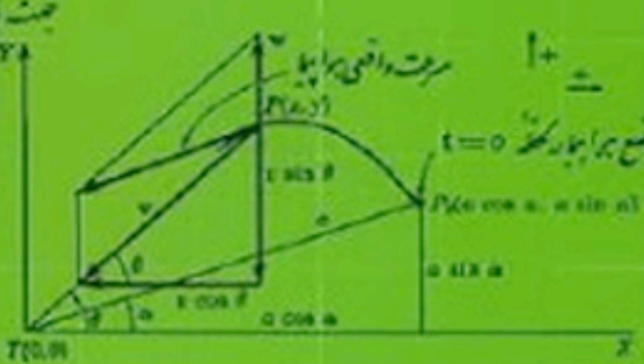
معادلات دیفرانسیل معمولی

و

کاربرد آنها

۱



بیژن شمس

تألیف

کیخسرو فرخ زاده

مُعادلات دیفرانسیل معمُولی

و

کاربُرد آنها

جلد اوّل

تألیف

بیژن شمس - کیخسرو فرخ زاده

شناسنامه کتاب

نام کتاب : معادلات دیفرانسیل معمولی و کاربرد آنها
مؤلفان : بیژن شمس و کیخسرو فرخ زاده
تعداد : ۳۰۰۰ نسخه
نوبت چاپ : سوم
تاریخ انتشار : پاییز ۱۳۶۶
صفحه و قطع : ۹۰۸ صفحه وزیری
چاپ : چاپخانه مروی
ناشر : انتشارات منصوری

فهرست

فصل هفتم

فصل هشتم

بنام خدا

پیشگفتار

در سرآغاز چاپ نخست این کتاب آمده بود . " از آزمونهای چند ساله تدریس خود در دانشکده علوم دانشگاه تهران سودی گرفتیم و برآن شدیم که راه گردآوری کتاب را این‌چنین بسپاریم .

گفتنی‌های یکسان را در یک‌جا فراهم آورده‌ایم ، تا نیروی فکری جویندگان تنها درآنچه می‌جویند و می‌خواهند به‌کار رود .

با یادآوری مثالهای حل شده ، قضیه‌ها را بهتر و بیشتر شکافته‌ایم . چون بدیده داشته‌ایم که خود را از چهارچوب "تئوری" ویژه به بیرون کشیم تا از یک سو راه را برای بهره‌گیری دیگر رشته‌ها بازگذارده باشیم و از سوی دیگر دانش‌خواهانی که نیازی به بررسی جنبه‌های نظری معادلات دیفرانسیل ندارند ، بدون گرفتاری بتوانند دو فصل سوم و چهارم این نوشته را بخوانند و بدانند . . .

چاپ دوم ازکمیابی به نایابی گرایید و مؤلفان برآن شدندکه به‌چاپ سوم این کتاب دست بیازند ، و انتشارات منصوری به زیور طبعش آراست و سپاس مؤلفان را فراهم گردانید .

بیژن شمس و کیخسرو فرخ‌زاده
تهران ــ پائیز ۱۳۶۶

فصل اول

مفاهیم اساسی

۱ . ۱ - تعریف معادلات دیفرانسیل

اصطلاح معادله دیفرانسیل برای‌اولین بار درسال ۱۶۷۶ توسط Leibniz بکاربرده شده است ، ونامبرده این‌اصطلاح را برای نمایش هرنوع رابطه‌یی بین دیفرانسیلهای dx و dy و متغیرهای x و y و مقادیر ثابت a , b , c , ... بکار برده است . ولی بزودی این محدودیت مفهوم ازبین‌رفت و امروزه منظور از معادله دیفرانسیل معمولی رابطه‌یی بین یک متغیر مستقل x و یک متغیر تابع y و ضرایب دیفرانسیل متغیر تابع نسبت به متغیر مستقل میباشد ، مانند :

$$y' = ۱ + y \tag{۱ . ۱}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = -p^۲y \tag{۱ . ۱۱}$$

$$۲\frac{d^۳y}{dx^۳} + ۳\frac{d^۲y}{dx^۲} + \frac{dy}{dx} - ۱۰y = e^{-۳x}\sin ۵x \tag{۱ . ۱۲}$$

$$\left[۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲\right]^{\frac{۳}{۲}} = ۳\frac{d^۲y}{dx^۲} \tag{۱ . ۱۳}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{y^{\frac{۱}{۳}}(۱ + x^{\frac{۱}{۳}})} \tag{۱ . ۱۴}$$

باید توجه نمود که معادله دیفرانسیل ، اتحاد دیفرانسیل نمیباشد . مثلاً رابطه :

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲ \cdot \frac{d^۳y}{dy^۳} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ \cdot \frac{d^۳x}{dy^۳} + ۳\frac{d^۲y}{dx^۲} \cdot \frac{d^۲x}{dy^۲} = 0$$

اتحاد دیفرانسیل میباشد . چه اگر از دو طرف اتحاد $\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=۱$ نسبت به y مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{d^{۲}x}{dy^{۲}}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}=۰$$

حال اگر از دو طرف رابطه بالا نسبت به x مشتق بگیریم چنین داریم :

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}+۲\,\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{d^{۲}x}{dy^{۲}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$+\frac{d^{۳}x}{dy^{۳}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}+\frac{d^{۲}x}{dy^{۲}}\cdot\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۰$$

و یا :

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\frac{d^{۳}x}{dy^{۳}}+۳\,\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\cdot\frac{d^{۲}x}{dy^{۲}}=۰$$

در ریاضیات عمومی روش یافتن مشتقات متوالی تابع y را بطور مفصل دیده‌ایم. مثلاً اگر $y=e^x-۱$ باشد ، داریم :

$$y'=e^x=y+۱ \qquad (۱ . ۱۵)$$

و لذا برای این تابع رابطه (۱ . ۱) برقرار است . دراین صورت میگوییم $y=e^x-۱$ یکی از جوابهای رابطه (۱ . ۱) میباشد. ولی این جواب تنها جواب معادله نبوده و مثلاً $y=۲e^x-۱$ نیز در رابطه (۱ . ۱) صدق میکند ، زیرا :

$$y'=۲e^x=y+۱$$

یکی از مسائل اساسی که باید مورد بررسی قرار گیرد ، عبارت از تعیین کلیه جوابهای یک معادله دیفرانسیل میباشد . مسئله فوق را در واقع میتوان تعمیمی از حل معادله درجه دومی مانند :

$$x^{۲}-x+۲=۰ \qquad (۱ . ۱۶)$$

در جبر پنداشت . جوابهای معادله (۱۶ . ۱) عدد بوده ولی جوابهای معادله دیفرانسیل توابع میباشند . چنانچه بعداً ملاحظه خواهد شد ، جواب اکثر معادلات دیفرانسیل را

نمیتوان بصورت توابع صریحی از متغیر بیان نمود. ولی قضیه عمومی وجود، وجود جوابها و در واقع تعداد بیشماری از این جوابها را تضمین میکند.

مسئله‌یی که به مراتب اساسی‌تر از مسئله بالا میباشد آن است که بتوانیم از معادله دیفرانسیل خواص جمیع یا برخی از این جوابها را تعیین کنیم. در فصول بعدی خواهیم دید حتی اگر جواب معادله دیفرانسیل نیز بصورت توابع صریحی از متغیر بیان نشده باشد میتوان بسیاری از خواص معادله دیفرانسیل را مورد بررسی قرار داد و در واقع میتوانیم مقادیر عددی جوابها را با صحت‌ودقت خواسته شده تعیین کنیم. در نتیجه میتوان معادله دیفرانسیل را بیک نوع رابطه صریحی که مجموعه معینی از توابع را توصیف میکند تعبیر نمود. مثلاً میتوان نشان داد که کلیه جوابهای معادله (۱ . ۱۱) بصورت:

$$y=c_{۱}\mathit{cos}\,px+c_{۲}\mathit{sin}\,px \tag{۱ . ۱۷}$$

که در آن $c_{۱}$ و $c_{۲}$ مقادیر ثابت دلخواه‌اند میباشد. درواقع معادله (۱ . ۱۱) یعنی $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=-p^{۲}y$ طریقه دیگر توصیف جمیع توابع (۱ . ۱۱) است. حقیقت فوق که معادله دیفرانسیل میتواند بسیاری از توابع را توصیف کند، ارزش‌واهمیت‌آنرا برای توصیف هرنوع رابطه و بیانی به شکل خلاصه و موجز آشکارتر میکند. لذا تعجب‌آور نخواهد بود که ملاحظه میکنیم اکثر قوانین فیزیکی به شکل معادلات دیفرانسیل بیان شده‌اند و بعنوان مثال میتوان قانون دوم نیوتن را که بصورت:

نیرو = جرم × شتاب

است نام برد.

برای نقطه مادی به جرم m که در روی خط مستقیمی‌حرکت میکند معادله بالا منجر به معادله دیفرانسیل:

$$m\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}=F\left(t\,,\,x\,,\,\frac{dx}{dt}\right) \tag{۱ . ۱۸}$$

میگردد که وضعیت x را در زمان t برحسب نیروی F که ممکن است تابع t و x و سرعت $v=\frac{dx}{dt}$ باشد بیان میکند.

در تمام فصول بعدی با دو مسئله بالا که به آن اشاره شد سروکار خواهیم داشت، بدین معنی درحالتهایی که امکان پذیرباشد سعی‌خواهیم نمود روابط صریحی برای جوابهای

معادله دیفرانسیل بیابیم و چنانچه بعداً خواهیم دید این روابط صور متفاوتی خواهد داشت و حتی ممکن است جواب معادله نیز بصورت سریهای نامحدود بدست آید. همچنین کوشش میکنیم که بدون داشتن جواب صریح معادله خواص عمومی جوابها را مانند مقادیر عددی و نمودارها و مجانبها را مستقیماً از معادله دیفرانسیل استنتاج کنیم .

تجربه نشان داده است که باستثنای چند حالت خاص ، حل دو مسئله بالا مشکل میباشد ولی خوشبختانه معادلات خطی که اکثراً موارد استعمال آنها در علوم میباشد شامل حالات خاص استثنایی نبوده و میتوان مسائل بالا را بطور رضایت بخشی درباره آنها حل نمود .

۲ . ۱ - تعاریف اساسی

الف - معادله دیفرانسیل معمولی

منظور از معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام رابطه‌یی بین متغیر مستقل x و تابع دلخواه $y(x)$ و مشتقات آن تا مرتبه n ام میباشد که صورت کلی آن چنین است :

$$F(x , y , y' , y'' , \ldots , y^{(n)}) = 0 \qquad (۱ . ۲)$$

لذا معادلات :

$$xy'' + ۲y' + ۳y - ٦e^{x} = 0 \qquad (۱ . ۲۱)$$

$$(y''')^{۲} - ۲y'y''' + (y'')^{۳} = 0 \qquad (۱ . ۲۲)$$

متناظراً معادلات دیفرانسیل معمولی مراتب دوم و سوم میباشند . معادله (۱ . ۲۲) معادله درجه دومی برحسب بزرگترین مرتبه مشتق یعنی y''' میباشد و لذا آنرا معادلهٔ درجه دوم گوییم ، درصورتیکه معادله (۱ . ۱۸) درجه یک میباشد .

بطور کلی چنانچه معادله دیفرانسیل ، معادله جبری درجه k ام برحسب بزرگترین مرتبه مشتق باشد ، آنرا معادله دیفرانسیل درجه k ام نامیم .

صورت کلی معادلات درجه اول چنین است :

$$y^{(n)} = G(x , y , \ldots , y^{(n-۱)}) \qquad (۱ . ۲۳)$$

معادله دیفرانسیل معمولی را خطی گوییم هرگاه بتوان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$a_{0}(x)y^{(n)} + a_{۱}(x)y^{(n-۱)} + a_{۲}(x)y^{(n-۲)} + \cdots + a_{n-۱}(x)y' + a_{n}(x)y = Q(x) \qquad (۱ . ۲٤)$$

معادله بالا نسبت به y و مشتقات آن خطی میباشد . مثلاً معادله (۱ . ۲۱) خطی است ، زیرا :

$$a_۰(x) \equiv x \ , \ a_۱(x) \equiv ۲ \ , \ a_۲(x) \equiv ۳ \ , \ Q(x) \equiv ۶e^x \qquad (۱ . ۲۵)$$

باید توجه داشت که معادله دیفرانسیل خطی مذکور درجه اول میباشد ولی عکس این مطلب صحیح نیست یعنی لزومی ندارد که هرمعادله درجه اول‌خطی باشد. مثلاً معادله $y' = ۱ + xy^۲$ درجه اول بوده ولی خطی نیست (بواسطه وجود $xy^۲$) .

مثال :

معادله (۱ . ۱) معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه اول است .

معادله (۱ . ۱۱) معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم میباشد .

معادله (۱ . ۱۲) معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه سوم است .

معادله (۱ . ۱۳) معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه دوم و درجه دوم میباشد ، زیرا :

$$\left[۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ \right]^۳ = ۹\left(\frac{d^۲y}{dx^۲} \right)^۲ .$$

معادله (۱ . ۲۱) معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دوم است .

معادله (۱ . ۲۲) معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه سوم و درجه دوم است .

ب ـ معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی رابطه‌یی بین یک متغیر تابع و دو و یا چند متغیر مستقل و ضرایب دیفرانسیل متغیر تابع نسبت به متغیرهای مستقل تا مرتبه n ام میباشد ، مانند :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0 \qquad (۱ . ۲۶)$$

$$\frac{\partial^۲ v}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ v}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ v}{\partial z^۲} = 0 \qquad (۱ . ۲۷)$$

بطریق مشابه با معادله دیفرانسیل معمولی میتوان درجه و مرتبه وخطی بودن یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی را تعریف نمود . لذا معادله (۱ . ۲۶) معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی مرتبه‌اول‌نسبت به دومتغیر x و y بوده ، درصورتیکه معادله(۱ . ۲۷)

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی مرتبه دوم نسبت به سه متغیر x ، y ، z میباشد . همچنین معادله :

$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}\cdot\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}-\left(\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}\right)^{۲}=0$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی غیر خطی مرتبه دوم و درجه دوم است .

ج ـ معادله دیفرانسیل کلی

این معادله رابطه‌یی‌بین یک متغیر مستقل ودویاچند متغیر تابع وضرایب دیفرانسیل متغیرهای‌تابع نسبت به متغیرهای مستقل میباشد که ممکن است در معادله موجود باشد یا نباشد . مانند :

$$udx+vdy+wdz=0$$

که درآن u ، v ، w توابعی از x ، y ، z میباشند . معادله فوق را میتوان به یکی از صور زیر نوشت :

$$u+v\frac{dy}{dx}+w\frac{dz}{dx}=0 \quad , \quad u\frac{dx}{dt}+v\frac{dy}{dt}+w\frac{dz}{dt}=0$$

۱ . ۳ ـ تشکیل معادلات دیفرانسیل

الف ـ معمولی

تابع : $f(x, y, c_{۱}, c_{۲}, \ldots, c_n)=0$ (۱ . ۳)

که درآن x و y متغیر و $c_{۱}$ ، $c_{۲}$ ، … ، c_n مقادیرثابت‌دلخواه مستقل‌اند در دست میباشد . میخواهیم معادله دیفرانسیلی بدست آوریم که تابع f جواب آن باشد . بنابتعریف تابع f را جواب عمومی معادله دیفرانسیل نامیم .

چنانچه ازرابطه (۱ . ۳) نسبت به x ، n بار مشتق‌بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} y'^۲ + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

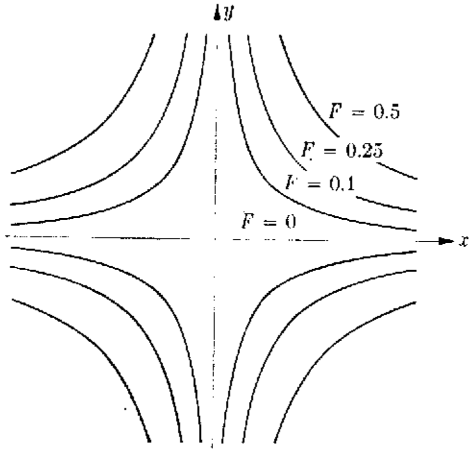
$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + n\frac{\partial^{n-۱} f}{\partial x^{n-۱} y} y' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y} y^{(n)} = 0$$

چون $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ است لذا هر معادله از معادله قبلی متمایز بوده و دراین صورت میتوان از n معادله بالا مقادیر $c_۱ , c_۲ , \ldots , c_n$ را بدست‌آورد و پس‌از جایگزین نمودن در رابطه (۳ . ۱) معادله دیفرانسیل $F(x , y , y' , y'' , \ldots , y^{(n)}) = 0$ بدست میآید .

دربعضی‌از موارد ممکن است تعداد مقادیر ثابت $c_۱ , c_۲ , \ldots , c_n$ در رابطه (۳ . ۱) کمتر از n باشد و لذا تعداد کمتری معادله برای حذف مقادیر ثابت مورد لزوم خواهد بود که طبعاً باعث کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل میگردد .

مثلاً معادله $y = x^۲ + c_۱^۲ - c_۲^۲$ در واقع بستگی به یک مقدار ثابت $c = c_۱^۲ - c_۲^۲$ داشته ومعادله‌دیفرانسیل مطلوب‌عبارت‌است‌از $y' = ۲x$ که‌یک معادله مرتبه‌اول میباشد.

یکی از حالات خاص و بسیار مهم معادله $F(x , y) = c$ است . این معادله منحنی‌های تراز تابع F را تعیین میکند . مثلاً رابطه $xy = c$ منحنی‌های تراز تابع $F = xy$ را مشخص مینماید . این منحنی‌ها را در شکل (۱ . ۱) نشان داده‌ایم .



شکل ۱ . ۱- منحنی‌های تراز تابع xy

در روی هریک‌ازمنحنی‌های تراز میتوان y را تابعی از x یعنی $y=\frac{c}{x}$ $(x\neq 0)$ پنداشت وتوابعی که بدینوسیله تعیین میشوند جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=-\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$ میباشند . چنانچه از رابطه $xy=c$ دیفرانسیل بگیریم میتوان متغیرها را بطور متقارن مورد بررسی قرارداد یعنی در رابطه $xdy+ydx=0$ برحسب شرایط مسئله میتوان y را متغیر تابع و یا بالعکس متغیر مستقل پنداشت .

چنانچه $x=0$ باشد x را تابع y پنداشته و معادله بصورت $x+y\frac{dx}{dy}=0$ در خواهد آمد و از آنجا $x=0$ در معادله صدق میکند . بطریق مشابه چنانچه y را تابع x فرض کنیم میتوان نشان داد که $y=0$ جواب معادله دیفرانسیل میباشد و لذا دو جواب از مبداء میگذرد . بطورکلی جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول :

$$P(x , y)dx+Q(x , y)dy=0 \qquad (۱ . ۳۱)$$

را میتوان بصورت $y=f(x)$ و یا $x=g(y)$ که به ترتیب در معادلات دیفرانسیل زیر صدق میکند پنداشت :

$$Q(x , y)\frac{dy}{dx}+P(x , y)=0$$

(۱ . ۳۲)

$$P(x , y)\frac{dx}{dy}+Q(x , y)=0$$

لذا رابطه (۱ . ۳۱) منجر به دومعادله دیفرانسیل بالا میگردد که بجز در حالت استثنایی $P=0$ و یا $Q=0$ جوابها یکسان میباشند . نقاطی که برای آنها $Q(x , y)=0$ است نقاط غیرعادی اولین معادله رابطه (۱ . ۳۲) بوده و اگر در چنین نقاطی $P(x , y)\neq 0$ باشد ، معمولاً این نقاط ، نقاط غیر عادی دومین معادله رابطه (۱ . ۳۲) نخواهد بود و در چنین نقاطی $\frac{dy}{dx}=\infty$ و $\frac{dx}{dy}=0$ است . به هرصورت در نقاطی که توابع $P(x , y)$ و $Q(x , y)$ تواماً صفر میباشند ، نقاط غیر عادی هر دومعادله (۱ . ۳۲) میباشد .

مثال ۱ - معادله دیفرانسیل $y=A\cos(px-a)$ که در آن A و a پارامتر میباشند بدست آورید .

حل - اگر از رابطه داده شده دوبار نسبت به x مشتق بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{dx} = -pA\sin(px-a) \quad , \quad \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = -p^{۲}A\cos(px-a) = -p^{۲}y$$

و از آنجا معادله دیفرانسیل مطلوب چنین است :

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = -p^{۲}y$$

دراین معادله اگر x را زمان فرض کنیم ، میتوان بیان نمود که شتاب $\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)$ متناسب با فاصله از مرکز (y) تغییر میکند . سرانجام اگر p را پارامتر فرض کنیم ، داریم :

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} = -p^{۲}\frac{dy}{dx} \; , \; \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} : \frac{dy}{dx} = -p^{۲} = \frac{۱}{y} \cdot \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

و یا :

$$y\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه سوم است .

مثال ۴- معادله دیفرانسیل جمیع سهمی‌هایی را که محور آنها محور Ox است بدست آورید .

حل - معادله دیفرانسیل ، سهمی‌های فوق را میتوان بصورت $y^{۲} = ٤a(x-h)$ نوشت ، که پس از حذف مقادیر ثابت a و h خواهیم داشت :

$$۲y\frac{dy}{dx} = ٤a \quad , \quad y\frac{dy}{dx} = ۲a$$

و یا :

$$y\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} = 0$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم و درجه اول است . از این مثال چنین برمیآید که لزومی ندارد هرمعادله‌یی که درجه اول است خطی باشد . ولی ازنظر نباید دور داشت که هرمعادله‌یی که خطی باشد طبعاً درجه اول نیز خواهد بود .

مثال ۳- معادله دیفرانسیل $y=c_۱x^۲+c_۲x^۳$ را بدست آورید .

حل - اگر $c_۱$ و $c_۲$ را میان y , y' , y'' حذف کنیم ، خواهیم داشت :

$$y=c_۱x^۲+c_۲x^۳\ ,\ y'=۲c_۱x+۳c_۲x^۲\ ,\ y''=c_۱+۶c_۲x \qquad (۱ . ۳۳)$$

برای حذف $c_۱$ و $c_۲$ میتوان مقادیر آنها را از دو معادله اول یافته و در معادله سوم جایگزین نمود تا معادله دیفرانسیل مطلوب بدست آید . ولی در این مورد برای حذف $c_۱$ و $c_۲$ میتوان از قضیه زیر که در جبر اثبات شده است استفاده نمود .

قضیه - شرط لازم و کافی برای توافق $n+۱$ معادله n مجهولی آن است که دترمینان متشکل از ضرایب مجهولات و مقادیر ثابت متحد با صفر باشد . بنابراین اگر $c_۱$ و $c_۲$ را مجهول و y , y' , y'' را ثابت بپنداریم ، شرط آنکه دستگاه معادلات (۱ . ۳۳) دارای جواب متوافق $c_۱$ و $c_۲$ باشند آن است که دترمینان زیر متحد با صفر باشد .

$$\begin{vmatrix} y & x^۲ & x^۳ \\ y' & ۲x & ۳x^۲ \\ y'' & ۲ & ۶x \end{vmatrix} = 0$$

و از آنجا معادله دیفرانسیل مطلوب عبارت خواهد بود از :

$$x^۴y''-۴x^۳y'+۶x^۲y=0$$

مثال ۴- مطلوب است معادله دیفرانسیل مخروطهای متحدالکانون .

حل - معادله طایفه مخروطهای متحدالکانون چنین است :

$$\frac{x^۲}{a^۲+\lambda}+\frac{y^۲}{b^۲+\lambda}=۱ \qquad (۱ . ۳۴)$$

که در آن a و b مقادیر ثابت و λ پارامتر دلخواهی است . اگر از رابطه (۱ . ۳۴) نسبت به x مشتق بگیریم چنین داریم :

$$\frac{x}{a^۲+\lambda}+\frac{yy'}{b^۲+\lambda}=0 \qquad (۱ . ۳۵)$$

معادله دیفرانسیل مطلوب پس از حذف λ بین دو معادله (۱ . ۳۴) و (۱ . ۳۵) بدست میآید.

$$a^{۲}+\lambda=\frac{x^{۲}y'-xy}{y'}\ ,\quad b^{۲}+\lambda=y^{۲}-xyy'\quad ,$$

$$a^{۲}-b^{۲}=\frac{x^{۲}y'-xy}{y'}-y^{۲}+xyy'$$

سرانجام معادله دیفرانسیل طایفه مخروطهای متحدالکانون عبارت خواهد بود از :

$$xyy'^{۲}+(x^{۲}-y^{۲}-a^{۲}+b^{۲})y'-xy=0 \qquad (۱\ .\ ۳۶)$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول و درجه دوم میباشد .

ب ـ مشتقات نسبی

فرض میکنیم $x_۱$, $x_۲$, ... , x_m متغیرهای مستقل و z متغیر تابع و $c_۱$, $c_۲$, ... , c_n مقادیر ثابت دلخواهی باشند که با رابطه :

$$f(x_۱\ ,\ x_۲\ ,\ \dots\ ,\ x_m\ ,\ z\ ,\ c_۱\ ,\ c_۲\ ,\ \dots\ ,\ c_n)=0 \qquad (۱\ .\ ۳۷)$$

بیکدیگر بستگی دارند . اکنون اگر نسبت به هریک از متغیرهای $x_۱$, $x_۲$, ... , x_m مشتق بگیریم ، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_۱}=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial x_۲}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_۲}=0\ ,\ \dots\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_m}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_m}=0 \qquad (۱\ .\ ۳۸)$$

چنانچه $m > n$ باشد برای حذف $c_۱$, $c_۲$, ... , c_n باندازه کافی معادله موجود است. ولی اگر $m < n$ باشد باید $\frac{۱}{۲}m(m+۱)$ مشتق مرتبه دوم زیر را به معادلات فوق اضافه نمود .

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial x_r^{۲}}+۲\frac{\partial^{۲}f}{\partial x_r\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}+\frac{\partial^{۲}f}{\partial z^{۲}}\left(\frac{\partial z}{\partial x_r}\right)^{۲}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_r^{۲}}=0$$

$$r=۱\ ,\ ۲\ ,\ \dots\ ,\ m \qquad (۱\ .\ ۳۸)$$

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^{۲} f}{\partial x_r \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_s} + \frac{\partial^{۲} f}{\partial x_s \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_r} +$$

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial z^{۲}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^{۲} z}{\partial x_r \partial x_s} = 0$$

$$r, s = ۱, ۲, \ldots, m \ , \ r \neq s$$

چنانچه در معادله دوم(۳۸ . ۱)به r و $s(r \neq s)$ مقادیر ۱ تا m را نسبت دهیم، تعداد این معادلات همان تعداد ترکیبات m حرف دو بدو که برابر $\frac{۱}{۲} m(m-۱)$ است میباشد . واضح است که تعداد معادلات اولین رابطه (۳۸ . ۱) برابر m بوده و بالنتیجه بازاء مقادیر مختلف r و s رابطه (۳۸ . ۱) شامل :

$$\frac{۱}{۲} m(m-۱) + m = \frac{۱}{۲} m(m+۱)$$

معادله میباشد . بهرصورت باید عملیات بالا را ادامه دهیم تابه تعداد کافی معادله جهت حذف n پارامتر $c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ بدست آوریم . معمولاً چون تعداد معادلات بیش‌از تعداد پارامترها میباشد ، لذا ممکن است به‌چند معادله دیفرانسیل برخورد نماییم .

مثال ۱- مطلوب است تعیین معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی جمیع صفحات .

حل - معادله صفحات را بصورت $z = ax + by + c$ مینویسیم . واضح است که $m = ۲ < n = ۳$ بوده‌واگرازمعادله بالانسبت به x و y مشتق‌بگیریم‌خواهیم‌داشت:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = b$$

این معادلات برای‌حذف مقادیر ثابت a , b , c کافی نبوده و باید:

$$\frac{۱}{۲} m(m+۱) = ۳$$

معادله که از مشتق مرتبه دوم حاصل میشود به معادلات فوق افزود ، یعنی :

$$\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} = r = 0 \quad , \quad \frac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y} = s = 0 \quad , \quad \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} = t = 0$$

بنابراین جمیع‌صفحات غیر موازی صفحه xOy در سه معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی مرتبه دوم $r = s = t = 0$ صدق میکنند .

مثال ۲- معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی کره‌ها را پیدا کنید .

حل - معادله کلی کره بصورت $(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲=R^۲$ که در آن a , b , c , R مقادیر ثابت دلخواهی هستند میباشد . دراین مثال نیز $m=۲<n=٤$ بوده و لذا برای حذف a , b , c , R علاوه برمشتقات مرتبه اول باید $\frac{۱}{۲}m(m+۱)=۳$ مشتق مرتبه دوم را نیز درنظر گرفت ، یعنی :

$$(x-a)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad , \quad (y-b)+(z-c)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

و یا :

$$(x-a)+(z-c)p=0 \quad , \quad (y-b)+(z-c)q=0$$

چنانچه از روابط بالا به ترتیب نسبت به x و y مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$۱+p^۲+(z-c)r=0 \;,\; pq+(z-c)s=0 \;,\; ۱+q^۲+(z-c)t=0$$

پس از حذف $z-c$ میان سه معادله بالا چنین داریم :

$$\frac{۱+p^۲}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{۱+q^۲}{t}$$

لذا دومعادله دیفرانسیل بامشتقات نسبی متمایز موجود خواهد بود . اگر λ مقدار مشترک کسرهای فوق باشد ، بین p , q , r , s , t رابطه زیر برقرار خواهد بود :

$$\lambda^۲(rt-s^۲)=۱+p^۲+q^۲>0$$

درنتیجه اگر کره درنظر گرفته شده حقیقی باشد باید شرط اضافی $rt>s^۲$ را نیز درنظر بگیریم .

مثال ۳- معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی رویه‌های دوار را بدست آورید .

حل - چنانچه محور دوران را محور z ها بپنداریم ، معادله این رویه‌ها بصورت $F(z , x^۲+y^۲)=0$ خواهد بود . حال اگر تبدیل متغیرهای $z=u_۱$ و $x^۲+y^۲=u_۲$ را درنظر گرفته وهمچنین از معادله حاصل نسبت به x و y مشتق بگیریم ، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial u_۱}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u_۲}\cdot ۲x=0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial u_۱}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u_۲}\cdot ۲y=0$$

چنانچه $\frac{\partial F}{\partial u_۱}=\frac{\partial F}{\partial u_۲}=0$ باشد باید F تبدیل به مقدار $c=0$ گردد ،

درغیراینصورت برای وجود جواب غیرصفر $\frac{\partial F}{\partial u_1}$ و $\frac{\partial F}{\partial u_2}$ لازم وکافی است که :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ج - کلی

ذیلاً برای سهولت روش یافتن معادلات دیفرانسیل کلی را در مورد سه متغیر بیان میکنیم . با جزئی تغییر میتوان این روش را در مورد n متغیر نیز تعمیم داد . چنانچه میدانیم معادله $\varphi(x, y, z) = \alpha$ یک طایفه رویه S_α را نمایش میدهد وبازاء هرمقدار α یک رویه ازطایفه رویه‌های S_α مشخص میگردد . اگر نقطه $M(x, y, z)$ و نقطه بینهایت نزدیک $M'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ را برروی رویه S_α انتخاب کنیم ، واضح است که :

$$\varphi(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - \varphi(x, y, z) = 0$$

حال اگر مشتقات نسبی $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ نسبت به سه متغیر x ، y ، z پیوسته باشند رابطه بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\left\{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon_1\right\}\delta x + \left\{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon_2\right\}\delta y +$$

$$\left\{\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z} + \varepsilon_3\right\}\delta z = 0$$

هنگامیکه δx ، δy ، δz بسوی صفر میل میکنند ε_1 ، ε_2 ، ε_3 نیز بسوی صفر میل خواهند نمود . حال اگر ε_1 ، ε_2 ، ε_3 بسوی صفر میل کرده و بجای δx ، δy ، δz به‌ترتیب dx ، dy ، dz را قرار دهیم ، دراین‌صورت معادله دیفرانسیل کلی :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0 \qquad (۱ . ۲۹)$$

بدست خواهد آمد . اگر سه مشتق نسبی دارای فاکتور مشترک μ بوده و $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mu p$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mu Q$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mu R$ باشند دراین صورت معادله (۳۹ . ۱) به معادله زیر تبدیل میگردد :

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

مثال - تابع $\frac{(x+z)(y+z)}{x+y}=c$ منجر به معادله دیفرانسیل :

$$\frac{y^{۲}-z^{۲}}{(x+y)^{۲}}dx+\frac{x^{۲}-z^{۲}}{(x+y)^{۲}}dy+\frac{۲z+x+y}{x+y}dz=0$$

میگردد که پس‌ازضرب در $(x+y)^{۲}$ خواهیم داشت :

$$(y^{۲}-z^{۲})dx+(x^{۲}-z^{۲})dy+(۲z+x+y)(x+y)dz=0$$

چون منظوراز نگارش کتاب بیشتر بحث‌درباره معادلات دیفرانسیل معمولی میباشد لذا ازاین پس بحث خود را درباره معادلات دیفرانسیل معمولی متمرکز خواهیم نمود .

٤ . ۱ - جوابها

منظور از جواب معادله دیفرانسیل معمولی :

$$F(x\,,\,y\,,\,y'\,,\,y''\,,\,\dots\,,\,y^{(n)})=0 \tag{۱ . ٤}$$

تابعی مانند $y=f(x)$ میباشد که درفاصله $a<x<b$ (این‌فاصله ممکن‌است محدود یا نامحدود باشد) و در جمیع نقاط $a<x<b$ دارای مشتق تا مرتبه n ام بوده و اگر تابع $y=f(x)$ و مشتقات متوالی‌آنرا در رابطه (٤ . ۱) قرار دهیم این رابطهٔ متحد صفر گردد. مثلاً تابع $y=e^{۲x}$ یکی از جوابهای معادله :

$$y''-٤y=0 \tag{۱ . ٤۱}$$

است زیرا $y'=۲e^{۲x}$ و $y''=٤e^{۲x}$ ولذا :

$$y''-٤y=٤e^{۲x}-٤e^{۲x}=0$$

با روشیکه معادله دیفرانسیل (٤ . ۱) را از رابطه (۳ . ۱) بدست آوردیم واضح است که

این رابطه در معادله (٤ . ١) صدق نموده و لذا آنرا **جواب*** معادله گوییم . جوابی که شامل مقادیر ثابت دلخواه مستقل بوده و تعداد آنها برابر n یعنی مرتبه معادله دیفرانسیل باشدآنرا**جواب عمومی**** نامیم. بنابراین رابطه(٣ . ١)جواب عمومی معادله‌دیفرانسیل (٤ . ١) است .

حال اگربه مقادیرثابت‌دلخواه $c_١ , c_٢ , \ldots , c_n$ مقادیر ثابتی نسبت‌دهیم ، جواب حاصل را **جواب خصوصی** گوییم. مثلاً معادله $y''' - y' = 0$ دارای جواب عمومی $y = a + be^x + ce^{-x}$ و جواب خصوصی $y = e^x + e^{-x}$ $(a = 0 , b = c = ١)$ میباشد .

در بعضی از موارد میتوان جوابهایی یافت که شامل جواب عمومی نبوده ، ولی این جوابهادر معادله دیفرانسیل صدق میکند. چنین جوابهایی را جوابهای **غیرعادی** گوییم. مثلاً معادله $y'^٢ - xy' + y = 0$ دارای‌جواب‌عمومی $y = cx - c^٢$ که طایفه خطوط مستقیم میباشد بوده و همچنین دارای جواب $y = \frac{١}{٤} x^٢$ که جزو جوابهای عمومی نیست نیز میباشد .

تبصره ١- جواب عمومی‌بستگی به n مقدار ثابت $c_١ , c_٢ , \ldots , c_n$ دارد. ولی اگر ظاهراً n مقدار ثابت در معادله موجود بوده و بتوان دو یا چند مقدار ثابت را با مقدار ثابت دیگری تعویض‌نمود (مانند تابع $y = x^٢ + c_١{}^٢ - c_٢{}^٢$ درشماره (٣ . ١)) در این صورت مرتبه معادله حاصل کمتر از n خواهد بود .

برای مثال فرض میکنیم جواب عمومی بشکل $f[x , y , \varphi(a , b)] = 0$ باشد. اگرچه ظاهراً این تابع بستگی به دومقدار ثابت دارد ولی درواقع تابع به یک مقدار ثابت $c = \varphi(a , b)$ بستگی داشته وبالنتیجه معادله دیفرانسیل مرتبه اول میباشد و نه مرتبه دوم .

---

* در ابتدا اصطلاح انتگرال (James Bernoulli , ١٦٨٩) و انتگرال خصوصی (Euler , ١٧٦٨) بکار برده شده است. بکار بردن کلمه‌جواب‌را بهلاگرانژ(١٧٧٤)نسبت میدهند که در تحت‌تأثیر Poincaré این‌کلمه را بکار برده است .

** قبلاً جواب عمومی را انتگرال کامل و یا معادله انتگرال کامل مینامیدند . ولی امروز اصطلاح معادلات انتگرالی مفهوم کاملاً متفاوتی پیداکرده است .

همچنین اگر $f(x , y , c_1 , c_2 , \dots , c_n) = 0$ بدوفاکتور تجزیه گردد و هریک ازآنهاشامل y باشد ، مرتبه معادله دیفرانسیل ممکن است کمترازn باشد ، چه اگر هیچیک ازفاکتورهاتمام n ثابت‌رادربرنداشته باشند، هریک‌ازفاکتورها منجربه یک‌معادله دیفرانسیل میگردد که مرتبه آن کمتر از n است .

مثلاً معادله $y^2-(a+b)xy+abx^2=0$ تجزیه بدومعادله $y-ax=0$ و $y-bx=0$ میشود که هرکدام آنها در معادله‌دیفرانسیل $y-xy'=0$ صدق میکند.

تبصره ۲- اگر تعاریف فوق را درحالت خاص معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=F(x)$ که در آن $F(x)$ در فاصله $a < x < b$ معین و پیوسته است بکار بریم جواب عمومی این معادله دیفرانسیل عبارت خواهد بود از :

$$y=\int F(x)+c \qquad a < x < b$$

مفهوم بالا را میتوان بسهولت در مورد معادلات بالاترازمرتبه یک تعمیم داد . مثلاً :

$$y''=20x^3 \;,\; y'=5x^4+c_1 \;,\; y=x^5+c_1x+c_2$$

باید توجه‌داشت که چون معادله $y''=20x^3$ مرتبهٔدوم‌است ، لذا جواب عمومی بستگی به دو مقدار ثابت c_1 و c_2 خواهد داشت .

مسائل

۱- در هریک‌از معادلات دیفرانسیل زیر درجه و مرتبه را تعیین نموده وتحقیق کنید آیا معادلات خطی میباشند .

الف - $y'=x^2-y$. ب - $y''-(y')^2+xy=0$.

پ - $(y')^2+xy'-y^2=0$. ت - $x^3y''-xy'+5y=2x$.

ث - $y^{(VI)}-y''=0$. ج - $\sin(y'')+e^{y'}=1$.

چ - $y'+x=(y-xy')^{-3}$. ح - $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}=\sqrt[4]{\rho+\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$.

خ - $\frac{\partial z}{\partial x}=۲\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}+۱$.

د - $ay\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}=y\frac{dy}{dx}(c^{۲}+x^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$.

ذ - $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}-xy=o$.

ر - $(y^{۲}+z^{۲}-x^{۲})\frac{\partial z}{\partial x}-۲xy\frac{\partial z}{\partial y}+۲xz=o$.

ز - $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\left[۱+(z-y)^{\frac{۱}{۳}}\right]=۱$.

ژ - $y\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}+a^{۲}\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}$.

س - $\left(\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}\right)^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۳}=۱$.

۲- معادلهٔ دیفرانسیل هریک از مسائل زیر را بدست آورید .

الف- $y=Ae^{x}+Be^{-x}+C$. ب - $y=Ae^{x}+Be^{۲x}+ce^{۳x}$.

پ - $y=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$. ت - $y=A\cosh\frac{x}{A}$.

ث - $Log y=Ax^{۲}+B$. ج - طایفه دوایری که شعاع آنها ثابت بوده و مرکزآنها برروی محور Ox واقع باشد. چ - طایفه سهمی‌هایی که کانون آنها برمبدأ مختصات منطبق بوده و محور آنها درامتداد محور Ox باشد. ح - مماسهای برسهمی $y^{۲}=۲x$. خ - طایفه سهمی‌هایی که محور آنها بموازات محور y ها است . د - جمیع دوایر بشعاع ثابت a . ذ - دوایری که از مبدأ مختصات میگذرند .

ر- جمیع دوایر در صفحه .

۳- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

الف ـ $y'=e^{۲x}-x$. ب ـ $y''=0$. پ ـ $y'''=x$.

ت ـ $y^{(n)}=0$. ث ـ $y^{(n)}=۱$. ج ـ $y'=\frac{۱}{x}$.

٤ـ معادله دیفرانسیل $y'=۲x$ مفروض است .

الف ـ نشان دهید $y=x^۲+c$ جواب عمومی معادله میباشد .

ب ـ جواب خصوصی معادله را چنان تعیین کنید که منحنی جواب از نقطه (١ , ٤) بگذرد .

پ ـ جواب خصوصی معادله راچنان تعیین کنید که منحنی جواب برخط $y=۲x+۳$ مماس باشد .

ث ـ جواب خصوصی معادله را چنان تعیین کنید که $\int_0^۱ y\,dx=۲$ باشد .

ه ـ معادله دیفرانسیل $y''=x^۲-۱$ مفروض است .

الف ـ جواب عمومی معادله را بدست آورید .

ب ـ جواب خصوصی معادله را بصورت $y(x)$ بقسمی تعیین کنید که $y(0)=۱$ و $y'(0)=۲$ باشد .

پ ـ جواب خصوصی معادله را بقسمی تعیین کنید که منحنی جواب از نقاط $A(۱\,,\,۲)$ و $B(۳\,,\,٥)$ بگذرد .

ت ـ جواب خصوصی معادله را بصورت $y(x)$ بقسمی تعیین کنید که $y(۱)=۲$ و $y'(۲)=۱$ باشد .

٦ـ جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

الف ـ $xy'+y=\sin x$. ب ـ $x^۲y'+۲xy=e^x$.

پ ـ $۲xyy'+y^۲=۳x^۲$. ت ـ $x^۲y''+٤xy'+۲y=e^x$.

۷ـ معادلات :

$$\text{(I)}\qquad ۲y=x\frac{dy}{dx}+ax \qquad\qquad \text{(II)}\qquad y=x\frac{dy}{dx}-bx^۲$$

مفروض است .

الف ـ نشان دهید با حذف a در معادله (I) و حذف b در معادله (II) درهرحالت معادله دیفرانسیل زیر بدست میآید :

$$x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}-۲x\frac{dy}{dx}+۲y=0 \qquad \text{(III)}$$

ب ـ با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید که معادلات :

$$y+\frac{dy}{dx}=۲ae^{x} \quad , \quad y-\frac{dy}{dx}=۲be^{-x}$$

دارای جواب عمومی مشترکی هستند .

پ ـ فرض میکنیم معادلات (I) و (II) دارای جواب مشترکی باشند . این جواب را با مساوی قرار دادن مقادیر $\frac{dy}{dx}$ برحسب x و y و مقادیر ثابت بدست آورید و نشان دهید که این جواب در معادله دیفرانسیل (III) صدق میکند .

ت ـ بطریق مشابه جواب مشترك معادلات قسمت (ب) را بدست آورید .

۸ـ نشان دهید اگر $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد دراین صورت $۲y'y'''=۳y''^۲$ بوده و اگر $a+d=0$ باشد چنین داریم : $(y-x)y''=۲y'(۱+y')$.

۹ـ ثابت کنید اگر $y^۳-۳ax^۲+x^۳=0$ باشد دراین صورت $\frac{d^۲y}{dx^۲}+\frac{۲a^۲x^۲}{y^۵}=0$. و همچنین نشان دهید منحنی‌هایی که از معادله بالا بدست میآیند ، تقعر آنها در جمیع نقاط بسوی محور x هاست ودرنقطه‌ای بطول $x=۳a$ دارای نقطه عطف میباشند .

۱۰ـ نشان دهید اگر :

$$x(۱-x)\frac{d^۲y}{dx^۲}-(٤-۱۲x)\frac{dy}{dx}-۳٦y=0$$

باشد ، دراین صورت :

$$x(۱-x)\frac{d^{n+۲}y}{dx^{n+۲}}-[٤-n-(۱۲-۲n)\,x]\frac{d^{n+۱}y}{dx^{n+۱}}-$$

$$(٤-n)\,(۹-n)\frac{d^{n}y}{dx^{n}}=0$$

همچنین با استفاده از قضیه ماك لورن نشان دهید مقدار y که بازاء $x=0$ مشتق مرتبه پنجم آن برابر یک و y برابر صفر میباشد ، عبارت است از :

$$\frac{٤!}{۹!}(۱۲٦x^{٥}-۸٤x^{٦}+۳٦x^{۷}-۹x^{۸}+x^{۹})$$

۱۱- معادله جمیع مقاطع مخروطی که‌دارای مجانب موازی محور y هانباشند میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(y-\alpha x-\beta)^{۲}=ax^{۲}+۲bx+c$$

$a\,,\,b\,,\,c\,,\,\alpha\,,\,\beta$ مقادیر ثابتی هستند .

نشان دهید معادله دیفرانسیل این مقاطع مخروطی عبارت است از :

$$\frac{d^{۳}}{dx^{۳}}\left[\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)^{-\frac{۲}{۳}}\right]=0$$

ویا: $$٤۰\left(\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\right)^{۳}-٤٥\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\cdot\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\cdot\frac{d^{٤}y}{dx^{٤}}+۹\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)^{۲}\cdot\frac{d^{٥}y}{dx^{٥}}=0$$

در حالت خاص نشان دهید معادله دیفرانسیل جمیع سهمی‌هایی که در یک صفحه قراردارند عبارت است از :

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}\left[\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)^{-\frac{۲}{۳}}\right]=0$$

و یا : $$٥\left(\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\right)^{۲}-۳\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\cdot\frac{d^{٤}y}{dx^{٤}}=0$$

۱۲- نشان دهید تابع $z=۳xy-y^{۳}+(y^{۲}-۲x)^{\frac{۳}{۲}}$ درمعادلات دیفرانسیل

با مشتقات نسبی زیر صدق میکند .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

۱۳- قضیه زیر راکه تعمیم قضیه اولر در مورد توابع همگن میباشد ثابت کنید .

اگر تابع f نسبت به متغیرهای x_1 و x_2 همگن واز درجه m و نسبت به متغیرهای y_1 و y_2 همگن و از درجه n باشد دراین صورت رابطه زیر برقرار خواهد بود :

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)-$$
$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=(n-m)f$$

۱۴- معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

مفروض است .

منحنی c_α جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق را درنظرگرفته وآنها را با خط $x=\xi$ قطع مینماییم. نشان دهید مماسهای برمنحنی c_α درنقاط تقاطع خط $x=\xi$ بامنحنی c_α یکدیگر را تلاقی میکنند .

همچنین نشان‌دهید برای معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-\frac{1}{x^2}$ مکان نقاط تقاطع خط مستقیم میباشد .

جوابها

۱- مراتب :

الف : اول . ب : دوم . پ : اول . ت : دوم . ث : ششم. ج : دوم
چ : اول. ح : دوم. خ : دوم . د : دوم. ذ : اول . ر : اول . ز : اول.
ژ : اول . س : دوم .

درجه :

الف : اول. ب : اول. پ : دوم . ت : اول. ث : اول. ج : نامعین.

چ : چهارم . ح : چهارم . خ : دوم . د : دوم . ذ : اول . ر : اول .
ز : اول . ژ : دوم . س : دوم .

الف و ت و ث خطی هستند .

۲- الف : $\frac{d^۳y}{dx^۳}=\frac{dy}{dx}$.

ب : $\frac{d^۳y}{dx^۳}-۶\frac{d^۲y}{dx^۲}+۱۱\frac{dy}{dx}-۶y=۰$.

پ : $\frac{d^۲y}{dx^۲}-۲\frac{dy}{dx}+۲y=۰$.

ت : $yLog\left[\frac{dy}{dx}+\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\right]=x\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}$.

ث : $xyy''-yy'-yy^{۲'}=۰$. ج : $y^۲y'^۲+y^۲=r^۲$.

چ : $yy'^۲+۲xy'-y=۰$. ح : $۲xy'^۲-۲yy'+۱=۰$.

خ : $\frac{d^۳y}{dx^۳}=۰$. د : $(۱+y'^۲)^۳=a^۲y''^۲$.

ذ : $(x^۲+y^۲)y''=۲(xy'-y)(۱+y'^۲)$.

ر : $(۱+y'^۲)y'''=۳y'y''^۲$.

۳- الف : $\frac{۱}{۲}(e^{۲x}-x^۲)+c$. ب : $c_۱x+c_۲$.

پ : $\frac{۱}{۲۴}x^۴+c_۱x^۲+c_۲x+c_۳$.

ت : $c_۱x^{n-۱}+c_۲x^{n-۲}+\cdots+c_{n-۱}x+c_n$.

ث : $\left(\frac{x^n}{n!}\right)+c_۱x^{n-۱}+c_۲x^{n-۲}+\cdots+c_n$.

ج : $(x\neq ۰)Log|x|+c$.

٤- ب : $c=٣$. پ : $c=٤$. ت : $c=\frac{٥}{٣}$.

٥- الف : $y=\frac{١}{١٢}(x^{٤}-٦x^{٢}+١٢c_{١}x+١٢c_{٢})$.

ب : $y=\frac{١}{١٢}(x^{٤}-٦x^{٢}+٢٤x+١٢)$.

پ : $y=\frac{١}{١٢}(x^{٤}-٦x^{٢}+٢x+٢٧)$.

ت : $y=\frac{١}{١٢}(x^{٤}-٦x^{٢}+٤x+٢٥)$.

٦- الف : $y=\frac{c-\cos x}{x} \quad (x\neq 0)$.

ب : $y=(e^{x}+c)x^{-٢} \quad (x\neq 0)$.

پ : $y=\pm\left[\frac{x^{٣}+c}{x}\right]^{\frac{١}{٢}} \quad (x\neq 0)$.

ت : $y=(e^{x}+c_{١}x+c_{٢})x^{-٢} \quad (x\neq 0)$.

٧- پ : $y=ax+bx^{٢}$. ت : $y=ae^{x}+be^{-x}$.

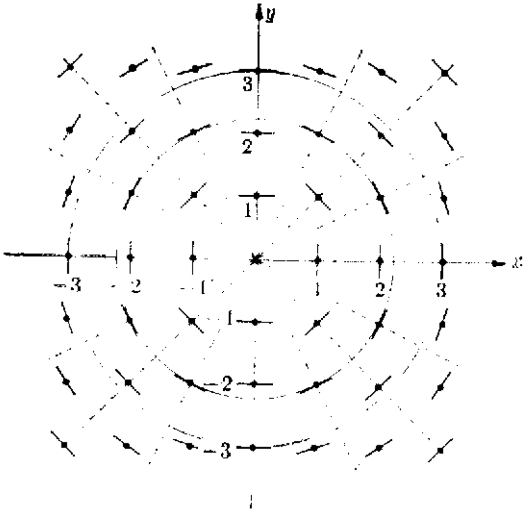
٥ . ١- تعبیر هندسی معادله دیفرانسیل مرتبه اول - حل نموداری

بطورکلی هرمعادله مرتبه و درجه اول را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$y'=F(x , y) \qquad (١ . ٥)$$

جوابهایی که درجستجوی آن میباشیم توابعی بشکل $y=f(x)$ میباشند که ضریب زاویه مماس براین خمها در هرنقطه (x , y) با رابطه (٥ . ١) تعیین میشوند و لذا با دردست داشتن تابع $F(x , y)$ میتوان خطوط مماس برمنحنی $y=f(x)$ را درهرنقطه **بدون** معلوم بودن شکل $y=f(x)$ **بدست آورد**. با ترسیم پاره خطهای مماس در نقاط **پراکنده** صفحه xy میتوان حوزه عناصر خطی **را بدست آورد**. این روش را برای معادله **دیفرانسیل**

$y'=-\frac{x}{y}$ درشکل (۲ . ۱) نمایش داده‌ایم . مثلاً در نقطه (۱ , ۱) ضریب زاویه برابر ۱— بوده و ازاین نقطه پاره خط کوچکی که نقطه (۱ , ۱) وسط آن است با ضریب زاویه ۱— رسم کرده‌ایم . همچنین در نقطه (۲ , ۳) ضریب زاویه مماس برابر $-\frac{۳}{۲}$ بوده و پاره خط متناظر را رسم نموده‌ایم . محاسبات عددی در جدول واقع درسمت راست شکل (۲ . ۱) داده شده است .



y'	y	x
∞	0	۱
∞	0	۲
0	۱	0
—۱	۱	۱
—۲	۱	۲
۱	۱	—۱
۲	۱	—۲
0	۲	0
—۰ر۵	۲	۱
—۱	۲	۲

شکل ۲ . ۱- عناصر خطی برای معادله $y'=-\frac{x}{y}$

اگر عمل ترسیم عناصر خطی را ادامه دهیم ، این خطوط تقریباً شکل طایفه منحنی‌هایی که مماس آنها عناصرخطی مزبور میباشند تعیین میکنند. مثلاً درشکل (۲ . ۱) این خطوط طایفه دوایر $x^{۲}+y^{۲}=c^{۲}$ راکه در آن c مقدار ثابت دلخواهی است بدست میدهد . در هرنقطه دلخواه (x , y) مماس برهریک از دوایر $x^{۲}+y^{۲}=c^{۲}$ برابر $-\frac{x}{y}$ بوده و بالنتیجه هریک از دوایر $x^{۲}+y^{۲}=c^{۲}$ یکی از جوابهای معادله $y'=-\frac{x}{y}$ میباشد. میتوان اصول بالا را نیز درباره جواب عمومی رابطه (۵ . ۱) تعمیم

داد و نتایج کلی زیر را درباره آن بدست آورد . جوابهای معادله (۰ . ۱) در صفحه xy تشکیل یکدسته منحنی‌را میدهند و از هرنقطه (x , y) واقع درصفحه‌یک منحنی میگذرد . باید توجه داشت که نتیجه فوق درصورتی صحیح است که درباره پیوستگی تابع $F(x , y)$ فرضهای عاقلانه‌یی قائل شده باشیم ، چه مثال $y' = -\frac{x}{y}$ بخوبی لزوم وجود شرایطی را برای $F(x , y) = -\frac{x}{y}$ تایید میکند . زیرا این تابع بازاء $y = 0$ منفصل بوده و برای مقادیر $x \neq 0$ این ناپیوستگی ایجاد اشکال نمیکند . زیرا ضریب زاویه بینهایت میباشد ، ولی در مبدأ مختصات جوابی موجود نیست . میتوان روش نموداری مثال فوق‌را برای هرنوع معادله مرتبه اول بکار برد و برای این منظورکافی است که ترسیم « عناصر خطی» را تا هنگامیکه جوابها شکل هندسی بخودگیرند درصفحه xOy ادامه دهیم و باترسیم منحنیهای مربوطه که «عناصر خطی» مزبورمماسهای‌آن میباشند تجزیه وتحلیل خود را تکمیل نماییم. ممکن است این روش را بدلایل زیر مورد انتقاد قرار دهیم .

۱- اگر چه بااین روش میتوان شکل تقریبی منحنیهای جواب را بدست آورد ، ولی فرمول تحلیلی این منحنیها را نمیتوان بدست آورد .

۲- منحنیهایی که با روش نموداری بدست میآیند تقریبهایی برای جوابهای معادله دیفرانسیل بوده و ما راجع به درجه صحت و دقت آن چیزی نمیدانیم .

۳- تعیین منحنیهای جواب با این روش مستلزم صرف وقت زیادی خواهد بود .

برای جواب به انتقادات فوق باید توجه داشت که :

الف - دراکثر اوقات نمیتوان جوابهای معادله دیفرانسیل را بصورت توابع صریح (توابع معمولی مقدماتی) بیان نمود و همانطورکه درشماره (۱ . ۱) متذکرشدیم ، معادله دیفرانسیل‌را باید نوعی‌ازفرمولها برای توصیف این جوابها پنداشت و حتی ممکن است روش ساده دیگری برای توصیف وبیان این توابع بغیراز معادله دیفرانسیل مربوطه موجود نباشد.

ب - چنانچه ذیلاً نشان خواهیم داد میتوان جوابها را با روش نموداری با دقت خواسته شده‌یی تعیین کنیم .

ج - سرعت تعیین جوابها با این روش بستگی تام به مهارت محاسب دارد .

دریافتن منحنیهای‌جواب بااین روش‌ممکن است‌بطورقابل ملاحظه‌یی باکمک منحنیهایی که آنها را **ایزوکلاین** * مینامیم تسریع نماییم . این خمها مکان هندسی نقاطی

---

* Isocline

هستند که ضریب‌زاویه مطلوب دارای مقدار ثابت m بوده و بالنتیجه برای معادله (۱ . ۵) این خمها با معادله

$$F(x , y)=m \qquad (۱ . ۵۱)$$

مشخص میگردند (m پارامتر است) . چنانچه منحنیهای (۱ . ۵۱) را ترسیم نماییم بسهولت میتوان بازاء هرمقدار m یک طایفه پاره خطهای موازی با ضریب زاویه m که نقطه وسط جمیع این پاره خطها روی منحنی $F(x , y)=m$ واقع است ترسیم نمود. برای معادله دیفرانسیل $y'=-\frac{x}{y}$ اینروکلاینها منحنیهای $-\frac{x}{y}=m$ که خطوط مستقیم گذرنده برمبدأ مختصات با ضریب زاویه $-\frac{۱}{m}$ است میباشند واز آنجا دراینحالت خاص «عناصر خطی» برخطوط اینروکلاین که درشکل (۱ . ۲) با خطوط منکسر نشان داده شده است عمود میباشد. باید تأکید نمود که درحالت کلی اینروکلاینهای جوابهای معادله دیفرانسیل نیستند، ولی دربرخی از موارد ممکن است اینروکلاینها جواب معادله دیفرانسیل باشند و دراینصورت اینروکلاین خط مستقیم با ضریب زاویه m خواهد بود، چه بنابر تعریف منحنیهای ایزوکلاین با رابطه $F(x , y)=m$ مشخص میشود وچنانچه رابطه فوق در معادله دیفرانسیل بخواهد صدق کند لازم است که $y'=F(x , y)=m$ ویا $y=mx+n$ باشد.

مسائل :

الف ـ برای معادله دیفرانسیل :

$$y'=۱-\frac{۱}{x+y} \qquad (۱ . ۵۲)$$

اینروکلاینها با رابطه زیر مشخص میشوند :

$$x+y=\frac{۱}{۱-m}$$

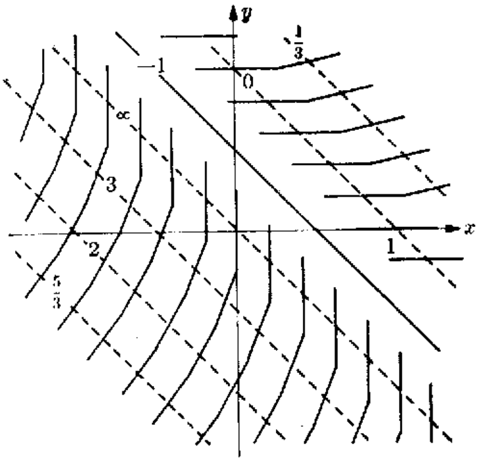
مثلاً برای $m_{۱}=\frac{۱}{۳}$, $m_{۲}=0$, $m_{۳}=-۱$, $m_{۴}=\infty$, $m_{۵}=۳$, $m_{۶}=۲$,

$m_{۷}=\frac{۵}{۳}$ خطوط اینروکلاینها به ترتیب $x+y=\frac{۳}{۲}$, $x+y=۱$,

$$x+y=-\frac{۳}{۲} \;,\; x+y=-۱ \;,\; x+y=-\frac{۱}{۲} \;,\; x+y=0 \;,\; x+y=\frac{۱}{۲}$$

میباشد .

درشکل(۳ . ۱) این خطوط را که بایکدیگر موازی هستند با خطوط منکسر و مقادیر متناظر m را نیز روی خطوط مربوطه درج کرده‌ایم . برای یافتن «عناصر خطی» نقاط غیر مشخص $A_۲ , B_۲ , C_۲ , \ldots$ و $A_۴ , B_۴ , C_۴ , \ldots$ را به‌ترتیب برروی خطوط $x+y=-\frac{۳}{۲}$ (متناظر با $m=\frac{۵}{۳}$) و $x+y=-۱$ (متناظربا $m=۲$) انتخاب نموده و از نقاط $A_۲ , B_۲ , C_۲ , \ldots$ خطوطی موازی با ضریب زاویه $m=\frac{۵}{۳}$ و از

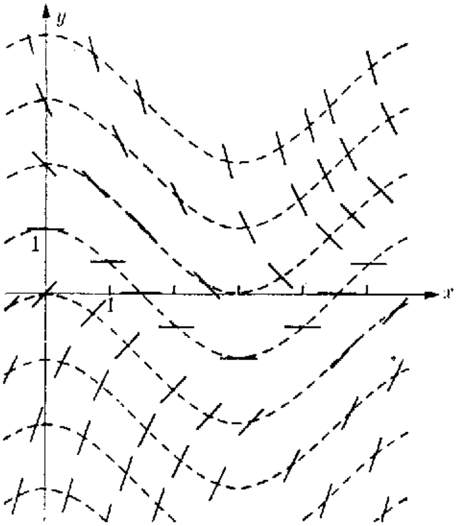


شکل ۳ . ۱- ایزوکلاینهای معادله دیفرانسیل $y'=۱-\frac{۱}{x+y}$

نقاط $A_۴ , B_۴ , C_۴ , \ldots$ خطوطی موازی باضریب زاویه $m=۲$ رسم میکنیم تا یکدیگر را درنقاط $A_۳ , B_۳ , C_۳ , \ldots$ قطع کنند وسپس $A_۴A_۵=A_۳A_۴$ و $B_۴B_۵=B_۳B_۴$ و $C_۴C_۵=C_۳C_۴ , \ldots$ رادر روی این خطوط جدا میکنیم تا نقاط $A_۵ , B_۵ , C_۵ , \ldots$ بدست آیند و سپس از نقاط اخیر خطوطی موازی با ضریب زاویه $m=۳$ رسم کرده تا خط $x+y=-\frac{۱}{۲}$ (متناظر با $m=۳$) را به ترتیب در نقاط $A_۶ , B_۶ , C_۶$ برخورد کنند و این عمل را ادامه میدهیم تا عناصر خطی و همچنین شکل تقریبی جوابها بدست

آید . خط ایزوکلاین متناظر با $m=-۱$ جواب معادله دیفرانسیل میباشد زیرا بازاء این مقدار m داریم $x+y=\frac{۱}{۲}$.

ب ـ برای معادله دیفرانسیل (۱ . ۵۳) $y'=\cos x-y$ ایزوکلاینها بارابطه $\cos x-y=m$ مشخص میشوند که‌آنها را با خطوط منکسر و «عناصر خطی» را با خطوط پر در شکل (۱ . ٤) نمایش داده‌ایم .



شکل ٤ . ۱- ایزوکلاینهای معادله دیفرانسیل $y'=\cos x-y$

ج ـ برای معادله دیفرانسیل (۱ . ٥٤) $y'=x^{۲}+y^{۲}$ ایزوکلاینها دوایر $x^{۲}+y^{۲}=m$ بوده که آنها را با خطوط منکسر و «عناصرخطی» را با خطوط پر در شکل (۱ . ۵) نمایش داده‌ایم .

د ـ بهمین ترتیب ایزوکلاینهای معادلات :

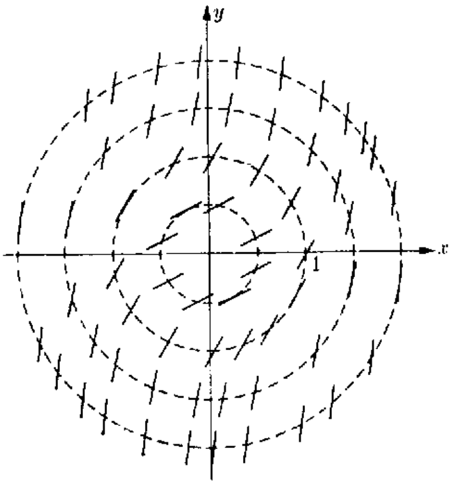
$$y'=\frac{x+y}{x-y} \qquad (۱ . ۵۵)$$

$$y'=\frac{(۱-x^{۲})y-x}{y} \qquad (۱ . ٥٦)$$

به ترتیب خطوط $m=\frac{x+y}{x-y}$ و منحنیهای $m=\frac{(۱-x^{۲})y-x}{y}$ بوده که در اشکال (۶ . ۱)و(۷ . ۱) با خطوط منکسرنمایش داده شده است. برای رسم منحنیهای ایزوکلاین رابطه (۵۶ . ۱) چنین عمل میکنیم :

$$my=(۱-x^{۲})y-x \ , \ x=y(۱-x^{۲}-m) \ , \ y=\frac{x}{۱-x^{۲}-m}$$

بسهولت معلوم میشود برحسب آنکه $۱-m \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$ باشداشکال مختلفی‌خواهیم‌داشت



شکل ۵ . ۱- ایزوکلاینهای معادله دیفرانسیل $y'=x^{۲}+y^{۲}$

و بخصوص بازاء $m=۱$ هذلولی متساوی‌القطرین $y=-\frac{۱}{x}$ بدست میاید. باکمی دقت معلوم میشودکه مبدأ مختصات نقطه عطف منحنیهای فوق میباشد $(m\neq ۱)$. زیرا :

$$y'=\frac{۱+x^{۲}-m}{(۱-x^{۲}-m)^{۲}} \quad , \quad y''=\frac{۲x^{۳}+۶(۱-m)x}{(۱-x^{۲}-m)^{۳}}$$

واضح است که $x=0$ نقطه عطف جمیع منحنیهای فوق میباشد .

حال فرض میکنیم $۱-m < 0$ باشد یعنی $x^۲ > ۱-m$ و بالنتیجه منحنی پیوسته بوده و دارای ماکزیمم و می‌نیمم میباشد .

معادلات بالاتر ازدرجه یك

هرمعادله مرتبه اول و درجه دوم را میتوان بشکل :

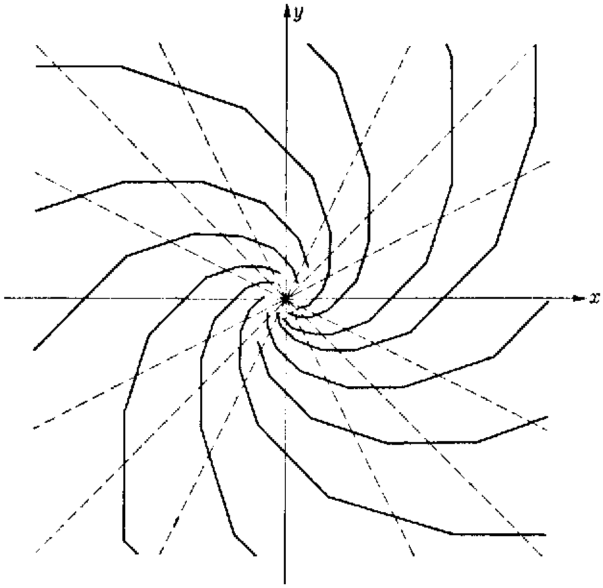
$$Py'^۲+Qy'+R=0 \qquad (۱ . ۵۷)$$

که‌درآن R , Q , P توابعی از x و y هستند نمایش داد. چنانچه معادله (۱.۵۷) را نسبت به y' حل کنیم چنین داریم :

$$y'=\frac{-Q+\sqrt{Q^۲-٤PR}}{۲P}=F_۱(x , y)$$

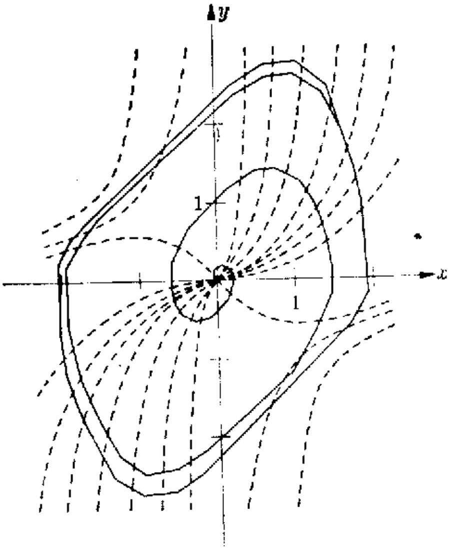
$$(۱ . ۵۸)$$

$$y'=\frac{-Q-\sqrt{Q^۲-٤PR}}{۲P}=F_۲(x , y)$$



شکل ۶ . ۱- ایزوکلاینهای معادله $y'=\frac{x+y}{x-y}$

بالنتیجه برای‌حل معادله (۱ . ۵۷) باید جوابهای عمومی‌ دو معادله درجه اول (۱ . ۵۸) را بدست آورد و چنانچه میدانیم میتوان این جوابها را با روش نموداری تعیین نمود . بطورکلی جوابهای دو معادله درجه اول (۱ . ۵۸) از یکدیگر مستقل میباشند ولی ممکن است در امتداد منحنی که آنرا منحنی مرزی مینامیم بریکدیگر منطبق گردند . حال چنانچه دو دسته‌جوابهای فوق روی یک منحنی مورد تجزیه و تحلیل قرارگیرند خواهیم‌دید درجمیع نقاطی که $Q^{۲}-۴PR>0$ است از هرنقطه صفحه دو عنصر خطی میگذرد ودرنقاطی که $Q^{۲}-۴PR=0$ میباشد یک عنصر خطی و بالاخره درنقاطی که $Q^{۲}-۴PR<0$ است عنصر خطی نمیگذرد . مکان هندسی نقاط $Q^{۲}-۴PR=0$ ممکن‌است‌شامل منحنی‌جواب باشد ودراینصورت این مکان همان منحنی مرزی‌خواهد بود .



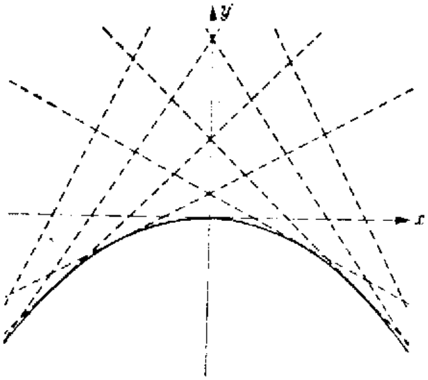
شکل ۷ . ۱- ایزوکلاینهای معادله

$$y'=\frac{(۱-x^{۲})y-x}{y}$$

مثال - برای معادله دیفرانسیل $y'^{۲}+xy'-y=0$ داریم :

$$y'=\frac{-x\pm\sqrt{x^{۲}+۴y}}{۲}\quad,\quad Q^{۲}-۴PR=x^{۲}+۴y$$

و لذا برحسب آنکه $x^{۲}+۴y \substack{>\\ \\<} 0$ باشد دوعنصر خطی ویا یک عنصر خطی و یا عنصر خطی موجود نیست . مکان‌هندسی $x^{۲}+۴y=0$ منحنی مرزی است‌که مشترک بین دو طایفه جواب فوق میباشد ، زیرا منحنی جواب است . تجزیه نموداری در شکل (۱ . ۸) نمایش داده شده است .



شکل ۸ . ۱- $y'^2+xy'-y=0$

مسائل

۱- برای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر عناصر خطی را در صفحه دومحور مختصات ترسیم نموده و سپس منحنی‌های جواب را دقیقاً رسم کنید .

الف - $y'=2x$. ب - $y'=\frac{1}{x}$.

پ - $y'=\cos x$; ت - $y'=e^x$.

۲- با کمک ایزوکلاینها جوابهای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را با روش نموداری یافته و سپس آنها را با جوابهای عمومی مربوطه مقایسه کنید .

الف - $y'=2y$ ، جواب عمومی $y=ce^{2x}$.

ب - $y'=x+y$ ، جواب عمومی $y=ce^x-x-1$.

پ - $y'=-\frac{y}{x}$ ، جواب عمومی $xy=c$.

۳- با کمک ایزوکلاینها برای هریک از معادلات زیر جوابهای نموداری یافته و سپس آنها را با اشکال متناظر مقایسه کنید .

الف - معادله (۵۳ . ۱) ، شکل ۴ . ۱ .

ب - معادله (۵٤ . ۱) ، شکل ۵ . ۱ .

پ ـ معادله (۵۵ . ۱) , شکل ۶ . ۱ .

ت ـ معادله (۵۸ . ۱) , شکل ۷ . ۱ .

ث ـ معادله $y'=\frac{x-y}{x+y}$ که از نقطه $A(۱ , ۱)$ میگذرد .

۴ ـ قبلاً یادآور میشویم که اگر نقطه مادی با سرعت $v=\frac{dx}{dt}$ برروی محورx ها حرکت کند ، شتاب آن عبارت خواهد بود از :

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

حال اگر این نقطه مادی در تحت‌تأثیر نیروی F که فقط تابع x و v است باشد قانون نیوتن عبارت خواهد بود از :

$$mv\frac{dv}{dx}=F(x , v)$$

معادله فوق معادله دیفرانسیل مرتبه اول میباشد که x و v را بیکدیگر مربوط میکند و لذا جوابهای آنرا میتوان بطور نموداری که آنرا سطح فاز مینامیم در صفحه xv مورد بررسی قرار داد .

حال با استفاده از مطالب مذکور در فوق هریک از معادلات زیر را بصورت x و v تبدیل نموده و سپس بطور نموداری جوابها را در صفحه xv مورد بررسی قرار دهید .

الف ـ $\frac{d^۲x}{dt^۲}=۳۲$ (سقوط آزاد جسم) .

ب ـ $\frac{d^۲x}{dt^۲}=-x$ (نوسان یک فنر با دامنه ثابت) .

پ ـ $\frac{d^۲x}{dt^۲}=-x-v$ (نوسان یک فنر با دامنه میرا) .

۵ ـ نشان دهید اگر معادله واندرپل* :

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+(x^۲-۱)\frac{dx}{dt}+x=o$$

Van der pol *

را بصورت x و v تبدیل کنیم این معادله بشکل معادله (٦٥ . ١) میباشد که در آن y به v تبدیل شده است. این معادله دیفرانسیل درنظریه مدارهای الکتریکی که شامل لوله های خلاء میباشند ظاهر میشود . تنها روش یافتن جوابهای این معادله بکمک ایزوکلاینها میباشد ، چه تاکنون نتوانسته اند فرمولهای صریحی برای جوابهای این معادله بدست آورند .

جوابها

مسئله ٤- الف - $v\frac{dv}{dx}=۳۲$ ، منحنی های جواب سهمی های $v^{۲}=٦٤x+c$ میباشد .

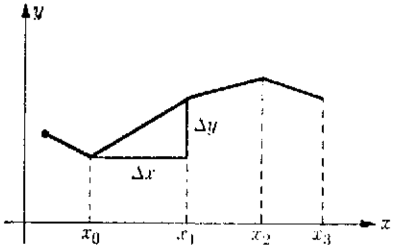
ب - $v\frac{dv}{dx}=-x$ ، منحنی های جواب دوایر $x^{۲}+v^{۲}=c$ است .

پ - $v\frac{dv}{dx}=-x-v$ ، منحنی های جواب حلزونیهایی هستند که حول نقطه (o , o) دورگشته اند .

٦ . ١ - روش انتگرال گیری گام بگام

در قسمتهای پیش جوابهای عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=F(x , y)$ را بدست آوردیم . ولی دربعضی از موارد ممکن است یافتن جواب خصوصی که از نقطه معین (x_0 , y_0) میگذرد مورد نظر باشد . یافتن چنین جوابی را بنابر تعریف **مسئله مقادیر اولیه** گوییم . (جمله «مقادیر اولیه» از مکانیک منتج شده است و آن عبارت است از معین بودن مقادیر وضعیتها وسرعتها در زمان اولیه t_0) باکمک عناصرخطی میتوانیم باروش نموداری جواب مورد نظررا بدست آوریم ، ولی لزومی ندارد که حوزه عناصر خطی را ترسیم نماییم . چه از نقطه (x_0 , y_0) پاره خط کوچکی با ضریب زاویه $F(x_0 , y_0)$ رسم نموده و آنرا تا نقطه نزدیک (x_1 , y_1) ، $x_1 > x_0$ ادامه میدهیم و سپس در نقطه (x_1 , y_1) ضریب زاویه $F(x_1 , y_1)$ را محاسبه کرده و پاره خط کوچکی ازاین نقطه با ضریب زاویه $F(x_1 , y_1)$ ترسیم نموده وآنرا تا نقطه نزدیک (x_2 , y_2) ، $x_2 > x_1$ ادامه میدهیم . با ادامه روش فوق خط شکسته‌ای بدست میآوریم که تقریبی برای جواب مورد بحث خواهد بود و آنرا در شکل (۹ . ۱) نمایش داده ایم .

چنانچه عملیات فوق را برای مقادیر x واقع درسمت چپ $x_\circ$ تکرار نماییم ، میتوان این روش نموداری را برای مقادیر $x < x_\circ$ نیز تعمیم داد . این روش را **انتگرال گیری گام بگام** گوییم .



شکل ۹ . ۱- جواب حاصل از روش انتگرال گیری گام بگام

ازآنجایی که عملیات فوق کاملاً جبری است لذا لزومی ندارد که متوسل به روش نموداری گردیم . این محاسبات را میتوان در جدول شماره ۱ . ۱ که شامل چهار ستون $\triangle y,F(x,y),y,x$ است درج نمود . برای محاسبه اعداد این جدول نمو $\triangle x$ را بطور دلخواه انتخاب کرده ولی نمو $\triangle y$ با فرسول زیر محاسبه میشود :

$$\triangle y=F(x\,,\,y)\triangle x \qquad (۱ . ۶)$$

در واقع $\triangle y$ بوسیله رابطه تقریبی $dy=\triangle y$ محاسبه میشود (زیرا بنابر تعریف دیفرانسیل متغیر مستقل $dx=\triangle x$ است) . اگر چه میتوان $\triangle x$ را درهرمرحله متغیر فرض نمود ، ولی برای سهولت در محاسبه بهتر است همانطورکه در جدول ۱ . ۱ ، $\triangle x$ ثابت فرض شده است آنرا ثابت اختیار نمود .

جدول ۱ . ۱

x	y	F(x , y)	△y
$x_\circ$	$y_\circ$	$F(x_\circ\,,\,y_\circ)$	$F(x_\circ\,,\,y_\circ)\triangle x$
$x_\circ+\triangle x$	$y_\circ+\triangle y$	$F(x_\circ+\triangle x_\circ,y_\circ+\triangle y)$	. . .
$x_\circ+۲\triangle x$	. . .	. . .	. . .

مثال - $y'=x^۲-y^۲$. با انتخاب $x_\circ=۱$ و $\triangle x=۰٫۱$ محاسبات درجدول ۱ . ۲ نشان داده شده است .

۱ . ۷- معادله $y'=F(x)$. فرض میکنیم تابع $F(x)$ درفاصله $a < x < b$ پیوسته باشد دراینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=F(x)$ با انتگرال گیری بدست میآید . یعنی :

جدول ۲ . ۱

x	y	$x^{۲}$	$y^{۲}$	$x^{۲}-y^{۲}$	$\triangle y=(x^{۲}-y^{۲})\triangle x$
۱	۱	۱	۱	0	0
۱ر۱	۱	۱ر۲۱	۱	۰ر۲۱	۰ر۰۲۱
۱ر۲	۱ر۰۲۱	۱ر۴۴	۱ر۰۴۲	۰ر۳۹۸	۰ر۰۴۰
۱ر۳	۱ر۰۶۱	. . .	. . .	. . .	. . .

$$y=\int_{x_{0}}^{x} F(x)dx+c \quad , \quad a<x<b \qquad (۱ . ۷)$$

ولی چون $F(x)$ پیوسته میباشد بنابراین: $\frac{d}{dx}\int_{x_{0}}^{x} F(u)du=F(x)$. برای تعیین جواب خصوصی $y'=F(x)$ بازاء $x=x_{0}$ و $y=y_{0}$ کافی است جایگزین نمودن x_{0} و y_{0} در رابطه (۱ . ۷) مقدار c را بدست آوریم :

$$y_{0}=\int_{x_{0}}^{x_{0}} F(u)du+c=0+c$$

و از آنجا $y_{0}=c$ بوده و جواب مطلوب عبارت خواهد بود از :

$$y=\int_{x_{0}}^{x} F(u)du+y_{0} \qquad (۱ . ۷۱)$$

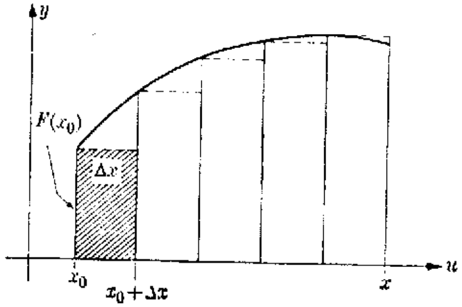
لذا محاسبه انتگرال‌فوق جواب مناسبی برای این مسئله تعیین میکند. ولی در اکثر موارد محاسبه این انتگرال برحسب توابع معمولی مقدور نیست اما از رابطه (۱ . ۷۱) میتوان برای محاسبه مقادیر y بازاء مقادیر مختلفه x استفاده نمود . چه اگر x را ثابت اختیار

نماییم مقدار انتگرال معین را میتوان بطورتقریب با هریک از روشهای **ذوزنقه یا سمپسون*** و غیره بدست آورد و بالاخص میتوان بطریق زیر و با روش «**مجموع مستطیلها**» مقدار انتگرال معین را بدست آورد .

برای این منظور x را ثابت‌فرض نموده و فاصله بین x_0 و x را به n فاصله جزئی Δx تقسیم میکنیم بقسمی که $x=x_0+n\Delta x$ باشد . چنانچه از شکل (۱۰ . ۱) برمیآید مقدار این انتگرال تقریباً برابر :

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}F(u)du=y_0+F(x_0)\Delta x+F(x_0+\Delta x)\Delta x+\cdots$$

$$+F[x_0+(n-۱)\Delta x]\Delta x \qquad (۱ . ۷۲)$$



شکل ۱۰ . ۱- انتگرال گیری و انتگرال گیری گام بگام

است . رابطه (۱ . ۷۲) بازاء مقادیر مختلفه x مقادیری برای y بدست میدهد که مانند روش انتگرال گیری گام بگام میباشد . مقادیر متوالی y بازاء $x=x_0$, $x_0+\Delta x$, ... , $x_0+n\Delta x$ عبارت خواهند بود از :

$$y_0 \, ,$$

$$y_0+\Delta y=y_0+F(x_0)\Delta x \, ,$$

$$y_0+F(x_0)\Delta x+F(x_0+\Delta x)\Delta x \, ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_0+F(x_0)\Delta x+\cdots+F[x_0+(n-۱)\Delta x]\Delta x$$

---

* Simpson

بعبارت دیگر در این حالت خاص انتگرال گیری گام بگام یکی از روشهای محاسبه تقریبی انتگرال معین میباشد. با ذکر این مثال دلیل بکار بردن جمله «انتگرال گیری» در روش انتگرال گیری گام بگام آشکار میگردد. بطور کلی میتوان جواب عمومی معادله دیفرانسیل را نوعی از تعمیم انتگرال گیری پنداشت. باید متذکر شد که تعدادی وسائل مکانیکی و الکتریکی برای حل معادله دیفرانسیل که شامل «انتگرال کننده‌ها» است موجود میباشد. این وسائل روش انتگرال گیری گام بگام را بطور پیوسته انجام میدهد و در واقع متناظر باحالت حدی $\Delta x \to 0$ میباشد.

مسائل

۱- با روش انتگرال گیری گام بگام و انتخاب $x=۱$, $y=۱$, $\Delta x=۰٫۱$ مقدار جواب معادله دیفرانسیل $y'=x-y^{۲}$ را بازاء $x=۱٫۵$ محاسبه کنید و همچنین جواب را بشکل خطوط منکسر نمایش دهید.

۲- الف - با انتخاب $x=0$, $y=0$, $\Delta x=۰٫۱$ مقدارجواب معادله دیفرانسیل $y'=\sqrt{۱-y^{۲}}$ را بازاء $x=۰٫۵$ با روش انتگرال گیری گام بگام محاسبه کنید وسپس نتیجه را با جواب تحقیقی $y=\sin x$ مقایسه کنید.

ب - با بکار بردن روش انتگرال گیری گام بگام و انتخاب $\Delta x=۰٫۰۵$ بار دیگر نتیجه را با $y=\sin x$ مقایسه کنید.

۳- معادله دیفرانسیل $y'=xe^{x}$ و نقطه $A(0 , ۱)$ مفروض است.

الف - منحنی انتگرال گذرنده از نقطه A را درنظر میگیریم، نشان دهید که بازاء $x=۱$ مقدار y این منحنی برابر $۱+\int_{0}^{۱} xe^{x}dx$ میباشد.

ب - با روش انتگرال گیری گام بگام و انتخاب $\Delta x=۰٫۲$ مقدار عددی جواب را بدست آورده و سپس آنرا با مقدار تحقیقی تابع مقایسه کنید.

۴- جواب خصوصی معادله‌دیفرانسیل $y'=e^{-x^{۲}}$ که از نقطه $B(0 , ۲)$ میگذرد درنظر مگیریم. درهریک از حالات زیر مقدار y را بازاء $x=۰٫۶$ محاسبه کنید.

الف - با روش انتگرال گیری گام بگام و انتخاب $\Delta x=۰٫۲$.

ب - با روش ذوزنقه و انتخاب نقاط تقسیم $x=0$, $۰٫۲$, $۰٫۴$, $۰٫۶$.

پ ـ با روش سمپسون و بکار بردن نقاط تقسیم ٠ر٦ , ٠ر٥ , ٠ر٤ , ٠ر٣ , ٠ر٢ , ٠ر١ , $x=0$.

ت ـ با بکار بردن جداول توابع خطا .

جوابها

١- ١ر٠٨٢ .

٢ـ الف : مقدار تقریبی ٠ر٤٨٥٠ و مقدار تحقیقی ٠ر٤٧٩٤٣ .

ب : ٠ر٤٨٢٢ .

٣ـ ب : مقدار تقریبی ١ر٧٤٢٩ و مقدار تحقیقی ٢ .

٤ـ الف : ٢ر٥٦٢٥٩ . ب : ٢ر٥٣٢٣٥ .

پ : ٢ر٥٣٥١٦ . ت : ٢ر٥٣٥١٥ .

٨ . ١- معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر و دستگاه معادلات دیفرانسیل - انتگرال‌گیری گام بگام .

چنانچه میدانیم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم :

$$y''=F(x, y, y') \tag{١ . ٨}$$

را میتوان بدستگاه معادلات :

$$\frac{dy}{dx}=z \quad , \quad \frac{dz}{dx}=F(x, y, z) \tag{١ . ٨١}$$

تبدیل نمود . لذا اگر $y=f(x)$ یکی‌ازجوابهای معادله (٨ . ١) باشد توابع $y=f(x)$ و $z=f'(x)$ در دستگاه معادلات (١ . ٨١) صدق میکند . بالعکس چنانچه $y=f(x)$ و $z=g(x)$ جواب دستگاه معادلات (١ . ٨١) باشد چنین داریم :

$$f'(x)=g(x) \quad , \quad g'(x)=F[x, f(x), g(x)]$$

و یا :

$$f''(x)=F[x, f(x), f'(x)]$$

بنابراین $y=f(x)$ درمعادله (٨ . ١) صدق میکند .

بطورکلی زوج معادلات :

$$\frac{dy}{dx}=G(x\,,\,y\,,\,z)\quad,\quad\frac{dz}{dx}=F(x\,,\,y\,,\,z)\qquad(۱ . ۸۲)$$

را **دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول** نامیم. یکی‌از جوابهای دستگاه فوق زوج توابع $y=f(x)$ و $z=g(x)$ که‌در فاصله $a<x<b$ معین ودر رابطه (۱ . ۸۲) متحداً صدق میکنند میباشد . مثلاً :

$$y=e^{-x}+e^{۳x}\quad,\quad z=e^{-x}-e^{۳x}$$

یکی از جوابهای دستگاه معادلات :

$$\frac{dy}{dx}=y-۲z\quad,\quad\frac{dz}{dx}=z-۲y$$

میباشد . زیرا :

$$-e^{-x}+۳e^{۳x}\equiv e^{-x}+e^{۳x}-۲(e^{-x}-e^{۳x})\quad,$$

$$-e^{-x}-۳e^{۳x}\equiv e^{-x}-e^{۳x}-۲(e^{-x}+e^{۳x})$$

جوابهای تقریبی دستگاه (۱ . ۸۲) را میتوان با روش انتگرال گیری گام بگام بدست آوردو برای این منظور معادلات دستگاه (۱ . ۸۲) را با دستگاه «معادلات تفاضلی» :

$$\Delta y=G(x\,,\,y\,,\,z)\Delta x\quad,\quad\Delta z=F(x\,,\,y\,,\,z)\Delta x\qquad(۱ . ۸۳)$$

تعویض مینماییم . حال چنانچه مقادیر اولیه $(x_{۰}\,,\,y_{۰}\,,\,z_{۰})$ در دست باشند با انتخاب اختیاری Δx نموهای Δy و Δz را از روابط زیر بدست میآوریم :

$$\Delta y=G(x_{۰}\,,\,y_{۰}\,,\,z_{۰})\Delta x\quad,\quad\Delta z=F(x_{۰}\,,\,y_{۰}\,,\,z_{۰})\Delta x\qquad(۱ . ۸۴)$$

و ازآنجا مقادیر $(x_{۱}\,,\,y_{۱}\,,\,z_{۱})$ با روابط زیر تعیین خواهند گردید :

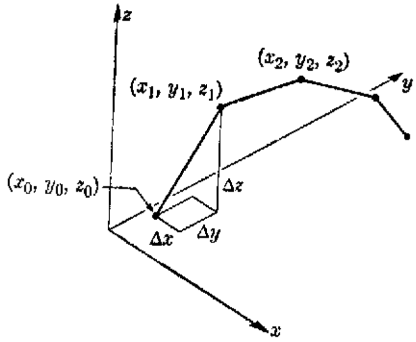
$$x_{۱}=x_{۰}+\Delta x\;,\;y_{۱}=y_{۰}+\Delta y\;,\;z_{۱}=z_{۰}+\Delta z$$

حال اگر $(x_{۱}\,,\,y_{۱}\,,\,z_{۱})$ را مقادیر اولیه پنداشته و عملیات بالا را تکرار کنیم مجموعه مقادیر $(x_{۲}\,,\,y_{۲}\,,\,z_{۲})$ بدست میاید و قس‌علیهذا . در صفحات xOy و zOx میتوان y و z را که توابعی از x میباشند مانند شکل (۱ . ۹) با خطوط منکسر رسم نماییم ویاآنکه میتوان توابع $y(x)$ و $z(x)$ را تواماً بشکل خطوط منکسردر صفحه‌xyz

نمایش داده و مانند شکل(۱۱ . ۱) نقاط متوالی (x_0 , y_0 , z_0) ، (x_1 , y_1 , z_1) ، (x_2 , y_2 , z_2) ، ... را باخطوط مستقیم بیکدیگر وصل کنیم .

محاسبات عددی‌را در جدول شماره ۳ . ۱ درج کرده‌ایم .

چنانچه فوقاً اشاره شد معادله مرتبه دوم (۸ . ۱) را میتوان بدستگاه معادلات (۸۱ . ۱) تبدیل کرد و لذا جوابهای خصوصی را میتوان بطور تقریب باروش‌انتگرال گیری گام بگام‌بدست آورد .



شکل ۱۱ . ۱- انتگرال گیری گام بگام برای دستگاه معادلات

جدول ۳ . ۱

x	y	z	G(x , y , z)	Δy	F(x , y , z)	Δz
x_0 $x_0+\Delta x$	y_0 $y_0+\Delta y$	z_0 $z_0+\Delta z$	$G(x_0 , y_0 , z_0)$ . . .	$G(x_0 , y_0 , z_0)\Delta x$ . . .	$F(x_0 , y_0 , z_0)$ . . .	$F(x_0 , y_0 , z_0)\Delta x$ . . .

مثلاً معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''=xy'-y$ معادل دستگاه معادلات :

$$\frac{dy}{dx}=z \quad , \quad \frac{dz}{dx}=xz-y$$

بوده و اگر آنرا با دستگاه معادلات تفاضلی تعویض کنیم ، خواهیم داشت :

$$\Delta y=z\Delta x \quad , \quad \Delta z=(xz-y)\Delta x$$

درجدول‌شمارهٔ ۴ . ۱ مقدار جوابها را با انتخاب‌شرایط اولیه $z_0=y'=0$ ، $y_0=۱$ ، $x_0=0$ و $\Delta x=۰٫۱$ محاسبه کرده‌ایم .

باید متذکر شد که‌نمیتوان مانندشماره(۵ . ۱) یافتن جوابها را با روش‌ایزوکلاینها دراین مورد تعمیم داد . ولی میتوان طایفه جوابهای معادله (۸۳ . ۱) را مجموعه‌یی از منحنی‌های $y=f(x)$ و $z=g(x)$ درفضای xyz پنداشت .

جدول ۴ . ۱

x	y	z	$z'=xz-y$	$\Delta y=z\Delta x$	$\Delta z=z'\Delta x$
0	۱	0	—۱	0	—۰ر۱
۰ر۱	۱	—۰ر۱	—۱ر۰۱	—۰ر۰۱	—۰ر۱۰۱
۰ر۲	۰ر۹۹	—۰ر۲۰۱	. . .	. . .	. . .

بهرصورت معادلات (۸۳ . ۱) در این مورد نیز امتداد مماس برخمهای انتگرال را درنقطه (x , y , z) تعیین میکند و دراینجا نیز میتوان حوزه عناصر خطی را تشکیل داد ولی درك و تجسم این مجموعه عناصر خطی در فضا حتی با کمك روشهای نموداری بسیار مشکل است .

تمام مطالب پیش گفته را میتوان در مورد دستگاه n معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر تعمیم داد :

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_{۱}}{dx}=F_{۱}(x , y_{۱} , \dots , y_n) \ , \\
&\frac{dy_{۲}}{dx}=F_{۲}(x , y_{۱} , \dots , y_n) \ , \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\frac{dy_n}{dx}=F_n(x , y_{۱} , \dots , y_n) \ .
\end{aligned} \tag{۱ . ۸۵}$$

جوابهای دستگاه فوق مجموعه n تابع :

$$y_{۱}=f_{۱}(x) \ , \ y_{۲}=f_{۲}(x) \ , \dots , \ y_n=f_n(x)$$

میباشد که متحداً در رابطه (۸۵ . ۱) صدق مینمایند و بالاخره جوابهای تقریبی را میتوان با انتگرال گیری گام بگام بطریق زیر بدست آورد .

$$\begin{aligned}
&\triangle y_۱=F_۱(x , y_۱ , y_۲ , \dots , y_n)\triangle x \ , \\
&\triangle y_۲=F_۲(x , y_۱ , y_۲ , \dots , y_n)\triangle x \ , \\
&. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
&. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
&. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
&\triangle y_n=F_n(x , y_۱ , y_۲ , \dots , y_n)\triangle x
\end{aligned}$$

معادله مرتبه n ام :

$$\frac{d^n y}{dx^n}=F(x , y , y' , \dots , y^{(n-۱)}) \qquad (۱ . ۸۶)$$

را میتوان با تبدیل متغیر زیر بدستگاه معادلات دیفرانسیل :

$$\frac{dy_۱}{dx}=y_۲ \ , \ \frac{dy_۲}{dx}=y_۳ \ , \ \dots \ , \ \frac{dy_{n-۱}}{dx}=y_n \ ,$$

$$\frac{dy_n}{dx}=F(x , y_۱ , y_۲ , \dots , y_n)$$

که در آن $y_۱=y$ ، $y_۲=y'$ ، $y_۳=y''$ ، ... ، $y_n=y^{(n-۱)}$ است تبدیل نمود . دستگاه معادلات (۱ . ۸۵) از لحاظ نظری صورت کلی میباشد ، زیرا چنانچه در بالا نشان دادیم هرمعادله مرتبه n ام (۱ . ۸۶) را میتوان بدستگاه معادلات (۱ . ۸۵) تبدیل نمود و همچنین بسهولت میتوان نشان داد که دستگاه معادلات بالاتر از مرتبه یک را میتوان بدستگاه معادلات (۱ . ۸۵) تبدیل کرد . مثلاً دستگاه معادلات :

$$\begin{aligned}
&\frac{d^۲y}{dx^۲}=F(x , y , y' , z , z') \ , \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (۱ . ۸۷) \\
&\frac{d^۲z}{dx^۲}=G(x , y , y' , z , z')
\end{aligned}$$

معادل چهار معادله مرتبه اول :

$$\frac{dy_{۱}}{dx}=y_{۲} \quad , \quad \frac{dy_{۲}}{dx}=F(x , y_{۱} , y_{۲} , y_{۳} , y_{٤})$$

(۱ ـ ۸۸)

$$\frac{dy_{۳}}{dx}=y_{٤} \quad , \quad \frac{dy_{٤}}{dx}=G(x , y_{۱} , y_{۲} , y_{۳} , y_{٤})$$

که در آنها $y_{۱}=y$, $y_{۲}=y'$, $y_{۳}=z$, $y_{٤}=z'$ است میباشد .

معادله غیر درجه اول :

$$F(x , y , y' , y'' , \dots , y^{(n)})=0 \qquad (۱ . ۸۹)$$

را معمولاً میتوان برحسب بزرگترین مرتبه مشتق یعنی $y^{(n)}$ حل نموده و سپس آنرا بیک ویا چند معادله مرتبه n ام و درجه اول (۸٦ . ۱) تبدیل نمود. لذا میتوانیم معادله (۸۹ . ۱) را نیز بدستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کنیم .

تعریف - مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل (۸۵ . ۱) برابر n بوده وبرای دستگاههای کلی‌تر بنابر تعریف مرتبه عبارت است از مرتبه دستگاه معادلات متناظر با رابطه (۸۵ . ۱). مثلاً مرتبه دستگاه معادلات (۸۷ . ۱) برابر چهار میباشد زیرا اگر آنرا بصورت متناظر با رابطه (۸۵ . ۱) تبدیل نماییم ، مرتبه دستگاه اخیر یعنی معادلات (۸۸ . ۱) برابر چهار میباشد .

مسائل

۱- هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را تبدیل بدستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کنید .

الف - $y''-xy'-x^{۲}y=0$.　　ب - $y''=xy'^{۲}-y'$.

پ - $y'''-۳y''+۵y'-٦y=\sin x$.　ت - $\frac{d^{۵}y}{dx^{۵}}=x$.

۲- برای هریک از مسائل زیر و با شرایط اولیه و مقادیر $\triangle x$ و تعداد گامها داده شده با روش انتگرال گیری گام بگام جوابها را بدست آورید و سپس هریک از جوابها را در صفحه xy رسم کنید .

الف - گام ٤ ; $y''=yy'+x \, ; \, x=0 , y=۱ , y'=0 \, ; \, \triangle x=۰٫۵$

ب - گام ۵ ; $y''=-y \, ; \, x=0 , y=0 , y'=۱ \, ; \, \triangle x=۰٫۱$

پ- $y''' - y'' - y' + y = x \; ; \; x = ٠ \, , \; y = ٠ \, , \; y' = ٠ \, , \; y'' = ١ \; ;$

گام ٥ ; $\Delta x =$ ٠ر١

ت- $y^{(IV)} + ٢y'' + y = x^{٢} \; ; \; x = ٠ \; ; \; y = -١ \, , \; y' = ٠ \, , \; y'' = ٠ \, ,$

گام ٥ ; $\Delta x = ١ \; ; \; y''' = ٠$

٣- دستگاه معادلات :

$$\frac{dx}{dt} = xy - z \;\; , \;\; \frac{dy}{dt} = x + z \; , \; \frac{dz}{dt} = xz$$

مفروض است. با روش انتگرال گیری گام بگام وشرایط اولیه $t = ٠$ و $x = y = z = ١$ و انتخاب $\Delta t = ١$ جواب را بازاء $t = ٤$ محاسبه کرده و چنانچه t را پارامتر فرض کنیم نتیجه را در فضای xyz رسم نمایید .

٤- هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را تبدیل بدستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نموده و مرتبه آنها را بیابید .

الف- $$\frac{d^{٢}y}{dx^{٢}} + y = z \quad , \quad \frac{d^{٢}z}{dx^{٢}} + ٤z = ٢y$$

ب- $$\frac{d^{٣}x}{dt^{٣}} - \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = t^{٢} \quad ,$$

$$\frac{d^{٢}x}{dt^{٢}} + \frac{dx}{dt} - \frac{d^{٢}y}{dt^{٢}} = e^{t}$$

پ- $$٢\frac{dx}{dt} - ٣\frac{dy}{dt} + x - y = \sin t \quad ,$$

$$٣\frac{dx}{dt} + ٢\frac{dy}{dt} - x = \cos t$$

جوابها

١- الف : $y' = z \;\; , \;\; z' = xz + x^{٢}y$

ب : $y' = z \;\; , \;\; z' = xz^{٢} - z$

پ : $y'=z , z'=w , w'=۳w-۵z+۶y+\sin x$

ت : $y'=z , z'=w , w'=u , u'=v , v'=x$

۲- الف : برای $x=0$, ۰ر۵ , ۱ , ۱ر۵ , ۲ مقادیر متناظر y به‌ترتیب عبارتند از :

y=۱ , ۱ , ۱ , ۱ر۱۲۵ , ۱ر۵۶۳

ب : y=0 , ۰ر۱ , ۰ر۲ , ۰ر۲۹۹ , ۰ر۳۹۶ , ۰ر۴۹۰

پ : y=0 , 0 , ۰ر۰۱ , ۰ر۰۳۱ , ۰ر۰۶۴۳ , ۰ر۱۱۱۵

ت : y=−۱ , −۱ , −۱ , −۱ , 0 , ۵

۳- y=۱ , ۳ , ۶ , ۱۲ , ۳۴ , x=۱ , ۱ , ۲ , ۱۰ , ۱۱۸

z=۱ , ۲ , ۴ , ۱۲ , ۱۳۲

۴- الف : $y'=w , w'=z-y , z'=u , u'=۲y-۴z$

ب : $x'=z , z'=u , y'=v , u'=z-v+t^۲ , v'=u+z-e^t$

پ : $$۱۳\frac{dx}{dt}=x+۲y+۲\sin t+۳\cos t ,$$

$$۱۳\frac{dy}{dt}=۵x-۳y+۲\cos t-۳\sin t$$

۹ . ۱- قضیه وجود - مسئله مقادیر اولیه و مسئله مقادیر کرانه‌یی

چنانچه قبلاً بیان نمودیم اگر $F(x , y)$ در شرایط معینی که در فصول آتی بطور مفصل آنها را مورد بحث قرار خواهیم داد صدق کند، معادله دیفرانسیل $y'=F(x , y)$ دارای جواب منحصر بفرد $y=f(x)$ که از نقطه داده شده (x_0 , y_0) میگذرد میباشد. لذا طبیعتاً انتظار داریم که در مورد معادله مرتبه n ام :

$$y^{(n)}=F(x , y , y' , \dots , y^{(n-1)}) \tag{۱ . ۹}$$

جواب منحصر بفردی که در شرایط اولیه زیر صدق میکند، بدست آوریم :

$$x=x_0 ; y=y_0 , y'=y_0' , \dots , y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \tag{۱ . ۹۱}$$

$x_0 , y_0 , \dots , y_0^{(n-1)}$ اعداد مفروضی میباشند. قضیه زیرصحت مطلب بالا را تأیید میکند.

قضیه وجود - فرض میکنیم $F(x , y , y' , \dots , y^{(n-1)})$ تابعی از متغیرهای

$x , y , y' , \dots , y^{(n-1)}$ بوده و در دو شرط زیر صدق میکند .

الف ـ در میدان $|x-x_0|< h , |y-y_0|< h , \dots , |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}|< h$ معین و پیوسته باشد .

ب ـ دراین میدان دارای مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته نسبت به $y , y' , \dots , y^{(n-1)}$ باشد .

دراینصورت معادله (۹ . ۱) دارای جوابی مانند $y=f(x)$ خواهد بود که خواص زیر را دارا میباشد .

۱ـ تابع $y=f(x)$ درفاصله $|x-x_0|< h_1$ معین بوده ودرشرایط اولیه(۹۱ . ۱) صدق میکند .

۲ـ این جواب منحصر بفرد میباشد. یعنی اگر $y=g(x)$ جواب معادله (۹ . ۱) باشد باید در شرایط اوایه (۹۱ . ۱) صدق کند .

در نقاطی که توابع $f(x)$ و $g(x)$ معین هستند $f(x)\equiv g(x)$ است . اثبات قضیه فوق را بعداً بطور مفصل مورد بحث قرار خواهیم داد . یکی از روشهای استدلال این قضیه آن است که نشان دهیم هنگامیکه $\Delta x \to 0$ حد جواب منکسریافته شده باروش انتگرال گیری گام بگام بسوی جواب $y=f(x)$ میل میکند . روش دیگر که متکی برتقریبات متوالی است و بروش **پیکارد*** موسوم است بعداً آنرا بررسی خواهیم نمود .

مثال ۱ ـ برای معادله دیفرانسیل $y''=\sin x$ جواب عمومی عبارت خواهد بوداز :

$$y'=-\cos x+c_1 \quad , \quad y=-\sin x+c_1x+c_2$$

حال اگربازاء $x=0$ مقادیر $y=y_0$ و $y'=y_0'$ (مقادیر اولیه) باشند معادلاتی که c_1 و c_2 را تعیین میکنند عبارت خواهند بوداز :

$$y_0=c_2 \quad , \quad y_0'=-1+c_1$$

و یا :

$$c_1=y_0'+1 \quad , \quad c_2=y_0$$

بنابراین جواب مورد نظر عبارت خواهد بود از :

$$y=-\sin x+(y_0'+1)x+y_0$$

Picard *

این مثال نشان میدهد درمواردیکه جواب معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را میتوانیم بدست آوریم معمولاً جواب عمومی باید بستگی به n مقدار ثابت دلخواه داشته باشد زیرا مقادیر اولیه (۱ . ۹۱) منجر به n معادله n مجهولی میگردد که عموماً دارای یکدسته جواب میباشد .

با درنظرگرفتن مطلب‌فوق و برای تعیین مقادیر ثابت دلخواه از روشهای دیگری که از مقادیر اولیه (۱ . ۹۱) استفاده نمیکنند بحث خواهیم نمود . یکی از متداول‌ترین روش برای تعیین مقادیرثابت‌دلخواه آن است که شرایط کرانه‌یی در انتهای‌فاصله $a \leqslant x \leqslant b$ برقرار باشد . فاصله $a \leqslant x \leqslant b$ فاصله‌یی است که جواب معادله دیفرانسیل در آن فاصله معین است .

مثال ۲- چنانچه میدانیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''=\sin x$ در فاصله $0 \leqslant x \leqslant \pi$ معین میباشد. لذا اگرفرض کنیم‌بازاء $x=0$ و $x=\pi$ مقدارyبه‌ترتیب برابر $y=y_1$ و $y=y_2$ باشد ، خواهیم داشت :

$$y_1=c_2 \qquad , \qquad y_2=c_1\pi+c_2$$

و یا :

$$c_1=\frac{y_2-y_1}{\pi} \quad , \quad c_2=y_1$$

در نتیجه جواب مورد نظر عبارت خواهد بود از :

$$y=-\sin x+\frac{y_2-y_1}{\pi}x+y_1$$

تعیین ضرایب در مثال ساده بالا چندان اشکالی ندارد ولی درحالت کلی یافتن جوابی که در شرایط کرانه‌یی‌صدق کند امکان ندارد وحتی اگر چنین جوابی موجود باشد لزومی ندارد که این‌جواب منحصر بفرد باشد. قضایای وجودی‌نیز برای مسائل شرایط کرانه‌یی موجود است ، ولی این قضایا مشکل بوده و ما از ذکر صورت قضیه آنها نیز خودداری میکنیم .

قضیه وجودی مذکور در فوق را میتوان در مورد n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تعمیم داد وبرای‌سهولت‌ذیلاً قضیه‌وجود را درمورد سه متغیر y , z , w بیان میکنیم.

قضیه ـ دستگاه سه معادله دیفرانسیل مرتبه اول :

$$\frac{dy}{dx}=F(x, y, z, w) \quad ,$$

$$\frac{dz}{dx}=G(x, y, z, w) \quad , \qquad (۱ . ۹۲)$$

$$\frac{dw}{dx}=H(x, y, z, w)$$

و میدان A که با رابطه زیر مشخص میشود مفروض است :

$$|x-x_0|<h \ , \ |y-y_0|<h \ , \ |z-z_0|<h \ , \ |w-w_0|<h$$

توابع F , G , H در میدان A پیوسته بوده ودارای مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته نسبت به y , z , w میباشد .

با فرضهای فوق میتوان نشان‌داد که معادله (۱ . ۹۲) دارای جواب منحصر بفرد :

$$y=f(x) \ , \ z=g(x) \ , \ w=p(x)$$

که در فاصله $|x-x_0|<h_1$ معین وازنقطه (x_0, y_0, z_0, w_0) میگذرد میباشد.

چنانچه قبلاً متذکر شدیم هرمعادله دیفرانسیل مرتبه n ام را میتوان بیک دستگاه n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کنیم و لذا قضیه بالا کلی بوده و معادله (۱ . ۹) حالت خاصی ازاین قضیه کلی میباشد و بالاخص شامل دستگاه معادلات زیر میباشد :

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}=F_۲\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \quad ,$$

$$\frac{d^۲y}{dt^۲}=F_٤\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \qquad (۱ . ۹٤)$$

چنانچه قانون نیوتن (نیرو = جرم × شتاب) را در مورد دستگاه ذرات بکار بریم دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم (۱ . ۹٤) عاید میگردد که آنرا میتوان با تبدیل متغیرزیر به یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل کنیم :

$$\frac{dx}{dt}=z=F_۱(t, x, y, z, w) \ , \ \frac{d^۲x}{dt^۲}=\frac{dz}{dt}=F_۲(t, x, y, z, w)$$

$$\frac{dy}{dt}=w=F_{۳}(t\,,x\,,y\,,z\,,w)\ \ ,\ \ \frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}=\frac{dw}{dt}=F_{٤}(t\,,x\,,y\,,z\,,w)$$

چنانچه شرایط قضیه وجود در مورد این دستگاه صادق باشد معادلات (۱ . ۹٤) دارای جواب منحصر بفرد بوده که در شرایط اولیه زیر صدق میکند :

$$t=t_{\circ}:x=x_{\circ}\ \ ,\ \ y=y_{\circ}\ \ ,\ \ \frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\circ}\ \ ,\ \ \frac{dy}{dt}=\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\circ}$$

لذا در مکانیک چنانچه وضعیتها و سرعتهای جمیع ذرات در یک لحظه از زمان در دست باشد حرکت دستگاه کاملاً مشخص میشود. بهمین ترتیب قوانین مشابهی در مدارهای الکتریکی موجود است .

مسائل

۱- جواب معادلات دیفرانسیل زیر را که درشرایط کرانه‌یی مربوطه صدق میکند بیابید.

الف - $y''=۱\ ;\ y(0)=۱\ ,\ y(۱)=۲$.

ب - $y^{(IV)}=0\ ;\ y(-۱)=۱,y(۱)=۱$ و $y'(۱)=0\,,\,y'(-۱)=0$.

۲- اگر $y=c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ باشد جوابی را بیابید (درصورت امکان) که در شرایط زیر صدق کند .

الف - $y(0)=۱\ ,\ y(\frac{۱}{۲}\pi)=-۱$.

ب - $y(0)=۱\ ,\ y(\pi)=۱$.　　پ - $y(0)=0\ ,\ y(\pi)=0$.

ت - $y(0)=0\ ,\ y(\pi)=۱$.

۳- با استفاده از قضیه وجود برای هریک از مسائل زیر نقطه‌یی مانند $(x_{\circ},y_{\circ})$ را بقسمی تعیین کنید که از آن نقطه یک جواب منحصر بفرد معادله بگذرد .

الف - $y'=\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}$.　　ب - $y'=\frac{y}{x}$.

پ - $y'=x\,Log\,x$.　　ت - $y'=\frac{x+y-۱}{x+۲y}$

جوابها

۱ـ الف : $\frac{1}{2}(x^2+x)+1$.   ب : ۱ .

۲ـ الف : $\cos x - \sin x$.   ب : بدون جواب .

پ : $c_2 \sin x$.   ت : بدون جواب .

۳ـ الف : تمام نقاط باستثنای $(0, 0)$.   ب : $x_0 \neq 0$.

پ : $x_0 > 0$.   ت : جمیع نقاط باستثنای نقاط واقع برخط $x+2y=0$.

فصل دوم

معادلات مرتبه و درجه اول

۱ . ۲- اشکال متفاوت معادله

با توجه به تعاریف مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل میتوان هرمعادله دیفرانسیل مرتبه و درجه اول را بصورت :

$$Q(x\,,\,y)y'+P(x\,,\,y)=o \qquad (۲ . ۱)$$

نوشت . چنانچه $Q(x\,,\,y)\neq o$ باشد رابطه بالا معادل :

$$y'=F(x\,,\,y) \quad , \quad F=-\frac{P}{Q} \qquad (۲ . ۱۱)$$

خواهد بود . بنابر قضیه وجود (شماره ۹ . ۱) چنانچه توابع F , $\frac{\partial F}{\partial y}$ در قسمتی از صفحه xy پیوسته باشند معادله (۱۱ . ۲) درهرنقطه واقع دراین قسمت از صفحه دارای جواب منحصر بفرد خواهد بود . نقاطی‌که $Q(x\,,\,y)=o$ میباشند نقاط غیرعادی بوده و باید جداگانه مورد بررسی قرارگیرد .

چنانچه در شماره (۳ . ۱) یادآورشدیم اگر دو طرف معادله (۱ . ۲) را در dx ضرب‌کنیم ، میتوان متغیرها را در معادله حاصل یعنی :

$$P(x\,,\,y)dx+Q(x\,,\,y)dy=o \qquad (۲ . ۱۲)$$

بیک نحو مورد بررسی قرار داد . بعبارت دیگر درمواردیکه $Q(x\,,\,y)\neq o$ است از تقسیم دو طرف رابطه (۱۲ . ۲) بر $Q(x\,,\,y)dx$ معادله (۱۱ . ۲) و همچنین اگر $P(x\,,\,y)\neq o$ باشد با تقسیم دو طرف رابطه (۱۲ . ۲) بر $P(x\,,\,y)dy$ معادله زیر بدست میآید :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{Q(x\,,\,y)}{P(x\,,\,y)}=o \qquad (۲ . ۱۳)$$

جواب معادله(۲ . ۱۲)را میتوان تابعی از x مانند y(x) و یا بالعکس تابعی از y مانند x(y) پنداشت. درصورتیکه هریک از توابع فوق در رابطه (۲ . ۱۲) متحداً صدق کند. درنقاطی که دوتابع P و Q تواماً متحد صفر میباشند دو معادله(۲ . ۱۱) و(۲ . ۱۳) بدون معنی بوده و چنین نقاطی را بنابرتعریف **نقاط غیر عادی** معادله (۲ . ۱۲) گویند.

تعریف ـ بنابر تعریف میدان یا ناحیه باز، قسمتی از صفحه xy مانند A میباشد که در جمیع نقاط واقع در A دو شرط اساسی زیر تواماً برقرار باشد.

الف ـ هردونقطه غیر مشخص واقع در A را بتوان با خط منکسری که کاملاً در A قرار دارد بیکدیگر وصل کرد.

ب ـ برای هرنقطه O واقع در A دایره‌یی بمرکز O بتوان یافت که جمیع نقاط واقع دراین دایره نیز در A باشد. مثلاً جمیع نقاط واقع درداخل یک مربع. جمیع نقاطی که برای آنها $x > 0$ (نیم صفحه) و جمیع نقاط واقع درصفحه باستثنای نقاط $A(1 , 0)$ و $B(0 , 1)$ هرکدام یک میدان میباشند.

۲ . ۲- معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

$$P(x , y)dx+Q(x , y)dy=0$$ (۲ . ۲)

را بنابر تعریف کامل گوییم درصورتیکه بتوان تابعی مانند u(x , y) بقسمی یافت که:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P \quad و \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q$$ (۲ . ۲۱)

و لذا $du=Pdx+Qdy$. بطورکلی معادله (۲ . ۲) را درمیدان D کامل گویند درصورتیکه رابطه (۲ . ۲۱) درمیدان D برقرار باشد.

جوابهای معادله کامل (۲ . ۲) منحنی‌های تراز تابع u(x , y) یعنی منحنی‌های $u(x , y)=c$ میباشند. (شکل ۱ . ۲)

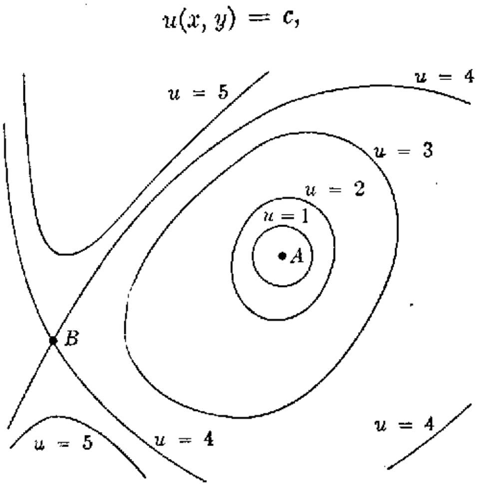
مثلاً اگر $y=f(x)$ یکی‌از جوابهای معادله(۲ . ۲) باشد دراین صورت درامتداد خم $y=f(x)$ چنین داریم:

$$\frac{du}{dx}=P+Q\frac{dy}{dx}=0$$

و بالنتیجه $u=c_۱$ خواهد بود . بعبارت کلی‌تر چنانچه بتوان یکی از منحنی‌های تراز $u=c$ را بشکل $y=f(x)$ یا $[x=g(y)]$ بیان‌نمود دراینصورت $y=f(x)$ یکی‌از جوابهای (۲ . ۲) خواهد بود . چه اگر $y=f(x)$ در معادله $u(x , y)=c$ صدق کند ، پس‌از مشتق گیری از معادله اخیر خواهیم داشت :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot ۱+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=o \quad , \quad P+Q\frac{dy}{dx}=o$$

میتوان بحث‌های بالا را در عبارت زیر خلاصه نمود :



شکل ۱ . ۲- منحنی‌های تراز u(x , y)

جواب معادله‌دیفرانسیل کامل مرتبه‌اول منحنی‌های تراز تابع u میباشد .

ممکن است نتوانیم یکی از منحنی‌های تراز را بصورت $y=f(x)$ و یا $x=g(y)$ بیان کنیم و حتی ممکن است نقاط استثنایی بر روی برخی از منحنی‌های تراز قرار گیرند . (شکل ۱ . ۲ نقطه B) .

مثال ۱- در معادله دیفرانسیل $xdx+ydy=o$ واضح است که :

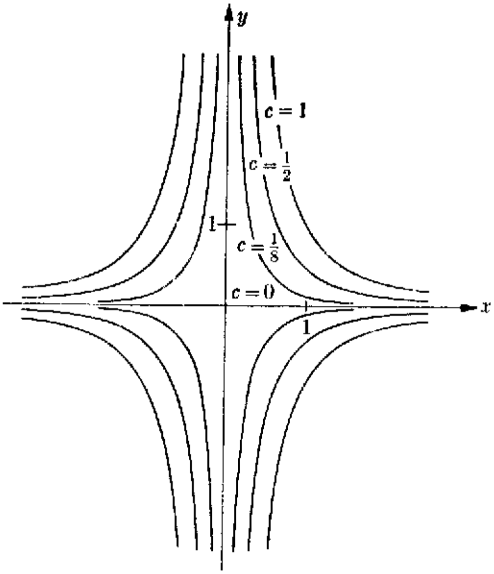
$$u=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲)$$

میباشد . زیرا :

$$du = \frac{۱}{۲}\, d(x^{۲} + y^{۲}) = xdx + ydy$$

لذا جوابها دوایر متحدالمرکز $x^{۲}+y^{۲}=c$ خواهند بود. بازاء $c=0$ منحنی تراز منجر به مبدأ مختصات که نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل میباشد میگردد و برای مقادیر $c<0$ مکان مورد نظر موهومی خواهد بود.

مثال ۲ - برای معادله دیفرانسیل $۲xydx + x^{۲}dy = 0$ جوابها منحنی‌های $u = x^{۲}y = c$ که در شکل (۲ . ۲) نشان داده شده است میباشند.



شکل ۲ . ۲- منحنی‌های تراز $u=x^{۲}y$

بازاء $c=0$ منحنی تراز متشکل از خطوط $x=0$ و $y=0$ خواهد بود. نقطه $(0 , 0)$ نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل بوده که از آن دو جواب میگذرد.

مسائل

۱- منحنی‌های تراز هریک از توابع $u(x , y)$ را در صفحه xy رسم کنید.

الف - $u=۲x^{۲}+y^{۲}$. ب - $u=۲x-۳y$.

پ ـ $u=y-۲x^{۲}$.   ت ـ $u=y^{۲}e^{-x}$.

۲ـ معادله دیفرانسیل هریک از طایفه منحنی‌های تراز مسئله یک را یافته و سپس نقاط غیر عادی هرکدام از آنها را بیابید .

۳ـ نشان دهید که معادلات دیفرانسیل زیر کامل بوده و جواب عمومی را بدست آورید .

الف ـ $xdx+۳y^{۲}dy=0$.   ب ـ $e^{x}dx-۲dy=0$.

پ ـ $y^{۲}dx+۲xydy=0$.   ت ـ $\frac{xdy-ydx}{x^{۲}}=0$.

۴ـ الف ـ معادله مرتبه اول $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را میتوان با دستگاه دو معادله مرتبه اول :

$$\frac{dx}{dt}=Q(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-P(x,y) \qquad (I)$$

تعویض نمود زیرا اگر t را بین معادلات (I) حذف کنیم معادله :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

حاصل میگردد. نشان دهید اگر $x=\varphi(t)$ و $y=\psi(t)$ یکی از جوابهای معادلات (I) باشد و t را از معادله $x=\varphi(t)$ (درصورت امکان) یافته وسپس آنرا در معادله $y=\psi(t)$ جایگزین کنیم تابع حاصل یعنی $y=f(x)$ در معادله $Pdx+Qdy=0$ صدق میکند.

ب ـ نتایج قسمت (الف) را در مورد معادله $ydx+xdy=0$ تعمیم داده وتحقیق کنید که جواب عمومی معادلات (I) عبارتند از $x=c_{۱}e^{t}$ و $y=c_{۲}e^{-t}$ و سپس با حذف t جواب عمومی معادله را پیدا کنید .

جوابها

۲ـ الف : $۲xdx+ydy=0$, نقطه غیر عادی $(0,0)$.

ب : $۲dx-۳dy=0$.   پ : $-۴xdx+dy=0$.

ت : $-y^{۲}e^{-x}dx+۲ye^{-x}dy=0$, $y=0$ غیر عادی .

۳ـ الف : $x^{۲}+۲y^{۳}=c$ جمیع نقاط (x,y) باستثنای $(0,0)$.

ب : $e^x - ۲y = c$. پ : $xy^۲ = c$.

ت : $\frac{y}{x} = c \quad (x \neq o)$.

۴ ـ ب : $\frac{dx}{dt} = x \ , \ \frac{dy}{dt} = -y \ , \ xy = c$.

۳ . ۲- شرایط کامل بودن معادله

قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه عبارت(۲ . ۲) دیفرانسیل کامل باشد آنستکه $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد . توابع $P(x , y)$ و $Q(x , y)$ بازاء جمیع نقاط واقع در صفحه دارای مشتقات نسبی پیوسته میباشند .

اثبات :

الف ـ شرط لازم است ـ زیرا اگر رابطه (۲ . ۲) دیفرانسیل کامل باشد بنابر تعریف میتوان تابعی مانند u بقسمی یافت که :

$$P(x , y)dx + Q(x , y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

و از آنجا داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x , y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x , y)$$

و یا :

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

چون بنابفرض توابع $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ پیوسته میباشند لذا هریک از توابع $\frac{\partial^۲ u}{\partial y \partial x}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}$ پیوسته بوده و از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^۲ u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

بنابراین :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ب ـ شرط کافی است ـ در این مورد فرض مینماییم که بازاء جمیع نقاط واقع درصفحه رابطه :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (۲ . ۳)$$

برقرار باشد. تأثیر نقاط انفصال را بعداً مورد بررسی قرار خواهیم داد . منظور یافتن تابعی مانند u میباشد بقسمی که :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x , y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x , y) \qquad (۲ . ۳۱)$$

چنانچه به تابع u مقدار ثابتی اضافه یا کم کنیم در رابطه (۲ . ۲) تغییری ایجاد نخواهد شد و لذا شرط اضافی :

$$u(0 , 0)=0 \qquad (۲ . ۳۲)$$

را نیز برقرار مینماییم زیرا اگر مثلاً $u(0 , 0)=c$ و $u(x , y)$ یکی از جوابهای معادله (۲ . ۳۱) باشد واضح است که $v(x , y)=u(x , y)-c$ در رابطه (۲ . ۳۱) صدق نموده و $v(0 , 0)=0$ میباشد . برای یافتن تابع $u(x , y)$ ابتدا مقادیر u رادرامتداد محور x ها مییابیم . دراین امتداد $y=0$ و $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x , 0)$. چون $u(x , 0)$ فقط به x بستگی داشته و رابطه (۲ . ۳۲) نیز صادق است لذا چنین داریم :

$$\int_0^{x_1}\frac{\partial u}{\partial x}dx=\Big[u(x , 0)\Big]_0^{x_1}=u(x_1 , 0)-u(0 , 0)$$

و یا :

$$u(x_1 , 0)=\int_0^{x_1}\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_0^{x_1}P(x , 0)dx \qquad (۲ . ۳۳)$$

بطریق مشابه میتوان مقادیر u را در امتداد محور y ها بدست آورد . یعنی :

$$u(0 , y_1)=\int_0^{y_1}\frac{\partial u}{\partial y}dy+u(0 , 0)=\int_0^{y_1}Q(0 , y)dy \qquad (۲ . ۳٤)$$

مقدار $u(x , y)$ را در نقطه (x_1 , y_1) میتوان از رابطه (۲ . ۳۳) بدستآورد :

$$u(x_1, y_1)-u(x_1, 0)=\int_0^{y_1}\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y)dy=\int_0^{y_1}Q(x_1, y)dy \ ,$$

$$u(x_1, y_1)=u(x_1, 0)+\int_0^{y_1}Q(x_1, y)dy$$

$$=\int_0^{x_1}P(x, 0)dx+\int_0^{y_1}Q(x_1, y)dy \qquad (۲ . ۳۵)$$

بطریق مشابه از معادله (۳۴ . ۲) خواهیم داشت :

$$u(x_1, y_1)=u(0, y_1)+\int_0^{x_1}P(x, y_1)dx$$

$$=\int_0^{x_1}P(x, y_1)dx+\int_0^{y_1}Q(0, y)dy \qquad (۲ . ۳۶)$$

روابط (۳۵ . ۲) و (۳۶ . ۲) مقدار $u(x, y)$ را در نقطه (x_1, y_1) مشخص میکند ولی طرف راست روابط فوق بایکدیگر مساوی میباشند چه تفاوت آنها برابر :

$$\int_0^{x_1}P(x, 0)dx+\int_0^{y_1}Q(x_1, y)dy-\int_0^{x_1}P(x, y_1)dx-\int_0^{y_1}Q(0, y)dy$$

$$=\int_0^{y_1}[Q(x_1, y)-Q(0, y)]dy-\int_0^{x_1}[P(x, y_1)-P(x, 0)]dx$$

$$=\int_0^{y_1}\int_0^{x_1}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dxdy-\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dydx$$

جمل واقع درسمت راست رابطه بالا انتگرال مضاعف را در مستطیل $0 \leqslant x \leqslant x_1$ ، $0 \leqslant y \leqslant y_1$ نمایش داده و آنجاییکه $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ است ، انتگرالهای مضاعف

بایکدیگر برابر بوده و تفاوت آنها صفر میباشد و بالنتیجه روابط (۲ . ۳۵) و (۲ . ۳۶) با یکدیگر برابر هستند .

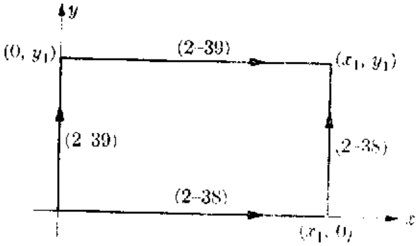
اکنون نشان خواهیم داد که در هرنقطه غیر مشخص مانند (x_1 , y_1) رابطه (۲ . ۳۱) برقرار است. زیرا باثابت نگاهداشتن y_1 در رابطه (۲ . ۳۶) وبا توجه باینکه توابع P و Q دارای مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته بوده خواهیم داشت :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1} P(x , y_1)dx=P(x_1 , y_1)$$

بطریق مشابه چنانچه x_1 را در رابطه (۲ . ۳۵) ثابت فرض کنیم چنین داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}=\frac{\partial}{\partial y_1}\int_0^{y_1} Q(x_1 , y)dy=Q(x_1 , y_1)$$

بالنتیجه رابطه (۲ . ۳۱) در نقطه غیر مشخص (x_1 , y_1) صادق بوده و بنابراین معادله (۲ . ۲) معادله دیفرانسیل کامل میباشد. روابط (۲ . ۳۵) و (۲ . ۳۶) ازبررسی تغییرات u در امتداد مسیرهایی که درشکل (۲ . ۳) نشان داده شده است بدست آمده است . مثلاً در رابطه (۲ . ۳۵) جمله $\int_0^{x_1} P(x , 0)dx$ افزایش حاصل در مقدار u که در نتیجه حرکت از نقطه $(0 , 0)$ به نقطه $(x_1 , 0)$ وجمله دوم تغییر u را که بواسطه پیمودن مسیر $x=x_1$ از نقطه $(x_1 , 0)$ به نقطه (x_1 , y_1) حاصل میشود نمایش میدهد .



شکل ۳ . ۲- حل معادله کامل باانتگرال گیری

چنانچه درشکل (۲ . ۴) نمایش داده شده است میتوان دونقطه $(0 , 0)$ و (x_1 , y_1) را با منحنی C بیکدیگر وصل کرد . فرض میکنیم معادلات خم C بصورت پارامتری زیر باشد :

$$x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ 0\leqslant t\leqslant t_1 \qquad \text{(۲ . ۳۷)}$$

نقاط $(0 , 0)$ و (x_1 , y_1) را به ترتیب متناظربا $t=0$ و $t=t_1$ اختیار مینماییم لذا در امتداد این مسیر چنین داریم :

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}$$

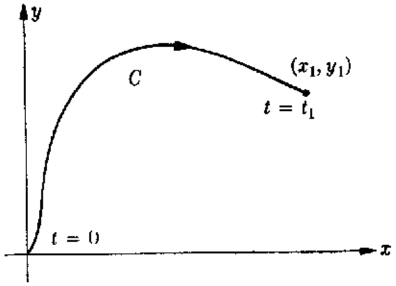
بنابراین :

$$u(x_1\,,y_1)=\int_0^{t_1}\frac{du}{dt}dt+u(0\,,0)=\int_0^{t_1}\frac{du}{dt}dt$$

$$u(x_1\,,y_1)=\int_0^{t_1}\left\{P[x(t)\;,\;y(t)]\frac{dx}{dt}+Q[x(t)\;,\;y(t)]\frac{dy}{dt}\right\}dt \tag{۲ . ۳۸}$$

رابطه بالا را میتوان بصورت انتگرال منحنی‌الخط در امتداد مسیرC تعبیر نمود. طرف‌راست معادله (۲ . ۳۸) را معمولاً بیکی‌از صور زیر نمایش میدهند :

$$\int_{C\,(0\,,0)}^{(x_1\,,y_1)}Pdx+Qdy \quad \text{یا} \quad \int_C Pdx+Qdy$$



شکل ۴ . ۲ـ مسیرانتگرال منحنی‌الخط

بنابراین با توجه به سمبول بالا رابطه (۲ . ۳۸) بصورت زیر درمیآید :

$$u(x_1\,,y_1)=\int_C Pdx+Qdy \tag{۲ . ۳۹}$$

اگر خم C را خط :

$$x=x_1t\;,\;y=y_1t\;,\;0\leqslant t\leqslant 1 \tag{۲ . ۳۹۰}$$

انتخاب نماییم رابطه (۲ . ۳۸) بصورت زیر در میآید :

$$u(x_1\,,y_1)=\int_0^1[x_1P(x_1t\,,y_1t)+y_1Q(x_1t\,,y_1t)]dt$$

و یا :

$$u(x\,,y)=\int_0^1[xP(xt\,,yt)+yQ(xt\,,yt)]dt \tag{۲ . ۳۹۱}$$

۳۱ . ۲- حل مسئله شرایط اولیه

اگر جواب عمومی معادله دیفرانسیل کامل بصورت $u(x , y)=c$ باشد جواب گذرنده از نقطه (x_0 , y_0) با انتخاب c از معادله $u(x_0 , y_0)=c$ بدست میاید و لذا معادله جواب خصوصی مورد نظر عبارت است از :

$$u(x , y)-u(x_0 , y_0)=0$$

(دربعضی از موارد ممکن است مکان بالا شامل چندین منحنی بوده که یکی از آنها جواب خصوصی موردنظرباشد) . چنانچه u را بتوان با انتگرال گیری منحنی‌الخط درامتداد منحنی C بدست آورد ، رابطه $u(x , y)-u(x_0 , y_0)=0$ بصورت :

$$\int_{(x_0 , y_0)}^{(x , y)} Pdx+Qdy=0$$

در خواهد آمد .

تبصره - در اثبات قضیه بالا فرض کردیم که توابع P و Q بازاء جمیع مقادیر (x , y) دارای مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته باشد . حال چنانچه نقطه (a , b) یکی از نقاط انفصال باشد بطورکلی نمیتوانیم تابع منحصر بفرد $u(x , y)$ را چنان تعیین کنیم که‌عبارت $du=Pdx+Qdy$ درمیدانی که نقطه (a , b) را دربرندارد برقرار باشد. برای میدانهایی که نقطه (a , b) رادربرنداشته باشند (شکل ۵ . ۲) میتوانیم تابع u را بیابیم زیرا در هرنقطه (x , y_1) این میدان میتوان u را بوسیله رابطه (۲۹ . ۲) محاسبه کرد . C یک مسیر غیر مشخص بوده که کاملاً درمیدان قرار داشته و نقطه ثابت (x_0 , y_0) ، [بعوض $(0 , 0)$] را به نقطه (x_1 , y_1) وصل میکنند . روش بالا را نیز میتوان برای میدان شکل (۶ . ۲) بکار برد . ولی بطورکلی برای دو مسیر C_1 و C_2 دو مقدار متفاوت برای u حاصل میگردد . و بالنتیجه u منحصر بفرد نخواهد بود .

مثال ۱ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$(۳x^۲y+۲xy)dx+(x^۳+x^۲+۲y)dy=0$$

را بدست آورید .

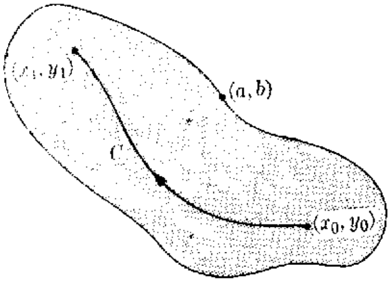
حل - شرط (۳ . ۲) برقرار بوده و لذا معادله فوق کامل میباشد . اگر مسیر C را خط (۳۹۰ . ۲) اختیارکنیم تابع u از رابطه (۳۹۱ . ۲) بدست میاید . یعنی :

$$u(x\ ,\ y)=\int_{۰}^{۱}[x(۳t^{۳}x^{۲}y+۲t^{۲}xy+y(x^{۳}t^{۳}+x^{۲}t^{۲}+۲ty)\ ]dt$$

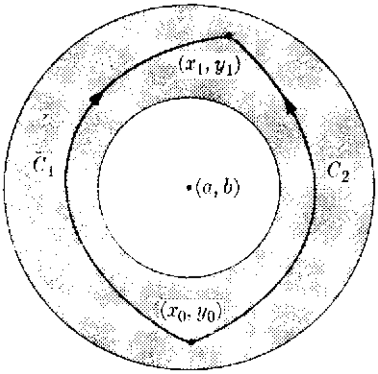
$$=۳x^{۲}y\int_{۰}^{۱}t^{۳}dt+۲x^{۲}y\int_{۰}^{۱}t^{۲}dt+x^{۳}y\int_{۰}^{۱}t^{۳}dt$$

$$+x^{۲}y\int_{۰}^{۱}t^{۲}dt+۲y^{۲}\int_{۰}^{۱}tdt$$

$$=\frac{۳}{۴}x^{۳}y+\frac{۲}{۳}x^{۲}y+\frac{۱}{۴}x^{۳}y+\frac{۱}{۳}x^{۲}y+y^{۲}=x^{۳}y+x^{۲}y+y^{۲}$$



شکل ۵ . ۲- میدانی که جواب معادله دیفرانسیل کامل را میتوان بصورت انتگرال منحنی‌الخط نمایش داد .



شکل ۶ . ۲- میدانی که نمیتوان جواب معادله دیفرانسیل کامل را بصورت انتگرال منحنی‌الخط نمایش داد .

مثال ۲- جواب عمومی معادله :

$$(xy\cos xy+\sin xy)dx+(x^{۲}\cos xy+e^{y})dy=۰$$

را پیدا کنید .

حل - بسهولت معلوم میشود که :

$$P=xy\cos xy+\sin xy\quad ,\quad Q=x^{۲}\cos xy+e^{y}$$

پس :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=۲x\cos xy-x^{۲}y\sin xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

لذا معادله داده شده دیفرانسیل کامل بوده و تابع $u(x , y)$ را میخواهیم چنان تعیین کنیم که :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy\cos xy+\sin xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{۲}\cos xy+e^{y}$$

چنانچه از معادله دومی نسبت به y انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت :

$$u=x\sin xy+e^{y}+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy\cos xy+\sin xy+\varphi'(x)=xy\cos xy+\sin xy$$

لذا $\varphi'(x)=o$ و یا $\varphi(x)=c$. بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر بدست میآید :

$$u(x , y)=x\sin xy+e^{y}=c$$

مثال ۳- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید :

$$\frac{(۱+y^{۲})ydx+(۱+x^{۲})xdd}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

حل - با کمی توجه آشکار میگردد که :

$$P=\frac{(۱+y^{۲})y}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \quad , \quad Q=\frac{(۱+x^{۲})x}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y+y^{۳}}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right]=\frac{۱+x^{۲}+y^{۲}+۳x^{۲}y^{۲}}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x+x^{۳}}{(۱+x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

بنابراین معادله بالا معادله دیفرانسیل کامل بوده و تابع $u(x , y)$ را میتوان مثلاً از رابطه زیر بدست آورد :

$$u(x\,,y)=\int\frac{(١+y^٢)y}{(١+x^٢+y^٢)^{\frac{٣}{٢}}}\,dx+\varphi(y)=\int\frac{ydx}{(١+x^٢+y^٢)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$-\int\frac{x^٢ydx}{(١+x^٢+y^٢)^{\frac{٣}{٢}}}+\varphi(y)=\int\frac{ydx}{(١+x^٢+y^٢)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$+\int xy\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{١}{(١+x^٢+y^٢)^{\frac{١}{٢}}}\right]dx+\varphi(y)=\frac{xy}{\sqrt{١+x^٢+y^٢}}+\varphi(y)$$

از طرف دیگر : $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+x^٣}{(١+x^٢+y^٢)^{\frac{٣}{٢}}}+\varphi'(y)$ و یا $\varphi'(y)=0$

بالنتیجه جواب عمومی چنین است :

$$\frac{xy}{\sqrt{١+x^٢+y^٢}}=c$$

تبصره - اگر چه معادله بالا معادله دیفرانسیل کامل میباشد ولی اگر مخرجها را ازبین ببریم معادله دیفرانسیل حاصل کامل نخواهد بود .

مسائل

١- نشان دهید که معادلات زیر کامل بوده و جوابهای آنها را بدست آورید .

الف - $٢xydx+(x^٢+١)dy=0$

ب - $(٢x+y)dx+(x-٢y)dy=0$

پ - $(١٥x^٢y^٢-y^٤)dx+(١٠x^٣y-٤xy^٣+٥y^٤)dy=0$

ت - $e^{x^٢y}(١+٢x^٢y)dx+x^٣e^{x^٢y}dy=0$

ث - $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0$

ج - $٣xy(١+x^٢)^{\frac{١}{٢}}dx+[(١+x^٢)^{\frac{٣}{٢}}+\sin y]dy=0$

چ - $(x^۲+y^۲)^۲(xdx+ydy)+۲dx+۳dy=۰$

ح - $\frac{ydx-xdy}{y^۲}+xdx=۰$

خ - $(۲xy^۲+۲xye^{۲x}+e^{۲x}y)dx+(۲x^۲y+xe^{۲x})dy=۰$

د - $\frac{(y-x)dx-۲xdy}{(x+y)^۳}=۰$

ذ - $x\sqrt{x^۲+y^۲}dx-\frac{x^۲y}{y-\sqrt{x^۲+y^۲}}dy=۰$

ر - $(٤x^۳-\sin x+y^۳)dx-(y^۲+۱-۳xy^۲)dy=۰$

۲- در هریک از معادلات زیر جوابهای خصوصی مربوطه را تعیین کنید .

الف - $(۲x+y+۱)dx+(x+۳y+۲)dy=۰ \;;\; y(۰)=۰$

ب - $(۳x+y+۵)^۳(۳dx+dy)+۲dx-dy=۰ \;;\; y(-۲)=۱$

پ - $x^۲dx+ye^ydy=۰ \;;\; y(۰)=۱$

ت - $e^{x^۲}dx+\sin(۱+y^۲)dy=۰ \;;\; y(۰)=۰$

ث - $ye^{-x^۲}dx+\left[\int_۰^x e^{-t^۲}dt+y\right]dy=۰ \;;\; y(۱)=۱$

ج - $(y^۲e^{xy^۲}+٤x^۳)dx+(۲xye^{xy^۲}-۳y^۲)dy=۰ \;;\; y(۱)=۰$

۳- جواب‌عمومی معادله $(x+y)dx+xdy=۰$ راباهریک‌ازروابط (۲ . ۳۵) و (۲ . ۳۶) و (۲ . ۳۷) بدست آورید .

٤- بکمک‌انتگرال منحنی‌الخط (۲ . ۳۸) جواب‌عمومی‌معادله کامل $\frac{ydx-xdy}{x^۲+y^۲}=۰$ را از نقطه $(۱ , ۰)$ تا نقطه $(x_۱ , y_۱)$ محاسبه کنید . مسیر C را دایره $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ $[۰\leqslant t\leqslant \theta_۱]$ فرض کنید .

۵- n را چنان تعیین کنید که معادله دیفرانسیل :

$$\frac{ax^۲+۲bxy+cy^۲}{(x^۲+y^۲)^n}(ydx-xdy)=0$$

کامل باشد .

٦ـ معادله دیفرانسیل :

$$(Pdx+Qdy)e^{[f(x)dx]}=0 \qquad (I)$$

که درآن P , Q , f توابع غیر مشخصی از x هستند مفروض است .

الف ـ چه رابطه‌یی بین P , Q , f و مشتقات آنها باید برقرار باشد تا معادله (I) کامل گردد .

ب ـ با استفاده از قسمت (الف) عامل انتگرال کننده و از آنجا جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^۳+xy^٤)dx+۲y^۳dy=0$ را بدست آورید .

جوابها

۱ـ الف : $x^۲y+y=c$.   ب : $x^۲+xy-y^۲=c$.

پ : $٥x^۳y^۲-xy^٤+y^٥=c$.   ت : $xe^{x^۲y}=c$.

ث : $x\sin(x+y)=c$.   ج : $y(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}-\cos y=c$.

چ : $(x^۲+y^۲)^۳+۱۲x+۱۸y=c$.

ح : $۲x+x^۲y=cy$.   خ : $x^۲y^۲+xe^{۲x}y=c$.

د : $x=c(x+y)^۲$.   ذ : $(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}+y^۳=c$.

ر : $۳x^٤+۳\cos x+۳y^۳x-y^۳-۳y=c$ ..

۲ـ الف : $۲x^۲+۲xy+۳y^۲+۲x+٤y=0$.

ب : $(۳x+y+٥)^٤+٤(۲x-y+٥)=0$.

پ : $x^۳+۳e^y(y-۱)=0$.

ت : $\int_0^x e^{t^۲}dt+\int_0^y \sin(t^۲)dt=0$.

ث : $\text{۲}y\int_{0}^{x} e^{-t^{۲}}dt+y^{۲}=\text{۲}\int_{0}^{۱} e^{-x^{۲}}dx+\text{۱}$.

ج : $e^{xy^{۲}}+x^{٤}-y^{۳}=\text{۲}$.

۳- $x^{۲}+\text{۲}xy=c$.

٤- $\theta=\mathrm{Arc}tg\left(\frac{y}{x}\right)=c$.

٥- $n=\text{۲}$.

٦- الف : $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}+Qf(x)$.

ب : عامل انتگرال کننده $e^{x^{۲}}$ ، جواب عمومی $y^{٤}+x^{۲}-\text{۱}=ce^{-x^{۲}}$.

٤ . ۲- معادلاتی که متغیرها از یکدیگر جدا میشوند

این معادلات حالت خاصی از معادله دیفرانسیل کامل میباشند . چه اگر P تابع x و Q تابع y باشد دراینصورت $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ بوده ولذا چنانچه P را به X و Q را به Y نمایش دهیم رابطه (۲ . ۲) بصورت زیر تبدیل خواهد شد :

$$Xdx+Ydy=0 \qquad (\text{۲ . ٤})$$

و یا :

$$\int Xdx+\int Ydy=c$$

درمواردیکه P و Q حاصل‌ضرب توابعی از x مانند X و $X_{۱}$ و توابعی از y مانند Y و $Y_{۱}$ باشند میتوان آنرا مبدل به معادله (٤ . ۲) نمود . چه اگر قرار دهیم :

$$P=XY_{۱} \quad , \quad Q=X_{۱}Y$$

رابطه (۲ . ۲) پس‌از تقسیم بر $X_{۱}Y_{۱}$ بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{X}{X_{۱}}dx+\frac{Y}{Y_{۱}}dy=0 \qquad (\text{۲ . ٤۱})$$

باید توجه‌داشت که باتقسیم‌بر $X_{۱}Y_{۱}$ تعدادی‌ازجوابهای معادله (۲ . ۲)ازبین میروند. زیرا اگرمثلاً $x=a$ یکی از ریشه‌های $X_{۱}=0$ باشد واضح است $x=a$ یکی از جوابهای معادله (۲ . ۲)بوده ولی معمولاً این جواب ، جواب معادله (٤۱ . ۲) نیست .

مثال ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$x(y^۲-۱)dx-y(x^۲-۱)dy=0 \qquad (A)$$

حل ـ با فرض $x\ ,\ y\neq\pm ۱$ چنین داریم :

$$\frac{x}{x^۲-۱}dx-\frac{y}{y^۲-۱}dy=0\ ,\ Log|x^۲-۱|-Log|y^۲-۱|=-Log c$$

لذا :

$$y^۲-۱=c(x^۲-۱) \qquad (B)$$

کاملاً آشکار است که $x=\pm ۱$ و $y=\pm ۱$ ریشه‌های معادله (A) بوده و در معادله (B) نیز صدق میکنند .

۵ . ۲- معادلات همگن

معادله دیفرانسیل (۲ . ۲) را در صورتی همگن درجه n ام نامیم که توابع $P(x , y)$ و $Q(x , y)$ توابع همگن درجه n ام از متغیرهای x و y باشند . یعنی :

$$P(vx , vy)=v^nP(x , y)\ ,\ Q(vx , vy)=v^nQ(x , y) \qquad (۲ . ۵)$$

چنانچه در رابطه (۲ . ۵) ، v را به $\frac{۱}{x}$ و $\frac{y}{x}$ را به t بدل کنیم ، خواهیم داشت:

$$P(x , y)=x^nP(۱ , t)\ ,\ Q(x , y)=x^nQ(۱ , t) \qquad (۲ . ۵۱)$$

با استفاده از رابطه (۲ . ۵۱) و جایگزین کردن $\frac{y}{x}=t$ معادله (۲ . ۲) بصورت زیر درمیآید :

$$x^nP(۱ , t)dx+x^nQ(۱ , t)(tdx+xdt)=0$$

و یا :

$$[P(۱ , t)+tQ(۱ , t)]dx+xQ(۱ , t)dt=0$$

پس :

$$Log x+\int\frac{Q(۱ , t)}{P(۱ , t)+tQ(۱ , t)}dt=c$$

قضیه ـ اگر رابطه (۲ . ۲) همگن و کامل بوده و درجه همگنی آن برابر ۱ — نباشد جواب عمومی $xP(x , y)+yQ(x , y)=c$ خواهد بود .

اثبات ـ زیرا اگر قرار دهیم $u=Px+Qy$ چنین داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}=P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}$$

از طرفی چون بنابر قضیه اولر چون توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ همگن درجه n ام میباشند پس $x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=nP$ بنابراین رابطه بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P+nP=(n+۱)P$$

بطریق مشابه :

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q+nQ=(n+۱)Q$$

از طرف دیگر :

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(n+۱)(Pdx+Qdy)$$

و چون بنابر فرض $n\neq-۱$ است پس :

$$Pdx+Qdy=\frac{d(Px+Qy)}{n+۱}=0 \quad \text{و یا} \quad .Px+Qy=c$$

حال چنانچه $n=-۱$ باشد ، جواب عمومی معادله (۲ . ۲) بایک کوادراتور بدست میآید . دراینصورت معادله $\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}=0$ معادله دیفرانسیل کامل خواهد بود زیرا :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{Px+Qy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{Px+Qy}\right)$$

و یا :

$$(Px+Qy)\frac{\partial P}{\partial y}-Px\frac{\partial P}{\partial y}-PQ-Py\frac{\partial Q}{\partial y}=(Px+Qy)\frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$-Qx\frac{\partial P}{\partial x}-PQ-Qy\frac{\partial Q}{\partial x}$$

پس از ساده نمودن دوطرف رابطه بالا خواهیم داشت :

$$Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\left(x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

ولی از آنجایی که بنابر فرض توابع P و Q همگن درجه ۱ — میباشند ، لذا بنابرفرمول اولر مقدار هریک از دو طرف رابطه بالا برابر PQ است. بطورکلی ممکن است هرمعادله همگن را با ضرب نمودن درفاکتور $\frac{۱}{Px+Qy}$ کامل نماییم .

موارد استعمال معادلات همگن

معادلات :

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{Ax+By+C}{ax+by+c}\right) \qquad (۲ . ۵۲)$$

را که درآن A , B , C , a , b , c مقادیر ثابت دلخواهی هستند میتوان با روش زیر به معادلا همگن تبدیل کرد .

حالت اول - $Ab-Ba\neq 0$: متغیرهای جدید ξ و η را باروابط :

$$x=h+\xi \quad و \quad y=k+\eta \qquad (۲ . ۵۳)$$

مشخص نموده و h و k را که مقادیر ثابت دلخواهی هستند چنان تعیین میکنیم که روابط زیر تواماً برقرار باشند :

$$Ah+Bk+C=0 \quad , \quad ah+bk+c=0 \qquad (۲ . ۵۴)$$

پس از جایگزین نمودن روابط (۲ . ۵۳) در رابطه (۲ . ۵۲) و استفاده از روابط (۲ . ۵۴) خواهیم داشت :

$$\frac{d\eta}{d\xi}=F\left(\frac{A\xi+B\eta}{a\xi+b\eta}\right)$$

بالنتیجه F تابع همگنی از درجه صفر نسبت به ξ و η خواهد بود . باید توجه داشت چون بنابفرض $Ab-Ba\neq 0$ است لذا از رابطه (۲ . ۵۴) میتوان مقادیر h و k را بدست آورد .

حالت دوم - $Ab-Ba=0$: دراین حالت تبدیل متغیر زیر را درنظر میگیریم :

$$\eta=x+\frac{B}{A}y=x+\frac{b}{a}y$$

و بالنتیجه :

$$\frac{d\eta}{dx}=۱+\frac{b}{a}\cdot\frac{dy}{dx}=۱+\frac{b}{a}F\left(\frac{A\eta+C}{a\eta+c}\right)$$

مثال ۱- معادله دیفرانسیل $(۲ye^{\frac{y}{x}}-x)y'+۲x+y=0$ را حل کنید .

حل - چون درجه $e^{\frac{y}{x}}$ صفر میباشد لذا معادله بالا همگن درجه اول بوده و پس‌از تبدیل متغیر $y=tx$ چنین داریم :

$$y'=xt'+t \ , \ (۲te^{t}-۱)xt'+۲(t^{۲}e^{t}+۱)=o \ ,$$

$$\frac{۲t-e^{-t}}{t^{۲}+e^{-t}}dt+\frac{۲dx}{x}=o \quad \text{و یا} \quad Log(t^{۲}+e^{-t})+۲Logx=c$$

سرانجام :

$$y^{۲}+x^{۲}e^{-\frac{y}{x}}=c$$

مثال ۲ - معادله دیفرانسیل $x(x^{۲}+۳y^{۲})dx+y(y^{۲}+۳x^{۲})dy=o$ را حل کنید .

حل - معادله فوق همگن و کامل بوده ودرجه همگنی‌آن برابر ۳ میباشد. لذا بنابر قضیه شماره (۵ . ۲) جواب عمومی عبارت خواهد بود از $x^{٤}+٦x^{۲}y^{۲}+y^{٤}=c$.

مثال ۳ - معادله دیفرانسیل $٤(x-۲)^{۲}\frac{dy}{dx}=(x+y-۱)^{۲}$ را حل کنید .

حل - معادله داده شده را بصورت $\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{٤}\left(\frac{x+y-۱}{x-۲}\right)^{۲}$ مینویسیم .

حال‌چون $Ab-Ba=-۱\neq o$ است، لذاقرار میدهیم $x=\xi+h$ و $y=\eta+k$.

مقادیر h و k را بقسمی تعیین میکنیم که در دو معادله زیر صدق کنند :

$$h+k-۱=o \ , \ h-۲=o$$

و یا :

$$h=۲ \ , \ k=-۱$$

پس :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{۱}{٤\xi^{۲}}(\xi+\eta)^{۲}$$

معادله بالا همگن بوده و اگرقرار دهیم $\frac{y+۱}{x-۲}=\frac{\eta}{\xi}=t$ خواهیم داشت :

$$t+\xi\frac{dt}{d\xi}=\frac{۱}{٤}(۱+t)^{۲} \ , \ \xi\frac{dt}{d\xi}=\frac{۱}{٤}(۱-t)^{۲}$$

و یا :

$$\int\frac{d\xi}{\xi}=\int\frac{٤dt}{(۱-t)^{۲}}+A \ , \ Log\xi=A+\frac{٤}{۱-t}$$

بالاخره :

$$Log(x-۲)=A+\frac{٤(x-۲)}{x-y-۳}$$

مسائل

۱ـ نشان دهید هریک از معادلات زیر همگن بوده و جواب عمومی را بدست آورید.

الف - $۲xydx+(x^۲+y^۲)dy=0$.

ب - $(x+\sqrt{y^۲-xy})dy-ydx=0$.

پ - $(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

ت - $xy'-y-x\sin\left(\frac{y}{x}\right)=0$.

ث - $(۲x^۲y+y^۳)dx+(xy^۲-۲x^۳)dy=0$.

ج - $y^۲dx+(x\sqrt{y^۲-x^۲}-xy)dy=0$.

چ - $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}\right)dy=0$.

ح - $ydx+xLog\frac{y}{x}dy-۲xdy=0$.

خ - $۲ye^{\frac{x}{y}}dx+(y-۲xe^{\frac{x}{y}})dy=0$.

د - $\left(xe^{\frac{y}{x}}-y\sin\frac{y}{x}\right)dx+x\sin\frac{y}{x}dy=0$.

ذ - $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^۲+y^۲}$.

ر - $x^۳\frac{dy}{dx}=y^۳+y^۲\sqrt{y^۲-x^۲}$.

ز - $x^۲y'=n(x^۲+y^۲)\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+xy$.

ژ - $(۵x^۲y+۳۰xy^۲+۴x^۳)dy+(۵xy^۲+۲۰y^۳+۶x^۲y)dx=0$.

۲ـ جواب عمومی هریک از معادلات زیر را بدست آورید.

الف ـ $(۲x-y+۱)dx+(x+y)dy=۰$.

ب ـ $(۲x+۳y-۱)dx+(٤x+٦y+۲)dy=۰$.

پ ـ $(x+۲y-٤)dx-(۲x-٤y)dy=۰$.

ت ـ $(۳x+۲y+۱)dx-(۳x+۲y-۱)dy=۰$.

ث ـ $(x+y+۱)dx+(۲x+۲y+۲)dy=۰$.

ج ـ $(x+y-۱)dx+(۲x+۲y-۳)dy=۰$.

چ ـ $(x+y-۱)dx-(x-y-۱)dy=۰$.

ح ـ $(x+y)dx+(۲x+۲y-۱)dy=۰$.

خ ـ $(۷y-۳)dx+(۲x+۱)dy=۰$.

د ـ $(x+۲y)dx+(۳x+٦y+۳)dy=۰$.

ذ ـ $(x+۲y)dx+(y-۱)dy=۰$.

ر ـ $(۳x-۲y+٤)dx-(۲x+۷y-۱)dy=۰$.

ز ـ $(۱۲x+۲۱y-۹)dx+(٤۷x+٤۰y+۷)dy=۰$.

ژ ـ $(x+۲y)(dx-dy)=dx+dy$.

۳ـ اگر $y(x)$ جواب عمومی معادله و منظور از $y(۰)$ مقدار جواب بازاء $y=۰$ باشد ، درهریک از معادلات دیفرانسیل زیر جواب خصوصی راکه در شرایط اولیه مربوطه صدق میکند بدست آورید .

الف ـ $(x^۲+y^۲)dx=۲xydy \;;\; y(-۱)=۰$

ب ـ $(xe^{\frac{y}{x}}+y)dx=xdy \;;\; y(۱)=۰$

پ ـ $y'-\frac{y}{x}+\operatorname{cosec}\frac{y}{x}=۰ \;;\; y(۱)=۰$

ت ـ $(xy-y^۲)dx-x^۲dy=۰ \;;\; y(۱)=۱$

ث ـ $(x+y)dy=\sqrt{x^۲+y^۲}\,dx \;;\; y(۱)=۳$

ج ـ $(x+y)dx+(۳x+۳y-٤)dy=۰ \;;\; y(۱)=۰$

چ ـ $(۳x+۲y+۳)dx-(x+۲y-۱)dy=۰ \;;\; y(-۲)=۱$

ح - $(y+۷)dx+(۲x+y+۳)dy=۰ \;;\; y(۰)=۱$

خ - $(x+y+۲)dx-(x-y-٤)dy=۰ \;;\; y(۱)=۰$

٤- نشان دهید که جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}$$

نمایش یک طایفه مخروطی است .

۵- نشان دهید جواب عمومی معادله دیفرانسیل $ydx-۲xdy=۰$ نمایش یک طایفه سهمی است که دارای محور مشترک و همچنین مماس مشترک در رأس میباشند .

٦- نشان دهید جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$(٤x+۳y+۱)dx+(۳x+۲y+۱)dy=۰$$

نمایش یک طایفه هذلولی است که معادلات $x+y=۰$ و $۲x+y+۱=۰$ خطوط مجانبهای آنها میباشند .

۷- نشان دهید ایزوکلاینهای معادلات همگن مرتبه اول خطوط گذرنده برمبدأ مختصات میباشند .

۸- نشان دهید جوابهای معادله همگن، منحنی‌های مشابه میباشند یعنی اگر $y=f(x)$ یکی از جوابهای معادله برای هرمقدار غیر مشخص k باشد $ky=f(kx)$ نیز جواب معادله خواهد بود .

جوابها

۱- الف : $۳x^۲y+y^۳=c$.

ب : $y=ce^{-۲\sqrt{۱-\frac{x}{y}}} \;;\; y>۰ , x<y$

$y=ce^{۲\sqrt{۱-\frac{x}{y}}} \;;\; y<۰ , x>y$.

پ : $\mathrm{Arc}tg\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{۱}{۲}\,Log(x^۲+y^۲)=c$.

ت : $y=۲x\mathrm{Arc}tg\,cx$.

ث : $\frac{x^۲}{y^۲}+Log\,xy=c \;;\; x\neq ۰ , y\neq ۰$.

ج : $y^۲ > x^۲$; $c(y+\sqrt{y^۲-x^۲})=xy$ و یا معادل آن $y^۲-cx=y\sqrt{y^۲-x^۲}$.

چ : $y\sin\frac{y}{x}=c$.   ح : $y=c\left(۱+Log\frac{x}{y}\right)$.

خ : $۲e^{\frac{x}{y}}+Log y=c$.

د : $Log x^۲-e^{-\frac{y}{x}}\left(\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}\right)=c$.

ذ : $cx^۲=y+\sqrt{x^۲+y^۲}$.   ر : $cxy=y+\sqrt{y^۲-x^۲}$.

ز : $y=x\,tg\,cx^n$.   ژ : $x^٤y^٤(x^۲+xy+۵y^۲)=c$.

۲- الف : $x\neq-\frac{۱}{۳}$; $Log\left|۲\left(\frac{۳x+۱}{۳}\right)^۲+\left(\frac{۳y-۱}{۳}\right)^۲\right|$.

$$=c-\sqrt{۲}\,Arctg\frac{۳y-۱}{\sqrt{۲}\,(۳x+۱)}$$

ب : $۲x+۳y-۱-۸Log|۲x+۳y+۷|+y=c$.

پ : $Log[٤(y-۱)^۲+(x-۲)^۲]-۲Arctg\frac{۲y-۲}{x-۲}=c$.

ت : $Log|۱۵x+۱۰y-۱|+\frac{۵}{۲}(x-y)=c$.

ث : $x+۲y=c$.

ج : $x+۲y+Log|x+y-۲|=c$.

چ : $(x-۱)^۲+y^۲=ce^{۲Arctg\frac{y}{x-۱}}$.

ح : $x+۲y+Log|x+y-۱|=c$.

خ : $۷Log|۲x+۱|+۲Log|۷y-۳|=c$.

د : $x+۳y-۳Log|x+۲y+۳|=c$.

ذ : $\frac{x+۲}{x+y+۱}+Log|x+y+۱|=c$.

ر : $۳x^۲-۴xy+۸x-۷y^۲+۲y=c$.

ز : $(x+۵y-۴)^۳(۳x+۲y+۱)=c$.

ژ : $۳x-۳y+c=۲Log|۳x+۶y-۱|$.

۳- الف : $y^۲=x^۲+x$. ب : $Logx+e^{-\frac{y}{x}}=۱$.

پ : $Logx-\cos\frac{y}{x}+۱=0$.

ت : $x=e^{\frac{x}{y}-۱}$.

ث : $\int_{۳}^{v}\frac{(۱+u)du}{\sqrt{۱+u^۲}-u-u^۲}=Logx \quad , \quad v=\frac{y}{x}$

ج : $x+۳y+۲Log|۲-x-y|=۱$.

چ : $(۲x+۲y+۱)(۳x-۲y+۹)^۴=-۱$.

ح : $(y+۷)^۲(۳x+y+۱)=۱۲۸$.

خ : $Log[(x-۱)^۲+(y+۳)^۲]+۲Arctg\frac{x-۱}{y+۳}=۲Log۳$.

۶ . ۲- فاکتورهای انتگرال کننده

چنانچه قبلاً متذکر شدیم شرط لازم و کافی برای کامل بودن معادله دیفرانسیل $Pdx+Qdy=0$ آن است که $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. حال اگر معادله (۲ . ۲) کامل نباشد سعی میکنیم با ضرب کردن در تابع مناسبی از x و y آنرا کامل کنیم . مثلاً معادله :

$$ydx-xdy=0 \qquad (۲ . ۶)$$

کامل نبوده ولی پس از ضرب در $y^{-۲}$ کامل خواهد شد :

$$\frac{ydx-xdy}{y^{۲}}=d\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (۲ . ۶۱)$$

دراینصورت گوییم $y^{-۲}$ **فاکتور انتگرال کننده** معادله(۶ . ۲) میباشد. بطریق مشابه معادله :

$$۲ydx+xdy=o \qquad (۲ . ۶۲)$$

پس‌از ضرب‌در x کامل خواهد شد . یعنی :

$$۲xydx+x^{۲}dy=d(x^{۲}y)=o \qquad (۲ . ۶۳)$$

و لذا x فاکتور انتگرال کننده معادله (۶۲ . ۲) خواهد بود .

حال‌اگر فرض کنیم $\mu(x , y)$ یکی از فاکتورهای‌انتگرال کننده معادله (۲ . ۲) باشد معادله :

$$\mu Pdx+\mu Qdy=o \qquad (۲ . ۶۴)$$

دیفرانسیل کامل بوده و لذا : $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$

و یا :

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}=o \qquad (۲ . ۶۵)$$

لذادرحالت کلی برای یافتن μ (یکی از فاکتورهای انتگرال کننده) باید معادله دیفرانسیل با مشتقات‌نسبی (۶۵ . ۲) راکه بمراتب مشکل تراز معادله دیفرانسیل معمولی (۲ . ۲) است حل نمود. برای منظور مایک جواب خصوصی کافی بوده واغلب آنرا بوسیله‌آزمایش بدست میآورند . پس‌از یافتن μ جواب عمومی معادله (۶۴ . ۲) را که دیفرانسیل کامل است مانند شماره (۳ . ۲) بدست میآوریم .

باید توجه داشت چنانچه معادلات دیفرانسیل را در فاکتورهای انتگرال کننده‌یی ضرب‌نماییم ممکن‌است ناپیوستگی‌ویاجوابهای‌اضافی(منحنی‌هایی که درامتدادآنهافاکتورهای انتگرال کننده مساوی‌صفراست)ایجاد شود. مثلاً درمورد معادله(۶ . ۲) فاکتور $y^{-۲}$ بازاء $y=o$ منفصل میباشد ویا معادله(۶۲ . ۲) دارای فاکتور انتگرال کننده x بوده که بازاء $x=o$ برابرباصفر میباشد ولذا $x=o$ یکی از جوابهای معادله(۶۳ . ۲) بوده که ضمناًنیز درمعادله (۶۲ . ۲) صدق میکند.

بطورکلی‌چنانچه معادله دیفرانسیل را در فاکتوری ضرب نماییم معادله دیفرانسیل

تغییر مییابد و باید بدقت تحقیق نماییم که جواب اضافی حاصل نشود و یا آنکه جوابی ازبین نرود .

درنظریه معادلات با مشتقات نسبی ثابت میکنند که معادله (۲ . ۶۵) دارای بینهایت جواب $\mu(x,y)$ میباشد ولذا درمواردیکه جواب عمومی معادله (۲ . ۶۵) را بتوان بدست آورد معادله (۲ . ۲) دارای بینهایت فاکتور انتگرال کننده خواهد بود . ذیلاً با ذکر دو مثال این مطلب را روش میکنیم .

مثال ۱- معادله دیفرانسیل $ydx-xdy=0$ کامل نبوده ولی اگر $\mu(x,y)$ یکی ازفاکتورهای انتگرال کننده این معادله باشد با کمی دقت معلوم میگردد که شرط (۲ . ۶۵) بصورت زیر در خواهد آمد :

$$x\frac{\partial\mu}{\partial x}+y\frac{\partial\mu}{\partial y}+2\mu=0$$

واضح است که $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{xy}$ درمعادله بالا صدق نموده و اگر قرار دهیم $\mu=\frac{1}{x^2}$ معادله $\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=0$ که کامل بوده و دارای جواب $\frac{y}{x}=c$ است بدست خواهد آمد. همچنین اگر $\mu=\frac{1}{y^2}$ قرار دهیم معادله حاصل دارای جواب $\frac{x}{y}=c'$ و بالاخره اگر $\mu=\frac{1}{xy}$ باشد معادله دارای جواب عمومی $\frac{x}{y}=c''$ خواهد بود.

مثال ۲- بنابر مسئله سوم شماره (۲ . ۳) تابع $(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ یکی از فاکتورهای انتگرال کننده معادله $(1+y^2)ydx+(1+x^2)xdy=0$ میباشد وهمچنین اگردوطرف معادله فوق را بر $xy(1+x^2)(1+y^2)$ تقسیم کنیم معادله حاصل دیفرانسیل کامل بوده و لذا $\frac{1}{xy(1+x^2)(1+y^2)}$ یکی دیگر از فاکتورهای انتگرال کننده میباشد .

قضیه - اگر μ_1 و μ_2 دو فاکتور انتگرال کننده مستقل معادله :

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2 . 2}$$

باشند . دراینصورت :

$$\frac{\mu_2}{\mu_1}=c \quad \text{و یا} \quad \mu_2=c\mu_1$$

یکی از انتگرالهای معادله (۲ . ۲) خواهد بود .

باید توجه داشت که چون μ_1 و μ_2 از یکدیگر مستقل میباشند لذا خارج قسمت آنها برابر مقدار ثابت نخواهد بود .

اثبات ـ بسهولت میتوان نشان داد که رابطه $\mu_2=c\mu_1$ در معادله دیفرانسیل :

$$\left\{\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right\}dx+\left\{\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right\}dy=o \qquad (۲ . ۶۶)$$

صدق میکند ولی چون μ_1 و μ_2 فاکتورهای انتگرال کننده معادله (۲ . ۲) میباشند لذا شرط (۲ . ۶۵) برای آنها برقرار خواهد بود یعنی :

$$P\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+\mu_1\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}=o \qquad (۲ . ۶۷)$$

$$P\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+\mu_2\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}=o \qquad (۲ . ۶۸)$$

پس از حذف $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$ در دو معادله بالا خواهیم داشت :

$$\mu_2\left\{P\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right\}-\mu_1\left\{P\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right\}=o$$

و یا :

$$\left\{\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right\}P=\left\{\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right\}Q \qquad (۲ . ۶۹)$$

پس از حذف $\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}$ و $\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}$ بین دومعادله (۲.۶۶) و (۲ . ۶۹) معادله (۲ . ۲) بدست میآید وچون $\mu_2=c\mu_1$ در رابطه (۲ . ۶۶) صدق میکند لذا یکی از انتگرالهای معادله (۲ . ۲) میباشد.

قضیه فوق بیان میکند که اگر یک فاکتور انتگرال کننده معادله (۲ . ۲) در دست باشد میتوان تعداد بیشماری از آنها را بدست آورد زیرا اگر مثلاً μ_1 در دست باشد و قرار دهیم $\mu_2=v\mu_1$ بنابر رابطه (۲ . ۶۸) چنین داریم :

$$P\frac{\partial(v\mu_{۱})}{\partial y}-Q\frac{\partial(v\mu_{۱})}{\partial x}+v\mu_{۱}\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}=0$$

و یا :

$$Pv\frac{\partial\mu_{۱}}{\partial y}+P\mu_{۱}\frac{\partial v}{\partial y}-Qv\frac{\partial\mu_{۱}}{\partial x}-Q\mu_{۱}\frac{\partial v}{\partial x}+v\mu_{۱}\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}=0\quad ,$$

$$v\left[P\frac{\partial\mu_{۱}}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_{۱}}{\partial x}+\mu_{۱}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]+\mu_{۱}\left[P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x}\right]=0$$

بنابر رابطه (۶۷ . ۲) عبارت واقع در کرشه اول صفر بوده وبالنتیجه معادله بالا تبدیل به :

$$\mu_{۱}\left\{P\frac{\partial v}{\partial y}-Q\frac{\partial v}{\partial x}\right\}=0$$

میگردد . چون این معادله بازاء $v=c$ برقرار است و بنابر قضیه بالا $\frac{\mu_{۲}}{\mu_{۱}}=c$ جواب عمومی معادله (۲ . ۲) است لذا :

$$v=\frac{\mu_{۲}}{\mu_{۱}}=c$$

جواب عمومی معادله (۲ . ۲) میباشد . حال اگر $u=c$ یکی از اشکال جواب عمومی باشد واضح است که باید $v=F(u)$ باشد و لذا :

$$\mu_{۲}=\mu_{۱}F(u)$$

$F(u)$ تابع غیر مشخصی از u میباشد .

مثلاً در مثال یک معادله $ydx-xdy=0$ دارای سه فاکتور انتگرال کننده $\frac{۱}{x^{۲}}$, $\frac{۱}{y^{۲}}$, $\frac{۱}{xy}$ بوده و لذا بنابر قضیه بالا خارج قسمت دو بدوآنها یعنی :

$$\frac{۱}{x^{۲}}:\frac{۱}{y^{۲}}=c_{۱}\ ,\ \frac{۱}{x^{۲}}:\frac{۱}{xy}=c_{۲}\ ,\ \frac{۱}{y^{۲}}:\frac{۱}{xy}=c_{۳}$$

که تماماً معادل $\frac{y}{x}=c$ میباشند جواب عمومی‌بوده و فاکتورهای انتگرال کننده بصورت $\mu=\frac{۱}{xy}F\left(\frac{y}{x}\right)$ است .

۶۱ . ۲- حالات خاص فاکتور انتگرال کننده

الف ـ در بعضی از موارد میتوان بسهولت قسمت کامل $Pdx+Qdy=0$ را که به du نمایش میدهیم تشخیص داد وسپس با ضرب نمودن معادله در تابع مناسبی از u مثلاً f(u) سعی میکنیم که بقیه معادله را نیز به دیفرانسیل کامل تبدیل نماییم .

مثال ۱- معادله $(xy^{۲}+y)dx+xdy=0$ را حل کنید .

حل - این معادله را میتوان بصورت $xy^{۲}dx+d(xy)=0$ نوشت . معادله اخیر را در تابعی از xy ضرب مینماییم بقسمیکه در کامل بودن قسمت دوم تغییری ایجاد نشود و برای این منظور اگر دو طرف معادله بالا را بر $(xy)^{۲}$ تقسیم کنیم میتوان $y^{۲}$ را از جمله اول حذف نمود یعنی :

$$\frac{dx}{x}+\frac{۱}{(xy)^{۲}}d(xy)=0$$

و یا :

$$Log|x|-\frac{۱}{xy}=c$$

مثال ۲- معادله $(x+۳y^{۲})dx+۲xydy=0$ را حل کنید .

حل - دراین مسئله xdx کامل بوده و لذا سعی مینماییم که باضرب کردن دوطرف معادله بالا درتابع مناسبی از x باقیمانده عبارت بالا یعنی $۳y^{۲}dx+۲xydy$ را نیز کامل کنیم . چنانچه تابع مورد نظر را به $v(x)$ نمایش دهیم دراین صورت میخواهیم تابع v را چنان تعیین کنیم که معادله دیفرانسیل :

$$۳y^{۲}vdx+۲xvydy=0$$

کامل باشد . رابطه (۳ . ۲) دراینحالت تبدیل به معادله زیر میگردد :

$$۶yv=۲y(xv'+v)$$

و چنانچه $y\neq 0$ باشد خواهیم داشت :

$$۶v=۲xv'+۲v \ , \ xv'-۲v=0 \ , \ x\frac{dv}{dx}-۲v=0$$

دراین معادله متغیرها از یکدیگر جدا شده و بسهولت معلوم میگردد که $v=x^{۲}$ یکی از جوابهای معادله بالا بوده و از آنجا $x^{۲}$ یکی از فاکتورهای انتگرال کننده میباشد . پس از

ضرب نمودن در $x^{۲}$ معادله $(x+۳y^{۲})dx+۲xydy=o$ بصورت زیر درمیآید :

$$(x^{۳}+۳x^{۲}y^{۲})dx+۲x^{۳}ydy=o$$

و یا :

$$\frac{x^{٤}}{٤}+x^{۳}y^{۲}=c$$

مثال ۳- معادله $(۳y+۸xy^{۲})dx+(۲x+٦x^{۲}y)dy=o$ را حل کنید .

حل - عبارت $۳ydx+۲xdy$ را که کامل نبوده ولی پس‌از ضرب‌در $\frac{۱}{xy}$ متغیرها از یکدیگر جدا میشوند درنظر میگیریم :

$$(xy)^{-۱}(۳ydx+۲xdy)=\frac{۳dx}{x}+\frac{۲dy}{y}=d(۳Logx+۲Logy)$$
$$=d(Logx^{۳}y^{۲})$$

چنانچه معادله را در $(xy)^{-۱}$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۳\frac{dx}{x}+۲\frac{dy}{y}+۸ydx+٦xdy=o \qquad \text{(I)}$$

دو جمله اول سمت چپ رابطه بالا کامل بوده و چنانچه دو طرف معادله بالا را در تابع غیرمشخصی‌از $Logx^{۳}y^{۲}$ ویا $x^{۳}y^{۲}$ ضرب کنیم‌در کامل بودن‌این دوجمله تغییری حاصل نمیشود . حال $z=x^{۳}y^{۲}$ قرار داده و تابع $v(z)$ را چنان تعیین میکنیم که عبارت $v(z)(۸ydx+٦xdy)$ کامل باشد . بنابراین رابطه(۳ . ۲) مبدل‌به معادله‌زیرمیگردد:

$$\frac{\partial}{\partial y}(۸yv)=\frac{\partial}{\partial x}(٦xv)\ ,$$

$$۸v+۸y\frac{\partial v}{\partial y}=٦v+٦x\frac{\partial v}{\partial x}\ ,$$

$$۸v+۸yv'(z)۲x^{۳}y=٦v+٦xv'(z)۳x^{۲}y^{۲}\ ,$$

$$۲zv'(z)-۲v=o$$

بالنتیجه $v=z$ جواب معادله بالا میباشد . پس‌ازضرب‌معادله (I) در z چنین داریم:

$$zdLogz+۸x^{۳}y^{۳}dx+٦x^{٤}y^{۲}dy=o$$

و یا :

$$z\frac{dz}{z}+d(۲x^{۴}y^{۳})=0$$

درنتیجه :

$$x^{۳}y^{۲}+۲x^{۴}y^{۳}=c$$

ب ـ فرض میکنیم معادله (۲ . ۲) دارای فاکتور انتگرال کننده $\mu(x)$ که فقط به x بستگی دارد باشد . دراینصورت معادله (٦۵ . ۲) بصورت :

$$Q\frac{d\mu}{dx}=\mu\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}$$

و یا :

$$\frac{d\mu}{dx}/\mu=\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/Q \qquad (۲ . ٦۹٠)$$

درخواهد آمد . چون طرف چپ رابطه بالا تابع x میباشد لذا باید طرف راست معادله فوق نیز تابعی از x باشد .

بطریق مشابه میتوان ثابت نمود که اگر معادله (۲ . ۲) دارای فاکتور انتگرال کننده‌یی مانند $\mu(y)$ باشد باید تابع $-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/P$ فقط به y بستگی داشته باشد و لذا برای آنکه تحقیق نماییم که آیا معادله (۲ . ۲) دارای فاکتور انتگرال کننده $\mu(x)$ ویا $\mu(y)$ میباشد کافی است که به‌ترتیب کسور $\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/Q$ و $-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/P$ را تشکیل داده و تحقیق کنیم که این کسور به ترتیب تابع x و یا y میباشند یا خیر .

مثال ـ معادله $(۱-xy)dx+(xy-x^{۲})dy=0$ را حل کنید .

حل ـ کسر $\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/Q$ راتشکیل میدهیم :

$$\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/Q=\frac{-x-(y-۲x)}{xy-x^{۲}}=-\frac{x-y}{x(x-y)}=-\frac{۱}{x}$$

لذا این کسرتنهاتابع x بوده‌وبنابراین معادله‌بالادارای فاکتورانتگرال کننده $\mu(x)$ خواهد بود :

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{dx}{x}\quad,\quad \mu=\frac{۱}{x}$$

و بعدازضرب کردن دراین فاکتور خواهیم داشت :

$$\left(\frac{۱}{x}-y\right)dx+(y-x)dy=۰ \quad , \quad Log|x|-xy+\frac{۱}{۲}y^{۲}=c$$

پ - چنانچه معادله (۲ . ۲) دارای فاکتور انتگرال کننده $\mu=f(x+y)=f(z)$ باشد معادله (۶۵ . ۲) بصورت :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/(P-Q)$$

در میآید وازآنجا شرط لازم برای وجود چنین فاکتور انتگرال کننده‌یی آن‌است که طرف راست رابطه بالا تابعی از z و یا $x+y$ باشد .

مثال - معادله $(۵x^{۲}+۲xy+۳y^{۳})dx+۳(x^{۲}+xy^{۲}+۲y^{۳})dy=۰$ را حل کنید .

حل - چنانچه کسر $-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/(P-Q)$ را تشکیل دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/(P-Q)=-\frac{۶y^{۲}-۴x}{۲x^{۲}+۲xy-۳xy^{۲}-۳y^{۳}}$$

$$=\frac{۲}{x+y}=\frac{۲}{z}$$

و یا : $f(z)=z^{۲}$

و بالنتیجه معادله دارای فاکتور انتگرال کننده $(x+y)^{۲}$ بوده و جواب عمومی معادله $(x^{۲}+y^{۳})(x+y)^{۳}=c$ میباشد .

ت - بالاخره اگر معادله (۲ . ۲) دارای فاکتورانتگرال کننده $\mu=f(xy)=f(z)$ باشد بسهولت معلوم میگردد که معادله (۶۵ . ۲) تبدیل به :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/(Px-Qy)$$

گردیده ولذا شرط لازم برای وجود چنین فاکتور انتگرال کننده‌یی آنستکه طرف راست رابطه بالا تابعی از z و یا xy باشد .

مثال - معادله $(xy^{۳}+۲x^{۲}y^{۲}-y^{۲})dx+(x^{۲}y^{۲}+۲x^{۳}y-۲x^{۲})dy=۰$ را حل کنید .

حل - چنانچه کسر $-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/(Px-Qy)$ را تشکیل دهیم خواهیم داشت :

$$-\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}/(Px-Qy)=\frac{xy^{۲}-۲x^{۲}y-۲y+٤x}{xy^{۲}-۲x^{۲}y}=۱-\frac{۲}{xy}=۱-\frac{۲}{z}$$

و از آنجا : $f(z)=e^{z}z^{-۲}$

و بالنتیجه فاکتور انتگرال کننده برابر $\mu=e^{xy}x^{-۲}y^{-۲}$ است و جواب عمومی بصورت $e^{xy}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۲}{y}\right)=c$ میباشد .

مسائل

۱ـ برای هریک از معادلات زیر فاکتور انتگرال کننده‌یی تعیین کرده و سپس جواب عمومی را بدست آورید .

الف : $(x+۲y)dx+xdy=0$. ب : $(x+۳y)dx+xdy=0$.

پ : $ydx+(y-x)dy=0$. ت : $۲y^{۲}dx+(۲x+۳xy)dy=0$.

ث : $(x^{۲}+y^{۲}+x)dx+ydy=0$.

ج : $ydx+(x+x^{۲}y^{٤})dy=0$. چ : $(۲+۲y^{۳})dx+۳xy^{۲}dy=0$.

ح : $ydx+(y^{۳}-۲x)dy=0$. خ : $(۳y+۳e^{x}y^{\frac{۲}{۳}})dx+xdy=0$.

د : $(x+x^{۲}y+y^{۳})dx+(y-x^{۳}-xy^{۲})dy=0$.

ذ : $(xy+y^{۲})dx+(xy-x^{۲})dy=0$.

ر : $(y^{۳}-۲x^{۲}y)dx+(۲xy^{۲}-x^{۳})dy=0$.

ز : $(٥y-٦x)dx+xdy=0$.

ژ : $(\sin y+x^{۲}+۲x)dx+\cos y\,dy=0$.

س : $(۳x-y^{۲})dx-٤xydy=0$.

۲ـ نشان دهید هریک از معادلات زیر دارای یکی از فاکتورهای انتگرال کننده $\mu(x)$ ، $\mu(y)$ ، $\mu(x+y)$ ، $\mu(xy)$ بوده وازآنجا جواب عمومی را بدست آورید .

الف : $(x+y)dx+dy=0$. ب : $(x^{۳}+y^{٤})dx+۸xy^{۳}dy=0$.

پ : $xy^{۳}dx+(x^{۲}y^{۲}-۱)dy=0$.

ت : $(۱-xy)dx+(۱-x^۲)dy=۰$.

ث : $y^۲dx+(xy+۱)dy=۰$.

ج : $dx+[۱+(x+y)tgy]dy=۰$.

چ : $(x^۳-۲y^۳-۳xy)dx+۳x(y^۲+x)dy=۰$.

ح : $(x^۲-y^۲+۱)dx+(x^۲-y^۲-۱)dy=۰$.

خ : $(۲x^۲+xy+a^۲)ydx+(x+۲y)(x^۲+a^۲)dy=۰$.

د : $(۳x^۵y^۸-y^۳)dx+(۵x^۶y^۷+x^۳)dy=۰$.

ذ : $(y+۱)dx+(xy+y^۲+y+۱)dy=۰$.

ر : $(۷x^۳+۳x^۲y+۴y)dx+(۴x^۳+x+۵y)dy=۰$.

ز : $\left(\text{Arc}tgxy+\dfrac{xy-۲xy^۲}{۱+x^۲y^۲}\right)dx+\dfrac{x^۲-۲x^۲y}{۱+x^۲y^۲}dy=۰$.

ژ : $۳(y+x)^۲dx+x(۳y+۲x)dy=۰$.

س : $(۲xy+x^۲+b)dx+(y^۲+x^۲+a)dy=۰$.

۳ـ معادله دیفرانسیل $Pdx+Qdy=۰$ که‌درآن P و Q توابعی‌از **x** و **y** هستند مفروض است .

الف ـ تعیین کنید چه رابطه‌یی بین P و Q و مشتقات مرتبه اول آن باید برقرار باشد تا تابع $\mu\left(\dfrac{۱}{x^۲-y^۲}\right)$ یکی از عاملهای انتگرال کننده آن باشد .

ب ـ تعیین کنید چه شرطی بین P و Q و مشتقات مرتبه اول آن باید برقرار باشد تا تابع $\mu\left(\dfrac{۱}{x^۲+y^۲}\right)$ یکی از عاملهای انتگرال کننده آن باشد .

پ - با استفاده‌از قسمت(الف)عامل انتگرال کننده وجواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$(x^۲-y^۲-y)dx-(x^۲-y^۲-x)dy=۰$$

ت ـ بااستفاده‌از قسمت(ب) عامل انتگرال کننده و جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$ydx-(x^{۲}+y^{۲}+x)dy=0$$

۴ـ معادله دیفرانسیل $Pdx+Qdy=0$ که‌درآن P و Q توابعی از x و y هستند مفروض است .

تعیین کنید چه رابطه‌یی بین P و Q و مشتقات مرتبه اول آن باید برقرار باشد تا تابع $\mu\left(\frac{x}{y}\right)$ یکی از عاملهای انتگرال کننده آن باشد .

۵ـ نشان دهید $\cos x\cos y$ یکی از عاملهای انتگرال کننده معادله دیفرانسیل :

$$(۲x\,tg\,y\sec x+y^{۲}\sec y)dx+(۲y\,tg\,x\sec y+x^{۲}\sec x)dy=0$$

بوده و جواب عمومی را بدست آورید .

۶ـ نشان دهید معادله دیفرانسیل :

$$(y^{۴}-۲y^{۲})dx+(۳xy^{۳}-۴xy+y)dy=c$$

دارای عامل انتگرال کننده‌یی بصورت تابعی از $xy^{۲}$ میباشد وهمچنین جواب عمومی معادله‌را بدست آورید .

۷ـ معادله دیفرانسیل :

$$pydx+qxdy+x^{m}y^{n}(rydx+sxdy)=0$$

که درآن p , q , m , n , r , s مقادیر ثابتی هستند مفروض است .

الف ـ نشان دهید این معادله درصورتی دارای عامل انتگرال کننده‌یی بصورت $x^{h}y^{k}$ (h , k مقادیر ثابتی هستند) خواهد بود که رابطه زیر بین ضرایب معادله و مقادیر ثابت h و k برقرار باشد .

$$\frac{h+۱}{p}=\frac{k+۱}{q} \quad ; \quad \frac{h+m+۱}{r}=\frac{k+n+۱}{s}$$

ب ـ بااستفاده از قسمت (الف) جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$۳ydx-۲xdy+x^{۲}y^{-۱}(۱۰ydx-۶xdy)=0$$

را بدست آورید .

۸ـ با مشتق گیری از معادله :

$$\int\frac{f(xy)+F(xy)}{f(xy)-F(xy)}\cdot\frac{d(xy)}{xy}+Log\frac{x}{y}=c$$

نشان دهید که عبارت $\frac{١}{xy\left\{f(xy)-F(xy)\right\}}$ عامل انتگرال کننده معادله دیفرانسیل :

$$f(xy)ydx+F(xy)xdy=o$$

بوده و سپس معادله دیفرانسیل :

$$(x^{٢}y^{٢}+xy+١)ydx-(x^{٢}y^{٢}-xy+١)xdy=o$$

را حل کنید .

جوابها

١- الف : $x^{٣}+٣x^{٢}y=c$. ب : $x^{٤}+٤x^{٣}y=c$.

پ : $x+y\mathit{Log}|y|=cy$, $y=o$.

ت : $y\mathit{Log}|x^{٢}y^{٣}|-٢=cy$; $x=o$, $y=o$.

ث : $٢x+\mathit{Log}(x^{٢}+y^{٢})=c$.

ج : $xy^{٤}-٣=٣cxy$; $x=o$, $y=o$.

چ : $x^{٢}(y^{٣}+١)=c$. ح : $x+y^{٣}=cy^{٢}$, $y=o$.

خ : $xy^{\frac{١}{٣}}+e^{x}=c$. د : $y=x\,tg\,c-[٢(x^{٢}+y^{٢})]^{-١}$.

ذ : $x+y\mathit{Log}|xy|=cy$; $x=o$, $y=o$.

ر : $x^{٢}y^{٤}-x^{٤}y^{٢}=c$. ز : $x^{٥}y=x^{٦}+c$.

ژ : $e^{x}(\sin y+x^{٢})=c$. س : $x(x-y^{٢})^{٢}=c$.

٢- الف : $(x+y-١)e^{x}=c$. ب : $(x^{٣}+٧y^{٤})\sqrt{x}=c$.

پ : $x^{٢}y^{٢}=\mathit{Log}\,cy^{٢}$. ت : $\arcsin x+y\sqrt{١-x^{٢}}=c$.

ث : $ye^{xy}=c$. ج : $(x+y)\sec y=c$.

چ : $x^{٣}+y^{٣}+٣xy=cx^{٢}$.

ح : $(x-y)e^{\frac{١}{٢}(x+y)^{٢}}=c$.

خ : $y(x+y)\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}=c$.

د : $۲x^{۳}y^{۵}+(x^{-۲}-y^{-۲})=c$.

ذ : $e^{y}(x+y)=c(y+۱)$.

ر : $(x^{۳}+y)(x+y)^{۴}=c$.

ز : $x\,\mathrm{Arc}tg\,xy-Log(۱+x^{۲}y^{۲})=c$.

ژ : $۶x^{۲}y^{۲}+۸x^{۳}y+۳x^{۴}=c$.

س : $y^{۳}+x^{۳}+۳(x^{۲}y+ay+bx)=c$.

۳- الف : $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)/(Py+Qx)$.

ب : $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)/(Py-Qx)$.

پ : عامل انتگرال کننده $\frac{۱}{x^{۲}-y^{۲}}$ وجواب عمومی:

$$x-y+\frac{۱}{۲}\,Log\,\frac{x+y}{x-y}=c\ .$$

ت : عامل انتگرال کننده $\frac{۱}{x^{۲}+y^{۲}}$ وجواب عمومی:

$$y+\mathrm{Arc}tg\,\frac{y}{x}=c\ .$$

۴- کسر $\dfrac{y^{۲}\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]}{xP+yQ}$ باید تابعی از $\frac{x}{y}$ باشد .

۵- عامل انتگرال کننده $xy^{۲}+۱$ وجواب عمومی:

$$x(y^{۲}-۲)(xy^{۲}+۲)-۱=\frac{c}{y^{۲}}\ .$$

۶- $x^{۲}\sin y+y^{۲}\sin x=c$.

۷- ب : $x^{۲}y^{-۳}$ عامل انتگرال کننده معادله بوده وجواب عمومی عبارت خواهد بود از $x^{۳}+۲x^{۵}=cy^{۳}$.

$$. \mathrm{Arc}tg\,xy + Log\frac{x}{y} = c$$ -۸

۲ . ۷- معادله‌خطی مرتبه اول

چنانچه قبلاً متذکر شدیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول را درصورتی خطی گوییم که بتوان آنرا بشکل :

$$f(x)y' + g(x)y = h(x) \qquad [f(x) \neq o] \qquad (۲ . ۷)$$

نوشت . از تقسیم دو طرف معادله فوق بر $f(x)$ رابطه (۲ . ۷) تبدیل به رابطه زیر میگردد :

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (۲ . ۷۱)$$

که در آن $p(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ و $q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$.

چنانچه دوطرف معادله(۲ . ۷۱) را درdx ضرب کنیم میتوان آنرا بصورت ساده زیر نوشت :

$$(py - q)dx + dy = o \qquad (۲ . ۷۲)$$

بنابر قسمت (ب) شماره(۲ . ۶) شرط‌آنکه عبارت(۲ . ۷۲) پس‌از ضرب درفاکتور انتگرال کننده $\mu(x)$ کامل گردد آنستکه طرف راست رابطه (۲ . ۶۹۰) تابع x باشد . باتوجه بآنکه p و q تنها تابع x میباشند بآسانی معلوم میشود که رابطه (۲ . ۶۹۰) بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{d\mu}{dx}/\mu = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = \frac{\partial}{\partial y}(py - q) = P$$

و یا :

$$\frac{d\mu}{\mu} = pdx \quad , \quad Log\mu = \int pdx \quad , \quad \mu = e^{\int pdx}$$

لذا چنانچه دوطرف رابطه (۲ . ۷۲) را درفاکتور انتگرال کننده $\mu = e^{\int pdx}$ ضرب کنیم این رابطه کامل میگردد چه :

$$e^{\int pdx}dy + pye^{\int pdx}dx - qe^{\int pdx}dx = o \quad ,$$

$$\frac{d}{\text{[illegible]}}(ye^{\int pdx}) - qe^{\int pdx}dx = o \quad ,$$

$$\frac{d}{d_x}(y\,e^{\int Pdx}) - q\,e^{\int Pdx} = 0$$

و یا :

$$ye^{\int pdx} - \int qe^{\int pdx}dx = c \quad ,$$

و بالنتیجه معادله (۲ . ۷۱) دارای جواب عمومی :

$$y=e^{-\int pdx}\int qe^{\int pdx}dx+ce^{-\int pdx} \qquad (۲ . ۷۲)$$

است. بنابراین جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول (۲ . ۷۱) را میتوان بادو کوادراتور* بدست آورد. از نقطه نظر اهمیتی که نتایج بالا دارد آنها را در قضیه زیر خلاصه میکنیم .

قضیه - $p(x)$ و $q(x)$ درفاصله $a<x<b$ پیوسته میباشند وفرض میکنیم یکی از انتگرالهای نامعین $e^{\int pdx}$ و یا $\int qe^{\int pdx}dx$ را انتخاب کرده‌باشیم. میخواهیم نشان دهیم که :

الف - تمام جوابهای معادله (۲ . ۷۱) درفاصله $a<x<b$ بصورت (۲ . ۷۴) میباشد .

ب - برای هرنقطه (x_0 , y_0) و $a<x_0<b$ مقدارپارامتر c را میتوان منحصراً چنان تعیین نمود که منحنی (۲ . ۷۳) متناظر، ازنقطه (x_0 , y_0) بگذرد.

اثبات - با جایگزین نمودن $v=e^{\int pdx}$ ودرنظرداشتن آنکه بنابفرض $p(x)$ پیوسته میباشد، لذا v نیز پیوسته خواهد بود :

$$v'=e^{\int pdx}p(x)=pv$$

اگر $y(x)$ یکی از جوابهای رابطه (۲ . ۷۱) در فاصله $a<x<b$ باشد متوالیاً چنین داریم :

$$y'+py=q \quad , \quad vy'+pvy=qv$$

$$vy'+v'y=qv \ , \ \frac{d}{dx}(vy)=qv \ , \ vy=\int qvdx+c$$

ولی از آنجایی که $v(x)\neq 0$ است لذا $y=v^{-1}\int qvdx+cv^{-1}$ و بنابراین y بشکل (۲ . ۷۳) خواهد بود .

رابطه (۲ . ۷۳) را میتوان بصورت $y=r(x)+\frac{c}{v(x)}$ نوشت. پس ازجایگزین نمودن مقادیر (x_0 , y_0) و باتوجه به‌آنکه $v(x_0)\neq 0$ است مقدار c عبارت خواهد

---

* Quadrature

بود از $c=v(x_\circ)[y_\circ-r(x_\circ)]$. بازاء این مقدار c (فقط بازاء این مقدار) شرایط اولیه صادق میباشد .

تبصره ۱- اگر در رابطه (۷۱ . ۲) طرف راست یعنی $q(x)=0$ باشد معادله خطی بصورت $y'+py=0$ درآمده وانتگرال عمومی فقط شامل یک کوادراتور است زیرا رابطه (۷۳ . ۲) دراینصورت مبدل به $y=ce^{-\int pdx}$ میگردد .

تبصره ۲- با کمی دقت در رابطه (۷۳ . ۲) ملاحظه خواهیم نمود که جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی تابع خطی برحسب مقدار ثابت c میباشد وبالعکس معادله دیفرانسیل توابع $y=cf(x)+g(x)$ خطی میباشد . زیرا داریم :

$$y=cf(x)+g(x) \quad , \quad y'=cf'(x)+g'(x)$$

پس از حذف c بین دو معادله بالا خواهیم داشت :

$$y'=\frac{y-g(x)}{f(x)}\,f'(x)+g'(x)$$

و یا :

$$y'-\frac{f'(x)}{f(x)}\,y=g'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}\,g(x)$$

تبصره ۳- اگر یک جواب خصوصی معادله خطی مرتبه اول در دست باشد جواب عمومی بوسیله یک کوادراتور بدست میآید . زیرا اگر y_1 جواب خصوصی (۷۱ . ۲) باشد داریم $\frac{dy_1}{dx}+py_1=q$ پس از کم نمودن این معادله از معادله (۷۱ . ۲) خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx}(y-y_1)+p(y-y_1)=0$$

و یا :

$$y-y_1=ce^{-\int pdx}$$

تبصره ٤- اگر دو جواب خصوصی متمایز رابطه (۷۱ . ۲) در دست باشد انتگرال عمومی معادله را میتوان بدون کوادراتور بدست آورد .

بنابر تبصره دوم و رابطه (۷۳ . ۲) جواب عمومی این معادله را میتوان بصورت $y=cf(x)+g(x)$ نوشت . جوابهای خصوصی y_1 و y_2 بازاء مقادیر c_1 و c_2 بدست میآید یعنی :

$$y_1=c_1f(x)+g(x) \quad ; \quad y_2=c_2f(x)+g(x)$$

و چنانچه $f(x)$ و $g(x)$ را بین دو معادله بالا و $y=cf(x)+g(x)$ حذف کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{y-y_{۱}}{y_{۲}-y_{۱}}=\frac{c-c_{۱}}{c_{۲}-c_{۱}}.$$

تبصره ۵- برای یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول (۷ . ۲) ابتدا آنرا مبدل بشکل (۷۱ . ۲) نموده وسپس عامل انتگرال کننده $\mu=e^{\int pdx}$ را که به اختصار به F . I نمایش میدهیم محاسبه کرده و جواب عمومی را از رابطه زیر که همواره باید بخاطر داشته باشیم بدست میآوریم :

$$\frac{d}{dx}(y\,.\,F\,.\,I)=q\,.\,F\,.\,I$$

مثال ۱ - معادله خطی مرتبه اول $(x^{۲}+۱)y'-۲xy=۲x(x^{۲}+۱)^{۲}$ را حل کنید .

حل - بنابرتبصره پنجم به‌ترتیب خواهیم داشت :

$$y'-\frac{۲x}{(x^{۲}+۱)}y=۲x(x^{۲}+۱)\quad ,$$

$$F\,.\,I=e^{-\int\frac{۲xdx}{x^{۲}+۱}}=e^{Log\frac{۱}{x^{۲}+۱}}=\frac{۱}{x^{۲}+۱}\quad ,$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{۱}{x^{۲}+۱}\right)=۲x(x^{۲}+۱)\cdot\frac{۱}{x^{۲}+۱}\quad ,$$

$$\frac{y}{x^{۲}+۱}=c+(x^{۲}+۱)\quad ;\quad y=c(x^{۲}+۱)+(x^{۲}+۱)^{۲}$$

مثال ۲- معادله خطی مرتبه اول $y'\sin x\cos^{۳}x+y\cos ۲x\cos^{۲}x=۱$ را حل کنید .

حل - بنابر تبصره پنجم به ترتیب خواهیم داشت :

$$y'+\frac{\cos ۲x}{\sin x\cos x}y=\frac{۱}{\sin x\cos^{۳}x}\quad ,$$

$$F.I = e^{\int \frac{\cos ۲x dx}{\sin x \cos x}} = e^{\int \frac{۲\cos ۲x dx}{\sin ۲x}} = e^{\int \frac{d(\sin ۲x)}{\sin ۲x}} = e^{Log \sin ۲x} = \sin ۲x ,$$

$$\frac{d}{dx}(y \cdot \sin ۲x) = \frac{۱}{\sin x \cos^۳ x} \cdot ۲\sin x \cos x \quad ,$$

$$y \sin ۲x = c + ۲ tg x \quad \text{و یا} \quad y = c(\sin ۲x)^{-۱} + \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

مثال ۳- معادله خطی مرتبه اول :

$$x(x+۱)y' - (x^۲ + x - ۱)y = (x+۱)(x^۲ - ۱)$$

را حل کنید .

حل - بنابر تبصره پنجم به ترتیب خواهیم داشت :

$$y' - \frac{(x^۲ + x - ۱)}{x(x+۱)} y = \frac{x^۲ - ۱}{x} \quad ,$$

$$F.I = e^{-\int \frac{x^۲+x-۱}{x(x+۱)} dx} = e^{-\int \left[۱ - \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۱}\right] dx} = e^{Log \frac{x}{x+۱} - x}$$

$$= \frac{x}{x+۱} e^{-x} \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{x}{x+۱} e^{-x}\right) = \frac{x^۲ - ۱}{x} \cdot \frac{x}{x+۱} e^{-x} \quad ,$$

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{x}{x+۱} e^{-x}\right) = (x-۱)e^{-x} \quad ,$$

$$y \cdot \frac{x}{x+۱} e^{-x} = c - xe^{-x} \quad , \quad y = ce^{x}\left(۱ + \frac{۱}{x}\right) - ۱ - x$$

۸ . ۲- معادلات برنولی[۱] - ژاکوبی[۲] - ریکاتی[۳] - کلرو[٤] - لاگرانژ[٥]*

۸۱ . ۲- معادله برنولی

معادله :

$$y' + py = qy^n \qquad (۲ . ۸۱)$$

---

[۱] Bernoulli

[۲] Jacobi

[۳] Riccati

[٤] Clairaut

[٥] Lagrange

* این معادله به معادله دالامبر نیز موسوم است

راکه درآن p و q توابعی از x میباشند به برنولی‌نسبت میدهند. این معادله را میتوان باتبدیل متغیرتابع به معادله‌خطی‌تبدیل کرد وبرای‌این منظوراگر دوطرف رابطه (۲ . ۸۱) را بر y^n بخش کنیم خواهیم داشت :

$$y^{-n}y'+py^{۱-n}=q$$

حال اگر تبدیل متغیر تابع $z=y^{۱-n}$ را انجام دهیم به ترتیب چنین داریم :

$$z=y^{۱-n} \quad , \quad \frac{dz}{dx}=(۱-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}+(۱-n)pz=(۱-n)q$$

معادله اخیر نسبت به z خطی‌بوده و میتوان جواب عمومی‌آنرا درحالت کلی بادوکوادراتور بدست آورد .

مثال ـ معادله $y'-\frac{y}{۲x}=۵x^۲y^۵$ را حل کنید .

حل ـ با توجه به مطالب بالا به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{y'}{y^۵}-\frac{۱}{۲xy^۴}=۵x^۲ \quad , \quad v=y^{-۴} \quad , \quad \frac{dv}{dx}=-۴y^{-۵}y'$$

$$v'+\frac{۲}{x}v=-۲۰x^۲ \quad , \quad F.I=e^{\int\frac{۲}{x}dx}=e^{Log x^۲}=x^۲$$

$$\frac{d}{dx}(v\cdot x^۲)=-۲۰x^۲\cdot x^۲ \quad , \quad x^۲v=c-۴x^۵$$

$$v=cx^{-۲}-۴x^۳ \quad , \quad y=v^{-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{cx^{-۲}-۴x^۳}}$$

۸۲ . ۲ ـ معادله ژاکوبی

معادله :

$$(a_۱+b_۱x+c_۱y)(xdy-ydx)-(a_۲+b_۲x+c_۲y)dy$$
$$+(a_۳+b_۳x+c_۳y)dx=0 \qquad (۲ . ۸۲)$$

را که درآن ضرایب a_r , b_r , c_r $(r=1 , 2 , 3)$ مقادیر ثابتی میباشند به‌ژاکوبی نسبت میدهند . این معادله را با تبدیل متغیرها میتوان به معادله برنولی تبدیل کرد . برای این منظورتبدیل متغیرهای $x=X+\alpha$ و $y=Y+\beta$ را داده و مقادیر α و β را چنان تعیین میکنیم که ضرایب $dX , dY , XdY-YdX$ توابع همگنی از X و Y باشند . چنانچه تبدیل متغیرهای فوق را انجام دهیم رابطه (۲ . ۸۲) بصورت زیر درمیآید :

$$\begin{aligned}&(b_1X+c_1Y)(XdY-YdX)\\&-\left\{A_2+b_2X+c_2Y-\alpha(A_1+b_1X+c_1Y)-A_1X\right\}dY\\&+\left\{A_3+b_3X+c_3Y-\beta(A_1+b_1X+c_1Y)-A_1Y\right\}dX=0\end{aligned} \tag{۲ . ۸۲۱}$$

که در آن $A_r=a_r+b_r\alpha+c_r\beta$, $(r=1 , 2 , 3)$

با کمی دقت در معادله بالا معلوم میشود که ضریب $XdY-YdX$ نسبت به X و Y همگن بوده و برای آنکه ضرایب dX و dY نیزنسبت‌به X و Y همگن باشند باید α و β درمعادلات $A_2-\alpha A_1=0$ و $A_3-\beta A_1=0$ صدق کنند ویاآنکه:

$$A_1=\lambda \quad , \quad A_2=\alpha\lambda \quad , \quad A_3=\beta\lambda$$

پس از جایگزین کردن مقادیر A_3 , A_2 , A_1 خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}a_1-\lambda+b_1\alpha+c_1\beta&=a_2+(b_2-\lambda)\alpha+c_2\beta\\&=a_3+b_3\alpha+(c_3-\lambda)\beta=0\end{aligned} \tag{۲ . ۸۲۲}$$

ولی‌شرط لازم و کافی برای‌آنکه سه معادله‌بالا نسبت‌به α و β متوافق باشند آن‌است که :

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

از دترمینان بالا که معادله درجه سوم نسبت به λ میباشد مقدار λ را بدست‌آورده و مقادیر α و β را از رابطه (۲ . ۸۲۲) بدست میآوریم .

چنانچه مقادیر یافته شده α و β را در رابطه (۲ . ۸۲۱) قرار داده و دوطرف آنرا بر b_1X+c_1Y تقسیم کنیم ، خواهیم داشت :

$$XdY-YdX-\Phi\left(\frac{Y}{X}\right)dY+\Psi\left(\frac{Y}{X}\right)dX=o$$

و بالاخره اگر قرار دهیم $Y=uX$ معادله بالا به معادله برنولی :

$$\frac{dX}{du}+U_۱X+U_۲X^۲=o$$

که درآن $U_۱$ و $U_۲$ فقط به u بستگی دارند تبدیل میگردد .

میتوان نشان داد که اگر دترمینان بالا برحسب λ دارای سه ریشه متمایز $\lambda_۱$, $\lambda_۲$, $\lambda_۳$ باشد معادله ژاکوبی دارای جواب $U^{\lambda_۲-\lambda_۳}V^{\lambda_۳-\lambda_۱}W^{\lambda_۱-\lambda_۲}=c$ خواهد بود . U , V , W روابط خطی برحسب x و y میباشند .

مثال - معادله $(۲-x+۲xy-۲y^۲)dx+(۲+۲y-۲x^۲+۲xy)dy=o$ مفروض‌است . با انتخاب $a_۱=۱$ این معادله را بصورت(۲ . ۸۲۱) تبدیل کرده وسپس جواب عمومی معادله را بدست آورید .

حل - رابطه (۲ . ۸۲) را برحسب dx و dy مرتب نموده و سپس آنرا متحد با رابطه بالا قرار داده و به ترتیب چنین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}&(a_۱+b_۱x+c_۱y)(xdy-ydx)-(a_۲+b_۲x+c_۲y)dy+(a_۳+b_۳x\\&\quad+c_۳y)dx=[a_۳+b_۳x+(c_۳-a_۱)y-b_۱xy-c_۱y^۲]dx+[-a_۲\\&\quad+(a_۱-b_۲)x-c_۲y+c_۱xy+b_۱x^۲]dy\equiv(۲-x+۲xy-۲y^۲)dx\\&\quad+(۲+۲y-۲x^۲+۲xy)dy\end{aligned}$$

و ازآنجا : $a_۳+b_۳x+(c_۳-a_۱)y-b_۱xy-c_۱y^۲\equiv۲-x+۲xy-۲y^۲$

$$-a_۲+(a_۱-b_۲)x-c_۲y+c_۱xy+b_۱x^۲\equiv۲+۲y-۲x^۲+۲xy$$

نظربا ینکه‌روابط بالااتحاد میباشند وباتوجه بآنکه بنا بفرض $a_۱=۱$ است بسهولت معلوم میگردد که :

$$a_۱=۱\quad,\quad a_۲=-۲\quad,\quad a_۳=۲$$

$$b_۱=-۲\quad,\quad b_۲=۱\quad,\quad b_۳=-۱$$

$$c_۱=۲\quad,\quad c_۲=-۲\quad,\quad c_۳=۱$$

لذا شکل متناظر رابطه (۲ . ۸۲۱) این مسئله عبارت خواهد بوداز :

$$(۱-۲x+۲y)(xdy-ydx)-(-۲+x-۲y)dy+(۲-x+y)dx=0$$

اکنون تبدیل متغیرهای $x=X+\alpha$ و $y=Y+\beta$ را داده و مقادیر α و β را چنان تعیین میکنیم که ضرایب $dX , dY , XdY-YdX$ کثیرالجمله های همگن نسبت به X و Y باشند. اگر متغیرهای جدید را در معادله بالا قرار دهیم به ترتیب چنین داریم:

$$(۱-۲X-۲\alpha+۲Y+۲\beta)(XdY-YdX+\alpha dY-\beta dX)-(-۲+X$$
$$+\alpha-۲Y-۲\beta)dY+(۲-X-\alpha+Y+\beta)dX=0$$

$$-۲(X-Y)(XdY-YdX)-\Big[-۲+\alpha-۲\beta+X-۲Y-\alpha(۱-۲\alpha$$
$$+۲\beta-۲X+۲Y)-(۱-۲\alpha+۲\beta)X\Big]dY+\Big[۲-\alpha+\beta-X+Y$$
$$-\beta(۱-۲\alpha+۲\beta-۲X+۲Y)-(۱-۲\alpha+۲\beta)Y\Big]dX=0 \qquad \text{(I)}$$

واضح است که ضریب $XdY-YdX$ کثیرالجمله همگن برحسب X و Y میباشد ولی برای آنکه ضرایب dX و dY همگن باشند باید داشته باشیم :

$$(-۲+\alpha-۲\beta)-\alpha(۱-۲\alpha+۲\beta)=0 \quad ,$$
$$(۲-\alpha+\beta)-\beta(۱-۲\alpha+۲\beta)=0$$

و اگر قرار دهیم $۱-۲\alpha+۲\beta=\lambda$ معادلات بالا بصورت زیر درمیآیند :

$$۱-\lambda-۲\alpha+۲\beta=-۲+(۱-\lambda)\alpha-۲\beta=۲-\alpha+(۱-\lambda)\beta=0 \qquad \text{(II)}$$

و چنانچه شرط متوافق بودن سه معادله بالا را بنویسیم دترمینان زیر حاصل میشود :

$$\begin{vmatrix} ۱-\lambda & -۲ & ۲ \\ -۲ & ۱-\lambda & -۲ \\ ۲ & -۱ & ۱-\lambda \end{vmatrix}=0$$

و اگر مجموع سطر اول و دوم را در سطر دوم قرار دهیم چنین داریم :

$$-(۱+\lambda)\begin{vmatrix} ۱-\lambda & -۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & 0 \\ ۲ & -۱ & ۱-\lambda \end{vmatrix}=0$$

و یا :
$$-(۱+\lambda)\begin{vmatrix} ۱-\lambda & -۳+\lambda & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۱-\lambda \end{vmatrix}=۰$$

و یا :
$$(۱+\lambda)[(۱-\lambda)(-۳+\lambda)+٦]=۰\ ,\quad -(۱+\lambda)(\lambda^{۲}-٤\lambda-۳)=۰$$

لذا :
$$\lambda=-۱\quad ,\quad ۲\pm\sqrt{۷}$$

برای اختصار درعملیات ، جواب عمومی متناظر با $\lambda=-۱$ را محاسبه میکنیم. اگراین مقدار λ را در رابطه (II) قرار دهیم $\alpha=۰$ و $\beta=-۱$ بدست میآید و سرانجام اگر مقادیر α و β انتخابی را در رابطه (I) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$-۲(X-Y)(XdY-YdX)-(۲X-۲Y)dY+(-۳X+٤Y)dX=۰$$

و یا :
$$(XdY-YdX)+dY+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳X-٤Y}{X-Y}\right)dX=۰$$

اکنون تبدیل متغیر $Y=uX$ را انجام میدهیم و لذا چنین داریم :

$$\frac{Y}{X}=u\quad ,\quad \frac{XdY-YdX}{X^{۲}}=du\ ,\ dY=Xdu+udX\quad ,$$

$$X^{۲}du+Xdu+udX+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳-٤u}{۱-u}\right)dX=۰\quad ,$$

$$X^{۲}+X-\frac{۲u^{۲}+۲u-۳}{۲(۱-u)}\cdot\frac{dX}{du}=۰\quad \text{و یا}\quad \frac{۲u^{۲}+۲u-۳}{۲(۱-u)}\cdot\frac{dX}{du}-X=X^{۲}$$

معادله فوق معادله برنولی میباشد و بنابراین دوطرف آنرا بر $X^{۲}$ تقسیم کرده و $Z=\frac{۱}{X}$ قرار میدهیم :

$$X^{-۲}\frac{۲u^{۲}+۲u-۳}{۲(۱-u)}\cdot\frac{dX}{du}-X^{-۱}=۱\quad ,\quad -\frac{۱}{X^{۲}}\cdot\frac{dX}{du}=\frac{dZ}{du}$$

$$\frac{۲u^{۲}+۲u-۳}{۲(۱-u)}\cdot\frac{dZ}{du}+Z=-۱\quad ,$$

$$\frac{dZ}{du}+\frac{۲(۱-u)}{۲u^{۲}+۲u-۳}Z=-\frac{۲(۱-u)}{۲u^{۲}+۲u-۳}$$

$$\mathrm{F}\,.\,\mathrm{I}=e^{\int\frac{۲(۱-u)}{۲u^{۲}+۲u-۳}\,du}=\frac{\left(u+\frac{۱-\sqrt{۷}}{۲}\right)^{\frac{۳-\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}}}{\left(u+\frac{۱+\sqrt{۷}}{۲}\right)^{\frac{۳+\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}}}$$

$$\frac{d}{du}\left[Z\cdot\frac{\left(u+\frac{۱-\sqrt{۷}}{۲}\right)^{\frac{۳-\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}}}{\left(u+\frac{۱+\sqrt{۷}}{۲}\right)^{\frac{۳+\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}}}\right]=-\frac{\left(u+\frac{۱-\sqrt{۷}}{۲}\right)^{\frac{۳-\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}}}{\left(u+\frac{۱+\sqrt{۷}}{۲}\right)^{\frac{۳+\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}}}\cdot\frac{(۱-u)}{\left(u+\frac{۱+\sqrt{۷}}{۲}\right)\left(u+\frac{۱-\sqrt{۷}}{۲}\right)}$$

پس از محاسبه Z میتوان جواب عمومی را بدست آورد .

۸۳ . ۲- معادله ریکاتی و خواص آن

معادله :

$$\frac{dy}{dx}=py^{۲}+qy+r \qquad (۲\,.\,۸۳)$$

که در آن p , q , r توابعی از x میباشند معادله تعمیم یافته ریکاتی* است. بطورکلی این معادلات را نمیتوان با کوادراتورهای معمولی حل کرد و بالنتیجه منجر به تعریف توابع ترانساندانت جدیدی خواهد گردید که از توابع ترانساندانت معمولی متمایز میباشند.

چنانچه $y=y_{۱}$ یکی از جوابهای خصوصی معادله (۸۳ . ۲) در دست باشد جواب عمومی با دو کوادراتور متوالی بدست میآید. چه اگر تبدیل متغیر $y=y_{۱}+z$ را دهیم خواهیم داشت :

---

* معادله‌یی که ریکاتی حل کرده است بصورت $y'+ay^{۲}=bx^{m}$ میباشد که در آن a و b مقادیر ثابتی است وصورت کلی بالا بوسیله دالامبر مورد مطالعه قرار گرفته است .

$$\frac{dy_{۱}}{dx}+\frac{dz}{dx}-p(y_{۱}^{۲}+۲y_{۱}z+z^{۲})-q(y_{۱}+z)-r=o$$

چون $y=y_{۱}$ بنابفرض جواب خصوصی معادله (۸۳ . ۲) است لذا چنین داریم :

$$\frac{dz}{dx}=(۲y_{۱}p+q)z+pz^{۲}$$

معادله بالا معادله برنولی‌بوده وبا تبدیل متغیر $z=\frac{۱}{u}$ به معادله خطی‌تبدیل میگردد.

نتیجه ۱- اگر سه جواب خصوصی و متمایز $y_{۱}$, $y_{۲}$, $y_{۳}$ در دست باشد جواب عمومی (۸۳ . ۲) بدون کوادراتور بدست خواهد آمد زیرا واضح است که سه تابع :

$$u=\frac{۱}{y-y_{۱}}\ ,\ u_{۱}=\frac{۱}{y_{۲}-y_{۱}}\ ,\ u_{۲}=\frac{۱}{y_{۳}-y_{۱}}$$

در معادله خطی مربوطه صدق کرده و بنابر تبصره چهارم شماره (۷ . ۲) چنین داریم :

$$\frac{u-u_{۱}}{u_{۲}-u_{۱}}=c$$

c مقدار ثابتی میباشد. پس‌ازجایگزین نمودن مقادیر u , $u_{۱}$, $u_{۲}$ این‌رابطه بصورت $\frac{y-y_{۲}}{y-y_{۱}}=c\,\frac{y_{۳}-y_{۲}}{y_{۳}-y_{۱}}$ درمیاید.

نتیجه ۲- انتگرال عمومی معادله‌ریکاتی تابع هموگرافیک‌از مقدار ثابت c میباشد. زیرا بنا برابطه (۷۳ . ۲) جواب عمومی معادله خطی بصورت $u=cf_{۱}+f_{۲}$ بوده [$f_{۱}(x)$ و $f_{۲}(x)$ توابع غیر مشخصی‌از x بوده و جایگزین فاکتورهای $e^{-\int pdx}$ و $e^{-\int pdx}\int qe^{\int pdx}dx$ هستند] ولذا جواب عمومی معادله‌ریکاتی‌عبارت خواهد بود از :

$$y=y_{۱}+z=y_{۱}+\frac{۱}{u}=y_{۱}+\frac{۱}{cf_{۱}+f_{۲}}=\frac{cy_{۱}f_{۱}+y_{۱}f_{۲}+۱}{cf_{۱}+f_{۲}}=\frac{cf_{۳}+f_{۴}}{cf_{۱}+f_{۲}}$$

که در آن $f_{۳}=y_{۱}f_{۱}$ و $f_{۴}=۱+y_{۱}f_{۲}$.

بالعکس میتوان‌نشان داد که هرتابع هموگرافیک‌از مقدار ثابت c را بین تابع ومشتق آن حذف کنیم معادله دیفرانسیل حاصل معادله ریکاتی خواهد بود .

نتیجه ۳- بنابر تعریف‌نسبت **نابساز** (غیر توافقی) چهار مقدار $y_{۱}$, $y_{۲}$, $y_{۳}$, $y_{۴}$

که آنرا باسیمول $(y_{۱} , y_{۲} , y_{۳} , y_{٤})$ نمایش میدهند عبارتست از حاصلضرب :

$$\frac{y_{۱}-y_{۳}}{y_{۱}-y_{٤}} \cdot \frac{y_{۲}-y_{٤}}{y_{۲}-y_{۳}}$$

بطور کلی تعداد نسبت‌های نابسازی که با چهارحرف $y_{۱}$، $y_{۲}$ ، $y_{۳}$ ، $y_{٤}$ میتوان تشکیل داد برابر $۲٤ = !٤$ میباشد ولی بسهولت میتوان نشان داد که ازاین ۲٤ نسبت فقط ٦ نسبت دارای مقادیر متمایز از یکدیگر میباشند چه اگر $\lambda = (y_{۱} , y_{۲} , y_{۳} , y_{٤})$ قرار دهیم :

$$(y_{۲} , y_{۱} , y_{۳} , y_{٤}) = \frac{y_{۲}-y_{۳}}{y_{۲}-y_{٤}} \cdot \frac{y_{۱}-y_{٤}}{y_{۱}-y_{۳}} = \frac{۱}{\lambda}$$

و بالنتیجه با قرارداد فوق ، مقادیر شش نسبت ، عبارت خواهند بود از :

$$\lambda \ , \ \frac{۱}{\lambda} \ , \ ۱-\lambda \ , \ \frac{۱}{۱-\lambda} \ , \ \frac{\lambda}{\lambda-۱} \ , \ \frac{\lambda-۱}{\lambda}$$

لذا با درنظر گرفتن نتیجه اول میتوان گفت که نسبت نابساز چهار جواب خصوصی معادله ریکاتی همواره ثابت میباشد .

نتیجه ٤- اگر دو انتگرال خصوصی $y = y_{۱}$ و $y = y_{۲}$ معادله ریکاتی را داشته باشیم جواب عمومی با یک کوادراتور بدست میاید . زیرا اگر $y_{۱}$ و $y_{۲}$ را در معادله (۲ . ۸۳) قرار داده و سپس آنها را از رابطه (۲ . ۸۳) کم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx}(y-y_{۱}) - p(y-y_{۱})(y+y_{۱}) - q(y-y_{۱}) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(y-y_{۲}) - p(y-y_{۲})(y+y_{۲}) - q(y-y_{۲}) = 0$$

و یا :

$$\frac{d}{dx}(y-y_{۱})/(y-y_{۱}) - q - p(y+y_{۱}) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(y-y_{۲})/(y-y_{۲}) - q - p(y+y_{۲}) = 0$$

لذا :

$$\frac{d(y-y_{۱})}{y-y_{۱}} - \frac{d(y-y_{۲})}{y-y_{۲}} - p(y_{۱}-y_{۲})dx = 0$$

پس از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$Log\frac{y-y_1}{y-y_2}-\int p(y_1-y_2)dx=c$$

نتیجه ۵- اگردر رابطه(۸۳ . ۲) ضریب y^2 یعنی $p(x)$ متحد صفر باشد معادله ریکاتی به‌معادله خطی‌تبدیل میگردد ولی‌اگر p متحد صفر نباشد معادله ریکاتی را میتوان به معادله مرتبه دوم‌خطی‌تبدیل نمود و برای این منظور فرض میکنیم v متغیر تابع جدیدی باشد که با رابطه $y=\frac{v}{p}$ مشخص میگردد. پس‌ازجایگزین کردن y و $\frac{dy}{dx}$ در رابطه (۸۳ . ۲) به ترتیب خواهیم داشت :

$$\left(\frac{v'}{p}-\frac{vp'}{p^2}\right)=p\cdot\frac{v^2}{p^2}+q\frac{v}{p}+r$$

و یا :

$$\frac{dv}{dx}=v^2+\left(q+\frac{p'}{p}\right)v+rp$$

بنابراین :

$$\frac{dv}{dx}=v^2+\varphi v+\psi$$ (۸۳۱ . ۲)

که در آن $\varphi=q+\frac{p'}{p}$ و $\psi=rp$ اکنون قرار میدهیم $v=-\frac{u'}{u}$ لذا خواهیم داشت :

$$-\frac{u''}{u}+\frac{u'^2}{u^2}=\frac{u'^2}{u^2}-\varphi\frac{u'}{u}+\psi=0$$ و یا $$u''-\varphi u'+\psi u=0$$

بالعکس اگر در معادله مرتبه دوم $y''+py'+qy=0$ تبدیل متغیر تابع :

$$y=\exp^*(-\int udx)$$

را دهیم خواهیم داشت :

$$y'=-u\exp(-\int udx)\quad,\quad y''=(u^2-u')\exp(-\int udx)$$

و از آنجا معادله $y''+py'+qy=0$ بصورت $u'=q-pu+u^2$ که یک معادله ریکاتی است درمیاید .

---

* منظور از سمبول exp بیان‌کننده توان عدد e میباشد یعنی $\exp(u)=e^u$.

نتیجه ۶- اکنون معادله اصلی ریکاتی یعنی $\frac{dy}{dx}+by^۲=cx^m$ رادرنظر گرفته و در آن تبدیل متغیر تابع $by=\frac{۱}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$ را میدهیم وازآنجا به ترتیب چنین داریم :

$$b\frac{dy}{dx}=-\frac{۱}{v^۲}\left(\frac{dv}{dx}\right)^۲+\frac{۱}{v}\left(\frac{d^۲v}{dx^۲}\right)$$

و یا : ,

$$-\frac{۱}{v^۲}\left(\frac{dv}{dx}\right)^۲+\frac{۱}{v}\cdot\frac{d^۲v}{dx^۲}+\frac{۱}{v^۲}\left(\frac{dv}{dx}\right)^۲-bcx^m=0$$

$$\frac{d^۲v}{dx^۲}-bcvx^m=0 \qquad (۲ . ۸۳۲)$$

در فصول آتی نشان خواهیم داد که رابطه (۲ . ۸۳۲) را میتوان به معادله **بسل*** تبدیل کرد.

نتیجه ۷- برای یافتن جواب عمومی معادله ریکاتی لازم است که یکی از جوابهای خصوصی معادله را در دست داشته باشیم . دربرخی از موارد یافتن این جواب با بررسی معادله بسهولت معلوم میگردد مثلاً با کمی دقت معلوم میشود که $y=x$ یکی از جوابهای خصوصی معادله $y'=۱-x^۲+y^۲$ میباشد . در مواردیکه r , q , p در رابطه (۲ . ۸۳) کثیرالجمله هایی از x میباشند در جستجوی جوابی میباشیم که کثیرالجمله یی از x باشد وبرای آنکه تعداد کثیرالجمله ها را محدود نماییم از روش زیر که مربوط به **رینویل**** است استفاده میکنیم .

اکنون معادلات ریکاتی را درنظر میگیریم که ضرایب $\varphi=q+\frac{p'}{p}$ و $\psi=pr$ در رابطه (۲ . ۸۳۱) کثیرالجمله هایی از x باشند. چنانچه r , q , p کثیرالجمله هایی از x باشند واضح است که ψ کثیرالجمله یی از x بوده ولی لزومی ندارد که φ کثیرالجمله یی از x باشد و چنانچه بعداً بیان خواهیم نمود دراینجا نباید نتیجه گرفت که مسئله تعیین جوابهای کثیرالجمله برای معادلات (۲ . ۸۳) و (۲ . ۸۳۱) بایکدیگر معادل میباشند .

درهرصورت شرح خواهیم داد که برای یافتن جوابهای خصوصی کافی است یک یادو کثیرالجمله را که ضرایب آن کاملاً معین هستند بعنوان جواب پنداشته و باجایگزین نمودن آن در معادله تحقیق کنیم که کدامیک از آنها در معادله صدق میکنند .

Bessel *

Rainville **

تعریفـ $P(x)$ را کثیرالجمله یی از درجه زوج پنداشته و $\sqrt{P(x)}$ را برحسب قوای نزولی x بسط میدهیم. قسمت کثیرالجمله بسط اخیر را بنابر تعریف با سمبول $[\sqrt{P(x)}]$ نمایش میدهیم و برای آنکه منحصر بفرد بودن نتایج را تضمین کنیم از دو ضریب ممکنه بزرگترین قوه x (زیرا ضرایب ممکن است موهومی باشند) در بسط $\sqrt{P(x)}$ ضریبی را انتخاب میکنیم که دارای کوچکترین دامنه مثبت باشد.

یکی از روشهای بسیار ساده برای یافتن قسمت کثیرالجمله $[\sqrt{P(x)}]$ آن است که مانند حساب از $P(x)$ جذر بگیریم. ذیلاً با ذکر مثالهایی این روش را یادآوری میکنیم.

مثال ١ـ قسمت کثیرالجمله $[\sqrt{x^٦-٤x^٤+١٠x^٢-٤}]$ را پیدا کنید.

حلـ چنانچه مطابق معمول جذر کثیرالجمله بالا را حساب کنیم چنین داریم:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{x^٦-٤x^٤+١٠x^٢-٤} & x^٣-٢x \\ \hline
x^٦ & ٢x^٣-٢x \\
-٤x^٤ & \quad -٢x \\ \hline
-٤x^٤+٤x^٢ & -٤x^٤+٤x^٢ \\ \hline
٦x^٢-٤ & ٢x^٣-٤x
\end{array}$$

و از آنجا: $[\sqrt{x^٦-٤x^٤+١٠x^٢-٤}]=x^٣-٢x$

مثال ٢ـ قسمت کثیرالجمله $[\sqrt{x^٤-٢x^٣+x-٦}]$ را بدست آورید.

حلـ بطریق مشابه خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{x^٤-٢x^٣+x-٦} & x^٢-x-\frac{١}{٢} \\ \hline
x^٤ & ٢x^٢-x \\
-٢x^٣ & \quad -x \\ \hline
-٢x^٣+x^٢ & -٢x^٣+x^٢ \\ \hline
-x^٢ & ٢x^٢-٢x-\frac{١}{٢} \\
-x^٢+x+\frac{١}{٤} & \quad -\frac{١}{٢} \\ \hline
-\frac{٢٥}{٤} & -x^٢+x+\frac{١}{٤}
\end{array}$$

لذا :

$$[\sqrt{x^٤ - ٢x^٣ + x - ٦}\,] = x^٢ - x - \frac{١}{٢}$$

قضیه اول - اگر در معادله :

$$\frac{dv}{dx} = \psi + v^٢ \qquad (٢ . ٨٣٣)$$

$\psi(x)$ کثیرالجمله یی ازدرجه زوج باشد تنها جواب کثیرالجمله یی (یعنی جوابهایی که بصورت کثیرالجمله هستند) معادله عبارت از $v = \pm [\sqrt{-\psi}\,]$ خواهد بود و اگر درجه $\psi(x)$ فرد باشد معادله (٢ . ٨٣٣) دارای جواب کثیرالجمله نخواهد بود .

اثبات - فرض میکنیم درجه ψ زوج و $s = [\sqrt{-\psi}\,]$ باشد . کثیرالجمله q را با رابطه $-\psi = s^٢ + q$ تعیین میکنیم . واضح است که درجه q کمتر از s میباشد . رابطه (٢ . ٨٣٣) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{dv}{dx} = v^٢ - s^٢ - q = (v-s)(v+s) - q \qquad (٢ . ٨٣٤)$$

اکنون فرض میکنیم v کثیرالجمله یی از x باشد . باستثنای $v = \pm s$ درجه سمت راست رابطه (٢ . ٨٣٤) اقلاً باندازه بزرگترین درجه‌های v و s بزرگ خواهد بود ولی درجه های کثیرالجمله های v' و q به ترتیب از v و s کوچکتر میباشند وازآنجا چنین برمیآید که رابطه (٢ . ٨٣٤) برای کثیرالجمله های غیر مشخص صادق نبوده و فقط برای $v = \pm s$ صادق است .

حال فرض میکنیم درجه ψ فرد باشد. چون درجه $v^٢$ زوج و بزرگتر از v' میباشد لذا برای آنکه معادله (٢ . ٨٣٣) برقرار باشد لازم است که در عبارت $\psi + v^٢$ ضرایب جملیکه دارای قوای بزرگتر از v' هستند متحد صفر باشند و بنابراین باید درجه های ψ و $v^٢$ بایکدیگر مساوی باشند. ولی چون بنابر فرض درجه ψ فرد است لذا امکان ندارد که درجه آن برابر $v^٢$ که زوج است گردد و بنابراین در مواردیکه درجه ψ فرد باشد نمیتوان جواب کثیرالجمله یی برای معادله (٢ . ٨٣٣) یافت . اگر دررابطه (٢ . ٨٣١) تبدیل متغیرتابع $v = u - \frac{١}{٢}\varphi$ را بدهیم میتوان این معادله را به معادله (٢ . ٨٣٣) مبدل کنیم .

زیرا به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=\left(u-\frac{۱}{۲}\varphi\right)^{۲}+\varphi\left(u-\frac{۱}{۲}\varphi\right)+\psi$$

و یا :

$$\frac{du}{dx}=u^{۲}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\frac{۱}{۴}\varphi^{۲}+\psi=-\frac{۱}{۴}\left(\varphi^{۲}-۴\psi-۲\frac{d\varphi}{dx}\right)+u^{۲}$$

$$=c_{0}+u^{۲}\quad,\quad c_{0}=-\frac{۱}{۴}\left(\varphi^{۲}-۴\psi-\frac{۲d\varphi}{dx}\right)$$

چون بنابفرض φ و ψ کثیرالجمله هایی از x میباشند لذا c_0 نیز کثیرالجمله یی از x بوده و میتوان قضیه بالا را درمورد معادله (۲ . ۸۳۱) بصورت زیر بیان کرد .

قضیه دوم ـ اگر در رابطه (۲ . ۸۳۱) ضرایب φ و ψ کثیرالجمله هایی از x بوده و درجه :

$$\triangle=\varphi^{۲}-۴\psi-۲\frac{d\varphi}{dx}$$

زوج باشد ، هیچ کثیرالجمله یی باستثنای $v=-\frac{۱}{۲}(\varphi\pm T)$ که درآن $T=[\sqrt{\triangle}\,]$ است جواب معادله نمیتواند باشد . اگر درجه $\triangle$ فرد باشد هیچ کثیرالجمله یی جواب معادله (۲ . ۸۳۱) نمیباشد .

مثال ۳ـ جمیع جوابهای کثیرالجمله یی معادله :

$$v'=(۲x^{۳}-۳x^{۲}-۴x+۶)+(x^{۳}-۲x+۴)v+v^{۲}$$

را بدست آورید .

حل ـ پس از مقایسه با رابطه (۲ . ۸۳۱) چنین داریم :

$$\psi=۲x^{۳}-۳x^{۲}-۴x+۶\quad;\quad\varphi=x^{۳}-۲x+۴$$

و پس از محاسبه معلوم میگردد که :

$$\triangle=x^{۶}-۴x^{۴}+۱۰x^{۲}-۴$$

چون درجه $\triangle$ زوج میباشد لذا بنابر قضیه دوم معادله (۲ . ۸۳۱) دارای جواب کثیرالجمله :

$$v=-\frac{۱}{۲}(\varphi\pm T)$$

میباشد . بااستفاده از مسئله یک داریم :

$$T=[\sqrt{\triangle}\,]=[\sqrt{x^{٦}-٤x^{٤}+۱۰x^{۲}-٤}\,]=x^{۳}-۲x$$

و بنابراین جوابهای آزمایشی بیان شده در قضیه دوم عبارت خواهند بود از :

$$v_{۱}=-\frac{۱}{۲}\,(\varphi+T)=-\frac{۱}{۲}\,(x^{۳}-۲x+٤+x^{۳}-۲x)=-x^{۳}+۲x-۲$$

$$v_{۲}=-\frac{۱}{۲}\,(\varphi-T)=-\frac{۱}{۲}\,(x^{۳}-۲x+٤-x^{۳}+۲x)=-۲$$

پس‌از جایگزین کردن $v_{۱}$ و $v_{۲}$ در معادله بالا خواهیم دید که $v_{۱}$ جواب معادله بوده و لذا میتوان نتیجه گرفت که $v_{۱}=-x^{۳}+۲x-۲$ تنها جواب کثیرالجمله این معادله میباشد .

