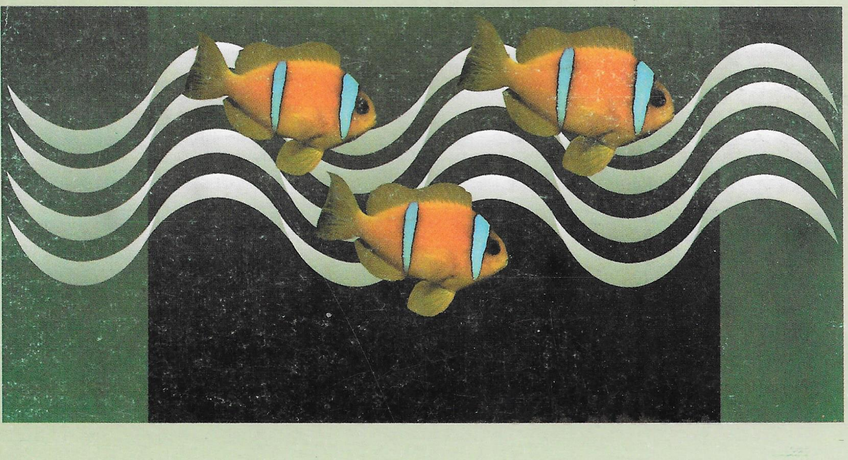
علوی

مقدمات

آنالیز کلاسیک

تألیف

جرالد، مارسدن



ترجمه

دکتر بیژن شمس

دکتر محمدعلی رضوانی

مقدمات

آنالیز کلاسیک

تـألیف
جرالد، مارسدن

دکتر محمدعلی رضوانی
ترجمه
دکتر بیژن شمس

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

بنام خدا

پیشگفتار مترجمان

مفاهیمی که از دیرباز در آنالیز کلاسیك مطرح بوده‌اند، در اثـر انبوه پژوهشهای متمادی و تحول بنیادی ریاضیات به تدریج تعمیم یافته‌اند و به‌صورتی چنان مجرد و کلی درآمده‌اند که شناخت آنها برای مبتدیان دشوار می‌نماید.

هدف از درس آنالیز کلاسیك در برنامه‌های رشته ریاضی آن است که دانشجو را با این سیر تحول آشنا سازد، و زمینه‌ای بـرای تجربه‌گذار از آنالیز کلاسیك به آنالیز نوین فراهم کند.

چون کتـاب مقدمـات آنالیز کلاسیک تألیف جرالد ای. مارسدن بـه تشخیص صاحب‌نظران یکی از بهترین کتب موجود در زمینهٔ آنالیز کلاسیك است به‌ترجمهٔ درآمد تا دراین راه دانشجویان را یاری دهد.

درپایان بایسته است کـه از مدیر ارجمند و کارکنان محترم فنی سازمان انتشارات علوی که موجبات چاپ این کتاب را فراهم کرده‌اند، سپاسگزاری شود.

دکتر بیژن شمس- دکترمحمد علی رضوانی

پیشگفتار مؤلف

این کتاب برای دو دورهٔ سه ماهه یا یك یا دو دورهٔ ششماهه در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته و آنالیز حقیقی مقدماتی درنظر گرفته شده‌است. این کتاب کلاسیك است، به‌این معنی که با حساب دیفرانسیل و انتگرال و آنالیز فوریه در فضای اقلیدسی سروکار دارد. تنها اشاره‌های کوتاهی به مباحث «نوین» همچون انتگرال گیری لبگ، توزیعها، و مکانیك کوانتومی شده است. در برابر وسوسهٔ گنجاندن آنالیز برداری (قضیهٔ استوکس و غیره) مقاومت به‌خرج دادیم. دربیشتر برنامه‌های آموزشی، این مبحث زودتر، در سال دوم، درسطحی غیر صوریتر می‌آید (به‌عنوان نمونه، کتاب
J. Marsden and A. Tromba, *vector Calculus*, *W. H. Freeman and Company*, 1975 را ببینید) و می‌تواند دیرتر در چارچوب نظریهٔ خمینه‌ها، برای دانشجویانی که چنین گرایشی دارند، بیاید.

در ارائه مطالب، ما تعمداً راه غیرمجرد را برگزیده‌ایم ـ هدفمان ایجاد درك مستحکمی ازحالت اقلیدسی ومعرفی‌تجرید، آن‌هم فقط ازلابلای مثالها بوده‌است. به‌عنوان نمونه، اگر فضاهای اقلیدسی به خوبی درك شوند، گذار به فضاهای دیگری نظیر فضای توابع پیوسته وفضاهای متریك مجرد، پرش کوتاهی خواهدبود. درچارچوب فضای‌توابع پیوسته، می‌توانیم قدرت روشهای متداول در فضای متریك مجرد را ببینیم. وقتی که نظریهٔ کلی، قبل ازموعد ارائه شود، دانشجو دربارهٔ مناسبت آن سردرگم می‌شود؛ درنتیجه وقت بسیاری ازتعلیم ممکن است به هدر رود.

دراین‌کتاب فرض برآن است که خواننده مقداری حساب دیفرانسیل و انتگرال در چنته دارد؛ یعنی اینکه، این آقا یا خانم می‌داند چگونه از توابع استاندارد مشتق گیری یا انتگرال گیری کند. به‌سخن دقیقتر، مطالب به‌طورمنطقی‌پشت‌سرهم می‌آیند وبه‌پیش‌نیازهای اندکی نیاز دارند، با وجود این دانشی ازحساب دیفرانسیل و انتگرال برای فهم مثالها و تمرینها موردنیاز است. همچنین، تماس مختصری با مشتقات جزئی و انتگرالهای چندگانه

مطلوب است ولـی اساسی نیست. فصل ۶، دربارهٔ مشتق‌گیری، به مقدمات جبر خطی نیـاز دارد؛ مشخصاً، دانشجو بـایـد بداند کـه یک تبدیل خطی و ماتریس نمایش دهندهٔ آن چیست.

