معماهایی در منطق ریاضی

تألیف ریموند اِسمولیان / ترجمهٔ محمد شریف زاده

انتشارات فاطمی

بسیاری از مردم ادعا می کنند که به حل مسئله های ریاضی و منطق علاقه‌ای ندارند، با این همه، اگر با مسئله‌ای در منطق یا ریاضی روبه‌رو شوند که به شکل معما ارائه شده باشد، با اشتیاق فراوان به حل آن می پردازند.

ریموند اسمولیان، نویسندهٔ این کتاب، که خود یکی از دانشمندان منطقی است، با طرح معماهای گوناگون، که هریک به صورت داستانی جذاب است، می کوشد تا خوانندهٔ عادی را با گزارهٔ مشهور گودل آشنا کند. این گزارهٔ منطقی، به شکلهای گوناگون، در بسیاری از تئوریهای علمی که با پدیدهٔ خودنمایی سروکار دارند ظاهر شده است. به همین سبب، این کتاب نه تنها خوانندهٔ عادی بلکه دانشجویان ریاضی یا منطق، زبانشناسان و مهندسان کامپیوتر را نیز می‌تواند به خود جلب کند.

معماهایی در منطق ریاضی

تألیف ریموند اسمولیان

ترجمهٔ محمد شریف زاده

ویراستار : هوشنگ شریف زاده

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

تهران ــــ ۱۳۶۶

انتشارات فاطمی

معماهایی درمنطق ریاضی

THE LADY OR THE TIGER

مؤلف: ریموند اسمولیان **Raymond Smullyan**

مترجم: محمدشریف زاده

ویراستار: هوشنگ شریف زاده

چاپ اول: دی ماه ۱۳۶۶

تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه

چاپ وصحافی: چاپخانهٔ تقویم

نشانی: تهران، خیابان دکترفاطمی، شمارهٔ ۱۵۹

تلفن: ۶۵۱۴۲۲

فهرست

فصل چهارم. قابل حل یا غیرقابل حل

به نام خدا

پیشگفتار

پس از انتشار نخستین کتابم در زمینهٔ معمّاها (که نامش را کاملاً فراموش کرده‌ام!) نامه‌های بسیار دریافت کردم. یکی از آن نامه‌ها از پسر ده‌سالهٔ یکی از همدوره‌های سابقم بود که اکنون ریاضیدانی مشهور است. نامه نشان می‌داد که آن پسر با اشتیاق مشغول خواندن کتاب است و با الهام از برخی معمّاهای کتاب، معمّای زیبای جدیدی طرح کرده است. بیدرنگ به پدرش تلفن زدم و داشتن چنین پسر باهوشی را به او تبریک گفتم. پیش از اینکه پسرش را صدا بزند تا گوشی تلفن را بردارد آهسته به من گفت: «حالا هم مشغول خواندن کتاب شماست ولی وقتی که با او صحبت می‌کنید سعی کنید تا متوجه نشود که این کتاب درواقع ریاضیات است، زیرا او از ریاضیات تنفر دارد. اگر بفهمد که کتاب شما ریاضی است بیدرنگ آن را کنار خواهد گذاشت.»

این رویداد را از آن‌رو بازگو کردم که پدیده‌ای بسیار عجیب و درعین حال متداول را نشان می‌دهد. بسیاری را دیده‌ام که ادعا می‌کردند از ریاضیات تنفر دارند، با این همه، یک مسئلهٔ منطق یا ریاضی را مشروط برآنکه به‌شکل یک معما ارائه می‌کردم با اشتیاق فراوان به‌آن مشغول می‌شدند. شاید شگفت‌آور نباشد اگر یک کتاب معمای خوب را به‌عنوان بهترین داروی بیماری «اشتیاق ریاضی» تجویز کنند، زیرا هر رسالهٔ ریاضی را می‌توان به‌شکل یک معما ارائه کرد. بعضی از اوقات فکر می‌کنم که اگر **اقلیدس**[1] کتاب **اصول هندسهٔ** خودرا به‌شکل معما ارائه کرده بود

۱ــ اقلیدس ریاضیدان یونانی و بنیانگزار مکتبی در اسکندریه بود. درسال ۳۰۰ پیش از میلاد به‌اوج شهرت خود رسیده بود. مهمترین اثرش **اصول هندسه** است که پایهٔ بسیاری از کارهای بعدی در هندسه شد ــ د.

چه می‌شد؟ مثلاً اگر به‌جای اینکه نخست گزارهٔ برابر بودن زاویه‌های جانبی یک مثلث متساوی‌الساقین را طرح و سپس اثبات آن‌را بیان کند،مسئله را به‌این صورت مطرح می‌کرد چه می‌شد؟ «مسئله: اگر یک مثلث متساوی‌الساقین باشد آیا دو زاویهٔ آن الزاماً مساوی خواهند بود؟ چرا آری یا چرا خیر؟ پاسخ را در صفحهٔ .... می‌یابید». و اگر همین شیوه را در مورد گزاره‌های دیگر کتابش نیز به‌کار می‌برد چه می‌شد؟ چنین کتابی می‌توانست یکی از بهترین کتابهای معما در تاریخ باشد.

به‌طور کلی کتابهای معمای من با کتابهای معمای دیگران تفاوت دارد، زیرا من اغلب معماهایی طرح می‌کنم که با استنتاجهای بنیادی و مهمّ منطق و ریاضیات ارتباط اساسی داشته باشند. از این رو هدف اصلی نخستین کتاب منطق که نوشتم این بود که خوانندهٔ عادی را با گزارهٔ مهمّ **گودل**[1] به اختصار آشنا کنم. کتابی که اکنون در دست دارید خیلی بیشتر درجهت این منظور تنظیم شده است. پیشنویس این کتاب را در درسی باعنوان «معماها و تناقضها»، تدریس کردم. در آن کلاس یکی از دانشجویان می‌گفت تمامی این کتاب، به‌ویژه بخشهای ۳ و ٤، بیشتر شبیه یک رُمان ریاضی است و من تاکنون کتابی چنین ندیده‌ام.

من فکر می‌کنم عبارت «رُمان ریاضی» بسیار مناسب است. بیشتر مطالب این کتاب درواقع به صورت داستان است. نام دیگر این کتاب می‌تواند مثلاً «اسرار قفل مونت کارلو» باشد، زیرا نیمهٔ دوم کتاب مربوط به موردی می‌شود که «**کارآگاه کریگ**» از اسکاتلندیارد مأموریت می‌یابد که برای جلوگیری از یک زیان هنگفت رمز قفل یک صندوق را در مونت کارلو کشف کند. اما کوششهای اوّلیهٔ او برای حل معما به‌جایی نمی‌رسد و به لندن برمی‌گردد. درآنجا با شخصی برجسته و عجیب که در دستگاههای رمزدار سرمایه‌گذاری می‌کند آشنا می‌شود. او با این شخص و یک دانشمند «منطق ریاضی» گروهی تشکیل می‌دهند و به‌زودی خودرا در جریانی می‌یابند که دقیقاً به‌قلب اکتشاف مهمّ گودل مربوط می‌شود. معمای قفل مونت کارلو درواقع همان مسئلهٔ قفل گودل است و شکل کلی آن انعکاس جالب توجّهی است از اندیشه‌های اساسی گودل که به شکلهای گوناگون دربسیاری تئوریهای علمی که با پدیدهٔ **خودزایی** سروکاردارند شاخهٔ اصلی دوانده است.

[1]— کورت گودل (Kurt Godel)، ریاضیدان و منطقی اتریشی است که در سال ۱۹۰٦ میلادی متولد شد. درزمینهٔ بنیادهای ریاضی سهم عمده‌ای دارد. بیشترشهرت او دربیان گزارهٔ **گودل** است – م.

بررسیهای کارآگاه کریگ و دوستانش به اکتشافهای ریاضی چشمگیری منجر شد که تا آن زمان برای عموم وجامعهٔ دانشمندان ناشناخته بود. این اکتشافها عبارتند از **قوانین کریگ** و **قوانین فرِگوسن**[1] که برای نخستین بار در این کتاب منتشر می شود، و می تواند برای یک فرد عادی، یک منطقی، یک زبانشناس و یک کارشناس کامپیوتر به یک اندازه جالب توجّه باشد.

نوشتن این کتاب برای من بسیار آموزنده بوده است و فکر می کنم که خواندن آن نیز آموزنده باشد. انتشار کتابهای دیگری را در این زمینه در برنامه دارم که امیدوارم به زودی تقدیم کنم. در اینجا لازم می دانم که از **آن کلوز** (Ann Close) ویراستار کتاب، و **ملوین روزنتال** (Melvin Rosenthal)، ویراستار فنّی کتاب، به خاطر کمکهای بیدریغی که به من کرده اند سپاسگزاری کنم.

فوریهٔ ۱۹۸۲

ریموند اسمولیان

۱ــ فرگوسن (Fergusson)، نام یکی از قهرمانان داستانهای این کتاب است ــ م.

فصل نخست

دختر زیبا یا ببر گرسنه

۱

معماهای بیمزه، برخی کهنه، برخی نو

کتاب را با مجموعه ای ازمعماهای گوناگون منطق و حساب - برخی کهنه و برخی نو- آغازمی کنم.

۱ــ چقدر؟

فرض کنید پول من برابرپول شما باشد. چند دلار به شما بدهم که پول شما ده دلار بیشتر ازپول من بشود؟ (پاسخ درپایان این بخش آمده است).

۲ــ معمّای سیاستمدار

در انجمنی نام صد سیاستمدار برده شد. هر سیاستمدار درمیان مردم یا به حقه‌باز معروف بود یا به ساده‌اندیش. در بارهٔ این سیاستمداران دو واقعیّت می دانیم:

(۱) دست کم یکی ازسیاستمداران به ساده‌اندیش معروف بود.

(۲) از میان هر دو سیاستمدار دست کم یکی به حقه‌باز معروف بود.

آیا می‌توان با توجّه به این دو واقعیّت مشخص کرد که چند نفر از سیاستمداران به حقه‌باز و چند نفر به ساده‌اندیش معروف بودند؟

۳ــ آب لیمو در بطری

قیمت یک بطری آب لیمو ده دلار است. ارزش آب لیمو نُه دلار بیشتر از ارزش هر بطری است. قیمت هر بطری چقدر است؟

٤ــ چه سودی به‌دست می‌آید؟

نکتهٔ جالب توجّه در مورد این معما این است که همه کس برای پیدا کردن پاسخ آن علاقه نشان می دهد، با این همه، هرکس به‌شکل متفاوتی آن‌را حل می کند و پاسخ متفاوتی به‌دست می آورد و اصرار دارد که پاسخ او درست است. معما از این قرار است:

دلالی جنسی را ۷ دلار می خرد و آن‌را به ۸ دلار می فروشد. دو باره آن‌را ۹ دلار می خرد و ۱۰ دلار می فروشد. سود او در مجموع چقدر است؟

۵ــ مسئلهٔ ده حیوان خانگی

نکتهٔ آموزندهٔ این معما این است که گرچه می توان آن‌را از راه جبر مقدماتی حل کرد، اما بدون مراجعه به جبر و فقط با اندکی تفکّر نیز می توان پاسخ آن‌را یافت. از این گذشته، به‌نظر من حل مسئله از راه تفکّر عادی در مقایسه با راه‌حل جبری آن بسیار جالب توجّه‌تر، آموزنده‌تر و به‌خصوص خلاّقتر است. صورت مسئله این است:

می خواهیم پنجاه و شش بیسکویت را به ده حیوان خانگی بدهیم. هر حیوان یا سگ است یا گربه. به هر سگ بایستی شش بیسکویت و به هر گربه پنج بیسکویت بدهیم. تعیین کنید عدهٔ سگها و عدهٔ گربه ها را؟

البته اگر اندکی آشنایی با علم جبر داشته باشیم می توانیم بیدرنگ پاسخ مسئله را پیدا کنیم. همچنین می توان مسئله را به‌سادگی از راه آزمایش و خطا حل کرد، به این ترتیب که عدهٔ گربه ها می تواند یازده پاسخ داشته باشد (هرعددی از صفر تا ده). امکان هر پاسخ را آزمایش می کنیم.

سرانجام به پاسخ درست خواهیم رسید. اما اگر به مسئله از زاویهٔ درست نگاه شود از سادگی راه‌حل، که نه به جبر نیازی هست و نه به آزمایش و خطا، در شگفت خواهید شد. از این رو حتی به خواننده‌ای که راه‌حل دیگری پیدا کرده است توصیه می کنم که راه‌حل نگارنده را نیز ببیند.

۶ـ پرندگان بزرگ و پرندگان کوچک

این معما نیز نمونهٔ دیگری است که می توان آن‌را با استفاده از جبر یا از راه تفکّر عادی حل کرد. من هنوزهم تفکّر عادی را ترجیح می دهم.

در یک پرنده فروشی دو نوع پرنده - کوچک و بزرگ - به‌فروش می رسید. خانمی وارد فروشگاه شد. پنج پرندهٔ بزرگ و سه پرندهٔ کوچک خرید. اما اگر سه پرندهٔ بزرگ و پنج پرندهٔ کوچک خریده بود ۲۰ دلار کمتر می پرداخت. قیمت هر پرنده چقدر است؟

۷ـ دربارهٔ زیان فراموشکاری

این داستان واقعیّت دارد:

گفته می شود که دریک گروه ۲۳ نفری احتمال اینکه دست کم دو نفر در گروه باشند که روز تولدشان یکسان باشد بیش از ۵۰ درصد است. روزی در دانشگاه پرینستون احتمالات مقدماتی تدریس می کردم. به دانشجویان توضیح می دادم که اگر به‌جای ۲۳ نفر ۳۰ نفر را درنظر بگیرند، احتمال یکسان بودن حداقل دو روز تولد فوق العاده افزایش خواهد یافت، اما چون در این کلاس فقط ۱۹ نفر وجود دارند احتمال یکسان بودن دو روز تولد خیلی کمتر از ۵۰ درصد است.

در این هنگام یکی از دانشجویان دستش را بلند کرد و گفت: «من شرط می بندم که در این کلاس دست کم دو نفر روز تولدشان یکسان است.» گفتم «من نمی توانم این شرطبندی را بپذیرم زیرا یقین دارم که

برد با من است.» دانشجو پاسخ داد «مهم نیست، در هرحال من شرط می بندم.» گفتم «بسیار خوب» و فکر کردم که درس خوبی به این دانشجوی سمج خواهم داد. از ردیف اول شروع به پرسش روز تولد دانشجویان کردم. تقریباً به ردیفهای نیمهٔ کلاس رسیده بودم که همگی از فراموشکاری من زدیم زیر خنده. البته دانشجویی که با آن همه اطمینان شرطبندی کرد و برنده شد روز تولد کسی، جز روز تولد خودش، را نمی دانست. آیا می توانید حدس بزنید که چرا او آن قدر مطمئن بود؟

۸ــ انجمن جمهوریخواهان و دموکراتها

در انجمنی از جمهوریخواهان و دموکراتها هر عضو یا جمهوریخواه بود یا دموکرات. روزی یکی از دموکراتها تصمیم گرفت که جمهوریخواه شود. از آن پس، عدهٔ دموکراتها برابر عدهٔ جمهوریخواهان شد. چند هفته بعد عضو جدید جمهوریخواه تغییر عقیده داد و دو باره دموکرات شد و از آن پس اوضاع دو باره مانند سابق شد. چندروز بعد، جمهوریخواه دیگری تصمیم گرفت که دموکرات شود. از آن پس، عدهٔ دموکراتها دو برابر عدهٔ جمهوریخواهان شد. آیا می توانید تعیین کنید که در آن انجمن چند عضو وجود داشته است؟

۹ــ نمونهٔ دیگری از مسئلهٔ «کلاههای رنگی»

آقایان A ، B و C هرسه در منطق مهارت کامل دارند. هریک می تواند کلّیّهٔ نتیجه هایی را که از مقدماتی معین به دست می آید بیدرنگ استخراج کند. همچنین هریک می داند که دو نفر دیگر نیز مانند خودش در منطق مهارت دارند. به هریک از این آقایان دو تمبر قرمز، دو تمبر زرد و سه تمبر سبز نشان می دهیم. پس از آن، چشمهای هرسه را می بندیم و به پیشانی هرکدام یک تمبر می چسبانیم. چهار تمبر باقیمانده را پنهان می کنیم. سپس چشمهای این سه نفر را باز می کنیم. از آقای A می پرسیم که آیا می تواند بگوید که

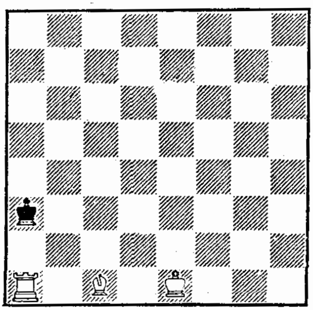
تمبری که به پیشانی او چسبیده شده است چه رنگی را به‌طور قطع نخواهد داشت. او پاسخ منفی می دهد. همین پرسش را از آقای B می کنیم. او نیز پاسخ منفی می دهد.

آیا با استفاده از این اطلاعات می توان رنگ تمبری را که به پیشانی A یا B یا C چسبیده شده است استنتاج کرد؟

۱۰ــ معمایی برای آنها که از بازی شطرنج اطلاع دارند

در اینجا شما را با نوع جدیدی از مسائل مربوط به بازی شطرنج آشنا می کنم که در آن برخلاف مسائل معمولی شطرنج ــ که مثلاً سفید در فلان تعداد حرکت سیاه را مات می کند ــ تجزیه و تحلیل مراحل یک بازی، یعنی چگونگی رسیدن به یک موقعیّت مطرح می شود.

کارآگاه کریگ[1] مأمور ویژهٔ اسکاتلندیارد ، که به اندازهٔ شرلوک هومز[2] به این نوع مسائل علاقه دارد، روزی با یکی از دوستان خود وارد یک باشگاه شطرنج شد و بازی پایان یافته‌ای را برروی صفحهٔ شطرنج مشاهده کرد. دوستش با دیدن صفحهٔ شطرنج چنین اظهارنظر کرد: «هرکس این



۱ــ کارآگاه کریگ (Inspector Craig) شخصیّت ساختگی کتاب دیگر من دربارهٔ معماهای منطق است که با عنوان «**نام این کتاب چیست؟**» منتشر شده است.

۲ــ در کتاب «عجایب شطرنج شرلوک هومز» که نویسندهٔ این کتاب آن را هم تألیف کرده است، معماهای فراوانی از این نوع طرح شده است.

بازی را داشته است بیگمان از قاعده های شطرنج آگاهی نداشته است زیرا چنین موقعیّتی کاملاً غیرممکن است.»

کریگ پرسید «چرا؟»

دوستش پاسخ داد «زیرا در این موقعیّت سیاه هم به وسیلهٔ رخ سفید و هم به وسیلهٔ فیل سفید کیش شده است. چطور ممکن است سفید توانسته باشد به چنین موقعیّتی رسیده باشد؟ زیرا اگر رخ با حرکت قبلی به موقعیّت فعلی آورده شده باشد، سیاه، پیش از آن نیز به وسیلهٔ فیل درمعرض کیش بوده است اما اگر حرکت قبلی فیل را به موقعیّت فعلی آورده باشد، سیاه، پیش از آن نیز به وسیلهٔ رخ درمعرض کیش بوده است. بنابراین رسیدن به این موقعیّت غیرممکن است.»

کریگ اندکی موقعیّت را بررسی کرد و گفت: «این طور نیست. گرچه این موقعیّت بسیار شگفت انگیز است اما کاملاً در چارچوب موارد ممکن قرار دارد و قاعده های بازی رعایت شده است.»

کریگ کاملاً درست می گفت! این موقعیّت هرچند به ظاهر احتمال ناپذیر است اما امکانپذیر است، و می توان حرکت قبلی سفید را از آن استنتاج کرد. آیا می توانید آن حرکت را استنتاج کنید؟

پاسخها

۱ــ

پاسخ این پرسش را اغلب ده دلار می دانند که نادرست است. فرض کنید ما هریک ۵۰ دلار داشته باشیم و من ده دلار به شما بدهم. درنتیجه من ٤۰ دلار و شما ٦۰ دلار خواهید داشت، یعنی ۲۰ دلار از من بیشتر خواهید داشت و نه ۱۰ دلار.

بنابراین پاسخ درست پنج دلار است.

۲ــ

یک پاسخ بسیار متداول «۵۰ ساده اندیش و ۵۰ حقه باز» است. پاسخ متداول دیگر

«۵۱ ساده اندیش و ۴۹ حقه باز» است. هردو پاسخ نادرست است. پاسخ درست را به‌ترتیب زیر می توان پیدا کرد:

می دانیم که دست‌کم یک نفر ساده اندیش است. فرض می کنیم این یک نفر آقای فرانک (Frank) باشد. اکنون ازمیان ۹۹ نفر باقیمانده یک نفر را انتخاب می کنیم و فرض می کنیم که او آقای جان (John) باشد.

بر طبق شرط دوم مسئله دست‌کم یکی از این‌دو باید حقه‌باز باشد. چون می دانیم که فرانک حقه‌باز نیست پس جان حقه‌باز است. چون جان را به‌طورتصادفی ازمیان ۹۹ نفر انتخاب کردیم بنابراین هریک از این ۹۹ نفر بایستی حقه‌بازباشد. پس پاسخ درست یک ساده‌اندیش و ۹۹ حقه‌باز است.

روش دیگر حل مسئله به این صورت است: این شرط را که ازمیان هردو نفر دست‌کم یکی حقه‌باز است می‌توان به این صورت بیان کرد که از هر دو نفر هردو ساده‌اندیش نیستند یا هردو نفری را که انتخاب کنیم هردوساده‌اندیش نخواهند بود. و این یعنی حداکثر یک‌نفر ساده‌اندیش است. از طرفی برطبق شرط اول دست‌کم یک نفر ساده‌اندیش است. بنابراین دقیقاً فقط یک نفر ساده‌اندیش است. کدام راه‌حل را ترجیح می دهید؟

۳—

اغلب پاسخ نادرست یک دلار داده می شود. فرض کنیم هر بطری واقعاً یک دلار بیارزد بنابراین ارزش آب‌لیمو که نُه دلار بیشتراز ارزش هر بطری است ده دلار خواهد شد. درنتیجه ارزش هر بطری با آب‌لیمو ۱۱ دلار خواهد شد. پاسخ درست نیم دلار ارزش بطری و نُه دلار و نیم ارزش آب‌لیمو است. در این صورت ارزش هر بطری با آب‌لیمو ده دلار خواهد شد.

۴—

برخی این‌طور استدلال می کنند که وقتی دلال جنسی را هفت دلار می خرد و آن‌را هشت دلار می فروشد یک دلار سود برده است. همچنین اگر جنسی را که قبلاً هشت دلار فروخته بود نُه دلار بخرد یک دلار ضرر کرده است و تا اینجا نه سود داشته است نه زیان. وقتی که این جنس را که نُه دلار خریده به ده دلار می فروشد یک دلار سود خواهد برد. بنابراین سود او در مجموع خریدها و فروشها یک دلار است.

استدلال دیگر به این نتیجه می رسد که دلال سر به سر کرده است. زیرا جنسی را که هفت دلار خریده است هشت دلار فروخته است. و در این معامله یک دلار سود برده است، اما با پرداخت نُه دلار برای جنسی که قبلاً هفت دلار برای آن پرداخت کرده بود دو دلار ضرر کرده است و با فروش آن به ده دلار یک دلار سود به دست آورده است. بنابراین جمع سود و جمع زیان او در معاملات برابر و درنتیجه سر به سر کرده است.

اما این هردو استدلال نادرست هستند. پاسخ درست این است که دلال دو دلار سود داشته است و به راههای گوناگون می توان به این نتیجه رسید.

یک روش استدلال چنین است: ابتدا با فروش جنس هفت دلاری به هشت دلار واضح است که یک دلار سود به دست آورده است. اکنون فرض کنید که دلال به جای آنکه همان جنس را نُه دلار بخرد و ده دلار بفروشد جنس دیگری را به نُه دلار بخرد و ده دلار بفروشد. این کار از نظر تجارتی هیچ تفاوتی با مورد اول ندارد. روشن است که در این معامله نیز یک دلار سود می برد. و بنابراین جمعاً ۲ دلار سود به دست آورده است.

استدلال آسانتر دیگر چنین است: جمع پرداختهای دلال برابر است با ۱۶=۹+۷ دلار و جمع دریافتهای او برابر است با ۱۸=۱۰+۸ دلار. درنتیجه ۲ دلار سود به دست آورده است.

اگر هنوز قانع نشده اید به این استدلال توجّه کنید: فرض کنید در آغاز روز، دلال کار خودرا با دردست داشتن ۱۰۰ دلار شروع کند و در آن روز فقط همان چهار معامله را انجام دهد. ببینیم جمع دارایی نقدی او در پایان روز چقدر خواهد بود؟ چون در نخستین معامله ۷ دلار می پردازد موجودی او به ۹۳ دلار کاهش می یابد. سپس وقتی که جنس خود را هشت دلار می فروشد موجودی او ۱۰۱ دلار می شود. وقتی که همان جنس را ۹ دلار می خرد موجودی او ۹۲ دلار می شود و چون آن را ۱۰ دلار می فروشد موجودی او ۱۰۲ دلار می شود. پس در آغاز روز کار خود را با ۱۰۰ دلار شروع کرده است و در پایان روز ۱۰۲ دلار در اختیار دارد. به این ترتیب آیا سود او می تواند چیزی غیر از ۲ دلار باشد؟

۵—

راه حلی که من در ذهن دارم چنین است: ابتدا به هریک از ده حیوان پنج بیسکویت

می دهیم. با این کار گربه ها سهم خودرا دریافت کرده اند و شش بیسکویت هم باقی می ماند. بنابراین شش بیسکویت باقیمانده سهم سگها خواهد بود و چون هرسگ بایستی یک بیسکویت بیشتراز هر گربه دریافت کند عدهٔ سگها بایستی شش و عدهٔ گربه ها بایستی چهار باشد.

البته می توان درستی این پاسخ را آزمایش نیز کرد: شش سگ که هرکدام شش بیسکویت می گیرند جمعاً سی و شش بیسکویت به دست می آورند و چهار گربه که هرکدام پنج بیسکویت می گیرند جمعاً بیست بیسکویت به دست می آورند. جمع بیسکویتها برابر ۲۰+۳۶ یعنی همان ۵۶ می شود.

۶—

چون ارزش هرپرندهٔ بزرگ برابر ارزش دوپرندهٔ کوچک است، ارزش پنج پرندهٔ بزرگ برابر ارزش ده پرندهٔ کوچک خواهد بود. بنابراین ارزش پنج پرندهٔ بزرگ و سه پرندهٔ کوچک برابر ارزش سیزده پرندهٔ کوچک خواهد شد. ازطرفی ارزش سه پرندهٔ بزرگ و پنج پرندهٔ کوچک برابر ارزش یازده پرندهٔ کوچک است. درنتیجه تفاوت میان ارزش پنج پرندهٔ بزرگ و سه پرندهٔ کوچک با ارزش سه پرندهٔ بزرگ وپنج پرندهٔ کوچک برابر تفاوت میان ارزش سیزده پرندهٔ کوچک و ارزش یازده پرندهٔ کوچک، یعنی برابر ارزش دو پرندهٔ کوچک است و می دانیم که این تفاوت برابر ۲۰ دلار است. بنابراین ارزش دوپرندهٔ کوچک ۲۰ دلار یعنی ارزش هرپرندهٔ کوچک برابر ۱۰ دلار است.

پاسخ را امتحان می کنیم: ارزش یک پرندهٔ کوچک ۱۰ دلار و ارزش یک پرندهٔ بزرگ ۲۰ دلار است. بنابراین هزینهٔ خرید پنج پرندهٔ بزرگ و سه پرندهٔ کوچک برابر ۱۳۰ دلار خواهد شد. اما اگر پنج پرندهٔ کوچک و سه پرندهٔ بزرگ خریداری می شد هزینهٔ آن ۱۱۰ دلار می شد که ۲۰ دلار ازمورد اول کمتر است.

۷—

هنگامی که شرطبندی را پذیرفتم کاملاً فراموش کرده بودم که دوتا از دانشجویانم که همیشه پهلوی هم می نشستند دوقلو بودند.

۸—

عدهٔ اعضا دوازده نفربودند: هفت دموکرات و پنج جمهوریخواه.

۹—

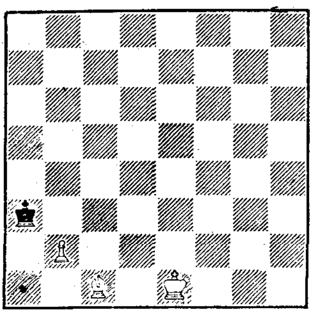
تنها کسی که رنگ تمبر پیشانی او قابل تعیین است C است. اگر تمبر C قرمز می بود در آن صورت B از راه استدلال می دانست که رنگ تمبر خودش قرمز نیست، یعنی باخودش می گفت که اگر تمبر من قرمز می بود، در آن‌صورت A با دیدن دو تمبر قرمز می فهمید که تمبر خودش قرمز نیست. اما A نمی داند که تمبرش قرمز نیست بنابراین تمبر من نمی تواند قرمز باشد.

این ثابت می کند که اگر تمبر C قرمز می بود در آن‌صورت B می فهمید که تمبر خودش قرمز نیست. اما B نمی دانست که تمبرش قرمز نیست بنابراین تمبر C نمی تواند قرمز باشد.

با همین استدلال و تعویض رنگ قرمز با رنگ زرد ثابت می شود که تمبر C زرد هم نمی تواند باشد. بنابراین رنگ تمبر C بایستی سبز باشد.

۱۰—

مشاهدهٔ شکل روشن نمی کند که کدام طرف صفحه متعلق به سفید و کدام طرف متعلق به سیاه بوده است. در ابتدا به نظر می آید که حرکت سفید از پایین به بالا است و اگر واقعاً چنین می بود، موقعیّت مشاهده شده غیرممکن بود. واقعیّت این است که سفید از بالا به پایین حرکت می کرده است، و موقعیّت بازی پیش از آخرین حرکت سفید به شکل زیر بوده است.



درخانهٔ سمت چپ پایین یک مهرهٔ سیاه بوده است که نمی توان مشخص کرد چه مهره‌ای (وزیر، رخ، فیل یا اسب) بوده است. پیادهٔ سفید آن مهرهٔ سیاه را می زند و تبدیل به رخ می شود. درنتیجه موقعیّتی به وجود می آید که درشکل مشاهده می شود.

البته ممکن است این پرسش پیش آید که: «چرا سفید پس از رساندن پیاده‌اش به‌خط اول به‌جای وزیر، رخ را انتخاب کرد؟ آیا این خیلی **غیرمحتمل** نیست؟ پاسخ این است که بلی، این کار واقعاً خیلی **غیرمحتمل** است، اما انجام هرحرکت دیگر نه‌فقط غیرمحتمل بلکه غیرممکن است و همان‌طور که شرلوک هومز به واتسن (Watson) گفت «هرگاه غیرممکن را از موارد قابل تصوّر کنار بگذاری آنچه می‌ماند، اگرچه احتمال نداشته باشد، باید حقیقت باشد.»

۲

دختر زیبا یا ببر گرسنه

بسیاری از شما با داستان **بانو یا ببر** نوشتهٔ فرانک استاکتن[1] آشنا هستید. در این داستان، زندانی بایستی ازمیان دو اتاق یکی را انتخاب کند. دریکی از اتاقها دختری زیبا و در اتاق دیگر ببری گرسنه وجود دارد. اگر اتاق اول را انتخاب کند می‌تواند با آن دختر ازدواج کند و اگر اتاق دوم را انتخاب کند احتمالاً ببر او را خواهد خورد.

پادشاهی نیز این داستان را خوانده بود. روزی به وزیر خود گفت: «ما نیز می‌توانیم با زندانیان چنین کنیم، با این تفاوت که من سرنوشت زندانی را به‌بخت او واگذار نمی‌کنم بلکه علامتهایی بردر اتاقها نصب می‌کنم و فقط برخی از واقعیّتها را در بارهٔ علامتها به‌زندانی می‌گویم. اگر زندانی زیرک باشد و بتواند استدلال منطقی بکند جان خودرا نجات خواهد داد و عروسی زیبا به‌دست خواهد آورد». وزیر گفت: «فکر بسیار خوبی است، قربان!»

۱ــ Frank Stockton (۱۹۰۲ - ۱۸۳٤)، داستان‌نویس امریکایی است که از مهمترین داستانهای کوتاه او بانو یا ببر است که درسال ۱۸۸۲ منتشر شد – م.

آزمایشهای روز اول

در روز اول سه آزمایش انجام شد و در هر سه آزمایش پادشاه به زندانی توضیح داد که در هریک از این دو اتاق دختری زیبا یا ببری گرسنه است. اما ممکن است در هردو اتاق ببر یا در هردو اتاق دختر یا دریک اتاق ببر و در اتاق دیگر دختر باشد.

۱ــ آزمایش اول

زندانی پرسید: «اگر در هر دو اتاق ببر باشد چطور؟ در آن صورت چه کار کنم؟»

پادشاه پاسخ داد: «این از بخت بد شما خواهد بود.»

زندانی پرسید: «اگر در هر دو اتاق دختر باشد چطور؟»

پادشاه گفت: «پاسخ این پرسش را که خود می دانید! معلوم است که در این صورت خوشبختی به شما روی خواهد آورد.»

زندانی پرسید: «خوب، فرض کنیم دریک اتاق ببر و در اتاق دیگر دختر باشد، در آن صورت چه خواهد شد؟»

پادشاه گفت: «در آن صورت انتخاب شما خیلی اهمیّت خواهد داشت. آیا چنین نیست؟»

زندانی پرسید: «از کجا بدانم کدام اتاق را باید انتخاب کنم؟»

پادشاه به علامتهایی که بردر اتاقها نصب شده بود اشاره کرد و گفت با کمک این علامتها:

۱	۲
در این اتاق یک دختر است و در اتاق دیگر یک ببر	در یکی از این دو اتاق دختر و در دیگری ببر است

زندانی پرسید: «آیا این علامتها درستند؟»

پادشاه پاسخ داد: «یکی ازآنها درست است و دیگری نادرست.»
اگر شما به جای زندانی بودید کدام در را می‌گشودید؟ (البته اگر شما هم دختر را به ببر ترجیح دهید!)

۲ـ آزمایش دوم

زندانی اول جان خودرا نجات داد و با دختر ازدواج کرد. پس از آن علامتهای جدیدی بردر اتاقها نصب شد و متناسب با آن علامتها ساکنان اتاقها (دختر یا ببر) نیز تغییر داده شدند. در این مورد علامتها به شکل زیر شد:

۱	۲
دست کم در یکی از این اتاقها یک دختر است	ببر در اتاق دیگر است

زندانی دوم پرسید: «آیا عبارتهایی که در این علامتها نوشته شده اند درستند؟»
پادشاه پاسخ داد: «یا هردو درست هستند یا هردو نادرست.»
زندانی کدام اتاق را باید انتخاب کند؟

۳ـ آزمایش سوم

در این آزمایش پادشاه توضیح داد که در این مورد نیز علامتها یا هردو درست هستند یا هردو نادرست. علامتها چنین بودند:

۱	۲
یا یک ببر در این اتاق است یا یک دختر در اتاق دیگر است	در اتاق دیگر یک دختر است

آیا در اتاق شمارهٔ ۱ ببر است یا دختر؟ در اتاق شمارهٔ ۲ چطور؟

آزمایشهای روز دوم

پادشاه به وزیرش گفت «دیروز، روز شکست ما بود، زیرا هرسه زندانی معماها را حل کردند. بسیارخوب! امروز پنج آزمایش خواهیم داشت که کمی دشوارترند وزیر گفت: «فکر بسیار خوبی است، قربان!»»

پادشاه توضیح داد که در آزمایشهای امروز اگر در اتاق سمت چپ (اتاق شمارهٔ ۱) دختر باشد، عبارتی که بردر آن می نویسیم درست خواهد بود، اما اگر در آن اتاق ببر باشد عبارتی که بردر می نویسیم نادرست خواهد بود و در اتاق سمت راست (اتاق شمارهٔ ۲) توضیحات برعکس اتاق شمارهٔ ۱ خواهد بود، یعنی اگر دختر در اتاق باشد عبارتی که بردر می نویسیم نادرست و اگر ببر در آن باشد عبارتی که بردر می نویسیم درست خواهد بود. درضمن ممکن است در هر دو اتاق ببر یا در هر دو اتاق دختر یا دریک اتاق ببر و در اتاق دیگر دختر باشد.

٤ــ آزمایش چهارم

پادشاه قاعده هایی را که وضع کرده بود برای زندانی توضیح داد و سپس علامتهای زیر را به او نشان داد.

۲	۱
در هر دو اتاق دختر است	در هر دو اتاق دختر است

به نظر شما زندانی کدام اتاق را باید انتخاب کند؟

۵ــ آزمایش پنجم

همان قاعده ها برقرار است و علامتها به شرح زیر هستند:

۱ دست کم در یک اتاق دختر است	۲ دختر در اتاق دیگر است

۶ــ آزمایش ششم

پادشاه از این معما و معمای بعدی خیلی راضی بود. در این معما علامتهای زیر داده شد:

۱ تفاوتی نمی کند که کدام اتاق را انتخاب کنید	۲ در اتاق دیگر یک دختر است

چه باید بکند؟

۷ــ آزمایش هفتم

علامتهای این معما به‌شرح زیر بود:

۱ انتخاب اتاق اهمیّت دارد	۲ بهتر است اتاق دیگر را انتخاب کنید

انتخاب زندانی چه باید باشد؟

۸ــ آزمایش هشتم

زندانی فریاد کشید: «هیچ علامتی بردر اتاقها نصب نشده است!» پادشاه پاسخ داد: «کاملاً درست است. علامتها تازه آماده شده‌اند و هنوز فرصت نکرده‌ام آنها را نصب کنم.»

زندانی پرسید: «در این صورت چگونه انتظار دارید که من اتاق انتخاب کنم؟»

پادشاه گفت: «نگران نباش، علامتها حاضر شدند، نگاه کن!»

در این اتاق یک ببر است	در هر دو اتاق ببر است

زندانی با نگرانی گفت: «بسیار خوب! اما هنوز معلوم نکرده اید که کدام علامت متعلق به کدام اتاق است.»

پادشاه اندکی فکر کرد و گفت: «لازم نیست معلوم شود! شما می توانید بدون دانستن آن اطلاعات نیز مسئله را حل کنید. البته فقط فراموش نکن که وجود یک دختر در اتاق سمت چپ به این معنی است که اطلاعاتی که می بایست بردر آن نصب شود درست است و وجود یک ببر در آن نشاندهندهٔ نادرستی اطلاعاتی است که می بایستی به درِ اتاقها نصب می شد، و در مورد اتاق سمت راست قضیه معکوس است.»

راه حل این مسئله چگونه است؟

آزمایشهای روز سوم

پس از آزمایش هشتم پادشاه گفت: «لعنت بر اینها! بازهم همهٔ زندانیها برنده شدند! فکر می کنم فردا به جای دو اتاق سه اتاق درنظر بگیرم و در یک اتاق دختر و در دو اتاق دیگر ببر بگذارم. آن گاه خواهیم دید که بر زندانیها چه خواهد گذشت.»

وزیر گفت: «فکر بسیار خوبی است، قربان!»

پادشاه فریاد زد: «گرچه همنشینی باتو مارا خوشنود می کند، اما این قدر نگو فکر بسیار خوبی است قربان و وقتی از تو چیزی می پرسند کمی هم فکر کن.»

وزیر گفت: «احسنت! عالی فرمودید قربان!»

۹ــ آزمایش نهم

به هرحال در روز سوم پادشاه برطبق نقشه عمل کرد. سه اتاق به زندانی نشان داد و توضیح داد که دریک اتاق دختر و در دو اتاق دیگر ببر است. علامتهای اتاقها به شرح زیر بودند:

۱	۲	۳
در این اتاق یک ببر است	در این اتاق یک دختر است	در اتاق شمارهٔ ۲ یک ببر هست

پادشاه افزود که دست کم یکی از این سه علامت درست است.
دختر در کدام اتاق بود؟

۱۰ــ آزمایش دهم

در این آزمایش نیز فقط یک دختر و دو ببر بود. پادشاه برای زندانی توضیح داد که علامت اتاق دختر درست است و دست کم یکی از دو علامت دیگر نادرست است. علامتها به شرح زیر بود:

۱	۲	۳
در اتاق شمارهٔ ۲ یک ببر هست	در این اتاق یک ببر هست	در اتاق شمارهٔ ۱ یک ببر هست

زندانی چه تصمیمی باید بگیرد؟

۱۱ــ اوّلین، دومین و سومین انتخاب

در این آزمایش بسیار جالب توجّه، پادشاه برای زندانی توضیح داد که دریکی از اتاقها دختر و دریکی ببر است و اتاق سوم خالی است. اطلاعات نوشته شده براتاق دختر درست، اطلاعات نوشته شده براتاق ببر نادرست و

اطلاعات نوشته شده براتاق خالی یا درست یا نادرست است. علامتها به‌شرح زیر هستند:

۱	۲	۳
اتاق شمارهٔ ۳ خالی است	ببر در اتاق شمارهٔ ۱ است	این اتاق خالی است

زندانی دختر را از پیش می‌شناخت و علاقه داشت که با او ازدواج کند. بنابراین هرچند انتخاب اتاق خالی بهتراز انتخاب اتاق ببر بود ترجیح می‌داد اتاقی را انتخاب کند که دختر در آن بود.

آیامی توانیدبگویید دختر درکدام اتاق و ببر درکدام اتاق بود؟ اگر به این دوپرسش پاسخ دهید بیگمان اتاق خالی را هم می‌توانید پیدا کنید.

آزمایشهای روز چهارم

پادشاه گفت: «وحشتناک است! گویا نمی‌توانم معماها را به اندازهٔ کافی دشوار کنم و زندانیان را به دام بیندازم! خیلی‌خوب، فقط یک آزمایش دیگر خواهیم داشت. اما این بارحال زندانی را واقعاً جامی آورم!»

۱۲ــ مار پیچ منطقی

پادشاه که حرف وعملش یکی بود به‌جای سه اتاق نُه اتاق درنظر گرفت و به زندانی توضیح داد که فقط دریکی از اتاقها دختر هست و اتاقهای دیگریا ببر دارند یا خالی هستند و افزود که علامت اتاقی که در آن دختر هست درست است و علامت همهٔ اتاقهایی که در آن ببر هست نادرست و علامت اتاقهای خالی یا درست یا نادرست است.

علامتها به‌شرح زیر بود:

۱	۲	۳
دختر در اتاق شمارهٔ فرد است	این اتاق خالی است	یا علامت اتاق شمارهٔ ۵ درست است یا علامت اتاق شمارهٔ ۷ نادرست است
۴	**۵**	**۶**
علامت اتاق شمارهٔ ۱ نادرست است	یا علامت اتاق شمارهٔ ۲ یا علامت اتاق شمارهٔ ٤ درست است	علامت اتاق شمارهٔ ۳ نادرست است
۷	**۸**	**۹**
دختر در اتاق شمارهٔ ۱ نیست	در این اتاق یک ببر هست و اتاق نهم خالی است	در این اتاق یک ببر هست و علامت اتاق ششم نادرست است

زندانی مدّت زیادی موقعیّت را بررسی کرد و باخشم فریاد کشید «این مسئله حل شدنی نیست و این از انصاف به دور است.» پادشاه با خنده گفت: «می دانم!»

زندانی پاسخ داد «خیلی خنده داشت! حالا دست کم یک راهنمایی مناسب بکنید: آیا اتاق شمارهٔ ۸ خالی است یا نه؟»

پادشاه که مردی با انصاف بود زندانی را در مورد خالی بودن یا پر بودن اتاق شمارهٔ ۸ راهنمایی کرد و زندانی موفق شد اتاقی را که دختر در آن بود پیدا کند.

به نظر شما دختر در کدام اتاق بود؟

پاسخها

۱ـ

می دانیم که یکی از علامتها درست و دیگری نادرست است. آیا ممکن است علامت اول درست و علامت دوم نادرست باشد؟ مسلماً نه، زیرا اگر علامت اول درست باشد در آن صورت علامت دوم نیز درست خواهد بود. سبب آن است که اگر در اتاق شمارهٔ ۱ دختر و در اتاق شمارهٔ ۲ ببر باشد عبارت «در یکی از این دو اتاق دختر و در دیگری ببر است» نیز درست خواهد بود. بنابراین چون حالت «علامت اول درست و علامت دوم نادرست» درست نیست پس بایستی علامت اول نادرست و علامت دوم درست باشد. درست بودن علامت دوم یعنی در یک اتاق ببر و در اتاق دیگر دختر است که واقعیّت دارد و نادرست بودن علامت اول یعنی ببر در اتاق شمارهٔ ۱ و دختر در اتاق شمارهٔ ۲ است. پس زندانی بایستی اتاق شمارهٔ ۲ را انتخاب کند.

۲ـ

اگر علامت دوّم نادرست باشد، در آن صورت در اتاق شمارهٔ یک بایستی یک دختر باشد. درنتیجه عبارت «دست کم در یکی از اتاقها یک دختر است» یعنی علامت یک درست خواهد بود. بنابراین علامتها نمی توانند هردو نادرست باشند. این به معنی آن است که هردو علامت بایستی درست باشد (زیرا برطبق فرضهای معما یا هردو علامت درست است یا هردو نادرست). پس ببر در اتاق شمارهٔ ۱ و دختر در اتاق شمارهٔ ۲ است. یعنی در این مسئله نیز زندانی بایستی اتاق شمارهٔ ۲ را انتخاب کند.

۳ـ

در این آزمایش پادشاه خیلی سخاوت به خرج می دهد زیرا در هردو اتاق دختر گذاشته است. اثبات این نتیجه به شرح زیر است:

علامت یک درواقع می گوید که دست کم یکی از موارد زیر درست است: یک ببر در اتاق شمارهٔ ۱ و یک دختر در اتاق شمارهٔ ۲ وجود دارد (علامت یک، امکان درست بودن هردو مورد را رد نمی کند).

حال اگر علامت ۲ نادرست باشد، در آن صورت در اتاق شمارهٔ ۱ بایستی ببر باشد، که به معنی درستی علامت اول خواهد بود (زیرا مورد اول پاراگراف فوق صحّت پیدا می کند). اما در این آزمایش گفته شده است که یا هردو علامت درست است یا

هر دو نادرست. بنابراین چون علامت ۲ درست است پس هر دو علامت بایستی درست باشد. چون علامت ۲ درست است پس یک دختر در اتاق شمارهٔ ۱ است، که این یعنی نادرست بودن امکان اول علامت ۱. و چون دست کم یکی از دو امکان درست است، پس امکان دوم در علامت ۱ بایستی درست باشد. نتیجه آن که در اتاق شمارهٔ ۲ نیز یک دختر است.

۴—

چون هردو علامت یک چیز می گوید پس یا هردو درست هستند یا هردو نادرست. فرض کنیم هردو درست باشند. در آن‌صورت در هردو اتاق دختر خواهد بود. اما برطبق اطلاعاتی که داریم اگر در اتاق شمارهٔ ۲ دختر باشد، علامت آن بایستی نادرست باشد. از این تناقض نتیجه‌می شود که هردو علامت نمی تواند درست باشد. بنابراین هردو علامت نادرست هستند. درنتیجه ببر در اتاق شمارهٔ ۱ و دختر در اتاق شمارهٔ ۲ است.

۵—

اگر در اتاق شمارهٔ ۱ ببر باشد، به تناقض برمی خوریم. زیرا اگر در اتاق شمارهٔ ۱ ببر باشد، در آن‌صورت علامت اول نادرست است، یعنی در هیچ اتاق دختر نیست و در هردو اتاق بایستی ببر باشد. امّا برطبق فرضهای مسئله وجود ببر در اتاق شمارهٔ ۲ نشانهٔ درستی علامت دوم است، یعنی در اتاق دیگر دختر است و این نتیجه با فرض وجود ببر در اتاق شمارهٔ ۱ تناقض دارد. بنابراین وجود ببر در اتاق شمارهٔ ۱ ناممکن است، پس در آن اتاق بایستی دختر باشد.

۶—

علامت اول در واقع می گوید یا در هر دو اتاق دختر است یا در هر دو اتاق ببر است، به‌عبارت دیگر در هرحال تفاوتی نمی کند که کدام اتاق انتخاب شود.

فرض کنیم در اتاق شمارهٔ ۱ دختر باشد. در آن‌صورت علامت اول درست خواهد بود، که به‌معنی وجود دختر در اتاق شمارهٔ ۲ نیز هست. اما اگر فرض کنیم در اتاق شمارهٔ ۱ ببر باشد در آن‌صورت علامت اول نادرست خواهد بود، و این بدان معنی است که ساکنان دو اتاق همنوع نیستند. در این حالت نیز نتیجه می شود که در اتاق

شمارهٔ ۲ یک دختر است. بنابراین، صرف نظر از اینکه در اتاق شمارهٔ ۱ چه هست، در اتاق شمارهٔ ۲ بایستی دختر باشد. اما چون در اتاق شمارهٔ ۲ دختر است، علامت ۲ بایستی نادرست باشد و بنابراین در اتاق شمارهٔ ۱ ببر هست.

۷—

مفهوم علامت اول این است که ساکنان اتاقها متفاوت هستند (در یک اتاق دختر و در اتاق دیگر ببر است)؛ اما نمی دانیم که کدام یک در کدام اتاق است. اگر ساکن اتاق شمارهٔ ۱ دختر باشد، در آن صورت علامت اول درست است و بنابراین در اتاق شمارهٔ ۲ بایستی ببر باشد. ازطرف دیگر اگر ساکن اتاق شمارهٔ ۱ ببر باشد، در آن صورت علامت اتاق شمارهٔ ۱ نادرست است، یعنی ساکنان دو اتاق متفاوت نیستند و بنابراین در اتاق شمارهٔ ۲ نیز بایستی ببر باشد. درنتیجه در اتاق شمارهٔ ۲ قطعاً ببر هست. و این نشان می دهد که علامت اتاق شمارهٔ ۲ درست است؛ پس در اتاق شمارهٔ ۱ بایستی دختر باشد.

۸—

فرض کنید علامت «در این اتاق ببر است» بر درِ اتاق شمارهٔ ۱ نصب شده باشد. حال اگر در آن اتاق دختر باشد، علامت نادرست است و این باشرطی که پادشاه گفته بود مغایر است. اگر در اتاق شمارهٔ ۱ ببر باشد، علامت درست است که این نتیجه نیز باشرط مسئله مغایر است. بنابراین علامت مورد بحث نمی تواند به اتاق شمارهٔ ۱ مربوط شود و بایستی به اتاق شمارهٔ ۲ نصب شود و درنتیجه علامت دیگر بایستی به اتاق شمارهٔ ۱ نصب شود.

بنابراین علامت «در هردو اتاق ببر است» مربوط به اتاق شمارهٔ ۱ است. درنتیجه در اتاق شمارهٔ ۱ نمی تواند دختر باشد، زیرا در آن صورت علامت اتاق شمارهٔ ۱ درست خواهد بود، یعنی در هردو اتاق ببر است و این تناقضی است آشکار. بنابراین در اتاق شمارهٔ ۱ ببر است و درنتیجه علامت آن نادرست است. پس در اتاق شمارهٔ ۲ دختر هست.

۹—

علامتهای ۲ و ۳ بایکدیگر تناقض دارند، بنابراین فقط یکی از آن دو درست است.

ازطرفی چون حداکثر یکی از سه علامت درست است، بنابراین علامت اول نادرست است، یعنی دختر در اتاق شمارهٔ ۱ است.

۱۰—

چون علامت اتاقی که دختر در آن است درست است، بنابراین در اتاق شمارهٔ ۲ نمی‌تواند دختر باشد. اگر در اتاق شمارهٔ ۳ دختر باشد، در آن‌صورت هرسه علامت می‌بایست درست باشند؛ که این با شرط «دست کم یکی از علامتها نادرست است» تناقض دارد. بنابراین دختر در اتاق شمارهٔ ۱ است (و علامت ۲ درست و علامت ۳ نادرست است).

۱۱—

چون علامت اتاقی که دختر در آن است درست است، پس در اتاق شمارهٔ ۳ نمی‌تواند دختر باشد.

فرض کنیم در اتاق شمارهٔ ۲ دختر باشد، در آن‌صورت علامت ۲ بایستی درست باشد که درنتیجه ببر در اتاق شمارهٔ ۱ است و اتاق شمارهٔ ۳ خالی خواهد بود. یعنی علامت اتاقی که در آن ببر هست درست است و این ممکن نیست. پس دختر در اتاق شمارهٔ ۱ است؛ اتاق شمارهٔ ۳ خالی و ببر در اتاق شمارهٔ ۲ است.

۱۲—

اگر پادشاه به زندانی می گفت که اتاق شمارهٔ ۸ خالی است، غیرممکن بود که زندانی بتواند دختر را پیدا کند. چون زندانی سرانجام اتاق دختر را پیدا کرد، بنابراین پادشاه بایستی به او گفته باشد که اتاق شمارهٔ ۸ خالی نیست. زندانی به این صورت استدلال کرد:

«ممکن نیست که دختر در اتاق شمارهٔ ۸ باشد، زیرا اگر در آنجا باشد علامت ۸ درست خواهد بود. و چون علامت می گوید که در آن اتاق ببر است به تناقض می رسیم». بنابراین در اتاق شمارهٔ ۸ دختر نیست. همچنین اتاق شمارهٔ ۸ خالی نیست، درنتیجه در اتاق شمارهٔ ۸ بایستی ببر باشد، و چون ببر در آن است پس علامتش نادرست است. حال، اگر اتاق شمارهٔ ۹ خالی باشد، علامت ۸ درست خواهد بود. بنابراین اتاق شمارهٔ ۹ نمی‌تواند خالی باشد.

پس اتاق شمارهٔ ۹ نیز خالی نیست. همچنین دختر در آن نیست. زیرا در این صورت علامت آن درست خواهد بود، که این به معنی وجود ببر در آن اتاق و وجود ببر در اتاق شمارهٔ ۹ یعنی نادرست بودن علامت آن است. اگر علامت ٦ نادرست باشد، یعنی علامت ۹ باید درست باشد، که ممکن نیست. بنابراین علامت ٦ درست است.

چون علامت ٦ درست است، پس علامت ۳ نادرست است. اما علامت ۳ هنگامی نادرست است که علامت ۵ نادرست و علامت ۷ درست باشد. چون علامت ۵ نادرست است پس علامت ۲ و علامت ٤ هردو نادرستند و چون علامت ٤ نادرست است، پس علامت ۱ باید درست باشد.

بنابراین جدول «درست، نادرست» بودن علامتها به شرح زیر خواهد شد:

علامت ۱— درست	علامت ٤— نادرست	علامت ۷— درست
علامت ۲— نادرست	علامت ۵— نادرست	علامت ۸— نادرست
علامت ۳—نادرست	علامت ٦— درست	علامت ۹— نادرست

اکنون روشن است که دختر بایستی در اتاق ۱ یا ٦ یا ۷ باشد، زیرا علامتهای دیگر نادرست اند. چون علامت ۱ درست است، دختر نمی تواند در اتاق شمارهٔ ٦ باشد. چون علامت ۷ درست است، دختر نمی تواند در اتاق شمارهٔ ۱ باشد. بنابراین دختر در اتاق شمارهٔ ۷ است.

۳

تیمارستان دکتر تار و پروفسور فذر

به آقای کریگ، کارآگاه اسکاتلندیارد، مأموریت داده شد که به فرانسه برود و یازده تیمارستان را که گویا با مسئله‌ای رو به رو شده بودند بررسی کند. ساکنان هریک از این تیمارستانها را فقط پزشک و بیمار تشکیل داده بود. پزشکان کارمند تیمارستان بودند. در هر تیمارستان هریک از ساکنان - پزشک یا بیمار - یا عاقل بود یا دیوانه. درضمن عاقلها کاملاً عاقل بودند و باورهایشان درستی صددرصد داشت، یعنی هرگزارهٔ نادرست را نادرست می‌پنداشتند و هرگزارهٔ درست را درست می انگاشتند. باورهای دیوانه‌ها **کاملاً** نادرست بود، یعنی هرگزارهٔ نادرست را درست می پنداشتند و هرگزارهٔ درست را نادرست می دانستند. درضمن کلّیّهٔ ساکنان تیمارستان همیشه راستگو بودند یعنی آنچه را می گفتند واقعاً باور داشتند.

۱ــ تیمارستان اول

کارآگاه کریگ، در نخستین تیمارستانی که بازدید کرد، بادونفر از ساکنان به نامهای جونز (Jonnes) و اسمیت (Smit) جداگانه گفتگو کرد.

از جونز پرسید: «بگو ببینم درbارهٔ آقای اسمیت چه می دانی؟»

جونز پاسخ داد: «باید بگویی **دکتر** اسمیت. او از پزشکان همکار ما در

تیمارستان است.»

اندکی بعد کریگ آقای اسمیت را دید و از او پرسید: «در بارهٔ جونز چه می دانی؟ پزشک است یا بیمار؟»

اسمیت پاسخ داد: «او بیمار است.»

کارآگاه چند لحظه وضعیّت را جمعبندی کرد و دریافت که باید در آن تیمارستان مسئله ای وجود داشته باشد: یا باید یکی از پزشکان دیوانه باشد و بنابراین نبایستی در تیمارستان کار کند، یا باید یکی از بیماران سالم باشد و بنابراین نبایستی او را در تیمارستان نگه داشت.

کریگ چگونه به این واقعیّت پی برد؟

۲ــ تیمارستان دوم

در دومین تیمارستانی که کریگ بازدید کرد یکی از ساکنان عبارتی را بیان کرد که کریگ براساس آن دریافت که او بایستی فردی عاقل باشد که به‌عنوان بیمار به‌آنجا برده شده است. از این‌رو دستور داد که او را از تیمارستان آزاد کنند.

آیا شما می توانید آن عبارت را بیان کنید؟

۳ــ تیمارستان سوم

در سومین تیمارستان، کارآگاه کریگ براساس عبارتی که یکی از ساکنان بیان کرد نتیجه گرفت که او می باید پزشکی دیوانه باشد.

آیا می توانید چنان عبارتی را بیان کنید؟

٤ــ تیمارستان چهارم

در این تیمارستان کریگ از یکی از ساکنان پرسید: «آیا شما بیمارهستید؟»

او پاسخ داد «بلی».

آیا لزوماً در این تیمارستان مسئله ای وجود دارد؟

۵– تیمارستان پنجم

در این تیمارستان کارآگاه از یک نفر پرسید: «آیا شما یک بیمار هستید؟» او پاسخ داد «بلی. من این طور عقیده دارم.»

آیا لزوماً در این تیمارستان مسئله ای وجود دارد؟

۶– تیمارستان ششم

در این تیمارستان کارآگاه از یکی پرسید: «آیا شما عقیده دارید که بیمار هستید؟» آن شخص پاسخ داد: «من معتقدم که چنین عقیده‌ای دارم.»

آیا لزوماً در این تیمارستان مسئله ای هست؟

۷– تیمارستان هفتم

در این تیمارستان کریگ با موقعیّت جالب توجّه‌تری برخورد کرد. او با دونفر از ساکنان تیمارستان ـ A و B ـ ملاقات کرد و دریافت که A عقیده دارد که B دیوانه است و B عقیده دارد که A پزشک است. کارآگاه دستور داد که یکی از آن دونفر را از تیمارستان آزاد کنند. کدامیک را و چرا؟

۸– تیمارستان هشتم

تیمارستان هشتم کاملاً اسرارآمیز بود، اما کریگ سرانجام به کُنه قضایا پی برد. او دریافت که در آنجا شرایط زیر برقرار است:

۱– ازمیان هردونفر ـ A و B ـ یا A به B اعتماد دارد یا ندارد.

۲– برخی از ساکنان **معلم** ساکنان دیگر هستند و هرنفر دست کم یک معلم دارد.

