دانشگاه پیام نور

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

(رشتهٔ ریاضی)

دکتر سعید فاریابی

از سری انتشارات آزمایشی متون درسی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

(رشتهٔ ریاضی)

مؤلف: دکتر سعید فاریابی

دانشگاه پیام نور

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

فصل ۱: چند جمله‌ایهای متعامد

در این فصل با توابع متعامد و ویژگیهای آنها آشنا می‌شویم.

۱ - ۱ - توابع متعامد

تعریف ۱-۱-۱

فرض می‌کنیم توابع f، g بر بازهٔ [a,b] تعریف شده باشند و تابع w بر بازهٔ (a,b) پیوسته و مثبت باشد. ***حاصلضرب داخلی*** f و g نسبت به ***تابع وزن*** w توسط انتگرال

$$\int_a^b w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx \qquad (1)$$

تعریف می‌کنیم. حاصلضرب داخلی را با نماد (f,g) نمایش می‌دهیم. دقت می‌کنیم این نماد اطلاعی در مورد تابع وزن و بازهٔ انتگرالگیری به‌دست نمی‌دهد، این اطلاعات باید در هر مورد مشخص داده شوند. w می‌تواند در یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ (a,b) بینهایت شود. تعریف حاصلضرب داخلی را می‌توان به حالتی که بازهٔ انتگرالگیری بینهایت است توسعه داد. در این حالت فرض می‌کنیم که توابع f، g و w به قسمی باشند که انتگرال مورد نظر همگرا باشد.

به آسانی می‌توان ویژگیهای زیر را در مورد حاصلضرب داخلی ثابت کرد.

تمرین ۱-۱-۲

ثابت کنید که

(الف) $(f\ ,\ g) = (g\ ,\ f)$

(ب) $(f\ ,\ g + h) = (f\ ,\ g) + (f\ ,\ h)$

(پ) $(c\ f,\ g) = c\ (f,\ g),\ c \in R$

تعریف ۱-۱-۳

حاصلضرب داخلی تابع f با خود این تابع، یعنی

$$(f , f) = \int_a^b w(x) [f(x)]^2 dx$$

نامنفی است، چون به ازای هر x، $a < x < b$ ، $w(x) > 0$. *نرم* f راکه با $\|f\|$ نمایش می‌دهیم. با رابطهٔ

$$\|f\| = (f , f)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

تعریف می‌کنیم. از (۲) روشن است که نرم f را می‌توان به صورت

$$\|f\| = \{ \int_a^b w(x) [f(x)]^2 dx \}^{\frac{1}{2}}$$

نوشت. اگر f بر بازهٔ [a,b] پیوسته باشد، نرم آن صفر است. اگر و تنها اگر f تابع صفر باشد.

تعریف ۱-۱-۴

دو تابع f و g را نسبت به تابع وزن w بر بازهٔ (a,b) ***متعامد*** می‌گوییم، اگر

$$(f , g) = 0$$

تذکر ۱-۱-۵

در حالتی که به ازای هر x، $a < x < b$ ، $w(x) = 1$ و $(f,g) = 0$، دو تابع f و g را ***متعامد ساده*** می‌نامیم. وقتی $\|f\| = 1$، تابع f را ***نرمال شده*** می‌گوییم.

تعریف ۱-۱-۶

دنباله توابع $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ را یک مجموعهٔ متعامد می‌نامیم، اگر این توابع دوبه‌دو متعامد باشند. یعنی اگر $(\psi_m , \psi_n) = 0$ وقتی $m \neq n$

تذکر ۱-۱-۷

اگر نرم هیچکدام از توابع دنبالهٔ متعامد $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ صفر نباشند، هریک از توابع ψ_n را می‌توان با تقسیم کردن آنها بر عدد ثابت مثبت $\|\psi_n\|$ نرمال کرد. دنبالهٔ جدید $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ که به این ترتیب تشکیل می‌گردد، یعنی:

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

متعامد یکه است، یعنی داریم:

$$(\phi_n , \phi_m) = \int_a^b w(x)\, \phi_n(x)\, \phi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ اگر} \\ 1 & m = n \text{ اگر} \end{cases}$$

مثال ۱-۱-۸

فرض می‌کنیم به ازای $0 \leq x \leq \pi$ ، $\phi_n(x) = \sin nx$، نشان دهید دنبالهٔ $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ بر بازهٔ $[0 , \pi]$ متعامد ساده است. همچنین نرم هریک از توابع ϕ_n را پیدا کنید.

حل

می‌خواهیم ثابت کنیم که $(\phi_n , \phi_m) = 0$ وقتی $m \neq n$. بنا به تعریف حاصلضرب داخلی، خواهیم داشت

$$(\phi_n , \phi_m) = \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{ \cos (n-m)x - \cos (n+m)x\}\, dx$$

توجه می‌کنیم‌که چون m و n اعداد صحیح بزرگتراز صفر هستند و $n \neq m$، پس

$$(\phi_n , \phi_m) = \left[\frac{1}{2(n-m)} \sin (n-m)x - \frac{1}{2(n+m)} \sin (n+m)x\right]_0^{\pi}$$

با قرار دادن حدود انتگرالگیری در عبارت بالا، نتیجه می‌شود که اگر $m \neq n$ آنگاه

$$(\phi_n , \phi_m) = 0$$

برای پیدا کردن $\|\phi_n\|$ بنا به تعریف نرم، خواهیم داشت

$$\|\phi_n\|^2 = (\phi_n , \phi_n) = \int_0^{\pi} \sin nx \sin nx \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx$$

با استفاده از فرمول مثلثاتی $\sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}$، به دست می‌آوریم

$$\|\phi_n\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1-\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4n} [\sin 2n\pi - \sin 0] = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین: $\|\phi_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

تمرین ۱-۱-۹

دنباله توابع $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید این دنباله توابع بر بازهٔ $[-\pi , \pi]$ متعامد ساده است. همچنین نرم هریک از توابع $\sin nx$ را پیدا کنید.

تعریف ۱-۱-۱۰

دنباله چندجمله‌ایهای $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ را که در آن ϕ_n یک چندجمله‌ای از درجه n

است، یک **مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایها** می‌نامیم.

در ادامهٔ این فصل مجموعه‌های ساده از چندجمله‌ایها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تمرینهای بخش ۱-۱

۱-۱-۱۱

۱. برای توابع داده شدهٔ f، g و w و بازهٔ مشخص شده حاصلضرب داخلی f و g را پیدا کنید.

(الف) $f(x) = x$ ، $g(x) = 1$ ، $w(x) = \sqrt{x}$ ، $0 \leq x \leq 1$

(ب) $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ ، $w(x) = 1$ ، $0 \leq x \leq \pi$

۲. در هر یک از مسائل بالا نرم تابع f را پیدا کنید.

۳. اگر به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، $\phi_n(x) = \sin n\pi x$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ $(0,1)$ متعامد ساده است. همچنین نرم هریک از توابع ϕ_n را پیدا کنید.

۴. فرض می‌کنیم که دو تابع f و g نسبت به تابع وزن w بر بازهٔ (a,b)، متعامد باشند. نشان دهید که دو تابع $F = \sqrt{w}\, f$ و $G = \sqrt{w}\, g$ بر بازهٔ (a,b) متعامد ساده هستند.

۵. فرض می‌کنیم به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $|x| \leq 1$ ، $f_n(x) = x^n$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چندجمله‌ایهاست، لیکن یک مجموعهٔ متعامد ساده روی $(-1,1)$ نیست.

۶. نشان دهید

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2$$

۱-۲ ــ یک قضیهٔ وجودی در مورد چندجمله‌ایهای متعامد

در این بخش ثابت می‌کنیم که متناظر با بازه و تابع وزن داده شده یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد وجود دارد. نخست چند ویژگی از

چندجمله‌ایها راکه در اثبات قضیهٔ وجودی مورد نیاز هستند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۲-۱

فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایها و Q_m یک چندجمله‌ای دلخواه از درجهٔ m باشد. در این صورت Q_m را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از $\phi_0 , \phi_1 , \ldots , \phi_m$ نوشت.

اثبات

قضیه را به کمک استقراء ثابت می‌کنیم. اگر Q_0 تابع ثابتی باشد (یعنی یک چندجمله‌ای از درجه صفر باشد). قرار می‌دهیم $C = \frac{Q_0}{\phi_0}$، توجه می‌کنیم که $\phi_0 \neq 0$، بنابراین $Q_0 = C\phi_0$. پس قضیه به ازای $m = 0$ درست است. اینک فرض می‌کنیم که قضیه به ازای هر $K \geq m$ که K عدد صحیح نامنفی است، درست باشد و Q_{K+1} چندجمله‌ای دلخواهی از درجهٔ $K+1$ باشد، یعنی:

$$Q_{K+1}(x) = A_{K+1}x^{K+1} + A_K x^K + \ldots + A_0$$

که در آن $A_{K+1} \neq 0$. از طرف دیگر چون مجموعهٔ چندجمله‌ایهای داده شده ساده است، بنابراین:

$$\phi_{K+1}(x) = a_{K+1}x^{K+1} + a_K x^K + \ldots + a_0$$

و $a_{K+1} \neq 0$. اگر $C_{K+1} = \frac{A_{K+1}}{a_{K+1}}$ انتخاب کنیم، آنگاه:

$$Q_{K+1} - C_{K+1}\phi_{K+1} = \left(A_K - \frac{A_{K+1}}{a_{K+1}}a_K\right)x^K + \ldots + \left(A_0 - \frac{A_{K+1}}{a_{K+1}}a_0\right)$$

یک چند جمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از K است، لذا بنا به فرض استقراء، خواهیم داشت:

$$Q_{K+1} - C_{K+1}\phi_{K+1} = C_0\phi_0 + C_1\phi_1 + \ldots + C_K\phi_K$$

یا

$$Q_{K+1} = C_0 \phi_0 + C_1 \phi_1 + ... + C_K \phi_K + C_{K+1} \phi_{K+1}$$

به‌این ترتیب ثابت کردیم که قضیه به ازای هر عدد صحیح نامنفی برقرار است.

قضیه ۱-۲-۲

مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن w بر بازهٔ (a,b) متعامد است اگر و تنها اگر به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و به ازای هر $m = 0,1,...,n-1$ داشته باشیم:

$$(\phi_n(x)\ ,\ x^m) = \int_a^b w(x)\ \phi_n(x)\ x^m\ dx = 0 \qquad (1)$$

اثبات

نخست ثابت می‌کنیم که اگر شرط (۱) برقرار باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ متعامد است. فرض می‌کنیم ϕ_n و ϕ_m دو چندجمله‌ای متمایز از این مجموعه باشند و $n > m$. اگر

$$\phi_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_0$$

آنگاه بنا به قسمتهای (ب) و (پ) تمرین ۱-۱-۲ و شرط (۱)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\phi_n(x)\ ,\ \phi_m(x)\ ) &= (\ \phi_n(x),\ a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_0) \\ &= a_m\ (\phi_n(x),\ x^m) + a_{m-1}\ (\phi_n(x),\ x^{m-1}\ ) + ... + a_0\ (\phi_n\ ,1)) = 0\end{aligned}$$

اینک ثابت می‌کنیم که اگر مجموعهٔ ساده چندجمله‌ایهای $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ متعامد باشد، آنگاه شرط (۱) برقرار است. فرض می‌کنیم n و m دو عدد صحیح مثبت باشند به‌طوری که $0 \le m < n$ بنا به قضیهٔ ۱-۲-۱ اعداد ثابت $C_0, C_1, ..., C_m$ وجود

دارند به قسمی که

$$x^m = C_0\,\phi_0(x) + C_1\,\phi_1(x) + \dots + C_m\,\phi_m(x)$$

بنا به قسمتهای (ب) و (پ) تمرین ۱-۱-۲ و تعامد چندجمله‌ایها، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(\phi_n(x), x^m) &= (\phi_n(x), C_0\,\phi_0(x) + C_1\,\phi_1(x) + \dots + C_m\,\phi_m(x))\\ &= C_0(\phi_n(x), \phi_0(x)) + C_1(\phi_n(x), \phi_1(x)) + \dots + C_m(\phi_n(x), \phi_m(x))\\ &= 0 \qquad m = 0, 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

قضیه ۱-۲-۳

فرض می‌کنیم تابع w بر بازهٔ (a,b) مثبت و پیوسته باشد و هریک از انتگرالهای

$$M_n = \int_a^b w(x)\, X^n\, dx \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (۲)$$

موجود باشند (a یا b یا هر دو ممکن است بینهایت باشند). در این صورت مجموعهٔ ساده‌ای از چندجمله‌ایها که نسبت به تابع w بر (a,b) متعامد است، وجود دارد. هر عضو این مجموعه، صرفنظر از یک ضریب ثابت، یکتاست.

اثبات

نشان می‌دهیم که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، چندجمله‌ای ϕ_n از درجهٔ n وجود دارد، به قسمی که:

$$(\phi_n(x), x^m) = \int_a^b w(x)\,\phi_n(x)\, X^m\, dx = 0 \qquad , \qquad m = 0, 1, \dots, n-1 \quad (۳)$$

اگر ϕ_0 تابع ثابت غیرصفر باشد، بنا بر قضیهٔ ۱-۲-۲ دنبالهٔ $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ متعامد خواهد بود.

اینک نشان می‌دهیم که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، اعداد ثابت

$C_0, C_1, \ldots, C_n$، با شرط $C_n \neq 0$، وجود دارند، به‌طوری که چندجمله‌ای

$$\phi_n(x) = C_0 + C_1 X + \ldots + C_n X^n$$

در شرایط (۳) صدق کند. با توجه به (۲) این n شرط به صورت دستگاه

$$\begin{aligned}
(\phi_n(x), 1) &= M_0 C_0 + M_1 C_1 + \ldots + M_{n-1} C_{n-1} + M_n C_n = 0 \\
(\phi_n(x), x) &= M_1 C_0 + M_2 C_1 + \ldots + M_n C_{n-1} + M_{n+1} C_n = 0 \\
&\vdots \\
(\phi_n(x), x^{n-1}) &= M_{n-1} C_0 + M_n C_1 + \ldots + M_{2n-2} C_{n-1} + M_{2n-1} C_n = 0
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
M_0 C_0 + M_1 C_1 + \ldots + M_{n-1} C_{n-1} &= -M_n C_n \\
M_1 C_0 + M_2 C_1 + \ldots + M_n C_{n-1} &= -M_{n+1} C_n \\
&\vdots \\
M_{n-1} C_0 + M_n C_1 + \ldots + M_{2n-2} C_{n-1} &= -M_{2n-1} C_n
\end{aligned} \tag{۴}$$

درمی‌آید. اگر دترمینان

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \ldots & M_{n-1} \\ M_1 & M_2 & \ldots & M_n \\ \vdots & & & \\ M_{n-1} & M_n & \ldots & M_{2n-2} \end{vmatrix}$$

صفر نباشد، با تقسیم دو طرف هریک از معادله‌های دستگاه (۴) بر C_n اعداد C_K/C_n، $K = 0, 1, \ldots, n-1$ به عنوان جواب دستگاه به دست می‌آیند. در این

صورت اگر C_n مقدار ثابت غیرصفری باشد، بقیهٔ ضرایب، یعنی $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$، مضربهای منحصربه‌فرد C_n می‌شوند، آنگاه چندجمله‌ای ϕ_n بدون در نظر گرفتن یک ضریب ثابت به‌طور یکتا معین می‌شود.

اینک نشان می‌دهیم که Δ_n نمی‌تواند صفر باشد. بدین منظور فرض می‌کنیم $\Delta_n = 0$، ثابت می‌کنیم که این فرض به تناقض منجر می‌گردد. دستگاه همگن متناظر با دستگاه (۴)، یعنی دستگاه

$$
\begin{aligned}
&M_0 C_0 + M_1 C_1 + \ldots + M_{n-1} C_{n-1} = 0\\
&M_1 C_0 + M_2 C_1 + \ldots + M_n C_{n-1} = 0\\
&\quad\vdots\\
&\quad\vdots\\
&M_{n-1} C_0 + M_n C_1 + \ldots + M_{2n-2} C_{n-1} = 0
\end{aligned}
$$

را در نظر می‌گیریم. چون دترمینان ضرایب این دستگاه یعنی Δ_n، صفر است، پس دستگاه برای $C_0 , C_1 , \ldots , C_{n-1}$ دارای جواب غیربدیهی است. با توجه به روشی که این دستگاه را تشکیل دادیم، نتیجه می‌شود که یک چندجمله‌ای Q_{n-1} از درجهٔ نابیشتر از $n-1$ و غیرصفر وجود دارد، به قسمی که

$$(Q_{n-1} (x) , X^m) = 0 \qquad , \qquad m = 0 , 1 , 2 , \ldots , n-2$$

یعنی Q_{n-1} بر هر چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از $n-1$ عمود است. به ویژه برخودش نیز عمود می‌باشد. بنابراین،

$$(Q_{n-1} , Q_{n-1}) = \int_a^b w(x) \, [Q_{n-1} (x)]^2 \, dx = 0$$

ولی این غیرممکن است زیرا $w(x)$ بر (a,b) مثبت فرض شده است. پس فرض $\Delta_n = 0$ ممکن نیست و خواهیم داشت $\Delta_n \neq 0$. به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

در واقع قضیه ۱-۲-۳ روشی برای ساختن هر تعداد متناهی از عناصر یک مجموعه ساده از چندجمله‌ایهای متعامد را بیان می‌کند.

مثال ۱-۲-۴

چند جمله‌ایهای ϕ_0، ϕ_1 و ϕ_2 از یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایها را که نسبت به تابع وزن $w(x) = \sqrt{x}$ بر بازهٔ $(0,1)$ متعامداند را به دست اورید. در اینجا فرض می‌کنیم که ϕ_n به صورت

$$\phi_n(x) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$$

باشد.

حل

با توجه به صورت کلی $\phi_n(x)$ که در بالا داده شده است، نتیجه می‌گیریم که

$$\phi_0(x) = 1$$
$$\phi_1(x) = x + a$$
$$\phi_2(x) = x^2 + bx + c$$

ثابت a از شرط

$$(\phi_1, 1) = 0$$

به‌دست می‌آید. بنا به تعریف حاصلضرب داخلی، داریم

$$(\phi_1, 1) = \int_0^1 \sqrt{x}(x+a)\,dx = \frac{2}{5}X^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}a \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}a = 0$$

بنابراین، $a = -\frac{3}{5}$ و

$$\phi_1(x) = X - \frac{3}{5}$$

ثابتهای b و c در ϕ_2 از شرایط

$$(\phi_2(x), 1) = 0$$
$$(\phi_2(x), X) = 0$$

به‌دست می‌آیند. بنا به تعریف حاصلضرب داخلی، داریم:

$$(\phi_۲(x), ۱) = \int_۰^۱ \sqrt{x}\,(x^۲ + bx + c)\,dx$$

$$= \frac{۲}{۷}X^{\frac{۷}{۲}} + \frac{۲}{۵}bX^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۳}cX^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۱$$

$$= \frac{۲}{۷} + \frac{۲}{۵}b + \frac{۲}{۳}c = ۰$$

و

$$(\phi_۲(x), x) = \int_۰^۱ \sqrt{x}\,(x^۲ + bx + c)\,x\,dx$$

$$= \int_۰^۱ (x^{\frac{۷}{۲}} + bx^{\frac{۵}{۲}} + cx^{\frac{۳}{۲}})\,dx$$

$$= \frac{۲}{۹}x^{\frac{۹}{۲}} + \frac{۲}{۷}bx^{\frac{۷}{۲}} + \frac{۲}{۵}cx^{\frac{۵}{۲}}\Big|_۰^۱$$

$$= \frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۷}b + \frac{۲}{۵}c = ۰$$

از حل دستگاه معادلات

$$\frac{۲}{۷} + \frac{۲}{۵}b + \frac{۲}{۳}c = ۰$$

$$\frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۷}b + \frac{۲}{۵}c = ۰$$

مقادیر $b = -\frac{۱۰}{۹}$ و $c = \frac{۵}{۲۱}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\phi_۲(x) = x^۲ - \frac{۱۰}{۹}x + \frac{۵}{۲۱}$$

این روش طولانی است و یک فرمول کلی برای چندجمله‌ایهای ϕ_n از درجهٔ n به‌دست نمی‌آید.

تمرین ۱-۲-۵

چندجمله‌ایهای ϕ_0، ϕ_1 و ϕ_2 از یک مجموعهٔ چندجمله‌ایها راکه نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ بر بازهٔ $(-1,1)$ متعامداند را به‌دست آورید. در اینجا فرض می‌کنیم که ϕ_n به صورت

$$\phi_n(x) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

باشد.

تمرینهای بخش ۱-۲

تمرین ۱-۲-۶

۱. چندجمله‌ایهای ϕ_0، ϕ_1 و ϕ_2 از یک مجموعهٔ چندجمله‌ایها راکه نسبت به تابع وزن و بازهٔ داده شده متعامداند را به دست آورید. فرض می‌کنیم ϕ_n به صورت

$$\phi_n(x) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

باشد.

(الف) $\quad 0 \le x \le 1 \qquad w(x) = X$

(ب) $\quad 0 < x \le 1 \qquad w(x) = X^{-\frac{1}{2}}$

۲. فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد نسبت به تابع وزن w بر بازهٔ (a,b) باشد. اگر

$$\phi_n(x) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

ثابت کنید

$$(\phi_n(x), X^n) = \frac{1}{a_n}\|\phi_n(x)\|^2$$

۳. فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعهٔ ساده‌ای از چندجمله‌ایها باشد که روی بازهٔ $(-1, 1)$ به‌طور ساده متعامداند، قرار می‌دهیم

$$\psi_n(x) = \phi_n\left(\frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{a-b}\right)$$

در اینجا a و b اعداد ثابت می‌باشند، $a < b$. نشان دهید که $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ایها است که بر بازهٔ (a,b) به‌طور ساده متعامد است.

۴. اگر P چندجمله‌ای باشد که به ازای هر عدد صحیح و نامنفی n، $(P(x), x^n) = 0$. نشان دهید که P تابع صفر است.

۵. (الف) نشان دهید که تابع مستقل $f_1 = 1$، $f_2 = x$ و $f_3 = e^x$ یک مجموعهٔ متعامد ساده بر بازهٔ $[0,1]$ تشکیل نمی‌دهد.

(ب) نشان دهید که با استفاده از سه تابع f_1، f_2 و f_3 می‌توان یک مجموعه متعامد ساده بر بازهٔ $[0,1]$ ساخت.

۶. دنبالهٔ نامتناهی توابع $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی بازهٔ $[a,b]$ مستقل خطی نامیده می‌شود اگر به ازای هر عدد صحیح و مثبت m توابع $f_0, f_1, \ldots, f_m$ مستقل خطی باشند. اگر $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنبالهٔ مستقل خطی از توابع پیوسته باشد. ثابت کنید یک دنبالهٔ توابع $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت

$$g_0 = f_0$$
$$g_1 = K_{10} f_0 + f_1$$
$$\vdots$$
$$g_n = K_{n0} f_0 + K_{n1} f_1 + \ldots + K_{nn-1} f_{n-1} + f_n$$

وجود دارد که بر بازهٔ $[a,b]$ یک مجموعه از توابع به‌طور ساده متعامد تشکیل می‌دهد.

۷. دنبالهٔ نامتناهی $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$ راکه بر بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ مستقل خطی می‌باشند را در نظر می‌گیریم. با استفاده از تمرین ۶، g_0، g_1 و g_2 از مجموعه چندجمله‌ایهای $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ راکه بر بازهٔ $-1 \leq x \leq 1$ به‌طور ساده متعامد می‌باشند را به دست آورید.

۱-۳ـ خواص چندجمله‌ایهای متعامد

در این بخش چند خاصیت کلی مشترک بین همهٔ مجموعه‌های ساده از چندجمله‌ایهای متعامد را ارائه می‌دهیم و خواص چندجمله‌ایهای خاص را در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تذکر ۱-۳-۱

یادآور می‌شویم که تابع وزن w، بر بازهٔ (a,b) مثبت و پیوسته می‌باشد و همهٔ انتگرالهای

$$\int_a^b w(x)\, X^n\, dx \;,\; n = 0 , 1 , 2 , \ldots$$

موجود می‌باشند (a یا b یا هر دو می‌توانند بینهایت باشند).

قضیه ۱-۳-۲

فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد بوده و Q_m یک چندجمله‌ای دلخواه از درجهٔ m باشد. در این صورت داریم:

$$Q_m = C_0\, \phi_0 + C_1\, \phi_1 + \ldots + C_m\, \phi_m$$

که در آن

$$C_K = \frac{(Q_m , \phi_K)}{\| \phi_K \|^2} , K = 0 , 1 , 2 , \ldots , m$$

اثبات

بنا به قضیه ۱-۲-۱ می‌دانیم که ثابتهایی چون C_i وجود دارند به قسمی که

$$Q_m = \sum_{i=0}^{m} C_i \phi_i$$

اینک با در نظر گرفتن حاصلضرب (Q_m , ϕ_K)، خواهیم داشت

$$(Q_m , \phi_K) = (C_0 \phi_0 + C_1 \phi_1 + \dots + C_m \phi_m , \phi_K)$$

بنا به تمرین ۱-۱-۲ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}(Q_m , \phi_K) = C_0 (\phi_0 , \phi_K) + C_1 (\phi_1 , \phi_K) + \dots \\ + C_K (\phi_K , \phi_K) + \dots + C_m (\phi_m , \phi_K)\end{aligned}$$

چون وقتی $i \neq K$، $(\phi_i , \phi_K) = 0$، پس

$$(Q_m , \phi_K) = C_K (\phi_K , \phi_K) = C_K \| \phi_K \|^2$$

و چون $\| \phi_K \| \neq 0$، پس از حل معادلهٔ بالا نسبت به C_K، به دست می‌آوریم

$$C_K = \frac{(Q_m , \phi_K)}{\| \phi_K \|^2}$$

مثال ۱-۳-۳

در تمرین ۷ بخش ۱-۲-۶ نشان دادیم که چندجمله‌ایهای

$g_0 (x) = 1$

$g_1 (x) = x$

$g_2 (x) = x^2 - \frac{1}{3}$

بر بازهٔ $(-۱,۱)$ به‌طور ساده متعامداند. تابع $x^۲$ را به صورت ترکیب خطی از توابع $g_۰$، $g_۱$ و $g_۲$ بنویسید.

حل

بنا به قضیهٔ ۱-۳-۲ تابع $x^۲$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی $g_۰$، $g_۱$ و $g_۲$ یعنی $x^۲ = C_۰ g_۰ + C_۱ g_۱ + C_۲ g_۲$، نوشت. که در آن به ازای $K = ۰ , ۱ , ۲$، $C_K = \frac{(x^۲, g_K)}{\| g_K \|^۲}$. نخست باید نرمهای $g_۰$، $g_۱$ و $g_۲$ را حساب کنیم. بنا به تعریف نرم خواهیم داشت

$$\| g_۰ \|^۲ = \int_{-۱}^{۱} ۱\, dx = x \Big|_{-۱}^{۱} = ۲$$

$$\| g_۱ \|^۲ = \int_{-۱}^{۱} x^۲ dx = \frac{x^۳}{۳} \Big|_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\| g_۲ \|^۲ = \int_{-۱}^{۱} [x^۲ - \frac{۱}{۳}]^۲ dx = \int_{-۱}^{۱} [x^۴ - \frac{۲}{۳} x^۲ + \frac{۱}{۹}]\, dx$$

$$= \frac{x^۵}{۵} - \frac{۲}{۹} x^۳ + \frac{۱}{۹} x \Big|_{-۱}^{۱}$$

$$= (\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵}) - \frac{۲}{۹}(۱+۱) + \frac{۱}{۹}(۱+۱)$$

$$= \frac{۲}{۵} - \frac{۴}{۹} + \frac{۲}{۹} = \frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۹} = \frac{۸}{۴۵}$$

بنابراین،

$$C_۰ = \frac{(x^۲, ۱)}{۲} = \frac{۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} x^۲ dx = \frac{۱}{۲} [\frac{x^۳}{۳}]_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{۲} [\frac{۲}{۳}] = \frac{۱}{۳}$$

$$C_۱ = \frac{(x^۲, x)}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲} \int_{-۱}^{۱} x^۳ dx = \frac{۳}{۲} [\frac{x^۴}{۴}]_{-۱}^{۱} = \frac{۳}{۲} [\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}] = ۰$$

$$C_۲ = \frac{(x^۲ , x^۲ - \frac{۱}{۳})}{\frac{۸}{۴۵}} = \frac{۴۵}{۸} \int_{-۱}^{۱} (x^۲)(x^۲ - \frac{۱}{۳})\, dx$$

$$= \frac{۴۵}{۸} \int_{-۱}^{۱} [x^۴ - \frac{۱}{۳} x^۲]$$

$$= \frac{۴۵}{۸} [\frac{x^۵}{۵} - \frac{۱}{۹} x^۳]_{-۱}^{۱}$$

$$= \frac{۴۵}{۸} \cdot [\frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۹}] = \frac{۴۵}{۸} \cdot \frac{۸}{۴۵}$$

$$= ۱$$

پس

$$x^۲ = \frac{۱}{۳}(۱) + ۰\,(x) + ۱\,(x^۲ - \frac{۱}{۳})$$

قضیه ۱-۳-۴

فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد باشد. نشان دهید که این مجموعه در رابطه بازگشتی

$$X \phi_n (x) = A_n \phi_{n+۱} (x) + B_n \phi_n (x) + C_n \phi_{n-۱} (x) , n \geq ۱ \qquad (۱)$$

صدق می‌کند.

اثبات

چون $X \phi_n (x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n+۱$ می‌باشد. پس بنا به قضیهٔ ۱-۳-۲ خواهیم داشت

$$X \phi_n (x) = \sum_{K=۱}^{n+۱} a_{nK} \phi_K (x)$$

که در آن

$$a_{nK} = \frac{(X \phi_n (x) , \phi_K(x))}{\| \phi_K (x) \|^۲}$$

بنا به تعریف حاصلضرب داخلی

$$(X\,\phi_n(x)\,,\ \phi_K(x)) = \int_a^b w(x)\, X\,\phi_n(x)\ \phi_K(x)\, dx$$

$$= \int_a^b w(x)\ \phi_n(x)\, X\,\phi_K(x)\, dx$$

$$= (\,\phi_n(x)\,,\, X\,\phi_K(x))$$

بنابراین،

$$a_{nK} = \frac{(\,\phi_n(x)\,,\, X\,\phi_K(x))}{\|\phi_K(x)\|^{۲}} \qquad (۲)$$

چون $X\,\phi_K(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $K+۱$ است، پس به ازای $n > K+۱$ یا $K<n-۱$ داریم $a_{nK} = ۰$، زیرا ϕ_n بر هر چندجمله‌ای از درجه کمتر از n عمود است. بنابراین a_{nK}هایی که احتمالاً مخالف صفر می‌باشند، با قرار دادن $K = n-۱$، $K = n$ و $K = n+۱$ به‌دست می‌آیند. اینک با قرار دادن $a_{nn+۱} = A_n$، $a_{nn} = B_n$ و $a_{nn-۱} = C_n$ رابطه بازگشتی خواسته شده به‌دست می‌آید.

تمرین ۱-۳-۵

نشان دهید که A_n و C_n در رابطه بازگشتی (۱) مخالف صفر می‌باشند.

قضیه ۱-۳-۶

فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چندجمله‌ایها باشد که بر بازهٔ (a,b) نسبت به تابع وزن w متعامد است. ثابت کنید چندجمله‌ای درجه nام یعنی ϕ_n، بر بازهٔ (a,b) دارای n صفر متمایز در بازهٔ (a,b) است.

اثبات

چندجمله‌ای $\phi_۰$ تابع ثابت غیرصفر است و در نتیجه دارای هیچ صفری

نیست. به ازای $n>0$، خواهیم داشت:

$$(\phi_n, \phi_0) = 0$$

یا

$$\phi_0 \int_a^b w(x)\, \phi_n(x)\, dx = 0$$

چون $\phi_0 \neq 0$، پس:

$$\int_a^b w(x)\, \phi_n(x)\, dx = 0$$

از طرفی بنا به فرض تابع وزن w، به ازای $a < x < b$، $w(x) > 0$. بنابراین تابع ϕ_n لااقل در یک نقطه از بازهٔ (a,b) تغییر علامت می‌دهد. فرض می‌کنیم $x_1, x_2, ..., x_m$ همهٔ نقاطی در بازهٔ (a,b) باشند که ϕ_n در آنها تغییر علامت می‌دهد. در این صورت $m \leq n$، زیرا ϕ_n حداکثر می‌تواند n صفر متمایز داشته باشد. فرض می‌کنیم $m<n$، در این صورت چندجمله‌ای $\psi_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)$ نیز در هر یک از نقاط $x_1, x_2, ..., x_m$ تغییر علامت می‌دهد. بنابراین حاصلضرب $\phi_n \psi_m$ را می‌توان به صورت

$$\phi_n \psi_m = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 ... (x - x_m)^2\, Q_{n-m}(x)$$

نوشت که در هیچ نقطه‌ای از بازهٔ (a,b) تغییر علامت نمی‌دهد. ولی چون ψ_m یک چند جمله‌ای از درجهٔ m است، $m < n$، پس

$$(\phi_n \psi_m) = \int_a^b w(x)\, (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 ... (x - x_m)^2\, Q_{n-m}(x)\, dx = 0$$

ولی این ممکن نیست زیرا تابع زیر علامت انتگرال تغییر علامت نمی‌دهد. در نتیجه $n = m$ بنابراین ϕ_n در بازهٔ (a,b) دارای n صفر حقیقی متمایز است.

تمرین ۱-۳-۷

نشان دهید چندجمله‌ایهای $\psi_n(x) = x^{2n}$، $n = 0, 1, 2, ...$ نسبت به تابع وزن $w(x) = x$ بر بازهٔ $(-1,1)$ متعامداند. توجه می‌کنیم که به‌طور کلی ψ_n در بازهٔ تعامد دارای n صفر متمایز نیست. آیا این مطلب با قضیهٔ ۱-۳-۶ در تناقض است؟

تمرینهای بخش ۱-۳

۱-۳-۸

۱. اگر توابع $f_1, f_2, ..., f_m$ (که الزاماً چندجمله‌ای نیستند) متعامد باشند، یعنی $(f_i, f_j) = 0$، وقتی $i \neq j$، و

$$F = C_1 f_1 + C_2 f_2 + ... + c_m f_m$$

نشان دهید

$$C_K = \frac{(F, f_K)}{\| f_K \|^2}$$

۲. اگر $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه ساده از چندجمله‌ایهای متعامد باشد، نشان دهید ϕ_n در رابطهٔ بازگشتی

$$X^2 \phi_n (x) = A_n \phi_{n+2}(x) + B_n \phi_{n+1}(x) + C_n \phi_n(x) + D_n \phi_{n-1} (x) + E_n \phi_{n-2} (x)$$

صدق می‌کند.

۳. آیا مجموعهٔ چندجمله‌ایهای $\{1, x, x^2, ...\}$ می‌تواند در بازه‌ای متعامد باشد؟ به چه دلیل؟

۴. اگر به ازای هر x، $f_3 (x) = x^3 + x$ و $f_4 (x) = x^4$. (الف) نشان دهید که f_3 و f_4 بر بازهٔ $(-1,1)$ به‌طور ساده متعامد هستند. (ب) آیا f_3 و f_4 می‌توانند چندجمله‌ایهای درجه سوم و چهارم یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد ساده بر بازهٔ $(-1,1)$ باشند؟ به چه دلیل؟

۱-۴ ــ تابع مولد و چندجمله‌ایهای لژاندر

تابع دو متغیرهٔ F برای مجموعه توابع $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک ***تابع مولد*** گفته می‌شود، اگر

$$F (x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x) t^n$$

همچنین می‌گوییم که توابع f_n توسط تابع F تولید می‌شوند.

مثال ۱-۴-۲

تابع $(1 + t)^x$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه توابعی را که توسط این تابع ساخته می‌شوند، به‌دست آورید.

حل

با استفاده از فرمول بسط دوجمله‌ای

$$(1 + z)^{\alpha} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - m + 1)}{m!} z^m \qquad |z| < 1 \tag{1}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$(1 + t)^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x - 1)\dots(x - n + 1)}{n!} t^n \qquad |t| < 1$$

بنابراین، $(1 + t)^x$ تابع مولد دنبالهٔ

$$\frac{x(x - 1)\dots(x - n + 1)}{n!}$$

است.

۱-۴-۳: چند جمله‌ایهای لژاندر

تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر عبارت است از

$$F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

برای به‌دست آوردن بسط $F(x,t)$ بر حسب توانهای t، می‌نویسیم:

$$F(x,t) = (1 - u)^{-\frac{1}{2}}$$

که در آن

$$u = ۲xt - t^{۲}$$

اینک بسط $(۱ - u)^{-\frac{۱}{۲}}$ را با استفاده از فرمول (۱) با $z = -u$ می‌نویسیم، خواهیم داشت

$$F(x,t) = ۱ + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{(\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۲} - ۱) \dots (-\frac{۱}{۲} - m + ۱)}{m!} (-u)^{m} \quad (۲)$$

این بسط به ازای $|u| < ۱$، به‌ویژه وقتی $|x| \le ۱$ و $|t| < \sqrt{۲} - ۱$ معتبر می‌باشد، زیرا

$$\begin{aligned} |u| = |۲xt - t^{۲}| &\le ۲\,|x|\,|t| + |t^{۲}| \\ &< ۲(\sqrt{۲} - ۱) + (\sqrt{۲} - ۱)^{۲} = ۱ \end{aligned}$$

اینک هریک از پرانتزهای صورت کسر (۲) را که تعداد آنها برابر با m است جمع می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$F(x,t) = ۱ + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{m} (\frac{۱}{۲})(\frac{۳}{۲}) \dots (\frac{۲m - ۱}{۲})}{m!} (-۱)^{m} u^{m}$$

$$= ۱ + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{(۱)(۳) \dots (۲m-۱)}{۲^{m}\, m!} u^{m}$$

با ضرب کردن صورت و مخرج کسر فرمول بالا در

$$\begin{aligned} (۲)(۴) \dots (۲m) &= (۲)(۱)(۲)(۲) \dots (۲)(m) \\ &= ۲^{m} (۱)(۲) \dots (m) \\ &= ۲^{m}\, m! \end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم

$$F(x,t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1)(2)(3)(4)\ldots(2m-1)(2m)}{2^m.\, m!\, 2^m.\, m!} u^m$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} u^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} u^m \qquad (3)$$

اینک هریک از مقادیر $u^m = (2xt - t^2)^m$ در (۳) را می‌توان به صورت یک سری توان متناهی بر حسب t، که به ازای هر x و t معتبر می‌باشد، نوشت. بنابراین،

$$u^m = (2xt - t^2)^m = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!\,(2xt)^{m-j}\,(-t^2)^j}{j!\,(m-j)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j\, m!\,(2x)^{m-j}}{j!\,(m-j)!} t^{m+j}$$

با قرار دادن این مقدار از فرمول (۳)، به ازای $|x| \leq 1$، $|t| < \sqrt{2}-1$ ، به دست می‌آوریم

$$F(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j\,(2m)!\,(2x)^{m-j}}{2^{2m}\, m!\, j!\,(m-j)!} \right] t^{m+j} \qquad (4)$$

سری مک‌لورن را می‌توان با گردآوری جمله‌های مشابهٔ t در فرمول (۴) به دست آورد. بدین منظور تغییر اندیسهای جدید

$$K = j\,,\ n = m + j$$

را به‌کار می‌بریم. بنابراین، چون $0 \leq j \leq m$ ، پس $0 \leq K \leq n-K$ یا

$$0 \leq 2K \leq n \quad , \quad n \geq 0$$

$$0 \leq K \leq \frac{n}{2}$$

چون وقتی m و j اعداد صحیح می‌باشند، n و K نیز اعداد صحیح هستند. بنابراین:

$$\circ \le K \le [\frac{n}{\text{۲}}]$$

با قرار دادن اندیسهای جدید n و K به صورت

$$j = K \ , m - j = n - \text{۲}K \ \ , \text{۲}m = \text{۲}(n - K) \ \ , m + j = n$$

در فرمول (۴)، به ازای $\text{۱} \le |x|$ و $|t| < \sqrt{\text{۲}} - \text{۱}$، به دست می‌آوریم

$$F(x,t) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \left[\sum_{K=\circ}^{[\frac{n}{\text{۲}}]} \frac{(-\text{۱})^K (\text{۲}n - \text{۲}K)!}{\text{۲}^n (n - K)!\, K!\, (n - \text{۲}K)!} X^{n-\text{۲}K} \right] t^n$$

ضریب t^n در سری فوق یک چندجمله‌ای بر حسب X از درجهٔ n است. این چندجمله‌ای را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را **چندجمله‌ای *لژاندر*** می‌نامیم. بنابراین، خواهیم داشت

$$F(x,t) = (\text{۱} - \text{۲}xt + t^\text{۲})^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} = \sum_{n=\circ}^{\infty} P_n(x)\, t^n \qquad (\text{۵})$$

که در آن

$$P_n(x) = \sum_{k=\circ}^{[\frac{n}{\text{۲}}]} \frac{(-\text{۱})^K (\text{۲}n-\text{۲}K)!}{\text{۲}^n (n-K)!\, (n - \text{۲}K)!} X^{n-\text{۲}K} \qquad (\text{۶})$$

۱-۴-۴: چند خاصیت چندجمله‌ایهای لژاندر

از فرمول (۶) مشاهده می‌کنیم که $P_n(x)$ وقتی که n زوج است، تنها شامل توانهای زوج x و وقتی n فرد باشد تنها شامل توانهای فرد x است.

با قرار دادن $n = \circ$ و $K = \circ$ و به همین نحو $n = \text{۱}$ و $K = \circ$ در فرمول (۶) چندجمله‌ایهای اول و دوم لژاندر عبارت می‌شوند از:

$$P_\circ(x) = \text{۱} \qquad\qquad P_\text{۱}(x) = x$$

مثال ۱-۴-۵

$P_n(1)$ را پیدا کنید.

حل

بنا به (۵) می‌دانیم که

$$F(1,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n \qquad (7)$$

همچنین با قرار دادن $x = 1$ در تابع مولد

$$F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

به‌دست می‌آوریم

$$F(1,t) = (1 - 2t + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{1-t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad (8)$$

با مقایسهٔ ضرایب توانهای مشابه در (۷) و (۸) مشاهده می‌کنیم که

$$P_n(1) = 1$$

۱-۴-۶: فرمول ردریگز

فرمول دیگری که به چندجمله‌ایهای لژاندر منتهی می‌گردد، فرمول ردریگز است. یعنی:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \qquad (9)$$

برای تحقیق درستی این فرمول، نخست $(x^2 - 1)^n$ را توسط سری دوجمله‌ای بسط می‌دهیم

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^K n!}{K!\,(n-K)!} (x^2)^{n-K}$$

یا

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^K n!}{K!\,(n-K)!} X^{2n-2K}$$

اینک n بار مشتق می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^K n!}{K!\,(n-K)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2K}) \qquad (10)$$

برای محاسبه $\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2K})$ مشاهده می‌کنیم وقتی $2n - 2K < n$ یا $K > \frac{n}{2}$ مقدار مشتق صفر است و به ازای $2n - 2K > n$ یا $K < \frac{n}{2}$، خواهیم داشت

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2K}) = \frac{(2n - 2K)!}{(n - 2K)!} X^{n-2K}$$

و چون K عددی صحیح است رابطه (۱۰) به صورت

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^K n!\,(2n - 2K)!}{K!\,(n-K)!\,(n - 2K)!} X^{n-2K} \qquad (10)$$

درمی‌آید. با ضرب کردن دو طرف این رابطه در $\frac{1}{2^n n!}$، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^K n!\,(2n-2K)!}{K!\,(n-K)!\,(n-2K)!} X^{n-2K}$$

با مقایسه طرف راست این رابطه با (۶) مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = P_n(x)$$

تمرین ۱-۴-۷

با استفاده از تابع مولد

$$F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

و تغییر متغیر $X = \cos\theta$ چندجمله‌ایهای لژاندر را برحسب کسینوس مضربهای θ بنویسید.

مثال ۱-۴-۸

فرض می‌کنیم $f(x)$ بر بازهٔ $[-1,1]$ دارای مشتق nام پیوسته باشد، نشان دهید

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)\, dx$$

(ب) ثابت کنید

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ اگر } \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \text{ اگر } \end{cases} \qquad (11)$$

حل

(الف) بنا به فرمول ردریگز (۹) می‌توان نوشت

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

با به‌کار بردن روش انتگرالگیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$I= \frac{1}{2^n n!} \left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx$$

مقدار عبارت داخل کروشه در هر دو نقطه انتهایی صفر می‌شود، بنابراین

$$I = \frac{-1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx$$

و با ادامهٔ انتگرالگیری به روش جزء‌به‌جزء خواهیم داشت:

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^{n}(x) (x^2-1)^n dx \qquad (12)$$

(ب) با قرار دادن $f(x) = P_m(x)$ با $m < n$ در فرمول (۱۲)، خواهیم داشت:

$$I = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x) (x^2-1)^n dx$$

چون $P_m(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m است و $m < n$، بنابراین:

$$P_m^{(n)}(x) = 0$$

بنابراین:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

به این ترتیب قسمت اول (۱۱) ثابت شد. برای اثبات قسمت دوم فرمول (۱۱) با قرار دادن $f(x) = P_n(x)$ در فرمول (۱۲)، به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x) (x^2-1)^n dx \qquad (13)$$

برای محاسبه $P_n^{(n)}(x)$ در انتگرال بالا از فرمول ردریگز

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

استفاده می‌کنیم. بنا به فرمول (۱۰) به دست می‌آوریم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{K=0}^{n} \frac{(-1)^K n!}{K! (n-K)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2K})$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^K n! (2n-2K)!}{K! (n-K)! (n-2K)!} x^{n-2K}$$

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^K n! (2n-2K)!}{K! (n-K)! (n-2K)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{n-2K}$$

مشتق $\frac{d^n}{dx^n} x^{n-2K}$ به ازای هر $K > 0$ برابر صفر و به ازای هر $K = 0$

$$\frac{d^n}{dx^n} X^n = n!$$

بنابراین،

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{n! (2n)! n!}{n! (n)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

با قرار دادن این مقدار در (۱۳)، به دست می‌آوریم:

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n)!^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{2(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^1 (x^2-1)^n dx \qquad (۱۴)$$

با به کار بردن تغییر متغیر $x = \cos\theta$ و یادآوری فرمول بازگشتی

$$\int \cos^{2n+1}_{\theta}\, d\theta = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n}_{\theta} \sin\theta + \frac{2n}{2n+1} \int \cos^{2n-1}_{\theta}\, d\theta$$

انتگرال معین در فرمول (۱۴) به صورت

$$\int_0^1 (x^2-1)^n\, dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}_{\theta}\, d\theta$$

$$= (-1)^n \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{(-1)^n\, 2^n\, n!}{(1)(3)\ldots(2n-1)(2n+1)}$$

با ضرب کردن صورت و مخرج کسر بالا در (۲n) ... (۴) (۲) خواهیم داشت

$$\int_0^1 (x^2-1)^n\, dx = \frac{(-1)^n\, 2^{2n}\, (n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}$$

با قرار دادن این مقدار در (۱۴)، نتیجه می‌شود که

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \cdot \frac{(-1)^n\, 2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!\,(2n+1)}$$
$$= \frac{2}{(2n+1)}$$

به این ترتیب اثبات (۱۱) کامل می‌شود.

تمرینهای بخش ۱-۴

۱-۴-۹

۱. ثابت کنید

الف) $P_n(-1) = (-1)^n$

ب) $P_{2n+1}(0) = 0$

پ) $P_{2n}(0) = \dfrac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$

۲. با به‌کار بردن قسمت (الف) مثال ۱-۴-۷ به ازای $m = 0, 1, \ldots, n-1$ نشان دهید:

$$(P_n(x), x^m) = \int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\, dx = 0$$

این فرمول در مورد تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر چه مطلبی را بیان می‌کند؟

۳. ثابت کنید چندجمله‌ایهای لژاندر، $P_n(x)$، در معادله دیفرانسیل زیر که به معادله دیفرانسیل لژاندر موسوم است، صدق می‌کند.

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

۴. تابع مولد

$$F(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(x)\, t^n$

که در آن $j_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^j x^{n+2j}}{2^{n+2j}\, j!\, \Gamma(n+j+1)}$

توابع $j_n(x)$ به توابع بسل نوع اول از مرتبه n معروفند. (فصل ۵ کتاب معادلات دیفرانسیل از سری کتابهای دانشگاه پیام نور را ببینید.)

۵. اگر $F(x,t) = \dfrac{1}{1-t} \exp\left(\dfrac{-xt}{1-t}\right)$

نشان دهید $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n$

که در آن چندجمله‌ایهای $L_n(x) = \sum_{K=0}^{n} \dfrac{(-1)^K n!\, x^K}{(k!)^2 (n-K)!}$

به ***چندجمله‌ایهای لاگر*** از درجهٔ n معروف است.

۶. اگر $F(x,t) = \exp(2xt - t^2)$

نشان دهید

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

که در آن چندجمله‌ایهای

$$H_n(x) = \sum_{K=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^K n! (2X)^{n-2K}}{k! (n-2K)!}$$

به **چندجمله‌ایهای هرمیت** از درجهٔ n معروف است.

۷. نشان دهید

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

این فرمول، فرمول ردریگز مربوط به چندجمله‌ایهای لاگر است.

۸. نشان دهید

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

این فرمول، فرمول ردریگز مربوط به چندجمله‌ایهای هرمیت است.

۱-۵ــ ویژگیهای چندجمله‌ایهای لژاندر

در این بخش رابطهٔ بازگشتی و معادله دیفرانسیل لژاندر را به‌دست می‌آوریم. در تمرینها رابطهٔ بازگشتی و معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به چندجمله‌ایهای خاص دیگر را که در تمرینهای بخش گذشته بیان کردیم، آورده‌ایم. در زیر قضیه‌ای از درس آنالیز را که در رابطه با مشتقگیری از سریهای توانی است، بدون اثبات، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۵-۱

فرض می‌کنیم تابع $F(x,t)$ نسبت به t در $t=0$ به ازای هر x در بازهٔ g تحلیلی باشد، به‌طوری که

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, t^n \quad , \quad |t| < h \quad , \quad x \in g$$

در این صورت داریم:
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_n(x)\, t^{n-1}$$

به علاوه اگر $F(x,t)$ و $\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$ نسبت به t، در ۰=t، به ازای هر x در بازهٔ g، تحلیل باشند، آنگاه به ازای هر $|t| < h$ و هر x در g داریم:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, t^n$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\, t^n$$

همچنین فرض می‌کنیم که به ازای هر $|t| < h$ و هر x در g، همه مشتقات جزئی F ‏(x,t) وجود داشته و پیوسته باشند. در این صورت f'_n وجود دارد و به ازای هر $n \geq 0$ و x متعلق به g، $g_n(x) = f'_n(x)$.

۱-۵-۲ ـ رابطه بازگشتی چندجمله‌ایهای لژاندر

با مشتقگیری از تابع مولد

$$F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

نسبت به x و t به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (x - t)(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{3}{2}} \tag{2}$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial t} = t(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{3}{2}} \tag{3}$$

از فرمولهای (۱) و (۲) مشاهده می‌کنیم که

$$(1 - 2xt + t^2)\frac{\partial F}{\partial t} = (x - t)F \tag{4}$$

می‌دانیم که $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$ با توجه به قضیه ۱-۵-۱ با مشتقگیری جزئی از F نسبت به t خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, P_n(x)\, t^{n-1}$$

با قرار دادن سریهای مربوط به F، $\frac{\partial F}{\partial t}$ در معادلهٔ (۴) معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n\, P_n(x)\, t^{n-1} = (x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} -2nx\, P_n(x)\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} -P_n(x)\, t^{n+1}$$

اندیس جمع در سری سوم در طرف چپ معادله بالا را می‌توانیم از صفر شروع کنیم و دو سری در طرف راست معادله را به طرف چپ این معادله منتقل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} -2nx\, P_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} -x\, P_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^{n+1} = 0$$

جمله اول از سریهای اول و چهارم را از سریها خارج می‌کنیم. معادلهٔ

$$P_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} -2nx\, P_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n+1}$$

$$- x\, P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} -x\, P_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^{n+1} = 0$$

به دست می‌آید. با انتقال اندیس جمع در همهٔ سریها به $n = 2$، خواهیم داشت:

$$[P_1(x) - xP_0(x)] + \sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)\,t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} -2(n-1)\,xP_{n-1}(x)\,t^{n-1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)P_{n-2}(x)t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} -xP_{n-1}(x)t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(x)t^{n-1} = 0$$

یا

$$[P_1(x) - xP_0(x)] + \sum_{n=2}^{\infty}[nP_n(x) - x(2n-1)\,P_{n-1}(x) + (n-1)\,P_{n-2}(x)]\,t^{n-1} = 0$$

بنا به ۱-۴-۴ ، می‌دانیم که $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ ، بنابراین

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0$$

از طرفی می‌دانیم که یک سری وقتی برابر صفر است که

$$nP_n(x) - x(2n-1)\,P_{n-1}(x) + (n-1)\,P_{n-2}(x) = 0 \quad , \quad n \geq 2$$

یا

$$nP_n(x) - x(2n-1)\,P_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x) = 0 \quad , \quad n \geq 2 \qquad (5)$$

از این‌رو چندجمله‌ایهای لژاندر در رابطه بازگشتی (۵) صدق می‌کنند.

تمرین ۱-۵-۳

نشان دهید که

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

۱-۵-۴ ــ معادله دیفرانسیل لژاندر

با توجه به فرمولهای (۲) و (۳) مشاهده می‌کنیم که

$$(x - t)\frac{\partial F}{\partial x} = t\frac{\partial F}{\partial t}$$

یا

$$(x - t)\frac{\partial F}{\partial x} - t\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad (۶)$$

می‌دانیم که $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$ چون F در شرایط قضیه ۱-۵-۱ صدق می‌کند، پس

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, t^n \quad , \quad |x|<1 \quad , \quad |t|<\sqrt{2}-1$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1}$$

با قرار دادن سریهای مربوط به $\frac{\partial F}{\partial t}$ و $\frac{\partial F}{\partial x}$ در معدله (۶)، معادلهٔ

$$(x - t)\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, t^n - t\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^{n-1} = 0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} -P'_n(x)\, t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} -nP_n(x)\, t^n = 0$$

به‌دست می‌آید. با خارج کردن جملهٔ اول از سری اول، تغییر اندیس جمع به $n = 1$ و با توجه به اینکه $P'_0(x) = 0$، معادلهٔ

$$x P'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} xP'_n(x)\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} -P'_{n-1}(x)\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} -nP_n(x)\, t^n = 0$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\, x P'_n(x) - P'_{n-1}(x) - nP_n(x)\,]\, t^n = 0$$

به‌دست می‌آید. بنابراین مشاهده می‌کنیم که چندجمله‌ایهای لژاندر در رابطه بازگشتی دیفرانسیلی

$$x P'_n(x) = P'_{n-1}(x) + nP_n(x) \qquad (۷)$$

صدق می‌کنند.

با استفاده از رابطه بازگشتی (۵) و (۷) می‌توان معادله‌ای که تنها شامل $P_n(x)$ و مشتقات آن است به دست آورد. با مشتقگیری از رابطه بازگشتی (۵) خواهیم داشت:

$$nP'_n(x) = (2n-1)\, x\, P'_n(x) + (2n-1)\, P_{n-1}(x) - (n-1)\, P'_{n-2}(x) \qquad (۸)$$

با توجه به فرمول (۷)، می‌توانیم بنویسیم

$$P'_{n-1}(x) = x\, P'_n(x) - nP_n(x) \qquad (۹)$$

با تبدیل n به ۱-n در فرمول (۹)، به دست می‌آوریم:

$$P'_{n-2}(x) = x\, P'_{n-1}(x) - (n-1)\, P_{n-1}(x)$$

با قرار دادن مقدار $P'_{n-1}(x)$ از فرمول (۹) در رابطه بالا، رابطهٔ

$$P'_{n-2}(x) = x\, [\, xP'_n(x) - nP_n\,(x)\,] - (n-1)\, P_{n-1}(x)$$

$$= x^2\, P'_n(x) - nx\, P_n(x) - (n-1)\, P_{n-1}(x) \qquad (۱۰)$$

به دست می‌آید. با قرار دادن مقادیر $P'_{n-1}(x)$ و $P'_{n-2}(x)$ از (۹) و (۱۰) در معادلهٔ (۸) و ساده کردن معادلهٔ حاصل، خواهیم داشت

$$P'_n(x) = x^2\, P'_n(x) - nx\, P_n(x) + n\, P_{n-1}(x)$$

با مشتقگیری از این معادله نسبت به x، به دست می‌آوریم

$$P''_n(x) = 2xP'_n(x) + x^2 P''_n(x) - nP_n(x) - nx\, P'_n(x) + nP'_{n-1}(x)$$

با قرار دادن مقدار $P'_{n-1}(x)$ از (۹) در معادله بالا، معادلهٔ

$$P''_n(x) = 2xP'_n(x) + x^2 P''_n(x) - nP_n(x) - nx\, P'_n(x) + n\,[xP'_n(x) - nP_n(x)]$$

یا

$$(1-x^2)\, P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)\, P_n(x) = 0 \;,\quad n \geq 2 \qquad (11)$$

به دست می‌آید. این معادله به ازای $n \geq 2$ معتبر است. لیکن با توجه به $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$ مشاهده می‌کنیم که این فرمول به ازای $n = 0$ و $n = 1$ نیز برقرار است.

تذکر ۱-۵-۵

معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\frac{dy}{dx} + \alpha\,(\alpha+1)\,y = 0 \qquad (12)$$

به ***معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر مرتبهٔ*** α معروف است. روشن است که وقتی α برابر با عدد صحیح و نامنفی n باشد، یک جواب این معادله، چندجمله‌ای لژاندر، $P_n(x)$ است. به سادگی مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ (۱۲) را می‌توان به صورت

$$\frac{d}{dx}\left[\,(1-x^2)\,\frac{dy}{dx}\,\right] + \alpha(\alpha+1)\,y = 0 \qquad (13)$$

نوشت.

مثال ۱-۵-۶

الف) با استفاده از فرمول ردریگز چندجمله‌ایهای لژاندر را ثابت کنید.

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\,P_n(x)$$

ب) نشان دهید: $\int_x^1 P_n(x)\,dx = \dfrac{P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)}{2n+1}$

حل

الف) قرار می‌دهیم $u^n = (x^2-1)^n$

از فرمول ردریگز می‌دانیم که

$$2^n\, n!\, P_n(x) = D^n u^n \qquad (14)$$

یا

$$2^{n+1}\,(n+1)!\,P_{n+1}(x) = D^{n+1}\,u^{n+1}$$
$$= D^{n-1}\,(D^2\,u^{n+1})$$

که در آن $u = x^2-1$. بنابراین

$$\begin{aligned}
D\,u^{n+1} &= D\,(x^2-1)^{n+1}\\
&= 2(n+1)\,x\,u^n\\
D^2 u^{n+1} &= 2(n+1)\,(u^n + 2nx^2\,u^{n-1})\\
&= 2(n+1)\,[\,u^n + 2n(x^2-1)\,u^{n-1} + 2nu^{n-1}\,]\\
&= 2(n+1)\,[\,(2n+1)\,u^n + 2nu^{n-1}\,]
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$2^{n+1}\,(n+1)!\,P_{n+1}(x) = 2(n+1)\,D^{n-1}\,[\,(2n+1)\,u^n + 2nu^{n-1}\,]$$

در نتیجه

$$2^n\,n!\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,D^{n-1}\,u^n + 2nD^{n-1}\,u^{n-1} \qquad (15)$$

با تبدیل n به n-۱ در (۱۴)، به دست می‌آوریم

$$2^{n-1}\,(n-1)!\,P_{n-1}(x) = D^{n-1}\,u^{n-1}$$

با قرار دادن این مقدار در (۱۵)، رابطهٔ

$$2^n\,n!\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,D^{n-1}\,u^n + 2^n\,n!\,P_{n-1}(x)$$

یا

$$P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{2^n\, n!} D^{n-1} u^n \qquad (16)$$

به دست می‌آید. با مشتقگیری از رابطهٔ بالا و به‌کار بردن فرمول ردریگز، خواهیم داشت

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\, P_n(x) \qquad (17)$$

(ب) با انتگرالگیری از رابطهٔ (۱۷) از x تا ۱ و با توجه به فرمول $P_n(1) = 1$ (مثال ۱-۴-۵ را ببینید) به دست می‌آوریم

$$\int_x^1 P'_{n+1}(x)\, dx - \int_x^1 P'_{n-1}(x)\, dx = (2n+1) \int_x^1 P_n(x)\, dx$$

$$-P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = (2n+1) \int_x^1 P_n(x)\, dx$$

یا

$$\int_x^1 P_n(x)\, dx = \frac{P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)}{2n+1}$$

تمرین ۱-۵-۷

صفرهای P_1، P_2 و P_3 را پیدا کرده و نمودار آنها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

تمرینهای بخش ۱-۵

تمرین ۱-۵-۸

۱. (الف) تحقیق کنید تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر، یعنی $F(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$، در معادلهٔ

$$(1 - 2xt + t^2)F_x = tF$$

صدق می‌کند. در اینجا $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ است.

(ب) از معادلهٔ قسمت (الف) رابطه بازگشتی

$$P'_{n+۲}(x) - ۲x\, P'_{n+۱}(x) + P'_n(x) = P_{n+۱}(x) \quad , \quad n \geq ۰$$

را به‌دست آورید.

۲. (الف) تحقیق کنید تابع مولد چند جمله‌ایهای لژاندر، $F(x,t)=(۱-۲xt+t^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$، در معادلهٔ

$$(۱ - t^۲)\, F_x - ۲t^۲\, F_t = tF$$

صدق می‌کند.

(ب) از معادلهٔ قسمت (الف) رابطه بازگشتی

$$P'_{n+۲}(x) - P'_n(x) = (۲n+۳)\, P_{n+۱}(x) \quad , \quad n \geq ۰$$

را به دست آورید.

