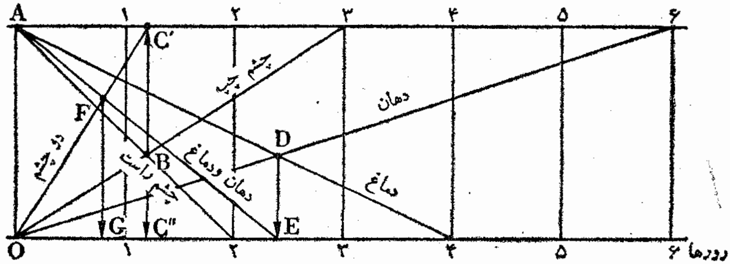
برای پیدا کردن نقطه‌های متناظر با کسرها، بهتر است از کاغذ میلیمتری استفاده کنیم. اندازه‌های این کاغذ، چقدر باید باشد؟ صورت کسرهای مفروض از ۴ تا ۶۰۱ و مخرج آنها از ۵ تا ۷۸۷ است؛ بنابراین به نظر می‌رسد که باید اندازه‌های کاغذ خیلی بزرگ باشد؛ ولی از این خاصیت استفاده می‌کنیم که اگر صورت ومخرج کسر را به یك نسبت کوچك کنیم، مقدار آن تغییری نمی‌کند، مثلا کسر $\frac{۵۳}{۶۷}$ را به کسر $\frac{۵/۳}{۶/۷}$ تبدیل می‌کنیم؛ به جای کسر $\frac{۵۰۹}{۶۵۳}$، کسر $\frac{۵/۰۹}{۶/۵۳}$ را در نظر می‌گیریم و غیره. به این ترتیب، همهٔ نقطه‌ها را دریك برگ معمولی کاغذ، می‌توان مشخص کرد.

روشن است که در نمودار، جای نقطه‌ها، به هرحال با تقریب پیدا می‌شود؛ بنابراین اگر مقدار دوکسرخیلی به‌هم نزدیك باشد، ممکن است به‌کمك نمودار نتوان با دقت‌آنهارا با هم مقایسه‌کرد؛ درچنین وضعی بهتراست، کسرهایی‌راکه ازلحاظ مقدار، خیلی به هم نزدیکند، با روش معمولی تبدیل به یك مخرج، با هم مقایسه کرد.

ولی در موردکسرهای مورد نظر ما ، نمودار به‌خوبی نشان می‌دهد که کوچکترین آنها $\frac{۳۲۱}{۴۴۹}$ است، بعد از آن کسر $\frac{۳۶۰}{۴۹۱}$ قرار گرفته است و غیره.

۲۲۳. نمودار را در دستگاه « زمان ـ حجم آب » در نظر می گیریم (شکل ۱۱۱) .

پاره‌خط OA متناظر با حجم حوض است . «چشم راست ، حوض را در ۲ روز پرمی‌کند»، متناظر با خط ۲ ـ A؛ «چشم چپ ، حوض را در ۳ روز پرمی‌کند»، متناظر با خط ۳ ـ O .



شکل ۱۱۱

نقطهٔ B ، محل برخورد ۲ ـ A و ۳ ـ O را در نظر می گیریم . پاره‌خط BC'، نمایندهٔ مقدار آبی است که از چشم راست، درفاصلهٔ زمانی AC'، وارد حوض شده است؛ به‌همین ترتیب، پاره‌خط BC''، نمایندهٔ مقدار آبی است که درهمان فاصلهٔ زمانی، از چشم چپ وارد حوض شده است . بنابراین پاره‌خط AC' ($=OC''$) نمایندهٔ زمانی است که هردو چشم، درآن مدت، تمام حوض را پرمی‌کنند. به این ترتیب، OC' نمودار کار دو چشم با هم است.

به همین ترتیب نمودار کار دهان (۶ ـ O) و دماغ (۴ ـ A) را رسم می‌کنیم و به کمك نقطهٔ D (محل برخورد این دو نمودار) ، AE، یعنی نمودار کار مشترك دهان ودماغ را رسم می‌کنیم.

باجمع نمودارهای OC' و AE (که درنقطهٔ F به‌هم برمی‌خورند)، پاره خط OG بدست می‌آید (G تصویر نقطهٔ F روی محور زمان

است)، و نمودار فاصلهٔ زمانی است، که در آن با باز بودن هرچهار مسیر، حوض پرمی‌شود .

روی شکل دیده می‌شود که : $OG = \frac{۴}{۵}\ (O - ۱)$. بنابراین حوض در $\frac{۴}{۵}$ شبانه روز، یعنی ۱۹ ساعت و ۱۲ دقیقه پرمی‌شود.

۲۲۴. چون سه اتومبیل با هم به B رسیده‌اند ، و از آنجا به طرف C ، بدون وقفه، حرکت کرده‌اند، وچون بنابر فرض مسأله، اتومبیلها ، در فاصله‌های زمانی مساوی ، حرکت کرده‌اند ، در هر نقطه‌ای (و منجمله در نقطهٔ C) ، به فاصله‌های زمانی مساوی از یکدیگرند (منتهی از نقطهٔ B به بعد ، در ردیف عکس) . بنابر فرض مسأله ، اتومبیل اول، یك ساعت بعد از اتومبیل دوم به C می‌رسد؛ بنابراین اتومبیل سوم، یك ساعت قبل از اتومبیل دوم، به C می‌رسد، یعنی اتومبیل اول ۲ ساعت بعد از اتومبیل سوم به C می‌رسد. به‌ماشین دوم وفاصلهٔ AB، بیش ازاین‌نیازی نداریم ومی‌توان مسأله را به‌این ترتیب منظم‌کرد: «از نقطهٔ B ، در یك زمان، دو اتومبیل شمارهٔ ۱ و شمارهٔ ۳ ، حرکت کردند ؛ اتومبیل شمارهٔ ۳ به محض اینکه به نقطهٔ C رسید ($BC = ۱۲۰^{\mathrm{km}}$)، برگشت و در ۴۰ کیلومتری نقطهٔ C ، به اتومبیل شمارهٔ ۱ برخورد کرد ، ضمناً می‌دانیم که اتومبیل شمارهٔ ۱ ، دو ساعت بعد از اتومبیل شمارهٔ ۳ ، به نقطهٔ C رسیده است».

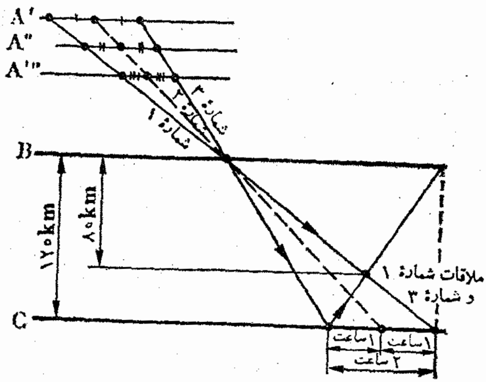
اتومبیلها ، از نقطهٔ B ، با هم شروع به حرکت کردند . تا لحظهٔ برخورد، اتومبیل شمارهٔ ۱، ۸۰ کیلومتر $(۱۲۰ - ۴۰)$ و اتومبیل شمارهٔ ۳، ۱۶۰ کیلومتر $(۱۲۰ + ۴۰)$ ، حرکت کرده‌اند. بنابراین سرعت اتومبیل شمارهٔ ۳ مساوی ۲ برابر $(۱۶۰ \div ۸۰)$ سرعت اتومبیل شمارهٔ ۱ است.

دردوساعتی که از زمان رسیدن شمارهٔ ۳ به Cتا رسیدن شمارهٔ۱ به C، طول کشیده‌است؛ اولاً شمارهٔ ۳به‌اندازهٔ ۴۰کیلومتر (درجهت ازCبه B)

رفته است، سپس شمارهٔ ۱، همین فاصله را (در جهت از B به C)، طی کرده است. از آنجا که سرعت اتومبیل شمارهٔ ۳، دو برابر سرعت اتومبیل شمارهٔ ۱ است، بنابراین زمانی را که شمارهٔ ۳ برای پیمودن ۴۰ کیلومتر صرف می‌کند، نصف زمانی است که شمارهٔ ۱، برای طی همین فاصله، لازم دارد. به‌این ترتیب، اتومبیل شمارهٔ ۱، برای پیمودن این فاصله $۲ \times \frac{۲}{۱+۲}$، یعنی $\frac{۴}{۳}$ ساعت صرف وقت کرده است.

اتومبیل شمارهٔ ۱، فاصلهٔ ۴۰ کیلومتری را در $\frac{۴}{۳}$ ساعت طی کرده است و بنابراین، سرعتی مساوی $۴۰ \div \frac{۴}{۳}$، یعنی ۳۰ کیلومتر در ساعت داشته است.

همهٔ آنچه را که گفتیم، می‌توان به روشنی و از روی شکل دید (شکل ۱۱۲). فاصلهٔ AB داده نشده است و نمی‌توان آنرا پیدا کرد، بنابراین جای نقطهٔ A را روی شکل، می‌توان در A'، A'' یا A''' و یا هر نقطهٔ دیگری گرفت.



شکل ۱۱۴

۲۲۵. a) سرعت دوچرخه سوار اول را v، سرعت دوچرخه سوار دوم را w و فاصلهٔ AB را L می‌گیریم. در این صورت داریم :

	تا اولین ملاقات	تا دومین ملاقات
راهی که دوچرخه سوار اول رفته است (به کیلومتر)	۵	L+۳
راهی که دوچرخه سوار دوم رفته است (به کیلومتر)	$۵\times\frac{W}{V}$	$(L+۳)\frac{W}{V}$
راهی که هردو روی‌هم رفته‌اند (به کیلومتر)	L	۳L

از اینجا، دو معادله بدست می‌آید :

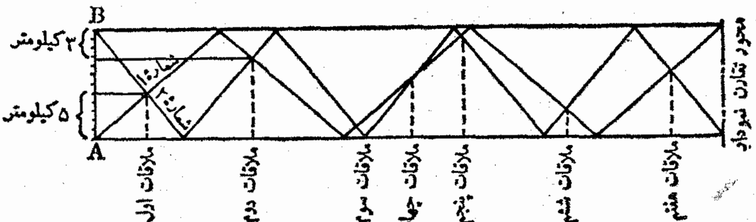
$$۵\left(۱+\frac{w}{v}\right)=L \qquad (۱)$$

$$(L+۳)\left(۱+\frac{w}{v}\right)=۳L \qquad (۲)$$

از تقسیم (۲) بر (۱) بدست می‌آید :

$$\frac{L+۳}{۵}=۳ \Longrightarrow L+۳=۱۵ \Longrightarrow L=۱۲ \text{ (کیلومتر)}$$

b) بهتر است حرکت دوچرخه سوارها را به کمك نمودار مجسم کنیم (شکل ۱۱۳) .



شکل ۱۱۳

نمودار به خوبی نشان می‌دهد که بعد از ملاقات اول ، دوچرخه سوارها تا ملاقات دوم، روی هم به اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ AB راه می‌روند؛ درست به همین ترتیب، در فاصلهٔ ملاقات دوم و سوم هم،

دو دوچرخه‌سوار روی‌هم به‌اندازهٔ دوبرابر فاصلهٔ AB حرکت می‌کنند. بنابراین فاصلهٔ زمانی بین ملاقات دوم و سوم برابر است با همان فاصلهٔ زمانی بین ملاقات اول و دوم.

ولی، اگر ازاینجا این نتیجه را برای فاصلهٔ زمانی ملاقاتهای بعدی هم درست بدانیم، دچار اشتباه شده‌ایم. هماطورکه ازنمودار شکل ۱۱۳ دیده می‌شود ، فاصلهٔ ملاقاتهای سوم و چهارم ، همچنین فاصلهٔ بین ملاقاتهای چهارم و پنجم ، به مراتب کوچکتر از دو فاصلهٔ اول است ؛ مقدار این دو فاصله را می‌توان بدون اشکال بدست آورد :

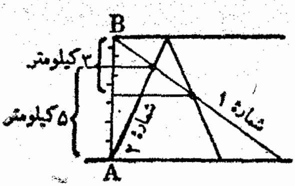
بین ملاقات سوم و ملاقات پنجم، دوچرخه‌سوارها به اندازهٔ دوبرابر فاصلهٔ AB راه رفته‌اند ، بنابراین فاصلهٔ زمانی بین ملاقات سوم و پنجم، برابر است با فاصلهٔ زمانی بین ملاقات اول ودوم (و همچنین، ملاقات دوم و سوم). به این ترتیب، فاصلهٔ بین ملاقاتهای سوم و چهارم (همچنین فاصلهٔ بین ملاقاتهای چهارم و پنجم)، برابر است با نصف فاصلهٔ بین ملاقاتهای اول و دوم (یا دوم و سوم).