۳– هیچ فرد A حاضر نیست معلم B باشدمگرآنکه **A** عقیده داشته

باشد که B به او اعتماد دارد.

۴ــ برای هرفرد A فردی مانند B وجود دارد که فقط به کلّیّهٔ کسانی که دست کم یک معلم مورد اعتماد A دارند اعتماد دارد. (به بیان دیگر، برای هرفرد X ، B درصورتی به X اعتماد خواهد داشت که A به یک معلم X اعتماد داشته باشد و B به X اعتماد نمی کند مگر آنکه A به یک معلم X اعتماد کند.)

۵ــ یک نفر وجود دارد که به همهٔ بیماران اعتماد دارد و به هیچ پزشکی اعتماد ندارد.

کارآگاه مدّت زیادی به مسئلهٔ تیمارستان هشتم فکر کرد و سرانجام ثابت کرد که یا یکی از بیماران عاقل است یا یکی از پزشکان دیوانه است. آیا شما می توانید این نتیجه را ثابت کنید؟

۹ــ تیمارستان نهم

در این تیمارستان کریگ با چهار نفر گفتگو کرد: A ، B ، C ، D . شخص A عقیده داشت که B و C ازنظر عقلی شبیه یکدیگرند. B عقیده داشت که A و D ازنظر عقلی شبیه یکدیگرند. کریگ از C پرسید «آیا شما و D هردو پزشکید؟» C جواب داد «خیر.»

آیا در این تیمارستان مسئله ای هست؟

۱۰ــ تیمارستان دهم

کارآگاه کریگ، مسئلهٔ این تیمارستان را، گرچه حل کردنش دشوار بود، بسیار جالب توجّه یافت. نخستین نکته‌ای که کشف کرد این بود که ساکنان تیمارستان کمیته های گوناگون تشکیل داده بودند. در یک کمیته ممکن بود هم پزشک و هم بیمار و همچنین هم عاقل و هم دیوانه عضویت داشته باشند. کارآگاه به واقعیّتهای دیگری نیز پی برد:

۱ــ همهٔ بیماران یک کمیته تشکیل داده بودند.

۲ــ همهٔ پزشکان یک کمیته تشکیل داده بودند.

۳ــ هرکس در تیمارستان دوستان بسیار داشت، که یکی از آنها بهترین دوستش بود، همچنین هرکس دشمنان بسیار داشت که یکی از آنها بدترین دشمنش بود.

٤ــ همهٔ کسانی که بهترین دوستشان در کمیتهٔ معین C بود یک کمیته تشکیل داده بودند، همچنین همهٔ کسانی که بدترین دشمنشان در کمیتهٔ C بود یک کمیته تشکیل داده بودند.

۵ــ در هر دو کمیتهٔ (۱) و (۲) دست کم شخصی مانند D وجود دارد که بهترین دوستش عقیده دارد که او در کمیتهٔ (۱) و بدترین دشمنش عقیده دارد که او در کمیتهٔ (۲) است.

کریگ با جمعبندی این واقعیّتها به‌طور جالب توجّهی ثابت کرد که یا یکی از پزشکان دیوانه است یا یکی از بیماران عاقل. او چگونه به این نتیجه رسید؟

۱۱ــ معمای دیگر تیمارستان دهم

کریگ مدتی دیگر در تیمارستان دهم توقف کرد، زیرا در آنجا مسائل دیگری توجّه او را جلب کرده بود. کنجکاو شده بود که بداند آیا همهٔ افراد عاقل یک کمیته تشکیل داده‌اند یا نه، و آیا همهٔ افراد دیوانه نیز یک کمیته تشکیل داده‌اند یا نه. نمی توانست براساس اطّلاعات (۱)، (۲)، (۳)، (٤) و (۵) به این دو پرسش پاسخ دهد ـ اما صرفاً بااستفاده از اطلاعات (۳) و (٤) و (۵) ـ ثابت کرد که ممکن نیست هردوی این گروهها کمیته تشکیل داده باشند. چگونه این مطلب را ثابت کرد؟

۱۲ــ یک معمای دیگر در همان تیمارستان

کریگ موضوع دیگری را نیز در مورد این تیمارستان ثابت کرد. او این موضوع را بسیار مهم تلقی کرد. درواقع بااستفاده از راه‌حل این مسئله، دو مسئلهٔ قبلی خیلی ساده‌تر حل می‌شوند. موضوع از این‌قرار بود که در هردوکمیتهٔ (۱) و (۲) یک نفر مانند E و یک نفر مانند F وجود داشت به‌طوری که E عقیده داشت که F در کمیتهٔ (۱) است و F عقیده داشت که E در کمیتهٔ (۲) است. کاراگاه چگونه به این نتیجه رسید؟

۱۳ــ تیمارستان دکتر تار و پروفسور فِذِر

در آخرین تیمارستانی که مورد بازدید کاراگاه قرار گرفت، مسئله بسیار شگفت‌آور بود. این تیمارستان به وسیلهٔ دو پزشک به نامهای دکتر تار و پروفسور فِذِر اداره می‌شد. پزشکان دیگری نیز جزو کارمندان تیمارستان بودند. در اینجا هرکس را که خود عقیده داشت بیمار است **عجیب** می‌نامیدند و هرکس را که همهٔ بیمارها عقیده داشتند عجیب است و هیچ یک از پزشکان عقیده نداشت که او عجیب است **مخصوص** می‌نامیدند. کاراگاه دریافت که در این تیمارستان دست کم یک نفر عاقل است و این شرط نیز برقرار است:

شرط C : به ازای هرفرد یک نفر در تیمارستان وجود دارد که بهترین دوست اوست. از این گذشته، به‌ازای هر دونفر A و B اگر A عقیده داشته باشد که B مخصوص است، در آن‌صورت بهترین دوست A عقیده دارد که B بیمار است.

اندکی پس از این اکتشاف، کریگ با دکتر تار و پروفسور فِذِر گفتگوهای اختصاصی ترتیب داد. متن گفتگوبا دکتر تار به‌شرح زیر است:

کریگ: دکتر تار، راستی آیا همهٔ پزشکان این تیمارستان عاقل هستند؟

تار: البته که همه عاقل‌اند.

کریگ: بیماران چطور؟ آیا همهٔ آنها دیوانه‌اند؟

تار: دست‌کم یکی از آنها دیوانه است.

پاسخ دوم، کارآگاه را به‌تعجب واداشت. البته اگر همهٔ بیمارها دیوانه باشند، این عبارت که دست‌کم یکی از آنها دیوانه است درست خواهد بود، اما چرا دکتر تار این همه احتیاط می‌کرد؟ پس از آن، کریگ با پروفسور فِدِر گفتگو کرد و مطالب زیر در این گفتگو مطرح شد:

کریگ: دکتر تار گفت که دست‌کم یک بیمار در اینجا دیوانه است. قطعاً درست است! این طور نیست؟

پروفسور فِدِر: البته که درست است! کلّیهٔ بیماران این تیمارستان دیوانه‌اند! فکر کرده‌اید که اینجا چگونه تیمارستانی است؟

کریگ: پزشکان چطور؟ آیا همه سالمند؟

پروفسور فِدِر: دست‌کم یکی از آنها سالم است.

کریگ: دکتر تار چطور؟ آیا او سالم است؟

پروفسور فِدِر: البته که سالم است! چگونه جرأت می‌کنید چنین پرسشی مطرح کنید؟

اینجا بود که کارآگاه به‌عمق وحشت‌آمیز وضعیّت این تیمارستان پی برد! شما چه فکر می‌کنید؟

(اگر کتاب «**نظام دکتر تار و پروفسور فِدِر**» نوشتهٔ **اِدگَر آلِن پو**[1] را خوانده باشید احتمالاً پاسخ این مسئله را بدون آشنایی با چگونگی اثبات حدس خواهید زد. لطفاً به ملاحظات پس از پاسخ مسئلهٔ ۱۳ مراجعه فرمایید).

۱ــ Edgar Allan Poe (۱۸۰۹ - ۱۸٤۹) نویسنده و شاعر امریکایی. شهرتش بیشتر به‌سبب داستانهای کوتاه است. این داستانها اغلب اسرارآمیزند. بعضی از داستانهایش به فارسی ترجمه شده است ــ م.

پاسخها

۱—

ثابت می کنیم که جونز یا اسمیت (نمی دانیم کدامیک) باید یا پزشک دیوانه یا بیمار عاقل باشد (بازهم نمی دانیم کدامیک).

جونز یا عاقل است یا دیوانه. فرض کنیم عاقل باشد. در این صورت نظر او درست است، یعنی اسمیت واقعاً یک پزشک است. اگر اسمیت دیوانه باشد، در این صورت پزشکی دیوانه است. اگر اسمیت عاقل باشد، در این صورت نظر او درست است و این بدان معنی است که جونز یک بیمار و بنابراین بیماری عاقل است (چون فرض کرده‌ایم که جونز عاقل است). به این ترتیب ثابت می شود که اگر جونز عاقل باشد، یا او بیماری عاقل یا اسمیت پزشکی دیوانه است.

اکنون فرض کنیم که جونز دیوانه باشد. در این صورت نظر او نادرست است و این بدان معنی است که اسمیت بیمار است. اگر اسمیت عاقل باشد در این صورت بیماری عاقل است. اگر اسمیت دیوانه باشد، در این صورت نظر او نادرست است و نتیجه می شود که جونز پزشک است، و آن هم یک پزشک دیوانه. به این ترتیب ثابت می شود که اگر جونز دیوانه باشد، یا او پزشکی دیوانه است یا اسمیت بیماری عاقل است.

به طور خلاصه، اگر جونز عاقل باشد، در این صورت یا او بیماری عاقل یا اسمیت پزشکی دیوانه است. اگر جونز دیوانه باشد، در این صورت یا او پزشکی دیوانه یا اسمیت بیماری عاقل است.

۲—

پاسخهای بسیاری می‌توان داد. ساده‌ترین پاسخی که من می‌توانم تصوّر کنم این است که آن شخص گفته باشد «من پزشکی عاقل نیستم». اگر چنین باشد می توان ثابت کرد که گویندهٔ آن می بایستی بیماری عاقل باشد. زیرا:

یک پزشک دیوانه نمی تواند این نظر درست را داشته باشد که او پزشکی عاقل نیست. پزشک عاقل نیز نمی تواند این نظر نادرست را داشته باشد که او پزشکی عاقل نیست. بیمار دیوانه نیز نمی تواند این نظر درست را داشته باشد که او پزشکی عاقل نیست (زیرا یک بیمار دیوانه پزشکی عاقل نیست). بنابراین گویندهٔ چنان عبارتی یک بیمار عاقل بوده است و نظر او که خودرا پزشکی عاقل نمی دانست درست بوده است.

۳ـ
آن عبارت ممکن است چنین بوده باشد: «من یک بیمار دیوانه هستم». بیمار عاقل نمی تواند این نظر نادرست را داشته باشد که او بیماری دیوانه است. بیمار دیوانه نیز نمی تواند این نظر درست را داشته باشد که او بیماری دیوانه است. بنابراین گویندهٔ عبارت بالا بیمار نیست، پس پزشک است. پزشک عاقل ممکن نیست فکر کند که بیماری دیوانه است. بنابراین گویندهٔ آن عبارت پزشکی دیوانه است که به نادرست فکر می کند بیماری دیوانه است.

٤ـ
گوینده عقیده دارد که او بیمار است. اگر عاقل باشد، در آن صورت واقعاً بیمار است، یعنی بیماری عاقل است و نبایستی در تیمارستان باشد. اگر دیوانه باشد، نظرش نادرست است و بنابراین بیمار نیست و پزشک است، یعنی یک پزشک دیوانه است و نبایستی جزو کارمندان تیمارستان باشد. پس، نمی توان مشخص کرد که آیا این شخص بیماری عاقل است یا پزشکی دیوانه، اما در هردو حالت او نبایستی در تیمارستان باشد.

۵ـ
در اینجا مسئله با مسئلهٔ تیمارستان قبلی کاملاً فرق می کند. فقط به این سبب که گوینده گفته است که او عقیده دارد که بیمار است نمی توان الزاماً نتیجه گرفت که او واقعاً عقیده دارد که بیمار است! چون او مانند همهٔ ساکنان تیمارستان راستگو است و می گوید که عقیده دارد که بیمار است پس، عقیده دارد که عقیده دارد که بیمار است. فرض می کنیم که او دیوانه باشد. در این صورت عقیده هایش همگی نادرست اند؛ حتّی در مورد عقیده های خودش، پس این عقیده هم که عقیده دارد که بیمار است نادرست است و بنابراین درواقع عقیده دارد که پزشک است. چون دیوانه است و عقیده دارد که پزشک است. بنابراین درواقع او بیمار است. پس اگر دیوانه باشد. بیماری دیوانه است. اکنون فرض می کنیم که او عاقل باشد. چون عقیده دارد که عقیده دارد که بیمار است، بنابراین عقیدهٔ او در مورد بیمار بودنش درست است. چون عقیده دارد که بیمار است. پس واقعاً بیمار است. بنابراین اگر عاقل باشد نیز یک بیمار است. پس می بینیم که این شخص یا یک بیمار عاقل است یا یک بیمار دیوانه و بنابراین نمی توان

نتیجه گرفت که حتماً در این تیمارستان مسئله ای وجود دارد.

به‌طور کلی قضیهٔ این تیمارستان را می توان به‌شرح زیر تشریح کرد: اگر شخصی در این تیمارستان عقیده‌ای داشته باشد، بسته به اینکه آن شخص عاقل باشد یا دیوانه، آن عقیده درست یا نادرست خواهد بود. اما اگر شخصی عقیده دارد که عقیده‌ای دارد، آن عقیده درست خواهد بود خواه آن شخص عاقل باشد یا دیوانه. (اگر دیوانه باشد دو عقیده مانند حاصلضرب منفی در منفی که مثبت است یکدیگر را خنثی می کنند).

۶—

در این مورد، گوینده ادّعا نکرده است که بیمار است یا عقیده دارد که بیمار است. او ادعا می کند که عقیده دارد که عقیده دارد که بیمار است. چون به آنچه ادعا می کند عقیده دارد، پس عقیده دارد که عقیده دارد که عقیده دارد که بیمار است. دو عقیدهٔ اول یکدیگر را خنثی می کنند (به قسمت آخر حل مسئلهٔ قبل توجّه کنید). درنتیجه آن شخص درواقع عقیده دارد که بیمار است. بنابراین مسئلهٔ این تیمارستان به مسئلهٔ تیمارستان چهارم تقلیل می یابد که قبلاً آن را حل کردیم (این فرد بایستی یا یک بیمار عاقل یا یک پزشک دیوانه باشد).

۷—

کریگ A را بیرون کرد. **دلیل:** فرض می کنیم A عاقل باشد. در این صورت عقیدهٔ او مبنی بر این که B دیوانه است درست است. چون B دیوانه است عقیدهٔ او مبنی بر اینکه A پزشک است نادرست است، بنابراین A بیماری عاقل است و می باید آزاد شود.
اکنون اگر فرض کنیم که A دیوانه است،در این صورت عقیدهٔ او درمورد دیوانه بودن B نادرست است، یعنی B عاقل است، درنتیجه عقیدهٔ B درمورد پزشک بودن A درست است و با این فرض، A پزشکی دیوانه است و بایستی اخراج شود.

درمورد B هیچ گونه نتیجه ای نمی توان گرفت.

۸—

برطبق شرط ۵، در این تیمارستان شخصی وجود دارد که به همهٔ بیماران اعتماد دارد اما به هیچ کدام از پزشکان اعتماد ندارد. فرض می کنیم نام این شخص آرتور

(Arthur) باشد. برطبق شرط ۴ فردی وجود دارد که او را بیل (Bill) می نامیم. که فقط به افرادی اعتماد دارد که دست کم یک معلم مورداعتماد آرتور داشته باشند. این بدان معنی است که به ازای هرفرد x اگر بیل به x اعتماد کند، در آن صورت آرتور دست کم به یک معلم x اعتماد می کند، و اگر بیل به x اعتماد نکند، آرتور به هیچ یک از معلمهای x اعتماد نمی کند. چون برطبق شرط ۵، مورداعتماد آرتور بودن معادل بیمار بودن است بنابراین جملهٔ آخر را می توان به صورت زیر بیان کرد: به ازای هر فرد x ، اگر بیل به x اعتماد کند، در آن صورت دست کم یک معلم x بیمار است، و اگر بیل به x اعتماد نکند در آن صورت هیچ یک از معلمهای x بیمار نیست. چون این گزاره در مورد هریک از افراد تیمارستان درست است بنابراین اگر x خود بیل نیز باشد درست است. پس نتیجه های زیر به دست می آید:

(۱) اگر بیل به خودش اعتماد کند، در آن صورت دست کم یک معلم بیمار دارد.

(۲) اگر بیل به خودش اعتماد نکند، در آن صورت هیچ معلم بیمار ندارد.

آشکار است که فقط همین دو امکان وجود دارد، یعنی یا بیل به خود اعتماد دارد یا به خود اعتماد ندارد. اکنون ببینیم در هرمورد چه نتیجه هایی به دست می آید.

مورد ۱ — بیل به خود اعتماد دارد: در این صورت بیل دست کم یک معلم دارد که بیمار است، او را پیتر (Peter) می نامیم. چون پیتر معلم بیل است بنابراین عقیده دارد که بیل به خودش اعتماد دارد (برطبق شرط ۳) . ازطرفی واقعاً نیز بیل به خود اعتماد دارد، بنابراین عقیدهٔ پیتر درست است و درنتیجه او عاقل است. پس، پیتر یک بیمار عاقل است و نبایستی در تیمارستان باشد.

مورد ۲ — بیل به خود اعتماد ندارد: در این مورد هیچ یک از معلمهای بیل بیمار نیست. اما در هرحال بیل نیز مانند هریک از ساکنان دیگر تیمارستان دست کم یک معلم دارد، که او را ریچارد (Richard) می نامیم. ریچارد بایستی یک پزشک باشد. همچنین چون ریچارد معلم بیل است پس عقیده دارد که بیل به خودش اعتماد دارد. چون عقیدهٔ او نادرست است پس دیوانه است. بنابراین ریچارد پزشکی دیوانه است و نبایستی جزو کارمندان تیمارستان باشد.

به طور خلاصه: اگر بیل به خود اعتماد کند، در آن صورت دست کم یکی از بیماران عاقل است. اگر بیل به خود اعتماد نکند، در آن صورت دست کم یکی از پزشکان دیوانه است. چون نمی دانیم که آیا بیل به خود اعتماد دارد یا نه بنابراین مسئلهٔ

این تیمارستان را نمی‌توانیم کشف کنیم، یعنی نمی‌توانیم بفهمیم که آیا یکی از بیماران عاقل است یا یکی از پزشکان دیوانه است.

۹-
نخست ثابت می کنیم که C و D هردو ازنظر عقلی شبیه یکدیگرند: یا هردو عاقلند یا هردو دیوانه.

فرض می کنیم A و B هردو عاقل باشند. در این صورت B و C واقعاً شبیه یکدیگرند (از نظر عقلی) و A و D نیز واقعاً به یکدیگر شباهت دارند و این یعنی هر چهار نفر عاقلند.پس در این مورد C و D هر دو عاقل و بنابراین مشابه اند. اکنون فرض می کنیم A و B هر دو دیوانه باشند. در این صورت B و C متفاوتند و A و D نیز متفاوتند. در نتیجه C و D هردو عاقلند، یعنی در این مورد نیز مشابهند. فرض می کنیم A عاقل و B دیوانه باشد. در این صورت B و C شبیه یکدیگرند، یعنی C دیوانه است، اما A و D متفاوتند، یعنی D نیز دیوانه است. بالاخره فرض می‌کنیم A دیوانه و B عاقل باشد. در این صورت B و C متفاوتند که در نتیجه C دیوانه است، اما A و D شبیه یکدیگرند و این بدان معنی است که D نیز دیوانه است.

به طور خلاصه، اگر A و B مشابه باشند، C و D هردوعاقل خواهند بود و اگر A و B متفاوت باشند، C و D هردو دیوانه خواهند بود.

بنابراین ثابت شد که C و D یا هردو عاقلند یا هردو دیوانه. فرض کنیم هردو عاقل باشند، در این صورت گفتهٔ C که براساس آن،او و D هردو پزشک نیستند درست است، و این بدان معنی است که دست کم یکی از آنها بیمار ــ بیمار عاقل است. اگر C و D هردو دیوانه باشند، در آن صورت گفتهٔ C نادرست است و این بدان معنی است که هردو آنها پزشک ــ پزشک دیوانه ــ هستند. بنابراین در این تیمارستان یا دست کم یک بیمار عاقل یا دست کم دو پزشک دیوانه وجود دارد.

۱۰، ۱۱، ۱۲-
ابتدا مسئله های ۱۱ و ۱۲ را بخوانید، زیرا آسانترین راه برای حل مسئلهٔ ۱۰ این است که از مسئلهٔ ۱۲ آغاز کنیم.

پیش از آغاز، به‌یک اصل مفید اشاره می کنیم: فرض می کنیم دو عبارت X و Y داشته باشیم که یا هردو درست یا هردو نادرست باشند. در این صورت اگر یکی از افراد تیمارستان یکی از این عبارتها را باور داشته باشد عبارت دیگر را نیز باور خواهد

داشت.

دلیل: اگر هردو عبارت درست باشد درآن‌صورت هرکدام از افراد تیمارستان که یکی ازآنها را باور داشته باشد بایستی عاقل باشد و بنابراین باید عبارت دیگر را، که آن نیز درست است، باور داشته باشد. اگر هردو عبارت نادرست باشد، هرکس که یکی ازآنها را باور داشته باشد بایستی دیوانه باشد، و باید عبارت دیگر را، که آن نیز نادرست است، باور داشته باشد.

اکنون مسئلهٔ ۱۲ را حل می کنیم: دو کمیتهٔ اختیاری مثلاً کمیتهٔ (۱) و (۲) را درنظرمی گیریم. مجموعهٔ افرادی راکه بدترین دشمنشان درکمیتهٔ (۱) است U و مجموعهٔ افرادی را که بهترین دوستشان در کمیتهٔ (۲) است V می نامیم. برطبق اطلاعات ۴، مجموعه های U و V نیز دو کمیته هستند. بنابراین برطبق اطلاعات ۵، فردی وجود دارد، مثلاً به‌نام دان (Dan)، که بهترین دوست او، مثلاً به‌نام ادوارد (Edward)، عقیده دارد که او در کمیتهٔ U است و بدترین دشمن او، مثلاً به‌نام فرد (Fred)، عقیده دارد که او درکمیتهٔ V است. اکنون، برطبق تعریف U، اگر بگوییم دان در کمیتهٔ U است، مثل آن است که گفته باشیم بدترین دشمن او، یعنی فرد، در کمیتهٔ (۱) است. به‌بیان دیگر دو عبارت «دان در U است»، و «فرد در کمیتهٔ (۱) است» یا هردو درست یا هردونادرست اند. چون ادواردیکی از این دو عبارت، یعنی بودن دان در U، را باور دارد پس بایستی عبارت دیگر، یعنی بودن فرد در کمیتهٔ (۱)، را نیز باور داشته باشد (اصل مقدّماتی را به خاطر بیاورید). پس ادوارد عقیده دارد که فرد در کمیتهٔ (۱) است.

از سوی دیگر، فرد عقیده دارد که دان در کمیتهٔ V است. اما برطبق تعریف V، دان فقط درصورتی عضو V خواهد بود که دوست او ادوارد عضو کمیتهٔ (۲) باشد، یعنی این دو عبارت یا هردو درست اند یا هردو نادرست. اما چون فرد عقیده دارد که دان عضو V است، فرد بایستی عقیده داشته باشد که ادوارد عضو کمیتهٔ (۲) است.

بنابراین، دونفر، ادوارد و فرد، با باورهای زیر وجوددارند: ادوارد عقیده دارد که فرد در کمیتهٔ (۱) است و فرد عقیده دارد که ادوارد در کمیتهٔ (۲) است. به این ترتیب مسئلهٔ ۱۲ حل شد.

برای حل مسئلهٔ ۱۰، مجموعهٔ همهٔ بیماران و مجموعهٔ همهٔ پزشکان را که مطابق اطلاعات (۱) و (۲) کمیته تشکیل می دهند، به‌ترتیب کمیتهٔ (۱) و کمیتهٔ (۲) می نامیم. مطابق حل مسئلهٔ ۱۲، دونفر مانند ادوارد و فرد وجوددارندکه دارای

عقیده های زیر هستند: ادوارد عقیده دارد که فرِد در کمیته ای متشکل از کلّیّهٔ بیماران، یعنی کمیتهٔ (۱)، است و فرِد عقیده دارد که ادوارد در کمیته ای متشکل از کلّیّهٔ پزشکان، یعنی کمیتهٔ (۲)، است. به بیان دیگر ادوارد عقیده دارد که فرد بیمار است و فرد عقیده دارد که ادوارد پزشک است. بنابراین برطبق مسئلهٔ ۱ (در اینجا به جای جونز و اسمیت با ادوارد و فرِد سروکار داریم) یکی از این دونفر، یعنی ادوارد یا فرِد، بایستی یا پزشکی دیوانه یا بیماری عاقل باشد. بنابراین در این تیمارستان مسلماً مسئله ای وجود دارد.

اما برای حل مسئلهٔ ۱۱، فرض می کنیم مجموعهٔ همهٔ افراد عاقل و مجموعهٔ همهٔ افراد دیوانه هرکدام یک کمیته باشند و آنها را به ترتیب کمیتهٔ (۱) و کمیتهٔ (۲) بنامیم. در این صورت برطبق مسئلهٔ ۱۲، ادوارد و فرد دارای عقیده های زیر هستند: (الف) ادوارد عقیده دارد که فرد عاقل است، یعنی عقیده دارد که او عضو کمیتهٔ (۱) است. (ب) فرِد عقیده دارد که ادوارد دیوانه است، یعنی عقیده دارد که او عضو کمیتهٔ (۲) است. این غیرممکن است، زیرا اگر ادوارد عاقل باشد، عقیدهٔ او درست است و این خود به معنی عاقل بودن فرِد است و این خود به معنی درست بودن عقیدهٔ فرِد، یعنی به معنی دیوانه بودن ادوارد است. بنابراین اگر ادوارد عاقل باشد، دیوانه نیز خواهد بود، که این غیرممکن است. ازسوی دیگر، اگر ادوارد دیوانه باشد، عقیدهٔ او در مورد فرِد نادرست است و این خود به معنی دیوانه بودن فرد است، و درنتیجه عقیدهٔ فرد در مورد ادوارد نادرست است، و این خود به معنی عاقل بودن ادوارد است. پس اگر ادوارد دیوانه باشد، عاقل نیز خواهد بود که این نیز غیرممکن است. بنابراین فرض مسئله، یعنی این فرض که مجموعهٔ افراد عاقل و مجموعهٔ افراد دیوانه هرکدام یک کمیته تشکیل داده باشند، به تناقض می رسد. پس این دو مجموعه نمی تواند هرکدام یک کمیته باشد.

۱۳ــ

آنچه کریگ متوجه شد و او را به وحشت انداخت این بود که در این تیمارستان همهٔ پزشکان دیوانه بودند و همهٔ بیماران عاقل. او موضوع را به این شرح اثبات کرد:

حتی پیش از گفتگو با دکتر تار و پروفسور فِذِر، او می دانست که دست کم یک فرد عاقل A در تیمارستان هست. فرض کنیم B، بهترین دوست A باشد. برطبق شرط C ، اگر A عقیده داشته باشد که B **مخصوص** است، در آن صورت بهترین دوست A عقیده خواهد داشت که B بیمار است. چون B بهترین دوست A است،

پس اگر A عقیده داشته باشد که B **مخصوص** است، B عقیده دارد که B بیمار است. به‌بیان دیگر، اگر A عقیده داشته باشد که B مخصوص است، در آن صورت B **عجیب** خواهد بود. چون A عاقل است، پس عقیده A مبنی بر اینکه B **مخصوص** است برابر است با واقعاً **مخصوص** بودن B . با این استدلال **گزارهٔ اصلی** زیر اثبات می‌شود:

اگر B مخصوص باشد، در آن صورت B عجیب خواهد **بود**.

اکنون، B یا عجیب هست یا عجیب نیست. اگر عجیب باشد، در آن صورت عقیده دارد که بیمار است و بنابراین (برطبق حل مسئلهٔ ٤) بایستی یا پزشکی دیوانه یا بیماری عاقل باشد؛ که درهر دوحالت B نبایستی در تیمارستان باشد. اما اگر فرض کنیم که B عجیب نباشد در آن صورت مخصوص نیز نخواهد بود، زیرا برطبق **گزارهٔ اصلی** بالا، B فقط هنگامی می‌تواند مخصوص باشد که عجیب نیز باشد. بنابراین B نه عجیب است نه مخصوص. چون مخصوص نیست پس این دو فرض که همهٔ بیماران عقیده دارند که او عجیب است و هیچ کدام از پزشکان عقیده ندارند که او عجیب است نمی‌تواند هردو درست باشد. یعنی دست کم یکی از این دو فرض بایستی نادرست باشد. اگر فرض اول نادرست باشد، در آن صورت دست کم یک بیمار، مثلاً P ، عقیده ندارد که B عجیب است. اگر P دیوانه باشد در آن صورت بایستی عقیده داشته باشد که B عجیب است (چون عجیب نیست)، بنابراین P عاقل است، یعنی P یک بیمار عاقل است. اگر فرض دوم نادرست باشد، در آن صورت دست کم یک پزشک، مثلاً D ، عقیده دارد که B عجیب است. و این به معنی دیوانه بودن D است (چون B عجیب نیست). پس D پزشکی دیوانه است.

به‌طور خلاصه: اگر B عجیب باشد، در آن صورت او یا بیماری عاقل است یا پزشکی دیوانه، اگر B عجیب نباشد، در آن صورت بیماری عاقل، مثل P ، عقیده ندارد که B عجیب است یا یک پزشک دیوانه، مثل D، عقیده دارد که B عجیب است. بنابراین در این تیمارستان بایستی یا بیماری سالم یا پزشکی دیوانه وجود داشته باشد.

همان‌طور که پیش از این گفتم کارآگاه این گزاره را پیش از گفتگو با دکتر تار و پروفسور فِدِر تشخیص داده بود. پس از گفتگو معلوم شد که دکتر تار عقیده دارد که همهٔ پزشکان عاقلند و پروفسور فِدِر عقیده دارد که همهٔ بیماران دیوانه‌اند. برطبق گزاره‌ای که اثبات شد این دو عقیده نمی‌توانند هردو درست باشند، یعنی دست کم یکی از آنها نادرست است. اما پروفسور فِدِر عقیده دارد که دکتر تار عاقل است. اگر

پروفسور فِذِر خودش عاقل باشد، در آن صورت عقیدهٔ او نیز بایستی درست باشد، یعنی دکتر تار نیز باید عاقل باشد، که این موضوع باآنچه اثبات کردیم مغایر است. بنابراین پروفسور فِذِر می بایستی دیوانه باشد. چون دیوانه است پس عقیدهٔ او در مورد عاقل بودن دکتر تار نادرست است و دکتر تار نیز بایستی دیوانه باشد. بنابراین ثابت شد که دکتر تار و پروفسور فِذِر هردو دیوانه اند.

چون دکتر تار دیوانه است و عقیده دارد که دست کم یکی از بیماران دیوانه است، پس درواقع همهٔ بیماران بایستی عاقل باشند. چون پروفسور فِذِر دیوانه است و عقیده دارد که دست کم یکی ازپزشکان عاقل است، پس درواقع همهٔ پزشکان بایستی دیوانه باشند. درنتیجه ثابت شد که در این تیمارستان همهٔ پزشکان دیوانه و همهٔ بیماران عاقل هستند.

ملاحظات: این معما نخست در کتاب داستان **نظام دکتر تار و پروفسور فِذِر** نوشتهٔ **ادگر آلِن‌پو،** نویسندهٔ امریکایی، مطرح شده بود که در آن بیماران یک تیمارستان توانستند بر پزشکان و کارمندان تیمارستان بشورند و آنها را به سلولهای بیماران بیندازند و به جای آنها ادارهٔ تیمارستان را به سرپرستی تار و فِذِر برعهده بگیرند.

٤
کارآگاه کریگ از ترانسیلوانیا بازدید می کند

کارآگاه کریگ، یک هفته پس از بازدید از تیمارستانهای فرانسه، خود را آماده می کرد که به لندن برگردد. ناگهان تلگرافی از دولت ترانسیلوانیا (Transylvania) دریافت کرد که از او مصرّانه خواسته بودند تا برای حل موارد شگفت انگیزی از **وَمپایریسم**[1] به ترانسیلوانیا بیاید. همان‌طور که در کتاب دیگرم که آن‌هم دربارهٔ معماهای منطق است و باعنوان «نام این کتاب چیست؟» منتشر شده است توضیح داده‌ام، ترانسیلوانیا سرزمینی است که ساکنان آن از انسان و وَمپایر تشکیل شده است؛ وَمپایرها همیشه دروغ می گویند و انسانها همیشه راست می گویند. از این گذشته، نیمی از ساکنان این سرزمین، چه انسان چه وَمپایر، دیوانه اند و عقیده‌هایشان کاملاً نادرست است (مانند ساکنان تیمارستان دکتر تار و پروفسور فِذِر)، یعنی

۱— وَمپایر (Vampire) در فرهنگ خرافی غرب موجودی ماورای طبیعت است که شبها برای مکیدن خون انسانهای خواب بیرون می‌آید. بنابراین عقیده ها وَمپایرها سایه و در آینه تصویر ندارند. وَمپایریسم (Vampirism) یعنی اعتقاد داشتن به وَمپایر– م.

هرگزارهٔ نادرست را درست می‌پندارند و هرگزارهٔ درست را نادرست می‌پندارند. نیمی دیگر از ساکنان ترانسیلوانیا کاملاً عاقلند و عقیده هایشان کاملاً درست است (مانند ساکنان عاقل تیمارستان بخش سوم)، یعنی هرگزارهٔ درست را درست و هرگزارهٔ نادرست را نادرست می دانند.

مسلماً، سیستم منطق ترانسیلوانیا بسیار پیچیده‌تر از سیستم منطق تیمارستان است، زیرا در آنجا دست کم همهٔ افراد راستگوبودند و گفته های نادرست آنها ازروی توّهم و خیال بود و هرگز به‌سبب بدخواهی دروغ نمی گفتند. اما در اینجا وقتی که یک ترانسیلوانیایی عبارتی نادرست می گوید، ممکن است یا از بدخواهی باشد یا از توّهم. انسانهای عاقل و وَمپایرهای دیوانه فقط عبارتهای درست می گویند، انسانهای دیوانه و وَمپایرهای عاقل فقط عبارتهای نادرست می گویند. مثلاً اگر از یک ترانسیلوانیایی بپرسیم که آیا زمین گرد است (و نه مسطح)، چنانچه او انسانی عاقل باشد می داند که زمین گرد است و به پرسش ما پاسخ مثبت خواهد داد، اما اگر او انسانی دیوانه باشد عقیده دارد که زمین گرد نیست و عقیدهٔ خودرا صادقانه برزبان می آورد و می گوید که زمین گرد نیست. چنانچه او وَمپایری عاقل باشد می داند که زمین گرد است اما چون دروغگوی مطلق است جواب خواهد داد که زمین گرد نیست. اما اگر وَمپایری دیوانه باشد عقیده دارد که زمین گرد نیست اما به‌دروغ می گوید که زمین گرد است. پس یک وَمپایر دیوانه به هرپرسشی مانند یک انسان عاقل پاسخ می دهد و یک انسان دیوانه مانند یک وَمپایر عاقل به پرسشها پاسخ می دهد.

خوشبختانه کریگ به وَمپایریسم نیز به‌اندازهٔ منطق تسلط داشت (درواقع دانش و علاقهٔ کریگ بسیار گسترده بود). هنگامی که وارد ترانسیلوانیا شد، مقامات کشور که همگی انسانهای عاقل بودند، به‌او اطلاع دادند که جمعاً ده مورد وجود دارد که به‌یاری او نیاز است و تقاضا کردند که

مسئولیّت تحقیق را برعهده بگیرد.

پنج مورد اول

در هریک از این پنج مورد، دو نفر از ساکنان ترانسیلوانیا مورد شک بودند. قبلاً هم روشن شده بود که در هرمورد یکی از افراد انسان و دیگری وَمپایر است، اما نمی دانستند که کدام چیست. در مورد وضعیّت عقلی افراد نیز، به جز در مورد ۵، هیچ شناختی وجود نداشت.

۱ــ مورد لوسی و مینا

مورد اول به دو خواهر به نامهای لوسی (Lucy) و مینا (Minna) مربوط می شد و کریگ می بایستی مشخص می کرد که کدام یک وَمپایر است. همان طور که در بالا اشاره شد از وضعیّت عقلی آن دو چیزی نمی دانستند. متن بازجویی به شرح زیر است:

کریگ از لوسی پرسید: خواهش می کنم چیزی راجع به خودتان بگویید.

لوسی: ما دو خواهر دیوانه ایم.

کریگ از مینا پرسید: آیا این حقیقت دارد؟

مینا: البته که نه!

براساس این بازجویی کریگ توانست به شیوه ای که همه بپذیرند ثابت کند که کدام یک از آن دو خواهر وَمپایر است. شما بگویید کدام یک؟

۲ــ مورد برادران لوگوسی

مورد بعدی مربوط به برادران لوگوسی (Lugosi) بود که نام هردو بلا

(Bela) بود. در اینجا نیز یکی وَمپایر و دیگری انسان بود. این دونفر در بازجویی عبارتهای زیر را بیان کردند:

بلای بزرگ: من انسان هستم.

بلای کوچک: من انسان هستم.

بلای بزرگ: برادر من عاقل است.

کدام‌یک وَمپایر است؟

۳ــ مورد مایکل و پیتر کارلف

در این مورد از دو برادر به نامهای مایکل و پیتر کارلف (Michael & Peter Karloff) تحقیقاتی به‌عمل آمد و آنها مطالب زیر را بیان کردند:

مایکل کارلف: من یک وَمپایر هستم.

پیتر کارلف: من یک انسان هستم.

مایکل کارلف: من و برادرم ازنظر وضعیّت‌عقلی شبیه یکدیگریم.

کدام‌یک از دو برادر وَمپایر است؟

٤ــ مورد تورگنیفها

مورد چهارم به پدر و پسری با نام خانوادگی تورگنیف (Turgenief) مربوط می‌شد. متن بازجویی به‌شرح زیر است:

کریگ (خطاب به پدر): آیا شما هردو عاقل، یا هردو دیوانه، یا ازنظر عقلی متفاوتید؟

پدر: دست‌کم یکی از ما دیوانه است.

پسر: این کاملاً درست است.

پدر: البته من یک وَمپایر نیستم.

کدام‌یک وَمپایر است؟

۵ـ مورد کارل و مارتا دراکولا

آخرین مورد در این گروه به یک جفت دوقلو به اسامی کارل و مارتا دراکولا (Karl & Martha Dracula) ارتباط داشت (نترسید! به شما اطمینان می دهم که این دو از خویشان کُنت دراکولای[1] معروف نیستند). جنبهٔ جالب توجّه این مسئله این بود که نه تنها از پیش می دانستند که یکی از این دو وَمپایر است، بلکه مشخص هم شده بود که یکی از آنها عاقل و دیگری دیوانه است. البته کریگ از پیش نمی دانست کدام یک چیست. در این تحقیق مطالب زیر گفته شد:

کارل: خواهرم یک وَمپایر است.

مارتا: برادرم دیوانه است!

کدام یک وَمپایر است؟

پنج زن و شوهر

پنج مورد دوم هرکدام به یک زن و شوهر مربوط بود. شاید بدانید که در ترانسیلوانیا ازدواج میان انسان و وَمپایر برخلاف قانون است. بنابراین در اینجا هرزوج یا هردو انسان یا هردو وَمپایر هستند. در این موارد نیز از وضعیّت عقلی افراد شناخت قبلی وجود نداشت.

٦ـ مورد سیلوان و سیلویا نیترات

در این گروه کارآگاه بایستی ابتدا وضعیّت خانم سیلویا و آقای سیلوان نیترات (Sylvan & Silvia Nitrate) را کشف کند. همان طور

[1] ــ شخصیّت داستانی که به وسیلهٔ برام استوکر (Bram Stoker، ۱۹۱۲ - ۱۸٤۷ میلادی) نوشته شده است و نوعی وَمپایر است.

که قبلاً اشاره شده این زن و شوهر ممکن بود یا هردو انسان یا هردو وَمپایر باشند. بازجویی کریگ از این دونفر به‌شرح زیر است:

کریگ (خطاب به خانم نیترات): خواهش می کنم کمی دربارهٔ خودتان صحبت کنید.

سیلویا: شوهر من انسان است.

سیلوان: همسر من وَمپایر است.

سیلویا: یکی ازما عاقل ویکی ازما دیوانه است.

این دونفر انسان هستند یا وَمپایر؟

۷ــ مورد جورج و گلوریا گلوبول

این مورد به خانوادهٔ گلوبول (Globule) مربوط بود.

کریگ: چیزی راجع به خودتان بگویید.

گلوریا (Gloria): هرچه شوهرم بگوید درست است.

جورج (George): همسر من دیوانه است.

کریگ درحالی که فکر می کرد این گونه توصیف چقدر برای یک خانم ناخوشایند است، از دو پاسخی که دریافت کرده بود توانست مسئله را حل کند.

این زن و شوهر انسانند یا وَمپایر؟

۸ــ مورد بوریس و دروثی ومپیر

رئیس پلیس ترانسیلوانیا برای کارآگاه توضیح داد: «لازم است توجه داشته باشید که نام خانوادگی متهمان در این مورد برقضاوت شما تأثیر نداشته باشد.»

پاسخهای این زوج به‌شرح زیر است:

بوریس ومپیر (Boris Vampyre): ما هردو وَمپایر هستیم.

دروثی ومپیر (Dorothy): همین‌طور است.
بوریس ومپیر: ما ازنظر عقلی شبیه یکدیگریم.
این دو چگونه زوجی هستند؟

۹ــ مورد آرتور و لیلیان سویت

این مورد به‌یک زوج خارجی (خارجی برای ترانسیلوانیایی) به اسامی آرتور و لیلیان سویت (Arthur & Lillian Sweet) مربوط می‌شد. نتیجهٔ بازجویی چنین است:

آرتور: ما هردو دیوانه ایم.
لیلیان: همین‌طوراست.
آرتور و لیلیان چه موجوداتی هستند؟

۱۰ــ مورد لوگی و مانوئلا بیردکلیف

پاسخهای این زوج به‌شرح زیر است:

لوگی (Luigi) : دست کم یکی ازما دیوانه است.
مانوئلا (Manuella) : این درست نیست.
لوگی: ما هردو انسانیم.
شما درمورد لوگی و مانوئلا چه‌فکر می کنید؟

دو معمای غیرمنتظره

۱۱ــ مورد A و B

کاراگاه که پس ازحل این موارد ناخوشایند خیالش آسوده شده بود، داشت لوازمش را جمع‌آوری می کرد تا به لندن برگردد، که ناگهان مقامات ترانسیلوانیا وارد اتاقش شدند و از او درخواست کردند که یک روز دیگر هم بماند و در حل مسئله‌ای که به‌تازگی پیش آمده است آنها را یاری کند.

البته، کریگ از این پیشنهاد خوشحال نشد، اما به‌حکم وظیفه راضی شد بماند و همکاری کند.

موضوع از این قرار بود که به‌تازگی پلیس به دونفر از مقامات برجستهٔ کشور مشکوک شده و آنها را دستگیر کرده بود. چون کریگ درخواست کرده است که نام و جنسیّت آن دو پنهان بماند از این رو در اینجا آنها را A و B می نامیم. برخلاف ده مورد قبلی در این مورد هیچ نوع اطلاع اوّلیّه مبنی بر وجود رابطه ای معین میان این دو دردست نبود. ممکن بود هردو وَمپایر یا هردو انسان، یا یکی انسان و دیگری وَمپایر باشد. همچنین احتمال داشت هردو عاقل، هردو دیوانه، یا یکی عاقل و دیگری دیوانه باشد.

در جریان محاکمه ابتدا A اظهار کرد که B عاقل است و B ادعا کرد که A دیوانه است. پس از آن A مدعی شد که B وَمپایر است، و B مدعی شد که A انسان است.

از این اظهارات چه استنتاجی راجع به A و B حاصل می شود؟

۱۲ــ دو فیلسوف ترانسیلوانیایی

کریگ، خوشحال از پایان یافتن این محاکمات غیرعادی، آرام در ایستگاه قطار نشسته بود و منتظر بود تا قطار برسد و سوار آن شود و از کشور ترانسیلوانیا خارج شود. خیلی دوست داشت هرچه زودتر به لندن بازگردد! در همین حال گفتگوی دو فیلسوف ترانسیلوانیایی را می شنید که با اشتیاق زیاد پیرامون مسئلهٔ زیر بحث می کردند:

فرض می کنیم در ترانسیلوانیا یک جفت دوقلوی کاملاً همانند وجود داشته باشند که یکی انسان‌عاقل و دیگری وَمپایر دیوانه باشد. فرض می کنیم که به‌یکی از این دونفر برخورد کنیم و بخواهیم بفهمیم او کدام‌یک است. آیا با چند پرسش که پاسخِ هریک بلی یا خیر است می توان مسئله را حل کرد؟ فیلسوف اول عقیده داشت که با هرقدرپرسش نمی توان به

پاسخ دست یافت زیرا این دو به هر پرسشی پاسخ مشابه می دهند. به این معنی که در مورد یک پرسش معین، اگر پاسخ درست بلی باشد، انسان عاقل می داند که پاسخ بلی است و به درست پاسخ خواهد داد بلی، در صورتی که وَمپایر دیوانه عقیده دارد که پاسخ خیر است و به دروغ خواهد گفت بلی.

همچنین، اگر پاسخ درست پرسش ما خیر باشد، انسان عاقل پاسخ خواهد داد خیر و وَمپایر دیوانه چون عقیده دارد که پاسخ بلی است به دروغ خواهد گفت خیر. بنابراین گرچه ذهن این دو برادر کاملاً متفاوت است اما از راه گفتگو با آنها نمی توان هیچ وجه تمایزی میان آن دو پیدا کرد. به این ترتیب فیلسوف اول عقیده داشت که از راه پرسش نمی توان این دوقلوها را از یکدیگر تمیزداد و فقط شاید بتوان بااستفاده از دستگاه دروغ سنج نتیجه ای گرفت.

فیلسوف دوم با این نظر موافق نبود، البته او هیچ استدلالی در اثبات ادعای خود نداشت و فقط می گفت «اگر من از یکی از این دو برادر بازجویی کنم می توانم او را شناسایی کنم.»

کارآگاه خیلی مایل بود نتیجهٔ این گفتگو را بشنود. در این هنگام قطار رسید و او سوار شد اما فیلسوفها سوار آن قطار نشدند.

کریگ تا مدتی همچنانکه در واگن نشسته بود به این مسئله فکر کرد و سرانجام متوجه شد که فیلسوف دوم درست می گفت: اگر با یکی از دو برادر گفتگو شود، واقعاً می توان با چند پرسش که پاسخ آنها بلی، خیر باشد، او را شناسایی کرد و به دستگاه دروغ سنج نیازی نخواهد بود. در اینجا دو مسئله مطرح می شود:

(۱) کمترین عدهٔ پرسشهای لازم چندتا است؟

(۲) از آن جالب توجه‌تر، در استدلال فیلسوف اول چه اشکالی وجود دارد؟

پاسخها

قبل از ارائهٔ راه‌حلها، یک اصل را که در حل بسیاری از مسائل به کار خواهد رفت به اثبات می رسانیم. برطبق این اصل اگر یک ترانسیلوانیایی بگوید انسان است، در آن‌صورت بایستی عاقل باشد، و اگر بگوید وَمپایر است، در آن‌صورت بایستی دیوانه باشد. اثبات به این صورت است: فرض کنید بگوید انسان است. این گفته یا درست است یا نادرست. اگر درست باشد، در آن‌صورت او واقعاً یک انسان است. اما تنها انسانهایی که عبارتهای درست می گویند انسانهای عاقل هستند، بنابراین در این مورد او عاقل است. اما اگر گفتهٔ او نادرست باشد، در آن‌صورت او واقعاً یک وَمپایر است. اما فقط وَمپایرهای عاقل عبارتهای نادرست می گویند (وَمپایرهای دیوانه مانند انسانهای عاقل عبارتهای درست می گویند)، بنابراین در این حالت نیز او عاقل است. پس ثابت شد که اگر یک ترانسیلوانیایی ادعا کند که انسان است، چه ادعای او درست باشد چه نادرست، بایستی موجودی عاقل باشد.

اکنون اگر یک ترانسیلوانیایی مدعی شود که یک وَمپایر است چه نتیجه ای می توان گرفت؟ خوب، اگر ادعای او درست باشد در آن‌صورت او واقعاً یک وَمپایر است، و فقط وَمپایرهای دیوانه هستند که عبارتهای درست می گویند. اگر ادعای او نادرست باشد، یعنی او درواقع انسان باشد، در آن‌صورت او یک انسان دیوانه است زیرا فقط انسانهای دیوانه هستند که عبارتهای نادرست می گویند. پس در این حالت نیز شخص دیوانه است. بنابراین هرفرد ترانسیلوانیایی که ادعا کند وَمپایر است دیوانه است.

اثبات این واقعیّت را، که اگریک ترانسیلوانیایی ادعا کند عاقل است بایستی انسان باشد و اگریک ترانسیلوانیایی ادعا کند دیوانه است بایستی وَمپایر باشد، به‌عهدهٔ خواننده واگذار می کنیم. اکنون می پردازیم به حل معماها:

۱—

گفتهٔ لوسی یا درست است یا نادرست. اگر درست باشد در آن صورت هردو خواهر واقعاً دیوانه اند، یعنی لوسی دیوانه است، و چون هر ترانسیلوانیایی دیوانه که عبارتی درست بگوید وَمپایری دیوانه است پس لوسی یک وَمپایر است.

اگر گفتهٔ لوسی نادرست باشد، در آن‌صورت دست کم یکی از خواهرها عاقل است. اگر لوسی عاقل باشد، چون عبارتی نادرست گفته است پس بایستی وَمپایر باشد

(زیرا انسانهای عاقل فقط عبارت درست می گویند). اگر لوسی دیوانه باشد، در آن صورت مینا بایستی عاقل باشد. همچنین چون مینا عبارتی مخالف عبارت نادرست لوسی گفته است پس گفته اش درست است. یعنی مینا عاقل است و مطلب درست گفته است، پس مینا انسان است. بنابراین در این حالت نیز لوسی بایستی وَمپایر باشد.

به این ترتیب ثابت می شود که گفتهٔ لوسی چه درست باشد چه نادرست، او یک وَمپایرِ است.

—۲

برطبق اصلی که اثبات کردیم هر ترانسیلوانیایی که بگوید انسان است بایستی عاقل باشد و هر ترانسیلوانیایی که بگوید وَمپایر است بایستی دیوانه باشد. در این مورد برادران لوگوسی هردو ادعا می کنند که انسان هستند، پس هردو عاقلند. بنابراین وقتی که بلای بزرگ می گوید برادرش عاقل است گفته اش درست است. چون بلای بزرگ هم عاقل است و هم عبارت درست می گوید، پس انسان است. بنابراین بلای کوچک بایستی وَمپایر باشد.

—۳

چون مایکل ادعا می کند که وَمپایر است، پس دیوانه است و چون پیتر ادعا می کند که انسان است، پس عاقل است. چون مایکل دیوانه و پیتر عاقل است پس این دو ازنظر عقلی مشابه نیستند. بنابراین گفتهٔ دوم مایکل نادرست است و چون او دیوانه است پس بایستی انسان باشد (وَمپایرهای دیوانه مطلب نادرست نمی گویند!). بنابراین پیتر وَمپایر است.

—۴

پدر و پسر هردو در بارهٔ وضعیّت عقلی خود پاسخ مشابه دادند. این بدان معنی است که یا هردو درست می گویند یا هردو نادرست. اما چون فقط یکی از آنها انسان و دیگری وَمپایر است پس الزاماً بایستی ازنظر وضعیّت عقلی متفاوت باشند: اگر هردو عاقل باشند، آنکه انسان است مطلب درست می گوید و آنکه وَمپایر است مطلب نادرست می گوید، و بنابراین هیچ گاه توافق نخواهند داشت؛ اگر هردو دیوانه باشند، آنکه

انسان است مطلب نادرست می گوید و آنکه ومپایر است مطلب درست خواهد گفت، و در این مورد نیز نمی‌توانند در پاسخ یک پرسش توافق داشته باشند. در نتیجه، این ادعا که دست کم یکی از آنها دیوانه است واقعاً درست است. این ثابت می‌کند که هر دو نفر درست می‌گویند. بنابراین چون پدر می‌گوید که وَمپایر نیست پس واقعاً همین طور است. در نتیجه پسر بایستی وَمپایر باشد.

۵—

فرض کنید مارتا وَمپایر باشد، در آن‌صورت کارل انسان است، و چون با این فرض کارل مطلب درست گفته است پس انسانی عاقل است. چون کارل و مارتا ازنظر عقلی متفاوتند پس مارتا بایستی وَمپایر دیوانه باشد. اما ادعای مارتا مبنی بر اینکه کارل دیوانه است نادرست است، زیرا وَمپایر دیوانه نمی تواند مطلب نادرست بگوید. بنابراین فرض وَمپایر بودن مارتا به تناقض می رسد. پس کارل وَمپایر است.

همچنین می‌توان وضعیّت عقلی این دو را مشخص کرد. کارل مطلب نادرست گفته است و چون وَمپایر است پس بایستی عاقل باشد. مارتا نیز مطلب نادرست گفته است اما چون انسان است پس بایستی دیوانه باشد. پس پاسخ کامل این است که کارل وَمپایری عاقل و مارتا انسانی دیوانه است. کارل وقتی که می گوید خواهرش وَمپایر است دروغ می گوید، و مارتا که می گوید برادرش دیوانه است در توهم است (چه خواهربرادری عجیبی، حتی در ترانسیلوانیا).

۶—

در اینجا در شرایطی هستیم که دو مخاطب یا هردو انسان یا هردو وَمپایرند. بنابراین دو گفتهٔ اول نمی تواند هردو درست یا هردو نادرست باشد (زیرا اگر هردو نادرست باشد، سیلوان بایستی وَمپایر و سیلویا بایستی انسان باشد). پس یکی از دو گفته درست و دیگری نادرست است. و این بدان معنی است که یکی از این دو نفر عاقل و دیگری دیوانه است (زیرا اگر هردو عاقل باشند در صورت انسان بودنشان هردو گفته درست و در صورت وَمپایر بودنشان هردو گفته نادرست خواهد بود). بنابراین گفتهٔ سیلویا مبنی بر اینکه یکی از آنها عاقل و دیگری دیوانه است درست است. و این به معنی آن است که سیلویا درست می‌گوید. بنابراین، درست می‌گوید که شوهرش انسان است. پس این زوج هر دو انسان هستند (که سیلویا عاقل و سیلوان دیوانه است).

۷—

وقتی که گلوریا می گوید هرچه شوهرش بگوید درست است، درواقع دیوانه بودن خود را می پذیرد. به عبارت دیگر گلوریا به طور غیرمستقیم ادعا می کند که دیوانه است. چون فقط وَمپایرها می توانند چنین ادعایی بکنند (همان طور که پیش از شروع پاسخها اثبات کردیم)، پس گلوریا بایستی وَمپایر باشد. بنابراین جورج و گلوریا هردو وَمپایر هستند.

۸—

فرض می کنیم هردو انسان باشند. در آن صورت گفتهٔ آنها مبنی بر اینکه هردو وَمپایر هستند نادرست است و این به معنی آن است که هردو نفر انسان دیوانه اند. درنتیجه این دو ازنظر عقلی شبیه یکدیگرند. پس گفتهٔ دوم بوریس باید درست باشد و این در مورد یک انسان دیوانه نمی تواند صادق باشد. بنابراین آنها نمی توانند هردو انسان باشند. پس هردو وَمپایرند (و آن هم وَمپایر دیوانه).

۹—

فرض می کنیم هردو انسان باشند. یک انسان عاقل نمی تواند ادعا کند که او و شخصی دیگر هردو دیوانه اند. پس این دو بایستی انسان دیوانه باشند. در این صورت انسانهای دیوانه ای داریم که مطلب درست می گویند و این ممکن نیست. بنابراین آن دو نمی توانند انسان باشند. پس بایستی وَمپایر باشند. (ممکن است وَمپایر عاقل باشند، زیرا به دروغ گفته اند که هردو دیوانه اند، یا ممکن است وَمپایر دیوانه باشند زیرا به درست گفته اند که دیوانه اند. یادآوری می شود که وَمپایرهای دیوانه همیشه مطلب درست می گویند، گرچه چنین قصدی ندارند.)

۱۰—

لوگی و مانوئلا گفتهٔ یکدیگر را نقض می کنند، بنابراین یکی ازآنها می بایستی درست و دیگری نادرست بگوید. چون یا هردو انسان یا هردو وَمپایر هستند، پس دیوانه بودن دست کم یکی ازآنها درست است. زیرا اگر هردو عاقل باشند، یا بایستی هردو مطلب درست بگویند (در صورت انسان بودن هردو) یا بایستی هردو مطلب نادرست بگویند (در صورت وَمپایر بودن هردو). پس لوگی درست می گوید که دست کم یکی ازآنها

دیوانه است. بنابراین لوگی راستگو است و گفتهٔ او که هردو انسان هستند نیز درست است. پس ثابت شد که لوگی و مانوئلا هردو انسانند (که لوگی عاقل و مانوئلا دیوانه است).

۱۱ـ

فرض می کنیم کسی را که مطلب درست بگوید **قابل اعتماد** و کسی را که مطلب نادرست بگوید **غیرقابل اعتماد** بنامیم. پس، افراد قابل اعتماد یا انسان عاقلند یا وَمپایر دیوانه، و افراد غیرقابل اعتماد یا انسان دیوانه اند یا وَمپایر عاقل. اکنون A ادعا می کند که B عاقل و همچنین وَمپایر است. این دو ادعای A یا هردو درست یا هردو نادرست است. اگر هردو درست باشد، در آن صورت B وَمپایری عاقل است، و این به معنی آن است که B غیرقابل اعتماد است. ازسوی دیگر، اگر هردو ادعای A نادرست باشد، در آن صورت B می بایستی انسانی دیوانه باشد، و این به معنی آن است که B غیرقابل اعتماداست. پس درهرحال، چه هردو ادعای A درست و چه نادرست باشد، B قابل اعتماد نیست. بنابراین هردو ادعای B نادرست است و A نه دیوانه است و نه انسان. پس A بایستی یک وَمپایر عاقل باشد، و این به معنی آن است که A غیرقابل اعتماد است؛ پس هردو ادعای A نادرست است و بنابراین B بایستی انسانی دیوانه باشد. پس پاسخ این است که A وَمپایری عاقل و B انسانی دیوانه است.

جالب توجّه است که این مسئله یکی از شانزده مورد مشابهی است که همگی حل یکسان دارند. عدهٔ ترکیبهای دوتایی دو گفتهٔ A راجع به B (یکی درمورد وضعیّت عقلی او ویکی در مورد انسان یا وَمپایر بودن او) و دو گفتهٔ B راجع به A (یکی درمورد وضعیّت عقلی او و یکی در مورد انسان یا وَمپایر بودن او)، که برابر شانزده امکان است، شخصیّت واحد A و B را در هرترکیب دقیقاً تعیین می کند. مثلاً اگر A بگوید که B انسان و عاقل است و B بگوید که A وَمپایر و دیوانه است، نتیجه می شود که B یک انسان عاقل و A یک وَمپایر دیوانه است. همچنین، اگر A بگوید B عاقل و وَمپایر است و B بگوید A دیوانه و وَمپایر است، می توان اثبات کرد که A انسان عاقل و B وَمپایر عاقل است.