اکنون میخواهیم تحقیق کنیم که با چه شرایطی هردو کثیرالجمله آزمایشی قضیه دوم در معادله صدق میکنند . قضیه زیر باین سئوال جواب میدهد .

قضیه سوم - شرط لازم و کافی برای آنکه دو کثیرالجمله آزمایشی قضیه دوم جواب معادله :

$$\frac{dv}{dx}=\psi+\varphi v+v^{۲} \qquad (۲ \,.\, ۸۳۱)$$

باشند آنست که $\triangle$ تبدیل به مقدار ثابت گردد .

الف - شرط لازم است - فرض میکنیم کثیرالجمله های $v_{۱}=-\frac{۱}{۲}\,(\varphi+T)$ و $v_{۲}=-\frac{۱}{۲}\,(\varphi-T)$ تواماً در معادله (۲ . ۸۳۱) صدق کنند وپس‌از جایگزین نمودن آنها در معادله (۲ . ۸۳۱) به ترتیب خواهیم داشت :

$$T'=\frac{۱}{۲}\,(T^{۲}-\triangle) \quad , \quad T'=-\frac{۱}{۲}\,(T^{۲}-\triangle)$$

ازروابط بالا نتیجه میگیریم که $T'=o$ و از آنجا $T=k$ خواهد بود . چون T ثابت میباشد لذا $\triangle$ نیز ثابت خواهد بود و لزوم شرط بدین ترتیب ثابت میشود .

ب - شرط کافی‌است - دراین مورد $\triangle$ را ثابت میپنداریم . دراین صورت :

$$T=\sqrt{\triangle} \quad , \quad v_{۱}=-\frac{۱}{۲}\,(\varphi+\sqrt{\triangle}\,)$$

$$ψ+φv_۱+v_۱^۲=ψ-\frac{۱}{۲}φ^۲-\frac{۱}{۲}φ\sqrt{Δ}+\frac{۱}{٤}φ^۲+\frac{۱}{۲}φ\sqrt{Δ}+\frac{۱}{٤}Δ$$

پس از جایگزین کردن مقدار $Δ$ که برابر $φ^۲-٤ψ-۲\frac{dφ}{dx}$ است در معادله بالا خواهیم داشت :

$$ψ+φv_۱+v_۱^۲=ψ-\frac{۱}{٤}φ^۲+\frac{۱}{٤}φ^۲-ψ-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dφ}{dx}=-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dφ}{dx}$$

ولی چون بنا بفرض $Δ$ ثابت میباشد پس چنانچه از رابطه $v_۱=-\frac{۱}{۲}(φ+\sqrt{Δ})$ نسبت به x مشتق بگیریم داریم $\frac{dv_۱}{dx}=-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dφ}{dx}$ و بالنتیجه رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$ψ+φv_۱+v_۱^۲=-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dφ}{dx}=\frac{dv_۱}{dx}$$

بعبارت دیگر $v_۱$ درمعادله (۸۳۱ . ۲) صدق میکند .

بطریق مشابه میتوان نشان داد که $v_۲=-\frac{۱}{۲}(φ-\sqrt{Δ})$ درمعادله (۸۳۱ . ۲) صدق مینماید . زیرا :

$$ψ+φv_۲+v_۲^۲=ψ-\frac{۱}{۲}φ^۲+\frac{۱}{۲}φ\sqrt{Δ}+\frac{۱}{٤}φ^۲-\frac{۱}{۲}φ\sqrt{Δ}+\frac{۱}{٤}Δ$$

$$=ψ-\frac{۱}{۲}φ^۲+\frac{۱}{۲}φ\sqrt{Δ}+\frac{۱}{٤}φ^۲-\frac{۱}{۲}φ\sqrt{Δ}+$$

$$\frac{۱}{٤}φ^۲-ψ-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dφ}{dx}=-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dφ}{dx}=\frac{dv_۲}{dx}$$

و باین ترتیب کافی بودن قضیه نیز ثابت میگردد .

اکنون میخواهیم جواب عمومی را در اینحالت بدست آوریم و برای این منظور $v=-\frac{۱}{۲}(φ+k)+u^{-۱}=v_۱+u^{-۱}$ که در آن $k=\sqrt{Δ}$ استقرار داده وآنرا درمعادله (۸۳۱ . ۲) جایگزین میکنیم لذا به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv_۱}{dx}-\frac{u'}{u^۲}=\psi+\varphi\left(v_۱+\frac{۱}{u}\right)+\left(v_۱+\frac{۱}{u}\right)^۲$$

$$=\psi+\varphi v_۱+v_۱^۲+\frac{\varphi}{u}+\frac{۱}{u_۲}+\frac{۲v_۱}{u}$$

چون $v_۱$ جواب معادله میباشد پس $\frac{dv_۱}{dx}=\psi+\varphi v_۱+v_۱^۲$ لذا چنین داریم :

$$-\frac{u'}{u^۲}=\frac{\varphi}{u}+\frac{۱}{u^۲}-\frac{\varphi+k}{u}$$

بالاخره $u'-ku+۱=o$. اگر $k\neq o$ باشد این معادله دارای جواب عمومی $u=ce^{kx}+k^{-۱}$ میباشد که درآن c مقدار ثابت غیر مشخصی است. بنابراین درمواردیکه △ ثابت میباشد جواب عمومی معادله (۲ . ۸۳۱) عبارت خواهد بود از :

$$v=-\frac{۱}{۲}(\varphi+k)+(ce^{kx}+k^{-۱})^{-۱}$$

واضح است اگر در رابطه بالا $c=o$ و یا $c\rightarrow\infty$ باشد به‌ترتیب جوابهای کثیرالجمله $v_۱=-\frac{۱}{۲}(\varphi+k)$ و $v_۲=-\frac{۱}{۲}(\varphi-k)$ بدست میآید .

بالاخره درمواردیکه $\triangle=o$ است k نیزبرابر صفر بوده و معادله(۲ . ۸۳۱) دارای جواب عمومی زیر خواهد بود :

$$v=-\frac{۱}{۲}\varphi+\frac{۱}{c_۱-x}$$

باید تأکید کنیم که‌سه‌قضیه‌بالادرباره معادلات‌ریکاتی‌هنگامی‌صادق میباشند که ψ و φ در رابطه (۲ . ۸۳۱) کثیرالجمله‌هایی از x باشند ولی اگر نتوانیم قضایای بالا را درمورد معادله ریکاتی بکار بریم نمیتوانیم نتیجه بگیریم که معادله دارای جواب کثیرالجمله نیست مثلاً معادله ریکاتی :

$$\frac{dy}{dx}=\sin^۲x+\frac{\cos^۲x}{x^۲}y^۲$$

دارای جواب کثیرالجمله‌یی $y=x$ میباشد .

اکنون شایسته است که جوابهای کثیرالجمله‌یی معادله :

$$sy'=py^۲+qy+r \qquad (۲ . ۸۳۵)$$

را که در آن p , q , r , s کثیرالجمله هایی از x هستند مورد بررسی قرار دهیم. چنانچه از مثال زیر برمیآید تعداد جوابهای کثیرالجمله‌یی مانند حالتهای خاص بالا محدود به دو جواب نیست .

مثال ٤- جوابهای کثیرالجمله‌یی معادله :

$$(۹x^٤+۱۸x^۳+۱۱x^۲+۲x)\frac{dy}{dx}=-۹x^٤-٦x^۳+٤x^۲$$
$$+(۱۸x^۳+۲٤x^۲+٤x+۲)y+۳y^۲$$

را پیدا کنید .

حل - بسهولت معلوم میگردد که این معادله دارای پنج جواب کثیرالجمله بشکل زیر میباشد :

$$y_۱=x \;;\; y_۲=x^۲+۲x \;;\; y_۳=۳x^۳+٥x^۲+۳x \;;\; y_٤=۲x^۲+\frac{۷}{۳}x \;;$$
$$y_٥=-x^۲-\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}$$

مسئله تعیین جوابهای کثیرالجمله‌یی معادله $sy'=py^۲+qy+r$ تاکنون بطور رضایت بخشی حل نشده است ولی برای محدود کردن جوابهای آزمایشی میتوان **بطریق** زیر عمل نمود :

چنانچه معادله (۲ . ۸۳۵) دارای جواب کثیرالجمله‌یی $y=c(x)$ باشد باجایگزین نمودن $y=u+c(x)$ در معادله (۲ . ۸۳۵) آنرا به ترتیب زیر ساده میکنیم :

$$s(u'+c')=p(u+c)^۲+q(u+c)+r$$

و یا :

$$su'+sc'=pc^۲+qc+r+u(۲pc+q)+pu^۲$$

با توجه بآنکه بنابفرض $c(x)$ یکی از جوابهای معادله (۲ . ۸۳۵) است لذا چنین داریم:

$$su'=p_۱u+pu^۲ \quad ; \quad p_۱=۲pc+q$$

واضح است که معادله بالا دارای جواب کثیرالجمله $u=0$ بوده و میتوان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$su' = u(p_{۱} + pu)$$

ازاین‌صورت معادله میتوان‌نتیجه گرفت که اگر u دارای فاکتور $(x-a)^{m}$ و $m \geqslant ۱$ باشد دراینصورت $(x-a)$ یکی از فاکتورهای $s(x)$ خواهد بود . با توجه به مطلب بالا میتوان جوابهای آزمایشی را محدود به‌توابعی نمایم که فاکتورهای خطی آنها شامل $s(x)$ باشند .

مثال ۵- جوابهای کثیرالجمله‌یی معادله ریکاتی زیر را بدست آورده و سپس جواب عمومی معادله را بیابید .

$$\frac{dy}{dx} = ۱٦x^{۲} - ۵ + ۸xy + y^{۲}$$

حل - چنانچه معادله بالا را با رابطه (۲ . ۸۳۱) مقایسه کنیم چنین داریم :

$$\varphi = ۸x \quad , \quad \psi = ۱٦x^{۲} - ۵$$

$$\triangle = \varphi^{۲} - ٤\psi - ۲\frac{d\varphi}{dx} = ٤$$

و لذا بنابر قضیه سوم دو کثیرالجمله آزمایشی :

$$y_{۱} = -\frac{۱}{۲}(\varphi + T) \quad , \quad y_{۲} = -\frac{۱}{۲}(\varphi - T)$$

که درآن $T = \sqrt{\triangle} = ۲ = k$ است جواب معادله خواهند بود . یعنی :

$$y_{۱} = -\frac{۱}{۲}(\varphi + T) = -\frac{۱}{۲}(۸x + ۲) = -٤x - ۱$$

$$y_{۲} = -\frac{۱}{۲}(\varphi - T) = -\frac{۱}{۲}(۸x - ۲) = -٤x + ۱$$

و جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$v = -\frac{۱}{۲}(\varphi + k) + (ce^{kx} + k^{-۱})^{-۱} = -\frac{۱}{۲}(۸x + ۲) +$$

$$\left(ce^{۲x} + \frac{۱}{۲}\right)^{-۱} = -(٤x + ۱) + \left(ce^{۲x} + \frac{۱}{۲}\right)^{-۱}$$

مثال ۶- نشان دهید که ۱ , x , $x^۲$ جوابهای خصوصی معادله :

$$x(x^۲-۱)y'+x^۲-(x^۲-۱)y-y^۲=0$$

بوده و از آنجا جواب عمومی این معادله را بدست آورید .

حل - بسهولت معلوم میشود که هریک ازجوابهای خصوصی ۱ , x , $x^۲$ دراین معادله صدق میکند و لذا بنابر نتیجه اول خواهیم داشت :

$$\frac{y-y_۲}{y-y_۱}=c\,\frac{y_۳-y_۲}{y_۳-y_۱} \quad \text{و یا} \quad \frac{y-x}{y-۱}=c\,\frac{x}{(x+۱)}$$

و بالنتیجه جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$y[(۱-c)x+۱]=(۱-c)x+x^۲$$

جواب عمومی بالا را میتوان بصورت ساده‌تر $y(x+k)=x+kx^۲$ که درآن $k=\frac{۱}{۱-c}$ است نوشت .

با کمی دقت معلوم میشود که جوابهای خصوصی $y_۱=۱$, $y_۲=x$, $y_۳=x^۲$ به‌ترتیب متناظر بامقادیر $k=0$, $k=۱$, $k=\infty$ هستند. حال اگر $k=-۱$ باشد جواب خصوصی متناظر برابر $y_٤=-x$ میباشد و بنابر نتیجه سوم نسبت نابساز چهار عدد $(y_۱ , y_۲ , y_۳ , y_٤)$ باید مقدار ثابت باشد زیرا اگر این نسبت را تشکیل دهیم چنین داریم:

$$(y_۱ , y_۲ , y_۳ , y_٤)=\frac{y_۱-y_۳}{y_۱-y_٤}\cdot\frac{y_۲-y_٤}{y_۲-y_۳}=\frac{۱-x^۲}{۱+x}\cdot\frac{۲x}{x-x^۲}$$

$$=(۱-x)\cdot\frac{۲}{۱-x}=۲$$

مثال ۷ - نشان دهید که دو مقدار برای k میتوان یافت بقسمیکه $\frac{k}{x}$ جوابهای خصوصی معادله $x^۲\left(\frac{dy}{dx}+y^۲\right)=۲$ باشد وازآنجا جواب عمومی معادله را بدست آورید .

حل - برای آنکه $\frac{k}{x}$ جواب معادله باشد باید داشته باشیم :

$$x^۲\left(-\frac{k}{x^۲}+\frac{k^۲}{x^۲}\right)=۲$$

و بالنتیجه بازاء ریشه‌های معادله $k^۲-k-۲=0$ یعنی $k=۲\,,-۱$ تابع $\frac{k}{x}$ جوابهای خصوصی معادله میباشد .

باستفاده از نتیجه چهارم جواب عمومی این مسئله بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲}{x^۲}-y^۲ \quad ,$$

$$Log\frac{y-y_۱}{y-y_۲}-\int p(y_۱-y_۲)dx=c \quad ,$$

$$Log\frac{y-\frac{۲}{x}}{y+\frac{۱}{x}}+\int\frac{۳}{x}\,dx=c \quad \text{و یا} \quad \frac{y-\frac{۲}{x}}{y+\frac{۱}{x}}x^۳=c$$

جواب‌عمومی معادله‌بصورت $y\,(kx^٤-x)=۲kx^۳+۱$ میباشد که‌درآن $c=\frac{۱}{k}$ است .

مثال ۸ ـ معادله مرتبه دوم :

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}-x\frac{dy}{dx}+(۱-۲x^۲)y=0 \qquad \text{(I)}$$

را به معادله ریکاتی تبدیل نموده و سپس آنرا حل کنید .

حل ـ باستفاده ازنتیجه پنجم تبدیل متغیر تابع $y=e^{-\int udx}$ را داده و لذا چنین داریم :

$$\frac{dy}{dx}=-u\exp(-\int udx) \quad ; \quad \frac{d^۲y}{dx^۲}=(u^۲-u')\exp(-\int udx)$$

اگر مقادیر بالا را در معادله جایگزین نماییم خواهیم داشت :

$$(u^۲-u')+xu+(۱-۲x^۲)=0$$

و یا :

$$u'=(۱-۲x^۲)+xu+u^۲ \qquad \text{(II)}$$

بدون استفاده از قضایای نتیجه هفتم معلوم میگردد که معادله بالا دارای جواب خصوصی $u=x$ میباشد ولی برای تمرین ازاین قضیه استفاده میکنیم .

اگر معادله فوق را با رابطه (۸۳۱ . ۲) مقایسه کنیم داریم $\psi=(۱-۲x^{۲})$ و $x=\varphi$ و بنابر قضیه دوم نتیجه هفتم چنانچه درجه :

$$\triangle=\varphi^{۲}-٤\psi-۲\frac{d\varphi}{dx}=x^{۲}-٤+۸x^{۲}-۲=۹x^{۲}-٦$$

زوج باشد یکی‌از کثیرالجمله های $u=-\frac{۱}{۲}(\varphi\pm T)$ جواب خصوصی خواهد بود .

دراین مثال درجه $\triangle$ زوج بوده و قسمت کثیرالجمله $\sqrt{\triangle}$ یعنی $T=[\sqrt{\triangle}]$ برابر $۳x$ میباشد . پس باید تحقیق نماییم که کدامیک از کثیرالجمله های آزمایشی :

$$u_{۱}=-\frac{۱}{۲}[\varphi+T]=-۲x \quad , \quad u_{۲}=-\frac{۱}{۲}[\varphi-T]=-\frac{۱}{۲}[x-۳x]=x$$

در معادله صدق میکند. چنانچه دو تابع فوق را در معادله جایگزین نماییم معلوم میگردد که $u_{۲}=x$ یکی از جوابهای خصوصی معادله میباشد .

برای یافتن جواب عمومی معادله (II) تبدیل متغیر $u=x+\frac{۱}{z}$ را میدهیم. پس‌از جایگزین نمودن این عبارت در رابطه (II) به ترتیب خواهیم داشت :

$$۱-\frac{z'}{z^{۲}}=(۱-۲x^{۲})+x^{۲}+\frac{x}{z}+x^{۲}+\frac{۲x}{z}+\frac{۱}{z^{۲}}$$

و یا :

$$z'+۳xz=-۱$$

معادله اخیر خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $e^{\int ۳xdx}=e^{\frac{۳}{۲}x^{۲}}$ میباشد و لذا جواب عمومی آن عبارت خواهد بود از :

$$z=ce^{-\frac{۳}{۲}x^{۲}}-\int e^{\frac{۳}{۲}x^{۲}}dx$$

و از آنجا جواب عمومی معادله (II) بصورت :

$$u=x+\left[ce^{-\frac{۳}{۲}x^{۲}}-\int e^{\frac{۳}{۲}x^{۲}}dx\right]^{-۱}$$

در میاید و بالاخره جواب عمومی معادله (I) عبارت خواهد بود از:

$$y=\exp\int\left\{-x-\left[ce^{-\frac{۳}{۲}x^{۲}}-\int e^{\frac{۳}{۲}x^{۲}}dx\right]^{-۱}\right\}dx$$

۸٤ . ۲ـ معادله کلرو

معادله :

$$y=px+f(p) \qquad (۲ . ۸٤)$$

که درآن $p=\dfrac{dy}{dx}$ و $f(p)$ کثیرالجمله غیر مشخصی از p میباشد به معادله کلرو موسوم است . میخواهیم تحقیق نماییم که آیا این معادله باستثنای جواب عمومی که از آن استخراج شده است دارای جواب‌دیگری میباشد. اگر از معادله فوق نسبت به x مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{dx}=p=p+[x+f'(p)]\,\frac{dp}{dx}$$

معادله بالا بازاء مقادیر $\dfrac{dp}{dx}=0$ و یا $x+f'(p)=0$ صادق میباشد. ازمعادله $\dfrac{dp}{dx}=0$ مقدار $p=c$ بدست میاید و از آنجا جواب عمومی بصورت :

$$y=cx+f(c) \qquad (۲ . ۸٤۱)$$

خواهد بود. از طرف دیگرچنانچه x را بین معادله $x+f'(p)=0$ و معادله (۲ . ۸٤) حذف کنیم چنین داریم :

$$x=-f'(p) \quad , \quad y=-pf'(p)+f(p) \qquad (۲ . ۸٤۲)$$

معادلات بالا نمایش معادلات پارامتری یکی از جوابهای معادله (۲ . ۸٤) بوده و اگر p را بین آنها حذف کنیم معادله این منحنی بصورت $\varphi(x\,,y)=0$ که بستگی به مقدار ثابت ندارد درمیاید. معمولاً این جواب دربین جوابهای عمومی که با رابطه(۲ . ۸٤۱) مشخص میشود نبوده و لذا بنابرشماره (۱ . ٤) جواب غیر عادی معادله (۲ . ۸٤) خواهد بود . چنانچه میدانیم برای یافتن پوش طایفه خطوط مستقیم (۲ . ۸٤۱)

کافی است پارامتر c را بین رابطه (۲ . ۸٤۱) و مشتق آن نسبت به c یعنی $x+f'(c)=0$ حذف کنیم. ولی از آنجایی که عمل حذف c در معادلات اخیر عیناً معادل حذف پارامتر p بین معادلات (۲ . ۸٤۲) میباشد لذا نتیجه میگیریم که جواب غیر عادی معادله کلرو را میتوان از نقطه نظر هندسی پوش جوابهای عمومی پنداشت.

۲ . ۸۵- معادله لاگرانژ

معادله:

$$y=xg(p)+f(p)$$

(۲ . ۸۵)

که در آن $g(p)$ و $f(p)$ کثیرالجمله های غیر مشخصی از $p=\frac{dy}{dx}$ میباشد به معادله لاگرانژ موسوم است. واضح است اگر در رابطه (۲ . ۸۵)، $g(p)=p$ باشد معادله لاگرانژ به معادله کلرو تبدیل میگردد و لذا $g(p)\neq p$ پنداشته و از رابطه (۲ . ۸۵) نسبت به x مشتق میگیریم:

$$p=g(p)+[xg'(p)+f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

(۲ . ۸۵۱)

از آنجایی که $g(p)\neq p$ است لذا $\frac{dp}{dx}$ متحد صفر نبوده و بنابراین جواب عمومی خط مستقیم نخواهد بود. ولی معهذا چنانچه معادله $g(p)-p=0$ دارای ریشه های حقیقی مثلاً $p=m$ باشد بازاء این مقدار m، $\frac{dp}{dx}$ برابر صفر بوده و رابطه (۲ . ۸۵۱) برقرار است. بنابراین بین جوابهای (۲ . ۸۵) ممکن است توابع خطی $y=xg(m)+f(m)$ که در آن m یکی از ریشه های معادله $g(p)-p=0$ است جواب این معادله باشد. درفصول بعدی نشان خواهیم داد که این جواب نه فقط جواب خصوصی معادله (۲ . ۸۵) میباشد بلکه جواب غیر عادی نیز خواهد بود. چون $\frac{dp}{dx}$ متحد صفر نیست لذا اگر دوطرف رابطه (۲ . ۸۵۱) را بر $\frac{dp}{dx}$ تقسیم کنیم چنین داریم:

$$[g(p)-p]\frac{dx}{dp}+g'(p)x+f'(p)=0$$

برای حل معادله خطی بالا به ترتیب زیر عمل میکنیم:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{g'(p)}{g(p)-p}x=-\frac{f'(p)}{g(p)-p} \quad ,$$

$$F.I=\exp\left[\int\frac{g'(p)}{g(p)-p}dp\right]=\exp\left[\int\frac{g'(p)-۱}{g(p)-p}dp+\int\frac{dp}{g(p)-p}\right]$$

اگر $Log\varphi=\int\frac{dp}{g(p)-p}$ باشد رابطه بالا بصورت ساده زیر درمیآید :

$$F.I=e^{Log[g(p)-p]+Log\varphi}=\varphi[g(p)-p]$$

بنابر تبصره پنجم شماره (۷ . ۲) چنین داریم :

$$\frac{d}{dp}\left\{x\varphi(p)[g(p)-p]\right\}=-f'(p)\varphi(p)$$

و یا :

$$[g(p)-p]\varphi(p)x=c-\int f'(p)\varphi(p)dp \qquad (۲ . ۸۵۲)$$

ازاین رابطه x برحسب پارامتر p و مقدار ثابت غیر مشخص c تعیین گشته و چنانچه x را بین روابط (۸۵ . ۲) و (۸۵۲ . ۲) حذف کنیم y نیز برحسب p تعیین میشود و بنابراین معادلات پارامتری خمهای انتگرال برحسب پارامتر p تعیین میگردد .

باید یادآور شد که بندرت میتوان p را بین روابط (۸۵ . ۲) و (۸۵۲ . ۲) حذف نمود و جواب عمومی را بشکل تابعی از x , y , c بیان کرد .

مثال ۱ - معادله $y=x+p^{۲}-\frac{۲}{۳}p^{۳}$ را حل کنید .

حل - معادله بالا معادله لاگرانژ بوده وپس از مشتق گیری نسبت به x چنین داریم:

$$p=۱+(۲p-۲p^{۲})\frac{dp}{dx} \quad \text{و یا} \quad (p-۱)\left(۲p\frac{dp}{dx}+۱\right)=0$$

و لذا :

$$۲pdp+dx=0 \quad \text{و یا} \quad p=۱$$

چنانچه $p=۱$ را درمعادله جایگزین کنیم خط $y=x+\frac{۱}{۳}$ بدست میاید که فعلا این جواب را مورد بررسی قرار نمیدهیم .

از رابطه $۲pdp+dx=0$ نتیجه میگردد که $p^۲+x=c$ و بآسانی معادلات پارامتری جواب عمومی بصورت :

$$x=c-p^۲ \quad , \quad y=c-\frac{۲}{۳}p^۳$$

درمیآید . دراینحالت خاص میتوان p را بین دو معادله فوق حذف نمود تا معادله ضمنی جواب عمومی که بصورت :

$$۹(c-y)^۲=٤(c-x)^۳$$

است بدست آید .

جواب $y=x+\frac{۱}{۳}$ جزو طایفه منحنی‌های فوق نبوده و ذیلاً نشان‌خواهیم‌داد که این‌خط پوش منحنی‌های فوق میباشد. برای این منظور محل تقاطع این خط و جواب خصوصی $(c=0)$ یعنی منحنی $۹y^۲+٤x^۳=0$ را پیدا میکنیم . طول نقاط تقاطع بوسیله معادله : $(۳x+۱)^۲+٤x^۳=0$

ویا : $٤x^۳+۹x^۲+٦x+۱=0 \;,\; (x+۱)^۲(٤x+۱)=0$

تعیین میگردند. بنابراین خط $y=x+\frac{۱}{۳}$ برجواب عمومی متناظربا $c=0$ درنقطه‌یی بطول ۱ — مماس است و ازآنجاییکه سایر خمهای انتگرال از انتقال این منحنی خاص (یعنی $۹y^۲+٤x^۳=0$) بموازات خط $y=x$ پدید میآیند وخط $y=x+\frac{۱}{۳}$ دراثر این انتقال انواریان است لذا هرمنحنی این طایفه برخط $y=x+\frac{۱}{۳}$ مماس بوده و بنابراین پوش آنها میباشد .

مسائل

۱ـ جواب عمومی معادلات خطی مرتبه اول زیر را بدست آورید .

الف ـ $(\sin^۲x-y)dx-tgx\,dy=0$.

ب ـ $(y^۲-۱)dx+(y^۳-y+۲x)dy=0$.

پ ـ $y\,Log\,y\,dx+(x-Log\,y)dy=0$.

ت ـ $(۲xy'+y)\sqrt{۱+x}=۱+۲x$.

ث ـ $۲(x^۲+x+۱)y'+(۲x+۱)y=۸x^۲+۱$.

ج ـ $(x^۲-۱)y'-xy=x^۲$.

چ ـ $x(x+۱)y'-(x^۲+x-۱)y=(x+۱)(x^۲-۱)$.

ح ـ $y'\sin^۲x-y\,tg\,x=tg\,x-tg^۳x$.

خ ـ $y'\cot g\,x-y=\operatorname{cosec}۲x+\cos۲x$.

د ـ $(۱-x^۲)y'+xy=x\arcsin x+(۱-x)\sqrt{۱-x^۲}$.

ذ ـ $dx+xdy=e^{-y}\sec^۲y\,dy$.

۲ـ نشان دهید که معادله $f'(y)\dfrac{dy}{dx}+f(y)P(x)=Q(x)$ نسبت به y خطی بوده و از آنجا جوابهای عمومی مسائل زیر را بدست آورید .

الف ـ $\dfrac{dy}{dx}+۱=٤e^{-y}\sin x$.

ب ـ $\sin y\dfrac{dy}{dx}=\cos x(۲\cos y-\sin^۲x)$.

پ ـ $\sin y\dfrac{dy}{dx}=\cos y(۱-x\cos y)$.

ت ـ $(۱+y^۲)dx=(\operatorname{arctg}y-x)dy$.

ث ـ $(۱+\sin y)dx=[۲y\cos y-x(\sec y+tg\,y)]dy$.

۳ـ معادلات برنولی زیر را حل کنید .

الف ـ $x^۲y-x^۳\dfrac{dy}{dx}=y^٤\cos x$.

ب ـ $y+۲\dfrac{dy}{dx}=y^۳(x-۱)$.

پ ـ $xy'=٤y-٤\sqrt{y}$.

ت ـ $xy'+y=y^۲Log\,x|$.

ث ـ $y'\cos x+y\sin x+y^۳=o$.

ج ـ $y'+۲y=۲xy^{\frac{۳}{۲}}$.

چ - $۲(۱+x)yy'+۲x-۳x^{۲}+y^{۲}=0$.

ح - $xdy-[y+xy^{۳}(۱+Log x)]dx=0$.

خ - $(۲xy^{۵}-y)dx+۲xdy=0$.

د - $۲\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}+x^{۳}\cos y=0$.

ذ - $\frac{dy}{dx}+x(x+y)=x^{۳}(x+y)^{۳}-۱$.

۴- جواب غیر عادی هریک از معادلات کلرو زیر را بدست آورید .

الف - $y=px+\sqrt{p^{۲}-۱}$.

ب - $y=px+\frac{۲}{۳}(p+۱)^{\frac{۳}{۲}}$.

پ - $y=px+\sqrt{a+۲hp+\frac{bp^{۲}}{ab-b^{۲}}}$.

ت - $y=px+\sqrt{۱-p^{۲}}-p\arccos p$.

ث - $y=px+\sqrt{P^{۲}+۱}-pLog(p+\sqrt{p^{۲}+۱})$.

۵- باتبدیل متغیر تابع $y^{۳}=v$ معادله $y=۳px+p^{-۱}y^{-۴}$ را به معادله کلرو تبدیل نموده و از آنجا جواب عمومی و جواب غیر عادی را پیدا کنید .

۶- با تبدیل متغیر $z=e^{x}$ معادله $y=p+\frac{e^{x}}{p}$ رابه معادله کلروتبدیل نموده و از آنجا جواب عمومی و جواب غیر عادی را پیدا کنید .

۷- باجایگزین نمودن $۲z=(x^{۲}+y^{۲})$ درمعادله $(۱+p^{۲})y^{۲}=f(x+py)$ آنرا تبدیل به معادله کلرونموده و از آنجا جواب عمومی وجواب غیر عادی را بدست آورید و همچنین درحالت خاص جواب غیر عادی معادله $(۱+p^{۲})y^{۲}=(x+py)^{۳}$ را پیدا کنید .

۸- با تبدیل متغیرهای $x^{۲}=t^{-۱}$ و $y=vx$ معادله دیفرانسیل :

$$x^{۴}p^{۳}-x^{۳}yp^{۲}-x^{۲}y^{۲}p+xy^{۳}=۱$$

را حل کرده و جواب عمومی و جواب غیر عادی را بدست آورید .

۹- معادله دیفرانسیل $xyp^۲-(x^۲+y^۲-۱)p+xy=0$ راباتبدیل متغیرهای $X=x^۲$ و $Y=y^۲$ به معادله کلرو تبدیل کرده وازآنجا نتیجه بگیرید که جواب عمومی یک طایفه مخروطی رانشان میدهد که برچهارضلع مربع ثابتی که آنراتعیین میکنید مماس است.

۱۰- معادله دیفرانسیل $x^۲p^۲+yp(۲x+y)+y^۲=0$ رابا تبدیل متغیرهای $X=y$ و $Y=xy$ به معادله کلرو تبدیل نموده وازآنجا معادله را حل کنید. همچنین ثابت کنید $y+۴x=0$ یک جواب غیر عادی معادله میباشد و $y=0$ جزو پوش و هم قسمتی از جواب است .

۱۱- با تبدیل متغیرهای $X=\frac{۱}{x}$ و $Y=\frac{۱}{y}$ معادله دیفرانسیل :

$$y^۲\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=x^۴\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲$$

را به معادله کلرو تبدیل کنید و سپس جواب عمومی و جواب غیر عادی را بدست آورید .

۱۲- چنانچه $y^۲-x^۲$ را متغیر تابع جدید فرض کنیم ، نشان دهید که معادله دیفرانسیل $(x^۲+y^۲-۲xyp)^۲=۴a^۲y^۲(۱-p^۲)$ را میتوان به معادله کلرو تبدیل کرد وهمچنین ثابت کنید جواب غیر عادی دو هذلولی متساوی‌القطرین بوده که در معادله نیز صدق میکند .

۱۳- با تبدیل متغیرهای $\sin y=u$ و $\sin x=v$ جوابهای عمومی و غیر عادی معادله دیفرانسیل $\cos^۲ yp^۲+\sin x\cos x\cos yp-\sin y\cos^۲ x=0$ را بدست آورید .

۱۴- معادله دیفرانسیل $p^۲x(x-۲)+p(۲y-۲xy-x+۲)+y^۲+y=0$ راحل کنید .

۱۵- جوابهای عمومی و غیر عادی معادلات لاگرانژ زیر را بدست آورید .

الف - $y=۲xp+p^۲$.

ب - $y=x+ap-aLog|p|$.

پ - $x-y=۲ap-ap^۲$.

ت - $۳p^۲y=(۲p^۳-۱)x$.

ث - $y=p^۲+p^۳$.

ج - $y=yp^۲+۲px$.

چ - $a^۲(p-b)^۲+p(y+bx)^۲=0$.

۱۶- نشان دهید اگر درمعادله دیفرانسیل $x+yp=f(p)$ تبدیل متغیر $tgt=p$ را انجام دهیم ، جواب عمومی این معادله بصورت :

$$y=\left\{c+\int f'(tgt)d(sect)\right\}cost$$

درمیاید و از آنجا معادله $x+yp=p^{۳}$ را حل کنید .

۱۷- نشان دهید که جوابهای عمومی معادله دیفرانسیل :

$$r'^{۲}sin\theta-۲rr'cos\theta-r(rsin\theta+a)=o$$

طایفه کاردیوئیدهای $r=acosec\alpha\,sin^{۲}\frac{۱}{۲}(\theta-\alpha)$ میباشند که همگی بردوایر $r+asin\theta=o$ مماس هستند .

۱۸- با تبدیل متغیر $y=tp$ جوابهای هریک از معادلات زیر را برحسب پارامتر t بیان کنید .

الف- $(y+p)^{۲}=y-p$. ب- $(y+p)^{٤}=۳y+p$.

پ- $y^{۳}-۳yp+p^{۳}=o$. ت- $y^{٤}+p^{٤}=yp(y+p)$.

۱۹- باتبدیل‌متغیر $y-۲x=tp$ معادله‌دیفرانسیل $(p-۱)(y-۲y)^{۲}=p^{۲}$ را حل کنید .

۲۰- مقادیر ثابت a , m , n را درمعادله دیفرانسیل :

$$y^{۲}p^{۲}+۲xyp+ay^{۲}+۲mx+n=o$$

چنان تعیین کنید که این معادله دارای یک جواب غیر عادی حقیقی باشد و دراینصورت جواب عمومی را بدست آورید .

۲۱- با استفاده از نتیجه هفتم شماره (۸۳ . ۲) قسمت کثیرالجمله توابع اصم زیر را بدست آورید .

الف- $[\sqrt{۹x^{۸}-٦x^{۷}+x^{٦}+۱۲x^{٥}-۱۰x^{٤}+x^{۳}-x+۷}]$.

ب- $[\sqrt{x^{٦}+۸x^{٤}-x^{۳}+۷x-۲}]$.

۲۲- تحقیق کنید کدامیک از معادلات زیر دارای جواب کثیرالجمله میباشد . برای معادلاتی که دارای جواب کثیرالجمله است ، جواب عمومی را بدست آورید .

الف- $\frac{dy}{dx}=-x^{۳}+x-۳-(x-۱)^{۲}y+y^{۲}$.

ب- $\frac{dy}{dx}=-x^{٤}-۳x^{۲}+۲+y^{۲}$.

پ - $\frac{dy}{dx}=x^3-(3x-1)y+y^2$.

ت - $\frac{dy}{dx}=16x^2-5+8xy+y^2$.

ث - $y'=1-x^2+y^2$. ج - $y'=-1+xy+y^2$.

چ - $y'=-x^5-x^2y+y^2$.

ح - $y'=(2x^3-3x^2-2)+(x^3+1)y+y^2$.

خ - $y'=x^2+x-1+(2x+1)y+y^2$.

د - $xy'+(m-1)ax^m(y-x)^2+y-2x=0$.

ذ - $y'+xy^2-(2x^2+1)y+x^3+x-1=0$.

۲۳- نشان دهید که توابع $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$ جوابهای خصوصی معادله ریکاتی $x(x^2-1)y'+x^2-(x^2-1)y-y^2=0$ بوده و بکمک نتیجه سوم شماره (۲ . ۸۳) جواب عمومی این معادله را بدست آورید .

۲٤- با استفاده از نتیجه پنجم شماره (۲ . ۸۳) معادله دیفرانسیل ریکاتی $y'=-2-5y-2y^2$ رابه معادله خطی مرتبه دوم تبدیل کرده وازآنجا جواب عمومی را بدست آورید .

۲۵- با استفاده از نتیجه هفتم شماره (۲ . ۸۳) جواب کثیرالجمله معادله دیفرانسیل ریکاتی زیر را بدست آورید :

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+x+1-(x^2+1)y+(x-1)y^2=0$$

همچنین نشان دهید که یکی از جوابهای خصوصی دیگر این معادله معکوس این کثیرالجمله بوده وازآنجا بکمک نتیجه چهارم شماره (۲ . ۸۳) جواب عمومی این معادله را بدست آورید .

۲٦- معادله مرتبه دوم :

$$y''+Py'+Qy=0 \qquad \text{(I)}$$

که درآن P و Q توابعی از x هستند مفروض است .

الف - نشان دهید که باتبدیل متغیر تابع $y=v\exp\left(-\frac{1}{2}\int P\,dx\right)$ میتوان معادله (I) رابه معادله $v''+Iv=0$ تبدیل کرد . $I(x)$ تابع معینی از x است که باید آنرا تعیین کنید .

ب ـ با کمک نتیجه پنجم شماره (۸۳ . ۲) و قسمت (الف) نشان دهید که معادله (I) به معادله زیر تبدیل میشود :

$$\frac{du}{dx}=u^{۲}+Q-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dP}{dx}-\frac{۱}{۴}P^{۲}$$

پ ـ با استفاده از قسمت (ب) معادله دیفرانسیل زیر را حل کرده و جواب عمومی آنرا بدست آورید :

$$(۱-x^{۲})\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-۴x\frac{dy}{dx}+(x^{۴}-۳)y=0$$

۲۷ـ معادله ریکاتی :

$$y'+by^{۲}=cx^{m} \qquad (I)$$

که در آن m , c , b مقادیر ثابتی میباشند مفروض است .

الف ـ نشان دهید که اگر $m=0$ باشد جواب عمومی معادله (I) را میتوان بصورت توابع معینی از x بیان کرد .

ب ـ ثابت کنید اگر تبدیل متغیر $y=\frac{z}{x}$ را در معادله (I) انجام دهیم این معادله بصورت زیر درمیآید :

$$xz'-z+bz^{۲}=cx^{m+۲} \qquad (II)$$

و از آنجا با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید هنگامیکه $m=0$ باشد جواب عمومی معادله اخیر را میتوان برحسب توابع معینی از x بیان نمود .

پ ـ با تبدیل متغیر $z=ux^{a}$ نشان دهید که معادله :

$$xz'-az+bz^{۲}=cx^{n} \qquad (III)$$

مبدل به معادله :

$$x^{۱-a}u'+bu^{۲}=cx^{n-۲a} \qquad (IV)$$

میگردد . همچنین نشان دهید اگر درمعادله (IV) تبدیل متغیر $X=x^{a}$ را انجام دهیم این معادله به معادله ریکاتی متناظربا (I) تبدیل میشود که در آن m , c , b متناظراً مبدل به $\frac{n-۲a}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ گردیده‌اند واز آنجا ثابت کنید درصورتی میتوان جواب عمومی معادله (III) را برحسب توابع معینی از x بدست آورد که $n=۲a$ باشد .

ت ـ نشان دهید اگر تبدیل متغیر $z=\frac{a}{b}+\frac{x^n}{u}$ را در معادله (III) انجام دهیم این معادله به معادله (II) تبدیل میگردد که در آن c , b , a متناظراً تبدیل به $b , c , n+a$ میشود و از آنجا نشان دهید که جواب عمومی هریک از معادلات فوق‌را میتوان برحسب توابع معینی‌از x بیان نمود، هرگاه $n=۲a$ و یا $n=۲(n+a)$ باشد. حال اگر عمل‌فوق را تکرار کنیم ثابت کنید جواب عمومی معادله (III) را میتوان برحسب توابع معینی از x بیان نمود ، هرگاه $n=۲(sn+a)$ باشد (s صفر یا هرعدد درست مثبت است) .

ث ـ نشان دهید با تبدیل متغیر $z=\frac{x^n}{u}$ معادله(III) مبدل‌به معادله مشابهی میگردد که c , b , a متناظراً تبدیل به $b , c , (n-a)$ گردیده و از آنجا نتیجه بگیرید که جواب عمومی هریک از این معادلات را میتوان برحسب توابع معینی از x بیان نمود ، هرگاه $n=۲(sn-a)$ باشد .

ج ـ با استفاده از نتایج قسمتهای (پ) و (ت) و (ث) نشان دهید که جواب عمومی معادله ریکاتی (I) را میتوان برحسب توابع معینی از x بیان نموده هرگاه :

$$m+۲=۲s(m+۲)\pm ۲$$

باشد و از آنجا نشان دهید این نتیجه معادل $m=-\frac{۴r}{۲r\pm ۱}$ (که در آن r مانند s صفر و یا عدد درست مثبت است) و یا $\frac{۲}{m+۲}$ برابر عدد فرد مثبت یا منفی است میباشد .

چ ـ نشان دهید که تبدیل متغیرهای $X=x^{m+۳}$ و $y=\frac{۱}{bx}+\frac{۱}{x^۲Y}$ درمعادله ریکاتی (I) آنرا تبدیل به معادله مشابهی مینماید که m , c , b متناظراً تبدیل به $-\frac{m+۴}{m+۳} , \frac{b}{m+۳} , \frac{c}{m+۳}$ میشود و از آنجا نتیجه بگیرید که اگر m بشکل $-\frac{۴s}{۲s-۱}$ باشد این تبدیل s را مبدل به $s-۱$ میکند . بادرنظرگرفتن این تبدیل نشان دهید که دراینحالت جواب عمومی معادله ریکاتی (I) را میتوان برحسب توابع معینی از x بیان نمود .

ح ـ ثابت کنید که تبدیل متغیرهای $X=x^{m+۱}$ و $y=\frac{۱}{Y}$ درمعادله ریکاتی (I) آنرا تبدیل به معادله مشابهی مینماید که m , c , b متناظراً تبدیل به :

$$\frac{c}{m+۱}\ ,\quad \frac{b}{m+۱}\ ,\quad -\frac{m}{m+۱}$$

میشوند و ازآنجا بااستفاده از قسمت (ج) نشان دهید درصورتی میتوان جواب عمومی معادله ریکاتی (I) را برحسب توابع معینی از x بیان کرد که m بشکل $-\frac{۴s}{۲s+۱}$ باشد .

۲۸ـ الف ـ نشان دهید که تابع $y=\frac{cf_۱(x)+f_۲(x)}{cf_۳(x)+f_۴(x)}$ که درآن c مقدار ثابت و $f_۱f_۴-f_۲f_۳\neq 0$ است ، جواب عمومی معادله ریکاتی زیر میباشد :

$$\begin{vmatrix} f_۱ & f_۲ \\ f_۳ & f_۴ \end{vmatrix} y'=\begin{vmatrix} f_۱ & f_۲ \\ f'_۱ & f'_۲ \end{vmatrix}+\left\{\begin{vmatrix} f_۲ & f_۳ \\ f'_۲ & f'_۳ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_۴ & f_۱ \\ f'_۴ & f'_۱ \end{vmatrix}\right\}y+\begin{vmatrix} f_۳ & f_۴ \\ f'_۳ & f'_۴ \end{vmatrix}y^۲$$

ب ـ با استفاده از قسمت (الف) و بکار بردن روش زیر معادله ریکاتی‌یی تشکیل دهید که ضرایب آن کثیرالجمله بوده و دارای تعداد معینی جوابهای کثیرالجمله باشد .

$f_۱(x)$ را مساوی صفر و کثیرالجمله های $f_۳(x)$ و $f_۴(x)$ را بطور دلخواه انتخاب میکنیم . فرض میکنیم $c_۱ , c_۲ , \ldots , c_n$ مقادیر معینی برای مقدار ثابت غیر مشخص c باشند. سپس $f_۲$ را با رابطه زیر تعیین میکنیم :

$$f_۲=(c_۱f_۳+f_۴)(c_۲f_۳+f_۴)\ \ldots\ (c_nf_۳+f_۴)$$

نشان دهید که معادله ریکاتی حاصل دارای $(n+۱)$ جواب کثیرالجمله :

$$y=0\ ,\ y_i=\frac{f_۲}{c_if_۳+f_۴}\ ,\ (i=۱\ ,\ ۲\ ,\ \ldots\ ,\ n)$$

میباشد . اگر بخواهیم نتایج را قدری ساده کنیم باید کثیرالجمله غیر مشخص $p(x)$ را انتخاب کرده و تبدیل متغیر تابع $u=y+p(x)$ را انجام دهیم. معادله حاصل دارای $(n+۱)$ جواب کثیرالجمله خواهدبود، ولی $u=0$ ممکن است جزو این جوابها نباشد. چنانچه

$f_۳=۱$, $f_٤=x$, $c_۱=o$, $c_۲=۱$, $c_۳=-۱$, $c_٤=۲$, $c_۰=\frac{۱}{۲}$, $(x)=۲x$

باشد معادله ریکاتی حاصل و همچنین جوابهای کثیرالجمله را پیدا کنید .

جوابها

۱- الف : $۳y\sin x=\sin^۳x+c$.

ب : $۲x(y-۱)=(y+۱)[٤y-y^۲-Log(y+۱)^٤+c]$.

پ : $۲xLogy=Log^۲y+c$.

ت : $y=\frac{c}{\sqrt{x}}+\sqrt{۱+x}$.

ث : $y=\frac{c}{\sqrt{x^۲+x+۱}}+۲x-۳$.

ج : $y=\sqrt{x^۲-۱}\,[c+Log(x+\sqrt{x^۲-۱})]-x$.

چ : $y=ce^x\left(۱+\frac{۱}{x}\right)-۱-x$.

ح : $y=c\,tg\,x-\sec^۲x$.

خ : $y\cos x=c+\frac{۱}{۲}Log\left|tg\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{x}{۲}\right)\right|+\frac{۱}{۲}\cos x$
$-\frac{۱}{٦}\cos ۳x$.

د : $y=\sqrt{۱-x^۲}(c+Log\sqrt{۱-x^۲})+\arcsin x$.

ذ : $x=e^{-y}(c+tg\,y)$.

۲- الف : $e^y=۲(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$.

ب : $\cos y=\frac{۱}{۲}\sin^۲x-\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{۱}{٤}+ce^{-۲\sin x}$.

پ : $\frac{۱}{\cos y}=\sec y=x+۱+ce^x$.

ت : $x=arc\,tg\,y-۱+ce^{-arc\,tg\,y}$.

ث : $(\sec y+tg\,y)x=y^۲+c$.

۳- الف : $x^۳=y^۳(c_۱+۳\sin x)$.

ب : $(۲x-y)^۲=c(x+۲y-۵)$.

پ : $y=(cx^۲+۱)^۲$.

ت $y=(\cos x+۱+Log\, x|)^{-۱}$.

ث : $y=(c\sec^۲ x+۲\sec x\, tg x)^{-\frac{۱}{۲}}$.

ج : $y=(ce^x+x+۱)^{-۲}$.

چ : $y^۲=\frac{c+x^۳-x^۲}{x+۱}$.

ح : $\frac{x^۲}{y^۲}=-\frac{۲}{۳}x^۳\left(\frac{۲}{۳}+Log x\right)+c$.

خ : $۳x^۲=(٤x^۳+c)y^٤$.

د : $\frac{y}{x^۲}=\cos y+y\sin y+c$.

ذ : $\frac{۱}{(x+y)^۲}=x^۲+۱+ce^{x^۲}$.

٤- الف : $y^۲=x^۲-۱$. ب : $y=\frac{۱}{۳}x^۳-x$.

پ : $ax^۲+۲bxy+by^۲=۱$.

ت : $y=\sin x$. ث : $y=\cosh x$.

۵- جواب عمومی $y^۳=cx+\frac{۳}{c}$ ، جواب غیر عادی $y^٦=۱۲x$.

٦- جواب عمومی $y=ce^x+\frac{۱}{c}$ ، جواب غیر عادی $y^۲=٤e^x$.

۷- جواب عمومی و جواب غیر عادی $(x-c)^۲+y^۲=f(c)$

حالت خاص - جواب غیر عادی $۲۷(x^۲+y^۲)^۲-٤x(x^۲+۹y^۲)+٤y^۲=0$.

۸- جواب عمومی $x^۲-۲c^۲xy+c^۳=0$ ، جواب غیر عادی $۳۲xy^۳=۲۷$.

۹- جواب عمومی $y^۲=cx^۲+\frac{c}{c-۱}$.

۱۰- جواب عمومی $xy=cy+c^{۲}$.

۱۱- جواب عمومی $x=cy+c^{۲}xy$ ؛ جواب غیر عادی $y+٤x^{۲}=0$.

۱۲- جواب عمومی $y^{۲}-x^{۲}=cx+۲a^{۲}\pm a\sqrt{٤a^{۲}-c^{۲}}$ ؛ جواب غیر عادی $y^{۲}-x^{۲}=\pm ۲ay$.

۱۳- جواب‌عمومی $\sin y=c\sin x+c^{۲}$ ، جواب غیرعادی $\sin^{۲}x+٤\sin y=0$.

۱٤- جواب عمومی $(y-cx+۲c)(y-cx+۱)=0$.

۱۵- الف : جواب عمومی $(xy+c)^{۲}=٤(y+x^{۲})(y^{۲}-cx)$.

ب : جواب عمومی $y+c=e^{\frac{x+c}{a}}$ ؛ جواب غیر عادی $y=x+a$.

پ : جواب عمومی $(x+c)^{۲}=٤a(y+c)$ ؛ جواب غیر عادی $y=x-a$.

ت : جواب عمومی $(۳cy+۱)^{۲}=٤c^{۳}x^{۳}$ ؛ جواب‌غیرعادی $y+x=0$.

ث : جواب عمومی :

$$(۲x+c)^{۳}+(۲x+c)^{۲}-۱۸(۲x+c)y=۲۷y^{۲}+۱٦y$$

ج : جواب عمومی $y^{۲}=۲cx+c^{۲}$ ؛ جواب غیرعادی $x^{۲}+y^{۲}=0$.

چ : جواب عمومی $(x-c)(y+bc)=a^{۲}$ ؛ جواب غیر عادی $y+bx=\pm ۲a\sqrt{b}$.

۱٦- جواب عمومی $y=tg^{۲}t-۲+c\cos t$ ، $x=۲tgt-c\sin t$.

۱۸- الف : $y=\frac{t^{۲}-t}{(t+۱)^{۲}}$ ، $x=c+Log\left\{(t+۱)^{۲}|t-۱|\right\}$.

ب : ، $x=c+\frac{٤}{۳}Log|t+۱|-\frac{۱}{۹}Log|۳t+۱|-\frac{۱}{۹}Log|۳t+۱|$.

$y=t(۳t+۱)^{\frac{۱}{۳}}/(t+۱)^{\frac{٤}{۳}}$

پ : $y=\frac{۳t^{۲}}{t^{۳}+۱}$ ، $x=c-t+۳\int\frac{dt}{t^{۳}+۱}$.

ت : $y=\frac{t^{۳}+t^{۲}}{t^{٤}+۱}$ ، $x=c-t-Log|t+۱|+٤\int\frac{dt}{t^{٤}+۱}$.

۱۹- جواب عمومی $y=\frac{۳}{۲}(x+c)$ ؛ جواب غیر عادی $y=۲x\pm ۲$.

۲۰- جواب عمومی $y^۲=n+cx+\frac{۱}{۴}c$ ؛ جواب غیر عادی :

$x^۲+y^۲=n$ ؛ $a=-۱$, $m=o$, $n>o$

۲۱- الف : $۳x^۴-x^۳+۲x-۱$. ب : $x^۳+۴x-\frac{۱}{۲}$.

۲۲- الف : جواب کثیرالجمله $y_۱=x^۲-x+۲$ ؛ جواب عمومی :

$$y=x^۲-x+۲+\frac{\exp(-\frac{۱}{۵}x^۵+\frac{۳}{۴}x^۴-x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲+۲x)}{c-\int\exp(-\frac{۱}{۵}x^۵+\frac{۳}{۴}x^۴-x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲+۲x)}.$$

ب : بدون جواب کثیرالجمله . پ : بدون جواب کثیرالجمله .

ت : جوابهای کثیرالجمله $y_۱=-۴x-۱$, $y_۲=-۴x+۱$ ؛

جواب عمومی $y=\frac{-۴cx+(۱+۴x^۲)}{c-x}$.

ث : جواب کثیرالجمله $y_۱=x$ ؛ جواب‌عمومی $y=x+\frac{e^{x^۲}}{c-\int e^{x^۲}dx}$

ج : جواب کثیرالجمله $y_۱=-x$ ؛ جواب عمومی :

$$y=-x+\frac{e^{-\frac{x^۲}{۲}}}{c-\int e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx}.$$

چ : بدون جواب کثیرالجمله .

ح : جواب کثیرالجمله $y_۱=۱-x^۳$ ؛ جواب عمومی :

$$y=۱-x^۳+\frac{\exp\left(۳x-\frac{x^۴}{۴}\right)}{c-\int\exp\left(۳x-\frac{x^۴}{۴}\right)dx}.$$

خ : جوابهای کثیرالجمله $y_۱=-(x+۱)$, $y_۲=-x$;
جواب عمومی $y=-(x+۱)+(ce^x+۱)$.

د : جواب کثیرالجمله $y_۱=x$; جواب عمومی $y=x+\frac{۱}{cx+ax^m}$.

ذ : جواب کثیرالجمله $y_۱=x$; جواب عمومی $y=x+\frac{۱}{ce^{-x}+x-۱}$.

۲۳- جواب عمومی $(x+c)y=cx^۲+x$.

۲٤- جواب عمومی $۲(ce^{۳x}+۱)y=-(ce^{۳x}+٤)$.

۲٥- جواب عمومی $y-x=c(xy-۱)e^{-x}$.

۲٦- جواب عمومی $(۱-x^۲)y=\left\{a+b\int e^{-x^۲}dx\right\}e^{\frac{۱}{۲}x^۲}$.

۲۷- الف : $yk(Ae^{۲kx}+۱)=c(Ae^{۲kx}-۱)$ که درآن $k=\sqrt{bc}$, $bc>o$
$yk=c\,tg(A-kx)$ که درآن $k=\sqrt{-bc}$, $bc<o$
$y=cx+A$ اگر $b=o$, $y(bx+A)=۱$ اگر $c=o$.

۲۸- ب : معادله ریکاتی :

$$(۲x^٥+٥x^٤-٥x^۲-۲x)u'=-۱٦x^٥-۳۰x^٤+۲x^۲$$
$$+(۱۰x^٤+۲۰x^۳-۲x-۲)u-۲u^۲$$

جوابهای کثیرالجمله عبارتند از :

$u_۱=۲x$; $u_۲=x^٤+\frac{٥}{۲}x^۳-\frac{۱}{۲}x-۱$; $u_۳=x^٤+\frac{۳}{۲}x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲+x$

$u_٤=x^٤+\frac{۷}{۲}x^۳+\frac{۷}{۲}x^۲+۳x$; $u_٥=x^٤+\frac{۱}{۲}x^۳-x^۲+\frac{۳}{۲}x$;

$u_٦=x^٤+۲x^۳-x^۲$

۹ . ۲- روش تبدیل متغیر

تاکنون معادلاتی که میتوان انتگرال آنها را با کوادراتور بدست آورد مانند معادلاتی که متغیرها ازیکدیگر مجزا میشوند ، معادلات کامل ، معادلات همگن ، معادلات خطی وغیره را مورد بررسی قرار دادیم . ولی اغلب به معادلاتی برخورد میکنیم که درمیان صور کلاسیک پیش گفته نیست و لذا باید تحقیق نماییم که با تبدیل متغیر مستقل یا تابع یا هردو میتوان معادله را بصورت یکی از صور کلاسیک تبدیل نمود . برای روشن شدن

این مطلب کافی‌است تذکر دهیم که تبدیل متغیر تابع $z=y^{۱-n}$ در رابطه (۲ . ۸۱) معادله برنولی‌را به معادله‌خطی‌تبدیل میکند ویاآنکه‌تبدیل متغیرتابع $y=vx$ در معادله همگن آنرا تبدیل به معادله‌یی میکند که متغیرهااز یکدیگر مجزا میشوند و همچنین تبدیل متغیر $v=ax+by$ در معادله :

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$$

آنرا مبدل به معادله $\frac{dv}{dx}=a+bf(v+c)$ مینماید . واضح است که در این معادله متغیرها بسهولت از یکدیگر مجزا میشوند . انتگرال معادله :

$$\left\{xf(y)+g(y)\right\}\frac{dy}{dx}=h(y) \qquad (۲ . ۹)$$

را نمیتوان بدست آورد ولی اگر x را متغیر تابع و y را متغیر مستقل فرض کنیم این معادله نسبت به‌x خطی بوده ولذا بنابر شماره (۲ . ۷) درحالت کلی میتوان‌جواب عمومی را بادو کوادراتور بدست آورد . رابطه (۲ . ۹) بصورت زیر درمیآید :

$$h(y)\,\frac{dx}{dy}-f(y)x=g(y)$$

یافتن فرمول کلی برای تبدیل متغیر امکان پذیر نمیباشد . ولی اگر در معادله دیفرانسیل عبارت $xdx+ydy$ جزئی ازمعادله باشد $u=x^۲+y^۲$ را میتوان متغیر جدیدی پنداشت و یا اگر $xdy-ydx$ درمعادله ظاهرگردد توابع $\frac{x}{y}$ و یا $\frac{y}{x}$ را باید متغیر جدیدی‌فرض کرد . ولی‌اگرهردوعامل $xdx+ydy$ و $xdy-ydx$ درمعادله‌دیفرانسیل موجود باشند بایدتبدیل متغیرقطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را انجام‌دهیم و دراینحالت شایسته است که‌جواب‌عمومی‌رابرحسب پارامترهای r و θ بیان کنیم . اگر تبدیل متغیر قطبی را انجام دهیم بسهولت معلوم میشود که :

$$xdx+ydy=rdr\ ,\ xdy-ydx=r^۲d\theta$$

مثال ۱ - باتبدیل متغیرهای $u=x^۳$ و $v=y^۲$ معادله دیفرانسیل :

$$۳x^۵dx-y(y^۲-x^۳)dy=0$$

را حل کنید .

حل - پس‌از جایگزین کردن متغیرهای جدید چنین داریم :

$$udu-\frac{١}{٢}(v-u)dv=0$$

این معادله همگن بوده و اگر آنرا مانند روش شماره (٢ . ٥) حل کنیم جواب عمومی بصورت $(v-٢u)(v+u)^{٢}=c$ بدست میاید واز آنجا جواب عمومی این مسئله عبارت خواهد بود از $(y^{٢}-٢x^{٣})(y^{٢}+x^{٣})^{٢}=c$.

مثال ٢ - معادله دیفرانسیل $(xy+١)dx+٢x^{٢}(٢xy-١)dy=0$ را حل کنید .

حل - از وجود xy در معادله میتوان استنتاج نمود که ممکن‌است $v=xy$ را بجای y متغیر تابع جدیدی پنداشت . پس‌از جایگزین نمودن متغیر جدید خواهیم داشت :

$$(٤v^{٢}-٣v-١)dx-٢x(٢v-١)dv=0$$

دراین معادله متغیرها از یکدیگر مجزا شده و روش انتگرال گیری معمولی منجر به جواب عمومی زیر خواهد گردید :

$$(٤xy+١)^{٢}(xy-١)^{٢}=cx^{٥}$$

مثال ٣ - معادله دیفرانسیل $xy'-y=f(x)g\left(\frac{y}{x}\right)$ را حل کنید .

حل - پس‌از جایگزین نمودن $y=vx$ این معادله به معادله‌یی که متغیرها را میتوان از یکدیگر مجزا نمود تبدیل میشود . چه اگر متغیر جدید را در معادله جایگزین کنیم چنین داریم :

$$x^{٢}v'=f(x)g(v) \quad \text{و یا} \quad \frac{f(x)dx}{x^{٢}}=\frac{dv}{g(v)}$$

مثلاً معادله دیفرانسیل $xy'-y=٢x\frac{y^{٢}-x^{٢}}{x^{٤}-١}$ پس‌از تبدیل متغیر فوق و مجزا نمودن متغیرها بصورت $\frac{dv}{v^{٢}-١}=\frac{٢xdx}{x^{٤}-١}$ که دارای جواب عمومی :

$$\frac{v-١}{v+١}=c_{١}\frac{x^{٢}-١}{x^{٢}+١}$$

است درمیاید . اگر $c = \frac{۱-c_۱}{۱+c_۱}$ باشد جواب عمومی این مسئله عبارت خواهد بود از :

$$y = x\frac{x^{۲}+c}{cx^{۲}+۱}$$

مثال ٤- معادله دیفرانسیل :

$$(x^{۲}+y^{۲})(xdx+ydy)+(x^{۲}+y^{۲}+۲x+۲y)(ydx-xdy)=0$$

را حل کنید .

حل - چنانچه x و y را به مختصات قطبی تبدیل کرده و $r^{۲}$ را حذف کنیم خواهیم داشت :

$$dr-(r+۲\cos\theta+۲\sin\theta)d\theta=0$$

این معادله نسبت به r خطی بوده و دارای جواب عمومی $r=ce^{\theta}-۲\sin\theta$ میباشد .

مثال ۵- معادله دیفرانسیل :

$$(x\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}+x^{۲}y+y^{۲}+y^{۳})dx+(y\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}-x^{۳}-xy-xy^{۲})dy=0$$

را حل کنید .

حل - با تبدیل x و y به مختصات قطبی و با درنظر داشتن روابط :

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta \quad , \quad dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$$

این معادله بصورت زیر درمیاید :

$$(r^{۲}\cos\theta+r^{۳}\sin\theta\cos^{۲}\theta+r^{۲}\sin^{۲}\theta+r^{۳}\sin^{۳}\theta)(\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)$$
$$+(r^{۲}\sin\theta-(r^{۳}\cos^{۳}\theta-r^{۲}\sin\theta\cos\theta-r^{۳}\sin^{۲}\theta\cos\theta)(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)=0$$

این عبارت پس‌از خلاصه کردن بصورت ساده زیر درمیاید :

$$r^{۲}dr-(r^{۳}\sin\theta+r^{۴})d\theta=0$$

این معادله دیفرانسیل معادله برنولی بوده و پس‌از جایگزین نمودن $u=r^{-۱}$ مبدل به معادله خطی میشود و از آنجا جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$re^{\cos\theta}\left(c-\int e^{-\cos\theta}d\theta\right)=۱$$

مسائل

۱- جواب عمومی هریک از معادلات زیر را با تبدیل متغیرهای مناسبی بدست آورید.

الف - $x(y'+1)+tg(x+y)=0$.

ب - $xy'-y=x^2+y^2$.

پ - $(1-x^2)yy'+xy^2+2x^2=0$.

ت - $2(1+x)yy'+y^2+2x-3x^2=0$.

ث - $(x^2+xy+1)y'=y^2+xy+1$.

ج - $(x^2+y^2-a)yy'+x(x^2+y^2+a)=0$.

چ - $\left[(x^2+y^2-a)x-y\right]y'=(x^2+y^2-a)y+x$.

ح - $(x^2+y^2-a)(x+yy')=2xy(y-xy')$.

خ - $(x+2y)dx+(y-2x)dy=0$.

د - $(3x^3+xy^2-x^2y^2-y^4)dx+(3x^2y+y^3+x^3y+xy^3)dy=0$.

ذ - $(x^2+y^2)^3(ydx+xdy)+6xy(x^2+y^2)^2(xdx+ydy)=0$.

ر - $2(x^3-y^3x)dx+3(x^2y^2+y^5)dy=0$.

۲- برای هریک از مسائل زیر تبدیل متغیرهای مربوطه را انجام داده و از آنجا جواب عمومی معادله را بدست آورید .

الف - $(2x+y)dx+(x+5y)dy=0 \; ; \; u=x-y \, , v=x+2y$.

ب - $3x^2ye^ydx+x^3e^y(y+1)dy=0 \; ; \; u=x^3 \, , v=ye^y$.

پ - $(2x-3y)dx-3xdy=0 \; ; \; u=x^2-3xy \, , v=x+y$.

ت - $(x^2-y^4)y'=xy \; ; \; x=ty$.

ث - $(xy'-2y)^2=x^2(x^4-y^2) \; ; \; y=tx^2$.

ج - $(x^4-1)(xy'-y)=2x(y^2-x^2) \; ; \; y=tx$.

۳- معادله دیفرانسیل $x^m(xy'-y)=y^2-x^2$ مفروض است . باجایگزین

نمودن $y=\frac{x(۱+z)}{۱-z}$ معادله دیفرانسیل حاصل را برحسب z نوشته وسپس جوابهای عمومی معادله را درحالات خاص $m=0$, $m=۱$, $m=۲$ بدست آورید .

جوابها

۱- الف : $x\sin(x+y)=c$. ب : $y=x\,tg(x+c)$.

پ : $y^۲=(۱-x^۲)\left\{c+Log|۱-x|-Log|۱+x|\right\}+۲x$.

ت : $(۱+x)y^۲=c-x^۲+x^۳$.

ث : $(x+y)^۲+۲=c(x-y)^۲$.

ج : $(x^۲+y^۲)^۲+۲a(x^۲-y^۲)=c$.

چ : $۱-\frac{a}{r^۲}=ce^{۲a\theta}$.

ح : $Log\,r^۲+\frac{a}{r^۲}=c+\cos ۲\theta$.

خ : $r=ce^{\theta}$.

د : $r=c\exp\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,tg(\sqrt{۲}\cos\theta)\right]$.

ذ : $xy(x^۲+y^۲)^۳=c$.

ر : $Log(x^۴+y^۴)+۲\,arctg\left(\frac{x^۲}{y^۲}\right)=c$.

۲- الف : $۲x^۲+۲xy+۵y^۲=c$.

ب : $x^۳ye^y=c$. پ : $x^۳-۳xy=c$.

ت : $x^۲=y^۲(c^۲-y^۲)$. ث : $y=x^۲\cos(x+c)$.

ج : $y=\frac{x^۳+cx}{cx^۲+۱}$.

۳- معادله دیفرانسیل $x^{m}z'=۲z$ ؛ جواب عمومی در حالتهای $m=0$, $m=۱$, $m=۲$ به ترتیب‌عبارتند از :

$$y=x\coth(c-x)\ ,\ y=\frac{x(۱+cx^{۲})}{۱-cx^{۲}}\quad ,\quad y=x\coth\left(c+\frac{۱}{x}\right)$$

۱۰ . ۲- معادله اولر*

یکی از صور مهم معادلاتی که متغیرها از یکدیگر مجزا میشوند معادله :

$$\frac{dx}{X^{\frac{۱}{۲}}}+\frac{dy}{Y^{\frac{۱}{۲}}}=0 \qquad (۲ . ۱۰)$$

است که در آن :

$$X=a+bx+cx^{۲}+ex^{۳}+fx^{۴}\quad ,\quad Y=a+by+cy^{۲}+ey^{۳}+fy^{۴}$$

میباشد . f , e , c , b , a مقادیر ثابت غیرمشخصی هستند . این معادله به معادله اولر موسوم است و در فصول بعدی نشان خواهیم داد که جواب عمومی را میتوان برحسب توابع بسل بیان کرد .

ابتدا حالت خاص :

$$\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}+\frac{dy}{\sqrt{۱-y^{۲}}}=0 \qquad (۲ . ۱۰۱)$$

که دارای جواب عمومی $\arcsin x+\arcsin y=c$ میباشد درنظر میگیریم . از طرف دیگر این معادله را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\sqrt{۱-y^{۲}}\,dx+\sqrt{۱-x^{۲}}\,dy=0$$

و پس‌از انتگرال گیری جزء بجزء چنین داریم :

$$x\sqrt{۱-y^{۲}}-\int\frac{xydy}{\sqrt{۱-y^{۲}}}+y\sqrt{۱-x^{۲}}-\int\frac{xydx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}=c_{۱}$$

و یا :

$$x\sqrt{۱-y^{۲}}+y\sqrt{۱-x^{۲}}-\int xy\left[\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}+\frac{dy}{\sqrt{۱-y^{۲}}}\right]=c_{۱}$$

---

* Euler

باتوجه به‌رابطه (۲ . ۱۰۱) عبارت واقع در زیر علامت انتگرال برابر صفر میشود و ازآنجا معادله (۲ . ۱۰۱) دارای جواب عمومی $x\sqrt{۱-y^۲}+y\sqrt{۱-x^۲}=c_۱$ خواهد بود . چون‌جواب‌عمومی معادلات‌دیفرانسیل مرتبه‌اول‌فقط باید بیک مقدارثابت بستگی داشته‌باشد لذا بین مقادیر c و $c_۱$ باید رابطه غیر مشخصی مانند $c_۱=f(c)$ برقرار باشد .

اگر $x=\sin u$ و $y=\sin v$ قرار دهیم دو جواب عمومی را با توجه برابطه $c_۱=f(c)$ به ترتیب میتوان بصورت زیر نوشت :

$$u+v=c\ ;\ \sin u\cos v+\sin v\cos u=c_۱=f(c)=f(u+v)$$

اگر در رابطه دوم بالا v را مساوی صفرقراردهیم دراینصورت $\sin u=f(u)$ بوده وازآنجا خواهیم داشت :

$$\sin u\cos v+\sin v\cos u=\sin(u+v)$$

بنابراین فرمول مجموع سینوسها را برای توابع ، ثابت نمودیم .

جواب عمومی $\arcsin x+\arcsin y=c$ را میتوان بصورت :

$$\arcsin y=c-\arcsin x \quad \text{و یا} \quad \sin(\arcsin y)=\sin(c-\arcsin x)$$

نوشت . ولی چون $\sin(\arcsin x)=x$ و $\cos(\arcsin x)=\pm\sqrt{۱-x^۲}$ میباشد رابطه بالا پس‌از بسط و جایگزین کردن این مقادیر بصورت زیر درمیآید :

$$y=\sin c\cos(\arcsin x)-\cos c\sin(\arcsin x)=\pm\sqrt{۱-x^۲}\sin c-x\cos c$$

و یا :

$$(y+x\cos c)^۲=(۱-x^۲)\sin^۲ c\quad ,\quad x^۲+y^۲+۲xy\cos c=\sin^۲ c$$

و بالاخره اگر $k=\cos c$ باشد یکی دیگر از اشکال جواب عمومی معادله (۲ . ۱۰۱) بصورت زیر خواهد بود :

$$x^۲+y^۲+۲kxy=۱-k^۲$$

بطریق مشابه معادله دیفرانسیل :

$$\frac{dx}{\sqrt{(۱-x^۲)(۱-k^۲x^۲)}}+\frac{dy}{\sqrt{(۱-y^۲)(۱-k^۲y^۲)}}=0 \qquad (۲ . ۱۰۲)$$

دارای‌جواب عمومی $\operatorname{argsn}x+\operatorname{argsn}y=c$ است . $\operatorname{argsn}x$* تابع معکوس بیضوی ژاکوبین میباشدکه بوسیله :

---

* خوانده میشود آرگومان سیگنوم x .

$$\mathrm{argsn}x=\int_{۰}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(۱-t^{۲})(۱-k^{۲}t^{۲})}}$$

مشخص میشود. فرض میکنیم $x=\mathrm{sn}u$ و $y=\mathrm{sn}v$ باشد دراین صورت $u+v=c$ است. جواب دیگری را که معادل جواب اول است میتوان بطریق زیر بدست آورد. رابطه (۲ . ۱۰۲) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-k^{۲}x^{۲})}\ ,\ \frac{dy}{du}=-\sqrt{(۱-y^{۲})(۱-k^{۲}y^{۲})}$$

اگرازروابط بالانسبت‌به u مشتق گرفته وتوجه‌داشته‌باشیم که $du=-dv$ است‌به‌ترتیب چنین داریم :

$$\frac{d^{۲}x}{du^{۲}}=\frac{-۲x(۱-k^{۲}x^{۲})-۲k^{۲}x(۱-x^{۲})}{۲\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-k^{۲}x^{۲})}}\cdot$$

$$\frac{dx}{du}=\frac{-(۱+k^{۲})x+۲k^{۲}x^{۳}}{\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-k^{۲}x^{۲})}}\cdot\sqrt{(۱-x^{۲})(۱-k^{۲}x^{۲})}$$

و یا :

$$\frac{d^{۲}x}{du^{۲}}=-(۱+k^{۲})x+۲k^{۲}x^{۳}$$

بطریق مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{du}=-\frac{dy}{dv}=-(۱-y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}(۱-k^{۲}y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

و یا :

$$\frac{d^{۲}y}{du^{۲}}=\frac{d^{۲}y}{dv^{۲}}=-(۱+k^{۲})y+۲k^{۲}y^{۳}$$

از روابط فوق بآسانی روابط زیر نتیجه میشوند :

$$x\frac{d^{۲}y}{du^{۲}}-y\frac{d^{۲}x}{du^{۲}}=۲k^{۲}xy(y^{۲}-x^{۲})$$

$$x^{۲}\left(\frac{dy}{du}\right)^{۲}-y^{۲}\left(\frac{dx}{du}\right)^{۲}=(x^{۲}-y^{۲})(۱-k^{۲}x^{۲}y^{۲})$$

از تقسیم روابط بالا نتیجه میشود که :

$$\frac{x\frac{d^{۲}y}{du^{۲}}-y\frac{d^{۲}x}{du^{۲}}}{x\frac{dy}{du}-y\frac{dx}{du}}=-\left(x\frac{dy}{du}+y\frac{dx}{du}\right)\frac{۲k^{۲}xy}{۱-k^{۲}x^{۲}y^{۲}}$$

این معادله بسهولت قابل انتگرال گیری بوده و پس‌از انتگرال گیری چنین داریم :

$$Log\left(x\frac{dy}{du}-y\frac{dx}{du}\right)=c+Log(۱-k^{۲}x^{۲}y^{۲})$$

و یا :

$$x\frac{dy}{dv}+y\frac{dx}{du}=c_{۱}(۱-k^{۲}x^{۲}y^{۲})$$

با توجه بروابط $x=snu$ و $y=snv$ و با درنظر داشتن آنکه جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه‌اول باید بیک مقدار ثابت بستگی داشته باشد[یعنی $c_{۱}=f(c)$] رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$snusn'v+snvsn'u=f(c)(۱-k^{۲}sn^{۲}usn^{۲}v)$$

باقرار دادن $v=0$ خواهیم داشت $f(u)=snu$ و از آنجا فرمول جمع توابع بیضوی ژاکوبین snu با رابطه زیر بدست میاید :

$$sn(u+v)=\frac{snusn'v+snvsn'u}{۱-k^{۲}sn^{۲}usn^{۲}v}$$

میتوان نشان داد که جواب عمومی معادله (۱۰ . ۲) تابع جبری میباشد چه اگر $z=x+y$ قرار دهیم معادله (۱۰ . ۲) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{X^{\frac{۱}{۲}}}{y-x}\ ,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{Y^{\frac{۱}{۲}}}{x-y}\ ;\quad \frac{dx}{X^{\frac{۱}{۲}}}=-\frac{dy}{Y^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{dt}{y-x}$$

و بالنتیجه چنین داریم :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\frac{X^{\frac{۱}{۲}}-Y^{\frac{۱}{۲}}}{y-x}=\frac{Y^{\frac{۱}{۲}}-X^{\frac{۱}{۲}}}{x-y}$$

وپس‌از مشتق گیری نسبت به t خواهیم داشت :

$$\frac{d^{۲}z}{dt^{۲}}=\frac{۱}{x-y}\left[\frac{۱}{۲Y^{\frac{۱}{۲}}}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{۱}{۲X^{\frac{۱}{۲}}}\cdot\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right]-\frac{Y^{\frac{۱}{۲}}-X^{\frac{۱}{۲}}}{(x-y)^{۲}}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{۱}{(x-y)^{۲}}\left[\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dY}{dy}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{dX}{dx}-\frac{(Y^{\frac{۱}{۲}}-X^{\frac{۱}{۲}})(Y^{\frac{۱}{۲}}+X^{\frac{۱}{۲}})}{y-x}\right]$$

$$=\frac{۱}{(x-y)^{۲}}\Big[b+c(x+y)+\frac{۳c}{۲}(x^{۲}+y^{۲})+۲f(x^{۳}+y^{۳})-b$$

$$-c(x+y)-e(x^{۲}+xy+y^{۲})-f(x^{۳}+x^{۲}y+xy^{۲}+y^{۳})\Big]$$

چهار جمله آخر داخل کروشه مقدار $\frac{Y-X}{y-x}$ میباشد وپس‌ازخلاصه کردن چنین داریم:

$$\frac{d^{۲}z}{dt^{۲}}=\frac{۱}{(x-y)^{۲}}\left[\frac{۱}{۲}c(x^{۲}-۲xy+y^{۲})+f(x^{۳}-x^{۲}y-xy^{۲}+y^{۳})\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}e+f(x+y)=\frac{۱}{۲}e+fz$$

بالاخره اگردوطرف این معادله را در $۲\frac{dz}{dt}$ ضرب‌نموده وانتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=cz+fz^{۲}+k$$

k مقدار ثابت انتگرال گیری میباشد .

و یا جواب عمومی بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{(Y^{\frac{۱}{۲}}-X^{\frac{۱}{۲}})^{۲}}{(x-y)^{۲}}=k+c(x+y)+f(x+y)^{۲} \qquad (۲ . ۱۰۳)$$

عبارت فوق عبارت‌جبری بوده ولی اگر متغیرها را جدا نماییم جواب عمومی به توابع بیضوی منجر خواهد شد .

یکی از حالات خاص معادله (۲ . ۱۰) معادله زیر میباشد :

$$\frac{dx}{\sqrt{۴x_۳-g_۲x-g_۳}}+\frac{dy}{\sqrt{۴y_۳-g_۲y-g_۳}}=0$$

اگر $\gamma(z)$ تابع بیضوی **وایراشتراس*** که بوسیله :

$$z=\int_{\gamma(z)}^{\infty}(۴t^۳-g_۲t-g_۳)^{-\frac{۱}{۲}}dt$$

تعیین میشود باشد در اینصورت معادله دارای جواب عمومی $u+v=c$ که درآن $x=\gamma(u)$ و $y=\gamma(v)$ است خواهد بود .

جواب جبری این معادله بنابر رابطه (۲ . ۱۰۳) بصورت زیر میباشد :

$$\left\{(۴x^۳-g_۲x-g_۳)^{\frac{۱}{۲}}-(۴y^۳-g_۲y-g_۳)^{\frac{۱}{۲}}\right\}^۲=(x-y)^۲(c+۴x+۴y)$$

مثال - یکی‌از جوابهای جبری معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{\sqrt{۱+x^۳}}=\frac{dy}{\sqrt{۱+y^۳}}$ را بدست آورید .

حل - پس‌از مقایسه با رابطه (۲ . ۱۰) چنین داریم :

$$\sqrt{۱+x^۳}=X^{\frac{۱}{۲}} \;;\; a=۱ \;,\; b=c=f=0 \;,\; e=۱$$

$$-\sqrt{۱+y^۳}=Y^{\frac{۱}{۲}} \;;\; a=e=۱ \;,\; b=c=f=0$$

بالنتیجه رابطه جبری (۲ . ۱۰۳) بصورت ساده زیر درمیآید :

$$\frac{(\sqrt{۱+y^۳}+\sqrt{۱+x^۳})^۲}{(x-y)^۲}=(x+y)+k$$

برای ساده نمودن رابطه بالا به ترتیب چنین داریم :

---

* Weierstrassian

$$٢+x^٣+y^٣+٢\sqrt{١+x^٣+y^٣+x^٣y^٣}=x^٣+y^٣-xy(x+y)+k(x-y)^٢ ,$$

$$٤(١+x^٣+y^٣+x^٣y^٣)=k^٢(x-y)^٤+x^٢y^٢(x+y)^٢+٤$$
$$-٢kxy(x+y)(x-y)^٢+٤xy(x+y)-٤k(x-y)^٢ ,$$

$$٤x^٣+٤y^٣+٤x^٣y^٣=k^٢(x-y)^٤+x^٢y^٢(x+y)^٢-٢kxy(x+y)(x-y)^٢$$
$$+٤x^٢y+٤xy^٢-٤k(x-y)^٢ ,$$

$$k^٢(x-y)^٤+x^٢y^٢(x-y)^٢-٢kxy(x+y)(x-y)^٢-٤(x-y)^٢(x+y)$$
$$-٤k(x-y)^٢=0$$

پس‌از تقسیم دوطرف‌رابطه بالابر $(x-y)^٢$ و تبدیل k به $-k$ جواب جبری معادله عبارت خواهد بود از :

$$x^٢y^٢+٢kxy(x+y)+k^٢(x-y)^٢-٤(x+y)+٤k=0$$

١١ . ٢- معادله داربو*

معادله‌یی که بوسیله داربو مورد بررسی قرارگرفته است چنین میباشد :

$$-Ldy+Mdx+N(xdy-ydx)=0 \qquad (٢ . ١١)$$

L , M , N کثیرالجمله‌هایی برحسب x و y بوده‌که ماکزیمم درجه آنها برابر m میباشد .

ذیلاً نشان خواهیم داد که‌اگرتعداد معینی ازجوابهای خصوصی معادله (١١ . ٢) بشکل $f(x, y)=0$ در دست باشند میتوان جواب عمومی معادله (١١ . ٢) را بایک کوادراتور ویا بدون کوادراتور بدست آورد . $f(x, y)$ کثیرالجمله غیر قابل تجزیه میباشد .

ابتدا قضیه کمکی زیر را ثابت میکنیم :

قضیه ١ - اگر $u(x, y)=c$ یکی ازجوابهای معادله (١١ . ٢) باشد تابع $u\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ که تابع همگن‌درجه صفر نسبت به سه متغیر x , y , z است درعبارت:

---

* Darboux

$$A(u) \equiv L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ (۲ . ۱۱۰)

صدق خواهد نمود .

اثبات - فرض میکنیم جواب عمومی معادله (۲ . ۱۱) بصورت $u(x , y) = c$ باشد دراینصورت معادله (۲ . ۱۱) معادل :

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

بوده و پس‌از حذف dx و dy بین معادله فوق و رابطه (۲ . ۱۱) خواهیم داشت :

$$L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} - N\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$ (۲ . ۱۱۱)

چنانچه درعبارت $u(x , y)$ متغیرهای x و y را به ترتیب با $\frac{x}{z}$ و $\frac{y}{z}$ تعویض کنیم (z متغیر مستقل جدیدی است) ، $u\left(\frac{x}{z} , \frac{y}{z}\right)$ تابع گویای همگنی نسبت به متغیرهای x , y , z بوده که درجه آن صفر میباشد و لذا بنابر قضیه اولر چنین داریم :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

باستفاده‌ازروابط‌بالاو معادله (۲ . ۱۱۱) تابع $u\left(\frac{x}{z} , \frac{y}{z}\right)$ درعبارت زیرصدق میکند:

$$A(u) \equiv L\frac{\partial u}{\partial x} + M\frac{\partial u}{\partial y} + N\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ (۲ . ۱۱۰)

L , M , N کثیرالجمله‌های همگن‌درجه m ام نسبت به سه متغیر x , y , z میباشند .

تبصره - بسهولت میتوان نشان داد که عکس این قضیه نیز صادق است یعنی اگر $u\left(\frac{x}{z} , \frac{y}{z}\right)$ در رابطه (۲ . ۱۱۰) صدق کندعبارت $u(x , y) = c$ یکی ازجوابهای معادله (۲ . ۱۱) میباشد .

اکنون‌فرض میکنیم که $f(x , y) = 0$ یکی‌ازجوابهای‌خصوصی معادله (۲ . ۱۱) که درآن $f(x , y)$ کثیرالجمله درجه h ام وغیرقابل تجزیه است باشد وهمچنین قرار میدهیم:

$$g(x , y , z) = z^h f\left(\frac{x}{z} , \frac{y}{z}\right)$$

چون $g(x , y , z)$ کثیرالجمله همگن‌درجه h ام میباشد لذا بنابرقضیه اولر چنین‌داریم :

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = hg$$

باتوجه برابطه (۲ . ۱۱۰) خواهیم داشت :

$$A(g) \equiv L\frac{\partial g}{\partial x} + M\frac{\partial g}{\partial y} + N\frac{\partial g}{\partial z} = L\frac{\partial}{\partial x}(z^h f) + M\frac{\partial}{\partial y}(z^h f) + N\frac{\partial}{\partial z}(z^h f)$$

$$= z^h\left(L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z}\right) + hz^{h-1}fN$$

ازآنجایی‌که $f(x , y) = 0$ یکی‌از جوابهای‌خصوصی معادله (۲ . ۱۱) میباشد لذا بنابر قضیه بالا تابع $f\left(\frac{x}{z} , \frac{y}{z}\right)$ درعبارت :

$$A(f) \equiv L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

صدق مینماید و بنابراین رابطه بالا بصورت ساده زیر درمیآید :

$$A(g) = hz^{-1}Ng = Kg \qquad (۲ . ۱۱۲)$$

چون بنابفرض L , M , N کثیرالجمله‌های درجه m ام نسبت به x و y و $g(x , y , z)$ نیز کثیرالجمله همگن درجه h ام است لذا $A(g)$ کثیرالجمله‌یی از درجه $m+h-۱$ خواهد بود و بالنتیجه K کثیرالجمله‌یی از درجه $m-۱$ میباشد .

اکنون فرض میکنیم تابع F تابع مرکب از سه متغیر u , v , w که خود نیز توابعی‌از x , y , z هستند باشد. عبارت(۲ . ۱۱۰) برای تابع F دراین مورد بااستفاده ازمشتقات نسبی تابع مرکب و بکار بردن رابطه (۲ . ۱۱۰) به ترتیب بصورت زیر نوشته میشود :

$$A(F) \equiv L\frac{\partial F}{\partial x} + M\frac{\partial F}{\partial y} + N\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\equiv L\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$+M\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$+N\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\equiv\frac{\partial F}{\partial u}\left(L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+N\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(L\frac{\partial v}{\partial x}+M\frac{\partial v}{\partial y}\right.$$

$$\left.+N\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}\left(L\frac{\partial w}{\partial x}+M\frac{\partial w}{\partial y}+N\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}A(u)+\frac{\partial F}{\partial v}A(v)+\frac{\partial F}{\partial w}A(w)$$

بطریق مشابه میتوان نشان داد چنانچه F تابع مرکب $u , v , w , t , \ldots$ که هریک از آنها توابعی از x , y , z است باشند خواهیم داشت :

$$A(F)=\frac{\partial F}{\partial u}A(u)+\frac{\partial F}{\partial v}A(v)+\frac{\partial F}{\partial w}A(w)$$

$$+\frac{\partial F}{\partial t}A(t)+\cdots \tag{۲ . ۱۱۳}$$

اکنون فرض میکنیم که :

$$f_1(x , y)=0 , f_۲(x , y)=0 , \ldots , f_r(x , y)=0 , \ldots , f_p(x , y)=0$$

جوابهای خصوصی معادله (۲ . ۱۱) که درآن $f_r(x,y)$ ، $(r=۱,۲ , \ldots , p)$ کثیرالجمله های غیرقابل تجزیه وازدرجه h_r , $(r=۱ , ۲ , \ldots , p)$ استباشد. همچنین فرض میکنیم:

$$g_r(x , y , z)=z^{h_r}f_r\left(\frac{x}{z} , \frac{y}{z}\right) , \quad (r=۱ , ۲ , \ldots , p)$$

تابع :

$$u(x , y , z)=\prod_{r=1}^{p}(g_r)^{a_r} \tag{۲ . ۱۱۴}$$

که درآن $a_1 , a_۲ , a_۳ , \ldots , a_r , \ldots , a_p$ مقادیر ثابت غیر مشخصی که باید آنها را

تعیین کنیم درنظر میگیریم. چون این تابع، تابعی از $g_p , \dots , g_r , \dots , g_2 , g_1$ که هریک از آنها توابعی از z , y , x است میباشد لذا با استفاده از رابطه (۲ . ۱۱۳) خواهیم داشت :

$$A(u)=\frac{\partial u}{\partial g_1}A(g_1)+\frac{\partial u}{\partial g_2}A(g_2)+\cdots+\frac{\partial u}{\partial g_r}A(g_r)$$

$$+\cdots+\frac{\partial u}{\partial g_p}A(g_p)=\sum_{r=1}^{p}\frac{\partial u}{\partial g_r}A(g_r)$$

حال اگر از رابطه (۲ . ۱۱٤) نسبت به g_r مشتق گرفته و رابطه (۲ . ۱۱۲) را بکار ببریم رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$A(u)=\sum_{r=1}^{p} a_r g_1^{a_1} g_2^{a_2}\ \dots\ g_r^{a_r-1}\ \dots\ g_p^{a_p} K_r g_r$$

$$=u\sum_{r=1}^{p} a_r K_r$$

بازاء هرمقدار r تابع K_r کثیرالجمله درجه $m-1$ است و $u(x , y , z)$ کثیرالجمله درجه $h_1a_1+h_2a_2+\cdots+h_ra_r+\cdots+h_pa_p$ نسبت به سه متغیر z , y , x میباشد. لذا اگر تابع $u(x , y , z)$ بازاء $z=1$ بخواهد جواب معادله (۲ . ۱۱) باشد باید کثیرالجمله یی از درجه صفر نسبت به z , y , x بوده و بنابر قضیه اول نیز در رابطه $A(u)=0$ صدق کند یعنی :

$$h_1a_1+h_2a_2+h_3a_3+\cdots+h_ra_r+\cdots+h_pa_p=0$$

(۲ . ۱۱۵)

$$K_1a_1+K_2a_2+K_3a_3+\cdots+K_ra_r+\cdots+K_pa_p=0$$

هریک از توابع K_r اکثراً دارای $\frac{1}{2}m(m+1)$ جمله بوده و چون معادله دوم نسبت به z , y , x اتحاد است لذا بین مقادیر ثابت $a_p , \dots , a_2 , a_1$ اکثراً $\frac{1}{2}m(m+1)$ رابطه برقرار میباشد و از آنجا دو معادله بالا اکثراً $\frac{1}{2}m(m+1)+1$ رابطه بین

p مقدارثابت تعیین میکند. چنانچه تعداد مقادیرثابت غیرمشخص $a_۱$ و $a_۲,\ldots,a_p$ یعنی p از تعداد معادلات تجاوز کند یعنی :

$$p \geqslant \frac{۱}{۲}\, m(m+۱)+۲$$

باشد مقادیر غیر مشخصی میتوان به p نسبت داد و از آنجا قضیه زیر حاصل میگردد :

قضیه دوم - اگر $\frac{۱}{۲}\, m(m+۱)+۲$ جواب خصوصی معادله (۱۱ . ۲) دردست باشد جواب عمومی این معادله را میتوان بدون کوادراتور بدست آورد .

اگر $p=\frac{۱}{۲}\, m(m+۱)+۱$ و سبین معادله (۱۱۵ . ۲) صفر باشد قضیه فوق برقرار میباشد. ولی اگر $p=\frac{۱}{۲}\, m(m+۱)+۱$ و سبین صفر نباشد فرض میکنیم که مقادیر ثابت بوسیله معادلات زیر تعیین میگردند :

$$h_۱a_۱+h_۲a_۲+h_۳a_۳+\cdots+h_pa_p=-m-۲$$

$$K_۱a_۱+K_۲a_۲+K_۳a_۳+\cdots+K_pa_p=-\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}$$

اکنون $\frac{۱}{۲}\, m(m+۱)+۱$ معادله غیر همگن موجوداست که میتوان مقادیر ثابت $a_۲$ را از آنها بدست‌آورد. تعیین مقادیر ثابت فوق منجر به تابعی مانند $u(x, y, z)$ میشود که در رابطه زیر صدق میکند :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=-(m+۲)u$$

$$A(u)\equiv L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+N\frac{\partial u}{\partial z}=-\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)u$$

از حذف $\frac{\partial u}{\partial z}$ بین معادلات بالا خواهیم داشت :

$$\left[L\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)u\right]z$$
$$-\left[x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(m+۲)u\right]N=0$$

ولی چون N همگن و از درجه m ام است لذا چنین داریم :

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}+z\frac{\partial N}{\partial z}=mN$$

ازحذف $\frac{\partial N}{\partial z}$ بین دو معادله بالا رابطه زیر بدست میآید :

$$(Lz-Nx)\frac{\partial u}{\partial x}+(Mz-Ny)\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+\left(z\frac{\partial L}{\partial x}+z\frac{\partial M}{\partial y}-x\frac{\partial N}{\partial y}-۲N\right)u=0$$

اگر $z=۱$ اختیارگردد تابع $u(x,y)$ در معادله :

$$(L-Nx)\frac{\partial u}{\partial x}+(M-Ny)\frac{\partial u}{\partial y}+\left[\frac{\partial(L-Nx)}{\partial x}+\frac{\partial(M-Ny)}{\partial y}\right]u=0$$

صدق مینماید .

چنانچه این رابطه را با رابطه (۶۵ . ۲) مقایسه کنیم نتیجه میشود که $u(x,y)$ یکی‌از عاملهای انتگرال کننده معادله زیر میباشد :

$$-Ldy+Mdx+N(xdy-ydx)=0$$

لذا اگر $\frac{۱}{۲}m(m+۱)+۱$ جواب خصوصی دردست‌باشد همواره میتوان یکی از عاملهای انتگرال کننده را بدست آورد .

در مورد معادله ژاکوبی (شماره ۸۲ . ۲) ، $m=۱$ است. زیرا معادله ژاکوبی بصورت زیر میباشد :

$$(a_۱+b_۱x+c_۱y)(xdy-ydx)-(a_۲+b_۲x+c_۲y)dy$$
$$+(a_۳+b_۳x+c_۳y)dx=0$$

معادله دارای جواب خطی بصورت :

$$\alpha x+\beta y+\gamma=c_{۱}$$

$$A(f)\equiv(a_{۲}z+b_{۲}x+c_{۲}y)\frac{\partial f}{\partial x}+(a_{۳}z+b_{۳}x+c_{۳}y)\frac{\partial f}{\partial y}+(a_{۱}z+b_{۱}x+c_{۱}y)\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda f$$

که در آن λ مقدار ثابت و $f=\alpha x+\beta y+\gamma z$ است میباشد. معادله اخیر منجر به سه معادله بین مقادیر ثابت α , β , γ , λ میگردد. یعنی :

$$\gamma(a_{۱}-\lambda)+\alpha a_{۲}+\beta a_{۳}=0\ ,\ \gamma b_{۱}+\alpha(b_{۲}-\lambda)+\beta b_{۳}=0\ ,$$
$$\gamma c_{۱}+\alpha c_{۲}+\beta(c_{۳}-\lambda)=0$$

و یا :

$$\begin{vmatrix} a_{۱}-\lambda & a_{۲} & a_{۳} \\ b_{۱} & b_{۲}-\lambda & b_{۳} \\ c_{۱} & c_{۲} & c_{۳}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

اگر فرض کنیم این معادله که نسبت به λ از درجه سوم است دارای سه ریشه متمایز $\lambda_{۱}$, $\lambda_{۲}$, $\lambda_{۳}$ میباشد و همچنین مقادیر متناظر f را به U , V , W نمایش دهیم ، دراینصورت عبارت :

$$U^{i}V^{j}W^{k}=c_{۲}$$

هنگامیکه در آن $z=۱$ اختیار گردد درصورتی جواب عمومی خواهد بود که :

$$i+j+k=0\quad,\quad\lambda_{۱}i+\lambda_{۲}j+\lambda_{۳}k=0$$

وبرای این منظور کافی است $i=\lambda_{۲}-\lambda_{۳}$; $j=\lambda_{۳}-\lambda_{۱}$; $k=\lambda_{۱}-\lambda_{۲}$. بنابراین جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$U^{\lambda_{۲}-\lambda_{۳}}V^{\lambda_{۳}-\lambda_{۱}}W^{\lambda_{۱}-\lambda_{۲}}=c_{۲}$$

۱۲ . ۲- اصل دوگانگی

باتبدیلی که آنرا به لژاندر* نسبت میدهند میتوان معادله دیفرانسیل مرتبه اول را

---

* Legendre

به‌معادله دیگری که ازهمان مرتبه است تبدیل کرد. فرض میکنیم X و Y متغیرهای جدیدی باشند که با روابط :

$$X=p \quad , \quad Y=xp-y$$

مشخص شده باشند و همچنین فرض میکنیم $P=\frac{dY}{dX}$ و $\frac{dp}{dx}\neq 0$ باشد. بادرنظر گرفتن تبدیل متغیرهای بالا چنین داریم :

$$dX=dp \quad , \quad dY=xdp+pdx-dy=xdp$$

بنابراین : $\frac{dY}{dX}=P=x \quad , \quad y=xp-Y=XP-Y$

و ازآنجا تبدیل : $X=p \quad , \quad Y=xp-y$

معادل : $x=P \quad , \quad y=XP-Y$

خواهد بود. همانطورکه تعبیرهندسی‌این تبدیلات را ذیلاً توضیح خواهیم داد دوتبدیل فوق بطور معکوس بیکدیگر مربوط میگردند وازآنجابوسیله این تبدیلات هریک از معادلات:

$$F(x\,,y\,,p)=0 \quad , \quad F(P\,,XP-Y\,,X)=0$$

را میتوان بدیگری تبدیل کرد. ذیلاً نشان خواهیم داد اگر یکی از معادلات فوق قابل انتگرال گیری باشد، انتگرال معادله دیگر را میتوان با عملیات جبری بدست آورد. زیرا اگر $\varphi(X\,,Y)=c$ جواب عمومی معادله دوم باشد پس‌از مشتق گیری نسبت به X خواهیم داشت :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\frac{\partial\varphi}{\partial Y}P=0$$

چنانچه X , Y , P را بین معادله بالا ومعادله $\varphi(X\,,Y)=c$ و دو معادله $x=P$ و $y=XP-Y$ حذف کنیم جواب عمومی معادله $F(x\,,y\,,p)=0$ بدست میآید.

درحالت خاص معادله $\Phi(xp-y)=x\Psi(p)$ با تبدیلات بالا به معادله $\Phi(Y)=P\Psi(X)$ که متغیرها ازیکدیگر جدا میشوند تبدیل میگردد.

مثال - معادله دیفرانسیل $(y-px)x=y$ را حل کنید.

حل - پس‌از بکار بردن تبدیلات فوق چنین داریم :

$$-YP=XP-Y \quad , \quad P=\frac{Y}{X+Y}$$

این معادله همگن بوده و دارای جواب عمومی $LogY-\frac{X}{Y}=c$ میباشد . پس از مشتق گیری نسبت به X خواهیم داشت :

$$\frac{P}{Y}-\frac{Y-XP}{Y^{۲}}=o \quad \text{و یا} \quad Y=\frac{Y-XP}{P}=-\frac{y}{x}$$

همچنین از معادله $-YP=XP-Y$ و با استفاده از رابطه $P=x$ چنین داریم :

$$\frac{X}{Y}=\frac{۱}{P}-۱=\frac{۱}{x}-۱$$

پس از جایگزین نمودن مقادیر Y و $\frac{X}{Y}$ در معادله $LogY-\frac{X}{Y}=c$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده عبارت خواهد بود از :

$$Log\left(-\frac{y}{x}\right)-\frac{۱}{x}=c_1 \quad \text{ویا} \quad y=cxe^{\frac{۱}{x}}$$

تعبیر هندسی تبدیلات لژاندر

میخواهیم نشان دهیم اگر (x , y) و (X , Y) را که بوسیله رابطه (۲ . ۱۲) تعیین میگردند نقاطی در صفحه متغیر uv بپنداریم مکان نقاط (x , y) قطبی معکوس مکان (X , Y) نسبت به سهمی $u^{۲}=۲v$ و بالعکس میباشد . برای اثبات این مطلب مقدمتاً لازم میدانیم که قطب و قطبی را در مورد مخروطی‌ها تعریف نماییم .

تعریف ـ هریک از خطوط گذرنده از نقطه $P(x_{۱} , y_{۱})$ مخروطی :

$$ax^{۲}+۲hxy+by^{۲}+۲gx+۲fy+c=o \qquad (۲ . ۱۲۱)$$

را در دو نقطه مانند M و M' برخورد میکند (نقطه P برروی مخروطی واقع نیست) . مکان هندسی محل تقاطع مماسهای مرسوم برمخروطی دراین نقاط را بنابر تعریف قطبی نقطه P نسبت به مخروطی نامیده و P را قطب این قطبی گوییم .

اگر $N(x_{۲} , y_{۲})$ محل برخورد مماسهای برمخروطی در نقاط M و M' باشد واضح است که اگر قاطع PMM' تغییر کند نقطه N متناظر آن نیز تغییر مینماید. قطبی

نقطه P نسبت به مخروطی مکان هندسی نقاط N میباشد .

اکنون نشان خواهیم داد که قطبی نقطه $P(x_{۱}, y_{۱})$ نسبت به مخروطی (۲ . ۱۲۱) خط مستقیم :

$$ax x_{۱} + h(x y_{۱} + x_{۱} y) + b y y_{۱} + g(x + x_{۱}) + f(y + y_{۱}) + c = 0 \quad (۲ . ۱۲۲)$$

میباشد. زیرا نقطه N برروی قطبی نقطه P یعنی خط △ واقع است و معادله وتر MM' عبارت است از* :

---

* چنانچه میدانیم معادله مماس برخم $f(x, y) = 0$ در نقطه $M(x, y)$ عبارت است از $(X-x)f'_x + (Y-y)f'_y = 0$ و از آنجا معادله مماس بر مخروطی (۱۲۱ . ۲) در نقطه $A(x, y)$ (نقطه A برروی مخروطی است) عبارت خواهد بود از :

$$(X-x)(۲ax + ۲hy + ۲g) + (Y-y)(۲by + ۲hx + ۲f) = 0$$

$$axX + h(yX + xY) + byY + gX + fY = ax^{۲} + ۲hxy + by^{۲} + gx + fy$$

ولی بنابر رابطه (۱۲۱ . ۲) عبارت سمت راست رابطه بالا برابر $-gx-gy-c$ میباشد واز آنجا معادله مماس در نقطه A عبارت خواهد بود از :

$$(I) \qquad axX + h(yX + xY) + byY + g(x + X) + f(y + Y) + c = 0$$

اگرنقاط $M(x_{۳}, y_{۳})$ و $M'(x_{۴}, y_{۴})$ باشد برای یافتن معادله مماسهای MN و M'N کافی است بجای (x, y) در معادله (I) به ترتیب $(x_{۳}, y_{۳})$ و $(x_{۴}, y_{۴})$ را قرار دهیم . بنابراین معادله مماس MN عبارت خواهد بود از :

$$ax_{۳}X + h(y_{۳}X + x_{۳}Y) + by_{۳}Y + g(x_{۳} + X) + f(y_{۳} + Y) + c = 0$$

از طرفی چون نقطه $N(x_{۲}, y_{۲})$ برروی این مماس قرار دارد لذا خواهیم داشت :

$$(II) \quad ax_{۳}x_{۱} + h(y_{۳}x_{۲} + x_{۳}y_{۲}) + by_{۳}y_{۲} + g(x_{۳} + x_{۲}) + f(y_{۳} + y_{۲}) + c = 0$$

بطریق مشابه از آنجایی که نقطه N برروی مماس M'N قرار دارد خواهیم داشت :

$$(III) \quad ax_{۴}x_{۲} + h(y_{۴}x_{۲} + x_{۴}y_{۲}) + by_{۴}y_{۲} + g(x_{۴} + x_{۲}) + f(y_{۴} + y_{۲}) + c = 0$$

بقیه پاورقی در صفحه بعد

$$axx_{۲}+h(xy_{۲}+x_{۲}y)+byy_{۲}+g(x+x_{۲})+f(y+y_{۲})+c=0$$

چون نقطه $P(x_{۱} , y_{۱})$ روی این خط قرار دارد لذا :

$$ax_{۱}x_{۲}+h(x_{۱}y_{۲}+x_{۲}y_{۱})+by_{۱}y_{۲}+g(x_{۱}+x_{۲})+f(y_{۱}+y_{۲})+c=0$$

رابطه بالا نشان میدهد که مکان نقاط $(x_{۲} , y_{۲})$ خط :

$$ax_{۱}x+h(x_{۱}y+xy_{۱})+by_{۱}y+g(x_{۱}+x)+f(y_{۱}+y)+c=0$$

است. معادله اخیر معادله مطلوب میباشد . ولی از آنجاییکه وتر AB نیز دارای همین معادله میباشدلذا میتوان نتیجه گرفت که قطبی‌نقطه P نسبت به مخروطی(۱۲۱ . ۲) بروتر واصل بین نقاط تماس مماسهای‌حقیقی‌یا موهومی مرسوم‌ازنقطه P (یعنی AB) منطبق‌است.

اکنون فرض میکنیم مکان نقطه (x , y) درصفحه متغیر uv خم C باشد. نقطه $M(x , y)$ را برروی خم C فرض نموده و مماس برخم C را درنقطه M رسم مینماییم. معادله این مماس عبارت خواهد بود از :

$$v-y=p(u-x) \qquad (۲ . ۱۲۲)$$

قطب این مماس را نسبت به سهمی $u^{۲}=۲۷v$ تعیین میکنیم و برای این منظور مماس برخم C در نقطه M را امتداد میدهیم تا سهمی $u^{۲}=۲۷v$ را در نقاط A و B قطع کنند. از نقاط A و B مماسهایی برسهمی رسم میکنیم تا یکدیگر را در نقطه N برخورد کنند. بنابر مطالبی که قبلاً بیان نمودیم بسهولت معلوم میشود که نقطه N قطب مماس برخم C در نقطه M وبالعکس این مماس قطبی‌نقطه N نسبت به سهمی $u^{۲}=۲۷v$ است.

بقیه پاورقی از صفحه قبل

ازدو معادله (II) و (III) میتوان نتیجه گرفت که نقاط $M(x_{۳} , y_{۳})$ و $M'(x_{٤} , y_{٤})$ برروی خط :

$$ax_{۲}x+h(xy_{۲}+x_{۲}y)+byy_{۲}+g(x+x_{۲})+f(y+y_{۲})+c=0$$

قرار دارند . همچنین از مقایسه معادله بالا با معادله (I) میتوان نتیجه گرفت که :

اگر نقطه $N(x_{۲} , y_{۲})$ خارج مخروطی باشد معادله وتر واصل بین نقاط تماس دو مماس مرسوم از نقطه P یعنی MM' عیناً مانند معادله مماس در نقطه $(x_{۲} , y_{۲})$ است چنانچه این نقطه برروی مخروطی باشد .

اگر $N(X , Y)$ باشد وهمچنین از مقایسه $u^{۲}-۲v=0$ با معادله (۲ . ۱۲۱) قطبی نقطه P نسبت به سهمی $u^{۲}-۲v=0$ با جایگزین نمودن :

$$a=۱ \ , \ f=-۱ \ , \ h=b=g=c=0$$

در رابطه (۲ . ۱۲۲) بدست میاید . یعنی :

$$Xu-Y-v=0 \qquad (۲ . ۱۲٤)$$

از طرفی چون دو معادله (۲ . ۱۲۳) و (۲ . ۱۲٤) معادله خط AB میباشند لذا برای آنکه این دو معادله متحد باشند باید داشته باشیم :

$$X=p \quad , \quad Y=px-y$$

اگر نقطه M برروی خم C تغییرمکان دهد واضح است که نقاط P متناظر آن نیز تغییرمکان داده و مکان هندسی این نقاط خم C' قطبی معکوس خم C میباشد . بعبارت دیگر خم C' مکان هندسی قطب های مماسهای درنقاط مختلفه خم C نسبت به سهمی $u^{۲}=۲v$ میباشد . همچنین میتوان نشان داد که خم C قطبی معکوس خم C' است یعنی مکان هندسی قطب های مماسهای خم C' نسبت به سهمی .

فصل سوم

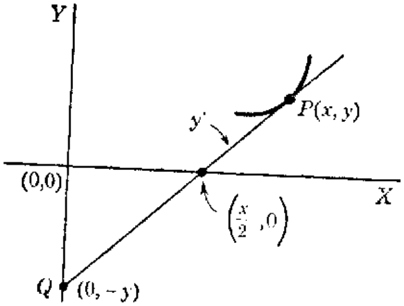
موارد استعمال معادلات مرتبه اول دیفرانسیل

۱ . ۳- مسائل هندسی

۱۱ . ۳- یافتن معادله منحنی از روی خواص آن

اکنون میتوانیم انواع مختلف مسائلی که منجر به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول میگردند حل کنیم . برای این منظور ابتدا برخی از مسائل هندسی را که منظور یافتن معادله خمهایی است که مشتق آنها یعنی y' دارای خاصیت معینی باشند مورد بررسی قرار میدهیم .

مثال ۱- طایفه خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که محور x ها پاره خط محدود بین مماس در نقطه p و محور y ها را نصف کند .



شکل ۱ . ۳

حل - نقطه غیر مشخص $P(x , y)$ را روی یکی از منحنی‌های طایفه خمهای مفروض اختیار کرده وفرض میکنیم PQ پاره خط محصور بین مماس براین خم درنقطه P و محور Oy باشد بنابفرض محور Ox قطعه خط PQ رانصف میکند ولذا مختصات نقطه Q عبارت از $o , -y$ میباشد .

از طرف دیگر ضریب زاویه خط PQ که همان خط مماس برطایفه منحنی‌های C میباشد برابر $\frac{۲y}{x}$ است و بالنتیجه :

$$\frac{۲y}{x} = y' = \frac{dy}{dx} \qquad \text{(I)}$$

جواب عمومی معادله (I) عبارت است از :

$$y = cx^{۲} \;,\; x \neq o \;,\; y \neq o \qquad \text{(II)}$$

بنابراین ثابت نمودیم اگر طایفه منحنی‌هایی موجود باشند که درشرایط این مسئله صدق نمایند برای آنها شرط (I) و بالنتیجه شرط (II) صادق خواهد بود .

بالعکس باید نشان دهیم که طایفه منحنی‌هایی که در شرط (II) صدق میکنند شرایط مسئله نیز برای آنها صادق است . چه اگر $P(x_0 , y_0)$ نقطه‌یی واقع بریکی از طایفه منحنی‌های (II) باشد با استفاده از رابطه (II) خواهیم داشت :

(III) $$y_0 = cx_0^{۲} \quad , \quad y'_{(x_0 , y_0)} = ۲cx_0$$

معادله مماس در نقطه P با ضریب زاویه $۲cx_0$ عبارت است از :

$$y - y_0 = ۲cx_0(x - x_0)$$

محل تماس این خط مماس با محور y ها یعنی عرض نقطه Q در شکل (۱ . ۳) باقرار دادن $x = 0$ درمعادله بالا بدست میاید . یعنی :

$$y = y_0 - ۲cx_0^{۲}$$

و بالنتیجه مختصات وسط پاره خط PQ چنین است :

(IV) $$\left(\frac{x_0}{۲} \; , \; y_0 - cx_0^{۲}\right)$$

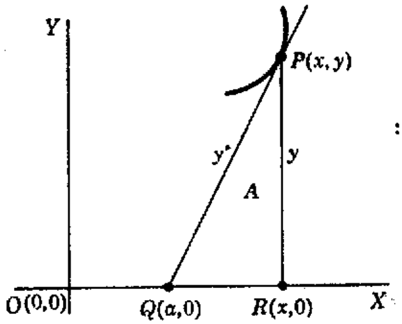
اگر بجای y_0 در رابطه (IV) مقدار آنرا از رابطه (III) قرار دهیم مختصات وسط پاره خط PQ عبارت خواهد بود از :

(V) $$\left(\frac{x_0}{۲} \; , \; 0\right)$$

یعنی ثابت کردیم که محور x ها قسمتی از مماس مرسوم در نقطه $P(x_0 , y_0)$ بریکی از طایفه منحنی‌های (II) که محدود بین نقطه P و محور y ها است نصف میکند .

مثال ۲- خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که مساحت ناحیه محدود به محور x ها و مماس مرسوم از نقطه غیر مشخص $P(x , y)$ واقع بریکی از منحنی‌های این طایفه و عرض نقطه P بطول x برابر مقدار ثابت A باشد .

حل - از نقطه غیر مشخص $P(x , y)$ واقع برروی یکی از منحنی‌های طایفه منحنی‌های مطلوب مماسی برآن رسم میکنیم . اگر $Q(a , 0)$ محل تقاطع خط مماس بامحور x ها و $R(x , 0)$ محل تقاطع تصویر مماس با محور x ها باشد (شکل ۲ . ۳) معادله خط مماس عبارت خواهد بود از :



شکل ۲ . ۳

(I) $$\frac{y}{x-a}=y' \quad , \quad x\neq a$$

اگر معادله بالا را نسبت به a حل کنیم خواهیم داشت:

(II) $$OQ=a=x-\frac{y}{y'}$$

از آنجا فاصله QR عبارت میگردد از :

$$QR=OR-OQ=x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)=\frac{y}{y'}$$

و بالنتیجه سطح A از رابطه زیر بدست میآید :

$$A=\frac{۱}{۲}\,y\left(\frac{y}{y'}\right)=\frac{y^۲}{۲y'}$$

و یا :

$$\frac{y'}{y^۲}=\frac{۱}{۲A}$$

معادله بالا دارای جواب عمومی :

(III) $$\frac{۱}{y}=-\frac{x}{۲A}+c \quad \text{و یا} \quad y=\frac{۲A}{۲Ac-x} \quad , \quad x\neq ۲Ac$$

است . لذا نشان دادیم اگر یک طایفه منحنی موجود باشد که در شرایط مسئله صدق نماید باید این طایفه منحنی‌ها در شرط (I) و بالنتیجه در شرط (III) صدق کند . اکنون نشان خواهیم داد که عکس مطالب بالا نیز صحیح است . یعنی اگر طایفه منحنی‌هایی در شرط (III) صدق نمایند شرایط مسئله برای این طایفه منحنی‌ها نیز صادق خواهد بود . زیرا اگر نقطه $P(x_۰ , y_۰)$ نقطه‌یی واقع بر یکی از منحنی‌های رابطه (III) باشد چنین داریم:

(IV) $$y_۰=\frac{۲A}{۲Ac-x_۰} \quad , \quad y'^{*}_{(x_۰ , y_۰)}=\frac{۲A}{(۲Ac-x_۰)^۲}$$

معادله خط مماس در نقطه $P(x_۰ , y_۰)$ وضریب زاویه‌یی که از رابطه (IV) بدست میآید عبارت است از :

---

* منظور از $y'_{(x_۰ , y_۰)}$ مقدار مشتق بازاء $x=x_۰$ و $y=y_۰$ است .

$$(V) \qquad y-y_۰=(x-x_۰)\,\frac{۲Λ}{(۲Ac-x_۰)^۲}$$

برای یافتن طول نقطه تقاطع خطی که معادله آن با رابطه (V) مشخص میگردد (نقطه Q در شکل ۲ . ۳) با محور x ها کافی‌است در رابطه (V) ، $y=o$ قرار دهیم . یعنی :

$$x=x_۰-\frac{۲Ax_۰-y_۰(۲Ac-x_۰)^۲}{۲A}=\frac{y_۰(۲Ac-x_۰)^۲}{۲A}$$

بالنتیجه مساحت مورد نظر چنین است :

$$\frac{۱}{۲}\,y_۰\left[\frac{y_۰(۲Ac-x_۰)^۲}{۲A}\right]$$

اگردر رابطه بالا بجای $(۲Ac-x_۰)^۲$ مقدارآنرا که از اولین معادله (IV) بدست میآید قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۲}\,y_۰\left(\frac{٤A^۲y_۰}{۲Ay_۰^۲}\right)=A$$

بنابراین‌طایفه منحنی‌هایی که‌بارابطه(III) مشخص میشوند درشرایط مسئله صدق میکنند.

مثال ۳- خم‌هاسنی C رابقسمی تعیین کنید که طول OQ متناسب با $tg\psi$ باشد. Q محل تقاطع مماس برخم بامحور Ox و ψ زاویه این مماس با محورx ها میباشد (شکل ۲ . ۳) .

حل - از شکل (۲ . ۳) بسهولت معلوم میشود که :

$$OQ=OR-QR=x-yy'$$

ولی چون $tg\psi=y'$ است لذا :

$$OQ=x-\frac{y}{y'}=k\,tg\psi=ky'$$

(k مقدارثابت است) . ویا :

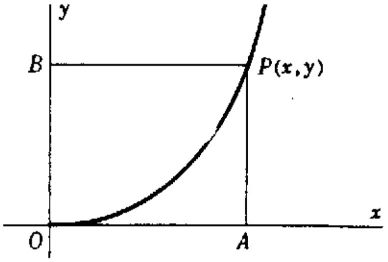
$$(I) \qquad y=xy'-ky'^۲$$

معادله (I) معادله کلرو بوده و همانطورکه میدانیم دارای جواب عمومی $y=cx-kc^۲$ و جواب غیرعادی $x^۲=٤ky$ است .

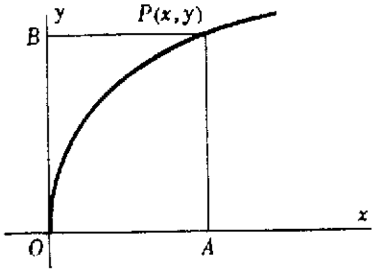
منحنی مطلوب جواب غیر عادی یعنی سهمی $x^۲=٤ky$ است . جوابهای عمومی

خطوط مماس براین سهمی را نشان میدهد . مانند مسائل قبل بسهولت میتوان نشان داد که سهمی $x^{۲}=٤ky$ در شرایط مسئله صدق میکند .

مثال ٤- از نقطه P واقع برطایفه منحنی‌های C که همگی ازمبداء مختصات میگذرند خطوط PA و PB را به ترتیب موازی محور x ها و y ها رسم مینماییم . قوس OP مستطیلی را که ازمحورهای مختصات وخطوط AP و PB تشکیل میشود بدوقسمت تقسیم میکند (اشکال ۳ . ۳ الف و ب) . منحنی‌های C را چنان تعیین کنید که مساحت یکی از قسمتها سه برابر سطح قسمت دیگر باشد .



شکل ۳ . ۳- الف



شکل ۳ . ۳- ب

حل - باید دو حالت زیررا مورد بررسی قرار داد در شکل (۳ . ۳ الف) فرض مسئله بصورت زیر درمیآید :

۳ برابر مساحت OAP = مساحت OPB

و از آنجا :

$$۳\int_{۰}^{x} ydx = xy - \int_{۰}^{x} ydx$$

و یا :

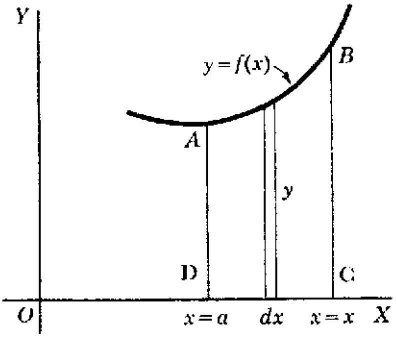
$$٤\int_{۰}^{x} ydx = xy$$

برای یافتن معادله دیفرانسیل مطلوب از معادله بالا نسبت به x مشتق میگیریم :

$$٤y = y + x\frac{dy}{dx} \quad \text{و یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{۳y}{x}$$

پس از انتگرال گیری طایفه منحنی‌های $y=cx^{۳}$ بدست میآید .

در شکل (۳ . ۳ ب) مساحت OAP سه برابر مساحت OPB است . پس $\int_{0}^{x} ydx=۳xy$ ٤ . اگر ازاین معادله نسبت به x مشتق بگیریم معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{۳x}$ که دارای جواب عمومی $y^{۳}=cx$ است بدست میآید .



شکل ٤ . ۳

چون درهریک از دو مورد فوق معادله دیفرانسیل از مشتق گیری بدست آمده است لذا ممکن است جواب حاصل دارای جوابهای زاید باشد بنابراین لازم است که مساحت را درهریک از دو حالت محاسبه کنیم . ولی دراین مسئله هردوجواب در شرایط مسئله صدق میکنند .

مثال ۵- طایفه خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که سطح منحنی محدودبه محور x ها و عرضهای نقاط $x=a$ و $x=x$ متناسب با طول قوس محدود به این خطوط باشد شکل (٤ . ۳) .

حل - چنانچه میدانیم در مختصات کارتزین ds و dA عنصر طول قوس و عنصر سطح به ترتیب عبارتند از :

$$ds=\sqrt{dx^{۲}+dy^{۲}}=dx\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}=dy\sqrt{۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}} \quad ,$$

$$dA=ydx$$

بنابفرض سطح محدود بین قوس AB از منحنی مطلوب و عرضهای نقاط بطول $x=a$ و $x=x$ و محور x ها متناسب با طول قوس AB میباشد . یعنی :

$$\int_{a}^{x} ydx=k\int_{a}^{x}\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}\,dx$$

که در آن $k>0$ مقدار ثابتی میباشد. اگر از رابطه بالا نسبت به x مشتق بگیریم چنین داریم :

$$y=k\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}\ ;\ y^{۲}=k^{۲}\left[۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\right]\ ,\quad y>0\ ,\ k>0$$

و یا :

$$\frac{\pm\sqrt{y^{۲}-k^{۲}}}{k}=\frac{dy}{dx}\ ;\ \frac{dx}{k}=\frac{\pm dy}{\sqrt{y^{۲}-k^{۲}}}\ ,\ y\neq k$$

پس‌از انتگرال گیری از رابطه بالا جواب مطلوب بدست میآید . یعنی :

$$\frac{x}{k}=Log\left(y\pm\sqrt{y^{۲}-k^{۲}}\right)-Log c$$

و یا :

$$ce^{\frac{x}{k}}=y\pm\sqrt{y^{۲}-k^{۲}}\ ,\ y=\frac{۱}{۲c}\left(c^{۲}e^{\frac{x}{k}}+k^{۲}e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

مثال ۶- ذوزنقه قائم‌الزاویه منحنی‌الخط ABCD شکل (۴ . ۳) را حول محور x ها دوران میدهیم . مطلوب‌است تعیین این‌خمها بقسمی که حجم‌حاصل متناسب با :

الف ـ مجموع عرضهای نقاط C و D باشد (شکل ۴ . ۳) .

ب ـ تفاضل عرضهای نقاط C و D باشد (شکل ۴ . ۳) .

حل ـ اگر b عرض نقطه ثابت D باشد از مشتق گیری شرط مسئله در قسمت (الف) یعنی رابطه :

$$\text{(I)}\qquad \pi\int_{a}^{x}y^{۲}dx=k(y+b)$$

خواهیم داشت :

$$\pi y^{۲}=k\frac{dy}{dx}$$

معادله بالا دارای جواب عمومی $y(c-\pi x)=k$ بوده که اگر از آن مقدار y را بدست آورده و در سمت چپ رابطه (I) بجای آن قرار دهیم چنین داریم :

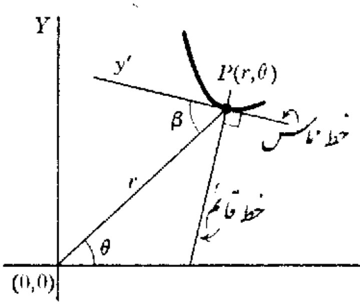
$$\pi\int_{a}^{x}y^{۲}dx=\pi\int_{a}^{x}\frac{k^{۲}dx}{(c-\pi x)^{۲}}=\frac{k^{۲}}{c-\pi x}-\frac{k^{۲}}{c-\pi a}$$

بالنتیجه جواب‌فوق زاید بوده ولذاهیچ منحنی‌یی نمیتوان‌یافت که شرط (الف) برای آن‌صادق باشد . اگر استدلال فوق‌را در مورد قسمت (ب) تکرار کنیم‌از رابطه :

$$\pi\int_{a}^{x} y^{۲}dx=k(y-b)$$

معادله دیفرانسیل $\pi y^{۲}=k\frac{dy}{dx}$ بدست میآید . جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از $y(c-\pi x)=k$. بسهولت معلوم میگردد که این منحنی‌ها در شرط (ب) صدق مینمایند و بنابراین طایفه خمهای $y(c-\pi x)=k$ دارای شرط مطلوب هستند .

مثال ۷- طایفه خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که در هرنقطه P واقع بریکی ازاین خمها شعاع حامل این نقطه زاویه بین مماس و قائم برخم در نقطه P را نصف کند (شکل ۵ . ۳) .



شکل ۵ . ۳

حل - فرض میکنیم r و θ مختصات قطبی نقطه P واقع بریکی از خمهای مطلوب باشد . اگر β زاویه بین شعاع حامل ومماس درنقطه P که درخلاف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری شده است باشد چنین داریم :

$$tg\beta=r\frac{d\theta}{dr} \qquad (I)$$

ولی از طرف دیگر بنابفرض مسئله شعاع حامل زاویه بین خطوط مماس وقائم را نصف میکند لذا $\beta=۴۵^\circ$ ویا $\beta=-۴۵^\circ$ خواهد بود . واضح است درشکل (۵ . ۳) $\beta=-۴۵^\circ$ بوده و لذا خواهیم داشت :

$$-۱=r\frac{d\theta}{dr} \quad , \quad \frac{dr}{r}=-d\theta$$

جواب عمومی معادله اخیر عبارت خواهد بود از :

$$(II) \qquad Log r=-\theta+c' \quad , \quad r=e^{-\theta+c'}=e^{-\theta}\cdot e^{c'}=ce^{-\theta}$$

بعنوان تمرین حل مسئله را در مورد $\beta=۴۵^\circ$ و همچنین اثبات عکس مسئله را برعهده خواننده میگذاریم .

منظوراز عکس مسئله آن است که اگر طایفه خمهایی در معادله (II) صدق کنند شرط مسئله نیز برای این خمها صادق خواهد بود .

مثال ۸- طایفه خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که در هرنقطه P واقع بریکی ازاین خمها β زاویه بین شعاع حامل و مماس براین خم در نقطه P ثلث ψ زاویه مماس و محور Ox باشد (شکل ۵ . ۳) .

حل - بنابفرض مسئله و استفاده از شکل (۵ . ۳) و رابطه (I) مثال ۷ به ترتیب

چنین داریم :
$$\beta=\frac{\psi}{۳}=\frac{۱}{۳}(\beta+\theta) \quad .$$

لذا :
$$\beta=\frac{\theta}{۲} \quad , \quad tg\beta=tg\frac{\theta}{۲}$$

و یا :
$$tg\beta=r\frac{d\theta}{dr}=tg\frac{\theta}{۲}$$

و ازآنجا :
$$\frac{dr}{r}=cotg\frac{\theta}{۲}d\theta$$

پس از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$(I) \qquad Log r=۲Log sin\frac{\theta}{۲}+Log c_۱$$

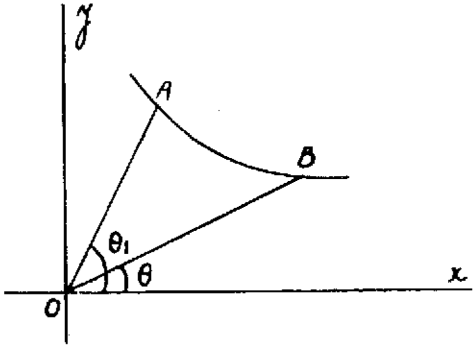
و یا :
$$r=c_۱ sin^۲\frac{\theta}{۲}=\frac{c_۱}{۲}(۱-cos\theta)$$

لذا طایفه خمهای هامنی C عبارت خواهند بود از طایفه کاردیوئیدهای :

$$r=k(۱-\cos\theta) \quad , \quad k=\frac{c_۱}{۲}$$

بالعکس بسهولت میتوان نشان داد که طایفه کاردیوئیدهایی که دررابطه (I) صدق مینمایند برای آنها شرط مسئله صادق میباشد .

مثال ۹- طایفه خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که سطح قطاع حاصل از دو شعاع حامل OA و OB(A و B دونقطه واقع بریکی از منحنی‌های مطلوب میباشند) و قوس AB برابر نصف طول قوس AB باشد (شکل ۶ . ۲) .



شکل ۶ . ۲

حل - چنانچه میدانیم در مختصات قطبی ds و dA عنصر طول قوس و عنصر سطح به ترتیب عبارتند از :

$$ds=\sqrt{(dr)^۲+r^۲(d\theta)^۲}=dr\sqrt{۱+r^۲\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^۲}=d\theta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^۲+r^۲} \quad ,$$

$$dA=\frac{۱}{۲}r^۲d\theta$$

حال اگر فرض کنیم معادله شعاعهای حامل OA و OB به ترتیب $\theta=\theta_۱$ و $\theta=\theta$ باشند درابنصورت با استفاده از فرض مسئله و روابط بالا خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۲}\int_{\theta_۱}^{\theta} r^۲\,d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{\theta_۱}^{\theta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^۲ + r^۲}\,d\theta$$

اکنون اگر از رابطه بالا نسبت به θ مشتق بگیریم معادله دیفرانسیل :

$$(1) \qquad r^۲ = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^۲ + r^۲} \quad \text{و یا} \quad dr = \pm r\sqrt{r^۲ - ۱}\,d\theta$$

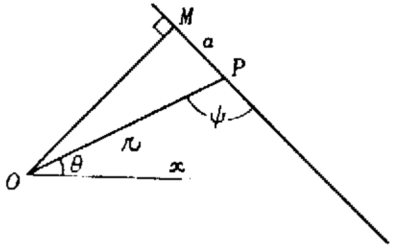
بدست میآید .

اگر $r^۲ = ۱$ باشد رابطه (I) منجر به $dr = 0$ گردیده و بسهولت میتوان نشان داد که $r = ۱$ در شرایط مسئله صدق مینماید .

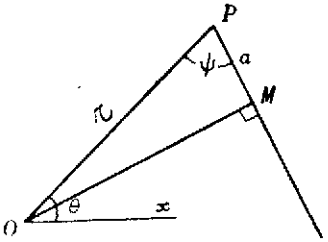
اگر $r^۲ \neq ۱$ باشد رابطه (I) را بشکل $\frac{dr}{r\sqrt{r^۲ - ۱}} = \pm d\theta$ نوشته وجواب $r = sec(c \pm \theta)$ را بدست میاوریم . لذا شرایط مسئله درمورد دایره $r = ۱$ و طایفه منحنی‌های $r = sec(c + \theta)$ صدق میکند . باید توجه داشت که طایفه منحنی‌های $r = sec(c + \theta)$ و $r = sec(c - \theta)$ بریکدیگر منطبق هستند .

مثال ۱۰- طایفه خمهای هامنی C را چنان تعیین کنید که پاره خط PM ثلث شعاع حامل OP باشد (اشکال ۷ . ۳ الف و ب) . P نقطه‌یی است از خم و M تصویر قطب روی مماس برخم در نقطه P میباشد .

حل - با توجه به اشکال (۷ . ۳ الف) و (۷ . ۳ ب) چنین داریم :



شکل ۷ . ۳- الف



شکل ۷ . ۳- ب

$$r = ۳a = ۳r\cos(\pi - \psi) = -۳r\cos\psi$$

و از آنجا : $\cos\psi = -\frac{۱}{۳}$, $tg\psi = -۲\sqrt{۲}$

همچنین : $r = ۳a = ۳r\cos\psi$, $tg\psi = ۲\sqrt{۲}$

از ترکیب دو حالت بالا وهمچنین با استفاده از رابطه (I) مثال ۷ خواهیم داشت :

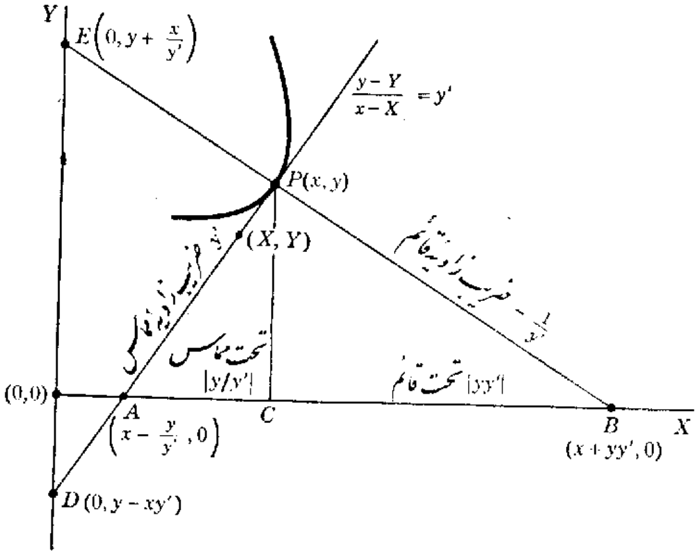
$$tg\psi = r\frac{d\theta}{dr} = \mp ۲\sqrt{۲} \quad \text{و یا} \quad \frac{dr}{r} = \pm\frac{d\theta}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین خم‌های مطلوب عبارت خواهند بود از :

$$r = ce^{\frac{\theta}{۲\sqrt{۲}}} , \qquad r = ce^{-\frac{\theta}{۲\sqrt{۲}}}$$

مسائل

۱- ازنقطه $P(x , y)$ واقع برخم C بمعادله $y=f(x)$ مماس و قائم PA و PB را رسم میکنیم (شکل ۸ . ۳) . ضریب زاویه مماس PA برابر y' وضریب زاویه قائم AB برابر $-\frac{۱}{y'}$ است . خواص زیر را اثبات کنید .



شکل ۸ . ۳

الف ـ طول از مبدأ خط مماس (OA) برابر $x-\frac{y}{y'}$ است .

ب ـ عرض از مبدأ خط مماس (OD) برابر $y-xy'$ میباشد .

پ ـ طول از مبدأ خط قائم (OB) برابر $x+yy'$ است .

ت ـ عرض از مبدأ خط قائم (OE) برابر $y+\frac{x}{y'}$ میباشد .

ث ـ طول AC تصویر AP برروی محور x ها برابر $\left|\frac{y}{y'}\right|$ میباشد . AC را تحت مماس گوییم .

ج ـ طول CB تصویر BP برروی محور x ها برابر $|yy'|$ است . CB را تحت قائم نامیم .

چ ـ طول پاره خط AP برابر $\left|y\sqrt{\frac{۱}{y'^۲}+۱}\right|$ است .

ح ـ طول پاره‌خط DP برابر $\left|x\sqrt{۱+y'^۲}\right|$ میباشد .

خ ـ طول پاره خط PB برابر $\left|y\sqrt{۱+y'^۲}\right|$ است .

د ـ طول پاره خط PE برابر $\left|x\sqrt{۱+\frac{۱}{y'^۲}}\right|$ میباشد .

در هریک از مسائل زیر یعنی از مسئله ۲ الی ۲۸ با بکار بردن مختصات کارتزین معادله طایفه خمهایی را بیابید که در شرط مربوطه صدق کند .

۲ـ ضریب زاویه مماس برمنحنی درهرنقطه برابر مجموع مختصات این نقطه باشد. منحنی را بیابید که از مبدأ مختصات بگذرد .

۳ـ در هرنقطه منحنی تحت مماس برابر مقدار ثابت مثبت k باشد .

راهنمایی ـ به قسمت (ث) مسئله ۱ مراجعه شود .

۴ـ در هرنقطه منحنی تحت قائم برابر مقدار ثابت مثبت k باشد .

راهنمایی ـ به قسمت (ج) مسئله ۱ مراجعه شود .

۵ـ درهرنقطه منحنی تحت قائم متناسب با مربع طول نقطه باشد .

۶ـ محور x ها پاره خط قائم واقع بین نقطه P (واقع برمنحنی) و محل تقاطع آنرا با محور y ها نصف کند . منحنی‌را بیابید که درشرط فوق صدق کرده و از نقطه (۴ , ۲) بگذرد .

۷- در هرنقطه منحنی طول از مبداء خط مماس مساوی عرض آن باشد .

راهنمایی - به قسمت (الف) مسئله ۱ مراجعه شود .

۸- قائم درهرنقطه منحنی از مبدأ بگذرد .

۹- ضریب زاویه مماس برمنحنی در هرنقطه P(x , y) برابر نصف ضریب زاویه خط و اصل بین مبدأ مختصات و نقطه P باشد .

۱۰- قائم درهرنقطه منحنی و خط و اصل بین مبدأ مختصات و این نقطه تشکیل مثلث متساوی‌الساقین دهند که قاعده آن محور x ها باشد .

۱۱- طول عمود از مبدأ مختصات برخط مماس برمنحنی در نقطه (x , y) برابر طول نقطه تماس باشد .

۱۲- طول قوسی از منحنی از مبدأ تانقطه متغیر P(x , y) مساوی دوبرابر جذر طول نقطه P باشد .

۱۳- طول پاره خط مماس ازنقطه تماس تامحل تقاطع آن بامحور x ها مقدار ثابت باشد .

راهنمایی - به قسمت (چ) مسئله ۱ مراجعه شود .

۱۴- در مسئله بالا کلمه مماس را به قائم تبدیل کرده و جوابرا بیابید .

راهنمایی - به قسمت (خ) مسئله ۱ مراجعه گردد .

۱۵- مساحت مثلث‌قائم‌الزاویه‌یی که از خط مماس و محور x ها و عرض نقطه تماس خط مماس با منحنی تشکیل میشود برابر عدد ۸ باشد .

راهنمایی - به قسمت (ث) مسئله ۱ مراجعه گردد .

۱۶- سطح ناحیه محدود بین طول قوس از منحنی y=f(x) و محور x ها وخطوط x=۲ و x=x برابر نصف طول قوس محدود بین خطوط x=۲ و x=x باشد .

۱۷- ضریب زاویه مماس برمنحنی برابر مربع طول نقطه تماس مماس و منحنی باشد . منحنی خاصی را بیابید که از نقطه (۱ , ۱—) بگذرد .

۱۸- تحت مماس مساوی مجموع مختصات نقطه تماس خط مماس و منحنی باشد .

راهنمایی - به قسمت (ث) مسئله ۱ مراجعه گردد .

۱۹- طول پاره خط مماس ازنقطه تماس تا محل تقاطع آن با محور x ها مساوی طول از مبدأ خط مماس باشد . راهنمایی - به قسمتهای (چ) و (الف) مراجعه شود .

۲۰- مماس درهرنقطه منحنی و خط و اصل بین مبدأ مختصات و این نقطه تشکیل مثلث متساوی‌الساقینی دهند که قاعده آن محور x ها باشد .

۲۱- نقطه تماس خط مماس برمنحنی ومنحنی وسط پاره‌خط مماس محدود بین محورهای مختصات باشد .

۲۲- در مسئله ۲۱ کلمه مماس را به قائم تبدیل کنید .

۲۳- طول قوسی ازمنحنی واقع بین خطوط $x=a$ و $x=x$ برابر $\frac{x^2}{2}$ است .

۲۴- سطح ناحیه‌یی که محدود به‌قوسی‌از منحنی $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=x$ و محور x ها میباشد متناسب با تفاضل عرضهای این نقاط باشد .

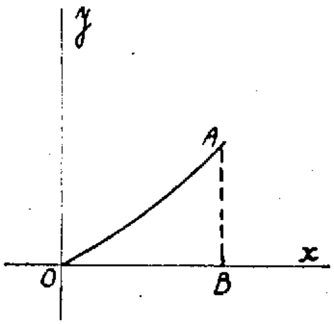
۲۵- فرض‌میکنیم $y=f(x)$ منحنی باشد که از مبدأ مختصات میگذرد . طایفه منحنی‌های C راچنان تعیین کنید که‌حجم‌حاصل از دوران مثلث منحنی‌الخط OAB حول محور Ox برابرحجمی باشد که ازدوران همین‌شکل حول‌محور y ها پدید میآید (شکل ۹ . ۳) .

۲۶- منحنی C را چنان تعیین کنید که از مبدأ مختصات گذشته و سطح محدود بین منحنی و عرضهای نقاط بطول $x=0$ و $x=x$ و محور x ها k برابر مکعب عرض نقطه متغیر باشد .

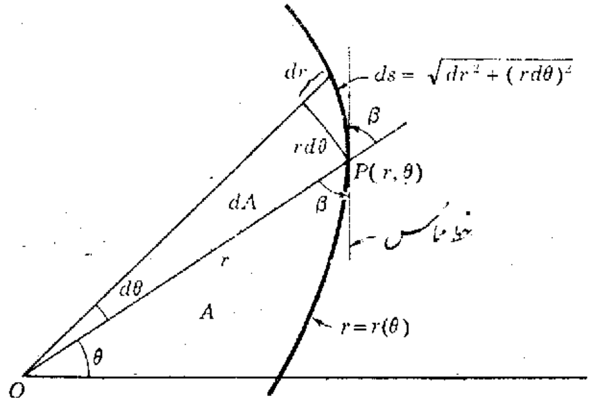
۲۷- اگر طول از مبدأ خط مماس برمنحنی در نقطه P دو برابر طول نقطه P باشد نشان دهید این خم هذلولی متساوی‌القطرین است .

۲۸- طول‌ازمبدأخط مماس برمنحنی‌درهرنقطه P ازمنحنی متناسب باعرض نقطه P باشد .

۲۹- فرض میکنیم $P(r, \theta)$ نقطه‌یی واقع برمنحنی C بمعادله $r=r(0)$ باشد . درنقطه P مماس برمنحنی را رسم میکنم (شکل ۱۰ . ۳) نشان دهید :



شکل ۹ . ۳



شکل ۱۰ . ۳

الف - $\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2$ ، A سطح محدود بین قوسی ازمنحنی ودوشعاع حامل است .

ب - $\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{۲}+r^{۲}}$ که در آن s طول قوس منحنی محدود بین دو شعاع حامل میباشد .

پ - $tg\beta=r\frac{d\theta}{dr}$.

ت - طول تحت مماس‌قطبی یعنی محل تقاطع مماس با خطی که از قطب برشعاع حامل عمود میشود برابر $rtg\beta=r^{۲}\frac{d\theta}{dr}$ است .

ث - طول تحت‌قائم قطبی یعنی محل تقاطع قائم با خطی که از قطب برشعاع حامل عمود میشود برابر $rcotg\psi=\frac{dr}{d\theta}$ است .

بابکار بردن مختصات‌قطبی درهریک از مسائل ۳۰ الی ۳۴ طایفه خمهایی را بیابید که در شرط مربوطه صدق کنند .

۳۰- زاویه بین شعاع حامل در نقطه P و مماس برمنحنی در نقطه $P(r, \theta)$ ثابت باشد .

۳۱- زاویه بین شعاع حامل در نقطه P و مماس برمنحنی در نقطه $P(r, \theta)$ ، k برابر زاویه قطبی θ باشد .

۳۲- تحت قائم قطبی دو برابر سینوس زاویه قطبی θ باشد .

۳۳- تحت مماس قطبی مساوی تحت‌قائم قطبی باشد .

۳۴- سطح محدود بین قوسی از منحنی و شعاع حاملی که به نقاط انتهایی قوس منتهی میگردند برابر نصف طول قوس باشد .

راهنمایی - از قسمتهای (الف) و (ب) مسئله ۲۹ استفاده کنید .

جوابها

۲- $y=e^{x}-x-۱$.

۳- $y^{k}=ce^{x}\ ,\ \frac{y}{y'}>o\ ;\ y^{k}=ce^{-x}\ ,\ \frac{y}{y'}<o$.

۴- $y^{۲}=۲kx+c\ ,\ yy'>o\ ;\ y^{۲}=-۲kx+c\ ,\ yy'<o$.

۵- $۳y^۲=۲kx^۳+c$, $yy'>0$; $۳y^۲=-۲kx^۳+c$, $yy'<0$.

۶- $x^۲+۲y^۲=۲۴$. ۷- $x+yLogy+cy=0$.

۸- $x^۲+y^۲=c$. ۹- $y^۲=cx$.

۱۰- $y^۲-x^۲=c$. ۱۱- $x^۲+y^۲=cx$.

۱۲- $y=\pm(\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^۲})+c$.

۱۳- $\pm x+c=\sqrt{k^۲-y^۲}-kLog\dfrac{k+\sqrt{k^۲-y^۲}}{y}$.

۱۴- $x=\pm\sqrt{k^۲-y^۲}+c$.

۱۵- $xy=cy-۱۶$, $y'>0$; $xy=cy+۱۶$, $y'<0$.

۱۶- $۸y=۴ce^{۲x}+c^{-۱}e^{-۲x}$.

۱۷- $۳y=x^۳+۴$.

۱۸- $x=yLog|cy|$, $\left(\dfrac{y}{y'}\right)>0$; $۲xy+y^۲=c$, $\left(\dfrac{y}{y'}\right)<0$.

۱۹- $x^۲+y^۲=cy$. ۲۰- $xy=c$.

۲۱- $xy=c$. ۲۲- $x^۲-y^۲=c$.

۲۳- $y=\pm\left[\dfrac{x}{۲}\sqrt{x^۲-۱}-\dfrac{۱}{۲}Log(x+\sqrt{x^۲-۱})\right]+c$.

۲۴- $y^k=ce^x$. ۲۵- $x-y=cxy$.

۲۶- سهمی $۳ky^۲=۲x$. ۲۸- $x=y(c-kLogy)$.

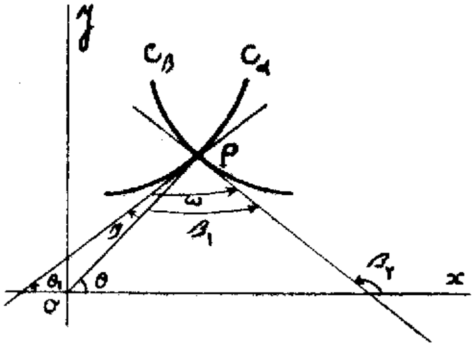
۳۰- $r=ce^{\theta cotg\beta}$. ۳۱- $r^k=c\sin k\theta$.

۳۲- $r=c-۲\cos\theta$. ۳۳- $r=ce^{\theta}$.

۳۴- $r=۱$; $r=\sec(\theta+c)$, $r\neq۱$.

۱۲ . ۳- مسیرها

فرض میکنیم $f(x , y , \alpha)=0$ و $g(x , y , \beta)=0$ معادلات دوطایفه خمهای هامنی C_α و C_β که به‌ترتیب بستگی به پارامتر α و β دارند باشند . چنانچه هریک‌از طایفه خمهای C_β هریک از خمهای C_α را بنابر قانون معینی قطع کندمنحنی های C_β را**مسیرهای** طایفه‌منحنی‌های C_α گوییم . یکی از مهمترین حالات موردی است که منحنی‌های این دو دسته یکدیگر را تحت‌زاویه ثابتی قطع کنند . اگر خمی جمیع طایفه خمهای دیگر را بزاویه قائمه قطع کند این خم را **مسیر قائم** طایفه خمها گوییم . مثلاً دایره‌یی بمرکز O مسیر قائم جمیع طایفه خطوط گذرنده برمبدأ مختصات میباشد و بالعکس هرخط گذرنده برمبدأ مختصات مسیر قائم جمیع دوایر متحدالمرکز $x^۲+y^۲=a^۲$ (a مقداری است ثابت) است . بطور خلاصه طایفه منحنی‌های $y=\beta x$ و $x^۲+y^۲=a^۲$ بطور متقابل مسیرهای قائم یکدیگر هستند .



شکل ۱۱ . ۳- مسیرهای مایل خمهای C_β

اکنون میخواهیم مسیرهای تحت زاویه ω طایفه خمهای هامنی C_α را پیدا کنیم . برای‌این‌منظورابتدا معادله دیفرانسیل خمهای C_α را تشکیل میدهیم یعنی α را بین معادله $f(x , y , \alpha)=0$ ومشتق‌آن‌نسبت به x حذف میکنیم . فرض میکنیم $F(x , y , y')=0$ معادله دیفرانسیل طایفه خمهای C_α باشد.

منظوریافتن‌طایفه خمهایی است که طایفه‌خمهای C_α را بزاویه ω قطع کند . درشکل (۱۱ . ۳) یکی‌از طایفه خمهای C_α در نقطه P یکی ازطایفه خمهای C_β را تحت زاویه ω قطع کرده‌است . بازاء هرنقطه C_α که‌بتوان مقداری برای y' از معادله $F(x,y,y')=0$ بدست آورد سه عدد (x , y , y') را متناظر میکنیم . بطریق مشابه برای هرنقطه از خم C_β که‌دارای مماس‌است‌سه عدد (x , y , y') را مربوط میکنیم . دو عدد اول مختصات نقطه و عدد سوم ضریب زاویه مماس دراین نقطه برخم C_β میباشد . نظربا‌ینکه نقطه P محل تقاطع دو خم C_α و C_β میباشد لذا برای رفع هرگونه ابهامی‌چنانچه‌نقطه P روی

خم C_βواقع باشد اعداد متناظر با آنرا با $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$ نمایش میدهیم. باتوجه‌بشکل (۱۱ . ۳) معلوم میشود که در نقطه P داریم $x=\bar{x}$ و $y=y$ و $y'=tg\theta_{۱}$ و $\bar{y}'=tg\beta_{۲}$ وهمچنین $\beta_{۲}=\theta_{۱}+\omega$ بوده ولذا چنین داریم :

$$y'=tg\theta_{۱}=tg(\beta_{۲}-\omega)=\frac{tg\beta_{۲}-tg\omega}{۱+tg\beta_{۲}tg\omega}=\frac{\bar{y}'-tg\omega}{۱+\bar{y}'tg\omega}$$

بنابراین در نقطه P واقع برمسیر C_β رابطه‌زیر برقرار است :

$$F(x, y, y')=F\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{\bar{y}'-tg\omega}{۱+y'tg\omega}\right)=o$$

لذا معادله دیفرانسیل مسیرهای مایل خمهای C_β بصورت زیر میباشد :

$$F\left(x, y, \frac{y'-tg\omega}{۱+y'tg\omega}\right)=o$$

و ازآنجا قوانین کلی زیر بدست میآیند .

قانون کلی اول

اگر معادله‌دیفرانسیل‌طایفه‌خمهای C_α را داشته باشیم‌و بخواهیم معادله دیفرانسیل طایفه منحنی‌هایی که منحنی‌های فوق را بزاویه ثابت ω قطع میکنند بیابیم کافی است در معادله دیفرانسیل خمهای C_α بجای y' کسر $\frac{y'-m}{۱+my'}$ که در آن $m=tg\omega$ است قرار دهیم‌و یاآنکه بجای dy مقدار $dy-mdx$ و بجای dx مقدار $dx+mdy$ را قرار دهیم . چنانچه در شکل (۱۱ . ۳) زاویه $\omega=\frac{\pi}{۲}$ باشد مسیرهای مایل تبدیل به مسیرهای قائم گردیده و از آنجا خواهیم داشت :

$$y'=tg\theta=tg\left(\beta-\frac{\pi}{۲}\right)=-cotg\beta=-\frac{۱}{\bar{y}'}$$

و لذا اگر معادله دیفرانسیل‌طایفه‌خمهایC_α عبارت‌از $f(x, y, y')=o$ باشد بنابراین در نقطه P واقع بر مسیر C_β رابطه زیر برقرار میباشد :

$$f(x, y, y')=\left(\bar{x}, \bar{y}, -\frac{۱}{\bar{y}'}\right)=o$$

و از آنجا معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم طایفه خمهای C_α چنین است :

$$f\left(x\ ,\ y\ ,\ -\frac{۱}{y'}\right)=o$$

قانون کلی دوم

اگر معادله دیفرانسیل طایفه خمهای C_α در دست باشد وبخواهیم معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم این خمها را بیابیم کافی است در معادله دیفرانسیل خمهای C_α بجای y' کسر $-\frac{۱}{y'}$ را قرار دهیم و یا آنکه بجای dy مقدار $-dx$ و بجای dx مقدار dy را جایگزین کنیم .

اگر معادله طایفه خمهای C_α بصورت قطبی $f(r\ ,\ \theta\ ,\ \alpha)=o$ ، (α پارامتر غیر مشخصی میباشد) داده شده باشد و معادله دیفرانسیل این طایفه خمها :

$$F\left(r\ ,\ \theta\ ,\ \frac{d\theta}{dr}\right)=o$$

باشد . میدانیم که زاویه مماس برخم C_α در نقطه $P(r\ ,\ \theta)$ باشعاع حامل OP تشکیل زاویه‌یی مانند β میدهد بقسمی که $tg\beta=r\frac{d\theta}{dr}$. مماس برخمهای C_α و C_β در نقطه P زوایایی باشعاع حامل OP تشکیل میدهند که آنها را به ترتیب به β و $\beta_۱$ نمایش میدهیم . با توجه بشکل (۱۱ . ۳) بسهولت نتیجه میشود که :

$$\omega=\beta_۱-\beta\quad ,$$

$$tg\beta=tg(\beta_۱-\omega)=\frac{tg\beta_۱-tg\omega}{۱+tg\beta_۱ tg\omega}=\frac{r\frac{d\theta}{dr}-m}{۱+mr\frac{d\theta}{dr}}=\frac{rd\theta-mdr}{dr+mrd\theta}\ ,\ (m=tg\omega)$$

و از آنجا قانون عمومی زیر بدست میآید .

قانون کلی سوم

اگر معادله دیفرانسیل طایفه خمهای C_α بشکل قطبی $F\left(r\ ,\ \theta\ ,\ \frac{d\theta}{dr}\right)=o$ باشد برای یافتن معادله دیفرانسیل طایفه خمهایی که منحنی‌های C_α را بزاویه ثابت ω

قطع میکند کافی است در معادله دیفرانسیل خمهای C_α بجای $r\frac{d\theta}{dr}$ کسر $\frac{r\frac{d\theta}{dr}-m}{۱+mr\frac{d\theta}{dr}}$ که در آن $m=tg\omega$ است قرار دهیم و یا آنکه بجای $rd\theta$ مقدار $rd\theta-mdr$ و بجای dr مقدار $dr+mrd\theta$ را قرار دهیم .

در حالت خاص اگر مسیرها قائم باشند $\omega=\pm\frac{\pi}{۲}$ بوده و لذا :

$$tg\beta_۱=tg\left(\beta\pm\frac{\pi}{۲}\right)=-cotg\beta=-\frac{۱}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

قانون کلی چهارم

اگر معادله دیفرانسیل طایفه خمهای C_α بصورت قطبی $F\left(r,\theta,\frac{d\theta}{dr}\right)=o$ باشد برای یافتن معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم این طایفه خمها کافی است در معادله $F\left(r,\theta,\frac{d\theta}{dr}\right)=o$ بجای $r\frac{d\theta}{dr}$ مقدار $-\frac{۱}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}$ را قراردهیم و یاآنکه بجای $rd\theta$ مقدار $-dr$ و بجای dr مقدار $rd\theta$ را جایگزین نماییم .

مثال ۱ - مسیرهای مایل خمهایی که دوایر متحدالمرکز $x^۲+y^۲=c$ را بزاویه ٤٥° قطع میکند بدست آورید .

حل - بنابر قانون اول باید ابتدا معادله دیفرانسیل دوایر متحدالمرکز را یافته و سپس بجای y' کسر $\frac{y'-tg٤٥^\circ}{۱+y'tg٤٥^\circ}=\frac{y'-۱}{۱+y'}$ را قرار دهیم ولذا بهترتیب خواهیم داشت :

$$x+yy'=o\ ,\ x+y\frac{y'-۱}{۱+y'}=o\ ,\ (x+y)dy+(x-y)dx=o$$

این معادله همگن بوده و اگر تبدیل متغیر $y=vx$ را بکار ببریم چنین داریم :

$$(v^۲+۱)dx+x(v+۱)dv=o \quad \text{و یا} \quad \frac{dx}{x}+\frac{v+۱}{v^۲+۱}dv=o$$

و یا پس از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$Log x + \frac{۱}{۲} Log(v^۲+۱) + arc tg v = Log k_۱$$

و یا
$$Log x^۲(۱+v^۲) = Log k - ۲ arc tg v$$

و بالاخره :
$$x^۲+y^۲ = ke^{-۲ arc\, tg \frac{y}{x}}$$

پس‌از تبدیل به مختصات قطبی معادله مسیر مطلوب عبارت خواهد بود از :

$$r^۲ = ke^{-۲\theta} \quad \text{و یا} \quad re^{\theta} = c$$

لذا مسیرهای مطلوب یک طایفه حلزونی‌های متساوی‌الزاویه میباشند .

مثال ۲ - مسیرهای مایل طایفه خطوط مستقیم $y=ax$ را پیدا کنید .

حل - بنابر قانون اول چنانچه در معادله دیفرانسیل طایفه خطوط مستقیم فوق که بصورت $xy'=y$ است بجای dy مقدار $dy-mdx$ و بجای dx مقدار $dx+mdy$ را قرار دهیم به ترتیب چنین داریم :

$$xy'=y \ , \ xdy=ydx \ , \ x(dy-mdx)=y(dx+mdy)$$

و یا :
$$xdy-ydx=m(xdx+ydy)$$

ولی بنابر شماره (۹ . ۲) چون هردو عامل $xdx+ydy$ و $xdy-ydx$ در معادله دیفرانسیل موجود میباشند لذا شایسته است که تبدیل متغیر قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را بدهیم . پس‌ازاین تبدیل متغیر معادله بالا بصورت ساده $rd\theta=mdr$ درآمده و جواب عمومی بصورت $r=\beta e^{\frac{\theta}{m}}$ میباشد . بنابراین دراین‌حالت نیز مسیرهای طایفه خطوط فوق‌الذکر حلزونی‌های متساوی‌الزاویه میباشند .

مثال ۳ - مسیرهای قائم سهمی‌های $y^۲=٤cx$ را که در آن c پارامتر میباشد بدست آورید .

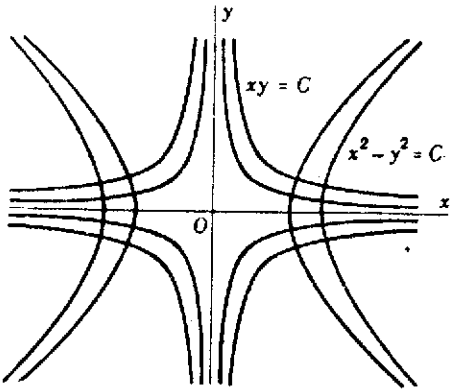
حل - بنابر قانون دوم باید در معادله دیفرانسیل این طایفه سهمی‌ها که بصورت $۲xy'=y$ است بجای y' کسر $-\frac{۱}{y'}$ را قرار دهیم و ازآنجا معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم این سهمی‌ها $۲x+yy'=0$ بوده و لذا مسیرهای قائم آنها بیضی‌های $۲x^۲+y^۲=c^۲$ میباشند .

مثال ٤- مسیرهای قائم هذلولی‌های $xy=c$ را پیداکنید .

حل - معادله دیفرانسیل طایفه هذلولی‌های داده شده چنین است :

$$xy'+y=o$$

حال بنابر قانون دوم باجایگزین نمودن کسر $-\frac{۱}{y'}$ بجای y' معادله‌دیفرانسیل مسیرهای قائم‌بصورت $ydy-xdx=o$ بدست میاید. بنابراین مسیرهای قائم طایفه هذلولی‌های $xy=c$ هذلولی‌های $y^{۲}-x^{۲}=c$ میباشد که درشکل (۱۲ . ۳) نمایش داده شده است .



شکل ۱۲ . ۳

مثال ۵- نشان دهید که مسیرهای قائم مخروطی‌های متحدالکانون :

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}+\lambda}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}+\lambda}=۱$$

که در آن λ پارامتر میباشد برخود مخروطی منطبق است .

حل - معادله دیفرانسیل این مخروطی‌ها را که عبارت است از :

$$xyy'^{۲}+(x^{۲}-y^{۲}-a^{۲}+b^{۲})y'-xy=o \qquad (I)$$

در مثال ٤ قسمت (الف) شماره (۳ . ۱) بدست آوردیم . برای یافتن معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بنابر قانون دوم کافی است y' را به $-\frac{۱}{y'}$ تبدیل کنیم . ولی چنانچه

در معادله (I) بجای y' کسر $-\frac{۱}{y'}$ را قرار دهیم این معادله تغیری ننموده و بالنتیجه مخروطی‌های متحدالکانون بریکدیگر عمود میباشند .

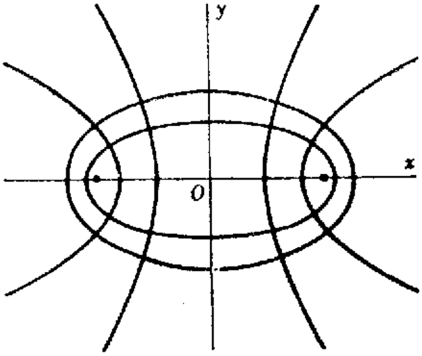
مثال ۶- نشان دهید که مسیرهای قائم مخروطی‌های متحدالکانون :

$$\frac{x^{۲}}{c}+\frac{y^{۲}}{c-\lambda}=۱$$

که در آن c پارامتر و λ مقدار ثابتی است برخود مخروطی منطبق است .

حل - معادله دیفرانسیل این مخروطی‌ها چنین است :

$$(x+yy')(xy'-y)-\lambda y'=o$$



شکل ۱۳ . ۳

برای یافتن معادله دیفرایسیل مسیرهای قائم این طایفه مخروطی‌ها بنابر قانون دوم باید در معادله دیفرانسیل بالا بجای y' کسر $-\frac{۱}{y'}$ را قرار دهیم . چنانچه ملاحظه میکنیم با انجام این عمل در معادله فوق تغییری حاصل نمیشود لذا معلوم میشود که مخروطی‌های متحدالکانون بریکدیگر عمود میباشند (شکل ۱۳ . ۳) .

مثال ۷- خمهایی را تعیین کنید که طایفه خمهای $r^{p}=\alpha \cos p\theta$ (α پارامتر) را بزاویه ثابت ω ، ($m=tg\omega$) قطع کند .

حل - بنابر قانون سوم باید در معادله دیفرانسیل این خمها که بصورت :

$$\frac{۱}{r}=-tg\,p\theta\frac{d\theta}{dr}$$

است بجای $r\frac{d\theta}{dr}$ کسر $\frac{r\frac{d\theta}{dr}-m}{۱+mr\frac{d\theta}{dr}}$ را قرار دهیم ولذا به‌ترتیب چنین خواهیم داشت:

$$١=-tg\,p\theta\cdot r\frac{d\theta}{dr}\quad,\quad ١=-tg\,p\theta\cdot\frac{r\frac{d\theta}{dr}-m}{١+mr\frac{d\theta}{dr}}$$

$$-cotg\,p\theta\left(١+mr\frac{d\theta}{dr}\right)=r\frac{d\theta}{dr}-m\quad,$$

$$(m-cotg\,p\theta)=r\frac{d\theta}{dr}(١+m\,cotg\,p\theta)\quad,$$

$$\frac{dr}{r}=\frac{١+m\,cotg\,p\theta}{m-cotg\,p\theta}d\theta=\frac{\sin p\theta+m\cos p\theta}{-\cos p\theta+m\sin p\theta}d\theta$$

$$=\frac{d(-\cos p\theta+m\sin p\theta)}{p(-\cos p\theta+m\sin p\theta)}$$

و از آنجا جواب عمومی معادله دیفرانسیل مسیرهای مایل این خمها بصورت :

$$r^p=\beta\cos(p\theta+\omega)$$

میباشد .

مثال ٨- مسیرهای قائم طایفه کاردیوئیدهای $r=c(١+\sin\theta)$ را بدست آورید .

حل - بنابر قانون چهارم باید در معادله دیفرانسیل این خمها که بصورت $\frac{dr}{d\theta}=\frac{r\cos\theta}{١+\sin\theta}$ است بجای $\frac{dr}{d\theta}$ مقدار $-r^٢\frac{d\theta}{dr}$ را قرار دهیم و از آنجا معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم این کاردیوئیدها عبارت خواهد بود از :

$$-\frac{d\theta}{dr}=\frac{\cos\theta}{r(١+\sin\theta)}\quad \text{و یا}\quad \frac{dr}{r}+\frac{١+\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=0$$

و یا پس از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$Log\,r+Log\left(\frac{١+\sin\theta}{\cos\theta}\right)-Log\cos\theta=Log\,c$$

و یا :

$$r=c(١-\sin\theta)$$

مسائل

۱- در هریک از مسائل زیر خمهایی را بیابید که خمهای مربوطه را بزاویه ثابت ω قطع کند (a , α , $tg\omega=m$ مقادیر ثابت میباشند) .

الف - $x^۲-y^۲=\alpha$. ب - $x^۲+y^۲=۲\alpha x$.

پ - $y^۲=٤ax$, $\omega=٤٥^\circ$.

ت - $y^۲+۲xy-x^۲=\alpha$, $\omega=٤٥^\circ$.

ث - $r=a\theta$. ج - $r=ae^{\pm\alpha\theta}$.

۲- طایفه خمهای C_α درمعادله دیفرانسیل :

$$M(x\ ,\ y)dx+N(x\ ,\ y)dy=o$$

صدق میکند. معادله دیفرانسیل مسیرهای مایل این خمها را بقسمی تعیین کنید که باآنها زاویه α تشکیل دهند.

۳- اگر معادله دیفرانسیل طایفه خمهای C_α همگن باشد نشان دهید که معادله دیفرانسیل مسیرهای مایل که بااین خمها زاویه α تشکیل میدهند همگن خواهد بود .

٤- نشان دهید طایفه منحنی‌هایی که طایفه بیضی‌های متحدالکانون را بزاویه ثابت ω ، $(tg\omega=m)$ قطع میکند بامعادلات :

$$x=c\cos\varphi\cosh m(\lambda+\varphi)\quad ,\quad y=c\sin\varphi\sinh m(\lambda+\varphi)$$

مشخص میشوند . $۲c$ فاصله کانونی بیضی میباشد.

٥- معادله مسیرهای قائم هریک از منحنی‌ها زیر را در دستگاه مختصات کارتزین بیابید . α پارامتر و a و b مقادیری است ثابت .

الف - $y^۲=\frac{x^۳}{\alpha-x}$. ب - $y=x-۱+\alpha e^{-x}$.

پ - $y^۲=۲x^۲(۱-\alpha x)$. ت - $x^۳-۳xy^۲=\alpha$.

ث - $x^۲+\alpha y^۲=a$. ج - $x^۲-y^۲+۲\alpha xy=a^۲$.

چ - $x(x^۲+y^۲)+\alpha(x^۲-y^۲)=o$.

ح - $(x^{۲}-a)^{۲}+(y^{۲}-b)^{۲}=\alpha^{۲}$.

خ - $xy=\alpha(x-۱)^{۲}$. د - $y=\alpha(x+a)e^{x}$.

ذ - $th^{۲}x+th^{۲}(y+\alpha)=۱$.

ر - $\frac{x^{۲}}{\alpha}+y^{۲}=\frac{a^{۲}}{\alpha-۱}$ ز - $y^{۲}=\alpha x^{۳}$.

ژ - $e^{x}\cos y=k$. س - $\sin y=\alpha e^{x^{۲}}$.

۶- معادله مسیرهای قائم هریک از منحنی‌های زیر را در دستگاه مختصات کارتزین بیابید :

الف - طایفه دوایریکه مرکز آنها برروی محور x ها واقع بوده و طول شعاع آنها متغیر باشد .

ب - طایفه‌بیضی هایی که مرکزآنها درنقطه O (مبدأ مختصات) بوده و محور اطول آنها روی محور Ox قرار داشته و طول آن مقدار ثابت ۲a باشد .

پ - طایفه سهمی‌هایی که کانون آنها در نقطه O بوده و طول پاره خطی که از کانون برمحور سهمی عمود گردد و محصور بین منحنی است برابر ۲a باشد .

ت - طایفه هذلولی‌های متساوی‌القطرینی که از نقطه $A(a , o)$ گذشته و محور y ها مجانب آن باشد .

۷- معادله مسیرهای قائم هریک ازمنحنی‌های زیر را در دستگاه مختصات قطبی بیابید . α پارامتر و a مقدار ثابت است .

الف - $r=\alpha\cos\theta$. ب - $r=\alpha(\sec\theta+tg\theta)$.

پ - $r=\alpha+\cos n\theta$. ت - $r=\sin\theta+\alpha$.

ث - $r=\alpha\sin ۲\theta$. ج - $r^{۲}=\alpha(r\sin\theta-۱)$.

چ - $r^{۲}=\alpha\cos ۲\theta$. ح - $(r^{۲}+a^{۲})\sin\theta+\alpha r=o$.

خ - $r=\frac{\alpha}{۱+۲\cos\theta}$. د - $r^{-۱}=\sin^{۲}\theta+\alpha$.

ذ - $r=\alpha(۱+۲\cos\theta)$. ر - $r^{n}\sin n\theta=\alpha$.

ز - $r=e^{\alpha\theta}$. س - $r^{n}\sin n\theta=\alpha^{n}$.

ش - $r^{۲}=a^{۲}Log(\alpha tg\theta)$.

جوابها

۱- الف : $x^۲+۲mxy-y^۲=c$. ب : $x^۲+y^۲=۲c(x-my)$.

پ : $Log|۲x^۲+xy+y^۲|+\frac{٦}{\sqrt{۷}}\,Arctg\,\frac{x+۲y}{x\sqrt{۷}}=c$.

ت : $xy=c$. ث : $r=c(\theta+m)^{(m^۲+۱)}\cdot e^{-m\theta}$.

ج : $x^۲+y^۲=c^۲$.

۲- $y'=\frac{N\,tg\alpha+M}{M\,tg\alpha-N}$

۵- الف : $(x^۲+y^۲)^۲=c(۲x^۲+y^۲)$.

ب : $x=y-۱+ce^{-y}$.

پ : $x^۲+۳y^۲Log(ky)=c$.

ت : $y^۳-۳x^۲y=c$.

ث : $x^۲+y^۲-۲aLog|x|=c$.

ج : $(x^۲+y^۲)^۲=c+۲a^۲(x^۲-y^۲)$.

چ : $y(۳x^۲+y^۲)=c(x^۲+y^۲)^۳$.

ح : $x^{۲b}(y^۲-b)^{a}=c(x^۲-a)^{b}y^{۲a}$.

خ : $y^۲+x^۲-٤x+Log(x+۱)^٤=c$.

د : $x+a+۱=c\exp\left(\frac{۱}{۲}y^۲+x\right)$.

ذ : $y=cos\,hx+c$. ر : $\frac{x^۲}{c}+y^۲=\frac{a^۲}{c-۱}$.

ز : $۳y^۲+۲x^۲=c$. ژ : $e^{x}sin\,y=a$.

س : $x=c\,cos^۲y$.

٦- الف : $x^۲+y^۲=cy$. ب : $x^۲+y^۲=۲a^۲Log|cx|$.

پ : $\sqrt{\frac{۲r}{a}-۱}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{۲r}{a}-۱}=c\pm\frac{۱}{۲}\theta$.

ت : $۳a(y^۲-x^۲)+۲x^۳=c$.

۷- الف : $r=c\,\sin\theta$. ب - $r=cc^{-\sin\theta}$.

پ : $n^۲=r\left[c+Log\frac{۱+\cos n\theta}{\sin n\theta}\right]$.

ت : $e^{\frac{۱}{r}}=c(\sec\theta+tg\theta)$.

ث : $r^۴=c\cos ۲\theta$. ج : $r=۲\sin\theta+c\cos\theta$.

چ : $r^۲=c\sin ۲\theta$. ح : $(r^۲-a^۲)\cos\theta+cr=0$.

خ : $r^۲(\sin\theta-\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)=c$.

د : $tg\theta=ce^{۲r}$. ذ : $r=c\sqrt{\sin\theta\sin\frac{۱}{۲}\theta}$.

ر : $r^n\cos n\theta=c$. ز : $r=e^{\sqrt{c-\theta^۲}}$.

س : $r^n\cos n\theta=c^n$. ش : $\Lambda(x^۲+y^۲)=a^۲+x^۲-y^۲$.

۲ . ۳ - مسائل غلظت محلولها - مسائل بهره - مسائل درجه‌حرارت - مسائل رشد و تجزیه - مسائل چند فاکتوری .

۲۱ . ۳ - مسائل غلظت محلولها

دراین نوع مسائل سعی میکنیم رابطه‌یی بدست‌آوریم تا مقدار عنصری که درمحلولی سوجود است واین مقداردر هرلحظه‌بازمان t تغییر میکندبرحسب تابع معینی‌از t بیان کنیم .

مثال ۱ - مخزنی دارای ۱۰۰ گالن* آب میباشد . درنتیجه اشتباهی ، بجای آنکه ۲۰۰ پوند** نمک دراین مخزن ریخته شود ۳۰۰ پوند نمک وارد مخزن شده است .

---

* هرگالن برابر ۳٫۷۸۵ لیتر میباشد .

** یک پوند ۰٫۴۵۳۵۹ کیلوگرم و ۲٫۲۰۴۶ پوند یک کیلوگرم است .

بمنظور رفع این اشتباه منفذی در سطح تحتانی مخزن طوری تعبیه گردیده است که بتواند درهردقیقه ۳ گالن آب نمک را تخلیه کند وضمناً در همان لحظه هردقیقه ۳ گالن آب خالص با تلمبه وارد مخزن کرده و محلول را با هم زدن یکنواخت نگاه میداریم .

زمان لازم برای آنکه محلول آب نمک مخزن دارای ۲۰۰ پوند نمک باشد بیابید .

حل - روش معمول برای حل این نوع مسائل آن است که تعداد پوندهای نمک موجود در محلول در لحظه t را به x نمایش داده وسپس معادله یی تشکیل میدهیم که در فاصله زمان کوچک و غیر مشخص Δt تغییرات تقریبی x را تعیین کند .

در این مسئله بنابفرض درهردقیقه ۳ گالن آب نمک از مخزن خارج میشود و لذا مقدار آب نمکی که در لحظه Δt از مخزن خارج میشود برابر $۳\Delta t$ خواهد بود .

از طرف دیگرچون محلول را خوب مخلوط کرده‌ایم و x تعداد پوندهای نمک موجود درمحلول درلحظه t میباشد لذا غلظت محلول برای هرگالن برابر $\frac{x}{۱۰۰}$ پوندبوده وازآنجا مقدار نمکی که از مخزن خارج میشود تقریباً برابر $x\frac{۳\Delta t}{۱۰۰}$ (مثلاً اگر در لحظه t مقدار نمک موجود در ۱۰۰ گالن محلول آب نمک ۲۵۰ پوند باشد مقدار نمکی که در لحظه بسیار کوچک Δt از مخزن خارج میشود تقریباً برابر ۲۵۰ $\frac{۳\Delta t}{۱۰۰}$ میباشد) .

بنابراین اگر Δx فقدان تقریبی نمک را در لحظه Δt نمایش دهد دراینصورت خواهیم داشت:

$$\Delta x \# \frac{-۳\Delta t}{۱۰۰} \quad , \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \# \frac{-۳}{۱۰۰}x$$

(مفهوم سمبول # «تقریباً مساوی با» است) .

از آنجایی که مقدار x با گذشت زمان کاهش مییابد لذا مقدار Δx منفی بوده و چون نمکی وارد محلول نمیشود لذا این مسئله منجر به معادله دیفرانسیل زیر خواهد شد :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{-۳x}{۱۰۰} \quad , \quad \frac{dx}{x}=۰٫۰۳dt$$

و ازآنجا :

$$\text{(II)} \qquad Log x=-۰٫۰۳t+c' \quad , \quad x=ce^{-۰٫۰۳t}$$

اگر درمعادله (II) مقدار c را با شرایط اولیه $(t=o \ , \ x=۳۰۰)$ یافته وسپس آنرا در معادله (II) قرار دهیم معادله اخیر را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x=۳۰۰e^{-۰ر۰۲t} \qquad \text{(III)}$$

معادله (III) مقدار نمک موجود در محلول را برحسب تابعی از t بیان میکند .

اگر در معادله (III) مقدار $x=۲۰۰$ اختیارگردد خواهیم داشت :

$$\frac{۲}{۳}=e^{-۰ر۰۲t} \quad , \quad Log\frac{۳}{۲}=۰ر۰۲t$$

و از آنجا : $t=۱۳ر۵$ دقیقه

بعبارت دیگر ۱۳ر۵ دقیقه طول میکشد تا مقدار نمک موجود دراین محلول از ۳۰۰ پوند به ۲۰۰ پوند کاهش یابد .

تبصره - روش کوتاهتر و مناسبتر برای حل مسئله بالا آن‌است که انتگرال معادله دوم رابطه (I) را بین مقادیر شرایط اولیه $(t=0 \; , \; x=۳۰۰)$ و شرایط نهایی $(t=t \; , \; x=۲۰۰)$ محاسبه کنیم یعنی :

$$\int_{x=۳۰۰}^{۲۰۰}\frac{dx}{x}=-۰ر۰۲\int_{t=0}^{t}dt$$

و یا : $Log\frac{۲}{۳}=-۰ر۰۲t \quad , \quad Log\frac{۳}{۲}=۰ر۰۲t$

مثال ۲- مخزن ۱۰۰ گالنی با محلول آب نمک که ۶۰ پوند نمک محلول دارد پر شده است. درهردقیقه دوگالن آب وارد مخزن کرده و محلول را که باهم‌زدن یکنواخت نگاه میداریم از مخزن با همان نرخ (۲ گالن در دقیقه) خارج میکنیم. مقدار نمک موجود در مخزن را پس‌از یک ساعت تعیین کنید .

حل - فرض‌میکنیم x تعداد پوندهای‌نمک موجود درمحلول در هرلحظه t باشد . بنابفرض درهردقیقه دوگالن آب نمک ازمخزن خارج میگردد و لذا درلحظه Δt مقدارآب نمکی که‌ازمخزن‌خارج میشود برابر $۲\Delta t$ خواهد بود. ازطرف‌دیگر غلظت‌هرگالن‌محلول برابر $\frac{x}{۱۰۰}$ بوده و بنابفرض درلحظه Δt مقدار $۲\Delta t$ گالن آب نمک که تقریباً شامل $۲\Delta t \cdot \frac{x}{۱۰۰}$ پوند نمک خالص است از مخزن خارج میشود . بنابراین در زمان Δt تغییر تقریبی مقدار نمک محلول با رابطه :

(I) $$\Delta x \# -\frac{x}{۵۰}\Delta t$$

و یا معادله دیفرانسیل : (II) $$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{۵۰}$$

مشخص میگردد . معادله(II) دارای جواب عمومی $x=ce^{-\frac{t}{۵۰}}$ که مقدار نمک موجود در محلول درلحظه t را نمایش میدهد خواهد بود . از طرف دیگر چون بنابفرض در زمان $t=0$ مقدار $x=۶۰$ است لذا $c=۶۰$ میباشد . بالاخره اگر در رابطه $x=ce^{-\frac{t}{۵۰}}$ مقادیر $c=۶۰$ و $t=۶۰$ را قرار دهیم به ترتیب خواهیم داشت :

$$x=۶۰e^{-\frac{۶}{۵}}=۶۰(۰٫۳۰۱)=۱۸ \text{ پوند}$$

یعنی پس از یک ساعت مقدار نمک موجود دراین محلول ۱۸ پوند خواهد بود .

مثال ۳- مخزنی با ۱۰۰ گالن آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن ۳ پوند میباشد پر شده است . در هردقیقه ۳ گالن آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن ۲ پوند است وارد مخزن میشود و درهمان لحظه درهردقیقه ۳ گالن آب نمک مخلوط خارج میگردد چنانچه مخلوط را باهم‌زدن یکنواخت نگاه داریم مقدار نمک موجود دراین محلول را برحسب تابعی از t بیان کنید .

حل - مانند معمول تعداد پوندهای نمک موجود در محلول درلحظه t را به x نمایش میدهیم . بنابفرض درهردقیقه ۶ پوند نمک وارد و ۳ گالن آب نمک از آن خارج میگردد . لذا در لحظه Δt مقدار $۶\Delta t$ پوند نمک وارد و تقریباً $\frac{x}{۱۰۰}(۳\Delta t)$ پوند نمک از محلول خارج میگردد . بنابراین اگر Δx تغییر تقریبی در مقدار نمک موجود در محلول باشد چنین داریم :

(I) $$\Delta x \# ۶\Delta t-\frac{x}{۱۰۰}۳\Delta t \quad , \quad \frac{\Delta x}{\Delta t}\#۶-۰٫۰۳x$$

و ازآنجا معادله دیفرانسیل زیر بدست میآید :

(II) $$\frac{dx}{۶-۰٫۰۳x}=dt$$

پس‌از انتگرال گیری از رابطه (II) و بااستفاده از تبصره بالا خواهیم داشت :

$$\int_{x=۳۰۰}^{x} \frac{dx}{۰٫۰۳x-۶}=\int_{t=0}^{t} -dt$$

و از آنجا : $$x=۱۰۰(۲+e^{-۰٫۰۳t})$$

مثال ٤- مثال ۳ را با تغییرات زیر حل کنید .

۱- درهردقیقه ۳ گالن آب خالص بجای آب نمک وارد مخزن میکنیم .

۲- درهردقیقه ٥ گالن آب نمک مخلوط را از مخزن خارج میکنیم .

حل - ازآنجایی که بنابفرض درهردقیقه ۳ گالن‌آب وارد و ٥ گالن آب نمک از مخزن خارج میشود لذا در پایان t دقیقه مقدار آب نمک موجود در مخزن $(۱۰۰-۲t)$ گالن خواهد بود . اگر x تعداد پوندهای نمک موجود در محلول درلحظه t باشد تغییر تقریبی درمقدار نمک محلول درفاصله زمانی کوچک $\triangle t$ برابر :

$$\triangle x \# -\frac{x}{۱۰۰-۲t}(٥\triangle t) \quad , \quad \frac{\triangle x}{\triangle t} \# -\frac{٥x}{۱۰۰-۲t}$$

خواهد بود .

وازآنجا معادله دیفرانسیل زیر بدست میآید :

$$(I) \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{-٥x}{۱۰۰-۲t} \quad , \quad \frac{dx}{٥x}=\frac{-dt}{۱۰۰-۲t} \quad , \quad 0 \leqslant t < ٥۰$$

چنانچه‌ازمعادله(I) انتگرال گرفته‌وشرط اولیه $(t=0 , x=۳۰۰)$ راحدود تحتانی انتگرالها فرض کنیم خواهیم‌داشت :

$$\frac{۱}{٥}\int_{x=۳۰۰}^{x} \frac{dx}{x}=\int_{t=0}^{t} \frac{-dt}{۱۰۰-۲t}$$

$$x=\frac{۳}{۱۰۰۰}(۱۰۰-۲t)^{\frac{٥}{۲}}$$

مثال ٥- اطاقی به ابعاد $۱۲ \times ٥۰ \times ۱٥۰=۹۰۰۰۰$ فوت* مکعب دارای

---

* یک فوت برابر ۱۲ اینچ و هراینچ برابر ٤ ٥ر۲ سانتیمتر است بنابراین یک فوت برابر ٤٨ر۳۰ سانتیمتر میباشد .

دودهم درصد گاز انیدرید کربنیک میباشد . هوای تازه که دارای پنج صدم درصد گاز انیدرید کربنیک است با نرخ ۹۰۰۰ فوت مکعب در دقیقه وارد اطاق میشود . درصد گاز انیدرید کربنیک را در اطاق پس‌از بیست دقیقه بدست آورید .

حل - اگر در زمان t «تعداد فوت مکعب» گاز انیدرید کربنیک در اطاق را به x نمایش دهیم غلظت گاز انیدرید کربنیک واقع در اطاق برابر $\frac{x}{۹۰۰۰۰}$ است .

در زمان بینهایت کوچک dt مقدار $CO_۲$ که وارد اطاق میشود برابر $۹۰۰۰(۰٫۰۰۰۵)dt$ فوت مکعب و مقدار گاز انیدرید کربنیکی که از اطاق خارج میشود برابر $۹۰۰۰\frac{xdt}{۹۰۰۰۰}$ فوت مکعب است و بنابراین تغییر در مقدار $CO_۲$ در این فاصله بینهایت کوچک زمانی برابر :

$$dx=۹۰۰۰\left(۰٫۰۰۰۵-\frac{x}{۹۰۰۰۰}\right)dt=-\frac{x-۴۵}{۱۰}dt$$

است .

اگر از رابطه بالا انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$۱۰Log(x-۴۵)=-t+Logc_۱ \quad ; \quad x=۴۵+ce^{-\frac{t}{۱۰}}$$

در زمان $t=o$ مقدار گاز انیدرید کربنیک اطاق برابر $x=۰٫۰۰۲(۹۰۰۰۰)=۱۸۰$ بوده و از آنجا : $c=۱۸۰-۴۵=۱۳۵$

لذا : $$x=۴۵+۱۳۵e^{-\frac{t}{۱۰}}$$

معادله بالا مقدار گاز انیدرید کربنیک را برحسب تابعی از t مشخص میکند . اگر در این معادله $t=۲۰$ اختیار گردد خواهیم داشت :

$$x=۴۵+۱۳۵e^{-۲}=۶۳$$

ولذا درصد گاز انیدرید کربنیک در اطاق پس‌از بیست دقیقه برابر $\frac{۶۳}{۹۰۰۰۰}=۰٫۰۰۰۷$ یعنی هفت صدم درصد خواهد بود .

مسائل

در مسائل زیر فرض شده است که محلول را با هم زدن یکنواخت نگاه میداریم.

۱- مخزنی با ۱۰۰ گالن آب نمک که در آن ۳۰ پوند نمک محلول گردیده پرشده است. درهردقیقه ۳ گالن آب خالص وارد مخزن گردیده و محلول آب نمک با همان نرخ (۳ گالن در دقیقه) از مخزن خارج میگردد. مطلوب است تعیین:

الف- مقدار نمک موجود در مخزن پس‌از ۱۰ دقیقه.

ب- چه مدت طول میکشد تا مقدار نمک ۱٥ پوند گردد.

۲- اگر در مسئله یک بجای ۳ گالن آب خالص ۲ گالن آب وارد مخزن گردد و بقیه شرایط مسئله تغییر نکند دراینحالت مسئله راحل کنید.

۳- اگر در مسئله یک بجای ۳ گالن آب خالص ٤ گالن آب وارد مخزن گردد و بقیه شرایط مسئله تغییر نکند دراینحالت مسئله را حل کنید.

٤- مخزنی شامل ۱۰۰ گالن آب‌نمک‌میباشد که از تجزیه ٦۰ پوند نمک درآب‌حاصل گردیده است. درهردقیقه ۲ گالن آب نمک که دارای ۲ پوند نمک است وارد مخزن نموده و محلول آب نمک را با نرخ ۳ گالن در دقیقه از مخزن خارج میکنیم، مقدار نمک موجود در مخزن را پس‌از یک ساعت تعیین کنید.

٥- مخزنی با ۲۰۰ گالن آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن ۳ پوند میباشد پر شده است. درهردقیقه ٤ گالن‌آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن ۲ پوند است وارد مخزن میشود و در همان لحظه درهردقیقه ٤ گالن آب نمک مخلوط خارج میگردد. مطلوب است تعیین:

الف- مقدار نمک موجود در مخزن پس‌از ۲۰ دقیقه.

ب- درچه‌زمانی غلظت نمک موجود در محلول به ۲ر۵ پوند برای هرگالن تقلیل میابد.

٦- مخزن ۱۰۰ گالنی با محلول آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن $\frac{1}{2}$ پوند میباشد پر شده است. درهردقیقه ۳ گالن آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن ۲ پوند است وارد مخزن میگردد و در همان لحظه درهردقیقه ۲ گالن آب نمک مخلوط خارج میشود.

مقدار نمک موجود در مخزن و غلظت آنرا پس‌از ٣٠ دقیقه بدست آورید .

راهنمایی ـ پس‌از ٣٠ دقیقه مخزن محتوی ١٣٠ گالن آب نمک خواهد بود .

٧ـ مخزنی با ١٠٠ گالن آب نمک که غلظت نمک‌آن‌برای هرگالن ٠ر٦ پوند میباشد پرشده است . درهردقیقه ٢ گالن آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن یک پوند است وارد مخزن میگردد و درهردقیقه ٣ گالن آب نمک مخلوط خارج میشود .

مقدار نمک موجود در مخزن و غلظت آنرا پس‌از ٦٠ دقیقه بدست آورید .

راهنمایی ـ پس‌از ٦٠ دقیقه مخزن محتوی ٤٠ گالن آب نمک است .

٨ـ مخزنی دارای ٢٠٠ گالن آب میباشد . درهردقیقه ٢ گالن محلول آب نمک که غلظت‌نمک‌آن برای هرگالن ٢ پوند است وارد مخزن شده و باهمان نرخ (٢ گالن‌دردقیقه) آب نمک مخلوط خارج میشود .

الف ـ نمک موجود در محلول را پس‌از ١٠٠ دقیقه بدست آورید .

ب ـ درچه زمانی غلظت نمک موجود در محلول به یک پوند درگالن میرسد .

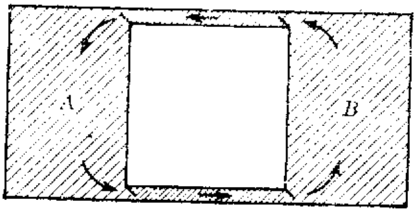
پ ـ آیا میتواند نمک موجود در محلول برابر ٤٠٠ پوند گردد ؟

٩ـ مخزنی محتوی ١٠٠ گالن آب خالص است . درهردقیقه ٢ گالن آب نمک که غلظت نمک آن برای هرگالن یک پوند است وارد مخزن میگردد و بانرخ یک گالن در دقیقه آب نمک مخلوط خارج میشود .

مقدار نمک موجود در مخزن و غلظت آنرا پس‌از ٦٠ دقیقه بدست آورید .

١٠ـ مخزنی دارای ٢٠٠ گالن آب میباشد. درهردقیقه ٢ گالن آب نمک که غلظت نمک آن نامعین‌است‌وارد مخزن میگردد و با همان نرخ (٢ گالن‌در دقیقه) آب نمک مخلوط خارج میشود. اگر پس‌از ١٢٠ دقیقه مقدار نمک موجود در مخزن ٣٨٠ پوند باشد غلظت نمک محلولی که وارد مخزن میشود بدست آورید .

١١ـ دو مخزن A و B هریک محتوی ٥٠٠ گالن آب هستند. بهریک از مخازن فوق باید ١٥٠ گالن از ماده شیمیایی معینی اضافه‌نمود. ولی درنتیجه اشتباهی ٣٠٠ گالن این ماده را در مخزن A وارد نموده‌اند . تلمبه هایی‌نصب شده است که محلولرا از دو مخزن با نرخ ١٠٠ گالن در دقیقه بجریان میاندازد (شکل ١٤ . ٣) .



شکل ١٤ . ٣

الف - چه مدت طول میکشد تا مخزن A ، ۲۰۰ گالن و مخزن B ، ۱۰۰ گالن از ماده شیمیایی فوق را دربرداشته باشند .

ب - آیا از نقطه‌نظر تئوری ممکن است که هریک از دو مخزن فوق محتوی ۱۵ گالن ماده شیمیایی باشند .

۱۲- مخزنی شامل ۱۰۰ گالن آب نمک که از تجزیه ۸۰ پوند نمک در آب حاصل شده است میباشد . در هردقیقه ۴ گالن آب خالص وارد مخزن کرده و مخلوط را با همان نرخ (۴ گالن در دقیقه) وارد مخزن دیگری که در ابتدا شامل ۱۰۰ گالن آب خالص بوده مینماییم . مخلوط را با نرخ ۴ گالن درهردقیقه از مخزن دوم خارج میکنیم . مقدار نمک موجود در مخزن دوم را پس‌از یک ساعت بدست آورید .

۱۳- اطاقی که حجم آن ۵۰۰۰ فوت مکعب است دارای سه دهم درصد گاز انیدرید کربنیک میباشد . هوای تازه که دارای یکدهم درصد گاز انیدرید کربنیک است با نرخ ۱۰۰۰ فوت مکعب در دقیقه وارد اطاق میگردد .

الف - درصد گاز انیدرید کربنیک را در اطاق پس‌از ۳۰ دقیقه بدست آورید .

ب - درچه زمانی اطاق محتوی دو دهم درصد گاز انیدرید کربنیک خواهد شد .

۱۴- اطاقی که حجم آن ۷۲۰۰ فوت مکعب است دارای دو دهم درصد گاز انیدرید کربنیک میباشد . تعیین کنید در هردقیقه چه مقدار هوای تازه که محتوی پنج صدم درصد گاز انیدرید کربنیک است باید وارد اطاق کرد تا پس‌از ۱۵ دقیقه درصد گاز انیدرید کربنیک اطاق به یکدهم درصد کاهش یابد .

جوابها

۱- الف : $x=۳۰e^{-۰٫۳}=۲۲٫۲$ پوند .

ب : $e^{-۰٫۰۳t}=\frac{۱}{۲}$, $t=۲۳٫۱$ دقیقه.

۲- الف : $x=۳۰(۱-۰٫۰۱t)^{۳}=۳۰(۰٫۹)^{۳}=۲۱٫۸۷$ پوند .

ب : $t=۲۰٫۶$ دقیقه .

۳- الف : $x=۳۰e^{-۰٫۲۸۶}=۲۲٫۵$ پوند .

ب : $t=۲۶٫۰$ دقیقه .

٤- $x=-\frac{٤٠}{١٠٠^{٣}}(١٠٠-t)^{٣}+(١٠٠-t)=٣٧٫٤$ پوند .

٥- الف : $x=٢٠٠(٢+e^{-٠٫٤})=٥٣٤٫١$ پوند .

ب : $t=٥٠ Log٢=٣٤٫٧$ دقیقه .

٦- ١٧١ پوند , ١٫٣٢ پوند برای هرگالن .

٧- ٣٧٫٤ پوند , ٠٫٩٤ پوند برای هرگالن .

٨- الف : ٢٥٢٫٨ پوند . ب : ٦٩٫٣ دقیقه .

پ : هنگامیکه زمان بسوی بینهایت میل میکند نمک محتوی درمخزن بسوی ٤٠٠ پوند میل خواهد نمود .

٩- ٩٨ پوند , ٠٫٦١ پوند برای هرگالن .

١٠- ٢ پوند برای هرگالن .

١١- الف : ٢٧٫٥ دقیقه . ب : خیر , درصورتی مخزن B محتوی ١٥٠ گالن ماده شیمیایی خواهد بود که t بسوی بینهایت میل کند .

١٢- برای مخزن دوم $\frac{dx}{dt}=٤\left(\frac{٤}{٥}e^{-٠٫٠٤t}-\frac{٤x}{١٠٠}\right)$ و جواب مورد نظر عبارت است از ١٧٫٤ پوند .

١٣- الف : ٠٫١٠ درصد . ب : ٣٫٤٧ دقیقه .

١٤- ٥٢٧ فوت مکعب در دقیقه .

٢٢ . ٣- مسائل مرابحه

مبلغ A ریال را با بهره سالانه ٦ درصد سرمایه گزاری میکنیم . مقدار P یعنی مجموع سرمایه و بهره در پایان یک سال عبارت خواهد بود از :

اگر بهره سالانه محاسبه شود $P=A(١+٠٫٠٦)$

اگر بهره شش ماهه محاسبه شود $P=A\left(١+\frac{٠٫٠٦}{٢}\right)^{٢}$

اگر بهره سه ماهه محاسبه شود

$$P=A\left(۱+\frac{۰ر۰۶}{۴}\right)^{۴}$$

اگر بهره ماهانه محاسبه شود

$$P=A\left(۱+\frac{۰ر۰۶}{۱۲}\right)^{۱۲}$$

بطورکلی اگر بهره r درصد درسال بوده و این بهره m بار در سال محاسبه گردد مقدار P با رابطه زیر مشخص میشود :

$$P=A\left(۱+\frac{r}{m}\right)^{m} \tag{I}$$

لذا در انتهای سال n ام مقدار P عبارت خواهد بود از :

$$P=A\left[\left(۱+\frac{r}{m}\right)^{m}\right]^{n} \tag{II}$$

حال اگر m یعنی تعداد دفعاتی که بهره بهسرمایه در یک سال اضافه میشود بدون حد افزایش یابد خواهیم داشت :

$$P=\lim_{m\to\infty} A\left[\left(۱+\frac{r}{m}\right)^{m}\right]^{n}=\lim_{m\to\infty} A\left[\left(۱+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{nr}$$
$$=Ae^{nr}$$

بنابراین اگر A ریال را بطور پیوسته و با بهره سالانه r درصد بمرابحه مرکب بگذاریم خواهیم داشت :

$$P=Ae^{rt} \tag{III}$$

و از آنجا معادله دیفرانسیل طایفه منحنی‌های یک پارامتری (III) بصورت :

$$\frac{dP}{dt}=rP \tag{IV}$$

است .

مثال ۱ - مطلوب است تعیین مدت لازم برای‌آنکه مبلغ یک ریال که با بهره سالانه ۴ درصد بطور پیوسته به مرابحه مرکب گذارده میشود دو برابر گردد .

حل - معادله (IV) با انتخاب $r=۰ر۰۴$ بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dP}{dt}=\text{۰ر۰٤}P \quad \text{و یا} \quad \frac{dP}{P}=\text{۰ر۰٤}dt$$

اگر از این معادله انتگرال گرفته وحدود تحتانی و فوقانی انتگرال را به ترتیب مقادیر اولیه و نهائی فرض کنیم خواهیم داشت :

$$\int_{P=\text{۱}}^{\text{۲}} \frac{dP}{P}=\text{۰ر۰٤}\int_{t=o}^{t} dt \quad , \quad Log\text{۲}=\text{۰ر۰٤}t$$

و ازآنجا مقدار t تقریباً برابر $\text{۱۷}\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ سال میباشد .

تبصره ۱- این مسئله را نیز میتوان با بکار بردن رابطه (III) و قرار دادن :

$$P=\text{۲} \ , \ A=\text{۱} \ , \ r=\text{۰ر۰٤}$$

حل کنیم .

تبصره ۲- اگرمبلغ یک ریال رابا بهره سالانه ٤ درصد که هرشش ماه قابل تبدیل است بمرابحه مرکب بگذاریم پس از $\text{۱۷}\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ سال این مبلغ دو برابر میگردد . از طرف دیگر همانطورکه در مسئله بالا دیدیم اگر این مبلغ رابطورپیوسته و باهمان نرخ بمرابحه مرکب بگذاریم این مبلغ پس از $\text{۱۷}\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ سال دوبرابر میگردد ولذا آنطورکه ممکن است انتظار داشته باشیم خاصیت مرابحه مرکب پیوسته چندان مؤثر نیست .

مثال ۲- اگر به تمام حسابهای جاری شخصی در بانک سالانه ۵ درصد بهره تعلق گیرد ، تعیین کنید اکنون این شخص چه میزان سرمایه باید بحساب جاری خود اختصاص دهد تا بتواند سالانه مجموعاً ۳٦۰۰ ریال از این حساب بیکی از طرق زیر بمدت ۲۰ سال بقسمی برداشت کند که در انقضای این مدت از تمام وجوهیکه بدین ترتیب بحساب او واریز شده است استفاده نماید .

الف - از تاریخ ودیعه پول بطور پیوسته (مثلاً روزانه $\frac{\text{۳٦۰۰}}{\text{۳٦٥}}$ ریال) از این حساب پول برداشت نماید .

ب - اگر ماهانه ۳۰۰ ریال از این حساب برداشت شود . اولین برداشت یکماه پس از ودیعه پول انجام میگیرد .

ج ـ بهره‌یی که به سرمایه شخص تعلق میگیرد هرسه ماه بحساب او منظور گردیده و ضمناً در پایان هرسه ماه ٩٠٠ ریال ازاین حساب برداشت میگردد (در محاسبات بانکی روش اخیر مرسوم‌تر از دو روش بالا میباشد) .

حل :

الف ـ اگر P پولی باشد که اکنون باید شخص بحساب جاری خود منظور کند در لحظه بسیار کوچک dt بنابر رابطه (IV) اصل و بهره این مبلغ برابر $(rP)dt$ خواهد بود و چون بنابفرض سالانه مجموعاً ٣٦٠٠ ریال از این حساب برداشته میشود لذا در لحظه dt مقدار $(٣٦٠٠)dt$ ریال برداشت گردیده وتغییرات P دراین لحظه با معادله دیفرانسیل زیر تعیین میگردد :

$$dP = (rP)dt - ٣٦٠٠dt$$

و یا :

$$\frac{dP}{٠ر٠٥P - ٣٦٠٠} = dt$$

اگراز معادله دیفرانسیل بالا انتگرال گرفته و حدود تحتانی و فوقانی انتگرال را به ترتیب برابر شرایط اولیه $(t=o \ , \ P=P)$ و شرایط نهایی $(t=٢٠ \ , \ P=o)$ اختیار کنیم خواهیم داشت :

$$\int_{P}^{o} \frac{-dP}{٣٦٠٠ - ٠ر٠٥P} = \int_{t=o}^{t=٢٠} dt$$

و یا :

$$٢٠\Big[Log(٣٦٠٠ - ٠ر٠٥P) \Big]_{P}^{o} = ٢٠ \quad , \quad \frac{٣٦٠٠}{٣٦٠٠ - ٠ر٠٥P} = e$$

و از آنجا :

$$P = \frac{٣٦٠٠(e-١)}{٠ر٠٥e} = ٧٢٠٠٠(١ - e^{-١}) = ٤٥٥١٣ \text{ ریال}$$

ب ـ اگر A سرمایه شخص در ابتدای ماه باشد بنابرابطه (III) اصل و بهره این مبلغ در پایان ماه برابر $Ae^{\frac{٠ر٠٥}{١٢}}$ بوده و از آنجا مقدار پولی که در پایان ماه اول درحساب شخص مانده است برابر $Ae^{\frac{٠ر٠٥}{١٢}} - ٣٠٠$ خواهد بود .

بسهولت معلوم میشود که موجودی حساب در پایان ماه دوم برابر :

$$(Ae^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰)e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰=Ae^{۲\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰$$

است و همچنین موجودی در پایان ماه سوم برابر :

$$(Ae^{۲\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰)e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰=Ae^{۳\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{۲\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}$$
$$-۳۰۰e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰$$

میباشد و الی آخر .

بطریق مشابه میتوان نشان داد که موجودی در پایان ماه n ام برابر :

$$Ae^{n\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{(n-۱)\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{(n-۲)\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-\cdots-۳۰۰e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰$$

است .

از طرف دیگر چون بنابفرض در پایان سال بیستم یعنی در ماه ۲۴۰ ام پولی درحساب نخواهد بود لذا :

$$Ae^{۲۴۰\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{۲۳۹\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰e^{۲۳۸\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-\cdots-۳۰۰e^{۲\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}$$
$$-۳۰۰e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}-۳۰۰=o$$

و از آنجا :

$$Ae=۳۰۰\left[۱+e^{\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}+e^{۲\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}+\cdots+e^{۲۳۹\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}\right]=۳۰۰\left[\frac{۱-e^{۲۴۰\times\frac{۰٫۰۵}{۱۲}}}{۱-e^{-۰٫۰۵}}\right]$$

$$A=۳۰۰\left(\frac{۱-e}{e-e^{\frac{۱۲٫۰۵}{۱۲}}}\right)=۴۵٫۴۱۸ \text{ ریال}$$

ج ـ اگر A مقدار پولی باشد که اکنون باید بحساب جاری گذارده شود موجودی حساب در پایان سه ماهه اول برابر $A\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)-۹۰۰$ ریال میباشد . بهمین ترتیب موجودی در پایان سه ماهه دوم برابر :

$$\left[A\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)-۹۰۰\right]\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)-۹۰۰$$
$$=A\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)^{۲}-۹۰۰\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)-۹۰۰$$

است و الی‌آخر .

بطریق مشابه میتوان نشان داد که موجودی در پایان سه ماهه n ام برابر :

$$A\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)^{n}-۹۰۰\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)^{n-۱}$$
$$-\cdots-۹۰۰\left(۱+\frac{۰٫۰۵}{۴}\right)-۹۰۰$$

میباشد. از طرف دیگر چون بنا بفرض در پایان سه ماهه هشتادم پولی در حساب نخواهد بود لذا :

$$A(۱٫۰۱۲۵)^{۸۰}=۹۰۰[۱+(۱٫۰۱۲۵)+(۱٫۰۱۲۵)^{۲}+\cdots+(۱٫۰۱۲۵)^{۷۹}]$$
$$=۹۰۰\,\frac{۱-(۱٫۰۱۲۵)^{۸۰}}{۱-۱٫۰۱۲۵}=۹۰۰\,\frac{(۱٫۰۱۲۵)^{۸۰}-۱}{۰٫۰۱۲۵}$$
$$A=\frac{۱-(۱٫۰۱۲۵)^{-۸۰}}{۰٫۰۱۲۵}=۴۵۳۴۸ \quad \text{ریال}$$

مسائل

در هریک از مسائل زیر در مواردی که ذکر نگردیده فرض شده است که بهره بطور پیوسته بسرمایه اضافه میگردد .

۱- با بهره ۵ درصد در سال تعیین کنید پس از چند سال هزار ریال دو برابر میگردد .

۲- تعیین کنید با چه بهره‌یی مبلغ یکهزار ریال پس از ۱۲ سال دو برابر میشود .

۳- اصل و بهره ۱۰۰۰ ریال را با بهره $۴\frac{۱}{۲}$ درصد در سال پس از ۱۰ سال بدست آورید .

۴- شخصی وصیت نمود دارایی او را که متجاوز از ۲۰ میلیون ریال است بین چند مؤسسه عام‌المنفعه تقسیم نمایند. ولی قبل از توزیع پول بین مؤسسات ذینفع باید ما ترک او را بمدت

۵۰۰ سال در مؤسسات پس‌انداز ودیعه نهند. چون طبعاً ثروت ملت دراین نوع مؤسسات متمرکز خواهد شد لذا دولت این وصیت نامه را مورد اعتراض قرار داد. تعیین کنید ۱۰۰۰۰۰۰ ریال در مدت ۵۰۰ سال تقریباً بالغ برچه مقدار میگردد.

٥- فرض میکنیم شخصی بخواهد پس‌از ۳۰ سال بازنشسته شود. در پایان این مدت بنابر قسمت (ب) مثال دوم تقریباً ٤٥٠٠٠ ریال مورد نیاز خواهد بود تا بتوانیم پس‌از بازنشستگی بمدت بیست سال ماهانه ۳۰۰ ریال دریافت داریم.

الف - تعیین کنید با نرخ پنج درصد چه مبلغی باید ماهانه بپردازیم.

راهنمایی - اگر A مبلغی باشد که در پایان هرماه باید پرداخت گردد در پایان ماه اول $P=A$ و در پایان ماه دوم $P=Ae^{\frac{٠ر٠٥}{١٢}}+A$ میباشد.

ب - تعیین کنید هرششماه چه مبلغ باید پرداخت شود درصورتیکه بهره با نرخ پنج‌درصد هرششماه تبدیل گردد.

تبصره - این مسئله منجر به معادله دیفرانسیل نخواهد شد.

جوابها

۱- ١٣ر٨٦ سال (اگر بهره ٥ درصد و قابل تبدیل ششماهه باشد یک ریال پس‌از ١٤ سال دو برابر خواهد شد).

۲- تقریباً ٥ر٧٨ درصد.

۳- ١٠٦٨ر٣١.

٤- ٤٨٥١٦٥١٩٥٤٠٠٠٠٠٠.

٥- الف: $٤٥ر٥٠٠=A\left[\frac{١-e^{١ر٥}}{١-e^{\frac{٠ر٠٥}{١٢}}}\right]$ ریال‌وازآنجا تقریباً $A=٥٤ر٥٧$ ریال در ماه.

ب: $٤٥٥٠٠=A\left[\frac{(١ر٠٢٥)^{٦٠}-١}{٠ر٠٢٥}\right]$ ریال و از آنجا تقریباً $A=٣٣٤ر٥٨$ ریال در هرششماه است.

۲۳ . ۳- مسائل درجه حرارت

بطور تجربی ثابت شده است در تحت شرایط معینی نرخ تغییرات درجه حرارت جسمی که در محیطی که درجه حرارت آن (ثابت فرض میشود) متفاوت‌ازدرجه حرارت‌جسم است فرو برده میشود متناسب با تفاضل درجه حرارت جسم و محیط خواهد بود .

بیان فوق را میتوان با سمبول ریاضی بصورت زیر نوشت :

$$\frac{dT_B}{dt} = -k(T_B - T_M) \tag{۳ . ۲۳}$$

که در آن $k > 0$ ثابت بوده و T_B درجه‌حرارت جسم درلحظه t و T_M درجه‌حرارت ثابت محیط میباشد. ازآنجایی که جواب عمومی معادله (۲۳ . ۳) بستگی به‌دو مقدار ثابت k و c (ثابت انتگرال گیری) دارد لذا برای یافتن این مقادیر لازم است که علاوه‌برشرایط اولیه درجه حرارت جسم را در زمان آینده‌یی نیز بدانیم .

مثال ۱- جسمی که درجه حرارت آن ۱۸۰ درجه* است درمایعی که درجه‌حرارت آنرا در ۶۰° ثابت نگاه داشته‌ایم فرو میبریم پس‌از یک‌دقیقه درجه حرارت جسم به ۱۲۰° کاهش مییابد . زمان لازم برای آنکه درجه حرارت جسم به ۹۰° برسد بدست آورید .

حل - فرض میکنیم T درجه‌حرارت‌جسم درلحظه t باشد دراینصورت معادله (۲۳ . ۳) با انتخاب $T_M = ۶۰$ بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - ۶۰) \tag{I}$$

نظر باینکه‌تابع T نزولی میباشد لذا علامت منفی را در رابطه (I) بکار برده‌ایم. حال‌اگر ازاین رابطه انتگرال گرفته و شرایط داده شده را حدود انتگرال قرار دهیم خواهیم داشت :

---

* در این فصل و فصول آتی درجه حرارت برحسب فارنهایت بیان میشود (مگر خلاف آن ذکر شود) و بین درجه‌های فارنهایت و سانتیگراد همواره رابطه زیر برقرار است :

$$C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$$

که در آن C درجه برحسب سانتیگراد و F درجه برحسب فارنهایت میباشد .

$$(II) \int_{T=۱۸۰}^{۱۲۰} \frac{dT}{T-۶۰} = -k\int_{t=0}^{۱} dt \quad , \quad \int_{T=۱۸۰}^{۹۰} \frac{dT}{T-۶۰} = -k\int_{t=0}^{t} dt$$

از انتگرال اولی چنین داریم :

$$Log ۰٫۵ = -k \quad , \quad k = Log ۲$$

و پس‌از تعیین مقدار ثابت k انتگرال دوم منجر به معادله زیر میگردد :

$$Log ۰٫۲۵ = -(Log ۲)t \quad , \quad t = \frac{Log ٤}{Log ۲} = \frac{۲ Log ۲}{Log ۲} = ۲$$

یعنی دو دقیقه طول خواهدکشید تا درجه حرارت جسم به ۹۰° برسد .

مثال ۲- گلوله‌آهنی‌بوزن ۵۰ پوند* که‌درجه‌حرارت‌آن ۲۰۰° است‌بلافاصله درظرفی که شامل ۱۰۰ پوند آب است فرو میبریم . درجه حرارت آب ظرف ٤۰° و گرمای ویژه آهن برابر ۰٫۱۱ میباشد مطلوب است :

۱- تعیین درجه حرارت جسم برحسب تابعی از t .

۲- اگر t → ∞ درجه‌حرارت مشترکی که جسم‌وآب‌به‌آن نزدیک میشوند بیابید .

حل - قبلاً گرمای ویژه ماده شیمیایی را تعریف میکنیم .

تعریف گرمای ویژه - یک واحد وزن ماده‌یی را درنظر میگیریم . اگر مقدار حرارتی که لازم است تا درجه‌حرارت‌این واحد وزن‌را یک درجه بالا برد به A نشان‌دهیم و B مقدار کالری‌لازم برای بالا بردن یک‌درجه حرارت همان‌واحد وزن آب باشد بنا به تعریف نسبت $\frac{A}{B}$ راگرمای ویژه این ماده‌گوییم .

مثال - درآزمایشی یک کالری حرارت لازم است تا درجه حرارت یک‌گرم آب را یک درجه سانتیگراد تغییر داد (یا بعبارت دیگر برای آنکه درجه حرارت یک پوند آب را یک درجه فارنهایت‌تغییردهیم یک واحد حرارتی انگلیسی لازم‌است) . حال‌اگر مثلاً برای آنکه درجه حرارت یک‌گرم ماده‌یی را یک درجه سانتیگراد تغییر دهیم $\frac{۱}{۱۰}$ کالری حرارت لازم باشد (و یا برای آنکه درجه حرارت یک پوند از این ماده را یک درجه فارنهایت

---

* پوند واحد وزن است و ۲٫۲۰٤۶ پوند برابر یک‌کیلوگرم میباشد .

تغییر دهیم $\frac{۱}{۱۰}$ واحد حرارتی لازم است) گرمای ویژه این ماده $\frac{۱}{۱۰}$ خواهد بود .

اکنون با استفاده از تعریف گرمای ویژه به حل مسئله اصلی میپردازیم .

اگر T_B درجه حرارت گلوله آهن در پایان زمان t باشد درجه حرارت گلوله پس از لحظه t عبارت از $۲۰۰-T_B$ خواهد بود و لذا مقدار گرمایی که گلوله آهن در لحظه t از دست میدهد برابر :

$$۵۰(۰٫۱۱)(۲۰۰-T_B) \qquad \text{(I)}$$

میباشد. بطریق مشابه و با درنظر گرفتن این مطلب که گرمای ویژه آب یک است مقدار گرمایی که آب میگردد برابر :

$$۱۰۰(۱)(T_W-۴۰) \qquad \text{(II)}$$

است. که در آن T_W درجه حرارت آب در پایان زمان t میباشد .

از طرف دیگر چون گرمایی که گلوله از دست میدهد همان مقدار گرما را آب میگیرد بنابراین روابط (I) و (II) با یکدیگر برابر بوده و لذا :

$$۵۰(۰٫۱۱)(۲۰۰-T_B)=۱۰۰(T_W-۴۰)$$

اگر معادله بالا را نسبت به T_W حل کرده و بجای T_M مقدارش را در رابطه قرار دهیم به ترتیب خواهیم داشت :

$$T_W=T_M=۵۱-۰٫۰۵۵T_B$$

$$\frac{dT_B}{dt}=-k(T_B-۵۱+۰٫۰۵۵T_B)=k(۵۱-۱٫۰۵۵T_B)$$

$$Log(۱٫۰۵۵T_B-۵۱)=-۱٫۰۵۵kt+c$$

با توجه بانکه درجه حرارت گلوله درابتدا $(t=o)$ برابر $۲۰۰°$ است $(T_B=۲۰۰°)$ لذا اگر این شرایط را در معادله بالا قرار دهیم $c=Log۱۶۰$ و از آنجا معادله مطلوب عبارت خواهد بود از :

$$T_B=\frac{۱}{۱٫۰۵۵}(۵۱+e^{-۱٫۰۵۵kt})$$

۲ـ اگر در معادله بالا $t \to \infty$ خواهیم داشت :

$$T_B=۴۸٫۳°F$$

مسائل

۱- جسمی که درجه حرارت آن ۱۰۰° است در محیطی که درجه حرارت آن ثابت و ۲۰° است قرار میدهیم . پس‌از ده دقیقه درجه حرارت جسم به ۶۰° کاهش مییابد .

الف - T درجه حرارت جسم را برحسب تابعی از زمان بدست آورید .

ب - درجه حرارت جسم را پس‌از ٤۰ دقیقه تعیین کنید .

پ - پس‌از چه مدت درجه حرارت جسم ۵۰° میگردد .

۲- تفاضل درجه حرارت جسم و محیطش که در آن قرار دارد ٤۰° است . پس‌از پنج دقیقه این تفاضل ۲۰° میگردد . اگر درجه محیط ثابت باشد مطلوب است تعیین :

الف - k در رابطه (۲۳ . ۳) .

ب - پس‌از چه مدت درجه حرارت جسم ۱۰° میگردد .

۳- جسمی که درجه حرارت آن ۲۰° است در محیطی که درجه حرارتش ثابت و ۶۰° است قرار میدهیم . پس‌از ۵ دقیقه درجه حرارت جسم ۳۰° میگردد .

الف - درجه حرارت جسم را پس‌از ۲۰ دقیقه تعیین کنید .

ب - پس‌از چه مدت درجه حرارت جسم ٤۰° میشود .

٤- گلوله‌آهن ۵۰ پوندی را تا ۲۰۰ درجه فارنهایت حرارت داده وسپس بلافاصله آنرا در ظرفی که محتوی ۱۰۰ پوند آب ٤۰ درجه فارنهایت است فرومیبریم . گرمای ویژه آهن برابر ۰٫۱۱ است .

الف - T درجه حرارت جسم را برحسب تابعی از زمان بدست آورید .

ب - اگر $t \to \infty$ حرارت مشتریکه جسم وآب بدان میل میکنند بدست‌آورید .

راهنمایی - اگر T_B درجه حرارت گلوله آهن در پایان لحظه t باشد مقدار حرارتی که گلوله آهن در لحظه t از دست میدهد برابر ۵۰(۰٫۱۱)(۲۰۰ — T_B) است .

اگر T_W درجه حرارت آب پس‌از زمان t باشد و درنظر داشته باشیم که گرمای ویژه آب برابر یک است مقدار حرارتی که آب بدست میاورد برابر ۱۰۰(۱)(T_W — ٤۰) میباشد .

ولی چون مقدار حرارتی که گلوله آهن از دست میدهد برابر مقدار حرارتی است که آب بدست میاورد لذا :

$$٥٠(٠ر١١)(٢٠٠-T_B)=١٠٠(١)(T_{W-٤٠})$$

معادله بالا را نسبت به T_W حل کرده و آنرا بجای T_M در رابطه (٢٢ . ٣) قرار داده و معادله حاصل را نسبت به T_B حل میکنیم .

٥ـ گرمای‌ویژه قلع برابر ٠ر٠٥ است. جسمی‌از قلع که وزن‌آن ١٠ پوند ودرجه حرارتش ١٠٠ درجه فارنهایت است درظرفی که محتوی ٥٠ پوند آب ١٠ درجه فارنهایت میباشد فرو میبریم .

الف ـ T درجه حزارت جسم را برحسب تابعی از زمان بدست آورید .

ب ـ اگر $t \to \infty$ درجه‌حرارت مشتریکه‌قلع و آب بدان میل میکنند بدست‌آورید .

٦ـ درجه حرات جسمی که وزن‌آن ١٠٠ پوند وگرمای ویژه‌آن برابر $\frac{١}{١٠}$ است ٢٠٠ درجه فارنهایت میباشد. این‌جسم را درظرفی که محتوی ٤٠ پوند از مایعی که گرمای ویژه آن برابر $\frac{١}{٢}$ و درجه حرارتش ٥٠ درجه فارنهایت است فرو میبریم .

الف ـ T درجه حرارت جسم را برحسب تابعی از زمان بدست آورید .

ب ـ جسم تا چه درجه حرارتی سرد خواهد شد .

جوابها

١ـ الف : $T=٢٠(+٤e^{-٠ر٠٦٩٣١t})$.

ب : ٢٥° . پ : ١٤ر٢ دقیقه .

٢ـ الف : $k=-\frac{١}{٢}Log(٠ر٥)=٠ر١٣٨٦$.

ب : $t=١٠$ دقیقه .

٣ـ الف : $٤٧ر٣^\circ$. ب : ١٢ دقیقه .

٤ـ الف : $T_B=\frac{١}{١ر٠٥٥}(٥١+١٦٠e^{-١ر٠٠٥kt})$.

ب : $٤٨ر٣^\circ$ فارنهایت .

٥ـ الف : $T=\frac{١}{١ر٠١}(١١+٩٠e^{-١ر٠١kt})$.

ب :   ۹°ر۱۰ فارنهایت .

۶- الف : $. T=۱۰۰(۱+۳^{\frac{-۳kt}{۲}})$

ب :   ۱۰۰° فارنهایت .

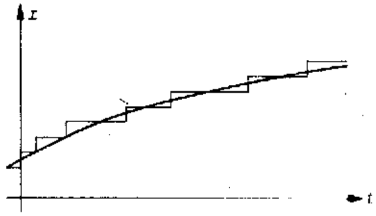
۲۴ . ۳- مسائل رشد و تجزیه

نرخ رشد هرجامعه‌یی (بشر - حیوان - باکتری و غیره) بستگی به محیط و تعداد عناصری که درلحظه معینی از زمان موجود میباشد دارد. مثلاً تعداد افرادی که میتوانند در یک منطقه زندگی نمایند بستگی به حداکثر مواد غذایی که میتوان از این منطقه تأمین نمود دارد . ولی اگر جامعه خیلی کوچک باشد محیط چندان مؤثر نیست (دراینصورت عرضه مواد غذایی نامحدود خواهد بود) . اگر x اندازه جامعه در لحظه t باشد ساده‌ترین قانونی که میتوان برای رشد جامعه فرض نمود عبارت است از :

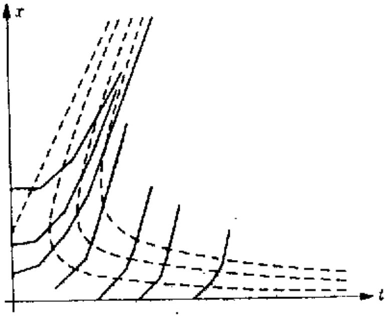
$$\frac{dx}{dt}=kx \quad (\text{k مقداری است ثابت}) \qquad (۳ . ۲۴)$$

ازآنجایی که x اندازه جامعه عدد درست میباشد انتخاب x بدون معنی‌است زیرا مقدار $\frac{dx}{dt}$ صفر و یا بینهایت میباشد (شکل ۱۵ . ۳) . ولی میتوان تابع ملایمی بقسمی انتخاب کرد که تقریباً برابر جامعه حقیقی بوده و برای آن معادله دیفرانسیل (۲۴ . ۳) صادق باشد.

اثر محیط را میتوان بروشهای متعدد درنظرگرفت. میتوان فرض نمود حداکثر مقدار قابل قبول x (مثلاً بواسطه اتمام عرضه مواد غذائی) x_0 باشد و معادله دیفرانسیل زیر را برای رشد این نوع جامعه‌ها فرض میکنیم :



شکل ۱۵ . ۳- رشد جامعه‌یی که با یک منحنی ملایم تقریب شده است



شکل ۱۶ . ۳- رشد جامعه در نتیجه بهبود محیط

$$\frac{dx}{dt}=kx(x_{\circ}-x) \quad , \quad x \leqslant x_{\circ} \qquad (۳ . ۲۴۱)$$

یکی از انواع مهم و جالب معادله (۲۴۱ . ۳) را میتوان با فرض نمودن آنکه در نتیجه بهبود تکنیک $x_{\circ}$ تابع صعودی از زمان t میباشد بدست آورد. مثلاً ممکن است فرض نمود که:

$$\frac{dx}{dt}=kx(at+b-x) \quad , \quad x < at+b \qquad (۳ . ۲۴۲)$$

a و b مقادیر ثابتی هستند. تجزیه جوابها بوسیله ایزوکلاینها منجر به شکل (۱۶ . ۳) خواهد گردید.

معادله بالا معادله برنولی بوده و تبدیل متغیر $y=\frac{۱}{x}$ آنرا مبدل به معادله خطی مینماید و لذا میتوان جوابها را بدست آورد.

بهرصورت مسائل این قسمت نیز شامل مقدار ثابت k بوده ولذا برای تعیین جواب باید شرایط اولیه در زمان یعنی t در دست باشد.

مثال ۱- اگر جمعیت کشوری درظرف ۵۰ سال دو برابر شود با فرض آنکه نرخ افزایش جمعیت در لحظه t متناسب با تعداد جمعیت در این لحظه میباشد تعیین کنید پس از چند سال جمعیت کشور ۳ برابر میگردد.

حل - اگر جمعیت کشور رادر زمان t به x ودر زمان $t=o$ به $x_{\circ}$ نمایش دهیم بنابفرض مسئله خواهیم داشت:

$$(I) \qquad \frac{dx}{dt}=kx \quad \text{و یا} \quad \frac{dx}{x}=kdt$$

راه اول

اگرمعادله دوم (I) رااین حدود $(t=o \; ; \; x=x_{\circ})$ و $(t=t \; ; \; x=x)$ انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$(II) \qquad x=x_{\circ}e^{kt}$$

ولی بنابفرض درزمان $t=۵۰$ مقدار $x=۲x_{\circ}$ است. اگر این مقادیر را درمعادله (II) قرار دهیم $e^{۵۰t}=۲$. بادرنظرگرفتن این رابطه و قرار دادن $x=۳x_{\circ}$ در رابطه (II) به ترتیب چنین داریم:

$$۳=e^{kt} \quad , \quad ۳^{۵۰}=e^{۵۰kt}=(e^{۵۰k})^{t}=۲^{t}$$

و یا : $t=\frac{۵۰Log۳}{Log۲}=۷۹$ سال

راه دوم

چنانچه ازرابطه دوم معادله (I) بین مقادیر $(t=o\ ;\ x=x_0)$ و $(t=۵۰\ ;\ x=۲x_0)$ انتگرال بگیریم چنین داریم :

$$\int_{x_0}^{۲x_0}\frac{dx}{x}=k\int_{o}^{۵۰}dt \quad \text{و یا} \quad Log\,\frac{۲x_0}{x_0}=۵۰k\ ,\ ۵۰k=Log۲$$

همچنین اگر ازرابطه (I) بین مقادیر $(t=o\ ;\ x=x_0)$ و $(t=t\ ;\ x=۳x_0)$ انتگرال گرفته و از رابطه بالا نیز استفاده کنیم چنین داریم :

$$\int_{x_0}^{۳x_0}dx=k\int_{o}^{t}dt \quad ,\quad Log۳=kt$$

و ازآنجا :

$$۵۰Log۳=۵\ kt=tLog۲ \quad \text{و یا} \quad t=\frac{۵۰Log۳}{Log۲}=۷۹ \ \text{سال}$$

مثال ۲ - نرخ افزایش باکتری موجود درکشت معینی متناسب با تعداد فعلی آن میباشد .

الف ـ اگرپس ازچهارساعت تعداد باکتری‌ها دو برابر گردد درپایان ۱۲ ساعت تعداد باکتریهای موجود چه خواهد بود .

ب ـ اگر پس از ۳ و ۵ ساعت تعداد باکتریهای به ترتیب $۱۰^٤$ و ٤×۱۰^٤ باشند تعداد این باکتریها را در ابتدا محاسبه کنید .

حل ـ چنانچه x تعداد باکتریهادر ساعت t باشد از فرض مسئله چنین برمیآید که :

$$\frac{dx}{dt}=kx \quad \text{و یا} \quad \frac{dx}{x}=kdt \qquad \text{(I)}$$

الف ـ راه اول ـ پس از انتگرال گیری از معادله (I) خواهیم داشت :

$$Log x=kt+Log c \quad \text{و یا} \quad x=ce^{kt} \qquad \text{(II)}$$

اگر در زمان $t=o$ تعداد باکتریها برابر $x_\circ$ باشد مقدار ثابت c برابر $x_\circ$ بوده واز آنجا جواب عمومی معادله دیفرانسیل (I) عبارت از $v=x_\circ e^{kt}$ میگردد. ولی بنابفرض پس‌از گذشت ٤ ساعت تعداد باکتریها دو برابر میشود یعنی بعبارت دیگر بازاء $t=٤$ مقدار $x=۲x_\circ$ است و بالنتیجه $e^{٤k}=۲$ وازآنجا برای یافتن تعداد باکتریهادر زمان $t=۱۲$ (باتوجه برابطه $e^{٤k}=۲$) چنین عمل میکنیم.

$$x=x_\circ e^{۱۲k}=x_\circ(e^{٤k})^{۳}=۸x_\circ$$

یعنی پس‌از گذشت ۱۲ ساعت تعداد باکتریها ۸ برابر تعداد باکتریها در زمان $t=o$ خواهد بود.

راه دوم - چنانچه ازرابطه (I) بین زوج مقادیر $(x=x_\circ\ ;\ t=o)$ و $(x=۲x_\circ\ ;\ t=٤)$ انتگرال بگیریم چنین داریم:

$$\int_{x_\circ}^{۲x_\circ}\frac{dx}{x}=k\int_{\circ}^{٤}dt \quad \text{و یا} \quad ٤k=Log۲$$

با استفاده از رابطه بالا وانتگرال گیری رابطه (I) بین زوج مقادیر $(x=x_\circ\ ;\ t=o)$ و $(x=x\ ;\ t=۱۲)$ خواهیم داشت:

$$\int_{x_\circ}^{x}\frac{dx}{x}=k\int_{\circ}^{۱۲}dt \quad , \quad Log\frac{x}{x_\circ}=۱۲k=۳(٤k)=۳Log۲=Log۸$$

و از آنجا:

$$x=۸x_\circ$$

ب - راه‌اول - باجایگزین نمودن زوج مقادیر $t=۳;x=۱۰^{٤}$ و $t=۵;x=٤\times۱۰^{٤}$ در رابطه (II) مقادیر c عبارت خواهند بود از:

$$c=\frac{۱۰^{٤}}{e^{۳k}} \quad , \quad c=\frac{٤\times۱۰^{٤}}{e^{۵k}}$$

پس‌از مساوی قرار دادن دو مقدار c خواهیم داشت $e^{۲k}=٤$ و یا $e^{k}=۲$ و ازآنجا تعداد باکتری‌ها در لحظه $t=o$ برابر خواهد بود با:

$$c=\frac{۱۰^{٤}}{e^{۳k}}=\frac{۱۰^{٤}}{۸}$$

راه دوم- اگر از رابطه (I) بین زوج مقادیر $(t=۳ ; x=۱۰^۴)$ و $(t=۵ ; x=۴\times۱۰^۴)$ انتگرال بگیریم چنین داریم :

$$\int_{۱۰^۴}^{۴\times۱۰^۴}\frac{dx}{x}=k\int_{۳}^{۵}dt \quad , \quad Log۴=۲k \quad , \quad k=Log۲$$

اکنون از رابطه (I) بین زوج مقادیر $t=۰ ; x=x_۰$ و $t=۳ ; x=۱۰^۴$ انتگرال میگیریم :

$$\int_{x_۰}^{۱۰^۴}\frac{dx}{x}=k\int_{۰}^{۳}dt \quad , \quad Log\frac{۱۰^۴}{x_۰}=۳k=۳Log۲ \quad \text{ویا} \quad x_۰=\frac{۱۰^۴}{۸}$$

مثال ۳- جامعه معینی از مورچه‌ها را که در آن نرخ فوت در هر زمان متناسب با تعداد مورچه‌های موجود در این لحظه است درنظر میگیریم . چنانچه تولدی رخ ندهد در پایان هفته جمعیت این جامعه نصف میگردد . ولی درنتیجه موالید که نرخ آن نیز متناسب با جمعیت فعلی است تعداد مورچه‌ها در پایان هفته دو برابر میگردد . نرخ تولید این جامعه را بدست آورید .

حل - دراین مسئله باید دوضریب تناسب را که برای تولید $k_۱$ و برای فوت به $k_۲$ نمایش میدهیم محاسبه کنیم .

با بکاربردن این حقیقت که نرخ فوت متناسب با تعداد فعلی مورچه‌هااست واستفاده از این فرض که اگر تولدی روی ندهد تعداد مورچه‌ها در پایان هفته نصف میگردد چنین داریم :

$$\frac{dx}{dt}=-k_۲x \quad , \quad \int_{x=۱}^{۰٫۵}\frac{dx}{x}=-k_۲\int_{۰}^{۱}dt \quad \text{و یا} \quad k_۲=Log۲$$

که در آن x جمعیت جامعه فوق درلحظه t و $x=۱$ بجای ۱۰۰ درصد بکار برده شده است .

با درنظر گرفتن موالید و متوفیات این جامعه معادله دیفرانسیل زیر بدست میآید :

$$\frac{dx}{dt}=k_۱x-(Log۲)x \qquad \frac{dx}{x}=(k_۱-Log۲)dt$$

اگرازمعادله‌بالا بین‌زوج مقادیر $(t=o\ ;\ x=۱)$ و $(t=۲\ ;\ x=۲)$ انتگرال‌بگیریم

خواهیم داشت :

$$\int_{x=۱}^{۲} \frac{dx}{x} = (k_۱ - Log۲) \int_{t=o}^{۲} dt$$

و از آنجا :

$$Log۲ = ۲k_۱ - Log٤ \quad , \quad k_۱ = \frac{۱}{۲}\, Log۸ = ۱ر۰۳۹۷$$

و بالنتیجه نرخ تولد در هفته ۱۰۳ر۹۷ درصد میباشد .

مسائل

در مسائل ۱ الی ۱۰ فرض مینماییم نرخ تجزیه جسمی متناسب با مقداری که از جسم میماند باشد و همچنین نرخ رشد جامعه‌یی متناسب با تعداد موجود باشد .

۱- چنانچه نصف وزن رادیوم پس‌از ۱۶۰۰ سال ازبین برود درصد ازبین رفتن رادیوم را پس‌از ۱۰۰ سال تعیین کنید .

۲- چنانچه پس‌از یک ساعت مقدار مخمرهای فعال درکشتی دو برابر مقدار اولیه‌آن باشد تعیین کنید پس‌از $۲\frac{۳}{٤}$ ساعت مقدارمخمرهای‌فعلی‌چندبرابرتعداد اولیه خواهدبود .

۳- اگر فرض کنیم مقدار موجود رادیوم درقطعه‌یی ازسرب پس‌از ۱۵۰۰ سال پنجاه درصد باشد تعیین کنید پس‌از ۲۵۰۰ سال چه درصدی از رادیوم درسرب باقی خواهد ماند .

٤- اگر پس‌از ۵۰ سال ۱ر۷ درصد ازجسمی تجزیه شود تعیین کنید پس‌از ۱۰۰ سال چند درصد از این جسم باقی خواهد ماند . چند سال لازم است تا ده درصد ازاین جسم تجزیه شود .

۵- تعداد باکتریهای موجود درکشتی برابر ۱۰۰۰۰۰ عدد است . پس‌از $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت‌تعداد باکتریهاده درصد افزایش مییابد . تعیین کنید پس‌ازچند ساعت تعداد باکتریها بالغ بر ۲۰۰۰۰۰ عدد میگردد . تعداد باکتریها را پس‌از ۱۰ ساعت تعیین کنید .

٦- اگر جمعیت کشوری پس‌از ۵۰ سال دو برابرگردد وجمعیت فعلی آن ۲۰ میلیون نفر باشد تعیین کنید :

الف ـ پس‌از چند سال جمعیت به ۳۰ میلیون نفر بالغ میگردد .

ب ـ پس‌از ده سال جمعیت کشور چه خواهد بود .

۷ـ اگر ده درصد از جسمی پس‌از ۱۰۰ سال تجزیه شود تعیین کنید پس‌از چند سال ۵۰ درصد از این جسم تجزیه خواهد شد .

۸ـ اگر تعداد باکتریهای موجود درکشتی پس‌از ۳ ساعت دو برابر گردد و پس‌از ۱۵ ساعت تعداد باکتریها یک میلیون عدد باشد تعداد اولیه باکتریها را بیابید .

۹ـ جمعیت اولیه شهری که ٤۰ هزار نفر میباشد در اثر رشد طبیعی پس‌از ۵۰ سال دو برابر میگردد . درنتیجه خروج و ورود مردم بشهر سالانه ٤۰۰ نفر برجمعیت شهراضافه میشود . جمعیت شهر را پس‌از ۱۰ سال برآورد کنید .

راهنمایی ـ ابتدا فاکتور تناسب رشد طبیعی را بیابید .

۱۰ـ مسئله ۹ را درصورتیکه سالانه ٤۰۰ نفر ازجمعیت شهرکم شود حل کنید .

۱۱ـ کشتی از باکتری که تعداد اولیه آن N_0 است دراثر رشد طبیعی تعداد آن پس‌از ٤Log۲ روز دوبرابرمیگردد. اگر باکتریها را با نرخ یکنواخت R در روز ازکشت خارج کنیم تعداد باکتریهای موجود درکشت را برحسب تابعی از زمان t بیان کنید . نشان دهید برحسب آنکه $R \underset{>}{\leq} \frac{N_0}{٤}$ باشد تعداد باکتریها صعودی یا ثابت یا نزولی میباشد .

۱۲ـ اگر نرخ کاهش حجم جسم کروی متناسب با مساحت رویه جسم باشد شعاع کره را برحسب تابعی از زمان بدست آورید .