ملاقات چهارم کجا اتفاق می‌افتد ؟ بدون هیچ محاسبه و یا ترسیم اضافی، از روی شکل ۱۱۳ معلوم می‌شودکه ملاقات چهارم، درست در وسط فاصلهٔ A و B انجام می‌گیرد. (متذکرمی‌شویم که روی شکل، نقطهٔ متناظر باملاقات چهارم، درمرکزتقارن نمودارقرارگرفته است.) به این ترتیب، دوچرخه‌سوار دوم (آنکه تندتر می‌رود)، در هرنیم دور (حرکت از A به B یا از B به A)، تنها یکبار با دوچرخه‌سوار دیگر ملاقات می‌کند؛ در حالی‌که دوچرخه سوار اول (آنکه سرعت کمتری دارد) ، در هرنیم دور یا یکبار و یا سه‌بار (در نیم‌دورهای سوم وهشتم وغیره)، دوچرخه‌سوار دیگر را ملاقات می‌کند.

بعد از آنکه دوچرخه‌سوار اول، پنج دور کامل (و یا دوچرخه‌سوار دوم، هفت دورکامل)، حرکت کند، کاملاً به حالت اول برمی‌گردند و همین وضع، دوباره شروع می‌شود.

نمودار حرکت، بعداز پنج نیم دور اولی (ویا هفت نیم‌دور دومی)، قرینهٔ محوری نموداری است که در شکل ۱۱۳، رسم شده است.

يك توضيح. براى حل مسألهٔ مربوط به دو دوچرخه سوار، فرض را براين گرفتيم ، كه بين ملاقات اول و دوم، هر يك از دوچرخه سوارها ، يك



شكل ۱۱۴

دوردرجهت عكس‌حركت اوليهٔ خود داشته‌اند؛ درحالی‌كه چنين‌شرطی در صورت مسأله وجود ندارد. بنابراين ، مسأله جواب ديگری هم دارد، كه وجود آن از نمودار شكل ۱۱۴ پيدا است.

در اين حالت، فاصلهٔ AB را پيدا كنيد وجواب را بررسی نماييد.

۲۲۶. حل جبری مسأله، مشكل نيست. اگر مبلغی راكه هركدام به‌صندوق پس‌انداز سپرده‌اند، مساوی x ونرخ بهرهٔ پس‌اندازه را y (يعنی ۱۰۰ ريال دريكسال به‌اندازهٔ y ريال سود بدهد) فرض‌كنيم، به سادگی به دو معادلهٔ دو مجهولی زير می‌رسيم:

$$\frac{mxy}{1200}=p-x \ ; \ \frac{nxy}{1200}=q-x$$

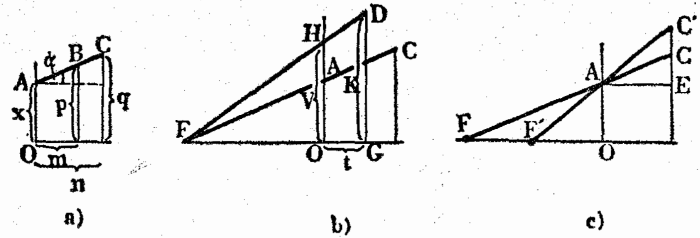
و از آنجا، به سادگی مقادير x و y بدست می‌آيد :

$$x=\frac{mq-np}{m-n} \ , \ y=\frac{1200(p-q)}{mq-np} \qquad (1)$$

حالا به حل مسأله، به‌كمك ترسيم می‌پردازيم:

در دستگاه مختصات قائم «زمان ـ سرمايه»، بـرای مـاه و ريال، واحدهای مساوی می‌گيريم ودونقطهٔ $B(m , p)$ و $C(n , q)$ را پيدا می‌كنيم؛ سپس اين دو نقطه را به‌هم وصل می‌كنيم و امتداد می‌دهيم تا محور عرض را در نقطهٔ A قطع كند (شكل ۱۱۵-a).

نقطهٔ A نشان می‌دهد، كه درلحظهٔ صفر، مبلغ پس‌انداز مساوی OA ريال بوده است؛ از اين لحظه، رشد يكنواخت مبلغ پس‌انداز شروع می‌شود؛ اين رشد، به‌وسيلهٔ تمايل خط راست مشخص می‌شود، به‌نحوی كه بعداز m ماه، مبلغ پس‌انداز (با بهرهٔ آن) به p ريال و بعداز n ماه به q ريال می‌رسد.



شکل ۱۱۵

مسأله حل شده است :

۱. عرض نقطهٔ A ، مبلغ مورد نظر سپرده است . اگر معادلهٔ خط BC را بنویسیم (برحسب v ـ زمان و x ـ مبلغ سپرده)، و در آن $v=0$ بگیریم، مقدار x (یعنی مبلغ مورد نظرسپرده، همان مقداری که در رابطهٔ (۱) بدست‌آوردیم، پیدا می‌شود: $OA=\dfrac{mq-np}{m-n}$

۲. تانژانت زاویه‌ای که نیم خط AC با محور طول می‌سازد، برابر است با بهرهٔ مبلغ سپردهٔ OA در یك ماه : $tg\alpha=\dfrac{p-q}{m-n}$. بنابر این بهرهٔ OA ریال در یك سال ۱۲ برابر این مبلغ و بهرهٔ یك ریال در یك سال به اندازهٔ $\dfrac{1}{OA}$ مبلغ اخیر و بالاخره بهرهٔ ۱۰۰ ریال در یك سال، ۱۰۰ برابر مبلغ آخری است؛ یعنی :

$$\text{نرخ بهره}=\frac{1200}{OA}tg\alpha=\frac{1200(p-q)}{mq-np}$$

به‌کمك رسم نمودار ، می‌توان مسأله‌های دیگری را هم حل کرد، مثلاً : «اگر v ریال را برای مدت t ماه به‌حساب پس‌انداز بگذاریم؛ مبلغ k، که صندوق پس‌انداز خواهد پرداخت، چقدر است؟»

پاره‌خط CA را امتداد می‌دهیم تا محور طول را در نقطهٔ F قطع کند (شکل ۱۱۵-b). پاره‌خط OF ، زمانی را نشان می‌دهد که درجریان آن، سپردهٔ مفروض دو برابر می‌شود (یعنی زمانی که ضمن‌آن، مبلغ

بهره، مساوی مبلغ سپرده می‌شود). ولی نقطهٔ F برای همهٔ سپرده‌ها، مقدار ثابتی است. در اینجا، سپرده برابر است با v ؛ $OH=v$ را روی محور عرض جدا می‌کنیم و FH را امتداد می‌دهیم، نیم‌خط HD، که به‌این‌ترتیب بدست می‌آید، رشد مقدار سپرده را، درجریان زمان، نشان می‌دهد. $OG=t$ را روی محورطول جدا می‌کنیم و GD را موازی OH رسم می‌کنیم تا نقطهٔ D بدست آید: $GD=k$

اگرنرخ بهره تغییر کند، نقطهٔ F هم روی محورطول جابجا می‌شود؛ مثلاً اگرنرخ n برابر شود، نقطهٔ F به نقطهٔ F' می‌رود، به‌نحوی که $OF \div OF' = n$. در حقیقت (شکل ۱۱۵-c)، طبق فرض باید داشته باشیم: $C'E \div CE = n$؛ از مثلثهای متشابه CEA و AOF نتیجه مـی‌شود: $CE \div EA = AO \div OF$، از تشابـه دو مثلث $C'EA$ و AOF' نتیجه می‌شود: $C'E \div EA = AO \div OF'$، از آنجا $OF \div OF' = C'E \div CE = n$.

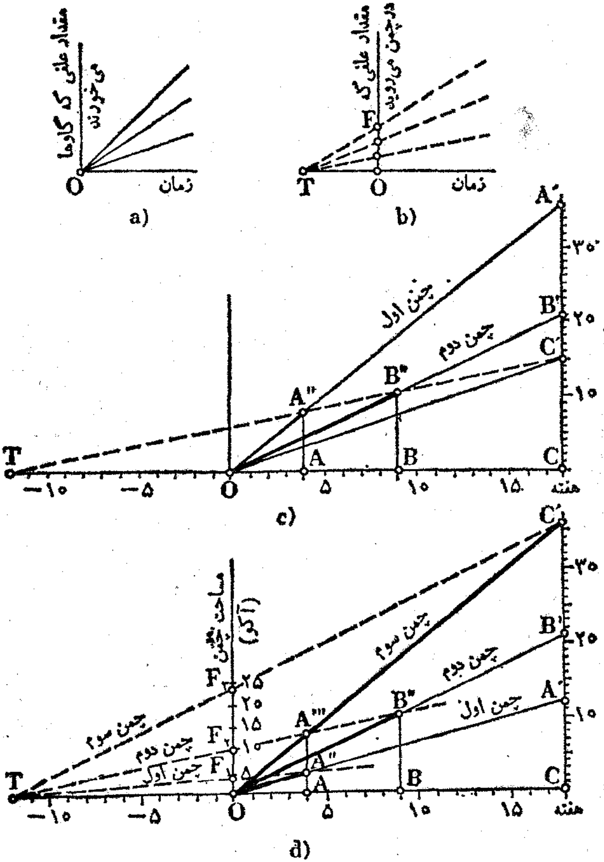
درحالتهایی که به مناسبت فرضهای خاص مسأله، مشکل خیلی بزرگ می‌شود، می‌توان واحد را روی دو محور، نامساوی گرفت. ضمناً روشن است که ما دراین مسأله تنها به بهره‌کاری ساده توجه داشتیم و نه بهره‌کاری مرکب.

۲۲۷. محور طول را محور زمان (با واحد هفته) می‌گیریم و شروع زمان را از لحظه‌ای به حساب می‌آوریم که گاوها در چمن رها شده‌اند، محورعرض را هم برای مقدارعلف می‌گیریم (واحدرا مثلا می‌توان، مقدار سهم هرگاو در یك هفته گرفت)؛ دو نمایش تغییرات در نظر می‌گیریم: نمایش تغییرات مقدار علفی که به‌وسیلهٔ گاوهـا خورده می‌شود ـ با خط کامل، نمایش تغییرات رشد علفها ـ با خط چین.

نمایش‌تغییرات اول (شکل۱۱۶-a)، رابطهٔ بین‌مقدار علفی‌راکه گاوها مصرف می‌کنند، با تعداد هفته‌هایی کـه آنها در چمنزار بوده‌اند، نشان می‌دهد. چون مقدار علفی که هرگاو در یك هفته می‌خورد (و فعلاً برای ما مجهول است)، مقدار ثابتی است، این نمایش تغییرات، نیم‌خطی است کـه از مبداء مختصات می‌گذرد و ضریب زاویهٔ آن

(تانژانت زاویه‌ای که با جهت مثبت محور طول می‌سازد)، باتعداد گاوها نسبت مستقیم دارد.

نمایش تغییرات دوم (شکل ۱۱۶-b)، رابطهٔ بین مقدار علفی را که در چمنزار رشد می‌کند، با تعداد هفته‌ها نشان می‌دهد ؛ زمان از لحظه‌ای شروع می‌شود که علفها شروع به رشدکرده‌اند (این لحظه، روی محور زمان، به وسیلهٔ T نشان داده شده است که در سمت چپ نقطهٔ O قرارگرفته است). چون مقدار علفی که در هرهفته می‌روید،



شکل ۱۱۶

مقدار ثابتی است (که برای ما مجهول است)، این نمایش تغییرات، نیم‌خطی است که از نقطهٔ T می‌گذرد؛ ضریب زاویهٔ این نیم خط، با مساحت چمن نسبت مستقیم دارد. مقدار علفی که در لحظهٔ ورود گاوها به چمن، روییده است، متناسب با پاره‌خطهای قائمی است که به نقطهٔ O و محل برخورد نمایش تغییرات با محور عرض محدود می‌شود.