آیا می دانید چگونه هریک از این شانزده امکان را می توان حل کرد و چرا هرمورد فقط یک پاسخ دارد؟ اگر نمی دانید، به این استدلال توجّه کنید: A می تواند چهار جفت عبارت به این صورت بیان کند: (۱) B عاقل است، B انسان است، (۲)

B عاقل است، B وَمپایراست، (۳) B دیوانه است، B انسان است، (٤) B دیوانه است، B وَمپایر است. در هریک از این چهار مورد می توان تعیین کرد که آیا B قابل اعتماد است یا نه. در مورد (۱)، B می بایستی قابل اعتماد باشد، خواه گفته های A هردو درست یا هردو نادرست باشد. زیرا اگر هردو درست باشد، B یک انسان عاقل خواهد بود و بنابراین قابل اعتماد است، و اگر هردو نادرست باشد، B یک وَمپایر دیوانه خواهد بود که در این حالت نیز قابل اعتماد است. با همین استدلال ثابت می شود که در مورد (٤) نیز، B بایستی قابل اعتماد باشد. اما، در موردهای (۲) و (۳)، B الزاماً بایستی غیرقابل اعتماد باشد. بنابراین از گفته های A همیشه می توان قابل اعتمادبودن B را معین کرد. به همین روش از دو گفتهٔ B، می توان قابل اعتمادبودن A را تعیین کرد. درنتیجه با معین شدن قابل اعتمادبودن A و B، می توان فهمید که کدام یک از چهار گفتهٔ این دو نفر درست و کدام یک نادرست است و به این ترتیب مسئله حل می شود.

بدنیست بدانید که اگر به جای اینکه A و B هرکدام دو مطلب در بارهٔ دیگری بگوید، هرکدام یک عبارت مرکب بگوید در آن صورت مسئله حل نشدنی است. مثلاً اگر A به جای دو گفتهٔ «B عاقل است» و «B وَمپایر است» می گفت «B وَمپایر عاقل است» هیچ چیز در بارهٔ قابل اعتمادبودن B نمی توانستیم استنتاج کنیم. این بدان سبب است که اگر گفتهٔ A درست باشد، B وَمپایری عاقل خواهد بود، اما اگر گفتهٔ A نادرست باشد، B ممکن است یا یک وَمپایر دیوانه یا یک انسان عاقل یا یک انسان دیوانه باشد.

—۱۲

یک پرسش کافی است. کافی است از او بپرسید: «آیا شما انسان هستید؟» همچنین ممکن است از او بپرسید «آیا شما عاقلید؟» یا «آیا شما انسانی عاقلید؟». فرض می کنیم از او پرسیده باشید: «آیا شما انسان هستید؟» خوب، اگر مخاطب انسان عاقل باشد مسلماً پاسخ می دهد بلی. اما اگر مخاطب وَمپایری دیوانه باشد، چون دیوانه است به نادرستی عقیده دارد که انسان است و چون وَمپایر است به دروغ می گوید که خیر. بنابراین انسان عاقل پاسخ می دهد بلی و وَمپایر دیوانه پاسخ می دهد خیر. پس اگر به شما پاسخ دهند بلی، نتیجه می گیرید که مخاطب انسان عاقل است و اگر پاسخ دهند خیر نتیجه می گیرید که مخاطب وَمپایر دیوانه است.

اما در مورد اشکالی که در استدلال فیلسوف اول وجود داشت باید گفت که در این مورد او درست می گفت که اگر از هردو برادر یک پرسش مشابه بکنید پاسخ مشابه خواهید شنید. اما آنچه را این فیلسوف توجّه نداشت این بود که اگر از این دو برادر می پرسیدید «آیا شما انسان هستید؟» درواقع از هردو یک مطلب یکسان نیز نپرسیده بودید بلکه دو پرسش گوناگون مطرح نموده بودید، زیرا کلمهٔ «شما» که در این پرسش به‌کار رفته است متغیر است و مفهوم آن به شخصیّت مخاطب بستگی دارد! به‌بیان دیگر اگر یک پرسش کاملاً یکسان از دو فرد متفاوت بنمایید، درواقع دو پرسش متفاوت کرده‌اید.

مسئله را به‌شکل دیگری بررسی کنیم: فرض کنید نامهای دو برادر را بدانیم، مثلاً جان (John)نام انسان عاقل و جیم (Jim) نام وَمپایر دیوانه باشد. اگر از هرکدام از دو برادر بپرسیم: «آیا جان انسان است؟» هردو برادر پاسخ خواهند داد بلی، زیرا یک پرسش مشابه را از هردو کرده‌ایم. همچنین اگر بپرسیم: «آیا جیم انسان است؟» هردو برادر پاسخ خواهند داد خیر. اما اگر از هر برادر بپرسیم: «آیا شما انسانید؟» درواقع از هرکدام پرسشی متفاوت کرده‌ایم.

فصل دوم

معما و ماورای معما

۵

معما و ماورای معما

جزیرهٔ پرسندگان

در گوشه‌ای از اقیانوس بیکران، جزیرهٔ عجیبی وجود دارد که به **جزیرهٔ پرسندگان** شهرت دارد. سبب این نامگذاری آن است که ساکنان این جزیره همیشه مطلب خود را به صورت پرسش بیان می کنند. فکر می کنید که با این ترتیب افراد این جزیره چگونه با یکدیگر ارتباط برقرار می کنند؟ این موضوع را بعداً خواهیم فهمید.

مردمان این جزیره فقط پرسشهایی می کنند که پاسخ آنها بلی یا خیر باشد. هرکس یا از نوع A است یا از نوع B . مردمان نوع A فقط پرسشهایی می کنند که پاسخ درست آنها بلی باشد و مردمان نوع B فقط پرسشهایی می کنند که پاسخ درست آنها خیر باشد. به‌عنوان مثال، کسی از نوع A ممکن است بپرسد «آیا دو بعلاوهٔ دو می شود چهار؟» اما نمی‌پرسد که «آیا دو بعلاوهٔ دو می شود پنج؟» یک فرد نوع B ممکن نیست بپرسد که آیا دو بعلاوهٔ دو می شود چهار بلکه می پرسد «آیا دو بعلاوهٔ دو می شود پنج یا می شود شش؟».

۱—

فرض کنیم که یکی از افراد این جزیره را ملاقات کنید و او از شما بپرسد «آیا من از نوع B هستم؟» شما چه چیزی می توانید استنتاج کنید؟

۲—

فرض کنیم او به جای پرسش بالا از شما پرسیده بود که آیا او از نوع A است. در آن صورت چه نتیجه ای می توانستید بگیرید؟

۳—

خود من زمانی به این جزیره رفتم و یک زوج به اسامی اتان راسل و وایلت راسل (Ethan & Violet Russell) را ملاقات کردم. شنیدم که اتان از شخصی پرسید «آیا وایلت و من هردو از نوع B هستیم؟»

می توانید بگویید وایلت از چه نوع است؟

٤—

روزی با دو برادر آشنا شدم که اسم کوچک آنها آرتور و رابرت (Arthur & Robert) بود. روزی آرتور از رابرت پرسید «آیا دست کم یکی از ما از نوع B هستیم؟»

آرتور و رابرت از چه نوع هستند؟

۵—

زمانی دیگر زوجی را ملاقات کردم که نام خانوادگی آنها گُردن (Gordon) بود. آقای گُردن از همسرش پرسید: «عزیزم، آیا ما از دو نوع متفاوت هستیم؟»

چه استنتاجی می توان دربارهٔ این زوج کرد؟

۶ـ

پس از آن، با یک نفر از مردم به نام خانوادگی زُرن (Zorn) آشنا شدم. او از من پرسید: «آیا من از نوعی هستم که بتوانید از من بپرسید از نوع B هستم؟»

آیا می توان چیزی درباره زُرن استنتاج کرد، یا این داستان ناممکن است؟

۷ـ

پس از ملاقات با مردم متین بالا، به آدم بذله گویی برخوردم که پرسید «آیا من از نوعی هستم که بتوانید آنچه را اکنون می پرسم ازمن بپرسید؟»

آیا می توان چیزی در بارهٔ او فهمید؟

۸ـ

با خانوادهٔ دیگری آشنا شدم که نام خانوادگی آنها کلینک (Klink) بود. خانم کلینک از شوهرش پرسید: «آیا شما از نوعی هستید که بتوانید ازمن بپرسید که از نوع A هستم یا نه؟»

آیا می توان چیزی درمورد این زوج فهمید؟

۹ـ

پس از آن با زوجی به نامهای جان بلاک و بتی بلاک (John & Betty Black) آشنا شدم. بتی از جان پرسید: «آیا شما از نوعی هستید که بتوانید بپرسید که آیا دست کم یکی از ما از نوع B است؟»

جان و بتی از چه نوعی هستند؟

ملاحظات: معماهای ۸ و ۹ عنوان آوازی را که سالها پیش شنیده بودم به یادم می آورد. آن آواز بخشی از مجموعهٔ آوازهایی بود که درواقع نوعی شوخی یا روانکاوی را بیان می کرد. عنوان آواز این بود: «من نمی توانم

به شمایی که به‌من عادت کرده‌اید عادت کنم.»

۱۰—

رویداد بعدی واقعاً یک کلاف سردرگم منطق بود. سه خواهر به نامهای آلیس، بتی و سینتیا (Alice,Betty & Cynthia) را ملاقات کردم. آلیس از بتی پرسید «آیا شما از نوعی هستید که بتوانید از سینتیا بپرسید که آیا او از نوعی هست که بتواند ازشما بپرسد که آیا شما از دو نوع گوناگون هستید؟»

همین‌طور که از آن سه خواهر دور می‌شدم به حل معما فکر می‌کردم وسرانجام دریافتم که می‌توان نوع یکی از آنها را تعیین کرد.

کدام‌یک را، و آن از چه نوعی است؟

یک برخورد عجیب

چندی بعد شاهد سه گفتگو بودم که از همهٔ موارد قبلی در جزیرهٔ پرسندگان عجیبتر بود. سه نفر از بیماران تیمارستانی‌که دربخش ۳ این کتاب مطرح شد فرار کرده و به این جزیره آمده بودند. یادآوری می‌شود که بیماران آن تیمارستان ممکن بود عاقل یا دیوانه باشند، و افراد عاقل عقیده‌هایشان کاملاً درست و افراد دیوانه عقیده‌هایشان کاملاً نادرست بود. همچنین افراد مذکور، چه عاقل چه دیوانه، همیشه راست می‌گفتند، یعنی هیچ‌گاه مطلبی نمی‌گفتند مگرآنکه باور کنند که آن مطلب درست است.

۱۱—

در روز ورودشان به جزیره یکی از بیماران به‌نام آرنولد (Arnold) با یک نفر محلی برخورد کرد. آن شخص از او پرسید «آیا عقیده دارید که من از نوع B باشم؟»

در بارهٔ آن شخص محلی چه می توان فهمید؟ در بارهٔ آرنولد چطور؟

۱۲–

روز بعد یکی دیگر از بیماران به نام توماس (Thomas) گفتگویی طولانی با یک نفر محلی داشت (اگر بتوانید آن را گفتگو بنامید زیرا توماس عبارتهای خودرا به صورت خبری بیان می کرد و محلی به صورت پرسشی). سرانجام محلی از توماس پرسید: «آیا عقیده دارید که من از نوعی باشم که بتوانم ازشما بپرسم که آیا شما دیوانه اید؟».

در مورد فرد محلی چه می توان استنتاج کرد؟ در بارهٔ توماس چطور؟

۱۳–

چندروز بعد، با بیمار سوم گفتگو کردم. نام او ویلیام (William) بود. ویلیام به من گفت روز قبل گفتگوی میان توماس و یک نفر محلی به نام هال (Hal) را شنیده است. در آن گفتگو توماس به هال گفته است: «شما از نوعی هستید که ممکن است بپرسید آیا من عقیده دارم که شما از نوع B هستید».

آیا می توان در مورد توماس، هال، یا ویلیام چیزی استنتاج کرد؟

جادوگر کیست؟

در این مرحله از ماجراها، هنوز نمی دانستم آیا توماس عاقل است یا دیوانه و فرصت چندانی نیز برای کشف این موضوع نداشتم. روز بعد هرسه نفر جزیره را ترک کردند. آخرین چیزی که در بارهٔ آنها شنیدم این بود که خود به دلخواه به تیمارستان برگشته بودند. ظاهراً از آن پس، از وضع خود در تیمارستان راضی بودند. زیرا هرسه به این نتیجه رسیده بودند که زندگی در خارج از تیمارستان حتی از زندگی در داخل تیمارستان دیوانه کننده تر است.

خوب تازه خیالم از اینکه اوضاع در جزیرهٔ پرسندگان به‌حالت عادی برگشته است راحت شده بود که شایعه‌ای شنیدم و خیلی به موضوع علاقه‌مند شدم. قضیه این بود که می گفتند ممکن است یک جادوگر در جزیره باشد. من از کودکی مجذوب جادوگران می‌شدم و اکنون خیلی مشتاق بودم که اگر این شایعه درست باشد جادوگری واقعی ببینم. درفکر بودم که چگونه می‌توان این موضوع را کشف کرد.

۱٤ـ

خوشبختانه، روزی یکی از مردم محل چیزی پرسید که براثر آن فهمیدم که بایستی یک جادوگر در جزیره وجود داشته باشد.

آیا شما می‌توانید چنان پرسشی طرح کنید؟

در اینجا ممکن است برای خواننده این پرسش پیش آید که چگونه ممکن است من چیزی در بارهٔ وجود جادوگر در جزیره شنیده باشم، یا به‌طور کلی در آن جزیره که همهٔ افراد فقط پرسش می کنند و هرگز خبری نمی دهند مگر ممکن است بتوان چیزی دربارهٔ جزیره شنید. اگر تا به‌حال پاسخ را پیدا نکرده‌اید، بادیدن راه‌حل این مسئله دقیقاً متوجه می‌شوید که مردم این جزیره می‌توانند به‌راحتی انسانهای دیگر (گرچه کمی دشوارتر) اطلاعات خودرا به‌یکدیگر انتقال دهند.

همان‌طور که حدس می زنید، من از این موضوع که فهمیدم واقعاً یک جادوگر در جزیره هست خوشحال شدم. همچنین متوجه شدم که فقط همان یک جادوگر درآن جزیره هست، اما هیچ نمی دانستم که او چه کسی هست. بعداً فهمیدم که به هرتازه‌واردی که بتواند نام جادوگر را حدس بزند جایزهٔ مهمی داده خواهد شد. تنها مسئله این بود که اگر حدس کسی نادرست بود او را اعدام می‌کردند!.

از این رو، صبح روز بعد خیلی زود ازخواب بیدار شدم و به گردش

در اطراف جزیره پرداختم و امیدوار بودم که مردم محل آن‌قدر ازمن پرسش کنند که بتوانم به‌یقین بفهمم که چه کسی جادوگر است. درآن‌روز شاهد رویدادهای زیر بودم:

۱۵—

نخستین کسی را که دیدم نامش آرتور گود (Arthur Good) بود و ازمن پرسید: «آیا من جادوگرم؟»

آیا براساس این پرسش اطلاعات کافی برای پیداکردن جادوگر داشتم؟

۱۶—

برنارد گرین (Bernard Green) نفربعدی بود و ازمن پرسید: «آیا من از نوعی هستم که ممکن است بپرسم آیا من جادوگر نیستم؟»

آیا تا اینجا اطّلاعات کافی داشتم؟

۱۷—

فرد محلی بعدی، چارلز مانسفیلد (Charles Mansfield) پرسید: «آیا من از نوعی هستم که بتوانم بپرسم که آیا جادوگر از نوعی هست که بتواند بپرسد که آیا من جادوگر هستم؟»

آیا در این مرحله اطلاعات کافی داشته‌ام؟

۱۸—

دانیل مت (Daniel Mott) نفربعدی بود وپرسید: «آیاجادوگرازنوع B است؟»

آیا اطلاعات در این مرحله کافی بود؟

۱۹—

شخص بعدی، ادوین درود (Edwin Drood) پرسید: «آیا جادوگر و من ازیک نوع هستیم؟»

یافتم! یافتم! سرانجام اطلاعات کافی را برای حل این راز به دست آوردم.

جادوگر کیست؟

این مسئله جایزه دارد

آیا کارآگاه خوبی هستید؟ اگر چنین است توماس را که از تیمارستان فرار کرده و به جزیره آمده بود به یاد آورید؛ آیا او عاقل است یا دیوانه؟

پاسخها

۱—

طرح چنین پرسشی از طرف یکی از مردم این جزیره امکانپذیر نیست. اگر کسی از نوع A بپرسد: «آیا من از نوع B هستم؟» پاسخ درست خیراست (زیرا او از نوع B نیست)، اما کسی از نوع A نمی‌تواند پرسشی بکند که پاسخ درست آن خیر باشد. بنابراین هیچ کس از نوع A نمی‌تواند چنین پرسشی بکند. اگر کسی از نوع B این پرسش را بکند پاسخ درست بلی است (زیرا او واقعاً از نوع B است)، اما نوع B نمی‌تواند پرسشی که پاسخ درست آن بلی باشد بکند. بنابراین افراد نوع B در این جزیره نیز ممکن نیست بتوانند چنین پرسشی بکنند.

۲—

هیچ چیز نمی‌توان نتیجه گرفت. هرفرد جزیره می‌تواند بپرسد که آیا او از نوع A هست؛ زیرا او یا از نوع A است یا از نوع B . اگر از نوع A باشد، در آن صورت پاسخ درست به پرسش «آیا من از نوع A هستم» بلی است، که می‌دانیم هرفرد از نوع A مجاز است پرسشی را که پاسخ آن بلی باشد بکند. ازسوی دیگر اگر شخصی از نوع B باشد، در

آن صورت پاسخ درست پرسش خیر است، و هرفرد از نوع B مجاز است پرسشی با پاسخ خیر بکند.

۳ـ

ابتدا بایستی بفهمیم اتان از چه نوعی است. فرض کنیم اتان ازنوع A باشد. درآن صورت پاسخ درست پرسش او بایستی بلی باشد (چون بلی پاسخ درست پرسشهایی است که افراد نوع A می کنند). این به معنی آن است که اتان و وایلت هردو از نوع B هستند، و این نتیجه (اتان از نوع B است) با فرض ما تناقض دارد. بنابراین اتان نمی تواند از نوع A باشد و بایستی از نوع B باشد. چون از نوع B است پاسخ درست به پرسش او خیر است، یعنی وایلت و او هردو ازنوع B نیستند. پس وایلت بایستی از نوع A باشد.

۴ـ

فرض کنیم آرتور از نوع B باشد. در آن صورت گزارهٔ «دست کم یکی از دو برادر از نوع B هستند» درست خواهد بود، یعنی پاسخ پرسش او بلی خواهد شد که این به معنی آن است که او از نوع A است. چون با فرض بالا به تناقض می رسیم پس آرتور نمی تواند از نوع B باشد و بایستی از نوع A باشد. از اینجا نتیجه می شود که پاسخ درست به پرسش او بلی است و این به معنی آن است که دست کم یکی از آن دو از نوع B است. چون آرتور از نوع B نیست پس رابرت بایستی از این نوع باشد. بنابراین آرتور از نوع A و رابرت از نوع B است.

۵ـ

هیچ چیز درمورد آقای گُردن نمی توان نتیجه گرفت. اما خانم گُردن بایستی از نوع B باشد. اثبات به شرح زیر است:

آقای گُردن یا از نوع A است یا از نوع B . اگر از نوع A باشد پاسخ درست به پرسش او بلی است، یعنی آن دو از دو نوع متفاوتند. از اینجا نتیجه می شود که خانم گردن بایستی از نوع B باشد (چون شوهرش از نوع A است و آنها از دو نوع متفاوتند). پس اگر آقای گُردن از نوع A باشد، همسرش باید از نوع B باشد. اکنون فرض کنیم آقای گُردن از نوع B باشد، در این صورت پاسخ درست پرسش او خیر است و این به معنی آن است که آن دو از دو نوع متفاوت نیستند، و از یک نوع هستند، یعنی خانم

گردن نیز از نوع B است. پس اگر آقای گردن از نوع B باشد خانم گردن نیز از نوع B خواهد بود.

پس ثابت شد که چه آقای گردن از نوع A باشد چه از نوع B ، خانم گردن بایستی از نوع B باشد.

راه‌حل خیلی ساده‌تر اما گمراه کننده به شرح زیر است: از حل مسئلهٔ اول فهمیدیم که هیچ یک از افراد جزیره نمی‌تواند بپرسد که آیا او از نوع B است. پس اگر خانم گردن از نوع A می‌بود، در آن صورت اگر یک فرد جزیره از خانم گردن می‌پرسید که آیا آن دو از دو نوع متفاوت هستند این پرسش همانند این می‌شد که از او می‌پرسید آیا من از نوع B هستم؟ که ممکن نیست. بنابراین خانم گردن نمی‌تواند از نوع A باشد.

۶—

این داستان کاملاً ممکن است، اما زُرن بایستی از نوع B باشد. با به یادآوردن مسئلهٔ ۱، که هیچ فرد جزیره نمی‌تواند بپرسد که آیا او از نوع B است، می‌توان به آسانی آن را ثابت کرد. وقتی که زُرن می‌پرسد آیا او از نوعی هست که بتواند بپرسد آیا او از نوع B است، پاسخ درست خیر است (زیرا هیچ ساکن جزیره نمی‌تواند بپرسد که آیا او از نوع B است). چون پاسخ خیر است پس زُرن از نوع B است.

۷—

چون چنان پرسشی را فردی محلی مطرح کرده بود، مسلماً می‌تواند آن پرسش را بکند. بنابراین پاسخ درست به این پرسش بلی است. درنتیجه او از نوع A است.

۸—

در مورد خانم کلینک نمی‌توان چیزی استنتاج کرد، اما آقای کلینک بایستی از نوع A باشد. استدلال به این شرح است: فرض کنید خانم کلینک از نوع A باشد. در این صورت پاسخ درست به این پرسش بلی خواهد بود و این بدان معنی است که آقای کلینک می‌تواند از همسرش بپرسد که آیا او از نوع A است. و چون خانم کلینک از نوع A است، پس پاسخ پرسش آقای کلینک بلی است و این به معنی آن است که آقای کلینک از نوع A است. پس اگر خانم کلینک از نوع A باشد، همسرش نیز از همان نوع خواهد بود. اکنون فرض کنید خانم کلینک از نوع B باشد. در این صورت پاسخ درست

به پرسش او خیر است، که نشان می دهد آقای کلینک از نوعی نیست که بتواند از همسرش بپرسد که آیا او از نوع A است. پس آقای کلینک نمی تواند پرسشی که پاسخ درست آن خیر است بکند، از این رو بایستی از نوع A باشد. درنتیجه آقای کلینک در هرحالت (خواه همسرش از نوع A باشد یا از نوع B) از نوع A است.

۹-

فرض کنید بتی از نوع A باشد. در این صورت پاسخ درست به پرسش او بلی است. پس جان می توانست بپرسد که آیا دست کم یکی از آنها از نوع B است. اما این به تناقض می انجامد، زیرا اگر جان از نوع A باشد، در این صورت عبارت «دست کم یکی از آنها از نوع B است» نادرست خواهد بود. یعنی پاسخ درست به پرسش او خیر است، که این درمورد فردی از نوع A ممکن نیست. اگر جان از نوع B باشد در این صورت این گزاره که «دست کم یکی از آنها از نوع B است» درست خواهد بود، و این به معنی آن است که پاسخ درست به پرسش او بلی است. اما کسی که از نوع B باشد نمی تواند پرسشی که پاسخ آن بلی است بکند. درنتیجه این فرض که بتی از نوع A است غیرممکن است، پس او بایستی از نوع B باشد.

چون بتی از نوع B است، پس پاسخ درست به پرسش او خیر است و این بدان معنی است که جان نمی تواند از او بپرسد که آیا دست کم یکی از آنها از نوع B است. حال اگر جان از نوع A می بود می توانست چنان پرسشی بکند، زیرا در آن صورت گزارهٔ «دست کم یکی از آن دو از نوع B است» درست می بود (یعنی بتی). چون جان نمی تواند چنان پرسشی بکند پس او نیز بایستی از نوع B باشد.

پس پاسخ آن است که هردو نفر آنها از نوع B هستند.

۱۰-

ساده‌تر آن است که اثبات این گونه مسئله را مرحله به مرحله انجام دهیم. نخست می توان دو گزارهٔ زیر را اثبات کرد:

گزارهٔ ۱: از هر فرد X که از نوع A است، هیچ کس نمی تواند بپرسد که آیا X و او از دو نوع متفاوتند.

گزارهٔ ۲: از هر فرد X که از نوع B است، هر فرد می تواند بپرسد که آیا X و او ازدونوع متفاوت هستند.

گزارهٔ ۱ را پیش از این در مسئلهٔ ۵ اثبات کرده‌ایم و نشان دادیم که اگر خانم گُردن از نوع A می بود، در آن‌صورت آقای گردن نمی توانست بپرسد که آیا او و خانم گُردن از یک نوع هستند.

در مورد گزارهٔ ۲، اگر X از نوع B باشد، در آن صورت این پرسش که آیا نوع کسی با نوع X متفاوت است برابر است با این پرسش که آیا شخص از نوع A است، و همان‌طور که در اثبات مسئلهٔ ۲ دیدیم هر کس می تواند آن پرسش را بکند. بنابراین اگر X از نوع B باشد هر کس می تواند از X بپرسد که آیا X و او از دو نوع متفاوتند.

اکنون بپردازیم به خود مسئله: ثابت خواهیم کرد که پاسخ درست به پرسش آلیس خیر است، یعنی آلیس بایستی از نوع B باشد. به‌بیان دیگر ثابت می کنیم که ممکن نیست بتی بتواند از سینتیا بپرسد که آیا **سینتیا** از نوعی هست که بتواند از بتی بپرسد که آیا سینتیا و بتی از دو نوع گوناگون هستند.

فرض کنید بتی از سینتیا بپرسد که آیا سینتیا می تواند بپرسد که آیا او و بتی از دو نوع متفاوتند. این فرض به‌شرح زیر به تناقض می رسد: بتی یا از نوع A است یا از نوع B. اگر از نوع A باشد در آن‌صورت برطبق گزارهٔ ۱ سینتیا نمی تواند بپرسد که آیا او و بتی از دو نوع گوناگونند. بنابراین پاسخ پرسش بتی خیر خواهد بود، که این نتیجه غیرممکن است، زیرا برطبق فرض، بتی از نوع A است! ازسوی دیگر اگر بتی از نوع B باشد در آن‌صورت برطبق گزارهٔ ۲، سینتیا می تواند بپرسد که آیا او و بتی از دو نوع متفاوتند، یعنی پاسخ پرسش بتی بلی خواهد بود، که ممکن نیست زیرا بتی از نوع B است.

پس ثابت شد که بتی هیچ گاه نمی تواند این پرسش را که آلیس از بتی می پرسد که آیا او می تواند از سینتیا بپرسد، از سینتیا بپرسد. پس پاسخ درست به پرسش آلیس خیر است، یعنی آلیس از نوع B است. در مورد نوع بتی و سینتیا چیزی نمی توان استنتاج کرد.

—۱۱

به‌نظرم این خنده‌دارترین مسئلهٔ این بخش است، زیرا در مورد فردی که پرسش کرده است هیچ چیز نمی توان نتیجه گرفت، اما در مورد آرنولد، گرچه هرگز دهان نگشود (تا آنجا که ما می دانیم)، می توان ثابت کرد که او دیوانه است! نکته این است که هیچ فرد محلی نمی تواند از یک شخص عاقل بپرسد که آیا او عقیده دارد که او (فرد محلی)

از نوع B است، زیرا پرسیدن از یک شخص عاقل که آیا او چنان و چنان عقیده‌ای دارد مثل این است که از او بپرسند آیا چنان و چنان واقعاً درست است، و یک فرد محلی نمی‌تواند بپرسد که آیا او از نوع B هست یا نه. پس هیچ فرد محلی X نمی‌تواند از یک شخص عاقل بپرسد که آیا او عقیده دارد که X از نوع B هست.

از سوی دیگر (از این قسمت در حل یکی از مسائل بعدی نیز استفاده خواهیم کرد)، هرفرد محلی X می‌تواند از یک شخص دیوانه بپرسد که آیا او عقیده دارد که X از نوع B هست، زیرا پرسیدن آن از یک شخص دیوانه مثل آن است که X بپرسد آیا X از نوع A است، و همان‌طور که دیدیم، هرفرد محلی می‌تواند چنان پرسشی بکند.

۱۲—

در مورد توماس چیزی نمی‌توان استنتاج کرد، اما شخصی که آن پرسش را کرده است بایستی از نوع B باشد. زیرا اگر فرض کنیم که او از نوع A است، در آن‌صورت پاسخ درست به پرسش او بلی است که این به‌معنی آن است که توماس فکر می‌کند که فرد محلی می‌تواند از او بپرسد که آیا دیوانه است. اکنون توماس یا عاقل است یا دیوانه، اگر عاقل باشد عقیده‌های او درست است، یعنی شخص محلی می‌تواند از او بپرسد که آیا او دیوانه است. اما یک محلی از نوع A فقط پرسشهایی می‌تواند بکند که پاسخ درست آن بلی باشد، یعنی فقط در صورت دیوانه‌بودن توماس چنین پرسشی امکانپذیر است، پس این فرض که توماس عاقل است به این نتیجهٔ متناقض می‌رسد که توماس دیوانه است. اما اگر فرض کنیم که توماس دیوانه باشد در آن‌صورت عقیدهٔ او مبنی بر اینکه فرد محلی می‌تواند بپرسد که آیا او (توماس) دیوانه است نادرست خواهد بود. بنابراین فرد محلی نمی‌تواند از او بپرسد که آیا او دیوانه است. (زیرا توماس خواهد گفت خیر و این غیرممکن است زیرا محلی از نوع A است). اما چون توماس دیوانه و محلی از نوع A است، برطبق قوانین جزیرهٔ پرسندگان، فرد محلی مجاز است که از توماس بپرسد که آیا او دیوانه است (زیرا پاسخ درست بلی است). پس فرض دیوانه‌بودن توماس نیز به تناقض می‌رسد.

پس تنها راه رهایی از تناقض این است که فرد محلی بایستی از نوع B باشد و نه از نوع A که در این صورت چه توماس عاقل باشد چه دیوانه به تناقض برنمی‌خوریم.

۱۳—

ثابت می‌کنیم که واقعه‌ای را که ویلیام تعریف کرد نمی‌تواند روی داده باشد، و

بنابراین ویلیام بایستی دیوانه باشد که آن عقیده را دارد.
فرض کنید واقعه درست بوده باشد. در این صورت به تناقض زیر می رسیم: اگر توماس عاقل باشد، گفتهٔ او درست خواهد بود، یعنی هال می توانست از توماس پرسیده باشد که آیا او عقیده دارد که هال از نوع B است. اما برطبق حل مسئلهٔ ۱۱، این به معنی دیوانه بودن توماس خواهد بود! پس فرض عاقل بودن توماس به تناقض می رسد. ازسوی دیگر اگر توماس دیوانه باشد، گفتهٔ او نادرست خواهد بود، یعنی هال نمی توانست از توماس پرسیده باشد که آیا او عقیده دارد که هال از نوع B است. اما همان طور که در مسئلهٔ ۱۱ دیدیم، یک فرد محلی می تواند از یک شخص دیوانه بپرسد که آیا او عقیده دارد که فرد محلی از نوع B است. پس در این مورد نیز به تناقض می رسیم.
پس تنها امکان منطقی که به تناقض منجر نشود این است که توماس چنان پرسشی نکرده است و ویلیام فقط توهّم خودرا بیان کرده است.

—۱٤

پرسشهای بسیاری را می توان طرح کرد. پرسش مورد علاقهٔ من این است: «آیا من از نوعی هستم که بتوانم بپرسم آیا یک جادوگر در این جزیره هست؟»
فرض کنید پرسنده از نوع A باشد. در آن صورت پاسخ درست بلی است، یعنی او می تواند بپرسد که آیا یک جادوگر در جزیره است. اما چون او از نوع A است فقط هنگامی مجاز است بپرسد که آیا درجزیره یک جادوگر است که واقعاً یک جادوگر در جزیره باشد (که پاسخ درست بلی باشد). بنابراین اگر پرسنده از نوع A باشد در آن صورت بایستی یک جادوگر در جزیره وجود داشته باشد.
اگر فرض کنیم پرسنده از نوع B باشد، در آن صورت پاسخ درست به پرسش او خیر است، یعنی او نمی تواند بپرسد آیا در جزیره یک جادوگر هست. اما اگر واقعاً یک جادوگر در جزیره نباشد، شخص مذکور، که از نوع B است، می تواند بپرسد که آیا یک جادوگر در جزیره هست (زیرا پاسخ درست خیر است). اما نشان دادیم که پرسنده نمی تواند این را بپرسد؛ پس درواقع بایستی یک جادوگر در جزیره وجود داشته باشد.

—۱۵

البته نه.

۱۶—

فقط می‌توان نتیجه گرفت که برنارد گرین جادوگر نیست (با همان استدلال حل مسئلهٔ ۱٤).

۱۷—

فقط می‌توان نتیجه گرفت که جادوگر از نوعی است که نمی‌تواند بپرسد آیا چارلز مانسفیلد جادوگر است (به‌یاد آورید که در حل مسئلهٔ ۱۱ ثابت شد که اگر یک فرد محلی بپرسد «آیا من از نوعی هستم که بتوانم فلان یا فلان را بپرسم؟»، در آن‌صورت فلان و فلان بایستی درست باشد).

۱۸—

فقط می‌توان نتیجه گرفت که دانیل مت جادوگر نیست (زیرا جادوگر نمی‌تواند بپرسد که آیا جادوگر از نوع B است، هیچ کس نمی‌تواند بپرسد که آیا خود او از نوع B است).

۱۹—

فقط براساس آنچه ادوین درود می‌پرسد نمی‌توان جادوگر را شناسایی کرد، اما از پرسش او همراه با پرسشهای قبلی، مسئله خودبه‌خود حل می‌شود!

از پرسش ادوین درود می‌توان فهمید که جادوگر بایستی از نوع A باشد. زیرا اگر از نوع A باشد در این‌صورت پاسخ درست به‌پرسش او بلی است و بنابراین او و جادوگر واقعاً از یک نوع خواهند بود، یعنی جادوگر نیز از نوع A است. ازسوی دیگر اگر ادوین از نوع B باشد در آن‌صورت پاسخ درست به پرسش او خیر است، و این بدان معنی است که او و جادوگر نمی‌توانند از یک نوع باشند، چون ادوین از نوع B است پس جادوگر بایستی از نوع A باشد.

پس ثابت شد که جادوگر از نوع A است. اما در مسئلهٔ ۱۷، معلوم شد که جادوگر می‌تواند بپرسد که آیا مانسفیلد جادوگر است یا نه. چون جادوگر از نوع A است پس پاسخ پرسش او بلی است. بنابراین جادوگر مورد جستجوی ما خود چارلز مانسفیلد است.

مسئلهٔ جایزه‌دار

گفتیم که آرنولد، توماس و ویلیام همگی به این نتیجه رسیدند که زندگی در خارج از تیمارستان دیوانه کننده‌تر از زندگی در تیمارستان است. چون توماس با آرنولد و ویلیام، که هردو دیوانه اند، هم‌عقیده است پس او نیز بایستی دیوانه باشد.

٦

جزیرهٔ رؤیاها

زمانی در رؤیا دیدم که جزیره‌ای به‌نام **جزیرهٔ رؤیاها** وجود دارد. ساکنان این جزیره خوابهای روشن می بینند. درواقع افکارشان در خواب به همان روشنی افکارشان در بیداری است. از این گذشته، رویدادهای زندگی آنها درخواب مانند رویدادهای زندگی آنها دربیداری دارای تسلسل ازیک شب به‌شب دیگر است. از این رو برخی از مردمان این جزیره گاهی در یک آن نمی دانند که خوابند یا بیدار.

مردمان این جزیره بر دو نوعند: **روزبین** و **شب‌بین**. روزبینان به‌هنگام بیداری همهٔ باورهایشان درست و به‌هنگام خواب همهٔ باورهایشان نادرست است. اما شب‌بینان به‌هنگام بیداری همهٔ باورهایشان نادرست و به‌هنگام خواب همهٔ باورهایشان درست است.

۱ــ

یکی ازمردم این جزیره در لحظه‌ای معین عقیده داشت که روزبین است.

آیا می‌توان معین کرد که عقیدهٔ او درست بوده است یا نه؟ آیا می‌توان معین کرد که او در آن‌زمان خواب بوده است یا بیدار؟

۲ـ

زمانی یکی از بومیان این جزیره عقیده داشت که در آن هنگام، خواب است. آیا می‌توان معین کرد که عقیدهٔ او درست بوده است یا نه؟ آیا نوع او قابل تعیین است؟

۳ـ

(الف) آیا درست است که عقیدهٔ هرشخصی در این جزیره در بارهٔ روز بین یا شب بین بودن خودش هرگز تغییر نمی کند؟

(ب) آیا درست است که عقیدهٔ هر شخصی در این جزیره در بارهٔ خواب بودن یا بیدار بودن خودش، در یک لحظهٔ معین، هرگز تغییر نمی کند؟

٤ـ

زمانی خانمی از مردم این جزیره عقیده داشت که یا خواب است یا شب بین یا هم خواب است و هم شب بین (**یا** در اینجا یعنی **دست کم** یکی از دو حالت. به‌عبارت دیگر، یعنی احتمالاً یا این یا آن یا هردو).

آیا می توان معین کرد که او در آن هنگام خواب بوده است یا بیدار؟ آیا می توان نوع او را مشخص کرد؟

۵ـ

زمانی یکی از ساکنان این جزیره عقیده داشت که هم خواب است و هم روز بین. او واقعاً از چه نوعی بود؟

٦ـ

در این جزیره یک زن و شوهر با نام خانوادگی کولپ (Kulp) زندگی می کنند. در یک لحظه آقای کولپ عقیده داشت که او و همسرش هردو

شب‌بین هستند. در همان لحظه خانم کولپ عقیده داشت که آن‌دو، شب‌بین نیستند. در آن لحظه یکی از آن‌دو بیدار و دیگری خواب بود. کدام‌یک بیدار بود؟

۷ـ

زن و شوهری با نام خانوادگی بایرون (Byron) در جزیرهٔ رؤیاها زندگی می کنند، که یکی شب‌بین و دیگری روزبین است. در یک لحظه زن عقیده داشت که آنها یا هردو خواب یا هردو بیدارند. در همان لحظه شوهر عقیده داشت که آنها هردو باهم خواب یا هردو باهم بیدار نیستند.

عقیدهٔ کدام‌یک درست بود؟

۸ـ

این مسئله مورد جالب توجّهی است: یک بار فردی به‌نام ادوارد(Edward) عقیدهٔ شگفت‌انگیزی داشت، به‌این معنی که او و خواهرش الین (Elaine) هردو شب‌بین هستند، و او به‌تنهایی شب‌بین نیست.

آیا این ممکن است؟ او شب‌بین است یا روزبین؟ خواهرش چطور؟ آیا در آن لحظه او خواب بوده است یا بیدار؟

۹ـ خانوادهٔ سلطنتی

در این جزیره شاه، ملکه و یک شاهزاده خانم نیز زندگی می‌کنند. یک بار شاهزاده خانم عقیده داشت که پدر و مادرش از دو نوع گوناگونند. دوازده ساعت بعد تغییر حالت داد (یعنی اگر خواب بود بیدار شد و اگر بیدار بود خوابید). در حالت جدید عقیده داشت که پدرش روزبین و مادرش شب‌بین است.

شاه از چه نوع و ملکه از چه نوعی است؟

۱۰– پزشک جادوگر

هیچ جزیره‌ای نیست که یک جادوگر، یک شعبده‌باز، یک دکتر واقعی، یک دکتر جادوگر، یا چیزی شبیه اینها نداشته باشد. در جزیرهٔ رؤیاها پزشکی جادوگر، که درضمن تنها پزشک جادوگر جزیره است، زندگی می‌کند. اکنون به معمای جالب توجّهی درمورد این پزشک دقّت کنید.

یک بار یکی از ساکنان جزیره به‌نام اُرک (Ork) باخود فکر می‌کرد که نکند پزشک جادوگر خود من باشم. ضمن تفکر به این نتیجه رسید که اگر او روز بین و بیدار می بود در آن صورت همان پزشک جادوگر بود. در همان لحظه یکی دیگر از ساکنان جزیره به‌نام بُرک (Bork) عقیده داشت که اگر روز بین و بیدار یا شب بین و خواب می بود، او (یعنی بُرک) پزشک جادوگر بود. واقعیّت این است که در آن لحظه اُرک و بُرک یا هردو خواب یا هردو بیدار بودند.

پزشک جادوگر شب بین است یا روز بین؟

۱۱– یک ماورای معما

یک بار معمای زیر را در بارهٔ جزیرهٔ رؤیاها به‌یکی از دوستانم دادم:

«یکی از ساکنان در لحظه‌ای عقیده داشت که روز بین و بیدار است. او واقعاً چه بود؟»

دوستم مدتی فکر کرد و پاسخ داد «ظاهراً هنوز اطلاعات کافی برای حل معما به‌من نداده‌ای». البته او درست می گفت. از این رو از من پرسید: «آیا خود تو می دانی شخص مورد گفتگو از چه نوعی بود و در آن لحظه خواب بود یا بیدار؟»

پاسخ دادم «بلی، من این شخص را به‌خوبی می شناسم و می دانم از چه نوعی است و نیز از وضعیّت خواب یا بیدار بودن او در آن لحظه آگاهم.»

دوستم این بار پرسشی زیرکانه کرد: «اگر به‌من می گفتی که او روزبین است یا شب‌بین، آیا در آن‌صورت اطلاعات من برای تشخیص خواب یا بیدار بودن او کفایت می کرد؟» به این پرسش پاسخ درست دادم (بلی یا خیر)، و دوستم توانست معما را حل کند.

شخص مذکور شب‌بین بوده است یا روزبین و در آن لحظه بیدار بوده است یا خواب؟

۱۲– یک ماورای معمای دشوارتر

زمانی دیگر معمای زیر را برای دوستی مطرح کردم: «خانمی از ساکنان جزیرهٔ رؤیاها در لحظه‌ای عقیده داشت که هم خواب است و هم شب‌بین. او چه بوده است؟»

دوستم بیدرنگ فهمید که اطلاعات کافی به‌او نداده‌ام. از این رو پرسید:

«فرض کنیم که به‌من می گفتی او شب‌بین است یا روزبین. در آن‌صورت آیا می توانستم خواب یا بیدار بودن او را استنتاج کنم؟»

به پرسش او پاسخ درست دادم. با این همه نتوانست مسئله را حل کند (هنوز اطلاعات کافی نداشت).

چندروز بعد همان مسئله را به دوستی دیگر دادم (بدون اینکه دربارهٔ مطرح شدنش با دوست اول چیزی به او بگویم). این دوست دوم نیز متوجه شد که اطلاعات کافی به‌او نداده‌ام. پرسید: «اگر به‌من می گفتی که خانم در آن لحظه خواب بوده یا بیدار آیا اطلاعاتم برای تشخیص روزبین یا شب‌بین بودن او کفایت می کرد؟»

به این پرسش پاسخ درست دادم، اما دوست دوم نیز نتوانست مسئله را حل کند (او نیز اطلاعات کافی نداشت).

اکنون، شما اطلاعات کافی برای حل معما دراختیار دارید!

بگویید ببینم آن خانم روز بین بوده است یا شب بین، و در آن لحظه خواب بوده یا بیدار؟

سرانجام

فرض کنید جزیرهٔ رؤیاها واقعاً وجود داشته باشد و فرض کنید که من نیز یکی از ساکنان آن باشم. آیا من شب بین هستم یا روز بین؟ پاسخ به این پرسش برآساس مطالبی که در این بخش گفته ام واقعاً امکانپذیر است!

پاسخها

۱ و ۲ و ۳—

ابتدا ثابت می کنیم که قوانین زیر بایستی صدق کند:

قانون ۱: هرفرد جزیره درحالت بیداری عقیده دارد که روز بین است.

قانون ۲: هرفرد جزیره درحالت خواب عقیده دارد که شب بین است.

قانون ۳: افراد روزبین همیشه عقیده دارند که بیدارند.

قانون ٤: افراد شب بین همیشه عقیده دارند که خوابند.

برای اثبات قانون ۱ فرض می کنیم که فرد x در لحظه‌ای معین بیدار باشد. اگر x روز بین باشد در آن‌صورت هم روز بین است هم بیدار. بنابراین باورهای او در آن لحظه درست است، یعنی می داند که روز بین است. ازسوی دیگر، اگر او شب بین باشد در آن‌صورت چون شب بین و در آن لحظه بیدار است، باورهایش نادرست خواهد بود و بنابراین به اشتباه فکر می کند که روز بین است. به‌طور خلاصه، اگر x بیدار باشد، درآن صورت: اگر روز بین باشد خودش نیز به‌درست عقیده دارد که روز بین است و اگرشب بین باشد بازهم عقیده دارد (به‌نادرست) که روز بین است.

اثبات قانون ۲ نیز به‌همین شیوه است: اگر خواب باشد، در آن‌صورت اگر شب بین باشد عقیده دارد (به‌درست) که شب بین است و اگر روز بین باشد بازهم عقیده دارد (به‌نادرست) که شب بین است.

برای اثبات قانون ۳، فرض می کنیم که x روز بین باشد. در آن‌صورت در بیداری باورهایش درست خواهد بود، یعنی درحالت بیداری می داند که بیدار است.

اما در هنگام خواب، باورهایش نادرست است، یعنی درحالت خواب به اشتباه فکر می کند که بیدار است. بنابراین در بیداری به درست فکر می کند که بیدار است و در خواب به نادرست فکر می کند که بیدار است.

اثبات قانون ٤ شبیه اثبات قانون ۳ است و انجام آن‌را برعهدهٔ خواننده می گذاریم.

اکنون می پردازیم به حل مسئلهٔ ۱: نمی توان مشخص کرد که آیا باور آن شخص درست بوده است یا نه. اما او در آن لحظه بایستی بیدار بوده باشد، زیرا اگر خواب می بود می بایستی عقیده می داشت که شب بین است نه روز بین (برطبق قانون ۲).

در مسئلهٔ ۲ نیز نمی توان تعیین کرد که آیا باور آن شخص درست بوده یا نه؛ اما او بایستی شب بین بوده باشد، زیرا اگر روز بین می بود، می باید عقیده می داشت که بیدار است و نه خواب (برطبق قانون ۳).

در مسئلهٔ ۳ پاسخ قسمت **(الف)** خیر است، زیرا برطبق قوانین ۱ و ۲ عقیدهٔ شخصی از مردم این جزیره در مورد روز بین یا شب بین بودن خودش درحالت خواب باحالت بیداری متفاوت است. پاسخ قسمت **(ب)** برطبق قوانین ۳ و ٤ بلی است.

٤—

این مسئله را می توانید به طور سیستمی باتوجّه به چهار امکان زیر برای خانم جزیره‌ای حل کنید: **(۱)** شب بین و خواب است، **(۲)** شب بین و بیدار است، **(۳)** روز بین و خواب است، **(٤)** روز بین و بیدار است. اکنون با بررسی اینکه شرایط مسئله با کدام یک از چهار امکان فوق سازگار است می توان مسئله را حل کرد. اما من استدلال زیر را ترجیح می دهم:

اولاً، آیا ممکن است باور او نادرست باشد؟ اگر چنین است او نه خواب است نه شب بین و این بدان معنی است که بیدار و روز بین است. اما این یک تناقض است، زیرا کسی که بیدار و روز بین است نمی تواند باور نادرست داشته باشد. بنابراین باور او نمی تواند نادرست باشد و بایستی درست باشد. نتیجه این است که او خواب و شب بین است.

۵—

در اینجا نیز مسئله را می توان با توجّه به چهار حالت ممکن حل کرد، اما باز من ترجیح

می دهم که از روش ابتکاری خودم استفاده کنم:

آیا عقیدهٔ او ممکن است درست باشد؟ اگر چنین باشد او بایستی خواب و روز بین باشد. اما اگر خواب و روز بین باشد نمی تواند باور درست داشته باشد. بنابراین عقیدهٔ او نادرست است. اما تنها موردی که یکی از مردم جزیره ممکن است عقیدهٔ نادرست داشته باشد هنگامی است که خواب و روز بین یا بیداز و شب بین باشد. اگر خواب و روز بین می بود در آن صورت عقیدهٔ او درست بود (زیرا همین عقیده را داشت). بنابراین او بایستی بیدار و شب بین بوده باشد.

٦—

اگر این معما را به طور سیستمی حل کنیم شانزده حالت ممکن برای بررسی خواهیم داشت (چهار حالت برای شوهر و به ازای هریک از آنها چهار حالت برای همسر خواهیم داشت). خوشبختانه این معما با روش خیلی ساده تری قابل حل است.

ابتدا می گوییم چون یکی از آن دو خواب و دیگری بیدار است و چون باورهای آنها متضاد است، بنابراین بایستی هردو از یک نوع یعنی یا هردو روز بین یا هردو شب بین باشند. زیرا اگر از دو نوع گوناگون بودند در آن صورت هنگامی که هردو خواب یا هردو بیدار بودند باورهایشان متضاد و هنگامی که یکی خواب و دیگری بیدار بود باورهایشان مشابه می بود. چون وقتی یکی خواب و دیگری بیدار است باورهایشان مشابه نیست، پس بایستی هردو از یک نوع باشند.

باتوجّه به اینکه زن و شوهر، هردو، روز بین یا شب بین هستند، نخست فرض می کنیم که هردو شب بین باشند. با این فرض، عقیدهٔ شوهر در آن لحظه درست بوده است و چون شب بین است پس بایستی در آن لحظه خواب بوده باشد. حال اگر فرض کنیم هردو روز بین باشند در آن صورت مسلماً عقیدهٔ شوهر در این مورد که هردو شب بین هستند نادرست بوده است و چون او روز بین است و عقیدهٔ نادرست داشته است پس در آن لحظه بایستی خواب بوده باشد. پس چه هردو شب بین و چه هردو روز بین باشند، در آن لحظه شوهر خواب و همسر بیدار بوده است.

٧—

این مسئله از مسئلهٔ قبلی نیز ساده تر است، چون زن و شوهر از دو نوع متفاوت هستند، بنابراین عقیده های آنها بایستی هنگامی که در یک حالت مشابه (هردو خواب یا هردو بیدار) هستند متضاد، و هنگامی که در دو حالت متفاوت (یکی خواب و دیگری بیدار)

هستند مشابه باشد. چون در آن لحظه عقیده های آن دو متضاد بوده است، پس هردو در یک حالت، یعنی یا هردو خواب یا هردو بیدار، بوده اند. پس زن درست می گفت.

۸—

روشن است که ادوارد در آن موقعیّت درحالت فکری نامتعادلی قرار داشت، زیرا دو گزارهٔ منطقاً ناسازگار را توأماً درست می پنداشت! پس هردو عقیدهٔ ادوارد بایستی نادرست باشد. چون عقیده داشت که خود و الیان هردو شب بین هستند، پس هردو نفر شب بین نیستند. و چون عقیده داشت که خودش شب بین نیست، پس درواقع شب بین هست. پس ادوارد شب بین است اما هم او و هم خواهرش شب بین نیستند، پس الین روز بین است. چون ادوارد شب بین است و در آن لحظه عقیده اش نادرست است پس بایستی در آن لحظه بیدار بوده باشد. پس ادوارد شب بین و خواهرش روز بین است و او بیدار بوده است.

۹—

چون شاهزاده خانم تغییرحالت داده است، پس یکی از عقیده هایش درست و دیگری نادرست است، یعنی یکی ازدو گزارهٔ زیر درست و دیگری نادرست است:

(۱) شاه و ملکه از دو نوع گوناگونند.

(۲) شاه روز بین و ملکه شب بین است.

اگر گزارهٔ (۲) درست باشد، در آن صورت گزارهٔ (۱) نیز درست خواهد بود. چون گزاره های (۱) و (۲) نمی توانند هردو درست باشند پس گزارهٔ (۲) بایستي نادرست و درنتیجه گزارهٔ (۱) بایستی درست باشد. پس شاه و ملکه واقعاً از دو نوع متفاوتند و چون روز بین بودن شاه و شب بین بودن ملکه درست نیست پس شاه شب بین و ملکه روز بین است.

۱۰—

فرض کنیم ارک روز بین و در آن لحظه بیدار بوده باشد.آیا برمبنای این فرض می توان نتیجه گرفت که ارک پزشک جادوگر است؟ بلی برطبق استدلال زیر می توان چنین نتیجه گرفت. اگر ارک واقعاً روز بین و در آن لحظه بیدار بوده باشد در آن صورت عقیدهٔ او درست خواهد بود؛ یعنی اگر او روز بین و بیدار باشد در آن صورت واقعاً پزشک جادوگر است. پس، از فرض روز بین و بیدار بودن ارک نتیجه می شود که او پزشک

جادوگر است. البته این استنتاج منطقی دلیلی بر درستی فرض، یا پزشک جادوگر بودن ارک، نیست. فقط ثابت می شود که اگر او روز بین و بیدار می بود در آن صورت پزشک جادوگر بود. پس این گزارهٔ فرضی را ثابت کرده ایم که **اگر** ارک روز بین و بیدار باشد در **آن صورت** پزشک جادوگر است. اما در آن لحظه ارک دقیقاً به همین گزارهٔ فرضی عقیده داشت بنابراین عقیدهٔ ارک درست بوده است! درست بودن عقیدهٔ ارک به معنی آن است که در آن لحظه یا روز بین و بیدار یا شب بین و خواب بوده است؛ اما هنوز نمی توانیم بگوییم در کدام حالت بوده است. بنابراین الزاماً ارک پزشک جادوگر نیست، زیرا ممکن است او، در آن لحظه، شب بین و خواب بوده باشد.

با استدلالی مشابه ثابت می شود که عقیدهٔ برک نیز درست بوده است: اگر برک یا روز بین و بیدار، یا شب بین و خواب باشد، در هردو حالت، عقیدهٔ او درست خواهد بود و این به معنی آن است که او بایستی پزشک جادوگر باشد. این دقیقاً همان است که برک عقیده داشت. پس عقیدهٔ برک درست است. چون عقیدهٔ برک درست است، پس او یا روز بین و در آن لحظه بیدار، یا شب بین و در آن لحظه خواب است. اما در هردو حالت او بایستی پزشک جادوگر باشد.

چون برک پزشک جادوگر است، پس ارک پزشک جادوگر نیست. بنابراین ارک نمی تواند در آن لحظه بیدار و روز بین بوده باشد، زیرا نشان دادیم که اگر چنین بود او پزشک جادوگر می بود. پس ارک در آن لحظه خواب و همچنین شب بین بوده است. بنابراین برک نیز در آن لحظه خواب بوده است، و چون عقیدهٔ برک در آن لحظه درست بود، پس او بایستی شب بین بوده باشد. پس پزشک جادوگر شب بین است.

—۱۱

از این واقعیّت که یک نفر از مردم جزیرهٔ رؤیاها عقیده داشت که روز بین و بیدار است فقط می توان نتیجه گرفت که او شب بین و خواب است؛ بنابراین سه امکان وجود دارد:

(۱) او شب بین و بیدار بوده است (و عقیده ای نادرست داشت).

(۲) او روز بین و خواب بوده است (و عقیده ای نادرست داشت).

(۳) او روز بین و بیدار بوده است (و عقیده ای درست داشت).

حال اگر به دوستم گفته بودم که آن فرد جزیره ای روز بین یا شب بین است، آیا دوستم می توانست مسئله را حل کند؟ بسیار خوب، این به آنچه به او می گفتم

بستگی داشت. اگر به‌او می گفتم که فرد جزیره‌ای شب‌بین است، در آن‌صورت می فهمید که مورد (۱) تنها امکان است و درنتیجه می فهمید که فرد جزیره‌ای بیدار بوده است. اما اگر به‌او می گفتم که جزیره‌ای روزبین است، می فهمید که مورد (۱) غیرممکن و موارد (۲) و (۳) ممکن است، اما هیچ راهی نداشت که بفهمد کدام‌یک ازموارد (۲) و (۳) درست است و بنابراین نمی توانست مسئله را حل کند.

اما دوست عزیز ما نپرسید که آیا فرد جزیره‌ای روزبین است یا شب‌بین. تنها چیزی که پرسید این بود که اگر به‌او می گفتم که فرد جزیره‌ای روزبین است یا شب‌بین آیا او می توانست مسئله را حل کند. درواقع اگرفرد جزیره‌ای روزبین می‌بود، بایستی به پرسش دوستم پاسخ خیر می دادم (زیرا همان‌طور که نشان دادم، اگر به‌او می گفتم که فرد جزیره‌ای روزبین است نمی توانست مسئله را حل کند). اما اگرفرد جزیره‌ای شب‌بین بود، در آن‌صورت بایستی به پرسش او پاسخ بلی می دادم (زیرا همان‌طور که دیدیم، اگر به‌او می گفتم که فرد جزیره‌ای شب‌بین است، در آن‌صورت می توانست مسئله را حل کند). بنابراین چون دوست من می دانست که فرد جزیره‌ای شب‌بین و بیدار است بایستی به‌او پاسخ بلی می دادم.

۱۲—

از این موضوع که خانم فکر می کرد شب‌بین و خواب است فقط می توان نتیجه گرفت که او روزبین و بیدارنبوده است و بنابراین سه امکان باقی می ماند:

(۱) او شب‌بین و خواب بوده است.

(۲) او شب‌بین و بیداربوده است.

(۳) او روزبین و خواب بوده است.

اگر به پرسش دوست اول پاسخ بلی می دادم، درآن‌صورت می فهمید که مورد (۳) تنها امکان است (با استدلالی مشابه راه‌حل مسئلهٔ قبلی). چون نتوانست مسئله را حل کند، پس بایستی پاسخ خیر داده باشم. پس مورد (۳) درست نیست و فقط موارد (۱) و (۲) باقی می مانند.

اما درمورد دوست دوم، اگر به‌او پاسخ بلی می دادم درآن‌صورت می توانست بفهمد که مورد (۲) تنها امکان است (زیرا (۲) تنها موردی است که درآن شخص بیدار است، درصورتی که موارد (۱) و (۳) فقط در صورت خواب‌بودن او صدق می کنند). چون این دوست دوم نیز نتوانست مسئله را حل کند، پس به‌او نیز بایستی

پاسخ خیر داده باشم و این مورد **(۲)** را غیرممکن می کند. پس فقط امکان **(۱)** باقی می‌مانـد، یعنی فرد جزیره‌ای، همان‌طور که خودش عقیده داشت، شب‌بین و خواب بود.

به‌طور خلاصه، این واقعیّت که دوست اوّلم نتوانست مسئله را حل کند مورد **(۳)** را غیرممکن می کند، و این واقعیّت که دوست دوم نتوانست مسئله را حل کند مورد **(۲)** را غیرممکن می کند. آنچه می ماند مورد **(۱)** است و این بدان معنی است که خانم جزیره‌ای شب‌بین و خواب بوده است.

سرانجام

در ابتدای این فصل گفتم که وجود چنین جزیره‌ای را در رؤیا دیدم. اگر واقعاً چنین جزیره‌ای وجود داشت، در آن‌صورت رؤیای من درست بود و بنابراین اگر من نیز یکی از ساکنان آن جزیره بودم بایستی شب‌بین می بودم.

۷

ماورای معما

دو معمای آخر بخش ٦ (بجز معمای سرانجام) نمونه‌هایی از یک نوع معمای جذاب هستند. این نوع معما را من مایلم **ماورای معما** یا **معما دربارهٔ معما** بنامم. ماورای معما به این صورت است که یک معما طرح می کنند بدون آنکه اطلاعات کافی برای حل آن بدهند، وسپس می پرسند که آیا اگر مقدار معینی اطلاعات بیشتر داده شود معما قابل حل خواهد بود یا نه، امّا هیچ گاه خود آن اطلاعات جدید داده نمی شود. اما، ممکن است بخشی از آن اطلاعات جدید را بدهند تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. متأسفانه این نوع معماهای جذاب درکتابهای معما کمتر به‌چشم می خورد. در اینجا پنج نمونه از این نوع طرح می شوند که نخست با ساده‌ترین مورد و به‌تدریج با موارد دشوارتر و در پایان با شاه معمای این بخش آشنا می شویم.