۳. چندجمله‌ایهای هرمیت H_n (تمرین ۶ بخش ۱-۴-۹ را ببینید) توسط تابع مولد $F\,(x,t) = \exp\,[\,۲xt - t^۲\,]$ تولید می‌شوند، یعنی:

$$F\,(x,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$$

(الف) نشان دهید

$$F_x\,(x,t) = ۲t\, F\,(x,t) \quad , \quad F_t\,(x,t) = (x - t)\, F\,(x,t)$$

(ب) از روابط قسمت (الف) روابط بازگشتی

$$H'_n(x) = ۲n\, H_{n-۱}\,(x)$$

$$H_n(x) = ۲x\, H_{n-۱}\,(x) - ۲(n-۱)\, H_{n-۲}\,(x) \quad , \quad n \geq ۲$$

را به دست آورید.

(پ) با استفاده از روابط بازگشتی قسمت (ب) نشان دهید H_n در معادله

دیفرانسیل هرمیت $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ صدق می‌کند.

۴. چند جمله‌ایهای لاگر L_n (تمرین ۵ بخش ۱-۴-۹ را ببینید) توسط تابع مولد

$$F(x,t) = \frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t} \right)$$

تولید می‌شوند. یعنی

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n$$

الف) نشان دهید

$$(1-t)\, F_x + t\, F(x,t) = 0$$
$$(1-t)^2\, F_t + (x + t - 1)\, F(x,t) = 0$$

ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) نشان دهید

$$L'_n(x) - L'_{n-1}(x) + L_{n-1}(x) = 0$$

و

$$nL_n(x) + (x - 2n + 1)\, L_{n-1}(x) + (n-1)\, L_{n-2}(x) = 0 \ , \quad n \geq 2$$

پ) با استفاده از روابط بازگشتی قسمت (ب) ثابت کنید $L_n(x)$ در معادله دیفرانسیل لاگر $xy'' + (1-x)\, y' + ny = 0$ صدق می‌کند.

۱-۶ـ تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر

در این بخش تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر را مورد بحث قرار می‌دهیم. در تمرینها تعامد مربوط به چند جمله‌ایهای خاص دیگر را آورده‌ایم.

۱-۶-۱ـ تعامد

با استفاده از معادله دیفرانسیل (۱۳) بخش ۱-۵ می‌توان نشان داد که

چندجمله‌ایهای لژاندر بر بازهٔ (۱,۱-) متعامد ساده‌اند.

اگر m و n اعداد صحیح نامنفی باشند، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P'_n(x) \right] + n\,(n+1)\, P_n(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P'_m(x) \right] + m\,(m+1)\, P_m(x) = 0$$

با ضرب کردن معادلهٔ اول در $P_m(x)$ و معادله دوم در $-P_n(x)$ و جمع کردن دو معادلهٔ حاصل به دست می‌آوریم

$$[\, n\,(n+1) - m\,(m+1)\,]\, P_m(x)\, P_n(x)$$

$$= P_n(x)\,\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P'_m(x) \right] - P_m(x)\,\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P'_n(x) \right]$$

یا

$$[\, n^2 + n - m^2 - m \,]\, P_m(x)\, P_n(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P_n(x)\, P'_m(x) \right] - (1-x^2)\, P'_n(x)\, P'_m(x)$$

$$- \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\, P_m(x)\, P'_n(x) \right] + (1-x^2)\, P'_n(x)\, P'_m(x)$$

بنابراین،

$$(n-m)(n+m+1)\, \cancel{P_n(x)\, P_m(x) =}\, \frac{d}{dx}\left\{ (1-x^2) \left[P_n(x)\, P'_m(x) - P_m(x)\, P'_m(x) \right] \right\}$$

با انتگرالگیری از دو طرف این معادله نسبت به x از ۱- تا ۱، خواهیم داشت:

$$(n-m)\,(n+m+1) \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx$$

$$= \left\{ (1-x^2) \left[P_n(x)\, P'_m(x) - P_m(x)\, P'_n(x) \right] \right\}_{-1}^{1} = 0$$

چون $m \neq n$، پس

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \qquad (1)$$

۱-۶-۲ ـ نرم

نشان دهید که

$$C_n = \| P_n \|^2 = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \;, \quad n \geq 0$$

حل

از رابطه بازگشتی (۵) بخش ۱-۵، خواهیم داشت

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}\, x\, P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\, P_{n-2}(x) \;, \quad n \geq 2$$

بنابراین،

$$C_n = \int_{-1}^{1} P_n(x) \left[\frac{2n-1}{n}\, x\, P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\, P_{n-2}(x) \right] dx$$

با توجه به فرمول (۱)، به دست می‌آوریم

$$C_n = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} x\, P_{n-1}(x)\, P_n(x)\, dx \qquad (2)$$

همچنین از رابطه بازگشتی (۵) بخش ۱-۵، خواهیم داشت

$$x\, P_n(x) = \frac{1}{2n+1} \left[(n+1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x) \right] \;, \quad n \geq 2$$

با قرار دادن این مقدار به جای $x\, P_n(x)$ در فرمول (۲) به‌دست می‌آوریم

$$C_n = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2n+1} \left[(n+1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x) \right] P_{n-1}(x)\, dx$$

یا

$$C_n = \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\, P_{n-1}(x)\, dx + \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{1} [P_{n-1}(x)]^2\, dx$$

بنا به خاصیت تعامد (۱)، مشاهده می‌کنیم

$$C_n = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{1} [P_{n-1}(x)]^2\, dx$$

یا

$$C_n = \frac{2n-1}{2n+1} C_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \qquad (۳)$$

چون $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$، پس

$$C_0 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad , \quad C_1 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$$

با استفاده از فرمول (۳) به دست می‌آوریم

$$C_2 = \frac{3}{5} C_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$C_3 = \frac{5}{7} C_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

با استفاده از استقرای ریاضی به آسانی، می‌توان نشان داد

$$C_n = \frac{2}{2n+1} \quad , \quad n \geq 0$$

مثال ۱-۶-۳

معادله دیفرانسیل $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که این معادله را می‌توان به صورت

$$(p(x)\, y')' + q(x)\, y = 0 \qquad (۴)$$

نوشت، که در آن

$$p(x) = e^{\int a_1(x)\, dx}$$

$$q(x) = a_\circ(x)\, e^{\int a_1(x)\, dx}$$

حل

با ضرب کردن دو طرف معادلهٔ (۴) در $e^{\int a_1(x)\, dx}$، به دست می‌آوریم

$$e^{\int a_1(x)\, dx}\, y'' + a_1(x)\, e^{\int a_1(x)\, dx}\, y' + a_\circ(x)\, e^{\int a_1(x)\, dx}\, y = \circ$$

بنابراین،

$$(e^{\int a_1(x)\, dx}\, y')' + a_\circ(x)\, e^{\int a_1(x)\, dx}\, y = \circ$$

یا

$$(P(x)\, y')' + q(x)\, y = \circ$$

که در آن

$$p(x) = e^{\int a_1(x)\, dx} \quad , \quad q(x) = a_\circ(x)\, e^{\int a_1(x)\, dx}$$

۱-۶-۴

تمرینهای بخش ۱-۶

۱. چندجمله‌ایهای لاگر $L_n(x)$ از درجه n (تمرین ۴، ۱-۵-۸ را ببینید.) در معادله دیفرانسیل $xy'' + (1-x)\, y' + ny = \circ$ صدق می‌کند. نشان دهید این چندجمله‌ایها نسبت به تابع وزن $w(x) = e^{-x}$ بر بازهٔ $(\circ,\infty)$ متعامداند.

۲. چندجمله‌ایهای لاگر بر بازهٔ $(\circ,\infty)$ نسبت به تابع وزن $w(x)= e^{-x}$ متعامداند (تمرین ۱ را ببینید). این توابع در رابطهٔ بازگشتی

$$nL_n(x) = (2n - 1 - x)\, L_{n-1}(x) - (n-1)\, L_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 2$$

که در آن $L_\circ(x) = ۱$ و $L_۱(x) = ۱-x$ ، صدق می‌کنند (قسمت (ب) تمرین ۴، ۱-۵-۸ را ببینید) نشان دهید

$$\| L_n(x) \|^۲ = \int_\circ^\infty e^{-x} [L_n(x)]^۲ dx = ۱$$

۳. چندجمله‌ایهای هرمیت H_n از درجهٔ n (تمرین ۳، ۱-۵-۸ را ببینید.) در معادله دیفرانسیل $y'' - ۲xy' + ۲ny = \circ$ صدق می‌کند. نشان دهید این چندجمله‌ایها نسبت به تابع وزن $w(x) = e^{-x^۲}$ بر بازهٔ $(-\infty,\infty)$ متعامداند.

۴. چندجمله‌ایهای هرمیت بر بازهٔ $(-\infty,\infty)$ نسبت به تابع وزن $w(x) = e^{-x^۲}$ متعامداند، (تمرین ۳ را ببینید.) این توابع در رابطه بازگشتی

$$H_n(x) = ۲x\, H_{n-۱}(x) - ۲(n-۱)\, H_{n-۲}(x) \quad , \quad n \geq ۲$$

با $H_\circ(x) = ۱$ و $H_۱(x) = ۲x$ صدق می‌کنند. (قسمت ب، تمرین ۳، ۱-۵-۸ را ببینید.) نشان دهید.

$$\| H_n(x) \|^۲ = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^۲} [H_n(x)]^۲ dx = ۲^n\, n!\, \sqrt{\pi}$$

۵. الف) فرض کنیم توابع $p_n^m(x)$ که در آن m و n اعداد صحیح نامنفی با شرط $\circ \leq m \leq n$ هستند. به وسیله رابطهٔ

$$p^m{}_n(x) = \frac{d^m\, P_n(x)}{dx^m}$$

که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ایهای لژاندر می‌باشند، تعریف شوند. نشان دهید p_n^m جوابی از معادله

$$(۱-x^۲)\, y'' - ۲(m+۱)\, xy' + (n-m)(n+m+۱)\, y = \circ$$

است.

(ب) نشان دهید توابع p_i^m و p_j^m نسبت به تابع وزن $(1-x^2)^m$ روی بازهٔ $(-1,1)$ متعامد هستند.

۶. توابع

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$m = 0, 1, \ldots, n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad |x| \le 1$$

به توابع لژاندر وابسته معروف هستند. بنابراین،

$$P_2^0(x) = P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} . 3x$$

$$P_2^2(x) = (1-x^2) . 3$$

توجه می‌کنیم که وقتی m زوج است این توابع چندجمله‌ای و به ازای هر m و n وقتی $-1 \le x \le 1$ پیوسته می‌باشند.

الف) وقتی $-1 < x < 1$، نشان دهید $y = P_n^m(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + \left[n\,(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

صدق می‌کنند.

ب) نشان دهید توابع P_i^m و P_j^m، $i \ne j$ روی بازهٔ $(-1,1)$ به‌طور ساده متعامداند.

پ) ثابت کنید

$$\int_{-1}^{1} [\, P_n^m(x) \,]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

۷. نشان دهید که $u(\varphi) = P_n^m(\cos \varphi)$ بر بازهٔ $-\pi < \varphi < \pi$ در معادله دیفرانسیل

$$u'' + \cot\varphi \, u' + [\, n\,(n+1) - m^2 \csc^2 \varphi \,]\, u = 0$$

صدق می‌کند.

۱ـ۷ ــ معادله دیفرانسیل لژاندر

معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + \alpha(1+\alpha)\,y = 0 \qquad (1)$$

که در آن α یک عدد حقیقی ثابت است، به معادله دیفرانسیل لژاندر از مرتبهٔ α معروف است. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد $\alpha \geq -\frac{1}{2}$، زیرا اگر $\alpha < -\frac{1}{2}$ با انتخاب $\beta = -\alpha - 1$ خواهیم داشت $\alpha(\alpha+1) = \beta(\beta+1)$ که در آن $\beta > -\frac{1}{2}$.

وقتی α یک عدد صحیح و نامنفی، چون n، باشد، مشاهده کردیم که یک جواب معادلهٔ (۱) چندجمله‌ای لژاندر، یعنی P_n از درجهٔ n است. اینک معادله دیفرانسیل را به ازای یک αی دلخواه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ـ۷ـ۱ ــ جواب معادله دیفرانسیل لژاندر

معادله دیفرانسیل لژاندر

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)\,y = 0$$

دارای نقاط منفرد منظم در $x = 1$ و $x = -1$ است. با به کار بردن تغییر متغیر $t = 1-x$، نقطه $x = 1$ با نقطه $t = 0$ متناظر می‌گردد. بنابراین،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2Y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d^2Y}{dt^2}$$

توجه می‌کنیم که در اینجا $Y(t) = y(1-t)$ می‌باشد. با قرار دادن این مشتقات در معادله دیفرانسیل (۱) این معادله به معادلهٔ

$$t(2-t)\frac{d^2Y}{dt^2} + 2(1-t)\frac{dY}{dt} + \alpha(\alpha+1)\,Y = 0 \qquad (2)$$

تبدیل می‌گردد. چون $t = ۰$ یک نقطه منفرد منظم معادلهٔ (۲) است، پس این معادله حداقل دارای یک جواب به صورت

$$Y(t) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n t^{n+s} \qquad (۳)$$

است با دو بار مشتقگیری از Y نسبت به t به دست می‌آوریم

$$\frac{dY(t)}{dt} = \sum_{n=۰}^{\infty} (n+s) A_n t^{n+s-۱}$$

$$\frac{d^۲Y(t)}{dt^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} (n+s)(n+s-۱) A_n t^{n+s-۲}$$

با قرار دادن این مشتقات از معادله دیفرانسیل (۲) خواهیم داشت

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲(n+s)(n+s-۱) A_n t^{n+s-۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} -(n+s)(n+s-۱) A_n t^{n+s}$$

$$+ \sum_{n=۰}^{\infty} ۲(n+s) A_n t^{n+s-۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} -۲(n+s) A_n t^{n+s}$$

$$+ \sum_{n=۰}^{\infty} \alpha(\alpha+۱) A_n X^{n+s} = ۰$$

با خارج کردن جمله‌های اول سریهای اول و سوم، می‌توان سریها را به صورت زیر توسط یک سری نمایش داد.

$$A_۰ [\, ۲s(s-۱) + ۲s] r^{s-۱} + \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(n+s)(n+s-۱) A_n t^{n+s-۱}$$

$$+ \sum_{n=۱}^{\infty} -(n+s-۱)(n+s-۲) A_{n-۱} t^{n+s-۱} + \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(n+s) A_n t^{n+s-۱}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} -2(n+s-1)\, A_{n-1}\, t^{n+s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha\,(\alpha+1)\, A_{n-1}\, t^{n+s-1} = 0$$

$$2A_0 S^2 t^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [\, 2(n+s)\,(n+s-1) + 2(n+s)\,]\, A_n$$

$$+ [\, -(n+s-1)(n+s-2) - 2(n+s-1) + \alpha\,(\alpha+1)\,]\, A_{n-1} \}\, t^{n+s-1} = 0$$

بنابراین، معادلهٔ شاخص، عبارت است از:

$$f(s) = S^2 = 0$$

پس $S_1 = S_2 = 0$. رابطهٔ بازگشتی عبارت است از:

$$2(n+s)^2 A_n = [\,(n+s-1)\,(n+s) - \alpha\,(\alpha+1)]\, A_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

یا

$$A_n = \frac{[\,(n+s-1)\,(n+s) - \alpha\,(\alpha+1)]\, A_{n-1}}{2(n+s)^2} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (4)$$

بنابراین یک جواب معادله به صورت (۳) و جواب دیگر به صورت لگاریتمی است (فصل مربوط به حل معادلات دیفرانسیل توسط سریها، در کتاب معادلات دیفرانسیل از انتشارات دانشگاه پیام نور را ببینید.)

با قرار دادن $S = S_1 = 0$ در رابطه بازگشتی (۴) یک جواب به صورت (۳) به دست می‌آید:

$$A_n = \frac{n\,(n-1) - \alpha\,(\alpha+1)}{2n^2} A_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

یا

$$A_n = \frac{n\,(n+\alpha)\,(n-\alpha-1)}{2n^2} A_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

بنابراین با $A_0 = 1$ خواهیم داشت،

$$n = 1$$

$$A_1 = \frac{(1+\alpha)(-\alpha)}{2 \cdot 1^2}$$

$$n = 2$$

$$A_2 = \frac{(2+\alpha)(1-\alpha)}{2 \cdot 2^2} A_1$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(-\alpha)(1-\alpha)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$A_n = \frac{\left[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)\right]\left[(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)\right]}{2^n (n!)^2}$$

در نتیجه یک جواب معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$Y_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)\right]\left[(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)\right]}{2^n (n!)^2} t^n$$

و جواب دیگر این معادله برابر است با

$$Y_2(t) = Y_1(t) L_n t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

که در آن a_n ها اعداد ثابت هستند و مقادیر آنها مورد نظر نمی‌باشد و برحسب متغیر x، این جوابها عبارتند از

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)\right]\left[(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)\right]}{2^n (n!)^2} (1-x)^n$$

$$y_2(x) = y_1(x) L_n (1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1-x)^n$$

مقدار تابع y_1 در نقطهٔ $x = 1$ به ازای هر α برابر است وقتی که α عدد صحیح نباشد. سری مربوط به $y_1(x)$ نامتناهی است و به ازای هر $|x-1| < 2$ همگراست و وقتی α برابر با عدد صحیح نامنفی m باشد. معادله دیفرانسیل لژاندر به ازای $\alpha = m$ دارای چندجمله‌ای به صورت

$$P_m(x)= 1+\sum_{n=1}^{m}=\frac{[(m+1)(m+2)...(m+n)]\,[(-m)(1-m)...(n-1-m)]}{2^n(n!)^2}(1-x)^n$$

یا

$$P_m(x)= 1+\sum_{n=0}^{m}=\frac{(-1)^n\,(m+n)!}{2^n\,(n!)\,(m-n)!}\,(x-1)^n \qquad (5)$$

تمرین ۱ـ۷ـ۲

در ۵-۷-۱ نشان دادیم که معادله دیفرانسیل لژاندر دارای جوابهایی به صورت

$$u_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\,(1-x)^m \quad , \quad A_0 = 1$$

$$u_2(x) = u_1(x)\,L_n(1-x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m\,(1-x)^m$$

است. در اینجا سریها به ازای x، $|x-1| < 2$ همگرا هستند. به همین نحو، چون $x=-1$ یک نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل لژاندر (۱) است. پس این معادله دارای جوابهایی به صورت

$$v_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\,(1+x)^m$$

$$v_2(x) = v_1(x)\,L_n(1+x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m\,(1+x)^m$$

است. در اینجا سریهای توالی به ازای $|x+1| < 2$ همگرا می‌باشند.

نشان دهید وقتی α یک عدد صحیح نیست، جواب $u_1(x)$ وقتی که $x \to -1$، بینهایت می‌شود.

تذکر ۱-۷-۳

با توجه به (۵) و تمرین ۵-۷-۲ مشاهده می‌کنیم که تنها جوابهایی از معادله دیفرانسیل لژاندر که در $x = 1$ و $x = -1$ متناهی هستند، وقتی به دست می‌آید که α برابر عدد صحیح نامنفی n باشد. این مطلب در کاربردها اهمیت خاصی دارد.

تمرین ۱-۷-۴

نشان دهید تغییر متغیر $x = \cos\phi$ معادله دیفرانسیل لژاندر را به معادلهٔ

$$\frac{d^2Y}{d\phi^2} + \cot\phi\,\frac{dY}{d\phi} + \alpha(\alpha+1)\,Y = 0$$

تبدیل می‌کند.

۱-۸ ـ چندجمله‌ایهای چبیشف

تعریف ۱-۸-۱

مجموعه‌های چندجمله‌ایهایی که روی بازهٔ $(-1,1)$ نسبت به تابع وزن

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^B \,,\ \alpha > -1 \,,\ B > -1$$

متعامد باشند، به ***چندجمله‌ایهای ژاکوبی*** معروف هستند.

تذکر ۱-۸-۲

چندجمله‌ایهای لژاندر دستهٔ خاصی از چندجمله‌ایهای ژاکوبی به ازای $\alpha = B = 0$، هستند.

تذکر ۱-۸-۳

در اینجا ما دو دستهٔ خاص از چندجمله‌ایهای ژاکوبی را بررسی می‌کنیم.

چند جمله‌ایهای چبیشف از نوع اول دارای تابع وزن $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ و متناظر با $\alpha = B = -\frac{1}{2}$ می‌باشند. **چند جمله‌ایهای چبیشف از نوع دوم** دارای تابع وزن $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ و متناظر با $\alpha = B = \frac{1}{2}$ می‌باشند.

قضیه ۱ـ۸ـ۴

فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت چند جمله‌ایهای T_n و S_n از درجه n وجود دارند، به قسمی که

$$\operatorname{Cos} n\theta = T_n(\operatorname{Cos}\theta) \qquad (1)$$

$$\operatorname{Sin}(n+1)\theta = \operatorname{Sin}\theta\, S_n(\operatorname{Cos}\theta) \qquad (2)$$

اثبات

بنا بر قضیهٔ موآور، به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، خواهیم داشت

$$\operatorname{Cos} n\theta + i \operatorname{Sin} n\theta = (\operatorname{Cos}\theta + i \operatorname{Sin}\theta)^n$$

با به‌کار بردن قضیه دوجمله‌ای می‌توانیم بنویسیم

$$\operatorname{Cos} n\theta + i \operatorname{Sin} n\theta = \sum_{K=0}^{n} \frac{n!}{K!\,(n-K)!} (i \operatorname{Sin}\theta)^K (\operatorname{Cos}\theta)^{n-K} \qquad (3)$$

قسمتهای حقیقی و موهومی دوطرف معادله (۳) را مساوی قرار می‌دهیم. جمله‌های حقیقی در مجموع طرف راست این معادله، متناظر با مقادیر زوج K هستند. وقتی $K = 2m$، $m = 0, 1, 2, \ldots [\frac{n}{2}]$ آنگاه

$$(i \operatorname{Sin}\theta)^K = (i \operatorname{Sin}\theta)^{2m} = (i^2)^m \operatorname{Sin}^{2m}\theta$$
$$= (-1)^m (1 - \operatorname{Cos}^2\theta)^m$$

با مساوی قرار دادن قسمتهایی حقیقی در معادلهٔ (۳)، خواهیم داشت

$$\operatorname{Cos} n\theta = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!\,(-1)^m}{(2m)!\,(n-2m)!}\,(1-\operatorname{Cos}^2\theta)^m\,(\operatorname{Cos}\theta)^{n-2m}$$

طرف راست این معادله یک چندجمله‌ای درجه n از $\operatorname{Cos}\theta$ است. این چندجمله‌ای را با $T_n(\operatorname{Cos}\theta)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت

$$\operatorname{Cos} n\theta = T_n(\operatorname{Cos}\theta)$$

که در آن

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^m \frac{n!}{(2m)!\,(n-2m)!}\,(1-x^2)^m\,X^{n-2m}$$

از (۱) نتیجه می‌شود که

$$T_n(1) = \operatorname{Cos}\theta = 1 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

جمله‌های موهومی از مجموع طرف راست معادلهٔ (۳)، متناظر با مقادیر فرد k هستند. وقتی که $k = 2m+1$ ، $m = 0, 1, 2, \ldots, [\frac{(n-1)}{2}]$ ، خواهیم داشت

$$(i\operatorname{Sin}\theta)^K = (i\operatorname{Sin}\theta)^{2m+1} = (-1)^m\, i\operatorname{Sin}\theta\,(1-\operatorname{Cos}^2\theta)^m$$

با برابر قرار دادن قسمتهای موهومی در معادلهٔ (۳)، به دست می‌آوریم

$$\operatorname{Sin} n\theta \operatorname{Sin}\theta \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^m \frac{n!}{(2m+1)!\,(n-2m-1)!}\,(1-\operatorname{Cos}^2\theta)^m(\operatorname{Cos}\theta)^{n-2m-1}$$

مجموع طرف راست، یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ بر حسب $\operatorname{Cos}\theta$ است.

این چندجمله‌ای را با $S_{n-1}(\cos\theta)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت

$$\sin n\theta = \sin\theta \, S_{n-1}(\cos\theta)$$

و

$$\sin(n+1)\theta = \sin\theta \, S_n(\cos\theta)$$

که در آن

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \frac{m!}{(2m+1)!\,(n-2m)!} (1-x^2)^m x^{n-2m} \qquad (4)$$

از فرمول (۲) نتیجه می‌شود که

$$S_n(1) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = n+1$$

قضیه ۱-۸-۵

نشان دهید مجموعهٔ چندجمله‌ایهای $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ بر بازهٔ $(-1,1)$ متعامداند و

$$\|T_0\|^2 = \pi \quad , \quad \|T_n(x)\|^2 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

اثبات

نخست ضرب داخلی T_n و T_m یعنی

$$(T_n , T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)\, T_m(x)\, dx$$

را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن تغییر متغیر $x = \cos\theta$ وقتی $0 \le \theta \le \pi$ خواهیم داشت

$$(T_n , T_m) = \int_0^{\pi} T_n(\cos\theta)\, T_m(\cos\theta)\, d\theta$$

بنا به (۱)، به دست می‌آوریم

$$(T_n , T_m) = \int_{\circ}^{\pi} \text{Cos}n\theta \ \text{Cos}m\,\theta \, d\,\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{\pi} [\ \text{Cos}\ (n+m)\,\theta + \text{Cos}\ (n-m)\,\theta\ ]\ d\,\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\ [\ \frac{۱}{n+m}\ \text{Sin}\ (n+m)\,\theta + \frac{۱}{n-m}\ \text{Sin}\ (n-m)\,\theta\ ]\ d\,\theta$$

$$= \begin{cases} \circ & n \neq m \\ \frac{\pi}{۲} & m = n \neq \circ \\ \pi & m = n = \circ \end{cases}$$

تمرین ۱ـ۸ـ۶

نشان دهید که چندجمله‌ایهای $\{S_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x)=(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ بر بازهٔ (۱,۱-) متعامداند و

$$\| S_n \|^۲ = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad n = ۱, ۲, ...$$

تمرین ۱ـ۸ـ۷

نشان دهید که چندجمله‌ایهای $\{T_n\}$ و $\{S_n\}$ به ترتیب در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند.

$$۲x\ T_n(x) = T_{n+۱}\ (x) + T_{n-۱}\ (x)\ ,\ n \geq ۱ \qquad (۵)$$

$$۲x\ S_n(x) = S_{n+۱} + S_{n-۱}\ ,\ n \geq ۱ \qquad (۶)$$

قضیه ۱ـ۸ـ۸

نشان دهید چندجمله‌ایهای $T_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

صدق می‌کنند.

اثبات

می‌دانیم که $Y(\theta) = \text{Cos}\, n\theta$ یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2Y}{d^2\theta} + n^2 Y = 0$$

است. این معادله با تغییر متغیر $x = \text{Cos}\,\theta$ به صورت زیر درمی‌آید، قرار می‌دهیم $y(x) = Y(\theta)$، چون

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta} = -\frac{dy}{dx}\text{Sin}\,\theta$$

$$\frac{d^2Y}{d^2\theta} = \frac{d^2y}{dx^2}\text{Sin}^2\theta - \frac{dy}{dx}\text{Cos}\;\theta = (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$$

بنابراین چون $T_n(\text{Cos}\,\theta) = \text{Cos}\, n\theta$، پس $T_n(x)$ها در معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

صدق می‌کنند.

تمرین ۱ـ۸ـ۹

تابع مولد برای چندجمله‌ایهای چبیشف از نوع دوم عبارت است از

$$F(x,t) = \frac{1}{1-2xt+t^2}$$

با استفاده از این تابع موارد زیر را به دست آورید.

الف) فرمول (۴) برای $S_n(x)$ها

ب) رابطه بازگشتی (۶)

پ) نشان دهید که $S_n(x)$ها در معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

صدق می‌کند.

فصل ۲: تابع گرین و مسائل اشترم ـ لیوویل

در این فصل ویژگیهای مسائل با مقدار مرزی، در مورد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بحث مربوط به این‌گونه مسائل به چند مفهوم مهم از جمله تابع گرین و بسط توابع اختیاری نسبت به توابع ویژه منتهی می‌گردد. در این فصل مسائل اشترم ـ لیوویل را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۱ ـ مسائل با مقدار مرزی همگن

تعریف ۲-۱-۱

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$A(x)\, u'' + B(x)\, u' + c(x)\, u = g(x) \qquad (۱)$$

را بر بازهٔ $a \leq x \leq b$ در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض می‌کنیم توابع A ، A' ، B ، C و g ، به ازای هر x در این بازه پیوسته باشند و $A(x) > 0$. اگر $A' = B$ آنگاه معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت

$$\frac{d}{dx}\left[A(x) \frac{du}{dx} \right] + C(x)\, u = g(x) \qquad (۲)$$

نوشت. معادله (۲) را صورت ***خود الحاق*** معادلهٔ (۱) می‌نامیم.

تذکر ۲-۱-۲

با فرضهای مشابهٔ تعریف بالا در مورد A ، B و C معادلهٔ (۱) را همیشه

می‌توان به صورت (۲) تبدیل کرد. در واقع، اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را در تابع

$$\frac{1}{A} e^{\int \frac{B}{A} dx}$$

ضرب کنیم، معادلهٔ (۱) به معادلهٔ

$$Lu = \frac{d}{dx} [p(x) \frac{du}{dx}] + q(x) u = f(x) \qquad (۳)$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$p(x) = \exp \left(\int \frac{B}{A} dx \right) \quad , \quad q(x) = \frac{C(x)}{A(x)} p(x) \quad ,$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{A(x)} p(x)$$

واضح است که بر بازهٔ $a \leq x \leq b$ توابع p ، p' ، q و f پیوسته‌اند و $p(x) > 0$ است. معادلهٔ دیفرانسیل (۳) به معادلهٔ دیفرانسیل از نوع اشترم ـ لیوویل معروف است.

مثال ۲-۱-۳

معادله دیفرانسیل

$$(1-x^2) u'' - 2xu' + n (n+1) u = 0$$

را روی $-1 < x < 1$ به صورت خودالحاقی بنویسید.

حل

با مقایسه این معادله و معادلهٔ (۱) خواهیم داشت

$$A = (1-x^2) \quad , \quad B = -2x \quad , \quad C = n (n+1)$$

چون $A' = B$ معادله داده شده را می‌توان به صورت خودالحاق

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + n(n+1)u = 0$$

نوشت.

تمرین ۲-۱-۴

معادله دیفرانسیل $x^2 u'' + x u' + u = 0 \quad , \quad 0 < a \le x \le b$
را به صورت خودالحاق بنویسید.

تذکر ۲-۱-۵

در این بخش، روش یافتن جوابی از مسأله با مقدار اولیهٔ

$$\left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x) u = 0 \qquad a \le x \le b \qquad (۴)$$

$$Lu = \frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x) u = 0 \qquad (۴)$$

$$B_1(u) = \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \qquad (۵)$$

$$B_2(u) = \gamma u(a) + \delta u'(a) = 0$$

را بررسی می‌کنیم.

در اینجا ضرایب α، β، γ و δ ثابتهای حقیقی هستند و $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ و $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. روشن است که مسألهٔ (۴) و (۵) دست کم دارای یک جواب، مثلاً $u=0$، می‌باشد. سؤال اساسی که اینک باید به آن پاسخ دهیم، سؤال مربوط به وجود و روش پیدا کردن همهٔ جوابهای غیربدیهی اینگونه مسائل است.

قضیه ۲-۱-۶

مسأله (۴) و (۵) جواب غیربدیهی دارد اگر و تنها اگر برای هر دو جواب مستقل خطی معادلهٔ (۴) مثل u_1 و u_2 شرط

$$\begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۶)$$

برقرار باشد. در این حالت همهٔ جوابهای مسأله به صورت $v(x) = Cu(x)$ می‌باشند، که در آن u یک جواب غیربدیهی مسأله و C ثابتی اختیاری است.

اثبات

فرض می‌کنیم u_1 و u_2 بر بازهٔ $a \le x \le b$ دو جواب مستقل خطی معادلهٔ (۴) باشند. وجود این‌گونه جوابها از شرایط وضع شده بر p و q و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم u یک جواب غیربدیهی مسألهٔ (۴) و (۵) باشد. در این صورت ثابتهایی مانند C_1 و C_2 که هر دو صفر نیستند، وجود دارد، به قسمی که

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) \qquad a \le x \le b$$

چون u در شرایط مرزی (۵) صدق می‌کند و به دلیل خطی بودن این شرایط، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} B_1(u) &= C_1\, B_1\,(u_1) + C_2\, B_1\,(u_2) = 0 \\ B_2(u) &= C_1\, B_2\,(u_1) + C_2\, B_2\,(u_2) = 0 \end{aligned} \tag{۷}$$

چون C_1 و C_2 هر دو صفر نیستند، پس دترمینان ضرایب باید صفر باشد؛ یعنی

$$\begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} = 0$$

از این رو، اگر شرط (۶) برقرار نباشد، مسأله (۴) و (۵) تنها جواب بدیهی دارد.

از طرف دیگر اگر شرط (۶) برقرار باشد، آنگاه هر معادله در (۷) مضرب ثابتی از معادلهٔ دیگر است. از این‌رو، برای به‌دست آوردن یک جواب غیربدیهی مسأله، می‌توان یکی از معادلات (۷) را به دلخواه به‌کار برد. برای نمونه، اگر در

معادلهٔ اول قرار دهیم $C_1 = B_1(u_2)$ و $C_2 = -B_1(u_1)$، آنگاه

$$u(x) = B_1(u_2)\, u_1(x) - B_1(u_1)\, u_2(x)$$

یک جواب غیربدیهی (۴) و (۵) است. از طرفی از خطی و همگن بودن معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود که $v(x) = Cu(x)$، به ازای هر C، یک جواب مسأله است. بنابراین بینهایت جواب غیربدیهی برای مسأله به دست می‌آید. در واقع اگر مسأله (۴) و (۵) دارای یک جواب غیربدیهی مانند u، باشد، آنگاه هر جواب دیگر مسأله به صورت $v(x) = Cu(x)$ است که در آن C ثابتی اختیاری می‌باشد.

برای تحقیق درستی آخرین قسمت قضیه، فرض می‌کنیم v جواب دیگر مسأله باشد. در این صورت چون u و v هر دو در معادلهٔ اول شرایط مرزی (۵) صدق می‌کند، داریم

$$\alpha\, u(a) + \beta\, u'(a) = 0$$
$$\alpha\, v(a) + \beta\, v'(a) = 0$$

که یک دستگاه معادلات همگن برای ثابتهای α و β است. می‌دانیم که α و β هر دو صفر نیستند. از این‌رو، دترمینان دستگاه باید صفر باشد؛ یعنی

$$W(u, v, a) = \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۸)$$

این دترمینان رونسکینی u و v در $x = a$ است. اینک یادآور می‌شویم که وقتی رونسکینی دو جواب معادلهٔ (۴) در یک نقطه در $a \le x \le b$ صفر شود، بر این بازه متحد صفر می‌گردد. بنابراین از (۸) نتیجه می‌شود که به ازای هر $a \le x \le b$، $W(u,v;x) = 0$ که در نتیجه u و v وابسته خطی هستند؛ یعنی $v(a) = Cu(x)$ به ازای ثابت C.

مثال ۲-۱-۷

آیا مسأله با مقدار اولیهٔ

$$u'' + u = 0$$

$$u(0) = 0 \qquad u(\pi) = 0$$

جواب غیربدیهی دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب، جواب را پیدا کنید.

حل

جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$u(x) = C_1 \operatorname{Sin} x + C_2 \operatorname{Cos} x$$

چون دترمینان

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Sin} 0 & \operatorname{Cos} 0 \\ \operatorname{Sin} \pi & \operatorname{Cos} \pi \end{vmatrix} = 0$$

پس مسأله دارای جوابهای غیربدیهی است. در واقع، شرط $u(0) = 0$ ایجاب می‌کند که

$$C_2 = 0$$

بنابراین جوابهای مسأله عبارتند از

$$u(x) = C \operatorname{Sin} x$$

که در آن C ثابت دلخواه است.

تمرین ۲-۱-۸

آیا مسأله با مقدار اولیهٔ

$$u'' + \frac{1}{4} u = 0$$

$$u(0) = 0 \qquad u(\pi) = 0$$

جواب غیربدیهی دارد؟ در صورت وجود جواب غیربدیهی، آن را پیداکنید.

۲-۱-۹

تمرینهای بخش ۲-۱

۱. معادلات دیفرانسیل داده شده را به صورت خودالحاق بنویسید.

الف) $u'' + bu' + cu = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

در اینجا b و C ثابتهای حقیقی هستند.

ب) $xu'' + 2u' + xu = 0 \quad , \quad 0 < a \leq x \leq b$

۲. آیا مسائل با مقدار اولیهٔ داده شده، جواب غیربدیهی دارند؟ در صورت وجود جواب غیربدیهی آن را پیداکنید.

الف) $0 \leq x \leq 1$, $u'' = 0$

$u(1) = 0$, $u(0) + u'(0) = 0$

ب) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $u'' + u = 0$

$u'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $u(0) = 0$

پ) $1 \leq x \leq 2$, $x u'' + u' = 0$

$u(1) = 0$

$u(2) - (Ln4)\, u'(2) = 0$

۳. (شرایط مرزی غیرهمگن) مسأله با مقدار مرزی

$$Lu = 0$$

$$B_1(u) = C_1 \quad , \quad B_2(u) = C_2$$

راکه در آن L عملگر (۳)، B_1 و B_2 عملگرهای مرزی داده شده در (۵) می‌باشند، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم u_1 و u_2 دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل $Lu=0$ باشند.

الف) نشان دهید که مسأله جواب یگانه دارد اگر و تنها اگر دترمینان

$$D = \begin{vmatrix} B_۱ (u_۱) & B_۱ (u_۲) \\ B_۲ (u_۱) & B_۲ (u_۲) \end{vmatrix} \neq ۰$$

۴. با به‌کار بردن نتیجهٔ تمرین ۳، تعیین کنید که آیا مسائل زیر جواب دارند؟ در صورت مثبت بودن جواب، جواب را پیدا کنید.

الف)
$$u'' + u = ۰ \qquad ۰ \leq x \leq \pi$$
$$u(۰) = -۱ \qquad u(\pi) = -۱$$

ب)
$$u'' - ۴u = ۰ \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$
$$u(۰) = ۱$$
$$u(۱) = ۰$$

۲-۲ ـ مسائل غیرهمگن؛ تابع گرین

یادآوری ۲-۲-۱

معادله دیفرانسیل غیرهمگن

$$Lu = \frac{d}{dx} [p(x) \frac{du}{dx}] + q(x) u = f(x) \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن f بر بازهٔ $a \leq x \leq b$ پیوسته است. می‌خواهیم جوابی از این معادله را پیدا کنیم که در شرایط مرزی همگن

$$u(a) = ۰ \qquad u(b) = ۰ \qquad (۲)$$

صدق می‌کند. در اینجا شرایط مرزی بسیار ساده‌ای را صرفاً به دلیل راحتی کار،

انتخاب کرده‌ایم، نتایجی که به دست می‌آیند برای حالت کلی شرایط مرزی (۵) (بخش ۲-۱ را ببینید) نیز برقرارند.

نخست مسألهٔ (۱)، (۲) را با فرض اینکه جواب بدیهی، تنها جواب مسألهٔ همگن وابسته به آن، یعنی

$$Lu = 0 \qquad (۳)$$

$$u(a) = 0 \qquad u(b) = 0$$

باشد، در نظر می‌گیریم. در بخش زیر مشاهده می‌کنیم که اگر (۳) دارای جواب غیربدیهی باشد، آنگاه مسألهٔ (۱)، (۲) یا اصلاً جواب ندارد یا بینهایت جواب خواهد داشت.

قضیه ۲-۲-۲

با به‌کار بردن روش تغییر پارامترها، نشان دهید مسأله (۱) و (۲) جوابی به صورت

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

دارد که در آن

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)\, u_2(\xi)}{P(\xi)\, W(\xi; u_1, u_2)} & a \le x \le \xi \\[2ex] \dfrac{u_1(\xi)\, u_2(x)}{P(\xi)\, W(\xi; u_1, u_2)} & \xi \le x \le b \end{cases} \qquad (۴)$$

تابع G را ***تابع گرین*** برای عملگر L متناظر با شرایط مرزی (۲) می‌نامیم.

اثبات

فرض می‌کنیم u_1 جواب غیربدیهی از $Lu = 0$ باشد که در شرط $u_1(a) = 0$ صدق می‌کند و u_2 جواب غیربدیهی از همین معادله باشد که در شرط $u_2(b) = 0$

صدق می‌کند. روشن است که چنین جوابهایی وجود دارند. در واقع اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادلهٔ $Lu = 0$ باشد. در این صورت، قرار می‌دهیم

$$u_1(x) = y_2(a)\, y_1(x) - y_1(a)\, y_2(a)$$

و

$$u_2(x) = y_2(b)\, y_1(x) - y_1(b)\, y_2(x)$$

اینک، چون مسأله همگن متناظر با (۳) تنها دارای جواب بدیهی است، خواهیم داشت:

$$u_1(b) \neq 0, \qquad u_2(a) \neq 0$$

و توابع u_1 و u_2 مستقل خطی هستند. از این‌رو، رونسکینی $W(x\,;\, u_1, u_2)$ صفر نیست؛ یعنی به ازای هر $a \le x \le b$،

$$W(x\,;\, u_1, u_2) = u_1(x)\, u_2'(x) - u_1'(x)\, u_2(x) \neq 0 \tag{۵}$$

حال با استفاده از روش تغییر پارامترها، قرار می‌دهیم

$$u(x) = v_1(x)\, u_1(x) + v_2(x)\, u_2(x) \tag{۶}$$

که در آن دو تابع v_1 و v_2 را تعیین خواهیم کرد. با مشتقگیری از (۶) و قرار دادن

$$v'_1(x)\, u_1(x) + v'_2(x)\, u_2(x) = 0 \tag{۷}$$

داریم،

$$u'(x) = v_1(x)\, u'_1(x) + v_2(x)\, u'_2(x) \tag{۸}$$

با مشتقگیری از (۸) و با قرار دادن نتیجه همراه با (۸) و (۶) در معادله دیفرانسیل (۱) به دست می‌آوریم:

$$v'_1(x)\ u'_1(x) + v'_2(x)\ u'_2(x) = \frac{f(x)}{P(x)} \tag{۹}$$

با حل معادلات (۷) و (۹) نسبت به v'_1 و v'_2 به دست می‌آوریم:

$$v'_1(x) = \frac{-u_2(x)\ f(x)}{P(x)\ W(x\,;u_1\,,u_2)}$$

$$v'_2(x) = \frac{u_1(x)\ f(x)}{P(x)\ W(x\,;u_1\,,u_2)}$$

و بنابراین،

$$v_1(x) = -\int_{C_1}^{x} \frac{u_2(\xi)\ f(\xi)}{P(\xi)\ W(\xi\,;u_1\,,u_2)}\,d\xi$$

(۹)

$$v_2(x) = \int_{C_2}^{x} \frac{u_1(\xi)\ f(\xi)}{P(\xi)\ W(\xi\,;u_1\,,u_2)}\,d\xi$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواه هستند. با جایگذاری این مقادیر در (۶)، یک جواب خصوصی معادله (۱) به صورت

(۱۰)

$$u(x)= u_1(x)\int_{C_1}^{x} \frac{-u_2(\xi)\ f(\xi)\,d\xi}{P(\xi)\ W(\xi;u_1,u_2)} + u_2(x)\int_{C_2}^{x} \frac{u_1(\xi)\ f(\xi)\,d\xi}{P(\xi)\ W(\xi;u_1,u_2)}$$

به‌دست می‌آید.

اینک ثابتهای C_1 و C_2 را با به‌کار بردن شرایط مرزی (۲) به دست می‌آوریم.
به ازای $x = a$ قرار می‌دهیم $u = 0$ با توجه به اینکه $u_1(a) = 0$، خواهیم داشت

$$C_2 = a$$

به همین روش با قرار دادن $u=0$ به ازای $x=b$ و با توجه به اینکه $u_2(b)=0$، داریم

$$C_1 = b$$

با جایگذاری این مقادیر برای C_1 و C_2 در (۱۰) یک جواب خصوصی بـه صورت

$$u(x)= \int_a^x \frac{u_1(\xi)\, u_2(x)\, f(\xi)}{P(\xi)\, W(\xi;u_1,u_2)}\, d\xi + \int_x^b \frac{u_1(x)\, f(\xi)}{P(\xi)\, W(\xi;u_1,u_2)}\, d\xi \qquad (11)$$

به دست می‌آید. با قرار دادن

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)\, u_2(\xi)}{P(\xi)\, W(\xi\,;u_1,u_2)} & a \le x \le \xi \\[2ex] \dfrac{u_1(\xi) u_2(x)}{P(\xi)\, W(\xi\,;u_1,u_2)} & \xi \le x \le b \end{cases}$$

جواب (۱۱) را می‌توان به صورت ساده‌تر

$$u(x) = \int_a^b G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

نوشت.

تمرین ۲-۲-۳

برای مسأله با مقدار اولیه (۳) نشان دهید $P(x)\, W(x\,;u_1,u_2)$ مقدار ثابتی است.

تذکر ۲-۲-۴

با توجه به تمرین ۲-۲-۳ تابع گرین (۴) به صورت

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)\, u_2(\xi)}{K} & a \le x \le \xi \\[2ex] \dfrac{u_2(x)\, u_1(\xi)}{K} & \xi \le x \le b \end{cases} \qquad (12)$$

درمی‌آید، که در آن $K = P(x)\, W(x\,;\, u_1\,,\, u_2)$ مقدار ثابتی است.

تمرین ۲-۲-۵

مطالب زیر را در مورد تابع گرین (۴) یا (۱۲) ثابت کنید.

(I) تابع گرین در معادلهٔ

$$\frac{d}{dx}\left(P\,\frac{dG}{dx}\right) + qG = 0 \qquad (a < x < b\,,\, x \neq \xi)$$

صدق می‌کند.

(II) تابع گرین در $x = \xi$، پیوسته است، یعنی

$$G(\xi + 0\,,\xi) = G(\xi - 0\,,\xi)$$

(III) تابع گرین در شرایط مرزی مسأله صدق می‌کند، یعنی

$$G(a\,;\xi) = 0 \quad , \quad G(b\,,\xi) = 0$$

(IV) مشتق تابع گرین در $x = \xi$ ناپیوسته است، در واقع

$$\frac{dG}{dx} G(\xi + 0\,,\xi) - \frac{dG}{dx}(\xi - 0\,,\xi) = \frac{1}{P(\xi)}$$

(V) تابع گرین، برای عملگر خودالحاقی نسبت به متغیرهای x و ξ متقارن است،

یعنی
$$G(x\,,\xi) = G(\xi\,;\,x)$$

تذکر ۲-۲-۶

در واقع ویژگیهای (I) تا (IV) تابع گرین را به‌طور یگانه معین می‌کند، یعنی اگر تابعی بسازیم که در همهٔ ویژگیهای (IV) - (I) صدق کند. این تابع باید به صورت (۴) یا (۱۲) باشد، مشروط بر اینکه معادله دیفرانسیل خودالحاق باشد.

مثال ۲-۲-۷

تابع گرین و جواب مسأله با مقدار مرزی

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = 0 \qquad u(1) = 0$$

را پیدا کنید.

حل

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که جواب بدیهی، تنها جواب مسأله همگن است، بنابراین تابع گرین وجود دارد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $u'' = 0$ ،

عبارت است از: $$u(x) = Ax + B$$

یک جواب از مسأله که در شرط $u(0) = 0$ صدق کند، عبارت است از $u_1(x)=x$ و جوابی که در شرط $u(1) = 0$ صدق می‌کند را می‌توان توسط $u_2(x) = x-1$ تعریف کرد.

این دو تابع مستقل خطی هستند و رونسکینی آنها عبارت است از:

$$W(x; u_1, u_2) = u_1 u'_2 - u'_1 u_2 = 1$$

از این رو، بنا به (۱۲) تابع گرین برابر است با:

$$G(x;\xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & 0 \le x \le \xi \\ \xi(x-1) & \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

و جواب مسأله عبارت می‌شود از

$$u(x) = \int_0^1 G(x;\xi) f(\xi)\, d\xi$$

به ویژه اگر $f(x) = ۱$ ، آنگاه $u(x) = \frac{x(x-۱)}{۲}$ ، جواب مسأله است.

تمرین ۲-۲-۸

الف) تابع گرین و جواب مسأله با مقدار مرزی

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} + u = f(x) \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$

$$u(۰) = ۰ \qquad u(۱) = ۰$$

را پیدا کنید.

ب) جواب مسأله قسمت (الف) را در حالت $f(x) = ۱$ ، به دست آورید.

تمرین ۲-۲-۹

تابع گرین مسأله با مقدار مرزی

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} = f(x)$$

$$u(۰) = ۰ \quad , \quad u(۱) + u'(۱) = ۰$$

را پیدا کنید.

تمرین ۲-۲-۱۰

تابع گرین مسأله با مقدار مرزی

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} = f(x)$$

$$u(۰) = ۰ \quad , \quad u(۱) + u'(۱) = ۰$$

را پیدا کنید.

تذکر ۲-۲-۱۱

جواب مسأله با مقدار مرزی

$$Lu = f(x) \quad , \quad u(a) = A \quad , \quad u(b) = B \qquad (۱۳)$$

با شرایط مرزی غیرهمگن را می‌توان با ترکیب جواب مسألهٔ (۱) و (۲) و مسألهٔ

$$Lu = 0 \quad , \quad u(a) = A \quad , \quad u(b) = B \qquad (۱۴)$$

به‌دست آورد. بنابراین کافیست تنها جواب مسأله (۱۴) را پیدا کنیم. برای پیدا کردن جواب این مسأله فرض می‌کنیم u_1 و u_2 دو جواب مستقلی باشند که در مورد تابع گرین (۱۲) مورد استفاده قرار می‌گرفت. اینک فرض می‌کنیم جواب مسأله (۱۴) به صورت

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

باشند. در اینجا C_1 و C_2 ثابتهایی هستند که باید معین کرد. با به‌کار بردن شرایط مرزی و با توجه به اینکه $u_1(a) = 0$ و $u_2(b) = 0$، به‌دست می‌آوریم

$$u(a) = C_2 u_2(a) = A \qquad u(b) = C_1 u_1(b) = B$$

اینک چون $u_2(a) \neq 0$ $\quad u_1(b) \neq 0$

پس

$$C_1 = \frac{B}{u_1(b)} \qquad C_2 = \frac{A}{u_2(a)}$$

بنابراین جواب مسأله (۱۳) برابر است با:

$$u(x) = \int_a^b G(x;\xi) f(\xi)\, d\xi + \frac{B}{u_1(b)} u_1(x) + \frac{A}{u_2(a)} u_2(x) \qquad (۱۵)$$

تمرین ۲-۲-۱۲

جواب مسأله غیرهمگن

$$\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}} + u = f \qquad ۰ \le x \le ۱$$

$$u(۰) = A \qquad u(۱) = B$$

را پیدا کنید.

تمرین ۲-۲-۱۳

جواب مسأله غیرهمگن

$$u'' + ۴u = f \qquad ۰ \le x \le ۱$$

$$u(۰) = A \quad , \quad u(۱) = B$$

را پیدا کنید.

تمرین ۲-۲-۱۴

جواب مسأله غیرهمگن

$$u'' + K^{۲}u = f(x)$$

$$u(۰) - u'(۰) = A \qquad u(۱) = B$$

را پیدا کنید.

۲-۳ــ تعمیم تابع گرین

در بخش (۲-۲) یک جواب یگانه مسألهٔ (۱) و (۲) را در حالتی که تنها جواب مسألهٔ همگن (۳) جواب بدیهی باشد، به دست می‌آوریم. در این حالت تابع گرین (۱۲) به‌طور یگانه معین می‌شود. اینک می‌خواهیم حالتی راکه مسألهٔ همگن

(۳) دارای جواب غیربدیهی باشد، بررسی کنیم. در این حالت تابع گرین (۱۲) وجود ندارد، زیرا توابع u_1 و u_2 مستقل خطی نمی‌باشند. در واقع نشان خواهیم داد که در این حالت مسأله (۱) و (۲) یا جواب ندارد و یا بینهایت جواب خواهد داشت.

لِم ۲-۳-۱

(فرمول گرین) اگر u و v بر بازهٔ $a \le x \le b$ دو بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

$$\int_a^b [\, uL\, v - v\, Lu \,]\, dx = [\, P\, (u \frac{dv}{du} - v \frac{du}{dx}\,)\,]_a^b \tag{۱}$$

اثبات

داریم $\int_a^b uL\, v\, dx = \int_a u\, [\, \frac{d}{dx}\, (P \frac{dv}{dx}\,) + q\, v\,]\, dx$

$$= \int_a^b u \frac{d}{dx}\, (P \frac{dv}{dx}\,) + \int_a^b quv\, dx \tag{۲}$$

با به کار بردن دوبار انتگرالگیری به روش جزء به جزء در مورد انتگرال اول در طرف راست (۱)، به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^b u \frac{d}{dx}\, (P \frac{dv}{dx}\,) = P\, [\, u \frac{dv}{dx}\,]_a^b - \int_a^b P \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}\, dx$$

$$= [\, P\, (u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}\,)\,]_a^b + \int_a^b v \frac{d}{dx}\, (P \frac{du}{dx}\,)\, dx$$

با جایگذاری این مقدار در (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^b uLv\, dx = \int_a^b u\, [\, \frac{d}{dx}\, (P \frac{du}{dx}\,) + qu\,]\, dx + [\, P\, (u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}\,)\,]_a^b$$

$$= \int_a^b vLu\,dx + \left[P \left(u \frac{d\nu}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b$$

$$\int_a^b [\, uLv - vLu \,]\, dx = \left[P \left(\frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]_a^b$$

تذکر ۲-۳-۲

فرض کنیم $u_\circ$ یک جواب غیربدیهی مسأله (۳) بخش ۲-۲ بوده و مسأله (۱) و (۲) بخش ۲-۲ دارای جوابی مانند u باشد. با ضرب کردن دو طرف معادلهٔ (۱) یعنی

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)\, u = f(x)$$

در $u_\circ$ و انتگرالگیری از a تا b، به دست می‌آوریم

$$\int_a^b u_\circ Lu dx = \int_a^b u_\circ\, f(x)\, dx \tag{۳}$$

بنا به لِم ۲-۳-۱ داریم

$$\int_a^b u_\circ Lu dx = \int_a^b uLu_\circ + \left[P \left(u_\circ \frac{du}{dx} - u \frac{du_\circ}{dx} \right) \right]_a^b \tag{۴}$$

چون u و $u_\circ$ هر دو در $x = a$ و $x = b$ صفر هستند و $Lu_\circ = \circ$، طرف راست (۴) صفر می‌شود و از این‌رو از (۳)، خواهیم داشت

$$\int_a^b u_\circ\, f(x)\, dx = \circ \tag{۵}$$

این مطلب نشان می‌دهد که وقتی مسأله (۳) بخش ۲-۲ دارای جواب غیربدیهی، $u_\circ$ است، برای اینکه مسأله (۱) و (۲) بخش ۲-۲ جواب داشته باشد. باید معادلهٔ (۵) برقرار باشد. بنابراین اگر شرط (۵) برقرار نباشد، آنگاه مسأله (۱) و (۲) بخش ۲-۲ جواب نخواهد داشت. به عبارت دیگر، (۵) شرط لازم برای وجود جواب مسأله (۱) و (۲) بخش ۲-۲ است، مشروط بر اینکه مسأله (۳) بخش ۲-۲ دارای

جواب غیربدیهی u_0 باشد.

در واقع می‌توان نشان داد که شرط (۵) یک شرط کافی برای وجود جواب (۱) و (۲) بخش ۲-۲ است. قبل از اینکه تعمیم تابع گرین را برای این حالت تولید کنیم، یک مثال ساده را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲-۳-۳

جواب مسأله غیرهمگن

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \pi^2 u = 1 \qquad (6)$$

$$u(0) = 0 \qquad u(1) = 0$$

را پیدا کنید.

حل

به آسانی مشاهده می‌کنیم که جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده در (۶) برابر است با

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} + C_1 \operatorname{Sin} \pi x + C_2 \operatorname{Cos} \pi x$$

با به کار بردن شرایط مرزی داده شده در (۶) در مورد جواب بالا مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{1}{\pi^2} + C_2 = 0 \quad , \quad \frac{1}{\pi^2} - C_2 = 0$$

که به یک تناقض در مورد C_2 منجر می‌گردد. این مطلب نشان می‌دهد که مسأله (۶) جواب ندارد. در واقع به آسانی می‌توان مشاهده کرد که مسأله همگن وابسته به این مسأله یعنی

$$u'' + \pi^2 u = 0$$

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 0$$

دارای جواب غیربدیهی $u_0(x) = \operatorname{Sin} \pi x$ است ولی شرط (۵) به صورت

$$\int_0^1 1 - \operatorname{Sin} \pi x \, dx \neq 0$$

درمی‌آید، برقرار نیست.

از طرف دیگر، اگر مسألهٔ

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \pi^2 u = 2x - 1$$

$$u(0) = 0 \qquad u(1) = 0 \tag{۷}$$

را در نظر بگیریم، در این حالت شرط (۵) به صورت

$$\int_0^1 (2x - 1) \sin x \, dx = 0$$

درمی‌آید، برقرار است. با روش مقدماتی می‌توان بینهایت جواب به صورت

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \cos \pi x + \frac{2x-1}{\pi^2} + C \sin \pi x$$

برای مسأله (۷) پیدا کرد. در اینجا C ثابت دلخواهی است.

قضیه ۲-۳-۴

نشان دهید که مسألهٔ

$$Lu = \frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)\,u = f(x) \tag{۸}$$

وقتی u_0 یک جواب غیربدیهی مسأله غیرهمگن وابسته به (۸) یعنی

$$Lu = 0$$

$$u(a) = 0 \qquad u(b) = 0$$

است. دارای جوابی به صورت

$$u(x) = \int_a^b G^*(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

می‌باشد که در آن

$$G^*(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{u_0(x)\,u_2(\xi)}{K} & a\le x\le \xi\\[2mm] \dfrac{u_0(\xi)\,u_2(x)}{K} & x\le \xi\le b\end{cases} \tag{۹}$$

در اینجا u_2 جوابی از معادلهٔ $Lu=0$ است که در هیچکدام از شرایط مرزی (۸) صدق نمی‌کند و $K=P(x)\,W(x\,;u_0\,,u_2)$ مقدار ثابتی است، زیرا L خودالحاق می‌باشد.

اثبات

در اینجا u_0 و u_2 مستقل خطی هستند (تمرین ۲-۳-۶ را ببینید) از این رو بنا به (۱۰) بخش ۲-۲ خواهیم داشت

$$u(x)=u_0(x)\int_{C_1}^{x}\frac{-u_2(\xi)\,f(\xi)\,d\xi}{K}+u_2(x)\int_{C_2}^{x}\frac{u_0(\xi)\,f(\xi)\,d\xi}{K} \tag{۱۰}$$

که به ازای هر ثابت دلخواه C_1، C_2 و $u(x)$ جوابی از معادلهٔ داده شده در (۸) می‌باشد. در اینجا $K=P(x)\,W(x\,;u_0\,,u_2)$، که مقدار ثابتی است زیرا L خودالحاق می‌باشد. با به‌کار بردن شرایط مرزی داده شده در (۸) با توجه به اینکه u_0 در این شرایط صدق می‌کند، خواهیم داشت

$$u_2(a)\int_{C_2}^{a}\frac{u_0(\xi)\,f(\xi)\,d\xi}{K}=0\ ,\quad u_2(b)\int_{C_2}^{b}\frac{-u_0(\xi)\,f(\xi)\,d\xi}{K}=0$$

چون $u_2(a)\neq 0$ و $u_2(b)\neq 0$، پس معادلات (۱۱) وقتی برقرارند که انتگرالها برای مقداری از C_2 صفر گردند. با توجه به شرط (۵) کافیست $C_2=a$ یا $C_2=b$ انتخاب کنیم و ثابت دیگر، یعنی C_1، را به عنوان ثابت دلخواه در نظر بگیریم. با انتخاب $C_1=C_2=a$، در این صورت جواب (۱۰) به صورت

$$u(x)=\int_{a}^{x}\frac{u_0(\xi)\,u_2(x)-u_0(x)\,u_2(\xi)}{K}\,f(\xi)\,d\xi \tag{۱۱}$$

درمی‌آید. این جواب یگانه نیست زیرا می‌توان هر مضرب ثابتی از u_0 را به (۱۱) اضافه کرد. در واقع اگر جملهٔ

$$u_0(x)\int_a^b \frac{u_2(\xi)\, f(\xi)}{K}\, d\xi = u_0(x)\int_a^x \frac{u_2(\xi)\, f(\xi)}{K}\, d\xi + u_0(x)\int_x^b \frac{u_2(\xi)\, f(\xi)}{K}\, d\xi$$

را با (۱۱) جمع کنیم، به دست می‌آوریم:

$$u(x) = \int_a^x \frac{u_0(\xi)\, u_2(x)}{K}\, f\xi\, d\xi + \int_x^b \frac{u_0(x)\, u_2(\xi)}{K}\, f(\xi)\, d\xi \qquad (۱۲)$$

$$= \int_a^b G^*(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

که در آن

$$G^*(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_0(x)\, u_2(\xi)}{K} & a \le x \le \xi \\[2ex] \dfrac{u_0(\xi)\, u_2(x)}{K} & x \le \xi \le b \end{cases}$$

مثال ۲-۳-۵

جواب مسأله

$$u'' + \pi^2 u = f(x)$$
$$u(0) = 0 \qquad u(1) = 0$$

را با فرض $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{Sin}\, \pi x\, dx = 0$، پیدا کنید.