حل ترسیمی مسأله را، ابتدا برای حالت ساده‌ای درنظر می‌گیریم: در این حالت مساحت هرسه چمنزار را مساوی هم، ومثلاً مساوی مساحت چمنزار دوم فرض می‌کنیم. در این صورت فرضهای مسأله، چنین می‌شود:

تعداد هفته	تعداد گاوها	مساحت	چمن
۴	۳۰	۱۰	I
۹	۲۱	۱۰	II
۱۸	x	۱۰	III

نمایش تغییرات را رسم می‌کنیم (شکل ۱۱۶-c). روی محور زمان، نقطه‌های A ، B و C را به ترتیب متناظر با ۴ ، ۹ و ۱۸ هفته انتخاب می‌کنیم. از نقطهٔ C، عمودی برمحور زمان اخراج می‌کنیم و روی آن با واحد دلخواه، تعدادگاوها را مشخص می‌کنیم: نقطهٔ A' متناظر با ۳۶ گاو (چمن اول) ، و نقطهٔ B' متناظر با ۲۱ گاو است (چمن دوم)؛ بنابراین نیم‌خطهای OA' و OB' نمایش تغییرات مقدار علفی هستندکه به وسیلهٔ گاوها به ترتیب در چمن اول وچمن دوم خورده شده است. ولی بنا برفرض مسأله، تمام علف چمن اول در۴ هفته، وتمام علف چمن‌دوم در۹ هفته‌تمام شده‌است، بنابراین‌تنها پاره‌خطهای OA'' وOB'' ازاین نیم‌خطها، حقیقی هستند. پاره‌خطهای AA'' و BB'' (با مقیاسی) ، نمایندهٔ مقدار علفی هستندکه درچمنزار به مساحت ۱۰ آکر، بـه وسیلهٔ دو دسته گاو و زمانهای مربوطه خـورده شده‌اند ؛ ولی چون نمایش تغییرات مقدار علف چمنزار با مساحت معلوم ، کـه بـه صورت تابعی از زمـان است، خطی است

مستقیم، بنابراین خطی که از A'' و B'' عبور می‌کند، معرف نمایش تغییرات رشد علف در چمنزار است؛ روی این نمایش تغییرات، دو نقطه مشخص می‌کنیم: نقطهٔ T، که معرف لحظه‌ای است که از آن موقع، رشد علف شروع شده است (با اندازه‌گیری معلوم می‌شود که $TO = ۱۲$ هفته است)، و C' که پاره‌خط CC' را مشخص می‌کند و متناظر با تعداد گاوهایی است که ضمن ۱۰ هفته، تمام علف را در چمنزار به مساحت ۱۰ آکر می‌خورند. با اندازه‌گیری معلوم می‌شود که $CC' = ۱۵$ (گاو). این همان‌تعداد گاوهای چمنزار سوم، در حالت ساده شده است.

چون مساحت چمنزار سوم، در حقیقت به‌جای ۱۰ آکر، مساوی ۲۴ آکر است، تعداد مورد نظر گاوها برابر است با:

$$\frac{۲۴}{۱۰} \times ۱۵ = ۳۶ \quad \text{(گاو)}$$

حالا مسأله را، بدون ساده‌کردن آن، حل می‌کنیم.

روی محور افقی، نقطه‌های A، B و C را به‌ترتیب متناظر بازمانی که گاوها در چمنزارها هستند: ۴، ۹ و ۱۸ هفته، انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۱۶ - d). روی عمودی که از C بر محور افقی رسم می‌کنیم، نقطه‌های A' و B' را به ترتیب متناظر با تعداد گاوهای چمنزارهای اول ودوم، یعنی ۱۲ و ۲۱، علامت می‌گذاریم. نیم‌خطهای OA' و OB'، نشان دهندهٔ آهنگ مصرف علف در چمنزارهای اول و دوم، به‌وسیلهٔ گاوها است. بنابر فرض، مساحت چمنزارهای اول ودوم متفاوت است: اولی $۳\frac{۱}{۳}$ آکر و دومی ۱۰ آکر. اگر مساحت چمنزار اول، به جای $۳\frac{۱}{۳}$ آکر، مساوی ۱۰ آکر بود (یعنی سه برابر)، در آن صورت مقدار علفی که در این چمن در لحظهٔ مشخص شده به‌وسیلهٔ نقطهٔ A، روییده بود، با پاره‌خط $AA''' = ۳AA''$ معین می‌شد، نقطه‌های A''' و B'' روی نمایش تغییرات

دو چمن با مساحتهای مساوی (۱۰ آکر) هستند؛ بنابراین نیم‌خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، نمایش تغییرات رشد علف را درچمنزار به مساحت ۱۰ آکر نشان می‌دهد (که نقطهٔ T ، لحظهٔ شروع رشد علفها را نشان می‌دهد).

نیم‌خط $TA'''B''$ ، محور عرض را در نقطهٔ $F_۲$ قطع می‌کند؛ پاره‌خط $OF_۲$ مساحت چمنزار دوم را نشان مـی‌دهـد (پاره‌خط $OF_۱$ نمایندهٔ مساحت چمن اول است).

برای پیدا کـردن نمایش تغییرات رشد علف در چمنزار سوم، باید روی محور عرض ، نقطهٔ $F_۳$ را چنان مشخص کرد که پاره‌خط $OF_۳$ نمایندهٔ مساحت چمنزارسوم باشد؛ طبق فرض ، مساحت چمنزارسوم مساوی ۲۴ آکراست، یعنی $F_۳O \div F_۲O = ۲۴ \div ۱۰$. نیم‌خطی‌راکه از T و $F_۳$ می‌گذرد، رسم می‌کنیم. عرض نقطهٔ C' روی این نیم‌خط، جواب مسأله است؛ روی چمنزار سوم باید ۳۶ گاو رها کرد.

به کمك نمایش تغییرات، نه‌تنها می‌توان جواب مسأله را بدست‌آورد: «چند گاو می‌توانند به‌مدت ۱۸ هفته در چمنزار به مساحت ۲۴ آکـر چرا کنند؟» ، بلکه برای پرسشهای دیگری هم می‌توان ، جوابهای لازم را به سرعت پیدا کـرد . مثلاً به این سؤال که : «اگر β گاو در چمنزار بـه مساحت α آکر رها کنیم ، چند هفته می‌توانند چرا کنند؟»

کافی است دو نیم‌خط رسم‌کنیم: ۱) از نقطهٔ T به نقطهٔ F_α ازمحور عرض (عرض این نقطه مساوی α است)؛ ۲) نیم‌خطی که از نقطهٔ O بگذرد و خط قائم نمایندهٔ «تعداد گاوها» را در نقطه‌ای به عرض β، قطع کند.

طول نقطهٔ برخورد این دو نیم‌خط، جواب مسأله است.

جواب مسأله به صورت تحلیلی چنین است:

$$x = \frac{s_۳}{s_۱ s_۲} \times \frac{s_۱ b_۲ t_۲ (t_۳ - t_۱) - s_۲ b_۱ t_۱ (t_۳ - t_۲)}{t_۳ (t_۲ - t_۱)}$$

که درآن، مقدار s برحسب آکر؛ عدد b تعدادگاوها وزمان t تعداد

هفته‌ها است[۱].

۲۲۸. ۱. فاصلهٔ AB را مساوی s ، سرعت اختصاصی هریك از قایقها را مساوی v و سرعت جریان آب را مساوی a می گیریم. دراین صورت (برای وقتی که جهت حرکت آب از A به B باشد) : داریم :

$$\frac{s}{v+a}-\frac{s}{v+ax}=\frac{s}{v-a-x}-\frac{s}{v-a}$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$\frac{x}{a}=-۲$$

و یا (وقتی که جهت حرکت آب از B به A باشد) :

$$\frac{s}{v+a-x}-\frac{s}{v+a}=\frac{s}{v-a}-\frac{s}{v-a+x}$$

و ازآنجا :

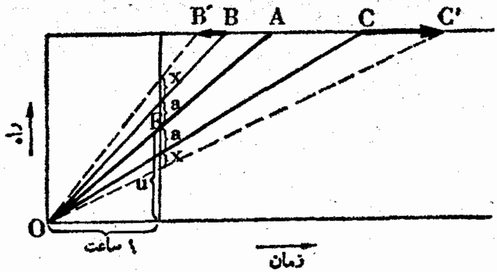
$$\frac{x}{a}=۲$$

بنابراین جواب چنین است : قایقی کـه در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند ، باید سرعت خود را به اندازهٔ $x=۲a$ اضافه کند و قایقی که در جهت جریان‌آب حرکت می‌کند، باید به همین اندازه از سرعت خود کم کند.

۲. برای حل مسأله، مقادیر s (فاصلهٔ دونقطهٔ A و B) و v (سرعت اختصاصی هریك از قایقها) را وارد کردیم ، که در جواب هیچگونه دخالتی نداشتند. چرا؟ اگر عدم دخالت s درجواب، کم وبیش قابل فهم است ، ناپدید شدن v ، مبهم و ناشناخته باقی می‌ماند. معنای فیزیکی جواب چیست؟

در دستگاه محورهای مختصات «زمان ـ راه» ، OA ، نمایش حرکت قایق را، بدون درنظر گـرفتن جریان آب، رسم می‌کنیم (خط کلفت‌تر در شکل ۱۱۷-a). در دوطرف نقطهٔ F، روی خط قائم ، پاره خط‌

۱) برای حل جبری این مسأله، به‌کتاب «سرگرمیهای جبر» تألیف «یا.ای. پرلمان»ـ ترجمهٔ فارسی، چاپ امیرکبیر، صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶ مراجعه کنید.



شکل ۱۱۷ - a

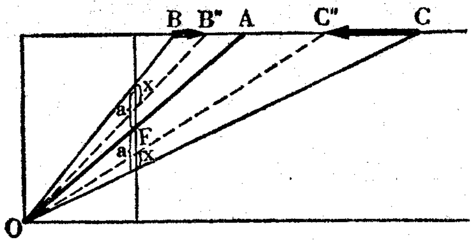
هایی مساوی a ازدوطرف جدا می‌کنیم و نمایش تغییرات OBـ حرکت قایق درجهت‌جریان‌آب، وOC ـ حرکت قایق درخلاف جریان‌حرکت آب را رسم می‌کنیم (OB و OC با خطهای کامل نازك رسم شده‌اند). همهٔ مقادیر را با پاره‌خطهای دلخواهی انتخاب کرده‌ایم ، از بحث بعد روشن خواهد شد که این مطلب اثری در نتیجهٔ کار ندارد .

سرعت قایقی را که در جهت جریان آب حرکت می‌کند، به اندازهٔ x اضافه می‌کنیم، نمایش‌تغییرات OB' بدست می‌آید. سرعت قایقی‌راکه در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند، به‌اندازهٔ x کم می‌کنیم، نمایش تغییرات OC' بدست می‌آید (OB' و OC' بـا خطچین نشان داده شده است).

از فرض مسأله معلوم می‌شود که کاهش مدت حرکت قایق اول (که با پاره‌خط BB' نشان داده شده است) بـاید مساوی افزایش مدت حرکت قایق دوم (پاره‌خط CC') باشد . ولی از شکل ۱۱۷ـa پیدا است که v، a و x هرچه باشند، همیشه $BB' \neq CC'$، تغییر سرعتها به نحوی که انجام شد، نمی‌تواند مسأله را به جواب برساند.

جهت سرعت مجهول x را عوض می‌کنیم (شکل ۱۱۷ـb) :

سرعت قایقی را که در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند ، به اندازهٔ x اضافه می‌کنیم، نمایش تغییرات OC'' بدست می‌آید. سرعت قایقی را که در جهت جریان آب حـرکت می‌کند ، به اندازهٔ x کم می‌کنیم ، نمایش تغییرات OB'' بدست می‌آید (OC'' و OB'' با خط



شکل ۱۱۷ - b

چنین نشان داده شده‌اند).

از شکل به‌خوبی معلوم می‌شود که BB'' تنها وقتی مساوی CC'' است که نقطهٔ B'' برنقطهٔ C ، و نقطهٔ C'' برنقطهٔ B منطبق باشد. در چنین حالتی، قایقها (با تغییر نمایش تغییرات‌آنها به وضع جدید)، با شرطهای مسأله می‌سازند: قایقی که در خلاف جریان آب حرکت می‌کند همانقدر به سرعت خود اضافه می‌کند که قایـق دیگر (آنکه در جهت جریان آب حـرکت می‌کند) ، از سرعت خود کم می‌کند (به اندازهٔ $x = ۲a$)، دراین صورت، مدت حرکت قایق اول همانقدر کم می‌شود که به مدت حرکت قایق دوم اضافه می‌شود (این مدت روی شکل باپاره‌خط BC نشان داده شده‌است).

شکل به‌خوبی نشان می‌دهد که چرا مقدار سرعت اختصاصی، دخالتی در جواب ندارد؛ استدلال ما، هیچگونه ارتباطی به مقدار v نـدارد و ثابت می‌کند که جواب مسأله، منحصر به‌فرد است.

مسأله را با «استدلال منطقی‌خالص» هم می‌توان حل کرد. بنابرفرض مسأله، به‌سرعت یکی ازقایقها، همانقدر اضافه می‌شود، که ازسرعت قایـق دیگر کم می‌شود ؛ در عمل می‌توان این تغییر سرعتها را به حساب تغییر سرعت جریان آب گذاشت. بنابراین مسأله را می‌توان به این صورت تنظیم کرد : «سرعت جریان آب را چگونه باید تغییر داد، تا کاهش زمان حرکت یکی ازقایقها، درست مساوی افزایش زمان حرکت قایق دیگر باشد.» جواب روشن است: اگر جهت جریان‌آب را عوض کنیم ، قایق اول همانقدر در راه خواهد بود که قایق دوم

در حالت اول در راه می‌بود ، وبـرعکس قایق دوم همانقدر صرف حرکت خواهدکردکه قایق اول درحالت قبل صرف می‌کرد، بنابراین آنقدر که به زمان حرکت قایق اول اضافه می‌شود ، همانقدر هم از زمان حرکت قایق دوم کم می‌شود . ولی تغییر جهت آب (با ثابت بودن سرعت اختصاصی قایقها)، معادل با آن است که سرعت قایقی را که ابتدا در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کرد ، به اندازهٔ دو برابر سرعت جریان آب، یعنی $x=۲a$، اضافه کنیم.