۱ــ داستان جان

این داستان به بررسی گزاره‌هایی پیرامون یک جفت دوقلو مربوط است. می دانستند که یکی از آن‌دو هیچ گاه راست نمی گوید اما نمی دانستند کدام‌یک. یکی از دوقلوها که نامش جان بود مرتکب جنایتی شده بود (جان الزاماً برادر دروغگو نبود). هدف بررسی این بود که بفهمند جان کدام

است.

قاضی از نفر اول دوقلوها پرسید: «آیا شما جان هستید؟»

او پاسخ داد: «بلی من جان هستم».

قاضی از دیگری پرسید: «آیا شما جان هستید؟»

او هم به این پرسش پاسخی داد (بلی یا خیر) و قاضی توانست جان را پیدا کند.

جان نفر اول بود یا دوم؟

۲ـ یک ماورای معما از سرزمین ترانسیلوانیا

در بخش ٤ دیدیم که هر ترانسیلوانیایی ممکن است یکی از چهار نوع زیر باشد: (۱) انسان عاقل، (۲) انسان دیوانه، (۳) وَمپایر عاقل، (٤) وَمپایر دیوانه.

انسان عاقل همیشه مطلب درست می گوید (هم درست می پندارد و هم راست می گوید)، انسان دیوانه همیشه مطلب نادرست می گوید (نه از روی تعمد بلکه به‌سبب پندار نادرست)، وَمپایر عاقل همیشه مطلب نادرست می گوید (عمداً)، و وَمپایر دیوانه همیشه مطلب درست می گوید (چون مطلب را نادرست می پندارد و نیز دروغگو است، بنابراین آنچه می گوید درست است).

روزی سه منطق‌دان تجربیّات سفرهای جداگانهٔ خود به ترانسیلوانیا را بازگو می کردند.

اولی می گفت: وقتی که آنجا بودم فردی به‌نام ایگور (Igor) را دیدم و از او پرسیدم که آیا انسانی عاقل است. پاسخم را داد (بلی، خیر). اما از پاسخ او نتوانستم بفهمم که چیست.

دومی گفت: عجبا؛ منهم ایگور را دیدم و از او پرسیدم که آیا وَمپایری عاقل است. پاسخم را داد (بلی یا خیر). با این همه، نتیجه‌ای

نگرفتم.

سومی فریاد زد: عجبا! عجبا! من نیز این ایگور را دیدم و از او پرسیدم که آیا وَمپایری دیوانه است، اما از پاسخش (بلی یا خیر) چیزی دستگیرم نشد.

ایگور عاقل است یا دیوانه؟ انسان است یا وَمپایر؟

۳ـ

در کتاب دیگرم به‌نام «**نام این کتاب چیست؟**» چند معمّا در بارهٔ جزیره‌ای که ساکنان آن از دو نوع **نجیب** و **نانجیب** بودند طرح کردم که افراد نجیب همیشه راست می گفتند و افراد نانجیب همیشه دروغ می گفتند. در اینجا با یک ماورای معمای نجیب - نانجیب آشنا می شویم.

روزی یک منطق‌دان به آن جزیره رفت و به دو فرد A و B برخورد کرد. از A پرسید: «آیا شما هردو نجیب هستید؟» و پاسخی شنید (بلی یا خیر). منطق‌دان مدتی فکر کرد، اما هنوز اطلاعات کافی برای شناختن A و B نداشت. از این‌رو از A پرسید: «آیا شما دونفر از یک‌نوع هستید؟ (یعنی هردو نجیب یا هردو نانجیب)». A پاسخی داد (بلی یا خیر) و منطق‌دان توانست نوع آن‌دو را بفهمد.

A و B از چه‌نوع بودند؟

۴ــنجیب، نانجیب، عادی

در جزیرهٔ دیگری افراد نجیب، نانجیب و عادی زندگی می کردند. نجیبها همیشه راست می گفتند، نانجیبها همیشه دروغ می گفتند، و افراد عادی، گاهی راست و گاهی دروغ می گفتند.

روزی به این جزیره رفتم و با دو فرد A و B آشنا شدم. از پیش می دانستم که یکی از آن‌دو نجیب و دیگری عادی است، اما نمی دانستم

کدام چیست. از A پرسیدم که آیا B فردی عادی است؛ و پاسخی شنیدم (بلی یا خیر) که براساس آن نوع A و B را فهمیدم.

کدام‌یک از آن دو عادی است؟

۵- جاسوس کیست؟

اکنون با یک ماورای معمای بسیار پیچیده‌تری آشنا می شویم.

داستان به محاکمهٔ سه متهم A و B و C مربوط می شود. پیش از آغاز محاکمه می دانستند که از آن سه نفر یکی نجیب است (همیشه راست می گوید)، یکی نانجیب است (همیشه دروغ می گوید) ویکی عادی است که درضمن جاسوس هم هست (گاهی دروغ و گاهی راست می گوید). هدف محاکمه این بود که جاسوس را بشناسند.

ابتدا از A خواستند که چیزی بگوید؛ ما دقیقاً نمی دانیم او چه گفت ولی می دانیم که یا گفته است C نانجیب است یا گفته است C جاسوس است. پس از او B یا گفته است که A نجیب است یا گفته است A نانجیب است یا گفته است که A جاسوس است، اما نمی دانیم کدام‌یک از این سه مطلب را بیان کرده است. بالاخره C در مورد B چیزی گفته است. دقیقاً نمی دانیم چه گفته است، اما می دانیم که یا گفته است B نجیب است، یا گفته است B نانجیب است، یا گفته است B جاسوس است. قاضی براساس گفته های A و B و C توانست جاسوس را بشناسد و او را محکوم کند.

این معما را برای یک منطق‌دان شرح دادند. او پس از کمی تفکّر گفت «اطلاعات کافی برای شناسایی جاسوس ندارم». برای او آنچه را A گفت دو باره شرح دادند و آن گاه توانست جاسوس را پیدا کند.

جاسوس که بود: A ، B ، یا C ؟

پاسخها

۱ـ

اگر نفر دوم نیز پاسخ بلی می داد، یقیناً قاضی نمی توانست بفهمد جان کدام است، پس دومی بایستی پاسخ خیر داده باشد. این بدان معنی است که دوقلوها یا هردو راست گفته اند یا هردو دروغ. اما هردو نمی توانند راست گفته باشند زیرا از پیش می دانیم که دست کم یکی از آنها همیشه دروغ می گوید. پس هردو دروغ گفته اند؛ یعنی جان نفر دوم است (نمی توان تعیین کرد که کدام یک همیشه دروغ می گوید).

۲ـ

منطق دان اول از ایگور پرسید که آیا او انسانی عاقل است یا نه. اگر ایگور واقعاً انسان عاقل می بود، جواب می داد بلی. اگر انسانی دیوانه نیز بود پاسخ می داد بلی (زیرا چون دیوانه است به اشتباه فکر می کند عاقل است و عقیدهٔ خودرا به درست بیان می کند). اگر وَمپایری عاقل بود بازهم پاسخ بلی می داد (زیرا چون عاقل است می داند که انسانی عاقل نیست، اما به دروغ می گوید بلی). اما اگر ایگور وَمپایری دیوانه بود جواب می داد خیر (زیرا چون وَمپایری دیوانه است، عقیده دارد که انسانی عاقل است و برخلاف عقیدهٔ خود بیان می کند). پس وَمپایری دیوانه به پرسش منطق دان پاسخ خیر می دهد. در آن صورت منطق دان اولی بایستی می فهمید که ایگور وَمپایری دیوانه است. اما منطق دان اولی نفهمید که ایگور چیست، پس باید پاسخ بلی گرفته باشد. از اینجا نتیجه می شود که ایگور وَمپایری دیوانه نیست.

منطق دان دوم پرسیده است «آیا شما یک ومپایر عاقلید؟». به این پرسش یک انسان دیوانه پاسخ بلی می دهد و سه نوع دیگر پاسخ خیر می دهند (اثبات این نتیجه را به عهدهٔ خواننده می گذاریم). چون منطق دان دوم نتوانست از پاسخ ایگور بفهمد که او از چه نوعی است، پس پاسخ بایستی خیر بوده باشد، و این به معنی آن است که او انسانی دیوانه نیست.

در مورد پرسش منطق دان سوم که پرسیده بود «آیا شما وَمپایری دیوانه هستید؟»، انسان عاقل پاسخ می داد خیر و هریک از سه نوع دیگر پاسخ می دادند بلی. چون منطق دان سوم نتوانست ایگور را بشناسد، پس بایستی پاسخ بلی دریافت کرده باشد و این بدان معنی است که ایگور انسانی عاقل نیست.

به این ترتیب نشان داده شد که ایگور وَمپایری دیوانه، یا انسانی دیوانه یا

انسانی عاقل نیست. پس بایستی وَمپایری عاقل باشد.

۳—

چهار مورد امکانپذیر است:

مورد ۱: A و B هردو نجیب هستند.

مورد ۲: A نجیب و B نانجیب است.

مورد ۳: A نانجیب و B نجیب است.

مورد ٤: A و B هردو نانجیب هستند.

منطق‌دان نخست از A پرسید که آیا هردو نفر نجیب هستند. اگر هرکدام از موارد ۱، ۳ یا ٤ درست بود، A پاسخ بلی می داد. اگر مورد ۲ درست بود A پاسخ خیر می داد (اثبات این نتیجه را برعهدهٔ خواننده می گذاریم). چون منطق‌دان از پاسخ A نفهمید که آن‌دو از چه نوعی هستند پس A بایستی پاسخ بلی داده باشد. منطق‌دان از آن پاسخ فقط دریافت که مورد ۲ درست نیست. سپس منطق‌دان از A پرسید که آیا آن‌دو از یک نوع هستند. درصورت درست بودن موارد ۱ و ۳، A پاسخ می داد بلی و در موارد ۲ و ٤ می گفت خیر (اثبات این را نیز برعهدهٔ خواننده می گذاریم). پس اگر منطق‌دان پاسخ بلی می شنید، فقط می فهمید که یا مورد ۱ یا مورد ۳ درست است، اما نمی توانست بفهمد که کدام‌یک. بنابراین بایستی پاسخ خیر دریافت کرده باشد. و از آن پاسخ فهمیده است که یا مورد ۲ یا مورد ٤ درست است، اما چون پیش از این مورد ۲ را رد کرده است، پس نتیجه گرفته است که مورد ٤ درست است یعنی A و B هردو نانجیب هستند.

٤—

اگر A پاسخ می داد بلی، در آن‌صورت ممکن بود نجیب باشد یا ممکن بود عادی باشد (که دروغ گفته بود)، و من نمی توانستم بفهمم که کدام‌یک. اگر A پاسخ می داد خیر، در آن‌صورت نمی توانست نجیب باشد (زیرا B عادی می شد، که یعنی A دروغ گفته است). بنابراین A می باید عادی باشد. فقط درصورتی که A پاسخ خیر می داد می توانستم او را بشناسم. پس فرد عادی موردنظر A است.

۵—

البته در اینجا فرض می کنیم که قاضی و منطق‌دان هردو افرادی کاملاً منطقی

باشند.

دو امکان وجود دارد: یا به منطق دان گفته شده است که A گفته است C نانجیب است، یا به او گفته شده است که A گفته است C جاسوس است. هردو امکان را بررسی می کنیم:

امکان ۱: A گفته است C نانجیب است.

اکنون B ممکن است سه چیز گفته باشد، و هریک را بررسی می کنیم.

مورد (۱): B گفته است A نجیب است.

در این صورت: **(۱)** اگر A نجیب باشد، C نانجیب خواهد بود (زیر A گفته است C نانجیب است)، و بنابراین B جاسوس است، **(۲)** اگر A نانجیب باشد، گفتهٔ B دروغ خواهد بود یعنی B جاسوس است (او نانجیب نیست چون A فرد نانجیب است)، بنابراین C نجیب است، **(۳)** اگر A جاسوس باشد، گفتهٔ B دروغ خواهد بود یعنی B نانجیب است وبنابراین C نجیب است. پس یکی ازسه حالت زیر امکانپذیر است:

(۱) A نجیب، B جاسوس و C نانجیب است.

(۲) A نانجیب، B جاسوس و C نجیب است.

(۳) A جاسوس، B نانجیب و C نجیب است.

اکنون فرض کنید C گفته باشد که B جاسوس است.

در آن صورت حالتهای **(۱)** و **(۳)** رد می شود (حالت **(۱)** درست نیست زیرا، C که نانجیب است نمی تواند بگوید B جاسوس است، زیرا در این حالت B جاسوس است، حالت **(۳)** نیز درست نیست زیرا، C که نجیب است نمی تواند بگوید B جاسوس است، زیرا در این حالت B جاسوس نیست). پس فقط حالت **(۲)** می ماند و قاضی می فهمد که B جاسوس است.

فرض کنیم C گفته باشد B نجیب است. در این صورت **(۱)** تنها حالت ممکن خواهد بود و باز قاضی می فهمد که B جاسوس است.

سرانجام، اگر فرض کنیم C گفته باشد که B نانجیب است، در آن صورت قاضی نمی تواند بفهمد که **(۱)** درست است یا **(۳)** و بنابراین نمی داند A جاسوس است یا B و نمی تواند کسی را محکوم کند. پس C نگفته است که B نانجیب است (به یاد داشته باشید که هنوز با فرض مورد **(۱)** که B گفته است A نجیب است سروکار داریم).

بنابراین اگر مورد (۱) درست باشد، B محکوم است.

مورد (۲): B گفته است A جاسوس است.

اثبات این موضوع را که در این مورد فقط سه حالت زیر امکانپذیر است برعهدهٔ خواننده می گذاریم:

(۱) A نجیب. B جاسوس و C نانجیب است.

(۲) A نانجیب، B جاسوس و C نجیب است.

(۳) A جاسوس، B نجیب و C نانجیب است.

اگر C گفته باشد B جاسوس است، در آن صورت یا حالت (۲) یا حالت (۳) امکانپذیر نیست و قاضی نمی تواند کسی را محکوم کند. اگر C گفته باشد B نجیب است، در آن‌صورت فقط حالت (۱) ممکن است و B محکوم می شود. و اگر C گفته باشد که B نانجیب است، در آن‌صورت یا (۱) یا (۳) غیرممکن است و قاضی نمی‌تواند کسی را محکوم کند. بنابراین C باید گفته باشد که B نجیب است و این به‌معنی آن است که B محکوم است.

پس، درمورد (۲) نیزشخص محکوم B است.

مورد (۳): B گفته است که A نانجیب است.

در این مورد چهار حالت زیر امکانپذیر است (اثبات برعهدهٔ خواننده):

(۱) A نجیب است، B جاسوس است، C نانجیب است.

(۲) A نانجیب است، B جاسوس است، C نجیب است.

(۳) A نانجیب است، B نجیب است، C جاسوس است.

(٤) A جاسوس است، B نانجیب است، C نجیب است.

اگر C گفته باشد که B جاسوس است، حالتهای (۲) و (۳) رد می شوند و قاضی نمی تواند گناهکار را پیدا کند. اگر C گفته باشد که B نجیب است، حالتهای (۱) و (۳) رد می شوند و باز قاضی نمی تواند محکوم را پیدا کند. اگر C گفته باشد که B نانجیب است، حالتهای (۱) و (۳) یا حالت (٤) رد می شود و باز قاضی نمی تواند محکوم را بیابد.

پس مورد (۳) به‌طور کلی رد می شود. بنابراین ثابت شد که یا مورد (۱) یا مورد (۲) درست است و در هردو مورد B محکوم می شود.

پس اگر امکان ۱ را درنظر بگیریم (A گفته است C نانجیب است)، B به‌عنوان جاسوس شناخته می شود و بنابراین اگر به منطق دان گفته می شد که A گفته است C نانجیب است او می توانست مسئله را حل کند و بفهمد که B جاسوس است.

امکان ۲: اکنون فرض می کنیم به منطق‌دان گفته شده باشد که A گفته است C جاسوس است. ثابت می کنیم که در این صورت منطق‌دان نمی تواند مسئله را حل کند، زیرا با این فرض هم امکان محکوم‌شدن A و هم امکان محکوم‌شدن B وجود دارد که منطق‌دان ممکن نیست بفهمد کدام‌یک.

برای اثبات این مطلب، فرض کنید A گفته باشد که C جاسوس است. در آن‌صورت فقط در یک حالت ممکن است که قاضی A را محکوم کند: فرض کنید B گفته باشد A نجیب است و C گفته باشد B نانجیب است. اگر A جاسوس باشد، B باید نانجیب باشد (که به‌دروغ گفته است A نجیب است) و C بایستی نجیب باشد (که به‌درست گفته است B نانجیب است)، و A که جاسوس است به‌دروغ C را به جاسوسی متهم کرده است. پس واقعاً ممکن است که A و B و C مطالب فوق را گفته باشند و A جاسوس باشد. اما اگر B جاسوس باشد، در آن‌صورت A بایستی نانجیب باشد که C را به جاسوسی متهم کند و C نیز بایستی نانجیب باشد که B را نانجیب معرفی کند، پس این حالت ممکن نیست. اگر C جاسوس باشد، در آن‌صورت A بایستی نجیب باشد که به‌درست C را جاسوس اعلام کرده است و B نیز بایستی نجیب باشد که A را به‌درست نجیب معرفی کرده است، پس این حالت نیز ممکن نیست. بنابراین اگر B گفته باشد که A نجیب است و C گفته باشد B نانجیب است، نتیجه می شود که A بایستی جاسوس باشد. پس در این امکان، احتمال محکوم‌شدن A وجود دارد.

خواهیم دید که احتمال محکوم شدن B نیز وجود دارد: فرض کنید B گفته باشد که A نجیب است و C گفته باشد که B جاسوس است (همچنان فرض می کنیم که A گفته است C جاسوس است). اگر A جاسوس باشد، در آن‌صورت B باید نانجیب باشد که بگوید A نجیب است و C نیز باید نانجیب باشد که بگوید B جاسوس است. پس این ممکن نیست. اگر C جاسوس باشد، در آن‌صورت A که گفته است C جاسوس است نجیب است و B که گفته است A نجیب است نیز نجیب است. پس این حالت نیز ممکن نیست. اما اگر B جاسوس باشد، به تناقض برنمی خوریم (A نانجیب است که C را جاسوس معرفی کرده. C نجیب است که B را جاسوس معرفی کرده، و B که جاسوس است می تواند گفته باشد که A نجیب است). پس امکان اینکه A و B و C مطالب فوق را گفته باشند وجود دارد که در آن‌صورت قاضی B را محکوم می کند.

پس نشان داده شد که اگر A گفته باشد C جاسوس است، امکان محکوم‌شدن A و همچنین امکان محکوم‌شدن B وجود خواهد داشت، و به هیچ وجه نمی‌توان فهمید که کدام امکان تحقّق می‌یابد. بنابراین اگر به منطق‌دان گفته شود که A گفته است C جاسوس است، او قادر به حل مسئله نخواهد بود. بنابراین، باید به منطق‌دان گفته شده باشد A گفته است C نانجیب است، که در این حالت قاضی فقط B را می‌تواند محکوم کند. پس B جاسوس است.

فصل سوم

اسرار قفل مونت کارلو

۸

اسرار قفل مونت کارلو

اگر یادتان باشد کارآگاه کریگ را هنگامی رها کردیم که در ترانسیلوانیا، آسوده خیال از اینکه سرانجام به میهن خود برمی گردد، سوار قطار شده بود. او باخودش می گفت «راحت شدم ازدست این وَمپایرها، چه خوب شد که به لندن، جایی که اوضاع عادی است، برمی گردم!»

اما کریگ نمی دانست که پیش از رسیدن به میهن خود ماجرای دیگری در انتظار اوست - ماجرایی کاملاً متفاوت با دو ماجرای قبلی که برای علاقه مندان به معماهای مربوط به رمزها بسیار جالب توجّه خواهد بود. جریان از این قرار بود:

کارآگاه تصمیم داشت که برای چند مسئلهٔ شخصی توقف کوتاهی در پاریس داشته باشد. پس از انجام کارهایش سوار قطاری شد که از پاریس به بندر کالِه[1] می رفت تا از آنجا با کشتی به بندر دُوِر[2] برود. تازه به بندر کاله رسیده بود که یکی از مقامات پلیس فرانسه تلگرافی را که از مونت کارلو

۱ــ کاله (Calais) بندر شهر و شهری است صنعتی در شمال غربی فرانسه.

۲ ــ دُوِر (Dover) بندر شهری است در شرقیترین بخش جنوبی انگلستان که کمترین فاصله اش از راه دریا با بندر کاله در فرانسه ۳۴ کیلومتر است ــ م.

مخابره شده بود به او تسلیم کرد. از او درخواست شده بود که بیدرنگ برای حل یک **مسئلهٔ مهم** به آنجا برود.

کریگ باخود اندیشید: «خدایا، با این وضع هرگز به کشور خودم نمی رسم!»

اما وظیفه را نمی توان نادیده گرفت. از این رو کریگ نقشه اش را کاملاً تغییر داد و به مونت کارلو رفت. در آنجا یکی از مقامات پلیس به نام مارتینز (Martinez) به پیشوازش آمد و بیدرنگ او را به یکی از بانکها برد.

مارتینز مسئله را برای کارآگاه چنین توضیح داد: «در این بانک، رمز بزرگترین صندوق امانتها گم شده است و اگر صندوق را منفجر کنیم خسارت بسیار به بار می آید.»

کریگ پرسید: «چطور شد که رمز را گم کردید؟»

مقام مسئول گفت: «رمز فقط روی یک کارت ثبت شده بود و یکی از کارکنان بیدقت، آن را در صندوق جا گذاشت و صندوق را قفل کرد.»

کارآگاه فریاد زد «خدایا! و اکنون هیچ کس رمز را به یاد ندارد؟»

مارتینز آهی کشید و گفت: «مطلقاً هیچ کس، وبدتر از همه این که اگر با رمز نادرست عمل شود قفل برای همیشه گیر می کند و در آن صورت هیچ راهی جز انفجار صندوق باقی نمی ماند و این همان طور که گفتم موجه نیست زیرا گذشته از خسارتی که به خود صندوق وارد می شود، اشیای شکستنی بسیار گرانبهایی را هم که در آن هست به خطر می اندازد.»

کریگ گفت: «یک دقیقه صبر کنید! به چه سبب قفلی را به کار گرفته اید که با استفاده از یک رمز نادرست برای همیشه گیر می کند؟»

مارتینز گفت: «من اصولاً با خریدن این قفل موافق نبودم، اما هیئت مدیرهٔ بانک این تصمیم را گرفت. توجیهشان این بود که مکانیسم این قفل خصوصیّاتی منحصر به فرد دارد که فایدهٔ آن از زیان احتمالی ناشی از به کار گرفتن رمز نادرست و انفجار صندوق، بیشتر است.»

کریگ گفت: «تا به‌حال توجیهی به این مسخرگی نشنیده بودم!»

مارتینز با ناراحتی گفت: «درست است؛ اما حالا چه باید کرد؟»

کریگ پاسخ داد «راستش را بگویم چیزی به فکرم نمی رسد، زیرا هیچ سرنخی وجود ندارد. متأسفم که برای هیچ به این سفر آمدم!»

مارتینز که کمی خوشحال شده بود گفت: «آه، البته که وجود دارد! وگرنه هرگز مزاحم شما نمی‌شدیم.»

کریگ گفت: «که این طور؟»

مارتینز گفت: «بلی، چندی پیش کارمندی عجیب و غریب در اینجا کار می کرد او ریاضیدان وعلاقه‌مند به معماهای مربوط به رمزها بود. خیلی به قفلهای رمزدار علاقه داشت و مکانیسم این صندوق را بادقت بسیار مورد مطالعه قرار داد و گفت که این غیرعادی‌ترین و زیرکانه‌ترین مکانیسمی است که تاکنون دیده است. این شخص همیشه معما طرح می کرد و مارا سرگرم می نمود. یک بار مقاله‌ای در مورد خواص گوناگون قفل صندوق امانتها نوشت و شرح داد که از آن خواص می توان شمارهٔ رمز قفل را استنتاج کرد. می گفت این معما برای رفع خستگی فکرتان خوب است؛ اما معما دشوارتر از آن بود که ما بتوانیم حل کنیم. از این رو به‌زودی آن را فراموش کردیم.»

کریگ پرسید: «خوب این مقاله اکنون در کجاست؟ لابد آن را نیز همراه کارت رمز در صندوق جا گذاشته اید!»

مارتینز گفت: «خوشبختانه چنین نیست»، و مقاله را که در کشوی میزش بود به کریگ داد.

کریگ مقاله را بادقّت مطالعه کرد و گفت: حالا می فهمم که چرا هیچ‌یک از شما نتوانستید معما را حل کنید! این معما فوق‌العاده دشوار است، آیا بهتر نیست با نویسنده تماس بگیرید؟ یقیناً او رمز را به‌یاد دارد یا می تواند دوباره آن‌را پیدا کند.»

مارتینز پاسخ داد: «او در اینجا با نام مارتین فارکوس (Farkus Martin) کار می کرد، اما احتمالاً این نام مستعار بوده است زیرا هرچه کوشیدیم نتوانستیم پیدایش کنیم.»

کریگ گفت: «لعنت برشیطان، پس راهی وجود ندارد جز اینکه خودم معما را حل کنم، اما ممکن است هفته ها یا ماهها وقت بگیرد.»

مارتینز گفت: «باید یک موضوع دیگر را نیزبرایتان بگویم. صندوق بایستی حتماً تا روزاول ژوئن گشوده شده باشد؛ زیرا چندین سند مهم دولتی در آن است که بایستی در اول وقت اداری روز دوم ژوئن به مقامات تسلیم شود. اگر تا اول ژوئن رمز کشف نشود مارا ناچار می کنند که صندوق را منفجر کنیم. البته انفجار صندوق به سندها خسارتی وارد نمی کند، زیرا سندها در صندوق کوچک و فوق العاده محکم دیگری قرار دارد و این صندوق کوچک در صندوق امانتها، و تاآنجا که ممکن است دور از در خروجی، قرار داده شده است. هرچند این سندها از مهمترین اشیای درون صندوق است اما منفجرکردن صندوق هم ازنظر مالی برای ما خیلی خرج برمی دارد. ازاین رو، پیدا کردن راهی بجز انفجار برای ما خیلی ارزش دارد.»

کریگ درحالی که بلند می شد گفت: «ببینم چه کارمی‌توانم بکنم؛ البته کوشش خودرا خواهم کرد اما قولی نمی دهم.»

اکنون ببینیم محتوای مقالهٔ فارکوس چه بود: فارکوس، دراین مقاله از ترکیبهایی که با حروف ساخته می شود گفتگو می کند و نه ازترکیبهایی که با ارقام ساخته می شود. بنابراین **رمز** عبارت است ازترکیب چند حرف از بیست وشش حرف الفبای انگلیسی. رمزشامل هرچند حرف می تواند باشد و هرحرف ممکن است چندین بار تکرار شود. به‌عنوان مثال BABXL می تواند یک رمزو XEGGEXY رمزی دیگرباشد. یک حرفِ تنها نیزیک ترکیب (رمز) محسوب می شود (رمزیک حرفی). با برخی ترکیبها قفل باز می شود، و با برخی دیگرقفل گیرمی کند. برخی ازترکیبها نیز هیچ اثری

برقفل ندارند. ترکیبهای بی اثر را **خنثا** می نامیم. حروف کوچک x و y را برای نشان‌دادن هرترکیب اختیاری به کار می گیریم و جملهٔ xy را به عنوان ترکیبی می پذیریم که در آن y به دنبال x آمده است. به عنوان مثال، اگر ترکیب GAQ را x و ترکیب DZBF را y بنامیم، xy عبارت است از ترکیب GAQDZBF . اگر حروف یک ترکیب را از آخر به اول بنویسیم، ترکیب به دست آمده را **مقلوب** ترکیب اول می نامیم.

مثلاً مقلوب ترکیب BQFR ترکیب RFQB خواهد بود. تکرار ترکیب x ، یا ترکیب xx ، یعنی ترکیبی که از نوشتن ترکیب x به دنبال خودش حاصل شود. مثلاً تکرار BQFR یعنی BQFRBQFR .

فارکوس (نام حقیقی اش هرچه بود) به برخی ترکیبها به عنوان ترکیبهایی که **ارتباط ویژه** با ترکیبهای دیگر (یا احتمالاً با خودشان) دارند اشاره می کند؛ اما هیچ جا در مقاله اش ویژگی این ارتباط ویژه را تعریف نمی کند. با این همه، بسیاری از ویژگیهای این نوع ترکیبها را که با ترکیبهای دیگرارتباط ویژه دارند شرح داده است و هرکس که اندکی هوش داشته باشد باید بتواند براساس این ویژگیها رمز قفل را کشف کند! ازجمله به پنج ویژگی اساسی زیر، که می گوید در مورد هردو ترکیب x و y درست است، اشاره کرده است.

ویژگی Q : به ازای هرترکیب x ، ترکیب QxQ ارتباط ویژه با x دارد (مثلاً QCFRQ ارتباط ویژه با CFR دارد).

ویژگی L : اگر x ارتباط ویژه با y داشته باشد، درآن صورت Lx ارتباط ویژه با Qy خواهد داشت (مثلاً چون QCFRQ ارتباط ویژه با CFR دارد، پس LQCFRQ ارتباط ویژه با QCFR دارد).

ویژگی V (ویژگی ترکیب مقلوب): اگر x ارتباط ویژه با y داشته باشد، درآن صورت Vx با مقلوب y ارتباط ویژه خواهد داشت. (مثلاً چون QCFRQ ارتباط ویژه با CFR دارد، پس VQCFRQ با RFC

ارتباط ویژه دارد.)

ویژگی R : (ویژگی تکرار): اگر x ارتباط ویژه با y داشته باشد، در آن‌صورت Rx ارتباط ویژه با yy (تکرار y) خواهد داشت.(مثلاً، چون QCFRQ ارتباط ویژه با CFR دارد پس RQCFRQ ارتباط ویژه با CFRCFR خواهد داشت. همچنین همان‌طور که در مثال ویژگی V دیدیم VQCFRQ ارتباط ویژه با RFC و درنتیجه RVQCFRQ ارتباط ویژه با RFCRFC خواهدداشت.

ویژگی Sp : اگر x ارتباط ویژه با y داشته باشد، واگرقفل با رمز x گیر کند در آن‌صورت رمز y خنثاست و اگر رمز x خنثا باشد، قفل با رمز y گیر خواهد کرد. (مثلاً، می دانیم که RVQCFRQ ارتباط ویژه با RFCRFQ دارد. بنابراین اگر با رمز RVQCFRQ قفل گیر کند، در آن‌صورت رمز RFCRFC اثری بر قفل نخواهد کرد واگر رمز RVQCRFQ اثری برقفل نداشته باشد، قفل با رمز RFCRFC گیر خواهد کرد.)

براساس این پنج ویژگی، واقعاً می توان رمز بازکردن قفل را پیدا کرد (کوچکترین رمزی که من می دانم ده حرفی است، و موارد دیگری نیز وجود دارد).

تا اینجا انتظار ندارم که خواننده بتواند مسئله را حل کند؛ مکانیسم این قفل براساس تئوری جامعی ساخته شده است که در چند بخش آیندهٔ کتاب کم کم باآن آشنا خواهیم شد. بعداً خواهیم دید که این تئوری، به چند اکتشاف بسیارمهم درریاضیات ومنطق مربوط می شود.

درواقع کریگ پس از مصاحبه با مارتینز چندین روز به این معما فکر کرد، اما نتوانست راه‌حلی بیابد.

کریگ باخود اندیشید: دلیلی ندارد که بیش ازاین دراینجا بمانم، زیرا معلوم نیست که حل معما چه مدت دیگروقت می گیرد. من می توانم در

خانه هم به آن فکر کنم.

از این رو کریگ به لندن برگشت. سرانجام این معما حل شد. در حل این مَعما نه فقط نبوغ کریگ و دوتن از دوستانش (که به زودی با آنها آشنا می شویم) مؤثر بود، بلکه اتّفاقات گوناگونی هم که پیاپی روی داد در این امر مؤثر واقع شد.

۹
یک ماشین حساب شگفت انگیز

کریگ پس از بازگشت به لندن، نخست مدتی از وقت خودرا به معمّای مونت کارلو اختصاص داد. اما چون به‌جایی نرسید تصمیم گرفت که مدتی به این مسئله فکرنکند. روزی به‌دیدن یکی از دوستانش به‌نام مک کالک (McCulloch)، که در دانشگاه آکسفورد با او همدوره بود، رفت. کریگ یادآوری کرد که درآن روزها مک کالک را جوانی خوش مشرب اما کمی عوضی می‌دانست که همیشه انواع گوناگون وسایل شگفت انگیز اختراع می کرد. اما این داستان مربوط به‌زمانی بود که هنوز کامپیوتر اختراع نشده بود و مک کالک یک شبه کامپیوتری مکانیکی ساخته بود.

مک کالک دربارهٔ این ماشین چنین توضیح داد: «تابه‌حال باآن بسیار سرگرم بوده‌ام. البته هنوز هیچ کاربرد عملی برای آن نیافته‌ام، اما خواص شگفت‌انگیزی درآن دیده‌ام.»

کریگ پرسید: «این دستگاه چه کاری انجام می دهد؟»

مک کالک پاسخ داد: «خوب، عددی را در ماشین می گذارید و پس از چندلحظه عددی از ماشین بیرون می آید.»

کریگ پرسید: «همان عدد یا عددی دیگر؟»

«این بستگی به عددی دارد که به دستگاه می دهید.»

کریگ گفت: «که این طور.»

مک کالک ادامه داد: «دستگاه هرعددی را نمی پذیرد - اعدادی را که ماشین می پذیرد اعداد «**پذیرفتنی**» می نامم.

کریگ گفت: «اصطلاحی کاملاً منطقی به کاربرده اید، اما مایلم بدانم که چه اعدادی پذیرفتنی و چه اعدادی ناپذیرفتنی هستند. آیا این ویژگی تابع قانون مشخّصی است؟ و نیز آیا وقتی که تصمیم بگیریم عددی پذیرفتنی را به دستگاه بدهیم عددی که بیرون می آید پیرو قانون معینی است؟»

مک کالک پاسخ داد: «خیر، تنها **تصمیم گرفتن** کافی نیست، بایستی عدد را واقعاً به دستگاه بدهید.»

کریگ گفت: «آه، البته، منظورمن هم این بود که وقتی که عددی را به دستگاه می دهیم آیا قطعاً مشخّص است که چه عددی بیرون می آید؟»

مک کالک پاسخ داد: «البته که مشخّص است، دستگاه اعداد را به طور تصادفی بیرون نمی دهد بلکه عملکرد آن مطلقاً تابع قوانین جبریّت است.»

و ادامه داد: «اکنون قوانین را برایتان توضیح می دهم. نخست باید تأکید کنم که منظور از یک عدد، عددی مثبت و **صحیح** است. دستگاه فعلی من اعداد منفی و اعشاری را نمی پذیرد. عدد معین N ، همان طور که معمول است، از ترکیب ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ٤، ٥، ٦، ۷، ۸ و ۹ تشکیل می شود. اما این ماشین، اعدادی را که رقم ۰ در آن باشد نمی پذیرد، مثلاً اعداد ۲۳ یا ٥٤۹۲ پذیرفته می شوند، اما اعدادی مانند ٥۰۲ یا ۳۲٥۰٦۰۷ پذیرفته نمی شوند. اکنون به ازای دو عدد N و M عدد NM را نه به عنوان حاصلضرب N و M بلکه به عنوان عددی که ازپی در پی قرارگرفتن ارقام N و M ایجاد می شود تعریف می کنم. مثلاً اگر N عدد ٥۳ و M عدد ۷۲۸ باشد منظور از NM عدد ٥۳۷۲۸ است. همچنین اگر N برابر ٤ و M برابر ۳۹ باشد

MN یعنی ۴۳۹)).

کریگ با تعجب فریاد زد: ((چه عملیات حیرت انگیزی با اعداد می کنید!))

مک کالک پاسخ داد: ((می دانم، امّا این عمل را ماشین بهتر از عملیات دیگر می فهمد. در هرحال اکنون قواعد عملیات را برایتان توضیح می دهم. وقتی که می گویم عدد x عدد y را **پدید می آورد**، یعنی x در دستگاه عددی پذیرفتنی است و وقتی که x را به دستگاه می دهیم عدد y بیرون می آید. قاعدهٔ اول به شرح زیر است:

قاعدهٔ ۱: به ازای هرعدد پذیرفتنی x عدد 2x (یعنی عددی که از قرارگرفتن ۲ در سمت چپ x به وجود آید، نه عدد ۲ ضرب در x) هم پذیرفتنی است و 2x عدد x را پدید می آورد.

مثلاً ۲۵۳ عدد ۵۳ را پدید می آورد و ۲۷۴۸۲ عدد ۷۴۸۲ و ۲۳۹۸۵ عدد ۳۹۸۵ را پدید می آورد. به بیان دیگر، اگرعدد 2x را به دستگاه بدهم، دستگاه رقم ۲ را حذف می کند و عدد x ازدستگاه بیرون می آید.))

کریگ پاسخ داد: ((این را که به سادگی می‌توان فهمید. قاعده های دیگر چگونه اند؟))

مک کالک گفت: ((فقط یک قاعدهٔ دیگر وجود دارد؛ اما لازم است که نخست این را بگویم که اگر x هرعددی باشد، عدد x2x نقش مهمی بازی می کند. عدد x2x را **پیوستهٔ عدد** x می نامم. مثلاً پیوستهٔ عدد ۷ عدد ۷۲۷ خواهد بود و پیوستهٔ عدد ۵۹۴ عدد ۵۹۴۲۵۹۴ خواهد بود. اکنون بپردازیم به قاعدهٔ دوم:

قاعدهٔ ۲: به ازای دو عدد x و y اگرعدد x عدد y را پدید آورد، درآن صورت عدد 3x پیوستهٔ عدد y را پدید می آورد.

مثلاً برطبق قاعدهٔ ۱ عدد ۲۷ عدد ۷ را پدید می آورد، بنابراین عدد ۳۲۷ پیوستهٔ عدد۷، یعنی‌عدد۷۲۷ را پدیدخواهدآورد. پس‌عدد۳۲۷ عدد۷۲۷

را پدید می آورد. همچنین، چون عدد ۲۵۸۶ عدد ۵۸۶ را پدید می آورد، پس عدد ۳۲۵۸۶ پیوستهٔ ۵۸۶ یعنی ۵۸۶۲۵۸۶ را پدید خواهد آورد.»

در این هنگام مک کالک عدد ۳۲۵۸۶ را به ماشین داد و ماشین پس از مدتی تلق و تولوق کردن بالاخره عدد ۵۸۶۲۵۸۶ را بیرون داد.

پس از این عمل مک کالک گفت: «گویا ماشین به روغنکاری نیاز دارد، اما پیش از آن، چند مثال دیگر را نیز تمرین می کنیم تا شما کاملاً به قواعد ماشین مسلط شوید. فرض کنید عدد ۳۳۲۷ را به ماشین بدهم. چه عددی بیرون خواهد آمد؟ می دانیم که عدد ۳۲۷ عدد ۷۲۷ را پدید می آورد، پس عدد ۳۳۲۷ پیوستهٔ ۷۲۷ یعنی عدد ۷۲۷۲۷۲۷ را پدید خواهد آورد. عدد ۳۳۳۲۷ چه عددی را پدید می آورد؟ خوب، چون ۳۳۲۷ عدد ۷۲۷۲۷۲۷ را پدید می آورد. (همان‌طور که هم اکنون دیدیم)، ۳۳۳۲۷ بایستی پیوستهٔ ۷۲۲۷۲۷ یعنی عدد ۷۲۷۲۷۲۷۲۷۲۷۲۷ را پدید آورد. مثال دیگر: ۲۵۹ عدد ۵۹ را پدید می آورد، و ۳۲۵۹ عدد ۵۹۲۵۹ را پدید می آورد و ۳۳۲۵۹ عدد ۵۹۲۵۹۲۵۹۲۵۹ را پدید می آورد و بالاخره ۳۳۳۲۵۹ عدد ۵۹۲۵۹۲۵۹۲۵۹۲۵۹۲۵۹۲۵۹۲۵۹ را پدید می آورد.»

کریگ گفت: «که این طور!، اما به‌نظر می رسد که تاکنون اعدادی را که به‌عنوان پدیدآورندهٔ اعداد دیگر بیان کردید، اعدادی هستند که با ۲ یا ۳ شروع می شوند. اگر عددی با ٤ یا رقمی دیگر شروع شود چه پیش می آید؟»

او گفت: بلی، درست است. لازم بود که قبلاً به‌شما می گفتم که در این ماشین، فقط اعدادی که با ۲ یا ۳ شروع شوند پذیرفتنی هستند. از این گذشته همهٔ این گونه اعداد نیز پذیرفتنی نیستند. البته امیدوارم بتوانم روزی ماشینی بزرگتر طرّاحی کنم که اعداد بیشتری را بپذیرد.»

کریگ پرسید: «کدام یک از اعدادی که با ۲ یا ۳ شروع می شوند پذیرفتنی نیستند؟»

مخترع گفت: «عدد ۲ به‌تنهایی پذیرفتنی نیست، زیرا نه با قاعدهٔ ۱ تطبیق دارد و نه با قاعدهٔ ۲، اما هرعدد چندرقمی که با ۲ شروع شود پذیرفته می‌شود. هرعددی که ارقام آن فقط از ۳ تشکیل شده باشد پذیرفته نمی‌شود. همچنین عدد ۳۲ و نیز ۳۳۲، یا هرعددی که از چند ۳ و پس از آن از ۲ تشکیل شود پذیرفتنی نخواهد بود. اما به ازای هر عدد X عدد ۲X، عدد ۳۲X، عدد ۳۳۲X، عدد ۳۳۳۲X و مانند اینها پذیرفتنی هستند. به‌طور خلاصه، تنها اعداد پذیرفتنی عبارتند از ۲X، ۳۲X، ۳۳۲X، ۳۳۳۲X و هرعددی که با چند ۳ شروع و به ۲X ختم شود. و ۲X عدد X را پدید می‌آورد، ۳۲X، پیوستهٔ X را پدید می‌آورد، ۳۳۲X پیوستهٔ پیوستهٔ X را پدید می‌آورد ـ که بهتر است آن‌را پیوستهٔ دو بارهٔ X بنامیم ـ؛ ۳۳۳۲X پیوستهٔ پیوستهٔ پیوستهٔ X را پدید می‌آورد ـ که آن‌را پیوستهٔ سه‌بارهٔ X می‌نامیم ـ وغیره.»

کریگ گفت: «کاملاً می‌فهمم. اکنون مایلم بدانم که این خواص عجیب ماشین که به‌آن اشاره کردید چه هستند.»

مک‌کالک پاسخ داد: «آه، این موضوع ما را به انواع معماهای عجیب **ترکیب** می‌کشاند. اکنون با چند نمونه آشنا بشویم:

۱ـ

مک‌کالک گفت: «نخست با یک مثال ساده آغاز می‌کنیم. عددی مانند N وجود دارد که خودش را پدید می‌آورد، یعنی وقتی که N را به ماشین بدهید همان عدد N بیرون خواهد آمد. آیا می‌توانید این عدد را پیدا کنید؟

۲ـ

پس از آنکه کریگ پاسخ مسئله را پیدا کرد مک‌کالک گفت: «بسیار خوب، اکنون به یک خاصیّت مهم دیگری توجّه کنید: عددی مانند N وجود دارد که پیوستهٔ خودرا پدید می‌آورد ـ به‌بیان دیگر، اگر N را به ماشین

بدهید، عدد N۲N بیرون می آید. آیا می توانید این عدد را پیدا کنید؟

کریگ این معما را دشوارتر یافت، اما سرانجام آن را حل کرد. آیا شما نیز می توانید آن را حل کنید؟

—۳

مک کالک گفت: «عالی بود! اما مایلم یک چیز را بدانم. شما از چه راه مسئله را حل کردید؟ آیا فقط با آزمایش و خطا عدد را پیدا کردید، یا از یک روش سیستمی استفاده کردید؟ همچنین به من بگویید آیا این عددی را که پیدا کردید، تنها عددی است که پیوستهٔ خودرا پدید می آورد یا اینکه عددهای دیگری نیز با این خاصیّت وجود دارند؟»

کریگ روش خود را در حل مسئله توضیح داد و به پرسش دیگر مک کالک که آیا مسئله پاسخهای دیگر هم دارد جواب داد. خواننده خواهد دید که تحلیل کریگ بسیار جالب توجه است، و در حل بسیاری از معماهای دیگر این بخش مفید خواهد بود.

—٤

مک کالک گفت: «اکنون که مسئلهٔ آخر را به این خوبی حل کردید بگویید ببینم مسئلهٔ اول را چگونه حل کردید؟ آیا تنها یک عدد هست که بتواند خودش را پدید آورد یا عددهای دیگری نیز این خاصیّت را دارند؟»

پاسخ کریگ را در بخش پاسخها می یابید.

—۵

مک کالک گفت: «امّا مسئلهٔ بعدی. عددی مانند N وجود دارد که عدد ۷N (یعنی رقم ۷ در جلوی عدد N قرار گیرد) را پدید می آورد. آیا می توانید آن را پیدا کنید؟»

۶—

مک کالک گفت: «اکنون به این پرسش توجّه کنیدُ. آیا عددی مانند N وجود دارد به‌طوری که عدد ۳N پیوستهٔ عدد N را پدید آورد؟»

۷—

مک کالک پرسید: «همچنین آیا عددی مانند N وجود دارد که بتواند پیوستهٔ ۳N را پدید آورد؟»

۸—

مک کالک ادامه داد: «یک خاصیّت استثنایی ماشین این است که به‌ازای هرعدد A، عددی مانند ۷ وجود دارد که A۷ را پدید می آورد. این گزاره را چگونه می توان ثابت کرد؟»

همچنین اگر A را داشته باشیم ۷ را چگونه پیدا می کنیم؟

تذکر: این اصل، هرچند خیلی ساده می نماید، خیلی مهمتر از آن است که مک کالک در آن موقع تشخیص داد! در این کتاب بارها به این اصل برخواهیم خورد و از این پس آن را **قانون مَک کالک** می نامیم.

۹—

مک کالک ادامه داد: «آیا به ازای یک عدد N الزاماً عددی مانند ۷ وجود دارد که پیوستهٔ A۷ را پدید آورد؟ به‌عنوان مثال، آیا عددی وجود دارد که پیوستهٔ عدد ۷ ٦ ۵ را پدید آورد و آن عدد کدام است؟»

۱۰—

مک کالک گفت: «یک مورد جالب توجّه دیگر! آیا عددی وجود دارد که پیوستهٔ دو بارهٔ خود را پدید آورد؟ آیا می توانید آن را پیدا کنید؟»

۱۱—

همچنین به‌ازای هرعدد A ، عددی مانند X وجود دارد که پیوستهٔ دو بارهٔ AX را پدید می‌آورد. آیا اگر A معلوم باشد می‌توانید X را پیدا کنید؟ به‌عنوان مثال، آیا می‌توانید عددی مانند AX را پیدا کنید که پیوستهٔ دو بارهٔ X ۷۸ را پدید آورد؟

اکنون مسائل دیگری را که مک کالک در آن روز به کریگ داد مطالعه خواهید کرد، که به‌جز آخرین آنها، بقیه ازنظر تئوری اهمیّت ندارند، اما برای خواننده ممکن است سرگرم کننده باشند.

۱۲—

عددی مانند N پیدا کنید به‌طوری که N ۳ خودش را (N ۳ را) پدید آورد.

۱۳—

عدد N را طوری پیدا کنید که عدد N ۳ عدد N ۲ را پدید آورد.

۱٤—

عدد N را طوری پیدا کنید که عدد N ۳ عدد N ۳۲ را پدید آورد.

۱۵—

آیا عددی مانند N وجود دارد به‌طوری که NNN ۲ و N ۲ ۳ یک عدد را پدید آورند؟

۱۶—

آیا عددی مانند N وجود دارد که پیوستهٔ آن، عدد NN را پدید آورد؟ آیا مسئله بیش ازیک پاسخ دارد؟

۱۷ـ

آیا عددی مانند N وجود دارد به‌طوری که NN پیوستهٔ عدد N را پدید آورد؟

۱۸ـ

عدد N را طوری پیدا کنید که پیوستهٔ N پیوستهٔ دو بارهٔ N را پدید آورد؟

۱۹ـ

عدد N عدد N۲۳ را پدید می آورد. N را پیدا کنید.

۲۰ــ یک نتیجهٔ منفی

مک کالک گفت: «از شما چه پنهان، مدت زیادی است که می کوشم تا عددی مانند N را که بتواند ۲ N را پدید آورد پیدا کنم، اما تاکنون همهٔ تلاشها بی نتیجه بوده است. نمی دانم که آیا من نتوانسته‌ام این عدد را پیدا کنم یا اینکه اصلاً چنین عددی وجود ندارد!»

توجه کریگ بیدرنگ به این مسئله جلب شد. مداد و کاغذش را درآورد و مشغول حل مسئله شد. اندکی بعد کریگ باخوشحالی گفت «دوست عزیز بیش از این وقت خودرا صرف این مسئله نکن، وجود چنین عددی غیرممکن است!»

کریگ چگونه این موضوع را ثابت کرد؟

پاسخها

۱ـ

عدد ۳۲۳ یک پاسخ است. چون برطبق قاعدهٔ ۱ عدد ۲۳ عدد ۳ را پدید می آورد، پس برطبق قاعدهٔ ۲، عدد ۳۲۳ بایستی پیوستهٔ عدد ۳ یعنی عدد ۳۲۳، یعنی خودش را، پدید

آورد.

آیا مسئله پاسخهای دیگری هم دارد؟ در حل مسئلهٔ ٤ پاسخ کریگ را خواهید دید.

—۲

کریگ عدد ۳۳۲۳۳ را پیدا کرد. اما هرعددی که به‌صورت X ۳۳۲ باشد پیوستهٔ دو بارهٔ X را پدید می آورد. پس عدد ۳۳۲۳۳ پیوستهٔ دو بارهٔ ۳۳ یعنی پیوستهٔ پیوستهٔ ۳۳ را پدید می آورد. اما پیوستهٔ عدد ۳۳ همان عدد ۳۳۲۳۳ است. پس پیوستهٔ دو بارهٔ عدد ۳۳ پیوستهٔ عدد ۳۳۲۳۳ خواهد بود. بنابراین عدد ۳۳۲۳۳ پیوستهٔ ۳۳۲۳۳ یعنی پیوستهٔ خودش را ایجاد می کند. این عدد چگونه پیدا شد و آیا پاسخ منحصر به فرد است؟ پاسخ کریگ را در حل مسئلهٔ بعد خواهید دید.

—۳

راه حل کریگ درمورد مسئلهٔ ۲ و همچنین پاسخ این پرسش را که آیا مسئله جوابهای دیگری نیز دارد، به‌زبان خود کریگ، در زیر شرح می دهیم:

باید عددی مانند N پیدا می کردم که N۲N را پدید آورد. این N بایستی به یکی ازصورتهای ۲X، ۳۲X، ۳۳۲X، ۳۳۳۲X، و مانند اینها باشد، و من بایستی X را کشف می کردم. آیا عددی ازخانوادهٔ ۲X می توانست پاسخ مسئله باشد؟ مسلماً خیر، زیرا ۲X عدد X را پدید می آورد که عدهٔ ارقام آن ازپیوستهٔ ۲X کمتر است. پس عددی به‌صورت ۲X نمی تواند پاسخ مسئله باشد.

در مورد عددی به صورت X ۳۲ چطور؟ این هم عددی را که پدید می آورد کوچک است. ۳۲X پیوستهٔ X را پدید می آورد که ازپیوستهٔ X ۳۲ کوچکتر است.

عددی به صورت X ۳۳۲ چطور؟ بسیارخوب، این عدد پیوستهٔ دو بارهٔ X یعنی X ۲ X ۲ X۲X X را پدید می آورد، و حال آنکه مقصود پیدا کردن عددی است که پیوستهٔ ۳۳۲X یعنی ۲۳۳۲X ۳۳۲X را پدید آورد. آیا X ۲X۲X۲X می تواند با ۲۳۳۲X ۳۳۲X یکسان باشد؟ ازنظر عدهٔ ارقام چطور؟ اگر عدهٔ ارقام X را برابر h فرض کنیم، عدهٔ ارقام X ۲ X ۲X X۲X برابر۳+ ٤h خواهد بود (چون در این عدد ٤تا X و ۳ تا ۲ وجود دارد)، در صورتی که عدهٔ ارقام ۲۳۳۲X ۳۳۲X برابر ۷+ ۲h می شود. آیا برابری ۷+ ۲h=۳+ ٤h امکانپذیر است؟ بلی، فقط به ازای ۲= h . پس ازنظر عدهٔ ارقام عددی به‌صورت X ۳۳۲ می تواند پاسخ مسئله باشد؛ اما فقط به شرطی

که x دورقم داشته باشد.

آیا پاسخهای دیگری هم امکان دارد؟ عددی به صورت x۳۳۳۲ چطور؟ این عدد پیوستهٔ سه‌بارهٔ x را پدید می‌آورد که به‌شکل x۲x۲x۲x۲x است، درحالی که ما عددی می‌خواهیم که پیوستهٔ x۳۳۲ یعنی x۲۳۳۳۲x۳۳۳۲ را پدید آورد. آیا این دو عدد می‌توانند برابر باشند؟ در اینجا نیز اگر عدهٔ ارقام x را h فرض کنیم، در آن صورت عدهٔ ارقام x۲x۲x۲x۲x برابر ۸h +۷ و عدهٔ ارقام x۳۳۳۲x۲۳۳۳۲ برابر ۲h +۹ خواهد بود. چون $h=\frac{1}{3}$ تنها پاسخ معادلهٔ ۸h +۷=۲h +۹ است، یعنی پاسخ معادله عدد صحیح نیست، پس پاسخ مسئله به‌صورت x۳۳۳۲ نخواهد بود.

عددی به صورت x۳۳۳۳۲ چطور؟ این عدد پیوستهٔ چهاربارهٔ x را پدید می‌آورد که دارای ۱۶h +۱۵ رقم است، و حال آنکه عدهٔ ارقام پیوستهٔ x برابر ۲h +۱۱ است. واضح است که به‌ازای هر مقدار صحیح ومثبت h عبارت ۱۶h +۱۵ همواره از عبارت ۲h +۱۱ بزرگتر خواهد بود. بنابراین عددی به‌صورت x۳۳۳۳۲، عدد بسیاربزرگی پدید خواهد آورد.

اگر عددی را درنظر بگیریم که به‌جای چهارتا ۳ با پنج تا ۳ شروع شود، در آن‌صورت تفاوت میان عدهٔ ارقام عددی که می‌خواهیم پدید آید و عدهٔ ارقام عددی که پدید می‌آید بازهم بیشتر خواهد شد. و اگر عددی را درنظر بگیریم که با شش ۳ یا عدهٔ بیشتری ۳ شروع شود تفاوت بازهم زیادتر می‌شود. پس ناگزیریم به همان عدد x۳۳۲ مراجعه کنیم که در آن x بایستی دورقمی باشد. بنابراین عدد N بایستی به‌صورت ۳۳۲ab باشد، که در آن a و b هرکدام یک رقم هستند. و بایستی مشخص شوند. اما ۳۳۲ab پیوستهٔ دو بارهٔ عدد ab را پدید می‌آورد، که برابر ab۲ab۲ab۲ab است. ما می‌خواهیم که ۳۳۲ab پیوستهٔ ۳۳۲ab یعنی عدد ۳۳۲ab۲۳۳۲ab را پدید آورد. آیا این دو عدد می‌توانند یکسان باشند؟ آنها را رقم به رقم زیر هم می‌نویسیم:

ab۲ab۲ab۲ab

۳۳۲ab۲۳۳۲ab

مقایسهٔ اولین رقم دو عدد فوق نشان می‌دهد که a بایستی برابر ۳ باشد. از مقایسهٔ رقم دوم نتیجه می‌شود که b =۳. پس پاسخ مسئله برابر N =۳۳۲۳۳ است و این تنها جواب ممکن است.

۴—

کریگ گفت: راستش را بگویم، مسئلهٔ اول را بافکر عادی حل کردم و عدد ۳۲۳ را بایک روش سیستمی به دست نیاوردم همچنین هنوز به این مسئله که آیا عدد دیگری نیز می تواند خودش را پدید آورد فکر نکرده ام.

اما فکر نمی کنم مسئله زیاد دشوار باشد. اکنون ببینیم آیا عددی به شکل ۳۳۲X می تواند پاسخ مسئله باشد. این عدد پیوستهٔ دو بارهٔ X یعنی X۲X۲X۲X را پدید می آورد که عدهٔ ارقام آن برابر ۳+ ٤h (h عدهٔ ارقام X را نشان می دهد) است. اما می خواهیم عدد ۳۳۲X که عدهٔ ارقام آن ۳ + h است پدید آید. واضح است که اگر h مثبت و صحیح باشد عبارت ۳+ ٤h همیشه از ۳+h بزرگتر خواهد بود. پس عددی که ۳۳۲X را پدید می آورد بسیار بزرگ است.

در مورد ۳۳۳۲ X یا هرعددی که با چهار یا عدهٔ بیشتری ۳ شروع شود چطور؟ خیر، تفاوت بیشتر خواهد شد. پس تنها حالت ممکن عددی به صورت ۳۲X است (عددی به صورت ۲X ممکن نیست زیرا این عدد ۲X را پدید نمی آورد بلکه عدد X را پدید می آورد). اما ۳۲ X عدد X ۲ X را پدید می آورد؛ و ما می خواهیم خودِ عدد یعنی ۳۲X پدید آید. پس ۳۲X بایستی با X ۲ X برابر باشد. اگر عدهٔ ارقام X را h فرض کنیم عدد ۳۲X دارای ۲+h رقم و عدد X ۲ X دارای ۱+ ۲h رقم خواهد بود. پس باید داشته باشیم ۲+h =۱+ ۲h، که پاسخ آن ۱=h است. پس X عددی یک رقمی است. اکنون ببینیم کدام رقم است که با آن ۳۲a =a ۲ a می شود؟ واضح است که جواب ۳= a است. پس ۳۲۳ تنها پاسخ مسئله است.

۵—

فرض کنید N برابر ۳۲۷۳ باشد. این عدد پیوستهٔ ۷۳ را، که عدد ۷۳۲۷۳ یعنی N ۷ است، پدید می آورد. پس ۷۳۲۷۳ یک پاسخ است. (می توان از راه مقایسهٔ عدهٔ ارقام، مانند دو مسئلهٔ قبل، ثابت کرد که این تنها پاسخ مسئله است).

٦—

چون ۳۲۳ خودش را پدید می آورد، پس ۳۳۲۳ بایستی پیوستهٔ ۳۲۳ را پدید آورد. پس اگر ۳۲۳=N باشد درآن صورت ۳N پیوستهٔ N را پدید می آورد (این تنها پاسخ است).

۷—

عدد ۳۲۳۳ = N پاسخ مسئله است. این عدد پیوستهٔ ۳۳۳ را پدید می آورد که این عدد پیوستهٔ عدد ۳۳۳۲۳۳۳ یعنی پیوستهٔ عدد ۳N است.

۸—

این مسئله تعمیم ساده‌ای از مسئلهٔ ۵ است: دیدیم که به‌ازای N=۳۲۷۳ عدد N عدد ۷N را پدید می آورد. این خاصیّت منحصر به رقم ۷ نیست، زیرا با هرعدد A اگر داشته باشیم ۳ A ۳۲ = Y در آن صورت Y عدد AY را پدید می آورد (زیـرا Y پیوستهٔ A۳ را پدید می آورد، که ۳ A۳۲A یعنی AY است). پس، مثلاً اگر بخواهیم عدد Y طوری باشد که ۸۳۷Y را پدید آورد در آن صورت Y برابر ۳۲۸۳۷۳ خواهد بود.