۱۳ـ حجم قطرات‌باران(که کروی میباشند) هنگامیکه سقوط مینمایند دراثرچسبندگی ذرات‌گرد و غبار بسطح آن افزایش مییابند . اگر فرض کنیم یک قطره شکل کروی خود رادرحین‌سقوط حفظ کند ونرخ تغییرات‌آن نسبت به y فاصله‌یی که سقوط نموده‌است متناسب با مساحت رویه در آن فاصله باشد شعاع قطره باران را برحسب تابعی از y بیان کنید .

جوابها

۱ـ ٤ر۲ درصد .

۲ـ ٦ر٧٣ برابر تعداد اولیه .

۳ـ ۳۱ درصد .

٤ـ ۹٦ر٦ درصد ، ۳۰۷ سال .

٥- الف : ١٨ر٢ ساعت . ب : ١٤٦٤٠٠ .

٦- الف : ٢٩ سال . ب : تقریباً ٢٢٩٧٠٠٠٠ .

٧- ٦٥٨ سال . ٨- ٣١٢٥٠ .

٩- ٥٠٢٤٠ . ١٠- ٤١٦٦٠ .

١١- $x=٤\left[R+\left(\frac{N_0}{٤}-R\right)e^{\frac{t}{٤}}\right]$.

١٢- $r=r_0-kt$ که درآن r_0 شعاع اولیه و k فاکتور تناسب و مثبت میباشد .

١٣- $r=r_0+kt$ که درآن r_0 شعاع اولیه و k فاکتور تناسب و مثبت میباشد .

٢٥ . ٣- مسائل چند فاکتوری

در برخی از موارد با برداشتن واحدهایی از مواد شیمیایی (یاجسم) A و B ماده جدیدی تشکیل میدهیم که نرخ رشد آن مشترکاً متناسب با مقادیر باقیمانده هریک از مواد A و B میباشد .

فرض میکنیم a_0 و b_0 به ترتیب مقادیراولیه A و B و x تعداد واحدهای ماده متشکله جدید در لحظه t باشد . لذا اگر مثلاً یک واحد x از ترکیب دو واحد از ماده A و سه واحد از ماده B تشکیل یافته باشد دراینصورت در لحظه t هنگامیکه x واحد از ماده جدید موجود باشد مقادیر باقیمانده مواد A و B دراین لحظه به ترتیب برابر $a_0-٢x$ و $b_0-٣x$ میباشند و با استفاده از جمله اول مذکور در بالا معادله دیفرانسیلی که نرخ تغییرات x را در لحظه t نمایش میدهد عبارت خواهد بود از :

$$\frac{dx}{dt}=k(a_0-٢x)(b_0-٣x)$$

که درآن k ضریب ثابت میباشد . بطورکلی اگر ترکیب α واحد ماده A و β واحد ماده B منجر به تشکیل یک واحد از ماده x گردد دراینصورت معادله دیفرانسیل زیر بدست میآید :

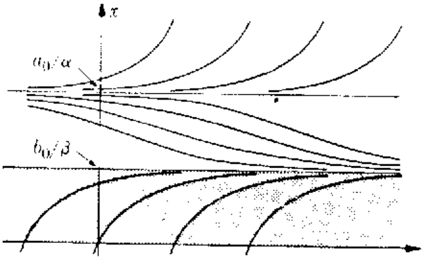
$$\frac{dx}{dt}=k(a_0-\alpha x)(b_0-\beta x) \tag{٣ . ٢٥}$$

a_0 و b_0 تعداد واحدهای مواد A و B که در لحظه اولیه موجود هستند میباشد .

اکنون خواص کیفی جوابهای معادله (۲۵ . ۳) را مورد بحث قرار میدهیم. جوابهای خصوصی این معادله عبارتند از :

$$x=\frac{a_\circ}{\alpha} \quad ; \quad x=\frac{b_\circ}{\beta} \qquad (۳ . ۲۵۱)$$

اگر $\frac{b_\circ}{\beta} > \frac{a_\circ}{\alpha}$ باشد خطوطی که با رابطه (۲۵۱ . ۳) مشخص میگردند از یکدیگر متمایزبوده وبموازات محور t ها میباشند. ازطرف دیگر چون $\frac{dx}{dt}$ در زیر خط $x=\frac{b_\circ}{\beta}$ و بالای خط $x=\frac{a_\circ}{\alpha}$ مثبت و بین دو خط مزبور منفی است لذا شکل جوابهای معادله (۲۵ . ۳) مانند منحنی‌هایی میباشد که‌آنهارا درشکل (۱۷ . ۳) رسم نموده‌ایم. چون ایزوکلاینها خطوط $x=c$ هستند لذا اگر منحنی‌های‌انتگرال‌را بسمت راست یا چپ انتقال دهیم این خمها نیز جواب عمومی معادله خواهند بود (در شکل ۱۷ . ۳ فقط قسمت سایه خورده دارای معنی فیزیکی میباشد زیرا x و همچنین $a_\circ-\alpha x$ و $b_\circ-\beta x$ باید مثبت باشند).



شکل ۱۷ . ۳- میل به‌حالت تعادل در یک فعل‌وانفعال شیمیایی

در عملیات مشکلتروپیچیده‌تر که ممکن‌است ماده C ازترکیب سه ویاچند ماه تشکیل گردد معادله (۲۵ . ۳) مبدل به معادله کلی زیر میگردد .

$$\frac{dx}{dt}=k(a_۱-\alpha_۱x)(a_۲-\alpha_۲x)\ \dots\ (a_n-\alpha_nx) \qquad (۳ . ۲۵۲)$$

خواص کیفی معادله (۲۵۲ . ۳) رانیزمیتوان‌بهمان روشی که‌خواص کیفی معادله (۲۵ . ۳) را مطالعه نمودیم آنرا مورد بررسی قرار داد .

در تجزیه مواد درمحلولهای شیمیایی ممکن‌است‌ازرابطه (۲۵ . ۳) بامختصر تغییری استفاده نماییم و برای این منظور اگر فرض کنیم ماده‌یی در محلولی تجزیه گردد که نرخ تجزیه شدن آن مشترکاً متناسب با :

۱- مقدار ماده‌یی که هنوز تجزیه نشده است.

۲- تفاضل غلظت ماده در محلول اشباع شده و غلظت واقعی ماده در محلول باشد .

مثلاً اگرده‌گالن آب بتواند حداکثر ۳۰ پوند نمک را در خود بطور محلول نگاه دارد درآینصورت گوییم محلول اشباع شده است و غلظت نمک دراین محلول اشباع شده درهرگالن ۳ پوند است. بنابراین اگر محلول آب نمکی فقط شامل ۱۵ پوند نمک باشد غلظت واقعی نمک در محلول برای هرگالن ۱ر۵ پوند بوده وبالنتیجه این غلظت ۵۰ درصد غلظت محلول اشباع شده میباشد.

اگر x مقدار تجزیه شده این ماده در لحظه t و $x_\circ$ مقدار اولیه این ماده و v حجم محلول باشد دراینصورت دراین لحظه مقداری که ازاین ماده در محلول تجزیه گردیده است برابر $x_\circ - x$ بوده ولذا $\frac{x_\circ - x}{v}$ غلظت ماده در محلول خواهد بود.

اگر c غلظت این ماده در یک محلول اشباع شده‌یی باشد دراینصورت معادله دیفرانسیلی که بطور ریاضی شرایط (۱) و (۲) را بیان میکند عبارت خواهد بود از:

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(c-\frac{x_\circ-x}{v}\right) \qquad (۳ . ۲۵۲)$$

مسائلی که معادله دیفرانسیل آنها منجر به معادلات (۳ . ۲۵) و (۳ . ۲۵۲) و (۳ . ۲۵۳) میگردند به **مسائل چند فاکتوری** موسوم‌اند.

مثال ۱- دو ماده A و B که مقدار اولیه آنها به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد است مفروض میباشند. برای تشکیل x واحد از ماده جدیدی، لازم است که دو واحد ازهریک ازاین مواد را بایکدیگر ترکیب نماییم. اگر فرض کنیم نرخ تشکیل ماده جدید مشترکاً متناسب با مقدار مانده هریک از این مواد باشد وپس از ۵ دقیقه مقدار $x=۱$ گردد مقدار x را پس از ده دقیقه محاسبه کنید.

حل - اگر در رابطه (۳ . ۲۵) مقادیر $a_\circ=۱۰$, $b_\circ=۸$, $\alpha=\beta=۲$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt}=k(۱۰-۲x)(۸-۲x)=۴k(۵-x)(۴-x)$$

واز آنجا:

$$۴kdt=\frac{dx}{(۵-x)(۴-x)}=\left(\frac{۱}{۴-x}-\frac{۱}{۵-x}\right)dx$$

اگر ازاین معادله انتگرال گرفته وحدود انتگرال راشرایط داده شده اختیار کنیم چنین داریم:

$$٤k\int_{t=0}^{٥} dt=\int_{x=0}^{۱}\left(\frac{۱}{٤-x}-\frac{۱}{٥-x}\right)dx \quad ;$$

$$٤k\int_{t=0}^{۱۰} dt=\int_{x=0}^{x}\left(\frac{۱}{٤-x}-\frac{۱}{٥-x}\right)dx$$

از معادله اول رابطه بالا خواهیم داشت :

$$k=\frac{۱}{۲۰}\left[Log\frac{٥-x}{٤-x}\right]_0^{1}=\frac{۱}{۲۰}Log\frac{۱٦}{۱٥}$$

و از دومین معادله رابطه بالا چنین داریم :

$$٤\left(\frac{۱}{۲۰}Log\frac{۱٦}{۱٥}\right)(۱۰)=Log\frac{٥-x}{٤-x}-Log\frac{٥}{٤}=Log\frac{٤(٥-x)}{٥(٤-x)}$$

و پس از ساده کردن :

$$\left(\frac{۱٦}{۱٥}\right)^{۲}=\frac{٤}{٥}\left(\frac{٥-x}{٤-x}\right)\ ,\ \frac{٥-x}{٤-x}=\frac{٦٤}{٤٥}\ ,\ ۱۹x=۳۱\ \text{ویا}\ x=۱٫٦۳$$

لذا پس از ۱۰ دقیقه ۱٫٦۳ واحد از ماده x تشکیل میشود .

مثال ۲ - ٥۰ گرم از ماده‌یی در ۱۰۰ گرم محلول اشباع شده‌یی تجزیه میگردد . ولی اگر ۳۰ گرم ازاین ماده را با ۱۰۰ گرم آب مخلوط و آنرا تکان دهیم پس از دو ساعت ۱۰ گرم از این ماده تجزیه میشود. تعیین کنید پس از ٥ ساعت چه مقدار ازاین ماده در آب تجزیه میگردد .

حل - اگر در رابطه (۳ . ۲٥۳) مقادیر $v=۱۰۰\ ,\ x_0=۳۰\ ,\ c=\frac{٥۰}{۱۰۰}$ را قرار دهیم چنین داریم :

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{٥۰}{۱۰۰}-\frac{۳۰-x}{۱۰۰}\right)=kx\,\frac{x+۲۰}{۱۰۰}\ ,\ \frac{dx}{x}-\frac{dx}{x+۲۰}=\frac{k}{٥}dt$$

اگر از رابطه بالا بین زوج مقادیر $(t=0\ ;\ x=۳۰)$ و $(t=۲\ ;\ x=۳۰-۱۰=۲۰)$ انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\int_{۳۰}^{۲۰}\frac{dx}{x}-\int_{۳۰}^{۲۰}\frac{dx}{x+۲۰}=\frac{k}{۵}\int_{0}^{۲}dt \quad , \quad k=\frac{۵}{۲}Log\,\frac{۵}{٦}=-۰ر٤٦$$

بار دیگر ازمعادله دیفرانسیل بالا بین زوج مقادیر $(t=o\ ;\ x=۳۰)$ و $(t=۵\ ;\ x=x)$ انتگرال میگیریم :

$$\int_{۳۰}^{x}\frac{dx}{x}-\int_{۳۰}^{x}\frac{dx}{x+۲۰}=\frac{k}{۵}\int_{0}^{۵}dt \quad , \quad Log\,\frac{۵x}{۳(x+۲۰)}=k=-۰ر٤٦$$

$$\frac{x}{x+۲۰}=\frac{۳}{۵}\,e^{-۰ر٤٦}=۰ر۳٦$$

وازآنجا $x=۱۲$ میگردد . بنابراین پس‌از ۵ ساعت $۳۰-۱۲=۱۸$ گرم ازاین ماده درآب تجزیه میشود .

مثال ۳- شش گرم گوگرد رادر محلول ۱۰۰ سانتیمترمکعب بنزول* قرار میدهیم . اگر ده گرم را در محلول فوق حل کنیم این محلول اشباع میگردد . اگر پس‌از ۵۰ دقیقه ۳ گرم گوگرد در محلول باشد پس‌از ۲۵۰ دقیقه چند گرم گوگرد در محلول خواهد بود .

حل - اگر x تعداد گرمهای گوگرد تجزیه نشده در لحظه t باشد در اینصورت مقدار گوگرد حل شده در این لحظه برابر $٦-x$ گرم بوده و از آنجا غلظت گوگرد در بنزول برابر $\frac{٦-x}{۱۰۰}$ است. در این مسئله c یعنی غلظت گوگرد در محلول بنزول اشباع شده برابر $۰ر۱=\frac{۱۰}{۱۰۰}$ است. با اختیار $c=۰ر۱$, $x_0=٦$ و $V=۱۰۰$ رابطه (۳ . ۲۵۳) بصورت زیر درمیاید :

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(۰ر۱-\frac{٦-x}{۱۰۰}\right)=\frac{kx(٤+x)}{۱۰۰}$$

و ازآنجا :

$$\frac{kdt}{۱۰۰}=\frac{dx}{x(x+٤)}=\frac{۱}{٤}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dx}{x+٤}\right)$$

و پس‌از انتگرال گیری چنین داریم :

Benzol *

$$\frac{k}{٢٥}\int_{t=0}^{٥٠} dt=\int_{x=٦}^{٣}\left(\frac{١}{x}-\frac{١}{x+٤}\right)dx\ ,$$

$$\frac{k}{٢٥}\int_{t=0}^{٢٥٠} dt=\int_{x=٦}^{x}\left(\frac{١}{x}-\frac{١}{x+٤}\right)dx$$

از معادله اول چنین داریم :

$$k=\frac{١}{٢}\left[Log\,\frac{x}{x+٤}\right]_{٦}^{٣}=\frac{١}{٢}\left(Log\,\frac{٣}{٧}-Log\,\frac{٦}{١٠}\right)=\frac{١}{٢}Log\,\frac{٥}{٧}$$

و از معادله دوم :

$$\frac{١}{٢٥}\left(\frac{١}{٢}Log\,\frac{٥}{٧}\right)٢٥٠=\left[Log\,\frac{x}{x+٤}\right]_{٦}^{x}=Log\,\frac{x}{x+٤}-Log\,\frac{٣}{٥}$$

$$=Log\,\frac{٥}{٣}\left(\frac{x}{x+٤}\right)$$

و پس‌ازساده‌کردن خواهیم داشت :

$$\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٥}=\frac{٥}{٣}\left(\frac{x}{x+٤}\right)\quad \text{و یا}\quad x=٠ر٥\ \text{گرم}$$

یعنی در پایان ٢٥٠ دقیقه مقدارگوگردی که هنوز تجزیه نشدهٔ است ٠ر٥ گرم بوده و لذا دراین لحظه مقدارگوگرد در محلول ٠ر٥ گرم میباشد .

مثال ٤- ماده شیمیایی γ ازعکس‌العمل‌دو ماده‌شیمیایی α و β تشکیل میشود. یعنی a گرم از ماده α و b گرم از ماده β ، (a+b) گرم از ماده γ را تشکیل میدهند. اگر در لحظه اولیه x_0 گرم از ماده α و y_0 گرم از ماده β و صفر گرم از ماده γ موجود باشد و اگر نرخ تشکیل γ متناسب باحاصلضرب غیر ترکیب شده α و β باشند مقدار γ تشکیل شده (z گرم) را برحسب تابعی از زمان t بیان کنید .

حل - درزمان t ، z گرم از ماده γ متشکل از $\frac{az}{a+b}$ گرم از ماده α و $\frac{bz}{a+b}$

گرم از ماده β میباشد و بالنیجه در لحظه t مقدارهای $\left(x_\circ-\frac{az}{a+b}\right)$ گرم‌از ماده α و $\left(y_\circ-\frac{bz}{a+b}\right)$ گرم از ماده β بصورت غیر قابل ترکیب باقی میماند و لذا :

$$\frac{dz}{dt}=K\left(x_\circ-\frac{az}{a+b}\right)\left(y_\circ-\frac{bz}{a+b}\right)$$

$$=\frac{Kab}{(a+b)^{۲}}\left(\frac{a+b}{a}\,x_\circ-z\right)\left(\frac{a+b}{b}\,y_\circ-z\right)=k(A-z)(B-z)$$

که در آن :

$$k=\frac{Kab}{(a+b)^{۲}}\quad,\quad A=\frac{(a+b)x_\circ}{a}\quad,\quad B=\frac{(a+b)y_\circ}{b}$$

برحسب آنکه $A\neq B$ و یا $A=B$ باشد دو حالت زیر را درنظر میگیریم .

حالت‌اول - $A\neq B$: فرض‌میکنیم $A>B$ باشد دراینصورت معادله دیفرانسیل بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{dz}{(A-z)(B-z)}=-\frac{۱}{A-B}\cdot\frac{dz}{A-z}+\frac{۱}{A-B}\cdot\frac{dz}{B-z}=kdt$$

پس‌از انتگرال گیری بین حدود $(t=o\ ;\ z=o)$ و $(t=t\ ;\ z=z)$ خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{A-B}\left[Log\,\frac{A-z}{B-z}\right]_{o}^{z}=kt\quad;\quad\frac{۱}{A-B}\left(Log\,\frac{A-z}{B-z}-Log\,\frac{A}{B}\right)=kt\,,$$

$$\frac{A-z}{B-z}=\frac{A}{B}\,e^{(A-B)kt}$$

و یا :

$$z=\frac{AB[۱-e^{-(A-B)kt}]}{A-Be^{-(A-B)kt}}$$

حالت‌دوم- $A=B$: اگر $A=B$ باشد داریم $\frac{dz}{(A-z)^{۲}}=kdt$ که پس‌از انتگرال گیری بین‌حدود $(t=o\ ;\ z=o)$ و $(t=t\ ;\ z=z)$ خواهیم داشت :

$$\left[\frac{۱}{A-z}\right]_{o}^{z}=[kt]_{o}^{t}\;,\quad\frac{۱}{A-z}-\frac{۱}{A}=kt\quad,\quad z=\frac{A^{۲}kt}{۱+Akt}$$

مسائل

در مسائل زیرازشماره یک الی هشت باستثنای مسئله چهارم فرض مینماییم که تمام عکس‌العملها در روابط (۲۵ . ۳) و (۲۳۵ . ۳) صدق نمایند .

۱- اگر در رابطه (۲۵ . ۳) مقادیر $a_\circ=b_\circ=۱۰$ و $\alpha=\beta=۱$ اختیارگردد و درمدت ده دقیقه پنج واحد ازماده x تشکیل شود تعداد واحدهایی از x که پس‌از ده دقیقه تشکیل میگردد بیابید .

۲- اگر در رابطه (۲۵ . ۳) مقادیر $a_\circ=۱۰$, $b_\circ=۸$, $\alpha=\beta=۱$ اختیار گردد ودرمدت یک دقیقه x واحد ازماده x تشکیل شود تعداد واحدهایی از x که پس‌از ده دقیقه تشکیل میگردد بیابید .

۳- با اختیار نمودن $\alpha=\beta=۱$ در رابطه (۲۵ . ۳) مطلوب است تعیین :

الف - عبارت x برحسب تابعی از زمان t برحسب آنکه $a_\circ \neq b_\circ$ و $a_\circ=b_\circ$ باشد .

ب - نشان‌دهید هنگامیکه $t \rightarrow \infty$ برحسب آنکه $b_\circ \geqslant a_\circ$ و یا $b_\circ \leqslant a_\circ$ باشد مقدار x بسوی $a_۱$ و یا $b_۲$ میل خواهد نمود.

۴- درعکس‌العمل شیمیایی معین ماده A که وزن اولیه‌اش ۱۲ پوند است به ماده B تبدیل میگردد . نرخ تشکیل ماده B متناسب با مقداری است که ازجسم A باقی میماند . اگر پس‌از ۲ر۵ دقیقه چهار پوند از ماده B تشکیل شده باشد مطلوب است :

الف - پس‌از ۶ دقیقه چه مقداراز ماده B تشکیل میگردد .

ب - زمان لازم برای آنکه ۶۰ درصد از ماده A به ماده B تبدیل شود .

مثال فوق را بدو روش زیرحل کنید .

۱- فرض کنید x نمایش مقداری از ماده A باشد که درلحظه t باقیمانده است .

۲- فرض کنید x نمایش مقداری از ماده B باشد که درلحظه t تشکیل شده است .

این نوع مسائل را مسائل یك فاکتوری گوییم .

۵- دو ماه A و B که وزن اولیه آنها به ترتیب ۲۰ پوند و ۴۰ پوند است مفروض میباشند. برای‌تشکیل x واحد ازماده جدیدی لازم است که یک واحد ازماده A را با دو واحد ازماده B ترکیب نمود .

الف ـ اگر پس‌از $\frac{۱}{۳}$ ساعت ۱۲ پوند از ماده جدید تشکیل شود عبارت x را برحسب تابعی از زمان و همچنین برحسب ساعت بیان کنید .

ب ـ حداکثر مقدار ممکنه x را بیابید .

۶ـ محلول اشباع شده‌یی ازآب‌نمک میتواند در هرگالن ۳ پوند نمک را بطور محلول نگاه دارد . یک قطعه نمک راکه وزن آن ۶۰ پوند است درظرفی که محتوی ۱۰۰ گالن آب است قرار میدهیم . اگر در ۵ دقیقه ۲۰ پوند از نمک تجزیه گردد مطلوب است :

الف ـ پس‌از یک ساعت چه مقدار نمک تجزیه میگردد .

ب ـ پس‌از چه مدتی ۴۵ پوند نمک تجزیه میشود .

۷ـ ۵ گرم از ماده A را در محلول ۱۰۰ سانتیمترمکعب مایع B قرار میدهیم . مایع اخیر هنگامیکه اشباع شود ۱۰ گرم از ماده A را درخود بطور محلول نگاه میدارد . اگر پس‌از یک ساعت ۲ گرم از ماده A در محلول باشد تعیین کنید پس‌از دو ساعت چندگرم از ماده A در محلول خواهد بود .

۸ـ ۱۵ گرم از ماده A را در ۵۰ سانتیمترمکعب آب قرار میدهیم . درصورت اشباع شدن ۲۵ گرم از ماده A درآب محلول میگردد . اگر پس‌از ۲ ساعت ۵ گرم از ماده A در محلول باشد تعیین کنید پس‌از پنج ساعت چندگرم از ماده A در محلول خواهد بود .

۹ـ ماده‌یی که حاوی ۱۰ پوند رطوبت است در اطاق بسته‌یی که حجم آن ۲۰۰۰ فوت مکعب‌است قرار میدهیم و اگر ماده اشباع گردد برای هرفوت مکعب میتواند ۰ر۰۱۵ پوند رطوبت نگاه دارد در ابتدا رطوبت نسبی هوا ۳۰ درصد است . اگر این ماده پس‌از یک ساعت چهار درصد رطوبت خود را از دست دهد تعیین کنید پس‌از چه مدتی این جسم ۸۰ درصد رطوبت خود را از دست خواهد داد . فرض میکنیم نرخی که جسم رطوبت خود را از دست میدهد متناسب با مقدار رطوبت موجود در جسم و تفاوت بین رطوبت موجود در هوای اشباع شده و غیر اشباع شده باشد .

جوابها

۱- ۸ $\frac{۱}{۳}$ واحد .   ۲- ۱ر۸۰ واحد .

۳- $x=\frac{a_۰b_۰[e^{k(a_۰-b_۰)t}-۱]}{a_۰e^{k(a_۰-b_۰)t}-b_۰}$, $x=\frac{a_۰^۲kt}{۱+a_۰kt}$.

٤- الف : ٧ر٤٧ پوند . ب : ٦ره دقیقه .

٥- الف : $x=\frac{١٨٠t}{٢+٩t}$. ب : ٢٠ پوند .

٦- الف : ٥٩ر٢ پوند . ب : ١٨ر٢ دقیقه .

٧- ٣ر٠٤ . ٨- ٨ر٩ گرم .

٩- $\frac{dx}{dt}=kx[٣٠-(١٩-x)]$ ؛ ٣ر٨ ساعت .

۳ . ۳- حرکت نقطه مادی درامتداد خط مستقیم - قائم ـ افقی و مایل

دراین قسمت مسائل متعدد و مختلفی راکه شامل حرکت نقطه مادی در امتدادخط مستقیم است مورد بحث و بررسی قرار داده و حرکت نقطه در صفحه را در جلد دوم فصل چهاردهم مورد مطالعه قرار خواهیم داد .

بنابرقانون‌اول‌نیوتن‌درباره حرکت ، هرگاه جسمی‌درحال‌سکون‌باشداین جسم‌دراینحال باقی خواهد ماند ولی اگر جسم متحرك باشد و نیروی خارجی نیز برآن وارد نگردد جسم سرعت خود را حفظ خواهد نمود .

بنابرقانون‌دوم‌نیوتن،مشتق بردارچندی‌حرکت (بردارچندی‌حرکت = جرم × بردارسرعت) متناسب‌با F برآیند نیروهای خارجی‌وارد برجسم میباشد. قانون اخیر بااستفاده‌از سمبولهای ریاضی بصورت زیر درمیآید :

$$\vec{F}=k\,\frac{d(m\vec{v})}{dt}=km\,\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{I}$$

که درآن m جرم جسم و v سرعت آن و $k > o$ ضریب ثابتی است که مقدار آن بستگی به انتخاب واحدهای فاصله ، نیرو ، جرم و زمان خواهد داشت .

اگراین‌واحدها برای فاصله،فوت* وبرای نیرو،پوندوبرای‌جرم،اسلاگ $\left(\frac{١}{٣٢}\right.$ پوند$\left.\right)$

---

* یک فوت(١') برابر ١٢ اینچ(١٢'')وهراینچ ٤ ٥ر٢سانتیمتر میباشد لذا یک فوت برابر :

$$1'=12''\times ٢ر٥٤=٣٠ر٤٧ \quad \text{سانتیمتر}$$

و همچنین یک فوت مربع برابر :

$$٣٠ر٤٧\times ٣٠ر٤٨=٠ر٠٩٢٩ \quad \text{متر مربع}$$

است .

و برای زمان ثانیه اختیارشود $k=۱$ میگردد و از آنجا رابطه (I) بصورت زیر درمیآید :

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{\gamma}=m\frac{d^{2}\vec{s}}{dt^{2}} \qquad (۳ . ۳)$$

بردار $\vec{s}$ فاصله نقطه مادی متحرك از نقطه ثابتی بوده و بردار $\vec{\gamma}$ که مشتق بردار سرعت را نمایش میدهد معمولاً آنرا بردار شتاب گویند . لذا اگر نیرویی برابر یک پوند برجسمی بجرم یک اسلاگ وارد نماییم شتاب حاصل برابر یک فوت برمجذور ثانیه میگردد .

از آنجاییکه $\vec{F}$ و $\vec{\gamma}$ و $\vec{v}$ بردار میباشند لذا درتمام مسائلیکه منجربه معادله حرکت (I) میگردند لازم و اساسی است که از ابتدا جهت مثبت را تعیین کنیم .

با استفاده از روابط $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}$ و $\vec{v}=\frac{d\vec{s}}{dt}$ معادله (۳ . ۳) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\vec{F}=m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{s}} \qquad (۳ . ۳۱)$$

بنابر قانون نیوتن درباره جذب اجسام اگر m_1 و m_2 جرم دو جسم که بفاصله r از یکدیگرقرار دارند باشد نیرویی که این دوجسم یکدیگراجذب مینمایند با رابطه زیر مشخص میشود :

$$F=k\frac{m_1m_2}{r^{2}} \qquad (۳ . ۳۲)$$

$k>0$ ضریب ثابت است .

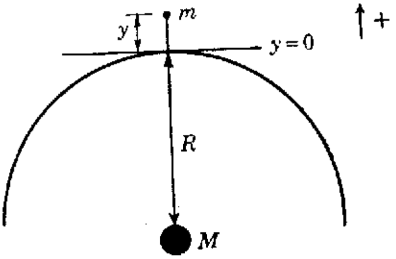
۳۱ . ۳- حرکت قائم

فرض میکنیم :

M= جرم زمین که کروی فرض شده است باشد .

m= جرم جسمی که در میدان ثقل زمین قرارگرفته است .

R= شعاع زمین .



شکل ۱۸ . ۳

y= فاصله جسم تا سطح زمین .

با استفاده از فرضهای بالا و مراجعه بشکل (۳ . ۱۸) و استفاده از رابطه (۳ . ۳۲) نیروی جاذبه زمین و جسم (جرمهای زمین و جسم را متمرکز در مراکزشان فرض نموده‌ایم) در رابطه زیر صدق میکند .

$$F=-G\frac{Mm}{(R+y)^2}$$ (۳ . ۳۱۱)

ضریب ثابت تناسب G راکه بجای k بکار برده‌ایم **ثابت ثقل** گوییم .

ازآنجایی‌که جهت مثبت را بسوی بالا اختیارنموده‌ایم و نظر باینکه برآیند نیروهای وارده بسوی پایین و درجهت مرکز زمین میباشد لذا لازم است‌که در رابطه (۳ . ۳۱۱) علامت منفی را بکار بریم . اگر y فاصله جسم از سطح زمین نسبت به R شعاع زمین کوچک باشد و بجای معادله (۳ . ۳۱۱) معادله :

$$F=-\frac{GMm}{R^2}$$ (۳ . ۳۱۲)

را بکار بریم خطای‌حاصل نیزکوچک خواهدبود . زیرا R تقریباً برابر ٤۰۰۰ میل* بوده وحتی اگر y دارای ارتفاعی به بلندی یک میل باشد اگر درمخرج رابطه (۳ . ۳۱۱) بجای $(4001\times5280)^2$ مقدار $(4000\times5280)^2$ را بکاربریم خطای حاصل نسبتاً قابل چشم پوشی خواهد بود .

اگردر رابطه (۳ . ۲) اندازه‌بردار $\vec{s}$ را به y نمایش دهیم‌رابطه (۳ . ۳۱۲) بصورت زیر درمیآید :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{GMm}{R^2}$$ (۳ . ۳۱۳)

چون R , M , G ثابت‌هایی میباشندلذا میتوان مقدار ثابت جدید g را جایگزین $\frac{GM}{R^2}$ نموده و ازآنجا معادله دیفرانسیل حرکت جسمی‌که حوزه ثقل زمین سقوط میکند برابر :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-gm \quad , \quad m\frac{dv}{dt}=-gm$$ (۳ . ۳۱٤)

---

* یک میل در ساعت برابر ۱٫۶ کیلومتر در ساعت و یا ۵۲۸۰ فوت در ساعت است .

که در آن $v=\frac{dy}{dt}$ است خواهد گردید .

رابطه (۳۱۴ . ۳) لازم است که دارای علامت منفی باشد زیرا جهت مثبت را بسوی بالا و نیروی جاذبه زمین را بسمت پایین فرض کرده‌ایم . از معادله (۳۱۴ . ۳) خواهیم داشت :

$$\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}=-g \qquad (۳ . ۳۱۵)$$

مقدار ثابت g که معمولاً نیروی ثقل نامیده میشود شتاب جسم در نتیجه نیروی جاذبه زمین بوده و مقدار آن برای مکانهای مختلف واقع برروی زمین و ارتفاعات متفاوت قدری تغییر میکند . برای سهولت مقدار g را برابر ۳۲ فوت برمجذور ثانیه اختیار مینماییم .

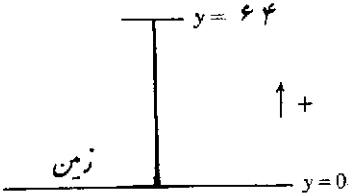
اگر از رابطه (۳۱۵ . ۳) انتگرال بگیریم معادله سرعت :

$$v=\frac{dy}{dt}=-gt+c_{۱} \qquad (۳ . ۳۱۶)$$

و بالاخره اگر از رابطه (۳۱۶ . ۳) انتگرال بگیریم معادله فاصله بدست میاید یعنی :

$$y=-\frac{gt^{۲}}{۲}+c_{۱}t+c_{۲} \qquad (۳ . ۳۱۷)$$

مثال ۱- گلوله‌یی را از ساختمانی که ۶۴ فوت ازسطح زمین ارتفاع دارد با سرعت ۴۸ فوت درثانیه در امتداد شاغول بطرف بالا میاندازیم مطلوب است :



شکل ۱۹ . ۳

الف - ارتفاعی که این جسم بالا میرود .

ب - تعیین مدت لازم برای آنکه گلوله بزمین برخورد کند .

ج - با چه سرعتی گلوله بزمین برخورد خواهد نمود .

حل - با استفاده از معادله (۳۱۷ . ۳) و انتخاب $g=۳۲$ چنین داریم :

$$\text{(I)} \qquad y=-۱۶t^{۲}+c_{۱}t+c_{۲}$$

و یا :

$$\text{(II)} \qquad v=\frac{dy}{dt}=-۳۲t+c_{۱}$$

اگر مبدأ را درسطح زمین اختیار کنیم شرایط اولیه $v=٤٨$, $y=٦٤$, $t=0$ گردیده و پس از جایگزین نمودن این مقادیر در روابط (I) و (II) خواهیم داشت :

$$c_2=٦٤ \quad , \quad c_1=٤٨$$

و از آنجا :

$$\text{(III)} \qquad y=-١٦t^2+٤٨t+٦٤ \quad , \quad v=-٣٢t+٤٨$$

تا زمانیکه سرعت گلوله صفر نگردیده است گلوله درامتداد شاغول بطرف بالا حرکت مینماید. سرعت هنگامی صفر میگردد که $v=-٣٢t+٤٨=0$ باشد یعنی پس از $t=١٥$ ثانیه مقدار سرعت صفر میگردد ولذا پس از قرار دادن این مقدار t در معادله اول رابطه (III) مقدار $y=١٠٠$ بدست میآید. یعنی گلوله تا ارتفاع ١٠٠ فوتی زمین بالا میرود .

هنگامی که گلوله در سطح زمین باشد y برابر صفر بوده و پس از قرار دادن $y=0$ در معادله اول رابطه (III) مقدار $t=٤$ بدست میآید. یعنی گلوله پس از ٤ ثانیه بسطح زمین خواهد رسید و سرعت آن دراین لحظه با قرار دادن $t=٤$ در معادله دوم (III) بدست میآید . پس :

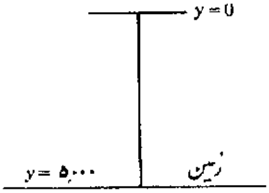
$$v=(-٣٢)(٤)+٤٨=-٨٠ \text{ فوت درثانیه}$$

علامت منفی نشانه آن است که گلوله بجهت پایین حرکت میکند .

تبصره ۱ - درمثال بالا عامل بسیار مهم مقاومت هوا را نادیده گرفتیم ولی در بسیاری از موارد نمیتوان ازاین عامل اساسی صرفنظر کرد . مقاومت هوا گذشته از عوامل دیگر باچگالی هوا و سرعت جسم تغییر میکند . بعلاوه خود چگالی هوا نیز بستگی به ارتفاع و زمان دارد . بعبارت دیگر چگالی هوا برای ارتفاعات متفاوت مختلف بوده و حتی ممکن است روز بروز نیز تغییر کند . لذا وجود عامل مقاومت هوا در مسائل واقعی بررسی آنها را مشکل میکند. ولی در مسائلی که ذیلاً آنها را مورد بررسی قرار خواهیم داد حالت ساده یی که اتمسفر ثابت و مقاومت هوا نیز متناسب با سرعت جسم است درنظر میگیریم . اگر دراین حالت ضمناً مقاومت هوا نیز متناسب با توان درستی از سرعت اختیار گردد مسائل مورد مطالعه بطور قابل ملاحظه یی ساده خواهند گردید . نمیتوان دلیل صحیح و منطقی یافت که امکان متناسب بودن مقاومت هوا با جذر یا لگاریتم سرعت را مستثنی کند .

بهرصورت در جمیع حالات همواره مقاومت هوا درجهتی وارد میشود که از حرکت ممانعت بعمل میآورد . بعبارت دیگر این نیرو در جهت مخالف حرکت تأثیر میکند .

مثال ۲- گلوله‌یی بجرم m اسلاگ را در امتداد شاغول از ارتفاع ۵۰۰۰ فوت بسوی پایین رها میکنیم. با فرض آنکه مقاومت هوا متناسب با توان اول سرعت و ضریب تناسب نیز $\frac{m}{\text{٤٠}}$ باشد سرعت و فاصله گلوله را در لحظه t بدست آورید.



شکل ۲۰ . ۳۰

حل - بنابفرض مسئله نیروی مقاومت هوا برابر $\left(\frac{m}{\text{٤٠}}\right)v$ است.

وزن جرم m برابر mg بوده وجهت این نیرو بسوی پایین میباشد. اگر مانند شکل (۲۰ . ۳) این جهت را جهت مثبت اختیار کنیم معادله دیفرانسیل (۳۱٤ . ۳) (بادرنظرداشتن این مطلب که جرم × شتاب = برآیند نیروهای وارده برجسم) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$m\frac{dv}{dt}=gm-\frac{m}{\text{٤٠}}v \qquad \text{(I)}$$

از آنجایی که نیروی ثقل g درجهت مثبت وارد میشود بدین جهت است که این نیرو دراین مسئله مثبت است. معادله (I) خطی بوده و برای حل آن به ترتیب چنین داریم:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{\text{١}}{\text{٤٠}}v=g$$

و یا:

$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{\text{١}}{\text{٤٠}}t}\right)=ge^{\frac{\text{١}}{\text{٤٠}}t}$$

پس:

$$v=\text{٤٠}g+c_{\text{١}}e^{-\frac{t}{\text{٤٠}}} \qquad \text{(II)}$$

و پس ازانتگرال گیری ازمعادله اخیرخواهیم داشت:

$$y=\text{٤٠}gt-\text{٤٠}c_{\text{١}}e^{-\frac{t}{\text{٤٠}}}+c_{\text{٢}} \qquad \text{(III)}$$

اگر نقطه‌یی که جسم را از آن نقطه رها کرده‌ایم مبدأ اختیار کنیم دراینصورت شرایط اولیه $t=0$, $v=0$, $y=0$ میباشند. اکنون اگر این شرایط اولیه را در روابط (II) و (III) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$c_{١}=-٤٠g \quad , \quad c_{٢}=-١٦٠٠g$$

پس معادلات خواسته شده عبارت خواهند بود از :

$$(IV) \qquad v=٤٠g(١-e^{-\frac{t}{٤٠}}) \quad , \quad y=٤٠g(t+٤٠e^{-\frac{t}{٤٠}}-٤٠)$$

مثال ٣- فنری را که میتوان وزن آنرا نادیده گرفت بطور عمودی آویزان نگاهداشته و جرم m را به انتهای دیگر فنر وصل کرده‌ایم . چنانچه سرعت این جرم درحالتی که فنر کشیده نیست v_{0} باشد سرعت فنر را برحسب تابعی از y ، طول کشش فنر بیان کنید .

حل - بنابر قانون **هوك*** نیروی فنر (نیرویی که از باز شدن فنر جلوگیری میکند) متناسب با طول کشش میباشد و لذا اگر مانند مثال بالا جهت مثبت را بسوی پایین اختیار کنیم خواهیم داشت :

برآیند نیروهای وارده برجسم = وزن جسم — نیروی فنر

یعنی :

$$m\frac{dv}{dt}=mg-ky$$

ویا :

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=mv\frac{dv}{dy}=mg=ky$$

و پس‌از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$mv^{٢}=٢mgy-ky^{٢}+c$$

ولی بنابفرض هنگامی که فنر باز نیست $(y=o)$ سرعت جرم m برابر v_{0} میباشد یعنی $c=mv_{0}$ و از آنجا :

$$mv^{٢}=٢mgy-ky^{٢}+mv_{0}^{٢}$$

مثال ٤- چتر بازی با سرعت ١٧٦ فوت در ثانیه در هنگامیکه چتر او باز میشود سقوط میکند . اگر مقاومت هوا $\frac{wv^{٢}}{٢٥٦}$ پوند که در آن w مجموع وزن چتر باز و چتر است باشد سرعت او را پس‌از باز شدن چتر برحسب تابعی از زمان t پیدا کنید .

Hook *

حل - جهت مثبت را بسوی پایین اختیارکرده و برآیند نیروهای وارده برجسم را با رابطه زیر تعیین میکنیم :

برآیند نیروهای وارده بردستگاه=وزن دستگاه—مقاومت هوا

بالنتیجه معادله دیفرانسیل (٣ . ٢١٤) بصورت زیر درمیآید :

$$\text{(I)}\qquad \frac{w}{g}\cdot\frac{dv}{dt}=w-\frac{wv^{٢}}{٢٥٦} \quad \text{و یا} \quad \frac{dv}{v^{٢}-٢٥٦}=-\frac{dt}{٨}$$

درمعادله دوم رابطه (I) مقدار $g=٣٢$ اختیار شده است. اکنون اگراز این معادله بین زوج مقادیر $(t=o\ ,\ v=١٧٦)$ و $(t=t\ ,\ v=v)$ انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\int_{١٧٦}^{v}\frac{dv}{v^{٢}-٢٥٦}=-\frac{١}{٨}\int_{o}^{t}dt \quad \text{و یا} \quad \frac{١}{٣٢}\left[Log\frac{v-١٦}{v+١٦}\right]_{١٧٦}^{v}=\left(-\frac{t}{٨}\right)_{o}^{t}$$

پس :

$$Log\frac{v-١٦}{v+١٦}-Log\frac{٥}{٦}=-٤t \quad \text{و یا} \quad \frac{v-١٦}{v+١٦}=\frac{٥}{٦}e^{-٤t}$$

و از آنجا :

$$\text{(II)}\qquad v=١٦\cdot\frac{٦+٥e^{-٤t}}{٦-٥e^{-٤t}}$$

تبصره ٢ - چنانچه در روابط (IV) مثال (٢) و (II) مثال (٤) t بسوی $+\infty$ میل کند سرعتهای متناظربه‌ترتیب‌بسوی ٤٠g و ١٦ فوت در ثانیه میل خواهند نمود. یعنی چنانچه عامل مقاومتی موجود باشد سرعت نمیتواند بطور نامحدودی با زمان افزایش یابد بلکه بسوی حدی میل خواهد نمود که سرعت نمیتواند از آن عدد تجاوز کند . این سرعت را **سرعت حدی** اجسامی که سقوط میکنند مینامیم در مثال ٢ سرعت حدی ٤٠g است درصورتیکه سرعت حدی مثال ٤ برابر ١٦ فوت در ثانیه میباشد .

مثال ٥ - قطره بارانی از ابر بی‌حرکتی سقوط میکند. چنانچه نیروی مقاومت هوا متناسب با توان دوم سرعت باشد سرعت لحظه t را برحسب تابعی از فاصله‌یی که سقوط میکند پیدا کرده و سپس سرعت حدی را بدست آورید .

حل - اگرجهت مثبت رابسوی پایین اختیار کنیم معادله دیفرانسیل حرکت (٣ . ٣١٤) مبدل به :

$$\text{(I)}\qquad m\frac{dv}{dt}=mg-kv^{٢}$$

میگردد که در آن $k > 0$ ضریب تناسب ثابتی میباشد .

چون منظور یافتن v برحسب y میباشد لذا به ترتیب چنین عمل میکنیم :

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=mv\frac{dv}{dy}=mg-kv^{۲}$$

و از آنجا :

$$\frac{vdv}{mg-kv^{۲}}=\frac{dy}{m} \qquad \text{(II)}$$

اگر ابر را مبدأ اختیار کنیم شرایط اولیه ($y=0$ و $v=0$) بدست میاید. انتگرال گیری رابطه (II) و درج شرایط اولیه اخیر منجر به معادله زیر میگردد :

$$\int_{v=0}^{v}\frac{vdv}{mg-kv^{۲}}=\frac{۱}{m}\int_{y=0}^{y}dy$$

$$-\frac{۱}{۲k}Log\frac{mg-kv^{۲}}{mg}=\frac{y}{m}\ ;\quad mg-kv^{۲}=mge^{-\frac{۲ky}{m}}$$

$$\text{(III)}\qquad v^{۲}=\frac{mg}{k}\left(۱-e^{-\frac{۲ky}{m}}\right)$$

اگر $t \to \infty$ فاصله y یعنی فاصله سقوط قطره باران بسوی بینهایت میل خواهد نمود و ازآنجا در رابطه (III) مجذورسرعت یعنی $v^{۲}$ بسوی $\frac{mg}{k}$ میل نموده وازآنجا سرعت حدی عبارت خواهد بود از :

$$T.v=\sqrt{\frac{mg}{k}} \qquad \text{(IV)}$$

باید توجه داشت که چون دراین مسئله جسم سقوط مینماید و جهت مثبت نیز بسوی پایین است در معادله (IV) باید برای سرعت حدی ریشه دوم مثبت اختیارگردد .

تبصره ۳ - ازآنجایی که رابطه (IV) فاقد y و سرعت اولیه است لذا سرعت حدی بستگی به سرعت اولیه وارتفاعی که قطره باران ازآن نزول میکند ندارد. از تجارب واقعی میدانیم که قطره باران پس‌از زمان محدودی (نه در زمان نامحدود) به سرعت حدی

خود میرسد واین بواسطه آن‌است که گذشته ازنیروی مقاومت‌هوا عوامل دیگری در کاهش سرعت قطره باران تأثیر مینماید .

تبصره ٤- جسمی که در آب سقوط میکند مانند جسمی که از ارتفاعی در هوا بطرف زمین رها میشود مواجه با نیروی مقاومتی میگردد . اگر اندازه سرعت کوچک باشد مقاومت آب تقریباً متناسب با توان اول سرعت خواهد بود و اگر مانند معمول جهت مثبت را بسوی پایین اختیارکنیم معادله دیفرانسیل (٣١٤ ، ٣) بصورت زیر درمیآید :

$$(\mathrm{I}) \qquad m\frac{dv}{dt}=mg-kv$$

معادله بالا مشابه رابطه (I) مثال دو میباشد .

مثال ٦- جسمی بجرم m اسلاگ ازحالت سکون‌در محیطی که نیروی مقاومت (پوند) آن متناسب با مجذورسرعت(فوت در ثانیه) است سقوط میکند . اگر سرعت حدی جسم ١٥٠ فوت در ثانیه باشد مطلوب است تعیین :

الف ـ سرعت پس‌از دو ثانیه .

ب ـ زمان لازم برای آنکه سرعت جسم به ١٠٠ فوت در ثانیه برسد .

حل - اگر مانند قبل جهت مثبت‌را بسوی پایین‌اختیارکرده و v نمایش سرعت‌جسم درثانیه t ام باشد معادله حرکت عبارت خواهد بود از :

$$(\mathrm{I}) \qquad m\frac{dv}{dt}=mg-Kv^{٢}$$

اگر g را مطابق معمول ٣٢ فوت در مربع سرعت و $K=٢mk^{٢}$ اختیار نماییم رابطه (I) بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dv}{dt}=٢(١٦-k^{٢}v^{٢}) \quad , \quad \frac{dv}{k^{٢}v^{٢}-١٦}=-٢dt$$

و پس‌از انتگرال گیری :

$$(\mathrm{II}) \qquad Log\frac{kv-٤}{kv+٤}=-١٦kt+Log c \quad , \quad \frac{kv-٤}{kv+٤}=ce^{-١٦kt}$$

ولی ازآنجایی که بنابفرض مسئله جسم از حالت سکون بحرکت در میآید لذا بازاء $t=o$ مقدار $v=o$ است . بنابراین اگر مقادیر اخیر را در معادله دوم رابطه (II) قرار دهیم $c=-١$ گردیده و از آنجا :

$$\frac{kv-٤}{kv+٤}=-e^{-١٦kt} \qquad \text{(III)}$$

اگر در رابطه (III) t را بسوی $+\infty$ میل داده و درنظر داشته باشیم که سرعت حدی برابر ۱۵۰ فوت درثانیه است خواهیم داشت :

$$١٥٠k-٤=0 \quad \text{و یا} \quad k=\frac{٢}{٧٥}$$

و از آنجا :

$$\frac{v-١٥٠}{v+١٥٠}=-e^{-٠ر٤٣t} \qquad \text{(IV)}$$

الف ـ اگر در رابطه (IV) t را برابر ۲ اختیار کنیم نتیجه میشود که :

$$\frac{v-١٥٠}{v+١٥٠}=-e^{-٠ر٨٦}=-٠ر٤٢٣$$

وازآنجا $v=٦١$ فوت در ثانیه میگردد.

ب ـ بازاء $v=١٠٠$ رابطه (IV) بصورت زیر نوشته میشود :

$$-e^{-٠ر٤٣t}=\frac{١٠٠-١٥٠}{١٠٠+١٥٠}=-٠ر٢=-e^{-١ر٦} \quad , \quad t=٣ر٧ \text{ ثانیه}$$

مثال ۷- جسمی بجرم m اسلاگ در محیطی که نیروی مقاومت (پوند) متناسب با سرعت است (فوت‌درثانیه) ازحالت سکون سقوط میکند. اگروزن مخصوص محیط برابر $\frac{١}{٤}$ وزن مخصوص جسم و سرعت حدی جسم ۲٤ فوت در ثانیه باشد مطلوب است تعیین :

الف ـ سرعت در پایان ثانیه سوم .

ب ـ فاصله‌یی که جسم در طول ۳ ثانیه می‌پیماید .

حل - فرض میکنیم v سرعت جسم در لحظه t باشد. علاوه بردو نیرویی که مانند مثال ٦ برجسم‌وارد میشود نیروی‌سومی که ازتفاوت بین وزن مخصوص محیط وجسم حاصل میگردد برجسم تأثیر میکند. نشان میدهند که مقدار این نیرو از حیث مقدار برابر وزن محیطی است که جسم در آن تغییر مکان می‌یابد و از حیث جهت ، مخالف‌نیروی‌ثقل است. لذا معادله حرکت بصورت زیر درمیآید :

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\frac{١}{٤}mg-Kv=\frac{٣}{٤}mg-Kv$$

با انتخاب $g=۳۲$ فوت در مجذور سرعت و $K=۳mk$ معادله بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{dv}{dt}=۳(۸-kv) \quad , \quad \frac{dv}{۸-kv}=۳dt$$

وپس ازانتگرال گیری بین زوج مقادیر $(t=o ; v=o)$ و $(t=t ; v=v)$ خواهیم داشت:

$$-\frac{۱}{k}[Log(۸-kv)]_o^V=[۳t]_o^T \quad , \quad -Log(۸-kv)+Log۸=۳kt \quad ,$$

$$kv=۸(۱-e^{-۳kt})$$

ولی بنابرفرض سرعت حدی برابر ۲۴ فوت در ثانیه است . یعنی اگر $t \to \infty$ مقدار $v=۲۴$ میباشد و ازآنجا $k=\frac{۱}{۳}$ بوده و لذا :

$$v=۲۴(۱-e^{-t})$$

الف ـ بازاء $t=۳$ چنین داریم :

$$v=۲۴(۱-e^{-۳})=۲۲٫۸ \quad \text{فوت در ثانیه}$$

ب ـ اگرمعادله $v=\frac{dy}{dt}=۲۴(۱-e^{-t})$ را بین زوج مقادیر $(t=o ; y=o$ و $(t=۳ ; y=y)$ انتگره کنیم خواهیم داشت :

$$[y]_o^y=۲۴[(۱+e^{-t})]_o^۳ \quad , \quad y=۲۴(۲+e^{-۳})=۴۹٫۲ \quad \text{فوت}$$

مثال ۸- شخصی با چترنجات از هواپیمایی که بطور افقی حرکت میکند از ارتفاع زیادی فرود میآید وپس از ۱۰ ثانیه چتر خود را باز میکند. اگر مجموع وزن شخص وچتر ۱۶۰ پوند باشد و نیروی مقاومت هوا به‌ترتیب زیر متناسب با توان اول سرعت باشد :

۱ـ هنگامی که چتر بسته است این نیرو برابر $\frac{۱}{۲}v$ میباشد .

۲ـ اگر چتر باز باشد نیروی مقاومت برابر $۱۰v$ است .

اولاً ـ سرعت چترباز را پس از ۱۰ ثانیه بدست آورید.

ثانیاً ـ سرعت حدی را تعیین کنید (یعنی سرعت تقریبی که چتر باز باآن سرعت‌بزمین میرسد) .

حل - اگر جهت مثبت‌را بسوی‌پایین اختیار کنیم پس‌از ۱۰ ثانیه اول سقوط جسم، معادله دیفرانسیل حرکت (۳۱۴ . ۳) عبارت خواهد بود از :

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\frac{۱}{۲}v$$

از طرف دیگر نیروی mg که جهت آن نیز بسوی پایین میباشد برابر ۱۶۰ پوند بوده و بالنتیجه جرم m برابر $۵=\frac{۱۶۰}{۳۲}$ اسلاگ است و از آنجا رابطه بالا منجر به معادله :

$$۵\frac{dv}{dt}=۱۶۰-\frac{۱}{۲}v \quad , \quad \frac{dv}{dt}+\frac{۱}{۱۰}v=۳۲$$

که دارای جواب عمومی :

$$v=۳۲۰+ce^{-۰٫۱t} \qquad \text{(I)}$$

است میگردد . اگر مبدأ را هنگامیکه چترباز ازهواپیما بسوی زمین فرود میآید اختیار کنیم در اینصورت $v=0$ و $t=0$ بوده و اگر مقادیر اخیر را در رابطه (I) قرار دهیم $c=-۳۲۰$ میگردد . بنابراین :

$$v=۳۲۰(۱-e^{-۰٫۱t})$$

اکنون اگر در معادله اخیر $t=۱۰$ باشد چنین داریم :

$$v=۳۲۰(۱-e^{-۱})=۳۲۰(۰٫۶۳۲۱)=۲۰۲٫۳ \text{ فوت در ثانیه} \qquad \text{(II)}$$

بعدازثانیه دهم وبادرنظر گرفتن‌آنکه پس‌ازاین لحظه‌نیروی مقاوت برابر ۱۰v است معادله دیفرانسیل (۳۱۴ . ۳) مبدل به :

$$۵\frac{dv}{dt}=۱۶۰-۱۰v \quad , \quad \frac{dv}{dt}+۲v=۳۲$$

که دارای جواب عمومی $v=۱۶+ce^{-۲t}$ است میگردد . اگر در این معادله شرایط اولیه را که بنابررابطه (II) عبارت‌از ($v=۲۰۲٫۳$ و $t=0$) است قراردهیم $c=۱۸۶٫۳$ گردیده و از آنجا خواهیم داشت :

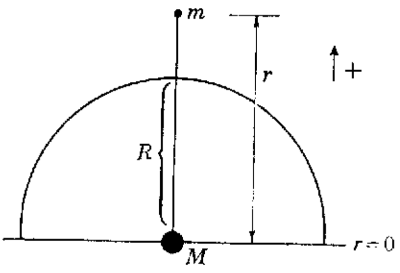
$$v=۱۶+۱۸۶٫۳e^{-۲t} \qquad \text{(III)}$$

اگر در معادله بالا $t=۵$ ثانیه باشد یعنی ۵ ثانیه پس‌از باز شدن چتر ویا ۱۵ ثانیه‌پس‌از فرود آمدن از هواپیما سرعت چتر باز عبارت خواهد بود از :

$$(IV)\qquad v = ۱۶ + ۱۸۶٫۳e^{-۱۰} = ۱۶ + ۱۸۶٫۳(۰٫۰۰۰۰۴۵)$$

$$= ۱۶ + ۰٫۰۰۸ = ۱۶٫۰۰۸$$ فوت درثانیه

اگر در رابطه (III) ، $t \to \infty$ سرعت حدی برابر ۱۶ فوت در ثانیه خواهد گردید . از رابطه (IV) معلوم میگردد چتر از ۵ ثانیه پس از باز شدن چتر با سرعتی که عملاً برابر ۱۶ فوت در ثانیه است فرود میآید .



شکل ۳ . ۲۱

تبصره ۵- دربدست‌آوردن رابطه (۳ . ۳۱۴) در مورد سقوط قائم جسم فرض نمودیم که y فاصله آن از سطح زمین نسبت به R شعاع زمین نسبتاً کوچک باشد و با این فرض توانستیم از y صرفنظر کنیم . ولی اگر جسم در فاصله دوری از سطح زمین قرار گرفته باشد نمیتوان از این فاصله چشم پوشی نمود ودراینحالت معادله (۳ . ۳۱۱) بصورت زیر درمیآید :

$$F = -\frac{GMm}{r^{۲}} \qquad (۳ . ۳۱۸)$$

که در آن M جرم زمین که در مرکز ثقل زمین متمرکز شده و r فاصله جسم از این مرکز (به شکل ۳ . ۲۱ رجوع گردد) میباشد . با استفاده از رابطه (۳ . ۳) رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{GMm}{r^{۲}} \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^{۲}} \qquad (۳ . ۳۱۹)$$

ازآنجایی که G و M ثابت میباشند لذا $GM = k$ است و بالنتیجه :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{r^{۲}} \quad ; \quad \frac{d^{۲}r}{dt^{۲}} = -\frac{k}{r^{۲}} \qquad (۳ . ۳۱۱۰)$$

که در آن $v = \frac{dr}{dt}$.

از معادله (۳ . ۳۱۱۰) نتیجه میگیریم که شتاب جسمی که در میدان جاذبه زمین قرار دارد معکوساً با مجذور فاصله آن از مرکز زمین تغییر میکند .

مثال ۹- جسمی را که بفاصله 5R از مرکز زمین واقع شده است (R شعاع کره

زمین وبرابر ۴۰۰۰ میل است) از حالت سکون دراستداد شاغول بطرف پایین رها میکنیم.

الف ـ سرعت جسم را هنگام برخورد باسطح زمین حساب کنید .

ب ـ سرعت متناظر با سقوط از فاصله بینهایت را تعیین کنید . بعبارت دیگر جرم را با چه سرعتی در امتداد شاغول باید به‌بالا پرتاب کرد تا از اثر قوه جاذبه زمین خارج گردد (ازجمیع سایر نیروها مانند نیروی مالشی‌وغیره صرفنظرمیکنیم) .

حل ـ با انتخاب مبدأدر مرکز زمین‌و بادرنظر داشتن این مطلب که بنابفرض مسئله تنها نیروی‌وارد برجسم نیروی جاذبه میباشد ، لذا درسطح زمین $(r=R)$ نیروی جاذبه همان mg بوده و با توجه به جهت مثبت ، رابطه (۳ . ۳۱۱۰) بصورت زیر درمیآید :

$$-\frac{mg}{m}=-\frac{k}{R^{۲}} \quad \text{و یا} \quad k=gR^{۲} \tag{I}$$

پس‌ازجایگزین نمودن مقدار k درمعادله (۳ . ۳۱۱۰) خواهیم داشت :

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr}=-\frac{gR^{۲}}{r^{۲}} \quad \text{و یا} \quad vdv=-\frac{gR^{۲}dr}{r^{۲}} \tag{II}$$

الف ـ اگرمعادله‌بالارا بین زوج مقادیر $(r=٥R \; ; \; v=0)$ و $(r=R \; ; \; v=v)$ انتگره کنیم چنین داریم :

$$\int_{۰}^{v} vdv=-gR^{۲}\int_{٥R}^{R}\frac{dr}{r^{۲}} \quad ; \quad \frac{۱}{۲}v^{۲}=gR^{۲}\left(\frac{۱}{R}-\frac{۱}{٥R}\right)=\frac{٤}{٥}\,gR$$

$$v^{۲}=\frac{۸}{٥}\,(۳۲)(٤۰۰۰)(٥۲۸۰) \quad , \quad v=۲٥٦۰\sqrt{۱٦۳}$$

یعنی جسم با سرعت ٦ میل در ثانیه بزمین برخورد میکند .

ب ـ اگر معادله $vdv=-gR^{۲}\frac{dr}{r^{۲}}$ را بین زوج‌مقادیر $(v=0 \; ; \; r\to\infty)$ و $(r=R \; ; \; v=v)$ انتگره کنیم چنین‌داریم :

$$\int_{۰}^{v} vdv=-gR^{۲}\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^{۲}} \quad , \quad v^{۲}=۲gR \quad \text{و یا} \quad v=٦٤۰۰\sqrt{۳۳}$$ فوت‌درثانیه

بعبارت دیگر جسم را با سرعت ۷ میل در ثانیه در امتداد شاغول باید به‌بالا پرتاب نمود تا از اثر قوه جاذبه زمین خارج گردد .

مثال ۱۰- جسمی را باسرعت اولیه v_0 در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میکنیم. اگر از مقاومت هوا صرفنظر گردد :

۱- v سرعت جسم را برحسب تابعی‌از r فاصله جسم از مرکز زمین تعیین کنید .

۲- سرعت جسم را در ارتفاع ۴۰۰۰ میلی از سطح زمین بدست آورید .

۳- تاچه ارتفاعی جسم صعود خواهد کرد .

۴- مقدار سرعت‌اولیه v_0 را چنان تعیین کنید که جسم از میدان‌قوه جاذبه زمین‌خارج گردد یعنی بعبارت دیگر جسم هرگز بزمین باز نگردد .

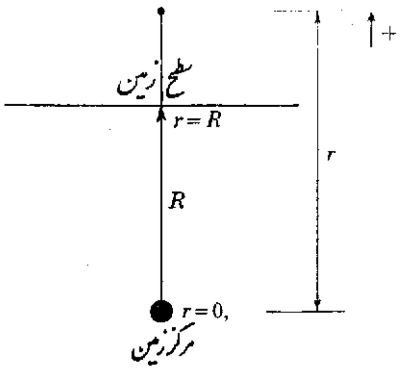
۵- زمان t را برحسب تابعی از r فاصله جسم از مرکز زمین بدست‌آورید .

حل - با توجه به شکل (۲۲ . ۳) و انتخاب مبدأ در مرکز زمین و بطریق مشابه مثال ۹ میتوان معادله حرکت این جسم را که بصورت :

$$vdv = -\frac{gR^2}{r^2}\,dr \qquad \text{(I)}$$

است (مشابه معادله دوم رابطه (II) مثال ۹) بدست‌آورد. پس‌از انتگرال گیری از رابطه (I) و درج شرایط اولیه ($v=v_0$ و $r=R$) خواهیم داشت :

$$\int_{v=v_0}^{v} vdv = -gR^2\int_{r=R}^{r}\frac{dr}{r^2}$$



شکل ۲۲ . ۳

یعنی :

$$v^{۲}=v_{\circ}^{۲}+\frac{۲gR^{۲}}{r}-۲gR=v_{\circ}^{۲}+۲gR\left(\frac{R}{r}-۱\right) \qquad \text{(II)}$$

از رابطه (II) میتوان مقدارسرعت v را برحسب تابعی‌از r بطریق زیر نوشت :

$$v=\pm\sqrt{v_{\circ}^{۲}+۲gR\left(\frac{R}{r}-۱\right)} \qquad \text{(III)}$$

برحسب آنکه جسم صعود یا سقوط کند به ترتیب باید علایم مثبت یا منفی رادیکال فوق را انتخاب کرد . رابطه (III) جواب سئوال اول میباشد .

۲- چون مبدأ مختصات در مرکززمین فرض شده و شعاع زمین نیز تقریباً ۴۰۰۰ میل است لذا هنگامیکه جسم بارتفاع ۴۰۰۰ میلی ازسطح زمین میرسد $r=۸۰۰۰$ میل خواهد بود . اگر مقدار اخیر r را در رابطه (III) قرار دهیم سرعت جسم دراین ارتفاع بدست میآید یعنی :

$$v=\pm\sqrt{v_{\circ}^{۲}+۲gR\left(\frac{R}{۸۰۰۰}-۱\right)}=\pm\sqrt{v_{\circ}^{۲}-۴۰۰۰g}$$

۳- جسم تا زمانی که سرعت آن صفر نگردیده است صعود میکند و لذا برای یافتن این ارتفاع کافی‌است که در رابطه (III) مقدار v را برابر صفر اختیار کنیم یعنی :

$$0=v_{\circ}^{۲}+۲gR\left(\frac{R}{r}-۱\right) \quad , \quad r=\frac{۲gR^{۲}}{۲gR-v_{\circ}^{۲}}$$

مقدار r که از رابطه بالا بدست میآید فاصله‌یی که جسم با سرعت اولیه $v_{\circ}$ صعود میکند تا مرکززمین میباشد وبرای‌بدست‌آوردن ارتفاعی که جسم‌ازسطح زمین صعود میکند کافی‌است تفاضل R را از رابطه دوم بالا بیابیم یعنی :

$$r=\frac{\frac{Rv_{\circ}^{۲}}{۲gR^{۲}}}{۲gR-v_{\circ}^{۲}}-R=\frac{Rv_{\circ}^{۲}}{۲gR-v_{\circ}^{۲}}$$

۴- اگر فاصله r با زمان افزایش یابد جسم ازقوه ثقل زمین خارج خواهد گردید یعنی هرگز جسم بزمین باز نمیگردد . معنی این عبارت آن است هنگامی که v سرعت جسم بسوی صفر میل میکند میخواهیم r نیز بسوی بینهایت میل کند . ازمعادله (III) چنین

برمیاید که اگر $v_0^{٢}=٢gR$ باشد هنگامیکه v بسوی صفر میل میکند r نیز بسوی $+\infty$ میل مینماید و از آنجا جواب سئوال چهارم عبارت است از :

$$v_0=\sqrt{٢gR}=\sqrt{٢(٣٢)(٤٠٠٠)(٥٢٨٠)}=٣٦٧٦٥$$ فوت درثانیه

میل در ثانیه* ٧ #

و بالنتیجه اگر از مقاومت هوا صرفنظر گردد سرعت فرار جسم تقریباً برابر ٢٦١٠٠ میل در ساعت خواهد بود .

٥- اگر درمعادله (III) بجای v مقدار $\frac{dr}{dt}$ را قرار داده و فرض کنیم :

$$a=٢gR^{٢} \quad , \quad b=v_0^{٢}-٢gR$$

معادله (III) بصورت زیر درمیاید :

$$\text{(IV)} \qquad v=\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{a}{r}+b}=\pm\sqrt{\frac{a+br}{r}}=\pm\frac{١}{r}\sqrt{ar+br^{٢}}$$

هنگامیکه جسم صعود مینماید سرعت مثبت بوده و رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$\text{(V)} \qquad dt=\frac{rdr}{\sqrt{ar+br^{٢}}}=\frac{١}{٢b}\cdot\frac{(a+٢br)dr}{\sqrt{ar+br^{٢}}}-\frac{a}{٢b}\cdot\frac{dr}{\sqrt{ar+br^{٢}}}$$

اگر فرض کنیم جسم نتواند از میدان ثقل زمین خارج شود یعنی $v_0^{٢}<٢gR$ و یا $b=v_0^{٢}-٢gR<o$ باشد پس از انتگرال گیری رابطه (V) خواهیم داشت :

(VI)

$$t=A+\frac{١}{b}\sqrt{ar+br^{٢}}-\frac{a}{٢b\sqrt{-b}}\,\mathrm{Arc}sin\left(\frac{-٢br-a}{a}\right) \quad , \quad b<o$$

اگر درمعادله بالا شرایط اولیه $(r=R \ , \ t=o)$ راقرار دهیم چنین داریم :

---

* اگر g برابر ٣٢ فوت برمجذور ثانیه باشد سرعت اولیه v_0 بجای ٧ میل در ثانیه تقریباً برابر ٦ر٩٦ میل درثانیه میگردد ولی اگر g نزدیک به ٣٢ر١٧ فوت در مجذور سرعت اختیار گردد مقدار سرعت اولیه v_0 برابر ٦ر٩٨ میل درثانیه میگردد .

$$A=-\frac{۱}{b}\sqrt{aR+bR^{۲}}+\frac{a}{۲b\sqrt{-b}}\,\mathrm{Arc}sin\left(\frac{-۲bR-a}{a}\right)\quad,\quad b<0$$

بالاخره اگر مقدار A را در رابطه (VI) قرار دهیم رابطه اخیر زمان t را برحسب، فاصله r مشخص میکند .

تبصره ۶- هنگامیکه جسم سقوط میکند v منفی بوده و لذا در مورد سقوط اجسام باید علامت منفی رابطه (IV) را اختیارکرد. یعنی :

$$v=-\sqrt{\frac{a}{r}+b}$$

بطریق مشابه میتوان‌رابطه متناظر(V) را بدست آورد و یا اگر مایل باشیم میتوانیم رابطه (II) مثال۱۱ را بکار بریم. همانطورکه‌بعداً توضیح داده خواهد شد این رابطه زمان سقوط جسم را برحسب‌تابعی از t و شرایط اولیه ($t=0$, $v=0$ و $r=r_0$) بیان میکند .

اگر فرض کنیم $b=0$ یعنی $v_0^{۲}=۲gR$ باشد و یا بعبارت دیگر جسم از قوه ثقل زمین خارج گردد رابطه (II) بصورت ساده زیر در میآید :

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{\sqrt{۲g}\,R}{r^{\frac{۱}{۲}}}\quad,\quad r^{\frac{۱}{۲}}dr=\sqrt{۲g}\,Rdt\quad,\quad \frac{۲}{۳}r^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{۲g}\,Rt+c$$

و بالاخره اگر در معادله دوم رابطه بالا مقادیر $t=0$ و $r=R$ اختیارگردد خواهیم داشت $c=\frac{۲}{۳}R^{\frac{۳}{۲}}$. یعنی :

$$\text{(VII)}\qquad t=\frac{۲}{۳R\sqrt{۲g}}\left(r^{\frac{۳}{۲}}-R^{\frac{۳}{۲}}\right)$$

تبصره ۷- الف - اگر در معادله (۲۱۹۰ . ۳) r بسوی بینهایت میل کند شتاب $\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}}$ که از نیروی جاذبه زمین ناشی میشود بسوی صفر میل میکند. یعنی اگر چه تأثیر میدان ثقل زمین هرگز صفر نمیگردد ولی تأثیر این نیرو چندان مؤثر نخواهد بود .

ب - اگردر معادله (II) سرعت‌اولیه v_0 برابر سرعت فرار جسم یعنی $v_0^{۲}=۲gR$

باشد معادله سرعت منجر به $v^۲=\frac{۲gR^۲}{r}$ خواهد گردید و از آنجا هرچه r بزرگتر گردد سرعت جسم تا زمانی که وارد میدان ثقل جسم سماوی دیگری نشده است کاهش مییابد. اگر $v_o^۲ > ۲gR$ باشد $v_o^۲-۲gR$ برابر مقدارثابت مثبتی مانند $k^۲$ میشود و بنابراین معادله سرعت (II) منجر به معادله $v^۲=k^۲+\frac{۲gR^۲}{r}$ میگردد. درمعادله اخیر اگر $r \to \infty$ سرعت $v \to k$ میل خواهد نمود.

پ - اگر $v_o^۲=۲gR$ باشد معادله (VII) زمان t را برحسب تابعی از r بیان میکند. اگر در معادله اخیر r بسوی بینهایت میل کند t نیز بسوی بینهایت میل خواهد نمود.

مثال ۱۱- جسمی از فضای بین سیارات و از فاصله r_o از مرکز زمین سقوط میکند.

الف - اگر r فاصله جسم از مرکز زمین باشد v سرعت جسم را برحسب تابعی از فاصله r پیدا کنید.

ب - سرعت جسم را در هنگام برخورد با سطح زمین بیابید.

پ - زمان t را برحسب تابعی از فاصله r بیابید.

حل - چنانچه مانند مثال بالا مرکز زمین را مبدأ وجهت مثبت را بسوی بالا اختیار کنیم بطریق مشابه‌بامثال ۹ میتوان‌نشان داد که معادله دیفرانسیل حرکت جسم عبارت‌از:

$$vdv=-\frac{gR^۲}{r^۲}dr$$

میباشد.

الف - اگراز معادله بالاانتگرال گرفته وشرایط اولیه $(t=0 \;;\; r=r_o)$ را حدود تحتانی انتگرال فرض کنیم به ترتیب چنین داریم:

$$\text{(I)} \qquad \int_{v=0}^{v} vdv=-gR^۲\int_{r=r_o}^{r}\frac{dr}{r}$$

یعنی:

$$v^۲=۲gR^۲\left(\frac{۱}{r}-\frac{۱}{r_o}\right)$$

ب - چنانچه در رابطه بالا مقدار $r=R$ اختیار گردد سرعت جسم در سطح زمین

بدست میاید یعنی :

$$v = -\sqrt{2gR - \frac{2gR^2}{r_0}} \qquad \text{(II)}$$

ازآنجایی که بنابفرض جهت مثبت بسوی بالا و جسم نیز بسوی پایین حرکت میکند لذا باید سرعت منفی باشد .

از رابطه (II) بسهولت معلوم میگردد که اگر r_0 خیلی بزرگ باشد یعنی جسم در فاصله دوری از مرکز زمین قرارگرفته باشد دراینصورت $\frac{2gR^2}{r_0}$ خیلی نزدیک صفر بوده و v بینهایت نزدیک به $\sqrt{2gR}$ ولی کوچکتر از آن میباشد . یعنی سرعت جسمی که از فضای خارجی سقوط میکند نمیتواند از $\sqrt{2gR}$ تجاوز نماید .

از طرف دیگر بنابر قسمت چهارم مثال ۱۰ مقدار $\sqrt{2gR}$ برابر ۲۵۱۰۰ میل درساعت بوده وازآنجا اگر ازمقاومت هوا صرفنظر شود جسمی که ازفضای بین سیارات سقوط میکند درسطح زمین سرعتی خواهد داشت که با ۲۵۱۰۰ میل درساعت اختلاف بسیار ناچیزی دارد .

پ ـ اگر استدلال مثال ۱۰ را تکرارکنیم میتوان زمان t را برحسب تابع r بطریق زیر یافت :

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{r_0}}{R\sqrt{2g}}\left[\sqrt{r_0 r - r^2} + \frac{r_0}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\mathit{sin}\,\frac{2r - r_0}{r_0}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{r_0}}{R\sqrt{2g}}\left(\sqrt{r_0 r - r^2} + \frac{r_0}{2}\operatorname{Arc}\mathit{cos}\,\frac{2r - r_0}{r_0}\right) \end{aligned}$$

تبصره ۸ـ درحل دو مثال ۱۰ و ۱۱ از مقاومت هوا صرفنظرکردیم . ولی‌ازآنجایی که همواره این نیروی مقاومت موجود میباشد سرعت فرار v_0 باید بطورقابل ملاحظه‌یی از $\sqrt{2gR} = ۲۵۱۰۰$ میل در ساعت بیشترباشد تا بتوانداین نیرو را خنثی نماید .

بهرصورت اگر جسمی با سرعتی برابر و یا کمی بیشتر از ۲۵۱۰۰ میل درساعت از اتمسفر زمین خارج گردد* (که تقریباً ۱۰۰ میل بالای سطح زمین میباشد) جسم از قوه

---

* محاسباتی که از تجزیه و تحلیل یکی‌از مسیرهای اقمار مصنوعی امریکا درسال ۱۹۶۲ بعمل آمده است نشان میدهد که چگالی اتمسفر در ۹۳۲ میلی زمین یک هزارمیلیونیم چگالی هوا درسطح دریا است .

جاذبه زمین خارج خواهد گردید. بالعکس درمورد جسمی که ازفضای خارجی سقوط میکند تا زمانی که این جسم به اتمسفر زمین نرسیده است (یعنی تا ارتفاع ۱۰۰ میلی از سطح زمین) ازسرعت جسم که با رابطه (II) مثال ۱۱ مشخص میگردد میتوان نتایج بسیاردقیقی بدست آورد . اگر چه ۱۰۰ میل نسبت به فواصلی که مورد بررسی قرار میگیرند چندان مهم بنظر نمیآید ولی اهمیت‌آن بسیار زیاد بوده و بررسی مسائل خروج از اتمسفرو ورود به اتمسفر اقمار را مشکل میکند .

مسائل

۱- نقطه مادی بجرم m برروی محور s ها در تحت تأثیر نیروی $F(s, v)$ حرکت میکند. اگر درلحظه اولیه $t=0$ سرعت v برابر v_0 و مقدار $s=0$ باشد برای هریک ازمسائل زیرسرعت v و زمان t را برحسب s بیان کنید . h, a, k, b, m مقادیر ثابت مثبتی هستند .

الف - $F=-ks-as^3$ (فنر غیر خطی) .

ب - $F=-\frac{kmb}{(s-b)^2}$ (جذب بانیروی متناسب با معکوس مجذور فاصله).

پ - $F=-bv-hv^3$ (مالش غیر خطی) .

۲- نقطه مادی بجرم m درتحت‌تأثیر نیروی $F=-ks+g(v)$ که درآن k مقدار ثابت مثبتی‌است و $g(v)$ بازاء مقادیر $v \geqslant 0$ برابر $-bv^2$ وبازاء مقادیر $v \leqslant 0$ برابر $+bv^2$ است حرکت میکند. b مقدار ثابت مثبتی میباشد . v را برحسب s یافته ومنحنی مربوطه را درصفحه sv ترسیم کنید. این مسئله را از نقطه نظرفیزیکی تعبیرکنید.

۳- نقطه مادی‌بجرم m روی محور Os در تحت‌تأثیر نیروی F حرکت میکند. اگر درلحظه اولیه $t=0$ مقدارسرعت $v=v_0$ و $s=s_0$ باشد برای هریک ازموارد زیر s و v را برحسب t پیداکنید (k, b, g, m مقادیرثابتی هستند) .

الف - $F=-mg-bv$.   ب - $F=-bv+k\sin t$.

پ - $F=bv^3e^{-kt}$.

۴- جسمی از حالت سکون در هوا سقوط میکند. اگر نیروی مقاومت هوا متناسب با v^2 باشد سرعت جسم را برحسب تابعی از t بیان کنید . (چنانچه گازی در زمان t یونیزه شود معادله دیفرانسیل یونیزه گاز نیز مانند معادله دیفرانسیل بالا خواهد بود) .

۵ـ صحت رابطه (II) مثال ۱۱ را تأیید کنید .

در مسائل ۶ الی ۹ از مقاومت هوا صرفنظر نموده و فرض میکنیم جسم نزدیک سطح زمین باشد .

۶ـ گلوله‌یی را که سرعت اولیه‌اش ۸۰ فوت در ثانیه است از زمین در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میکنیم .

الف ـ اگر زمین را مبدأ و جهت مثبت را بسوی بالا اختیار کنیم معادلات سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بیابید .

ب ـ سرعت و ارتفاع گلوله را پس از یک ثانیه بدست آورید .

پ ـ تا چه ارتفاع و برای چه مدتی گلوله صعود مینماید .

ت ـ درچه زمانی گلوله با زمین برخورد میکند و سرعت گلوله در این لحظه چه خواهد بود .

ث ـ اگر بجای گلوله پرتابه‌یی بوزن پنج تن با شرایط مذکور در این مسئله بسوی بالا پرتاب شود آیا نتایج بالا تغییر میکند .

۷ـ شخصی که به یک طرف پلی تکیه داده است سنگی را در آب سیاندازد . اگر این سنگ پس از ۱ر۲ ثانیه به آب برخورد کند تعیین کنید پل درچه ارتفاعی از سطح آب واقع شده است .

۸ـ گلوله‌یی از ارتفاع ۱۲۰ فوتی با سرعت اولیه ۸ فوت در ثانیه در امتداد شاغول بطرف زمین رها میگردد .

الف ـ درچه زمانی گلوله با زمین برخورد میکند و سرعت گلوله در این لحظه چه خواهد بود .

ب ـ اگر بخواهیم گلوله دیگری توأماً با گلوله اول بزمین برخورد کند تعیین کنید این گلوله را باید از چه ارتفاعی کمتر از گلوله اول بسوی زمین رها کرد .

پ ـ با چه سرعتی گلوله دوم به زمین برخورد میکند .

ت ـ جواب ۳ـ ثانیه که در فرض (الف) بدست میآید تعبیر کنید .

راهنمایی ـ در معادله سرعت $t = -۳$ قرار داده و سپس مسئله زیر را حل کنید :

اگر گلوله‌یی از زمین با سرعت ۸۸ فوت در ثانیه در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب شود تعیین کنید تا چه ارتفاعی گلوله صعود میکند . درچه ارتفاعی سرعت گلوله ۸ فوت درثانیه بسوی پایین خواهد بود . پس از چه مدتی گلوله باین ارتفاع و سرعت میرسد .

۹- شخصی که در ارتفاع ۸۱ فوتی از زمین قرار دارد جسمی را در امتداد شاغول بطرف زمین رها میکند . تعیین کنید شخص دیگری که در ارتفاع ۱۸۰ فوتی زمین قرار دارد باید با چه سرعتی شیئی دیگری را در امتداد شاغول بطرف زمین رها کند تا هردوشیئی در یک لحظه بزمین برخورد کنند .

۱۰- اگر وزن شخصی در روی زمین ۱٦۰ پوند باشد مطلوب است تعیین :

الف - جرم شخص .

ب - اگر شتاب ثقل در سطح ماه تقریباً برابر شتاب ثقل در سطح زمین باشد وزن شخص را در روی سطح ماه بدست آورید .

پ - در سطح ماه روابطی مشابه روابط (۳۸ . ۳) و (۳۹ . ۳) بدست آورید .

۱۱ - گلوله یی که از سطح زمین با سرعت اولیه ٦٤ فوت درثانیه در امتداد شاغول بطرف‌بالا پرتاب میشود پس‌از دو ثانیه به حداکثر ارتفاع خود میرسد. بااستفاده ازقسمت (پ) مسئله ۱۰ اگر این گلوله در سطح ماه بطرف بالا پرتاب شود حداکثر ارتفاعی که میتواند صعود کند و همچنین زمانی که لازم است به این ارتفاع برسد بدست آورید .

۱۲- اگرشخصی بتواند در روی زمین ٥ فوت‌پرش‌ارتفاع کند تعیین کنید این شخص برروی ماه چند فوت میتواند پرش ارتفاع نماید و نسبت بزمانی که در زمین در هوا است در ماه چه مدت بیشتر در هوا خواهد بود . فرض میکنیم که فاصله مرکز ثقل او از نوك میله ۲ فوت باشد . .

۱۳- شخصی که وزنش ۱٦۰ پوند است وارد آسانسوری میشود که با شتاب ۲ فوت در مربع ثانیه درحال فرود آمدن است. وزن او را هنگامیکه درآسانسور است بدست‌آورید.

راهنمایی - جرم همواره ثابت است‌ولی‌هنگامیکه شتاب آسانسور کاهش مییابد برشتاب شخص افزوده میشود .

در مسائل ۱٤الی۲۱ و ۲٤ و ۲٥ فرض میکنیم نیروی R نیروی مقاومت هوا متناسب باتوان اول سرعت است یعنی $R=kv$ و همچنین جسمی که سقوط یا صعود میکند نزدیک سطح زمین قرار دارد .

۱٤- جسمی بجرم m از ارتفاع زیادی سقوط میکند .

الف - با اختیار نمودن جهت مثبت بسوی پایین و انتخاب مبدأ در نقطه یی که جسم از آن نقطه سقوط میکند سرعت و فاصله یی که جسم سقوط میکند برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

راهنمایی ـ در رابطه (I) مثال ٢ شماره (٣١ . ٣) بجای $\frac{m}{٤٠}$ مقدار k را قرار داده واز نتایج حاصله صحت رابطه (IV) همان مثال را تأیید کنید .

ب ـ سرعت حدی جسم را بیابید .

١٥ـ مسئله ١٤ را در موردی که جسم با سرعت اولیه v_0 فوت در ثانیه سقوط میکند حل نمایید . سرعت حدی را یافته و آنرا با قسمت (ب) مسئله چهاردهم مقایسه کنید . ملاحظه مینماییم که سرعت حدی بستگی به سرعت اولیه ندارد .

١٦ـ جسمی که ١٩٢ پوند وزن دارد ارارتفاع زیادی سقوط میکند. اگر k ضریب ثابت تناسب یعنی مقاومت هوا ١٢ باشد .

الف ـ مستقیماً سرعت وفاصله یی را که جسم سقوط میکند برحسب توابعی اززمان یافته و آنرا با قسمت (الف) مسئله ١٤ مقایسه کنید .

ب ـ سرعت حدی را بدست آورید .

پ ـ پس از ١٠ ثانیه جسم چه مقدارسقوط میکند. سرعت جسم رادراین لحظه تعیین کنید .

١٧ـ مسئله ١٦ را در موردی که جسم با سرعت اولیه ١٧٠ فوت در ثانیه سقوط میکند حل کنید . این مسئله را مستقیماً حل نموده و نتیجه را با مسئله ١٥ مقایسه کنید .

١٨ـ چتر بازی از ارتفاع زیادی سقوط آزاد میکند و قبل از باز نمودن چترش سرعت حدی او ١٧٥ فوت درثانیه است . اگر مجموع وزن شخص و چتر ٢٠٠ پوند باشد مطلوب است تعیین :

الف ـ k ضریب تناسب مقاومت هوا .

راهنمایی ـ از رابطه یی که در قسمت (ب) مسئله ١٤ بدست آمده است استفاده کنید .

ب ـ سرعت و فاصله یی که جسم سقوط میکند برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

پ ـ سرعت چترباز را پس از $٨\frac{٣}{٤}$ ثانیه و $١٧\frac{١}{٢}$ ثانیه و $٢٦\frac{١}{٤}$ ثانیه و $٣٢\frac{٥}{٦}$ ثانیه بدست آورید .

ت ـ پس از $٣٢\frac{٥}{٦}$ ثانیه جسم چه مقدارسقوط کرده است .

١٩ـ اگردر مسئله ١٨ فرض کنیم چترباز هنگامی که سرعت او به سرعت ١٧٥ فوت درثانیه میرسد چتر خود را باز کند و چتر او طوری ساخته شده باشد که بتواند با سرعت ١٦ فوت درثانیه بزمین بنشیند مطلوب است تعیین :

الف ـ مقدار جدید k .

راهنمایی ـ از سرعت حدی که در مسئله ۱۵ بدست آمده است استفاده کنید .

ب ـ پس‌ازآنکه چتر خود را باز میکند سرعت و فاصله‌یی که سقوط میکند برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

پ ـ پس‌از ۱ ثانیه ، ۲ ثانیه ، ۳ ثانیه ، ۴ ثانیه و ۵ ثانیه سرعت چترباز را تعیین کنید .

ت ـ پس‌از ۵ ثانیه چه مقدارسقوط نموده است .

ث ـ آیا از جوابهای قسمتهای (پ) و (ت) میتوان ارتفاع سالمی را تعیین نمود که چترباز در آن ارتفاع چتر خود را بازمیکند.

ج ـ اگر چترباز چترش را در ارتفاع ۱۰۴۰ فوتی بازکند پس‌از چند ثانیه بزمین میرسد .

۲۰ـ چتربازی از هواپیمایی که با سرعت زیاد بطور افقی حرکت میکند خارج میشود هنگامیکه درمییابد به سرعت حدی خود رسیده است چتر خود را باز میکند.

الف ـ قبل‌از آنکه چتر خود را بازکند سرعت و فاصله‌یی که سقوط میکند برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

راهنمایی ـ رابطه‌یی که درقسمت (ب) مسئله ۱۴ بدست آمده نسبت به $\frac{m}{k}$ حل کنید .

ب ـ سرعت چترباز را پس‌از ۱۱ $\frac{۱}{۴}$ ثانیه ، ۲۲ $\frac{۱}{۲}$ ثانیه ، ۳۳ $\frac{۳}{۴}$ ثانیه و ۴۵ ثانیه تعیین کنید .

پ ـ پس‌از ۴۵ ثانیه چه مقدار سقوط نموده است .

۲۱ـ اگرنیروی مقاومت‌هوا درمورد جسمی که باسرعت ۲۵ فوت درثانیه سقوط میکند ۵۰ پوند باشد k ضریب تناسب مقاومت هوا را بیابید . برای مقدار k که بدین ترتیب بدست میآید سرعت حدی جسمی که سقوط میکند و وزن آن ۱۰۰ پوند است تعیین کنید . اگرسرعت اولیه جسم ۲۰ فوت در ثانیه باشد معادلات سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

۲۲ـ جسمی که وزنش ۹۶ پوند است به محض آنکه درآب قرارگیرد شروع بفرورفتن درآب میکند . از حرکت این جسم دو نیرو ممانعت بعمل میاورد . نیرویی که جهت آن

بسوی بالا بوده ودرنتیجه‌شناوری جسم حاصل میگردد ونیروی دیگری که درنتیجه مقاومت آب ایجاد میشود . اگر نیروی شناور ۱۲ پوند و نیروی مقاومت‌آب $٦v$ و مبدأ درسطح آب و جهت مثبت بسوی پایین باشد .

الف ـ سرعت و وضعیت جسم را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

ب ـ سرعت حدی را بیابید .

۲۳ـ بنابرتعریف **وزن مخصوص** یک جسم نسبت وزنش به وزن‌آبی که هم حجم‌آن است میباشد. فرض‌میکنیم جسمی از حالت سکون‌به محیطی که وزن مخصوصش برابر $\frac{١}{٤}$ وزن مخصوص جسم و نیروی مقاومت محیط $\frac{mv}{٣}$ است سقوط میکند .

الف ـ مطلوب است تعیین سرعت جسم برحسب تابعی از زمان .

راهنمایی ـ بسهولت معلوم میگردد که نیروی شناور محیط که جهت آن بسوی بالا میباشد برابر $\frac{١}{٤}$ وزن جسم است .

ب ـ سرعت حدی را بیابید .

۲٤ـ جسمی بجرم m را با سرعت اولیه v_0 فوت درثانیه در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میکنیم .

الف ـ اگر مبدأ را در زمین‌و جهت مثبت را بسوی بالا اختیارکنیم سرعت و وضعیت جسم را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

ب ـ تا چه ارتفاعی جسم صعود میکند و درچه زمانی به حداکثر ارتفاع میرسد .

۲۵ـ شیئی که وزنش ٦٤ پوند است با سرعت‌اولیه ۹٦ فوت‌درثانیه در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میشود . نیروی مقاومت هوا $٤v$ است .

الف ـ مطلوب است تعیین سرعت و وضعیت جسم برحسب توابعی از زمان .

ب ـ تا چه ارتفاعی جسم صعود میکند و درچه زمانی به حداکثر ارتفاعش میرسد. جوابها را با روابطی که درمسئله ۲٤ بدست آمده است مقایسه کنید .

پ ـ درچه‌زمانی‌وباچه سرعتی جسم‌بزمین‌برخورد میکند . ملاحظه خواهیم‌نمود که زمان سقوط طولانی‌تر از زمان صعود میباشد ولی اگر مقاومت هوا موجود نباشد هر دو زمان (زمان سقوط وصعود جسم)با یکدیگر برابر هستند. همچنین سرعت بازگشت کمتر ازسرعت اولیه است .

ت ـ اگر از قسمت (ب) و رابطه‌یی که درمثال ١٤ برای اجسامی که سقوط میکند

بدست آوردیم استفاده کنیم آیا دراینصورت زمان و سرعتی که جسم بزمین برخورد میکند تغییر خواهد نمود ؟

در مسائل ۲۶ الی ۳۴ فرض میکنیم نیروی مقاومت هوا متناسب با توان دوم سرعت باشد یعنی $R=kv^2$ و همچنین جسمی که سقوط یا صعود میکند نزدیک سطح زمین قرار دارد .

۲۶- درمثال ۵ ، v، سرعت قطره بارانی که فرود میآید برحسب فاصله یی که سقوط میکند بدست آوردیم . با استفاده از رابطه (I) سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بدست آورید . سرعت حدی آنرا تعیین نموده و آنرا با رابطه (IV) مقایسه کنید .

۲۷- جسمی بجرم m که سرعت اولیه‌اش v_0 فوت درثانیه است ازارتفاع زیادی سقوط میکند .

الف ـ اگر مبدأ را نقطه یی که ازآن سقوط میکند وجهت مثبت را بسوی پایین اختیار کنیم عبارت سرعت را برحسب تابعی از فاصله یی که سقوط میکند بدست آورید .

ب ـ عبارت سرعت را برحسب تابعی از زمان تعیین کنید .

پ ـ سرعت حدی را با رابطه (IV) مثال ۵ و همچنین با مسئله ۲۶ مقایسه کنید. ملاحظه میکنیم که سرعت حدی بستگی به سرعت اولیه ندارد .

۲۸- جسمی بجرم m که سرعت اولیه آن v_0 فوت درثانیه است از زمین در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میشود .

الف ـ اگر مبدأ را در زمین وجهت مثبت را بسوی بالا اختیارکنیم عبارت سرعت را برحسب تابعی از ارتفاع بدست آورید .

ب ـ عبارات سرعت و ارتفاع جسم را برحسب توابعی از زمان تعیین کنید .

پ ـ درچه زمانی جسم به حداکثر ارتفاع خود میرسد.

ت ـ تا چه ارتفاعی جسم صعود میکند .

تبصره ـ فرمولهای بالا هنگامی صادق هستند که جسم سقوط کند . اگر جسم شروع به سقوط نماید باید فرمولهایی که درمثال ۵ و مسئله ۲۶ بدست آوردیم بکار بریم . بامسئله ۲۱ که فرمولی برای محاسبه زمان لازم برای مسافرت رفت و برگشت بدست آوردیم مقایسه کنید .

۲۹- باچه سرعتی جسم مذکور درمسئله ۲۸ بازمین خورد میکندوتاچه مدتی سقوط میکند.

راهنمایی ـ از تبصره مسئله ۲۸ استفاده کنید . برای تعیین سرعت در رابطه (III) مثال ۵ بجای y حداکثر ارتفاعی که از قسمت (ت) مسئله ۲۸ بدست میآید قرار دهید .

ملاحظه مینماییم که سرعت بازگشت کمتر از سرعت اولیه v_0 است. برای آنکه زمان سقوط را بدست آوریم از رابطه‌یی که برای y در مسئله ۲۶ بدست میآید استفاده میکنیم. در این حالت بسهولت معلوم نمیگردد که زمان سقوط بیشتر از زمان صعود میباشد.

۳۰- سرعت چتربازی در لحظه‌یی که چتر خود را باز میکند ۱۶۰ فوت درثانیه و نیروی مقاومت هوا برابر $\frac{mv^2}{8}$ است.

الف - اگر مبدأ را درنقطه‌یی که چترباز چترخود را باز میکند و جهت مثبت را بسوی پایین اختیار کنیم سرعت بعدی و فاصله را برحسب توابعی از زمان بدست‌آورید.

ب - سرعتهای او را پس‌از ۱ ثانیه و ۲ ثانیه بعداز آنکه چترش باز میشود تعیین کنید.

پ - سرعت حدی چترباز چه خواهد بود.

ت - تعیین کنید پس‌از ۱ ثانیه، ۲ ثانیه چند فوت سقوط میکند.

ث - اگر چتر او در ۱۰۶۴ فوتی ازسطح زمین باز شود تعیین کنید تقریباً پس‌از چه مدت چترباز بزمین میرسد.

۳۱- جسمی بجرم m از هواپیمایی که در ارتفاع یک میلی زمین بطور افقی حرکت میکند سقوط مینماید. نیروی مقاومت برابر $2mk^2v^2$ وسرعت حدی جسم ۱۰۰ فوت درثانیه است. مطلوب است تعیین:

الف - مقدار ثابت k.

راهنمایی - $T.v=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ و باید بجای k مقدار $2mk^2$ راقرار داد.

ب - سرعت جسم برحسب تابعی از زمان.

پ - سرعت جسم پس‌از ۳ ثانیه.

ت - پس‌از چه مدتی سرعت جسم ۶۰ فوت درثانیه میگردد.

۳۲- جسمی از ارتفاع زیادی سقوط میکند و سرعت حدی آن ۱۰ فوت درثانیه است.

الف - معادلات سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بدست آورید.

راهنمایی - $T.v=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ و معادله را نسبت به $\frac{k}{m}$ حل کنید.

ب - معادله سرعت را برحسب تابعی از فاصله بدست آورید.

۳۳- چتر بازی که با چترش مجموعاً ۱۹۲ پوند وزن دارد از هواپیمایی که بطورافقی

حرکت میکند سقوط مینماید. چترباز چترخود را پس‌از ۱۰ ثانیه باز میکند. اگر فرض کنیم هنگامی که چتر بسته است ضریب تناسب مقاومت هوا برابر $\frac{۱}{۱۲۰}$ وهنگامی که‌چتر، باز میگردد این عدد برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد مطلوب است تعیین .

الف ـ سرعت چترباز برحسب تابعی از زمان قبل‌از آنکه چتر باز شود .

ب ـ سرعت حدی قبل‌از آنکه چتر باز گردد .

پ ـ سرعت پس‌از ۱۰ ثانیه اول .

ت ـ سرعت برحسب تابعی از زمان پس‌از آنکه چتر باز میشود .

ث ـ سرعت حدی پس‌از آنکه چتر باز میشود .

ج ـ سرعت پس‌از ۱۵ ثانیه وهمچنین تعیین سرعت پس‌از ۵ ثانیه بعدازآنکه چترباز میشود .

این مسئله را مستقلاً حل کرده و نتایج آنرا با روابطی که در مسائل ۲۶ و ۲۷ بدست میاید مقایسه کنید .

۳۴ـ چتر بازی با چترش ۱۹۲ پوند وزن دارد . فرض میکنیم سرعت سالم نشست چترباز ۱۶ فوت درثانیه‌ونیروی مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت باشد. نیروی مقاومت برای هرفوت مربع سطح مقطع چتر هنگامیکه با سرعت ۲۰ فوت درثانیه تحت زاویه عمود برجهت حرکت ، حرکت میکند برابر $\frac{۱}{۲}$ پوند است . برای آنکه چترباز بتواند سالم بزمین فرود آید تعیین کنید سطح مقطع چتر چه باید باشد .

راهنمایی ـ ابتدانیروی مقاومت هواراتعیین کنیدوسپس k راچنان‌بیابید که $T.v=۱۶$ باشد و ازآنجا تعداد فوت مربع چتر راکه نیروی مقاومت هوابرابر $kv^{۲}$ است تعیین کنید.

در مسائل ۳۵ الی ۴۳ از مقاومت‌هوا صرفنظر مینماییم‌وفرض میکنیم که شیئی در ارتفاع زیادی از زمین قرار دارد و لذا میتوان معادله (۳ . ۳۹۲) را برای حرکت جسم بکار برد. با بکار بردن داده‌های $R=۴۰۰۰$ میل و $g=۳۲$ فوت برمجذورسرعت و $\sqrt{۲gR}=۶٫۹۶$ میل‌درثانیه مسائل زیر را حل کنید .

۳۵ـ تعیین کنید موشکی رابا چه سرعتی باید از زمین پرتاب نمود تا به‌ارتفاع ۴۰۰ میلی ازسطح زمین ، ۴۰۰۰ میلی ازسطح زمین برسد . این مسئله را مستقیماً حل نموده و نتایج آنرا با قسمت سوم مثال ۱۰ مقایسه کنید .

۳۶ـ هوایی که درارتفاع ۲۰۰ میلی ازسطح زمین قرار دارد بقدری رقیق میباشد

که بندرت حرکت سفینه فضایی‌را کاهش میدهد. این قسمت ازهوا را ناحیه F_2 اتمسفر گوییم. چنانچه تمام‌سوخت موشکی‌درارتفاع ۲۰۰ میلی بمصرف رسیده باشد و بخواهیم این موشک ۳۸۰۰ میل دیگر صعود نماید تعیین کنید موشک در ارتفاع ۲۰۰ میلی باید چه سرعتی داشته باشد.

۳۷- جسمی تا ارتفاع ۴۰۰ میلی صعود میکند و پس‌از آن شروع بسقوط نمودن میکند. مطلوب است تعیین سرعت جسم هنگامی که ۲۰۰ میل سقوط نموده است وهمچنین سرعت جسم را درلحظه برخورد با زمین بیابید.

راهنمایی - در رابطه (I) مثال ۱۱ مقدار $r_0=R+۴۰۰=۴۴۰۰$ قرار دهید.

ملاحظه مینماییم که سرعت جسم در لحظه‌یی که بازمین برخورد میکند برابر سرعتی است که باید جسم را با آن سرعت پرتاب نمود تا بارتفاع ۴۰۰ میلی برسد. به مسئله ۳۵ رجوع شود.

۳۸- فرض‌میکنیم جسمی‌از حالت سکون‌ازفاصله $61R$ از مرکززمین یعنی ۲۴۴۰۰۰ میلی (معادل فاصله ماه از مرکز زمین) سقوط کند. با چه سرعتی و درچه زمانی این جسم بزمین خواهد رسید.

۳۹- جسمی با سرعت اولیه‌یی برابر سرعت فرار $\sqrt{۲gR}$ در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میشود. مطلوب است تعیین:

الف - سرعت جسم برحسب تابعی از r فاصله جسم تا مرکز زمین.

ب - درچه‌زمانی به‌ارتفاع ۲۴۴۰۰۰ میلی(فاصله ماه از مرکززمین) خواهد رسید.

راهنمایی - از روابط (III) و (VII) مثال ۱۰ استفاده کنید.

۴۰- جسمی را با سرعت اولیه v_0 که مقدارش کمتر از سرعت فرار $\sqrt{۲gR}$ است در امتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میکنیم. درچه زمانی جسم به حداکثر ارتفاع خود میرسد.

راهنمایی - در قسمت سوم مثال ۱۰ عبارت این ارتفاع را بدست آورده‌ایم. مقدار r را برحسب a و b که درقسمت پنجم مثال ۱۰ تعیین نموده‌ایم بدست آورده وسپس رابطه VI این مثال را که در آن بجای A مقدارش قرار داده شده است بکار میبریم.

تبصره - معادله زمانی اخیر فقط برای اجسامی که صعود میکنند صادق میباشد. اگر بخواهیم زمان بازگشت آنرا بدست آوریم باید معادله زمانی که در رابطه III مثال ۱۱ داده شده است استفاده نمود و بجای r_0 ارتفاعی که جسم شروع بسقوط میکند قرار داد.

۴۱- نشان دهید اگر سرعت‌اولیه v_0 بمقدارقابل توجهی کمترازسرعت‌فرار $\sqrt{۲gR}$

باشد دراینصورت زمان مذکوردر مسئله ۴۰ یعنی زمان لازم برای آنکه جسم بحداکثرارتفاع خود برسد تقریباً برابر $\frac{v_0}{g}$ است .

راهنمایی ـ بجای تابع Arcsin بسط آنرا قرارداده واز v_0^2 و قوای بالاتر v_0 صرفنظر میکنیم . برای آنکه بتوانیم حذفهای نامبرده را تا اندازه‌یی توجیه کنیم در معادله زمانی مسئله ۴۰ سرعت v_0 را برابر $\frac{۱}{۳۰}$ میل درثانیه اختیار مینماییم .

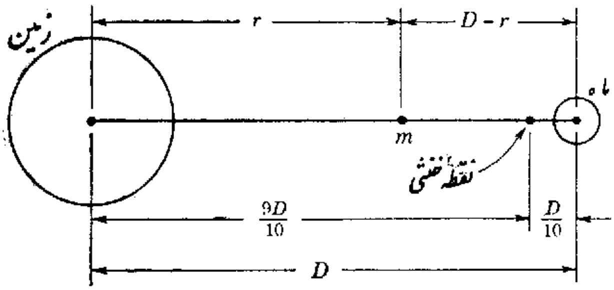
۴۲ـ جسمی درسطح ماه با سرعت اولیه v_0 درامتداد شاغول بطرف بالا پرتاب میشود . مطلوب است تعیین :

الف ـ v سرعت جسم برحسب تابعی از r_m فاصله جسم از مرکز ماه .

ب ـ سرعت فرار جسم .

شعاع ماه تقریباًبرابر ۱۰۸۰ میل بوده و شتاب ثقل در روی سطح ماه تقریباًبرابر $\frac{۱}{۶}$ عدد متناظر برروی سطح زمین میباشد . جهت خروجی از ماه را جهت مثبت اختیارکنید .

۴۳ـ الف ـ نشان دهیداگر نقطه مادی را در فاصله $\frac{۹}{۱۰}$ از مرکز زمین و برروی خطی که مرکز زمین را بمرکز ماه وصل میکند قرار دهیم این نقطه درحال سکون خواهد بود (شکل ۲۳ . ۳) یعنی نیروی جاذبه‌یی که ازطرف ماه وزمین برنقطه مادی که درفاصله $\frac{۹}{۱۰}$ از مرکززمین وبرروی خط واصل بین مرکززمین وماه واقع شده وارد میشودبایکدیگربرابر میباشد . این نقطه را **نقطه خنثی** گوییم . فرض میکنیم جرم ماه برابر $\frac{۱}{۸۱}$ جرم زمین باشد .



شکل ۲۳ . ۳

راهنمایی ـ عبارت (۳۴ . ۳) را برای ماه و زمین بکار برده و سپس دو نیرو را برابر یکدیگر فرض کنید .

ب ـ مبدأ را در مرکز زمین وجهت مثبت را جهتی که از زمین خارج میشود و ماه را ثابت فرض میکنیم . معادله دیفرانسیل حرکت نقطه مادی راکه ازسطح زمین بسوی ماه پرتاب میشود با درنظرگرفتن نیروهای جاذبه زمین و ماه بدست آورید . معادله اخیررا با شرایطاولیه ($t=o$ و $v=v_o$) حل کنید .

پ ـ با چه سرعتی نقطه مادی را باید پرتاب کرد تا به نقطه خنثی برسد .

راهنمایی ـ درمعادله سرعتی که درقسمت (ب) بدست‌میاید $v=o$ و $r=\frac{۹}{۱۰}D$ قراردهید . فرض‌میکنیم $R_m^۲=\frac{۶R^۲}{۸۱}$ و $D=۶۱R+\frac{R}{۴}$ و $g_m=\frac{g}{۶}$ باشد . R_m شعاع ماه و g_m شتاب ماه میباشد . ملاحظه مینماییم که‌شتاب ماه چندان‌اثری ندارد .

ت ـ با چه سرعتی موشکی باید از زمین پرتاب شود تا بماه برسد .

۴۴ـ اگر جسمی در سوراخی که در مرکز زمین‌حفرشده است سقوط نماید و با نیرویی متناسب با فاصله جسم از مرکز زمین بسوی مرکز جذب شود تعیین کنید .

الف ـ با چه سرعتی جسم‌از مرکز زمین خواهد گذشت .

ب ـ درچه زمانی جسم بطرف دیگر سوراخ خواهد رسید .

تبصره ـ حرکت این جسم حرکت ساده توافقی نام‌دارد . در فصل هشتم بحث کاملی ازاین نوع حرکت خواهیم نمود .

جوابها

۱ـ الف :

$$\frac{۱}{۲}m(v^۲-v_o^۲)=-\frac{۱}{۲}ks^۲-\frac{۱}{۴}as^۴ \quad ,$$

$$t=\pm\int_o^x (v_o^۲-km^{-۱}u^۲-\frac{۱}{۲}am^{-۱}u^۴)^{-\frac{۱}{۲}}du$$

ب :

$$\frac{۱}{۲}(v^۲-v_o^۲)=ks(s-b)^{-۱} \quad ,$$

$$t=\pm\int_o^x [v_o^۲+۲ku(u-b)^{-۱}]^{-\frac{۱}{۲}}du$$

پ :
$$t=\int_{\circ}^{x}\frac{c+c^{۲}v_{\circ}tg\frac{bcu}{m}}{cv_{\circ}-tg\frac{bcu}{m}}du \quad , \quad v=\frac{cv_{\circ}-tg\frac{bcs}{m}}{c+c^{۲}v_{\circ}tg\left(\frac{bcs}{m}\right)}$$

۲- $(v^{۲}-\frac{۱}{۲}mkb^{-۲}\pm kb^{-۱}s)c^{\pm\frac{۲bs}{m}}=c_{۱}$. علامت مثبت برای مقادیر $v\geqslant 0$ و علامت منفی برای مقادیر $v\leqslant 0$.

۳- الف :
$$v=c^{-\frac{bt}{m}}(v_{\circ}+gmb^{-۱})-gmb^{-۱} \quad ;$$
$$s=s_{\circ}-mgtb^{-۱}+(۱-c^{-\frac{bt}{m}})b^{-۲}(m^{۲}g+mbv_{\circ})$$

ب:
$$v=(b^{۲}+m^{۲})^{-۱}\left[\left\{(b^{۲}+m^{۲})v_{\circ}+km\right\}e^{-\frac{bt}{m}}+k(b\sin t-m\cos t)\right]$$
$$s=(b^{۳}+m^{۲}b)^{-۱}\left[\left\{-mv_{\circ}(b^{۲}+m^{۲})-km^{۲}\right\}e^{-\frac{bt}{m}}-kb(b\cos t+m\sin t)\right]+s_{\circ}+\frac{mv_{\circ}+k}{b}$$

پ :
$$v^{۲}=kmv_{\circ}^{۲}/[۲bv_{\circ}^{۲}(e^{-kt}-۱)+km] \quad ;$$
$$s=s_{\circ}+v_{\circ}\int_{\circ}^{t}\frac{km}{۲bv_{\circ}^{۲}(e^{-ku}-۱)+km}\Big]^{\frac{۱}{۲}}du$$

۴- $v=k\,tgh\frac{gt}{k}$.

۶- الف : $v=-۳۲t+۸۰ \; ; \; y=-۱۶t^{۲}+۸۰t$.

ب : ۴۸ فوت درثانیه , ۶۴ فوت .

پ : $۲\frac{۱}{۲}$ ثانیه ، ۱۰۰ فوت .

ت : ۵ ثانیه ، ۸۰— فوت درثانیه . ث : خیر .

۷- ۷۰ر۵٦ فوت .

۸- الف : $۲\frac{۱}{۲}$ ثانیه ، ۸۸ فوت درثانیه .

ب : ۲۰ فوت . پ : ۸۰ فوت درثانیه .

ت : اگر۳ ثانیه قبلاً گلوله را با سرعت ۸۸ فوت درثانیه از زمین بطرف بالا پرتاب مینمودیم تا ارتفاع ۱۲۱ فوتی صعود میکرد وهنگامیکه در بازگشت ازارتفاع ۱۲۰ فوتی میگذشت سرعتی برابر ۸ فوت درثانیه خواهد داشت.

۹- ٤٤ فوت در ثانیه .

۱۰- الف : ۵ اسلاگ . ب : $۲٦\frac{۲}{۳}$ پوند .

پ : $v=-\frac{۱٦t}{۳}+c_۱$ ، $y=-\frac{۸}{۳}t^۲+c_۱t+c_۲$.

۱۱- ۲۸٤ فوت ، ۱۲ ثانیه .

۱۲- ۱۵ فوت درصورتیکه فرض کنیم میله را بطور افقی اندازه گرفته‌ایم ولذا مرکز ثقل ۲ فوت بالای زمین و ٦ مرتبه بلندتر خواهد .

۱۳- ۱۵۰ پوند .

۱٤- الف :

$$v=\frac{mg}{k}\left(۱-e^{-\frac{kt}{m}}\right)\ ;\ y=\frac{mg}{k}t+\frac{m^۲g}{k^۲}\left(e^{-\frac{kt}{m}}-۱\right)$$

ب : $T.v=\frac{mg}{k}$.

۱۵-

$$v=\frac{mg}{k}\left(۱-e^{-\frac{kt}{m}}\right)+v_0e^{-\frac{kt}{m}}\ ,$$

$$y=\frac{mg}{k}t-\left(\frac{m^۲g}{k^۲}-\frac{mv_0}{k}\right)\left(۱-e^{-\frac{kt}{m}}\right)\ ;\ T.v=\frac{mg}{k}$$

۱٦- الف : $y=۱٦t+۸(e^{-۲t}-۱)$, $v=۱٦(۱-e^{-۲t})$.

ب : ۱٦ فوت درثانیه .

پ : $y=۸(۱۹+e^{-۲۰})=۱۵۲$ فوت ;
$v=۱۶(۱-e^{-۲۰})=۱۶$ فوت درثانیه .

۱۷- الف : $v=۱۶(۱-e^{-۲t})+۱۷۰e^{-۲t}=۱۶+۱۵۴e^{-۲t}$;
$y=۱۶t+۷۷(۱-e^{-۲t})$.

ب : ۱۶ فوت درثانیه .   پ : ۲۲۷ فوت ، ۱۶ فوت درثانیه .

۱۸- الف : $k=\frac{۸}{۷}$.

ب : $v=۱۷۵(۱-e^{-\frac{۳۲t}{۱۷۵}})$,
$y=۱۷۵t+\frac{۱۷۵^{۲}}{۳۲}\left(e^{-\frac{۳۲t}{۱۷۵}}-۱\right)$.

پ : ۱۳۹ر۷ فوت درثانیه ، ۱۶۷ر۹ فوت درثانیه ، ۱۷۳ر۶ فوت درثانیه ، ۱۷۴ر۶ فوت درثانیه .   ت : ۴۷۹۱ فوت .

۱۹- الف : $k=۱۲ر۵$.

ب : $v=۱۶(۱-e^{-۲t})+۱۷۵e^{-۲t}; y=۱۶t+\frac{۱۵۹}{۲}(۱-e^{-۲t})$.

پ : ۳۷ر۵ فوت‌درثانیه ، ۱۸ر۹ ، ۱۶ر۴ ، ۱۶ر۰۵ ، ۱۶ر۰۱ فوت‌درثانیه.

ت : ۱۵۹ر۵ فوت .   ث : بیش‌از ۱۶۰ فوت .

ج : تقریباً ۶۰ ثانیه .

۲۰- الف : $v=۱۸۰\left(۱-e^{-\frac{۸t}{۴۵}}\right)$, $y=۱۸۰t+\frac{۱۸۰^{۲}}{۳۲}\left(c^{-\frac{۸t}{۴۵}}-۱\right)$.

ب : $v\left(۱۱\frac{۱}{۴}\right)=۱۸۰(۱-e^{-۲})=۱۵۵ر۶$ فوت درثانیه ,
۱۷۶ر۷ , ۱۷۹ر۶ , ۱۷۹ر۹ فوت درثانیه .

پ : تقریباً ۷۱۰۰ فوت .

۲۱- $v=۵۰-۳۰e^{-\frac{gt}{۵۰}}=۵۰-۳۰c^{-۰ر۶۴t}; y=۵۰t-\frac{۱۵۰۰}{g}\left(۱-e^{-\frac{gt}{۵۰}}\right)$

$k=٢$ ؛ فوت درثانیه $T.v=٥٠$ ؛ $=٥٠t-\frac{٣٧٥}{٨}(١-e^{-٠٫٦٤t})$

٢٢- الف : $y=١٤\left[t-\frac{١}{٢}(١-e^{-٢t})\right]$, $v=١٤(١-e^{-٢t})$.

ب : فوت درثانیه $T.v=١٤$.

٢٣- الف : $v=٧٢(١-e^{-\frac{t}{٣}})$.

ب : فوت درثانیه $T.v=٧٢$.

٢٤- الف : $y=\left(\frac{gm^٢}{k^٢}+\frac{mv_٠}{k}\right)(١-e^{-\frac{kt}{m}})-\frac{gm}{k}t$,

$$v=\frac{gm}{k}(e^{-\frac{kt}{m}}-١)+v_٠e^{-\frac{kt}{m}}$$

ب : $y=\frac{m}{k}\left(v_٠-\frac{gm}{k}Log\frac{kv_٠+gm}{gm}\right)$,

$$t=\frac{m}{k}Log\frac{kv_٠+gm}{gm}$$

٢٥- الف : $y=٥٦(١-e^{-٢t})-١٦t$, $v=١٦(٧c^{-٢t}-١)$.

ب : ثانیه $t=\frac{١}{٢}Log٧=٠٫٩٧$,فوت $y=٨(٦-Log٧)=٣٢٫٤$.

پ : تقریباً ٣٫٥ ثانیه ، ١٦- فوت درثانیه .

ت : همان جواب .

٢٦- $v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,tgh\sqrt{\frac{gk}{mt}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{e^{٢\sqrt{\frac{kg}{mt}}}-١}{e^{٢\sqrt{\frac{kg}{mt}}}+١}$

$$y=\frac{m}{k}\,Log\cosh\sqrt{\frac{gk}{mt}}=\frac{m}{k}\,Log\;\frac{e^{\sqrt{\frac{gk}{mt}}}+e^{-\sqrt{\frac{gk}{mt}}}}{۲}\;;$$

$$T.v=\sqrt{\frac{mg}{k}}$$ فوت درثانیه

۲۷- الف : $v^{۲}=\frac{mg}{k}\left(۱-e^{-\frac{۲ky}{m}}\right)+v_{0}^{۲}e^{-\frac{۲ky}{m}}$. چون جهت مثبت بسوی پایین میباشد هنگامی‌که جسم سقوط میکند باید ریشه دوم مثبت را برای v اختیارکرد .

ب : $$\frac{\sqrt{k}v+\sqrt{mg}}{\sqrt{k}v-\sqrt{mg}}=\frac{\sqrt{k}\,v_{0}+\sqrt{mg}}{\sqrt{k}\,v_{0}-\sqrt{mg}}\,e^{۲\sqrt{\frac{gk}{mt}}}\,.$$

پ : فوت درثانیه $T.v=\sqrt{\frac{mg}{k}}$.

۲۸- الف : $v^{۲}=\frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{۲ky}{m}}-۱\right)+v_{0}^{۲}e^{-\frac{۲ky}{m}}$. چون جهت مثبت بسوی بالا است هنگامی‌که جسم صعود میکند باید ریشه دوم مثبت را برای v اختیارکرد .

ب : $$t=\sqrt{\frac{m}{kg}}\left(Arctg\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_{0}-Arctg\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v\right)$$

و یا : $$v=\sqrt{\frac{gm}{k}}\,tg\left(c-\sqrt{\frac{kg}{mt}}\right)$$

که در آن : $$c=Arctg\sqrt{\frac{k}{mg}}\,v_{0}$$

رابطه برای زمان t فقط برای جسمی‌که سقوط میکند صادق است .

$$y=\frac{m}{k}\,Log\;\frac{\cos\left(c-\sqrt{\frac{Kg}{m}}\,t\right)}{\cos c}$$

پ : $t=c\sqrt{\frac{m}{kg}}$.   ت : $y=\frac{m}{k}Log\sec c$.

۲۹- $\cosh\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t=\sec c$

و یا : $t=\sqrt{\frac{m}{gk}}\,\mathrm{Arg}\cosh(\sec c)$ ؛ $v=\sqrt{\frac{mg}{kv_۰^۲+mg}}\,v_۰$ فوت درثانیه

که درآن : $c=\mathrm{Arc}tg\sqrt{\frac{k}{gm}}\,v_۰$

۳۰- الف : $y=۱۶t+۸Log(۵٫۵-۴٫۵e^{-۴t})$ ؛ $v=۱۶\frac{۱۱+۹e^{-۴t}}{۱۱-۹e^{-۴t}}$.

ب : ۱۶٫۴۹ , ۱۶٫۰۰۹ فوت درثانیه .

پ : ۱۶ فوت درثانیه .   ت : ۲۹٫۵ فوت ، ۱۶٫۱ فوت .

ث : ۶۶ ثانیه .

۳۱- الف : $k=\frac{۱}{۲۵}$.   ب : $v=۱۰۰\frac{e^{۰٫۶۴t}-۱}{e^{۰٫۶۴t}+۱}$.

پ : ۷۴٫۴ فوت درثانیه .   ت : ۲٫۲ ثانیه .

$$v=۱۰taoh(۳٫۲t)=۱۰\frac{e^{۶٫۴t}-۱}{e^{۶٫۴t}+۱}\;;$$

۳۲- الف : $y=\frac{۱۰۰}{g}Log\cos h۳٫۲t=\frac{۱۰۰}{g}Log\frac{e^{۳٫۲t}+e^{-۳٫۲t}}{۲}$

$$v=۱۰tgh(۳٫۲t)=۱۰\frac{e^{۶٫۴t}-۱}{e^{۶٫۴t}+۱}$$

ب : $v=۱۰\sqrt{۱-e^{-۰۰٫۶۴y}}$.

۳۳- الف : $v=۱۵۱٫۸\frac{e^{۲t\sqrt{\frac{۱۰}{۱۵}}}-۱}{e^{۲t\sqrt{\frac{۱۰}{۱۵}}}+۱}$.

ب : فوت درثانیه $T.v=۱۵۱٫۸$.

پ : ٤ر١٤٧ فوت درثانیه .

ت : $$v=۱۲\,\frac{۱ر۱۸e^{\frac{۱٦t}{۳}}+۱}{۱ر۱۸e^{\frac{۱٦t}{۳}}-۱}\,.$$

ث : ١٢ فوت درثانیه . ج : ١٢ فوت درثانیه .

٣٤- ٦٠٠ فوت سربع .

٣٥- ١٠ر٢ سیل درثانیه ، ٩٢ر٤ میل درثانیه .

٣٦- ٧ر٤ سیل درثانیه .

٣٧- الف : ٤٥ر١ سیل درثانیه .

ب : ١٠ر٢ میل درثانیه .

٣٨- ٩ر٦ میل درثانیه ، ١١٩ ساعت .

٣٩- الف : $v=R\sqrt{\frac{۲g}{r}}$. ب : ٦ر٠٥ ساعت .

٤٠- $$t=-\frac{۱}{b}\sqrt{aR+bR^{۲}}-\frac{a}{۲b\sqrt{-b}}\left[\frac{\pi}{۲}-\text{Arc}\,\sin\frac{-۲bR\cdot-a}{a}\right]$$

$$t=\frac{gR^{۲}}{(۲gR-v_{۰}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\left[\frac{v_{۰}\sqrt{۲gR-v_{۰}^{۲}}}{gR}+\text{Arc}\cos\left(\frac{gR-v_{۰}^{۲}}{gR}\right)\right]$$

$$=\frac{gR^{۲}}{(۲gR-v_{۰}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\left[\frac{v_{۰}\sqrt{۲gR-v_{۰}^{۲}}}{gR}+۲\text{Arc}\sin\frac{v_{۰}}{\sqrt{۲gR}}\right]$$

٤٢- الف : $v^{۲}=v_{۰}^{۲}+\frac{gR_m}{۳}\left(\frac{R_m}{r}-۱\right)$ که درآن R_m شعاع ماه میباشد .

ب : $v_{۰}=\sqrt{\frac{gR_m}{۳}}=$ ٤٨ر١ میل درثانیه .

۴۳- ب :

$$v\frac{dv}{dr}=\frac{-gR^۲}{r^۲}+\frac{g_mR_m^۲}{(D-r)^۲}\quad,\quad v^۲=۲g\frac{R^۲}{r}$$

$$+\frac{۲g_mR_m^۲}{D-r}+v_0^۲-۲gR-\frac{۲g_mR_m^۲}{D-R}$$

پ : اگر از نیروی جاذبه ماه صرفنظر گردد با سرعت :

$$v_0=\sqrt{۲gR}\,(۰٫۹۹)=۹۹$$

درصد سرعت فرار از زمین .

ث : هنگامیکه نقطه مادی به نقطه خنثی میرسد سرعت باید دارای مقدار مثبت باشد . به قسمت (پ) مراجعه گردد .

۴۴- الف : ۹ر۴ میل درثانیه . ب : ۵ر۴۲ دقیقه .

۳۲ . ۳- حرکت افقی

اگر جسمی در امتداد افقی مثلاً روی میز یا سطح مستوی حرکت کند نیروی مالشی ایجاد میشود که مانع حرکت جسم میگردد . نیروی مالش فوق درنتیجه :

۱- نیروی جاذبه زمین که دائماً جسم را برمیز یا سطح مستوی فشار میدهد .

۲- نیروی سختی سطح میز یا سطح مستوی که آنرا با حرف μ نمایش داده و ضریب مالش سطح گوییم .

تعریف نیروی مالشی - نیروی مالشی جسمی که برروی سطح افقی حرکت میکند برابر حاصلضرب μ ضریب مالش جسم ونیروی جاذبه mg میباشد یعنی نیروی مالشی برابر $\mu(mg)$ است.

تبصره ۱- تجربه نشان میدهد که نیروی لازم برای ادامه حرکت جسم بمراتب کمتر از نیرویی است که برای بحرکت انداختن جسم باید بآن وارد نمود و لذا دو ضریب مالش استاتیکی و لغزشی بدست خواهد آمد .

ضریب مالش استاتیکی در شروع حرکت و مالش لغزشی درحین حرکت برجسم تأثیر میکند . گذشته ازنیروی مالشی جسم ممکن است درتحت تأثیر نیروی مقاومت هوا ویا محیطهای دیگری که در آن حرکت میکند قرار گیرد .

مثال ۱- جسمی با نیروی ۱۰ پوند بوسیله سورتمه یی برروی حوض منجمد شده یی کشیده میشود . وزن جسم و سورتمه مجموعاً ۶۴ پوند است و از ضرایب مالش استاتیکی ولغزشی میتوان صرفنظر کرد. اگر سورتمه درحالت سکون شروع به حرکت نماید ومقاومت

هوا دو برابر سرعت سورتمه باشد سرعت و فاصله طی شده بوسیله سورتمه را پس‌از ٥ ثانیه بدست آورید. سرعت حدی چیست ؟

حل - دراین مسئله $m=\frac{٦٤}{٣٢}=٢$ ونیروی مقاومت‌هوا برابر$٢v$ پونداست‌وبالنتیجه معادله دیفرانسیل حرکت سورتمه با بخاطر داشتن رابطه اساسی :

نیروی ویژه وارد برجسم = جرم × شتاب

بصورت زیر درمیآید :

$$٢\frac{dv}{dt}=١٠-٢v \quad , \quad \frac{dv}{dt}+v=٥$$

این معادله دارای جواب عمومی $v=٥+c_1e^{-t}$ بوده و پس‌از جایگزین کردن مقادیر اولیه $(t=0$ و $v=0)$ خواهیم داشت:

$$v=٥(١-e^{-t}) \tag{I}$$

اگر درمعادله (I) مقدار $t=٥$ اختیارگردد :

$$v=٥(١-e^{-٥})=٥(١-٠٫٠٠٦٧)=٥\times ٠٫٩٩٣٣=٤٫٩٧$$ فوت درثانیه

از رابطه (I) سرعت حدی برابر ٥ فوت درثانیه میگردد .

اگر از رابطه (I) انتگرال بگیریم s یعنی فاصله‌یی که جسم در لحظه t پیموده است بدست میآید لذا :

$$s=٥(t+e^{-t})+c_٢ \tag{II}$$

اگر مبدأ زمان ومکان را بریکدیگر منطبق اختیارکنیم یعنی دررابطه(II) مقادیر $t=0$ و $s=0$ اختیارگردد $c_٢=-٥$ میشود و از آنجا معادله (II) بصورت زیر درمیآید :

$$s=٥(t+e^{-t}-١)$$

و بالاخره اگر درمعادله بالا $t=٥$ اختیارگردد خواهیم داشت :

$$s=٥(٥+e^{-٥}-١)=٥(٤+٠٫٠٠٦٧)\ \#\ ٢٠$$ فوت

مثال ۲- کشتی بوزن ٤٨٠٠٠ تن در تحت نیروی ثابت ٢٠٠٠٠٠ پوند از حالت سکون بحرکت درمیآید. ضرایب مالش استاتیکی و لغزشی قابل چشم پوشی هستند .

الف - اگرنیروی‌مقاومت‌آب $١٠٠٠٠v$ پوند که‌درآنvسرعت کشتی برحسب‌فوت‌درثانیه

است باشد سرعت را بصورت تابعی از زمان t بنویسید .

ب ـ سرعت حدی را برحسب میل در ساعت تعیین کنید .

حل ـ معادله دیفرانسیل حرکت کشتی بصورت زیر میباشد :

$$\frac{۴۸۰۰۰ \times ۲۰۰۰}{۳۲} \cdot \frac{dv}{dt} = ۲۰۰۰۰۰ - ۱۰۰۰۰v$$

و یا :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{۳۰۰} = \frac{۲۰}{۳۰۰}$$

معادله دیفرانسیل خطی بالا دارای جواب عمومی $v = ce^{-\frac{t}{۳۰۰}} + ۲۰$ میباشد .

الف ـ از آنجایی که کشتی از حالت سکون بحرکت درمیاید لذا در زمان $t=0$ مقدار $v=0$ بوده و اگر این مقادیر را در عبارت v برحسب t قرار دهیم مقدار $c= -۲۰$ خواهد بود و لذا :

$$v = ۲۰ - ۲۰e^{-\frac{t}{۳۰۰}} = ۲۰(۱ - e^{-\frac{t}{۳۰۰}})$$

ب ـ چنانچه در معادله بالا $t \to \infty$ واضح است که $v = ۲۰$ بوده و بالنتیجه سرعت حدی برابر ۲۰ فوت درثانیه و یا ۱۳٫۶ میل درساعت میشود . این مقدار را نیز میتوان از معادله دیفرانسیل بالا بدست آورد زیرا اگر v بسوی حدی میل کند $\frac{dv}{dt}$ بسوی صفر میل کرده و مانند قبل $v = ۲۰$ خواهد شد .

مثال ۳ـ دانش‌آموزی که ۷۵ پوند وزن دارد برای رسیدن به‌سطح سرسره‌یی‌میدود . هنگامیکه به‌ابتدای این سطح میرسد سرعت او ۱۰ فوت درثانیه است. اگر μ ضریب‌مالش لغزشی بین کفش دانش‌آموز و سطح یخ برابر $\frac{۱}{۲۵}$ باشد تا چه فاصله‌یی دانش‌آموز روی سطح سر خواهد خورد .

حل ـ بنابر تعریف نیروی مالشی برابر :

$$\mu(mg) = \frac{۱}{۲۵} \cdot ۷۵ = ۳$$

پوند است . از آنجایی که نیروی اخیر تنها نیرویی است که از حرکت جسم ممانعت بعمل

میاورد و چون جرم جسم $\frac{۷۵}{۳۲}$ است لذا معادله دیفرانسیل حرکت :

$$\frac{۷۵}{۳۲}\cdot\frac{dv}{dt}=-۳ \quad , \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{۳۲}{۲۵}$$

میگردد . ولی با درنظرگرفتن رابطه $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds}$ عبارت بالا بصورت زیر درمیاید :

$$v\frac{dv}{ds}=-\frac{۳۲}{۲۵} \quad , \quad vdv=-\frac{۳۲}{۲۵}ds \qquad (I)$$

s فاصله دانش‌آموز از مبدأ سرسره میباشد .

اکنون از معادله دوم (I) انتگرال گرفته وشرایط اولیه و نهایی را حدود این انتگرال اختیار میکنیم یعنی :

$$\int_{v=۱۰}^{0} v\,dv=-\frac{۳۲}{۲۵}\int_{s=0}^{s} ds \quad ; \quad ۵۰=\frac{۳۲}{۲۵}s$$

و از آنجا مقدار s تقریباً برابر ۳۹ فوت میشود .

مثال ٤- مثال ۳ را درحالتی که باد با سرعتی برابر با سرعت دانش‌آموز و درجهت مخالف حرکت او بوزد حل کنید .

حل- بسهولت معلوم میگردد که معادله دیفرانسیل حرکت دانش‌آموز دراینحالت برابر:

$$\frac{۷۵}{۳۲}v\frac{dv}{ds}=-۳-v \quad , \quad \frac{vdv}{v+۳}=-\frac{۳۲}{۷۵}ds$$

$$\int_{v=۱۰}^{0}\left(۱-\frac{۳}{v+۳}\right)dv=-\frac{۳۲}{۷۵}\int_{s=0}^{s} ds$$

و از آنجا :

$$-۳Log۳-۱۰+۳Log۱۳=-\frac{۳۲}{۷۵}s \quad , \quad s=۱۳٫۱ \text{ فوت}$$

مثال ۵- قایقی با سرعت ۱۲ میل درساعت بوسیله قایق موتوری دیگری کشیده

میشود . در زمان معین $t=o$ این قایق را از قایق موتوری مجزا نموده و شخصی که در قایق نشسته است درجهت حرکت قایق موتوری با نیرویی برابر ۲۰ پوند پارو میزند. اگر مجموع وزن شخص و قایق ۴۸۰ پوند ونیروی مقاومت (پوند) برابر ۱٫۷۵v که در آن v سرعت برحسب فوت درثانیه است باشد سرعت قایق را پس‌از $\frac{۱}{۲}$ دقیقه بدست آورید .

حل - نیروی ویژه‌یی که در لحظه $t=o$ (لحظه‌یی که قایق موتوری را از قایق جدا میکنیم) برقایق تأثیر میکند برابر تفاضل نیروی ۲۰ پوند و نیروی مقاومت ۱٫۷۵v خواهد بود. جرم شخص‌وقایق برابر $۱۵=\frac{۴۸۰}{۳۲}$ بوده و ازآنجا معادله دیفرانسیل حرکت عبارت است از :

$$۱۵\frac{dv}{dt}=۲۰-۱٫۷۵v \quad \text{ویا} \quad \frac{dv}{dt}+\frac{۷}{۶۰}v=\frac{۴}{۳}$$

معادله دیفرانسیل‌فوق دارای جواب عمومی $v=ce^{-\frac{۷t}{۶۰}}+\frac{۸۰}{۷}$ است. درزمان $t=o$ سرعت اولیه برابر $v=\frac{۱۲(۵۲۸۰)}{(۶۰)^۲}=\frac{۸۸}{۵}$ فوت درثانیه است وپس‌از جایگزین کردن این مقادیر در معادله بالا $c=\frac{۲۱۶}{۳۵}$ میگردد . پس :

$$v=\frac{۸۰}{۷}+\frac{۲۱۶}{۳۵}e^{-\frac{۷t}{۶۰}}$$

و ازآنجا بازاء $t=۳۰$ خواهیم داشت :

$$v=\frac{۸۰}{۷}+\frac{۲۱۶}{۳۵}e^{-\frac{۷}{۲}}=۱۱٫۶ \text{ فوت درثانیه}$$

مثال ۶- فرض کنیم نقطه مادی بجرم m در تحت‌تأثیر نیروی F که فقط بستگی‌به موقعیت نقطه دارد در امتداد محور افقی Os حرکت کند . درحرکت نقطه بحث کنید .

حل - اگراز مالش‌های‌استاتیکی ولغزشی چشم‌پوشی کنیم معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر درمیآید :

$$m\frac{d^۲s}{dt^۲}=F(s)$$

سمت چپ رابطه بالا را با استفاده از رابطه (۳۱ . ۳) و $v=\frac{ds}{dt}$ میتوان بصورت زیر نوشت :

$$mv\frac{dv}{ds}=F(s)$$

و یا :

$$\frac{mv^{۲}}{۲}=\int F(s)ds+c_{۱} \qquad (I)$$

یعنی :

$$\frac{mv^{۲}}{۲}+u(s)=c_{۱} \qquad (II)$$

که درآن $u(s)=-\int F(s)ds$.

جمله $\frac{۱}{۲}mv^{۲}$ **نیروی زنده** نقطه مادی وتابع $u(s)$ (که تاعدد ثابتی معین شده است) **انرژی پتانسیل** نامیده میشود . رابطه (II) بیان میکند که در مورد حرکت هردستگاه :

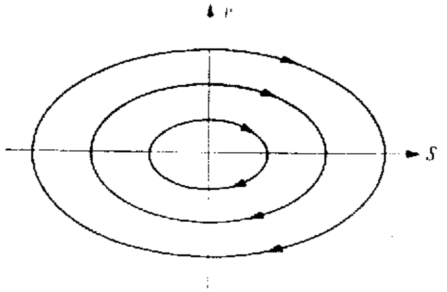
$$\text{نیروی زنده + نیروی پتانسیل = ثابت} \qquad (III)$$

معادله (III) قانون حفظ انرژی و عدد ثابت واقع درسمت چپ رابطه بالا را کل انرژی نامیم .

مثلاً اگر $F(s)=-ks$ (قانون هوك) که درآن $k>0$ است باشد منحنی‌های (۳۹٤ . ۳) درصفحه sv بیضی‌های :

$$(IV) \qquad \frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}ks^{۲}=c_{۱}$$

خواهند بود . اگر $v=\frac{ds}{dt}>0$ باشد واضح است که اگر t ترقی کند s نیز افزایش مییابد وازآنجا حرکت بسمت‌راست میباشد . اگر $v<0$ باشد s تابع نزولی از t بوده وحرکت



شکل ۲٤ . ۳ـ مقایسه سرعت و موقعیت نقطه‌یی که تحت قانون هوك حرکت میکند

نقطه مادی روی محور Os تصویر حرکت واقعی بربیضی‌های (IV) بوده و لذا این نقطه مادی روی محور Os با انتقال ماکزیمم $\sqrt{\frac{۲c_۱}{R}}$ نوسان میکند . از معادله (II) میتوان زمان t را برحسب s بطریق زیر بدست آورد :

$$\frac{ds}{dt}=v=\pm\sqrt{\frac{۲}{m}[c_۱-u(s)]} \quad ; \quad \pm\sqrt{\frac{۲}{m}}\,dt=\frac{ds}{\sqrt{c_۱-u(s)}}$$

و یا :

$$\pm\sqrt{\frac{۲}{m}}\,t=\int\frac{ds}{\sqrt{c_۱-u(s)}}+c_۲$$

علامت مثبت مربوط به قسمت فوقانی صفحه $(v > o)$ و علامت منفی مربوط به قسمت تحتانی صفحه است .

چنانچه نقطه مادی گذشته از نیروی F در تحت‌تأثیر نیروی مالشی که فقط بستگی به سرعت دارد قرارگیرد معادله حرکت بصورت زیر درمیآید :

$$mv\frac{dv}{ds}=F(s)+G(v)$$

این معادله ، معادله دیفرانسیل مرتبه‌اول بوده که ممکن است با بکار بردن یکی از روشهای فصل دوم آنرا حل کرد .

اگر نیروتابع سرعت و وضعیت نقطه باشد معادله دیفرانسیل حرکت منجر به معادله مرتبه اول :

$$mv\frac{dv}{ds}=F(s\, ,\, v)$$

میگردد . بالاخره اگر نیروتابع سرعت v و زمان t باشد معادله کلی‌حرکت منجر به معادله مرتبه اول :

$$m\frac{dv}{dt}=F(v\, ,\, t)$$

گردیده و اگر جواب عمومی معادله اخیر $\varphi(v\, ,\, t)=c_۱$ باشد پس‌از جایگزین کردن $v=\frac{ds}{dt}$ در معادله اخیر آنرا تبدیل به معادله مرتبه اول مینماید .

مسائل

۱ـ سورتمه‌یی که برروی آن جرمی قرار دارد روی یخ کشیده میشود . مجموع وزن جرم و سورتمه ۸۰ پوند است . بفرض آنکه بتوان از ضرایب مالش لغزشی و استاتیکی صرفنظر کرد ونیروی مقاومت‌هوا (برحسب پوند) ۵ برابر سرعت سورتمه باشد تعیین کنید :

الف ـ نیروی ثابتی که باید برسورتمه وارد نمود بقسمی که سرعت حدی آن به ۱۰ میل درساعت برسد .

ب ـ سرعت و مسافتی که در پایان ۴۸ ثانیه این سورتمه پیموده است .

۲ـ وزن قایق و سرنشین آن مجموعاً ۳۲۰ پوند است . قایق از حال سکون بحرکت درآمده و نیرویی که بوسیله پارو وارد میشود و درجهت حرکت قایق است برابر ۱۶ پوند ونیروی مقاومت‌آب (پوند) دو برابرسرعت (فوت درثانیه)قایق میباشد مطلوب است تعیین :

الف ـ سرعت قایق برحسب تابعی از زمان t .

ب ـ سرعت قایق پس‌از ۵ ثانیه و ۱۵ ثانیه .

پ ـ سرعت حدی قایق .

۳ـ شخصی سورتمه‌یی‌را که برروی‌آن بسته‌یی قرار دارد و مجموع وزن بسته وسورتمه mg پوند است با نیروی ثابت F پوند برروی سطحی از یخ میکشد . بفرض آنکه از نیروی مالشی یخ برشخص بتوان صرفنظر نمود و نیروی مقاومت هوا k برابر سرعت سورتمه باشد وسورتمه‌ازحالت سکون بحرکت درآید مطلوب است تعیین :

الف ـ سرعت برحسب تابعی از زمان t .

ب ـ فاصله برحسب تابعی از زمان t .

پ ـ فاصله برحسب تابعی از سرعت .

ت ـ سرعت حدی .

۴ـ درمثال ۳ فرض میکنیم‌وزن سورتمه وبسته مجموعاً ۹۶ پوند ، نیروی مقاومت‌هوا برابر $\frac{۱}{۹}$ سرعت آن و سورتمه با نرخ ثابت ۴ر۵ فوت درثانیه (یعنی سرعت حدی سورتمه ۴ر۵ فوت درثانیه است) باشد مطلوب است تعیین :

الف ـ نیروی ثابتی که شخص باید برسورتمه وارد نماید .

ب ـ معادلات سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

پ ـ پس‌از ۵ ثانیه سورتمه چه مسافتی‌را می‌پیماید .

قسمتهای فوق را جداگانه حل کرده و نتایج آنرا با فرمولهایی که در مسئله ۳ بدست میآید مقایسه کنید .

۵- پسر بچه‌یی که mg پوند وزن‌دارد برای رسیدن به سطح سُرسره‌یی با سرعت v_0 فوت درثانیه میدود . ضریب مالش لغزشی کفش و یخ r است . اگر از نیروی مقاومت هوا صرفنظر کنیم مطلوب است تعیین :

الف - سرعت برحسب تابعی از فاصله .

ب - تا چه فاصله پسر بچه روی سطح سُر میخورد .

۶- پسربچه‌یی که ۸۰ پوند وزن‌دارد برای رسیدن به‌سطح سُرسره‌یی میدود وهنگامیکه به ابتدای‌این‌سطح میرسد سرعتش ۱۲ فوت درثانیه است . ضریب مالش لغزشی بین کفش وسطح یخ برابر $\frac{۱}{۲۰}$ است و باد در جهت مخالف حرکت با نیرویی مساوی دو برابر سرعت میوزد . مطلوب است تعیین :

الف - تابع فاصله برحسب سرعت .

ب - تا چه فاصله پسر بچه روی سطح سُر میخورد .

۷- کشتی بوزن ۳۲۰۰۰ تن در تحت نیروی ثابت ۱۲۰۰۰۰ پوند از حالت سکون بحرکت درمیآید . اگر نیروی مقاومت آب برابر ۵۰۰۰v باشد سرعت کشتی را برحسب تابعی از زمان و همچنین سرعت حدی کشتی را بدست آورید .

۸- ماشینی که برروی‌جاده لغزنده‌یی‌حرکت مینماید باترمز ، سرعت‌خود را به ۶ میل درساعت و یا ۸ر۸ فوت درثانیه کاهش میدهد . ولی قبل‌ازآنکه توقف نماید ۸۰ فوت درجاده سُر میخورد . اگر از نیروی مقاومت هوا صرفنظر کنیم ضریب مالش لغزشی بین لاستیک و خیابان را بدست آورید .

۹- جسمی که وزن آن ۵۰ پوند است‌برروی میزی که‌ضریب مالش لغزشی‌آن‌برابر $\frac{۱}{۲۵}$ است قرار دارد . این جسم بوسیله فنری به وزنه ۱۴ پوندی که بطور عمودی بالای میز نگاهداشته شده است وصل میشود . درلحظه‌یی که دستگاه رها میشود جسم ۵۰ پوندی درفاصله ۱۵ فوتی ازلبه میز قرار دارد . اگر فرض کنیم نیروهای دیگری بردستگاه وارد نشوند تعیین کنید پس‌ازچه مدتی و با چه سرعتی جسم ازسطح میز خارج میشود .

راهنمایی - مجموع جرم دستگاه برابر $\frac{۶۴}{۳۲}$ است .

۱۰- نیرویی که هواپیمایی‌را بسمت‌جلو میراند برابر F پوند است. اگر نیروی مقاومت هوا $kv^۲$ باشد سرعت حدی هواپیما را بدست آورید .

۱۱- جسمی‌بوزن۸پوند را ازحالت سکون‌برروی‌سطحی که ضریب مالش لغزشی آن‌برابر $\frac{۱}{۴}$ است با نیرویی برابر دو برابر فاصله جسم از مبدأ حرکت $(x=o)$ بجلو میکشیم . اگر نیروی مقاومت هوا برابر $\frac{v^۲}{۸}$ باشد عبارت سرعت جسم را برحسب تابعی از فاصله بدست آورید .

۱۲- وزن قایق و سرنشین آن مجموعاً ۴۰۰ پوند است. درلحظه‌یی که شخص شروع به پارو زدن میکند سرعت قایق ۲۲ فوت درثانیه است . اگر نیروی مقاومت آب ۲۷ پوند و پارو نیز نیروی ثابتی برابر ۱۵ پوند بردستگاه وارد کند سرعت قایق را برحسب تابعی از زمان و همچنین سرعت حدی قایق را بدست آورید .

جوابها

۱- الف : $\frac{۲۲۰}{۳}$ پوند . ب : $\frac{۴۴}{۳}$ فوت درثانیه ، ۶۹۷ فوت .

۲- الف : $v=۸(۱-e^{-۰ر۲t})$.

ب : ۱ر۵ فوت درثانیه ، ۶ر۷ فوت درثانیه .

پ : $T.v=۸$ فوت درثانیه .

۳- الف : $v=\frac{F}{k}(۱-e^{-\frac{kt}{m}})$.

ب : $s=\frac{F}{k}\left(t+\frac{me^{-\frac{kt}{m}}}{k}-\frac{m}{k}\right)$.

پ : $s=\frac{m}{k}\left(-v-\frac{F}{k}\,Log\,\frac{F-kv}{F}\right)$.

ت : $T.v=\frac{F}{k}$ فوت درثانیه .

۴- الف : $\frac{۱}{۲}b$.

ب : $s=\frac{۹}{۲}(t+۲۷e^{-\frac{t}{۲۷}}-۲۷)$, $v=\frac{۹}{۲}(۱-e^{-\frac{t}{۲۷}})$.

پ : ۱۲۲۸ر۵ فوت .

۵- الف : $v^۲=v_0{}^۲-۲rgs$. ب : $s=\frac{v_0{}^۲}{۲rg}$.

۶- الف : $v-۲Log\frac{۲+v}{۱۴}=۱۲-\frac{۴}{۵}s$. ب : ۱۰ر۱ .

۷- $v=۲۴(۱-e^{-\frac{t}{۴۰۰}})$ ، فوت درثانیه $T.v=۲۴$.

۸- ۰ر۰۱۵ .

۹- درثانیه $t=۲ر۲$, فوت درثانیه $v=۱۳ر۴$.

۱۰- فوت درثانیه $T.v=\sqrt{\frac{F}{k}}$.

۱۱- $v^۲=۱۶(x-۲+۲e^{-x})$.

۱۲- $v=\frac{۱}{۲}(۱۵+۲۹e^{-\frac{۴t}{۲۵}})$, فوت درثانیه $T.v=\frac{۱۵}{۲}$.

۳۳ . ۳- حرکت مایل

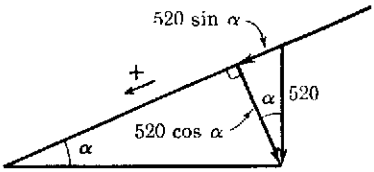
اگر جسمی در امتداد خط مایل D که با افق زاویه α تشکیل میدهد حرکت نماید نیروی مؤثری که باعث جنبش جسم در امتداد خط مایل D بسوی پایین میگردد ، مؤلفه نیروی ثقل که در جهت موازی حرکت تأثیر میکند میباشد و نیروهایی که از حرکت جسم ممانعت بعمل میآورند نیروهای مالشی ومقاومت هستند . در این حالت نیروی مالشی حاصلضرب μ ضریب مالش و مؤلفه نیروی جاذبه برامتداد عمود برحرکت است .

مثال ۱- لوژی با دو سرنشین که مجموع وزن آنها بالوژ ۵۲۰ پوند است در امتداد شیبی که ضریب زاویه‌آن برابر $\frac{۵}{۱۲}$ میباشدبسوی پایین حرکت میکند . ضریب مالش لغزشی برابر $\frac{۱}{۵۰}$ و نیروی مقاومت باد که در جهت مخالف حرکت لوژ میوزد ۵ برابر سرعت لوژ است . مطلوب است تعیین :

الف ـ زمان لازم برای آنکه لوژبه انتهای سرازیری که طول آن ٦٥٠ فوت است برسد.

ب ـ چنانچه طول سرازیری بینهایت باشد سرعت حدی چه خواهد بود .

حل ـ فرض میکنیم α زاویه شیب سرازیری فوق باشد. چون بنابفرض ضریب زاویه فوق برابر $\frac{٥}{١٢}$ است لذا $tg\alpha=\frac{٥}{١٢}$ واز آنجا $sin\alpha=\frac{٥}{١٣}$ و $cos\alpha=\frac{١٢}{١٣}$ میباشد.



شکل ٢٥ . ٣

بنابراین با توجه به شکل (٢٥ . ٣) اندازه مؤلفه نیروی ثقل در امتداد حرکت برابر :

$$٥٢٠\,sin\alpha=٥٢٠\times\frac{٥}{١٣}=٢٠٠ \text{ پوند}$$

است و اندازه آن در امتداد عمود برحرکت :

$$٥٢٠\,cos\alpha=٥٢٠\times\frac{١٢}{١٣}=٤٨٠ \text{ پوند}$$

میباشد . چون ضریب سالش لغزشی برابر $\frac{١}{٥٠}$ است لذا نیروی مالش لغزشی برابر :

$$٤٨٠\times\frac{١}{٥٠}=٩٫٦ \text{ پوند}$$

میگردد .

با توجه بآنکه جرم جسم برابر $\frac{٥٢٠}{٣٢}$ است معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{٥٢٠}{٣٢}\cdot\frac{dv}{dt}=٢٠٠-٩٫٦-٥v=١٩٠٫٤-٥v \quad ; \quad \frac{dv}{dt}+\frac{٤}{١٣}v=١١٫٧$$

معادله بالا دارای جواب عمومی $v=٣٨+c_1e^{-\frac{٤t}{١٣}}$ بوده و اگر شرایط اولیه :

$$(t=0 \ , \ v=0)$$

را در آن جایگزین کنیم $c_1=-٣٨$ میشود. یعنی :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt}=v=٣٨(١-e^{-\frac{٤t}{١٣}})$$

و پس‌از انتگرال‌گیری خواهیم داشت :

$$x=۳۸(t+\frac{۱۳}{٤}e^{-\frac{٤t}{۱۳}})+c_۲ \qquad (II)$$

اگر مبدأ زمان را در ابتدای حرکت لوژ اختیار کنیم یعنی در لحظه $t=0$ مقدار $x=0$ اختیارگردد و سپس این مقادیر را در رابطه (II) قرار دهیم مقدار $c_۲=-۱۲۳٫۵$ بدست میآید . یعنی :

$$x=۳۸(t+\frac{۱۳}{٤}e^{-\frac{٤t}{۱۳}})-۱۲۳٫۵$$

اگر در معادله بالا مقدار $x=۶۵۰$ گردد چنین داریم :

$$۲۰٫٤=t+\frac{۱۳}{٤}e^{-\frac{٤t}{۱۳}}$$

جواب این معادله تقریباً $t=۲۰٫٤$ ثانیه است . یعنی پس‌از ۲۰٫٤ ثانیه لوژ به‌انتهای سرازیری میرسد .

ب ـ اگر در رابطه (I) مقدار $t \to \infty$ سرعت حدی برابر ۳۸ فوت درثانیه خواهد گردید .

مثال ۲ـ جسمی که وزن آن w پوند است در امتداد سطح سوربی که با افق زاویه α تشکیل میدهدباسرعت اولیه v_0 بسوی بالا پرتاب میگردد. چنانچه ضریب مالش لغزشی r و نیروی مقاومت هوا که درجهت مخالف حرکت تأثیر میکند برابر kv پوند باشد .

الف ـ سرعت و فاصله جسم را برحسب تابعی از t بیابید .

ب ـ برای چه مدت و تا چه فاصله‌یی جسم در امتداد سطح سورب بالا میرود .

مبدأ زمان ومکان‌را بریکدیگر منطبق و جهت مثبت را درجهت حرکت فرض‌میکنیم .

حل ـ بسهولت معلوم میشود که اندازه مؤلفه نیروی‌ثقل درجهت‌حرکت $-w\sin\alpha$ و مؤلفه همین نیرو در امتداد عمود برحرکت $w\cos\alpha$ است .

الف ـ ازآنجایی که‌ضریب مالش‌لغزشی r است‌لذا نیروی مالش لغزشی برابر $wr\cos\alpha$ خواهد بود .

باتوجه بآنکه جرم جسم برابر $m=\frac{w}{۳۲}$ است معادله دیفرانسیل حرکت جسم بصورت زیر میباشد :

$$m\frac{dv}{dt}=-w\sin\alpha-wr\cos\alpha-kv$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=-\frac{w}{m}(\sin\alpha+r\cos\alpha)$$

چنانچه در جواب عمومی بالا که بصورت $v=c_{۱}c^{-\frac{kt}{m}}-\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)$ است

شرایط اولیه $(v=v_{\circ}\ ,\ t=o)$ را قرار دهیم مقدار $c_{۱}=v_{\circ}+\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)$ بدست میآید و از آنجا :

$$v=\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)(e^{-\frac{kt}{m}}-۱)+v_{\circ}e^{-\frac{kt}{m}} \tag{I}$$

و یا پس‌از انتگرال گیری از رابطه اخیر رابطه :

$$s=\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)(-\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}-t)-\frac{v_{\circ}m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}+c_{۲}$$

بدست میآید. چنانچه مبدأ زمان و مکان را بریکدیگر منطبق بگیریم یعنی‌در لحظه $t=o$ مقدار $s=o$ باشد مقدار ثابت $c_{۲}$ بدست میآید یعنی :

$$c_{۲}=\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)\frac{m}{k}+\frac{v_{\circ}m}{k}$$

پس :

$$s=\frac{w(\sin\alpha+r\cos\alpha)}{k}\left[\frac{m}{k}(۱-e^{-\frac{kt}{m}})-t\right]+\frac{mv_{\circ}}{k}(۱-e^{-\frac{kt}{m}}) \tag{II}$$

ب ـ تا زمانیکه سرعت صفر نشده است جسم در سطح مورب بالا میرود . لذا برای یافتن این زمان کافی است عبارت (I) را برابر صفر قرار دهیم . یعنی :

$$\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)(e^{-\frac{kt}{m}}-۱)+v_{\circ}e^{-\frac{kt}{m}}=o\quad ,$$

$$e^{-\frac{kt}{m}}\left[\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)+v_{\circ}\right]=\frac{w}{k}(\sin\alpha+r\cos\alpha)\quad ,$$

$$e^{\frac{kt}{m}} = ١ + \frac{kv_0}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)} \quad \text{و یا} \quad t = \frac{m}{k}\, Log\left[١ + \frac{kv_0}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha}\right]$$

اکنون مقدار t را که بدین ترتیب بدست آمده است در رابطه (II) قرار میدهیم و از آنجا فاصله مطلوب عبارت میگردد از :

$$s = \frac{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)}{k}\left\{\frac{m}{k}\left[١ - \frac{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha) + kv_0}\right] - t\right\}$$

$$+ \frac{mv_0}{k} \cdot \frac{kv_0}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha) + kv_0}$$

$$= \frac{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)mv_0}{k[w(\sin\alpha + r\cos\alpha) + kv_0]} + \frac{mv_0^{٢}}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha) + kv_0}$$

$$- \frac{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)}{k} \cdot \frac{m}{k}\, Log\left[١ + \frac{kv_0}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)}\right]$$

$$= \frac{mv_0}{k} - \frac{m^{٢}g(\sin\alpha + r\cos\alpha)}{k^{٢}}\, Log\left[١ + \frac{kv_0}{w(\sin\alpha + r\cos\alpha)}\right]$$

مسائل

در مسائل زیر مبدأ را درلحظه شروع حرکت و جهت مثبت را جهت حرکت انتخاب میکنیم .

١- لوژی با چهارسرنشین که مجموع وزن‌آنها بالوژ ٤٠٠ پوند است در امتدادشیبی که باافق زاویه ٣٠° تشکیل میدهد بسوی پایین حرکت میکند .

اگر جسم از حالت سکون بحرکت درآید و ضریب مالش لغزشی برابر $\frac{١}{٥٠}$ باشد وضعیت و سرعت لوژ را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

اگر طول شیب ١٢٣٫٢ فوت باشد تعیین کنید لوژ با چه سرعتی به انتهای شیب میرسد . از مقاومت هوا صرفنظر میکنیم .

٢- جسمی که ٤٠٠ پوند وزن دارد در امتداد شیبی که با افق زاویه ٣٠° تشکیل

میدهد با سرعت اولیه ۵۰ فوت درثانیه بطرف بالا پرتاب میشود . ضریب مالش لغزشی برابر $\frac{۱}{۱۰}$ است و از مقاومت هوا صرفنظر میشود .

الف ـ وضعیت و سرعت جسم را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

ب ـ قبل ازاینکه جسم متوقف گردد تا چه فاصله وبرای چه مدتی حرکت مینماید .

۳ـ نقاط مادی A و B هردو در یک زمان از یک نقطه واقع برمحیط دایره که درصفحه عمودی قرار دارد از حالت سکون بحرکت درمیآیند . نقطه مادی A در امتداد قطر عمودی و نقطه مادی B در امتداد وتر غیر مشخصی از دایره حرکت میکند . اگر تنها نیروی مؤثری که بردو نقطه مادی وارد میشود نیروی ثقل باشد ثابت کنید نقاط مادی A و B دریک زمان از محیط دایره خواهند گذشت .

۴ـ جسمی بوزن w پوند با سرعت اولیه v_0 فوت درثانیه درامتداد شیبی که با افق زاویه α° تشکیل میدهد بسوی پایین حرکت میکند . ضریب مالش لغزشی برابر r است و از مقاومت هوا صرفنظر میکنیم .

الف ـ سرعت و فاصله جسم را برحسب توابعی از زمان بیابید .

ب ـ سرعت را برحسب تابعی از فاصله بدست آورید .

پ ـ عبارت زمان را برحسب تابعی از فاصله بیابید .

با استفاده ازاین فرمولها صحت جوابهای مسئله یک را تأیید کنید .

۵ـ جسمی بوزن w پوند با سرعت اولیه v_0 فوت درثانیه در امتداد شیبی که با افق زاویه α° تشکیل میدهد بسوی بالا حرکت میکند. ضریب مالش لغزشی برابر r است و از مقاومت هوا صرفنظر میکنیم .

الف ـ وضعیت و سرعت جسم را برحسب توابعی از زمان بدست آورید .

ب ـ قبل ازاینکه جسم متوقف گردد تا چه فاصله و برای چه مدتی حرکت مینماید.

بااستفاده از این فرمولها صحت جوابهای مسئله ۲ را تأیید کنید .

۶ـ جسمی بوزن w پوند از حالت سکون در امتداد شیبی که باافق زاویه α° تشکیل میدهد بسوی پایین حرکت میکند. ضریب مالش لغزشی برابر r میباشد و نیروی مقاومت هوا برابر kv پوند است .

الف ـ سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بیابید .

ب ـ فاصله را برحسب تابعی از سرعت بدست آورید .

پ ـ سرعت حدی را تعیین کنید .

٧- پسر بچه و سورتمه‌یی که مجموعاً ٩٦ پوند وزن دارند از حالت سکون در امتداد شیبی که ضریب زاویه‌اش برابر $\frac{٣}{٤}$ است بسوی پایین حرکت میکند. ضریب مالش لغزشی برابر $\frac{١}{٢٤}$ و نیروی مقاومت هوا دو برابر سرعت میباشد .

الف ـ سرعت و فاصله سورتمه را برحسب توابعی از زمان بیابید .

ب ـ سرعت حدی سورتمه را تعیین کنید .

پ ـ اگر طول شیب ٢٧٢ فوت باشد پس از چه مدتی سورتمه به انتهای شیب میرسد .

ت ـ سرعت سورتمه در انتهای شیب چه خواهد بود .

این مسئله را مستقلاً حل نموده و بااستفاده ازفرمولهایی که در مسئله ٦ بدست آمده صحت جوابها را تأیید کنید .

٨- جسمی که ٦٤ پوند وزن دارد با سرعت اولیه ٩٦ فوت درثانیه در امتداد شیبی که ضریب زاویه‌اش برابر $\frac{١}{٤}$ است بسوی بالاحرکت میکند. ضریب مالش لغزشی برابر $\frac{١}{٤}$ و نیروی مقاومت هوا برابر $\frac{١}{١٠}v$ پوند است .

الف ـ سرعت و فاصله جسم را برحسب توابعی از زمان بیابید .

ب ـ تاچه فاصله و برای چه مدتی جسم حرکت میکند .

این مسئله را مستقلاً حل کرده و بااستفاده از فرمولهایی که در مثال ٣ بدست آمده صحت جوابها را تأیید کنید .

٩- لوژی با دوسرنشین که مجموع وزن آنها با لوژ برابر ٣٠٠ پوند است در امتداد شیبی که درارتفاع ٢٠٠ فوتی سطح افق قرار دارد و طول آن برابر $\frac{١}{٤}$ میل است ازحالت سکون بحرکت درمیآید . ضریب مالش لغزشی برابر $\frac{٣}{١٠٠}$ ونیروی مقاومت باد متناسب با مربع سرعت میباشد . هنگامیکه سرعت لوژ برابر ٣٠ فوت درثانیه است این نیرو برابر ٦ پوند میباشد .

الف ـ سرعت لوژ را برحسب تابعی از فاصله و زمان بدست آورید .

ب ـ با چه سرعتی لوژ به انتهای شیب میرسد .

پ ـ پس از چه مدتی لوژ به انتهای شیب خواهد رسید .

ت ـ اگر طول شیب بینهایت باشد سرعت حدی لوژ را بدست آورید .

جوابها

۱- $v=۱۵٫۴t$, $s=۷٫۷t^{۲}$, $v=۶۱٫۷$ فوت درثانیه .

۲- الف : $v=۵۰-۱۸٫۷۷t$, $s=۵۰t-۹٫۳۰t^{۲}$.

ب : $t=۲٫۷$ ثانیه , $s=۶۶٫۶$ فوت .

۴- الف : $v=v_{\circ}+g(\sin\alpha-r\cos\alpha)t$, $s=v_{\circ}t+\frac{g}{۲}(\sin\alpha-r\cos\alpha)t^{۲}$.

ب : $v^{۲}=v_{\circ}^{۲}+۲g(\sin\alpha-r\cos\alpha)s$.

پ : $t=\frac{\sqrt{v_{\circ}^{۲}+۲gs(\sin\alpha-r\cos\alpha)}-v_{\circ}}{g(\sin\alpha-\cos\alpha)}$.

۵- الف : $v=v_{\circ}-g(\sin\alpha+r\cos\alpha)t$, $s=v_{\circ}t-\frac{g}{۲}(\sin\alpha+r\cos\alpha)t^{۲}$.

ب : $t=\frac{v_{\circ}}{g(\sin\alpha+r\cos\alpha)}$, $s=\frac{v_{\circ}^{۲}}{۲g(\sin\alpha+r\cos\alpha)}$.

۶- الف : , $s=\frac{W}{k}(\sin\alpha-r\cos\alpha)\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}-\frac{m}{k}\right)$.

$$v=\frac{W}{k}(\sin\alpha-r\cos\alpha)(۱-e^{-\frac{kt}{m}})$$

ب : $s=\frac{m}{k}\left(-v-\frac{A}{k}Log\frac{A-kv}{A}\right)$ که درآن :

$$A=mg(\sin\alpha-r\cos\alpha)$$

پ : سرعت حدی $=\frac{W}{k}(\sin\alpha-r\cos\alpha)$.

۷- الف : $v=۲۷٫۲(۱-e^{-\frac{۲t}{۳}})$, $s=۲۷٫۲\left(t+\frac{۳}{۲}e^{-\frac{۲t}{۳}}-\frac{۳}{۲}\right)$.

ب : $T.v=۲۷٫۲$ فوت درثانیه .

پ : ۵٫۱۱ ثانیه . ت : ۲٫۲۷ فوت درثانیه .

۸- درفرمولهای مثال ۳ باید مقادیر :

$$w=٦٤ \ , \ r=\frac{١}{٤} \ , \ k=\frac{١}{١٠} \ , \ \sin\alpha=\frac{٣}{٥} \ , \ \cos\alpha=\frac{٤}{٥} \ ,$$

$$v_{\circ}=٩٦ \ , \ m=\frac{٦٤}{٣٢}=٢$$

قرار داد.

۹- الف : $v=٧٤٫١\,\dfrac{e^{٠٫١٠٩t}-١}{e^{٠٫١٠٩t}+١} \ , \ v^{٢}=٥٤٨٤(١-e^{-٠٫٠٠١٤s})$.

ب : ٦٨ فوت درثانیه . پ : تقریباً ۳۰ ثانیه.

ت : ۷۴٫۱ فوت درثانیه.

۴ . ۳- منحنی‌های تعقیبی - منحنی‌های تعقیبی نسبی

۴۱ . ۳- منحنی تعقیبی - اگرجسم A همواره بسوی‌نقطه ثابت و یا جسم متحرك دیگر B حرکت کند مسیرپیموده شده بوسیله جسم A را منحنی تعقیبی گوییم.

مثال ۱- خلبانی سعی میکند هواپیمای خود را بسوی شهر T که درمغرب فرودگاه مبدأ قراردارد برساند. اگرسرعت‌هواپیما v میل در ساعت وسرعت باد که از جانب جنوب میوزد w میل درساعت باشد معادله مسیر هواپیما را با فرض آنکه فاصله فرودگاه مبدأ از شهر T برابر a میل باشد بیابید.

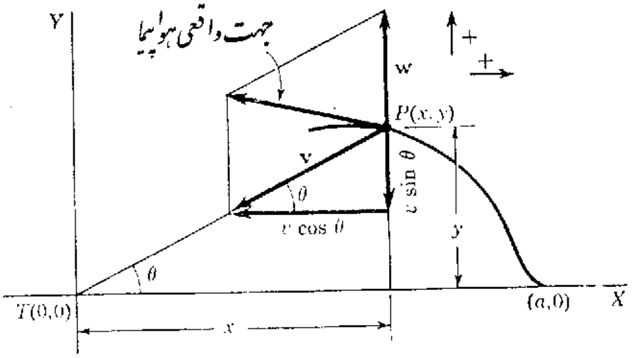
حل - اگر $P(x , y)$ وضعیت هواپیما در لحظه t باشد اندازه بردار سرعت دراین لحظه برابر v بوده و جهت آن همواره بسوی شهر T میباشد .

زاویه‌یی که این بردار با خط افقی و اصل بین فرودگاه مبدأ و شهر T تشکیل میدهد به θ نمایش میدهیم.

بنابفرض مسئله جهت باد ازجانب جنوب بشمال بوده و دارای سرعتی برابر w میل درساعت است .

همانطورکه از شکل (۲۶ . ۳) مشهود میگردد اندازه و جهت بردارسرعت واقعی هواپیما درلحظه t قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{w}$ اضلاع آن‌هستند. ولی چون جهت این بردار(بردارسرعت‌واقعی) درهرلحظه تغییر میکند لذا باید برمسیرهواپیما

مماس باشد و از آنجا مسئله منجر به یافتن رابطه‌یی میگردد که $\frac{dy}{dx}$ را برحسب تابعی از x و y بیان کند.



شکل ۲۶ . ۳

مؤلفه های سرعت هواپیما در امتداد محور x ها و y ها عبارتند از:

$$\frac{dx}{dt}=-v\cos\theta \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-v\sin\theta$$

و از آنجا تصویر سرعت واقعی هواپیما در امتداد محور x ها و y ها با درنظرگرفتن سرعت باد عبارت خواهند بود از:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt}=-v\cos\theta \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-v\sin\theta+w$$

از طرف دیگر بسهولت از شکل (۲۶ . ۳) معلوم میگردد که:

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

پس‌از جایگزین کردن مقادیر بالا در رابطه (I) چنین داریم:

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{dt}=-\frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}}+w$$

اگر معادله دوم (II) را برمعادله اول همین رابطه تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\text{(III)}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-vy+w\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{-vx}=\frac{y-\frac{w}{v}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{x}$$

اکنون در معادله (III) نسبت سرعت باد به سرعت هواپیما یعنی کسر $\frac{w}{v}$ را مساوی k قرار داده و از آنجا معادله دیفرانسیل همگن زیر بدست میآید :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-k\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{x}$$

اکنون معادله همگن بالا را مانند روش شماره (۵ . ۲) و با درنظرداشتن شرایط اولیه :

$$t=0\ ;\ x=a\ ,\ y=0\ ,\ y'=\frac{y}{x}=0$$

بطریق زیر حل میکنیم :

$$\frac{xdy-ydx}{x^{۲}}=-\frac{k}{x}\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}\quad ,\quad \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}}=-\frac{k}{x}dx$$

$$\int_{\frac{y}{x}=0}^{\frac{y}{x}}\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}}=-\int_{x=a}^{x}\frac{k}{x}dx\quad ,$$

$$Log\left[\frac{y}{x}+\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}\right]=-kLog\,\frac{x}{a}$$

و ازآنجا :

$$\frac{y}{x}+\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}=\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}$$

و یا :

$$۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}=\left(\frac{x}{a}\right)^{-۲k}-۲\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}$$

$$۲\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}\cdot\frac{y}{x}=\left(\frac{x}{a}\right)^{-۲k}-۱$$

و بالنتیجه :

$$\text{(IV)} \qquad y=\frac{x}{۲}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k}-\left(\frac{x}{a}\right)^{k}\right]=\frac{a}{۲}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{۱-k}-\left(\frac{x}{a}\right)^{۱+k}\right]$$

اگر در معادله اخیربجای k کسر $\frac{w}{v}$ راقرار دهیم معادله مسیرهواپیمابدست میآید. یعنی:

$$\text{(V)} \qquad y=\frac{a}{۲}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{۱-\left(\frac{w}{v}\right)}-\left(\frac{x}{a}\right)^{۱+\left(\frac{w}{v}\right)}\right]$$

بحث - ازمعادله (V) میتوان نتایج جالب زیر را درباره مسیر هواپیما بدست‌آورد :

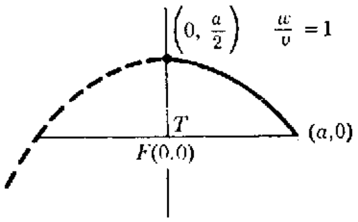
حالت اول - سرعت باد و سرعت هواپیما بایکدیگر برابر باشند یعنی $v = w$.
دراینحالت معادله (V) بصورت زیر درمیآید :

$$\text{(VI)} \qquad y=\frac{a}{۲}\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right) \quad , \quad x^{۲}=-۲a\left(y-\frac{a}{۲}\right)$$

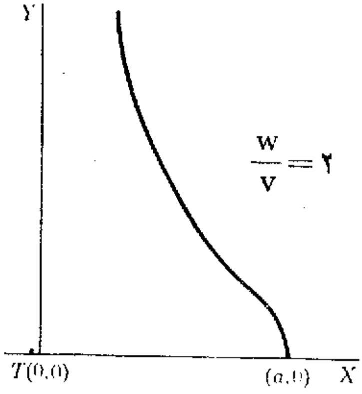
یعنی مسیر هواپیما سهمی خواهد بود وهیچگاه به مقصد خود یعنی شهر T نخواهد رسید. (شکل ۲۷ . ۳) .

حالت دوم - سرعت باد بیشتر ازسرعت هواپیما است یعنی $w > v$. دراینحالت $\frac{w}{v} > ۱$ ویا $۱-\left(\frac{w}{v}\right) < 0$ بوده وبالنتیجه هنگامیکه x بسوی صفر میل میکند عبارت :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{۱-\left(\frac{w}{v}\right)}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{w}{v}-۱}$$



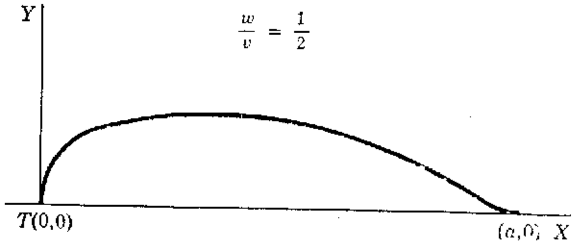
شکل ۲۷ . ۳



شکل ۲۸ . ۳

بسوی بینهایت میل خواهد نمود و بنابراین هنگامیکه دررابطه (V) مقدار x بسوی صفرمیل کندy نیزبسوی بینهایت میل میکندومانندحالت اول هواپیما هرگزبمقصدخود یعنی‌شهرT نخواهد رسید. بااختیار $۲=\frac{W}{V}$ شکل تقریبی مسیر در شکل (۲۸ . ۳) نمایش داده شده است .

حالت سوم - سرعت باد کمتر از سرعت هواپیما است یعنی $w < v$. دراینحالت $\frac{W}{V} < ۱$, $۱-\frac{W}{V} > o$ میباشد . از رابطه (V) معلوم میگردد هنگامیکه $x=o$ باشد y نیز برابر صفر گردیده و بالنتیجه هواپیما بمقصد خود یعنی شهر T خواهد رسید. مسیرتقریبی هواپیمادراینحالت باانتخاب $v=۲w$ در شکل (۲۹ . ۳) ترسیم‌شده‌است .



شکل ۲۹ . ۳

مثال ۲- مثال یک را با بکار بردن مختصات قطبی حل کنید.

حل - قبلاً مؤلفه‌های بردارهای سرعت وشتاب نقطه P به مختصات قطبی (r , θ) را درامتداد شعاع حامل وامتداد عمود برآن بدست میاوریم. چنانچه از روابط :

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

نسبت به t دوبار مشتق بگیریم چنین داریم :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt}=\cos\theta\frac{dr}{dt}-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad \frac{dy}{dt}=\sin\theta\frac{dr}{dt}+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}=\cos\theta\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}}-۲\sin\theta\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}-r\sin\theta\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} \\ \frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}=\sin\theta\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}}+۲\cos\theta\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}+r\cos\theta\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} \end{cases}$$

روابط (I) و (II) بازاء جمیع مقادیر θ برقرار بوده و بالاخص برای $\theta=o$ نیز صادق

خواهند بود. از طرف دیگر هنگامیکه $\theta=o$ باشد امتداد شعاع حامل برمحور Ox و امتداد عمود برشعاع حامل برمحور Oy منطبق میگردد و ازآنجا در اینحالت $(\theta=o)$ تصاویر بردارهای سرعت و شتاب در امتداد شعاع حامل و عمود برآن به ترتیب عبارت میگردند از:

$$v_r=\frac{dx}{dt} \quad , \quad v_\theta=\frac{dy}{dt} \quad , \quad \gamma_r=\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} \quad , \quad \gamma_\theta=\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}$$

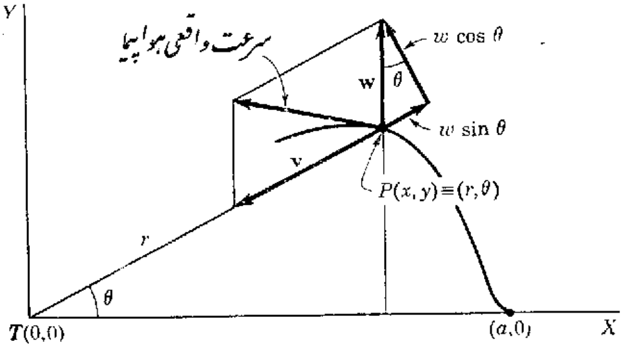
با انتخاب $\theta=o$ در دو معادله (I) و (II) وبااستفاده از معادلات بالا چنین داریم:

$$v_r=\frac{dr}{dt} \quad , \quad v_\theta=r\,\frac{d\theta}{dt} \qquad (۳ . ٤١)$$

$$\gamma_r=\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲} \quad , \quad \gamma_\theta=۲\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}+r\,\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} \qquad (۳.٤١١)$$

روابط (٤١ . ۳) و (٤١١ . ۳) تصاویر بردار سرعت و شتاب در امتدادهای شعاع حامل و عمود برآن میباشند.

درمثال مورد بحث مؤلفه‌های سرعت باد درامتداد شعاع حامل وعمود برآن بنابرابطه (٤١ . ۳) و با استفاده از شکل (۳۰ . ۳) عبارتند از:



شکل ۳۰ . ۳

$$\text{(III)} \qquad W_r=\frac{dr}{dt}=w\sin\theta \quad , \quad W_\theta=r\,\frac{d\theta}{dt}=w\cos\theta$$

لذا مؤلفه‌های سرعت واقعی هواپیما با درنظرگرفتن سرعت بادو هواپیما در امتدادهای شعاع حامل و عمود برآن عبارت میگردند از:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dr}{dt}=-v+w\sin\theta \quad , \quad \frac{rd\theta}{dt}=w\cos\theta$$

و پس از تقسیم معادله دوم (IV) برمعادله اول همین رابطه عبارت :

$$\frac{dr}{rd\theta}=\frac{-v+w\sin\theta}{w\cos\theta}=-\frac{v}{w}\cdot\frac{۱}{\cos\theta}+tg\theta=k\sec\theta+tg\theta$$

و یا :

$$\frac{dr}{r}=(k\sec\theta+tg\theta)d\theta$$

که درآن $k=-\frac{v}{w}$ است‌بدست میاید . جواب معادله دیفرانسیل بالا ازانتگرال گیری همین رابطه بدست میآید . یعنی :

$$Log r+Log c=k Log(\sec\theta+tg\theta)-Log\cos\theta$$

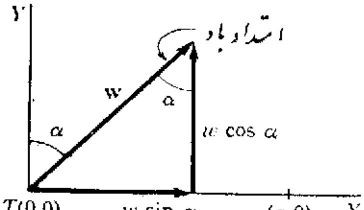
$$\text{(V)} \qquad cr=(\sec\theta+tg\theta)^{k}\sec\theta$$

حال اگر شرایط اولیه $t=o$. $\theta=o$, $r=a$, $k=-\frac{v}{w}$ را دراین معادله قرار دهیم $c=\frac{۱}{a}$ گردیده و سرانجام مسیر مطلوب عبارت میشود از :

$$\text{(VI)} \qquad r\cos\theta=a(\sec\theta+tg\theta)^{-\frac{v}{w}}$$

مثال ۳- مثال یک را با فرض آنکه باد با سرعت w میل درساعت‌درامتدادی که باامتداد شاغول زاویه α تشکیل میدهد میوزد حل کنید.

حل - ذیلاً این مثال را با دو روش حل میکنیم .



شکل ۳۱ . ۳

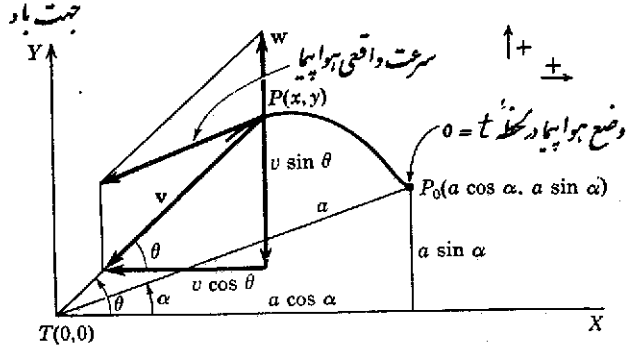
روش اول - محورهای مختصات راچنان انتخاب مینماییم که محورy ها منطبق برجهت باد گردد. دراینصورت شرایط اولیه در لحظه $t=o$ عبارت از $x=a\cos\alpha$ و $y=a\sin\alpha$ گردیده و معادلات دیفرانسیل حرکت عیناً مانند رابطه (I) مثال یک میگردند (به شکل ۳۱ . ۳ مراجعه شود) . یعنی :

$$(I)\qquad \frac{dx}{dt}=-v\cos\theta \quad , \quad \frac{dy}{dt}=-v\sin\theta+w$$

اگر بطریق مشابه مثال یک عمل کنیم رابطه (I) منجر به معادله زیر میشود :

$$(II)\qquad Log\frac{y}{x}+\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}=-kLogx+Logc \quad , \quad k=\frac{w}{v}$$

مقدار ثابت c با قرار دادن شرایط اولیه $x=a\cos\alpha$ و $y=a\sin\alpha$ در معادله (II) بدست میآید . یعنی :



شکل ۳۲ . ۳

$$c=(tg\alpha+\sec\alpha)(a\cos\alpha)^{k}$$

پس :

$$Log\frac{y}{x}+\sqrt{۱+\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}+Logx^{k}=Log[(tg\alpha+\sec\alpha)(a\cos\alpha)^{k}]$$

معادله بالا پس از جایگزین نمودن $k=\frac{w}{v}$ و ساده کردن بصورت زیر درمیآید :

$$(III)\qquad x^{\left(\frac{w}{v}\right)-۱}\left(y+\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\right)=(tg\alpha+\sec\alpha)(\alpha\cos\alpha)^{\frac{w}{v}}$$

باتوجه بآنکه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ مقادیر ثابتی میباشند میتوان مانند مثال یک منحنی های تقریبی مسیر هواپیما را درسه حالت $w \mathrel{\substack{<\\=\\>}} v$ ترسیم کرد .

روش دوم - باملاحظه شکل (۳۲ . ۳) معلوم میگردد که مؤلفه های برآیند

نیروهای باد و سرعت هواپیما برروی محورهای Ox و Oy عبارتند از :

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dx}{dt} = -v\cos\theta + w\sin\alpha \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -v\sin\theta + w\cos\alpha$$

اگر معادله دوم رابطه (IV) را برمعادله اول همین رابطه تقسیم کرده وبجای $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به ترتیب مقادیر $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را قرار دهیم عبارت :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-v\sin\theta + w\cos\alpha}{-v\cos\theta + w\sin\alpha}$$

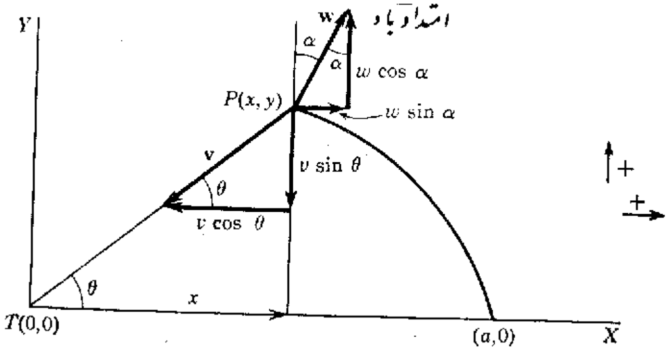
و یا :

$$\text{(V)} \qquad \left(-\frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}} + w\cos\alpha\right)dx = \left(-\frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}} + w\sin\alpha\right)dy$$

بدست میآید. بادرنظر داشتن آنکه v , $w\sin\alpha$, $w\cos\alpha$ مقادیر ثابتی میباشند وهمچنین شرایط اولیه ($x=a$ و $y=0$) بسهولت معادله همگن (V) دارای جواب عمومی :

$$(x)^{\left(\frac{w}{v}\right)-1}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right) = (tg\alpha + \sec\alpha)(\alpha\cos\alpha)^k$$

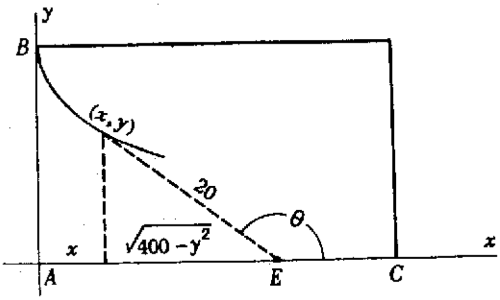
میباشد.



شکل ۳۳ . ۳

مثال ٤- شخصی که درگوشه A استخر مستطیل شکلی ایستاده است انتهای نخی را بطول ۲۰ متر که کاملاً کشیده شده و انتهای دیگر آن به قایقی که درگوشه مجاور B قرار دارد وصل شده است دردست دارد. این شخص از نقطه A درامتداد ضلع دیگر استخر

بسوی C حرکت میکند وهمواره سعی میکند که نخ کشیده باشد (شکل ۳۴ . ۳). موقعیت قایق و شخص را هنگامیکه قایق بفاصله ۱۲ فوتی از AC میرسد بدست آورید.



شکل ۳۴ . ۳

حل - اضلاع AC و AB استخررابه ترتیب محورx هاو محورyها پنداشته وفرض مینماییم هنگامیکه شخص در امتداد AC به نقطه E میرسد موقعیت قایق (x , y) و ضریب زاویه امتداد نخ را به $tg\theta$ نمایش میدهیم و لذا به ترتیب چنین داریم :

$$tg\theta=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{٤٠٠-y^۲}} \quad , \quad dx=-\frac{\sqrt{٤٠٠-y^۲}}{y}\,dy$$

ویا پس‌از انتگرال گیری :

$$x=-\sqrt{٤٠٠-y^۲}+۲٠Log\frac{۲٠+\sqrt{٤٠٠-y^۲}}{y}+c$$

هنگامیکه‌قایق درنقطه B باشد $x=o$ و $y=۲٠$ است. پس‌ازجایگزین کردن این مقادیر درمعادله بالا مقدار $c=o$ بدست میآید و از آنجا معادله مسیر قایق عبارت میگردد از :

$$x=-\sqrt{٤٠٠-y^۲}+۲٠Log\frac{۲٠+\sqrt{٤٠٠-y^۲}}{y}$$

ازطرف دیگر :

$$AE=x+\sqrt{٤٠٠-y^۲}=۲٠Log\frac{۲٠+\sqrt{٤٠٠-y^۲}}{y}$$

وبالنتیجه هنگامیکه قایق بفاصله ۱۲ فوتی‌از AC قرار دارد یعنی $y=۱۲$ است‌چنین‌داریم :

$$AE=x+۱٦=۲٠Log۳=۲۲$$

لذا شخصی ۲۲ فوت درامتداد AC ازنقطه A فاصله داشته وقایق نیز ۶ فوت از AB فاصله خواهد داشت.

مسائل

۱- شخصی در رودخانه‌یی که ۱۰۰ فوت عرض آن است با نرخ ۳ فوت درثانیه شنا میکند و قصد دارد که خود را به درختی که در طرف مقابل حرکت او قرار دارد برساند.

الف - اگر جریان آب با نرخ یک فوت درثانیه ; ۳ فوت درثانیه ; ٤ فوت درثانیه او را از مسیر اصلی منحرف کند معادله مسیر او را درهریک از این حالتها بدست آورید.

ب - نمودار هریک از معادلات فوقرا رسم کنید.

این مسئله را مستقلاً حل کرده وجوابهای حاصل را با رابطه (IV) مثال یک مقایسه کنید.

۲- در مسئله یک نشان دهید :

الف - شخص درصورتی به درختی که در طرف دیگر رودخانه واقع شده است میرسد که سرعت جریان آب یک فوت درثانیه باشد.

ب - اگر سرعت جریان‌آب ۳ فوت درثانیه باشد ، در آن طرف رودخانه به نقطه‌یی میرسد که فاصله‌اش از درخت ۵۰ فوت است.

پ - اگر سرعت‌جریان‌آب ٤ فوت درثانیه باشد هیچگاه به‌آن طرف رودخانه نمیرسد.

۳- مسئله یک‌را بابکاربردن مختصات قطبی‌حل کنید. این مسئله‌را مستقلاً حل کرده و جوابهای حاصل را با رابطه (V) مثال ۲ مقایسه کنید.

٤- حشره‌یی برلبه میزگرد مدوری بشعاع a که با سرعت زاویه‌یی ثابت α دوران میکند‌قرار‌دارد. این حشره مستقیماً باسرعت ثابت v_0 بطرف مرکز‌میز‌حرکت میکند. معادله مسیر حشره را در مختصات قطبی نسبت به محورهایی که درفضا ثابت هستند بیابید.

نمودار معادله را هنگامیکه $a=$ ۱۰ فوت و $\alpha=\frac{\pi}{٤}$ رادیان درثانیه و $v_0=$ ۱ فوت درثانیه باشد رسم کنید. زمانی که حشره بمرکز میزمیرسد میزچند دور دوران نموده است.

راهنمایی - اگر θ زاویه‌یی باشد که میز در لحظه t تحت آن دوران نموده است و r فاصله حشره از مرکز میز در آن لحظه باشد دراینصورت $\frac{d\theta}{dt}=\alpha$, $r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=r\alpha$.

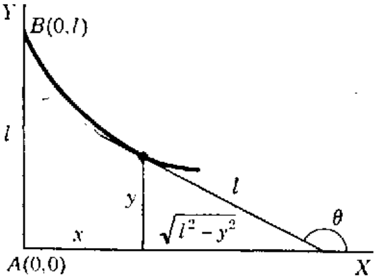
۵- درمسئله‌چهار فرض میکنیم‌حشره درجهتی موازی باقطری که ازنقطه‌یی که درابتدا حشره برمیز نشسته است میگذرد حرکت میکند :

الف ـ معادله مسیر حشره را نسبت به محورهای ثابت در فضا تعیین کنید.

ب ـ نوع منحنی مسیر را تعیین نمایید.

راهنمایی ـ اگر نسبت به شکل قطبی ناآشنا هستیدآنرا به مختصات قائم تبدیل کنید.

۶ـ پسر بچه‌یی در نقطه A ایستاده است و بوسیله نخی بطول l که کاملاً کشیده است قایقی را که در نقطه B در آب میباشد نگاه میدارد (شکل ۳۵ . ۳). پسر بچه در امتداد عمود بر AB شروع بحرکت میکند و همواره سعی مینماید که نخ کشیده باشد. اگر از قد پسر بچه صرفنظر کرده وفرض کنیم نخ همواره برمسیر قایق مماس باشد معادله مسیر قایق را بدست آورید. منحنی مسیر را **تراکتریکس*** گوییم.



شکل ۳۵ . ۳

راهنمایی ـ ضریب زاویه خط‌مماس برمنحنی‌تراکتریکس عبارت است از $tg\theta=\frac{dy}{dx}$.

۷ـ خلبانی سعی میکند هواپیمای خود را بسوی شهری که در ۴۰۰ میلی غرب اوقرار دارد برساند.

اگر سرعت هواپیما ۳۰۰ میل در ساعت و سرعت باد که از جانب جنوب میوزد ۲۰ میل درساعت باشد معادله مسیر هواپیما را بیابید.

این مسئله را مستقلاً در دستگاه مختصات قائم وقطبی حل کرده وجوابهای حاصل‌را با روابط (IV) مثال یک و (V) مثال دو مقایسه کنید.

۸ـ خلبانی سعی میکند هواپیمای خود را بسوی شهری که در a میلی شمال او قرار دارد برساند. اگر سرعت هواپیما v میل درساعت وسرعت باد که از جانب مغرب میوزد w میل درساعت باشد معادله مسیر هواپیما را بیابید.

۹ـ مسئله ۸ را با فرض‌آنکه شهر در a میلی‌جنوب خلبان قرارداشته باشد حل کنید.

۱۰ـ خلبانی‌سعی میکند هواپیمای‌خود را بسوی شهری که در ۳۰ میلی غرب او قرار دارد برساند. اگر سرعت هواپیما ۲۰۰ میل درساعت باشد و باد با سرعتی برابر ۲۰ میل درساعت‌دراستدادی که ضریب زاویه‌آن‌برابر $\frac{4}{3}$ است بوزد معادله مسیرهواپیما را بدست

Tractrix *

آورید . این مسئله را مستقلاً با استفاده از دو روشی که در مثال ۳ ذکر شده است حل کرده و صحت معادلات دیفرانسیلی که بدست میآید با روابط (I) و (V) مثال ۳ مقایسه کنید .

۱۱- مسئله ۱۰ را بفرض آنکه باد درجهتی که ضریب زاویه آن برابر $-\frac{٤}{۳}$ است حل کنید. روش دوم مثال ۳ را بکار برید. این مسئله را مستقلاً حل کرده وسپس صحت معادله دیفرانسیل بدست آمده را با رابطه (V) مثال ۳ مقایسه کنید.

۱۲- درمثال ٤ فرض میکنیم حشره مستقیماً بطرف نوری که در فضا مقابل انتهای قطری که از نقطه یی که حشره برمیز قرار دارد میگذرد حرکت کند . معادله دیفرانسیل مسیر حشره را در مختصات قطبی بیابید .

جوابها

۱- , $x^۲=-۲۰۰(y-۵۰)$, $y=۵۰\left[\left(\frac{x}{۱۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۳}}-\left(\frac{x}{۱۰۰}\right)^{\frac{۷}{۳}}\right]$.

$$y=۵۰\left[\left(\frac{x}{۱۰۰}\right)^{\frac{۲}{۳}}-\left(\frac{x}{۱۰۰}\right)^{\frac{٤}{۳}}\right]$$

۳- ; $r=\frac{۱۰۰}{۱+\sin\theta}$; $r\cos\theta=۱۰۰(\sec\theta+tg\theta)^{-\frac{۳}{٤}}$.

$$r=۱۰۰\,\frac{۱-\sin\theta}{(۱+\sin\theta)^{۲}}$$

٤- $r=a-\frac{v_۰}{\alpha}\theta$ (مبدأ درمرکز دایره) ؛ $۱\frac{۱}{٤}$ دور .

۵- الف : $۲v_۰(r\sin\theta)=\alpha(a^{۲}-r^{۲})$.

ب : دایره : مرکز $\left(o\ ,\ -\frac{v_۰}{\alpha}\right)$, شعاع $\sqrt{a^{۲}+\frac{v_۰^{۲}}{\alpha^{۲}}}$.

۶- $x = l\,Log\,\frac{l+\sqrt{l^{۲}-y^{۲}}}{y} - \sqrt{l^{۲}-y^{۲}}$.

۷- $r\,cos\theta = ۴۰۰\,(\sec\theta + tg\theta)$ ؛

$$y = ۲۰۰\left[\left(\frac{x}{۴۰۰}\right)^{\frac{۱۴}{۱۵}} - \left(\frac{x}{۴۰۰}\right)^{\frac{۱۶}{۱۵}}\right]$$

۸- $x = \frac{a}{۲}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{۱-\left(\frac{w}{v}\right)} - \left(\frac{y}{a}\right)^{۱+\left(\frac{w}{v}\right)}\right]$ ، جهت مثبت بسمت مشرق و جنوب .

۹- مانند مثال ۸ . جهت مثبت بسمت مشرق وشمال .

۱۰- روش اول : جواب $y+\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} = ۲(۲۴۰)^{\frac{۱}{۸}}x^{\frac{۷}{۸}}$.

روش دوم ـ معادله دیفرانسیل عبارت است از :

$$(۲۰۰y - ۲۰\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})dx - (۲۰۰x - ۱۵\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})dy = 0$$

۱۱- معادله دیفرانسیل :

$$(۲۰۰y - ۲۰\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})dx - (۲۰۰x + ۱۵\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})dy = 0$$

۱۲- $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{v_0 r\,cos(\theta-\psi)}{r\alpha + v_0 sin(\theta-\psi)}$ که در آن ψ زاویه بین قطر گذرنده برنقطه‌یی که حشره بر مسیر قرار دارد وخط واصل از انتهای دیگر این قطر و حشره میباشد.

۴۲ . ۳- منحنی تعقیبی نسبی

جسم متحرك A همواره جسم متحرك دیگر B را که مبدأ دستگاه مختصات نیز بآن وابسته‌است تعقیب مینماید . مسیری که جسم A می‌پیماید **منحنی تعقیبی نسبی** گوییم . درحقیقت این مسیر آنطورکه بوسیله ناظر واقع در جسم B مشاهده میشود ترسیم میگردد .

مثال ۱ـ هواپیمای شکاری که سرعت آن V_F است همواره بمب افکنی راکه سرعتش V_B میباشد تعقیب میکند . نوك هواپیمای شکاری همواره بسوی بمب افکن است . مسیر شکاری را آنطوری که از بمب افکن مشاهده میشود بیابید .

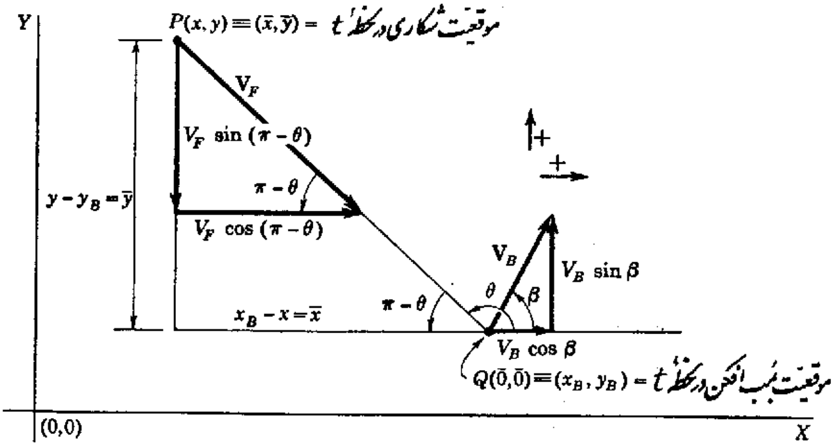
حل ـ مختصات مبدأ دستگاه مختصات ثابتی که در زمین قرار دارد (o , o) و $(\bar{o} , \bar{o})$ مختصات مبدأ دستگاه مختصاتی است که وابسته به هواپیمای بمب افکن میباشد .

دراینصورت درهرلحظه t موقعیت هواپیمای شکاری بادو مختصات (x , y) نسبت به مبدأ ثابت (o , o) و $(\bar{x} , \bar{y})$ نسبت به مبدأ متحرک $(\bar{o} , \bar{o})$ مشخص میگردد.

باتوجه بشکل (۳۶ . ۳) برای ناظری که درزمین قراردارد مؤلفه های سرعت هواپیمای شکاری در امتداد محورهای Ox و Oy عبارتند از:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt} = V_F \cos(\pi - \theta) = -V_F \cos\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = -V_F \sin(\pi - \theta) = -V_F \sin\theta$$



شکل ۳۶ . ۳

اگر دو هواپیما در امتداد خط مستقیم بیکدیگر نزدیک گردند بنظر ناظری که در یکی از هواپیماها قراردارد چنین خواهد رسید که او ساکن بوده و هواپیمای دیگر با سرعتی مساوی مجموع سرعتهای دو هواپیما بجانب او میآیند . اگر دو هواپیما در امتداد خط مستقیمی از یکدیگر دور شوند ناظری که دریکی از این هواپیماها قرار دارد چنین تصور میکند که او ساکن بوده و هواپیمای دیگر با سرعتی برابر مجموع سرعتهای دو هواپیما از او دور میگردد . بالاخره اگر دو هواپیما در امتداد خط مستقیمی در یک جهت حرکت کنند ناظری که در هواپیمای تعقیب شونده قرار دارد چنین تصور میکند که او ساکن بوده و برحسب آنکه سرعتش کمتر یا بیشتر از سرعت هواپیمای تعقیب کننده باشد این هواپیما با سرعتی برابر تفاضل سرعتهای دو هواپیما باو نزدیک و یا از او دور میشوند .

بنابر شکل (۳۶ . ۳) مؤلفه‌های افقی سرعتهای شکاری و بمب افکن در یک جهت میباشند. لذا برای خلبان‌بمب افکن چنین بنظرمیرسد (فرض میکنیم مؤلفه‌افقی بردار سرعت شکاری بزرگتر از مؤلفه متناظر بمب افکن باشد) که او ساکن بوده و هواپیمای شکاری درجهت مثبت محور x ها با سرعتی برابر تفاضل این مؤلفه‌های افقی بسوی او نزدیک میشود. یعنی نرخ تغییرات x برای خلبان بمب‌افکن عبارت خواهد بود از:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=-V_F cos\theta-V_B cos\beta$$

مؤلفه‌های عمودی بردارهای سرعت هواپیماهای شکاری و بمب افکن در جهت مخالف و بسوی یکدیگر میباشد و بنابراین سرعت شکاری نسبت به خلبان بمب افکن درجهت منفی محور y ها بوده و مقدار آن برابر مجموع مؤلفه‌های سرعت است. یعنی:

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=-(V_F sin\theta+V_B sin\beta)$$

و ازآنجا:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{V_F sin\theta+V_B sin\beta}{V_F cos\theta+V_B cos\beta} \qquad (II)$$

اگر در رابطه (II) مقادیر:

$$sin(\pi-\theta)=sin\theta=\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^{۲}+\bar{y}^{۲}}} \quad ,$$

$$cos(\pi-\theta)=-cos\theta=\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^{۲}+\bar{y}^{۲}}}$$

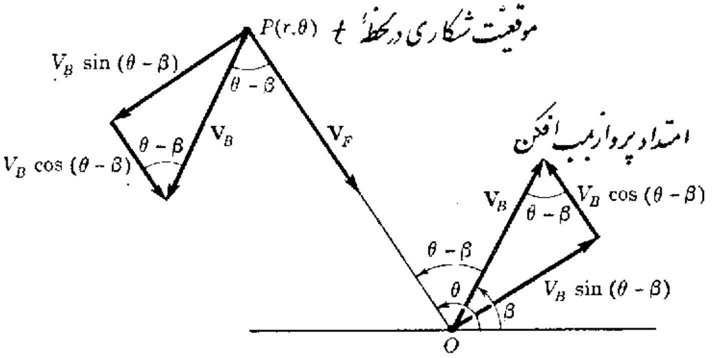
را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{V_F\bar{y}+V_B sin\beta\sqrt{\bar{x}^{۲}+\bar{y}^{۲}}}{-V_F\bar{x}+V_B cos\beta\sqrt{\bar{x}^{۲}+\bar{y}^{۲}}} \qquad (III)$$

با بخاطرداشتن این مطلب که $V_B sin\beta$, $V_B cos\beta$, V_F مقادیر ثابتی میباشند معادله (III) معادله همگن بوده که بعنوان‌تمرین حل آنرا برعهده خواننده واگذارمیکنیم. شرایط اولیه درلحظه $t=o$ یعنی زمانیکه تعقیب شروع میشود بستگی به فاصله وجهت‌هواپیمای شکاری از هواپیمای بمب افکن دارد.

مثال ۲- مثال یک را با بکار بردن مختصات قطبی حل کنید.

حل - اگرخلبان هواپیمای بمب افکن بسوی راست حرکت کند بنظر او چنین میرسد که او ساکن بوده و هواپیمای شکاری بسمت چپ حرکت میکند. لذا خلبان بمب افکن که با سرعت V_B (که درشکل ۳۷ . ۳ بابردار $\overrightarrow{OA}$ نمایش داده شده است) حرکت میکند چنین تصور مینماید که هواپیمای شکاری با سرعت V_B (درشکل ۳۷ . ۳ با بردار $\overrightarrow{PC}$ نمایش داده شده است) حرکت میکند .



شکل ۳۷ . ۳

بنابرابطه(۴۱ . ۳) تصاویر بردار اخیر درامتداد شعاع حامل و امتداد عمود برآن عبارت است از :

$$\frac{dr}{dt} = -V_B\cos(\theta-\beta)$$

$$r\frac{d\theta}{dr} = V_B\sin(\theta-\beta)$$

لذا از نقطه نظرخلبان بمب افکن مؤلفه سرعت واقعی شکاری درامتداد شعاع حامل ، مجموع دو سرعت متحدالجهت که هردو درجهت منفی r قرار دارند میباشد یعنی :

$$\frac{dr}{dt} = -V_F - V_B\cos(\theta-\beta) \qquad \text{(I)}$$

و بطریق مشابه مؤلفه سرعت شکاری درامتداد عمود برشعاع حامل عبارت خواهد بود از :

$$r\frac{d\theta}{dt} = V_B\sin(\theta-\beta) \qquad \text{(II)}$$

از تقسیم روابط (I) و (II) خواهیم داشت :

$$\text{(III)} \qquad \frac{dr}{rd\theta} = -\frac{cos(\theta-\beta)}{sin(\theta-\beta)} - \frac{V_F}{V_B}\, cosec(\theta-\beta)$$

و پس از انتگرال گیری جواب عمومی معادله (III) بصورت زیر بدست میآید :

$$Log r + Log c = -Log sin(\theta-\beta) - \frac{V_F}{V_B}\, Log[cosec(\theta-\beta) - cotg(\theta-\beta)]$$

و یا :

$$\text{(IV)} \qquad cr = \frac{[cosec(\theta-\beta) - cotg(\theta-\beta)]^{-\frac{V_F}{V_B}}}{sin(\theta-\beta)}$$

$$= \frac{۱}{sin(\theta-\beta)} \left[\frac{۱ - cos(\theta-\beta)}{sin(\theta-\beta)} \right]^{-\frac{V_F}{V_B}}$$

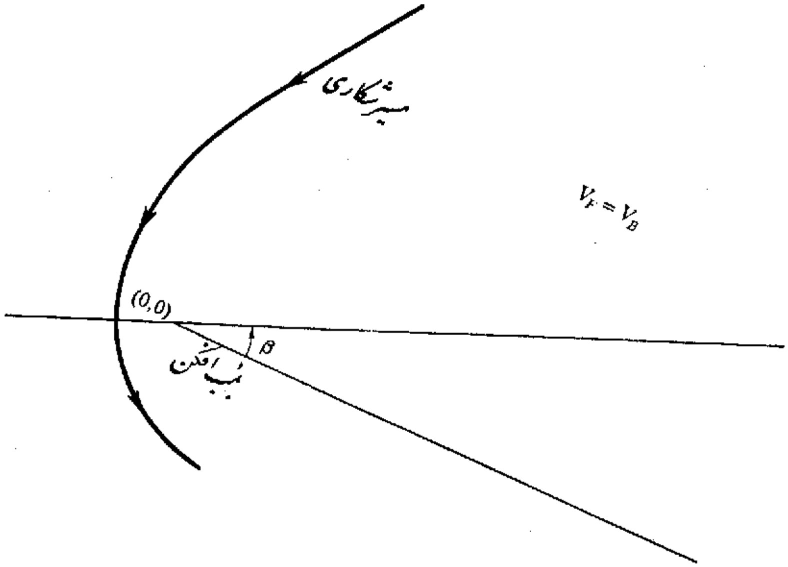
$$= \frac{۱}{[sin(\theta-\beta)]^{۱-\left(\frac{V_F}{V_B}\right)} \, [۱ - cos(\theta-\beta)]^{\frac{V_F}{V_B}}}$$

خلبان بمب افکنی که سیرشکاری را مشاهده میکند بنظرش میرسد که او ساکن بوده ومسیر هواپیمای شکاری که بوسیله رابطه (IV) مشخص میگردد (این معادله برآیند حرکت هردو هواپیما است) کاملاً از حرکت هواپیمای شکاری حاصل میگردد. بوسیله رابطه (IV) میتوانیم منحنی تقریبی مسیر هواپیمای شکاری را آنطورکه از نقطه نظر بمب افکن مشاهده میشود رسم کنیم.

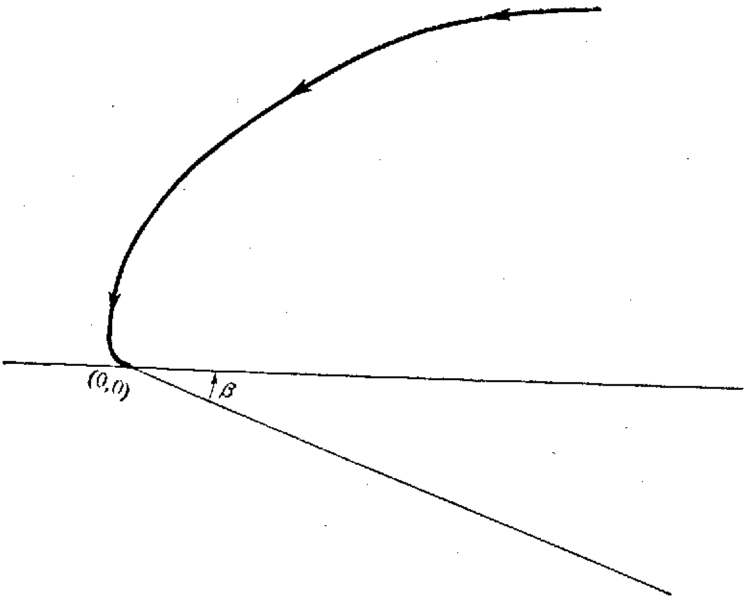
حالت اول - اگر $V_B = V_F$ یعنی سرعت شکاری و بمب افکن با یکدیگر برابر باشند رابطه (IV) بصورت ساده زیر درمیآید :

$$cr = \frac{۱}{۱ - cos(\theta-\beta)}$$

معادله اخیر معادله سهمی میباشد. شکل تقریبی مسیر هواپیمای شکاری را آنطورکه از بمب افکن مشاهده میگردد درشکل (۳۸ . ۳) ترسیم نمودهایم. ازاین شکل کاملاً روشن است که هیچگاه شکاری به بمب افکن نخواهد رسید.



شکل ۳۸ . ۳



شکل ۳۹ . ۳

حالت دوم- اگر $V_F > V_B$ باشد دراینصورت $o < \left(\frac{V_F}{V_B}\right)-۱$ و ازآنجا رابطه (IV) بصورت زیر درمیآید :

$$cr=\frac{[sin(\theta-\beta)]^{\left(\frac{V_F}{V_B}\right)-۱}}{[۱-cos(\theta-\beta)]^{\frac{V_F}{V_B}}}$$

شکل تقریبی مسیر هواپیمای شکاری را آنطورکه از بمب افکن مشاهده میگردد درحالت $V_F=۲V_B$ درشکل (۳۹ . ۳) ترسیم نموده‌ایم.

تبصره - مقادیر $t=o$, $r=r_\circ$, $\theta=\theta_\circ$ شرایط اولیه میباشند.

مسائل

۱- هواپیمای A با سرعت ۲۰۰ میل در ساعت درجهتی که ضریب زاویه‌آن‌برابر $\frac{۳}{۴}$ است پرواز میکند.

هواپیمای دیگر B که در ۵۰ میلی شمال هواپیمای A واقع شده است هواپیمای A را با سرعت ۳۰۰ میل در ساعت تعقیب میکند. اگر نوك هواپیمای B همیشه بسوی هواپیمای A باشد معادله مسیر B را آنطورکه از هواپیمای A مشاهده میشود بیابید.

راهنمایی - درمختصات‌قطبی‌درلحظه $t=o$, $\theta=\frac{\pi}{۲}$, $tg\beta=\frac{۳}{۴}$, $r=۵۰$.

۲- مسئله یك را درصورتیکه هواپیمای A درجهت جنوب شرقی و هواپیمای B در لحظه‌یی که شروع به تعقیب هواپیمای A میکند در ۵۰ میلی شمال شرقی A باشد حل کنید.

راهنمایی - در لحظه $t=o$, $\theta=\frac{\pi}{۴}$, $\beta=-\frac{\pi}{۴}$, $r=۵۰$. شکلی متناظر با شکل (۳۷ . ۳) رسم کنید و توجه کامل به علامت داشته باشید.

۳- مسئله یك‌را فقط در مختصات قطبی‌بافرض‌آنکه هواپیمای A درجهت شمال‌شرقی و هواپیمای B درلحظه‌یی که شروع به‌تعقیب‌هواپیمای A میکند در ۵۰ میلی جنوب‌شرقی A باشد حل کنید.

راهنمایی - درلحظه $t=o$, $\theta=-\frac{\pi}{٤}$, $\beta=\frac{\pi}{٤}$, $r=٥٠$. شکل متناظر با شکل (٣ . ٣٧) را رسم کنید و توجه کامل به علامت داشته باشید.

جوابها

١- معادله دیفرانسیل در مختصات قائم عبارت است از :

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\frac{٣٠٠\bar{y}+١٢٠\sqrt{x^{٢}+y^{٢}}}{٣٠٠x+١٦٠\sqrt{x^{٢}+y^{٢}}}$$

با شرایط اولیه $\bar{y}=٥٠$, $x=o$, $t=o$.

جواب معادله در دستگاه مختصات قطبی عبارت میگردد از :

$$r=\frac{٥٠\sqrt{٢}\,(٤\sin\theta-٣\cos\theta)^{\frac{١}{٢}}}{(٥-٤\cos\theta-٣\sin\theta)^{\frac{٣}{٢}}}$$

٢- $$r=\frac{٥٠\sqrt{٢}\,(\sin\theta+\cos\theta)^{\frac{١}{٢}}}{(\sqrt{٢}-\cos\theta+\sin\theta)^{\frac{٣}{٢}}}.$$

٣- $$r=\frac{٥٠\sqrt{٢}\,(\cos\theta-\sin\theta)^{\frac{١}{٢}}}{(\sqrt{٢}-\cos\theta-\sin\theta)^{\frac{٣}{٢}}}.$$

٥ . ٣- انواع مسائلی که منجر به معادلات مرتبه اول میگردند

٥١ . ٣- جریان آب از منفذ .

اگرآب محتوی مخزنی از منفذ کوچکی که درانتهای آن قرار دارد بخارج جریان یابد ثابت میکنند نرخ جریان‌آب درلحظه t متناسب با سطح منفذ وریشه دوم ارتفاع آب مخزن است. یعنی :

$$\frac{dV}{dt}=-ka\sqrt{h}\quad ; \quad dV=-ka\sqrt{h}\,dt \qquad (٣ . ٥١)$$

که در آن :

V تعداد فوت مکعب آب موجود در مخزن در ثانیه t ام .

k ضریب تناسب مثبت .

a سطح منفذ برحسب فوت مربع .

h ارتفاع سطح آب از منفذ در لحظه t برحسب فوت .

چون حجم آب کاهش مییابد بنابراین لازم است که در عبارت (۳ . ۵۱) علامت منفی رابکار بریم . اگر A مساحت مقطعی از سطح آب درلحظه t باشد $dV=Adh$ بوده واگراین مقداررا درمعادله‌دوم (۳ . ۵۱) قرار داده‌و $k=٤٫٨$* اختیارگردد چنین‌داریم :

$$Adh=-٤٫٨a\sqrt{h}\,dt \quad ; \quad Ah^{-\frac{۱}{۲}}dh=-٤٫٨\pi r^{۲}dt \qquad (۳ . ۵۱۱)$$

که درآن :

A مساحت مقطعی از سطح آب در ثانیه t ام برحسب فوت مربع .

h ارتفاع سطح آب از منفذ درلحظه t برحسب فوت .

r شعاع منفذ برحسب فوت .

مثال ۱- مخزن‌استوانه‌یی شکلی‌بشعاع ۸ فوت‌وارتفاع ۱۰ فوت‌به عمق h فوت مملو از آب میباشد . چنانچه آب این مخزن‌از منفذ مستدیری شکل‌بشعاع یک اینچ خارج شود زمان لازم برای تخلیه کامل مخزن را بدست آورید .

حل - اگر در رابطه (۳ . ۵۱۱) مقادیر $A=٦٤$ و $r=\frac{۱}{۱۲}$ اختیارگردد چنین داریم :

$$٦٤h^{-\frac{۱}{۲}}dh=-٤٫٨\pi\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۲}dt \quad ;$$

$$dt=-\frac{٦٤(۱٤٤)}{٤٫٨}\cdot\frac{dh}{\sqrt{h}}=-۱۹۲۰\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

و پس‌از انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل بالا بین زوج مقادیر :

$$h=۱۰ \;;\; t=0 \quad \text{و} \quad h=0 \;,\; t=t$$

خواهیم داشت :

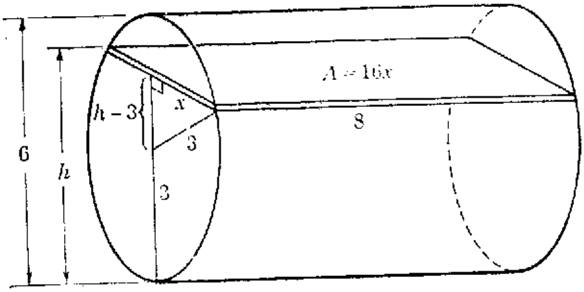
---

* این عدد بطور آزمایش بدست آمده و در تحت شرایط معینی صادق است .

$$\int_{0}^{t} dt = -۱۹۲۰\int_{۱۰}^{0} \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad ; \quad t = -۳۸٤۰\left[\sqrt{h}\,\right]_{۱۰}^{0} = ۳۸٤۰\sqrt{۱۰}$$ ثانیه

یعنی پس‌از ۳ ساعت و ۲۲ دقیقه مخزن از آب خالی میشود.

مثال ۲- مخزن آبی را که قطر مقطع مستدیر آن ٦ فوت و ارتفاعش ۸ فوت است مملو از آب کرده‌ایم. درانتهای مخزن منفذی بشعاع یک اینچ طوری قرار داده‌ایم که اگر مخزن‌را بطورافقی مانند شکل (۴۰ . ۳) نگاه داریم دراین‌وضعیت جدید نیز منفذ درقسمت تحتانی استوانه واقع میشود. تعیین کنید پس‌از چند دقیقه مخزن خالی میگردد.



شکل ۴۰ . ۳

حل - اگر مانند شکل (۴۰ . ۳) درلحظه t مقطع افقی بارتفاع h باقسمتهای مستدیر مخزن وترهایی‌بطول ۲x جدا کند سطح مقطع عبارت میشود از A = ۱٦x . ازطرف دیگر با استفاده ازشکل (۴۰ . ۳) چنین داریم :

$$۹ = (h-۳)^{۲} + x^{۲} \;,\; ۹ = h^{۲} - ٦h + ۹ + x^{۲} \;;\; x = \sqrt{h(٦-h)}$$

بنابراین اگر در رابطه (۱۱ ۵ . ۳) مقادیر $A = ۱٦\sqrt{h(٦-h)}$ و $r = \frac{۱}{۱۲}$ را قرار دهیم چنین داریم :

$$۱٦\sqrt{h(٦-h)}\,dh = -٤{,}۸\pi\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۲}\sqrt{h}\,dt \quad ;$$

$$\sqrt{٦-h}\,dh = -۰{,}۳\pi\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۲}dt$$

و یا پس‌ازانتگرال گیری بین زوج مقادیر $(t=0\,;\,h=٦)$ و $(t=t\,;\,h=0)$ مقدار t بطریق زیر بدست میآید :

$$\int_{٦}^{0}\sqrt{٦-h}\,dh=-\frac{٠ر٣\pi}{١٤٤}\int_{0}^{t}dt\quad ;\quad \frac{٢}{٣}\,٦^{\frac{٣}{٢}}=\frac{٠ر٣\pi}{١٤٤}\,t$$

یعنی :

$$t=\frac{٤\sqrt{٦}\;(١٤٤)}{٠ر٣\pi}=\frac{٤٠(٤٨)\sqrt{٦}}{\pi}\ \text{ثانیه}\quad ;\quad \frac{٤٠\times ٤٨\sqrt{٦}}{٦٠\pi}=\frac{٣٢\sqrt{٦}}{\pi}\ \text{دقیقه}$$

مسائل

۱- مخزنی بشکل مکعب مستطیل که قاعده آن مربعی بطول ٦ فوت و به عمق ۹ فوت که مملواز آب است ازتنها منفذ مدوری بشعاع یک اینچ تخلیه میشود. تعیین کنید پس از چند دقیقه مخزن خالی میشود.

۲- قیفی در منتهی الیه فوقانی دارای قطری برابر ۱۰ اینچ ودر منتهی الیه تحتانی دارای قطر یک اینچ است. اگر این قیف در ابتدا مملو از آب خالص بوده و عمق آن ۲٤ فوت باشد زمان لازم برای تخلیه مخزن را بدست آورید.

۳- درهردقیقه ٦π فوت مکعب آب وارد استوانه خالی قائمی بشعاع ٦ فوت و ارتفاع ۹ فوت میگردد. اگر در انتهای استوانه منفذی بقطر یک اینچ باشد پس از چند دقیقه مخزن پر میشود.

راهنمایی - $\left[\frac{\pi}{١٠}-\frac{\pi}{(٢٤)^{٢}}\,٤ر٨\sqrt{h}\right]dt=٣٦\pi dh$

٤- مخزنی که مقطع آن ۳ فوت در ٤ فوت میباشد تا ارتفاع ۹ فوتی از آب پر شده است. منفذی بشعاع یک اینچ در قعر مخزن قرار دارد.

الف - تعیین کنید پس از چه مدتی مخزن خالی میشود.

ب - پس از چه مدتی ارتفاع آب در مخزن ٥ فوت میگردد.

راهنمایی - در لحظه $t=0$; $h=٩$ بوده و در رابطه (۳ . ٥۱۱) :

$$A=١٢\quad ,\quad r=\frac{١}{١٢}$$

٥- مخزنی که قطرمقطع مستدیرآن برابر ٦ فوت وارتفاعش برابر ۸ فوت است مملواز آب میباشد. منفذی بشعاع یک اینچ درقعر مخزن قرار دارد. تعیین کنید پس از چند دقیقه مخزن خالی میشود.

۶- مخزن آبی که بشکل قیف مخروطی است مملو از آب میباشد. رأس مخروط در پایین و ارتفاع مخروط ۱۸ فوت وشعاع قاعده‌آن برابر ۱۲ فوت است. اگر منفذی بشعاع یک اینچ در انتهای قیف موجود باشد تعیین کنید پس‌از چند دقیقه مخزن خالی میشود .

۷- مخزن آبی که بشکل سهمی گون دوار میباشد قطرآن درقسمت فوقانی برابر ۶ فوت و عمق آن برابر ۳ فوت است. اگر مخزن مملوازآب باشد ودرانتهای‌آن منفذی بقطر یک اینچ موجود باشد تعیین کنید پس‌از چند دقیقه مخزن خالی میشود .

جوابها

۱- ۱۳۷ دقیقه .

۲- ۱۳٫۷ ثانیه .

۳- ۶۵ دقیقه .

۴- الف : $\frac{۳۶}{\pi}$ دقیقه .

ب : $۱۲\,\frac{۳-\sqrt{۵}}{\pi}$ دقیقه .

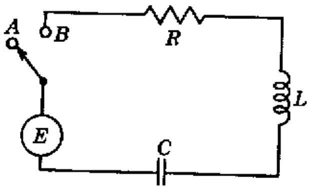
۵- $۱۸\sqrt{۲}$ دقیقه .

۶- ۳۰٫۵ دقیقه .

۷- $۱۲\sqrt{۳}$ دقیقه .

۵۲ . ۳- مدارهای الکتریکی

با استفاده از قوانین نیوتن درباره حرکت قادرگردیدیم بین نیروهای مؤثری که بریک دستگاه مکانیکی‌وارد میشوند رابطه‌یی‌برقرار کنیم . قوانین مشابهی که بنام‌قوانین **کیرشهف*** موسومند این امکان را بما میدهد که دریک دستگاه الکتریکی روابطی بین نیروهایی که انرژی‌تأمین میکند و نیروهایی که این‌انرژیها را بمصرف میرسانند برقرارکنیم. ذیلاً یکی ازاین قوانین را بیان کرده و آنرا درباره مدار الکتریکی ساده‌یی بکار میبریم .



شکل ۴۱ . ۳

در مورد مدار الکتریکی ساده‌یی که درشکل (۴۱ . ۳) آنرا ترسیم نموده‌ایم مقدار انرژی مدار را با E نمایش میدهیم . این مقدار ممکن است یک پیل ، باطری ویا مولد باشد که انرژی را بصورت جریان الکتریکی‌از ذرات باردار بمدار میرساند . سرعت این ذرات را **جریان** نامیم . همانطورکه‌ازشکل (۴۱ . ۳) پیدا است مقدار انرژی درصورتی‌این جریان را ایجاد خواهد

---

* Kirchhoff (۱۸۲۴—۱۸۸۷)

نمود که کلید A را بسوی B حرکت دهیم و دراین حال مدار را بسته گوییم . اگر یک واحد بار برای پیمایش یک دورکامل مدارخود احتیاج به α واحد انرژی داشته باشد (این انرژی‌از باطری یا منبع دیگرکه درمدار قراردارد تأمین میگردد) بنابرتعریف α را **نیروی محرکه** مدار نامیده و آنرا با سمبول emf نمایش میدهیم . مثلاً اگر ازمنبعی ۳ واحد انرژی لازم باشد تایک واحد باردر مدارالکتریکی یک‌دورکامل بپیماید دراینصورت نیروی محرکه ۳ واحد خواهد بود .

در دستگاههای الکتریکی‌نیز مانند دستگاههای مکانیکی دستگاه واحدهای متفاوتی موجود است . در دستگاهی که مورد عمل ما خواهد بود ، واحد نیروی محرکه را **ولت** گوییم . سه عنصر دیگری که درشکل (٤۱ . ۳) به R و L و C نمایش داده شده‌اند مصرف کننده انرژی میباشند . بزبان ساده و غیر فنی میتوان گفت که مقدار معینی انرژی لازم است تا بتوانیم‌جریان الکتریکی ذرات باردار را ازاین موانع عبور دهیم . انرژی که هریک از موانع بکار میبرند با **افت ولت*** بیان میکنیم .

در فیزیک نشان میدهند که :

افت ولت درطول **سیم مقاومت** (R درشکل ٤۱ . ۳) $= Ri$

(۵۲ . ۳) افت ولت درطول **خود القاء یاسلف** (L درشکل ٤۱ . ۳) $= L\dfrac{di}{dt}$

افت ولت درطول **خازن** (C درشکل ٤۱ . ۳) $= \dfrac{۱}{c}q$

است بشرط آنکه :

R **مقاومت سیم** برحسب **اهم**** اندازه گرفته شده باشد .

L **ضریب خود القایی** سلف برحسب **هانری***** اندازه گرفته شده باشد .

C **ظرفیت خازن** برحسب **فاراد****** اندازه گرفته شده باشد .

q **بار** در مدار برحسب **کولمب******* اندازه گرفته شده باشد .

---

* بسهولت میتوان افت ولت در طول هریک از موانع را با اسبابی که ولتمتر نامیده میشود اندازه‌گیری کنیم . برای این منظور لازم است سیمی از ولتمتر را به یک طرف مانع و سیم دیگر را به قسمت دیگر مانع وصل کرده و بدین ترتیب درجه‌یی که عقربه ولتمتر نشان میدهد بخوانیم .

** Ohms .

*** Henrys .

**** Farads .

***** Coulombs .

i جریان‌ درمدارکه با نرخ تغییرات بار q و یا سرعت q تعیین میشود. یعنی :

$$i=\frac{dq}{dt} \qquad (۳ . ۵۲۱)$$

با **آمپر*** اندازه‌گرفته میشود .

همانطورکه ازاسم سیم مقاومت برمیآید این قسمت در برابر جریان ذرات بارشده مقاومت میکند و بنابراین برای آنکه ذرات از آن عبورکنند انرژی مورد لزوم خواهد بود . عمل خود القاء آن است‌که نرخ جریان ذرات باردار را تا سرحدامکان ثابت نگاه میدارد و لذا مانع افزایش یاکاهش شدت جریان میشود .

خازن‌ذرات باردار را ذخیره‌کرده و نتیجتاًجریان الکتریکی را قطع مینماید. هنگامیکه بارهای‌گرد آمده بیش‌از ظرفیت خازن باشد ذرات باردار بصورت جرقه از فاصله C واقع در شکل (۳ . ۴۱) جهیده و سپس ذرات مسیر خود را درمدار ادامه خواهند داد .

قانون دوم کیرشهف بیان میکندکه مجموع افت ولت درمدار بسته‌یی مساوی E(t) نیروی محرکه منبع‌انرژی میباشد وازآنجا با استفاده ازروابط (۳ . ۵۲)چنین داریم :

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}q=E(t) \qquad (۳ . ۵۲۲)$$

و پس‌از بکار بردن رابطه (۳ . ۵۲) معادله دیفرانسیل حرکت بار q برحسب تابعی از t در مدار بسته‌یی عبارت میگردد از :

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=E(t) \qquad (۳ . ۵۲۳)$$

اگر بخواهیم شدت جریان i را برحسب تابعی از t بیان‌کنیم میتوان بیکی از دو طریق زیر عمل‌کرد :

۱- q جواب عمومی معادله (۳ . ۵۲۳) را بدست آورده و سپس مشتق آنرا بدست آوریم .

۲- پس‌از مشتق‌گیری از معادله (۳ . ۵۲۲) و استفاده از رابطه (۳ . ۵۲۱) خواهیم داشت :

---

* Amperes

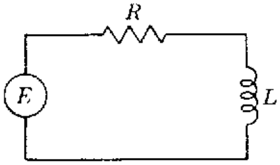
$$L\frac{d^{۲}i}{dt^{۲}}+R\frac{di}{dt}+\frac{۱}{c}i=\frac{d}{dt}E(t) \qquad (۳ . ۵۲٤)$$

بالاخره اگر خازن c درمدار نباشد معادله دیفرانسیل (۳ . ۵۲۲) مبدل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E \qquad (۳ . ۵۲۵)$$

میگردد (شکل ۴۲ . ۳) .

مثال ۱- الف - معادله (۳ . ۵۲۵) رادرحالتیکه شدت جریان اولیه i_0 و $E(t)=E_0$ است حل کنید .



شکل ۴۲ . ۳

ب - اگر در معادله (۳ . ۵۲۵) مقادیر L برابر ۳ هانری و R برابر ۱۵ اهم و :

$$E(t)=۱۱۰\,sin\,۱۲۰\pi t$$

اختیار گردد شدت جریان را برحسب تابعی از t بدست آورید درصورتیکه شدت جریان اولیه برابر صفر باشد .

حل - الف : جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی :

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E_0$$

که در آن L و R و E_0 مقادیر ثابتی هستند عبارت است از :

$$ie^{\frac{Rt}{L}}=\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{Rt}{L}}dt=\frac{E_0}{R}e^{\frac{Rt}{L}}+c$$

و یا :

$$i=\frac{E_0}{R}+cc^{-\frac{Rt}{L}}$$

و با توجه بشدت جریان اولیه $c=i_0-\frac{E_0}{R}$ بوده و از آنجا :

$$i=\frac{E_\circ}{R}\left(١-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)+i_\circ e^{-\frac{Rt}{L}}$$

باید درنظرداشت هنگامیکه $t \to \infty$ شدت جریان بسوی مقدار ثابت $i=\frac{E_\circ}{R}$ میل میکند.

ب ـ اگر مقادیر $E=١١٠\sin١٢٠\pi t$, $R=١٥$, $L=٣$ را در معادله (٣ . ٥٢٥) جایگزین کنیم چنین داریم :

$$٣\frac{di}{dt}+١٥i=١١٠\sin١٢٠\pi t$$

و ازآنجا جواب عمومی معادله اخیر عبارت میگردد از :

$$ie^{٥t}=\frac{١١٠}{٣}\int e^{٥t}\sin١٢٠\pi t\,dt=\frac{١١٠}{٣}e^{٥t}\frac{٥\sin١٢٠\pi t-١٢٠\pi\cos١٢٠\pi t}{٢٥+١٤٤٠٠\pi^٢}+c$$

و یا :

$$i=\frac{٢٢}{٣}\cdot\frac{\sin١٢٠\pi t-٢٤\pi\cos١٢٠\pi t}{١+٥٧٦\pi^٢}+ce^{-٥t}$$

و ازآنجاییکه بازاء $t=0$ مقدار $i=0$ است لذا :

$$c=\frac{٢٢\times٢٤\pi}{٣(١+٥٧٦\pi^٢)}$$

یعنی :

$$i=\frac{٢٢}{٣}\cdot\frac{\sin١٢٠\pi t-٢٤\pi\cos١٢٠\pi t+٢٤\pi e^{-٥t}}{١+٥٧٦\pi^٢}$$

با درنظر داشتن آنکه مجموع مربعات ضرایب $\sin$ و $\cos$ برابر مخرج کسر بالا است لذا میتوان با انتخاب پارامتر زیر عبارت بالا را بصورت ساده‌تری نوشت. یعنی :

$$\sin\varphi=\frac{٢٤\pi}{(١+٥٧٦\pi^٢)^{\frac{١}{٢}}}\quad,\quad\cos\varphi=\frac{١}{(١+٥٧٦\pi^٢)^{\frac{١}{٢}}}$$

و ازآنجا :

$$i=\frac{٢٢}{٣(١+٥٧٦\pi^٢)^{\frac{١}{٢}}}\left(\cos\varphi\sin١٢٠\pi t-\sin\varphi\cos١٢٠\pi t\right)+\frac{١٧٦\pi e^{-٥t}}{١+٥٧٦\pi^٢}$$

$$=\frac{٢٢}{٣(١+٥٧٦\pi^٢)^{\frac{١}{٢}}}\sin(١٢٠\pi t-\varphi)+\frac{١٧٦\pi e^{-٥t}}{١+٥٧٦\pi^٢}$$

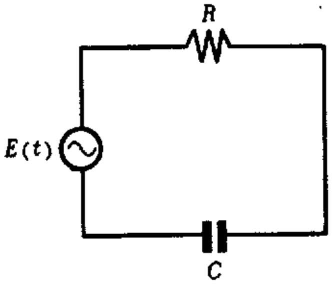
باید توجه داشت که پس از مدت کوتاهی جمله دوم بسیار کوچک میگردد و بنابراین پس از لحظه‌یی جریان i منحنی سینوسی کاملی میگردد .

مثال ۴- خازنی بظرفیت $c=۱۰^{-۳}$ فارادو سیم مقاومت ۱۰ اهمی بطور سری به نیروی محرکه $E(t)=۱۰۰\sin ۱۲۰\pi t$ ولت وصل شده است .

الف - اگر بازاء $t=o$ مقدار $q=o$ باشد عبارت q را برحسب t پیدا کنید .

ب - اگر در لحظه $t=o$ مقدار $i=۵$ آمپر گردد مقدار i را بدست آورید .

حل - بنابفرض مسئله وآنطورکه ازشکل (۳ . ۴۳) برمیآید این مدارشامل خود القاء نبوده و بالنتیجه پس از قرار دادن مقادیر :



شکل ۳ . ۴۳

$$L=o\ ,\ R=۱۰\ ,\ c=۱۰^{-۳}\ ,\ E(t)=۱۰۰\sin ۱۲۰\pi t$$

در معادله (۳ . ۵۲۳) معادله دیفرانسیل خطی زیر برحسب q بدست میآید :

$$۱۰\frac{dq}{dt}+۱۰^{۳}q=۱۰۰\sin ۱۲۰\pi t$$

برای یافتن جواب عمومی معادله اخیر به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$qe^{۱۰۰t}=۱۰\int e^{۱۰۰t}\sin ۱۲۰\pi t dt$$

$$=۱۰e^{۱۰۰t}\ \frac{۱۰۰\sin ۱۲۰\pi t-۱۲۰\pi\cos ۱۲۰\pi t}{۱۰۰۰۰+۱۴۴۰۰\pi^{۲}}+A$$

$$=e^{۱۰۰t}\ \frac{۱۰\sin ۱۲۰\pi t-۱۲\pi\cos ۱۲۰\pi t}{۱۰۰+۱۴۴\pi^{۲}}+A$$

و یا :

$$\text{(I)}\qquad q=\frac{۱}{(۱۰۰+۱۴۴\pi^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\sin(۱۲۰\pi t-\varphi)+Ae^{-۱۰۰t}$$

که درآن :

$$\sin\varphi=\frac{۱۲\pi}{(۱۰۰+۱٤٤\pi^{۲})^{\frac{۱}{۲}}} \quad , \quad \cos\varphi=\frac{۱۰}{(۱۰۰+۱٤٤\pi^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$$

الف ـ اگر در رابطه (I) شرایط اولیه $t=0$ و $q=0$ گذارده شود مقدار :

$$A=\frac{۳\pi}{۲٥+۳٦\pi^{۲}}$$

بدست میاید و لذا :

$$q=\frac{۱}{۲(۲٥+۳٦\pi^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\sin(۱۲۰\pi t-\varphi)+\frac{۳\pi e^{-۱۰۰t}}{۲٥+۳٦\pi^{۲}}$$

ب ـ برای یافتن i کافی است از رابطه (I) مشتق بگیریم . یعنی :

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{٦۰\pi}{(۲٥+۳٦\pi^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\cos(۱۲۰\pi t-\varphi)-۱۰۰Ae^{-۱۰۰t}$$

و اگر شرایط اولیه $i=٥$ و $t=0$ را در معادله اخیر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$۱۰۰A=\frac{٦۰\pi}{(۲٥+۳٦\pi^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\cos\varphi-٥=\frac{۳۰۰\pi}{(۲٥+۳٦\pi^{۲})}-٥$$

یعنی :

$$i=\frac{٦۰\pi}{(۲٥+۳٦\pi^{۲})}\cos(۱۲۰\pi t-\varphi)-\left(\frac{۳۰۰\pi}{۲٥+۳٦\pi^{۲}}-٥\right)e^{-۱۰۰t}$$

مسائل

۱ـ یک قرقره‌یی که خود القایی آن ۳ هانری و مقاومت آن ۳۰ اهم است بطورسری به نیروی محرکه ۱٥۰ ولتی وصل شده است . درصورتیکه شدت جریان اولیه برابر صفر باشد شدت جریان را در لحظه $t=۰٫۰۱$ ثانیه بیابید.