هر فصل به‌قرارزیرسازماندهی‌شده‌است. بندهای‌متعددی‌وجود دارند که‌شامل تعاریف، صورت‌قضایا،مثالها، ومسائل نسبتاً آسان هستند. به‌محض آنکه دانشجو برقضایاتسلط پیدا کندو قادر باشد مسائل آسان را دستکاری کند، می‌تواند به پایان فصل برود و بر برهانهای فنی تسلط بیابد. در آنجا مثالها وتمرینهای متعدد بیشتری داده شده‌اند. تمرینهای آسانتری که در دنبال هر بند آمده‌اند دانشجو را قادر می‌سازند تا به تدریج که جلو می‌رود برمطالب مسلط شود. آنگاه تمرینهای پـایـان فصل غالباً به‌آگاهی کامل ازکل فصل موردنظر یـا فصول قبلی مشتمل بر برهان قضایا، نیاز دارند. این طرح هنگام ارائه درسها خوب ازکار درآمده است. وقتی‌که درسها به‌توضیح قضایا اختصاص می‌یابند وفقط برهانهای انتخاب شده‌ای ارائه می‌شوند، برای دانشجو بسیار آسانتراست‌که ببیند جریان ازچه قرار است. ما دریافتیم کـه با بهره‌گیری از این رهیافت، در هر درس می‌توان یک یـا دو بند را ارائه کرد.

فصل مقدماتی حاوی مطالب مربوط بـه اصطلاحات اساسی است. دانشجویی‌کـه به ریزه‌کاریهای نظریهٔ مجموعه‌ها علاقمند باشد می‌تواند به پیوست مراجعه‌کندکه پرفسور I.Fáry از روی لطف آن را تهیه‌کرده‌اند.

فصل ۱ حاوی مطالبی دربارهٔ مبانی ساختار خط حقیقی است‌که برای مباحث‌بعدی مورد نیازند. ما حداقل زمـان را صرف اصول موضوع جبری می‌کنیم و توجه خود را برخاصیت تمامیت متمرکزمی‌کنیم. اصول‌موضوع جبری‌معمولاً در دوره‌های جبرمقدماتی ارائه می‌شوند، وچون دانشجو با کارکردن با اعداد حقیقی‌آشناست، منطقی به‌نظرمی‌رسد که مهارتهای جبری را معتبر بدانیم.

فصل ۲ و ۳ توپولوژی $\mathbf{R}^n$ را به‌طریقی مورد بررسی قرار می‌دهند که فقط بتوان ساختار متریك اصلی $\mathbf{R}^n$ را به‌کاربرد. این را به منظورگذار تقریبـاً خودکار به فضاهـای متریک دیگری، مانند فضای توابع پیوسته کـه بعداً مورد بررسی قرار می‌گیرد، انجـام داده‌ایم.

دراینجا ازیك معرفی کامل و زودرس فضاهـای متریك مجرد خودداری شده است. تجربه نشان داده است‌که دراین سطح تقریباً دوهفتهٔ اضافی لازم‌است تا مطالعهٔ این‌حالت مجرد را به انجام برسانیم، زیرا در وهلهٔ اول، باید از لابلای فضاهای متریك «عجیب و غریب» معمولی،که دانشجو آنهـا را گیج کننده می‌یابد، عبورکنیم. بعداً می‌توانیم دقت باقیمـانده را بـرای مباحث مفیدتـری نظیر قضیهٔ آسکولی، قضیهٔ استون ـ وایرشتراس، قضایای نقطهٔ ثابت، و معادلات دیفرانسیل یا انتگرال صرف‌کنیم.

فصل ۴، با بررسی نکات اساسی دربارهٔ پیوستگی، بحث را ادامـه می‌دهد. فصل ۵ خواص مفصلتری از توابع پیوسته را در ارتباط با همگرایی یکنواخت به دست می‌دهد.

تعدادی از مباحث تخصصی‌تر در بندهای ۵.۵-۹.۵، ارائه می‌شوند که می‌توان گزیده‌ای از آنها را درنظر گرفت.

فصل ۶ سروکارش با مشتق‌گیری است که استفاده‌هایی از جبرخطی می‌کند. همهٔ مباحث متداول در حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرند. بررسی نسبتاً دقیقی ازماکسیممها و مینیممها ارائه شده است که مشتمل بر بحثی اختیاری دربارهٔ لم مورس در فصل ۷ است. مبحث اصلی فصل ۷ بحث کاملی از قضایای تابع‌معکوس وضمنی‌است. قضایای وجودی برای‌معادلات‌دیفرانسیل معمولی وتکثیرکنهای لاگرانژ (اکسترممهای مقید) نیز ارائه شده‌اند.

فصل ۸ مبانی انتگرال‌گیری را مورد بررسی قرار می‌دهد. ممکن است بعضیها بخواهند این مطلب را قبل ازفصل ۷ تدریس کنند. دراین فصل ما سروکارمان با انتگرال ریمان است ولی قضیهٔ لبگ و مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را درآن گنجانده‌ایم. بندی اختیاری، نگاه سریعی برتوزیعها، که با تابع δ روشن شده است، می‌افکند.