بعداً خواهیم دید که این گزاره از جنبهٔ تئوری اهمیّت زیادی دارد.

۹—

پاسخ مثبت است؛ فرض کنید Y برابر ۳۳ A ۳۳۲ باشد. این عدد پیوستهٔ دو بارهٔ A۳۳ را پدید می آورد که پیوستهٔ ۳۳ A۳۳۲A است. اما A۳۳۲A۳۳ همان AY است. پس Y پیوستهٔ AY را پدید می آورد.

مورد خاصّی که مک کالک مثال زد این بود که Y چه عددی است که پیوستهٔ ۵۶Y را پدید می آورد. پاسخ ۳۳۲۵۶۳۳= Y است.

۱۰—

پاسخ عدد ۳۳۳۲۳۳۳ است. این عدد پیوستهٔ سه بارهٔ ۳۳۳ را که پیوستهٔ دو بارهٔ پیوستهٔ ۳۳۳ است پدید می آورد. اما پیوستهٔ ۳۳۳ عدد ۳۳۳۲۳۳۳ است. پس ۳۳۳۲۳۳۳ پیوستهٔ دو بارهٔ عدد ۳۳۳۲۳۳۳ را پدید می آورد.

به الگوی عام زیر توجّه کنید: ۳۲۳ خودش را پدید می آورد. ۳۳۲۳۳ پیوستهٔ خودش را پدید می آورد. ۳۳۳۲۳۳۳ پیوستهٔ دو بارهٔ خودش را پدید می آورد. همچنین ۳۳۳۳۲۳۳۳۳ پیوستهٔ سه بارهٔ خودش را پدید می آورد و ۳۳۳۳۳۲۳۳۳۳۳ پیوستهٔ چهار بارهٔ خودش را پدید می آورد، و غیره (می توانید خودتان ثابت کنید).

۱۱—

پاسخ مسئله عدد ۳۳۳ A ۳۳۳۲ = X است. این عدد پیوستهٔ سه بارهٔ ۳۳۳ A را که

پیوستهٔ دو بارهٔ ۳۳۳ X ۳۳۳۲ A که برابر AX است. پس X پیوستهٔ دو بارهٔ A X را پدید می آورد.

در آن مثال خاص A برابر ۷۸ است و بنابراین پاسخ مسئله ۳۳۳۲۷۸۳۳۳ است.

۱۲ـ

روشن است که عدد ۲۳ پاسخ مسئله است. (زیرا می دانیم که ۳۲۳ خودش را پدید می آورد، پس اگر N را برابر ۲۳ بگیریم عدد ۳N خودش را، یعنی ۳ N را، پدید می آورد.)

۱۳ـ

پاسخ برابر ۲۲ است.

۱٤ـ

پاسخ برابر ۲۳۲ است.

۱۵ـ

البته!، ۲ = N این خاصیّت را دارد.

۱٦ـ

هرعددی که فقط از ۲ تشکیل شود.

۱۷ـ

بلی، ۳۲ این خاصیّت را دارد.

۱۸ـ

N = ۳۳

۱۹ـ

N= ۳۲۳۲۳

۲۰ـ

می‌توانید بررسی کنید که هرعدد N که دو یا چند رقم اول آن از ۳ تشکیل شده باشد، عددی پدید می‌آورد که عدهٔ ارقام آن از عدهٔ ارقام N ۲ بیشتر است (به عنوان مثال اگر N به‌صورت X ۳۳۲ و h عدهٔ ارقام X باشد، درآن‌صورت N پیوستهٔ دو بارهٔ X را پدید می‌آورد که دارای ۳+ h۲ رقم است، و حال آنکه عدهٔ ارقام N ۲ برابر h+٤ است). همچنین N نمی‌تواند به‌صورت X۲ باشد. بنابراین برای اینکه N بتواند عدد N ۲ را پدیدآوردبایستی به‌صورت X ۳۲ باشد. امّا X ۳۲ عدد X۲X را پدیدمی‌آورد و ما می‌خواهیم عدد ۳۲X۲ پدید آید. برای اینکه این دو عدد یکی باشند بایستی داشته باشیم h+۳ =۱+ ۲h، که در آن h عدهٔ ارقام X است. پاسخ معادلهٔ بالا h=۲ است. پس پاسخ مسئله، اگر وجود داشته باشد، بایستی به‌صورت ab۳۲ باشد، که در آن a و b یک رقمی هستند. اما ab۳۲ عدد ab۲ab را پدید می‌آورد، و ما می‌خواهیم عدد ۳۲ab۲ پدید آید. پس باید ببینیم آیا ab۲ab و ۳۲ab۲ می‌توانند برابر باشند. این دو عدد را رقم به رقم زیرهم می‌نویسیم:

ab۲ab

۳۲ab۲

بامقایسهٔ رقمهای اول دو عدد بالا نتیجه می‌شود که a =۳ و از مقایسهٔ رقمهای سوم پاسخ a=۲ به دست می‌آید. پس مسئله پاسخ ندارد. یعنی وجود عدد N که بتواند N ۲ را پدید آورد، ممکن نیست.

۱۰
قانون کریگ

دو هفتهٔ بعد، کریگ دوباره به ملاقات مک کالک رفت.

کریگ پرسید: «شنیده‌ام که دستگاه خود را گسترش داده‌اید. آن‌طور که یکی از دوستان مشترک می گفت ماشین جدید شما کارهای بسیار جالب توجّهی انجام می دهد. آیا این درست است؟»

مک کالک باافتخار گفت: «آه، بلی! ماشین جدید علاوه‌بر رعایت قواعد ۱ و ۲ ماشین قبلی از دو قاعدهٔ دیگر نیز پیروی می کند. راستی کمی چای دم کرده‌ام چطور است پیش از آنکه با قواعد جدید آشنا شوید چند فنجان چای بنوشیم!»

پس از صرف چای و شیرینی مک کالک گفت:

«هرگاه ارقام عددی را از راست به چپ بازنویسی کنیم عدد به‌دست آمده را **مقلوب** عدد اول می نامیم، مثلاً مقلوب عدد ۵۹۳۴ عدد ۴۳۹۵ است. اکنون دو قاعدهٔ جدید را برایتان توضیح می دهم:

قاعدهٔ ۳: به ازای هر دو عدد X و Y ، اگرعدد X عدد Y را پدید آورد، درآن‌صورت 4X مقلوب Y را پدید می آورد.

اکنون عدد Y را هرطور که می خواهید انتخاب کنید تا این قاعده را شرح دهم.»

کریگ گفت: «بسیار خوب. فرض کنید که عدد ۷٦۹۵ را انتخاب کنم.»

مک کالک گفت: «خیلی خوب، اکنون x را طوری انتخاب می کنیم که عدد ۷٦۹۵ را پدید آورد ــ عدد ۲۷٦۹۵ را درنظر می گیریم ـ و عدد ٤۲۷٦۹۵ را به ماشین می دهیم تا ببینیم چه می شود.»

مک کالک عدد ٤۲۷٦۹۵ را به ماشین داد و عدد ۵۹٦۷ یعنی مقلوب ۷٦۹۵ بیرون آمد.

مک کالک ادامه داد: «پیش از این که قاعدهٔ بعدی را توضیح دهم بدنیست با برخی کارها که می شود بااستفاده از این قاعده ـ البته توأم با قواعد ۱ و ۲ ــ انجام داد آشنا شویم».

ــ۱

مک کالک گفت: «حتماً یادتان هست که عدد ۳۲۳ در ماشین قبلی که تابع قاعدهٔ ۳ نبود (فقط به قواعد ۱ و ۲ عمل می کرد)، خودش را پدید می آورد، و ۳۲۳ تنها عددی بود که می توانست خودش را پدید آورد. در ماشین جدید وضعیّت فرق می کند. آیا می توانید عدد دیگری پیدا کنید که با این ماشین خودش را پدید آورد؟ همچنین عدهٔ این نوع اعداد چقدر است؟

کریگ در مدت کوتاهی مسئله را حل کرد. آیا شما نیز می توانید؟ (در قسمت پاسخها جواب مسئله را از زبان خود کریگ خواهید شنید.)

ــ۲

مک کالک پس از شنیدن پاسخ کریگ گفت: «عالی بود. اکنون مسئلهٔ دیگری به شما می دهم: قبلاً باید بگویم هرعددی را که با مقلوب خود برابر باشد نسبت به مقلوب خود **متقارن** می نامم. مثلاً اعداد ۵۸۳۸۵ یا ۷٤٤۷ اعداد متقارنند. اعدادی را که متقارن نیستند اعداد **نامتقارن** می نامم. مثلاً

اعداد ۴۶۷۳۳ یا ۳۲۵۱ نامتقارنند. اکنون می دانیم که یک عدد وجود دارد که مقلوب خود را پدید می آورد و آن ۳۲۳ است ـ زیرا ۳۲۳ هم خودرا پدید می آورد و هم متقارن است. در ماشین قبلی، که تابع قاعدهٔ ۳ نبود، هیچ عدد نامتقارنی که مقلوب خودرا پدید آورد وجود نداشت. اما در ماشین جدید، با استفاده از قاعدهٔ ۳، چنین عددی وجود دارد؛ درواقع چندین عدد با این خاصیّت وجود دارند. آیا می توانید یک نمونه را پیدا کنید؟»

۳ـ

مک کالک ادامه داد: «همچنین برخی اعداد پیوستهٔ عدد مقلوب خودرا پدید می آورند. یک نمونه پیدا کنید.»

و اکنون با دومین قاعدهٔ جدید آشنا شوید:

قاعدهٔ ۴: اگر عدد X عدد ۷ را پدید آورد، در آن صورت عدد ۵X عدد ۷۷ را پدید خواهد آورد. منظور از ۷۷ عدد حاصل از **تکرار** ۷ است.

پس از تشریح قاعدهٔ ۴ مک کالک مسائل زیر را به کریگ داد.

۴ـ

عددی پیدا کنید که تکرار خود را پدید آورد.

۵ـ

عددی پیدا کنید که مقلوب تکرار خود را پدید آورد.

۶ـ

پس از آنکه کریگ مسئلهٔ ۵ را حل کرد مک کالک گفت: «عجیب است؛ من مسئله را از راه دیگری حل کردم و پاسخی که به دست آمد هفت رقمی بود.»

درواقع دو عدد هفت رقمی وجود دارد که مقلوب تکرار خود را پدید می آورند. آیا می توانید دومی را پیدا کنید؟

۷—

مک کالک گفت: «می دانیم که به ازای هر عدد x ، عدد ۵۲x تکرار x را پدید می آورد. آیا می توانید عددی مانند x پیدا کنید به طوری که عدد ۵x تکرار x را پدید آورد؟»

کریگ اندکی به این مسئله فکر کرد و ناگهان زد زیر خنده! زیرا جواب خیلی بدیهی بود.

۸—

مک کالک گفت: «و حالا عددی هست که تکرار پیوستهٔ خود را پدید می آورد. آیا می توانید آن را پیدا کنید؟»

۹—

همچنین عددی هست که پیوستهٔ تکرار خود را پدید می آورد. آن را پیدا کنید.

اعداد عملیاتی

ناگهان کریگ گفت: «من تازه متوجه شدم که تقریباً همهٔ این مسائل را می توان با استفاده از یک اصل کلی حل کرد! ماشین شما خاصیّت بسیار شگفت انگیزی دارد؛ وقتی که این خاصیّت را بدانیم، نه فقط مسائلی را که شما دادید بلکه مسائل بیشمار دیگری را نیز می توان حل کرد!

مثلاً، باید عددی وجود داشته باشد که تکرار مقلوب پیوستهٔ خودرا پدید آورد، همچنین عددی هست که پیوستهٔ تکرار مقلوب خودرا پدید می آورد، و نیز عددی هست که...»

مک کالک صحبت کریگ را قطع کرد و گفت: «عجبا! من در جستجوی چنین اعدادی بوده‌ام، اما هیچ گاه نتوانستم آنها را پیدا کنم. این اعداد کدامند؟»

کریگ پاسخ داد: «اگر کمی صبر کنی تا یک قانون را برایت شرح دهم، خودت در چند ثانیه جواب را پیدا خواهی کرد.»

مک کالک با بهت زدگی پرسید! «این قانون کدام است؟»

کریگ که از بهت زدگی مک کالک به نشاط آمده بود ادامه داد: من حتّی می توانم عددی را پیدا کنم که تکرار مقلوب پیوستهٔ دو بارهٔ خود را پدید آورد، یا عددی مانند ۷ را که مقلوب پیوستهٔ دو بارهٔ ۷۷۷۷ را پدید آورد، یا عدد Z را که...،»

مک کالک فریاد کشید: «کافی است! چرا این قانون را برای من نمی گویید و کار برد آن را برای بعد نمی گذارید؟»

کریگ پاسخ داد: «بسیار خوب!»

در این هنگام کارآگاه برگه کاغذی را که روی زمین افتاده بود برداشت و مدادی از جیبش درآورد و نزدیک مک کالک نشست تا دوستش **بتواند نوشته های او را ببیند.**

کریگ گفت: «تصوّر می کنم با مفهوم «**عمل**» برروی اعداد آشنا هستید. مثلاً عمل افزودن ۱ به اعداد، یا ضرب کردن اعداد در ۳، یا مربع کردن اعداد، یا در ارتباط با ماشین شما، **مقلوب کردن**، **تکرارکردن**، **پیوسته کردن** اعداد، یا عمل پیچیده‌تری مانند به‌دست آوردن مقلوب تکرار پیوستهٔ اعداد. اکنون حرف F را به‌عنوان یک عمل معین برروی عدد X و F (X) را نتیجهٔ انجام عمل F بر X تعریف می کنیم. البته خودتان به‌خوبی از کار برد عمومی این تعریفها در ریاضیات اطلاع دارید. بنابراین اگر F عمل مقلوب کردن باشد در آن‌صورت F (X) مقلوب X است یا اگر F عمل تکرارکردن باشد F(X) تکرار X است و مانند اینها.

اکنون باید گفت که اعداد معینی وجود دارند ــ درواقع هرعددی که از ارقام ۳، ٤، یا ۵ تشکیل شده اند ــ که آنها را **اعداد عملیاتی** می نامیم، زیرا این اعداد تعیین کنندهٔ عملیات ماشین هستند: فرض کنید M عددی متشکل از ارقام ۳، ٤یا۵ و F یک عمل معین باشد. در این صورت اگر عدد X عدد Y را پدید آورد عدد MX بایستی عدد F (Y) را پدید آورد. مثلاً اگر عدد X عدد Y را پدید آورد، در آن صورت عدد ٤ X برطبق قانون ۳ مقلوب Y را پدید خواهد آورد و از این رو می توان گفت که عدد ٤ **تعیین کننده** یا **مشخص کنندهٔ** عمل **مقلوب کردن** است. همچنین برطبق قاعدهٔ ٤ عدد ۵ تعیین کنندهٔ عمل **تکرار** است. عدد ۳ نیز تعیین کنندهٔ عمل **پیوسته کردن** است، یعنی عمل پیدا کردن پیوستهٔ اعداد. اکنون فرض کنید که F عملی باشد که وقتی برروی عدد X اعمال شود پیوستهٔ تکرار X را به وجود آورد. به بیان دیگر F (X) پیوستهٔ تکرار X است. آیا عددی مانند M وجود دارد که مشخص کنندهٔ این عمل باشد، و اگر وجود دارد آن عدد کدام است؟»

مک کالک پاسخ داد: «واضح است که عدد ۳۵ این خاصیّت را دارد، زیرا اگر X عدد Y را پدید آورد، در آن صورت ۵ X تکرار Y را پدید خواهد آورد و درنتیجه ۳۵ X پیوستهٔ تکرار Y را پدید می آورد. بنابراین ۳۵ مشخص کنندهٔ عمل پیوسته گرفتن از تکرار اعداد است.»

کریگ گفت: «آفرین! اکنون تعریف اعداد عملیاتی را متوجه شدید. عملی را که یک عدد عملیاتی M انجام می دهد، **عملیات M** می نامیم. مثلاً **عملیات ٤** یعنی عمل مقلوب کردن اعداد. عملیات ۵ یعنی عمل تکرار اعداد، عملیات ۳۵ یعنی عمل پیوسته گرفتن از تکرار اعداد و مانند اینها.»

کریگ ادامه داد: «اما اینجا یک پرسش وجود دارد؛ آیا ممکن است دو عدد گوناگون یک عمل واحد را تعیین کنند؟ یعنی آیا ممکن است دو عدد عملیاتی M و N که مساوی نیستند، یک عمل واحد را انجام

دهند؟»

مک کالک اندکی فکر کرد و گفت: «آه، البته! ٤٥ و ٥٤ دو عدد متفاوتند، اما هردو یک عمل واحد را تعیین می کنند، زیرا مقلوب تکرار یک عدد همان تکرار مقلوب آن است.»

کریگ گفت: «خوب است؛ البته من به‌مثال دیگری فکر کرده بودم. اکنون بگویید ببینم ٤٤ چه عملی را مشخص می کند؟»

مک کالک گفت: «خوب، اگر **عملیات ٤٤** برروی X انجام گیرد، مقلوب مقلوب X ، یعنی خود X پدید می آید. نمی دانم به عملی که اعمال آن بر X سبب پدید آمدن خود X شود چه اسمی باید داد؟»

کریگ توضیح داد: در ریاضیات این مورد را معمولاً عمل **همانندی** می نامند. بنابراین عدد ٤٤ مشخص کنندهٔ عمل همانندی است. همچنین عدد ٤٤٤٤ یا هرعددی که فقط از ارقام ٤ تشکیل شده باشد و عدهٔ ارقامش زوج باشد همین خاصیّت را دارند. بنابراین شمارهٔ اعدادی که عمل همانندی را انجام می دهند بینهایت است. و به‌طور کلی، به‌ازای هرعدد **عملیاتی** M ، عددی که از M و چند ٤ قبل یا بعداز M تشکیل شده باشد، **همان** عمل را انجام می دهد.

مک کالک گفت: «که این طور.»

کریگ گفت: «و حالا به‌ازای هرعدد عملیاتی M و هرعدد X نتیجهٔ انجام عمل M بر X را به صورت «(M (X »)» نمایش می دهیم. مثلاً (X) ۳ یعنی پیوستهٔ X و (X) ٤ یعنی مقلوب X ، (X) ۵ یعنی تکرار X ، (X) ٤۳۵ یعنی مقلوب پیوستهٔ تکرار X . آیا این علامت اختصاری مناسب است؟»

مک کالک پاسخ داد: «آه، بلی»

کریگ گفت: «امیدوارم که جملهٔ (M (X را با MX اشتباه نکنید. زیرا (M(X یعنی نتیجهٔ انجام عمل M بر X و MX یعنی عدد

حاصل از کنارهم قرار دادن اعداد M و X ، که این دو کاملاً متفاوتند. مثلاً ۳(۵) برابر ۳۵ نیست بلکه برابر ۵۲۵ است.»

مک کالک گفت: «این را می فهمم. اما آیا ممکن است تصادفاً M (X) و MX برابر شوند؟»

کریگ پاسخ داد: «پرسش خوبی است. باید در مورد آن فکر کنم!»

مک کالک پیشنهاد کرد: «بهتر است نخست یک فنجان دیگر چای بنوشیم.»

کریگ پاسخ داد: «عالی است!»

اکنون که این دو دوست عزیزمان مشغول صرف چای هستند، من هم چند معما در ارتباط با اعداد عملیاتی برایتان طرح می کنم تا با کاربرد علامت M (X) که بعداً نقش مهمّی خواهد داشت به‌خوبی آشنا شوید.

۱۰—

پاسخ پرسش آخر مک کالک مثبت است: یک عدد عملیاتی M و یک عدد معین X ، به‌طوری که $M(X) = MX$ باشد واقعاً وجود دارند. آیا می توانید آن دو عدد را پیدا کنید؟

۱۱—

آیا یک عدد عملیاتی M وجود دارد که $M(M) = M$ باشد؟

۱۲—

عدد عملیاتی M وعدد X را پیدا کنید به‌طوری که $M(X) = XXX$ باشد.

—۱۳

عدد عملیاتی M و عدد X را پیدا کنید به‌طوری که M (X) = M + ۲ باشد.

—۱٤

M و X را پیدا کنید به‌طوری که M (X) تکرار MX باشد.

—۱۵

اعداد عملیاتی M و N را پیدا کنید به‌طوری که M(N) تکرار N (M) باشد.

—۱٦

دو عدد عملیاتی متفاوت M و N را پیدا کنید به‌طوری که M (N) = N(M) باشد.

—۱۷

آیا می‌توانید دو عدد عملیاتی M و N را پیدا کنید به‌طوری که M (N) =N (M)+۳۹ باشد؟

—۱۸

همچنین دو عدد عملیاتی M و N را پیدا کنید به‌طوری که M(N)= N (M) + ٤۹۲ باشد.

—۱۹

دو عدد عملیاتی متفاوت M و N را پیدا کنید به‌طوری که M (N) = MM و N (M) = NN باشد.

قانون کریگ

پس از صرف چای، مک کالک گفت: «اما هنوز راجع به اصلی که گفتید کشف کرده‌اید چیزی به من نگفته‌اید. تصوّر می‌کنم مفاهیم اعداد عملیاتی، و عملیات، که شرح دادید، مقدمات درک آن قانون بود.»

کریگ پاسخ داد: «آه، بلی، و فکر می کنم اکنون می توانید قانون را بفهمید. آیا برخی مسائل را که قبلاً به من دادید به یاد می آورید؟ مثلاً به مسئلهٔ پیداکردن عدد X که تکرار خودش را پدید می آورد، به بیان جدید می شود پیداکردن عدد X به طوری که عدد (X)۵ را پدید آورد. یا پیداکردن عدد X که پیوستهٔ خودرا پدید می آورد به بیان جدید می شود پیداکردن X به طوری که (X)۳ را پدید می آورد. و نیز، عدد X که مقلوب خود را پدید می آورد، یعنی عددی که (X)۴ را پدید می آورد. اما همهٔ اینها موارد خاصّی از یک اصل عام هستند، که براساس آن به ازای هر عدد عملیاتی M ، می توان عددی مانند X که (X) M را پدید می آورد پیدا کرد! به بیان دیگر، برای هرعمل F که ماشین شما بتواند انجام دهد، یعنی هرعمل F که به وسیلهٔ یک عدد عملیاتی M مشخص شود، بایستی عددی مانند X وجود داشته باشد که (X) F را پدید آورد.

کریگ ادامه داد: «درضمن، به ازای یک عدد عملیاتی M ، می توان عدد X را که بتواند (X)M را پدید آورد باروش خیلی ساده ای پیدا کرد. وقتی که این روش عام را بدانید، خواهید توانست مثلاً عدد X را که (X)۵۴۳ را پدید آورد پیدا کنید. و این به معنی حل مسئلهٔ پیداکردن عددی است که تکرار مقلوب پیوستهٔ خودش را پدید آورد. همچنین می توانید عدد X را که (X)۳۵۴ را پدید آورد پیدا کنید، و این یعنی حل مسئلهٔ پیداکردن عددی که پیوستهٔ تکرار مقلوب خودش را پدید آورد. یا همان طور که گفتم می توانم عددی پیدا کنم که تکرار مقلوب پیوستهٔ دوبارهٔ خودش را پدید آورد. به بیان دیگر عدد X که (X)۵۴۳۳ را

پدید آورد. بدون استفاده از این روش حل این گونه مسائل فوق العاده دشوار است، اما با این روش مسائل خیلی کودکانه جلوه می کنند.»

مک کالک گفت: «سراپا گوشم؛ بالأخره این روش جالب توجه شما کدام است؟»

کریگ گفت: «به زودی برایتان خواهم گفت. اما بهتر است نخست یک موضوع مقدّماتی را کاملاً متوجه شویم، و آن این که به ازای هرعدد عملیاتی M و هر دو عدد Y و Z ، اگر عدد Y عدد Z را پدید آورد، در آن صورت عدد MY عدد M(Z) را پدید می آورد. مثلاً اگر عدد Y عدد Z را پدید آورد در آن صورت عدد ۳Y عدد ۳(Z) را، که پیوستهٔ Z است، پدید می آورد؛ و عدد ۴Y عدد ۴(Z) را پدید می آورد؛ عدد ۵Y عدد ۵(Z) را پدید می آورد؛ ۳۴Y عدد ۳۴(Z) را پدید می آورد. همچنین به ازای هرعدد عملیاتی M ، اگر عدد Y عدد Z را پدید آورد، در آن صورت عدد MY عدد M(Z) را پدید خواهد آورد. خصوصاً چون عدد ۲Z عدد Z را پدید می آورد، پس همیشه M۲Z عدد M(Z) را پدید می آورد (مثلاً ۳۲Z عدد ۳(Z) را که پیوستهٔ Z است پدید می آورد، ـ ۴۲Z عدد ۴(Z) را پدید می آورد ــ و به ازای هرعدد عملیاتی M عدد M۲Z را پدید می آورد.) درواقع می توان M(Z) را عددی دانست که به وسیلهٔ M۲Z پدید می آید.

مک کالک گفت: «همهٔ اینها را می فهمم.»

کریگ پاسخ داد: «این واقعیّت خیلی زود فراموش می شود. بنابراین یک بار دیگر آن را تکرار می کنم و بهتر است به دقّت آن را یادداشت کنیم و به یاد بسپاریم!»

واقعیّت ۱: به ازای هرعدد عملیاتی M و هر دو عدد Y و Z ، اگر Y عدد Z را پدید آورد، در آن صورت عدد MY عدد M(Z) را پدید خواهد آورد. (خصوصاً عدد M۲Z عدد M(Z) را پدید می آورد.)

کریگ ادامه داد: از این واقعیّت توأم با واقعیّتی که در مورد ماشین اول خود کشف کردید و در ماشین فعلی نیز صدق می کند، به سادگی نتیجه می شود که به ازای هرعدد عملیاتی M ، بایستی عدد x وجود داشته باشد که (M(x را پدید آورد. یعنی نتیجهٔ اعمال عمل M برروی x را پدید آورد. باداشتن M ، عدد x را می توان با یک روش کلی ساده پیدا کرد.

۲۰—

کریگ یک اصل اساسی را کشف کرده است که از این پس آن را **قانون کریگ** می نامیم. برطبق قانون کریگ به ازای هرعدد عملیاتی M ، عددی مانند x وجود دارد که (M(x را پدید می آورد. قانون کریگ را چگونه می توان ثابت کرد، و درصورت داشتن M عدد x را چگونه می توان پیدا کرد؟ مثلاً کدام x است که (٥٤٣(x را پدید می آورد؟ یا کدام x است که تکرار مقلوب پیوستهٔ x را پدید می آورد؟ و کدام x است که پیوستهٔ تکرار مقلوب x ، یعنی (٣٥٤(x را پدید می آورد؟

مک کالک گفت: «چند مسئلهٔ دیگر نیز دارم که مایلم شما ببینید، اما خیلی دیر شده است. چطور است امشب را مهمان من باشید؟ فردا مسائل را برایتان خواهم گفت.»

خوشبختانه کریگ در مرخصی سالیانه بود و دعوت مک کالک را باخوشحالی پذیرفت.

نمونه هایی از قانون کریگ

صبح روز بعد، پس از یک صبحانهٔ بسیار عالی (مک کالک مردی فوق العاده مهمان نواز بود!)، مک کالک مسائل زیر را به کریگ داد.

۲۱—

عدد x را طوری پیدا کنید که ٧x ٧x را پدید آورد.

۲۲ـ

عدد x را پیدا کنید به‌طوری که مقلوب ۹x را پدید آورد.

۲۳ـ

عدد x را پیدا کنید به‌طوری که پیوستهٔ ۸۹x را پدید آورد.

کریگ پس از آنکه مسائل فوق را حل کرد فریاد زد: «خیلی زرنگی! هیچ یک از این مسائل را نمی‌توان بااستفاده از قانونی که دیروز شرح دادم حل کرد.»

مک کالک با خنده گفت: «درست است!»

کریگ گفت: «با این همه هر سه مسئله را می‌توان با استفاده از یک اصل کلی حل کرد. اعداد ۷ و ۵ و ۸۹ نخست کاملاً اختیاری به‌نظر می‌آیند. به ازای هرعدد A عددی مانند x وجود دارد که تکرار AX را پدید می‌آورد، و عددی مانند x وجود دارد که مقلوب AX را پدید می‌آورد، و عددی مانند x وجود دارد که پیوستهٔ AX را پدید می‌آورد. همچنین عددی مانند x وجود دارد که تکرار مقلوب AX ، یا مقلوب پیوستهٔ AX را پدید می‌آورد. درواقع به ازای هر عدد عملیاتی M و هر عدد A ، عددی مانند X وجود دارد که M(AX) را پدید می‌آورد، یعنی عددی که از انجام عمل M برروی AX حاصل می‌شود.

۲۴ـ

البته کریگ درست می‌گفت: «به‌ازای هر عدد عملیاتی M و هر عدد A بایستی عددی مانند X که M (AX) را پدید آورد وجود داشته باشد. این اصل را **قانون دوم کریگ** می‌نامیم. این قانون را چگونه می‌توان ثابت کرد. و با داشتن عدد عملیاتی M و یک عدد A ، چگونه می‌توان عددی مانند X را که M(AX) را پدید آورد پیدا کرد؟

۲۵—

مک کالک گفت: سؤال دیگری به نظرم رسید: «اگر $\overleftarrow{X}$ نشان دهندهٔ مقلوب X باشد، آیا می توان X را طوری تعیین کرد که ٦۷ $\overleftarrow{X}$ را پدید آورد؟ (یعنی آیا عددی مانند X وجوددارد که عددمتشکل از مقلوب X و ٦۷ را پدید آورد؟). به طور کلی آیا درست است که به ازای هرعدد A، می توان عددی مانند X را طوری تعیین کرد که $\overleftarrow{X}A$ را پدید آورد؟»

۲٦—

مک کالک ادامه داد: پرسش دیگری نیز به نظرم آمد: «آیا می توان X را طوری تعیین کرد که تکرار ٦۷ $\overleftarrow{X}$ را پدیدآورد؟ و به طور کلی، به ازای هرعدد A آیا می توان X را طوری تعیین کرد که تکرار $\overleftarrow{X}A$ را پدید آورد؟ و کلّیتر آنکه، آیا می توان به ازای هرعدد A و هرعدد عملیاتی M عدد X را طوری تعیین کرد که $M(\overleftarrow{X}A)$ را پدید آورد؟»

بحث: قانون کریگ نه فقط در مورد ماشین دوم مک کالک بلکه در مورد ماشین اول او نیز صدق می کند. درواقع این قانون در هرماشینی که پیرو قوانین ۱ و ۲ باشد صدق خواهد کرد. به بیان دیگر هرگاه به ماشین اول مک کالک قوانین جدیدی اضافه کنیم، مکانیسم جدید نیز پیرو قانون کریگ (درواقع هردو قانون کریگ) خواهد بود.

قانون اول کریگ به یک نتیجهٔ معروف تئوری توابع محاسبه پذیر، که به **گزارهٔ بازگشت** موسوم است (و گاهی آن‌را **گزارهٔ نقطهٔ ثابت** می نامند)، مربوط می شود. قاعده های ۱ و ۲ مک کالک، موضوع را در کوتاهترین بیان، که تاکنون دیده‌ام، تشریح می کند. این قاعده ها یک خاصیّت شگفت انگیز دیگر نیز دارند (این خاصیّت به یک نتیجهٔ مشهور دیگر در تئوری توابع شمارش‌پذیر موسوم به **گزارهٔ بازگشت دوباره** مربوط می شود)؛ که در بخش بعد با آن آشنا می شویم. همهٔ اینها به موضوع

ماشینهای **خودزا** (Self-reproducing) مربوط می شوند.

پاسخها

۱—

کریگ گفت: «با ماشین فعلی شمارهٔ اعداد متفاوت که خودرا پدید می آورند بینهایت است.»

مک کالک گفت: «این را چگونه ثابت می کنید.»

کریگ پاسخ داد: «بسیار خوب! عدد S را از خانوادهٔ اعداد A می نامیم، به شرط آنکه دارای این خاصیّت باشد که به ازای هر دوعدد X و Y ، اگر عدد X عدد Y را پدید می آورد، عدد SX پیوستهٔ عدد Y را پدید آورد. اما پیش از آنکه قاعدهٔ جدید را اضافه کنید، عدد ۳ تنها عدد از خانوادهٔ اعداد A بوده، و به ازای هرعدد S از این نوع عدد S۲S باید خودرا پدید آورد، زیرا S۲S پیوستهٔ S را پدید می آورد که برابر S۲S است.»

مک کالک پرسید: «از کجا می دانید که شمارهٔ اعداد A بینهایت است؟»

کریگ پاسخ داد: «در ابتدا، آیا قبول دارید که با هرعدد X و Y اگر عدد X عدد Y را پدید آورد در آن صورت X ۴۴ نیز Y را پدید می آورد؟»

مک کالک گفت: «چه نکتهٔ ظریفی! البته که حق با شماست: اگر X عدد Y را پدید آورد در آن صورت ۴X مقلوب Y را پدید می آورد و درنتیجه ۴۴X مقلوب مقلوب Y یعنی Y را پدید خواهد آورد.»

کریگ گفت: «خوب، پس اگر عدد X عدد Y را پدید آورد ۴۴X عدد Y و بنابراین ۳۴۴X پیوستهٔ Y را پدید خواهد آورد. بنابراین ۳۴۴ نیز از خانوادهٔ اعداد A است. وچون ۳۴۴ از اعداد A است، پس ۳۴۴۲۳۴۴ بایستی خودش را پدید آورد!»

مک کالک گفت: «بسیار خوب! پس اکنون دو عدد ۳۲۳ و ۳۴۴۲۳۴۴ را داریم که خود را پدید می آورند. چطور از اینجا نتیجه می شود که شمارهٔ اعدادی که خودرا پدید می آورند بینهایت است؟»

کریگ گفت: «خیلی واضح است؛ اگر S از خانوادهٔ اعداد A باشد، در آن صورت S۴۴ نیز از اعداد A خواهد بود زیرا به ازای هرعدد X و Y اگر X عدد Y را پدید آورد، در آن صورت X ۴۴ نیز Y را پدید خواهد آورد. و همچنین S۴۴X

پیوستهٔ ۷ را پدید می‌آورد؛ زیرا S از اعداد A است. پس ۳ از اعداد A است و بنابراین ۳۴۴ نیز از اعداد A است، نیز ۳۴۴۴ از اعداد A است و به‌طور کلی هرعددی که با رقم ۳ شروع و بقیهٔ ارقام آن تعداد زوجی ۴ باشد از اعداد A است. همچنین ۳۲۳ خودرا پدید می‌آورد، و نیز ۳۴۴۲۳۴۴ و ۳۴۴۴۴۲۳۴۴۴۴ و غیره هم خودرا پدید می‌آورند. و به این ترتیب مسئله دارای بینهایت پاسخ است.

کریگ اضافه کرد: «ضمناً، پاسخهای مسئله به نمونه‌های فوق محدود نیست. اعداد ۴۴۳ و ۴۴۴۴۳ نیز از اعداد A هستند. درواقع هرعددی که ازعدهٔ زوجی رقم چهار سپس رقم ۳ و سپس عدهٔ زوجی رقم ۴ تشکیل شود، مانند ۴۴۳۴۴۴۴، از اعداد A است، و اگر این گونه اعداد را با S نشان دهیم، اعداد S ۲ S نیزخودرا پدید می‌آورند.»

—۲

عدد ۴۳۲۴۳ یک پاسخ است! چون ۲۴۳ عدد ۴۳ را پدید می‌آورد، پس عدد ۳۲۴۳ پیوستهٔ ۴۳ را پدید می‌آورد. بنابراین ۴۳۲۴۳ بایستی مقلوب پیوستهٔ ۴۳— یعنی مقلوب ۴۳۲۴۳ (زیرا ۴۳۲۴۳ پیوستهٔ ۴۳ است) را پدید آورد. پس عدد ۴۳۲۴۳ مقلوب خودش را پدید می‌آورد.

در اینجا ممکن است خواننده بپرسد که عدد ۴۳۲۴۳ از کجا پیدا شد. آیا از راه مقایسهٔ عدهٔ ارقام استدلال شده است؟ خیر، اثبات مسائل از راه مقایسهٔ عدهٔ ارقام برای این ماشین خیلی ابتدایی است. دربخش بعد خواهیم دید که اساس حل مسائل دراین ماشین قانون کریگ است.

—۳

عدد ۳۴۳۲۳۴۳ یک پاسخ است. پیدا کردن عددی را که به‌وسیلهٔ عدد ۳۴۳۲۳۴۳ پدید می‌آید برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم و خواهید دید که عدد به‌دست آمده دقیقاً پیوستهٔ مقلوب ۳۴۳۲۳۴۳ است. (این پاسخ نیز بااستفاده از قانون کریگ به‌دست آمده است).

—۴

عدد ۵۳۲۵۳ این خاصیّت را دارد (در اینجا نیز قانون کریگ پاسخ را پیدا کرده است).

۵—
یک پاسخ ۴۵۳۲۴۵۳ است.

۶—
عدد ۵۴۳۲۵۴۳ پاسخ دیگر است.

۷—
وقتی که بدانیم چه عددی خودش را پدید می‌آورد این مسئله خیلی بدیهی می شود. اگر عدد X خودش را پدید آورد در آن‌صورت X ۵ تکرار X را پدید خواهد آورد. بنابراین به‌عنوان مثال ۵۳۲۳ تکرار ۳۲۳ را پدید می آورد.

۸—
عدد ۵۳۳۲۵۳۳ یک پاسخ است (با استفاده از قانون کریگ).

۹—
با استفاده از قانون کریگ عدد ۳۵۳۲۳۵۳ به‌دست می آید (امیدوارم با این مثالها کنجکاوی خواننده برای یادگرفتن قانون کریگ بیشتر شود).

۱۰—
چون (۵)۵ تکرار ۵ است پس ۵۵=(۵)۵. پس هم M و هم X را برابر ۵ می گیریم (من هیچ گاه نگفتم که M و X باید متفاوت باشند).

۱۱—
چون (۴)۴ مقلوب ۴ است پس ۴ = (۴)۴. همچنین ۴ = M یک پاسخ است (درواقع هرعددی که فقط از ارقام ۴ تشکیل بشود).

۱۲—
M = ۳ و X = ۲ را امتحان کنید (۲۲۲ = (۲)۳).

۱۳—

$6 = 4(6)$ و $4+2 = 6$ پس $4+2 = 4(6)$ بنابراین $M = 4$ و $X = 2$.

۱۴—

$M = 55$ و $X = 55$ یک پاسخ است.

۱۵—

$M = 4$ و $N = 44$ یک پاسخ است.

۱۶—

$M = 5$ و $N = 55$ یک پاسخ است.

۱۷—

$M = 5$ و $N = 4$ یک پاسخ است.

۱۸—

$M = 3$ و $N = 5$ یک پاسخ است.

۱۹—

$M = 54$ و $N = 45$ یک پاسخ است.

۲۰—

فرض کنید M یک عدد عملیاتی باشد. مطابق واقعیّت ۱ می دانیم که به ازای هر دو عدد Y و Z ، اگر عدد Y عدد Z را پدید آورد در آن صورت عدد MY عدد M(Z) را پدید خواهد آورد. بنابراین (اگر MY را برابر Z بگیریم) اگر Y عدد MY را پدید آورد در آن صورت بایستی M(MY) را پدید آورد. بنابراین اگر X را برابر MY بگیریم، عدد X عدد M(X) را پدید خواهد آورد! پس مسئله به اینجا پایان می پذیرد که عدد Y را پیدا کنیم به طوری که MY را پدید آورد. اما این مسئله در بخش قبل حل شد (از راه قانون مک کالک). کافی است Y را برابر ۳۲M۳ و X را برابر M۳۲M۳ بگیرید و در آن صورت X عدد M(X) را به وجود خواهد آورد.

پاسخ را آزمایش می کنیم: فرض کنید X = M ۳۲ M ۳ . چون عدد ۳ ۲M عدد ۳ M را پدید می آورد، پس ۳ ۳۲M باید ۳ M ۳۲ M را پدید آورد (برطبق قانون ۲)، و بنابراین ۳ M ۳۲M باید (M (M۳۲ M۳ را پدید آورد. بنابراین اگر X برابر ۳ M ۳۲M باشد، X عدد (M(X را پدید خواهد آورد.

حال با چند نمونه از کار برد این مسئله آشنا می شویم! برای پیدا کردن X به طوری که تکرار خودرا پدید آورد، M را برابر ۵ می گیریم. پاسخ (بهتر است بگوییم یکی از پاسخها) برابر ۵۳۲۵۳ خواهد بود. برای پیدا کردن X به طوری که مقلوب خود را به وجود آورد، M را برابر ٤ می گیریم. و X برابر ٤۳۲٤۳ خواهد شد. برای پیدا کردن X به طوری که پیوستهٔ مقلوب خودرا به وجود آورد، M را برابر ۳٤ می گیریم و یک پاسخ برابر ۳٤۳۲۳٤۳ خواهد بود.

در مورد مسئلهٔ اول مک کالک ـ پیدا کردن X به طوری که تکرار مقلوب پیوستهٔ X را پدید آورد ـ M را برابر ۵٤۳ می گیریم (۵ برای تکرار، ٤ برای مقلوب و ۳ برای پیوسته). پاسخ عدد ۵٤۳۳۲۵٤۳۳ خواهد بود (خواننده می تواند به طور مستقیم بررسی کند که آیا عدد ۵٤۳۳۲۵٤۳۳ تکرار مقلوب پیوستهٔ خودش را پدید می آورد). در مورد مسئلهٔ دوم مک کالک ـ پیدا کردن X به طوری که پیوستهٔ تکرار مقلوب خودش را پدید آورد، ـMرا برابر ۳۵٤ می گیریم و پاسخ ۳۵٤۳۲۳۵٤۳ به دست می آید.

قانون کریگ واقعاً شگفت انگیز است!

۲۱ و۲۲ و۲۳ و۲٤ــ

مسائل ۲۱، ۲۲ و۲۳ هرسه حالتهای خاصّ مسئلهٔ ۲٤ هستند. از این رو نخست مسئلهٔ ۲٤ را حل می کنیم.

عدد عملیاتی M وعدد اختیاری A را درنظر بگیرید. می خواهیم X را طوری پیدا کنیم که (M(AX را پدید آورد. راه ابتکاری این است که عددی مانند Y پیدا کنیم که MY را پدید نیاورد بلکه AMY را پدید آورد. اکنون Y را برابر ۳۲AM ۳ می گیریم. چون Y عدد AMY را پدید می آورد پس برطبق واقعیّت ۱، MY بایستی (M(AMY را پدید آورد. پس اگر X را برابر MY بگیریم X عدد (M(AX را پدید خواهد آورد. چون ما Y را برابر ۳ ۳۲ AM گرفتیم پس X برابر M ۳۲AM ۳ خواهد شد. و بنابراین پاسخ M ۳۲AM ۳ است.

برای استفاده از این نتیجه در مسئلهٔ ۲۱، ابتدا توجه می کنیم که ۷X ۷X

تکرار X ۷ است و بنابراین می خواهیم X عددی باشد که تکرار X ۷ را پدید آورد ـ یعنی تکرار AX که در آن A برابر ۷ است. پس A مساوی ۷ است و M را نیز برابر ۵ می گیریم (چون عدد ۵ مشخص کنندهٔ عمل تکرار است). پس پاسخ برابر ۵۳۲۷۵۳ است (خواننده می تواند به طور مستقیم بررسی کند که عدد ۵۳۲۷۵۳ واقعاً تکرار عدد ۷۵۳۲۷۵۳ را پدید می آورد). در مسئلهٔ ۲۲، A برابر ۹ است و M را برابر ٤ می گیریم و بنابراین عدد ٤۳۲۹٤۳ پاسخ مسئله است. در مسئلهٔ ۲۳، A برابر ۸۹، M برابر ۳ و درنتیجه پاسخ برابر ۳۳۲۸۹۳۳ است.

۲۵ــ

بلی، برای هرعدد A، می توان عدد X را طوری پیدا کرد که $\overleftarrow{X}A$، یعنی ٤۳ $\overleftarrow{A}$ ٤۳۲، را پدید آورد (در حالت خاصّ که A برابر ٦۷ است $\overleftarrow{A}$ برابر ۷٦ و پاسخ برابر ٤۳۲۷٦٤۳ است).

۲٦ــ

در کلّی‌ترین حالت، راه ابتکاری این است که متوجه باشیم $\overleftarrow{X}A$ مقلوب $\overleftarrow{A}X$ است و بنابراین $M(\overleftarrow{XA}) = M\,٤(\overleftarrow{A}X)$. برطبق قانون دوم کریگ، هر X که $(M٤(\overleftarrow{A}X)$ را پدید آورد برابر ٤۳ $M٤۳۲\overleftarrow{A}M$ خواهد بود. پس این یک پاسخ است.

در حالت خاصّ، که M برابر ۵ و A برابر ٦۷ است، عدد X که تکرار $\overleftarrow{X}$٦۷ را پدید آورد برابر ۵٤۳۲۷٦۵٤۳ خواهد شد (همان طور که خواننده می تواند به طور مستقیم بررسی کند).

۱۱
قوانین فرگوسن

اکنون با پیشرفت جالب توجّه دیگری در ماشینهای مک کالک آشنا می‌شویم. مک کالک، دو هفته پس از آخرین ملاقاتی که با کریگ داشت، نامه‌ای به این شرح از او دریافت کرد:

مک کالک عزیز:

من و دوستم ملکم فرگوسن (Malcolm Fergusson) به ماشینهای شما بسیار علاقه‌مند شده‌ایم. آیا شما فرگوسن را می‌شناسید؟ ایشان در زمینهٔ منطق محض فعالانه پژوهش می‌کنند و تاکنون چندین ماشین منطق هم ساخته‌اند. اما دامنهٔ علاقهٔ آقای فرگوسن خیلی گسترده‌تر از اینهاست. ایشان به‌نوعی مسائل شطرنج که به **تحلیل وارونه** شهرت دارد بسیار علاقه‌مند هستند. در مسائل انتزاعیِ ترکیب، از نوعی که ماشینهای شما آنها را به‌خوبی انجام می‌دهد، نیز مطالعات فراوان کرده‌اند. هفتهٔ پیش ایشان را ملاقات کردم و مسائلی را که شما طرح کرده بودید به ایشان نشان دادم. خیلی تعجب کرد. سه روز بعد دوباره به دیدنش رفتم. می‌گفت ماشینهای شما خواصّ جالب توجّه دیگری نیز دارند که حتّی خود شما نیز متوجّه آن نشده‌اید! فکرش هنوز کمی مبهم بود و تصمیم داشت که

بازهم مدّتی به موضوع بیندیشد.

شب جمعهٔ آینده فرگوسن شام را مهمان ما است. چطوراست شما هم تشریف بیاورید! یقین دارم که شما دو نفر علاقه های مشترک بسیار دارید و ممکن است مایل باشید که بفهمید فرگوسن درمورد ماشینهای شما چه نظری دارد.

به امید دیدار در شب جمعه.

دوست شما
ل - کریگ

مک کالک بیدرنگ به نامهٔ کریگ پاسخ داد:

کریگ عزیز

متأسفانه هنوز سعادت دیدار ملکم فرگوسن را نداشته‌ام، اما از دوستان مشترکمان مطالب بسیاری در مورد او شنیده‌ام. آیا او شاگرد منطق‌دان برجسته آقای گاتلیب فریج (Gottlob Frege) نبوده است؟ شنیده‌ام به‌تازگی در مورد مفاهیمی که برای تمام مبانی ریاضیات جنبهٔ اساسی دارد تحقیق می کند، و مسلم است که از این فرصت برای ملاقات او استقبال می کنم. از این گذشته، خیلی کنجکاوم بدانم که چه‌چیز جدیدی در ماشینهای من کشف کرده است. خیلی از دعوت شما متشکرم و با اشتیاق خدمت خواهم رسید.

دوست شما
ن - مک کالک

مهمانان کریگ آمدند و پس از یک شام باشکوه (که مالک خانه - خانم هوفمن - تهیه کرده بود)، گفتگوها در بارهٔ ریاضی آغاز شد.

مک کالک گفت: «شنیده ام که نوعی ماشینهای منطق

ساخته اید. مایلم اطلاعات بیشتری در بارهٔ آنها داشته باشم. ممکن است آنها را برایم تشریح کنید؟»

فرگوسن پاسخ داد: «آه بلی - داستانی طولانی دارد، حتی هنوزهم مسئلهٔ اساسی در بارهٔ طرز کار آنها را حل نکرده‌ام. چطور است شما و کریگ سری به کارگاه من بزنید؟ درآنجا با همه‌چیز آشنا خواهید شد. اما امشب را مایلم درمورد ماشینهای **شما** صحبت کنیم. همان‌طور که چندروز قبل به کریگ گفتم ماشینهای شما خواصّی دارد که تصوّر نمی کنم خود شما هم متوجه آنها شده باشید.»

مک کالک پرسید: «این خواصّ کدامند؟»

۱ـ

فرگوسن گفت: «بسیار خوب. با یک مثال که مربوط به ماشین دوم شماست شروع می کنیم: آیا می‌توان اعداد X و Y را طوری تعیین کرد که X مقلوب Y را پدید آورد و Y تکرار X را؟»

کریگ و مک کالک خیلی از این مسئله حیرت کردند و بیدرنگ به حل آن پرداختند، اما هیچ یک موفق به حل مسئله نشدند. البته مسئله قابل حل است و خوانندهٔ علاقه‌مند می تواند امتحان کند. یک اصل اساسی، که در بخش بعد توضیح خواهیم داد، مبنای حل این مسئله است، و وقتی که آن را بدانید ازسادگی مسئله تعجب خواهید کرد.

۲ـ

وقتی که فرگوسن پاسخ را به آنها نشان داد کریگ گفت: «من پاک گیج شدم. پاسخ درست است، اما چگونه آن را پیدا کردید؟ آیا این دوعدد X و Y را به‌تصادف پیدا کردید، یا برای پیدا کردن آنها از یک الگوی منطقی استفاده کردید؟ به‌نظر من، موضوع بیشتر به افسونگری شباهت دارد.»

مک کالک گفت: «همین طور است، این مانند کار شعبده بازان است که ناگهان از داخل کلاهشان یک خرگوش بیرون می آورند.»

فرگوسن که از شگفتزدگی دوستان خیلی لذت می برد با خنده گفت: «آه، بلی ـ اما به نظر می آید که من از داخل کلاهم دو خرگوش بیرون آورده ام که هرکدام اثری مخصوص بر دیگری داشته است.»

کریگ پاسخ داد: «این کاملاً درست است، فقط دوست دارم بدانم ازکجا دانستید کدام دو خرگوش را بیرون بیاورید.»

فرگوسن که بیشتر به وجد آمده بود گفت: «پرسش خوبی است! پرسش خوبی است! اکنون بپردازیم به یک مسئلهٔ دیگر: دو عدد X و Y را تعیین کنید به طوری که X تکرار Y را پدید آورد و Y مقلوب پیوستهٔ X را.»

مک کالک فریاد کشید: «آه، نه!»

کریگ گفت: یک لحظه صبر کن، تصوّر می کنم سررشته را پیدا کرده ام. آقای فرگوسن، آیا می خواهید بگویید که به ازای هر دو عدد عملیاتی M و N بایستی اعدادی مانند X و Y وجود داشته باشند به طوری که عدد X عدد M(Y) و عدد Y عدد N(X) را پدید آورد؟

فرگوسن گفت: «دقیقاً همین طور است و بنابراین می توان مثلاً اعداد X و Y را تعیین کرد به طوری که X پیوستهٔ دوبارهٔ Y را و Y تکرار مقلوب X را ـ یا هرترکیب دیگری را که بخواهید ـ پدید آورد.»

مک کالک فریاد کشید: «فوق العاده است! این چند روز آخر خیلی سعی کردم که دستگاهی با این خواصّ بسازم؛ اما نمی دانستم که قبلاً آن را ساخته ام!»

فرگوسن پاسخ داد: «بلی. همین طور است.»

مک کالک پرسید: «این را چگونه ثابت می کنید؟»

فرگوسن پاسخ داد: «اجازه بدهید اثبات را به تدریج انجام دهیم. درواقع قواعد ۱ و ۲ شما هستهٔ اصلی موضوع را تشکیل می دهند. بنابراین

نخست کمی با ماشین اول شما - که پیرو این دو قاعده است - تمرین می کنیم. با یک مسئلهٔ ساده آغاز می کنیم: آیا فقط با استفاده از قواعد ۱ و ۲ می توان **دو عدد متفاوت** X و Y را تعیین کرد به طوری که عدد X عدد Y را پدید آورد و عدد Y عدد X را؟»

کریگ و مک کالک بیدرنگ سرگرم حل این مسئله شدند.

کریگ با خوشحالی گفت: «آه، البته! این مسئله با استفاده از مطلبی که چند هفتهٔ پیش مک کالک نشانم داد قابل حل است.»

آیا شما می توانید X و Y را پیدا کنید؟

—۳

فرگوسن گفت: «و حالا، به ازای هر عدد A ، اعداد X و Y وجود دارند، به طوری که عدد X عدد Y را پدید می آورد و عدد Y عدد AX را پدید می آورد. در صورت دانستن A ، آیا می توانید X و Y را تعیین کنید؟ مثلاً آیا می توانید اعداد X و Y را طوری تعیین کنید که عدد X عدد Y و عدد Y عدد 7X را پدید آورد؟»

کریگ پرسید: «آیا هنوز تنها با قواعد ۱ و ۲ سروکار داریم یا اینکه می توانیم از قواعد ۳ و ٤ نیز استفاده کنیم؟»

فرگوسن پاسخ داد: «فقط به قواعد ۱ و ۲ نیاز خواهید داشت.»

کریگ و مک کالک مشغول حل مسئله شدند و ناگهان کریگ فریاد زد: «یافتم! یافتم!»

—٤

پس از آنکه کریگ پاسخ را اعلام کرد مک کالک گفت: «شگفت انگیز است، من پاسخ دیگری پیدا کرده ام!» درواقع مسئله دو پاسخ دارد. آیا شما می توانید پاسخها را پیدا کنید؟

۵—

فرگوسن گفت: «و حالا با یک خاصیّت واقعاً اساسی آشنا می شویم: از قواعد ۱ و ۲ می توان نتیجه گرفت که به ازای هر دو عدد A و B می توان اعدادی مانند X و Y را پیدا کرد به طوری که عدد X عدد AY و عدد Y عدد BX را پدید آورد. به عنوان مثال می توان X و Y را طوری تعیین کرد که X عدد ۷۷Y و Y عدد ۸X را پدید آورد. آیا می توانید X و Y را پیدا کنید؟

٦—

فرگوسن گفت: «می توان به سادگی از مسئلهٔ قبل ـ یا حتی ساده تر از آن، از قانون دوم کریگ - نتیجه گرفت که به ازای هر دو عدد عملیاتی M و N ، می توان اعداد X و Y را طوری تعیین کرد که به ترتیب (M(Y و (N(X را پدید آورند. این خاصیّت نه فقط در ماشین فعلی شما، بلکه **درهر** ماشینی که دست کم پیرو قوانین ۱ و ۲ باشد وجود دارد. مثلاً در ماشین فعلی شما می توان اعداد X و Y را طوری تعیین کرد که X مقلوب Y و Y پیوستهٔ X را پدید آورد. آیا می توانید X و Y را پیدا کنید؟»

۷—

پس از آنکه مسئلهٔ ٦ را حل کردند مک کالک به فرگوسن گفت: «عالی بود!» اکنون این پرسش پیش می آید: «آیا ماشین من تابع قیاس دوگانهٔ (Double Analogue) قانون دوم کریگ نیز هست؟ به این معنی که به ازای دو عدد عملیاتی M و N و دو عدد A و B آیا می توان اعداد X و Y را طوری تعیین کرد که عدد X عدد (M (AY و عدد Y عدد (N (BX را پدید آورد؟»

فرگوسن پاسخ داد: «آه، بلی.» مثلاً می توان X و Y را طوری تعیین کرد که X تکرار ۷۷Y و Y مقلوب ۸۹X را پدید آورد.

آیا می‌توانید این اعداد را پیدا کنید؟

۸ـ

کریگ گفت: «من یک مسئلهٔ دیگر نیز به فکرم رسیده است. به ازای یک عدد عملیاتی M و یک عدد B ، آیا می‌توان X و Y را طوری تعیین کرد که عدد X عدد (M (Y و عدد Y عدد BX را پدید آورد؟ مثلاً آیا X و Y می‌توانند مقادیری باشند که X پیوستهٔ Y و Y عدد X ۷۸ را پدید آورد؟»

۹ـ

فرگوسن گفت: «در واقع خیلی ترکیبهای دیگر نیز امکانپذیر است. به ازای هر دو عدد عملیاتی M و N و هردو عدد A و B می‌توان X و Y را طوری تعیین کرد که هرکدام از شرایط زیر صادق باشد:

(الف) عدد X عدد (M(AY و عدد Y عدد (N (X را پدید آورد.

(ب) عدد X عدد (M(AY و عدد Y عدد BX را پدید آورد.

(پ) عدد X عدد (M(Y و عدد Y عدد X را پدید آورد.

(ت) عدد X عدد (M(AY و عدد Y عدد X را پدید آورد.

این گزاره‌ها چگونه اثبات می‌شوند؟

۱۰ـ تعمیم مسئله به سه عدد و بیشتر

کریگ گفت: «تصوّر می‌کنم تا اینجا همهٔ امکانها را بررسی کرده باشیم.»

فرگوسن پاسخ داد: «خیر! آنچه تاکنون دیده‌اید تازه آغاز کار است. مثلاً آیا می‌دانستید سه عدد X ، Y و Z وجود دارد که عدد X مقلوب Y ، عدد Y تکرار عدد Z و عدد Z پیوستهٔ X را پدید می‌آورد؟»

مک کالک فریادزنان گفت: «آه، نه!»

فرگوسن داد کشید! «آه، بلی! به‌طور کلی به ازای هر سه عدد

عملیاتی M و N و P می‌توان مقادیر X و Y و Z را طوری تعیین کرد که عدد X عدد (M(Y ، عدد Y عدد (N(Z وعدد Z عدد (P(X را پدید آورد.»

آیا شما می‌توانید این را اثبات کنید؟ به‌ویژه؛ به‌ازای کدام مقادیر X، Y و Z عدد X مقلوب Y ، عدد Y تکرار Z وعدد Z پیوستهٔ X را پدید می‌آورند؟

پس از آنکه کریگ و مک کالک مسئله را حل کردند فرگوسن گفت: «البته، شکلهای گوناگونی از این قانون سه عددی امکانپذیر است. مثلاً به‌ازای هر سه عدد عملیاتی M ، N و P و هر سه عدد A، B و C می‌توان مقادیر X و Y و Z را طوری معین کرد که عدد X عدد (M(AY، عدد Y عدد (N(BZ وعدد Z عدد (P(CX را پدید آورد.» «همچنین اگر هرکدام از اعداد A ، B یا C را نادیده بگیریم بازهم این گزاره صادق خواهد بود. همچنین مقادیر X ، Y و Z می‌توانند به گونه‌ای باشند که عدد X عدد AY، عدد Y عدد (M(Z وعدد Z عدد (N(BX را پدید آورد. هرنوع ترکیبی که بخواهید امکانپذیر است و آن‌را می‌توانید در اوقات فراغت تمرین کنید.»

فرگوسن ادامه داد: «همچنین می‌توان گزاره را به چهار یا عدهٔ بیشتری اعداد عملیاتی تعمیم داد. مثلاً می‌توانید مقادیر X ، Y ، Z و W را چنان تعیین کنید که عدد X عدد ۷۸Y، عدد Y تکرار عدد Z ، عدد Z مقلوب عدد W ، عدد W پیوستهٔ عدد ۶۲X را پدید آورد. عدهٔ امکانها بینهایت است و همهٔ اینها از قدرت شگفت انگیز قواعد ۱ و ۲ ناشی می‌شوند.»