حل

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $u_0(x) = \mathrm{Sin}\, \pi x$ یک جواب غیربدیهی از مسأله همگن

$$u'' + \pi^2 u = 0$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

است. اینک جوابی از معادله دیفرانسیل همگن را پیدا می‌کنیم که در $x = 0$ و $x = 1$

صفر نیست. به آسانی می‌توان مشاهده کرده که $u_۲(x) = \cos \pi x$ در این حالت $K = u_۰ u'_۲ - u'_۰ u_۲ = -\pi$ از این رو بنا به (۹)

$$G^*(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{۱}{\pi} \sin \pi x \cos \pi \xi & a \leq x \leq \xi \\ -\frac{۱}{\pi} \sin \pi \xi \cos \pi x & \xi \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

و جواب مسأله عبارت است از

$$u(x) = \int_۰^۱ G^*(x ; \xi) f(\xi) d\xi + C \sin \pi x$$

که در آن C یک ثابت دلخواه است.

تمرین ۲-۳-۶

فرض کنیم $u_۰$ یک جواب غیربدیهی از مسألهٔ

$$L(u) = ۰$$
$$u(a) = ۰ \quad , \quad u(b) = ۰$$

بوده و u جوابی از معادلهٔ $L(u) = ۰$ باشد. ثابت کنید u و $u_۰$ وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر u در یکی از شرایط $u(a) = ۰$ و $u(b) = ۰$ صدق کند.

تمرین ۲-۳-۷

تعمیم تابع گرین را برای عملگر داده شدهٔ L و شرایط مرزی داده شده پیدا کنید.

الف)
$$L = \frac{d^۲}{dx^۲} \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۱$$

$$u'(۰) = ۰ \quad , \quad u'(۱) = ۰$$

ب)
$$L = \frac{d^۲}{dx^۲} + ۱ \quad , \quad ۰ \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$$

$$u'(۰) = ۰ \quad , \quad u'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰$$

پ) $$x\left(\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\right)+\left(\frac{d}{dx}\right) \quad , \quad ۰ \le x \le ۱$$

$u(۰)$ متناهی است

$$u'(۱)=۰$$

تمرین ۲-۳-۸

فرض کنید $u_۰$ یک جواب غیربدیهی مسألهٔ
$$Lu = ۰ \quad , \quad ۰ \le x \le b$$
$$u(a) = ۰ \qquad u(b) = ۰$$
باشد به قسمی که
$$\int_a^b u_۰^{۲}(x)\,dx = ۱$$
نشان دهید که مسألهٔ
$$Lu = u_۰$$
$$u(a) = ۰ \quad , \quad u(b) = ۰$$
جواب ندارد.

تمرین ۲-۳-۹

آیا مسأله
$$u'' - ۲u' + u = ۱ \quad , \quad ۰ < x < ۱$$
$$u(۰) = ۰ \quad , \quad ۲u(۱) - u'(۱) = ۰$$
جواب دارد؟

۲-۴ ــ مسائل با مقدار ویژه

در این بخش جوابهای غیربدیهی مسائلی به صورت

$$Ly + \lambda\, r(x)\, y = ۰ \qquad (۱)$$

$$\alpha_{۱۱}\, y(a) + \alpha_{۱۲}\, y'(a) + \alpha_{۱۳}\, y(b) + \alpha_{۱۴}\, y'(b) = ۰$$
$$(۲)$$
$$\alpha_{۲۱}\, y(a) + \alpha_{۲۲}\, y'(a) + \alpha_{۲۳}\, y(b) + \alpha_{۲۴}\, y'(b) = ۰$$

را بررسی می‌کنیم که در آن $Ly = \frac{d}{dx} [P(x) \frac{dy}{dx}] + q(x) y$

در اینجا λ پارامتر است و فرض می‌کنیم تابع r بر بازهٔ $a \leq x \leq b$ پیوسته و مثبت باشد. مانند گذشته فرض می‌کنیم توابع p، p' و q بر این بازه پیوسته بوده و تابع p بر این بازه مثبت می‌باشد. حال اگر عملگرهای مرزی U_1 و U_2 را به کمک فرمولهای

$$U_1 (y) = \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \alpha_{13} y(b) + \alpha_{14} y'(b)$$
$$U_2 (y) = \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \alpha_{23} y(b) + \alpha_{24} y'(b)$$

تعریف کنیم. حال مسأله با مقدار مرزی (۱) و (۲) را می‌توان به صورت

$$Ly = -\lambda r y \qquad (4)$$
$$U_1 (y) = 0 \qquad U_2 (y) = 0$$

نوشت، که در آن Ly در (۳) تعریف شده است.

تذکر ۲-۴-۱

روشن است، که جواب بدیهی معادله دیفرانسیل داده شده در (۴) یعنی $y=0$ در شرایط مرزی داده شده در (۴) صدق می‌کند. اینک، این سؤال مطرح می‌شود که آیا مقادیری از λ وجود دارد که به ازای آنها معادلهٔ دیفرانسیل بالا دارای یک جواب غیربدیهی که در شرایط مرزی صدق می‌کند، باشد؟

تعریف ۲-۴-۲

مقداری از λ که به ازای آن مسأله (۴) دارای یک جواب غیربدیهی باشد، یک **مقدار ویژه** و جواب غیربدیهی متناظر با آن یک ***تابع ویژه*** نامیده می‌شود.

مثال ۲-۴-۳

مقادیر ویژه و توابع ویژه مسأله

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi$$
$$y(0) = 0 \qquad y'(\pi) = 0$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا بجاست که سه حالت $\lambda > 0$، $\lambda = 0$ و $\lambda < 0$ را به‌طور جداگانه بررسی کنیم، زیرا جوابهای معادله دیفرانسیل در این سه حالت صورتهای متفاوت دارند.

به ازای $\lambda > 0$ قرار می‌دهیم $\lambda = K^2$ که در آن $K > 0$. در این صورت معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y'' + K^2 y = 0$$

درمی‌آید. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$y(x) = C_1 \operatorname{Cos} Kx + C_2 \operatorname{Sin} Kx$$

در اینجا C_1 و C_2 ثابتهای دلخواه هستند. شرط $y(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. بنابراین اگر جواب غیربدیهی وجود داشته باشد، باید به صورت

$$y(x) = C_2 \operatorname{Sin} Kx$$

باشد. شرط $y'(\pi) = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$C_2 K \operatorname{Cos} K\pi = 0$$

اگر $C_2 = 0$ انتخاب شود، این شرط برقرار خواهد بود، ولی در این صورت تنها جواب بدیهی $y = 0$ به دست می‌آید، چون $K > 0$، باید داشته باشیم

$$\operatorname{Cos} K\pi = 0$$

بنابراین داریم:

$$K\pi = (۲n - ۱)\frac{\pi}{۲} \quad , \quad n = ۱,۲,...$$

یا

$$K_n = \frac{۲n-۱}{۲} \quad , \quad n = ۱,۲,...$$

در این حالت مقادیر متناظر λ عبارتند از:

$$\lambda_n = \left(\frac{۲n-۱}{۲}\right)^۲ \quad , \quad n = ۱,۲,...$$

این اعداد مقادیر ویژه مسأله هستند و توابع

$$y_n(x) = \sin K_n x = \sin \frac{۲n-۱}{۲} x \quad , \quad n = ۱,۲,... \qquad (۵)$$

توابع ویژه متناظر با این مقادیر می‌باشند. در اینجا ثابت دلخواه $C_۲$ را برابر با یک انتخاب کرده‌ایم. در واقع $C_۲$ می‌تواند برابر با هر مقدار غیرصفر باشد.

وقتی $\lambda = ۰$ معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y'' = ۰$$

درمی‌آید. در این حالت جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$y(x) = C_۱ + C_۲ x$$

شرط $y(۰) = ۰$ ایجاب می‌کند که $C_۱ = ۰$. بنابراین داریم:

$$y(x) = C_۲ x$$

شرط $y'(\pi) = ۰$ ایجاب می‌کند که $C_۲ = ۰$. بنابراین هنگامی که $\lambda = ۰$ تنها جواب معادله دیفرانسیل که در شرایط مرزی صدق می‌کند جواب بدیهی، یعنی $y = ۰$ است. از این رو $\lambda = ۰$ یک مقدار ویژهٔ مسأله نیست.

هنگامی که $\lambda < 0$ قرار می‌دهیم $\lambda = -K^2$ که در آن $K > 0$. در این صورت معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y'' - K^2 y = 0$$

درمی‌آید. جواب عمومی این معادله برابر است با

$$y(x) = C_1 \operatorname{Cos} h\, K x + C_2 \operatorname{Sin} h\, K x$$

و شرط $y(0) = 0$، ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. بنابراین داریم:

$$y(x) = C_2 \operatorname{Sin} h\, Kx$$

و شرط $y'(\pi) = 0$ ایجاب می‌کند که

$$C_2 K \operatorname{Cos} h\, K\pi = 0$$

چون $K > 0$، $\operatorname{Cos} h\, \pi \neq 0$ پس باید داشته باشیم $C_2 = 0$. از این رو تنها جوابی که در شرایط مرزی صدق می‌کند جواب بدیهی است و بنابراین مسأله دارای مقادیر ویژهٔ منفی نیست.

تذکر ۲-۴-۴

اگر جوابهای مختلط را بپذیریم، امکان ظاهر شدن مقادیر ویژه مختلط وجود دارد. با وجود این در بخشهای زیر نشان خواهیم داد که برای یک دستهٔ خاص از مسائل با مقادیر ویژه، که مثال ۲-۴-۳ حالت خاصی از آن است، مقادیر ویژهٔ مختلط وجود ندارد. از این‌رو، تنها مقادیر ویژهٔ مسأله مثال بالا توسط فرمول (۵) داده می‌شود. از هریک از مسائل که در زیر می‌آید مسأله مورد مطالعه، نیز مقادیر ویژهٔ مختلط نیست.

تمرین ۲-۴-۵

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 \le x \le a$$

$$y(0) = 0 \qquad y(a) = 0$$

را پیدا کنید.

مثال ۲-۴-۶

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0 \qquad y(1) + y'(1) = 0$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا نیز سه حالت $\lambda > 0$، $\lambda = 0$ و $\lambda < 0$ را به‌طور جداگانه در نظر می‌گیریم. برای $\lambda > 0$، قرار می‌دهیم $\lambda = K^2$ که در آن $K > 0$. در این صورت معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y'' + K^2 y = 0$$

درمی‌آید. جواب عمومی این معادله، عبارت است از

$$y(x) = C_1 \operatorname{Cos} Kx + C_2 \operatorname{Sin} Kx$$

شرط $y(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. بنابراین اگر یک جواب غیربدیهی وجود

داشته باشد باید به صورت

$$y(x) = C_۲ \operatorname{Sin} Kx$$

باشد. شرط $y(۱)+y'(۱)=۰$ به

$$C_۲ (\operatorname{Sin} K + K \operatorname{Cos} K) = ۰$$

منتهی می‌گردد. اگر $C_۲ = ۰$ انتخاب شود، این شرط برقرار خواهد بود، ولی در این صورت تنها جواب بدیهی، یعنی $y = ۰$ به دست می‌آید. بنابراین باید داشته باشیم

$$K = -\tan K \tag{۶}$$

گرچه نمی‌توان فرمول صریحی برای ریشه‌های مثبت این معادله ارائه داد، اما این واقعیت که معادلهٔ بالا دارای تعداد نامتناهی ریشه است را می‌توان از نمودار توابع K و $\tan K$ـ در شکل (۱) مشاهده کرد. اگر ریشهٔ مثبت n ام معادلهٔ (۶) را با K_n نشان دهیم، مقادیر ویژهٔ متناظر با این ریشه‌ها عبارتند از:

$$\lambda_n = K_n^۲ \qquad , \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

این اعداد مقادیر ویژهٔ مسأله هستند و توابع

$$y_n(x) = \operatorname{Sin} K_n x \qquad , \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

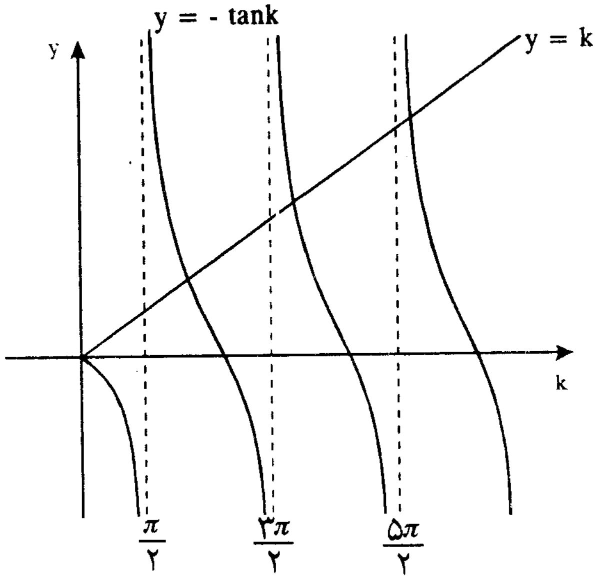
توابع ویژه متناظر با این مقادیر می‌باشند.

وقتی $\lambda = ۰$ معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y'' = ۰$$

درمی‌آید. در این حالت جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$y = C_۱ + C_۲ x$$



(شکل ۱)

شرط $y(\circ) = \circ$ ایجاب می‌کند که $C_۱ = \circ$ بنابراین داریم:

$$y = C_۲ X$$

شرط $y(۱) + y'(۱) = \circ$ ایجاب می‌کند که

$$C_۲ + C_۲ = \circ$$

یا

$$C_۲ = \circ$$

بنابراین هنگامی که $\lambda = \circ$ تنها جواب معادله دیفرانسیل که در شرایط مرزی صدق می‌کند جواب بدیهی یعنی $y = \circ$ است. از این رو $\lambda = \circ$ یک مقدار ویژه مسأله نیست.

هنگامی که $\lambda < \circ$ قرار می‌دهیم $\lambda = -K^۲$ که در آن $K > \circ$ در این صورت معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y'' - K^۲ y = \circ$$

درمی‌آید. جواب عمومی این معادله برابر است با

$$y(x) = C_1 \operatorname{Cos} h Kx + C_2 \operatorname{Sin} h Kx$$

شرط $y(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. بنابراین داریم

$$y(x) = C_2 \operatorname{Sin} h Kx$$

و شرط $y(1) + y'(1) = 0$، ایجاب می‌کند که

$$C_2 \operatorname{Sin} hK + C_2 K \operatorname{Cos} hx = 0$$

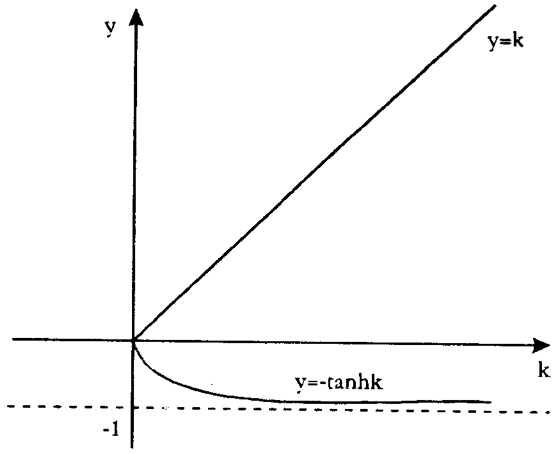
یا

$$C_2 (\operatorname{Sin} hK + K \operatorname{Cos} hK) = 0$$

یا به ازای $C_2 \neq 0$

$$K = -\tan hK \qquad (7)$$

حال برای حل این معادله نمودار توابع $u = K$ و $u = -\tan hK$ را رسم می‌کنیم نقاط تقاطع این دو منحنی جوابهای معادلهٔ (۷) می‌باشند. از شکل (۲) به آسانی مشاهده می‌کنیم که این دو منحنی به ازای $K > 0$ نقطهٔ نقاطی ندارند و در نتیجه این مسأله مقادیر ویژهٔ منفی ندارد.



(شکل ۲)

تمرین ۲-۴-۷

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$y^{(۴)} + \lambda y'' = ۰ \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$
$$y(۰) = y''(۰) = ۰ \qquad y(۱) = y'(۱) = ۰$$

را پیدا کنید.

تمرین ۲-۴-۸

مقادیر ویژه و توابع ویژه مسائل زیر را پیدا کنید.

الف)
$$y'' + \lambda y = ۰ \qquad ۰ \leq x \leq a$$
$$y'(۰) = y'(a) = ۰$$

ب)
$$y'' + \lambda y = ۰ \qquad -a \leq x \leq a$$
$$y(-a) = y(a) \qquad y'(-a) = y'(a)$$

پ)
$$\frac{d}{dx}(xy') + \frac{\lambda}{x} y = ۰ \qquad ۱ \leq x \leq ۲$$
$$y'(۱) = ۰ \qquad y(۲) = ۰$$

۲-۵ــ مسائل اشترم و لیوویل

در این بخش نظریهٔ کلی در مورد مسائل با مقادیر ویژه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

یادآوری ۲-۵-۱

در اینجا مسائلی به صورت

$$L y = -\lambda r(x) y \qquad (۱)$$
$$U_۱(y) = ۰ \quad , \quad U_۲(y) = ۰$$

را که در آن

$$Ly = \frac{d}{dx}\left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)\, y$$

و

$$U_1(y) = \alpha_{11}\, y(a) + \alpha_{12}\, y'(a) + \alpha_{13}\, y(b) + \alpha_{14}\, y'(b)$$

$$U_2(y) = \alpha_{21}\, y(a) + \alpha_{22}\, y'(a) + \alpha_{23}\, y(b) + \alpha_{24}\, y'(b)$$

در نظر می‌گیریم. (بخش ۲-۴ را ببینید.)

تعریف ۲-۵-۲

مسأله با مقدار اولیهٔ (۱) را بر بازهٔ [a,b] ***خودالحاق*** می‌گوییم، اگر و تنها اگر به ازای همهٔ توابع u و v متعلق به B (در اینجا B دسته توابعی را نشان می‌دهد که بر بازهٔ [a,b] دارای مشتق دوم پیوسته بوده و در شرایط مرزی داده شده در (۱) صدق می‌کنند.)

داشته باشیم:

$$\int_a^b (v\,L\,u - u\,L\,v)\, dx = 0 \qquad (۲)$$

تمرین ۲-۵-۳

اتحاد لاگرانژ. اگر $Ly = \frac{d}{dx}\left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)\, y$ بر بازهٔ [a,b] تعریف شده باشد و دو تابع u و v بر [a,b] دارای مشتق دوم پیوسته باشند، آنگاه

$$u\,L\,v - v\,L\,u = \frac{d}{dx}\left[P(x)\, W(x; u, v) \right]$$

یا (۳)

$$\int_a^b (u\,L\,v - v\,L\,u)\, dx = \Big[P(x)\, W(x; u, v) \Big]_a^b$$

که در آن $W(x; u, v) = u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)$ رونسکینی دو تابع u و v است.

قضیه ۲-۵-۴

فرض می‌کنیم λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه مسأله (۱) و دو تابع y_1 و y_2 توابع ویژه

متناظر با آنها باشند. اگر این مسأله خودالحاق باشد آنگاه نشان دهید که y_1 و y_2 نسبت به تابع وزن r بر بازهٔ [a,b] متعامد هستند.

اثبات

دو تابع ویژه y_1 و y_2 در روابط

$$L y_1 = -\lambda_1 r y_1$$
$$L y_2 = -\lambda_2 r y_2$$

صدق می‌کنند. از ضرب کردن معادله اول در y_2 و معادلهٔ دوم در y_1 و تفریق دو معادله حاصل، به دست می‌آوریم

$$y_2 L y_1 - y_1 L y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) r y_1 y_2$$

چون y_1 و y_2 توابع ویژه مسأله می‌باشند، پس در شرایط مرزی مسأله صدق می‌کنند و در نتیجه به دستهٔ B متعلق هستند. با انتگرالگیری از معادلهٔ اخیر در فاصلهٔ a تا b به دست می‌آوریم

$$\int_a^b (y_2 L y_1 - y_1 L y_2)\, dx = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b r y_1 y_2\, dx$$

چون مسأله خودالحاق است، پس شرط (۲) برقرار می‌باشد در نتیجه

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b r y_1 y_2\, dx = 0$$

چون $\lambda_1 \neq \lambda_2$، پس

$$\int_a^b r y_1 y_2\, dx = 0$$

و به این ترتیب مسأله ثابت شده است.

قضیه ۲-۵-۵

نشان دهید همهٔ مقادیر ویژهٔ یک مسأله خودالحاق حقیقی هستند.

اثبات

فرض می‌کنیم مسأله دارای مقدار ویژهٔ مختلط $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ با $\beta_0 \neq 0$ باشد و $y_0 = u_0 + iv_0$ تابع ویژه متناظر با این مقدار ویژه باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$L\, y_0 = -\lambda_0\, r\, y_0$$
$$(p\, y'_0)' + q\, y_0 = -\lambda_0\, r\, y_0$$

با مزدوج‌گیری و یادآوری این مطلب که p، q و r توابع حقیقی هستند، خواهیم داشت

$$(p\, \bar{y}'_0)' + q\, \bar{y}_0 = -\bar{\lambda}_0\, r\, \bar{y}_0$$

یا

$$L\, \bar{y}_0 = -\bar{\lambda}_0\, r\, \bar{y}_0$$

چون تابع y_0 یک تابع ویژه مسأله می‌باشد، پس در شرایط مرزی، یعنی

$$U_1(y_0) = 0 \quad , \quad U_2(y_0) = 0$$

صدق می‌کند. با مزدوج‌گیری و با توجه به اینکه عملگرهای مرزی U_1 و U_2 دارای ضرایب حقیقی می‌باشند، خواهیم داشت

$$\bar{u}_1(\bar{y}_0) = u_1(\bar{y}_0) = 0 \quad , \quad \bar{u}_2(\bar{y}_0) = u_2(\bar{y}_0) = 0$$

بنابراین تابع $\bar{Y}_0 = u_0 - iv_0$ نیز یک تابع ویژه مسأله متناظر با مقدار ویژه $\bar{\lambda}_0 = \alpha_0 - i\beta_0$ است. بنا بر قضیه ۲-۵-۴ خواهیم داشت

$$\int_a^b r\, y_0\, \bar{y}_0\, dx = \int_a^b r\, |y_0|^2\, dx = 0$$

ولی چون تابع زیر انتگرال مثبت است، این انتگرال نمی‌تواند صفر باشد و این مطلب به یک تناقض منتهی می‌گردد.

تذکر ۲-۵-۶

قضیه ۲-۵-۵ بیان می‌کند که اگر یک مسأله خودالحاق دارای مقادیر ویژه باشد، این مقادیر باید حقیقی باشند. این قضیه وجود مقادیر ویژه را تضمین نمی‌کند، با وجود این در کارهای پیشرفته‌تر معادلات دیفرانسیل می‌توان اثبات قضیهٔ زیر در مورد وجود بینهایت مقادیر ویژه را که با کوچکترین مقدار ویژه شروع می‌شود، را یافت.

قضیه ۲-۵-۷

مقادیر یک مسأله خودالحاق یک دنبالهٔ بینهایت مرتب که از لحاظ اندازه صعودی می‌باشند تشکیل می‌دهد، یعنی

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

که در آن $\lambda_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$

مثال ۲-۵-۸

نشان دهید مسأله

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 \le x \le a$$
$$y(0) = y(a) = 0$$

خودالحاق است. (این مسأله، همان مسأله تمرین ۲-۴-۵) می‌باشد.

حل

در اینجا

$$Ly = y'' = (y')'$$

بنا به تمرین ۲-۵-۳ و با توجه به اینکه $P(x) = 1$ کافیست نشان دهیم که

$$[\, W(x\,;u\,,v)\,]_0^b = 0$$

یا

$$[\, u v' - u' v]_0^b = 0$$

با توجه به اینکه u و v در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند، خواهیم داشت

$$u(0) = u(a) = v(0) = v(a) = 0$$

از این رو

$$[\, u v' - u' v]_0^a = u(a)\,v'(a) - u'(a)\,v(a) - u(0)\,v'(0) + u'(0)\,v(0) = 0$$

تذکر ۲-۵-۹

بنا به تمرین ۲-۵-۳ مقادیر و توابع ویژه مسأله خودالحاق مثال ۲-۵-۸ عبارتند از

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad , \quad y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1,2,\ldots$$

قضیه ۲-۵-۴ بیان می‌کند که اگر $m \neq n$، آنگاه

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = 0$$

زیرا به ازای هر x در $[0,a]$، $r(x) = 1$.

تمرین ۲-۵-۱۰

نشان دهید مسأله با مقدار ویژه

$$(e^{2x} y')' + e^{2x}(\lambda + 1)\,y = 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

خودالحاق است.

تمرین ۲-۵-۱۱

بدون اینکه مسأله زیر را حل کنید، مستقیماً نشان دهید که توابع ویژه مسأله متعامداند (شرایط تعامد را نیز بیان کنید.)

$$x y'' + y' + \lambda x y = 0$$

$$y'(0) = 0 \qquad y(1) = 0$$

حالت خاص ۲-۵-۱۲

اینک مسأله با مقدار ویژهٔ

$$Ly = (p y')' + q y = -\lambda r y \qquad a \le x \le b$$

$$U_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \quad , \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0) \tag{4}$$

$$U_2(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad , \quad (\gamma^2 + \beta^2 \neq 0)$$

را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که یک شرط مرزی تنها شامل مقادیر y و y' در نقطه انتهایی $x = a$ است، در حالی که شرط دیگر تنها شامل مقادیراین توابع در نقطه $x = b$ می‌باشد. به همین علت این مسأله را یک ***مسأله با شرایط جدا شده*** می‌نامیم.

تمرین ۲-۵-۱۳

نشان دهید مسأله (۴) یک مسأله خودالحاق است.

قضیه ۲-۵-۱۴

اگر شرایط زیر برای مسأله (۴) برقرار باشند، آنگاه این مسأله هیچ مقدار ویژه منفی ندارد.

$$\alpha\beta \le 0 \quad , \quad \gamma\delta \ge 0 \tag{5}$$

$q(x) \le 0$ به ازای هر x در $[a,b]$

اثبات

نخست فرض می‌کنیم که y در شرایط

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = \circ \qquad (۶)$$
$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = \circ$$

صدق کند. در اینجا بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم $\alpha \neq \circ$، $\gamma \neq \circ$ و $y'(a) \neq \circ$ و $y'(b) \neq \circ$. در این صورت معادلات داده شده در (۶) را می‌توان به صورت

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{y(a)}{y'(a)}$$
$$\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{y(b)}{y'(b)}$$

نوشت. بنابراین از شرایط $\alpha\beta \geq \circ$ و $\gamma\delta \geq \circ$ به ترتیب نتیجه می‌گیریم که $y(a)\,y'(a) \leq \circ$ و $y(b)\,y'(b) \geq \circ$. اینک فرض می‌کنیم $\lambda_\circ$ یک مقدار ویژهٔ مسألهٔ (۴) و $y_\circ$ یک تابع ویژهٔ وابسته به این مقدار ویژه باشد، در این صورت خواهیم داشت

$$L y_\circ = -\lambda_\circ r y_\circ$$
$$(p y'_\circ)' + q y_\circ = -\lambda_\circ r y_\circ$$

اینک دو طرف معادلهٔ اخیر را در $y_\circ$ ضرب کرده و سپس از دو طرف معادله از a تا b نسبت به x انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\int_a^b y_\circ (p y'_\circ)' \, dx + \int_a^b q y_\circ^۲ \, dx = -\lambda_\circ \int_a^b r y_\circ^۲ \, dx$$

با به‌کار بردن انتگرالگیری جزء به جزء در مورد انتگرال اول در سمت راست این معادله، به دست می‌آوریم

$$y_\circ (p y'_\circ) \Big|_a^b - \int_a^b p (y'_\circ)^۲ \, dx + \int_a^b q y_\circ^۲ \, dx = -\lambda_\circ \int_a^b r y_\circ^۲ \, dx$$

یا

$$p(b)\, y_\circ(b)\, y'_\circ(b) - p(a)\, y_\circ(a)\, y'_\circ(b) - \int_a^b p(y'_\circ)^2\, dx \qquad (۷)$$

$$+ \int_a^b q\, y_\circ^2\, dx = -\lambda_\circ \int_a^b r\, y_\circ^2\, dx$$

بنابراین با توجه به اینکه $q(x) \leq \circ$ ، $p(x) > \circ$ و $r(x) > \circ$ بر بازهٔ $[a,b]$ و $y(a)\, y'(a) \geq \circ$ و $y(b)\, y'(b) \leq \circ$، نتیجه می‌گیریم که همهٔ جمله‌ها در طرف راست معادلهٔ (۷) با در نظر گرفتن علامت جمله‌ها، منفی و انتگرال در طرف راست این معادله مثبت است. در نتیجه $\lambda_\circ$ نمی‌تواند یک عدد منفی باشد.

قضیه ۲-۵-۱۵

یک تابع ویژهٔ مسألهٔ (۴) بدون در نظر گرفتن عامل ثابت، یکتا است.

اثبات

فرض می‌کنیم u و v توابع ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda_\circ$ باشند، کافیست نشان دهیم که u و v وابسته خطی می‌باشند و بنابراین v مضرب ثابتی از u است. چون u و v هر دو در شرط مرزی در $x = a$ صدق می‌کنند، خواهیم داشت

$$\alpha\, u(a) + \beta\, u'(a) = \circ$$

$$\alpha\, v(a) + \beta\, v'(a) = \circ$$

از طرف دیگر، چون α و β هر دو صفر نیستند، خواهیم داشت

$$W(a\,;u\,,v) = \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = \circ$$

بنابراین رونسکینی دو جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (یعنی u و v) در $x=a$ صفر است، پس u و v وابسته خطی می‌باشند. (در غیر این صورت رونسکینی u و v در هیچ نقطه‌ای از $[a,b]$ صفر نمی‌شود.)

حالت خاص ۲-۵-۱۶

دومین دسته از مسائل خاصی راکه بررسی می‌کنیم مسائلی به صورت

$$\begin{aligned} Ly = (p\,y')' + q\,y &= -\lambda\, r\, y \\ y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned} \qquad (۸)$$

هستند که در آنها

$$P(a) = P(b) \qquad (۹)$$

در اینجا مجدداً فرض می‌کنیم که به ازای $a \leq x \leq b$، $P(x) > 0$ و $r(x) > 0$. در این حالت می‌گوییم که مسأله دارای ***شرایط مرزی متناوب*** است.

تمرین ۲-۵-۱۷

نشان دهید که مسأله داده شده در ۲-۵-۱۶ خودالحاق است.

مثال ۲-۵-۱۸

مسأله با مقدار ویژهٔ

$$\begin{aligned} y'' + \lambda\, y &= 0 \\ y(-a) &= y(a) \\ y'(-a) &= y'(a) \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم. مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ این مسأله را پیدا کنید.

حل

به ازای $\lambda = 0$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y(x) = C_1 + C_2\, x$$

شرایط مرزی ایجاب می‌کنند که

$$C_1 - C_2 a = C_1 + C_2 a \qquad \text{و} \qquad 2CC_2 = 0$$

بنابراین $C_2 = 0$ و C_1 دلخواه است. در نتیجه $\lambda_0 = 0$ یک مقدار ویژهٔ مسأله با تابع ویژهٔ مستقل $y_0(x) = 1$ است. به ازای $\lambda = K^2$، $K > 0$ جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = C_1 \cos Kx + C_2 \sin Kx$$

شرایط مرزی ایجاب می‌کنند که

$$C_1 \cos Ka - C_2 \sin Ka = C_1 \cos Ka + C_2 \sin Ka$$

و

$$C_1 \sin Ka + C_2 \cos Ka = - C_1 \sin Ka + C_2 \cos Ka$$

یا

$$C_1 \sin Ka = 0 \qquad\qquad C_2 \sin Ka = 0$$

برای به‌دست آوردن یک جواب غیربدیهی، K باید مساوی یکی از مقادیر

$$K_n = \frac{n\pi}{a} \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

باشد. ولی به ازای چنین مقداری از K مقادیر C_1 و C_2 دلخواه هستند. بنابراین به ازای هر مقدار ویژهٔ

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

توابع ویژهٔ وابسته عبارتند از:

$$y_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{a} + B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

در اینجا A_n و B_n اعداد دلخواه هستند و هر دو همزمان صفر نیستند. به آسانی می‌توان نشان داد که مسأله مقادیر ویژهٔ منفی ندارد.

تذکر ۲-۵-۱۹

اگر u و v دو تابع دلخواه مستقل بر بازهٔ [a,b] باشند، همواره می‌توان ترکیبی از u و v که بر بازهٔ (a,b) متعامد هستند، انتخاب کرد. همچنین اگر u و v دو تابع ویژهٔ مستقل وابسته به یک مقدار ویژه باشند، می‌توان دو تابع ویژهٔ مستقل متعامد پیدا کرد. به قسمی که هر تابع ویژهٔ وابسته به این مقدار ویژه، یک ترکیب خطی از این دو تابع متعامد باشد.

تذکر ۲-۵-۲۰

در مثال ۲-۵-۸ چون به ازای هر x متعلق به [a,a-]، $p(x) = ۱$ پس شرط (۹) برقرار است و از طرفی چون این مسأله با شرایط متناوب است، بنابراین این مسأله خودالحاق می‌باشد. در نتیجه توابع $\mathrm{Cos}\,\frac{n\pi x}{a}$ و $\mathrm{Sin}\,\frac{n\pi x}{a}$ که هر دو وابسته به مقدار ویژهٔ λ_n هستند بر بازهٔ (a,a-) نسبت به تابع وزن $r(x) = ۱$ متعامداند.

تمرین ۲-۵-۲۱

به چه دلیل مسألهٔ (۸) نمی‌تواند بیش از دو تابع ویژهٔ مستقل وابسته به یک مقدار ویژهٔ خاصی باشد.

تمرین ۲-۵-۲۲

نشان دهید که مسألهٔ

$$y'' + (\lambda r + q)\,y = ۰$$

$$y(۰) - y'(۱) = ۰ \quad , \quad y'(۰) + y(۱) = ۰$$

خودالحاق است. توجه کنید که شرایط مرزی نه جداشدنی و نه متناوب هستند.

تمرین ۲-۵-۲۳

نشان دهید که مسأله با مقدار اولیهٔ

$$Ly = (p\,y')' + (\lambda\, r + q)\, y = 0$$

$$U_1(y) = \alpha_{11}\, y(a) + \alpha_{12}\, y'(a) + \alpha_{13}\, y(b) + \alpha_{14}\, y'(b) = 0$$

$$U_2(y) = \alpha_{21}\, y(a) + \alpha_{22}\, y'(a) + \alpha_{23}\, y(b) + \alpha_{24}\, y'(b) = 0$$

خودالحاق است اگر و تنها اگر شرط

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{p(a)} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{vmatrix}}{p(b)} \qquad (10)$$

برقرار باشد.

تمرین ۲-۵-۲۴

با استفاده از تمرین ۲-۵-۲۳ نشان دهید که

الف) مسائل (۴) و (۸) خودالحاق می‌باشند.

ب) مسألهٔ تمرین ۲-۵-۲۲ خودالحاق است.

تمرین ۲-۵-۲۵

نشان دهید که

$$y'' + \lambda\, y = 0$$

$$y(0) - y(1) = 0 \qquad\qquad y'(0) + y'(1) = 0$$

خودالحاق نیست.

تمرین ۲-۵-۲۶

فرض می‌کنیم $\phi_n(x)$ و $\psi_n(x)$ توابع ویژهٔ مستقل خطی بر بازهٔ $a < x < b$ متناظر با مقدار ویژهٔ یکسان λ_n مسألهٔ

$$(p\,y')' + qy = r\lambda\, y$$
$$U_1(y) = 0 \qquad U_2(y) = 0$$

باشند. ترکیبهای خطی

$$f_n(x) = \phi_n(x) \qquad , \qquad g_n(x) = \psi_n(x) - \alpha\,\phi_n(x)$$

داده شده است، مقدار α را به قسمی تعیین کنید که

$$\int_a^b r(x)\, f_n(x)\, g_n(x)\, dx = 0$$

مسائل منفرد ۲-۵-۲۷

مسألهٔ

$$Ly = (p\,y')' + qy = \lambda\, r(x)\, y$$
$$U_1(y) = 0 \qquad , \qquad U_2(y) = 0$$

را **منفرد** می‌گوییم. اگر یکی یا بیش از یکی از پدیده‌های زیر رخ دهد

الف) $p(a) = 0$ یا $p(b) = 0$ (یا هردو)

ب) $p(x)$، $q(x)$ یا $r(x)$ در $x = a$ یا $x = b$ (یا هر دو) بینهایت شود.

پ) a یا b (یا هر دو) بینهایت باشند.

مثال ۲-۵-۲۸

نشان دهید هر مسأله با یکی از معادلات دیفرانسیل زیر منفرد است.

الف) (معادلهٔ لژاندر) $\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] + \lambda y = 0 \quad , \quad -1 < x < 1$

ب) (معادله بسل) $\frac{d}{dx}(xy') - \frac{v^2}{x}y + \lambda x y = 0 \qquad 0 < x < b$

پ) (معادلهٔ لاگر) $\frac{d}{dx}(xe^{-x}y') + \lambda e^{-x} y = 0 \qquad 0 < x < \infty$

ت) (معادلهٔ هرمیت) $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y') + \lambda e^{-x^2} y = 0 \qquad -\infty < x < \infty$

حل

معادلهٔ لژاندر منفرد است، چون $p(x) = 1-x^2$ در هر دو نقطهٔ انتهایی $x = \pm 1$ صفر است. برای معادله دیفرانسیل بسل، مشاهده می‌کنیم که $p(x) = x$ در $x = 0$ صفر است و به ازای $v \neq 0$، تابع $q(x) = -\frac{v^2}{x}$ در $x = 0$ بینهایت می‌شود. معادلهٔ دیفرانسیل لاگر در $x = 0$ منفرد است زیرا $p(x) = x e^{-x}$ صفر است و همچنین نقطهٔ انتهایی بازه بینهایت می‌باشد. در حالت معادلهٔ هرمیت، منفرد بودن از بینهایت بودن نقاط انتهایی بازه ناشی می‌شود، توجه می‌کنیم که $e^{-x^2} \to 0$ وقتی $x \to \pm\infty$.

خودالحاقی مسائل منفرد ۲-۵-۲۹

شرط خودالحاق بودن برای مسائل غیرمنفرد عبارت است از

$$\int_a^b [\, uLv - vLu \,]\, dx = p(x)\, W(x\,;u\,,v)\,\Big|_a^b = 0$$

که در آن u و v دارای مشتق دوم پیوسته می‌باشند و در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کنند. می‌دانیم که این ویژگی تعامد توابع ویژهٔ این مسأله را تضمین می‌کند.

در حالتی که منفرد بودن مسأله در $x = a$ رخ دهد، شرایط مرزی را به قسمی وضع می‌کنیم که

$$\lim_{x \to a^+} P(x)\ W(x\,;\,u\,,\,v) = 0 \qquad (۱۱)$$

$$P(b)\ W(b\,;\,u\,,\,v) = 0$$

برای مثال وقتی منفرد بودن از $P(a) = 0$ ناشی شود، در این صورت اگر، y و y' متناهی باشند وقتی $x \to a^+$، آنگاه شرط (۱۱) برقرار است، در صورتی که منفرد بودن مسأله در $x = b$ رخ دهد، در این حالت شرایط مرزی را به قسمی وضع می‌کنیم که

$$P(a)\ W(a\,;\,u\,,\,v) = 0$$

$$(۱۲)$$

$$\lim_{x \to b^-} P(x)\ W(x\,;\,u\,,\,v) = 0$$

برای مثال، اگر $P(b)$ صفر باشد، آنگاه متناهی بودن y و y' وقتی $x \to \bar{b}$ برقرار است شرط (۱۲) را تضمین می‌کند. بالاخره اگر $p(a) = p(b) = 0$ آنگاه متناهی بودن y و y' وقتی $x \to a^+$ و $x \to b^-$، خودالحاق بودن مسأله را تضمین می‌کند.

مثال ۲-۵-۳۰

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسأله

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 < x < \infty$$

$$y(0) = 0$$

y و y' متناهی‌اند وقتی $x \to \infty$.

را پیدا کنید.

حل

برای $\lambda = K^{2}$و $K > 0$، جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y = C_{1}\ \mathrm{Cos}\ Kx + C_{2}\ \mathrm{Sin}\ Kx$$

از شرط $y(0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $C_{1} = 0$ و بنابراین

$$y = C_{2}\ \mathrm{Sin}\ Kx$$

از طرفی $y = C_{2}\ \mathrm{Sin}\ Kx$ و $y' = C_{2}\ K\ \mathrm{Cos}\ Kx$ متناهی‌اند وقتی $x \to \infty$.
بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\lambda = K^{2}$، به ازای هر عدد حقیقی (مثبت) K، یک مقدار ویژهٔ است و تابع ویژه متناظر با آن عبارت است از

$$y = \mathrm{Sin}\ Kx$$

در حالت $\lambda = 0$، جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y = C_{1}\ x + C_{2}$$

از شرط $y(0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $C_{2} = 0$ بنابراین

$$y = C_{1}x$$

از طرف دیگر، وقتی $x \to \infty$. این جوابها وقتی و تنها وقتی متناهی‌اند که

$$C_{1} = 0$$

از این رو $\lambda = 0$ یک مقدار ویژهٔ مسأله نیست.

وقتی $\lambda = -K^{2}$ ($K > 0$) جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y = C_{1}\ \mathrm{Cos}\ hx + C_{2}\ \mathrm{Sin}\ hx$$

از شرط $y(0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که $C_1 = 0$، بنابراین

$$y = C_2 \operatorname{Sin} hx$$

از طرف دیگر، وقتی $x \to \infty$، این جوابها وقتی و تنها وقتی متناهی‌اند که

$$C_2 = 0$$

از این رو مسأله دارای مقدار ویژهٔ منفی نیست.

تمرین ۲-۵-۳۱

مسأله با مقدار مرزی

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \quad , \quad -1 < x < 1$$

y، y' متناهی‌اند وقتی $x \to -1^+$

y، y' متناهی‌اند وقتی $x \to 1^-$

را در نظر می‌گیریم. مقادیر ویژه و توابع ویژه این مسأله را پیدا کنید.

تمرین ۲-۵-۳۲

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسأله منفرد

$$x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0$$

$$y(1) = 0$$

y، y' متناهی‌اند وقتی $x \to 0^+$

را پیدا کرده و در مورد تعامد توابع ویژه بحث نمایید.

تمرین ۲-۵-۳۳

مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ مسأله منفرد

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y'(0) = 0$$

y، y' متناهی‌اند وقتی $x \to \infty$

فصل ۳: سری فوریه و انتگرال فوریه

در این فصل بسط سری مربوط به توابع نسبت به یک مجموعه توابع متعامد (به ویژه نسبت به توابع مثلثاتی متعامد) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این نمایش در کاربردها از اهمیت خاصی برخوردار است. برخی از این کاربردها را در فصل آخر این کتاب خواهیم دید.

۳-۱ ــ سری فوریه

۳-۱-۱

از فصل ۱ تعریف ضرب داخلی توابع f و g و نرم تابع f را به صورت زیر یادآوری می‌کنیم.

$$(f, g) = \int_a^b w(x)\ f(x)\ g(x)\ dx$$

$$\|f\| = (f , f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b w(x)\ [\ f(x)]^2\ dx\ \right)^{\frac{1}{2}}$$

دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ را یک مجموعهٔ متعامد می‌نامیم، اگر به ازای $m \neq n$ $(\phi_n , \phi_m) = 0$. در فصلهای گذشته مثالهای متعددی از مجموعه‌های توابع متعامد را بررسی کرده‌ایم. مجموعه‌های چندجمله‌ایهای متعامد (فصل ۱) از جمله مجموعه‌های متعامد هستند. مسائل با مقدار ویژهٔ خودالحاق (فصل ۲) به مجموعه‌های متعامد از توابع ویژه منجر می‌شوند.

تعریف ۳-۱-۲

دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعهٔ **متعامد یکه** نامیده می‌شود، اگر یک مجموعه متعامد باشد و به ازای هر n، $\|\phi_n\| = 1$. اگر $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ،که در آن

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

متعامد یکه است. برای اثبات این مطلب ($\|\psi_n\| \neq 0$ به ازای هر n) مشاهده می‌کنیم که

$$(\phi_m , \phi_n) = \frac{1}{\|\psi_m\| \, \|\psi_n\|} \int_a^b w(x)\, \psi_m(x)\, \psi_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \; m \neq n \\ 1 & , \; m = n \end{cases}$$

مثال ۳-۱-۳

دنباله توابع متعامد زیر را به یک دنباله توابع متعامد یکه تبدیل نمایید.

الف) $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty}, \; w(x) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq a$

ب) $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=0}^{\infty}, \; w(x) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq a$

پ) $\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{a}, \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty}, \; w(x) = 1 \quad ; \quad -a \leq x \leq a$

حل

(الف) تعامد دنباله توابع $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty}$ از خودالحاق بودن مسألهٔ داده شده در تمرین ۲-۴-۵ نتیجه می‌شود. از طرفی بنا به تعریف نرم، خواهیم داشت:

$$\| \text{Sin}\,\frac{n\pi x}{a} \|^{۲} = \int_{۰}^{a}\left[\text{Sin}\,\frac{n\pi x}{a} \right]^{۲} dx = \frac{a}{۲}$$

از این رو، بنا به (۱) دنباله توابع

$$\frac{\text{Sin}\,\frac{n\pi x}{a}}{\| \text{Sin}\,\frac{n\pi x}{a} \|}\sqrt{\frac{۲}{a}}\,\text{Sin}\,\frac{n\pi x}{a} \qquad (۲)$$

یک دنباله توابع متعادمد یکه است.

(ب) تعامد دنباله توابع $\{ ۱, \text{Cos}\,\frac{n\pi x}{a} \}_{n=۱}^{\infty}$ از خودالحاق بودن مسألهٔ تمرین ۲-۴-۸ قسمت (الف) نتیجه می‌شود. از طرفی بنا به تعریف نرم، خواهیم داشت

$$\| ۱ \|^{۲} = \int_{۰}^{a} (۱)^{۲}\, dx = a$$

$$\| \text{Cos}\,\frac{n\pi x}{a} \|^{۲} = \int_{۰}^{a}\left[\text{Cos}\,\frac{n\pi x}{a} \right]^{۲} dx = \frac{a}{۲}$$

از این رو، بنا به (۱) دنباله توابع

$$\left\{ \frac{۱}{\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{۲}{a}}\,\text{Cos}\,\frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=۱}^{\infty} \qquad (۳)$$

یک دنباله توابع متعامد یکه است.

(پ) تعامد دنباله توابع $\{ ۱, \text{Cos}\,\frac{n\pi x}{a}, \text{Sin}\,\frac{n\pi x}{a} \}_{n=۱}^{\infty}$ از خودالحاق بودن مسألهٔ داده شده در مثال ۲-۵-۱۸ نتیجه می‌شود. از طرفی بنا به تعریف نرم، خواهیم داشت

$$\| ۱ \|^{۲} = \int_{-a}^{a} dx = ۲a$$

$$\| \cos \frac{n\pi x}{a} \|^{۲} = \int_{-a}^{a} [\cos \frac{n\pi x}{a}]^{۲} dx = a$$

$$\| \sin \frac{n\pi x}{a} \|^{۲} = \int_{-a}^{a} [\sin \frac{n\pi x}{a}]^{۲} dx = a$$

از این رو، بنا به (۱) دنباله توابع

$$\left\{ \frac{۱}{\sqrt{۲a}} , \frac{۱}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} , \frac{۱}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=۱}^{\infty}$$

یک دنباله توابع متعامد یکه است.

تمرین ۳-۱-۴

می‌دانیم که چندجمله‌ایهای لژاندر $\{P_n\}_{n=۰}^{\infty}$ بر بازهٔ [۱,۱-] متعامد ساده‌اند. این مجموعه را به یک مجموعهٔ متعامد یکه تبدیل کنید.

تعریف ۳-۱-۵

فرض می‌کنیم f تابع دلخواهی باشد که بر بازهٔ [a,b] تعریف شده است و $\{\phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعهٔ متعامد از توابع بر بازهٔ (a,b) با تابع وزن w باشد. فرض می‌کنیم که f(x) را به ازای هر x متعلق به بازهٔ (a,b) بتوان به وسیلهٔ یک سری نامتناهی به صورت

$$f(x) = \sum_{K=۱}^{\infty} C_K \phi_K(x) \tag{۲}$$

نمایش داد. با ضرب کردن دو طرف این معادله در $w(x)\phi_n(x)$ (که در آن n یک عدد صحیح مثبت است) و با انتگرالگیری از a تا b (با این فرض که انتگرالگیری جمله به جمله از سری معتبر است) خواهیم داشت

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_n(x) dx = \sum_{K=۰}^{\infty} C_K \int_a^b w(x) \phi_K(x) \phi_n(x) dx$$

به دلیل متعامد بودن توابع ϕ_K ، همه جمله‌های سری دو طرف راست به جزء جمله‌ای که در آن $K = n$ ، صفر هستند. بنابراین

$$(f , \phi_n) = C_n (\phi_n , \phi_n)$$

و

$$C_n = \frac{(f , \phi_n)}{\| \phi_n \|^{2}} \qquad (۳)$$

ضرایب (۳) . ضرایب **فوریهٔ** تابع f نسبت به مجموعهٔ متعامد $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود و سری (۲) با ضرایب (۳) **سری فوریهٔ** تابع f نامیده می‌شود.

تذکر

جهت به‌دست آوردن فرمول (۳) از سری (۲) دو فرض اساسی را پذیرفتیم. فرض کردیم که تابع f(x) را بتوان با یک سری نامتناهی نمایش داد و همچنین فرض کردیم که انتگرالگیری جمله به جمله از جمله‌های یک سری نامتناهی مجاز باشد. در واقع برای یک تابع دلخواه مانند f هیچ تضمینی حتی برای همگرایی سری (۲) با ضرایب (۳) وجود ندارد چه رسد به اینکه این سری به f(x) همگرا باشد.

مثال ۳-۱-۶

تابع

$$f(x) = |x| \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$$

را در نظر می‌گیریم. سری فوریهٔ این تابع را بر حسب مجموعهٔ توابع متعامد $\{ 1, \cos nx , \sin nx \}_{n=1}^{\infty}$ پیدا کنید. (قسمت (پ) مثال ۳-۱-۳ را ببینید.)

حل

در این حالت بنا به فرمولهای (۲) و (۳) سری فوریهٔ تابع f عبارت می‌شود از

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

که در آن،

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad ; \quad n = 0,1,2, \ldots$$

و

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx \qquad , \qquad n = ۱,۲, ...$$

با جایگزاری $f(x) = |x|$ در انتگرالهای بالا، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx \qquad\qquad n = ۰,۱,۲, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx \qquad\qquad n = ۱,۲, ...$$

به ازای $n = ۰$، $a_۰$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$a_۰ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{۰} x\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\ dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{-\pi}^{۰} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{۰}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi^۲}{۲}\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^۲}{۲}\right]$$

$$= \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = \pi$$

و به ازای $n = ۱,۲,۳, ...$، خواهیم داشت

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{۰} x\ \mathrm{Cos}\ nx + \frac{1}{\pi}\int_{۰}^{\pi} x\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx$$

با به کار بردن انتگرالگیری به روش جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$a_n = \frac{۲}{\pi n^۲}\left[\ \mathrm{Cos}\ n\pi - ۱\ \right] \qquad\qquad n = ۱,۲, ...$$

و به ازای ... ,$n = ۱,۲,۳$ ، b_n به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\ \text{Sin}\ nx\ dx = -\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\circ} x\ \text{Sin}\ nx\ dx + \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} x\ \text{Sin}\ nx\ dx$$

مجدداً با به‌کار بردن انتگرالگیری روش جزء به جزء، به‌دست می‌آوریم

$$b_n = \circ \qquad\qquad n = ۱,۲,۳, ...$$

اینک چون ... ,$n = ۱,۲,۳$ و $\text{Cos}\ n\pi = (-۱)^n$ ، پس a_nها به صورت زیر درمی‌آیند.

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{۴}{\pi n^۲} & , \quad n = ۱,۳,۵, ... \\ \circ & , \quad n = ۲,۴,۶, ... \end{cases}$$

یا

$$a_{۲n-۱} = -\frac{۴}{\pi (۲n-۱)^۲} \qquad , \qquad n = ۱,۲,۳, ...$$

بنابراین سری فوریهٔ (۲) از این حالت به صورت زیر درمی‌آید:

$$|x| \sim \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\text{Cos}\ (۲n-۱)\ x}{(۲n-۱)^۲} \qquad (۴)$$

تذکر ۳-۱-۷

دقت می‌کنیم که همگرایی سری (۴) به $f(x)$ را به ازای هر x در $[-\pi,\pi]$ ثابت نکرده‌ایم، همگرایی سری فوریه را در حالت کلی در بخشهای آتی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تذکر ۳-۱-۸

اگر همگرایی سری (۴) را به $f(x) = |x|$ قبول کنیم، در این صورت با قرار

دادن $x = ۰$ در (۴) نتیجهٔ جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$۰ = \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$$

یا

$$\frac{\pi^۲}{۸} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$$

تمرین ۳-۱-۹

تابع $f(x) = x \quad , \quad ۰ \leq x \leq \pi$

را در نظر می‌گیریم. سری فوریهٔ این تابع را بر حسب مجموعه توابع متعامد $\{\text{Cos}\, nx\}_{n=۰}^{\infty}$ پیدا کنید. (قسمت (ب) مثال ۳-۱-۳ را ببینید.)

مثالهایی از سری فوریه ۳-۱-۱۰

در اینجا فرمولهای مربوط به ضرایب فوریهٔ تابع دلخواه f را نسبت به مجموعه‌های معینی از توابع متعامد، بیان می‌کنیم.

الف) سری چندجمله‌ایهای لژاندر

چندجمله‌ایهای لژاندر یعنی $\{P_n\}_{n=۰}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x) = ۱$ بر بازهٔ $[-۱,۱]$ متعامداند و

$$\| P_n \|^۲ = \int_{-۱}^{۱} [P_n(x)]^۲ \, dx = \frac{۲}{۲n+۱} \quad , \quad n \geq ۰$$

در نتیجه بنا بر فرمولهای (۲) و (۳) سری فوریهٔ ـ لژاندر و ضرایب فوریهٔ برای تابع دلخواه f عبارتند از:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} C_n P_n(x)$$

و

$$C_n = \frac{۲n+۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} f(x) P_n(x) \, dx \quad , \quad n \geq ۰$$

ب) سری چندجمله‌ایهای چبیشف نوع اول

چندجمله‌ایهای چبیشف نوع اول، یعنی $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ بر بازهٔ $[-1,1]$ متعامداند و

$$\|T_n\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & , \quad n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

سری فوریهٔ ـ چبیشف نوع اول برای تابع f را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{2} C_0 T_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(x)$$

که در آن

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad , \quad n \geq 0$$

نوشت.

پ) سری فوریهٔ ـ چندجمله‌ایهای لاگر

چندجمله‌ایهای لاگر، یعنی $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x) = e^{-x}$ بر بازهٔ $(0,\infty)$ متعامداند و

$$\|L_n\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2\, dx = 1 \quad , \quad n \geq 0$$

سری فوریهٔ ـ چندجمله‌ایهای لاگر برای تابع f را می‌توان به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(x)$$

که در آن

$$C_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, L_n(x)\, dx \quad , \quad n \geq 0$$

نوشت.

ت) سری فوریهٔ ـ چندجمله‌ایهای هرمیت

چندجمله‌ایهای هرمیت، $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x) = e^{(-x^2)}$ بر بازهٔ $(-\infty,\infty)$ متعامداند و

$$\| H_n \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[H_n (x) \right]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad , \quad n \geq 0$$

سری فوریهٔ ـ چندجمله‌ایهای هرمیت و ضرایب فوریه برای تابع دلخواه f عبارتند از:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n (x)$$

و

$$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx \quad , \quad n \geq 0$$

ث) سری سینوسی فوریه

دنبالهٔ توابع $\{ \operatorname{Sin} \frac{n \pi x}{a} \}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ $(0,a)$ به‌طور ساده متعامداند و

$$\| \operatorname{Sin} \frac{n \pi x}{a} \|^2 = \int_0^a \operatorname{Sin}^2 \frac{n \pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \quad , \quad n \geq 1$$

سری سینوسی فوریه و ضرایب فوریه برای تابع دلخواه f عبارتند از

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{Sin} \frac{n \pi x}{a}$$

و

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{Sin} \frac{n \pi x}{a} dx \quad , \quad n \geq 1$$

ج) سری کسینوسی فوریه

دنباله توابع $\left\{ \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=0}^{\infty}$ بر بازهٔ $(0,a)$ به‌طور ساده متعامداند و

$$\left\| \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a} \right\|^2 = \int_0^a \left[\operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a} \right]^2 dx = \begin{cases} a & , \ n = 0 \\ \frac{a}{2} & , \ n \geq 1 \end{cases}$$

سری کسینوسی فوریه برای $f(x)$ را می‌توان به صورت

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a}$$

نوشت، که در آن

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a} dx \quad , \quad n \geq 0$$

چ) سری مثلثاتی کلی فوریه

دنباله توابع $\left\{ 1, \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a}, \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} \right\}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ $(-a,a)$ به‌طور ساده متعامداند و

$$\left\| \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a} \right\|^2 = \int_{-a}^{a} \operatorname{Cos}^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 2a & , \ n = 0 \\ a & , \ n \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\| \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} \right\|^2 = \int_{-a}^{a} \operatorname{Sin}^2 \frac{n\pi x}{a} dx = a \quad , \quad n \geq 1$$

سری مثلثاتی کلی فوریه برای تابع $f(x)$ با سری

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{a} + b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} \right)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \qquad , \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \qquad , \qquad n \geq 1$$

تعریف می‌شود. در بعضی کتب "سری فوریه" تنها به این نوع سریها اطلاق می‌شود.

تمرین ۳-۱-۱۱

(الف) سری مثلثاتی کلی فوریهٔ تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

را پیدا کنید.

(ب) با قرار دادن $x = \frac{\pi}{2}$ در بسط سری فوریهٔ تابع f در قسمت (الف) و با فرض اینکه سری فوریه به مقدار تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$ همگرا باشد، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

۳-۲ ــ همگرایی سری فوریه

در این بخش دو نوع همگرایی، یعنی همگرایی در میانگین و همگرایی نقطه‌ای، سری فوریه را مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۳-۲-۱

تابع f بر بازهٔ [a,b] ***قطعه‌ای پیوسته*** گفته می‌شود، مشروط بر اینکه

الف) f بجز در تعداد متناهی نقطه، مانند $a = x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ از $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) در هر نقطهٔ ناپیوستگی، حدود چپ و راست f موجود باشد (در $x_1=a$، حد راست و در $x=b$ حد چپ تابع f وجود داشته باشد.)

تذکر ۳-۲-۲

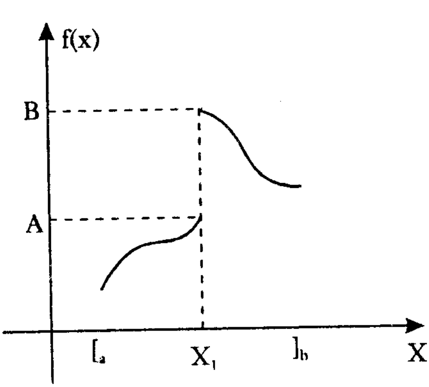
از نمادهای $f(x_i^+)$ و $f(x_i^-)$ به ترتیب جهت نمایش حدود چپ و راست f در x_i استفاده می‌کنیم شکل ۱ تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته است. این تابع تنها یک نقطهٔ ناپیوستگی در $x=x_1$ دارد و

$$f(x_i^-) = A \qquad\qquad f(x_i^+) = B$$

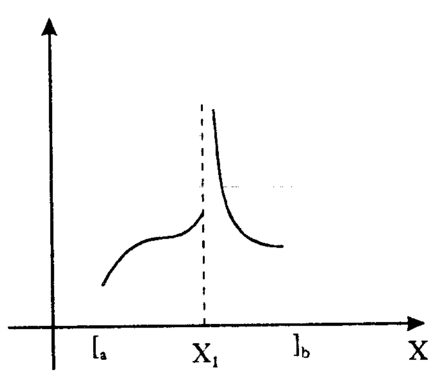
ولی تابع g در شکل ۲، بر بازهٔ $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته نیست. با اینکه این تابع تنها یک نقطهٔ ناپیوستگی در $x=x_1$ دارد، ولی حد راست g در x_1 موجود نیست.

تذکر ۳-۲-۳

دسته یا فضای توابعی را که بر بازهٔ $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته می‌باشند با $C_p[a,b]$ نمایش می‌دهیم. اگر بازهٔ تحت بررسی معلوم باشد، از نماد ساده‌تر C_p برای نمایش



شکل ۱



شکل ۲

دسته توابع قطعه‌ای پیوسته بر $[a,b]$ استفاده می‌کنیم. اگر توابع f و g هر دو به C_p متعلق باشند، آنگاه

$$\alpha f + \beta g$$

که در آن α و β ثابتهای دلخواه می‌باشند و

$$fg$$

نیز متعلق به C_p می‌باشند.

مطالب زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

یادآوری ۳-۲-۴

فرض می‌کنیم تابع w بر (a,b) پیوسته و مثبت باشد، به قسمی که

$$\int_a^b w(x)\, dx$$

موجود است. توجه می‌کنیم که انتگرال بالا ممکن است نـاسره بـاشد. اگـر F بـه $C_p[a,b]$ متعلق باشد آنگاه انتگرال

$$\int_a^b w(x)\, F(x)\, dx$$

نیز موجود است. بنابراین با توجه به تذکر ۳-۲-۳، اگر f و g به C_p متعلق باشند، آنگاه

$$(f\,,\, g) = \int_a^b w(x)\, f(x)\, g(x)\, dx$$

و

$$\| f \| = (f\,,\, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b w(x)\, [\, F(x)\,]^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف شده‌اند.

تذکر ۳-۲-۵

توجه می‌کنیم که اگر f به C_p متعلق باشد و $\|f\| = 0$ ، آنگاه احتمالاً تابع f بجز در نقاط ناپیوستگی خود، صفر است. بنابراین اگر $\|f - g\| = 0$ آنگاه f و g باید در همهٔ نقاط بجز تعداد متناهی از نقاط [a,b]، مساوی باشند.