فصل بعدی دو قضیهٔ بنیادی مربوط به انتگرالهای چندگانه را اثبات می‌کند: تحویل به انتگرالهای مکرر وفرمول تعویض متغیرها. کاربردهای متعددی آورده شده‌اند.

آخرین فصل، فصل ۱۰، بررسی نسبتاً کاملی ازسریهای فوریه، ازنقطه‌نظرفضاهای مجهز به‌حاصل‌ضرب داخلی، ارائه می‌دهد. مباحثی چون این برای دانشجویان دوره‌های آنالیز مقدماتی مفیدند، زیرا این بسیار فراترازصرف «دقیق‌کردن» مباحث فراوانی است که آنان ازقبل می‌دانند. یك ویژگی غیر متداول نحوهٔ ارائه ما، گنجاندن‌کاربردهایی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل و مکانیك‌کوانتومی است.

البته مدرسان درمورد دقت، نقش شهود، انتخاب موضوع، وغیره دارای سلیقه‌های متفاوتی هستند. شاید تذکراتی چند دربارهٔ تنوع روشهای ارائه مطالب موجود در این کتاب‌آنهایی راکه می‌خواهند این‌کتاب را با سبك خاص خودِ تطبیق دهند، یاری رساند.

نخست، در فصول ۲ تا ۴، این امکان هست‌که برفضاهای متریك مجرد، بدون واردکردن تغییری اساسی در متن، تأکید بیشتری کنیم. درواقع تمرین خوبی است که دانشجویان را وادارکنیم تا این تطبیق را خودشان به انجام برسانند، زیرا یکبار که آنها برهان «درست» در $\mathbf{R}^n$ را ببینند، اقدام به این تعمیمها لذت بخش می‌شود. در این باره R.Gulliver جدولی تهیه کرده است که درپایان فصل ۵ آمده است؛ این جدول نشان می‌دهد که کدام قضایا برای فضاهای متریك‌کلی برقرارند.

بعضی از مطالب واقع در فصل ۵ کمی پیشرفته‌ترند و می‌توان آنها را به تعویق انداخت. همچنین، اگریك‌توالی‌منطقی‌کامل‌مطلوب باشد، باید مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از توابع یك متغیره قبل از فصل ۵ بیایند؛ این امر به زمینهٔ دانشجویان بستگی دارد. اساسی‌ترین جنبه‌های مطالب نامبرده دربندهای ۳.۵، ۶.۵، و ۵.۷ به‌کار رفته‌اند. در عمل دریافته‌ایم‌که الزام به‌کاربستن مقداری حساب دیفرانسیل و انتگرال، قبل‌ازآنکه درجریان درس «به طور صحیح» ارائه شود، فقط بهترین دانشجویان را آزرده خاطر می‌کند.

به نظر ما این چیز سالمی است، ولی بعضیها ممکن است بخواهند ترتیب ارائه را تعویض کنند.

درآغاز فصل ۶، خوب است کمی جبرخطی را مرور کرد؛ مشخصاً تعریف ماتریس یك تبدیل خطی را. همچنین فرصت خوبی است تا مثال ۴ واقع در انتهای فصل ۴ را مورد بررسی قرار دهیم.

برای یك دورهٔ ششماهه، به منظور رسیدن به فصل ۱۰، باید بعضی ازمباحث (مانند بندهای ۵.۵ــ۹.۵ و ۳.۷ــ۷.۷) را حذف کرد. برای دو دورهٔ سه ماهه، وقت برای تکمیل کل متن (شاید با از قلم انداختن بندهای ۸.۵، ۹.۵، ۳.۷، ۴.۷، ۶.۷، ۷.۷، ۷.۱۰، و ۸.۱۰) وجود دارد.

نمادهایی که دراین متن به‌کار رفته‌اند استاندارد هستند جز شاید درموارد زیر:
$\mathbf{R}$ خط عددی حقیقی را نمایش می‌دهد، $\mathbf{C}$ اعداد مختلط را نمایش می‌دهد، $\mathbf{R}^n$ فضای n بعدی اقلیدسی را نمایش می‌دهد، و ■ دلالت برپایان یك برهان دارد. نماد $]a, b[$ برای نشان دادن بازهٔ باز مرکب ازهمهٔ اعداد حقیقی x که در $a<x<b$ صدق می‌کنند، به‌کار رفته است. این قرارداد اروپایی موجب اجتناب از اختلاط آن با جفت مرتب (a,b) می‌شود. نماد $x \to f(x)$ نشان می‌دهد که x با f بر $f(x)$ نگاشته می‌شود. نماد $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ به‌این معناست که f قلمرو A را در $\mathbf{R}^m$ می‌نگارد. گهگاه $\Longrightarrow$ برای نشان دادن «مستلزم . . . است» به‌کار می‌رود. نماد $A \setminus B$ اعضایی از مجموعهٔ A را نشان می‌دهد که اعضای B نیستند، و $x \in A$ به‌این معناست که x عضوی از A است.

در داخل هرفصل، بندها، قضایا، و تعاریف متوالیاً شماره‌گذاری شده‌اند. ارجاع به‌چیزی، مانند «قضیهٔ ۲۴» یا «تمرین ۳»، به‌مطلبی در داخل فصل یا بند حاضر اشاره‌دارد؛ درغیراین‌صورت، شمارهٔ فصل یا بند مورد نظر آورده می‌شود.