۲ـ یک قرقره‌یی که خود القایی آن برابر ۲ هانری و مقاومت آن برابر ۲۰ اهم است بطورسری به

نیروی محرکه $۱۰۰\sin ۱۵۰t$ ولتی وصل شده است . اگر شدت جریان اولیه صفر باشد شدت جریان را بازاء $t=۰ر۰۱$ ثانیه بدست آورید .

۳- با استفاده ازرابطه (۵۲۲ . ۳) نشان دهید معادله دیفرانسیل مدار الکتریسته‌یی که شامل مقاومت R ، خازن c و نیروی محرکه $E(t)=e\sin wt$ ، $(w, e, c, R$ مقادیر ثابتی هستند) است بصورت زیر میباشد :

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{c}=\frac{dE}{dt}$$

شدت جریان i را در زمان t بدست آورید .

٤- هنگامیکه نیروی محرکه‌یی از مداری که جریان الکتریکی از آن جاری استقطع شود یعنی درلحظه $t=0$ ، $E=0$ باشد جریان را **جریان القاء** شده و جمله $L\frac{di}{dt}$ را **نیروی محرکه القاء شده** گوییم . درلحظه‌یی که یک نیروی محرکه ازمداری که شامل سیم مقاومت ۳۰ اهم و خود القاء ٦ هانری است قطع میشود جریان $i=۱۵$ آمپر میباشد .

الف ـ مطلوب است تعیین معادله جریان برحسب تابعی از زمان .

ب ـ درچه هنگامی شدت جریان ۷ر۵ آمپر میگردد .

جوابها

۱- ۰ر۴۷۶ آمیر . ۲- ۰ر۲۹۹ آمپر .

۳- $i=\frac{ecw}{۱+R^۲c^۲w^۲}(\cos wt+Rcw\sin wt)+c_۱e^{-\frac{t}{Rc}}$.

٤- الف : $i=۱۵e^{-۵t}$. ب : ۰ر۱٤ ثانیه .

۵۳ . ۳- حالت پایای جریان گرما

هنگامیکه جدار داخل و خارج جسمی مانند جدار داخلی و خارجی اطاق یا لوله‌یی در درجه حرارتهای پایای متفاوتی نگاهداشته شود واضح است که گرما از جدارگرمتر به جدار سردتر جریان مییابد. درصورتی گرما به حالت پایا میرسد که درجه حرارت هرسطحی موازی جداری از جسم ثابت باشد . لذا در حالت پایای جریان گرما چون درجه حرارت هرسطحی که بموازات جداری ازجسم هستند ثابت است این سطوح را **سطوح تکدما**

نامیم . البته رویه‌های تکدما که در فواصل مختلفی از جدار داخلی جسم قرار دارند دارای درجه حرارتهای متفاوتی هستند . در بسیاری از موارد درجه حرارت رویه تکدما فقط تابعی از فاصله رویه ازجدار داخلی بوده و نرخ جریان گرمایی که ازاین‌سطح در واحد زمان میگذرد تواماً متناسب با مساحت‌این‌سطح و $\frac{dT}{dx}$ است. T درجه حرارت‌رویه تکدما میباشد . یعنی :

$$Q=-kA\frac{dT}{dx} \tag{۳ . ۵۳}$$

که در آن :

Q نرخ جریان کالری* گرمای است که در یک ثانیه از سطح تکدما میگذرد .

k ضریب ثابت تناسب که **رسانایی گرمایی** ماده بین جدارها نامیده میشود.

A مساحت یک رویه تکدما برحسب سانتیمتر مربع .

T درجه حرارت رویه تکدما برحسب سانتیگراد .

x فاصله رویه تکدما از جدار داخلی برحسب سانتیمتر .

درج علامت منفی در عبارت (۳ . ۵۳) آن است که نشان دهد گرما از جدار داخلی جسم که گرمتراست به جدارخارجی که دارای‌درجه حرارت کمتری است جریان دارد.

مثال ۱ - مطلوب است تعیین تعداد کالری گرمایی که دریک ساعت ازیک متر مربع دیوار سردخانه‌یی که دارای ضخامت ۱۲۵ سانتیمتر است میگذرد درصورتیکه بدانیم **$k=$ ۰٫۰۰۲۵** و درجه حرارتهای جدارهای داخلی و خارجی سردخانه به ترتیب **برابر ۵°c—** و ۷۵°c باشد .

حل - چنانچه x فاصله نقطه‌یی در داخل دیوار از جدار خارجی باشد و معادله (۳ . ۵۳) را با درنظر داشتن $k=$ ۰٫۰۰۲۵ و $A=(۱۰۰)^{۲}$ بین زوج مقادیر :

$$(x=0\ ;\ T=۷۵) \quad و \quad (x=۱۲۵\ ,\ T=-۵)$$

انتگرال‌بگیریم خواهیم داشت :

---

* یک کالری مساوی مقدار گرمای لازم برای آنکه درجه حرارت یک گرم آب یک درجه سانتیگراد تغییر یابد میباشد .

$$\int_{۷۵}^{-۵} dT = -\frac{Q}{kA}\int_{0}^{۱۲۵} dx \quad ; \quad ۸۰ = \frac{Q}{kA}(۱۲۵) \quad ; \quad Q = \frac{۸۰kA}{۱۲۵}$$

و یا :

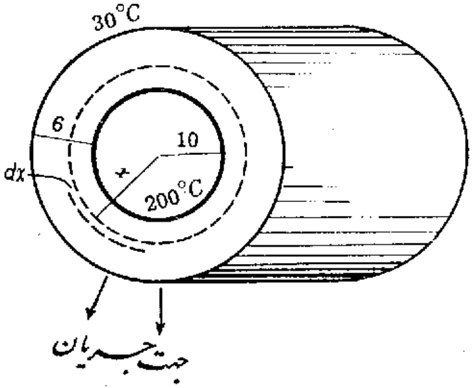
$$Q = \frac{۸۰(۰٫۰۰۲۵)(۱۰۰)^{۲}}{۱۲۵} = ۱۶ \text{ کالری درثانیه}$$

و بالنتیجه در یک ساعت از یک متر مربع دیوار سردخانه ۵۷۶۰۰ کالری گرما میگذرد.

مثال ۲- بمنظورجلوگیری ازهدر رفتن حرارت یک لوله بخار که قطر آن برابر ۲۰ سانتیمتر است آنرا با ماده عایق حرارت که $k=۰٫۰۰۰۳$ است بضخامت ۶ سانتیمترمیپوشانیم (شکل ۴۴ . ۳).

الف - تعیین کنید در طول یک مترلوله دریک ساعت چه مقدار گرما هدرمیرود درصورتیکه حرارت درجدار داخلی و خارجی لوله به ترتیب برابر ۲۰۰°c و ۳۰°c باشد.

ب - درجه حرارت را درفاصله $x > ۱۰$ سانتیمتر ازمرکز لوله تعیین کنید.



شکل ۴۴ . ۳

حل - درفاصله $x > ۱۰$ سانتیمتر از مرکز لوله درطول یک سانتیمتر لوله گرما ازسطح بسیار نازکی بمساحت $۲\pi x$ سانتیمتر مربع میگذرد. لذا رابطه (۵۳ . ۳) بصورت زیر درمیآید:

$$Q = -kA\frac{dT}{dx} = -۲\pi kx\frac{dT}{dx} \quad ; \quad ۲\pi k dT = -Q\frac{dx}{x}$$

الف : اگر از معادله دیفرانسیل بالا بین زوج مقادیر :

$$(T=۳۰ \ ; \ x=۱۶) \quad \text{و} \quad (T=۲۰۰ \ ; \ x=۱۰)$$

انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$۲\pi k\int_{۳۰}^{۲۰۰} dT = -Q\int_{۱۶}^{۱۰}\frac{dx}{x} \quad ;$$

$$۳۴۰\pi k = Q(Log۱۶ - Log۱۰) = QLog۱٫۶$$

و از آنجا در طول یک سانتیمتر لوله در یک ثانیه مقدار $Q=\frac{٣٤٠\pi k}{Log ١٫٦}$ کالری گرما هدر میرود و بالنتیجه در طول یک متر لوله در یک ساعت مقدار گرمای از دست رفته برابر $١٠٠(٦٠)^{٢}Q=٢٤٥٠٠٠$ کالری خواهد بود .

ب : پس از جایگزین نمودن مقدار Q در معادله دیفرانسیل بالا و انتگرال گیری از معادله حاصل بین زوج مقادیر $(T=٣٠ \ ; \ x=١٦)$ و $(T=T \ ; \ x=x)$ چنین داریم :

$$٢\pi k dT=-\frac{٣٤٠\pi k}{Log ١٫٦}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$\int_{٣٠}^{T} dT=-\frac{١٧٠}{Log ١٫٦}\int_{١٦}^{x}\frac{dx}{x} \quad ; \quad T-٣٠=-\frac{١٧٠}{Log ١٫٦}Log\frac{x}{١٦}$$

و یا :

$$T=\left(٣٠+\frac{١٧٠}{Log ١٫٦}Log\frac{١٦}{x}\right)^{\circ}c$$

بسهولت معلوم میشود که اگر در رابطه بالا $x=١٠$ و $x=١٦$ اختیار گردد مقادیر T به ترتیب عبارت خواهند بود از $T=٢٠٠^{\circ}c$ و $T=٣٠^{\circ}c$.

مسائل

١- ضخامت دیوار آجری برابر ٣٠ سانتیمتر است . اگر درجه حرارت جدار داخلی $٢٠^{\circ}c$ وجدار خارجی $0^{\circ}c$ و $k=٠٫٠٠١٢$ باشد درجه حرارت داخل دیوار را برحسب تابعی از فاصله از جدار خارجی دیوار بیان کرده و گرمایی که در هر روز در هر متر مربع دیوار ازبین میرود پیدا کنید .

٢- یک لوله بخار که قطر آن یک فوت وضخامتش برابر $\frac{١}{٢}$ فوت است دارای پوششی از مواد عایق میباشد . درجه حرارت جدار داخلی لوله ٤٧٥° فارنهایت و درجه حرات جدار خارجی لوله ٧٥° فارنهایت و $k=٠٫٠٠٠٢٢$ است . درفاصله x فوتی ازمرکز لوله درجه حرارت واقع درپوشش فوق را بدست آورده وهمچنین گرمایی که در هرروز در طول یک فوت لوله از بین میرود بدست آورید .

۳- شعاع داخلی و خارجی گلوله توخالی کروی به‌ترتیب برابر ۴ سانتیمتر و ۹ سانتیمتر است رسانایی گرمایی ماده‌بین‌جدارها ۰ر۷۵ کالری‌بردرجه برسانتیمتر برثانیه میباشد . جدار داخلی را در °۱۰۰ سانتیگراد وجدار خارجی را درصفردرجه سانتیگراد پایا نگاه داشته‌ایم. تعیین کنید :

الف - گرمایی که دریک ثانیه هدر میرود وبطرف خارج بجدار خارجی جریان مییابد.

ب - درجه حرارت رویه‌یی که در فاصله ۵ سانتیمتری از مرکز قرار دارد .

راهنمایی - در رابطه (۵۳ . ۳) باید $A=٤\pi r^{۲}$ قرارداده و معادله حاصل را بین زوج مقادیر $(T=۱۰۰\ ;\ r=٤)$ و $(T=0\ ;\ r=۹)$ انتگره کنیم . r بجای x بوده و شعاع یک رویه تکدما میباشد .

تبصره - بایدتوجه‌داشت که Q مقدارپایا میباشد. مثلاً دراین مسئله مقدار Q برابر ۲۱۶۰π کالری درثانیه است . بنابراین از هررویه تکدما در هرثانیه ۲۱۶۰π کالری گرما میگذرد . اگررویه‌یی نزدیکتر به مرکز کره باشد طبیعی است که مساحت‌آن کمتر از رویه‌یی که دورتر از مرکز کره است خواهد بود و لذا برای **هرواحد سطح** در هرثانیه مقدارگرمایی که از رویه نزدیکتر میگذرد بیشتر از رویه‌یی که در فاصله دورتر از مرکز کره قرار دارد است . ولی بهرصورت کل گرمایی که درهررویه هدر میرود یکسان خواهد بود.

۴- قطریک‌لوله بخار که میتوان‌ازضخامت آن‌صرفنظر کرد برابر ۶ سانتیمتراست . این لوله‌را بضخامت ۳ سانتیمتربا منیزیم* که رسانایی گرمایی‌آن برابر ۰ر۰۰۰۱۷ است عایق بندی میکنیم . درجه حرارت جدار داخل لوله °۱۰۰ سانتیگراد ودرجه حرارت جدار خارج آن صفر درجه سانتیگراد است :

الف - گرمایی که درطول یک متر لوله در یک ثانیه هدر میرود و بطرف خارج جریان مییابد بیابید .

ب - درجه حرارت یک رویه تکدما که شعاع‌آن برابر ۸ سانتیمتر است پیدا کنید .

راهنمایی - در رابطه (۵۲ . ۳) داریم $A=۲\pi r(۱۰۰)$ که r شعاع یک رویه تکدما است .

جوابها

۱- $T=\frac{۲x}{۳}$ و ۶۹۱۰۰۰ کالری .

---

* Magnesia.

۲- $T=۷۵-\frac{۴۰۰ Log x}{Log ۲}$ و ۶۹۰۰۰ B.T.u .

۳- الف : $Q=۲۱۶۰\pi$ کالری درثانیه .

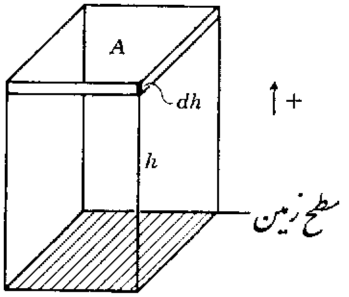
ب : °۶۴ سانتیگراد .

۴- الف : $۸٫۶\pi$ کالری درثانیه .

ب : °۲۹ سانتیگراد .

۵۴ . ۳- فشار اتمسفری و اقیانوسی

ستونی از هوا که سطح مقطع آن A و ارتفاعش dh است و بفاصله h واحدی از سطح زمین قراردارد درنظر میگیریم (شکل ۴۵ . ۳) . برای سهولت فرض میکنیم زمین مستوی و هوا درحال سکون بوده که تغییرات درجه حرارت ، طول و عرض جغرافیایی در آن اثری ندارد . جهت مثبت بسوی بالا است . فرض میکنیم p فشار* وارد براین ستون هوا که درنتیجه وزن تمام هوایی که بالای آن واقع هستند باشد . بنابراین P کل نیروی وارده برستونی از هوا که سطح مقطع آن A است برابر $P=Ap$ است . لذا :



شکل ۴۵ . ۳

$$dP=Adp \qquad \text{(I)}$$

رابطه بالا تغییرات نیروی P را برحسب تغییرات فشار p میدهد . فرض میکنیم ρ وزن یک واحد حجم از هوا باشد . بنابراین وزن ستونی از هوا که ارتفاع آن dh و سطح مقطع آن A است برابر :

$$(Adh)\rho \qquad \text{(II)}$$

هنگامیکه از ارتفاع h به ارتفاع $h+dh$ میرویم کاهش در کل نیرو باید مساوی وزن ستونی از هوا بضخامت dh باشد . بنابراین رابطه (I) را با علامت منفی با رابطه (II) مساوی قرار داده و از آنجا چنین داریم :

$$-Adp=\rho Adh \quad , \quad \frac{dp}{dh}=-\rho \qquad (۵۴ . ۳)$$

---

* فشار برابر است با نیرویی که عموداً بریک واحد مساحت رویه وارد میگردد .

رابطه (۳ . ۵٤) بیان میکند که نرخ تغییرات فشار نسبت به ارتفاع مساوی وزن یک واحد حجم هوا درآن ارتفاع باعلامت منفی میباشد .

واحدهایی که بکار میبریم عبارتند از :

۱- برای ρ پوند برفوت مکعب .

۲- برای p پوند بر فوت مربع .

۳- برای ارتفاع h فوت .

اگر p فشار اقیانوسی و h عمق از سطح دریا باشد رابط (۳ . ۵٤) بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dp}{dh}=\rho \qquad (۳ . ۵٤۱)$$

مثال۱- فرض میکنیم هوا گاز تکدما باشد. لذا بنا برقانون **بویل*** فشار و وزن مخصوص آن متناسب هستند. یعنی :

$$\rho=kp \qquad (۳ . ۵٤۲)$$

الف - فشارهوا را برحسب تابعی از h ارتفاع از سطح زمین بدستآورید. درصورتیکه فشار هوا درسطح دریا در هراینچ مربع ۱٤٫۷ پوند باشد .

ب - اگر درسطح دریا مقدار ρ درهرفوت مکعب برابر ۰٫۰۸۱ پوند باشد مقدار k را در رابطه (۳ . ۵٤۲) پیدا کنید .

پ - فشارهوا رادرارتفاعهای ۱۰۰۰۰ فوتی ، ۱۵۰۰۰ فوتی ، ۷۰۰۰۰ فوتی و ۵۰ میلی بیابید .

ت - نشان دهید درصورتی فشار صفر میباشد که h بینهایت باشد .

ث - وزن مخصوص هوا را برحسب تابعی از ارتفاع پیدا کنید .

ج - وزن هوا را در ارتفاعهای ۱۰۰۰ فوتی ، ۵۰۰۰ فوتی ، ۱۰۰۰۰ فوتی و ۵۰۰۰۰ فوتی پیدا کنید .

حل - الف : باجایگزین کردن رابطه (۳ . ۵٤۲) در رابطه (۳ . ۵٤) چنین داریم:

$$\frac{dp}{dh}=-kp \quad ; \quad \frac{dp}{p}=-kdh$$

و یا :

$$p=ce^{-kh}$$

---

* Boyle

ولی بنابفرض درسطح دریا فشار هوا در هراینچ مربع برابر ۱۴٫۷ پوند است . پس اگر شرایط اولیه $h=0$ و $p_0=۱۴٫۷$ را درمعادله بالا قرار دهیم مقدار $c=۱۴٫۷$ بدست میاید وازآنجا درهراینچ مربع فشار برابر $p=۱۴٫۷e^{-kh}$ پوند و یا فشار برهرفوت مربع برابر $p=۱۴٫۷\times ۱۲\times ۱۲e^{-kh}=۲۱۱۷e^{-kh}$ پوند است .

ب : باتوجه برابطه (۳ . ۵۴۲) وبااستفاده‌ازمقدار p که درقسمت‌بالا بدست‌آوردیم خواهیم داشت :
$$\rho=kp=k(۲۱۱۷e^{-kh})$$

و چون بنابفرض مقدار ρ در سطح دریا $(h=0)$ برهرفوت مکعب برابر ۰٫۰۸۱ پوند است لذا خواهیم داشت :

$$۰٫۰۸۱=۲۱۱۷k \quad , \quad k=\frac{۰٫۰۸۱}{۲۱۱۷}=۰٫۰۰۰۰۳۸$$

پ ـ اگردررابطه $p=۱۴٫۷e^{-kh}$ بجای k مقدار۰٫۰۰۰۰۳۸ راقراردهیم معادله فشار برحسب ارتفاع بدست میاید . یعنی :

$$p=۱۴٫۷e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸h} \tag{I}$$

حال اگر دراین معادله بجای h به ترتیب مقادیر ۱۲۰۰۰۰ اینچ و ۱۸۰۰۰۰ اینچ و ۸۴۰۰۰۰ اینچ و $۵۰\times ۵۲۸۰\times ۱۲=۳۱۶۸۰۰۰$ اینچ قرار دهیم* به ترتیب چنین داریم :

$$p=۱۴٫۷e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۱۲۰۰۰۰)}=۱۴٫۷e^{-۴٫۵۶}=۱۰$$ پوند براینچ مربع

$$p=۱۴٫۷e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۱۸۰۰۰۰)}=۱۴٫۷e^{-۶٫۸۴}=۸٫۳$$ پوند براینچ مربع

$$p=۱۴٫۷e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۸۴۰۰۰۰)}=۱۴٫۷e^{-۳۱٫۹۲}=۱$$ پوند براینچ مربع

$$p=۱۴٫۷e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۳۱۶۸۰۰۰)}=۱۴٫۷e^{-۱۲۰٫۳۸۴}=۰٫۰۰۰۶۰$$ پوند براینچ مربع

ت : اگر در رابطه (I) ، h بسوی بینهایت میل کند واضح است که p نیز بسوی صفر میل مینماید .

ث : با استفاده از فرض (ب) چنین داریم :

---

* یک فوت برابر ۱۲ اینچ و یک میل برابر ۵۲۸۰ فوت است .

$$\rho=\frac{۰٫۰۸۱}{۲۱۱۷}\left(۲۱۱۷e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸h}\right)=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸h}$$

ج : اگر در معادله بالا بجای h به ترتیب مقادیر ۱۰۰۰ فوت ، ۵۰۰۰ فوت ، ۱۰۰۰۰ فوت و ۵۰۰۰۰ فوت قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\rho=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۱۰۰۰)}=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۰۳۸}=۰٫۰۷۸$$ پوند برفوت مکعب

$$\rho=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۵۰۰۰)}=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۱۹}=۰٫۰٦۷$$ پوند برفوت مکعب

$$\rho=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۱۰۰۰۰)}=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۳۸}=۰٫۰۵۵$$ پوند برفوت مکعب

$$\rho=۰٫۰۸۱e^{-۰٫۰۰۰۰۳۸(۵۰۰۰۰)}=۰٫۰۸۱e^{-۱٫۹}=۰٫۰۱۲$$ پوند برفوت مکعب

مثال ۲- فرض‌میکنیم ρ وزن یک‌فوت مکعب‌آب دریا که تحت فشار p پوند برفوت مربع است از رابطه زیر بدست آید :

$$\rho=k(۱+۲\times ۲۰^{-۸}p) \qquad \text{پوند برفوت مکعب} \qquad (۳.۵٤۳)$$

اگر این عدد درسطح دریا ٦٤ پوند برفوت مکعب باشد مطلوب است :

الف ـ تعیین مقدار k .

ب ـ فشار آب دریارا برحسب تابعی‌از عمق آبی‌که در زیر سطح دریا است بیابید.

پ ـ وزن یک متر مکعب آب دریا را برحسب تابعی از عمق محاسبه کنید .

ت ـ فشار و وزن مخصوص آب دریا را در عمق ۲۰۰۰۰ فوتی تعیین کنید .

حل ـ الف ـ چون درسطح دریا $p=0$ است‌لذا اگر در رابطه (۳ . ۵٤۳) مقادیر $\rho=٦٤$ و $p=0$ را قرار دهیم مقدار $k=٦٤$ بدست میاید .

ب ـ باجایگزین کردن‌رابطه (۳ . ۵٤۳) در رابطه (۳ . ۵٤۱) چنین داریم :

$$\frac{dp}{dh}=\rho=٦٤(۱+۲\times ۱۰^{-۸}p) \quad ; \quad \frac{dp}{۱+۲\times ۱۰^{-۸}p}=٦٤dh$$

و از آنجا :

$$\int\frac{dp}{۱+۲\times ۱۰^{-۸}p}=٦٤h+c \quad ; \quad \frac{۱۰^{۸}}{۲}Log(۱+۲\times ۱۰^{-۸}p)=٦٤h+c$$

ولی چون درسطح دریا $(h=0)$ فشار برابرصفر است $(p=0)$ لذا اگر مقادیر $h=p=0$ رادر معادله بالاقراردهیم $c=0$ بدست‌میآید ولذا عبارت p برحسب h عبارت میگردداز :

$$۱۰^{۸}Log(۱+۲\times۱۰^{-۸}p)=۱۲۸h \quad ; \quad Log\left(۱+\frac{۲}{۱۰^{۸}}p\right)=\frac{۱۲۸}{۱۰^{۸}}\,h$$

و یا :

$$p=۵\times۱۰^{۷}\left(e^{\frac{۱۲۸h}{۲۰^{۸}}}-۱\right) \qquad (I)$$

پ ـ با توجه برابطه (۳ . ۵۴۳) وبااستفاده از مقدار p که در قسمت بالا بدست آوردیم چنین داریم :

$$\rho=٦٤(۱+۲\times۱۰^{-۸}p)=٦٤\left[۱+۲\times۱۰^{-۸}\times۵\times۱۰^{۷}\left(e^{\frac{۱۲۸h}{۱۰^{۸}}}-۱\right)\right]$$

$$(II) \quad =٦٤e^{\frac{۱۲۸h}{۱۰^{۸}}}$$

ت ـ برای تعیین فشاروزن مخصوص درعمق ۲۰۰۰۰ فوتی کافی‌است‌در رابطه (I) و (II) بجای h مقدار ۲۰۰۰۰ را قرار دهیم . یعنی :

$$p=۵\times۱۰^{۷}(e^{۰٫۰۲۵٦}-۱)=۱۲۹٦۵۰۰$$ پوند برفوت مربع

$$\rho=٦٤e^{۰٫۰۲۵٦}=٦۵٫۷$$ پوند برفوت مکعب

مسائل

۱ـ ثابت میکنند که اگر هوا بدون از دست دادن یا گرفتن گرما منبسط گردد رابطه $p=k\rho^{۱٫٤}$ برقرار است .

الف ـ اگردرسطح دریا $p=۱٤٫۷$ پوند برمربع اینچ و $\rho=۰٫۰۸۱$ پوندبرفوت مکعب باشد فشار هوا را برحسب تابعی از ارتفاع پیدا کنید .

راهنمایی ـ ابتدا مقدار k را یافته و سپس در رابطه (۳ . ۵٤) بجای ρ مقدار $\left(\frac{p}{k}\right)^{\frac{۵}{۷}}$ راقرار دهید .

ب ـ ارتفاع اتمسفر را تعیین کنید یعنی درجه ارتفاعی $\rho=o$ است .

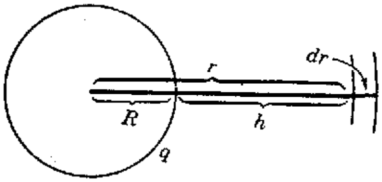
راهنمایی ـ دررابطه (۳ . ۵٤) بجای dp مقدار $۱٫٤k\rho^{۰٫٤}d\rho$ را قرار داده ومعادله حاصل را نسبت به ρ حل کرده و مقدار h را بازاء $\rho=o$ تعیین کنید .

۲- اگر بجای آنکه زمین را مستوی فرض کنیم آنرا کروی بپنداریم نشان دهید که رابطه (۳ . ۵۴) منجر به رابطه زیر میگردد :

$$\frac{dp}{dh} = -\rho - \frac{۲p}{R+h} \qquad (۳ . ۵۴۴)$$

که در آن R شعاع زمین میباشد .

راهنمایی - با توجه بشکل (۳ . ۴۶) حجم یک طبقه نازک کروی از هوا که ضخامت آن dr بوده وبفاصله r واحدی‌از مرکز زمین قرار دارد برابر $۴\pi r^{۲}dr$ است . لذا وزن آن برابر $(۴\pi r^{۲}dr)\rho$ خواهدبود. لذا کل نیروی P که درنتیجه وزن‌هوای خارج برسطح کره وارد میشود برابر $P = ۴\pi r^{۲}p$ است . لذا خواهیم داشت:



شکل ۳ . ۴۶

$$dP = ۴\pi(r^{۲}dp + ۲rpdr)$$

هنگامیکه از فاصله r به $r+dr$ میرویم کاهش در کل نیرو باید مساوی وزن‌طبقه کروی باشد .

جوابها

۱- الف : $p^{\frac{۲}{۷}} = p_\circ^{\frac{۲}{۷}} - \frac{۲}{۷} k^{-\frac{۵}{۷}} h$ که در آن $p_\circ = ۱۴٫۷$ پوند براینچ مربع و یا برابر ۲۱۱۶٫۸ پوند برفوت مربع است .

$$k = ۲۱۱۶٫۸(۰٫۰۸۱)^{-\frac{۷}{۵}}$$

ب :

$$h = \frac{۷}{۲}\left(\frac{p_\circ}{\rho_\circ}\right) = \frac{۷}{۲}\left(\frac{۲۱۱۶٫۸}{۰٫۰۸۱}\right)$$

$$= ۹۱۵۰۰ \text{ فوت} = ۱۷\frac{۱}{۳} \text{ میل}$$

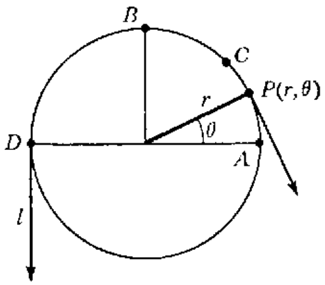
۵۵ . ۳- طناب یا زنجیر دور یک استوانه

اگر طناب یا زنجیری که یکنواخت و غیر قابل انعطاف است و با کشیدن در طول

آن تغییری ایجاد نمیشود دور پایه لنگر استوانه زبری به پیچیم ، با وارد نمودن نیروی کمتری بیک‌طرف طناب یا زنجیر میتوان نیروی بیشتری که برطرف دیگر وارد میشود کنترل کرد . مثلاً یک کارگر میتواند با پیچاندن طنابی که به انتهای وزنه سنگینی وصل است بدورتیری وزنه را بحال تعادل نگاه دارد .

برای پایه لنگری که محور آن افقی است معادله دیفرانسیلی که T **نیروی کشش** در نقطه‌یی مانند P واقع برآن را بیان میکند عبارت است از :

$$\frac{dT}{d\theta}=\delta r(\cos\theta+\mu\sin\theta)+\mu T \qquad (۳ . ۵۵)$$



شکل ۳ . ۴۷

P نقطه‌یی است که طناب یا زنجیر از آن نقطه میلغزد (شکل ۳ . ۴۷) .

T نیروی کشش نخ در نقطه غیر مشخص P واقع برآن برحسب پوند .

r شعاع استوانه برحسب فوت .

μ ضریب مالش بین طناب و پایه .

δ وزن طناب یا زنجیر در هرفوت برحسب پوند .

θ زاویه حامل نقطه P .

مثال ۱ - وزن زنجیری در هرفوت δ پوند است . این زنجیر براستوانه‌یی که محور آن افقی و شعاع قاعده‌اش برابر r فوت میباشد آویزان شده است یک‌طرف زنجیر در نقطه A میباشد . چه مقدار باید طرف دیگر زنجیر در زیر D ادامه یابد تا آنکه زنجیر درحال لغزش باشد (شکل ۳ . ۴۷) .

حل - رابطه (۵۵ . ۳) معادله دیفرانسیل خطی نسبت به T بوده و برای یافتن جواب عمومی آن به ترتیب زیر عمل میکنیم (r , μ , δ مقادیر ثابتی هستند) :

$$\frac{dT}{d\theta}-\mu T=\delta r(\cos\theta+\mu\sin\theta)$$

$$F.I=e^{-\int\mu d\theta}=e^{-\mu\theta} \quad ; \quad \frac{d}{d\theta}(Te^{-\mu 0})=\delta r(\cos\theta+\mu\sin\theta)e^{-\mu\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}(Te^{-\mu\theta})=\frac{\delta r}{۱+\mu^{۲}}\cdot\frac{d}{d\theta}e^{-\mu\theta}[(۱-\mu^{۲})\sin\theta-۲\mu\cos\theta]$$

$$Te^{-\mu\theta}=\frac{\delta r}{۱+\mu^{۲}}e^{-\mu\theta}[(۱-\mu^{۲})\sin\theta-۲\mu\cos\theta]+c$$

$$T=\frac{\delta r}{۱+\mu^{۲}}[(۱-\mu^{۲})\sin\theta-۲\mu\cos\theta]+ce^{\mu\theta} \qquad (I)$$

واضح است که در نقطه A مقدار $\theta=o$ و $T=o$ است . باقرار دادن این مقادیر در رابطه بالا مقدار $c=\frac{۲\mu\delta r}{۱+\mu^{۲}}$ بدست میآید . از طرف دیگر اگر l طول قسمتی از زنجیر باشد که درقسمت تحتانی نقطه D قرار دارد چون بنابفرض وزن هرفوت **زنجیر δ پوند است** لذا مقدار $T=\delta l$ خواهد بود ولی دراین نقطه $\theta=\pi$ است .

پس از جایگزین کردن مقادیر :

$$c=\frac{۲\mu\delta r}{۱+\mu^{۲}}\ ,\ T=\delta l\ ,\ \theta=\pi$$

مقدار $l=\frac{۲\mu r}{۱+r^{۲}}(۱+e^{\pi\mu})$ بدست میآید . ملاحظه مینماییم که برای مقدار ثابتی از μ طول l فقط تابعی از r است .

مثال ۲- اگر محور استوانه قائم باشد وزن طناب یا زنجیر که عموداً وارد میشود استوانه را فشار نمیدهد و بنابراین نیروی مؤثری نبوده و ممکن است در رابطه (۳ . ۵۵) δ را که وزن طناب یا زنجیر برای هرفوت میباشد برابر صفر اختیار کرد . دراین حالت رابطه (۳ . ۵۵) بصورت ساده زیر درمیآید :

$$\frac{dT}{d\theta}=\mu T \qquad (۳ . ۵۵۱)$$

بکمک رابطه (۳ . ۵۵۱) مثال زیر را حل کنید .

ملوانی باپیچیدن طناب محکمی بدور پایه لنگر عمودی کشتی را بحال تعادل نگاه میدارد . نیروی کششی که کشتی برطناب وارد میکند ۵ تن* وضریب مالش طناب وپایه برابر $\frac{۱}{۳}$ میباشد . اگر شخصی برای نگاه داشتن تعادل کشتی ۵۰ پوند نیرو وارد کند تعیین کنید تقریباً ملوان باید چند دور طناب دور پایه بپیچد .

حل - معادله (۳ . ۵۵۱) دارای جواب عمومی $T=ce^{\mu\theta}$ بوده و اگر شرایط اولیه $(\theta=o\ ,\ T=۵۰)$ را دراین معادله قرار دهیم مقدار $c=۵۰$ بدست میآید .

---

* یک تن برابر ۲۰۰۰ پوند است .

اکنون میخواهیم مقدار θ را چنان تعیین کنیم که $T=۱۰۰۰۰$ باشد . یعنی :

$$۱۰۰۰۰=۵۰e^{\frac{۱}{۳}\theta} \quad ; \quad ۲۰۰=e^{\frac{۱}{۳}\theta} \quad ; \quad \frac{۱}{۳}\theta=Log۲۰۰$$

و از آنجا :

$$\theta=۳Log۲۰۰=۳\times ۲٫۳۰۲٦\times log_{۱۰}۲۰۰=۳\times ۲٫۳۰۲٦\times ۲٫۳۰۱۰۳$$

و یا : رادیان $\theta=۱۵٫۸۷$

بعبارت دیگر باید طناب را کمی بیشتر از $۲\frac{۱}{۲}$ بار بدور پایه پیچاند .

مسائل

۱- وزن زنجیری در هرفوت δ پوند است . این زنجیر براستوانه‌یی که محور آن افقی و شعاع قاعده‌اش r فوت میباشد آویزان شده است . یک طرف زنجیر در نقطه B و طرف دیگر آن به‌نقطه D میرسد (شکل ۴۷ . ۳) . حداقل مقدار μ چه باید باشد تاآنکه زنجیر نلغزد .

راهنمایی- شرایط اولیه ($T=o$, $\theta=\frac{\pi}{۲}$) بوده و اگر بخواهد زنجیر نلغزد باید در $\theta=\pi$ مقدار $T=o$ گردد .

۲- وزن زنجیری درهرفوت یک پوند است . این زنجیر براستوانه‌یی که محور آن افقی و شعاع قاعده‌اش برابر $\frac{۱}{۲}$ فوت میباشد آویزان شده است . ضریب مالش بین زنجیر و استوانه برابر $\frac{۱}{۲}$ است . یک طرف زنجیر پس‌از پیمایش $\frac{۳}{٤}$ دور به نقطه C میرسد (شکل ٤۷ . ۳) . اگر زنجیر درحال لغزش باشد l مقدار طولی از زنجیر که آویزان است بدست آورید .

جوابها

۱- $۲\mu=(۱-\mu^{۲})e^{\frac{\pi\mu}{۲}}$, $\mu=۰٫۷۳۲٤$.

۲- فوت $l=۰٫٦۳$.

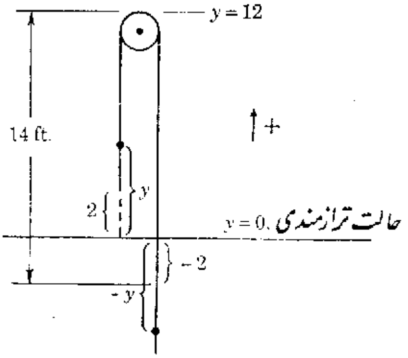
٥٦ . ٣ - حرکت یك دستگاه مرکب

دراینحالت از قانون نیوتن درباره حرکت که بصورت :

$$F=m\gamma=mv\left(\frac{dv}{dy}\right) \tag{٣ . ٥٦}$$

است استفاده میکنیم. F مجموع جبری جمیع نیروهایی که برجسمی به جرم m وارد میشود میباشد و γ شتاب مرکز ثقل جسم است .

مثال ۱- زنجیری بطول ٢٤ فوت که وزن هر فوت آن برابر δ پوند است برروی قرقره بدون مالش آویزان است. این قرقره در فاصله بیش از ٢٤ فوتی از زمین قرار دارد . در لحظه اولیه با کشیدن زنجیر بقسمی که ١٠ فوت آن از یك طرف و ١٤ فوت از طرف دیگر آویزان باشد زنجیر را بحال تعادل نگاه میداریم (شکل ٤٨ . ٣) . تعیین کنید پس از آنکه زنجیر را آزاد کنیم چه مدتی و با چه سرعتی زنجیر از قرقره میگذرد .



شکل ٤٨ . ٣

حل - اگر ١٢ فوت از زنجیر از هرطرف قرقره آویزان باشد واضح است که حالت ترازمندی زنجیر برقرار میباشد. وضع اخیر را $y=0$ مینامیم . لذا اگر فاصله انتهای زنجیر از حالت ترازمندی y باشد فاصله انتهای دیگر زنجیر $-y$ بوده و بنابراین نیروی مؤثری که باعث حرکت زنجیر میگردد $٢y\delta$ است . رابطه (٣ . ٥٦) با توجه بآنکه جرم زنجیر برابر $\frac{٢٤\delta}{٣٢}$ است بصورت زیر درمیآید.

$$٢y\delta=\frac{٢٤\delta}{٣٢}\,v\left(\frac{dv}{dy}\right) \quad ; \quad ٨ydy=٣vdv$$

و یا :

$$٤y^{٢}=\frac{٣}{٢}v^{٢}+c$$

ولی بنابفرض مسئله درلحظه $t=0$ مقدار $v=0$ و $y=٢$ است . لذا اگر مقادیر $v=0$ و $y=٢$ را در رابطه بالا قرار دهیم مقدار $c=١٦$ بدست میآید . یعنی :

$$٤y^{۲}-١٦=\frac{۳}{۲}v^{۲} \quad ; \quad v^{۲}=\frac{۲(٤y^{۲}-١٦)}{۳} \qquad \text{(I)}$$

برای تعیین سرعت عبورزنجیر از قرقره کافی است در رابطه بالا بجای $y=۱۲$ قرار دهیم. پس :

$$v^{۲}=\frac{۲(٥٦٠)}{۳}=\frac{١٦\times۲١٠}{۹} \quad ; \quad v=-\frac{٤}{۳}\sqrt{۲١٠}$$ فوت درثانیه

علامت منفی برای آن است که جهت سرعت زنجیر در خلاف جهت مثبت میباشد.

برای تعیین t بار دیگر رابطه (I) را درنظر میگیریم :

$$v^{۲}=\frac{۲(٤y^{۲}-١٦)}{۳} \quad , \quad \frac{dy}{dt}=v=-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\sqrt{٤y^{۲}-١٦} \quad ,$$

$$\frac{dy}{\sqrt{٤y^{۲}-١٦}}=-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\,dt$$

و پس از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$Log(y\pm\sqrt{y^{۲}-٤})=-۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}\,t+c$$

وپس از جایگزین کردن شرایط اولیه $(t=o \;,\; y=۲)$ مقدار $c=Log\,۲$ بدست میآید.

لذا :

$$Log\,\frac{y\pm\sqrt{y^{۲}-٤}}{۲}=-۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}\,t \qquad \text{(II)}$$

اکنون اگر در معادله اخیر $y=۱۲$ قرار دهیم مقدار $t=\sqrt{\frac{۳}{۸}}Log(٦+\sqrt{۳٥})$ ثانیه بدست میآید.

مثال ۲- اگر نقطه مادی بدون لغزش در امتداد یک منحنی ثابتی که معادله آن $y=f(x)$ است بلغزد میتوان نشان داد که معادله دیفرانسیل حرکت این نقطه درصورتیکه جهت مثبت بسوی بالا باشد عبارت است از :

$$vdv=-gdy \qquad (۳\,.\,٥٦١)$$

g شتاب ثقل ، v سرعت نقطه مادی در امتداد منحنی و y فاصله عمودی نقطه در لحظه t است . لذا $v=\frac{ds}{dt}$ که در آن s فاصله‌یی است که نقطه مادی در امتداد مسیر منحنی حرکت کرده است .

الف ـ نشان دهید که جواب عمومی معادله (۳ . ۵۶۱) با شرایط اولیه :

$$t=o\ ,\ v=v_۰\ ,\ y=y_۰$$

عبارت است از :

$$v^{۲}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^{۲}=v_۰^{۲}+۲g(y_۰-y) \tag{۳ . ۵۶۲}$$

ب ـ باجایگزین نمودن عبارت $\frac{ds}{dt}=\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}\,\frac{dx}{dt}$ دررابطه(۳.۵۶۲) و بادرنظر داشتن شرط اولیه $y_۰=f(x_۰)$ و معادله $y=f(x)$ نشان دهید که معادله (۳ . ۵۶۲) منجر به معادله زیر میگردد :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^{۲}=\frac{v_۰^{۲}+۲g[f(x_۰)-f(x)]}{۱+[f'(x)]^{۲}} \tag{۳ . ۵۶۳}$$

از رابطه (۳ . ۵۶۳) میتوان x را برحسب تابعی از t بدست آورد . با در دست داشتن x میتوان y را از معادله مسیر یعنی $y=f(x)$ تعیین کرد .

پ ـ با استفاده از رابطه (۳ . ۵۶۳) مسئله زیر را حل کنید .

نقطه مادی برروی سیم نرمی که بشکل سهمی $x^{۲}=-y$ است حرکت میکند . در لحظه اولیه این نقطه مادی در مبدأ بوده ودراین نقطه دارای سرعت چهار فوت درثانیه است . وضعیت نقطه مادی را پس‌از ۵ ثانیه بیابید .

حل ـ الف ـ جواب عمومی معادله (۳ . ۵۶۱) عبارت است از $v^{۲}=-۲gy+c$ اگردراین معادله شرایطاولیه ($v=v_۰$ و $y=y_۰$) راقراردهیم مقدار $c=v_۰^{۲}+۲gy_۰$ بدست میآید و از آنجا عبارت v برحسب y بصورت زیر درمیآید :

$$v^{۲}=v_۰^{۲}+۲g(y_۰-y)$$

ب ـ با قرار دادن مقادیر $\frac{dy}{dx}=f'(x)\ ,\ y_۰=f(x_۰)\ ,\ y=f(x)\ ,\ \frac{ds}{dt}$ در رابطه (۳ . ۵۶۲) به ترتیب چنین داریم :

$$\left\{ ١+[f'(x)]^٢ \right\}\left(\frac{dx}{dt}\right)^٢=v_٠^٢+٢g[f(x_٠)-f(x)]$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^٢=\frac{v_٠^٢+٢g[f(x_٠)-f(x)]}{١+[f'(x)]^٢}$$

پ - دراینحالت $v_٠=٤$ ، $f(x)=-x^٢$ ، $f(x_٠)=o$ ، $f'(x)=٢x$ بوده و ازآنجا رابطه (٣ . ٥٦٣) بصورت زیر درمیاید .

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^٢=\frac{١٦+٦٤x^٢}{١+٤x^٢}=١٦ \quad ; \quad \frac{dx}{dt}=\pm ٤$$

$$x=\pm ٤t+c$$

ولی بنابفرض در لحظه اولیه نقطه مادی در مبدأ مختصات است . لذا اگر مقادیر :

$$t=o \quad و \quad x=o$$

در معادله اختیار گردد مقدار $c=o$ بدست میاید و ازآنجا مقدار $x=\pm ٤t$ میگردد . لذا معادلات پارامتری نقطه مادی دراینحالت عبارت میگردند از :

$$x=\pm ٤t \quad ; \quad y=-١٦t^٢$$

بالنتیجه موقعیت نقطه مادی پس از ٥ ثانیه عبارتست از (فوت $x=٢٠$; فوت $y=-٤٠٠$) و یا (فوت $x=-٢٠$; فوت $y=-٤٠٠$) .

مسائل

١- در مثال یک فرض کنید که ١٤ فوت از طول زنجیری که از طرف دیگر آویزان است بزمین برسد . سرعتی که طرف دیگر زنجیر از قرقره میگذرد تعیین کنید .

٢- طول زنجیری ١٢ فوت است . ٦ فوت این زنجیر برروی میز مسطح بدون مالشی که ارتفاع آن از زمین بیش از ١٢ فوت است متکی شده است . اگر زنجیر را رها کنیم تعیین کنید پس از چه مدتی و با چه سرعتی انتهای زنجیر از میز میگذرد .

راهنمائی - $m=\frac{١٢\delta}{٣٢}$ و $F=y\delta$. y فاصله قسمتی از زنجیر که آویزان است از لبه میز و δ وزن هر فوت زنجیر میباشد . شرایط اولیه عبارتند از :

$$t=0\ ,\ y=٦\ ,\ v=0$$

۳- درمسئله ۲ فرض کنید ارتفاع میز ازسطح زمین ٤ فوت باشد . دراینحالت جوابها را بیابید .

جوابها

۱- ۱ر۱۸ فوت در ثانیه .

۲- ۱۷ فوت درثانیه و ثانیه $t=\sqrt{\frac{۳}{۸}Log(۲+\sqrt{۳})}$.

۳- ۳ر۱۵ فوت درثانیه .

۵۷ . ۳- جرم متغیر - حرکت موشکها

در مسائل مستقیم‌الخطی که تاکنون مورد مطالعه قرارداديم در مدت حرکت ، جرم نقطه مادی یاجسم را ثابت فرض کرديم . ولی اگر جرم نیز با زمان تغییر کند قانون دوم نیوتن دیگر صادق نبوده و باید در آن تغییری بدهیم . ثابت شده است که معادله دیفرانسیل اجسام متغیرالجرمی که درامتداد خط مستقیم‌حرکت میکنند بصورت‌زیر میباشد :

$$m\frac{dv}{dt}=F+u\frac{dm}{dt} \qquad (۳ . ۵۷)$$

که در آن :

m جرم جسم در لحظه t .

v سرعت جسم در لحظه t .

F مجموع جبری تمام نیروهایی که در لحظه t برجسم وارد میگردند .

dm جرمی که در فاصله زمانی dt به جسم ملحق و یا از آن جدا میگردد .

u سرعت dm در لحظه‌یی که بجسم ملحق یا ازآن جدا میشود . این سرعت‌نسبت به ناظری که در جسم قرار دارد میباشد .

باکمی دقت به رابطه(۳ . ۵۷) معلوم میشود که‌تنها اختلاف این معادله با قانون دوم نیوتن در جمله $u\frac{dm}{dt}$ است .

اگر جرم dm درفاصله زمانی dt از دستگاه جدا شود $\frac{dm}{dt}$ منفی و اگر به

دستگاه ملحق گردد $\frac{dm}{dt}$ مثبت میباشد .

مثال ۱ - موشکی بوزن $۳۲M$ پوند که شامل مواد سوختی بوزن $۳۲m_{۰}$ پوند است دراثراحتراق $۳۲k$ پوند سوخت درثانیه مستقیماً از سطح زمین بطرف جلو رانده میشود. سرعت نسبی گازی که ازانتهای موشک خارج میگردد A فوت درثانیه میباشد (نسبت بناظری که در موشک است) .

چنانچه تنها نیرویی که به موشک وارد میشود نیروی ثقل و جهت مثبت بسوی بالا انتخاب گردد سرعت موشک و فاصله یی که طی میکند برحسب تابعی از t بیان کنید . اگر سوخت موشک تمام شود سرعت و ارتفاع موشک را دراین لحظه بدست آورید .

حل - جرم متغیردرلحظه t برابر $m=M+m_{۰}-kt$ بوده ولذا $\frac{dm}{dt}=-k$ است . ازطرف دیگر بنابفرض مسئله u سرعت جرم dm برابر $-A$ و نیروی جاذبه درلحظه t مساوی $F=-(M+m_{۰}-kt)g$ میباشد . اگر مقادیر :

$$m \ , \ F \ , \ u \ , \ \frac{dm}{dt}$$

راکه باین طریق بدست آمده است در رابطه (۵۷ . ۳) قرار دهیم چنین داریم :

$$(M+m_{۰}-kt)\frac{dv}{dt}=-(M+m_{۰}-kt)g+Ak$$

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{Ak}{M+m_{۰}-kt}dt$$

$$v=-gt-A\,Log(M+m_{۰}-kt)+c_{۱} \quad , \quad o\leqslant t<\frac{M+m_{۰}}{k}$$

ولی چون موشک با سرعت اولیه صفر بطرف بالا رانده شده است لذا درلحظه $t=o$ مقدار $v=o$ است و ازآنجا :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt}=v=-gt-A\,Log(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t) \quad , \quad o\leqslant t<\frac{M+m_{۰}}{k}$$

$$\text{(II)} \qquad x=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}-A\int Log(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t)dt+c_{۲}$$

برای محاسبه انتگرال بالا به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t=z \quad ; \quad \frac{-k}{M+m_{۰}}dt=dz$$

$$\int Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t\right)dt=-\int\frac{M+m_{۰}}{k}Log z dz$$

$$=-\frac{M+m_{۰}}{k}\int Log z dz=-\frac{M+m_{۰}}{k}(zLog z-z)$$

$$=-\frac{M+m_{۰}}{k}\left[\frac{M+m_{۰}-kt}{M+m_{۰}}Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t\right)-\frac{M+m_{۰}-kt}{M+m_{۰}}\right]$$

$$=-\frac{۱}{k}\left[(M+m_{۰}-kt)Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t\right)-(M+m_{۰}-kt)\right]$$

اگر در جمله دوم طرف راست رابطه (II) مقدار بالا را قرار دهیم چنین داریم :

$$x=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+\frac{A}{k}(M+m_{۰}-kt)Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t\right)$$
$$-\frac{A}{k}(M+m_{۰}-kt)+c_{۲} \quad , \quad ۰\leqslant t<\frac{M+m_{۰}}{k}$$

بالاخره اگر دراین معادله شرایط اولیه ($t=۰$ و $x=۰$) را قرار دهیم چنین‌داریم :

$$c_{۲}=\frac{A}{k}(M+m_{۰})$$

و از آنجا :

$$\text{(III)} \qquad x=At-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+\frac{A}{k}(M+m_{۰}-kt)Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{۰}}t\right)$$
$$۰\leqslant t<\frac{M+m_{۰}}{k}$$

سوخت موشک درلحظه‌یی باتمام میرسدکه $۳۲m_{۰}-۳۲kt=۰$ ویا $t=\frac{m_{۰}}{k}$ باشد

اکنون اگر این مقدار t را در روابط (I) و (III) قرار دهیم چنین داریم :

$$v_{\circ}=-\frac{gm_{\circ}}{k}-A\,Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{\circ}}\cdot\frac{m_{\circ}}{k}\right)$$

$$=-\frac{gm_{\circ}}{k}-A\,Log\,\frac{M}{M+m_{\circ}}$$

$$x=\frac{Am_{\circ}}{k}-\frac{g}{۲}\left(\frac{m_{\circ}}{k}\right)^{۲}+\frac{AM}{k}\,Log\,\frac{M}{M+m_{\circ}}$$

تبصره - اگر موشک درفضای آزاد حرکت کند یعنی تحت نیروی جاذبه زمین نباشد دراینصورت در رابطه (۷ ۵ . ۳) مقدار $F=o$ است .

در این مثال اگر $F=o$ باشد طبعاً $g=o$ بوده و از آنجا معادلات (I) و (III) بصورت زیر درمیآیند :

$$v=-A\,Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{\circ}}\,t\right)\quad,\quad o\leqslant t<\frac{M+m_{\circ}}{k}$$

$$x=At+\frac{A}{k}(M+m_{\circ}-kt)Log\left(۱-\frac{k}{M+m_{\circ}}\,t\right)\quad,$$

$$o\leqslant t<\frac{M+m_{\circ}}{k}$$

مثال ۲- مجموع وزن موشک و سوخت آن $m_{\circ}$ اسلاگ است . برای حرکت این موشک لازم است که درهرثانیه k اسلاگ از جرم آن محترق گردد .

اگر در لحظه‌یی که احتراق شروع میگردد سرعت موشک $v_{\circ}$ باشد و سوختی که از انتهای موشک خارج میشود بقدری باشد که این سوخت در فضا بی‌حرکت بماند معادله سرعت و فاصله موشک را برحسب تابعی از زمان بیابید .

حل - برای آنکه سوختی که ازعقب موشک خارج میشود نسبت بناظری که درزمین قراردارد بی‌حرکت باشد سرعتی که سوخت را به عقب میراند باید برابر سرعتی که موشک را بجلو هدایت میکند باشد . باید توجه داشت که سرعت سوخت در هرلحظه برابر v ، سرعت موشک میباشد . ولی نسبت به ناظری که در موشک قراردارد چنین بنظر میرسد که او ساکن بوده وسوختی که از انتهای موشک خارج میشود با نرخ $-v$ فوت درثانیه ازاو دور میگردد . سرعت ناظر درجهت مثبت $+v$ فوت درثانیه است .

بنابراین رابطه (۷ ۵ . ۳) با توجه به مقادیر :

$$u = -v \ , \ m = m_0 - kt \ , \ F = -(m_0 - kt)g$$

بصورت زیر درمیآید :

$$(m_0 - kt)\frac{dv}{dt} = -(m_0 - kt)g + kv$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{k}{m_0 - kt} v = -g$$

معادله فوق خطی بوده ودارای عامل انتگرال کننده $e^{-\int \frac{kdt}{m_0 - kt}} = (m_0 - kt)$ است.
لذا جواب عمومی معادله بالا به ترتیب زیر بدست میاید :

$$\frac{d}{dt}[v(m_0 - kt)] = -g(m_0 - kt) \quad ; \quad v(m_0 - kt) = \frac{g}{۲k}(m_0 - kt)^{۲} + c$$

پس‌از قرار دادن شرایط اولیه $(v = v_0 \text{ و } t = o)$ مقدار $c = \frac{۲kv_0 m - gm_0^{۲}}{۲k}$
بدست میاید یعنی :

$$v = \frac{g}{۲k}(m_0 - kt) + \frac{۲kv_0 m - gm_0^{۲}}{۲k(m_0 - kt)}$$

با استفاده از رابطه $\frac{dy}{dt} = v$ وبادرنظرداشتن شرط اولیه $(t = o \ , \ y = o)$ رابطه بالا
پس‌از انتگرال گیری بصورت زیر درمیآید :

$$y = \frac{g}{٤k^{۲}}(۲m_0 kt - k^{۲}t^{۲}) - \frac{۲km_0 v_0 - gm_0^{۲}}{۲k^{۲}} Log\left(۱ - \frac{k}{m_0}t\right)$$

مسائل

۱ـ موشکی‌بجرم m که محتوی مواد سوختی‌بجرم m_0 است از ارتفاع زیادی بزمین سقوط میکند. موشک دراثر احتراق k اسلاگ از جرمش درهرثانیه حرکت میکند. سرعت نسبی گازی که ازانتهای موشک خارج میشود برابر A فوت درثانیه است (نسبت بناظری که درموشک میباشد). مطلوب‌است تعیین عبارت فاصله برحسب تابعی از t . جهت مثبت را بسوی پایین اختیار کنید.

راهنمایی ـ از مثال یک استفاده کنید.

۲- مثال ۲ را درحالتیکه موشک در فضای آزاد حرکت میکند حل کنید.

راهنمایی - در رابطه (۷ ۵ . ۳) مقدار $F=o$ قرار دهید.

۳- جسمی برروی خط مستقیم درفضای‌آزاد با سرعت v_o فوت درثانیه حرکت میکند. درلحظه‌اولیه جرم‌جسم m_o است ودرهرثانیه k اسلاگ برجرم آن اضافه میشود. معادلات سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان پیدا کنید.

راهنمایی - در رابطه (۷ ۵ . ۳)، $F=o$ اختیارکرده و فرض کنید dm جرم اضافه شده درفضا بیحرکت باشد. سرعت جسم نسبت بناظری که درجسم میباشد $-v$ است. v سرعت جسم میباشد بقیه مسئله را با استفاده از مثال ۲ حل کنید.

۴- قطره بارانی که کروی است در تحت‌تأثیر نیروی ثقل سقوط میکند. جرم این قطره‌ها دراثر ملحق‌شدن قطره‌های رطوبت‌ساکنی افزوده میشود. نرخ ملحق شدن قطره‌های رطوبت به قطره باران متناسب بامساحت‌رویه‌است. اگر در لحظه اولیه شعاع $r=r_o$ باشد معادلات شتاب، سرعت و فاصله را برحسب‌توابعی از زمان بیابید. جهت مثبت را بسوی پایین اختیارکنید. نشان دهید اگر $r_o=o$ باشد مقدار شتاب ثابت و برابر $\frac{g}{۴}$ است.

۵- زنجیری‌را از دور حلقه‌یی که‌درحال سکون است باز میکنیم، در تحت‌تأثیرنیروی ثقل (که تنها نیرویی است که برجسم وارد میشود) مستقیماً سقوط میکند. در لحظه اولیه l فوت از زنجیر باز شده است. باانتخاب جهت مثبت بسوی پایین سرعت را برحسب تابعی از زمان بیابید.

۶- مسئله ۵ را درحالتیکه زنجیر قبل‌از سقوط در امتداد صفحه بی‌مالشی که با افق زاویه θ تشکیل میدهدبلغزد حل کنید. فرض میکنیم که‌حلقه‌بحالت سکون درفاصله l فوتی از یک طرف صفحه واقع شده و در لحظه اولیه یک انتهای زنجیر در انتهای صفحه باشد.

جوابها

۱-
$$y=\frac{۱}{۲}gt^{۲}-At-\frac{A}{k}(M+m_o-kt)Log\left(۱-\frac{kt}{M+m_o}\right)$$
$$o\leqslant t<\frac{M+m_o}{k}$$

۲-
$$v=\frac{m_o v_o}{m_o-kt}\quad,\quad y=\frac{m_o v_o}{k}Log\frac{m_o}{m_o-kt}\,.$$

۳- $v=\frac{m_\circ v_\circ}{m_0+kt}$ ، $y=\frac{m_\circ v_\circ}{k} Log \frac{m_\circ+kt}{m_\circ}$.

٤- با استفاده از مسئله ١٤ شماره (٢٤ . ٣) نشان دهید $r=r_\circ+\frac{kt}{\delta}$ است . r شعاع قطره باران در لحظه t و k ضریب ثابت تناسب و δ جرم در هرفوت مکعب آب است . لذا $dr=\frac{kdt}{\delta}$. u سرعت ذره dm برابر $-v$ است که درآن v سرعت قطره باران در لحظه t میباشد . زیرا نسبت به ناظری که باقطره باران حرکت میکند بنظر میرسد که او ساکن بوده و ذره درجهت منفی که بسوی بالا میباشد با سرعتی برابر سرعت او در لحظه‌یی که قطره رطوبت به‌آن ملحق میشود بطرف او حرکت میکند . جرم متغیر m درلحظه t برابر $m=\frac{٤\pi r^٣\delta}{٣}$ است:

$$\gamma=\frac{g}{٤}\left(١+\frac{٣r_\circ^٤}{r^٤}\right) \quad , \quad v=\frac{\delta}{k}\cdot\frac{g}{٤}\left(r-\frac{r_\circ^٤}{r^٣}\right) \quad ,$$

$$y=\frac{g}{٨}\left(\frac{\delta}{k}\right)^٢\left(r^٢+\frac{r_\circ^٢}{r^٢}-٢r_\circ^٢\right)$$

اگر در معادله بالا بجای r مقدار $r_\circ+\frac{kt}{\delta}$ را قراردهیم میتوان معادلات شتاب ، سرعت و فاصله را برحسب توابعی از زمان بدست آورد .

٥- جرم زنجیر در لحظه t برابر $\delta(l+y)$ است . δ جرم زنجیر درهرواحد طول و $l+y$ فاصله‌یی از زنجیر میباشد که درلحظه t سقوط نموده است . لذا $\frac{dm}{dt}=\delta\frac{dy}{dt}=\delta v$ سرعت dm قسمتی از زنجیر هنگامیکه از حلقه جدا میشود (نسبت به شخصی که با زنجیر حرکت میکند) $-v$ است . v سرعت زنجیردر لحظه t میباشد . $\frac{dv}{dt}$ را با $v\frac{dv}{dy}$ تعویض میکنیم . جواب عبارت خواهد بود از:

$$v^٢(l+y)^٢=\frac{٢g}{٣}\left[(l+y)^٣-l^٣\right]$$

٦- با استفاده از مسئله ٥ نیروی مؤثر دراینحالت $[(l\sin\theta)\delta+y\delta]g$ که درآن y فاصله عمودی زنجیر که سقوط کرده است میباشد . جواب عبارت خواهد بود از :

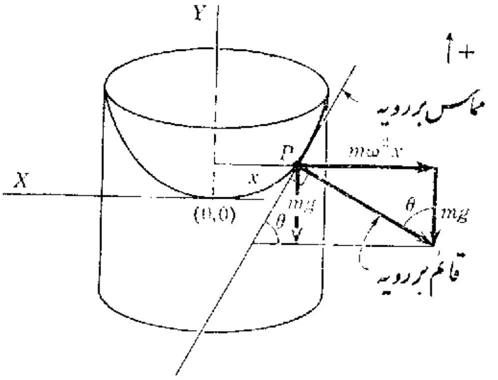
$$v^{۲}(l+y')=\frac{g}{۳}\,[۳ly\,sin\theta(۲l+y)+y^{۲}(۳l+۲y)]$$

۵۸ . ۳- دوران مایع در یك استوانه

این قسمت را با حل مثالهایی ذیلاً تشریح نموده‌ایم :

مثال ۱- ظرفی از آب حول محور قائمش با سرعت زاویه‌یی ثابت ω دوران میکند . نشان دهید هنگامیکه آب نسبت به ظرف بدون حرکت‌باشد سطح آب بشکل سهمی گون‌دوار درمیآید . معادله منحنی که از مقطع قائمی که برمحور استوانه میگذرد بدست آورید .

حل - با توجه به شکل (۴۹ . ۳) ملاحظه میشود که بریک ذره‌یی از آب درنقطه P دو نیرو وارد میشود ، یک نیرو که درنتیجه mg وزن ذره است و جهت آن بسوی پایین میباشد و نیروی دیگر که دراثر نیروی گریز از مرکز دوران حاصل میشود و مقدار **آن** برابر $m\omega^{۲}x$ است . ازآنجاییکه ذرات آب بیحرکت هستند باید برآیند این دو نیروقائم برسطح آب در نقطه P باشد زیرا در غیراینصورت برآیند دارای مؤلفه‌یی در امتداد مماس برمنحنی بوده و بالنتیجه سبب میگردد که آب در نقطه P حرکت کند . لذا با استفاده از شکل (۴۹ . ۳)چنین داریم :



شکل ۴۹ . ۳

$$tg\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{m\omega^{۲}x}{mg}\quad ;\quad y=\frac{\omega^{۲}x^{۲}}{۲g}+c \qquad \text{(I)}$$

اگر مبدأ رادر پایین‌ترین نقطه منحنی انتخاب کنیم $y=\frac{\omega^{۲}x^{۲}}{۲g}$ بدست میآیدواین معادله، معادله منحنی مقطع قائمی که از محور استوانه میگذرد میباشد .

مثال ۲ـ فرض میکنیم ظرف دوار مثال یک استوانه یی باشد که وزن مایع داخل آن در هر واحد حجم ρ باشد . اگر فشار برمحور ظرف p_0 باشد نشان دهید که فشار در سطح مایع در نقطه یی که فاصله آن از محور r است از معادله دیفرانسیل $\frac{dp}{dr}=\frac{\rho\omega^{۲}r}{g}$ تعیین میگردد و از آنجا جواب معادله را بیابید .

حل ـ مانند مثال یک ، یک عنصر حجم در تحت تأثیر فشار وارده برسطح و نیروی گریز از مرکز بحال ترازمندی میباشد . لذا اگر در رابطه (I) مثال یک y را به $\frac{p}{\rho}$ و x را به r تبدیل کنیم خواهیم داشت :

$$dp=\frac{\rho\omega^{۲}}{g}\,rdr \tag{II}$$

لذا :

$$p=p_0+\frac{\rho\omega^{۲}r^{۲}}{۲g}$$

مثال ۳ـ فرض میکنیم استوانه مثال ۲ محتوی گازی که وزن آن در هر واحد حجم ρ است باشد و بعلاوه از قانون بویل یعنی $p=k\rho$ پیروی کند. p فشار و k مقداری است ثابت. نشان دهید $p=p_0e^{\frac{\omega^{۲}r^{۲}}{۲kg}}$.

حل ـ اگر در رابطه (II) مثال ۲ بجای ρ مقدار $\frac{p}{k}$ را قرار دهیم به ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{dp}{p}=\frac{\omega^{۲}}{kg}\,rdr \quad ; \quad Log\frac{p}{p_0}=\frac{\omega^{۲}r^{۲}}{۲kg}$$

$$p=p_0e^{\frac{\omega^{۲}r^{۲}}{۲kg}}$$

فصل چهارم

خواص جوابهای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

١ . ٤- بده و بازده

معادله خطی مرتبه اول :

$$a(t)D_t x + x = F(t) \tag{٤ . ١}$$

که درآن سمبول $D_t x$ مشتق $\frac{dx}{dt}$ را نمایش میدهد درنظر میگیریم . t متغیر مستقل (زمان) و x متغیر تابع میباشد که تغییر کیفیت یا مکانی را نشان میدهد. مثلاً در بعضی از موارد خاص ممکن است x اندازه فشار ، جریان ، بار الکتریکی ، سرعت ، جرم و یا سایر کیفیت‌های فیزیکی را نمایش دهد .

معادله (١ . ٤) را میتوان با تقسیم بر $a(t)$ بصورت زیر درآورد :

$$D_t x + p(t)x = q(t) \quad , \quad p(t) = \frac{١}{a(t)} \quad , \quad q(t) = \frac{F(t)}{a(t)} \tag{٤ . ١١}$$

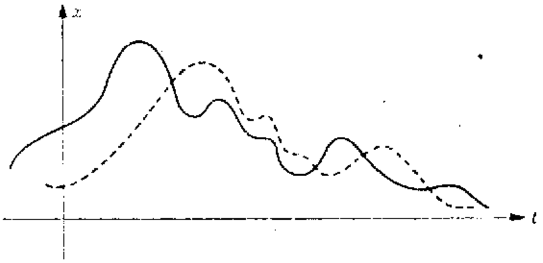
معمولاً $a(t)$ را مخالف صفر فرض مینمایند وبنابراین روابط (١ . ٤) و (١١ . ٤) بایکدیگر هم‌ارز خواهند بود و بالعکس اگر $P(t)$ مخالف صفر باشد رابطه (١١ . ٤) را میتوان با تقسیم بر $P(t)$ برابطه (١ . ٤) مبدل کرد .

درمعادله (١ . ٤) جمله $F(t)$ را **بده** نامیده و میتوان آنرا مانند قانون تغییراتی که سعی میکنیم x را مجبور به پیروی از آن نماییم بپنداریم . اگر در معادله (١ . ٤) ضریب $a(t)$ برابرصفرباشد دراینصورت x عیناً مساوی $F(t)$ خواهد بود ازآنجا جمله $a(t)D_t x$ مانعی را توصیف میکند که منجر به عدم تساوی x و $F(t)$ میگردد . یکی ازجوابهای خصوصی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول (١ . ٤) را **یك « بازده »** نامیم . همانطورکه بعداً نشان خواهیم‌داد پس‌ازگذشت **دوره میرایی** فقط یك تابع بازده $x(t)$ موجود بوده د دراینصورت میتوان از بازده صحبت کرد .

برای روشن شدن مفاهیم بده و بازده و روابط موجود بین آنها میتوان از مثالهای زیر استفاده نمود .

مثال ۱- آزمایش ساده اندازه‌گیری درجه حرارت اتمسفر را درنظر میگیریم . بده $[F(t)]$ درجه حرارت واقعی بوده وبازده (x) خواندن فوری درجه حرارت از میزان‌الحراره میباشد . واضح است که در داخل اطاق درجه حرارت واقعی اطاق و درجه حراتی که میزان‌الحراره نشان میدهد بایکدیگر برابر هستند یعنی بده و بازده بایکدیگر برابر هستند $[x=F(t)]$. ولی اگر میزان‌الحراره را از اطاق گرمی به محیط خارج انتقال دهیم واضح است که آناً میزان‌الحراره درجه حرارت واقعی محیط خارج را نشان نخواهد داد و از آنجا بازده و بده برای دوره کوتاهی با یکدیگر برابر نبوده ولی پس‌ازگذشت این دوره کوتاه میزان‌الحراره درجه حرارت واقعی محیط خارج را نشان خواهد داد .

مثال ۲- سرعت اتومبیل رادرلحظه t به x نمایش میدهیم . باتنظیم پدال گاز، اتومبیل باسرعت‌متناظربا ماکزیمم درجاده مسطحی‌حرکت میکند. چنانچه‌غفلتاً‌پدال گازرا فشاردهیم اتومبیل فوراً بسرعت ماکزیمم متناظر با تنظیم جدید پدال گاز نمیرسد زیرا در نتیجه مانعی که ازماند اتومبیل حاصل میشود سرعت واقعی (بازده) فوراً برابر سرعت خواسته شده (بده) نمیگردد .



شکل ۱ . ٤- بده و بازده

نوعی از تغییرات بده و بازده را درشکل (۱ . ٤) نمایش داده‌ایم برای روشن شدن بیشتر مفهوم‌بده و بازده میتوان مثالهای متعدد و متنوع دیگری ذکرکرد. در واقع زندگی روزمره ما مملو از مثالهایی است که میخواهیم خواسته‌های ما با پیروی از روشهای توصیف شده ودرنظرگرفته شده‌یی انجام‌یابد (بده) ولی در عمل می‌بینیم که این خواسته‌ها (بازده) درنتیجه موانعی آنطورکه مورد نظر ما بوده است عملی نشده است .

دربعضی از موارد ممکن است ازاین حقیقت که بازده تغییر جزیی و تغییری از «بده»

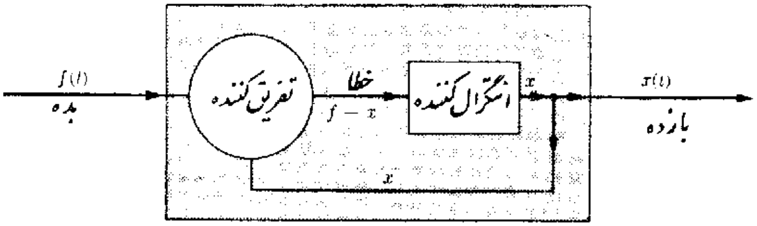
است استفاده نماییم وحتی در عمل برای طرح مکانیسمی که «بده» را با روش معینی تغییر میدهد سعی و اهتمام زیاد بکار میبرند . مثلاً فنرها و قسمتهای جاذب ضربه در اتومبیل طوری‌طرح‌ریزی میشوند که «بده» را (تکان خوردن ماشین‌در جاده‌های مملو از دست‌انداز) به بازده کاملاً مختلف تبدیل کنند (تکان نخوردن ماشین و راحتی مسافرین) .

رابطه بین‌بده وبازده راهمواره‌نمیتوان با معادله خطی (۱ . ۴) توصیف نمود زیرا اگر موانع پیچیده و درهم باشند رابطه بین بده و بازده منجر به معادلات مرتبه بالاتر و یا معادلات غیر خطی خواهند گردید . دلیل آنکه برای حالت خاص خطی اهمیت زیادی قائل هستیم آن‌است که گذشته از ساده بودن‌و موارد استعمال متعدد آن معادلات خطی مارا در حل سایر مسائل پیچیده راهنمایی میکنند .

برای‌آنکه مهندسین دستگاههای فیزیکی را توصیف کنند از **شکل کلی** که یک نوع ساده‌آنرا در شکل(۲ . ۴) نمایش داده‌ایم استفاده میکنند . دستگاه فیزیکی را مانند جعبه سیاهی که از محتویات داخل آن اطلاع کمی داریم می‌پنداریم . تنها اطلاعی که درباره این دستگاه داریم آن است که بده $F(t)$ متناظر با بازده $x(t)$ (بازاء شرایط اولیه‌داده شده)بوده ومیخواهیم‌رابطه بین x و F را مطالعه کنیم . دستگاههای پیچیده‌تر را میتوان با چند جعبه سیاه توصیف کرد مثلاً میتوان‌بده‌را به جعبه اول‌انتقال و سپس بازده حاصل را به جعبه دوم عبور داد و الی آخر .

شکل ۲ . ۴ـ شکل کلی ساده

یک مثال‌از یک جعبه سیاه‌با محتویات داخل‌آنرا درشکل (۳ . ۴) نمایش داده‌ایم . این‌شکل‌یک دستگاه کنترل ساده راتشریح میکند . بده $f(t)$ منجر به بازده $x(t)$ میگردد و سعی میکنیم که بده و بازده را بایکدیگر برابر کنیم .



شکل ۳ . ۴ـ دستگاه کنترل ساده

درهرلحظه بازده وبده بایکدیگر مقایسه گردیده وهردورا بهدستگاه **تفریق کننده** که خطای $f(t)-x(t)$ را محاسبه مینماید میبریم و سپس خطا را به انتگرال کننده تقویت کننده که یک بازده :

$$x=\frac{١}{a}\int[f(t)-x(t)]dt$$

ایجاد میکند میبریم . یعنی :

$$a\frac{dx}{dt}=f(t)-x(t)$$

بنابراین معادله (١ . ٤) برای این دستگاه برقرار خواهد بود . از آنجاییکه این دستگاه دائماً بازده را به دستگاه باز میگرداند تا در بده تاثیر کند لذا آنرا دستگاه **تغذیه برگشتی** نامیم . مثلاً اگر ناظری بخواهد از حرکت دستهیی تبعیت نماید چنانچه از دسته عقب بیفتد باید فوراً خطا را مشاهده و برسرعت خود بیافزاید .

٢ . ٤ـ انحطاط نمایی

اکنون معادله (١ . ٤) را درنظر گرفته و فرض میکنیم $a(t)$ مقدار ثابت مثبتی که برای سهولت به a نمایش میدهیم باشد . دراینحالت منظور یافتن بازده متناظر با بده صفر $[F(t)=0]$ است و لذا معادله (١ . ٤) مبدل به معادله :

$$aD_t x+x=0$$ (٤ . ٢)

میگردد . جواب عمومی معادله بالا (مثلاً باستفاده از روش جدا نمودن متغیرها) عبارت خواهد بود از :

$$x=ce^{-\frac{t}{a}}$$ (٤ . ٢١)

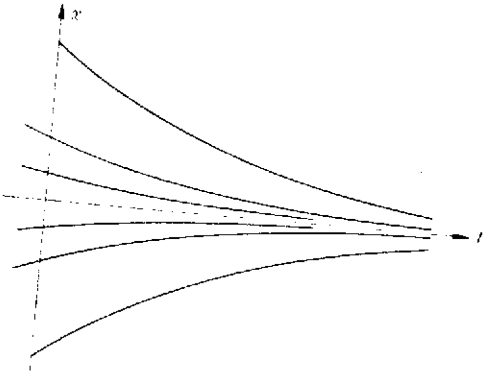
بازاء $t=0$ مقدار $x=c$ بوده و از آنجا میتوان c را مقدار اولیه بازده یعنی x_0 پنداشت و بالنتیجه معادله (٢١ . ٤) منجر به معادله :

$$x=x_0e^{-\frac{t}{a}}$$ (٤ . ٢٢)

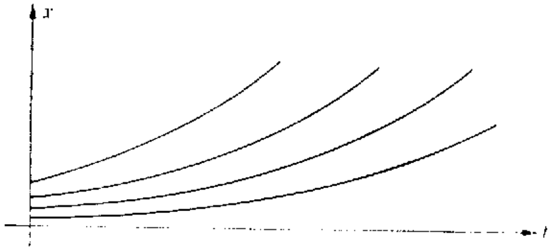
خواهد گردید. اگر $x_0=0$ باشد بازده x متحد صفر گردیده وازآنجا بده وبازدهبایکدیگربرابر خواهند شد . اگر $x_0\neq 0$ باشد همانطورکه درشکل (٤ . ٤) نشان داده شده است هنگامیکه t افزایش مییابد هریک از جوابهای x بسوی صفر میل میکند .

پدیده‌هایی که با معادله (۲۲ . ۴) توصیف میشوند موسوم به **انحطاط نمایی** میباشند .

کمیت فیزیکی که با x اندازه گیری میشود دارای یک **مقدار ارجح** $x=0$ بوده و اگر با انتخاب $x_0 \neq 0$ سعی کنیم ازاین مقدار (یعنی $x=0$) منحرف شویم مقدار x بتدریج به صفر برخواهد گشت و درواقع پس از دوره کوتاهی برابر صفر خواهد شد . ازآنجایی که تمام جوابهای (۲۲ . ۴) هنگامیکه $t \to \infty$ بسوی صفر میل میکند لذا این جوابها را «**جوابهای میرا**» نامیم .



شکل ۴ . ۴ـ انحطاط نمایی



شکل ۵ . ۴ـ رشدنمایی

چنانچه یکی ازبازده‌های ممکنه $x=c_1$ (c_1 مقداری است ثابت) باشد این بازده را یک **جواب تراز مندی** نامیم. جواب ترازمندی را **پایدار** گوییم هرگاه $t \to \infty$ جمیع بازده‌ها (یااقلاً بازده‌هایی که شرایط اولیه آنها بقدر کافی نزدیک به مقدار ترازمندی هستند) بسوی جواب ترازمندی میل کنند. واضح است که درانحطاط نمایی $x=0$ جواب ترازمندی

بوده و این جواب نیز پایدار میباشد چه اگر در رابطه (۲۲ . ۴) ، $t \to \infty$ جمیع بازده‌ها بسوی $x=0$ (جواب ترازمندی) میل خواهند نمود .

سرعت تمایل بازده‌های (۲۲ . ۴) بسوی جواب ترازمندی صفر باندازه مقدار ثابت a مشخص میگردد . زیرا از رابطه (۲۲ . ۴) کاملاً مشهود است که هرچه a بزرگتر باشد سرعت تمایل x بسوی صفر کمترخواهد بود . از نقطه نظر فیزیکی a دارای بُعد زمان بوده و آنرا **ثابت زمانی** گوییم .

با کمی دقت معلوم میشود که بازاء $t=0$, $t=a$, $t=۲a$, $t=۳a$, … مقادیر بازده متناظر به ترتیب برابر :

$$x=x_0\ ,\ x=x_0e^{-۱}\ ,\ x=x_0e^{-۲}=x_0(e^{-۱})^{۲}\ ,\ x=x_0e^{-۳}=(x_0e^{-۱})^{۳}$$

بوده و از آنجا قضیه زیر بدست میآید .

قضیهـ مقادیر x متناظر با زمانهای متساوی‌الفاصله $t=0$, $t=a$, $t=۲a$, $t=۳a$, … تشکیل تصاعد هندسی نزولی باقدر نسبت $e^{-۱}=۰٫۳۶۷۸۷۹$ را میدهند . ثابت زمانی را میتوان زمان لازم برای آنکه انحراف از جواب ترازمندی را به ۳۷ درصد جواب اولیه کاهش دهیم بپنداریم .

بطورکلی میتوان نشان داد که اگر مقادیر t تشکیل تصاعد حسابی دهند و تفاوت مشترك آنها d باشد مقادیر بازده‌های متناظر یعنی x تشکیل تصاعد هندسی با قدر نسبت $e^{-\frac{d}{a}}$ را خواهند داد .

اگر مقدار ثابت a در معادله (۱ . ۴) منفی باشد دراینصورت جوابهای (۲۲ . ۴) توابع **نمایی صعودی** را توصیف خواهند نمود . بنابراین باید جهت محور زمان را درشکل (۴ . ۴) تعویض نمود تا شکل (۵ . ۴) بدست آید . این پدیده را **رشد نمایی** گوییم . دراینحالت نیز دارای بازده خاص $x=0$ میباشیم ولی اگر مقدار اولیه x_0 انحراف جزیی از صفر داشته باشد هنگامیکه t ترقی میکند مقادیر x از صفر دور میشود (در واقع اگر $t \to \infty$ مقادیر x بسوی باضافه بینهایت یا منهای بینهایت میل میکنند) . دراینحالت گوییم جواب ترازمندی $x=0$ **ناپایدار** است .

۳ . ۴- بده ثابت

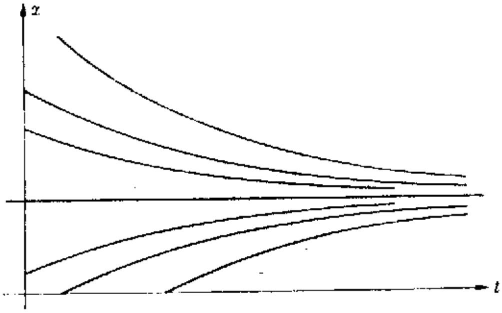
اکنون فرض میکنیم $F(t)$ مقدار ثابت و برابر F_0 و مانند شماره (۲ . ۴) ضریب $a(t)$ در معادله (۱ . ۴) مقدار ثابت مثبت باشد دراینصورت معادله دیفرانسیل (۱ . ۴) بصورت زیر در میآید :

$$aD_tx+x=F_\circ \qquad (۴ . ۳)$$

جوابهای این معادله :

$$x=F_\circ+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (۴ . ۳۱)$$

میباشند که آنها را در شکل (۶ . ۴) ترسیم کرده‌ایم . وجود مقدار ثابت $F_\circ$ در معادله (۳ . ۴) جواب ترازمندی $x=F_\circ$ را جانشین جواب $x=o$ میکند . انحراف هرجواب از مقدار



شکل ۶ . ۴- جواب برای بده ثابت

$F_\circ$ (خطا) برابر $x-F_\circ$ بوده وبنابر معادله (۳۱ . ۴) این مقدار هنگامیکه $t \to +\infty$ بطور نمایی بسوی صفر میل میکند وبنابراین جوابهای $x-F_\circ$ دراینحالت میرا خواهندبود همچنین جواب ترازمندی پایدار است .

اگر a منفی باشد جهت زمان تغییر نموده و جواب ترازمندی ناپایدار خواهد شد .

۴ . ۴ ـ بده شیبی

بار دیگر a را مقدار ثابت مثبت و :

$$F(t)=kt \qquad (۴ . ۴)$$

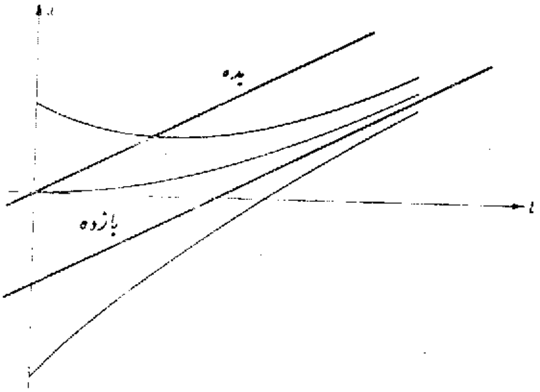
که در آن k مقدار ثابتی است می‌پنداریم . $F(t)$ را **بده شیبی** میگوییم وازآنجا معادله دیفرانسیل (۱ . ۴) منجر به معادله :

$$aD_tx+x=kt \qquad (۴ . ۴۱)$$

خواهدگردید . بنابر شماره (۷ . ۲) این معادله دارای جواب عمومی :

$$x = k(t-a) + ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٤٢)$$

است. بده و بازده را درشکل (۷ . ٤) نمایش داده‌ایم. درعبارت (٤٢ . ٤) بسهولت میتوان جمله میرای $ce^{-\frac{t}{a}}$ راکه درصورت تمایل t بسوی باضافه بینهایت بطورنمایی منحط میشود تشخیص داد. جمله‌اول واقع‌درسمت‌راست رابطه (٤٢ . ٤) یعنی $k(t-a)$ مقدار ثابتی نبوده ولی میتوان آنرا مانند **«حالت پایا»** فرض نمود. در واقع اینحالت یکی ازحالتهای خاص بازده بوده و هنگامیکه $t \to \infty$ جمع بازده‌های معادله دیفرانسیل (٤١ . ٤) بسوی حالت پایا میل میکند و یابعبارت دیگرانحراف‌هربازده ازجمله $k(t-a)$ میرا است. بنابراین میتوان گفت حالت پایا پایدار است.



شکل ۷ . ٤- جواب برای بده شیبی

باکمی دقت معلوم میشودکه حالت پایا یعنی $k(t-a)$ با بده kt فاصله زمانی ثابت‌زمانی یعنی a را دارد*. بنابراین بازده از بده پیروی میکند ولی هیچگاه قادرنخواهد بود آناً آنرا دوباره بوجود آورد.

۵ . ٤- بده عمومی - اصل جمع شدن بازده‌ها

برای مقادیر ثابت و مثبت $a(a > o)$ و بده عمومی $F(t)$ معادله دیفرانسیل (۱ . ٤) وجوابهای آن عبارت خواهند بود از:

$$aD_t x + x = F(t) \qquad (٤ . ٥)$$

---

* ازاین اصل میتوان برای تعریف ثابت زمانی یا اندازه‌گیری‌آن استفاده‌کرد.

$$x=\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int F(t)e^{\frac{t}{a}}dt+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٥١)$$

اگر فرض کنیم $F(t)$ بازاء جمیع مقادیر t پیوسته باشد بنابرقضیه شماره (٧ . ٢) معادله (٥١ . ٤) برای تمام مقادیر t یک دسته از جوابهای $x(t)$ را تعیین میکند . در شماره (٦ . ٤) نشان خواهیم داد که معادله (٥١ . ٤) را میتوان در حالات عمومی‌تر و کلی‌تر بکار بریم .

جمله اول واقع درسمت راست معادله (٥١ . ٤) را به $G(t)$ نمایش میدهیم . یعنی :

$$G(t)=\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int F(t)e^{\frac{t}{a}}dt \qquad (٤ . ٥٢)$$

درعبارت سمت‌راست رابطه بالایکی‌ازانتگرالهای نامعین را انتخاب کرده‌ایم. لذا بازده‌های معادله دیفرانسیل (٥ . ٤) عبارت خواهند بود از :

$$x=G(t)+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٥٣)$$

از رابطه (٤.٥٣) میتوان $G(t)$ را مانند حالت پایا پنداشت زیرا تفاضل بازده عمومی و بازده‌پایا میرا بوده(یعنی این‌تفاضل هنگامیکه t بسوی‌باضافه بینهایت میل میکند بطورنمایی منحط میشود) وحالت‌پایا پایدار نیزخواهد بود. باید یادآورشد که‌انتخاب $G(t)$ بستگی‌به انتگرال‌نامعین که‌درمعادله(٥٢ . ٤) درنظرمیگیریم‌دارد. چه‌اگردررابطه‌اخیرانتخاب‌انتگرال نامعین‌راتغییردهیم‌به$G(t)$جمله $c_1e^{-\frac{t}{a}}$ (c_1 مقداری است ثابت) افزوده خواهد شد و بنابراین برخلاف شماره (٤ . ٤) حالت پایا بطوردقیق معین نیست .

بهرصورت چنانچه تفاوت دو جواب میرا باشد این دو جواب را یکسان قرار میدهیم‌و درواقع یک بازده و یک حالت پایا موجود است .

اکنون فرض میکنیم $F_1(t)$ و $F_2(t)$ بده‌هایی باشند که بازاء جمیع مقادیر t پیوسته‌بوده و $G_1(t)$ و $G_2(t)$ بازده‌های متناظر که‌بارابطه (٥٢ . ٤) مشخص میشوند باشند. **بازده متناظر با ترکیب خطی بده‌ها یعنی $c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$ ترکیب بازده‌ها یعنی $c_1G_1(t)+c_2G_2(t)$ است.** این مطلب **اصل جمع شدن** بازده‌ها است که میتوان با توجه برابطه زیر و انتخاب مناسب انتگرالهای نامعین آنرا تأیید کرد :

$$\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int[c_۱F_۱(t)+c_۲F_۲(t)]e^{\frac{t}{a}}dt=c_۱\cdot\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int F_۱(t)e^{\frac{t}{a}}dt$$

$$+c_۲\cdot\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int F_۲(t)e^{\frac{t}{a}}dt$$

مثال ۱- جواب عمومی معادله‌دیفرانسیل خطی $۳D_t x+x=۵+۲t$ را بدست آورید.

حل - بنابرشماره (۳ . ٤) یکی‌ازبازده‌های متناظربا بده ثابت ۵ برابر $x=۵$ میباشد وبنابر شماره (٤ . ٤) یکی از بازده‌های متناظر با بده شیبی $۲t$ برابر $۲(t-۳)$ است ولذا بنابر اصل جمع‌شدن بازده‌ها یکی ازبازده‌های متناظربا بده $۲t+۵$ برابر $۵+۲(t-۳)$ بوده و ازآنجا بازده عمومی عبارت خواهد بود از :

$$x=۵+۲(t-۳)+ce^{-\frac{t}{۳}}$$

مثال ۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $۳D_t x+x=٤t+۳e^{۲t}$ را بدست آورید.

حل - یکی از بازده‌های متناظر با $e^{۲t}$ برابر :

$$\frac{۱}{۳}e^{-\frac{t}{۳}}\int e^{۲t}c^{\frac{t}{۳}}dt=\frac{۱}{۷}c^{۲t}$$

است . بالنتیجه با استفاده از اصل جمع شدن بازده‌ها یکی از بازده‌های متناظر با بده شیبی $٤t$ و بده $۳e^{۲t}$ برابر بازده $٤(t-۳)+\frac{۳}{۷}e^{۲t}$ است واز آنجا بازده عمومی عبارت خواهد بود از :

$$x=٤(t-۳)+\frac{۳}{۷}e^{۲t}+ce^{-\frac{t}{۳}}$$

چنانچه از سیراها صرفنظر کنیم بطور ساده میتوان گفت که اگر بده‌ها را در مقدار ثابتی ضرب کنیم بازده‌ها نیزدرآن مقدار ثابت ضرب خواهد شد و اگر دو بده را جمع کنیم بازده‌های متناظر نیز بایکدیگر جمع میگردند .

مسائل

۱- برای هریک از مسائل زیر بده و ثابت زمانی را تعیین کنید :

الف - $D_t x+۳x=e^t$. ب - $۵D_t x+۲x=\sin ۲t$.

پ - $۲D_t x+x=te^{-t}$. ت - $D_t x+x=t^۲$.

۲- در هریک از مسائل زیر بازده‌یی را که در شرایط اولیه $(t_۰=0 \ , \ x_۰=0)$ صدق میکند بیابید و سپس آنرا از نقطه نظر ترسیمی با بده مقایسه کنید :

الف - $D_t x+۲x=0$. ب - $D_t x+۲x=۱$.

پ - $۲D_t x+x=۳$. ت - $۲D_t x+x=t$.

ث - $۲D_t x+x=\sin t$. ج - $۲D_t x+x=\sin ۵t$.

چ - $۱۰D_t x+x=\sin t$. ح - $۲D_t x+۵x=\sin t$.

خ - $۲D_t x+x=۱+t$. د - $۲D_t x-x=t$.

۳- الف - نشان دهید که برای معادله $۵D_t x+x=F(t)$ جدول بازده‌ها و بده‌های زیر صحیح میباشد :

بده	بازده	بده	بازده
۱	۱	e^t	$e^t/۶$
t	$t-۵$	$\sin t$	$(\sin t-۵\cos t)/۲۶$
$t^۲$	$t^۲-۱۰t+۵۰$	$\cos t$	$(\cos t+۵\sin t)/۲۶$

ب - برای معادله قسمت (الف) و با کمک جدول بالا بازده‌های متناظر با بده‌های زیر را پیدا کنید :

I- $۳t+۲$. II- $۲t^۲-t+۳$. III- $۳e^t-۵$.

IV- $۲t-۱۳\sin t$. V- $۷\sin t+۹\cos t$.

VI- $۴\sin\left[t+\left(\frac{\pi}{۳}\right)\right]$.

۴ـ نشان دهید که در معادله کلی $a(t)D_t x+x=F(t)$ که در آن $a(t)\neq 0$ است درصورتی **یک بازده** متحد **یک بده** خواهد بود که بده مقدار ثابتی باشد .

۵ـ شکل (۸ . ۴) قسمتی از منحنی میرای $ce^{-\frac{t}{a}}$ را نمایش میدهد . نشان دهید چگونه میتوان بقیه منحنی را تنها با روشهای ترسیمی بدست آورد . همچنین نشان دهید چگونه میتوان سایر منحنی‌های $c'e^{-\frac{t}{a}}$ رابرای مقادیر $c'\neq c$ یافت .

شکل ۸ . ۴

۶ـ برای هریک از مفاهیم زیر مثالهایی ذکر کنید که بتواند مفهومهای بده و بازده را توصیف کند.

الف ـ روشن کردن چراغ . ب ـ بکار بردن دستگاه اتوماتیکی تنظیم کننده گرما .
پ ـ راندن اتومبیل . ت ـ بردن توپ در بازی فوتبال .
ث ـ رهبری ارکستر . ج ـ ترسیم منحنی روی کاغذ .
چ ـ سرخ کردن یک جوجه . ح ـ استفاده کردن از تلفن .
خ ـ گوش دادن به رادیو. د ـ رهبری مانورهای ارتش .

جوابها

۱ـ بده‌ها : الف : $\frac{۱}{۳}e^{t}$. ب : $\frac{۱}{۲}\sin ۲t$.
پ : te^{-t} . ت : $t^{۲}$.
ثابتهای زمانی : الف : $\frac{۱}{۳}$. ب : $\frac{۵}{۲}$.
پ : ۲ . ت : ۱ .
۲ـ الف : 0 . ب : $\frac{۱}{۲}(۱-e^{-۲t})$.
پ : $۳(۱-e^{-\frac{t}{۲}})$.
ت : $t-۲+۲e^{-\frac{t}{۲}}$.

ث : $\frac{۱}{۵}(-۲\cos t+\sin t+۲e^{-\frac{t}{۲}})$.

ج : $\frac{۱}{۱۰۱}(-۱۰\cos ۵t+\sin ۵t+۱۰e^{-\frac{t}{۲}})$.

چ : $\frac{۱}{۱۰۱}(-۱۰\cos t+\sin t+۱۰e^{-\frac{t}{۱۰}})$.

ح : $\frac{۱}{۲۰}(-۲\cos t+۵\sin t+۲e^{-\frac{۵t}{۲}})$.

خ : $t-۱+e^{-\frac{t}{۲}}$. د : $۲e^{\frac{t}{۲}}-t-۲$.

۳ - ب : I: $۳t-۱۳$. II: $۲t^{۲}-۲۱t+۱۰۸$.

III : $\frac{۱}{۲}e^{t}-۵$.

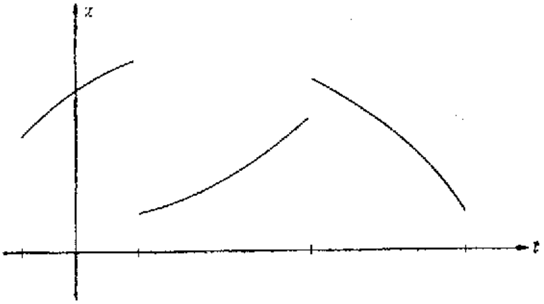
IV : $۲t-۱۰-\frac{۱}{۲}(\sin t-۵\cos t)$.

V : $۲\sin t-\cos t$.

VI : $\frac{۱}{۱۳}[(۱+۵\sqrt{۳})\sin t+(\sqrt{۳}-۵)\cos t]$.

۶ . ۴- بده‌های ناپیوسته

اکنون فرض میکنیم تابع $F(t)$ دارای ناپیوستگی‌های جهشی مانندشکل(۹ . ۴) باشد .



شکل ۹ . ۴- تابع پیوسته قطعه‌یی

درهریک‌ازنقاط انفصال تابع $F(t)$ دارای حد چپ وراست بوده و فرض میکنیم درهرفاصله اکثراً تعداد محدودی از این نوع نقاط انفصال موجود باشد . تابع $F(t)$ را در اینحالت «**پیوسته قطعه‌یی**» نامیم . ازاین تابع میتوان بدون اشکال‌انتگرال گرفت. زیرا اگر :

$$G(t)=\int_{o}^{t} F(u)du$$

باشد تابع $G(t)$ بازاء جمیع مقادیر t معیین و پیوسته میباشد . چه بنابر دستور اول میانه اگر $|h|$ بقدرکافی کوچک باشد چنین داریم :

$$G(t+h)-G(t)=\int_{t}^{t+h} F(u)du=hF(t_1) \quad t\leq t_1 \leq t+h \qquad (٤ . ٦)$$

رابطه بالا حتی اگر F در نقطه t منفصل باشد برقرار است زیرا برای مقادیرکوچک h تابع F درفاصله $(t , t+h)$ پیوسته میباشد . حال اگر در رابطه (٤ . ٦) ، h با مقادیر مثبت بسوی صفر میل کند $F(t_1)$ بسوی حد راست تابع F در نقطه t میل کرده و لذا $G(t+h)-G(t) \rightarrow o$. بطریق مشابه اگر h با مقادیر منفی بسوی صفر میل کند $G(t+h)-G(t) \rightarrow o$ و لذا $G(t)$ پیوسته خواهد بود . ازطرف دیگر از رابطه (٤ . ٦) چنین داریم :

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=F(t_1) \qquad (٤ . ٦١)$$

اگر تابع F درنقطه t پیوسته باشد هنگامیکه $h \rightarrow o$ حدکسربالا چنین است :

$$G'(t)=\lim_{h\rightarrow o}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=F(t) \qquad (٤ . ٦٢)$$

اگر F منفصل وحدراست وچپ در نقطه t موجود باشد (یعنی تابع $F(t)$ پیوسته قطعه‌یی باشد) و h را با مقادیر مثبت و منفی بسوی صفر میل دهیم چنین داریم :

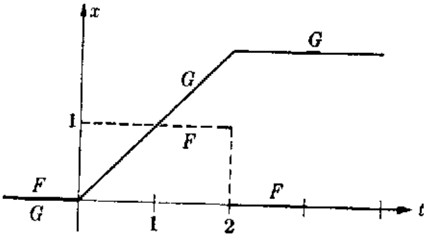
$$G'_{+}(t)=\lim_{h\rightarrow o+}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=\lim_{t_1\rightarrow t+}F(t_1)$$

$$G'_{-}(t)=\lim_{h\rightarrow o-}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=\lim_{t_1\rightarrow t-}F(t_1) \qquad (٤ . ٦٤)$$

بنابراین G در نقطه t دارای مشتقهای راست و چپ که به ترتیب برابر حدود راست وچپ تابع F میباشد خواهد بود .

مثال ۲- تابع $F(t)$ با روابط تحلیلی زیر مشخص میگردد :

$$F(t)=۰ \qquad t<۰$$
$$F(t)=۱ \qquad ۰<t<۲$$
$$F(t)=۰ \qquad t\geqslant ۲$$



شکل ۱۰ . ٤- انتگرال تابع پیوسته قطعه‌یی

نشان دهید که تابع $G(t)$ مربوطه پیوسته بوده وباستثنای نقاط $t=۰$ و $t=۲$ که تابع $G(t)$ دارای گوشه هایی میباشد $G'(t)=F(t)$.

حل - $G(t)$ سطح واقع زیر منحنی $F(t)$ را بین ۰ تا t نمایش میدهد و تابع $G(t)$ متناظر با هریک از فواصل فوق عبارت خواهد بود از :

$$G(t)=۰ \qquad t\leq ۰$$
$$G(t)=t \qquad ۰\leq t\leq ۲$$
$$G(t)=۲ \qquad t\geqslant ۲$$

$$\left[\, G(t)=\int_۰^t F(u)du=\int_۰^۲ tdt+\int_۲^t ۰dt=۲ \,\right]$$

بنابراین $G(t)$ پیوسته بوده و باستثنای نقاط $t=۰$ و $t=۲$ که تابع $G(t)$ دارای **گوشه‌هایی** میباشد $G'(t)=F(t)$. درهریک ازاین گوشه‌ها مشتق $G(t)$ به ترتیب برابر حدود راست و چپ تابع $F(t)$ میباشد . یعنی :

$$G'_+(۰)=\lim_{h\to 0+}\frac{h-۰}{h}=\lim_{t_۱\to 0+}F(t_۱)=۱$$

$$G'_-(۰)=\lim_{h\to 0-}\frac{۰}{h}=\lim_{t_۱\to 0-}F(t_۱)=۰$$

$$G'_+(۲)=\lim_{h\to 0+}\frac{۲-۲}{h}=\lim_{t_۱\to ۲+}F(t_۱)=۰$$

$$G'_-(۲)=\lim_{h\to 0-}\frac{h}{h}=\lim_{t_۱\to ۲-}F(t_۱)=۱$$

حال اگر $F(t)$ در رابطه (٤ . ۱) پیوسته قطعه‌یی بوده و مانند قبل a مقدار ثابت مثبتی باشد میتوان جوابهای معادله دیفرانسیل را از فرمول زیر بدست آورد :

$$x=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int F(t)e^{\frac{t}{a}}\,dt+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٦٤)$$

حاصل‌ضرب $F(t)e^{\frac{t}{a}}$ نیزپیوسته قطعه‌یی بوده و بنابر استدلال بالاانتگرالهای نامعین پیوسته و معین میباشند لذا میتوان نوشت :

$$\int F(t)e^{\frac{t}{a}}\,dt=\int_{0}^{t}F(u)e^{\frac{u}{a}}\,du+c \qquad (٤ . ٦٥)$$

با همان روش استدلال شماره (۲ . ۷) میتوان نشان داد که رابطه (٤ . ٦٤) در معادله دیفرانسیل (٤ . ۱) باستثنای نقاط جهش $F(t)$ صدق میکند. ولی بنابر مطالب بالا در هریک‌ازاین‌نقاط (یعنی‌نقاط انفصال‌تابع $F(t)$) بازده $x(t)$ پیوسته بوده و دارای گوشه‌یی میباشد . مشتق راست (یا چپ) تابع $x(t)$ درمعادله (٤ . ۱) درصورتی صدق میکند که $F(t)$ را حد راست (یا چپ) این نقاط فرض کنیم .

اکنون میتوان مفهوم جواب معادله دیفرانسیل را تعمیم داد . اگر تابع $x(t)$ پیوسته بوده و در فواصلی که توابع $F(t)$ پیوسته است تابع $x(t)$ در معادله دیفرانسیل (٤ . ۱) صدق کند دراینصورت تابع $x(t)$ را یک جواب (٤ . ۱) نامیم . قضیه شماره (۲ . ۷) نشان میدهد که جمیع این جوابها با رابطه (٤ . ٦٤) مشخص میشوند و متناظر با شرایط اولیه $(t=t_0\ ,\ x=x_0)$ فقط یک جواب موجود است .

مثال ۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $۳D_tx+x=F(t)$ که در آن $F(t)$ تابع مشخص شده در مسئله ۱ (شکل ٤ . ۱۰) است بیابید .

حل - برای تعیین انتگرال نامعین از رابطه (٤ . ٦٥) استفاده میکنیم :

$$\int F(t)e^{\frac{t}{۳}}\,dt=\int_{0}^{t}F(u)e^{\frac{u}{۳}}\,du=\begin{cases} 0 & t\leq 0 \\ ۳(e^{\frac{t}{۳}}-۱) & 0\leq t\leq ۲ \\ ۳(e^{\frac{۲}{۳}}-۱) & t\geqslant ۲ \end{cases}$$

رابطه (۶۴ . ۴) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x=\varphi(t)+ce^{-\frac{t}{۳}}$$

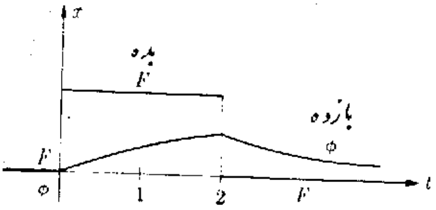
که در آن :

$$\varphi(t)=\frac{۱}{۳}e^{-\frac{t}{۳}}\int F(t)e^{\frac{t}{۳}}dt$$

و یا :

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0 & t\leq 0 \\ (۱-e^{-\frac{t}{۳}}) & 0\leq t\leq ۲ \\ (e^{\frac{۲}{۳}}-۱)e^{-\frac{t}{۳}} & t\geq ۲ \end{cases}$$

بده $F(t)$ و بازده $\varphi(t)$ را درشکل (۱۱ . ۴) نمایش داده‌ایم . تفاوت بازده عمومی و $\varphi(t)$ صیرا میباشد . میتوان بازده شکل (۱۱ . ۴) را با استدلال زیر بدست آورد . بامقادیربزرگ منفی t ومقدار $x=0$ شروع مینمائیم . ازآنجائی که بده صفر است بازده تا لحظه‌یی که $t=0$ نگردیده است بوضع ترازمندی خواهد بود . دراین لحظه زمان ، بده‌به مقدار **یک** میجهد (دستورهای جدیدی داده میشود) اکنون بازده مانند موردی که $F(t)$ برای جمیع مقادیر t مساوی **یک** است رفتارمیکند زیرا بازده نمیتواند حدث بزند که دستور جدیدی در لحظه $t=۲$ داده خواهد شد . بنابرشماره (۳ . ۴) و با شرایط اولیه $(t_0=0 \;,\; x_0=0)$ بازده متناظر با بده ثابت ۱ نسبت به جواب ترازمندی ۱ از یک منحنی انحطاط نمایی پیروی میکند (ثابت زمانی ۳ است) . در زمان $t=۲$ دستور جدیدی صادر میشود که بازده مانند حالتی که $F(t)$ همواره صفر است پیروی کند . شرط اولیه در لحظه $t=۲$ برابر $۱-e^{-\frac{۲}{۳}}$ بوده و لذا بازده نسبت به جواب ترازمندی صفر از یک منحنی انحطاط نمایی پیروی خواهد نمود .

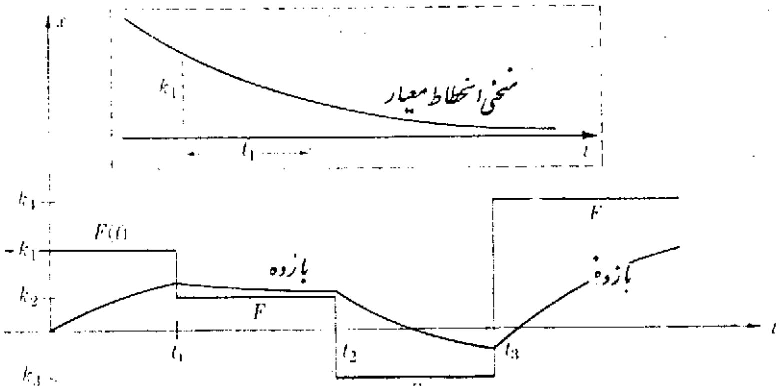


شکل ۱۱ . ۴- جواب برای بده تابع پله‌یی

۷ . ۴- بده تابع پله‌یی

اگر تابع پیوسته قطعه‌یی $F(t)$ در فواصل بین جهش‌ها ثابت باشد این تابع را تابع

پله‌یی نامیم (شکل ۱۲ . ۴) . بنابر شماره (۶ . ۴) میتوان بازده‌یی برای معادله $aD_t x+x=F(t)$ بدست‌آورد. مثلاً اگر درزمان $t=0$ بازده متناظر برابرصفربوده وفقط به‌آینده $(t>0)$ توجه‌داشته‌باشیم میتوان‌بازده عمومی‌رانسبت‌بمقادیر ترازمندی‌لحظه‌یی و تبعیت کردن ازیک دسته منحنی‌های «میرای نمایی» بدست‌آورد. بین $t=0$ و اولین جهش در نقطه t_1 خطا از مقدار اولیه k_1 به ضریبی از $e^{-\frac{t_1}{a}}$ کاهش مییابد درزمان $t=t_1$ مقدار جدیدترازمندی k_2 بوده وتفاوت‌بازده‌و k_2 خطای E_2 است که برابر $k_1(1-e^{-\frac{t_1}{a}})-k_2$ میباشد. بین t_1 و t_2 این‌خطا به طرفین از $e^{-(t_2-t_1)/a}$ کاهش مییابد. این خطای جدید در زمان $t=t_2$ نسبت به مقدار ترازمندی جدید k_3 منجر به خطای E_3 میشود والی آخر. بازده دائماً بده را تعقیب نموده و هنگامیکه به هدف نزدیک میگردد ناگهان بده‌به مقدارجدید خود جهش مییابد. باید درنظرداشت که قسمتهای‌مجزای‌شکل (۱۲ . ۴)



شکل ۱۲ . ۴- محاسبه نموداری جواب برای بده تابع پله‌یی

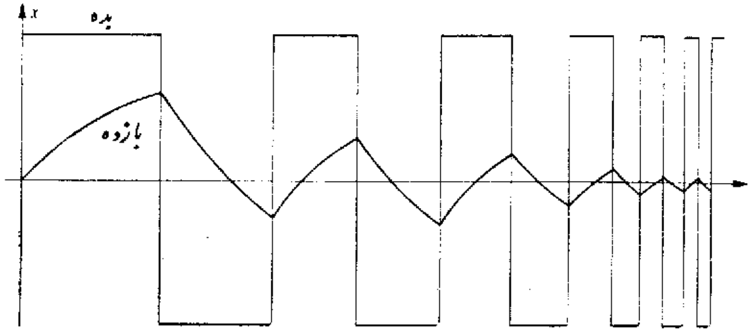
جمیعاً قسمتهایی ازمنحنی $x=e^{-\frac{t}{a}}$ میباشند که آنهارا نیزدرهمان شکل نشان داده‌ایم. لذا منحنی (۱۲ . ۴) درفاصله $0 \leqslant t \leqslant t_1$ قسمتی از منحنی معیار میباشد که ازنقطه‌یی که مقدار آن k_1 است‌شروع شده و برای t_1 واحد ادامه خواهد داشت. هنگامیکه این منحنی معیار در دست باشد میتوان بازده عمومی را با روش ترسیم بدست آورد. چنانچه بده را روی کاغذ شفاف ترسیم وسپس آنرا برروی‌قسمت متناظر منحنی معیار قرار دهیم روش ترسیم فوق ساده‌تر خواهد شد. ثابت زمانی a در تعیین ماهیت بازده نقش بسیار اساسی دارد. اگر a بزرگ باشد مکانیسم کند بوده و بازده قادر نیست که ازتغییرات سریع بده پیروی کند

و چنانچه a کوچک باشد بازده تقریباً شبیه بده خواهد بود .

از مکانیسمی که دارای کوچکترین مقدار ممکنه a است نمیتوان نتیجه گرفت که این مکانیسم میتواند بهترین نتیجه را ایجاد کند. در بسیاری از موارد دستوراتی که به مکانیسم داده میشود شامل غیر منظمی‌های غیر عمدی میباشد و اگر ثابت زمانی بزرگ باشد این نامنظمی‌ها در مکانیسم «دانا» مؤثرنخواهد بود . مثلاً اگر اتومبیلی در نتیجه تغییر جزیی در پدال گاز فوراً تحت‌تأثیرقرار گیرد مسافری که بااین ماشین حرکت میکند دائماً در جنبش و حرکت خواهد بود (شکل ۱۳ . ٤) .

چنانچه a را ثابت و فرکانس جهش‌ها در بده را متغیر فرض کنیم میتوان بار دیگر بستگی انتخاب ثابت زمانی را توصیف کرد .

اگر F(t) بین‌دومقداربجلو و به‌عقب‌جهش نماید بازده نیز بین مقادیر میانی بجلو وعقب خواهد جهید (شکل ۱۳ . ٤) اگرسرعت‌نوسان F(t) افزایش یابد بازده دردامنه باریک و باریکتری‌نوسان خواهد نمود . برای نوسانات‌بسیار سریع F تقریباً بازده ثابت‌است. (این پدیده اساسی عکسهای سینمایی ، بده شدیداً ۳۲ دفعه نوسان میکند ولی چشم بشر نوسان جزیی را مشاهده و عکسی را می‌بیند که فقط بتدریج تغییر میکند) .



شکل ۱۳ . ٤- جواب برای بده نوسانی

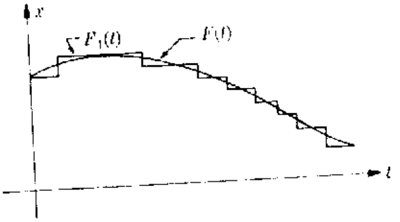
درتمام این قسمت a را مثبت (حالت پایدار) و یک تابع بازده را انتخاب کرده‌ایم. سایر توابع بازده از تابع انتخاب‌شده دارای‌اختلاف میرا بوده ولذا پس‌ازگذشت‌زمان اولیه‌یی با بازده انتخاب شده متوافق خواهند بود .

۸ . ٤- تقریب بده غیر مشخص به تابع پله‌یی

اگر F(t) بده پیوسته یاپیوسته‌قطعه‌یی‌باشد همانطورکه‌درشکل (۱٤ . ٤) نمایش داده شده‌است میتوان F(t) را بطور غیر مشخص وباتقریب نزدیکی باتابع پله‌یی $F_1(t)$ تعویض کرد . میتوان نوشت :

$$F(t)=F_1(t)+E(t) \qquad (۴ . ۸)$$

که در آن $E(t)$ خطای تقریب میباشد. با استفاده از اصل جمع شدن بازده‌ها، بازده حقیقی مشتمل برمجموع بازده‌های متناظر با بده $F_1(t)$ و $E(t)$ میباشد. میتوان نشان داد (مسئله ۵ زیر) که اگر $|E(t)| < t$ (شاید باستثنای نقاط انفصال) دراینصورت بازده x_E حاصل از $E(t)$ پس از گذشت زمان کوتاهی بازاء جمیع مقادیر t درنامساوی $|x_E| < t$ صدق خواهد نمود. لذا با کوچک نمودن خطای $E(t)$ میتوان تقریب مناسبی برای بازده حقیقی ازتعویض $F(t)$ به تابع پله‌یی $F_1(t)$ بدست آورد.



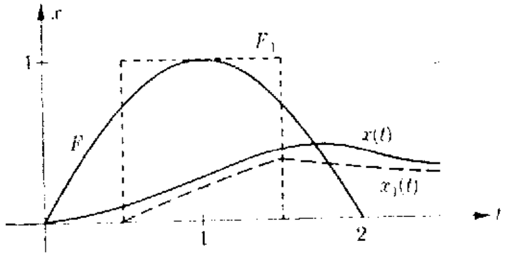
شکل ۱۴ . ۴

مثال۱- $۲D_tx+x=F(t)$ که‌درآن $F(t)$ با روابط تحلیلی زیرمشخص میشود

برای $t \leqslant 0$ $F(t)=0$

برای $0 \leqslant t \leqslant ۲$ $F(t)=۲t-t^{۲}$

برای $t \geqslant ۲$ $F(t)=0$



شکل ۱۵ . ۴- مقایسه جواب پولس سهمی با پولس مربع تقریبی

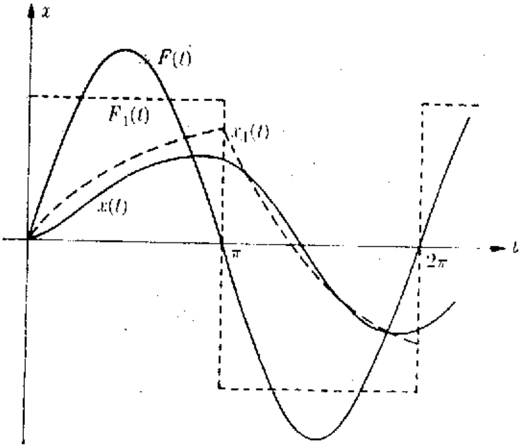
$F_1(t)$ را برای مقادیر $t<\frac{۱}{۲}$ و $t>\frac{۳}{۲}$ برابر صفرو برای مقادیر $\frac{۱}{۲} \leqslant t \leqslant \frac{۳}{۲}$ مساوی یک فرض میکنیم. بده و بازده‌های متناظر (برای مقادیر اولیه صفر) در شکل (۱۵ . ۴) نمایش داده شده است. خطای $E(t)$ دارای ماکزیمم $\frac{۳}{۴}$ بوده ولی هیچگاه تفاوت بازده‌ها از ۲ر۰ تجاوز نمیکند.

مثال ۲- $۲D_tx+x=\sin t$ بده را با امواج مربع تقریب میکنیم یعنی دوفاصله

$0 < t < \pi$ تابع $F_۱(t) = ۰٫۷۵$ و درفاصله $\pi < t < ۲\pi$ مقدار:

$$F_۱(t) = -۰٫۷۵$$

فرض میکنیم. دو بازده متناظر با مقدار اولیه صفر در شکل (۱۶ . ۴) نمایش داده شده است. دراینجا نیز تقریب بطور قابل ملاحظه‌یی مناسب میباشد.



شکل ۱۶ . ۴- مقایسه جواب موج سینوسی با جواب موج مربع تقریبی

مسائل

برای هریک از توابع زیر $F(t)$ ، تابع $\int_0^t F(u)du = G(t)$ را یافته وسپس توابع $F(t)$ و $G(t)$ را ترسیم کنید.

الف- برای $t < 0$ $F(t) = 0$ و برای $t \geqslant 0$ $F(t) = ۱$.

ب- برای $t < 0$ $F(t) = 0$ و برای $0 \leqslant t \leqslant \pi$ $F(t) = \sin t$ و برای $t \geqslant \pi$ $F(t) = 0$.

پ- $F(t) = [t]$ که در آن t عدد درست n میباشد بقسمی که در نامساوی $n \leq t < n + ۱$ صدق کند. مثلاً $[۳٫۵۶۲] = ۳$ و $[-۲٫۵۶۷] = -۳$ و $[-۵] = -۵$.

ت- $F(t) = (-۱)^{[t]}$.   ث- $F(t) = t - [t]$.

ج- $F(t) = e^{t-[t]}$.

۲- برای هریک از معادلات دیفرانسیل زیر بازده عمومی را بدست آورده و برای انتخاب شرایط اولیه مناسب برای سه مسئله اول بده و بازده را ترسیم کنید .

الف - $۲D_tx+x=F(t)$ که درآن برای مقادیر $t<o$ تابع $F(t)=o$ و برای مقادیر $t\geqslant o$ تابع $F(t)=۱$ است .

ب - $۲D_tx+x=F(t)$ که درآن $F(t)$ مانند قسمت (ب) مسئله (۱) مشخص میگردد .

پ - $۲D_tx+x=F(t)$ که درآن $F(t)$ مانند قسمت (پ) مسئله (۱) مشخص میگردد .

ت - $۲D_tx+x=F(t)$ که درآن $F(t)$ مانند قسمت (ت) مسئله (۱) مشخص میگردد .

ث - $۵D_tx+x=F(t)$ که درآن $F(t)$ مانند قسمت (ت) مسئله (۱) مشخص میگردد .

۳- الف - برای مقادیر واقع در فاصله $-۴\leqslant t\leqslant ۸$ بدقت تابع $x=e^{-\frac{t}{۴}}$ را ترسیم کنید .

ب - باکمک منحنی قسمت (الف) با روش ترسیم بازده متناظر با شرایط اولیه صفر را برای معادله دیفرانسیل زیر تعیین کنید :

$$۴D_tx+x=F(t)$$

$F(t)$ برای مقادیر $t<o$ برابر صفر و درفاصله $o\leqslant t<۲$ ، $F(t)=۱$ ، درفاصله $۲\leqslant t<۳$ ، $F(t)=o$ ، درفاصله $۳\leqslant t<۵$ ، $F(t)=۲$ و برای $t\geqslant ۵$ مقدار $F(t)=o$ است .

پ - قسمت (ب) را با مقداراولیه -۱ تکرار کنید .

۴- برای معادله دیفرانسیل $D_tx+x=F(t)$ برای انتخابهای ذیل جهت $F(t)$ بازده متناظر با شرایط اولیه صفر را یافته وآنها را با جایگزین نمودن $F(t)$ بوسیله توابع پله‌یی داده شده مقایسه کنید (یعنی بازده متناظر با شرایط اولیه صفر) . مانند مسئله ۳ بازده متناظر به $F_۱(t)$ را باید بطور ترسیمی بدست آورد .

الف - $F(t)=o$, $t<o$ ؛ $F(t)=e^t-۱$, $o\leqslant t\leqslant ۱$ ؛ $F(t)=(e^۲-e)e^{-t}$, $t\geqslant ۱$

$$F_1(t)=o\ ,\ t \geqslant \frac{۳}{۲}\ ;\ F_1(t)=۱\ ,\ \frac{۱}{۲} \leqslant t < \frac{۳}{۲}\ ;\ F_1(t)=o\ ,\ t < \frac{۱}{۲}.$$

ب ـ

$$F(t)=o\ ,\ t \geqslant \pi\ ;\ F(t)=\cos t\ ,\ o \leqslant t < \pi\ ;$$

$$F(t)=o\ ,\ t < o$$

$$F_1(t)=o\ ,\ \frac{\pi}{۳} \leqslant t \leqslant \frac{۲\pi}{۳}\ ;\ F_1(t)=۰٫۷\ ,\ \frac{\pi}{۶} \leqslant t < \frac{\pi}{۳}\ ;$$

$$F_1(t)=۱\ ,\ o \leqslant t < \frac{\pi}{۶}\ ;\ F_1(t)=o\ ,\ t < o\ ;\ F_1(t)=o\ ,\ t \geqslant \pi\ ;$$

$$F_1(t)=-۱\ ,\ \frac{۵\pi}{۶} \leqslant t < \pi\ ;\ F_1(t)=-۰٫۷\ ,\ \frac{۲\pi}{۳} \leqslant t < \frac{۵\pi}{۶}$$

۵ـ الف ـ نشان دهید که اگر $E(t)$ پیوسته قطعه‌یی بوده و برای $t > o$ نامساوی $-\varepsilon < E(t) < \varepsilon$ برقرار باشد و **a** مقدار ثابت مثبتی باشد دراینصورت :

$$-a\varepsilon e^{\frac{t}{a}} < \int_o^t E(u)e^{\frac{u}{a}}du < a\varepsilon e^{\frac{t}{a}}$$

ب ـ با کمک نتیجه قسمت (الف) نشان دهید که اگر برای $t > o$ ، $|E(t)| < \varepsilon$ بازده $x(t)$ متناظر با مقدار اولیه صفر برای معادله دیفرانسیل $aD_t x + x = E(t)$ برای $t > o$ در نامساوی $|x(t)| < \varepsilon$ صدق میکند .

جوابها

۱ـ الف : برای مقادیر $t < o$ تابع $G(t)=o$ و برای مقادیر $t \geqslant o$ تابع $G(t)=t$.

ب : برای مقادیر $t < o$ تابع $G(t)=o$ و برای مقادیر $o \leqslant t \leqslant \pi$ تابع $G(t)=۱-\cos t$ و برای مقادیر $t \geqslant \pi$ تابع $G(t)=۲$.

پ : برای مقادیر $n \leqslant t \leqslant n+۱$ تابع $G(t)=nt-\frac{۱}{۲}n(n+۱)$.

ت : برای مقادیر $۲n \leqslant t \leqslant ۲n+۱$ تابع $G(t)=t-۲n$ وبرای مقادیر $۲n+۱ \leqslant t \leqslant ۲n+۲$ تابع $G(t)=۲n+۲-t$.

ث : برای مقادیر $n \leqslant t \leqslant n+۱$ تابع $G(t)=\frac{۱}{۲}[n+(t-n)^{۲}]$.

ج : $e^{t-[t]}+(e-۱)[t]-۱$.

۲- الف : $x=ce^{-\frac{t}{۲}}+G(t)$ ، برای مقادیر $t \leqslant 0$ تابع $G=0$, $t \geqslant 0$ تابع $G=۱-e^{-\frac{t}{۲}}$.

ب : $x=ce^{-\frac{t}{۲}}+G(t)$ ، برای مقادیر $t \leqslant 0$ تابع $G=0$ وبرای مقادیر $0 \leqslant t \leqslant \pi$ تابع $G(t)=\frac{۱}{۵}(\sin t-۲\cos t+۲e^{-\frac{t}{۲}})$ و برای مقادیر $t \geqslant \pi$ تابع $G=\frac{۲}{۵}(e^{\frac{\pi}{۲}}+۱)e^{-\frac{t}{۲}}$.

پ : $x=ce^{-\frac{t}{۲}}+G(t)$ ، برای مقادیر $n \leqslant t \leqslant n+۱$ تابع :

$$G=n-\frac{e^{-\frac{t}{۲}}(e^{\frac{۱}{۲}}-e^{(n+۱)/۲})}{۱-e^{۱/۲}}$$

ت : $x=ce^{-\frac{t}{۲}}+G(t)$ ، برای مقادیر $n \leqslant t \leqslant n+۱$ تابع :

$$G=(-۱)^{n}-e^{(۱-t)/۲}[۲(-۱)^{n}e^{\frac{n}{۲}}+e^{-\frac{۱}{۲}}-۱]/(۱+e^{\frac{۱}{۲}})$$

ث : $x=ce^{-\frac{t}{۵}}+G(t)$ تابع :

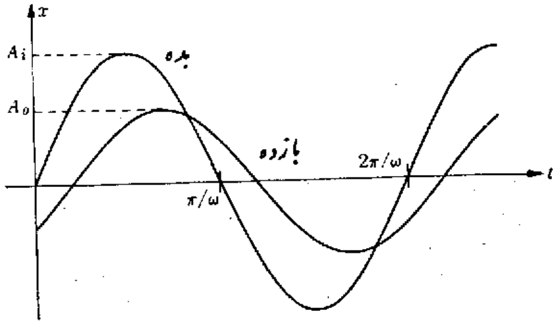
$$G=(-۱)^{n}-e^{(۱-t)/۵}[۲(-۱)^{n}e^{\frac{n}{۵}}+e^{-\frac{۱}{۵}}-۱]/(۱+e^{\frac{۱}{۵}})$$

۴- بازده‌های واقعی :

الف : برای مقادیر $t < 0$ تابع $x=0$ و برای مقادیر $0 \leq t \leq ۱$ تابع $x=\frac{۱}{۲}(e^{t}+e^{-t})-۱$ وبرای مقادیر $t > ۱$ تابع $x=\frac{۱}{۲}(e-۱)e^{-t}(۲te-۱-e)$.

ب : برای مقادیر $t < 0$ تابع $x=0$ و برای مقادیر $0 \leq t \leq \pi$ تابع

$x=\frac{١}{٢}(\sin t+\cos t-e^{-t})$ وبرای مقادیر $t\geqslant\pi$ تابع $x=-\frac{١}{٢}(e^{\pi}+١)e^{-t}$.



شکل ١٧ . ٤- جواب برای بده سینوسی

٩ . ٤ - بده‌های سینوسی

تجزیه و تحلیلی که درشماره (٧ . ٤) نمودیم نوع بازده‌یی راکه میتوان از بده‌های نوسانی انتظار داشت تا اندازه‌یی روشن‌میکند . همانطورکه خواهیم دید چنانچه حالت بده سینوسی :

$$F(t)=A_i\sin\omega t \qquad (\omega>o) \qquad (٤ . ٩)$$

را مورد بررسی قرار دهیم میتوانیم توصیف کاملتر و دقیقتری بدست آوریم . A_i را **دامنه*** **بده** و ω را **فرکانس بده** (رادیان برای واحد زمان) گوییم .

بازده برای معادله دیفرانسیل $aD_tx+x=F(t)$, $(a>o)$ از رابطه :

$$x=\frac{١}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int A_i\sin\omega t\,e^{\frac{t}{a}}dt+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٩١)$$

و پس‌از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$x=\frac{A_i}{١+a^٢\omega^٢}(\sin\omega t-a\omega\cos\omega t)+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٩٢)$$

---

* Amplitude

که میتوان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$x = A_\circ sin(\omega t - \alpha) + ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٩٣)$$

که در آن :

$$A_\circ = \frac{A_i}{\sqrt{١ + a^٢\omega^٢}} \quad , \quad tg\alpha = a\omega \quad , \quad o < \alpha < \frac{\pi}{٢} \qquad (٤ . ٩٤)$$

نوشت .

بازده را میتوان مجموع جمله « حالت پایا » :

$$x_١ = A_\circ sin(\omega t - \alpha) \qquad (٤ . ٩٥)$$

و جمله میرا پنداشت . $A_\circ$ را **دامنه بازده** و ω را **فرکانس بازده** گوییم . علامت منفی α در رابطه (٩٥ . ٤) اختلاف فازرا نمایش میدهد ، نوسان بازده : α رادیان ازنوسان بده اختلاف زمانی دارد . لذا $\alpha = \frac{\pi}{٢}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{٣}$ به ترتیب حاکی از اختلاف زمانی $\frac{١}{٤}$ و $\frac{١}{٦}$ یک نوسان است . درشکل (١٧ . ٤) این بده را با انتخاب تقریبی $\alpha = \frac{\pi}{٤}$ ترسیم کرده‌ایم .

از رابطه (٩٤ . ٤) نتیجه میشود که دامنه بازده کمتر از دامنه بده میباشد و نسبت $\frac{A_\circ}{A_i}$ که همواره کمتر از یک است **عامل تقویت کن** گوییم. مقدار عامل تقویت کن بستگی به ω فرکانس بده (a ثابت است) دارد وهرچه سرعت نوسانهای بده زیادتر باشد دامنه سریعتر تنزل میکند . همچنین همانطورکه در شکل (١٨ . ٤) نمایش داده شده است هنگامیکه $\omega \to +\infty$ کسر $\frac{A_\circ}{A_i} \to o$. در همان شکل (١٨ . ٤) اختلاف زمانی α و ω نیز نمایش داده شده است واز شکل کاملاً روشن است هنگامیکه ω از o تا $+\infty$ تغییر میکند α از o تا $+\frac{\pi}{٢}$ تغییر مینماید. از رابطه (٩٤ . ٤) نتیجه میگیریم که اگر ω را ثابت و a را متغیرفرض کنیم معادل آنست که a را ثابت و ω را متغیر به پنداریم و همچنین اگر a را در مقدار ثابت k ضرب کنیم تأثیرآن در $A_\circ$ همان خواهد بود که ω را در k ضرب کنیم.

اگر بده $F(t)$ را $A_i cos\omega t$ به پنداریم تابع بازده متناظر عبارت خواهد بود از :

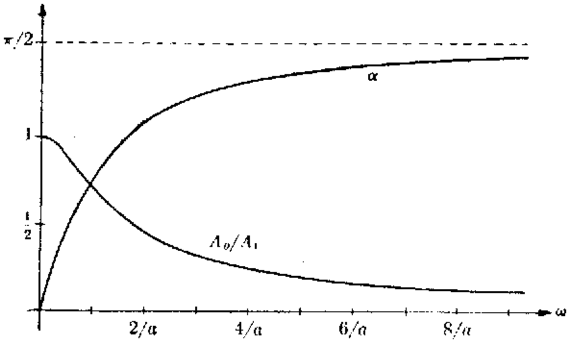
$$x=A_\circ \cos(\omega t-\alpha)+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٩٦)$$

$A_\circ$ و α بوسیله رابطه (٤ . ٩٤) تعیین میشود (به مسئله ۲ مراجعه شود) . باستفاده از اصل جمع شدن بازده‌ها نتیجه میگیریم که بازده متناظر با :

$$F(t)=c_۱\cos\omega t+c_۲\sin\omega t \qquad (٤ . ٩٧)$$

عبارت خواهد بود از :

$$x=\frac{۱}{\sqrt{۱+a^۲\omega^۲}}\left[c_۱\cos(\omega t-\alpha)+c_۲\sin(\omega t-\alpha)\right]+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٩٨)$$



شکل ١٨ . ٤- فاصله تقویت و فاز برای بده سینوسی

روابط (٤ . ٩٧) و (٤ . ٩٨) را میتوان بصورت ساده‌تر زیر نوشت :

$$F(t)=A_i\sin(\omega t+\beta) \quad , \quad A_i=\sqrt{c_۱^۲+c_۲^۲} \quad , \quad tg\beta=\frac{c_۱}{c_۲} \qquad (٤ . ٩٩)$$

$$x=A_\circ \sin(\omega t+\beta-\alpha)+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ٩٩٠)$$

(به مسئله ۳ مراجعه شود) $A_\circ$ و α دراینجانیزبا رابطه (٤ . ٩٤) تعیین میگردند . لذا بده دارای اختلاف فاز β ودامنه A_i است درصورتیکه بازده دارای اختلاف فاز $\beta-\alpha$ و دامنه $A_\circ$ میباشد . بده و بازده دارای همان فرکانس هستند .

۱۰ . ۴- سریهای فوریه *

اگر n عدد درست مثبت و a_n و b_n مقادیر ثابتی باشند عبارت :

$$a_n cos n\omega t + b_n sin n\omega t \qquad (\omega = \text{ثابت} > 0)$$

تابع نوسانی را بافراوانی $n\omega$ نمایش میدهد . دوره تناوب هرنوسان $\frac{۲\pi}{n\omega}$ است و لذا در فاصله زمانی $T=\frac{۲\pi}{\omega}$ تابع ، n نوسان تکمیل میکند . اگر ترکیب خطی چنین نوسان هایی را برای $n = ۱ , ۲ , \dots , N$ تشکیل دهیم چنین داریم :

$$\sum_{n=۱}^{N} (a_n cos n\omega t + b_n sin n\omega t) = F(t)$$

تابع $F(t)$ در هرفاصله زمانی $\tau=\frac{۲\pi}{\omega}$ خود را تکرار کرده یعنی بازاء جمیع مقادیر t چنین داریم :

$$F(t+\tau)=F(t) \qquad (٤ . ۱۰۰)$$

زیرا رابطه فوق برای هرجمله از مجموع بالا برقرار است . اگر برای تابع $F(t)$ رابطه بالا برقرار باشد گوییم $F(t)$ دارای دوره تناوب τ است . چنانچه N بینهایت باشد سری نامحدود :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} (a_n cos n\omega t + b_n sin n\omega t) \qquad (٤ . ۱۰۱)$$

بدست میاید . اگر این سری بازاء جمیع مقادیر t متقارب باشد مجموع آن یعنی $F(t)$ نیز در رابطه (٤ . ۱۰۱) صدق کرده و دارای دوره تناوب τ خواهد بود . میتوان ثابت نمود که هرتابع $F(t)$ که دارای دوره تناوب $\tau=\frac{۲\pi}{\omega}$ بوده ودربرخی ازشرایط پیوستگی صدق کند میتوان بصورت مجموع سری بالا و مقدار ثابتی نمایش داد . یعنی :

$$F(t)=\frac{a_0}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} (a_n cos n\omega t + b_n sin n\omega t) \qquad (٤ . ۱۰۲)$$

Fourier series *

(جمله ثابت $\frac{a_\circ}{۲}$ برای سهولت دریافتن فرمول کلی ضرایب انتخاب شده است) . چنانچه $F(t)$ بازاء جمیع مقادیر t دارای مشتق پیوسته $F'(t)$ باشد رابطه (۴ . ۱۰۲) برقرار خواهد بود .

اکنون فرض میکنیم تابع $F(t)$ را بتوان با رابطه (۴ . ۱۰۲) نمایش داد . دو طرف این رابطه را در $\cos n\omega t$ ضرب نموده و بین o تا τ انتگرال میگیریم . یعنی :

$$\int_\circ^\tau F(t)\cos m\omega t dt=\int_\circ^\tau \frac{a_\circ}{۲}\cos m\omega t dt \qquad (۴ . ۱۰۳)$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n\int_\circ^\tau \cos n\omega t\cos m\omega t dt+b_n\int_\circ^\tau \sin n\omega t\cos m\omega t dt]$$

اگر مثلاً $F(t)$ پیوسته باشد میتوان از جمل سری نامحدود بالا جمله به جمله انتگرال گرفت. برای $m=o , ۱ , ۲ , ...$ چنین داریم :

$$\int_\circ^\tau \cos n\omega t\cos m\omega t dt=\begin{cases} o & n\neq m \\ \frac{۱}{۲}\tau & n=m \end{cases} \qquad (۴ . ۱۰۴)$$

$$\int_\circ^\tau \sin n\omega t\cos m\omega t dt=o \qquad (۴ . ۱۰۵)$$

(به مسئله ۴ رجوع شود) . لذا رابطه (۴ . ۱۰۳) بصورت زیر در میآید :

$$\int_\circ^\tau F(t)\cos m\omega t dt=\frac{\tau}{۲}a_m \qquad m=o , ۱ , ۲ , ... \qquad (۴ . ۱۰۶)$$

بطریق مشابه خواهیم داشت :

$$\int_\circ^\tau F(t)\sin m\omega t dt=\frac{\tau}{۲}b_m \qquad m=۱ , ۲ , ... \qquad (۴ . ۱۰۷)$$

بنابراین **قانون ضرایب** عبارت خواهند بود از :

$$a_n=\frac{۲}{\tau}\int_{0}^{\tau}F(t)\cos n\omega t\,dt \quad , \quad b_n=\frac{۲}{\tau}\int_{0}^{\tau}F(t)\sin n\omega t\,dt \qquad (٤ . ١٠٨)$$

که در آن $\tau=\frac{۲\pi}{\omega}$. مقادیرثابت a_n و b_n که‌ازرابطه(٤ . ١٠٨) تعیین میگردند **ضرایب فوریه تابع** $F(t)$ **در فاصله** 0 تا τ **نامیده** وسریهای متناظر (٤ . ١٠٢) را **سریهای فوریه** $F(t)$ درهمان‌فاصله نامیم . اگر $F(t)$ فقط بین 0 و τ داده شده باشد و $F(t)$ پیوسته قطعه‌یی باشد دراینصورت سری $F(t)$ کاملاً معین است . اگر $F(t)$ تابع تناوبی بادوره تناوب τ و $F(t)$ تابع پیوسته قطعه‌یی باشد دراینصورت نیز میتوان ضرایب را بافرمولهای :

$$a_n=\frac{۲}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{۲}}^{\frac{\tau}{۲}}F(t)\cos n\omega t\,dt \quad , \quad b_n=\frac{۲}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{۲}}^{\frac{\tau}{۲}}F(t)\sin n\omega t\,dt \qquad (٤ . ١٠٩)$$

محاسبه کرد . درحقیقت انتگرالهای $F(t)\cos n\omega t$ و $F(t)\sin n\omega t$ درهرفاصله بطول τ دارای مقدار یکسان میباشد (به مسئله ٥ رجوع شود) .

مثال - فرض‌میکنیم $F(t)$ دارای دوره‌تناوب ۲π باشد وبرای‌مقادیر $0 < t < \pi$ تابع $F(t)=۱$ و برای مقادیر $-\pi < t < 0$ تابع $F(t)=-۱$. در نقاط جهش مقدارصفر که متوسط حدود راست‌وچپ میباشداست‌به $F(t)$ نسبت میدهیم (شکل ١٩ . ٤) تابع $F(t)$ موج مربع میباشد .

برای این تابع $\tau=۲\pi$ و $\omega=\frac{۲\pi}{\tau}=۱$. رابطه (٤ . ١٠٩) منجر به روابط زیر میشود :

$$a_n=-\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nt\,dt+\frac{۱}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nt\,dt=0$$

$$b_n=-\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nt\,dt+\frac{۱}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt=\begin{cases}0 & n=۲ , ٤ , \ldots\\ \frac{٤}{n\pi} & n=۱ , ۳ , ٥ , \ldots\end{cases}$$

لذا سری فوریه تابع $F(t)$ عبارت خواهد بود از :

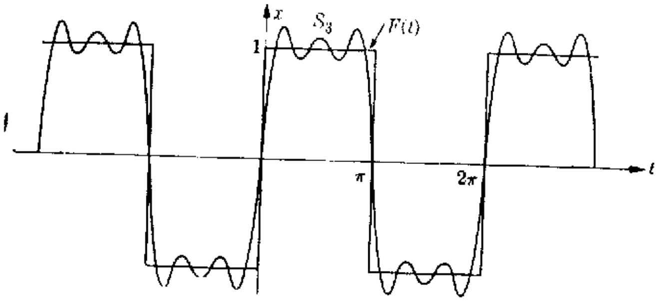
$$\frac{٤}{\pi}\sin t+\frac{٤}{٣\pi}\sin ٣t+\cdots=\frac{٤}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(٢n-١)t}{٢n-١}$$

میتوان نشان داد که این سری بازاء جمیع مقادیر t بسوی $F(t)$ متقارب است . درنقاط جهش هرجمله سری صفر بوده و لذا مجموع صفر خواهد بود که با تعریف ابتدایی $F(t)$ دراین نقاط مطابقت دارد . چنین شرطی کاملاً عادی است. درنقطه انفصال ازسری میتوان متوسط مقدار را بدست‌آورد . یعنی :

$$\frac{١}{٢}\left[\lim_{h\to o+}F(t+h)+\lim_{h\to o-}F(t+h)\right]$$

در نقطه t میتوان $F(t)$ را تقریباً بوسیله مجموع جزئی سری فوق بدست آورد. در شکل (۱۹ . ٤) چنین تقریبی نمایش داده شده است . یعنی مجموع جزئی :

$$S_٣=\frac{٤}{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin ٣t}{٣}+\frac{\sin ٥t}{٥}\right)$$



شکل ۱۹ . ٤- تقریب موج مربع با مجموع جزئی سری فوریه

۱۱ . ٤- بده نوسان عمومی

برای تعیین بازده معادله دیفرانسیل :

$$aD_t x+x=F(t)\qquad (a>o)\qquad (٤ . ١١)$$

هنگامیکه‌بده $F(t)$ تابع متناوب‌ودوره تناوب آن τ باشد ابتدا باید $F(t)$ را بوسیله سری فوریه متناظر آن بسط داد . یعنی :

$$F(t)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

و ازآنجا :

$$x=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int e^{\frac{t}{a}}\left[\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\right]dt+ce^{-\frac{t}{a}}$$

$$(۴ . ۱۱۱)$$

$$=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(a_n-an\omega b_n)\cos n\omega t+(b_n+an\omega a_n)\sin n\omega t}{۱+a^۲n^۲\omega^۲}+ce^{-\frac{t}{a}}$$

(اگر $F(t)$ پیوسته باشد از سری فوق میتوان جمله بجمله انتگرال گرفت) . لذا سری فوریه را که نمایش بازده تناوبی خواهد بود بدست میآوریم و ازآنجا بازده عمومی مجموع تابع تناوبی یا «**حالت پایا**» و تابع میرا میباشد .

رابطه بین بده وبازده را میتوان برحسب دامنه وفاز بطورواضح تر بیان کرد . برای این منظور مینویسیم :

$$F(t)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n^i\sin(n\omega t+\beta_n) \qquad (۴ . ۱۱۲)$$

دراینصورت مانند شماره (۴ . ۹) بازده حالت پایا عبارت از :

$$x=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}A_n^\circ\sin(n\omega t+\beta_n-\alpha_n) \qquad (۴ . ۱۱۳)$$

$$A_n^\circ=\frac{A_n^i}{\sqrt{۱+n^۲\omega^۲a^۲}} \quad , \quad tg\,\alpha_n=an\omega \qquad 0<\alpha_n<\frac{\pi}{۲}$$

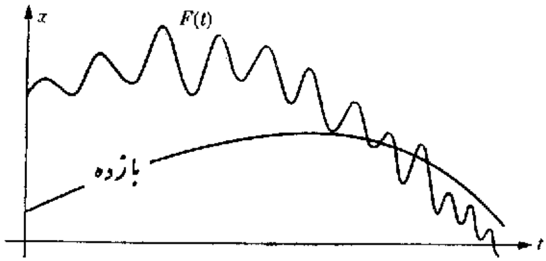
از رابطه (۴ . ۱۱۳) میتوان نتیجه مهم زیر را بدست آورد .

هنگامیکه n افزایش مییابد رادیکال مخرج کسر بالا نیز افزایش مییابد لذا از اهمیت جمل متوالی بده در بازده بطور قابل محسوسی کاسته خواهد گردید . اصولاً بازده بستگی به جمله ثابت ، نوسان اساسی $(n=۱)$ و چند « هارمونیکهای بالاتر » $(n=۲ , ۳ , \ldots)$ دارد. جمله ثابت ، متوسط مقادیر $F(t)$ است . یعنی :

$$\frac{a_0}{۲}=\frac{۱}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)dt$$

لذا بده و بازده درطول یک دوره تناوب دارای همان مقدار متوسط هستند .

همانطورکه ازشکل (۲۰ . ٤) برمیآید مقادیر بزرگ دامنه در هارمونیکهای بالاتر منجر به نامنظمی‌هایی در $F(t)$ خواهند شد ولی بهرصورت بازده از هارمونیکهای بالاتر صرفنظر کرده و لذا منحنی هموار خواهد بود. لذا دستگاهی که با معادله دیفرانسیل خطی $aD_t x+x=F(t)$ نمایش‌داده میشود میتوان مانند یک‌صاف‌کن پنداشت ، چه مقادیر ثابت یانوسانایی که‌وارد دستگاه میشوند وفرکانس‌آن کم میباشد تغییرجزئی میدهد ولی‌شدت نوساناتی که دارای فرکانس شدید هستند کاهش مییابد .



شکل ۲۰ . ٤- اثر هموارکردن برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

مثال - فرض‌میکنیم $F(t)$ موج مربع‌شکل (۱۹ . ٤) و $a=۱$ باشد . معادله دیفرانسیل مربوط عبارت خواهد بود از :

$$D_t x+x=\frac{٤}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)t}{۲n-۱}$$

دراینجا $\omega=۱$ و روابط (۱۱۱ . ٤) و (۱۱۳ . ٤) منجر به بازده زیر برای حالت پایا میگردد :

$$x=\frac{٤}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-(۲n-۱)\cos(۲n-۱)t+\sin(۲n-۱)t}{[۱+(۲n-۱)^۲](۲n-۱)}$$

$$=\frac{٤}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin[(۲n-۱)t-\alpha_n]}{(۲n-۱)\sqrt{۱+(۲n-۱)^۲}}\quad,\quad tg\alpha_n=۲n-۱$$

فرمول صریح برای بازده تناوبی - اگر بازده عمومی (۱۱ . ٤) را بصورت:

$$x=G(t)+ce^{-\frac{t}{a}}$$

$$G(t)=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int_{o}^{t}e^{\frac{u}{a}}F(u)du$$

بنویسیم معمولاً $G(t)$ تابع تناوبی را نمایش نخواهد داد . بهرصورت برای انتخاب مناسب c ، بازده باید با حالت پایای بازده که در بالا بدست آمده‌است تطبیق کند . برای یافتن c شرط زیر را برقرار میکنیم :

$$x(\tau)-x(o)=o$$

و لذا :

$$G(\tau)+ce^{-\frac{\tau}{a}}-G(o)-c=o$$

پس :

$$c=\frac{G(\tau)}{۱-e^{-\frac{\tau}{a}}}$$

زیرا $G(o)=o$. بنابراین جواب تناوب مورد نظر عبارت خواهد بود از :

$$x=G(t)+\frac{G(\tau)}{۱-e^{-\frac{\tau}{a}}}e^{-\frac{t}{a}}$$

(٤ . ۱۱٤)

$$G(t)=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int_{o}^{t}e^{\frac{u}{a}}F(u)du$$

فقط فرض کرده‌ایم که $x(o)=x(\tau)$ ولی میتوان نشان داد (به مسئله ۸ مراجعه‌شود) که رابطه (۱۱٤ . ٤) تابعی که بازاء جمیع مقادیر t متناوب است تعیین میکند .

مسائل

۱- برای هریک از معادلات زیر بازده تناوبی را یافته و آنرا با بده متناظر مقایسه کنید :

الف - $D_t x + x = ۳ \sin t + \sin ٥t$.

ب - $۱۰ D_t x + x = ۳ \sin t + \sin ٥t$.

پ - $D_t x + x = ۳ \sin t + \sin ٥t + ٦ \sin ۱۰۰ t$.

ت - $D_t x + x = \cos t + ۳ \sin t$.

ث - $D_t x + x = \sin^۳ t$.

۲- نشان دهید که رابطه (٤ . ٩٦) بازده عمومی معادله دیفرانسیل :

$$aD_t x + x = A_i \cos \omega t$$

میباشد .

۳- الف - نشان دهید که رابطه (٤ . ٩٧) را میتوان بصورت (٤ . ٩٩) نوشت . طریقه یافتن ربع β را توضیح دهید .

ب - نشان دهید که بازده عمومی معادله دیفرانسیل :

$$aD_t x + x = A_i \sin(\omega t + \beta)$$

با رابطه (٤ . ٩٩٠) تعیین میگردد .

٤- روابط (٤ . ۱۰٤) و (٤ . ۱۰٥) را اثبات کنید .

٥- نشان دهید اگر $f(t)$ دارای دوره تناوب τ و $f(t)$ پیوسته قطعه‌یی باشد برای هرمقدار c خواهیم داشت:

$$\int_c^{c+\tau} f(t)dt = \int_0^{\tau} f(t)dt$$

راهنمایی - انتگرالها را مانند مساحت تعبیر کنید .

٦- هریک از توابع زیر را برحسب سری فوریه بسط دهید . چند جمله اول مجموع جزئی را ترسیم و آنرا با تابع مقایسه کنید .

الف - برای مقادیر $0 \leqslant t \leqslant \pi$ تابع $F(t) = t$ و $\pi \leqslant t \leqslant ۲\pi$ تابع $F(t) = ۲\pi - t$ ، دوره تناوب ۲π .

ب - برای مقادیر $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ تابع $F(t) = t$ ، دوره تناوب ۲π .

پ - برای مقادیر $-۱ \leqslant t \leqslant ۱$ تابع $F(t) = t^۲$ ، دوره تناوب ۲ .

ت ـ برای مقادیر $0 \leqslant t \leqslant ۱$ تابع $F(t)=e^t$ ، دوره تناوب ۱ .

۷ـ چنانچه توابع (الف) و (ب) و(پ) و (ت) مسئله ۶ رابده‌بپنداریم، بازده‌های تناوبی متناظر معادله دیفرانسیل $D_t x+x=F(t)$ را بصورت سریهای فوریه بدست آورید.

۸ـ نشان دهید که اگر $F(t)$ پیوسته قطعه‌یی بوده ودارای دوره تناوب τ باشدرابطه (۱۱٤ . ٤) ، x را بصورت تابع تناوبی از t تعیین میکند .

راهنمایی ـ نشان دهید که :

$$x(t+\tau)-x(t)=\frac{۱}{a}\,e^{-(t+\tau)/a}\int_{\tau}^{t+\tau} e^{\frac{u}{a}}F(u)\,du$$

$$-\frac{۱}{a}\,e^{-\frac{t}{a}}\int_{0}^{t} e^{\frac{u}{a}}F(u)\,du$$

در انتگرال اول $v=u-\tau$ قرار دهید .

۹ـ جوابهای تناوبی مسئله ۷ قسمتهای (الف) و(ب) رابا رابطه (۱۱٤ . ٤) بدست آورید.

جوابها

۱ـ الف : $\left(\frac{۳}{\sqrt{۲}}\right)\sin(t-\mathrm{arc}tg\,۱)+\left(\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}\right)\sin(۵t-\mathrm{arc}tg\,۵)$.

ب : $\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰۱}}\right)\sin(t-\mathrm{arc}tg\,۱۰)$

$+\left(\frac{۱}{\sqrt{۲۵۰۱}}\right)\sin(۵t-\mathrm{arc}tg\,۵۰)$.

پ : $\left(\frac{۳}{\sqrt{۲}}\right)\sin(t-\mathrm{arc}tg\,۱)+\left(\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}\right)\sin(۵t-\mathrm{arc}tg\,۵)$

$+\left(\frac{۵}{\sqrt{۱۰۰۰۱}}\right)\sin(۱۰۰t-\mathrm{arc}tg\,۱۰۰)$.

ت : $\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)\cos(t-\mathrm{arc}tg\,۱)+\left(\frac{۳}{\sqrt{۲}}\right)\sin(t-\mathrm{arc}tg\,۱)$.

ث : $\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\right)\sin(t-\operatorname{arctg}۱)-\left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۴۰}\right)\sin(۲t-\operatorname{arctg}۳)$.

۶ـ الف : $\frac{\pi}{۲}+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n-۱}{n^۲}\cos nt$.

ب : $-۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\sin nt}{n}$.

پ : $\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\cos n\pi t}{n^۲}$.

ت : $e-۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(e-۱)\cos ۲n\pi t-۲\pi(e-۱)n\sin ۲n\pi t}{۱+۴\pi^۲n^۲}$.

۷ـ الف : $\frac{\pi}{۲}+\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n-۱}{n^۲(۱+n^۲)}(\cos nt+n\sin nt)$.

ب : $-۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n\sin(nt-\operatorname{arctg}n)}{n\sqrt{۱+n^۲}}$.

پ : $\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲\sqrt{۱+\pi^۲n^۲}}\cos(n\pi t-\operatorname{arctg}n\pi)$.

ت : $(e-۱)+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۴\pi^۲e^۲n^۲+(e-۱)^۲]^{\frac{۱}{۲}}}{(۱+۴\pi^۲n^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\sin(۲\pi nt+\beta_n-\alpha_n)$.

$\operatorname{tg}\beta_n=-۲(e-۱)/(۴\pi en)$, $\frac{۱}{۲}\pi<\beta_n<\pi$, $\operatorname{tg}\alpha_n=۲\pi n$,

$0<\alpha_n<\frac{۱}{۲}\pi$

۹ـ الف : برای مقادیر $0\leqslant t\leqslant\pi$ تابع :

$$x=t-۱+۲e^{-t}/(۱+e^{-\pi})$$

برای مقادیر $\pi\leqslant t\leqslant ۲\pi$ تابع :

$$x=۲\pi-t+۱-۲e^{\pi-t}/(۱+e^{-\pi})$$

ب :   برای مقادیر $o \leqslant t \leqslant ۱$ تابع :

$$x=\frac{۱}{۲}\left[e^{t}+e^{۱-t}\right]$$

۱۲ . ٤- تعبیرذهنی بازده

بازده عمومی معادله دیفرانسیل :

$$aD_t x+x=F(t) \qquad (٤ . ۱۲)$$

که در آن a مقدار مثبت ثابتی است میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int_{t_0}^{t}F(u)e^{\frac{u}{a}}du+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ۱۲۱)$$

نوشت. تنهااختلاف رابطه بالا با رابطه (۱٥ . ٤) در آن است که جمله اول جواب خاص را بقسمی میدهد که برای $t=t_0$ مقدار $x=o$ میباشد . حتی ممکن است t_0 را بسوی $-\infty$ میل دهیم و لذا خواهیم داشت :

$$x=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int_{-\infty}^{t}F(u)e^{\frac{u}{a}}du+ce^{-\frac{t}{a}} \qquad (٤ . ۱۲۲)$$

انتگرال در فاصله $(-\infty , t)$ را میتوان به مجموع دوانتگرال در فواصل $(-\infty , o)$ و (o , t) تجزیه نموده . نشان میدهند که انتگرال نامعین :

$$\int_{-\infty}^{o}F(u)e^{\frac{u}{a}}du \qquad (٤ . ۱۲۳)$$

موجود میباشد ودر واقع مقدار ثابتی است . لذا رابطه (۱۲۲ . ٤) بصورت زیر درمیآید :

$$x=\frac{۱}{a}e^{-\frac{t}{a}}\left(c_1+\int_{o}^{t}F(u)e^{\frac{u}{a}}du\right)+ce^{-\frac{t}{a}}$$

c_1 مقداری است ثابت . کاملاً آشکار است که رابطه بالا با رابطه (۱۲۱ . ٤) هم‌ارز میباشد ($t_\circ = o$) .

برای آنکه موجود بودن انتگرال (۱۲۳ . ٤) را تضمین نماییم باید برای مقادیر نسبتاً بزرگ منفی t تابع F(t) بطور قابل ملاحظه‌ یی کوچک باشد .

در اکثر موارد عملی تابع F(t) را میتوان برای مقادیر بزرگ منفی t و یا آنکه اغلب برای جمیع مقادیر منفی t برابر صفر فرض کرد و بالنتیجه رابطه (۱۲۳ . ٤) دارای معنی میباشد .

بازده خاصی که بوسیله جمله اول طرف راست رابطه (۱۲۲ . ٤) مشخص میگردد میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x=\frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int_{-\infty}^{t}F(u)e^{\frac{u}{a}}du=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{t}F(u)e^{\frac{(u-t)}{a}}du$$

اگر در رابطه بالا تبدیل متغیر $v=t-u$ را انجام دهیم خواهیم داشت :

$$x=\int_{\circ}^{\infty}F(t-v)\left(\frac{1}{a}e^{-\frac{v}{a}}\right)dv \qquad (٤ . ۱۲٤)$$

رابطه (۱۲٤ . ٤) را میتوان بصورت متوسط وزنی ازگذشته F(t) پنداشت . به مقدار F در v زمان قبل [مقدار F(t—v)] وزن $\frac{e^{-\frac{v}{a}}}{a}$ را نسبت داده‌ایم . مجموع وزن عبارت است از :

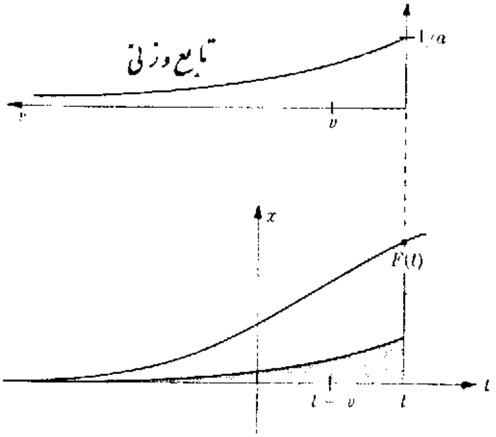
$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{a}e^{-\frac{v}{a}}dv=1 \qquad (٤ . ۱۲۵)$$

بنابراین مقدار بازده را میتوان از نقطه نظر نموداری همانطورکه درشکل (۲۱ . ٤) نشان داده شده است محاسبه نمود. در شکل (۲۱ . ٤) نمودار تابع وزنی $\frac{1}{a}e^{-\frac{v}{a}}$ را وارونه نموده وآنرا بالای نمودار F(t) قرارداده‌ایم . البته مبدأ را بالای مقادیر t فرض کرده‌ایم .

اگر مقدار F در لحظه $t-v$ را در تابع وزنی $\frac{e^{-\frac{v}{a}}}{a}$ ضرب کنیم منحنی جدیدی بدست

میاید که سطح واقع در زیر این منحنی از $-\infty$ تا t مقدار x میباشد .

واضح است که به مقادیر اخیر F(t) وزن بیشتری نسبت داده میشود . بنابراین (باستثنای دوره کوتاهی) مقادیر بده در لحظات کوچک تأثیر بسزایی در مقدار بازده خواهد داشت . بهرصورت از آنجایی که مقادیر F درگذشته نیز وزنی دریافت میکنند ، میتوانیم بگوییم که بازده این وزنهارا که اخیراً دریافت کرده است «بخاطر داشته» و دوباره یک‌نوع



شکل ۲۱ . ٤- بازده مانند متوسط وزنی بده گذشته

متوسطی بین گذشته و حال ایجاد میکند. لذا بازده ، مقادیرگذشته بده را بخاطر داشته و هرچه بخواهد سعی کند مقادیر گذشته دورتری را بخاطرآورد این حافظه ضعیفتر گردیده وحتی بسوی صفر نیز میل مینماید. مقادیرF درفاصله زمانی بسیار دور «فراموش شده» هستند. شکل منحنی تابع وزنی بستگی به مقدار a ، ثابت زمانی دارد وهرچه a بزرگتر باشد خاطره بهتر است . برای مقادیر بسیارکوچک a هنگامیکه v افزایش مییابد منحنی بسوی صفر میل میکند و لذا خاطره بسیار ضعیف است .

۱۳ . ٤- اثر a منفی و a متغیر

در اکثر قسمتهای‌قبل فرض نمودیم که ضریب a مقدار ثابت و مثبت باشد. اگر a عدد منفی باشد درنتایج باید بجای افزایش زمان t نقصان زمان t را قرار دارد. درصورتی میتوان ازجمله میرای $ce^{-\frac{t}{a}}$ صرفنظرکرد که t نزول کند . اگر زمان افزایش یابد واضح است هنگامیکه t بسوی باضافه بینهایت میل میکنداین جمله $(cc^{-\frac{t}{a}})$ بزرگ شده

و بسوی ∞ ± میل خواهد نمود . این بازده ارزش علمی چندانی ندارد زیرا **ناپایدار** بوده و با مختصرتغییری درشرایط اولیه جمله جدید $ce^{-\frac{t}{a}}$ ایجاد میشود . این جمله هنگامیکه t افزایش مییابد شکل ظاهری بازده را تغییر میدهد زیرا مقدار $e^{-\frac{t}{a}}$ بازیاد شدن t افزایش مییابد .

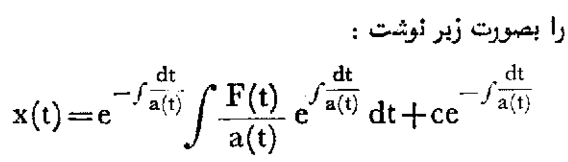
قوانین مربوط برشد جوامع (بشر - حیوان - باکتری) با تقریب اول درمعادله‌هایی بشکل $aD_tx+x=F(t)$ صدق میکند (بشماره ۲۴ . ۳ رجوع شود) . دراین معادله مقدار a منفی میباشد . بنابراین رشدهای‌اخیردارای صفت ناپایدارکه دربالا توضیح دادیم میباشند (شاید این دلیل برتوصیف مشکل بودن زندگی در زمین باشد) . عملیات مشابه دیگری ازقبیل‌رشد پول با مرابحه مرکب ، برخی‌ازفعل‌وانفعالهای شیمیایی (مثلاً انفجار) طوفان در دریا یا اتمسفر ، نشر بیماریهای مسری و نشر شایعه ، مثالهایی هستند که بده در مقدار بازده تأثیر بسزایی نمینماید .

اگر ضریب a بازمان t تغییرکند میتوان بنابر شماره (۷ . ۲) جواب عمومی معادله خطی (۱ . ٤) را بصورت زیر نوشت :

$$x(t)=e^{-\int\frac{dt}{a(t)}}\int\frac{F(t)}{a(t)}\,e^{\int\frac{dt}{a(t)}}\,dt+ce^{-\int\frac{dt}{a(t)}} \qquad (٤ . ۱۳)$$

بدون آنکهبجزییات رابطه بالا توجه کنیم میتوان هریک‌ازجوابها را بطورکیفی مورد بررسی قرار داد . اگر a(t) مثبت باشد دراینصورت بازده x(t) سعی مینماید که از بده F(t) پیروی کند. اگر a بزرگ و مثبت باشد این‌تعقیب بکندی صورت‌میگیرد ولی اگر a مثبت وکوچک باشد تعقیب بسرعت انجام میشود .

اگر a مقادیر مثبت و منفی را اختیارکند دچار اشکال خواهیم شد زیرا وجود a(t) در مخرج عبارت (۱۳ . ٤) منجر به انتگرالها نامعین میشود و لذا نمیتوان قضیه وجود را



شکل ۲۲ . ٤- اثر جایگزینی t با t—b

که در شماره (۹ . ۱) بدان اشاره نمودیم دراین حالت بکاربرد . اگر a منفی باشد جوابها ناپایدارهستند (بمسائل ۸ و ۱۰ رجوع شود) تفاوت اساسی بین حالتی که a متغیر یامقدار ثابت‌باشد درآن‌است که‌اگر a **مقدارثابت‌و** $f(t)$ **یکی ازجوابهای معادله دیفرانسیل** $aD_t x+x=F(t)$ **باشد برای هرمقدار ثابت** b **تابع** $x=f(t-b)$ **یکی از جوابهای معادله** $aD_t x+x=F(t-b)$ **خواهد بود** . زیرا چون $f(t)$ جواب معادله دیفرانسیل $aD_t x+x=F(t)$ است لذا چنین دازیم :

$$aD_t f(t)+f(t)=F(t)$$

اگر دراین معادله بجای t مقدار $t--b$ را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$aD_t f(t-b)+f(t-b)=F(t-b)$$

همانطورکه درشکل (۲۲ . ٤) نشان‌داده شده است اثر تعویض t با $t-b$ آن است که منحنی $f(t)$ را b واحد منتقل نماید.

نتیجه بالا را میتوان بطریق زیر تعبیر نمود .

اگربده دارای تأخیرزمانی b باشد بازده نیز دارای تأخیر زمانی b خواهد بود وبدین دلیل مکانیسم را **ساکن** گوییم . بعبارت دیگر عمل مکانیسم برای هربده‌یی درهرلحظه یکسان میباشد ولی اگر a متغیر باشد عمل مکانیسم با زمان تغییر میکند .

۱٤ . ٤- انتگرال گیری گام بگام

روشهای نموداری متفاوتی راکه برای حالتی که a ثابت است بیان داشتیم (اشکال ۱۲ . ٤ و ۲۱ . ٤) میتوان درموردی که a متغیرباشد بکاربریم (به مسئله ٦ رجوع شود) . مثلاً بنابرشماره(۸ . ٤)میتوان‌بجای $F(t)$ و $a(t)$ توابع پله‌یی که بطور تقریب‌برابراین توابع هستند قرارداد . اگر a متغیر و مثبت باشد روش شکل (۱۲ . ٤) برای فواصل مختلف t احتیاج به منحنی‌های نمایی متفاوتی خواهد داشت . این روش تا اندازه‌یی شبیه بروش انتگرال گیری گام بگام که درشماره (٦ . ۱) بآن اشاره نمودیم میباشد . دراینحالت فرمول تقریبی که بکار میبریم عبارت است از :

$$\Delta x=\frac{x-F(t)}{a(t)}\,\Delta t$$

اگر $F(t)$ تابع مشکلی باشد و یا مقدارآن بصورت جدول یا نمودارآن داده شده باشد میتوان از روش عددی یا نموداری فوق استفاده کرد .

روش دیگر برای محاسبه عددی جوابها موجود میباشد وآن عبارت است ازاینکه بجای انتگرالهای نامعین در رابطه (۱۳ . ٤) انتگرالهای معین از t_0 تا t قرار داده و انتگرالها را برای هرمقدار t بوسیله روش ذوزنقه یا سمپسون محاسبه کنیم .

مسائل

۱- برای هریک از مسائل زیر جواب $x(t)$ راکه درشرایط اولیه $x=0$ و $t=0$ صدق میکند بیابید . بده و بازده را با یکدیگر مقایسه کرده وتعیین کنید تا چه اندازه بازده مقدار بده را بخاطر دارد .

الف - $D_t x+x=F(t)$ که در آن برای مقادیر $t<0$ مقدار $F(t)=0$ و برای $0\leqslant t\leqslant ۱$ مقدار $F(t)=t-t^{۲}$ و برای $t>۱$ مقدار $F(t)=0$.

ب - $۵D_t x+x=F(t)$ که در آن $F(t)$ مانند قسمت (الف) میباشد .

پ - $D_t x+x=F(t)$ که در آن برای مقادیر $t<0$ مقدار $F(t)=0$ و برای $0<t\leqslant \pi$ مقدار $F(t)=۱۰\sin t$ و برای $t>\pi$ مقدار $F(t)=\sin t$ است.

۲- نمودار تابع وزنی $\dfrac{e^{-\frac{v}{a}}}{a}$ $(v\geqslant 0)$ را برای مقادیر a = ۰ر۱ و $a=۱$ و $a=۱۰$ رسم کنیم .

۳- برای هریک از معادلات زیر نمودار بازده را مانند شکل (۲۱ . ٤) بیابید .

الف - $D_t x+x=F(t)$ که درآن برای مقادیر $t<0$ مقدار $F(t)=0$ و برای $0\leqslant t<۲$ مقدار $F(t)=۱$ و برای $t\geqslant ۲$ مقدار $F(t)=0$ است .

ب - $D_t x+x=F(t)$ که در آن برای مقادیر $t<0$ مقدار $F(t)=0$ و برای $t\geqslant 0$ مقدار $F(t)=t$ است .

٤- با درنظر گرفتن شرایط اولیه درهریک از مسائل زیر بازده را با بده مقایسه کنید.

الف - $-۲D_t x+x=۱-t\ ;\ x=0\ ,\ t=0$.

ب - $-۲D_t x+x=\sin t\ ;\ x=۱\ ,\ t=0$.

پ - $(۱+t)D_t x+x=۱-t\ ;\ x=0\ ,\ t=0$.

ت - $(۱+t)D_t x+x=\sin t\ ;\ x=0\ ,\ t=0$.

ث ـ $(۱-t^۲)D_t x+x=۱-t^۲$ ؛ $x=۱$, $t=0$.

۵ـ باانتگرال گیری گام بگام وانتخاب $\Delta t=$ ۰ر۱ جواب هریک از معادلات زیررا یافته و سپس آنرا با جواب واقعی مسئله مقایسه کنید :

الف ـ $۵D_t x+x=۱-t$ ؛ $t=0$, $x=۳$.

ب ـ $۲D_t x+x=\sin t$ ؛ $t=0$, $x=۱$.

پ ـ $(۱+t)D_t x+x=t^۲$ ؛ $t=0$, $x=0$.

ت ـ $D_t x-x=۱$ ؛ $t=0$, $x=0$.

۶ـ نشان‌دهید رابطه (۴ . ۱۲۴) را میتوان برای معادله‌خطی با ضریب متغیر تعمیم داد یعنی معادله خطی $a(t)D_t x+x=F(t)$ دارای بازده‌یی بشکل :

$$x=\int_0^\infty F(t-v)H_t(v)dv$$

میباشد . تابع وزنی $H_t(v)$ بستگی به t نیز دارد .

۷ـ نشان دهید اگر $a(t)$ پیوسته و در فاصله $(0 , t)$ مخالف صفر باشد تبدیل متغیر $v=\int_0^t \frac{du}{a(u)}$ درمعادله $a(t)D_t x+x=F(t)$ آنرا مبدل به معادله با ضرایب ثابت میکند . متغیر v را میتوان مانند واحد خاصی برروی محور t ها تعبیر نمود .

۸ـ ثابت کنید جواب ترازمندی $x\equiv 0$ برای هریک از معادله های‌زیر ناپایدار است حتی اگر $a(t)>0$ باشد .

الف ـ $(۱+t^۲)D_t x+x=0$.

ب ـ $e^t D_t x+x=0$.

۹ـ نشان دهید اگر بازاء جمیع مقادیر t تابع $a(t)$ پیوسته و بزرگتر از صفر باشد جواب ترازمندی $x\equiv 0$ که در معادله $a(t)D_t x+x\equiv 0$ صدق میکند درصورتی پایدار است که $\int_0^\infty \frac{dt}{a(t)}=\infty$. این نتیجه را با مسئله ۷ مقایسه کنید .

۱۰ـ در هریک از مسائل زیر ثابت کنید اگر چه برای جمیع مقادیر t تابع a(t) منفی میباشد ولی جواب هریک از معادلات برای جمیع مقادیر t دارای کران میباشد وبنابراین جواب ترازمندی یک نوع پایایی دارا میباشد :

الف ـ $-(۱+t^{۲})D_t x + x = 0$.

ب ـ $-\cosh t D_t x + x = 0$.

جوابها

الف : $t > ۱ \; , \; x = ۰ر۲۸۲e^{-t} \; ; \; 0 \le t \le ۱$,

$x = ۳e^{-t} - t^{۲} + ۳t - ۳ \; ; \; t < 0 \; , \; x = 0$.

ب : $t > ۱ \; , \; x = ۰ر۰۳۷e^{-\frac{t}{۵}} \; ; \; 0 \le t \le ۱$,

$x = ۵۵e^{-\frac{t}{۵}} - t^{۲} + ۱۱t - ۵۵ \; ; \; t < 0 \; , \; x = 0$.

پ : $t > \pi \; , \; x = \frac{۱}{۲}(\sin t - \cos t) + ۱۰۹e^{-t} \; ; \; 0 \le t \le \pi$,

$x = ۵e^{-t} + ۵(\sin t - \cos t) \; ; \; t < 0 \; , \; x = 0$.

٤ـ بازده‌ها :

الف : $e^{\frac{t}{۲}} - t - ۱$.   ب : $۰ر۲(\sin t + ۲\cos t + ۳e^{\frac{t}{۲}})$.

پ : $\frac{۲t - t^{۲}}{۲ + ۲t} \; , \; t > -۱$.   ت : $\frac{۱ - \cos t}{۱ + t} \; , \; t > -۱$.

ث : $(\arcsin t + ۲)\sqrt{\frac{۱-t}{۱+t}} + x = t - ۱ \; , \; -۱ < t \le ۱$,

$x = t + ۱ + \sqrt{\frac{t-۱}{t+۱}}\,[Log(t + \sqrt{t^{۲} - ۱}) + c] \; , \; t \ge ۱$. c مقداری است غیر مشخص .

٥- مقادیر محاسبه شده‌جواب بازاء ٠ر٥ = t به‌ترتیب برابر :

الف : ١ر٨٨٤٣ .　　ب : ٠ر٨٢٠٦ .

پ : ٠ر٠٢٧٢ .　　ت : ٠ر٦١٠٥ .

مقادیر واقعی :

الف : ١ر٨٨٠٧ .　　ب : ٠ر٨٣٥٢ .

پ : ٠ر٠٢٧٨ .　　ت : ٠ر٦٤٨٧ .

٦- $H(t\,,\,v)=b(t-v)\exp\int_{t}^{t-v} b(u)du$ که درآن $b(t)=\frac{1}{a(t)}$.

فصل پنجم

معادلات دیفرانسیل مرتبه و درجه بزرگتر از یک

۱ . ۵- مقدمه

معادلات کلرو و لاگرانژ که آنها را در فصل دوم بررسی نمودیم معادلات دیفرانسیلی میباشند که مرتبه آنها اول و درجه آنها معمولاً بالاتر از یک میباشد .

دراین فصل میخواهیم آن دسته از معادلاتی که میتوان آنها را با تبدیل متغیرهای مناسبی به معادلات مرتبه پایین‌تر تبدیل نمود مورد بررسی قرار دهیم .

۲ . ۵- معادلات مرتبه اول و درجه n ام

صورت کلی این نوع معادلات چنین است :

$$\psi(x , y , p)=p^n+A_۱(x , y)p^{n-۱}+A_۲(x , y)p^{n-۲}+\cdots \qquad (٥ . ۲)$$
$$+A_{n-۱}(x , y)p+A_n(x , y)=0$$

که درآن : $p=\dfrac{dy}{dx}$ و $A_i(x , y)$, $(i=۱ , ۲ , ... , n)$

توابع گویایی از دو متغیر x و y میباشند .

دربعضی از موارد ممکن است معادله بالا را بیکی از طرق مشروحه زیر حل کرد .

تبصره - دربعضی موارد ممکن است معادلات مرتبه و درجه n ام غیر جبری باشند . مثلاً معادله دیفرانسیل $e^{y''}-y'^۲+xy'=0$ غیر جبری است . اگر چه دراین مثال میتوان معادله رانسبت به y'' حل کرده وآنرا تبدیل به معادله درجه اول $y''=Log(y'^۲-xy')$ نمود ولی درحالت کلی معادلات دیفرانسیل غیر جبری را نمیتوان نسبت به بزرگترین مرتبه مشتق حل نمود و حتی ممکن است دارای بینهایت جواب باشد .

۲۱ . ۵ - معادلاتی که شامل x یا y نیستند

معادله (۲ . ٥) را برحسب آنکه در آن x یا y موجود نباشد میتوان بیکی از دو صورت زیر نوشت :

$$F(x , p)=0 \quad , \quad \varphi(y , p)=0 \qquad (۵ . ۲۱)$$

اگربتوان هریک‌ازمعادلات فوق را نسبت به p حل نمود به‌ترتیب زیرمیتوان جواب‌عمومی هرکدام ازمعادلات دیفرانسیل بالا را بدست آورد :

$$p=f(x) \qquad , \quad p=g(y)$$

و یا :

$$y=\int f(x)dx+c \quad , \quad x=\int\frac{dy}{g(y)}+c$$

از طرف دیگر اگر هریک از معادلات (۵ . ۲۱) طوری باشند که بتوان آنها را نسبت به x یا y حل نمود دراینصورت جواب‌عمومی معادلات (۵ . ۲۱) را میتوان بطریق زیربدست آورد :

$$x=u(p) \qquad , \qquad y=v(p) \qquad (۵ . ۲۱۱)$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{u'(p)dp}{dy} \qquad , \qquad \frac{dy}{dx}=p=\frac{v'(p)dp}{dx}$$

$$dy=pdx=pu'(p)dp \qquad , \qquad dx=\frac{dy}{p}=\frac{v'(p)dp}{p}$$

و ازآنجا :

$$y=\int pu'(p)dp+c_1 \qquad , \qquad (۵ . ۲۱۲)$$

$$x=\int\frac{v'(p)dp}{p}+c_1$$

با استفاده از رابطه $\frac{dy}{dx}=p$ و انتگرال گیری جزء بجزء رابطه (۵ . ۲۱۲) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$y=\int pdx+c_2 \qquad , \qquad x=\int\frac{dy}{p}+c_2$$

$$=px-\int xdp+c_2 \qquad , \qquad =\frac{y}{p}+\int\frac{ydp}{p^2}+c_2$$

$$=px-\int u(p)dp+c_2 \qquad , \qquad =\frac{y}{p}+\int\frac{v(p)dp}{p^2}+c_2$$

بهر صورت با توجه بروابط (۲۱۱ . ۵)و(۲۱۲ . ۵) جواب پارامتری معادلات (۲۱ . ۵) عبارت خواهند بود از :

$$x=u(p) \quad , \quad x=\int\frac{v'(p)dp}{p}+c_1$$

$$y=\int pu'(p)dp+c_1 \quad , \quad y=v(p)$$

در مواردی که بتوان p را بین دو معادله بالا حذف کرد معادلات ضمنی جواب عمومی بدست میآید .

اگر هریک از معادلات (۲۱ . ۵) را بتوان بصورت پارامتری نوشت بسهولت میتوان جواب عمومی را بشکل پارامتری بدست آورد . زیرا اگر مثلاً معادله $F(x , p)=0$ را بتوان بصورت پارامتری $x=h(t)$, $p=k(t)$ بنویسیم به‌ترتیب چنین عمل میکنیم :

$$\frac{dh}{dt}=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{۱}{p}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$dy=ph'(t)dt=k(t)h'(t)dt$$

و بالنتیجه معادلات :

$$x=h(t) \quad , \quad y=\int k(t)h'(t)dt+c_1$$

معادلات پارامتری جواب عمومی معادله دیفرانسیل $F(x , p)=0$ خواهد بود .

بطریق مشابه اگر بتوان معادله $\varphi(y , p)=0$ را بصورت پارامتری :

$$y=\omega(t) \quad , \quad p=\omega_1(t)$$

نوشت معادلات پارامتری جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از :

$$y=\omega(t) \quad , \quad x=\int\frac{\omega'(t)}{\omega_1(t)}\,dt+c_1$$

مثال ۱ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$٤x(x-۱)(x-۲)p^۲-(۳x^۲-٦x+۲)^۲=0$$

حل - اگر معادله بالا رانسبت به p حل کرده وازآن انتگرال بگیریم چنین داریم :

$$y-c=\pm\int\frac{۳x^{۲}-٦x+۲}{۲\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}}dx=\pm\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}$$

و از آنجا جواب عمومی عبارت خواهد بود از $(y-c)^{۲}=x(x-۱)(x-۲)$.

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$x^{۲}=p^{۲}(a^{۲}-x^{۲})$$

a مقداری است ثابت .

حل - اگر معادله بالا را نسبت به x حل نموده و سپس از رابطه $dy=pdx$ انتگرال بگیریم به ترتیب خواهیم داشت :

$$x=\frac{ap}{\sqrt{۱+p^{۲}}} \quad , \quad dx=\frac{adp}{(۱+p^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$y=\int pdx+c_{۲}=a\int\frac{pdp}{(۱+p^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=-\frac{a}{\sqrt{۱+p^{۲}}}$$

و از آنجا جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از $x^{۲}+(y-c)^{۲}=a^{۲}$.

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y=p^{۲}+p^{۳}$$

حل - چنانچه از رابطه $dx=\frac{dy}{p}$ جزء بجزء انتگرال بگیریم به ترتیب چنین داریم:

$$x+\frac{c}{۲}=\frac{y}{p}+\int\frac{ydp}{p^{۲}}=p+p^{۲}+\int(۱+p)dp=۲p+\frac{۳p^{۲}}{۲}$$

و بالنتیجه معادلات پاراسترى جواب عمومی :

$$x=\frac{۱}{۲}(۳p^{۲}+٤p-c) \quad , \quad y=p^{۲}+p^{۳}$$

خواهد بود .

مثال ٤- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$(p-x)^{۳}+p(p-x)=۱$$

حل - باکمی دقت معلوم میگردد که دراین معادله میتوان معادلات پارامتری p و x را یافت و برای این منظور $p-x=t$ قرار داده و به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$t^{۳}+pt=۱$$

$$p=\frac{۱-t^{۳}}{t} \quad , \quad x=\frac{۱-t^{۲}-t^{۳}}{t}$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{۱}{t^{۲}}-۱-۲t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=-\frac{۱+t^{۲}+۲t^{۳}}{t^{۲}}$$

و ازآنجا :

$$\frac{۱}{p}\cdot\frac{dy}{dt}=-\frac{۱+t^{۲}+۲t^{۳}}{t^{۲}}$$

و یا :

$$dy=-\frac{۱+t^{۲}+۲t^{۳}}{t^{۲}}\cdot\frac{۱-t^{۳}}{t}=\frac{۲t^{۶}+t^{۵}-t^{۳}-t^{۲}-۱}{t^{۳}}$$

سرانجام :

$$y=c+\frac{۱}{۲}t^{۴}+\frac{۱}{۳}t^{۳}-t-Log|t|+\frac{۱}{۲}t^{-۲}$$

و بالنتیجه معادلات پارامتری خمهای انتگرال عبارت خواهند بود از :

$$x=t^{-۱}-t-t^{۲} \ , \ y=c-Log|t|-t+\frac{۱}{۲}t^{-۲}+\frac{۱}{۳}t^{۳}+\frac{۱}{۲}t^{۴}$$

مثال ۵- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$p^{۳}-p^{۲}+y^{۲}=0$$

حل - اگر معادله بالارانسبت به y حل کنیم چنین داریم :

$$y^{۲}=p^{۲}(۱-p)$$

اگر $۱-p=t^{۲}$ قرار دهیم عبارت سمت راست رابطه بالا مربع کامل گردیده و ازآنجا مقادیر p و y برحسب پارامتر t عبارت خواهند بود از :

$$y=t-t^{۳} \quad , \quad p=۱-t^{۲}$$

و ازآنجا :
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=p\,\frac{dx}{dt}=۱-۳t^{۲}$$

$$x=c+\int\frac{۱-۳t^{۲}}{۱-t^{۲}}\,dt=c+۳t+Log\,\frac{t-۱}{t+۱}$$

بالنتیجه معادلات پارامتری خمهای انتگرال عبارت خواهند بود از :

$$x=c+۳t+Log\,\frac{t-۱}{t+۱}\quad,\quad y=t-t^{۳}$$

۲۲ . ۵- معادلاتی که نسبت به P قابل حل هستند

دراینحالت اگر طرف چپ رابطه (۲ . ۵) مانند کثیرالجمله یی برحسب p فرض شود میتوان آنرا به n فاکتور خطی تجزیه کرد . یعنی میتوان رابطه (۲ . ۵) را بشکل :

$$(p-F_{۱})(p-F_{۲})\ \dots\ (p-F_{n-۱})(p-F_{n})=0$$

که در آن F_i ها $(i=۱\,,\,۲\,,\,\dots\,,\,n)$ توابعی از x و y هستند نوشت .

اکنون اگرهریک از فاکتورها را برابر صفر قرار داده و جواب عمومی معادلات مرتبه و درجه اول :

$$\frac{dy}{dx}=F_{۱}(x\,,\,y)\quad,\quad\frac{dy}{dx}=F_{۲}(x\,,\,y)\,,\,\dots\,,\frac{dy}{dx}=F_{n}(x\,,\,y)$$

را بصورت :

$$f_{۱}(x\,,\,y\,,\,c_{۱})=0\ ,\ f_{۲}(x\,,\,y\,,\,c_{۲})=0\,,\,\dots\,,\,f_{n}(x\,,\,y\,,\,c_{n})=0\qquad(۵\ .\ ۲۲)$$

بدست آوریم دراینحالت جواب عمومی معادله (۲ . ۵) حاصل ضرب n جواب معادلات (۲۲ . ۵) میباشد که در آن $c_{۱}=c_{۲}=\cdots=c_{n}=c$ اختیار گردد . یعنی :

$$f_{۱}(x\,,\,y\,,\,c)f_{۲}(x\,,\,y\,,\,c)\ \dots\ f_{n}(x\,,\,y\,,\,c)=0$$

مثال ۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$p^{۴}-(x+۲y+۱)p^{۳}+(x+۲y+۲xy)p^{۲}-۲xyp=0$$

حل - با کمی دقت معلوم میشود که معادله بالا را میتوان بصورت زیر تجزیه کرد :

$$p(p-۱)(p-x)(p-۲y)=0$$

بالنتیجه جواب عمومی معادلات مرتبه و درجه اول :

$$\frac{dy}{dx}=0 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=۱ \quad , \quad \frac{dy}{dx}-x=0 \quad , \quad \frac{dy}{dx}-۲y=0$$

متناظراً برابر :

$$y-c_۱=0 \quad , \quad y-x-c_۲=0 \quad , \quad ۲y-x^۲-c_۳=0 \quad , \quad y-c_۴e^{۲x}=0$$

خواهد بود واز آنجا جواب عمومی معادله دیفرانسیل چنین‌است :

$$(y-c)(y-x-c)(۲y-x^۲-c)(y-ce^{۲x})=0$$

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$xyp^۲+(x^۲+xy+y^۲)p+x^۲+xy=0$$

حل - پس‌از تجزیه معادله بالا به عوامل درجه اول چنین داریم :

$$(xp+x+y)(yp+x)=0$$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل :

$$x\frac{dy}{dx}+x+y=0 \quad , \quad y\frac{dy}{dx}+x=0$$

متناظراً برابر : $۲xy+x^۲-c_۱=0 \quad , \quad x^۲+y^۲-c_۲=0$

خواهد بود و از آنجا جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از :

$$(۲xy+x^۲-c)(x^۲+y^۲-c)=0$$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$(x^۲+x)p^۲+(x^۲+x-۲xy-y)p+y^۲-xy=0$$

حل - این معادله به عوامل درجه اول :

$$[(x+۱)p-y][xp+x-y]=0$$

تجزیه میشود و از آنجا جواب عمومی معادلات دیفرانسیل :

$$(x+۱)\frac{dy}{dx}-y=0 \quad , \quad x\frac{dy}{dx}+x-y=0$$

به ترتیب برابر :

$$y-c_{۱}(x+۱)=0 \quad , \quad y+x\,Log\,c_{۲}x=0$$

بوده و بالنتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر :

$$[y-c(x+۱)][y+x\,Log\,cx]=0$$

میباشد .

مثال ٤- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$x^{۲}p^{۲}-۲xyp+y^{۲}=x^{۲}y^{۲}+x^{٤}$$

حل - چنانچه این معادله را نسبت به p که از درجه دوم است حل کنیم چنین داریم :

$$xp-y=\pm x(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

این معادله پس از تبدیل متغیر $y=xz$ مبدل به :

$$\frac{dz}{(۱+z^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}=\pm dx$$

که دارای جوابهای عمومی $z=\sinh(c\pm x)$ است خواهد گردید واز آنجا جواب عمومی معادله عبارت خواهد بود از :

$$[y-x\sinh(x+c)][y-x\sinh(c-x)]=0$$

۲۳ . ۵ - معادلاتی که نسبت به y قابل حل هستند

دراینحالت میتوان معادله (۲ . ۵) را بصورت $y=f(x\,,\,p)$ نوشت . حال اگر ازاین معادله نسبت به x مشتق بگیریم معادله مرتبه ودرجه اول :

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}=F\left(x\,,\,p\,,\,\frac{dp}{dx}\right)$$

بدست میاید . اگر جواب عمومی این معادله $\varphi(x\,,\,p\,,\,c)=0$ باشد دربرخی از موارد جواب عمومی از حذف پارامتر p بین معادلات $y=f(x\,,\,p)$ و $\varphi(x\,,\,p\,,\,c)=0$ حاصل میشود

ودرغیر اینصورت معادلات پارامتری جواب عمومی برحسب پارامتر p بدست میآید .

تبصره - معادلات کلرو ولاگرانژ حالت خاصی از اینحالت میباشند .

مثال ۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$۱٦x^۲+۲p^۲y-p^۳x=0$$

حل - چنانچه این معادله را نسبت به y حل کنیم چنین داریم :

$$۲y=px-۱٦\frac{x^۲}{p^۲}$$

پس از مشتق گیری نسبت به x خواهیم داشت :

$$۲p=p+x\frac{dp}{dx}-۳۲\frac{x}{p^۲}+\frac{۳۲x^۲}{p^۳}\cdot\frac{dp}{dx}$$

و یا :

$$(p^۳+۳۲x)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad (I)$$

این معادله هنگامی برقرار است که $p^۳+۳۲x=0$ و یا $p-x\frac{dp}{dx}=0$ باشد .

ازمعادله اخیر $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$ و بالنتیجه $p=kx$. اگرمقدار p را در معادله دیفرانسیل جایگزین نماییم خواهیم داشت :

$$۱٦x^۲+۲k^۲x^۲y-k^۳x^٤=0 \quad \text{و یا} \quad ۲+c^۲y-c^۳x^۲=0 \quad (k=۲c)$$

ازآنجاییکه فاکتور $p^۳+۳۲x$ واقع در عبارت (I) شامل مشتق $\frac{dp}{dx}$ نمیباشد فعلاً آنرا مورد بررسی قرار نمیدهیم ولی در فصول آتی که درباره نقاط غیرعادی بحث خواهیم نمود بار دیگر این فاکتور را مطالعه خواهیم کرد .

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y=۲px+p^٤x^۲$$

حل - اگر ازاین معادله نسبت به x مشتق بگیریم به ترتیب خواهیم داشت :

$$p=۲x\frac{dp}{dx}+۲p+۲p^٤x+٤p^۳x^۲\frac{dp}{dx}$$

و یا :

$$\left(p+۲x\frac{dp}{dx}\right)(۱+۲p^۳x)=۰$$

اگر از فاکتور $۱+۲p^۳x=۰$ مانند مسئله بالا صرفنظر کنیم معادله دیفرانسیل $p+۲x\frac{dp}{dx}=۰$ دارای جواب عمومی $xp^۲=c$ خواهد بود .

حال اگر مقدار x را برحسب پارامتر p ازاین معادله بدست آورده و آنرا درمعادله $y=۲px+p^۴x^۲$ قرار دهیم معادلات پارامتری جواب عمومی بصورت :

$$x=\frac{c}{p^۲}$$

$$y=\frac{۲c}{p}+c^۲$$

در خواهند آمد .

دراین مثال میتوان بسهولت p رابین معادله $xp^۲=c$ و یا $p^۲=\frac{c}{x}$ و معادله دیفرانسیل $y=۲px+p^۴x^۲$ به ترتیب زیر حذف نمود :

$$y-p^۴x^۲=۲px$$

$$(y-p^۴x^۲)^۲=۴p^۲x^۲ \quad \text{و یا} \quad (y-c^۲)^۲=۴cx$$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$x=yp+p^۲$$

حل - پس‌از حل معادله نسبت به y معادله لاگرانژ زیر بدست میآید :

$$y=\frac{x}{p}-p$$

اکنون اگر نسبت به x ازاین معادله مشتق بگیریم چنین داریم :

$$p=\frac{۱}{p}-\frac{x}{p^۲}\cdot\frac{dp}{dx}-\frac{dp}{dx} \quad \text{و یا} \quad p^۳-p+(x+p^۲)\frac{dp}{dx}=۰$$

و از آنجا :

$$(p^۳-p)\frac{dx}{dp}+x+p^۲=0 \quad \text{و یا} \quad \frac{dx}{dp}+\frac{x}{p^۳-p}=\frac{-p}{p^۲-۱}$$

معادله اخیر خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $F.I=e^{\int\frac{dp}{p^۳-p}}=\frac{\sqrt{p^۲-۱}}{p}$ میباشد . لذا جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از :

$$\frac{x\sqrt{p^۲-۱}}{p}=-\int\frac{dp}{\sqrt{p^۲-۱}}=-Log\,(p+\sqrt{p^۲-۱}\,)+c$$

و یا :

$$x=-\frac{p}{\sqrt{p^۲-۱}}Log(p+\sqrt{p^۲-۱}\,)+\frac{cp}{\sqrt{p^۲-۱}}$$

$$y=-p-\frac{۱}{\sqrt{p^۲-۱}}Log(p+\sqrt{p^۲-۱}\,)+\frac{c}{\sqrt{p^۲-۱}}$$

مثال ۴ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$۳x^۴p^۲-xp-y=0$$

حل - چنانچه معادله فوق را نسبت به y حل نموده و سپس از آن نسبت به x مشتق بگیریم به ترتیب چنین داریم :

$$p=-p+۱۲x^۳p^۲+(۶x^۴p-x)\frac{dp}{dx}$$

و یا :

$$(۶x^۳p-۱)\left(۲p+x\frac{dp}{dx}\right)=0$$

اگرمانند مثالهای(۱) و (۲) ازفاکتور $۶x^۳p-۱=0$ صرفنظرنماییم معادله دیفرانسیل $۲p+x\frac{dp}{dx}=0$ دارای جواب عمومی $x^۲p=c$ خواهد بود و بالنتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy=c(۳cx-۱)$ میباشد .

۲۴ . ۵ - معادلاتی که نسبت به x قابل حل هستند

معادله (۲ . ۵) دراینحالت بصورت $x=\varphi(y\,,p)$ درمیآید. اگر از این معادله

نسبت به y مشتق بگیریم معادله مرتبه ودرجه اول :

$$\frac{dx}{dy}=\frac{۱}{p}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}=\Phi\left(y , p , \frac{dp}{dy}\right)$$

بدست میآید .

دربرخی از موارد میتوان جواب عمومی معادله دیفرانسیل را از حذف پارامتر p بین معادله $x=\varphi(y , p)$ و جواب عمومی معادله بالایعنی $\psi(y , p , c)=۰$ بدست آورد . درغیراینصورت معادلات پارامتری جواب عمومی برحسب پارامتر p بدست میآید.

مثال ۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$p^{۳}-۲xyp+۴y^{۲}=۰$$

حل - اگرمعادلهبالارا نسبت به x حل کرده وسپس ازآن نسبت به y مشتقبگیریم ترتیب خواهیم داشت :

$$۲x=\frac{p^{۲}}{y}+\frac{۴y}{p}$$

$$\frac{۲}{p}=\frac{۲p}{y}\cdot\frac{dp}{dy}-\frac{p^{۲}}{y^{۲}}+۴\left(\frac{۱}{p}-\frac{y}{p^{۲}}\cdot\frac{dp}{dy}\right)$$

و یا :

$$\left(p-۲y\frac{dp}{dy}\right)(۲y^{۲}-p^{۳})=۰$$

اگر p را بین جواب عمومی معادله دیفرانسیل $p-۲y\frac{dp}{dy}=۰$ کهبصورت $p^{۲}=ky$ استو معادلهدیفرانسیل $p^{۳}-۲xyp+۴y^{۲}=۰$ حذف کنیم جوابعمومی معادله اخیر عبارت خواهد بود از $۲y=c(c-x)^{۲}$ که درآن $k=۲c$.

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y=۳px+۶p^{۲}y^{۲}$$

حل - اگر این معادله را نسبت به x حل کرده و سپس ازآن نسبت به y مشتق بگیریم به ترتیب خواهیم داشت :

$$۳x=\frac{y}{p}-۶py^{۲}$$

$$\frac{۳}{p}=\frac{۱}{p}-\frac{y}{p^{۲}}\cdot\frac{dp}{dy}-٦y^{۲}\frac{dp}{dy}-۱۲py$$

و یا :

$$(۱+٦p^{۲}y)\left(۲p+y\frac{dp}{dy}\right)=0$$

چنانچه فاکتور دوم را برابر صفر قرار دهیم معادله دیفرانسیل $۲p+y\frac{dp}{dy}=0$ دارای جواب عمومی $py^{۲}=c$ بوده و اگر p را ازاین معادله بدست آورده و آنرا در معادله دیفرانسیل $y=۳px+٦p^{۲}y^{۲}$ قراردهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل اخیر عبارت خواهد بود از $y^{۳}=۳cx+٦c^{۲}$.

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$٤x=py(p^{۲}-۳)$$

حل- اگر ازاین معادله نسبت به y مشتق بگیریم چنین داریم :

$$(I)\quad \frac{٤}{p}=p(p^{۲}-۳)+۳y(p^{۲}-۱)\frac{dp}{dy}\quad \text{و یا}\quad \frac{dy}{y}+\frac{۳p(p^{۲}-۱)dp}{(p^{۲}-٤)(p^{۲}+۱)}=0$$

اگر جمله دوم واقع درسمت چپ رابطه (I) را به کسور جزیی تجزیه و سپس از عبارت (I) انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$Log\,y+\frac{۹}{۱۰}Log(p+۲)+\frac{۹}{۱۰}Log(p-۲)+\frac{۳}{٥}Log(p^{۲}+۱)=Log\,c$$

و ازآنجا :

$$x=\frac{۱}{٤}\cdot\frac{cp(p^{۲}-۳)}{(p^{۲}-٤)^{\frac{۹}{۱۰}}(p^{۲}+۱)^{\frac{۳}{٥}}}\quad,\quad y=\frac{c}{(p^{۲}-٤)^{\frac{۹}{۱۰}}(p^{۲}+۱)^{\frac{۳}{٥}}}$$

مثال ٤- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$(I)\qquad ۱٦y^{۳}p^{۲}-٤xp+y=0$$

حل - اگر این معادله را نسبت به x حل کرده و بعدازآن نسبت به y مشتق بگیریم به‌ترتیب خواهیم داشت :

$$٤x=\frac{y}{p}+١٦y^{٣}p$$

$$\frac{٤}{p}=\frac{١}{p}+٤٨y^{٢}p+\left(١٦y^{٣}-\frac{y}{p^{٢}}\right)\frac{dp}{dy}$$

و یا :

$$\left(١٦y^{٢}-\frac{١}{p^{٢}}\right)\left(٣p+y\frac{dp}{dy}\right)=٠$$

معادله دیفرانسیل $٣p+y\frac{dp}{dy}=٠$ دارای جواب عمومی $y^{٣}p=k$ بوده و اگر p را بین این معادله ومعادله دیفرانسیل (I) حذف کنیم، جواب عمومی بصورت $y^{٤}=c(x-c)$ که در آن $c=٤k$ است درمیآید .

٢٥ . ٥- معادلات همگن نسبت به x و y

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\varphi(x, y, p)=٠$ نسبت به x و y همگن درجه m ام باشد دراینصورت میتوان آنرا بصورت $x^{m}F\left(\frac{y}{x}, p\right)=٠$ نوشت. حال اگر بتوان این معادله را نسبت به p حل کرد یعنی $p=f\left(\frac{y}{x}\right)$ باشد جواب عمومی را میتوان مانند شماره (٥ . ٢) بدست آورد . ولی اگر بتوانیم این معادله را نسبت به $\frac{y}{x}$ حل کنیم چنین داریم :

$$\frac{y}{x}=\psi(p) \quad , \quad y=x\psi(p)$$

این معادله‌حالت‌خاصی‌از معادله لاگرانژ (شماره ٨٥ . ٢) میباشد که میتوان جواب عمومی آنرا بدست آورد .

مثال ۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y=yp^{٢}+٢px \tag{I}$$

حل - این معادله نسبت به x و y همگن و از درجه یک میباشد. اگر معادله‌را نسبت به x حل کرده‌واز معادله حاصل نسبت به y مشتق‌بگیریم به‌ترتیب خواهیم‌داشت :

$$٢x=y\left(\frac{١}{p}-p\right) \; ; \; \frac{٢}{p}=\frac{١}{p}-p-y\left(\frac{١}{p^{٢}}+١\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{p}{y}\quad,\quad py=c$$

اگر p را بین معادله $py=c$ و معادله دیفرانسیل (I) حذف کنیم جواب عمومی $y^۲=۲cx+c^۲$ بدست میاید .

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$۲yp^۳-yp^۲+۲xp-x=0$$

حل - ازآنجایی که معادله بالا نسبت به x و y همگن و از درجه اول است اگر آنرا نسبت به $\frac{y}{x}$ حل کنیم به ترتیب چنین داریم :

$$yp^۲(۲p-۱)=-x(۲p-۱)\quad,\quad y=-\frac{x}{p^۲}$$

معادله فوق حالت خاصی از معادله لاگرانژ بوده و برای حل آن باید از آن نسبت به x مشتق بگیریم . یعنی :

$$\frac{dy}{dx}=p=-\frac{۱}{p^۲}+\frac{۲x}{p^۳}\cdot\frac{dx}{dp}\quad,\quad\frac{p^۳+۱}{p^۲}=\frac{۲x}{p^۳}\cdot\frac{dx}{dp}$$

و یا :

$$x^۲=c+\frac{۱}{٥}p^٥+\frac{۱}{۲}p^۲$$

و بالنتیجه معادلات پارامتری خمهای انتگرال عبارت خواهند بود از :

$$x^۲=c+\frac{۱}{٥}p^٥+\frac{۱}{۲}p^۲\quad,\quad y^۲=cp^{-٤}+\frac{۱}{٥}p+\frac{۱}{۲}p^{-۲}$$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y(p^٤+p^۳-۳p^۲)-p(۳y+٤x)-٤x=0$$

حل - این معادله نسبت به x و y همگن و از درجه یک میباشد . لذا اگر آنرا نسبت به $\frac{y}{x}$ حل کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{y}{x}=\frac{٤(p+۱)}{(p^٤+p^۳-۳p^۲-۳p)}=\frac{٤}{p(p^۲-۳)}$$

و یا :

$$٤x=py(p^۲-۳)$$

جواب عمومی معادله بالا را در مثال سوم شماره (۲٤ ، ٥) پیدا کردیم . یعنی :

$$x=\frac{۱}{٤}\cdot\frac{cp(p^{۲}-۳)}{(p^{۲}-٤)^{\frac{۹}{۱۰}}(p^{۲}+۱)^{\frac{۳}{٥}}}\quad ;\quad y=\frac{c}{(p^{۲}-٤)^{\frac{۹}{۱۰}}(p^{۲}+۱)^{\frac{۳}{٥}}}$$

مثال ٤. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$x^{۲}-k^{۲}y^{۲}+۲xyp+(۱-k^{۲})y^{۲}p^{۲}=o$$

k مقداری است ثابت .

حل - چون این معادله نسبت به x و y همگن و از درجه دوم است لذا اگر آنرا نسبت به p حل کنیم به ترتیب چنین داریم :

$$p=\frac{-xy\pm\sqrt{x^{۲}y^{۲}-(۱-k^{۲})x^{۲}y^{۲}+k^{۲}(۱-k^{۲})y^{٤}}}{(۱-k^{۲})y^{۲}}$$

$$=\frac{-xy\pm ky\sqrt{x^{۲}+(۱-k^{۲})y^{۲}}}{(۱-k^{۲})y^{۲}}$$

$$p=\frac{-x\pm k\sqrt{x^{۲}+(۱-k^{۲})y^{۲}}}{(۱-k^{۲})y}=\frac{-۱\pm k\sqrt{۱-(k^{۲}-۱)\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}}{(۱-k^{۲})\,\frac{y}{x}}$$

$$=\frac{۱\mp k\sqrt{۱-(k^{۲}-۱)\left(\frac{y}{x}\right)^{۲}}}{(k^{۲}-۱)\,\frac{y}{x}}$$

اکنون تبدیل متغیرهای $\frac{y}{x}=v$ و $۱-(k^{۲}-۱)v^{۲}=z^{۲}$ را انجام میدهیم . یعنی :

$$x\frac{dv}{dx}+v=p=\frac{۱\mp k\sqrt{۱-(k^{۲}-۱)v^{۲}}}{(k^{۲}-۱)v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{۱\mp k\sqrt{۱-(k^{۲}-۱)v^{۲}}-(k^{۲}-۱)v}{(k^{۲}-۱)v}$$

و بالنتیجه :

$$-\frac{x}{dx}zdz=\mp kz+z^{۲} \quad \text{و یا} \quad \frac{dz}{۲\mp k}+\frac{dx}{x}=0$$

و ازآنجا : $x^{۲}z^{۲}=(c\pm kx)^{۲}$ و $x(z\mp k)=c$

$$x^{۲}-(k^{۲}-۱)y^{۲}=(c\pm kx)^{۲}$$

ازآنجایی‌که c مقدار ثابت غیر مشخصی‌است ، میتوان k را عدد مثبتی فرض نمود وبالنتیجه جواب عمومی بصورت :

$$x^{۲}(۱-k^{۲})+y^{۲}(۱-k^{۲})+۲kcx-c^{۲}=0$$

که نمایش یک دسته دوایر است درمیآید .

مسائل

۱- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

الف - $۳p^{۳}-py+۱=0$. ب - $x=٤p+٤p^{۳}$.

پ - $p^{۲}-۲xp+۱=0$. ت - $p^{۳}+p=e^{y}$.

ث - $y=p\sin p+\cos p$. ج - $y=p\,tg\,p+Log\cos p$.

چ - $e^{p-y}=p^{۲}-۱$. ح - $p=tg\left(x-\frac{p}{۱+p^{۲}}\right)$.

۲- با انتخاب پارامتر مناسب جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بیابید .

الف - $(y+p)^{۲}=y-p$. ب - $(y+p)^{٤}=۳y+p$.

پ - $y^{۳}-۳yp+p^{۳}=0$. ت - $y^{٤}+p^{٤}=yp(y+p)$.

۳- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

الف - $x^{۲}p^{۲}+xyp-٦y^{۲}=0$.

ب - $xp^{۲}+(y-۱-x^{۲})p-x(y-۱)=0$.

پ- $p^{۲}x(x-۲)+p(۲y-۲xy-x+۲)+y^{۲}+y=0$.

ت- $x+yp^{۲}=p(۱+xy)$.

ث- $p^{۳}-p(x^{۲}+xy+y^{۲})+xy(x+y)=0$.

ج- $p^{۲}-۲p\cosh x+۱=0$.

چ- $xp^{۵}-yp^{۴}(x^{۲}+۱)p^{۳}-۲xyp^{۲}+(x+y^{۲})p-y=0$.

ح- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}-\frac{a}{x}=0$.

خ- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}+۲\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=۱$.

د- $x^{۲}p^{۲}+۳xyp+۲y^{۲}=0$.

ذ- $x^{۲}p^{۲}+۳xyp+۳y^{۲}=0$.

ر- $p(p+y)=x(x+y)$.

ز- $p^{۳}-(x^{۲}+xy+y^{۲})p^{۲}+(x^{۳}y+x^{۲}y^{۲}+xy^{۳})p-x^{۳}y^{۳}=0$.

ژ- $(a^{۲}-x^{۲})p^{۳}+bx(a^{۲}-x^{۲})p^{۲}-p-bx=0$.

س- $\left(۱-y^{۲}-\frac{y^{۴}}{x^{۲}}\right)p^{۲}-\frac{۲y}{x}p+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}=0$.

ش- $p^{۲}+\left(x+y-۲\frac{y}{x}\right)p+xy+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}-y-\frac{y^{۲}}{x}=0$.

۴- نشان دهید اگر معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول نسبت به x و y همگن باشد میتوان با تبدیل متغیرهای $x\frac{dt}{dx}=z$ و $y=tx$ آنرا حل نمود و سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل $p^{۳}-\frac{۱}{۲}p^{۲}+\frac{x}{y}p-\frac{x}{۲y}=0$ را بدست آورید .

۵- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

الف- $y^{۲}p^{۲}+۳px-y=0$. ب- $y=۲px+y^{۲}p^{۳}$.

پ - $x^۲(y-xp)=yp^۲$. ت - $p^۳-۴xyp+۸y^۲=0$.

ث - $p^۴=۴y(xp-۲y)^۲$. ج - $x^۲+y=p^۲$.

چ - $p^۳=y^۴(y+xp)$. ح - $p^۳+x^۳=axp$.

خ - $p^۲+۲yp\cot gx=y^۲$. د - $(xp-y)^۲=p^۲-\frac{۲y}{x}p+۱$.

جوابها

۱- الف : $y=۳p^۲+p^{-۱}$, $x=۴p^۳+\frac{۱}{۲}p^{-۲}+c$.

ب : $y=۲p^۲+۳p^۴+c$, $x=۴p+۴p^۳$.

پ : $y=\frac{۱}{۴}p^۲-\frac{۱}{۲}Log\,p+c$, $x=\frac{۱}{۲}(p+p^{-۱})$.

ت : $y=Log(p^۳+p)$, $x=۲\operatorname{arc}tg\,p-p^{-۱}+c$.

ث : $y=p\sin p+\cos p$, $x=\sin p+c$.

ج : $y=p\,tg\,p+Log\cos p$, $x=tg\,p+c$.

چ : $y=p-Log(p^۲-۱)$, $x=Log\,\frac{p(p+۱)}{p-۱}+c$.

ح : $y=p-Log(p^۲-۱)$, $x=\frac{p}{۱+p^۲}+\operatorname{arc}tg\,p$.

۲- الف : $y=\frac{t^۲-t}{(t+۱)^۲}$, $x=c+Log[(t+۱)^۳|t-۱|]$.

ب : , $x=c+\frac{۴}{۳}Log|t+۱|-\frac{۱}{۹}Log|۳t+۱|$.

$$y=\frac{t(۳t+۱)^{\frac{۱}{۳}}}{(t+۱)^{\frac{۴}{۳}}}$$

پ : $y=\frac{۳t^{۲}}{t^{۳}+۱}$ ، $x=c-t+۳\int\frac{dt}{t^{۳}+۱}$.

ت : $y=\frac{t^{۳}+t^{۲}}{t^{٤}+۱}$ ، $x=c-t-Log|t+۱|+٤\int\frac{dt}{t^{٤}+۱}$.

۳- الف : $(y-cx^{۲})(y-cx^{-۳})=0$.

ب : $(۲y-x^{۲}+c)(xy-x+c)=0$.

پ : $(y-cx+۲c)(y-cx+۱)=0$.

ت : $(۲y-x^{۲}-c)(۲x-y^{۲}-c)=0$.

ث : $(۲y-x^{۲}-c)(y-ce^{x})(y+x-۱-ce^{-x})=0$.

ج : $(y-e^{x}-c)(y+e^{-x}-c)=0$.

چ : $(y-cx-c^{۳})(c^{۲}x-cy+۱)=0$.

ح : $(y+A)^{۲}=۲ax$.

خ : $A^{۲}+۲Ay(۳x^{۲}-y^{۲})=x^{۲}(x^{۲}-۳y^{۲})^{۲}$.

د : $A^{۲}-Axy(۱+x)+x^{۲}y^{۲}=0$.

ذ : $A^{۲}-۲Ax^{\frac{۳}{۲}}y\cos(۳^{\frac{۱}{۲}}Log\,x^{\frac{۱}{۲}})+x^{۳}y^{۲}=0$.

ر : $(y-\frac{۱}{۲}x^{۲}-A)(y+x-۱-Ae^{-x})=0$.

ز : $(y-Ae^{\frac{۱}{۲}x^{۲}})(y-\frac{۱}{۳}x^{۳}-A)[y(A-x)-۱]=0$.

ژ : $(y+\frac{۱}{۲}bx^{۲}-A)\left[\sin^{۲}(y-A)-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right]=0$.

س : $\left[Ae^{y}+\left(۱+\frac{x^{۲}}{y^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}-\frac{x}{y}\right]\left[Ae^{-y}+\right.$

$\left.\left(۱+\frac{x^{۲}}{y^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}-\frac{x}{y}\right]=0$.

ش : $(y-Axe^{-x})(y+x^2-Ax)=0$.

-٤ $(y-\frac{1}{2}x-A)(y^{\frac{3}{2}}-A)^2$.

-٥ الف : جواب‌عمومی $y^3-3cx-c^2=0$ وجواب غیرعادی $x^2-\frac{4}{9}y^3=0$.

ب : جواب عمومی $y^2=2cx+c^3$ و جواب غیرعادی $32x^3+27y^4=0$.

پ : جواب عمومی $y^2=Ax+A^2$ و جواب غیر عادی $x^2-4y^2=0$.

ت : جواب عمومی $2y=c(c-x)^2$ وجواب غیرعادی $27y=4x^3$.

ث : جواب عمومی $y=c^2(x-c)^2$.

ج : جواب عمومی $Log c_1 x=\int\frac{du}{\sqrt{1+u}-2u}$, $y=x^2u$.

چ : جواب عمومی $\frac{1}{y}=Ax+A^3$ و جواب غیر عادی $4y^2x^3=27$.

ح : جواب عمومی $y-A=\frac{1}{6}a^2\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}$, $x=\frac{at^2}{1+t^3}$ و جواب غیر عادی $\frac{3x}{a}=4^{\frac{1}{3}}$.

خ : جواب عمومی $y^2-2yA+A^2\sin^2x=0$ وجواب غیر عادی $y=0$.

د : جواب عمومی $(y-Ax^2)^2=(x^2-y^2)(x^2-1)$ وجواب غیرعادی $y=\pm x$.

۳ . ۵- معادلاتی که مرتبه آنها بیش از یك است

ساده‌ترین شکل معادله دیفرانسیل مرتبه n ام معادله دیفرانسیل $\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$ میباشد .

یافتن جواب این معادله منجر به انتگرال گیری n گانه خواهد گردید ، زیرا اگر x_0 مقدار ثابت غیر مشخصی باشد به ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+c_0$$

$$\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)dx+c_0(x-x_0)+c_۱$$

$$\frac{d^{n-۳}y}{dx^{n-۳}}=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} f(x)dx+\frac{c_0(x-x_0)^{۲}}{۲!}+c_۱(x-x_0)+c_۲$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)dx+c_0\,\frac{(x-x_0)^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

$$+\frac{c_۱(x-x_0)^{n-۲}}{(n-۲)!}+\cdots+c_{n-۱}$$

که در آن $c_{n-۱}$, ... , $c_۱$, c_0 مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند .

انتگرال n گانه بالارا میتوان به یک انتگرال ساده تبدیل کرد زیرا اگر فرض کنیم :

$$Y=\frac{۱}{(n-۱)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-۱}f(t)dt$$

دراینصورت به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{dY}{dx}=\frac{۱}{(n-۲)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-۲}f(t)dt$$

$$\frac{d^{۳}Y}{dx^{۳}}=\frac{۱}{(n-۳)!}\int_{x_{٠}}^{x}(x-t)^{n-۳}f(t)dt$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{d^{n-۱}Y}{dx^{n-۱}}=\int_{x_{٠}}^{x}f(t)dt$$

و بالاخره :

$$\frac{d^{n}Y}{dx^{n}}=f(x)$$

بنابراین Y در معادله‌دیفرانسیل $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}=f(x)$ صدق کرده و چون Y و $(n-۱)$ مشتق‌اول آن بازاء $x=x_{٠}$ صفر میگردند لذا Y با انتگرال چندگانه متحد گردیده وازآنجا جواب عمومی معادله عبارت خواهد شد از :

$$y=\frac{۱}{(n-۱)!}\int_{x_{٠}}^{x}(x-t)^{n-۱}f(t)dt+\frac{c_{٠}(x-x_{٠})^{n-۱}}{(n-۱)!}$$

$$+\frac{c_{۱}(x-x_{٠})^{n-۲}}{(n-۲)!}+\cdots+c_{n-۱}$$

باستثنای حالت‌ساده فوق و معادلات‌خطی با ضرایب ثابت که در فصل‌ششم مورد بررسی قرار خواهند گرفت، تعداد معدودی ازمعادلات مرتبه بالاترازیک را میتوان باروشهای مقدماتی حل کرد. ولی در برخی از حالات بسیارخاص باتبدیل متغیرهای مناسب که دربعضی از موارد ممکن است با یک یا چند انتگرال توأم باشد، میتوان از مرتبه معادله دیفرانسیل کاست. ذیلاً حالات اساسی این نوع معادلات را مورد بررسی قرار میدهیم .

۳۱ . ۵ - معادلاتی که دارای متغیر تابع نیست

شکل کلی این معادلات بصورت زیر میباشد :

$$F\left(x\ ,\ \frac{d^ky}{dx^k}\ ,\ \frac{d^{k+۱}y}{dx^{k+۱}}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

این معادله فاقد y و $k-۱$ مشتق مرتبه اول میباشد . اگر دراین معادله تبدیل متغیر $v=\frac{d^ky}{dx^k}$ را انجام دهیم معادله دیفرانسیل حاصل نسبت به v ازمرتبه $(n-k)$ ام خواهد بود . چنانچه بتوان این معادله را حل کرد و جواب آن $v=v(x)$ باشد دراینصورت باید معادله دیفرانسیل $\frac{d^ky}{dx^k}=v(x)$ که دربالاآنرا مورد بررسی قرارداديم حل کنیم .

درحالت کلی معادله دیفرانسیل مرتبه $(n-k)$ ام نسبت به v دارای جوابی مانند $\varphi(x\,,v)=0$ میباشد که معمولاً بسهولت نسبت به v قابل حل نیست .

اکنون اگر بتوانیم x و v را برحسب پارامتر t بصورت $x=x(t)$ و $y^{(k)}=v(t)$ بیان کنیم دراینصورت چنین داریم :

$$dy^{(k-۱)}=v(t)dx=v(t)x'(t)dt$$

اگرازرابطه بالا نسبت به t تابع اولیه بگیریم مقدار $y^{(k-۱)}$ بدست میآید و چنانچه عمل فوق را k بار تکرار نماییم میتوان y را برحسب پارامتر t تعیین کرد و از آنجا معادلات پارامتری خمهای انتگرال بدست میآیند .

یکی از موارد خاص و مهم این نوع معادلات ، معادلاتی است که میتوان آنها را بصورت $\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}\right)$ نوشت . بنابراین چنین معادلاتی را میتوان با کوادراتورهایی حل کرد .

مثال ۱ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$۲\,\frac{d^۲y}{dx^۲}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲+۴=0$$

حل - این معادله شامل y نبوده و اگر $\frac{dy}{dx}=p$ قراردهیم به‌ترتیب چنین داریم:

$$۲\,\frac{dp}{dx}=p^۲-۴ \quad , \quad \frac{۲dp}{p^۲-۴}=dx$$

$$\frac{۱}{۲}\,Log\frac{p-۲}{p+۲}=x+Logk \quad , \quad \frac{p-۲}{p+۲}=c_۱e^{۲x}$$

$$p=\frac{۲(۱+c_۱e^{۲x})}{(۱-c_۱e^{۲x})}=۲\left(۱+\frac{۲c_۱e^{۲x}}{۱-c_۱e^{۲x}}\right)$$

و از آنجا : $y=۲x-۲Log(۱-c_۱e^{۲x})+c_۲$

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$xy''-y'=-\frac{۲}{x}-Logx$$

حل - پس‌از تبدیل متغیر $\frac{dy}{dx}=p$ به ترتیب خواهیم داشت :

$$x\frac{dp}{dx}-p=-\frac{۲}{x}-Logx \quad , \quad \frac{dp}{dx}-\frac{p}{x}=-\frac{۲}{x^۲}-\frac{Logx}{x}$$

این معادله خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $F.I=e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{۱}{x}$ است. لذا:

$$\frac{p}{x}=c+\int\left[-\frac{۲}{x^۲}-\frac{Logx}{x}\right]\frac{۱}{x}\,dx \quad ,$$

$$\frac{p}{x}=c+\frac{۱}{x^۲}+\frac{Logx}{x}+\frac{۱}{x} \quad , \quad p=cx+\frac{۱}{x}+۱+Logx$$

و ازآنجا : $y=c_۱x^۲+c_۲+(x+۱)Logx$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲+x\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^۲y}{dx^۲}=a\frac{d^۲y}{dx^۲}\left\{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

حل - ازآنجایی‌که این معادله دارای y نیست لذا اگر تبدیل متغیر $\frac{dy}{dx}=p$ را انجام دهیم میتوان آنرا تبدیل به معادله مرتبه اول نمود . یعنی :

$$۱+p^{۲}+xp\frac{dp}{dx}=a\frac{dp}{dx}(۱+p^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{dp}{dx}[a(۱+p^{۲})^{\frac{۱}{۲}}-xp]=۱+p^{۲}$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{a(۱+p^{۲})^{\frac{۱}{۲}}-xp}{۱+p^{۲}}=\frac{a}{(۱+p^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{xp}{۱+p^{۲}}$$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{p}{۱+p^{۲}}x=\frac{a}{(۱+p^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$$

این معادله خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $F.I=e^{\int\frac{pdp}{1+p^{۲}}}=\sqrt{۱+p^{۲}}$ است . لذا جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از :

$$\text{(I)}\qquad x\sqrt{۱+p^{۲}}=c_{۱}+ap \quad \text{ویا} \quad x=\frac{c_{۱}}{\sqrt{۱+p^{۲}}}+\frac{ap}{\sqrt{۱+p^{۲}}}$$

از آنجاییکه نمیتوان p را در رابطه (I) برحسب تابع گویایی از x بیان نمود لذا سعی میکنیم که x و p را برحسب پارامتر t مشخص کنیم و برای این منظور قرار میدهیم $p=tgt$ و بالنتیجه خواهیم داشت :

$$p=tgt \quad , \quad x=c_{۱}cost+asint$$

$$dy=pdx=tgtdx=tgt(-c_{۱}sint+acost)dt$$

و از آنجا :

$$y=c_{۱}[Logtg\left(\frac{\pi}{٤}-\frac{t}{۲}\right)+sint]-acost+c_{۲}$$

لذا معادلات پارامتری خمهای انتگرال عبارت خواهند بود از :

$$x=c_{۱}cost+asint \quad ،$$

$$y=c_۱[Logtg\left(\frac{\pi}{٤}-\frac{t}{۲}\right)+sin\,t]-a\,cos\,t+c_۲$$

مثال ٤- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$(۱+x^۲)\,\frac{d^۲y}{dx^۲}+۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲=o$$

حل - این معادله شامل y نبوده و اگر $\frac{dy}{dx}=p$ قرار دهیم به ترتیب چنین داریم :

$$(۱+x^۲)\,\frac{dp}{dx}+(۱+p^۲)=o \quad \text{و یا} \quad \frac{dp}{۱+p^۲}+\frac{dx}{۱+x^۲}=o$$

$$Arctg\,p+Arctg\,x=Arctg\,c_۱$$

برای یافتن عبارت پارامتری x و p تبدیل متغیرهای $Arctg\,x=t$ و $Arctg\,p=y$ را انجام میدهیم و از آنجا خواهیم داشت :

$$y+t=Arctg\,c_۱ \quad \text{و یا} \quad tg(y+t)=c_۱$$

$$\frac{tg\,y+tg\,t}{۱-tg\,y\,log\,t}=\frac{p+tg\,t}{۱-p\,tg\,t}=c_۱$$

و از آنجا :

$$p=\frac{c_۱-tg\,t}{۱+c_۱tg\,t}$$

$$dy=pdx=\frac{c_۱-tg\,t}{۱+c_۱tg\,t}\,d(tg\,t)$$

$$y=-c_۱tg\,t+\frac{c_۱{}^۲+۱}{c_۱{}^۲}\,Log(۱+c_۱tg\,t)+c_۲$$

بنابراین معادلات پارامتری خمهای انتگرال عبارت خواهند بود از :

$$x=tg\,t \quad , \quad y=-c_۱tg\,t+\frac{c_۱{}^۲+۱}{c_۱{}^۲}\,Log(۱+c_۱tg\,t)+c_۲$$

۳۲ . ۵ - معادلاتی که دارای متغیر مستقل نیست

اگر معادله دیفرانسیل بصورت :

$$F\left(y\ ,\ \frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \qquad (۵ . ۳۲)$$

باشد میتوان با تبدیل متغیرهای‌تابع و مستقل آنرا به مرتبه $(n-1)$ تبدیل کرد . زیرا اگر y را متغیر مستقل و $p=\frac{dy}{dx}$ را متغیرتابع فرض کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{dx}=p \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dp}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dp}{dy}=p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)$$

$$=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$$

و الی‌آخر . پس‌از جایگزین کردن عبارات فوق دررابطه (۵ . ۳۲) معادله‌یی مانند :

$$\Phi\left(y\ ,\ p\ ,\ \frac{dp}{dy}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0$$

بدست میآید .

اکنون فرض مینماییم که بتوانیم جواب عمومی این معادله را بدست‌آوریم وهمچنین این جواب را بصورت پارامتری $p=g(t)$ و $y=f(t)$ که در آن f و g به $n-1$ مقدار ثابت‌غیر مشخص بستگی دارند نمایش دهیم بالنتیجه x را بطریق زیر میتوان بایک کوادراتور برحسب پارامتر t بیان نمود :

$$x=\int\frac{dy}{p}=\int\frac{f'(t)dt}{g(t)}$$

معادلات مرتبه دوم :

$$F\left(y\ ,\ \frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \qquad (۵ . ۳۲۱)$$

که فاقد متغیر مستقل x هستند میتوان با تبدیل متغیرهای بالا به معادله مرتبه اول :

$$\varphi\left(y\ ,\ p\ ,\ \frac{dp}{dy}\right)=0$$

تبدیل کرد .

اگر $\psi(y , p)=c$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول بالا باشد جواب عمومی معادله (۳۲۱ . ٥) را میتوان مانند شماره (۲۱ . ٥) بدست آورد .

معادلاتی که بشکل :

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}\right) \qquad (٥ . ۳۲۲)$$

هستند با قرار دادن $v=\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}$ به معادله :

$$\frac{d^۲v}{dx^۲}=f(v)$$

که حالت خاصی از حالت کلی بالا هستند تبدیل کرد . اگر دراین معادله $\frac{dv}{dx}=p$ قرار دهیم خواهیم داشت :

$$p\frac{dp}{dv}=f(v)$$

$$p^۲=c+۲\int f(v)dv$$

و از آنجا :

$$x=\int[c+۲\int f(x)dv]^{-\frac{۱}{۲}}dv$$

برای آنکه یافتن y میسر باشد باید بتوانیم v را برحسب تابعی از x بیابیم و از آنجا جواب مورد نظربا (n—۲) کوادراتور بدست میآید . معادله $y''=f(y)$ حالت خاصی ازمعادله (۳۲۲ . ٥) میباشد چه اگر در این رابطه $n=۲$ اختیار گردد معادله $y''=f(y)$ بدست میآید .

مثال ۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$yy''-(y')^۲=y^۲Logy$$

حل - باتبدیل متغیرهای $y'=p$ و $y''=p\frac{dp}{dy}$ معادله بالا تبدیل به :

$$yp\frac{dp}{dy}-p^۲=y^۲Logy \quad \text{و با} \quad \frac{۲y^۲pdp-۲p^۲ydy}{y^۴}=۲Logy\frac{dy}{y}$$

میگردد و از آنجا :

$$\frac{p^۲}{y^۲}=(Logy)^۲+c \quad , \quad \frac{dy}{y\sqrt{(Logy)^۲+c}}=\pm dx$$

$$Log(Logy+\sqrt{(Logy)^۲+c})=\pm x+Logk$$

و یا :

$$Logy+\sqrt{(Logy)^۲+c}=ke^{\pm x} \quad , \quad c=k^۲e^{\pm ۲x}-۲ke^{\pm x}Logy$$

$$Logy=c_۱e^{\pm x}+c_۲e^{\mp x}$$

ولی چون $c_۱$ و $c_۲$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند جواب بالا را میتوان بصورت نهایی زیر نوشت :

$$Logy=c_۱e^{x}+c_۲e^{-x}$$

مثال ۲ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dx^۲}=e^{۲y}$ را چنان تعیین کنید که منحنی انتگرال در مبدأ مختصات برمحور x ها مماس باشد .

حل ـ چون بنابفرض منحنی انتگرال در مبدأ مختصات برمحور x ها مماس است لذا دراین نقطه $y'=o$ است . اگر تبدیل متغیر $y'=p$ و $y''=p\frac{dp}{dy}$ را دهیم به ترتیب چنین داریم :

$$۲pdp=۲e^{۲y}dy \quad \text{و یا} \quad p^۲=e^{۲y}+k$$

اکنون اگر مقادیر اولیه $y=y'=o$ را در معادله بالا قرار دهیم $k=-۱$ و لذا $p=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{e^{۲y}-۱}$ خواهد شد . تبدیل متغیر $e^{۲y}=z$ این معادله‌را تبدیل به $\frac{dz}{z\sqrt{z-۱}}=\pm dx$ که دارای جواب عمومی $arctg\sqrt{z-۱}=\pm x+c$ و یا $arctg\sqrt{e^{۲y}-۱}=\pm x+z$ است میکند . حال اگر شرایط اولیه $x=y=o$ را دراین معادله قرار دهیم $c=o$ خواهد گردید و از آنجا :

$$\sqrt{e^{۲y}-۱}=tg(\pm x)=\pm tgx$$

و بالنتیجه جواب خصوصی مورد نظر $e^{۲y}=sec^۲x$ میباشد .

باید توجه‌داشت که شکل جواب عمومی معادله بستگی به علامت‌اولین مقدار ثابتی که از انتگرال گیری حاصل میشود دارد . زیرا اگردر معادله دیفرانسیل $p^{۲}=e^{۲y}+k$ مقدار ثابت غیر مشخص k مثبت و برابر $A^{۲}$ و $z=e^{۲y}$ باشد به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{dz}{z\sqrt{z+A^{۲}}}=\pm dx \quad \text{و یا} \quad \frac{۱}{۲A} Log \frac{\sqrt{z+A^{۲}}-A}{\sqrt{z+A^{۲}}+A}=\pm x+c$$

$$\frac{\sqrt{z+A^{۲}}-A}{\sqrt{z+A^{۲}}+A}=Be^{\pm ۲Ax} \quad \text{و یا} \quad \frac{A(۱+Be^{\pm ۲Ax})}{(۱-Be^{\pm ۲Ax})}=\sqrt{z+A^{۲}}$$

ازآنجایی که A مقدار ثابت غیر مشخص است خواهیم‌داشت :

$$z+A^{۲}=\frac{A^{۲}(۱+Be^{۲Ax})^{۲}}{(۱-Be^{۲Ax})^{۲}} \quad , \quad z=e^{۲y}=\frac{٤A^{۲}Be^{۲Ax}}{(۱-Be^{۲Ax})^{۲}}$$

وبالاخره :

$$e^{y}=\frac{۲Ace^{Ax}}{(۱-c^{۲}e^{۲Ax})}$$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$a^{۲}\frac{d^{٤}y}{dx^{٤}}=\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

حل - معادله بالا حالت خاصی از معادله (۳۲۲ . ۵) است و لذا اگر تبدیل متغیر $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=v$ را انجام دهیم خواهیم داشت :

$$a^{۲}\frac{d^{۲}v}{dx^{۲}}=v$$

چنانچه درفصل ششم خواهیم دید این معادله دارای جواب عمومی :

$$z=c_{۱}e^{\frac{x}{a}}+c_{۲}e^{-\frac{x}{a}}$$

بوده و لذا جواب عمومی $y=Ae^{\frac{x}{a}}+Be^{-\frac{x}{a}}+Cx+D$ خواهد بود .

مثال ٤ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$c^{۳}\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}=\frac{dy}{dx}\left\{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\right\}^{۲}$$

حل ـ این معادله حالت خاصی از معادله (۳۲ . ۵) بوده و اگر از رابطه زیر استفاده کنیم :

$$\text{(I)}\qquad \frac{dy}{dx}=p\ ,\ \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=p\frac{dp}{dy}\ ,\quad \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^{۲}+p^{۲}\frac{d^{۲}p}{dy^{۲}}$$

خواهیم داشت :

$$\text{(II)}\qquad c^{۳}p\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^{۲}+p\frac{d^{۲}p}{dy^{۲}}\right]=p(۱+p^{۲})^{۲}$$

ازآنجایی که در معادله بالا y متغیر مستقل است و این معادله فاقد y است بنابراین بار دیگر میتوان از روابط زیر که مشابه رابطه (I) هستند استفاده کرد :

$$\text{(III)}\qquad \frac{dp}{dy}=v\quad ,\qquad \frac{d^{۲}p}{dy^{۲}}=v\frac{dv}{dp}$$

و پس از جایگزین نمودن روابط (III) در رابطه (II) خواهیم داشت :

$$c^{۳}\left(v^{۲}+vp\frac{dv}{dp}\right)=(۱+p^{۲})^{۲}$$

بالاخره اگر در معادله بالا تبدیل تابع $v^{۲}=z$ را انجام دهیم معادله خطی :

$$c^{۳}\left(z+\frac{۱}{۲}p\frac{dz}{dp}\right)=(۱+p^{۲})^{۲}\quad ,\quad \frac{dz}{dp}+\frac{۲}{p}z=\frac{۲(۱+p^{۲})^{۲}}{c^{۳}p}$$

بدست میآید. این معادله دارای عامل انتگرال کننده $F.I=e^{\int\frac{۲}{p}dp}=p^{۲}$ بوده ولذا جواب عمومی آن عبارت است از :

$$\frac{d}{dp}(zp^{۲})=\frac{۲p(۱+p^{۲})^{۲}}{c^{۳}}$$

$$zp^{۲}=A_{۱}+\int\frac{۲p(۱+p^{۲})^{۲}dp}{c^{۳}}=A_{۱}+\int\frac{(۱+p^{۲})^{۲}d(۱+p^{۲})}{c^{۳}}$$

$$=A_{۱}+\frac{۱}{۳c^{۳}}(۱+p^{۲})^{۳}$$

و بالنتیجه :

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)^{۲} p^{۲} = A_{۱} + \frac{۱}{۳c^{۳}}(۱+p^{۲})^{۳} \quad ,$$

$$\frac{dp}{dy} = \pm\frac{۱}{p}\sqrt{A_{۱}+\frac{(۱+p^{۲})^{۳}}{۳c^{۳}}}$$

و از آنجا معادلات پارامتری خمهای‌انتگرال p عبارت خواهند بود از :

$$y = A_{۲} \pm \int \frac{pdp}{\sqrt{A_{۱}+\frac{(۱+p^{۲})^{۳}}{۳c^{۳}}}} \quad ,$$

$$x = A_{۳} \pm \int \frac{dp}{\sqrt{A_{۱}+\frac{(۱+p^{۲})^{۳}}{۳c^{۳}}}}$$

مثال ۵- با تبدیل متغیرهای مناسبی معادله دیفرانسیل :

$$F[y^{(n-۲)} \; , \; y^{(n-۱)} \; , \; y^{(n)}] = 0$$

را به معادله مرتبه اول تبدیل کرده و از آنجا جواب عمومی معادله‌دیفرانسیل :

$$y^{(n-۲)}\, y^{(n)} = \left\{ y^{(n-۱)} \right\}^{۲}$$

را بدست آورید .

حل - اگرتبدیل متغیرهای $y^{(n-۱)} = z$ و $y^{(n-۲)} = u$ را داده ودرنظرداشته باشیم‌که $y^{(n)}$ مشتق $y^{(n-۱)}$ و $y^{(n-۱)}$ مشتق $y^{(n-۲)}$ است چنین داریم :

$$z = y^{(n-۱)} = \frac{dy^{(n-۲)}}{dx} = \frac{du}{dx} \quad ; \quad y^{(n)} = \frac{dy^{(n-۱)}}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

و از آنجا :

$$\frac{y^{(n)}}{y^{(n-۱)}} = \frac{dz}{du} \quad ; \quad y^{(n)} = z\frac{dz}{du}$$

حال اگر مقادیر $y^{(n)}$ و $y^{(n-۱)}$ و $y^{(n-۲)}$ را در معادله قرار دهیم ، معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیربدست میآید :

$$F\left(u , z , z\frac{dz}{du}\right)=0$$

پس‌از جایگزین کردن تبدیل متغیرهای فوق در معادله دیفرانسیل :

$$y^{(n-۲)}y^{(n)}=\left\{y^{(n-۱)}\right\}^{۲}$$

خواهیم داشت :

$$\frac{uzdz}{du}=z^{۲} \quad \text{و یا} \quad \frac{dz}{z}=\frac{du}{u}$$

$$z=cu \quad \text{و یا} \quad u'=cu$$

$$y^{(n-۲)}=u=c_{۱}e^{cx}$$

اگراز این رابطه $(n-۲)$ بار انتگرال بگیریم ، انتگرال عمومی عبارت خواهد شد از :

$y=ke^{cx}+$ کثیرالجمله غیر مشخصی از درجه $(n-۳)$

۳۳ . ۵ - معادلات همگن

دراین قسمت سه دسته معادله را مورد بررسی قرار میدهیم .