تمرین ۳-۲-۶

اگر f و g به C_p متعلق باشند، آنگاه نامساوی شوارتز

$$|(f\,,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

و نامساوی مثلث

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

هر دو برقرارند.

تعریف ۳-۲-۷

فرض می‌کنیم دنباله توابع $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ و تابع f به فضای $C_p[a,b]$ متعلق باشند. می‌گوییم دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (نسبت به تابع وزن w بر [a,b]) در میانگین به f همگراست. اگر

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

یعنی اگر

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b w(x)\, [\, f_n(x) - f(x)\,]^2\, dx = 0$$

تذکر ۳-۲-۸

اگر دنباله‌ای در میانگین بر بازهٔ [a,b] نسبت به تابع وزن w ، همگرا باشد، لزوماً به این معنی نیست که این دنباله در هر نقطه از بازهٔ همگرای نقطه‌ای است. همچنین احتمال دارد که یک دنباله به تابع f بر یک بازه همگرای نقطه‌ای باشد، بدون آنکه در میانگین، به f همگرا باشد (تمرین زیر را ببینید).

تمرین ۳-۲-۹

دنبالهٔ $\{x^n\}_{n=۱}^{\infty}$ را بر بازهٔ $۰ \le x \le ۱$ وقتی n عدد صحیح و مثبتی است، در نظر می‌گیریم. نشان دهید این دنباله (با $w(x) \equiv ۱$) به تابع صفر $[۰,۱]$، در میانگین همگراست. آیا این دنباله به تابع صفر بر $[۰,۱]$ همگرای نقطه‌ای می‌باشد؟

تمرین ۳-۲-۱۰

تعیین کنید آیا تابع داده شده بر بازهٔ تعریف خود قطعه‌ای پیوسته است؟

الف) $f(x) = |x| \qquad -۱ \le x \le ۱$

ب)
$$g(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le x < ۱ \\ ۰ & ۱ \le x \le ۲ \end{cases}$$

پ)
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{(۱-x)} & ۰ \le x \le ۲,\ x \ne ۱ \\ ۰ & x = ۱ \end{cases}$$

۳-۳ــ همگرایی در میانگین سری فوریه

در این بخش همگرایی در میانگین سری فوریه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۳-۳-۱

فرض کنیم $\{\phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعه از توابع متعامد یکه بر بازهٔ $[a,b]$ نسبت به تابع وزن w بوده و هریک از توبع ϕ_n به $C_p[a,b]$ متعلق باشند. اگر f تابعی در $C_p[a,b]$ باشد، آنگاه سری فوریهٔ آن عبارت است از

$$\sum_{K=۱}^{\infty} C_K \phi_K$$

که در آن

$$C_K = (f , \phi_K)$$

ضریب فوریهٔ Kام ، f است. اینک فرض کنیم که $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ مجموع جزئی سری فوریه، یعنی

$$S_n = \sum_{K=1}^{\infty} C_K \phi_K$$

باشد. در این صورت سری فوریه در میانگین به تابع f همگرا گفته می‌شود، اگر دنبالهٔ مجموع جزئی آن در میانگین به f همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n - f\| = 0$$

تذکر ۳-۳-۲

اینک قبل از ادامهٔ بحث مربوط به سری فوریه امکان نمایش f توسط یک سری عمومی به صورت

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_K \phi_K \qquad (1)$$

را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳-۳-۳

به ازای هر عدد صحیح n ، بهترین تقریب در میانگین برای تابع f به وسیلهٔ یک مجموع به صورت

$$\sum_{K=1}^{n} a_K \phi_K$$

هنگامی به‌دست می‌آید که ضرایب a_K همان ضرایب فوریهٔ f باشند.

اثبات

فرض کنیم

$$T_n\,(x; a_۱, a_۲, ..., a_n) = \sum_{K=۱}^{\infty} a_K\, \phi_K\,(x)$$

مجموع جزئی سری (۱) در نقطهٔ x باشد، قرار می‌دهیم

$$E_n = \| f - T_n \|$$

به منظور دستیابی به بهترین تقریب "در میانگین" برای f ، باید ضرایب a_K طوری انتخاب شوند که E_n تا حد امکان کوچک شود، داریم

$$E_n^۲ = \int_a^b w(x)\, \left[\, f(x) - \sum_{K=۱}^{\infty} a_K\, \phi_K\,(x)\, \right]^۲ dx$$

با مربع کردن عبارت داخل کروشه، به دست می‌آوریم

$$E_n^۲ = \int_a^b w(x)\ \Big\{ [f(x)]^۲ - ۲\sum_{K=۱}^{n} a_K\, f(x)\, \phi_K(x) + \sum_{K=۱}^{n} a_K^۲\, [\,\phi_K(x)]^۲$$

$$+\ ۲\sum_{\substack{K=۱\\ i\neq j}}^{n}\ \sum_{j=۱}^{n}\ a_K\, a_j\, \phi_K\, \phi_j\ \Big\} = ۰$$

اینک با توجه به $(\phi_i , \phi_j) = ۰$ وقتی $i \neq j$، خواهیم داشت

$$E_n^۲ = \|f\|^۲ - ۲\sum_{K=۱}^{n} a_K \int_a^b w(x)\, f(x)\, \phi_K(x)\, dx + \sum_{K=۱}^{n} a_K^۲\, \|\phi_n\|^۲$$

$$= \|f\|^۲ - \sum_{K=۱}^{n} ۲a_K\, C_K + \sum_{K=۱}^{n} a^۲_K$$

یا

$$E_n^2 = \|f\|^2 + \sum_{K=1}^{n} (a_K^2 - 2a_K C_K),$$

با اضافه کردن C_K^2 به عبارت داخل پرانتز رابطهٔ بالا، به‌دست می‌آوریم

$$E_n^2 = \|f\|^2 + \sum_{K=1}^{n} (a_K^2 - 2a_K C_K + C_K^2) - \sum_{K=1}^{n} C_K^2$$

یا

$$E_n^2 = \|f\|^2 + \sum_{K=1}^{n} (a_K - C_K)^2 - \sum_{K=1}^{n} C_K^2 \qquad (2)$$

بنابراین، به ازای هر عدد صحیح مثبت داده شدهٔ n ، مقدار E_n هنگامی کوچکترین است که به ازای $K = 1,2,\dots,n$ ، $a_K = C_K$.

قضیه ۳-۳-۴

اگر یک سری به صورت $\sum_{K=1}^{\infty} a_K \phi_K$

در میانگین به f همگرا باشد، آنگاه ضرایب a_K باید همان ضرایب فوریهٔ f باشند.

اثبات

با قرار دادن $a_K = C_K$ در فرمول (۲)، خواهیم داشت

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{K=1}^{n} C_K^2 \qquad (3)$$

از فرمولهای (۳) و (۲) مشاهده می‌کنیم که

$$E_n^2 = \|f - T_n\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \sum_{K=1}^{n} (a_K - C_K)^2 \qquad (4)$$

از این رو

$$0 \le \| f - S_n \|^2 \le \| f - T_n \|^2$$

بنابراین، اگر سری (۱) در میانگین به f همگرا باشد، یعنی $\lim_{n\to\infty} \| f-T_n \| = 0$ از نامساوی بالا نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} \| f-S_n \| = 0$، یعنی سری فوریه نیز باید در میانگین به f همگرا باشد. از معادلهٔ (۴) مشاهده می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{K=1}^{n} (a_K - C_K)^2 = 0$$

ولی این ممکن نیست، مگر اینکه به ازای هر عدد صحیح K، $a_K = C_K$.

تذکر ۳-۳-۵

در بحث زیر تنها سری فوریهٔ تابع f متعلق به $C_p[a,b]$ را با مجموع جزئی nام، S_n و ضرایب فوریهٔ C_n، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۳-۳-۶

نشان دهید نامساوی زیر که به ***نامساوی بسل*** معروف است، برای هر تابع f که به $C_p[a,b]$ متعلق باشد برقرار است.

$$\sum_{K=1}^{\infty} C_K^2 \le \| f \|^2$$

اثبات

از معادله (۳) مشاهده می‌کنیم که

$$\sum_{K=1}^{n} C_K^2 \le \| f \|^2 \qquad n \ge 1$$

دنبالهٔ اعداد $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$، با جملهٔ nام

$$A_n = \sum_{K=1}^{n} C_K^2$$

نانزولی است و از بالا به عدد $\|f\|^2$ کراندار است. بنابراین این دنباله همگراست و خواهیم داشت

$$\sum_{K=1}^{\infty} C_K^2 \leq \|f\|^2$$

تذکر ۳-۳-۷

دقت می‌کنیم که نامساوی بالا، صرف‌نظر از اینکه سری فوریهٔ f در میانگین همگراست یا خیر، برقرار است.

تذکر ۳-۳-۸

توجه می‌کنیم که چون سری $\sum_{K=1}^{\infty} C_K^2$ همگراست، پس

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 0$$

یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b w(x)\, f(x)\, \phi_K(x)\, dx = 0$$

تمرین ۳-۳-۹

دنباله توابع متعامد

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Sin} nx \quad , \quad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Cos} nx$$

را به ازای ... $n = 1, 2, 3,$ و $0 \leq x \leq \pi$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید که به ازای هر f

متعلق به $C_p[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f(x)\ \mathrm{Cos}\ nx\ dx = 0$$

(۵)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f(x)\ \mathrm{Sin}\ nx\ dx = 0$$

تذکر ۳-۳-۱۰

از نامساوی (۳) مشاهده می‌کنیم که سری فوریهٔ f در میانگین به f همگراست، اگر و تنها اگر

$$\|f\| = \sum_{K=1}^{\infty} C_K^2 \tag{۶}$$

این شرط به ***تساوی پارسوال*** معروف است.

تمرین ۳-۳-۱۱

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. اگر f در میانگین بر بازهٔ $[-1,1]$ با $w(x) = 1$، با تابعی به صورت

$$C_0 P_0 + C_1 P_1 + C_2 P_2$$

که در آن P_n چندجمله‌ای لژاندر از درجهٔ n است، تقریب شود. ثابتهای C_i را چنان تعیین کنید که بهترین تقریب در میانگین به‌دست آید.

تمرین ۳-۳-۱۲

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. ثابتهای $C_۰$ ، $C_۱$ و $C_۲$ را چنان تعیین کنید که مقدار

$$\int_{-۱}^{۱} \left[f(x) - (C_۰ + C_۱x + C_۲x^۲) \right]^۲ dx$$

مینیمم گردد.

تمرین ۳-۳-۱۳

فرض کنیم f به $C_p\,[-۱,۱]$ متعلق باشد، نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲n+۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} f(x)\; P_n(x)\; dx = ۰$$

تمرین ۳-۳-۱۴

فرض کنیم برای $C \le x \le ۰$ ، $f(x)=۱$ و برای $۰ \le x \le C$

$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{C}}\; \text{Sin}\; \frac{n\pi x}{C}$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n،

الف) نامساوی بسل برای تابع f و مجموعهٔ متعامد یکهٔ $\{\phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ چیست؟

ب) تساوی پارسوال برای f و $\{\phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ چیست؟ اگر تساوی پارسوال برقرار باشد، در مورد سری سینوسی فوریهٔ f چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

تعریف ۳-۳-۱۵

فرض کنیم $\{\phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک مجموعهٔ متعامد از توابعی باشد که هر جملهٔ آن به $C_p[a,b]$ متعلق است. این مجموعهٔ متعامد از فضای $C_p[a,b]$ ***کامل*** گفته می‌شود، اگر هر تابع از فضا به وسیلهٔ سری فوریهٔ خود به مفهوم همگرایی در میانگین نمایش داده شود.

تذکر ۳-۳-۱۶

از معادلهٔ (۶) مشاهده می‌کنیم که یک مجموعهٔ متعامد یکه، کامل است، اگر و تنها اگر تساوی پارسوال به ازای هر تابع f در فضا برقرار باشد.

قضیه ۳-۳-۱۷

اگر یک مجموعهٔ متعامد $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای $C_p[a,b]$ کامل باشد و تابعی، مانند f ، بر هر عضو مجموعه عمود باشد، آنگاه $f(x) = 0$ به‌جزاحتمالاً به ازای تعداد متناهی از مقادیر $x \in [a,b]$.

اثبات

قرار می‌دهیم $\psi_n = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}$ ، بنابراین $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است. پس $C_n = (f , \psi_n)$ ، به ازای هر n صفر است، یعنی همهٔ ضرایب فوریه صفر می‌باشند. بنا بر تساوی پارسوال $\|f\| = 0$ ، از این رو، $f(x) = 0$ بجز هنگامی که x یک نقطهٔ ناپیوستگی است و تعداد چنین نقاطی متناهی است.

تذکر ۳-۳-۱۸

از قضیهٔ ۳-۳-۱۷ نتیجه می‌شود که اگر یک عضو از یک مجموعهٔ متعامد را حذف کنیم، توابع باقیمانده نمی‌توانند یک مجموعهٔ کامل را تشکیل دهند. زیرا عضو حذف شده بر هر عضو مجموعهٔ جدید عمود است.

تذکر ۳-۳-۱۹

قضیه زیر را از آنالیز می‌پذیریم و از آن و قضیهٔ بعد از آن استفاده می‌کنیم تا کامل بودن مجموعهٔ چندجمله‌ایهای متعامد بر یک بازهٔ متناهی را ثابت کنیم.

قضیه ۳-۳-۲۰

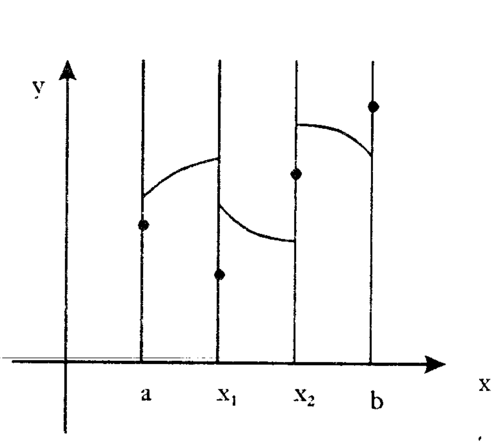
(قضیه تعریف وایراشتراس) فرض کنیم تابع g بر یک بازهٔ کراندار $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت به ازای هر عدد مثبت ε یک چندجمله‌ای Q وجود دارد، به قسمی که به ازای هر x در $[a,b]$ ، $|g(x) - Q(x)| < \varepsilon$.

قضیه ۳-۳-۲۱

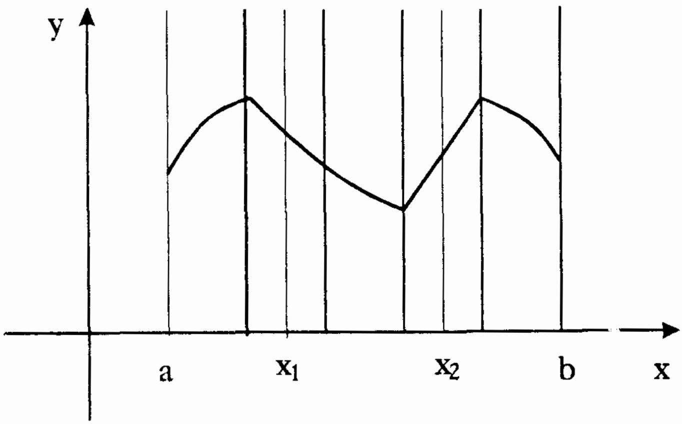
فرض می‌کنیم f به فضای $C_p[a,b]$ متعلق باشد (تابع وزن w بر (a,b) مثبت و پیوسته فرض شده و چنان است که $\int_a^b w(x)\,dx$ وجود دارد). در این صورت به ازای هر عدد مثبت ε، تابع پیوستهٔ g بر [a,b] وجود دارد به قسمی که $\|f-g\| < \varepsilon$

اثبات

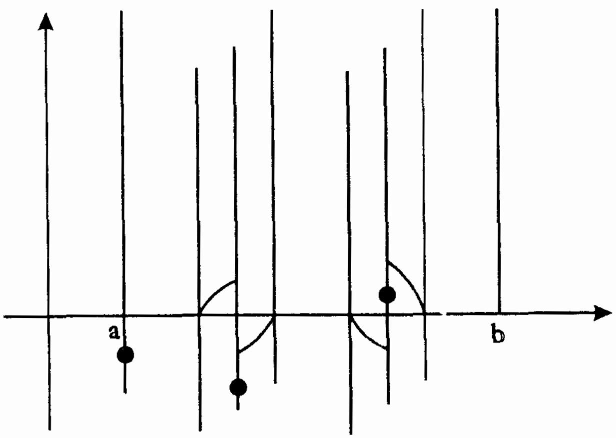
فرض کنیم $x_1, x_2, \ldots, x_N$ نقاطی در (a,b) باشند، که f در آنها ناپیوسته است. حالت $N = 2$ در شکل ۱ توضیح داده شده است. تابع g را به روش زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $g(a) = f(a+)$، $g(b) = g(-b)$ و بر بازهٔ (a,b)، $g(x)=f(x)$ بجز بر بازه‌های $(x_i - \delta\ , x_i + \delta)$، $i = 1, 2, \ldots, N$ که در آن δ یک عدد کوچک مثبت است که بعداً تعیین خواهد شد. فرض می‌کنیم بر هریک از این بازه‌ها، g به قسمی است که نمودار آن یک قطعه خط مستقیم است و این قطعه خط چنان انتخاب می‌شود که g را بر [a,b] پیوسته می‌کند. (شکل ۲ نمودار مربوط به تابع g متناظر با تابع f در شکل ۱ را نشان می‌دهد.) بنابراین مقدار تابع f-g احتمالاً بجز در a و b و بر بازه‌های $(x_i - \delta\ , x_i + \delta)$، صفر است. (شکل ۳ را ببینید). اکنون δ را به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب نموده تا $\|f - g\| < \varepsilon$ را تضمین کند.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

اینک به بیان جزئیات می‌پردازیم، چون f به $C_p\,[a,b]$ متعلق است، یک عدد مثبت، مانند A وجود دارد به قسمی که به ازای هر x در $[a,b]$، $|f(x)| \le A$ پس به ازای هر x در $[a,b]$، $|g(x)| \le A$ و $|f(x) - g(x)| \le ۲A$ به ازای هر x در $[a,b]$. فرض می‌کنیم اعداد c و d چنان باشند که

$$a < C < X_1 \qquad , \qquad X_N < d < b$$

پس w بر بازهٔ $[c,d]$ پیوسته است و یک عدد مثبت ، مانند B وجود دارد به قسمی که به ازای هر x در $[c,d]$ ، $|w(x)| \leq B$. اینک δ را به قدر کافی کوچک انتخاب می‌کنیم که $C < x_1 - \delta$ و $x_N + \delta < d$ در این صورت

$$\|f - g\| = \left(\int_a^b w(x)\, [f - g]^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{xi-\delta}^{xi+\delta} w(x)\, [f - g]^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{8\, A^2\, B\, N\, \delta}$$

برای ε داده شده

$$\delta \leq \frac{\varepsilon^2}{32 A^2\, B\, N}$$

انتخاب می‌کنیم. بنابراین $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$

قضیه ۳-۳-۲۲

یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد برای بازهٔ $[a,b]$ و تابع وزن w در فضای $C_p[a,b]$ کامل است. در اینجا w بر بازهٔ (a,b) مثبت و پیوسته فرض شده و چنان است که $\int_a^b w(x)\, dx$ وجود دارد.

اثبات

فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعهٔ ساده از چندجمله‌ایهای متعامد با تابع وزن w باشد و $\int_a^b w(x)\, dx = K$. اگر f متعلق به $C_p[a,b]$ بوده و ε یک عدد مثبت باشد بنا به قضیه ۳-۳-۲۱ تابع پیوستهٔ g وجود دارد به قسمی که

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

همچنین بنا به قضیه ۳-۳-۲۰ یک چندجمله‌ای Q وجود دارد به قسمی که به ازای هر x در [a,b] خواهیم داشت

$$|q(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{۲\sqrt{K}}$$

بنابراین،

$$\|q - Q\| = \left(\int_a^b w(g - Q)^۲ \, dx \right)^{\frac{۱}{۲}} \leq \left(\frac{\varepsilon^۲}{۴K} \int_a^b w \, dx \right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{\varepsilon}{۲}$$

با به‌کار بردن نامساوی مثلث مشاهده می‌کنیم که

$$\|f - Q\| \leq \|f - g\| + \|g - Q\| < \varepsilon$$

فرض کنیم m درجهٔ چندجمله‌ای Q باشد، در این صورت ثابتهای $a_۰, a_۱, \ldots, a_m$ وجود دارد به قسمی که

$$Q = \sum_{i=۰}^{m} a_i \phi_i$$

فرض می‌کنیم S_n مجموع جزئی nام سری فوریهٔ f باشد، بنا به قضیه ۳-۳-۳، خواهیم داشت

$$\|f - S_n\| \leq \|f - Q\| < \varepsilon$$

و در نتیجه

$$\|f - S_n\| < \varepsilon$$

وقتی که $n \geq m$ است از این رو

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n\| = ۰$$

تذکر ۳-۳-۲۳

از قضیه ۳-۳-۲۲ نتیجه می‌شود که چندجمله‌ایهای لژاندر و چبیشف بر [۱,۱-] متعامد کامل هستند، توجه می‌کنیم که این قضیه در مورد کامل بودن چندجمله‌ایهای لاگر و هرمیت که بازه‌های تعامد آنها نامتناهی است، کاربردی ندارد. قضایای مربوط به کامل بودن این توابع را در پایان همین فصل به‌طور جداگانه بیان می‌کنیم.

تذکر ۳-۳-۲۴

اینک در زیر قضیهٔ مربوط به کامل بودن توابع ویژهٔ مسائل با مقدار مرزی خودالحاق را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۳-۲۵

فرض کنیم p' ، q و r بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند و به ازای هر x در $[a,b]$ ، $P(x)>0$ و $r(x)>0$. مجموعهٔ همه توابع ویژه مسأله خودالحاق

$$(P\,y')' + (\lambda\, r + q)\, y = 0$$
$$U_1(y) = 0 \qquad U_2(y) = 0$$

در فضای $C_p[a,b]$ ، یک مجموعه متعامد کامل است. (اگر دو تابع ویژهٔ مستقل خطی مربوط به یک مقدار ویژه باشند، دو تابع ویژهٔ متعامد انتخاب می‌شوند) به ویژه مجموعه‌های $\{\mathrm{Sin}\ \frac{n\pi x}{C}\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{C}\}_{n=0}^{\infty}$ بر $[0,C]$ با $w(x)=1$ کامل است. همچنین مجموعهٔ

$$\{\ 1,\ \mathrm{Cos}\,\frac{n\pi x}{C}\ ,\ \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi x}{C}\ \}_{n=1}^{\infty}$$

بر بازهٔ $[-C,C]$ با $w(x) = 1$ کامل است.

تذکر ۳-۳-۲۶

اینک در زیر کامل بودن چندجمله‌ایهای لاگر و هرمیت را بدون اثبات بیان می‌کنیم. دقت می‌کنیم که برای هر دوی این مجموعه‌های چندجمله‌ای، بازهٔ تعامد بی‌کران است. اگر یک چنین مجموعه‌ای در فضای توابعی کامل باشد، در این فضا حداقل باید انتگرالهای ناسره‌ای که در محاسبهٔ ضرایب فوریه مورد استفاده قرار می‌گیرند، همگرا باشند.

تعریف ۳-۳-۲۷

تابع f به فضای V متعلق است، اگر بر هر بازه‌ای به صورت [o,b] با $b > 0$ قطعه‌ای پیوسته باشد و انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-x} [f(x)]^2 dx$$

همگرا باشد.

تذکر ۳-۳-۲۸

چندجمله‌ایهای لاگر به فضای V متعلق هستند. همچنین می‌توان نشان داد که اگر f و g به V متعلق باشند، آنگاه انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx$$

همگراست و $\alpha f + \beta g$ به ازای هر ثابت α و β به V متعلق است (چرا؟). به دلیل این ویژگی می‌توان در مورد حاصلضرب داخلی

$$(f , g) = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx$$

نرم،

$$\|f\| = (f , f)^{\frac{1}{2}}$$

و فاصلهٔ

$$\|f - g\|$$

برای توابع f و g متعلق به V، صحبت کرد. اگر f و g به V متعلق باشند، همهٔ انتگرالها در تعریفهای بالا همگرا هستند.

تعریف ۳-۳-۲۹

تابع f را به فضای W متعلق می‌گوییم، اگر بر هر بازهٔ متناهی بسته قطعه‌ای پیوسته باشد و انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2}} [\, f(x) \,]^{2} \, dx$$

موجود باشد.

تذکر ۳-۳-۳۰

چندجمله‌ایهای هرمیت H_n به W متعلق هستند. می‌توان نشان داد که اگر f و g به W متعلق باشند، آنگاه انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2}} f(x) \, g(x) \, dx$$

موجود است و $\alpha f + \beta g$ به ازای ثابتهای α و β به W متعلق است (چرا؟). بنابراین می‌توان ضرب داخلی

$$(f \,,\, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2}} f(x) \, g(x) \, dx$$

نرم

$$\| f \| = (f \,,\, f)^{\frac{1}{2}}$$

و فاصلهٔ

$$\| f - g \|$$

را برای توابع f و g متعلق به W تعریف کرد.

قضیه ۳-۳-۳۱

چندجمله‌ایهای لاگر در فضای V و چندجمله‌ایهای هرمیت در فضای W کامل هستند.

تمرین ۳-۳-۳۲

نشان دهید که مجموعهٔ متعامد ساده $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در آن $\phi_n(x)=\text{Cos}\, n\pi x$، در فضای $C_p[0,1]$ کامل نیست.

تمرین ۳-۳-۳۳

اگر یک دنبالهٔ از توابع متعامد در فضای توابع پیوسته بر $[a,b]$ کامل باشد، نشان دهید در فضای $C_p[a,b]$ کامل است.

تمرین ۳-۳-۳۴

الف) فرض کنیم f بر $[0,\pi]$ پیوسته باشد و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. نشان دهید یک عدد صحیح، مانند m، و ثابتهای $C_0, C_1, \dots, C_m$ وجود دارند به قسمی که برای $0 \le \theta \le \pi$

$$\left| f(\theta) - \sum_{K=0}^{m} C_K \text{Cos}\, K\theta \right| < \varepsilon$$

آیا لزوماً ضرایب C_K همان ضرایب کسینوسی فوریهٔ f هستند؟

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) ثابت کنید که سری کسینوسی فوریهٔ یک تابع پیوسته بر $[0, \pi]$ در میانگین به آن همگراست.

۳-۴ ــ همگرایی نقطه‌ای سری فوریه

در این بخش همگرایی سری فوریهٔ مثلثاتی را در هر نقطه به جای همهٔ بازه مورد بحث قرار می‌دهیم. می‌دانیم که سری فوریهٔ تابع دلخواه f لزوماً در هر نقطه

همگرا نیست. برای اثبات قضایای مربوط به همگرایی نقطه‌ای سری فوریه باید توجه خود را به دستهٔ مناسبی از توابع محدود کنیم. یک چنین دسته‌ای از توابع دستهٔ توابع ***قطعه‌ای هموار*** است.

تعریف ۳-۴-۱

تابع f بر بازهٔ بستهٔ [a,b] قطعه‌ای هموار است اگر f و f′ بر [a,b] قطعه‌ای پیوسته باشند.

قضیه ۳-۴-۲

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ [a,b]، قطعه‌ای هموار باشد. در این صورت f در a دارای مشتق چپ و در b دارای مشتق راست و در هر نقطهٔ (a,b) دارای مشتقهای چپ و راست می‌باشد.

اثبات

در اینجا تنها مشتق راست را بررسی می‌کنیم.(و خواننده می‌تواند وجود مشتق چپ را به روش مشابه اثبات کند.) فرض کنیم x_0 نقطه‌ای در [a,b) باشد. چون f′ تنها دارای تعداد متناهی نقطهٔ ناپیوستگی است، پس بازه‌ای مانند (x_0,x_1) که در آن $x_1 > x_0$، وجود دارد که بر آن، f′ پیوسته است. به ازای هر x در این بازه و با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین، خواهیم داشت

$$\frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

که در آن $x_0 < \xi < x$ عدد ξ به x بستگی دارد. چون f′ قطعه‌ای پیوسته است، حد

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(\xi)$$

موجود است. پس f در x_0 دارای مشتق از راست می‌باشد.

تذکر ۳-۴-۳

توجه می‌کنیم که اگر حد

$$\lim_{x \to x_\circ^+} \frac{f(x) - f(x_\circ^+)}{x - x_\circ}$$

موجود باشد، این حد مشتق راست تابع f در $x_\circ$ نامیده می‌شود. به همین نحو، اگر

$$\lim_{x \to x_\circ^-} \frac{f(x) - f(x_\circ^-)}{x - x_\circ}$$

موجود باشد، این حد مشتق چپ تابع f در $x_\circ$ نامیده می‌شود. اگر مشتق f در $x_\circ$ موجود باشد، آنگاه مشتقهای چپ و راست موجود بوده و برابر با $f'(x_\circ)$ می‌باشند.

تذکر ۳-۴-۴

نخستین نوع سری فوریه‌ای که مورد بررسی قرار می‌دهیم، سری مثلثاتی کلی برای تابع f تعریف شده بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ است. توابع $\{1, \text{Cos } nx , \text{Sin } nx\}_{n=1}^{\infty}$ بر این بازه متعامد ساده می‌باشند و سری فوریهٔ وابسته به f عبارت است از

$$\frac{1}{2} a_\circ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \text{Cos } nx + b_n \text{Sin } nx \right) \qquad (1)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{ Cos } nt + dt \qquad , \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{ Sin } nt + dt \qquad n \geq 1 \qquad (2)$$

توجه می‌کنیم که هر جمله در سری (۱) متناوب[1] با دوره تناوب 2π است. از

---

۱. تابع g ، تعریف شده به ازای هر x، متناوب با دوره تناوب T گفته می‌شود، اگر $g(x+T)=g(x)$ به ازای هر x.

این رو، اگر سری بر بازهٔ $[-\pi, \pi]$ همگرا باشد، آنگاه به ازای هر x به یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π همگراست. سری مثلثاتی را می‌توان جهت نمایش یک تابع متناوب به ازای هر x یا برای نمایش تابعی که تنها بر یک بازهٔ متناهی از بارهٔ تعریف تابع تعریف می‌شود، مورد استفاده قرار داد. برای اثبات قضیه مربوط به همگرایی سری (۱) به نتیجهٔ زیر نیازمندیم.

قضیه ۳-۴-۵

اگر

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n} \cos K\theta$$

آنگاه

$$D_n(\theta) = \begin{cases} n + \dfrac{1}{2}, & \theta = 2N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{وقتی} \\ \dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

و

$$\int_{0}^{\pi} D_n(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{0} D_n(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

اثبات

با ضرب کردن دو طرف معادلهٔ مربوط به تعریف $P_n(\theta)$ در $2\sin\frac{\theta}{2}$، به ازای هر θ، به‌دست می‌آوریم

$$2\sin\frac{\theta}{2} D_n(\theta) = \sin\frac{\theta}{2} + \sum_{K=1}^{n} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos K\theta$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$2\cos K\theta \sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(K + \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(K - \frac{1}{2}\right)\theta$$

خواهیم داشت

$$۲D_n(\theta)\operatorname{Sin}\frac{\theta}{۲} = \operatorname{Sin}\frac{\theta}{۲} + \sum_{K=۱}^{n}\left[\operatorname{Sin}\left(K+\frac{۱}{۲}\right)\theta - \operatorname{Sin}\left(K-\frac{۱}{۲}\right)\theta\right]$$

جمله‌ها در طرف راست معادلهٔ بالا «ادغامی» می‌باشند و در نتیجه خواهیم داشت

$$۲D_n(\theta)\operatorname{Sin}\frac{\theta}{۲} = \operatorname{Sin}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\theta$$

از این رو

$$D_n(\theta) = \frac{\operatorname{Sin}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\theta}{۲\operatorname{Sin}\frac{\theta}{۲}}$$

وقتی $\operatorname{Sin}\frac{\theta}{۲} \neq ۰$ یعنی هنگامی که $\theta \neq ۲N\pi$ به ازای $N = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots$ است. به ازای این مقادیر برای θ از تعریف $D_n(\theta)$ خواهیم داشت

$$D_n(۲N\pi) = \frac{۱}{۲} + \sum_{K=۱}^{n} ۱ = n + \frac{۱}{۲}$$

چون توابع $\{۱, \operatorname{Cos} K\theta\}$ به ازای $K \geq ۱$ بر بازهٔ $[۰,\pi]$ متعامد هستند، بنابراین

$$\int_۰^\pi D_n(\theta)\,d\theta = \int_۰^\pi ۱ . D_n(\theta)\,d\theta = \int_۰^\pi ۱ . \frac{۱}{۲}\,d\theta = \frac{\pi}{۲}$$

و چون $D_n(\theta) = D_n(-\theta)$ پس

$$\int_{-\pi}^{۰} D_n(\theta)\,d\theta = \int_۰^\pi D_n(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{۲}$$

قضیه ۳-۴-۶

فرض کنیم f تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π بوده و بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای

هموار باشد. در این صورت در هر نقطهٔ $x_\circ$ سری فوریهٔ (۱) برای f به $\frac{1}{2}[f(x_\circ^+)+f(x_\circ^-)]$ همگراست.

اثبات

فرض می‌کنیم

$$S_n(x_\circ) = \frac{1}{2}a_\circ + \sum_{K=1}^{n}(a_K \cos Kx_\circ + b_K \sin Kx_\circ)$$

مجموع جزئی nام سری فوریه باشد. برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_\circ) = \frac{1}{2}[f(x_\circ^+) + f(x_\circ^-)]$$

با استفاده از فرمولهای (۲) برای ضرایب a_K و b_K خواهیم داشت

$$S_n(x_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos Kt \cos Kx_\circ + \sin Kt \sin Kx_\circ\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + \sum_{K=1}^{n}\cos K(t-x_\circ)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x_\circ)\,dt$$

با به‌کار بردن تغییر متغیر $u = t - x_\circ$ می‌توانیم بنویسیم

$$S_n(x_\circ) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_\circ}^{\pi-x_\circ} f(x_\circ + u)\,D_n(u)\,du$$

چون تابع زیر علامت انتگرال یک تابع متناوب از u با دوره تناوب 2π است، خواهیم داشت

$$S_n(x_\circ) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_\circ + u)\,D_n(u)\,du$$

یا

$$S_n(x_\circ) = \frac{1}{\pi}\int_\circ^{\pi} f(x_\circ + u)\, D_n(u)\, du + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\circ} f(x_\circ + u)\, D_n(u)\, du$$

با توجه به قضیه ۳-۴-۵، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{۲} f(x_\circ^{+}) = \frac{1}{\pi}\int_\circ^{\pi} f(x_\circ)\, D_n(\theta)\, d\theta$$

$$\frac{1}{۲} f(x_\circ^{-}) = \int_{-\pi}^{\circ} f(x_\circ^{-})\, D_n(\theta)\, d\theta$$

زیرا مقادیر $f(x_\circ^{+})$ و $f(x_\circ^{-})$ به متغیر انتگرالگیری u بستگی ندارند. بنابراین

$$S_n(x_\circ) - \frac{1}{۲}\left[f(x_\circ^{+}) + f(x_\circ^{-}) \right] = \frac{1}{\pi}\int_\circ^{\pi}\left[f(x_\circ + u) - f(x_\circ^{+}) \right] D_n(u)\, du +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\circ}\left[f(x_\circ + u) - f(x_\circ^{-}) \right] D_n(u)\, du$$

یا

$$S_n(x_\circ) = \frac{1}{۲}\left[f(x_\circ^{+}) + f(x_\circ^{-}) \right] = \frac{1}{\pi} A_n(x_\circ) + \frac{1}{\pi} B_n(x_\circ)$$

که در آن

$$A_n(x_\circ) = \int_\circ^{\pi}\left[f(x_\circ + u) - f(x_\circ^{+}) \right] D_n(u)\, du$$

و

$$B_n(x_\circ) = \int_{-\pi}^{\circ}\left[f(x_\circ + u) - f(x_\circ^{+}) \right] D_n(u)\, du$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x_\circ) = \lim_{n\to\infty} B_n(x_\circ) = \circ$$

آنگاه اثبات قضیه کامل می‌شود. در اینجا فقط $\lim_{n\to\infty} A_n(x_\circ) = \circ$ را نشان می‌دهیم و اثبات $\lim_{n\to\infty} B_n(x_\circ) = \circ$ را به عهده خواننده وامی‌گذاریم. فرمول $A_n(x_\circ)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_n(x_\circ) = \int_\circ^\pi \frac{f(x_\circ+u) - f(x_\circ)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{۲}}{\operatorname{Sin}\frac{u}{۲}} \operatorname{Sin}\left(n + \frac{۱}{۲}\right) u \, du$$

$$A_n(x_\circ) = \int_\circ^\pi \frac{f(x_\circ+u) - f(x_\circ^+)}{u} \cdot \frac{u}{۲} \operatorname{Cos} nu \, du + \int_\circ^\pi \frac{f(x_\circ+u) - f(x_\circ^+)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{۲}}{\operatorname{Sin}\frac{u}{۲}} \operatorname{Cos}\frac{u}{۲} \operatorname{Sin} nu \, du$$

چون f بر هر بازهٔ بستهٔ متناهی قطعه‌ای هموار است، پس بنا بر قضیهٔ ۳-۴-۲ دارای مشتق راست در $x_\circ$ است. از این رو توابع

$$\frac{f(x_\circ+u) - f(x_\circ^+)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{۲}}{\operatorname{Sin}\frac{u}{۲}} \operatorname{Cos}\frac{u}{۲} \quad , \quad \frac{f(x_\circ+u) - f(x_\circ^+)}{u} \cdot \frac{u}{۲}$$

دارای حدود راست در ۰ هستند. بنابراین توابع مذکور بر بازهٔ $[\circ, \pi]$ قطعه‌ای پیوسته می‌باشند. اینک از روابط (۵) در قضیه ۳-۳-۹ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x_\circ) = \circ$$

تذکر ۳-۴-۷

توجه می‌کنیم که $\frac{۱}{۲}\left[f(x_\circ^+) + f(x_\circ^-) \right]$ میانگین حدهای چپ و راست f در نقطهٔ $x_\circ$ است. اگر f در $x_\circ$ پیوسته باشد، این مقدار برابر با $f(x_\circ)$ است.

قضیه ۳-۴-۸

فرض می‌کنیم f بر بازهٔ $-\pi \le x \le \pi$ پیوسته و قطعه‌ای هموار باشد، به‌طوری

که $f(\pi) = f(-\pi)$. ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ همگراست. در اینجا a_n و b_n ضرایب فوریهٔ مربوط به تابع f می‌باشند. فرمول (۲) را ببینید.

اثبات

چون f قطعه‌ای هموار است، از این رو f' قطعه‌ای پیوسته می‌باشد و ضرایب فوریهٔ مربوط به آن، یعنی

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

موجودند. چون f پیوسته است و $f(\pi) = f(-\pi)$. با به کار بردن انتگرالگیری به روش جزء به جزء مشاهده می‌کنیم که

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \Big[f(x) \cos nx \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{\cos n\pi}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] + nb_n$$

$$= nb_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \Big[f(x) \sin nx \Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= -na_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

که در آن a_n و b_n ضرایب فوریهٔ f می‌باشند. بنابراین

$$a_n = -\frac{b'_n}{n} \qquad b_n = -\frac{b'_n}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (۳)$$

از نامساویهای

$$(|a_n'| - \frac{1}{n})^2 = a_n'^2 - \frac{2|a_n'|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$(|b_n'| - \frac{1}{n})^2 = b_n'^2 - \frac{2|b_n'|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n} \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}$$

اینک با توجه به (۳)، خواهیم داشت

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n' + b_n') + \frac{1}{n^2}$$

از این رو، به ازای هر عدد صحیح دلخواه m، خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{m} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} (a_n'^2 + b_n'^2) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \qquad (۴)$$

چون f' قطعه‌ای پیوسته، پس بنا بر آنچه که در اثبات قضیه ۳-۳-۶ نشان داده‌ایم، سری اول در طرف راست رابطهٔ (۴) همگراست وقتی $m \to \infty$. دومین سری نیز همگراست زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک سری ـ p با $p = 2$ می‌باشد. بنابراین سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \qquad (۵)$$

همگراست.

قضیه ۳-۴-۹

فرض می‌کنیم f بر بازهٔ $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته، قطعه‌ای هموار باشد و $f(-\pi)=f(\pi)$. در این صورت ثابت کنید که سری فوریهٔ مربوط به f، یعنی

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

به ازای هر x در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به‌طور مطلق و یکنواخت به f همگراست.

اثبات

چون $f(-\pi)=f(\pi)$، پس اگر f را به یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π بسط دهیم یک تابع پیوسته و قطعه‌ای هموار به‌دست می‌آوریم. از این‌رو بنا به قضیهٔ ۳-۴-۶ سری فوریهٔ (۱) به ازای هر x در $[-\pi,\pi]$ همگراست. به منظور نشان دادن همگرایی مطلق و یکنواخت، مشاهده می‌کنیم که

$$|a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx| \leq |a_n \operatorname{Cos} nx| + |b_n \operatorname{Sin} nx|$$

$$\leq |a_n| + |b_n|$$

که در آن، بنا به قضیه ۳-۴-۸، می‌دانیم که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ همگراست. بنابراین اثبات قضیه از آزمون مقایسه و آزمون -M وایراشتراس نتیجه می‌شود.

تذکر ۳-۴-۱۰

توجه می‌کنیم که شرایط بیان شده در قضیه بالا، همگرایی مطلق و یکنواخت را برای سری فوری بر هر بازهٔ بسط متناوب تابع تضمین می‌کند. در این رابطه، شرط $f(-\pi)=f(\pi)$ که پیوستگی بسط متناوب تابع f را تضمین می‌کند، ضروری است، زیرا مجموع یک سری که به‌طور یکنواخت همگراست باید پیوسته باشد.

قضیه ۳-۴-۱۱

اگر f یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π و پیوسته بوده و f' بر $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای هموار، آنگاه با مشتقگیری جمله به جمله از سری فوریهٔ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} nx \, dx \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx \qquad n = ۱,۲,۳,...$$

سری

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n(-a_n\,\mathrm{Sin}\,nx + b_n\,\mathrm{Cos}\,nx)$$

به‌دست می‌آید که به‌طور نقطه‌ای به $f'(x)$ همگراست وقتی که $f''(x)$ موجود باشد.

اثبات

چون f' در شرایط قضیه ۳-۴-۶ صدق می‌کند، پس سری فوریه همگرایی دارد. اگر x یک نقطهٔ پیوستگی f' باشد، آنگاه سری فوریهٔ f' را می‌توان توسط

$$f'(x) = \frac{۱}{۲}a'_{\circ} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a'_n\,\mathrm{Cos}\,nx + b'_n\,\mathrm{Sin}\,nx)$$

نمایش داد. بنا به تعریف ضرایب فوریه، خواهیم داشت

$$a'_{\circ} = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{۱}{\pi}[\,f(\pi) - f(-\pi)\,] = \circ$$

همچنین با به‌کار بردن انتگرالگیری به روش جزء به جزء، خواهیم داشت (اثبات مربوط به قضیه ۳-۴-۸ را ببینید.)

$$a'_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{Cos}\,nx\,dx$$
$$= nb_n \qquad n = ۱,۲, ...$$

و

$$b'_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx$$
$$= -\,na_n \qquad n = ۱,۲, ...$$

از این رو نتیجه می‌شود که

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n(-a_n\,\mathrm{Sin}\,nx + b_n\,\mathrm{Cos}\,nx)$$

قضیه ۳-۴-۱۲

اگر f یک تابع قطعه‌ای هموار و متناوب با دوره تناوب 2π باشد، آنگاه با انتگرالگیری جمله به جمله از سری فوریهٔ تابع f می‌توان سریی به دست آورد که به‌طور نقطه‌ای به انتگرال تابع f همگراست. به ویژه اگر

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx)$$

باشد، آنگاه

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2} a_0 (x + \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\, a_n \operatorname{Sin} nx - b_n \operatorname{Cos} nx + (-1)^n b_n \,]$$

اثبات

نخست تابع g را توسط

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = -\frac{1}{2} a_0\, x$$

تعریف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که g پیوسته است و

$$g'(x) = f(x) - \frac{1}{2} a_0$$

از این رو، g' قطعه‌ای پیوسته است و بنابراین تابع g حداقل قطعه‌ای همگراست. در نتیجه g دارای سری فوریهٔ همگراست. یعنی

$$g(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{Cos} nx + B_n \operatorname{Sin} nx)$$

به ازای $n \leq 1$ ، با استفاده از انتگرالگیری به روش جزء به جزء خواهیم داشت

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{Cos} nx\, dx$$

$$= \frac{۱}{n\pi} g(x) \text{ Sin } nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{۱}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) \text{ Sin } nx \, dx$$

$$= -\frac{۱}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\, f(x) - \frac{۱}{۲} a_۰ \,] \text{ Sin } nx \, dx$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$A_n = -\frac{b_n}{n} \qquad , \qquad n = ۱,۲,۳, \ldots$$

به همین نحو می‌توان نشان داد که

$$B_n = -\frac{a_n}{n} \qquad\qquad n = ۱,۲,۳, \ldots$$

از این رو خواهیم داشت

$$g(x) = \frac{۱}{۲} A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} (a_n \text{ Sin } nx - b_n \text{ Cos } nx)$$

سرانجام برای محاسبهٔ $A_۰$ توجه می‌کنیم که

$$g(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt - \frac{۱}{۲} \pi a_۰$$

$$= \pi a_۰ - \frac{۱}{۲} \pi a_۰$$

$$= \frac{۱}{۲} \pi a_۰$$

اینک با قرار دادن $x = \pi$ از سری مربوط به g، خواهیم داشت

$$g(\pi) = \frac{۱}{۲} \pi a_۰ = \frac{۱}{۲} \pi A_۰ - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n} b_n$$

[توجه کنید که $\operatorname{Cos} n\pi = (-1)^n$] یا

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2}\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} b_n$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل شده است.

مثال ۳-۴-۱۳

الف) تابع

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le \pi \end{cases} \quad , \; f(x + 2\pi) = f(x)$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید که سری مثلثاتی کلی فوریهٔ تابع f عبارت است از

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin}(2n-1)x}{2n-1} \qquad (6)$$

ب) سری فوریهٔ انتگرال تابع f، یعنی $-\pi < x \le \pi$ و $g(x) = |x|$ را بر روی یک دورهٔ تناوب تابع f به‌دست آورید.

حل

بنا به تعریف سری فوریه خواهیم داشت

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} nx + b_n \operatorname{Sin} nx)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Cos} nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{Sin} nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

اینک با توجه به تعریف تابع f ، ضرایب فوریه را به صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$a_\circ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\circ} -\,dx + \int_{\circ}^{\pi} dx = \circ$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{Cos}\,nx\,dx = \int_{-\pi}^{\circ} -\,\mathrm{Cos}\,nx\,dx + \int_{\circ}^{\pi}\mathrm{Cos}\,nx\,dx = \circ$$

و

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx = \int_{-\pi}^{\circ} -\,\mathrm{Sin}\,nx\,dx + \int_{\circ}^{\pi}\mathrm{Sin}\,nx\,dx$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\circ} - \frac{\mathrm{Cos}\,nx}{n}\Big|_{\circ}^{\pi}$$

$$= \frac{۱}{n} - \frac{\mathrm{Cos}\,n\pi}{n} - \frac{\mathrm{Cos}\,n\pi}{n} + \frac{۱}{n}$$

$$= \frac{۲}{n} - \frac{۲\mathrm{Cos}\,n\pi}{n} = \frac{۲-۲(-۱)^n}{n} = \begin{cases} \frac{۴}{n} & \text{اگر n عدد صحیح فرد} \\ \circ & \text{اگر n عدد صحیح زوج} \end{cases}$$

بنابراین، سری فوریه به صورت

$$f(x) = \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mathrm{Sin}\,(۲n-۱)x}{۲n-۱}$$

درمی‌آید.

پ) با توجه به قضیه ۳-۴-۱۲ می‌توان از طرف رابطهٔ (۶) انتگرال گرفت، بنابراین

$$g(x) = C - \frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\mathrm{Cos}\,(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۲}$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری است. چون نتیجهٔ اخیر باید بسط سری فوریهٔ تابع g باشد، بنابراین

$$C = \frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \; dx = \frac{1}{2}\pi$$

و بنابراین

$$g(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

نتیجه اخیر را با نتیجه مثال ۳-۱-۶ مقایسه کنید.

تمرین ۳-۴-۱۴

تابع

$$f(x) = \begin{cases} -K & -\pi < x < 0 \\ K & 0 < x < \pi \end{cases} \quad , \; f(x + 2\pi) = f(x)$$

را در نظر بگیرید.

الف) سری مثلثاتی کلی فوریه تابع f را پیدا کنید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

پ) نمودار تابعی را که به ازای $-3\pi \le x \le 3\pi$ سری به آن همگراست، رسم کنید.

تمرین ۳-۴-۱۵

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 4 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \quad , \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

را در نظر بگیرید. سری مثلثاتی کلی فوریهٔ f در نقاط زیر به چه مقداری همگراست؟

الف) $x = 0$ ، ب) $x = \frac{\pi}{2}$ ، پ) $x = \pi$
ت) $x = 2\pi$ ، ث) $x = \frac{\pi}{3}$

تمرین ۳-۴-۱۶

تابع متناوب با دوره تناوب 2π ، $-\pi < x \leq \pi$ و $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.

الف) نشان دهید که سری مثلثاتی کلی فوریهٔ f عبارت است از

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که

ب) $$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

پ) $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

از (ب) و (پ) نتیجه بگیرید که

ت) $$1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

تمرین ۳-۴-۱۷

سری فوریهٔ کدام‌یک از توابع متناوب زیر با دوره تناوب 2π به‌طور یکنواخت همگرا می‌باشد؟

الف) $f(x) = \sin^2 x , -\pi < x \leq \pi$

ب) $f(x) = x^2 , -\pi < x \leq \pi$

پ) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} , -\pi < x \leq \pi$

تذکر ۳-۴-۱۸

در قضیهٔ زیر به جای توابع متناوب توابعی را که تنها بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ تعریف شده‌اند، بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳-۴-۱۹

فرض کنیم f بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای هموار باشد. در این صورت سری فوریهٔ مثلثاتی (۱) برای $f(x)$ به ازای هر x در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ به $\frac{1}{2}\,[f(x^+)+f(x^-)]$ همگراست و در $x=\pm\pi$ سری به مقدار $\frac{1}{2}\,[f(-\pi^+)+f(\pi^-)]$ همگراست.

اثبات

فرض کنیم تابع متناوب f با دوره تناوب 2π چنان باشد که برای $-\pi\le x\le\pi$ $F(x)=f(x)$ و تابع F بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای هموار است. سری فوریهٔ برای $F(x)$ شبیه به سری فوریه برای $f(x)$ است و بنا بر قضیه ۳-۴-۶ این سری به ازای هر x به $\frac{1}{2}\,[F(x^+)+F(x^-)]$ همگراست. در نتیجه این سری برای $-\pi<x<\pi$ به $\frac{1}{2}\,[f(x^+)+f(x^-)]$ همگراست. چون $F(-\pi^-)=f(\pi^-)$ و $F(\pi^+)+f(-\pi^+)$، بنابراین به ازای $x=\pm\pi$ سری $\frac{1}{2}\,[f(-\pi^+)+f(\pi^-)]$ همگراست.

مثال ۳-۴-۲۰

تابع

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ 1 & 0<x\le\pi \end{cases}$$

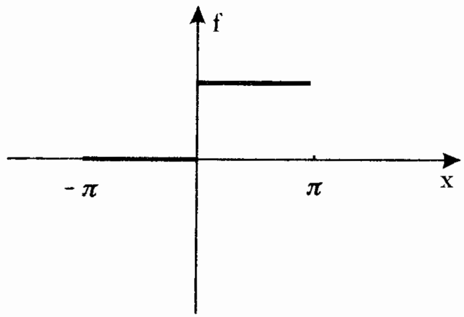
را در نظر بگیرید. بسط سری فوریه مثلثاتی این تابع را پیدا کنید. نمودار تابعی که به ازای $-3\pi\le x\le 3\pi$ سری به آن همگراست، رسم کنید.

حل

تابع f بر بازهٔ $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای پیوسته است و مشتق آن

$$f'(x)=0 \quad , \quad -\pi<x<0 \quad , \quad 0<x<\pi$$

بر این بازه قطعه‌ای پیوسته است. از این رو f بر بازهٔ $[-\pi, \pi]$ قطعه‌ای هموار است. شکل ۱ را ببینید.



شکل ۱

در اینجا ضرایب فوریهٔ f عبارتند از

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\, dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{Cos}\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Cos}\, nx\, dx = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

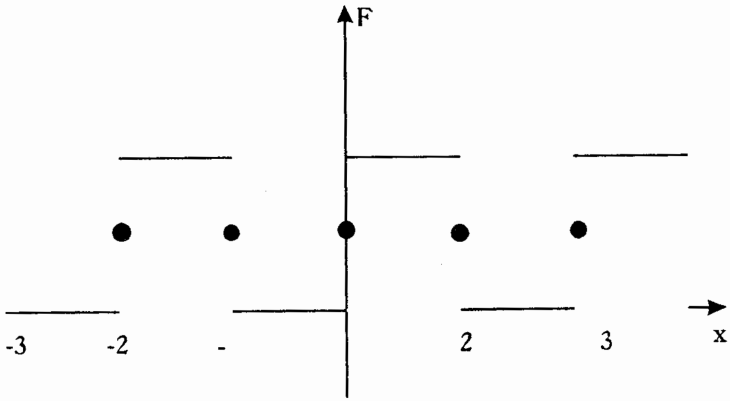
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{Sin}\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Sin}\, nx\, dx$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[\mathrm{Cos}\, nx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}[1 - \mathrm{Cos}\, n\pi] = \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه برای f(x) عبارت است از

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}\, (2n-1)x}{2n-1}$$

اگرچه f در خارج بازهٔ $(-\pi, \pi)$ تعریف نشده است، اما سری همه جا همگراست و تابع F را که متناوب با دوره تناوب 2π است، نمایش می‌دهد. نمودار تابع F در بازهٔ $[-3\pi, 3\pi]$ در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲

قضیه ۳-۴-۲۱

فرض کنیم f بربازهٔ $[-C,C]$ قطعه‌ای هموارباشد. در این صورت سری فوریهٔ مثلثاتی

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{C} + b_n \sin \frac{n\pi x}{C}\right) \qquad (7)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{-c}^{c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C}\, dx \qquad , \qquad n \geq 0$$

(۸)

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-c}^{c} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C}\, dx \qquad , \qquad n \geq 1$$

برای $-C < x < C$ به $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ همگراست. در $x = \pm C$ سری به مقدار $\frac{1}{2}[f(-C^+)+f(C^-)]$ همگراست.

اثبات

اگر تغییر متغیر $x = \frac{\pi t}{C}$ را به کار گیریم و قرار دهیم $f(x) = f(\frac{\pi t}{C}) \equiv F(t)$ تابع

جدید F(t) بر بازهٔ $-C \le t \le C$ قطعه‌ای هموار است و از قضیهٔ ۳-۴-۱۹ به‌دست می‌آوریم

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{C} + b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi t}{C})$$

که درآن

$$a_n = \frac{1}{C} \int_{-c}^{c} F(t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{C} dt \quad , \quad n \ge 0$$

$$b_n = \frac{1}{C} \int_{-c}^{c} F(t) \operatorname{Cos} \frac{n\pi t}{C} dt \quad , \quad n \ge 1$$

با تغییر متغیر t به x و با قرار دادن f به‌جای F در فرمولهای بالا، روابط (۷) و (۸) به‌دست می‌آید.

تذکر ۳-۴-۲۲

در حالت کلی‌تر می‌توان تابع f تعریف شده بر بازهٔ $[a, a+T]$ را در نظر گرفت، که در آن a و T دو عدد حقیقی و دلخواه می‌باشند. در این صورت با بحثی شبیه به بحث بالا، می‌توان نشان داد که تابع f بسط سری فوریه‌ای به صورت زیر دارد.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} \frac{2n\pi x}{T} + b_n \operatorname{Sin} \frac{2n\pi}{T} x) \qquad (9)$$

که در آن

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{a}^{a+T} f(x) \operatorname{Cos} \frac{2n\pi x}{T} dx \quad , \quad n \ge 0 \qquad (10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{a}^{a+T} f(x) \operatorname{Sin} \frac{2n\pi x}{T} dx \quad , \quad n \ge 1$$

توجه می‌کنیم که وقتی $a = -C$ این روابط به صورت روابط (۷) و (۸) درمی‌آیند. همچنین با قرار دادن $a = -\frac{T}{2}$ روابط بالا به صورت روابط زیر درمی‌آیند:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Cos} \frac{2n\pi x}{T} + b_n \operatorname{Sin} \frac{2n\pi}{T} x) \qquad (11)$$

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\,\mathrm{Cos}\,\frac{۲n\pi x}{T}\,dx \qquad , \qquad n \geq ۰$$

(۱۲)

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{-\frac{T}{۲}}^{\frac{T}{۲}} f(x)\,\mathrm{Sin}\,\frac{۲n\pi x}{T}\,dx \qquad , \qquad n \geq ۱$$

تمرین ۳-۴-۲۳

بسط سری فوریهٔ مثلثاتی تابع $۰ < x < ۱$ ، $f(x) = x$ را پیدا کنید.

تمرین ۳-۴-۲۴

الف) نشان دهید که از سری فوریهٔ تابع $-\pi \leq x \leq \pi$ و $f(x) = x^۲$ می‌توان جمله به جمله از ۰ تا x وقتی $-\pi \leq x \leq \pi$ انتگرال گرفت. (تمرین ۳-۴-۱۶ را ببینید.) نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{\mathrm{Sin}\,nx}{n^۳} = \frac{۱}{۱۲}x(x^۲ - \pi^۲)$$

ب) با به‌کار بردن نتیجه قسمت (الف) نشان دهید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{(۲n-۱)^۳} = \frac{\pi^۳}{۳۲}$$

تمرین ۳-۴-۲۵

نشان دهید که ضرایب فوریهٔ سری فوریهٔ تابع قطعه‌ای هموار f تعریف شده بر $[-\pi, \pi]$ در معادلهٔ پارسوال

$$\frac{a_۰^۲}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n^۲ + b_n^۲) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^۲\,dx = \frac{۱}{\pi}\,\|f\|^۲$$

صدق می‌کنند.

تمرین ۳-۴-۲۶

تابع $f(x) = x^{2}$ و $-\pi \leq x \leq \pi$ را در نظر بگیرید. با استفاده از قسمت (الف) تمرین ۳-۴-۲۵ نشان دهید،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6}} = \frac{\pi^{6}}{945}$$

تمرین ۳-۴-۲۷

تابع $f(x) = \operatorname{Cos} Kx$ و $-\pi < x < \pi$ را که در آن K یک عدد صحیح نیست، در نظر بگیرید.

الف) سری فوریهٔ آن را پیدا کنید.

ب) با استفاده از سری فوریهٔ قسمت (الف) و با قرار دادن $K = z$ و جایگذاری $x = 0$ و $x = \pi$ بسط سریهای زیر را به دست آورید.

$$\operatorname{CSC} z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{z^{2} - n^{2}}$$

$$\operatorname{Cot} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2} - n^{2}}$$

پ) با فرض $0 < z < 1$ و با انتگرالگیری از سری مربوط به $\operatorname{Cot} \pi z$ از $z = 0$ تا $z = x$، $0 < x < 1$ در قسمت (ب) نشان دهید که

$$L_n \left(\frac{\operatorname{Sin} \pi x}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^{2}}{n^{2}}\right)$$

یا به‌طور معادل خواهیم داشت[1]

$$L_n (\operatorname{Sin} \pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^{2}}{n^{2}}\right)$$

۱. علامت $\prod_{n=1}^{\infty}$ حاصلضرب نامتناهی را نشان می‌دهد.

ت) با فرض ۱ > z > ۰ نشان دهید

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} \pi z}$$

راهنمایی: انتگرال را به صورت مجموع دو انتگرال به قسمی که بازهٔ انتگرال اولی (۰,۱) و دومی (∞ ,۱) باشد، بنویسید. سپس از تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ برای انتگرال دوم استفاده کنید.

تمرین ۳-۴-۲۸

فرض کنید f بر بازهٔ [$-\pi$ π] پیوسته و قطعه‌ای هموار باشد، نشان دهید که

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \qquad , \qquad -\pi < x < \pi$$

که در آن

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

تعریف ۳-۴-۲۹

تابع f که بر بازه‌ای به صورت (a,a-) یا [a,a-] یا (∞ , ∞-) تعریف شده است زوج گفته می‌شود اگر به ازای هر x در این بازه $f(-x) = f(x)$ و آن را فرد گوییم اگر به ازای هر x در این بازه $f(-x) = -f(x)$.

تذکر ۳-۴-۳۰

اگر f زوج و g فرد باشد، آنگاه fg فرد است. برای اثبات این مطلب، مشاهده می‌کنیم که اگر $F = fg$ آنگاه

$$F(-x) = f(-x)\, g(-x) = f(x)\,[-g(x)] = -f(x)\, g(x) = -F(x)$$

همچنین به آسانی می‌توان نشان داد که اگر f و g هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، آنگاه fg زوج است.

تذکر ۳-۴-۳۱

با توجه به تعبیر هندسی توابع زوج و فرد به وضوح روشن است که اگر تابع f بر بازهٔ $[-a,a]$ تعریف شده و فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = ۰$$

و اگر f زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)\,dx$$

قضیه ۳-۴-۳۲

فرض کنیم f بر بازهٔ $[۰,C]$ قطعه‌ای هموار باشد. در این صورت سری سینوسی فوریه برای $f(x)$ عبارت است از

$$\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{C}$$

$$b_n = \frac{۲}{C}\int_{۰}^{c} f(x) \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{C}\,dx \qquad , \qquad n \geq ۱$$

که به ازای $۰ < x < C$ به $\frac{۱}{۲}[f(x^+)+f(x^-)]$ و در $x = ۰$ یا $x = C$ به صفر همگراست.