ما از M. Buchner و W. Wilson که در اولین پیش‌نویس این‌کتاب ما را یاری رساندند، و از I.Fa'ry و R.Gulliver به خاطر همکاری درتهیه پیوستهای آن سپاسگزاری می کنیم. همچنین از دانشجویان ریاضی 104A–B در برکلی، به ویژه E.Wong، J.Lim، J.Wing، و J.Seitz، به‌خاطر یافتن اغلاط کوچك متعدد ونکاتی مربوط به‌سبك، سپاسگزاری می کنیم. از همکارانمان، که بسیاری از مسائل این‌کتاب، از امتحانات گذشته‌شان استخراج شده است، سپاسگزاری می‌کنیم. نام چند همکار شایستهٔ ذکر خاص است، به‌ویژه P. Chernoff، I.Fáry، R. Gulliver، و M. Mayer به خاطر خواندن بخشهایی از دستنویس و پیشنهاد اصلاحات متعدد. بندهای ۹.۵ و ۴.۱۰ وتعدادی‌ازمسائل باتوجه به‌جزوه‌های درس P.Chernoff تنظیم شده‌است. دیگر دستیاران، A. Erickson، A. Hausknecht، D. Heifetz، و J. Macrae در بخشهایی از دستنویس ما را یاری کردند، بسیاری از اغلاط را تصحیح کردند، و پاسخهای بیشتر مسائل را بررسی و تهیه کردند. همچنین M . McCracken، W. A. J. Luxemburg، و R. Graff به‌ما یاری رساندند. ما از I.Workman

به خاطر کار ظریف ماشین نویسی دستنویس این کتاب و از N. Lee به خاطر حمایت معنویش سپاسگزاری می‌کنیم.

سرانجام، سپاس ما به R. Abraham، K. Mc Aloon، A. Tromba، M. O' Nan، مسئولین Eagle Mathematics Incorporated (یك سازمان مؤلفین ریاضی)، به خاطر توصیه‌شان برای نوشتن این‌کتاب و تشویقهای بعدیشان، تعمیم می‌یابد.

جرالد ای. مارسدن

نکاتی لازم از نظریهٔ مجموعه‌ها و توابع

دانشجویی که می‌خواهد با موفقیت از این کتاب بهره گیرد باید با حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی، وهمچنین دانشی از جبرخطی (بیشتر برای استفاده درفصول ۶، ۷ و ۱۰) و اندکی آگاهی ازحساب دیفرانسیل وانتگرال توابع چندمتغیره آشنایی داشته باشد. آمادگی کافی معمولاً از دو سال ریاضیات دورهٔ لیسانس حاصل می‌شود. به‌علاوه، دانشی اساسی ازمجموعه‌ها وتوابع موردنیاز است، که به‌این منظور مفاهیم لازم در زیرخلاصه شده‌اند. این مطالب باید به‌طوراختصارمطالعه شوند وسپس به‌هنگام نیاز مورد استفاده قرار گیرند.

نظریهٔ مجموعه‌ها نقطهٔ آغاز اکثر شاخه‌های ریاضی است و خود مبحثی وسیع و پیچیده است. برای اختصار و فهم بهتر، مطالعه‌مان را تا اندازه‌ای شهودی شروع می‌کنیم. خواننده‌ای که علاقه‌مند است در بارهٔ ظرافتهای این موضوع بیشتر بداند، می‌تواند، برای اطلاعات بیشتر، به‌پیوست (الف) در انتهای کتاب مراجعه نماید.

یك مجموعه عبارت است از گردایه‌ای از «اشیاء» یا «چیزها» که اعضای آن مجموعه نامیده می‌شوند. مثلاً، اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ... یك مجموعه تشکیل می‌دهند. همین طور مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای (کسرهای) p/q یك‌مجموعه می‌سازند. اگر S یك مجموعه، و x عضوی از S باشد، می‌نویسیم $x \in S$. مجموعهٔ A را زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ S گویند، هرگاه هرعضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ S باشد؛ با استفاده از نمادها، می‌نویسیم $(x \in S) \Longleftarrow (x \in A)$. نماد $\Longleftarrow$ به معنای «مستلزم آن است که» می‌باشد. هنگامی که A یك زیرمجموعهٔ S است، می‌نویسیم $A \subset S$. گاهی هم ازنماد $A \subseteq S$ برای نشان دادن $A \subset S$ استفاده می‌شود. تساوی مجموعه‌ها را نیز می‌توانیم به این صورت تعریف کنیم که $A = B$ یعنی $A \subset B$ و $B \subset A$؛ یعنی A و B دارای اعضای یکسانی هستند. مجموعهٔ تهی، که با $\varnothing$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای فاقد عضو می‌باشد. مثلاً، مجموعهٔ تمام اعداد

صحیح n که در $n^2=-1$ صدق کنند تهی است. مجموعهٔ تهی $\varnothing$ اغلب سبب سرگردانی دانشجویان می‌شود، ودر واقع مفهومی عجیب **است** ــ دراین مرحله برروی اهمیت آن زیاد تأکید نکنید.

برای مشخص کردن یك مجموعه معمولاً اعضای آن را به‌صورت یك‌فهرست‌تنظیم نموده وداخل ابرو قرار می‌دهیم. بدین‌سان برای نمایش مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت از $\mathbf{N}=\{۱,۲,۳,\ldots\}$ و برای مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح از

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-۳,-۲,-۱,\ ۰,۱,۲,۳,\ldots\}$$

استفاده می کنیم. مثالی از یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{N}$ عبارت‌است ازمجموعهٔ اعداد زوج که‌آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$A=\{۲,۴,۶,\ldots\}=\{x\in\mathbf{N}\mid \text{زوج است } x\}\subset\mathbf{N}$$

مجموعهٔ $\{x\in\mathbf{N}\mid \text{زوج است } x\}$ را چنین می‌خوانیم «مجموعهٔ همهٔ اعضای x از $\mathbf{N}$ به‌طوری‌که x زوج است».