حالا دیگر کاملاً روشن شده است که چرا سرعت اختصاصی قایقها، و فاصلهٔ s ، در جواب مسأله دخالتی ندارند.

۰۲۲۹. ۱. سن پدر را u، پسر بزرگتر را x، پسر دوم را y و پسر کوچکتر را z می‌گیریم. با توجه به فرضهای مسأله، به‌سادگی، این معادله‌ها بدست می‌آید :

$$u+۱۰=۲(x+۱۰)\ ,\qquad u=x+y+z+۵\ ,$$
$$u+۳۰=۲(z+۳۰)\ ,\qquad u+۲۰=۲(y+۲۰)\ ,$$

از سه معادلهٔ آخر، x ، y و z را برحسب u ، محاسبه می‌کنیم :

$$z=\frac{u-۳۰}{۲}\quad ,\quad y=\frac{u-۲۰}{۲}\quad ,\quad x=\frac{u-۱۰}{۲}$$

این مقادیر را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم :

$$u=\frac{۳u-۶۰}{۲}+۵ \Longrightarrow u=۵۰$$

که از آنجا به‌سادگی x ، y و z بدست می‌آید :

$$x=۲۰\quad ,\quad y=۱۵\quad ,\quad z=۱۰$$

۲. بعداز ۱۰ سال، سن پسر بزرگتر مساوی نصف سن پدرمی‌شود. وقتی که ۱۰ ــ ۲۰، یعنی ۱۰ سال دیگر بگذرد، پسر بزرگتر، ۱۰ سال بزرگ می‌شود، ولی نصف سن پدر به اندازهٔ ۲ ÷ ۱۰ یعنی ۵ سال زیاد می‌شود . بنابراین در آن موقع ، تعداد سالهای سن پسر

بزرگتر به اندازهٔ ۵ – ۱۰، یعنی ۵ سال بیشتر ازنصف تعداد سالهای سن پدر است؛ ولی در این زمان، سن پسر دوم، مساوی نصف سن پدر است. در نتیجه معلوم می‌شود که پسر بزرگتر، ۵ سال از پسر دوم بزرگتر است. به همین ترتیب می‌توان روشن کرد که پسر دوم، ۵ سال از پسر کوچکتر، بزرگتر است.

اگر سن پسر کوچکتر را z و سن پدر را u فرض کنیم، داریم:

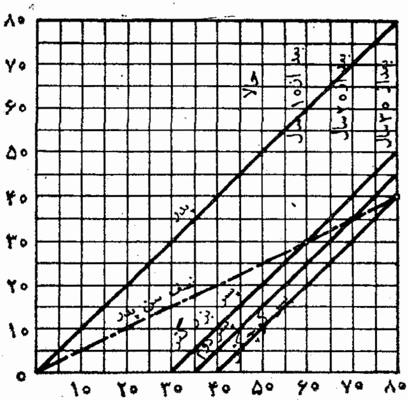
$$z+(z+۵)+(z+۱۰)+۵=u \implies ۳z+۲۰=u,$$

$$(z+۵+۵+۱۰)\times ۲=u+۱۰ \implies ۲z+۳۰=u,$$

که از آنجا خواهیم داشت:

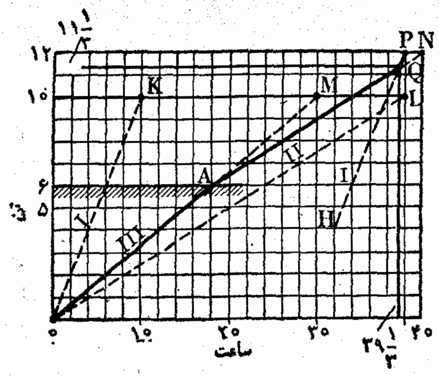
$$z=۱۰ \;,\; y=۱۵ \;,\; x=۲۰ \;,\; u=۵۰$$

این نتیجه‌ها را می‌توان به روشنی روی شکل زیر مشاهده کرد:



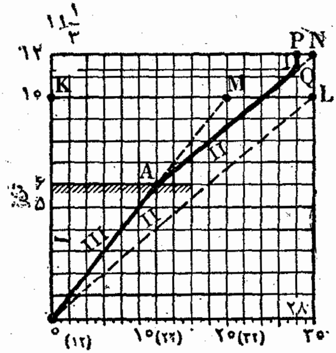
شکل ۱۱۸

۲۳۰. قبل از همه متذکر می‌شویم که عدد مطلق قیمت محصول، هیچگونه اهمیتی برای جستجوی جواب نـدارد؛ تنها این مطلب مهم است ارزانترین قیمت محصول در دهستان III و گرانترین آن دردهستان I است. مسأله را به‌کمك نمایش تغییرات حل‌می‌کنیم، خط شکسته‌ای را می‌سازیم که به وسیلهٔ آن سیر حرکت زمان را برای کار اتومبیلی که محصول را، از دهستانهای اول، دوم و سوم حمل مـی‌کند، نشان دهد(شکل ۱۱۹–a).



شکل ۱۱۹-a

این خط شکسته ازنقطهٔ (۰ , ۰) O شروع می‌شود. رساندن محصول از دهستان I با نیم‌خط I نشان داده‌شده است، که ازنقطهٔ K(۱۰,۱۰) می‌گذرد : در ۱۰ ساعت ۱۰ تن؛ به‌همین ترتیب، برای دهستان II ، نیم خط II ،که از نقطه (۱۰ , ۴۰) L می‌گذرد؛ و برای دهستان III ، نیم خط III ، که از نقطهٔ (۱۰ , ۳۰)M مـی‌گذرد . خط شکستهٔ مورد نظر، ازسه پاره‌خط تشکیل شده است، به‌نحوی‌که طول تصویر آن روی‌محورعرض، متناظر باوزن‌کل محصول (۱۲تن) باشد؛ و طول تصویر آن برمحور طول، از زمان‌کار اتومبیل (۴۰ ساعت) تجاوز نکند.



شکل ۱۱۹-b

چون محصول مـورد نظر، دردهستان III، ازجاهای دیگر، ارزانتر است، ابتدا خرید رااز آنجـا می‌کنیم ؛ ولی مقـــدار محصول در دهستان III، محدود به ۶ تن است؛ بنابراین اولین پاره‌خط از خط شکستهٔ مطلوب‌عبارت

است ازOA. بعد از دهستان III ، قیمت محصول در دهستان II ارزانتر است؛ از نقطهٔ A، پاره‌خط AN را موازی OL رسم‌می‌کنیم، ولی نقطهٔ N خارج مرز زمانی ما قرار دارد (۴۲ ساعت به‌جای ۴۰ ساعت) به همین مناسبت ، از نقطهٔ P نیم خط PH را موازیOK رسم می‌کنیم تا خط AN را درنقطهٔ Q قطع‌کند. خط شکسته مطلوب $OAQP$ خواهد بود، جواب را می‌خوانیم :

$$x_1 = \frac{۲}{۳} \text{ (تن)} \quad , \quad x_2 = ۵\frac{۱}{۳} \text{ (تن)} \quad , \quad x_3 = ۶ \text{ (تن)}$$

حل مسأله را می‌توان به این ترتیب ساده‌تر کردکه عددهای مربوط به صرف وقت بـرای حمل و نقل را (۱ ، ۴ و ۳) ، یك واحد کم کنیم، یعنی آنها را مساوی ۰ ، ۳ و ۲ بگیریم، متناظر بـا آن مرز زمانی را هم ۱۲ ساعت پایین بیاوریم. نمایش تغییرات مربوط به‌این وضع را در شکل ۱۱۹ـb داده‌ایم.

۲۳۱. ۱. $AM = x$ و $AP = y$ مـی‌گیریم $(x > y)$ ، ضمناً x و y را برحسب کیلومتر به حساب می‌آوریم. مسافرهای مسن‌تر در راه از A به B ، به اندازهٔ $\left(\frac{x}{۳۶} + \frac{۳۹/۶ - x}{۴}\right)$ ساعت و دو مسافـر جوانتر $\left(\frac{y}{۶} + \frac{۳۹/۶ - y}{۳۶}\right)$ ساعت‌وقت صرف کرده‌اند . بالاخره وقتی‌که اتومبیل برای رسیدن ازA بهB صرف‌کرده است، چنین‌است:

$$\frac{x + (x - y) + (۳۹/۶ - y)}{۳۶} \text{ (ساعت)}$$

چون این سه مقدار باهم‌برابرند، بدست می‌آید:

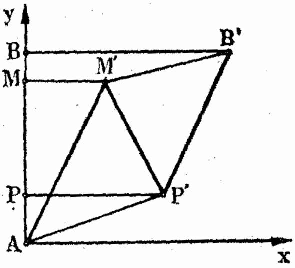
$$\frac{x}{۳۶} + \frac{۳۹/۶ - x}{۴} = \frac{y}{۶} + \frac{۳۹/۶ - y}{۳۶} = \frac{۲x - ۲y + ۳۹/۶}{۳۶}$$

از این دستگاه، جواب زیر بدست می‌آید :

$$x = ۳۳/۶ \text{ (کیلومتر)} \quad ; \quad y = ۹/۶ \text{ (کیلومتر)}$$

۲. حال این مسأله را به کمك ترسیم حل می‌کنیم . طبق فرض ، دو

مسافر جوان و اتومبیل در یك لحظه از نقطهٔ A حرکت کرده‌اند ؛ این حقیقت را به وسیلهٔ دو نیم‌خط AM' و AP' نشان داده‌ایم که مبداء آنها برهم منطبق است ؛ چون اتومبیل سریع‌تر از پیاده‌ها می‌رود ، زاویه‌ای که نیم‌خط AM' با جهت مثبت محور Ax می‌سازد ، بزرگتر از زاویه‌ای است که نیم‌خط AP' بااین محور به‌وجودمی‌آورد. ازنقطهٔ M، اتومبیل (به‌طرف عقب) و دومسافر مسن‌تر (به طرف جلو) با هم حرکت می‌کنند: نمایش حرکت‌آنها به‌ترتیب عبارت است از پاره‌خطهای $M'P'$ $(\widehat{M'P'P}=\widehat{M'Ax})$ و $M'B'$ (زاویهٔ بین $M'B'$ با محور Ax، کوچکتر است از زاویهٔ بین AP' و محور Ax) .



شکل ۱۲۵

در P، اتومبیل وجوانها به‌هم می‌رسند ؛ نقطهٔ P'.

در B، اتومبیل ومسن‌ترها به‌هم می‌رسند ؛ $P'B'$ را موازی AM' رسم می‌کنیم تا نیم‌خطی را که از M' شروع شده است، در B' قطع کند .

نقطه‌های P'، M' و B' را روی محورقائم تصویرمی‌کنیم تا نقطه‌های P ، M و B بدست آید .

با توجه به شرطهای مسأله داریم :

$$۱)\quad \frac{AM+MP}{AP}=۳۶\div ۶ \Longrightarrow \frac{AP+۲MP}{AP}=۶$$

و از آنجا

$$۱+\frac{۲MP}{AP}=۶ \Longrightarrow \frac{۲MP}{AP}=۵ \Longrightarrow \frac{AP}{AM}=\frac{۲}{۵}$$

$$۲)\quad \frac{MP+PB}{MB}=۳۶\div ۴ \Longrightarrow \frac{MB+۲MP}{MB}=۹$$

و از آنجا:

$$۱+\frac{۲MP}{MB}=۹ \Longrightarrow \frac{۲MP}{MB}=۸ \Longrightarrow \frac{MP}{MB}=\frac{۴}{۱}$$

بنابراین *

$$AP \div PM \div MB = ۸ \div ۲۰ \div ۵$$

از آنجا:

$$AP=\frac{۸}{۸+۲۰+۵}\times ۳۹/۶=\frac{۸}{۳۳}\times ۳۹/۶=۹/۶(\text{کیلومتر})$$

$$PM=\frac{۲۰}{۳۳}\times ۳۹/۶=۲۴(\text{کیلومتر})$$

در این راه حل دیده می‌شود که جواب ، بـه مقدار مطلق سرعتها ارتباطی ندارد و تنها به نسبت سرعت اتومبیل بـه سرعت پیاده‌ها مربوط می‌شود.