اثبات

فرض می‌کنیم F تابعی فرد باشد که بر $[-C,C]$ تعریف شده و بر $(۰,C]$ برابر f است. در این صورت F بر $[-C,C]$ قطعه‌ای هموار است. اگر $F(x)$ را به سری فوریهٔ مثلثاتی بسط دهیم، همهٔ ضرایب جمله‌های کسینوسی

$$a_n = \frac{۱}{C}\int_{-c}^{c} F(x) \operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{C}\,dx \qquad , \qquad n \geq ۰$$

صفر می‌شوند. زیرا تابع زیر علامت انتگرال فرد است و ضرایب جمله‌های

سینوسی عبارتند از

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-c}^{c} F(x)\ \mathrm{Sin}\ \frac{n\pi x}{C}\ dx = \frac{2}{C}\int_{0}^{c} f(x)\ \mathrm{Sin}\ \frac{n\pi x}{C}\ dx \qquad , \qquad n\geq 1$$

بنابراین سری مثلثاتی $F(x)$ همان سری سینوسی $f(x)$ است. سری به ازای هر $0 < x < C$ به $\frac{1}{2}[F(x^+) + F(x^-)]$ همگراست و در نتیجه سری سینوسی به $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ همگراست و در $x = 0$ و $x = C$ به دلیل اینکه F بسط فرد تابع f بر بازهٔ $[-C,C]$ است پس $F(0^+) = -F(0^-)$ و $F(C^+) = -F(C^-)$. بنابراین سری مثلثاتی به صفر همگراست، و در نتیجه سری سینوسی نیز به صفر همگراست.

قضیه ۳-۴-۳۳

فرض کنیم f بر بازهٔ $[0,C]$، قطعه‌ای هموار باشد، در این صورت سری کسینوسی فوریه برای $f(x)$، عبارت است از

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{C}$$

$$a_n = \frac{2}{C}\int_{0}^{c} f(x)\ \mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{C}\ dx \qquad , \qquad n\geq 1$$

به ازای $0 < x < C$ به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ و وقتی $x = 0$ به $f(0^+)$ و در $x=C$ به $f(C^-)$ همگراست.

اثبات

فرض می‌کنیم G تابعی زوج باشد که بر $[-C,C]$ تعریف شده است و با تابع f بر $[0,C]$ مساو باشد. در این صورت G بر $[-C,C]$ قطعه‌ای هموار است. اگر G را به سری فوریهٔ مثلثاتی بسط دهیم، همهٔ ضرایب جمله‌های سینوسی

$$b_n = \frac{1}{C}\int_{-c}^{c} G(x)\ \mathrm{Sin}\ \frac{n\pi x}{C}\ dx \qquad , \qquad n\geq 1$$

صفر می‌شوند. زیرا تابع زیر علامت انتگرال فرد است و ضرایب جمله‌های کسینوسی عبارتند از

$$a_n = \frac{1}{C}\int_{-c}^{c} G(x)\ \text{Cos}\ \frac{n\pi x}{C}\ dx = \frac{2}{C}\int_{0}^{c} f(x)\ \text{Cos}\ \frac{n\pi x}{C}\ dx \qquad n \geq 0$$

بنابراین سری مثلثاتی فوریهٔ $G(x)$ همان سری کسینوسی $f(x)$ است. سری به ازای هر $0 < x < C$ به $\frac{1}{2}[G(x^+)+G(x^-)]$ همگراست و در نتیجه سری کسینوسی به $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ همگراست. اینک به دلیل اینکه G بسط زوج تابع f است، پس $G(0^+) = G(0^-)$ و $G(C^+) = G(C^-)$ بنابراین سری مثلثاتی به ازای $x=0$ به $f(0^+)=G(0^+)$ و به ازای $x = C$ به $G(C^+)=f(C^-)$ همگراست. در نتیجه سری کسینوسی نیز به همین مقادیر همگراست.

تذکر ۳-۴-۳۴

قضیهٔ زیر در مورد همگرایی یکنواخت سریهای فوریه سینوسی و کسینوسی حالت خاصی از قضیهٔ ۳-۴-۹ می‌باشند.

قضیه ۳-۴-۳۵

فرض کنیم f یک تابع پیوسته و قطعه‌ای هموار بر بازهٔ $0 \leq x \leq \pi$ باشد. در این صورت سری فوریهٔ کسینوسی f، یعنی

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \text{Cos}\ nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \text{Cos}\ nx\ dx \quad , \quad n = 0,1,2,... \tag{12}$$

به ازای هر $0 \leq x \leq \pi$ به $f(x)$ و به ازای هر x به تابع متناوبی که بسط زوج f است، به‌طور مطلق و یکنواخت همگراست.

اگر علاوه بر این، f در شرایط $f(0) = f(\pi) = 0$ صدق کند، آنگاه به همین نحو

سری فوریهٔ سینوسی f یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{Sin} nx$$

(۱۳)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{Sin} nx \, dx \qquad n \geq 1$$

بر بازهٔ $0 \leq x \leq \pi$ به f و به ازای هر x به تابع متناوبی که بسط فرد تابع f می‌باشد، به‌طور مطلق و یکنواخت همگراست.

تذکر ۳-۴-۳۶

توجه می‌کنیم که در اینجا شرط $f(0) = f(\pi) = 0$ پیوستگی تابع متناوبی که بسط فرد f می‌باشد را تضمین می‌کند.

تمرین ۳-۴-۳۷

سری فوریهٔ کسینوسی و سینوسی تابع $0 \leq x \leq \pi$ و $f(x) = x$ را پیدا کنید.

تمرین ۳-۴-۳۸

سری فوریهٔ کسینوسی تابع

$$f(x)= \begin{cases} \operatorname{Cos} x \quad , & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

را پیدا کنید.

تمرین ۳-۴-۳۹

سری فوریه سینوسی تابع

$$f(x)= \begin{cases} x \quad , & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \quad , & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

را پیدا کنید.

تذکر ۳ـ۴ـ۴۰

در قضایای مربوط به همگرایی سری فوریهٔ چندجمله‌ایهای چپیشف، لاگر و هرمیت را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۳ـ۴ـ۴۱

فرض کنیم f بر بازهٔ $[-1,1]$ قطعه‌ای هموار باشد. در این صورت سری فوریه چندجمله‌ایهای چپیشف از نوع اول برای $f(x)$ به ازای $-1 < x < 1$ به $\frac{1}{2}\ [f(x^+) + f(x^-)]$ و در نقطهٔ $x = -1$ به $f(-1^+)$ و در نقطهٔ $x = 1$ به $f(1^-)$ همگراست. سری چندجمله‌ایهای چپیشف از نوع دوم به ازای $-1 < x < 1$ به $\frac{1}{2}\ [f(x^+) + f(x^-)]$ همگراست.

۳ـ۴ـ۴۲

فرض کنیم f بر هر بازهٔ متناهی به صورت $[0,b]$، $b > 0$ قطعه‌ای هموار باشد و انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-x}\ [f(x)]^2\ dx$$

موجود باشد. در این صورت سری چندجمله‌ایهای لاگر برای $f(x)$ به ازای $0 < x < \infty$ به $\frac{1}{2}\ [f(x^+) + f(x^-)]$ همگراست.

قضیه ۳ـ۴ـ۴۳

فرض کنیم f بر هر بازهٔ متناهی قطعه‌ای هموار باشد و انتگرال

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\ [f(x)]^2\ dx$$

موجود باشد. در این صورت سری چندجمله‌ایهای هرمیت برای $f(x)$ به ازای هر x به $\frac{1}{2}\ [f(x^+) + f(x^-)]$ همگراست.

۳-۵ــ انتگرال فوریه

در بخش نمایش یک تابع توسط سری فوریه را بررسی کردیم. مشاهده کردیم که اگر سری فوریه به تابع بر بازهٔ متناهی همگرا باشد، آنگاه سری بسط متناوبی از تابع را در خارج این فاصله نمایش می‌دهد. این مطلب به این معناست که در حالتی که تابع به ازای هر x تعریف شده باشد، این تابع را نمی‌توان توسط سری فوریه‌ای نمایش داد که به ازای هر x برقرار باشد، مگر اینکه تابع متناوب باشد. در این بخش می‌خواهیم بسطی مشابه برای تابع غیرمتناوبی که به ازای هر x تعریف شده‌اند به‌دست آوریم. بدین منظور سری فوریهٔ تابع را بر بازهٔ دلخواهی مانند $[-L,L]$ در نظر می‌گیریم و حد آن را وقتی L به بینهایت میل می‌کند، بررسی می‌کنیم.

انتگرال ۳-۵-۱

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $-\infty < x < \infty$ قطعه‌ای هموار باشد. در این صورت بر هر زیر بازه‌ای به صورت $[-L,L]$، f دارای بسط سری فوریه‌ای به صورت زیر است. (قضیه ۳-۴-۲۱ را ببینید.)

$$f(x) = \frac{a_0}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (۱)$$

که در آن،

$$a_n = \frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi) \cos\frac{n\pi\xi}{L}\, d\xi \quad , \quad n = ۰,۱,۲,\ldots$$

$$b_n = \frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{L}\, d\xi \quad , \quad n = ۱,۲,\ldots \qquad (۲)$$

می‌دانیم که در هر نقطه‌ای، مانند x، که تابع f ناپیوسته است، f(x) باید با $\frac{۱}{۲}[f(x^+) + f(x^-)]$ جایگزین گردد. با جایگذاری a_n و b_n در (۱) به دست می‌آوریم

$$f(x) = \frac{۱}{۲L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\, d\xi + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\left[\cos\frac{n\pi\xi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} + \sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right] d\xi$$

$$= \frac{۱}{۲L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\, d\xi + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}(\xi - x) \qquad (۳)$$

اینک، اگر $L \to \infty$، جمله اول در سمت راست (۳) صفر می‌شود. مشروط بر اینکه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi$ موجود باشد؛ که مطمئناً اگر فرض کنیم که f بر $-\infty < x < \infty$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، موجود است. با فرض اینکه f بر بازهٔ $-\infty < x < \infty$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، اگر $L \to \infty$ از (۳) به دست می‌آوریم

$$f(x) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \cos \frac{n\pi}{L} (\xi - x) d\xi \qquad (۴)$$

به منظور بررسی حد در سمت راست رابطهٔ (۴)، قرار می‌دهیم

$$S_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad \Delta S_n = S_{n+1} - S_n = \frac{\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

در این صورت (۴) را می‌توان به صورت

$$f(x) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-L}^{L} f(\xi) \cos S_n (\xi - x) d\xi \right] \Delta S_n \qquad (۵)$$

نوشت. مجموع در معادله (۵)، مجموع تعریف شده در انتگرال معین تابع

$$F(x,S) = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(\xi) \cos S (\xi - x) d\xi$$

بر بازهٔ $0 \le S < \infty$ تدایی می‌کند. بنابراین، طبیعی است که انتظار داشته باشیم وقتی $L \to \infty$ (۵) به

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos S (\xi - x) d\xi \qquad (۶)$$

منتهی گردد. فرمول (۶) ***انتگرال فوریهٔ*** تابع f نامیده می‌شود. اینک در زیر نشان می‌دهیم، تحت شرایطی که بر f تحمیل خواهیم کرد، در واقع f را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

قضیه ۳-۵-۲

فرض کنیم f بر بازهٔ $-\infty < x < \infty$ قطعه‌ای هموار و مطلقاً انتگرالپذیر باشد. در این صورت، در هر نقطهٔ x در $(-\infty,\infty)$

$$\frac{1}{2}\left[f(x^{+}) + f(x^{-}) \right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{Cos}\, S\, (\xi - x)\, d\xi \qquad (۷)$$

اثبات

بنا به تعریف انتگرال ناسره، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{Cos}\, S\, (\xi - x)\, d\xi$$

(۸)

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\lambda} dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{Cos}\, S\, (\xi - x)\, d\xi$$

انتگرال داخلی در (۸) به ازای $\lambda > S > 0$ نسبت به S همگرای یکنواخت است، زیرا

$$| f(\xi)\, \mathrm{Cos}\, S\, (\xi - x) | \leq | f(\xi) |$$

و f بر $(-\infty,\infty)$ مطلقاً انتگرالپذیر است. از این‌رو، ترتیب انتگرالگیری نسبت به ξ و S را می‌توان تعویض کرد. بنابراین، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{Cos}\, S(\xi - x)\, d\xi = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{0}^{\lambda} \mathrm{Cos}\, S(\psi - x)\, dS\, d\xi$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi}\, dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \frac{\mathrm{Sin}\, \lambda\, (\xi - x)}{(\xi - x)}\, d\xi$$

با قرار دادن $t = \xi - x$ رابطهٔ بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \mathrm{Cos}S\,(\xi-x)\, d\xi = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda t}{t}\,dt \qquad (۹)$$

از طرفی می‌دانیم که $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\, t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ (تبدیلات لاپلاس کتاب معادلات دیفرانسیل رشتهٔ ریاضی از این سری کتابها را ببینید.) بنابراین

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda t}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \qquad (۱۰)$$

از این‌رو با توجه به (۹) و (۱۰) فرمول انتگرال فوریه در (۷) ثابت می‌شود اگر بتوانیم نشان دهیم که

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} [\, f(x+t) - f(x^-)\,]\,\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda t}{t}\, dt = 0 \qquad (۱۱)$$

و

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [\, f(x+t) - f(x^+)\,]\,\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda t}{t}\, dt = 0 \qquad (۱۲)$$

انتگرال در (۱۲) را می‌توان به صورت

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}\,\mathrm{Sin}\,\lambda t\, dt$$

$$= I_1 + I_2 - I_3$$

نوشت، که در آن

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}\,\mathrm{Sin}\,\lambda t\, dt$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_b^\infty \frac{f(x+t)}{t}\,\mathrm{Sin}\,\lambda t\, dt$$

$$I_3 = \frac{f(x^+)}{\pi} \int_b^\infty \frac{\operatorname{Sin} \lambda t}{t}\, dt$$

و b یک عدد دلخواه است. چون $\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$ به ازای $0 \le t \le b$ قطعه‌ای پیوسته و $\frac{f(x^+)}{t}$ بر بازهٔ $b \le t < \infty$ قطعه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرالپذیر است، از قضیهٔ ریمان ـ لبگ (صورت این قضیه را در زیر بیان خواهیم کرد.) نتیجه می‌شود که I_1 و I_2 به صفر میل می‌کنند وقتی $\lambda \to \infty$. تغییر متغیر $\lambda t = z$، I_3 را به

$$I_3 = \frac{f(x^+)}{\pi} \int_{\lambda b}^\infty \frac{\operatorname{Sin} z}{z}\, dz$$

تبدیل می‌کند، که به وضوح به صفر میل می‌کند وقتی $\lambda \to \infty$ بنابراین

$$\lim_{\lambda \to \infty} I = \lim\, [\, I_1 + I_2 - I_3\,] = 0$$

به همین نحو، می‌توان نشان داد که مقدار حد در (۱۱) صفر است.

قضیه ۳-۵-۳

(لبگ ـ ریمان) اگر تابع g بر بازهٔ $a \le t \le b$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(t) \operatorname{Sin} \lambda t\, dt = 0$$

قضیه ۳-۵-۴

اگر تابع g بر بازهٔ $a \le t < \infty$ قطعه‌ای پیوسته بوده و

$$\int_a^\infty |g(t)|\, dt$$

موجود باشد، (یعنی g بر $a \le x < \infty$ مطلقاً انتگرالپذیر باشد)، آنگاه

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^\infty g(t) \operatorname{Sin} \lambda t\, dt = 0$$

تذکر ۳-۵-۵

با بسط $\cos S\,(\xi - x)$ از فرمول (۶) مشاهده می‌کنیم که انتگرال فوریه را می‌توان به صورت

$$f(x) = \int_{\circ}^{\infty} [\, A(S) \cos Sx + B(S) \sin Sx \,]\, dS \qquad (۱۳)$$

نوشت، که در آن

$$A(S) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos S\xi \, d\xi$$
$$B(S) = \frac{۱}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin S\xi \, d\xi \qquad (۱۴)$$

مثال ۳-۵-۶

فرمول انتگرال، تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| < ۱ \\ \circ & |x| > ۱ \end{cases}$$

را پیدا کنید.

حل

به وضوح تابع f در شرایط قضیه ۳-۵-۱ صدق می‌کند. بنابراین به ازای $-\infty < x < \infty$ خواهیم داشت

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{۲} = \frac{۱}{\pi} \int_{\circ}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos S\,(\xi - x)\, d\xi$$

$$= \frac{۱}{\pi} \int_{\circ}^{\infty} dS \int_{-۱}^{۱} \cos S\,(\xi - x)\, d\xi$$

$$= \frac{۱}{\pi} \int_{\circ}^{\infty} \left[\frac{\sin S\,(\xi - x)}{S} \right]_{-۱}^{۱} dS$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin S(1-x) + \sin S(1+x)}{S} dS$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos Sx \sin S}{S} dS$$

بنابراین

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos Sx \sin S}{S} dS = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

به ویژه،با قرار دادن $x = 1$ در رابطهٔ اخیر، به دست می‌آوریم

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos S \sin S}{S} dS = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 2S}{S} = \frac{1}{2}$$

تذکر ۳-۵-۷

فرض کنیم f تابعی زوج باشد که در شرایط قضیه ۳-۵-۱ صدق می‌کند. در این صورت $f(\xi) \cos S\xi$ و $f(\xi) \sin S\xi$ به ترتیب توابعی زوج و فرد از ξ می‌باشند. فرمولهای (۱۴) به

$$A(S) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos S\xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos S\xi \, d\xi$$

و

$$B(S) = 0$$

منتهی می‌گردند. بنابراین فرمول (۱۳) به صورت

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin Sx \left(\int_0^\infty f(\xi) \cos S\xi \, d\xi \right) dS \qquad (15)$$

تحویل می‌یابد. این فرمول به فرمول ***انتگرال کسینوسی فوریه*** معروف است. در این حالت f فقط به ازای $0 \le x < \infty$ تعریف شده است و فرمول (۱۵) f را به ازای هر x به

یک تابع زوج توسعه می‌دهد.

به همین نحو، اگر f تابعی فرد باشد، آنگاه از فرمول (۱۴)، خواهیم داشت

$$A(S) = 0 \qquad B(S) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\,\mathrm{Sin}\,S\xi\,d\xi$$

بنابراین، انتگرال فوریهٔ (۱۳) به صورت انتگرال سینوسی فوریهٔ

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Sin}\,Sx\left(\int_0^\infty f(\xi)\,\mathrm{Sin}\,S\xi\,d\xi\right)d\xi \qquad (16)$$

درمی‌آید. در این حالت فرمول (۱۶) تابع f را که فقط به ازای $0 \le x < \infty$ تعریف شده است به ازای هر x به یک تابع فرد توسعه می‌دهد.

قضیه ۳-۵-۸

فرض کنیم f بر بازهٔ $0 \le x < \infty$ قطعه‌ای هموار و مطلقاً انتگرالپذیر باشد. در این صورت f را می‌توان به ازای $0 \le x < \infty$ توسط فرمول انتگرال کسینوسی، فرمول (۱۵) یا به ازای $0 < x < \infty$ توسط فرمول انتگرال سینوسی فوریه، فرمول (۱۶) نمایش داد. هریک از این انتگرالها به $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ همگراست. توجه می‌کنیم که انتگرال کسینوسی فوریه در $x = 0$ به $f(0^+)$ و انتگرال سینوسی فوریه در $x = 0$ به صفر همگراست.

تمرین ۳-۵-۹

فرمول انتگرال کسینوسی فوریه را برای تابع

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Sin}\,x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

را پیدا کنید.

تمرین ۳-۵-۱۰

فرمول انتگرال سینوسی فوریه را برای تابع داده شده در تمرین ۳-۵-۸ پیدا کنید.

تمرینهای گوناگون فصل ۵

۳-۵-۱۱

در تمرینهای ۱ تا ۳ سری فوریهٔ تابع داده شده را پیدا کنید. نمودار تابع متناوبی را که به ازای $-\pi \le x \le \pi$ سری به آن همگراست، رسم کنید.

.۱
$$f(x) = \begin{cases} -\pi & -\pi < x < 0 \\ x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

.۲
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

.۳
$$f(x) = \sinh x \qquad -\pi < x < \pi$$

۴. فرض کنیم f یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π باشد، به ازای هر x قرار می‌دهیم $g(x) = f(x - L)$. نشان دهید که

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

که در آن a_n و b_n ضرایب فوریهٔ تابع f می‌باشند.

۵. با استفاده از نتیجه تمرین ۴ و تمرین ۲ سری فوریهٔ تابع

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & -\pi \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

با $f(x + 2\pi) = f(x)$ را به دست آورید.

۶. اگر $f(x - L) = f(x)$، نشان دهید، به ازای $n \geq ۱$، $a_{۲n-۱} = b_{۲n-۱} = ۰$ و

$$a_{۲n} = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\ \mathrm{Cos}\ \frac{۲n\pi x}{L}\,dx \qquad , \qquad n \geq ۰$$

$$b_{۲n} = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\ \mathrm{Sin}\ \frac{۲n\pi x}{L}\,dx \qquad , \qquad n \geq ۱$$

۷. با به‌کار بردن نتیجه تمرین ۶، سری فوریه تابع

$$f(x) = x \qquad , \qquad ۰ \leq x < \pi \qquad , \qquad f(x - \pi) = f(x)$$

را پیدا کنید.

۸. با به‌کار بردن صورت مختلط سری فوریه (تمرین ۳-۴-۲۹ را ببینید.) نشان دهید سری فوریهٔ تابع

$$f(x) = e^{ax} \qquad\qquad -\pi < x < \pi$$

عبارت است از

$$e^{ax} = \mathrm{Sin\ h}\, a\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-۱)^{n}\ \frac{a\pi + i n\pi}{a^{۲}\pi^{۲} + n^{۲}\pi^{۲}}\, e^{inx}$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۱ سری کسینوسی فوریه تابع داده شده را پیدا کنید.

۹. $$f(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ ۱ - x & \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

۱۰. $$f(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x < ۱ \\ ۰ & ۱ < x < ۲ \end{cases}$$

۱۱. $$f(x) = e^{x} \qquad\qquad ۰ < x < \pi$$

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۴ سری سینوسی فوریه تابع داده شده را پیدا کنید.

.۱۲

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Sin} x & \circ \le x \le \frac{\pi}{۲} \\ \circ & \frac{\pi}{۲} < x \le \pi \end{cases}$$

.۱۳

$$f(x) = e^{x} \qquad \circ < x < \pi$$

.۱۴

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} & \circ \le x \le ۱ \\ ۱ & ۱ \le x \le ۲ \end{cases}$$

۱۵. با استفاده از سری فوریهٔ تابع $-\pi < x < \pi$ ، $f(x) = e^{x}$، نشان دهید که

$$۱ + ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}+۱} \le \pi \operatorname{Cot} h\, \pi$$

۱۶. فرض کنیم به ازای $-\pi \le x \le \pi$ ، $f(x) = x^{۲}$ و به ازای هر x ، $f(x+۲\pi) = f(x)$. ثابت کنید که رابطهٔ

$$f(x) = \frac{\pi^{۲}}{۳} + ۴\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n} \frac{\operatorname{Cos} nx}{n^{۲}}$$

به ازای هر x برقرار است، و از آن نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۱۲} \quad , \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۶}$$

۱۷. فرض کنیم به ازای هر x ، $f(x + ۲\pi) = f(x)$ که در آن

$$f(x) = \begin{cases} \circ & -\pi \le x \le \circ \\ \operatorname{Sin} x & \circ \le x \le \pi \end{cases}$$

ثابت کنید که به ازای هر x

$$f(x) = \frac{۱}{\pi} + \frac{۱}{۲}\,\mathrm{Sin}\ x - \frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}\ ۲\pi x}{۴n^{۲}-۱}$$

و از آن نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴n^{۲}-۱} = \frac{۱}{۲}$$

۱۸. فرض کنیم تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - \dfrac{x}{۲h} & ۰ \le x \le ۲h \\ ۰ & ۲h \le x \le \pi \end{cases}$$

به یک تابع زوج متناوب با دورهٔ تناوب ۲π توسعه داده شود. نشان دهید که به ازای هر x،

$$f(x) = \frac{۲h}{\pi} + \left[\ \frac{۱}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{\sin\ nh}{nh}\right)^{۲} \mathrm{Cos}\ nx\ \right]$$

۱۹. ثابت کنید که، به ازای هر $-\pi \le x \le \pi$،

$$\mathrm{Cos}\ ax = \frac{\mathrm{Sin}\,\pi\ a}{\pi\ a} + \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n}\, \frac{۲a\ \mathrm{Sin}\,\pi\ a}{\pi\ (a^{۲}-\pi^{۲})}\,\mathrm{Cos}\ nx$$

که در آن، a یک عدد صحیح نیست. از رابطهٔ بالا نتیجه بگیرید که

$$\mathrm{Cot}\,\pi\ a = \frac{۱}{\pi}\left(\ \frac{۱}{a} - \ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲a}{n^{۲}-a^{۲}}\ \right)$$

۲۰. نشان دهید که از سری فوریهٔ تابع $-\pi \le x \le \pi$ ، $f(x) = x^{۲}$ می‌توان جمله به جمله، از ۰ تا x وقتی $-\pi \le x \le \pi$ ، انتگرال گرفت و در نتیجه خواهیم داشت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n}\, \frac{\mathrm{Sin}\ nx}{n^{۳}} = \frac{۱}{۱۲}\, x\,(x^{۲}-\pi^{۲})$$

و از آن نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^{3}} = \frac{\pi^{3}}{32}$$

و از معادلهٔ پارسوال، نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6}} = \frac{\pi^{6}}{945}$$

۲۱. با انتگرالگیری جمله به جمله از سری

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{Sin} nx}{n} \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

از ۰ تا x، نشان دهید

$$\frac{x^{2}}{4} = \frac{\pi^{2}}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\operatorname{Cos} nx}{n^{2}} \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$$

$$\frac{x}{12}(x^{2} - \pi^{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} nx}{n^{2}} \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$$

۲۲. فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < K \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

با به‌کار بردن فرمول انتگرال فوریه در مورد f، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} S(K-x) + \operatorname{Sin} Sx}{S}\, dS$$

۲۳. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Cos} X & |x| < \pi \\ \circ & |x| > \pi \end{cases}$$

را توسط فرمول انتگرال فوریه نمایش دهید و تحقیق کنید که

$$\operatorname{Cos} x = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty S\,\frac{\operatorname{Cos} Sx \operatorname{Sin} S\pi}{۱ - S^۲}\,dS \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

مقدار انتگرال در $x = \pm\pi$ چیست؟

۲۴. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ e^{-x} & x > \circ \end{cases}$$

را توسط فرمول انتگرال فوریه نمایش دهید و مقدار انتگرال

$$\int_\circ^\infty \frac{S \operatorname{Sin} Sx + \operatorname{Cos} Sx}{۱ + S^۲}\,dx$$

را به ازای هر x، محاسبه کنید.

۲۵. با به‌کار بردن فرمول انتگرال کسینوسی فوریه در مورد تابع

$$f(x) = e^{-x} \qquad x \geq \circ$$

نتیجه بگیرید که

$$e^{-x} = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty \frac{\operatorname{Cos} Sx}{۱ + S^۲}\,dS \qquad x \geq \circ$$

۲۶. تابع $f(x) = xe^{-x}$ ، $x \geq \circ$ را توسط انتگرال کسینوسی نمایش دهید و

نشان دهید

$$xe^{-x} = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱ - S^{۲}}{(۱ + S^{۲})^{۲}}\,\text{Cos}\, Sx\, dS \qquad x \geq ۰$$

۲۷. تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & x > ۱ \end{cases}$$

را توسط فرمول انتگرال سینوسی فوریه نمایش دهید و مقدار انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{۱ - \text{Cos}\, S}{S}\,\text{Sin}\, Sx\, dx$$

را به ازای هر $x \leq ۰$ ، محاسبه کنید.

۲۸. ثابت کنید که

$$e^{-x}\,\text{Sin}\, x = \frac{۴}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{S\,\text{Sin}\, Sx}{S^{۴} + ۴}\,dS \quad , \quad x \geq ۰$$

۲۹. ثابت کنید که

$$e^{-x} = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{S\,\text{Sin}\, Sx}{۱ + S^{۲}}\,dS$$

۳۰. سری فوریه تابع $f(x) = ۱$ ، $۰ < x < ۱$ را بر حسب توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$y'' + y' + \lambda y = ۰ \qquad ۰ < x < ۱$$
$$y(۰) = ۰ \qquad y(۱) = ۰$$

پیدا کنید.

۳۱. سری فوریهٔ تابع $f(x) = \operatorname{Sin} x$ و $\circ < x < \pi$ را بر حسب توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$y'' + (\lambda + 4)\, y = 0 \qquad 0 < x < \pi$$

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

پیدا کنید.

۳۲. سری فوریهٔ تابع $f(x) = \operatorname{Ln} x$ ، $1 < x < e$ را نسبت به توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0$$

$$y(1) = 0 \qquad y(e) = 0$$

پیدا کنید.

فصل ۴: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول

در این فصل روشهای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول را مطالعه خواهیم کرد.

۴-۱ ــ تعاریف و چند مثال هندسی

تعریف ۴-۱-۱

یک معادله متشکل از دو یا تعداد بیشتری متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی یک یا تعداد بیشتری متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامده می‌شود.

تذکر ۴-۱-۲

برای مثال صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای دو متغیر مستقل x و y و یک متغیر وابستهٔ z، عبارت است از

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \ldots) = 0$$

که در آن $z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$، $z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ و غیره، نمایش مشتقات جزئی می‌باشند. و نمایش صورت کلی یک معادله دیفرانسیل برای n متغیر مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و متغیر وابستهٔ u عبارت است از

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \ldots) = 0$$

مثال ۴-۱-۳

هریک از معادلات زیر مثالهایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند.

$$x\, z_x - y\, z_y = \text{Sin}\, xy \tag{۱}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{۲}$$

$$u\, u_y\, u_{xxx} + u^2_{yy} = \text{Sin}\, u \tag{۳}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3 \tag{۴}$$

$$\begin{cases} w\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\,\dfrac{\partial w}{\partial y} = x + y \\[2ex] v\,\dfrac{\partial v}{\partial x} + w\,\dfrac{\partial w}{\partial y} = x - y \end{cases} \tag{۵}$$

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = t + 1 \tag{۶}$$

تعریف ۴-۱-۴

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را **خطی** می‌گوییم اگر متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر شولد. معادله دیفرانسیل راکه خطی نباشد **غیرخطی** می‌گوییم.

تمرین ۴-۱-۵

کدام‌یک از معادلات (۱) تا (۶) داده شده در مثال ۴-۱-۳ خطی می‌باشند؟

تعریف ۴-۱-۶

مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر با بالاترین مرتبهٔ مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.

تمرین ۴-۱-۷

مرتبهٔ هریک از معادلات (۱) تا (۶) داده شده در مثال ۴-۱-۳ را تعیین کنید.

تذکر ۴-۱-۸

صورت کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول برای دو متغیر مستقل عبارت است از

$$P(x,y)\,Z_x + Q(x,y)\,Z_y + R(x,y)\,Z = S(x,y)$$

و صورت کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم برای دو متغیر مستقل عبارت است از

$$A(x,y)\,Z_{xx} + B(x,y)\,Z_{xy} + C(x,y)\,Z_{yy} + D(x,y)\,Z_x + E(x,y)\,Z_y + F(x,y)\,Z = G(x,y)$$

تعریف ۴-۱-۹

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را **شبه خطی** می‌گوییم، اگر معادله نسبت به بالاترین مرتبهٔ مشتقی که در معادله ظاهر می‌شود خطی باشد.

تمرین ۴-۱-۱۰

کدام‌یک از معادلات (۱) تا (۶) داده شده در مثال ۴-۱-۳ شبه خطی می‌باشند؟

تذکر ۴-۱-۱۱

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل شبه خطی برای دو متغیر مستقل خطی عبارت است از

$$P\,(x, y, z)\, Z_x + Q\,(x, y, z)\, Z_y = R\,(x, y, z)$$

مشاهده می‌کنیم که یک معادله خطی حتماً یک معادله دیفرانسیل شبه خطی می‌باشد ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

تعریف ۴-۱-۱۲

یک معادله دیفرانسیل را تقریباً خطی می‌گوییم اگر معادله شبه خطی بوده و ضرایب بالاترین مرتبهٔ مشتقهایی که در معادله ظاهر می‌شوند، فقط به متغیرهای مستقل بستگی داشته باشند.

تذکر ۴-۱-۱۳

صورت کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل تقریباً خطی برای دو متغیر مستقل عبارت است از

$$A(x,y)\, Z_{xx} + ۲B\,(x,y)\, Z_{xy} + C\,(x,y)\, Z_{xx} + D(x, y, z, z_x, z_y) = ۰$$

تمرین ۴-۱-۱۴

کدام‌یک از معادلات (۱) تا (۶) داده شده در مثال ۴-۱-۳ تقریباً خطی می‌باشند؟

معرفی نماد ۴-۱-۱۵

در نوشتن معادلات دیفرانسیل با مشتات جزئی که شامل دو متغیر مستقل می‌باشند گاهی از نمادهای زیر استفاده می‌شود.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} \ , \ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ , \ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} \ , \ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

تمرین ۴-۱-۱۶

هریک از معادلات زیر را با توجه به تعاریف داده شده در این بخش دسته‌بندی کنید.

الف) $u_{xy} + x^2 u_{yy} + (\text{Cos } y)\, u_x = \tan(xy)\, u + x^2 y^2$

ب) $x^2 r + yt - zp + (1 - z^3)\, q = x$

پ) $u_y\, u_{xxy} + u_x\, u_{yy} - u^2_z + xy^2 = z$

ت) $u_{xx} - u_{yy} + (u_x)^2 = x^2$

۴-۲ ـ تشکیل معادلات و چند مثال هندسی

تعریف ۴-۲-۱

مجموعهٔ R را یک ***ناحیه*** می‌گوییم. اگر R یک مجموعهٔ باز و همبند باشد.

تعریف ۴-۲-۲

فرض کنیم R یک ناحیه در صفحه باشد، تابع تعریف شده توسط $Z = f(x,y)$ وقتی f یک تابع مشتق‌پذیر بر R است یک **سطح هموار** نامیده می‌شود. یک چنین سطحی را می‌توان توسط معادله‌ای به صورت $F(x, y, z) = 0$ نیز تعریف کرد. مشروط بر اینکه معادله یک تابع مشتق‌پذیر را به‌طور صریح، مانند $Z = f(x, y)$، بر R تعریف کند. نمایش دیگری از سطوح در فضای سه بُعدی صورت پارامتری

$$x = f(u,v) \quad , \quad y = g(u,v) \quad , \quad z = h(u,v)$$

است، که در آن u و v پارامتر می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم که توابع f ، g و h به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و ژاکوبین آنها، یعنی

$$J_1 = \frac{\partial\,(g,h)}{\partial\,(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$J_2 = \frac{\partial(h,f)}{\partial\,(u,v)} \qquad J_3 = \frac{\partial(f,g)}{\partial\,(u,v)}$$

بر ناحیه‌ای از صفحهٔ uv همزمان صفر نباشند.

مثال ۴-۲-۳

با حذف توابع دلخواه f_1 و f_2 در رابطهٔ $Z = f_1(x) + f_2(y)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌دست آورید.

حل

دستهٔ تمام توابع از متغیرهای مستقل x ، y به صورت

$$Z = f_1(x) + f_2(y)$$

را بر حوزهٔ تعریف توابع، در نظر می‌گیریم. در اینجا f_1 و f_2 دو تابع مشتق‌پذیر می‌باشند. برای اینگونه توابع با مشتقگیری نسبت به x، به‌دست می‌آوریم

$$Z_x = f'_1(x)$$

و با مشتقگیری نسبت به y، خواهیم داشت:

$$Z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\,[\,f'_1(x)\,] = 0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل $Z_{xy} = 0$ به دست می‌آید.

تذکر ۴-۲-۴

دقت کنید که در مثال بالا، به ازای هر انتخاب برای توابع f_1 و f_2 یک سطح به‌دست می‌آوریم که در معادله دیفرانسیل $Z_{xy} = 0$ صدق می‌کند. برای مثال، سطوح

$$Z = 6 e^x + L_n (1 + Cos^2 y)$$
$$Z = x^4 - x + 3 \, Cos \, h^3 y$$

هرکدام جوابی از معادله دیفرانسیل $Z_{xy} = 0$ می‌باشند. توجه کنید که اگر C_1، C_2، C_3 و C_4 ثابتهای دلخواه باشند، آنگاه

$$Z = 6 C_1 e^x + C_2 (x^2 - Sin \, x) + C_3 L_n (1 + y^2) + 3 C_4 Cos \, h^3 y$$

نیز جوابی از معادله می‌باشد.

مثال ۴-۲-۵

معادله دیفرانسیل مربوط به خانواده تمام سطوح دوار حول محور -Z را پیدا کنید.

حل

یک سطح از این خانواده به صورت $Z = f(x^2 + y^2)$ است. فرض می‌کنیم $t = x^2 + y^2$؛ در این صورت $Zx = 2x \, f'(t)$ و $Zy = 2y \, f'(t)$. با حذف $f'(t)$ از این دو معادله، معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول $yp - xq = 0$ به‌دست می‌آید.

مثال ۴-۲-۶

تمام توابع مجزا به صورت $Z = f(x) \, g(y)$ در معادله دیفرانسیل صدق می‌کنند آن را پیدا کنید.

حل

مشـاهده مـی‌کنیم کـه $p = f'(x)\ g(y)$ و $q = f(x)\ g'(y)$ و $s = f'(x)\ g'(y)$.
بنابراین

$$\frac{pq}{s} = f(x)\ g(y) = Z$$

و از این رو تمام توابع مجزا در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $Zs - pq = 0$ صدق می‌کنند.

مثال ۴-۲-۷

فرض کنید $u = f(x, y, z)$ و $v = g(x, y, z)$ توابع مشتق‌پذیری از متغیرهای مستقل x، y و z باشند. معادله ازکمترین مرتبهٔ ممکن را به قسمی پیداکنید که تمام توابع تعریف شده توسط رابطهٔ $F(u,v) = 0$ در آن صدق کنند. در اینجا F_u و F_v هر دو با هم صفر نیستند.

حل

به ازای هر انتخاب مناسب F یک تابع به صورت $Z = \varphi(x,y)$ به‌طور صریح تعریف شده است. با مشتقگیری از رابطهٔ $F(u,v) = 0$ نخست نسبت به x و سپس نسبت به y، به‌دست می‌آوریم

$$F_u\,(u_x + u_z z_x) + F_v\,(v_x + v_z z_x) = 0$$

$$F_u\,(u_y + u_z z_y) + F_v\,(v_y + v_z z_y) = 0$$

برای حذف F_u و F_v معادلات بالا را به صورت

$$F_u\,(u_x + u_z z_x) = -F_v\,(v_x + v_z z_x)$$

$$F_u\,(u_y + u_z z_y) = -F_v\,(v_y + v_z z_y) = 0$$

می‌نویسیم. با تقسیم دو طرف معادلات بالا، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{u_x + u_z z_x}{u_y + u_z z_y} = \frac{v_x + v_z z_x}{v_y + v_z z_y}$$

این معادله را می‌توان به صورت

$$(u_z v_y - u_y v_z) z_x + (u_x v_z - v_x u_z) z_y = v_x u_y - u_x v_y$$

یا

$$p \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,y)} + q \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,x)} \qquad (۱)$$

نوشت. در اینجا یک معادله دیفرانسیل شبه خطی مرتبهٔ اول به‌دست آمده است.

تمرین ۴-۲-۸

با حذف تابع دلخواه داده شده، معادله دیفرانسیلی با کمترین مرتبهٔ ممکن به‌دست آورید که رابطهٔ $G(x^۲ + y^۲ + z^۲, z) = ۰$ در آن صدق کند.

تمرین ۴-۲-۹

با حذف تابع دلخواه داده شده، معادله دیفرانسیلی با پایین‌ترین مرتبهٔ ممکن به‌دست آورید که رابطهٔ $ze^{-x^۲} + \psi(x^۲ + y^۲) = ۰$ در آن صدق کند.

یادآوری ۴-۲-۱۰

اگر f یک تابع مشتق‌پذیر از x و y در ناحیه‌ای از صفحهٔ xy باشد، آنگاه سطح متناظر با آن، یعنی s، در فضای xyz یک ***صفحهٔ مماس*** در هر نقطهٔ $P_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ بر S دارد. معادلهٔ صفحهٔ مماس عبارت است از

$$p_۰(x - x_۰) + q_۰(y - y_۰) - (z - z_۰) = ۰$$

که در آن $p_۰ = f_x(x_۰, y_۰)$ و $q_۰ = f_y(x_۰, y_۰)$ در این حالت بُرداریکه

$$\vec{n} = \frac{p_۰\vec{i} + q_۰\vec{j} - \vec{K}}{(p_۰^۲ + q_۰^۲ + ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$$

بردار *نرمال* **یکه** به s در P_0 نامیده می‌شود. بردار n بر صفحهٔ مماس در P_0 عمود است. اگر معادله سطح s به صورت غیر صریح $F(x, y, z) = 0$ باشد و اگر $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$. معادله صفحهٔ مماس به s در P_0 عبارت است از

$$F_x |_{P_0} (x - x_0) + F_y |_{P_0} (y - y_0) + F_z |_{P_0} (z - z_0) = 0$$

در این حالت بردار نرمال یکه در P_0 عبارت است از

$$\vec{n} = \frac{F_x |_{P_0} \vec{i} + F_y |_{P_0} \vec{j} + F_z |_{P_0} \vec{K}}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{\frac{1}{2}} \; |_{P_0}}$$

اینک فرض کنیم که سطح S توسط معادلات پارامتری به صورت $x = f(u,v)$ و $y = g(u,v)$ و $z = h(u,v)$ داده شده باشد، که در آن ژاکوبینهای J_1، J_2 و J_3 که در تعریف ۴-۲-۲ تعریف شده‌اند، همزمان صفر نباشند. در این صورت معادلهٔ صفحهٔ مماس بر S در $P_0 (x_0 , y_0 , z_0)$ عبارت است از

$$J_1 (x - x_0) + J_2 (y - y_0) + J_3 (z - z_0) = 0$$

و بردار نرمال یکه عبارت است از

$$\vec{n} = \frac{J_1 \vec{i} + J_2 \vec{j} + J_3 \vec{K}}{(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

در معادلات بالا ژاکوبینها در u_0 و v_0 متناظر با مقادیر x_0 ، y_0 و z_0 محاسبه می‌شوند.

مثال ۴-۲-۱۱

معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به خانواده تمام صفحات مماس بر بیضی‌گون $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ را که بر صفحهٔ xy عمود نیستند، پیدا کنید.

حل

اگر $P_0\ (x_0,y_0,z_0)$ یک نقطهٔ دلخواه بر بیضی‌گون با $z_0 \neq 0$ باشد، معادلهٔ صفحهٔ مماس در P_0 عبارت است از

$$2x_0\ (x - x_0) + 8y_0\ (y - y_0) + 8z_0\ (z - z_0) = 0$$

یا

$$x_0x + 4y_0y + 4z_0z = 4 \qquad (2)$$

دقت کنید که به دست آوردن معادلهٔ بالا از این واقعیت که $x_0^2 + 4y_0^2 + z_0^2 = 4$ استفاده کرده‌ایم. وقتی P_0 بر روی بیضی‌گون تغییر کند، این معادله تمام صفحات مماس در خانواده صفحات مماس را به‌دست می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که در معادلهٔ (۲) تنها دو ثابت اختیاری وجود دارد، چون P_0 باید بر سطح واقع باشد. با مشتقگیری از (۲) نسبت به x و y به دست می‌آوریم

$$x_0 + 4z_0p = 0 \qquad 4y_0 + 4z_0q = 0 \qquad (3)$$

با جایگذاری $-4z_0p$ به‌جای x_0 و $-z_0q$ به جای y_0 در معادلهٔ (۲) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$px + qy - z = -\frac{1}{z_0} \qquad (4)$$

اینک با قرار دادن مختصات $P_0\ (x_0,y_0,z_0)$ در معادلهٔ بیضی‌گون به دست می‌آوریم

$$x_0^2 + 4y_0^2 + 4z_0^2 = 4$$

یا

$$\left(\frac{x_0}{z_0}\right)^2 + 4\left(\frac{y_0}{z_0}\right)^2 + 1 = \frac{4}{z_0^2}$$

با توجه به معادلات (۳)، می‌دانیم که $16p^2 = \left(\frac{x_0}{z_0}\right)^2$ و $q^2 = \left(\frac{y_0}{z_0}\right)^2$، بنابراین معادلهٔ بالا به صورت

$$16p^2 + 4q^2 + 4 = \frac{4}{z_0^2}$$

$$4p^2 + q^2 + 1 = \frac{1}{z_0^2}$$

$$(4p^2 + q^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{z_0}$$

درمی‌آید. بنابراین با قرار دادن این مقدار در (۴) معادله دیفرانسیل خواسته شده به دست می‌آید.

$$xp + yq - z = -(1 + 4p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

تمرین ۴-۲-۱۲

معادله دیفرانسیلی باکمترین مرتبهٔ ممکن مربوط به خانواده تمام صفحات مماس بر سطح $z = xy$ را پیدا کنید.

تمرین ۴-۲-۱۳

معادله دیفرانسیل باکمترین مرتبهٔ ممکن را به قسمی پیدا کنید که تمام صفحاتی که از نقطهٔ $(0, 0, 1)$ می‌گذرد و بر صفحهٔ xy عمود نیست در آن صدق کنند.

تمرین ۴-۲-۱۴

با حذف توابع دلخواه معادله دیفرانسیلی باکمترین مرتبهٔ ممکن را به قسمی پیدا کنید که $u = f(x - ct) + g(x + ct)$ در آن صدق کند.

تمرین ۴-۲-۱۵

با حذف دو تابع دلخواه f و g معادله دیفرانسیلی با کمترین مرتبهٔ ممکن را به قسمی پیدا کنید که $z = f(y) \operatorname{Cos} x + g(y) \operatorname{Sin} x$ در آن صدق کند.

تمرین ۴-۲-۱۶

با حذف ثابتهای a و b معادله دیفرانسیل با کمترین مرتبهٔ ممکن را به قسمی پیدا کنید که $z = e^{ax + by}$ جواب آن باشد.

۴-۳ــ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

تعریف ۴-۳-۱

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول بر حسب دو متغیر مستقل x و y و متغیر وابستهٔ z به صورت

$$A(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + C(x, y) z = G(x, y) \qquad (1)$$

است. در این بخش فرض می‌کنیم که ضرایب A ، B و C و تابع داده شدهٔ G بر ناحیه‌ای مانند R ، از صفحهٔ xy دارای مشتقات مرتبهٔ اول پیوسته نسبت x و y بوده و حداقل یکی از ضرایب A و B بر R صفر نباشد.

تعریف ۴-۳-۲

برای معادلهٔ (۱) عملگر دیفرانسیلی

$$L = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C$$

وجود دارد. این عملگر **خطی** است، یعنی L دارای خاصیت

$$L(C_1 Z_1 + C_2 Z_2) = C_1 L Z_1 + C_2 L Z_2$$

می‌باشد که به ازای هر دو عدد ثابت C_1 و C_2 و هر زوج تابع Z_1 و Z_2 که بر R مشتق‌پذیر باشند برقرار است.

تذکر ۴-۳-۳

معادله دیفرانسیل (۱) را می‌توان به صورت خلاصه‌تر

$$L\,Z = G$$

نوشت. ***معادلهٔ همگن*** متناظر با (۱) عبارت است از

$$L\,Z = 0 \qquad (۲)$$

تعریف ۴-۳-۴

منظور از یک ***جواب*** معادلهٔ (۱) بر R ، تابعی مثل $Z = \varphi(x, y)$ با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته در R است، به قسمی که اگر مشتقات φ_x و φ_y در معادلهٔ (۱) قرار داده شوند، یک اتحاد نسبت به x و y بر R حاصل شود. سطح متناظر در فضای xyz یک ***سطح انتگرال*** نامیده می‌شود.

تعریف ۴-۳-۵

منظور از ***جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن***، رابطه‌ای است که شامل یک تابع دلخواه بوده و برای هر انتخاب تابع دلخواه جوابی از معادلهٔ (۲) به‌دست آید.

قضیه ۴-۳-۶

اگر Z_h نمایش جواب عمومی معادلهٔ همگن بوده و Z_p یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن (۱) را نمایش دهد، آنگاه

$$Z = Z_h + Z_p \qquad (۳)$$

جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن است.

اثبات

اگر Z_p یک جواب خصوصی معادلهٔ (۱) و Z توسط معادلهٔ (۳) داده شده باشد، آنگاه

$$LZ = L(Z_h + Z_p) = LZ_h + LZ_p = LZ_p = G$$

از این‌رو Z یک جواب معادلهٔ غیرهمگن است.

اگر Z_h تمام جوابهای معادلهٔ همگن را شامل شود، رابطهٔ (۳) همهٔ جوابهای معادلهٔ غیرهمگن را بر R به‌دست می‌دهد. اینک فرض می‌کنیم که v جوابی از معادلهٔ (۱) بر R باشد. قرار می‌دهیم $w = v - Z_p$ در این صورت

$$Lw = L(v - Z_p) = Lv - LZ_p = G - G = 0$$

بنابراین w جوابی از معادله همگن بر R است. بنابراین برای انتخابیِ از تابع دلخواه که در Z_h ظاهر شده است، خواهیم داشت

$$v - Z_p = Z_h$$

یا

$$v = Z_h + Z_p$$

مثال ۴-۳-۷

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z = x$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا $A = 1$، $B = 0$، $C = 1$ و $G(x, y) = x$ (معادلهٔ (۱)). معادلهٔ همگن

متناظر با این معادله عبارت است از

$$p + Z = 0$$

با فرض ثابت بودن y معادلهٔ بالا را می‌توان به صورت

$$e^x \frac{\partial z}{\partial x} + e^x Z = \frac{\partial z}{\partial x}(e^x z) = 0$$

نوشت. حال با انتگرالگیری از معادلهٔ بالا نسبت به x، نتیجه می‌شود که

$$e^x z = f(y)$$

یا

$$z = e^{-x} f(y)$$

که در آن f یک تابع دلخواه است. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ همگن عبارت است از

$$Z_h = e^{-x} f(y)$$

توجه می‌کنیم که جواب عمومی را می‌توان به صورت

$$F(e^x z , y) = 0$$

نیز نوشت. در اینجا F تابع دلخواه مشتق‌پذیری است که F_u بر ناحیه‌ای از صفحهٔ uv صفر نیست. اگر F یک چنین تابعی باشد، آنگاه می‌توان $F(u,v) = 0$ را برای u حل کرد و رابطهٔ $u = f(v)$ یا $z = e^{-x} f(y)$ را به‌دست آورد.

اینک برای پیدا کردن یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن داده شده، چون معادله دیفرانسیل به مشتقات y بستگی ندارد، می‌توان یک جواب خصوصی را به صورت

$$Z_p = Ax + B$$

در نظر گرفت. با قرار دادن این جواب در معادله دیفرانسیل داده شده، به دست می‌آوریم

$$A + Ax + B = x$$

در نتیجه

$$A = ۱ \quad , \quad A + B = ۰$$

بنابراین $A = ۱$ و $B = -۱$ با قرار دادن این مقادیر در Z_p یک جواب خصوصی معادله به صورت

$$Z_p = x - ۱$$

به دست می‌آید. از این‌رو، بنا به قضیهٔ ۴-۳-۶ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده عبارت است از

$$Z = e^{-x} f(y) + x - ۱$$

که در آن f تابع دلخواه است که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشد. این رابطه یک دسته از سطحهای انتگرال معادله دیفرانسیل جزئی را معرفی می‌کنند.

تمرین ۴-۳-۸

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial z}{\partial y} + ۲z = y^{۲} + ۱$$

را پیدا کنید.

روش حل ۴-۳-۹

روش حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت:

معادله دیفرانسیل

$$Ap + Bq + Cz = G$$

راکه در آن A ، B و C ثابت بوده و $A^2 + B^2 \neq 0$ در نظر می‌گیریم. در اینجا همچنین فرض می‌کنیم که G یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به x و y باشد.
معادله دیفرانسیل همگن وابسته به این معادله عبارت است از

$$Ap + Bq + Cz = 0 \qquad (۲)$$

در اینجا با استفاده از تغییر متغیرهای

$$\xi = C_{11}\, x + C_{12}\, y \qquad \eta = C_{21}\, x + C_{22}\, y$$

و انتخاب مناسبی برای ثابتهای C_{ij} معادله (۲) را به صورت معادلهٔ ساده‌تری درمی‌آوریم.
اینک

$$Z_x = Z_\xi\, \xi_x + Z_\eta\, \eta_x \qquad Z_y = Z_\xi\, \xi_y + Z_\eta\, \eta_y$$

بنابراین،

$$Z_x = C_{11}\, Z_\xi + C_{21}\, Z_\eta \qquad Z_y = C_{12}\, Z_\xi + C_{22}\, Z_\eta$$

با قرار دادن این مقادیر به جای Z_x و Z_y در معادلهٔ (۲) معادلهٔ

$$(AC_{11} + BC_{12})\, Z_\xi + (AC_{21} + BC_{22})\, Z_\eta + CZ = 0 \qquad (۳)$$

به دست می‌آید. با فرض $A \neq 0$ و انتخاب $C_{11} = 1$ ، $C_{12} = 0$ ، $C_{21} = B$ و $C_{22} = A$. خواهیم داشت

$$\xi = x \qquad \eta = Bx - Ay$$

و معادلهٔ (۲) با توجه به (۳) به صورت

$$A\, Z_\xi + CZ = 0$$

یا

$$Z_\xi + \frac{C}{A} Z = 0$$

درمی‌آید. با ثابت نگهداشتن η، انتگرالگیری نسبت به ξ، به‌دست می‌آوریم

$$L_n Z = -\frac{C}{A}\xi + f_1(\eta)$$

یا

$$Z = e^{-\frac{C}{A}\xi} e^{f_1(\eta)}$$

بنابراین

$$Z = e^{-\frac{C}{A}\xi} f(\eta)$$

که در آن f یک تابع دلخواه است. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۲) عبارت است از

$$Z_h = e^{-\frac{C}{A}x} f(Bx - Ay) \tag{۴}$$

که در آن f تابع دلخواهی است که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشد. جواب عمومی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$F(Z e^{-\frac{C}{A}z}, Bx - Ay) = 0$$

در اینجا F(u,v) تابع دلخواهی است که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و $f_u \neq 0$. اگر $A=0$ و $B \neq 0$، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۲) عبارت می‌شود از

$$Z_h = e^{-\frac{C}{B}y} f(Bx) \tag{۵}$$

با

$$F\left(Z e^{-\frac{C}{B} y}, Bx\right) = 0$$

اگر $A \neq 0$ و اگر Z_p یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اصلی باشد، آنگاه جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیرهمگن برابر است با:

$$Z = e^{-\frac{C}{A} x} f(Bx - Ay) + Z_p \qquad (6)$$

مثال ۴-۳-۱۰

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$2Z_x - 3Z_y = x$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا $A = 2$ و $B = -3$ و $C = 0$ بنابراین با توجه به فرمول (۴) جواب عمومی معادله همگن عبارت است از

$$Z_h = f(-3x - 2y)$$

برای پیدا کردن یک جواب خصوصی معادلهٔ اصلی، y را ثابت نگهداشته و فرض می‌کنیم

$$Z_p = A_1 x^2 + B_1 x + C_1$$

از این رو

$$\frac{\partial Z_p}{\partial x} = 2A_1 x + B_1 \quad , \quad \frac{\partial Z_p}{\partial y} = 0$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ اصلی به‌دست می‌آوریم

$$4A_1 x + B_1 = x$$

از این رو

$$A_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad B_1 = 0$$

و C_1 یک ثابت دلخواه است که آن‌را برابر با صفر انتخاب می‌کنیم. در نتیجه یک جواب خصوصی عبارت است از

$$Z_p = \frac{1}{4} x^2$$

بنابر فرمول (۷) جواب عمومی معادلهٔ اصلی برابر است با

$$Z = f(-3x - 2y) + \frac{1}{4} x^2$$

تمرین ۴-۳-۱۱

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$Zx - 2Z_y + Z = \text{Sin } x + y$$

را پیدا کنید.

روش حل ۴-۳-۱۲

روش حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب غیرثابت:

معادله دیفرانسیل

$$A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + C(x, y) Z = 0 \qquad (7)$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$\xi = \xi\,(x, y) \quad , \quad \eta = \eta\,(x, y) \tag{۸}$$

تبدیل بر R با ژاکوبی

$$\frac{\partial\,(\xi\,,\eta)}{\partial\,(x, y)} \neq 0 \tag{۹}$$

باشد. بنابراین، چون

$$Z_x = Z_\xi\, \xi_x + Z_\eta\, \eta_x \quad , \quad Z_y = Z_\xi\, \xi_y + Z_\eta\, \eta_y$$

است، معادلهٔ (۷) به صورت

$$(A\,\xi_x + B\,\xi_y\,)\,Z_\xi + (A\,\eta_x + B\,\eta_y\,)\,Z_\eta + CZ = 0 \tag{۱۰}$$

درمی‌آید. توجه می‌کنیم که در این معادله تمام ضرایب بر حسب متغیرهای ξ و η بیان شده‌اند. توجه می‌کنیم که تنها محدودیتی که بر تبدیل (۸) اعمال شده است، برقراری شرط (۹) می‌باشد. به منظور ساده کردن معادلهٔ (۱۰) η را به قسمی انتخاب می‌کنیم که

$$A\,\eta_x + B\,\eta_y = 0 \tag{۱۱}$$

این مطلب را می‌توان به صورت زیر انجام داد: فرض می‌کنیم $A\,(x, y) \neq 0$. معادله دیفرانسیل عمومی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B\,(x, y)}{A\,(x, y)} \tag{۱۲}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که جواب عمومی معادلهٔ (۱۲) برابر باشد با

$$\eta(x, y) = C \qquad (۱۳)$$

که در آن $\eta_y \neq 0$ و C یک ثابت دلخواه است. در این صورت تابع $\eta(x, y)$ که به این ترتیب انتخاب شده است در معادلهٔ (۱۱) صدق می‌کند، زیرا

$$d(\eta(x, y)) = \eta_x\, dx + \eta_y\, dy = 0$$

و بنابراین،

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$$

و با توجه به (۱۲) این معادله را می‌توان به صورت

$$\frac{B}{A} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$$

یا

$$A\eta_x + B\eta_y = 0$$

نوشت. اینک با انتخاب $\xi(x, y) = x$، خواهیم داشت

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

زیرا $\eta_y \neq 0$ و $\xi_x \neq 0$. توجه می‌کنیم که تبدیلی که به این شکل ساخته‌ایم معکوس‌پذیر است. بنابراین، معادله (۱۰) به صورت

$$AZ_\xi + CZ = 0$$

درمی‌آید. با ثابت نگهداشتن y، معادلهٔ بالا به‌صورت

$$\frac{dZ}{d\xi} + \frac{C}{A} Z = 0$$

درمی‌آید. با جدا کردن متغیرها و انتگرالگیری، به‌دست می‌آوریم

$$\int \frac{dZ}{Z} = - \int \frac{C}{A} d\xi$$

$$L_n Z = - \int \frac{C}{A} \xi + f_1 (\eta)$$

$$Z (\xi , \eta) = f (\eta) e^{- \int \frac{C}{A} \xi}$$

که در آن f یک ثابت دلخواه است. تابع

$$\psi (\xi , \eta) = e^{- \int \frac{C(\xi , \eta)}{A(\xi , \eta)} d\xi}$$

در معادلهٔ (۱۴) صدق می‌کند. بنابراین

$$u (x, y) = \psi [x, \eta (x, y)]$$

یک جواب خصوصی معادلهٔ (۷) است. **جواب عمومی** معادلهٔ (۷) عبارت است از

$$Z_h = u (x, y) f [\eta (x, y)] \tag{۱۵}$$

به منظور تحقیق درستی این مطلب، فرض می‌کنیم f یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. در این صورت

$$Z_x = u_x f(\eta) + u f'(\eta) \eta_x \qquad Z_y = u_y f(\eta) + u f'(\eta) \eta_y$$

و بنابراین،

$$AZ_x + BZ_y + CZ = A\,(u_x + Bu_y + Cu)\,f(\eta) + (A\,\eta_x + B\,\eta_y)\,f'(\eta) = 0$$

زیرا u جوابی از معادلهٔ (۷) می‌باشد و η در معادلهٔ (۱۱) صدق می‌کند.

قضیه ۴-۳-۱۳

تمام جوابهای معادلهٔ (۷) به صورت محلی زیر در جواب عمومی (۱۵) گسترده شده‌اند. اگر v جوابی از معادلهٔ (۷) بر R بوده و P_0 نقطه‌ای از R باشد، آنگاه یک همسایگی از P_0 و یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر، مانند f، وجود دارند به قسمی که بر این همسایگی خواهیم داشت

$$v = u(x, y)\,f\,[\,\eta\,(x, y)\,]$$

در اینجا توابع u و η همان توابع تعریف شده در ۴-۳-۱۲ می‌باشند.