دراین مرحله یك تفاوت نمادی وجود داردکه باید از آن آگاه باشیم. فرض‌کنیم S یك مجموعه باشد. به ازای $a\in S$، $\{a\}$ آن زیر مجموعه‌ای از S را می‌نمایاند‌که اعضایش مرکب از عضو یکتای a است. بدین‌سان $\{a\}\subset S$ درحالی‌که $a\in S$.

برای یك مجموعهٔ کلی S و به‌ازای $A\subset S$ و $B\subset S$، تعریف می‌کنیم $A\cup B=\{x\in S\mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$ که چنین خوانده می‌شود «مجموعهٔ همهٔ $x\in S$هایی‌که اعضای A یا B (یا هردو) هستند». مجموعهٔ $A\cup B$ را اجتماع A و B گویند. به طور مشابه، می‌توان اجتماع خانواده‌هایی از مجموعه‌ها را تشکیل داد. مثلاً، فرض‌کنیم $A_۱$، $A_۲$، ... زیرمجموعه‌هایی از S باشند. آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\cup_{i=۱}^{\infty} A_i=\{x\in S\mid x\in A_i \text{ ،به‌ازای } i \text{ ی}\}$$

این‌اجتماع را به‌صورت $\cup\{A_۱,A_۲,A_۳,\ldots\}$ نیزمی‌نویسند. توجه‌کنید‌که $A\cup B$ حالت خاصی است‌که در آن $A_۱=A$، $A_۲=B$، وبه‌ازای هر $i>۲$، $A_i=\varnothing$.

به طور مشابه می‌توان اشتراکهای $A\cap B=\{x\in S\mid x\in A \text{ و } x\in B\}$ و $\cap_{i=۱}^{\infty}A_i=\{x\in S\mid x\in A_i \text{ ،به‌ازای هر } i\}$ را تشکیل داد. شکل ۰ــ۱ این اعمال را با نمودار نشان می‌دهد.

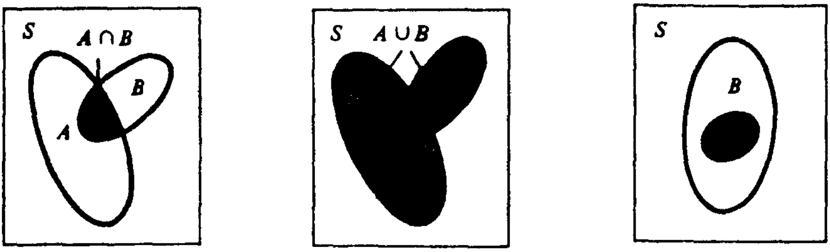
برای A و $B\subset S$، متمم A را نسبت به B چنین تعریف می‌کنیم

$$B\setminus A=\{x\in B\mid x\notin A\}$$

که در آن $x\notin A$ بداین معناست‌که x در A نیست. شکل ۰ ــ ۲ را ببینید.

خواننده می‌تواند، همان‌گونه‌که ذیلاً درمثال ۱ انجام‌شده‌است،ثابت کندکه،به‌ازای مجموعه‌های دلخواه $A_۱,A_۲,B\subset S$، $B\setminus(A_۱\cup A_۲)=(B\setminus A_۱)\cap(B\setminus A_۲)$ و $B\setminus(A_۱\cap A_۲)=(B\setminus A_۱)\cup(B\setminus A_۲)$. این مثالی از یك «همانی مجموعه‌ای» می‌باشد. مثالهای دیگری درمسائل داده شده‌اند.

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A ، B را چنین تعریف می‌کنیم $A\times B=$ $\{(a,b)|a\in A$ و $b\in B\}$. این مجموعه مرکب از همهٔ زوجهای مرتب (a,b) است که در آن $a\in A$ و $b\in B$. شکل ۰ـ۳ را ببینید.

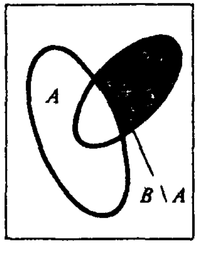


(الف) (ب) (پ)

شکل ۰ـ۱ (الف) زیرمجموعه. (ب) اجتماع. (پ) اشتراك.

یك تابع $f:A\to B$ ، «قانونی» است که به‌هر $a\in A$ عضومعینی از B را، که با $f(a)$ می‌نمایانند، نسبت می‌دهد. اغلب برای نشان دادن آنکه a به عنصر $f(a)$ نگاشته می‌شود ، از نماد $a\to f(a)$ استفاده می‌کنند . مثلاً (شکل ۰ـ۴) ، تابع $f(x)=x^2$ را می‌توانیم این گونه مشخص کنیم که بگوییم $x\to x^2$. دراینجا $A=B$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است.

تبصره: دراین کتاب واژه‌های «نگاشت»، «تابع»، و «تبدیل» باهم مترادف‌اند[1].