پاسخها

۱—

مقادیر X = ۴۳۲۵۲۴۳ و Y = ۵۲۴۳۲۵۲۴۳ یک پاسخ هستند. چون عدد ۲۵۲۴۳ عدد ۵۲۴۳ را پدید می‌آورد، پس عدد ۳۲۵۲۴۳ پیوستهٔ عدد ۵۲۴۳ را که برابر

۵۲۴۳۲۵۲۴۳ است یعنی Y را پدید خواهد آورد. چون عدد ۳۲۵۲۴۳ عدد Y را پدید می‌آورد، پس ۴۳۲۵۲۴۳ مقلوب Y را پدید خواهد آورد. اما عدد ۴۳۲۵۲۴۳ برابر X است. پس X مقلوب Y را پدید می‌آورد. همچنین Y تکرار X را پدید می‌آورد (زیرا Y برابر X ۵۲ است، و چون عدد X ۲ عدد X را پدید می‌آورد، عدد X ۵۲ تکرار X را پدید خواهد آورد). بنابراین X مقلوب Y و Y تکرار X را پدید می‌آورد.

۲ــ

کریگ قانون مک کالک را یادآوری کرد: که به‌ازای هرعدد A می‌توان عدد X را (۳ A ۳۲) طوری معین کرد که AX را پدید آورد. درحالت خاصّ اگر A را برابر ۲ بگیریم می‌توان عددی مانند X (۳۲۳۳) پیدا کرد که X ۲ را پدید آورد. و البته عدد ۲X نیز عدد X را پدید می‌آورد. بنابراین اعداد ۳۲۲۳ و ۲۳۲۲۳ یک پاسخ مسئله هستند؛ عدد ۳۲۲۳ عدد ۲۳۲۲۳ وعدد ۲۳۲۲۳ عدد ۳۲۲۳ را پدید می‌آورد.

۳ــ

کریگ حل مسئله را با این استدلال شروع کرد که بایستی عدد X را طوری تعیین کنیم که عدد X ۲۷ را پدید آورد. پس اگرعدد Y را برابر X۲۷ بگیریم، عدد X عدد Y و عدد Y عدد X ۷ را پدید خواهد آورد. همچنین نشان داد که مسئله دارای پاسخ است و X برابر است با ۳۲۲۷۳. بنابراین پاسخی که کریگ پیدا کرد عبارت بود از X = ۳۲۲۷۳ و Y = ۲۷۳۲۲۷۳ .

البته این پاسخ فقط به عدد ۷ مربوط است، اما اگر درمورد هرعدد A اعدادX و Y را به‌صورت X = ۳۲۲ A ۳ و ۳ A ۳۲۲ Y = ۲ A تعریف کنیم عدد X عدد Y و عدد Y عدد AX را پدید خواهد آورد.

۴ــ

اما مک کالک مسئله را از راه دیگری حل کرد. اوچنین استدلال کرد که بایستی عدد Y را طوری تعیین کرد که Y۲۷ را پدید آورد. پس اگرX را برابر Y۲۷ بگیریم عدد X عدد Y وعدد Y عدد X ۷ را پدید خواهد آورد. می‌دانیم که اگر Y را برابر۳۲۷۲۳ بگیریم این خاصیّت را خواهد داشت. بنابراین پاسخی که مک کالک پیدا کرد برابر X = ۲۳۲۷۲۳ و Y = ۳۲۷۲۳ بود.

۵–

کافی است X را چنان تعیین کنیم که A۲BX را پدید آورد. پس اگر Y را برابر ۲BX بگیریم عدد X عدد AY و عدد Y عدد BX را پدید خواهد آورد. برای اینکه عدد X عدد A۲BX را پدید آورد یک پاسخ برابر ۳۲ A ۲ B ۳ است. پس یک پاسخ مسئله عبارت است از X=۳۲ A ۲ B ۳ و Y=۲ B ۳۲ A ۲ B ۳ (درحالت خاصّ که A=۷ و B=۸ است پاسخ مسئله برابر است با X=۳۲۷۲۸۳ و Y=۲۸۳۲۷۲۸۳).

۶–

ابتدا مسئله را با استفاده از قانون دوم کریگ حل می کنیم. به‌یاد دارید که برطبق قانون دوم کریگ به‌ازای هرعدد عملیاتی M و هرعدد A می‌توان عدد X (درواقع M۳۲AM۳) را طوری تعیین کرد که M(AX) را پدید آورد. اکنون دو عدد عملیاتی M و N را درنظر بگیرید. اگر A را برابر N ۲ بگیریم، برطبق قانون دوم کریگ می‌توان X (یعنی M۳۲ N ۲ M۳) را طوری معین کرد که M(N ۲ X) را پدید آورد. و البته عدد N ۲ X عدد N (X) را پدید خواهد آورد. پس اگر Y را برابر N ۲ X بگیریم، عدد X عدد M(Y) و عدد Y عدد N(X) را پدید می آورد. بنابراین یک پاسخ برابر است با: X = M ۳۲ N ۲ M ۳ و Y = N ۲ M ۳۲ N ۲ M ۳. (درحالت خاصّی که فرگوسن مثال زد M را ٤ و N را ۳ می گیریم و پاسخ X=٤۳۲۳۲٤۳ و Y= ۳۲٤۳۲۳۲٤۳ است. خواننده می تواند امتحان کند که X مقلوب Y و Y و پیوستهٔ X را پدید می آورد – قسمت دوم کاملاً واضح است.)

مسئله را می توانستیم از این راه نیز حل کنیم: با استفاده از پاسخ مسئلهٔ ۵ می دانیم که اعداد Z و W را می توان چنان تعیین کرد که عدد Z عدد NW وعدد W عدد MZ را پدید آورد (یعنی Z = ۳۲ N۲M۳ و W = ۲M۳۲NM ۳). پس برطبق واقعیّت بخش پیش عدد MZ عدد M(NW) و عدد NW عدد N(MZ) را پدید می آورند. پس اگر X را برابر MZ و Y را برابر NW بگیریم، عدد X عدد M(Y) و عدد Y عدد N(X) را پدید خواهد آورد. پس پاسخ باید X = M۳۲ N۲M۳ و Y= N۲M۳۲N۲M۳ باشد.

—۷

در اینجا X باید عددی باشد که (M(AN ۲BX را پدید آورد. برطبق قانون دوم کریگ این عدد بایستی ۳ M ۳۲ AN ۲BM باشد. اکنون اگر Y را برابر N۲BX بگیریم، در آن‌صورت عدد X عدد (M(AY و عدد Y (که N ۲BX است) عدد (N (BX را پدید خواهد آورد. پس پاسخ کلی (یا دست کم یک پاسخ مسئله) X = M۳۲AN ۲BM ۳ و Y = N۲BM۳۲AN ۲BM ۳ است. در حالت خاصّ این مسئله، M را برابر ۵، N را برابر ٤، A را برابر ۷ و B را برابر ۸۹ می گیریم.

—۸

برطبق قانون دوم کریگ، عددی مانند X که بتواند (M(۲BX را پدید آورد واقعاً وجود دارد و برابر است با ۳ X= M۳۲۲ BM . اکنون اگر Y را برابر ۲BX بگیریم، در آن‌صورت عدد X عدد (M(Y و عدد Y عدد BX را پدید خواهد آورد. درحالت خاصّ این مسئله M را برابر ۳، و B را برابر ۷۸ می گیریم که پاسخ X = ۳۳۲۲۷۸۳۳ و Y = ۲۷۸۳۳۲۲۷۸۳۳ به دست می آید.

—۹

(الف) اگر عدد X را طوری بگیریم که(M (AN ۲X را پدید آورد و Y را برابر N۲X بگیریم، (می توان X را برابر M۳۲AN ۲۳ گرفت، که Y برابر N ۲M ۳۲AN۲۳ می شود) در آن صورت عدد X عدد (M(AY و عدد Y عدد (N (X را پدید خواهد آورد.

(ب) اکنون X را طوری می گیریم که (M (A۲BX را پدید آورد و Y را برابر ۲ BX می گیریم (در این حالت خواهیم داشت: X = M۳۲ A۲ B۳ و Y=۲BM ۳۲A ۲ B ۳).

(پ) اگر عدد X عدد (M(Y را پدید آورد و Y = ۲ X باشد می توان یک پاسخ به‌دست آورد، وخواهیم داشت: ۳ X = M ۳۲۲M و ۳ Y = ۲ M ۳۲۲ M .

(ت) اگر عدد X عدد (M(AY را پدید آورد و Y = ۲X باشد، یک پاسخ به‌دست می آید وخواهیم داشت: ۳ X = M ۳۲A۲M و ۳ Y = ۲M ۳۲A۲M .

—۱۰

برطبق قانون دوم کریگ، عددی مانندX ، که (M(N۲P۲X را پدید می آورد،

وجود دارد و برابر است با M۳۲ N۲ P۲ M ۳ . اگر Y را برابر N۲ P ۲X بگیریم، عدد X عدد (M(Y را پدید خواهد آورد. اگر Z برابر P ۲X باشد، Y برابر N ۲ Z می شود، و بنابراین عدد Y عدد (N(Z را پدید خواهد آورد و عدد Z عدد (P (X را پدید می آورد. پس پاسخ صریح مسئله عبارت است از: X = M ۳۲ N ۲ P ۲ M ۳ و Y = N۲P۲M۳۲N۲P۲M ۳ و Z = P۲M ۳۲ N۲ P ۲ M ۳ .

در این مــورد خـاص خـواهیم داشت: X = ٤۳۲۵۲۳۲٤۳ ، Y = ۵۲۳۲٤۲۳۲۵۲۳۲٤۳ و Z = ۳۲٤۳۲۵۲۳۲٤۳ .

خواننده می تواند مستقیماً حساب کند که X مقلوب Y ، Y تکرار Z و Z پیوستهٔ X را پدید می آورد.

از این گذشته، به ازای هر سه عدد A و B و C می توان عددهای U و V و W را چنان پیدا کرد که عدد U عدد AV ، عدد V عدد BW ، و عدد W عدد CU را پدید آورد؛ برای این کار کافی است U را طوری بگیریم که A ۲ B ۲CU را پدید آورد (با استفاده از قانون دوم کریگ خواهیم داشت: U = ۳۲ A ۲ B ۲ C ۳). اکنون اگر فرض کنیم V = ۲ B ۲ CU و W = ۲ CU ، در آن صورت عدد U عدد AV ، عدد V عدد BW ، و عدد W عدد CU را پدید خواهد آورد. اگر A و B و C اعداد عملیاتی باشند و X = AV و Y = BW و Z = CU باشد و عدد X عدد (A (Y ، عدد Y عدد (B(Z و عدد Z عدد (C (X را پدید آورد، در آن صورت روش دیگری برای حل مسئله خواهیم داشت.

۱۲

میان‌پرده - تعمیم می دهیم

دو روز پس از داستان قبلی، اسکاتلندیارد کارآگاه کریگ را به‌طور ناگهانی و کاملاً غیرمنتظره مأمور کرد که، برای بررسی موضوعی، که هرچند مهم بود اما در اینجا مورد علاقهٔ ما نیست، به نروژ برود. اکنون که او در نروژ است من هم از فرصت استفاده می کنم و اندیشه های خودرا در بارهٔ ماشینهای مک کالک برایتان می گویم. اما اگر خیلی نگران پیدا کردن پاسخ معمای قفل مونت کارلو هستید می توانید فعلاً این بخش از کتاب را نادیده بگیرید.

ریاضیدانان علاقهٔ بسیاری به تعمیم دارند! بسیار دیده‌ایم که ریاضیدانی، مثلاً x ، گزاره‌ای را اثبات می کند و شش ماه پس از انتشار آن، ریاضیدانی مانند y پیدا می شود و می گوید «آقای x گزارهٔ قشنگی را اثبات کرده است، اما من می توانم حالت کلّیتر (تعمیم) گزاره را اثبات کنم!» و شش ماه بعد نیز مقاله ای تحت عنوان «تعمیم گزارهٔ x » به‌چاپ می رسد. یا ممکن است y کمی زیرکتر باشد و نخست **نزد خودش** تعمیم گزارهٔ x را ثابت کند و سپس یک حالت خاصّ از این تعمیم را به‌شکلی کاملاً متفاوت از گزارهٔ x به‌عنوان گزاره‌ای جدید به‌نام خودش منتشر کند.

البته در این‌صورت ممکن است ریاضیدان دیگری، مثل Z ، پیدا شود و احساس کند که دو گزارهٔ X و Y بایستی دارای اصلی مشترک باشند، و پس از مدتی کوشش، آن اصل مشترک را پیدا کند. و آن‌را در مقاله‌ای انتشار دهد و اضافه کند «با استدلال زیر هم گزارهٔ X و هم گزارهٔ Y را می‌توان به‌عنوان حالتهای خاصّ گزارهٔ من به‌دست آورد...».

من‌هم از این قاعده جدا نیستم. از این‌رو نخست برخی از خصوصیّات ماشینهای مک‌کالک را، که گمان نمی‌کنم مک‌کالک، کریگ یا فرگوسن متوجّه آن شده باشند، توضیح می‌دهم و سپس چند تعمیم خواهیم داشت.

وقتی که بحثهای مربوط به ماشین دوم مک‌کالک را از نو بررسی کردم نخستین چیزی که توجّهم را جلب کرد این بود که با مطرح شدن **قاعدهٔ ٤** (قاعدهٔ تکرار) دیگر برای به‌دست آوردن قوانینی مانند قانون کریگ و قانون فرگوسن نیازی به **قاعدهٔ ۲** (قاعدهٔ پیوستگی) نخواهد بود. درواقع اگر ماشینی را درنظر بگیریم که فقط تابع قواعد ۱ و ٤ باشد، می‌توان عدد X را طوری تعیین کرد که: خودش یا تکرار خودش را پدید آورد. می‌توان به‌ازای هرعدد A عدد X را طوری تعیین کرد که AX یا تکرار AX یا تکرارتکرار AX را پدید آورد. همچنین، باوجود حذف قاعدهٔ ۲ از ماشین مک‌کالک، می‌توان عدد X را طوری تعیین کرد که مقلوب خود، یا تکرار مقلوب خود، یا مقلوب AX ، یا تکرار مقلوب AX را پدید آورد.

همچنین اگر ماشینی را درنظر بگیریم که تابع قاعده‌های ۱ و ۲ و ٤ باشد (قاعدهٔ ۳، یعنی قاعدهٔ مقلوب نمودن، را نداشته باشد)، در آن‌صورت برای پیدا کردن عددی که پیوستهٔ خودش را پدید آورد دو راه وجود خواهد داشت. برای پیدا کردن عددی که تکرار خود را پدید آورد، یا عددی که پیوستهٔ تکرار خودرا یا تکرار پیوستهٔ خودرا پدید آورد دو راه وجود خواهد داشت.

سرانجام، در هر ماشینی که دست کم تابع قاعدهٔ ۱ و قاعدهٔ ۲ باشد قوانین کریگ و قوانین فرگوسن صدق خواهند کرد. بنابراین با به کار گرفتن قاعدهٔ ٤ به‌جای قاعدهٔ ۲، می توان بسیاری از مسائل دو بخش قبلی را با روش دیگری حل کرد (آیا می دانید چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ اگر نمی دانید، در زیر برایتان توضیح می دهم).

می‌توانم موضوع را خیلی شرح و بسط دهم، اما برای کوتاه کردن موضوعی مفصل، مشاهدات عمدهٔ خودرا در شکل سه واقعیّت توضیح می دهم.

واقعیّت ۱: همان طور که هر ماشینی که تابع قواعد ۱ و ۲ باشد تابع قانون مک کالک نیز هست (یعنی به ازای هر عدد A می توان X را طوری تعیین کرد که AX را پدید آورد)، ماشینی که تابع قاعده‌های ۱ و ٤ باشد نیز تابع قانون مک کالک خواهد بود.

واقعیّت ۲: هر ماشینی که تابع قانون مک کالک باشد تابع دو قانون کریگ نیز خواهد بود.

واقعیّت ۳: هر ماشینی که تابع قانون دوم کریگ و قاعدهٔ ۱ باشد تابع قانون فرگوسن نیز خواهد بود.

آیا می توانید سه واقعیّت فوق را اثبات کنید؟

پاسخها

ابتدا ماشینی را درنظر بگیرید که تابع قواعد ۱ و ٤ باشد. در این ماشین به‌ازای هرعدد X، عدد X ۵۲ عدد XX را پدید می آورد. بنابراین اگر X را برابر ۵۲ بگیریم، عدد ۵۲۵۲ عدد ۵۲۵۲ را پدید خواهد آورد. پس عددی که خودش را پدید آورد وجود دارد. همچنین عدد ۵۵۲۵۵۲ تکرار خودش را پدید می‌آورد. همچنین برای اینکه عدد X به‌ازای هرعدد A عدد AX را پدید آورد می‌توان X را برابر ۵۲ A ۵۲ گرفت (چون

تکرار A۵۲ را پدید می‌آورد، که برابر A۵۲A۵۲ ، یعنی AX ، است). و این واقعیّت ۱ را ثابت می کند (اگر بخواهیم عدد X ا طوری معین کنیم که تکرار AX را پدید آورد آن را برابر ۵۵۲A۵۵۲ می گیریم).

اکنون دستگاهی را درنظر بگیرید که تابع قاعده های ۱ و ۳ و ٤ مک کالک باشد. در این ماشین عددی که مقلوب خودش را پدید آورد برابر ٤۵۲٤۵۲ است (این عدد مقلوب تکرار ٤۵۲، یعنی مقلوب ٤۵۲٤۵۲، را پدید می آورد). (این را با پاسخ قبلی، یعنی عدد ٤۳۲٤۳، مقایسه کنید).

عددی که تکرار مقلوب خود را پدید آورد برابر ۵٤۵۲۵٤۵۲ است. (این را با پاسخ ۵٤۳۲۵٤۳ مقایسه کنید).

اکنون ماشینی را درنظر بگیرید که تابع قاعده های ۱ و ۲ و ٤ باشد. می دانیم که در این ماشین ۳۳۲۳۳ پیوستهٔ خودش را پدید می آورد، اما عدد ۳۵۲۳۵۲ نیز همین خاصیّت را دارد. درمورد عددی که تکرار خودش را پدید آورد، قبلاً دو پاسخ ۳۵۲۳۵ و ۵۵۲۵۵۲ را به دست آورده ایم. در بارهٔ عددی که پیوستهٔ تکرار خودش را پدید آورد یک پاسخ ۳۵۳۲۳۵۳ و پاسخ دیگر ۳۵۵۲۳۵۵۲ است. در بارهٔ عددی که تکرار پیوستهٔ خودش را پدید آورد یک پاسخ ۵۳۳۲۵۳۳ و پاسخ دیگر ۵۳۵۲۵۳۵۲ است.

اکنون ماشینی را درنظر بگیرید که دست کم تابع قاعده های ۱ و ٤ ماشینهای مک کالک باشد. به ازای یک عدد عملیاتی M ، برای اینکه عدد X عدد M(X)را پدید آورد بایستی برابر۵۲ M۵۲M باشد (این پاسخ را با پاسخ قبلی، یعنی M۳۲M ۳ ، که با استفاده از قاعدهٔ ۲ به جای قاعدهٔ ٤، به دست آمد مقایسه کنید). و به ازای عدد عملیاتی M و عدد A ، برای اینکه عدد X عدد M(AX) را پدید آورد بایستی برابر M۵۲AM۵۲ باشد. (این پاسخ را با عدد M ۳۲AM ۳ که قبلاً به دست آوردیم مقایسه کنید). این موضوع نشان می دهد که می توان از قاعده های ۱ و ٤ هردو قانون کریگ را نتیجه گرفت. اما قبلاً گزارهٔ عامتر (واقعیّت ۲) را توضیح داده ام که از قانون مک کالک می توان قوانین کریگ را نتیجه گرفت. این موضوع را می توان با روشی که در بخش ۱۰ به کار گرفته شد اثبات کرد. به این ترتیب که به ازای یک عدد عملیاتی M می توان عدد Y را طوری تعیین کرد که عدد MY را پدید آورد، و بنابراین عدد MY عدد M(MY) را پدید آورد، یعنی اگر X را برابر MY بگیریم عدد X عدد M(X) را پدید آورد. و به ازای هرعدد A ، اگر عدد Y طوری باشد که عدد AMY را پدید آورد، در آن صورت MY عدد M(AMY) را پدید می آورد، و بنابراین اگر

X=MY باشد عدد X عدد (M(AX را پدید می‌آورد.

در مورد واقعیّت ۳، می‌توان آن‌را با همان روش که در بخش قبل به کار گرفته شد ثابت کرد. (مثلاً، به‌ازای اعداد عملیاتی N و M ، اگر قانون دوم کریگ صادق باشد، می‌توان عدد X را طوری تعیین کرد که (M(N۲X را پدید آورد، و اگر Y را برابر M۲X بگیریم، عدد X عدد (Y) M و عدد Y عدد (X) N را پدید خواهد آورد.)

۱۳
کلید رمز

برنامهٔ کریگ در نروژ کمتر از آنچه انتظار می رفت طول کشید و او دقیقاً سه هفته پس از ترک لندن به وطن بازگشت. همین که به‌خانه رسید مشاهده کرد که مک کالک یادداشتی به‌این مضمون برایش فرستاده است:

کریگ عزیز:

امیدوارم تا روز جمعه ۱۲ ماه مه به لندن برگشته باشی. در این‌صورت خیلی خوشحال می‌شوم که شام را در آن‌شب باهم بخوریم. درضمن فرگوسن را نیز برای آن‌شب دعوت کرده‌ام.

ارادتمند: نورمن مک کالک

کریگ با خود گفت: «عالی است! درست به‌موقع رسیدم!»

وقتی که به خانهٔ مک کالک رسید، فرگوسن یک ربع ساعت پیش از او به آنجا رسیده بود. پس از آنکه مک کالک به‌او خوشامد گفت، فرگوسن گفت: «هنگامی که شما در سفر بودید مک کالک یک ماشین محاسبه اختراع کرد.»

کریگ گفت: «راستی؟»

مک کالک گفت: «البته همهٔ کار را خودم انجام نداده‌ام، فرگوسن نیز تا اندازه‌ای دخالت داشت.» در هرحال این ماشین فوق‌العاده جالب‌توجّه است و تابع چهار قاعدهٔ زیر است:

M-I : به ازای هر عدد x ، عدد ۲x۲ عدد x را پدید می‌آورد.

M-II : اگر عدد x عدد y را پدید آورد، عدد ٦x عدد ۲y را پدید خواهد آورد.

M-III : اگر عدد x عدد y را پدید آورد، عدد ٤x عدد $\overleftarrow{y}$ را پدید خواهد آورد (مانند ماشین قبلی).

M-IV : اگر عدد x عدد y را پدید آورد، عدد ۵x عدد yy را پدید خواهد آورد (مانند ماشین قبلی).

مک کالک ادامه داد: «این ماشین همهٔ خواص خوب ماشین قبلی را دارد. درضمن از دو قانون شما و همچنین از قیاس دوگانه نیز پیروی می‌کند.»

کریگ مدتی با وضعی که برای او غیر معمول بود چهار قاعدهٔ فوق را بررسی کرد و سرانجام گفت: «من که اصلاً سر در نمی‌آورم، من حتی نمی‌توانم عددی را که خودش را پدید آورد پیدا کنم، آیا چنین اعدادی وجود دارند؟»

مک کالک گفت: «بلی، البته، در مقایسه با ماشین قبلی، پیدا کردن چنین اعدادی به‌وسیلهٔ این ماشین بسیار دشوارتر است. درواقع من نیز نتوانستم این مسئله را حل کنم، اما فرگوسن آن را حل کرد. کوچکترین عددی که با این خاصیت پیدا کردیم ده‌رقمی بود.»

کریگ دوباره به فکر فرو رفت و پرسید: «بیگمان دو قاعدهٔ اول برای پیدا کردن چنین عددی کافی نیست، درست است؟»

مک کالک پاسخ داد: «مسلماً خیر؛ برای پیدا کردن چنین عددی به هر چهار قاعده نیاز است.»

کریگ، که دو باره به فکر فرورفته بود، گفت: «فوق العاده است!»
و ناگهان درحالی که تقریباً از روی صندلی خود به هوا می جهید فریاد زد: «خدای من! این معمای قفل را حل می کند!.»

فرگوسن پرسید: «شما راجع به چه چیز حرف می زنید؟»

کریگ گفت: «معذرت می خواهم» و سپس داستان کامل قفل مونت کارلو را برایشان تعریف کرد و در پایان از آن دو خواهش کرد که موضوع را کاملاً محرمانه تلقّی کنند. سپس به مک کالک گفت: «اکنون اگر عددی را که با این ماشین خودش را پدید می آورد به من بگویید می توانم بیدرنگ رمزی را پیدا کنم که قفل مونت کارلو را باز می کند.»

در اینجا سه معما برای خواننده داریم:

(۱) در این ماشین کدام عدد است که خودش را پدید می آورد؟

(۲) کدام رمز قفل را باز می کند؟

(۳) دو پرسش فوق چگونه به یکدیگر مربوط می شوند؟

سرانجام

روز بعد، صبح زود، کریگ پیک مورد اعتمادی را به مونت کارلو فرستاد تا رمز قفل را به مارتینز بدهد. پیک به موقع به مقصد رسید و قفل بدون هیچ اشکالی باز شد.

به پیشنهاد مارتینز، هیئت مدیرهٔ بانک پاداش قابل توجّهی برای کریگ تصویب کرد و کریگ با اصرار آن را با مک کالک و فرگوسن تقسیم کرد و سه دوست پیروزی خود را در رستوران لیون لندن جشن گرفتند.

پس از شام کریگ گفت: «بلی، این ماجرا جالب توجّه ترین موردی است که تا کنون به آن برخورد کرده ام! آیا این فوق العاده نیست که ماشینهای محاسبهٔ شما، که صرفاً براساس کنجکاوی علمی دست به اختراع

آنها زدید، چنین کار برد عملی غیرمنتظره ای داشته باشند؟»

پاسخها

ابتدا قدری راجع به معمای قفل مونت کارلو صحبت می کنیم.

در شرط آخر فارکوس، هیچ چیزی که نشان دهد رمز Y الزاماً با رمز X تفاوت دارد گفته نشد. از این رو، اگر X و Y را برابر بگیریم، شرط مزبور به این شرح خواهد شد: «اگر X ارتباط ویژه با X داشته باشد، در آن صورت اگر قفل با رمز X گیر کند، X خنثا خواهد بود، و اگر X خنثا باشد در آن صورت قفل با رمز X گیر خواهد کرد». اما غیرممکن است X هم خنثا باشد و هم قفل را گیر دهد. بنابراین اگر X ارتباط ویژه با X داشته باشد، در آن صورت X نه خنثا خواهد بود و نه قفل با آن گیر می کند. پس X بایستی قفل را بازکند! پس اگر بتوانیم رمز X را طوری تعیین کنیم که باخودش ارتباط ویژه داشته باشد در آن صورت X قفل را بازخواهد کرد.

البته کریگ قبل از بازگشت به لندن متوجّه این موضوع شده بود، اما چگونه می توان X را طوری تعیین کرد که باخودش ارتباط ویژه داشته باشد؟ این مسئله ای است که کریگ تا پیش از آشناشدن با ماشین سوم مک کالک نتوانست آن را حل کند.

موضوع این است که مسئلهٔ پیدا کردن ترکیبی که برطبق شرایط فارکوس ارتباط ویژه باخودش داشته باشد دقیقاً مشابه است با مسئلهٔ پیداکردن عددی که در ماشین سوم مک کالک خودش را پدید آورد. تنها تفاوت اساسی این است که رمز از ترکیب حروف تشکیل شده است، درصورتی که ماشین با ترکیب ارقام کار می کند؛ اما هرکدام ازاین دو مسئله را می توان با روش سادهٔ زیر به دیگری تبدیل کرد.

نخست باید درنظر داشت که فقط به ترکیبهای چهار حرف Q ، L ، V و R نیاز داریم (بدیهی است که اینها تنها حروفی هستند که نقش اساسی دارند). اکنون فرض کنید به‌جای به کار گرفتن این حروف به‌ترتیب از ارقام ۲ ، ۶ ، ٤ و ۵ استفاده کنیم (یعنی ۲ برای Q ، ٦ برای L ، ٤ برای V و ۵ برای R). برای سهولت به‌خاطر سپردن، ارتباط حرف ــ رقم را به شکل زیر نمایش می دهیم:

Q	L	V	R
۲	٦	٤	۵

اکنون ببینیم اگر چهار شرط اول فارکوس را با ارقام (به‌جای حروف) بنویسیم چه شکلی پیدا خواهند کرد:

(۱) به‌ازای هر عدد X، عدد ۲ X ۲ ارتباط ویژه با X خواهد داشت.

(۲) اگر X ارتباط ویژه با Y داشته باشد، X ۶ ارتباط ویژه با Y ۲ خواهد داشت.

(۳) اگر X ارتباط ویژه با Y داشته باشد، X ۴ ارتباط ویژه با $\overleftarrow{Y}$ خواهد داشت.

(۴) اگر X ارتباط ویژه با Y داشته باشد، X ۵ ارتباط ویژه با YY خواهد داشت.

بیدرنگ می‌توان فهمید که اینها دقیقاً همان شرایط ماشین آخری هستند با این تفاوت که به جای عبارت **پدید می‌آورد** عبارت **ارتباط ویژه داشتن** به‌کار رفته است (می‌توانستم در بخش ۸ به‌جای عبارت **ارتباط ویژه** از عبارت **پدید می‌آورد** استفاده کنم، امّا عمداً نخواستم به خواننده خیلی راهنمایی کرده باشم!) پس می‌بینیم که هریک از این دو مسئله را می‌توان به دیگری تبدیل کرد.

مطلب را باردیگر، اما دقیقتر، توضیح می‌دهم: به‌ازای هر ترکیب X متشکل از حروف Q، L، V، R، $\overline{X}$ عددی است که از جایگزینی ۲ برای Q، ۶ برای L، ۴ برای V، و ۳ برای R به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال، اگر X ترکیب VQRLQ باشد در آن‌صورت $\overline{X}$ برابر عدد ۴۲۵۶۲ خواهد بود. حال $\overline{X}$ را عدد رمز ترکیب X می‌نامیم. (درضمن فکر نسبت دادن اعداد به عبارتها نخست به وسیلهٔ منطقدان مشهور کورت گودل مطرح شد و این روش به نام شمارش گودل معروف شده است. در فصل چهارم این کتاب خواهیم دید که این روش اهمیّت ویژه‌ای دارد.)

اکنون می‌توانیم نکتهٔ اصلی پاراگراف بالا را دقیقاً به این شرح بیان کنیم: به‌ازای هر دو ترکیب X و Y متشکل از چهار حرف Q و L و V و R، اگر براساس چهار شرط M-I تا M-IV ماشین سوم مک کالک $\overline{X}$ را طوری تعیین کنیم که $\overline{Y}$ را پدید آورد، در آن‌صورت می‌توان ثابت کرد که براساس چهار شرط اول فارکوس X ارتباط ویژه با Y دارد - و بالعکس.

پس اگر در ماشین اخیر بتوانیم عددی پیدا کنیم که خودش را پدید آورد، در آن‌صورت این عدد بایستی عدد رمز ترکیبی باشد که ارتباط ویژه با خودش دارد، و این ترکیب قفل را باز خواهد کرد.

اکنون در ماشین اخیر چگونه می‌توان عدد N را طوری تعیین کرد که خودش را پدید آورد؟ ابتدا عدد H را طوری تعیین می‌کنیم که به‌ازای هر دو عدد X و Y، اگر عدد X عدد Y را پدید آورد، در آن‌صورت عدد HX عدد ۲ Y ۲ Y را پدید آورد. اگر

بتوانیم H را پیدا کنیم در آن‌صورت به‌ازای هر عدد ۷ ، عدد ۲ H۲۷ عدد ۲ ۷ ۲ ۷ را پدید خواهد آورد. (زیرا برطبق شرط M – I عدد ۲ ۷ ۲ عدد ۷ را پدید می آورد.)، و بنابراین عدد ۲ H ۲ H عدد ۲ H ۲ H را پدید می آورد، و به این ترتیب عدد موردنظر ما N ، پیدا خواهد شد. اما عدد H را چگونه می توان پیدا کرد؟

مسئله به این صورت درمی آید: با داشتن عدد ۷ ، چگونه می‌توان با پی در پی به کار گرفتن عملیاتی که ماشین اخیر انجام می دهد به عدد ۲ ۷ ۲ ۷ رسید؟ بسیار خوب، می توان به‌صورت زیر از عدد ۷ عـدد ۲ ۷ ۲ ۷ را پیدا کرد: ابتدا مقلوب ۷ یعنی $\overleftarrow{۷}$ را می نویسیم. سپس رقم ۲ را در سمت چپ $\overleftarrow{۷}$ قرارمی دهیم که ۲$\overleftarrow{۷}$ حاصل می شود. حال ۲$\overleftarrow{۷}$ را مقلوب می کنیم و ۷۲ به‌دست می آید و اکنون ۷۲ را تکرار می کنیم و ۲ ۷ ۲ ۷ نتیجه می شود. این عملیات به‌ترتیب به‌وسیلهٔ اعداد عملیاتی ٤ ، ٦ ، ٤ و ۵، نمایش داده می شوند. بنابراین H را برابر ۵٤٦٤ می گیریم.

اکنون‌عدد H را آزمایش می کنیم: فرض کنیم عدد X عدد ۷ را پدیدآورد. می خواهیم آزمایش کنیم و ببینیم که آیا عدد X ۵٤٦٤ عدد ۲ ۷۲۷ را پدید می آورد. خوب، چون عدد X عدد ۷ را پدید می آورد، پس X ٤ عدد $\overleftarrow{۷}$ را پدید خواهد آورد (برطبق قاعدهٔ M–III)، بنابراین X ٦٤ عدد ۲ $\overleftarrow{۷}$ را پدید خواهد آورد (برطبق قاعدهٔ M–II)، همچنین X ٤٦٤ عدد ۷۲ را پدید می آورد (برطبق قاعدهٔ M–III). درنتیجه ۵٤٦٤X عدد ۲ ۷ ۲ ۷ را پدید خواهد آورد (برطبق قاعدهٔ M – IV). پس اگر عدد X عدد ۷ را پدید آورد عدد HX واقعاً عدد ۲ ۷ ۲ ۷ را پدید خواهد آورد.

اکنون که عدد H را پیدا کردیم، عدد N را برابر ۲ H۲H می گیریم و بنابراین عدد ۵٤٦٤۲۵٤٦٤۲ خودش را پدید می آورد (خواننده می تواند مستقیماً آزمایش کند).

اکنون که می دانیم عدد ۵٤٦٤۲۵٤٦٤۲ خودش را پدید می آورد، پس این عدد بایستی عدد رمز ترکیبی که قفل را باز می کند باشد. و این ترکیب (رمز) عبارت است از: RVLVQRVLVQ

البته مسئلهٔ قفل مونت کارلو را می توان به‌جای تطبیق دادن آن با یک مسئلهٔ ماشین اعداد (ماشین حساب) و پیدا کردن راه‌حل، به‌طور مستقیم نیز حل کرد. اما من روش تبدیل مسئله را انتخاب کردم، زیرا از یک سو ازنظر تاریخی کارآگاه کریگ راه‌حل مسئله را به این صورت پیدا کرد و ازسوی دیگر فکر کردم برای خواننده

جالب توجّه است که ببیند چگونه دو مسئلهٔ ریاضی با دو محتوای گوناگون می توانند صورت انتزاعی یکسان داشته باشند.

برای اینکه مستقیماً آزمایش کنیم که ترکیب RVLVQRVLVQ باخود ارتباط ویژه دارد (و بنابراین قفل را باز می کند) به‌صورت زیر استدلال می کنیم: ترکیب QRVLVQ با ترکیب RVLV ارتباط ویژه دارد (برطبق ویژگی Q)؛ بنابراین ترکیب VQRVLVQ بامقلوب RVLV یعنی VLVR ارتباط ویژه دارد (برطبق ویژگی V). بنابراین ترکیب LVQRVLVQ با ترکیب QVLVR ارتباط ویژه دارد (برطبق ویژگی L)، و بنابراین VLVQRVLVQ با مقلوب QVLVR یعنی RVLVQ ارتباط ویژه دارد. در نتیجه (برطبق ویژگی R)، ترکیب RVLVQRVLVQ با تکرار RVLVQ یعنی RVLVQRVLVQ ارتباط ویژه دارد. و بنابراین RVLVQRVLVQ ارتباط ویژه با خودش دارد.

فصل چهارم

قابل حل یا غیرقابل حل

۱۴
ماشین منطق فرگوسن

چند ماه پس از حل اسرار قفل مونت کارلو، کارآگاه کریگ و مک کالک برای آشنا شدن با ماشین منطق فرگوسن به دیدن او رفتند. گفتگو خیلی زود به مسئلهٔ اثبات‌پذیری کشانیده شد.

فرگوسن گفت: «بایستی رویداد جالب توجّه و آموزنده‌ای را برایتان نقل کنم. در یک امتحان هندسه از دانش‌آموزی خواسته شده بود که گزارهٔ فیثاغورس[۱] را اثبات کند. دانش‌آموز ورقهٔ سفید تحویل داد و معلم ریاضی به‌او نمرهٔ صفر داد و در حاشیهٔ ورقه‌اش نوشت: «اثبات نکرده است!». پس از آن دانش‌آموز به معلم خود مراجعه کرد و گفت «استاد، از کجا می‌دانید که آنچه من به‌شما تحویل دادم یک اثبات نیست؟ شما هیچ‌گاه در این درس مفهوم **اثبات** را تعریف نکرده‌اید! شما مفاهیمی مانند مثلث، مربع، دایره، موازی‌بودن، عمودبودن و مفاهیم دیگر هندسی را خیلی عالی تعریف کرده‌اید، اما هیچ‌گاه دقیقاً روشن نکرده‌اید که مفهوم کلمهٔ

۱ــ Pythagoras یکی از فیلسوفان و ریاضیدانان یونانی قرن ششم پیش از میلاد. او و پیروانش واضع تئوری اعداد و تئوری ریاضی و موسیقی بوده‌اند. از مشهورترین کارهایش در هندسه اثبات گزاره‌ای است که به‌او نسبت می‌دهند.

اثبات چیست. پس چگونه با این اطمینان می گویید ورقه ای که من به شما تحویل دادم اثبات ندارد؟ چطور **ثابت** می کنید که این کار یک اثبات نیست؟»

کریگ در حالی که کف می زد فریاد زد: «آفرین! این پسر پیشرفت خواهد کرد.» و سپس پرسید «معلم او چه واکنشی نشان داد؟»

فرگوسن پاسخ داد: «اوه، متأسفانه، معلم شخصی خشک و بی ذوق بود و قدرت تخیّل نداشت و از درسهای ریاضی دیگر دانش آموز نیز، به عنوان اینکه به معلم خود اسائهٔ ادب کرده است، نمرهٔ بیشتری کسر کرد.

کریگ با تنفر اظهار تأسف کرد! «اگر من معلم آن پسر بودم به سبب این دقّت زیرکانه بالاترین نمره را به او می دادم!»

فرگوسن پاسخ داد: «البته من نیز چنین می کردم. اما می دانید که متأسفانه بسیاری از این معلمها همین طورند. هیچ گونه قدرت خلاّقیّت مستقل ندارند و از دانش آموزی که به طور مستقل فکر می کند خوششان نمی آید.»

مک کالک گفت: «باید اعتراف کنم که اگر من هم به جای آن معلم بودم نمی توانستم به پرسش دانش آموز پاسخ دهم. البته من او را به سبب پرسشی که طرح کرده بود تمجید می کردم، اما نمی توانم تصوّر کنم که چگونه می توانستم پرسش او را پاسخ دهم؛ به هرحال، اثبات یعنی چه؟ من وقتی که یک اثبات درست را مطالعه می کنم، به صورتی آن را درک می کنم و معمولاً متوجه یک استدلال نادرست نیز می شوم، با این همه اگر از من بپرسند که تعریف **اثبات** چیست از پاسخ عاجز می مانم!»

فرگوسن پاسخ داد: «تقریباً همهٔ ریاضیدانهای عملی همین وضعیّت را دارند. بیش از نود و نُه درصد آنها گرچه نمی توانند مفهوم اثبات را تعریف کنند اما می توانند یک اثبات درست را بفهمند یا نادرستی یک اثبات را تشخیص دهند. یکی از مسائلی که ما منطق دانها به آن علاقه مند هستیم تحلیل مفهوم **اثبات** است و می کوشیم که آن را مانند هرمفهوم دیگر

ریاضی تا حد امکان روشن کنیم.»

کریگ پرسید: «بیشتر ریاضیدانها درحالی که نمی توانند اثبات را تعریف کنند، می توانند درستی یا نادرستی یک اثبات را تشخیص دهند، چرا تعریف اثبات بایستی این قدر اهمیّت داشته باشد؟»

فرگوسن پاسخ داد: «دلایل بسیار وجود دارد. گرچه حتی اگر یک دلیل هم وجود نداشت باز من مایل می بودم که تعریف اثبات را به خاطر خودش هم که باشد بدانم. در تاریخ ریاضیات بسیار اتّفاق افتاده است که برخی مفاهیم، مثلاً مفهوم پیوستگی، مدتها پیش از آنکه به روشنی تعریف شوند، با فکر عادی شناخته شده بودند. اما وقتی که یک مفهوم تعریف می شود ابعاد جدیدی پیدا می کند. گزاره هایی را می توان در ارتباط با آن ثابت کرد که اگر معیار دقیقی وجود نداشت که این مفهوم چه وقت باید به کار رود و چه وقت نباید چنین کشفهایی اگر غیرممکن نمی بود دست کم بسیار دشوار بود. مفهوم **اثبات** نیز از این قاعده مستثنی نیست؛ اتفاق افتاده است که یک اثبات سبب مطرح شدن یک اصل جدید - مانند **اصل انتخاب** - شده است و بحثهای بسیاری در مورد درست بودن اصل جدید صورت گرفته است. یک تعریف دقیق از «اثبات» مشخص می کند که دقیقاً کدام یک از اصول ریاضی در استدلال موردنظر به کار گرفته شده و کدام یک به کار گرفته نشده است.»

ازسوی دیگر، در مواردی که می خواهیم نشان دهیم که یک گزارهٔ ریاضی براساس عده ای اصول معین **اثبات پذیر** نیست، داشتن تعریف دقیق از مفهوم «اثبات» اهمیّت بسیار پیدا می کند. مورد مشابه، مسئلهٔ ترسیم به کمک خط کش و پرگار در هندسهٔ اقلیدسی است: هنگامی که بخواهیم امکان ناپذیری یک ترسیم معین - مثلاً تقسیم یک زاویه به سه قسمت مساوی، مربع کردن یک دایره، یا ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب دیگر باشد - را به کمک خط کش و پرگار نشان دهیم، به کار

گرفتن مفهوم ترسیم اهمیّت بیشتری پیدا می کند تا بخواهیم امکانپذیری یک ترسیم را نشان دهیم. مسئلهٔ اثبات‌پذیری نیز همین‌طور است. برای نشان‌دادن اینکه یک گزاره براساس عده‌ای اصول معین اثبات‌پذیر نیست به کار گرفتن مفهوم **اثبات** خیلی بیشتر اهمیّت دارد تا موقعی که با موردی مثبت سروکار داریم - یعنی موردی‌که بخواهیم نشان دهیم که یک گزاره براساس اصولی معین اثبات‌پذیر است.

یک معمای گودلی

فرگوسن ادامه داد: «در یک سیستم اصول، اثبات شامل رشتهٔ معینی از عبارتهاست که برطبق قاعده‌هایی دقیق ساخته می‌شوند. به‌آسانی می‌توان به‌صورت صرفاً مکانیکی معین کرد که آیا رشته‌ای از عبارتها تشکیل یک اثبات را در سیستم می‌دهند یا نه. درواقع می‌توان به‌سادگی ماشینی ساخت که این کار را انجام دهد. اما ساختن ماشینی که بتواند تعیین کند که دریک سیستم اصول کدام عبارتها اثبات‌پذیرو کدام عبارتها اثبات‌ناپذیرند موضوع کاملاً متفاوتی است. اما این موضوع که آیا می‌توان چنین ماشینی ساخت یا نه احتمالاً به سیستم ما بستگی دارد.....

درحال حاضر، من علاقه‌مند به اثبات مکانیکی گزاره‌ها هستم، یعنی علاقه‌مند به ماشینهایی هستم که حقایق گوناگون ریاضی را اثبات می‌کنند.» فرگوسن درحالی که باغرور به یک دستگاه فوق‌العاده عجیب اشاره می‌کرد درادامهٔ سخن گفت: «این آخرین اختراع من است.»

کریگ و مک کالک چند دقیقه‌ای آن ماشین را نگریستند وسعی کردند که طرز کارش را بفهمند.

سرانجام کریگ پرسید: «بالاخره این ماشین چه‌نوع کاری انجام می‌دهد؟»

فرگوسن پاسخ داد: «واقعیّتهای گوناگون مربوط به اعداد صحیح

مثبت را اثبات می کند. فعلاً مشغول طرّاحی زبانی هستم که شامل اسامی مجموعه های گوناگون اعداد - خصوصاً اعداد صحیح مثبت - باشد. با این زبان عدهٔ مجموعهٔ اعداد **نامپذیر** بیشمار است. مثلاً برای مجموعهٔ اعداد زوج، برای مجموعهٔ اعداد فرد، برای مجموعهٔ اعداد اول، برای مجموعهٔ اعداد قابل تقسیم بر ۳ و به‌طور کلی برای هرمجموعه ای که در تئوری اعداد مورد توجّه است، می توان یک نام در این زبان تعیین کرد. اما گرچه عدهٔ مجموعه های نامپذیر بیشمار است، عدهٔ آنها از عدهٔ اعداد صحیح مثبت بیشتر نیست. و به هرعدد صحیح مثبت n یک مجموعهٔ معین نامپذیر A_n مرتبط می شود. بنابراین می توان همهٔ مجموعه های نامپذیر را به صورت رشتهٔ نامعین $A_۱$ و $A_۲$ ، A_n ... مرتب کرد (برای فهم مطلب، کتابی را با بینهایت صفحه درنظر بگیرید که در آن به ازای هرعدد صحیح مثبت n ، در صفحهٔ nام کتاب یک مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت توضیح داده شده باشد و مجموعه‌ای را که در صفحهٔ nام تشریح شده است مجموعهٔ A_n تصوّر کنید).

اکنون علامت «∈» را به معنی «متعلق است به» یا «عضوی است از» به کار می گیریم و به ازای هر عدد x و هر عدد y عبارت $x \in A_y$ را به صورت «x به مجموعهٔ A_y متعلق است» می خوانیم. این تنها نوع عبارتی است که ماشین من بررسی می کند. کار ماشین این است که با آزمایش کشف کند چه اعدادی به چه مجموعه های نامپذیر تعلق دارند.

اکنون برای هر عبارت $x \in A_y$ یک عدد **رمز** درنظر می گیریم، و عدد رمز را در پایهٔ ۱۰ طوری می نویسیم که از تعداد x رقم ۱ و به دنبال آن تعداد y رقم ۰ تشکیل شود. مثلاً عدد رمز عبارت ۳ $\in A_۲$ برابر ۱۱۱۰۰ و عدد رمز ۱ $\in A_۵$ برابر ۱۰۰۰۰۰ خواهد بود. به ازای دو عدد x و y جملهٔ x * y را به عنوان عدد رمز عبارت $x \in A_y$ تعریف می کنیم. بنابراین x * y یعنی تعداد x رقم ۱ که به دنبال آن y رقم ۰ قرار گرفته است.»

فرگوسن ادامه داد: «این ماشین به صورت زیر کار می کند؛ هرگاه کشف کند که عدد x به مجموعهٔ A_y تعلق دارد، عدد $y * x$ یعنی عدد رمز عبارت $x \in A_y$ را چاپ می کند. اگر ماشین بنویسد $x * y$ در آن‌صورت می گوییم ماشین عبارت $x \in A_y$ را **اثبات** کرده است. و عبارت $x \in A_y$ را **اثبات‌پذیر** می نامیم (به وسیلهٔ ماشین)، هرگاه ماشین بتواند عدد $x * y$ را چاپ کند.»

اما من می دانم که استنتاج این ماشین همیشه درست است، به این معنی که هر عبارتی که به وسیلهٔ ماشین اثبات پذیر باشد، آن عبارت واقعاً درست است.»

کریگ صحبت فرگوسن را قطع کرد و گفت: «یک دقیقه صبر کنید! منظورتان از «**درست**» چیست؟ چگونه «**درست بودن**» از «**اثبات‌پذیر بودن**» متمایز می شود؟»

فرگوسن پاسخ داد: «بلی، این دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند: می گوییم عبارت $x \in A_y$ درست است هرگاه عدد x واقعاً عضو مجموعهٔ A_y باشد. این موضوع کاملاً با وقتی که بگوییم ماشین قادر به چاپ کردن عدد $x * y$ است تفاوت دارد، و در این مورد فقط می‌توانیم بگوییم که عبارت $x \in A_y$ به وسیلهٔ ماشین **اثبات‌پذیر** است.»

کریگ گفت: «حالا متوجّه شدم. وقتی که عبارت اثبات‌پذیر به‌وسیلهٔ ماشین یک عبارت درست باشد می گویید که ماشین درست عمل می کند و منظورتان این است که ماشین عدد $x * y$ را چاپ نمی کند مگر آنکه x واقعاً عضو مجموعهٔ A_y باشد. آیا درست می گویم؟»

فرگوسن پاسخ داد: «دقیقاً!»

کریگ پرسید: «بگویید ببینم، چطور می دانید که ماشین شما همیشه درست عمل می کند؟»

فرگوسن پاسخ داد: «برای پاسخ دادن به این پرسش بایستی همهٔ

جزئیات مربوط به ماشین را برایتان توضیح دهم. اعمال ماشین براصول معیّنی از اعداد صحیح مثبت مبتنی است. این اصول به صورت دستورالعملهای معین در ماشین برنامه‌ریزی شده‌اند. اصول مذکور از واقعیّتهای معروف ریاضی هستند و چون همگی درست هستند و هراستنتاج منطقی از گزاره‌های درست بایستی درست باشد، بنابراین ماشین قادر به اثبات یک عبارت نادرست نیست. اگر مایلید می‌توانم اصول مورد بحث را برایتان شرح دهم. سپس خودتان خواهید دید که ماشین فقط عبارتهای درست را می‌تواند اثبات کند.»

مک کالک گفت: «پیش از این کار مایلم پرسش دیگری بکنم. فرض کنید من موقتاً بپذیرم که هرعبارت اثبات‌پذیر به وسیلهٔ ماشین یک عبارت درست باشد. آیا عکس گزاره نیز درست است؟ یعنی آیا ماشین می‌تواند هرعبارت درست به‌شکل $x \in A_y$ را اثبات کند؟ به‌بیان دیگر آیا ماشین می‌تواند همهٔ عبارتهای به‌شکل $x \in A_y$ را اثبات کند، یا فقط برخی ازآنها را اثبات می‌کند؟»

فرگوسن پاسخ داد: «پرسش بسیار مهمی است، اما افسوس که پاسخ آن را نمی‌دانم! این دقیقاً همان مسئلهٔ اصلی است که تاکنون نتوانسته‌ام حل کنم! مدتهاست که گاه و بیگاه به این مسئله اندیشیده‌ام، اما هنوز به‌جایی نرسیده‌ام. به‌طور قطع می‌دانم که ماشین می‌تواند هرعبارت $x \in A_y$ را، که نتیجه‌ای منطقی از اصول است، اثبات کند، اما نمی‌دانم که آیا عدهٔ اصولی را که به ماشین برنامه داده‌ام کافی است یانه؟ اصول موردبحث تقریباً همهٔ آنچه را ریاضیدانها درمورد سیستم اعداد صحیح مثبت می‌دانند دربر می‌گیرد، با این همه ممکن است هنوز این عده اصل برای تعیین اینکه کدام عدد x به کدام مجموعهٔ نامپذیر A_y متعلق است کافی نباشد. تابه‌حال هرعبارت $x \in A_y$ را که آزمایش کرده و درستی آن‌را براساس صرفاً مبانی ریاضی تحقیق کرده‌ام، استنتاجی منطقی از اصول

مذکور بوده است، و بنابراین ماشین می تواند آن‌را اثبات کند. اما فقط به این دلیل که تا کنون نتوانسته ام یک عبارت درست را که ماشین قادر به اثبات آن نباشد پیدا کنم نباید نتیجه گرفت که چنین عبارتی وجود ندارد. ممکن است من هنوز آن‌را پیدا نکرده باشم، یا ممکن است ماشین قادر به اثبات کلیّهٔ عبارتهای درست باشد و من هنوز نتوانسته‌ام این واقعیّت را ثابت کنم. درهرحال درست نمی دانم موضوع چگونه است!»

در این مرحله فرگوسن برای کوتاه کردن مطلب همهٔ اصولی را که مورد استفادهٔ ماشین واقع می شود و همچنین قاعده های صرفاً منطقی را که با استفاده از آنها ماشین می تواند براساس عبارتهای قبلی عبارتهای جدید را اثبات کند برای کریگ و مک کالک توضیح داد. وقتی که کریگ و مک کالک این جزئیات از کار ماشین را دانستند، بیدرنگ متوجّه شدند که ماشین واقعاً دارای درستی است - یعنی فقط عبارتهای درست را اثبات می کند. اما این مسئله که آیا ماشین همهٔ عبارتهای درست را می تواند ثابت کند یا فقط برخی را، هنوز حل نشده مانده بود. درطی چند ماه بعد، این سه نفر دائماً جلسه داشتند و به آهستگی اما با اطمینان به حل مسئله نزدیک شدند تا سرانجام آن‌را حل کردند.

خواننده را با همهٔ جزئیات دردسر نمی دهم، و فقط مواردی را که به حل مسئله مربوط می شوند توضیح می دهم: نقطهٔ عطف در بررسیهای این سه دوست هنگامی پدید آمد که سه خاصیّت اصلی ماشین را کشف کردند. آن خواصّ برای حل مسئله کفایت می کرد. تصوّر می کنم نخست کریگ و مک کالک متوجه این سه خاصیّت ماشین شدند، امّا این فرگوسن بود که موضوع را نهایی کرد. به زودی این خواصّ را برایتان توضیح می دهم، امّا اول با چند علامت اختصاری آشنا می شویم.

اگر A مجموعهٔ معینی از اعداد صحیح مثبت باشد، کلیهٔ اعداد صحیح مثبتی را که در A نیستند به **عنوان مجموعهٔ مکمل** A تعریف

می کنیم و با $\bar{A}$ نمایش می دهیم. (مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد زوج باشد، مکمل آن $\bar{A}$ مجموعهٔ اعداد فرد خواهد بود، یا اگر A مجموعهٔ اعداد قابل تقسیم بر ۵ باشد مکمل آن $\bar{A}$ مجموعهٔ اعداد غیرقابل تقسیم بر ۵ خواهد بود).

اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد، مجموعهٔ A^* را به عنوان مجموعهٔ متشکل از اعداد صحیح مثبت x تعریف می کنیم با این شرط که $x * x$ عضوی از A باشد. بنابراین وقتی می گوییم x عضو A^* است معادل این است که بگوییم $x * x$ عضو A است.

اکنون سه خاصیّت اصلی ماشین را که کریگ و مک کالک کشف کردند توضیح می دهیم:

خاصیّت ۱: مجموعهٔ A_8 مجموعهٔ کلیّهٔ اعدادی است که ماشین می تواند چاپ کند.

خاصیّت ۲: به ازای هر عدد مثبت n ، مجموعهٔ $A_{3 \times n}$ مکمل مجموعهٔ A_n است (منظور از $3 \times n$ یعنی ۳ ضرب در n).

خاصیّت ۳: به ازای هر عدد مثبت n ، مجموعهٔ $A_{3 \times n+1}$ همان مجموعهٔ A_n^* است (مجموعهٔ A_n^* یعنی مجموعهٔ اعداد x به طوری که $x * x$ عضو A_n باشد).

—۱

از خواص ۱ ، ۲ و ۳ می توان با استدلالی پیچیده نتیجه گرفت که ماشین فرگوسن قادر به اثبات همهٔ عبارتهای درست نیست! خواننده باید عبارتی پیدا کند که درست باشد اما به وسیلهٔ ماشین اثبات پذیر نباشد. به بیان دیگر باید اعداد n و m (n و m ممکن است متفاوت یا مساوی باشند) را به گونه ای پیدا کند که n درواقع عضو A_m باشد، اما ماشین نتواند عدد $n * m$ را که عدد رمز عبارت $n \in A_m$ است چاپ کند.

۲—

در حل مسئلهٔ یک اعداد n و m هردو کوچکتر از ۱۰۰ به‌دست آمده‌اند. مسئله یک پاسخ دیگر، که n و m هردو کوچکتر از ۱۰۰ باشند، نیز دارد (در اینجا نیز n می‌تواند با m برابر یا متفاوت باشد، نمی گویم کدام‌یک). آیا می‌توانید این پاسخ را پیدا کنید؟

۳—

اگر برای n و m محدودیتی قائل نباشیم مسئله چند پاسخ خواهد داشت؟ یعنی چند عبارت وجود دارد که درست هستند اما به وسیلهٔ ماشین فرگوسن اثبات‌پذیر نیستند؟

سرانجام

فرگوسن از آرزوی ساختن ماشینی که بتواند همهٔ عبارتهای درست حساب را اثبات کند و هیچ عبارت نادرست را اثبات نکند مأیوس نشد و ماشینهای منطق خیلی زیادی ساخت*. اما در مورد هرماشین یا خودش یا کریگ و مک کالک یک عبارت درست که ماشین نمی‌توانست اثبات کند کشف می کردند. سرانجام فرگوسن از ساختن یک دستگاه صرفاً مکانیکی که هم درست عمل کند و هم بتواند عبارتهای درست حساب را اثبات کند صرف نظر کرد.

سبب اینکه تلاش قهرمانانهٔ فرگوسن شکست خورد مربوط به کمبود نبوغ او نبود. باید به‌یاد آوریم که او دهها سال پیش از منطق‌دانهایی مانند گودل، تارسکی[۱]، کلین[۲]، تورینگ[۳]، پست[۴]، چرچ[۵] و مانند آنها، که

* برخی از آن ماشینها خیلی جذاب بودند و امیدوارم بتوانم در کتاب بعدی ام در مورد آنها صحبت کنم.

۱—آلفرد تارسکی (Alfred Tarski)، ریاضیدان و منطقی لهستانی که درسال ۱۹۰۲ درورشوبه دنیا

به زودی با اکتشافاتشان آشنا خواهیم شد، می زیست. اگر زنده می ماند و از اکتشافات آنان آگاه می شد می فهمید که شکست او تنها به این سبب بود که آنچه را او می خواست انجام دهد در واقع چیزی غیرممکن بود! و بنابراین با درود به فرگوسن و همکارانش کریگ و مک کالک سی یا چهل سال به جلو می پریم و در بخش بعد نگاهی به سال تعیین کنندهٔ ۱۹۳۱ می افکنیم.

پاسخها

۱–

عبارت $A_{۷۵}\in$ ۷۵ که عبارتی درست است اما ماشین نمی تواند آن را اثبات کند یک پاسخ مسئله است. استدلال به شرح زیر است:

فرض کنید عبارت $A_{۷۵}\in$ ۷۵ نادرست باشد. در این صورت عدد ۷۵ به مجموعهٔ $A_{۷۵}$ تعلق ندارد و بنابراین عضو مجموعهٔ $A_{۲۵}$ است (زیرا برطبق خاصیّت ۲ مجموعهٔ $A_{۷۵}$ مکمل مجموعهٔ $A_{۲۵}$ خواهد بود). از اینجا برطبق خاصیّت ۳ نتیجه می شود که ۷۵*۷۵ عضو مجموعهٔ $A_{۸}$ است، زیرا ۱+۸×۳=۲۵ و بنابراین ماشین می تواند عدد رمز ۷۵*۷۵ را چاپ کند. به بیان دیگر عبارت $A_{۷۵}\in$ ۷۵ به وسیلهٔ ماشین اثبات پذیر است. پس اگر عبارت $A_{۷۵}\in$ ۷۵ نادرست باشد به وسیلهٔ ماشین اثبات پذیر خواهد بود. امّا می دانیم که ماشین درست عمل می کند و عبارتهای

آمد، مطالعات مهمی در زمینهٔ جبرعمومی، منطق ریاضی، تئوری مجموعه ها انجام داد.