دسته اول - معادلات دیفرانسیلی هستند که نسبت به y و y' و $y'' , \dots , y^{(n)}$ همگن میباشند. اگر درجه همگنی این معادلات m باشد میتوان آنها را بصورت زیرنوشت:

$$y^{m}F\left(x , \frac{y'}{y} , \frac{y''}{y} , \dots , \frac{y^{(n)}}{y}\right)=0 \qquad (۵ . ۳۳)$$

فرض میکنیم u متغیر تابع جدیدی باشد که با رابطه $y=c^{\int udx}$ مشخص میگردد لذا :

$$y'=ue^{\int udx} \quad , \quad y''=(u'+u^{۲})e^{\int udx} \ , \dots ,$$

$$y^{(n)}=U_{n}e^{\int udx}$$

U_n کثیرالجمله‌یی از $u , u' , u'' , \dots , u^{(n-۱)}$ است. حال اگر روابط بالا را درعبارت (۳۳ . ۵) قرار دهیم معادله دیفرانسیل حاصل از مرتبه $(n-۱)$ ام خواهد بود .

دسته دوم - معادلاتی هستند که نسبت به x و dx همگن میباشند . بعبارت دیگر اگر درمعادله دیفرانسیل x و dx را به λx و λdx تعویض کنیم داشته باشیم:

$$F(\lambda x , y , \lambda^{-۱}y' , \lambda^{-۲}y'' , \dots , \lambda^{-n}y^{(n)})$$
$$=\lambda^{m}F(x , y , y' , y'' , \dots , y^{(n)})=0$$

این معادلات را میتوان بصورت :

$$f(y , xy' , x^{۲}y'' , \dots , x^{n}y^{(n)})=0 \qquad (۵ . ۳۳۱)$$

نوشت . اگر تبدیل متغیر مستقل $x=e^{t}$ را انجام دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{۱}{x}\cdot\frac{dy}{dt} \quad \text{و یا} \quad x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{۱}{x^{۲}}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{۱}{x}\cdot\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{۱}{x^{۲}}\cdot\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-\frac{۱}{x^{۲}}\cdot\frac{dy}{dt}$$

و از آنجا :

$$x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}-y\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)y$$

باستفاده ازروش استقراء ریاضی میتوان نشان داد که :

$$x^{r}\frac{d^{r}y}{dx^{r}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\ \cdots\ \left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)y \quad (۵ . ۳۳۲)$$

زیرا اگر رابطه بالا برای r برقرار باشد و از دوطرف رابطه بالا نسبت به x مشتق بگیریم چنین داریم :

$$rx^{r-۱}\frac{d^{r}y}{dx^{r}}+x^{r}\frac{d^{r+۱}y}{dx^{r+۱}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\cdots\right.$$
$$\left.\left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)y\right]$$
$$=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\ \cdots\ \left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)y\right]$$

رابطه بالا را با استفاده از رابطه (۵ . ۳۳۲) و $\frac{dt}{dx}=\frac{۱}{x}$ میتوان بصورت زیر نوشت :

$$x_{r}{}^{+۱}\frac{d^{r+۱}y}{dx^{r+۱}}=\frac{d^{r}}{dt^{r}}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)y$$

$$-r\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)y$$

$$=\left(\frac{d}{dt}-r\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}۱-\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)y$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-۱\right)\left(\frac{d}{dt}-۲\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-r+۱\right)\left(\frac{d}{dt}-r\right)y$$

زیرا همانطورکه در فصول بعدی نشان خواهیم داد ترتیب قرارگرفتن سازه‌ها نتیجه حاصل را تغییر نخواهد داد . ولی ازآنجایی که رابطه (۳۳۲ . ٥) برای $r=۱$ و $r=۲$ برقرار میباشد لذا این رابطه برای جمیع اعداد درست مثبت برقرار خواهد بود .

بهر صورت اگر روابطی مشابه (۳۳۲ . ٥) را درمعادله (۳۳۱ . ٥) قرار دهیم **معادله** اخیر تبدیل به معادله دیفرانسیل :

$$\Phi\left(y\,,\,\frac{dy}{dt}\,,\,\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}\,,\,\ldots\,,\,\frac{d^{n}y}{dt^{n}}\right)=0$$

که آنرا در شماره (۳۲ . ٥) بررسی نمودیم میگردد .

اگر چه میتوان معادلات دیفرانسیل :

$$F(y''\,,\;y'-xy''\,,\;y-xy'+\frac{۱}{۲}x^{۲}y'')=0 \qquad (۳۳۳ . ٥)$$

را مانند روش بالا حل کرد ولی بطریق ساده زیر میتوان جواب عمومی آنرا بدست آورد .

از رابطه (۳۳۳ . ٥) نسبت به x مشتق میگیریم . یعنی :

$$y'''\frac{\partial F}{\partial y''}+(y''-y''-xy''')\frac{\partial F}{\partial(y'-xy'')}$$

$$+(y'-y'-xy'+xy''+\frac{۱}{۲}x^{۲}y''')\frac{\partial F}{\partial(y-xy'+\frac{۱}{۲}x^{۲}y'')}=0$$

$$y''\left[\frac{\partial F}{\partial y''} - x\frac{\partial F}{\partial(y'-xy'')} + \frac{۱}{۲}x^{۲}\frac{\partial F}{\partial(y-xy'+\frac{۱}{۲}x^{۲}y'')}\right]=0$$

واضح است که معادله اخیر بازاء $y''=0$ برقرار است و از آنجا :

$$y=A+Bx+\frac{۱}{۲}Cx^{۲}$$

که درآن A و B و C مقادیر ثابتی میباشند درصورتی رابطه بالا جواب عمومی خواهد بود که $F(C, B, A)=0$ باشد .

دسته سوم - معادلاتی هستند که نسبت به dx و dy و x و y همگن باشند. یعنی اگر درمعادله (۳۳ . ٥) بجای x و y و y' و $y'' , \dots , y^{(n)}$ به ترتیب λx و λy و y' و $\lambda^{-۱}y'' , \dots , \lambda^{-n+۱}y^{(n)}$ قرار دهیم داشته باشیم :

$$\varphi(\lambda x , \lambda y , y', \lambda^{-۱}y'',\dots,\lambda^{-n+۱}y^{(n)}) = \lambda^{m}F(x , y , y' , y'' , \dots , y^{(n)})=0$$

دراینصورت معادله (۳۳ . ٥) را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$F\left(\frac{y}{x} , y' , xy'' , \dots , x^{n-۱}y^{(n)}\right)=0$$

چنانچه تبدیل متغیر $y=xu$ رادر معادله بالا انجام دهیم بسهولت معلوم میگردد که معادله حاصل بصورت (۳۲۱ . ٥) و یا بصورت همگن نوع دوم درمیاید .

مثال ۱ - معادله دیفرانسیل $xyy''-xy'^{۲}+yy'=0$ را حل کنید .

حل - معادله بالا همگن نوع اول میباشد زیرا نسبت به y و y' و y'' همگن و از درجه دوم است. حال اگر دوطرف معادله فوق را بر $y^{۲}$ تقسیم کرده و $y=e^{\int u dx}$ قرار دهیم به ترتیب چنین داریم :

$$x\frac{y''}{y}-x\left(\frac{y'}{y}\right)^{۲}+\frac{y'}{y}=0$$

و یا :

$$x(u'+u^{۲})-xu^{۲}+u=0 \quad , \quad xu'+u=0$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از :

$$xu=c \quad \text{و یا} \quad xy'=cy$$

و از آنجا جواب عمومی معادله عبارت خواهد بود از :

$$y=c_۱x^c$$

مثال ۲ ـ معادله دیفرانسیل $xy''(x^۲y''+۲xy'+۲y)+۲yy'=۰$ را حل کنید .

حل ـ معادله بالا همگن‌نوع دوم بوده واگر تبدیل متغیر $x=e^t$ را داده وپس‌از ضرب دوطرف معادله بالا در x و بااستفاده‌از رابطه (۳۳۲ . ۵) چنین داریم :

$$\left(\frac{d^۲y}{dt^۲}-\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^۲y}{dt^۲}-\frac{dy}{dt}+۲\frac{dy}{dt}+۲y\right)+۲y\frac{dy}{dt}=۰$$

و یا :

$$\left(\frac{d^۲y}{dt^۲}\right)^۲+۲y\frac{d^۲y}{dt^۲}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^۲=۰$$

از آنجایی‌که معادله بالا شامل متغیر مستقل x نیست میتوان جواب عمومی این معادله را مانند شماره (۳۲ . ۵) بدست آورد . بعبارت دیگر برای حل این معادله از روابط زیر استفاده میکنیم :

$$\frac{dy}{dt}=v \quad , \quad \frac{d^۲y}{dt^۲}=v\frac{dv}{dy}$$

دراینصورت خواهیم داشت :

$$v^۲\left(\frac{dv}{dy}\right)^۲+۲yv\frac{dv}{dy}-v^۲=۰$$

و یا :

$$v^۲=y\frac{d(v^۲)}{dy}+\frac{۱}{۴}\left[\frac{d(v^۲)}{dy}\right]^۲$$

چنانچه دراین معادله $v^۲$ را متغیرتابع و y را متغیر مستقل فرض کنیم ، معادله بالا معادله کلرو بوده و دارای جواب عمومی :

$$v^۲=۴(cy+c^۲)$$

خواهد بود .

پس‌از قرار دادن :

$$v=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx}$$

در معادله بالا و جدا نمودن متغیرها خواهیم داشت :

$$\pm\frac{dy}{۲\sqrt{cy+c^۲}}=\frac{dx}{x}$$

و یا : $\pm\sqrt{cy+c^۲}=c\,Log\,c_۱x$

و بالنتیجه انتگرال عمومی عبارت خواهد بود از :

$$y=c[(Log\,c_۱x)^۲-۱]$$

مثال ۳- معادله دیفرانسیل $x^۳y''+m(xy'-y)^۲=0$ را حل کنید .

حل - بسهولت معلوم میگردد که این معادله همگن نوع سوم میباشد . لذا اگر دو طرف معادله بالارا بر $x^۲$ تقسیم کرده وبجای y و y' و y'' به ترتیب xu و مشتقات آنرا قرار دهیم خواهیم داشت :

$$xy''+m\left(y'-\frac{y}{x}\right)^۲=0$$

$$x^۲u''+mx^۲u'^۲+۲xu'=0 \quad \text{و یا} \quad ۲xu'+x^۲u''+m(u+xu'-u)^۲=0$$

معادله بالا همگن نوع دوم بوده ولذا اگرتبدیل متغیر مذکور درشماره (۳۲ . ۵) را انجام دهیم خواهیم داشت :

$$\left(\frac{d^۲u}{dt^۲}-\frac{du}{dt}\right)+m\left(\frac{du}{dt}\right)^۲+۲\frac{du}{dt}=0$$

که در آن $x=e^t$ است .

بالاخره اگر درمعادله اخیر $\frac{du}{dt}=z$ قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$dt=\frac{mdz}{۱+mz}-\frac{dz}{z} \quad \text{و یا} \quad \frac{dz}{dt}=-z(۱+mz)$$

و از آنجا :

$$du=zdt=\frac{mzdz}{۱+mz}-\frac{zdz}{z}=-\frac{۱}{۱+mz}dz$$

$$e^{mu}\left(۱+m\frac{du}{dt}\right)=c \quad \text{و یا} \quad mu\,Log(۱+mz)=Log\,c$$

و یا : $\frac{d}{dx}(xe^{mu})=c$ و یا $e^{mu}\left(۱+mx\frac{du}{dx}\right)=c$

اگر بار دیگر از معادله اخیر انتگرال بگیریم چنین داریم :

$$e^{\frac{my}{n}}=c+\frac{c_۱}{x} \quad \text{و یا} \quad xe^{mu}=cx+c_۱$$

مثال ۴ - مطلوب است تعیین صورت کلی معادلات دیفرانسیلی که نسبت به y و xy' و x²y'' همگن باشند و سپس جواب عمومی این نوع معادلات را بدست آورید. واز آنجا معادله دیفرانسیل اولر مرتبه دوم :

$$x^۲y''-(\alpha+\beta-۱)xy'+\alpha\beta y=0$$

را که در آن α و β مقادیر ثابتی هستند حل کنید. همچنین جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xyy''=y'(۲xy'+ay)$ را بدست آورید.

حل - صورت کلی این نوع معادلات $F\left(\frac{xy'}{y}, \frac{x^۲y''}{y}\right)=0$ بوده و اگر فرض کنیم معادله اخیر را بتوان نسبت به $\frac{x^۲y''}{y}$ حل کرد خواهیم داشت :

$$x^۲y''=yf\left(\frac{xy'}{y}\right)$$

معادله بالا توأماً همگن نوع اول و دوم بوده و لذا همگن نوع سوم نیز خواهد بود. حال اگر متغیر تابع جدید u را که با رابطه $u=\frac{xy'}{y}$ مشخص میگردد درنظربگیریم چنین داریم :

$$xy'=uy \quad , \quad xy''=u'y+(u-۱)y'$$

$$x^۲y''=u'xy+u(u-۱)y$$

و بالنتیجه :

$$xu'+u(u-۱)=f(u)$$

دراین معادله متغیرها از یکدیگر جدا میشوند و لذا :

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{f(u)-u(u-۱)} \quad , \quad \frac{dy}{y}=\frac{udu}{f(u)-u(u-۱)}$$

چنانچه از دو معادله بالا انتگرال بگیریم معادلات پارامتری خمهای انتگرال که شامل دو مقدارثابت میباشد بدست میآید. چنانچه تبدیل متغیرهای بالا را در معادله دیفرانسیل اولر :

$$x^۲y''-(\alpha+\beta-۱)xy'+\alpha\beta y=o$$

انجام دهیم معادله :

$$xu'+(u-\alpha)(u-\beta)=o$$

بدست میآید . اگر در معادله اخیر متغیرها را از یکدیگر مجزا نموده و انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{u-\alpha}{u-\beta}=cx^{\alpha-\beta} \quad \text{و یا} \quad \frac{c\alpha x^{\alpha}-\beta x^{\beta}}{cx^{\alpha}-x^{\beta}}=u=\frac{xy'}{y}$$

یعنی :

$$\frac{d(cx^{\alpha}-x_{\beta})}{cx^{\alpha}-x^{\beta}}=\frac{dy}{y}$$

ازآنجا $y=c_۱(cx^{\alpha}-x^{\beta})$ و بالنتیجه جواب عمومی را میتوان بصورت :

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}$$

که درآن A و B مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند نوشت. برای حل معادله :

$$xyy''=y'(۲xy'+ay)$$

ابتدا آنرا بشکل $x^۲y''=y\frac{xy'}{y}\left(۲\frac{xy'}{y}+a\right)$ نوشته وسپس تبدیل متغیرهای بالا را دراین معادله انجام میدهیم تا معادله $xu'=u(u+a+۱)$ بدست آید . دراینصورت چنین داریم :

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u(u+a+۱)} \quad , \quad \frac{dy}{y}=\frac{du}{u+a+۱}$$

$$x^{a+۱}=c\,\frac{u}{u+a+۱} \quad , \quad y=c_۱(u+a+۱)$$

و پس‌از حذف u انتگرال عمومی عبارت خواهد بود از :

$$y=\frac{١}{A+Bx^{a+١}}$$

٤ . ٥ - معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل :

$$f(x , y , y' , \dots , y^{(n)})=p(x) \qquad \text{(٥ . ٤)}$$

را درصورتی کامل گوییم که بتوان آنرا از مشتق گیری از عبارت :

$$g(x , y , y' , \dots , y^{(n-١)})=g(x)$$

که مرتبه آن یک مرتبه کمتر از مرتبه معادله (٥ . ٤) است بدست آورد . مثلاً معادله :

$$٣y^{٢}y''' + ١٤yy'y'' + ٤(y')^{٣} + ١٢y'y'' = ٢x$$

معادله دیفرانسیل کامل میباشد زیرا میتوان آنرا از مشتق گیری از معادله :

$$٣y^{٢}y'' + ٤y(y')^{٢} + ٦(y')^{٢} = x^{٢} + c$$

بدست آورد .

اکنون میخواهیم شرطی که یک معادله دیفرانسیل کامل باشد بیابیم و برای این منظور ابتدا بررسی خود را به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n ام محدود میکنیم . همانطورکه‌درشماره(٢ . ١٠) متذکرشدیم این نوع معادلات‌را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$a_{٠}(x)\frac{d^{n}y}{dx^{n}} + a_{١}(x)\frac{d^{n-١}y}{dx^{n-١}} + a_{٢}(x)\frac{d^{n-٢}y}{dx^{n-٢}} \qquad \text{(٥ . ٤١)}$$

$$+\cdots+a_{n-١}(x)\frac{dy}{dx} + a_{n}(x)y=q(x)$$

درحالت کلی معادله (٥ . ٤١) لزومی ندارد که کامل باشد ولی ذیلاً نشان خواهیم داد که اگر روابطی بین ضرایب $a_{٠}$, $a_{١}$, … , a_{n} برقرار باشد معادله کامل خواهد بود یعنی میتوان از آن یکبار انتگرال گرفت .

برای سهولت اگر مانند معمول مشتق‌نسبت به x را با (') نشان‌دهیم باانتگرال گیری جزء بجزء میتوان صحت روابط زیر را تأیید کرد :

$$\int a_{n}ydx=\int a_{n}ydx$$

$$\int a_{n-۱}\frac{dy}{dx}dx=-\int a'_{n-۱}y\,dx+a_{n-۱}y$$

$$\int a_{n-۲}\frac{d^۲y}{dx^۲}dx=\int a''_{n-۲}y\,dx-a'_{n-۲}y+a_{n-۲}y'$$

$$\int a_{n-۳}\frac{d^۳y}{dx^۳}dx=-\int a'''_{n-۳}y\,dx+a''_{n-۳}y-a'_{n-۳}y'+a_{n-۳}y''$$

. . . .

. . . .

. . . .

بااستفاده از روابط بالا اگر از دوطرف رابطه (۴۱ . ۵) انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\int q(x)dx+c_۱=\int(a_n-a'_{n-۱}+a''_{n-۲}-a'''_{n-۳}+\cdots)y\,dx$$

$$+(a_{n-۱}-a'_{n-۲}+a''_{n-۳}-\cdots)y$$

$$+(a_{n-۲}-a'_{n-۳}+a''_{n-۳}-\cdots)y'$$

$$+(a_{n-۳}-a'_{n-۴}+a''_{n-۵}+\cdots)y''+\cdots$$

$$=\int Q_n y\,dx+Q_{n-۱}y+Q_{n-۲}y'+Q_{n-۳}y''+\cdots+Q_۰\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}$$

که در آن قانون تشکیل ضرایب $Q_n , \ldots , Q_۱ , Q_۰$ برای جمیع ضرایب یکسان بوده و بخصوص :

$$Q_۰=a_۰ \quad \text{و} \quad Q_۱=a_۱-a'_۰$$

حال شرط لازم‌وکافی برای آنکه از عبارت سمت چپ رابطه (۴۱ . ۵) بتوان یکبار انتگرال گرفت آن است که $Q_n=0$ باشد یعنی :

$$a_n-a'_{n-۱}+a''_{n-۲}-a'''_{n-۳}+\cdots+(-۱)^n a_۰^{(n)}=0 \qquad (۵ . ۴۲)$$

اگر شرط فوق برقرار باشد **انتگرال اول** معادله (۴۱ . ۵) عبارت خواهد بود از :

$$Q_۰\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}+Q_۱\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}+\cdots+Q_{n-۱}y \qquad (۵ . ٤۳)$$
$$=\int q(x)dx+c_۱$$

$c_۱$ مقداری است ثابت و غیر مشخص .

حال اگر ضرایب Q دررابطه‌یی مشابه بارابطه (٤۲ . ۵) صدق کند یعنی :

$$Q_{n-۱}-\frac{dQ_{n-۲}}{dx}+\frac{d^۲Q_{n-۳}}{dx^۲}+\cdots+(-۱)^{n-۱}\frac{d^{n-۱}Q_۰}{dx^{n-۱}}=0$$

دراین‌حالت میتوان‌از معادله (٤۳ . ۵) یک بار دیگر انتگرال گرفت. این‌عمل را میتوان تامادامی‌که ضرایب معادلات حاصل درشرایط مشابه با رابطه (٤۲ . ۵) صدق میکند ادامه داد .

دربعضی از موارد عملاً میتوان با بررسی سطحی تعیین نمود که آیا معادله قابل انتگرال‌گیری میباشد یاخیر. زیرا دربسیاری از موارد ضرایب $a_۰ , a_۱ , \ldots , a_n$ بشکل bx^m (b مقداری است ثابت) ویا مجموع روابطی بشکل bx^m میباشد. واضح است که عبارت $x^m \frac{d^ny}{dx^n}$ دیفرانسیل کامل خواهد بود هرگاه m کوچکتر از n باشد زیرا اگراز این عبارت جزء بجزء انتگرال بگیریم خواهیم‌داشت :

$$x^m\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}-mx^{m-۱}\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}+m(m-۱)x^{m-۲}\frac{d^{n-۳}y}{dx^{n-۳}}$$
$$+\cdots+(-۱)^m m!\frac{d^{n-m-۱}y}{dx^{n-m-۱}}$$

اگر $n=m+۱$ باشد جمله آخر $(-۱)^m m!\,y$ خواهد بود .

انتگرال اول معادله دیفرانسیل مرتبه n ام دیفرانسیل کامل را میتوان بطریق زیر بدست آورد .

درمعادله‌دیفرانسیل کامل مرتبه nام که‌ازمشتق معادله‌دیفرانسیل مرتبه $(n-۱)$ام بدست میآید درجه $\frac{d^ny}{dx^n}$ برابر یک است‌زیرا درغیراین‌صورت معادله کامل نخواهدبود.

معادله را بصورت $v=0$ نوشته و ازعبارت vdx انتگرال میگیریم[۱]. درعبارت

vdx فرض میکنیم که v فقط تابع $\frac{d^{n-١}y}{dx^{n-١}}$ که مشتق آن $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$ است میباشد . اگر $u_١$ انتگرال تابع اخیر باشد واضح است که عبارت $vdx - du_١$ حداکثر از مرتبه $(n-١)$ ام بوده و چون دیفرانسیل کامل نیز میباشد لذا درجه بزرگترین مشتق y موجود در معادله باید یک باشد . با تکرار عمل فوق بتعداد دفعات لازم عبارتی مانند :

$$vdx - du_١ - du_٢ - du_٣ - \cdots = 0$$

بدست میاید و از آنجا یک انتگرال معادله عبارت میگردد از :

$$u_١ + u_٢ + \cdots = c$$

مثال ١ - انتگرال اول معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$(x^٣ - ٢x)y''' + (٨x^٢ - ٥)y'' + ١٥xy' + ٥y = 0$$

حل - اگر معادله فوق را با رابطه (٤١ . ٥) مقایسه کنیم خواهیم داشت :

$$\text{(I)} \quad a_0(x) = x^٣ - ٢x \;,\; a_١(x) = ٨x^٢ - ٥ \;,\; a_٢(x) = ١٥x \;,\; a_٣(x) = ٥$$

برای آنکه این معادله کامل باشد باید شرط (٤٢ . ٥) برای ضرایب معادله برقرارباشد. یعنی :

$$a_٣ - a_٢ + a_١'' - a_0''' = 0$$

حال اگر روابط (I) را در عبارت بالا جایگزین کنیم خواهیم داشت :

$$٥ - ١٥ + ١٦ - ٦ = 0$$

پس معادله دیفرانسیل کامل بوده و انتگرال اول آن عبارت خواهد بود از:

$$\text{(II)} \qquad (x^٣ - ٢x)y'' + (٥x^٢ - ٣)y' + ٥xy = c$$

تبصره - معادله (II) دیفرانسیل کامل نیست زیرا ضرایب این معادله در شرط (٤٢ . ٥) صدق نمیکند .

مثال ٢ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\text{(I)} \qquad xy''' + (x^٢ + x + ٣)y'' + (٤x + ٢)y' + ٢y = 0$$

حل - ضرایب این معادله در شرط (۴۲ . ۵) صدق نموده و لذا معادله دیفرانسیل کامل میباشد .

عبارت سمت چپ رابطه (I) را درنظر میگیریم . برای آنکه جمله اول این عبارت یعنی xy'' را بدست آوریم باید از xy'' مشتق بگیریم یعنی $d(xy'')=xy'''+y''$. حال اگر این جمله را از عبارت واقع در سمت چپ رابطه (I) حذف نماییم عبارت :

$$(x^۲+x+۲)y''+(۴x+۲)y'+۲y$$

باقی خواهد ماند. برای آنکه جمله $(x^۲+x+۲)y''$ را بدست آوریم باید از :

$$(x^۲+x+۲)y'$$

نسبت به x مشتق گرفت. یعنی :

$$\frac{d}{dx}[(x^۲+x+۲)y']=(x^۲+x+۲)y''+(۲x+۱)y'$$

حال اگر این مقدار را از عبارت $(x^۲+x+۲)y''+(۴x+۲)y'+۲y$ حذف کنیم عبارت $(۲x+۱)y'+۲y$ باقی میماند که دیفرانسیل $(۲x+۱)y$ است. بنابراین معادله (I) کامل بوده و مشتق معادله :

$$xy''+(x^۲+x+۲)y'+(۲x+۱)y=c_۱ \tag{II}$$

میباشد .

ضرایب معادله (II) نیز در شرط (۴۲ . ۵) صدق مینماید و بالنتیجه این معادله دیفرانسیل کامل خواهد بود. برای یافتن انتگرال اول آن اگر مانند روش فوق عمل کنیم به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{d}{dx}(xy')=xy''+y'$$

$$(x^۲+x+۱)y'+(۲x+۱)y=\frac{d}{dx}(x^۲+x+۱)y$$

بنابراین معادله (II) کامل بوده و مشتق معادله :

$$xy'+(x^۲+x+۱)y=c_۱x+c_۲ \tag{III}$$

میباشد . این معادله، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بوده ودارای عامل انتگرال کننده $xe^{\frac{۱}{۲}x(x+۲)}$ است و لذا جواب عمومی معادله دیفرانسیل (I) عبارت خواهد بود از :

$$xye^{\frac{۱}{۲}x(x+۲)} = c_{۱}\int xe^{\frac{۱}{۲}x(x+۲)}dx + c_{۲}\int e^{\frac{۱}{۲}x(x+۲)}dx + c_{۳}$$

عملیات بالا را درجدول زیر خلاصه کرده‌ایم وبطورکلی در حل مسائل مشابه نیز میتوان ازاین روش استفاده کرد :

$$\begin{array}{lr}
 & xy''' + (x^{۲}+x+۳)y'' + (٤x+۲)y' + ۲y = 0 \\
xy'' & xy''' \qquad\qquad\qquad y'' \\ \hline
 & (x^{۲}+x+۲)y'' + (٤x+۲)y' + ۲y \\
(x^{۲}+x+۲)y' & \underline{(x^{۲}+x+۲)y'' + (۲x+۱)y'} \\
 & (۲x+۱)y' + ۲y \\
(۲x+۱)y & (۲x+۱)y' + ۲y \\
\text{(II)} & xy'' + (x^{۲}+x+۲)y' + (۲x+۱)y = c_{۱} \\
xy' & xy'' + \qquad\qquad\qquad y' \\ \hline
 & (x^{۲}+x+۱)y' + (۲x+۱)y \\
(x^{۲}+x+۱)y & (x^{۲}+x+۱)y' + (۲x+۱)y \\
\end{array}$$

$$\text{(III)}\quad xy' + (x^{۲}+x+۱)y = c_{۱}x + c_{۲}$$

مثال ۳ ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\text{(I)}\quad ۲yy''' + ٦y''y' = -\frac{۱}{x^{۲}}$$

حل ـ بااستفاده از روش بالا به‌ترتیب زیر چنین داریم :

$$\begin{array}{lr}
 & ۲yy''' + ٦y'y'' \\
۲yy'' & \underline{۲yy''' + ۲y'y''} \\
 & ٤y'y'' \\
۲y'^{۲} & ٤y'y'' \\
\end{array}$$

لذا معادله (I) دیفرانسیل کامل بوده و پس‌از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$۲yy'' + ۲y'^۲ = -\int\frac{dx}{x^۲} = \frac{۱}{x} + ۲c_۱$$

اگرباردیگر از رابطه بالاانتگرال‌بگیریم معادله $۲yy'' = Log x + ۲c_۱x + c_۲$ که‌دارای جواب $y^۲ = xLog x + c_۱x^۲ + c_۲x + c_۳$ است بدست میاید .

مثال ٤- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$(۱+۳xy^۲)y'' + ۹(y^۲+۲xyy')y'' + ۱۸yy'^۲ + ٦xy'^۳ = ٦ \qquad \text{(I)}$$

حل - برای حل این معادله به‌ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$\begin{array}{ll}
 & (۱+۳xy^۲)y'' + ۹y^۲y'' + ۱۸xyy'y'' + ۱۸yy'^۲ + ٦xy'^۳ \\
(۱+۳xy^۲)y'' & (۱+۳xy^۲)y'' + ۳y^۲y'' + ٦xyy'y'' \\
\hline
 & ٦y^۲y'' + ۱۲xyy'y'' + ۱۸yy'^۲ + ٦xy'^۳ \\
٦y^۲y' & ٦y^۲y'' \qquad\qquad + ۱۲yy'^۲ \\
\hline
 & ۱۲xyy'y'' + ٦yy'^۲ + ٦xy'^۳ \\
٦xyy'^۲ & ۱۲xyy'y'' + ٦yy'^۲ + ٦xy'^۳ \\
\hline
\end{array}$$

لذا معادله (I) دیفرانسیل کامل بوده و پس‌از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$(۱+۳xy^۲)y'' + ٦y^۲y' + ٦xyy'^۲ = ٦x + ۲c_۱ \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{array}{ll}
(۱+۳xy^۲)y' & (۱+۳xy^۲)y'' + ٦y^۲y' + ٦xyy'^۲ \\
 & (۱+۳xy^۲)y'' + ۳y^۲y' + ٦xyy'^۲ \\
\hline
y^۳ & +۳y^۲y' \\
 & ۳y^۲y' \\
\hline
\end{array}$$

بطریق مشابه رابطه (II) نیز انتگرال کامل بوده و دارای انتگرال اول:

$$(۱+۳xy^۲)y' + y^۳ = ۳x^۲ + ۲c_۱x + c_۲$$

است . بسهولت معلوم میگردد که معادله اخیر نیز کامل بوده و دارای جواب :

$$xy^٣+y=x^٣+c_١x^٢+c_٢x+c_٣$$

میباشد .

مثال ٥- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$(I)\qquad x^٣y'''+٥x^٢y''+(٢x-x^٣)y'-(٢+x^٢)y=٤٠x^٣-٤x^٥$$

حل - بسهولت معلوم میگردد که ضرایب این معادله درشرط (٤٢ . ٥) صدق نمیکند واین معادله دیفرانسیل کامل نیست. برای آنکه تحقیق نماییم آیا این معادله دارای عامل انتگرال کننده‌یی مانند x^m میباشد دوطرف معادله (I) را در x^m ضرب مینماییم :

$$x^{m+٣}y'''+٥x^{m+٢}y''+(٢x^{m+١}-x^{m+٣})y'-(٢x^m+x^{m+٢})y$$
$$=(٤٠x^٣-٤x^٥)x^m$$

شرط (٤٢ . ٥) بصورت زیر درمیآید :

$$-(٢x^m+x^{m+٢})-٢(m+١)x^m+(m+٣)x^{m+٢}$$
$$+٥(m+٢)(m+١)x^m-(m+٣)(m+٢)(m+١)x^m$$
$$=(m+١)x^{m+٢}+(m+٢)(m-m^٢)x^m=0$$

رابطه فوق بازاء $m=-٢$ صادق بوده و لذا $x^{-٢}$ یکی‌ازعاملهای انتگرال کننده است. با بکار بردن این عامل انتگرال کننده رابطه (I) بصورت زیر نوشته میشود :

$$(I)\qquad xy'''+٥y''+\left(\frac{٢}{x}-x\right)y'-\left(\frac{٢}{x^٢}+١\right)y=٤٠x-٤x^٣$$

$$\begin{array}{ll}
xy'' & \underline{xy'''+y''} \\
٤y'+\left(\frac{٢}{x}-x\right)y & ٤y''+\left(\frac{٢}{x}-x\right)y'-\left(\frac{٢}{x^٢}+١\right)y \\
 & \underline{٤y''+\left(\frac{٢}{x}-x\right)y'-\left(\frac{٢}{x^٢}+١\right)y}
\end{array}$$

ازآنجا یک انتگرال اول معادله (I) عبارت خواهد بود از :

$$xy''+٤y'+\left(\frac{٢}{x}-x\right)y=٢٠x^٢-x^٣+c_١$$

تبدیل متغیر $y=\frac{v}{x^۲}$ معادله بالا را تبدیل به معادله $v''-v=۲۰x^۳-x^۵+kx$ مینماید و همانطورکه در فصل ششم نشان‌خواهیم داد ، این معادله دارای جواب عمومی $v=x^۲y=c_۱e^x+c_۲e^{-x}+c_۳x+x^۵$ میباشد .

مثال ۶- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\text{(I)} \qquad x\cos y y'''-۳x\sin y y'y''-\cos y y''-x\cos y(y')^۳+\sin y(y')^۲ +x\cos y y'-\sin y=0$$

حل - چون $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin y}{x}\right)=\frac{x\cos y y'-\sin y}{x^۲}$ میباشد از وجود دوجمله‌آخر عبارت بالا پی‌میبریم که‌ممکن‌است $\frac{۱}{x^۲}$ یکی از عوامل انتگرال کننده معادله باشد . اگر دوطرف رابطه(I) را در $\frac{۱}{x^۲}$ ضرب نموده و سپس از آن انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{\cos y y''-\sin y(y')^۲}{x}+\frac{\sin y}{x}=c_۱ \quad , \quad \cos y y''-\sin y(y')^۲+\sin y=c_۱x$$

تبدیل متغیر $\sin y=z$ این معادله را مبدل به معادله $z''+z=c_۱x$ که دارای جواب عمومی :

$$z=\sin y=c_۱x+c_۲\cos x+c_۳\sin x$$

است مینماید .

مثال ۷- یک انتگرال اول معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$y+۳xy'+۲yy'^۳+(x^۲+۲y^۲y')y''=0$$

حل - این معادله مرتبه دوم است و لذا تبدیل متغیر $\frac{dy}{dx}=p$ را انجام میدهیم . سمت‌چپ عبارت‌بالا پس‌از تبدیل متغیرفوق‌وبااستفاده از رابطه $\frac{dp}{dx}=y''$ بصورت‌زیردرمیآید:

$$v=y+۳xp+۲yp^۳+(x^۲+۲y^۲p)\frac{dp}{dx}$$

$$\text{(I)} \qquad vdx=(y+۳xp+۲yp^۳)dx+(x^۲+۲y^۲p)dp$$

اکنون فرض میکنیم درعبارت vdx فقط p تغییرکند . یعنی :

$$x^۲p+y^۲p^۲=u_۱ \quad ; \quad du_۱=(x^۲+۲y^۲p)dp$$

اکنون محدودیت فوق را رفع نموده و از عبارت $u_۱$ دیفرانسیل میگیریم . یعنی :

$$du_۱=(۲xp+۲yp^۳)dx+(x^۲+۲y^۲p)dp \qquad \text{(II)}$$

پس‌ازکسر نمودن روابط (I) و (II) خواهیم داشت :

$$vdx-du_۱=(y+xp)dx=d(xy)$$

و ازآنجا یک انتگرال اولیه معادله عبارت میگردد از :

$$\int vdx=u_۱+xy+A=k \quad ; \quad \int vdx=x^۲p+y^۲p^۲+xy=c$$

مسائل

۱- جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید .

الف - $y''+y'^۲=۱$. ب - $y''+(x-a)y'^۳=0$.

پ - $۲yy''=y'^۲$. ت - $yy''+\frac{۱}{۲}y'^۲=y^{-۲}$.

ث - $x(۱-x)y''+۲(۱-x)y'=۱$.

ج - $y^{(٤)}\cdot y^{(۳)}=۱$. چ - $y'''+y''=x^۲$.

ح - $y'''^۲+xy'''-y''=0$.

خ - $(۱+۲x)y'''+٤xy''-(۱-۲x)y'=e^{-x}$.

د - $(۱+x^۲)y''+۲xy'=۲x^{-۳}$.

ذ - $(۲x-۳)y'''-(٦x-۷)y''+٤xy'-٤y=۸$.

ر - $(۲x^۳-۱)y'''-٦x^۲y''+٦xy'=0$.

ز - $(۱-x^۲)y''-xy'=۲$.

س - $y''=y'^۳+y'$. ش - $yy''=۲y'^۲-۲y'$.

ص - $yy''+y'^{۲}=y^{۲}$.   ض - $y''+y'^{۲}+۱=٠$.

ط - $yy''+y'^{۳}=٠$.   ظ - $yy''+y'^{۲}=۲$.

ع - $yy''=y'^{۲}(۱-y'\cos y+yy'\sin y)$.

غ - $yy''-y'^{۲}=y\,Log\,y$.   ف - $ay''=(۱+y'^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$.

ق - $ay''=(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$.   ك - $a^{۳}y'''y''=(۱+c^{۲}y''^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$.

گ - $x^{۲}y''''=\lambda y''$.   ل - $aby''=(y^{۲}+a^{۲}y'^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$.

م - $y(۱-Log\,y)y''+(۱+Log\,y)y'^{۲}=٠$.

ن - $yy''+(y'^{۲}+a^{۲}y''^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=y'^{۲}$.

۲- نوع همگنی معادلات زیر را تعیین کرده و جواب عمومی آنها را بدست‌آورید.

الف - $yy''=y'^{۲}-y'^{۳}$.

ب - $xy^{۲}y''-xyy'^{۲}+(y^{۲}+a)y'=٠$.

پ - $yy''+y'^{۲}+۲a^{۲}y^{۴}=٠$.

ت - $y''(y-۱)=۲y'^{۲}$.   ث - $xyy''+ny'(xy'-y)=٠$.

ج - $x^{۲}yy''=۲(xy')^{۲}+axyy'+ay^{۲}$.

چ - $(۲yy''-y'^{۲})x^{۲}+y^{۲}=٠$.

ح - $x(۱-x)y''+۲(۱-x)y'=۱$.

خ - $x^{۲}y''=(mx^{۲}y'^{۲}+ny^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$.

د - $ny''(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$.

ذ - $nx^{۳}y''=(y-xy')^{۲}$.   ر - $x^{۴}y''=(y-xy')^{۳}$.

۳ـ نشان دهید که جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$yy''=(a+۱)y'^{۲}+byy'+cy^{۲}$$

بستگی به وضع ریشه‌های معادله درجه دوم $au^{۲}+bu+c=0$ دارد و برحسب آنکه $b^{۲}-۴ac \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} 0$ باشد جواب عمومی را درهریک از این حالات بدست آورید .

۴ـ نشان دهید عبارت $(y-x)f(y')=A$ یک انتگرال اول معادله :

$$(y-x)y''+F(y')=0$$

است و از آنجا جواب عمومی معادله $F(p)=(۱+p)(۱+p^{۲})$ را بدست آورید .

۵ـ نشان دهید تبدیل متغیر $y=u^{\alpha}$ (و یا $y=e^{u}$ درصورتیکه $m=۱$ باشد) در معادله دیفرانسیل $yy''=my'^{۲}+ayy'+by^{۲}+cy^{m+۱}$ آنرا مبدل به معادله خطی مینماید و ازآنجا جواب عمومی هریک از معادلات زیر را بدست آورید .

الف ـ $yy''=۲y'^{۲}-۲y^{۳}$. ب ـ $۲yy''=۶y'^{۲}+y^{۲}-۳y^{۴}$.

پ ـ $yy''=y'^{۲}+yy'$. ت ـ $۳yy''=۲y'^{۲}+۳۶y^{۲}$.

۶ـ معادلات دیفرانسیل کامل زیر را حل کنید .

الف ـ $y''\sin x-y'\cos x+۲y\sin x=\cos x$.

ب ـ $xyy''+xy'^{۲}+۲yy'=۱$.

پ ـ $(x+x^{۳})y'''+(۲+۸x^{۲})y''+۱۴xy'+۴y=0$.

ت ـ $x^{۳}y'''+(۳x^{۲}+x+۱)y''+(x^{۳}+۱)y'+۳x^{۲}y=x^{۳}$.

ث ـ $۲yy'''+۲(y+۳y')y''+۲y'^{۲}=۲$.

ج ـ $(x+۲y)y''+۲y'^{۲}+۲y'=۲$.

چ ـ $(۱+۲y+۳y^{۲})y'''+۶y'(y''+y'^{۲}+۳yy'')=x$.

ح ـ $۳x(y^{۲}y'''+۶xv'y''+۲y'^{۳})-۳y(yy''+۲y'^{۲})=-\frac{۲}{x}$.

راهنمایی ـ $x^{۲}$ عامل انتگرال کننده است .

خ - $yy''' + ۳y'y'' - ۲yy'' - ۲y'^۲ + yy' = e^{۳x}$.

راهنمایی - e^{-x} عامل انتگرال کننده است . این مسئله را با تبدیل متغیر $y^۲ = v$ حل کنید .

د - $۲(y+۱)y'' + ۲y'^۲ + y^۲ + ۲y = ۰$.

راهنمایی - $y^۲ + ۲y = v$.

۷- نشان دهید اگر توابع $P(x)$ و $Q(x)$ در رابطه $P' + P = ۱ + Q$ صدق نمایند، معادله دیفرانسیل $y'' + Py' + Qy = ۰$ دارای عامل انتگرال کننده e^x خواهد بود و از آنجا جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + xy' + xy = ۰$ که در شرایط $x = ۱$, $y = ۱$ و $y' = ۰$ صدق میکند بدست آورید .

۸- شرط کامل بودن متوالی معادله (۵ . ۴۱) رابرحسب ضرایب $a_۰$, $a_۱$, ... , a_n بدست آورید .

۹- یک انتگرال اول معادلات :

$$xy''' + (x^۲ - ۳)y'' + ۴xy' + ۲y = ۰ \qquad \text{(I)}$$

$$۲x + y^۲ + ۲xyy' + xy'' + x^۲y''' = y' \qquad \text{(II)}$$

را بدست آورده و نشان دهید که اگر دوطرف معادله :

$$x^۲y''' + ۴xy'' + (x^۲ + ۲)y' + ۳xy = ۲$$

را در قوه‌ای از x ضرب کنیم ، این معادله کامل خواهد گردید و از آنجا جواب عمومی را بدست آورید .

۱۰- یک انتگرال اول معادلات زیر را بدست آورید .

الف - $yy'' - yx^۲y' = xy^۲$.

ب - $x^۲y''' + xy'' + (۲xy - ۱)y' + y^۲ = ۰$.

۱۱- نشان دهید اگر معادله $y'' + \frac{a^۲y}{(x^۲ + y^۲)^۲} = ۰$ را در $۲x^۲y' - ۲xy$ ضرب نماییم معادله دیفرانسیل کامل میگردد و از آنجا یک انتگرال اول و جواب عمومی معادله را بدست آورید .

۱۲- اگر معادله دیفرانسیل $y''+\frac{\alpha y}{(\beta y^۲+\gamma+۲\delta x+\eta x^۲)^۲}=o$ دارای عامل انتگرال کننده‌یی بصورت $X_۱y'+X_۲y$ باشد یک انتگرال اول را بدست آورید .

جوابها

۱- الف : $y=\mathit{Log}|Ae^x+Be^{-x}|$.

ب : $x=Ae^y+Be^{-y}+a$.

پ : $y=(A+Bx)^۲$.

ت : $٤(Ay-۲)(Ay+٤)^۲=۹A^٤(x+B)^۲$.

ث : $y=A+\frac{B}{x}+\frac{۱-x}{x}\mathit{Log}|۱-x|$.

ج : $۱۰٥y=\pm(۲x+c_۱)^{\frac{۱}{۲}}+c_۲x^۲+c_۳x+c_٤$.

چ : $y=c_۱e^{-x}+c_۲x+c_۳+\frac{x^۲(x^۲-٤x+۱۲)}{۱۲}$.

ح : $y=\frac{۱}{۳}cx^۳+۲c^۲x^۲+c_۲x+c_۳$.

خ : $y=Ae^{-x}+B(x^۲+۳x)e^{-x}+c+\frac{۱}{۲}xe^{-x}$.

د : $y=c_۱+c_۲\mathrm{arc}\mathit{tg}x+\frac{۱}{x}$.

ذ : $y=c_۱x+c_۲e^x+c_۳e^{۲x}-۲$.

ر : $y=c_۱(x^٤+٤x)+c_۲x^۲+c_۳$.

ز : $\mathit{Log}c_۱x=\int\frac{adu}{۱-۲au+(۱-u)^{\frac{۱}{۲}}}$, $y+c_۲=\int x^۲udx$.

ژ : $y=A+B\mathrm{arc}\mathit{sin}x+(\mathrm{arc}\mathit{sin}x)^۲$.

س : $y=\mathrm{arc}\mathit{sin}\,c_۲e^x+c_۱$.

ش : $Ay = tg(Ax+B)$.

ص : $y^{۲} = c_{۱} \sinh(\sqrt{۲}\,x + c_{۲})$.

ض : $y = Log\cos(x - c_{۱}) + c_{۲}$.

ط : $x = c_{۱} + c_{۲}y + yLogy$.

ظ : $y^{۲} = ۲x^{۲} + c_{۱}x + c_{۲}$.

ع : $x = c_{۱} + c_{۲}Logy + \sin y$.

غ : $(Logy + c)^{۲} = Ae^{x}$.

ف : $y - A = a\,ch\left(\frac{x}{a} - B\right)$.

ق : $(x-A)^{۲} + (y-B)^{۲} = a^{۲}$.

ك : $t = y''$ را بین معادلات $x = A + \frac{a^{۳}}{c^{۲}}(۱ + c^{۲}t^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$,

$$P = B + \frac{a^{۳}}{۲c^{۳}}\left\{ct(۱+c^{۲}t^{۲})^{\frac{۱}{۲}} - Log\left[ct + (۱+c^{۲}t^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\right]\right\},$$

$$y - c = \int p \frac{a^{۳}t}{(۱+c^{۲}t^{۲})^{\frac{۱}{۲}}} dt$$

حذف کنید .

گ : $y = C + Dx + Ax^{\frac{۵}{۲}+\mu} + Bx^{\frac{۵}{۲}-\mu}$ که درآن :

$$\mu = \left(\lambda + \frac{۱}{٤}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

ل : اگر $y = pt$ باشد معادلات پارامتری خمهای انتگرال عبارت خواهند بود از :

$$\frac{dy}{y}=\frac{-udu}{u^۲-cu-۱} \quad , \quad dx=\frac{audu}{(u^۲-cu-۱)(u^۲-۱)^{\frac{۱}{۲}}}$$

که در آن : $c=\frac{a}{b}$

م : $Logy=\frac{x+A}{x+B}$.

ن : $x+B=\frac{۱}{A}Log\left[Ay+(۱+a^۲A^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right]$.

۲- الف : همگن نوع سوم ، $y+ALog|y|+B=x$.

ب : همگن نوع دوم ، $Ay^۲+a=Bx^A$.

پ : همگن نوع اول ، $y^۲=A\cos ۲ax+B\sin ۲ax$.

ت : همگن نوع دوم ، $y=\frac{A+x}{B+x}$.

ث : همگن نوع اول و دوم و سوم ، $y^{n+۱}=Ax^{n+۱}+B$ (هنگامیکه $n=-۱$ است $y=Ax^B$ میباشد) .

ج : همگن نوع اول و دوم وسوم ، $y=\frac{۱}{Ax+Bx^a}$.

چ : همگن نوع اول و دوم و سوم ، $y=x(A+BLog|x|)^۲$.

ح : غیر همگن ، $y=A+\frac{B}{x}+\frac{۱-x}{x}Log|۱-x|$.

خ : همگن نوع سوم ، با تبدیل متغیرهای $y=xz$, $x=e^\theta$, $\frac{dz}{d\theta}=v$, $v=zs$ جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$\int\frac{ds}{[m(۱+s)^۲+n]^{\frac{۱}{۲}}-s^۲-s}=a^{\theta+c_۱}$$

د : همگن نوع‌سوم ، جواب عمومی‌را میتوان مانند شماره (۳ . ۵) بدست

آورد ، ولی اگرتبدیل متغییرقطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را بدهیم معادله دیفرانسیل مبدل به معادله $nr=\rho$ که دارای جواب $\theta+B=\frac{dr}{r}\left[\left(\frac{r}{\frac{r}{n}+A}\right)^{۲}-۱\right]^{-\frac{۱}{۲}}$ است میگردد (ρ شعاع انحناء خم میباشد) .

ذ : همگن نوع سوم ، $y=nx\,Log\left(A+\frac{B}{x}\right)$. این جواب را نیز میتوان با تبدیل متغیر $xy'-y=u$ بدست آورد .

ر : $y=x\left(A-\arcsin\frac{B}{x}\right)$.

۳- اگر ریشه های حقیقی m و n باشند $y=[Ae^{-max}+Be^{-nax}]^{-\frac{۱}{a}}$ ، اگر $m=n$ باشد $y=e^{mx}(A+Bx)^{-\frac{۱}{a}}$ ، اگر ریشه های موهومی و برابر $h\pm ki$ باشند $y=Ae^{hx}|\cos ka(x-B)|^{-\frac{۱}{a}}$.

۴- $(x-B)^{۲}+(y-B)^{۲}=A^{۲}$.

۵- $\alpha=\frac{۱}{۱-m}$.

الف : $y=\frac{۱}{x^{۲}+Ax+B}$.

ب : $y=\frac{۱}{\sqrt{A\cos x+B\sin x+۳}}$.

پ : $y=Ae^{Be^{x}}$.   ت : $y=(Ae^{۲x}+Be^{-۲x})^{۳}$.

۶- الف : $y=A(\cos x+\sin^{۲}x\,Log\,\mathrm{cotg}\,\frac{۱}{۲}x)\sin x\cos x+B\sin^{۲}x$.

ب : $y^{۲}=A+x+\frac{B}{x}$.

پ : $(x+x^{۳})y''+(۵x^{۲}+۱)y'+۴xy=A$.

ت : $x^۳y'' + (x+۱)y' + x^۳y = \frac{۱}{۴}x^۴$.

ث : $y^۲ = x^۲ + c_۱ + c_۲x + c_۳e^{-x}$.

ج : $y(x+y) = x^۲ + c_۱x + c_۲$.

چ : $y + y^۲ + y^۳ = c_۱x^۲ + c_۲x + c_۳ + \frac{x^۴}{۲۴}$.

ح : $y^۳ = c_۱x^۳ + c_۲x + c_۳ + xLogx$.

خ : $y^۲ = c_۱ + c_۲e^x + c_۳xe^x + e^{۲x}$.

د : $y^۲ + ۲y = c_۱cosx + c_۲sinx$.

۷- $Logy = -\frac{۱}{۲}(x-۱)^۲$.

۸-

$$p_۱ - ۲p'_۲ + ۳p''_۳ - \cdots = 0$$

$$p_۲ - ۳p'_۳ + ۶p''_۴ - \cdots = 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$p_m - (m+۱)p'_{m+۱} + \frac{۱}{۲}(m+۱)(m+۲)p''_{m+۲} - \cdots = 0$$

. . . .

. . . .

. . . .

۹- انتگرال اول معادله (I) عبارت است از $xy'' + (x^۲ - ۴)y' + ۲xy = A$ (انتگرال اول معادله اخیر $xy' + (x^۲ - ۵)y = Ax + B$ میباشد که میتوان آنرا حل کرد) انتگرال اول معادله (II) عبارت است از :

$$x^۲y'' - xy' + y + xy^۲ + x^۲ = A$$

اگر دو طرف معادله آخر را در x ضرب کنیم معادله دیفرانسیل کامل گردیده وانتگرال اول عبارت میگردد از :

$$x^3y''+x^2y'+x^3y=x^2+A$$

۱۰- الف : $y'^2-x^2y^2=A$. ب : $x^3y''-xy'+xy^2=A$.

۱۱- انتگرال اول $(xy'-y)^2-a^2\dfrac{x^2}{y^2+x^2}=A$ و جواب عمومی :

$$\frac{1}{x}+B=\int\left\{\frac{1+u^2}{A(1+u^2)+a^2}\right\}^{\frac{1}{2}}du$$

۱۲- اولرنشان داده است که اگر مقادیر $X_2=-\delta-\eta x$ و $X_1=\gamma+2\delta x+\eta x^2$ در رابطه $X_1y'+X_2y$ اختیارگردد رابطه اخیر یک عامل انتگرال کننده برای معادله دیفرانسیل خواهد بود . انتگرال اول معادله عبارت خواهد بود از :

$$(\gamma+2\delta x+\eta x^2)y'^2-2(\delta+\eta x)yy'=A-\eta y^2-\frac{\alpha y^2}{\beta y^2+\gamma+2\delta x+\eta x^2}$$

با تبدیل متغیر $y\beta^{\frac{1}{2}}=u(\gamma+\delta x+\eta x^2)^{\frac{1}{2}}$ معادله بالا را حل کنید .

۵ . ۵- معادلات مرتبه دوم خطی

چون معادلات مرتبه دوم خطی با ضرایب متغیر درفیزیک و مکانیک موارد استعمال فراوانی دارند لذا دراین قسمت برخی از خواص مهم آنها را مورد بررسی قرار میدهیم .

۵۱ . ۵- تعیین جواب عمومی درصورتیکه یك جواب خصوصی درست باشد.

معادلات :

$$A_0(x)w''+2A_1(x)w'+A_2(x)w=R_1(x) \tag{5 . 51}$$

و :

$$w''+P(x)w'+Q(x)w=R(x) \tag{5 . 511}$$

اقلاً در نواحی که $A_1(x)\neq 0$ است هم‌ارز یکدیگر هستند . در بعضی‌از موارد رابطه (۵۱ . ۵) و درموارد دیگر معادله (۵۱۱ . ۵) را بکار میبریم که هریك از آنها صورت

کلی معادلات مرتبه دوم خطی را نمایش میدهد .

ازاین پس برای اختصار توابع $A_0(x)$, $A_١(x)$, $A_٢(x)$, $R_١(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ رابه‌ترتیب‌به A_0 و $A_١$ و $A_٢$ و $R_١$ و P و Q و R نشان‌داده وفرض میکنیم که این توابع و مشتقهای آنها پیوسته باشند .

اکنون نشان خواهیم داد که هرجواب معادله (باستثنای $y\equiv 0$) :

$$y''+Pv'+Qy=0$$ (٥١٢ . ٥)

منجربه‌جواب عمومی معادله (٥١١ . ٥) میگردد . زیرا اگر y یکی‌ازجوابهای (٥١٢ . ٥) باشد تبدیل متغیر $w=yv$ در رابطه (٥١١ . ٥) آنرا مبدل به معادله :

$$yv''+(٢y'+Py)v'+(y''+Py'+Qy)v=R$$ (٥١٣ . ٥)

مینماید . چون بنابفرض y یکی از جوابهای معادله (٥١٢ . ٥) است لذا :

$$yv''+(٢y'+Py)v'=R$$

ازآنجایی که y تابع معلومی از x میباشد معادله بالا نسبت به v' خطی‌بوده و دارای عامل انتگرال کننده $y^٢e^{\int pdx}$ است . زیرا اگردوطرف معادله فوق را دراین‌فاکتور ضرب کنیم طرف‌چپ‌این رابطه‌مشتق‌تابع $y^٢v'e^{\int pdx}$ بوده و طرف راست تابع معلومی از x خواهد بود . انتگرال گیری ازاین رابطه منجر به معادله‌یی خواهد گردید که ممکن است آنرانسبت به v' برحسب توابع معلوم و مقدار ثابت غیر مشخصی حل کرد . و بالاخره انتگرال گیری دیگر، v رابرحسب‌توابع معلوم ودو مقدار ثابت غیر مشخص تعیین میکند و جواب عمومی معادله (٥١١ . ٥) از رابطه $w=yv$ بدست خواهد آمد . این روش را ذیلاً با ذکر مثالی روشن کرده‌ایم . بنابراین مسئله یافتن جواب عمومی معادله (٥١١ . ٥) را تبدیل به یافتن یکی از جوابهای $(y\neq 0)$ معادلات همگن :

$$y''+Py'+Qy=0$$

و یا هم‌ارز آن :

$$A_0y''+٢A_١y'+A_٢y=0$$

نموده‌ایم .

مثال ١ـ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم :

$$(١+x^٢)y''-٢xy'+٢y=x^٣+٣x$$

را حل کنید .

حل - بسهولت معلوم میشود که $y=x$ یکی از جوابهای معادله :

$$(۱+x^{۲})y''-۲xy'+۲y=0$$

است. بنابراین اگر تبدیل متغیر $y=xv$ را انجام دهیم به ترتیب خواهیم داشت :

$$y'=xv'+v \quad , \quad y''=xv''+۲y'$$

و پس از جایگزین کردن عبارات فوق در معادله دیفرانسیل چنین داریم :

$$(x^{۳}+x)v''+۲v'=x^{۳}+۳x$$

و یا :

$$v''+\frac{۲}{x(x^{۲}+۱)}v'=\frac{x^{۲}+۳}{x^{۲}+۱}$$

این معادله دارای عامل انتگرال کننده $e^{\int\frac{۲}{x(x^{۲}+۱)}dx}=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$ بوده و از آنجا جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}v'\right)=\frac{x^{۲}(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

و یا :

$$\frac{x^{۲}v'}{x^{۲}+۱}=\int\frac{x^{۲}(x^{۲}+۳)dx}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}+c_{۱}$$

$$v'=x+c_{۱}\left(\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}}\right)=x+c_{۱}\left(۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right)$$

$$v=\frac{۱}{۲}x^{۲}+c_{۱}\left(۱-\frac{۱}{x}\right)+c_{۲}$$

و از آنجا :

$$y=xv=\frac{۱}{۲}x^{۳}+c_{۱}(x^{۲}-۱)+c_{۲}x$$

مثال ۲- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم :

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-x^{۲}\frac{dy}{dx}+xy=x^{m+۱}$$

را حل کنید .

حل - یکی ازجوابهای خصوصی معادله $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-x^{۲}\frac{dy}{dx}+xy=0$ برابر $y=x$ است و لذا در معادله بالا $y=xv$ قرارمیدهیم . یعنی :

$$x\frac{d^۲v}{dx^۲}+۲\frac{dv}{dx}-x^۲\left(x\frac{dv}{dx}+v\right)+x^۲v=x^{m+۱}$$

و یا :

$$\frac{d^۲v}{dx^۲}+\left(\frac{۲}{x}-x^۲\right)\frac{dv}{dx}=x^m$$

این معادله خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $e^{\int(\frac{۲}{x}-x^۲)dx}=x^۲e^{-\frac{۱}{۳}x^۳}$ است و بالنتیجه :

$$\frac{dv}{dx}\left(x^۲e^{-\frac{۱}{۳}x^۳}\right)=A+\int x^{m+۲}e^{-\frac{۱}{۳}x^۳}dx$$

و لذا :

$$v=B+\int\frac{Adx}{x^۲}e^{\frac{۱}{۳}x^۳}+\int\frac{dx}{x^۲}e^{\frac{۱}{۳}x^۳}\int x^{m+۲}e^{-\frac{۱}{۳}x^۳}dx$$

بسهولت معلوم میگردد که اگر $m=0$ و یا ضریب مثبتی از سه باشد میتوان انتگرال بالا را ساده کرد .

۵۲ . ۵ - صورت هنجاری

اگرنتوانیم یکی‌ازجوابهای خصوصی معادله (۵۱۲ . ۵) را بدست‌آوریم دراینصورت دربعضی‌از موارد شایسته‌است که ضریب $\frac{dv}{dx}$ را در معادله (۵۱۳ . ۵) برابر صفر قرار دهیم . در چنین مواردی y باید در معادله :

$$۲\frac{dy}{dx}+Py=0$$

صدق کند. این معادله دارای جواب $y=e^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}$ بوده و پس‌از جایگزین کردن عبارت $y=e^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}v$ درمعادله (۵۱۳ . ۵) خواهیم داشت :

$$e^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}v''+\left(Q-\frac{۱}{۲}P'-\frac{۱}{۴}P^۲\right)ve^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}=R$$

و یا :

$$v''+Iv=Re^{\frac{۱}{۲}\int pdx}$$

که در آن :

(۵ . ۵۲)
$$I=Q-\frac{۱}{۲}P'-\frac{۱}{٤}P^{۲}$$

ولی همانطور که فوقاً اشاره شد اگر یکی از جوابهای خصوصی معادله $v''+Iv=0$ در دست باشد جواب عمومی معادله $v''+Iv=Re^{\frac{۱}{۲}\int pdx}$ بدست میآید ولذا ازاین پس معادله :

(۵ . ۵۲۱)
$$v''+Iv=0$$

را درنظر خواهیم گرفت .

معادله (۵ . ۵۲۱) را **صورت هنجاری** معادله (۵ . ۵۱۲) نامیده وتابع $I(x)$ را یک **انواریان** معادله (۵ . ۵۱۲) گوییم بطریق مشابه میتوان نشان داد که انواریان معادله (۵ . ۵۱) عبارت خواهد بود از :

(۵ . ۵۲۲)
$$I=A_0^{-۲}(A_0A_۲-A_0A'_۱+A'_0A_۱-A^{۲}_۱)$$

ذیلاً نشان خواهیم داد که تابع I در معادله (۵ . ۵۲۱) انواریان میباشد . برای این منظور فرض میکنیم توابع P و Q و $P_۱$ و $Q_۱$ بقسمی باشند که اگر $y=fy_۱$ را در معادله :

$$y''+Py'+Qy=0$$

قرار دهیم این معادله تبدیل به :

(۵ . ۵۲۳)
$$y''_۱+P_۱y'_۱+Q_۱y_۱=0$$

که در آن f تابع x است گردد .

اکنون میخواهیم نشان دهیم که این دو معادله دارای یک صورت هنجاری میباشند . زیرا اگر تبدیل متغیر $y=fy_۱$ رادرمعادله (۵ . ۵۱۲) انجام دهیم خواهیم داشت :

$$fy''_۱+(۲f'+Pf)y'_۱+(f''+Pf'+Qf)y_۱=0$$

و از آنجا :

$$P_۱=\frac{۲f'}{f}+P \quad , \quad Q_۱=\frac{f''}{f}+P\frac{f'}{f}+Q$$

اگر I_1 و I به ترتیب انواریانهای صورتهای هنجاری (۵۲۳ . ۵) و (۵۱۲ . ۵) باشند چنین داریم :

$$I_1=Q_1-\frac{۱}{۲}P_1'-\frac{۱}{٤}P_1^{۲}=\frac{f''}{f}+P\frac{f'}{f}+Q$$
$$-\frac{ff'-(f')^{۲}}{f^{۲}}-\frac{۱}{۲}P'-\frac{(f')^{۲}}{f^{۲}}-\frac{f'}{f}P-\frac{۱}{٤}P^{۲}$$
$$=Q-\frac{۱}{۲}P'-\frac{۱}{٤}P^{۲}=I$$

و ازآنجا تابع $I(x)$ مورد مطالعه ، تغییر ننموده و یا بعبارت دیگر تابع $I(x)$ در تبدیل $y=fy_1$ انواریان خواهد بود .

ازطرف دیگر بسهولت میتوان نشان داد که اگر دو معادله (۵۱۲ . ۵) و (۵۲۳ . ۵) دارای یک صورت هنجاری باشند هریک ازاین معادلات را میتوان بارابطه :

$$y=y_1e^{\frac{۱}{۲}\int(p_1-p)dx} \qquad (۵۲٤ . ۵)$$

به معادله دیگری تبدیل کرد . زیرا اگر مثلاً درمعادله(۵۱۲ . ۵)تبدیل متغیر $y=fy_1$ را انجام دهیم وازرابطه $P_1=\frac{۲f'}{f}+P$ استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{f'}{f}=\frac{۱}{۲}(P_1-P) \quad , \quad f=e^{\frac{۱}{۲}\int(p_1-p)dx}$$

درحالت کلی میتوان معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را بصورت هنجاری (۵۲۱ . ۵) تبدیل کرد . حال اگر بتوانیم یکی از جوابهای خصوصی (باستثنای $y=o$) صورت هنجاری معادله رابیابیم دراینحالت میتوان جواب عمومی معادله رابدست آورد . دو معادله (۵۱۲ . ۵) و (۵۲۳ . ۵) راکه برای آن $I=I_1$ است **هم‌ارز** نامیم .

تبصره - اگر در رابطه (۵۲۱ . ۵) ضریب I تابع گویایی از x که درجه مخرج آن از درجه صورتش بیشتر است باشد در برخی از موارد میتوان از روش زیر استفاده کرد .

عبارت (۵۲۱ . ۵) با تبدیل متغیر $v=ze^{\int p_1dx}$ بصورت زیر در میآید :

$$z''+۲P_1z'+P_۲z=o \qquad (I)$$

که درآن : $P_۲ = I + P^۲_۱ + P'_۱$

با انتگرال گیری از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$(II) \qquad z' + ۲P_۱ z + \int z(P_۲ - ۲P'_۱)dx = A$$

چون بین $P_۱$ و $P_۲$ فقط یک رابط موجود است لذا برای تعیین این مقادیر میتوان رابطه زیر را برقرار کرد یعنی $P_۲ = ۲P'_۱$ و از آنجا $p_۱$ در معادله زیر صدق خواهد نمود :

$$(III) \qquad P'_۱ - P^۲_۱ = I$$

هرمقدار $P_۱$ که در معادله بالا صدق کند منجر به جواب عمومی خواهد گردید . زیرا اگر $P_۱$ معلوم باشد از معادله خطی $z' + ۲P_۱ z = A$ میتوان z و بالنتیجه $v = ze^{\int p_۱ dx}$ بدست میآید . اگر I تابع گویایی از x یعنی $I = \frac{V}{T^۲U}$ اختیار گردد به ترتیب خواهیم داشت :

$$I = \frac{V}{T^۲U} = \frac{VU}{T^۲U^۲} = \frac{UV}{\varphi^۲}$$

T و U و V توابع گویایی از متغیر x میباشند. لذا اگر $P_۱ = \frac{f(x)}{\varphi}$ اختیار گردد میتوان دربعضی از موارد ضرایب f(x) را چنان تعیین کرد که تابع $P_۱$ در رابطه (III) صدق کند .

مثال ۱- معادله دیفرانسیل :

$$y'' - \frac{۲}{x}y' + \left(a^۲ + \frac{۲}{x^۲}\right)y = 0$$

که در آن a مقداری است ثابت حل کنید .

حل - بسهولت معلوم میگردد که :

$$I = Q - \frac{۱}{۲}P' - \frac{۱}{۴}P^۲ = a^۲ + \frac{۲}{x^۲} - \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲}{x^۲} - \frac{۱}{۴} \cdot \frac{۴}{x^۲} = a^۲$$

ولی همانطور که بعداً درفصل ششم نشان خواهیم داد معادله دیفرانسیل $v'' + a^۲v = 0$ دارای جواب عمومی $v = c_۱ \cos ax + c_۲ \sin ax$ میباشد. لذا :

$$y=ve^{\int\frac{dx}{x}}=xv=c_{۱}x\cos ax+c_{۲}x\sin ax$$

جواب عمومی معادله است . $c_{۱}$ و $c_{۲}$ مقادیر ثابت غیر مشخصی میباشند .

مثال ۲ـ معادله دیفرانسیل :

$$y''-\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}y'+\frac{y}{٤x^{۲}}\left(-۸+x^{\frac{۱}{۲}}+x\right)=0$$

را حل کنید .

حل ـ دراین مسئله $P=-\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}$ بوده و از آنجا :

$$y=e^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}=e^{x^{\frac{۱}{۲}}}$$

و همچنین :

$$I=Q-\frac{۱}{۲}P'-\frac{۱}{٤}P^{۲}=-\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۱}{٤x^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۱}{٤x}-\frac{۱}{٤x^{\frac{۳}{۲}}}-\frac{۱}{٤x}=-\frac{۲}{x^{۲}}$$

و از آنجا معادله (۵۲۱ . ۵) تبدیل به :

$$v''-\frac{۲}{x^{۲}}v=0 \quad , \quad x^{۲}v''-۲v=0$$

که معادله اولر مرتبه دوم است (به فصل ششم مراجعه شود) میگردد و از آنجا جواب عمومی معادله بالابنابر مثال چهارم شماره(۳۳ . ۵) عبارت میگردد از $v=Ax^{۲}+\frac{B}{x}$.

یعنی :

$$y=\left(Ax^{۲}+\frac{B}{x}\right)e^{x^{\frac{۱}{۲}}}$$

مثال ۳ـ معادله دیفرانسیل $x(۱-x)^{۲}v''=۲v$ را حل کنید .

حل ـ این معادله را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$v'' - \frac{۲}{x(۱-x)^{۲}}\, v = 0$$

رابطه (III) بصورت زیر درمیآید :

$$P'_{۱} - P^{۲}_{۱} = -\frac{۲}{x(۱-x)^{۲}}$$

اگر مقدار $P_{۱} = \frac{E}{x} + \frac{F}{۱-x}$ را در معادله بالا قرار دهیم $E = F = -۱$ بدست میاید یعنی $P_{۱} = -\frac{۱}{x(۱-x)}$. رابطه (II) پس‌از قرار دادن مقدار $p_{۱}$ عبارت میگردد از :

$$z' - \frac{۲}{x(۱-x)}\, z = A$$

این معادله نسبت به z خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده :

$$e^{-\int\frac{۲dx}{x(۱-x)}} = \left(\frac{۱-x}{x}\right)^{۲}$$

است ، لذا :

$$\frac{d}{dx}\left[z\left(\frac{۱-x}{x}\right)^{۲}\right] = A\left(\frac{۱}{x}-۱\right)^{۲} = A\left(\frac{۱}{x^{۲}}+۱-\frac{۲}{x}\right)$$

$$z\left(\frac{۱-x}{x}\right)^{۲} = A\left(x-\frac{۱}{x}-۲Logx\right)+B$$

و از آنجا :

$$z = Ax\left[\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{۲xLogx}{(x-۱)^{۲}}\right]+Bx^{۲}(x-۱)^{-۲}$$

پس :

$$v = ze^{\int p_{۱}dx} = \left\{Ax\left[\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{۲xLogx}{(x-۱)^{۲}}\right]+Bx^{۲}(x-۱)^{-۲}\right\}e^{-\int\left[\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱-x}\right]dx}$$

$$= c_{۱}\left[(x+۱)+\frac{xLogx}{۱-x}\right]+c_{۲}x(x-۱)^{-۱}$$

مثال ٤- معادله دیفرانسیل $x(۱-x)y''+۲y'+۲y=0$ را حل کنید .

حل - این معادله را بصورت $y''+\frac{۲}{x(۱-x)}y'+\frac{۲}{x(۱-x)}y=0$

نوشته و سپس با تبدیل متغیر $y=ve^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}$ آنرا مبدل به‌صورت هنجاری (٥ . ٥۲۱) مینمائیم . یعنی :

$$y=ve^{-\frac{۱}{۲}\int pdx}=ve^{-\int\frac{dx}{x(۱-x)}}=ve^{-\int\left[\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱-x}\right]dx}=ve^{Log\frac{۱-x}{x}}$$

$$(I) \qquad y=\frac{۱-x}{x}v$$

$$I=Q-\frac{۱}{۲}P'-\frac{۱}{٤}P^۲=\frac{۲}{x(۱-x)}+\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{(۱-x)^۲}$$
$$-\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{(۱-x)^۲}-\frac{۲}{x(۱-x)}=-\frac{۲}{(۱-x)^۲}$$

اگر چه میتوان معادله هنجاری $v''-\frac{۲}{(۱-x)^۲}v=0$ را به معادله اولر مرتبه دوم تبدیل کرد ، ولی برای تمرین بیشتر این مسئله را نیز از روش بالا حل میکنیم .

بسهولت معلوم میگردد که رابطه (III) بصورت زیر در میآید :

$$P_۱'-P_۱^۲=-\frac{۲}{(۱-x)^۲}$$

واضح است **توابع** $P_۱=\frac{۲}{(۱-x)}$ و $P_۱=\frac{۱}{۱-x}$ در رابطه بالا صدق کرده و

پس‌از قرار دادن **مقدار** $P_۱=\frac{۱}{۱-x}$ رابطه (II) دارای جواب عمومی :

$$z=A(x-۱)+B(x-۱)^۲$$

میباشد .

از طرف دیگر چنین داریم :

$$v=ze^{\int p_۱dx}=[A(x-۱)+B(x-۱)^۲]e^{\int\frac{dx}{۱-x}}=B(۱-x)-A$$

اگر مقدار بالا را در رابطه (I) قرار دهیم جواب عمومی معادله بدست میآید . یعنی :

$$y=\frac{١-x}{x}v=\frac{١-x}{x}[B(١-x)-A]$$

۵۳ . ۵ - ادژوینت *

اگر چه در فصل ششم (شماره ۳ . ٦) مفصلاً درباره ادژوینت بحث خواهیم نمود ولی برای تفهیم بیشتر آن لازم میدانیم فعلاً بحث خود را به معادله مرتبه دوم خطی محدود نماییم .

برای حل معادله دیفرانسیل :

$$y''+Py'+Qy=o$$

دربعضی‌از موارد سعی میکنم عامل انتگرال کننده‌یی مانند $u(x)$ برای معادله بالا بدست آوریم . اگر فرض کنیم چنین عامل انتگرال کننده‌یی تعیین‌شده باشد درایتصورت‌باید عبارت :

$$uy''+uPy'+uQy=o$$

کامل باشد . لذا میتوان عبارت بالا را بصورت زیر نوشت :

$$(uy')'+(hy)'=o$$

u و h توابعی‌از x میباشند که باید آنها را تعیین کنیم . اگراز رابطه بالا مشتق‌بگیریم چنین داریم :

$$uy''+(u'+h)y'+h'y=o$$

و اگر ضرایب‌این معادله را با معادله دیفرانسیل $uy''+uPy+uQ=o$ مقایسه کنیم خواهیم داشت :

$$u'+h=uP \quad , \quad h'=uQ$$

اگر بین این دو معادله h را حذف کنیم معادله‌یی که u باید در آن صدق کند بدست میآید . یعنی :

$$u''-Pu'+(Q-P')u=o \qquad (٥ . ٥٣)$$

---

* Adjoint . برای اولین بار Fuchs لغت ادژوینت را در سال ۱۸۷۳ بکار برد .

این معادله را **ادژوینت** معادله (٥ . ٥١٢) گوییم .

بطریق مشابه میتوان نشان داد که اگر u یکی از جوابهای معادله (٥ . ٥٣) باشد دراینصورت u یکی از عاملهای انتگرال کننده معادله (٥ . ٥١٢) خواهد بود . بالنتیجه اگربتوانیم معادله (٥ . ٥٣) را حل کنیم میتوانیم معادله (٥ . ٥١٢) را به معادله خطی تبدیل کرده وسپس جواب عمومی آنرا مانند شماره (۲ . ۷) بدست آوریم .

همانطورکه درشماره (٥ . ٥١) متذکرگردیدیم حتی اگر یکی از جوابهای معادله (٥ . ٥٣) دردست باشدجواب عمومی این معادله وازآنجاجواب عمومی معادله (٥ . ٥١٢) بدست خواهد آمد .

اکنون ادژوینت معادله (٥ . ٥٣) را بهمان روشی که ادژوینت معادله دیفرانسیل (٥ . ٥١٢) را یافتیم بدست میآوریم . یعنی :

$$w''-(-P)w'+[Q-P'-(-P)']w=o \quad \text{و یا} \quad w''+Pw'+Qw=o$$

این معادله همان معادله (٥ . ٥١٢) بوده و ازآنجا نتیجه میشود که :

ادژوینت ، ادژوینت معادله (٥ . ٥١٢) خود معادله (٥ . ٥١٢) میباشد .

اکنون نشان خواهیم داد که انواریان صورت هنجاری معادله (٥ . ٥١٢) وانواریان صورت هنجاری معادله ادژونیت (٥ . ٥٢) بایکدیگر برابر میباشند . زیرا :

$$I_\alpha=Q-P'-\frac{۱}{۲}(-P)'-\frac{۱}{٤}(-P)^{۲}=I$$

ولذا معادلات (٥ . ٥١٢) و (٥ . ٥٣) بایکدیگر هم‌ارز هستند .

بسهولت میتوان نشان داد که ادژوینت معادله :

$$A_{٠}y''+۲A_{۱}y'+A_{۲}y=o$$

برابر :

$$A_{٠}u''+۲(A'_{٠}-A_{۱})u'+(A''_{٠}-۲A'_{۱}+A_{۲})u=o \qquad (٥ . ٥٣١)$$

است . این معادله را میتوان بصورت زیرکه آنرا بمراتب سهلتر میتوان بخاطر داشت و قابل تعمیم نیز برای مراتب بالاتر است نوشت . یعنی :

$$(A_{٠}u)''-(۲A_{۱}u)'+A_{۲}u=o \qquad (٥ . ٥٣۲)$$

اکنون معادله بسل :

$$xy''+y'+xy=0 \qquad \text{(I)}$$

که دارای اندیس صفر است و بعداً بطور مفصل درباره آن بحث خواهیم کرد درنظر میگیریم. چنانچه ادژوینت معادله (I) را تشکیل دهیم فرم معادله مانند رابطه (I) بوده و لذا این معادله را **سلف ادژوینت*** نامیم.

اکنون معادله :

$$y''+\frac{۱}{x}y'+y=0 \qquad \text{(II)}$$

که از تقسیم دوطرف معادله (I) بر x حاصل شده است درنظر میگیریم. ادژوینت معادله (II) معادله :

$$u''-\frac{۱}{x}u'-\left(۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right)u=0$$

بوده و لذا معادله (II) سلف ادژوینت نمیباشد.

ذیلاً نشان خواهیم داد که هرمعادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم :

$$A_{۰}y''+۲A_{۱}y'+A_{۲}y=0$$

را میتوان با ضرب در فاکتور معینی بشکل سلف ادژوینت نوشت. زیرا اگر v چنین فاکتوری باشد خواهیم داشت :

$$A_{۰}vy''+۲A_{۱}vy'+A_{۲}vy=0$$

لذا ادژوینت این معادله عبارت خواهد بود از :

$$A_{۰}vu''+۲[(A_{۰}v)'-A_{۱}v]u'+[(A_{۰}v)''-۲(A_{۱}v)'+A_{۲}v]u=0$$

و از آنجا معادله $A_{۰}vy''+۲A_{۱}vy'+A_{۲}vy=0$ سلف ادژوینت خواهد بود هرگاه داشته باشیم :

$$\frac{A_{۰}v}{A_{۰}v}=\frac{(A_{۰}v)'-A_{۱}v}{A_{۱}v}=\frac{(A_{۰}v)''-۲(A_{۱}v)'+A_{۲}v}{A_{۲}v}$$

کسرهای فوق درصورتی برقرار است که داشته باشیم :

---

* Self – Adjoint

$$(A_۰v)'=۲A_۱v$$

و یا : $A_۰v'+(A'_۰-۲A_۱)v=0 \quad , \quad \frac{v'}{v}=\left(\frac{۲A_۱}{A_۰}-\frac{A'_۰}{A_۰}\right)$

$$v=\frac{۱}{A_۰}e^{۲\int\frac{A_۱}{A_۰}dx}$$

مثال ۱- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم :

$$y''-\left(۲x+\frac{۳}{x}\right)y'-۴y=0$$

را با یافتن یکی از جوابهای معادله ادژوینت آن حل کنید .

حل - معادله ادژوینت این معادله عبارت است از :

$$u''-\left[-\left(۲x+\frac{۳}{x}\right)\right]u'+\left[-۴+\left(۲-\frac{۳}{x^۲}\right)\right]u=0$$

و یا : $u''+\left(۲x+\frac{۳}{x}\right)u'-\left(۲+\frac{۳}{x^۲}\right)u=0$

معادله اخیردارای جواب خصوصی $u=x$ بوده وشرط اول کامل بودن یعنی $u'+h=uP$ بصورت زیر درمیآید :

$$۱+h=-x\left(۲x+\frac{۳}{x}\right) \quad \text{و یا} \quad h=-۲(x^۲+۲)$$

چنانچه دوطرف معادله بالا را در x ضرب کرده وآنرا بصورت $(uy')'+(hy)'=0$ بنویسیم خواهیم داشت :

$$[xy']'-۲[(x^۲+۲)y]'=0$$

و یا : $xy'-۲(x^۲+۲)y=۴c_۱$

معادله بالا خطی بوده ودارای عامل انتگرال کننده $e^{\int\left(-۲x-\frac{۴}{x}\right)dx}=\frac{e^{-x^۲}}{x^۴}$ میباشد

و لذا جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{ye^{-x^{٢}}}{x^{٤}}\right]=\frac{٤c_{١}}{x}\cdot\frac{e^{-x^{٢}}}{x^{٤}}$$

$$y\frac{e^{-x^{٢}}}{x^{٤}}=c_{٢}+٤c_{١}\int\frac{e^{-x^{٢}}dx}{x^{٥}}$$

و یا :

$$y=c_{٢}e^{x^{٢}}x^{٤}+٤c_{١}x^{٤}e^{x^{٢}}\int\frac{e^{-x^{٢}}dx}{x^{٥}}$$

برای محاسبه انتگرال $\int\frac{e^{-x^{٢}}}{x^{٥}}dx$ تبدیل متغیر $x^{٢}=t$ را داده و به ترتیب بطریق زیر جزء بجزء انتگرال میگیریم :

$$\int\frac{e^{-x^{٢}}dx}{x^{٥}}=\frac{١}{٢}\int\frac{e^{-t}dt}{t^{٣}}=\frac{١}{٢}\left[\frac{-e^{-t}}{٢t^{٢}}-\frac{١}{٢}\int\frac{e^{-t}dt}{t^{٢}}\right]$$

$$=-\frac{١}{٤}\left[\frac{e^{-t}}{t^{٢}}+\int\frac{e^{-t}}{t^{٢}}dt\right]$$

$$=-\frac{١}{٤}\left[\frac{e^{-t}}{t^{٢}}-\frac{e^{-t}}{t}-\int\frac{e^{-t}}{t}dt\right]$$

$$=-\frac{١}{٤}\left[\frac{e^{-x^{٢}}}{x^{٤}}-\frac{e^{-x^{٢}}}{x^{٢}}-٢\int\frac{e^{-x^{٢}}}{x}dx\right]$$

و لذا :

$$y=c_{٢}x^{٤}e^{x^{٢}}+c_{١}(x^{٢}-١)+٢c_{١}x^{٤}e^{x^{٢}}\int\frac{e^{-x^{٢}}}{x}dx$$

مثال ٤- نشان دهید معادله دیفرانسیل **لژاندر*** :

$$(١-x^{٢})y''-٢xy'+n(n+١)y=٠$$

که در آن n مقداری است ثابت ، سلف ادژوینت میباشد و از آنجا جواب عمومی معادله

---

* Legendre

دیفرانسیل $(۱-x^۲)y''-۲xy'+۲y=o$ را بدست آورید .

حل - همانطورکه در بالا نشان دادیم اگر دوطرف این معادله را در :

$$v=\frac{۱}{A_o}e^{۲\int\frac{A_۱}{A_o}dx}$$

ضرب کنیم معادله حاصل سلف ادژوینت خواهد گردید. حال چنانچه عبارت v را تشکیل دهیم خواهیم داشت :

$$v=\frac{۱}{(۱-x^۲)}e^{\int\frac{-۲xdx}{۱-x^۲}}=\frac{۱}{(۱-x^۲)}e^{Log(۱-x^۲)}=۱$$

یعنی این معادله سلف ادژوینت خواهد بود .

بطریق دیگر میتوان نشان داد که این معادله سلف ادژوینت میباشد زیرا رابطه (٥٣١ . ٥) مبدل به معادله زیر میگردد :

$$(۱-x^۲)u''+۲[-۲x+x]u'+[-۲+۲+n(n+۱)]u=o$$

و یا :

$$(۱-x^۲)u''-۲xu'+n(n+۱)u=o$$

معادله‌دیفرانسیل $(۱-x^۲)y''-۲xy'+۲y=o$ دارای‌جواب خصوصی $y=x$ بوده و لذا میتوان آنرا مانند شماره (٥١ . ٥) حل کرد . ولی ازآنجاییکه این معادله سلف‌ادژوینت‌نیزمیباشد بنابراین $u=x$ یکی‌ازعاملهای‌انتگرال کننده این معادله‌بوده ولذا اگر دوطرف معادله را در x ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$x(۱-x^۲)y''-۲x^۲y'+۲xy=o$$

و یا :

$$[x(۱-x^۲)y']'-[(۱-x^۲)y]'=o$$

$$x(۱-x^۲)y'-(۱-x^۲)y=c_۱ \quad \text{و یا} \quad y'-\frac{۱}{x}y=\frac{c_۱}{x(۱-x^۲)}$$

این معادله خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{۱}{x}$ است. یعنی :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)=c_۱\int\frac{dx}{x^۲(۱-x^۲)}=c_۱\left\{\int\frac{dx}{x^۲}+\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{۱-x}+\frac{۱}{۲}\int\frac{dx}{۱+x}\right\}$$

$$\frac{y}{x}=c_۲+c_۱\left[-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲}Log\frac{۱+x}{۱-x}\right]$$

و یا :

$$y=c_۲x-c_۱+\frac{c_۱x}{۲}Log\frac{۱+x}{۱-x}$$

٥٤ . ٥ - تبدیل متغیر مستقل

بار دیگر معادله :

$$y''+Py'+Qy=0 \qquad (٥ . ٥١٢)$$

را درنظر گرفته و با استفاده از روابط زیر متغیر مستقل x را به z تبدیل میکنیم :

$$y'=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dz} \quad , \quad y''=\left(\frac{dz}{dx}\right)^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}+\frac{d^۲z}{dx^۲}\cdot\frac{dx}{dz}$$

اکنون روابط بالا را در معادله (٥١٢ . ٥) قرار میدهیم . یعنی :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^۲\frac{d^۲y}{dz^۲}+\left(\frac{d^۲z}{dx^۲}+P\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz}+Qy=0 \qquad (٥ . ٥٤)$$

حال سعی میکنیم z را چنان تعیین کنیم که معادله (٥٤ . ٥) تبدیل به معادلاتی گردند که قبلاً آنها را مورد بررسی قرار داده‌ایم . مثلاً شرایطی را مییابیم که معادله (٥٤ . ٥) دارای ضرایب ثابت باشد . برای این منظور لازم است که $\frac{۱}{Q}\left(\frac{dz}{dx}\right)^۲$ مقدار ثابتی باشد . یعنی:

$$z=c\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx$$

(c مقداری است ثابت) . باچنین انتخابی معادله (٥٤ . ٥) درصورتی دارای ضرایب ثابت خواهد بود که فقط و فقط نسبت $\dfrac{\frac{d^۲z}{dx^۲}+P\frac{dz}{dx}}{Q}$ ثابت باشد .

اگر از رابطه $z=c\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx$ استفاده کنیم این کسر بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{\frac{d^۲z}{dx^۲}+P\frac{dz}{dx}}{Q}=\frac{c}{۲}\cdot\frac{Q'+۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}}$$

بالنتیجه آزمون زیر بدست میآید .

آزمون - اگر در معادله (۵ . ۵۱۲) عبارت :

$$\frac{Q'+۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}} \qquad (۵ . ۵۴۱)$$

مقدار ثابتی باشد تبدیل متغیر $z=\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx$ معادله دیفرانسیل (۵ . ۵۱۲) راتبدیل به معادله دیفرانسیل باضرایب ثابت خواهدنمود . اگررابطه (۵ . ۵۴۱) ثابت نباشد هیچ تبدیل متغیر مستقل به تنهایی نمیتواند معادله (۵ . ۵۱۲) را بمعادله با ضرایب ثابت تبدیل کند .

میتوان آزمونهای متفاوتی که مشابه آزمون بالا هستند بدست آورد . مثلاً اگر z را چنان تعیین کنیم که ضریب $\frac{dy}{dz}$ برابر صفر باشد تابع z با رابطه زیر مشخص میگردد :

$$z=\int dxe^{-\int pdx}$$

مثال ۱- معادله دیفرانسیل :

$$(I) \qquad y''+\left(x-\frac{۱}{x}\right)y'+x^۲y=o$$

را حل کنید .

حل - ابتدا کسر (۵ . ۵۴۱) را تشکیل میدهیم . یعنی :

$$\frac{Q'+۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۲x+۲x^۲\left(x-\frac{۱}{x}\right)}{x^۳}=\frac{۲x^۳}{x^۳}=۲$$

لذا تبدیل متغیر مستقل $z=\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx=\int xdx=\frac{۱}{۲}x^۲$ را داده و به ترتیب

چنین داریم : $$\frac{dz}{dx}=x$$

$$\frac{dy}{dx}= x\,\frac{dy}{dz}=(۲z)^{\frac{۱}{۲}}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=x^۲\,\frac{d^۲y}{dz^۲}+\frac{dy}{dz}= ۲z\,\frac{d^۲y}{dz^۲}+\frac{dy}{dz}$$

اگر این روابط را در معادله (I) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$۲z\,\frac{d^۲y}{dz^۲}+\frac{dy}{dz}+ ۲z\,\frac{dy}{dz}-\frac{dy}{dz}+۲zy=0$$

و یا :

$$\frac{d^۲y}{dz^۲}+\frac{dy}{dz}+y=0$$

همانطوری که در فصل ششم نشان داده خواهد شد معادله اخیر دارای جواب عمومی :

$$y=e^{-\frac{z}{۲}}\left(c_۱ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,z+c_۲ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,z\right)$$

که در آن $c_۱$ و $c_۲$ مقادیر ثابتی هستند میباشد . لذا جواب عمومی معادله عبارت خواهد بود از :

$$y=e^{-\frac{x^۲}{٤}}\left(c_۱ \cos\frac{\sqrt{۳}}{٤}\,x^۲+c_۲ \sin\frac{\sqrt{۳}}{٤}\,x^۲\right)$$

مثال ۲- معادله دیفرانسیل :

$$(۱-x^۲)\,\frac{d^۲y}{dx^۲}-x\,\frac{dy}{dx}=c^۲y$$

را حل کنید .

حل - معادله زیر را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}-\frac{x}{۱-x^۲}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{c^۲}{۱-x^۲}\,y$$

اگر تبدیل متغیر مستقل را چنان انجام دهیم که :

$$\frac{dz}{dx}=e^{-\int pdx}=e^{\int\frac{xdx}{۱-x^۲}}=(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$$

و یا :

$$z=\arcsin x$$

باشد دراینصورت ضریب $\frac{dy}{dz}$ در معادله (٤٥ . ٥) برابر صفر خواهد بود و معادله اخیر پس‌از این تبدیل متغیر به معادله :

$$(۱-x^۲)^{-۱}\frac{d^۲y}{dz^۲}=c^۲(۱-x^۲)^{-۱}y$$

و یا :

$$\frac{d^۲y}{dz^۲}-c^۲y=o$$

تبدیل میشود .

این معادله دارای جواب عمومی $y=Ae^{cz}+Be^{-cz}$ بوده و بالنتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$y=Ae^{c\arcsin x}+Be^{-c\arcsin x}$$

٥ . ٥٥ - مشتق شوارتزین*

اکنون نسبت دو جواب متمایز معادله دیفرانسیل :

$$v''+Iv=o$$

را درنظر میگیریم . فرض‌میکنیم $v_۱$ و $v_۲$ چنین جوابهایی بوده و نیز $v_۱=sv_۲$ باشد لذا خواهیم داشت :

$$v''_۱+Iv_۱=o\quad,\quad v''_۲+Iv_۲=o$$

و یا :

$$(sv_۲)''+I(sv_۲)=o$$

$$۲s'v'_۲+s''v_۲+s(v''_۲+Iv_۲)=o$$

و بالاخره :

$$v_۲s''+۲v'_۲s'=o\qquad(٥ . ٥٥)$$

اگر ازاین معادله‌نسبت به x مشتق بگیریم چنین داریم :

Schwarzian *

$$v_۲s''' + ۳v'_۲s'' + ۲v''_۲s' = 0 \quad \text{و یا} \quad s''' + ۳\frac{v'_۲}{v_۲}s'' + ۲\frac{v''_۲}{v_۲}s' = 0$$

و با استفاده از روابط (۵۵ . ۵) و معادله $v''_۲ + Iv_۲ = 0$ خواهیم داشت :

$$\frac{v'_۲}{v_۲} = -\frac{۱}{۲}\cdot\frac{s''}{s'} \quad , \quad \frac{v''_۲}{v_۲} = -I$$

لذا اگر این روابط را در معادله بالا قرار دهیم چنین داریم :

$$s''' - \frac{۳}{۲}\cdot\frac{(s'')^۲}{s'} - ۲Is' = 0$$

و یا :

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{s''}{s'}\right)^۲ = ۲I \qquad (۵ . ۵۵۱)$$

عبارت‌واقع درسمت چپ معادله (۵۵۱ . ۵)را مشتق شوارتزین s نسبت به x نامیده وبنابر قرار داد آنرا به $\{s , x\}$ نمایش میدهیم .

اگر بتوانیم یکی از جوابهای خصوصی معادله (۵۵۱ . ۵) را بیابیم دراینصورت یکی از جوابهای معادله $v'' + Iv = 0$ با رابطه $\frac{v'_۲}{v_۲} = -\frac{۱}{۲}\cdot\frac{s''}{s'}$ بدست میاید و بنابر شماره (۵۱ . ۵) جواب عمومی $v'' + Iv = 0$ یا هر معادله‌یی که معادله اخیر فرم هنجاری آن باشد بسهولت تعیین میگردد .

مشتق شوارتزین را ممکن است مستقلاً تعریف نمود و برای این منظور این مشتق را با رابطه زیرکه در آن زبرها مشتق گیری نسبت به x را نمایش میدهند تعیین میکنیم . یعنی :

$$\{s , x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{s''}{s'}\right)^۲ \qquad (۵ . ۵۵۲)$$

با درنظر داشتن تعریف بالا میخواهیم قضیه زیر را ثابت کنیم .

قضیه - اگر a و b و c و dمقادیرثابتی‌بوده و $ad - bc \neq 0$ باشددراینصورت :

$$\left\{\frac{as+b}{cs+d} , x\right\} = \{s , x\} \qquad (۵ . ۵۵۳)$$

اثبات - اگر $y_۱$ و $y_۲$ جوابهای متمایز معادله $y''+Iy=0$ باشند عبارات $v_۱=ay_۱+by_۲$ و $v_۲=cy_۱+dy_۲$ نیز جوابهای این معادله خواهند بود. بنابررابطه (۵ . ۵۵۱) چنین داریم:

$$۲I=\left\{s\ ,\ x\right\}=\left\{\frac{v_۱}{v_۲}\ ,\ x\right\}=\left\{\frac{ay_۱+by_۲}{cy_۱+dy_۲}\ ,\ x\right\}$$

$$\left\{s\ ,\ x\right\}=\left\{\frac{as+b}{cs+d}\ ,\ x\right\}$$

که درآن $s=\frac{y_۱}{y_۲}$ است.

در بسیاری از رشته های ریاضی (نظریه توابع متغیر مختلط - هندسه و غیره) تبدیل $w=\frac{as+b}{cx+d}$ را که درآن $ad-bc\neq 0$ است **تبدیل بی‌لینر* عادی و یا تبدیل خطی کسری عادی** گویند.

لذا این قضیه بیان میکند که اگر تبدیل بی‌لینر عادی را در مورد متغیر تابع انجام دهیم مشتق شوارتزین انواریان میماند.

باید درنظر داشت که اگر $ad-bc=0$ باشد w ثابت بوده و لذا $\left\{w\ ,\ x\right\}$ نامعین خواهد بود.

ازاین قضیه میتوان نتیجه گرفت که اگر $ad-bc\neq 0$ باشد:

$$\left\{\frac{ax+b}{cx+d}\ ,\ x\right\}=\left\{x\ ,\ x\right\}=0$$

مثال ۱ - نشان دهید که:

$$\left\{s\ ,\ x\right\}=-\left(\frac{ds}{dx}\right)^{۲}\left\{x\ ,\ s\right\}$$

حل - بنابر تعریف، مشتق شوارتزین s نسبت به x با رابطه زیر تعیین میگردد:

$$\left\{s\ ,\ x\right\}=\frac{s'''}{s'}-\frac{۳}{۲}\left(\frac{s''}{s'}\right)^{۲}$$

Bilinear *

زبرها مشتق نسبت به x را نمایش میدهند .

ولی از طرف دیگر چنین داریم :

$$\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=۱ \quad \text{و یا} \quad s'_x=\frac{۱}{x'_s}$$

$$s''_x=-\frac{x''_s\cdot s'_x}{(x'_s)^{۲}}=-\frac{x''_s}{(x'_s)^{۳}}$$

$$s'''_x=-\left[\frac{x'''_s\cdot s'_x}{(x'_s)^{۳}}-\frac{۳(x'_s)^{۲}(x''_s)^{۲}\cdot s'_x}{(x'_s)^{٦}}\right]$$

$$=-\frac{x'''_s}{(x'_s)^{٤}}+۳\frac{(x''_s)^{۲}}{(x'_s)^{٥}}$$

با استفاده از این روابط معلوم میگردد که :

$$\frac{s''_x}{s'_x}=-\frac{x''_s}{(x'_s)^{۲}} \quad , \quad \frac{s'''_x}{s'_x}=-\frac{x'''_s}{(x'_s)^{۳}}+۳\frac{(x''_s)^{۲}}{(x'_s)^{٤}}$$

و از آنجا :

$$\left\{s\ ,\ x\right\}=\frac{s'''_x}{s'_x}-\frac{۳}{۲}\left(\frac{s''_x}{s'_x}\right)^{۲}=-\frac{x'''_s}{(x'_s)^{۳}}+۳\frac{(x''_s)^{۲}}{(x'_s)^{٤}}-\frac{۳}{۲}\cdot\frac{(x''_s)^{۲}}{(x'_s)^{٤}}$$

$$=-\frac{۱}{(x'_s)^{۲}}\left[\frac{x'''_s}{x'_s}-\frac{۳}{۲}\left(\frac{x''_s}{x'_s}\right)^{۲}\right]=-\left(\frac{ds}{dx}\right)^{۲}\left\{x\ ,\ s\right\}$$

مثال ۲ـ نشان دهید که :

$$\left\{s\ ,\ x\right\}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\left[\left\{s\ ,\ y\right\}-\left\{x\ ,\ y\right\}\right]$$

حل ـ بااستفاده از تعریف مشتق شوارتزین و مشتق تابع تابع به ترتیب خواهیم داشت :

$$\left\{s\ ,\ x\right\}=\frac{s'''}{s'}-\frac{۳}{۲}\cdot\left(\frac{s''}{s'}\right)^{۲}$$

زبرها مشتق گیری نسبت به x را نشان میدهند.

$$s' = \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$s'' = \frac{d^{۲}s}{dx^{۲}} = \left(\frac{d^{۲}s}{dy^{۲}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} + \frac{ds}{dy} \cdot \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

$$s''' = \frac{d^{۳}s}{dx^{۳}} = \left(\frac{d^{۳}s}{dy^{۳}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۳} + ۲\left(\frac{d^{۲}s}{dy^{۲}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)$$

$$+ \frac{d^{۲}s}{dy^{۲}} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + \frac{ds}{dy} \cdot \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}$$

$$= \left(\frac{d^{۳}s}{dy^{۳}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۳} + ۳\left(\frac{d^{۲}s}{dy^{۲}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right) + \frac{ds}{dy} \cdot \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}$$

و بالنتیجه :

$$\frac{s'''}{s'} = \frac{۱}{s'_y}\left(\frac{d^{۳}s}{dy^{۳}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} + \frac{۳}{s'_y}\left(\frac{d^{۲}s}{dy^{۲}}\right)\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right) + \frac{۱}{y'_x} \cdot \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}$$

$$\frac{s''}{s'} = \frac{۱}{s'_y}\left(\frac{d^{۲}s}{dy^{۲}}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{۱}{y'_x} \cdot \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

و از آنجا :

$$\left\{s\ ,\ x\right\} = \left(\frac{s'''_y}{s'_y}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲} + ۳\left(\frac{s''_y}{s'_y}\right)\left(\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right) + \frac{۱}{y'_x} \cdot \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}$$

$$- \frac{۳}{۲}\left[\left(\frac{s''_y}{s'_y}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right]^{۲}$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\left[\frac{s'''_y}{s'_y} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{s''_y}{s'_y}\right)^{۲}\right] + \frac{۱}{y'_x} \cdot \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{y''_x}{y'_x}\right)^{۲}$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\left\{s\ ,\ y\right\} + \left\{y\ ,\ x\right\}$$

ولی بنابر مثال یک

$$\left\{y\ ,\ x\right\} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\left\{x\ ,\ y\right\}$$

لذا :

$$\left\{s\ ,\ x\right\} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\left[\left\{s\ ,\ y\right\} - \left\{x\ ,\ y\right\}\right]$$

۵۶ . ۵ - هم‌ارز بودن دو معادله با تبدیل متغیرهای مستقل و تابع

میخواهیم شرطی رابدست آوریم که معادله :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Iy = 0 \qquad (۵۶ . ۵)$$

هم‌ارز معادله :

$$\frac{d^2v}{dz^2} + Jv = 0 \qquad (۵۶۱ . ۵)$$

باشد . بعبارت دیگر بتوانیم معادله (۵۶ . ۵) را با تبدیل هردو متغیر x و y بمعادله (۵۶۱ . ۵) مبدل کنیم . I و J به‌ترتیب توابع معلومی از x و z میباشند . درمورد متغیر تابع ما فقط تبدیلاتی که بصورت $y=fv$ که در آن f تابعی از متغیر مستقل و v متغیر تابع جدید است مورد مطالعه قرار میدهیم .

ابتدا در معادله (۵۶ . ۵) متغیر مستقل x را به z تبدیل میکنیم . بنابر شماره (۵۴ . ۵) تبدیل متغیر مستقل جدید معادله (۵۶ . ۵) را به معادله زیر بدل میکند :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz} + Iy = 0 \qquad (۵۶۲ . ۵)$$

حال میخواهیم شرایطی‌را بیابیم که معادلات (۵۶۲ . ۵) و(۵۶۱ . ۵) با یکدیگر هم‌ارز باشند . بنابر شماره (۵۲ . ۵) برای آنکه شرط اخیر برقرار باشد .

الف ـ انواریانهای‌صورتهای‌هنجاری دومعادله(۵۶۲ . ۵) و (۵۶۱ . ۵) بایکدیگر برابر باشند .

ب ـ بین متغیرهای تابع‌این‌دو معادله رابطه (۵۲۴ . ۵) برقرار باشد یعنی هریک ازاین معادلات را بتوان با رابطه :

$$y = ve^{\frac{1}{2}\int(p_1 - p)dx}$$

بدیگری تبدیل کرد .

اکنون اگر دو شرط بالا را دراین مسئله بکار برده وضمناً از رابطه(۵۲۲ . ۵)استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$J=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-٤}\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^{٢}I-\frac{١}{٢}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{٢}\frac{d^{٣}z}{dx^{٣}}\cdot\frac{dx}{dz}\right.$$

$$\left.+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\cdot\frac{dx}{dz}\cdot\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}-\frac{١}{٤}\left(\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\right)^{٢}\right]$$

$$y=ve^{-\frac{١}{٢}\int\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\left(\frac{dx}{dz}\right)^{٢}dz}\qquad ,$$

معادله اول را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{٢}J=I-\frac{١}{٢}\cdot\frac{d^{٣}z}{dx^{٣}}\cdot\frac{dx}{dz}+\frac{٣}{٤}\left(\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\right)^{٢}\left(\frac{dx}{dz}\right)^{٢}$$

و یا :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{٢}J=I-\frac{١}{٢}\left\{z\ ,\ x\right\}\qquad(٥\ .\ ٥٦٣)$$

و ازآنجا این عبارت شامل مشتق شوارتزین z نسبت به x میباشد . از طرف دیگر :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{٢}=٢\,\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\cdot\frac{dx}{dz}=٢\,\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}$$

و بالنتیجه :

$$\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\left(\frac{dx}{dz}\right)^{٢}=\frac{\dfrac{d^{٢}z}{dx^{٢}}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^{٢}}=\frac{١}{٢}\cdot\frac{\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^{٢}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^{٢}}$$

$$=\frac{١}{٢}\cdot\frac{d}{dz}Log\left(\frac{dz}{dx}\right)^{٢}=\frac{d}{dz}Log\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

و ازآنجا شرط دوم یعنی :

$$y=ve^{-\frac{١}{٢}\int\frac{d^{٢}z}{dx^{٢}}\left(\frac{dx}{dz}\right)^{٢}dz}$$

با استفاده از رابطه بالا مبدل به :

$$y=ve^{-\frac{١}{٢}Log\frac{dz}{dx}}$$

و یا :

$$y=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{\frac{١}{٢}}v \qquad (٥ ـ ٥٦٤)$$

میگردد .

لذا برای‌آنکه‌دو معادله (٥٦ . ٥)و(٥٦١ . ٥) آنچنان هم‌ارز باشند که موردنظرما میباشد لازم و کافی است که شرایط (٥٦٣ . ٥) و (٥٦٤ . ٥) توأماً برقرار باشند .

درحالت کلی برای آنکه مسئله هم‌ارز بودن‌دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را مورد بررسی قرار دهیم ابتدا آنرا به صورتهای هنجاری تبدیل کرده و سپس مانند روش بالا برای دو معادله اخیر شرایط هم‌ارز بودن را برقرار میکنیم .

مثال ۱ـ نشان دهید که معادلات دیفرانسیل :

$$\frac{d^{٢}y}{dx^{٢}}+\frac{١}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-y=0 \qquad ,$$

$$٤(١-z)^{٢}\frac{d^{٢}v}{dz^{٢}}+٨z\frac{dv}{dz}+v=0$$

با تبدیل خطی کسری $z=\frac{ax+b}{cx+d}$ قابل‌تبدیل بیکدیگر بوده وسپس مقادیر a , b , c , d را تعیین کرد و همچنین رابطه بین y و v را بدست آورید .

حل ـ ابتدا باید دو معادله بالا را به صورتهای هنجاری (٥٦ . ٥) و (٥٦١ . ٥) تبدیل کنیم . یعنی :

$$\frac{d^{٢}y}{dx^{٢}}+\left(-١+\frac{١}{٢x^{٢}}-\frac{١}{٤x^{٢}}\right)y=0$$

$$\frac{d^{٢}v}{dz^{٢}}+٤^{-٢}(١-z)^{-٤}[٤(١-z)^{٢}-٤(١-z)^{٢}\times ٤$$
$$-٨(١-z)\times ٤z-١٦z^{٢}]v=0$$

و یا :

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\left(\frac{۱}{٤x^۲}-۱\right)y=0$$

و

$$\frac{d^۲v}{dz^۲}+\frac{(z+۱)(z-۳)}{٤(۱-z)^٤}v=0$$

دو معادله بالا هم‌ارز خواهند بود هرگاه روابط (٥٦٣ . ٥) و (٥٦٤ . ٥) برقرار باشد. چون تابع z تبدیل خطی کسری میباشد بنابر قضیه شماره (٥٥ . ٥) مشتق شوارتزین $\left\{z\,,\,x\right\}$ برابر صفر میباشد . پس‌از قرار دادن مقادیر I , J, z , $\frac{dz}{dx}$ در رابطه (٥٦٣ . ٥) خواهیم داشت :

$$\frac{(ad-bc)^۲}{(cx+d)^٤}\cdot\frac{[(a+c)x+(b+d)][(a-۳c)x+(b-۳a)](cx+d)^۲}{٤[(a-c)x+(b-d)]^٤}=\frac{۱}{٤x^۲}-۱$$

$$\frac{(ad-bc)^۲}{(cx+d)^۲}\cdot\frac{[(a+c)x+(b+d)][(a-۳c)x+(b-۳d)]}{٤[(a-c)x+b-d]^٤}=\frac{۱}{٤x^۲}-۱$$

$$(I)\qquad x^۲(ad-bc)^۲[(a+c)x+(b+d)][(a-۳c)x+(b-۳d)]$$
$$=(۱-٤x^۲)(cx+d)^۲[(a-c)x+(b-d)]^٤$$

بزرگترین قوه سمت راست این رابطه $x^۸$ میباشد و ضریب آن $-٤c^۲(a-c)^٤$ است . درصورتیکه بزرگترین قوه سمت چپ رابطه $x^۸$ است و بنابراین برای آنکه اتحاد فوق بازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد باید ضریب $x^٦$ برابر صفر گردد یعنی $a=c$.

اگر مقدار $a=c$ را در رابطه (I) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(II)\qquad ٤a^۲x^۲[۲ax+(b+d)][-۲ax+(b-۳d)]$$
$$=٤(۱-٤x^۲)(ax+d)^۲(b-d)^۲$$

سمت چپ این رابطه معادله درجه چهارمی است که فاقد مقدار ثابت میباشد درصورتیکه مقدار ثابت سمت راست برابر $٤d^۲(b-d)^۲$ و لذا $d=0$ و یا $b=d$ خواهد بود .

بازاء $b=d$ رابطه بالا مبدل به :

$$٤a^٢x^٢(٢ax+٢b)(-٢ax-٢b)=0$$

که فقط بازاء $a=0$ قابل قبول است تبدیل میگردد وبازاء این مقدار a تبدیل خطی کسری تبدیل به $z=١$ میگردد .

اکنون شرط $d=0$ را درنظر میگیریم . بازاء این شرط رابطه (II) بصورت زیر درمیآید :

$$(٢ax+b)(-٢ax+b)=(١-٤x^٢)b^٢$$

و بالنتیجه $a^٢=b^٢$ و از آنجا رابطه مطلوب عبارت خواهد بود از :

$$z=١\pm\frac{١}{x}$$

ولی برای تبدیل متغیرهای تابع باید علامت منفی را اختیار کرد :

$$z=١-\frac{١}{x}$$

و یا :

$$z=\frac{x-١}{x}$$

رابطه (٥٦٤ . ٥) بصورت زیر نوشته میشود :

$$Y=xV$$

$$yc^{\frac{١}{٢}\int\frac{dx}{x}}=xve^{\frac{١}{٢}\int\frac{٢zdz}{(١-z)^٢}}$$

$$ye^{\frac{١}{٢}Log\,x}=xve^{-\int\frac{١-z-١}{(١-z)^٢}dz}=xve^{\int-\frac{dz}{١-z}-\int\frac{dz}{(١-z)^٢}}$$

$$=xve^{Log(١-z)-\frac{١}{١-z}}$$

$$yx^{\frac{1}{۲}}=xv\cdot\frac{1}{x}e^{x}\quad,\quad y=x^{-\frac{1}{۲}}ve^{x}$$

٦ . ٥ - روش تغییر پارامترها

درشماره (٥ . ٥١) نشان دادیم که اگر یک جواب معادله $y''+Py'+Qy=0$ در دست باشد جواب عمومی معادله $y''+Py'+Qy=R$ را میتوان بدست آورد . لذا برای حل معادله مرتبه دوم لازم است که یک جواب خصوصی در دست باشد . در مواردی که با استفاده از روشهای پیش‌گفته نتوانیم این جواب را بدست آوریم از روش زیر استفاده میکنیم . همانطورکه درفصل ششم نشان خواهیم داد این روش را میتوان برای یافتن جواب خصوصی هرنوع معادله خطی تعمیم داد. فرض میکنیم y_1 یکی از جوابهای معادله :

$$y''+Py'+Qy=0 \tag{٥ . ٥١٢}$$

باشد لذا :

$$y''_1+Py'_1+Qy_1=0$$

از حذف Q بین دو معادله بالا رابطه زیر بدست میآید :

$$y_1y''-yy''_1+P(y_1y'-yy'_1)=0 \tag{٥ . ٦}$$

و یا :

$$y_1y'-yy'_1=Ae^{-\int pdx} \tag{٥ . ٦١}$$

واضح است که اگر y جواب عمومی معادله (٥ . ٥١٢) باشد A باید مخالف صفر باشد زیرا درغیر اینصورت جواب عمومی معادله (٥ . ٥١٢) به یک مقدار ثابت بستگی خواهد داشت . رابطه (٥ . ٦١) نسبت به y خطی بوده و دارای عامل انتگرال کننده $e^{-\int\frac{y'_1}{y_1}dx}=\frac{1}{y_1}$ است . لذا :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{A}{y_1^{۲}}e^{-\int pdx}$$

$$y=By_1+Ay_1\int\frac{dx}{y_1^{۲}}e^{-\int pdx}=By_1+Ay_{۲} \tag{٥ . ٦٢}$$

که در آن :
$$y_2=y_1\int\frac{dx}{y_1^2}\,e^{-\int pdx}$$

بنابراین عبارت $y=By_1+Ay_2$ جواب عمومی معادله (۵ . ۵۱۲) بوده و بالاخص y_2 یکی از جوابهای خصوصی میباشد .

اگر جواب خصوصی y_2 را در رابطه (۵ . ۶) قرار داده و از آن انتگرال بگیریم رابطه زیر که بفرمول **آبل*** موسوم است بدست میآید :

$$y_1y''_2-y_2y''_1=ce^{-\int pdx} \qquad (۵ . ۶۳)$$

اکنون رابطه (۵ . ۶۲) را در رابطه :

$$y''+Py'+Qy=R \qquad (۵ . ۶۴)$$

قرار داده و بجای آنکه ضرایب A و B را مقادیر ثابت فرض کنیم آنها را توابعی از x اختیار میکنیم . ضرایب A و B باید بقسمی تعیین گردند که رابطه (۵ . ۶۲) در عبارت (۵ . ۶۴) صدق کند . بنابراین صورت جواب عمومی دو معادله (۵ . ۵۱۲) و (۵ . ۶۴) یکسان بوده ولی A و B در جواب عمومی معادله (۵ . ۵۱۲) مقادیر ثابت و در معادله (۵ . ۶۴) توابعی از x هستند . این روش بروش **تغییر پارامترها** موسوم است .

با توجه باینکه y برحسب دو کمیت مجهول A و B بیان شده است میتوان بین این دو کمیت هر رابطه یی که برای مقصود ما مناسب باشد اختیار کرد .

اگر از رابطه (۵ . ۶۲) با فرض آنکه A و B توابعی از x هستند مشتق بگیریم چنین داریم :

$$y'=By'_1+Ay'_2+y_1B'+y_2A'$$

$$y'=By'_1+Ay'_2 \qquad \text{(I)}$$

بشرط آنکه :

$$y_1B'+y_2A'=0 \qquad (۵ . ۶۵)$$

---

* Niels Henrick Abel (۱۸۲۹ - ۱۸۰۲) آبل ریاضی‌دان نروژی بوده که درطول [illegible] بسیار کوتاه خود خدمات مهی بعلم ریاضی نموده است .

رابطه (٥ . ٦٥) رابطه‌یی میباشد که باید بین‌ضرایب A و B برقرار باشد. اگر از عبارت (I) یک بار دیگر مشتق بگیریم چنین داریم :

$$y''=By''_1+Ay''_2+y'_1B'+y'_2A' \tag{II}$$

اگر روابط (٥ . ٦٢) و (I) و (II) را در معادله (٥ . ٦٤) قرارداده ودرنظر داشته باشیم که y_1 و y_2 جوابهای خصوصی معادله (٥ . ١٢٥) میباشد خواهیم داشت :

$$y'_1B'+y'_2A'=R \tag{٥ . ٦٦}$$

رابطه بالا را با استفاده از روابط (٥ . ٦٥) و (٥ . ٦٣) میتوان به ترتیب بصورت زیر نوشت :

$$\frac{A'}{y_1}=-\frac{B'}{y_2}=\frac{y'_2A'+y'_1B'}{y_1y'_2-y_2y'_1}=\frac{R}{y_1y'_2-y_2y'_1}$$

$$=\frac{R}{ce^{-\int pdx}}=\frac{R}{c}e^{\int pdx}$$

و از آنجا :

$$A=E+\frac{1}{c}\int Ry_1e^{\int pdx}dx \quad ; \quad B=F-\frac{1}{c}\int Ry_2e^{\int pdx}dx$$

که در آن E و F مقادیرثابت‌غیر مشخص و c مقدار ثابتی میباشد که بستگی‌به صورتهای توابع y_1 و y_2 دارد .

بنابراین جواب عمومی معادله (٥ . ٦٤) عبارت خواهد بود از :

$$y=Ey_2(x)+Fy_1(x)+\frac{1}{c}\int^x R(\xi)e^{\int^\xi p(z)dz}[y_2(x)y_1(\xi)-y_1(x)y_2(\xi)]d\xi$$

که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای خصوصی معادله (٥ . ١٢٥) بوده و بنابراین در فرمول آبل (٥ . ٦٣) صدق میکنند .

بدون آنکه از عمومیت مسئله بکاهیم میتوان فرض نمود که c در رابطه (٥ . ٦٣) برابر یک است زیرا در غیراینصورت اگر $f_2(x)$ را مبدل به $\frac{1}{c}f_2(x)$ نماییم رابطه

(۶۲ . ۰) برابطه‌یی تبدیل میگردد که در آن c مساوی یک میباشد .

تبصره - روش تبدیل متغیررا میتوان بنحودیگری نسبت به جمله‌یی که حذف مینماییم بکار بریم تا انتگرال واسطه‌یی بدست آوریم و سپس مقادیر ثابتی که دراین انتگرال ظاهر میگردند متغیر فرض میکنیم .

مثلاً برای حل معادله :

$$y''+y'^{۲}f(y)+F(y)=0 \tag{I}$$

ابتدا جمله‌یی که شامل F(y) است حذف مینماییم تا یک انتگرال واسطه بدست آید. این انتگرال در معادله :

$$y''+y'^{۲}f(y)=0$$

صدق میکند . لذا :

$$y'e^{\int f(y)dy}=c \tag{II}$$

اکنون بجای آنکه c را مقدار ثابت اختیار کنیم آنرا تابعی از x میپنداریم و از رابطه (II) نسبت به x مشتق میگیریم . یعنی :

$$[y''+f(y)y'^{۲}]e^{\int f(y)dy}=c'$$

با توجه به رابطه (I) عبارت بالا به صورت زیر نوشته میشود :

$$-F(y)c^{\int f(y)dy}=c'$$

از آنجا :

$$cc'=-F(y)e^{۲\int f(y)dy}y'$$

و یا :

$$c^{۲}=A-۲\int dyF(y)e^{۲\int f(y)dy}$$

بنابراین یکی از انتگرالهای اول معادله (I) عبارت میگردد از :

$$y'e^{\int f(y)dy}=\left\{A-۲\int dyF(y)e^{۲\int f(y)dy}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

چون متغیرها در رابطه بالا قابل مجزا شدن هستند لذا میتوان جواب عمومی معادله (I) را بدست آورد .

مثال ۱- معادله زیر را حل کنید :

$$xy'-y=(x-۱)(y''-x+۱)$$

حل - معادله بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$y''-\frac{x}{x-۱}y'+\frac{۱}{x-۱}y=x-۱$$

معادله $y''-\frac{x}{x-۱}y'+\frac{۱}{x-۱}y=0$ دارای جوابهای خصوصی $y_۱=x$ و $y_۲=e^x$ بوده و لذا جواب عمومی عبارت خواهد بود از $y=Bx+Ae^x$. A و B توابعی از x میباشند که در روابط زیر صدق میکنند :

$$A'e^x+B'x=0 \quad , \quad A'e^x+B'=x-۱$$

و از آنجا :

$$A'=xe^{-x} \quad , \quad B'=-۱$$

$$A=E+\int^{x}\xi e^{-\xi}d\xi=E-e^{-x}(x+۱) \quad ; \quad B=F-x$$

و جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$y=Ee^x+Fx-(x^۲+x+۱)$$

مثال ۲- معادله دیفرانسیل $y''-۶y'+۹y=\frac{e^{۳x}}{x^۲}$ را حل کنید .

حل - درفصل ششم نشان خواهیم داد که جواب عمومی معادله $y''-۶y'+۹y=0$ عبارت است از $y=Ae^{۳x}+Bxe^{۳x}$. A و B توابعی از x هستند که در دو رابطه (۵ . ۶۵) و (۵ . ۶۶) صدق مینمایند .

$$A'e^{۳x}+B'xe^{۳x}=0 \quad ; \quad (۳A'+B')e^{۳x}+۳B'xe^{۳x}=\frac{e^{۳x}}{x^۲}$$

و از آنجا :

$$A'=-\frac{۱}{x} \quad , \quad B'=\frac{۱}{x^۲}$$

$$A=E-Log x \quad , \quad B=F-\frac{۱}{x}$$

و بالنتیجه جواب عمومی معادله برابر $y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}-e^{3x}Log x$ میگردد .

مثال ۳ - معادله $y''+f(x)y'+y'^2\varphi(x)=0$ راحل کرده و سپس جواب این معادله را با استفاده‌از روش‌شماره (۳ . ۵) بدست آورید . همچنین جواب عمومی معادله $y''+f(y)y'+\varphi(y)y'^2=0$ را بیابید .

حل - اگرموقتاً جمله‌یی که‌شامل $y'^2\varphi(x)$ است‌حذف کنیم معادله $y''+f(x)y'=0$ دارای جواب عمومی $y'=ce^{-\int f(x)dx}$ میباشد . اکنون c را تابعی از x پنداشته و آنرا در معادله قرار میدهیم . یعنی :

$$y''=[c'-cf(x)]e^{-\int f(x)dx} \quad ;$$

$$[c'-cf(x)]e^{-\int f(x)dx}+cf(x)e^{-\int f(x)dx}+c^2e^{-2\int f(x)dx}\varphi(x)=0$$

$$-\frac{c'}{c^2}=e^{-\int f(x)dx}\varphi(x) \quad , \quad c=[B+\int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx]^{-1}$$

و ازآنجا :

$$y-A=\int[B+\int\varphi(x)e^{-\int f(x)dx}dx]^{-1}e^{-\int f(x)dx}dx \qquad (I)$$

چون معادله فاقد y است لذا تبدیل متغیر $p=\frac{dy}{dx}$ آنرا مبدل به معادله زیرمینماید:

$$\frac{dp}{dx}+f(x)p+p^2\varphi(x)=0$$

این معادله نسبت به p برنولی بوده و میتوان جواب عمومی آنرا مانند شماره (۸۱ . ۲) بدست آورد .

اگر روش‌بالا را درمورد معادله $y''+f(y)y'+\varphi(y)y'^2=0$ تکرارکنیم جواب عمومی آن بدست میآید وبرای این منظورکافی‌است x واقع درسمت چپ رابطه (I) رابه y تبدیل کنیم :

$$y-A=\int[B+\int\varphi(y)e^{-\int f(y)dy}dy]^{-1}e^{-\int f(y)dy}dy$$

مثال ۴- جواب‌عمومی معادله‌دیفرانسیل $y''+f(x)y'+F(y)y'^2=0$ را بیکی از سه روش زیر بدست آورید .

اولاً ـ با حذف جمله آخر یک انتگرال واسطه بدست آورده و سپس پارامترها را تغییر دهید .

ثانیاً ـ باحذف جمله دوم یک انتگرال واسطه بدست آورده وسپس پارامترها را تغییر دهید .

ثالثاً ـ دوطرف معادله را در y'^{-1} ضرب کرده و سپس از هرجمله انتگرال بگیرید.

ازمثالهای (۳) و (۴) نتیجه میشود که معادله $y''+Py'+Qy'^{2}=0$ درصورتی قابل انتگرال گیری میباشد که :

الف ـ P و Q توابعی از x باشند .

ب ـ P و Q توابعی از y باشند .

پ ـ P تابعی از x و Q تابعی از y باشد .

حل ـ اولاً ـ اگر موقتاً جمله یی که شامل $F(y)y'^{2}$ است حذف کنیم مانند مثال (۳) معادله $y''+f(x)y'=0$ دارای جواب عمومی $y'=ce^{-\int f(x)dx}$ خواهد بود . اگر c را تابعی از x پنداشته وعبارات y' و y'' را مانند مثال ۳ محاسبه نموده وآنرا در معادله قرار دهیم خواهیم داشت :

$$c'+c^{2}F(y)e^{-\int f(x)dx}=0 \quad ; \quad c'+cF(y)y'=0$$

$$Log\,\frac{c}{A}=-\int F(y)dy \quad ; \quad c=Ae^{-\int F(y)dy}$$

$$y'=ce^{-\int f(x)dx}=Ae^{-\int F(y)dy}\times e^{-\int f(x)dx}$$

$$dye^{\int F(y)dy}=Ae^{-\int f(x)dx}dx \quad ; \quad \int e^{\int F(y)dy}dy=B+A\int e^{-\int f(x)dx}dx$$

ثانیاً ـ اگر از جمله دوم موقتاً صرفنظر کنیم ، معادله شامل متغیر مستقل نبوده و لذا بنابر شماره (۲ . ۵) اگر تبدیل متغیرهای $y'=p$ و $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ رادر معادله انجام دهیم خواهیم داشت :

$$y''+F(y)y'^{۲}=0 \quad , \quad p\frac{dp}{dy}+F(y)p^{۲}=0$$

$$\frac{dp}{p}=-F(y)dy \quad , \quad y'=p=ce^{-\int F(y)dy}$$

اکنون c را تابعی از y پنداشته و عبارات $y'=p$ و $y''=p\frac{dp}{dy}$ را در معادله قرار میدهیم . یعنی :

$$\frac{dp}{dy}=\left[\frac{dc}{dy}-cF(y)\right]e^{-\int F(y)dy} \quad , \quad y''=p\frac{dp}{dy}=ce^{-۲\int F(y)dy}\left[\frac{dc}{dy}-cF(y)\right]$$

$$ce^{-۲\int F(y)dy}\left[\frac{dc}{dy}-cF(y)\right]+F(y)c^{۲}e^{-۲\int F(y)dy}+f(x)ce^{-\int F(y)dy}=0$$

$$\frac{dc}{dy}e^{-\int F(y)dy}+f(x)=0 \quad , \quad \frac{dc}{ce^{-\int F(y)dy}dx}e^{-\int F(y)dy}+f(x)=0$$

$$\frac{dc}{c}+f(x)dx=o \quad , \quad c=Ae^{-\int f(x)dx}$$

$$e^{\int F(y)dy}dy=Ae^{-\int f(x)dx}dx \quad , \quad \int e^{\int F(y)dy}dy=B+A\int e^{-\int f(x)dx}dx$$

ثالثاً ـ پس از ضرب دوطرف معادله در $\frac{۱}{y'}$ خواهیم داشت :

$$\frac{y''}{y'}+f(x)+F(y)y'=0 \quad , \quad \frac{dy'}{y'}+f(x)dx+F(y)dy=0$$

$$Log\,\frac{y'}{A}+\int f(x)dx+\int F(y)dy=0 \quad , \quad \frac{y'}{A}=e^{-\int F(y)dy}\times e^{-\int f(x)dx}$$

و از آنجا :

$$\int e^{\int F(y)dy}dy=B+A\int e^{-\int f(x)dx}dx$$

۵.۷ - تجزیه اوپریتورها

معادله مرتبه‌دوم $A_{۰}y''+۲A_{۱}y'+A_{۲}y=0$ که‌درآن $A_{۰}$ و $A_{۱}$ و $A_{۲}$ توابع معینی از x هستند درنظر میگیریم . این معادله را ممکن است با تجزیه نمودن اوپریتور

$A_۰D^۲+۲A_۱D+A_۲$ بحاصل‌ضرب $(pD+q)(rD+s)$ حل نمود. p , q , r , s توابعی از x میباشند که باید آنها را تعیین کرد و $D\equiv\frac{d}{dx}$ است. درباره اوپریتورها بطور مفصل در فصل هفتم بحث خواهیم کرد .

اگر بتوان اوپریتور $A_۰D^۲+۲A_۱D+A_۲$ را تجزیه نمود ، به ترتیب چنین داریم:

$$A_۰y''+۲A_۱y'+A_۲y=۰ \quad ; \quad (A_۰D^۲+۲A_۱D+A_۲)y=۰$$

$$(pD+q)(rD+s)y=۰ \tag{I}$$

برای حل معادله (I) به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$(II)\qquad \begin{aligned}&(rD+s)y=z \quad ; \quad r\frac{dy}{dx}+sy=z\\ &(pD+q)z=۰ \quad ; \quad p\frac{dz}{dx}+qz=۰\end{aligned}$$

از دومین معادله رابطه (II) مقدار z را که برابر $z=Ae^{-\int\frac{q}{p}dx}$ است یافته و آنرا در معادله اول (II) که نسبت به y خطی میباشد قرار داده و سپس جواب عمومی را مانند شماره (۷ . ۲) تعیین میکنیم .

بنابراین برای یافتن جواب عمومی معادله در اینحالت کافی است ضرایب p و q و r و s را تعیین کنیم .

ولی مقدمتاً لازم است متذکر گردیم که اگر A و B دو اوپریتور دیفرانسیل خطی باشند در اغلب موارد $AB\neq BA$ است. مثلاً $x^۲D$ بنابر تعریف اوپریتوری میباشد که اگر در تابعی مانند y عمل کند نتیجه برابر $x^۲\frac{dy}{dx}$ گردد. ولی $Dx^۲$ بنابر تعریف اوپریتوری میباشد که اگر بر y عمل کند مشتق $x^۲y$ بدست میاید . یعنی :

$$(Dx^۲)y=\frac{d}{dx}(x^۲y)=x^۲\frac{dy}{dx}+۲xy=(x^۲D+۲x)y$$

پس :

$$Dx^۲=x^۲D+۲x\neq x^۲D$$

حال فرض میکنیم اوپریتور $A_۰D^۲+۲A_۱D+A_۲$ را بتوان به حاصل‌ضرب عوامل درجه اول تجزیه کرد . یعنی :

$$(pD+q)(rD+s)=A_0D^۲+۲A_۱D+A_۲ \qquad (۵ . ۷)$$

از طرف دیگر با استفاده از تعریف اوپریتور $D=\frac{d}{dx}$ چنین داریم :

$$(pD+q)(rD+s)y=(p\frac{d}{dx}+q)(r\frac{d}{dx}+s)y=p\frac{d}{dx}\left(r\frac{dy}{dx}+sy\right)+qr\frac{dy}{dx}+qsy$$

$$=pr\frac{d^۲y}{dx^۲}+pr'\frac{dy}{dx}+ps\frac{dy}{dx}+pr\frac{dy}{dx}+ps'y+pr\frac{dy}{dx}+psy$$

$$(pD+q)(rD+s)y=[prD^۲+(pr'+ps+qr)D+(ps'+qs)]y$$

و یا :

$$prD^۲+(pr'+ps+qr)D+(ps'+qs)=A_0D^۲+۲A_۱D+A_۲$$

از آنجا :

$$\begin{aligned} pr&=A_0\\ pr'+ps+qr&=۲A_۱ \qquad (۵ . ۷۱)\\ ps'+qs&=A_۲ \end{aligned}$$

چون باید ازین سه معادله فوق p و q و r و s را تعیین کنیم لذا p و r را فاکتورهای A_0 پنداشته و q و s را از معادله دوم وسوم بدست میآوریم. اگر q را بین دو معادله حذف کنیم خواهیم داشت :

$$psr'+ps^۲-۲sA_۱-prs'+rA_۲=0 \qquad (۵ . ۷۲)$$

p ، r ، $A_۱$ ، $A_۲$ توابع معینی از x بوده و s تابعی است که باید آنرا تعیین کنیم. معادله بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(III) \qquad s'=\frac{s^۲}{r}+\frac{pr'-۲A_۱}{pr}s+\frac{A_۲}{p}$$

این معادله، معادله ریکاتی بوده وبنابرنتیجه پنجم شماره (۸۳ . ۲) تبدیل متغیر $s=-\frac{r\sigma'}{\sigma}$ آنرا مبدل به معادله مرتبه دوم میکند. زیرا اگر مقدار s' و s را در رابطه (III) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$-\frac{prr'\sigma'}{\sigma}+\frac{pr^{۲}(\sigma')^{۲}}{\sigma^{۲}}+\frac{۲A_{۱}r\sigma'}{\sigma}+\frac{prr'\sigma'}{\sigma}+\frac{pr^{۲}\sigma''}{\sigma}$$

$$-\frac{pr^{۲}(\sigma')^{۲}}{\sigma^{۲}}+rA_{۲}=0$$

و یا :

$$pr^{۲}\sigma''+۲A_{۱}\sigma'+A_{۲}\sigma=0$$

ولی چون $r\neq 0$ و $pr=A_{0}$ است لذا :

$$A_{0}\sigma''+۲A_{۱}\sigma'+A_{۲}\sigma=0$$

این همان معادله‌یی میباشد که میخواهیم جواب آنرا بیابیم و لذا اگر بتوانیم s را بیابیم از رابطه $s=-\frac{r\sigma'}{\sigma}$ میتوان σ و بالنتیجه جواب عمومی را یافت .

تبصره - معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را میتوان بصورت :

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{۱}{U}\cdot\frac{dy}{dz}\right\}+y=0$$

نوشت. زیرا اگر دوطرف معادله $y''+Py'+Qy=0$ رادر $e^{\int pdx}$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{\int pdx}y'\right\}+Qe^{\int pdx}y=0 \qquad \text{(I)}$$

اکنون متغیر مستقل z را چنان انتخاب میکنیم که :

$$dz=Qe^{\int pdx}dx$$

باشد . بااین تبدیل متغیر رابطه (I) بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{d}{dz}\left\{Qe^{۲\int pdx}\frac{dy}{dz}\right\}+y=0$$

ولی ازآنجاییکه $Qe^{۲\int pdx}$ تابع معینی از x است لذا تابعی از z نیزخواهد بودکه‌آنرا به $\frac{۱}{U}$ نمایش میدهیم . U تابعی است از z . پس :

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{۱}{U}\cdot\frac{dy}{dz}\right\}+y=۰$$

مثال ۱- معادله :

$$(x^{۲}-۳x+۲)y''-(۲x-۳)y'+۲y=۰$$

را حل کنید .

حل - برای تجزیه اوپریتورها آنرا بصورت زیر مینویسیم :

$$\text{(I)}\quad [(x-۱)D+q(x)][(x-۲)D+s(x)]=(x-۱)(x-۲)D^{۲}-(۲x-۳)D+۲$$

ولی چون ضرایب $D^{۲}$ در دوطرف معادله باهم برابر هستند لذا اگر طرف چپ رابطه بالا را بسط دهیم اتحاد زیر بدست میآید :

$$(x-۱)D+(x-۱)s(x)D+(x-۱)s'(x)+(x-۲)q(x)D+q(x)s(x)=-(۲x-۳)D+۲$$

بنابراین برای تعیین $q(x)$ و $s(x)$ دو معادله زیر بدست میآید :

$$(x-۱)+(x-۱)s(x)+(x-۲)q(x)=-۲x+۳$$

$$(x-۱)s'(x)+q(x)s(x)=۲$$

اکنون فرض میکنیم که $q(x)$ و $s(x)$ توابع خطی از x باشند . درحال حاضر نمیتوانیم وجود این توابع را تأیید نماییم ولی‌اگر بتوانیم این توابع را بیابیم میتوان آنها را مستقیماً در معادله قرار داد و صحت اتحاد **اوپریشینال*** را بررسی نمود .

اگر $s(x)=ax+b$ و $q(x)=cx+d$ باشد مقادیر ثابت d , c , b , a باید در دو اتحاد زیرصدق کنند :

$$x-۱+ax^{۲}+bx-ax-b+cx^{۲}+dx-۲cx-۲d\equiv-۲x+۳$$

$$ax-a+acx^{۲}+bcx+adx+bd\equiv۲$$

واز آنجا شش معادله زیربدست میآید :

Operatinal *

$$a+c=0$$

$$۱+b-a+d-۲c=-۲$$

$$-۱-b-۲d=۳$$

$$ac=0$$

$$a+bc+ad=0$$

$$-a+bd=۲$$

بسهولت میتوان نشان داد که دستگاه معادلات بالا دارای جواب منحصر بفرد $a=0$, $b=-۲$, $c=0$, $d=-۱$ خواهد بود .

برای تأیید آنکه توابع $q(x)=-۱$ و $s(x)=-۲$ توابع مورد نظر هستند کافی است صحت اتحاد (I) را بازاء این مقادیر $q(x)$ و $s(x)$ ثابت کنیم . یعنی :

$$[(x-۱)D-۱][(x-۲)D-۲]=(x-۱)(x-۲)D^۲+(x-۱)D$$

$$-۲(x-۱)D-(x-۲)D+۲$$

$$=(x^۲-۳x+۲)D^۲-(۲x-۳)D+۲$$

بالنتیجه مسئله اصلی ما منجر به حل معادله زیر میگردد :

$$[(x-۱)D-۱][(x-۲)D-۲]y=0$$

برای حل معادله بالا $[(x-۲)D-۲]y=z$ قرار میدهیم . پس :

$$[(x-۱)D-۱]z=0 \quad ; \quad \frac{z'}{z}-\frac{۱}{x-۱}=0$$

این معادله‌دارای‌جواب‌عمومی $z=c_۱(x-۱)$ است . $c_۱$ ثابت غیر مشخصی میباشد . لذا:

$$(x-۲)y'-۲y=c_۱(x-۱)$$

این معادله نسبت به y خطی بوده و دارای عامل‌انتگرال کننده $(x-۲)^{-۳}$ است . پس :

$$(x-۲)^{-۲}y'-۲(x-۲)^{-۳}y=c_۱(x-۱)(x-۲)^{-۳}$$

$$(x-۲)^{-۲}y=c_۱\int\frac{x-۱}{(x-۲)^۳}\,dx=c_۱\int\frac{۱+x-۲}{(x-۲)^۳}\,dx$$

و یا :
$$(x-۲)^{-۲}y=c_۱[-\frac{۱}{۲}(x-۲)^{-۲}-(x-۲)^{-۱}]+c_۳$$

لذا جواب عمومی معادله عبارت میگردد از :

$$y=c_۲(x-۲)^۲+c_۳(۲x-۳)$$

مثال ۲- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید .

$$(x^۲+x-۲)y''+(x^۲-x)y'-(٦x^۲+۷x)y=0$$

حل - بطریق مشابه مثال بالاوانتخاب $p=x+۲$ ، $r=x-۱$ ، $q=cx+d$ ، $s=ax+b$ به ترتیب خواهیم داشت :

$$[(x+۲)D+q][(x-۱)D+s]=(x+۲)(x-۱)D^۲ \\ +(x^۲-x)D-(٦x^۲+۷x)$$

$$(x+۲)D+(x+۲)sD+(x+۲)s'+(x-۱)qD+qs \\ =(x^۲-x)D-(٦x^۲+۷x)$$

از آنجا :
$$(x+۲)+(x+۲)s+(x-۱)q=x^۲-x$$

$$(x+۲)s'+qs=-(٦x^۲+۷x)$$

پس ازجایگزین نمودن مقادیر q و s و متحد نمودن ضرایب دردوطرف معادله ، شش معادله زیر بدست میاید :

$$\begin{cases} a+c=۱ \\ -c+d+۲a+b=-۲ \\ d-۲b=۲ \end{cases} \begin{cases} ac=-٦ \\ ad+cb+a=-۷ \\ bd+۲a=0 \end{cases}$$

بسهولت میتوان نشان داد که شش دستگاه معادله بالادارای جواب منحصر بفرد $a=-۲$ ، $b=۱$ ، $c=۳$ ، $d=+٤$ است . پس معادله را میتوان بصورت :

$$[(x+۲)D+۳x+٤][(x-۱)D-(۲x-۱)]y=0$$

نوشت . باجایگزین کردن $[(x-۱)D-(۲x-۱)]y=z$ معادله :

$$(x+۲)\frac{dz}{dx}+(۳x+٤)z=0$$

دارای جواب عمومی $z=A(x+۲)^{۲}e^{-۳x}$ بوده و بالنتیجه معادله خطی :

$$(x-۱)\frac{dy}{dx}-(۲x-۰)y=A(x+۲)^{۲}e^{-۳x}$$

دارای جواب عمومی زیر میباشد :

$$y=(x-۱)e^{۲x}[B+A\int_{۰}\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^{۲}e^{-٥x}dx]$$

مسائل

۱- معادله مرتبه دوم $(D^{۲}+RD+S)y=0$ مفروض است نشان دهید :
اولا - $x=y$ در صورتی جواب خصوصی خواهد بود که $R+xS=0$ باشد و از آنجا جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید .

الف - $\left(D^{۲}-\frac{۲}{x}D+\frac{۳}{x^{۲}}\right)y=۲x-۱$.

ب - $$x^{۲}(x+۱)\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-x(۲+٤x+x^{۲})\frac{dy}{dx}+(۲+٤x+x^{۲})y=-x^{٤}-۲x^{۳}$$

پ - $x^{۲}y''-x(x+۲)y'+(x+۲)y=-x^{۳}-x-۲$.

ت - $(۱+x^{۲})y''-۲xy'+۲y=X$.

ث - $(x\sin x+\cos x)y''-x\cos xy'+y\cos x=x$.

ج - $xy''-۳y'+\frac{۳y}{x}=x+۲$.

چ - $x^{۲}y''+xy'-y=-۳x^{۲}-۱$.

ثانیاً - اگر $۱+R+S=0$ باشد، $y=e^{x}$ یکی از جوابهای خصوصی معادله خواهد

بود و از آنجا جواب عمومی هریک از معادلات زیر را بدست آورید .

الف - $xy''-(۲x+۱)y'+(x+۱)y=(x^۲+x-۱)c^{۲x}$.

ب - $xy''-(x+۲)y'+۲y=o$.

پ - $(x+۱)y''-(۲x+۳)y'+(x+۲)y=(x^۲+۲x+۱)c^{۲x}$.

ت - $x^۲y''+(x-٤x^۲)y'+(۱-۲x+٤x^۲)y=(x^۲-x+۱)c^{x}$.

ث - $(x-۱)y''-xy'+y=۱$.

ج - $y''-xy'+(x-۱)y=X$.

ثالثاً - اگر $۱-R+S=o$ باشد ، $y=c^{-x}$ یکی‌از جوابهای خصوصی معادله میباشد و از آنجا جواب عمومی $y''+۲y'+y=x^۲+۳x$ را بدست آورید .

رابعاً - اگر $m^۲+mR+S=o$ باشد ، $y=e^{mx}$ یکی از جوابهای خصوصی معادله میباشد و از آنجا جواب عمومی $(x-۲)y''-(٤x-۷)y'+(٤x-٦)y=o$ را بدست آورید .

۲- نشان دهید یک مقدار m موجود است که x^m یکی از جوابهای معادلات زیر میباشد و سپس جواب عمومی معادله را بیابید .

الف - $(x^۲-۲x)y''+۲(۱-x)y'+۲y=o$.

ب - $x^۲(۱-x)y''+x(x-٤)y'+٦y=o$.

پ - $y''+\frac{x^۳-۲}{x}y'-۳xy=o$.

ت - $(x^۲+٤)y''-۲xy'+۲y=۸$.

ث - $x(۳x+۲)(x+۱)y''=۲(۲x+۱)y'+۲(۳x+۱)y$.

۳- نشان دهید هریک‌از معادلات‌زیردارای جواب خصوصی $y=ax+b$ (a و b را باید تعیین کنید) بوده و سپس جواب عمومی را بیابید .

الف - $(۱+x^۲)y''-(۱+x)(۲x+۵)y'+(۲x+۵)y=o$.

ب - $x(۱-x)^۲y''+(۱-x^۲)y'+(۱+x)y=o$.

پ ـ $xy''-(x+۳)y'+y=0$.

۴ـ نشان دهید هریک از معادلات زیر دارای جواب خصوصی $y=ax^۲+bx+c$ (a و b و c را باید تعیین کنید) بوده و سپس جواب عمومی را بیابید .

الف ـ $xy''-(x+۴)y'+۲y=0$.

ب ـ $x(۱-x^۲)^۲y''+(۱-x^۲)(۱+۳x^۲)y'+۴x(۱+x^۲)y=0$.

پ ـ $(۱+x^۲)y''-۲y=0$.

ت ـ $x(x-۱)y''+(۲x-۱)y'-۶y=0$.

ث ـ $x(x-۲)y''-۲(x-۱)y'+۲y=۲x^۳-۶x^۲$.

۵ـ نشان دهید $y=\sin x$ یکی‌ازجوابهای خصوصی معادله‌های زیر میباشد وسپس جواب عمومی را بدست آورید .

الف ـ $tg^۲x y''-۲tgx y'+(۲-tg^۲x)y=0$.

ب ـ $y''\sin^۲x-(۲tgx+\sin x\cos x)y'+۳y=0$.

پ ـ $y''-۲tgx y'+۳y=۲\sec x$.

۶ـ نشان دهید $y=\frac{۱}{۱+x}$ یکی از جوابهای خصوصی معادله :

$$x(۱+x)y''=[(n-۲)x+n]y'+ny$$

میباشد و سپس جواب عمومی را بدست آورید .

۷ـ نشان دهید $y=\frac{x}{۱-x}$ یکی‌ازجوابهای‌خصوصی معادله $x(۱-x)^۲y''=۲y$ است و از آنجا جواب عمومی را بدست آورید .

۸ـ نشان دهید $y=\frac{۱}{x}$ یکی از جوابهای خصوصی معادله :

$$(ax-bx^۲)y''+۲ay'+۲by=x^{n-۱}$$

میباشد و سپس جواب عمومی معادله را بدست آورید .

۹- نشان دهید $y=xe^x$ یکی از جوابهای خصوصی معادله :

$$x^۲y''+(x^۲-۲x)y'-(۲x^۲+x-۲)y=0$$

میباشد و سپس جواب عمومی معادله را بدست آورید .

۱۰- هریک از معادلات زیر را بصورتهای هنجاری تبدیل کرده و سپس جواب عمومی معادله را بیابید .

الف - $y''-\frac{۲}{x}y'+\left(۱+\frac{۲}{x^۲}\right)y=xe^x$.

ب - $y''-۲xy'+(x^۲+۲)y=e^{\frac{۱}{۲}(x^۲+۲x)}$.

پ - $y''-\frac{۳}{x}y'+\frac{۳}{x^۲}y=۲x-۱$.

ت - $y''-۴xy'+۴x^۲y=xe^{x^۲}$.

ث - $xy''-۲(x-۱)y'+۲(x-۱)y=0$.

ج - $x^۲y''+۴x^۲y'+(۴x^۲-۶)y=0$.

چ - $x^۲y''-۲xy'+۲(x^۲+۱)y=0$.

ح - $x^۲y''+(x^۲-۲x)y'-(۲x^۲+x-۲)y=0$.

خ - $x^۲y''+(x^۲-۲x)y'-(۲x^۲+x-۲)y=0$.

د - $y''-۲tgxy'-۱۰y=0$.

ذ - $y''-۲bxy'+b^۲x^۲y=x$.

ر- $y''-\frac{۲}{x}y'+\left(a^۲+\frac{۲}{x^۲}\right)y=0$.

ز- $y''-۴xy'+(۴x^۲-۳)y=e^{x^۲}$.

۱۱- نشان دهید دو معادله $y''-xy'+۲y=0$ و $w''+xw'+۳w=0$ هم‌ارز بوده و رابطه بین y و w را نیز بیابید .

۱۲- مقدار $Q(x)$ را در معادله $y''+ay'+Qy=0$ که در آن a مقداری است

ثابت چنان تعیین کنید که تبدیل $y=vf(x)$ آنرا به معادله :

$$v''+\frac{1}{x}v'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)v=0$$

بدل کند و از آنجا مقدار $f(x)$ را بیابید .

۱۳- نشان دهید دو معادله زیر هم‌ارز بوده و رابطه بین z و ζ را نیز بیابید :

$$(1-x^2)z''+(1-3x)z'+kz=0 \;\; ; \;\; (1-x^2)\zeta''-(1+x)\zeta'+(k+1)\zeta=0$$

k مقداری است ثابت .

۱۴- مسائل زیر را با استفاده از تبصره شماره (۵۲ . ۵) حل کنید .

الف- $(1-x^2)^2v''+v=0$.

ب- $(2x+1)^2(x^2+x+1)v''=18v$.

پ- $v''=4v\frac{\sin 3x}{\sin^3 x}$.

ت- $y''+\frac{\gamma-(\alpha+2)}{x(1-x)}y'-\frac{\alpha y}{x(1-x)}=0$.

ث- $y''+\frac{\alpha-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}y'-\frac{\alpha\beta y}{x(1-x)}=0$.

ج- $y''+\frac{\alpha+1-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}y'-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y=0$.

۱۵- ادژوینت هریک از معادلات زیر را بیابید .

الف- $y''+\frac{1}{x}y'-\left(1+\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$.

ب- $x^2y''-(x+1)y'+3y=0$.

پ- $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$.

ت- $y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}y=0$.

۱٦- با تبدیل متغیر مستقل جواب عمومی هریک از معادلات زیر را بدست آورید .

الف - $y''-(۱+٤e^{x})y'+۳e^{۲x}y=e^{۲(x+e^{x})}$.

ب - $y''-\cot g\,xy'-\sin^{۲}xy=\cos x-\cos^{۳}x$.

پ - $y''+\frac{۲}{x}y'+\frac{۱}{x^{٤}}y=\frac{۲x^{۲}+۱}{x^{٦}}$.

ت - $y''+\left(٤x-\frac{۱}{x}\right)y'+٤x^{۲}y=۳xe^{-x^{۲}}$.

ث - $٤x^{۲}y''+٤x^{۳}y'+(x^{۲}+۱)^{۲}y=0$.

ج - $xy''-y'+٤x^{۳}y=0$.

چ - $x^{٤}y''+۲x^{۳}y'+y=\frac{۱+x}{x}$.

ح - $x^{۸}y''+٤x^{۷}y'+y=\frac{۱}{x^{۳}}$.

خ - $y''+\left(\frac{۱۲x}{٥}-\frac{۱}{x}\right)y'+٤x^{۲}y=0$.

د - $y''+tg\,xy'+\cos^{۲}xy=0$.

ذ - $y''+\left(۱۲x^{۲}-\frac{۲}{x}\right)y'+x^{٤}y=0$.

ر - $xy''-۳y'+۱٦x^{۷}y=0$.

ز - $y''+(۲\cos x+tg\,x)y'+\cos^{۲}xx=0$.

ژ - $(x^{۲}-۱)y''+xy'=c^{۲}y$.

س - $y''+y'\,tg\,x+y\cos^{۲}x=0$.

ش - $y''-\frac{۳x+۱}{x^{۲}-۱}y+\left[\frac{٦(x+۱)}{(x-۱)(۳x+٥)}\right]^{۲}=0$.

ص - $y''+\frac{۲}{x}y'+\frac{a^{۲}}{x^{٤}}y=0$.

ض - $(۱+x^{۲})y''+xy'+۲y=0$.

۱۷- معادله دیفرانسیل $y''+Py'+Qy=0$ مفروض است . اگر مقدار کسر (٥٤۱ . ٥) برابر $٤m$, $v^{۲}=Q$. m مقدار ثابت باشد معادله کمکی متناظر را یافته و سپس آنرا حل کنید و همچنین برحسب v و m صورت کلی معادلاتی‌را که میتوان بااین روش حل کرد بدست آورید .

۱۸- معادله $y''+Py'+Qy=0$ و تابع $z=z(x)$ که در عبارت $\frac{۱}{Q}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{۲}=z^{۲}$ صدق میکند مفروض است . شرطی را بیابید که معادله :

$$y''+Py'+Qy=0$$

با تبدیل متغیر z به معادله اولر تبدیل گردد یعنی عبارت $\frac{۱}{Q}\left(\frac{d^{۲}z}{dx^{۲}}+P\frac{dz}{dx}\right)$ برابر ضریب ثابتی از z گردد .

۱۹- معادله‌دیفرانسیل مرتبه دوم $y''+Py'+Qy=0$ مفروض است . تعیین کنید چه رابطه‌یی بین P و Q و مشتقات آنها باید برقرار باشد تا این معادله با تبدیل متغیر مستقل به معادله بسل اندیس صفر یعنی $\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}+\frac{۱}{z}\cdot\frac{dy}{dz}+y=0$ تبدیل گردد .

بااستفاده از این رابطه نشان دهید معادله $y''+\frac{۱}{x}y'+۹x^{٤}y=0$ را میتوان به معادله بسل اندیس صفر تبدیل کرد .

۲۰- نشان‌دهید در معادله $y''+Py+Qy=0$ عبارت $\frac{۲PQ+Q'}{\overset{۳}{Q^{۲}}}$ در اثر تبدیل متغیر مستقل از x به $z=z(x)$ انواریان است ، یعنی‌اگر درمعادله متغیر مستقل x را به z تبدیل نماییم ورابطه (٥٤ . ٥) را بصورت $\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}+P_{۱}\frac{dy}{dz}+Q_{۱}y=0$ بنویسیم نشان دهید :

$$\frac{\frac{dQ_{۱}}{dz}+۲P_{۱}Q_{۱}}{Q_{۱}^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{dQ}{dx}+۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}}$$

همچنین نشان دهید بااین تبدیل متغیر ، $\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx$ نیز انواریان است . یعنی :

$$\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx=\int Q_{۱}^{\frac{۱}{۲}}dz$$

۲۱- صحت روابط زیر را تأیید کنید .

الف - $\left\{x^{m} , x\right\}=-\frac{۱}{۲}(m^{۲}-۱)x^{-۲}$.

ب - $\left\{tg x , x\right\}=۲$.

پ - $\left\{sx , x\right\}=-\left(۱+\frac{۳}{۲}tg^{۲}x\right)$.

ت - $\left\{s , x\right\}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}\left\{s , y\right\}-\left(\frac{dv}{dx}\right)^{۲}\left\{x , v\right\}+\left(\frac{dv}{dx}\right)^{۲}\left\{y , v\right\}$.

راهنمایی - از مثال ۲ شماره (۵۵ . ۵) استفاده کنید .

۲۲- مقدار s را که در معادله $x^{۲}\left\{s , x\right\}=a$ صدق میکند بیابید .

۲۳- نشان دهید که معادلات دیفرانسیل زیر قابل تبدیل بیکدیگر بوده و رابطه‌بین y و v را نیز بیابید .

الف - با تبدیل $z=tg x$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+tg^{۲}xy=0\\(۱+z^{۲})^{۲}\frac{d^{۲}v}{dz^{۲}}+(z^{۲}-۱)v=0\end{array}\right.$$

ب -

$$\left\{\begin{array}{l}(۱-x^۲)\dfrac{d^۲y}{dx^۲}-۲x\dfrac{dy}{dx}+n(n+۱)y=o\\[2ex](۱-k^۲)\dfrac{d^۲v}{dz^۲}+\dfrac{۱-۳z^۲}{z}\cdot\dfrac{dv}{dz}=\left[۱+\dfrac{(۲n+۱)^۲}{۱-t^۲}\right]z\end{array}\right.$$

با تبدیل :

$k\ .\ x(۱-z^۲)(۱+z^۲)$ مقداری است ثابت.

پ -

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^۲y}{dx^۲}+\dfrac{۲k}{x}\cdot\dfrac{dy}{dx}-B^۲y=o\\[2ex](۱-z)^۲\dfrac{d^۲v}{dz^۲}+۲(B-۱+z)\dfrac{dv}{dz}+k(۱-k)v=o\end{array}\right.$$

با تبدیل :

$B\ .\ (x-۱)=xz$ و k مقادیری است ثابت.

۲۴- جواب عمومی معادلات زیر را بااستفاده از روش تغییر پارامترها بدست آورید .

الف - $y''+y=cosecx$.

ب - $y''+۴y=۴sec^۳۲x$.

پ - $y''-۴y'+۳y=(۱+e^{-x})^{-۱}$.

ت - $y''-y=e^{-x}sin\,e^{-x}+cos\,e^{-x}$.

ث - $y''-y=(۱+e^{-x})^{-۲}$.

ج - $y''+n^۲y=secnx$ (n مقداری است ثابت) .

چ - $(۱-x^۲)y''-۴xy'-(۱+x^۲)y=x$.

ح - $y'+Qy=Ry^۲$.

۲۵- نشان دهید اوپریتورهای $x^۳D$ و $Dx^۳$ بایکدیگر برابر نیستند $\left(D=\dfrac{d}{dx}\right)$.

۲۶- اگر $A=xD+۱$ و $B=D-x$ باشد حاصل‌ضربهای AB و BA را بیابید .

۲۷- حاصل‌ضرب عبارتهای $[(x+۱)D-۱]\ [(x-۲)D-x]$ و $[(x-۲)D-x][(x+۱)D-۱]$ را بدست آورید .

۲۸- اگر $A=xD^۲-xD+۲$ و $B=D^۲+xD-D+۱$ باشد حاصل‌ضربهای BA و AB را محاسبه کنید.

۲۹- اوپریتورهای:

$$A=(a_۱x+b_۱)D+c_۱x+d_۱\ ,\ \ B=(a_۲x+b_۲)D+c_۲x+d_۲$$

که درآن $a_۱ , b_۱ , c_۱ , d_۱ , a_۲ , b_۲ , c_۲ , d_۲$ مقادیر ثابتی هستند، مفروض است. نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه $AB=BA$ باشد آن است که $A=k_۱B+k_۲$. $k_۱$ و $k_۲$ مقادیر ثابتی میباشند.

با محاسبه، صحت نتیجه بالا را در موارد زیر تایید کنید.

الف- $A=(x-۱)D-۳\ ,\ B=(x-۱)D+۳$.

ب- $A=۲xD+۱\ ,\ B=xD+۳$.

۳۰- مسائل زیر را بااستفاده از روش تجزیه اوپریتورها حل کنید.

الف- $y''-\frac{۳}{x}y'+\frac{۳}{x^۲}y=۲x-۱$.

ب- $xy''+(۱-x)y'-۲(۱+x)y=e^{-x}(۱-۶x)$.

پ- $(x+۳)y''-(۲x+۷)y'+۲y=(x+۳)^۲e^x$ ؛

ت- $(x+۱)y''-(۳x+۴)y'+۳y=(۳x+۲)e^{۳x}$.

ث- $x^۲y''-۴xy'+(۶+۹x^۲)y=0$.

ج- $xy''+۲y'+۴xy=۴$.

چ- $(۱+x^۲)y''-۲xy'+۲y=\frac{۱-x^۲}{x}$.

ح- $(۲x^۲+x-۱)y''+۲(x-۲)y'-۲=0$.

خ- $xy''-(x^۲-۲)y'-xy=0$.

د- $axy''+(۳a+bx)y'+۳by=0$.

ذ- $(x-۱)(x-۲)y''-(۲x-۳)y'+۲y=0$.

ر- $(٢x-١)y''-(٣x-٤)y'+(x-٣)y=0$.

ز- $(x^٢+٣x+٢)y''+(٥x^٢+\frac{٢١}{٢}x+٤)y'+$.

$$(٦x^٢+\frac{١٧}{٢}x+٤)y=0$$

ژ- $(x^٢-١)y''-(٣x+١)y'-(x^٢-x)y=0$.

س- $x^٢(a-bx)y''-٢x(٢a-bx)y'+٢(٣a-bx)y=٦x^٢$.

٣١- عبارت $y''+٢Py'+Qy$ که در آن P و Q توابعی از x هستند مفروض است . نشان دهید اگر u در معادله مرتبه اول :

$$Du+u^٢=DP+P^٢-Q$$

صدق کند در اینصورت :

$$y''+٢Py'+Qy=(D+P+u)(D+P-u)y$$

خواهد بود . بااستفاده از این روش جواب عمومی معادله زیر را بیابید .

$$y''+٢\left(tgx-\frac{١}{x}\right)y'+\left(١+٢tg^٢x-٢\frac{tgx}{x}\right)y=cosxsinx+\frac{٢cos^٢x}{x}$$

٣٢- معادله $Pu''+Qu'+Ru=0$ را بشکل $v''+\mu v=0$ بنویسید . نشان دهید اگر :

$$S_0=A+Bx \quad , \quad S_{n+١}=\int_0^x dx\int_0^x \mu S_n dx$$

باشد ، ... $v=S_0-S_١+S_٢$ خواهدبود . اگر μ محدود باشد عبارت v رابرحسب سری که لزوماً بازاء جمیع مقادیر x متقارب است بسط دهید . درحالت خاص $\mu=x^n$ مسئله را حل کنید .

جوابها

۱- اولاً - الف : $y=Ax^۳+Bx+x^۳Logx+x^۲$.

ب : $y=Ax^۲e^x+Bx+x^۲$.

پ : $y=Ax+Bxe^x+x^۲-۱$.

ت :

$$\frac{y}{x}=B+A\left(x-\frac{۱}{x}\right)$$

$$+\int^x\left(۱+\frac{۱}{z^۲}\right)\left\{\int^z\frac{Xx}{(۱+x^۲)^۲}dx\right\}dz \,.$$

ث : $y=Ax+B\cos x-\sin x$.

ج : $y=Ax+Bx^۳-x^۲-xLogx$.

چ : $y=Ax+Bx^{-۱}+۱-x^۲$.

ثانیاً - الف : $y=Ax^۲e^x+Be^x+xe^{۲x}$.

ب : $y=Ae^x+B(x^۲+۲x+۲)$.

پ : $y=Ae^x+Be^x(x+۱)^۲+xe^{۲x}$.

ت : $y=e^{۲x}(A\cos Logx+B\sin Logx)+e^x$.

ث : $y=Ax+Be^x+۱$.

ج : $ye^{-x}=A+B\int^x e^{\frac{۱}{۲}z^۲-۲z}\left(\int^z Xe^{x-\frac{۱}{۲}x^۲}dx\right)dz$.

ثالثاً : $y=Ae^{-x}+Bxe^{-x}+x^۲-x$.

رابعاً : $y=Ae^{۲x}(x-۲)^۲+Be^{۲x}$.

۲- الف : $y=Ax^۲+B(x-۱) \quad , \quad m=۲$.

ب : $y=Ax^۲+\frac{Bx^۳}{(۱-x)^۳} \quad , \quad m=۲$.

پ : $m=٣$ ، $y=x^{٣}Log x+١+Ax^{٣}+Bx^{٣}\int x^{-٤}e^{-\frac{x^{٣}}{٣}}dx$.

ت : $m=٢$ ، $y=A(x^{٢}-٤)+Bx+x^{٢}$.

ث : $m=٢$ ، $y=Ax^{٢}+\frac{B}{x+١}$.

٣- الف : $y_{١}=(١+x)$ ، $y=A(١+x)+Be^{٢x}(١+x)(٢x+١)$.

ب : $y_{١}=(١-x)$ ، $y=(١-x)(ALog x+B)$.

پ : $y_{١}=(x+٣)$ ، $y=A(x+٣)+Be^{x}(x^{٢}-٤x+٦)$.

٤- الف : $y=(x^{٢}+٦x+١٢)[B+A\int\frac{x^{٤}e^{x}dx}{(x^{٢}+٦x+١٢)^{٢}}$ ، $y_{١}=(x^{٢}+٦x+١٢)$

ب : $y_{١}=(١-x^{٢})$ ، $y=(١-x^{٢})(ALog x+B)$.

پ : $y=A(١+x^{٢})+B[x+(١+x^{٢})arctg x]$ ، $y_{١}=(١+x^{٢})$

ت : $y=(٦x^{٢}-٦x+١)\left[A+BLog\left|١-\frac{١}{x}\right|\right]+B(٦x-٣)$ ، $y_{١}=٦x^{٢}-٦x+١$.

ث : $y_{١}=x^{٢}$ ، $y=Ax^{٢}+B(x-١)+x^{٣}$.

٥- الف : $y=A\sin x+Bx\sin x$.

ب : $y=Atg x+B\sin x$.

پ : $y=\frac{١}{٢}\sec x+c_{١}(\cos x-\frac{١}{٢}\sec x)+c_{٢}\sin x$.

٦- $y=\frac{A+Bx^{n+١}}{١+x}$.

٧- $y=\frac{Ax}{١-x}+B\frac{x+١+٢xLog|x|}{١-x}$.

۸- $$xy=A+B(a-bx)^{۳}+\int^{x} a-bz)^{۲}\left(\int^{z} x^{n}(a-bx)^{-۲}dx\right)dz.$$

۹- $y=Axe^{x}+Bxe^{-۲x}$.

۱۰- الف : $y=Ax\cos x+Bx\sin x+\frac{۱}{۲}xe^{x}$.

ب : $y=e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}}\left(A\cos\sqrt{۳}\,x+B\sin\sqrt{۳}\,x\right)+\frac{۱}{۴}e^{\frac{۱}{۲}(x^{۲}+۲x)}$.

پ : $y=Ax+Bx^{۳}+Bx^{۳}Log x+x^{۲}$.

ت : $y=e^{x^{۲}}(A\cos\sqrt{۲}\,x+B\sin\sqrt{۲}\,x)+\frac{۱}{۲}xe^{x^{۲}}$.

ث : $y=\frac{e^{x}}{x}(A\cos x+B\sin x)$.

ج : $y=e^{-۲x}(Ax^{۳}+Bx^{-۲})$.

چ : $xy=A\cos\sqrt{۲}\,x+B\sin\sqrt{۲}\,x$.

ح : $y=Axe^{x}+Bxe^{-۲x}$.

خ : $x^{۲}y=e^{x}(Ae^{\frac{۳}{۲}x}+Be^{-\frac{۳}{۲}x})$.

د : $y=(Ae^{۳x}+Be^{-۳x})\sec x$.

ذ : $$y=e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}b}[A\cos x\sqrt{b}+B\sin x\sqrt{b}+b^{-\frac{۱}{۲}}\int^{x} ze^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}b}\sin[(x-b)\sqrt{b}\,]dz.$$

ر : $y=(A\cos ax+B\sin ax)x$.

ز : $ye^{-x^{۲}}=Ae^{x}+Be^{-x}-۱$.

۱۱- $y=we^{\frac{x^۲}{۲}}$.

۱۲- $Q(x)=\frac{a^۲+۴}{۴}-\frac{۴n^۲-۱}{۴x^۲}$ ، $f(x)=c\sqrt{x}e^{-\frac{۱}{۲}ax}$.

۱۳- $I=\frac{k}{۱-x^۲}=\frac{(۳x-۵)(۱+x)}{۴(۱-x^۲)^۲}$ ، $\zeta=z(۱+x)$.

۱۴- الف : $P_۱=\frac{x}{۱-x^۲}$ ، $\frac{v}{(۱-x^۲)^{\frac{۱}{۲}}}=A+B\,Log\,\frac{۱+x}{۱-x}$.

ب :

$$v\,\frac{(۲x+۱)^۲}{x^۲+x+۱}-A=B\left[\frac{۱۶}{۳}x^۳+۸x^۲-۸x+۶\sqrt{۳}\,Arctg\left(\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}\right)\right] ,$$.

$$P_۱=۳(۲x+۱)^{-۱}(x^۲+x+۱)^{-۱}$$

پ : $v-A\sin^۴x=B\frac{\cos x}{\sin^۳x}(۵+۶\sin^۲x+۸\sin^۴x+۱۶\sin^۶x)$ ، .

$$P_۱=-۴\cot g\,x$$

ت : $yx^{\gamma-۱}(۱-x)^{-\gamma+\alpha+۱}=A+B\int x^{\gamma-۲}(۱-x)^{-\gamma+\alpha}dx$.

ث : $y(۱-x)^{\beta}=A+B\int x^{-\alpha}(۱-x)^{\beta-۱}dx$.

ج : $yx^{\alpha}=A+B\int x^{\alpha-۱}(۱-x)^{-\beta}dx$.

۱۵- الف : $v''-\frac{۱}{x}v'-\left(۱+\frac{n^۲-۱}{x^۲}\right)v=o$.

ب : $x^۲u''+(۵x+۱)u'+su=o$.

پ : $(۱-x^۲)u''-xu'+(n+۲)(n-۱)u=o$.

ت : سلف ادژوینت .

۱۶- الف : $y=Ae^{e^x}+Be^{۳e^x}-e^{۲e^x}$.

ب : $y=Ae^{-\cos x}+Be^{\cos x}-\cos x$.

پ : $y=A\cos\left(\frac{۱}{x}\right)+B\sin\left(\frac{۱}{x}\right)+\frac{۱}{x^۲}$.

ت : $y=Ae^{-x^۲}+Bx^۲e^{-x^۲}+x^۳e^{-x^۲}$.

ث : $y=\sqrt{x}e^{-\frac{x^۲}{٤}}(A+B\,Log x)$.

ج : $y=A\sin x^۲+B\cos x^۲$.

چ : $y=A\cos\left(\frac{۱}{x}\right)+B\sin\left(\frac{۱}{x}\right)+\frac{۱+x}{x}$.

ح : $y=A\cos\left(\frac{۱}{۳x^۳}\right)+B\sin\left(\frac{۱}{۳x^۳}\right)+\frac{۱}{x^۳}$.

خ : $y=e^{-\frac{۳x^۲}{۵}}\left(A\cos\frac{٤x^۲}{۵}+B\sin\frac{٤x^۲}{۵}\right)$.

د : $y=A\cos(\sin x)+B\sin(\sin x)$.

ذ : $y=A\exp\left(\frac{-٦+\sqrt{۳۵}}{۳}x^۳\right)+B\exp\left(\frac{-٦-\sqrt{۳۵}}{۳}x^۳\right)$.

ر : $y=A\cos x^٤+B\sin x^٤$.

ز : $y=e^{-\sin x}(A+B\sin x)$.

ژ : $y=A\cos(c\arcsin x)+B\sin(c\arcsin x)$.

س : $y=A\cos(\sin x)+B\sin(\sin x)$.

ش : $z=\frac{۱}{۱۲}(x-۱)^۳(۳x+۵)$, $y=z^{\frac{۱}{۲}}(A+B\,Log z)$.

ص : $y=A\cos\frac{a}{x}+B\sin\frac{a}{x}$.

ض : $y=A\cos[\sqrt{۲}\ \text{argsh}x]+B\sin[\sqrt{۲}\ \text{argsh}x]$.

۱۷- $y''+\left(۲mv-\frac{v'}{v}\right)y'+v^{۲}y=0$.

۱۸- $\frac{Q'+۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}}=c_{1}$.

۱۹- $\frac{Q'+۲PQ}{Q^{\frac{۳}{۲}}}\int Q^{\frac{۱}{۲}}dx=۲$.

۲۲- $s=\frac{Ax^{۲l}+B}{A'x^{۲l}+B'}$ که در آن $۲l=(۱+۲a)^{\frac{۱}{۲}}$.

۲۳- الف : $y=v\cos x$.

ب : $y=v(۱-k^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$.

پ : $y=x^{-k}e^{Bx}v$.

۲۴- الف : $y=A\cos x+B\sin x+\sin x\,Log\sin x-x\cos x$.

ب : $y=A\cos ۲x+B\sin ۲x-۱+\sin ۲x\,Log(\sec ۲x+tg\,۲x)$.

پ : $y=Ae^{x}+Be^{۲x}+\frac{۱}{۲}e^{۲x}+\frac{۱}{۲}(e^{x}-e^{۲x})Log(۱+e^{-x})$.

ت : $y=Ae^{x}+Be^{-x}-e^{x}\sin e^{-x}$.

ث : $y=Ae^{x}+Be^{-x}-۱+e^{-x}Log(۱+e^{x})$.

ج : $y=A\cos nx+B\sin nx+\frac{x}{n}\sin nx+\frac{\cos nx}{n^{۲}}Log(\cos nx)$.

چ : $y(۱-x^{۲})=A\cos x+B\sin x+x$.

ح : $\frac{۱}{y}e^{-\int Qdx}=A-\int Re^{-\int Qdx}dx$.

۲۵- $Dx^{۳}=x^{۳}D+۳x^{۲}D\neq x^{۳}D$.

۲۶- $AB=xD^{۲}-(x^{۲}-۱)D-۲x$, $BA=xD^{۲}-(x^{۲}-۲)D-x$.

۲۷- $(x-۲)(x+۱)D^{۲}+۳D+x$,
$(x-۲)(x+۱)D^{۲}-x(x+۱)D+x$.

۲۸- $BA=xD^{٤}+(x^{۲}-۲x+۲)D^{۳}-(x^{۲}-۳x+۱)D^{۲}-D+۲$,
$AB=xD^{٤}+(x^{۲}-۲x)D^{۳}-(x^{۲}-٤x-۲)D^{۲}-۲D+۲$.

۲۹- الف : $AB=BA=(x-۱)^{۲}D^{۲}-٦$.

ب : $AB=BA=۲x^{۲}D^{۲}+۹xD+۳$.

۳۰- الف : $y=Ax^{۳}+Bx+x^{۲}(۱+xLogx)$.

ب : $y=xe^{-x}Ae^{۲x}\int\frac{e^{-۳x}}{x}dx+Be^{۲x}$.

پ : $y=-xe^{x}-٤e^{x}+A(۲x+۷)+Be^{۲x}$.

ت : $y=A(۳x+٤)+Be^{۳x}+xe^{۳x}$.

ث : $y=x^{۲}(A\cos ۳x+B\sin ۳x)$.

ج : $xy=A\cos ۲x+B\sin ۲x+۱$.

چ : $y=A(x^{۲}-۱)+Bx+xLogx$.

ح : $(x+۱)y=A(۲x-۱)^{۲}+B$.

خ : $xy=A\int_{0}^{x}e^{\frac{y^{۲}}{۲}}dy+B$.

د : $y=e^{-\frac{b}{a}x}\left[A\int x^{-۳}e^{\frac{b}{a}x}dx+B\right]$.

ذ : $y=A(x-۲)^{۲}-۲B(x-۲)+B$.

ر : $$y=e^{x}\left[A\int\frac{e^{-\frac{x}{۲}dx}}{(۲x-۱)^{\frac{۵}{٤}}}+B\right].$$

ز : $$y=e^{-۲x}(x+۲)^{٤}\left[A\int\frac{(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{(x+۲)^{۰}}e^{x}dx+B\right].$$

ژ : $$y=e^{-x}(x+۱)^{۲}\left[A\int\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^{۲}e^{۲x}+B\right].$$

س : $y(a-bx)=a^{۲}+Ax^{۲}+Bx^{۳}$.

۳۱- $y=Ax^{۳}\cos x+B\cos x-\sin x\cos x$.

۳۲- مقدار μ با استفاده از رابطه (۲۵ . ۵) عبارت خواهد بود از :

$$\mu=\frac{R}{P}-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{Q}{P}\right)-\frac{۱}{٤}\cdot\frac{Q^{۲}}{P^{۲}}$$

اگر مقدار داده شده v را در معادله قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{d^{۲}S_{۰}}{dx^{۲}}-\frac{d^{۲}S_{۱}}{dx^{۲}}+\frac{d^{۲}S_{۲}}{dx^{۲}}+\cdots+\mu(S_{۰}-S_{۱}+S_{۲}\cdots)=0$$

عبارت بالا درصورتی برقرار است که :

$$\frac{d^{۲}S_{۰}}{dx^{۲}}=0\quad,\quad\frac{d^{۲}S_{۱}}{dx^{۲}}=\mu S_{۰}\ ,\ \cdots\ ,\frac{d^{۲}S_{n+۱}}{dx^{۲}}=\mu S_{n}$$

اگر در فاصله $(٤ , 0)$ تابع μ برای جمیع مقادیر x محدود باشد میتوان مقدار مثبتی مانند M بقسمی یافت که برای جمیع مقادیر x واقع در این فاصله $\mu\leqslant M$ باشد . اگر A' بزرگترین مقدار محدود $S_{۰}$ باشد به ترتیب چنین داریم :

$$S_{۱}<\frac{۱}{۲!}MA'x^{۲}\quad,\quad S_{۲}<\frac{۱}{٤!}M^{۲}A'x^{٤}\ ,\ \cdots$$

$$v<A'\left(۱+\frac{Mx^{۲}}{۲!}+\frac{M^{۲}x^{٤}}{٤!}+\cdots\right)$$

واضح است که چون عبارت سمت‌راست رابطه بالا بازاء جمیع مقادیر x (بشرط آنکه M یعنی μ محدود باشد) متقارب است لذا v نیز متقارب خواهد بود . اگر $\mu = x^n$ گردد مقدار v عبارت میشود از :

$$v = A\left[۱ - \frac{x^{n+۲}}{(n+۱)(n+۲)} + \frac{x^{n+۴}}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)(n+۴)} - \cdots \right]$$

$$+ B\left[x - \frac{x^{n+۳}}{(n+۲)(n+۳)} + \frac{x^{n+۵}}{(n+۲)(n+۳)(n+۴)(n+۵)} - \cdots \right]$$

فصل ششم

نظریه عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n

۶ . ۱ - خواص اوپریتور* دیفرانسیل خطی

با توجه برابطه (۲۴ . ۱) صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام عبارت است از :

$$a_۰(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_۱(x)\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}+a_۲(x)\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}+\cdots+a_{n-۱}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=q(x)$$

رابطه بالا را بطور سمبولی میتوان بشکل زیر نوشت** :

$$L(y)=(a_۰D^n+a_۱D^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}D+a_n)y=q(x) \qquad (۶ . ۱)$$

که درآن $D=\frac{d}{dx}$ است .

فرض میکنیم که ضرایب $a_۰$, $a_۱$, ... , a_n و تابع $q(x)$ در فاصله بسته $a \leqslant x \leqslant b$ توابع پیوسته و یکسان*** از متغیر x و $a_۰(x)$ دراین فاصله مخالف صفر باشد. با شرایط فوق وهمانطور که درجلددوم این کتاب نشان خواهیم داد با استفاده از قضیه وجود تابع پیوسته منحصر بفردی مانند $y(x)$ موجود است که در معادله (۱ . ۶) صدق نموده و مقدار آن در نقطه $x_۰$ واقع در فاصله بسته (a , b) برابر $y_۰$ و $(n-۱)$ مشتق آن در نقطه $x_۰$ برابر $y'_۰ , y''_۰ , \ldots , y^{(n-۱)}$ است . عبارت :

$$L \equiv a_۰D^n+a_۱D^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}D+a_n$$

را **اوپریتوردیفرانسیل خطی مرتبه n ام** گوییم. درفصل هفتم بطور مفصل درباره

---

* Operator

** مفهوم اوپریتورهای سمبولیک برای اولین بار در سال ۱۸۰۸ توسط Brisson توصیه شد ولی **کوشی** آنرا بطور وسیعی بکار برد .

*** منظوراز توابع یکسان توابعی هستند که بازاء هرمقدار x تابع y دارای یک مقدار باشد .

اوپریتورها بحث نموده و خواص آنهارا مورد بررسی قرار خواهیم داد. معادله دیفرانسیل:

$$L(u)=0 \qquad (٦ . ١١)$$

را **معادله همگن** متناظربا رابطه (٦ . ١) نامیم. دلیل این نامگذاری آن‌است که $L(u)$ نسبت به $u\,,u'\,,\dots\,,u^{(n)}$ همگن و خطی میباشد. رابطه (٦ . ١١) را نیز **معادله بدون طرف ثانی** رابطه (٦ . ١) نیز میگویند.

قضایای مقدماتی زیر اهمیت اوپریتور L را روشن میکند.

الف - اگر $u=u_1$ یکی از جوابهای معادله همگن (٦ . ١١) باشد در اینصورت $u=cu_1$ نیزجواب معادله‌همگن‌خواهد بود. c مقداری‌است ثابت.

این قضیه را میتوان با استفاده از رابطه $D^r cu_1=cD^r u_1$ اثبات نمود. زیرا:

$$L(cu_1)=\sum_{r=0}^{n} a_r D^{n-r}(cu_1)=c\sum_{r=0}^{n} a_r D^{n-r}u_1=cL(u_1)=0$$

ب - اگر $u_1\,,u_2\,,\dots\,,u_m$ ، m جواب معادله همگن (٦ . ١١) باشد دراینصورت $u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m$ یك جواب معادله همگن است. $c_1\,,c_2\,,\dots\,,c_m$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند.

نتیجه بالا را میتوان‌بادرنظر گرفتن رابطه‌زیربطریق مشابه با قسمت (الف)ثابت کرد:

$$D^r[c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m]=c_1D^ru_1+c_2D^ru_2+\cdots+C_mD^ru_m$$

اگر n جواب متمایز $u_1\,,u_2\,,\dots\,,u_n$ معادله همگن (٦ . ١١) که بطور خطی از یکدیگر مستقل* هستند دردست باشد، عبارت:

$$u(x)=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n$$

که شامل n مقدار غیر مشخص است جواب عمومی معادله همگن (٦ . ١١) میباشد. مقادیر ثابت $c_1\,,c_2\,,..\,,c_n$ را بادرنظر گرفتن شرایط زیر فقط بیک‌نحو میتوان‌تعیین کرد:

---

* شرایط خطی بودن مستقل را در شماره ٦ . ٢ مورد بررسی قرار میدهیم.

(۶ . ۱۲)
$$u(x_0)=y_0\ ,\ u'(x_0)=y'_0\ ,\ u''(x_0)=y''_0\ ,\ \dots\ ,\ u^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

پ- اگر $y=y_0(x)$ یکی از جوابهای معادله غیر همگن (۶ . ۱) و $u(x)$ جواب عمومی معادله همگن (۶ . ۱۱) باشد ، جواب عمومی معادله (۶ . ۱) عبارت میگردد از $y=y_0(x)+u(x)$.

همانطورکه میدانیم مشتق مرتبه r ام مجموع چند تابع مساوی مجموع مشتقهای مرتبه r ام هریک از این توابع میباشد . مثلاً :

$$D^r(f+g)=D^rf(x)+D^rg(x)$$

رابطه (۶ . ۱) را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$\sum_{r=0}^{n} a_rD^{n-r}y=q(x)$$

پس‌از جایگزین نمودن $y=y_0(x)+u(x)$ در رابطه بالا چنین داریم :

$$\sum_{r=0}^{n} a_rD^{n-r}[y_0(x)+u(x)]=q(x)$$

$$\sum_{r=0}^{n} a_r[D^{n-r}y_0(x)+D^{n-r}u(x)]=q(x)$$

$$\sum_{r=0}^{n} a_rD^{n-r}y_0(x)+\sum_{r=0}^{n} D^{n-r}u(x)=q(x)$$

چون بنابفرض $y_0(x)$ یکی از جوابهای معادله غیر همگن (۶ . ۱) و $u(x)$ جواب عمومی معادله همگن (۶ . ۱۱) است . پس :

$$\sum_{r=0}^{n} a_rD^{n-r}y_0(x)=q(x)\quad ;\quad \sum_{r=0}^{n} D^{n-r}u(x)=0$$

لذا $y=y_0(x)+u(x)$ درمعادله (۶ . ۱) صدق نموده و چون شامل n مقدار ثابت است ، بنابراین جواب عمومی معادله اخیر میباشد. حال اگر $u(x)$ بقسمی انتخاب گردد

که در شرایط (۱۲ . ٦) صدق نمایند و $y_0(x)$ نیز چنان انتخاب شود که :

$$y_0(x_0)=y'_0(x_0)=y''_0(x_0)=\cdots=y_0^{(n-۱)}(x_0)=0 \qquad (I)$$

دراینصورت جواب $y=y_0(x)+u(x)$ در شرایط :

$$y(x_0)=y_0 \;,\; y'(x_0)=y'_0 \;,\; y''(x_0)=y''_0 \;,\; \cdots \;,\; y^{(n-۱)}(x_0)=y_0^{(n-۱)}$$

صدق مینمایند . اگر $q(x)\neq 0$ باشد میتوان $y_0(x)$ را چنان انتخاب کرد که رابطه (I) برقرار باشد .

با کمی دقت در جواب عمومی معادله غیر همگن (۱ . ٦) معلوم میگردد که این جواب شامل دو قسمت است .

۱- **جواب عمومی** معادله همگن (۱۱ . ٦) که بشکل :

$$u(x)=c_۱u_۱+c_۲u_۲+\cdots+c_nu_n$$

بوده و شامل n مقدار ثابت میباشد و **تابع مکمل*** نامیده میشود .

۲- **جواب خصوصی**** که جوابی از معادله (۱ . ٦) است که فاقد هرگونه مقدار ثابتی میباشد . این جواب ممکن است جوابی از معادله (۱ . ٦) باشد که خود تابع و $(n-۱)$ مشتق آن در نقطه‌یی مانند x_0 واقع در فاصله (a , b) متحد صفر گردند .

مثلاً اگر معادله مورد مطالعه :

$$y''+y=x$$

باشد. تابع مکمل عبارت میگردد از $A\cos x+B\sin x$ که درآن A و B مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند . $y=x$ را میتوان یکی از جوابهای خصوصی فرض نمود و لذا جواب عمومی معادله عبارت میگردد از :

$$y=A\cos x+B\sin x+x$$

با نسبت دادن مقادیر به A و B جوابهای خصوصی معادله بدست میایند.

---

* در حل مسائل ، در برخی از موارد این تابع را با علامت اختصاری C.F نمایش میدهند .

** در مواردی برای حل مسائل این تابع را با علامت اختصاری P.I نمایش میدهند .

۲ . ٦- رونسکین*

فرض میکنیم u_n , ... , $u_۲$, $u_۱$ ، n جواب معادله همگن مرتبه n ام (٦ . ۱۱) باشند .

عبارت $c_۱u_۱+c_۲u_۲+\cdots+c_nu_n$ جواب عمومی معادله (٦ . ۱۱) خواهد بود هرگاه u_n , ... , $u_۲$, $u_۱$ بطور خطی ازیکدیگر مستقل باشند. یعنی نتوانیم مقادیر ثابتی مانند c_n , ... , $c_۳$, $c_۲$, $c_۱$ که جمیع آنها متحد صفر نیستند چنان تعیین کنیم که عبارت :

$$c_۱u_۱+c_۲u_۲+c_۳u_۳+\cdots+c_nu_n$$

متحد صفر باشد .

n تابع :

$$u_۱(x) \ , \ u_۲(x) \ldots u_n(x)$$

که در فاصله (a , b) دارای مشتق مرتبه $(n—۱)$ ام است درنظر میگیریم . اکنون شرطی را بدست میاوریم که این توابع بطور خطی از یکدیگر مستقل باشند .

زیرا اولاً اگر n تابع فوق بطور خطی از یکدیگر مستقل نباشند مقادیر ثابتی مانند c_n , ... , $c_۲$, $c_۱$ ممکن است چنان تعیین کرد که اتحاد زیر برقرارباشد :

$$c_۱u_۱+c_۲u_۲+\cdots+c_nu_n=0$$

ازآنجایی که رابطه بالا درفاصله (a , b) یک اتحاد است میتوان در این فاصله از آن $(n—۱)$ بار مشتق گرفت . یعنی :

$$c_۱u'_۱+c_۲u'_۲+\cdots+c_nu'_n=0$$

$$c_۱u''_۱+c_۲u''_۲+\cdots+c_nu''_n=0$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$c_۱u_۱^{(n-۱)}+c_۲u_۲^{(n-۱)}+\cdots+c_nu_n^{(n-۱)}=0$$

---

* H. Wronskian (۱۸۲۱) .

بنابراین n معادله برای تعیین مقادیر ثابت $c_{۱} , c_{۲} , \dots , c_n$ موجود بوده و لذا اگر دستگاه معادلات فوق متوافق باشند باید داشته باشیم :

$$\Delta(u_{۱} , u_{۲} , u_{۳} , \dots , u_n)=\begin{vmatrix} u_{۱} & u_{۲} & \cdots u_n \\ u'_{۱} & u'_{۲} & \cdots u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{۱}^{(n-۱)} & u_{۲}^{(n-۱)} & \cdots u_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}=0$$

دترمینان بالا به **رونسکین*** توابع $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_n$ موسوم است .

بنابراین شرط لازم برای آنکه n تابع $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_n$ بطور خطی تابع یکدیگر باشند آن است که رونسکین این توابع متحد صفر باشد. **لذا اگر رونسکین این توابع مخالف صفر باشد شرط کافی برای آنکه n تابع $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_n$ بطور خطی از یکدیگر مستقل باشند خواهد بود .** بالعکس فرض میکنیم Δ متحد صفر باشد . ممکن است که رونسکین تعداد کمتری از توابع مثلاً $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_k$ متحد صفر باشد . در قضیه زیر نشان میدهیم که اگر $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_k$ جوابهای معادله دیفرانسیل باشند و رونسکین آنها متحد صفرباشد این جوابها بطور خطی تابع یکدیگر هستند .

اگر $u_{۱}(x) , u_{۲}(x) , \dots , u_k(x)$ توابعی باشند که $(k-۱)$ مشتق آن در فاصله بسته $a \leqslant x \leqslant b$ محدود بوده و رونسکین آن در این فاصله متحد صفر باشد ولی رونسکین $u_{۱}(x) , u_{۲}(x) , \dots , u_{k-۱}(x)$ مخالف صفرباشد همواره رابطه‌یی بشکل :

$$u_k(x)=c_{۱}u_{۱}(x)+c_{۲}u_{۲}(x)+\cdots+c_{k-۱}u_{k-۱}(x)$$

بین توابع $u_{۱}(x) , u_{۲}(x) , \dots , u_k(x)$ برقرار است . $c_{۱} , c_{۲} , \dots , c_{k-۱}$ مقادیر ثابتی هستند .

اثبات - بنابفرض رونسکین $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_k$ مساوی صفر میباشد . یعنی :

---

* متحد صفربودن رونسکین شرط کافی برای آنکه n تابع $u_{۱} , u_{۲} , \dots , u_n$ بطورخطی تابع یکدیگر باشند نیست .

$$\Delta(u_۱ , u_۲ , u_۳ , \ldots , u_k)=\begin{vmatrix} u_۱ & u_۲ & u_۳ & \cdots & u_k \\ u'_۱ & u'_۲ & u'_۳ & \cdots & u'_k \\ u''_۱ & u''_۲ & u''_۳ & \cdots & u''_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_۱^{(k-۱)} & u_۲^{(k-۱)} & u_۳^{(k-۱)} & \cdots & u_k^{(k-۱)} \end{vmatrix}=0$$

اگر دترمینان فوق را برحسب سطر r ام بسط دهیم ، خواهیم‌داشت :

$$U_۱u_۱^{(r)}+U_۲u_۲^{(r)}+U_۳u_۳^{(r)}+\cdots+U_ru_r^{(r)}+\cdots+U_ku_k^{(r)}=0$$

$U_۱ , U_۲ , \ldots , U_k$ ضرایب $u_۱^{(r)} , u_۲^{(r)} , \ldots , u_k^{(r)}$ در بسط دترمینان بالا هستند . اکنون اگر بجای $u_۱^{(r)} , u_۲^{(r)} , \ldots , u_k^{(r)}$ به ترتیب :

$$u_k^{(k-۱)} , \ldots , u_۲^{(k-۱)} , u_۱^{(k-۱)} ; u'_k , \ldots , u'_۲ , u'_۱ ; u_k , \ldots , u_۲ , u_۱$$

قرار دهیم ، چون دترمینان حاصل دارای دو سطر مساوی خواهد بود که مقدار آن برابرصفر است لذا رابطه بالا برای جمیع مقادیر $r=0 , ۱ , \ldots , k-۱$ برقرار است . یعنی :

$$\text{(I)}\qquad U_۱u_۱^{(r)}+U_۲u_۲^{(r)}+U_۳u_۳^{(r)}+\cdots+U_ru_r^{(r)}+\cdots+U_ku_k^{(r)}=0$$
$$(r=0 , ۱ , ۲ , \ldots , k-۱)$$

حال اگر از هریک از $(k-۱)$ معادله بالا باتوجه‌به معادله‌بعدی مشتق‌بگیریم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(U'_۱u_۱^{(r)}+U'_۲u_۲^{(r)}+U'_۳u_۳^{(r)}+\cdots+U'_ru_r^{(r)}+\cdots+U'_ku_k^{(r)})\\ +(U_۱u_۱^{(r+۱)}+U_۲u_۲^{(r+۱)}+U_۳u_۳^{(r+۱)}+\cdots\\ +U_ru_r^{(r+۱)}+\cdots+U_ku_k^{(r+۱)})=0\end{aligned}$$

ولی پرانتز دوم واقع درطرف چپ رابطه بالا با توجه برابطه (I) برای مقادیر :

$$r=0 , ۱ , \ldots , k-۲$$

صفر است. لذا :

$$U'_{۱}u_{۱}^{(r)}+U'_{۲}u_{۲}^{(r)}+U'_{۳}u_{۳}^{(r)}+\cdots+U'_{r}u_{r}^{(r)}+\cdots+U'_{k}u_{k}^{(r)}=0$$
$$(r=0\,,\,۱\,,\,۲\,,\,\ldots\,,\,k-۲)$$

تعداد معادلات‌بالا $(k-۱)$ میباشد. اگردترمینان U_k را برحسب سطر $(r-۱)$ ام بسط داده ومعادله r ام‌بالا را در ضریب $u_{۱}^{(r-۱)}$ در بسط U_k ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$U'_{۱}U_k-U'_kU_{۱}=0$$

و ازآنجاییکه U_k در فاصله $(a\,,\,b)$ متحد صفر نیست نتیجه میشود که :

$$U_{۱}=-c_{۱}U_k$$

بطریق مشابه $U_{۲}=-c_{۲}U_k$ ، ... ، $U_{k-۱}=-c_{k-۱}U_k$. $c_{۱}$ ، $c_{۲}$ ، ... ، $c_{k-۱}$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند . اگر روابط بالا را در اتحاد :

$$U_{۱}u_{۱}+U_{۲}u_{۲}+U_{۳}u_{۳}+\cdots+U_ku_k=0$$

قرار دهیم ، خواهیم‌داشت :

$$U_k(-c_{۱}u_{۱}-c_{۲}u_{۲}-\cdots-c_{k-۱}U_{k-۱}+u_k)=0$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت میشود .

اکنون فرض میکنیم $u_{۱}\,,\,u_{۲}\,,\,\ldots\,,\,u_n$ بقسمی باشند که $(n-۱)$ مشتق آن درهرنقطه واقع در فاصله $(a\,,\,b)$ محدود باشد و همچنین هررابطه غیر صفری بشکل $g_{۱}u_{۱}+g_{۲}u_{۲}+\cdots+g_nu_n$ بانضمام $(n-۱)$ مشتق آن درهرنقطه واقع در فاصله مخالف صفر باشد . $g_{۱}\,,\,g_{۲}\,,\,\ldots\,,\,g_n$ مقادیر ثابتی هستند . اگر رونسکین $u_{۱}\,,\,u_{۲}\,,\,\ldots\,,\,u_n$ درهرنقطه P واقع در فاصله $(a\,,\,b)$ متحد صفرباشد این توابع بطور خطی از یکدیگر مستقل نیستند . زیرا از متحد صفر بودن رونسکین برای $x=P$ نتیجه میشود که میتوان مقادیر ثابتی مانند $c_{۱}\,,\,c_{۲}\,,\,\ldots\,,\,c_n$ که‌جمیع آنها صفر نیستند بقسمی تعیین کرد که :

$$c_{۱}u_{۱}^{(r)}(p)+c_{۲}u_{۲}^{(r)}(p)+\cdots+c_nu_n^{(r)}(p)=0$$
$$(r=0\,,\,۱\,,\,۲\,,\,\ldots\,,\,n-۱)$$

لذا تابع :

$$c_{۱}u_{۱}(x)+c_{۲}u_{۲}(x)+\cdots+c_nu_n(x)$$

بانضمام $(n-۱)$ مشتق‌آن‌در نقطه $x=P$ متحد صفر بوده و بالنتیجه متحد صفر خواهد بود و بدین ترتیب قضیه ثابت میشود .

اکنون فرض میکنیم $u_۱ , u_۲ , \dots , u_k$ توابعی از x باشند بقسمی که درهرنقطه واقع درفاصله (a , b) دارای مشتقهای محدود تا مرتبه $(n-۱)$ ام $(n>k)$ بوده و هیچ رابطه غیر صفری بشکل :

$$g_۱u_۱+g_۲u_۲+\cdots+g_ku_k$$

(که درآن $g_۱ , g_۲ , \dots , g_k$ مقادیرثابتی هستند)و$(n-۱)$ مشتق آن‌درهیچ نقطه واقع دراین فاصله متحد صفر نباشد . اگر رونسکین $u_۱ , u_۲ , \dots , u_k$ متحد صفر باشد این توابع بطور خطی از یکدیگر مستقل نیستند .

برای اثبات ابتدا حالتی را درنظر میگیریم که $\Delta(u_۱ , u_۲ , \dots , u_{k-۱}) \neq 0$ باشد و فرض میکنیم P نقطه‌یی واقع درفاصله (a , b) باشد که برای آن :

$$\Delta(u_۱ , u_۲ , \dots , u_{k-۱}) \neq 0$$

است . چون رونسکین تابع پیوسته میباشد لذا در همسایگی نقطه p مخالف صفر بوده و از آنچه قبلاً بیان کردیم‌نتیجه میشود که مقادیر $c_۱ , c_۲ , \dots , c_n$ را میتوان بقسمی انتخاب کرد که رابطه :

$$c_۱u_۱+c_۲u_۲+\cdots+c_ku_k$$

درهمسایگی p متحد صفر باشد. $(n-۱)$ مشتق رابطه بالا نیزدرهمسایگی p متحد صفر بوده و لذا بنابفرض توابع باید متحد صفر باشند .

اکنون حالت کلی را درنظر میگیریم و فرض میکنیم رونسکین توابع :

$$u_۱ , u_۲ , \dots , u_m \ ; \ (۱<m<k)$$

درفاصله (a , b) متحد صفر و رونسکین $u_۱ , u_۲ , \dots , u_{m-۱}$ دراین فاصله مخالف صفر باشد . بنابراین نتیجه میشود که $u_۱ , u_۲ , \dots , u_m$ بطور خطی تابع یکدیگر بوده و قضیه بدین‌ترتیب ثابت میشود .

قضایای بالا را میتوان درمورد جوابهای $u_۱(x) , u_۲(x) , \dots , u_n(x)$ معادله دیفرانسیل بکار برد . چون هرجوابی‌که با $(n-۱)$ مشتق آن درهرنقطه واقع درفاصله (a , b) صفر باشد متحداً برابر صفر است لذا نتیجه میشود که :

الف - اگر رونسکین $u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_{n}$ در هرنقطه واقع در فاصله (a, b) متحد صفر باشد n جواب فوق بطور خطی تابع یکدیگر هستند .

ب - اگر رونسکین $u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_{k}$ $(k < n)$ در فاصله (a, b) متحد صفر باشند k جواب فوق بطور خطی تابع یکدیگر میباشند .

اگر $v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_{n}$ ازتبدیلات خطی $u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_{n}$ بدست آمده باشند. یعنی :

$$v_{r} = a_{r۱}u_{۱} + a_{r۲}u_{۲} + \cdots + a_{rn}u_{n} \quad , \quad (r = ۱ , ۲ , \ldots , n)$$

بسهولت میتوان نشان داد که :

$$\triangle(v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_{n}) = A\triangle(u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_{n})$$

که در آن A دترمینان $|a_{rs}|$ است . $v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_{n}$ بطور خطی از یکدیگر مستقل خواهند بود هرگاه $\triangle(v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_{n}) \neq o$ باشد وبرای این منظور لازم است که :

۱- دترمینان A مخالف صفر و یا تبدیل معمولی باشد .

۲- $u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_{n}$ بطور خطی از یکدیگر مستقل باشند .

فرض میکنیم $u_{۱}, u_{۲}, \ldots, u_{n}$ ، n جواب معادله همگن (۱۱ . ۶) که بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند باشد. رونسکین این توابع را میتوان بشکل ساده‌یی نوشت که ذیلاً آنرا بدست میاوریم .

اگر از دترمینان △ مشتق گرفته ودرنظرداشته‌باشیم که برای مشتق گیری از دترمینان کافی است از هرسطر جداگانه مشتق گرفت لذا مشتق △ مجموع n دترمینان خواهد بود که (n — ۱) دترمینان اول شامل دوسطر مشابه بوده ولذا متحد صفرخواهند بود وازآنجا :

$$\frac{d\triangle}{dx} = \begin{vmatrix} u_{۱} & u_{۲} & \cdots & u_{n} \\ u'_{۱} & u'_{۲} & \cdots & u'_{n} \\ u''_{۱} & u''_{۲} & \cdots & u''_{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{۱}^{(n-۲)} & u_{۲}^{(n-۲)} & \cdots & u_{n}^{(n-۲)} \\ u_{۱}^{(n)} & u_{۲}^{(n)} & \cdots & u_{n}^{(n)} \end{vmatrix}$$

ولی چون بنابفرض $u_r\,(r=1,2,\ldots,n)$ جوابهای معادله همگن (٦ . ١١) است . لذا :

$$a_0u_r^{(n)}=-a_1u_r^{(n-1)}-a_2u_r^{(n-2)},\ldots,a_{n-1}u'_r-a_nu_r\ .$$
$$(r=1,2,\ldots,n)$$

از n معادله بالا میتوان هریک از n مجهول $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}$ را بدست آورد .

مثلاً :

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{\begin{vmatrix} -u_1^{(n)} & u_1^{(n-2)} & \cdots & u'_1 & u_1 \\ -u_2^{(n)} & u_2^{(n-2)} & \cdots & u'_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -u_n^{(n)} & u_n^{(n-2)} & \cdots & u'_n & u_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1^{(n-1)} & u_1^{(n-2)} & \cdots & u'_1 & u_1 \\ u_2^{(n-1)} & u_2^{(n-2)} & \cdots & u'_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^{(n-1)} & u_n^{(n-2)} & \cdots & u'_n & u_n \end{vmatrix}}=\frac{-\frac{d\Delta}{dx}}{\Delta}$$

و یا :

$$\Delta=\Delta_0\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1}{a_0}dx\right] \qquad (٦ . ٢)$$

Δ_0 مقدار Δ بازاء $x=x_0$ است .

از رابطه (٦ . ٢) نتیجه میشود که اگر $a_0(x)$ در فاصله (a,b) متحد صفر نباشد مقدار Δ درصورتی متحد صفر خواهد شد که مقدار آن در نقطه x_0 متحد صفر باشد .

اگر $\Delta_{\circ}$ مخالف صفر باشد باستثنای نقاط غیر عادی یعنی نقاطی که $\frac{a_1}{a_{\circ}}$ بینهایت میشود Δ نیز صفر نخواهد بود . این نقاط را از ابتدا از فرضی که درباره پیوسته بودن ضرایب $L(u)$ نمودیم‌وهمچنین $a_{\circ}$ را درفاصله (a , b) مخالف صفرفرض کردیم مشتثنی نموده‌ایم .

تبصره - اگر در رابطه (۱۱ . ۶) مقادیر :

$$n=۲ , a_{\circ}=۱ , a_1=p , y_1=u_1 , y_2=u_2 , \Delta=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}$$

اختیارگردد رابطه (۲ . ۶) مبدل به رابطه :

$$y_1\frac{dy_2}{dx}-y_2\frac{dy_1}{dx}=ce^{-\int pdx}$$

میگردد که مستقلاً آنرا در فصل پنجم بدست آوردیم .

مثال ۱- نشان دهید که $\sin x$ و $\cos x$ جوابهای معادله $(D^۲+۱)y=o$ هستند که بطور خطی از یکدیگر مستقل میباشند .

حل - بسهولت میتوان نشان داد که $y_1=\sin x$ و $y_2=\cos x$ در معادله صدق میکنند و بالنتیجه جواب معادله هستند .

بنابر شماره (۲ . ۶) برای آنکه ثابت کنیم این جوابها بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند باید نشان دهیم رونسکین این توابع مخالف صفر است . یعنی :

$$\Delta(\sin x , \cos x)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-۱\neq o$$

لذا بنابر قسمت (ب) شماره (۱ . ۶) جواب عمومی معادله $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ خواهد بود .

مثال ۲- جواب عمومی معادله $(D^۲+۱)y=۲e^x$ را بدست آورید .

حل - با بررسی مختصری معلوم میشود که $y=e^x$ یکی از جوابهای خصوصی معادله میباشد و بنابر مثال یک جواب عمومی معادله همگن $(D^۲+۱)y=o$ عبارت

است از $y=c_{۱}\sin x+c_{۲}\cos x$. پس بنابر قسمت (پ) شماره (۱ . ٦) جواب عمومی معادله چنین است :

$$y=c_{۱}\sin x+c_{۲}\cos x+x$$

مثال ۳- جواب عمومی معادله $(D^{۳}-٦D^{۲}+۱۱D-٦)y=٤-۱۲x$ را بدست آورید .

حل - میتوان نشان داد که $y_{۱}=e^{x}$ و $y_{۲}=e^{۲x}$ و $y_{۳}=e^{۳x}$ جوابهای معادله همگن میباشد . این جوابها بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند . زیرا :

$$\Delta(e^{x},e^{۲x},e^{۳x})=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{۲x} & e^{۳x} \\ e^{x} & ۲e^{۲x} & ۳e^{۳x} \\ e^{x} & ٤e^{۲x} & ۹e^{۳x} \end{vmatrix}=۲e^{٦x}\neq 0$$

از طرف دیگر میتوان نشان داد که $y=۲x+۳$ یکی از جوابهای معادله غیر همگن :

$$(D^{۳}-٦D^{۲}+۱۱D-٦)y=٤-۱۲x$$

است لذا بنابر قسمت (پ) شماره (۱ . ٦) جواب عمومی معادله بصورت زیرمیباشد :

$$y=c_{۱}e^{x}+c_{۲}e^{۲x}+c_{۳}e^{۳x}$$

مثال ٤- نشان دهید که بازاء جمیع مقادیر x سه تابع :

$$y_{۱}=e^{x}\ ,\ y_{۲}=xe^{x}\ ,\ y_{۳}=\operatorname{sh}x$$

بطور خطی از یکدیگر مستقل میباشد .

$$\Delta(e^{x},xe^{x},\operatorname{sh}x)=\begin{vmatrix} e^{x} & xe^{x} & \operatorname{sh}x \\ e^{x} & (x+۱)e^{x} & \operatorname{ch}x \\ e^{x} & (x+۲)e^{x} & \operatorname{sh}x \end{vmatrix}=e^{۲x}\begin{vmatrix} ۱ & x & \operatorname{sh}x \\ ۱ & (x+۱) & \operatorname{ch}x \\ ۱ & (x+۲) & \operatorname{sh}x \end{vmatrix}$$

$$\Delta(y_{۱},y_{۲},y_{۳})=e^{۲x}\begin{vmatrix} ۱ & x & \operatorname{sh}x \\ 0 & ۱ & \operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x \\ 0 & ۲ & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-۲e^{۲x}(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh})=-۲\neq 0$$

مسائل

۱- معادله دیفرانسیل $x^۲y''+۴xy'+۲y=0$ مفروض است .

الف - تحقیق کنید که برای هرمقدار $c_۱$ و $c_۲$ تابع $y=c_۱x^{-۲}+c_۲x^{-۱}$ درمعادله صدق میکند .

ب - نشان دهید که $c_۱$ و $c_۲$ رافقط بیک نحو میتوان تعیین کرد که درشرایط اولیه $y=y_۰ , y'=y'_۰$ برای $(x_۰>0)x=x_۰$ صدق کند . $y=c_۱x^{-۲}+c_۲x^{-۱}$ برای مقادیر $x>0$ جواب عمومی معادله است .

۲- با پیروی از روش حل مثال یک نشان دهید که :

$$y=x^۲+e^{-x}(c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل :

$$y''+۲y'+۵y=۵x^۲+۴x+۲$$

است .

۳- نشان دهید که مجموعه توابع زیر بازاء جمیع مقادیر x بطور خطی از یکدیگر مستقل میباشند .

الف - e^{ax} , e^{bx} , e^{cx} (a , b , c از یکدیگر متمایز هستند) .

ب - x , $x^۲$, $x^۳$.

پ - $\sin x$, $\cos x$, $\sin ۲x$.

۴- تعیین کنید کدام یک از مجموعه توابع زیر بازاء جمیع مقادیر x بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند .

الف - $\sinh x$, e^x , e^{-x} .

ب - $\sin ۳x$, $\sin x$, $\sin^۳ x$.

پ - $۱+x$, $۱+۲x$, $x^۲$.

ت - $x^۲-x+۱$, $x^۲-۱$, $۳x^۲-x-۱$.

۵- فرض میکنیم $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادله دیفرانسیل :

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \quad , \quad a<x<b$$

و :

$$\Delta=\Delta(y_1 , y_2)=y_1(x)y'_2(x)-y'_1(x)y_2(x)$$

رونسکین دو جواب باشد .

الف - نشان دهید که $\Delta'=-p(x)\Delta$.

ب - با استفاده از رابطه (۲ . ٦) نشان دهید که اگر برای مقداری از x_0 مقدار $(a<x_0<b)$ $\Delta(x_0)=0$ گردد مقدار $\Delta(x)$ برای جمیع مقادیر $a<x<b$ متحد صفر خواهد بود .

٦- نشان دهید که هرجواب معادله دیفرانسیل غیر خطی $y'=1+y^2$ در داخل فاصله‌یی بطول حداکثر π معین است .

۷- فرض میکنیم $y_1(x)$ ، $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ درداخل فاصله معینی بطور خطی از یکدیگر مستقل باشند و c_1 , c_2 , ... , c_n و C_1 , C_2 , ... , C_n مقادیر ثابتی باشند که در داخل این فاصله داشته باشیم :

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

نشان دهید که :

$$c_1=C_1 , c_2=C_2 , \ldots , c_n=C_n$$

جوابها

٤- الف و ب و ت بطور خطی تابع یکدیگر هستند .

٦- $y=tg(x+c)$.

۲۱ . ٦- مجموعه جوابهای اساسی

اگر $u_1 , u_2 , \ldots , u_n$ یک دسته جوابهای معادله همگن $L(u)=0$ که بطور خطی از یکدیگر مستقل هستند باشند دراینصورت گوییم این دسته جوابها تشکیل مجموعه **جوابهای اساسی*** یا **دستگاه جوابهای اساسی** را میدهند .

---

* جمله «دستگاه اساسی» برای اولین بار درسال ۱۸٦٦ توسط Fuchs بکار برده شده است .

همانطورکه میدانیم شرط آنکه n جواب معادله همگن (١١ . ٦) بطور خطی از یکدیگر مستقل باشند و بالنتیجه یک مجموعه جوابهای اساسی تشکیل دهند آن است که رونسکین n جواب مخالف صفر باشد . جواب عمومی معادله عبارت میگردد از :

$$u=c_{۱}u_{۱}+c_{۲}u_{۲}+\cdots+c_nu_n$$

رابطه بالا باستثنای حالتی که جمیع مقادیر ثابت c_n ، ... ، $c_{۲}$ ، $c_{۱}$ صفر هستند متحد صفر نیست . واضح است که تعداد بیشماری ازمجموعه جوابهای اساسی موجود است ولی یک مجموعه خاص بعلت سادگی آن دارای اهمیت بسزایی است . فرض میکنیم $u_{۱}(x)$ بقسمی باشد که :

$$u_{۱}(x_\circ)=۱ \;,\; u'_{۱}(x_\circ)=u''_{۱}(x_\circ)=\cdots=u_{۱}^{(n-۱)}(x_\circ)=0$$

و $u_r(x)$ $(r=۲ , ۳ , ٤ , \ldots , n)$ جوابهای خصوصی معادله باشد که در شرایط اولیه زیر صدق کند :

$$u_r(x_\circ)=u'_r(x_\circ)=u''_r(x_\circ)=\cdots=u_r^{(r-۲)}(x_\circ)=0$$

$$u_r^{(r-۱)}(x_\circ)=۱ \quad , \quad (r=۲ , ۳ , \ldots , n)$$

$$u_r^{r}(x_\circ)=u_r^{(r+۱)}(x_\circ)=\cdots=u_r^{(n-۱)}(x_\circ)=0$$

ازآنجایی که مقدار رونسکین u_n ، ... ، $u_{۲}$ ، $u_{۱}$ درنقطه $x_\circ$ برابر یک است لذا این دسته از جوابهای خصوصی تشکیل یک مجموعه جوابهای اساسی داده و از آنجا جواب منحصر بفرد معادله همگن $L(u)=0$ که در شرایط اولیه :

$$u(x_\circ)=y_\circ \;,\; u'(x_\circ)=y'_\circ , \ldots , u^{(n-۱)}(x_\circ)=y_\circ^{(n-۱)}$$

صدق میکند ، عبارت میشود از :

$$u(x)=y_\circ u_{۱}(x)+y'_\circ u_{۲}(x)+y''_\circ u_{۳}(x)+\cdots+y_\circ^{(n-۱)}u_n(x)$$

هرمجموعه جوابهای اساسی $u_n(x)$ ، ... ، $u_{۲}(x)$ ، $u_{۱}(x)$ را ممکن است بشکل زیر نوشت:

$$u_{۱}(x)=v \;,\; u_{۲}(x)=v_{۱}\int v_{۲}dx \;,\; u_{۳}(x)=v_{۱}\int v_{۲}\int v_{۳}(dx)^{۲}$$

و بطور کلی :

$$u_r(x)=v_{۱}\int v_{۲}\int v_{۳}\int \cdots \int v_r(dx)^{r-۱}$$

که در آن :

$$v_r=\frac{d}{dx}\left\{\frac{۱}{v_{r-۱}}\times\frac{d}{dx}\left[\frac{۱}{v_{r-۲}}\cdot\frac{d}{dx}\cdots\frac{۱}{v_۲}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{u_r}{u_۱}\right)\right]\right\}$$

حال اگر n تابع $u_۱ , u_۲ , \dots , u_n$ مجموعه جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل همگن باشد این معادله‌را میتوان‌ازحذف n مقدارثابت c بین $(n+۱)$ معادله زیر بدست آورد :

$$u=c_۱u_۱+c_۲u_۲+\cdots+c_nu_n$$

$$u'=c_۱u'_۱+c_۲u'_۲+\cdots+c_nu'_n$$

$$u''=c_۱u''_۱+c_۲u''_۲+\cdots+c_nu''_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u^{(n)}=c_۱u_۱^{(n)}+c_۲u_۲^{(n)}+\cdots+c_nu_n^{(n)}$$

لذا :

$$\Delta(u , u_۱ , u_۲ , \cdots , u_n)=0 \qquad \text{(I)}$$

که در آن Δ رونسکین $u , u_۱ , u_۲ , \dots , u_n$ است . دربسط رابطه (I) ضریب $u^{(n)}$ برابر $\Delta(u_۱ , u_۲ , \dots , u_n)$ بوده که‌چون $u_۱ , u_۲ , \dots , u_n$ بنابفرض یک مجموعه جوابهای اساسی‌هستند مقدار آن مخالف‌صفر است. رابطه (I) را برای سهولت درمحاسبات به‌ترتیب زیر میتوان نوشت :

$$L(u)=\frac{\Delta(u , u_۱ , u_۲ , \dots , u_n)}{\Delta(u_۱ , u_۲ , \dots , u_n)}=0 \qquad \text{(II)}$$

واضح است که ضریب $u^{(n)}$ درعبارت $L(u)$ برابر واحد میباشد و معادله بالا بصورت زیر درمیآید :

$$L(u)=\frac{d^nu}{dx^n}+P_۱\frac{d^{n-۱}u}{dx^{n-۱}}+P_۲\frac{d^{n-۲}u}{dx^{n-۲}}+\cdots+P_r\frac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}}$$
$$+\cdots+P_{n-۱}\frac{du}{dx}+P_nu=0 \qquad (۶ . ۲۱)$$

برای تعیین ضریب P_r صورت کسر واقع درطرف راست رابطه (II) را درنظر میگیریم :

$$\Delta(u\,,\,u_{۱}\,,\,u_{۲}\,,\,\dots\,,\,u_n)=\begin{vmatrix} u & u_{۱} & u_{۲} & \cdots & u_n \\ u' & u'_{۱} & u'_{۲} & \cdots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n-r)} & u_{۱}^{(n-r)} & u_{۲}^{(n-r)} & \cdots & u_n^{(n-r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & u_{۱}^{(n)} & u_{۲}^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ضریب $u^{(n-r)}=\dfrac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}}$ در بسط دترمینان بالا عبارت میگردد از :

$$(-۱)^{n-r-۱}\begin{vmatrix} u_{۱} & u_{۲} & \cdots & u_n \\ u'_{۱} & u'_{۲} & \cdots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{۱}^{(n-r-۱)} & u_{۲}^{(n-r-۱)} & \cdots & u_n^{(n-r-۱)} \\ u_{۱}^{(n-r+۱)} & u_{۲}^{(n-r+۱)} & \cdots & u_n^{(n-r+۱)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{۱}^{(n-۱)} & u_{۲}^{(n-۱)} & \cdots & u_n^{(n-۱)} \\ u_{۱}^{(n)} & u_{۲}^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

اکنون اگر با تعویض سطرها سطرآخر را درسطر $(r-۱)$ ام از انتها قرار دهیم علامت دترمینان $(-۱)^r$ بار تغییر میکند و از آنجا خواهیم داشت :

$$(-۱)^{n-r}(-۱)^{r-۱}\begin{vmatrix} u_۱ & u_۲ & \cdots & u_n \\ u'_۱ & u'_۲ & \cdots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_۱^{(n-r-۱)} & u_۲^{(n-r-۱)} & \cdots & u_n^{(n-r-۱)} \\ u_۱^{(n)} & u_۲^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \\ u_۱^{(n-r+۱)} & u_۲^{(n-r+۱)} & \cdots & u_n^{(n-r+۱)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_۱^{(n-۱)} & u_۲^{(n-۱)} & \cdots & u_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}$$

$$=-(-۱)^{n}\begin{vmatrix} u_۱ & u_۲ & \cdots & u_n \\ u'_۱ & u'_۲ & \cdots & u'_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_۱^{(n-r-۱)} & u_۲^{(n-r-۱)} & \cdots & u_n^{(n-r-۱)} \\ u_۱^{(n)} & u_۲^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \\ u_۱^{(n-r+۱)} & u_۲^{(n-r+۱)} & \cdots & u_n^{(n-r+۱)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_۱^{(n-۱)} & u_۲^{(n-۱)} & \cdots & u_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}$$

ملاحظه میکنیم که دترمینان بالا همان دترمینان $\Delta(u_۱ , u_۲ , \dots , u_n)$ است که درآن بجای $u_۱^{(n-r)}$ مقدار $u_۱^{(n)}$ وبجای $u_۲^{(n-r)}$ مقدار $u_۲^{(n)}$ وغیره قرارداده‌ایم. اگر مقداراین دترمینان را به A_r نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$P_r = -\frac{A_r}{\Delta}$$

بایدتوجه‌داشت که تمام‌ضرایب $P_1 , P_2 , \ldots , P_r , \ldots , P_{n-1} , P_n$ و ضریب $\frac{d^n u}{dx^n}$ شامل فاکتور $(-1)^n$ هستند که میتوان آنرا حذف کرد .

اکنون میخواهیم اوپریتورL را بصورت حاصل‌ضرب n اوپریتور مرتبه اول بنویسیم . برای این منظور قرار میدهیم :

$$u_r = \Delta(u , u_1 , u_2 , \ldots , u_r)$$

$$\Delta_r = \Delta(u_1 , u_2 , \ldots , u_r) \quad , \quad (\Delta_0 = 1)$$

با قرار داد بالا رابطه (II) بصورت زیر نوشته میشود :

$$L(u) = \frac{u_n}{\Delta_n} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-1} U_n}{\Delta_n^2} \qquad (۶ . ۲۱۱)$$

اکنون اتحاد زیر را ثابت میکنیم :

$$\text{(III)} \qquad u_r \Delta_{r-1} = u_{r-1} \Delta'_r - u'_{r-1} \Delta_r$$

برای اثبات رابطه فوق از ضرب و مشتق دترمینانها استفاده میکنیم . یعنی :

$$u_{r-1}\Delta'_r = \begin{vmatrix} u & u_1 & u_2 & \cdots & u_{r-1} \\ u' & u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_{r-1} \\ u'' & u''_1 & u''_2 & \cdots & u''_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(r-1)} & u_1^{(r-1)} & u_2^{(r-1)} & \cdots & u_{r-1}^{(r-1)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_r \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & \cdots & u'_r \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 & \cdots & u''_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(r-1)} & u_2^{(r-1)} & u_3^{(r-1)} & \cdots & u_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

دومین دترمینان بالا مجموع r دترمینان میباشد که‌چون $(r-۱)$ دترمینان آن دارای دو سطر مساوی هستند مقدار آن صفر است و لذا :

$$(IV)\qquad u_{r-۱}\Delta'_r=\begin{vmatrix} u & u_۱ & u_۲ & \cdots & u_{r-۱} \\ u' & u'_۱ & u'_۲ & \cdots & u'_{r-۱} \\ u'' & u''_۱ & u''_۲ & \cdots & u''_{r-۱} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(r-۱)} & u_۱^{(r-۱)} & u_۲^{(r-۱)} & \cdots & u_r^{(r-۱)} \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} u_۱ & u_۲ & u_۳ & \cdots & u_r \\ u'_۱ & u'_۲ & u'_۳ & \cdots & u'_r \\ u''_۱ & u''_۲ & u''_۳ & \cdots & u''_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_۱^{(r-۲)} & u_۲^{(r-۲)} & u_۳^{(r-۲)} & \cdots & u_r^{(r-۲)} \\ u_۱^{(r)} & u_۲^{(r)} & u_۳^{(r)} & \cdots & u_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

بطریق مشابه میتوان نشان داد که :

$$(V)\qquad u'_{r-۱}\Delta_r=\begin{vmatrix} u & u_۱ & u_۲ & \cdots & u_{r-۱} \\ u' & u'_۱ & u'_۲ & \cdots & u'_{r-۱} \\ u'' & u''_۱ & u''_۲ & \cdots & u''_{r-۱} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(r-۲)} & u_۱^{(r-۲)} & u_۲^{(r-۲)} & \cdots & u_{r-۱}^{(r-۲)} \\ u^{(r)} & u_۱^{(r)} & u_۲^{(r)} & \cdots & u_{r-۱}^{(r)} \end{vmatrix}\times$$

$$\begin{vmatrix} u_۱ & u_۲ & \cdots & u_r \\ u'_۱ & u'_۲ & \cdots & u'_r \\ u''_۱ & u''_۲ & \cdots & u''_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_۱^{(r-۲)} & u_۲^{(r-۲)} & \cdots & u_r^{(r-۲)} \\ u_۱^{(r-۱)} & u_۲^{(r-۱)} & \cdots & u_r^{(r-۱)} \end{vmatrix}$$

اکنون اگرهریک ازدترمینانهای روابط (IV) و (V) رابرحسب سطرآخربسط داده و در نظر داشته باشیم که دترمینانهای‌فرعی‌این ضرایب در هردو دترمینان یکسان هستند پس‌از عملیات مختصری رابطه (III) بدست میآید .

با استفاده از رابطه (III) رابطه (۲۱۱ . ٦) را میتوان بصورت‌زیر نوشت :

$$L(u)=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{\Delta_{n-۱}U_n}{\Delta^۲_n}=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{U_{n-۱}\Delta'_n-U'_{n-۱}\Delta_n}{\Delta^۲_n}$$

$$=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\left(-\frac{U_{n-۱}}{\Delta_n}\right)$$

$$=-\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta_{n-۱}}{\Delta_n}\cdot\frac{U_{n-۱}}{\Delta_{n-۱}}\right]$$

$$=-\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta^۲_{n-۱}}{\Delta_n\Delta_{n-۲}}\left(\frac{\Delta_{n-۲}U_{n-۱}}{\Delta^۲_{n-۱}}\right)\right]$$

اگر بار دیگر رابطه (III) را درباره عبارت واقع در پرانتز رابطه بالا بکار بریم خواهیم داشت :

$$L(u)=-\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta^۲_{n-۱}}{\Delta_n\Delta_{n-۲}}\left(\frac{U_{n-۲}\Delta_{n-۱}-U'_{n-۲}\Delta_{n-۱}}{\Delta^۲_{n-۱}}\right)\right]$$

$$=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta^۲_{n-۱}}{\Delta_n\Delta_{n-۲}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{U_{n-۲}}{\Delta_{n-۱}}\right)\right]$$

اگر رابطه (III) را متوالیاً بکار بریم میتوان نشان داد که :

$$L(u)=(-۱)^n\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\Delta_{n-۱}^۲}{\Delta_n\Delta_{n-۲}}\cdot\frac{d}{dx}\ \cdots\ \frac{d}{dx}\cdot\frac{\Delta_۱^۲}{\Delta_۲\Delta_۰}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{\Delta_۰}{\Delta_۱}u\right]\qquad(۶ . ۲۱۲)$$

که در آن هر اوپریتور دیفرانسیل برتمام توابعی که بعدازآن وارد میشود عمل میکند .

هنگامیکه جوابهای اساسی را بشکل :

$$u_۱=v_۱\ ,\ u_۲=v_۱\int v_۲dx\ ,\ \ldots\ ,\ u_n=v_۱\int v_۲\int v_۳\int\ \cdots\ \int v_n(dx)^{n-۱}$$

اختیار میکنیم با استفاده از تعریف $\Delta_۰$ ، $\Delta_۱$ ، $\Delta_۲$ ، $\Delta_۳$ ، … ، $\Delta_{n-۲}$ ، $\Delta_{n-۱}$ ، Δ_n خواهیم داشت :

$$\Delta_۰=۱\ ,\quad \Delta_۱=u_۱=v_۱\ ,\quad \Delta_۲=\Delta(u_۱\,,u_۲)=-v_۱^۲v_۲\ ,$$

$$\Delta_۳=\Delta(u_۱\,,u_۲\,,u_۳)=v_۱^۳v_۲^۲v_۳$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\Delta_{n-۲}=(-۱)^{n-۳}v_۱^{n-۲}v_۲^{n-۳}v_۳^{n-۴}\ \ldots\ v_{n-۲}$$

$$\Delta_{n-۱}=(-۱)^{n-۲}v_۱^{n-۱}v_۲^{n-۲}v_۳^{n-۳}\ \ldots\ v_{n-۱}\ ,$$

$$\Delta_n=(-۱)^{n-۱}v_۱^nv_۲^{n-۱}v_۳^{n-۲}\ \ldots\ v_n$$

و از آنجا :

$$\frac{\Delta_۰}{\Delta_۱}=\frac{۱}{v_۱}\ ,\quad \frac{\Delta_۱^۲}{\Delta_۲\Delta_۰}=-\frac{۱}{v_۲}\ ,\quad \frac{\Delta_۲^۲}{\Delta_۳\Delta_۱}=\frac{v_۱^۴v_۲^۲}{v_۱^۴v_۲^۲v_۳}=\frac{۱}{v_۳}\ ,\ \ldots\ ,$$

$$\frac{\Delta_{n-۱}^۲}{\Delta_n\Delta_{n-۲}}=\frac{v_۱^{۲n-۲}v_۲^{۲n-۴}v_۳^{۲n-۶}\ \ldots\ v_{n-۱}^۲}{v_۱^{۲n-۲}v_۲^{۲n-۴}v_۳^{۲n-۶}\ \ldots\ v_{n-۱}^۲v_n}=\frac{۱}{v_n}$$

با جایگزین نمودن روابط فوق در رابطه (۶ . ۲۱۲) خواهیم داشت :

$$L(u)=(-۱)^n\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-۱}}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_ndx}\cdot\frac{d}{v_{n-۱}dx}\ \cdots\ \frac{d}{v_۲dx}\cdot\frac{u}{v_۱}=0$$

(۶ . ۲۱۳)

با توجه برابطه (۶ . ۲۱۲) رابطه (۶ . ۱۱) را از حیث معمولی میتوان بصورت زیر نوشت:

$$L_n L_{n-۱} \ \dots \ L_۲ L_۱(u) = 0$$

سمبول L_i اوپریتور $D-\alpha_i$ را نمایش میدهد و :

$$\alpha_i = \frac{d}{dx} Log \frac{\triangle_i}{\triangle_{i-۱}} = \frac{d}{dx} Log(v_۱ v_۲ \ \dots \ v_i)$$

زیرا با کمی دقت برابطه (۲۱۲ . ۶) چنین داریم :

$$\frac{\triangle_i}{\triangle_{i-۱}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\triangle_{i-۱} z}{\triangle_i}\right) = \frac{dz}{dx} - z \frac{d}{dx} Log \frac{\triangle_i}{\triangle_{i-۱}} = (D-\alpha_i) z$$

باید درنظر داشت که ترتیب قرارگرفتن فاکتورهای $(D-\alpha_i)$ را نباید تغییر داد. زیرا رابطه زیر در حالت کلی صادق نیست :

$$(D-\alpha_i)(D-\alpha_j) = (D-\alpha_j)(D-\alpha_i)$$

بعبارت دیگر و همانطور که درشماره (۷ . ۵) تذکر دادیم درحالت کلی اوپریتورهای دیفرانسیل بایکدیگر قابل جابجا شدن نیستند .

۲۲ . ۶ــ کاهش مرتبه معادله

اگر r جواب مستقل مرتبه n ام $L(u)=0$ در دست باشد میتوان مرتبه این معادله را به $n-r$ کاهش داد. زیرا فرض میکنیم $u_۱ , u_۲ , \dots , u_r$ جوابهای معادله باشند و قرار میدهیم :

$$v_۱ = u_۱ \ , \ v_۲ = \frac{d}{dx}\left(\frac{u_۲}{v_۱}\right) \quad ; \quad v_۳ = \frac{d}{dx}\left\{\frac{۱}{v_۲} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{u_۳}{v_۱}\right)\right\}$$

رابطه (۲۱۳ . ۶) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{v_n dx} \cdot \frac{d}{v_{n-۱} dx} \cdots \frac{d}{v_{r+۱} dx} \cdot \frac{d}{v_r dx} \cdots \frac{d}{v_۲ dx} \cdot \frac{u}{v_۱} = 0$$

ولی چون بنابفرض r جواب $u_۱ , u_۲ , \dots , u_r$ در دست است لذا $v_۱ , v_۲ , \dots , v_r$ معلوم بوده و بالنتیجه رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$P(v) = 0$$

که در آن :

$$(I)\qquad v=\frac{d}{v_r dx}\cdot\frac{d}{v_{r-1}dx}\cdot\frac{d}{v_{r-2}dx}\cdots\frac{d}{v_2 dx}\cdot\frac{u}{v_1}$$

و P اوپریتور خطی از مرتبه $(n-r)$ ام است . اگر بتوان هرجواب معادله $P(v)=0$ را بدست آورد آنگاه مقدار u را میتوان با r بار انتگرال گیری از رابطه (I) بدست آورد .

روش واقعی اجرای عملیات فوق را در حالت خاص معادله مرتبه دوم :

$$(II)\qquad y''+py'+qy=0$$

ذیلاً شرح میدهیم . فرض میکنیم y_1 یکی از جوابهای خصوصی این معادله در دست باشد و قرار میدهیم :

$$y=y_1\int udx$$

لذا :

$$y''_1\int udx+2y'_1u+y_1u'+p[y'_1\int udx+y_1u]+qy_1\int udx=0$$

و یا :

$$y_1u'+(2y'_1+py_1)u=0$$

معادله بالا معادله خطی مرتبه اول برحسب u بوده و دارای جواب عمومی :

$$u=cy_1^{-2}e^{-\int pdx}$$

است . بنابراین دو جواب متمایز (II) عبارت خواهند بود از :

$$y_1\quad,\quad y_1\int[y_1^{-2}e^{-\int pdx}]dx$$

۲۳ . ۶ـ حل معادله غیر همگن

اکنون میخواهیم جواب عمومی معادله :

$$L(y)=q(x)\qquad(۶ . ۲۳)$$

را بدستآوریم . البته فرض شده است که $y_1, y_2, \dots, y_n$ یکدسته از جوابهای اساسی معادله همگن $L(y)=0$ در دست میباشند .

برای حل معادله (۲۳ . ۶) از یکی از دو روش زیر استفاده میکنیم.

۶.۲۳۱ـ روش تغییر پارامتر

همانطورکه میدانیم جواب عمومی معادله همگن $L(y)=0$ عبارت است از :

$$y=A_1y_1+A_2y_2+\cdots+A_ry_r+\cdots+A_ny_n \qquad (٦ . ٢٣١)$$

A_n , ... , A_2 , A_1 مقادیرثابت‌غیر مشخصی هستند. اکنون فرض میکنیم که مقادیر A توابع غیر مشخصی از x باشند دراینصورت خواهیم داشت :

$$\text{(I)}\quad \frac{dy}{dx}=A_1\frac{dy_1}{dx}+A_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+A_r\frac{dy_r}{dx}+\cdots+A_n\frac{dy_n}{dx}$$
$$+y_1\frac{dA_1}{dx}+y_2\frac{dA_2}{dx}+\cdots+y_r\frac{dA_r}{dx}+\cdots+y_n\frac{dA_n}{dx}$$

حال چون تنها محدودیتی که تاکنون‌برای n تابع غیر مشخص $A_r(r=1 , 2 , \ldots , n)$ قائل شده‌ایم آن است که رابطه (٦ . ٢٣١) درمعادله (٦ . ٢٢) صدق کند بنابراین میتوانیم $(n-1)$ شرط دلخواه‌دیگرنیزبین‌ضرایب A برقرار کنیم،مشروط برآنکه‌این شروط بایکدیگر متوافق باشند. فرض‌میکنیم یکی از این شروط عبارت باشد از :

$$\text{(II)}\quad y_1\frac{dA_1}{dx}+y_2\frac{dA_2}{dx}+\cdots+y_r\frac{dA_r}{dx}+\cdots+y_n\frac{dA_n}{dx}=0$$

با فرض برقرار بودن شرط بالا رابطه (I) بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dy}{dx}=A_1\frac{dy_1}{dx}+A_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+A_r\frac{dy_r}{dx}+\cdots+A_n\frac{dy_n}{dx} \qquad (٦ . ٢٣١١)$$

حال اگر از رابطه بالا مشتق بگیریم چنین داریم :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+A_2\frac{d^2y_2}{dx}+\cdots+A_r\frac{d^2y_r}{dx^2}+\cdots+A_n\frac{d^2y_n}{dx^2} \qquad (٦ . ٢٣١٢)$$

مشروط برآنکه :

$$\text{(III)}\quad \frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dA_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dA_2}{dx}+\cdots+\frac{dy_r}{dx}\cdot\frac{dA_r}{dx}$$
$$+\cdots+\frac{dy_n}{dx}\cdot\frac{dA_n}{dx}=0$$

اگر عمل فوق را ادامه دهیم و فرض کنیم که مقادیر A چنان باشند که در روابط زیر صدق کنند :

$$\frac{d^{۲}y_{۱}}{dx^{۲}}\cdot\frac{dA_{۱}}{dx}+\frac{d^{۲}y_{۲}}{dx^{۲}}\cdot\frac{dA_{۲}}{dx}+\cdots+\frac{d^{۲}y_{r}}{dx^{۲}}\cdot\frac{dA_{r}}{dx}+\cdots+\frac{d^{۲}y_{n}}{dx^{۲}}\cdot\frac{dA_{n}}{dx}=0$$

$$\frac{d^{۳}y_{۱}}{dx^{۳}}\cdot\frac{dA_{۱}}{dx}+\frac{d^{۳}y_{۲}}{dx^{۳}}\cdot\frac{dA_{۲}}{dx}+\cdots+\frac{d^{۳}y_{r}}{dx^{۳}}\cdot\frac{dA_{r}}{dx}+\cdots+\frac{d^{۳}y_{n}}{dx^{۳}}\cdot\frac{dA_{n}}{dx}=0 \qquad \text{(IV)}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{d^{n-۲}y_{۱}}{dx^{n-۲}}\cdot\frac{dA_{۱}}{dx}+\frac{d^{n-۲}y_{۲}}{dx^{n-۲}}\cdot\frac{dA_{۲}}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-۲}y_{r}}{dx^{n-۲}}\cdot\frac{dA_{r}}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-۲}y_{n}}{dx^{n-۲}}\cdot\frac{dA_{n}}{dx}=0$$

(n—۳) معادله بالا با روابط (II) و (IV) تشکیل (n — ۱) معادله میدهند .

اگر از رابطه (۲۳۱۲ . ۶) باتوجه‌بروابط (IV) ، (n—۱) بار مشتق بگیریم ، چنین داریم :

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}=A_{۱}\frac{d^{۳}y_{۱}}{dx^{۳}}+A_{۲}\frac{d^{۳}y_{۲}}{dx^{۳}}+\cdots+A_{r}\frac{d^{۳}y_{r}}{dx^{۳}}+\cdots+A_{n}\frac{d^{۳}y_{n}}{dx^{۳}}$$

$$\frac{d^{٤}y}{dx^{٤}}=A_{۱}\frac{d^{٤}y_{۱}}{dx^{٤}}+A_{۲}\frac{d^{٤}y_{۲}}{dx^{٤}}+\cdots+A_{r}\frac{d^{٤}y_{r}}{dx^{٤}}+\cdots+A_{n}\frac{d^{٤}y_{n}}{dx^{٤}}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=A_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+A_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+A_r\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}}+\cdots+A_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \qquad \text{(۶ . ۲۳۱۳)}$$

اگر از آخرین معادله بالا مشتق بگیریم چنین داریم :

$$\frac{d^ny}{dx^n}=A_1\frac{d^ny_1}{dx^n}+A_2\frac{d^ny_2}{dx^n}+\cdots+A_r\frac{d^ny_r}{dx^n}+\cdots+A_n\frac{d^ny_n}{dx^n}+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_2}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_r}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_n}{dx}$$

پس از جایگزین نمودن روابط (۶ . ۲۳۱) و (۶ . ۲۳۱۱) و (۶ . ۲۳۱۲) و (۶ . ۲۳۱۳) در رابطه (۶ . ۱) وباتوجه باین که بنابفرض $y_1 , y_2 , \dots , y_r , \dots , y_n$ جوابهای اساسی معادله همگن $L(y)=0$ میباشند چنین داریم :

$$\text{(V)}\qquad a_0(x)\left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_2}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-1}y_r}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_r}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dA_n}{dx}\right)=q(x)$$

معادله بالا بانضمام روابط (II) و (III) و (IV) ، n معادله خطی نسبت به متغیرهای $\frac{dA_r}{dx}$ $(r=1 , 2 , \dots , n)$ بوده وطبق نظریه معادلات خطی مقدار $\frac{dA_r}{dx}$ برابر کسری است که مخرج آن دترمینان ضرایب متغیرها و صورت آن همین دترمینان است که ضرایب $\frac{dA_r}{dx}$ در دترمینان مخرج با مقادیر معلوم یعنی $(0 , 0 , \dots , q(x))$ تعویض شود .