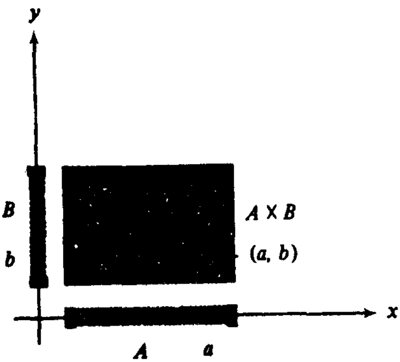
شکل ۰ـ۲ متمم

برای یك تابع $f:A\to B$ مجموعهٔ A را قلمرو f و B را هدف آن می‌نامند. برد f مجموعهٔ $f(A)=\{f(x)\in B|x\in A\}$ است، که یك زیرمجموعهٔ B می‌باشد. نمودار

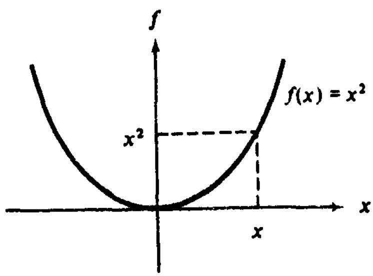
---

۱. درمتن انگلیسی دو واژهٔ «mapping» و «map» آمده است، که به‌جای هردوی آنها واژهٔ «نگاشت» به‌عنوان هم‌ارز فارسی برگزیده شده است. ــ م.

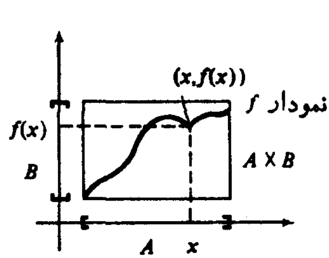
f مجموعهٔ $\{(x, f(x)) \in A \times B \mid x \in A\}$ است، مانند شکل ۰ـ۵ .



شکل ۰ـ۳ حاصل‌ضرب دکارتی



شکل ۰ـ۴ تابع



شکل ۰ـ۵ نمودار یك تابع

کسی که تـوجه دقیق به اساس منطقی دارد ممکن است نسبت به استفاده از زبـان محاوره‌ای ازقبیل «قانون» معترض باشد و بهتر بداند که یك تابـع از A به B را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ تعریف کند با این خاصیت که هردوعضواین مجموعه که دارای

اعضای نخست یکسان هستند با هم مساوی باشند، یعنی عضو اول x، عضو دوم $f(x)$ را معلوم کند. شکل ۰ـ۵ را ببینید.

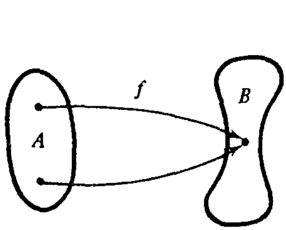
یك تابع $f : A \to B$ را یك به یك (همچنین انژکسیون) خوانند در صورتی که اگر[1] $a_1 \neq a_2$ آنگاه $f(a_1) \neq f(a_2)$. بدین‌سان تابعی را یك به یك گویند که هیچ دو عضو متمایز درقلمرو را بریك عضو یکتا در برد ننگارد.

مثالی افراطی از تابعی که یك به یك نیست تابع ثابت می‌باشد، تابعی مانند $f : A \to B$ به‌طوری که، به‌ازای هر $a_1, a_2 \in A$ ، $f(a_1) = f(a_2)$. شکل ۰ـ۶ را ببینید.

تابع $f : A \to B$ را پوشا یا یك سورژکسیون گوییم، هرگاه به‌ازای هر $b \in B$، یك $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(a) = b$ ، به‌عبارت دیگروقتی که برد با هدف مساوی باشد. بایستی توجه شود که انتخاب A و B قسمتی از تعریف f است، و یك به‌یك یا پوشا بودن یا نبودن f بستگی به این انتخاب دارد. مثلاً، $f(x) = x^2$ یك به‌یك و پوشاست وقتی که $A = B$ و مرکب از همهٔ اعداد حقیقی x باشند به طوری که $x \geqslant 0$ ، یك به‌یك است ولی پوشا نیست وقتی که A همهٔ آن x هایی باشد که $x \geqslant 0$ و B همهٔ xها باشد، و هیچ‌کدام از این دو حالت را ندارد وقتی که هردوی A و B همهٔ اعداد حقیقی باشند.

برای $f : A \to B$ و $D \subset A$، قرار می‌دهیم $f(D) = \{f(d) \in B | d \in D\}$، و برای $C \subset B$ ، $f^{-1}(C)$ را مجموعهٔ $\{a \in A | f(a) \in C\}$ تعریف می‌کنیم. $f(D)$ را تصویر D و $f^{-1}(C)$ را تصویرمعکوس یا پیش تصویر C گوییم.

اگر $f : A \to B$ یك به‌یك و پوشا باشد، آنگاه از تعریف به‌آسانی ملاحظه‌می‌شود که تابع یکتایی، که با $f^{-1} : B \to A$ نشان داده می‌شود (نباید با $f^{-1}(C)$ مذکوردر بالا یا با $1/f$ اشتباه شود) وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $b \in B$، $f(f^{-1}(b)) = b$،



شکل ۰ـ۶ تابع ثابت

1. درتعاریف استفاده از «اگر» به‌جای «اگر، وفقط اگر» یك قرارداد است. عبارت دوم غالباً به‌صورت $\Longleftrightarrow$ نوشته می‌شود (مؤلف دراینجا نماد «iff» را نیز آورده است که مخفف «if and only if» می‌باشد.ـ م.)، البته درقضایا مطلقاً لازم است که بین «اگر» ، «فقط اگر» و «اگر، وفقط اگر» (همان iff . ـ م.) تمایز قائل شد.

و به‌ازای هر $a\in A$ ، $f^{-1}(f(a))=a$. f^{-1} را تابع معکوس f می‌نامیم. یك نگاشت یك به‌یك و پوشا را نیز یك‌بیژکسیون یا یك تناظر یك به‌یك می‌نامند. [آگاهی: برای‌هر مجموعهٔ $C\subset D$ می‌توانیم $f^{-1}(C)$ را تشکیل دهیم حتی اگر f یك‌به‌یك یا پوشانباشد. برای تمرین با این اعمال، تمرین ۳ را ببینید.]