اثبات

معادلات

$$A\,v_x + B\,v_y + Cv = 0$$
$$A\,u_x + B\,u_y + Cu = 0$$

بر همسایگی P_0 به‌طور همزمان برقرارند. با ضرب کردن معادله اول در u و معادله دوم در v- و جمع کردن دو معادلهٔ حاصل، معادلهٔ

$$A\,(u\,v_x - v\,u_x\,) + B\,(u\,v_y - v\,u_y\,) = 0$$

به‌دست می‌آید. اینک با فرض $w = \frac{v}{u}$ معادله بالا به صورت

$$A\,w_x + Bw_y = 0$$

درمی‌آید. بنا به (۱۱) معادلات

$$A w_x + B w_y = 0$$
$$A \eta_x + B \eta_y = 0$$

همزمان برقرارند. چون بر R، $A^2 + B^2 \neq 0$ در نتیجه دترمینان ضرایب دستگاه بالا باید برابر صفر باشد.

$$w_x \eta_y - \eta_x w_y = 0$$

بنابراین

$$\frac{\partial(w, \eta)}{\partial(x,y)} = 0$$

اینک از قضیه‌ای در آنالیز، با توجه به صفر بودن ژاکوبی و این واقعیت که $\eta_y \neq 0$ می‌توان نتیجه گرفت که همسایگی از P_0 و تابعی که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیراست وجود دارند، به‌طوری که بر این همسایگی، داریم

$$w(x, y) = f[\eta(x, y)]$$

یعنی

$$v = u(x, y) = f[\eta(x, y)]$$

قضیه ۴-۳-۱۴

فرض کنیم که Z_p یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن

$$LZ = AZ_x + BZ_y + CZ = G$$

باشد، که در آن G بر R یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشد. در این صورت جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن برابر است با

$$Z = Z_p + u\, f(\eta)$$

که در آن u و η مانند قبل تعریف می‌شوند.

اثبات

نخست از خطی بودن عملگر L، به ازای هر تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر f، نتیجه می‌گیریم که

$$LZ = L[Z_p + u f(\eta)] = LZ_p + L[u f(\eta)] = G$$

یعنی تابع Z به ترتیبی که تعریف شده است در معادلهٔ غیرهمگن صدق می‌کند. اینک فرض می‌کنیم φ جوابی از معادلهٔ غیرهمگن بر R باشد. قرار می‌دهیم $v = \varphi - Z_p$. در این صورت

$$Lv = L(\varphi - Z_p) = L\varphi - LZ_p = G - G = 0$$

از این رو، v جوابی از معادلهٔ همگن است. بنابراین از قضیهٔ ۴-۳-۱۳ نتیجه می‌گیریم که،حداقل به‌طور محلی،تابعی مانند f وجود دارد به قسمی که

$$v = u(x, y) f[\eta(x, y)]$$

و بنابراین،

$$\varphi = Z_p + u(x, y) f[\eta(x, y)]$$

مثال ۴-۳-۱۵

معادله دیفرانسیل

$$x^2 p - xyq + yz = 0$$

را حل کنید.

حل

در اینجا ضرایب عبارتند از $A(x, y) = x^2$، $B(x, y) = -xy$ و $C(x, y) = y$. در

این حالت معادلهٔ (۱۲) به صورت

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

یا

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

درمی‌آید. بنابراین

$$\eta\,(x, y) = xy = C$$

از این رو، تبدیل مناسب برای این معادله عبارت است از

$$\xi = x \qquad \eta = xy$$

بنابراین با توجه به ضرایب $A\,(\xi\,,\eta) = \xi^2$ و $C\,(\xi\,,\eta) = \frac{\xi}{\eta}$، معادلهٔ (۱۴) به صورت

$$\xi^2\, Z_\xi + \frac{\eta}{\xi}\, Z = 0$$

یا

$$Z_\xi + \frac{\eta}{\xi^3}\, Z = 0$$

درمی‌آید. در این صورت

$$\int \frac{C(\xi\,,\eta)}{A(\xi\,,\eta)}\, d\xi = \int \frac{\eta}{\xi^3}\, d\xi = -\frac{\eta}{2\xi^2}$$

و

$$\psi\,(\xi\,,\eta) = e^{\frac{\eta}{2\xi^2}}$$

یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل اصلی عبارت است از

$$u\,(x\,,y) = e^{\frac{y}{2x}}$$

بنابراین با توجه به (۱۵) جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از

$$Z = e^{\frac{y}{2x}} f(xy)$$

که در آن f یک تابع دلخواه است.

تمرین ۴-۳-۱۶

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$x z_x - y z_y + z = 0$$

را پیدا کنید.

تمرین ۴-۳-۱۷

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$xyp - x^2 q + yz = 0$$

را پیدا کنید.

تمرین ۴-۳-۱۸

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(x + a) p + (y + b) q + cz = 0$$

را که در آن a ، b و c ثابت می‌باشند، پیدا کنید.

روش حل ۴-۳-۱۹

فرض می‌کنیم $Lu = Au_x + Bu_y + Cu_z + Du = G$ یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول نسبت به سه متغیر مستقل x ، y و z و متغیر وابسته u باشد، که در آن A ، B ، C و D ثابت می‌باشند و $G(x, y, z)$ یک تابع داده شده است. با فرض $A \neq 0$

برای به‌دست آوردن جوابی از معادله همگن $Lu = 0$ که شامل یک تابع دلخواه باشد، جوابی به صورت

$$u = e^{-\frac{Dx}{A}} f(ax + by + cz)$$

را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری این جواب در معادله $Lu = 0$، نشان دهید که ثابتهای a، b و c باید در معادلهٔ $Aa + Bb + Cc = 0$ صدق کند. بالعکس اگر a، b و c به قسمی انتخاب شوند که معادلهٔ اخیر برقرار باشد، آنگاه

$$u = e^{-\frac{Dx}{B}} f(ax + by + cz)$$

به ازای هر تابع مشتق‌پذیر f، جواب معادله است. اگر $A = 0$ و $B \neq 0$، به همین روش می‌توان نشان داد

$$u = e^{-\frac{Dx}{B}} f(ax + by + cz)$$

و الا آخر.

تمرین ۴-۳-۲۰

معادلهٔ

$$2u_x - u_y + 4u_z + u = 0$$

را در نظر می‌گیریم. جوابی از معادله شامل یک تابع دلخواه پیدا کنید.

تمرین ۴-۳-۲۱

معادلهٔ

$$u_x - 4u_y + 7u_z - u = x + y + z + 1$$

را در نظر می‌گیریم. جوابی از معادله شامل یک تابع دلخواه پیدا کنید.

۴-۴ ـ معادلات دیفرانسیل شبه خطی مرتبهٔ اول روش لاگرانژ

در این بخش معادلات شبه خطی به صورت

$$P\,(x, y, z)\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q\,(x, y, z)\,\frac{\partial z}{\partial y} = R\,(x, y, z) \qquad (۱)$$

نسبت به دو متغیر مستقل x و y و متغیر وابسته z را بررسی می‌کنیم. روش حلی که منجر به حل اینگونه معادلات می‌شود به **روش لاگرانژ** معروف است.

تعریف ۴-۴-۱

فرض می‌کنیم τ ناحیه‌ای در فضای سه بعدی xyz باشد. همچنین فرض می‌کنیم که ضرایب P ، Q و R در معادلهٔ (۱) توابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری نسبت به x ، y و z در τ باشند و P و Q در τ صفر نشوند. با **تصویر τ بر صفحهٔ xy** منظور مجموعهٔ همهٔ نقاط (x,y) در صفحهٔ xy است به قسمی که به ازای مقداری از z نقطهٔ (x,y,z) به τ متعلق باشد. فرض می‌کنیم که R نمایش تصویر τ بر صفحهٔ xy باشد. یک **جواب** معادلهٔ (۱) بر R تابعی مانند $z = \varphi\,(x,y)$ با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته است به قسمی که شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) اگر $(x_\circ , y_\circ)$ نقطه‌ای از R و $z_\circ = \varphi\,(x_\circ, y_\circ)$ باشد، آنگاه $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ به τ متعلق باشد.

رابطهٔ

$$P\,[\,x, y, \varphi\,(x,y)\,]\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} + Q\,[\,x, y, \varphi\,(x,y)\,]\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} = R\,[\,x, y, \varphi\,(x,y)\,]$$

به ازای هر x,y متعلق به R برقرار باشد.

تذکر ۴-۴-۲

بعداً نشان خواهیم داد که تحت این مفروضات معادلهٔ (۱) همیشه جواب دارد و در واقع از یک همسایگی نقطهٔ داده شده از R ، بینهایت جواب متمایز خواهد داشت.

روش لاگرانژ ۴-۴-۳

وابسته به معادلهٔ (۱) دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (۲)$$

را که به **معادلات کمکی** معروف می‌باشند، در نظر می‌گیریم. یک دستگاه هم‌ارز عبارت است از

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P} \qquad (۳)$$

که در آن x متغیر مستقل است. جواب عمومی دستگاه (۳) به صورت

$$Y = Y(x , C_1 , C_2) \qquad Z = Z(x , C_1 , C_2) \qquad (۴)$$

است که در آن C_1 و C_2 ثابتهای دلخواه می‌باشند. اگر این معادلات را نسبت به C_1 و C_2 حل کنیم، آنگاه جواب عمومی معادلات کمکی (۲) را می‌توان به صورت

$$u(x , y , z) = C_1 \qquad v(x , y , z) = C_2 \qquad (۵)$$

نوشت. هریک از روابط $u = C_1$ و $v = C_2$ یک ***انتگرال*** معادلات کمکی نامیده می‌شود. با فرض به‌طور تابعی مستقل بودن دو تابع u و v در τ ؛ یعنی ژاکوبینهای

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \; , \; \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} \; , \; \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$$

همگی در نقطه‌ای از τ صفر نباشند. رابطهٔ

$$F(u, v) = 0 \qquad (۶)$$

که در آن F دلخواه است، **جواب عمومی** معادلهٔ (۱) نامیده می‌شود. جواب عمومی را می‌توان به صورتهای $u = f(v)$ و $v = g(u)$ نیز نوشت. که در آن f و g توابع دلخواه می‌باشند.

تذکر ۴-۴-۴

قبل از اینکه نظریهٔ مربوط به روش لاگرانژ را مورد بحث قرار دهیم به چند مثال جهت توضیح بیشتر این روش توجه می‌کنیم.

مثال ۴-۴-۵

جواب عمومی معادلهٔ

$$xzp + yzq = -(x^۲ + y^۲)$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا $P(x, y, z) = xz$، $Q(x, y, z) = yz$ و $R(x, y, z) = -(x^۲ + y^۲)$. این توابع در همه جا نسبت به x ، y و z به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشند. معادلات کمکی (۲) در این حالت عبارتند از

$$\frac{dx}{XZ} = \frac{dy}{YZ} = \frac{dz}{-(x^۲ + y^۲)}$$

چون $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$، بنابراین باانتگرالگیری به‌دست می‌آوریم $\text{Ln } y = \text{Ln } x + C_۱$. در این صورت یکی از انتگرالهای معادلهٔ کمکی عبارت است از

$$u(x, y, z) = \frac{y}{x} = C_۱$$

از این رابطه جهت حذف کردن y از معادلهٔ

$$\frac{dx}{xz} = -\frac{dz}{(x^۲ + y^۲)}$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{x^۲ (۱ + C_۱{}^۲)}$$

یا

$$x\,dx = -\frac{z\,dz}{۱ + C_۱{}^۲}$$

اینک با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$(۱ + C_۱{}^۲) X^۱ + Z^۲ = C_۲$$

اینک با جایگذاری $C_۱$ توسط $\frac{y}{x}$ در این رابطه، دومین انتگرال معادلات کمکی به صورت

$$(۱ + \frac{y^۲}{x^۲}) x^۲ + z^۲ = C_۲$$

یا

$$v(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ = C_۲$$

به دست می‌آید. در اینجا ژاکوبینها عبارتند از

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -۲\,\frac{x^۲ + y^۲}{x^۲} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = -۲\,\frac{zy}{x^۲}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = ۲\,\frac{z}{x}$$

ژاکوبینها در هر ناحیه‌ای از فضا که $xyz \neq ۰$ مخالف صفر می‌باشند اگر τ

چنین ناحیه‌ای باشد، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ شبه خطی عبارت است از

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$$

این جواب عمومی را می‌توان به صورتهای

$$x^2 + y^2 + z^2 = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \frac{y}{x} = f(x^2 + y^2 + z^2)$$

نیز نوشت. در اینجا f و g توابع دلخواه هستند.

تذکر ۴-۴-۶

یک روش مناسب برای انتگرالگیری از یک دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول، استفاده از این واقعیت جبری است که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آنگاه به ازای مقادیر دلخواه λ و μ خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

از این رو، از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\lambda\, dx + \mu\, dy + v dz}{\lambda P + \mu Q + vR} = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

به ازای هر مقدار دلخواه برای λ، μ و v، به‌ویژه اگر λ، μ، v به قسمی انتخاب شوند که $\lambda P + \mu Q + vR = 0$، آنگاه $\lambda\, dx + \mu\, dy + vdz = 0$. حال اگر تابعی مانند u وجود داشته باشد به قسمی که $du = \lambda dx + \mu dy + vdz$، آنگاه $u(x,y,z) = C_1$ یک انتگرال معادلات کمکی می‌باشد.

مثال ۴-۴-۷

جواب عمومی معادلهٔ

$$(y-x)p+(y+x)q=\frac{x^{2}+y^{2}}{z}$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا معادلات کمکی عبارتند از

$$\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{y+x}=\frac{zdz}{x^{2}+y^{2}}$$

چون $P+Q=2y$، با انتخاب $\lambda=1$، $\mu=1$ و $v=0$، خواهیم داشت

$$\frac{dx+dy}{2y}=\frac{dy}{y+x}$$

یا

$$(y+x)(dx+dy)=2y\,dy$$

با انتگرالگیری از این معادله، به دست می‌آوریم

$$\frac{(y+x)^{2}}{2}=y^{2}+C_{1}$$

بنابراین اولین انتگرال معادلات کمکی، برابر است با

$$u(x,y,z)=\frac{(y+x)^{2}}{2}-y^{2}=x^{2}+2xy-y^{2}=C_{1}$$

اینک

$$xP-yQ=-(x^{2}+y^{2})=-zR$$

از این رو

$$\frac{xdx-ydy}{-(x^{2}+y^{2})}=\frac{zdz}{x^{2}+y^{2}}$$

یا

$$x\,dx - y\,dy = -z\,dz$$

با انتگرالگیری از این معادله، به دست می‌آوریم

$$x^۲ - y^۲ + z^۲ = C_۲$$

بنابراین دومین انتگرال معادلات کمکی عبارت است از

$$v(x,y,z) = x^۲ - y^۲ + z^۲ = C_۲$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل جزئی برابر است با

$$F(x^۲ + ۲xy - y^۲, x^۲ - y^۲ + z^۲) = ۰$$

تذکر ۴-۴-۸

توجه کنید که در مثال ۴-۴-۷ دو انتگرال مستقل به دست آمده، تنها زوج انتگرالی نیستند که می‌توان در نوشتن جواب عمومی به‌کار برد. مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{x^۲ + y^۲} = \frac{z\,dz}{x^۲ + y^۲}$$

یا

$$d(xy) = z\,dz$$

با انتگرالگیری از معادلهٔ بالا، یک انتگرال معادلات کمکی به صورت

$$۲xy = z^۲ + C_۱$$

یا

$$z^۲ - ۲xy = C_۱$$

به دست می‌آید. پس می‌توان از این انتگرال در نوشتن جواب عمومی معادلهٔ مثال بالا استفاده کرد. در این صورت جواب عمومی به صورت

$$F(z^2 - 2xy, x^2 - y^2 + z^2) = 0$$

درمی‌آید، که در آن F دلخواه است.

مثال ۴-۴-۹

جواب عمومی معادلهٔ $(z^2 + 2yz - y^2)p + (xy + xz)q = xy - xz$ را پیدا کنید.

حل

در اینجا معادلات کمکی عبارتند از

$$\frac{dx}{z^2 + 2yz - y^2} = \frac{dy}{xy + xz} = \frac{dz}{xy - xz}$$

از معادلهٔ

$$\frac{dy}{x(y+z)} = \frac{dz}{x(y-z)}$$

معادلهٔ

$$\frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

یا

$$y\,dy = d(yz) + z\,dz$$

به‌دست می‌آید. با انتگرالگیری از این معادله یک انتگرال معادلات کمکی به

صورت

$$u(x, y, z) = z^{۲} - y^{۲} + ۲yz = C_{۱}$$

به دست می‌آید. همچنین، چون

$$xP + yQ + zR = ۰$$

پس

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = ۰$$

بنابراین دومین انتگرال معادلات کمکی برابر است با

$$v(x, y, z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = C_{۲}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از

$$F(z^{۲} - y^{۲} + ۲yz\,,\ x^{۲} - y^{۲} + z^{۲}) = ۰$$

تمرین ۴-۴-۱۰

جواب عمومی معادلهٔ $۲z_x - ۲z_y + ۲z = ۲x$ را پیدا کنید.

تمرین ۴-۴-۱۱

جواب عمومی معادلهٔ $xyz_x - x^{۲}z_y - yz = xy$ را پیدا کنید.

تمرین ۴-۴-۱۲

جواب عمومی معادلهٔ $(x + z)q + (y + z)q = ۰$ را پیدا کنید.

تمرین ۴-۴-۱۳

جواب عمومی معادلهٔ $yp - xq = x^{۳}y + xy^{۳}$ را پیدا کنید.

تمرین ۴-۴-۱۴

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x (y - z)p + y (z - x)q = z (x - y)$$

را پیدا کنید.

منحنیهای شاخص ۴-۴-۱۵

از نقطه نظر هندسی و تحلیل روابط زیادی بین دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۲) و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱) وجود دارد. مهمترین آنها میدان برداری

$$\vec{V} (x,y,z) = P (x,y,z) \vec{i} + Q (x,y,z) \vec{j} + R (x,y,z) \vec{k} \qquad (۷)$$

است، که ***میدان برداری شاخص*** وابسته به معادلهٔ (۱) نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم $z = \varphi (x,y)$ جوابی از معادلهٔ (۱) در R باشد. به طور هندسی جواب سطح هموواری، مانند S، را مشخص می‌کند که در τ قرار دارد و ***سطح انتگرال*** نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم که $\vec{n}$ بردار نرمال بر S باشد [بردار $\vec{n} = \frac{p_{\circ}\vec{i} + q_{\circ}\vec{j} - \vec{k}}{(p_{\circ}^{۲} + q_{\circ}^{۲} + ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$ در یادآوری ۴-۲-۱۰ بردار یکه بر S می‌باشد]. اگر $\vec{V}$ بردار شاخص در نقطه‌ای بر S باشد، آنگاه

$$V \cdot n = \frac{P_p + Qq - R}{(p_{\circ}^{۲} + q_{\circ}^{۲} + ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$$

بنابراین $\vec{V}$ در صفحهٔ مماس بر S در هر نقطه بر S قرار دارد. بالعکس، اگر S یک سطح هموار با معادلهٔ $z = \varphi (x,y)$ باشد و اگر در هر نقطه بر S بردار شاخص $\vec{V}$ در آن نقطه در صفحهٔ مماس S واقع باشد، آنگاه S یک سطح انتگرال است و $z = \varphi (x,y)$ یک جواب معادلهٔ (۱) است.

هر منحنی هموار C واقع در τ به قسمی که منحنی شاخص V در هر نقطه بر C بر C مماس باشد یک **منحنی شاخص** از معادلهٔ (۱) نامیده می‌شود. بنابراین منحنیهای شاخص خطهای میدان، میدان برداری $V\ (x, y, z)$ می‌باشند. منحنی هموار C یک منحنی شاخص است اگر و تنها اگر معادلات کمکی (۲) بر C برقرار باشند. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که یک مجموعه از اعداد هادی مماس بر C مجموعهٔ دیفرانسیلهای dx ، dy و dz است و معادلات کمکی این واقعیت را بیان می‌کنند که اعداد هادی متناسب با مجموعهٔ اعداد هادی P ، Q و R از بردار $\vec{V}$ می‌باشند، یعنی مماس بر C در جهت $\vec{V}$ است.

منحنیهای شاخص یک خانواده دو پارامتری از منحنیهای فضایی تشکیل می‌دهد. درست یک شاخص بر هر نقطهٔ τ می‌گذرد. برای مشاهده این مطلب، در معادله (۳) x را به عنوان متغیر مستقل در نظر می‌گیریم. دستگاه (۳) در شرایط قضیهٔ وجودی یک دستگاه معادلات مرتبهٔ اول صدق می‌کند. بنابراین اگر X_0 ثابت باشد و Y_0 ، Z_0 مقادیر انتخاب شده‌ای باشند، آنگاه یک جواب یگانه، مانند

$$Y = Y(x, y_0, z_0) \qquad Z = Z(x, y_0, z_0) \tag{۸}$$

وجود دارد به قسمی که در یک همسایگی X_0 ، خواهیم داشت

$$Y(x_0, y_0, z_0) = Y_0 \qquad Z(x_0, y_0, z_0) = Z_0 \tag{۹}$$

در فضای xyz هر تابع در معادلهٔ (۸) یک استوانه را نمایش می‌دهد و رابطهٔ (۹) بیان می‌کند که این استوانه‌ها در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) یکدیگر را قطع می‌کنند. در یک همسایگی از (x_0, y_0, z_0) استوانه یکدیگر را در یک منحنی هموار C که از نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد قطع می‌کنند. چون دستگاه (۳) بر C برقرار است، نتیجه می‌شود که C یک منحنی شاخص است چون دستگاه (۳) با توجه به شرایط (۹) جواب یگانه دارد، پس C تنها شاخصی است که از (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد. اینک با در نظر گرفتن Y_0 و Z_0 به عنوان پارامتر، خانواده منحنیهای تعریف شده در معادلهٔ (۸) یک خانواده دو پارامتری از منحنیهای شاخص را تشکیل می‌دهد که درست یک

عضو این خانواده از هر نقطهٔ τ می‌گذرد. علاوه بر این، هر منحنی شاخص معادله دیفرانسیل جزئی به این خانواده متعلق است. توجه می‌کنیم که مطالب عنوان شده در بالا نتیجه می‌دهند که منحنیهای شاخص متمایز نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند.

اگر S یک منحنی انتگرال معادلهٔ (۱) و C یک منحنی شاخص باشد، آنگاه C منحنی S را قطع می‌کند یا C embedd در S است. برای نشان دادن این مطلب، فرض می‌کنیم $z = \varphi (x,y)$ معادله سطح انتگرال S باشد. فرض می‌کنیم C منحنی شاخصی باشد که S را در $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ قطع می‌کند. می‌دانیم که در یک همسایگی نقطهٔ $x= x_\circ$ یک جواب یگانه مانند $Y = Y(x)$ از معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q\ [x,y,\ \varphi (x,y)]}{P\ [x,y,\ \varphi (x,y)]}$$

وجود دارد به قسمی که $y (y_\circ) = y_\circ$ منحنی فضایی C' تعریف شده توسط معادلات $y = y(x)$ ، $z = \varphi [x, y(x)]$ از نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ می‌گذرد و در سطح S قرار دارد. همچنین

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_x + \varphi_y y' = \varphi_x + \varphi_y \frac{Q}{P} = \frac{P \varphi_x + Q \varphi_y}{P} = \frac{R}{P}$$

بنابراین توابعی که C' را تعریف می‌کنند در دستگاه (۳) صدق می‌کنند؛ و علاوه بر این $y(x_\circ) = y_\circ$ و $z(x_\circ) = z_\circ$. ولی توابعی که منحنی شاخص C را تعریف می‌کنند دقیقاً در همان شرایط صدق می‌کنند. ولی فقط یک مجموعه توابع $y(x)$ و $z(x)$ با این ویژگیها وجود دارد. بنابراین شاخص C و منحنی C' embedd یکسان می‌باشند.

تحقیق درستی روش لاگرانژ ۴-۴-۱۶

در اینجا درستی روش لاگرانژ را به روش هندسی و تحلیلی بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم S یک سطح انتگرال معادلهٔ (۱) باشد و $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ نقطه‌ای بر S باشد. یک منحنی هموار Γ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که (۱) Γ بر S واقع باشد و از نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ بگذرد (۲) Γ یک منحنی شاخص نباشد؛ یعنی مماس بر Γ در هیچ کجا موازی با بردار شاخص V در طول Γ نباشد. می‌دانیم که بر هر نقطهٔ Γ دقیقاً یک منحنی شاخص، مانند C، می‌گذرد و C embedd در S است. همچنین مماس بر

منحنی شاخص C در هیچ نقطه‌ای با مماس بر Γ در نقطهٔ تقاطع C و Γ منطبق نباشد. به این ترتیب یک زیرخانواده از خانوادهٔ منحنیهای شاخص تشکیل می‌شود و در یک همسایگی $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ این زیر خانواده از منحنیهای شاخص سطح انتگرالی، مانند S، را تشکیل می‌دهد. زیر خانواده خاص مربوط به این سؤال از خانوادهٔ دوپارامتری تمام منحنیهای شاخص توسط وضع کردن رابطه تابعی $F(C_1 , C_2) = 0$ بر پارامترهای C_1 و C_2 که در معادلهٔ (۵) ظاهر شده‌اند، به دست می‌آیند.

اینک فرض می‌کنیم

$$u(x, y, z) = C_1 \qquad v(x, y, z) = C_2 \qquad (۱۰)$$

دو انتگرال مستقل معادلات کمکی در τ باشند. همچنین فرض می‌کنیم $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ یک نقطهٔ ثابت ولی یک نقطه به دلخواه انتخاب شده بر τ باشد. در این صورت در یک همسایگی $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ دو سطح

$$u(x, y, z) = u(x_\circ , y_\circ , z_\circ) \quad , \quad v(x, y, z) = v(x_\circ , y_\circ , z_\circ) \qquad (۱۱)$$

در یک سطح هموار C که از نقطه $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ می‌گذرد یکدیگر را قطع می‌کنند. منحنی C منحنی شاخصی است که از نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ می‌گذرد با انتخاب x به عنوان پارامتر در طول C؛ با مشتقگیری از معادلات (۱۰)، معادلات

$$u_x + u_y \frac{dy}{dx} + u_z \frac{dz}{dx} = \circ \qquad v_x + v_y \frac{dy}{dx} + v_z \frac{dz}{dx}$$

به دست می‌آید. از این رو، از معادلات کمکی (۳) نتیجه می‌شود که

$$Pu_x + Qu_y + Ru_z = \circ \qquad Pv_x + Qv_y + Rv_z = \circ \qquad (۱۲)$$

این معادلات به طور همزمان در طول منحنی C برقرارند. نمایش برداری آنها عبارتند از

$$V \cdot \nabla u = \circ \qquad V \cdot \nabla v = \circ$$

بنابراین معادلات (۱۲) باین کنندهٔ این واقعیت می‌باشند که در هر نقطه از C بردار شاخص V بر هر دو بردار $\nabla v . \nabla u$ عمود است و در نتیجه با بردار $\nabla u \times \nabla v$ موازی است. یادآور می‌شویم که $\nabla u \times \nabla v$ در جهت بردار مماس بر C در آن نقطه است.

می‌توان به‌طور تحلیلی زیر درستی عبارت جواب عمومی به کار رفته در مورد رابطه (۶) را تحقیق کرد. فرض می‌کنیم u و v مانند پاراگراف قبلی تعریف شوند و F هر تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیری که $F(u , v) = 0$ به‌طور صریح تابعی مانند $z = \varphi(x,y)$ راتعریف کندکه دارای مشتقات جزئی پیوسته‌ای در همسایگی‌ای از نقطهٔ (x_0 , y_0 , z_0) در τ باشد. در اینجا دقیقاً مانند مثال ۴-۲-۷ مشتق‌گیری از $F=0$ نسبت به x و y و حذف F بین آنها به معادلهٔ

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\varphi_x + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\varphi_y = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \qquad (۱۳)$$

منجر می‌گردد. اینک از معادلات همزمان (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{Q}{P}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \quad , \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{R}{P}\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$$

با قرار دادن عبارتهای مربوط به ژاکوبینها در (۱۳) معادلهٔ

$$P\varphi_x + Q\varphi_y = R$$

به دست می‌آید. از این رو φ جوابی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱) است. در اینجا متذکر می‌شویم که نتایج به دست آمده به‌طور محلی می‌باشند، زیرا دلایل ارائه شده بر پایه قضیهٔ وجودی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی استوار است. بنابراین ویژگیهای نشان داده شده فقط در همسایگی‌ای از نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) در τ برقرار است.

روش حل ۴-۴-۱۷

یک معادله دیفرانسیل شبه‌خطی مرتبهٔ اول برای n متغیر مستقل $x_1,x_2,\dots,x_n$ و

متغیر مستقل u به صورت

$$P_1 U_{x_1} + P_2 U_{x_2} + \dots + P_n U_n = R \qquad (14)$$

یا

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = R$$

است، که در آن فرض می‌کنیم که توابع به‌طور پیوسته نسبت به x_iها و u مشتق‌پذیر باشند و P_i بر ناحیه‌ای مانند τ از فضای $(x_1, \dots, x_n, u)$ صفر نباشند. فرض می‌کنیم R تصویر τ بر صفحهٔ $u = 0$ باشد، یک **جواب**، مانند $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$، از (۱۴) بر R یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر از x_iها است به قسمی که φ و مشتقات آن در معادلهٔ (۱۴) صدق کنند. برای پیدا کردن جواب عمومی معادلهٔ (۱۴) معادلات کمکی به صورت

$$\frac{d x_1}{P_1} = \frac{d x_2}{P_2} = \dots = \frac{d x_n}{P_n} = \frac{d u}{R} \qquad (15)$$

را تشکیل می‌دهیم. اگر $n, w_1, \dots, w_n$ انتگرال مستقل معادلات کمکی (۱۵) باشد، آنگاه جواب عمومی (۱۴) عبارت است از

$$f(w_1, \dots, w_n) = 0$$

که در آن f تابعی دلخواه است.

مثال ۴-۴-۱۸

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$u_x + x\,u_y + xy\,u_z = xyzu$$

را پیدا کنید.

حل

در اینجا $P_1 = 1$، $P_2 = x$، $P_3 = xy$ و $R = xyzu$. معادلات کمکی عبارتند از

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy} = \frac{du}{xyzu}$$

با حل معادلهٔ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x}$$

یک انتگرال معادلات کمکی به صورت

$$w_1 = y - \frac{x^2}{2} = C_1$$

به‌دست می‌آید. از حل معادلهٔ

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy}$$

یا

$$y\,dy = dz$$

انتگرال دیگر معادلات کمکی به صورت

$$w_2 = z - \frac{y^2}{2} = C_2$$

درمی‌آید. و بالاخره از حل معادلهٔ

$$\frac{dz}{xy} = \frac{du}{xyzu}$$

یا

$$z\,dz = \frac{du}{u}$$

انتگرال

$$w_3 = u\,e^{-\frac{z^2}{2}} = C_3$$

برای معادلات کمکی به‌دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده عبارت است از

$$F\left(y - \frac{x^2}{2},\ z - \frac{y^2}{2},\ ue^{-\frac{z^2}{2}}\right) = 0$$

تمرین ۴-۴-۱۹

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$x\,u_x + (z+u)\,u_y + (y+u)\,u_z = y + z$$

را پیدا کنید.

۴-۵ـ مسأله کوشی برای معادلات دیفرانسیل شبه خطی مرتبهٔ اول

یک مسألهٔ اساسی در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی تعیین جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ است که از یک نقطهٔ معینی در صفحهٔ xy می‌گذرد. تحت شرایط خاصی یک جواب یگانه برای مسأله وجود دارد.

یک مسألهٔ مشابه در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول، نسبت به دو متغییر x و y تعیین کردن انتگرال سطحی است که این سطح از یک منحنی داده شده در فضای xyz بگذرد. یک چنین مسأله‌ای یک ***مسألهٔ کوشی*** نامیده می‌شود. در این بخش روش حل مسألهٔ کوشی برای معادلهٔ (۱) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قبل از بررسی حالت کلی به یک مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۴-۵-۱

یک جواب $z = \varphi(x,y)$ از معادلهٔ $yp - xq = 0$ را به قسمی پیدا کنید که $\varphi(x,0) = x^4$.

حل

در اینجا می‌خواهیم سطح انتگرالی را پیدا کنیم که از منحنی Γ که توسط معادلات همزمان $z = x^4$ و $y = 0$ تعریف شده است بگذرد. برای پیدا کردن جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. در اینجا $P=y$، $Q = -x$ و $R = 0$. بنابراین یک انتگرال معادلات کمکی از معادلهٔ

$$dz = 0$$

به صورت

$$u = z = C_1$$

به دست می‌آید. از حل معادلهٔ

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

انتگرال دوم معادلات کمکی به صورت

$$v = x^2 + y^2 = C_2$$

درمی‌آید. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ داده شده عبارت است از

$$Z = f(x^2 + y^2)$$

که در آن f یک تابع دلخواه است. هر سطح انتگرال یک سطح دوار حول محور Z است. از شرط $z = x^4$ و $y = 0$ نتیجه می‌شود که $z^4 = f(x^2)$. بنابراین $f(t) = t^2$. از این رو جواب مسأله کوشی برابر است با

$$Z = (x^2 + y^2)^2$$

تذکر ۴-۵-۲

در حالت کلی جواب، مسألهٔ کوشی برای معادلهٔ (۱) ممکن است وجود داشته یا نداشته باشد. همچنین ممکن است که مسأله بینهایت جواب متمایز داشته باشد. همهٔ این حالات را می‌توان به کمک معادلهٔ دیفرانسیل داده شده در تمرین ۴-۵-۱ توضیح داد. اگر Γ منحنی داده شده در این مثال باشد، دقیقاً یک جواب وجود دارد. اینک فرض می‌کنیم که Γ دایرهٔ $Z = 1, x^2 + y^2 = 1$ باشد. در این صورت هر تابعی مانند h(t) که در آن $h(1) = 1$ و $z = h(x^2 + y^2)$ جواب است. به وضوح در این حالت بینهایت جواب وجود دارد. در مقابل این حالت اگر Γ را بیضی $x^2+y^2=1$، $z = y$ در نظر بگیریم. اگر $z = f(x^2 + y^2)$ جواب مسأله کوشی باشد، آنگاه دایرهٔ $x^2+y^2=1$، خواهیم داشت $z = f(1)$ که ثابت است. به این ترتیب شرط ثابت بودن z با شرط $z = y$ وقتی $x^2+y^2=1$ در تناقض بنابراین هیچ جوابی وجود ندارد. توجه می‌کنیم که در حالت اخیر منحنی داده شده به قسمی است که تصویر آن بر صفحهٔ xy با تصویر منحنی شاخص بر صفحهٔ xy منطبق است، ولی Γ یک منحنی شاخص نیست.

روش حل ۴-۵-۳

فرض می‌کنیم Γ منحنی همواری باشد که به ازای $a<t<b$ توسط معادلات پارامتری

$$x = f(t) \quad , \quad y = g(t) \quad , \quad z = h(t) \qquad (1)$$

تعریف شده است. همچنین فرض می‌کنیم که Γ یک منحنی شاخص نباشد. برای به دست آوردن سطح انتگرالی از معادلهٔ (۱) بخش ۴-۴ که شامل Γ باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $u = C_1$ و $v = C_2$ دو انتگرال مستقل معادلات کمکی (۲) بخش ۴-۴ باشند. در این صورت دو معادله به صورت

$$u\,[\,f(t), g(t), h(t)\,] = C_1 \qquad v\,[\,f(t), g(t), h(t)\,] = C_2 \tag{۲}$$

به دست می‌آوریم. با حذف t بین دو معادلهٔ (۲) رابطه‌ای به صورت

$$F\,(C_1\,, C_2\,) = 0 \tag{۳}$$

به دست می‌آید. بنابراین جواب مسألهٔ کوشی برابر است با

$$F\,[\,u\,(x,y,z)\,,\,v\,(x,y,z)\,] = 0 \tag{۴}$$

مثال ۴-۵-۴

سطح انتگرالی از معادلهٔ

$$(y + xz)p + (x + yz)q = z^2 - 1$$

که از سهمی $x = t$، $y = 1$ و $z = t^2$ می‌گذرد، پیدا کنید.

حل

در اینجا معادلات کمکی عبارتند از

$$\frac{dx}{y + xz} = \frac{dy}{x + yz} = \frac{dz}{z^2 - 1}$$

چون $P + Q = (x + y)\,(z - 1)$ و $P - Q = (x - y)\,(z - 1)$، بنابراین معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\frac{dx + dy}{x + y} = \frac{dz}{z - 1} \quad , \quad \frac{dx - dy}{x - y} = \frac{dz}{z + 1}$$

از این رو،دو انتگرال مستقل معادلات کمکی عبارتند از

$$u = \frac{z-1}{x+y} = C_1 \quad , \quad v = \frac{z+1}{x-y} = C_2$$

توجه می‌کنیم که در اینجا منحنیهای شاخص خطوط راستی هستند که از تقاطع صفحه‌های

$$z - 1 - C_1(x+y) = 0 \qquad z + 1 - C_2(x-y) = 0$$

به دست می‌آیند. بنابراین منحنی داده شدهٔ Γ یک منحنی شاخص نیست. در این حالت معادلهٔ (۲) به صورت

$$\frac{t^2-1}{t+1} = C_1 \quad , \quad \frac{t^2+1}{t-1} = C_2$$

درمی‌آید. از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $t = C_1+1$. با قرار دادن این مقدار به جای t در معادلهٔ دوم بالا، خواهیم داشت: $(C_1+1)^2 = C_1 C_2$. بنابراین سطح انتگرالی که شامل Γ می‌باشد، معادله‌ای به صورت

$$\left(\frac{z-1}{x+y}+1\right)^2 + = \frac{z-1}{x+y} \cdot \frac{z+1}{x-y}$$

یا

$$\left(\frac{z-1+x+y}{x+y}\right)^2 = \frac{z^2-1}{x^2-y^2}$$

است.

تمرین ۴-۵-۵

سطح انتگرالی از معادلهٔ $p + q = z$ را پیدا کنید که از منحنی $z = \text{Cos}\, x$ و $y=0$ می‌گذرد.

تمرین ۴-۵-۶

سطح انتگرالی از معادلهٔ $2z_x - 5z_y = x^2 - 4z$ را پیدا کنید که از منحنی

$x = 0$ ، $z = \operatorname{Sin} y + e^{y} + \frac{1}{8}$ می‌گذرد.

تمرین ۴-۵-۷

سطح انتگرالی از معادلهٔ $x^{2}p + y^{2}q = z^{2}$ را پیدا کنید که از منحنی $x=t$ ، $y=2t$ و $z = 1$ می‌گذرد.

تمرین ۴-۵-۸

سطح انتگرالی از معادلهٔ $z(x+z)p - y(y+z)q = 0$ را پیدا کنید که از منحنی $x=1$ ، $y = t$ و $z = \sqrt{t}$ می‌گذرد.

تذکر ۴-۵-۹

از نقطه نظر هندسی رابطهٔ تابعی $F(C_1, C_2) = 0$ که بر ثابتهای C_1 و C_2 وضع می‌شود، یک زیرخانواده تك‌پارامتری از خانوادهٔ دوپارامتری منحنیهای شاخص در معادلهٔ (۵) بخش ۴-۴ معین می‌کند، به طور تحلیلی، شرطی که تحت آن سطح حاصل شامل منحنی داده شدهٔ Γ باشد، برقراری رابطهٔ

$$F\{u[f(t), g(t), h(t)], v[f(t), g(t), h(t)]\} = 0 \qquad (۵)$$

به ازای هر t، برای $a \le t \le b$ می‌باشد. اما اگر F را توسط حذف t بین دو معادلهٔ در معادلهٔ (۲) به دست آوریم، آنگاه به وضوح رابطهٔ (۵) به ازای هر t ، $a \le t \le b$ برقرار است. بنابراین، مشاهده می‌کنیم که موقعیت در این روش بستگی به حذف t در معادلهٔ (۲) دارد. اینک در زیر قضیهٔ وجودی و یگانگی را به طور محلی برای مسائل کوشی بررسی می‌کنیم. در این قضیه نشان می‌دهیم که اگر Γ یک منحنی شاخص نباشد، همیشه می‌توان t را در معادلهٔ (۲) حذف کرد.

قضیه ۴-۵-۱۰

فرض می‌کنیم τ ناحیهٔ xyz در فضا بوده و R تصویر Γ بر صفحهٔ xy باشد. همچنین فرض می‌کنیم که شرایط زیر نیز برقرار باشد:

(۱) ضرایب P ، Q و R در معادلهٔ (۱) بخش ۴-۴ نسبت به x ، y و z توابعی به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و P ، Q در τ صفر نشوند؛

(۲) Γ یک منحنی فضایی واقع بر τ باشد و به‌طور پارامتری توسط معادلات (۱) تعریف شده باشد، که در آن توابع f ، g و h معکوس‌پذیر و دارای مشتقات مرتبهٔ اول پیوسته باشند؛

(۳) $[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 \neq 0$ ، $a < t < b$ ؛

(۴) (x_0 , y_0 , z_0) نقطهٔ متناظر با $t = t_0$ بر Γ باشد؛

(۵) $P(x_0 , y_0 , z_0)\, g'(t_0) - Q(x_0 , y_0 , z_0)\, f'(t) \neq 0$

در این صورت یک همسایگی N از (x_0 , y_0) در R و یک همسایگی $|t-t_0| < \delta$ ، از t و یک تابع یگانه $z = \varphi(x,y)$ وجود دارند، به قسمی که φ جوابی از معادلهٔ (۱) بخش ۴-۴ بر N است و

$$h(t) = \varphi\,[\,f(t)\,,\,g(t)\,]$$

به ازای هر t ، $|t-t_0| < \delta$ ، برقرار است.

اثبات

برای اثبات این قضیه از قضیهٔ زیر در مورد دستگاه (۳) بخش ۴-۴ استفاده می‌کنیم. تحت شرایط حاضر بر P ، Q و R یک خانواده دوپارامتری جوابهای

$$y = y(x, C_1 , C_2) \qquad z = z(x, C_1 , C_2) \tag{۶}$$

از معادلات (۳) وجود دارد، که در آن دو تابع y و z پیوسته می‌باشند و مشتقات مرتبهٔ اول آنها نسبت به پارامترهای C_1 و C_2 بر یک بُرد معین از مقادیر این پارامترها که شامل y_0 و z_0 پیوسته است. علاوه بر این به ازای هر زوج از مقادیر C_1 و C_2 ، خواهیم داشت:

$$y(x_0 , C_1 , C_2) = C \qquad z(x_0 , C_1 , C_2) = C_2 \tag{۷}$$

از معادلات (۷) به ازای $x = x_0$، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial y}{\partial C_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial C_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial C_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial C_2} = 1$$

از این رو، ژاکوبین $\frac{\partial (y,z)}{\partial (C_1, C_2)}$ در همسایگی‌ای از (x_0 , y_0 , z_0) مخالف صفر است. این مطلب نتیجه می‌دهد که معادلهٔ (۵) را می‌توان نسبت به C_1 و C_2 حل کرد. بنابراین، خواهیم داشت

$$C_1 = u (x, y, z) \quad , \quad C_2 = v (x, y, z)$$

و توابع v و u در ویژگی

$$y_0 = u (x_0 , y_0 , z_0) \qquad z_0 = v (x_0 , y_0 , z_0)$$

صدق می‌کنند. ژاکوبین $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$ در همسایگی‌ای از (x_0 , y_0 , z_0) مخالف صفر است، زیرا این ژاکوبین معکوس $\frac{\partial(y,z)}{\partial(C_1 , C_2)}$ است. اینک با استفاده از دو تابع u و v که به این ترتیب ساخته‌ایم، توابع $C_1 (t)$ و $C_2 (t)$ را توسط

$$C_1 (t) = u [f(t), g(t), h(t)] \quad , \quad C_2 (t) = v [f(t), g(t), h(t)]$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $C_1 (t_0) = y_0$ و $C_2 (t_0) = z_0$. علاوه بر این C_1 و C_2 دارای مشتقات مرتبهٔ اول پیوسته نسبت به t در همسایگی‌ای از $t = t_0$ است. با به‌کار بردن قاعدهٔ زنجیری، خواهیم داشت

$$\frac{dC_1}{dt} = \nabla u \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \frac{dC_2}{dt} = \nabla v \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (8)$$

که در آن

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j} + h'(t)\,\vec{k}$$

توجه می‌کنیم که بردار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بر Γ مماس است. اینک حداقل یکی از مقادیر

$C_1'(t_\circ)$ و $C_2'(t_\circ)$ مخالف صفر است. فرض می‌کنیم که اینطور نباشد، یعنی $C_1'(t_\circ)=C_2'(t_\circ)=\circ$ در این صورت در $t = t_\circ$، $x = x_\circ$، $y = y_\circ$ و $z = z_\circ$ بردار $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بر بردارهای ∇u و ∇v عمود است. چون ژاکوبین $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$ در $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ مخالف صفر است، بردار $\nabla u \times \nabla v$ یک مؤلفهٔ غیرصفر x دارد و بنابراین در این نقطه بردار غیرصفر است. همچنین بنا به فرض (۳) در صورت قضیه $\frac{dr}{dt}$ در $t = t_\circ$ بردار صفر نیست. از این رو $\frac{dr}{dt}$ با بردار $\nabla u \times \nabla v$ هم‌جهت است. اما بردار $\nabla u \times \nabla v$ با بردار شاخص V هم‌جهت می‌باشد (۴-۴-۱۶ را ببینید). بنابراین Γ در $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ یک منحنی شاخص است. این مطلب با فرض (۵) در صورت قضیه، یعنی $\vec{V}\times \frac{d\vec{r}}{dt} .\vec{k} \neq \circ$ در این نقطه در تناقض است. بنابراین حداقل یکی از مقادیر $C_1'(t_\circ)$ و $C_2'(t_\circ)$ مخالف صفر است. بنا به یکی از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال معادلهٔ $C_1 = C_1(t)$ را می‌توان در همسایگی‌ای از $t_\circ$ حل کرد و معکوس تابع یعنی $t=t(C_1)$ را به دست آورد، علاوه بر $t(y_\circ) = t_\circ$ با جایگذاری $t(C_1)$ به‌جای t در معادلهٔ $C_2 = C_2(t)$، خواهیم داشت:

$$C_2 = C_2 [t(C_1)] = \psi (C_1)$$

اینک معادلهٔ

$$v (x,y,z) - \psi [u (x,y,z)] = \circ \qquad (۹)$$

را در نظر می‌گیریم. به سادگی مشاهده می‌کنیم که اگر در این رابطه x ، y و z را به ترتیب با f(t)، g(t) و h(t) جایگزین کنیم، یک اتحاد نسبت به t حاصل می‌شود. به ویژه این معادله به ازای $x = x_\circ$، $y = y_\circ$ و $z = z_\circ$ نیز برقرار است. مشاهده می‌کنیم که طرف چپ معادلهٔ (۹) در یک همسایگی $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است. اینک ادعا می‌کنیم که در $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$

$$v_z - \psi' (u) u_z \neq \circ \qquad (۱۰)$$

برای اثبات این مطلب ملاحظه می‌کنیم که

$$\psi'(C_1) = \frac{dC_2}{dC_1} = \frac{\frac{dC_2}{dt}}{\frac{dC_1}{dt}} = \frac{\nabla v \cdot d\vec{r}/dt}{\nabla u \cdot d\vec{r}/dt}$$

اگر در (x_0, y_0, z_0)، $v_z - \psi'(u)\, u_z = 0$ آنگاه

$$v_z \nabla u \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - u_z \nabla v \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

با توجه به عبارت مربوط به حاصلضرب سه گانهٔ $(\nabla u \times \nabla v) \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ معادلهٔ بالا به صورت

$$(\nabla u \times \nabla v) \times \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{k} = 0$$

از این رو،

$$V \times \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{k} = 0$$

که با فرض (۵) در تناقض است. بنابراین (۱۰) برقرار است. اینک (۱۰) نتیجه می‌دهد که می‌توان معادلهٔ (۹) را در یک همسایگی (x_0, y_0, z_0) حل کرد. و یک تابع مانند $z = \varphi(x,y)$ که به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، به قسمی به دست آورد که $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ در واقع یک همسایگی از t_0 وجود دارد به قسمی که به ازای هر t، خواهیم داشت

$$h(t) = \varphi[\, f(t), g(t)\,]$$

اثبات اینکه φ در یک همسایگی (x_0, y_0, z_0) جوابی از معادلهٔ (۱) بخش ۴-۴ است از بحث ارائه شده در پاراگراف پایان ۴-۴-۱۶ نتیجه می‌شود.

از شرط مربوط به ناشاخص بودن Γ نتیجه می‌شود که در یک همسایگی

اگر در $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$، $v_z - \psi'(u)\, u_z = \circ$ آنگاه

$$v_z \nabla u \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - u_z \nabla v \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \circ$$

با توجه به عبارت مربوط به حاصلضرب سه‌گانهٔ $(\nabla u \times \nabla v) \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ معادلهٔ بالا به صورت

$$(\nabla u \times \nabla v) \times \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{k} = \circ$$

از این رو،

$$V \times \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{k} = \circ$$

که با فرض (۵) در تناقض است. بنابراین (۱۰) برقرار است. اینک (۱۰) نتیجه می‌دهد که می‌توان معادلهٔ (۹) را در یک همسایگی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ حل کرد. و یک تابع مانند $z = \varphi(x,y)$ که به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، به قسمی به دست آورد که $z_\circ = \varphi(x_\circ, y_\circ)$ در واقع یک همسایگی از $t_\circ$ وجود دارد به قسمی که به ازای هر t، خواهیم داشت

$$h(t) = \varphi\,[\, f(t)\,,\, g(t)\,]$$

اثبات اینکه φ در یک همسایگی $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ جوابی از معادلهٔ (۱) بخش ۴-۴ است از بحث ارائه شده در پاراگراف پایان ۴-۴-۱۶ نتیجه می‌شود.

از شرط مربوط به ناشاخص بودن Γ نتیجه می‌شود که در یک همسایگی $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ مسأله کوشی حداکثر یک جواب دارد. برای اینکه اگر دو انتگرال سطح از معادلهٔ (۱) بخش ۴-۴ وجود داشته باشد که در نزدیکی $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ شامل Γ باشند، آنگاه در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک، از $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$، Γ تنها منحنی محل برخورد این دو سطح است. اما Γ شاخص نیست.

تمرینهای فصل ۴

تمرین ۴-۵-۱۱

۱. مرتبهٔ هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کرده و آنها را به صورت معادلات خطی، تقریباً خطی، شبه خطی، یا هیچکدام دسته‌بندی کنید.

الف) $u_{xx} + xu_y = 0$

ب) $uu_y + u_{xx} - u_x = 0$

پ) $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varphi = 0$

ت) $u_{xyy} + u_x u_{yy} - u_x^2 + xy^2 = z$

۲. توابع دلخواه ظاهر شده در روابط زیر را حذف کرده و یک معادله دیفرانسیل با پایین‌ترین مرتبهٔ ممکن به دست آورید.

الف) $ze^{-x^2} + \psi(x^2 + y^2) = 0$

ب) $F(2y - x^2, ze^{-x}) = 0$

پ) $F\left(x^2 - z^2, \frac{x + z}{y}\right) = 0$

ت) $F\left(z, \frac{x + z}{y + z}\right) = 0$

۳. با حذف ثابتهای دلخواه a ، b ، c ، ... در روابط داده شده معادلهٔ دیفرانسیلی با مشتقات جزئی از پایین‌ترین مرتبهٔ ممکن به‌دست آورید.

الف) $z = bx^a y^{1-a}$

ب) $u = A e^{ax} \operatorname{Cos} ay$

پ) $u = A e^{-a^{۲}t} \operatorname{Cos} ax$

ت) $z = ax + by + a^{۲} + b^{۲}$

۴. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

الف) $z_x + xz = x^{۳} + ۳xy$

ب) $sp + ۴q + z = x^{۲} + ۱ + ۲e^{۳y}$

پ) $p - aq = e^{mx} \operatorname{Cos} by$ که در آن a ، m و b ثابت می‌باشند.

ت) $p - q - ۲z = e^{۲x} \operatorname{Cos} ۳y$

۵. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به‌دست آورید.

الف) $zp + yq = x$

ب) $x^{۲}q + y^{۲}q = axy$ ، a ثابت و مخالف صفر است.

پ) $p - ۲q = ۳x^{۲} \operatorname{Sin} (y - ۲x)$

ت) $\operatorname{Cos} y \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{Cos} x \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y$

ث) $xp - yq = ۲xy (a^{۲} - z^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$

ج) $xp - yq - xz = 2e^{x} + x^{2}y$

چ) $x^{2}p - xyq = -2yz$

۶. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

الف) $P_1 U_x + P_2 U_y + P_3 U_z + RU = 0$

که در آن P_1، P_2، P_3، R ثابت هستند.

ب) $3u_x + 5u_y - u_z = \cos y - 2e^{-z}$

پ) $(x + z) u_x + y u_y - 2u_z = 4e^{z}$

ت) $(z - y) u_x + y u_y - z u_z = y (x + z) - y^{2}$

ث) $x u_x + y u_y + z u_z = nu$

که در آن n یک عدد ثابت است.

ج) $\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_1 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} + x_1 x_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0$

چ) $u = x f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \frac{xy\,Lnx}{z} = t$

۷. انتگرال سطحی را که از منحنی داده شده می‌گذرد، پیدا کنید.

الف) $xp - yq = 0 \qquad x = y = z = t$

ب) $2xzp + 2yzq = z^{2} - x^{2} - y^{2} \quad , \quad x + y + z = 0 \quad , \quad x^{2} + y^{2} + z^{2} = a^{2}$

که در آن a یک عدد ثابت است.

پ) $x(y - z)p + y(z - x)q = z(x - y) \quad , \quad x = y = z = t$

ت) $yp - xq = 2xyz \quad ; \quad x = y = z = t$

ث) $p \operatorname{Sec} x + aq = \operatorname{Cot} y \quad ; \quad z(0,y) = \operatorname{Sin} y$

ج) $u_x + u_y - u = 0 \quad ; \quad u = 1 + \operatorname{Cos} x \ , \ y = 2x$

چ) $x u_x - y u_y = x - u \quad ; \quad u = x^2 \ , \ y = x$

ح) $y u_x - x u_y + xu = 0 \quad ; \quad u = y \ , \ x^2 + 4y^2 = 4$

فصل ۵: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم

۵-۱ ــ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

مقدمه ۵-۱-۱

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم برای دو متغیر مستقل x و y عبارت است از

$$A\,Z_{xx} + 2B\,Z_{xy} + C\,Z_{yy} + D\,Z_x + E\,Z_y + F\,Z = G \qquad (1)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که ضرایب و تابع داده شدهٔ G بر ناحیهٔ R از صفحهٔ xy به‌طور پیوسته دو بار مشتق‌پذیر باشند. در اینجا نماد عملگری

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}\ ,\ D_y = \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ ,\ D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\ , \ldots$$

بسیار مفید است. معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت سادهٔ

$$LZ = G \qquad (2)$$

که در آن

$$L = AD_x^2 + 2BD_x D_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F \qquad (3)$$

نوشت. عملگر L یک **عملگر خطی** است، یعنی

$$L\,(C_1 Z_1 + C_2 Z_2) = C_1\,L\,Z_1 + C_2\,L\,Z_2 \qquad (4)$$

که در آن $C_۱$ و $C_۲$ دو ثابت دلخواه بوده و دو تابع $Z_۱$ و $Z_۲$ دارای مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته می‌باشند.

تعریف ۵-۱-۲

یک تابع $Z = \varphi\ (x,y)$ با مشتقات دوم پیوسته بر R یک **جواب** معادلهٔ (۲) می‌باشد اگر با جایگذاری φ و مشتقات آن در طرف چپ معادلهٔ (۲) یک اتحاد نسبت به متغیرهای x ، y بر R به‌دست آید. وقتی φ یک تابع با مقدار حقیقی باشد. سطح تعریف شده توسط $Z = \varphi\ (x,y)$ در صفحهٔ xyz یک ***انتگرال سطح*** معادلهٔ (۲) نامیده می‌شود. **معادلهٔ همگن** وابسته به معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$LZ = 0 \qquad (۵)$$

قضیه ۵-۱-۳

اگر $z_۱ , z_۲ , ... , z_p$ جوابهای معادلهٔ (۲) باشند، آنگاه به ازای ثابتهای دلخواه $C_۱ , C_۲ , ... , C_p$ تابع $z = C_۱ z_۱ + C_۲ z_۲ + ... + C_p z_p$ نیز یک جواب معادلهٔ (۲) است. علاوه بر این اگر Z_q یک جواب خصوصی معادله (۲) باشد، آنگاه $C_۱z_۱+C_۲z_۲+...+C_pz_p+z_q$ نیز یک جواب معادلهٔ (۲) است.

اثبات

از ویژگی خطی بودن L، نتیجه می‌شود که

$$L\ (C_۱z_۱ + C_۲z_۲ + ... + C_pz_p) = C_۱Lz_۱ + C_۲Lz_۲ + ... + C_pLz_p = $$
$$C_۱\ 0 + C_۲\ 0 + ... + C_p\ 0 = 0$$

از طرف دیگر بنا به همین خاصیت، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L\ (C_۱z_۱ + C_۲z_۲ + ... + C_pz_p + z_q) &= L\ (C_۱z_۱ + C_۲z_۲ + ... + C_pz_p + z_q) \\ &= L\ (C_۱z_۱ + C_۲z_۲ + ... + C_pz_p\ )\ L\ z_q) \\ &= L\ z_q = G \end{aligned}$$

تعریف ۵-۱-۴

ساده‌ترین حالت وقتی اتفاق می‌افتد که ضرایب عملگر L در معادلهٔ (۲) اعداد حقیقی ثابت باشند. همچنین فرض می‌کنیم که G یک تابع تحلیلی با مقدار حقیقی در R باشد. در این صورت معادلهٔ (۲) همیشه جواب دارد و در واقع بینهایت جواب متمایز خواهد داشت. در برخی حالات می‌توان رابطه‌ای شامل دو تابع دلخواه را به قسمی پیدا کرد که به ازای هر انتخاب دلخواه برای توابع (با توجه به مشتق‌پذیری مورد لزوم) یک جواب معادلهٔ (۵) حاصل شود. یک چنین رابطه‌ای **جواب عمومی معادلهٔ همگن** نامیده می‌شود و اگر Z_h نمایش جواب عمومی معادلهٔ (۵) بوده و Z_p یک جواب خصوصی معادلهٔ (۲) باشد، آنگاه $Z = Z_h + Z_p$ **جواب عمومی** معادلهٔ غیرهمگن خواهد بود.

تذکر ۵-۱-۵

مثال زیر تعریفهای بالا را توضیح می‌دهد.

مثال ۵-۱-۶

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x + 3\cos 2y$$

را پیدا کنید.

حل

معادله همگن وابسته به معادلهٔ غیرهمگن داده شده عبارت است از

$$(D_x^2 - D_y^2)\, Z = 0$$

عملگر $L = D_x^2 - D_y^2$ در این مثال را می‌توان به صورت

$$L = D_x^2 - D_y^2 (D_x + D_y)(D_x - D_y) = (D_x - D_y)(D_x + D_y)$$

تجزیه کرد. فرض می‌کنیم Z یک جواب معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول $D_x Z + D_y Z = 0$ باشد. در این صورت Z یک جواب معادلهٔ همگن می‌باشد، زیرا

$$(D_x^2 - D_y^2) Z = [(D_x - D_y)(D_x + D_y)] Z = (D_x - D_y)(D_x Z + D_y Z) = 0$$

به همین نحو، اگر Z یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول $D_x Z - D_y Z = 0$ باشد، آنگاه Z یک جواب معادلهٔ همگن است. اینک جواب عمومی معادلهٔ $D_x Z + D_y Z = 0$ عبارت است از $Z = f(x-y)$ که در آن f یک تابع دلخواه است و جواب عمومی معادلهٔ $D_x z - D_y z = 0$ عبارت است از $z=g(x+y)$، که در آن g یک تابع دلخواه می‌باشد. از این‌رو، جواب عمومی معادلهٔ همگن برابر است با

$$Z_h = f(x-y) + g(x+y)$$

برای پیدا کردن یک جواب خصوصی متناظر با جملهٔ ۴x با ثابت نگهداشتن y، از معادلهٔ

$$Z_{xx} = ۴x$$

دوبار انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت

$$Z_x = ۲x^۲$$
$$Z = \frac{۲}{۳} x^۳$$

به همین نحو، برای پیدا کردن جواب خصوصی متناظر با جملهٔ ۳Cos۲y با ثابت نگهداشتن x، از معادلهٔ

$$-۲yy = ۳\text{Cos}\,۲y$$

دوبار انتگرال می‌گیریم. بنابراین،

$$Z_y = -\frac{۳}{۲}\,\text{Sin}\,۲y$$

و

$$Z = \frac{۳}{۴}\,\text{Cos}\,۲y$$

بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ غیرهمگن برابر است با

$$Z = f(x-y) + g(x+y) + \frac{۲x^۳}{۳} + \frac{۳}{۴}\operatorname{Cos}۲y$$

که در آن f و g دو توابع دلخواه می‌باشند.

۵-۱-۷ـ روش حل معادلات همگن با ضرایب ثابت

مانند مثال ۵-۱-۷ گاهی می‌توان عملگر L با ضرایب ثابت را به صورت حاصلضرب عملگرهای مرتبهٔ اول خطی تجزیه کرد. در صورتی که بتوانیم L را تجزیه کنیم، جواب عمومی معادلهٔ (۵) را می‌توان به کمک نتایج ۴-۳-۱۲ به دست آورد. فرض می‌کنیم که

$$L = L_۱ L_۲ = (a_۱ D_x + b_۱ D_y + C_۱)(a_۲ D_x + b_۲ D_y + C_۲) \qquad (۶)$$

چون ضرایب ثابت بوده و $D_xD_y = D_yD_x$ در نتیجه عملگرهای $L_۱$ و $L_۲$ جابجا می‌شوند، یعنی $L_۱ L_۲ = L_۲ L_۱$. بنابراین، اگر $Z_۱$ یک جواب معادلهٔ مرتبهٔ اول $L_۱Z=۰$ باشد، آنگاه

$$LZ_۱ = (L_۱ L_۲) Z_۱ = (L_۲ L_۱) Z = L_۲ (L_۱ Z) = ۰$$

به همین نحو، اگر $Z_۲$ یک جواب $L_۲ Z_۲ = ۰$، آنگاه $Z_۲$ یک جواب معادلهٔ (۵) است. از طرف دیگر، چون L یک عملگر خطی است، بنابراین $Z = Z_۱ + Z_۲$ نیز یک جواب معادلهٔ (۵) می‌باشد. در نتیجه اگر $A = a_۱ a_۲ \neq ۰$ و عوامل $L_۱$ و $L_۲$ متمایز باشند، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ (۵) عبارت است از

$$Z_h = e^{-\frac{C_۱x}{a_۱}} f(b_۱x - a_۱y) + e^{-\frac{C_۲x}{a_۲}} g(b_۲x - a_۲y) \qquad (۷)$$

که در آن f و g توابع دلخواه هستند. اگر عاملهای L تکراری باشند، یعنی $L_۱=L_۲$،

آنگاه جواب عمومی برابر است با

$$Z_h = e^{-\frac{C_1 x}{a_1}} \left[x f(b_1 x - a_1 y) + g(b_1 x - a_1 y) \right] \tag{۸}$$

اگر یکی از ضرایب a_1 و a_2 صفر باشد، جملهٔ متناظر با آن در معادلهٔ (۷) توسط جمله‌ای به صورت (۵) در بخش ۴-۳ جایگزین می‌شود.