۲– استفن کل کلین (Stephen Cole Kleene)، ریاضیدان و منطقی امریکایی که در سال ۱۹۰۹ به دنیا آمد و مطالعات مهمّی در زمینهٔ منطق ریاضی و تئوری مجموعه ها انجام داد.

۳– الن ماتیسن تورینگ (Alen Mathison Turing ۱۹۵٤ - ۱۹۱۲ میلادی)، ریاضیدان و منطقی انگلیسی و ازپیشروان تئوری کامپیوتر بود ونقش مهمی در تحلیلهای منطقی فرایندهای کامپیوتر داشت.

٤– امیل لئون پست (Emil Leon Post ۱۹۵٤ - ۱۸۹۷)، ریاضیدان لهستانی که بعداً تبعهٔ امریکا شد.

۵– الونزو چرچ (Alonzo Church)، فیلسوف، ریاضیدان و منطقی امریکایی بود که شهرتش بیشتر به سبب یافتن گزاره‌ای است که به گزارهٔ چرچ معروف است – م.

نادرست را اثبات نمی کند. بنابراین عبارت $۷۵ \in A_{۷۵}$ نمی تواند نادرست باشد و بایستی درست باشد.

چون عبارت $۷۵ \in A_{۷۵}$ درست است، پس عدد ۷۵ عضو مجموعهٔ $A_{۷۵}$ است و نمی تواند متعلق به مجموعهٔ $A_{۲۵}$ باشد (برطبق خاصیّت ۲)، و بنابراین عدد $۷۵ * ۷۵$ نمی تواند عضو $A_{۸}$ باشد، زیرا اگر $۷۵ * ۷۵$ عضو $A_{۸}$ باشد در آن صورت برطبق خاصیّت ۳ عدد ۷۵ به مجموعهٔ $A_{۲۵}$ متعلق خواهد شد. چون $۷۵ * ۷۵$ به $A_{۸}$ متعلق نیست، پس عبارت $۷۵ \in A_{۷۵}$ به وسیلهٔ ماشین اثبات پذیر نیست. درنتیجه عبارت $۷۵ \in A_{۷۵}$ درست است اما ماشین نمی تواند آن را اثبات کند.

-۲

پیش از یافتن پاسخهای دیگر به واقعیّت عام زیر توجّه می کنیم: مجموعهٔ K را به عنوان مجموعهٔ کلّیهٔ اعداد x با این خاصیّت که عبارت $x\in A_x$ به وسیلهٔ ماشین اثبات پذیر نباشد تعریف می کنیم. به بیان دیگر k مجموعهٔ کلّیهٔ اعداد x است که در آن $x * x$ را ماشین نمی تواند چاپ کند. اکنون $A_{۷۵}$ برابر K است، زیرا اگر x به $A_{۷۵}$ متعلق باشد یعنی به $A_{۲۵}$ متعلق نیست که این یعنی $x * x$ به $A_{۸}$ متعلق نیست و چون $A_{۸}$ مجموعهٔ کلّیهٔ اعدادی است که ماشین می تواند چاپ کند پس $A_{۷۵} = K$ ، اما $A_{۷۳}$ نیز برابر K است. زیرا اگر x به $A_{۷۳}$ متعلق باشد، یعنی $x * x$ به $A_{۲۴}$ تعلق دارد (برطبق خاصیّت ۳) زیرا $۷۳=۳\times۲۴+۱$، که این بدان معنی است که $x * x$ به $A_{۸}$ تعلق ندارد (برطبق خاصیّت ۲). پس $A_{۷۳}$ عبارت است از مجموعهٔ کلّیهٔ اعداد x که در آن $x * x$ به $A_{۸}$ تعلق ندارد، یا به بیان دیگر $A_{۷۳}$ مجموعهٔ اعداد x است به طوری که $x\in A_x$ اثبات پذیر به وسیلهٔ ماشین نباشد. بنابراین $A_{۷۳}$ و $A_{۷۵}$ برابرند زیرا هردو برابر مجموعهٔ K هستند. از این گذشته، به ازای هرعدد n با خاصیّت $A_n = K$ ، عبارت $n\in A_n$ بایستی درست امّا به وسیلهٔ ماشین اثبات ناپذیر باشد، که این را می توان اساساً با همان استدلال حالت خاصّ $n=۷۵$ ثابت کرد (دربخش بعد یک استدلال کلیتر ارائه خواهیم داد). پس عبارت $۷۳ \in A_{۷۳}$ نمونهٔ دیگری است از یک عبارت درست که عدد رمز آن را ماشین نمی تواند بیرون دهد.

-۳

به ازای هرعدد n ، مجموعهٔ $A_{۹\times n}$ با مجموعهٔ A_n برابر است، زیرا $A_{۹\times n}$ مکمل $A_{۳\times n}$ است و $A_{۳\times n}$ مکمل A_n است، بنابراین $A_{۹\times n}$ با A_n برابر است. پس

مجموعهٔ $A_{۶۷۵}$ با مجموعهٔ $A_{۷۵}$ برابر است و بنابراین $۶۷۵ \in A_{۶۷۵}$ یک پاسخ دیگر است. همچنین $۲۱۷۵ \in A_{۲۱۷۵}$ نیز یک پاسخ است. درواقع عدهٔ عبارتهای درست که ماشین فرگوسن نمی‌تواند اثبات کند بینهایت است: به‌طور کلّی برای هرعدد n که برابر حاصلضرب عدد ۷۵ در مضربی از عدد ۹ یا برابر حاصلضرب عدد ۷۳ در مضربی از عدد ۹ باشد، عبارت $n \in A_n$ درست است، امّا ماشین نمی‌تواند آن را اثبات کند.

۱۵

اثبات‌پذیری و درستی

سال ۱۹۳۱ میلادی (۱۳۱۰ شمسی) در تاریخ منطق ریاضی واقعاً نقطهٔ عطف مهمّی به شمار می آید. در این سال بود که کورت گودل گزارهٔ مشهورِ خود، **کمال ناپذیری**، را به‌چاپ رساند. گودل رسالهٔ* دوران‌ساز خودرا به‌شرح زیر شروع می کند:

تکامل ریاضیات درجهت دقّت بیشتر موجب شده است که شاخه های بسیاری از آن به‌شکل صوری درآید، به‌طوری که با استفاده از عدهٔ کمی قواعد مکانیکی می‌توان اثبات گزاره ها را انجام داد. جامعترین سیستم صوری در حال حاضر از یک سو اصول ریاضیات نوشتهٔ وایتهد و راسل[1] و ازسوی دیگر سیستم اصول تئوری مجموعه های زرملو ــ فرانکل[2]

* در بارهٔ گزاره‌های صوری تصمیم ناپذیر **اصول ریاضیات** (نوشتهٔ وایتهد و راسل) و سیستمهای وابسته به‌آن – م.

۱ــ**برتراند راسل** (Bertrand Russell، ۱۹۷۰ - ۱۸۷۲)، ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی که از مشهورترین کتابهایش **رساله‌ای درباب مبانی هندسه**، **اصول ریاضیات** و **تاریخ فلسفهٔ غرب** را می توان نام برد. **آلفرد وایتهد** (Alfred Whitehead، ۱۹۴۷ - ۱۸۶۱)، ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی بود. در سال ۱۹۱۰ کتاب مشهور خود **اصول ریاضیات** (Principia Mathematica) را با همکاری برتراند راسل نوشت. ازکتابهای دیگراو **اصول دانش طبیعی**، **ماجراهای اندیشه‌ها** و **ماهیّت حیات** را

است. این هردو سیستم آن‌قدر جامعند که همهٔ روشهای اثبات را، که امروز در ریاضیات به کار می روند، می توان درقالب آنها بیان کرد، یعنی می توان آنها را به‌چند اصل و قاعدهٔ استنتاج کاهش داد. بنابراین منطقی است که تصوّر کنیم با این اصول و قواعد استنتاج بتوان **کلّیّهٔ** مسائل ریاضی قالب‌پذیر در این سیستمها را حل نمود. در ادامهٔ این بحث خواهید دید که واقعیّت چنین نیست و در هردو سیستم مذکور مسائلِ نسبتاً ساده‌ای در تئوری اعداد صحیح و مثبت وجود دارند که براساس اصول قابل حل نیستند.

گودل ادامه می دهد که این مطلب به ویژگی خاصّ دو سیستم مورد بحث بستگی ندارد بلکه در انواع بسیاری از سیستمهای ریاضی صادق است.

منظور از «انواع بسیاری» سیستمهای ریاضی چیست؟ تعبیرهای زیادی ارائه شده است، و درنتیجه گزارهٔ گودل به روشهای گوناگونی تعمیم داده شده است. باکمال تعجّب، یکی از سرراست‌ترین روشها، که برای خوانندهٔ معمولی نیز به‌آسانی قابل درک است، از ناشناخته‌ترین روشهای ارائه شده است. آنچه موضوع را عجیب‌تر می نماید این است که ناشناخته‌ترین روش همان روشی است که خود گودل در مقدّمهٔ نخستین مقاله‌اش ارائه کرده است! اکنون به‌شرح این روش می پردازیم.

یک سیستم اصول با خواص زیر را درنظر بگیرید. نخست برای مجموعه‌های گوناگون اعداد صحیح مثبت تعیین نام می کنیم و این مجموعه‌های نامپذیر را در یک رشتهٔ نامحدود A_1 و A_2، ...، A_n، ... مرتّب می کنیم (مانند سیستم فرگوسن در بخش قبل). عدد n را **شاخص** مجموعهٔ

می توان نام برد. برخی از کتابهای این دو فیلسوف به فارسی هم ترجمه شده‌اند.

۲ــآبراهام آدولف فرانکل (A. Adolf Fraenkel، ۱۹۶۵- ۱۸۹۱ میلادی)، ریاضیدان و منطقی اسرائیلی بود.

نامپذیر A می گوییم هرگاه داشته باشیم $A = A_n$ (بنابراین اگر به‌عنوان مثال مجموعه‌های A_2 و A_7 و A_{13} مساوی باشند اعداد ۲ و ۷ و ۱۳ شاخصهای این مجموعه خواهند بود). و مانند سیستم فرگوسن، به هرعدد x و هر عدد y یک عبارت ارتباط می دهیم - که به‌صورت $x\in A_y$ نوشته می شود - و اگر x به A_y تعلّق داشته باشد عبارت را درست و اگر x به A_y تعلّق نداشته باشد، عبارت را نادرست می نامیم. اما در اینجا فرض نمی کنیم که عبارت $x\in A_y$ تنها عبارت سیستم است، بلکه عبارتهای دیگر را نیز ممکن می دانیم. در هرحال هرعبارت را تحت عنوان **عبارت درست** یا **عبارت نادرست** طبقه‌بندی می کنیم.

به هرعبارت سیستم یک عدد رمز نسبت می دهیم و آن را **عدد گودل** می نامیم و $y * x$ را به‌عنوان عدد گودل عبارت $x\in A_y$ نمایش می دهیم (در اینجا نیازی نیست فرض کنیم که $x * y$ از x رقم ۱ و به‌دنبال آن y رقم ۰ تشکیل شده است، زیرا این هیچ شباهتی به رمزگذاری که گودل انجام داد ندارد. رمزگذاریهای متفاوت بسیاری می توان به کار گرفت. این موضوع که کدام مناسبتر است به سیستم مورد بررسی بستگی دارد. در هرحال در گزارهٔ عامی که اکنون می خواهیم اثبات کنیم هیچ فرضی در مورد رمزگذاری موردنیاز نیست).

عبارتهای معیّنی را به‌عنوان **اصول** سیستم درنظر می گیریم، و قاعده‌های معیّنی را که با استفاده از آنها بتوان عبارتهای گوناگونی را براساس اصول سیستم اثبات کرد طرح می کنیم. بنابراین هرعبارت درسیستم دارای یک خاصیّت کاملاً معیّن - یعنی خاصیّت اثبات‌پذیری - است. فرض می کنیم که سیستم درست است، به‌این مفهوم که هرعبارت اثبات‌پذیر در سیستم یک عبارت درست است. بنابراین خصوصاً هرگاه عبارت $x\in A_y$ در سیستم اثبات‌پذیر باشد در آن‌صورت x واقعاً عضو مجموعهٔ A_y خواهد بود.

فرض می کنیم P مجموعهٔ اعداد گودل مربوط به کلّیهٔ عبارتهای اثبات‌پذیر سیستم باشد. در اینجا نیز مکمّل هرمجموعهٔ A را با $\bar{A}$ نمایش می دهیم (مجموعهٔ اعدادی را که در A نیستند) و مجموعهٔ کلّیهٔ اعداد x را که درآن $x * x$ متعلق به A باشد،با A^* نشان می دهیم. اکنون سیستمهایی را مورد بررسی قرار می دهیم که در آنها شرایط G_1 و G_2 و G_3 به‌شرح زیر صادق باشد:

G_1 : مجموعهٔ P در سیستم نامپذیر است. به‌بیان دیگر دست کم یک عدد p وجود دارد به‌طوری که A_p مجموعهٔ اعداد گودل عبارتهای اثبات‌پذیر سیستم باشد (درسیستم فرگوسن عدد ۸ یک پاسخ p بود).

G_2 : مکمّل هر مجموعهٔ نامپذیر در سیستم، خود یک مجموعهٔ نامپذیر است. یعنی به ازای هرعدد x عددی مانند x' وجود دارد به‌طوری که $A_{x'}$ مکمّل A_x باشد (درسیستم فرگوسن $3 \times x$ یک پاسخ x' بود).

G_3 : برای هر مجموعهٔ نامپذیر A ، مجموعهٔ A^* نیز در سیستم نامپذیر است. به‌بیان دیگر به‌ازای هر عدد x عددی x^* پیدا می شود به‌طوری که A^*_x مجموعهٔ کلّیهٔ اعداد n که $n * n$ عضومجموعهٔ A_x هستند باشد. (درسیستم فرگوسن یک پاسخ برای x^* برابر $3 \times x + 1$ بود).

واضح است که شرایط F_1 و F_2 و F_3 درسیستم فرگوسن حالتهای خاصّ شرایط G_1 و G_2 و G_3 هستند. این شرایط عام از اهمیّت ویژه‌ای برخوردارند، زیرا درعدهٔ زیادی ازسیستمهای گوناگون ریاضی، ازجمله در دو سیستمی که درمقالهٔ گودل مطرح شده است، صدق می کنند. به‌بیان دیگر می توان کلّیهٔ مجموعه های نامپذیر را در یک رشتهٔ نامحدود A_1 ، A_2 ، ... ، A_n ، ... مرتّب کرد و رمزگذاری عبارتها را طوری انجام داد که شرایط G_1 و G_2 و G_3 صادق باشند، بنابراین هرچیزی که درمورد سیستمهای تابع شرایط G_1 و G_2 و G_3 صادق باشد درمورد بسیاری سیستمهای مهمّ نیز صادق خواهد بود.

اکنون می‌توان گزارهٔ گودل را به‌شکل انتزاعیِ زیر بیان و آن‌را اثبات کرد:

گزارهٔ G : در هرسیستم صحیح که تابع شرایط G_1 و G_2 و G_3 باشد بایستی یک عبارت درست اما اثبات‌ناپذیر در سیستم وجود داشته باشد.

اثبات گزارهٔ G تعمیمی ساده از اثباتی است که خواننده قبلاً در سیستم فرگوسن باآن آشنا شد: فرض می کنیم K مجموعهٔ اعداد x باشد به‌طوری که $x * x$ عضو مجموعهٔ P نباشد. چون P نامپذیر است (برطبق شرط G_1) پس مکمّل آن $\bar{P}$ نیزنامپذیر است (برطبق شرط G_2)، وبنابراین مجموعهٔ $\bar{P}*$ نامپذیر است (برطبق شرط G_3). امّا $\bar{P}*$ همان K است (زیرا $\bar{P}*$ عبارت است از مجموعهٔ اعداد x که در آن $x * x$ عضو $\bar{P}$ است یا به‌بیان دیگر مجموعهٔ اعداد x که در آن $x * x$ عضو P نیست). بنابراین مجموعهٔ K در سیستم نامپذیر است که این بدان معنی است که دست کم به‌ازای یک عدد k خواهیم داشت $K = A_k$. (در سیستم فرگوسن ۷۳ و همچنین ۷۵ برابر K بودند). بنابراین برای هر عدد x ، درستی عبارت $x \in A_k$ معادل است با این عبارت که $x * x$ عضو P نیست، و این معادل است با این موضوع که عبارت $x \in A_x$ درسیستم اثبات‌پذیرنیست. به‌ویژه اگر x را برابر k بگیریم درستی عبارت $k \in A_k$ برابر است با اثبات‌ناپذیری آن در سیستم، یعنی برابر است با درستی و اثبات‌ناپذیری یا نادرستی و اثبات‌پذیری آن در سیستم. مورد دوم غیرممکن است زیرا فرض کرده‌ایم که سیستم درست است، بنابراین بایستی مورد اول درست باشد - یعنی عبارت درست اما اثبات‌ناپذیر در سیستم است.

بحث: در کتاب، **نام این کتاب چیست؟** حالت مشابهی را مطرح کردم که ساکنان جزیره‌ای یا **نجیب** بودند که همیشه راست می گفتند یا **نانجیب** بودند که همیشه دروغ می گفتند. برخی افراد نجیب به عنوان نجیب **قطعی** و برخی افراد نانجیب به عنوان نانجیب **قطعی**

شناخته شده بودند. (مفهوم نجیب در آن کتاب با مفهوم عبارت درست در اینجا مطابقت دارد و مفهوم نجیب قطعی با مفهوم عبارت درست و اثبات‌پذیر تطبیق می‌کند.) اکنون غیرممکن است که یک ساکن جزیره بتواند بگوید: «من یک نجیب نیستم» زیرا یک فرد نجیب هیچ گاه دروغ نمی‌گوید و نمی‌تواند بگوید که نجیب نیست و یک فرد نانجیب هیچ گاه نمی‌تواند ادعا کند که نانجیب است، زیرا این ادعا درست است. امّا برای یک ساکن جزیره این امکان وجود دارد که بگوید: «من یک نجیب قطعی نیستم». در این ادعا تناقضی وجود ندارد، امّا یک نکتهٔ جالب توجّهی از آن نتیجه می‌شود و آن این است که گوینده بایستی **واقعاً** یک نجیب امّا نه یک نجیب قطعی باشد، زیرا یک فرد نانجیب هیچ گاه این ادعای درست را که او یک نجیب قطعی نیست ندارد و بنابراین گوینده بایستی یک نجیب باشد. چون او نجیب است پس گفتهٔ او بایستی درست باشد یعنی او واقعاً نجیب است امّا همان‌طور که خودش می‌گوید یک نجیب قطعی نیست— همان گونه که عبارت $k \in A_k$ که اثبات‌ناپذیری خود در سیستم را بیان می‌کند، بایستی درست امّا اثبات‌ناپذیر در سیستم باشد.

عبارتهای گودل و گزارهٔ تارسکی

اکنون یک سیستم را درنظر می‌گیریم که دست کم تابع شرایط G_2 و G_3 باشد (در حال حاضر شرط G_1 مطرح نیست). قبلاً مجموعهٔ اعداد گودل را که به عبارتهای اثبات‌پذیر در سیستم نسبت داده‌ایم با P نمایش دادیم. اکنون مجموعهٔ اعداد گودل مربوط به کلّیهٔ عبارتهای درست سیستم را با T نشان می‌دهیم. درسال ۱۹۳۳ آلفرد تارسکی، منطقدان مشهور، پرسش زیر را مطرح کرد و به آن پاسخ داد: آیا مجموعهٔ T در سیستم نامپذیر است یا نه؟

به این پرسش می‌توان صرفاً براساس شرایط G_2 و G_3 پاسخ داد. به زودی پاسخ را برایتان خواهم گفت، امّا نخست به یک پرسش اساسیتر در مورد سیستمهایی که دست کم تابع شرط G_3 هستند توجّه می کنیم.

به ازای هر عبارت X و هر مجموعهٔ A متشکل از اعداد صحیح مثبت، X را **عبارت گودل** A می نامیم هرگاه یا X درست بوده و عدد گودل آن عضو A باشد، یا X نادرست بوده و عدد گودل آن عضو A نباشد (می توان عبارت X را به صورت عبارتی تصوّر کرد که مبیّن این مفهوم باشد که عدد گودل خودش عضو مجموعهٔ A است. در این صورت اگر عبارت درست باشد، عدد گودل آن واقعاً عضو A خواهد بود و اگر عبارت نادرست باشد عدد گودل آن عضو A نخواهد بود). اکنون یک سیستم را **سیستم گودلی** می نامیم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ نامپذیر A در سیستم دست کم یک عبارت گودل برای A وجود داشته باشد.

گزاره‌ای که هم اکنون بیان می کنیم بسیار اساسی است:

گزارهٔ C: اگر یک سیستم تابع شرط G_3 باشد آن سیستم گودلی خواهد بود.

۱ ـــ

گزارهٔ C را اثبات کنید.

۲ ـــ

سیستم فرگوسن را به عنوان حالت خاصّ درنظر بگیرید. و یک عبارت گودل برای مجموعهٔ A_{100} بیابید.

۳ ـــ

فرض کنید یک سیستمی گودلی باشد (بدون آنکه الزاماً تابع شرط G_3 باشد). اگر سیستم درست باشد و تابع شرایط G_1 و G_2 باشد، آیا لزوماً

عبارتی که درست اما اثبات‌ناپذیر باشد در سیستم وجود دارد؟

—٤

فرض کنید T مجموعهٔ اعداد گودل مربوط به عبارتهای درست باشد. آیا برای T یک عبارت گودل وجود دارد؟ آیا برای مکمّل T یعنی $\bar{T}$ یک عبارت گودل وجود دارد؟

اکنون در موقعیّتی هستیم که می‌توانیم به مسئلهٔ تارسکی پاسخ دهیم. شکل انتزاعی گزارهٔ تارسکی به‌صورت گزارهٔ T است.

گزارهٔ T: در هر سیستمی که تابع شرایط G۲ و G۳ باشد، مجموعهٔ T که متشکل است از اعداد گودل مربوط به عبارتهای درست، در سیستم نامپذیر نیست.

یادداشت: برخی اوقات به‌جای کلمهٔ **نامپذیر** کلمهٔ **تعریف پذیر** به‌کار رفته است و گزارهٔ T برخی اوقات به‌صورت زیر بیان شده است: در سیستمهایی که به‌قدر کافی غنی هستند، درستی در سیستم در درون سیستم تعریف پذیر نیست.

—٥

گزارهٔ T را اثبات کنید.

—٦

بدنیست بدانیم که با اثبات گزارهٔ T بیدرنگ می‌توان گزارهٔ G را به‌عنوان گزارهٔ فرعی نتیجه گرفت. آیا می‌دانید چطور؟

شکلی دوگانه برای استدلال گودل

سیستمهای گوناگونی که با استفاده از استدلال گودل ناکامل بودن آنها

اثبات می شود دارای این خاصیّت نیز هستند که به هرعبارت X یک عبارت X' به‌نام نفی X مربوط می شود که شرط لازم و کافی برای درست بودن آن این است که X نادرست باشد. عبارت X را **اثبات ناپذیر** یا **ردشدنی** در سیستم می نامند، هرگاه نفی آن یعنی X' در سیستم اثبات پذیر باشد. اگر سیستم درست باشد هیچ عبارت نادرستی در سیستم اثبات ناپذیر نیست و هیچ عبارت درست در سیستم ردشدنی نیست.

دیدیم که از شرایط G_1 و G_2 و G_3 وجود عبارت گودل G برای مجموعهٔ $\bar{P}$ نتیجه می شود، و این عبارت G درست اما اثبات ناپذیر در سیستم است (بافرض صحیح بودن سیستم). چون G درست است، پس در سیستم ردشدنی نیست (برطبق فرض درست بودن سیستم). پس عبارت G نه اثبات پذیر و نه ردشدنی در سیستم است. (این گونه عبارتها را عبارتهای **تعیین ناپذیر** در سیستم می نامند).

در سال ۱۹۶۰ در گزارشی که تحت عنوان «تئوری سیستمهای صوری» نوشتم موضوع شکل «دوگانهٔ» استدلال گودل را مطرح کردم: به‌جای طرح عبارتی که مبیّن اثبات ناپذیری خود باشد، عبارتی می سازیم که مبیّن ردپذیری خود باشد. به‌بیان دقیقتر، اگر R مجموعهٔ اعداد گودل برای عبارتهای ردشدنی باشد و X یک عبارت گودل برای R باشد، X چه وضعیّتی خواهد داشت؟ این فکر در مسئلهٔ بعدی دنبال خواهد شد.

۷—

اکنون یک سیستم درست را که تابع شرط G_3 باشد درنظر بگیرید، اما به‌جای شرایط G_1 و G_2 فرض کنیم فقط شرط زیر برقرار باشد:

G_1' : مجموعهٔ R در سیستم نامپذیر است.

(پس فرض می کنیم که سیستم درست و تابع شرایط G_1' و G_3 باشد).

(الف) ثابت کنید که یک عبارت وجود دارد که نه اثبات‌پذیر و نه ردشدنی در سیستم است.

(ب) به‌عنوان یک مثال خاصّ، فرض کنید مجموعهٔ R برابر A_{10} باشد و به‌ازای هر عدد n مجموعهٔ A_{5xn} مجموعهٔ کلّیّهٔ اعداد x باشد و $x * x$ عضو A_n باشد (این یک حالت خاصّ برای G۳ است). اکنون مسئله از این قرار است که عبارتی پیدا کنیم که نه اثبات‌پذیر و نه ردشدنی در سیستم باشد و تعیین کنیم که آیا آن عبارت درست است یا نادرست.

ملاحظات: (۱) روش گودل برای پیدا کردن عبارت تعیین‌ناپذیر به ساختن یک عبارت گودل برای $\bar{P}$، مکمّل P، منتهی می‌شود؛ چنین عبارتی (که مبیّن اثبات‌ناپذیری خودش هست) بایستی درست اما اثبات‌ناپذیر در سیستم باشد. روش «دوگانه» به ساختن عبارت گودل برای مجموعهٔ R به‌جای مجموعهٔ $\bar{P}$ منتهی می‌شود.

چنین عبارتی (که مبیّن ردّنشدنی بودن خودش هست) بایستی نادرست اما ردنشدنی باشد (چون نادرست است اثبات شدنی هم نیست بنابراین تعیین‌پذیر در سیستم نیست). باید توضیح دهم که سیستمهایی که در نخستین مقالهٔ گودل بررسی شده‌اند تابع هر چهار شرط G۱ و G۲ G۳ و G'۱ هستند، بنابراین برای ساختن عبارتهای تعیین‌ناپذیر می‌توان از هردو روش استفاده کرد.

(۲) همانگونه که عبارتی که مبیّن اثبات‌ناپذیری خود باشد شبیه حالتی است که یک ساکن جزیرهٔ نجیبها ـ نانجیبها ادعا کند که یک نجیب قطعی نیست، عبارتی که مبیّن ردشدنی بودن خودش باشد نیز شبیه حالتی است که یک ساکن جزیره ادعا کند که **یک نانجیب** قطعی است. چنین فردی واقعاً نانجیب است اما نه یک نانجیب قطعی (اثبات این را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم).

پاسخها

۱ـ

فرض کنید سیستم تابع شرط G_3 باشد و S نشان‌دهندهٔ هرمجموعهٔ نامپذیر در سیستم باشد. در این صورت برطبق شرط G_3 مجموعهٔ S^* درسیستم نامپذیر است. پس عددی مانند b به‌طوری که $A_b = S^*$ باشد وجود دارد. اکنون عدد x فقط هنگامی عضو S^* خواهد بود که $x*x$ عضو S باشد. به‌ویژه اگر b را برابر x بگیریم، عدد b فقط درصورتی عضو A_b خواهد بود که $b*b$ عضو S باشد. همچنین، شرط لازم و کافی برای اینکه b عضو A_b باشد این است که عبارت $b \in A_b$ درست باشد. پس شرط لازم و کافی برای درست‌بودن $b \in A_b$ آن است که $b*b$ عضو S باشد. همچنین $b*b$ عدد گودل عبارت $b \in A_b$ است. و بنابراین می بینیم که شرط لازم و کافی برای اینکه $b \in A_b$ درست باشد این است که عدد گودل آن عضو S باشد. پس اگر $b \in A_b$ درست باشد عدد گودل آن عضو S خواهد بود؛ اگر $b \in A_b$ نادرست باشد عدد گودل آن عضو S نخواهد بود. بنابراین عبارت $b \in A_b$ یک عبارت گودل برای S است.

۲ـ

درسیستم فرگوسن، به ازای هر عدد n مجموعهٔ $A_{3\times n+1}$ برابر مجموعهٔ A_n^* است و بنابراین مجموعهٔ A_{301} برابر مجموعهٔ A_{100}^* است. و بنابراین از نتیجهٔ مسئلهٔ قبل استفاده می کنیم و b را برابر ۳۰۱ می گیریم. بنابراین، $301 \in A_{301}$ عبارت گودلی برای مجموعهٔ A_{100} است. به‌طور کلّیتر، به ازای هرعدد n، اگر داشته باشیم $b = 3\times n + 1$ ، عبارت $b \in A_b$ در سیستم فرگوسن یک عبارت گودلی برای A_n خواهد بود.

۳ـ

بلی، چنین است. فرض کنید سیستم گودلی باشد و شرایط G_1 و G_2 هردو برقرار باشد. همچنین فرض کنید که سیستم درست باشد. برطبق شرط G_1 مجموعهٔ P ، نامپذیر است، بنابراین برطبق G_2 مجموعهٔ $\bar{P}$ ، یعنی مکمّل P ، نامپذیر است. پس، چون سیستم گودلی است یک عبارت گودلی X برای $\bar{P}$ وجود دارد. اما وقتی که می گوییم عدد گودل X در $\bar{P}$ است مثل آن است که بگوییم عدد مذکور در P نیست،

که این یعنی اثبات ناپذیر تلقی کردن X . پس یک عبارت گودل برای $\bar{P}$ چیزی بیشتر یا کمتر از یک عبارت نیست که شرط لازم و کافی برای درست بودن آن اثبات ناپذیری اش در سیستم است. همان‌طور که دیدیم، یک چنین عبارتی بایستی درست اما اثبات ناپذیر در سیستم باشد (با فرض درست بودن سیستم).

در واقع، جوهر استدلال گودل یعنی ساختن یک عبارت گودل برای $\bar{P}$.

۴—

واضح است که هرعبارت X یک عبارت گودل برای T است. زیرا اگر X درست باشد عدد گودل آن در T است و اگر X نادرست باشد عدد گودل آن در T نیست. بنابراین، **هیچ** عبارتی نمی تواند عبارت گودل برای T باشد، زیرا این حالت که یا X درست است و عدد گودل آن $\bar{T}$ هست یا X نادرست است و عدد گودل آن در $\bar{T}$ نیست نمی تواند امکان داشته باشد.

بررسی این گزاره که به ازای هر مجموعهٔ اعداد A و هرعبارت X ، عبارت X یا عبارت گودل A است یا عبارت گودل $\bar{A}$ است، اما هیچ گاه عبارت گودل هردو نیست، ممکن است برای خواننده آموزنده باشد.

۵—

ابتدا هرسیستمی را که تابع شرط G_3 باشد درنظر بگیرید. برطبق مسئلهٔ ۱، برای هرمجموعهٔ نامپذیر در سیستم، یک عبارت گودل وجود دارد. همچنین برطبق مسئلهٔ ٤، برای مجموعهٔ $\bar{T}$ هیچ عبارت گودل وجود ندارد. بنابراین اگر سیستم تابع شرط G_3 باشد مجموعهٔ T در سیستم نامپذیر نیست. اگر سیستم تابع شرط G_2 نیز باشد، در آن صورت T نیز در سیستم نامپذیر نیست، زیرا اگر T نامپذیر باشد برطبق شرط G_2 مکمّل آن یعنی $\bar{T}$ نیز باید نامپذیر باشد؛ که نیست. پس ثابت شد در سیستمی که تابع شرایط G_2 و G_3 است مجموعهٔ T در آن نامپذیر نیست.

به طور خلاصه: (الف) اگر G_3 صدق کند $\bar{T}$ نامپذیر نیست، (ب) اگر G_2 و G_3 هردو صدق کنند T و $\bar{T}$ هیچ یک در سیستم نامپذیر نیستند.

٦—

اگر نخست گزارهٔ T را اثبات کرده باشیم گزارهٔ G را می توان به شرح زیر نتیجه

گرفت:

فرض کنیدیک سیستم درست که تابع شرایط G۱ و G۲ G۳ باشد داشته باشیم. بااستفاده از گزارهٔ T از G۲ و G۳ نتیجه می شود که T در سیستم نامپذیر نیست. اما P برطبق شرط G۱ در سیستم نامپذیر است. چون P نامپذیر است و T نامپذیر نیست، پس این دو متفاوت هستند. اما هرعدد عضو P عضو T نیز هست، زیرا فرض شده است که سیستم درست است، به این معنی که هرعبارت اثبات پذیر درست است. بنابراین چون T با مجموعه P متفاوت است پس دست کم بایستی یک عدد n که در P نیست در T باشد. چون n عضو T است پس بایستی عدد گودل یک عبارت درست مانند X باشد. اما چون n در P نیست پس X در سیستم اثبات پذیر نیست. بنابراین X درست است اما در سیستم اثبات پذیر نیست. بنابراین گزارهٔ G صادق است.

۷—

باتوجّه به شرایط G'_1 و G_3 داریم:

(الف) برطبق G'_1، مجموعهٔ R در سیستم نامپذیر است. پس برطبق شرط G۳ مجموعهٔ R_* در سیستم نامپذیر است. بنابراین عددی مانند h به‌طوری که $A_h = R_*$ باشد بایستی وجود داشته باشد. اما برطبق تعریف R_*، شرط لازم و کافی برای آنکه عدد x عضو R_* باشد این است که $x * x$ عضو R باشد. بنابراین، به‌ازای هرعدد x شرط لازم و کافی برای آنکه x عضو A_h باشد این است که $x * x$ عضو R باشد. درحالت خاصّ اگر x را برابر h بگیریم، شرط لازم و کافی برای آنکه h عضو A_h باشد آن است که عبارت $h \in A_h$ درست باشد. همچنین چون $h * h$ عدد گودل عبارت $h \in A_h$ است پس شرط لازم و کافی برای آنکه $h * h$ عضو R باشد این است که عبارت $h \in A_h$ ردشدنی باشد. بنابراین شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت $h \in A_h$ این است که عبارت مذکور ردشدنی باشد. و این بدان معنی است که این عبارت یا درست و ردشدنی است یا نادرست و ردنشدنی است. چون فرض کرده‌ایم که ماشین درست است پس عبارت نمی‌تواند درست و ردّشدنی باشد، بنابراین بایستی نادرست و ردنشدنی باشد. چون عبارت نادرست است، پس اثبات‌پذیر نیست (به‌دلیل درست‌بودن سیستم). پس عبارت $h \in A_h$ نه اثبات‌پذیر است و نه ردّشدنی (و درضمن نادرست است).

(ب) در اینجا A_1. برابر R گرفته شده است و همچنین به ازای هر عدد n مجموعهٔ A_{5xn} برابر مجموعهٔ A_n^* است. بنابراین A_{50}. برابر مجموعهٔ R_* است. و همچنین طبق نتیجهٔ قسمت (الف) اگر h را برابر ۵۰ بگیریم عبارت $50 \in A_{50}$. نه اثبات‌پذیر است و نه ردشدنی. همچنین عبارت مذکور نادرست است.

۱۶

ماشینهایی که ازخود حرف می زنند

اکنون استدلال گودل را از زاویه ای دیگر، که فکر اصلی را به صورتی بسیار واضح بیان می کند، موردتوجّه قرار می دهیم.

چهار علامت P و N و A و ـ را، با تمامی ترکیبهای ممکن آنها درنظر می گیریم. هرترکیب این چهار علامت را یک **جمله** می نامیم. مثلاً P--NA-P ، یا PN--A-P- - هرکدام یک جمله هستند. به برخی جمله ها یک مفهوم نسبت می دهیم و آنها را **عبارت** می نامیم.

فرض کنید ماشینی داریم که برخی جمله ها را می تواند چاپ کند و برخی را نمی تواند. جمله ای را که ماشین بتواند چاپ کند **جملهٔ چاپ پذیر** می نامیم. فرض می کنیم هرجمله ای که چاپ پذیر باشد حتماً ماشین آن را چاپ خواهد کرد، گرچه ممکن است این کار کمی طول بکشد. چاپ پذیر بودن یک جمله، مانند جملهٔ X ، را به صورت P-X نمایش می دهیم. مثلاً P-ANN یعنی ANN چاپ پذیر است (که البته ممکن است گزاره ای درست یا نادرست باشد). چاپ پذیر نبودن X را به صورت NP-X نشان می دهیم (حرف N حرف اول کلمهٔ انگلیسی NOT به معنی نه و حرف P حرف اول انگلیسی Printable به معنی چاپ پذیر است. بنابراین NP-X را می خوانیم X چاپ پذیر نیست).

جملهٔ X-X را **پیوستهٔ جملهٔ** X می‌نامیم. علامت A را برای «**پیوسته**»، به‌کار می‌بریم و بنابراین اگر بخواهیم بگوییم پیوستهٔ X چاپ‌پذیر است می‌نویسیم PA-X (و می‌خوانیم پیوستهٔ X چاپ‌پذیر است). اگر بخواهیم بگوییم پیوستهٔ X چاپ‌پذیر نیست می‌نویسیم NPA-X (و می‌خوانیم پیوستهٔ X چاپ‌پذیر نیست).

اکنون خواننده ممکن است بپرسد که چرا از خط تیره (-) نیز به‌عنوان یک علامت استفاده می‌کنیم و چرا برای اینکه بگوییم X چاپ‌پذیر است به‌جای P-X نمی‌نویسیم PX . علت این است که حذف خط تیره موجب ابهام درپس و پیش شدن مفاهیم خواهد شد. مثلاً آیا PAN به مفهوم چاپ‌پذیر بودن پیوستهٔ N است یا چاپ‌پذیر بودن عبارت AN ؟ امّا با به‌کار گرفتن خط تیره چنین ابهامی پیش نمی‌آید. زیرا اگر بخواهیم بگوییم پیوستهٔ N چاپ‌پذیر است می‌نویسیم PA-N ، درحالی که چاپ‌پذیربودن AN را با P-AN نمایش خواهیم داد. فرض کنید بخواهیم بگوییم: X - چاپ‌پذیر است، آیا می‌نویسیم P-X ؟ خیر، این به‌معنی آن است که X چاپ‌پذیر است. برای اینکه بگوییم X- چاپ‌پذیر است باید بنویسیم P--X .

با چند مثال دیگر مطلب را تفهیم می‌کنیم: --P یعنی — چاپ‌پذیر است؛ --PA یعنی --- (پیوسته-) چاپ‌پذیر است، ----P نیز یعنی --- چاپ‌پذیر است: NPA--P-A یعنی پیوستهٔ P-A- چاپ‌پذیر نیست؛ به‌بیان دیگر P-A--P-A- چاپ‌پذیر نیست. NP--P-A-- P-A نیز همان معنی را دارد.

اکنون هرکدام از چهار ترکیب P-X ، NP-X ، PA-X و NPA-X را، که در آن X هرجمله‌ای می‌تواند باشد، به‌عنوان یک **عبارت** تعریف می‌کنیم. عبارت P-X را **درست** می‌نامیم هرگاه X چاپ‌پذیر باشد و **نادرست** می‌خوانیم اگر X چاپ‌پذیر نباشد. و NP-X را درست

می نامیم هرگاه X چاپ پذیر نباشد و نادرست می خوانیم اگر X چاپ پذیر باشد. عبارت PA – X را درست می گوییم هرگاه پیوستهٔ X چاپ پذیر باشد و نادرست می نامیم اگر پیوستهٔ X چاپ پذیر نباشد. بالاخره ، NA–X را درست می گوییم هرگاه پیوستهٔ X چاپ پذیر نباشد و نادرست می گوییم اگر پیوستهٔ X چاپ پذیر باشد. اکنون تعریف دقیقی از درستی - نادرستی هر چهار نوع عبارت فوق الذکر را ارائه داده ایم، و از اینجا نتیجه می شود که برای هرجملهٔ X داریم:

قانون ۱: شرط لازم و کافی برای درست بودن P – X آن است که X به وسیلهٔ ماشین چاپ پذیر باشد.

قانون ۲: شرط لازم و کافی برای درست بودن PA – X آن است که X – X چاپ پذیر باشد.

قانون ۳: شرط لازم و کافی برای درست بودن NP – X آن است که X چاپ پذیر نباشد.

قانون ٤: شرط لازم و کافی برای درست بودن NPA – X آن است که X – X چاپ پذیر نباشد.

در اینجا با یک دور عجیب رو به رو هستیم! ماشین عبارتهایی را چاپ می کند که دربارهٔ آنچه ماشین می تواند یا نمی تواند چاپ کند صحبت می کنند. به بیان دیگر، ماشین دربارهٔ خودش حرف می زند (دقیقتر بگوییم، ماشین عبارتهایی دربارهٔ خودش چاپ می کند).

اکنون فرض می کنیم که ماشین صددرصد درست است – یعنی هیچ گاه یک عبارت نادرست را چاپ نمی کند و فقط عبارتهای درست را چاپ می کند. از این گزاره گزاره های فرعی بسیار نتیجه می شود. به عنوان مثال، اگر ماشین عبارت P – X را چاپ کند، در آن صورت بایستی X را نیز چاپ کند؛ زیرا، چون P – X را چاپ می کند پس P – X بایستی درست باشد و این بدان معنی است که X چاپ پذیر است و بنابراین ماشین

بایستی دیر یا زود X را چاپ کند.

همچنین نتیجه می‌شود که اگر ماشین بتواند PA – X را چاپ کند، در آن‌صورت (چون PA–X بایستی درست باشد) بایستی X – X را نیز چاپ کند. درضمن اگر ماشین NP – X را چاپ کند، در آن‌صورت نمی‌تواند P – X را نیز چاپ کند، زیرا این دو عبارت نمی‌توانند توأماً درست باشند - عبارت اول می‌گوید که ماشین X را چاپ نمی‌کند و عبارت دوم می‌گوید که ماشین X را چاپ می‌کند.

مسئلهٔ زیر اهمیّت تئوری گودل را به بهترین شیوه آشکار می‌کند.

۱– چیستان یک عبارتیِ گودلی

یک عبارت درست پیدا کنید که ماشین نتواند چاپ کند!

۲– معمای دوعبارتیِ گودلی

فرض می‌کنیم همان شرایط قبلی برقرار باشد و همچنین ماشین درست باشد.

یک عبارت X و یک عبارت Y وجود دارد به‌طوری که یکی از آنها، یا X یا Y ، بایستی درست باشد ولی چاپ‌پذیر نباشد؛ اما از شرایط پنهان در قوانین ۱ تا ٤ ممکن نیست بفهمیم کدام‌یک. آیا می‌توانید X و Y را پیدا کنید؟ (راهنمایی: عبارتهای X و Y را چنان پیدا کنید که X بگوید Y چاپ‌پذیر است و Y بگوید که X چاپ‌پذیر نیست. دو روش برای انجام این کار وجود دارد و هردو به قوانین فرگوسن مربوط هستند!).

۳– مسئلهٔ سه عبارتیِ گودلی

عبارتهای X ، Y و Z را چنان بسازید که X بگوید Y چاپ‌پذیر است، Y بگوید Z چاپ‌پذیر نیست و Z بگوید X چاپ‌پذیر است، و نشان دهید که

دست کم یکی از این سه عبارت (گرچه نمی‌توان تعیین کرد کدام‌یک) بایستی درست باشد اما به‌وسیلهٔ ماشین چاپ‌پذیر نباشد.

دو ماشین که از خود و دربارهٔ یکدیگر حرف می‌زنند

اکنون علامت جدید R را به مجموعهٔ علامتها می‌افزاییم. پس با پنج علامت P ، R ، N ، A و - سروکار داریم و دو ماشین M_1 و M_2 داریم که هرکدام عبارتهای گوناگون متشکل از این پنج علامت را چاپ می‌کند. اکنون علامت « P » را به‌عنوان **«چاپ‌پذیر بودن»** به وسیلهٔ ماشین اول و علامت « R » را به‌عنوان **«چاپ‌پذیر بودن»** به وسیلهٔ ماشین دوم به کار می‌بریم. بنابراین در اینجا P – X به‌معنی چاپ‌پذیر بودن به‌وسیلهٔ ماشین اول و R – X به‌معنی چاپ‌پذیر بودن به‌وسیلهٔ ماشین دوم خواهد بود. همچنین، PA – X یعنی پیوستهٔ X به‌وسیلهٔ ماشین اول چاپ‌پذیر است، RA–X یعنی پیوستهٔ X به‌وسیلهٔ ماشین دوم چاپ‌پذیر است. همچنین عبارتهای NP – X و NR – X و NPA – X و NRA – X به‌ترتیب دارای معناهای زیر هستند: X به‌وسیلهٔ ماشین اول چاپ‌پذیر نیست، X به‌وسیلهٔ ماشین دوم چاپ‌پذیر نیست، X – X به‌وسیلهٔ ماشین اول چاپ‌پذیر نیست، X – X به‌وسیلهٔ ماشین دوم چاپ‌پذیر نیست. در اینجا منظور از **عبارت** یکی از هشت ترکیب زیر است: R – X ، P– X ، NP– X ، NR– X ، PA – X ، RA – X ، NPA – X یا NRA– X . فرض می‌کنیم که ماشین اول فقط عبارتهای درست را چاپ کند و ماشین دوم فقط عبارتهای نادرست را چاپ کند. عبارتی را **اثبات‌پذیر** می‌نامیم که فقط به‌وسیلهٔ ماشین اول چاپ‌پذیر باشد. عبارتی را **ردشدنی** می‌گوییم که فقط به‌وسیلهٔ ماشین دوم چاپ‌پذیر باشد. بنابراین حرف P را به‌عنوان **«اثبات‌پذیر»** و حرف R را به‌عنوان **«ردشدنی»** به کار می‌گیریم.

۴ـ

عبارتی پیدا کنید که نادرست باشد اما ردشدنی نباشد.

۵ـ

دو عبارت X و Y وجود دارند به‌طوری که یکی از آنها (نمی دانیم کدام‌یک) بایستی یا درست اما اثبات‌ناپذیر یا نادرست اما ردنشدنی باشد؛ که نمی دانیم کدام‌یک از این دو حالت صادق است.

این را می توان با دو روش گوناگون حل کرد، که در اینجا براساس آن دو روش دو مسئلهٔ زیر را مطرح می کنم.

(الف) عبارتهای X و Y را طوری پیدا کنید که X بگوید Y اثبات‌پذیر است و Y بگوید X ردشدنی است. و سپس نشان دهید که یکی از دو عبارت X یا Y (که نمی‌توانیم تعیین کنیم کدام‌یک) یا درست اما اثبات‌ناپذیر یا نادرست اما ردنشدنی است.

(ب) عبارتهای X و Y را طوری پیدا کنید که X بگوید Y اثبات‌پذیر نیست و Y بگوید X ردشدنی نیست. سپس نشان دهید که یکی از این دو عبارت X و Y (نمی‌توانیم تعیین کنیم کدام‌یک) یا درست اما اثبات‌ناپذیر یا نادرست اما ردنشدنی است.

۶ـ

اکنون یک مسئلهٔ چهار عبارتی را مطرح می کنیم! عبارتهای X و Y و Z و W را طوری پیدا کنید که X بگوید Y اثبات‌پذیر است، Y بگوید Z ردشدنی است، Z بگوید W ردّشدنی است و W بگوید X ردنشدنی است. نشان‌دهید که یکی از این چهار عبارت بایستی یا درست اما اثبات‌ناپذیر باشد یا نادرست اما ردنشدنی باشد (اگرچه به هیچ وجه نمی‌توان مشخص کرد کدام‌یک از آن چهار عبارت این خاصیّت را دارد!).

ماشین مک کالک و گزارهٔ گودل

ممکن است خواننده متوجه شده باشد که میان برخی مسائل این بخش و بعضی از ویژگیهای ماشین اول مک کالک شباهتهایی وجود دارد. در واقع، ماشین مذکور را می توان به صورت زیر به گزارهٔ گودل ارتباط داد:

—۷

فرض کنید یک سیستم ریاضی داشته باشیم که عبارتهای آن‌را برخی **درست** و برخی **اثبات‌پذیر** بنامیم و فرض می کنیم سیستم درست باشد یعنی هرعبارت اثبات‌پذیر یک عبارت درست باشد. به هر عدد N یک عبارت نسبت می دهیم و آن‌را **عبارت** N می‌نامیم. فرض می کنیم که سیستم تابع دو شرط زیر باشد:

Mc۱ : به ازای هر دو عدد X و Y ، اگر در ماشین اول مک کالک عدد X عدد Y را پدید آورد در آن صورت شرط لازم و کافی برای درست بودن X ۸ اثبات‌پذیر بودن عبارت Y است. به یاد آورید که ۸X به معنی ۸ ضرب در X نیست بلکه به معنی قرار گرفتن رقم ۸ در سمت چپ عدد X است.)

Mc۲ : به ازای هر عدد X ، شرط لازم و کافی برای درست بودن X ۹ آن است که X نادرست باشد.

عدد N را طوری پیدا کنید که عبارت N درست اما در سیستم اثبات ناپذیر باشد.

—۸

فرض کنید در مسئلهٔ قبلی در شرط Mc۱ به جای ماشین اول مک کالک ماشین سوم مک کالک مطرح باشد. اکنون عدد N را طوری پیدا کنید که عبارت N درست اما اثبات ناپذیر باشد!

۹ــ تناقض؟

دو باره به مسئلهٔ ۱ برمی گردیم، اما با تفاوتهای زیر: به‌جای علامت «P» از علامت «B» استفاده می کنیم (به دلایل روانشناسانه که بعداً روشن خواهد شد). **عبارت** را به همان صورت قبلی تعریف می کنیم، اما این بار به‌جای P از علامت B استفاده می کنیم. بنابراین، عبارتهای ما اکنون به‌صورت B–X ، NB–X ، BA–X و NBA–X درمی‌آیند. مانند قبل عبارتها به دو گروه عبارتهای درست و عبارتهای نادرست تقسیم می شوند، اما این‌بار می دانیم که کدام عبارت درست و کدام عبارت نادرست است. اکنون به‌جای داشتن ماشینی که عبارتهای گوناگون را چاپ می کند، یک منطقدان در مقابل ماست که برخی عبارتها را **باور** دارد و برخی را باور ندارد. وقتی که می گوییم منطقدان یک عبارت را باور **ندارد** مقصود آن نیست که او آن‌را **رد** می کند، بلکه مقصود فقط آن است که او آن‌را باور ندارد. به‌بیان دیگر، یا فکر می کند که آن عبارت نادرست است یا هیچ نظری ندارد. اکنون علامت «B» را برای «منطقدان باور دارد» به کار می بریم و فرض می کنیم که برای هرجملهٔ X چهار شرط زیر صادق باشد:

B۱ : شرط لازم و کافی برای درست بودن B–X آن است که منطقدان X را باور داشته باشد.

B۲ : شرط لازم و کافی برای درست بودن NB–X آن است که منطقدان X را باور نداشته باشد.

B۳ : شرط لازم و کافی برای درست بودن BA–X آن است که منطقدان X–X را باور داشته باشد.

B۴ : شرط لازم و کافی برای درست بودن NBA–X آن است که منطقدان X–X را باور نداشته باشد.

با فرض اینکه منطقدان از درستی برخوردار باشد، یعنی اینکه او

هیچ عبارت نادرست را باورنداشته باشد - می توانیم عبارتی پیدا کنیم که درست باشد امّا منطقدان نداند که درست است. آن عبارت NBA-NBA است (که می گوید منطقدان پیوستهٔ NBA یعنی NBA- NBA را باور ندارد).

اکنون به مطلب جالب توجّه‌تری می رسیم: فرض کنید دو واقعیّت زیر در مورد منطقدان وجود داشته باشد:

واقعیّت ۱: منطقدان دست‌کم به اندازهٔ من و شما منطق می داند، درواقع فرض می کنیم که او یک منطقدان کامل است: یعنی او با داشتن هرمقدمات می‌تواند تمام گزاره‌هایی را که به‌طور منطقی از مقدّمات نتیجه می شوند استنتاج کند.

واقعیّت ۲: منطقدان **می‌داند** هر چهار شرط B۱ و B۲ B۳ B۴ صادق هستند.

واقعیّت ۳: منطقدان همیشه از درستی برخوردار است. یعنی هیچ عبارت نادرست را باور ندارد.

اکنون چون منطقدان می داند که چهار شرط B۱ ، B۲ و B۳ و B۴ صادق هستند، و می‌تواند به‌خوبی من و شما استدلال کند، مسلماً او نیز می‌تواند همان استدلالی را که ما به‌کار بردیم و ثابت کردیم که NBA-NBA بایستی درست باشد انجام دهد. پس چون می‌تواند این مطلب را اثبات کند بعداز انجام‌دادن آن، عبارت NBA-NBA را باور خواهد داشت. اما در همان لحظه‌ای که این عبارت را باورمی دارد، عبارت باطل می شود، زیرا عبارت می گوید که منطق‌دان آن را باورندارد؛ که درنتیجه چون منطقدان، یک عبارت نادرست را باوردارد پس دارای درستی نیست.

پس، اگر فرض کنیم واقعیّتهای ۱ و ۲ و ۳ درست باشند آیا به تناقض برخورد نمی کنیم؟ پاسخ این است که خیر به تناقض برنمی خوریم.

در پاراگراف آخر استدلال من یک نقص عمدی وجود دارد! آیا می‌توانید این نقص را پیدا کنید؟

پاسخها

۱—

به ازای هرجملهٔ X ، عبارت NPA−X می گوید که پیوستهٔ X چاپ شدنی نیست، خصوصاً NPA−NPA می گوید که پیوستهٔ NPA چاپ شدنی نیست. اما پیوستهٔ NPA همان عبارت NPA−NPA است!. بنابراین، NPA−NPA چاپ ناشدنی بودن خودش را بیان می کند. به‌بیان دیگر، شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت آن است که چاپ ناشدنی باشد. این بدان معنی است که عبارت یا درست است اما چاپ ناشدنی یا نادرست است اما چاپ شدنی. حالت دوم نمی تواند صادق باشد زیرا ماشین صحّت دارد. بنابراین بایستی حالت اول صدق کند، یعنی عبارت مذکور درست است اما ماشین نمی تواند آن‌را چاپ کند.

۲—

فرض کنید X عبارت P−NPA − P − NPA و Y عبارت NPA − P−NPA باشد. عبارت X (که برابر Y − P است) می گوید که Y چاپ شدنی است. عبارت Y می گوید که پیوستهٔ P−NPA چاپ ناشدنی است. اما پیوسته P−NPA برابر X است. پس Y می گوید که X چاپ ناشدنی است. (درضمن چنین عبارتهای X و Y را به‌شکل دیگری نیز می‌توان ساخت. X را برابر PA− NP−PA و Y را برابر PA − NP − PA − NP بگیرید).

پس دو عبارت X و Y داریم که X می گوید Y چاپ ناشدنی است و Y می گوید X چاپ ناشدنی است.

اکنون فرض کنید که X چاپ پذیر باشد. و درآن صورت X درست خواهد بود که این به‌معنی آن است که Y چاپ شدنی است. بنابراین Y درست خواهد بود که این به‌معنی آن است که X چاپ ناشدنی است. این یک تناقض است، زیرا در این مورد X هم چاپ شدنی است هم چاپ ناشدنی. پس X نمی تواند چاپ شدنی باشد. چون X چاپ شدنی نیست و Y می گوید X چاپ شدنی نیست پس Y بایستی درست باشد. بنابراین می دانیم که:

(۱) X چاپ شدنی نیست.

(۲) Y درست است.

X یا درست است یا درست نیست. اگر X درست باشد، برطبق(۱)، X درست اما چاپ ناشدنی است. اگر X نادرست باشد، در آن صورت Y چاپ ناشدنی است، زیر X می گوید که Y چاپ شدنی است و بنابراین در این مورد Y درست است اما برطبق (۲) چاپ ناشدنی است. پس یا X درست اما چاپ ناشدنی است یا Y نادرست امّا چاپ ناشدنی است، امّا هیچ راهی برای اینکه بفهمیم کدام یک این خاصیّت را دارد وجود ندارد.

بحث: حالت فوق مشابه حالتی است که در جزیرهٔ نجیب - نانجیب دو فرد X و Y وجود داشته باشند که X مدعی شود Y یک نجیب قطعی است و Y مدعی شود که X یک نجیب قطعی نیست. تنها چیزی که می توان نتیجه گرفت این است که دست کم یکی از این دو نفر یک نجیب غیرقطعی است، اما نمی توان معین کرد کدام یک.

این موضوع را در کتاب «**نام این کتاب چیست؟**» در قسمتی از بخش آخر به نام «جزیرهٔ دو عبارتی گودلی» مورد توجّه قرار داده ام.

۳—

فرض می کنیم: Z = PA-P-NP-PA Y = NP – Z = (NP – PA-P-NP-PA)

X = P – Y = (P – NP – PA – P – NP – PA)

آشکارا مشاهده می شود که X می گوید Y چاپ شدنی است و Y می گوید Z چاپ ناشدنی است. در مورد Z ، Z می گوید که پیوستهٔ P – NP – PA چاپ شدنی است، اما پیوستهٔ P – NP – PA برابر P – NP – PA – P – NP – PA یعنی برابر X است! پس Z می گوید X چاپ شدنی است.

پس X می گوید Y چاپ شدنی است، Y می گوید Z چاپ ناشدنی است، و Z می گوید X چاپ شدنی است. اکنون ببینیم از این چه نتیجه ای به دست می آید:

فرض کنیم Z چاپ شدنی باشد. در آن صورت Z درست است، یعنی X چاپ شدنی، و بنابراین درست است، و این بدان معنی است که Y چاپ شدنی و درنتیجه درست است، و این بدان معنی است که Z چاپ ناشدنی است. پس اگر فرض کنیم Z چاپ شدنی باشد، نتیجه می شود که Z چاپ ناشدنی است و این یک

تناقض است. پس Z چاپ شدنی نیست، و بنابراین Y درست است. پس می دانیم که:

(۱) Z چاپ شدنی نیست.

(۲) Y درست است.

امّا X یا درست است یا نادرست. فرض کنیم X درست باشد. اگر Z نادرست باشد، در آن صورت X چاپ شدنی نیست، و این بدان معنی است که X درست اما چاپ ناشدنی است. اگر Z درست باشد، در آن صورت چون برطبق (۱) چاپ شدنی نیست، پس Z درست امّا چاپ ناشدنی است. پس اگر X درست باشد، در آن صورت یا X یا Z درست امّا چاپ ناشدنی است. اگر X نادرست باشد در آن صورت Y چاپ ناشدنی است، بنابراین برطبق (۲) Y درست امّا چاپ ناشدنی است.

به طور خلاصه، اگر X درست باشد در آن صورت دست کم یکی از دو عبارت X و Z درست امّا چاپ ناشدنی است. اگر X نادرست باشد، در آن صورت Y درست امّا چاپ ناشدنی خواهد بود.

۴–

فرض کنید S بیانگر عبارت RA–RA باشد. S می گوید پیوستهٔ RA، که خود S است، ردّشدنی است. بنابراین شرط لازم و کافی برای درست بودن S آن است که S ردشدنی باشد. چون S نمی تواند درست و ردّشدنی باشد، پس بایستی نادرست اما ردّناشدنی باشد.