یعنی :

$$\frac{dA_r}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} y_{۱} & y_{۲}' & \cdots & 0 & \cdots & y_n \\ y'_{۱} & y'_{۲} & \cdots & 0 & \cdots & y'_n \\ y''_{۱} & y''_{۲} & \cdots & 0 & \cdots & y''_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\circ}y_{۱}^{(n-۱)} & a_{\circ}y_{۲}^{(n-۱)} & \cdots & q(x) & \cdots & a_{\circ}y_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}}{a_{\circ}\begin{vmatrix} y_{۱} & y_{۲} & \cdots & y_r & \cdots & y_n \\ y'_{۱} & y'_{۲} & \cdots & y'_r & \cdots & y'_n \\ y''_{۱} & y''_{۲} & \cdots & y''_r & \cdots & y''_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{۱}^{(n-۱)} & y_{۲}^{(n-۱)} & \cdots & y_r^{(n-۱)} & \cdots & y_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}}=\frac{(-۱)^{n+r}q(x)\begin{vmatrix} y_{۱} & y_{۲} & \cdots & y_{r-۱} & y_{r+۱} & \cdots & y_n \\ y'_{۱} & y'_{۲} & \cdots & y'_{r-۱} & y'_{r+۱} & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{۱}^{(n-۲)} & y_{۲}^{(n-۲)} & \cdots & y_{r-۱}^{(n-۲)} & y_{r+۱}^{(n-۲)} & \cdots & y_n^{(n-} \end{vmatrix}}{a_{\circ}\begin{vmatrix} y_{۱} & y_{۲} & \cdots & y_r & \cdots & y_n \\ y'_{۱} & y'_{۲} & \cdots & y'_r & \cdots & y''_n \\ y''_{۱} & y''_{۲} & \cdots & y''_r & \cdots & y''_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{۱}^{(n-۱)} & y_{۲}^{(n-۱)} & \cdots & y_r^{(n-۱)} & \cdots & y_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}}$$

صورت کسر دوم رابطه بالا از بسط صورت کسر اول برحسب سطر r ام بدست آمده است .

ولی بنابرشماره (٦ . ۲) مخرج کسربالا رونسکین توابع $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ میباشد یعنی $\Delta(y_1 , y_2 , \dots , y_n)$ وصورت آن ضریب $y_r^{(n-1)}$ در بسط Δ برحسب سطر آخر است . اگر این ضریب را به Δ_r نمایش دهیم رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{dA_r}{dx}=\frac{q(x)\Delta_r}{a_0\Delta} \quad , \quad A_r=c_r+\int\frac{q(x)\Delta_r}{a_0\Delta}dx$$

c_r مقادیرثابت غیر مشخصی میباشند . لذاجواب عمومی معادله (٦ . ۲۳) عبارت میگردداز:

$$y=\sum_{r=1}^{r=n} y_r\left[\, c_r+\int\frac{q(x)\Delta_r}{a_0\Delta}dx\,\right] \qquad (٦ . ۲۳۱٤)$$

چون $\sum_{r=1}^{n} c_r y_r$ جواب عمومی معادله همگن $L(y)=0$ است لذا با استفاده از قسمت (پ) شماره (٦ . ۱) عبارت :

$$y_1\int\frac{q(x)\Delta_1}{a_0\Delta}dx+y_2\int\frac{q(x)\Delta_2}{a_0\Delta}dx+\cdots+y_n\int\frac{q(x)\Delta_n}{a_0\Delta}dx$$

(٦ . ۲۳۱٥)

یکی از جوابهای خصوصی معادله (٦ . ۲۳) خواهد بود .

با توجه به مطالب فوق در بکار بردن روش تغییر پارامتر دریافتن جواب خصوصی معادله (٦ . ۲۳) به ترتیب زیر عمل میکنیم .

الف ـ ازرابطه (٦ . ۲۳۱) تابع مکمل یعنی جواب عمومی معادله همگن $L(y)=0$ را بدست میآوریم* .

ب ـ اکنون فرض میکنیم $A_r(r=1 , 2 , \dots , n)$ ، مقادیر ثابتی که در تابع مکمل (٦ . ۲۳۱) ظاهر میشوند توابع غیر مشخصی از x باشند .

پ ـ از رابطه (٦ . ۲۳۱) با درنظرداشتن آنکه ضرایب A_r اکنون توابعی از x هستند به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل مشتق گرفته وباستثنای آخرین مشتق، مجموع جمیع جمله هایی که شامل مشتقهای ضرایب A_r هستند مساوی صفر قرار میدهیم . در مورد آخرین مشتق

---

* برای نحوه تعیین جواب عمومی معادله همگن بشماره (٦ . ٦) مراجعه شود .

مجموع مشتقهای‌ضرایب A_r مساوی $\frac{q(x)}{a_0(x)}$ است. بدین‌ترتیب روابط (II) و (III) و (IV) و (V) بدست میآیند.

ت ـ ازروابط(II)و(III)و(IV)و(V) مقادیر $A'_n , \dots , A'_r , \dots , A'_2 , A'_1$ را بدست میآوریم .

ث ـ مقادیر $A_n , \dots , A_r , \dots , A_2 , A_1$ را باانتگرال گیری‌یافته وسپس رابطه متناظر با رابطه (۶ . ۲۳۱۴) را تعیین میکنیم .

نتیجه ۱ــ فرض‌میکنیم معادله(۶ . ۲۳) بصورت ساده زیرباشد :

$$y''+p(x)y'+r(x)y=q(x) \tag{I}$$

اگر y_1 و y_2 یک دسته از جوابهای اساسی معادله همگن باشد با درنظر داشتن آنکه :

$$a_0=1 \;,\; n=2 \;,\; \Delta=\Delta(y_1 , y_2) \;,\; \Delta_1=y_2 \;,\; \Delta_2=y_1$$

رابطه (۶ . ۲۳۱۵) که جواب خصوصی معادله (I) را میدهد مبدل به :

$$y_1\int\frac{y_2}{\Delta(y_1 , y_2)}q(x)dx+y_2\int\frac{y_1}{\Delta(y_1 , y_2)}q(x)dx$$

میگردد .

نتیجه ۲ــ بنابر شماره (۶ . ۲۲) هرگاه r جواب مستقل معادله همگن مرتبه n ام $L(y)=0$ در دست باشد میتوان آنرا مبدل به معادله مرتبه $(n-r)$ ام نمود .

حال اگر $(n-1)$ جواب‌خصوصی مستقل معادله همگن مرتبه n ام $L(y)=0$ را داشته باشیم میتوان‌آنرا مبدل به معادله مرتبه‌اول خطی‌نمود. زیرا $n-(n-1)=1$. بالنتیجه اگر $(n-1)$ جواب خصوصی مستقل معادله همگن مرتبه n ام در دست باشد میتوان جواب عمومی را با استفاده از روش تغییر پارامتر به ترتیب زیر با دوکوادراتور بدست آورد .

فرض میکنیم $(n-1)$جواب خصوصی معادله $L(y)=0$ ، $y_{n-1} , \dots , y_2 , y_1$ باشندو $c_{n-1} , \dots , c_2 , c_1$ ، $(n-1)$تابع از x چنان باشند که عبارت :

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_{n-1}y_{n-1} \tag{6 . 2316}$$

یکی از جوابهای معادله $L(y)=0$ باشد .

چون رابطه بالا تنها رابطه‌یی است که بین $(n-1)$ تابع $c_{n-1} , \dots , c_2 , c_1$

برقرار است لذا ممکن است $(n-۲)$ رابطه دیگر را بطور دلخواه بین این ضرایب برقرار نمود ، مشروط برآنکه این روابط بایکدیگر ناسازگار نباشند . فرض میکنیم $c_{۱}, c_{۲}, \dots c_{n-۱}$ چنان باشند که در $(n-۲)$ رابطه زیر صدق کنند :

$$y_{۱}\frac{dc_{۱}}{dx}+y_{۲}\frac{dc_{۲}}{dx}+\cdots+y_{n-۱}\frac{dc_{n-۱}}{dx}=0$$

$$\frac{dy_{۱}}{dx}\cdot\frac{dc_{۱}}{dx}+\frac{dy_{۲}}{dx}\cdot\frac{dc_{۲}}{dx}+\cdots+\frac{dy_{n-۱}}{dx}\cdot\frac{dc_{n-۱}}{dx}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-۳}y_{۱}}{dx^{n-۳}}\cdot\frac{dc_{۱}}{dx}+\frac{d^{n-۳}y_{۲}}{dx^{n-۳}}\cdot\frac{dc_{۲}}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-۳}y_{n-۱}}{dx^{n-۳}}\cdot\frac{dc_{n-۱}}{dx}=0$$

(۶ . ۲۳۱۷)

حال اگر از رابطه (۶ . ۲۳۱۶) باتوجه بروابط (۶ . ۲۳۱۷)، n بار مشتق بگیریم . چنین داریم :

$$\frac{dy}{dx}=c_{۱}\frac{dy_{۱}}{dx}+c_{۲}\frac{dy_{۲}}{dx}+\cdots+c_{n-۱}\frac{dy_{n-۱}}{dx}$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=c_{۱}\frac{d^{۲}y_{۱}}{dx^{۲}}+c_{۲}\frac{d^{۲}y_{۲}}{dx^{۲}}+\cdots+c_{n-۱}\frac{d^{۲}y_{n-۱}}{dx^{۲}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}=c_{۱}\frac{d^{n-۲}y_{۱}}{dx^{n-۲}}+c_{۲}\frac{d^{n-۲}y_{۲}}{dx^{n-۲}}+\cdots+c_{n-۱}\frac{d^{n-۲}y_{n-۱}}{dx^{n-۲}}$$

$$\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}=c_{۱}\frac{d^{n-۱}y_{۱}}{dx^{n-۱}}+c_{۲}\frac{d^{n-۱}y_{۲}}{dx^{n-۱}}+\cdots+c_{n-۱}\frac{d^{n-۱}y_{n-۱}}{dx^{n-۱}}$$

$$+\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{dc_{r}}{dx}\cdot\frac{d^{n-۲}y_{r}}{dx^{n-۲}}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=c_۱\frac{d^n y_۱}{dx^n}+c_۲\frac{d^n y_۲}{dx^n}+\cdots+c_{n-۱}\frac{d^n y_{n-۱}}{dx^n}$$

$$+۲\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{dc_r}{dx}\cdot\frac{d^{n-۱}y_r}{dx^{n-۱}}+\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{d^۲c_r}{dx^۲}\cdot\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}$$

پس ازجایگزین کردن رابطه(۲۳۱۶ . ۶) و روابط بالادرمعادله $L(y)=0$ و باتوجه باین مطلب که بنابفرض $y_۱ , y_۲ , \dots , y_{n-۱}$ جوابهای خصوصی معادله اخیرمیباشند ، خواهیم داشت :

$$a_\circ\left[\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\left(۲\frac{dc_r}{dx}\quad\frac{d^{n-۱}y_r}{dx^{n-۱}}+\frac{d^۲c_r}{dx^۲}\cdot\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}\right)\right]\quad(۶ . ۲۳۱۸)$$

$$+a_۱\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{dc_r}{dx}\cdot\frac{d^{n-۱}y_r}{dx^{n-۱}}=0$$

اکنون رونسکین $y_۱ , y_۲ , \dots , y_{n-۱}$ را درنظر میگیریم. یعنی :

$$\Delta(y_۱ , y_۲ , \dots , y_{n-۱})=\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ & \cdots & y_{n-۱} \\ y'_۱ & y'_۲ & \cdots & \hat{y}_{n-۱} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-۳}y_۱}{dx^{n-۳}} & \frac{d^{n-۳}y_۲}{dx^{n-۳}} & \cdots & \frac{d^{n-۳}y_{n-۱}}{dx^{n-۳}} \\ \frac{d^{n-۲}y_۱}{dx^{n-۲}} & \frac{d^{n-۲}y_۲}{dx^{n-۲}} & \cdots & \frac{d^{n-۲}y_n}{dx^{n-۲}} \end{vmatrix}$$

اگر این دترمینان را برحسب سطر آخر بسط داده و ضریب :

$$\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}\quad , \quad (r=۱ , ۲ , \dots , n-۱)$$

را دراین بسط به Δ_r نشان دهیم خواهیم داشت :

$$\Delta = \sum_{r=1}^{r=n-1} \Delta_r \frac{d^{n-r}y_r}{dx^{n-r}} \qquad (۶ . ۲۲۱۹)$$

از طرف‌دیگر اگر دو طرف معادله (۶ . ۲۲۱۷) را بر $\frac{dc_1}{dx}$ تقسیم کنیم، میتوان $(n-2)$ مجهول $\frac{dc_{n-1}}{dx} / \frac{dc_1}{dx}, \ldots, \frac{dc_3}{dx} / \frac{dc_1}{dx}, \frac{dc_2}{dx} / \frac{dc_1}{dx}$ را بااستفاده از نظریه دستگاه معادلات خطی از رابطه (۶ . ۲۲۱۷) بدست آورد . یعنی :

$$\frac{dc_2}{dx} / \frac{dc_1}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_3}{dx} & \cdots & \frac{dy_{n-1}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-3}y_1}{dx^{n-3}} & \frac{d^{n-3}y_3}{dx^{n-3}} & \cdots & \frac{d^{n-3}y_{n-1}}{dx^{n-3}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-1} \\ \frac{dy_2}{dx} & \frac{dy_3}{dx} & \cdots & \frac{dy_{n-1}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-3}y_2}{dx^{n-3}} & \frac{d^{n-3}y_3}{dx^{n-3}} & \cdots & \frac{d^{n-3}y_{n-1}}{dx^{n-3}} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

و یا :

$$\frac{\frac{dc_1}{dx}}{\Delta_1} = \frac{\frac{dc_2}{dx}}{\Delta_2}$$

بطریق مشابه میتوان نشان داد که :

$$\frac{dc_۳}{dx} \Big/ \frac{dc_۱}{dx} = \frac{\Delta_۳}{\Delta_۱} \;, \dots ,\; \frac{dc_{n-۱}}{dx} \Big/ \frac{dc_۱}{dx} = \frac{\Delta_{n-۱}}{\Delta_۱}$$

از آنجا :

$$\frac{\frac{dc_۱}{dx}}{\Delta_۱} = \frac{\frac{dc_۲}{dx}}{\Delta_۲} = \frac{\frac{dc_۳}{dx}}{\Delta_۳} = \cdots = \frac{\frac{dc_{n-۱}}{dx}}{\Delta_{n-۱}} = z$$

پس :

$$\frac{dc_r}{dx} = z\Delta_r \quad , \quad (r = ۱ , ۲ , \dots , n-۱)$$

مشتق گیری از رونسکین $\Delta(y_۱ , y_۲ , \dots , y_{n-۱})$ منجر به $(n-۱)$ دترمینان میشود که چون $(n-۲)$ دترمینان آن دارای دو سطر مساوی هستند متحد صفر میباشد . یعنی :

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ & \cdots & y_{n-۱} \\ y'_۱ & y'_۲ & \cdots & y'_{n-۱} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-۳}y_۱}{dx^{n-۳}} & \frac{d^{n-۳}y_۲}{dx^{n-۳}} & \cdots & \frac{d^{n-۳}y_{n-۱}}{dx^{n-۳}} \\ \frac{d^{n-۱}y_۱}{dx^{n-۱}} & \frac{d^{n-۱}y_۲}{dx^{n-۱}} & \cdots & \frac{d^{n-۱}y_{n-۱}}{dx^{n-۱}} \end{vmatrix} = \sum_{r=۱}^{r=n-۱} \Delta_r \frac{d^{n-۱}y_r}{dx^{n-۱}}$$

اکنون با استفاده از روابط بالا و همچنین رابطه (۲۳۱۹ . ۶) مجموعهای واقع در سمت چپ رابطه (۲۳۱۸ . ۶) را میتوان ساده کرد . یعنی :

$$\text{(I)} \qquad \sum_{r=۱}^{r=n-۱} \frac{dc_r}{dx} \cdot \frac{d^{n-۱}y_r}{dx^{n-۱}} = z \sum_{r=۱}^{r=n-۱} \Delta_r \frac{d^{n-۱}y_r}{dx^{n-۱}} = z \frac{d\Delta}{dx}$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{r=۱}^{r=n-۱} \frac{dc_r}{dx} \cdot \frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}} = z \sum_{r=۱}^{r=n-۱} \Delta_r \frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}} = z\Delta$$

از طرف دیگر با مشتق گیری از رابطه $\frac{dc_r}{dx} = z\Delta_r$ چنین داریم :

$$\frac{d^{۲}c_r}{dx^{۲}}=\frac{dz}{dx}\triangle_r+z\frac{d\triangle_r}{dx}$$

$$\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{d^{۲}c_r}{dx^{۲}}\cdot\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}=\frac{dz}{dx}\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\triangle_r\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}$$

$$+z\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{d\triangle_r}{dx}\cdot\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}$$

ولی دومین جمله سمت راست عبارت بالا متحد صفر میباشد زیرا $\frac{d\triangle_r}{dx}$ مجموع (n−۲) دترمینان میباشد که چون (n−۳) دترمینان آن دارای دو سطر مساوی هستند متحد صفر میباشد ودترمینان (n−۱) ام نیزهنگامی که برای مقادیرمختلفه r از ۱ تا (n−۱) جمع شود متحد صفر خواهد شد . یعنی :

$$\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{d\triangle_r}{dx}\cdot\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}=0$$

پس :

$$\text{(III)}\qquad\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\frac{d^{۲}c_r}{dx^{۲}}\cdot\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}=\frac{dz}{dx}\sum_{r=۱}^{r=n-۱}\triangle_r\frac{d^{n-۲}y_r}{dx^{n-۲}}=\triangle\frac{dz}{dx}$$

لذا رابطه (۲۳۱۸ . ۶) با استفاده از روابط (I) و (II) و (III) بصورت ساده زیر در میآید :

$$a_{۰}\triangle\frac{dz}{dx}+۲a_{۰}\frac{d\triangle}{dx}z+a_{۱}\triangle z=0$$

اگر دو طرف این معادله را بر $a_{۰}\triangle$ بخش کنیم چنین داریم :

$$\frac{dz}{dx}+\left(\frac{۲}{\triangle}\cdot\frac{d\triangle}{dx}+\frac{a_{۱}}{a_{۰}}\right)z=0$$

این معادله دارای جواب عمومی :

$$z=A\triangle^{-۲}e^{-\int\frac{a_{۱}}{a_{۰}}dx}$$

بوده و بالنتیجه مقادیر متناظر c_r از رابطه :

$$\frac{dc_r}{dx}=z\Delta_r=A\,\frac{\Delta_r}{\Delta^{۲}}\,e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}$$

$$c_r=A_r+A\int\frac{\Delta_r}{\Delta^{۲}}\,e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}dx \quad , \quad (r=۱\,,\,۲\,,\,\dots\,,\,n)$$: و یا

بدست میآیند .

بنابراین جواب عمومی معادله همگن $L(y)=0$ عبارت میگردد از :

$$y=\sum_{r=۱}^{r=n-۱}A_ry_r+A\sum_{r=۱}^{r=n-۱}y_r\int\frac{\Delta_r}{\Delta^{۲}}\,e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}dx \qquad (۶\,.\,۲۳۱۱۰)$$

این جواب شامل n ثابت غیر مشخص $A\,,\,A_۱\,,\,\dots\,,\,A_{n-۱}$ میباشد .

اکنون معادله مرتبه دوم :

$$y''+py'+qy=0$$

که در آن p و q توابعی از x هستند درنظر میگیریم . فرض میکنیم $y_۱$ یکی از جوابهای خصوصی این معادله در دست باشد . پس از مقایسه این معادله با رابطه (۱ . ۶) چنین داریم :

$$n=۲\ ,\ a_0(x)=۱\ ,\ a_۱(x)=p\ ,\ \Delta=y_۱\ ,\ \Delta_۱=۱$$

اگر مقادیر بالا را در رابطه (۲۳۱۱۰ . ۶) قرار دهیم جواب عمومی معادله مرتبه دوم $y''+py'+qy=0$ هنگامی که یکی از جوابهای خصوصی آن در دست باشد بدست میآید و بدین ترتیب بار دیگر جوابی که درشمارههای (۵ . ۰) و (۲۲ . ۶) بدستآوردیم تأیید میشود . یعنی :

$$y=A_۱y_۱+Ay_۱\int[y_۱^{-۲}e^{-\int pdx}dx]$$

مثال ۱ - جواب عمومی معادله $(D^{۳}+D)y=cosecx$ را بدست آورید .

حل - الف - درشماره (۶ . ۶) خواهیم دید که تابع مکمل عبارت است از :

$$y=c_۱+c_۲\cos x+c_۳\sin x$$

ب ـ فرض میکنیم $c_۱$, $c_۲$, $c_۳$ توابع غیر مشخصی از x باشند .

پ ـ ازعبارت $y=c_۱+c_۲\cos x+c_۳\sin x$ سه مرتبه مشتق میگیریم . یعنی :

$$Dy=(-c_۲\sin x+c_۳\cos x)+(c'_۱+c'_۲\cos x+c'_۳\sin x)$$

قرار میدهیم :

$$c'_۱+c'_۲\cos x+c'_۳\sin x=0 \tag{I}$$

پس :

$$Dy=(-c_۲\sin x+c_۳\cos x)$$

ازاین رابطه بار دیگر مشتق میگیریم . لذا :

$$D^۲y=(-c_۲\cos x-c_۳\sin x)+(-c'_۲\sin x+c'_۳\cos x)$$

قرار میدهیم :

$$-c'_۲\sin x+c'_۳\cos x=0 \tag{II}$$

پس :

$$D^۲y=(-c_۲\cos x-c_۳\sin x)$$

اکنون ازاین رابطه بار دیگر مشتق گرفته و مقادیر Dy و $D^۳y$ که بدین ترتیب بدست میآیند در معادله $(D^۳+D)y=\mathrm{cosec}\,x$ قرار میدهیم . یعنی :

$$D^۳y=(c_۲\sin x-c_۳\cos x)-(c'_۲\cos x+c'_۳\sin x)$$

$$\mathrm{cosec}\,x=D^۳y+Dy=(c_۲\sin x-c_۳\cos x)-(c'_۲\cos x+c'_۳\sin x)$$
$$+(-c_۲\sin x+c_۳\cos x)$$

و یا :

$$-c'_۲\cos x-c'_۳\sin x=\mathrm{coscex} \tag{III}$$

ازجمع نمودن روابط (I) و (III) مقدار $c'_۱$ بدست میآید :

$$c'_۱=\mathrm{cosec}\,x \quad , \quad c_۱=-\mathrm{Log}(\mathrm{cosec}\,x+\mathrm{cotg}\,x)$$

ازروابط (II) و (III) میتوان مقادیر $c'_۲$ و $c'_۳$ را بدست آورد :

$$c'_۲=-\mathrm{cotg}\,x \quad , \quad c_۲=-\mathrm{Log}\sin x$$

$$c'_۳=-۱ \quad , \quad c_۳=-x$$

بنابراین یکی ازجوابهای خصوصی معادله عبارت میگردد از :

$$y=-\mathrm{Log}(\mathrm{cosec}\,x+\mathrm{cotg}\,x)-\cos x\,\mathrm{Log}\sin x-x\sin x$$

و جواب عمومی معادله برابر :

$$y=c_۱+c_۲\cos x+c_۳\sin x-Log(\operatorname{cosec}x+\operatorname{cotg}x)-\cos x\,Log\sin x-x\sin x$$

خواهد بود .

مثال ۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(D^۲-٦D+۹)y=\frac{e^{۳x}}{x^۲}$ رابدست آورید .

حل - الف - تابع مکمل برابر $y=c_۱e^{۳x}+c_۲xe^{۳x}$ است .

ب - $c_۱$ و $c_۲$ را توابع غیر مشخصی از x فرض نموده و از عبارت y دو بار مشتق میگیریم . یعنی :

$$Dy=(۳c_۱+c_۲)e^{۳x}+۳c_۲xe^{۳x}+(c'_۱e^{۳x}+c'_۲xe^{۳x})$$

قرار میدهیم :

$$c'_۱e^{۳x}+c'_۲xe^{۳x}=0 \qquad \text{(I)}$$

لذا :

$$Dy=(۳c_۱+c_۲)e^{۳x}+۳c_۲xe^{۳x}$$

اکنون از رابطه بالا مشتق گرفته ومقادیر $D^۲y$, Dy , y که بدین ترتیب بدست آمده اند در معادله دیفرانسیل قرار میدهیم :

$$D^۲y=(۹c_۱+٦c_۲)e^{۳x}+۹c_۲xe^{۳x}+(۳c'_۱+c'_۲)e^{۳x}+۳c'_۲xe^{۳x}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{۳x}}{x^۲}=D^۲y-٦Dy+۹y&=(۹c_۱+٦c_۲)e^{۳x}+۹c_۲xe^{۳x}\\&+(۳c'_۱+c'_۲)e^{۳x}+۳c'_۲xe^{۳x}-٦(۳c_۱+c_۲)e^{۳x}\\&-۱۸c_۲xe^{۳x}+۹(c_۱e^{۳x}+c_۲xe^{۳x})\end{aligned}$$

و یا :

$$\text{(II)} \qquad \frac{e^{۳x}}{x^۲}=(۳c'_۱+c'_۲)e^{۳x}+۳c'_۲xe^{۳x}$$

از حل معادلات (I) و (II) چنین داریم :

$$c'_۱=-\frac{۱}{x} \quad , \quad c_۱=-Log x$$

$$c'_۲=\frac{۱}{x^۲} \quad , \quad c_۲=-\frac{۱}{x}$$

لذا یکی از جوابهای خصوصی معادله برابر :

$$y = -e^{۲x} Log x - e^{۲x}$$

میباشد و جواب عمومی عبارت‌است‌از :

$$y = c_{۱}e^{۲x} + c_{۲}xe^{۲x} - e^{۲x} Log x$$

مثال ۳- توابع $f_{۱}(x)$ ، $f_{۲}(x)$ ، $f_{۳}(x)$ سه جواب خصوصی معادله :

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} + \varphi(x)\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + Q\frac{dy}{dx} + Sy = o$$

میباشند . که در آن Q و S توابعی از x هستند . نشان دهید جواب عمومی معادله :

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} + \varphi(x)\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + Q\frac{dy}{dx} + Sy = \psi(x)$$

عبارت است از :

$$\text{(III)} \qquad y = c_{۱}f_{۱}(x) + c_{۲}f_{۲}(x) + c_{۳}f_{۳}(x)$$

$$+ \int^{x} \psi(\xi) e^{\int_{a}^{\xi} \varphi(z)dz} \begin{vmatrix} \frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi} & \frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi} & \frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi} \\ f_{۱}(\xi) & f_{۲}(\xi) & f_{۳}(\xi) \\ f_{۱}(x) & f_{۲}(x) & f_{۳}(x) \end{vmatrix} d\xi$$

$c_{۱}$ ، $c_{۲}$ ، $c_{۳}$ مقادیر ثابت غیر مشخص و a مقدار ثابت معینی است .

حل - معادله (I) دارای جواب عمومی $y = A_{۱}f_{۱} + A_{۲}f_{۲} + A_{۳}f_{۳}$ میباشد . اکنون $A_{۱}$ ، $A_{۲}$ ، $A_{۳}$ را توابع غیر مشخصی‌از x پنداشته واز آن سه‌بار مشتق میگیریم . اگر رابطه (II) را با رابطه (۱ . ٦) مقایسه‌کنیم . خواهیم داشت :

$$a_{o}(x) = ۱ \ , \ a_{۱}(x) = \varphi(x) \ , \ q(x) = \psi(x) \ , \ n = ۳$$

روابط (II) و (III) و (V) شماره (۲۳۱ . ٦) بصورت زیر در میآیند :

$$A'_{۱}f_{۱} + A'_{۲}f_{۲} + A'_{۳}f_{۳} = o$$

$$A'_{۱}f'_{۱} + A'_{۲}f'_{۲} + A'_{۳}f'_{۳} = o$$

$$A'_{۱}f''_{۱}+A'_{۲}f''_{۲}+A'_{۳}f''_{۳}=\psi(x)$$

دستگاه معادلات فوق نسبت به $A'_{۱} , A'_{۲} , A'_{۳}$ خطی بوده و دارای جوابهای :

$$A'_{۱}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_{۲} & f_{۳} \\ 0 & f'_{۲} & f'_{۳} \\ \psi(x) & f''_{۲} & f''_{۳} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{۱} & f_{۲} & f_{۳} \\ f'_{۱} & f'_{۲} & f'_{۳} \\ f''_{۱} & f''_{۲} & f''_{۳} \end{vmatrix}}=\frac{\psi(x)(f_{۲}f'_{۳}-f_{۳}f'_{۲})}{\triangle}$$

$$\triangle A'_{۱}=\psi(x)(f_{۲}f'_{۳}-f_{۳}f'_{۲})$$

که در آن $\triangle$ رونسکین $f_{۱} , f_{۲} , f_{۳}$ است .

از طرف دیگر بنابر رابطه (۲ . ٦) چنین داریم :

$$\triangle(f_{۱} , f_{۲} , f_{۳})=\begin{vmatrix} f_{۱} & f_{۲} & f_{۳} \\ f'_{۱} & f'_{۲} & f'_{۳} \\ f''_{۱} & f''_{۲} & f''_{۳} \end{vmatrix}=\triangle_{0}e^{-\int^{x}\frac{a_{1}}{a_{0}}dx}=e^{-\int_{a}^{x}\varphi(\xi)d\xi}$$

بنابراین :

$$A'_{۱}=\psi(x)e^{\int_{a}^{x}\varphi(z)dz}(f_{۲}f'_{۳}-f_{۳}f'_{۲})$$

بطریق مشابه خواهیم داشت :

$$A'_{۲}=\psi(x)e^{\int_{a}^{x}\varphi(z)dz}(f'_{۱}f_{۳}-f_{۱}f'_{۳}) \quad , \quad A'_{۳}=\psi(x)e^{\int_{a}^{x}\varphi(z)dz}(f_{۱}f'_{۲}-f_{۲}f'_{۱})$$

و ازآنجا :

$$A_{۱}=c_{۱}+\int^{x}\psi(\xi)e^{\int_{a}^{\xi}\varphi(z)dz}\left[f_{۲}(\xi)\frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi}-f_{۳}(\xi)\frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi}\right]d\xi$$

$$A_{۲}=c_{۲}+\int^{x}\psi(\xi)e^{\int_{a}^{\xi}\varphi(z)dz}\left[f_{۳}(\xi)\frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi}-f_{۱}(\xi)\frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi}\right]d\xi$$

$$A_{۳}=c_{۳}+\int^{x}\psi(\xi)e^{\int_{a}^{\xi}\varphi(z)dz}\left[f_{۱}(\xi)\frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi}-f_{۲}(\xi)\frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi}\right]d\xi$$

بالنتیجه جواب عمومی معادله عبارت است از :

$$\begin{aligned}y=A_{۱}f_{۱}+A_{۲}f_{۲}+A_{۳}f_{۳}=c_{۱}f_{۱}+c_{۲}f_{۲}+c_{۳}f_{۳}\\ +\int^{x}\psi(\xi)e^{\int_{a}^{\xi}\varphi(z)dz}\Big\{f_{۱}(x)\left[f_{۲}(\xi)\frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi}-f_{۳}(\xi)\frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi}\right]\\ +f_{۲}(x)\left[f_{۳}(\xi)\frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi}-f_{۱}(\xi)\frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi}\right]\\ +f_{۳}(x)\left[f_{۱}(\xi)\frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi}-f_{۲}(\xi)\frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi}\right]\Big\}d\xi\end{aligned}$$

$$y=c_{۱}f_{۱}(x)+c_{۲}f_{۲}(x)+c_{۳}f_{۳}(x)$$

$$+\int^{x}\psi(\xi)e^{\int_{a}^{\xi}\varphi(z)dz}\begin{vmatrix}\frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi} & \frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi} & \frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi}\\ f_{۱}(\xi) & f_{۲}(\xi) & f_{۳}(\xi)\\ f_{۱}(x) & f_{۲}(x) & f_{۳}(x)\end{vmatrix}d\xi$$

مثال ٤- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید :

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}=P\left(x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-۲x\frac{dy}{dx}+۲y\right)+Q \qquad \text{(I)}$$

P و Q توابعی از x هستند .

حل - معادله (I) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d^{۳}y}{dx^{۳}}-x^{۲}P\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+۲xP\frac{dy}{dx}-۲Py=Q$$

بسهولت معلوم میشود که معادله همگن :

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^{۳}y}{dx^{۳}} - x^{۲}P\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} + ۲xP\frac{dy}{dx} - ۲Py = 0$$

دارای دو جواب‌خصوصی $y_{۱}=x$ و $y_{۲}=x^{۲}$ است. دراین مسئله دو جواب خصوصی معادله مرتبه سوم همگن (II) در دست است و لذا میتوان نتیجه دوم شماره (۲۳۱ . ۶) را بکار برد. از طرف دیگر بنابر نتیجه اول شماره (۲۳۱ . ۶) چنین داریم :

$$\Delta_{۱} = -y_{۲} = -x^{۲} \quad ; \quad \Delta_{۲} = y_{۱} = x$$

رابطه (۲۳۱۰ . ۶) با توجه بآنکه :

$$n = ۳ \;,\; \Delta(y_{۱}, y_{۲}) = \begin{vmatrix} y_{۱} & y_{۲} \\ y'_{۱} & y'_{۲} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^{۲} \\ ۱ & ۲x \end{vmatrix} = x^{۲}$$

$$a_{0}(x) = ۱ \quad , \quad a_{۱}(x) = -x^{۲}P$$

میباشد بصورت زیر درمیآید :

$$y = A_{۱}y_{۱} + A_{۲}y_{۲} + A\left[y_{۱}\int \frac{\Delta_{۱}}{\Delta^{۲}} e^{-\int \frac{a_{۱}}{a_{0}}dx} dx + y_{۲}\int \frac{\Delta_{۲}}{\Delta^{۲}} e^{-\int \frac{a_{۱}}{a_{0}}dx} dx \right]$$

$$= A_{۱}x + A_{۲}x^{۲} + A\left[x\int \frac{-x^{۲}}{x^{۴}} e^{\int x^{۲}pdx} dx + x^{۲}\int e^{\int x^{۲}pdx} \frac{dx}{x^{۳}} \right]$$

لذا سومین جواب خصوصی معادله همگن عبارت خواهد بود از :

$$x\int e^{\int x^{۲}pdx}\frac{dx}{x^{۲}} - x^{۲}\int e^{\int x^{۲}pdx}\frac{dx}{x^{۳}}$$

اکنون اگر مقادیر :

$$f_{۱}(x) = x \;,\; f_{۲}(x) = x^{۲} \;,\; f_{۳}(x) = x\int e^{\int x^{۲}pdx}\frac{dx}{x^{۲}} - x^{۲}\int e^{\int x^{۲}pdx}\frac{dx}{x^{۳}}$$

$$\varphi(x) = -x^{۲}P \;,\; \psi(x) = Q$$

$$\frac{df_{۱}(\xi)}{d\xi} = ۱ \quad , \quad \frac{df_{۲}(\xi)}{d\xi} = ۲\xi \quad ,$$

$$\frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi} = \int e^{\int \xi^{۲}p(\xi)d\xi}\frac{d\xi}{\xi^{۲}} - ۲\xi\int e^{\int \xi^{۲}p(\xi)d\xi}\frac{d\xi}{\xi^{۳}}$$

رادر رابطه (III) مثال سوم قرار دهیم جواب عمومی معادله بدست میآید. یعنی :

$$y=c_{۱}x+c_{۲}x^{۲}+c_{۳}x\int e^{\int x^{۲}pdx}\frac{dx}{x^{۲}}-c_{۳}x^{۲}\int e^{\int x^{۲}pdx}\frac{dx}{x^{۳}}$$

$$+\int^{x} Q(\xi)e^{\int_{a}^{\xi}-z^{۲}p(z)dz}\begin{vmatrix} ۱ & ۲\xi & \frac{df_{۳}(\xi)}{d\xi} \\ \xi & \xi^{۲} & f_{۳}(\xi) \\ x & x^{۲} & f_{۳}(x) \end{vmatrix}$$

۲۳۲ . ٦- روش ضرایب نامعین

در برخی از موارد میتوان یکی از جوابهای خصوصی معادله (۲۳ . ٦) را با روش ضرایب نامعین بدست آورد. دراین روش جواب خصوصی را برابر :

$$y=Ar_{۱}(x)+Br_{۲}(x)+Cr_{۳}(x)+\cdots+Gr_{t}(x) \qquad (٦ . ۲۳۲)$$

پنداشته و مقادیر ثابت $A , B , C , \dots , G$ را چنان تعیین میکنیم که عبارت بالا در رابطه (۲۳ . ٦) صدق کند. $r_{۱}(x) , r_{۲}(x) , \dots , r_{t}(x)$ جمل $q(x)$ وجملی که از مشتقهای آن بدست میآیند میباشد.

مثلاً اگرمعادله بشکل $L(y)=x^{۳}$ باشد، رابطه متناظربامعادله (۲۳۲ . ٦) برابر :

$$y=Ax^{۳}+Bx^{۲}+Cx+D$$

خواهد بود و یا آنکه اگر معادله بصورت $L(y)=e^{x}+e^{۲x}$ باشد لازم است رابطه (۲۳۲ . ٦) را دراین حالت بشکل :

$$y=Ae^{x}+Be^{۲x}$$

اختیارکنیم زیرا جمله جدیدی از مشتق گیری جمل e^{x} و $e^{۲x}$ بدست نمیآید.

اگر معادله بصورت $L(y)=\sin ax$ باشد رابطه متناظر با معادله (۲۳۲ . ٦) بصورت :

$$y=A\sin ax+B\cos ax$$

درمیاید . ولی اگر معادله بشکل $L(y)=\sec x$ باشد دیگر نمیتوان روش بالا را بکار برد، زیراجمل جدیدی که ازمشتق گیری عبارت $q(x)=\sec x$ بدست میایدنامحدود است.

این روش را باید در دو مورد زیر مختصر تغییری داد .

الف - جملی از $q(x)$ نیز جمله یی از تابع مکمل باشد . اگرجمله یی از $q(x)$ مثلاً u نیزجمله یی از تابع مکمل باشد وریشه معادله مفسر* متناظر بااین جمله m باشد که s بار تکرارشده باشد در رابطه (۶ . ۲۲۲) جمله $x^s u$ و مشتقهای آنرا قرار داد . مثلاً دریافتن جواب خصوصی معادله $(D-۲)^۲(D+۳)y=e^{۲x}+x^۲$ نظر باینکه $e^{۲x}$ همچنین جمله یی ازتابع مکمل متناظر با ریشه $m=۲$ است درعبارت (۶ . ۲۳۲) ازعبارت $x^۲e^{۲x}$ ومشتقهای آن استفاده میکنیم . بنابراین جواب خصوصی معادله را بشکل :

$$y=Ax^۲c^{۲x}+Bxe^{۲x}+ce^{۲x}+Dx^۲+Ex+F$$

اختیار میکنیم .

ب - یکی از جمل $q(x)$ بشکل $x^r u$ است و u جمله یی از تابع مکمل میباشد. اگر u متناظر با ریشه مکرر مرتبه s ام m باشد رابطه (۶ . ۲۳۲) باید شامل $x^{r+s}u$ و مشتقهای آن باشد .

مثلاً رابطه متناظر با رابطه (۶ . ۲۳۲) در معادله :

$$(D-۲)^۳(D+۳)x=x^۲e^{۲x}+x^۲$$

بصورت :

$$y=Ax^۵e^{۲x}+Bx^۴e^{۲x}+Cx^۳e^{۲x}+Dx^۲e^{۲x}+Exe^{۲x}$$
$$+Fe^{۲x}+Gx^۲+Hx+J$$

میباشد . شش جمله اول عبارت بالا با توجه بآنکه $e^{۲x}$ قسمتی از تابع مکمل که متناظر با ریشه سه گانه $m=۲$ است بدست میاید .

پ - فرض میکنیم $Q(x)$ بشکل :

$$e^{ax}\cos bx(p_۰x^m+p_۱x^{m-۱}+\cdots+p_m) \qquad (۶ . ۲۳۲۱)$$
$$+e^{ax}\sin bx(q_۰x^m+q_۱x^{m-۱}+\cdots+q_m)$$

---

* در شماره (۶ . ۶) **بطور** مفصل درباره معادله مفسر بحث خواهیم نمود .

باشد . برخی‌از ضرایب $a , b , p_0 , p_1 , \ldots , p_m$ و $q_0 , q_1 , \ldots , q_m$ ممکن است صفر باشند . اگر $a \pm bi$ یکی از ریشه‌های معادله مفسر* :

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (۶ . ۲۳۲۲)$$

نباشد ، دراینصورت میتوان y جواب خصوصی معادله(۲۳ . ۶) راکه شکل آن مشابه $q(x)$ است بدست آورد . یعنی :

$$y = e^{ax}\cos bx(k_1x^m + k_2x^{m-1} + \cdots + k^m) \qquad (۶ . ۲۳۲۳)$$
$$+ e^{ax}\sin bx(l_1x^m + l_2x^{m-1} + \cdots + l_m)$$

مقادیرثابت $k_1 , k_2 , \ldots , k_m$ و $l_1 , l_2 , \ldots , l_m$ ازقراردادن‌عبارت‌بالادررابطه(۲۳ . ۶) و متحد نمودن‌ضرایب معادله‌بدست میاید . اگر $a \pm bi$ ریشه مکرر مرتبه h ام معادله مفسر (۲۳۲۲ . ۶) باشد رابطه (۲۳۲۳ . ۶) را باید در x^h ضرب نمود .

اثبات مطلب‌بالا را در شماره (۶ . ۶) که درباره معادلات مفسر بحث خواهیم نمود بیان میکنیم .

مثال ۱- یکی‌ازجوابهای‌خصوصی معادله $(D^2 - 2D)y = e^x\sin x$ رابدست‌آورید .

حل - $e^x\sin x$ جمله‌یی از تابع مکمل نبوده و چون مشتق آن برابر $e^x\cos x$ است لذا جواب خصوصی را بشکل :

$$y = Ae^x\sin x + Be^x\cos x$$

اختیار میکنیم . مقادیر Dy و D^2y را محاسبه کرده وآنرادر معادله قرار میدهیم . یعنی :

$$Dy = (A - B)e^x\sin x + (A + B)e^x\cos x$$

$$D^2y = -2Be^x\sin x + 2Ae^x\cos x$$

$$(D^2 - 2D)y = -2Ae^x\sin x - 2Be^x\cos x = e^x\sin x = q(x)$$

پس‌از مساوی قرار دادن ضرایب جمل مشابه چنین داریم :

$$-2A = 1 \ , \ A = -\frac{1}{2} \ , \ B = 0$$

بالنتیجه یکی از جوابهای خصوصی معادله عبارت خواهد بود از :

---

* در شماره (۶ . ۶) بطور مفصل درباره معادله مفسر بحث خواهیم نمود .

$$y=-\frac{١}{٢}e^{x}\sin x$$

مثال ٢- یکی از جوابهای خصوصی معادله $(D^{٢}-٢D+٣)y=x^{٣}+\sin x$ را بدست آورید .

حل - هیچیک از جمل $q(x)=x^{٣}+\sin x$ جمله تابع مکمل نیستند و لذا قرار میدهیم :

$$y=Ax^{٣}+Bx^{٢}+Cx+E+F\sin x+G\cos x$$

پس :

$$Dy=٣Ax^{٢}+٢Bx+C-G\sin x+F\cos x$$

$$D^{٢}y=٦Ax+٢B-G\cos x-F\sin x$$

بنابراین :

$$\begin{aligned}(D^{٢}-٢D+٣)y&=٣Ax^{٣}+٣(B-٢A)x^{٢}+(٣C-٤B+٦A)x\\&+(٣E-٢C+٢B)+٢(F+G)\sin x\\&+٢(G-F)\cos x=x^{٣}+\sin x\end{aligned}$$

از مساوی قرار دادن جمل متشابه در دوطرف معادله چنین داریم :

$$٣A=١\ ,\ B-٢A=0\ ,\ ٣C-٤B+٦A=0\ ,\ ٣E-٢C+٢B=0$$
$$٢(F+G)=١\ ,\ ٢(G-F)=0$$

$$A=\frac{١}{٣}\ ,\ B=\frac{٢}{٣}\ ,\ C=\frac{٢}{٩}\ ,\ E=-\frac{٨}{٢٧}\ ,\ F=G=\frac{١}{٤}$$

لذا یکی از جوابهای خصوصی معادله عبارت است از :

$$y=\frac{١}{٣}x^{٣}+\frac{٢}{٣}x^{٢}+\frac{٢}{٩}x-\frac{٨}{٢٧}+\frac{١}{٤}(\sin x+\cos x)$$

مثال ٣- یکی ازجوابهای خصوصی معادله $(D-٢)^{٢}y=x^{٣}e^{٢x}+xe^{٢x}$ رابدست آورید .

حل - همانطورکه بعداً خواهیم‌دید تابع مکمل این معادله $y=c_{١}e^{٢x}+c_{٢}xe^{٢x}$ است . چون $e^{٢x}$ یکی از عوامل $q(x)$ بوده و همچنین در تابع مکمل که متناظر با ریشه مضاعف دو میباشد ظاهر میگردد ، لذا یکی از جوابهای خصوصی را بشکل :

$$y=Ax^{٥}e^{٢x}+Bx^{٤}e^{٢x}+Cx^{٣}e^{٢x}+Ex^{٢}e^{٢x}$$

اختیار میکنیم . باید توجه داشت چون تابع مکمل شامل جمل $xe^{٢x}$ و $e^{٢x}$ باضرایب غیر مشخص میباشد لذا از درج جمل $xe^{٢x}$ و $e^{٢x}$ در عبارت بالا صرفنظر کردیم . بنابراین :

$$Dy=٢Ax^٥e^{٢x}+(٥A+٢B)x^٤e^{٢x}+(٤B+٢C)x^٣e^{٢x}+(٣C+٢E)x^٢e^{٢x}+٢Exe^{٢x}$$

$$D^٢y=٤Ax^٥e^{٢x}+(٢٠A+٤B)x^٤e^{٢x}+(٢٠A+١٦B+٤C)x^٣e^{٢x}+(١٢B+١٢C+٤E)x^٢e^{٢x}+(٦C+٨E)xe^{٢x}+٢Ee^{٢x}$$

و :

$$(D^٢-٤D+٤)y=٢٠Ax^٣e^{٢x}+١٢Bx^٢e^{٢x}+٦Cxe^{٢x}+٢Ee^{٢x}=x^٣e^{٢x}+xe^{٢x}$$

از مساوی‌قرار دادن ضرایب جمل متشابه در دوطرف معادله چنین داریم :

$$٢٠A=١\ ,\ ١٢B=0\ ,\ ٦C=١\ ,\ ٢E=0$$

و ازآنجا :

$$A=\frac{١}{٢٠}\ ,\ B=0\ ,\ C=\frac{١}{٦}\ ,\ E=0$$

بنابراین یکی از جوابهای خصوصی معادله عبارت است از :

$$y=\frac{١}{٢٠}x^٥e^{٢x}+\frac{١}{٦}x^٣e^{٢x}$$

مثال ٤- یکی از جوابهای خصوصی معادله $(D^٢+١)y=x+٢\cos x+\sin x$ را بدست آورید .

حل - تابع مکمل این معادله ، $y=c_١\cos x+c_٢\sin x$ است . اگر جمله $٢\cos x+\sin x$ را با رابطه (٦ . ٢٣٢١) مقایسه کنیم . خواهیم داشت :

$$a=0\ ,\ b=١\ ,\ m=0\ ,\ p_٠=٢\ ,\ q_٠=١$$

لذا بنابر قسمت پ شماره (٦ . ٢٣٢) چون $+i$ ریشه ساده معادله مفسر است ، پس یکی از جوابهای خصوصی را بشکل :

$$y=Ax+B+x(C\cos x+D\sin x)$$

اختیار میکنیم . پس‌ازجایگزین‌نمودن عبارت فوق در معادله و مساوی قرار دادن ضرایب جمل متشابه در دو طرف معادله چنین داریم :

$$A=۱ \;,\; B=o \;,\; C=-\frac{۱}{۲} \;,\; D=۱$$

ازآنجا یکی از جوابهای خصوصی معادله عبارت میگردد از :

$$y=x+x\sin x-\frac{۱}{۲}x\cos x$$

مثال ۵- یکی از جوابهای خصوصی معادله $(D^۲+۴)y=x^۲\sin ۲x$ را بدست آورید .

حل- همانطورکه بعداً خواهیم دیدتابع مکمل این‌معادله: $y=c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x$ است . ازآنجایی‌که $q(x)=x^۲\sin ۲x$ و $\sin ۲x$ قسمتی از تابع مکمل میباشد که متناظر باریشه ساده‌است لذا بنابر قسمت (ب) شماره (۲۳۲ . ۶) عبارت زیررا برای‌انتگرال خصوصی اختیار میکنیم :

$$y=Ax^۳\cos ۲x+Bx^۳\sin ۲x+Cx^۲\cos ۲x+Ex^۲\sin ۲x+Fx\cos ۲x+Gx\sin ۲x$$

باید درنظر داشت‌که چون $H\cos ۲x+K\sin ۲x$ در تابع مکمل موجود است لذا این جمل را درعبارت بالا دخالت نداده‌ایم . پس :

$$\begin{aligned}Dy=&\,۲Bx^۳\cos ۲x-۲Ax^۳\sin ۲x+(۳A+۲E)x^۲\cos ۲x\\&+(۳B-۲C)x^۲\sin ۲x+(۲C+۲G)x\cos ۲x+(۲E-۲F)x\sin ۲x\\&+F\cos ۲x+G\sin ۲x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^۲y=&-۴Ax^۳\cos ۲x-۴Bx^۳\sin ۲x+(۱۲B-۴C)x^۲\cos ۲x\\&+(-۱۲A-۴E)x^۲\sin ۲x+(۶A+۸E-۴F)x\cos ۲x\\&+(۶B-۸C-۴G)x\sin ۲x+(۲C+۴G)\cos ۲x+(۲E-۴F)\sin ۲x\end{aligned}$$

بنابراین :

$$\begin{aligned}(D^۲+۴)y=&\,۱۲Bx^۲\cos ۲x-۱۲Ax^۲\sin ۲x+(۶A+۸E)x\cos ۲x\\&+(۶B-۸C)x\sin ۲x+(۲C+۴G)\cos ۲x\\&+(۲E-۴F)\sin ۲x=x^۲\sin ۲x\end{aligned}$$

از مساوی قرار دادن ضرایب حمل متشابه در دوطرف معادله چنین داریم :

$$-۱۲A=۱\ ,\ ۱۲B=o\ ,\ ۶A+۸E=o\ ,\ ۶B-۸C=o$$

$$۲C+۴G=o\ ,\ ۲E-۴F=o$$

پس :

$$A=-\frac{۱}{۱۲}\ ,\ B=o\ ,\ C=o\ ,\ E=\frac{۱}{۱۶}\ ,\ F=\frac{۱}{۳۲}\ ,\ G=o$$

بنابراین یکی از جوابهای خصوصی معادله چنین است :

$$y=-\frac{۱}{۱۲}x^{۳}\cos ۲x+\frac{۱}{۱۶}x^{۲}\sin ۲x+\frac{۱}{۳۲}x\cos ۲x$$

۳ . ۶ - معادله ادژوینت *

در شماره (۲ . ۵) معادله ادژوینت را برای معادله مرتبه دوم خطی بدست آوردیم. اکنون میخواهیم این معادله را برای معادلات مرتبه بالاتر تعیین کنیم.

بنابر شماره (۲ . ۵) از معادله ادژوینت میتوان یکی از عاملهای انتگرال کننده معادله مرتبه دوم را تعیین نمود. لذا ممکن است مفهوم عامل انتگرال کننده را که نقش بسیار اساسی در حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌اول دارد در مورد معادلات خطی بالاتر تعمیم داد و نتایج بسیار مهمی بدست آورد. فرض میکنیم :

$$L(u)=a_{۰}\frac{d^{n}u}{dx^{n}}+a_{۱}\frac{d^{n-۱}u}{dx^{n-۱}}+a_{۲}\frac{d^{n-۲}u}{dx^{n-۲}}+\cdots+a_{n-۱}\frac{du}{dx}+a_{n}u \tag{۳ . ۶}$$

و تابع v تابعی باشد که عبارت $vL(u)dx$ دیفرانسیل کامل باشد.

از طرف دیگر با مشتق گیری بسهولت میتوان نشان داد که :

$$V\frac{d^{r}U}{dx^{r}}=VU^{(r)}=\frac{d}{dx}[U^{(r-۱)}V-U^{(r-۲)}V'+U^{(r-۳)}V''+\cdots+(-۱)^{r-۱}UV^{(r-۱)}]+(-۱)^{r}UV^{(r)} \tag{۳۱ . ۶}$$

---

* Adjoint

پس از ضرب دوطرف رابطه (۳ . ۶) در v و بکار بردن رابطه (۳۱ . ۶) برای هرجمله طرف راست رابطه اخیر خواهیم داشت :

$$vL(u)=\frac{d}{dx}[u^{(n-۱)}a_0v-u^{(n-۲)}(a_0v)'+u^{(n-۳)}(a_0v)''$$

$$+\cdots+(-۱)^{n-۱}u(a_0v)^{(n-۱)}]+(-۱)^{n}u(a_0v)^{n}$$

$$+\frac{d}{dx}[u^{(n-۲)}a_۱v-u^{(n-۳)}(a_۱v)'+u^{(n-۴)}(a_۱v)''$$

$$+\cdots+(-۱)^{n-۲}u(a_۱v)^{(n-۲)}]+(-۱)^{n-۱}u(a_۱v)^{n-۱}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{d}{dx}[u'a_{n-۲}v-u(a_{n-۲}v)']+u(a_{n-۲}v)''$$

$$+\frac{d}{dx}(ua_{n-۱}v)-u(a_{n-۱}v)'$$

$$+a_nuv$$

و یا :

$$vL(u)=\frac{d}{dx}[u^{(n-۱)}a_0v-u^{(n-۲)}(a_0v)'+u^{(n-۳)}(a_0v)''$$

$$+\cdots+(-۱)^{n-۱}(a_0v)^{(n-۱)}]$$

$$+\frac{d}{dx}[u^{(n-۲)}a_۱v-u^{(n-۳)}(a_۱v)'+u^{(n-۴)}(a_۱v)''$$

$$+\cdots+(-۱)^{n-۲}(a_۱v)^{n-۲}] \qquad (۶ . ۳۲)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{d}{dx}[u'a_{n-۲}v-u(a_{n-۲}v)']+\frac{d}{dx}(ua_{n-۱}v)+u\bar{L}(v)$$

که در آن :

$$L(v)=(-۱)^n \frac{d^n(a_0 v)}{dx^n}+(-۱)^{n-۱}\frac{d^{n-۱}(a_۱ v)}{dx^{n-۱}}+\cdots+\frac{d^۲(a_{n-۲}v)}{dx^۲}-\frac{d(a_{n-۱}v)}{dx}+a_n v \qquad (۶.۳۳)$$

عبارت دیفرانسیلی $L(v)$ را **ادژوینت** $L(u)$ نامیده و معادله $L(v)=0$ **معادله ادژوینت** متناظر با معادله $L(u)=0$ است . رابطه (۶ . ۳۲) را میتوان بصورت زیر که **اتحاد لاگرانژ** نامیده میشود نوشت :

$$vL(u)-uL(v)=\frac{d}{dx}[p(u,v)] \qquad (۶ . ۳۴)$$

عبارت $p(u,v)$ که برحسب $u, u', \ldots, u^{(n-۱)}$ و $v, v', \ldots, v^{(n-۱)}$ خطی و همگن میباشد **کونکومیتانت بی‌لینر*** نامیم .

برای آنکه v یکی از عاملهای انتگرال کننده $L(u)$ باشد لازم و کافی است که v در معادله ادژوینت $L(v)=0$ صدق کند . اگر v یکی از جوابهای معادله اخیر باشد معادله $L(u)=0$ مبدل به معادله خطی مرتبه $(n-۱)$ ام :

$$p(u,v)=c$$

که در آن c مقدار ثابت غیر مشخصی است میگردد . اگر $v_۱$ و $v_۲$ و ... ، v_r ، r جواب متمایز معادله ادژوینت در دست باشد دراینصورت r معادله خطی مرتبه $(n-۱)$ ام زیر را خواهیم داشت :

$$\text{(I)} \qquad p(u,v_۱)=c_۱\ ,\ \ p(u,v_۲)=c_۲\ , \ldots ,\ p(u,v_r)=c_r$$

بین r معادله فوق که از یکدیگر متمایز هستند میتوان $(r-۱)$ کمیت :

$$u^{(n-۱)}, u^{(n-۲)}, \ldots, u^{(n-r+۱)}$$

را حذف نمود . معادله‌یی که بدین ترتیب بدست میآید از مرتبه $(n-r)$ ام بوده و ضرایب آن شامل r مقدار ثابت $c_۱ , c_۲ , \ldots , c_r$ است . در حالت خاص اگر $r=n$ باشد جمیع مشتقهای $u^{(n-۱)} , u^{(n-۲)} , \ldots , u'$ را میتوان از دستگاه معادلات (I) حذف

Bilinear concomitant *

نمود و بدین ترتیب عبارت صریح u را برحسب $v_1 , v_2 , \ldots , v_n$ و $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$ بدست آورد . بعبارت دیگر دراینحالت معادله کاملاً قابل انتگرال‌گیری است .

اکنون نشان خواهیم داد که رابطه بین $L(u)$ و $\overline{L}(v)$ معکوس یکدیگرهستند. یعنی اگر $\overline{L}(v)$ ادژوینت $L(u)$ باشد $L(u)$ نیز ادژوینت $\overline{L}(v)$ خواهد بود . زیرا درغیراینصورت فرض میکنیم $L_1(u)$ ادژوینت $\overline{L}(v)$ باشد . لذا تابعی مانند $P_1(u , v)$ موجود است که در اتحاد لاگرانژ (۲٤ . ٦) صدق میکند . یعنی :

$$vL_1(u) - u\overline{L}(v) = \frac{d}{dx}\,[P_1(u , v)]$$

اگر رابطه (۳٤ . ٦) را از رابطه بالا کسر کنیم چنین داریم :

$$v[L_1(u) - L(u)] = \frac{d}{dx}\,[P_1(u , v) - P(u , v)]$$

$P_1(u , v) - P(u , v)$ نسبت به $v , v' , \ldots , v^{(n-1)}$ خطی و همگن است ولی $v[L_1(u) - L(u)]$ شامل $v^{(n)}$ نبوده ولذا باید ضریب v^{n-1} درعبارت :

$$P_1(u , v) - P(u , v)$$

متحد صفر باشد . با تکرار استدلال فوق میتوان نشان داد که $P_1(u , v) - P(u , v)$ متحدصفر میباشد ولذا $P_1(u)$ متحدبا $P(u)$ است. هنگامیکه‌ادژوینت معادله $L(u) = 0$ متحد $L(u) = 0$ باشد این معادله را **سلف‌ادژوینت**[*] نامیم .

اکنون فرض میکنیم $L(u)$ را با استفاده از روش شماره (۲۱ . ٦) به حاصلضرب اوپریتورها تجزیه کنیم. رابطه (۲۱۳ . ٦) را بامختصرتغییری میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\text{(I)} \qquad L(u) = \frac{d}{v_{n+1}dx} \cdot \frac{d}{v_n dx} \cdot \frac{d}{v_{n-1}dx} \cdots \frac{d}{v_2 dx} \cdot \frac{u}{v_1}$$

ولی با استفاده از روش انتگرال گیری جزء بجزء به ترتیب چنین داریم :

---

[*] اولین مثال در مورد معادله سلف ادژوینت درسال ۱۸۳۷ توسط ژاکوبی داده شد . اونشان داد هنگامی که مرتبه معادله دیفرانسیل $2m$ است اوپریتور L بشکل $P\overline{P}$ است که در آن P و $\overline{P}$ اوپریتورهای ادژوینت مرتبه m میباشند .

$$\int vL(u)dx=\frac{v}{v_{n+١}}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}$$

$$-\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx \qquad (٦ . ٣٠)$$

$$\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx$$

$$=\left(\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-٢}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)$$

$$-\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-٢}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx$$

$$\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-٢}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx$$

$$=\left(\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-٢}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-٣}dx}\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)$$

$$-\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_{n-١}dx}\cdot\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-٢}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-٣}dx}\cdot\cdots\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_٤ dx}\cdot\frac{d}{v_٥ dx}\cdots\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_٣ dx}\cdot\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx$$

$$=\left(\frac{d}{v_٣ dx}\cdot\frac{d}{v_٤ dx}\cdot\frac{d}{v_٥ dx}\cdots\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)$$

$$-\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_٣ dx}\cdot\frac{d}{v_٤ dx}\cdots\frac{d}{v_n dx}\cdot\frac{v}{v_{n+١}}\right)\left(\frac{d}{v_٢ dx}\cdot\frac{u}{v_١}\right)dx$$

$$\int\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_{۳}dx}\cdot\frac{d}{v_{٤}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{۱}{v_{۲}}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_{۳}dx}\cdot\frac{d}{v_{٤}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\frac{u}{v_{۱}}$$

$$-\int\left[\frac{u}{v_{۱}}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{d}{v_{۳}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right]dx$$

اگر مقادیر بالا را در رابطه (۳۵ . ٦) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\int vL(u)dx=\frac{v}{v_{n+۱}}\cdot\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-۱}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}$$

$$-\left(\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)$$

$$+\left(\frac{d}{v_{n-۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-۲}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-۳}dx}\cdot\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$+(-۱)^{n-۲}\left(\frac{d}{v_{۳}dx}\cdot\frac{d}{v_{٤}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)$$

$$+(-۱)^{n-۱}\left(\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{d}{v_{۳}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\frac{u}{v_{۱}}$$

$$+(-۱)^{n}\int\left[\frac{u}{v_{۱}}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{d}{v_{۳}dx}\cdot\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right]dx$$

لذا :

$$\int vL(u)dx=P(u\,,v)+\int[u\bar{L}(v)]dx \qquad (۶\,.\,۳۶)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}P(u\,,v)=&\frac{v}{v_{n+۱}}\cdot\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-۱}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\\ &-\left(\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)\\ &+\left(\frac{d}{v_{n-۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{n}dx}\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{n-۲}dx}\cdot\frac{d}{v_{n-۳}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)\\ &\cdot\;\cdot\\ &\cdot\;\cdot\\ &\cdot\;\cdot\\ &+(-۱)^{n-۲}\left(\frac{d}{v_{۳}dx}\cdot\frac{d}{v_{۴}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\left(\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}\right)\\ &+(-۱)^{n-۱}\left(\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{d}{v_{۳}dx}\cdot\frac{d}{v_{۴}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}\right)\frac{u}{v_{۱}}\end{aligned}$$

و :

$$\text{(II)}\qquad \bar{L}(v)=(-۱)^{n}\frac{d}{v_{۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{n}dx}\cdot\frac{v}{v_{n+۱}}$$

اکنون اگر از رابطه (۶ . ۳۶) نسبت به x مشتق بگیریم ار دیگر اتحاد لاگرانژ بدست میآید . یعنی :

$$vL(u)=\frac{d}{dx}\,[P(u\,,v)]+u\bar{L}(v)$$

بخصوص اگر رابطه $L(u)$ سلف ادژوینت باشد باید روابط (I) و (II) متحد یکدیگر باشند . لذا :

$$\text{(III)}\qquad v_{n+۱}=\pm v_{۱}\;,\;v_{n}=\pm v_{۲}\;,\;v_{n-۱}=\pm v_{۳}\,,\ldots$$

بنابراین اگر $L(u)=0$ معادله دیفرانسیل خطی سلف ادژوینت مرتبه زوج ۲m باشدآنرا میتوان بااستفاده از روابط (I) و (III) بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{v_{۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{m}dx}\cdot\frac{d}{v_{m+۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{m}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}=0$$

و یا :

$$P\bar{P}(u)=0$$

که در آن P اوپریتور دیفرانسیل :

$$\frac{d}{v_{۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{m}dx}\cdot\frac{۱}{v_{m+۱}^{\frac{۱}{۲}}}$$

و $\bar{P}$ ادژوینت آن است .

بطریق مشابه اگر معادله $L(u)=0$ معادله دیفرانسیل خطی سلف ادژوینت مرتبه فرد $۲m-۱$ باشد آنرا میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{v_{۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{m}dx}\cdot\frac{d}{v_{m}dx}\cdots\frac{d}{v_{۲}dx}\cdot\frac{u}{v_{۱}}=0$$

و یا :

$$P\frac{d}{dx}\bar{P}(u)=0$$

که در آن P اوپریتور :

$$\frac{d}{v_{۱}dx}\cdot\frac{d}{v_{۲}dx}\cdots\frac{d}{v_{m-۱}dx}\cdot\frac{۱}{v_{m}}$$

و $\bar{P}$ ادژوینت آن است .

تبصره ــ اگر در رابطه (۲۳ . ٦) مقادیر :

$$n=۲\ ,\ a_{۰}=A_{۰}\ ,\ a_{۱}=۲A_{۱}\ ,\ a_{۲}=A_{۲}$$

اختیار شود ادژوینت معادله مرتبه دوم :

$$A_{۰}y''+۲A_{۱}y'+A_{۲}y=0$$

عبارت میگردد از : $(A_{۰}u)''-(۲A_{۱}u)'+A_{۲}u=0$

و بدین ترتیب بار دیگر صحت رابطه (۵۳۲ . ۵) تأیید میشود .

و اگر در رابطه (۳۳ . ٦) مقادیر :

$$n=۲\ ,\ a_{۰}=۱\ ,\ a_{۱}=P\ ,\ a_{۲}=Q$$

اختیار شود ادژوینت معادله مرتبه دوم :

$$y''+Py'+Qy=0$$

عبارت میگردد از : $u''-Pu'+(Q-P)'u=0$

و بدین‌ترتیب بار دیگر صحت رابطه (٥ . ٥٢) تأیید میشود .

٤ . ٦ ـ جواب مشترك دو معادله دیفرانسیل خطی

اگر معادله همگن مرتبه n ام $L(u)=0$ دارای جوابهای مشترکی بامعادله خطی همگنی که مرتبه آن کمتر از مرتبه معادله $L(u)=0$ است باشد دراینصورت حتی اگر جواب مشترك را نیز نداشته باشیم میتوان مرتبه معادله $L(u)=0$ راکاهش داد. زیرا اگر فرض کنیم :

$$L\equiv a_{۰}D^{n}+a_{۱}D^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}D+a_{n}$$

(٦ . ٤)

$$L_{۱}\equiv b_{۰}D^{m}+b_{۱}D^{m-۱}+\cdots+b_{m-۱}D+b_{m}\qquad m<n$$

اکنون اوپریتور سوم :

$$R_{۱}\equiv r_{۰}D^{n-m}+r_{۱}D^{n-m-۱}+\cdots+r_{n-m-۱}D+r_{n-m}$$

را درنظر گرفته ضرایب را چنان تعیین میکنیم که مرتبه اوپریتور $L-R_{۱}L_{۱}$ تا حدود امکان کاهش یابد. چون اوپریتور مشتق از قوانین معمولی‌جبری پیروی میکند و بالاخص قانون‌نماها $(D^{r}D^{s}=D^{r+s})$ برای آن صادق است لذا با استفاده از دستور لیبنیز* در مورد مشتق n ام حاصلضرب دو تابع چنین داریم :

$$\begin{aligned}L-R_{۱}L_{۱}=&a_{۰}D^{n}+a_{۱}D^{n-۱}+a_{۲}D^{n-۲}+\cdots+a_{n-m}D^{m}+\cdots+a_{n-۱}D\\&+a_{n}-(r_{۰}D^{n-m}+r_{۱}D^{n-m-۱}+r_{۲}D^{n-m-۲}+\cdots+r_{n-m-۱}D\\&+r_{n-m})(b_{۰}D^{m}+b_{۱}D^{m-۱}+\cdots+b_{m-۱}D+b_{m})=a_{۰}D^{n}\\&+a_{۱}D^{n-۱}+a_{۲}D^{n-۲}+\cdots+a_{n-m}D^{m}+\cdots+a_{n-۱}D+a_{n}\end{aligned}$$

---

* Leibniz

$-r_۰D^{n-m}(b_۰D^m)-r_۰D^{n-m}(b_۱D^{m-۱})$

$-r_۰D^{n-m}(b_۲D^{m-۲})-\cdots-r_۱D^{n-m-۱}(b_۰D^m)$

$-r_۱D^{n-m-۱}(b_۱D^{m-۱})-r_۱D^{n-m-۱}(b_۲D^{m-۲})$

$-\cdots-r_۲D^{n-m-۲}(b_۰D^m)-\cdots-r_{n-m-۲}D^۲(b_۰D^m$

$+b_۱D^{m-۱}+b_۲D^{m-۲}+\cdots)$

$-\cdots-r_{n-m-۱}D(b_۰D^m+b_۱D^{m-۱}+\cdots)-\cdots-r_{n-m}b_۰D^m+\cdots$

$=a_۰D^n+a_۱D^{n-۱}+a_۲D^{n-}+\cdots+a_{n-m}D^m+\cdots$

$+a_{n-۱}D+a_n-r_۰[b_۰D^{n-m}D^m+(n-m)b'_۰D^{n-m-۱}D^m$

$+\frac{(n-m)(n-m-۱)}{۲۱}b''_۰D^{n-m-۲}D^m+\cdots]$

$-r_۰[b_۱D^{n-m}D^{m-۱}+(n-m)b'_۱D^{n-m-۱}D^{m-۱}+\cdots]$

$-r_۰[b_۲D^{n-m}D^{m-۲}+\cdots]\cdots-r_۱[b_۰D^{n-m-۱}D^m$

$+(n-m-۱)b'_۰D^{n-m-۲}D^m+\cdots]-\cdots$

$-r_۲[b_۰D^{n-m-۲}D^m+\cdots]-r_۱[b_۱D^{n-m-۱}D^{m-۱}+\cdots]+\cdots$

$-r_{n-m-۲}(b''_۰D^m+۲b'_۱DD^{m-۱}+b_۲D^{m-۲}+\cdots)$

$-r_{n-m-۱}(b'_۰D^m+b_۱D^m+\cdots)-r_{n-m}b_۰D^m-\cdots$

$=a_۰D^n+a_۱D^{n-۱}+a_۲D^{n-۲}+\cdots+a_{n-m}D^m+\cdots+a_{n-۱}D$

$+a_n-r_۰b_۰D^n-(n-m)r_۰b'_۰D^{n-۱}$

$-\frac{۱}{۲}(n-m)(n-m-۱)r_۰b''_۰D^{n-۲}+\cdots-r_۰b_۱D^{n-۱}$

$-(n-m)r_۰b'_۱D^{n-۲}-\cdots-r_۰b_۲D^{n-۲}+\cdots-r_۱b_۰D^{n-۱}$

$-(n-m-۱)r_۱b'_۰D^{n-۲}-\cdots-r_۲b_۰D^{n-۲}+\cdots$

$-r_۱b_۱D^{n-۲}-\cdots-r_{n-m-۲}D^m(b''_۰+۲b'_۱+b_۲)$

$-r_{n-m-۱}D^m(b'_۰+b_۱)-r_{n-m}b_۰D^m+\cdots$

$$L-R_{۱}L_{۱}=(a_{۰}-r_{۰}b_{۰})D^{n}+\Big\{a_{۱}-r_{۱}b_{۰}-r_{۰}[(n-m)b'_{۰}+b_{۱}]\Big\}D^{n-۱}$$

$$+\Big\{a_{۲}-r_{۲}b_{۰}-r_{۱}[(n-m-۱)b'_{۰}+b_{۱}]$$

$$-r_{۰}\Big[\frac{۱}{۲}(n-m)(n-m-۱)b''_{۰}+(n-m)b'_{۱}+b_{۲}\Big]\Big\}D^{n-۲}$$

$$+\cdots+[a_{n-m}-r_{n-m}b_{۰}-r_{n-m-۱}(b'_{۰}+b_{۱})$$

$$-r_{n-m-۲}(b''_{۰}+۲b'_{۱}+b_{۲}-\cdots)D^{m}+\cdots$$

بالاخره اگر $n-m+۱$ مقدار ثابت $r_{n-m}, \dots, r_{۲}, r_{۱}, r_{۰}$ را چنان تعیین کنیم که ضرایب $D^{m}, \dots, D^{n-۲}, D^{n-۱}, D^{n}$ درعبارت بالا صفر باشد $n-m+۱$ معادله زیر بدست میآید که میتوان از آن مقادیر ثابت $(i=0, ۱, ۲, \dots, n-m)r_{i}$ را بدست آورد :

$$a_{۰}=r_{۰}b_{۰}$$

$$a_{۱}=r_{۱}b_{۰}+r_{۰}[(n-m)b'_{۰}+b_{۱}]$$

$$a_{۲}=r_{۲}b_{۰}+r_{۱}[(n-m-۱)b'_{۰}+b_{۱}]$$

$$+r_{۰}\Big[\frac{۱}{۲}(n-m)(n-m-۱)b''_{۰}+(n-m)b'_{۱}+b_{۲}\Big]$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$a_{n-m}=r_{n-m}b_{۰}+r_{n-m-۱}(b'_{۰}+b_{۱})+r_{n-m-۲}(b''_{۰}+۲b'_{۱}+b_{۲})+\cdots \qquad (۶ . ۴۱)$$

باید توجه داشت که روابط بالا برای تعیین ضرایب $r_{n-m}, \dots, r_{۱}, r_{۰}$ کافی بوده و هنگامیکه این ضرایب تعیین شوند اوپریتور $L-R_{۱}L_{۱}$ حداکثر از مرتبه $(m-۱)$ ام خواهد بود .

باید توجه داشت که توابع r با عملیات گویای جمع ، تفریق ، ضرب و تقسیم و

مشتق گیری از توابع p و q بدست آمده‌اند . لذا اگر ضرایب L و $L_۱$ توابع گویایی از x باشند ضرایب $R_۱$ نیز توابع گویایی از x خواهند بود . بنابراین :

$$L=R_۱L_۱+L_۲$$

که در آن $L_۲$ اوپریتوری است که شبیه L و $L_۱$ بوده ولی مرتبه آن از $(m-۱)$ تجاوز نمیکند .

اکنون حالتی را درنظر میگیریم که معادلات $L(u)=o$ و $L_۱(u)=o$ دارای جواب مشترکی باشند . واضح است که این جواب مشترك در معادله $L_۲(u)=o$ نیز صدق میکند .

اگر جمیع جوابهای معادله $L_۱(u)=o$ جواب $L(u)=o$ نیز باشند و همچنین $L_۲(u)$ متحد صفر نباشد بنابرآنچه که قبلاً متذکر گردیدیم معاله $L_۲(u)=o$ که مرتبه آن حداکثر $(m-۱)$ است دارای m جواب $L_۱(u)=o$ است واین امر ممکن نیست مگرآنکه $L_۲$ متحد صفر باشد . بالنتیجه L به حاصلضرب $R_۱L_۱$ تجزیه میشود عکس قضیه بالا نیز صادق است یعنی اگر $L=R_۱L_۱$ باشد جمیع جوابهای $L_۱$ جوابهای L نیز خواهند بود .

اکنون فرض میکنیم که معادله $L_۱(u)=o$ دارای جوابهایی باشد که جواب $L(u)=o$ نیست. واضح است که $L_۲$ متحد صفر نبوده و اگر استدلال بالا را تکرار کنیم میتوان اوپریتورهای $R_۲$ و $L_۳$ که مرتبه $L_۳$ کمتر از مرتبه $L_۲$ است بقسمی یافت که :

$$L_۱=R_۲L_۲+L_۳$$

اگر عمل فوق را ادامه دهیم سرانجام چنین داریم :

$$L_{\alpha-۱}=R_\alpha L_\alpha+L_{\alpha+۱}$$

در رابطه بالا یا $L_{\alpha+۱}$ متحد صفر و یا آنکه اوپریتور مرتبه صفر میباشد زیرا در غیر اینصورت عملیات بالا رامیتوان یک مرحله دیگر ادامه داد .

در حالت اول هرجواب $L_\alpha(u)=o$ جواب $L_{\alpha-۱}(u)=o$ است . لذا با توجه برابطه :

$$L_{\alpha-۲}=R_{\alpha-۱}L_{\alpha-۱}+L_\alpha$$

هرجواب $L_\alpha(u)=o$ جواب $L_{\alpha-۲}(u)=o$ است و بطریق مشابه جواب :

$$L_{\alpha-۲}(u)=0\ , \dots , L_{۲}(u)=0\ ,\ L_{۱}(u)=0\ ,\ L(u)=0$$

خواهد بود . بالنتیجه :

$$\begin{aligned} L &= R_{۱}(R_{۲}L_{۲}+L_{۳})+L_{۲} \\ &= (R_{۱}R_{۲}+۱)L_{۲}+R_{۱}L_{۳} \\ &= (R_{۱}R_{۲}+۱)(R_{۳}L_{۳}+L_{٤})+R_{۱}L_{۳} \\ &= (R_{۱}R_{۲}R_{۳}+R_{۱}+R_{۳})L_{۳}+(R_{۱}R_{۲}+۱)L_{٤} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= RL_{\alpha} \qquad (٦ . ٤٢) \end{aligned}$$

بنابراین با عملیات گویا L را به حاصلضرب دواوپریتور تجزیه کردیم .

لذا اگر تبدیل متغیر تابع $v=L_{\alpha}(u)$ را در رابطه (٦ . ٤٢) انجام دهیم معادله $L(u)=0$ مبدل به معادله زیر میگردد :

$$R(v)=0$$

اگر مرتبه اوپریتور L_{α} ، k باشد اوپریتور R از مرتبه $(n-k)$ خواهد بود .

فرض میکنیم جواب عمومی معادله $R(v)=0$ که شامل $(n-k)$ مقدار ثابت غیر مشخص است $v=V$ باشد . دراینصورت جواب عمومی معادله $L(u)=0$ از حل کامل معادله غیر همگن مرتبه k ام $L_{\alpha}(u)=V$ بدست میآید . این جواب شامل n مقدار ثابت غیر مشخص میباشد .

در حالت دوم $L_{\alpha+1}$ یا تابعی از x و یا مقدار ثابت مخالف صفر میباشد . پس معادلات $L_{\alpha}(u)=0$ و $L_{\alpha-1}(u)=0$ دارای جوابهای مشترك نیستند .

اگر ضرایب معادله دیفرانسیل توابع گویایی از x باشند و این معادله فاقد جواب مشترك با جمیع معادله هایی که مرتبه آن کمتر از مرتبه معادله هستند باشد (ضرایب معادله های اخیر نیز توابعی گویایی از x هستند) دراینصورت معادله اولی را **غیرقابل تجزیه** گوییم .

این مفهوم را بااستفاده از نظریه میدان گویایی میتوان بطور وسیعی تعمیم داد . متغیر

مستقل x و برخی ازتوابع اصم‌وترانساندانت از x را عناصریا مبنای میدان[R]فرض میکنیم. هرتابعی‌که با عملیات گویا (شامل مشتق گیری نیز میباشد) از این عناصر بدست میآید در میدان R گویا نامیم. اگر معادله دیفرانسیلی‌که ضرایب آن درمیدان [R] گویا است جواب مشترکی باهرمعادله مرتبه‌کمترکه ضرایب‌آن نیز درمیدان [R] گویا هستند نباشد گوییم معادله درمیدان [R] غیر قابل تجزیه است.

۵ . ۶ - اوپریتورهای خطی قابل جابجایی

درشماره (۷ . ۵) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم:

$$A_0y''+2A_1y'+A_2y=0 \qquad (۶ . ۵)$$

را بحاصلضرب اوپریتورهای خطی مرتبه‌اول تجزیه نمودیم. یعنی:

$$(pD+q)(rD+s)y=0$$

بین ضرایب A_0 , A_1 , A_2 و p , q , r , s رابطه (۷۱ . ۵) برقرار بوده و مقدار s را میتوان از رابطه (۷۲ . ۵) بدست آورد.

حال اگر دررابطه(۵ . ۶) مقدار $A_0=1$ اختیارگردد وبرای سهولت مقادیر p و r برابر یک فرض شوند رابطه (۷۱ . ۵) منجر به دو رابطه زیر میگردد:

$$s+q=2A_1 \quad , \quad qs+s'=A_2 \qquad (۶ . ۵۱)$$

لذا جواب عمومی معادله $(D+s)y=0$ جواب عمومی رابطه (۵ . ۶) است. ولی درحالت کلی جواب عمومی $(D+q)y=0$ جواب عمومی رابطه (۵ . ۶) نیست مگر آنکه‌دواوپریتور $(D+s)$ و $(D+q)$ با یکدیگر قابل جابجایی باشند. یعنی:

$$(D+q)(D+s)y=(D+s)(D+q)y \qquad (۶ . ۵۲)$$

بهمان روشی‌که‌رابطه (۷۱ . ۵) را با مقایسه با رابطه (۷ . ۵) بدست آوردیم، اگر طرف راست رابطه بالا را با رابطه (۵ . ۶) ، $(A_0=1)$ مقایسه‌کنیم چنین داریم:

$$s+q=2A_1 \quad , \quad qs+q'=A_2 \qquad (۶ . ۵۳)$$

ازمقایسه روابط (۵۱ . ۶) و (۵۳ . ۶) خواهیم داشت:

$$s'=q' \quad , \quad s=q+A \qquad (۶ . ۵۴)$$

A مقداری است ثابت.

لذا شرط لازم و کافی برای آنکه رابطه (٥٢ . ٦) برقرار باشد و یا آنکه این دو اوپریتور با یکدیگر قابل جابجایی باشند آن است که رابطه (٥٤ . ٦) برقرار باشد .

دراینحالت و بفرض آنکه $A_0=1$ باشد معادله دیفرانسیل (٥ . ٦) بصورت زیر نوشته میشود :

$$(P+A)Py=0$$

که در آن P اوپریتور $(D+q)$ است.

همچنین معادله : $y''+2py'+(p^2+p'-a^2)y=0$

که درآن a مقدار ثابتی میباشد ، میتوان به عوامل زیر تجزیه کرد :

$$(D+p-a)(D+p+a)y=0$$

پس از مقایسه با رابطه (٥٢ . ٦) چنین داریم :

$$q=p-a\ ,\ s=p+a\ ,\ q'=s'=p'$$

لذا رابطه (٥٤ . ٦) صادق بوده وازآنجا دو اوپریتور فوق بایکدیگر قابل جابجایی هستند و بالنتیجه میتوان جواب عمومی معادله را بروش شماره (٧ . ٥) بدست آورد .

اکنون عبارت: $y'''+3A_1y''+3A_2y'+A_3y=0$

را درنظر گرفته و فرض میکنیم بوسیله‌یی آنرا به حاصلضرب اوپریتورهای خطی مرتبه اول زیر تجزیه کرده باشیم :

$$(D+q)(D+s)(D+r)y=0$$

اگررابطه (٥٤ . ٦) را متوالیاً درباره فاکتورهای رابطه بالا دو بدو انجام دهیم ، شرط کافی برای آنکه رابطه‌های بالا بایکدیگر قابل جابجایی باشند بدست میآید . یعنی :

$$s=q+A_1\quad ,\quad r=q+A_2$$

A_1 و A_2 مقادیر ثابتی هستند .

بطورکلی اگر P و Q به ترتیب اوپریتورهای مرتبه m و n باشند بطریق مشابه میتوان نشان داد P و Q درصورتی قابل جابجایی هستند که :

$$P=(D+q+A_{۱})(D+q+A_{۲})\ \dots\ (D+q+A_{m})$$
$$Q=(D+q+A_{m+۱})(D+q+A_{m+۲})\ \dots\ (D+q+A_{m+n})$$
(۶ . ۵۵)

باشد .

اگرچه رابطه فوق شرط کافی است برای آنکه دو اوپریتور P و Q با یکدیگر قابل جابجایی باشند ، ولی این شرط ، شرط لازم نمیباشد . مثلاً اوپریتورهای :

$$D^{۲}-۲x^{-۲}\quad,\quad D^{۳}-۳x^{-۲}D+۳x^{-۳}$$

بایکدیگر قابل جابجایی هستند ولی نمیتوان اوپریتورهای بالا را بشکل رابطه (۶ . ۵۵) نوشت و از آنجا مسئله یافتن شرط لازم و کافی برای تجزیه نمودن دو اوپریتور P و Q که نمیتوان آنها را به حاصلضرب اوپریتورهای مرتبه کمتر تجزیه نمود مطرح میشود .

۶ . ۵۱ - شرط قابل جابجایی بودن

فرض میکنیم P و Q اوپریتورهای خطی مرتبه m و n باشند . اگر P و Q بایکدیگر قابل جابجایی باشند و h مقدار ثابت غیر مشخصی باشد دراینصورت :

$$(P-h)Q=Q(P-h)$$

لذا اگر y_{m} , ... , $y_{۲}$, $y_{۱}$ یکدسته از جوابهای اساسی معادله :

$$P(y)-hy=0 \qquad \text{(I)}$$

باشند .

$$Q(y_{۱})\quad,\quad Q(y_{۲})\ ,\ \dots\ ,\ Q(y_{n})$$

نیز جوابهای رابطه (I) بوده و رابطه زیر بین جوابهای فوق و y_{m} , ... , $y_{۲}$, $y_{۱}$ برقرار است . یعنی :

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned}
Q(y_{۱})&=a_{۱۱}y_{۱}+a_{۱۲}y_{۲}+a_{۱۳}y_{۳}+\cdots+a_{۱m}y_{m}\\
Q(y_{۲})&=a_{۲۱}y_{۱}+a_{۲۲}y_{۲}+a_{۲۳}y_{۳}+\cdots+a_{۲m}y_{m}\\
Q(y_{۳})&=a_{۳۱}y_{۱}+a_{۳۲}y_{۲}+a_{۳۳}y_{۳}+\cdots+a_{۳m}y_{m}\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
Q(y_{m})&=a_{m۱}y_{۱}+a_{m۲}y_{۲}+a_{m۳}y_{۳}+\cdots+a_{mm}y_{m}
\end{aligned}$$

a_{ij} $(i , j = ۱ , ۲ , \dots , m)$ مقادیر ثابتی هستند .

اکنون فرض میکنیم :

$$Y = c_۱y_۱ + c_۲y_۲ + \cdots + c_my_m$$

که درآن $c_۱ , c_۲ , \dots , c_m$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند که باید آنهارا تعیین کنیم .

چون بنابفرض Q اوپریتورخطی مرتبه n ام است لذا بنابر قسمت(ب) شماره (۱ . ۶) و بااستفاده از رابطه (II) چنین داریم :

$$\begin{aligned}
Q(Y) &= Q(c_۱y_۱ + c_۲y_۲ + \cdots + c_my_m)\\
&= c_۱Q(y_۱) + c_۲Q(y_۲) + \cdots + c_mQ(y_m)\\
&= c_۱(a_{۱۱}y_۱ + a_{۱۲}y_۲ + a_{۱۳}y_۳ + \cdots + a_{۱m}y_m)\\
&\quad + c_۲(a_{۲۱}y_۱ + a_{۲۲}y_۲ + a_{۲۳}y_۳ + \cdots + a_{۲m}y_m)\\
&\quad + c_۳(a_{۳۱}y_۱ + a_{۳۲}y_۲ + a_{۳۳}y_۳ + \cdots + a_{۳m}y_m)\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad + c_m(a_{m۱}y_۱ + a_{m۲}y_۲ + a_{m۳}y_۳ + \cdots + a_{mm}y_m)\\
&= y_۱(c_۱a_{۱۱} + c_۲a_{۲۱} + c_۳a_{۳۱} + \cdots + c_ma_{m۱})\\
&\quad + y_۲(c_۱a_{۱۲} + c_۲a_{۲۲} + c_۳a_{۳۲} + \cdots + c_ma_{m۲})\\
&\quad + y_۳(c_۱a_{۱۳} + c_۲a_{۲۳} + c_۳a_{۳۳} + \cdots + c_ma_{m۳})\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\quad + y_m(c_۱a_{۱m} + c_۲a_{۲m} + c_۳a_{۳m} + \cdots + c_ma_{mm})\\
&= k(c_۱y_۱ + c_۲y_۲ + c_۳y_۳ + \cdots + c_my_m)
\end{aligned}$$

که در آن :

$$kc_r = c_۱a_{۱r} + c_۲a_{۲r} + c_۳a_{۳r} + \cdots + c_ma_{mr}$$
$$(r = ۱ , ۲ , ۳ , \dots , m)$$

برای آنکه m معادله فوق سازگار باشند لازم است که k در دترمینان زیر صدق کند :

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱-k} & a_{۲۱} & a_{۳۱} & \cdots & a_{m۱} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲-k} & a_{۳۲} & \cdots & a_{m۲} \\ a_{۱۳} & a_{۲۳} & a_{۳۳-k} & \cdots & a_{m۳} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{۱m} & a_{۲m} & a_{۳m} & & a_{mm-k} \end{vmatrix} = 0$$

لذا متناظر با هر مقدار h میتوان m مقدار ثابت k (لزومی ندارد که ازیکدیگر متمایز باشند) بقسمی یافت که معادلات :

$$\text{(III)} \qquad P(y) - hy = 0 \quad , \quad Q(y) - ky = 0$$

دارای جواب مشترك باشند .

بطریق مشابه متناظر با هرمقدار k از دومین معادله رابطه (III) ، میتوان n مقدار h را از اولین رابطه (III) بطریقی بدست آورد که دو معادله فوق دارای جواب مشترك باشند.

بنابراین اگر معادلات رابطه (III) دارای جواب مشترك باشد ، h و k باید در رابطه $F(h, k) = 0$ صدق کند . این رابطه برحسب h از درجه n ام و برحسب k از درجه m ام است. رابطه $F(h, k) = 0$ را میتوان ازحذف $y, y', y'', \ldots, y^{(m+n-۱)}$ بین $m+n$ معادله زیر بدست آورد :

$$\begin{array}{ll} P(y) - hy = 0 & Q(y) - ky = 0 \\ DP(y) - hy' = 0 & DQ(y) - ky' = 0 \\ D^{۲}P(y) - hy'' = 0 & D^{۲}Q(y) - ky'' = 0 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ D^{n-۱}P(y) - hy^{(n-۱)} = 0 & D^{m-۱}Q(y) - ky^{(m-۱)} = 0 \end{array}$$

ولی از رابطه $Q(y) - ky = P(y) - hy = 0$ نتیجه میشود که :

$$F(P , Q)y=F(h , k)y=0$$

وبنابراین y جواب معادله $L(y)=F(P , Q)y=0$ که‌ازمرتبه mn است خواهد بود.

اکنون‌فرض میکنیم اعداد $h_{۱} , h_{۲} , h_{۳} , \dots , h_{r}$ ازیکدیگر متمایزبوده‌وهمچنین‌فرض میکنیم $Y_{۱} , Y_{۲} , Y_{۳} , \dots , Y_{r}$ جوابهای مشترك معادلات :

$$P(y)-hy=0 \quad , \quad Q(y)-ky=0$$

برای مقادیر h و مقادیر متناظر k باشند. توابع $Y_{۱} , Y_{۲} , \dots , Y_{r}$ بطور خطی‌ازیکدیگر متمایز هستند زیرا اگر رابطه‌یی بشکل :

$$c_{۱}Y_{۱}+c_{۲}Y_{۲}+c_{۳}Y_{۳}+\cdots+c_{r}Y_{r}=0$$

بین توابع فوق برقرار باشد و سمت چپ رابطه بالا را به ترتیب در $P , P^{۲} , \dots , P^{r-۱}$ عمل کنیم خواهیم داشت :

$$c_{۱}h_{۱}Y_{۱}+c_{۲}h_{۲}Y_{۲}+c_{۳}h_{۳}Y_{۳}+\cdots+c_{r}h_{r}Y_{r}=0$$

$$c_{۱}h_{۱}^{۲}Y_{۱}+c_{۲}h_{۲}^{۲}Y_{۲}+c_{۳}h_{۳}^{۲}Y_{۳}+\cdots+c_{r}h_{r}^{۲}Y_{r}=0$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$c_{۱}h_{۱}^{r-۱}Y_{۱}+c_{۲}h_{۲}^{r-۱}Y_{۲}+c_{۳}h_{۳}^{r-۱}Y_{۳}+\cdots+c_{r}h_{r}^{r-۱}Y_{r}=0$$

روابط فوق سازگارهستند هرگاه $c_{۱} , c_{۲} , c_{۳} , \dots , c_{r}$ جمیعاً برابر صفر باشند. بنابراین تعداد نامحدودی‌توابع که بطورخطی ازیکدیگر متمایزهستند درمعادله $F(P , Q)y=0$ صدق مینمایند. ولی مرتبه این معادله mn بوده ولذا نمیتواند بیش‌از mn جواب متمایز که بطورخطی ازیکدیگر متمایز هستند دارا باشد. پس معادله $F(P , Q)=0$ اتحاد خواهد بود و ازآنجا قضیه اساسی زیر نتیجه میشود.

اگر P و Q اوپریتورهای قابل جابجایی از مرتبه‌های m و n باشند متحدآدر رابطه جبری بشکل $F(P , Q)=0$ صدق میکنند. این‌رابطه‌برحسب P از درجه n و برحسب Q ازدرجه m است.

مثلاً اگر :

$$P=D^{۲}-۲x^{-۲} \quad , \quad Q=D^{۳}-۳x^{-۲}D+۳x^{-۳}$$

باشد داریم $P^{۳} = Q^{۲}$ ومعادلات $(P-h)y=0$ و $(Q-k)y=0$ دارای جواب مشترک خواهند بود هرگاه $h^{۳}-k^{۲}=0$ باشد .

٦ . ٦ - معادلات خطی باضرایب ثابت

٦ . ٦١ - اوپریتور خطی باضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت :

$$A_{۰}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+A_{۱}\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}+A_{۲}\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}+\cdots+A_{n-۱}\frac{dy}{dx}+A_{n}y=0$$

(٦ . ٦١)

نخستین معادله‌ای از صورت کلی معادلات دیفرانسیل بود که درسال ۱۷۲۹ توسط اولرو برنولی* حل شد . این معادله صرفنظر از اهمیت تاریخی آن دارای موارد استعمال بیشماری بوده و چون جواب عمومی آن ساده است از نقطه‌نظر تئوری نیز دارای ارزش زیادی است .

معادله غیر همگن متناظر با رابطه (٦ . ٦١) یعنی :

$$A_{۰}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+A_{۱}\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}+A_{۲}\frac{d^{n-۲}y}{dx^{n-۲}}+\cdots+A_{n-۱}\frac{dy}{dx}+A_{n}y=f(x)$$

(٦ . ٦١١)

دارای موارد استعمال مهم و بیشماری است .

فرض میکنیم $A_{۰}$ مخالف صفر باشد. بقیه ضرایب ممکن است صفر باشند یا نباشند. رابطه (٦ . ٦١) که میتوان آنرا بصورت زیر نوشت ** :

$$F(D)y \equiv (A_{۰}D^{n}+A_{۱}D^{n-۱}+A_{۲}D^{n-۲}+\cdots+A_{n-۱}D+A_{n})y=0$$

دارای اوپریتوری میباشد که ممکن است آنرا بحاصلضرب عوامل زیر تجزیه کرد . یعنی :

$$A_{۰}(D-a_{۱})(D-a_{۲})(D-a_{۳})\ \ldots\ (D-a_{n})$$

Daniel Bernoulli *

** قرار داد سمبولیک F(D) را به کوشی نسبت میدهند .

ولی $a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}, \dots, a_{n}$ مقادیر ثابتی هستند که ریشه‌های معادله جبری :

$$A_{۰}r^{n}+A_{۱}r^{n-۱}+A_{۲}r^{n-۲}+\cdots+A_{n-۱}r+A_{n}=۰ \qquad (٦ . ٦١٢)$$

میباشند . رابطه (٦١٢ . ٦) را **معادله مفسر** رابطه (٦١ . ٦) گوییم .

بااستفاده از رابطه (٥٥ . ٦) چون $a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}, \dots, a_{n}$ مقادیر ثابتی هستند بنابراین عوامل :

$$(D-a_{۱}) \ , \ (D-a_{۲}) \ , \ (D-a_{۳}) , \dots , (D-a_{n})$$

بایکدیگر قابل جابجایی بوده و از آنجا هریک ازجوابهای n معادله مرتبه اول :

$$(D-a_{۱})y=۰ \ , \ (D-a_{۲})y=۰ \ , \ (D-a_{۳})y=۰ , \dots , (D-a_{n})y=۰$$

جواب معادله همگن (٦١ . ٦) خواهند بود .

٦١١ . ٦ - حل معادله همگن

فرض میکنیم y_{r} جواب عمومی معادله :

$$(D-a_{r})y=۰$$

باشد . لذا :

$$y_{r}=c_{r}e^{a_{r}x}$$

پس بنابر قسمت (ب) شماره (١ . ٦) :

$$y=c_{۱}e^{a_{۱}x}+c_{۲}e^{a_{۲}x}+c_{۳}e^{a_{۳}x}+\cdots+c_{n}e^{a_{n}x} \qquad (٦ . ٦١١١)$$

جواب معادله (٦١ . ٦) خواهد بود . $c_{۱}, c_{۲}, c_{۳}, \dots, c_{n}$ مقادیر ثابت غیر مشخصی میباشند . در شماره (٦٤ . ٦) نشان میدهیم که این جوابها بطور خطی از یکدیگر مستقل بوده و بالنتیجه رابطه (٦١١١ . ٦) جواب عمومی معادله (٦١ . ٦) است .

بطور غیر مستقیم فرض کرده‌ایم که $a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}, \dots, a_{n}$ همگی از یکدیگر متمایز هستند و موقتاً حالتی که معادله جبری (٦١٢ . ٦) دارای ریشه‌های مساوی است کنار گذارده‌ایم .

اکنون فرض میکنیم ضرایب $A_{۰}, A_{۱}, A_{۲}, \dots, A_{n}$ حقیقی باشند . لذا بنابر نظریه معادلات $a_{۱}, a_{۲}, \dots, a_{n}$ ریشه‌های معادله مفسر (٦١٢ . ٦) یا اعداد حقیقی یا اعداد موهومی مزدوج میباشند .

اگر $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ اعداد حقیقی باشند جواب معادله (۶ . ۶۱) از رابطه (۶ . ۶۱۱۱) بدست میآید ولی اگر تعدادی ازریشه های $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ دوبدو مزدوج یکدیگر باشند لازم است که رابطه (۶ . ۶۱۱۱) را مختصر تغییری دهیم . مثلاً اگر a_r و a_s اعداد موهومی مزدوجی بشکل :

$$a_r=\alpha+i\beta \quad , \quad a_s=\alpha-i\beta$$

باشند ، جمله : $c_r e^{a_r x}+c_s e^{a_s x}$

در رابطه (۶ . ۶۱۱۱) را ممکن است بصورت زیر نوشت :

$$c_r e^{(\alpha+i\beta)x}+c_s e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}[c_r(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_s(\cos\beta x-i\sin\beta x]$$
$$=e^{\alpha x}(c'_r\cos\beta x+c'_s\sin\beta x) \qquad \text{(۶ . ۶۱۱۲)}$$

که در آن :

$$c'_r=c_r+c_s \quad , \quad c'_s=i(c_r-c_s)$$

۶۱۲ . ۶ - فاکتورهای تکراری

اکنون فرض میکنیم اوپریتور :

$$A_0D^n+A_1D^{n-1}+A_2D^{n-2}+\cdots+A_{n-1}D+A_n$$

دارای یک فاکتور تکراری مثلاً $(D-a)^p$ باشد . لذا عبارت جواب عمومی رابطه (۶ . ۶۱) شامل جواب عمومی معادله $(D-a)^p y=0$ است. یکی از جوابهای متناظر بااین فاکتور یعنی $y=ce^{ax}$ را میدانیم (c مقداری است ثابت) . برای تعیین جواب عمومی $(D-a)^p y=0$ از روش تغییر پارامتر استفاده میکنیم (شماره ۲۳۱ . ۶) و برای این منظور قرار میدهیم $y=e^{ax}v$ ، v تابعی است که باید آنرا تعیین کرد . لذا :

$$(D-a)^p e^{ax}v=(D-a)^{p-1}e^{ax}Dv=(D-a)^{p-2}e^{ax}D^2v=\cdots=e^{ax}D^pv$$

بنابراین $y=e^{ax}v$ جواب معادله $(D-a)^p y=0$ خواهد بود هرگاه v جواب معادله $D^p v=0$ باشد و از آنجا v باید کثیرالجمله غیرمشخصی برحسب x از درجه $(p-1)$ ام باشد . بالنتیجه جواب عمومی عبارت میگردد از :

$$y=(c_1+c_2x+\cdots+c_px^{p-1})\,e^{ax} \qquad \text{(۶ . ۶۱۲۱)}$$

رابطه بالا که ازنقطه‌نظرتئوری باید شامل p مقدار ثابت باشد ، p مقدار ثابت :

$$c_۱ , c_۲ , \dots , c_p$$

را دربر دارد .

بالاخره اگر معادله مفسر (۶ . ۶۱۲) دارای ریشه‌های مکرر مرتبه p ام باشد . مثلاً :

$$(D-\alpha+i\beta)^p(D-\alpha-i\beta)^p$$

جواب متناظر با این قسمت عبارت میگردد از :

$$y=(c_۱+c_۲x+\cdots+c_px^{p-۱})e^{\alpha x}\cos\beta x+(c'_۱+c'_۲x+\cdots+c'_px^{p-۱})e^{\alpha x}\sin\beta x \quad (۶ . ۶۱۲۲)$$

۶ . ۶۱۳ - تابع مکمل

همانطورکه در شماره(۶ . ۱) متذکر شدیم بنابر تعریف تابع مکمل هرمعادله‌خطی جواب عمومی معادله همگن متناظر با آن میباشد. حال‌که تمام موارد ممکنه یک معادله خطی با ضرایب ثابت‌را بررسی نموده‌ایم بجا است که تحقیق کنیم‌آیا روابط (۶ . ۶۱۱۱)و (۶ . ۶۱۱۲)و(۶ . ۶۱۲۱)و(۶ . ۶۱۲۲)جواب عمومی‌معادله همگن (۶ . ۶۱)میباشند.

ابتدا حالتی که‌اعداد $a_۱ , a_۲ , \dots , a_n$ که ممکن است اعداد حقیقی یاموهومی باشند و این اعداد از یکدیگر متمایز هستند مورد بررسی قرار میدهیم . دراینحالت اگر :

$$s=a_۱+a_۲+\cdots+a_n$$

و :

$$y_۱=e^{a_۱x} , \quad y_۲=e^{a_۲x} , \quad y_۳=e^{a_۳x} , \dots , y_n=e^{a_nx}$$

باشد مقدار رونسکین جوابها عبارت میگردد از :

$$\Delta(y_۱ , y_۲ , y_۳ , \dots , y_n)=\begin{vmatrix} y_۱ & y_۲ & y_۳ & \cdots & y_n \\ y'_۱ & y'_۲ & y'_۳ & \cdots & y'_n \\ y''_۱ & y''_۲ & y''_۳ & \cdots & y''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_۱^{(n-۱)} & y_۲^{(n-۱)} & y_۳^{(n-۱)} & \cdots & y_n^{(n-۱)} \end{vmatrix}$$

$$=e^{sx}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(2-1)} & a_3^{(n-1)} & \cdots & a_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

دترمینان بالا دترمینان **واندرموند*** بوده و مقدار آن برابر استبا :

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\ \dots\ (a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)\ \dots$$
$$(a_n-a_{n-1})$$

پس :

$$\Delta(y_1\,,y_2\,,y_3\,,\dots,y_n)=c^{sx}\prod(a_i-a_j)$$

ولی چون $a_i \neq a_j$ استلذا $\Delta(y_1\,,y_2\,,\dots,y_n)\neq 0$ بوده و بنابر شماره (۶ . ۲) n تابع :

$$y_1=e^{a_1x}\ ,\ y_2=e^{a_2x}\ ,\ y_3=c^{a_3x},\dots,y_n=e^{a_nx}$$

بطور خطی‌از یکدیگرمستقل بوده ولذا روابط (۶ . ۶۱۱۱) و (۶ . ۶۱۱۲) جواب عمومی معادله (۶ . ۶۱) است .

اکنون حالتی‌را درنظر میگیریم که‌درآن جمیع مقادیر a بایکدیگر برابر باشند. پس :

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1})e^{ax}$$

اگر برای مقدار معینی از مقادیر c، y متحد صفر باشد عبارت :

$$c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1}$$

متحد صفر خواهد بود و این غیر ممکن است مگر آنکه $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ باشد دراین مورد نیز عبارت (۶ . ۶۱۲۱) جواب عمومی خواهد بود .

---

* Vandermonde

بطورکلی اگر جواب بشکل :

$$p_۱e^{a_۱x}+p_۲e^{a_۲x}+p_۳e^{a_۳x}+\cdots+p_me^{a_mx}$$

که درآن $p_۱$, $p_۲$, ... , p_m کثیرالجمله هایی برحسب x و $a_۱$, $a_۲$, ... , a_m مقادیر ثابت متمایز از یکدیگر هستند باشد نشان میدهیم که عبارت بالا نمیتواند متحد صفر باشد مگر آنکه کثیرالجمله های p متحد صفر باشند .

زیرا اگر فرض کنیم :

$$p_۱e^{a_۱x}+p_۲e^{a_۲x}+p_۳e^{a_۳x}+\cdots+p_me^{a_mx}=0$$

و قرار دهیم $b_k=a_k-a_۱$ ، عبارت بالا را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$p_۱+p_۲c^{b_۲x}+p_۳e^{b_۳x}+\cdots+p_me^{b_mx}=0$$

اگر $r_۱$ درجه کثیرالجمله $p_۱$ باشد وچنانچه ازرابطه بالا $r_۱+۱$ بار مشتق بگیریم چنین داریم:

$$Q_۲c^{b_۲x}+Q_۳c^{b_۳x}+\cdots+Q_me^{b_mx}=0$$

$Q_۲$, $Q_۳$, ... , Q_m کثیرالجمله هایی هستند که درجه آنها متناظراً برابر درجه $p_۲$, $p_۳$, ... , p_m بوده و اعداد $b_۲$, $b_۳$, ... , b_m از یکدیگر متمایزاً هستند . اگرعمل فوق را ادامه دهیم بمرحله یی خواهیم رسید که $R_me^{r_mx}=0$. R_m کثیرالجمله یی است که درجه آن مساوی p_m بوده و لذا R_m باید متحد صفر باشد واین امر غیر ممکن است .

بنابراین نتیجه میشود که :

$$p_۱e^{a_۱x}+p_۲e^{a_۲x}+p_۳c^{a_۳x}+\cdots+p_me^{a_mx}$$

متحد صفر نیست .

اکنون که نشان دادیم روابط (۶ . ۶۱۱۱) و (۶ . ۶۱۱۲) و (۶ . ۶۱۲۱) و (۶ . ۶۱۲۲) جواب عمومی معادله (۶ . ۶۱) میباشند میتوان برای حل معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت از قضیه زیر استفادهٔ کرد .

قضیه ـ معادله دیفرانسیل خطی همگن و با ضرایب ثابت (۶ . ۶۱) را در نظر گرفته و پس از یافتن n ریشه معادله مفسر (۶ . ۶۱۲) به :

الف ـ r هرریشه ساده حقیقی مفسر ، تابع e^{rx} را نسبت میدهیم .

ب ـ $\alpha \pm i\beta$ زوج ریشهٔ ساده معادله مفسر، توابع $e^{\alpha x}\sin\beta x$ و $e^{\alpha x}\cos\beta x$ را نسبت میدهیم.

پ ـ r هر ریشه‌مکرر مرتبه k ام معادله مفسر، توابع:

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^{۲}e^{rx}, \dots, x^{k-۱}e^{rx}$$

را نسبت میدهیم.

ت ـ $\alpha \pm i\beta$ ریشه مکرر مرتبه k ام معادله مفسر، توابع:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x , xe^{\alpha x}\cos\beta x , x^{۲}e^{\alpha x}\cos\beta x , \dots , x^{k-۱}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x , xe^{\alpha x}\sin\beta x , x^{۲}e^{\alpha x}\sin\beta x , \dots , x^{k-۱}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

را نسبت میدهیم.

n تابع $y_۱(x) , y_۲(x) , \dots , y_n(x)$ که بدین ترتیب بدست میآیند بازاء جمیع مقادیر x بطور خطی از یکدیگر مستقل بوده و لذا:

$$y=c_۱y_۱(x)+c_۲y_۲(x)+\cdots+c_ny_n(x)$$

جواب عمومی معادله (۶۱ . ۶) خواهد بود.

مثال ۱ـ جواب عمومی معادله $(D^{۲}+۳D+۲)y=0$ را بدست آورید.

حل ـ معادله مفسر $r^{۲}+۳r+۲=0$ دارای ریشه‌های ساده متمایز و حقیقی ۱− و ۲− میباشد و لذا جواب عمومی عبارت خواهد بود از:

$$y=c_۱e^{-x}+c_۲e^{-۲x}$$

$c_۱$ و $c_۲$ مقادیر ثابتی هستند (متناظر با رابطه ۶۱۱۱ . ۶ و قسمت (الف) قضیه شماره ۶۱۳ . ۶).

مثال ۲ـ جواب عمومی معادله $(D^{۳}-D^{۲}-۱۲D)y=0$ را بدست آورید.

حل ـ معادله مفسر $r^{۳}-r^{۲}-۱۲r=r(r-۴)(r+۴)=0$ دارای ریشه‌های ساده متمایز و حقیقی 0 و ۴ و ۳− است و لذا:

$$y=c_۱+c_۲e^{۴x}+c_۳e^{-۳x}$$

$c_۱$ و $c_۲$ و $c_۳$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند.

مثال ۳ـ جواب عمومی معادله $(D^{۳}+۲D^{۲}-۵D-۶)y=0$ رابدست آورید.

حل - معادله مفسر $r^۳+۲r^۲-۵r-۶=(r-۲)(r+۱)(r+۳)=0$ دارای ریشه‌های ساده متمایز و حقیقی ۲ و ۱— و ۳— میباشد و لذا :

$$y=c_۱e^{۲x}+c_۲e^{-x}+c_۳c^{-۳x}$$

$c_۱$ و $c_۲$ و $c_۳$ مقادیر ثابت غیر مشخصی میباشند .

مثال ٤- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(D^۲-۲\lambda D+\lambda^۲+\mu^۲)y=0$ که در آن λ و μ مقادیر ثابتی هستند بیابید .

حل - معادله مفسر $r^۲-۲\lambda r+(\lambda^۲+\mu^۲)=0$ دارای ریشه‌های ساده و متمایز مزدوج $\lambda\pm\mu i$ است و لذا :

$$y=e^{\lambda x}(c_۱\cos\mu x+c_۲\sin\mu x)$$

$c_۱$ و $c_۲$ مقادیر ثابتی میباشند (متناظر با رابطه ۶۱۱۲ . ۶ و قسمت (ب) قضیه شماره ۶۱۳ . ۶) .

مثال ۵ - معادله $(D^٤+۵D^۲-۳٦)y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر $r^٤+۵r^۲-۳٦=(r^۲-٤)(r^۲+۹)=0$ دارای دوریشه ساده حقیقی و متمایز ۲ ± و دو ریشه ساده مزدوج و متمایز $۲i\pm$ میباشد و لذا بنابر قسمتهای (الف) و (ب) قضیه شماره (۶۱۳ . ۶) جواب عمومی عبارت میشود از :

$$y=A_۱e^{۲x}+A_۲e^{-۲x}+A_۳\cos۳x+A_٤\sin۳x$$

$$=C_۱\cosh۲x+C_۲\sinh x+C_۳\cos۳x+C_٤\sin۳x$$

زیرا : $\sinh۲x=\frac{۱}{۲}(e^{۲x}-e^{-۲x}) \quad , \quad \cosh۲x=\frac{۱}{۲}(e^{۲x}+e^{-۲x})$

$$C_۱=A_۱+A_۲ \ , \ C_۲=A_۱-A_۲ \ , \ C_۳=A_۳ \ , \ C_٤=A_٤$$

$A_۱ , A_۲ , A_۳ , A_٤$ مقادیر ثابت میباشند .

مثال ٦- معادله $(D^٤+D^۳+۲D^۲-D+۳)y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر :

$$r^٤+r^۳+۲r^۲-r+۳=(r^۲+۲r+۳)(r^۲-r+۱)=0$$

دارای ریشه های ساده مزدوج و متمایز $-١ \pm i\sqrt{٢}$, $\frac{١}{٢} \pm i\,\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ است ولذا :

$$y=e^{-x}(c_١\cos\sqrt{٢}\,x+c_٢\sin\sqrt{٢}\,x)+e^{-\frac{١}{٢}x}(c_٣\cos\frac{١}{٢}\sqrt{٣}\,x+c_٤\sin\frac{١}{٢}\sqrt{٣}\,x)$$

$c_١ , c_٢ \; c_٣ , c_٤$ مقادیر ثابتی هستند .

مثال ٧ - معادله $(D^٣-٣D^٢+٣D-١)y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر $(r+١)^٣=0$ دارای ریشه مکرر حقیقی مرتبه سوم یک میباشد و لذا جواب عمومی عبارت خواهد بود از :

$$y=(c_١+c_٢x+c_٣x^٢)e^{x}$$

$c_١$ و $c_٢$ و $c_٣$ مقادیر ثابتی هستند (متناظر با رابطه ٦١٢١ . ٦ و قسمت (پ) قضیه شماره ٦١٣ . ٦) .

مثال ٨- معادله $(D^٤+٦D^٣+٥D^٢-٢٤D-٣٦)y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر :

$$r^٤+٦r^٣+٥r^٢-٢٤r-٣٦=(r-٢)(r+٢)(r+٣)^٢=0$$

دارای ریشه های ساده حقیقی و متمایز ٢ و ٢ — و ریشه مکرر مرتبه دوم حقیقی ٣ — است و لذا :

$$y=c_١e^{٢x}+c_٢c^{-٢x}+(c_٣+c_٤x)e^{-٣x}$$

$c_١ , c_٢ , c_٣ , c_٤$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند .

مثال ٩- معادله $(D^٤-D^٣-٩D^٢-١١D-٤)y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر $r^٤-r^٣-٩r^٢-١١r-٤=(r+١)^٣(r-٤)=0$ دارای ریشه مکرر مرتبه سوم حقیقی ١ — و ریشه ساده حقیقی ٤ است . لذا :

$$y=e^{-x}(c_١+c_٢x+c_٣x^٢)+c_٤e^{٤x}$$

$c_١ , c_٢ , c_٣ , c_٤$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند .

مثال ١٠- معادله $(D^٢-٢D+٥)^٢y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر $(r^٢-٢r+٥)^٢=0$ دارای **ریشه های** مکرر مرتبه دوم مزدوج

$۱ \pm ۲i$ است‌ولذا بنا بررابطه (۶ . ۶۱۲۲) یا قسمت (ت) قضیه‌شماره (۶ . ۶۱۳) جواب عمومی عبارت میگردد از :

$$y=e^{x}[(c_{۱}+c_{۲}x)\cos^{۲}x+(c_{۳}+c_{۴}x)\sin ۲x]$$

$c_{۴} , c_{۳} , c_{۲} , c_{۱}$ مقادیر ثابتی هستند .

مثال ۱۱- معادله $(D^{۶}+۸D^{۴}+۱۶D^{۲})y=0$ را حل کنید .

حل - معادله مفسر $r^{۶}+۸r^{۴}+۱۶r^{۲}=r^{۲}(r^{۲}+۴)^{۲}=0$ دارای ریشه حقیقی مکرر مرتبه دوم صفرو ریشه مکرر مزدوج مرتبه دوم $\pm ۲i$ است و لذا :

$$y=c_{۱}+c_{۲}x+(c_{۳}+c_{۴}x)\cos ۲x+(c_{۵}+c_{۶}x)\sin ۲x$$

$c_{۶} , c_{۵} , c_{۴} , c_{۳} , c_{۲} , c_{۱}$ مقادیر ثابت غیر مشخص هستند .

۶ . ۶۱۴ - حالتی که فاکتورهای تکراری مانند حالت‌حدی فرض میشود

درموردی که اوپریتور :

$$A_{۰}D^{n}+A_{۱}D^{n-۱}+A_{۲}D^{n-۲}+\cdots+A_{n-۱}D+A_{n}$$

دارای‌ریشه مکررباشد **دالامبر** برای یافتن تابع مکمل متناظربااین ریشه روش بسیارجالبی ابداع نموده است . نظر باینکه این روش را میتوان درحالتی که ضرایب نیز توابعی از x باشند تعمیم داد لذا موقتاً فرض میکنیم که معادله بشکل :

$$p_{۰}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+p_{۱}\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}+\cdots+p_{n-۱}\frac{dy}{dx}+p_{n}y=0$$

است . $p_{۰} , p_{۱} , p_{۲} , \dots , p_{n}$ تابع پارامترهای معینی مانند $\alpha_{۱} , \alpha_{۲} , \alpha_{۳} , \dots , \alpha_{\mu}$ و حتی ممکن‌است تابعی از x نیز باشند . فرض میکنیم تابع $f(x , r)$ چنان باشد که برای مقدار معینی از r که خود نیز تابعی از پارامترهای $\alpha_{۱} , \alpha_{۲} , \dots , \alpha_{\mu}$ میباشد درمعادله صدق کند . اگر مقادیر r را که دارای خاصیت فوق هستند وآنها را به $r_{۱} , r_{۲} , \dots , r_{\nu}$ مینامیم چنان انتخاب کنیم که توابع :

$$f(x , r_{۱}) \; , \; f(x , r_{۲}) , \dots , f(x . r_{\nu})$$

از یکدیگر متمایز باشند دراینصورت توابع فوق ، ν جواب خصوصی معادله خواهند بود . بهرصورت برای مقادیر مشخصی از $\alpha_{۱} , \alpha_{۲} , \dots , \alpha_{\mu}$ دو و یا حتی چند مقدار r مثلاً

$r_{۱}$ و $r_{۲}$ با یکدیگر برابر گردیده و بالنتیجه توابع متناظر یعنی $f(x , r_{۱})$ و $f(x , r_{۲})$ نیز مساوی یکدیگر شده و بنابراین تعداد جوابهای خصوصی که بوسیله توابع $f(x , r)$ مشخص شده است کاهش میباید . ولی دراینحالت مقدار حد :

$$\frac{f(x , r_{۲})-f(x , r_{۱})}{r_{۲}-r_{۱}}$$

درحالتی که این حد موجود باشد جواب معادله خواهد بود . ولی همانطور که میدانیم مقدار حد کسر برابر :

$$\left[\frac{\partial f(x , r)}{\partial r}\right]_{r=r_{۱}}$$

بطریق مشابه میتوان حالتی که $r_{۱} , r_{۲} , r_{۳}$ بایکدیگر برابر هستند بررسی نمود . تابع :

$$\left[\frac{f(x , r_{۳})-f(x , r_{۲})}{r_{۳}-r_{۲}}-\frac{f(x , r_{۲})-f(x , r_{۱})}{r_{۲}-r_{۱}}\right] / (r_{۲}-r_{۱})$$

در معادله صدق نموده و اگر این حد موجود باشد ، حد بالا یعنی :

$$\left[\frac{\partial^{۲} f(x , r)}{\partial r^{۲}}\right]_{r=r_{۱}}$$

یکی از جوابهای معادله میباشد .

بطورکلی اگر برای مقادیر معینی ازپارامترهای :

$$\alpha_{۱} , \alpha_{۲} , \ldots , \alpha_{\mu}$$

داشته باشیم : $r_{۱}=r_{۲}=r_{۳}=\cdots=r_{\mu}$

دراینصورت معادله دارای μ جواب :

$$f(x , r_{۱}) , \left[\frac{\partial f(x , r)}{\partial r}\right]_{r=r_{۱}} , \left[\frac{\partial^{۲} f(x , r)}{\partial r^{۲}}\right]_{r=r_{۱}} , \ldots , \left[\frac{\partial^{\mu-۱} f(x , r)}{\partial r^{\mu-۱}}\right]_{r=r_{۱}}$$

مثال ۱- جواب عمومی معادله $(D^{۲}+۱)^{۲}y=0$ را بدست آورید .

حل - معادله کلی $(D^{۲}+\alpha^{۲})(D^{۲}+\beta^{۲})y=o$ را درنظر میگیریم . معادله اخیر هنگامیکه $\alpha^{۲}\neq\beta^{۲}$ است دارای جواب عمومی :

$$y=A_{۱}\cos\alpha x+A_{۲}\cos\beta x+A_{۳}\sin\alpha x+A_{۴}\sin\beta x$$

میباشد .

اگر $\alpha=\beta=۱$ باشد عبارت بالا جواب عمومی معادله $(D^{۲}+۱)^{۲}y=o$ بوده و منجر به عبارت :

$$y=c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x \tag{I}$$

میگردد . ولی توابع :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\cos\alpha x\right]_{\alpha=۱}=-x\sin x \quad , \quad \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin\alpha x\right]_{\alpha=۱}=x\cos x$$

جوابهای خصوصی معادله هستند. این جوابها را نمیتوان با نسبت دادن مقادیر معینی به $c_{۱}$ و $c_{۳}$ از رابطه (I) بدست آورد .

بنابراین جواب عمومی معادله مطلوب عبارت است از :

$$y=(c_{۱}+c_{۲}x)\cos x+(c_{۳}+c_{۴}x)\sin x$$

مثال ۳- جواب عمومی معادله $(D^{۴}-۲D^{۲}+۱)y=o$ را بدست آورید .

حل - معادله کلی $(D-\alpha_{۱})(D-\alpha_{۲})(D+\alpha_{۳})(D+\alpha_{۴})y=o$ را درنظر میگیریم. معادله اخیر هنگامیکه $\alpha_{۱}\neq\alpha_{۲}\neq\alpha_{۳}\neq\alpha_{۴}$ است دارای جواب عمومی :

$$y=A_{۱}e^{\alpha_{۱}x}+A_{۲}e^{\alpha_{۲}x}+A_{۳}e^{-\alpha_{۲}x}+A_{۴}e^{-\alpha_{۴}x}$$

میباشد. اگر $\alpha_{۱}=\alpha_{۲}=۱$ و $\alpha_{۳}=\alpha_{۴}=+۱$ گردد عبارت بالاجواب عمومی معادله نخواهد بود ، زیرا این رابطه منجر به عبارت :

$$y=c_{۱}e^{x}+c_{۳}e^{-x}$$

میشود . ولی توابع :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_{۱}}[e^{\alpha_{۱}x}]_{\alpha_{۱}=۱}=xe^{x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_{۳}}[e^{-\alpha_{۲}x}]_{\alpha_{۳}=۱}=-xe^{-x}$$

جوابهای خصوصی معادله هستند . پس جواب عمومی معادله عبارت میشود از :

$$y=e^{x}(c_{۱}+c_{۲}x)+e^{-x}(c_{۳}+c_{۴}x)$$

مثال ۳ـ جواب عمومی معادله $(D^{۶}+۹D^{۴}+۲۴D^{۲}+۱۶)y=0$ را بدست آورید .

حل - $(D^{۶}+۹D^{۴}+۲۴D^{۲}+۱۶)y=(D^{۲}+۱)(D^{۲}+۴)^{۲}y=0$.

تابع مکمل متناظر با فاکتور $(D^{۲}+۱)$ تابع $c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x$ است. ولی برای یافتن تابع مکمل متناظر با ریشه مضاعف موهومی $\pm ۲i$ اگر مانند مثال (۱) عمل کنیم، توابع :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\cos\alpha x\right]_{\alpha=۲}=-x\sin ۲x \quad , \quad \left[\frac{\partial}{\partial\beta}\sin\beta x\right]_{\beta=۲}=x\cos ۲x$$

جوابهای خصوصی معادله بوده و بالنتیجه جواب عمومی عبارت میگردد از :

$$y=c_{۱}\cos x+c_{۲}\sin x+(c_{۳}+c_{۴}x)\cos ۲x+(c_{۵}+c_{۶}x)\sin ۲x$$

همانطورکه ازحل مسائل بالا مشاهده میشود برای یافتن تابع مکمل لازم است که ریشه های معادله مفسر (۶ . ۶۱۲) را بیابیم و لذا ذیلاً بطور مختصر روش یافتن جوابهای تقریبی معادلات جبری را توضیح میدهیم .

۶ . ۶۱۵ - حل معادلات جبری

الف ـ قضایای کلی .

رابطه :

$$f(x)=x^{n}+A_{۱}x^{n-۱}+A_{۲}x^{n-۲}+A_{۳}x^{n-۳}+\cdots+A_{n} \quad (۶ . ۶۱۵)$$

که در آن $A_{۱} , A_{۲} , \dots , A_{n}$ مقادیر ثابت حقیقی هستند در نظر میگیریم .

بنابرنظریه معادلات اگر $\alpha+i\beta$ ریشه معادله $f(x)=0$ باشد $\alpha-i\beta$ نیز ریشه این معادله بوده و بالنتیجه $f(x)$ دارای فاکتور درجه دومی بصورت :

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^{۲}+\beta^{۲}$$

میباشد که برای جمیع مقادیر حقیقی x مثبت است . لذا اگر $\alpha , \beta , \dots , k$ ریشه های حقیقی $f(x)=0$ باشند (لزومی ندارد که جمیع این ریشه‌ها از یکدیگر متمایز باشند) دراینصورت چنین داریم :

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ \dots\ (x-k)\cdot\varphi(x) \qquad (۶.۶۱۵۱)$$

$\varphi(x)$ برای جمیع مقادیر حقیقی مثبت بوده و رابطه (۶ . ۶۱۵) را فقط بیک نحو میتوان بصورت (۶ . ۶۱۵۱) نوشت. لذا هنگامیکه x تغییر میکند، اگر x ازیکی از ریشه های حقیقی $f(x)=o$ بگذرد علامت $f(x)$ تغییر مینماید و از آنجا نتایج زیر بدست میاید .

I - اگر x از هریك از ریشه‌ها بزرگتر باشد و یا آنکه جمیع ریشه‌ها موهومی باشند $f(x)$ مثبت است .

لذا نتیجه میشود که برای مقادیر نسبتاً بزرگ x علامت هر کثیرالجمله مانند علامت بزرگترین جمله آن میباشد .

II- فرض میکنیم a و b اعداد حقیقی باشند .

۱- اگر $f(a)$ و $f(b)$ متحدالعلامه باشند، یا تعداد زوجی از ریشه‌های معادله $f(x)=o$ بین a و b قرار دارند و یا آنکه ریشه‌یی بین a و b موجود نیست .

۲- اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند تعداد فردی از ریشه‌های معادله $f(x)=o$ بین a و b قرار دارند .

III - ۱- اگر درجه معادله $f(x)=o$ فرد باشد دراینصورت معادله اقلاً دارای یك ریشه حقیقی است .

۲- اگر درجه معادله $f(x)=o$ زوج و A_n در رابطه (۶ . ۶۱۵) منفی باشد دراینصورت معادله دست‌کم‌دارای یك‌ریشه مثبت و دست‌کم دارای یك ریشه منفی میباشد .

زیرا بنابر قسمت (I) میتوان عدد مثبت و بزرگ a را چنان انتخاب کرد که $f(a)$ مثبت و $f(-a)$ با $(-۱)^n$ متحدالعلامه باشند .

لذا اگر n فرد باشد، $f(a)$ و $f(-a)$ مختلف‌العلامه بوده و اقلاً یک ریشه بین a و $-a$ قرار دارد . ولی اگر n زوج و A_n منفی باشد، $f(a)$ و $f(-a)$ مثبت و $f(o)$ منفی است . لذا اقلاً یک ریشه بین صفر و a و یک ریشه بین صفر و $-a$ قرار میگیرد .

ب ـ قانون علامات دکارت *

دراین قسمت فرض میکنیم $A_n \neq 0$ باشد لذا معادله دارای ریشه صفر نیست .

در بررسی علامات جمل کثیرالجمله به ترتیب زیر عمل میکنیم .

از اولین جمله ازسمت چپ شروع نموده و تعیین علامت جمل کثیرالجمله را بسمت راست ادامه میدهیم و برحسب آنکه علامت هرجمله با علامت جمله قبلی یکسان یا مخالف آن باشد گوییم دراین جمله **حفظ علامت** شده است و یا آنکه در این جمله **تغییر علامت** رخ داده است .

بنابراین رابطه $x^{۷} - ۲x^{٥} - ۳x^{٤} - ٤x^{۳} + ٥x^{۲} - ٦x + ۷$ دارای دو **حفظ علامت** وچهار **تغییر علامت** است . حفظ علامات درجمل $-۳x^{٤}$ و $-٤x^{۳}$ وتغییر علامات درجمل $-۲x^{٥}$, $٥x^{۲}$, $-٦x$, ۷ ظاهر میشود .

اگر جمیع ضرایب معادله $f(x) = 0$ مخالف‌صفر باشند این معادله را **کامل** گوییم. ولی اگر مثلاً $A_r = 0$ باشد گوییم معادله **فاقد** جمله متناظر میباشد. دریک‌معادله کامل:

I– اگر x را به −x تبدیل کنیم تغییر علامت هرجمله منجر به حفظ علامت آن جمله و بالعکس میگردد .

II– اگر μ تعداد تغییرعلامات جمل و μ' تعداد حفظ علامات جمل و n درجه معادله باشد ، $\mu + \mu' = n$ است .

با مقدمات فوق اکنون میتوان قانون دکارت را به شرح زیر بیان کرد .

تعداد ریشه‌های مثبت $f(x) = 0$ نمیتواند از تعداد تغییر علامات $f(x)$ بیشتر باشد .

تعداد ریشه‌های منفی $f(x) = 0$ نمیتواند از تعداد تغییرعلامات $f(-x)$ بیشتر باشد .

برای اثبات قسمت‌اول نشان خواهیم داد که اگر u هرکثیرالجمله غیر مشخص و a عدد مثبت‌و $v = u(x-a)$ باشد دراینصورت v پس‌ازبسط اقلاً دارای یک تغییرعلامت بیش‌از u میباشد .

ابتدا فرض میکنیم u کامل باشد و مورد زیر را درنظر میگیریم :

---

* Descarte

$$\begin{array}{ccccccccc|l} & + & - & + & + & - & - & - & + & \text{u علامات جمل} \\ - & + & - & - & + & + & + & - & & \\ \hline - & + & - & \pm & + & \pm & \pm & - & + & \text{v علامات جمل} \end{array}$$

که در آن + مبین آن است که علامت ممکن است مثبت و یا منفی و یا جمله متناظر صفر باشد . از مشاهده جدول علامات بالا نتیجه میگیریم که :

۱- اگر در جمله r ام u حفظ علامت شده باشد ، با استفاده از تعریف حفظ علامت ضرایب x^{n-r+1} و x^{n-r+2} در u متحدالعلامه میباشند و چون بنابفرض a عددی است مثبت ضریب x^{n-r+1} در v نامعین خواهد بود .

۲- اگر در جمله r ام u تغییر علامت شده باشد ضرایب x^{n-r+1} و x^{n-r+2} در u مختلف‌العلامه بوده و چون بنابفرض a عددی است مثبت ضریب x^{n-r+1} در v معین خواهد بود .

۳- در انتهای v تغییر علامتی وارد خواهد شد .

بنابر قسمت (۱) و (۲) تغییر علامات v اقلاً برابر u است و بنابر قسمت (۳) ، v مسلماً دارای یک تغییر علامت بیش‌از u است .

ولی اگر برخی از ضرایب u صفر باشد جدول زیر را درنظر میگیریم :

$$\begin{array}{cccccc} + & + & 0 & 0 & - & \\ & - & - & 0 & 0 & + \\ \hline + & \pm & - & 0 & - & + \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} - & + & 0 & 0 & - & \\ & + & - & 0 & 0 & + \\ \hline - & + & - & 0 & - & + \end{array}$$

لذا تغییر علامت v اقلاً یکی بیش‌از u میباشد .

اکنون‌فرض میکنیم $\dots\ f(x) = \varphi(x) \cdot (x-\alpha)(x-\beta)$ که در آن α , β , ... ریشه های مثبت $f(x)=0$ هستند باشد . بنابر قسمت بالا ضریب $\varphi(x)$ در هریک از عوامل $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, ... منجربه یک تغییر علامت میگردد وبالنتیجه تعداد تغییر علامت $f(x)$ اقلاً برابر تعداد ریشه های مثبت $f(x)=0$ میباشد .

قسمت دوم قضیه دکارت باتوجه بآنکه ریشه های منفی $f(x)=0$ ریشه های مثبت $f(-x)=0$ با تغییر علامت میباشند ثابت میشود .

نتیجه - فرض میکنیم $f(x)$ درجه n و μ تعداد تغییر علامات در $f(x)$ و μ'

تعداد تغییر علامات در $f(-x)$ و m تعداد ریشه‌های مثبت $f(x)=0$ و m' تعداد ریشه‌های منفی $f(x)=0$ باشد . اگر :

I- $\mu+\mu' < n$ ، معادله $f(x)=0$ دست‌کم‌دارای $n-(\mu+\mu')$ ریشه موهومی خواهد بود.

II- اگر تمام ریشه‌های $f(x)=0$ حقیقی باشند، $m=\mu$ و $m'=\mu'$.

زیرا بنابر قانون دکارت $m \leqslant \mu$ و $m' \leqslant \mu'$. لذا :

$$m+m' \leqslant \mu+\mu' \leqslant n \qquad (I)$$

پس تعداد ریشه‌های موهومی معادله $f(x)=0$ که برابر $n-(m+m')$ است‌دست کم برابر $n-(\mu+\mu')$ میگردد . زیرا بااستفاده از رابطه (I) چنین داریم :

$$n-(m+m') \geqslant n-(\mu+\mu')$$

حال اگر تمام ریشه‌های معادله $f(x)=0$ حقیقی باشند $m+m'=n$ و بالنتیجه از رابطه (I) خواهیم داشت :

$$m+m'=\mu+\mu'$$

ولی بنابرقانون دکارت $m \leqslant \mu$ است . اگر $m < \mu$ باشد برای آنکه رابطه بالا برقرار باشد لازم است‌که $m' > \mu'$ گردد و این خود مخالف قسمت دوم قضیه دکارت است . لذا $m=\mu$ و $m'=\mu'$.

مثال ۱- نشان دهید اگر s , r , q مثبت باشند معادله :

$$f(x)=x^4+qx^2+rx-s=0$$

دارای یک ریشه مثبت ، یک ریشه منفی و دو ریشه موهومی میباشد .

حل - بنابر قسمت(III) از قسمت (الف) چون درجه $f(x)$ زوج و $A_n=-s<0$ است‌لذا معادله دست‌کم دارای یک ریشه مثبت ودست‌کم‌دارای یک ریشه منفی میباشد. همچنین $\mu=1$ و $\mu'=1$ لذا این دو ریشه تنها دو ریشه حقیقی معادله بوده و دو ریشه دیگر موهومی میباشد .

مثال ۲ - نشان دهید معادله $x^5-2x^2+7=0$ دست کم دارای دو ریشه موهومی میباشد .

حل - دراین مثال $\mu=۲$ و $\mu'=۱$ ولذا $\mu+\mu'=۳$ است . بنابراین معادله نمیتواند بیش‌از ۳ ریشه حقیقی که دو ریشه آن مثبت و دیگری منفی است باشد . بنابراین معادله دست‌کم دارای دو ریشه موهومی خواهد بود .

پ - قانون دوگوا *

اگر در معادله $f(x)=0$ ضرایب r جمله متوالی صفر باشد دراینصورت اگر :

I- r زوج باشد معادله دست‌کم دارای r ریشه موهومی است.

II - r فرد باشد برحسب آنکه علامت ضرایب جمل ماقبل و مابعد متحدالعلامه‌یا مختلف‌العلامه باشند معادله دست‌کم‌دارای $(r+۱)$ ویادست‌کم $(r-۱)$ ریشه موهومی است .

فرض میکنیم $f(x)$ فاقد r جمله بین hx^m و $kx^{m-r-۱}$ باشد و همچنین قرار میدهیم :

$$f(x)=hx^m+kx^{m-r-۱}+\varphi(x) \quad , \quad f_۱(x)=\psi(x)+\varphi(x)$$

که در آن :

$$\psi(x)=hx^m+c_۱x^{m-۱}+c_۲x^{m-۲}+\cdots+c_rx^{m-r}+kx^{m-r-۱}$$

هیچیک از مقادیر $c_۱$ ، $c_۲$ ، ... ، c_r برابر صفر نیستند .

واضح است که معادله $\psi(x)=0$ ازدرجه $(r+۱)$ ام بوده وبنابر قانون دکارت مجموع تعداد تغییر علامت در $\psi(x)$ و تعداد تغییر علامت در $\psi(-x)$ برابر $r+۱$ میباشد .

اکنون‌فرض میکنیم μ تعداد تغییرعلامت در $hx^m+kx^{m-r-۱}$ و μ' تعداد تغییر علامت در $h(-x)^m+k(-x)^{m-r-۱}$ باشد. بنابراین تفاضل مجموع تغییر علامات در $f(x)$ و $f(-x)$ و تغییرعلامت‌در $f_۱(x)$ و $f_۱(-x)$ برابر $r+۱-(\mu+\mu')$ بوده‌وازآنجا معادله $f(x)=0$ دست‌کم‌دارای $r+۱-(\mu+\mu')$ ریشه موهومی‌است .

ابتدا فرض میکنیم r زوج باشد دراینصورت $(-x)^m$ و $(-x)^{m-r-۱}$ مختلف‌العلامه بوده و اگر :

۱- h و k متحدالعلامه باشند ، $\mu=0$ و $\mu'=۱$.

---

* De Gua

۲- h و k مختلف‌العلامه باشند ، $\mu=۱$ و $\mu'=0$ و بنابراین درهردو حالت :

$$r+۱-(\mu+\mu')=r$$

اگر r فرد باشد $(-x)^m$ و $(-x)^{m-r-۱}$ متحدالعلامه بوده و اگر :

۱- h و k متحدالعلامه‌باشند ، $\mu=0$, $\mu'=0$ و $r+۱-(\mu+\mu')=r+۱$.

۲- h و k مختلف‌العلامه باشند ، $\mu=\mu'=۱$ و $r+۱-(\mu+\mu')=r-۱$.

مثال ۱- نشان دهید اگر در معادله :

$$ax^n+nbx^{n-۱}+\frac{n(n-۱)}{۲!}cx^{n-۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}dx^{n-۳}+\cdots+k=0$$

$H=ac-b^۲>0$ باشد این معادله دست‌کم دارای دو ریشه موهومی میباشد .

حل- تبدیل متغیر $x=y-\frac{b}{a}$ معادله بالا را تبدیل به :

$$x^n+\frac{nH}{a^۲}x^{n-۲}+\cdots=0$$

مینماید . چون‌ضرایب x^n و $x^{n-۲}$ متحدالعلامه هستند (بنابفرض H عددی است مثبت) وبین‌این دوجمله ضریب $x^{n-۱}$ صفر است لذا بنابر قضیه **دوگوا** معادله دست‌کم دارای دو ریشه موهومی خواهد بود .

ت - کرانه‌های ریشه‌های یك معادله

دراین قسمت ریشه‌ها را حقیقی و ضرایب بزرگترین جمله را مثبت فرض میکنیم . دریافتن ریشه های معادله ارجح است سعی‌کنیم دو عدد که ریشه های حقیقی معادله بین آنها قرار دارند تعیین‌کنیم . اگر h و l این‌دو عدد و $h>l$ باشد h را **کرانه فوقانی** و l را **کرانه تحتانی** ریشه ها نامیم .

I - عدد h درصورتی **کرانه فوقانی** ریشه‌های معادله $f(x)=0$ است‌که برای جمیع مقادیر $x\geqslant h$ ، $f(x)>0$ باشد .

II - اگر h' یکی‌ازکرانه‌های فوقانی ریشه‌های $f(-x)=0$ باشد دراینصورت $-h'$ یکی از **کرانه‌های تحتانی** ریشه‌های $f(x)=0$ است. زیرا اگر α کوچکترین ریشه معادله $f(x)=0$ باشد $-\alpha$ بزرگترین ریشه $f(-x)=0$ بوده و لذا $h'>-\alpha$ و ازآنجا $-h'<\alpha$ میباشد .

III - اگر h'' یکی ازکرانه‌های فوقانی ریشه‌های مثبت $f\left(\frac{١}{x}\right)=0$ باشد دراینصورت $\frac{١}{h''}$ یکی ازکرانه‌های تحتانی ریشه‌های مثبت $f(x)=0$ است زیرا اگر α' کوچکترین ریشه مثبت $f(x)=0$ باشد $\frac{١}{\alpha'}$ بزرگترین ریشه مثبت $f\left(\frac{١}{x}\right)=0$ است . پس $h''>\frac{١}{\alpha'}$ و ازآنجا $\frac{١}{h''}<\alpha'$.

IV - برای یافتن کرانه‌های ریشه‌های یک معادله میتوان از یکی ازدو روش زیر استفاده کرد .

I - روش دسته بندی جمل

دراین روش جمل معادله $f(x)=0$ را چنان دسته‌بندی مینماییم که بسهولت بتوان عددی مانند h بقسمی تعیین نمود که برای مقادیر $x\geqslant h$ مجموع جمل واقع در هردسته مثبت یا مساوی صفر باشد .

برای آنکه جمل را بطور مناسبی دسته‌بندی کنیم ، دربعضی از موارد لازم است $f(x)$ را درعدد مثبتی ضرب کنیم .

همانطورکه در دو مثال زیر خواهیم دید بااستفاده از این روش و بکار بردن ابتکار لازم میتوان کرانه‌ها را با دقت معینی محاسبه نمود .

II - روش تقریبات متوالی

میتوان نشان داد که هرریشه معادله (٦ . ٦١٥) درنامساوی :

$$|x|\leqslant M+١ \quad , \quad M=\max(|A_١|,|A_٢|,\ldots,|A_n|) \qquad (٦ . ٦١٥٢)$$

صدق میکند* .

بنابراین یافتن ریشه‌های معادله(٦ . ٦١٥) منجر به‌جستجوی این ریشه‌ها درفاصله $-b\leqslant x\leqslant b$ که درآن $b=١+M$ است میگردد .

---

* برای اثبات رابطه (٦ . ٦١٥٢) و بحث بیشتر در این مورد به صفحه ٤٤٦ کتاب زیر مراجعه شود .

Higher Algebra By S. Baranard & J. M. child

اکنون بسهولت میتوان بکمک $f'(x)$ نمودار تابع $f(x)$ را در فاصله $-b \leqslant x \leqslant b$ بررسی نمود و محل تقریبی ریشه‌ها را بدست آورد . اگر x_0 یکی از این ریشه‌های تقریبی باشد و $f(x_0)f''(x_0) > 0$ و x_0 در فاصله‌یی قرار گیرد که شامل یکی از ریشه‌های $f(x)=0$ باشد ولی در این فاصله هیچیک از ریشه‌های $f'(x)$ و یا $f''(x)$ واقع نباشند در اینصورت x_1 تقریب بهتر برای ریشه معادله را میتوان با روش نیوتن از رابطه زیر بدست آورد :

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (٦ . ٦١٥٣)$$

با برقرار بودن شرایط فوق تکرار روش بالا منجر به پیدایش دنباله‌یی از اعداد میگردد که بسوی ریشه مورد نظر متقارب هستند .

مثال ۱ـ تعداد و علامت ریشه‌های حقیقی معادله زیر را تعیین کرده و کرانه‌های فوقانی و تحتانی ریشه مثبت را تعیین کنید :

$$f(x)=x^{۳}-۱۰x^{۲}-۱۱x-۱۰۰=0$$

حل - بنابر قسمت (III) از قسمت (الف) چون درجه $f(x)$ فرد است لذا معادله بالا دست کم دارای یک ریشه حقیقی است .

از طرف دیگر چون $f(x)$ دارای یک تغییر علامت در جمله $-۱۰x^{۲}$ است لذا تعداد ریشه‌های مثبت $f(x)$ حداکثر برابر یک خواهد بود . بعبارت دیگر معادله دارای یک ریشه حقیقی مثبت است .

بسهولت معلوم میشود که تعداد تغییر علامات $f(-x)$ برابر دو بوده و بالنتیجه مجموع تعداد تغییر علامات $f(x)$ و $f(-x)$ برابر سه یعنی درجه معادله میگردد . لذا بنابر قانون دکارت و نتیجه آن معادله فاقد ریشه‌های موهومی بوده و بالنتیجه $f(x)$ دارای دو ریشه حقیقی منفی دیگر نیز خواهد بود .

برای تعیین کرانه فوقانی ریشه‌های مثبت معادله به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$\begin{aligned}٦f(x)=٦x^{۳}-٦۰x^{۲}-٦٦x-٦۰۰=٤x^{۲}(x-۱۵)\\ +x(x^{۲}-٦٦)+(x^{۳}-٦۰۰)\end{aligned}$$

واضح است که برای مقادیر $x \geqslant ۱۵$ تابع $f(x) > 0$ بوده و لذا ۱۰ یکی از کرانه‌های فوقانی ریشه‌ها است .

باجایگزین نمودن $x=\frac{۱}{y}$ در معادله فوق خواهیم داشت :

$$\varphi(y)=۱۰۰y^{۳}+۱۱y^{۲}+۱۰y-۱=0$$

و یا :

$$\varphi(y)=۵y^{۲}(۲۰y-۱)+(۱۶y^{۲}+۱۰y-۱)=0$$

بزرگترین ریشه عبارت $۱۶y^{۲}+۱۰y-۱=0$ تقریباً برابر $\frac{۱٫۴}{۱۶}$ بوده و اگر y برابر این مقدار باشد $۲۰y-۱>0$ است .

لذا برای مقادیر $y\geqslant\frac{۱٫۵}{۱۶}$ و یا $x=\frac{۱}{y}\leqslant\frac{۱۶}{۱٫۵}$ و یا برای مقدار $x=۱۰٫۶$ ، عبارت $\varphi(y)>0$ است . پس ۱۰٫۶ کرانه تحتانی برای ریشه مثبت خواهد بود .

مثال ۲- تعداد و علامت ریشه‌های حقیقی معادله زیر را تعیین کرده و کرانه‌های فوقانی و تحتانی ریشه‌ها را تعیین کنید :

$$f(x)=۳x^{۴}-۶۱x^{۳}+۱۲۷x^{۲}+۲۲۰x-۵۲۰=0$$

حل - بنابر قسمت (III) از قسمت (الف) چون درجه $f(x)$ زوج و :

$$A_{۴}=-\frac{۵۲۰}{۳}<0$$

است معادله بالا دست‌کم دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است .

ازطرف‌دیگر بسهولت معلوم میشود که تعداد تغییر علامتهای $f(x)$ برابر (درجمل $-۶۱x^{۳}$ و $۱۲۷x^{۲}$ و -۵۲۰) و تعداد تغییر علامتهای $f(-x)$ برابر یک (در جمله $-۲۲۰x$) است . لذا مجموع تعداد تغییر علامتهای $f(x)$ و $f(-x)$ برابر درجه معادله $f(x)$ بوده و بنابر قانون‌دکارت معادله دارای سه ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی است .

برای‌تعیین کرانه فوقانی ریشه‌های معادله به‌ترتیب‌زیر عمل میکنیم :

$$f(x)=x^{۲}(۳x^{۲}-۶۱x+۱۲۷)+(۲۲۰x-۵۲۰)$$

ریشه بزرگتر معادله $٣x^٢-٦١x+١٢٧=0$ برابر ١٧ر٩ بوده و لذا ١٨ یکی از کناره‌های فوقانی ریشه‌ها میباشد . از طرف دیگر :

$$f(-x)=(٣x^٤-٥٢٠)+x(٦١x^٢+١٢٧x-٢٢٠)$$

برای مقادیر $x \geqslant ٤$ هریک‌ازعبارت واقع در پرانتز بالا مثبت بوده و لذا بنابر قسمت(II) از قسمت (ت) ، ٤- یکی ازکرانه های تحتانی ریشه های $f(x)=0$ خواهد بود .

مثال ٣- تعداد و علامت‌ریشه های حقیقی معادله زیر را تعیین کرده و مقدار تقریبی ریشه ها را نیز بدست آورید :

$$f(x)=x^٣+x+١=0$$

حل - بنابر قسمت (III) از قسمت (الف) چون درجه $f(x)$ فرد است لذا این معادله دست‌کم دارای یک ریشه حقیقی است. چون معادله‌فاقد $x^٢$ است وضرایب $x^٣$ و x متحدالعلامه هستند پس بنابر قانون **دوگوا** معادله دست‌کم دارای دو ریشه موهومی خواهد بود .

بعبارت دیگر معادله دارای یک ریشه حقیقی‌و دو ریشه موهومی است .

چون تعداد تغییر علامتهای $f(x)$ صفر است لذا ریشه حقیقی معادله منفی خواهد بود .

پس‌از مقایسه $f(x)$ با رابطه (٦ . ٦١٥) چنین داریم :

$$A_١=0 \ , \ A_٢=١ \ , \ A_٣=١$$

بنابراین رابطه (٦ . ٦١٥٢) بصورت زیر نوشته میشود :

$$|x| \leqslant M+١ \quad , \quad M=\max(١,١,١)=١$$

و یا :

$$|x| \leqslant ٢ \quad , \quad -٢ \leqslant x \leqslant ٢$$

چون‌منحنی $f(x)$ درفاصله $-٢ \leqslant x \leqslant ٢$ موردلزوم‌است‌وازآنجایی‌که $f'(x)=٣x^٢+١$ میباشد لذا دراین فاصله مشتق صفر نمیگردد و بنابراین میتوان قانون نیوتن را برای یافتن ریشه های تقریبی بکاربرد . این معادله فقط دارای یک ریشه حقیقی منفی و نزدیک به -١ میباشد . با بکاربردن رابطه (٦ . ٦١٥٣) تقریبهای متوالی زیر بدست میآید :

$$-٠ر٧٥ \;,\; -٠ر٦٨٦ \;,\; -٠ر٦٨٢٣٤ \;,\; \dots$$

اگر معادله $x^۳+x+۱=0$ را بر $x+۰ر۶۸۲۳۴$ بخش کنیم معادله درجه دوم :

$$x^۲-۰ر۶۸۲۳۴x+۱ر۴۶۵۵۸۷۸=0$$

که دارای ریشه‌های موهومی $۰ر۳۴۱۱۷ \pm ۱ر۱۶۱۵۵i$ است بدست میاید .

ث - یافتن ریشه‌های گویای معادله

ریشه گویای معادله را میتوان از قضیه زیر بدست آورد .

اگر $px-q$ فاکتوری از معادله :

$$f(x)=A_۰x^n+A_۱x^{n-۱}+A_۲x^{n-۲}+\cdots+A_{n-۱}x+A_n=0$$

که در آن $A_۰ , A_۱ , \ldots , A_n$ اعداد درست و یا صفر و p و q اعداد درست که نسبت بیکدیگر اول هستند باشد ، در اینصورت p یکی از فاکتورهای $A_۰$ و q یکی از فاکتورهای A_n است .

زیرا اگر $px-q$ یکی از فاکتورهای $f(x)$ باشد واضح است که $f\left(\frac{q}{p}\right)=0$ و بالنتیجه :

$$A_۰q^n+A_۱q^{n-۱}p+A_۲q^{n-۲}p^۲+\cdots+A_np^n=0$$

و از آنجا : $A_۰q^n=$ عدد درست $\times p$

پس $A_۰q^n$ بر p بخش پذیر میباشد . ولی بنابفرض p و q نسبت بیکدیگر اول هستند لذا p و q^n نسبت بیکدیگر اول بوده و بالنتیجه a باید بر p بخش پذیر باشد . بعبارت دیگر p یکی از مقسوم‌علیه های a است. بطریق مشابه نیز میتوان نشان داد که q نیز یکی از مقسوم علیه های A_n است .

بنابراین ریشه‌های گویای $A_۰x^n+A_۱x^{n-۱}+\cdots+A_{n-۱}x+A_n=0$ باید دربین مقادیر $\pm\frac{q}{p}$ جستجو نمود . p و q نسبت بیکدیگر اول و p یکی از مقسوم‌علیه‌های $A_۰$ و q یکی از مقسوم‌علیه‌های A_n است .

مثال ۱ - تعداد و علامت ریشه های حقیقی و مقدار ریشه های گویای معادله :

$$f(x)=۲x^{۳}-۵x^{۲}+۵x-۳=0$$

را بدست آورید .

حل ـ بنابر قسمت (III) از قسمت (الف) چون درجه $f(x)$ فرد است لذا معادله بالا دست کم دارای یک ریشه حقیقی است. این معادله دارای سه تغییر علامت (درجمل $-۵x^{۲}$, $۵x$, -۳) است لذا تعداد ریشه های مثبت معادله حداکثر سه است .

از طرف دیگر چون تعداد تغییر علامتهای $f(-x)$ صفر است ، معادله $f(x)=0$ دارای ریشه های منفی نیست وازآنجائیکه مجموع تغییر علامت $f(x)$ و $f(-x)$ برابر سه یعنی درجه $f(x)$ است بنابر قانون دکارت معادله فاقد ریشه های موهومی خواهد بود . بعبارت دیگر معادله بالا دارای سه ریشه مثبت میباشد .

$$f(x)=۲x^{۳}-۵x^{۲}+۵x-۳=۲x^{۲}\left(x-\frac{۵}{۲}\right)+۵\left(x-\frac{۳}{۵}\right)$$

بنابراین $\frac{۵}{۲}$ یکی از کرانه های فوقانی ریشه ها بوده و چون $f(x)=0$ فاقد ریشه های منفی است لذا صفر یکی از کرانه های تحتانی ریشه ها است .

اگر $\frac{q}{p}$ ریشه معادله باشد $p=۲$, $p=۱$; $q=۱$, $q=۳$. تنها مقدار $\frac{q}{p}$ که بین 0 , $\frac{۵}{۲}$ واقع شده‌است ۱ , $\frac{۱}{۲}$, $\frac{۳}{۲}$ میباشد. بسهولت معلوم میگردد که $\frac{۳}{۲}$ تنها ریشه گویای معادله است .

ج ـ روش مقسوم‌علیه‌های نیوتن

قبلاً یادآور میشویم که رابطه (۶ . ۶۱۵) را میتوان به معادله :

$$f(x)=x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+a_{۲}x^{n-۲}+\cdots+a_{n}=0 \qquad \text{(I)}$$

که در آن $a_{۱}$, $a_{۲}$, ... , a_{n} کمترین اعداد درست ممکنه هستند تبدیل کرد .

بنابر قسمت (ث) اگر α یکی از ریشه های گویای معادله (I) باشد α عدد درستی بوده و a_{n} برآن بخش پذیر است .

فرض میکنیم h یکی از فاکتورهای a_{n} باشد. اگر $(x-h)$ فاکتوری برای $f(x)$ باشد و $f(x)$ را بر $x-h$ بخش کنیم میتوان عمل تقسیم را درجدول زیر خلاصه کرد :

$$\begin{array}{lllllll} (۱-h) & ۱ & +a_{۱} & +a_{۲}+\cdots+a_{n-۲} & & +a_{n-۱} & +a_{n} \\ & & h & +b_{۱}h+\cdots+b_{n-۳}h & & +b_{n-۲}h & +b_{n-۱}h \\ \hline & & b_{۱} & b_{۲} & b_{n-۲} & b_{n-۱} & 0 \end{array}$$

که در آن :

$$b_{۱}=a_{۱}+h\ ,\ b_{۲}=a_{۲}+b_{۱}h\ ,\ \dots\ ,\ b_{n-۱}=a_{n-۱}+b_{n-۲}h\ ,\ a_{n}+b_{n-۱}h=0$$

در روش نیوتن عملیات بالارا به‌ترتیب عکس انجام میدهیم . یعنی :

$$\begin{array}{llllll} a_{n} & +a_{n-۱} & +a_{n-۲}+\cdots+a_{۲} & +a_{۱} & +۱ \\ & -b_{n-۱} & -b_{n-۲}-\cdots-b_{۲} & -b_{۱} & -۱ \\ \hline & -b_{n-۲}h & -b_{n-۳}h-\cdots-b_{۱}h & -h & 0 \end{array}$$

دراین روش‌چون h یکی‌از مقسوم‌علیه های a_n است‌لذا a_n را برh تقسیم‌نموده و خارج‌قسمت آنراکه برابر $-b_{n-۱}$ است با $a_{n-۱}$ جمع نموده‌ایم تا $-b_{n-۲}h$ بدست آید . مقدار اخیر را بر h بخش میکنیم تا $-b_{n-۲}$ بدست آید و سپس آنرا با $a_{n-۲}$ جمع مینماییم تا $-b_{n-۳}h$ بدست آید والاآخر .

اگر در طول عملیات بالا هریک از $b_r\ (r=۱\ ,\ ۲\ ,\ \dots\ ,\ n-۱)$ ها عدد درستی نباشند ، $f(x)$ بر $x-h$ بخش پذیر نبوده و باید محاسبات را بدانجا خاتمه داد . بعبارت دیگر آخرین عدد در انتهای خط باید برابر صفر باشد .

برای ساده کردن‌عملیات ، عدد غیرمشخصی مانند a انتخاب مینماییم. اگر $x-h$ یکی از فاکتورهای $f(x)$ باشد $f(a)$ بر $a-h$ بخش پذیر خواهد بود . معمولاً $a=\pm۱$ اختیار مینمایند .

مثال ۱- تعداد و علامت ریشه های حقیقی و مقدار ریشه های گویای معادله :

$$f(x)=x^{٤}-۳۹x^{۲}+٤٦x-۱٦۸=0$$

را بدست آورید .

حل - بنابر قسمت (III) از قسمت (الف) چون درجه $f(x)$ زوج و

$$A_{٤}=-۱٦۸<0$$

است معادله بالا دست کم دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی میباشد .

ازطرف دیگرچون ضریب $x^{۳}$ در معادله صفروضرایب $x^{٤}$ و $-۳۹x^{۲}$ مختلف العلامه هستند لذا بنابر قانون **دوگوا** معادله دارای ریشه موهومی نیست $(r-۱=0)$.

ولی ازآنجایی که معادله فوق دارای سه تغییرعلامت (درجمل $-۳۹x^{۲}$, $٤٦x$, -۱٦۸) و $f(-x)$ دارای یک تغییرعلامت میباشد لذا تعداد ریشه های مثبت معادله حداکثرسه و تعداد ریشه های منفی معادله حداکثر یک میباشد . بعبارت دیگر معادله دارای سه ریشه مثبت و یک ریشه منفی است .

برای یافتن کرانه های ریشه ها به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$f(x)=x^{۲}(x^{۲}-۳۹)+۲(۲۳x-۸٤)$$

$$٤f(-x)=۲x^{۲}(x^{۲}-۷۸)+(x^{٤}-٦۷۲)+x(x^{۳}-۱۸٤)$$

بنابراین نتیجه میشود که تمام ریشه های حقیقی معادله بین -۹ و ۷ قرار دارند .

اگر h یکی از ریشه های گویای معادله باشد ، h عدد درستی بوده و $\pm h$ یکی از مقسوم علیه های $۱٦۸=۲^{۳}\times۳\times۷$ است. مقادیرممکنه h که درفاصله $(-۹ , ۷)$ واقع شده اند عبارت خواهند بود از :

$$\pm۱ , \pm۲ , \pm۳ , \pm٤ , \pm٦ , -۷ , -۸$$

بسهولت میتوان تعدادی از اعداد بالارا فوراً مستثنی کرد . زیرا :

$$f(۱)=-۱٦۰=-۲^{۵}\times۵ \quad ; \quad f(-۱)=-۲۵۲=-۲^{۲}\times۳^{۲}\times۷$$

بنابراین ±۱ ریشه های معادله (I) نیستند .

همچنین اگر h یکی از ریشه ها باشد $(h-۱)$ یکی از مقسوم علیه های ۱٦۰ بوده و بدین ترتیب میتوانیم -۲ , -٤ , -٦ , -۸ را مستثنی نماییم بطریق مشابه $(-۱-h)$ نیز باید یکی از مقسوم علیه های -۲۵۲ باشد وبالنتیجه میتوان اعداد ٤ و ۱ را نیز مستثنی کرد . اعداد مانده عبارت خواهند بود از :

$$۲ , +۳ , -۳ , +٦$$

اگراین اعداد را با استفاده ازروش نیوتن آزمایش کنیم می بینیم که -٦ و ۷ تنها ریشه های گویای معادله هستند .

(۱−۲)	−۱٦۸	+٤٦	−۳۹	+0	+۱
		−۸٤	−۱۹	−۲۹	
		−۳۸	−۵۸	−۲۹	
(۱−۳)	−۱٦۸	+٤٦			
		−۵٦			
		−۱۰*			
(۱+۳)	−۱٦۸	+٤٦	−۳۹		
		+۵٦	−۳٤		
		۱۰۲	−۷۳*		
(۱−٦)	−۱٦۸	+٤٦	−۳۹	+0	+۱
		−۲۸	+۳	−٦	−۱
		+۱۸	−۳٦	−٦	0
(۱+۷)	−۱٦۸	+٤٦	−۳۹	+0	+۱
		+۲٤	−۱۰	+۷	−۱
		۷۰	−٤۹	۷	0

چ - یافتن ریشه‌های موهومی معادلات

چون معادلات درجه سوم دست کم دارای یک ریشه حقیقی است لذا مانند مثال سوم قسمت (ت) همواره میتوان این نوع معادلات را به حاصلضرب یک معادله درجه دوم و یک معادله درجه اول تجزیه کرد. بطریق مشابه میتوان معادله درجه چهارمی که دارای دو ریشه حقیقی و یا هر معادله یی که دارای یک زوج ریشه موهومی است به حاصلضرب یک عامل درجه دوم و عوامل دیگر تجزیه کرد. ولی اگر تعداد ریشه های موهومی دو و یا بیشتر باشد باید مستقیماً ریشه های موهومی را مورد بررسی قرار داد. یک روش که از **گشتاورها** استفاده میکنند ذیلاً توضیح میدهیم.

معادله :

$$z^n+A_1z^{n-1}+A_2z^{n-2}+\cdots+A_{n-1}z+A_n=0 \quad (٦.٦۱۵٤)$$

---

* محاسبات دراین مرحله متوقف میشود زیرا اعداد ۱۰ و ۷۳ بر ۳ بخش پذیر نیستند.

که درآن z عدد موهومی و $A_n , A_{n-١} , \dots , A_٢ , A_١$ اعداد حقیقی هستند درنظر میگیریم .

اگر $z_n , \dots , z_٢ , z_١$ ریشه‌های معادله (٦ . ٦١٤٤) باشند قرار میدهیم :

$$s_k = z_١^k + z_٢^k + z_٣^k + \cdots + z_n^k \quad , \quad (k=0 , ١ , ٢ , \dots) \qquad (٦ . ٦١٥٥)$$

s_k را **گشتاور مرتبه** k ام ریشه‌ها نامیم .

میتوان نشان‌داد که s_k رابرحسب ضرایب $A_n , A_{n-١} , \dots , A_٢ , A_١$ میتوان ازروابط زیر بدست آورد :

$$s_٠ = n \ , \ s_١ + A_١ = 0 \ , \ s_٢ + A_١ s_١ + ٢A_٢ = 0 \ , \dots$$

$$s_k + A_١ s_{k-١} + \cdots + A_{k-١} s_١ + kA_k = 0 \qquad (٦ . ٦١٥٦)$$

$$(k = ١ , ٢ , \dots , n-١)$$

$$s_k + A_١ s_{k-١} + \cdots + A_{n-١} s_{k-n+١} + A_n s_{k-n} = 0 \quad , \quad (k \geqslant n)$$

مثلاً درمورد معادله : $z^٥ - ٤z^٣ + ٢z^٢ - z + ١ = 0$

چنین داریم : $A_١ = 0 \ , \ A_٢ = -٤ \ , \ A_٣ = ٢ \ , \ A_٤ = -١ \ , \ A_٥ = ١$

$$s_٠ = ٥ \ , \ s_١ + 0 = 0 \ , \ s_٢ + 0s_١ - ٨ = 0$$

$$s_٣ + 0s_٢ - ٤s_١ + ٦ = 0 \quad , \quad s_٤ + 0s_٣ - ٤s_٢ + ٢s_١ - ٤ = 0$$

$$s_k + 0s_{k-١} - ٤s_{k-٢} + ٢s_{k-٣} - s_{k-٤} + s_{k-٥} = 0$$

برای مقادیر $k = ٥ , ٦ , \dots$. بالنتیجه ؛

$$s_٠ = ٥ \ , \ s_١ = 0 \ , \ s_٢ = ٨ \ , \ s_٣ = -٦ \ , \ s_٤ = ٣٦$$

$$s_٥ = ٤s_٣ - ٢s_٢ + s_١ - s_٠ = -٤٥ \quad , \quad s_٦ = ١٦٤ \ , \dots$$

اکنون‌فرض میکنیم‌ریشه های‌معادله (٦ . ٦١٤٤) درصفحه‌موهومی‌توزیع‌شده باشند. بنابراین دورترین ریشه از مبدأ زوج ریشه مزدوج $z_١$ و $\overline{z_١}$ است. **درآینصورت‌برای مقادیر بزرگ k عبارت** $z_١^k + z_٢^k$ **تقریبی برای** s_k **میباشد .**

زیرا بنابر فرمول **مواور** چنین داریم :

$$z_1{}^k=r_1{}^k(\cos k\theta_1+i\sin k\theta_1)$$

لذافاصله $z_1{}^k$ از مبدأ برابر $r_1{}^k$ است و بالنتیجه برای مقادیر بزرگ k ریشه‌های z_1 و $\overline{z_1}$ که فاصله آنها از مبدأ بیشتر از سایر ریشه‌ها است در عبارت s_k مؤثرتر خواهند بود. اگر فرض نماییم $s_k=z_1{}^k+\overline{z_1}{}^k$ باشد دراینصورت s_k گشتاور مرتبه k ام معادله درجه دومی مانند $az^۲+bz+c=0$ که درآن z_1 و $\overline{z_1}$ ریشه‌های آن هستند میباشد. لذا بااستفاده از رابطه (۶ . ۶۱۴۶) برای مقادیر $k \geqslant ۲$ چنین داریم:

$$s_k+\frac{b}{a}s_{k-1}+\frac{c}{a}s_{k-۲}=0$$

و یا:

$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-۲}=0 \qquad (۶ . ۶۱۵۷)$$

رابطه بالاباید بطور تقریب برای مقادیر بزرگ k صادق باشد. لذا اگر مقادیر s_k رابرای $k=۱, ۲, ...$ محاسبه نماییم میتوانیم با محاسبه نمودن عبارت (۶ . ۶۱۵۷) برای دو مقدار متوالی ونسبتاً بزرگ k مقادیر a , b , c را حذف کنیم. این روش منجر به سه معادله زیر میشود:

$$az^۲+bz+c=0$$

$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-۲}=0$$

$$as_{k+1}+bs_k+cs_{k-1}=0$$

از حذف a , b , c بین سه معادله بالا، معادله درجه دوم مطلوب بصورت دترمینان زیر بدست میآید:

$$\begin{vmatrix} z^۲ & z & ۱ \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-۲} \\ s_{k+1} & s_k & s_{k-1} \end{vmatrix}=0 \qquad (۶ . ۶۱۵۸)$$

برای مقادیر بزرگ k ریشه‌های معادله درجه دوم فوق تقریباً ریشه‌های z_1 و $\overline{z_1}$ است.

اگر دورترین ریشه از مبدأ حقیقی باشد با تکرار استدلال بالا بسهولت میتوان نشان داد که z_1 درمعادله خطی $az+b=0$ و بالنتیجه در دستگاه معادلات:

$$az+b=0 \quad , \quad as_k+bs_{k-۱}=0$$

صدق میکند . لذا برای مقادیر بزرگ k ، عبارت $z=\frac{s_k}{s_{k-۱}}$ ریشه حقیقی تقریبی مورد نظر میباشد .

ازمطالبی که بیان شد نتیجه میگیریم ، لازم است از ابتدا بدانیم که آیا معادله دارای یک زوج ریشه موهومی یا ریشه ساده حقیقی یا ترکیبات دیگری از ریشه‌ها که در فاصله حداکثر از مبدأ قرار دارند میباشد. برای این منظوراز گشتاورهااستفاده میکنیم. درحالتی که معادله دارای ریشه ساده حقیقی باشد وفاصله آن از مبدأ از سایر ریشه‌ها بزرگتر باشد علامت s_k (برای ریشه مثبت) ثابت میباشد و یا تغییر علامت میدهد (برای ریشه‌های منفی) . درصورتیکه درمورد ریشه‌های موهومی چنین وضعی پیش نمیآید .

اگر فاصله سه ریشه (یا تعداد بیشتر) از مبدأ حداکثر باشد روش بالا عملی نبوده و تقریباً همواره میتوان این اشکال را با تبدیل ساده‌یی مانند $z'=z+۱$ برطرف نمود . معادله جدیدی که برحسب z' بدین ترتیب بدست میآید معمولاً فاقداشکال توصیف شده بالا است. همین روش را میتوان درموردیکه $\pm a$ ریشه‌های حقیقی معادله در فاصله حداکثر قرار دارند بکار برد .

اگر ریشه هایی که در فاصله حداکثر واقع شده‌اند $x_۱ \pm iy_۱$ باشد و این ریشه‌ها دوگانه یا سه گانه و یا بطورکلی چندگانه باشند دراینصورت میتوان نشان داد که برای مقادیر بزرگ k تقریباً $x_۱+iy_۱$ درمعادله (٦١٥٨ . ٦) صدق میکند .

مثال ۱- ریشه‌های حقیقی و موهومی معادله $z^۳+z+۱=0$ را بدست آورید . (این معادله درواقع همان مثال ۳ قسمت (ت) است) .

حل - بااستفاده از رابطه (٦١٥٦ . ٦) مقادیر s_k برای مقادیر :

$$k=0,۱,۲,۳,\ldots,۲۱$$

عبارتند از :

$$۳,0,-۲,-۳,۲,۵,۱,-۷,-٦,٦,۱۳,0,-۱۹,-۱۳$$

$$۱۹,۳۲,-٦,-۵۱,-۲٦,۵۷,۷۷,-۳۱$$

از علامتهای گشتاورهااستنباط میکنیم که معادله دارای ریشه‌های حقیقی نیست و لذا فرض میکنیم معادله دارای یک زوج ریشه‌های موهومی است و دترمینان (٦١٥٨ . ٦) را برای $k=۱۰$ تشکیل میدهیم . یعنی :

$$\begin{vmatrix} z^۲ & z & ۱ \\ ۱۳ & ۶ & -۶ \\ ٠ & ۱۳ & ۶ \end{vmatrix} = ٠$$

و یا : $۱۱۴z^۲ - ۷۸z + ۱۶۹ = ٠ \quad ; \quad z = -٠٫۳۴۲ \pm ۱٫۱۷i$

برای $k = ۲٠$ تقریب بهتری برای ریشه‌ها بدست میاید. زیرا :

$$\begin{vmatrix} z^۲ & z & ۱ \\ ۷۷ & ۵۷ & -۲۶ \\ -۳۱ & ۷۷ & ۵۷ \end{vmatrix} = ٠$$

و یا : $۵۲۵۱z^۲ - ۳۵۸۳z + ۷۶۹۶ = ٠$

$$z = ٠٫۳۴۱۱۷ \pm ۱٫۱۶۱۵۶i$$

روش بالا را میتوان برای یافتن ریشه ، یا ریشه هایی که درمجاورت مبدأ مختصات قراردارند و فاصله آنها از مبدأ از سایر ریشه‌ها نزدیکتر است بکار بریم . زیرا با تبدیل متغیر $w = \frac{۱}{z}$ معادله‌یی برحسب w بدست میاوریم. اگر :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

دراینصورت :

$$w = \frac{۱}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{۱}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

بنابراین دورترین ریشه‌های w از مرکز متناظر با نزدیکترین ریشه‌های z از مبدأ خواهند بود. درمورد مثال بالا تبدیل متغیر $w = \frac{۱}{z}$ آنرا مبدل‌به $w^۳ + w^۲ + ۱ = ٠$ مینماید و برای مقادیر $k = ٠, ۱, ۲, \ldots, ۲۱$ ، s_k دارای مقادیر زیر است :

$$۳, -۱, ۱, -۴, ۵, -۶, ۱٠, -۱۵, ۲۱, -۳۱, ۴۶, -۶۷, ۹۸$$

$$-۱۴۴, ۲۱۱, -۳٠۹, ۴۵۳, -۶۶۴, ۹۷۳, -۱۴۲۶, ۲٠۹٠, -۳٠۶۳$$

از مثبت و منفی بودن گشتاورها استنباط میکنیم که معادله دارای ریشه منفی است . برای $k = ۲۱$ خواهیم داشت :

$$w = \frac{s_k}{s_{k-۱}} = \frac{-۳٠۶۳}{۲٠۹٠} \quad , \quad z = -\frac{۲٠۹٠}{۳٠۶۳} = ٠٫۶۸۲۳۴$$

ریشه‌هایی که در این مثال بدست‌آوردیم تا پنج رقم اعشار با ریشه‌هایی که در مثال ۳ قسمت (ت) بدست آوردیم یکسان است .

۶۲ . ۶- معادلات خطی کوشی و لژاندر

معادله :

$$A_{۰}x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+A_{۱}x^{n-۱}\frac{d^{n-۱}y}{dx^{n-۱}}+\cdots+A_{n-۱}x\frac{dy}{dx}+A_{n}y=0 \qquad (۶ . ۶۲)$$

که در آن $A_{۰}\ ,\ A_{۱}\ ,\ A_{۲}\ ,\ \ldots\ ,\ A_{n}$ مقادیر ثابتی هستند به معادله کوشی* موسوم است. این معادله را با تبدیل متغیر $x=e^{z}$ میتوان بیک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرد . زیرا اگر اوپریتور $\frac{d}{dz}$ را به θ نمایش دهیم به ترتیب چنین داریم :

$$Dy=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{۱}{x}\cdot\frac{dy}{dz}$$

$$xDy=\frac{dy}{dz}=\theta y$$

$$D^{۲}y=\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{x}\cdot\frac{dy}{dz}\right)=\frac{۱}{x^{۲}}\left(\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}-\frac{dy}{dz}\right)$$

$$x^{۲}D^{۲}y=\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}-\frac{dy}{dz}=\theta(\theta-۱)y$$

$$D^{۳}y=\frac{d}{dx}\left[\frac{۱}{x^{۲}}\left(\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}-\frac{dy}{dz}\right)\right]$$

$$=-\frac{۲}{x^{۳}}\left(\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}-\frac{dy}{dz}\right)+\frac{۱}{x^{۳}}\left(\frac{d^{۳}y}{dz^{۳}}-\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}\right)$$

$$=\frac{۱}{x^{۳}}\left(\frac{d^{۳}y}{dz^{۳}}-۳\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}+۲\frac{dy}{dz}\right)$$

$$x^{۳}D^{۳}y=\theta(\theta-۱)(\theta-۲)y$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$x^{r}D^{r}y=\theta(\theta-۱)(\theta-۲)\ \ldots\ (\theta-r+۱)y$$

---

* این معادله را معادله اولر نیز مینامند.

پس‌از جایگزین کردن مقادیر xDy , x^2D^2y , x^3D^3y , ... , x^2D^2y در رابطه (٦ . ٦٢) چنین داریم :

$$[A_0\theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+1)+A_1\theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+2)+\dots+A_{n-1}\theta+A_n]y=0$$

و یا :

$$(\theta^n+B_1\theta^{n-1}+B_2\theta^{n-2}+\dots+B_{n-1}\theta+B_n)y=0 \qquad (٦ . ٦٢١)$$

$B_1 , B_2 , \dots , B_n$ توابعی‌از $A_0 , A_1 , \dots , A_n$ بوده وبالنتیجه مقادیرثابتی میباشند .

معادله مفسر (٦ . ٦٢١) معادله :

$$r^n+B_1r^{n-1}+B_2r^{n-2}+\dots+B_{n-1}r+B_n=0 \qquad (٦ . ٦٢٢)$$

بوده و بالنتیجه جواب معادله (٦ . ٦٢) شامل جملی مانند cx^r که در آن r در معادله مفسر بالا صدق میکند میباشد .

اگر معادله مفسر (٦ . ٦٢٢) دارای n ریشه متمایز $r=\alpha , \beta , \gamma , \dots , k$ باشد جواب عمومی معادله (٦ . ٦٢) عبارت میشود از :

$$c_1x^\alpha+c_2x^\beta+c_3x^\gamma+\dots+c_nx^k \qquad (٦ . ٦٢٣)$$

ولی اگر معادله مفسر (٦ . ٦٢٢) دارای ریشه مکرر مرتبه s ام $r=\alpha$ باشد قسمتی از جواب عمومی که متناظر بااین ریشه مکرر α است عبارت خواهد بود از :

$$x^\alpha[c_1+c_2Log|x|+c_3(Log|x|)^2+\dots+c_s(Log|x|)^{s-1}] \qquad (٦ . ٦٢٤)$$

معادله خطی **لژاندر** عبارت است از :

$$A_0(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+A_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2(ax+b)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+A_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+A_ny=0$$

$A_0 , A_1 , \dots , A_n , a , b$ مقادیر ثابتی هستند .

این معادله را میتوان باتبدیل متغیر $ax+b=\xi$ به معادله خطی کوشی و یاآنکه

مستقیماً باتبدیل متغیر $ax+b=e^z$ به‌معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرد. واضح است که اگر در معادله لژاندر $b=0$ و $a=۱$ باشد این معادله به معادله خطی کوشی تبدیل میشود.

مثال ۱- جواب عمومی معادله $(x^۳D^۳+۳x^۲D^۲-۲xD+۲)y=0$ رابیابید.

حل - تبدیل متغیر $x=e^z$ معادله بالا را مبدل به معادله:

$$[\theta(\theta-۱)(\theta-۲)+۳\theta(\theta-۱)-۲\theta+۲]y=(\theta^۳-۳\theta+۲)y$$
$$=(\theta-۲)(\theta-۱)^۲y=0$$

مینماید. این معادله دارای جواب عمومی $y=c_۱e^z+c_۲ze^z+c_۳e^{-۲z}$ است و لذا جواب عمومی معادله مطلوب عبارت میگردد از:

$$y=c_۱x+c_۲xLogx+\frac{c_۳}{x^۲}$$

مثال ۲- معادله زیر را حل کنید:

$$(x^۳D^۳+۲xD-۲)y=0$$

حل - تبدیل متغیر $x=e^z$ این معادله‌را مبدل به معادله:

$$[\theta(\theta-۱)(\theta-۲)+۲\theta-۲]y=(\theta-۱)(\theta^۲-۲\theta+۲)y=0$$

مینماید. این معادله دارای جواب عمومی $y=c_۱e^z+e^z(c_۲\cos z+c_۳\sin z)$ است.

پس:

$$y=c_۱x+x(c_۲\cos Logx+c_۳\sin Logx)$$

مثال ۳- معادله $[(۲x+۱)^۲D^۲+(٤x+۲)D'-٤]y=0$ را حل کنید.

حل - پس‌از جایگزین کردن $(۲x+۱)^r$ در معادله، معادله مفسر زیر بدست میآید:

$$٤r(r-۱)+٤r-٤=0\quad,\quad r^۲-۱=0$$

لذا جواب عمومی عبارت میگردد از:

$$y=c_۱(۲x+۱)+c_۲(۲x+۱)^{-۱}$$

۶۳ . ۶ - معادله خطی لاپلاس*

دراین معادله ضرایب ، تابع خطی‌ازمتغیر مستقل میباشند ، لذا :

$$[(A_0+B_0x)D^n+(A_1+B_1x)D^{n-1}+(A_2+B_2x)D^{n-2}+\cdots+(A_n+B_nx)]y=0 \qquad (\text{۶ . ۶۳})$$

اگرتمام مقادیرثابت B صفر باشند رابطه (۶۳ . ۶) یک معادله خطی باضرایب‌ثابت بوده و دارای جوابی بشکل تابع نمایی خواهد بود . شاید توجه باین مطلب بوده که در صدد برآمدند که تحقیق کنند آیا انتگرالی بشکل :

$$I=\int e^{xt}f(t)dt \qquad (\text{۶ . ۶۳۱})$$

درمعادله صدق میکند یاخیر . $f(t)$ و حدود انتگرال مستقل‌از x بوده و انتخاب آنها در اختیارما است .

درحالت کلی چنین داریم :

$$\frac{d^rI}{dx^r}=\int e^{xt}t^rf(t)dt$$

لذا اگر طرف‌چپ معادله (۶۳ . ۶) را مطابق معمول به Ly نمایش‌دهیم‌چنین داریم :

$$LI=\int e^{xt}[(A_0+B_0x)t^n+(A_1+B_1x)t^{n-1}+(A_2+B_2x)t^{n-2}+\cdots+(A_n+B_nx)]f(t)dt$$

$$=\int e^{xt}[P(t)+xQ(t)]f(t)dt$$

که در آن :

$$P(t)=A_0t^n+A_1t^{n-1}+A_2t^{n-2}+\cdots+A_n$$

$$Q(t)=B_0t^n+B_1t^{n-1}+B_2t^{n-2}+\cdots+B_n$$

اکنون :

---

* Laplace

$$\int e^{xt}x\,Q(t)f(t)dt=\int Q(t)\,f(t)\,\frac{\partial}{\partial t}(e^{xt})dt$$

$$=[e^{xt}Q(t)f(t)]-\int e^{xt}\,\frac{d}{dt}\,[Q(t)f(t)]dt$$

لذا $LI=٠$ خواهد بود هرگاه :

الف ـ $f(t)$ بقسمی باشد که :

$$\frac{d}{dt}\,[Q(t)f(t)]-P(t)f(t)=٠$$

ب ـ پس از یافتن $f(t)$ از عبارت بالا حدود انتگرال گیری چنان باشد که :

$$[e^{xt}Q(t)f(t)]=٠$$

شرط (الف) صادق خواهد بود هرگاه :

$$f(t)=\frac{١}{Q(t)}\,\exp\left\{\int\frac{P(t)}{Q(t)}dt\right\}$$

و بازاء این مقدار $f(t)$ شرط (ب) مبدل برابطه زیر میشود :

$$e^{xt+\int\frac{P}{Q}dt}=٠$$

تبصره ـ اکثراً دررابطه (٦٣١ . ٦) بجای t ضریب ثابتی ازآن مانند $-t$ و it بکار میبرند .

مثال ـ جواب عمومی معادله $xy''+(٢n+١)y'+xy=٠$ را بدست آورید .

حل ـ ازمقایسه این معادله با رابطه (٦٣ . ٦) معلوم میگردد که :

$$P(t)=(٢n+١)t \quad , \quad Q(t)=t^٢+١$$

$$\int\frac{P}{Q}\,dt=Log(t^٢+١)^{n+\frac{١}{٢}}$$

$$f(t)=\frac{١}{Q(t)}\,\exp\left\{\int\frac{P(t)}{Q(t)}dt\right\}=\frac{١}{t^٢+١}\,\exp\left\{Log(t^٢+١)^{n+\frac{١}{٢}}\right\}$$

$$=(t^{۲}+۱)^{n-\frac{۱}{۲}}$$

اگر در رابطه (۶۳۱ . ۶) ، t را به it تبدیل کنیم . عبارت :

$$I=\int e^{ixt}(۱-t^{۲})^{n-\frac{۱}{۲}}dt$$

در معادله دیفرانسیل صدق خواهد نمود هرگاه I متقارب بوده و حدود انتگرال چنان انتخاب شوند که :

$$[e^{ixt}(۱-t^{۲})^{n+\frac{۱}{۲}}]=0$$

متحداً برابر صفر باشد . همانطورکه میدانیم عبارت I درصورتی متقارب است که n مثبت باشد و اگر حدود انتگرال را منهای یک وبعلاوه یک اختیار کنیم عبارت‌بالا نیز صفرخواهد شد . قسمت موهومی انتگرال چون تابع زیر علامت انتگرال تابع فردی از متغیر t است مقدار آن برابر صفر میگردد لذا رابطه :

$$y=\int_{-۱}^{۱}\cos(xt)(۱-t^{۲})^{n-\frac{۱}{۲}}dt$$

در معادله صدق میکند . باقرار دادن $t=\cos\theta$ معلوم میشود که تابع :

$$y=\int_{0}^{\pi}\cos(x\cos\theta)\sin^{۲n}\theta d\theta$$

نیز در معادله صدق میکند . انتگرال فوق درنظریه توابع بسل بطور وسیعی بکار میرود .

مسائل

۱- معادلات زیر را حل کنید .

الف - $(D^{۲}+۲D-۱۵)y=0$.

ب - $(D^{۳}+D^{۲}-۲D)y=0$.

پ - $(D^{٢}+٦D+٩)y=0$.

ت - $(D^{٤}-٦D^{٣}+١٢D^{٢}-٨D)y=0$.

ث - $(D^{٢}-٤D+١٣)y=0$.

ج - $(D^{٢}+٢٥)y=0$.

چ - $(D^{٤}+٤D^{٢})y=0$.

ح - $(D^{٣}-D^{٢}+٩D-٩)y=0$.

خ - $(D^{٤}-٦D^{٣}+١٣D^{٢}-١٢D+٤)y=0$.

د - $(D^{٣}+٢D^{٢}-D-٢)y=0$.

ذ - $(D^{٤}+١٣D^{٢}+٣٦)y=0$.

ر - $(D^{٤}-١٣D^{٢}+٣٦)y=0$.

ز - $(D^{٣}+٨)y=0$.

ژ - $(D^{٦}-٦٤)y=0$.

س - $(D^{٦}+٦٤)y=0$.

ش - $(D^{٣}-٣D^{٢}+٣D-١)y=0$.

ص - $(D^{٤}+١)y=0$.

ض - $(D^{٥}+٢D^{٣}+D)y=0$.

ط - $(D^{٥}+١)y=0$.

ظ - $(D^{٨}-٢٥٦)y=0$.

ع - $(٣٦D^{٣}-١٤٤D^{٢}+١٩١D-٨٤)y=0$.

غ - $(D^{٣}+٥D^{٢}-١)y=0$.

ف - $(D^{٤}-٥D^{٢}+D\pm٤)y=0$.

ق - $(D^{٤}+D-١)y=0$.

ك - $(D^{٤}+D^{٣}+D^{٢}+D+١)y=o$.

٢- جوابهای متناظر باهریک از معادلات زیر را که درشرایط اولیه مربوطه صدق میکنند بیابید :

الف - $(D^{٢}+١)y=o \;;\; y(o)=١ \,,\; y'(o)=o$.

ب - $(D^{٢}+D-٣)y=o \;;\; y(o)=o \,,\; y'(o)=١$.

پ - $(D^{٢}+٤D+٤)y=o \;;\; y(o)=١ \,,\; y'(o)=١$.

ت - $(D^{٢}-٢D+٥)y=o \;;\; y(o)=٢ \,,\; y'(o)=٤$.

ث - $(D^{٢}-٤D+٢٠)y=o \;;\; y\left(\frac{\pi}{٢}\right)=o \,,\; y'\left(\frac{\pi}{٢}\right)=١$.

ج - $(٣D^{٣}+٥D^{٢}+D-١)y=o \;;\; y(o)=o \,,\; y'(o)=١ \,,\; y''(o)=-١$.

چ - $(D^{٣}+٢D^{٢}-D-٢)y=o \;;\; y(o)=١ \,,\; y'(o)=o$.

ح - $l\frac{d^{٢}\theta}{dt^{٢}}+g\theta=o \;;\; \theta(o)=\alpha \,,\; \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{t-o}=o$. l, g, α مقادیر ثابت هستند .

(معادله تقریبی نوسانهای یک‌پاندول ساده بطول l که ازحال سکون شروع بحرکت میکند . α زاویه‌یی است که پاندول درحالت سکون با امتداد شاقول تشکیل میدهد) .

٣- جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر راکه در شرایط‌کرانه‌یی متناظر صدق میکنند بدست آورید .

الف - $(D^{٢}-D-٦)y=o \;;\; y(o)=١ \,,\; y(١)=o$.

ب - $(D^{٢}+١)y=o \;;\; y(o)=١ \,,\; y\left(\frac{\pi}{٢}\right)=٢$.

پ - $(D^{٢}+١)y=o \;;\; y(o)=o \,,\; y(\pi)=o$.

٤- معادله دیفرانسیل :

$$m\frac{d^{٢}s}{dt^{٢}}+k\frac{ds}{dt}+cs=0$$

مفروض است. تعیین کنید بین ضرایب s , c , k , m که مقادیر ثابتی هستند چه رابطه یی باید برقرار باشد تا جواب معادله اخیر بشکل توابع مثلثاتی گردد.

(معادله بالا معادله حرکت نقطه مادی بجرم m که در امتداد حرکت مستقیم الخط خود همواره جذب نقطه ثابتی میگردد میباشد. نیروی وارده براین نقطه مادی C برابر فاصله آن از نقطه ثابت و نیروی اصطکاك k برابر سرعت است. مثلا آلات تنظیم طول موج دستگاه گیرنده رادیو که در هوا ارتعاش مینماید درنظر میگیریم. نیروی الاستیکی که سعی میکند آنرا دوباره بحال ترازمندی بازگرداند متناسب با فاصله و نیروی مقاومت هوا نیز متناسب با سرعت است).

٥ـ نشان دهید اگر k بقدری کوچک باشد که بتوان از $\frac{k^{٢}}{mc}$ صرفنظر کرد جواب معادله مسئله (٤) تقریباً $e^{-\frac{kt}{٢m}}$ برابر حالتی است که در معادله اخیر $k=0$ باشد. (ازاین مسئله میتوان نتیجه گرفت که نیروی مقاوم کم، عملاً فرکانس را تغییری نمیدهد ولی دامنه ارتعاشات متوالی مانند یک تصاعد هندسی تنزل میکند).

٦ـ معادله $L\frac{d^{٢}\theta}{dt^{٢}}+R\frac{d\theta}{dt}+\frac{Q}{C}=0$ با شرایط:

$$CR^{٢}<٤L\ ,\ \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=0}=0\ ,\ Q(0)=Q_0$$

حل کنید.

(Q شارژ در لحظه t بریکی از پوششهای ظرف **لیدن** * بظرفیت C است. پوششهای این ظرف درلحظه $t=0$ بوسیله سیم مقاومت R و ضریب خود القایی L بیکدیگر متصل میگردند).

٧ـ معادلات زیر را حل کنید:

الف ـ $(x^{٢}D^{٢}-٣xD+٤)y=0$.

ب ـ $(x^{٢}D^{٢}-٢xD+٢)y=0$.

Leyden *

پ - $(x^٣D^٣+٢x^٢D^٢)y=0$.

ت - $(x^٣D^٣+xD-١)=0$.

ث - $(x^٣D^٣+٣x^٢D^٢+xD+٨)y=0$.

ج - $(x^٤D^٤+٢x^٣D^٣+x^٢D^٢-xD+١)y=0$.

چ - $[٢(x+١)^٢D^٢-(x+١)D+١]y=0$.

ح - $[(١+٢x)^٢D^٢-٦(١+٢x)D+١٦]y=0$.

خ - $[(١+x)^٣D^٣+(١+x)^٢D^٢+٣(١+x)D-٨]y=0$.

٨ - بااستفاده از قانون علامات دکارت نشان دهید :

الف - اگر q مثبت باشد معادله $x^٣+px+q=0$ فقط دارای یک ریشه حقیقی است .

ب - معادله $x^٧-٣x^٤+٢x^٣-١=0$ اقلاً دارای چهار ریشه موهومی میباشد .

٩- بااستفاده از روش دسته بندی جمل یکی ازکرانه‌های فوقانی و تحتانی ریشه‌های معادلات زیر را بیابید .

الف - $x^٤-٣x^٣-٢x^٢+٧x+٣=0$.

ب - $x^٥-١٠x^٤-٥x^٣+٦x^٢-١١x-٣٥٠=0$.

راهنمایی - برای یافتن یکی ازکرانه‌های فوقانی معادله را بصورت :

$$x^٣(x^٢-١٠x-٥)+(٦x^٢-١١x-٣٥٠)$$

دسته بندی میکنیم . برای یافتن یکی ازکرانه‌های تحتانی x را به $-y$ تبدیل نموده و معادله جدید را بصورت $y(y^٤-١١)+y^٣(٩y-٥)+(y^٤-٦y^٢+٣٥٠)=0$ مینویسیم .

پ - $x^٤+٤x^٣-١١x^٢-٩x-٥٠=0$.

ت - $x^٤-٢x^٣+٣x^٢-٥x+١=0$.

ث - $٢x^٣-١١x^٢-١٠x-١=0$.

راهنمایی - معادله را بصورت $x(۲x^۲ - ۱۱x - ۱۱) + (x - ۱) = 0$ بنویسید .

ج - $x^۵ + x^۴ - ۶x^۳ - ۸x^۲ - ۱۵x - ۱۰ = 0$.

راهنمایی - معادله را بصورت $x(x^۴ - ۶x^۲ - ۱۵) + (x^۴ - ۸x^۲ - ۱۰) = 0$ بنویسید .

چ - $x^۵ - ۳x^۴ - ۲۴x^۳ + ۹۵x^۲ - ۴۶x - ۱۰۱ = 0$.

۱۰ - معادله $f(x) = x^n + A_۱x^{n-۱} + A_۲x^{n-۲} + \cdots + A_n = 0$ مفروض است . $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... ، A_n مقادیر ثابتی هستند . اگر $A-$ ضریبی از ضرایب فوق باشد که دارای بزرگترین قدر مطلق است ، نشان دهید $A + ۱$ یکی از کرانه های فوقانی ریشه ها است .

راهنمایی - اگر فرض کنیم $x > ۱$ باشد $f(x) > 0$ است هرگاه :

$$x^n > A(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + ۱) \quad \text{ویا} \quad x^n > A\frac{x^n - ۱}{x - ۱}$$

رابطه اخیر نیزدرصورتی برقرار است که $x^n > A\dfrac{x^n}{x - ۱}$ ویا $x - ۱ > A$.

۱۱- معادله $f(x) = x^n + A_۱x^{n-۱} + A_۲x^{n-۲} + \cdots + A_n = 0$ مفروض است . $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... ، A_n مقادیر ثابتی هستند . اگر $A-$ ضریبی از ضرایب فوق باشد که دارای بزرگترین قدرمطلق است و اولین ضریب منفی A_r باشدنشان دهید $\sqrt[r]{A} + ۱$ یکی از کرانه های فوقانی ریشه ها است .

راهنمایی - فرض میکنیم $x > ۱$ باشد . $f(x) > 0$ است هرگاه :

$$x^n > A(x^{n-r} + x^{n-r-۱} + \cdots + ۱) \quad \text{ویا} \quad x^n > A\frac{x^{n-r+۱} - ۱}{x - ۱}$$

رابطه اخیر درصورتی برقرار است که $x^n > A\dfrac{x^{n-r+۱}}{x - ۱}$ ویا $(x - ۱)x^{r-۱} > A$ ویا $(x - ۱)^r > A$ باشد یعنی $x > \sqrt[r]{A} + ۱$.

۱۲- با استفاده از مسئله (۱۰) نشان دهید که کرانه های قسمتهای (الف) و (ب) و (پ) و (ت) و (ث) مسئله (۹) بقرار زیر است :

الف - ۴ و ۴— ، ب - ۳۵۱ و ۵— . پ - ۹ و ۱۲— .

ت ـ ٦ و 0 . ث ـ ٧ و −٦ .

۱۳ـ باستفاده از مسئله (۱۱) یکی از کرانه‌های فوقانی ریشه‌های معادله :

$$x^{٧} - ١٠٠x^{٢} - ٢٣٧ = 0$$

را بیابید .

۱٤ـ ریشه‌های گویای معادلات زیر را بیابید :

الف ـ $x^{٣} - ٩x^{٢} + ٢٢x - ٢٤ = 0$.

ب ـ $x^{٣} - ٥x^{٢} - ١٨x + ٧٢ = 0$.

پ ـ $٣x^{٣} - ٢x^{٢} - ٦x + ٤ = 0$.

ت ـ $٤x^{٤} - ٣٦x^{٣} + ٤٥x^{٢} + ٥٤x - ٨١ = 0$.

ث ـ $٦x^{٤} - ٢٥x^{٣} + ٢٦x^{٢} + ٤x - ٨ = 0$.

ج ـ $٦x^{٤} + ٥٣x^{٣} - ٩٥x^{٢} - ٢٥x + ٤٢ = 0$.

۱٥ـ جمیع ریشه‌های معادلات زیر را بدست آورید :

الف ـ $z^{٣} - z + ١ = 0$.

ب ـ $z^{٣} + z^{٢} - z + ١ = 0$.

پ ـ $z^{٤} + ٤z^{٣} + z - ١ = 0$.

ت ـ $z^{٤} - z^{٣} + ١ = 0$.

ث ـ $٣z^{٥} + z^{٤} - ٥z^{٣} - ١٧z^{٢} - ٧z - ٥ = 0$.

ج ـ $٢٤z^{٦} + ١٦z^{٥} + ٥٨z^{٤} + ١٢z^{٣} - ١٨z - ٤٥ = 0$.

۱٦ـ نشان دهید اگر $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-١} + \cdots + a_n$ و $a_0 \neq 0$ و s_k گشتاور مرتبه k ام باشد ، برای مقادیر بزرگ k :

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = s_0 + \frac{s_١}{z} + \frac{s_٢}{z^{٢}} + \cdots + \frac{s_n}{z^n} + \cdots$$

و سپس گشتاورهای s_k را برای معادله $z^{٣} + z + ١ = 0$ محاسبه کنید .

راهنمایی ـ فرض میکنیم $f(z)=a_۰(z-z_۱)(z-z_۲)\ \dots\ (z-z_n)$ باشد. نشان دهید که :

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{z}{z-z_۱}+\frac{z}{z-z_۲}+\cdots+\frac{z}{z-z_n}$$

$$=\frac{۱}{۱-\left(\frac{z_۱}{z}\right)}+\frac{۱}{۱-\left(\frac{z_۲}{z}\right)}+\cdots+\frac{۱}{۱-\left(\frac{z_n}{z}\right)}$$

هرجمله را با سری هندسی متناظر آن یعنی :

$$\frac{۱}{۱-r}=۱+r+r^۲+\cdots+r^n+\cdots \qquad |r|<۱$$

تعویض کنید .

جوابها

۱ـ الف : $y=c_۱e^{۳x}+c_۲e^{-۵x}$.

ب : $y=c_۱+c_۲e^{x}+c_۳e^{-۲x}$.

پ : $y=c_۱e^{-۳x}+c_۲xe^{-۳x}$.

ت : $y=c_۱+c_۲e^{۲x}+c_۳xe^{۲x}+c_۴x^۲e^{۲x}$.

ث : $y=e^{۲x}(c_۱\cos ۳x+c_۲\sin ۳x)$.

ج : $y=c_۱\cos ۵x+c_۲\sin ۵x$.

چ : $y=c_۱+c_۲x+c_۳\cos ۲x+c_۴\sin ۲x$.

ح : $y=c_۱e^{x}+c_۲\cos ۳x+c_۳\sin ۳x$.

خ : $y=(c_۱+c_۲x)e^{x}+(c_۳+c_۴x)e^{۲x}$.

د : $y=c_۱e^{x}+c_۲e^{-x}+c_۳e^{-۲x}$.

ذ : $y=c_۱\cos(۲x-\alpha)+c_۲\cos(۳x-\beta)$.

ر: $y=c_۱\cosh(۲x-\alpha)+c_۲\cosh(۳x-\beta)$

و یا $y=A_۱e^{۲x}+A_۲e^{-۲x}+A_۳e^{۳x}+A_۴e^{-۳x}$.

ز: $y=c_۱e^{-۲x}+c_۲e^{x}\cos(x\sqrt{۳}-\alpha)$.

ژ: $y=c_۱e^{۲x}+c_۲e^{-۲x}+c_۳e^{-x}\cos(x\sqrt{۳}-\alpha)$
$+Fe^{x}\cos(x\sqrt{۳}-\beta)$.

س: $y=c_۱\cos ۲x+c_۲\sin ۲x+e^{x\sqrt{۳}}(c_۳\cos x+c_۴\sin x)$
$+e^{-x\sqrt{۳}}(c_۵\cos x+c_۶\sin x)$.

ش: $y=c_۱e^{x}+c_۲xe^{x}+c_۳x^۲e^{x}$.

ص: $y=e^{ax}(c_۱\cos ax+c_۲\sin ax)+e^{-ax}(c_۳\cos ax+c_۴\sin ax)$

که در آن $a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

ض: $y=c_۱+c_۲\cos x+c_۳\sin x+c_۴x\cos x+c_۵x\sin x$

ط:

$$y=c_۱e^{-x}+e^{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴}}\left(c_۲\cos\frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}+c_۳\sin\frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}\right)$$
$$+e^{\frac{۱-\sqrt{۵}}{۴}}\left(c_۴\cos\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}+c_۵\sin\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}\right).$$

و یا: $y=c_۱e^{-x}+e^{۰٫۸۰۹}(c_۲\cos ۰٫۵۸۸x+c_۳\sin ۰٫۵۸۸x)$
$-e^{-۰٫۳۰۹x}(c_۴\cos ۰٫۹۵۱x+c_۵\sin ۰٫۹۵۱x)$

ظ:

$$y=c_۱e^{۲x}+c_۲e^{-۲x}+c_۳\cos ۲x+c_۴\sin ۲x+e^{\sqrt{۲}x}(c_۵\cos\sqrt{۲}x+c_۶\sin\sqrt{۲}x)$$
$$+e^{-\sqrt{۲}x}(c_۷\cos\sqrt{۲}x+c_۸\sin\sqrt{۲}x).$$

ع: $y=c_۱e^{\frac{۳}{۲}x}+c_۲e^{\frac{۴}{۳}x}+c_۳e^{\frac{۷}{۶}x}$.

غ : $y=c_١e^{٠٫٤٢٩x}+c_٢e^{-٤٫٩٦x}+c_٣e^{-٠٫٤٧٠x}$.

ف : $y=c_١e^{١٫٢٢x}+c_٢e^{١٫٧٨x}+c_٣e^{-٠٫٨٦x}+c_٤e^{-٢٫١٥x}$.

ق : $y=c_١e^{-١٫٢٢x}+c_٢e^{٠٫٧٣x}+e^{-٠٫٢٥x}(c_٣\cos ١٫٠٣x$
$+c_٤\sin ١٫٠٣x)$.

ك : $y=e^{٠٫٣٠٩x}(c_١\cos ٠٫٩٥١x+c_٢\sin ٠٫٩٥١x)$
$+e^{-٠٫٨٠٩x}(c_٣\cos ٠٫٥٨٨x+c_٤\sin ٠٫٥٨٨x)$.

٢- الف : $y=\cos x$.

ب : $y=\frac{٢}{\sqrt{١٣}}e^{-\frac{t}{٢}}\sinh\left(\frac{\sqrt{١٣}t}{٢}\right)$.

پ : $y=(١+٣x)e^{-٢x}$.

ت : $y=e^{x}(٢\cos ٢x+\sin ٢x)$.

ث : $y=\frac{١}{٤}e^{٢x-\pi}\sin ٤x$.

ج : $y=\frac{٩}{١٦}e^{\frac{x}{٣}}+\left(\frac{x}{٤}-\frac{٩}{١٦}\right)e^{-x}$.

چ : $y=٢e^{-x}-e^{-٢x}$.

ح : $\theta=\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}$.

٣- الف : $y=\frac{e^{٣x}-e^{٥-٢x}}{١-e^{٥}}$.

ب : $y=\cos x+٢\sin x$.

پ : $y=c\sin x$.

٤- $k^{٢}<٤mc$.

٦- $Q=Q_{٠}e^{-\frac{Rt}{٢L}}\left(\cos nt+\frac{R}{٢Ln}\sin nt\right)$ که درآن :

$$n=\sqrt{\left(\frac{۱}{LC}-\frac{R^۲}{۴L^۲}\right)}$$

۷- الف : $y=c_۱x^۲+c_۲x^۲Logx$.

ب : $y=c_۱x+c_۲x^۲$.

پ : $y=c_۱+c_۲x+c_۳Logx$.

ت : $y=c_۱x+c_۲xLogx+c_۳xLog^۲x$.

ث : $y=c_۱x^{-۲}+c_۲x\cos(\sqrt{۳}\,Lcgx-\alpha)$.

ج : $y=c_۱x+c_۲xLgox+c_۳x(Logx)^۲+c_۴x(Logx)^۳$.

چ : $y=c_۱(x+۱)+c_۲\sqrt{x+۱}$.

ح : $y=(۱+۲x)^۲[c_۱+c_۲Log(۱+۲x)]$.

خ : $y=c_۱(۱+x)^۲+c_۲\cos[\beta+۲Log(۱+x)]$.

۹- الف : $-۲ , +۴$.   ب : $-۲ , ۱۱$.   پ : $-۴ , ۴$.

ت : ، $۰٫۵ , ۲$.   ث : $-۱ , ۷$.   ج : $-۳ , ۳٫۰۲$.

چ : $-۶ , ۷$.

۱۳- ۴ .

۱۴- الف : ۶ .   ب : $-۴ , ۶ , ۳$.   پ : $\frac{۲}{۳}$.

ت : $\frac{۲}{۳} , \frac{۳}{۲}$.   ث : $۲ , ۲ , \frac{۲}{۳} , -\frac{۱}{۲}$.

ج : $\frac{۲}{۳} , \frac{۳}{۲}$.

۱۵- الف : $۰٫۶۶۲۴ \pm ۰٫۵۶۲۳i \quad , \quad -۱٫۳۲۴۷$.

ب : $۰٫۴۱۹۶۴ \pm ۰٫۶۰۶۲۵i \quad , \quad -۱٫۸۳۹۳$.

پ : —٤ر٠٧٥٠ , ٠ر٤٨٥٧٨ , —٠ر٢٠٥٣٩ ± ٠ر٦٨٠٤٤i .

ت : ١ر٠١٨٩ ± ٠ر٦٠٢٦٠i , —٠ر٥١٨٩٢ ± ٠ر٦٦٦٣١i .

ث : —١ر٠٤٧٢٧ ± ١ر١٣٥٩٤i , —٠ر١٦٦٦٧ + ٠ر٠٥٥٢٨i ,
٢ر٠٩٤٥٤ .

ج : ± ٠ر٨٦٦٠٣ , ± ١ر٢٢٤٧i , —٠ر٣٣٣٣٣ ± ١ر٢٤٧٢i .

١٦-
$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=٣-٢z^{-٢}-٣z^{-٣}+٢z^{-٤}+\cdots$$

$$s_{\circ}=٣\ ,\ s_{١}=o\ ,\ s_{٢}=-٢\ ,\ s_{٣}=-٣\ ,\ s_{٤}=٢$$

فصل هفتم

اوپریتورها*

۷ . ۱- بحث مقدماتی درباره روش اوپریشنال**

۷ . ۱۱ - اوپریتور Q .

منظور از روش اوپریشنال آن است که جوابهای معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت راکه در شرایط اولیه صدق مینماید بدست آوریم .

تاکنون متغیر مستقل را با x و متغیر تابع را با y نشان میدادیم ولی برای بکار بردن معادلات دیفرانسیل در فیزیک ، شیمی وسایر رشته‌های مربوطه ، متغیر تابع را با x و متغیر مستقل را با t که نمایش زمان است نشان میدهیم .

برای توضیح در روش اوپریشنال معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

$$\frac{dx}{dt}-ax=f(t) \qquad (۷ . ۱۱)$$

با مقدار اولیه $x=x_o \;;\; t=o$ بازاء

راکه در آن a مقداری است ثابت درنظر میگیریم . رابطه (۷ . ۱۱) را یعنی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول و مقدار اولیه را توأماً « **مسئله مقدار اولیه** » نامیم .

همانطورکه قبلاً میدانیم جواب معادله دیفرانسیل (۷ . ۱۱) عبارت است از :

$$\frac{d}{dt}\,(xc^{-at})=f(t)e^{-at}$$

و از آنجا :

$$x(t)c^{-at}-x(o)=\int_{o}^{t} f(\tau)e^{-a\tau}d\tau$$

Operator *

Operatinal **

و یا :

$$x(t)=x(o)e^{at}+\int_{o}^{t} e^{a(t-\tau)}f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۱۱)$$

بالنتیجه جواب معادله دیفرانسیل (۱۱ . ۷) را میتوان بانتگرال گیری از o تا t بدست آورد. همچنین اگر از معادله (۱۱ . ۷) نسبت به t انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$x(t)-x_{o}-a\int_{o}^{t} x(\tau)d\tau=\int_{o}^{t} f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۱۲)$$

بالعکس اگر x در رابطه (۱۱۲ . ۷) صدق کند چون بازاء $t=o$ مقدار انتگرالهای واقع در رابطه (۱۱۲ . ۷) صفر هستند لذا $x(o)=x_{o}$ بوده وازمشتق گیری عبارت (۱۱۲ . ۷) نسبت به t خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dt}x(t)-ax(t)=f(t)$$

بنابراین «مسئله مقدار اولیه» (۱۱ . ۷) هم‌ارز معادله انتگرالی (۱۱۲ . ۷) است .

روش اوپریشنال ، رابطه (۱۱۲ . ۷) را مبنای بحث خود قرار میدهد و اگر رابطه (۱۱۲ . ۷) داده شده باشد دراین رابطه x_{o} موجود است درصورتیکه در معادله (۱۱ . ۷) باید مقدار اولیه را جداگانه بیان کرد .

نظر باینکه دراین فصل عمل انتگرال گیری از o تا t رُل اساسی دارد لذا سمبول معینی برای آن بکار خواهیم برد .

اگر f تابع غیر مشخصی از t باشد بنابرقرار داد بازاء جمیع مقادیر t ، Qf را که تابعی از t است با رابطه زیر تعیین میکنیم :

$$Qf(t)=\int_{o}^{t} f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۱۳)$$

Q را اوپریتور نامیم . بااین قرار داد رابطه (۱۱۲ . ۷) بصورت زیر نوشته میشود :

$$x-x_{o}-aQx=Qf$$

$$(۱-aQ)x=x_{o}+Qf \qquad (۷ . ۱۱٤)$$

باید توجه نمود که بجای $x-aQx$ عبارت $(۱-aQ)x$ نوشته شده است. اکنون جواب معادله (۷ . ۱۱۴) را بصورت :

$$x=\frac{۱}{۱-aQ}x_۰+\frac{Q}{۱-aQ}f \qquad (۷ . ۱۱۵)$$

مینویسیم .

واضح است که در حل معادله (۷ . ۱۱۴) نسبت به x ، $(۱-aQ)$ را مانند عدد معمولی فرض کرده و از اینکه $(۱-aQ)$ اوپریتور است و رابطه $\frac{۱}{۱-aQ}$ را باید قبلاً مشخص نمود صرفنظر کرده‌ایم .

حال فرض میکنیم $\frac{۱}{۱-aQ}$ را بطریقی تعریف کرده باشیم . از مقایسه روابط (۷ . ۱۱۱) و (۷ . ۱۱۵) خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۱-aQ}x_۰=x_۰e^{at} \quad , \quad \frac{Q}{۱-aQ}f(t)=\int_۰^t e^{a(t-\tau)}f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۱۶)$$

از دومین رابطه (۷ . ۱۱۶) چنین برمیآید که $\frac{Q}{۱-aQ}$ را باید اوپریتور محسوب کرد و از آنجا نتیجه میشود که $\frac{۱}{۱-aQ}$ نیز باید اوپریتور باشد درحالیکه از اولین رابطه (۷ . ۱۱۶) نمیتوان استنتاج نمود که عبارت $\frac{۱}{۱-aQ}$ اوپریتور است زیرا این عبارت در عدد ثابت $x_۰$ عمل میکند .

۷ . ۱۲ - محاسبات اصلی با اوپریتور Q

اکنون مسئله «مقدار اولیه» را برای معادله مرتبه دوم :

$$\frac{d^۲x}{dt^۲}+a\frac{dx}{dt}+bx=f(t) \qquad (۷ . ۱۲)$$

بازاء $x=x_۰ \ , \ \frac{dx}{dt}=x_۱ \ ; \ t=0$

در نظر میگیریم . پس از انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt}-x_{۱}+a(x-x_{۰})+bQx=Qf$$

$$\frac{dx}{dt}+ax+bQx=x_{۱}+ax_{۰}+Qf \qquad (۷ . ۱۲۱)$$

حال اگر از رابطه (۷ . ۱۲۱) مجدداً انتگرال بگیریم چنین داریم :

$$x-x_{۰}+aQx+bQ(Qx)=Q(x_{۱}+ax_{۰})+Q(Qf)$$

$$x+aQx+bQ^{۲}x=x_{۰}+aQx_{۰}+Qx_{۱}+Q^{۲}f \qquad (۷ . ۱۲۲)$$

که در آن بجای $Q(Qx)$ و $Q(Qf)$ به ترتیب $Q^{۲}x$ و $Q^{۲}f$ نوشته شده است. لذا اوپریتور $Q^{۲}$ انتگرال گیری مضاعف را نشان میدهد .

حال فرض میکنیم x در رابطه (۷ . ۱۲۲) صدق کند . نظر باینکه بازاء $t=0$ مقادیر Q و $Q^{۲}$ متحد صفر هستند لذا $x=x_{۰}$ خواهد بود . همچنین اگر از رابطه (۷ . ۱۲۲) نسبت به t مشتق بگیریم رابطه (۷ . ۱۲۱) بدست میآید که بازاء $t=t_{۰}$ مقدار $\frac{dx}{dt}=x_{۱}$ است .

در این مورد نیز مسئله مقدار اولیه (۷ . ۱۲) را بعبارت (۷ . ۱۲۲) که هم‌ارز رابطه (۷ . ۱۲) بوده وشامل انتگرال گیری و مقادیر اولیه $x_{۰}$ و $x_{۱}$ است تبدیل کرده‌ایم .

اکنون عبارت سمت چپ رابطه (۷ . ۱۲۲) را بصورت $(۱+aQ+bQ^{۲})x$ نوشته و سپس آنرا بحاصلضرب عوامل درجه اول $(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)$ که در آن λ و μ ریشه‌های معادله درجه دوم $k^{۲}+ak+b=0$ است تجزیه میکنیم و بالنتیجه رابطه (۷ . ۱۲۲) بصورت زیر درمیآید :

$$(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)x=x_{۰}+aQx_{۰}+Qx_{۱}+Q^{۲}f$$

مثال - مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید :

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}-۳\frac{dx}{dt}+۲x=f(t)$$

$$x=۱\ ,\ \frac{dx}{dt}=-۱\ ;\ t=0\ \text{بازاء}$$

حل - اگر از رابطه بالا دوبار انتگرال بگیریم تا عبارت مشابه رابطه (۷ . ۱۲۲) بدست آید خواهیم داشت :

$$(۱-۳Q+۲Q^{۲})x=۱-۳Q(۱)+Q(-۱)+Q^{۲}f$$
$$=(۱-٤Q)(۱)+Q^{۲}f$$

$$(۱-Q)(۱-۲Q)x=(۱-٤Q)(۱)+Q^{۲}f$$

اگر اوپریتور $(۱-Q)(۱-۲Q)$ را مانند عدد معمولی فرض کنیم چنین داریم :

$$x=\frac{۱-٤Q}{(۱-Q)(۱-۲Q)}(۱)+\frac{Q^{۲}}{(۱-Q)(۱-۲Q)}f$$

برای محاسبه جمله اول طرف راست رابطه فوق ملاحظه میکنیم که میتوان‌بااستفاده ازاولین رابطه (۷ . ۱۱۶) عباراتی‌برای $\frac{۱}{۱-Q}(۱)$ و $\frac{۱}{۱-۲Q}(۱)$ بدست‌آورد وبالنتیجه برای محاسبه $\frac{۱-٤Q}{(۱-Q)(۱-۲Q)}(۱)$ ابتدا آنرا به‌کسرهای جزئی تجزیه میکنیم و از آنجا خواهیم داشت :

$$\frac{۱-٤Q}{(۱-Q)(۱-۲Q)}(۱)=\left(\frac{۳}{۱-Q}-\frac{۲}{۱-۲Q}\right)(۱)=۳e^{t}-۲e^{۲t}$$

بطریق مشابه میتوان عبارت $\frac{Q^{۲}}{(۱-Q)(۱-۲Q)}f$ را بصورت زیر نوشت :

$$\frac{Q}{(۱-Q)(۱-۲Q)}(Qf)=\left[\frac{-۱}{۱-Q}+\frac{۱}{۱-۲Q}\right](Qf)$$
$$=-\frac{Q}{۱-Q}f+\frac{Q}{۱-۲Q}f$$

و از آنجا بنابر دومین رابطه (۷ . ۱۱۶) جواب معادله بصورت زیر خواهد بود :

$$x=۳e^{t}-۲e^{۲t}+\int_{\circ}^{t}[c^{۲(t-\tau)}-e^{(t-\tau)}]f(\tau)d\tau$$

بعداً نشان خواهیم داد که قوانین معمولی جبری درباره سمبول Q صادق است .

١٣ . ٧ ـ اوپریتور

بنابر تعریف هرگاه قانونی داشته باشیم که بتوانیم از هرتابع غیرمشخص $f(t)$ تابع جدید Af رابدست آوریم A را **اوپریتور** نامیم.

مثال ١ـ تابع غیر مشخص $f(t)=٦t^٢+٢t+٥$ مفروض است .

الف ـ اگر قانون داده شده انتگرال گیری از ٠ تا t باشد دراینصورت اوپریتور A همان Q است که آنرا درشماره (٧ . ١١) تعریف کردیم . لذا :

$$Af(t)=A[٦t^٢+٢t+٥]=Q[٦t^٢+٢t+٥]$$
$$=\int_٠^t (٦t^٢+٢t+٥)dt=٢t^٣+t^٢+٥t$$

ب ـ اگر قانون داده شده مشتق گیری باشد دراینصورت اوپریتور A همان $\frac{d}{dt}=D$ است . پس :

$$Af(t)=A[٦t^٢+٢t+٥]=D[٦t^٢+٢t+٥]$$
$$=\frac{d}{dt}(٦t^٢+٢t+٥)=١٢t+٢$$

مثال ٢ـ دنباله $f(t)=\left\{\frac{١}{t(t+١)}\right\}$ مفروض است.

الف ـ اگر قانون داده شده یافتن مجموع t جمله اول دنباله فوق باشد دراینصورت اوپریتور A همان $\sum_{١}^{t}$ است و از آنجا چنین داریم :

$$Af(t)=A\left[\frac{١}{t(t+١)}\right]=\sum_{١}^{t}\frac{١}{t(t+١)}=\sum_{١}^{t}\left[\frac{١}{t}-\frac{١}{t+١}\right]$$
$$=١-\frac{١}{t+١}=\frac{t}{t+١}$$

ب ـ اگر قانون داده شده یافتن مجموع بینهایت جمله از جمل دنباله فوق باشد دراینصورت اوپریتور A برابر $\sum_{١}^{\infty}$ است . پس :

$$Af(t)=A\left[\frac{۱}{t(t+۱)}\right]=\sum_{۱}^{\infty}\frac{۱}{t(t+۱)}=۱$$

مثال ۳- تابع غیر مشخص $f(x\,,\,y)=٦x^{۲}+٥x^{۲}y+٧y^{۲}$ مفروض است .

الف - اگرقانون داده شده ، مشتق گیری نسبت به x باشد ، اوپریتور A برابر $\frac{\partial}{\partial x}$ است . پس :

$$Af(x\,,\,y)=A[٦x^{۲}+٥x^{۲}y+٧y^{۲}]=\frac{\partial}{\partial x}[٦x^{۲}+٥x^{۲}y+٧y^{۲}]=۱۲x+۱۰xy$$

ب - اگرقانون داده شده ، مشتق گیری نسبت به y باشد اوپریتور A همان $\frac{\partial}{\partial y}$ است و از آنجا چنین داریم :

$$Af(x,y)=A[٦x^{۲}+٥x^{۲}y+٧y^{۲}]=\frac{\partial}{\partial y}[٦x^{۲}+٥x^{۲}y+٧y^{۲}]=٥x^{۲}+۱٤y$$

در بخشهای زیر توابع f , g , ... را توابع غیرمشخصی از t پنداشته و فرض میکنیم که مشتقات این توابع تا مرتبه‌یی که مورد لزوم است موجود باشند .

تعریف - اوپریتور A را **خطی** نامیم درصورتیکه رابطه زیر برقرار باشد :

$$A(\lambda f+\mu g)=\lambda Af+\mu Ag$$

f و g توابع غیر مشخصی از t و λ , μ مقادیر ثابت هستند .

واضح است که اوپریتورهای Q , D , $\sum_{۱}^{t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ خطی میباشند .

اکنون اوپریتورهای خطی A و B را درنظر میگیریم این دو اوپریتور را بدو طریق میتوان با یکدیگر ترکیب کرد .

روش اول - اگر α و β دومقدار ثابت غیرمشخص باشند ترکیب خطی $\alpha A+\beta B$ را تشکیل داده واثر این اوپریتور را برهرتابع غیر مشخص f با رابطه زیر مشخص میکنیم :

$$(\alpha A+\beta B)f=\alpha Af+\beta Bf$$

روش دوم - اکنون حاصلضرب AB راتشکیل میدهیم. بنابر تعریف اثر اوپریتور AB را برهرتابع غیر مشخص f با رابطه زیر مشخص میکنیم :

$$ABf=A(Bf)$$

لذا برای یافتن ABf کافی است ابتدا Bf را یافته و سپس اثر A را در Bf محاسبه کنیم .

بسهولت میتوان نشان داد که اگر اوپریتورهای A و B خطی باشند اوپریتورهای $\alpha A+\beta B$ و AB نیز خطی خواهند بود .

برای آنکه مفهوم حاصلضرب را بیشتر توضیح دهیم ذیلاً به ذکر مثالهایی میپردازیم .

مثال ٤- فرض میکنیم $A=Q$ و $B=D=\frac{d}{dt}$ باشد . AB و BA را محاسبه کنید .

بنابر تعریف بالا برای محاسبه عبارت $ABf=QDf$ لازم است ابتدا اثر D را در f محاسبه کرد (یعنی از f نسبت به t مشتق گرفت) وسپس اثر Q را در نتیجه حاصل بدست آورد (یعنی انتگرال گیری از صفر تا t) و بالنتیجه چنین داریم :

$$ABf(t)=QDf(t)=Q(Df)=Q[f'(t)] \qquad (۷ . ۱۳)$$

$$=\int_o^t f'(\tau)d\tau=f(t)-f(o)$$

بطریق مشابه خواهیم داشت :

$$BAf(t)=DQf(t)=D(Qf)=\frac{d}{dt}\int_o^t f(\tau)d\tau=f(t) \qquad (۷ . ۱۳۱)$$

نظر باینکه معمولاً $f(o)\neq o$ است لذا DQ و QD متحد یکدیگر نیستند و بنابراین هنگامیکه حاصلضرب اوپریتورها را مورد بررسی قرار میدهیم باید توجه دقیقی به ترتیب قرارگرفتن فاکتورها بنماییم .

اگر $AB=BA$ باشد گوییم اوپریتورهای A و B **جابجایی** هستند .

هنگامیکه بااعداد حقیقی محاسبات عددی انجام میدهیم اغلب قوانین جبری را آزادانه بکار میبریم. دراین قسمت نمیخواهیم فهرست کاملی ازاین قوانین را بیان کنیم ، لذا ذیلاً فقط سه قانون مهم آنرا بیان میکنیم .

الف - قانون جابجایی برای ضرب

a و b دوعنصر غیر مشخص است که بنابر قرار داد ، ترکیب این دو عنصررا با o نشان میدهیم . اگر $a.b=b.a$ باشد گوییم **دو عنصر** a و b قابل جابجایی هستند.

مثال ۱- اگر a و b دوعدد **حقیقی یا موهومی وقانون** ترکیب جمع یا ضرب باشد همانطورکه میدانیم :

$$a\cdot b=b\cdot a \quad , \quad a+b=b+a$$

مثال۲ - اگر a و b دوبرداروقانون ترکیب، ضرب عددی باشد $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ولی اگر قانون ترکیب ضرب برداری باشد $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$.

مثال ۳- اگر a و b دو دترمینان مرتبه n ام و قانون ترکیب حاصل جمع یا حاصلضرب دو دترمینان باشد همانطورکه میدانیم :

$$a+b=b+a \quad , \quad a\cdot b=b\cdot a$$

مثال ٤- a و b توابعی از x هستندکه دارای انتگرال ریمنی هستند و قانون ترکیب نیز حاصلضرب دو تابع فوق میباشد .

همانطورکه قبلاً میدانیم ab دارای انتگرال ریمنی بوده و :

$$\int a\,.\,bdx=\int b\,.\,adx$$

ب - قانون توزیعی

اگر برای هرسه عنصر غیر مشخص c , b , a رابطه $a(b+c)=ab+ac$ برقرار باشدگوییم **قانون توزیعی** برای این سه عنصر صادق است .

مثال ۱- واضح است که اگر c , b , a اعداد حقیقی یا موهومی باشند قانون توزیعی فوق برقرار است .

مثال ۲- اگر $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ سه بردار غیر مشخص باشند چنین داریم :

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$$

مثال ۳- اگر C , B , A اوپریتورهای خطی باشند چنین داریم :

$$A(B+C)=AB+AC$$

پ - قانون پیوندی

اگر برای هرسه عنصرغیرمشخص c , b , a رابطه $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ برقرار باشدگوییم **قانون پیوندی** برای این سه عنصر صادق است .

مثال ۱- اگر c , b , a اعداد حقیقی ، موهومی ویاد ترمینان باشند قانون پیوندی فوق برقرار است .

مثال ۲ ـ اگر $\vec{C}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ سه بردار باشند چنین داریم :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} \neq \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

زیرا بااستفاده از تعریف حاصلضرب سه گانه چنین داریم :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = -\vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -[(\vec{C} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}] = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

مثال ۳- اگر C , B , A اوپریتورهای خطی باشند بسهولت میتوان ثابت نمود که :

$$A(BC) = (AB)C$$

تعبیر قانون پیوندی برای اوپریتورها آن است که میتوان حاصلضرب ABC را بدون نوشتن پرانتزها بکار برد . زیرا برای یافتن تأثیر این حاصلضرب در تابع f باید ابتدا تأثیر اوپریتور C را در f بدست آورد و سپس اوپریتور B را درنتیجه حاصل تأثیر داد و بالاخره اوپریتور A را درنتیجه بدست آمده یعنی $B(Cf)$ دخالت داد .

درحالت خاص میتوان قوای اوپریتور A را بطریق زیر تشکیل داد :

$$A^{۲} = AA \quad ; \quad A^{۳} = AAA \quad ; \quad A^{۴} = AAAA \; ; \; \cdots$$

اگراوپریتور A ، n بارپی‌درپی برتابعی مانند f عمل کندآنرا بصورت $A^n f$ نمایش میدهیم . لذا میتوان کثیرالجمله اوپریتوری زیر را برحسب اوپریتور A تشکیل داد :

$$C_{۰} + C_{۱}A + C_{۲}A^{۲} + \cdots + C_n A^n$$

$C_{۰}$ عمل ضرب در $C_{۰}$ است .

همانطورکه قبلاً نشان دادیم هردو کثیرالجمله غیر مشخص اوپریتوری را میتوان جابجا کرد و لذا این نوع کثیرالجمله ها مانند کثیرالجمله های معمولی قابل تجزیه

شدن و ضرب شدن میباشند و بالنتیجه ترتیب قرارگرفتن فاکتورها کاملاً اختیاری است. مثلاً :

$$(۱+A)(۱-۲A)=(۱-۲A)(۱+A)=۱-A-۲A^۲$$

۱۴ . ۷ - اوپریتور وارونه

اکنون معادله $Ax=g$ که درآن A اوپریتور خطی و g تابع غیر مشخصی از t و x تابع مجهولی است درنظر میگیریم . قبلاً به این نوع معادلات برخورد کرده‌ایم مثلاً در رابطه (۱۱۴ . ۷) :

$$A=(۱-aQ) \quad , \quad g=x_۰+Qf$$

میباشد درصورتیکه در رابطه (۱۲۲ . ۷) :

$$A=۱+aQ+bQ^۲ \quad , \quad g=x_۰+aQx_۰+Qx_۱+Q^۲f$$

معادله $Ax=g$ ممکن است دارای جواب نباشد و یا آنکه دارای بینهایت جواب باشد . مثلاً چون درحالت کلی $g(o)\neq o$ است معادله $Qx=g$ یعنی $\int_o^t x(\tau)d\tau=g(t)$ دارای جواب نیست . زیرا بازاء $t=o$ سمت‌چپ این معادله متحد صفر است درصورتیکه بنابفرض طرف راست مخالف صفر میباشد. بالعکس معادله $Dx=g$ یعنی $\frac{dx}{dt}=g(t)$ همواره دارای بینهایت جواب $x(t)=\int_o^t g(\tau)d\tau+c$ میباشد .

اکنون فرض میکنیم برای هرتابع غیر مشخص g معادله $Ax=g$ دارای یک‌جواب منحصر بفرد باشد. واضح است این جواب به g بستگی‌داشته و بنابر قرار داد ، جواب‌فوق را با $A^{-۱}g$ نمایش داده و اوپریتور $A^{-۱}$ را وارونه A نامیم .

قضیه اول

اگر اوپریتور A خطی باشد اوپریتور $A^{-۱}$ نیز خطی است . یعنی :

$$A^{-۱}(\lambda g_۱+\mu g_۲)=\lambda A^{-۱}g_۱+\mu A^{-۱}g_۲$$

اثبات - فرض کنیم $x_۱=A^{-۱}g_۱$ و $x_۲=A^{-۱}g_۲$ باشد . لذا بااستفاده از تعریف $A^{-۱}$ چنین داریم :

$$Ax_۱=g_۱ \quad , \quad Ax_۲=g_۲$$

و از آنجا :

(بااستفاده از خطی بودن اوپریتور A)

$$A(\lambda x_۱+\mu x_۲)=\lambda Ax_۱+\mu Ax_۲$$

$$=\lambda g_۱+\mu g_۲$$

و بالنتیجه $x=\lambda x_۱+\mu x_۲$ یکی از جوابهای معادله $Ax=\lambda g_۱+\mu g_۲$ است. ولی معادله فوق فقط دارای جواب منحصربفرد :

$$x=A^{-۱}(\lambda g_۱+\mu g_۲)$$

میباشد و لذا جواب $\lambda x_۱+\mu x_۲$ باید با جواب بالا متحد باشد . یعنی :

$$\lambda x_۱+\mu x_۲=A^{-۱}(\lambda g_۱+\mu g_۲)$$

$$\lambda A^{-۱}g_۱+\mu A^{-۱}g_۲=A^{-۱}(\lambda g_۱+\mu g_۲)$$

و بدین ترتیب خطی بودن اوپریتور A ثابت میشود .

قضیه دوم

$AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$. I اوپریتوریگانه بوده وبارابطه $Ig=g$ مشخص میشود .

اثبات - معادله $Ax=g$ دارای جواب $x=A^{-۱}g$ بوده و در معادله صدق میکند یعنی $A(A^{-۱}g)=g$. از طرف دیگر چون معادله $Ax=Ag$ دارای جواب $x=A^{-۱}(Ag)$ است و چون $x=g$ نیزیکی از جوابهای این معادله میباشد و بنابفرض این معادله دارای جواب منحصربفرد است . لذا :

$$A^{-۱}(Ag)=g$$

و از آنجا :

$$AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$$

قضیه سوم

اگر اوپریتور خطی B در رابطه $AB=BA=۱$ صدق نماید و A اوپریتور خطی

باشد B اوپریتور وارونه A میباشد. بعبارت دیگر معادله $Ax=g$ دارای جواب منحصر بفرد $x=Bg$ است .

اثبات :

اولاً ـ Bg یک جواب معادله $Ax=g$ میباشد زیرا با استفاده از قانون پیوندی درباره اوپریتورهای خطی به ترتیب چنین داریم :

$$Ax=A(Bg)=ABg=Ig=g$$

ثانیاً ـ این جواب منحصر بفرد است زیرا اگر $Ax=g$ باشد چنین داریم :

$$x=Ix=BAx=B(Ax)=Bg$$

میتوان سه قضیه بالا را در قضیه عمومی زیر خلاصه کرد .

قضیه عمومی

اگر معادله $Ax=g$ برای هر تابع غیر مشخص g دارای جواب منحصر بفرد $x=A^{-1}g$ بوده و اوپریتور A خطی باشد اوپریتور A^{-1} خطی بوده و در رابطه $A^{-1}A=AA^{-1}=I$ صدق میکند .

بالعکس اگر اوپریتور خطی B در رابطه $AB=BA=۱$ صدق کند وارونه اوپریتور خطی A همان B است یعنی $A^{-1}=B$.

برای آنکه مفهوم اوپریتورهای وارونه را بیشتر توضیح دهیم ، کافی است متذکر شویم که هیچیک از اوپریتورهای Q و D دارای وارونه نمیباشند. زیرا همانطورکه قبلاً نشان دادیم معادله $Qx=g$ دربعضی از موارد دارای جواب نیست و معادله $Dx=g$ دارای بینهایت جواب است . (یکی از شرایط اصلی اوپریتور وارونه آن است که معادلات فوق دارای جواب منحصر بفرد باشند) .

اکنون نشان خواهیم داد که $(۱-aQ)$ ، (a مقداری است ثابت) دارای وارونه میباشد . این حقیقت مهم اساس روش اوپریشنال بوده و برای نشان دادن مطلب فوق معادله $(۱-aQ)x=g$ یعنی :

$$x(t)-a\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau=g(t)$$

را درنظر میگیریم . اگر از این معادله نسبت به t مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$x'(t)-ax(t)=g'(t) \quad ; \quad x(o)=g(o)$$

معادله بالا معادله خطی بوده و بنابر شماره (۷ . ۲) دارای جواب منحصر بفرد زیر است :

$$x(t)=g(o)e^{at}+\int_{o}^{t} e^{a(t-\tau)}g'(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۴)$$

لذا وارونه $(۱-aQ)$ یعنی $(۱-aQ)^{-۱}$ موجود بوده و مقدار $x=(۱-aQ)^{-۱}g$ را میتوان از رابطه (۷ . ۱۴) بدست آورد .

حالات خاص

۱ـ اگر $g(t)=۱$ باشد $g(o)=۱$ و $g'(\tau)=o$ است ولذا معادله $(۱-aQ)x=۱$ دارای جواب منحصر بفرد $x=(۱-aQ)^{-۱}(۱)$ بوده و بالنتیجه رابطه (۷ . ۱۴) بصورت زیر درمیآید :

$$(۱-aQ)^{-۱}(۱)=e^{at} \qquad (۷ . ۱۴۱)$$

۲ـ اگر $g=Qf$ باشد $g(o)=o$ و $g'(\tau)=f(\tau)$ است و بالنتیجه معادله $(۱-aQ)x=Qf$ دارای جواب منحصر بفرد $x=(۱-aQ)^{-۱}[Qf(t)]$ بوده و لذا رابطه (۷ . ۱۴) بصورت زیر درمیآید :

$$(۱-aQ)^{-۱}Qf(t)=\int_{o}^{t} e^{a(t-\tau)}f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۴۲)$$

روابط (۷ . ۱۴۱) و (۷ . ۱۴۲) همان رابطه (۷ . ۱۱۶) است که آنها را قبلاً با فرض آنکه روی سمبول Q میتوان قوانین معمولی جبری انجام داد بدست آوردیم . تنها اختلافی که بین روابط فوق موجود است آن است که در رابطه (۷ . ۱۱۶) بجای $(۱-aQ)^{-۱}$ و $(۱-aQ)^{-۱}Q$ به ترتیب $\frac{۱}{۱-aQ}$ و $\frac{Q}{۱-aQ}$ نوشته شده است .