تذکر ۵-۱-۸

وقتی L یک عملگر همگن به صورت

$$L = A D_x^2 + 2B D_x D_y + C D_y^2$$

باشد، در این حالت مرتبهٔ مشتق Z که در هر جملهٔ L ظاهر می‌شود یکسان می‌باشند. مثلاً دو اگر r_1 و r_2 ریشه‌های چندجمله‌ای $Ar^2 + 2Br + C$ باشند، آنگاه

$$L = A(D_x - r_1 D_y)(D_x - r_2 D_y)$$

اگر $A = 0$، آنگاه $L = D_y(2BD_x + CD_y)$. توجه می‌کنیم که ریشه‌های r_1 و r_2 وقتی حقیقی می‌باشند که $B^2 - AC \geq 0$

تذکر ۵-۱-۹

در زیر روشهایی برای پیدا کردن جوابهای خصوصی معادلهٔ (۲) را توضیح می‌دهیم. این روشها مشابه روشهای مورد استفاده در تعیین جوابهای خصوصی معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت است.

جواب خصوصی ۵-۱-۱۰

فرض می‌کنیم L عملگر خطی داده شده در معادلهٔ (۳) باشد، که در آن

ضرایب اعداد حقیقی می‌باشند. در این صورت $L = P(D_x, D_y)$ یک چندجمله‌ای از عملگرهای D_x و D_y می‌باشند. اگر $f(x,y)$ یک تابع باشد، می‌دانیم که معادلهٔ

$$\frac{f(x,y)}{P(D_x, D_y)} = \varphi(x,y)$$

به معنی

$$P(D_x, D_y)[\varphi(x,y)] = f(x,y)$$

است. به آسانی می‌توان درستی معادلات زیر را تحقیق کرد.

(۱) $\frac{e^{ax+by}}{P(D_x, D_y)} = \frac{e^{ax+by}}{P(a,b)}$ مشروط بر اینکه ثابتهای a و b به قسمی باشند که $P(a,b) \neq 0$.

(۲) $\frac{\sin(ax+by)}{P(D_x^2, D_y^2)} = \frac{\sin(ax+by)}{P(-a^2,-b^2)}$ مشروط بر اینکه $P(-a^2,-b^2) \neq 0$. معادلهٔ $\frac{\cos(ax+by)}{P(D_x^2, D_y^2)} = \frac{\cos(ax+by)}{P(-a^2,-b^2)}$ نیز برقرار است.

(۳) $\frac{\cos(ax+by)}{P(D_x,D_y)} = R_e\left[\frac{e^{i(ax+by)}}{P(ia,ib)}\right]$ و $\frac{\sin(ax+by)}{P(D_x,D_y)} = I_m\left[\frac{e^{i(ax+by)}}{P(ia,ib)}\right]$

مشروط بر اینکه $P(ia,ib) \neq 0$

(۴) $\frac{e^{mx}\cos(ax+by)}{P(D_x, D_y)} = R_e\left[\frac{e^{mx+i(ax+by)}}{P(m+ia, ib)}\right]$ مشروط بر اینکه به ازای ثابتهای حقیقی m، a و b، $P(m+ia, ib) \neq 0$. به همین نحو،

$$\frac{e^{mx}\sin(ax+by)}{P(D_x, D_y)} = I_m\left[\frac{e^{mx+i(ax+by)}}{P(ia, m+ib)}\right]$$

(۵) $\frac{X_n}{(D_x+a)^m} = (a^{-m} - ma^{-(m+1)} D_x + [m(m+1)/2!] D_x^2 - \dots) X^n$

مشروط بر اینکه $a \neq 0$ و n، m اعداد صحیح مثبت باشند.

مثال ۵-۱-۱۱

جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $r-t+2p+z=y^2+2\sin(2x+y)-x^2y$ را پیدا کنید.

حل

معادله دیفرانسیل همگن به صورت

$$LZ=(D_x^2-D_y^2+2D_x+1)z=0$$

است. در اینجا L را می‌توان به صورت

$$L=(D_x-D_y+1)(D_x+D_y+1)$$

تجزیه کرد. نخست جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

$$L_1Z=Z_x-Z_y+Z=0 \qquad , \qquad L_2Z=Z_x+Z_y+Z=0$$

را با روشهای ارائه شده در مورد معادلات شبه خطی مرتبهٔ اول، پیدا کنیم. معادلات کمکی مربوط به معادلهٔ $L_1Z=0$ عبارتند از

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{-z}$$

از حل معادلهٔ $\frac{dy}{-1}=\frac{dx}{1}$، یک انتگرال سطح معادلات کمکی به صورت

$$u=x+y=C_1$$

به دست می‌آید و از حل معادلهٔ $\frac{dz}{-z}=\frac{dx}{1}$ یک انتگرال سطح دیگر به صورت

$$v=Ze^x=C_2$$

به دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ $L_1Z = 0$، عبارت است از

$$Ze^{x} = f(x+y)$$

یا
$$Z = e^{-x} f(x+y)$$

به همین نحو، جواب عمومی معادلهٔ $L_2Z = 0$ به صورت

$$Z = e^{-x} g(x-y)$$

به دست می‌آید. از این‌رو، جواب عمومی معادلهٔ همگن برابر است با

$$Z_h = e^{-x} f(x+y) + e^{-x} g(x-y)$$

برای یافتن یک جواب خصوصی معادلهٔ $LZ = y^2$، فرض می‌کنیم $Z=Z(y)$. معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$Z'' - Z = -y^2 \qquad (*)$$

را حل می‌کنیم. می‌دانیم که یک جواب خصوصی این معادله عبارت است از

$$Z_p = Ay^2 + By + C$$

با دو بار مشتقگیری از این رابطه و قرار دادن Z_p'' و Z_p در معادلهٔ (*)، خواهیم داشت

$$Z_p = 2Ay + B$$

$$Z_p'' = 2A$$

$$2A - Ay^2 + By + C = -y^2$$

بنابراین

$$A = 1 \ , \quad B = 0 \ , \quad 2A + C = 0$$

از معادلهٔ $۲A + C = ۰$، به دست می‌آوریم $C = -۲$. بنابراین جواب خصوصی خواسته شده برابر است با $Z_p = y^۲ + Z$. برای پیدا کردن یک جواب خصوصی مربوط به $LZ = ۲Sin\,(۲x + y)$ بنا به فرمول (۲) ۵-۱-۱۰، می‌نویسیم

$$\frac{۲Sin\,(۲x+y)}{D_x^۲ - D_y^۲ + ۲D_x + ۱} = \frac{۲Sin\,(۲x+y)}{-۲^۲ + ۱^۲ + D_x + ۱} = \frac{Sin\,(۲x+y)}{D_x - ۱}$$

$$= \frac{(D_x + ۱)\,[\,Sin\,(۲x + y)\,]}{D_x^۲ - ۱} = \frac{(D_x + ۱)\,Sin\,(۲x + y)}{-۲^۲ - ۱}$$

$$= \frac{۲\,Cos\,(۲x + y) + Sin\,(۲x + y)}{۵}$$

همچنین با استفاده از (۵) در ۵-۱-۱۰ می‌توان یک جواب خصوصی مربوط به $-x^۲y$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{-x^۲y}{D_x^۲ - D_y^۲ + ۲D_x + ۱} = \frac{-x^۲y}{(D_x + ۱)^۲ - D_y^۲} = \frac{-x^۲y}{(D_x + ۱)^۲\left\{۱ - \left[\dfrac{D_y}{(D + ۱)}\right]^۲\right\}}$$

$$\frac{۱}{(D_x + ۱)^۲}\left\{۱ + \left(\frac{D_y}{D_x + ۱}\right)^۲ + \left(\frac{D_y}{D_x + ۱}\right)^۴ + \ldots\right\}(-x^۲y)$$

$$= -\frac{x^۲y}{(D_x + ۱)^۲} = -y\,(۱ + D_x)^{-۲}\,x^۲$$

$$= -y\,[\,۱ - ۲D_x + ۳D_x^۲ - \ldots\,]\,x^۲$$

$$= -y\,(x^۲ - ۴x + ۶)$$

بنابراین، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده عبارت است از

$$Z = e^{-x}\,[f(x+y) + g(x-y)] - \frac{۱}{۵}\,[۲Cos(۲x+y) + Sin(۲x+y)] - y(x^۲ - ۴x + ۶) + y^۲ + z$$

تمرین ۵-۱-۱۲

جواب عمومی معادلهٔ $r - 10s + qt = 0$ را به دست آورید.

تمرین ۵-۱-۱۳

جواب عمومی معادلهٔ $4Z_{xy} + Z_{yy} = \cos y + 1$ را پیدا کنید.

تمرین ۵-۱-۱۴

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $Z_{xx} = xy$ را پیدا کنید.

تمرین ۵-۱-۱۵

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $r - t - 3p + 3q = xy$ را پیدا کنید.

تمرین ۵-۱-۱۶

جواب عمومی معادله دیفرانسیل
$Z_{xx} - Z_{xy} - Z_x + Z_y = 2\cos(3x + 2y)$ را پیدا کنید.

روش حل ۵-۱-۱۷

معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با n متغیر مستقل $x_1,\dots,x_n$ به صورت

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = G \qquad (9)$$

را در نظر می‌گیریم. به کمک نماد عملگری $D_{xi} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ، $i = 1,\dots,n$ عملگر خطی ظاهر شده در (۹) را می‌توان به صورت

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} D_{xi} D_{xj} + \sum_{i=1}^{n} B_i D_{xi} + C$$

نوشت. معادلهٔ همگن وابسته به این معادله عبارت است از

$$Lu = 0 \qquad (10)$$

با فرض اینکه ضرایب A_{ij} ، B_i و C در L حقیقی ثابت بوده و $A_{ij} = A_{ji}$ ، $i,j=1,...,n$ باشد.

وقتی عملگر L را بتوان به صورت حاصلضرب در عملگر خطی مرتبهٔ اول، یعنی:

$$L = L_1L_2 = (a_1 D_{x_1} + ... + a_n D_{xn} + C)\ (b_1 D_{x_1} + ... + b_n D_{xn} + d)$$

تجزیه کرد. روش حل برای دو متغیر x و y را به حالتی که n متغیر مستقل داشته باشیم تعمیم داد. در این صورت جواب عمومی معادلات مرتبهٔ اول $L_1u = 0$ و $L_2u=0$ را می‌توان توسط نتایج فصل ۴، پیدا کرد. در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ (۱۰) برابر است با

$$\begin{aligned} U_h = {} & e^{-\frac{cx_1}{a_1}} f\,(a_2x_1 - a_1x_2\,,\, ...\,,\, a_nx_1 - a_1x_n\,) + \\ & e^{-\frac{dx_1}{b_1}} g\,(b_2x_1 - b_1x_2\,,\, ...\,,\, b_nx_1 - b_1x_n\,) \end{aligned} \tag{11}$$

که در آن f و g توابع دلخواه می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم که $a_1 \neq 0$ و $b_1 \neq 0$ اگر a_1 و b_1 صفر باشد، جواب عمومی را مانند حالت $n = 2$ تعمیم می‌دهیم. **جواب عمومی** معادلهٔ (۹) عبارت است از

$$Z = U_h + U_p$$

که در آن U_p یک جواب خصوصی است.

مثال ۵-۱-۱۸

جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$2U_{xx} + U_{xy} + 2U_{xz} - U_{yy} - U_{yz} = x^2 + y^2 + z^2$$

را پیدا کنید.

حل

معادله همگن وابسته به معادلهٔ بالا را می‌توان به صورت

$$Lu = (۲D_x^۲ + D_x D_y + ۲D_x D_z - D_y^۲ - D_y D_z)\, u = ۰$$

نوشت. در اینجا L را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد.

$$L = (D_x + D_y + D_z)\,(۲D_x - D_y)$$

اینک به کمک معادلات کمکی جواب عمومی در معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول

$$L_۱u = u_x + u_y + u_z = ۰ \qquad L_۲u = ۲u_x - u_y = ۰$$

را پیدا می‌کنیم. برای معادلهٔ اول معادلات کمکی عبارت است از

$$\frac{dx}{۱} = \frac{dy}{۱} = \frac{dz}{۱} \quad , \quad du = ۰$$

به آسانی می‌توان انتگرالهای معادلات کمکی را پیدا کرد

$$u = C_۱$$
$$x - y = C_۲$$
$$x - z = C_۳$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ $L_۱u = ۰$، برابر است با

$$u = f\,(x - y \,,\, x - z)$$

معادلات کمکی برای معادلهٔ $L_۲u = ۰$ عبارتند از:

$$\frac{dx}{۲} = \frac{dy}{-۱} \quad , \quad dz = ۰ \ , \ du = ۰$$

بنابراین انتگرالهای مربوط به این معادلات کمکی عبارتند از

$$u = C_۱$$
$$z = C_۲$$
$$x + ۲y = C_۳$$

از این‌رو، جواب عمومی معادلهٔ $L_۲u = ۰$ برابر است با

$$u = g\ (x + ۲y\ ,\ z)$$

در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ همگن $Lu = ۰$، عبارت است از

$$u_h = f\ (x - y\ ,\ x - z) + g\ (x + ۲y\ ,\ z)$$

برای پیدا کردن یک جواب خصوصی مربوط به $Lu = x^۲$ با فرض ثابت بودن y و z، یک جواب خصوصی مربوط به معادلهٔ

$$۲u_{xx} = x^۲$$

را با دو بار انتگرالگیری، به صورت

$$u_x = \frac{۱}{۶}x^۳$$

$$u = \frac{۱}{۲۴}x^۴$$

به‌دست می‌آید. به همین نحو، با دو بار انتگرالگیری از معادلهٔ

$$-u_{yy} = y^{۲}$$

یک جواب خصوصی مربوط به معادلهٔ $Lu = y^{۲}$، به صورت

$$u_y = -\frac{y^{۳}}{۳}$$

$$u = -\frac{y^{۴}}{۱۲}$$

به دست می‌آید. سرانجام برای پیدا کردن یک جواب خصوصی مربوط به معادلهٔ $Lu = z^{۲}$، از معادلهٔ

$$۲u_{xz} = z^{۲}$$

با فرض ثابت بودن y انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت

$$u_x = \frac{۱}{۶} z^{۳}$$

$$u = \frac{۱}{۶} z^{۳} x$$

بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده برابر است با

$$u = f(x - y , x - z) + g(x + ۲y , z) + \frac{۱}{۲۴} x^{۴} - \frac{y^{۴}}{۱۲} + \frac{۱}{۶} z^{۳} x$$

تمرین ۵-۱-۱۹

جواب عمومی معادلهٔ

$$u_{xx} + ۲u_{xy} + u_{yy} - u_{yz} - ۲u_{xz} + u_{zz} = x + y + z$$

را پیدا کنید.

۵-۲ ــ جوابهایی از نوع نمایی و از نوع حاصلضربی

در بسیاری از مسائلی که شامل معادلات دیفرانسیل جزئی (از جمله مسائلی که در فیزیک رخ می‌دهند) جوابهایی از نوع نمایی و جوابهایی از رویهم نهادن آنها به دست می‌آیند، بسیار مفیدتر از جوابهای شامل تابع اختیاری می‌باشد. همچنین توجه می‌کنیم که جوابهای از نوع نمایی همیشه برای معادلات همگن با ضرایب ثابت وجود دارند.

روش حل ۵-۲-۱

معادلهٔ دیفرانسیل (۵) در بخش ۵-۱ را با فرض ثابت بودن ضرایب در نظر می‌گیریم. جوابی از این معادله به صورت

$$Z = e^{hx+my} \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا h و m اعداد ثابتی می‌باشند که باید آنها را تعیین کرد. چون $D_x z = hz$ و $D_y z = mz$ با جایگذاری z از معادله (۵)، معادلهٔ

$$Ah^2 + 2Bhm + Cm^2 + Dh + Em + F = 0 \qquad (۲)$$

به دست می‌آید. برعکس، اگر h و m به قسمی انتخاب شوند که معادلهٔ (۲) برقرار باشد، آنگاه تابع z در (۱) در معادلهٔ (۵) بخش ۵-۱ صدق می‌کند. فرض می‌کنیم که با حل معادلهٔ (۲) را بر حسب m رابطهٔ تابعی $m = g(h)$ به دست آید. در این صورت تابع

$$z = f(h)e^{hx+g(h)\,y}$$

در معادلهٔ (۵) بخش ۵-۱، به ازای هر انتخاب تابع f، صدق می‌کند. به‌طور کلی، جوابهایی که از رویهم نهادن جوابها، یعنی

$$z = \sum_h f(h)\, e^{hx+g(h)\,y} \qquad\qquad z = \int f(h)\, e^{hx+g(h)\,y}\, dh$$

به دست می‌آید، جوابهایی از معادلهٔ (۵) بخش ۵-۱ را تعریف می‌کنند. مشروط بر اینکه توابعی را تعریف کنند که به‌طور پیوسته دوبار مشتق‌پذیرند و مشتقگیری از تابع بعد از نماد جمع و نماد انتگرال مجاز باشد. این مطلب را می‌توان در مورد معادلاتی به صورت (۱۰) بخش ۵-۱ توسعه داد.

مثال ۵-۲-۲

معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}} = C^{۲} \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}$ که معادلهٔ موج در فضای یک متغیرهٔ x است را در نظر می‌گیریم. جوابهای از نوع نمایی را پیدا کنید.

حل

در اینجا جوابهایی به صورت

$$u = e^{hx+mt}$$

را در نظر می‌گیریم. با قرار دادن مشتقات u یعنی

$$u_{xx} = h^{۲} e^{hx+mt}$$
$$u_{tt} = m^{۲} e^{hx+mt}$$

در معادله داده شده رابطهٔ

$$C^{۲}h^{۲}-m^{۲} = ۰$$

به دست می‌آید. بنابراین $m = ch$ یا $m = -ch$. به ازای هر مقدار h، توابع

$$u = e^{hx+hct} \qquad u = e^{hx-hct}$$

جوابهای معادله موج می‌باشند. معمولاً در بسیاری از مسائل حرکت موج جوابهایی که نسبت به t متناوب می‌باشند، مورد نظر است. فرض می‌کنیم $w > ۰$ یک عدد ثابت و $h = iw$، که در آن $i = \sqrt{-۱}$ در این صورت

$$u = e^{iw(x+ct)} \qquad u = e^{iw(x-ct)}$$

جوابهای متناوب نسبت به t می‌باشند. صورتهای مفید جواب معادلهٔ موج عبارتند از

$$u = \sum_{n} [\, A(w_n)\ \mathrm{Cos}\ w_n x + B\,(w_n)\ \mathrm{Sin}\ w_n x \,]\ e^{\pm i w_n c t}$$

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} f(w)\ e^{iw(x \pm ct)}\ dw$$

تمرین ۵-۲-۳

جوابهای از نوع نمایی معادله دیفرانسیل $Z_{xx} - ۲Z_{xy} + Z_y - Z = ۰$ را پیدا کنید.

تمرین ۵-۲-۴

جوابهای از نوع نمایی معادله دیفرانسیل

$$Z_{xx} + Z_{yy} = ۰$$

را پیدا کنید.

روش حاصلضرب ۵-۲-۵

درکاربردهای معادلات دیفرانسیل به ویژه درکاربردهای فیزیکی که در فصل ۶ ارائه خواهد شد در همهٔ موارد جوابهایی که به صورت متغیرهای جداشدنی می‌باشند مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا روش پیدا کردن اینگونه جوابها را که به روش متغیرهای جداشدنی (یا روش حاصلضرب) معروف است، توسط یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۵-۲-۶

معادله موج یک بعدی $U_{xx} = C^{-۲}\, U_{tt}$ را در نظر بگیرید. جوابهایی از معادله

را، که به صورت حاصلضرب تابعی از x تنها در یک تابع که تنها به t بستگی دارد، پیدا کنید.

حل

فرض می‌کنیم معادله جوابی به صورت

$$u(x,t) = X(x)\, T(t)$$

باشد. چون هریک از عوامل حاصلضرب تنها به یک متغیر بستگی دارند، مشاهده می‌کنیم که

$$U_{xx} = X''(x)\, T(x) \qquad U_{tt} = X(x)\, T''(x)$$

(برای سادگی، فرض می‌کنیم که پریم‌ها نمایش مشتق نسبت به متغیر داخل پرانتز باشد). با جایگذاری عبارتهای مربوط به U_{xx} و U_{tt} در معادلهٔ داده شده و تقسیم این معادله بر $X(x)\, T(t)$ به دست می‌آوریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{C^۲\, T(t)} \qquad (۳)$$

در (۳) متغیرها را جدا کرده‌ایم، زیرا طرف چپ این رابطه تنها تابعی از x و طرف راست آن تنها تابعی از t است. چون طرف چپ این رابطه مستقل از t و طرف راست این رابطه مستقل از x است، اگر در (۳) x و t غیرمستقل باشند، دو طرف این رابطه باید برابر با مقدار ثابتی، مثلاً $-\lambda$ باشند؛ یعنی

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad \frac{T''(t)}{C^۲\, T(t)} = -\lambda$$

این دو رابطه دو معادله دیفرانسیل معمولی به صورت

$$X''(x) + \lambda X(x) = ۰ \qquad (۴)$$

$$T''(t) + \lambda C^۲\, T(t) = ۰ \qquad (۵)$$

دو معادلهٔ (۴) و (۵) را می‌توان توسط روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم حل کرد. اما، جوابهای این معادلات دیفرانسیل به مقدار λ بستگی دارند (فرض می‌کنیم λ حقیقی باشد). اگر $\lambda = K^{2} > 0$، نتیجه می‌شود که

$$X(x) = C_{1} \operatorname{Cos} kx + C_{2} \operatorname{Sin} kx$$
$$T(t) = C_{3} \operatorname{Cos} kct + C_{4} \operatorname{Sin} kct$$

از این رو، چون $u(x,t) = X(x)T(x)$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$u(x,t) = \left(C_{1} \operatorname{Cos} kx + C_{2} \operatorname{Sin} kx \right) \left(C_{3} \operatorname{Cos} kct + C_{4} \operatorname{Sin} kct \right)$$

که در آن C_1، C_2، C_3 و C_4 ثابتهای دلخواه می‌باشند. در این حالت جوابهای رویهم نهاده را می‌توان به صورت

$$u(y,t) = \sum_{K} \left(C_{1K} \operatorname{Cos} kx + C_{2K} \operatorname{Sin} kx \right) \left(C_{3K} \operatorname{Sin} kct + C_{4K} \operatorname{Cos} kct \right)$$

نوشت. به همین نحو، اگر $\lambda = -K^{2} < 0$ آنگاه

$$u(x,t) = \left(C_{1} \operatorname{Cos} h\, kx + C_{2} \operatorname{Sin} h\, kx \right) \left(C_{3} \operatorname{Cos} h\, kct + C_{4} \operatorname{Sin} h\, kct \right)$$

و سرانجام اگر $\lambda = 0$، خواهیم داشت

$$u(x,t) = (C_{1} + C_{2} x)(C_{3} + C_{4} t)$$

تمرین ۵-۲-۷

جوابهایی از معادلهٔ

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

را که به صورت حاصلضرب تابعی از x در تابعی از y می‌باشند، پیدا کنید.

تمرین ۵-۲-۸

جوابهایی از معادلهٔ

$$u_{xy} + ۴u_{xx} = ۰$$

را که به صورت حاصلضرب تابعی از x در تابعی از y می‌باشند، پیدا کنید.

۵-۳ــ صورتهای نرمال، هذلولی، سهمی، بیضوی

در هندسهٔ تحلیلی مطالعهٔ منحنیهایی که معادلات آنها از درجه دوم نسبت به x و y می‌باشند، با تحویل معادله به صورت نرمال ساده‌تر انجام می‌گیرد. به کمک یک تبدیل خطی از متغیرهای x و y معادله را می‌توان به صورت هذلولی یا سهمی یا بیضی نسبت به متغیرهای جدید ξ و η تبدیل کرد. دستگاه مختصات $\xi\eta$، دستگاه مختصاتی است که نسبت به آن منحنی ساده‌تر و طبیعی‌ترین نمایش جبری خودش را داشته باشد، و ویژگیهای منحنی اصلی دقیقاً شبیه به ویژگیهای منحنی در صورت استاندارد باشد. یک روش مشابه را در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم مورد استفاده قرار می‌دهیم.

تعریف ۵-۳-۱

فرض می‌کنیم

$$LZ = A\,Z_{xx} + ۲B\,Z_{xy} + C\,Z_{yy} + M\,(x, y, z, z_x, z_y) = ۰ \qquad (۱)$$

یک معادله دیفرانسیل تقریباً خطی با مقادیر مستقل حقیقی x و y باشد. همچنین فرض می‌کنیم که ضرایب A ، B و C توابع با مقدار حقیقی و با مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته بر ناحیهٔ R صفحهٔ xy بوده و ضرایب A ، B و C همزمان صفر نباشند. مجموع جمله‌های

$$AD_x^{۲} + ۲BD_x\,D_y + CD_y^{۲} \qquad (۲)$$

قسمت ***اصلی*** عملگر L در (۱) نامیده می‌شود. در واقع قسمت اصلی عملگر است که ویژگیهای جوابهای معادلهٔ (۱) را معین می‌کند.

تابع Δ تعریف شده بر R توسط

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)\,C(x,y)$$

مبین L نامیده می‌شود. عملگر L [یا معادلهٔ (۱)] را

۱. در نقطهٔ (x,y) هذلولوی می‌گوییم اگر $\Delta(x,y) > 0$.

۲. در نقطهٔ (x,y) سهموی می‌گوییم اگر $\Delta(x,y) = 0$.

۳. در نقطهٔ (x,y) بیضوی می‌گوییم اگر $\Delta(x,y) < 0$.

عملگر L را در R هذلولوی می‌گوییم اگر L در هر نقطهٔ R هذلولوی باشد. تعاریف مشابهی را می‌توان برای عبارت L سهمی در R و L بیضوی در R ساخت.

مثال ۵-۳-۲

معادلهٔ

$$(1 - x^2) Z_{xx} - 2xy\, Z_{xy} + (1 - y^2) Z_{yy} + xZ_x + 3x^2 y\, Z_y - 2Z = 0$$

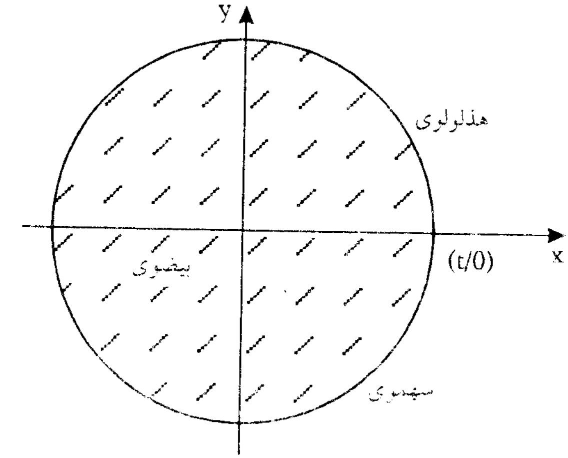
را دسته بندی کنید.

حل

مبین این معادله برابر است با

$$\Delta = (-xy)^2 - (1 - x^2)(1 - y^2) = -1 + x^2 + y^2$$

در نتیجه، عملگر L همچنین معادله دیفرانسیل، در ناحیه‌ای که $x^2 + y^2 > 1$ هذلولوی بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ سهموی و بر ناحیه‌ای که $x^2 + y^2 < 1$ است.(شکل ۱ را ببینید.)



شکل ۱

۳-۳-۵

فرض می‌کنیم

$$\xi = \xi\,(x,y) \qquad , \qquad \eta = \eta\,(x,y)$$

دو تابع با مقدار حقیقی با مشتقات دوم پیوسته بر R باشند که ژاکوبین $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ بر R مخالف صفر است. این توابع ناحیه R را به ناحیه‌ای، مانند R'، از صفحهٔ $\xi\eta$ تصویر می‌کند. به منظور تعیین نمایش L نسبت به متغیرهای جدید $\xi\eta$، مشتقات زیر را محاسبه می‌کنیم

$$Z_x = Z_\xi\,\xi_x + Z_\eta\,\eta_x \qquad , \qquad Z_y = Z_\xi\,\xi_y + Z_\eta\,\eta_y$$

$$Z_{xx} = Z_{\xi\xi}\,(\xi_x)^۲ + Z_{\xi\eta}\,\eta_x\,\xi_x + Z_\xi\,\xi_{xx} + Z_{\eta\xi}\,\xi_x\,\eta_x + Z_{\eta\eta}\,(\eta_x)^۲ + Z_\eta\,\eta_{xx}$$

$$= Z_{\xi\xi}\,(\xi_x)^۲ + ۲Z_{\xi\eta}\,\xi_x\,\eta_x + Z_{\eta\eta}\,(\eta_x)^۲ + Z_\xi\,\xi_{xx} + Z_\eta\,\eta_{xx}$$

با قرار دادن عبارتهای مربوط به مشتقات Z را در معادلهٔ (۱)، معادلهٔ

$$LZ = Q(\xi)\,Z_{\xi\xi} + Q\,(\xi\,,\eta)\,Z_{\xi\eta} + Q\,(\eta)\,Z_{\eta\eta} + M'(\xi\,,\eta\,,Z,Z_\xi\,,Z_\eta) = ۰ \qquad (۳)$$

به دست می‌آید. در اینجا

$$Q(\xi) = A\xi_x^{۲} + ۲B\xi_x\xi_y + C\xi_y^{۲} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix}$$

$$Q(\xi,\eta) = A\xi_x\eta_x + ۲B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}$$

$$Q(\eta) = A\eta_x^{۲} + ۲B\eta_x\eta_y + C\eta_y^{۲} = \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{bmatrix}$$

قسمت اصلی L در نمایش جدید آن برابر است با

$$Q(\xi)\frac{\partial^{۲}}{\partial\xi^{۲}} + ۲Q(\xi,\eta)\frac{\partial^{۲}}{\partial\xi\,\partial\eta} + Q(\eta)\frac{\partial^{۲}}{\partial\eta^{۲}}$$

که مبین آن عبارت است از

$$\Delta' = [\,Q(\xi,\eta)\,]^{۲} - Q(\xi)\,Q(\eta)$$

یک محاسبهٔ کاملاً مستقیم به رابطهٔ

$$\Delta' = \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^{۲}\Delta \qquad (۴)$$

منتهی می‌شود. بنابراین L هذلولوی (یا سهموی، یا بیضوی) بر R' است اگر و تنها اگر: L هذلولوی (یا سهموی، یا بیضوی) بر R باشد.

معادلات هذلولوی ۵-۳-۴

فرض می‌کنیم L بر R هذلولوی بوده و حداقل A یا C در R صفر نباشند. در این صورت تبدیلی وجود دارد که به‌طور محلی پیوسته و یک به یک است و معادلهٔ (۱) را به معادله‌ای به صورت

$$Z_{\xi\eta} + G(\xi,\eta,Z,Z_\xi,Z_\eta) = ۰$$

تبدیل می‌کند. این صورت معادله را صورت **نرمال معادلات هذلولوی نسبت به دو متغیر مستقل** نامیده می‌شود. از معادلهٔ (۳) روشن است صورت نرمال وقتی حاصل می‌شود که اگر تبدیل به قسمی باشد که $Q(\xi) = Q(\eta) = 0$. از این رو، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول

$$Q(\varphi) = A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0 \tag{5}$$

را در نظر می‌گیریم. معادلهٔ (۵) به **معادلهٔ شاخص** L معروف است. این معادله یک معادلهٔ غیرخطی است؛ با وجود این، $Q(\varphi)$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد. نخست فرض می‌کنیم که در R، $A \neq 0$ چون $\Delta > 0$، پس می‌توان توابع با مقدار حقیقی m_1، m_2 را توسط

$$m_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{A} \qquad m_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{A}$$

تعریف کرد. در این صورت

$$Q(\varphi) = A(\varphi_x - m_1\varphi_y)(\varphi_x - m_2\varphi_y)$$

حال، اگر ξ و η را به قسمی انتخاب کنیم که

$$\xi_x - m_1\xi_y = 0 \qquad \eta_x - m_2\eta_y = 0 \tag{6}$$

آنگاه $Q(\xi) = Q(\eta) = 0$ برای حل معادلات داده شده در (۶) به ترتیب از معادلات کمکی

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1},\ d_\xi = 0 \quad , \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_2},\ d_\eta = 0$$

استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که جوابهای عمومی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$\frac{dy}{dx} = -m_1 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -m_2 \tag{7}$$

به ترتیب عبارت باشند از

$$u(x, y) = C_1 \quad , \quad v(x, y) = C_2$$

از بخش ۴-۴ توجه می‌کنیم که u در معادلهٔ اول معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبهٔ اول در معادلهٔ (۶) و v در معادلهٔ دوم، صدق می‌کند. اگر

$$\xi = u(x, y) \quad , \quad \eta = v(x, y)$$

انتخاب کنیم، آنگاه این توابع دارای مشتقات مرتبهٔ دوم پیوسته بوده و

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 \xi_y & \xi_y \\ m_2 \eta_y & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_y \eta_y (m_1 - m_2) \neq 0$$

و معادلهٔ تبدیل برابر است با

$$2Q(\xi, \eta) Z_{\xi\eta} + M'(\xi, \eta, Z, Z_\xi, Z_\eta) = 0$$

معادلات سهموی ۵-۳-۵

اگر L بر R سهموی باشد، آنگاه تبدیل $\xi = \xi(x,y)$ و $\eta = \eta(x,y)$. معادلهٔ (۱) را به معادله‌ای به صورت

$$Z_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, Z, Z_\xi, Z_\eta) = 0$$

تبدیل می‌کند که به **صورت نرمال برای معادلات سهموی نسبت به دو متغیر مستقل** معروف است. چون $\Delta = 0$، $A \neq 0$ یا $C \neq 0$. با فرض $A \neq 0$. اینک ریشه‌های معادلهٔ

$$Am^2 + 2Bm + C = 0$$

حقیقی و برابر می‌باشند. فرض می‌کنیم

$$m = -\frac{B}{A}$$

در این صورت $Q(\varphi) = A(\varphi_x - m\varphi_y)^2$. فرض می‌کنیم $u(x,y) = C$ جواب عمومی معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = -m$$

باشد $\xi = u(x,y)$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین در حالت سهموی یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای شاخص $\xi = C$ وجود دارد. با روشی که ξ را انتخاب کرده‌ایم، نتیجه می‌گیریم که $Q(\xi) = 0$

اینک یک تابع سادهٔ $\eta = v(x,y)$ [معمولاً $\eta = x$] را به قسمی انتخاب می‌کنیم که در R، $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$. در این صورت $[Q(\xi,\eta)]^2 = \Delta' = 0$ از معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود که اگر تبدیلی را به صورت ارائه شده بسازیم، معادلهٔ تبدیل برابر است با

$$Q(\eta) Z_{\eta\eta} + M'(\xi, \eta, Z, Z_\xi, Z_\eta) = 0$$

در اینجا $Q(\eta) \neq 0$، زیرا در غیر اینصورت

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} m\,\xi_y & \xi_y \\ m\,\eta_y & \eta_y \end{vmatrix} = 0$$

که این مطلب با روشی که η انتخاب شده است در تناقض است. اگر $A(x,y) = 0$، آنگاه $C(x,y) \neq 0$ و بحثی شبیه به بحث بالا به صورت نرمال منجر می‌شود.

۶-۳-۵ معادلات بیضوی

اگر $\Delta = B^2 - AC < 0$، آنگاه L در R یک عملگر بیضوی است. در این

حالت ریشه‌های معادلهٔ

$$Am^۲ + ۲Bm + C = ۰$$

توابع با مقدار مختلط

$$m_۱ = \frac{-B + i\sqrt{-\Delta}}{A} \qquad m_۲ = \frac{-B - i\sqrt{-\Delta}}{A}$$

می‌باشند. جوابهای معادلات (۷) مقدار مختلط می‌باشند و برای معادلات دیفرانسیل بیضوی منحنیهای شاخص حقیقی وجود ندارد. فرض می‌کنیم ضرایب A ، B و C توابع تحلیلی از متغیرهای x و y در R باشند. در این صورت تبدیلی وجود دارد به قسمی که معادلهٔ (۱) را به معادله‌ای به صورت

$$Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, Z, Z_\xi, Z_\eta) = ۰ \qquad (۸)$$

تبدیل می‌کند که **به صورت نرمال برای معادلات بیضوی نسبت به دو متغیر مستقل** معروف است. فرض می‌کنیم $\varphi = u + iv$ جوابی از معادلهٔ $\varphi_x - m_۱\varphi_y = ۰$ در R باشد به قسمی که $u(x,y)$ و $v(x,y)$ توابع با مقدار حقیقی می‌باشند و $u_y \neq ۰$ یا $v_y \neq ۰$ فرض می‌کنیم $\xi = u(x,y)$ و $\eta = v(x,y)$. در این صورت

$$۰ = \varphi_x - m_۱\varphi_y = (\xi_x + i\eta_x) - m_۲(\xi_y + i\eta_y)$$

$$= \xi_x + \frac{B}{A}\xi_y + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\eta_y + i\left(\eta_x + \frac{B}{A}\eta_y - \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\xi_y\right)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\xi_x = -\frac{B}{A}\xi_y - \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\eta_y$$

$$\eta_x = -\frac{B}{A}\eta_y + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}\xi_y$$

از این رو

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}(\xi^۲_y + \eta^۲_y) \neq ۰$$

اینک

$$Q(\varphi) = A(\varphi_x - m_1\varphi_y)(\varphi_x - m_2\varphi_y) = 0$$

و

$$Q(\varphi) = Q(\xi + i\eta) = Q(\xi) + 2iQ(\xi,\eta) - Q(\eta)$$

در نتیجه، $Q(\xi) = Q(\eta)$ و $Q(\xi,\eta) = 0$ از معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود که معادلهٔ تبدیل به صورت

$$Q(\xi)(Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta}) + M'(\xi,\eta,Z,Z_\xi,Z_\eta) = 0$$

اگر $Q(\xi) = 0$، آنگاه

$$0 = Q^2(\xi,\eta) - Q(\xi)Q(\eta) = \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2 \Delta$$

که نتیجه می‌دهد $\Delta = 0$، و با فرض $\Delta > 0$ در تناقض است. بنابراین $Q(\xi) \neq 0$ و صورت نرمال (γ) نتیجه می‌شود.

مثال ۵-۳-۷

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $yZ_{xx} + (x+y)Z_{xy} + xZ_{yy} = 0$ را پیدا کنید.

حل

در اینجا
$$\Delta = \frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x-y)^2}{4} > 0$$

بنابراین، معادله در همه جا به جز خط $y = x$ هذلولوی و بر این خط سهموی است.

در این حالت

$$m_۱\ ,\ m_۲ = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{A}$$

$$= \frac{-\frac{(x+y)}{۲} \pm \frac{(x-y)}{۲}}{y}$$

بنابراین، $m_۱ = -۱$ و $m_۲ = -\frac{x}{y}$ منحنیهای شاخص از حل معادلات (۷)، یعنی

$$\frac{dy}{dx} = ۱ \qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

به صورت

$$\xi = u\,(x\,,\,y) = y - x = C_۱ \qquad \eta = v\,(x\,,\,y) = y^۲ - x^۲ = C_۲$$

توجه می‌کنیم که ژاکوبین، یعنی

$$\frac{\partial\,(\xi\,,\,\eta)}{\partial\,(x\,,\,y)} = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ -۲x & ۲y \end{vmatrix} = -۲y + ۲x = ۲(x-y)$$

در R مخالف صفر است. برای پیداکردن معادله دیفرانسیل تبدیل نخست مشتقات Z را برحسب ξ و η به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$Z_x = Z_\xi\,\xi_x + Z_\eta\,\eta_x = -Z_\xi - ۲x\,Z_\eta$$
$$Z_y = Z_\xi\,\xi_y + Z_\eta\,\eta_y = Z_\xi + ۲y\,Z_\eta$$

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= -Z_{\xi\xi}\,\xi_x - Z_{\xi\eta}\,\eta_x - ۲Z_\eta - ۲x\,Z_{\eta\xi}\,\xi_x - ۲x\,Z_{\eta\eta}\,\eta_x \\ &= Z_{\xi\xi} + ۲x\,Z_{\xi\eta} + ۲x\,Z_{\eta\xi} + ۴x^۲\,Z_{\eta\eta} - ۲Z_\eta \\ &= Z_{\xi\xi} + ۴x\,Z_{\xi\eta} + ۴x^۲\,Z_{\eta\eta} - ۲Z_\eta \end{aligned}$$

و

$$Z_{xy} = -Z_{\xi\xi}\,\xi_y - Z_{\xi\eta}\,\eta_y - ۲x\,(Z_{\eta\xi}\,\xi_y + Z_{\eta\eta}\,\eta_y)$$

$$Z_{xy} = -Z_{\xi\xi} - ۲y\,Z_{\xi\eta} - ۲x\,Z_{\xi\eta} - ۴xy\,Z_{\eta\eta}$$

$$\begin{aligned} Z_{yy} &= Z_{\xi\xi}\,\xi_y + Z_{\xi\eta}\,\eta_y + ۲Z_\eta + ۲y\,(Z_{\eta\xi}\,\xi_y + Z_{\eta\eta}\,\eta_y) \\ &= Z_{\xi\xi} + ۲y\,Z_{\xi\eta} + ۲y\,Z_{\eta\xi} + ۴y^۲\,Z_{\eta\eta} + ۲Z_\eta \\ &= Z_{\xi\xi} + ۴y\,Z_{\xi\eta} + ۴y^۲\,Z_{\eta\eta} + ۲Z_\eta \end{aligned}$$

اینک با قرار دادن این مشتقات در معادلهٔ دیفرانسیل داده شده، معادلهٔ تبدیل به صورت

$$\begin{aligned} &yZ_{\xi\xi} + ۴xy\,Z_{\xi\eta} + ۴x^۲y\,Z_{\eta\eta} - ۲yZ_\eta - xZ_{\xi\xi} - yZ_{\xi\xi} - ۲xy\,Z_{\xi\eta} - ۲y^۲\,Z_{\xi\eta} \\ &\quad - ۲x^۲\,Z_{\xi\eta} - ۲xy\,Z_{\xi\eta} - ۴x^۲y\,Z_{\eta\eta} - ۴xy^۲\,Z_{\eta\eta} + xZ_{\xi\xi} + ۴xy\,Z_{\xi\eta} \\ &\quad + ۴xy^۲\,Z_{\eta\eta} + ۲x\,Z_\eta = ۰ \end{aligned}$$

درمی‌آید. که پس از ساده کردن این معادله، خواهیم داشت

$$-۲\,(x^۲ - ۲xy + y^۲)\,Z_{\xi\eta} + ۲(x-y)\,Z_\eta = ۰$$

$$(x-y)^۲\,Z_{\xi\eta} + (y-x)\,Z_\eta = ۰$$

$$\xi^۲\,Z_{\xi\eta} + \xi\,Z_\eta = ۰$$

$$\xi\,Z_{\xi\eta} + Z_\eta = ۰$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\,(\xi\,Z_\eta) = ۰$$

با انتگرالگیری

$$\xi\,Z_\eta = h\,(\eta)$$

از این رو،

$$Z = \frac{۱}{\xi}\int h\,(\eta)\,d_\eta + f(\xi) = f\,(y-x) + \frac{g(y^۲ - x^۲)}{y-x}$$

تمرین ۵-۳-۸

معادله دیفرانسیل $۴\,Z_{xx} - ۸\,Z_{xy} + ۴\,Z_{yy} = ۱$ را دسته‌بندی کنید. سپس آن‌را به صورت نرمال تحویل کنید و جواب عمومی آن‌را به‌دست آورید.

تمرین ۵-۳-۹

معادله دیفرانسیل $۴ Z_{xx} - ۴ Z_{xy} + ۵ Z_{yy} = ۰$ را دسته‌بندی کنید. سپس آن

را به صورت نرمال تحویل کنید و جواب عمومی آن‌را به‌دست آورید.

تمرینهای فصل ۵

۱۰-۳-۵

۱. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل داده شده را پیدا کنید.

الف) $Z_{yy} + Z = e^{x+y}$

ب) $۲s + ۳t - q = ۶\text{Cos}\,(۲x - ۳y) - ۳۰\,\text{Sin}\,(۲x - ۳y)$

پ) $r - ۴t = ۱۲x^۲ + \text{Cos}\,y + ۴$

ت) $r - ۲s + t = ۴e^{۳y} + \text{Cos}\,x$

ث) $r + t = ۰$

ج) $\frac{۱}{C^۲}\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = \frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲}{\partial r^۲}(r^۲ u)$

راهنمایی: از تغییر متغیر $v = r^۲u$ استفاده کنید.

۲. یک جواب خصوصی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

الف) $u_{xx} - ۶u_{xy} + ۹u_{yy} = xy^۲$

ب) $u_{xx} - ۲u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = \text{Sin}\,(۲x + y)$

۳. نشان دهید که معادله یفرانسیل با ضرایب متغیر

$$ax^۲ u_{xx} + bxy\, u_{xy} + cy^۲ u_{yy} + dx\, u_x + ey\, u_y + fu = ۰$$

که در آن a,...,f ثابت می‌باشند، را می‌توان با تغییر متغیر $\xi = \text{Ln}x$ و $\eta = \text{Ln}y$ به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد.

۴. با استفاده از روش تمرین (۳) جواب عمومی هریک از معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $x^{۲} u_{xx} - y^{۲} u_{yy} + x u_x - y u_y = Lnx$

ب) $xy u_{xy} + x u_x + y u_y + u = xy$

۵. جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیداکنید.

الف) $(D_x - D_y)(D_x + D_y) u = u_{xx} - u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = ۰$

ب) $(D_x - D_y + D_z)(D_x + ۲D_y + ۱) u$

$$= u_{xx} + u_{xy} - ۲u_{yy} + u_{xz} + ۲u_{yz} + u_x - u_y + u_z = ۰$$

پ) $(D_x + D_y + D_z)^{۲} u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + ۲u_{xy} + ۲u_{yz} + ۲u_{zx} = ۰$

۶. الف) $u = x f(x-y , x+z) + g(x-z , y-z) + ۲\text{Sin } x - x \text{ Cos } x$

$$+ ۲\text{Sin } y - y \text{ Cos } y + ۲\text{Sin } z - z \text{ Cos } z$$

ب) $u = e^{x} (x+z , y+z) + e^{-x} g(x-z , y-z) + \frac{e^{۲x}}{۳} - \text{Cos } y - z$

پ) $u = f(x + \sqrt{A}\, t , y + \sqrt{C}\, t) + g(x - \sqrt{A}\, t , y \sqrt{C}\, t)$

۷. جوابهایی از نوع نمایی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

الف) $Z_{xx} - ۲Z_x - Z_y = ۰$

ب) $u_{xx} + u_{yy} = ۰$

پ) $u_{xx} + u_{yy} + k^{۲}u = ۰$

که در آن k ثابت است.

ت) $c^{۲} (u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}$

که در آن c ثابت است.

۸. جوابهایی از معادلات دیفرانسیل داده شده راکه به صورت حاصلضرب تابعی از x در تابعی از y می‌باشند، پیداکنید.

الف) $u_x + ۲u_y = ۰$

ب) $u_x + u_y = ۲(x + y)\, u$

پ) $x\, u_x = y\, u_y$

۹. هریک از معادلات زیر را دسته‌بندی و آن را به صورت نرمال تحویل کنید. و سپس جواب عمومی آن را به دست آورید.

الف) $r - ۲s + t + a(p - q) + cz = (x + ۲y)^۲$

ب) $x^۲ r + ۲xys + y^۲ t = ۴x^۲$

پ) $x^۲ r - y^۲ t = xy$

ت) $r - (۲ \sin x)\, s - (\cos^۲ x)\, t - (\cos x)\, q = ۰$

ث) $xy\,(t - r) + (x^۲ - y^۲)\, s = py - qx - ۲(x^۲ - y^۲)$

ج) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[(۱ - \frac{x}{h})^۲ Z_x \right] = \frac{۱}{a^۲} (۱ - \frac{x}{h})^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial t^۲}$$

a و h اعداد مثبت حقیقی می‌باشند.

فصل ۶: کاربردهای فیزیکی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۶-۱ ــ معادلهٔ گرما

در این بخش مسائلی با معادلات دیفرانسیل سهمومی خطی به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} = 0$$

با دو متغیر x و t را بررسی می‌کنیم. این معادله، به معادلهٔ گرمای یک‌بُعدی معروف است، که در تجزیه و تحلیل هدایت گرما یک مادهٔ جامد همگن پدید می‌آید. مسائل گوناگونی از این معادله را توسط مراجعه به بخش گرما در یک میلهٔ باریک مطالعه و فرمول‌بندی خواهیم کرد.

۶-۱-۱ــ معادلهٔ گرما

یک تیغهٔ خیلی باریک با ضخامت w از یک مادهٔ جامد همگن ایزوتروپ را در نظر می‌گیریم وجوه S_1 و S_2 از تیغه را به ترتیب در دماهای T_1 و T_2 نگهدارید. یک قسمت استوانه‌ای از تیغه با مساحت A (شکل ۱) را در نظر می‌گیریم. به تجربه معلوم شده است که شدت گرما از میان این قسمت تیغه، تقریباً برابر است با

$$-KA\,\frac{T_1 - T_2}{w} \qquad (1)$$

که در آن K یک ثابت مثبت است که ***رسانایی گرمایی*** نامیده می‌شود و مقدار آن به

جنس تیغه بستگی دارد. اگر $T_1 > T_2$ گرما در جهت S_1 به S_2 منتقل می‌شود. و مقدار (۱) مثبت است. اگر $T_1 < T_2$ گرما در جهت عکس از S_2 به S_1 هدایت می‌شود و مقدار (۱) منفی است.

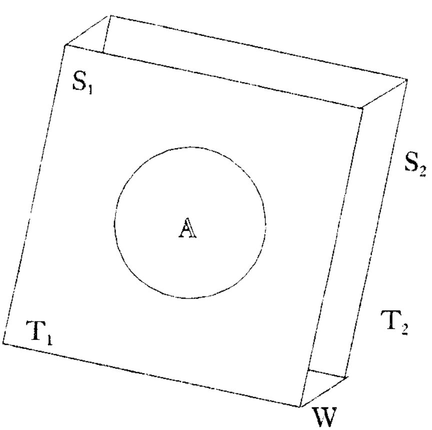
اینک یک میلهٔ استوانه‌ای[1] به طول a و به مساحت مقطع عرضی A را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم x قسمتی از طول میله باشد که از یک انتهای آن اندازه گرفته می‌شود. فرض می‌کنیم که رویهٔ جانبی میله، عایق‌بندی شده و دما در سراسر هر مقطع عرضی در هر لحظهٔ معین یکنواخت است. همچنین فرض می‌کنیم دما در میله توسط تابع $u(x,t)$ از x و t که در آن t نمایش زمان است، بیان می‌شود.

بنا بر فرمول (۱)، شدت گرمای هدایت شده از یک مقطع نازک میله، تقریباً برابر است با

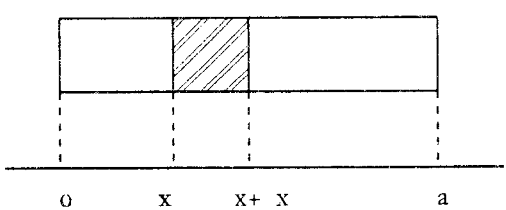
$$-KA\,\frac{u(x+\Delta x\,,\,t)-u(x\,,\,t)}{\Delta x}$$

با حدگیری وقتی که $\Delta x \to 0$ برای شدت گرمایی که از یک قسمت عرضی میله هدایت می‌شود، به عبارت

$$-K\,A\,U_x(x\,,\,t) \qquad (۲)$$



شکل ۱



شکل ۲

---

۱. لزومی ندارد که مقطع عرضی گرد باشد.

می‌رسیم. در نتیجه شدت گرمای خالصی که توسط یک قسمت به پهنای Δx جذب می‌شود عبارت است از

$$K\,A \left[\, U_x(x+\Delta x\,,\,t) - U_x(x\,,\,t) \,\right]$$

از طرف دیگر شدت گرمای جذب شده توسط یک مقطع باریک به وسیلهٔ عبارت

$$S\rho\, U_t(x_1\,,\,t)\;\Delta x$$

نیز داده می‌شود. در اینجا ثابت S گرمای ویژهٔ فلز است، P جرم درواحد حجم و x_1 نقطه‌ای بین و x و $x+\Delta x$ است. در نتیجه، خواهیم داشت

$$S\rho A\, U_t(x_1\,,\,t) = K\,A \left[\, U_x(x+\Delta x\,,\,t) - U_x(x\,,\,t) \,\right]$$

از تقسیم دو طرف این معادله بر $S\rho A\,\Delta x$ و با میل دادن Δx به صفر معادلهٔ

$$U_t(x\,,\,t) = K\,U_{xx}(x\,,\,t)$$

به دست می‌آید. در اینجا ثابت

$$K = \frac{K}{S\rho}$$

قابلیت انتشار گرمایی ماده نامیده می‌شود. بنابراین تابع دمای $u\ (x,t)$ یک جواب معادلهٔ

$$U_t = K\,U_{xx} \qquad (۳)$$

است که ***معادلهٔ گرمای*** یك‌بُعدی نامیده می‌شود.

۶-۱-۲ - شرایط مرزی

معمولاً برای تعیین دما در میله باید معادلهٔ (۳) را با توجه به شرایط مرزی

خاصی حل کرد. اگر دما در دو انتهای میله معین باشد، شرایط مرزی عبارتند از

$$u(\circ,t) = \phi(t) \quad , \quad u(a,t) = \psi(t) \quad , \quad t \geq \circ$$

که در آن ϕ و ψ توابع معینی هستند. چنانچه دو انتهای میله، عایق‌بندی شده باشد، آنگاه شدت هدایت گرما از دو انتهای میله صفر است و بنا بر فرمول (۲)، خواهیم داشت

$$u_x(\circ,t) = \circ \quad , \quad u_x(c,t) = \circ \quad , \quad t \geq \circ$$

حالت سوم، احتمال کاربرد قانون خنک‌سازی نیوتن در دو انتهای میله است. این قانون بیان می‌کند که شدت انتقال گرما در واحد سطح از میان دو مرز متناسب با اختلاف دمای بین دو مرز و محیط اطراف آنهاست. بنابراین خواهیم داشت

$$-KA\, U_x(\circ,t) = C\,[\,T_\circ - u(\circ,t)\,] \quad , \quad t \geq \circ$$
$$-KA\, U_x(a,t) = C\,[\,u(a,t) - T_\circ\,] \quad , \quad t \geq \circ$$

که در آن C یک ثابت مثبت است و $T_\circ$ دمای محیط اطراف می‌باشد. در حالت وقتی $T_\circ = \circ$، می‌توان نوشت

$$u_x(\circ,t) - h\,u(\circ,t) = \circ \quad , \quad u_x(a,t) + h\,u(a,t) = \circ \quad , \quad t \geq \circ$$

که در آن $h = \frac{C}{(KA)}$. در واقع همیشه می‌توان با یک تبدیل، مسأله را به حالت $T_\circ = \circ$ تحویل نمود (مثال (۶-۱-۴) را ببینید). سرانجام، ترکیبات گوناگونی از این سه نوع شرایط مرزی امکان‌پذیر است. برای مثال، ممکن است یک انتهای میله عایق‌بندی شده باشد و انتهای دیگر میله در دمای معینی نگهداشته شود.

در هر یک از حالات بالا، باید توزیع دمای اولیه را در طول میله نیز بدانیم. این مطلب متناظر با یک شرط مرزی به صورت

$$u(x,\circ) = f(x) \quad , \quad \circ \leq x \leq a$$

است. در اینجا f یک تابع داده شده است.

۶-۱-۳ــ تذکر

در مسائلی که دما به فضای مختصات متعامد x و y و همچنین به زمان t بستگی دارد، دمای $u(x,y,t)$ به وسیلهٔ معادلهٔ گرمای دوبُعدی

$$u_t = K(u_{xx} + u_{yy})$$

به دست می‌آید. در حالت سه بعدی، معادلهٔ گرما به صورت

$$u_t = K(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

است.

۶-۱-۴ــ مثال

فرض می‌کنیم u جوابی از معادلهٔ گرمای $u_t = K u_{xx}$ باشد به قسمی که به ازای $0 \le x \le a$، $u(x, 0) = f(x)$ و برای $t \ge 0$ داشته باشیم

$$u_x(0,t) + h[T_0 - u(0,t)] = 0 \quad , \quad u_x(a,t) + h[u(a,t) - T_0] = 0 \quad (۴)$$

بنابراین، فرض شده است که قانون خنک‌سازی نیوتن در دو انتهای میله برقرار باشد. اگر $v(x,t) = u(x,t) - T_0$. نشان دهید $v_t = K v_{xx}$ و برای $0 \le x \le a$، $v(x,0) = f(x) - T_0$ و برای $t \ge 0$

$$v_x(0,t) - h\,v(0,t) = 0 \quad , \quad v_x(a,t) + h\,v(a,t) = 0$$

بالعکس نشان دهید که اگر v در این شرایط صدق کند، آنگاه $u = v + T_0$ یک جواب مسألهٔ اصلی است.

حل

با مشتق‌گیری از رابطهٔ

$$v(x,t) = u(x,t) - T_0 \quad (۵)$$

نسبت به t و x به دست می‌آوریم

$$v_{xx} = u_{xx} \quad , \quad v_t = u_t$$

بنابراین چون u در معادلهٔ $u_t = K u_{xx}$ صدق می‌کند، در نتیجه

$$v_t = K v_{xx}$$

با قرار دادن $t = \circ$ در (۵)، به دست می‌آوریم

$$v(x, \circ) = u(x, \circ) - T_\circ$$
$$= f(x) - T_\circ$$

با قرار دادن $x = a$ در (۴) و

$$v_x(x, t) = u_x(x, t) \qquad (۶)$$

روابط زیر را به دست می‌آوریم

$$v(a, t) = u(a, t) - T_\circ$$

یا

$$u(a, t) = v(a, t) + T_\circ$$

و

$$v_x(a, t) = u_x(a, t)$$

و با قرار دادن $x = \circ$ در (۵) و (۶)، خواهیم داشت

$$u(\circ, t) = v(\circ, t) + T_\circ$$
$$v_x(\circ, t) = u_x(\circ, t)$$

اینک با قرار دادن مقادیر بالا، در (۴) روابط زیر را به دست خواهیم آورد:

$$v_x(\circ, t) + h[T_\circ - (\circ, t) - T_\circ] = \circ$$

یا

$$v_x(\circ, t) - h v(\circ, t) = \circ$$

و از معادلهٔ دوم (۴)، نتیجه می‌شود که

$$v_x(a, t) + h[v(a, t) + T_\circ - T_\circ] = \circ$$

یا

$$v_x(a, t) + h v(a, t) = \circ$$

با بحثی کاملاً شبیه به بحث بالا، اگر v در شرایط داده شده صدق کند، آنگاه $u = v + T_0$ یک جواب مسألهٔ اصلی است.

۶-۱-۵ـ تمرین

یک انتهای میله‌ای به طول ۲ فوت را که اطرافش عایق‌بندی شده است، در دمای $0°C$ و انتهای دیگر آن را در دمای $10°C$ نگه‌می‌داریم. اگر توزیع دمای اولیه در طول میله یک تابع خطی باشد، مسأله با مقدار مرزی مربوط به این میله را بنویسید.

۶-۱-۶ـ تمرین

اگر دمای میله به زمان بستگی نداشته باشد، آنگاه دمای $u(x)$، به ازای هر x در $0 < x < a$ در معادلهٔ $u''(x) = 0$ صدق می‌کند. در هر یک از حالات زیر $u(x)$ را پیدا کنید.

الف) انتهای میله در $x = 0$، را در دمای ثابت A و انتهای آن در $x = a$، را در دمای ثابت B نگه‌داشته‌ایم.

ب) انتهای میله در $x = 0$، عایق‌بندی می‌باشد، و انتهای آن در $x = a$، در دمای ثابت T نگهداشته می‌شود.

پ) قانون خنک‌سازی نیوتن بر هر دو انتها به‌کار می‌رود و دمای محیط اطراف یک دمای ثابت T است.

۶-۱-۷ـ تمرین

دو انتهای میله‌ای متناظر با نقاط $x = 0$ و $x = 5$ هستند. انتهای $x = 0$ عایق‌بندی شده و انتهای $x = 5$ را در مای $100°$ نگهداشته‌ایم. در لحظهٔ $t = 0$، دما در یک نقطهٔ دلخواه x برابر با $100 \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ است. مسأله با مقدار مرزی برای دمای $u(x,t)$ در میله را بنویسید.

۶-۲ ـ بررسی چند مسأله در مورد معادلهٔ گرما

در اینجا به چند مثال در مورد مسائل بیان شده در بخش گذشته توجه می‌کنیم.