۰۲۳۲. ۱. حل جبری مسأله مشکل نیست. اگرتعداد خروسها را x، تعداد مرغها را y و تعداد جوجه‌ها را z فرض کنیم، باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x+y+z=۱۰۰ \\ ۵x+۳y+\frac{۱}{۳}z=۱۰۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر بین این دو معادله، z را حذف کنیم، به معادلهٔ دومجهولی زیر می‌رسیم :

$$۷x+۴y=۱۰۰$$

که می‌توان آنرا به این صورت نوشت :

$$y=۲۵-۲x+\frac{x}{۴}$$

از این معادله معلوم می‌شود که x بر ۴ قابل قسمت است. اگر x را به ترتیب مساوی ۴ ، ۸ و ۱۲ بگیریم برای y ، عددهای ۱۸ ، ۱۱ و ۴ و برای z ، عددهای ۷۸ ، ۸۱ و ۸۴ بدست می‌آید . اگر x را بزرگتر از ۱۲ ، و مثلاً مساوی ۱۶ بگیریم ، برای y عددی

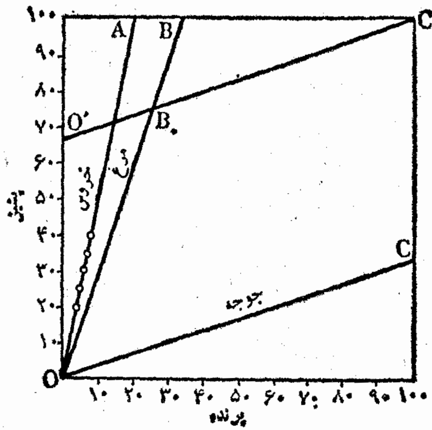
* این نسبتهای مساوی را با ترسیم خالص هم می‌شد پیدا کرد.

منفی بدست می‌آید که قابل قبول نیست ، بنابراین دستگاه (۱) تنها سه جواب دارد :

$x_۳ = ۱۲$	$x_۲ = ۸$	$x_۱ = ۴$
$y_۳ = ۴$	$y_۲ = ۱۱$	$y_۱ = ۱۸$
$z_۳ = ۸۴$	$z_۲ = ۸۱$	$z_۱ = ۷۸$

که در هرحال ، هم تعداد کل پرنده‌ها وهم جمع قیمت‌آنها مساوی ۱۰۰ می‌شود .

۲. حالا به حل ترسیمی مسأله می‌پردازیم (شکل ۱۲۱-a). در این ترسیم ، افزایش قیمت خرید را نسبت به اضافه شدن تعداد پرنده‌های موردخریداری، بررسی می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، باید سه خط شکسته ساخت ،که هرکدام از آنها با شرطهای زیر بسازند : ۱) شروع خط شکسته در مبداء مختصات و انتهای‌آن، در نقطهٔ‌متناظر با ۱۰۰ پرنده و ۱۰۰ پشیزقرار گیرد؛ ۲) خط شکسته از سه‌پاره خط تشکیل



شکل ۱۲۱-a

شده باشد، به‌نحوی‌که تصویر افقی هرپاره خط‌آن ، متناظر با تعداد یکی از پرنده‌های خریداری شده وتصویر قائم‌آن ، متناظر قیمت‌این پرنده‌ها باشد (به ترتیب برای جوجه‌ها ، مرغها و خروسها) ؛ ۳) طول هریك از رأسهای خط شکسته، عددی صحیح باشد .

از نقطهٔ (۰ ، ۰) O ، نیم خط AO را طوری رسم می‌کنیم که ضریب زاویهٔ آن مساوی ۱ ÷ ۵ باشد (پنج پشیزبرای یك خروس). همچنین نیم‌خط OB را با ضریب زاویهٔ مساوی ۱ ÷ ۳ (سه پشیز برای یك

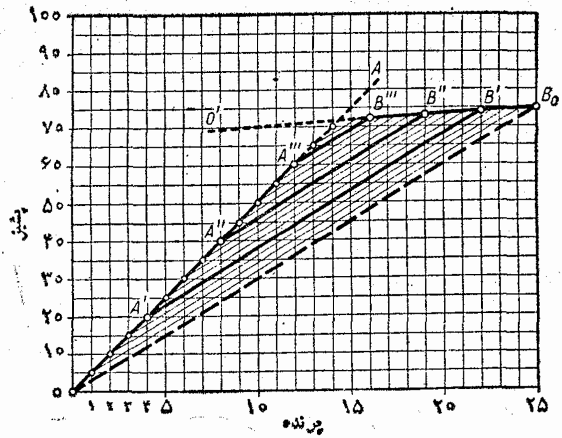
مرغ) و نیم‌خط OC را با ضریب زاویهٔ مساوی ۳ ÷ ۱ (یك پشیز برای سه جوجه)، رسم می‌کنیم.
سه پاره خط هریك از خطهـای شکسته باید مـوازی این نیم خطها باشند.

چون تعداد هریك از پرنده‌ها بـاید عددی صحیح باشد، در حقیقت تنها با نقطه‌هایی که واقع براین خطهای شکسته‌اند، سروکار داریم، نه تمام خطهای شکسته به صورت پیوسته: اینها نقطه‌هایی هستند که طول آنها عددهایی صحیح باشند. روی نیم‌خط OA، چند تا از این نقطه‌ها را مشخص کرده‌ایم.

از نقطهٔ C(۱۰۰ ، ۱۰۰)، خط $O'C_0$ را موازی OC رسم می‌کنیم. این خط، نیم‌خط OB را در نقطهٔ B_0 قطع می‌کند؛ طول B_0 مساوی ۲۵، و عددی صحیح است. خط شکستهٔ OB_0C_0 در شرطهای زیر صدق می‌کند:

شروع آن، نقطهٔ O(۰ ، ۰) وانتهای آن C_0(۱۰۰ ، ۱۰۰) است؛ طول رأسهای آن (۰، ۲۵ و ۱۰۰)، عددهایی صحیح‌اند؛ پاره‌خط اول آن موازی OB و پاره‌خط دوم آن موازی OC است.

بنابراین، خط شکستهٔ OB_0C_0 با همهٔ شرطها، بجز شرط اول سازگار است: در این خط شکسته، پاره‌خط سوم، که متناظر باتعداد خروسها است، وجود ندارد (خط شکستهٔ OB_0C_0 نشان می‌دهدکه ۲۵ مرغ و ۷۵ جوجه خریده شده است؛ مجموع پرنده‌ها ۲۵ + ۷۵، یعنی ۱۰۰، ومجموع قیمت‌آنها $\frac{۱}{۳}$ × ۷۵ + ۳ × ۲۵ یعنی ۱۰۰ پشیز می‌شود). برای اینکه خروس هم جزو خرید باشد، باید پاره خط مربوط به «مرغها» را به موازات خـود طـوری جابجا کـرد که نیم خطهای OA و $O'C_0$ را درنقطه‌هایی به طولهای صحیح، قطع کند.
برای اینکه کار ترسیم ساده‌تر شود، مقیاس افقـی را در قسمتی از جدول بزرگ می‌کنیم (شکل ۱۲۱-b).

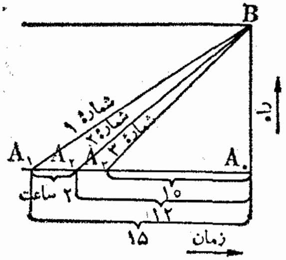


شکل ۱۲۱-b

همانطور که از روی شکل دیده می‌شود ، شرطهای مسأله ، تنها در سه خط شکسته صدق می‌کند .

خطشکسته	خروس	مرغ	جوجه	مجموع پرنده‌ها	قیمت آنها
$OA'B'C_0$	۴	۱۸	۷۸	۱۰۰	۱۰۰
$OA''B''C_0$	۸	۱۱	۸۱	۱۰۰	۱۰۰
$OA'''B'''C_0$	۱۲	۴	۸۴	۱۰۰	۱۰۰

۲۳۳. a) نمایش تغییرات حرکت سه جسم را رسم می‌کنیم . چون جسمها، از نقطهٔ شروع حرکت (که آنرا A می‌نامیم) ، در زمانهای مختلف ، حرکت کرده‌اند و سپس در یك نقطه به‌هم رسیده‌اند ، نمایش تغییرات سه حرکت ، در نقطهٔ B به‌هم می‌رسند. چون طبق فرض ، سرعت جسمها به نسبت ۶ ÷ ۵ ÷ ۴ است و زمان



شکل ۱۲۲

حرکت متناسب با نسبت عکس سرعتها است (چون طول راه برای هرسه جسم یکی است) ، بنابراین :

$$A_1A_0 \div A_2A_0 \div A_3A_0 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{5} \div \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{15}{60} \div \frac{12}{60} \div \frac{10}{60} = 15 \div 12 \div 10$$

از طرف دیگر $A_1A_2 = 2$ ساعت است ، در نتیجه

$$A_2A_3 = \frac{12-10}{15-12} \times A_1A_2 = \frac{2}{3} \times 2 = 1\frac{1}{3} \text{(ساعت)}$$

متذکر می‌شویم که برای حل این مسأله ، نیازی بـه مقادیر مطلق سرعتها نیست و تنها کافی است که نسبت این سرعتها برای ما معلوم باشد (جواب فرق نمی‌کند ، اگر سرعت جسمها به ترتیب مساوی ۴ ، ۵ و ۶ سانتیمتر در ساعت باشد یا ۴ ، ۵ و ۶ کیلومتر در ثانیه و غیره) .

b) به کمك رابطهٔ مربوط به‌حرکت متشابه‌التغییر می‌توان دستگاهی شامل سه معادله و سه مجهول تشکیل داد : ۱) سرعت اولیهٔ جسم دوم ، ۲) شتاب جسم اول و ۳) فاصلهٔ زمانـی از شروع حرکت تا لحظه‌ای که سرعت دوجسم مساوی می‌شود ؛ با پیدا کـردن این مجهولها ، می‌توان محاسبه را ادامـه داد و لحظهٔ مورد نظر مسأله را بدست آورد . ولی محاسبهٔ جواب ، با این روش به اندازهٔ کافی مفصل می‌شود. اگر به‌آنچه که در زیرمی‌آوریم توجه‌کنیم ، ساده‌تر می‌توان به‌جواب رسید .

طبق فرض مسأله، درلحظه‌ای که سرعتهای دو جسم مساوی می‌شود، فاصلهٔ بین آنها ۳۷۹ متر است ، ما می‌خواهیم بدانیم که چه موقع، جسم دوم به انـدازهٔ ۱۱۳۷ متر ازجسم اول جلـو می‌افتد . ولـی $1137 : 379 = 3$.

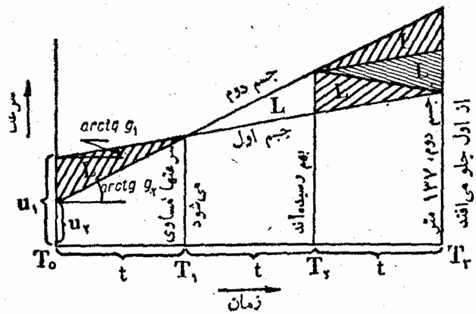
بنابراین مسأله را می‌توان به این صورت تنظیم کرد :

«دو جسم از نقطهٔ A در یك جهت و در یك زمان شروع به حرکت کردند؛ هردو، حرکت متشابه‌التغییر دارند ؛ سرعت اولی بیشتر از سرعت دومی است . بعد از ۱ ساعت و۳۷ دقیقه و ۳۹ ثانیه، جسم

دوم به جسم اول می‌رسد ...».

به این ترتیب طرح کلی حرکت چنین است : دو جسم همـزمان از یك نقطه شروع به حرکت می‌کنند؛ چون سرعت اولی بیش ازسرعت دومی است ، فاصلهٔ بین آنها شروع به زیاد شدن می‌کند ؛ ولی از طرف دیگر، بعد ازمدتی، جسم دوم به جسم اول می‌رسد؛ این وضع تنها در صورتـی پیش می‌آیدکه شتاب آن بیشتر از شتاب جسم اول باشد ؛ بنابراین قبل از برخورد ، لحظه‌ای وجود دارد که در آن سرعت دوجسم برابرمی‌شود .

همهٔ اینها را می‌توان روی شکل ، ساده‌تر دید ، نمایش تغییرات را در دستگاه مختصات «زمان ـ سرعت» رسم می‌کنیم. چون $s = v.t$، بنابراین مقدار راهی که به وسیلهٔ جسم طی شده است ، به صورت مساحت‌ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ، و فاصلهٔ بین دو جسم در لحظهٔ T، به صورت‌اختلاف مساحتهای دو ذوزنقه ، نشان داده می‌شود .