لازم است متذکر گردیم ، جمیع توابعی که دراین فصل با آنها سروکار داریم دارای مشتق مرتبه اول ، دوم ، سوم و بطورکلی تا مرتبه‌یی که مورد لزوم است میباشند. مثلاً تابع $x(t)$ که از رابطه (۷ . ۱۴) بدست میآید دارای چنین خاصیتی است . زیرا مشتق

مرتبه اول آن موجود بوده و برابر $ax(t)+g'(t)$ میباشد و از آنجا مشتق مرتبه دوم آن برابر $ax'(t)+g''(t)$ و غیره است .

۷ . ۱۵ ـ وارونه حاصلضرب

همانطورکه در شماره (۱۲ . ۷) متذکر گردیدیم همواره میتوان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را بصورت :

$$(۱+aQ+bQ^۲)x=(c_۱+c_۲Q)(۱)+Q^۲f$$

نوشت و بنابراین شایسته است که وارونه عبارت $۱+aQ+bQ^۲$ را بدانیم . از طرف دیگرچون عبارت $۱+aQ+bQ^۲$ را میتوان بحاصلضرب عوامل $(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)$ تجزیه کرد و هر کدام از فاکتورها نیز دارای وارونه هستند لذا چنین استنباط میشود که ممکن است عبارت $۱+aQ+bQ^۲$ دارای وارونه باشد . اکنون مسئله کلی زیر را درنظر میگیریم .

اگر A و B دو اوپریتورباشند که وارونه آنها نیز موجود باشد آیاوارونه حاصلضرب AB موجود خواهد بود ؟

برای جواب دادن به سئوال فوق معادله $ABx=g$ را درنظرگرفته و معادله را بصورت $A(Bx)=g$ نوشته و سپس آنرا نسبت به Bx حل میکنیم . یعنی :

$$Bx=A^{-۱}g$$

اکنون معادله بالا را نسبت به x حل میکنیم . یعنی :

$$x=B^{-۱}(A^{-۱}g)=B^{-۱}A^{-۱}g$$

ولی چون جواب فوق منحصر بفرد میباشد . لذا :

$$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱} \tag{۷ . ۱۵}$$

قضیه فوق را میتوان بانشان دادن اینکه اوپریتورهای AB و $B^{-۱}A^{-۱}$ وارونه یکدیگر هستند اثبات کنیم . زیرا :

$$(AB)(B^{-۱}A^{-۱})=A(BB^{-۱})A^{-۱}=AIA^{-۱}=AA^{-۱}=I$$

$$(B^{-۱}A^{-۱})(AB)=B^{-۱}(A^{-۱}A)B=B^{-۱}IB=B^{-۱}B=I$$

قضیه اول

اگر اوپریتورهای A و B قابل جابجایی بوده و دارای وارونه‌های $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ باشند . چنین داریم :

$$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$$

یعنی اوپریتورهای وارونه $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ نیز قابل جابجایی هستند.

اثبات - اگر وارونه های A و B که به ترتیب آنها را به $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ نشان‌میدهیم موجود باشند بااستفاده‌از رابطه(۱۵ . ۷) و توجه باینکه A و B بنابفرض قابل جابجایی هستند چنین داریم :

$$B^{-۱}A^{-۱}=(AB)^{-۱}=(BA)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$$

حالت خاص

اگر وارونه اوپریتور A موجود باشد ، وارونه اوپریتور $A^{۲}=AA$ موجود بوده و با رابطه :

$$A^{-۱}A^{-۱}=(A^{-۱})^{۲}=(A^{۲})^{-۱}$$

مشخص میشود .

همچنین وارونه اوپریتور $A^{۳}=A^{۲}A$ موجود بوده و با رابطه :

$$(A^{۲})^{-۱}(A^{-۱})=(A^{-۱})^{۲}(A^{-۱})=(A^{-۱})^{۳}$$

مشخص میشود .

بطورکلی چنین داریم :

$$(A^{n})^{-۱}=(A^{-۱})^{n}$$

لذا وارونه A^{n} را به A^{-n} نمایش داده و دراینصورت خواهیم داشت :

$$A^{-n}A^{n}=A^{n}A^{-n}=I$$

بطور خلاصه تاکنون A^{r} را برای جمیع مقادیر درست مثبت و منفی r تعیین کردیم و اگر $A^{\circ}=I$ باشد دراینصورت قانون‌نما نیز برای اوپریتورها صادق است . منظور از قانون‌نما آن است که برای‌جمیع مقادیر درست ، مثبت و منفی و صفر r و s رابطه زیر برقراراست :

$$A^{r}A^{s}=A^{r+s}$$

قضیه دوم

اگر اوپریتورهای A و B قابل جابجایی باشند و وارونه A یعنی $A^{-۱}$ نیز موجود باشد اوپریتورهای $A^{-۱}$ و B نیز قابل جابجایی هستند یعنی :

$$A^{-۱}B=BA^{-۱}$$

اثبات - چون بنابفرض A و B قابل جابجایی‌هستند ونظربا اینکه $A^{-۱}$ نیز موجود میباشد لذا به‌ترتیب چنین داریم :

$$A^{-۱}(AB)A^{-۱}=A^{-۱}(BA)A^{-۱} \quad , \quad (A^{-۱}A)BA^{-۱}=A^{-۱}B(AA^{-۱})$$

ولی $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$ و لذا چنین داریم :

$$BA^{-۱}=A^{-۱}B$$

شاید چنین بنظر آید که برای حل معادلات دیفرانسیل احتیاجی به بحث‌های فوق نیست . درصورتیکه در حقیقت مطالب پیش گفته برای حل این معادلات بسیار مفید است . زیرا همواره طرف چپ معادلات دیفرانسیل خطی را میتوان به حاصلضرب عواملی که تماماً بصورت $(۱-\lambda Q)$, $(۱-\mu Q)$, ... بوده ودوبدونسبت بیکدیگر و Q قابل جابجایی هستند تجزیه کرد واز آنجا میتوان قضایای اول ودوم شماره (۱۵ . ۷) را بکار برد با استفاده ازاین قضایا محاسبات بااوپریتور Q را مانند محاسبات معمولی (عددی) انجام داد .

مثال ۱- بنابر قسمت‌دوم‌ازحالات‌خاص‌شماره (۱۴ . ۷) وارونه‌اوپریتور $(۱-aQ)$ موجود بوده وبرابر $(۱-aQ)^{-۱}$ است. از طرف دیگر اوپریتورهای Q و $(۱-aQ)$ قابل جابجایی‌هستند ولذابنابرقضیه‌دوم‌شماره (۱۵ . ۷)اوپریتورهای Q و $(۱-aQ)^{-۱}$ نیز قابل جابجایی خواهند بود . یعنی :

$$(۱-aQ)^{-۱}Q=Q(۱-aQ)^{-۱}$$

مثال ۲ - همانطورکه در شماره (۱۲ . ۷) متذکر گردیدیم :

$$۱+aQ+bQ^{۲}=(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)$$

ولی چون اوپریتورهای $(۱-\lambda Q)$ و $(۱-\mu Q)$ خطی‌وقابل جابجایی هستند و بنابر شماره (۱۴ . ۷) دارای وارونه هستند لذا بنابر قضیه اول شماره (۱۵ . ۷) چنین داریم :

$$(۱+aQ+bQ^{۲})^{-۱}=[(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)]^{-۱}$$
$$=(۱-\mu Q)^{-۱}(۱-\lambda Q)^{-۱}=(۱-\lambda Q)^{-۱}(۱-\mu Q)^{-۱}$$

همچنین بنابر همین قضیه عبارت :

$$(۱-Q)^{-۱}(۱-۳Q)^{-۱}(۱-Q)^{-۱}(۱-۳Q)$$

را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(۱-Q)^{-۱}(۱-Q)^{-۱}(۱-۳Q)^{-۱}(۱-۳Q)=[(۱-Q)^{-۱}]^{۲}$$
$$=(۱-Q)^{-۲}$$

لذا بدون آنکه مرتکب اشتباهی شده باشیم میتوان سمبولهای خود را با جایگزین کردن $\frac{۱}{۱-aQ}$ بجای $(۱-aQ)^{-۱}$ و :

$$(۱-aQ)^{-۱}Q=Q(۱-aQ)^{-۱} \quad \text{بجای} \quad \frac{Q}{۱-aQ}$$

و :

$$(۱-aQ)^{-۲}Q=Q(۱-aQ)^{-۲} \quad \text{بجای} \quad \frac{Q}{(۱-aQ)^{۲}}$$

و غیره ساده کنیم .

بطورکلی اگررابطه‌یی بشکل $\frac{\Phi(Q)}{(۱-a_۱Q)(۱-a_۲Q)\dots(۱-a_nQ)}$ که درآن $\Phi(Q)$ کثیرالجمله‌یی از Q است داشته باشیم میتوانیم آنرا بصورت :

$$(۱-a_۱Q)^{-۱}(۱-a_۲Q)^{-۱}(۱-a_۳Q)^{-۱}\dots(۱-a_nQ)^{-۱}\Phi(Q)$$

نوشته و عمل فاکتورها را بهر نحوی که مایل باشیم تغییر دهیم و درصورتیکه $\Phi(Q)$ مثلاً دارای فاکتور $(۱-a_۲Q)$ باشد با تغییرمکان دادن مناسب فاکتورها بطریقی که $(۱-a_۲Q)^{-۱}$ و $(۱-a_۲Q)$ مجاور یکدیگر قرارگیرند میتوان این فاکتور را با $(۱-a_۲Q)^{-۱}$ حذف کرد .

اکنون بسیار ساده است که صحت تجزیه کسرهای جزیی‌را که در مثال شماره (۷ . ۱۲) بیان کردیم تأیید نمائیم . یعنی برای آنکه اوپریتور :

$$\frac{١-٤Q}{(١-Q)(١-٢Q)}$$

را بکسرهای جزیی تجزیه کنیم صورت کسر فوق را بشکل :

$$١-٤Q=٣(١-٢Q)-٢(١-Q)$$

مینویسیم . دراینصورت چنین داریم :

$$\begin{aligned}\frac{١-٤Q}{(١-Q)(١-٢Q)}&=(١-Q)^{-١}(١-٢Q)^{-١}(١-٤Q)\\&=(١-Q)^{-١}(١-٢Q)^{-١}[٣(١-٢Q)-٢(١-Q)]\\&=٣(١-Q)^{-١}-٢(١-٢Q)^{-١}\\&=\frac{٣}{١-Q}-\frac{٢}{١-٢Q}\end{aligned}$$

درحالیت کلی اگر $\Phi(Q)$ کثیرالجمله درجه $(n-١)$ ام از Q باشد میتوان کسر :

$$\frac{c_٠+c_١Q+c_٢Q^٢+\cdots+c_{n-١}Q^{n-١}}{(١-a_١Q)(١-a_٢Q)\ldots(١-a_nQ)}$$

را مانند حالتی که Q متغیر معمولی است بکسرهای جزیی :

$$\frac{A_١}{١-a_١Q}+\frac{A_٢}{١-a_٢Q}+\frac{A_٣}{١-a_٣Q}+\cdots+\frac{A_n}{١-a_nQ}$$

تجزیه کرد .

١٦ . ٧ - کسرهای جزیی برای وارونه‌ها

اکنون از حیث نظری بجایی رسیده‌ایم که میتوانیم جمیع محاسبات معمولی که با اوپریتور Q انجام میدهیم آنرا تأیید نماییم و زمان آن فرا رسیده است که روش چنین محاسبات را کمی توسعه دهیم .

قبلاً روش محاسبه روابط (١) $\frac{١}{١-aQ}$ و $\frac{Q}{١-aQ}f$ رامیدانیم ولی اغلب تعیین مقدار روابط کلی‌تر :

$$\frac{Q^{n}}{(۱-aQ)^{n+۱}}(۱) \quad , \quad \frac{Q^{n+1}}{(۱-aQ)^{n+۱}}f \quad , \quad (n=۱ , ۲ , ۳ , ...)$$

مورد نیازاست که اکنون آنها را محاسبه خواهیم کرد .

بااستفاده از رابطه (۱۱۶ . ۷) به ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{Q}{(۱-aQ)^{۲}}(۱)=\frac{Q}{۱-aQ}\left[\frac{۱}{۱-aQ}(۱)\right]=\frac{Q}{۱-aQ}(e^{at})$$
$$=\int_{0}^{t}e^{a(t-\tau)}e^{a\tau}d\tau=e^{at}\int_{0}^{t}d\tau=te^{at}$$

واضح است که میتوان استدلال فوق را تکرار کرد و از آنجا :

$$\frac{Q^{۲}}{(۱-aQ)^{۳}}(۱)=\frac{Q}{۱-aQ}\left[\frac{Q}{(۱-aQ)^{۲}}(۱)\right]=\frac{Q}{۱-aQ}(te^{at})$$
$$=\int_{0}^{t}e^{a(t-\tau)}\tau e^{a\tau}d\tau=e^{at}\int_{0}^{t}\tau\, d\tau=\frac{t^{۲}}{۲}e^{at}$$

$$\frac{Q^{۳}}{(۱-aQ)^{٤}}(۱)=\frac{Q}{۱-aQ}\left[\frac{Q^{۲}}{(۱-aQ)^{۳}}(۱)\right]=\frac{Q}{۱-aQ}\left(\frac{t^{۲}}{۲}e^{at}\right)$$
$$=e^{at}\int_{0}^{t}\frac{\tau^{۲}}{۲}d\tau=\frac{t^{۳}}{۳!}e^{at}$$

و بااستفاده ازاصل استقراء محدود ، بسهولت میتوان ثابت نمود که برای جمیع مقادیر مثبت $n(n=۱ , ۲ , ۳ , ...)$ رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{Q^{n}}{(۱-aQ)^{n+۱}}(۱)=\frac{t^{n}}{n!}e^{at} \qquad (۷ . ۱۶)$$

اگر تعاریف معمولی $Q^{\circ}=۱$, $t^{\circ}=۱$, $0!=۱$ را بنماییم رابطه (۱۶ . ۷) نیز بازاء $n=0$ برقرار خواهد بود .

دلیل آنکه بجای محاسبه عبارت $\frac{۱}{(۱-aQ)^{۲}}(۱)$ مبادرت به محاسبه

$\frac{Q}{(۱-aQ)^۲}(۱)$ نموده‌ایم ، سهولت آن است . زیرا رابطه اولی‌را مرتباً میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\frac{۱}{(۱-aQ)^۲}(۱)=\frac{(۱-aQ)+aQ}{(۱-aQ)^۲}(۱)$$

$$=\frac{۱}{۱-aQ}(۱)+a\frac{Q}{(۱-aQ)^۲}(۱)$$

$$=e^{at}+ate^{at}=(۱+at)e^{at}$$

برای‌تعیین مقدار $\frac{Q^{n+۱}}{(۱-aQ)^{n+۱}}f$ نشان خواهیم داد که :

$$\frac{Q^{n+۱}}{(۱-aQ)^{n+۱}}f(t)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^n}{n!}e^{a(t-\tau)}f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۱۶۱)$$

عبارت بالا بنابر رابطه (۷ . ۱۱۶) بازاء $n=0$ صادق بوده و باستفاده از روش استقرا محدود ، نشان خواهیم داد که رابطه (۷ . ۱۶۱) برای مقادیر $n=۱ , ۲ , ۳ , ...$ نیز برقرار است .

زیر اگر رابطه اخیر برای $n=k$ صادق باشد با استفاده از رابطه (۷ . ۱۱۶) خواهیم داشت : .

$$\frac{Q^{k+۲}}{(۱-aQ)^{k+۲}}f=\frac{Q}{۱-aQ}\left\{\frac{Q^{k+۱}}{(۱-aQ)^{k+۱}}f\right\}$$

$$=\int_0^t e^{a(t-\tau)}\left\{\frac{Q^{k+۱}}{(۱-aQ)^{k+۱}}f(\tau)\right\}d\tau$$

$$=\int_0^t e^{a(t-\tau)}\left\{\int_0^t\frac{(\tau-u)^k}{k!}e^{a(\tau-u)}f(u)du\right\}d\tau$$

میدان انتگرال گیری درصفحه $u\tau$ محدود بخطوط $u=0$, $u=\tau$, $\tau=t$ است . در انتگرال مضاعف‌بالا حدود انتگرال گیری‌را تغییر میدهیم . لذا اگر ابتدا u را ثابت ونسبت به τ انتگرال‌بگیریم حدود تغییرات τ بین u و t است ودرانتگرال گیری نسبت به u متغیر u بین صفر و t تغییر میکند . لذا :

$$\int_{۰}^{t}\left\{\int_{u}^{t} e^{a(t-\tau)}\frac{(\tau-u)^k}{k!}e^{a(\tau-u)}f(u)d\tau\right\}du$$

$$=\int_{۰}^{t} e^{a(t-u)}f(u)\left\{\int_{u}^{t}\frac{(\tau-u)^k}{k!}d\tau\right\}du$$

$$=\int_{۰}^{t} e^{a(t-u)}f(u)\,\frac{(t-u)^{k+۱}}{(k+۱)!}\,du$$

پس اگر رابطه (۷ . ۱۶۱) برای $n=k$ برقرار باشد برای $n=k+۱$ نیز صادق خواهد بود وچون صحت آنرا برای $n=o$ اثبات کرده‌ایم لذا بنابر روش استقراء محدود، رابطه (۷ . ۱۶۱) برای جمیع مقادیر درست مثبت n برقرار است .

اکنون با داشتن روابطی مانند (۷ . ۱۶) و (۷ . ۱۶۱) میتوان هرمعادله‌یی که بشکل :

$$(۱+aQ+bQ^۲)x=(c_۱+c_۲Q)(۱)+Q^۲f$$

است و یا بطور کلی جمیع معادلات دیفرانسیلی که مرتبه آنها بیش از دو میباشد حل کنیم .

اگرفرض کنیم $(۱+aQ+bQ^۲)=(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)$ باشد دراینصورت جواب معادله دیفرانسیل بالا عبارت خواهد بود از :

$$x=\frac{c_۱+c_۲Q}{(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)}(۱)+\frac{Q^۲}{(۱-\lambda Q)(۱-\mu Q)}f$$

پس از تجزیه عبارت سمت راست رابطه فوق به کسرهای جزیی میتوان جواب عمومی را بدست آورد

در مثال شماره (۷ . ۱۲) هنگامیکه λ و μ دو عدد متمایز بودند این روش را توضیح دادیم و ذیلاً این روش را با ذکر مثالی در حالت $\lambda=\mu$ مورد بررسی قرار خواهیم داد .

بطریق مشابه میتوان عبارات کلی‌تر :

$$\frac{\Phi(Q)}{۱+a_۱Q+a_۲Q^۲+\cdots+a_nQ^n}(۱)+\frac{Q^n}{۱+a_۱Q+a_۲Q^۲+\cdots+a_nQ^n}f$$

(۷ . ۱۶۲)

راکه درآن $\Phi(Q)$ کثیرالجمله‌یی است که درجه آن کمتر از n است محاسبه نمود .

همانطورکه میدانیم میتوان مخرج رابطه (١٦٢ . ٧) را بشکل :

$$١+a_١Q+a_٢Q^٢+a_٣Q^٣+\cdots+a_nQ^n$$
$$=A_١(١-\lambda_١Q)^{m_١}(١-\lambda_٢Q)^{m_٢}\ldots(١-\lambda_kQ)^{m_k}$$

تجزیه نموده و سپس رابطه :

$$\frac{\Phi(Q)}{(١-\lambda_١Q)^{m_١}(١-\lambda_٢Q)^{m_٢}\ldots(١-\lambda_kQ)^{m_k}}$$

را بصورت ترکیبهایی ازکسرهای :

$$\frac{١}{١-\lambda_١Q},\ \frac{Q}{(١-\lambda_١Q)^٢},\ \frac{Q^٢}{(١-\lambda_١Q)^٣},\ldots,\ \frac{Q^{m_١-١}}{(١-\lambda_١Q)^{m_١}}$$

$$\frac{١}{١-\lambda_٢Q},\ \frac{Q}{(١-\lambda_٢Q)^٢},\ \frac{Q^٢}{(١-\lambda_٢Q)^٣},\ldots,\ \frac{Q^{m_٢-١}}{(١-\lambda_٢Q)^{m_٢}}$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{١}{١-\lambda_kQ},\ \frac{Q}{(١-\lambda_kQ)^٢},\ \frac{Q^٢}{(١-\lambda_kQ)^٣},\ldots,\ \frac{Q^{m_k-١}}{(١-\lambda_kQ)^{m_k}}$$

و بطریق مشابه عبارت :

$$\frac{Q^n}{١+a_١Q+a_٢Q^٢+a_٣Q^٣+\cdots+a_nQ^n}$$

را بصورت ترکیبهایی ازکسرهای :

$$\frac{Q}{١-\lambda_١Q},\ \frac{Q^٢}{(١-\lambda_١Q)^٢},\ \frac{Q^٣}{(١-\lambda_١Q)^٣},\ldots,\ \frac{Q^{m_١}}{(١-\lambda_١Q)^{m_١}}$$

$$\frac{Q}{۱-\lambda_۲ Q}\ ,\ \frac{Q^۲}{(۱-\lambda_۲ Q)^۲}\ ,\ \frac{Q^۳}{(۱-\lambda_۲ Q)^۳}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{Q^{m_۲}}{(۱-\lambda_۲ Q)^{m_۲}}$$

$$\begin{array}{c} \cdot\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$\frac{Q}{(۱-\lambda_k Q)}\ ,\ \frac{Q^۲}{(۱-\lambda_k Q)^۲}\ ,\ \frac{Q^۳}{(۱-\lambda_k Q)^۳}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{Q^{m_k}}{(۱-\lambda_k Q)^{m_k}}$$

نوشته و سپس رابطه (۱۶۲ . ۷) را بااستفاده از روابط (۱۶ . ۷) و (۱۶۱ . ۷) محاسبه کنیم .

بطورکلی بکاربردن رابطه (۱۶۱ . ۷) منجربه انتگرالهایی میگرددکه نمیتوان آنها را ساده کرد. ولی اکثراً تابع f بصورت کثیرالجمله‌یی از t یا تابع نمایی یا حاصلضرب یک کثیرالجمله و یک تابع نمایی است و دراینصورت میتوان جواب معادله را بصورتی نوشت که شامل انتگرال نباشد و ذیلاً این مطلب را با ذکر مثالی روشن خواهیم کرد .

مثال ۱ - مطلوب است محاسبه عبارت :

$$x=\frac{۲-Q}{۱-۲Q+Q^۲}(۱)+\frac{Q^۲}{۱-۲Q+Q^۲}f$$

حل - بنابر نظریه کسرهای جزیی شایسته است که کسر $\frac{۲-Q}{(۱-Q)^۲}$ رابرحسب $\frac{۱}{۱-Q}$ و $\frac{۱}{(۱-Q)^۲}$ بسط دهیم . ولی همانطورکه قبلاً متذکرشدیم محاسبه $\frac{Q}{(۱-Q)^۲}$ مناسبتر از $\frac{۱}{(۱-aQ)^۲}$ است . لذا با توجه باین مطلب و استفاده از رابطه (۱۶ . ۷) به ترتیب چنین داریم :

$$\frac{۲-Q}{(۱-Q)^۲}(۱)=\frac{۲(۱-Q)+Q}{(۱-Q)^۲}(۱)$$

$$=\frac{۲}{۱-Q}(۱)+\frac{Q}{(۱-Q)^۲}(۱)=۲e^t+te^t$$

با توجه برابطه (۱۶۱ . ۷) [بازاء $n=۱$] عبارت $\frac{Q^۲}{(۱-Q)^۲}f$ را میتوان بصورت:

$\int_{0}^{t}(t-\tau)e^{(t-\tau)}f(\tau)d\tau$ نوشت و لذا چنین داریم :

$$x=(۲+t)e^{t}+\int_{0}^{t}(t-\tau)e^{(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

مثال ۳- جواب معادله $\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}-\frac{dx}{dt}-۲x=۳e^{-t}$ که بازاء $t=0$ مقادیر $x=۲$ و $\frac{dx}{dt}=0$ حاصل میشود پیدا کنید .

حل - با توجه برابطه (۱۲۲ . ۷) معادله فوق را میتوان بصورت :

$$(۱-Q-۲Q^{۲})x=(۲-۲Q)(۱)+Q^{۲}(۳e^{-t})$$

نوشت و بااستفاده از رابطه (۱۶ . ۷) میتوان بجای $۳e^{-t}$ مقدار $\frac{۳}{۱+Q}(۱)$ راقرار داد . لذا خواهیم داشت :

$$(۱-Q-۲Q^{۲})x=(۲-۲Q)(۱)+\frac{۳Q^{۲}}{۱+Q}(۱)$$

$$(۱+Q)(۱-۲Q)x=\frac{۲+Q^{۲}}{۱+Q}(۱)$$

$$x=\frac{۲+Q^{۲}}{(۱+Q)^{۲}(۱-۲Q)}(۱)$$

و پس‌از تجزیه به کسرهای جزیی چنین داریم :

$$x=\left[\frac{۱}{۱+Q}-\frac{Q}{(۱+Q)^{۲}}+\frac{۱}{۱-۲Q}\right](۱)$$

و بنابر رابطه (۱۶ . ۷) جواب خصوصی عبارت میگردد از :

$$x=e^{-t}-te^{-t}+e^{۲t}$$

واضح است که میتوان روش فوق را هنگامیکه $f(t)$ مضربی از $t^{n}e^{at}$ و یا بطورکلی کثیرالجمله‌یی از te^{at} باشد تعمیم داد .

۲ . ۷- دستورات عملی برای بکار بردن روشهای فوق

۲۱ . ۷ - سمبول p - اکنون که اصول کلی روش اوپریشنال را برقرار نموده‌ایم، برای مقاصد عملی و سهولت عملیات جبری در توابع گویا از Q سمبول جدیدی مانند p که با رابطه $p=\frac{۱}{Q}$ مشخص میشود درنظر گرفته و جمیع محاسبات را نسبت به p و با درنظر گرفتن قواعد معمولی جبری انجام میدهیم. واضح است که با قرارداد فوق مثلاً عبارت $\frac{Q^m}{(۱-\lambda Q)^{m+۱}}$ مبدل به $\frac{p^{-m}}{(۱-\lambda p^{-۱})^{m+۱}}$ و یا $\frac{p}{(p-\lambda)^{m+۱}}$ خواهد شد و روابط (۱۶ . ۷) و (۱۶۱ . ۷) بصورت زیر در میآید :

$$\frac{p}{(p-\lambda)^{m+۱}}\,(۱)=\frac{t^m}{m!}e^{\lambda t} \qquad (۷ . ۲۱)$$

$$\frac{۱}{(p-\lambda)^{m+۱}}f(t)=\int_0^t\frac{(t-\tau)^m}{m!}e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau)d\tau \qquad (۷ . ۲۱۱)$$

حالتهای خاص زیر را همواره باید درنظر داشت :

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{۱}{p}\,(۱)=t & ,\ \frac{۱}{p^۲}\,(۱)=\frac{۱}{۲}t^۲\\[2ex] \frac{p}{p-\lambda}\,(۱)=e^{\lambda t} & ,\ \frac{p}{(p-\lambda)^۲}\,(۱)=te^{\lambda t}\\[2ex] \frac{۱}{p}f(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau & ,\ \frac{۱}{p-\lambda}f(t)=\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f(\tau)d\tau\end{array}\right.$$

(۷ . ۲۱۲)

همچنین رابطه کلی :

$$\frac{c_0+c_۱Q+c_۲Q^۲+\cdots+c_{n-۱}Q^{n-۱}}{۱+a_۱Q+a_۲Q^۲+\cdots+a_nQ^n}\,(۱)$$

$$+\frac{Q^n}{۱+a_۱Q+a_۲Q^۲+\cdots+a_nQ^n}f(t)$$

را میتوان باتبدیل‌متغیر $p=\frac{۱}{Q}$ بصورت زیر نوشت :

$$p\frac{c_۰p^{n-۱}+c_۱p^{n-۲}+c_۲p^{n-۳}+\cdots+c_{n-۱}}{p^n+a_۱p^{n-۱}+a_۲p^{n-۲}+\cdots+a_n}(۱)$$

$$+\frac{۱}{p^n+a_۱p^{n-۱}+a_۲p^{n-۲}+\cdots+a_n}f(t)$$

$$=p\frac{C(p)}{A(p)}(۱)+\frac{۱}{A(p)}f(t)$$

که در آن :

$$A(p)=p^n+a_۱p^{n-۱}+a_۲p^{n-۲}+\cdots+a_n$$

و :

$$C(p)=c_۰p^{n-۱}+c_۱p^{n-۲}+c_۲p^{n-۳}+\cdots+c_{n-۱}$$

مزیت رابطه بالا دراین است که میتوان کسرهای $\frac{C(p)}{A(p)}$ و $\frac{۱}{A(p)}$ را برای هرفاکتور $(p-\lambda)^m$ ازکثیرالجمله $A(p)$ به کسرهای جزیی :

$$\frac{۱}{p-\lambda},\ \frac{۱}{(p-\lambda)^۲},\ \frac{۱}{(p-\lambda)^۳},\ \ldots,\ \frac{۱}{(p-\lambda)^m}$$

تجزیه نمود و سپس برای هرفاکتور $(p-\lambda)^m$ از $A(p)$ رابطه :

$$p\frac{C(p)}{A(p)}(۱)+\frac{۱}{A(p)}f(t)$$

شامل جملاتی مانند :

$$\frac{p}{p-\lambda}(۱),\ \frac{p}{(p-\lambda)^۲}(۱),\ \frac{p}{(p-\lambda)^۳}(۱),\ldots,\frac{p}{(p-\lambda)^m}(۱)$$

$$\frac{۱}{p-\lambda}f(t),\ \frac{۱}{(p-\lambda)^۲}f(t),\ \frac{۱}{(p-\lambda)^۳}f(t),\ \ldots,$$

$$\frac{۱}{(p-\lambda)^m}f(t)$$

خواهد بود که میتوان آنها را بکمک روابط (۲۱ . ۷) و (۲۱۱ . ۷) محاسبه کرد .

باید تذکر داد که سمبول p را برای این بکار میبریم که این محاسبات ساده شود و

همچنین سمبول p اوپریتور نبوده ، بلکه اوپریتوری که تمام عملیات بدان بستگی دارد $p^{-۱}=Q$ میباشد (زیرا اگر p اوپریتور باشد باید وارونه اوپریتور Q باشد ولی همانطور که قبلاً نشان دادیم Q دارای اوپریتور وارونه نیست) .

جمیع قوانین جبری که درباره سمبول Q صادق است درباره سمبول p نیز صادق خواهد بود مثلاً :

$$p\,\frac{۲p+۱}{p^۲-۱}=p\,\frac{\frac{۳}{۲}(p+۱)+\frac{۱}{۲}\,(p-۱)}{p^۲-۱}=\frac{۳}{۲}\cdot\frac{p}{p-۱}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{p}{p+۱}$$

هم‌ارز :

$$\frac{۲+Q}{۱-Q^۲}=\frac{\frac{۳}{۲}\,(۱+Q)+\frac{۱}{۲}\,(۱-Q)}{۱-Q^۲}$$

$$=\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۱}{۱-Q}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+Q}$$

بوده و همانطور که قبلاً نشان دادیم محاسبات اخیر نسبت به سمبول Q صادق است .

۲۲ . ۷- روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام خطی

برای بررسی در مسئله «مقدار اولیه» :

$$\left\{\begin{array}{l}(D^n+a_۱D^{n-۱}+a_۲D^{n-۲}+\cdots+a_n)x=f(t)\\ x=x_۰\ ,\ Dx=x_۱\ ,\ D^۲x=x_۲\ ,\ \dots\ ,\ D^{n-۱}x=x_{n-۱}\ ;\ t=0\ \text{بازاء}\end{array}\right.\qquad(۷\ .\ ۲۲)$$

که درآن $a_n , \dots , a_۲$ و $a_۱ , x_{n-۱} , \dots , x_۲ , x_۱ , x_۰$ مقادیر ثابتی هستند ، کافی است ازاین رابطه n بار نسبت به t تابع اولیه بگیریم . این عمل منجر به معادله‌یی نسبت به Q که درآن مقادیر $x_۰ , x_۱ , x_۲ , \dots , x_{n-۱}$ دخالت دارند خواهد شد. حال اگر در معادله اخیر بجای Q مقدار $p^{-۱}$ را قرار داده و برای ازبین بردن قوای منفی p دوطرف را در p^n ضرب کنیم به معادله زیر که آنرا فرم **اوپریشنال** رابطه (۲۲ . ۷) نامیم خواهیم رسید :

$$(p^n+a_۱p^{n-۱}+a_۲p^{n-۲}+\cdots+a_n)x=f(t)$$

$$+\Big\{x_۰(p^n+a_۱p^{n-۱}+a_۲p^{n-۲}+\cdots+a_{n-۱}p)$$

$$+x_۱(p^{n-۱}+a_۱p^{n-۲}+a_۲p^{n-۳}+\cdots+a_{n-۲}p)$$
$$+x_۲(p^{n-۲}+a_۱p^{n-۳}+\cdots+a_{n-۳}p)$$
$$+\cdots+x_{n-۱}p\Big\}(۱) \qquad (۷ . ۲۲۱)$$

جزییات محاسبه‌یی که منجر به این رابطه میگردد بعداً توضیح میدهیم ولی میتوان درحالت خاص $n=۲$ صحت این رابطه را تأیید نمود . زیرا اگر $n=۲$ باشد همانطورکه در شماره (۷ . ۱۲) متذکر شدیم بنابر رابطه (۷ . ۱۲۲) مسئله مقدار اولیه :

$$\begin{cases} \dfrac{d^۲x}{dt^۲}+a_۱\dfrac{dx}{dt}+b_۱x=f(t) \\ x=x_۰ \;,\; Dx=x_۱ \;;\; t=0 \text{ بازاء} \end{cases}$$

هم‌ارز معادله انتگرالی زیر است :

$$x+a_۱Qx+b_۱Q^۲x=x_۰+a_۱Qx_۰+Qx_۱+Q^۲f$$

اگر دوطرف رابطه بالا را در $p^۲$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$(p^۲+a_۱p+b_۱)x=x_۰(p^۲+a_۱p)+px_۱+f(t)$$

برای‌بخاطرداشتن رابطه (۷ . ۲۲۱) قانون زیر را برای‌پیدا کردن فرم اوپریشنال (۷ . ۲۲) توصیه میکنیم .

قانون اول

در معادله دیفرانسیل(۷ . ۲۲) اوپریتور D را باسمبول p تعویض نموده و در سمت راست این رابطه به f(t) کثیرالجمله زیر را :

$$(p^n+a_۱p^{n-۱}+a_۲p^{n-۴}+\cdots+a_{n-۱}p)\times$$
$$\left(x_۰+\frac{x_۱}{p}+\frac{x^۲}{p^۲}+\cdots+\frac{x_{n-۱}}{p^{n-۱}}\right)(۱)$$

که ازضرب کردن ونگاهداشتن قوای مثبت p حاصل میشود اضافه میکنیم .

باید درنظر داشت که کثیرالجمله واقع در سمت راست رابطه (۷ . ۲۲۱) باستثنای f(t) دارای فاکتور مشترک p بوده و هیچیک از جمل آن ضریب a_n را دربر ندارد .

تابع $f(t)$ اغلب مجموع جملاتی مانند $At^re^{\alpha t}$ است که بنابررابطه (۷ . ۲۱) میتوانآنرا بصورت $Ar!\,\frac{p}{(p-\alpha)^{r+1}}$ (۱) نوشت . عبارت اخیر پس‌از ساده کردن بصورت $F(p)$(۱) **که آنرا فرم اوپریشنال** $f(t)$ نامیم درمیآید .

اکنون بار دیگررابطه (۷ . ۲۲۱) را درنظر گرفته و بجای $f(t)$ مقدار $F(p)$(۱) را قرار داده و سپس با درنظر گرفتن اینکه طرف راست رابطه (۷ . ۲۲۱) بصورت :

$$A(p)x=[pC(p)+F(p)](۱)$$

درمیآید جواب x را بصورت (۱) $x=p\,\frac{G(p)}{H(p)}$ مینویسیم .

اکنون میتوان تابع گویای $\frac{G(p)}{H(p)}$ را به کسرهای جزیی تجزیه کرده و سپس مقدار x را بکمک روابط (۷ . ۲۱) و (۷ . ۲۱۱) بدست میاوریم .

نظرباینکه منظور بسط x برحسب $\frac{p}{(p-\lambda)^m}$ (۱) است [و نه $\frac{۱}{(p-\lambda)^m}$ (۱)] لذا همواره قبل‌از تجزیه به کسرهای جزیی باید سعی کرد که فاکتور p را خارج نماییم و برای حل معادله (۷ . ۲۲) درصورتیکه فرم اوپریشنال $f(t)$ در دست باشد باید همواره قانون زیر را درنظر داشته باشیم .

قانون دوم

ابتدا رابطه (۷ . ۲۲۱) راکه فرم اوپریشنال رابطه (۷ . ۲۲) است نوشته و همچنین بجای $f(t)$ فرم اوپریشنال $F(p)$(۱) را قرار داده و سپس معادله حاصل را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل نموده و جواب $\frac{x}{p}=R(p)$(۱) که در آن $R(p)$ تابع گویایی از p است یافته و $R(p)$ رابه کسر های جزیی تجزیه نموده و بالاخره معادله $x=pR(p)$(۱) را بکمك روابط (۷ . ۲۱) و (۷ . ۲۱۱) محاسبه مینماییم .

اکنون اگر $f(t)$ را نتوانیم به فرم اوپریشنال هم‌ارزش تبدیل کنیم و یا بعبارت دیگر $f(t)$ مجموع جملی مانند $At^re^{\alpha t}$ نباشد شایسته‌است که‌قانون زیر را همواره‌درنظر داشته باشیم .

قانون سوم

رابطه (۲۲ . ۷) را بصورت اوپریشنال $A(p)x=pC(p)(۱)+f(t)$ **مینویسیم وسپس آنرا نسبت به x حل مینماییم یعنی :**

$$x=p\frac{C(p)}{A(p)}(۱)+\frac{۱}{A(p)}f(t)$$

اکنون $\frac{C(p)}{A(p)}$ **و** $\frac{۱}{A(p)}$ **را به کسرهای جزیی تجزیه کرده و سپس برای محاسبه x از روابط (۲۱ . ۷) و (۲۱۱ . ۷) استفاده میکنیم .**

مثال ۱- فرم اوپریشنال تابع $f(t)=t^۲+(۳t-۲)e^{-t}$ را بیابید .

حل - بنابر روابط (۲۱۲ . ۷) چنین داریم :

$$t^۲=\frac{۲}{p^۲}(۱) \;;\; ۳te^{-t}=۳\frac{p}{(p+۱)^۲}(۱) \;;\; e^{-t}=\frac{p}{p+۱}(۱)$$

و از آنجا :

$$t^۲+(۳t-۲)e^{-t}=\frac{۲}{p^۲}(۱)+۳\frac{p}{(p+۱)^۲}(۱)-۲\frac{p}{p+۱}(۱)$$

$$=\left[\frac{۲}{p^۲}+\frac{p(۱-۲p)}{(p+۱)^۲}\right](۱)$$

و بالنتیجه فرم اوپریشنال تابع مفروض عبارت میگردد از :

$$\left[\frac{۲}{p^۲}+\frac{p(۱-۲p)}{(p+۱)^۲}\right](۱)$$

مثال ۲- مسئله مقدار اولیه :

$$\begin{cases}(D^۳+۲D^۲-D-۲)x=۳e^{۲t}\\ x_0=۲\;,\;x_1=-۳\;,\;x_۲=۱\;;\;t=0 \text{ بازاء}\end{cases}$$

را حل کنید .

حل - الف - فرم اوپریشنال رابطه بالا بصورت :

$$(p^۳+۲p^۲-p-۲)x=(p^۳+۲p^۲-p)\left(۲-\frac{۳}{p}+\frac{۱}{p^۲}\right)(۱)+۳e^t$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در جمله اول طرف راست رابطه بالا نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p^۳+۲p^۲-p-۲)x=(۲p^۳+p^۲-۷p)(۱)+۳e^{۲t}$$

ب ـ بنابر رابطه (۲۱ . ۷) فرم اوپریشنال $e^{۲t}$ برابر $\frac{p}{p-۲}$ (۱) است و لذا فرم اوپریشنال این مسئله عبارت است از :

$$(p^۳+۲p^۲-p-۲)x=\left(۲p^۳+p^۲-۷p+\frac{۳p}{p-۲}\right)(۱)$$

$$=\frac{۲p^۴-۳p^۳-۹p^۲+۱۷p}{p-۲}\,(۱)$$

پ ـ اکنون باید این معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کرده و جواب آنرا بصورت $\frac{x}{p}=R(p)(۱)$ بنویسیم . یعنی :

$$\frac{x}{p}=\frac{۲p^۳-۳p^۲-۹p+۱۷}{(p^۳+۲p^۲-p-۲)(p-۲)}\,(۱)=R(p)\,(۱)$$

که‌در‌آن $R(p)=\frac{۲p^۳-۳p^۲-۹p+۱۷}{(p^۳+۲p^۲-p-۲)(p-۲)}$ تابع گویایی از p است .

ت ـ باید $R(p)$ را به کسرهای جزیی تجزیه کنیم . با توجه بآنکه :

$$p^۳+۲p^۲-p-۲=(p-۱)(p+۱)(p+۲)$$

است چنین داریم :

$$R(p)=\frac{۲p^۳-۳p^۲-۹p+۱۷}{(p-۱)(p+۱)(p+۲)(p-۲)}=\frac{A}{p-۱}+\frac{B}{p+۱}+\frac{C}{p+۲}+\frac{D}{p-۲}$$

و پس‌از محاسبه خواهیم داشت :

$$A=-\frac{۷}{۶}\ ,\ B=\frac{۷}{۲}\ ,\ C=-\frac{۷}{۱۲}\ ,\ D=\frac{۱}{۰}$$

و لذا :

$$\frac{x}{p}=R(p)(۱)=\left[\frac{-\frac{۷}{۶}}{p-۱}+\frac{\frac{۷}{۲}}{p+۱}-\frac{\frac{۷}{۱۲}}{p+۲}+\frac{\frac{۱}{۴}}{p-۲}\right](۱)$$

ث ـ اکنون باید معادله $x=pR(p)(۱)$ را بکمک رابطه (۷ . ۲۱۲) محاسبه کرد . پس :

$$x=\left[-\frac{۷}{۶}\cdot\frac{p}{p-۱}+\frac{۷}{۲}\cdot\frac{p}{p+۱}-\frac{۷}{۱۲}\cdot\frac{p}{p+۲}+\frac{۱}{۴}\cdot\frac{p}{p-۲}\right](۱)$$

$$x=-\frac{۷}{۶}e^{t}+\frac{۷}{۲}e^{-t}-\frac{۷}{۱۲}e^{-۲t}+\frac{۱}{۴}e^{۲t}$$

مثال ۳- مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}(D^{۲}-۷D+۶)x=t^{۲}\\ x_{۰}=x_{۱}=0\ ;\ t=0 \text{ بازاء}\end{cases}$$

حل ـ الف ـ فرم اوپریشنال رابطه بالا بصورت :

$$(p^{۲}-۷p+۶)x=(p^{۲}-۷p)\left(0+\frac{0}{p}\right)(۱)+t^{۲}$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در جمله اول طرف راست نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p^{۲}-۷p+۶)x=t^{۲}$$

ب ـ بنابر رابطه (۷ . ۲۱۲) فرم اوپریشنال $t^{۲}$ بصورت $\frac{۲}{p^{۲}}(۱)$ است و لذا فرم اوپریشنال این مسئله عبارت است از :

$$(p^{۲}-۷p+۶)x=\frac{۲}{p^{۲}}(۱)$$

پ ـ باید این معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کردوجواب رابصورت $\frac{x}{p}=R(p)(۱)$ نوشت . لذا :

$$\frac{x}{p}=\frac{۲}{p^{۳}(p-۱)(p-۶)}(۱)=R(p)(۱)$$

که درآن $R(p)=\frac{۲}{p^{۳}(p-۱)(p-۶)}$ تابع گویایی از p است .

ت ـ باید $R(p)$ را به کسرهای جزیی تجزیه کنیم :

$$R(p)=\frac{۲}{p^{۳}(p-۱)(p-۶)}=\frac{A}{p-۱}+\frac{B}{p-۶}+\frac{C}{p}+\frac{D}{p^{۲}}+\frac{E}{p^{۳}}$$

و پس‌از محاسبه خواهیم داشت :

$$A=-\frac{۲}{۵}\ ,\ B=\frac{۱}{۵۴۰}\ ,\ C=\frac{۴۳}{۱۰۸}\ ,\ D=\frac{۷}{۱۸}\ ,\ E=\frac{۱}{۳}$$

و لذا :

$$\frac{x}{p}=\left(\frac{-\frac{۲}{۵}}{p-۱}+\frac{\frac{۱}{۵۴۰}}{p-۶}+\frac{\frac{۴۳}{۱۰۸}}{p}+\frac{\frac{۷}{۱۸}}{p^{۲}}+\frac{\frac{۱}{۳}}{p^{۳}}\right)(۱)$$

ث ـ اکنون باید عبارت $x=pR(p)(۱)$ را بکمک رابطه (۲۱۲ . ۷) محاسبه کرد . پس :

$$x=\left(-\frac{۲}{۵}\cdot\frac{p}{p-۱}+\frac{۱}{۵۴۰}\cdot\frac{p}{p-۶}+\frac{۴۳}{۱۰۸}+\frac{۷}{۱۸}\times\frac{۱}{p}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{p^{۲}}\right)(۱)$$

$$=-\frac{۲}{۵}e^{t}+\frac{۱}{۵۴۰}e^{۶t}+\frac{۴۳}{۱۰۸}+\frac{۷}{۱۸}t+\frac{۱}{۶}t^{۲}$$

مثال ۴ـ مسئله مقدار اولیه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}(D^{۳}-۳D+۲)x=f(t)\\ x_{۰}=-۱\ ,\ x_{۱}=۵\ ,\ x_{۲}=۲\ ;\ t=o \text{ بازاء}\end{cases}$$

حل ـ الف ـ فرم اوپریشنال رابطه بالا بصورت :

$$(p^{۳}-۳p+۲)x=(p^{۳}-۳p)\left(-۱+\frac{۵}{p}+\frac{۲}{p^{۲}}\right)(۱)+f(t)$$

که درآن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در جمله اول طرف راست نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p^۳-۳p+۲)x=[-(p^۳-۳p)+۵p^۲+۲p](۱)+f(t)$$
$$=(-p^۳+۵p^۲+۵p)(۱)+f(t)$$

ب ـ تابع $f(t)$ تابع غیر مشخصی بوده و ممکن است فاقد فرم اوپریشنال باشد . پس نمیتوان درحالت کلی فرم اوپریشنال $f(t)$ را نوشت .

پ ـ معادله بالا را نسبت به x حل کرده و جواب را بصورت زیر مینویسیم :

$$x=p\,\frac{C(p)}{A(p)}\,(۱)+\frac{۱}{A(p)}\,f(t)$$

$$x=p\,\frac{-p^۲+۵p+۵}{p^۳-۳p+۲}\,(۱)+\frac{۱}{p^۳-۳p+۲}\,f(t)$$

$$=p\,\frac{C(p)}{A(p)}\,(۱)+\frac{۱}{A(p)}\,f(t)$$

که درآن $C(p)=-p^۲+۵p+۵ \quad , \quad A(p)=p^۳-۳p+۲$

ت ـ حال کسرهای $\frac{C(p)}{A(p)}$, $\frac{۱}{A(p)}$ را به کسرهای جزیی تجزیه میکنیم . یعنی:

$$\frac{C(p)}{A(p)}=\frac{-p^۲+۵p+۵}{p^۳-۳p+۲}=\frac{-p^۲+۵p+۵}{(p-۱)^۲(p+۲)}=\frac{۳}{(p-۱)^۲}-\frac{۱}{p+۲}$$

$$\frac{۱}{A(p)}=\frac{۱}{p^۳-۳p+۲}=\frac{۱}{(p-۱)^۲(p+۲)}$$

$$=\left(\frac{-\frac{۱}{۹}}{p-۱}+\frac{\frac{۱}{۳}}{(p-۱)^۲}+\frac{\frac{۱}{۹}}{p+۲}\right)f(t)$$

ث ـ بااستفاده از روابط (۲۱ . ۷) و (۲۱۱ . ۷) چنین داریم :

$$x=p\,\frac{C(p)}{A(p)}+\frac{۱}{A(p)}\,f(t)=p\left[\frac{۳}{(p-۱)^۲}-\frac{۱}{p+۲}\right](۱)$$
$$+\left[\frac{-\frac{۱}{۹}}{p-۱}+\frac{\frac{۱}{۳}}{(p-۱)^۲}+\frac{\frac{۱}{۹}}{p+۲}\right]f(t)$$

$$=۳te^t-e^{-۲t}+\int_۰^t\left[-\frac{۱}{۹}\,e^{(t-\tau)}+\frac{۱}{۳}\,(t-\tau)e^{(t-\tau)}\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{۹}\,e^{-۲(t-\tau)}\right]f(\tau)d\tau$$

۲۳ . ۷ - کسرهای جزیی

درحل مسائل قبل ، از جزییات محاسباتی که برای تجزیه کسرهای گویا به کسرهای جزیی لازم است صرفنظر کردیم ولی نظر باینکه این تجزیه قسمت اساسی روش اوپریشنال میباشد لذا شایسته است که روش مناسبی برای پیدا کردن این کسرها بدست آوریم. ذیلاً این روش را توضیح داده و آنرا در تمام مسائل آتی بکار میبریم .

تابع گویای $\frac{G(p)}{H(p)}$ را که درآن درجه $G(p)$ کمتراز $H(p)$ است درنظر گرفته و فرض میکنیم $H(p)$ دارای ریشه مکرر مرتبه m ام باشد . یعنی :

$$H(p)=(p-\lambda)^m K(p) \quad ; \quad K(\lambda)\neq 0$$

دراینصورت بسطی بشکل :

$$\frac{G(p)}{H(p)}=\frac{A_m}{(p-\lambda)^m}+\frac{A_{m-۱}}{(p-\lambda)^{m-۱}}+\cdots+\frac{A_۲}{(p-\lambda)^۲}+\frac{A_۱}{p-\lambda}+\cdots$$

(۲۳ . ۷)

که درآن نقطه‌های بعداز $\frac{A_۱}{p-\lambda}$ متناظر باسایر فاکتورهای $H(p)$ است بدست میآید.

اکنون میخواهیم ضرایب A_m و $A_{m-۱}$ و ... و $A_۲$ و $A_۱$ را درعبارت (۲۳ . ۷) محاسبه کنیم. همانطورکه قبلاً متذکر گردیدیم میتوانیم روی سمبول p مانند متغیرمعمولی عملیات جبری انجام دهیم. هنگامیکه $p-\lambda$ فاکتور ساده $H(p)$ است (یعنی $m=۱$) ضریب A در رابطه $\frac{A}{p-\lambda}$ را میتوان فوراً بدست آورد . زیرا دراینصورت چنین داریم :

$$\frac{G(p)}{H(p)}=\frac{G(p)}{(p-\lambda)K(p)}=\frac{A}{p-\lambda}+B(p)$$

$$G(p)=AK(p)+(p-\lambda)B(p)K(p)=AK(p)+(p-\lambda)L(p)$$

که درآن $L(p)=B(p)K(p)$.

اکنون اگر در رابطه بالا $p=\lambda$ اختیار گردد مقدار $A=\frac{G(\lambda)}{K(\lambda)}$ بدست میآید.

$K(\lambda)$ را میتوان باحذف فاکتور ساده $(p-\lambda)$ در مخرج [یعنی $H(p)$] و قراردادن $p=\lambda$ درنتیجه حاصل و یا بامشتق گیری نسبت به p از اتحاد $H(p)=(p-\lambda)K(p)$

و قرار دادن $p=\lambda$ در مشتق بدست آورد یعنی $H'(\lambda)=K(\lambda)$. بهر صورت مقدار A از قانون زیر بدست میاید .

قانون چهارم

برای آنکه ضریب A را در عبارت $\frac{A}{p-\lambda}$ که در آن $p-\lambda$ فاکتور ساده مخرج یعنی $H(p)$ است بدست آوریم ممکن است فاکتور $p-\lambda$ را از مخرج عبارت $\frac{G(p)}{H(p)}$ حذف کرده وسپس در نتیجه حاصل بجای $p=\lambda$ قرار داد ویا آنکه نسبت به p از مخرج این عبارت مشتق گرفته و در نتیجه حاصل بجای $p=\lambda$ قرار داد . یعنی :

$$A=\frac{G(\lambda)}{H'(\lambda)}$$

اکثراً (ولی نه در جمیع حالات) از راه اول استفاده میکنند .

درمواردیکه $p-\lambda$ فاکتور مکرر $H(p)$ باشد $(m>۱)$ ابتدا $p-\lambda=u$ قرار داده و سپس کسر $\frac{G(p)}{H(p)}$ را برحسب u بسط میدهیم . یعنی :

$$\frac{G(p)}{H(p)}=\frac{G(p)}{(p-\lambda)^m K(p)}=\frac{G(\lambda+u)}{u^m K(\lambda+u)}=\frac{L(u)}{u^m M(u)}$$

$L(u)$ و $M(u)$ کثیرالجمله هایی از u بوده و $M(u)$ دارای فاکتور u نیست $(M(0)\neq 0)$.

اکنون میخواهیم ضرایب $A_۱ , A_۲ , A_۳ , \ldots , A_{m-۱} , A_m$ را در بسط :

$$\frac{L(u)}{u^m M(u)}=\frac{A_m}{u^m}+\frac{A_{m-۱}}{u^{m-۱}}+\cdots+\frac{A_۲}{u^۲}+\frac{A_۱}{u}+\cdots$$

بدست آوریم . اگر رابطه فوق را در $u^m M(u)$ ضرب کنیم چنین داریم :

$$L(u)=(A_m+A_{m-۱}u+\cdots+A_۲u^{m-۲}+A_۱u^{m-۱})M(u)+u^m N(u)$$

(۷ . ۲۳۱)

$N(u)$ کثیرالجمله یی برحسب u میباشد که تعیین ضرایب آن مورد نظر ما نیست با متحد

نمودن‌ضرایب $u^0 , u , u^2 , \dots , u^{m-1}$ ، m مقدارثابت $A_m , A_{m-1} , \dots , A_2 , A_1$ را میتوان بدست آورد . برای محاسبه ضرایب اخیر میتوان از قانون زیر استفاده کرد .

قانون پنجم

برای محاسبه ضرایب $A_m , A_{m-1} , \dots , A_2 , A_1$ هنگامیکه $H(p)$ دارای ریشه مکرر مرتبه m ام است ابتدا تبدیل متغیر $p-\lambda=u$ را داده وسپس کسر $\frac{G(p)}{H(p)}$ را بصورت $\frac{L(u)}{u^m M(u)}$ نوشته وسپس با صرفنظر کردن u^m وقوای بالاتر و بسط عبارت $\frac{L(u)}{M(u)}$ برحسب قوای صعودی u بوسیله تقسیم معمولی میتوان ضرایب $A_m , A_{m-1} , \dots , A_2 , A_1$ را محاسبه کرد .

واضح است که دربررسی این مسائل ممکن است $H(p)$ دارای فاکتورهای موهومی باشد ولی چون اکثراً ضرایب $G(p)$ و $H(p)$ اعداد حقیقی هستند لذا اگر $H(p)$ دارای‌فاکتور موهومی $p-\lambda$ باشد مزدوج آن یعنی $p-\bar{\lambda}$ نیز یک فاکتور $H(p)$ خواهد بود[زیرا اگر $H(p)$ دارای ریشه موهومی باشد مزدوج‌آن نیزیکی‌از ریشه‌هااست] و بالنتیجه‌باهرکسر $\frac{A}{p-\lambda}$ کسر مزدوج $\frac{\bar{A}}{p-\bar{\lambda}}$ متناظر میگردد و ازآنجا برای یافتن جواب معادله به جملاتی مانند :

$$\left(A\frac{p}{p-\lambda}+\bar{A}\frac{p}{p-\bar{\lambda}}\right)(1)=Ae^{\lambda t}+\bar{A}e^{\bar{\lambda}t}$$

برخواهیم خورد .

حال اگرفرض کنیم $A=a+ib$ باشد مزدوج آن بصورت $\bar{A}=a-ib$ بوده و ازآنجا چنین داریم :

$$A+\bar{A}=2a=2Rl(A)$$

پس :

$$Ae^{\lambda t}+\bar{A}e^{\bar{\lambda}t}=2Rl(Ae^{\lambda t})$$

عبارت بالا را میتوان بصورت‌ترکیبات حقیقی کسینوس وسینوس وتوابع نمایی تبدیل کرد .

باید تذکر دهیم که ریشه‌های مکررموهومی محاسبات راکمی مشکل مینماید ولی خوشبختانه درعمل کمتر به آن برخورد میکنیم .

مثال ۱ـ جملات متناظربا $(p-۱)$ را درکسرهای جزیی عبارت :

$$\frac{p^۳+۳p}{(p-۱)^۳(p+۱)(p+۲)}$$

بدست آورید .

حل - پس‌از جایگزین کردن $p-۱=u$ چنین داریم :

$$p^۳+۳p=(u+۱)^۳+۳(u+۱)=٤+٦u+۳u^۲+u^۳$$

$$(p+۱)(p+۲)=(u+۲)(u+۳)=٦+٥u+u^۲$$

لذا :

$$\frac{p^۳+۳p}{(p-۱)^۳(p+۱)(p+۲)}=\frac{٤+٦u+۳u^۲+u^۳}{u^۳(٦+٥u+u^۲)}=\frac{A_۳}{u^۳}+\frac{A_۲}{u^۲}+\frac{A_۱}{u}$$

$$+\frac{Bu+C}{٦+٥u+u^۲}$$

$$٤+٦u+۳u^۲+u^۳=(A_۳+A_۲u+A_۱u^۲)(٦+٥u+u^۲)$$

$$+u^۳(Bu+C)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $u^۲$, u , u^0 در دوطرف رابطه بالا میتوان مقادیر ثابت $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ را بدست آورد. واضح است که جمل بالاتر از $u^۲$ تأثیری دراین ضرایب نداشته و بخصوص مقدار $u^۳$ درسمت چپ رابطه بالا کوچکترین تأثیری درمقادیر $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ نخواهد داشت .

باتوجه‌به مطالب‌بالا میتوان مقادیر $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ را از رابطه زیر بدست آورد :

$$\frac{٤+٦u+۳u^۲}{٦+٥u+u^۲}=A_۳+A_۲u+A_۱u^۲$$

حال اگر مانند معمول $٤+٦u+۳u^۲$ را بر $٦+٥u+u^۲$ بخش کرده و از قوای $u^۳$ و بالاتر آن صرفنظرکنیم خواهیم داشت :

$$\begin{array}{r|l} ٤+٦u+٣u^{٢} & ٦+٥u+u^{٢} \\ \cline{2-2} ٤+\frac{١٠}{٣}u+\frac{٢}{٣}u^{٢} & \frac{٢}{٣}+\frac{٤}{٩}u+\frac{١}{٥٤}u^{٢} \\ \cline{1-1} \frac{٨}{٣}u+\frac{٧}{٣}u^{٢} & \\ \\ \frac{٨}{٣}u+\frac{٢٠}{٩}u^{٢} & \\ \cline{1-1} \frac{١}{٩}u^{٢} & \\ \\ \frac{١}{٩}u^{٢} & \\ \cline{1-1}\cline{1-1} \end{array}$$

بالنتیجه :

$$٤+٦u+٣u^{٢}=\left(\frac{٢}{٣}+\frac{٤}{٩}u+\frac{١}{٥٤}u^{٢}\right)(٦+٥u+u^{٢})+\cdots$$

و از آنجا ضرایب جمل مزبور عبارت میگردند از :

$$\frac{\frac{٢}{٣}}{(p-١)^{٣}}+\frac{\frac{٤}{٩}}{(p-١)^{٢}}+\frac{\frac{١}{٥٤}}{(p-١)}$$

٢٤ . ٧- مثالها

برای روشن‌شدن مطالب یاد شده درشماره‌های (٢١ . ٧) و (٢٢ . ٧) و (٢٣ . ٧) وتفهیم بیشترآنهاذیلاً چند مثال حل میکنیم. دراین مثالها نیز مانند مثالهای قبل مقادیر x , Dx , $D^{٢}x$, ... را بازاء $t=o$ متناظراً با مقادیر $x_{٠}$, $x_{١}$, $x_{٢}$, ... نشان میدهیم.

مثال ١ــ مسئله مقدار اولیه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} (D^{٤}+٤)x=o \\ x_{٠}=٣ \ , \ x_{١}=x_{٢}=x_{٣}=o \ ; \ t=o \ \text{بازاء} \end{cases}$$

حل - الف - فرم اوپریشنال این معادله بصورت :

$$(p^٤+٤)x=p^٤\left(٣+\frac{0}{p}+\frac{0}{p^٢}+\frac{0}{p^٣}\right)(١)+0$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در جمله اول طرف راست رابطه بالا نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p^٤+٤)x=٣p^٤(١)$$

ب - نظربا ینکه $f(t)=0$ است لذا فرم اوپریشنال این مسئله همان :

$$(p^٤+٤)x=٣p^٤(١)$$

است .

پ - اکنون باید معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کرده و جواب را بصورت :

$$\frac{x}{p}=R(p)(١)$$

نوشت. یعنی :

$$\frac{x}{p}=\frac{٣p^٣}{p^٤+٤}(١)=R(p)(١)$$

$R(p)=\frac{٣p^٣}{p^٤+٤}$ تابع گویایی از p است .

ت - باید $R(p)$ را به کسرهای جزیی تجزیه کرد .

$$(p^٤+٤)=(p^٢-٢i)(p^٢+٢i)$$

برای یافتن ریشه‌های دوم $\pm ٢i$ بطریق زیر عمل میکنیم :

$$\sqrt{٢i}=\sqrt{٢}\cdot\sqrt{i}=\sqrt{٢}\cdot\sqrt{\cos\frac{\pi}{٢}+i\sin\frac{\pi}{٢}}$$

$$=\sqrt{٢}\left[\cos\frac{\theta+٢k\pi}{٢}+i\sin\frac{\theta+٢k\pi}{٢}\right],\ \theta=\frac{\pi}{٢}\ ;\ k=0\ ,\ ١$$

$$=\sqrt{٢}\left[\cos\frac{\pi}{٤}+i\sin\frac{\pi}{٤}\right]=١+i \qquad (k=0)$$

$$=\sqrt{۲}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{۴}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۴}\right)\right]=-(۱+i) \qquad (k=۱)$$

بطریق مشابه میتوان نشان داد که :

$$\sqrt{-۲i}=\pm(۱-i)$$

و از آنجا :

$$p^۴+۴=(p^۲-۲i)(p^۲+۲i)$$
$$=(p-۱-i)(p+۱+i)(p+۱-i)(p-۱+i)$$

لذا جمیع فاکتورهای مخرج ساده بوده و اگر $p-\lambda$ یکی از این فاکتورها باشد بنابر قانون چهارم هنگامیکه کسر $\frac{۳p^۳}{p^۴+۴}$ را به کسرهای جزبی‌تجزیه میکنیم ، ضریب جمله متناظر بااین فاکتور با مشتق گیری‌ازمخرج و قرار دادن $p=\lambda$ بدست میاید . یعنی بازاء چهار مقدار λ این ضریب برابر :

$$\left[\frac{۳p^۳}{۴p^۳}\right]_{p=\lambda}=\frac{۳}{۴}$$

است . بنابراین :

$$\frac{x}{p}=\frac{۳}{۴}\left[\frac{۱}{p-۱-i}+\frac{۱}{p+۱+i}+\frac{۱}{p+۱-i}+\frac{۱}{p-۱+i}\right](۱)$$

ت ـ حال باید معادله $x=pR(p)(۱)$ را حل کرد . پس :

$$x=\frac{۳}{۴}\left[\frac{p}{p-۱-i}+\frac{p}{p-۱+i}+\frac{p}{p+۱-i}+\frac{p}{p+۱+i}\right](۱)$$

$$=\frac{۳}{۲}Rl[e^{(۱+i)t}+e^{(-۱+i)t}]=\frac{۳}{۲}e^t\cos t+\frac{۳}{۲}e^{-t}\cos t=۳\cos t\,\mathrm{ch}t$$

مثال ۲ ـ مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}(D-۱)^۳x=\sin t\\ x_0=۱\ ,\ x_۱=۲\ ,\ x_۲=۳\ ;\ t=o \text{ بازاء}\end{cases}$$

حل ـ الف ـ فرم اوپریشنال این معادله بصورت :

$$(p-۱)^۳x=(p^۳-۳p^۲+۳p)\left(۱+\frac{۲}{p}+\frac{۳}{p^۲}\right)(۱)+\sin t$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در جمله اول طرف راست نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p-۱)^۳x=[(p^۳-۳p^۲+۳p)+۲(p^۲-۳p)+۳p](۱)+\sin t$$
$$=(p^۳-p^۲)(۱)+\sin t$$

ب ـ باید فرم اوپریشنال sint را بدست آورد . یعنی :

$$\sin t=I(e^{it})=I\left[\frac{p}{p-i}(۱)\right]=I\left[\frac{p(p+i)}{p^۲+۱}(۱)\right]=\frac{p}{p^۲+۱}(۱)$$

لذا فرم اوپریشنال مسئله فوق چنین است :

$$(p-۱)^۳x=(p^۳-p^۲)(۱)+\frac{p}{p^۲+۱}(۱)=\left(p^۳-p^۲+\frac{p}{p^۲+۱}\right)(۱)$$
$$=\frac{p^۵-p^۴+p^۳-p^۲+p}{p^۲+۱}(۱)$$

پ ـ اکنون باید معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کرده و جواب را بصورت :

$$\frac{x}{p}=R(p)(۱)$$

نوشت . یعنی :

$$\frac{x}{p}=\frac{p^۴-p^۳+p^۲-p+۱}{(p-۱)^۳(p^۲+۱)}(۱)=R(p)(۱)$$

$R(p)=\frac{p^۴-p^۳+p^۲-p+۱}{(p-۱)^۳(p^۲+۱)}$ تابع گویایی از p است .

ت ـ $R(p)$ را به کسرهای جزیی تجزیه میکنیم . فاکتورهای موهومی $p\pm i$ در مخرج منجر به دو کسر مزدوج میگردند . و این فاکتورها ساده هستند و مثلاً ضریب $\frac{۱}{p-i}$ در بسط به کسرهای جزیی بنابر قانون چهارم عبارت است از :

$$\frac{i^٤-i^٣+i^٢-i+١}{(i-١)^٣(٢i)}=\frac{١}{(٢+٢i)٢i}=\frac{١}{٤(١-i)}=-\frac{١+i}{٨}$$

بالنتیجه قسمتی از جواب x که متناظر با کسرهای جزیی $\frac{١}{p-\lambda}$ و مزدوج آن $\frac{١}{p-\bar{\lambda}}$ است عبارت میگردد از :

$$٢Rl\left[-\frac{١+i}{٨}\ (\cos t+i\sin t)\right]=-\frac{١}{٤}\ (\cos t-\sin t)$$

برای تعیین ضرایب متناظر با فاکتور مکرر $p-١$ تبدیل متغیر $p-١=u$ را داده و اگر با استفاده از قانون پنجم از جمل $u^٣$ و قوای بالاتر آن صرفنظر کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\frac{p^٤-p^٣+p^٢-p+١}{(p-١)^٣(p^٢+١)}&=\frac{u(u+١)^٣+(u+١)^٢-u}{u^٣[(u+١)^٢+١]}\\&=\frac{u+٣u^٢+u^٣+٢u+١-u+\cdots}{u^٣(٢+٢u+u^٢)}\\&=\frac{١+٢u+٤u^٢+\cdots}{u^٣(٢+٢u+u^٢)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
١+٢u+٤u^٢ & ٢+٢u+u^٢ \\ \cline{2-2}
١+u+\frac{١}{٢}u^٢ & \frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}u+\frac{٥}{٤}u^٢ \\ \cline{1-1}
u+\frac{٧}{٢}u^٢ & \\
u+u^٢ & \\ \cline{1-1}
\frac{٥}{٢}u^٢ & \\
\frac{٥}{٢}u^٢ & \\ \hline\hline
\end{array}$$

لذا :
$$A_١=\frac{٥}{٤}\ ,\ A_٢=\frac{١}{٢}\ ,\ A_٣=\frac{١}{٢}$$

پس‌از جایگزین کردن $u=p-١$ قسمتی از جواب x که متناظر با کسرهای جزیی $\frac{١}{(p-١)^k}$ است بصورت :

$$\left[\frac{۱}{۲}\cdot\frac{p}{(p-۱)^{۳}}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{p}{(p-۱)^{۲}}+\frac{۵}{٤}\cdot\frac{p}{p-۱}\right](۱)$$

خواهد بود . پس جواب مسئله عبارت میگردد از :

$$x=-\frac{۱}{٤}\,(\cos t-\sin t)+\left(\frac{۱}{٤}\,t^{۲}+\frac{۱}{۲}\,t+\frac{۵}{٤}\right)e^{t}$$

مثال ۳- مسئله مقدار اولیه :

$$\begin{cases}(D^{۲}+w^{۲})x=f(t)\\ x=x_{۰}\ ,\ Dx=x_{۱}\ \ ;\ \ t=o\ \text{بازاء}\end{cases}$$

را حل کنید . w مقدار حقیقی ثابت و مخالف صفر است .

حل - الف - فرم اوپریشنال این معادله بصورت :

$$(p^{۲}+w^{۲})x=p^{۲}\left(x_{۰}+\frac{x_{۱}}{p}\right)(۱)+f(t)$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف‌صفر p را در جمله اول طرف راست بالا نگاهداشت میباشد .

ب - چون فرم f(t) مشخص نشده است لذا همواره نمیتوان آنرا بصورت اوپریشنال هم ارزش تبدیل کرد و لذا فرم اوپریشنال این مسئله همان رابطه :

$$(p^{۲}+w^{۲})x=(x_{۰}p^{۲}+x_{۱}p)(۱)+f(t)$$

است .

پ - پس‌از حل معادله نسبت به x چنین داریم :

$$x=p\,\frac{x_{۰}p+x_{۱}}{p^{۲}+w^{۲}}\,(۱)+\frac{۱}{p^{۲}+w^{۲}}\,f(t)=p\,\frac{C(p)}{A(p)}\,(۱)+\frac{۱}{A(p)}\,f(t)$$

که در آن $A(p)=p^{۲}+w^{۲}$ و $C(p)=x_{۰}p+x_{۱}$ است .

ت - حال باید کسرهای $\dfrac{C(p)}{A(p)}$ و $\dfrac{۱}{A(p)}$ را به کسرهای جزیی تجزیه کنیم .

لذا :

$$\frac{x_\circ p+x_۱}{p^۲+w^۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(x_\circ-i\frac{x_۱}{w}\right)}{p-iw}+\frac{\frac{۱}{۲}\left(x_\circ+i\frac{x_۱}{w}\right)}{p+iw}\quad,$$

$$\frac{۱}{p^۲+w^۲}=\frac{۱}{۲iw}\left(\frac{۱}{p-iw}-\frac{۱}{p+iw}\right)$$

$$x=۲Rl\left[\frac{۱}{۲}\left(x_\circ-i\frac{x_۱}{w}\right)e^{iwt}\right]+\frac{۱}{۲iw}\int_\circ^t[e^{iw(t-\tau)}-e^{-iw(t-\tau)}]f(\tau)d\tau$$

$$=x_\circ \cos wt+\frac{x_۱}{w}\sin wt+\frac{۱}{w}\int_\circ^t \sin w(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

مثال ٤ـ مسئله مقدار اولیه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases}(D^۲+۲D+۵)x=e^{-۲t}\\ x_\circ=-۳\ ,\ x_۱=۲\ ;\ t=0\ \text{بازاء}\end{cases}$$

حل ـ الف ـ فرم اوپریشنال این معادله بصورت :

$$(p^۲+۲p+۵)x=(p^۲+۲p)\left(-۳+\frac{۲}{p}\right)(۱)+e^{-۲t}$$

که درآن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در جمله اول طرف راست رابطه بالا نگاهداشت میباشد .

ب ـ فرم اوپریشنال $e^{-۲t}$ برابر $\frac{p}{p+۲}(۱)$ بوده و لذا فرم اوپریشنال این مسئله عبارت میگردد از :

$$(p^۲+۲p+۵)x=\left[-۳(p^۲+۲p)+۲p+\frac{p}{p+۲}\right](۱)$$

پ ـ باید معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کرده و جواب را بصورت :

$$\frac{x}{p}=R(p)(۱)$$

نوشت . یعنی :

$$\frac{x}{p}=-\frac{۳p^{۲}+۱۰p+۷}{(p+۲)(p^{۲}+۲p+۵)}(۱)=R(p)(۱)$$

که در آن $R(p)=-\frac{۳p^{۲}+۱۰p+۷}{(p+۲)(p^{۲}+۲p+۵)}$.

ت ـ با توجه برابطه $(p^{۲}+۲p+۵)=(p+۱-۲i)(p+۱+۲i)$ تابع گویای $R(p)$ را به‌کسرهای جزیی تجزیه میکنیم . یعنی :

$$R(p)=-\frac{۳p^{۲}+۱۰p+۷}{(p+۲)(p^{۲}+۲p+۵)}(۱)=\frac{A}{p+۲}+\frac{B}{p+۱-۲i}+\frac{B}{p+۱+۲i}$$

چون مخرج دارای فاکتورهای ساده است ، لذا بنابر قانون چهارم چنین داریم :

$$A=\left[-\frac{۳p^{۲}+۱۰p+۷}{p^{۲}+۲p+۵}\right]_{p=-۲}=\frac{۱}{۵}$$

$$B=\left[-\frac{۳p^{۲}+۱۰p+۷}{(p+۲)(p+۱+۲i)}\right]_{p=-۱+۲i}=\frac{۱۲-۸i}{(۱+۲i)(۴i)}=\frac{-۸+i}{۵}$$

$$x=\left(A\frac{p}{p+۲}+B\frac{p}{p+۱-۲i}+\bar{B}\frac{p}{p+۱+۲i}\right)(۱)$$

$$=\frac{۱}{۵}e^{-۲t}+۲Rl\left[\frac{-۸+i}{۵}e^{(-۱+۲i)t}\right]$$

$$=\frac{۱}{۵}e^{-۲t}-\frac{۲}{۵}e^{-t}(۸\cos ۲t+\sin ۲t)$$

مثال ۵ - مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}(D^{۴}+۲D^{۲}+۱)x=0\\ x_{۰}=۱\ ,\ x_{۱}=0\ ,\ x_{۲}=-۱\ ,\ x_{۳}=0\ ;\ t=0 \text{ بازاء}\end{cases}$$

حل ـ الف ـ فرم اوپریشنال رابطه بالا بصورت :

$$(p^{۴}+۲p^{۲}+۱)x=(p^{۴}+۲p^{۲})\left(۱+\frac{0}{p}-\frac{۱}{p^{۲}}+\frac{0}{p^{۳}}\right)(۱)$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را درطرف راست رابطه بالا نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p^۴+۲p^۲+۱)x=[p^۴+۲p^۲-p^۲](۱)=(p^۴+p^۲)(۱)$$

ب ـ نظر باینکه $f(t)=o$ است لذا فرم اوپریشنال این مسئله همان :

$$(p^۲+۱)^۲x=p^۲(p^۲+۱)(۱)$$

یعنی :

$$(p^۲+۱)x=p^۲(۱)$$

میباشد .

پ ـ باید این معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کرده و جواب آنرا بصورت :

$$\frac{x}{p}=R(p)(۱)$$

نوشت. یعنی :

$$\frac{x}{p}=\frac{p}{p^۲+۱}(۱)=R(p)(۱) \quad ; \quad R(p)=\frac{p}{p^۲+۱}$$

ت ـ اکنون باید $R(p)$ را با توجه بانکه $p+i$ و $p-i$ فاکتورهای ساده هستند به کسرها جزیی تجزیه کنیم . یعنی :

$$\frac{x}{p}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{p-i}+\frac{۱}{p+i}\right)(۱)$$

ث ـ حال باید معادله $x=pR(p)(۱)$ را حل کرد . یعنی :

$$x=\frac{۱}{۲}\left(\frac{p}{p-i}+\frac{p}{p+i}\right)(۱)=\frac{۱}{۲}(c^{it}+e^{-it})=cos t$$

مثال ۶ـ مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} (D^۴+۲D^۲+۱)x=o \\ x_۰=x_۱=x_۲=o \ , \ x_۳=۱ \ ; \ t=o \ \text{بازاء} \end{cases}$$

حل ـ الف ـ فرم اوپریشنال این معادله بصورت :

$$(p^۴+۲p^۲+۱)x=(p^۴+۲p^۲)\left(o+\frac{o}{p}+\frac{o}{p^۲}+\frac{۱}{p^۳}\right)$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در طرف راست رابطه بالا نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(p^٤+۲p^۲+۱)x=p(۱)$$

ب ـ نظر باینکه $f(t)=0$ است لذا فرم اوپریشنال این مسئله همان :

$$(p^٤+۲p^۲+۱)x=p(۱) \quad \text{و یا} \quad (p^۲+۱)^۲x=p(۱)$$

است .

پ ـ باید این معادله را نسبت به $\frac{x}{p}$ حل کرده و جواب را بصورت :

$$\frac{x}{p}=R(p)(۱)$$

نوشت . یعنی :

$$\frac{x}{p}=\frac{۱}{(p^۲+۱)^۲}(۱) \quad ; \quad R(p)=\frac{۱}{(p^۲+۱)^۲}$$

ت ـ اکنون باید $R(p)$ را با توجه بآنکه $(p+i)^۲$ و $(p-i)^۲$ فاکتورهای مضاعف میباشند به کسرهای جزیی تجزیه کرد و مثلاً برای یافتن جملات متناظر با $p-i$ درتجزیه عبارت $\frac{۱}{(p^۲+۱)^۲}$ به کسرهای جزیی، تبدیل متغیر $p-i=u$ را میدهیم :

$$\frac{۱}{(p^۲+۱)^۲}=\frac{۱}{(p-i)^۲(p+i)^۲}=\frac{۱}{u^۲(u+۲i)^۲}=\frac{۱}{u^۲(-٤+٤iu+u^۲)}$$

$$=\frac{A_۲}{u^۲}+\frac{A_۱}{u}+\frac{Bu+C}{u^۲+٤iu-٤}$$

$$۱=(A_۲+A_۱u)(-٤+٤iu+u^۲)+u^۲(Bu+C)$$

اکنون اگر ۱ را بر $-٤+٤iu+u^۲$ بخش نموده و از جمل $u^۲$ و قوای بالاتر صرفنظر کنیم چنین داریم :

$$\begin{array}{r|l} & -٤+٤iu+u^۲ \\ \hline ۱ & \\ ۱-iu & -\frac{۱}{٤}-\frac{۱}{٤}iu \\ \hline iu & \end{array}$$

و از آنجا : $A_۱ = -\frac{۱}{٤} i \quad , \quad A_۲ = -\frac{۱}{٤}$

پس‌از تقسیم $-\frac{۱}{٤} - \frac{۱}{٤} iu$ بر $u^۲$ و جایگزین کردن $u=p-i$ جملات متناظر با $p-i$ عبارت خواهد بود از :

$$-\frac{۱}{٤} \cdot \frac{۱}{(p-i)^۲}(۱) - \frac{۱}{٤} i \frac{۱}{p-i}(۱)$$

ث ـ اکنون باید معادله $x=pR(p)(۱)$ را حل کرد. یعنی :

$$x = -\frac{۱}{٤} \cdot \frac{p}{(p-i)^۲}(۱) - \frac{۱}{٤} i \frac{p}{p-i}(۱) +$$ جمل متناظر مزدوج

$$x = ۲R\left\{ -\frac{۱}{٤} te^{it} - \frac{۱}{٤} ie^{it} \right\} = -\frac{۱}{۲} t\cos t + \frac{۱}{۲} \sin t$$

در پایان لازم میدانیم متذکر گردیم که ما عمداً مسائل فوق را بطریقی حل کردیم که فقط احتیاج بکار بردن روابط (۲۱ . ۷) و (۲۱۱ . ۷) باشد و دربعضی‌از موارد ممکن است فرمولهایی بکار برد که یافتن جواب ساده شود و مهمترین آنها عبارت است از :

$$\frac{p(p-\alpha)}{(p-\alpha)^۲ + w^۲}(۱) = e^{\alpha t}\cos wt \quad ; \quad \frac{wp}{(p-\alpha)^۲ + w^۲}(۱) = e^{\alpha t}\sin wt$$

(۷ . ۲٤)

زیرا :

$$\frac{p(p-\alpha)}{(p-\alpha)^۲ + w^۲}(۱) = \frac{p}{۲}\left[\frac{۱}{p-\alpha+iw} + \frac{۱}{p-\alpha-iw}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[e^{(\alpha+iw)t} + e^{(\alpha-iw)t}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲} e^{\alpha t}(e^{iwt} - e^{-iwt})$$

$$= e^{\alpha t}\cos wt$$

$$\frac{wp}{(p-\alpha)^۲ + w^۲}(۱) = \frac{p}{۲i}\left[\frac{۱}{p-\alpha-iw} - \frac{۱}{p-\alpha+iw}\right](۱)$$

$$= \frac{۱}{۲i}\left[e^{(\alpha+iw)t} - e^{(\alpha-iw)t}\right]$$

$$=\frac{۱}{۲i}\,e^{\alpha t}(e^{iwt}-e^{-iwt})=e^{\alpha t}\sin wt$$

۲۵ . ۷ - دستگاه معادلات

اگرچه درجلددوم این کتاب بطور مفصل درباره دستگاه معادلات بحث خواهیم نمود، ولی بمنظور تکمیل قسمت اوپریتورها لازم میدانیم دراین قسمت روش کار برد آنرا دردستگاه معادلات تذکر دهیم .

ساده‌ترین مسئله زیر، یعنی دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول :

$$\begin{cases}(a_{۱}D+b_{۱})x+(c_{۱}D+d_{۱})y=f(t)\\(a_{۲}D+b_{۲})+(c_{۲}D+d_{۲})y=g(t)\end{cases}\qquad (۲۵ . ۷)$$

را با شرایط اولیه :

$$x=x_{\circ}\ ,\ y=y_{\circ}\ ;\ t=o \text{ بازاء } \qquad (۲۵۱ . ۷)$$

درنظر میگیریم . مانند قبل $d_{۱} , c_{۱} , b_{۱} , a_{۱}$ و $d_{۲} , c_{۲} , b_{۲} , a_{۲}$ و $y_{\circ} , x_{\circ}$ مقادیر ثابت و اوپریتور $D=\frac{d}{dt}$ است .

زوج معادلاتی که Q را دربر دارد از انتگرال گیری رابطه (۲۵ . ۷) و درج شرایط اولیه (۲۵۱ . ۷) بدست میآید . یعنی :

$$\begin{cases}a_{۱}(x-x_{\circ})+b_{۱}Qx+c_{۱}(y-y_{\circ})+d_{۱}Qy=Qf(t)\\a_{۲}(x-x_{\circ})+b_{۲}Qx+c_{۲}(y-y_{\circ})+d_{۲}Qy=Qg(t)\end{cases}$$

باقراردادن $Q=p^{-۱}$ و ضرب دوطرف معادله در p معادلات بالا بصورت زیر درمیآیند :

$$\begin{cases}(a_{۱}p+b_{۱})x+(c_{۱}p+d_{۱})y=(x_{\circ}a_{۱}+y_{\circ}c_{۱})p(۱)+f(t)\\(a_{۲}p+b_{۲})x+(c_{۲}p+d_{۲})y=(x_{\circ}a_{۲}+y_{\circ}c_{۲})p(۱)+g(t)\end{cases}\qquad (۲۵۲ . ۷)$$

رابطه (۲۵۲ . ۷) را فرم اوپریشنال روابط (۲۵ . ۷) و (۲۵۱ . ۷) نامیم . اگر فرمهای اوپریشنال $f(t)$ و $g(t)$ در دست باشندآنها را درسمت راست (۲۵۲ . ۷) درج و سپس سمبول p را مانند عدد معمولی فرض کردم و معادلات (۲۵۲ . ۷) را مانند معادلات جبری حل میکنیم .

مثال ۱- دستگاه معادلات :

$$\begin{cases}(D-۱)x-۲y=t\\ -۲x+(D-۱)y=t\end{cases}$$

را با شرایط اولیه $x_\circ=۲\ ,\ y_\circ=٤$ حل کنید .

حل - فرم اوپریشنال این دستگاه معادلات عبارت‌است از :

$$\begin{cases}(p-۱)x-۲y=۲p(۱)+t\\ -۲x+(p-۱)y=٤p(۱)+t\end{cases}$$

ولی نظر باینکه فرم اوپریشنال $f(t)=g(t)=t$ است بنابر رابطه (۲۱۳ . ۷) برابر $t=\frac{۱}{p}(۱)$ میباشد . لذا :

$$\begin{cases}(p-۱)x-۲y=۲p(۱)+\frac{۱}{p}(۱)\\ -۲x+(p-۱)y=٤p(۱)+\frac{۱}{p}(۱)\end{cases}$$

حال اگر دستگاه معادلات فوق را نسبت به x حل کنیم خواهیم داشت :

$$[(p-۱)^۲-٤]x=\left[(p-۱)\left(۲p+\frac{۱}{p}\right)+۲\left(٤p+\frac{۱}{p}\right)\right](۱)$$

$$=\left(۲p^۲+۱-۲p-\frac{۱}{p}+۸p+\frac{۲}{p}\right)(۱)$$

$$=\frac{۲p^۳+٦p^۲+p+۱}{p}(۱)$$

$$\frac{x}{p}=\frac{۲p^۳+٦p^۲+p+۱}{p^۲(p+۱)(p-۳)}(۱)$$

پس‌از تجزیه به کسرهای جزیی و استفاده از قوانین چهارم و پنجم‌چنین داریم :

$$x=p\left[\frac{-\frac{۱}{۳}}{p^{۲}}-\frac{\frac{۱}{۹}}{p}-\frac{۱}{p+۱}+\frac{\frac{۲۸}{۹}}{p-۳}\right](۱)=-\frac{۱}{۳}t-\frac{۱}{۹}-e^{-t}+\frac{۲۸}{۹}e^{۳t}$$

بطریق مشابه نیز میتوان y را محاسبه کرد، ولی با توجه برابطه زیر محاسبه y ساده میشود:

$$۲y=Dx-x-t=-\frac{۱}{۳}+e^{-t}+\frac{۲۸}{۳}e^{۳t}+\frac{۱}{۳}t+\frac{۱}{۹}$$
$$+e^{-t}-\frac{۲۸}{۹}e^{۳t}-t$$

بالنتیجه :

$$y=-\frac{۱}{۳}t-\frac{۱}{۹}+e^{-t}+\frac{۲۸}{۹}e^{۳t}$$

در بسیاری از موارد ممکن است بررسی فوق منجر به نتیجه نگردد زیرا اگر مثلاً در رابطه (۷ . ۲۵) ضرایب جملی که مشتقات x و y را در بردارند متناسب باشند ، یعنی $\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{c_۱}{c_۲}$ باشد دراینصورت میتوان رابطه‌یی بین x و y بدست آورد که مشتقات x و y را دربرنداشته باشد .

مثلاً اگر دستگاه معادلات داده شده عبارت باشند از :

$$\begin{cases} Dx+۲x+Dy-۳y=t \\ ۲Dx+x+۲Dy+۲y=0 \end{cases}$$

میتوان معادله $۳x-۸y=۲t$ را ازاین دستگاه معادلات استنتاج کرد . درچنین مواردی مقادیر x_0 و y_0 را نمیتوان مستقلاً و بطور غیر مشخص تعیین کرد (درمثال بالا $۳x_0-۸y_0=0$) و حتی اگر x_0 و y_0 نیز بطور مناسبی با یکدیگر مربوط باشند ممکن است دستگاه معادلات دارای جوابی نباشد .

اگر مسائل فیزیکی را بطورصحیحی درقالب ریاضی بیان کرده باشیم ، اکثراً درمسائل فیزیکی این نوع دستگاه معادلات موردی پیدا نخواهد نمود و ازاین جهت از بحث درآنها صرفنظر میکنیم .

اکنون میتوانیم نظریه فوق را برای n معادله مرتبه اول تعمیم دهیم . برای این منظور اگر مجهولها را به $x_۱ , x_۲ , \dots , x_n$ نشان دهیم میتوانیم دستگاه n معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول را بصورت :

$$\sum_{s=۱}^{n}(a_{rs}D+b_{rs})x_s=f_r(t) \quad , \quad (r=۱ , ۲ , \dots , n) \qquad (۷ . ۲۵۳)$$

با شرایط اولیه :

$$x_r=\alpha_r \;\; ; \;\; t=o \text{ بازاء } \; , \quad (r=۱ , ۲ , \dots , n) \qquad (۷ . ۲۵۴)$$

نشان دهیم . a_{rs} , b_{rs} و $\alpha_r (r , s=۱ , ۲ , \dots , n)$ مقادیر ثابت غیر مشخصی هستند. اگر از رابطه (۷ . ۲۵۳) با توجه به شرایط اولیه (۷ . ۲۵۴) تابع اولیه بگیریم فرم اوپریشنال :

$$\sum_{s=۱}^{n}(a_{rs}p+b_{rs})x_s=\sum_{s=۱}^{n}a_{rs}\alpha_s p(۱)+f_r(t) \quad , \quad (r=۱ , ۲ , \dots , n)$$

(۷ . ۲۵۵)

بدست میآید، که میتوان دستگاه معادلات فوق را مانند معادلات معمولی حل کرد .

در رابطه (۷ . ۲۵۳) بطورضمنی فرض کرده‌ایم که ضرایب جملی که مشتق متغیرهای $x_۱ , x_۲ , \dots , x_n$ را در بردارند از یکدیگر مستقل میباشند . بعبارت دیگر چنین فرض کرده‌ایم که نمیتوان دستگاه معادلات فوق را بطریقی با یکدیگر ترکیب کنیم که رابطه‌یی مستقل از مشتقهای $x_۱ , x_۲ , \dots , x_n$ بدست آوریم .

فرض فوق معادل آن است که دترمینان متشکله از ضرایب :

$$a_{rs} \quad ; \quad (r , s=۱ , ۲ , \dots , n)$$

مخالف صفر باشد . باقید فرض فوق همچنین میتوان نتیجه گرفت که مقادیر اولیه $\alpha_۱ , \alpha_۲ , \dots , \alpha_n$ از یکدیگر مستقل هستند .

میتوان معادلات مشکلتر دیگری را مورد بررسی و مطالعه قرار داد ولی فعلاً فقط به توضیح یک حالت قناعت میکنیم وآن حالتی است که یک دستگاه دومعادله مرتبه دوم نسبت به دو متغیر x و y موجود باشد .

اگرفرض کنیم بازاء $t=o$ مقادیر x , Dx و y , Dy متناظراً برابر $x_۰ , x_۱$ و $y_۰ , y_۱$ و اولین معادله این دستگاه بصورت :

$$(aD^۲+bD+c)x+(a'D^۲+b'D+c')y=f(t)$$

باشد . چون قانون اول شماره (۲۲ . ۷) را تعمیم دهیم فرم اوپریشنال این معادله :

$$(ap^{۲}+bp+c)x+(a'p^{۲}+b'p+c')y=(ap^{۲}+bp)\left(x_{۰}+\frac{x_{۱}}{p}\right)(۱)$$
$$+(a'p^{۲}+b'p)\left(y_{۰}+\frac{y_{۱}}{p}\right)(۱)+f(t)$$

که در آن فقط باید قوای مثبت و مخالف صفر p را در طرف راست رابطه بالا نگاهداشت میباشد . یعنی :

$$(ap^{۲}+bp+c)x+(a'p^{۲}+b'p+c')y=x_{۰}(ap^{۲}+bp)(۱)+x_{۱}(ap)(۱)$$
$$+y_{۰}(a'p^{۲}+b'p)(۱)+y_{۱}(a'p)(۱)+f(t)$$

بطریق مشابه میتوان دومین معادله دستگاه‌را به فرم اوپریشنال هم‌ارزش تبدیل کرده وسپس دستگاه معادلات حاصل را مانند دستگاه معادلات جبری حل کرد .

مثال ۲- دستگاه معادلات :

$$\begin{cases}(D^{۲}-٤D)x-(D-۱)y=۱\\(D+٦)x+(D^{۲}-D)y=e^{٤t}\end{cases}$$

را با شرایط اولیه $x_{۰}=x_{۱}=y_{۰}=۱$, $y_{۱}=0$ را حل کنید .

حل - فرم اوپریشنال این مسئله بقرار زیر است :

$$\begin{cases}(p^{۲}-٤p)x-(p-۱)y=(p^{۲}-٤p)\left(۱+\frac{۱}{p}\right)(۱)\\ \qquad -p\left(۱+\frac{0}{p}\right)(۱)+۱\\ (p+٦)x+(p^{۲}-p)y=p\left(۱+\frac{۱}{p}\right)(۱)\\ \qquad +(p^{۲}-p)\left(۱+\frac{0}{p}\right)(۱)+e^{٤t}\end{cases}$$

ولی نظربا‌ینکه بنابر روابط (۲۱۲ . ۷) فرم اوپریشنال (۱) $e^{٤t}=\frac{p}{(p-٤)}$ است لذا چنین داریم :

$$\begin{cases} (p^{٢}-٤p)x-(p-١)y=[(p^{٢}-٤p)+(p)+(-p)+١](١) \\ \qquad =(p^{٢}-٤p+١)(١) \\ (p+٦)x+(p^{٢}--p)y=\left[(p)+(p^{٢}-p)+\dfrac{p}{p-٤}\right](١) \\ \qquad =\left(p^{٢}+\dfrac{p}{p-٤}\right)(١) \end{cases}$$

حال اگر دستگاه معادلات فوق را نسبت به x حل کنیم چنین داریم :

$$[(p^{٢}-٤p)(p^{٢}-p)+(p-١)(p+٦)]x=(p^{٢}-p)(p^{٢}-٤p+١)(١)$$

$$+(p-١)\left(p^{٢}+\frac{p}{p-٤}\right)(١)$$

$$=\left(p^{٤}-٤p^{٣}+٤p^{٢}-p+\frac{p(p-١)}{p-٤}\right)(١)$$

$$(p^{٤}-٥p^{٣}+٥p^{٢}+٥p-٦)x=\frac{p}{p-٤}(p^{٤}-٨p^{٣}+٢٠p^{٢}-١٦p+٣)(١)$$

$$(p+١)(p-١)(p-٢)(p-٣)x=\frac{p(p-١)(p-٣)(p^{٢}-٤p+١)}{(p-٤)}(١)$$

و از آنجا :

$$\frac{x}{p}=\frac{p^{٢}-٤p+١}{(p+١)(p-٢)(p-٤)}(١)=\left(\frac{\frac{٢}{٥}}{p+١}+\frac{\frac{١}{٢}}{p-٢}+\frac{\frac{١}{١٠}}{p-٤}\right)(١)$$

$$x=\frac{٢}{٥}e^{-t}+\frac{١}{٢}e^{٢t}+\frac{١}{١٠}e^{٤t}$$

برای محاسبه y از اولین معادله دستگاه بالا استفاده مینماییم . یعنی :

$$(p-١)y=p(p-٤)x-(p^{٢}-٤p+١)(١)$$

$$=(p^{٢}-٤p+١)\left[\frac{p^{٢}}{(p+١)(p-٢)}-١\right](١)$$

$$=(p^{٢}-٤p+١)\frac{p+٢}{(p+١)(p-٢)}(١)$$

$$\frac{y}{p}=\frac{(p^{۲}-٤p+۱)(p+۲)}{p(p+۱)(p-۱)(p-۲)}(۱)=\left[\frac{۱}{p}-\frac{۱}{p+۱}+\frac{۳}{p-۱}-\frac{۲}{p-۲}\right](۱)$$

$$y=۱-e^{-t}+۳e^{t}-۲e^{۲t}$$

در پایان لازم است متذکر گردیم که اگر ضرایب جمل $D^{۲}x$ و $D^{۲}y$ بایکدیگر متناسب باشند برای یافتن جواب دستگاه به اشکال برخواهیم خورد .

۲۶ . ۷ ـ اثبات روش اوپریشنال

تاکنون اثبات ننموده‌ایم که اگر روش اوپریشنال را برای معادله دیفرانسیل مرتبه n ام (شماره ۲۲ . ۷) ویا یکدستگاه معادلات خطی مرتبه اول (شماره ۲۵ . ۷) بکاربریم جواب صحیحی برای «مسائل مقادیر اولیه» بدست میآوریم . اکنون این فاصله را تکمیل مینماییم و نظر باینکه اوپریتور Q در اثباتهای تئوری بمراتب سهل‌تر از p میباشد لذا اثبات این قضیه‌را برحسب Q بیان خواهیم کرد .

ابتدا معادلات (۲۵۳ . ۷) را با توجه به شرایط اولیه (۲۵٤ . ۷) درنظر میگیریم . حال اگر $x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n$ جوابهای این مسئله باشند با انتگرال گیری از رابطه (۲۵۳ . ۷) ویا درنظر گرفتن این نکته که $QDx_s(t)=x_s(t)-x_s(o)=x_s(t)-\alpha_s$ است چنین داریم :

$$\sum_{s=۱}^{n} a_{rs}(x_s-\alpha_s)+\sum_{s=۱}^{n} b_{rs}Qx_s=Qf_r(t)$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=۱}^{n}(a_{rs}+b_{rs}Q)x_s=\sum_{s=۱}^{n}a_{rs}\alpha_s+Qf_r(t)\\ \qquad\qquad =g_r(t) \quad , \quad (r=۱,۲,۳,\dots,n)\end{cases} \qquad (۷ . ۲۶)$$

بالعکس اگر $x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n$ در رابطه (۲۶ . ۷) صدق کند این مقادیر در رابطه (۲۵۳ . ۷) نیزصدق مینمایند، زیرا کافی است ازرابطه (۲۶ . ۷) نسبت به t مشتق بگیریم . همچنین اگر در رابطه (۲۶ . ۷)، t را مساوی صفرقرارداده وبا توجه به‌آنکه جمیع جملی که Q را دربر دارند متحد صفر هستند چنین داریم :

$$\sum_{s=۱}^{n} a_{rs}[x_s(o)-\alpha_s]=o \quad , \quad (r=۱,۲,\dots,n)$$

ولی از آنجایی که فرض نموده‌ایم که دترمینان $a_{rs}|$ مخالف صفر میباشدلذا ازمعادلات بالا چنین برمیآید که $x_r(o)-\alpha_r=o$ و از آنجاشرایط اولیه (٢٥٤ . ٧) صادق میباشد . بنابراین نشان دادیم که مسئله مقادیراولیه که باروابط (٢٥٣ . ٧) و (٢٥٤ . ٧) مشخص میشود هم‌ارز معادله (٢٦ . ٧) است .

باید توجه داشت که اگر در رابطه (٢٦ . ٧) بجای Q مقدار p^{-1} را قرار داده و سپس دوطرف رابطه فوق‌را در p ضرب کنیم مجدداً همان رابطه (٢٥٥ . ٧) یعنی معادلاتی که درکارهای عملی بکار میبریم بدست خواهیم آورد .

اکنون میخواهیم نشان دهیم که معادلات (٢٦ . ٧) منحصراً فقط دارای یک جواب است .

اگر $a_{rs}+b_{rs}Q$ را با $c_{rs}(Q)$ نمایش دهیم و فرض کنیم $\triangle(Q)$ دترمینانی باشد که عنصر واقع درسطر r ام و ستون s ام آن $c_{rs}(Q)$ و بالاخره $C_{rs}(Q)$ ضریب $c_{rs}(Q)$ در بسط دترمینان $\triangle(Q)$ باشد .

واضح است که $\triangle(Q)$ کثیرالجمله‌یی نسبت به Q میباشد که درجه آن اکثراً n است . یعنی :

$$\triangle(Q)=\triangle_0+\triangle_1 Q+\cdots+\triangle_n Q^n$$

$\triangle_0$ دترمینان مرتبه n ام $|a_{rs}|$ بوده و بنابراین مخالف‌صفر میباشد. بطریق مشابه نتیجه میگردد که $C_{rs}(Q)$ کثیرالجمله‌یی برحسب Q میباشد .

باید متذکرشد ، دترمینانهایی را که بکار میبریم عناصر آنها اوپریتور بوده وبسهولت میتوان آنها را تعریف نمود و مانند دترمینانهاییکه عناصر آنها اعداد معمولی هستند مورد بررسی قرار داد . همچنین چون عناصر این دترمینان قابل جابجایی هستند لذا میتوان ضرب را بهر ترتیبی که مایل باشیم انجام دهیم .

اکنون اگر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ جواب (٢٦ . ٧) باشند و معادله r ام (٢٦ . ٧) را در $C_{rj}(Q)$ ضرب نموده و بازاء مقادیر مختلفه r بایکدیگر جمع کنیم چنین داریم :

$$\sum_{s=1}^{n} c_{rs}(Q)x_s=g_r(t) \quad , \quad C_{rj}(Q)\sum_{s=1}^{n} c_{rs}(Q)x_s=g_r(t)C_{rj}(Q)$$

$$\sum_{r=1}^{n} C_{rj}(Q)\sum_{s=1}^{n} c_{rs}(Q)x_s=\sum_{I=1}^{n} g_r(t)C_{rj}(Q)$$

$$\sum_{s=1}^{n}\Big[\sum_{r=1}^{n}C_{r_j}{}'(Q)c_{rs}(Q)\Big]x_s=\sum_{r=1}^{n}c_{rj}(Q)g_r(t)$$

ولی همانطور که میدانیم :

$$\sum_{r=1}^{n}C_{rj}(Q)c_{rs}(Q)=\begin{cases}\triangle(Q) & , \quad s=j\\ 0 & , \quad s\neq j\end{cases}$$

و از آنجا چنین داریم :

$$\triangle(Q)x_j=\sum_{r=1}^{n}C_{rj}(Q)g_r(t) \quad , \quad (j=۱\,,۲\,,\dots,n)$$

ولی اوپریتور $\triangle(Q)$ بصورت $\triangle_{\circ}(۱+k_{۱}Q+k_{۲}Q^{۲}+\cdots+k_nQ^n)$ که درآن $\triangle_{\circ}\neq 0$ است میباشد و بنابراین طبق شماره (۷ . ۱۴) دارای وارونه است و از آنجا :

$$x_j=\sum_{r=1}^{n}\frac{C_{rj}(Q)}{\triangle(Q)}g_r(t) \quad , \quad (j=۱\,,۲\,,\dots,n) \qquad (۷\,.\,۲۶۱)$$

بااثبات مشابهی که از بیان آن خودداری میشود میتوان نشان داد که رابطه (۷ . ۲۶۱) یک دسته جوابهای معادلات (۷ . ۲۶) میباشند و از آنجا میتوان نتیجه گرفت که معادله (۷ . ۲۶) دارای جواب منحصر بفردی است که با رابطه (۷ . ۲۶۱) مشخص میگردد .

واضح است که در استدلال فوق یکی از روشهاییکه برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب عددی معمول است اتخاذ نموده وسپس تحقیق مینماییم که آیا این روش درحالتی که ضرایب اوپریتورهایی بشکل $a_{rs}+b_{rs}Q$ هستند صادق میباشد وسپس رابطه (۷ . ۲۶۱) که «**به قانون کرامر**» موسوم است بدست میآوریم واز آنجا حل معادلات (۷ . ۲۶) بوسیله قوانین جبری معمولی تأیید میگردد . درهرصورت باید رابطه (۷ . ۲۶۱) را محاسبه کرد وهمانطور که درشماره (۷ . ۱۴) متذکر گردیدیم باید توابع گویای Q را بصورت کسرهای جزیی تجزیه کرد . میتوان نتایج پیش گفته را در قضیه زیر خلاصه کرد .

قضیه اول

معادلات دیفرانسیل (۷ . ۲۵۳) دارای یکدستگاه جواب منحصر بفرد میباشد که در شرایط اولیه داده شده (۷ . ۲۵۴) صدق میکند به شرط آ-

دترمینانی که از ضرایب a_{rs} تشکیل میگردد مخالف صفر باشد و این جواب را میتوان باروش اوپریشنال طبق اصولی که درشماره (۷ . ۲۵) متذکر گردیدیم محاسبه کنیم .

اکنون مسئله «مقدار اولیه» را برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام که بنابر رابطه (۷ . ۲۲) مشخص شده‌است درنظر گرفته وآنرا به یکدستگاه n معادله خطی مرتبه اول تبدیل میکنیم .

برای‌این منظور x , Dx , D^2x , ... , $D^{n-1}x$ را متغیرهای جدیدی‌فرض‌نموده وبه ترتیب آنها را به u_0 , u_1 , ... , u_{n-1} نشان میدهیم . باکمی دقت بسهولت معلوم میگردد که :

$$Du_0=u_1 \;;\; Du_1=u_2 \;;\; Du_2=u_3 , \ldots , Du_{n-2}=u_{n-1}$$

و بالنتیجه معادله دیفرانسیل (۷ . ۲۲) با تبدیل متغیرهای فوق بصورت زیر در میآید :

$$Du_{n-1}+a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+\cdots+a_nu_0=f(t)$$

واضح است که مقادیراولیه u_0 , u_1 , ... , u_{n-1} به ترتیب برابر x_0 , x_1 , ... , x_{n-1} میباشند. بالعکس‌اگر u_0 , u_1 , ... , u_{n-1} درمعادلات فوق و شرایط اولیه صدق‌نمایند $x=u_0$ جواب معادله (۷ . ۲۲) میباشد و از آنجا مسئله مقدار اولیه زیر هم‌ارز رابطه (۷ . ۲۲) است :

$$\begin{cases} Du_0-u_1=0 \;,\; Du_1-u_2=0 , \ldots , Du_{n-2}-u_{n-1}=0 \\ Du_{n-1}+a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+\cdots+a_nu_0=f(t) \end{cases} \qquad (\text{۷ . ۲۶۲})$$

بازاء $u_0=x_0 , u_1=x_1 , u_2=x_2 , \ldots , u_{n-1}=x_{n-1} \;;\; t=0$

لذا کاملاً آشکار است که اگراختلاف غیراساسی سمبولها را صرفنظر کنیم مسئله بالا کاملاً شبیه بروابط(۷ . ۲۵۳)و(۷ . ۲۵۴) بوده وچون مقدار دترمینان ضرایب جملی که مشتق دربردارند مخالف‌صفراست میتوان‌فرم اوپریشنال‌این مسئله را بصورت (۷ . ۲۶) بنویسیم . درحقیقت مقدار این دترمینان برابر یک است زیرا عناصر واقع در روی قطر اصلی یک وسایر عناصر صفر هستند .

بهرصورت رابطه (۷ . ۲۶) برای این مسئله بصورت زیر نوشته میشود :

$$\begin{cases} u_۰ - Qu_۱ = x_۰ \;\; ; \;\; u_۱ - Qu_۲ = x_۱ \;\; ; \;\; u_۲ - Qu_۳ = x_۲ \; , \; \ldots \; , \\ \qquad\qquad\qquad u_{n-۲} - Qu_{n-۱} = x_{n-۲} \\ u_{n-۱} + a_۱ Qu_{n-۱} + a_۲ Qu_{n-۲} + \cdots + a_n Qu_۰ = x_{n-۱} + Qf(t) \end{cases} \qquad (۷ \,.\, ۲٦۳)$$

سپس میتوان این معادلات را طبق قوانین معمولی جبر حل کرد .

چون تنها جوابی که مورد نیازاست $u_۰ = x$ میباشد لذا اگر معادلات (۷ . ۲٦۳) را به ترتیب در :

$$۱ + a_۱ Q + a_۲ Q^۲ + \cdots + a_{n-۱} Q^{n-۱}$$

$$Q + a_۱ Q^۲ + a_۲ Q^۳ + \cdots + a_{n-۲} Q^{n-۱}$$

$$Q^۲ + a_۱ Q^۳ + a_۲ Q^٤ + \cdots + a_{n-۳} Q^{n-۱}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$Q^{n-۲} + a_۱ Q^{n-۱}$$

$$Q^{n-۱}$$

ضرب نموده و با یکدیگر جمع کرده و بجای $u_۰$ ، x قرار دهیم چنین داریم :

$$\begin{aligned} (۱ + a_۱ Q + a_۲ Q^۲ + \cdots + a_n Q^n)x = Q^n f(t) \\ + [x_۰(۱ + a_۱ Q + a_۲ Q^۲ + \cdots + a_{n-۱} Q^{n-۱}) \\ + x_۱(Q + a_۱ Q^۲ + \cdots + a_{n-۲} Q^{n-۱}) \\ + \cdots + x_{n-۱} Q^{n-۱}](۱) \end{aligned} \qquad (۷ \,.\, ۲٦٤)$$

چون اوپریتور $۱ + a_۱ Q + a_۲ Q^۲ + \cdots + a_n Q^n$ دارای وارونه است لذا مقدار x را میتوان از رابطه بالا بدست آورد و بالنتیجه روش اوپریشنال از نقطه نظر تئوری با بکاربردن اوپریتور Q تأیید میگردد . باید توجه داشت که اگر در رابطه (۷ . ۲٦٤) بجای Q ، $p^{-۱}$ قرار داده ودوطرف‌رابطه را در p^n ضرب کنیم عیناً‌رابطه (۷ . ۲۲۱) که‌فرم اوپریشنال (۷ . ۲۲) است واکثراً در مسائل عملی بکار میرود بدست میآید . لذا نشان دادیم که :

قضیه دوم

مسئله مقدار اولیه (۲۲ . ۷) دارای جواب منحصر بفرد است که میتوان این جواب را بنابر روش اوپریشنال که آنرا درشماره (۲۲ . ۷) توضیح دادیم محاسبه کرد .

۲۷ . ۷ - حل عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام

اگر روش اوپریشنال را در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه n ام :

$$(D^n+a_۱D^{n-۱}+a_۲D^{n-۲}+\cdots+a_n)x=f(t) \qquad (۷ . ۲۷)$$

بکار بریم جواب عمومی معادله (۷ . ۲۷) بهرنحوی که شرایط اولیه انتخاب گردیده باشند بصورت زیر است :

$$x=p\,\frac{C(p)}{A(p)}\,(۱)\;+\;\frac{۱}{A(p)}\,f(t) \qquad (۷ . ۲۷۱)$$

$A(p)=p^n+a_۱p^{n-۱}+\cdots+a_n$ و کثیرالجمله $C(p)$ بستگی به مقادیر اولیه داشته ولی به $f(t)$ بستگی ندارد .

بنابراین رابطه (۷ . ۲۷۱) جواب معادله (۷ . ۲۷) را بصورت مجموع دو جمله بیان نموده که جمله اول آن یعنی $p\frac{C(p)}{A(p)}\,(۱)$ درمعادله بدون طرف ثانی :

$$(D^n+a_۱D^{n-۱}+a_۲D^{n-۲}+\cdots+a_n)x=o \qquad (۷ . ۲۷۲)$$

با همان شرایط اولی قبلی صدق میکند . درصورتیکه جمله دوم یعنی $\frac{۱}{A(p)}\,f(t)$ جواب خصوصی معادله (۷ . ۲۷) که درآن جمیع مقادیر اولیه x , Dx , $D^۲x$, ... , $D^{n-۱}x$ صفر هستند میباشد .

ازطرف دیگرملاحظه میشود که هرجواب معادله بدون طرف ثانی بفرم ، $p\frac{C(p)}{A(p)}\,(۱)$ بوده و با درنظر داشتن اتحاد :

$$A(p)=(p-\lambda_۱)^{m_۱}(p-\lambda_۲)^{m_۲}\;\ldots\;(p-\lambda_k)^{m_k}$$

مقدار کسر فوق بصورت ترکیبهای خطی از :

$$e^{\lambda_۱ t}, te^{\lambda_۱ t}, \dots, t^{m_۱-۱}e^{\lambda_۱ t} \quad ; \quad e^{\lambda_۲ t}, te^{m_۲ t}, \dots, t^{m_۲-۱}e^{\lambda_۲ t}$$

$$e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, t^۲ e^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-۱}e^{\lambda_k t} \qquad (۷ \, . \, ۲۷۳)$$

میباشد .

بالعکس بسهولت میتوان نشان داد که هررابطه خطی از توابع (۲۷۳ . ۷) جواب معادله بدون طرف ثانی بوده و از آنجا قضیه زیر نتیجه میگردد .

قضیه :

جواب عمومی بدون طرف ثانی(۲۷۲ . ۷)بصورت رابطه خطی از توابع (۲۷۳ . ۷) میباشد .

بدین ترتیب بار دیگر مطالبی که در شماره (۶ . ۶) بیان کردیم تأیید میشود .

اکنون فرض میکنیم بخواهیم جواب عمومی معادله (۲۷ . ۷) را بدست آوریم . تنها چیزی که پس ازیافتن تابع مکمل یعنی جواب معادله بدون طرف ثانی مورد نیاز است تعیین جواب خصوصی معادله با طرف ثانی میباشد . این جواب را میتوان با روش اوپریشنال بدست آورد یعنی $f(t) \frac{۱}{A(p)}$. درمواردی که فرم اوپریشنال $F(p)(۱)$ دردست باشد جواب خصوصی بصورت $\frac{F(p)}{A(p)}(۱)$ بوده و هنگامیکه آنرا به کسرهای جزیی تجزیه میکنیم باید درنظر داشت جملی که قبلاً در تابع مکمل بدست آمده‌اند از آنها صرفنظر کرد .

مثلاً جواب خصوصی معادله $(D^۴-۱)x=te^t$ بصورت :

$$\frac{۱}{(p^۴-۱)} \cdot \frac{p}{(p-۱)^۲}(۱)=p\frac{۱}{(p^۲+۱)(p+۱)(p-۱)^۳}(۱)$$

بوده که پس از بسط میتوان نوشت :

$$\frac{۱}{(p^۲+۱)(p+۱)(p-۱)^۳}=\frac{A}{p-i}+\frac{\overline{A}}{p+i}+\frac{B}{p+۱}+\frac{C_۱}{p-۱}$$

$$+\frac{C_۲}{(p-۱)^۲}+\frac{C_۳}{(p-۱)^۳}$$

برای محاسبه جواب خصوصی دو جمله آخر طرف راست رابطه بالا مورد نیاز است چه جمل

دیگر منجر به ایجاد مضاربی از $e^{-it} , e^{it} , e^{-t} , e^{t}$ میگردند که قبلاً در تابع مکمل موجود میباشند .

مسائل

درجمیع مسائل زیر مقادیر $\dots , D^۳x , D^۲x , Dx , x$ را بازاء $t=0$ به‌ترتیب به $\dots , x_۳ , x_۲ , x_۱ , x_۰$ نشان داده‌ایم .

الف ـ مسائل مقادیر اولیه زیر را حل کنید :

۱- $(D^۲+۶D+۹)x=t^۲e^{-۳t}$; $x_۰=x_۱=0$.

۲- $(D^۲-D-۲)x=e^t \sin ۲t$; $x_۰=x_۱=0$.

۳- $(D^۴-۵D^۳+۵D^۲+۵D-۶)x=0$;
$x_۰=x_۳=۲ \ , \ x_۱=x_۲=0$.

۴- $(D^۳+۳D^۲-D-۳)x=c^{-۲t}$; $x_۰=x_۱=x_۲=0$.

۵- $(D^۲+۲D+۲)x=f(t)$; $x_۰=x_۱=0$.

۶- $(D^۲-۲D+۱)x=c^t$; $x_۰=۱ , x_۱=-۱$.

۷- $(D^۳+۱)x=e^{-t}$; $x_۰=۱ , x_۱=-۱ , x_۲=-۲$.

۸- $(D^۳-۳D^۲+۳D-۱)x=۵۴e^{۴t}$; $x_۰=۱ , x_۱=۲ , x_۲=۳$.

۹- $(D^۴+۲D^۳+D^۲-۲D-۲)x=t$;
$x_۰=۱ , x_۱=-۲ , x_۲=0 , x_۳=۵$.

۱۰- $(D^۲-۵D+۶)x=\cos ۳t$; $x_۰=0 , x_۱=۵$.

۱۱- $(D^۴+۴)x=f(t)$; $x_۰=x_۱=x_۲=x_۳=0$.

۱۲- $(D^۴-۵D^۳+۶D^۲+۴D-۸)x=0$;
$x_۰=0 , x_۱=x_۲=۱ , x_۳=۳$.

۱۳- $(D^۴+۴D^۲+۴)x=۱+t^۲$; $x_۰=x_۱=x_۲=x_۳=0$.

۱٤- $(D^۳-D^۲+٤D-٤)x=۱٥e^t \;;\; x_0=x_۱=٥\,,\ x_۲=0$.

۱٥- $(D^٤-D^۳)x=0 \;;\; x_0=x_۱=x_۲=x_۳=۱$.

۱٦- $(D^۳+۱)x=۳ \;;\; x_0=x_۱=x_۲=0$.

۱۷- $\begin{cases}(۳D+۲)x+Dy=0\\ Dx+(٤D+۳)y=۱۷e^t\end{cases} ;\; x_0=y_0=0$.

۱۸- $\begin{cases}Dx-۲y=\cos t\\ Dy+۲x=\sin t\end{cases} ;\; x_0=۱\,,\ y_0=۲$.

۱۹- $\begin{cases}(D-۲)x+(۲-D)y=-۲e^t\\ (۲D-۳)x+(۲-D)y=-۲e^t\end{cases} ;\; x_0=۱\,,\ y_0=0$.

۲۰- $\begin{cases}(۳D+٥)x-٤y=٤t^۲\\ ۸x-(۳D+۱)y=t^۲-۳t\end{cases} ;\; x_0=۲\,,\ y_0=0$.

۲۱- $\begin{cases}(D+٥)x+٤y=0\\ Dx+۲(D+٥)y=0\end{cases} ;\; x_0=٤\,,\ y_0=0$.

۲۲- $\begin{cases}(۲D-۱)x+(D-۲)y=e^t\\ (D-۲)x+(۲D-۱)y=e^{-t}\end{cases} ;\; x_0=\frac{۱}{۲}\,,\ y_0=-\frac{۱}{۲}$.

۲۳- $\begin{cases}(۷D+٥۰)x+٤Dy=E\\ ۲Dx+٥(D+٤)y=0\end{cases} ;\; x_0=y_0=0$. E مقداری است ثابت .

۲٤- $\begin{cases}(۲D+۳)x+Dy=f(t)\\ Dx+(D+۲)y=g(t)\end{cases} ;\; x_0=y_0=0$. مطلوب است تعیین x .

۲٥- $\begin{cases}D^۲x-۲y=\cos t\cosh t\\ D^۲y+۲x=\sin t\sinh t\end{cases} ;\; x_۱=y_۱=0\,,\ x_0=y_0=۱$.

۲۶-
$$\begin{cases} (۳D^۲+۱)x-y=0 \\ -۲x+(۳D^۲+۲)y=0 \end{cases} ; \quad x_1=۷\ ,\ x_0=y_0=y_1=0\ .$$

در مسئله بالا کوچکترین مقدار t را بقسمی تعیین کنید که عبارت $x-y$ متحد صفر گردد و دراینصورت مقادیر Dx و Dy را نیز بیابید .

۲۷-
$$\begin{cases} (D^۲+۸)x+۲y=۲۴\cos ۴t \\ ۲x+(D^۲+۵)y=0 \end{cases} ; \quad x_0=y_0=x_1=y_1=0\ .$$

۲۸-
$$\begin{cases} (D^۲-۸)x+Dy=0 \\ -۶Dx+(D^۲+۲)y=0 \end{cases} ; \quad x_0=y_0=۱\ ,\ x_1=-۱\ ,\ y_1=۶\ .$$

۲۹-
$$\begin{cases} (D^۲+۵)x-y=۴t^۲ \\ -۳x+(D^۲+۲)y=0 \end{cases} ; \quad x_0=y_0=x_1=y_1=0\ .$$

۳۰-
$$\begin{cases} D^۲x+۲x-z=0 \\ D^۲y+۲y-z=0 \\ D^۲z-۸x-y+۲z=0 \end{cases} ; \quad x_0=y_0=x_1=y_1=z_1=0\ ,\ z_0=۱\ .$$

مطلوب است تعیین z .

ب - x , y , z توابعی از t میباشند که در روابط زیر صدق میکنند :

$$۲x-۴y+z=۲ \quad ; \quad Dx=۳y \quad ; \quad ۲Dy=۳z$$

نشان دهید که $(D^۲-۶D+۹)z=0$ بوده و ازآنجا مقادیر x , y و z را برحسب t بیابید .

پ - نشان دهید که $y=mx$ در دستگاه معادلات :

$$(D-۸)x+(D-۱)y=0 \quad ; \quad (۷D-۲)x-۲y=0$$

صدق مینماید، هرگاه دو شرط زیر توأماً برقرار باشند .

۱- m یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $۲m^۲-۳m-۵۴=0$ باشد .

۲- x درمعادله $[۷D-۲(۱+m)]x=0$ صدق کند .

بابرقرار بودن دو شرط بالا عبارات x و y را برحسب t با شرایط اولیه $x_0=0$ و $y_0=۱$ بیابید .

ت ـ $$\begin{cases} Dx+٤y=۳\sin t \\ Dy-٤x=0 \end{cases} ;\ x_0=x_1=0 .$$

ث ـ $$\begin{cases} (D+۵)x+y=e^t \\ -x+(D+۳)y=e^{۲t} \end{cases} ;\ x_0=x_1=0 .$$

جوابها

الف ـ ۱ـ $x=\frac{۱}{۱۲}t^٤e^{-۳t}$.

۲ـ $x=\frac{۲}{۱۵}e^{۲t}-\frac{۱}{۱۲}e^{-t}-\frac{e^t}{۲۰}(\cos ۲t+۳\sin ۲t)$.

۳ـ $x=\frac{۷}{۲}e^t+\frac{۵}{۱۲}e^{-t}-\frac{۸}{۳}e^{۲t}+\frac{۳}{٤}e^{۳t}$.

٤ـ $x=\frac{۱}{۲٤}e^t-\frac{۱}{٤}e^{-t}+\frac{۱}{۳}e^{-۲t}+\frac{۱}{۸}e^{-۳t}$.

۵ـ $x=\int_0^t c^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

٦ـ $x=c^t\left(۱-۲t+\frac{۱}{۲}t^۲\right)$.

۷ـ $$x=\frac{۱}{۳}(۱+t)e^{-t}+e^{\frac{t}{۲}}\left[\frac{۲}{۳}\cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)\right. \left.-\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}t}{۲}\right)\right] .$$

۸ـ $x=۲e^{٤t}-(۱+۵t+۹t^۲)e^t$.

۹ـ $x=\frac{۱}{۲}(۱-t)+e^{-t}\left(\frac{۵}{۲}\cos t-\sin t-۲\right)$.

۱۰- $x=-\frac{۶۷}{۱۳}e^{۲t}+\frac{۳۱}{۶}e^{۲t}-\frac{۱}{۷۸}(\cos ۳t+۵\sin ۳t)$.

۱۱- $x=\frac{۱}{۴}\int_{0}^{t}[\cosh(t-\tau)\sin(t-\tau)$
$-\cos(t-\tau)\sinh(t-\tau)]f(\tau)d\tau$.

۱۲- $x=\frac{۱}{۳}(e^{۲t}-e^{-t})$.

۱۳- $x=\frac{۱}{۴}[t^{۲}-۱+\cos(\sqrt{۲}\,t)]$.

۱۴- $x=\left(۳t+\frac{۱۴}{۵}\right)e^{t}+\frac{۱}{۵}(۱۱\cos ۲t-۲\sin ۲t)$.

۱۵- $x=e^{t}$.

۱۶- $y=۳-۲e^{\frac{t}{۲}}\cos\left(\frac{\sqrt{۳}\,t}{۲}\right)-e^{-t}$.

۱۷- $x=\frac{۱}{۱۰}\left(-۵e^{t}+۱۷e^{-t}-۱۲e^{-\frac{۶}{۱۱}t}\right)$,
$y=\frac{۱}{۱۰}\left(۲۵e^{t}-۱۷e^{-t}-۸e^{-\frac{۶}{۱۱}t}\right)$.

۱۸- $x=\cos ۲t+\frac{۷}{۳}\sin ۲t+\frac{۱}{۳}\sin t$,
$y=\frac{۷}{۳}\cos ۲t-\sin ۲t-\frac{۱}{۳}\cos t$.

۱۹- $x=e^{t}\ ;\ y=e^{۲t}-e^{t}$.

۲۰- $۹x=۱۱e^{-۲t}+۱۵e^{t}-۱۲t-۸$,
$۹y=-۱۱e^{-۲t}+۳۰e^{t}-۹t^{۲}+۱۵t-۱۹۰$.

۲۱- $x=(۴\cos ۳t-\frac{۴}{۳}\sin ۳t)e^{-۴t}\ ,\ \ y=\frac{۱۰}{۳}e^{-۴t}\sin ۳t$

۲۲- $. x=\frac{۱}{۶}(t+۲)e^{t}-\frac{۱}{۶}(۳t-۱)e^{-t} \quad ,$

$y=\frac{۱}{۶}(t-۱)e^{t}+\frac{۱}{۶}(۳t-۲)e^{-t}$

۲۳- $. x=\frac{E}{۱۰۵۰}\left(۲۱-۵e^{-\frac{۱۰t}{۳}}-۱۶e^{-\frac{۱۰۰t}{۹}}\right) \quad ,$

$y=\frac{E}{۱۰۵}\left(e^{-\frac{۱۰۰t}{۹}}-e^{-\frac{۱۰t}{۳}}\right)$

۲۴- $. x=\frac{۱}{۵}\int_{۰}^{t} e^{-(t-\tau)}[f(\tau)+g(\tau)]d\tau$

$$-\frac{۲}{۵}\int_{۰}^{t} e^{-۶(t-\tau)}[۳g(\tau)-۲f(\tau)]d\tau$$

۲۵- $. x=\cos t\cosh t+\frac{۳}{۲}\sin t\sinh t \quad ,$

$y=-\sin t\sinh t+\cos t\cosh t$

۲۶- $. x=\frac{۱}{۳}v(۲t+\sin t) \quad ; \quad y=\frac{۲}{۳}v(t-\sin t)$

$$t=\pi \ , \ Dx=\frac{۱}{۳}v \ , \ Dy=\frac{۴}{۳}v$$

۲۷- $. x=\frac{۲}{۵}\cos ۲t+\frac{۹۶}{۳۵}\cos ۳t-\frac{۲۲}{۷}\cos ۴t \quad ,$

$y=-\frac{۴}{۵}\cos ۲t+\frac{۴۸}{۳۵}\cos ۳t-\frac{۴}{۷}\cos ۴t$

۲۸- $. x=\frac{۱}{۴}e^{۲t}+\frac{۱}{۲}e^{-۲t}+\frac{۱}{۴}(\cos ۲t-\sin ۲t) \quad ,$

$y=\frac{۱}{۲}e^{۲t}-e^{-۲t}+\frac{۳}{۲}(\cos ۲t+\sin ۲t)$

۲۹- $. x=t^{۲}-\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}\cos(t\sqrt{۲})+\frac{۱}{۶}\cos(t\sqrt{۶}) \quad ,$

$$y = t^{۲} - \frac{۴}{۳} + \frac{۳}{۲}\cos(t\sqrt{۲}) - \frac{۱}{۶}\cos(t\sqrt{۶})$$

۳۰- $$z = \frac{۱}{۲}\cosh t + \frac{۱}{۲}\cos(t\sqrt{۵}) .$$

ب- $$x = ۲ + \left(\frac{۱}{۲}A - \frac{۱}{۳}B + \frac{۱}{۲}Bt\right)e^{۲t} , .$$

$$y = \left(\frac{۱}{۲}A - \frac{۱}{۶}B + \frac{۱}{۲}Bt\right)e^{۲t} , \quad z = (A + Bt)e^{۲t}$$

پ- $$x = \frac{۲}{۲۱}(e^{۲t} - e^{-t}) \; ; \; y = \frac{۱}{۷}(۴e^{۲t} + ۳e^{-t}) .$$

ت- $$x = \frac{۱}{۵}(\cos t - \cos ۴t) , \quad y = \frac{۱}{۵}(۴\sin t - \sin ۴t) .$$

ث- $$x = -\left(\frac{۱۹t}{۳۰} + \frac{۱۱۹}{۹۰۰}\right)e^{-۴t} + \frac{۴}{۲۵}e^{t} - \frac{۱}{۳۶}e^{۲t} , .$$

$$y = \left(\frac{۱۹t}{۳۰} + \frac{۶۸۹}{۹۰۰}\right)e^{-۴t} + \frac{۱}{۲۵}e^{t} + \frac{۷}{۳۶}e^{۲t}$$

فصل هشتم

تبدیلات لاپلاس*

۱ . ۸ - مقدمه

با مشتق گیری از توابع میتوان برای هرتابع غیر مشخص $F(t)$ که قابل مشتق گیری باشد تابع دیگری مانند $F'(t)$ متناظر نمود . بعبارت دیگر عمل مشتق گیری تابع $F(t)$ را به $F'(t)$ تبدیل میکند . اگر مانند معمول عمل مشتق گیری را با حرف D نمایش دهیم، تبدیل فوق را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$D\left\{ F(t) \right\}=F'(t)$$

تابع $F'(t)$ **نقش** $F(t)$ دراین تبدیل خواهد بود. مثلاً تابع $۳t^{۲}$ **نقش** تابع $t^{۳}$ دراثر عمل مشتق گیری است .

تبدیل دیگری از توابع که در آنالیز با آن آشنا هستیم عمل انتگرال گیری است . یعنی :

$$Q\left\{ F(t) \right\}=\int_{0}^{x} F(t)\,dt$$

لذا درنتیجه عمل انتگرال گیری تابع جدیدی مانند $f(x)$ بدست میاید که نقش تابع $F(t)$ دراثر عمل انتگرال گیری فوق میباشد.

اگر توابع را در مقدار ثابت و یا آنکه آنها را در تابع معینی ضرب کنیم، توابع جدیدی بدست میایند که درهر مورد توابع جدید بدست آمده مثالهای بسیار ساده از تبدیل توابع خواهند بود .

درهریک از مثالهای فوق یکی از تبدیلهای وارونه موجوداست. یعنی اگر نقش، داده شده باشد ، میتوان تابع $F(t)$ را چنان تعیین کرد که نقش آن تابع مفروض باشد .

---

* Laplace

بطریق مشابه باشماره (۱۳ . ۷) تبدیل $T\Big\{F(t)\Big\}$ را خطی نامیم هرگاه :

$$T\Big\{c_۱F_۱(t)+c_۲F_۲(t)\Big\}=c_۱T\Big\{F_۱(t)\Big\}+c_۲T\Big\{F_۲(t)\Big\} \qquad (۸ . ۱)$$

$F_۱(t)$ و $F_۲(t)$ توابع غیر مشخص و $c_۱$ و $c_۲$ مقادیر ثابت غیر مشخصی میباشند .

لذا اگر تبدیل خطی باشد تبدیل ترکیب خطی هرزوج تابع غیر مشخص‌از t همان ترکیب خطی نقشهای این توابع خواهند بود .

مثالهایی که در بالا ذکر شد همگی تبدیلات خطی میباشند .

چنانچه در رابطه (۱ . ۸) یکبار $c_۲=0$ و بار دیگر $c_۱=c_۲=۱$ اختیار گردد به ترتیب روابط زیر بدست میآید :

$$T\Big\{c_۱F_۱(t)\Big\}=c_۱T\Big\{F_۱(t)\Big\}$$

$$T\Big\{F_۱(t)+F_۲(t)\Big\}=T\Big\{F_۱(t)\Big\}+T\Big\{F_۲(t)\Big\}$$

همواره نمیتوان تبدیل معینی را درباره جمیع توابع بکار برد . بعبارت دیگر دسته توابعی که میتوان تبدیل معینی را در آن انجام داد تا اندازه‌یی محدود میباشد . مثلاً تبدیل $D\Big\{F(t)\Big\}$ برای جمیع توابعی که قابل مشتق گیری هستند موجود میباشد و یا آنکه تبدیل $Q\Big\{F(t)\Big\}$ را میتوان برای توابعی که قابل انتگرال گیری هستند بکار برد .

تبدیلات‌خطی انتگرال توابع $F(t)$ که در فاصله محدود یا نامحدود $a < t < b$ معین هستند در حل مسائل معادلات دیفرانسیل بسیار مفید میباشد . فرض کنیم تابع $K(t, s)$ تابع معینی از متغیر t و پارامتر s باشد .

یکی از صورتهای کلی **تبدیل خطی انتگرال** توابع $F(t)$ نسبت به **کرنل*** $K(t, s)$ با معادله زیر نمایش داده میشود :

$$T\Big\{F(t)\Big\}=\int_a^b K(t, s)F(t)dt \qquad (۸ . ۱۱)$$

Kernel *

اگر انتگرال واقع در سمت راست رابطه بالاموجودباشد سمت‌راست رابطه (۱۱ . ۸) تابعی‌از s مانند $f(s)$ خواهد بود که نقش تابع $F(t)$ در اثر تبدیل فوق میباشد .

توابع $F(t)$ و دامنه تغییرات پارامتر s چنان باید باشد که انتگرال واقع درسمت راست رابطه (۱۱ . ۸) موجود باشد .

بعداً خواهیم دید که برای کرنل مشخصی از $K(t , s)$ اگر رابطه (۱۱ . ۸) را در مورد فرم دیفرانسیل خطی برحسب $F(t)$ بکار بریم این فرمها بروابط جبری برحسب $f(s)$ که‌شامل مقادیر کرانه‌یی تابع $F(t)$ هستند تعویض میگردد . بالنتیجه دسته معینی از معادلات دیفرانسیل مبدل به مسائل جبری برحسب نقش توابع مجهول میگردد . لذا اگر بتوان یکی از تبدیلات وارونه را بدست آورد جواب مسئله اصلی بدست خواهد آمد . بطریق مشابه میتوان مسائل مقادیر کرانه‌یی را در معادلات بامشتقات نسبی ساده نمود .

اگر در رابطه (۱۱ . ۸) مقادیر $a=0$, $b=\infty$, $K(t , s)=e^{-st}$ اختیار گردد تبدیل لاپلاس بدست میآید .

این تبدیل ، جایگزین روش سمبولی که بنام محاسبات اوپریشنال **هوی‌ساید** * موسوم بود گردید . بکار بردن‌این‌تبدیل و توسعه‌آن و همچنین محاسبات اوپریشنال مربوطه قبل‌از زمان هوی‌ساید شروع گردید و **لاپلاس** ** و **کوشی** *** نخستین کسانی‌بودند که درباره این تبدیل به بررسی پرداختند .

۲ . ۸ - تعریف تبدیل لاپلاس

اگر تابع $F(t)$ که برای جمیع مقادیر مثبت t معین است در e^{-st} ضرب گردد و از حاصلضرب حاصل $[e^{-st}F(t)]$ بین حدود صفر و بینهایت نسبت به t انتگرال گیری شود تابع جدیدی از پارامتر s مانند $f(s)$ بدست میآید . یعنی :

$$\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt=f(s)$$

همانطورکه قبلاً تذکر دادیم عمل فوق که در مورد تابع $F(t)$ انجام میشود **تبدیل لاپلاس** تابع $F(t)$ نامیم . تبدیل فوق را با سمبول $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ ویا $\mathscr{L}\left\{F\right\}$ نمایش میدهیم . لذا :

---

* Heaviside (۱۸۵۰ - ۱۹۲۵) .

** Laplace (۱۷۴۹-۱۸۲۷) .

*** Cauchy (۱۷۸۹-۱۸۵۷) .

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st}F(t)dt \qquad (۸ . ۲)$$

تابع جدید $f(s)$ **را مبدل لاپلاس** یا **نقش** $F(t)$ گوییم . در اکثر موارد تابع اصلی را با حروف بزرگ $[F(t)\ ,\ G(t)\ ,\ Y(t)]$ و مبدل لاپلاس آنرا با همان حروف کوچک مینویسند $[f(s)\ ,\ g(s)\ ,\ y(s)]$. در موارد دیگر با بکار بردن $(\breve{\ })$ مبدل لاپلاس را از تابع متمایز مینمایند . مثلاً مبدل لاپلاس تابع $u(t)$ تابع $\breve{u}(t)$ است .

فعلاً فرض میکنیم متغیر s عدد حقیقی باشد وبعداً درباره‌شرایط تابع $F(t)$ وهمچنین دامنه تغییرات s بحث خواهیم نمود .

ذیلاً مبدلهای چند تابع را بدست میآوریم .

۱- فرض میکنیم برای مقادیر $t > 0$ تابع $F(t)=۱$ باشد . اگر مقدار $F(t)$ را در رابطه (۲ . ۸) جایگزین نماییم به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{F\right\}=\mathscr{L}\left\{۱\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}dt=\left[\,-\frac{۱}{s}\,c^{-st}\,\right]_{0}^{\infty}$$

و لذا هنگامیکه $s > 0$ است :

$$\mathscr{L}\left\{۱\right\}=\frac{۱}{s}$$

خواهد بود .

۲- فرض میکنیم برای مقادیر $t>0$ تابع $F(t)=t$ باشد . باجایگزین نمودن مقدار $F(t)$ در رابطه (۲ . ۸) و بااستفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{F\right\}=\mathscr{L}\left\{t\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}tdt$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\,(t)\,\frac{e^{-st}}{-s}-(۱)\left(\frac{e^{-st}}{s^{۲}}\right)\right]_{0}^{p}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{۱}{s^{۲}}-\frac{e^{-sp}}{s^{۲}}-\frac{pe^{-sp}}{s}\right)$$

$$=\frac{۱}{s^{۲}} \qquad \text{اگر} \quad s>0$$

۳- فرض‌میکنیم برای مقادیر $t > ۰$ تابع $F(t) = e^{at}$ باشد . لذا :

$$\mathscr{L}\left\{F\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at}dt = \int_{۰}^{\infty} e^{(a-s)t}dt$$

$$= \frac{۱}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_{۰}^{\infty}$$

$$= \frac{۱}{s-a} \quad \text{اگر} \quad a-s < ۰ \quad \text{و یا} \quad s > a$$

۴- فرض‌میکنیم برای مقادیر $t > ۰$ تابع $F(t) = \sin at$ باشد . ابتدا نقش e^{iat} را بدست میاوریم . یعنی :

$$\text{(I)} \qquad \mathscr{L}\left\{e^{iat}\right\} = \frac{۱}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^{۲}+a^{۲}}$$

از طرف دیگر $e^{iat} = \cos at + i\sin at$. لذا :

$$\mathscr{L}\left\{e^{iat}\right\} = \mathscr{L}\left\{\cos at + i\sin at\right\}$$

$$= \int_{۰}^{\infty} e^{-st}(\cos at + i\sin at)dt$$

$$\text{(II)} \qquad = \int_{۰}^{\infty} e^{-st}\cos at dt + i\int_{۰}^{\infty} e^{-st}\sin at dt = \mathscr{L}(\cos at) + i\mathscr{L}(\sin at)$$

از مقایسه روابط (I) و (II) و مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{\sin at\right\} = \frac{a}{s^{۲}+a^{۲}} \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{\cos at\right\} = \frac{s}{s^{۲}+a^{۲}} \quad , \quad s > ۰$$

بطریق مشابه میتوان نشان داد که :

$$\mathscr{L}\left\{\sinh at\right\} = \frac{a}{s^{۲}-a^{۲}} \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{\cosh at\right\} = \frac{s}{s^{۲}-a^{۲}} \quad , \quad s > |a|$$

زیرا مثلاً :

$$\mathscr{L}\left\{\sinh at\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{۲}\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{۲}\right\}$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cdot e^{at}dt-\frac{۱}{۲}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cdot e^{-at}dt$$

$$=\frac{۱}{۲}\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\}-\frac{۱}{۲}\mathscr{L}\left\{e^{-at}\right\}$$

$$=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{s-a}-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{s+a}=\frac{a}{s^{۲}-a^{۲}}\quad,\quad s>|a|$$

نقش لاپلاس توابع مقدماتی فوق را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم .

نقش لاپلاس برخی از توابع مقدماتی

	$F(s)$	$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}F(t)dt=f(s)$	
۱	۱	$\frac{۱}{s}$	$s>0$
۲	t	$\frac{۱}{s^{۲}}$	$s>0$
۳	t^{n} $n=0,۱,۲,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+۱}}$ بنابر تعریف $0!=۱$	$s>0$
٤	e^{at}	$\frac{۱}{s-a}$	$s>a$
٥	$\sin at$	$\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}$	$s>0$
٦	$\cos at$	$\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}}$	$s>0$
۷	$\sinh at$	$\frac{a}{s^{۲}-a^{۲}}$	$s>\|a\|$
۸	$\cosh at$	$\frac{s}{s^{۲}-a^{۲}}$	$s>\|a\|$

۳ . ۸ - شرایط کافی برای وجود نقشهای لاپلاس

قبل‌از بیان این شرایط لازم میدانیم که دو تعریف زیر را بنماییم .

تعریف اول ـ همانطورکه درشماره (۱ . ٤) متذکرشدیم تابع $F(t)$ را درفاصله محدود $a \leqslant t \leqslant b$ **پیوسته قطعه‌یی** نامیم هرگاه بتوان این‌فاصله رابه‌تعداد محدودی فواصل جزیی چنان تقسیم نمود که تابع $F(t)$ درهریک ازاین فواصل جزیی پیوسته بوده و دارای حدود محدود چپ و راست باشد. این تابع در فاصله $a \leqslant t \leqslant b$ بازاء مقادیر $t_{۱} , t_{۲} , t_{۳} , \ldots$ مفصل میشود .

ملاحظه میشود که مثلاً حدود چپ و راست درنقطه انفصال $t_{۲}$ با روابط زیر مشخص میگردد :

$$\lim_{\varepsilon \to o} (t_{۲} + \varepsilon) = F(t_{۲} + o) = F(t_{۲} +)$$

$$\lim_{\varepsilon \to o} F(t_{۲} - \varepsilon) = F(t_{۲} - o) = F(t_{۲} -)$$

t عددی است مثبت .

این نوع نقاط انفصال به انفصال نوع اول موسوم است . تعداد نقاط انفصال نوع اول هرتابع اکثراً شماره پذیر بوده و مقدار جهش تابع درهریک از نقاط انفصال نوع اول محدود است .

نشان میدهند که انتگرال توابعی که درفاصله محدود (a , b) پیوسته قطعه‌یی هستند موجود بوده و برابر مجموع انتگرالهای توابع پیوسته درفواصل جزیی‌میباشد. مجموعه توابع پیوسته قطعه‌یی‌وسیع‌تراز مجموعه توابع پیوسته میباشد زیرا هرتابع پیوسته ، پیوسته‌قطعه‌یی میباشد .

تابع پله‌یی یگانه :

$$u(t-a) = \begin{cases} o & o < t < a \\ ۱ & t > a \end{cases}$$

مثال دیگری از تابع پیوسته قطعه‌یی است . این تابع به **تابع یگانه هوی‌ساید** نیز موسوم است .

واضح است که تابع اخیر برای هرعدد مثبت T در هرفاصله $o \leqslant t \leqslant T$ پیوسته قطعه‌یی است .

نقش لاپلاس این تابع بفرض آنکه $s > 0$ باشد عبارت است از :

$$\mathscr{L}\left\{u(t-a)\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}u(t-a)dt=\int_{0}^{a} e^{-st}(0)dt+\int_{a}^{\infty} e^{-st}(۱)dt$$

$$=\lim_{p\to\infty}\int_{a}^{p} \epsilon^{-st}dt=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{a}^{p}$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{e^{-as}-e^{-sp}}{s}=\frac{e^{-as}}{s}$$

تعریف دوم ـ تابع $F(t)$ را هم مرتبه‌تابع نمایی مرتبه γ نامیم هرگاه t بسوی بینهایت میل کند بتوان اعداد ثابت حقیقی $M > 0$ و γ را چنان تعیین نمود که برای جمیع مقادیر $t > N$ داشته باشیم :

$$|e^{-\gamma t}F(t)| < M \quad \text{و یا} \quad |F(t)| < Me^{\gamma t}$$

رابطه بالا را میتوان چنین بیان نمود که تابع $F(t)$ از مرتبه $e^{\gamma t}$ است و آنرا بصورت زیر نمایش داد :

$$F(t)=O(e^{\gamma t})$$

بطور کلی نیز میتوان گفت هنگامیکه t افزایش مییابد توابع هم مرتبه باتابع نمایی نمیتوانند از حیث مقدار مطلق سریع‌تر از $Me^{\gamma t}$ نمو نمایند . ولی بهرصورت این مطلب درعمل محدودیتی درمورد $F(t)$ ایجاد نمیکند زیرا M و γ میتوانند بطوردلخواه بزرگ اختیار گردند .

توابع محدود (یعنی در فاصله $a \leqslant t \leqslant b$ قدرمطلق $F(t)$ از عدد ثابتی مانند A کوچکتر باشد) مانند $\sin at$ و $\cos at$ توابع مرتبه نمایی هستند .

مثال ۱ـ تابع $F(t)=t^{۲}$ مثلاً هم مرتبه‌تابع نمایی مرتبه سه میباشد . زیرا برای جمیع مقادیر $t > 0$ چنین داریم :

$$|t^{۲}|=t^{۲} < e^{۳t}$$

مثال ۲ ـ تابع $F(t)=t^{n}$ هنگامیکه t بسوی بینهایت میل میکند، برای هرمقدار مثبت γ هم مرتبه $e^{\gamma t}$ است . زیرا :

$$|t^n| = t^n < e^{\gamma t}$$

بعبارت دیگر t^n دارای مرتبه نمایی ۲ است .

مثال ۳- تابع پله‌یی یگانه نیز دارای مرتبه نمایی‌واحد است . زیرا بنابر تعریف‌تابع پله‌یی یگانه برای جمیع مقادیر $t > a > o$ چنین داریم :

$$|u(t-a)| = ۱ < e^t$$

مثال ٤- تابع $F(t) = e^{t^۳}$ از مرتبه $e^{\gamma t}$ نیست‌زیرا باافزایش t مقدار :

$$|e^{-\gamma t} e^{t^۳}| = e^{t^۳ - \gamma t}$$

را میتوان از هرعدد مثبتی بزرگتر اختیار کرد .

اکنون بااستفاده ازدو تعریف بالا میتوان شرایط کافی برای وجود نقشهای لاپلاس را بیان کرد .

قضیه :

اگر تابع $F(t)$ درهرفاصله محدود $o \leqslant t \leqslant N$ پیوسته قطعه‌یی بوده وبرای مقادیر $t > N$ ازمرتبه نمایی ۲ باشد، دراینصورت برای جمیع مقادیر $s > ۲$ ، $f(s)$ نقش لاپلاس تابع $F(t)$ موجود است .

اثبات ـ برای هر عدد مثبت N چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\} = \int_o^\infty e^{-st}F(t)dt = \int_o^N e^{-st}F(t)dt + \int_N^\infty e^{-st}F(t)dt$$

ولی بنابفرض تابع $F(t)$ درفاصله محدود $o \leqslant t \leqslant N$ پیوسته قطعه‌یی است و تابع e^{-st} دراین فاصله پیوسته میباشد و میدانیم‌حاصلضرب دو تابع پیوسته تابعی است پیوسته‌لذا بااستفاده ازتعریف‌پیوستگی قطعه‌یی‌نتیجه میشود که تابع $e^{-st}F(t)$ درفاصله $o \leqslant t \leqslant N$ پیوسته قطعه‌یی بوده و لذا انتگرال آن دراین فاصله موجود است . یعنی اولین انتگرال واقع درسمت راست رابطه بالا موجود میباشد .

چون‌برای $t > N$ تابع $F(t)$ از مرتبه‌نمایی ۲ است، لذادومین‌انتگرال واقع درسمت راست رابطه بالا نیز موجود میباشد. زیرا :

$$\left|\int_{N}^{\infty} e^{-st}F(t)dt\right| \leqslant \int_{N}^{\infty} |e^{-st}F(t)|dt$$

$$\leqslant \int_{o}^{\infty} e^{-st}|F(t)|dt$$

$$\leqslant \int_{o}^{\infty} e^{-st}Me^{\gamma t} = \frac{N}{s-۲}$$

بشرط آنکه $s > ۲$ باشد .

تبصره - شرایط فوق شرایط کافی برای وجود نقش لاپلاس میباشد .

میتوان مثالهایی بیان نمود که تابع $F(t)$ درشرایط فوق صدق ننماید ولی دارای نقش لاپلاس باشد. یکی ازاین مثالها را درشماره (۷ . ۸) حل کرده‌ایم . بعبارت‌دیگر شرایط فوق‌شرایط‌لازم برای وجود نقش لاپلاس نیستند .

مثال ۱- تابع پله‌یی‌یگانه برای هرعدد مثبت T درهرفاصله $o \leqslant t \leqslant T$ پیوسته قطعه‌یی بوده ودارای مرتبه نمایی‌واحد است لذابنابر قضیه بالا دارای نقش لاپلاس میباشد ومقدارآن برای $s > o$ برابر $\frac{e^{-as}}{s}$ است .

مثال ۲- تابع $F(t) = t^{۲}$ چون پیوسته‌بوده (لذا پیوسته قطعه‌یی نیز خواهد بود) و دارای مرتبه نمایی‌سه میباشد لذا دارای نقش لاپلاس میباشد که بنابر جدول مندرج در شماره (۲ . ۸) مقدار آن برابر $\frac{۲}{s^{۳}}$ است .

٤ . ۸- خواص مهم تبدیلهای لاپلاس

درجمیع قضایایی که ذیلاً بیان میکنیم فرض مینماییم که توابع $F(t)$, $G(t)$ و $F_{۱}(t)$, $F_{۲}(t)$ درشرایط قضیه شماره (۳ . ۸) صدق نمایند .

٤۱ . ۸ - خاصیت خطی

اگر $c_{۱}$ و $c_{۲}$ مقادیرثابت‌غیر مشخص و $f_{۱}(s)$ و $f_{۲}(s)$ به ترتیب نقشهای‌لاپلاس توابع $F_{۱}(t)$ و $F_{۲}(t)$ باشند . چنین‌داریم :

$$\mathscr{L}\left\{c_{۱}F_{۱}(t)+c_{۲}F_{۲}(t)\right\}=c_{۱}\mathscr{L}\left\{F_{۱}(t)\right\}+c_{۲}\mathscr{L}\left\{F_{۲}(t)\right\}$$

$$=c_{۱}f_{۱}(s)+c_{۲}f_{۲}(s) \qquad (۸\ .\ ٤۱)$$

زیرا باستفاده از تعریف تبدیل لاپلاس چنین‌داریم :

$$\mathscr{L}\left\{c_{۱}F_{۱}(t)+c_{۲}F_{۲}(t)\right\}=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}[c_{۱}F_{۱}(t)+c_{۲}F_{۲}(t)]dt$$

$$=c_{۱}\int_{۰}^{\infty}e^{-st}F_{۱}(t)dt+c_{۲}\int_{۰}^{\infty}e^{-st}F_{۲}(t)dt$$

$$=c_{۱}\mathscr{L}\left\{F_{۱}(t)\right\}+c_{۲}\mathscr{L}\left\{F_{۲}(t)\right\}$$

$$=c_{۱}f_{۱}(s)+c_{۲}f_{۲}(s)$$

باستفاده ازاین مطلب که‌انتگرال مجموع تعدادمحدودی از توابع برابر مجموع انتگرالهای این توابع است بسهولت میتوان نشان داد که :

$$\mathscr{L}\left\{c_{۱}F_{۱}(t)+c_{۲}F_{۲}(t)+c_{۳}F_{۳}(t)+\cdots+c_{n}F_{n}(t)\right\}$$

$$=c_{۱}f_{۱}(s)+c_{۲}f_{۲}(s)+c_{۳}f_{۳}(s)+\cdots+c_{n}f_{n}(s)$$

$c_{۱}, c_{۲}, c_{۳}, \dots, c_{n}$ مقادیر ثابت غیر مشخص و $f_{۱}(s), f_{۲}(s), f_{۳}(s), \dots, f_{n}(s)$ به ترتیب نقشهای لاپلاس توابع $F_{۱}(t), F_{۲}(t), \dots, F_{n}(t)$ است .

دربرخی از موارد سمبول $\mathscr{L}$ که $F(t)$ را به $f(s)$ تبدیل میکند **اوپریتور تبدیل لاپلاس** نامیم . بنابر خاصیت سمبول $\mathscr{L}$ که‌دراین‌قضیه بیان‌شد گوییم $\mathscr{L}$ اوپریتور خطی بوده ویاآنکه دارای‌خاصیت خطی میباشد . بدین‌ترتیب اوپریتور $\mathscr{L}$ با تعریفی که‌درشماره (۱۳ . ۷) نمودیم مطابقت دارد .

مثال ۱ـ مطلوب است محاسبه عبارت :

$$\mathscr{L}\left\{٤t^{۲}-۳\cos ۲t+٥c^{-t}\right\}$$

حل ـ باستفاده از خاصیت خطی اوپریتور $\mathscr{L}$ و جدول مندرج درشماره (۲ . ۸) به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{٤t^{٢}-٣\cos ٢t+٥e^{-t}\right\}=٤\mathscr{L}\left\{t^{٢}\right\}-٣\mathscr{L}\left\{\cos ٢t\right\}+٥\mathscr{L}\left\{e^{-t}\right\}$$

$$=٤\left(\frac{٢!}{s^{٣}}\right)-٣\left(\frac{s}{s^{٢}+٤}\right)+٥\left(\frac{١}{s+١}\right)$$

$$=\frac{٨}{s^{٣}}-\frac{٣s}{s^{٢}+٤}+\frac{٥}{s+١}$$

مثال ٢- مطلوب است محاسبه عبارت :

$$\mathscr{L}\left\{٤e^{٥t}+٦t^{٣}-٣\sin ٤t+٢\cos ٢t\right\}$$

حل - بااستفاده از خاصیت خطی اوپریتور L و جدول مندرج درشماره (٢ . ٨) چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{٤e^{٥t}+٦t^{٣}-٣\sin ٤t+٢\cos ٢t\right\}=٤\mathscr{L}\left\{e^{٥t}\right\}+٦\mathscr{L}\left\{t^{٣}\right\}$$

$$-٣\mathscr{L}\left\{\sin ٤t\right\}+٢\mathscr{L}\left\{\cos ٢t\right\}$$

$$=٤\left(\frac{١}{s-٥}\right)+٦\left(\frac{٣!}{s^{٤}}\right)-٣\left(\frac{٤}{s^{٢}+١٦}\right)+٢\left(\frac{s}{s^{٢}+٤}\right)$$

$$=\frac{٤}{s-٥}+\frac{٣٦}{s^{٤}}-\frac{١٢}{s^{٢}+١٦}+\frac{٢s}{s^{٢}+٤}$$

٤٢ . ٨ - خواص انتقال

الف - اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ باشد.

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}F(t)\right\}=f(s-a) \qquad (٨ . ٤٢)$$

ب - اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ و:

$$G(t)=\begin{cases} F(t-a) & ; \quad t>a \\ 0 & ; \quad t<a \end{cases}$$

باشد دراینصورت :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=e^{-as}f(s) \qquad (۸۰-۴۲۱)$$

زیرا به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}F(t)\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}[e^{at}F(t)]dt$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt=f(s-a)$$

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}G(t)dt=\int_{0}^{a} c^{-st}G(t)dt+\int_{a}^{\infty} e^{-st}G(t)dt$$

$$=\int_{0}^{a} e^{-st}(0)dt+\int_{a}^{\infty} e^{-st}F(t-a)dt$$

$$=\int_{a}^{\infty} e^{-st}F(t-a)dt$$

اگردر انتگرال اخیر ، تبدیل متغیر $t=u+a$ را انجام دهیم ، خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\int_{a}^{\infty} e^{-st}F(t-a)dt=\int_{0}^{\infty} e^{-s(u+a)}F(u)du$$

$$=e^{-as}\int_{0}^{\infty} c^{-su}F(u)du=e^{-as}f(s)$$

مثال ۱- مطلوب است محاسبه عبارات زیر :

$$\mathscr{L}\left\{t^{۲}e^{۳t}\right\} \;;\; \mathscr{L}\left\{e^{-۲t}\sin ۴t\right\} \;;\; \mathscr{L}\left\{e^{۴t}\cosh ۵t\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{ e^{-۲t}(۳\cos ۶t - ۵\sin ۶t) \right\}$$

حل ـ بااستفاده از رابطه (۴۲ . ۸) و استفاده از جدول مندرج درشماره (۲ . ۸) به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{ t^{۲} \right\} = \frac{۲!}{s^{۳}} = \frac{۲}{s^{۳}} \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{ t^{۲}e^{۳t} \right\} = \frac{۲}{(s-۳)^{۳}}$$

$$\mathscr{L}\left\{ \sin ۴t \right\} = \frac{۴}{s^{۲}+۱۶} \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{ e^{-۲t}\sin ۴t \right\} =$$

$$\frac{۴}{(s+۲)^{۲}+۱۶} = \frac{۴}{s^{۲}+۴s+۲۰}$$

$$\mathscr{L}\left\{ \cosh ۵t \right\} = \frac{s}{s^{۲}-۲۵} \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{ e^{۴t}\cosh ۵t \right\} =$$

$$\frac{s-۴}{(s-۴)^{۲}-۲۵} = \frac{s-۴}{s^{۲}-۸s-۹}$$

روش دیگر :

$$\mathscr{L}\left\{ e^{۴t}\cosh ۵t \right\} = \mathscr{L}\left\{ e^{۴t}\left(\frac{e^{۵t}+e^{-۵t}}{۲} \right) \right\} = \frac{۱}{۲}\mathscr{L}\left\{ e^{۹t}+e^{-t} \right\}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left\{ \frac{۱}{s-۹} + \frac{۱}{s+۱} \right\} = \frac{s-۴}{s^{۲}-۸s-۹}$$

$$\mathscr{L}\left\{ ۳\cos ۶t - ۵\sin ۶t \right\} = ۳\mathscr{L}\left\{ \cos ۶t \right\} - ۵\mathscr{L}\left\{ \sin ۶t \right\}$$

$$= ۳\left(\frac{s}{s^{۲}+۳۶} \right) - ۵\left(\frac{۶}{s^{۲}+۳۶} \right) = \frac{۳s-۳۰}{s^{۲}+۳۶}$$

$$\mathscr{L}\left\{ e^{-۲t}(۳\cos ۶t - ۵\sin ۶t) \right\} = \frac{۳(s+۲)-۳۰}{(s+۲)^{۲}+۳۶} = \frac{۳s-۲۴}{s^{۲}+۴s+۴۰}$$

مثال ۴ـ مطلوب است تعیین $\mathscr{L}\left\{ F(t) \right\}$ برای تابع زیر :

$$F(t)=\begin{cases} \cos\left(t-\frac{۲\pi}{۳}\right) & ; \quad t>\frac{۲\pi}{۳} \\ o & ; \quad t<\frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

حل :

روش اول ـ باستفاده از رابطه (۸ . ۴۲۱) به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\cos t\right\}=\frac{s}{s^{۲}+۱}=f(s)$$

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=e^{-\frac{۲\pi s}{۳}}\left(\frac{s}{s^{۲}+۱}\right)=\frac{se^{-\frac{۲\pi s}{۳}}}{s^{۲}+۱}$$

روش دوم:

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}F(t)dt=\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}e^{-st}(o)dt+\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\infty}e^{-st}\cos\left(t-\frac{۲\pi}{۳}\right)dt$$

$$=\int_{۰}^{\infty}e^{-s\left(u+\frac{۲\pi}{۳}\right)}\cos u\,du=e^{-\frac{۲\pi s}{۳}}\int_{۰}^{\infty}e^{-su}\cos u\,du=\frac{se^{-\frac{۲\pi s}{۳}}}{s^{۲}+۱}$$

۴۳ . ۸ ـ خاصیت تغییرواحد

اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ باشد :

$$\mathscr{L}\left\{F(at)\right\}=\frac{۱}{a}f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (۸ . ۴۳)$$

زیرا :

$$\mathscr{L}\left\{F(at)\right\}=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}F(at)dt=\int_{۰}^{\infty}e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)}F(u)d\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$=\frac{۱}{a}\int_{0}^{\infty} c^{-\frac{su}{a}}F(u)du=\frac{۱}{a}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{s}{a}}\right)^{u}F(u)du$$

$$=\frac{۱}{a}\,f\left(\frac{s}{a}\right)$$

مثال ۱- عبارت $\mathscr{L}\left\{\sin ۳t\right\}$ را محاسبه کنید .

حل - با استفاده از رابطه (۴۳ . ۸) و نظر باینکه $\mathscr{L}\left\{\sin t\right\}=\frac{۱}{s^{۲}+۱}$ است لذا چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\sin ۳t\right\}=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{\left(\frac{s}{۳}\right)^{۲}+۱}=\frac{۳}{s^{۲}+۹}$$

مثال ۲- اگر $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\operatorname{arc}tg\left(\frac{۱}{s}\right)$ باشد* عبارت $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ رامحاسبه کنید .

حل - بااستفاده از رابطه (۴۳ . ۸) خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\}=\frac{۱}{a}\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}=\frac{۱}{a}\operatorname{arc}tg\frac{۱}{\frac{s}{a}}=\frac{۱}{a}\operatorname{arc}tg\left(\frac{a}{s}\right)$$

لذا :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}=\operatorname{arc}tg\left(\frac{a}{s}\right)$$

۴۴ . ۸ - نقش لاپلاس مشتقها

قضیه اول

اگر تابع $F(t)$ در فاصله محدود $0\leqslant t\leqslant N$ پیوسته و برای مقادیر $t>N$ تابع اخیرهم مرتبه تابع نمایی مرتبه ۲ و $F'(t)$ درفاصله $0\leqslant t\leqslant N$

---

* برای اثبات رابطه فوق بشماره (۴۷ . ۸) مراجعه شود .

پیوسته قطعه‌یی و $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ باشد. برای مقادیر $s>\gamma$ نقش $F'(t)$ موجود بوده و بارابطه زیر مشخص میشود :

$$\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=sf(s)-F(0) \qquad (۸ . ۴۴)$$

از رابطه بالا میتوان نتیجه گرفت که نقش لاپلاس مشتق هرتابع متناظر با مجموع مقدار ثابت $-F(0)$ وحاصلضرب نقش لاپلاس‌تابع اصلی و متغیر s است. بااستفاده ازخاصیت اخیر میتوان بجای عمل مشتق‌گیری عملیات ساده جبری برروی نقشها انجام داد.

اثبات ـ چون بنابفرض $F(t)$ درفاصله بسته $0\leqslant t\leqslant N$ پیوسته است لذا در نقطه $t=0$ نیز پیوسته بوده و عدد $F(0)$ همان $F(0+)$ یعنی حد راست تابع $F(t)$ در نقطه $t=0$ است.

برای اثبات وجود $\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}$ کافی‌است‌نشان دهیم‌که $\int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt$ موجود میباشد.

بازاء هرمقدار مثبت N نقاط انفصال تابع $F'(t)$ که درفاصله $0\leqslant t\leqslant N$ قرار دارند به $t_۱$ ، $t_۲$ ، ... ، t_n نمایش میدهیم. بااستفاده از روش انتگرال‌گیری جزء بجزء چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}F'(t)dt$$

$$\int_0^N e^{-st}F'(t)dt=\int_0^{t_۱} e^{-st}F'(t)dt+\int_{t_۱}^{t_۲} e^{-st}F'(t)dt$$

$$+\int_{t_۲}^{t_۳} e^{-st}F'(t)dt+\cdots+\int_{t_n}^{N} e^{-st}F'(t)dt$$

$$=\Big[\ e^{-st}F(t)\ \Big]_0^{t_۱}+s\int_0^{t_۱} e^{-st}F(t)dt+\Big[\ e^{-st}F(t)\ \Big]_{t_۱}^{t_۲}$$

$$+s\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}F(t)dt+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_2}^{t_3}+s\int_{t_2}^{t_3}e^{-st}F(t)dt$$

$$+\cdots+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_n}^{N}+s\int_{t_n}^{N}e^{-st}F(t)dt=\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{o}^{t_1}$$

$$+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_1}^{t_2}+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_2}^{t_3}+\cdots+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_n}^{N}$$

$$+\Big\{\int_{o}^{t_1}e^{-st}F(t)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}F(t)dt+\int_{t_2}^{t_3}e^{-st}F(t)dt$$

$$+\cdots+\int_{t_n}^{N}e^{-st}F(t)dt\Big\}$$

لذا :

$$\text{(I)}\qquad \int_{o}^{N}e^{-st}F(t)dt=\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{o}^{t_1}+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_1}^{t_2}+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_2}^{t_3}$$

$$+\cdots+\Big[e^{-st}F(t)\Big]_{t_n}^{N}+s\int_{o}^{N}e^{-st}F(t)dt$$

چون بنابفرض تابع $F(t)$ درفاصله محدود $o \leqslant t \leqslant N$ پیوسته است بنابراین :

$$\text{(II)}\quad F(o+)=F(o)\ ;\ F(t_1-o)=(Ft_1+o)\ ;\ F(t_2-o)=F(t_2+o)$$

$$,\ \ldots\ ,\ F(t_n-o)=F(t_n+o)$$

و از آنجا رابطه (I) بصورت زیر درمیاید :

$$\text{(III)}\quad \int_{o}^{N}e^{-st}F'(t)dt=-F(o)+e^{-sN}F(N)+s\int_{o}^{N}e^{-st}F(t)dt$$

از طرف دیگر بنابفرض تابع $F(t)$ برای مقادیر $t > N$ هم مرتبه تابع نمایی مرتبه γ است لذا بااستفاده از تعریف دوم شماره (۳ . ۸) همواره میتوان مقدار ثابت $M > 0$ را چنان تعیین کرد که :

$$|F(t)| < Me^{\gamma t}$$

و از آنجا :

$$|e^{-sN}F(N)| < Me^{-(s-\gamma)N}$$

عبارت‌واقع در سمت راست نامساوی بالا هنگامیکه $N \to \infty$ برای مقادیر $s > \gamma$ بسوی صفر میل میکند و از آنجا رابطه (III) بصورت زیر نوشته میشود :

$$\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}F'(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-F(0) + e^{-sN}F(N) + s\int_0^N e^{-st}F(t)dt\right]$$

$$= -F(0) + s\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}F(t)dt = s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt - F(0)$$

$$= sf(s) - F(0)$$

و بدین ترتیب قضیه اول و رابطه (٤٤ . ٨) ثابت میگردد .

حال اگر تابع $F(t)$ در نقطه $t=0$ منفصل باشد ولی حد راست تابع دراین نقطه موجود باشد . یعنی :

$$\lim_{t\to 0} F(t) = F(0+)^*$$

باشد دراینصورت استدلال فوق تامرحله‌یی که رابطه (I) را بدست آوردیم صادق بوده و در سمت‌راست رابطه (III) بجای $-F(0)$ باید مقدار $-F(0+)$ را قرارداد وازآنجا قضیه زیر نتیجه میشود .

قضیه دوم

اگر تابع $F(t)$ در نقطه $t=0$ منفصل بوده وحد راست تابع دراین نقطه

---

* دراین‌حالت $F(0+)$ برابر $F(0)$ (که ممکن است موجود نباشد) نیست .

موجود باشد، یعنی $\lim\limits_{t\to o} F(t)=F(t+)$ **و توابع** $F(t)$ و $F'(t)$ **در بقیه شرایط قضیه اول صدق کند، رابطه (۸ . ٤٤) مبدل برابطه زیر میگردد :**

$$\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=sf(s)-F(o+)$$ (۸ . ٤٤۱)

اگر تابع $F(t)$ درنقطه $t=a$ منفصل باشد و توابع $F(t)$ و $F'(t)$ درسایر شرایط قضیه اول صدق نماید با استدلالی مانند استدلال قضیه دوم میتوان نشان داد که :

$$\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=sf(s)-F(o)-e^{-as}\left\{F(a+)-F(a-)\right\}$$ (۸ . ٤٤۲)

مقدار $\left\{F(a+)-F(a-)\right\}$ را دربعضی از موارد جهش تابع در نقطه انفصال $t=a$ نامیم .

بمنظوربدست آوردن تبدیل لاپلاس ، مشتق مرتبه دوم یعنی $F''(t)$ قضیه اول را درمورد $F'(t)$ بکار میبریم وبرای این منظورفرض میکنیم درهرفاصله محدود $o \leqslant t \leqslant N$ $F'(t)$ پیوسته و $F''(t)$ پیوسته قطعه‌یی باشد و همچنین فرض میکنیم $F(t)$ و $F'(t)$ برای مقادیر $t > N$ هم مرتبه‌تابع نمایی مرتبه γ باشد. چون $F'(t)$ پیوسته است‌نتیجه میشود که $F(t)$ پیوسته میباشد و ازآنجا :

$$\mathscr{L}\left\{F''(t)\right\}=s\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}-F'(o)$$

$$=s[sf(s)-F(o)]-F'(o)$$

و ازآنجا تبدیل زیر بدست میاید :

$$\mathscr{L}\left\{F''(t)\right\}=s^{2}f(s)-sF(o)-F'(o)$$ (۸ . ٤٤۳)

چنانچه توابع $F(t)$ و $F'(t)$ دارای نقاط انفصال باشند بااستفاده از روابط (۸ . ٤٤۱) و (۸ . ٤٤۲) رابطه دیگری که مختصر تفاوتی با رابطه (۸ . ٤٤۳) دارد بدست میاید .

اگر قضیه اول را بروش فوق‌وبااستفاده از روش استقراء ریاضی در مورد مشتق مرتبه n ام بکار بریم، قضیه کلی زیر بدست میاید.

قضیه سوم

فرض میکنیم درفاصله محدود $o \leqslant t \leqslant N$ ، $F^{(n-۱)}(t)$ مشتق مرتبه $(n-۱)$ ام تابع $F(t)$ پیوسته بوده و $F^{(n)}(t)$ دراین فاصله پیوسته قطعه‌یی باشد .

اگر برای مقادیر $t > N$ توابع $F(t)$, $F'(t)$, $F''(t)$, … , $F^{(n-۱)}(t)$ هم مرتبه تابع نمایی مرتبه γ باشند، دراینصورت نقش $F^{(n)}(t)$ موجود بوده و برحسب $f(s)$ نقش تابع $F(t)$ دارای عبارت جبری زیر میباشد :

$$\mathscr{L}\left\{F^{(n)}(t)\right\}=s^{n}f(s)-s^{n-۱}F(o)-s^{n-۲}F'(o)-s^{n-۳}F''(o)$$

$$-sF^{(n-۲)}(o)-F^{(n-۱)}(o) \qquad (۸ . ٤٤٤)$$

مثال ۱ - بااستفاده از رابطه (٤٤ . ۸) صحت روابط زیر را تأیید کنید :

$$\mathscr{L}\left\{۱\right\}=\frac{۱}{s} \ ; \ \mathscr{L}\left\{t\right\}=\frac{۱}{s^{۲}} \ ; \ \mathscr{L}\left\{e^{at}\right\}=\frac{۱}{s-a}$$

حل - با انتخاب $F(t)=۱$ وتوجه بانکه $F(o)=۱$ و $F'(t)=o$ میباشد رابطه (٤٤ . ۸) بصورت زیر درمیآید :

$$\mathscr{L}\left\{o\right\}=o=s\mathscr{L}\left\{۱\right\}-۱ \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{۱\right\}=\frac{۱}{s}$$

حال اگر در رابطه (٤٤ . ۸) مقدار $F(t)=t$ اختیارگردد و از روابط :

$$\mathscr{L}\left\{۱\right\}=\frac{۱}{s} \ , \ F(o)=o \ , \ F'(t)=۱$$

استفاده شود به ترتیب خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{۱\right\}=\frac{۱}{s}=s\mathscr{L}\left\{t\right\}-o \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{t\right\}=\frac{۱}{s^{۲}}$$

بااستفاده از روش استقراء ریاضی میتوان نشان دادکه برای هرعدد درست و مثبت n

$\mathscr{L}\left\{t^{n}\right\}=\dfrac{n!}{s^{n+۱}}$.

بالاخره اگردررابطه (٤٤ . ۸) مقدار $F(t)=e^{at}$ اختیارگردد به‌ترتیب چنین داریم :

$$F'(t)=ae^{at} \quad ; \quad F(0)=۱$$

از آنجا :

$$\mathscr{L}\left\{ae^{at}\right\}=s\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\}-۱ \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{e^{at}\right\}=\frac{۱}{s-a}$$

مثال ۲ ـ تابع :

$$F(t)=\begin{cases} ۲t & , \quad 0\leqslant t\leqslant ۱ \\ t & , \quad t>۱ \end{cases}$$

داده شده است . مطلوب است تعیین :

الف ـ $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}$.

پ ـ آیا رابطه (۴۴ . ۸) صادق است و اگر نیست دلیل آنرا بیان کنید .

حل ـ الف :

$$f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\int_۰^{\infty} c^{-st}F(t)dt=\int_۰^{۱} e^{-st}(۲t)dt+\int_۱^{\infty} e^{-st}(t)dt$$

$$=۲\left[\frac{te^{-st}}{-s}-\frac{c^{-st}}{s^۲}\right]_۰^۱+\left[\frac{te^{-st}}{-s}-\frac{e^{-st}}{s^۲}\right]_۱^{\infty}$$

$$=\frac{۲}{s^۲}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^۲} \quad ; \quad s>0$$

ب :

$$\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=\int_۰^{\infty} e^{-st}F'(t)dt=\int_۰^{۱} c^{-st}(۲)dt+\int_۱^{\infty} e^{-st}(۱)dt$$

$$=۲\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_۰^۱+\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_۱^{\infty}=\frac{۲}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

واضح است چون تابع در نقطه $t=۱$ منفصل میباشد لذا رابطه (۸ . ٤٤) درمورد تابع اخیربرقرار نبوده ولی‌رابطه(۸ . ٤٤۲) صادق است. زیرا باتوجه بمقادیر $F(۱+)=۱$ و $F(۱-)=۲$ سمت راست رابطه (۸ . ٤٤۲) بصورت زیر نوشته میشود :

$$sf(s)-F(o)-c^{-as}\Big\{F(a+)-F(a-)\Big\}=\frac{۲}{s}-c^{-s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s}(۱-۲)$$

$$=\frac{۲}{s}-\frac{e^{-s}}{s}=\mathscr{L}\Big\{F'(t)\Big\}$$

مثال ۳- بااستفاده از رابطه (۸ . ٤٤۳) نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\Big\{\sin at\Big\}=\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}$$

حل - اگر در رابطه (۸ . ٤٤۳) مقادیر $F(t)=\sin at$, $F'(t)=a\cos at$, $F''(t)=-a^{۲}\sin at$, $F(o)=o$, $F'(o)=a$ خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\Big\{F''(t)\Big\}=s^{۲}\mathscr{L}\Big\{F(t)\Big\}-sF(o)-F'(o)$$

$$\mathscr{L}\Big\{-a^{۲}\sin at\Big\}=s^{۲}\mathscr{L}\Big\{\sin at\Big\}-s(o)-a$$

$$\mathscr{L}\Big\{\sin at\Big\}=\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}$$

مثال ٤- بااستفاده از رابطه (۸ . ٤٤٤) مقدار $\mathscr{L}\Big\{t^n\Big\}$ راکه‌درآن n عدددرست مثبتی است محاسبه کنید .

حل - تابع $F(t)=t^n$ برای هرعدد مثبت t درشرایط قضیه سوم صدق مینماید وچون:

$$F(o)=F'(o)=F''(o)=\cdots=F^{(m-۱)}(o)=o$$

$$F^{(m)}(t)=m! \quad ; \quad F^{(m+۱)}(t)=o$$

است، لذا اگر مقادیر فوق را در رابطه (۸ . ٤٤٤) جایگزین نموده و $n=m+۱$ قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{F^{(m+۱)}(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{0\right\}=0=s^{m+۱}\mathscr{L}\left\{t^m\right\}-m!$$

و از آنجا :

$$\mathscr{L}\left\{t^m\right\}=\frac{m!}{s^{m+۱}} \quad , \quad (s>0) \tag{I}$$

رابطه بالا را نیز میتوان برای حالتی که نما عدد درستی نیست تعمیم داد . برای محاسبه $\mathscr{L}\left\{t^k\right\}$ درحالتیکه $k>-۱$ استدرتبدیل لاپلاس تبدیل متغیر $x=st$ را انجام میدهیم . یعنی :

$$\mathscr{L}\left\{t^k\right\}=\int_0^\infty t^k e^{-st}dt=\int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^k e^{-x}d\left(\frac{x}{s}\right)$$

$$=\frac{۱}{s^{k+۱}}\int_0^\infty x^k e^{-x}dx$$

واضح است اگر $k+۱>0$ باشدانتگرال $\int_0^\infty x^k e^{-x}dx$ تابع گاماویا تابع فاکتوریل با متغیر $K+۱$ میباشد* . پس :

$$\mathscr{L}\left\{t^k\right\}=\frac{\Gamma(k+۱)}{s^{k+۱}} \quad , \quad (K>-۱ \ , \ s>0) \tag{II}$$

واضح است که رابطه (I) حالت خاصی‌ازرابطه (II) میباشد . چه اگر در رابطه اخیر K عدد درست مثبت باشد، رابطه (I) بدست میآید .

۴۵ . ۸ - نقش لاپلاس انتگرالها

اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ باشد :

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t F(u)du\right\}=\frac{f(s)}{s} \tag{۸ . ۴۵}$$

---

* برای تعریف تابع گاما و خواص آن بصفحه ۲۷۱ آنالیز ریاضی تألیف آقای دکتر وصال مراجعه شود .

زیرا اگر $G(t)=\int_{۰}^{t} F(u)du$ اختیار گردد تابع $G(t)$ در فاصله $۰ \leqslant t \leqslant N$ پیوسته بوده و چون بنابفرض تابع $F(t)$ نیز دراین فاصله پیوسته میباشد (زیرا توابع $F(t)$ و $F'(t)$ در شرایط قضیه اول شماره (٤٤ . ٨) صدق میکند) $G'(t)=F(t)$ است* .

با بکار بردن رابطه (٤٤ . ٨) وتوجه به $G(۰)=۰$ به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{G'(t)\right\}=s\left\{G(t)\right\}-G(۰)$$

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=s\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{t} F(u)du\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{t} F(u)du\right\}=\frac{f(s)}{s}$$

میتوان نشان داد که تابع $G(t)=\int_{۰}^{t} F(u)du$ هم مرتبه تابع نمایی مرتبه γ است .

زیرا بنابفرض تابع $F(t)$ هم‌مرتبه تابع نمایی مرتبه γ است. لذا میتوان مقادیر ثابت γ و M را چنان تعیین نمود که برای جمیع مقادیر $t \geqslant ۰$ ، $|F(t)| < Me^{\alpha t}$ باشد . اگر γ عدد مثبت نباشد میتوان آنرا با عدد مثبت تعویض کرد . لذا :

$$|G(t)| \leqslant \int_{۰}^{t} |F(u)|du < M\int_{۰}^{t} e^{\gamma u}du=\frac{M}{\gamma}(e^{\gamma t}-۱) \quad , \quad (\gamma > ۰)$$

$$|e^{-\gamma t}G(t)| < \frac{M}{\gamma}(۱-e^{-\gamma t}) < \frac{M}{\gamma} \quad , \quad (\gamma > ۰)$$

و بدین ترتیب ثابت میشود که تابع $G(t)$ هم مرتبه تابع نمایی مرتبه γ است .

مثال۱ــ عبارت $\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{t} (u^{۲}-u+e^{-u})du\right\}$ را محاسبه کنید.

---

* برای استدلال بصفحه ۲۳۰ آنالیز ریاضی تألیف آقای دکتر وصال مراجعه شود .

حل - بااستفاده از رابطه (٨ . ٤٥) و توجه به خاصیت خطی سمبول $\int$ و $\mathscr{L}$ به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\int_{٠}^{t}(u^{٢}-u+e^{-u})du\right\}=\mathscr{L}\left\{\int_{٠}^{t}u^{٢}du-\int_{٠}^{t}udu+\int_{٠}^{t}e^{-u}du\right\}$$

$$=\frac{١}{s}\mathscr{L}\left\{t^{٢}-t+e^{-t}\right\}$$

$$=\frac{١}{s}\left[\frac{٢!}{s^{٣}}-\frac{١}{s^{٢}}+\frac{١}{s+١}\right]\quad,\quad(s>0)$$

$$=\frac{٢}{s^{٤}}-\frac{١}{s^{٣}}+\frac{١}{s(s+١)}$$

مثال ٢- عبارت $\mathscr{L}\left\{\int_{٠}^{t}\frac{\sin u}{u}du\right\}$ را محاسبه کنید .

حل - بااستفاده‌ازرابطه(٨ . ٤٥) وتوجه به مثال(٢) شماره (٨ . ٤٣)چنین‌داریم:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\operatorname{arctg}\frac{١}{s}$$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{٠}^{t}\frac{\sin u}{u}du\right\}=\frac{١}{s}\operatorname{arctg}\frac{١}{s}$$

٨ . ٤٦ ضرب‌در t^{n}

اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ باشد :

$$\mathscr{L}\left\{t^{n}F(t)\right\}=(-١)^{n}\frac{d^{n}}{ds^{n}}f(s)=(-١)^{n}f^{(n)}(s)\tag{٨ . ٤٦}$$

زیرا بااستفاده از قانون لیبنیز در مشتق‌گیری از تابع زیر علامت انتگرال چنین داریم :

$$\frac{df}{ds}=f'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt=\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st}F(t)dt$$

$$=\int_0^{\infty} -te^{-st}F(t)dt=-\int_0^{\infty} e^{-st}\left\{ tF(t) \right\}dt$$

لذا :

$$\mathscr{L}\left\{ tF(t) \right\}=-\frac{df}{ds}=-f'(s) \tag{I}$$

و بدین ترتیب رابطه (٤٦ . ٨) درحالت $n=١$ ثابت میشود .

برای اثبات قضیه درحالت کلی از روش استقراء ریاضی استفاده میکنیم و فرض میکنیم که قضیه فوق برای $n=k$ صادق باشد . یعنی :

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\left\{ t^kF(t) \right\}dt=(-١)^kf^{(k)}(s) \tag{II}$$

اگر از دو طرف رابطه بالا نسبت به s مشتق بگیریم چنین داریم :

$$\frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st}\left\{t^kF(t)\right\}dt=(-١)^kf^{(k+١)}(s)$$

باستفاده ازدستور **لیبنیتز** * درمشتق گیری ازتابع زیر علامت انتگرال، طرف چپ رابطه بالا بصورت زیر نوشته میشود:

$$-\int_0^{\infty} e^{-st}\left\{t^{k+١}F(t)\right\}dt=(-١)^kf^{(k+١)}(s)$$

و یا :

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\left\{t^{k+١}F(t)\right\}dt=(-١)^{k+١}f^{(k+١)}(s) \tag{III}$$

لذا اگر رابطه (II) برقرار باشد، یعنی قضیه برای $n=k$ صادق باشد، دراین صورت رابطه (III) صادق بوده و بالنتیجه قضیه برای $n=k+١$ برقرار خواهد بود و چون بنا

---

* برای بحث بیشتر درباره مشتق گیری از تابع زیر علامت انتگرال (دستور لیبنیتز وتعمیم آن) بصفحات ٦٥ تا ٧٦ کتاب زیر مراجعه شود.

E.T.Whittaker & G.N. Watson; A course of Modern Analysis, 1950.

برابطه (I) قضیه برای $n=1$ صادق‌است لذا برای $n=1+1=2$ و $n=2+1=3$ وغیره صادق بوده و بدین‌ترتیب قضیه برای‌جمیع اعداد درست مثبت ثابت میگردد.

تبصره ـ اگر تابع $F(t)$ در هرفاصله محدود پیوسته قطعه‌یی وهم‌مرتبه تابع نمایی $e^{\gamma t}$ باشد، نقشهای‌لاپلاس‌توابع $F(t)$, $tF(t)$, $t^2F(t)$, … , $t^nF(t)$ برای مقادیر $s\geqslant\gamma_1$ که درآن $\gamma_1>\gamma$ است متقارب یکنواخت میباشد وهمچنین :

$$\lim_{s\to\infty} f(s)=0 \quad ; \quad \lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\left\{ t^nF(t) \right\}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

ابتدا نشان خواهیم‌داد که تابع $t^nF(t)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ هم‌مرتبه تابع‌نمایی است.

فرض میکنیم ε عددمثبتی باشد. بااستفاده از تعریف‌دوم شماره (۸۰۳) میتوان مقادیر ثابت M_1 و M_2 را چنان تعیین کرد که برای جمیع مقادیر صفر ودرست n :

$$\text{(I)} \qquad t^nF(t) < t^nM_1e^{\gamma t}=M_1t^ne^{-\varepsilon t}e^{(\gamma+\varepsilon)t}\leqslant M_1M_2e^{(\gamma+\varepsilon)t} \qquad (t>0)$$

M_2 حداکثر مقدار تابع $t^ne^{-\varepsilon t}$ برای مقادیر $t>0$ است. بالنتیجه تابع $t^nF(t)$ هم مرتبه تابع‌نمایی $e^{-\gamma_0 t}$ است که در آن $\gamma_0=(\gamma+\varepsilon)$ میباشد.

بنابفرض تابع $F(t)$ درفاصله محدود $0\leqslant t\leqslant T$ پیوسته قطعه‌یی است وتابع t^n در این فاصله پیوسته است لذا $t^nF(t)$ در این فاصله پیوسته قطعه‌یی میباشد و چون هم مرتبه تابع‌نمایی است لذا بنا برقضیه شماره (۸۰۳) نقش لاپلاس آن موجود است. از طرف دیگر بااستفاده از رابطه (I) چنین داریم :

$$\left|\int_0^\infty t^nF(t)e^{-st}dt\right| \leqslant \int_0^\infty t^nF(t)e^{-st}\,|\,dt\leqslant M_1M_2\int_0^\infty e^{-(s-\gamma_0)t}$$

$$=\frac{M_1M_2}{s-\gamma_0} \qquad (s>\gamma_0)$$

لذا هنگامیکه $s\to\infty$ عبارت $\mathscr{L}\left\{ t^nF(t) \right\}$ بسوی صفر میل میکندو این رابطه برای مقادیر $n=0,1,2,\ldots$ صادق است. یعنی :

$$\lim_{s\to\infty} f(s)=0 \quad ; \quad \lim_{s\to\infty}\mathscr{L}\left\{ t^nF(t) \right\}=0$$

چنانچه $s\geqslant\gamma_1$ و $\gamma_1>\gamma_0$ باشد بااستفاده ازرابطه (I) چنین داریم:

$$\left| t^nF(t)e^{-st} \right| \leqslant M_۱M_۲e^{-(\gamma_۱-\gamma_۰)t}=M(t)$$

تابع نمایی $M(t)$ مستقل از s بوده و برای مقادیر $\gamma_۱>\gamma_۰$ درفاصله (o,∞) قابل انتگرال گیری است وازآنجا بنا برآزمون **وایراشتراس** درمورد تقارب یکنواخت انتگرالها، نقش لاپلاس:

$$\int_{۰}^{\infty} t^nF(t)e^{-st}dt \qquad (n=o\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ \dots)$$

برای جمیع مقادیر $s\geqslant\gamma_۱>\gamma_۰$ نسبت به s متقارب یکنواخت است.

مثال ــ بااستفاده ازرابطه (۸۰۴۶) مقادیر عبارات زیررا محاسبه کنید:

$$\mathscr{L}\left\{t^{۲}\cos at\right\}\ ,\ \mathscr{L}\left\{t\sin at\right\}$$

حلــ باتوجه بجدول مندرج درشماره (۸۰۲) وبااستفاده ازرابطه (۸.۴۶) به ترتیب چنین داریم:

$$\mathscr{L}\left\{\sin at\right\}=\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}\ ;\ \mathscr{L}\left\{\cos at\right\}=\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}}$$

$$\mathscr{L}\left\{t\sin at\right\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}\right)\ ;\ \mathscr{L}\left\{t^{۲}\cos at\right\}=\frac{d^{۲}}{ds^{۲}}\left(\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}}\right)$$

$$\mathscr{L}\left\{t\sin at\right\}=\frac{۲as}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}\ ;\ \mathscr{L}\left\{t^{۲}\cos at\right\}=\frac{۲s^{۳}-۶a^{۲}s}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳}}$$

باکمی دقت روابط بالارا میتوان بااستفاده از روابط زیر بدست آورد.

$$\mathscr{L}\left\{t\sin at\right\}=-\mathscr{L}\left\{\frac{d}{da}\cos at\right\}=-\frac{d}{da}\mathscr{L}\left\{\cos at\right\}$$

$$=-\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}}\right)=\frac{۲as}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$$

$$\mathscr{L}\left\{t^{۲}\cos at\right\}=\mathscr{L}\left\{-\frac{d^{۲}}{da^{۲}}(\cos at)\right\}=-\frac{d^{۲}}{da^{۲}}\mathscr{L}\left\{\cos at\right\}$$

$$=\frac{d}{da}\left[\frac{۲as}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}\right]=\frac{۲s^{۳}-۶a^{۲}s}{(s^{۲}+a^{۲})^{۳}}$$

۸.۴۷ - تقسیم بر t .

اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ و $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$ موجود باشد:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}f(u)du \qquad (۸۰۴۷)$$

زیرا اگر $G(t)=\frac{F(t)}{t}$ را اختیار کرده و رابطه (۸۰۴۶) را درمورد $F(t)$ بکار بریم ، خواهیم داشت :

$$G(t)=\frac{F(t)}{t}\ ,\ F(t)=tG(t)$$

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{tG(t)\right\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}$$

و ازآنجا:

$$f(s)=-\frac{dg}{ds}$$

که درآن $g=g(s)=\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}$.

با انتگرال گیری از دوطرف رابطه بالا وبادرنظرداشتن آنکه بنابر تبصره شماره (۸۰۴۶) $\lim\limits_{s\to\infty}g(s)=0$ است خواهیم داشت :

$$g(s)=-\int_{\infty}^{s}f(u)du=\int_{s}^{\infty}f(u)du$$

ازآنجا :

$$\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}f(u)du$$

مثال۱ - عبارت $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ را محاسبه کنید .

حل ـ بااستفاده از رابطه (۸۰۴۷) و با درنظرداشتن :

$$\mathscr{L}\left\{ sin\,t \right\}=\frac{۱}{s^۲+۱}\ ,\ \lim_{t\to 0}\frac{sin\,t}{t}=۱$$ چنین داریم:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{sin\,t}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}\frac{du}{u^۲+۱}=arctg\left(\frac{۱}{s}\right)$$

مثال ۳ـ نشان دهید :

الف ـ $\int_{0}^{\infty}\frac{F(t)}{t}dt=\int_{0}^{\infty}f(u)du$ بشرط آنکه انتگرالها همگرا باشند .

$f(s)$ نقش لاپلاس تابع $F(t)$ است.

ب ـ $\int_{0}^{\infty}\frac{sin\,t}{t}dt=\frac{\pi}{۲}$.

حل ـ الف ـ بااستفاده از رابطهٔ (۸۰۴۷) و تعریف نقش لاپلاس چنین داریم:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}=\int_{0}^{\infty}e^{-st}\frac{F(t)}{t}dt=\int_{0}^{\infty}f(u)du$$

$$\lim_{s\to 0+}\int_{0}^{\infty}e^{-st}\frac{F(t)}{t}dt=\lim_{s\to 0+}\int_{s}^{\infty}f(u)du$$

و چنانچه انتگرالها همگرا باشند :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{F(t)}{t}\,dt=\int_{0}^{\infty}f(u)du$$

و بدین ترتیب قسمت (الف) ثابت میگردد.

ب ـ اگر درقسمت (الف)، تابع $F(t)=sin\,t$ باشد و توجه داشته باشیم که نقش لاپلاس تابع $sin\,t$ بنابرجدول مندرج درشماره (۸۰۲) تابع $f(s)=\frac{۱}{s^۲+۱}$ است چنین داریم :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{sin\,t}{t}\,dt=\int_{0}^{\infty}\frac{du}{u^{۲}+۱}=\Big[arctg\,u\Big]_{0}^{\infty}=\frac{\pi}{۲}$$

۸.٤۸- توابع تناوبی

فرض میکنیم تابع تناوبی $F(t)$ دارای دوره تناوب $t>0$ یعنی $F(t+T)=F(t)$ باشد. نقش لاپلاس تابع اخیر از رابطه زیر بدست میآید:

$$\mathscr{L}\Big\{F(t)\Big\}=\frac{\int_{0}^{T}e^{-st}F(t)dt}{۱-e^{-sT}} \qquad (۸\cdot٤۸)$$

زیرا :

$$\mathscr{L}\Big\{F(t)\Big\}=\int_{0}^{\infty}e^{-st}F(t)dt$$

$$=\int_{0}^{T}e^{-st}F(t)dt+\int_{T}^{۲T}e^{-st}F(t)dt+\int_{۲T}^{۳T}e^{-st}F(t)dt+\cdots$$

در دومین انتگرال $t=u+T$ و درسومین انتگرال $t=u+۲T$ وغیرو قرار میدهیم . لذا با استفاده از خاصیت تناوبی $F(t)$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}\Big\{F(t)\Big\}=\int_{0}^{T}e^{-su}F(u)\,du+\int_{0}^{T}e^{-s(u+T)}F(u+T)\,du+$$

$$\int_{0}^{T}e^{-s(u+۲T)}F(u+۲T)du+\cdots$$

$$=\int_{0}^{T}e^{-su}F(u)du+e^{-sT}\int_{0}^{T}e^{-su}F(u)\,du+$$

$$e^{-۲sT}\int_0^T e^{-su}F(u)du+\cdots$$

$$=(۱+e^{-sT}+e^{-۲sT}+\cdots)\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$$

ضریب انتگرال واقع درسمت راست رابطه بالا تصاعد هندسی با قدر نسبت $۱ > e^{-sT}$ است. لذا :

$$=\frac{\int_0^T e^{-su}F(u)\,du}{۱-e^{-sT}}$$

مثال ۱ - تابع تناوبی $F(t)$ با رابطه زیر مشخص میشود :

$$F(t)=\begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<۲\pi \end{cases}$$

عبارت $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ را محاسبه کنید .

حل - واضحست که T دورهٔ تناوب، برابر ۲π بوده و لذا اگر مقادیر T و $F(t)$ را در رابطه (۸.۴۸) قرار دهیم چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\frac{۱}{۱-e^{-۲\pi s}}\int_0^{۲\pi} e^{-st}F(t)dt$$

$$=\frac{۱}{۱-e^{-۲\pi s}}\left[\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t\,dt+\int_0^{۲\pi} e^{-st}(0)\,dt\right]$$

$$=\frac{۱}{۱-e^{-۲\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t\,dt$$

$$=\frac{۱}{۱-e^{-۲\pi s}}\left[\frac{e^{-st}(-s\,\sin t-\cos t)}{s^{۲}+۱}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{۱}{۱-e^{-۲\pi s}}\left\{\frac{۱+e^{-\pi s}}{s^{۲}+۱}\right\}=\frac{۱}{(۱-e^{-\pi s})(s^{۲}+۱)}$$

مثال ۲ ـ تابع تناوبی موج مربع با دورهٔ تناوب ۲c (c عددی‌است غیرمشخص) که با رابطهٔ زیر مشخص میگردد داده شده‌است . مطلوبست محاسبهٔ $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$

$$F(t)=\begin{cases} ۱ & 0<t<c \\ -۱ & c<t<۲c \end{cases}$$

حل ـ رابطهٔ (۸.۴۸) به ترتیب بصورت زیر نوشته میشود :

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\frac{۱}{۱-e^{-۲cs}}\int_{0}^{۲c}e^{-st}F(t)\,dt$$

$$=\frac{۱}{۱-e^{-۲cs}}\int_{0}^{c}e^{-st}(۱)dt+\int_{c}^{۲c}e^{-st}(-۱)dt$$

$$=\frac{(۱-e^{-cs})^{۲}}{s(۱-e^{-۲cs})}=\frac{(۱-e^{-cs})^{۲}}{s(۱-e^{-cs})(۱+e^{-cs})}=$$

$$=\frac{۱-e^{-cs}}{s(۱+e^{-cs})}=\frac{۱}{s}\ \operatorname{tgh}\frac{cs}{۲}\qquad (s>0)$$

۸.۴۹ ـ قضایای مقادیر اولیه و نهایی

در دوقضیه زیر فرض میکنیم توابع $F(t)$ و $F'(t)$ درفاصلهٔ محدود $0\leqslant t\leqslant N$ پیوسته قطعه‌یی وبرای مقادیر $t>N$ هم مرتبه تابع نمایی‌باشند.

۸.۴۹۱ ـ قضیه مقدار اولیه

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\lim_{s\to\infty}f(s)\qquad (۸.۴۹۱)$$

زیرا بااستفاده از تعریف نقش لاپلاس و رابطه (٨ . ٤٤) چنین داریم :

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=\int_o^{\infty} e^{-st}F'(t)=sf(s)-F(o)$$

اما چون بنابفرض‌تابع $F'(t)$ پیوسته قطعه‌یی و هم مرتبه‌تابع نمایی است لذا بنابر تبصره شماره(٨ . ٤٦) حد نقش لاپلاس‌آن هنگامیکه $s \to \infty$ بسوی صفر میل میکند. یعنی :

$$(\mathrm{II}) \qquad \lim_{s\to\infty}\mathscr{L}\left\{F'(t)\right\}=\lim_{s\to\infty}\int_o^{\infty} e^{-st}F'(t)dt=o$$

اگردر رابطه (I) ، s بسوی‌بینهایت میل کندوفرض کنیم تابع $F(t)$ بازاء $t=o$ پیوسته باشد ، بااستفاده از رابطه (II) چنین داریم :

$$o=\lim_{s\to\infty} sf(s)-F(o) \quad \text{و یا} \quad \lim_{s\to\infty} sf(s)=F(o)=\lim_{t\to o}F(t)$$

چنانچه تابع $F(t)$ درنقطه $t=o$ پیوسته نباشد بااستفاده‌از قضیه دوم شماره (٨ . ٤٦) بسهولت میتوان نشان داد که :

$$\lim_{s\to\infty} sf(s)=\lim_{t\to o+}F(t)$$

اگر $\lim_{t\to o}\frac{F(t)}{G(t)}=$ ١ باشد گوییم برای مقادیر کوچک t تابع $F(t)$ **نزدیک** به $G(t)$ بوده و از نقطه نظر سمبولی آنرا بصورت زیر مینویسیم :

$$F(t)\sim G(t) \quad , \quad t\to o$$

بطریق مشابه اگر $\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{g(s)}=$ ١ باشد گوییم برای مقادیربزرگ s تابع $f(s)$ **نزدیک** به $g(s)$ است و آنرا بصورت زیر مینویسیم :

$$f(s)\sim g(s) \quad , \quad s\to\infty$$

بااستفاده از قرار دادهای فوق میتوان قضیه مقدار اولیه را بشرح زیر تعمیم داد :

اگر برای مقادیر کوچک t ، $F(t) \sim G(t)$ باشد برای مقادیر بزرگ s ، $f(s) \sim g(s)$ است که در آن :

$$f(s) = \mathscr{L}\left\{ F(t) \right\} \quad ; \quad g(s) = \mathscr{L}\left\{ G(t) \right\}$$

میباشد .

۴۹۲ . ۸- قضیه مقدار نهایی

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to o} sf(s) \qquad (۸ . ۴۹۲)$$

زیرا بااستفاده از تعریف نقش لاپلاس و رابطه (۸ . ۴۴) چنین داریم :

$$\text{(I)} \qquad \mathscr{L}\left\{ F'(t) \right\} = \int_{o}^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = sf(s) - F(o)$$

هنگامیکه $s \to o$ حد سمت چپ رابطه بالا برابر :

$$\lim_{s \to o} \int_{o}^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = \int_{o}^{\infty} F'(t) dt = \lim_{P \to \infty} \int_{o}^{P} F'(t) dt$$

$$= \lim_{P \to \infty} \left\{ F(P) - F(o) \right\} = \lim_{t \to \infty} F(t) - F(o)$$

است . حد سمت راست رابطه (I) :

$$\lim_{s \to o} sf(s) - F(o)$$

بوده و بالنتیجه :

$$\lim_{t \to \infty} F(t) - F(o) = \lim_{s \to o} sf(s) - F(o)$$

و لذا رابطه مطلوب ، یعنی:

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to o} sf(s)$$

بدست میآید .

اگرتابع $F(t)$ بازاء $t=o$ منفصل باشد باستفاده ازقضیه دوم شماره (۸ . ۴۴) میتوان صحت رابطه (۸ . ۴۹۲) را نیز دراین حالت تأیید کرد .

اگر $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{F(t)}{G(t)} = ۱$ باشد مینویسیم :

$$F(t) \sim G(t) \quad , \quad t \to \infty$$

بطریق مشابه اگر $\lim\limits_{s \to o} \frac{f(s)}{g(s)} = ۱$ باشد مینویسیم :

$$f(s) \sim g(s) \quad , \quad s \to o$$

بالنتیجه قضیه مقدار نهایی بشرح زیر تعمیم داده میشود :

اگر : $F(t) \sim G(t) \quad , \quad t \to \infty$ باشد

دراینصورت : $f(s) \sim g(t) \quad , \quad s \to o$

که درآن $f(s)$ و $g(s)$ به ترتیب نقشهای لاپلاس توابع $F(t)$ و $G(t)$ هستند خواهد بود .

مثال ۱ــ صحت قضیه مقدار اولیه را درمورد توابع زیر تحقیق کنید :

$$۳-۲cost \; ; \; (۲t+۳)^{۲} \; ; \; t+sin۳t$$

حل ــ باستفاده ازجدول مندرج درشماره (۸ . ۲) و رابطه (۸ . ۴۹۱) به ترتیب چنین داریم :

$$(I) \qquad F(t)=۳-۲cos۲t \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{۳-۲cost\right\}$$

$$=\mathscr{L}\left\{۳\right\}-۲\mathscr{L}\left\{cost\right\}$$

$$=\frac{۳}{s}-\frac{۲s}{s^{۲}+۱}=\frac{s^{۲}+۳}{s(s^{۲}+۱)}=f(s) \quad , \quad s>o$$

$$\lim_{t \to o} F(t) = \lim_{s \to \infty} sf(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s^{۲}+۳}{s^{۲}+۱}$$

$$\lim_{t \to o}\left[۳-۲cos۲t\right] = \lim_{s \to \infty} \frac{s^{۲}+۳}{s^{۲}+۱}$$

و لذا ۱=۱ است .

$$\text{(II)} \qquad F(t)=(۲t+۳)^{۲} \quad ; \quad \mathscr{L}\Big\{F(t)\Big\}=\mathscr{L}\Big\{(۲t+۳)^{۲}\Big\}$$

$$=\mathscr{L}\Big\{۴t^{۲}+۱۲t+۹\Big\}$$

$$=۴\mathscr{L}\Big\{t^{۲}\Big\}+۱۲\mathscr{L}\Big\{t\Big\}+۹\mathscr{L}\Big\{۱\Big\}$$

$$=\frac{۸}{s^{۳}}+\frac{۱۲}{s^{۲}}+\frac{۹}{s}=\frac{۹s^{۲}+۱۲s+۸}{s^{۳}} \quad , \quad s>o$$

$$\lim_{t\to o}[(۲t+۳)^{۲}]=\lim_{s\to\infty}\frac{s(۹s^{۲}+۱۲s+۸)}{s^{۳}}$$

و از آنجا ۹=۹ خواهد بود .

$$\text{(III)} \qquad F(t)=t+\sin t \quad ; \quad \mathscr{L}\Big\{t+\sin t\Big\}=\mathscr{L}\Big\{t\Big\}$$

$$+\mathscr{L}\Big\{\sin t\Big\}=\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{۱}{s^{۲}+۱}$$

$$=\frac{۲s^{۲}+۱}{s^{۲}(s^{۲}+۱)} \quad , \quad s>o$$

$$\lim_{t\to o}(t+\sin t)=\lim_{t\to\infty}\frac{s(۲s^{۲}+۱)}{s^{۲}(s^{۲}+۱)}$$

و لذا $o=o$ است .

مثال ۲ـ صحت قضیه مقدار نهایی را در مورد توابع زیر تحقیق کنید :

$$۱+e^{-t}(\sin t+\cos t) \quad ; \quad t^{۳}e^{-۲t}$$

حل ـ بااستفاده‌ازجدول مندرج‌درشماره(۲ . ۸) و روابط (۴۲ . ۸) و (۴۹۲ . ۸) چنین داریم :

$$\text{(I)} \qquad F(t)=۱+e^{-t}(\sin t+\cos t) \quad ; \quad \mathscr{L}\Big\{۱+e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big\}$$

$$=\mathscr{L}\left\{۱\right\}+\mathscr{L}\left\{e^{-t}\sin t\right\}+\mathscr{L}\left\{e^{-t}\cos t\right\}$$

$$=\frac{۱}{s}+\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۱}+\frac{s+۱}{(s+۱)^{۲}+۱}$$

$$=\frac{۱}{s}+\frac{s+۲}{s^{۲}+۲s+۲}\quad , \quad s>0$$

$$=\frac{۲(s+۱)^{۲}}{s(s^{۲}+۲s+۲)}$$

$$\lim_{t\to 0} F(t)=\lim_{t\to 0}\left(۱+e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\right)$$

$$=۲=\lim_{s\to\infty} sf(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{۲s(s+۱)^{۲}}{s(s^{۲}+۲s+۲)}$$

و بدین ترتیب صحت رابطه (۴۹۲ . ۸) تأیید میگردد .

$$\text{(II)}\qquad F(t)=t^{۳}e^{-۲t}\quad ;\quad \mathscr{L}\left\{t^{۳}e^{-۲t}\right\}=\frac{۳!}{(s+۲)^{۴}}=\frac{۶}{(s+۲)^{۴}}$$

$$\lim_{t\to 0} F(t)=\lim_{t\to 0}\left(t^{۳}e^{-۲t}\right)=0=\lim_{s\to\infty} sf(s)=۶\lim_{s\to\infty}\frac{s}{(s+۲)^{۴}}=0$$

۵ . ۸ - روش یافتن نقشهای لاپلاس

برای تعیین نقشهای لاپلاس روشهای متفاوتی موجود است که فهرست آنها را ذیلاً ذکر نمودهایم .

۵۱ . ۸ - روش مستقیم

با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس که بوسیله رابطه (۲ . ۸) مشخص میگردد ، میتوان نقشهای لاپلاس توابع را بدست آورد . در شماره (۲ . ۸) بااین روش نقشهای لاپلاس توابع مقدماتی $(t^{n} , e^{at} , \sin at , \ldots)$ را بدست آوردیم .

۵۲ . ۸ - روش سریها

اگر بتوان $F(t)$ را برحسب تابع نمایی :

$$F(t)=a_۰+a_۱t+a_۲t^۲+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

بسط دهیم، نقش لاپلاس تابع $F(t)$ برابر مجموع نقشهای لاپلاس هریک از جمل سری بالا است . یعنی :

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\frac{a_۰}{s}+\frac{a_۱}{s^۲}+\frac{۲!\,a_۲}{s^۳}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,a_n}{s^{n+۱}}$$

اگر سری بالا بازاء مقادیر $s>\gamma$ متقارب باشد قضیه بالا صادق خواهد بود .

مثال ۱ـ اگر تابع :

$$J_۰(t)=\left\{۱-\frac{t^۲}{۲^۲}+\frac{t^۴}{۲^۲۴^۲}-\frac{t^۶}{۲^۲۴^۲۶^۲}+\cdots\right\}$$

باشد $\mathscr{L}\left\{J_۰(t)\right\}$ را محاسبه کنید . $J_۰(t)$ تابع **بسل** مرتبه صفر میباشد .

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{J_۰(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{۱-\frac{t^۲}{۲^۲}+\frac{t^۴}{۲^۲۴^۲}-\frac{t^۶}{۲^۲۴^۲۶^۲}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{۲^۲}\cdot\frac{۲!}{s^۳}+\frac{۱}{۲^۲۴^۲}\cdot\frac{۴!}{s^۵}-\frac{۱}{۲^۲۴^۲۶^۲}\cdot\frac{۶!}{s^۷}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{s}\left\{۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{s^۲}\right)+\frac{۱\cdot۳}{۲\cdot۴}\left(\frac{۱}{s^۴}\right)-\frac{۱\cdot۳\cdot۵}{۲\cdot۴\cdot۶}\left(\frac{۱}{s^۶}\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{۱}{s}\left[\left(۱+\frac{۱}{s^۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\right]\quad;\quad\left(\frac{۱}{s^۲}<۱\quad\text{و یا}\quad s>۱\right)$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}}$$

مثال ۲ـ نشان دهید :

$$\mathscr{L}\left\{Si(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du\right\}=\frac{۱}{s}\,\mathrm{arctg}\,\frac{۱}{s}$$

حل ـ با بسط سری $\sin u$ و انتگرال گیری چنین داریم :

$$\int_{۰}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du=\int_{۰}^{t}\frac{۱}{u}\left(u-\frac{u^{۳}}{۳!}+\frac{u^{۵}}{۵!}-\frac{u^{۷}}{۷!}+\cdots\right)du$$

$$=t-\frac{t^{۳}}{۳\cdot ۳!}+\frac{t^{۵}}{۵\cdot ۵!}-\frac{t^{۷}}{۷\cdot ۷!}+\cdots$$

و از آنجا :

$$\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du\right\}=\mathscr{L}\left[t-\frac{t^{۳}}{۳\cdot ۳!}+\frac{t^{۵}}{۵\cdot ۵!}-\frac{t^{۷}}{۷\cdot ۷!}+\cdots\right]$$

$$=\frac{۱}{s^{۲}}-\frac{۱}{۳\cdot ۳!}\cdot\frac{۳!}{s^{۴}}+\frac{۱}{۵\cdot ۵!}\cdot\frac{۵!}{s^{۶}}$$

$$-\frac{۱}{۷\cdot ۷!}\cdot\frac{۷!}{s^{۸}}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{s^{۲}}-\frac{۱}{۳s^{۴}}+\frac{۱}{۵s^{۶}}-\frac{۱}{۷s^{۸}}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{s}\left[\frac{\left(\frac{۱}{s}\right)}{۱}-\frac{\left(\frac{۱}{s}\right)^{۳}}{۳}+\frac{\left(\frac{۱}{s}\right)^{۵}}{۵}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{۱}{s}\right)^{۷}}{۷}+\cdots\right]$$

$$=\frac{۱}{s}\,\mathrm{arc}tg\,\frac{۱}{s}$$

زیرا برای مقادیر $|x| < ۱$ چنین داریم :

$$\mathrm{arc}tg\,x=x-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۵}-\frac{x^{۷}}{۷}+\cdots$$

۵۳ . ۸ ـ روش معادلات دیفرانسیل

دراین روش سعی میکنیم معادله دیفرانسیلی که $F(t)$ درآن صدق مینماید بدست

آوریم و سپس قضایای بالا را درمورد آن بکار میبریم .

مثال ـ مقدار $\mathscr{L}\left\{\sin\sqrt{t}\right\}$ را بیابید .

حل ـ بسهولت معلوم میگردد که تابع $Y(t)=\sin\sqrt{t}$ درمعادله دیفرانسیل زیر صدق مینماید :

$$٤tY''+٢Y'+Y=o$$

اگردردو طرف معادله بالاتبدیل لاپلاس را انجام دهیم وازروابط (٨ . ٤٦) و (٨ . ٤٤٣) و (٨ . ٤٤) استفاده کنیم، خواهیم داشت :

$$٤\mathscr{L}\left\{tY''\right\}+٢\mathscr{L}\left\{Y'\right\}+\mathscr{L}\left\{Y\right\}=o$$

$$-٤\frac{d}{ds}\left\{\mathscr{L}y''\right\}+٢\mathscr{L}\left\{Y'\right\}+\mathscr{L}\left\{Y\right\}=o$$

$$-٤\frac{d}{ds}[s^٢y-sY(o)-Y'(o)]+٢[sy-Y(o)]+y=o$$

که در آن : $y=\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}$

و یا :

$$-٨sy-٤s^٢\frac{dy}{ds}+٤Y(o)+٢sy-٢Y(o)+y=o$$

$$-٤s^٢\frac{dy}{ds}-٦sy+٢Y(o)+y=o$$

ولی چون $Y(o)=\sin o=o$ است . پس :

$$٤s^٢\frac{dy}{ds}+(٦s-١)y=o$$

$$y=\frac{c}{s^{\frac{٣}{٢}}}e^{-\frac{١}{٤s}}$$

چون برای مقادیر کوچک t ، $\sin\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ و برای مقادیر بزرگ s ، $y \sim \frac{c}{s^{\frac{۳}{۲}}}$

و بعداً نشان میدهیم که $\mathscr{L}\left\{\sqrt{t}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}$. لذا از مقایسه ، مقدار $c=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ بدست میآید . یعنی :

$$\mathscr{L}\left\{\sin\sqrt{t}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}e^{-\frac{۱}{۴s}}$$

۸ . ۵۴ - روش مشتق‌گیری نسبت بیک پارامتر

این روش را در قسمت آخر مثال شماره (۸ . ۴۶) قبلاً توضیح داده‌ایم .

۸ . ۵۵ - روشهای متفاوت

این روش شامل شیوه‌های خاصی بوده و باید درهرمورد روش خاصی را بکار برد .

۸ . ۵۶ - بکار بردن جداول (بجدول‌های ضمیمه رجوع شود) .

۸ . ۶ - محاسبه انتگرالها

اگر $f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ باشد :

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st}F(t)dt=f(s)$$

چنانچه در رابطه بالا s بسوی صفر میل کند ، چنین داریم :

$$\int_{0}^{\infty} F(t)dt=f(0) \qquad (۸ . ۶)$$

مشروط برآنکه انتگرال واقع درسمت چپ رابطه (۸ . ۶) متقارب باشد .

از رابطه (۸ . ۶) میتوان انتگرال بسیاری از توابع را بدست آورد .

مثال ۱ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید :

$$\int_{۰}^{\infty} te^{-۲t}\cos t\,dt \quad ; \quad \int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-۳t}}{t}\,dt$$

حل ـ در مورد انتگرال $\int_{۰}^{\infty} te^{-۲t}\cos ۲t\,dt$ ازرابطه (۸ . ۴۶) استفاده میکنیم.

یعنی :

$$\mathscr{L}\left\{t\cos t\right\}=\int_{۰}^{\infty} te^{-st}\cos t\,dt=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{\cos t\right\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^{۲}+۱}\right)$$

$$=\frac{s^{۲}-۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$$

و پس‌از جایگزین کردن $s=۲$ خواهیم داشت :

$$\int_{۰}^{\infty} te^{-۲t}\cos t\,dt=\frac{۳}{۲۵}$$

در مورد انتگرال $\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-۳t}}{t}\,dt$ به ترتیب زیر عمل میکنیم :

$$F(t)=e^{-t}-e^{-۳t} \quad ; \quad f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{e^{-t}-e^{-۳t}\right\}$$

$$=\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{s+۳}$$

بااستفاده از رابطه (۸ . ۴۷) چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{e^{-t}-e^{-۳t}}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}\left[\frac{۱}{u+۱}-\frac{۱}{u+۳}\right]=Log\,\frac{s+۳}{s+۱}$$

و از آنجا :

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-st}\left[\frac{e^{-t}-e^{-۳t}}{t}\right]dt=Log\,\frac{s+۳}{s+۱}$$

اگرحد رابطه بالا را هنگامیکه s با مقادیربزرگتراز صفر بسوی صفر میل کند $(s \to o+)$ بدست آوریم، چنین داریم :

$$\int_{o}^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-۳t}}{t}\,dt = Log۳$$

۸.۷ـ توابع خاص

۸ . ۷۱ - تابع گاما *

برای مقادیر مثبت n ، تابع گامارا با رابطه زیر مشخص میکنیم :

$$\Gamma(n)=\int_{o}^{\infty} u^{n-۱}e^{-u}du \tag{۸ . ۷۱}$$

ذیلاً برخی از خواص مهم این تابع را ذکر میکنیم .

الف ـ

$$\Gamma(n+۱)=n\Gamma(n) \quad , \quad n > o \tag{۸ . ۷۱۱}$$

چون $\Gamma(۱)=۱$ است لذاباستفاده ازرابطه بالا $\Gamma(۲)=۱$ و $\Gamma(۳)=۲$ وبطورکلی چنانچه n عدد درست مثبتی باشد $\Gamma(n+۱)=n!$. بدلیل فوق میباشدکه در برخی از موارد تابع گاما را تابع فاکتوریل مینامند .

ب ـ

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=\sqrt{\pi} \tag{۸ . ۷۱۲}$$

پ ـ

$$\Gamma(p)\Gamma(۱-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p} \quad , \quad o < p < ۱ \tag{۸ . ۷۱۳}$$

---

* برای اثبات روابط موجود بین تابع گاما وبحث بیشتردراین مورد بصفحات ۲۳۵ الی ۲۴۵ کتاب زیر مراجعه شود .

E.T. Whittaker & G. N. Watson ; A Course of Modern Analysis , 1950

ت ـ برای مقادیر بزرگ n رابطه زیر که به فرمول **استرلینگ*** موسوم است برقرار میباشد :

$$\Gamma(n+۱) \sim \sqrt{۲\pi n}\, n^{n}e^{-n}$$

ث ـ برای مقادیر منفی n میتوان $\Gamma(n)$ را بارابطه زیر تعریف کرد :

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+۱)}{n}$$

مثال ۱ـ مقادیر $\mathscr{L}\left\{t^{n}\right\}$, $\mathscr{L}\left\{t^{-\frac{۱}{۲}}\right\}$, $\mathscr{L}\left\{t^{\frac{۱}{۲}}\right\}$ را محاسبه کنید .

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{t^{n}\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}t^{n}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^{n}d\left(\frac{u}{s}\right)$$

$$=\frac{۱}{s^{n+۱}}\int_{0}^{\infty} u^{n}e^{-u}du=\frac{۱}{s^{n+۱}}\int_{0}^{\infty} u^{n+۱-۱}e^{-u}du$$

$$=\frac{\Gamma(n+۱)}{s^{n+۱}} \qquad \text{(I)}$$

مشروط برآنکه $n+۱>0$ و $s>0$ و یا $n>-۱$ و $s>0$ باشد .

اگر در رابطه بالا $n=-\frac{۱}{۲}$ قرارد هیم ، چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{t^{-\frac{۱}{۲}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}{s^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

چنانچه بار دیگر در رابطه(I) ، $n=\frac{۱}{۲}$ قرار داده و ازروابط (۷۱۱ . ۸) و (۷۱۲ . ۸) استفاده کنیم ، خواهیم داشت :

---

* Stirling

$$\mathscr{L}\left\{ t^{\frac{۱}{۲}} \right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right)}{s^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}{s^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}$$

مثال ۲- چنانچه رابطه (۸ . ۷۱۱) برای جمیع مقادیر مثبت و منفی n صادق باشد مطلوب است محاسبه مقادیر عبارات زیر :

الف - $\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right)$.
ب - $\Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right)$.
پ - $\Gamma\left(-\frac{۵}{۲}\right)$.
ت - $\Gamma(0)$.
ث - $\Gamma(-۱)$.
ج - $\Gamma(-۲)$.

حل -

الف - در رابطه (۸ . ۷۱۱) قرار میدهیم $n=-\frac{۱}{۲}$. پس :

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۱}{۲}\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right) \quad ; \quad -۲\sqrt{\pi}=\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right)$$

ب - باجایگزین کردن $n=-\frac{۵}{۲}$ در رابطه (۸ . ۷۱۱) وبااستفاده از قسمت (الف) همین مسئله چنین داریم :

$$\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۳}{۲}\Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right)$$

$$\Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right)=-\frac{۲}{۳}\Gamma\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۲}{۳}\left(-۲\sqrt{\pi}\right)=\frac{۴}{۳}\sqrt{\pi}$$

پ - باجایگزین کردن $n=-\frac{۵}{۲}$ دررابطه (۸ . ۷۱۱) وبااستفاده از قسمت (ب) همین مسئله چنین داریم :

$$\Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right)=-\frac{۵}{۲}\Gamma\left(-\frac{۵}{۲}\right)$$

$$\Gamma\left(-\frac{۵}{۲}\right)=-\frac{۲}{۵}\Gamma\left(-\frac{۳}{۲}\right)=-\frac{۸}{۱۵}\sqrt{\pi}$$

ت ـ باتوجه بآنکه $\Gamma(۱)=۱$ است ، در رابطه(۷۱۱ . ۸) قرار میدهیم $n=0$ ، پس :

$$\Gamma(۱)=۱=0\cdot\Gamma(0)$$

لذا نتیجه میشود که $\Gamma(0)$ باید بینهایت باشد .

ث ـ باجایگزین کردن $n=-۱$ در رابطه (۷۱۱ . ۸) و بااستفاده‌ازقسمت(پ) همین مسئله چنین داریم :

$$\Gamma(0)=-۱\cdot\Gamma(-۱)$$

لذا نتیجه میشود که $\Gamma(-۱)$ نیز بینهایت است .

ج ـ باجایگزین کردن $n=-۲$ در رابطه (۷۱۱ . ۸) وبااستفاده ازقسمت(ث) همین مسئله چنین داریم :

$$\Gamma(-۱)=-۲\Gamma(-۲)$$

پس $\Gamma(-۲)$ نیز بینهایت میباشد .

بطورکلی اگر p هرعدد مثبت یا صفر باشد ، $\Gamma(-p)$ بینهایت بوده و در رابطه زیر صدق میکند :

$$\Gamma\left(-p-\frac{۱}{۲}\right)=(-۱)^{p+۱}\left(\frac{۲}{۱}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)\cdots\left(\frac{۲}{۲p+۱}\right)\sqrt{\pi}$$

۸ . ۷۲ ـ توابع بسل

در جلد دوم این کتاب بطور مفصل درباره تابع بسل و خواص‌آن بحث خواهیم نمود ولی دراینجا برخی از خواص مهم آنرا ذکر میکنیم . تابع بسل مرتبه n را با رابطه زیر تعیین میکنیم :

$$J_n(t)=\frac{t^n}{۲^n\Gamma(n+۱)}\left\{۱-\frac{t^۲}{۲(۲n+۲)}+\frac{t^۴}{۲\cdot۴(۲n+۲)(۲n+۴)}-\cdots\right\}\qquad(۸ . ۷۲)$$

الف ـ اگر n عدد درست مثبت باشد :

$$J_{-n}(t)=(-۱)^n J_n(t)$$

ب - $$J_{n+۱}(t)=\frac{۲n}{t}J_n(t)-J_{n-۱}(t)$$

پ - $$\frac{d}{dt}\left\{t^n J_n(t)\right\}=t^n J_{n-۱}(t)$$

ولی اگر در رابطه بالا $n=۰$ اختیارگردد $J'_۰(t)=-J_۱(t)$ است .

ت - $$e^{\frac{۱}{۲}t\left(u-\frac{۱}{u}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(t)u^n$$

رابطه بالا را **تابع مولد** توابع بسل نامیم .

ث - $J_n(t)$ درمعادله دیفرانسیل بسل :

$$t^۲Y''(t)+tY'(t)+(t^۲-n^۲)Y(t)=۰$$

صدق میکند .

برای سهولت $J_n(it)$ را با رابطه زیرتعریف میکنند :

$$J_n(it)=i^{-n}I_n(t)$$

$I_n(t)$ تابع بسل مرتبه n کاهش یافته است .

مثال ـ عبارت $\mathscr{L}\left\{J_۱(t)\right\}$ را که در آن $J_۱(t)$ تابع بسل مرتبه اول است محاسبه کنید .

حل ـ با استفاده از قسمت (پ) شماره (۷۲ . ۸) و همچنین بکار بردن رابطه (٤٤ . ۸) به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{J_۱(t)\right\}=-\mathscr{L}\left\{J'_۰(t)\right\}=-\left[s\mathscr{L}\left\{J_۰(t)\right\}-۱\right]$$

ولی بنابر مثال یک شماره (٥۲ . ۸) خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{J_۰(t)\right\}=\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}}$$

لذا :
$$\mathscr{L}\left\{J_{۱}(t)\right\}=\frac{-s}{\sqrt{s^{۲}+۱}}+۱=\frac{\sqrt{s^{۲}+۱}-s}{\sqrt{s^{۲}+۱}}$$

۸ . ۷۳ - تابع خطا

این تابع با رابطه زیر مشخص میگردد :

$$\operatorname{erf}(t)=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-u^{۲}}du \qquad (۸ . ۷۳)$$

مکمل تابع خطا با رابطه زیر مشخص میگردد :

$$\operatorname{erfc}(t)=۱-\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-u^{۲}}du=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{\infty} e^{-u^{۲}}du$$

مثال ـ نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{erf}\sqrt{t}\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{t}} e^{-u^{۲}}du\right\}=\frac{۱}{s\sqrt{s+۱}}$$

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{t}} e^{-u^{۲}}du\right\}$$

$$=\mathscr{L}\left\{\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{t}}\left(۱-u^{۲}+\frac{u^{۴}}{۲!}-\frac{u^{۶}}{۳!}+\cdots\right)du\right\}$$

$$=\mathscr{L}\left\{\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\left(t^{\frac{۱}{۲}}-\frac{t^{\frac{۳}{۲}}}{۳}+\frac{t^{\frac{۵}{۲}}}{۵\,.\,۲!}-\frac{t^{\frac{۷}{۲}}}{۷\,.\,۳!}+\cdots\right)\right\}$$

و بااستفاده از خطی بودن سمبول $\mathscr{L}$ و مثال یک شماره (۸ . ۷۱) چنین‌داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{٢}{\sqrt{\pi}}\int_{٠}^{\sqrt{t}} e^{-u^{٢}}du\right\}=\frac{٢}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{٣}{٢}\right)}{s^{\frac{٣}{٢}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{٥}{٢}\right)}{٣s^{\frac{٥}{٢}}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\frac{٧}{٢}\right)}{٥\cdot ٢!s^{\frac{٧}{٢}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{٩}{٢}\right)}{٧\cdot ٣!s^{\frac{٩}{٢}}}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{١}{s^{\frac{٣}{٢}}}-\frac{١}{٢}\cdot\frac{١}{s^{\frac{٥}{٢}}}+\frac{١\cdot ٣}{٢\cdot ٤}\cdot\frac{١}{s^{\frac{٧}{٢}}}$$

$$-\frac{١\cdot ٣\cdot ٥}{٢\cdot ٤\cdot ٦}\cdot\frac{١}{s^{\frac{٩}{٢}}}+\cdots$$

$$=\frac{١}{s^{\frac{٣}{٢}}}\left(١-\frac{١}{٢}\cdot\frac{١}{s}+\frac{١\cdot ٣}{٢\cdot ٤}\cdot\frac{١}{s^{٢}}\right.$$

$$\left.-\frac{١\cdot ٣\cdot ٥}{٢\cdot ٤\cdot ٦}\cdot\frac{١}{s^{٣}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{١}{s^{\frac{٣}{٢}}}\left(١+\frac{١}{s}\right)^{-\frac{١}{٢}}=\frac{١}{s\sqrt{s+١}}$$

٧٤ . ٨ ـ انتگرالهای ساین* و کُساین**

این انتگرالها با روابط زیر مشخص میشوند :

$$\mathrm{Si}(t)=\int_{٠}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du \qquad (٨ . ٧٤)$$

Sine *

Cosine **

$$Ci(t)=\int_{t}^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du \qquad (۸ . ۷۴۱)$$

مثال ۱ـ نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\left\{ Si(t) \right\}=\mathscr{L}\left\{ \int_{o}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du \right\}=\frac{۱}{s}\,\mathrm{arc}tg\,\frac{۱}{s}$$

حل ـ مثال بالا رادرشماره‌های (۴۵ . ۸) **(مثال ۲)** و (۵۲ . ۸) (مثال ۲) بادو روش متفاوت حل کردیم و اینک دو روش دیگر برای محاسبه نقش لاپلاس انتگرالهای ساین بیان میکنیم.

روش اول ـ فرض میکنیم $F(t)=\int_{o}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du$ باشددراینصورت $F(o)=o$ و $F'(t)=\frac{\sin t}{t}$ و یا $tF'(t)=\sin t$ است. اگر نقش لاپلاس دو طرف رابطه اخیر را با توجه به روابط (۴۶ . ۸) و(۴۴ . ۸) بدست‌آوریم ، خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{tF'(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{\sin t\right\} \quad ; \quad -\frac{d}{ds}\left\{ sf(s)-F(o) \right\}=\frac{۱}{s^{۲}+۱}$$

$$\frac{d}{ds}\left\{ sf(s) \right\}=-\frac{۱}{s^{۲}+۱}$$

و پس‌از انتگرال گیری چنین داریم :

$$sf(s)=-\mathrm{arc}tg s+c$$

و بااستفاده از قضیه مقدار اولیه (شماره ۴۹۱ . ۸) چنین داریم :

$$\lim_{s\to\infty} sf(s)=\lim_{t\to o} F(t)=F(o)=o$$

بالنتیجه $c=\frac{\pi}{۲}$ و از آنجا :

$$sf(s)=\frac{\pi}{۲}-\mathrm{arc}tg s=\mathrm{arc}tg\left(\frac{۱}{s}\right) \quad , \quad f(s)=\frac{۱}{s}\,\mathrm{arc}tg\,\frac{۱}{s}$$

روش دوم ـ قرار میدهیم $u=tv$ بنابراین :

$$\int_{۰}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du=\int_{۰}^{۱}\frac{\sin tv}{v}\,dv$$

$$\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du\right\}=\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{۱}\frac{\sin tv}{v}\,dv\right\}$$

$$=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}\left\{\int_{۰}^{۱}\frac{\sin tv}{v}\,dv\right\}dt$$

اگر فرض کنیم بتوان ترتیب انتگرال گیری را تغییر داد ، چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\int_{۰}^{t}\frac{\sin u}{u}\,du\right\}=\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{v}\left\{\int_{۰}^{\infty}e^{-st}\sin tv\,dt\right\}dv$$

$$=\int_{۰}^{۱}\frac{\mathscr{L}\left\{\sin tv\right\}}{v}\,dv=\int_{۰}^{۱}\frac{dv}{s^{۲}+v^{۲}}$$

$$=\frac{۱}{s}\left[\operatorname{arc}tg\,\frac{v}{s}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۱}{s}\operatorname{arc}tg\,\frac{۱}{s}$$

مثال ۲ـ نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\left\{\operatorname{Ci}(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{\int_{t}^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\right\}=\frac{\operatorname{Log}(s^{۲}+۱)}{۲s}$$

حل ـ بطریق مشابه با روش اول مثال یک به ترتیب چنین داریم :

$$F(t)=\int_{t}^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\quad ;\quad F'(t)=-\frac{\cos t}{t}\quad ;\quad tF'(t)=-\cos t$$

$$\mathscr{L}\left\{tF'(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{-\cos t\right\}\quad ;\quad -\frac{d}{ds}\left[\,sf(s)-F(o)\,\right]=-\frac{s}{s^{۲}+۱}$$

$$\frac{d}{ds}\left\{ sf(s) \right\} = \frac{s}{s^۲+۱} \quad ; \quad sf(s) = \frac{۱}{۲} Log(s^۲+۱) + c$$

و بااستفاده از قضیه مقدار نهایی (شماره ۴۹۲ . ۸) چنین‌داریم :

$$\lim_{s \to o} sf(s) = \lim_{t \to \infty} F(t) = o \quad ; \quad c = o$$

بنابراین :

$$sf(s) = \frac{۱}{۲} Log(s^۲+۱) \quad , \quad f(s) = \frac{Log(s^۲+۱)}{۲s}$$

برای حل مسئله فوق نیز میتوان از روش دوم مثال یک استفاده کرد.

۷۵ . ۸ ـ انتگرالهای نمایی

این انتگرالها بارابطه زیر مشخص میشوند :

$$Ei(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \qquad (۸ . ۷۵)$$

مثال ۱ـ نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\left\{ Ei(t) \right\} = \mathscr{L}\left\{ \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right\} = \frac{Log(s+۱)}{s}$$

حل ـ بطریق مشابه با روش اول مثال یک شماره (۷۴ . ۸) چنین داریم :

$$F(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad ; \quad tF'(t) = -e^{-t}$$

$$\mathscr{L}\left\{ tF'(t) \right\} = \mathscr{L}\left\{ -e^{-t} \right\} \quad ; \quad -\frac{d}{ds}\left\{ sf(s) - F(o) \right\} = -\frac{۱}{s+۱}$$

$$\frac{d}{ds}\left\{ sf(s) \right\} = \frac{۱}{s+۱} \quad ; \quad sf(s) = Log(s+۱) + c$$

بابکار بردن قضیه مقدارنهایی مقدار $c=0$ بدست میآید. لذا :

$$f(s)=\frac{Log(s+1)}{s}$$

۸ . ۷۶ - توابع تهی

اگر تابع $\mathcal{N}(t)$ تابعی از t چنان باشد که برای مقادیر $t>0$ داشته باشیم :

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)du=0$$

دراینصورت $\mathcal{N}(t)$ را **تابع تهی** نامیم .

تابع :

$$F(t)=\begin{cases} 1 & t=\frac{1}{2} \\ -1 & t=1 \\ 0 & t=\text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

تابع تهی است.

بطورکلی هرتابعی که در جمیع نقاط باستثنای تعداد شماره پذیری از نقاط صفر باشد تابع تهی خواهد بود.

۸ . ۷۷ - نقشهای لاپلاس توابع خاص

درجدول مندرج درصفحه ۷۰۰ نقشهای لاپلاس چند تابع خاص را درج نموده‌ایم ولی صورت کامل آنرا درجدولی که در انتهای همین فصل میباشد درج کرده‌ایم.

مسائل

نقشهای لاپلاس توابع مقدماتی

۱- نقشهای لاپلاس هریک از توابع زیر را یافته و درهرمورد مقادیری از s را که نقش لاپلاس موجود است ، تعیین کنید.

الف - $2e^{4t}$.　　　ب - $3e^{-2t}$.

پ - $5t-3$.　　　ت - $2t^2-e^{-t}$.

جدول نقشهای لاپلاس توابع خاص

	$F(t)$	$f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$
۱	t^{n}	$\frac{\Gamma(n+۱)}{s^{n}+۱}$
۲	$J_{\circ}(at)$	$\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}$
۳	$J_{n}(at)$	$\frac{(\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}-s)^{n}}{a^{n}\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}$
٤	$\sin\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}e^{-\frac{۱}{٤s}}$
۵	$\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{۱}{٤s}}$
٦	$\operatorname{erf}(t)$	$\frac{e^{\frac{s^{۲}}{٤}}}{s}\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{۲}\right)$
۷	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\frac{۱}{s\sqrt{s+۱}}$
۸	$Si(t)$	$\frac{۱}{s}\operatorname{arc}tg\frac{۱}{s}$
۹	$Ci(t)$	$\frac{Log(s^{۲}+۱)}{۲s}$
۱۰	$Ei(t)$	$\frac{Log(s+۱)}{s}$
۱۱	$\mathcal{N}(t)$	o

ث- $۳\cos ۵t$.　　ج - $۱۰\sin ٦t$.

چ - $٦\sin ۲t-۵\cos ۲t$.　　ح - $(t^{۲}+۱)^{۲}$.

خ - $(\sin t - \cos t)^۲$.　　د - $۳\cosh ۵t - ۴\sinh ۵t$.

ذ - $\sin t \cos t$.　　ر - $\cos^۲ t$.

۲- مطلوب است محاسبه عبارات زیر :

الف - $\mathscr{L}\left\{(۵e^{۲t} - ۳)^۲\right\}$.

ب - $\mathscr{L}\left\{۴\cos^۲ ۲t\right\}$.

پ - $\mathscr{L}\left\{\cosh^۲ ۴t\right\}$.

۳- مقدار $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ را در هریک از حالات زیر محاسبه کنید.

الف - $F(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < ۲ \\ ۴ & t > ۲ \end{cases}$.

ب - $F(t) = \begin{cases} ۲t & 0 \leqslant t \leqslant ۵ \\ ۱ & t > ۵ \end{cases}$.

پ - $F(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq ۱ \\ ۱ & ۱ < t < ۲ \\ 0 & t > ۲ \end{cases}$.

ت - $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$.

۴- وجود نقش لاپلاس هریک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف - $\dfrac{۱}{t+۱}$.　　ب - $e^{t^۲ - t}$.　　پ - $\cos t^۲$.

خواص خطی ، انتقال و تغییرمبنا

۵- عبارت $\mathscr{L}\left\{۳t^۴ - ۲t^۳ + ۴e^{-۳t} - ۲\sin ۵t + ۳\cos ۲t\right\}$ را بیابید.

٦- هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف - $\mathscr{L}\left\{t^{۳}e^{-۳t}\right\}$.

ب- $\mathscr{L}\left\{e^{-t}\cos ۲t\right\}$.

پ - $\mathscr{L}\left\{۲e^{۳t}\sin ٤t\right\}$.

ت - $\mathscr{L}\left\{(t+۲)^{۲}e^{t}\right\}$.

ث - $\mathscr{L}\left\{e^{۲t}(۳\sin ٤t-٤\cos ٤t)\right\}$.