۵–

(الف) X را برابر P – RA – P – RA و Y را برابر RA – P – RA بگیرید. واضح است که X می گوید Y اثبات پذیر است و Y می گوید پیوستهٔ P – RA (که برابر X است) ردشدنی است. پس X می گوید Y اثبات پذیر است و Y می گوید X ردشدنی است. (اگر X را برابر PA – R – PA و Y را برابر R – PA – R – PA می گرفتیم، یک پاسخ دیگر داشتیم).

اما اگر Y اثبات پذیر باشد، در آن صورت Y بایستی درست باشد، یعنی X ردنشدنی و بنابراین نادرست است، که این بدان معنی است که Y اثبات پذیر نیست. پس فرض اثبات پذیر بودن Y به تناقض می رسد و بنابراین Y اثبات پذیر نیست. چون

۷- اثبات‌پذیر نیست پس X نادرست است. و بنابراین می دانیم که:
(۱) X نادرست است.
(۲) Y اثبات‌پذیر نیست.
اگر Y درست باشد، در آن صورت Y درست و اثبات‌ناپذیر است. اگر Y نادرست باشد، در آن صورت X ردشدنی نیست (چون Y می گوید X ردنشدنی است)، و بنابراین در این مورد X نادرست و ردناشدنی است. بنابراین یا Y درست و اثبات‌ناپذیر است یا X نادرست و ردناشدنی است.

(ب) X را برابر NP − NRA − NP − NRA و Y را برابر NP − NRA − NRA بگیرید (یا X برابر NPA − NR − NPA و Y را برابر − NR − NPA − NR − NPA بگیرید)، و همان گونه که خواننده می تواند بررسی کند، X می گوید که Y اثبات‌پذیر نیست و Y می گوید X ردشدنی نیست. اگر X ردشدنی باشد در آن‌صورت X نادرست است، Y اثبات‌پذیر است، Y درست است، X ردناشدنی است. بنابراین X ردشدنی نیست و Y نیز درست است. اگر X نادرست باشد، در آن‌صورت X نادرست اما ردناشدنی است. اگر X درست باشد در آن‌صورت Y اثبات‌پذیر نیست؛ بنابراین در این حالت Y درست اما اثبات‌ناپذیر خواهد بود.

بحث: مشابه با این مسئله، فرض کنید در جزیرهٔ نجیب − نانجیب دو ساکن X و Y داشته باشیم به‌طوری که X بگوید Y یک نجیب قطعی است و Y بگوید X یک نانجیب قطعی است. تنها چیزی که می توان استنتاج کرد این است که یکی از این دو نفر (نمی دانیم کدام‌یک) بایستی یا یک نجیب غیرقطعی یا یک نانجیب غیرقطعی باشد. اگر X بگوید Y یک نجیب قطعی نیست و Y بگوید X یک نانجیب قطعی نیست نیز همین نتیجه به دست می آید.

۶−

فرض کنید W= NPA − P − R − R − NPA، Z = R − W (یعنی R − NPA − R − NPA − P − R − R−NPA (یعنی Y= R−Z، (R− NPA − P − R − X= P− Y (R − (یعنی P− R−R −NPA − P− R− R − NPA) در این صورت X می گوید Y اثبات‌پذیر است، Y می گوید Z ردشدنی است، Z می گوید W ردشدنی است، W می گوید X اثبات‌پذیر نیست. (W می گوید R − NPA − P− R ، که همان X است، اثبات‌پذیر نیست).

اگر W ردشدنی باشد، در آن صورت W نادرست است، بنابراین X اثبات‌پذیر است، درنتیجه X درست است. بنابراین Y اثبات‌پذیر و درنتیجه درست است؛ پس Z ردشدنی و بنابراین نادرست است، که نتیجه می شود W ردشدنی نیست. بنابراین W نمی‌تواند ردشدنی باشد. پس W ردشدنی نیست و بنابراین Z نادرست است.

اما اگر W نادرست باشد، در آن‌صورت W نادرست اما ردناشدنی است. فرض کنید W درست باشد. در آن‌صورت X اثبات‌پذیر نیست. اگر X درست باشد، X درست اما اثبات‌ناپذیر است. فرض کنید X نادرست باشد در آن‌صورت Y اثبات‌پذیر نیست. اگر Y درست باشد، درآن‌صورت Y درست اما اثبات‌ناپذیر است، فرض کنید Y نادرست باشد. در آن‌صورت Z ردشدنی نیست؛ پس در این حالت Z نادرست اما ردشدنی نیست.

این نشان می دهد که یا W نادرست اما ردناشدنی است یا X درست اما اثبات‌ناپذیر است، یا Y درست اما اثبات‌ناپذیر است، یا Z نادرست اما ردناشدنی است.

۷ــ

این مسئله چیزی جز شکل دیگری ازمسئلهٔ ۱ این بخش نیست!

می دانیم که عدد ۳۲۹۸۳ عدد ۹۸۳۲۹۸۳ را پدید می آورد (در ماشین اول مک کالک)، بنابراین برطبق C۲ وMc۱، شرط لازم و کافی برای آنکه عبارت ۸۳۲۹۸۳ درست باشد آن است که عبارت ۹۸۳۲۹۸۳ اثبات‌پذیر باشد. همچنین برطبق Mc۲ ، شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت ۹۸۳۲۹۸۳ آن است که عبارت ۸۳۲۹۸۳ درست نباشد. بنابراین با ترکیب این دو نتیجه می بینیم که شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت ۹۸۳۲۹۸۳ آن است که آن عبارت اثبات‌پذیر نباشد. پس جواب برابر ۹۸۳۲۹۸۳ است.

اگر این را با مسئلهٔ ۱ مقایسه کنیم به‌آسانی درمی یابیم که ۹ نقش N ، ۸ نقش P ، ۳ نقش A ، و ۲ نقش خط تیره (ـ) را دارد. درواقع اگر علامتهای P ، N ، A و ـ را به ترتیب با ارقام ۸ ، ۹ ، ۳ و ۲ جایگزین کنیم عبارت NPA-NPA (که پاسخ مسئلهٔ ۱ است) به عدد ۹۸۳۲۹۸۳ (که پاسخ مسئلهٔ اخیر است) تبدیل می شود.

۸—

می دانیم که ماشین سوم مک کالک نیز تابع قانون مک کالک است؛ یعنی به ازای هر عدد A بایستی یک عدد X وجود داشته باشد که AX را پدید آورد.

این موضوع را به شرح زیر اثبات می کنیم: از بخش ۱۳ می دانیم که یک عدد H، یعنی عدد ۵٤٦٤ وجود دارد به طوری که به ازای هرعدد X، عدد H ۲ X ۲ عدد X ۲ X ۲ را پدید می آورد (یادآوری می شود که در آن مسئله، عدد H ۲ H ۲ خودش را پدید می آورد، اما این موضوع به مسئلهٔ فعلی ارتباط ندارد). اکنون یک عدد درنظر بگیرید و آن را با A نشان دهید و فرض کنید X = H ۲A H۲. اما عدد X عدد AH۲A H۲ ، یعنی AX ، را پدید می آورد. بنابراین عدد X عدد AX را پدید می آورد. و درنتیجه به ازای هر عدد A ، عددی مانند X که AX را پدید آورد برابر ۵٤٦٤۲ A ۵٤٦٤۲ است.

اکنون عدد X را باید طوری تعیین کنیم که ۹۸ X را پدید آورد: فرض کنیم X بتواند ۹۸ X را پدید آورد. در آن صورت شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت X ۸ آن است که عبارت ۹۸X اثبات پذیر باشد (برطبق Mc۱). بنابراین شرط لازم و کافی برای درست بودن عبارت ۹۸ X آن است که ۹۸ X اثبات پذیر نباشد (برطبق Mc۲). پس عبارت ۹۸ X درست است اما در سیستم اثبات پذیر نیست (زیرا سیستم درست است).

اکنون اگر A را برابر ۹۸ بگیریم، عدد X که بتواند ۹۸ X را پدید آورد برابر ۵٤٦٤۲۹۸۵٤٦٤۲ خواهد شد. بنابراین عبارت ۹۸۵٤٦٤۲۹۸۵٤٦٤۲ درست است اما در سیستم اثبات پذیر نیست.

۹—

گرچه فرض کردیم که اندیشه های منطق دان درست است، امّا فرض نکردیم که او می داند که درستی دارد! اگر می دانست که درستی دارد، در آن صورت به یک تناقض برخورد می کردیم! بنابراین آنچه از گزاره های ۱ و ۲ و ۳ نتیجه می شود یک تناقض نیست بلکه فقط این است که گرچه منطق دان در اندیشه هایش از درستی برخوردار است اما خودش نمی داند که اندیشه هایش درست است.

این مسئله تا حدودی به یک گزارهٔ دیگر گودل، به نام گزارهٔ دوم کمال ناپذیری گودل مربوط است. برطبق این گزاره (به بیان تقریبی) در سیستمهای با

ساخت غنی (از جمله سیستمهایی که در رسالهٔ اولیهٔ گودل مطرح شده است)، اگر سیستم سازگار باشد، در آن‌صورت سازگاری خودش را نمی‌تواند اثبات کند. این مطلب مهمی است که در نظر دارم آن را در ضمیمه‌ای بر این کتاب مورد بررسی بیشتر قرار دهم.

۱۷

اعداد فناپذیر و اعداد فناناپذیر

مدتی از آخرین ملاقات کریگ با مک کالک و فرگوسن گذشته بود، که او به طور نامنتظره با آن دو برخورد کرد و هرسه نفر با خوشحالی برای صرف شام به یک رستوران رفتند.

پس از صرف غذا، مک کالک گفت: «می دانید، مدتهاست که مسئله ای فکر مرا به خود مشغول داشته است.»

فرگوسن پرسید: «آن مسئله کدام است؟»

مک کالک پاسخ داد: «خوب، تاکنون چند ماشین را بررسی کرده ام و در همهٔ آنها به یک مسئلهٔ واحد برخوردم: در همهٔ ماشینها برخی اعداد پذیرفته می شوند و برخی پذیرفته نمی شوند. فرض کنید عددی پذیرفته شدنی مانند X را به ماشین بدهیم. عدد Y که از عدد X پدید می آید یا پذیرفته شدنی است یا پذیرفته نشدنی است. اگر Y پذیرفته نشدنی باشد جریان ادامه نمی یابد. اگر Y پذیرفته شدنی باشد، Y را مجدداً به ماشین می دهیم تا ببینیم چه عددی را پدید می آورد. اگر Z که به وسیلهٔ Y پدید می آید پذیرفته نشدنی باشد جریان دیگر ادامه نمی یابد. اما اگر Z پذیرفته شدنی باشد، آن را به ماشین می دهیم و جریان دست کم برای یک دور دیگر تکرار می شود. اگر این کار را پیوسته تکرار کنیم، یکی از دو امکان

زیر پیش خواهد آمد: (۱) سرانجام عددی پذیرفته نشدنی به دست می آید، (۲) جریان همچنان ادامه می یابد و پایانی ندارد. اگر حالت اول پیش آید در آن صورت عدد x را نسبت به ماشین **فناپذیر** می نامیم و اگر حالت دوم پیش آید آن را **فناناپذیر** می گوییم. البته یک عدد مشخص ممکن است در یک ماشین فناپذیر و در ماشین دیگر فناناپذیر باشد، در اینجا کریگ گفت: اکنون با ماشین اوّلتان شروع می کنیم: با آن ماشین اعداد فناپذیر بسیاری را می توانم تصوّر کنم، اما عدد فناناپذیری به ذهنم نمی رسد. شما چطور؟»

مک کالک پاسخ داد: «عدد ۳۲۳ چنین خاصیّتی دارد. این عدد خودش را پدید می آورد. بنابراین اگر آن را به ماشین بدهم همان ۳۲۳ بیرون می آید. اگر دوباره ۳۲۳ را به ماشین بدهم بازهم ۳۲۳ بیرون می آید. بنابراین در این مورد جریان هیچ گاه، پایان نمی یابد.»

کریگ با خنده گفت: «اوه، البته! اعداد فناناپذیر دیگری نیز وجود دارد؟»

—۱

مک کالک پاسخ داد: «خوب، در مورد عدد ۳۲۲۳ چه فکر می کنید؟ این عدد فناپذیر است یا فناناپذیر؟»

—۲

فرگوسن پرسید: «عدد ۳۲۲۲۳ چطور؟ آیا این عدد در ماشین اوّلتان فناپذیر است یا فناناپذیر؟»

مک کالک اندکی به این مسئله فکر کرد وسپس پاسخ داد: «اوه، آزمایش کردن این عدد بسیار دشوار است، فکر می کنم خودتان از انجام دادن این تمرین خیلی لذت خواهید برد!»

۳ـ

مک کالک گفت: «همچنین می توانید عدد ۳۲۳۲ را امتحان کنید.این عدد فناپذیر است یا فناناپذیر؟»

٤ـ

کریگ پرسید: «درباهٔ عدد ۳۲۳۲۳ چه می دانید؟ فناپذیر است یا فناناپذیر؟»

۵ـ

مک کالک گفت: «اینها همه مسائل جالب توجّهی هستند، اما هنوز مسئله اصلی را مطرح نکرده‌ام. یکی از دوستان، ماشین نسبتاً پیچیده‌ای اختراع کرده است و ادعا می کند هر کاری که هر ماشین دیگر انجام دهد ماشین او می تواند انجام دهد. او این ماشین را **ماشین عام** می نامد. اما چند عدد هست که نه من و نه خود او نمی توانیم تعیین کنیم که فناپذیرند یا فناناپذیر، و من درصددم که با ابداع یک آزمایش صرفاً مکانیکی فناپذیری یا فناناپذیری هرکدام از آن اعداد را تعیین کنم، اما تاکنون موفق نشده‌ام. به‌خصوص، درصددم که عدد H را طوری تعیین کنم که به‌ازای هر عدد پذیرفته‌شدنی X، اگر X فناناپذیر باشد در آن صورت HX فناپذیر شود، و اگر X فناپذیر باشد در آن صورت HX فناناپذیر شود. اگر بتوانم چنین عدد H را پیدا کنم در آن صورت می توانم در مورد هرعدد پذیرفته‌شدنی X مشخص کنم که آیا X فناپذیر است یا فناناپذیر.»

کریگ پرسید: «چگونه با پیداکردن H می توانید فناپذیری - فناناپذیری اعداد را پیدا کنید؟»

مک کالک پاسخ داد: «اگر این عدد H را داشته باشیم، نخست ماشینی مشابه ماشین دوستم می سازم و سپس عددی پذیرفته شدنی مانند X را

به‌یکی از ماشینها می دهم و در همان لحظه دوستم عدد HX را به ماشین دیگر می دهد. فقط یکی از دو جریان به‌پایان می رسد: اگر جریان اول پایان یابد می فهمم که x فناناپذیر است و اگر جریان دوم پایان یابد می فهمم که x فناناپذیر است.»

فرگوسن گفت: «اما نیازی به ساختن ماشین دوم نیست. می توانید مراحل دو جریان را متناوباً در یک ماشین انجام دهید.»

مک کالک پاسخ داد: «درست، اما همهٔ اینها جنبهٔ فرضی دارد، زیرا هنوز نتوانسته ام این عدد H را پیدا کنم. شاید این ماشین **نتواند** مسئلهٔ فناناپذیری در خودش را حل کند، به بیان دیگر، شاید چنین عدد H **وجود نداشته** باشد. همچنین، ممکن است من به اندازهٔ کافی زرنگ نبوده ام که H را پیدا کنم. این همان مسئله ای است که من مایلم با شما دوستان درمیان بگذارم.»

فرگوسن پاسخ داد: «خوب، ما باید قواعد این ماشین را بدانیم. این قواعد چه هستند؟»

مک کالک پاسخ داد: «ماشین بیست و پنج قاعده دارد، که دو قاعدهٔ اول همانها هستند که درماشین اول من با آنها آشنا شدید.»

فرگوسن گفت: «یک لحظه صبر کنید، آیا منظورتان این است که ماشین دوست شما تابع قواعد ۱ و ۲ است؟»

مک کالک پاسخ داد: «بلی.»

فرگوسن گفت: «خوب، این مسئله را حل می کند. هیچ ماشینی که تابع قواعد ۱ و ۲ باشد نمی تواند مسئلهٔ فناپذیری درخودش را حل کند!»

کریگ پرسید: «شما چگونه به این سرعت چنین نتیجه‌ای گرفتید؟»

فرگوسن پاسخ داد: «اوه، این برای من تازگی ندارد. چندی پیش دریکی از کارهای خود به مسئلهٔ مشابهی برخورد کرده بودم.»

فرگوسن چگونه فهمید که هیچ ماشینی که تابع قواعد ۱ و ۲ باشد نمی‌تواند مسئلهٔ فناپذیری در خودش را حل کند؟

پاسخها

۱—

یادآوری می کنیم که عدد ۳۲۲۳ عدد ۲۳۲۲۳ را پدید می آورد و البته عِدد ۲۳۲۲۳ نیز عدد ۳۲۲۳ را پدید می آورد. بنابراین، دو عدد ۳۲۲۳ و ۲۳۲۲۳ داریم، که هرکدام دیگری را پدید می آورد. پس این دو عدد فناناپذیر هستند: یکی از آنها را به ماشین بدهید، دیگری بیرون خواهد آمد سپس عدد دوم را به ماشین بدهید، عدد اول بیرون می آید. واضح است که این جریان پایان ندارد.

۲—

به ازای هر دوعدد X و Y ، می گوییم عدد X به عدد Y **منتهی** می شود هرگاه یا عدد X عدد Y را پدید آورد، یا عدد X عددی را پدید آورد که Y را پدید می آورد. یا عدد X عددی را پدید آورد که آن عدد عددی را پدید آورد که آن عدد... که آن عدد Y را پدید آورد. به بیان دیگر می گوییم X هنگامی به Y منتهی می شود که اگر جریان را با X شروع کنیم سرانجام دریک مرحله به Y برسیم. برای مثال، عدد ۲۲۲۲۲۲۷۸ پس از شش مرحله به عدد ۷۸ منتهی می شود. به طور کلی، اگر T از چندین ۲ تشکیل شده باشد، در آن صورت به ازای هرعدد X عدد TX به عدد X منتهی می شود.

اما ۳۲۲۲۳ خودش را پدید نمی آورد، اما به خودش منتهی می شود، زیرا ۲۲۳۲۲۲۳ را پدید می آورد که آن عدد نیز ۲۳۲۲۲۳ را پدید می آورد، که این عدد هم ۳۲۲۲۳ را پدید می آورد. چون ۳۲۲۲۳ به خودش منتهی می شود، پس بایستی فناناپذیر باشد.

خواننده ممکن است به این واقعیّت عام نیز توجّه کند: به ازای هر عدد T که فقط از چندین رقم ۲ تشکیل شده باشد، عدد ۳ T ۳ بایستی به خودش منتهی شود و بنابراین باید فناناپذیر باشد.

۳—

تنها راهی که من برای حل این مسئله می دانم این است که گزارهٔ عامتری ثابت کنیم که به‌موجب آن به‌ازای هر عدد T که فقط از ارقام ۲ تشکیل شده باشد، عدد ۳۲ T ۳ فناناپذیر باشد، و بنابراین در حالت خاصّ ۲ = T عدد ۳۲۳۲ نیز فناناپذیر خواهد بود، و این مبیّن یک اصل عامتر نیز هست، که در حل مسئلهٔ بعد از آن استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید گروهی از اعداد داشته باشیم (تفاوتی ندارد که گروه محدود یا نامحدود باشد)، که در آن هرعدد عضو گروه به عددی عضو گروه (خودش یا یک عدد دیگر) منتهی شود. پس هر عدد عضو گروه بایستی فناناپذیر باشد.

برای استفاده از این اصل در حل مسئلهٔ فعلی، گروه اعدادی را که به‌صورت ۳۲ T ۳ هستند درنظر بگیرید: (T فقط از ارقام ۲ تشکیل شده است). اکنون نشان می دهیم که در این گروه هر عدد عضو گروه به عددی عضو گروه منتهی می شود.

نخست عدد موردنظر در این مسئله، یعنی ۳۲۳۲، را درنظر بگیرید. این عدد، عدد ۳۲۲۳۲ را، که عضو گروه است پدید می آورد. عدد ۳۲۲۳۲ چطور؟ این نیز عدد ۲۳۲۲۲۳۲ را پدید می آورد که آن هم عدد ۳۲۲۲۳۲ را پدید می آورد، که عضو گروه است. عدد ۳۲۲۲۳۲ چطور؟ این عدد ۲۲۳۲۲۲۲۳۲ را پدید می آورد، که آن هم عدد ۲۳۲۲۲۲۳۲ را پدید می آورد که آن هم عدد ۳۲۲۲۲۲۳۲ را پدید می آورد. بنابراین در این مورد نیز به عددی عضو گروه می رسیم. به‌طور کلی به‌ازای هرعدد T متشکل از ارقام ۲، عدد ۳۲ T ۳۲ عدد ۳۲ T ۳۲۲ T را پدید می آورد، که به عدد ۳۲ T ۳۲۲ منتهی می شود، که این عدد هم عضو گروه است. پس کلّیهٔ عددهای عضو این گروه فناناپذیر هستند.

٤—

عدد ۳۲۳۲۳ عدد ۳۲۳۲۳۲۳ را پدید می آورد، که آن هم عدد ۳۲۳۲۳۲۳۲۳۲۳ را پدید می آورد و آن نیز عدد ۳۲۳۲۳۲۳۲۳۲۳۲۳۲۳۲۳ را پدید می آورد. الگو روشن است: هرعدد که آخرین رقم سمت راست آن ۳ باشد و سمت چپ آن از چندبار تکرار عدد ۳۲ تشکیل شده باشد، عددی به‌همین شکل را پدید می آورد (درواقع عددی بزرگتر از خودش)، و بنابراین کلّیهٔ این گونه اعداد فناناپذیرند.

۵—

نخست به این گزاره توجّه می کنیم: فرض کنید X و Y دوعدد باشند به‌طوری که عدد

X عدد Y را پدید آورد. در این صورت اگر Y فناپذیر باشد، X نیز بایستی فناپذیر باشد، زیرا اگر Y پس از n مرحله به یک عدد پذیرفته نشدنی Z منتهی شود، در آن صورت X پس از n+۱ مرحله به Z منتهی خواهد شد. همچنین اگر Y فناناپذیر باشد هیچ گاه به یک عدد پذیرفته نشدنی منتهی نخواهد شد و بنابراین X نیز به یک عدد پذیرفته نشدنی منتهی نمی شود، زیرا X فقط از راه Y می تواند به یک عدد دیگر منتهی شود. پس، اگر عدد X عدد Y را پدید آورد، در آن صورت وضعیّت فناپذیری X و Y یکسان خواهد بود (یعنی یا هردو فناپذیرند یا هردو فناناپذیرند).

اکنون ماشینی را که تابع دست کم قواعد ۱ و ۲ (یا احتمالاً قواعدی بیشتر) باشد وعددی مانند H را درنظر بگیرید. می دانیم که برطبق قاعده های ۱ و ۲، بایستی یک عدد X که HX را پدید آورد وجود داشته باشد (درواقع به یاد آورید که H۳۲H۳ نمونه ای ازچنین عدد است). چون عدد H عدد HX را پدید می آورد، پس اعداد H و HX یا هردو فناپذیرند یا هردو فناناپذیر (همان طور که در پاراگراف قبل نشان دادیم). پس عدد H نمی تواند طوری باشد که به ازای هر عدد X، یکی از دو عدد H و X فناپذیر و دیگری فناناپذیر باشد، زیرا درمورد خاصّ X = H۳۲H۳ این حالت که یکی از دو عدد X یا HX فناپذیر و دیگری فناناپذیر باشد نمی تواند وجود داشته باشد. بنابراین هیچ ماشینی که تابع قواعد ۱ و ۲ باشد نمی تواند مسئلهٔ فناپذیری در خودش را حل کند.

لازم به توضیح است که این موضوع در مورد هر ماشینی که تابع قواعد ۱ و ٤ باشد نیز صدق می کند، درواقع هر ماشینی که تابع قانون مک کالک باشد همین طور است.

(از این گذشته، کل این مسئله، به مسئلهٔ مشهور دیگری به نام مسئلهٔ نقص ماشینهای تورینگ مربوط است، که پاسخ آن نیز منفی است.)

۱۸
ماشینهایی که هرگز ساخته نشدند

اندکی پس از رویداد قبلی، در بعدازظهر یکی از روزها، کریگ با آرامش در اتاق مطالعه‌اش نشسته بود، که کسی به آهستگی در زد.

کریگ به خانم هوفمن گفت لطفاً ببینید چه کسی در می زند.

خانم هوفمن پس از چند دقیقه برگشت و گفت: «شخص عجیبی آمده است که شما را ببیند و مدعی است که درحال پایان دادن به بزرگترین و بیمانندترین اکتشاف ریاضی است! می گوید که شما **خیلی** به موضوع علاقه‌مند خواهید شد و اصرار دارد که بیدرنگ شما را ملاقات کند. چه دستوری صادر می فرمایید؟»

کریگ خردمندانه گفت: «خوب، بگو تشریف بیاورند به کتابخانه. من می توانم نیم ساعت به ایشان وقت بدهم.»

چند لحظه بعد درِ اتاق با شدت بازشد و مردی پریشان و هیجان‌زده به درون اتاق جهید. کیفش را روی نیمکت پرتاب کرد، دستهایش را در هوا تکان داد و درحالی که دیوانه‌وار به دورِ اتاق جست وخیز می کرد فریاد زد: «یافتم! یافتم! نزدیک است که آن‌را کَشف کنم و به‌عنوان بزرگترین ریاضیدان تاریخ مشهور شوم! از آن‌پس اسامی اقلیدس، ارشمیدس[1] و

۱—ارشمیدس (Arshimedes، ح ۲۱۲ - ۲۸۷ پیش از میلاد)، بزرگترین ریاضیدان، فیزیکدان و مهندس باستان بود.

گاوس[۱] فراموش خواهد شد! اسامی نیوتن[۲]، لوباچفسکی[۳]، بولیوئی[۴] ریمان[۵].....»

کریگ با آرامش اما به‌طور قاطع صحبت تازه‌وارد را قطع کرد و گفت: «خیلی خوب! خیلی خوب! بگو ببینم چه چیزی را کشف کرده‌ای؟»

تازه وارد با صدایی ملایمتر پاسخ داد: «هنوز کاملاً آن‌را کشف نکرده‌ام، اما به‌زودی اکتشاف خودرا تکمیل می کنم و پس از آن بزرگترین ریاضیدان تاریخ خواهم شد! و از آن‌پس اسامی گالیله[۶]، /کوشی[۷]، دیریکلی[۸]، کانتور[۹].....»

کریگ حرفش را قطع کرد و گفت: «کافی است، لطفاً فقط

۱ــ کارل فریدریخ گاوس (Carl Friedrich Gauss ، ۱۸۵۵ - ۱۷۷۷ میلادی)، ریاضیدان و اخترشناس آلمانی بود.

۲ــ آیزاک نیوتن (Isaac Newtan ، ۱۷۲۷ - ۱۶۴۲ میلادی)، فیلسوف و ریاضیدان مشهور انگلیسی بود.

۳ــ نیکولای ایوانوویچ لوباچفسکی (Nikolai Ivanovich Lobacheuski ، ۱۸۵۶ - ۱۷۹۳)، ریاضیدان روسی بود که به‌سبب کارهایش در هندسهٔ نااقلیدسی شهرت دارد.

۴ــ یانوش بولیوئی (Janos Bolyai ، ۱۸۶۰ - ۱۸۰۲ میلادی)، ریاضیدان مجارستانی بود که کارهای مهمّی در هندسهٔ نااقلیدسی کرد.

۶ــ گئورک فیدریچ برنهارت ریمان (Georg Friedrich Bernhard Riemann ، ۱۸۶۶ - ۱۸۲۶)، ریاضیدان آلمانی و بنیانگذار سیستمی در هندسهٔ نااقلیدسی بود.

۶ــ گالیله (Galileo Golilei، ۱۶۴۲ - ۱۵۶۴ میلادی)، دانشمند و فیلسوف ایتالیایی بود.

۷ــ اوگوستین لوئی کوشی (Augustin Louis Cauchy ۱۸۵۷ - ۱۷۸۹)، ریاضیدان فرانسوی بود. شهرتش به‌سبب پژوهشهای مهمّی است که در ریاضیات محض و کاربردی کرده است.

۸ــ پیستر گوستاف لژون دیریکلی (P. G. L. Dirichlet ، ۱۹۰۵ - ۱۸۵۹ میلادی)، ریاضیدان آلمانی بود که کارهای ارزشمندی در تئوری اعداد آنالیز و مکانیک کرد.

۹ــ گئورک کانتور (Georg Cantor، ۱۹۱۸ - ۱۸۴۵ میلادی)، ریاضیدان آلمانی و پایه گذار تئوری مجموعه‌ها بود و کارهای مهمّی در تئوری اعداد گنگ و حساب بینهایتها کرد.

بگویید این چیست که می‌خواهید کشف کنید؟»

غریبه با رنجش گفت: «می‌خواهم کشف کنم؟ به‌شما می‌گویم تقریباً کشف کرده‌ام! بلی، یک ماشین عام که می‌تواند **همهٔ** مسائل ریاضی را حل کند! با این ماشین بنده عقل کل خواهم شد، خواهم توانست.....»

کریگ گفت: «فهمیدم، رؤیای لایبنیتز[۱]!»

لایبنیتز هم چنین رؤیایی درسر داشت، اما من فکر نمی‌کنم که این رؤیا تحقّق‌پذیر باشد.

غریبه تحقیرکنان گفت: «لایبنیتز! لایبنیتز! او حتّی نمی‌دانست که از کجا شروع کند! اما من عملاً چنین ماشینی را **طرّاحی کرده‌ام!** فقط چند مطلب جزئی باقی مانده است. اما بهتر است نخست برایتان توضیح دهم که به‌دنبال چه چیزی هستم.»

غریبه که نامش والتن (Walton) بود چنین آغاز کرد: «به‌دنبال ماشینی مانند M هستم که دارای ویژگیهای معینی است: نخست عدد طبیعی X و سپس عدد طبیعی Y را به ماشین می‌دهید. ماشین به‌کار می‌افتد و عددی طبیعی بیرون می‌دهد که آن‌را با M(X . Y) نشان می‌دهیم. بنابراین وقتی که دادهٔ اول به ماشین X و دادهٔ دوم به ماشین Y باشد می‌گوییم M(X . Y)، **ستادهٔ** M است.»

کریگ گفت: «تا اینجا را متوجه‌ام.»

والتن ادامه داد: «چون من فقط با اعداد صحیح مثبت کار دارم از این پس هرگاه کلمهٔ **عدد** را به کار می‌برم مقصودم عدد **صحیح مثبت** است. همان‌طور که می‌دانید دو عدد طبیعی را **هم‌ارز** می‌گوییم هرگاه هردوزوج

۱ــ گوتفرید ویلهلم فون لایبنیتز (Gottfried Wilhelm Von Leibniz ، ۱۷۱۶ - ۱۶٤٦)، فیلسوف، ریاضیدان، سیاستمدار و اقتصاددان آلمانی و مبتکر حساب دیفرانسیل و انتگرال در ریاضیات بود.

یا هردو فرد باشند و اگر یکی فرد و دیگری زوج باشد آنها را **ناهم‌ارز** می‌نامیم.

به‌ازای هر عدد x عدد $M(x، x)$ را با $x^{\#}$ نشان می‌دهیم.

اکنون سه خاصیّتی که می‌خواهم در ماشینم برقرار باشند به‌شرح زیر است:

خاصیّت ۱: به‌ازای هر عدد a، می‌خواهم عدد b طوری باشد که به‌ازای هرعدد x، عدد $M(x، b)$ وعدد $M(x^{\#}، a)$ هم‌ارز باشند.

خاصیّت ۲: به‌ازای هر عدد b، می‌خواهم عدد a طوری باشد که به‌ازای هرعدد x، عدد $M(x، a)$ و $M(x، b)$ ناهم‌ارز باشند.

خاصیّت ۳: می‌خواهم عدد h طوری باشد که به‌ازای هرعدد x، عدد $M(x، h)$ وعدد x هم‌ارز باشند.»

والتن در پایان گفت: «اینها خواصّی هستند که مایلم در ماشین من برقرار باشند.»

کارآگاه کریگ مدّتی به‌موضوع فکرکرد و سرانجام پرسید: «پس مسئلهٔ شما چیست؟»

والتن پاسخ داد: «افسوس! من ماشینی ساخته‌ام که خواصّ ۱ و ۲ را دارد. ماشینی هم ساخته‌ام که خواصّ ۱ و ۳ را دارد. همچنین ماشینی ساخته‌ام که خواصّ ۲ و ۳ را دارد. همهٔ این ماشینها به‌خوبی کارمی کنند. طرحهای کامل هرسه ماشین را در کیفم گذاشته‌ام که روی نیمکت شماست. اما هرچه می‌کوشم تا هرسه خاصیّت را دریک ماشین برقرار کنم به مشکل برمی‌خورم!»

کریگ پرسید: «آن مشکل چیست؟»

والتن نومیدانه فریاد زد: «ماشین اصلاً کار نمی‌کند! وقتی که اعداد x و y را به ماشین می‌دهم، به‌جای اینکه عددی بیرون دهد شروع به وزوز می‌کند، چیزی شبیه اتصالی احساس می‌شود! آیا شما می‌توانید به‌علت این جریان پی ببرید؟»

کریگ گفت: «خوب، خوب! باید به این مسئله بیشتر فکر کنم. درحال حاضر به موضوع دیگری اشتغال دارم، اما اگر آدرس خودرا به‌من بدهید، درصورتی که به راه‌حلی رسیدم به‌شما اطلاع خواهم داد.»

چندروز بعد کارآگاه کریگ نامه‌ای به این مضمون برای والتن نوشت:

والتن عزیز:

از اینکه به دیدن من آمدید و توجّه مرا به ماشینی که می‌خواهید بسازید جلب کردید خیلی تشکر می‌کنم. حقیقت این است که من کاملاً نمی‌فهمم که حتّی اگر موفق به ساختن چنان ماشینی بشوید، چگونه می‌توانید با آن **کلّیهٔ** مسائل ریاضی را حل کنید، اما بیگمان خودتان بهتر می‌دانید. در هرحال، اصل مطلب این است که طرح شما بیشتر به ساختن ماشینی با حرکت دائم شباهت دارد: بنابراین امری محال است! درواقع مسئلهٔ شما از این هم بدتر است، زیرا گرچه ساختن یک ماشین با حرکت دائم در این جهان فیزیکی غیرممکن است، اما ازنظر **منطقی** غیرممکن نیست، درحالی که ساختن ماشین پیشنهادی شما نه‌فقط ازنظر فیزیکی غیرممکن است بلکه ازنظر منطقی هم محال است، زیرا درسه خاصیّتی که ذکر کردید یک تناقض منطقی وجود دارد.

در ادامهٔ نامهٔ کریگ علت محال بودن چنین ماشینی ازنظر منطقی توضیح داده شده است.

آیا شما می‌دانید چرا؟

بهتر است حل مسئله را درسه مرحله انجام داد:

(۱) نشان دهید که در هر ماشینی که خاصیّت ۱ برقرار باشد، به‌ازای هر عدد a ، دست‌کم بایستی یک عدد x وجود داشته باشد که $M(x،a)$ با x هم‌ارز باشد.

(۲) نشان دهید درهرماشینی که خواص ۱ و ۲ وجود داشته باشد،

به ازای هر عدد b ، عددی مانند x وجود دارد به طوری که $M(x, b)$ با x ناهم ارز است.

(۳) هیچ ماشینی نمی تواند خواص ۱ ، ۲ و ۳ را توأماً داشته باشد.

پاسخ

(الف) ماشینی با خاصیّت ۱ را درنظر بگیرید. یک عدد a را انتخاب کنید. برطبق خاصیّت ۱، یک عدد b وجود دارد به طوری که به ازای هر عدد x ، $M(x, b)$ با $M(x^{\#}, a)$ هم ارز باشد.

درحالت خاص اگر x را برابر b بگیریم، $M(b, b)$ با $M(b^{\#}, a)$ هم ارز خواهد بود. اما $M(b, b)$ برابر $b^{\#}$ است، پس $b^{\#}$ با $M(b^{\#}, a)$ هم ارز است. بنابراین اگر عدد $b^{\#}$ را با x نشان دهیم می بینیم که $M(x, a)$ با x هم ارز است.

(ب) اکنون هر ماشینی که خواصّ ۱ و ۲ را داشته باشد درنظر بگیرید. و یک عدد b را انتخاب کنید. برطبق خاصیّت ۲، عددی مانند a وجود دارد به طوری که به ازای هرعدد x ، عدد $M(x, a)$ با عدد $M(x, b)$ ناهم ارز باشد. و برطبق خاصیّت ۱ همان طور که در قسمت (الف) اثبات کردیم، دست کم یک عدد x وجود دارد به طوری که $M(x, a)$ با x هم ارز باشد. بنابراین یک چنین عدد x بایستی با $M(x, b)$ ناهم ارز باشد، زیرا با $M(x, a)$ هم ارز است که این عدد با $M(x, \;)$ ناهم ارز است.

(ج) مجدداً ماشینی را درنظر بگیرید که خواص ۱ و ۲ را داشته باشد. یک عدد h را انتخاب کنید. برطبق قسمت (ب) (چنانچه عدد b را با h نشان دهیم)، دست کم یک x وجود دارد که $M(x, h)$ با x ناهم ارز باشد. بنابراین $M(x, h)$ و x به ازای **کلّیهٔ** مقادیر x هم ارز نیستند، به بیان دیگر خاصیّت ۳ نمی تواند صادق باشد. پس اجتماع خواص ۱ و ۲ و ۳ باهم ناسازگارند.

تذکر: مسئلهٔ امکان ناپذیری ماشین والتن به گزارهٔ تارسکی (بخش ۱۵) خیلی شبیه است و می توان گزارهٔ مذکور و امکان ناپذیری ماشین را با یک استدلال واحد حل کرد.

۱۹

رؤیای لایبنیتز

فرگوسن (و همچنین والتن، با روش عجیب خودش) برای حل چیزی کوشش می کرد که اگر موفق می شد یکی از رؤیاهای لایبنیتز تحقّق می یافت: لایبنیتز امکان طرّاحی ماشینی را مطرح کرد که بتواند کلّیهٔ مسائل ریاضی و همچنین کلّیهٔ مسائل فلسفی را حل کند. مسائل فلسفی را که کنار بگذاریم، به‌نظر می رسد که حتّی برای مسائل ریاضی نیز رؤیای لایبنیتز تحقّق‌پذیر نیست. این مطلب از نتیجه هایی که **گودل**، **روسر**، **چرچ**، **کلین**، **تورینگ** و **پست**، به دست آوردند حاصل می شود، که اکنون به کارهای آن دانشمندان می پردازیم.

نوعی ماشین حساب وجود دارد که کارش انجام دادن عملیات ریاضی برروی اعداد صحیح مثبت است. در این ماشین، عدد x را به ماشین می دهند **(داده)** و عدد ۷ بیرون می آید **(ستاده)**. مثلاً می توانیم ماشینی طرّاحی کنیم (که یقیناً ماشین جالب توجّهی نخواهد بود) که هرگاه عدد x را به‌آن بدهید عدد ۱ + x بیرون آید. در این صورت می گوییم که ماشین عمل اضافه کردن ۱ را **محاسبه** می کند. همچنین ممکن است ماشینی طرّاحی کنیم که یک عمل را برروی دو عدد محاسبه کند، مانند انجام‌دادن عمل جمع. در این مورد نخست عدد x و سپس عدد ۷ را به

ماشین می دهیم. سپس دگمه‌ای را فشار می دهیم. پس از چند لحظه عدد $x + y$ بیرون می آید (البته برای این ماشین یک اسم مشخص وجود دارد. همان‌طور که حدس می زنید اسم این ماشین، **ماشین جمعزن** است).

نوعی ماشین دیگر نیز هست که می توان آن را **ماشین مولد** یا **ماشین شمارشگر** نامید، که در این بخش نقش مهمّتری خواهد داشت (و از تئوریهای پست نتیجه می شود).

این گونه ماشین هیچ داده‌ای ندارد، بلکه طوری برنامه‌ریزی شده است که مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت را تولید کند. مثلاً، ممکن است ماشینی داشته باشیم که مجموعهٔ اعداد زوج را تولید کند، یا یک ماشین داشته باشیم که مجموعهٔ اعداد فرد را تولید کند، یا یک ماشین که اعداد اول را تولید کند، و مانند اینها. نوعی برنامه برای تولید اعداد زوج در این نوع ماشینها می تواند به‌صورت زیر باشد:

دو دستورالعمل به ماشین می دهیم: (۱) عدد ۲ را چاپ کند. (۲) چنانچه عدد n را چاپ کرد عدد $n + 2$ را نیز چاپ کند. (همچنین قواعدی کمکی به ماشین می دهیم که دستورالعملها را به‌طور سیستمی دنبال کند به‌طوری که هرکاری را که ماشین **قادر به** انجام آن باشد در نهایت **انجام دهد**. ماشینی که دستورالعمل (۱) را پیروی کند دیر یا زود عدد ۲ را چاپ می کند و پس از چاپ عدد ۲ دیر یا زود برطبق دستورالعمل (۲) عدد ٤ را چاپ خواهد کرد، و پس از چاپ ٤ برطبق دستورالعمل (۲) دیر یا زود عدد ٦ را چاپ خواهد کرد، سپس عدد ۸، عدد ۱۰ و مانند آنها را چاپ می کند. به این ترتیب، این ماشین مجموعهٔ اعداد زوج را تولید می کند (این ماشین چنانچه دستورالعمل دیگری نداشته باشد هرگز اعداد ۱ و ۳ و ۵، یا هرعدد فرد دیگری را چاپ نخواهد کرد).

واضح است که برای اینکه یک ماشین اعداد فرد را چاپ کند، کافی است که در برنامه‌ریزی آن دستورالعمل (۱) را به‌صورت «عدد ۱ را

چاپ کن») تغییر دهیم. گاهی عملیات دو یا چند ماشین به‌هم ارتباط داده می‌شود، به‌طوری که ستادهٔ یک ماشین به عنوان دادهٔ ماشین دیگر به کار گرفته می‌شود. مثلاً فرض کنید دو ماشین A و B داشته باشیم و آنها را به‌صورت زیر برنامه‌ریزی کنیم: به ماشین A دو دستورالعمل می‌دهیم: (۱) عدد ۱ را چاپ کن، (۲) اگر ماشین B عدد N را چاپ کرد عدد ۱+N را چاپ کن. به ماشین B فقط یک دستورالعمل می‌دهیم: (۱) اگر ماشین A عدد N را چاپ کرد، عدد ۱ + N را چاپ کن. به‌نظر شما ماشین A و B هرکدام چه مجموعه‌ای را تولید می‌کنند؟ پاسخ آن است که ماشین A مجموعهٔ اعداد فرد و ماشین B مجموعهٔ اعداد زوج را چاپ خواهد کرد.

اکنون برنامهٔ ماشین مولد را به‌جای آنکه به زبان گفتگو تنظیم کنیم، به‌صورت کُد (رمز) که از یک رشته ارقام تشکیل شده است تهیه می‌کنیم. و مطالب را طوری تنظیم می‌کنیم که هرعدد مثبت معرف یک برنامه باشد. ماشینی را که رمز برنامهٔ آن عدد n باشد با M_n نشان می‌دهیم. بنابراین کلّیهٔ ماشینهای مولد را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ نامعیّن $M_۱$ و $M_۲$ .... M_n .... نشان داد ($M_۱$ ماشینی است که رمز برنامهٔ آن عدد ۱ است، $M_۲$ ماشینی است که رمز برنامهٔ آن عدد ۲ است و غیره).

به ازای هر مجموعهٔ A (متشکل از اعداد صحیح مثبت) و هر ماشین M، می‌گوییم که ماشین M مجموعهٔ A را **تولید** می‌کند، یا ماشین M مجموعهٔ A را **می‌شمارد**، هرگاه هرعدد عضو A سرانجام به وسیلهٔ ماشین چاپ شود و هیچ عدد خارج از A به‌وسیلهٔ ماشین چاپ نشود. و می‌گوییم که مجموعهٔ A **شمارش‌پذیر مؤثر** است (شمارش‌پذیر بازگشتی اصطلاح تکنیکی دیگر است) هرگاه دست کم یک ماشین M_i وجود داشته باشد که A را بشمارد. همچنین می‌گوییم مجموعهٔ A **حل‌شدنی** است (اصطلاح تکنیکی دیگر **بازگشت** است). هرگاه، یک ماشین M_i وجود داشته باشد که A را بشمارد و یک ماشین دیگر M_i وجود داشته باشد که مجموعهٔ اعداد

خارج از A را بشمارد. بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه A حل شدنی باشد آن است که هم A و هم مکمّل آن $\bar{A}$ عملاً شمارش پذیر باشند.

فرض کنید A حل شدنی باشد، و یک ماشین M_i که A را تولید کند و یک ماشین M_j که مکمّل A را تولید کند داشته باشیم. در این صورت یک روش عملی برای تعیین اینکه چه عددی عضو A است و چه عددی عضو A نیست خواهیم داشت: مثلاً فرض کنید می خواهیم بدانیم عدد ۱۰ عضو A هست یانه. ماشینهای M_i و M_j را به طور همزمان به کار می اندازیم و صبر می کنیم: اگر ۱۰ عضو A باشد ماشین M_i دیر یا زود آن را چاپ خواهد کرد، و خواهیم فهمید که ۱۰ عضو A است. اگر ۱۰ عضو A نباشد ماشین M_j دیر یا زود آن را چاپ می کند و می فهمیم که ۱۰ عضو A نیست. پس سرانجام به طور قطع برایمان مشخص خواهد شد که آیا ۱۰ عضو A هست یا عضو A نیست. (البته از قبل به هیچ وجه نمی دانیم که رسیدن به پاسخ چقدر وقت خواهد برد، تنها چیزی که می دانیم این است که دریک **مدّت معین** جواب را خواهیم فهمید.)

اکنون فرض کنید مجموعهٔ A عملاً شمارش پذیر باشد اما حل شدنی نباشد. در این صورت یک ماشین M_i که A را تولید کند داریم، اما ماشینی که مکمّل A را تولید کند نداریم. فرض کنید بخواهیم تعیین کنیم که یک عدد معین - مثلاً عدد ۱۰ ــ عضو A هست یانه. بهترین کاری که در این مورد می توانیم انجام دهیم این است که ماشین را به کار اندازیم و امیدوار باشیم که جواب بگیریم! در اینجا فقط ۵۰ درصد احتمال دارد که جواب بگیریم. اگر ۱۰ عضو A باشد در آن صورت دیر یا زود ماشین M_i آن را چاپ می کند و می فهمیم که ۱۰ عضو A است. اما اگر ۱۰ عضو A نباشد، M_i هرگز آن را چاپ نخواهد کرد، لیکن هرقدر که درانتظار بمانیم هیچ اطمینانی از **اینکه** M_i بعداً نیز ۱۰ را چاپ نخواهد کرد به دست نخواهیم آورد. بنابراین اگر ۱۰ عضو A باشد دیر یا زود موضوع را خواهیم

فهمید، اما اگر ۱۰ عضو A نباشد هیچ گاه به‌طور قطعی نخواهیم فهمید که ۱۰ عضو A نیست (دست کم با مشاهدهٔ فقط ماشین M_i). در این حالت مجموعهٔ A را می توان مجموعهٔ **نیمه حل شدنی** نامید.

نخستین ویژگی مهمّ این ماشینهای مولد آن است که می توان یک ماشین **عام** U ساخت که کار آن مشاهدهٔ سیستمی رفتار همهٔ ماشینهای M_1 و M_2 ... ، M_n ، ... باشد، و هرموقع که یک ماشین M_x عدد y را چاپ کرد U واقعیّت را گزارش دهد. گزارش چگونه انجام می شود؟ از راه چاپ یک عدد.

به ازای هر عدد x و y در اینجا نیز $x * y$ را به‌عنوان عددی که از x رقم ۱ و به‌دنبال آن y رقم (۰) تشکیل شده باشد تعریف می کنیم. دستورالعمل اصلی ما به U چنین است: هرگاه ماشین Mx عدد Y را چاپ کرد، عدد $x * y$ را چاپ کن.

مثلاً فرض کنید ماشین M_a برای تولید مجموعهٔ اعداد فرد و M_b برای تولید مجموعهٔ اعداد زوج برنامه‌ریزی شده باشند. در این صورت U کلّیهٔ اعداد ۱*a ، ۳*a ، ۵*a، ۷*a و مانند آنها و همچنین کلّیهٔ اعداد ۲*b ، ٤*b ، ٦*b و مانند آنها را چاپ خواهد کرد، اما هیچ گاه عدد ٤*a را چاپ نمی کند (زیرا M_a هرگز عدد ٤ را چاپ نمی کند)، همچنین عدد ۳*b را چاپ نمی کند (زیرا M_b هرگز عدد ۳ را چاپ نمی کند).

اکنون ماشین U نیز خودش دارای یک برنامه است و بنابراین جزو یکی از ماشینهای برنامه‌پذیر M_1 و M_2 ..... ، M_n ..... است. پس عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که M_k همان ماشین U باشد!

(در یک بررسی فنی‌تر به شما خواهم گفت که عدد k کدام است؟).

باید توجّه داشته باشیم که این ماشین عام M_k گذشته از مشاهده و

گزارش رفتار کلّیهٔ ماشینهای دیگر، رفتار خودش را نیز مشاهده و گزارش می‌کند. بنابراین هروقت که M_k عدد n را چاپ کند، بایستی عدد $k*n$ ، همچنین عدد $k*(k*n)$ و نیز عدد $k*[k*(k*n)]$ و مانند آنها را چاپ کند.

ویژگی مهمّ دیگر این ماشینها این است که به‌ازای هرماشین M_a می‌توان یک ماشین M_b را طوری برنامه‌ریزی کرد که فقط درصورتی عدد x را چاپ کند که ماشین M_a عدد $x*x$ را چاپ بکند. (به‌بیان دیگر ماشین M_b «مواظب» ماشین M_a است و به‌آن گفته شده است که فقط وقتی M_a عدد $x*x$ را چاپ کرد عدد x را چاپ کند). می‌توان برنامه‌ها را طوری رمزگذاری کرد که به‌ازای هرعدد a عدد b برابر $2a$ باشد، یعنی به‌ازای هرعدد a ، ماشین M_{2a} فقط هنگامی که ماشین M_a عدد $x*x$ را چاپ کرد عدد x را چاپ کند. فرض می‌کنیم که این کار انجام شده باشد و برآن اساس به دو واقعیّت اساسی که بعداً به‌کار خواهیم گرفت توجّه می‌کنیم.

واقعیّت ۱: تنها اعدادی را که ماشین عام U چاپ می‌کند اعداد $x*y$ است، مشروط برآنکه M_{ax} اعداد y را چاپ کند.

واقعیّت ۲: به‌ازای هر عدد a ، تنها اعدادی را که ماشین M_{2a} چاپ می‌کند اعداد x است مشروط برآنکه ماشین M_a اعداد $x*x$ را چاپ کند.

اکنون به موضوع اصلی می‌رسیم: هرمسئلهٔ صوری ریاضی را می‌توان به این مسئله که آیا ماشین M_a عدد b را چاپ می‌کند یا چاپ نمی‌کند تبدیل کرد. یعنی، در هر سیستم اصول صوری، می‌توان به همهٔ عبارتهای سیستم، اعداد گودل نسبت داد و عدد a را طوری تعیین کرد که ماشین M_a فقط اعداد گودل عبارتهای اثبات‌پذیر را چاپ کند و هیچ عدد دیگری را چاپ نکند. بنابراین برای اینکه ببینیم یک عبارت معیّن درسیستم

اثبات‌پذیر هست یانه کافی است عدد گودل آن عبارت، یعنی b ، را به ماشین Ma بدهیم و ببینیم که آیا آن‌را چاپ می کند یانه. پس اگر یک روش عملی داشته باشیم که از راه آن معین شود کدام ماشین کدام اعداد را چاپ می کند، در آن‌صورت می توان عملاً تعیین کرد که کدام عبارت در کدام سیستم اصول اثبات‌پذیر است. و این رؤیای لایبنیتز را تحقّق می بخشد. همچنین این مسئله را، که کدام عدد به‌وسیلهٔ کدام ماشین چاپ می شود، می توان به مسئلهٔ کدام اعداد به‌وسیلهٔ ماشین عام U چاپ می شوند کاهش داد، زیرا این مسئله که آیا ماشین M_a عدد b را چاپ می کند یانه برابر است با این مسئله که آیا ماشین U عدد b * a را چاپ می کند یا نه. بنابراین، شناخت U مستلزم شناخت کامل همهٔ ماشینها است، یعنی شناخت همهٔ سیستمهای ریاضی. و برعکس، این مسئله را، که کدام ماشین کدام عدد را چاپ می کند، می توان به این مسئله که آیا یک عبارت معین در یک سیستم معین اثبات‌پذیر است یانه کاهش داد. بنابراین شناخت کامل همهٔ سیستمهای ریاضی صوری مستلزم شناخت کامل ماشین عام است.

پس پرسش اصلی این است: فرض کنید V مجموعهٔ کلّیهٔ اعدادی باشد که به‌وسیلهٔ ماشین عام U چاپ می شوند (گاهی مجموعهٔ V را **مجموعهٔ عام** می نامند). آیا این مجموعهٔ V حل‌شدنی است یا نه؟ اگر V حل‌شدنی باشد در آن‌صورت رؤیای لایبنیتز تحقّق می یابد و اگر حل‌شدنی نباشد رؤیای لایبنیتز هرگز ممکن نیست به واقعیّت درآید. چون V عملاً شمارش‌پذیر است (مجموعهٔ V به‌وسیلهٔ ماشین U تولید می شود) مسئله به اینجا منتهی می شود که ببینیم آیا ماشینی مانند M_a وجود دارد که $\bar{V}$ یعنی **مکمل** V را چاپ کند، یعنی آیا ماشینی وجود دارد که فقط اعدادی را که U چاپ **نمی کند** چاپ کند؟ این مسئله را می توان براساس واقعیتهای مشروط ۱ و ۲ کاملاً پاسخ داد.

گزارهٔ L: مجموعهٔ V شمارش‌پذیر مؤثر نیست: به ازای هر ماشین M_a یا عددی در $\bar{V}$ وجود دارد که M_a نمی‌تواند آن‌را چاپ کند، یا M_a دست کم یک عدد را که در V باشد چاپ می کند.

آیا خواننده می‌تواند گزارهٔ L را اثبات کند؟ به‌عنوان یک حالت خاص، فرض کنید ادعا شود که ماشین $M_۵$ مجموعهٔ $\bar{V}$ را می شمارد (تولید می کند). برای نفی این ادعا، کافی است عددی مانند N پیدا کنیم که یا N در $\bar{V}$ باشد و $M_۵$ نتواند آن‌را چاپ کند، یا N در V باشد و $M_۵$ آن‌را چاپ کند. آیا می توانید چنین عددی را پیدا کنید؟

برای حل این مسئله مجدداً به استدلال گودل کشانده می شویم:

هر عدد a را در نظر بگیرید. طبق واقعیّت ۲، به ازای هر عدد x، شرط لازم و کافی برای آنکه Ma عدد x * x را چاپ کند این است که ماشین $M_{۲a}$ عدد x را چاپ کند. اما برطبق واقعیّت ۱، شرط لازم و کافی برای آنکه $M_{۲a}$ عدد x را چاپ کند آن است که ماشین عام U عدد x * a ۲ را چاپ کند، یا به بیان دیگر، درصورتی که x * ۲a عضو V باشد. بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه ماشین M_a عدد x * x را چاپ کند این است که عدد x * ۲a عضو $\bar{V}$ باشد. درحالت خاص، اگر x را برابر ۲a بگیریم، شرط لازم و کافی برای آنکه ماشین M_a عدد ۲a * ۲a را چاپ کند آن است که ۲a * ۲a عضو V باشد. پس یا: (۱) Ma عدد ۲a * ۲a را چاپ می کند و ۲a * ۲a عضو $\bar{V}$ است، یا (۲) M_a عدد ۲a * ۲a را چاپ نمی کند و ۲a * ۲a عضو $\bar{V}$ است. اگر (۱) درست باشد در آن صورت M_a عدد ۲a * ۲a را چاپ می کند، که عضو $\bar{V}$ نیست امّا عضو $\bar{V}$ است، و این بدان معنی است که ماشین M_a مجموعهٔ $\bar{V}$ را تولید نمی کند، زیرا دست کم یک عدد (۲a * ۲a) را که عضو $\bar{V}$ نیست چاپ می کند. اگر (۲) درست باشد در آن صورت نیز M_a نمی تواند مجموعهٔ $\bar{V}$ را تولید کند، زیرا عدد ۲a * ۲a عضو $\bar{V}$ است امّا ماشین M_a آن‌را چاپ

نمی کند. پس در هر دو حالت ماشین M_a مجموعهٔ $\bar{V}$ را نمی تواند تولید کند. چون هیچ ماشینی نمی‌تواند $\bar{V}$ را تولید کند پس مجموعهٔ $\bar{V}$ شمارش‌پذیر مؤثر نیست.

واضح است که درحالت خاص $a=5$، عدد n برابر ۱۰ * ۱۰ است.

اما این مطالب چه ارتباطی با رؤیای لایبنیتز دارد؟ به‌طور کلی، نمی توان امکانپذیری امید لایبنیتز را اثبات یا نفی کرد، زیرا او آرزوی خودرا درشکلی دقیق بیان نکرده است. درواقع در زمان لایبنیتز هیچ مفهوم دقیقی از «**ماشین شمارشگر**» یا «**ماشین مولد**» وجود نداشت. تعریف دقیق و کامل این مفاهیم در قرن اخیر ارائه شده است. مفاهیم موردبحث به شکلهای گوناگون بسیار به‌وسیلهٔ گودل، هربراند (Herbrand)، کلین، چرچ، تورینگ، پست، اسمولیان[1]، مارکوف[2] و بسیاری دیگر تعریف شده است، اما همهٔ آن تعریفها معادل یکدیگر بوده‌اند. اگر منظور از «حل شدنی» این باشد که مسئله برطبق هرکدام از این تعریفهای معادل، حل شدنی، باشد درآن صورت رؤیای لایبنیتز امکانپذیر نیست، به این دلیل ساده که ماشینها را می توان طوری شماره گذاری کرد که واقعیّتهای ۱ و ۲ برقرار باشند و درآن‌صورت برطبق گزارهٔ L مجموعهٔ V که به‌وسیلهٔ ماشین عام تولید می شود حل شدنی نیست؛ و فقط نیمه حل شدنی است. بنابراین هیچ روش صرفاً مکانیکی برای تعیین این موضوع که کدام عبارت در کدام سیستم اصول اثبات‌پذیر و کدام عبارت در کدام سیستم اصول اثبات‌ناپذیر است وجود ندارد.

بنابراین هرگونه کوشش برای اختراع مکانیسمی که بتواند همهٔ

۱ــ ریموند اسمولیان (نویسندهٔ همین کتاب).

۲ــ آندره آندریویچ مارکوف (A. A,Markov ۱۹۲۲ - ۱۸۵۶ میلادی). ریاضیدان و منطقی روسی بود که کارهای مهمّی در منطق و ریاضی کرد.

مسائل ریاضی را برایمان حل کند محکوم به شکست است.

به‌قول امیل پست (۱۹۴۴)، این نتیجه به‌ما نشان می دهد که تفکّر ریاضی امری است خلاّق و بایستی چنین بماند. یا به‌بیان ریاضیدان دیگر، پل رزنبلوم (Paul Rosenbloom)، این گزاره می رساند که انسان هراندازه کوشش کند، هرگز نمی تواند ضرورت به کار گرفتن عقل خودرا در حل مسائل حذف کند.