شکل ۱۲۳

روی محور سرعت ، دوپاره خط دلخواه v_1 و v_2 را جدا مـی‌کنیم ($v_1 > v_2$) . از انتهای این پاره‌خطها ، دو خط با ضریب زاویـه‌های g_1 و g_2 رسم می‌کنیم ($g_1 < g_2$) . طول نقطهٔ برخورد این دو خط برابر است با t ، فاصلهٔ زمانـی از شروع حرکت تا لحظه‌ای که سرعتهـای دوجسم مساوی می‌شود . تفاضل مساحت ذوزنقه‌هـا ($L = ۳۷۹$ مترمربع)عبارت است ازفاصلهٔ بین دوجسم، درلحظه‌ای

که‌سرعتهای مساوی دارند.
سپس ، برای اینکه دوجسم به‌هم برسند ، باید مساحت دو ذوزنقهٔ مربوطه،یعنی‌فاصله‌ها،برابرشود. ولی‌مساحت دوذوزنقهٔ قائم‌الزاویه وقتی مساوی می‌شود ، که ارتفاع مشترك و خطهای میانهٔ آنها ، مساوی باشد . از آنجا نتیجه می‌شود : $T_۰T_۲ = ۲T_۰T_۱$.
طبق صورت مسأله ، باید لحظه‌ای را پیدا کرد که در آن ، جسم دوم به اندازهٔ ۱۱۳۷ متر از جسم اول جلو بیفتد . ولی:

$$۱۱۳۷ = ۳ \times ۳۷۹ = ۳L$$

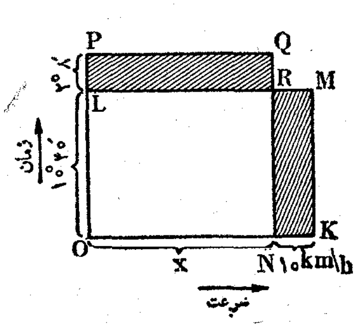
بنابراین‌باید نقطه‌ای مانند $T_۳$ را پیداکرد، به‌نحوی‌که اختلاف بین مساحتهای دو ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ با ضلع مشترك $T_۲T_۳$ مساوی$۳L$ بشود . ولی برای این منظور باید $T_۲T_۳ = t$ باشد . دراین وضع

$$T_۰T_۳ = ۳t = ۳ \times \frac{\text{۱ساعت ۳۷ دقیقه و ۳۹ ثانیه}}{۲} =$$

$$= \text{۲ ساعت ۱۱ دقیقه ۲۸/۵ ثانیه}$$

و به این ترتیب جواب مسأله بدست می‌آید .
سرعت اولیهٔ جسم اول وشتاب جسم دوم، که در صورت مسأله آمده است ، می‌تواند حذف شود ، زیرا جواب مسأله هیچگونه ارتباطی به آنها ندارد .

۲۳۴. محور افقی را، محور سرعت ومحور قائم را ، محور زمان می گیریم (شکل۱۲۴).چون‌فاصله‌ای‌راکه‌قطارطی‌می‌کند،برابراست‌باحاصلضرب سرعت‌درزمان،بنابراین‌مساحت مستطیلی‌که ضلعهای آن‌نمایندهٔ سرعت و زمان است ، فاصله‌ای راکه قطار طی می‌کند، نشان می‌دهد. فرض کنیم پاره‌خط OK سرعت‌قطار و پاره‌خط OL زمان حرکت باشد(۱۰ ساعت‌و۴۰ دقیقه)؛ دراین‌حالت، مساحت‌مستطیل $OKML$، فاصلهٔ بین دوشهر A و B را نشان می‌دهد.
اگرسرعت قطار را ۱۰ کیلومتر در ساعت کسم کنیم (پاره‌خط



شکل ۱۲۴

KN)، زمان حرکت ۲ ساعت و ۸ دقیقه (پاره‌خط LP) زیاد می‌شود. در این وضع فاصلهٔ AB ، با مساحت مستطیل $ONQP$ مشخص می‌شود . چون فاصلهٔ دو شهر ، در این دو حالت ، یکی است، باید مساحتهای دو مستطیل $OKML$ و $ONQP$ برابر باشد ؛ و چون مستطیل $ONRL$ قسمت مشترك آنها است ، بنابراین باید مساحت دو مستطیل $NKMR$ و $LRQP$ برابر باشد . اگر سرعت کم شدهٔ قطار (پاره‌خط ON) را x بگیریم ، بدست می‌آید :

= (۱۰ کیلومتر در ساعت) × (۱۰ ساعت و ۴۰ دقیقه)

(x کیلومتر در ساعت) × (۲ ساعت و ۸ دقیقه) =

از آنجا:

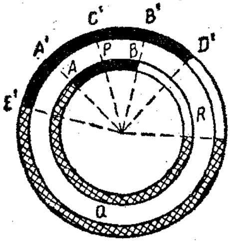
$$x = \frac{\text{۱۰ ساعت و ۴۰ دقیقه}}{\text{۲ ساعت و ۸ دقیقه}} \times ۱۰ =$$

$$= \frac{۶۴۰}{۱۲۸} \times ۱۰ = ۵۰ \ \text{(کیلومتر در ساعت)}$$

و سرعت قطار : ۶۰ = ۱۰ + ۵۰ (کیلومتر در ساعت) .

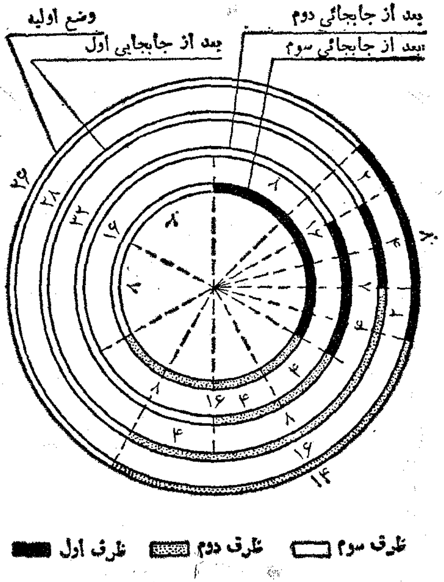
و فاصلهٔ بین دو شهر : $۶۰ \times ۱۰\frac{۴۰}{۶۰} = ۶۴۰$ (کیلومتر)

۲۳۵. a) طبق فرض، یك نوع عمل را، سه بار تکرار می‌کنیم : یك چهارم مایع محتوی یك ظرف را به ظرف دوم و یك چهارم دیگر آنرا به ظرف سوم می‌ریزیم . هربار که این عمل را انجام می‌دهیم ، مقدار کلی مایعی که در سه ظرف وجود دارد ، تغییر نمی‌کند . این مقدار ثابت مایع را بصورت محیط یك دایره (۳۶۰ درجه) ، نشان می‌دهیم ؛ مقدار مایعی که‌درهر لحظه، دراین‌یا آن‌ظرف‌وجود دارد، به‌وسیلهٔ قوس متناظر با آن، مشخص می‌شود (شکل ۱۲۵ ـ a) . ریختن قسمتی ازمایع ظرف P به ظرف Q (یا به‌ظرف R)، به معنای جابجا شدن قوسها است؛ ضمناً



شکل ۱۲۵-a

نقطه‌ای که محل برخورد قوسهای متناظر با ظرفهای Q و R است، تغییر نمی‌کند . فرض کنید ، بعد از ریختن یك چهارم مایع ظرف P در ظـرف Q و یك چهارم دیگر آن در ظـرف R ، مقدار مایعی کـه در ظرف P باقی می‌ماند با قـوس AB نشان داده شود . $A'E' = B'D' = \frac{1}{2} A'B'$ را جدا می کنیم ، نقطهٔ E' (و همچنین نقطهٔ D') را بدست می‌آوریم که مرز بین ظرفهای P و Q (ویا بین P و R) ، قبل از جابجا کردن مایع است .



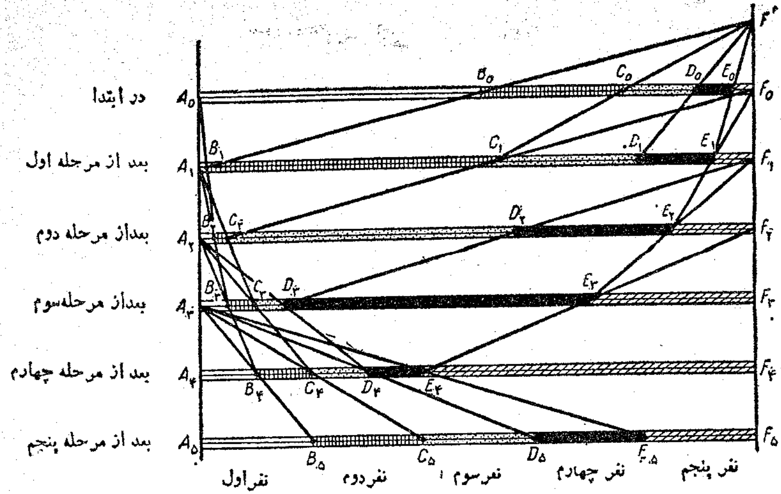
شکل ۱۲۵-b

درشکل ۱۲۵-b، دایرهٔ داخلی، وضع را در پایان کار نشان می‌دهد : در هریك از سه ظرف ، ۱۶ لیتر مایع وجود دارد . وضع قبل از آن (با توجه به آنچه که روی شکل ۱۲۵-a ، در بالا توضیح دادیم)، روی دایرهٔ بعدی نشان داده شده است . به همین ترتیب ، دو دایرهٔ بعدی را پیدا کرده‌ایم ، به‌نحوی که وضع اولیه، روی دایرهٔ خارجی مشخص شده است. باتوجه به تقسیم‌بندی که روی دایره‌ها شده‌است،

می‌توان در هرمرحله ، مقدار مایع داخل هرظرف را پیدا کرد.
جواب : در ابتدا ، ظرف اول ۸ لیتر ، ظرف دوم ۱۴ لیتر و ظرف سوم ۲۶ لیتر مایع داشته است .

b) حل حسابی مسأله. در پایان کار، هریك از پنج نفر به اندازهٔ $\frac{۱}{۵}$ مبلغ کل داشته‌اند ؛ بنابراین قبل از پنجمین عمل، چهار نفر هرکدام $\frac{۱}{۱۰}$ و نفر پنجم $\frac{۶}{۱۰}$ مبلغ کل رادراختیارداشتند؛قبل‌ازمرحلهٔ‌چهارم، سه نفر اول هرکدام $\frac{۱}{۲۰}$، چهارمی $\frac{۱۱}{۲۰}$ و پنجمی $\frac{۶}{۲۰}$ ؛ قبل از مرحلهٔ سوم ، دو نفر اول هرکدام $\frac{۱}{۴۰}$ ، سومی $\frac{۲۱}{۴۰}$ ، چهارمی $\frac{۱۱}{۴۰}$ و پنجمی $\frac{۶}{۴۰}$ ؛ قبل ازمرحلهٔ دوم، اولی $\frac{۱}{۸۰}$، پنجمی $\frac{۶}{۸۰}$؛ قبل از مرحلهٔ اول (یعنی در تقسیم اولیه) ، اولی $\frac{۸۱}{۱۶۰}$ ، دومی $\frac{۴۱}{۱۶۰}$ ، سومی $\frac{۲۱}{۱۶۰}$ ، چهارمی $\frac{۱۱}{۱۶۰}$ و پنجمی $\frac{۶}{۱۶۰}$ مبلغ کل را در اختیار داشته‌اند . ولی می‌دانیم که در تقسیم اولیه ، به اولی ۸۱ سکه رسیده بود ، بنابراین روی هم ۱۶۰ سکه بوده است .

حل ترسیمی مسأله . شش پاره‌خط موازی A_0F_0 ، A_1F_1 ، A_2F_2 ، A_3F_3، A_4F_4 و A_5F_5 را به‌فاصلهٔ مساوی ازیکدیگر، رسم می‌کنیم ، پاره‌خط پایینی A_5F_5 را به وسیلهٔ نقطه‌های B_5 ، C_5 ، D_5 و E_5 ، به پنج قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم : بعد از مرحلهٔ پنجم (یعنی وقتی که برای پنجمین‌بار ، یك نفر موجودی دیگران را دو برابر کرد) ، سهم پنج نفر با هم مساوی شد . نقطهٔ A_4 را به نقطه‌های B_5، C_5، D_5 و E_5 وصل‌می‌کنیم. دراین صورت روی پاره‌خط A_4F_4 پاره‌خطهای A_4B_4 ، B_4C_4 ، C_4D_4 و D_4E_4 بدست می‌آید که به ترتیب متناظر با تعداد سکه‌های چهارنفر اول، قبل از مرحلهٔ پنجم



شکل ۱۲۶

است. حالا نقطهٔ $A_۲$ را به نقطه‌های $B_۴$ ، $C_۴$ و $D_۴$ ، و نقطهٔ $F_۲$ را بـه نقطهٔ $E_۴$ وصل می‌کنیم ، نقطه‌های $B_۳$ ، $D_۳$ و $E_۳$ ، که به این ترتیب بدست می‌آید، وضع تقسیم سکه‌ها را قبل ازمرحلهٔ چهارم نشان می‌دهند . ساختمان بعدی روی شکل ۱۲۶ کاملا روشن است. پاره‌خط $A_۱B_۱$ ازتقسیم $A_۵B_۵$ به چهار قسمت مساوی بدست می‌آید که خود $A_۵B_۵$ هم یك پنجم تمام مبلغ است ؛ بنابراین :

$$A_۱B_۱ = \frac{AF}{۵ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲} = \frac{AF}{۸۰}$$

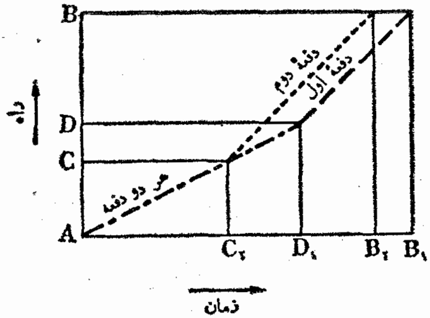
به این ترتیب ، راهزن اول بعد از آنکه سکه‌های چهار نفر دیگر را دوبرابر کند، $\frac{۱}{۸۰}$ تمام مبلغ برایش باقی می‌ماند، دراین وضع چهار نفر دیگر $\frac{۷۹}{۸۰}$ مبلغ را در اختیار دارند ، یعنی قبل از آنکـه سکه‌هایشان دو برابر شود $\frac{۷۹}{۱۶۰}$ مبلغ را داشته‌اند ، در نتیجه اولـی $۱ - \frac{۷۹}{۱۶۰}$ ، یعنی $\frac{۸۱}{۱۶۰}$ سکه‌ها را به‌خود اختصاص داده بود ؛

و چون طبق فرض ، اولی ۸۱ سکه را برداشته بود ، بنابراین تمام سکه‌ها ۱۶۰ عدد بوده است. وقتی‌که $AF=160$ باشد :

$$A_5B_5=B_5C_5=C_5D_5=D_5E_5=E_5F_5=32$$

برای اینکه بدانیم هر کدام در ابتدا چند سکه داشته‌اند ، کافی است روی شکل واز خط پایین شروع کنیم وهمهٔ عددها را بدست آوریم.