۶-۲-۱ـ تمرین

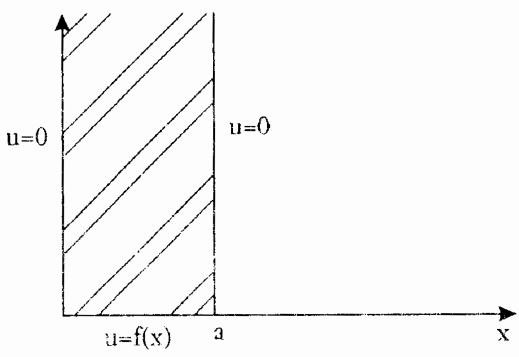
یک میله به طول a را که دو انتهای آن در دمای صفر نگهداشته شده است و توزیع دمای اولیهٔ آن از پیش داده شده است، در نظر می‌گیریم. مسأله با مقدار مرزی مربوط به این مسأله فیزیکی را بنویسید و سپس آن را حل کنید.

حل

در اینجا مسأله عبارت است از

$$
\begin{array}{lll}
u_t\,(x,t) = K\,u_{xx}\,(x,t) \quad , & \circ < x < a \quad , & t > \circ \\
u(\circ,t) = \circ \quad , & u(a,t) = \circ & t \geq \circ \\
u(x,\circ) = f\,(x) & \circ \leq x \leq a &
\end{array}
$$

که در آن f یک تابع داده شده است. اینک باید تابع u را که یک جواب معادلهٔ گرما در ناحیهٔ $\{(x,t)\ :\ \circ < x < a\ ,\ t > \circ\}$ است ، (شکل ۱ را ببینید) و در شرایط مرزی صدق می‌کند، پیدا کنیم.



حل مسأله رابا یافتن جوابهایی از معادله که به صورت حاصلضرب تابعی تنها از x در تابعی تنها از t، یعنی

$$u\,(x\,,\,t) = X\,(x)\,T\,(t) \qquad (۱)$$

هستند شروع می‌کنیم.

برای اینکه این «جوابهای ضربی» در شرایط

$$u(\circ, t) = u(a, t) = \circ \quad , \quad t \leq \circ \qquad (۲)$$

صدق کنند. از (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$u(\circ, t) = X(\circ)\, T(t) = \circ$$
$$u(a, t) = X(a)\, T(t) = \circ$$

در اینجا $T(t)$ به ازای هر $t \geq \circ$، متحد صفر نیست، زیرا در غیر این صورت جواب بدیهی برای مسأله به‌دست می‌آید. بنابراین شرایط

$$X(\circ) = \circ \quad ; \quad X(a) = \circ$$

برقرار است.

اگر معادلهٔ گرما جوابی به صورت (۱) داشته باشد، آنگاه

$$X(x)\, T'(t) = K\, X''(x)\, T(t)$$

از تقسیم دو طرف معادله بر $K\, X(x)\, T(t)$ به دست می‌آوریم

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{K\, T(t)}$$

بنا به بحث ارائه شده در بخش ۵-۲ خواهیم داشت

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{K\, T(t)} = -\lambda$$

و در نتیجه X و T باید به ترتیب جوابهای معادلات دیفرانسیل معمولی

$$X'' + \lambda X = \circ \quad , \quad T' + \lambda KT = \circ$$

باشند. بالعکس، اگر X و T جوابهای این معادلات برای مقدار یکسان λ باشند، آنگاه

حاصلضرب $u(x,t) = X(x)\ T(t)$ یک جواب معادلهٔ گرما است، زیرا

$$\begin{aligned} u_t\ (x,t) - K\ U_{xx}\ (x,t) &= X(x)\ T'(t) - K\ X''(x)\ T(t) \\ &= X(x)\ [\ -\lambda\ KT(t)\ ] - K\ [\ -\lambda\ X(x)\ ]\ T(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اینک معادلهٔ دیفرانسیل

$$X''\ (x) + \lambda\ X\ (x) = 0$$

همراه با شرایط اولیه برای X، یعنی $x\ (0) = 0$ و $X\ (a) = 0$، یک مسأله با مقدار ویژه به صورت

$$X''(x) + \lambda\ X(x) = 0$$

$$X\ (0) = 0 \quad , \quad X(a) = 0$$

تشکیل می‌دهد. اینگونه مسائل را در فصل ۲ بحث شده است و این مسألهٔ خاص در تمرین ۲-۴-۵ حل شده است. مقادیر ویژه، (مقادیر λ که مسأله بـه ازای آنـها دارای یک جواب غیربدیهی است) عبارتند از

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{a})^2 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$

توابع ویژه متناظر (جوابهای غیربدیهی) عبارتند از

$$X_n\ (x) = \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$$

برای $\lambda = \lambda_n$ خواهیم داشت

$$T' + \lambda_n\ KT = 0$$

که جوابی از آن، عبارت است از

$$T_n\ (t) = \exp\ (\ -\lambda_n\ Kt) = \exp \frac{-n^2 \pi^2 t}{a^2}$$

در نتیجه هریک از توابع حاصلضرب

$$U_n(x,t) = \exp \frac{-n^2\pi^2 Kt}{a^2} \quad \sin \frac{n\pi x}{a}$$

یک جواب معادلهٔ گرما است و در شرایط مرزی (۲) صدق می‌کند.

اگر ثابتهای C_n چنان باشند که سری

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \frac{-n^2\pi^2 Kt}{a^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{۳}$$

همگرا باشد و بتوان از آن جمله به جمله نسبت به x و t به تعداد دفعات کافی مشتق گرفت، آنگاه این سری نیز یک جواب از معادله دیفرانسیل را که در شرایط مرزی همگن (۲) صدق می‌کند، به دست می‌دهد.

توجه می‌کنیم که ثابتهای C_n در صورت امکان، باید چنان انتخاب شوند که سری (۳) در شرایط مرزی غیرهمگن

$$u(x,0) = f(x) \qquad , \qquad 0 \le x \le a$$

نیز صدق کند. این شرط ایجاب می‌کند که

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \qquad , \qquad 0 \le x \le a$$

و در این صورت C_n باید ضریب nام سری سینوسی فوریه برای تابع f باشد، یعنی

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx \tag{۴}$$

اینک با توجه به نظریهٔ ارائه شده در مورد سری فوریه در فصل ۳ مشاهده می‌کنیم که اگر تابع f بر $[0,a]$ پیوسته و قطعه‌ای هموار باشد و $f(0)=f(a)=0$، آنگاه سری (۳) با ضرایب (۴) به f همگرای یکنواخت است و می‌توان از این سری بر $0<x<a$ و $t>0$ به هر تعداد دفعات نسبت به x و t جمله به جمله مشتق گرفت. در نتیجه سری (۳) یک جواب از مسأله با مقدار مرزی مورد نظر است و می‌توان نشان داد که این جواب تنها جواب مسأله با مقدار مرزی است.

۶-۲-۲ــ تذکر

در اینجا متذکر می‌شویم که چگونه می‌توان مسألهٔ کلی‌تری را که در آن دو انتهای میله دماهای A و B و نه لزوماً صفر هستند، بررسی کرد. مسأله با مقدار مرزی

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t) \quad , \quad 0<x<a \quad , \quad t>0 \\
&u(0,t) = A \quad , \quad u(a,t) = B \quad , \quad t \geq 0 \qquad (5) \\
&u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq a
\end{aligned}
$$

را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که به کمک یک تغییر متغیر مستقل، این مسأله را می‌توان به مسأله گذشته تبدیل کرد. برای انجام این امر نخست یک چندجمله‌ای درجهٔ اول g به صورت

$$g(x) = C_1 x + C_2$$

را چنان تعیین می‌کنیم که $g(0) = A$ و $g(a) = B$ با این شرایط، خواهیم داشت

$$g(0) = C_2 = A \qquad g(a) = C_1 a + C_2 = B$$

یا $C_2 = A$ و $C_1 = \dfrac{B-A}{a}$. در نتیجه تابع مورد نظر عبارت است از

$$g(x) = \frac{B-A}{a}x + A$$

البته، برای همهٔ xها، داریم

$$g''(x) = 0$$

اینک فرض می‌کنیم u یک جواب مسأله با مقدار مرزی (۵) باشد و v توسط معادلهٔ

$$v(x, t) = u(x, t) - g(x) \qquad (۶)$$

تعریف شود. در این صورت به آسانی می‌توان تحقیق کرد که v یک جواب مسألهٔ با مقدار مرزی

$$v_t(x, t) = K v_{xx}(x, t) \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad t > 0$$

$$v(0,t) = 0 \quad , \quad v(a,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \qquad (۷)$$

$$v(x, 0) = f(x) - g(x)$$

است که از نوع مسألهٔ مورد بحث در آغاز این بخش می‌باشد، بالعکس اگر v یک جواب مسألهٔ (۷) باشد، آنگاه تابع u، که

$$u(x, t) = v(x, t) + g(x)$$

یک جواب مسألهٔ (۵) است.

۶-۲-۳ـ تمرین

دو انتهای یک میلهٔ استوانه‌ای شکل، در $x = 0$ و $x = a$، دارای دمای صفر است. عبارتی برای دمای $u(x,t)$ پیدا کنید اگر توزیع دمای اولیه عبارت باشد از

$$u(x, 0) = ۳ \sin \frac{\pi x}{a} - ۵ \sin \frac{۴\pi x}{a}$$

۶-۲-۴ــ تمرین

دمای $u\ (x,t)$ در یک میله با دو انتهای $x = ۰$ و $x = ۱$ را پیدا کنید، اگر دو انتهای میله در دمای ثابت داده شده نگهداشته شود و اگر توزیع دمای اولیهٔ داده شده برابر باشد با

$$u(۰, t) = ۰ \quad , \quad u(۱, t) = ۰ \quad , \quad u(x, ۰) = ۱ - x$$

۶-۲-۵ــ تمرین

یک میله با دو انتهای عایق‌بندی شدهٔ $x = ۰$ و $x = a$، دارای توزیع دمای اولیهٔ $u\ (x\ ,\ ۰) = f\ (x)$ است.

الف) مسأله با مقدار مرزی را که با مسألهٔ فیزیکی متناظر است بنویسید.

ب) نشان دهید که یک جواب مسأله (حداقل ظاهراً) با

$$u\ (x,t) = \frac{۱}{۲} C_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} C_n \exp\left[-\left(n \frac{\pi}{a}\right)^۲ Kt \right] \operatorname{Cos} \frac{n \pi x}{a}$$

داده می‌شود. در اینجا

$$C_n = \frac{۲}{a} \int_۰^a f(x) \operatorname{Cos} \frac{n \pi x}{a}\, dx$$

۶-۲-۶ــ تمرین

جواب مسألهٔ

$$u_t - u_{xx} = ۰ \qquad , \qquad ۰ < x < \pi \qquad t > ۰$$
$$u(۰, t) = ۰ \qquad , \qquad u(\pi, t) = ۰ \qquad t \geq ۰$$
$$u(x, ۰) = x(\pi - x) \qquad ۰ \leq x \leq \pi$$

را پیدا کنید.

۶-۲-۷ــ تمرین

معادلهٔ گرما در میله‌ای از $x = \circ$ تا $x = a$ را با شرایط مرزی

$u_x(\circ, t) + h\,u(\circ, t) = \circ$ قانون خنک‌سازی نیوتن

$u(a, t) = \circ$ $t \geq \circ$

$u(x, \circ) = f(x)$ $\circ \leq x \leq L$

را در نظر می‌گیریم. دمای $u(x,t)$ در این میله را پیدا کنید.

۶-۳ــ حالت یکنواخت جریان گرما

وقتی دمای u در یک جسم جامد، مستقل از زمان باشد، در معادلهٔ

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \circ$$

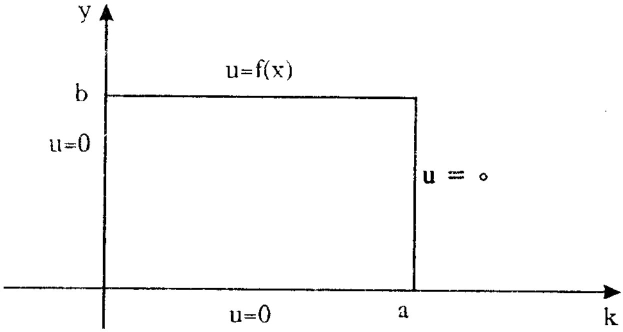
صدق می‌کند. این معادله به معادلهٔ سه‌بُعدی لاپلاس معروف است، در حالتی که u تنها به دو مختص قائم X و Y بستگی داشته باشد در معادلهٔ لاپلاس دوبعدی

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \circ$$

صدق می‌کند، تابعی که در ناحیهٔ R در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند و روی آن دارای مشتقات مراتب اول و دوم پیوسته است، در R **همساز** گفته می‌شود.

۶-۳-۱ــ مثال

دمای حالت یکنواخت $u(x,y)$ را در تیغهٔ مستطیلی شکل $|z| \leq h$، $\circ \leq Y \leq b$، $\circ \leq X \leq a$، که دمای لبه‌های آن در شکل ۱ داده شده است، پیدا کنید.



شکل ۱

حل

در اینجا فرض می‌کنیم که وجهای $z = \pm h$ عایق‌بندی شده باشند، به‌طوری که u تنها به x و y بستگی داشته و به z بستگی نداشته باشد. مسأله با مقدار مرزی که باید حل کنیم، عبارت است از

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b \qquad (1)$$
$$u(0, y) = 0 \quad , \quad u(a, y) = 0 \quad , \quad 0 \le y \le b$$
$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, b) = f(x) \, , \quad 0 \le x \le a$$

اگر معادلهٔ دیفرانسیل دارای یک جواب به صورت ضربی $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$ باشد، آنگاه

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(x) = 0$$

یا

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

که در آن λ یک عدد ثابت است. بنابراین X و Y باید در معادلات دیفرانسیل معمولی

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad , \qquad Y'' - \lambda Y = 0$$

صدق کنند. اینک از شرایط مرزی

$$u(0, y) = 0 \; , \; u(0, y) = 0 \; , \; u(x, 0) = 0$$

نتیجه می‌گیریم که،

$$X(0) = 0 \; , \; X(0) = 0 \; , \; Y(0) = 0$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه، مسألهٔ

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X(0) = 0 \quad , \quad X(a) = 0$$

و بنابراین ثابتهای C_n از فرمول

$$C_n = \frac{۲}{a \operatorname{Sin} h \dfrac{n\pi b}{a}} \int_{\circ}^{a} f(x) \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} dx \qquad (۲)$$

به دست می‌آیند.

۶-۳-۲ـ تذکر

اگر f بر $[\circ,a]$ پیوسته و قطعه‌ای هموار باشد، می‌توان نشان داد که سری (۱) با ضرایب (۲) یک جواب مسأله با مقدار مرزی را نمایش می‌دهد و در واقع تنها جواب مسأله است.

۶-۳-۳ـ تذکر

مسألهٔ پیدا کردن تابعی که در یک ناحیهٔ R همساز باشد و روی مرز R مقادیر معینی را بگیرد، به **مسألهٔ دیریکله** معروف است.

۶-۳-۴ـ تمرین

یک جواب مسألهٔ داده شده در مثال ۶-۳-۱ را وقتی

$$R : \circ < x < \pi \quad , \quad \circ < y < \pi$$

و

$$f(x) = \operatorname{Sin}^{۳} x$$

است، پیدا کنید.

۶-۳-۵ـ تمرین

یک جواب مسأله نیوتن

$$\Delta u = \circ \quad , \quad \circ < x < \pi \quad , \quad \circ < y < \pi$$

$$u_y(x,\circ) = x - \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \circ \le x \le \pi$$

به ترتیب عبارتند از

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad , \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad , \qquad n = 1,2,\ldots$$

جواب عمومی معادلهٔ مربوط به Y برابر است با

$$Y_n(y) = C_1 \cosh\frac{n\pi y}{a} + C_2 \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

شرط $Y(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. با انتخاب $C_2 = 1$، خواهیم داشت

$$Y_n(y) = \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

بنابراین، هریک از توابع

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل است و هریک از آنها در سه شرط مرزی همگن صدق می‌کند. با روی هم نهادن جوابها، سری

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \tag{1}$$

به دست می‌آید. در اینجا ثابتهای C_n در صورت امکان، باید چنان انتخاب شوند که در شرط مرزی غیرهمگن، یعنی

$$u(x,b) = f(x)$$

نیز صدق کنند. بنابراین،

$$y(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} = f(x)$$

$$u_y(x,\pi) = 0 \qquad , \qquad 0 \le x \le \pi$$
$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \qquad , \qquad 0 \le y \le \pi$$

را پیدا کنید.

۶-۳-۶ـ تمرین

مسأله دیریکله

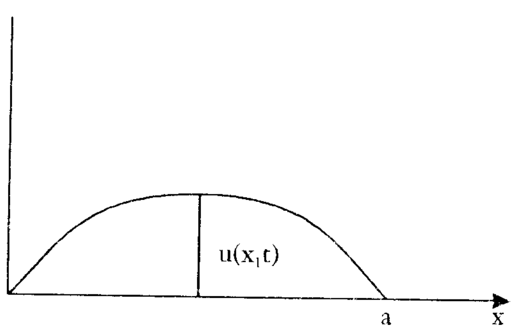
$$\Delta u = 0 \qquad , \qquad 0 < x < a \qquad , \qquad 0 < y < b$$
$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \qquad , \qquad 0 \le x \le a$$
$$u(0,y) = 0 \qquad , \qquad u(a,y) = g(y) \qquad , \qquad 0 \le y \le b$$

را حل کنید.

۶-۴ـ تار مرتعش

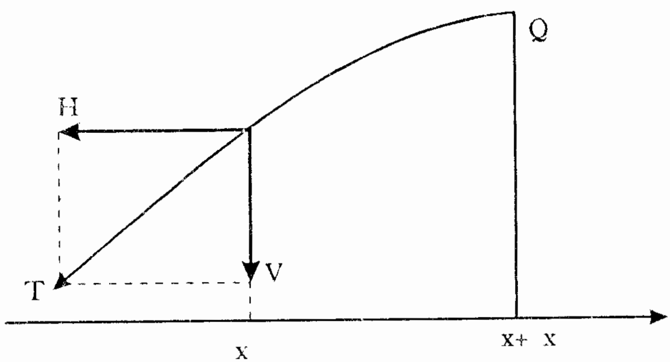
۶-۴-۱ـ معادلهٔ موج

یک تار کشسان را که بین نقاط $x = 0$ و $x = a$ در امتداد محور x کشیده شده است در نظر می‌گیریم. در وضعیت تعادل، تار به‌طور ساده در طول محور x بین دو نقطه قرار دارد. (در این بحث تأثیر نیروی جاذبه نادیده گرفته می‌شود.) هنگامی که ارتعاش تار در یک صفحه صورت می‌گیرد، نمایش آن در لحظهٔ معین t به صورت شکل ۱ است.



شکل ۱

فرض می‌کنیم هر نقطهٔ تار در امتداد خط عمود بر محور x حرکت می‌کند و بنابراین جابجایی از وضعیت تعادل را با u(x,t) نمایش می‌دهیم. برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل حرکت تار (یا معادلهٔ موج) نیروهای وارد بر قسمت کوچکی از تار را در نظر می‌گیریم (شکل ۲) فرض می‌کنیم تار کاملاً انعطاف‌پذیر است به‌طوری که نیروی T که در نقطهٔ P بر قسمتی از تار واقع در سمت چپ P وارد می‌شود، در جهت مماس بر تار عمل کند.



شکل ۲

مؤلفهٔ افقی H و مؤلفهٔ عمودی V از نیروی مماس T با توجه به $\tan\alpha = u_x$ عبارتند از

$$H\,(x,t) = T\,(x,t)\,\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\,T \qquad (1)$$

$$V\,(x,t) = T\,(x,t)\,\sin\alpha = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \qquad (2)$$

فرض کنید، در وضعیت تعادل، ρ نمایش جرم یکنواخت تار در واحد طول باشد. در این صورت $\rho\,\Delta x$ جرم قسمتی از تار بین P و Q در شکل ۲ است. با در نظر گرفتن نیروهای عمودی و افقی که بر قسمتی از تار تأثیر می‌کنند، داریم

$$H\,(x+\Delta x\,,t) - H\,(x,t) = 0$$

$$\rho\,\Delta x\,u_{tt}\,(x,t) = V\,(x+\Delta x\,,\,t) - V\,(x,t)$$

در اینجا x_1 بین x و $x + \Delta x$ است. (در اینجا معادلهٔ دوم متناظر با این فرض است که می‌توان قانون دوم نیوتن را برای یک محیط پیوسته به‌کار برد.) از تقسیم دو طرف این معادله بر Δx و با میل دادن آن به صفر، به معادلات

$$H_x(x, t) = 0 \tag{۳}$$

$$u_{tt}(x, t) = V_x(x, t) \tag{۴}$$

می‌رسیم. از معادلات (۳) و (۱)، خواهیم داشت

$$\frac{T}{\sqrt{1 + u_x^2}} = T_0$$

که در آن T_0 تنها به t بستگی داشته و به x بستگی ندارد. از معادلهٔ (۲)، به دست می‌آوریم

$$V = T_0 u_x$$

در نتیجه، از معادلهٔ (۴) خواهیم داشت

$$u_{tt}(x, t) = \frac{T_0}{\rho} u_{xx}(x, t)$$

به علاوه فرض می‌کنیم که T_0 یک عدد ثابت باشد. (این تقریب بخصوص وقتی که T تقریباً ثابت و یکنواخت است و اندازهٔ شیب u_x همیشه در مقایسه با واحد کوچک باشد، موجه است) هنگامی که تار در وضع تعادل خود در حال سکون باشد، می‌توان T_0 را برای مقدار نیروی کششی T انتخاب کرد.

معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$u_{tt} = C^2 u_{xx}$$

که در آن

$$C^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

معادلهٔ موج یک بعدی نامیده می‌شود. برای بیان حرکت تار، باید این معادله را با توجه به شرایط مرزی گوناگون حل کرد. چون دو انتهای تار ثابت می‌باشند، خواهیم داشت

$$u(\circ, t) = \circ \quad , \quad u(a, t) = \circ$$

باید سرعت و وضعیت اولیهٔ تار نیز معلوم باشد. این مفروضات متناظر با شرایط مرزی

$$u(x, \circ) = f(x) \qquad u_t(x, \circ) = g(x) \qquad \circ \leq x \leq a$$

در اینجا f و g توابع داده شده هستند.

۶-۴-۲ـ تذکر

در اینجا متذکر می‌شویم که

$$u_{tt} = C^{۲}(u_{xx} + u_{yy}) \qquad u = u(x, y, t)$$

به معادلهٔ موج دوبعدی معروف است و در حالت سه بعدی، معادله به صورت

$$u_{tt} = C^{۲}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad , \quad u = u(x, y, z, t)$$

است.

۶-۴-۳ـ تمرین

(الف) نشان دهید معادلهٔ موج $u_{tt} = C^{۲} u_{xx}$ را می‌توان با تغییر متغیرهای مستقل $r = x - ct$ و $s = x + ct$ به صورت $v_{rs} = \circ$ که در آن $v(r,s)=u(x,t)$ درآورد.

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف)، نشان دهید که هر جواب معادلهٔ موج به صورت

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

است. در اینجا توابع f و g دارای مشتقات دوم پیوسته هستند.

۶-۴-۴ــ تمرین

مسأله با مقدار مرزی

$$u_{tt}(x,t) = C^{۲} u_{xx}(x,t) \qquad t > ۰ \qquad \text{تمام } x \text{ها}$$

$$u(x,۰) = f(x) \qquad u_t(x,۰) = g(x) \qquad \text{تمام } x \text{ها}$$

راکه در آن f دارای مشتق دوم پیوسته و g دارای مشتق اول پیوسته در همه جا است، در نظر می‌گیریم.

با استفاده از نتیجه تمرین ۶-۴-۳ عبارت

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}[\, f(x-ct) + f(x+ct)\,] + \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, dx$$

را به عنوان جواب مسأله به دست آورید. این جواب به ***جواب دالامبری*** معادلهٔ موج معروف است.

۶-۴-۵ــ تمرین

جواب معادلهٔ موج را که در شرایط $u(x,۰) = \text{Sin}\, x$ ، $-\infty < x < \infty$ ، $u_t(x,۰)=۰$ صدق می‌کند، پیدا کنید.

۶-۴-۶ــ تمرین

جواب معادلهٔ موج را که در شرایط $u(x,۰) = ۰$ و $u_t(x,۰) = \text{Sin}\,۲x$ صدق می‌کند، پیدا کنید.

۶-۴-۷ــ تمرین

جواب مسأله

$$u_{tt} - ۴u_{xx} = ۰$$

$$u(x,۰) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x & ۰ \le x \le \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲}(۱-x) & \frac{۱}{۲} \le x \le ۱ \\ ۰ & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$u_t(x,۰) = ۰$$

را پیدا کرده و مقادیر $u(1,1)$ و $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ محاسبه کنید.

۶-۴-۸ـ تمرین

جواب مسأله

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty$$
$$u_t(x, 0) = g(x)$$

که در آن

$$g(x) = \begin{cases} \sin \pi x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

را پیدا کرده و $u(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ و $u(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$ محاسبه کنید.

۶-۵ـ جواب تار مرتعش

۶-۵-۱ـ روش حل

برای تعیین حرکت تار مرتعش باید جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$u_{tt}(x,t) = C^2 u_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < a \; , \; t > 0 \tag{1}$$

را که در شرایط مرزی

$$u(0,t) = 0 \qquad u(a, t) = 0 \qquad t \ge 0 \tag{2}$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \le x \le a \tag{3}$$

صدق می‌کند، پیدا کنیم. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، جوابهایی از معادله موج (۱) را که به صورت

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

که در آن A_nها و B_nها ثابتهای دلخواهی هستند. در این صورت جوابهای ضربی مسأله که در شرایط همگن (۲) صدق می‌کنند عبارتند از

$$u_n(x,t) = (A_n \operatorname{Cos} \frac{n\pi C}{a} t + B_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi C}{a} t)$$

با رویهم نهادن جوابها، جواب سری

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \frac{n\pi C}{a} t + B_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi C}{a} t) \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} \qquad (۴)$$

که در شرایط مرزی همگن (۳) صدق می‌کند، به دست می‌آید. اینک می‌کوشیم تا ثابتهای A_n و B_n را به قسمی انتخاب کنیم که جواب سری، در شرایط مرزی غیرهمگن (۳) نیز صدق کند. این شرایط ایجاب می‌کنند که

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} = f(x)$$

و

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi C}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a} = g(x)$$

بنابراین ثابتهای A_n و B_n از فرمولهای

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

و (۵)

$$B_n = \frac{2}{n\pi C} \int_0^a g(x) \operatorname{Sin} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

به دست می‌آیند.

۶-۵-۲ـ قضیه

اگر f و g در شرایط زیر صدق کنند، ثابت کنید سری (۴) با ضرایب (۵) به یک تابع که یک جواب مسأله با مقدار مرزی است،همگرا می‌شود

هستند می‌جوییم. با قرار دادن $U_{xx} = X''(x)\, T(t)$ و $U_{tt} = X(x)\, T''(t)$ در معادلهٔ موج خواهیم داشت

$$X(x)\, T''(t) = C^{۲}\, X''(x)\, T(t)$$

یا

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{C^{۲}\, T(t)} = -\lambda$$

که در آن λ ثابت است. بنابراین X و T در معادلات دیفرانسیل

$$X''(x) + \lambda X(x) = ۰ \quad , \quad T''(t) + \lambda C^{۲}\, T(t) =$$

صدق می‌کنند. همچنین برای اینکه جوابهای ضربی در شرایط مرزی همگن (۲) صدق کنند، لازم است که

$$X(۰) = ۰ \quad , \quad X(a) = ۰$$

از قبل می‌دانیم، که مقادیر و توابع ویژهٔ مسألهٔ

$$X''(x) + \lambda X(x) = ۰$$

$$X(۰) = ۰ \quad , \quad X(a) = ۰$$

عبارتند از

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{۲} \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

و

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$$

و جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi C}{a}\right)^{۲} T(t) = ۰$$

برابر است با

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi C}{a} t + B_n \sin \frac{n\pi C}{a} t$$

۱) f'' و g' بر $[0,a]$ پیوسته باشند و

۲) $f''(0) = f''(a) = 0 \quad , \quad f(0) = f(a) = 0$

$g(0) = g(a) = 0$

اثبات

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$2\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Sin}\,(\beta-\alpha) + \mathrm{Sin}\,(\beta+\alpha)$$
$$2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha) - \mathrm{Cos}\,(\beta+\alpha)$$

سری (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} A_n \left[\mathrm{Sin}\,\frac{n\pi}{a}(x-ct) + \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi}{a}(x+ct)\right] \right. \qquad (6)$$
$$\left. + \frac{1}{2} B_n \left[\mathrm{Cos}\,\frac{n\pi}{a}(x-ct) - \mathrm{Cos}\,\frac{n\pi}{a}(x+ct)\right] \right\}$$

اینک تابع F را به روش زیر تعریف می‌کنیم. به ازای $0 \le x \le a$ قرار می‌دهیم $F(r) = f(r)$ و F را به یک تابع فرد و متناوب با دوره تناوب $2a$ گسترش می‌دهیم. محدودیتهایی که قبلاً بر f اعمال شده است، پیوستگی F ، F' و F'' را در همه‌جا تضمین می‌کند. بنابراین تابع F را می‌توان با سری سینوسی فوریه نمایش داد. ضرایب b_n ، در این سری عبارتند از

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a F(r)\ \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi r}{a}\,dr = \frac{2}{a} \int_0^a f(r)\ \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi r}{a}\,dr = A_n$$

که در آن A_n همان مقدار داده شده در فرمول (۵) است. از این رو اولین گروه جمله‌ها در سری (۶) به

$$\frac{1}{2}[\,F(x-ct) + F(x+ct)\,]$$

همگراست.

اکنون تابع G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به ازای $0 \leq S \leq a$ قرار می‌دهیم

$$G(s) = \int_0^s g(x)\, dx$$

و G را به یک تابع زوج و متناوب با دورهٔ تناوب ۲a گسترش می‌دهیم. محدودیتهایی که روی g اعمال شده است پیوستگی G ، G' و G'' را در همه‌جا تضمین می‌کند، تابع G را در همه‌جا می‌توان با سری کسینوسی فوریه نمایش داد. ضرایب a_n در این سری عبارتند از

$$a_n = \frac{۲}{a} \int_0^a G(s) \operatorname{Cos} \frac{n\pi s}{a}\, ds = \frac{۲}{a} \left[\frac{a}{۲\pi} G(s) \operatorname{Sin} \frac{n\pi s}{a} \right]_0^a$$

$$- \frac{۲}{a} \frac{a}{n\pi} \int_0^a g(s) \operatorname{Cos} \frac{n\pi s}{a}\, ds$$

در اینجا از انتگرالگیری به روش جزء به جزء و این نکته که $G'(s)=g(s)$، استفاده شده است. چون قسمت انتگرال شده صفر می‌شود، داریم

$$a_n = -C B_n$$

بنابراین، گروه دوم جمله‌ها در سری (۶) به

$$\frac{۱}{۲c} [G(x+ct) - G(x-ct)]$$

همگراست. (جمله‌های ثابت در دو سری کسینوسی حذف می‌شوند). با ترکیب این نتایج، خواهیم داشت

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲} [F(x+ct) - F(x-ct)] + \frac{۱}{۲c} [G(x+ct) - G(x-ct)] \quad (۷)$$

این تابع برای تمام مقادیر x و t دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته است، زیرا F'' و G'' پیوسته هستند. همچنین مستقیماً می‌توان تحقیق کرد که این تابع یک

جواب معادلهٔ موج (۱) است. (تمرین ۶-۵-۳ را ببینید) دلیل اینکه جواب $u(x,t)$ در (۷) در شرایط مرزی (۲) و (۳) صدق می‌کند، در روند به دست آوردن این جواب گنجانده شده است (تمرین ۶-۵-۴ را ببینید).

۶-۵-۳ـ تمرین

نشان دهید که $u(x,t)$ داده شده در (۷) در معادلهٔ موج (۱) صدق می‌کند.

۶-۵-۴ـ تمرین

اگر جابجایی و سرعت اولیهٔ تار مرتعشی، عبارت باشد از

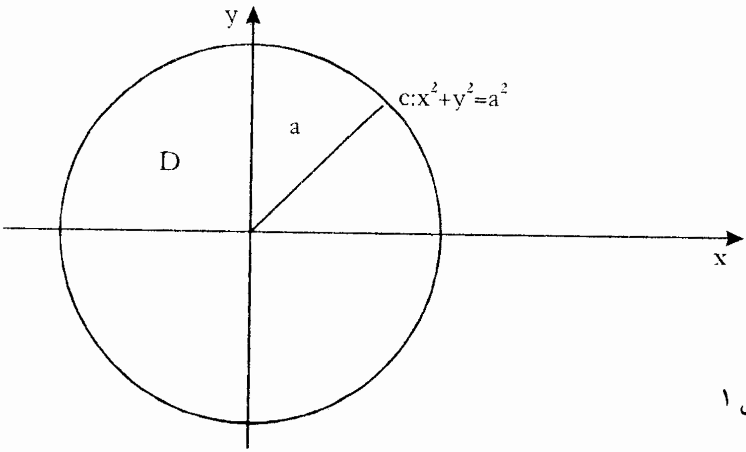
$$u(x,\circ) = \mathrm{Sin}\,\frac{n\pi}{a} \quad , \quad u_t(x,\circ) = \circ \ , \ \circ < x < a$$

فرمولی برای جابجایی $u(x,t)$ پیدا کنید.

۶-۶ـ یک مسألهٔ دیریکله در مورد یک گوی

فرض می‌کنیم D و C به ترتیب نمایش نقاط داخلی و نقاط مرزی گوی $x^2 + y^2 \le a^2$ باشند (شکل ۱). در اینجا تابعی مانند u در D را می‌خواهیم پیدا کنیم، که مقدار داده شده‌ای مانند $u = f$، را بر مرز C بگیرید. یعنی

$$\text{در } D\text{،}\ u_{xx} + u_{yy} = \circ \ \text{ و بر } C\ \ u = f \qquad (۱)$$



شکل ۱

۶-۶-۱ــ روش حل

برای اینکه بتوانیم روش جداسازی متغیرها را در مورد این مسأله به‌کار گیریم، لازم است که مختصات قطبی

$$x = r\,\mathrm{Cos}\,\theta \quad , \quad y = r\,\mathrm{Sin}\,\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 < r \le a$$

را معرفی می‌نماییم. با مشتقگیری از معادلهٔ اول و دوم بالا نسبت به x و y، چهار معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$1 = r_x\,\mathrm{Cos}\,\theta - r\,\theta_x\,\mathrm{Sin}\,\theta \qquad\qquad 0 = r_y\,\mathrm{Cos}\,\theta - r\,\theta_y\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$0 = r_x\,\mathrm{Sin}\,\theta + r\,\theta_x\,\mathrm{Cos}\,\theta \qquad\qquad 1 = r_y\,\mathrm{Sin}\,\theta + r\,\theta_y\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

با حل دستگاه معادلات اول نسبت به r_x و θ_x و حل دستگاه معادلات دوم نسبت به r_y و θ_y به دست می‌آوریم

$$r_x = \mathrm{Cos}\,\theta \qquad\qquad r_y = \mathrm{Sin}\,\theta$$

$$\theta_x = -\frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{r} \qquad\qquad \theta_y = \frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r}$$

اینک با استفاده از این مقادیر معادلهٔ لاپلاس نسبت به تغییر متغیر جدید به صورت زیر درمی‌آید:

$$u_x = u_r\,r_x + u_\theta\,\theta_x \qquad\qquad u_y = u_r\,r_y + u_\theta\,\theta_y$$

$$u_x = u_r\,\mathrm{Cos}\,\theta - u_\theta\,\frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{r} \qquad\qquad u_y = u_r\,\mathrm{Sin}\,\theta + u_\theta\,\frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{r}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\,\mathrm{Cos}\theta - u_\theta\,\frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{r}\right) - r_x + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_r\,\mathrm{Cos}\theta - u_\theta\,\frac{\mathrm{Sin}\,\theta}{r}\right)\theta_x$$

$$= \left[u_{rr} \operatorname{Cos}\theta - u_{\theta r} \frac{\operatorname{Sin}\theta}{r} + u_\theta \frac{\operatorname{Sin}\theta}{r^2} \right] \operatorname{Cos}\theta$$

$$+ \left[u_{r\theta} \operatorname{Cos}\theta - u_r \operatorname{Sin}\theta - u_{\theta\theta} \frac{\operatorname{Sin}\theta}{r} - u_\theta \frac{\operatorname{Cos}\theta}{r} \right] \left[- \frac{\operatorname{Sin}\theta}{r} \right]$$

$$= u_{rr} \operatorname{Cos}^2\theta - 2u_{r\theta} \frac{\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta}{r} + u_{\theta\theta} \frac{\operatorname{Sin}^2\theta}{r^2} + u_r \frac{\operatorname{Sin}^2\theta}{r}$$

$$+ 2u_\theta \frac{\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta}{r^2}$$

به همین نحو، می‌توان نشان داد که

$$u_{yy} = u_{rr} \operatorname{Sin}^2\theta + 2u_{r\theta} \frac{\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta}{r} + u_{\theta\theta} \frac{\operatorname{Cos}^2\theta}{r^2} + u_r \frac{\operatorname{Cos}^2\theta}{r}$$

$$- 2u_\theta \frac{\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta}{r^2}$$

با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ لاپلاس، معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی به صورت

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \qquad (2)$$

به دست می‌آید. و شرط (۱) به صورت

$$u(a, \theta) = f(\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad (3)$$

بنابراین مسأله (۱) به مسألهٔ هم‌ارز (۲) و (۳) تبدیل می‌شود، که در مورد آن می‌توان روش جداسازی متغیرها را به کار برد. در نتیجه فرض می‌کنیم که (۲) دارای جوابهایی به صورت

$$u(r, \theta) = R(r)\, \Theta(\theta)$$

باشد. با قرار دادن مشتقات

$$u_r = R'(r)\, \Theta(\theta)$$

$$u_{rr} = R''(r)\,\Theta(\theta)$$
$$u_{\theta\theta} = R(r)\,\Theta''(\theta)$$

در معادلهٔ (۲) و جدا کردن متغیرها، به‌دست می‌آوریم

$$r^{2}\,\frac{R''(r)}{R(r)} + r\,\frac{R'(r)}{R(r)} = -\,\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda$$

که در آن λ یک ثابت دلخواه است. این دستگاه معادلات به دو معادله دیفرانسیل معمولی،

$$r^{2}\,R''(r) + r\,R'(r) + \lambda\,R(r) = 0 \qquad (۴)$$

و

$$\Theta''(\theta) + \lambda\,\Theta(\theta) = 0 \qquad (۵)$$

به ترتیب برای توابع R و Θ منتهی می‌شود.

برای اینکه جواب مسألهٔ (۲) و (۳) تك ـ مقداری باشد، لازم است که جواب نسبت به θ متناوب با دوره تناوب 2π باشد؛ یعنی

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$$

از این‌رو، شرایط مرزی، متناوب

$$\theta(-\pi) = \theta(\pi) \qquad \theta'(-\pi) = \theta'(\pi)$$

را در مورد تابع θ وضع می‌کنم. همانطور که در فصل ۲ این کتاب مشاهده کردیم، مسألهٔ خودالحاق

$$\Theta''(\theta) + \lambda\,\Theta(\theta) = 0$$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \qquad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$$

دارای مقادیر ویژهٔ $n = ۰,۱,۲,...$ و $\lambda = n^۲$ و توابع ویژهٔ

$$H_n(\theta) = C_n \operatorname{Cos} n\theta + D_n \operatorname{Sin} n\theta$$

است. به ازای $\lambda = ۰$، معادلهٔ (۴) به صورت

$$r^۲ R''_{\circ}(r) + r R'_{\circ}(r) = ۰$$

درمی‌آید. بنابراین، جواب عمومی این معادله با انتگرالگیری به صورت

$$R_{\circ}(r) = A_{\circ} + B_{\circ} \operatorname{Ln} r$$

درمی‌آید. وقتی $\lambda = n^۲$، معادلهٔ کوشی دویلر

$$r^۲R''(r) + r R'(r) - n^۲R(r) = ۰$$

دارای جواب عمومی

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} \qquad n = ۱,۲,...$$

است. بنابراین، تمام توابع

$$u_n(r,\theta) = A_{\circ} + B_{\circ} L_n r + (A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n \operatorname{Cos} n\theta + D_n \operatorname{Sin} n\theta) \qquad (۶)$$

به ازای $n = ۰,۱,۲,...$، $r > ۰$ که توابع متناوب با دوره تناوب ۲π می‌باشند، در معادلهٔ لاپلاس (۲) در مختصات قطبی صدق می‌کند.

اینک یک ترکیب نامتناهی از توابع (۷) را به عنوان جواب مسألهٔ (۲) و (۳) به دست می‌آوریم. چون جواب مسأله باید در D که شامل مبداء می‌باشد، پیوسته

باشد، بنابراین نباید جمله لگاریتمی و توانهای منفی r را در نظر بگیریم. بنابراین، $B_n = 0$، $n = 0,1,2,\ldots$. اینک سری نامتناهی

$$u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \operatorname{Cos} nx + \beta_n \operatorname{Sin} n\theta) \qquad (7)$$

را در نظر می‌گیریم. اینک برای پیدا کردن ضرایب B_n ، α_n ، α_0 ، $n \geq 1$، قرار می‌دهیم r=a و شرط مرزی (۳) را به کار می‌بریم. بنابراین، خواهیم داشت

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (\alpha_n \operatorname{Cos} n\theta + \beta_n \operatorname{Sin} n\theta) \qquad (8)$$

این سری، بسط سری مثلثاتی کلی فوریه تا f بر بازهٔ $[-\pi , \pi]$ است، بنابراین ضرایب آن، عبارتند از

$$a_n = a^n \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{Cos} n\theta \, d\theta \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$(9)$$

$$b_n = a^n \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{Sin} n\theta \, d\theta \qquad n = 1,2,\ldots$$

اینک با قرار دادن α_n و β_n در معادلهٔ (۷) به دست می‌آوریم

$$u(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \operatorname{Cos} n\theta + b_n \operatorname{Sin} n\theta) \qquad (10)$$

که در آن a_n و b_n ضرایب فوریهٔ تابع f بر $[-\pi , \pi]$، داده شده توسط انتگرالهای (۹) می‌باشند.

فرمول (۱۰) همراه با (۹) جواب مسأله (۲) (۳) است. برای تحقیق درستی این مطلب، فرض می‌کنیم f یک تابع پیوسته، قطعه‌ای هموار، متناوب با دوره تناوب 2π بر $[-\pi , \pi]$ باشد. قرار می‌دهیم

$$M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| \, d\theta$$

۶-۶-۲ــ تمرین

مسأله دیریکله

$$u_{rr} + \frac{۱}{r} u_r + \frac{۱}{r^۲} u_{\theta\theta} = ۰ \quad , \quad r < a$$

$$u(a,\theta) = a \operatorname{Cos}^۲ \theta \quad , \quad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

را حل کنید.

۶-۶-۳ــ تمرین

جواب مسأله دیریکلهٔ

$$u_{xx} + u_{yy} = ۰ \qquad x^۲ + y^۲ < ۱$$

$$u = y^۲ \qquad x^۲ + y^۲ = ۱$$

را پیدا کنید.

۶-۶-۴ــ تمرین

جواب مسأله

$$\Delta u = ۰ \qquad r < ۱$$

$$u(۱,\theta) = \operatorname{Sin} \theta + \operatorname{Cos}^۲ \theta \qquad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$

را پیدا کنید.

۶-۷ــ کاربرد تبدیل لاپلاس در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در اینجا از تبدیل لاپلاس در حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم. روش حل در اینجا شبیه به روش حل دیفرانسیل توسط تبدیل لاپلاس است.

۶-۷-۱ــ مثال

مسأله

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = ۰ \qquad (۱)$$

بنابراین $|a_n| \le M$ و $|b_n| \le M$ ، تعریف می‌کنیم

$$u(r,\theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

با $\frac{\alpha_0}{2} = u_0$. در این صورت برای $r \le r_0$، با $r_0 < a$، خواهیم داشت

$$|u_n(r,\theta)| \le \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\ |a_n| + |b_n|\ \right] \le 2M \left(\frac{r}{a}\right)^n \qquad (11)$$

سری شامل جمله‌های $2M\left(\frac{r}{a}\right)^n$ به ازای $r \le r_0$ همگرای یکنواخت است. بنابراین سری (۱۰) به ازای $r = a$ نیز همگرای یکنواخت است. بنابراین، سری (۱۰) به‌طور یکنواخت به $u(r,\theta)$ برای $r \le a$ همگراست، و بنابراین $u(r,\theta)$ به ازای $0 \le r \le a$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ پیوسته است. چون

$$u(a,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

پس شرط مرزی (۳) برقرار است.

برای اینکه نشان دهیم که u در معادلهٔ لاپلاس (۲) صدق می‌کند، توجه می‌کنیم که سری (۱۰) و مشتقات اول و دوم آن به مضارب ثابتی از سری $\sum 2Mn^2\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}$ محدود می‌شود. این سریها به ازای $r \le r_0 < a$، همگرای یکنواخت می‌باشند. از این رو u به ازای $r < a$ مشتقات مرتبهٔ اول و دوم پیوسته دارد، که می‌توان آنها را توسط مشتقگیری جمله به جمله از سری (۱۰) به دست آورد. بنابراین

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} u_n(r,\theta)\,[n(n-1)+n-n^2] = 0$$

بنابراین، u در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند.

$$w(x,\circ) = \circ \quad , \quad w(\circ,t) = t \quad , \quad t \geq \circ$$

را حل کنید.

حل

از دو طرف معادلهٔ (۱) **نسبت به** t تبدیل لاپلاس می‌گیریم، خواهیم داشت

$$f\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] + x\left\{ s f[w] - w(x,\circ) \right\} = \circ \qquad (۲)$$

در اینجا $w(x,\circ) = \circ$. در جمله اول، فرض اینکه بتوانیم ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری را تعویض کنیم، خواهیم داشت

$$f\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] = \int_\circ^\infty e^{-st}\frac{\partial w}{\partial x}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_\circ^\infty e^{-st} w(x,t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x} f[w(x,t)]$$

قرار می‌دهیم $W(x,s) = f[w(x,t)]$ ، بنابراین از (۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x s W = \circ$$

این معادله را می‌توان به عنوان یک معادله دیفرانسیل معمولی با x به عنوان متغیر مستقل در نظرگرفت. زیرا مشتقات نسبت به s در معادله ظاهر نشده‌اند. با حل این معادله، به دست می‌آوریم

$$W(x,s) = C(s)\, C^{-s\frac{x^۲}{۲}} \qquad (۳)$$

از شرط $w(\circ,t) = t$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$W(\circ,S) = \frac{۱}{S^۲}$$

با قرار دادن $x = \circ$ در جواب بالا، نتیجه می‌گیریم که

$$C(S) = \frac{۱}{S^۲}$$

از این رو،

$$W(x, S) = \frac{۱}{S^۲} e^{-s\frac{x^۲}{۲}}$$

با استفاده از فرمول

$$f[f(t-c)\, u_c(t)] = e^{-Cs} F(S)$$

که در فصل تبدیلات کتاب معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شده است. نتیجه می‌گیریم که

$$w(x,t) = (t - \frac{x^۲}{۲})\, U_{\frac{x^۲}{۲}}(t) = \begin{cases} ۰ & t < \frac{x^۲}{۲} \\ t - \frac{x^۲}{۲} & t > \frac{x^۲}{۲} \end{cases}$$

۶-۷-۲ـ تمرین

با استفاده از تبدیل لاپلاس مسألهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + ۲x \frac{\partial u}{\partial t} = ۲x$$

$$u(x, ۰) = ۱ \quad , \quad u(۰, t) = ۱$$

را حل کنید.

۶-۷-۳ـ مثال

جابجایی، $w(x,t)$، در مورد یک تار مرتعش را با توجه به شرایط زیر پیدا کنید.

(i) تار ابتداً بر محورـ x از $x = ۰$ تا ∞ در حال سکون است.

(ii) برای $t > ۰$ معادلهٔ حرکت انتهای سمت چپ تار توسط

$$w(۰, t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & ۰ \le t \le ۲\pi \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

(iii) علاوه بر این

$$\lim_{x\to\infty} w(x,t) = 0 \qquad , \qquad t \geq 0$$

البته در حالت کلی تار به طول بینهایت وجود ندارد. این مدل یک تار یا نخ با طول دراز را که بتوان از وزن آن صرفنظر کرد، توضیح می‌دهد.

حل

باید معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۴}$$

را با توجه به شرایط مرزی

$$w(0,t) = f(t) \qquad \lim_{t\to\infty} (x,t) = 0 \tag{۵}$$

و شرایط اولیهٔ

$$w(x\,,\,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{۶}$$

حل کرد. با لاپلاس‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۵) نسبت به t، به دست می‌آوریم

$$S^2 f\,[\,w(x,t)] - S\,w(x,0) - \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = C^2 f\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

یا

$$S^2\,W(x\,,\,S) = C^2 f\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,W(x\,,\,S)$$

که در آن $W(x\,,\,S) = f\,[\,w(x,t)]$. چون مشتقات نسبت به S در معادلهٔ بالا، ظاهر نشده است، می‌توان آن را به عنوان یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خطی مرتبهٔ دوم

با ضرایب ثابت به صورت

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}} W - \frac{S^{۲}}{C^{۲}} W = ۰$$

در نظر گرفت. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$W(x , S) = A(S) e^{\frac{Sx}{C}} + B(S) e^{-\frac{Cx}{S}} \qquad (۷)$$

از (۵) نتیجه می‌گیریم که

$$W (۰ , S) = f [w(۰ ,t)] = f [f (t)] = F(S)$$

و از شرط دوم (۵)، با فرض اینکه بتوانیم ترتیب انتگرالگیری نسبت به t و حدگیری را وقتی $x \to \infty$ تعویض می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\infty} W(x,S) = \lim_{x\to\infty} \int_{۰}^{\infty} e^{-st} w(x,t)\, dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} \lim_{x\to\infty} w(x,t)\, dt = ۰$$

این مطلب نتیجه می‌دهد که A(S) در (۷) باید صفر باشد، زیرا برای $C > ۰$ به ازای هر مقدار مثبت S تابع $e^{\frac{Sx}{C}}$ افزایشی است. وقتی x افزایش می‌یابد. توجه می‌کنیم که چون تبدیل لاپلاس به‌طور کلی به ازای تمام sها بزرگتر از یک عدد ثابت مانند γ وجود دارد، پس می‌توانیم فرض کنیم که $S > ۰$. از این رو

$$W (۰ , S) = B(S) = F(S)$$

بنابراین، (۷) به صورت

$$W (x , S) = F(S) e^{-\frac{Sx}{C}}$$

درمی‌آید. با معکوس‌گیری از رابطهٔ بالا، جواب مسأله به صورت

$$w(x,t) = f\left(t - \frac{x}{C}\right) u_{\frac{x}{C}}(t)$$

یا

$$w(x,t) = \begin{cases} \text{Sin}\left(t - \frac{x}{c}\right) & \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + ۲\pi \\ ۰ & \text{در جاهای دیگر} \end{cases}$$

تمرینهای گوناگون فصل ۶

۶-۷-۴

۱. دو انتهای میله‌ای استوانه‌ای شکل، در $x = ۰$ و $x = a$، دارای دمای صفر است. عبارتی برای دمای $u(x,t)$ پیدا کنید. اگر توزیع دمای اولیه عبارت باشد از

$$u(x,۰) = \begin{cases} x & , \quad ۰ \le x \le \frac{a}{۲} \\ a - x & , \quad \frac{a}{۲} < x \le a \end{cases}$$

۲. دمای $u(x,t)$ در یک میله با دو انتهای $x = ۰$ و $x = ۱$ را به قسمی پیدا کنید که

$$u(۰,t) = ۰ \;,\; u(۱,t) = ۲ \;,\; u(x,۰) = ۲x\,\text{Cos}\,۲\pi x$$

۳. یک انتهای میله‌ای به طول ۱ در $x = ۰$ عایق‌بندی شده است و انتهای دیگر آن در $x = ۱$ در دمای صفر نگهداشته شده است. اگر

$$u(x,۰) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le x \le \frac{۱}{۲} \\ ۲(۱ - x) & \frac{۱}{۲} < x \le ۱ \end{cases}$$

یک عبارت برای $u(x,t)$، پیدا کنید.

۴. جوابی از معادلهٔ گرمای $u_t = Ku_{xx}$ را پیدا کنید که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$u(x\,,\,0) = \cos^2 x \;,\; u_x(0\,,\,t) = 0 \;,\; u_x(\pi\,,\,t) = 0 \;,\; t \ge 0$$

۵. جواب مسألهٔ

$$u_t = Ku_{xx} \quad , \quad 0 < x < a \quad t > 0$$
$$u(x\,,\,0) = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le a$$
$$u(0\,,\,t) = 0 \quad , \quad u_x(a\,,\,t) + h\,u(a\,,\,t) = 0$$

(h یک ثابت مثبت؛ $t \ge 0$ است.) را پیدا کنید.

۶. دمای $u(x,y)$ را در یک تیغهٔ مستطیلی پیدا کنید، اگر بر دمای $x = 0$ و $x = a$ دارای دمای صفر باشند و قانون خنک‌سازی نیوتن را بتوان در لبهٔ $y = 0$ و برای $0 \le x \le a$ ، $u(x,b) = f(x)$ به کار برد. فرض کنید دمای محیط اطراف صفر است.

۷. مسألهٔ

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b$$
$$u_y(x\,,\,0) = u_y(x\,,\,b) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le a$$
$$u_x(0\,,\,y) = g(y) \quad , \quad u_x(a\,,\,y) = 0 \quad , \quad 0 \le y \le b$$

را حل کنید.

۸. فرض می‌کنیم u جوابی از مسألهٔ

$$\Delta u = 0 \quad , \quad (0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b)$$
$$u(x\,,\,0) = 0 \quad , \quad u(x\,,\,a) = -f(x) \quad , \quad 0 \le x \le a$$
$$u(0\,,\,y) = 0 \quad , \quad u(a\,,\,y) = f(y) \quad , \quad 0 \le y \le a$$

باشد. نشان دهید $u(x,y) = -u(y,x)$ ؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $u(x,x) = 0$.

۹. با استفاده از نتیجه تمرین ۸ جوابی از معادلهٔ $\Delta u = 0$ را پیدا کنید که برای مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویهٔ محدود به خطهای $y = 0$ ، $y = x$ و $x = \pi$ در

شرایط مرزی

$$u(x,\circ)=\circ \qquad u(\pi,y)=\mathrm{Sin}^{۳} y \qquad u(x,x)=\circ$$

صدق کند.

۱۰. مسألهٔ

$$\Delta u=\circ \quad , \quad \circ<x<a \quad , \quad \circ<y<b$$
$$u_x(\circ,y)=\circ \quad , \quad u_x(\circ,y)=g(y) \quad , \quad \circ\le y\le b$$
$$u_y(x,\circ)=f(x) \quad , \quad u_y(x,b)=\circ \quad , \quad \circ\le x\le a$$

را با فرض اینکه

$$\int_{\circ}^{a} f(x)\,dx=\circ \qquad \int_{\circ}^{b} g(y)\,dy=\circ$$

حل کنید.

۱۱. جواب مسألهٔ دیریکلهٔ

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta}=\circ \qquad r<a$$

$$u(a,\theta)=a^{۳}\,\mathrm{Sin}^{۳}\theta \qquad \circ\le\theta\le ۲\pi$$

را پیدا کنید.

۱۲. جواب مسأله دیریکلهٔ

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=\circ \quad , \quad x^{۲}+y^{۲}<a$$
$$u(x,y)=x^{۲} \quad , \quad x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$$

را پیدا کنید.

۱۳. مسألهٔ

$$\Delta u=\circ \qquad x^{۲}+y^{۲}<۴$$
$$u(x,y)=y^{۴} \qquad x^{۲}+y^{۲}=۴$$

را حل کنید.

۱۴. نشان دهید مسأله با مقدار مرزی

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=\circ \quad , \quad \circ<x<a \qquad \circ<t<a$$
$$u(\circ,t)=u(a,t)=\circ \quad , \quad \circ\le t\le a$$
$$u(x,\circ)=\circ \quad , \quad u(x,a)=h(x) \qquad \circ\le x\le a$$

دارای جواب نیست مگر اینکه h تابع صفر باشد.

۱۵. هرگاه جابجایی و سرعت اولیهٔ تار مرتعش، عبارت باشند از

$$u(x, \circ) = \operatorname{Sin}\frac{\pi x}{a} \qquad u_t(x, \circ) = \operatorname{Sin}\frac{۲\pi x}{a} \qquad \circ \le x \le a$$

فرمولی برای جابجایی $u(x, t)$ پیدا کنید.

۱۶. مسألهٔ

$$\begin{array}{lll} u_{tt} - u_{xx} = \circ & , \quad \circ < x < \pi & , \quad t > \circ \\ u(x, \circ) = \operatorname{Sin}^۳ x & , \quad u_t(x, \circ) = \circ & , \quad \circ \le x \le \pi \\ u(\circ, t) = \circ & , \quad u(\pi, t) = \circ & , \quad t \ge \circ \end{array}$$

را حل کنید.

۱۷. با به‌کار بردن فرمول دالامبری جواب مسأله با مقدار مرزی

$$\begin{array}{llll} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \circ & & t > \circ & \text{تمام } x \text{ها} \\ u(x, \circ) = f(x) & u_t(x, \circ) = g(x) & t \ge \circ & \text{تمام } x \text{ها} \end{array}$$

(تمرین ۶-۴-۴ را ببینید) در هریک از حالات زیر مقدار جواب را در هریک از نقاط داده شده به‌دست آورید.

الف) در $(\frac{۱۱}{۸}, \frac{۱}{۸})$ و $(۱, \frac{۱}{۴})$ با

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| \le ۱ \\ \circ & |x| > ۱ \end{cases}$$

$$g(x) = \circ$$

ب) در $(\frac{۷\pi}{۱۲}, -\frac{\pi}{۱۲})$ و $(\frac{۵\pi}{۶}, \frac{-\pi}{۲})$ با

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Sin} x & |x| \le \pi \\ \circ & |x| > \pi \end{cases}$$

$$g(x) = \circ$$

۱۸. با استفاده از تبدیل لاپلاس مسألهٔ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=xt$$

$$u(x,0)=0 \qquad x\geq 0$$

$$u(0,t)=0 \qquad t\geq 0$$

را حل کنید.

۱۹. فرمولی برای $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ در مختصات استوانه‌ای

$$x=r\operatorname{Cos}\theta$$

$$y=r\operatorname{Sin}\theta$$

$$z=z$$

به دست آورید.

۲۰. فرمولی برای $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ در مختصات کروی

$$x=\rho\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\theta \qquad \rho>0$$

$$y=\rho\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\theta \qquad 0\leq\phi\leq\pi$$

$$z=\rho\operatorname{Cos}\phi \qquad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

به دست آورید.

*۲۱. یک جسم صلب استوانه‌ای دوّار به شعاع C و ارتفاع h مانند شکل زیر را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم رویه‌های بالایی و پایینی آن، عایق‌بندی شده باشد و رویهٔ جانبی آن دارای دمای صفر باشد. همچنین فرض می‌کنیم که در لحظهٔ $t=0$ دما در یک نقطه از جسم صلب، تنها به فاصلهٔ نقطه از محور استوانه بستگی داشته باشد، در مختصات استوانه‌ای، توزیع دمای اولیه تنها تابعی از مؤلفهٔ r، است و به θ یا z بستگی ندارد. توزیع دما در جسم را به ازای $t>0$ پیدا کنید. در اینجا می‌خواهیم جوابی از مسأله با مقدار مرزی

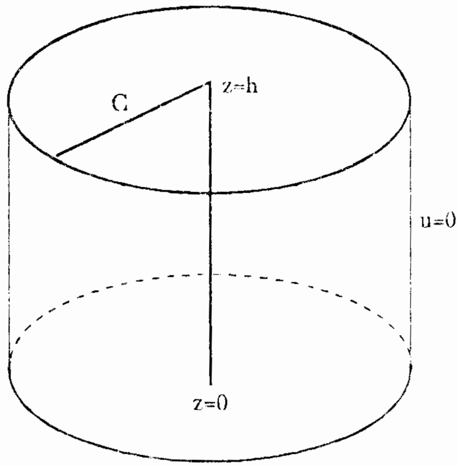
$$u_t(r,t)=K\left[u_{rr}(r,t)+\frac{1}{r}u_r(r,t)\right],\quad 0<r<C,\quad t>0 \qquad (8)$$

$$u(c,t)=0 \qquad t\geq 0$$

(۹)

$$u(r, 0) = f(r) \qquad 0 \le r \le C$$

را پیدا کنیم. در اینجا f توزیع دمای اولیه است.



*۲۲. یک عبارت برای دمای $u(r,t)$ در استوانهٔ $0 \le r \le C$ ، $0 \le z \le h$ به قسمی پیدا کنید که تمام رویه‌ها عایق‌بندی شده باشند و $u(r, 0) = f(r)$.

*۲۳. کرهٔ $0 \le \rho \le C$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حالت یکنواخت دما را در این کره بررسی کنیم. اگر دمای رویه، تابعی از پیش داده شده بر حسب ϕ باشد دمای u تنها به ρ و ϕ بستگی داشته باشد. فرمولی برای $u(\rho, \phi)$ به دست آورید.

*۲۴. تابع $u(\rho, \phi)$ را چنان انتخاب کنید که در ناحیهٔ نامتناهی $\rho > C$ در معادلهٔ لاپلاس صدق کند و روی کرهٔ $\rho = C$ مقادیر داده شدهٔ $u(c, \phi) = f(\phi)$ را بگیرد و وقتی $\rho \to \infty$ متناهی باشد.

*۲۵. حالت یکنواخت دما $u(\rho, \phi)$ را در نیم‌کرهٔ $0 \le \rho \le C$ ، $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ پیدا کنید اگر رویهٔ پایینی نیم‌کره در دمای صفر باشد و بر رویهٔ خم داشته باشیم $u(c, \phi) = f(\phi)$ و $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.