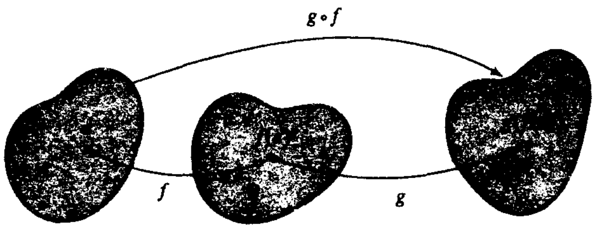
نگاشت $A\rightarrow A$: f را به طوری که، به ازای هر $x\in A$ ، $f(x)=x$ ، نگاشت همانی بر A می‌نامند. باید میان نگاشتهای همانی برای مجموعه‌های مختلف تمایز قائل شد. مثلاً، گاهی نماد I_A را برای نگاشت همانی بر A به‌کارمی‌بریم. روشن است که I_A یك به‌یك وپوشا می‌باشد.

اینك دو تابع $f: A\rightarrow B$ و $g: B\rightarrow C$ را درنظرمی‌گیریم. ترکیب آن دو $g\circ f: A\rightarrow C$ با $g\circ f\ (a) = g\ (\ f\ (a)\ )$ تعریف می‌شود. شکل ۰-۷ را ببینید. مثلاً، اگر $f: x\rightarrow x^{۲}$ و $g: x\rightarrow x+۳$ ، آنگاه $g\circ f: x\rightarrow x^{۲}+۳$ و $f\circ g: x\rightarrow (x+۳)^{۲}$ (دراینجا A ، B، و C مرکب‌ازهمهٔ اعداد حقیقی x می‌باشند).

گاهی می‌خواهیم تنها بعضی از اعضایی را که یك تابع بر آنها تعریف شده است مورد توجه قراردهیم. این عمل را تحدید یك‌تابع می‌نامند. به‌طور صوریتر، اگر نگاشت $f: A\rightarrow B$ و $D\subset A$ را داشته باشیم، تابع جدید $f|D: D\rightarrow B$ راکه چنین تعریف می‌شود، به‌ازای هر $x\in D$ ، $(f|D)(x)=f(x)$ درنظر می گیریم. $f|D$ را تحدید f بر D می‌نامیم، وهمچنین‌می گوییم که f یك توسیع $f|D$ است. اهمیت‌این‌مفاهیم درمباحث آتی روشن خواهد شد.

مجموعهٔ A را متناهی گویند، اگر بتوان به‌ازای یك‌عدد صحیح n، همهٔ اعضای آن را به صورت $\{a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_n\}$ نمایش داد. یك مجموعه را که متناهی نیست نامتناهی می‌نامند. مثلاً، مجموعهٔ همهٔ اعدادصحیح‌مثبت $\mathbf{N}=\{۱, ۲, \ldots\}$ مجموعه‌ای نامتناهی‌است.

در بررسی مثالها، تعیین آنکه آیا یك مجموعهٔ نامتناهی اعضای بیشتری از یك مجموعهٔ نامتناهی دیگر دارد، معمولاً مشکل است. برای نمونه درنگاه اول روشن نیست که تعداد اعدادگویا بیشتر است یا تعداد اعداد گنگ. برای دقیق کردن این مفهوم، گوییم که دومجموعهٔ A و B دارای یك تعداد عضو هستند (یا دارای یك عدداصلی هستند) اگر نگاشتی مانند $f: A\rightarrow B$ وجود داشته باشد که یك‌به‌یك و پوشا باشد.



شکل ۰-۷ ترکیب توابع

اگر تعداد اعضای یك مجموعهٔ نامتناهی همان تعداد اعضای مجموعهٔ اعداد صحیح $\{۱, ۲, ...\}$ باشد آنگاه آن مجموعه را شمارا خوانند. یك مجموعه را که یا متناهی یا شمارا باشد شمارش‌پذیر نامند. درغیر این‌صورت، یك مجموعه را نامتناهی شمارش‌ناپذیر، یا به طور خلاصه، شمارش ناپذیر می‌نامند. مثالی از یك مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر مجموعهٔ همهٔ اعداد بین ۰ و ۱ می‌باشد. (این مطلب را درفصل ۱ ثابت خواهیم کرد).

فرض کنیم S یك مجموعه باشد. یك دنباله در S را می‌توان به‌صورت یك نگاشت $f: \mathbf{N} \to S$، که در آن $\mathbf{N} = \{۱, ۲, ۳, ...\}$، درنظر گرفت. بدین‌سان به هر عدد صحیح n عضوی از S را مانند $f(n)$ نظیر کرده‌ایم. اغلب اوقات این امرمسلم راکه تابعی در اختیار داریم فراموش می‌کنیم و دنباله را مختصراً به صورت عناصر تصویر، مثلاً، $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... درنظر می‌گیریم، یا فقط می‌نویسیم «دنبالهٔ x_n» یا $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$. یك زیردنبالهٔ دنبالهٔ $x_۱$، $x_۲$، ... دنباله‌ای مانند $y_۱$، $y_۲$، ... است به طوری که هر y_n در مجموعهٔ $\{x_۱, x_۲, ...\}$ واقع باشد و اگر $i < j$ آنگاه $y_i = x_l$، $y_j = x_m$ که در آن $l < m$، به‌عبارت دیگر، یك زیر دنباله از «صرف نظرکردن» بعضی‌از اعضای دنبالهٔاصلی ومرتب کردن عناصر مانده به‌طورطبیعی، حاصل می‌شود.