۲۳۶. ۱) مسیر حرکت را دردستگاه «زمان-راه» رسم می‌کنیم (شکل ۱۲۷).



شکل ۱۲۷

دفعهٔ اول : نصف راه (AD) با سرعت اولیه طی مـی‌شود و نصف دیگـر راه (DB) با سرعت دو برابر، یعنی $D_1B_1=\frac{1}{2}AD_1$.

دفعهٔ دوم: نصف زمان با سرعت اولیه طـی می‌شود ، نصف دیگر با سرعت دو برابر ، یعنی $CB=2AC$ و $AC_2=C_2B_2$.

به کمك پـرگار معلوم می‌شود که $B_1B_2=\frac{1}{9}AB_1$ ، یعنی دفعهٔ دوم به‌اندازهٔ $\frac{1}{9}$ زمان دفعهٔ اول ، کمتر در راه بوده است .

۲) هردو دفعه ، یك سوم راه با سرعت اولیه ومثلاً در زمان t طی شده است .

هردو دفعه، نیم دوم راه، بـا سرعت دوبرابر طـی شده است، بنابر این درمورد آن $\frac{3}{4}t$ وقت صرف شده است .

دفعهٔ‌اول، برای بقیهٔ یك‌ششم راه، به‌اندازهٔ $\frac{t}{2}$ وقت صرف شده است .

دفعهٔ دوم ، بـرای همین یك ششم راه ، $\frac{t}{4}$ وقت صرف شده است .

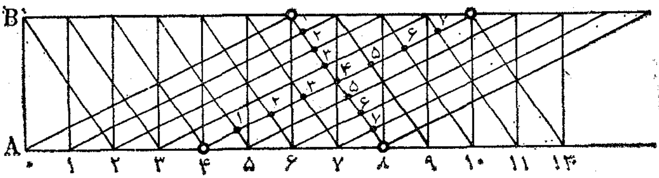
در مجموع ، وقتی که صرف شده است ، چنین است :

$$t+\frac{۳}{۴}t+\frac{۱}{۲}t=\frac{۹}{۴}t \qquad \text{: دفعهٔ اول}$$

$$t+\frac{۳}{۴}t+\frac{۱}{۴}t=\frac{۸}{۴}t \qquad \text{: دفعهٔ دوم}$$

بنابراین ، دفعهٔ دوم به اندازهٔ $\frac{۱}{۹}$ زمان دفعهٔ اول ، وقت کمتر صرف شده است .

۲۳۷. اگر جریان آب وجود نداشت وقایقها درآب ساکن حرکت می‌کردند، قایقی هم که از B به سمت A حرکت می‌کرد به هفت قایقی که از A حرکت کرده بودند ، برخورد می‌کرد . در حالتی هم کـه جریان آب وجـود دارد ، تعداد ملاقاتها تغییر نمـی‌کند ، زیرا هیچ دلیلی



شکل ۱۲۸

برای تغییر تعداد ملاقاتهای قایقها وجود ندارد. این تمام حل مسأله است. ولی آیـا هیچ چیز تغییر نمی‌کند ؟ چون بـه مناسبت وجـود جریان آب ، سرعت قایقها (نسبت به ساحل) تغییر می‌کند (به‌نسبت (۱ − ۲) : (۱ + ۲) ، یعنی ۱ : ۳) ، زمانی که برای طی مسیر لازم است، تغییر می‌کند (و به‌نسبت ۳ : ۱ است) ؛ به این مناسبت، برای قایقی که به طرف پایین و در جهت جریان آب می‌رود ، فاصلهٔ زمانی ملاقات دو قایق متوالی که از جهت عکس می‌آیند ، ثلث همین نوع فاصلهٔ زمانی برای قایقی است که در خلاف جریان‌آب حرکت می‌کند، (شکل ۱۲۸ را ببینید).

۲۳۸. ۱) سرعت اختصاصی قایق را x کیلومتر درساعت می‌گیریم. دراین صورت ، قایق در جهت جریان آب $(x+۴)$: $۱۳\frac{۱}{۳}$ ساعت و در

خلاف جریان آب $(x-۴)$: $۹\frac{۱}{۳}$ ساعت ، وقت صرف کرده است.

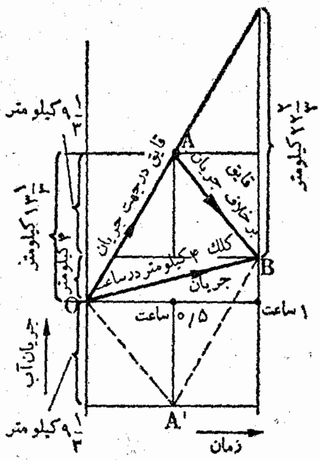
کلك تا لحظهٔ ملاقات به‌اندازهٔ $۱۳\frac{۱}{۳} - ۹\frac{۱}{۳}$ ، یعنی ۴ کیلومتر راه رفته است و برای این فاصله ۴ : ۴ ، یعنی ۱ ساعت وقت صرف کرده است . به این ترتیب به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\frac{۱۳\frac{۱}{۳}}{x+۴} + \frac{۹\frac{۱}{۳}}{x-۴} = ۱$$

که از آنجا، مقدار x بدست می‌آید: سرعت قایق $۲۲\frac{۲}{۳}$ کیلومتر در ساعت است .

۲) قایق در جهت جریان آب $۱۳\frac{۱}{۳}$ کیلومتر، ولی درخلاف جریان آب $۹\frac{۱}{۳}$ کیلومتر ، یعنی ۴ کیلومتر رفته است . بنابراین در این مدت ، کلك فقط ۴ کیلومتر رفته است و چون سرعت جریان آب ۴ کیلومتر در ساعت است، ازلحظهٔ حرکت از نقطهٔ A تالحظهٔ ملاقات، یك ساعت طول کشیده است . اگر دستگاه «قایق ـ کلك » را در نظر بگیریم (بدون توجه به ساحل) ، معلوم می‌شود که قایق از نظر زمانی ، همانقدر ازکلك دورشده است، که در موقع برگشتن، برای ملاقات باکلك، وقت لازم داشته است، یعنی ۲ : ۱ یا ۰/۵ ساعت. قایق در نیم ساعت $۱۳\frac{۱}{۳}$ کیلومتر (نسبت به‌ساحل) جلورفته‌است، بنابراین سرعت آن ۰/۵ : $۱۳\frac{۱}{۳}$ یا $۲۶\frac{۲}{۳}$ کیلومتر درساعت‌است، که اگرسرعت جریان‌آب‌را ازآن کم کنیم، سرعت اختصاصی‌قایق $۲۲\frac{۲}{۳}$ کیلومتر در ساعت بدست می‌آید .

تبصره. در فرض مسأله گفته شده است که قایق و کلك دریك زمان ودر جهت جریان آب حرکت کردند ، ولی این شرط اجباری نیست ، اگر قایق همزمان با کلك ، ولی به‌جای جهت جریان آب، در خلاف جریان‌آب حرکت کند، باز هم همین جواب بدست می‌آید (به شرطی که باز هم در خلاف جهت جریـان آب $9\frac{1}{3}$ کیلـومتر و در جهت جریان آب $13\frac{1}{3}$ کیلومتر رفته باشد) .



شکل ۱۲۹

شکل ۱۲۹ نشان می‌دهد که در دو حالت چه وضعی پیش می‌آید .

۲۳۹. ۱) فاصلهٔ زمانی بین هردو سئانس را x می‌گیریم . فرض می‌کنیم که سئانس‌اول ، y ساعت بعد از ساعت ۱۲ شروع شود. دراین صورت:

شروع سئانس اول :	$12+y$
شروع سئانس دوم :	$12+y+x$
. . . . . .	. . . . . .
شروع سئانس هفتم :	$12+y+6x$
شروع سئانس هشتم :	$12+y+7x$

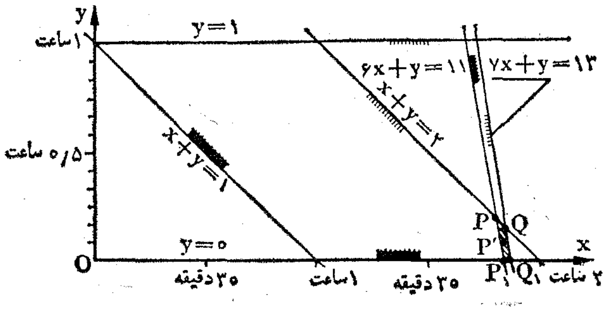
از اینجا و از فرض مسأله نتیجه می‌شود :

$$12\leqslant 12+y<13 \implies 0\leqslant y<1$$
$$13\leqslant 12+y+x<14 \implies 1\leqslant y+x<2$$
$$23\leqslant 12+y+6x<24 \implies 11\leqslant y+6x<12$$
$$24\leqslant 12+y+7x<25 \implies 12\leqslant y+7x<13$$

که اگر از نامساویهایی که از بقیه نتیجه می‌شود ، صرفنظر کنیم ، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases} ۰ \leqslant y < ۱ \\ ۱ \leqslant y + x < ۲ \\ ۱۱ \leqslant y + ۶x \\ \qquad y + ۷x < ۱۳ \end{cases}$$

دستگاه را به کمك ترسیم حل می‌کنیم (شکل ۱۳۰) .



شکل ۱۳۰

در صفحهٔ محورهای مختصات ، این شش خط را رسم می‌کنیم :

$$y = ۰ \,, \; *$$
$$y = ۱ \,,$$
$$x + y = ۱ \,, *$$
$$x + y = ۲ \,,$$
$$۶x + y = ۱۱ \,, *$$
$$۷x + y = ۱۳$$

هریك از این خطها، با توجه به علامت نامساوی ($<$ یا $>$)، نیم صفحه‌ای را برای ما مشخص می‌کند ؛ هریك از این نیم صفحه‌ها را روی شکل به وسیلهٔ هاشور و یا نوارکوتاه سیاه مشخص کرده‌ایم ، در حالتی که با علامت $\leqslant$ سروکار داریم، خود نقطه‌های خط راست هم در نامعادله صدق می‌کند (معادلهٔ این خطها با علامت ستاره و

نیم صفحه‌های مربوط به آنها با نوار سیاه مشخص شده است)؛ و در حالتی که با علامت > سروکار داریم ، نقطه‌های واقع برخط در نامعادله صدق نمی‌کند .

x و y مورد نظر عبارت است از مختصات نقطه‌هایی کـه در هرشش نیم صفحه قرار داشته باشد . روی شکل ۱۳۰ دیده می‌شود که این نقطه‌ها، چهارضلعی PQP_1Q_1 را تشکیل می‌دهند، که البته نقطه‌های واقع بردو ضلع PQ و QQ_1 جزو آنها نیست .

شرط اضافی مسأله (x و y باید مضرب ۵ باشند) ، تنها در مورد دو نقطه صدق می‌کنند :

$$P_1(1^\circ 50' \text{ ، } 0^\circ 0')$$

$$P'(1^\circ 50' \text{ ، } 0^\circ 5')$$

نقطهٔ $Q(1^\circ 50' \text{ ، } 10')$ با شرط مسأله می‌سازد ، ولـی در نامعادلهٔ $y+7x<13$ صدق نمی‌کند .

بنابراین مقدار x ، یعنی فاصلهٔ زمانی بین هردو سئانس، مساوی یك ساعت و ۵۰ دقیقه و شروع سئانس اول ، ساعت ۱۲ یا ساعت ۱۲ و ۵ دقیقه است .

۲) سئانس اول قبل از ساعت ۱۲ شروع نشده است ، سئانس هفتـم هم بعدازساعت ۱ شب تمام نشده است؛ بنابراین، این هفت سئانس بیش از ۱۲ − (۱ + ۲۴) ، یعنی ۱۳ ساعت وقت را نگرفته است .