ج - $\mathscr{L}\left\{e^{-٤t}\cosh ۲t\right\}$.

چ - $\mathscr{L}\left\{e^{-t}(۳\sinh ۲t-٥\cosh ۲t)\right\}$.

ح - $\mathscr{L}\left\{e^{-t}\sin^{۲}t\right\}$.

خ - $\mathscr{L}\left\{(۱+te^{-t})^{۳}\right\}$.

۷- $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ را بیابید درصورتیکه باشد :

$$F(t)=\begin{cases}(t-۱)^{۲} & t>۱\\ ۰ & ۰<t<۱\end{cases}$$

۸- اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\dfrac{s^{۲}-s+۱}{(۲s+۱)^{۲}(s-۱)}$ باشد، مقدار $\mathscr{L}\left\{F(۲t)\right\}$ را بیابید.

۹- اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\dfrac{e^{-\frac{۱}{s}}}{s}$ باشد، مقدار $\mathscr{L}\left\{e^{-t}F(۳t)\right\}$ رامحاسبه کنید.

۱۰- اگر $f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ باشد، نشان دهید برای مقادیر $r>۰$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{ r^{t}F(at) \right\}=\frac{۱}{s-Log r}\, f\left(\frac{s-Log r}{a}\right)$$

نقشهای لاپلاس مشتقها و انتگرالها

۱۱- تابع زیر مفروض است :

$$F(t)=\begin{cases} t^{۲} & o<t\leqslant ۱ \\ o & t>۱ \end{cases}$$

الف ـ عبارت $\mathscr{L}\left\{F''(t)\right\}$ را محاسبه کنید.

ب ـ آیا دراین مورد رابطه زیرصادق است :

$$\mathscr{L}\left\{F''(t)\right\}=s^{۲}\,\mathscr{L}\left\{ F(t) \right\}-sF(o)-F'(o)$$

۱۲- اگر $f(s)=\mathscr{L}\left\{ F(t) \right\}$ باشد ، نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\left\{ \int_{۰}^{t} dt_{۱} \int_{۰}^{t_{۱}} F(u)du \right\}=\frac{f(s)}{s^{۲}}$$

(دربعضی موارد انتگرال بالا را بطور اختصار بصورت $\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{t} F(t)dt^{۲}$ مینویسند) .

۱۳- نشان دهید که :

$$\mathscr{L}\left\{ \int_{۰}^{t} \frac{۱-e^{-u}}{u}\, du \right\}=\frac{۲}{s}Log(۱+s)$$

۱٤- نشان‌دهید که :

$$\int_{t=o}^{\infty}\int_{u=o}^{t} \frac{e^{-t}\sin u}{u}\, dudt=\frac{\pi}{٤}$$

ضرب در قوای t

۱۵- صحت روابط زیر را تأیید کنید.

الف - $\mathscr{L}\left\{t\cos at\right\}-\dfrac{s^{۲}-a^{۲}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$.

ب - $\mathscr{L}\left\{t\sin at\right\}=\dfrac{۲as}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$.

پ - $\mathscr{L}\left\{t(۳\sin ۲t-۲\cos ۲t)\right\}=\dfrac{۸+۱۲s-۲s^{۲}}{(s^{۲}+٤)^{۲}}$.

ت - $\mathscr{L}\left\{t^{۲}\sin t\right\}=\dfrac{٦s^{۲}-۲}{(s^{۲}+۱)^{۳}}$.

ث - $\mathscr{L}\left\{t\cosh ۳t\right\}=\dfrac{s^{۲}+۹}{(s^{۲}-۹)^{۲}}$.

ج - $\mathscr{L}\left\{t\sinh ۲t\right\}=\dfrac{٤s}{(s^{۲}-٤)^{۲}}$.

چ - $\mathscr{L}\left\{t^{۲}\cos t\right\}=\dfrac{۲s^{۳}-٦s}{(s^{۲}+۱)^{۳}}$.

ح - $\int_{0}^{\infty} te^{-۳t}\sin t\,dt=\dfrac{۳}{۵۰}$.

تقسیم بر t

۱۶- صحت روابط زیر را تأیید کنید.

الف - $\mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\}=Log\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$.

ب - $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}\right\}=\dfrac{۱}{۲}Log\left(\dfrac{s^{۲}+a^{۲}}{s^{۲}+b^{۲}}\right)$.

پ - $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\sinh t}{t}\right\}=\dfrac{۱}{۲}Log\left(\dfrac{s-۱}{s+۱}\right)$.

ت - $\int_{0}^{\infty}\dfrac{e^{-۳t}-e^{-٦t}}{t}\,dt=Log۲$.

ث - $\int_{o}^{\infty} \frac{\cos ۶t - \cos ۴t}{t} dt = Log \frac{۳}{۲}$.

ج - $\int_{o}^{\infty} \frac{\sin^{۲} t}{t^{۲}} dt = \frac{\pi}{۲}$.

توابع تناوبی

۱۷- مطلوب است محاسبه $\mathscr{L}\left\{ F(t) \right\}$ درهریک از موارد زیر :

الف - $F(t) = \begin{cases} ۳t & o < t < ۲ \\ ۶ & ۲ < t < ۴ \end{cases}$. دوره تناوب $F(t)$ چهار میباشد.

ب - $F(t) = \{ \; t^{۲} \quad o < t < ۲$. دوره تناوب $F(t)$ دو است.

پ - $F(t) = \begin{cases} t & o < t < ۱ \\ o & ۱ < t < ۲ \end{cases}$. برای مقادیر $t > o$ دوره تناوب $F(t)$ دو است.

قضایای مقادیر اولیه و نهایی

۱۸- در بکار بردن قضیه مقدار نهایی درباره تابع $\cos t$ بحث کنید.

۱۹- اگر برای مقادیر $p > -۱$ وهنگامیکه t بسوی‌صفرمیل میکند $F(t) \sim ct^{p}$ باشد ، نشان دهید هنگامیکه s بسوی بینهایت میل میکند :

$$f(s) \sim c \frac{\Gamma(p+۱)}{sp+۱}$$

c مقداری است ثابت.

۲۰- اگر $p > -۱$ و هنگامیکه t بسوی بینهایت میل میکند $F(t) \sim ct^{p}$ باشد ، نشان دهید هنگامیکه s بسوی‌بینهایت میل میکند :

$$f(s) \sim c \frac{\Gamma(p+۱)}{sp+۱}$$

c مقداری است ثابت.

تابع گاما

۲۱ـ مطلوب است محاسبه عبارات زیر :

الف ـ $\Gamma(٥)$.

ب ـ $\dfrac{\Gamma(٣)\Gamma(٤)}{\Gamma(٧)}$.

پ ـ $\Gamma\left(\dfrac{٥}{٢}\right)$.

ت ـ $\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{٣}{٢}\right)\Gamma(٤)}{\Gamma\left(\dfrac{١١}{٢}\right)}$.

۲۲ـ عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف ـ $\mathscr{L}\left\{t^{\frac{١}{٢}}+t^{-\frac{١}{٢}}\right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}\left\{t^{-\frac{١}{٣}}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}\left\{(١+\sqrt{t}\,)^{٤}\right\}$.

ت ـ $\mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{-٢t}}{\sqrt{t}}\right\}$.

ث ـ $\mathscr{L}\left\{t^{\frac{٧}{٢}}e^{٣t}\right\}$.

توابع بسل

۲۳ـ صحت روابط زیر را تأیید کنید.

الف ـ $\mathscr{L}\left\{e^{-at}J_{٠}(bt)\right\}=\dfrac{١}{\sqrt{s^{٢}-٢as+a^{٢}+b^{٢}}}$.

ب ـ $\mathscr{L}\left\{tJ_{٠}(at)\right\}=\dfrac{s}{(s^{٢}+a^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$.

پ ـ $\mathscr{L}\left\{e^{-٣t}J_{٠}(٤t)\right\}=\dfrac{١}{\sqrt{s^{٢}+٦s+٢٥}}$.

ت ـ $\mathscr{L}\left\{tJ_{٠}(٢t)\right\}=\dfrac{s}{(s^{٢}+٤)^{\frac{٣}{٢}}}$.

ث - $J'_۰(t) = -J_۱(t)$.

ج - $\frac{d}{dt}\left\{ t^n J_n(t) \right\} = t^n J_{n-۱}(t)$.

چ - $\mathscr{L}\left\{ I_۰(at) \right\} = \frac{۱}{\sqrt{s^۲ - a^۲}}$.

که درآن $I_۰(t) = J_۰(it)$ و $a > 0$ است.

ح - $\mathscr{L}\left\{ tJ_۰(t)e^{-t} \right\} = \frac{s-۱}{(s^۲ - ۲s + ۲)^{\frac{۳}{۲}}}$.

خ - $\int_۰^\infty J_۰(t)dt = ۱$.

د - $\int_۰^\infty e^{-t}J_۰(t)dt = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

ذ - $\mathscr{L}\left\{ \frac{d^۲}{dt^۲}\left[e^{۲t}J_۰(۲t)\right] \right\} = \frac{s^۲}{\sqrt{s^۲ - ۴s + ۸}} - s - ۲$.

ر - $\mathscr{L}\left\{ tJ_۱(t) \right\} = \frac{۲}{(s^۲ + ۱)^{\frac{۳}{۲}}}$.

ز - $\mathscr{L}\left\{ J_۰(a\sqrt{t}) \right\} = \frac{e^{-\frac{a^۲}{۴s}}}{s}$.

ژ - $\int_۰^\infty te^{-۳t}J_۰(۴t)dt = \frac{۳}{۱۲۵}$.

س - $\mathscr{L}\left\{ J_n(t) \right\} = \frac{(\sqrt{s^۲ + ۱} - s)^n}{\sqrt{s^۲ + ۱}}$ و ازآنجا مقدار $\mathscr{L}\left\{ J_n(at) \right\}$ را بیابید.

انتگرالهای ساین و کساین و نمایی

۲۴ـ مطلوب است محاسبه هریک از عبارات زیر :

الف ـ $\mathscr{L}\left\{e^{۲t}Si(t)\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}\left\{tSi(t)\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}\left\{t^{۲}Ci(t)\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}\left\{e^{-۳t}Ei(t)\right\}$.

ث ـ $\mathscr{L}\left\{tEi(t)\right\}$. ج ـ $\mathscr{L}\left\{e^{-t}Si(۲t)\right\}$.

چ ـ $\mathscr{L}\left\{te^{-۳t}Ei(۳t)\right\}$.

تابع خطا

۲۵ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف ـ $\mathscr{L}\left\{e^{۳t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}\left\{t\operatorname{erf}(۲\sqrt{t})\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}\left\{\operatorname{erfc}\sqrt{t}\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}\left\{\int_{0}^{t}\operatorname{erf}\sqrt{u}\,du\right\}$.

تابع پله‌یی یگانه

۲۶ـ تابع زیر مفروض است :

$$F(t)=\begin{cases} e^{-t} & 0<t<۳ \\ 0 & t>۳ \end{cases}$$

الف ـ نشان دهید که برحسب تابع **هویساید** تابع بالا را بصورت :

$$e^{-t}[۱-u(t-۳)]$$

میتوان نوشت.

ب ـ با استفاده از رابطه $\mathscr{L}\left\{u(t-a)\right\}=\frac{e^{-as}}{s}$ مقدار $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ را محاسبه کنید.

۲۷ـ نشان دهید که تابع :

$$F(t)=\begin{cases} F_{۱}(t) & ۰<t<a \\ F_{۲}(t) & t>a \end{cases}$$

را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$F(t)=F_{۱}(t)+[F_{۲}(t)-F_{۱}(t)]u(t-a)$$

۲۸- اگر :

$$F(t)=\begin{cases} F_{۱}(t) & ۰<t<a_{۱} \\ F_{۲}(t) & a_{۱}<t<a_{۲} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ F_{n-۱}(t) & a_{n-۲}<t<a_{n-۱} \\ F_{n}(t) & t>a_{n-۱} \end{cases}$$

باشد نشان دهید که :

$$F(t)=F_{۱}(t)+[F_{۲}(t)-F_{۱}(t)]u(t-a_{۱})+\cdots$$
$$+[F_{n}(t)-F_{n-۱}(t)]u(t-a_{n-۱})$$

۲۹- توابع زیر را برحسب توابع **هویساید** بنویسید :

الف -
$$F(t)=\begin{cases} \sin t & ۰<t<\pi \\ \sin ۲t & \pi<t<۲\pi \\ \sin ۳t & t>۲\pi \end{cases}$$

ب -
$$F(t)=\begin{cases} t^{۲} & ۰<t<۲ \\ ۴t & t>۲ \end{cases}$$

۳۰- نشان دهید که برای مقادیر $s>۰$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{ t^{۲}u(t-۲) \right\}=\frac{۲}{s^{۳}}-\frac{۲e^{-۲s}}{s^{۳}}(۱+۲s+۲s^{۲})$$

محاسبه انتگرالها

صحت روابط زیر را تأیید کنید :

الف ـ $\int_{۰}^{\infty} t^{۳}e^{-t}\sin t\,dt = ۰$.

ب ـ $\int_{۰}^{\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{۴}$.

پ ـ $\int_{۰}^{\infty} J_n(t)\,dt = ۱$.

ت ـ $\int_{۰}^{\infty} tJ_n(t)\,dt = ۱$.

ث ـ $\int_{۰}^{\infty} ue^{-u^{۲}}J_{۰}(au)\,du = \frac{۱}{۲}e^{-\frac{a^{۲}}{۴}}$.

ج ـ $\int_{۰}^{\infty} te^{-t}\,\mathrm{Ei}(t)\,dt = Log۲ - \frac{۱}{۲}$.

چ ـ $\int_{۰}^{\infty} ue^{-u^{۲}}\,\mathrm{erf}u\,du = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$.

جوابها

۱ـ الف : $\frac{۲}{s-۴}$; $s > ۴$.

ب : $\frac{۳}{s+۲}$; $s > -۲$.

پ : $\frac{۵-۳s}{s^{۲}}$; $s > ۰$.

ت : $\frac{٤+٤s-s^{٣}}{s^{٣}(s+١)}$; $s > 0$.

ث : $\frac{٣s}{s^{٢}+٢٥}$; $s > 0$. ج : $\frac{٦٠}{s^{٢}+٣٦}$; $s > 0$.

چ : $\frac{١٢-٥s}{s^{٢}+٤}$; $s > 0$. ح : $\frac{s^{٤}+٤s^{٢}+٢٤}{s^{٣}}$; $s > 0$.

خ : $\frac{s^{٢}-٢s+٤}{s(s^{٢}+٤)}$; $s > 0$. د : $\frac{٣s-٢٠}{s^{٢}-٢٥}$; $s > 0$.

ذ : $\frac{١}{s^{٢}+٤}$ ر : $\frac{s^{٢}+٢}{s(s^{٢}+٤)}$

٢- الف : $\frac{٩}{s}+\frac{٣٠}{s-٢}-\frac{٢٥}{s-٤}$; $s > ٤$.

ب : $\frac{٢s}{s^{٢}+١٦}+\frac{٢}{s}$; $s > 0$. پ : $\frac{s^{٢}-٣٢}{s(s^{٢}-٦٤)}$.

٣- الف : $\frac{٤e^{-٢s}}{s}$. ب : $\frac{٢}{s^{٣}}(١-e^{-٥s})-\frac{١٠}{s}c^{-٥s}$.

پ : $\frac{١}{s}(e^{-s}-c^{-٢s})$. ت : $\frac{١+c^{-\pi s}}{s^{٢}+١}$.

٤- الف : موجود است. ب : موجود نیست. پ : موجود است.

٥- $\frac{٣s}{s^{٢}+٤}+\frac{١٠}{s^{٢}+٢٥}-\frac{٤}{s+٣}+\frac{١٢}{s^{٤}}-\frac{٧٢}{s^{٥}}$.

٦- الف : $\frac{٦}{(s+٣)^{٤}}$. ب : $\frac{s+١}{s^{٢}+٢s+٥}$.

پ : $\frac{٨}{s^{٢}-٦s+٢٥}$. ت : $\frac{٤s^{٢}-٤s+٢}{(s-١)^{٣}}$.

ث : $\frac{٢٠-٤s}{s^{٢}-٤s+٢٠}$. ج : $\frac{s+٤}{s^{٢}+٨s+١٢}$.

چ : $\frac{١-٥s}{s^{٢}+٢s-٣}$. ح : $\frac{٢}{(s+١)(s^{٢}+٢s+٥)}$.

خ : $\frac{۱}{s}+\frac{۳}{(s+۱)^{۲}}+\frac{۶}{(s+۲)^{۳}}+\frac{۶}{(s+۳)^{۴}}$.

۷- $\frac{۲e^{-s}}{s^{۲}}$. ۸- $\frac{s^{۲}-۲s+۴}{۴(s+۱)^{۲}(s-۲)}$.

۹- $\frac{e^{-\frac{۳}{s+۱}}}{s+۱}$. ۱۱- الف : $\frac{۲(۱-e^{-s})}{s}$.

۱۷- الف : $\frac{۳-۳e^{-۲s}-۶se^{-۴s}}{s^{۲}(۱-e^{-۴s})}$.

ب : $\frac{۲-۲e^{-۲s}-۴se^{-۲s}-۴s^{۲}e^{-۲s}}{s^{۳}(۱-e^{-۲s})}$.

پ : $\frac{۱-e^{-s}(s+۱)}{s^{۲}(۱-e^{-۲s})}$.

۲۱- الف : ۲۴ . ب : $\frac{۱}{۶۰}$.

پ : $\frac{۳\sqrt{\pi}}{۴}$. ت : $\frac{۳۲}{۳۱۵}$.

۲۲- الف : $\frac{(۲s+۱)\sqrt{\pi}}{۲s^{\frac{۳}{۲}}}$. ب : $\frac{\Gamma\left(\frac{۲}{۳}\right)}{s^{\frac{۲}{۳}}}$.

پ : $\frac{s^{۲}+۲\sqrt{\pi}\,s^{\frac{۳}{۲}}+۶s+۳\sqrt{\pi}\,s^{\frac{۱}{۲}}+۲}{s^{۳}}$.

ت : $\sqrt{\frac{\pi}{s+۲}}$. ث : $\frac{۱۰۵\sqrt{\pi}}{۱۶(s-۳)^{\frac{۹}{۲}}}$.

۲٤- الف : $\frac{\operatorname{arctg}(s-۲)}{s-۲}$. ب : $\frac{\operatorname{arctg} s}{s^۲}-\frac{۱}{s(s^۲+۱)}$.

پ : $\frac{Log(s^۲+۱)}{s^۳}-\frac{۳s^۲+۱}{s(s^۲+۱)^۲}$.

ت : $\frac{Log(s+٤)}{s+۳}$. ث : $\frac{Log(s+۱)}{s^۲}-\frac{۱}{s(s+۱)}$.

ج : $\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{s+۱}{۲}\right)}{s+۱}$.

چ : $\frac{۱}{(s+۲)^۲}Log\left(\frac{s+۵}{۳}\right)-\frac{۱}{(s+۲)(s+۵)}$.

۲۵- الف : $\frac{۱}{(s-۳)\sqrt{s-۲}}$. ب : $\frac{۳s+۸}{s^۲(s+٤)^{\frac{۳}{۲}}}$.

پ : $\frac{۱}{\sqrt{s+۱}\,(\sqrt{s+۱}+۱)}$. ت : $\frac{۱}{s^۲\sqrt{s+۱}}$.

۲۶- ب : $-\frac{۱-e^{-۳(s+۱)}}{s+۱}$.

۲۹- الف : $\sin t+(\sin ۲t-\sin t)u(t-\pi)+(\sin ۳t-S۲t)u(t-۲\pi)$.

ب : $t^۲+(٤t-t^۲)u(t-۲)$.

۸ . ۸- تبدیل لاپلاس وارونه

۸۱ . ۸ - تعریف نقش لاپلاس وارونه

$f(s)$ نقش لاپلاس تابع $F(t)$ است یعنی $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$. $F(t)$ را **یك نقش لاپلاس وارونه** $f(s)$ نامیده و آنرا بشکل زیر مینویسند :

$$F(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}$$

$\mathscr{L}^{-۱}$ **اوپریتور تبدیل لاپلاس وارونه نامیده میشود .** چون اوپریتور $\mathscr{L}$ خطی میباشد لذابنابر شماره (۱٤ . ۷) اوپریتور وارونه $\mathscr{L}^{-۱}$ نیز خطی‌است.

مثال - چون :

$$\mathscr{L}\left\{e^{kt}\right\}=\frac{۱}{s-k} \quad ; \quad \mathscr{L}\left\{\sin kt\right\}=\frac{k}{s^{۲}+k^{۲}}$$

لذا چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s-k}\right\}=e^{kt} \quad ; \quad \mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{k}{s^{۲}+k^{۲}}\right\}=\sin kt$$

۸۲ . ۸ - منحصر بفرد بودن نقشهای لاپلاس وارونه ـ قضیه لرش*

چون بنابر جدول مندرج درشماره (۷۷ . ۸) نقش لاپلاس تابع تهی صفر است لذا اگر $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ باشد بااستفاده از خاصیت خطی اوپریتور $\mathscr{L}$ چنین‌داریم :

$$\mathscr{L}\left\{F(t)+\mathscr{N}(t)\right\}=f(s)$$

از رابطه بالا نتیجه میشود که تابع $f(s)$ دارای دونقش لاپلاس وارونه زیر است :

$$F(t) \quad و \quad F(t)+\mathscr{N}(t)$$

مثال - توابع $F_{۱}(t)=e^{-۳t}$ و $F_{۲}(t)=\begin{cases} 0 & t=۱ \\ e^{-۳t} & \end{cases}$ دارای یک نقش لاپلاس یعنی $\frac{۱}{s+۳}$ است.

بادرنظر داشتن توابع تهی ، نقش لاپلاس وارونه منحصر بفرد نیست ولی این نقش منحصربفرد خواهد بود هرگاه ازتوابع تهی صرفنظرکنیم. بااین نوع توابع درفیزیک کمتر برخورد میکنیم. بهرصورت نتیجه بالا را درقضیه زیر بیان نموده‌ایم.

---

* Lerch

قضیه لرش*

اگر ازتوابع تهی‌صرفنظر کرده‌وفرض کنیم‌تابع $F(t)$ درهرفاصله محدود $o \leqslant t \leqslant N$ پیوسته فاصله‌یی بوده و برای مقادیر $t > N$ هم مرتبه تابع نمایی باشد دراینصورت نقش لاپلاس وارونه تابع $f(s)$ یعنی $\mathscr{L}\left\{ f(s) \right\} = F(t)$ منحصر بفرد است. درقضایای زیر باستثنای مواردی که ذکر میگردد فرض مینماییم که قضیه لرش برقرار است.

بااستفاده‌ازجدول مندرج‌درشماره(۲ . ۸) بسهولت میتوان صحت جدول(صفحه۷۶۶) را تأیید کرد.

مثال ـ بااستفاده از جدول (صفحه۷۶۶) میتوان نشان داد که :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۱}{s^۲+۹} \right\} = \frac{۱}{۳} \sin ۳t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۴}{s-۲} \right\} = ۴c^{۲t}$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۱}{s^۴} \right\} = \frac{t^۳}{۳!} = \frac{t^۳}{۶}$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{s}{s^۲+۲} \right\} = \cos\sqrt{۲}\, t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۶s}{s^۲-۱۶} \right\} = ۶\cosh ۴t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۱}{s^۲-۳} \right\} = \frac{\sinh\sqrt{۳}\, t}{\sqrt{۳}}$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۱}{s^{\frac{۳}{۲}}} \right\} = \frac{t^{\frac{۱}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right)} = \frac{t^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۲t^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}} = ۲\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

---

* برای اثبات به صفحه ۱۸۴ کتاب زیر مراجعه گردد :

R. V. Cherchill ; Operatinal Mathematics, 1958

جدول نقشهای لاپلاس وارونه

	$f(s)$	$\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=F(t)$
۱	$\frac{۱}{s}$	۱
۲	$\frac{۱}{s^۲}$	t
۳	$\frac{۱}{s^{n+۱}}\ ,\ n=0\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ \cdots$	$\frac{t^n}{n!}$
۴	$\frac{۱}{s-a}$	e^{at}
۵	$\frac{۱}{s^۲+a^۲}$	$\frac{\sin at}{a}$
۶	$\frac{s}{s^۲+a^۲}$	$\cos at$
۷	$\frac{۱}{s^۲-a^۲}$	$\frac{\sinh at}{a}$
۸	$\frac{s}{s^۲-a^۲}$	$\cosh at$

۸۳ . ۸ ـ برخی ازخواص مهم نقشهای لاپلاس وارونه

ذیلاً برخی از خواص مهم نقشهای لاپلاس وارونه را ذکر میکنیم . این قضایا باستثنای (۸۳۷ . ۸) را میتوان بسهولت بااستفاده از قضایای شماره (۵ . ۸) ثابت نمود .

۸۳۱ . ۸ ـ خاصیت خطی

بااستفاده ازخطی بودن اوپریتور $\mathscr{L}^{-۱}$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{c_۱f_۱(s)+c_۲f_۲(s)\right\}=c_۱\mathscr{L}^{-۱}\left\{f_۱(s)\right\}+c_۲\mathscr{L}^{-۱}\left\{f_۲(s)\right\}$$

(۸ . ۸۳۱)

$c_۱$ و $c_۲$ مقادیر ثابت غیر مشخصی است.

مثال ١ـ عبارت $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤}{s-٢}-\frac{٣s}{s^{٢}+١٦}+\frac{٥}{s^{٢}+٤}\right\}$ رامحاسبه کنید.

حل -

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤}{s-٢}-\frac{٣s}{s^{٢}+١٦}+\frac{٥}{s^{٢}+٤}\right\}=٤\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{s-٢}\right\}$$

$$-٣\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{s}{s^{٢}+١٦}\right\}+٥\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{s^{٢}+٤}\right\}$$

$$=٤e^{٢t}-٣\cos ٤t+\frac{٥}{٢}\sin ٢t$$

مثال ٢ـ مقادیر هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف - $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٥s+٤}{s^{٣}}-\frac{٢s-١٨}{s^{٢}+٩}+\frac{٢٤-٣٠\sqrt{s}}{s^{٤}}\right\}$.

ب - $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦}{٢s-٣}-\frac{٣+٤s}{٩s^{٢}-١٦}+\frac{٨-٦s}{١٦s^{٢}+٩}\right\}$.

حل - الف :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٥s+٤}{s^{٣}}-\frac{٢s-١٨}{s^{٢}+٩}+\frac{٢٤-٣٠\sqrt{s}}{s^{٤}}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٥}{s^{٢}}+\frac{٤}{s^{٣}}-\frac{٢s}{s^{٢}+٩}+\frac{١٨}{s^{٢}+٩}\right.$$

$$\left.+\frac{٢٤}{s^{٤}}-\frac{٣٠}{s^{\frac{٧}{٢}}}\right\}=٥t+٤\left(\frac{t^{٢}}{٢!}\right)-٢\cos ٣t$$

$$+١٨\left(\frac{١}{٣}\sin ٣t\right)+٢٤\left(\frac{t^{٣}}{٣!}\right)-\frac{٣٠t^{\frac{٥}{٢}}}{\Gamma\left(\frac{٧}{٢}\right)}$$

$$=٥t+٢t^{٢}-٢\cos ٢t+٦\sin ٢t+٤t^{٣}-\frac{١٦}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{٥}{٢}}$$

زیرا :

$$\Gamma\left(\frac{٧}{٢}\right)=\frac{٥}{٢}\cdot\frac{٣}{٢}\cdot\frac{١}{٢}\Gamma\left(\frac{١}{٢}\right)=\frac{١٥}{٨}\sqrt{\pi}$$

ب :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦}{٢s-٣}-\frac{٣+٤s}{٩s^{٢}-١٦}+\frac{٨-٦s}{١٦s^{٢}+٩}\right\}$$

$$=\mathscr{L}\left\{\frac{٣}{s-\frac{٣}{٢}}-\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{s^{٢}-\frac{١٦}{٩}}\right)-\frac{٤}{٩}\left(\frac{s}{s^{٢}-\frac{١٦}{٩}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{s^{٢}+\frac{٩}{١٦}}\right)-\left(\frac{s}{s^{٢}+\frac{٩}{١٦}}\right)\right\}$$

$$=٣^{\frac{٣t}{٢}}-\frac{١}{٤}\sinh\frac{٤t}{٣}-\frac{٤}{٩}\cosh\frac{٤t}{٣}$$

$$+\frac{٢}{٣}\sin\frac{٣t}{٤}-\frac{٣}{٨}\cos\frac{٣t}{٤}.$$

٨ . ٨٣٢ - خواص انتقال

اگر a مقدار ثابت و $\mathscr{L}^{-١}\left\{f(s)\right\}=F(t)$ باشد :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{f(s-a)\right\}=e^{at}F(t) \qquad (٨ . ٨٣٢)$$

و :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{e^{-as}f(s)\right\}=\begin{cases}F(t-a) & t>a\\ 0 & t<a\end{cases} \qquad (٨ . ٨٣٢١)$$

اثبات - بااستفاده از تعریف نقش لاپلاس به ترتیب چنین داریم :

$$f(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$f(s-a)=\int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left\{e^{at}F(t)\right\}dt=\mathscr{L}\left\{e^{at}F(t)\right\}$$

و از آنجا :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{f(s-a)\right\}=e^{at}F(t)$$

و بدین ترتیب صحت رابطه (۸۳۲ . ۸) تأیید میشود .

$$e^{-as}f(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-as}e^{-st}F(t)dt=\int_{0}^{\infty} e^{-s(t+a)}F(t)dt$$

$$=\int_{a}^{\infty} e^{-su}F(u-a)du \qquad (t+a=u)$$

$$=\int_{0}^{a} e^{-st}(0)dt+\int_{a}^{\infty} e^{-st}F(t-a)du=\int_{0}^{\infty} e^{-st}G(t)dt$$

که در آن :

$$G(t)=\begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-as}f(s)\right\}=G(t)=\begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$$

و بدین ترتیب صحت رابطه (۸۳۲۱ . ۸) تأیید میگردد.

باید توجه داشت که تابع $G(t)$ را میتوان برحسب تابع پله‌یی یگانه هوی‌ساید بشکل $F(t-a)u(t-a)$ نوشت.

مثال ۱ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦s-٤}{s^٢-٤s+٢٠}\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤s+١٢}{s^٢+٨s+١٦}\right\}$.

پ : $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s+٧}{s^٢-٢s-٣}\right\}$. ت : $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{\sqrt{٢s+٣}}\right\}$.

حل ـ باستفاده از رابطه (٨ . ٨٣٢) چنین داریم :

الف :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦s-٤}{s^٢-٤s+٢٠}\right\}=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦s-٤}{(s-٢)^٢+١٦}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦(s-٢)+٨}{(s-٢)^٢+١٦}\right\}$$

$$=٦\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{(s-٢)}{(s-٢)^٢+١٦}\right\}$$

$$+٢\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤}{(s-٢)^٢+١٦}\right\}$$

$$=٦e^{٢t}\cos ٤t+٢e^{٢t}\sin ٤t=٢e^{٢t}(٣\cos ٤t+\sin ٤t)$$

ب :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤s+١٢}{s^٢+٨s+١٦}\right\}=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤s+١٢}{(s+٤)^٢}\right\}=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٤(s+٤)-٤}{(s+٤)^٢}\right\}$$

$$=٤\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{s+٤}\right\}-٤\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{(s+٤)^٢}\right\}$$

$$=٤e^{-٤t}-٤te^{-٤t}=٤e^{-٤t}(١-t)$$

پ :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s+٧}{s^٢-٢s-٣}\right\}=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s+٧}{(s-١)^٢-٤}\right\}=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣(s-١)+١٠}{(s-١)^٢-٤}\right\}$$

$$=٣\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{s-١}{(s-١)^٢-٤}\right\}+٥\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٢}{(s-١)^٢-٤}\right\}$$

$$=۳e^{t}\cosh ۲t+٥e^{t}\sinh ۲t$$

$$=e^{t}(۳\cosh ۲t+٥\sinh ۲t)=٤e^{۳t}-e^{-t}$$

ت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\sqrt{۲s+۳}}\right\}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\left(s+\frac{۳}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}}\right\}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ c^{-\frac{۳}{۲}t}\cdot\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}t^{-\frac{۱}{۲}}e^{-\frac{۳}{۲}t}$$

مثال ۲ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-٥s}}{(s-۲)^{٤}}\right\}$. ب : $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{se^{-\frac{٤\pi s}{٥}}}{s^{۲}+۲٥}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(s+۱)e^{-\pi s}}{s^{۲}+s+۱}\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{٤-۳s}}{(s+٤)^{\frac{٥}{۲}}}\right\}$.

حل ـ بااستفاده از رابطه (۸ . ۸۳۲۱) چنین داریم :

الف : ازآنجایی که :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s-۲)^{٤}}\right\}=e^{۲t}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{٤}}\right\}=\frac{t^{۳}e^{۲t}}{۳!}=\frac{۱}{٦}\ t^{۳}e^{۲t}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-٥s}}{(s-۲)^{٤}}\right\}=\begin{cases}\frac{۱}{٦}(t-٥)^{۳}e^{۲(t-٥)} & t>٥\\ 0 & t<٥\end{cases}$$

$$=\frac{۱}{٦}(t-٥)^{۳}e^{۲(t-٥)}u(t-٥)$$

$u(t-۵)$ تابع هوی‌ساید است.

ب : ازآنجایی که :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^۲+۲۵}\right\}=\cos ۵t$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{se^{-\frac{۴\pi s}{۵}}}{s^۲+۲۵}\right\}=\begin{cases}\cos ۵\left(t-\frac{۴\pi}{۵}\right) & t>\frac{۴\pi}{۵}\\ 0 & t<\frac{۴\pi}{۵}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\cos ۵t & t>\frac{۴\pi}{۵}\\ 0 & t<\frac{۴\pi}{۵}\end{cases}$$

$$=\cos ۵t\,u\left(t-\frac{۴\pi}{۵}\right)$$

$u\left(t-\frac{۴\pi}{۵}\right)$ تابع هوی‌ساید است.

پ : ازآنجایی که :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+۱}{s^۲+s+۱}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+۱}{\left(s+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\left(s+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+\frac{۱}{۲}}{\left(s+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}}\right\}$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\left(s+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\frac{۳}{٤}}\right\}$$

$$=e^{-\frac{۱}{۲}t}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t+\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{-\frac{۱}{۲}t}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t$$

$$=\frac{e^{-\frac{۱}{۲}t}}{\sqrt{۳}}\left(\sqrt{۳}\cos\frac{\sqrt{۳}t}{۲}+\sin\frac{\sqrt{۳}t}{۲}\right)$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(s+۱)e^{-\pi s}}{s^{۲}+s+۱}\right\}$$

$$=\frac{e^{-\frac{۱}{۲}(t-\pi)}}{\sqrt{۳}}\left\{\sqrt{۳}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}(t-\pi)+\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}(t-\pi)\right\}\qquad t>\pi$$

$$=0\qquad t<\pi$$

$$=\frac{e^{-\frac{۱}{۲}(t-\pi)}}{\sqrt{۳}}\left\{\sqrt{۳}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}(t-\pi)+\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}(t-\pi)\right\}u(t-\pi)$$

$u(t-\pi)$ تابع هوی‌ساید است.

ت : چون :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s+٤)^{\frac{۵}{۲}}}\right\}=e^{-٤t}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{\frac{۵}{۲}}}\right\}=e^{-٤t}\frac{t^{\frac{۳}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۵}{۲}\right)}=\frac{٤t^{\frac{۳}{۲}}e^{-٤t}}{۳\sqrt{\pi}}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{٤-۳s}}{(s+٤)^{\frac{۵}{۲}}}\right\}=c^{٤}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-۳s}}{(s+٤)^{\frac{۲}{۵}}}\right\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{٤e^{٤}(t-۳)^{\frac{۳}{۲}}e^{-٤(t-۳)}}{۳\sqrt{\pi}} & t>۳\\ 0 & t<۳\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{٤(t-۳)^{\frac{۳}{۲}}e^{-٤(t-٤)}}{۳\sqrt{\pi}} & t>۳\\ 0 & t<۳\end{cases}$$

$$=\frac{٤(t-۳)^{\frac{۳}{۲}}e^{-٤(t-٤)}}{۳\sqrt{\pi}}u(t-۳)$$

$u(t-۳)$ تابع هوی‌ساید است.

۸ . ۸۲۳ ـ خاصیت تغییر مبنا

اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=F(t)$ باشد :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(ks)\right\}=\frac{۱}{k}F\left(\frac{t}{k}\right) \qquad (۸ . ۸۲۳)$$

k مقداری است ثابت.

اثبات ــ بااستفاده از تعریف نقش لاپلاس چنین داریم :

$$f(s)=\int_{۰}^{\infty}e^{-st}F(t)\,dt$$

$$f(ks)=\int_{۰}^{\infty}e^{-kst}F(t)\,dt=\int_{۰}^{\infty}e^{-su}F\left(\frac{u}{k}\right)d\left(\frac{u}{k}\right) \quad , \quad (u=kt)$$

$$=\frac{۱}{k}\int_{۰}^{\infty} e^{-su}F\left(\frac{u}{k}\right)du=\frac{۱}{k}\mathscr{L}\left\{F\left(\frac{t}{k}\right)\right\}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(ks)\right\}=\frac{۱}{k}F\left(\frac{t}{k}\right)$$

مثال ــ بااستفاده ازرابطه $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\frac{۱}{s}}}{s^{\frac{۱}{۲}}}\right\}=\frac{\cos ۲\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ مطلوب‌است‌محاسبه :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{۱}{۲}}}\right\}$$

a عددی است مثبت.

حل ــ بااستفاده از رابطه (۸۳۳ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{c^{-\frac{۱}{ks}}}{(ks)^{\frac{۱}{۲}}}\right\}=\frac{۱}{k}\cdot\frac{\cos ۲\sqrt{\frac{t}{k}}}{\sqrt{\pi\left(\frac{t}{k}\right)}}=\frac{۱}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\cos ۲\sqrt{\frac{t}{k}}}{\sqrt{\pi t}}$$

ویا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\frac{۱}{ks}}}{s^{\frac{۱}{۲}}}\right\}=\frac{\cos ۲\sqrt{\frac{t}{k}}}{\sqrt{\pi t}}$$

با قرار دادن $k=\frac{۱}{a}$ دررابطه‌بالا چنین‌داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{s^{\frac{۱}{۲}}}\right\}=\frac{\cos ۲\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$$

۸۳۴ . ۸ ـ وارونه نقشهای لاپلاس مشتقها و انتگرالها

با استفاده از روابط (۴۶ . ۸) و (۴۷ . ۸) بسهولت میتوان‌صحت روابط زیر را تأیید کرد :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ f^{(n)}(s) \right\} = \mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{d^n}{ds^n} f(s) \right\} = (-۱)^n t^n F(t) \qquad (۸ . ۸۳۴)$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \int_s^{\infty} f(u)du \right\} = \frac{F(t)}{t} \qquad (۸ . ۸۳۴۱)$$

که در آن $F(t) = \mathscr{L}^{-۱}\left\{ f(s) \right\}$ میباشد.

مثال ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{s}{(s^۲+a^۲)^۲} \right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \mathrm{Log}\left(۱ + \frac{۱}{s} \right) \right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \mathrm{Log}\left(۱ + \frac{۱}{s^۲} \right) \right\}$.

حل ـ

الف : باستفاده ازرابطه (۸ . ۸۳۴) ذیلاً این مسئله رابادوروش مختلف حل کرده ایم.

روش اول :

$$\frac{d}{ds}\left\{ \frac{۱}{s^۲+a^۲} \right\} = \frac{-۲s}{(s^۲+a^۲)^۲}$$

$$\frac{s}{(s^۲+a^۲)^۲} = -\frac{۱}{۲} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{۱}{s^۲+a^۲} \right)$$

ولی چون :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۱}{s^۲+a^۲} \right\} = \frac{\sin at}{a}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{s}{(s^۲+a^۲)^۲} \right\} = -\frac{۱}{۲} \mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{d}{ds}\left(\frac{۱}{s^۲+a^۲} \right) \right\}$$

$$= \frac{۱}{۲} t\left(\frac{\sin at}{a} \right) = \frac{t \sin at}{۲a}$$

روش دوم :

چنانچه نسبت به پارامتر a مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^۲+a^۲}\right)=\frac{-۲as}{(s^۲+a^۲)^۲}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^۲+a^۲}\right)\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{-۲as}{(s^۲+a^۲)^۲}\right\}$$

و یا :

$$\frac{d}{da}\left\{\mathscr{L}^{-۱}\left(\frac{s}{s^۲+a^۲}\right)\right\}=-۲a\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s^۲+a^۲)^۲}\right\}$$

و از آنجا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s^۲+a^۲)^۲}\right\}=-\frac{۱}{۲a}\cdot\frac{d}{da}(\cos at)=-\frac{۱}{۲a}(-t\sin at)=\frac{t\sin at}{۲a}$$

ب : بااستفاده از رابطه (۸۳٤۱ . ۸) و رابطه :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s+۱)}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+۱}\right\}=۱-e^{-t}$$

چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\int_s^{\infty}\left(\frac{۱}{u}-\frac{۱}{u+۱}\right)du\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\operatorname{Log}\left(۱+\frac{۱}{s}\right)\right\}=\frac{۱-e^{-t}}{t}$$

پ : فرض میکنیم :

$$f(s)=\operatorname{Log}\left(۱+\frac{۱}{s^۲}\right)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$$

لذا :

$$f'(s)=\frac{-۲}{s(s^۲+۱)}=-۲\left\{\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^۲+۱}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{f'(s)]\right\}=-۲\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^۲+۱}\right\}=-۲(۱-\cos t)$$

از طرف دیگر باستفاده از رابطه (۸ . ۸۳۴) خواهیم داشت $(n=۱)$:

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{f'(s)\right\}=-tF(t)$$

پس :

$$-tF(t)=-۲(۱-\cos t)$$

و از آنجا :

$$F(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\mathrm{Log}\left(۱+\frac{۱}{s^۲}\right)\right\}=\frac{۲(۱-\cos t)}{t}$$

۸۳۵ . ۸ ـ ضرب و تقسیم در قوای s

الف ـ ضرب در قوای s

اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=F(t)$ و $F(o)=o$ باشد :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{sf(s)\right\}=F'(t) \qquad (۸ . ۸۳۵)$$

یعنی اثر ضرب نمودن در s ، مشتق گیری از تابع $F(t)$ میباشد.

اگر $F(o)\neq o$ باشد ، دراینصورت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{sf(s)-F(o)\right\}=F'(t) \qquad (۸ . ۸۳۵۱)$$

اثبات ـ روابط (۸ . ۸۳۵) و (۸ . ۸۳۵۱) باستفاده از تعریف نقش لاپلاس وارونه و رابطه (۸ . ۴۴) ثابت میشود.

تبصره ـ میتوان فرمولهای بالا را برای $\mathscr{L}^{-۱}\left\{s^n f(s)\right\}$; $n=۲,۳,۴,\ldots$ تعمیم داد.

ب ـ تقسیم بر s

اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=F(t)$ باشد :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}=\int_o^t F(u)du \qquad (۸ . ۸۳۵۲)$$

یعنی اثر تقسیم بر s انتگرال گیری $F(t)$ از صفر تا t است.

اثبات ـ فرض میکنیم $G(t)=\int_{0}^{t} F(u)du$ باشد. پس $G'(t)=F(t)$ و $G(0)=0$. لذا بااستفاده از رابطه (۸ . ۴۴) چنین داریم :

$$f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{G'(t)\right\}=s\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}-G(0)$$
$$=s\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}$$

و یا :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\frac{f(s)}{s} \quad \text{ویا} \quad \mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}=G(t)=\int_{0}^{t} F(u)du$$

مثال ۱ـ مطلوب است محاسبه عبارت زیر :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+۱}\right\}$$

حل ـ بااستفاده ازرابطه(۸ . ۸۳۵) و $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}=\sin t$ و $\sin 0=0$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+۱}\right\}=\frac{d}{dt}(\sin t)=\cos t$$

مثال ۲ـ عبارت زیر را محاسبه کنید :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۳}(s^{۲}+۱)}\right\}$$

حل ـ باتوجه به $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}=\sin t$ و بکار بردن مکرر رابطه (۸ . ۸۳۵۲) چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s^{۲}+۱)}\right\}=\int_{0}^{t} \sin u du=۱-\cos t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}(s^{۲}+۱)}\right\}=\int_{\circ}^{t}(۱-\cos u)\,du=t-\sin t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۳}(s^{۲}+۱)}\right\}=\int_{\circ}^{t}(u-\sin u)\,du=\frac{t^{۲}}{۲}+\cos t-۱$$

مثال ۳ـ اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}=\frac{۱}{۲}\,t\sin t$ باشد عبارت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}$$

را محاسبه نمایید.

حل ـ

روش اول ـ بااستفاده از رابطه (۸۳۰۲ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\cdot\frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}=\int_{\circ}^{t}\frac{۱}{۲}\,u\sin u\,du$$

$$=\left[\frac{۱}{۲}\,u(-\cos u)-\frac{۱}{۲}\,(-\sin u)\right]_{\circ}^{t}$$

$$=\frac{۱}{۲}\,(\sin t-t\cos t)$$

روش دوم ـ بااستفاده از رابطه (۸۳۰ . ۸) خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{s\,\frac{s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۲}+۱-۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}-\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{۱}{۲}\,t\sin t\right\}=\frac{۱}{۲}\,(t\cos t+\sin t)$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}-\frac{۱}{۲}\,(t\cos t+\sin t)$$

$$=\frac{۱}{۲}\,(\sin t-t\cos t)$$

۸۳۶ . ۸ ـ خاصیت کانولوشین*

اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=F(t)$ و $\mathscr{L}^{-۱}\left\{g(s)\right\}=G(t)$ باشد :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)g(s)\right\}=\int_{0}^{t}F(u)G(t-u)du=F*G \qquad (۸ . ۸۳۶)$$

$F*G$ را **کانولوشین** F و G گوییم .

اثبات ـ برای اثبات رابطه بالا کافی است نشان دهیم که :

$$\mathscr{L}\left\{\int_{0}^{t}F(u)G(t-u)du\right\}=f(s)g(s) \qquad (I)$$

که در آن $f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ و $g(s)=\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}$ است. سمت چپ رابطه (I) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\int_{t=0}^{\infty}e^{-st}\left\{\int_{u=0}^{t}F(u)G(t-u)du\right\}dt$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t}e^{-st}F(u)G(t-u)du\,dt=\lim_{M\to\infty}S_{M}$$

که در آن :

---

* Convolution

$$\text{(II)} \qquad S_M = \int_{t=0}^{M} \int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)G(t-u)dudt$$

R_{tu} میدان انتگرال گیری واقع درصفحه tu که انتگرال (II) درآن محاسبه شده است میباشد.

اگر در انتگرال (II) تبدیل متغیر $t-u=v$ و یا $t=u+v$ را انجام دهیم میدان انتگرال گیری R_{tu}، در صفحه uv به میدان R_{uv} تبدیل میشود. باستفاده از تبدیل متغیر درانتگرالهای مضاعف چنین داریم:

$$\text{(III)} \qquad S_M = \iint_{R_{tu}} e^{-st}F(u)G(t-u)dudt$$

$$= \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\left|\frac{\partial(u\,,\,t)}{\partial(u\,,\,v)}\right|dudv$$

که درآن:

$$J = \frac{\partial(u\,,\,t)}{\partial(u\,,\,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & 0 \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

و ازآنجا:

$$\text{(IV)} \qquad S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)dudv$$

اکنون تابع زیر را درنظر میگیریم:

$$K(u\,,\,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)}F(u)G(v) & u+v \leqslant M \\ 0 & u+v > M \end{cases}$$

این تابع درمربع $u=0$, $u=M$; $v=0$, $v=M$ معین بوده ولی مقدار آن درقسمت فوقانی قطر مربع به معادله $u+v=M$ صفراست. برحسب تابع جدید عبارت (IV) بصورت زیر درمیآید:

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M} K(u\,,\,v)dudv$$

$$\lim_{M\to\infty} S_M=\int_{۰}^{\infty}\int_{u}^{\infty} K(u\,,\,u)dudv$$

$$=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)dudv$$

$$=\left\{\int_{۰}^{\infty} e^{-su}F(u)du\right\}\left\{\int_{۰}^{\infty} e^{-sv}G(v)dv\right\}$$

$$=f(s)g(s)$$

و بدین‌ترتیب رابطه (I) و ازآنجا رابطه (۸۳۶ . ۸) ثابت میگردد.

اکنون نشان خواهیم داد که :

$$F^*G=G^*F$$

زیرا اگر در رابطه(۸۳۶ . ۸)تبدیل متغیر $t-u=v$ و یا $u=t-v$ را انجام دهیم چنین داریم :

$$F^*G=\int_{۰}^{t} F(u)G(t-u)du=\int_{۰}^{t} F(t-v)G(v)dv$$

$$=\int_{۰}^{t} G(v)F(t-v)dv=G^*F$$

از رابطه بالا نتیجه میشود قانون جابجایی در مورد کانولوشین F و G نیز صادق است. قوانین پیوندی و توزیعی نیز درباره کانولوشین F و G برقرار است.

مثال ۱ــ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s+۱)(s^{۲}+۱)}\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۲}}{(s^{۲}+۴)^{۲}}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۳}}\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s^{۲}+۴)^{۳}}\right\}$.

حل ـ

الف :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s+۱}\right\}=e^{-t} \quad ; \quad \mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}=\sin t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s+۱)(s^{۲}+۱)}\right\}=\int_{۰}^{t} e^{-u}\sin(t-u)du$$

$$=\int_{۰}^{t} e^{-(t-u)}\sin u du=e^{-t}\int_{۰}^{t} e^{u}\sin u du$$

$$=e^{-t}\left[\frac{۱}{۲}e^{u}(\sin u-\cos u)\right]_{۰}^{t}=\frac{۱}{۲}(\sin t-\cos t+e^{-t})$$

ب :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+٤}\right\}=\cos ۲t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۲}}{(s^{۲}+٤)^{۲}}\right\}=\int_{۰}^{t}\cos ۲u\sin(۲t-۲u)du$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t}[\cos ۲t+\cos(۲t-٤u)]du$$

$$=\frac{۱}{۲}t\cos ۲t+\frac{۱}{٤}\sin ۲t$$

پ ـ باستفاده از مثال سوم شماره (۸۳۵ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}=\frac{۱}{۲}(\sin t-t\cos t) \quad ; \quad \mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)}\right\}=\sin t$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۳}}\right\}=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t}(\sin u-u\cos u)\sin(t-u)du$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{٠}^{t} \sin u \sin(t-u)du - \frac{١}{٢}\int_{٠}^{t} u\cos u \sin(t-u)du$$

$$= \frac{١}{٤}\int_{٠}^{t} [-\cos t + \cos(t-٢u)]du$$

$$-\frac{١}{٤}\int_{٠}^{t} u[\sin t + \sin(t-٢u)]du$$

$$= \frac{١}{٤}(\sin t - t\cos t) - \frac{١}{٨}t^{٢}\sin t - \frac{١}{٤}\int_{٠}^{t} u\sin(t-٢u)du$$

$$= \frac{١}{٤}(\sin t - t\cos t) - \frac{١}{٨}t^{٢}\sin t - \frac{١}{٤}\Big[\frac{u}{٢}\cos(t-٢u)$$

$$+\frac{١}{٤}\sin(t-٢u)\Big]_{٠}^{t}$$

$$= \frac{١}{٤}(\sin t - t\cos t) - \frac{١}{٨}t^{٢}\sin t - \frac{١}{٨}t\cos t + \frac{١}{٨}\sin t$$

$$= \frac{١}{٨}[(٣-t^{٢})\sin t - ٣t\cos t]$$

ت ـ با استفاده از روابط (٨ . ٨٣٣) و (٨ . ٨٣٥) و قسمت (پ) مسئله بالا چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{(s^{٢}+١)^{٣}}\right\} = \frac{١}{٨}[(٣-t^{٢})\sin t - ٣t\cos t]$$

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{\left[\left(\frac{s}{٢}\right)^{٢}+١\right]^{٣}}\right\} = ٢\left\{\frac{١}{٨}[(٣-٤t^{٢})\sin ٢t - ٦t\cos ٢t]\right\}$$

[رابطه (٨ . ٨٣٣)] :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦٤}{(s^{٢}+٤)^{٣}}\right\} = \frac{١}{٤}[(٣-٤t^{٢})\sin ٢t - ٦t\cos ٢t]$$

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{(s^٢+٤)^٣}\right\}=\frac{١}{٢٥٦}\left[(٣-٤t^٢)\sin ٢t-٦t\cos ٢t\right]$$

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{s}{(s^٢+٤)^٣}\right\}=\frac{١}{٢٥٦}\left[(٣-٤t^٢)\sin ٢t-٦t\cos ٢t\right]'$$

[رابطه (٨ . ٨٢٥)] :

$$=\frac{١}{٢٥٦}\left[٦\cos ٢t-٨t^٢\cos ٢t-٨t\sin ٢t\right.$$

$$\left.-٦\cos ٢t+١٢t\sin ٢t\right]$$

$$=\frac{١}{٦٤}t(\sin ٢t-٢t\cos ٢t)$$

مثال ٢ـ نشان دهید که :

$$\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv=\int_0^t(t-u)F(u)du$$

حل ـ بااستفاده از خاصیت کانولوشین، اگر $f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ باشد چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t(t-u)F(u)du\right\}=\mathscr{L}\left\{t\right\}\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\frac{f(s)}{s^٢}$$

لذا :

$$\int_0^t(t-u)F(u)du=\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{f(s)}{s^٢}\right\}\qquad\text{(I)}$$

اکنون نشان خواهیم داد که :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{f(s)}{s^٢}\right\}=\int_0^t\int_0^v F(u)dudv$$

زیرا اگر قرار دهیم :

$$G(t)=\int_0^t\int_0^v F(u)dudv$$

دراینصورت خواهیم داشت :

$$G'(t)=\int_0^t F(u)du \quad , \quad G''(t)=F(t)$$

ولی چون $G(0)=G'(0)=0$ است باستفاده از رابطه (۳۴۴ . ۸) چنین داریم :

$$f(s)=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{G''(t)\right\}=s^{۲}\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}-sG(0)-G'(0)$$

$$=s^{۲}\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}$$

و از آنجا :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\frac{f(s)}{s^{۲}}$$

و یا :

$$\text{(II)} \qquad \mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s^{۲}}\right\}=G(t)=\int_0^t\int_0^v F(u)dudv$$

ازمقایسه روابط (I) و (II) چنین داریم :

$$\text{(III)} \qquad \int_0^t\int_0^v F(u)dudv=\int_0^t (t-u)F(u)du$$

تبصره ــ رابطه (II) را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s^{۲}}\right\}=\int_0^t\int_0^t F(t)dt^{۲}$$

و یا بطورکلی :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s^{n}}\right\}=\int_0^t\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)dt^{n}$$

باستفاده از مطلب بالا بسهولت میتوان رابطه زیر را که تعمیم رابطه (III) است بدست آورد :

$$\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)dt^{n}=\int_0^t \frac{(t-u)^{n-۱}}{(n-۱)!}F(u)du$$

۸۴ . ۸ ـ روشهای محاسبه نقشهای لاپلاس وارونه

ذیلاً روشهای متفاوت محاسبه نقشهای لاپلاس وارونه را ذکر کرده‌ایم. این روشها متناظر با روشهای ذکر شده در شماره (۵ . ۸) میباشند.

۸۴۱ . ۸ ـ روش کسرهای جزیی

هرتابع گویای $\frac{P(s)}{Q(s)}$ راکه در آن $P(s)$ و $Q(s)$ کثیرالجمله هایی از s بوده و درجه $P(s)$ کوچکتراز $Q(s)$ است میتوان بصورت مجموع توابع گویای (که کسرهای گویا نامیده میشوند) بشکل $\frac{A}{(as+b)^r}$ و $\frac{As+B}{(as^۲+bs+c)^r}$ نوشت.

روش تجزیه توابع گویا و همچنین نحوه محاسبه ضرایب A و B را بطور مفصل در شماره (۲۳ . ۷) ذکر نموده‌ایم.

بنابراین با محاسبه نقشهای لاپلاس وارونه هریک از کسرهای جزیی میتوان عبارت $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}$ را محاسبه کرد.

مثال ـ عبارات زیر را محاسبه کنید:

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s+۷}{s^۲-۲s-۳}\right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s^۲-۴}{(s+۱)(s-۲)(s-۳)}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۵s^۲-۱۵s-۱۱}{(s+۱)(s-۲)^۳}\right\}$.

ت ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s+۱}{(s-۱)(s^۲+۱)}\right\}$.

ث ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^۲+۲s+۳}{(s^۲+۲s+۲)(s^۲+۲s+۵)}\right\}$.

حل ـ الف :

$$\frac{۳s+۷}{s^۲-۲s-۳}=\frac{۳s+۷}{(s+۱)(s-۳)}=\frac{۴}{s-۳}-\frac{۱}{s+۱}$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s+۷}{s^{۲}-۲s-۳}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{٤}{s-۳}\right\}-\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s+۱}\right\}=٤e^{۳t}-e^{-t}$$

ب :

$$\frac{۲s^{۲}-٤}{(s+۱)(s-۲)(s-۳)}=\frac{A}{s+۱}+\frac{B}{s-۲}+\frac{C}{s-۳}$$

چنانچه دو طرف رابطه بالا را در $(s+۱)$ و $(s-۲)$ و $(s-۳)$ ضرب نمودهو به ترتیب بجای $s=-۱$ و $s=۲$ و $s=۳$ قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=-\frac{۱}{٦} \quad , \quad B=-\frac{٤}{۳} \quad , \quad C=\frac{۷}{۲}$$

و از آنجا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s^{۲}-٤}{(s+۱)(s-۲)(s-۳)}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{-\frac{۱}{٦}}{s+۱}+\frac{-\frac{٤}{۳}}{s-۲}+\frac{\frac{۷}{۲}}{s-۳}\right\}$$

$$=-\frac{۱}{٦}e^{-t}-\frac{٤}{۳}e^{۲t}+\frac{۷}{۲}e^{۳t}$$

پ :

$$\frac{٥s^{۲}-۱٥s-۱۱}{(s+۱)(s-۲)^{۳}}=\frac{A}{s+۱}+\frac{B}{(s-۲)^{۳}}+\frac{C}{(s-۲)^{۲}}+\frac{D}{s-۲}$$

چنانچه دو طرف رابطه بالا را در $(s+۱)$ و $(s-۲)^{۳}$ ضرب کرده و بجای $s=-۱$ و $s=۲$ قرار دهیم مقادیر $A=-\frac{۱}{۳}$ و $B=-۷$ بدست میآید. لذا :

$$\frac{٥s^{۲}-۱٥s-۱۱}{(s+۱)(s-۲)^{۳}}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{(s+۱)}+\frac{-۷}{(s-۲)^{۳}}+\frac{C}{(s-۲)^{۲}}+\frac{D}{s-۲}$$

چنانچه دو طرف رابطه بالا را در s ضرب نموده و $s \to \infty$ چنین داریم :

$$0=-\frac{۱}{۳}+D \quad , \quad D=\frac{۱}{۳}$$

برای‌تعیین مقدار C کافی است‌در رابطه بالابجای $s=o$ قراردهیم وازآنجا مقدار $C=٤$ بدست میآید. لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۵s^{۲}-۱۵s-۱۱}{(s+۱)(s-۲)^{۳}}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{-\frac{۱}{۳}}{s+۱}+\frac{-۷}{(s-۲)^{۳}}+\frac{٤}{(s-۲)^{۲}}+\frac{\frac{۱}{۳}}{s-۲}\right\}$$

$$=-\frac{۱}{۳}e^{-t}-\frac{۷}{۲}t^{۲}e^{۲t}+٤te^{۲t}+\frac{۱}{۳}e^{۲t}$$

ت :

$$\frac{۳s+۱}{(s-۱)(s^{۲}+۱)}=\frac{A}{s-۱}+\frac{Bs+C}{s^{۲}+۱}$$

از ضرب دو طرف رابطه بالا در $(s-۱)$ و $(s^{۲}+۱)$ و اختیار نمودن $s=۱$ و $s=i$ مقادیر $A=۲$, $B=-۲$, $C=۱$ بدست میآیند . لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s+۱}{(s-۱)(s^{۲}+۱)}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲}{s-۱}\right\}-۲\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+۱}\right\}$$

$$+\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}=۲e^{t}-۲\cos t+\sin t$$

ث :

$$\frac{s^{۲}+۲s+۳}{(s^{۲}+۲s+۲)(s^{۲}+۲s+۵)}=\frac{As+B}{s^{۲}+۲s+۲}+\frac{Cs+D}{s^{۲}+۲s+۵}$$

مقادیر A , B , C , D را میتوان با جایگزین نمودن $s=o$, $s=۱$, $s=-۱$, $s \to \infty$ بدست آورد :

$$A=o\ ,\ B=\frac{۱}{۳}\ ,\ C=o\ ,\ D=\frac{۲}{۳}$$

لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۲}+۲s+۳}{(s^{۲}+۲s+۲)(s^{۲}+۲s+۵)}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{\frac{۱}{۳}}{s^{۲}+۲s+۲}+\frac{\frac{۲}{۳}}{s^{۲}+۲s+۵}\right\}$$

$$=\frac{۱}{۳}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۱}\right\}+\frac{۲}{۳}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+٤}\right\}$$

$$=\frac{۱}{۳}e^{-t}\sin t+\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{۲}e^{-t}\sin ۲t=\frac{۱}{۳}e^{-t}(\sin t+\sin ۲t)$$

۸٤۲ . ۸ ـ روش سری

اگر بتوان تابع $f(s)$ را برحسب قوای منفی s بصورت زیر بسط داد :

$$f(s)=\frac{a_۰}{s}+\frac{a_۱}{s^۲}+\frac{a_۲}{s^۳}+\frac{a_۳}{s^٤}+\cdots \qquad (۸ . ۸٤۲)$$

دراینصورت با شرایط معینی میتوان نقش لاپلاس وارونه $f(s)$ را بشکل زیر نوشت :

$$F(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=a_۰+a_۱t+\frac{a_۲t^۲}{۲!}+\frac{a_۳t^۳}{۳!}+\cdots$$

مثال ۱- عبارت زیر را محاسبه کنید :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\frac{۱}{s}}}{s}\right\}$$

حل ـ بااستفاده از بسط $e^{-\frac{۱}{s}}$ چنین داریم :

$$\frac{۱}{s}e^{-\frac{۱}{s}}=\frac{۱}{s}\left\{۱-\frac{۱}{s}+\frac{۱}{۲!s^۲}-\frac{۱}{۳!s^۳}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s^۲}+\frac{۱}{۲!s^۳}-\frac{۱}{۳!s^٤}+\cdots$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}e^{-\frac{۱}{s}}\right\}=۱-t+\frac{t^۲}{(۲!)^۲}-\frac{t^۳}{(۳!)^۲}+\frac{t^٤}{(٤!)^۲}-\cdots$$

$$=۱-t+\frac{t^۲}{۱^۲۲^۲}-\frac{t^۳}{۱^۲۲^۲۳^۲}+\frac{t^٤}{۱^۲۲^۲۳^۲٤^۲}-\cdots$$

$$=۱-\frac{(۲t^{\frac{۱}{۲}})^۲}{۲^۲}+\frac{(۲t^{\frac{۱}{۲}})^٤}{۲^۲٤^۲}-\frac{(۲t^{\frac{۱}{۲}})^٦}{۲^۲٤^۲٦^۲}+\cdots$$

(مثال یک شماره ۷۲ . ۸) :

$$=J_۰(۲\sqrt{t})$$

که در آن $J_0(t)$ تابع بسل اندیس صفر میباشد.

۸۴۳ . ۸ ـ روش معادلات دیفرانسیل

مثال ۱ ـ مطلوب است محاسبه $\mathscr{L}^{-۱}\left\{e^{-\sqrt{s}}\right\}$.

حل ـ فرض میکنیم $y=e^{-\sqrt{s}}$ باشد. لذا :

$$y'=-\frac{e^{-\sqrt{s}}}{۲s^{\frac{۱}{۲}}} \quad , \quad y''=\frac{e^{-\sqrt{s}}}{٤s}+\frac{e^{-\sqrt{s}}}{٤s^{\frac{۳}{۲}}}$$

و از آنجا :

$$٤sy''+۲y'-y=0 \qquad (I)$$

حال اگر $\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}=y(s)$ باشد بنابه روابط (۸ . ٤۶) و (۸ . ٤٤) و $Y(0)=0$ چنین داریم :

$$y''=\mathscr{L}\left\{t^{۲}Y\right\}$$

$$sy''=\mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}[t^{۲}Y]\right\}=\mathscr{L}\left\{t^{۲}Y'+۲tY\right\}$$

$$y'=\mathscr{L}\left\{-tY\right\}$$

بالنتیجه رابطه (I) بصورت زیر نوشته میشود :

$$٤\mathscr{L}\left\{t^{۲}Y'+۲tY\right\}-۲\mathscr{L}\left\{tY\right\}-\mathscr{L}\left\{Y\right\}=0$$

و یا :

$$٤t^{۲}Y'+(۶t-۱)Y=0$$

$$\frac{dY}{Y}+\left(\frac{۶t-۱}{٤t^{۲}}\right)dt=0$$

$$\mathrm{Log}Y+\frac{۳}{۲}\mathrm{Log}t+\frac{۱}{٤t}=c_{۱}$$

$$Y=\frac{c}{t^{\frac{۳}{۲}}}e^{-\frac{۱}{۴t}}$$

حال $tY=\frac{c}{t^{\frac{۱}{۲}}}e^{-\frac{۱}{۴t}}$. بنابراین :

$$\mathscr{L}\left\{tY\right\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{Y\right\}=-\frac{d}{ds}(e^{-\sqrt{s}})=\frac{e^{-\sqrt{s}}}{۲\sqrt{s}}$$

برای مقادیر بزرگ t ، $tY\sim\frac{c}{t^{\frac{۱}{۲}}}$ و $\mathscr{L}\left\{tY\right\}\sim\frac{c\sqrt{\pi}}{s^{\frac{۱}{۲}}}$. برای مقادیر کوچک s ، $\frac{e^{-\sqrt{s}}}{۲\sqrt{s}}\sim\frac{۱}{۲s^{\frac{۱}{۲}}}$ و از آنجا باستفاده از قضیه مقدار نهایی (شماره ۴۹ . ۸) مقدار $c=\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}$ بدست میآید. لذا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{e^{\sqrt{s}}\right\}=\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}\,t^{\frac{۳}{۲}}}e^{-\frac{۱}{۴t}}$$

مثال ۲ــ عبارت $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\}$ را محاسبه کنید.

حل ــ باستفاده از مثال بالا و روابط (۸۳۵ . ۸) و (۷۳ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\}=\int_{۰}^{t}\left\{\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}\,u^{\frac{۳}{۲}}}e^{-\frac{۱}{۴u}}\right\}du=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{۱}{۲\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-v^{۲}}dv$$

$$=\operatorname{erfc}\left(\frac{١}{٢\sqrt{t}}\right) \quad , \quad u=\frac{١}{٤v^{٢}}$$

مثال ۳ـ عبارت $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\}$ را محاسبه کنید.

حل ـ با استفاده از مثال یک و رابطه (۸۳۳ . ۸) و $k=x^{٢}$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-\sqrt{x^{٢}s}}}{x^{٢}s}\right\}=\frac{١}{x^{٢}}\operatorname{erfc}\left(\frac{١}{٢\sqrt{\frac{t}{x^{٢}}}}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\}=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{٢\sqrt{t}}\right)$$

۸٤٤ . ۸ ـ مشتق‌گیری نسبت بپارامتر

درقسمت (الف) شماره (۸۳٤ . ۸) این روش را توضیح دادیم و ذیلاً مثال دیگری با استفاده ازاین روش حل میکنیم.

مثال ۱ـ عبارت زیر محاسبه کنید :

$$\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{(s^{٢}+a^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}\right\}$$

حل ـ با استفاده از مثال دوم شماره (۷۲ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{J_{0}(at)\right\}=\frac{١}{\sqrt{s^{٢}+a^{٢}}}$$

$$\frac{d}{da}\mathscr{L}\left\{J_{0}(at)\right\}=\frac{d}{da}\left\{\frac{١}{\sqrt{s^{٢}+a^{٢}}}\right\}$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{da}\left\{J_{0}(at)\right\}\right]=\frac{-a}{(s^{٢}+a^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$\mathscr{L}\left\{tJ'_{۰}(at)\right\}=\frac{-a}{(s^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

بالنتیجه :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right\}=-\frac{t}{a}J'_{۰}(at)=\frac{tJ_{۱}(at)}{a}$$

زیرا همواره $J'_{۰}(u)=-J_{۱}(u)$* . $J_{۱}(u)$ تابع بسل اندیس اول میباشد.

مثال ۲ـ مطلوب است محاسبه عبارت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۲s+۵)^{\frac{۳}{۲}}}\right\}$$

حل ـ بااستفاده از مثال ۱ و رابطه (۸۳۲ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۲s+۵)^{\frac{۳}{۲}}}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{[(s+۱)^{۲}+۴]^{\frac{۳}{۲}}}\right\}$$

$$=e^{-t}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s^{۲}+۴)^{\frac{۳}{۲}}}\right\}=\frac{te^{-t}}{۲}J_{۱}(۲t)$$

۸۴۵ . ۸ ـ روشهای متفاوت بااستفاده ازقضایای بالا

۸۴۶ . ۸ ـ استفاده از جداول (جدول ضمیمه شماره ۲) .

۸۵ . ۸ ـ فرمول بسط هوی‌ساید

فرض میکنیم $P(s)$ و $Q(s)$ کثیرالجمله‌هایی از s و درجه $P(s)$ کوچکتر از $Q(s)$ باشد. فرض میکنیم $Q(s)$ دارای n ریشه متمایز از یکدیگر :

$$\alpha_k \;;\; k=۱,۲,۳,\ldots,n$$

باشد . دراینصورت :

---

* برای اثبات به قسمت (ث) مسئله ۲۳ شماره (۸ . ۷) مراجعه شود .

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,e^{\alpha_k t} \qquad (۸ . ۸۵)$$

زیرا چون بنابفرض α_k ریشه ساده مخرج میباشد و درجه $P(s)$ کوچکتر از $Q(s)$ است لذا بنابر قضیه اول شماره (۲۳ . ۷) وخاصیت خطی بودن اوپریتور $\mathscr{L}^{-۱}$ چنین داریم :

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\cdot\frac{۱}{s-\alpha_k}$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\sum_{k=۱}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\cdot\frac{۱}{s-\alpha_k}\right\}$$

$$=\sum_{k=۱}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s-\alpha_k}\right\}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,e^{\alpha_k t}$$

رابطه (۸۵ . ۸) به **بسط هوی‌ساید** موسوم است.

مثال ـ عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{۲s-۱۱}{(s+۲)(s-۳)}\right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{۱۹s+۳۷}{(s-۲)(s+۱)(s+۳)}\right\}$.

حل :

الف : واضح است که مخرج دارای ریشه های ۲− و ۳ است وضرایب $e^{\alpha_k t}$ به‌ترتیب عبارت است از :

$$\left[\frac{۲s-۱۱}{۲s-۱}\right]_{s=۳}=-۱ \quad ; \quad \left[\frac{۲s-۱۱}{۲s-۱}\right]_{s=-۲}=۳$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s-۱۱}{(s+۲)(s-۳)}\right\}=۳e^{-۲t}-e^{۳t}$$

ب : ریشه های مخرج عبارت است از ۲ , ۱− , ۳− وضرایب $e^{\alpha_k t}$ به ترتیب عبارتند از :

$$\left[\frac{۱۹s+۳۷}{۳s^{۲}+٤s-٥}\right]_{s=۲}=٥\ ;\ \left[\frac{۱۹s+۳۷}{۳s^{۲}+٤s-٥}\right]_{s=-۱}=-۳$$

$$\left[\frac{۱۹s+۳۷}{۳s^{۲}+٤s-٥}\right]_{s=-۳}=-\ ۲$$

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱۹s+۳۷}{(s-۲)(s+۱)(s-۳)}\right\}=٥e^{۲t}-۳e^{-t}-۲e^{-۳t}$$

۸۶ . ۸ ـ تابع بتا

اگر m و n اعداد مثبت باشند تابع بتا را با رابطه زیر مشخص میکنیم :

$$B(m\ ,\ n)=\int_{۰}^{۱}u^{m-۱}(۱-u)^{n-۱}du \qquad (۸\ .\ ۸٦)$$

بسهولت میتوان نشان داد که* :

$$B(m\ ,\ n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad (۸\ .\ ۸٦۱)$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲m-۱}\theta\cos^{۲n-۱}\theta\ d\theta=\frac{۱}{۲}\ B(m\ ,\ n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{۲\Gamma(m+n)} \qquad (۸\ .\ ۸٦۲)$$

رابطه (۸٦۱ . ۸) را بااستفاده از قضیه کانولوشین میتوان به ترتیب زیر ثابت کرد . عبارت :

$$G(t)=\int_{۰}^{t}x^{m-۱}(t-x)^{n-۱}dx$$

را درنظر میگیریم. بااستفاده از خاصیت کانولوشین چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{t^{m-۱}\right\}\mathscr{L}\left\{t^{n-۱}\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(m)}{s^{m}}\cdot\frac{\Gamma(n)}{s^{n}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}$$

---

* برای اثبات این دو رابطه بصفحات ۹۱ و ۹۲ و ۹۳ کتاب زیر مراجعه شود .

R. P. Gillespie ; Integration ; diver & Boyd , 1949

لذا :

$$G(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{s^{m+n}}\right\}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}$$

و یا :

$$\int_{0}^{t} x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}$$

باقرار دادن $t=۱$ در رابطه بالا ، رابطه (۸ . ۸۶۱) بدست میآید.

مثال ـ مطلوب است محاسبه هریک ازعبارات زیر :

الف ـ $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۴}\theta\cos^{۶}\theta\,d\theta$. ب ـ $\int_{0}^{\pi} \cos^{۴}\theta\,d\theta$.

پ ـ $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\theta}{\sqrt{tg\theta}}$.

الف : با مقایسه این انتگرال با رابطه (۸ . ۸۶۲) داریم $۲m-۱=۴$ و $۲n-۱=۶$ و ازآنجا $m=\frac{۵}{۲}$ و $n=\frac{۷}{۲}$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۴}\theta\cos^{۶}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{۵}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{۷}{۲}\right)}{۲\Gamma(۶)}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}\cdot\frac{۵}{۲}\cdot\frac{۳}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}}{۲\cdot۵\cdot۴\cdot۳\cdot۲\cdot۱}=\frac{۳\pi}{۵۱۲}$$

ب : چون $\cos\theta$ نسبت به $\theta=\frac{\pi}{۲}$ متقارن است . لذا :

$$\int_{0}^{\pi} \cos^{۴}\theta\,d\theta=۲\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۴}\theta\,d\theta$$

باقرار دادن $٠=١-٢m$ و $٤=١-٢n$ و یا $m=\frac{١}{٢}$ و $n=\frac{٥}{٢}$ در رابطه (٨٦٢ . ٨) خواهیم داشت :

$$٢\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \cos^{٤}\theta d\theta=٢\left[\frac{\Gamma\left(\frac{١}{٢}\right)\Gamma\left(\frac{٥}{٢}\right)}{٢\Gamma(٣)}\right]$$

$$=٢\left[\frac{\sqrt{\pi}\cdot\left(\frac{٣}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)\sqrt{\pi}}{٢\cdot٢\cdot١}\right]=\frac{٣\pi}{٨}$$

پ :

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{d\theta}{\sqrt{tg\theta}}=\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sin^{-\frac{١}{٢}}\theta \cos^{\frac{١}{٢}}\theta d\theta$$

$$٢m-١=-\frac{١}{٢} \;;\; ٢n-١=\frac{١}{٢} \;;\; m=\frac{١}{٤} \;,\; n=\frac{٣}{٤}$$

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{d\theta}{\sqrt{tg\theta}}=\frac{\Gamma\left(\frac{١}{٤}\right)\Gamma\left(\frac{٣}{٤}\right)}{٢\Gamma(١)}=\frac{١}{٢}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{٤}}=\frac{\pi\sqrt{٢}}{٢}$$

در محاسبه عبارت فوق از رابطه زیر استفاده کرده‌ایم :

$$\Gamma(p)\Gamma(١-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \quad , \quad ٠<p<١$$

٨٧ . ٨ ـ محاسبه انتگرالها

از نقش لاپلاس میتوان در محاسبه تعداد زیادی از انتگرالهای معین استفاده کرد.

مثال ١ـ مطلوب است محاسبه $\int_{٠}^{t} J_{٠}(u)J_{٠}(t-u)du$. $J_{٠}(u)$ تابع بسل اندیس صفر میباشد.

حل ـ فرض میکنیم $G(t)=\int_{۰}^{t} J_{۰}(u)J_{۰}(t-u)du$ باشد . بااستفاده از قضیه کانولوشین و مثال یک شماره (۷۲ . ۸) به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\mathscr{L}\left\{J_{۰}(t)\right\}\mathscr{L}\left\{J_{۰}(t)\right\}=\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+۱}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+۱}}=\frac{۱}{s^{۲}+۱}$$

لذا :

$$G(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۱}\right\}=\sin t$$

$$G(t)=\int_{۰}^{t} J_{۰}(u)J_{۰}(t-u)du=\sin t$$

مثال ۲ـ نشان دهید که $\int_{۰}^{\infty}\cos x^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$.

حل ـ فرض میکنیم $G(t)=\int_{۰}^{\infty}\cos tx^{۲}dx$ باشد. بااستفاده‌ازجدول مندرج در شماره(۲ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\int_{۰}^{\infty}c^{-st}dt\int_{۰}^{\infty}\cos tx^{۲}dx=\int_{۰}^{\infty}dx\int_{۰}^{\infty}e^{-st}\cos tx^{۲}dt$$

$$=\int_{۰}^{\infty}\mathscr{L}\left\{\cos tx^{۲}\right\}dx=\int_{۰}^{\infty}\frac{s}{s^{۲}+x^{٤}}dx$$

باقرار دادن $x^{۲}=s\,tg\theta$ و یا $x=\sqrt{s}\sqrt{tg\theta}$ وبااستفاده‌ازقسمت (پ) مثال (۸۶ . ۸) خواهیم داشت :

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{s}{s^{۲}+x^{٤}}dx=\frac{۱}{۲\sqrt{s}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(tg\theta)^{\frac{۱}{۲}}d\theta=\frac{۱}{۲\sqrt{s}}\left(\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{\pi\sqrt{۲}}{٤\sqrt{s}}$$

و از آنجا :

$$G(t)=\int_{۰}^{\infty} \cos tx^{۲}dx=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}\mathscr{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{s}}\right)$$

$$=\left(\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}\right)\left(\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{\sqrt{۲\pi}}{۴}\,t^{-\frac{۱}{۲}}$$

اگر در رابطه بالا $t=۱$ اختیار گردد چنین داریم :

$$\int_{۰}^{\infty} \cos x^{۲}dx=\frac{\sqrt{۲\pi}}{۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$$

مثال ۳ـ نشان دهید که :

$$\text{(I)}\qquad \int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx=\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$$

حل ـ تابع $G(t)=\int_{۰}^{\infty} e^{-tx^{۲}}\,dx$ را درنظر میگیریم :

$$\mathscr{L}\left\{G(t)\right\}=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}dt\int_{۰}^{\infty} e^{-tx^{۲}}\,dx=\int_{۰}^{\infty}dx\int_{۰}^{\infty} e^{-st}e^{-tx^{۲}}\,dt$$

$$=\int_{۰}^{\infty}dx\int_{۰}^{\infty}\mathscr{L}\left\{e^{-tx^{۲}}\right\}=\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{s+x^{۲}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{s}}\left[\operatorname{arc}tg\frac{x}{\sqrt{s}}\right]_{۰}^{\infty}=\frac{\pi}{۲\sqrt{s}}$$

$$G(t)=\int_{۰}^{\infty} e^{-tx^{۲}}\,dx=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{\pi}{۲\sqrt{s}}\right\}=\frac{\pi}{۲}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\sqrt{s}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}\,t^{-\frac{۱}{۲}}$$

با اختیار کردن $t=۱$ در رابطه بالا، رابطه (I) بدست میآید.

مثال ۴ـ نشان دهید که :

$$J_{۰}(t)=\frac{۱}{\pi}\int_{-۱}^{۱} e^{itw}(۱-w^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}dw$$

حل ـ با استفاده از مثال یک شماره (۸ . ۷۲) و رابطه :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\sqrt{s+a}}\right\}=\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}e^{-at}}{\sqrt{\pi}}$$

و همچنین قضیه کانولوشین چنین داریم :

$$J_{۰}(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+۱}}\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{s+i}}\right\}$$

$$=\int_{۰}^{t}\frac{u^{-\frac{۱}{۲}}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(t-u)^{-\frac{۱}{۲}}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}}du$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{t}e^{i(t-۲u)}u^{-\frac{۱}{۲}}(t-u)^{-\frac{۱}{۲}}du$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{t}e^{it(۱-۲v)}v^{-\frac{۱}{۲}}(۱-v)^{-\frac{۱}{۲}}dv \qquad (u=tv)$$

$$=\frac{۱}{\pi}\int_{-۱}^{۱}e^{itw}(۱-w^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}dw \qquad (۱-۲v=w)$$

مثال ۵ـ نشان دهید که :

$$J_{۰}(t)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta$$

حل :

روش اول ـ درمثال بالا قرار میدهیم $v=cos\theta$ لذا :

$$J_۰(t)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} e^{itcos\theta}\, d\theta=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} cos(tcos\theta)d\theta+\frac{i}{\pi}\int_۰^{\pi} sin(tsin\theta)d\theta$$

چون تابع $J_۰(t)$ تابع حقیقی از t است بنابراین :

$$J_۰(t)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} cos(tcos\theta)d\theta$$

روش دوم ـ فرض میکنیم :

$$G(t)=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi} cos(tcos\theta)d\theta=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} cos(tcos\theta)d\theta$$

$$\mathscr{L}\Big\{G(t)\Big\}=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \mathscr{L}\Big\{cos(tcos\theta)\Big\}d\theta=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{s}{s^۲+cos^۲\theta}d\theta$$

$$=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{ssec^۲\theta}{s^۲tg^۲\theta+s^۲+۱}d\theta$$

$$=\frac{۲}{\pi}\cdot\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}}=\Big[arctg\Big(\frac{stg\theta}{\sqrt{s^۲+۱}}\Big)\Big]_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}}$$

بالنتیجه :

$$G(t)=\mathscr{L}^{-۱}\Big\{\frac{۱}{\sqrt{s^۲+۱}}\Big\}=J_۰(t)$$

مسائل

نقشهای لاپلاس وارونه

۱ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣}{s+٤}\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{٢s-٥}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٨s}{s^{٢}+١٦}\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٦}{s^{٢}+٤}\right\}$.

ث ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s-١٢}{s^{٢}+٨}\right\}$. ج ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٢s-٥}{s^{٢}-٩}\right\}$.

چ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{s^{٥}}\right\}$. ح ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{s^{\frac{٧}{٢}}}\right\}$.

خ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١٢}{٤-٣s}\right\}$. د ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{s+١}{s^{\frac{٤}{٣}}}\right\}$.

٢ـ مطلوب است محاسبه هریک از عبارات زیر :

الف ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\left(\frac{\sqrt{s}-١}{s}\right)^{٢}\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٢s+١}{s(s+١)}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s-٨}{٤s^{٢}+٢٥}\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٥s+١٠}{٩s^{٢}-١٦}\right\}$.

ث ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s-٨}{s^{٢}+٤}-\frac{٤s-٢٤}{s^{٢}-١٦}\right\}$.

ج ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s-٢}{s^{\frac{٥}{٢}}}-\frac{٧}{٣s+٢}\right\}$.

٣ـ نشان دهید که توابع :

$$G(t)=t \quad , \quad F(t)=\begin{cases} t & t\neq ٣ \\ ٠ & t=٣ \end{cases}$$

دارای یک نقش لاپلاس هستند.

٤ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣(s^٢-١)^٢}{٢s^٥}+\frac{٤s-١٨}{٩-s^٢}+\frac{(s+١)(٢-s^{\frac{١}{٢}})}{s^{\frac{٥}{٢}}}\right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{s}{(s+١)^٥}\right\}$. پ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{s}{(s+١)^{\frac{٥}{٢}}}\right\}$.

ت ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٣s+٢}{٤s^٢+١٢s+٩}\right\}$. ث ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٥s-٢}{٣s^٢+٤s+٨}\right\}$.

ج ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{\sqrt[٣]{٨s-٢٧}}\right\}$. چ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{\sqrt{s^٢-٥s+٢٠}}\right\}$.

ح ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-٣s}}{s^٢}\right\}$. خ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{٨e^{-٣s}}{s^٢+٤}\right\}$.

د ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-s}}{\sqrt{s+١}}\right\}$. ذ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{se^{-٢s}}{s^٢+٣s+٢}\right\}$.

ر ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-٣s}}{s^٢-٢s+٥}\right\}$. ز ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١}{\sqrt{s}\,(s-١)}\right\}$.

ژ ـ $\mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{e^{-٢s}}{\sqrt{s^٢+٩}}\right\}$.

٥ـ اگر :

$$f(s)=\int_٠^\infty e^{-st}F(t)dt \quad , \quad \int_٠^\infty e^{-st}G(t)dt=f(ps+q)$$

باشند ، رابطه‌یی بین $F(t)$ و $G(t)$ بیابید. p و q مقادیر ثابتی هستند.

۶- اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s\sqrt{s+۱}}\right\}=\operatorname{erf}\sqrt{t}$ باشد عبارت $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s\sqrt{s+a}}\right\}$ را بیابید $a > 0$.

۷- اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(\sqrt{s^۲+۱}-s)^n}{\sqrt{s^۲+۱}}\right\}=J_n(t)$ باشد عبارت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(\sqrt{s^۲+a^۲}-s)^n}{\sqrt{s^۲+a^۲}}\right\}$$

را بیابید.

وارونه نقشهای لاپلاس مشتقها وانتگرالها

۸- هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+۱}{(s^۲+۲s+۲)^۲}\right\}$. ب - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\operatorname{Log}\left(\frac{s+۲}{s+۱}\right)\right\}$.

پ - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\operatorname{Log}\left(\frac{s+۲}{s+۱}\right)\right\}$.

ت - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\operatorname{arc}tg\left(\frac{۲}{s^۲}\right)\right\}$.

ث - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\operatorname{Log}\left(\frac{s^۲+a^۲}{s^۲+b^۲}\right)\right\}$.

ضرب و تقسیم در قوای s

۹- نشان دهید که :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s^۳}\right\}=\int_0^t\int_0^v\int_0^w F(u)\,du\,dv\,dw$$

آیا این انتگرال را میتوان بصورت $\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)dt^۳$ نوشت ؟ چرا.

۱۰ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کرده و درمورد رابطه بین این نقشهای وارونه بحث کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{(s-۱)^{۵}(s+۲)}\right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s-۲)^{۵}(s+۱)}\right\}$.

۱۱ـ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۳}(s+۱)}\right\}$. ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+۲}{s^{۲}(s+۳)}\right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s(s+۱)^{۳}}\right\}$. ت ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s\sqrt{s+۴}}\right\}$.

ث ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s\sqrt{s^{۲}+a^{۲}}}\right\}$.

۱۲ـ اگر $F(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}$ باشد نشان دهید که :

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{sf'(s)\right\}=-tF'(t)-F(t)$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{sf''(s)\right\}=t^{۲}F'(t)+۲tF(t)$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{s^{۲}f''(s)\right\}=t^{۲}F''(t)+۴tF'(t)+۲F(t)$.

۱۳ـ نشان دهید که :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{s^{۲}f'(s)+F(o)\right\}=-tF''(t)-۲F'(t)$$

قضیه کانولوشین

۱۴ـ نشان دهید که :

$$F^{*}\left\{G^{*}H\right\}=\left\{F^{*}G\right\}^{*}H$$

یعنی قانون پیوندی برای کانولوشین .

۱۵ـ نشان دهید که :

$$F^*(G+H)=F^*G+F^*H \quad , \quad (F+G)^*H=F^*H+G^*H$$

۱۶ـ نشان دهید که :

$$\frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!}=(\text{حاصلضرب } n)\ ۱^*۱^*۱^*\ \ldots\ ۱^* \qquad n=۱,۲,۳,\ldots$$

۱۷ـ نشان دهید که :

$$\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)dt^{۳}=\int_0^t\frac{(t-u)^{۲}}{۲!}F(u)du$$

و بطور کلی :

$$\int_0^t\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)dt^n=\int_0^t\frac{(t-u)^{n-۱}}{(n-۱)!}F(u)du$$

۱۸ـ قضیه کانولوشین را مستقیماً با استفاده از تعریف نقش لاپلاس ثابت کنید .

یعنی :

$$f(s)g(s)=\left\{\int_0^\infty e^{-su}F(u)du\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sv}G(v)dv\right\}$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u)G(v)\,dudv$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\right\}dt$$

۱۹ـ بااستفاده از قضیه کانولوشین نشان دهید که :

$$\int_0^t \sin u\cos(t-u)du=\frac{۱}{۲}t\sin t$$

۲۰ـ نشان دهید که :

$$\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{t}\frac{e^{(a-b)u}}{\sqrt{u(t-u)}}du=c^{(a-b)\frac{t}{۲}}I_{۰}\left\{\frac{۱}{۲}(a-b)t\right\}$$

که درآن $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$ و $J_n(x)$ تابع بسل مرتبه n است.

کسرهای جزیی

۲۱- هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

الف - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s+۱۶}{s^{۲}-s-۶}\right\}$. ب - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s-۱}{s^{۳}-s}\right\}$.

پ - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s+۱}{۶s^{۲}+۷s+۲}\right\}$.

ت - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱۱s^{۲}-۲s+۵}{(s-۲)(۲s-۱)(s+۱)}\right\}$.

ث - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲۷-۱۲s}{(s+۴)(s^{۲}+۹)}\right\}$.

ج - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۳}+۱۶s-۲۴}{s^{۴}+۲۰s^{۲}+۶۴}\right\}$.

چ - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s-۱}{(s+۳)(s^{۲}+۲s+۲)}\right\}$.

ح - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۲}-۲s+۳}{(s-۱)^{۲}(s+۱)}\right\}$.

خ - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s^{۳}-۳s^{۲}-۴۰s+۳۶}{(s^{۲}-۴)^{۲}}\right\}$.

د - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^{۲}-۳}{(s+۲)(s-۳)(s^{۲}+۲s+۵)}\right\}$.

ذ - $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s^{۲}-۲s+۲)(s^{۲}+۲s+۲)}\right\}$.

ر- $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s^{۳}-s^{۲}-۱}{(s+۱)^{۲}(s^{۲}+۱)^{۲}}\right\}$.

۲۲- بااستفاده از روش کسرهای جزیی قسمتهای (الف) و (ب) و (پ) مسائل ۱۰ و ۱۱ را بار دیگر حل کنید.

فرمول بسط هوی‌ساید

۲۳- هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

الف- $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{۲s^۲-۶s+۵}{s^۳-۶s^۲+۱۱s-۶}\right\}$.

ب- $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{s+۵}{(s+۱)(s^۲+۱)}\right\}$.

پ- $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{s-۱}{(s+۳)(s^۲+۲s+۲)}\right\}$ باقسمت (ج) مسئله ۲۱ مقایسه کنید.

ت- $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{s^۲-۳}{(s+۲)(s-۳)(s^۲+۲s+۵)}\right\}$ با قسمت (خ) مسئله ۲۱ مقایسه کنید.

ث- $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\dfrac{s}{(s^۲-۲s+۲)(s^۲+۲s+۲)}\right\}$ با قسمت (د) مسئله ۲۱ مقایسه کنید.

۲۴- فرض میکنیم $f(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ باشد که در آن $P(s)$ و $Q(s)$ کثیرالجمله هایی از s بوده و درجه $P(s)$ کوچکتر از $Q(s)$ است. $Q(s)=0$ دارای یک ریشه مکرر مرتبه n ام a بوده ولی بقیه ریشه‌ها $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ ساده هستند. نشان دهید که:

الف-

$$f(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_۱}{(s-a)^m}+\frac{A_۲}{(s-a)^{m-۱}}+\cdots+\frac{A_m}{s-a}+\frac{B_۱}{s-b_۱}+\frac{B_۲}{s-b_۲}+\cdots+\frac{B_n}{s-b_n}$$

ب-

$$A_k=\lim_{s\to a}\frac{۱}{(k-۱)!}\cdot\frac{d^k}{ds^k}\left\{(s-a)^m f(s)\right\}\ ;\ k=۱, ۲, \ldots, m$$

پ ـ

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ f(s) \right\}=e^{at}\left\{ \frac{A_۱ t^{m-۱}}{(m-۱)!}+\frac{A_۲ t^{m-۲}}{(m-۲)!}+\cdots+A_m \right\} +B_۱e^{b_۱t}+\cdots+B_ne^{b_nt}$$

۲۵ـ بااستفاده از تمرین ۲۴ هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۲s^۲-۹s+۱۹}{(s-۱)^۲(s+۳)} \right\}$.

ب ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۲s+۳}{(s+۱)^۲(s+۲)^۲} \right\}$.

پ ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۱۱s^۳-۴۷s^۲+۵۶s+۴}{(s-۲)^۳(s+۲)} \right\}$.

ت ـ $\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۲s^۳-s^۲-۱}{(s+۱)^۲(s^۲+۱)^۲} \right\}$ با قسمت (ذ) مسئله ۲۱ مقایسه کنید.

۲۶ـ بسط هوی‌ساید را در موردی که مخرج دارای فاکتور درجه دوم مکرر باشد ، تعمیم دهید و سپس مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{ \frac{۴s^۴+۵s^۳+۶s^۲+۸s+۲}{(s-۱)(s^۲+۲s+۲)^۲} \right\}$$

تابع بتا

۲۷ـ هریک‌از عبارات زیر را محاسبه کنید :

الف ـ $\int_۰^۱ x^{\frac{۳}{۲}}(۱-x)^۲dx$.   ب ـ $\int_۰^۴ x^۳(۴-x)^{-\frac{۱}{۲}}dx$.

پ ـ $\int_۰^۲ y^۴\sqrt{۴-y^۲}\,dy$.   ت ـ $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۶\theta d\theta$.

ث ـ $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲\theta\cos^۴\theta d\theta$.   ج ـ $\int_۰^{\pi} \sin^۴\theta\cos^۴\theta d\theta$.

۲۸ـ نشان دهید که :

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{p}\theta d\theta = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{p}\theta d\theta$$

$$= \begin{cases} \dfrac{۱ . ۲ . ۳ \dots (p-۱)}{۲ . ۴ . ۶ \dots p} . \dfrac{\pi}{۲} & \text{اگر } p \text{ عدد درست زوج مثبت باشد} \\ \dfrac{۲ . ۴ . ۶ \dots (p-۱)}{۱ . ۳ . ۵ \dots p} & \text{اگر } p \text{ عدد درست فرد مثبت باشد} \end{cases}$$

۲۹ـ اگر $\int_{۰}^{\infty} \frac{x^{p-۱}}{۱+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}$ باشد ، نشان دهید که :

$$\Gamma(p)\Gamma(۱-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad ۰ < p < ۱$$

راهنمایی ـ $y = \frac{x}{۱+x}$. باستفاده از مطلب بالا صحت رابطه زیر را تأیید کنید :

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{y^{۲}dy}{۱+y^{۴}} = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$$

۳۰ـ نشان دهید که :

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{tg\theta}\, d\theta = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$$

محاسبات انتگرالها

۳۱ـ صحت هریک از روابط زیر را تأیید کنید :

الف ـ $\int_{۰}^{\infty} \sin x^{۲}dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$.

ب ـ $\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{۲}$.

پ ـ $\int_{۰}^{\infty} x\cos x^{۳}dx = \frac{\pi}{۳\sqrt{۳}\,\Gamma\left(\frac{۱}{۳}\right)}$.

ت ـ $\int_0^t J_0(u)J_1(t-u)\,du = J_0(t) - \cos t$.

۳۲ـ اگر $0 < p < 1$ باشد، صحت روابط زیر را تأیید کنید :

الف ـ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2}}$.

ب ـ $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}}$.

۳۳ـ الف ـ نشان دهید که $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ متقارب است.

ب ـ اگر $t > 0$ باشد، آیا رابطه :

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^\infty x^2 e^{-tx^2}\,dx\right\} = \int_0^\infty \mathscr{L}\left\{x^2 e^{-tx^2}\right\}dx$$

برقرار میباشد.

پ ـ آیا برای محاسبه انتگرال (الف) میتوان از روش مثال سوم شماره (۸ . ۸۷) استفاده کرد.

مسائل مختلف

۳۴ـ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+1}\right\}$.

۳۵ـ اگر $b > a , q > -1 , p > -1$ باشد، نشان دهید که :

$$\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,dx = (b-a)^{p+q+1}B(p+1 , q+1)$$

راهنمایی ـ قرار میدهیم $x-a=(b-a)y$.

جوابها

۱ـ الف : $۳e^{-٤t}$.   ب : $\frac{۱}{۲}e^{\frac{٥}{۲}t}$.

پ : $۸\cos ٤t$.   ت : $۳\sin ۲t$.

ث : $۳\cos ۲\sqrt{۲}\,t - ۳\sqrt{۲}\sin ۲\sqrt{۲}\,t$.

ج : $۲\cosh ۳t - \frac{٥}{۲}\sin h\,۳t$.   چ : $\frac{t^{٤}}{۲٤}$.

ح : $\frac{۸t^{\frac{٥}{۲}}}{۱٥\sqrt{\pi}}$.   خ : $-٤e^{-۳t}$.

د : $\frac{(t^{-\frac{۲}{۳}}+۳t^{\frac{۱}{۳}})}{\Gamma\left(\frac{۱}{۳}\right)}$.

۲ـ الف : $۱+t-\frac{٤t^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}$.   ب : $۱+e^{-t}$.

پ : $\frac{۳}{٤}\cos\frac{٥}{۲}t-\frac{٤}{٥}\sin\frac{٥}{۲}t$.

ت : $\frac{٥}{۹}\cosh\frac{٤}{۳}t+\frac{٥}{٦}\sinh\frac{٤}{۳}t$.

ث : $۳\cos ۲t-٤\sin ۲t-٤\cosh ٤t+٦\sinh ٤t$.

ج : $\frac{٦t^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}-\frac{۸t^{\frac{۳}{۲}}}{۳\sqrt{\pi}}-\frac{۷}{۳}e^{-\frac{۲}{۳}t}$.

٤ـ الف :

$$\frac{۱}{۲}-t-\frac{۳}{۲}t^{۲}+\frac{۱}{۱٦}t^{٤}+\frac{٤t^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}+\frac{۸t^{\frac{۳}{۲}}}{۳\sqrt{\pi}}-٤\cosh ۳t+٦\sinh ۳t .$$

ب: $\frac{e^{-t}}{۲٤}(٤t^{۳}-t^{٤})$.   پ: $\frac{۲t^{\frac{۱}{۲}}(۳-۲t)}{۳\sqrt{\pi}}$.

ت: $\frac{۳}{٤}e^{-\frac{۳}{۲}t}-\frac{۵}{۸}te^{-\frac{۳}{۲}t}$.

ث: $\frac{e^{-\frac{۲}{۳}t}}{۱۵}\left(۲۵\cos\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}t-۲٤\sqrt{۵}\sin\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}t\right)$.

ج: $\frac{t^{-\frac{۲}{۳}}e^{\frac{۲۷}{۸}t}}{۲\Gamma\left(\frac{۱}{۳}\right)}$.   چ: $e^{۲t}J_{0}(٤t)$.

ح: $(t-۲)u(t-۲)$ یا $\begin{cases} t-۲ & t>۲ \\ 0 & t<۲ \end{cases}$.

خ: $٤\sin ۲(t-۳)u(t-۳)$ یا $\begin{cases} ٤\sin ۲(t-۳) & t>۳ \\ 0 & t<۳ \end{cases}$.

د: $\frac{(t-۱)^{-\frac{۱}{۲}}u(t-۱)}{\sqrt{\pi}}$ یا $\begin{cases} \frac{(t-۱)^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}} & t>۱ \\ 0 & t<۱ \end{cases}$.

ذ:

$\left\{۲e^{-۲(t-۲)}-e^{-(t-۲)}\right\}u(t-۲)$ یا $\begin{cases} ۲e^{-۲(t-۲)}-e^{-(t-۲)} & t>۲ \\ 0 & t<۲ \end{cases}$.

ر:

$\frac{۱}{۲}e^{(t-۳)}\sin ۲(t-۳)u(t-۳)$ یا $\begin{cases} \frac{۱}{۲}e^{(t-۳)}\sin ۲(t-۳) & t>۳ \\ 0 & t<۳ \end{cases}$.

ز : $e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$.

ژ : $J_0(3t-6)u(t-2)$ یا $\begin{cases} J_0(3t-6) & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$.

۵- $G(t) = e^{-\frac{q}{p}t}\,\dfrac{F\left(\frac{t}{p}\right)}{p}$.

۶- $\operatorname{erf}\dfrac{\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$. ۷- $a^n J_n(at)$.

۸- الف : $\frac{1}{2}te^{-t}\sin t$. ب : $\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$.

پ : $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}du$. ت : $\frac{2}{t}\sin t \sinh t$.

ث : $\displaystyle\int_0^t \frac{\cos au - \cos bu}{u}du$.

۱۰- الف : $\dfrac{e^t}{72}\left(t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{8}{27}\right) - \dfrac{e^{-2t}}{243}$.

ب : $e^{2t}\left(\frac{t^4}{36} + \frac{t^3}{54} - \frac{t^2}{54} + \frac{t}{81} - \frac{1}{243}\right) + \dfrac{e^{-t}}{243}$.

۱۱- الف : $1 - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}$. ب : $\frac{2}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t}$.

پ : $1 - e^{-t}(1 + t + \frac{1}{2}t^2)$.

ت : $\frac{1}{2}\operatorname{erf}(2\sqrt{t})$. ث : $\displaystyle\int_0^t J_0(au)du$.

۱۲- الف : $5e^{3t} - 2e^{-2t}$. ب : $1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$.

پ : $\frac{١}{٢}e^{-\frac{١}{٢}t}-\frac{١}{٣}e^{-\frac{٢}{٣}t}$. ت : $٥e^{٢t}-\frac{٣}{٢}e^{\frac{١}{٢}t}+٢e^{-t}$.

ث : $٣e^{-٤t}-٣\cos٣t$. ج : $\frac{١}{٢}\sin٤t+\cos٢t-\sin٢t$.

چ : $\frac{١}{٥}e^{-t}(٤\cos t-٣\sin t)-\frac{٤}{٥}e^{-٢t}$.

ح : $\frac{١}{٢}(٢t-١)e^{t}+\frac{٣}{٢}e^{-t}$.

خ : $(٥t+٣)e^{-٢t}-٢te^{٢t}$.

د : $\frac{٣}{٥٠}e^{٣t}-\frac{١}{٢٥}e^{-٢t}-\frac{١}{٥٠}e^{-t}\cos٢t+\frac{٩}{٢٥}e^{-t}\sin٢t$.

ذ : $\frac{١}{٢}\sin t\sinh t$. ر : $\frac{١}{٢}\sin t+\frac{١}{٢}t\cos t-te^{-t}$.

٢٣- الف : $\frac{١}{٢}e^{t}-e^{٢t}+\frac{٥}{٢}e^{٣t}$. ب : $٢e^{-t}+٣\sin t-٢\cos t$.

٢٥- الف : $(٣t-٢)e^{t}+٤e^{-٢t}$. ب : $t(e^{-t}-e^{-٢t})$.

پ : $(٢t^{٢}-t+٥)e^{٢t}+٦e^{-٢t}$.

ت : $\frac{١}{٢}\sin t+\frac{١}{٢}t\cos t-te^{-t}$.

٢٦- $e^{t}+e^{-t}\left\{(٣-٢t)\cos t-٣\sin t\right\}$.

٢٧- الف : $\frac{١٦}{٣١٥}$. ب : $\frac{٤٠٩٦}{٣٥}$. پ : ٢π .

ت : $\frac{٥\pi}{٣٢}$. ث : $\frac{\pi}{٣٢}$. ج : $\frac{٣\pi}{١٢٨}$.

٢٤- $\frac{١}{٣}\left\{e^{-t}-e^{\frac{١}{٢}t}\left(\cos\frac{\sqrt{٣}}{٢}t-\sqrt{٣}\sin\frac{\sqrt{٣}}{٢}t\right)\right\}$.

۸ . ۹ ـ موارد استعمال در معادلات دیفرانسیل ـ معادلات انتگرال ـ معادلات تفاوت

۸ . ۹۱ ـ معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت

از نقش لاپلاس میتوان در حل معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت استفاده کرد . فرض میکنیم بخواهیم معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مرتبه دوم :

$$\frac{d^{۲}Y}{dt^{۲}} + \alpha \frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad ; \quad Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t) \qquad (۸ . ۹۱)$$

که درآن α و β مقادیر ثابتی هستند با شرایط اولیه :

$$Y(o) = A \quad ; \quad Y'(o) = B \qquad (۸ . ۹۱۱)$$

حل کنیم . اگر نقش لاپلاس دوطرف رابطه (۸ . ۹۱) را باتوجه برابطه (۸ . ۹۱۱) بدست آوریم معادله جبری برای تعیین $\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}=y(s)$ بدست آورده و سپس $Y(t)$ را با یافتن نقش لاپلاس وارونه محاسبه میکنیم . بسهولت میتوان این روش را در مورد هرمعادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بکار برد .

مثال ۱- جواب معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$Y''+Y=t \quad ; \quad Y(o)=۱ \quad , \quad Y'(o)=-۲$$

حل ـ چنانچه ازدوطرف معادله دیفرانسیل باتوجه بشرایط اولیه و رابطه (۸ . ۴۴۳) و جداول مندرج در شماره‌های (۸ . ۲) و (۸ . ۸۲) و خطی بودن اوپریتور $\mathscr{L}^{-۱}$ به ترتیب چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{Y''\right\}+\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\mathscr{L}\left\{t\right\}$$

$$s^{۲}y-sY(o)-Y'(o)+y=\frac{۱}{s^{۲}}$$

$$s^{۲}y-s+۲+y=\frac{۱}{s^{۲}}$$

لذا :

$$y=\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\frac{۱}{s^{۲}(s^{۲}+۱)}+\frac{s-۲}{s^{۲}+۱}=\frac{۱}{s^{۲}}-\frac{۱}{s^{۲}+۱}$$

$$+\frac{s}{s^{۲}+۱}-\frac{۲}{s^{۲}+۱}$$

$$=\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{s}{s^{۲}+۱}-\frac{۳}{s^{۲}+۱}$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}}+\frac{s}{s^{۲}+۱}-\frac{۳}{s^{۲}+۱}\right\}=t+\cos t-۳\sin t$$

بسهولت میتوان نشان داد که تابع $Y=t+\cos t-۳\sin t$ درمعادله دیفرانسیل صدق نموده و دارای همان شرایط اولیه است برای روش دیگر که از انتگرال کانولوشین استفاده میشود به مثال ۷ مراجعه شود $(a=۱\ ,\ F(t)=t)$.

مثال ۲ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$Y''-۳Y'+۲Y=٤e^{۲t}\ ;\ Y(o)=-۳\ ,\ Y'(o)=٥$$

حل ـ اگر عملیات مندرج در مثال یک را تکرار کنیم به ترتیب خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{Y''\right\}-۳\mathscr{L}\left\{Y'\right\}+۲\mathscr{L}\left\{Y\right\}=٤\mathscr{L}\left\{e^{۲t}\right\}$$

$$[s^{۲}y-sY(o)-Y'(o)]-۳[sy-Y(o)]+۲y=\frac{٤}{s-۲}$$

$$(s^{۲}y+۳s-٥)-۳(sy+۳)+۲y=\frac{٤}{s-۲}$$

$$(s^{۲}-۳s+۲)y+۳s-۱٤=\frac{٤}{s-۲}$$

$$y=\frac{٤}{(s-۲)(s^{۲}-۳s+۲)}+\frac{۱٤-۳s}{s^{۲}-۳s+۲}=\frac{-۳s^{۲}+۲۰s-۲٤}{(s-۱)(s-۲)^{۲}}$$

$$=\frac{-۷}{s-۱}+\frac{٤}{s-۲}+\frac{٤}{(s-۲)^{٤}}$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{-۷}{s-۱}+\frac{٤}{s-۲}+\frac{٤}{(s-۲)^{٤}}\right\}=-۷e^{t}+٤e^{۲t}+٤te^{۲t}$$

مثال ۳ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$Y''+۲Y'+۵Y=e^{-t}\sin t \;;\; Y(0)=0 \;,\; Y'(0)=۱.$$

حل ـ باروشی مشابه مثال یک چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{Y''\right\}+۲\mathscr{L}\left\{Y'\right\}+۵\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\mathscr{L}\left\{c^{-t}\sin t\right\}$$

$$[s^۲y-sY(0)-Y'(0)]+۲[sy-Y(0)]+۵y$$
$$=\frac{۱}{(s+۱)^۲+۱}=\frac{۱}{s^۲+۲s+۲}$$

$$[s^۲y-s(0)-۱]+۲(sy-0)+۵y=\frac{۱}{s^۲+۲s+۲}$$

$$(s^۲+۲s+۵)y-۱=\frac{۱}{s^۲+۲s+۲}$$

$$y=\frac{۱}{(s^۲+۲s+۵)}+\frac{۱}{(s^۲+۲s+۲)(s^۲+۲s+۵)}$$
$$=\frac{s^۲+۲s+۳}{(s^۲+۲s+۲)(s^۲+۲s+۵)}$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s^۲+۲s+۳}{(s^۲+۲s+۲)(s^۲+۲s+۵)}\right\}=\frac{۱}{۳}c^{-t}(\sin t+\sin ۲t)$$

[قسمت (ث) مثال شماره ۸۴۱ ، ۸].

مثال ۴ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$Y'''-۳Y''+۳Y'-Y=t^۲c^t \;,\; Y(0)=۱ \;,\; Y'(0)=0 \;,\; Y''(0)=-۲$$

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{Y'''\right\}-۳\mathscr{L}\left\{Y''\right\}+۳\mathscr{L}\left\{Y'\right\}-\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\mathscr{L}\left\{t^۲e^t\right\}$$

$$[s^۳y-s^۲Y(0)-sY'(0)-Y''(0)]-۳[s^۲y-sY(0)-Y'(0)]$$
$$+۳[sy-Y(0)]-y=\frac{۲}{(s-۱)^۳}$$

$$(s^{۳}-۳s^{۲}+۳s-۱)\,y-s^{۲}+۳s-۱=\frac{۲}{(s-۱)^{۳}}$$

$$y=\frac{s^{۲}-۳s+۱}{(s-۱)^{۳}}+\frac{۲}{(s-۱)^{۶}}=\frac{s^{۲}-۲s+۱-s}{(s-۱)^{۳}}+\frac{۲}{(s-۱)^{۶}}$$

$$y=\frac{(s-۱)^{۲}-(s-۱)-۱}{(s-۱)^{۳}}+\frac{۲}{(s-۱)^{۶}}$$

$$y=\frac{۱}{s-۱}-\frac{۱}{(s-۱)^{۲}}-\frac{۱}{(s-۱)^{۳}}+\frac{۲}{(s-۱)^{۶}}$$

$$Y=e^{t}-te^{t}-\frac{t^{۲}e^{t}}{۲}+\frac{t^{۵}e^{t}}{۶۰}$$

مثال ۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مثال چهارم را بدست آورید .

حل ـ چون شرایط اولیه غیر مشخص هستند، لذا اگر فرض کنیم $Y(o)=A$, $Y'(o)=B$, $Y''(o)=C$ مانند مثال (٤) خواهیم داشت :

$$(s^{۳}y-As^{۲}-Bs-C)-۳(s^{۲}y-As-B)+۳(sy-A)-y=\frac{۲}{(s-۱)^{۳}}$$

و یا :

$$y=\frac{As^{۲}+(B-۳A)s+۳A-۳B+C}{(s-۱)^{۳}}+\frac{۲}{(s-۱)^{۶}}$$

چون A , B , C غیر مشخص میباشند بنابراین ضرایب صورت کسر اول عبارت بالا نیز غیر مشخص بوده و میتوان آنرا بصورت زیر نوشت :

$$y=\frac{c_{۱}}{(s-۱)^{۳}}+\frac{c_{۲}}{(s-۱)^{۲}}+\frac{c_{۳}}{s-۱}+\frac{۲}{(s-۱)^{۶}}$$

و از آنجا :

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\frac{c_{۱}t^{۲}}{۲}\,e^{t}+c_{۲}te^{t}+c_{۳}c^{t}+\frac{t^{۵}}{۶۰}\,e^{t}$$

$$=e^{t}\left(c_{۴}t^{۲}+c_{۵}t+c_{۶}+\frac{t^{۵}}{۶۰}\right)$$

مثال ۶ــ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$Y''+۹Y=\cos ۲t \;\; ; \;\; Y(o)=۱ \;\; , \;\; Y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=-۱$$

حل ــ چون مقدار $Y'(o)$ مشخص‌نشده است ، فرض میکنیم $Y'(o)=c$ باشد. لذا :

$$\mathscr{L}\left\{Y''\right\}+۹\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\mathscr{L}\left\{\cos ۲t\right\}$$

$$s^{۲}y-sY(o)-Y'(o)+۹y=\frac{s}{s^{۲}+٤}$$

$$(s^{۲}+۹)y-s-c=\frac{s}{s^{۲}+٤}$$

$$y=\frac{s+c}{s^{۲}+۹}+\frac{s}{(s^{۲}+٤)(s^{۲}+۹)}$$

$$=\frac{s}{s^{۲}+۹}+\frac{c}{s^{۲}+۹}+\frac{s}{٥(s^{۲}+٤)}-\frac{s}{٥(s^{۲}+۹)}$$

$$=\frac{٤}{٥}\left(\frac{s}{s^{۲}+۹}\right)+\frac{c}{s^{۲}+۹}+\frac{s}{٥(s^{۲}+٤)}$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\frac{٤}{٥}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+۹}\right\}+c\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}+۹}\right\}$$

$$+\frac{۱}{٥}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{s^{۲}+٤}\right\}$$

$$=\frac{٤}{٥}\cos ۳t+\frac{c}{۳}\sin ۳t+\frac{۱}{٥}\cos ۲t$$

برای یافتن مقدار c ملاحظه میکنیم که $Y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=-۱$ لذا $-۱=-\frac{c}{۳}-\frac{۱}{٥}$

و یا $c=\frac{۱۲}{٥}$. پس :

$$Y=\frac{٤}{٥}\cos ۳t+\frac{٤}{٥}\sin ۳t+\frac{۱}{٥}\cos ۲t$$

مثال ۷ــ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$Y''+a^{۲}Y=F(t)\ \ ,\ \ Y(o)=۱\ \ ,\ \ Y'(o)=۲$$

a مقداری است ثابت .

حل -

$$\mathscr{L}\left\{Y''\right\}+a^{۲}\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$$

$$s^{۲}y-sY(o)-Y'(o)+a^{۲}v=f(s)$$

$$s^{۲}y-s+۲+a^{۲}y=f(s)\quad ;\quad y=\frac{s-۲}{s^{۲}+a^{۲}}+\frac{f(s)}{s^{۲}+a^{۲}}$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{s-۲}{s^{۲}+a^{۲}}\right\}+\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s^{۲}+a^{۲}}\right\}$$

$$=\cos at-\frac{۲\sin at}{a}+\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{f(s)}{s^{۲}+a^{۲}}\right\}$$

باستفاده از رابطه ۸۳۶ . ۸چنین داریم :

$$=\cos at-\frac{۲\sin at}{a}+\frac{۱}{a}\int_{o}^{t}F(u)\sin a(t-u)du$$

مثال ۸ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $Y''-a^{۲}Y=F(t)$ را بدست‌آورید.

حل ـ فرض میکنیم $Y'(o)=c_{۲}$ و $Y(o)=c_{۱}$ باشد . پس‌از محاسبه نقش لاپلاس دو طرف معادله خواهیم داشت :

$$s^{۲}y-sc_{۱}-c_{۲}-a^{۲}y=f(s)$$

$$y=\frac{sc_{۱}+c_{۲}}{s^{۲}-a^{۲}}+\frac{f(s)}{s^{۲}-a^{۲}}$$

لذا :

$$Y=c_{۱}\cosh at+\frac{c_{۲}}{a}\sinh at+\frac{۱}{a}\int_{o}^{t}F(u)\sinh a(t-u)du$$

$$=A\cosh at+B\sinh at+\frac{۱}{a}\int_{o}^{t}F(u)\sinh a(t-u)du$$

۹۲ . ۸ ـ معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر

در حل برخی از معادلات دیفرانسیل که ضرایب آن متغیر است میتوان از نقش لاپلاس استفاده کرد. یکی از مواردی که میتوان بااستفاده از نقش لاپلاس معادله راحل نمود حالتی است که جمل معادله بصورت :

$$t^mY^{(n)}(t)$$

باشد. بنابر رابطه (٤٦ . ۸) چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{ t^mY^{(n)}(t) \right\}=(-۱)^m \frac{d^m}{ds^m}\mathscr{L}\left\{ Y^{(n)}(t) \right\}$$

و پس از قرار دادن مقدار $\mathscr{L}\left\{Y^{(n)}(t)\right\}$ از رابطه (٤٤ . ۸) در سمت راست رابطه بالا خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{ t^mY^{(n)}(t) \right\}$$

$$=(-۱)^m \frac{d^m}{ds^m}[s^nf(s)-s^{n-۱}Y(0)-s^{n-۲}Y'(0)+\cdots+sY^{(n-۲)}(0)-Y^{(n-۱)}(0)]$$

مثال ۱ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$tY''+Y'+٤tY=0 \ , \ Y(0)=۳ \ , \ Y'(0)=0$$

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{ tY'' \right\}+\mathscr{L}\left\{Y'\right\}+\mathscr{L}\left\{ ٤tY \right\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}\left\{s^۲y-sY(0)-Y'(0)\right\}+\left\{ sy-Y(0) \right\}-٤\frac{dy}{ds}=0$$

پس ازقراردادن مقادیر $Y(0)=۳$ و $Y'(0)=0$ ومشتق گیری نسبت به s چنین داریم :

$$(s^۲+٤)\frac{dy}{ds}+sy=0$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{sds}{s^۲+٤}=0$$

$$y=\frac{c}{\sqrt{s^۲+٤}}$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{c}{\sqrt{s^۲+٤}}\right\}=cJ_۰(۲t)$$

برای یافتن مقدار c ملاحظه میکنیم که :

$$Y(o)=cJ_۰(o)=c=۳$$

بنابراین :

$$Y=۳J_۰(۲t)$$

$J_۰(۲t)$ تابع بسل مرتبه صفر میباشد.

مثال۲ــ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$tY''+۱Y'+tY=o \quad ; \quad Y(o+)=۱ \;, Y(\pi)=o$$

حل ــ فرض میکنیم $Y'(o+)=c$ باشد. اگر نقش لاپلاس دو طرف معادله دیفرانسیل را بدست‌آورده‌وازروابط (٤٤۱ . ۸) و (٤٤۳ . ۸) استفاده کنیم چنین داریم :

$$-\frac{d}{ds}\left\{s^۲y-sY(o+)-Y'(o+)\right\}$$

$$+۲\left\{sy-Y(o+)\right\}-\frac{d}{ds}y=o$$

$$-s^۲y'-۲sy+۱+۲sy-۲-y'=o$$

$$-(s^۲+۱)y'-۱=o$$

$$y'=\frac{-۱}{s^۲+۱}$$

$$y=-\mathrm{arc}tg\,s+B$$

چون هنگامیکه $s\to\infty$ مقدار $y\to o$ لذا $B=\frac{\pi}{۲}$ است. پس :

$$y=\frac{\pi}{۲}-\mathrm{arc}tg\,s=\mathrm{arc}tg\,\frac{۱}{s}$$

[مثال یک شماره (٤۷ . ۸)]

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\text{arc}tg\,\frac{۱}{s}\right\}=\frac{\sin t}{t}$$

مثال ۳ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$Y''-tY'+Y=۱\ \ ,\ \ Y(o)=۱\ \ ,\ \ Y'(o)=۲$$

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{Y''\right\}-\mathscr{L}\left\{tY'\right\}+\mathscr{L}\left\{Y\right\}=\mathscr{L}\left\{۱\right\}=\frac{۱}{s}$$

$$s^{۲}y-sY(o)-Y'(o)=\frac{d}{ds}\left\{sy-Y(o)\right\}+y=\frac{۱}{s}$$

$$s^{۲}y-s-۲+sy'+y+y=\frac{۱}{s}$$

$$sy'+(s^{۲}+۲)y=s+۲+\frac{۱}{s}$$

$$\frac{dy}{ds}+\left(s+\frac{۲}{s}\right)y=۱+\frac{۲}{s}+\frac{۱}{s^{۲}}$$

$$F.I=e^{\int\left(s+\frac{۲}{s}\right)ds}=e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}+\text{Log}s}=s^{۲}e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}$$

$$\frac{d}{ds}\left(s^{۲}e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}y\right)=\left(۱+\frac{۲}{s}+\frac{۱}{s^{۲}}\right)s^{۲}e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}$$

$$y=\frac{۱}{s^{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}s^{۲}}\int\left(۱+\frac{۲}{s}+\frac{۱}{s^{۲}}\right)s^{۲}e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}ds$$

$$=\frac{۱}{s^{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}s^{۲}}\int(s^{۲}+۲s+۱)e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}ds$$

$$=\frac{۱}{s^{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}s^{۲}}\left[se^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}+۲e^{\frac{۱}{۲}s^{۲}}+c\right]$$

$$=\frac{۱}{s}+\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{c}{s^{۲}}e^{-\frac{۱}{۲}s^{۲}}$$

برای محاسبه مقدار c ، $e^{-\frac{۱}{۲}s^{۲}}$ را بسط میدهیم. یعنی :

$$y=\frac{۱}{s}+\frac{۲}{s^{۲}}+\frac{c}{s^{۲}}\left(۱-\frac{۱}{۲}s^{۲}+\frac{۱}{۸}s^{۴}-\cdots\right)$$

$$=\frac{۱}{s}+\frac{c+۲}{s^{۲}}-c\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}s^{۲}+\cdots\right)$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\right\}+(c+۲)\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۲}}\right\}$$

$$-c\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}s^{۲}+\cdots\right\}$$

$$=۱+(c+۲)t+c\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸}s^{۲}+\cdots\right\}$$

ولی چون $\mathscr{L}^{-۱}\left\{s^{k}\right\}$ برای مقادیر ... , ۲ , ۱ , $k=۰$ متحدصفراست. لذاچنین داریم:

$$Y=۱+(c+۲)t$$

بااستفاده از فرض $Y'(۰)\doteq ۲$ مقدار $c=۰$ بدست میآید و از آنجا :

$$Y=۱+۲t$$

۹۳ . ۸ــ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

نقش لاپلاس را میتوان برای حل دو و یا چند معادله دیفرانسیل معمولی بکار برد.

مثال ۱ــ دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=۲X-۳Y\\[2ex]\dfrac{dY}{dt}=Y-۲X\end{cases}\qquad X(۰)=۸\ ,\ Y(۰)=۳$$

حل ــ با بکار بردن نقش لاپلاس در دوطرف هریک از معادلات و قرار دادن :

$$\mathscr{L}\left\{X\right\}=x \quad , \quad \mathscr{L}\left\{Y\right\}=y$$

چنین داریم :

$$\begin{cases} sx-X(o)=۲x-۳y \\ sy-Y(o)=y-۲x \end{cases} \qquad \begin{cases} sx-۸=۲x-۳y \\ sy-۳=y-۲x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-۲)x+۳y=۸ \\ ۲x+(s-۱)y=۳ \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} ۸ & ۳ \\ ۳ & s-۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-۲ & ۳ \\ ۲ & s-۱ \end{vmatrix}}=\frac{۸s-۱۷}{s^۲-۳s-٤}=\frac{۸s-۱۷}{(s+۱)(s-٤)}=\frac{۵}{s+۱}+\frac{۳}{s-٤}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} s-۲ & ۸ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-۲ & ۳ \\ ۲ & s-۱ \end{vmatrix}}=\frac{۳s-۲۲}{s^۲-۳s-٤}=\frac{۳s-۲۲}{(s+۱)(s-٤)}=\frac{۵}{s+۱}-\frac{۲}{s-٤}$$

$$X=\mathscr{L}^{-۱}\left\{x\right\}=۵e^{-t}+۳e^{٤t} \quad ; \quad Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=۵e^{-t}-۲e^{٤t}$$

مثال ۳ـ دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} X''+Y'+۳X=۱۵e^{-t} \\ Y''-٤X'+۳Y=۱۵\sin ۲t \end{cases}$$

$$X(o)=۳۵ \ , \ X'(o)=-٤۸ \ , \ Y(o)=۲۷ \ , \ Y'(o)=-۵۵$$

حل -

$$\begin{cases} s^٢x-s(٣٥)-(-٤٨)+sy-٢٧+٣x=\dfrac{١٥}{s+١} \\[2ex] s^٢y-s(٢٧)-(-٥٥)-٤(sx-٣٥)+٣y=\dfrac{٣٠}{s^٢+٤} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^٢+٣)x+sy=٣٥s-٢١+\dfrac{١٥}{s+١} \\[2ex] -٤sx+(s^٢+٣)y=٢٧s-١٩٥+\dfrac{٣٠}{s^٢+٤} \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} ٣٥s-٢١+\dfrac{١٥}{s+١} & s \\[2ex] ٢٧s-١٩٥+\dfrac{٣٠}{s^٢+٤} & s^٢+٣ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^٢+٣ & s \\ -٤s & s^٢+٣ \end{vmatrix}}=\frac{٣٥s^٣-٤٨s^٢+٣٠٠s-٦٣}{(s^٢+١)(s^٢+٩)}$$

$$+\frac{١٥(s^٢+٣)}{(s+١)(s^٢+١)(s^٢+٩)}-\frac{٣٠s}{(s^٢+١)(s^٢+٤)(s^٢+٩)}$$

$$=\frac{٣٠s}{s^٢+١}-\frac{٤٥}{s^٢+٩}+\frac{٣}{s+١}+\frac{٢s}{s^٢+٤}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} s^٢+٣ & ٣٥s-٢١+\dfrac{١٥}{s+١} \\[2ex] -٤s & ٢٧s-١٩٥+\dfrac{٣٠}{s^٢+٤} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^٢+٣ & s \\ -٤s & s^٢+٣ \end{vmatrix}}=\frac{٢٧s^٣-٥٥s^٢-٣s-٥٨٥}{(s^٢+١)(s^٢+٩)}$$

$$+\frac{٦٠s}{(s+١)(s^٢+١)(s^٢+٩)}+\frac{٣٠(s^٢+٣)}{(s^٢+١)(s^٢+٤)(s^٢+٩)}$$

$$=\frac{۳۰s}{s^{۲}+۹}-\frac{۶۰}{s^{۲}+۱}-\frac{۳}{s+۱}+\frac{۲}{s^{۲}+۴}$$

بالنتیجه :

$$X=\mathscr{L}^{-۱}\left\{x\right\}=۳۰\cos t-۱۵\sin ۳t+۳e^{-t}+۲\cos ۲t$$

$$Y=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y\right\}=۳۰\cos ۳t-۶۰\sin t-۳e^{-t}+\sin ۲t$$

۹۴ . ۸ــ معادلات با مشتقات نسبی

تبدیل لاپلاس را میتوان برای حل برخی از معادلات با مشتقات نسبی که در شرایط کرانه‌یی صدق میکنند بکار بریم . این مسائل اغلب به **مسائل مقادیر کرانه‌یی** موسومند . ذیلاً چند نوع ازاین مسائل را مورد بررسی قرار داده‌ایم .

مثال ۱ــ تابع $U(x\ ,\ t)$ برای مقادیر $a \leqslant x \leqslant b$ و $t > 0$ معین میباشد . بفرض آنکه تابع $U=U(x\ ,\ t)$ دارای خواصی باشد که بتوان عملیات مندرج در زیر را انجام داد، مطلوب است محاسبه :

الف ـ $$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$$

ب ـ $$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial x}\,dt$$

حل :

الف ـ باانتگرال گیری جزء بجزء چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{dt}\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dt=\lim_{P\to\infty}\int_{0}^{P} e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$$

$$=\lim_{P\to\infty}\left\{\left[\,e^{-st}U(x\ ,\ t)\,\right]_{0}^{P}+s\int_{0}^{P} e^{-st}U(x\ ,\ t)dt\right\}$$

اکنون اگر $u(x\ ,\ t)$ نسبت به متغیر t درهرفاصله محدود $0 \leqslant t \leqslant N$ پیوسته قطعه‌یی

بوده و برای مقادیر $t > N$ هم‌ارز تابع نمایی مرتبه γ باشد ، رابطه بالا بصورت زیر نوشته میشود :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}=s\int_0^{\infty} e^{-st}U(x\,,\,t)dt-U(x\,,\,0)$$

$$=su(x\,,\,s)-U(x\,,\,0)=su-U(x\,,\,0)$$

که در آن :

$$u=u(x\,,\,s)=\mathscr{L}\left\{U(x\,,\,t)\right\}$$

ب ـ باستفاده ازقانون لیبنیزدر مورد مشتق گیری ازتابع زیر علامت انتگرال خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial x}\,dt=\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} e^{-st}Udt=\frac{du}{dx}$$

مثال ۲ـ باستفاده از مثال یک نشان دهید که :

الف ـ $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\}=s^2u(x\,,\,s)-sU(x\,,\,0)-U_t(x\,,\,0)$

ب ـ $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}=\frac{d^2u}{dx^2}$

که در آن :

$$U=u(x\,,\,s)=\mathscr{L}\left\{U(x\,,\,t)\right\}\quad,\quad U_t(x\,,\,0)=\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}$$

حل :

الف ـ فرض میکنیم $V=\frac{\partial U}{\partial t}$ باشد . لذا باستفاده از قسمت (الف) مثال یک چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\}=\mathscr{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\}=s\,\mathscr{L}\left\{V\right\}-V(x\,,\,0)$$

$$= s[s\mathscr{L}\left\{U\right\} - U(x , o)] - u_t(x , o)$$

$$= s^{۲}u - sU(x , o) - U_t(x , o)$$

ملاحظه مینماییم که تشابهی بین نتیجه بالاوقسمت (الف) مثال یک و روابط (٤٤٣ . ٨) و (٤٤ . ٨) موجود است.

ب ـ در قسمت (ب) مثال یک قرار میدهیم $V = \frac{\partial U}{\partial x}$. لذا:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^{۲} U}{\partial x^{۲}}\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\right\} = \frac{dv}{dx} = \frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}$$

مثال ۳ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر را که برای مقادیر $x > o$ و $t > o$ محدود است بیابید:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = ۲\,\frac{\partial U}{\partial t} + U \quad , \quad U(x , o) = ٦e^{-۳x}$$

حل ـ اگر نقش لاپلاس دوطرف معادله دیفرانسیل رانسبت به t یافته وسپس از مثال یک و شرایط کرانه‌یی استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$(I) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dx} = ۲\left\{su - U(x , o)\right\} + u \\ \frac{du}{dx} - (۲s + ۱)u = -۱۲e^{-۳x} \end{cases}$$

ملاحظه میکنیم که نقش لاپلاس، معادله بامشتقات نسبی را بیک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل میکند.

برای حل معادله دیفرانسیل (I) دو طرف معادله اخیر را در عامل انتگرال کننده $e^{-\int(۲s+۱)dx} = e^{-(۲s+۱)x}$ ضرب کرده و معادله را بشکل زیر مینویسیم:

$$\frac{d}{dx}\left\{ue^{-(۲s+۱)x}\right\} = -۱۲e^{-(۲s+٤)x}$$

$$ue^{-(۲s+۱)x} = \frac{٦}{s+۲}\,e^{-(۲s+٤)x} + c \quad , \quad u = \frac{٦}{s+۲}\,e^{-۳x} + ce^{(۲s+۱)x}$$

چون هنگامیکه $x \to \infty$ باید $U(x , t)$ محدود باشد لذا وقتیکه x بسوی بینهایت سیل میکند $u(x , s)$ نیز باید محدودباشدوبنابراین نتیجه میگردد که باید $c=0$ اختیار گردد. پس :

$$u=\frac{٦}{s+۲}e^{-۳x}$$

$$U=\mathscr{L}^{-۱}\left\{u\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{٦}{s+۲}e^{-۳x}\right\}=٦e^{-۲t-۳x}$$

مثال ٤ـ معادله با مشتقات نسبی زیر را حل کنید :

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} \quad ; \quad U(x , 0)=۳\sin ۲\pi x \;,\; U(0 , t)=0 \;,\; U(۱ , t)=0$$

که در آن $0 < x < ۱$ و $t > 0$ است.

حل ـ پس از یافتن نقش لاپلاس دوطرف معادله دیفرانسیل و با استفاده از مثالهای یک و دو چنین داریم :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} su-U(x , 0)=\dfrac{d^۲u}{dx^۲} \\[2ex] \dfrac{d^۲u}{dx^۲}-su=-۳\sin ۲\pi x \end{cases}$$

که در آن $u=u(x , s)=\mathscr{L}\left\{U(x , t)\right\}$ است. جواب عمومی معادله (I) عبارت است از:

$$\text{(II)} \qquad u=c_۱e^{\sqrt{s}x}+c_۲c^{-\sqrt{s}x}+\frac{۳}{s+٤\pi^۲}\sin ۲\pi x$$

اگر نقش لاپلاس شرایط کرانه‌یی که شامل t هستند بیابیم خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}\left\{U(0 , t)\right\}=u(0 , s)=0 \quad , \quad \mathscr{L}\left\{U(۱ , t)\right\}=u(۱ , s)=0$$

پس از قراردادن مقادیر فوق در رابطه (II) مقادیر $c_۱=c_۲=0$ بدست میآیدوبالنتیجه :

$$u=\frac{۳}{s+٤\pi^۲}\sin ۲\pi x$$

$$U(x\,,t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{u\right\}=۳e^{-۴\pi^{۲}t}\sin ۲\pi x$$

مثال هـ معادله با مشتقات نسبی زیر را حل کنید :

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}U}{\partial x^{۲}}\quad,\quad x>0\,,t>0\;,\;U(0\,,t)=۱\;,\;U(x\,,0)=0$$

$$x>0\;,\;t>0$$

حل ـ اگر نقش لاپلاس دوطرف معادله را یافته واز شرط $U(0\,,t)=۱$ استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\text{(I)}\qquad su-U(x\,,0)=\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}\quad,\quad\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}-su=0$$

$$\text{(II)}\qquad u(0\,,s)=\frac{۱}{s}$$

جواب عمومی معادله (I) عبارت است از :

$$u=u(x\,,s)=c_{۱}e^{\sqrt{s}\,x}+c_{۲}e^{-\sqrt{s}\,x}$$

با روشی شبیه روش استدلال مثال یک میتوان نشان داد که $c_{۱}=0$ است (بفرض آنکه $\sqrt{s}>0$) . لذا :

$$u=u(x\,,s)=c_{۲}e^{-\sqrt{s}\,x}$$

ولی بااستفاده از رابطه (II) مقدار $c_{۲}=\frac{۱}{s}$ بدست میآید. پس :

$$u=\frac{۱}{s}\,e^{-\sqrt{s}\,x}$$

$$U(x\,,t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{u\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s}\,e^{-\sqrt{s}\,x}\right\}$$

$$=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{۲\sqrt{t}}\right)=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{۲\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-v^{۲}}\,dv$$

(مثال ۲ شماره ۸۴۳ . ۸) .

مثال ٦ـ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$\frac{\partial^٢ Y}{\partial t^٢} - ٤\,\frac{\partial^٢ Y}{\partial x^٢} + Y = ١٦x + ٢٠\,\sin x$$

$$Y(o\,,t) = o \quad , \ Y(\pi\,,t) = ١٦\pi \quad , \ Y_t(x\,,o) = o$$

$$Y(x\,,o) = ١٦x + ١٢\sin ٢x - ٨\sin ٣x$$

حل ـ

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^٢ Y}{\partial t^٢}\right\} - ٤\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^٢ Y}{\partial x^٢}\right\} + \mathscr{L}\left\{Y\right\} = \mathscr{L}\left\{١٦x + ٢٠\,\sin x\right\}$$

$$s^٢ y - sY(x\,,o) - Y_t(x\,,o) - ٤\,\frac{d^٢ y}{dx^٢} + y = \frac{١٦x}{s} + \frac{٢٠\sin x}{s}$$

پس از قرار دادن مقادیر $Y(x\,,o)$ و $Y_t(x\,,o)$ در رابطه بالا چنین داریم :

$$(I) \qquad \frac{d^٢ y}{dx^٢} - \frac{١}{٤}\,(s^٢ + ١)y = \frac{-٤(s^٢+١)x}{s} - \frac{٥\sin x}{s} - ٣s\sin ٢\,x + ٢s\sin ٣x$$

$$(II) \qquad y(o\,,s) = o \quad , \quad y(\pi\,,s) = \frac{١٦\pi}{s}\,.$$

یکی از جوابهاخصوصی معادله (I) بشکل زیراست :

$$y_p = ax + b\sin x + c\sin ٢x + d\sin ٣x$$

پس از قرار دادن رابطه اخیر در رابطه (I) و متحد قرار دادن جمل مشابه در دو طرف معادله جواب خصوصی :

$$y_p = \frac{١٦x}{s} + \frac{٢٠\sin x}{s(s^٢+٥)} + \frac{١٢s\sin ٢x}{s^٢+١٧} - \frac{٨s\sin ٣x}{s^٢+٣٧}$$

بدست میآید.

از طرف دیگر جواب عمومی معادله بدون طرف ثانی (I) عبارت است از :

$$y_c = c_١ e^{-\frac{١}{٢}\sqrt{s^٢+١}\,x} + c_٢ e^{\frac{١}{٢}\sqrt{s^٢+١}\,x}$$

پس جواب عمومی معادله (I) عبارت میگردد از $y=y_p+y_c$. پس‌از جایگزین کردن شرایط (II) در رابطه اخیر مقادیر $c_١=c_٢=0$ بدست میآید. لذا :

$$y=\frac{١٦x}{s}+\frac{٢٠\sin x}{s(s^٢+٥)}+\frac{١٢s\sin ٢x}{s^٢+١٧}-\frac{٨s\sin ٣x}{s^٢+٣٧}$$

$$Y(x,t)=\mathscr{L}^{-١}\left\{y\right\}=١٦x+٤\sin x(١-\cos\sqrt{٥}\,t)$$

$$+١٢\sin ٢x\cos\sqrt{١٧}\,t-٨\sin ٣x\cos\sqrt{٣٧}\,t$$

مسائل

معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت

١- هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بااستفاده از نقش لاپلاس حل کنید :

الف - $Y''(t)+٤Y(t)=٩t\ ,\ Y(0)=0\ ,\ Y'(0)=٧$.

ب - $Y''(t)-٣Y'(t)+٢Y(t)=٤t+١٢e^{-t}\ ,\ Y(0)=٦\ ,$
$Y'(0)=-١$.

پ - $Y''(t)-٤Y'(t)+٥Y(t)=١٢٥t^٢\ ,\ Y(0)=Y'(0)=0$.

ت - $Y''(t)+Y(t)=٨\cos t\ ,\ Y(0)=١\ ,\ Y'(0)=-١$.

ث - $Y'''(t)-Y(t)=e^t\ ,\ Y(0)=0\ ,\ Y'(0)=0\ ,\ Y''(0)=0$.

ج - $Y^{IV}(t)+٢Y''(t)+Y(t)=\sin t\ ,$
$Y(0)=Y'(0)=Y''(0)=Y'''(0)=0$.

چ - $Y''(t)+٩Y(t)=١٨t\ ,\ Y(0)=0\ ,\ Y\left(\frac{\pi}{٢}\right)=0$.

ح - $Y^{IV}(t)-١٦Y(t)=٣٠\sin t\ ,\ Y(0)=0\ ,\ Y'(0)=٢\ ,$
$Y''(\pi)=0\ ,\ Y'''(\pi)=-١٨$.

خ - $Y''-٤Y'+٣Y=F(t)\ ,\ Y(0)=١\ ,\ Y'(0)=0$.

۲ـ معادله دیفرانسیل زیر را در هریک از حالتهای مربوطه حل کنید :

$$Y''+۴Y=F(t) \quad , \quad Y(۰)=۰ \ , \ Y'(۰)=۱$$

الف ـ $F(t)=\begin{cases} ۱ & ۰<t<۱ \\ ۰ & t>۱ \end{cases}$.

ب ـ $F(t)=u(t-۲)$ (تابع پله‌یی یگانه هوی ساید) .

معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر

۳ـ هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را بااستفاده از نقش لاپلاس حل کنید :

الف ـ $Y''+tY'-Y=۰ \ , \ Y(۰)=۰ \ , \ Y'(۰)=۱$.

ب ـ $tY''+(۱-۲t)Y'-۲Y=۰ \ , \ Y(۰)=۱ \ , \ Y'(۰)=۲$.

پ ـ $tY''+(t-۱)Y'-Y=۰ \ , \ Y(۰)=۵ \ , \ Y(\infty)=۰$.

۴ـ جواب محدود معادله $t^۲Y''+tY'+(t^۲-۱)Y=۰$ را که در شرط اولیه $Y(۱)=۲$ صدق میکند بدست آورید.

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

۵ـ هریک از معادلات زیر را حل کنید :

الف ـ

$$\begin{cases} Y'+۲Z'=t \\ Y''-Z=e^{-t} \end{cases} \quad , \quad Y(۰)=۳ \ , \ Y'(۰)=-۲ \ , \ Z(۰)=۰ .$$

ب ـ

$$\begin{cases} Y'-Z'-۲Y+۲Z=\sin t \\ Y''+۲Z'+Y=۰ \end{cases} \quad , \quad Y(۰)=Y'(۰)=Z(۰)=۰ .$$

پ ـ

$$\begin{cases} X'+۲Y''=e^{-t} \\ X'+۲X-Y=۱ \end{cases} \quad , \quad X(۰)=Y(۰)=Y'(۰)=۰ .$$

ت ـ

$$\begin{cases} Y'-Z'-۲Y+۲Z=\sin t \\ Y''+۲Z'+Y=o \end{cases} ,\quad Y(o)=o \;,\; Y'(\pi)=۱ \;,\; Z(o)=o \;.$$

ث ـ

$$\begin{cases} tY+Z+tZ'=(t-۱)e^{-t} \\ Y'-Z=e^{-t} \end{cases} ,\quad Y(o)=۱ \;,\; Z(o)=-۱ \;.$$

ج ـ

$$\begin{cases} -۳Y''+۳Z''=te^{-t}-۳\cos t \\ tY''-Z'=\sin t \end{cases} ,\quad Y(o)=-۱ \;,$$

$$Y'(o)=۲ \;,\; Z(o)=٤ \;,\; Z''(o)=o \;.$$

معادلات با مشتقات نسبی

۶ـ هریک از معادلات زیر را حل کنید :

الف ـ

$$\frac{\partial U}{\partial t}=۲\frac{\partial^{۲}U}{\partial x^{۲}} \;,\; U(o\,,t)=o \;,\; U(۵\,,t)=o \;,$$

$$U(x\,,o)=۱۰\sin ٤\pi x \;.$$

ب ـ

$$\frac{\partial U}{\partial t}=۲\frac{\partial^{۲}U}{\partial x^{۲}} \;,\; U(o\,,t)=o \;,\; U(۵\,,t)=o \;,$$

$$U(x\,,o)=۱۰\sin ٤\pi x-۵\sin ٦\pi x \;.$$

پ ـ

$$\frac{\partial^{۲}Y}{\partial t^{۲}}=۹\frac{\partial^{۲}Y}{\partial x^{۲}} \;,\; Y(o\,,t)=o \;,\; Y(۲\,,t)=o \;,$$

$$Y(x\,,o)=۲۰\sin ۲\pi x-۱۰\sin ۵\pi x \;.$$

ت ـ

$$\frac{\partial U}{\partial t}=۳\frac{\partial^{۲}U}{\partial x^{۲}} \;,\; U_x(o\,,t)=o \;,\; U\left(\frac{\pi}{۲}\,,t\right)=o \;.$$

I ـ $U(x\,,o)=۳۰\cos ۵x$.

II ـ $U(x\,,o)=۲۰\cos ۳x-۵\cos ۹x$.

ث ـ

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^{۲}U}{\partial x^{۲}}-٤U \;,\; U(o\,,t)=o \;,\; U(\pi\,,t)=o \;,$$

$$U(x\,,o)=٦\sin x-٤\sin ۲x \;.$$

ج- $\frac{\partial^۲ Y}{\partial t^۲}=۱۶\frac{\partial^۲ Y}{\partial x^۲}$, $Y_x(0,t)=0$, $Y(۳,t)=0$,

$Y(x,0)=0$, $Y_t(x,0)=۱۲\cos\pi x+۱۶\cos۳\pi x-۸\cos۵\pi x$.

چ- $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial t}=۱-e^{-t}$, $Y(x,0)=x$, $Y(x,t)$,

$0<x<۱$, $t>0$.

ح- معادله $\frac{\partial^۲ Y}{\partial t^۲}=\frac{\partial^۲ Y}{\partial x^۲}$, $x>0$, $t>0$ را که در شرایط اولیه زیر صدق میکند حل کنید :

$$Y(0,t)=۱۰\sin۲t \;,\; Y(x,0)=0 \;,\; Y_t(x,0)=0 \;,\; \lim_{x\to\infty}Y(x,t)=0$$

مسائل مختلف

۷- نشان دهید که جواب معادله دیفرانسیل $Y''(t)+k^۲Y(t)=F(t)$ که در شرایط اولیه $Y(0)=a$ و $Y'(0)=b$ صدق میکند عبارت است از :

$$Y(t)=a\cosh kt+\frac{b}{k}\sinh kt+\frac{۱}{k}\int_0^t F(u)\sinh k(t-u)du$$

۸- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$Y^{VI}(t)+Y'''(t)=۲\sin t \;,\; Y(0)=Y'(0)=0 \;,\; Y''(0)=۱$$

$$Y'''(0)=-۳$$

۹- جواب معادله $tY''-(t+۲)Y'+۳Y=t-۱$ که دارای نقش لاپلاس بوده و در شرط اولیه $Y(0)=0$ صدق میکند بیابید

۱۰- جواب عمومی معادله دیفرانسیل مندرج در قسمت (ب) مسئله ۳ را بیابید.

۱۱- جواب عمومی مسئله ۹ را پیدا کنید.

۱۲- باستفاده از نقش لاپلاس نشان دهید که جواب معادله :

$$\frac{d^۲Y}{dt^۲}+k^۲Y=A\cos\omega t \;,\; Y(0)=\alpha \;.\; Y'(0)=\beta$$

عبارت است از :

$$Y(t)=\frac{A(\cos\omega t-\cos kt)}{\omega^٢-k^٢}+\alpha\cos kt+\frac{\beta}{k}\sin kt$$

١٣- مقدار X را از دستگاه معادلات زیر پیدا کنید :

$$\begin{cases} X'+Y'=Y+Z \\ Y'+Z'=X+Z \\ X'+Z'=X+Y \end{cases} ,\quad X(o)=٢ \ ,\ Y(o)=-٣ \ ,\ Z(o)=١$$

١٤- اگر $Y=Y_١(t)$ یکی از جوابهای خصوصی معادله :

$$Y''(t)+P(t)Y'(t)+Q(t)Y(t)=o$$

باشد ، جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید :

$$Y''(t)+P(t)Y'(t)+Q(t)Y(t)=R(t)$$

١٥- آیا میتوان نقش لاپلاس را در یافتن جواب عمومی معادله $Y''+Y=\sec t$ بکار برد.

١٦- یکی از جوابهای محدود معادله :

$$(t-١)Y''+(٥-٤t)Y'-٣Y=o$$

که درشرط اولیه $Y(o)=٣$ صدق میکند ، بدست آورید. جواب عمومی معادله را بیابید.

جوابها

١- الف : $Y(t)=٣t+٢\sin ٢t$.

ب : $Y(t)=٣e^{t}-٢e^{٢t}+٢t+٢e^{-t}$.

پ : $Y(t)=٢٥t^٢+٤٠t+٢٢-٢e^{٢t}(٢\sin t-١١\cos t)$.

ت : $Y(t)=\cos t-٤\sin t+٤t\cos t$.

ث :

$$Y(t)=\frac{۱}{۳}\,te^{t}+\frac{۱}{۱۸}e^{-\frac{۱}{۲}t}\left\{۹\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}t+\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right\}-\frac{۱}{۲}e^{t}.$$

ج : $Y(t)=\frac{۱}{۸}\left\{(۳-t^{۲})\sin t-۳t\cos t\right\}$.

چ : $Y(t)=۲t+\pi\sin ۳t$.

ح : $Y=۲(\sin ۲t-\sin t)$.

خ : $Y=\frac{۳}{۲}e^{t}-\frac{۱}{۲}e^{۲t}+\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t}(e^{۲u}-e^{u})F(t-u)du$.

۲ـ الف : $Y(t)=\frac{۱}{۲}\sin ۲t+\frac{۱}{۴}(۱-\cos ۲t)\ ,\ t<۱$;

$$Y(t)=\frac{۱}{۲}\sin ۲t+\frac{۱}{۴}\left\{\cos(۲t-۲)-\cos ۲t\right\},\ t>۱$$

ب : $Y(t)=\frac{۱}{۲}\sin ۲t\ ,\ t<۲$;

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲t+\frac{۱}{۴}\left\{۱-\cos(۲t-۴)\right\},\ t>۲$$

۳ـ الف : $Y=t$. ب : $Y=e^{۲t}$. پ : $Y=۵e^{-t}$.

۴ـ $\frac{۲J_{۱}(t)}{J_{۱}(۱)}$.

۵ـ الف : $Y=۲+\frac{۱}{۲}t^{۲}+\frac{۱}{۲}e^{-t}-\frac{۳}{۲}\sin t+\frac{۱}{۲}\cos t$,

$$Z=۱-\frac{۱}{۲}e^{-t}+\frac{۳}{۲}\sin t-\frac{۱}{۲}\cos t$$

ب : $Y=\frac{۱}{۹}e^{-t}+\frac{۴}{۴۵}e^{۲t}-\frac{۱}{۵}\cos t-\frac{۲}{۵}\sin t+\frac{۱}{۳}te^{-t}$,

$$Z=\frac{۱}{۹}e^{-t}-\frac{۱}{۹}e^{۲t}+\frac{۱}{۳}te^{-t}$$

پ :

$$X=۱+e^{-t}-e^{-at}-e^{-bt}\ ,\ Y=۱+e^{-t}-be^{-at}-ae^{-bt}.$$

$$a=\frac{۱}{۲}(۲-\sqrt{۲})\ ,\ b=\frac{۱}{۲}(۲+\sqrt{۲})$$

ث : $Y=J_۰(t)\ ,\ Z=-J_۱(t)-e^{-t}$.

ج : $Y=\frac{۲}{۳}t^۲+\frac{۵}{۳}t-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}e^{-t}$,

$$Z=\frac{۲}{۳}t^۲+\frac{۸}{۳}+\frac{۱}{۳}e^{-t}+\frac{۱}{۳}te^{-t}+\cos t$$

۶- الف : $U(x\ ,t)=۱۰e^{-۳۲\pi^۲ t}\sin ۴\pi x$.

ب : $U(x\ ,t)=۱۰e^{-۳۲\pi^۲ t}\sin ۴\pi x-۵e^{-۷۲\pi^۲ t}\sin ۶\pi x$.

پ : $Y(x\ ,t)=۲۰\sin ۲\pi x\cos ۶\pi t-۱۰\sin ۵\pi x\cos ۱۵\pi t$.

ت : I- $۳۰e^{-۷۵t}\cos ۵x$.

II- $U(x\ ,t)=۲۰e^{-۲۷t}\cos ۳x-۵e^{-۲۴۳t}\cos ۹x$.

ث : $U(x\ ,t)=۶e^{-۵t}\sin x-۴e^{-۸t}\sin ۲x$.

ج : $Y(x\ ,t)=۱۲\cos \pi x\sin ۴\pi t+۱۶\cos ۳\pi x\sin ۱۲\pi t$

$$-۸\cos ۵\pi x\sin ۲۰\pi t$$

چ : $Y(x\ ,t)=x+۱-e^{-t}$.

۸- $Y=\frac{۱}{۲}t^۲-۲+e^{-t}+\sin t+\cos t$.

۱۳- $X=\frac{۲}{۳}e^{-\frac{۱}{۲}t}\left\{۳\cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)-۲\sqrt{۳}\sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)\right\}$.

۱۴- $Y=c_۱Y_۱\int\frac{\exp(-\int Pdt)}{Y_۱^۲}dt+c_۲Y_۱+$.

$$Y_۱\int\left\{\frac{\exp(-\int Pdt)}{Y_۱^۲}\int RY_۱\exp(\int Pdt)dt\right\}dt$$

۱۶- $$Y=c_۱e^{۴t}\int\frac{e^{-۴t}}{t-۱}\,dt+c_۲e^{۴t} \quad ; \quad Y=۳e^{۴t}.$$

۹۵ . ۸ـ معادلات انتگرال

معادله انتگرال معادله‌یی بشکل زیر است:

$$Y(t)=F(t)+\int_a^b K(u\,,t)Y(u)du \qquad (۸ . ۹۵)$$

$F(t)$ و $K(u\,,t)$ توابع مشخصی از $t\,,u$ و $b\,,a$ مقادیر ثابت و یا توابعی از t هستند. تابع $Y(t)$ که درزیرعلامت انتگرال است تابع مجهول میباشد.

همانطورکه درشماره (۸ . ۱) متذکرشدیم $K(u\,,t)$ را اغلب **کرنل** معادله انتگرال نامیم. اگر a و b مقادیر ثابتی باشند معادله را معادله انتگرال **فرد هولم*** و اگر a مقدار ثابت و $b=t$ باشد معادله را معادله انتگرال **ولترا**** گویند.

ذیلاً با حل چند مسئله نشان خواهیم داد که هرمعادله دیفرانسیل خطی را میتوان بیک معادله انتگرال تبدیل کرد ولی نمیتوان هرمعادله انتگرال را به یک معادله دیفرانسیل تبدیل نمود مثلاً معادله انتگرال :

$$Y(t)=\cos t+\int_0^t \mathrm{Log}(u+t)Y(u)du$$

را نمیتوان به معادله دیفرانسیل تبدیل کرد.

مثال ۱ـ معادله دیفرانسیل :

$$\text{(I)}\quad Y''(t)-۳Y'(t)+۲Y(t)=۴\sin t \quad , \quad Y(0)=۱\,,Y'(0)=-۲$$

را به معادله انتگرال تبدیل کنید.

حل ـ

روش اول ـ قرارمیدهیم $Y''(t)=V(t)$. باستفاده ازمثال ۲ شماره (۸ . ۸۳۶) و شرایط $Y(0)=۱$ و $Y'(0)=-۲$ چنین داریم :

---

* Fredholm.

** Volterra

$$Y'(t)=\int_{۰}^{t}V(u)du-۲ \quad , \quad Y(t)=\int_{۰}^{t}(t-u)V(u)du-۲t+۱$$

و از آنجا معادله دیفرانسیل با توجه بروابط بالا بشکل زیر درمیآید :

$$V(t)-۳\int_{۰}^{t}V(u)du+٦+۲\int_{۰}^{t}(t-u)V(u)du-٤t+۲=٤\sin t$$

و یا :

$$V(t)=٤\sin t+٤t-۸+\int_{۰}^{t}[۳-۲(t-u)]V(u)du$$

روش دوم ــ اگر از دو طرف معادله دیفرانسیل (I) انتگرال‌بگیریم چنین‌داریم :

$$\int_{۰}^{t}[Y''(u)-۳Y'(u)+۲Y(u)]du=\int_{۰}^{t}٤\sin u du$$

$$Y'(t)-Y'(۰)-۳Y'(t)+۳Y(۰)+۲\int_{۰}^{t}Y(u)du=٤-٤\cos t$$

پس‌از قرار دادن مقادیر $Y'(۰)=-۲$ و $Y(۰)=۱$ خواهیم داشت :

$$Y'(t)-۳Y(t)+۲\int_{۰}^{t}Y(u)du=-۱-٤\cos t$$

اگر بار دیگر از رابطه بالا از صفر تا t انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$Y(t)-Y(۰)-۳\int_{۰}^{t}Y(u)du+۲\int_{۰}^{t}(t-u)Y(u)du=-t-٤\sin t$$

$$Y(t)+\int_{۰}^{t}[۲(t-u)-۳]Y(u)du=۱-t-٤\sin t]$$

مثال ۲ــ معادله دیفرانسیل :

$$Y''(t)+(۱-t)Y'(t)+e^{-t}Y(t)=t^{۳}-۵t \quad , \quad Y(۰)=-۳ \quad , \quad Y'(۰)=٤$$

را به معادله انتگرال تبدیل کنید.

حل ـ

روش اول ـ با قرار دادن $Y''(t)=V(t)$ و بکار بردن $Y'(o)=٤$ و $Y(o)=-٣$ مانند روش اول مثال یک خواهیم داشت :

$$Y'(t)=\int_{۰}^{t} V(u)du+٤ \quad , \quad Y(t)=\int_{۰}^{t} (t-u)V(u)du+٤t-٣$$

و از آنجا :

$$V(t)+(١-t)\int_{۰}^{t} V(u)du+٤(١-t)$$

$$+e^{-t}\int_{۰}^{t} (t-u)V(u)du+٤te^{-t}-٣e^{-t}=t^{٣}-٥t$$

و یا :

$$V(t)=t^{٣}-t-٤+٣e^{-t}-٤te^{-t}+\int_{۰}^{t} [t-١-e^{-t}(t-u)]V(u)du$$

روش دوم ـ اگر مانند روش دوم مثال یک از دو طرف معادله دیفرانسیل انتگرال بگیریم چنین داریم :

$$\int_{۰}^{t} Y''(u)du+\int_{۰}^{t} (١-u)Y'(u)du+\int_{۰}^{t} e^{-u}Y(u)du=\int_{۰}^{t} (u^{٣}-٥u)du$$

پس از انتگرال گیری جزء بجزء در دومین انتگرال طرف چپ رابطه بالا خواهیم داشت :

$$Y'(t)-Y'(o)+\left\{\left|(١-u)Y(u)\right|_{۰}^{t}+\int_{۰}^{t} Y(u)du\right\}$$

$$+\int_{۰}^{t} e^{-u}Y(u)du=\frac{t^{٤}}{٤}-\frac{٥t^{٢}}{٢}$$

$$Y'(t)-Y'(o)+(١-t)Y(t)-Y(o)+\int_o^t Y(u)du$$

$$+\int_o^t e^{-u}Y(u)du=\frac{t^٤}{٤}-\frac{٥t^٢}{٢}$$

$$Y'(t)+(١-t)Y(t)+\int_o^t Y(u)du+\int_o^t e^{-u}Y(u)du=\frac{t^٤}{٤}-\frac{٥t^٢}{٢}+١$$

انتگرال گیری دیگر بین صفر و t منجر به رابطه زیر میشود:

$$Y(t)-Y(o)+\int_o^t (١-u)Y(u)du+\int_o^t (t-u)Y(u)du$$

$$+\int_o^t (t-u)e^{-u}Y(u)du=\frac{t^٥}{٢٠}-\frac{٥t^٣}{٦}+t$$

و از آنجا :

$$Y(t)+\int_o^t [١+t-٢u+(t-u)e^{-u}]\,Y(u)\,du=\frac{t^٥}{٢٠}-\frac{٥t^٣}{٦}+t-٣$$

مثال ٣ـ معادله دیفرانسیل :

$$Y^{(IV)}(t)-٤Y'''(t)+٦Y''(t)-٤Y'(t)+Y(t)=٣\cos ٢t$$

$$Y(o)=-١\ ,\ Y'(o)=٤\ ,\ Y''(o)=o\ ,\ Y'''(o)=٢$$

را به معادله انتگرال تبدیل کنید.

حل ـ قرار میدهیم $Y^{(IV)}(t)=V(t)$. مانند مثال یک و دو چنین داریم :

$$Y'''(t)=\int_o^t V(u)du+٢\quad,\quad Y''(t)=\int_o^t (t-u)V(u)du+٢t$$

$$Y'(t)=\int_o^t \frac{(t-u)^٢}{٢!}V(u)du+t^٢+٤$$

$$Y(t)=\int_{0}^{t}\frac{(t-u)^{۳}}{۳!}V(u)du+\frac{t^{۳}}{۳}+۴t-۱$$

اگر مقادیر فوق را در معادله دیفرانسیل درج کنیم خواهیم داشت :

$$Y^{(IV)}(t)=V(t)=۲۵-۱۶t+۴t^{۲}-\frac{۱}{۳}t^{۳}+۳\cos ۲t$$

$$+\int_{0}^{t}[۴-۶(t-u)+۲(t-u)^{۲}-\frac{۱}{۶}(t-u)^{۳}]V(u)du$$

روش دوم ـ اگر مانند روش دوم مثالهای یک و دو مرتباً در فاصله $(0, t)$ از معادله دیفرانسیل انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$Y(t)=\int_{0}^{t}[۴-۶(t-u)+۲(t-u)^{۲}-\frac{۱}{۶}(t-u)^{۳}]Y(u)du$$

$$=-\frac{۱۹}{۱۶}+۸t-\frac{۸۵t^{۲}}{۸}+۵t^{۳}+\frac{۳}{۱۶}\cos ۲t$$

معادلات انتگرال مثال فوق و همچنین معادلات انتگرالهای مثالهای دوم و سوم ، معادلات انتگرال ولترا میباشد زیرا حدود انتگرال گیری بین صفر و t میباشد . بطورکلی این نوع معادلات انتگرال ازمعادلات دیفرانسیل خطی بوجود میآیند که شرایط اولیه در یک نقطه معین داده شده باشد. همانطورکه ذیلاً خواهیم دید چنانچه شرایط اولیه برای یک معادله دیفرانسیل خطی در دو نقطه داده شده باشد ، معادلات انتگرال فرد هولم بدست میآید.

مثال ۴ـ معادله دیفرانسیل :

$$Y''(t)+\lambda Y(t)=0\ ,\ Y(0)=0\ ,\ Y(۱)=0$$

را که در آن λ مقداری است ثابت، بیک معادله انتگرال تبدیل کنید.

حل ـ

روش اول ـ قرار میدهیم :

$$Y'(0)=c\quad ,\quad Y''(t)=V(t)$$

$$(I)\quad Y'(t)=\int_{\circ}^{t} V(u)du+c \quad , \quad Y(t)=\int_{\circ}^{t} (t-u)V(u)du+ct$$

ولی چون $Y(١)=o$ است لذا باید داشته باشیم :

$$\int_{\circ}^{١} (١-u)V(u)du+c=o \quad , \quad c=\int_{\circ}^{١} (u-١)V(u)du$$

پس از قرار دادن مقدار c در دومین رابطه (I) چنین داریم :

$$Y(t)=\int_{\circ}^{t} (t-u)V(u)du+\int_{\circ}^{١} (tu-t)V(u)du$$

$$=\int_{\circ}^{t} (t-u)V(u)du+\int_{\circ}^{t} (tu-t)V(u)du+\int_{t}^{١} (tu-t)V(u)du$$

$$=\int_{\circ}^{t} (t-١)uV(u)du+\int_{t}^{١} (u-١)tV(u)dt$$

$$Y(t)=\int_{\circ}^{١} K(t , u)V(u)du$$

که در آن :

$$K(t , u)=\begin{cases} (t-١)u & u<t \\ (u-١)t & u>t \end{cases}$$

[$K(t , u)$ متقارن است زیرا $K(t , u)=K(u , t)$]

بالنتیجه معادله انتگرال مطلوب عبارت است از :

$$V(t)+\lambda\int_{\circ}^{١} K(t , u)V(u)du=o$$

$$V(t)=-\lambda\int_{\circ}^{١} K(t , u)V(u)du$$

روش دوم ــ انتگرال گیری ازدوطرف معادله دیفرانسیل بین صفر و t منجر برابطه زیر میگردد :

$$Y'(t)-Y'(0)+\lambda\int_0^t Y(u)du=0$$

انتگرال گیری دیگر بین صفر و t رابطه زیر را بدست میدهد :

$$Y(t)-Y(0)-Y'(0)t+\lambda\int_0^t (t-u)Y(u)du=0$$

پس ازقراردادن $Y(0)=0$ در رابطه بالا چنین داریم :

$$Y(t)=Y'(0)t-\lambda\int_0^t (t-u)Y(u)du \tag{I}$$

با منظور داشتن $t=۱$ و بکار بردن $Y(۱)=0$ در رابطه بالا خواهیم داشت :

$$Y'(0)=\lambda\int_0^{۱} (۱-u)Y(u)du \tag{II}$$

پس از جایگزین کردن رابطه (II) در رابطه (I) چنین داریم :

$$Y(t)=\lambda\int_0^{۱} (t-tu)Y(u)du-\lambda\int_0^t (t-u)Y(u)du$$

$$=\lambda\int_0^t (t-tu)Y(u)du+\lambda\int_t^{۱} (t-tu)Y(u)du$$

$$-\lambda\int_0^t (t-u)Y(u)du$$

$$=\lambda\int_0^t u(۱-t)Y(u)du+\lambda\int_t^{۱} t(۱-u)Y(u)du$$

$$=-\lambda\int_0^{۱} K(t,u)Y(u)du$$

که درآن :

$$K(t\,,\,u)=\begin{cases}(t-۱)u & u<t\\(u-۱)t & u>t\end{cases}$$

این معادله انتگرال معادله فردهولم با کرنل متقارن میباشد.

مثال هـ معادله انتگرال :

$$Y(t)=۳t-٤-۲\sin t+\int_{۰}^{t}[(t-u)^{۲}-۳(t-u)+۲]Y(u)du$$

را به معادله دیفرانسیل تبدیل کنید.

حل ـ بااستفاده از دستور لیبنیز :

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}K(u\,,\,t)du=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial K}{\partial t}\,du+K[b(t)\;,\;t]\frac{db}{dt}$$

$$-K[a(t)\;,\;t]\frac{da}{dt}$$

و مشتق گیری از دو طرف معادله خواهیم داشت :

$$\text{(I)}\quad Y'(t)=۳-۲\cos t+\int_{۰}^{t}۲(t-u)Y(u)du-۳\int_{۰}^{t}Y(u)du+۲Y(t)$$

$$\text{(II)}\quad Y''(t)=۲\sin t+۲\int_{۰}^{t}Y(u)du-۳Y(t)+۲Y'(t)$$

$$Y'''(t)=۲\cos t+۲Y(t)-۳Y'(t)+۲Y''(t)$$

و یا :

$$Y'''-۲Y''+۳Y'-۲Y=۲\cos t$$

اگر در معادله اصلی و روابط (I) و (II)، $t=۰$ اختیارگردد چنین داریم :

$$Y(o)=-٤ \; , \; Y'(o)=-۷ \; , \; Y''(o)=-۲$$

۹۶ . ۸- معادلات انتگرال از نوع کانولوشین

یکی از حالتهای خاص معادله انتگرال که اغلب درعمل باآن برخورد میکنیم عبارت است از :

$$Y(t)=F(t)+\int_{o}^{t}K(t-u)Y(u)du \qquad (۸ . ۹۶)$$

این معادله از نوع کانولوشین بوده و میتوان‌آنرا بصورت زیر نوشت:

$$Y(t)=F(t)+K(t)^{*}Y(t)$$

اگر از دو طرف معادله بالا نقش لاپلاس گرفته و فرض کنیم $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$ و $\mathscr{L}\left\{K(t)\right\}=k(s)$ موجود باشد خواهیم داشت :

$$y(s)=f(s)+k(s)y(s) \quad , \quad y(s)=\frac{f(s)}{۱-k(s)}$$

جواب مطلوب را میتوان با یافتن وارونه رابطه فوق بدست آورد .

مثال ۱ــ معادله انتگرال زیر را حل کنید :

$$Y(t)=t^{۲}+\int_{o}^{t}Y(u)\sin(t-u)du$$

حل ــ معادله انتگرال را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$Y(t)=t^{۲}+Y(t)^{*}\sin t$$

باگرفتن نقش لاپلاس از دو طرف معادله و بکار بردن قضیه کانولوشین و جداول مندرج درشماره (۲ . ۸) چنین داریم :

$$y=\frac{۲}{s^{۳}}+\frac{y}{s^{۲}+۱} \qquad , \qquad y=\mathscr{L}\left\{Y\right\}$$

$$y=\frac{۲(s^{۲}+۱)}{s^{٥}}=\frac{۲}{s^{۳}}+\frac{۲}{s^{٥}}$$

و از آنجا :

$$Y=۲\left(\frac{t^{۲}}{۲!}\right)+۲\left(\frac{t^{٤}}{٤!}\right)=t^{۲}+\frac{۱}{۱۲}t^{٤}$$

صحت این جواب را میتوان با جایگزین نمودن رابطه بالا در معادله انتگرال تأیید کرد.

مثال ۲ـ معادله انتگرال زیر را حل کنید :

$$\int_{0}^{t}Y(u)Y(t-u)du=۱٦sin٤t$$

حل ـ پس‌ازگرفتن نقش لاپلاس از دو طرف معادله و استفاده از جدول مندرج در شماره (۲ . ۸) به ترتیب چنین داریم :

$$Y(t)^{*}Y(t)=۱٦sin٤t \quad ; \quad \left\{y(s)\right\}^{۲}=\frac{٦٤}{s^{۲}+۱٦}$$

و یا :

$$y(s)=\pm\frac{۸}{\sqrt{s^{۲}+۱٦}}$$

لذا :

$$Y(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y(s)\right\}=\pm۸J_{\circ}(٤t)$$

بالنتیجه $Y(t)=۸J_{\circ}(٤t)$ و $Y(t)=-۸J_{\circ}(٤t)$ هردو جواب مسئله هستند.

مثال ۳ـ معادله انتگرال زیر را حل کنید :

$$Y(t)=\frac{۱}{۲}sin۲t+\int_{0}^{t}Y(u)Y(t-u)du$$

حل ـ رابطه بالا را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$Y(t)=\frac{۱}{۲}sin۲t+Y(t)^{*}Y(t)$$

پس‌ازگرفتن نقش لاپلاس ازدو طرف معادله واستفاده از قضیه کانولوشین خواهیم داشت :

$$y(s)=\frac{۱}{s^{۲}+٤}+\left\{y(s)\right\}^{۲}$$

$$\left\{y(s)\right\}^{۲}-y(s)+\frac{۱}{s^{۲}+٤}=o$$

پس‌از حل کردن معادله بالا چنین داریم :

$$y(s)=\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۱-\frac{٤}{s^{۲}+٤}}=\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲}\cdot\frac{s}{\sqrt{s^{۲}+٤}}$$

$$\text{(I)}\qquad y(s)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{s^{۲}+٤}+s}{\sqrt{s^{۲}+٤}}\right)$$

$$y(s)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{s^{۲}+٤}-s}{\sqrt{s^{۲}+٤}}\right)$$

و یا :

$$Y(t)=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{s^{۲}+٤}-s}{\sqrt{s^{۲}+٤}}\right)\right\}=J_{۱}(۲t)$$

رابطه (I) را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$y(s)=-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{s^{۲}+٤}-s}{\sqrt{s^{۲}+٤}}-۲\right)=۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{s^{۲}+٤}-s}{\sqrt{s^{۲}+٤}}\right)$$

و از آنجا :

$$Y(t)=\delta(t)-J_{۱}(۲t)$$

که در آن $\delta(t)$ تابع **دلتای دیراك** است.

۹۷ . ۸- معادلات انتگرال آبل - مسئله تاتوکرون

یکی از اشکال مهم معادله انتگرال نوع کانولوشین معادله **انتگرال آبل** که بشکل زیر است میباشد :

$$\int_{0}^{t} \frac{Y(u)}{(t-u)^{\alpha}}du = G(t) \qquad (۸ . ۹۷)$$

$G(t)$ تابع معلومی از t و $0 < \alpha < ۱$ مقداری است ثابت.

یکی از موارد استعمال معادله انتگرال آبل دریافتن شکل سیم بدون اصطکاک که درصفحه قائم‌قرار دارد و مهره‌یی برآن نهاده شده است میباشد. بعبارت دیگر مهره‌یی برروی سیم بدون اصطکاکی که درصفحه قائم‌واقع شده است قرار میدهیم. میخواهیم‌شکل سیم را چنان تعیین کنیم که مهره را از هرنقطه سیم رها کنیم در یک لحظه T به پایین‌ترین نقطه سیم‌برسد. این مسئله‌رامسئله **تاتوکرون*** نامندونشان میدهیم که‌شکل‌سیم سیکلوییداست.

مثال ۱ـ معادله :

$$\int_{0}^{t} \frac{Y(u)du}{\sqrt{t-u}} = ۱+t+t^{۲}$$

را حل کنید.

حل ـ معادله بالا را میتوان بشکل زیرنوشت :

$$Y(t)^{*}t^{-\frac{۱}{۲}} = ۱+t+t^{۲}$$

اگر از دو طرف رابطه بالا نقش لاپلاس بگیریم چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{Y\right\}\mathscr{L}\left\{t^{-\frac{۱}{۲}}\right\} = \mathscr{L}\left\{۱+t-t^{۲}\right\}$$

$$\frac{y\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}{s^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{s} + \frac{۱}{s^{۲}} + \frac{۲}{s^{۳}}$$

$$y = \frac{۱}{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}\left\{\frac{۱}{s^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{۱}{s^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{۲}{s^{\frac{۵}{۲}}}\right\}$$

Tautochrone *

و یا :

$$Y=\frac{۱}{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}\left\{\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}+\frac{t^{\frac{۱}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right)}+\frac{۲t^{\frac{۵}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۵}{۲}\right)}\right\}$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left(t^{-\frac{۱}{۲}}+۲t^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۲}{۳}t^{\frac{۳}{۲}}\right)=\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{۳\pi}\ (۳+۶t+۸t^{۲})$$

معادله انتگرال حالت خاصی از معادله انتگرال آبل است.

مثال ۲ـ سهره‌یی مقید است که برروی سیم بدون اصطکاکی که در صفحه قائم قرار دارد حرکت کند. اگر مهره از حالت سکون از هرنقطه سیم حرکت نموده و تحت نیروی ثقل سقوط کند زمان لازم برای سقوط به پایین‌ترین نقطه سیم را بیابید.

حل ـ فرض میکنیم مهره دارای جرم m بوده و از حالت سکون ازنقطه $A(x_{۰}\ ,\ y_{۰})$ حرکت نماید و پایین‌ترین نقطه سیم مبدأ مختصات باشد. اگر $Q\,(x\ ,\ y)$ وضع مهره در لحظه t برروی سیم و σ طول قوس OQ باشد بااستفاده از قانون حفظ انرژی چنین داریم.

+ انرژی سینتیک درنقطه P = انرژی پتانسیل درنقطه Q + انرژی سینتیک درنقطه Q
انرژی پتانسیل در نقطه P

$$mgy+\frac{۱}{۲}\,m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^{۲}=mgy_{۰}+o$$

$\frac{d\sigma}{dt}$ شتاب مهره در نقطه Q است. لذا :

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^{۲}=۲g(y_{۰}-y)$$

بااستفاده ازاین مطلب که σ تابع نزولی از زمان t میباشد. خواهیم داشت :

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\sqrt{۲g(y_{۰}-y)} \qquad \text{(I)}$$

بالنتیجه T زمان لازم برای‌آنکه مهره از نقطه P واقع برسیم به نقطه o پایین‌ترین نقطه‌خود برسد عبارت است از :

$$(II) \qquad T=\int_{۰}^{T} dt=\int_{y_{۰}}^{۰} \frac{-d\sigma}{\sqrt{۲g(y_{۰}-y)}}=\int_{۰}^{y_{۰}} \frac{d\sigma}{\sqrt{۲g(y_{۰}-y)}}$$

اگر شکل منحنی در دست باشد طول قوس منحنی را میتوان برحسب y بیان داشت و لذا :

$$(III) \qquad d\sigma=F(y)dy$$

$$(IV) \qquad T=\frac{۱}{\sqrt{۲g}}\int_{۰}^{y_{۰}} \frac{F(y)dy}{\sqrt{y_{۰}-y}}$$

در حالت کلی T تابعی از $y_{۰}$ یعنی وضعیت اولیه میباشد.

مثال ۳ـ مطلوب است تعیین شکل سیم مذکور درمثال (۲) مشروط برآنکه‌دررابطه (IV) زمان T مستقل از $y_{۰}$ باشد.

حل - دراینحالت باید $F(y)$ را چنان تعیین کرد که عبارت T درمعادله :

$$T=\frac{۱}{\sqrt{۲g}}\int_{۰}^{y_{۰}} \frac{F(y)}{\sqrt{y_{۰}-y}}\,dy$$

مقدار ثابت باشد.

معادله انتگرال‌فوق‌از نوع کانولوشین بوده وهمچنین حالت خاصی از معادله انتگرال آبل است و میتوان آنرا بشکل زیر نوشت :

$$\sqrt{۲g}\,T=F(y)*y^{-\frac{۱}{۲}}$$

پس‌ازگرفتن نقش لاپلاس از دو طرف معادله و بااستفاده از روابط :

$$\mathscr{L}\Big\{F(y)\Big\}=f(s) \quad , \quad \mathscr{L}\Big\{y^{-\frac{۱}{۲}}\Big\}=\frac{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}{s^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{۱}{۲}}}$$

چنین داریم :

$$\frac{\sqrt{۲g}\,T}{s}=f(s)\,\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{۱}{۲}}} \quad , \quad f(s)=\frac{T\sqrt{۲g}}{\sqrt{\pi}\,s^{\frac{۱}{۲}}}$$

نقش لاپلاس وارونه رابطه بالا عبارت است از :

(I)

$$F(y)=\frac{T\sqrt{۲g}}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{\frac{۱}{۲}}}\right\}=\frac{T\sqrt{۲g}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{y^{-\frac{۱}{۲}}}{\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{T\sqrt{۲g}}{\pi}y^{-\frac{۱}{۲}}$$

ولی از طرف دیگر :

$$\frac{d\sigma}{dy}=\frac{\sqrt{dx^۲+dy^۲}}{dy}=\sqrt{۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲}$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه (III) مثال دو و رابطه (I) همین مسئله چنین داریم :

$$\text{(II)}\qquad\sqrt{۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲}=\frac{d\sigma}{dy}=F(y)=\frac{T\sqrt{۲g}}{\pi}y^{-\frac{۱}{۲}}$$

اکنون اگر قرار دهیم :

$$\sqrt{b}=\frac{T\sqrt{۲g}}{\pi}\qquad,\qquad b=\frac{۲gT^۲}{\pi^۲}$$

رابطه (II) با توجه بآنکه ضریب زاویه مثبت است بشکل زیر درمیآید :

$$۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲=\frac{b}{y}\qquad,\qquad\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{b-y}{y}}$$

$$\text{(III)}\qquad x=\int\sqrt{\frac{b-y}{y}}\,dy+c$$

اگر در انتگرال فوق قرار دهیم $y=b\sin^۲\theta$ چنین داریم :

$$x=\sqrt{\frac{b\cos^۲\theta}{b\sin^۲\theta}}\cdot۲b\sin\theta\cos\theta+c$$

$$=\int۲b\cos^۲\theta\,d\theta+c=b\int(۱+\cos\theta)d\theta+c=\frac{b}{۲}(۲\theta+\sin۲\theta)+c$$

بالنتیجه معادلات پارامتری منحنی مطلوب عبارت است از :

$$x=\frac{b}{۲}(۲\theta+\sin ۲\theta)+c \quad , \quad y=b\sin^{۲}\theta=\frac{b}{۲}(۱-\cos ۲\theta)$$

ولی‌چون منحنی‌بایداز مبداء مختصات $x=o$, $y=o$ بگذردلذا $c=o$ بوده و اگر :

$$a=\frac{b}{۲}=\frac{gT^{۲}}{\pi^{۲}} \quad , \quad \varphi=۲\theta$$

باشد معادلات پارامتری خم عبارت خواهد بود از :

$$x=a(\varphi+\sin\varphi) \quad , \quad y=a(۱-\cos\varphi)$$

همانطورکه میدانیم معادلات بالا معادلات پارامتری سیکلویید است.

۸ . ۹۸ - معادلات انتگرال - دیفرانسیل

معادله انتگرال - دیفرانسیل ، معادله انتگرالی است که شامل مشتقهای $Y(t)$ تابع مجهول میباشد. مثلاً :

$$Y''(t)=Y(t)+\sin t+\int_{۰}^{t}\cos(t-u)Y(u)du \qquad (۸ . ۹۸)$$

یک معادله انتگرال - دیفرانسیل است.

با در دست‌داشتن شرایط اولیه میتوان این نوع معادلات‌را بااستفاده از نقش‌لاپلاس حل کرد.

مثال ۱ـ معادله :

$$(I) \qquad Y'(t)+۵\int_{۰}^{t}\cos ۲(t-u)Y(u)du=۱۰ \quad , \quad Y(o)=۲$$

را حل کنید.

حل ــ بااستفاده از خاصیت کانولوشین $(F^*G=G^*F)$ رابطه بالا را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$Y'(t)+۵\cos ۲t^*Y(t)=۱۰$$

پس‌ازگرفتن نقش لاپلاس دو طرف رابطه بالا چنین داریم :

$$sy-Y(o)+\frac{٥sy}{s^{۲}+٤}=\frac{۱۰}{s}$$

$$y=\frac{۲s^{۳}+۱۰s^{۲}+۸s+٤۰}{s^{۲}(s^{۲}+۹)}$$

و درنتیجه :

$$Y=\frac{۱}{۲۷}\,(۲٤+۱۲۰t+۳۰\cos ۳t+٥۰\sin ۳t)$$

باید درنظر داشت که معادله انتگرال ـ دیفرانسیل(I) را پس‌از انتگرال گیری بین صفر و t و بادرنظرگرفتن شرط اولیه $Y(o)=۲$ میتوان به یک معادله انتگرال تبدیل کرد.

$$Y(t)+٥\int_{o}^{t}(t-u)\cos ۲(t-u)Y(u)du=۱۰t+۲$$

۹۹ . ۸ ـ معادلات تفاوت ـ معادلات دیفرانسیل ـ تفاوت

معادلات تفاوت ، معادلاتی‌هستند که‌تابع $Y(t)$ را با یک یاچند تابع $Y(t-\alpha)$ مربوط میکنند. α مقداری است ثابت. مثلاً :

$$Y(t)-٤Y(t-۱)+۳Y(t-۲)=t$$

یک **معادله تفاوت** میباشد.

در مسائل مختلف عملی ممکن است معادله تفاوت را چنان طرح نمود که با شرایط اولیه خاصی بخواهیم‌تابع مجهولی مانند $Y(t)$ را بدست‌آوریم. بااستفاده از نقش لاپلاس میتوان این تابع را بدست آورد.

معادلات تفاوت که شامل روابطی از جمل دنباله ... , $a_{۲}$, $a_{۱}$, a_{o} هستند میتوان با نقش لاپلاس حل کرد. مثلاً :

$$a_{n+۲}-٥a_{n+۱}+٦a_{n}=o\quad ,\quad a_{o}=o\ ,\ a_{۱}=۱$$

معادله دیفرانسیل ـ تفاوت معادله تفاوتی میباشد که شامل مشتقهای مراتب مختلف تابع $Y(t)$ باشد. لذا مثلاً :

$$Y'(t)=Y(t-۱)+۲t$$

یک معادله دیفرانسیل ـ تفاوت است.

ضمناً ممکن است یک معادله تفاوت‌انتگرال ـ دیفرانسیل داشته باشیم. این معادله ، یک معادله‌دیفرانسیل ـ تفاوت‌است که تابع مجهول $Y(t)$ در زیر علامت انتگرال است

مثال ۱ـ معادله تفاوت زیر را حل کنید :

$$۳Y(t)-٤Y(t-۱)+Y(t-۲)=t \quad ; \quad Y(t)=0 \ , \ t<0$$

حل ـ اگر از دو طرف رابطه بالا نقش لاپلاس بگیریم خواهیم داشت :

$$\text{(I)} \qquad ۳\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}-٤\mathscr{L}\left\{Y(t-۱)\right\}+\mathscr{L}\left\{Y(t-۲)\right\}=\mathscr{L}\left\{t\right\}=\frac{۱}{s^۲}$$

اکنون :

$$\mathscr{L}\left\{Y(t-۱)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}Y(t-۱)dt=\int_{-۱}^\infty e^{-s(u+۱)}Y(u)du$$

$$[t=u+۱]$$

$$=e^{-s}\int_{-۱}^{0} e^{-su}Y(u)du+e^{-s}\int_0^\infty e^{-su}Y(u)du=e^{-s}y$$

و :

$$\mathscr{L}\left\{Y(t-۲)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}Y(t-۲)dt=\int_{-۲}^\infty e^{-s(u+۲)}Y(u)du$$

$$[t=u+۲]$$

$$=e^{-۲s}\int_{-۲}^{0} e^{-su}Y(u)du+e^{-۲s}\int_0^\infty e^{-su}Y(u)du$$

$$=e^{-۲s}y$$

زیرا بنابفرض مسئله برای مقادیر $u < 0$ ، $Y(u)=0$ است. لذا :

$$\int_{-۱}^{0} e^{-su}Y(u)du=0 \quad , \quad \int_{-۲}^{0} e^{-su}Y(u)du=0$$

بالنتیجه رابطه (I) بصورت زیر نوشته میشود :

$$۳y-٤e^{-s}y+e^{-۲s}y=\frac{۱}{s^{۲}}$$

$$y=\frac{۱}{s^{۲}(۳-٤e^{-s}+e^{-۲s})}=\frac{۱}{s^{۲}(۱-e^{-s})(۳-e^{-s})}$$

$$=\frac{۱}{۲s^{۲}}\left[\frac{۱}{۱-e^{-s}}-\frac{۱}{۳-e^{-s}}\right]=\frac{۱}{۲s^{۲}}\left[\frac{۱}{۱-e^{-s}}-\frac{۱}{۳\left(۱-\frac{e^{-s}}{۳}\right)}\right]$$

$$=\frac{۱}{۲s^{۲}}\left\{(۱+e^{-s}+e^{-۲s}+e^{-۳s}+\cdots)\right.$$

$$\left.-\frac{۱}{۳}\left(۱+\frac{e^{-s}}{۳}+\frac{e^{-۲s}}{۳^{۲}}+\frac{e^{-۳s}}{۳^{۳}}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{۱}{۳s^{۲}}+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(۱-\frac{۱}{۳^{n}}\right)\frac{e^{-ns}}{s^{۲}}$$

و از آنجا :

$$Y=\frac{t}{۳}+\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{[t]}\left(۱-\frac{۱}{۳^{n}}\right)(t-n)$$

که در آن $[t]$ بزرگترین عدد درست کوچکتر یا مساوی t است.

مثال۲ـ فرض میکنیم برای مقادیر $n \leqslant t < n+۱$ تابع $Y(t)=a_n$ باشد $(n=0 , ۱ , ۲ , \ldots)$. مطلوب است تعیین :

$$\mathscr{L}\left\{Y(t)\right\}=y(s) \text{ برحسب } \mathscr{L}\left\{Y(t+۲)\right\} \ , \ \mathscr{L}\left\{Y(t+۱)\right\}$$

حل ـ قرار میدهیم $t+۱=u$. لذا :

$$\mathscr{L}\left\{Y(t+۱)\right\}=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}Y(t+۱)dt=e^{s}\int_{۱}^{\infty} e^{-su}Y(u)du$$

$$=e^{s}\int_{۰}^{\infty} e^{-su}Y(u)du-e^{s}\int_{۰}^{۱} e^{-su}Y(u)du$$

ولی چون برای مقادیر $۰\leqslant t<۱$ ، $Y(t)=a_{۰}$ است . لذا :

$$\mathscr{L}\left\{Y(t+۱)\right\}=e^{s}y(s)-e^{s}\int_{۰}^{۱} e^{-su}a_{۰}du=e^{s}y(s)-\frac{a_{۰}e^{s}(۱-e^{-s})}{s}$$

برای محاسبه $\mathscr{L}\left\{Y(t+۲)\right\}$ برحسب $y(s)$ قرار میدهیم $t+۲=u$. پس :

$$\mathscr{L}\left\{Y(t+۲)\right\}=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}Y(t+۲)dt=e^{۲s}\int_{۲}^{\infty} e^{-su}Y(u)du$$

$$=e^{۲s}\left[\int_{۰}^{\infty} e^{-su}Y(u)du-\int_{۰}^{۱} e^{-su}Y(u)du-\int_{۱}^{۲} e^{-su}Y(u)du\right]$$

$$=e^{۲s}y(s)-e^{۲s}\int_{۰}^{۱} e^{-su}a_{۰}du-e^{۲s}\int_{۱}^{۲} e^{-su}a_{۱}du$$

زیرا برای مقادیر $۰\leqslant t<۱$ تابع $Y(t)=a_{۰}$ و برای مقادیر $۱\leqslant t<۲$ تابع $Y(t)=a_{۱}$ است .

$$=e^{۲s}y(s)-\frac{a_{۰}e^{۲s}(۱-e^{-s})}{s}-\frac{a_{۱}e^{۲s}(e^{-s}-e^{-۲s})}{s}$$

$$=e^{۲s}y(s)-\frac{e^{s}(۱-e^{-s})(a_{۰}e^{s}+a_{۱})}{s}$$

مثال ۳ـ فرض میکنیم دنباله $\left\{a_n\right\}$ ازمقادیر ثابت ... , $a_۲$, $a_۱$, $a_۰$ **دررابطه برگشت** که با معادله تفاوت زیر مشخص میشود صدق کند :

$$a_{n+۲}-۵a_{n+۱}+۶a_n=0 \quad , \quad a_۰=0 \;,\; a_۱=۱ \tag{I}$$

رابطه‌یی برای a_n بدست آورید و یا بعبارت دیگر معادله تفاوت را برحسب a_n حل کنید.

حل ـ برای مقادیر $n\leqslant t<n+۱$ تابع $Y(t)$ را بارابطه‌زیر مشخص میکنیم:

$$Y(t)=a_n \qquad n\leqslant t<n+۱ \qquad n=0\,,۱\,,۲\,,\dots$$

رابطه (I) بااستفاده از رابطه بالا بصورت زیر درمیآید :

$$Y(t+۲)-۵Y(t+۱)+۶Y(t)=0$$

پس‌از یافتن نقش لاپلاس دو طرف معادله فوق وبکار بردن نتایج مثال ۲ شماره(۹۸ . ۸) $(a_۰=0 \;,\; a_۱=۱)$ چنین داریم :

$$e^{۲s}y(s)-\frac{e^s(۱-e^{-s})}{s}-۵e^sy(s)+۶y(s)=0$$

$$(e^{۲s}-۵e^s+۶)y(s)=\frac{e^s(۱-e^{-s})}{s}$$

و از آنجا :

$$y(s)=\frac{e^s(۱-e^{-s})}{s(e^{۲s}-۵e^s+۶)}=\frac{e^s(۱-e^{-s})}{s}\left\{\frac{۱}{(e^s-۳)(e^s-۲)}\right\}$$

$$=\frac{e^s(۱-e^{-s})}{s}\left[\frac{۱}{e^s-۳}-\frac{۱}{e^s-۲}\right]$$

$$=\frac{۱-e^{-s}}{s}\left[\frac{۱}{۱-۳e^{-s}}-\frac{۱}{۱-۲e^{-s}}\right]$$

حال میخواهیم‌نقش وارونه $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱-e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}$ را بیابیم :

$$\frac{۱-e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}=\frac{۱-e^{-s}}{s}\cdot\frac{۱}{۱-re^{-s}}$$

$$=\frac{۱-e^{-s}}{s}(۱+re^{-s}+r^{۲}e^{-۲s}+\cdots)$$

$$=\int_{۰}^{۱} e^{-st}r^{۰}dt+\int_{۱}^{۲} e^{-st}r\,dt+\int_{۲}^{۳} e^{-st}r^{۲}dt+\cdots$$

$$=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

که درآن برای مقادیر $n\leqslant t<n+۱$ تابع $F(t)=r^n$ ، $n=۰,۱,۲,\ldots$ است. پس :

$$\text{(II)}\qquad \mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱-e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}=F(t)=r^n \quad , \quad n\leqslant t<n+۱$$

لذا :

$$Y(t)=a_n=\mathscr{L}^{-۱}\left\{y(s)\right\}=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱-e^{-s}}{s(۱-۳e^{-s})}\right\}-\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{۱-e^{-s}}{s(۱-۲e^{-s})}\right\}$$

و از آنجا بااستفاده از رابطه (II) خواهیم داشت :

$$Y(t)=a_n=۳^n-۲^n \quad , \quad n=۰,۱,۲,\ldots$$

میتوان نشان‌داد که جواب فوق‌در رابطه (I) صدق میکند زیرا اگر $a_n=۳^n-۲^n$ باشد واضح است که $a_۰=۰$, $a_۱=۱$ است. از طرف دیگر :

$$a_{n+۲}-۵a_{n+۱}+٦a_n=(۳^{n+۲}-۲^{n+۲})-۵(۳^{n+۱}-۲^{n+۱})+٦(۳^n-۲^n)$$

$$=۹.۳^n-٤.۲^n-۱۵.۳^n+۱۰.۲^n+٦.۳^n-٦.۲^n=۰$$

مثال ۴ـ معادله تفاوت :

$$a_{n+۲}-۵a_{n+۱}+٦a_n=٤^n \quad , \quad a_۰=۰ , a_۱=۱$$

را حل کنید .

حل ــ تنها اختلاف این مثال با مثال سه در آن است که در مثال اخیر سمت راست شامل جمله ۴^n است. این معادله را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$Y(t+۲)-۵Y(t+۱)+۶Y(t)=F(t)$$

که در آن برای مقادیر $n \leqslant t < n+۱$:

$$Y(t)=a_n \;,\; F(t)=۴^n \quad ; \quad n=۰,۱,۲,\ldots$$

اگر از دو طرف رابطه بالا نقش لاپلاس گرفته و از مثال دوم شماره (۹۹ . ۸) با توجه بمقادیر $a_۱=۱ \;,\; a_۰=۰$ استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\text{(I)} \qquad e^{۲s}y(s)-\frac{e^s}{s}(۱-e^{-s})-۵e^sy(s)+۶y(s)=\mathscr{L}\left\{۴^n\right\}$$

اکنون برای محاسبه $\mathscr{L}\left\{۴^n\right\}$ مسئله کلی‌تر زیر را درنظر میگریم.

اگربرای مقادیر $n \leqslant t < n+۱$ تابع $F(t)=r^n$ $(n=۰,۱,۲,۳,\ldots)$ باشد مقدار $\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}$ را محاسبه کنید.

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\int_۰^\infty e^{-st}F(t)dt=\int_۰^۱ e^{-st}r^\circ dt$$

$$+\int_۱^۲ e^{-st}rdt+\int_۲^۳ e^{-st}r^۲dt+\cdots$$

$$=\frac{۱-e^{-s}}{s}+r\left(\frac{e^{-s}-e^{-۲s}}{s}\right)+r^۲\left(\frac{e^{-۲s}-e^{-۳s}}{s}\right)^۲+\cdots$$

$$=\frac{۱-e^{-s}}{s}(۱+re^{-s}+r^۲e^{-۲s}+\cdots)=\frac{۱-e^{-s}}{s}\cdot\frac{۱}{۱-re^{-s}}$$

$$=\frac{۱-e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}$$

با کمی توجه برابطه بالا وبااستفاده از تعریف نقش وارونه معلوم میگردد که :

$$\text{(II)}\qquad \mathscr{L}^{-١}\left\{\frac{١-e^{-s}}{s(١-٢e^{-s})}\right\}=F(t)=٢^{n}$$

و بدین ترتیب نتیجه‌یی را که درمثال سوم شماره (٩٩ . ٨) بدست آوردیم بار دیگر تأیید میشود.

رابطه (I) با توجه به مقدار $\mathscr{L}\left\{٤^{n}\right\}$ بشکل زیر نوشته میشود :

$$e^{٢s}y(s)-\frac{e^{s}}{s}(١-e^{-s})-٥e^{s}y(s)+٦y(s)=\frac{١-e^{-s}}{s(١-٤e^{-s})}$$

و از آنجا :

$$y(s)=\frac{e^{s}(١-e^{-s})}{s(e^{s}-٢)(e^{s}-٣)}+\frac{١-e^{-s}}{s(e^{s}-٢)(e^{s}-٣)(١-٤e^{-s})}$$

$$=\frac{e^{s}(١-e^{-s})}{s}\left[\frac{١}{e^{s}-٣}-\frac{١}{e^{s}-٢}\right]+\frac{e^{s}-١}{s(e^{s}-٢)(e^{s}-٣)(e^{s}-٤)}$$

$$=\frac{١-e^{-s}}{s}\left[\frac{١}{١-٣e^{-s}}-\frac{١}{١-٢e^{-s}}\right]$$

$$+\frac{e^{s}-١}{s}\left[\frac{\frac{١}{٢}}{e^{s}-٢}-\frac{١}{e^{s}-٣}+\frac{\frac{١}{٢}}{e^{s}-٤}\right]$$

$$=\frac{١-e^{-s}}{s}\left[\frac{١}{١-٣e^{-s}}-\frac{١}{١-٢e^{-s}}\right]$$

$$+\frac{١-e^{-s}}{s}\left[\frac{\frac{١}{٢}}{١-٢e^{-s}}-\frac{١}{١-٣e^{-s}}+\frac{\frac{١}{٢}}{١-٤e^{-s}}\right]$$

لذا نقش وارونه رابطه بالا بااستفاده از رابطه (II) عبارت خواهد بود از :

$$\mathbf{Y}(t)=a_{n}=٣^{n}-٢^{n}+\frac{١}{٢}\cdot ٢^{n}-٣^{n}$$

$$+\frac{١}{٢}\cdot ٤^{n}=\frac{١}{٢}\cdot ٤^{n}-\frac{١}{٢}\cdot ٢^{n}=\frac{١}{٢}(٤^{n}-٢^{n})$$

مثال ۵ـ معادله تفاوت :

$$a_{n+۲}-۷a_{n+۱}+۱۰a_n=۱٦n \quad ; \quad a_۰=٦ \;,\; a_۱=۲$$

حل ـ بروش مشابه مثالهای سه و چهار میتوان مثال بالا را بشکل زیر نوشت :

$$\text{(I)} \qquad Y(t+۲)-۷Y(t+۱)+۱۰Y(t)=F(t)$$

که درآن برای مقادیر $n \leqslant t < n+۱$:

$$Y(t)=a_n \;,\; F(t)=۱٦n \quad ; \quad n=0\,,۱\,,۲\,,\ldots$$

اگر از دو طرف رابطه بالا نقش لاپلاس گرفته و از مثال دوم شماره (۹۹ . ۸) با توجه بمقادیر $a_۱=۲$, $a_۰=٦$ استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\text{(II)} \qquad e^{۲s}y(s)-\frac{e^{s}(۱-e^{-s})(٦e^{s}+۲)}{s}-۷e^{s}y(s)+\frac{٤۲e^{s}(۱-e^{-s})}{s}$$

$$+۱۰y(s)=۱٦\mathscr{L}\left\{n\right\}$$

از طرف دیگر با توجه به تعریف $F(t)=۱٦n$ چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{n\right\}=\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$=\int_{۰}^{۱} e^{-st}r^{\circ}dt+\int_{۱}^{۲} e^{-st}(۱)dt+\int_{۲}^{۳} e^{-st}(۲)dt+\cdots$$

$$=(۱)\left(\frac{e^{-s}-e^{-۲s}}{s}\right)+(۲)\left(\frac{e^{-۲s}-e^{-۳s}}{s}\right)$$

$$+(۳)\left(\frac{e^{-۳s}-e^{-٤s}}{s}\right)+\cdots$$

$$=\frac{e^{-s}(۱-e^{-s})}{s}\,(۱+۲e^{-s}+۳e^{-۲s}+٤e^{-۳s}+\cdots)$$

ولی برای مقادیر $|x|<۱$ چنین داریم :

$$۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots=\frac{۱}{۱-x}$$

بامشتق گیری‌ازرابطه بالاچنین داریم :

$$۱+۲x+۳x^{۲}+٤x^{۳}+\cdots=\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}$$

بنابراین با قرار دادن $x=e^{-s}$ خواهیم داشت :

$$۱+۲e^{-s}+۳e^{-۲s}+٤e^{-۳s}+\cdots=\frac{۱}{(۱-e^{-s})^{۲}}$$

لذا :

$$\mathscr{L}\left\{F(t)\right\}=\frac{e^{-s}}{s(۱-e^{-s})} \qquad \text{(III)}$$

و ازآنجا نقش وارونه $\dfrac{e^{-s}}{s(۱-e^{-s})}$ عبارت خواهد بود از :

$$F(t)=n=\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-s}}{s(۱-e^{-s})}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

$$n\leqslant t<n+۱\ ,\ n=o\,,۱\,,۲\,,\ldots$$

بهرصورت رابطه (II) بااستفاده از رابطه (III) بشکل زیر نوشته میشود :

$$e^{۲s}y(s)-\frac{e^{s}(۱-e^{-s})(٦e^{s}+۲)}{s}-۷e^{s}y(s)+\frac{٤۲e^{s}(۱-e^{-s})}{s}$$

$$+۱۰y(s)=\frac{۱٦e^{-s}}{s(۱-e^{-s})}$$

و از آنجا :

$$y(s)=\frac{e^{s}(۱-e^{-s})(٦e^{s}+۲)}{s(e^{s}-٥)(e^{s}-۲)}-\frac{٤۲e^{s}(۱-e^{-s})}{s(e^{s}-٥)(e^{s}-۲)}$$

$$+\frac{۱٦e^{-s}}{s(۱-e^{-s})(e^{s}-٥)(e^{s}-۲)}$$

$$=e^{s}\left(\frac{۱-e^{-s}}{s}\right)\left[\frac{۶e^{s}+۲}{(e^{s}-۵)(e^{s}-۲)}\right]$$

$$-۴۲\left(\frac{۱-e^{-s}}{s}\right)\left[\frac{e^{s}}{(e^{s}-۵)(e^{s}-۲)}\right]$$

$$+\frac{۱۶}{s}\left[\frac{۱}{(e^{s}-۱)(e^{s}-۵)(e^{s}-۲)}\right]$$

$$=e^{s}\left(\frac{۱-e^{-s}}{s}\right)\left[\frac{\frac{۳۲}{۳}}{e^{s}-۵}-\frac{\frac{۱۴}{۳}}{e^{s}-۲}\right]$$

$$-\left(\frac{۱-e^{-s}}{s}\right)\left[\frac{۷۰e^{-s}}{۱-۵e^{-s}}-\frac{۲۸e^{-s}}{۱-۲e^{-s}}\right]$$

$$+\frac{۱}{s}\left[\frac{۴}{e^{s}-۱}+\frac{\frac{۴}{۳}}{e^{s}-۵}-\frac{\frac{۱۶}{۳}}{e^{s}-۲}\right]$$

و از آنجا بااستفاده از مثال (۳) و رابطه (II) چنین داریم :

$$a_n=\frac{۳۲}{۳}\cdot ۵^{n}-\frac{۱۴}{۳}\cdot ۲^{n}-۷۰\cdot ۵^{n-۱}+۲۸\cdot ۲^{n-۱}+۴(n-۱)$$

$$+\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۵}{۴}(۵^{n}-۱)-\frac{۱۶}{۳}\cdot\frac{۲}{۱}(۲^{n}-۱)$$

$$=۴\cdot ۲^{n}-۳\cdot ۵^{n}+۴n+۵$$

مثال ۶ـ عبارت زیر را محاسبه کنید :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(۱-e^{-s})e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}$$

حل ـ اگر $\mathscr{L}^{-۱}\left\{f(s)\right\}=F(t)$ باشد خواهیم داشت :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{e^{-s}f(s)\right\}=\begin{cases}F(t-۱) & t>۱\\ 0 & t<۱\end{cases}$$

از طرف دیگر بااستفاده از رابطه (II) مثال ۳ چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(۱-e^{-s})e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}=F(t-۱)=r^n$$

$$n\leqslant t-۱<n+۱ \quad ; \quad n=۰,۱,۲,۳,\dots$$

و یا :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{(۱-e^{-s})e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}=r^{n-۱}$$

$$n\leqslant t<n+۱ \quad ; \quad n=۱,۲,۳,\dots$$

مثال ۷ـ مقدار $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}$ را برای مقادیر $r\neq ۱$ و $r=۱$ محاسبه کنید.

حل ـ بااستفاده از قضیه دو جمله‌یی چنین داریم :

$$\frac{e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}=\frac{e^{-s}}{s}(۱+re^{-s}+r^۲e^{-۲s}+\cdots)$$

$$=\frac{e^{-s}}{s}+\frac{re^{-۲s}}{s}+\frac{r^۲e^{-۳s}}{s}+\cdots$$

$$=u(t-۱)+ru(t-۲)+r^۲u(t-۳)+\cdots$$

بالنتیجه برای مقادیر $t\geqslant ۱$:

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}=F(t)=\sum_{k=۱}^{[t]} r^k \qquad \text{(I)}$$

و برای مقادیر $t<۱$ عبارت $\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-s}}{s(۱-re^{-s})}\right\}$ متحد صفر میباشد.

لذا برای مقادیر $r\neq ۱$ و $n\leqslant t<n+۱$ رابطه (I) را میتوان بشکل زیر نوشت :

$$r+r^۲+r^۳+\cdots+r^n=\frac{r(r^n-۱)}{r-۱}$$

اگر $r=۱$ باشد برای مقادیر $n\leqslant t<n+۱$ تابع $F(t)=n$ بوده و بار دیگر صحت رابطه (IV) مثال ۵ تأیید میشود.

مثال ۸ــ معادله دیفرانسیل ـ تفاوت زیر را حل کنید :

$$Y'(t)+Y(t-۱)=t^{۲} \quad ; \quad Y(t)=۰ \ , \ t<۰$$

حل ـ اگر نقش لاپلاس دو طرف رابطه بالا را محاسبه کنیم چنین داریم :

$$\mathscr{L}\left\{Y'(t)\right\}+\mathscr{L}\left\{Y(t-۱)\right\}=\mathscr{L}\left\{t^{۲}\right\} \tag{I}$$

ولی :

$$\mathscr{L}\left\{t^{۲}\right\}=\frac{۲}{s^{۳}} \ ;$$

$$\mathscr{L}\left\{Y'(t)\right\}=s\,\mathscr{L}\left\{Y\right\}-Y(۰)=sy-۰=sy$$

$$\mathscr{L}\left\{Y(t-۱)\right\}=\int_{۰}^{\infty} e^{-st}Y(t-۱)dt=\int_{-۱}^{\infty} e^{-s(u+۱)}Y(u)du$$

$$[t=u+۱]$$

$$=e^{-s}\int_{-۱}^{۰} e^{-su}Y(u)du+e^{-s}\int_{۰}^{\infty} e^{-su}Y(u)du$$

$$=e^{-s}y$$

[زیرا برای مقادیر $u<۰$ مقدار $Y(u)=۰$ است].

و بالنتیجه رابطه(I) با درنظر داشتن روابط فوق بشکل زیر درمیآید :

$$sy+e^{-s}y=\frac{۲}{s^{۳}} \quad , \quad y=\frac{۲}{s^{۳}(s+e^{-s})}=\frac{۲}{s^{۴}\left(۱+\frac{e^{-s}}{s}\right)}$$

$$y=\frac{۲}{s^{۴}}\left(۱-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-۲s}}{s^{۲}}-\frac{e^{-۳s}}{s^{۳}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{۲}{s^{۴}}-\frac{۲e^{-s}}{s^{۵}}+\frac{۲e^{-۲s}}{s^{۶}}-\frac{۲e^{-۳s}}{s^{۷}}+\cdots$$

$$=۲\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-ns}}{s^{n+۴}}$$

از طرفی چنین داریم :

$$\mathscr{L}^{-۱}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+٤}}\right\}=\begin{cases}\dfrac{(t-n)^{n+۳}}{(n+۳)!} & t\geqslant n\\[2ex] 0 & \text{برای سایر مقادیر } t\end{cases}$$

لذا اگر $[t]$ بزرگترین عدد درست کوچکتر یامساوی n باشد خواهیم داشت :

$$Y(t)=۲\sum_{0}^{[t]}\frac{(t-n)^{n+۳}}{(n+۳)!}$$

مثال ۹ـ مطلوب‌است محاسبه مقادیر $Y(٤)$ و $Y(\pi)$ در مثال ۸ .

حل ـ چون $٤=[٤]$ است. لذا :

$$Y(٤)=۲\sum_{n=0}^{٤}\frac{(٤-n)^{n+۳}}{(n+۳)!}$$

$$=۲\left\{\frac{٤^{۳}}{۳!}+\frac{۳^{٤}}{٤!}+\frac{۲^{٥}}{٥!}+\frac{۱^{٦}}{٦!}\right\}=۲۸\,/\,٦۲ \qquad \text{(تقریباً)}$$

چون $۳=[\pi]$ است. لذا :

$$Y(\pi)=۲\sum_{n=0}^{۳}\frac{(\pi-n)^{n+۳}}{(n+۳)!}$$

$$=۲\left[\frac{\pi^{۳}}{۳!}+\frac{(\pi-۱)^{٤}}{٤!}+\frac{(\pi-۲)^{٥}}{٥!}+\frac{(\pi-۳)^{٦}}{٦!}\right]=۱۲\,/\,۱۲ \qquad \text{(تقریباً)}$$

مسائل

۱ـ معادلات انتگرال

هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را به معادلات انتگرال هم‌ارزش تبدیل کنید :

الف ـ

$$Y''(t)+۲Y'(t)-۸Y(t)=٥t^{۲}-۳t \quad , \quad Y(0)=-۲ \ , \ Y'(0)=۳$$

ب ـ

$$۲Y''(t)-۳Y'(t)-۲Y(t)=٤e^{-t}+۲\cos t \quad , \quad Y(0)=٤ \ , Y'(0)=-۱$$

پ - $Y'''(t)+۸Y(t)=۳\sin t+۲\cos t \ , \ Y(۰)=۰ \ , \ Y'(۰)=-۱$
$Y''(۰)=۲$

ت - $Y''(t)+\cos tY(t)=e^{-t} \ , \ Y(۰)=-۲ \ , \ Y'(۰)=۰$

ث - $Y''(t)-tY'(t)+t^{۲}Y(t)=۱+t \ , \ Y(۰)=۴ \ , \ Y'(۰)=۲$

ج - $Y^{IV}(t)-۲tY''(t)+(۱-t^{۲})Y(t)=۱+۴t-۲t^{۲}+t^{۴} \ ,$
$Y(۰)=۱ \ , \ Y'(۰)=۰ \ , \ Y''(۰)=-۲ \ , \ Y'''(۰)=۰$

۲ـ هریک از معادلات انتگرال زیر را به معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه متناظر آن تبدیل کنید :

الف - $$Y(t)=۵\cos t+\int_{۰}^{t}(t-u)Y(u)du$$

ب - $$Y(t)=t^{۲}-۳t+۴-۳\int_{۰}^{t}(t-u)^{۲}Y(u)du$$

پ - $$Y(t)+\int_{۰}^{t}\left\{(t-u)^{۲}+۴(t-u)-۳\right\}Y(u)du=e^{-t}$$

ت - $$Y(t)-\int_{۰}^{t}(t-u)\sec tY(u)du=t$$

ث - $$Y(t)+\int_{۰}^{t}(t^{۲}+۴t-ut-u-۲)Y(u)du=۰$$

۳ـ معادلات انتگرال نوع کانولوشین

الف - $$Y(t)=t+۲\int_{۰}^{t}\cos(t-u)Y(u)du$$

ب - $$Y(t)=t+\frac{۱}{۶}\int_{۰}^{t}(t-u)^{۳}Y(u)du$$

پ ـ $$\int_0^t Y(u)Y(t-u)du = ۲Y(t)+t-۲$$

۴ـ معادله انتگرال آبل و مسئله تاتوکرون

الف ـ $$\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}du = \sqrt{t} .$$

ب ـ $$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{\frac{۱}{۳}}}du = t(۱+t) .$$

پ ـ نشان دهید که زمان لازم برای آنکه مهره مندرج در مثالهای دو و سه شماره (۸ . ۹۶) ازنقطه P ، بالاترین نقطه سیم به نقطه σ انتهای سیم (منتهی‌ترین نقطه سیکلوئید) برسد عبارت است از $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

ت ـ اگر $0 < \alpha < ۱$ و بفرض $F(0)=0$ جواب معادله انتگرال :

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{\alpha}}du = F(t)$$

را بیابید.

ث ـ جواب معادله انتگرال قسمت (ت) را بفرض $F(0) \neq 0$ بدست آورید.

۵ـ معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل

الف ـ $$\int_0^t Y(u)\cos(t-u)du = Y'(t) \ , \ Y(0)=۱$$

ب ـ $$\int_0^t Y'(u)Y(t-u)du = ۲۴t^{۳} \ , \ Y(0)=0$$

پ ـ نشان دهید که معادله انتگرال قسمت (الف) را میتوان بصورت معادله انتگرال زیر نوشت :

$$۱+\int_{۰}^{t}(t-u)Y(u)\cos(t-u)du=Y(t)$$

جواب معادله انتگرال اخیر را بدست آورید .

ت - $\int_{۰}^{t}Y''(u)Y'(t-u)du=Y'(t)-Y(t)\ ,\ Y(۰)=Y'(۰)=۰$

۶ـ معادلات تفاوت و دیفرانسیل ـ تفاوت

الف - $Y(t)-۳Y(t-۱)+۲Y(t-۲)=۱\ ,\ Y(t)=۰\ ,\ t<۰$

ب - $Y'(t)=۲Y(t-۱)+t\ ,\ Y(t)=۰\ ,\ t<۰$

پ - $Y''(t)-Y(t-۱)=F(t)\ ,\ Y(t)=۰\ ,\ Y'(t)=۰\ ,$

$$t\leqslant ۰\ ,\ F(t)=\begin{cases}۰ & t\leqslant ۰\\ ۲t & t>۰\end{cases}$$

ت - $۳Y(t)-۵Y(t-۱)+۲Y(t-۲)=F(t)\ ,\ Y(t)=۰\ ,$

$$t\leqslant ۰\ ,\ F(t)=\begin{cases}۰ & t<۰\\ t^{۲} & t>۰\end{cases}$$

ث - $۳a_{n+۲}-۵a_{n+۱}+۲a_n=۰\ ,\ a_۰=۱\ ,\ a_۱=۰$

ج - $a_{n+۲}+۲a_{n+۱}-۳a_n=۰\ ,\ a_۰=۰\ ,\ a_۱=۱$

چ - درصورتیکه $a_۰ , a_۱ , a_۲ , \ldots$ اعداد فیبیوناچی باشند که بوسیله رابطه $a_{n+۲}=a_{n+۱}+a_n$ که‌درآن $a_۰=۰$ و $a_۱=۱$ است مشخص میشوند مطلوب است تعیین اعداد فوق و همچنین a_n .

ح - $a_{n+۲}-۴a_{n+۱}+۴a_n=۰\ ,\ a_۰=۱\ ,\ a_۱=۴$

خ - $a_{n+۲}-۲a_{n+۱}+۲a_n=۰\ ,\ a_۰=۰\ ,\ a_۱=۱$

د - $a_{n+۳}-۲a_{n+۲}-a_{n+۱}+۲a_n=۰\ ,\ a_۰=۱\ ,$

$$a_۱=۱\ ,\ a_۲=۱$$

ذ ـ در قسمت (د) مقدار $a_{۱۰}$ را بیابید.

ر ـ نشان دهید که جواب معادله $a_{n+۲}-۶a_{n+۱}+۸a_n=0$ را میتوان بفرض $a_n=r^n$ که در آن r عدد ثابت غیر مشخصی است بدست آورد. این روش را در مورد قسمتهای (ث) و (ج) و (د) بکار برید.

۷ـ مسائل متفرقه

الف ـ نشان دهید که معادله دیفرانسیل غیر خطی:

$$Y''(t)+\left\{Y(t)\right\}^{۲}=t\sin t \;,\; Y(0)=۱ \;,\; Y'(0)=-۱$$

را میتوان بصورت معادله انتگرال زیر نوشت:

$$Y(t)+\int_{۰}^{t}(t-u)\left\{Y(u)\right\}^{۲}du=۳-t-۲\cos t-t\sin t$$

ب ـ $\int_{۰}^{t}Y(u)Y(t-u)du=۲Y(t)+\frac{۱}{۶}t^{۳}-۲t$

پ ـ $Y''(t)-Y(t)=۳\cos t-\sin t \;,\; Y(\pi)=۱ \;,\; Y'(\pi)=-۲$

ت ـ $Y(t)=t+\int_{۰}^{t}Y(u)J_{۱}(t-u)du$

ث ـ $\int_{۰}^{x}G(u)G(x-u)du=۸(\sin x-x\cos x)$

ج ـ $\int_{۰}^{t}Y(u)Y(t-u)du=t+۲Y(t)$

چ ـ $a_{n+۲}-۵a_{n+۱}+۶a_n=۲n+۱ \;,\; a_{۰}=0 \;,\; a_{۱}=۱$

ح ـ $a_{n+۲}+۴a_{n+۱}-۵a_n=۲۴n-۸ \;,\; a_{۰}=۳ \;,\; a_{۱}=-۵$

خ ـ $a_{n+۲}+۲a_{n+۱}+a_n=n+۲ \;,\; a_{۰}=0 \;,\; a_{۱}=0$

د ـ $a_{n+۲}-۶a_{n+۱}+۵a_n=۲^{n} \;,\; a_{۰}=0 \;,\; a_{۱}=0$

ذ - $a_{n+۳}-۲a_{n+۲}-a_{n+۱}+۲a_n=n^۲+۲^n$, $a_۰=۰$,
$a_۱=۱$, $a_۲=۱$

ر - تعیین کنید توابع پیوسته $F(t)$ را درصورتیکه :

$$\int_۰^t uF(u)\cos(t-u)du=te^{-t}-\sin t$$

ز - نشان دهید که معادله دیفرانسیل غیر خطی :

$$Y''(t)+۲Y'(t)=Y^۲(t)\ ,\ Y(۰)=۰\ ,\ Y(t)=۰$$

را میتوان بصورت معادلات انتگرال زیر نوشت :

$$Y(t)=\int_۰^t (۲t-۲)Y(u)du+\int_t^۱ ۲tY(u)du+\int_۰^۱ K(t\,,u)Y^۲(u)du$$

و یا :

$$Y(t)=\int_۰^t (۲-۲t)e^{۲(u-t)}Y(u)du-\int_t^۱ ۲te^{۲(u-t)}Y(u)du$$

$$+\int_۰^۱ e^{-۲t}K(t\,,u)Y^۲(u)du$$

که درآنها :
$$K(t\,,u)=\begin{cases} u(t-۱) & u<t \\ t(u-۱) & u>t \end{cases}$$

س -

$$۸Y(t)-۱۲Y(t-۱)+٤Y(t-۲)=F(t)\ ,\ Y(t)=۰\ ,\ t<۰\ ,$$

$$F(t)=\begin{cases} ۰ & t<۰ \\ e^{-t} & t>۰ \end{cases}$$

ش - اگر :

$$Y'_n(t)=\beta\left\{Y_{n-۱}(t)-Y_n(t)\right\}\ ,\ n=۱\,,۲\,,۳\,,\ldots$$

$$Y'_{٠}(t)=-\beta Y_{٠}(t)$$

و β مقدار ثابت باشد مطلوب است تعیین $Y_n(t)$ درصورتیکه برای مقادیر $n=۱ , ۲ , ۳ , \ldots$ داشته باشیم $Y_n(o)=o$ ، $Y_{٠}(o)=۱$.

ع - در قسمت (ش) بجای اولین معادله ، معادله :

$$Y'_n(t)=\beta_n\left\{Y_{n-۱}(t)-Y_n(t)\right\}$$

را که در آن $n=۱ , ۲ , ۳ , \ldots$ است قرار داده و سپس $Y_n(t)$ را بیابید. درمعادله داده شده $\beta_۱ , \beta_۲ , \beta_۳ , \ldots$ مقادیر ثابتی هستند.

جوابها

۱- الف :

$$V(t)+\int_{٠}^{t}(۲-۸t+۸u)V(u)du=٥t^{۲}+۲۱t-۲۲ \;,\; V(t)=Y''(t)$$

و یا :

$$Y(t)+\int_{٠}^{t}(۲-۸t+۸u)Y(u)du=-۲-t+\frac{٥}{۱۲}t^{٤}-t^{۳}$$

ب :

$$۲V(t)+\int_{٠}^{t}(۲u-۲t-۳)V(u)du=٤e^{-t}+۲\cos t+٥-۲t \;,$$

$$V(t)=Y''(t)$$

و یا :

$$۲Y(t)+\int_{٠}^{t}(۲u-۲t-۳)Y(u)du=٦-۱٠t+٤e^{-t}-۲\cos t$$

پ :

$$V(t)+٤\int_{٠}^{t}(t-u)^{۲}V(u)du=۳\sin t+۲\cos t-٤t^{۲}+٤t \;,\; V(t)=Y'''(t)$$

و یا :

$$Y(t)+٤\int_0^t (t-u)^{٢}Y(u)du=\frac{٥}{٢}t^{٢}+t-٣+٣\cos t-٢\sin t$$

ت :

$$V(t)+\int_0^t (t-u)\cos t\,V(u)du=e^{-t}+٢\cos t \quad ,$$

$$V(t)=Y''(t)$$

و یا :

$$Y(t)+\int_0^t (t-u)\cos u\,Y(u)du=t-٣+e^{-t}$$

ث :

$$V(t)+\int_0^t (t^{٣}-t-ut^{٢})V(u)du=١+٣t-٤t^{٢}-٢t^{٣} \quad ,$$

$$V(t)=Y''(t)$$

و یا :

$$Y(t)-\int_0^t (t-٢u+tu^{٢}-u^{٣})Y(u)du=\frac{١}{٢}t^{٢}+\frac{١}{٦}t^{٣}+٢t+٤$$

ج :

$$V(t)+\int_0^t \left\{\frac{١}{٦}(t-u)^{٣}(١-t^{٢})-٢t(t-u)\right\}V(u)du=0 \quad ,$$

$$V(t)=Y^{IV}(t)$$

و یا :

$$Y(t)-\int_0^t \left\{٢u(t-u)+٢(t-u)^{٢}+\frac{١}{٦}(t-u)^{٣}(١-u^{٢})\right\}Y(u)du=$$

$$١-t^{٢}+\frac{١}{٣}t^{٣}+\frac{١}{٢٤}t^{٤}-\frac{١}{١٨٠}t^{٦}+\frac{١}{١٦٨٠}t^{٨}$$

٢- الف : $Y''(t)-Y(t)=-٥\sin t \;,\; Y(0)=٥ \;,\; Y'(0)=0$

ب : $Y'''(t)+٦Y(t)=0\ ,\ Y(0)=٤\ ,\ Y'(0)=-۳\ ,$
$Y''(0)=۲$

پ : $Y'''(t)-۳Y''(t)+٤Y'(t)+۲Y(t)=-e^{-t}\ ,\ Y(0)=۱\ ,$
$Y'(0)=۲\ ,\ Y''(0)=۳$

ت : $Y''(t)-۲tg\,t\,Y'(t)-(۱+\sec t)Y(t)=-t-۲tg\,t\ ,$
$Y(0)=0\ ,\ Y'(0)=۱$

ث : $Y'''(t)+(۳t-۲)Y''(t)+(t+۱۰)Y'(t)+Y(t)=0\ ,$
$Y(0)=0\ ,\ Y'(0)=0\ ,\ Y''(0)=0$

۳ـ الف : $Y(t)=t+۲+۲(t-۱)e^{t}$

ب : $Y(t)=\frac{۱}{۲}(\sin t+\sinh t)$

پ : $Y(t)=۱$ ت : $Y(t)=0$

٤ـ الف : $Y(t)=\frac{۱}{۲}$ ب : $\frac{۳\sqrt{۳}}{٤\pi}t^{\frac{۱}{۳}}(۳t+۲)$

ت : $Y(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^t F'(u)(t-u)^{\alpha-۱}du$

ث : $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{\frac{۱}{۲}}}du=۱+t$

۵ـ الف : $Y(t)=۱+\frac{۱}{۲}t^{۲}$ ب : $Y(t)=\pm\frac{۱٦}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{۳}{۲}}$

ت : $Y(t)=0$

٦ـ الف : $Y(t)=۲^{[t]+۲}-[t]-۳$ ب : $Y(t)=\sum_{n=0}^{[t]}\frac{۲^{n}(t-n)^{n+۲}}{(n+۲)!}$

پ : $$Y(t)=۲\sum_{n=0}^{[t]}\frac{(t-n)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}$$

ت : $$Y(t)=\sum_{n=0}^{[t]}\left\{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n+۱}\right\}(t-n)^{۲}$$

ث : $۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^{n}-۲$ ج : $\frac{۱}{٤}\left\{۱-(-۳)^{n}\right\}$

چ : $0, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۲٤$;

$$a_{n}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left\{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n}\right\}$$

ح : $a_{n}=۲^{n}(n+۱)$ خ : $a_{n}=\frac{(۱+i)^{n}-(۱-i)^{n}}{۲i}$

د : $a_{n}=\frac{۱}{۳}\left\{۲^{n}-(-۱)^{n}\right\}$ ذ : $a_{۱۰}=۳٤۱$

۷- ب : $Y(t)=t$ و یا $Y(t)=۲\delta(t)-t$

پ : $$V(t)=۲\pi+۱-۲t+۳\cos t-\sin t$$
$$+\int_{\pi}^{t}(t-u)V(u)du\ ,\ V(t)=Y''(t)$$

ت : $$Y(t)=\frac{۱}{۲}(t^{۲}+۱)\int_{0}^{t}J_{0}(u)du+\frac{۱}{۲}tJ_{0}(t)-\frac{۱}{۲}t^{۲}J_{۱}(t)$$

ث : $$G(x)=\pm ٤\sin x$$

ج : $$Y(t)=J_{۱}(t)-\int_{0}^{t}J_{0}(u)du$$

و یا :

$$Y(t)=۲\delta(t)-J_{۱}(t)+\int_{0}^{t}J_{0}(u)du$$

ج : $a_n=\frac{٥}{٢}\cdot ٣^n-٥\cdot ٢^n+n+\frac{٥}{٢}$

ح : $a_n=٢n^٢-٤n+٢+(-٥)^n$

خ : $a_n=\frac{١}{٤}(٣n-١)(-١)^n+\frac{١}{٤}(n+١)$

د : $a_n=\frac{١}{٤}+\frac{١}{١٢}\cdot ٥^n-\frac{١}{٣}\cdot ٢^n$

ذ :

$$a_n=\frac{١}{٣}+\frac{٥}{٦}n-\frac{١}{٦}n^٣+\frac{١}{٦}n\cdot ٢^n-\frac{٢}{٩}\cdot ٢^n-\frac{١}{٩}(-١)^n$$

ر : $F(t)=-٢e^{-t}$

س : $Y(t)=\frac{١}{٨}e^{-t}\left\{١+\sum_{n=٠}^{[t]}(٢-٢^{-n})e^n\right\}$

ش : $Y_n(t)=\frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}$

پایان

ضمیمه ۱

جدول خواص عمومی نقش لاپلاس

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$F(t)$	$f(s)$
$a F_1(t) + b F_2(t)$	$a f_1(s) + b f_2(s)$
$a F(at)$	$f(s/a)$
$e^{at} F(t)$	$f(s-a)$
$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$	$e^{-as} f(s)$
$F'(t)$	$s f(s) - F(0)$
$F''(t)$	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$
$F^{(n)}(t)$	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$
$-t F(t)$	$f'(s)$
$t^2 F(t)$	$f''(s)$
$(-1)^n t^n F(t)$	$f^{(n)}(s)$
$\int_0^t F(u)\, du$	$\frac{f(s)}{s}$
$\int_0^t \cdots \int_0^t F(u)\, du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)\, du$	$\frac{f(s)}{s^n}$
$\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du$	$f(s)\, g(s)$

جدول خواص عمومی نقش لاپلاس

$f(s)$	$F(t)$
$\int_s^\infty f(u)\,du$	$\frac{F(t)}{t}$
$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$	$F(t) = F(t+T)$
$\frac{f(\sqrt{s})}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)\,du$
$\frac{1}{s}f(1/s)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})F(u)\,du$
$\frac{1}{s^{n+1}}f(1/s)$	$t^{n/2}\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})F(u)\,du$
$\frac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)\,du$
$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)\,du$	$F(t^2)$
$\frac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du$
$\frac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s) =$ کثیرالجمله کمتر از درجه n $Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)$ که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ همگی از یکدیگر متمایز می‌باشند	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

ضمیمه۲

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
$\frac{1}{s^n} \qquad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
$\frac{1}{(s-a)^n} \qquad n > 0$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$
$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \sinh at}{a}$

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \qquad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \qquad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\sin at}{2a}$
$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$
$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$
$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$
$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\sinh at}{2a}$
$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$
$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$
$\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$
$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$
$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t\sin at + at^2\cos at}{\text{[illegible]}}$

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at + 5at\cos at}{8a}$
$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\sin at}{8}$
$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\sin at}{2a}$
$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\sin at}{24a}$
$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\sinh at - 3at\cosh at}{8a^5}$
$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at - t\sinh at}{8a^3}$
$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\sinh at}{8a^3}$
$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\sinh at + at^2\cosh at}{8a}$
$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\sinh at + 5at\cosh at}{8a}$
$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at + 7at\sinh at}{8}$
$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\sinh at}{2a}$
$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\sinh at}{24a}$
$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{s}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right\}$
$\dfrac{s}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at)$
$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\sin at\sinh at}{2a^2}$
$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\sin at\cosh at+\cos at\sinh at)$
$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$
$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\sinh at+\sin at)$
$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\dfrac{\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}$	$\dfrac{e^{at}\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-b\,e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad n > -1$	$a^n J_n(at)$
$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad n > -1$	$a^n I_n(at)$
$\frac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
$\frac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t > b \\ 0 & t < b \end{cases}$
$\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\frac{t\,J_1(at)}{a}$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$t\,J_0(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at) - at\,J_1(at)$
$\frac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\frac{t\,I_1(at)}{a}$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$t\,I_0(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at) + at\,I_1(at)$
$\frac{1}{s(e^s-1)} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$	$F(t) = n, \quad n \leqq t < n+1, \; n = 0,1,2,\ldots$
$\frac{1}{s(e^s-r)} = \frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t) = \sum_{k-1}^{[t]} r^k$
$\frac{e^s-1}{s(e^s-r)} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t) = r^n, \quad n \leqq t < n+1, \; n = 0,1,2,\ldots$
$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
$\frac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$\left(\frac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$
$\frac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$
$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}\, a^{2n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u})\, du$
$\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
$\frac{\ln[(s^2+a^2)/a^2]}{2s}$	$\operatorname{Ci}(at)$
$\frac{\ln[(s+a)/a]}{s}$	$\operatorname{Ei}(at)$
$-\frac{(\gamma + \ln s)}{s}$ $\gamma =$ ثابت اولر $= .5772156\ldots$	$\ln t$
$\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$
$\frac{\pi^2}{6s} + \frac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ $\gamma =$ ثابت اولر $= .5772156\ldots$	$\ln^2 t$
$\frac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$ $\gamma =$ ثابت اولر $= .5772156\ldots$
$\frac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ $\gamma =$ ثابت اولر $= .5772156\ldots$

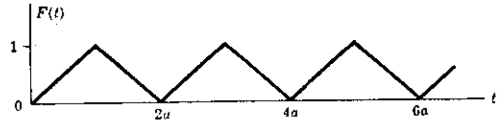
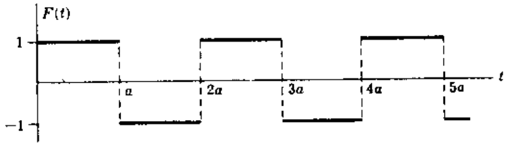
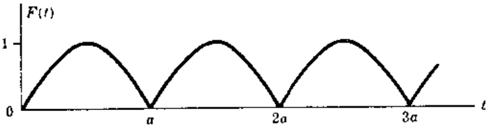
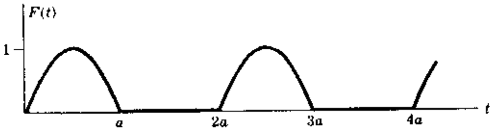
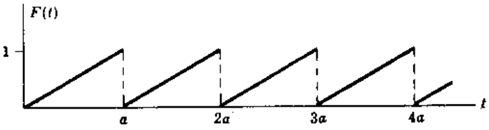
جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}} \qquad n > -1$	$t^n \ln t$
$\tan^{-1}(a/s)$	$\dfrac{\sin at}{t}$
$\dfrac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$\operatorname{Si}(at)$
$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\operatorname{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
$e^{s^2/4a^2}\operatorname{erfc}(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t^2}$
$\dfrac{e^{s^2/4a^2}\operatorname{erfc}(s/2a)}{s}$	$\operatorname{erf}(at)$
$\dfrac{e^{as}\operatorname{erfc}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
$e^{as}\operatorname{Ei}(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
$\dfrac{1}{a}\left[\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} - \sin as \operatorname{Ci}(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
$\sin as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} + \cos as \operatorname{Ci}(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} - \sin as \operatorname{Ci}(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
$\dfrac{\sin as\left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} + \cos as \operatorname{Ci}(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
$\left[\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right]^2 + \operatorname{Ci}^2(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
0	$\mathcal{N}(t)$
1	$\delta(t)$
e^{-as}	$\delta(t-a)$
$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$\mathcal{U}(t-a)$

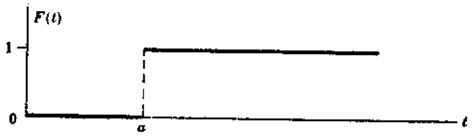
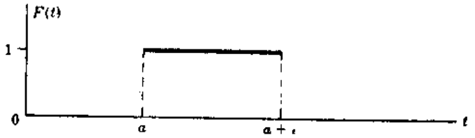
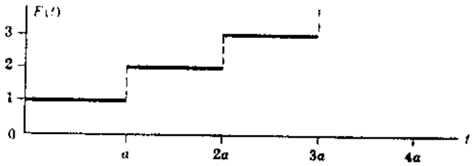
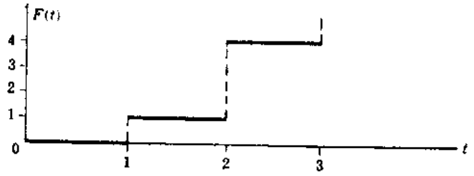
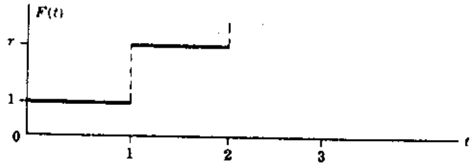
جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{\sinh sx}{s\sinh sa}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$
$\dfrac{\sinh sx}{s\cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\dfrac{\cosh sx}{s\sinh sa}$	$\dfrac{t}{a} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi t}{a}$
$\dfrac{\cosh sx}{s\cosh sa}$	$1 + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\dfrac{\sinh sx}{s^2\sinh sa}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi t}{a}$
$\dfrac{\sinh sx}{s^2\cosh sa}$	$x + \dfrac{8a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\dfrac{\cosh sx}{s^2\sinh sa}$	$\dfrac{t^2}{2a} + \dfrac{2a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\left(1 - \cos\dfrac{n\pi t}{a}\right)$
$\dfrac{\cosh sx}{s^2\cosh sa}$	$t + \dfrac{8a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\dfrac{\cosh sx}{s^3\cosh sa}$	$\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \dfrac{16a^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\, e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$
$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}$
$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$
$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{a}$
$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \dfrac{16a^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ ریشه های مثبت $J_0(\lambda) = 0$ میباشند
$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2\,J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{4}(x^2 - a^2) + t + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ ریشه های مثبت $J_0(\lambda) = 0$ میباشند
$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	تابع موج مثلثی 
$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	تابع موج مربع 
$\dfrac{\pi a}{a^2s^2 + \pi^2}\coth\left(\dfrac{as}{2}\right)$	تابع موج سینوسی 
$\dfrac{\pi a}{(a^2s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	تابع موج سینوسی نیمه 
$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	تابع موج دندانه‌ای 

جدول نقشهای لاپلاس خاص

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{e^{-as}}{s}$	تابع یکانه هوی ساید $\mathcal{U}(t-a)$ 
$\frac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	تابع ضربه‌ای 
$\frac{1}{s(1-e^{-as})}$	تابع پله‌ای 
$\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t)=n^2, \quad n \leqq t < n+1, \ n=0,1,2,\ldots$ 
$\frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t)=r^n, \quad n \leqq t < n+1, \ n=0,1,2,\ldots$ 
$\frac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t)=\begin{cases}\sin(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a\\ 0 & t > a\end{cases}$