در نتیجه زمانی که برای یك سئانس لازم است ، از ۱ ساعت و ۵۱ دقیقه تجاوز نمی‌کند (یك هفتم ۱۳ ساعت ، یا ۷۸۰ دقیقه ، مساوی ۱ ساعت و ۵۱ دقیقه است).

سئانس دوم قبل از ساعت ۱۴ شروع می‌شود و سئانس ششم قبل از ساعت ۲۲ و ۵۵ دقیقه تمام نمی‌شود؛ بنابراین، برای این پنج سئانس کمتر از ۸ ساعت و ۵۵ دقیقه ($22^\circ 55' - 14^\circ$) ، نمی‌توان به‌حساب آورد . در نتیجه زمان لازم برای یك سئانس نمی‌تواند از ۱ ساعت و ۴۷ دقیقه کمتر باشد (یك پنجم ۸ ساعت و ۵۵ دقیقه، یا ۵۳۵ دقیقه، مساوی ۱ ساعت و ۴۷ دقیقه می‌شود) . به این ترتیب:

(دقیقه) ۵۱ (ساعت) ۱ $\leqslant x \leqslant$ ۱ (ساعت) ۴۷ (دقیقه) ۱

از آنجا کـه فاصلهٔ زمانی لازم بـرای یك سئانس باید مضربی از ۵ دقیقه باشد)، x مساوی یك ساعت و ۵۰ دقیقه می‌شود. سئانس اول تا ساعت ۱۴ تمام‌می‌شود وبنابراین شروع آن ساعت ۱۲ ویا ۱۲ و۵۹ دقیقه است .

۲۴۰. دانش‌آموز سوم توصیه کردکه دومی به جای دوشماره ، فقط یکی از شماره‌ها را بگیرد . چـون معلـوم نیست کدامیك از شماره‌ها متعلق به اولی است، شماره‌ای راکه دومی می‌گیرد ممکن است همان شمارهٔ مورد نیاز خودش باشد و ممکن است شمارهٔ مورد نیاز او نباشد. در حالت اول، لزومی ندارد‌که دومی برای دیدن‌ا ولی، پیش اوبر گردد. در حالت دوم بـاید به سالن رستوران بر گردد و شمارهٔ خودش را بگیرد .

توصیهٔ دانش‌آموز ریاضی، دانش‌آموز دوم را با پنجاه درصد احتمال، از بر گشتن معاف می‌کند .

۲۴۱. a) اگر تعداد گردوهای هریك از سه‌کیسه باهم مساوی باشد (مثلاً در هرکیسه m گردو)، تعداد کل گردوها در سه کیسه مساوی $۳m$ می‌شود ، یعنی باید داشته باشیم : $n=۳m$ (کـه در آن m عددی صحیح ومثبت است). ولی n عددی دلخواه است وبنابراین، سه حالت می‌تواند باشد :

$$n=۳m$$

$$n=۳m+۱$$

$$n=۳m+۲$$

به این ترتیب ازسه حالتی‌که برای n وجود دارد، تنها یکی ازآنها می‌تواند برای تساوی تعدادگردوها در هرسه‌کیسه، قابل قبول باشد (که دراین صورت در هرکیسه n : ۳ گردو می‌تواند وجود داشته باشد) ، برای دوحالت دیگر ، این وضع ممکن نیست .

به این مناسبت ، حالتی را در نظر می‌گیریم که تعدادکل گردوها در سه کیسه مساوی $n=۳m$ باشد .

این $3m$ گردو می‌تواند بین سه کیسه به طریقه‌های مختلف تقسیم شود : مثلاً درکیسهٔ اول هیچ، در دومی یك گردو و درسومی بقیهٔ گردوها . به چند طریق مختلف می‌توان تعداد $3m$ گردو را بین این سه کیسه تقسیم کرد؟

ابتدا حالت ساده‌تری را در نظر می‌گیریم : فرض می‌کنیم دو کیسه داشته باشیم و تعداد کل گردوها مساوی k باشد . در این صورت در کیسهٔ اول ممکن است ۰ گردو یا ۱ گردو یا ۲ گردو ... یا k گردو وجود داشته باشد . به این ترتیب ، در حالتی که دو کیسه و روی هم k گردو داشته‌باشیم، $(k+1)$ حالت مختلف وجود دارد.
به مسألهٔ خودمان برمی‌گردیم که سه کیسه و روی‌هم n گردو داریم: اگر درکیسهٔ اول p گردو $(p \leqslant n)$ وجود داشته باشد، بقیهٔ $(n-p)$ گردو را (بنابر مسأله‌ای که برای دو کیسه ، هم اکنون حل کردیم)، می‌توان به $(n-P+1)$ طریق‌دردو کیسهٔ دیگر (دومی‌وسومی) قرار داد.

حالا می‌توان تعدادکل حالتهای مختلف وممکن را با توجه به‌مقادیر مختلف p $(p=0,1,2,\dots,n)$ ، بدست آورد. باید مجموع زیر را محاسبه کنیم :

$$\sum_{p=0}^{n}(n-p+1)=\sum_{p=0}^{n}[(n+1)-p]=$$

$$=(n+1)+n+(n-1)+\dots+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

بنابراین تعداد کل حالتهای ممکن ، برای تقسیم n گردو در سه کیسه ، برابر است با :

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

از این $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ حالت، تنها یکی، باشرط مسأله می‌سازد؛ بنابراین احتمال مورد نظر (برای $n=3m$) ، برابر است با

$\frac{۲}{(n+۱)(n+۲)}$، وچون احتمال اینکه $n = ۳m$ باشد، برابراست با $\frac{۱}{۳}$ ، احتمال اینکه تعداد گردوها ، در سه کیسه ، یکی باشد ، برابر است با $\frac{۲}{۳(n+۱)(n+۲)}$.

b) این احتمال صفر است ، زیرا تعداد حالتهای ممکنۀ تقسیم آرد در سه کیسه ، بی‌نهایت است .

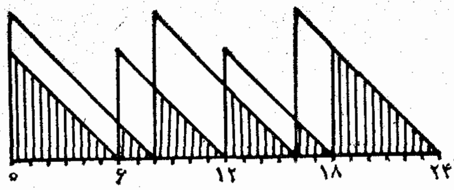
۲۴۲. هردو جواب نادرست است. علاوه برآن، آنچه که مسأله داده است، برای بدست آوردن جواب دقیق ، کافی نیست . حالت ساده‌تری را در نظر بگیریم . فرض کنید فاصلۀ زمانی چه برای حرکت اتوبوس و چه برای حرکت ترولیبوس ، مساوی ۸ دقیقه باشد . اگر برنامۀ تنظیمی این طور باشدکه اتوبوس و ترولیبوس از یك ایستگاه، باهم حرکت کنند ، وجود دو نوع وسیله ، فاصلۀ زمانی انتظار مسافرها را کم نمی‌کند ؛ در این حالت بطور متوسط باید ۴ = ۲ : ۸ دقیقه انتظار کشید.

ولی اگر برنامه به این ترتیب تنظیم شده باشدکه ترولیبوس ۴ دقیقه بعد از اتوبوس حرکت‌کند، زمان متوسط انتظار، برابر ۲ = ۲ : ۴ دقیقه می‌شود.

به این ترتیب، اگر هم اتوبوس و هم ترولیبوس هرکدام هر۸ دقیقه یك بار، حرکت کنند، زمان انتظار بین ۲ دقیقه تا ۴ دقیقه (بسته به برنامۀ تنظیمی) می‌تواند باشد .

به مسألۀ خودمان برمی‌گردیم (فاصلۀ زمانی ۶ دقیقه و ۸ دقیقه) . وضعی را که پیش می‌آید به کمك شکل نشان مـی‌دهیم . مسافر در هرلحظه‌ای ممکن است به ایستگاه بـرسد . مدت انتظار او وقتی ۰ دقیقه‌است که درست درلحظۀ حرکت‌اتوبوس (یاترولیبوس) به‌ایستگاه برسد . مدت انتظار وقتی مساوی t است کـه مسافر درست در یك لحظه بعد ازحرکت اتوبوس (یا ترولیبوس) برسد (t دقیقه را فاصلۀ دو حرکت گرفته‌ایم).

در شکل ۱۳۱ ـ a ، وضع انتظار را برای حالتی نشان داده‌ایم ، که برنامهٔ حرکت اتوبوس و تروليبوس چنان باشد که در



شکل ۱۳۱-a

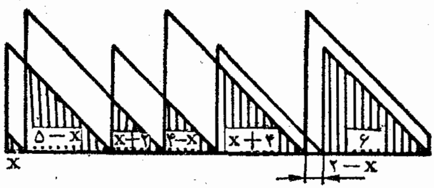
لحظه‌ای با هم ازيك ایستگاه حرکت کنند. مساحتهای مثلثهای هاشور خورده را محاسبه می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۲}(۶^۲+۲^۲+۴^۲+۴^۲+۲^۲+۶^۲)=۵۶$$

متوسط زمان انتظار برابر خواهد بود با :

$$۵۶ : ۲۴ = ۷ : ۳ = ۲\frac{۱}{۳} \text{ (دقیقه)}$$

وقتی که برنامهٔ حرکت این دو وسیله را طور دیگری تنظیم کنیم ، متوسط انتظار چقدر خواهد بود ؟ فرض کنید تروليبوس ، x دقیقه بعد ازاتوبوس حرکت کند (شکل ۱۳۱-b)؛ برای تعیین زمان متوسط انتظار ، باید مساحت مثلثهای هاشورخورده را حساب کنیم و ببینیم به‌ازای چه مقداری از x ، این مساحت به حداقل خود می‌رسد

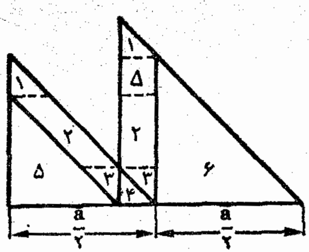


شکل ۱۳۱-b

(متذکر می‌شویم که $۰ \leqslant x \leqslant ۲$ ، ضمناً برای $x=۲$ همان شکلی بدست می‌آید که برای $x=۰$).

ابتدا به حل این مسأله می‌پردازیم: پاره‌خط a داده شده است؛ روی این پاره‌خط ،دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین طوری بسازیدکه مساحت آنها حداقل باشد . ثابت می‌کنیم که برای این منظور باید دو مثلث مورد نظر مساوی باشند . روی پاره‌خط مفروض a ، دو

زوج مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌سازیم، به نحوی که یك‌زوج آنها ازمثلثهای متساوی تشکیل شده باشد (شکل c-۱۳۱). مطابق‌شکل، خطهای‌راستی‌موازی‌باقاعده‌ها رسم می‌کنیم. مقایسهٔ قسمت‌هایی که بدست می‌آید، معلوم می‌کند که مساحت دو مثلث نامساوی، از مساحت دومثلث مساوی، به اندازهٔ قطعه‌ای که با Δ نشان داده‌ایم، بیشتر است، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل c-۱۳۱

از اینجا نتیجه می‌شود که حداقل مساحت برای مثلثهای با قاعده‌های $(x+۲)$ و $(۴-x)$، وقتی است که داشته باشیم:

$x+۲=۴-x$ یا $x=۱$.

به همین ترتیب دو مثلث با قاعده‌های $(۶-x)$ و $(x+۴)$، وقتی در مجموع حداقل مساحت را دارند که داشته باشیم:

$۶-x=x+۴$ یا $x=۱$.

بالاخره برای مثلثهای با قاعده‌های x و $(۲-x)$ باید داشته باشیم:

$۲-x=x$ یا $x=۱$.

به این ترتیب به ازای $x=۱$، مساحت هریك از سه زوج مثلث، به حداقل خود می‌رسد، یعنی وقتی x را مساوی ۱ دقیقه بگیریم، مجموع زمان انتظار به حداقل می‌رسد و برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\Big[x^{۲}+(۶-x)^{۲}+(x+۲)^{۲}+(۴-x)^{۲}+(x+۴)^{۲}+ +(۲-x)^{۲}+۶^{۲}\Big]=\frac{۱}{۲}\Big[۱^{۲}+۵^{۲}+۳^{۲}+۳^{۲}+۵^{۲}+ +۱^{۲}+۶^{۲}\Big]=۵۳$$

و زمان متوسط انتظار مساوی $\frac{53}{24}$ یا $2\frac{5}{24}$ دقیقه می‌شود .

می‌بینیم که در بهترین وضع برنامه ، متوسط زمـان انتظار مساوی $2\frac{5}{24}$ دقیقه می‌شود که اگر با زمان متوسط انتظار در حالت اول ($2\frac{1}{3}$ دقیقه) مقایسه کنیم ، $\frac{1}{8}$ دقیقه کمتر است و صرفه‌جویی نسبی وقت چنین است :

$$\frac{1}{8} : 2\frac{1}{3} = \frac{3}{56} \approx \%5$$