مثالهای حل شدهٔ فصل مقدماتی

۱. برای مجموعه‌های $A, B, C \subset S$، نشان دهید که

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(قانون توزیع‌پذیری)

حل: روش حل این است که نشان‌دهیم هرطرف زیرمجموعه‌ای ازطرف دیگراست. بنابراین ابتدا $x \in A \cap (B \cup C)$ی برمی‌گزینیم. این بدین‌معناست که x عضوی ازهر دوی A و $B \cup C$ می‌باشد. بنابراین x درA و درB یا در C است. اگر $x \in B$، آنگاه $x \in A \cap B$، درحالی‌که اگر $x \in C$، آنگاه $x \in A \cap C$. بنابراین x یا در $A \cap B$ یا در$A \cap C$ واقع‌است؛ یعنی $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$، ازاین رو $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. اینك فرض‌می‌کنیم $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$؛ بدین‌سان x یادر $A \cap B$ یا در $A \cap C$ واقع است. اگر $x \in A \cap B$، آنگاه x در A و B واقع است، وبه‌ویژه x در A و$B \cup C$ واقع‌است، بنابراین $x \in A \cap (B \cup C)$. به‌طورمشابه، اگر $x \in A \cap C$، نتیجه‌می‌گیریم که $x \in A \cap (B \cup C)$. ازاین‌رو $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$، و بنابراین تساوی حاصل می‌شود. این تساوی را می‌توان به‌طور نموداری، مانند شکل ۰ــ۸، تحقیق کرد.

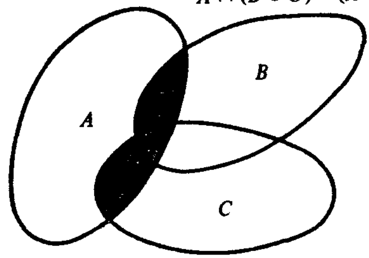
۲. نشان دهید که برای $A, B \subset S$،

$$A\subset B \Longleftrightarrow S\setminus A\supset S\setminus B$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که $A\subset B$ مستلزم آن است که $S\setminus B\subset S\setminus A$. فرض می‌کنیم $A\subset B$ و $x\in S\setminus B$. آنگاه $x\notin B$ و بنابراین $x\notin A$ (زیرا $x\in A\Longrightarrow x\in B$)، از این رو $x\in S\setminus A$، که ثابت می‌کند $S\setminus B\subset S\setminus A$. برای اثبات گزارهٔ معکوس فرض می‌کنیم $S\setminus B\subset S\setminus A$ و $x\in A$. آنگاه $x\notin B$ مستلزم آن است که $x\in S\setminus B$ که این خود نیز مستلزم آن است که $x\in S\setminus A$ و بنابراین $x\notin A$، که با فرض متناقض است؛ از این رو $x\in B$ و $A\subset B$.

۳. فرض کنیم $f(x)=x^2$ (که در مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است) و $B=\{y|y\geqslant 1\}$. مطلوب است محاسبهٔ $f^{-1}(B)$.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$



شکل ۸-۰ قانون توزیع‌پذیری

حل: بنابر تعریف $f^{-1}(B)$ شامل همهٔ x هایی است که $f(x)\in B$؛ یعنی همهٔ x هایی که $x^2\geqslant 1$. این نامساوی برقرار است اگر، و فقط اگر، $x\geqslant 1$ یا $x\leqslant -1$. بدین‌سان $f^{-1}(B)=\{x|x\geqslant 1\}\cup\{x|x\leqslant -1\}$.

۴. فرض کنیم A یک مجموعه باشد و $\mathcal{P}(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A را نشان دهد. ثابت کنید که A و $\mathcal{P}(A)$ دارای یک عدد اصلی نیستند.

حل: در اینجا استدلال کمی دشوار و ظریف است و نظیر «پارادوکسهای» متعددی است که در نظریهٔ مجموعه‌ها یافت می‌شود (برای جزئیات بیشتر پیوست (الف) را ببینید). این نتیجه مرهون کارهای گ. کانتور[1] است. فرض کنیم یک بیژکسیون $f:A\to\mathcal{P}(A)$ داشته باشیم؛ آنگاه یک تناقض استخراج خواهیم کرد. قرار می‌دهیم $B=\{x\in A|x\notin f(x)\}$. چون f پوشاست یک $y\in A$ وجود دارد به‌طوری که $f(y)=B$. اگر $y\in B$، آنگاه بنابر تعریف B نتیجه می‌گیریم که $y\notin B$. به‌طور مشابه اگر $y\notin B$، آنگاه نتیجه می‌گیریم که $y\in B$. در هر حال به یک تناقض می‌رسیم. در واقع این استدلال نشان می‌دهد که تابعی مانند $f:A\to\mathcal{P}(A)$ که پوشا باشد وجود ندارد.

1. G. Cantor

تمرینهای فصل مقدماتی

۱. نگاشتهای زیر به‌وسیلهٔ $f(x)$، قلمرو A، و برد B تعریف شده‌اند. به‌ازای $A_{\circ} \subset A$ و $B_{\circ} \subset B$ داده شده، مطلوب است محاسبهٔ $f(A_{\circ})$ و $f^{-1}(B_{\circ})$.

(الف) $f(x) = x^{2}, \quad A = \{-1, 0, 1\}, \quad B =$ همهٔ اعداد حقیقی

$A_{\circ} = \{-1, 1\}, \quad B_{\circ} = \{0, 1\}$

(ب)

$$f(x) = \begin{cases} x^{2}, & \text{اگر } x \geqslant 0 \\ -x^{2}, & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

$A =$ همهٔ اعداد حقیقی $= B$,

$A_{\circ} =$ همهٔ $x > 0$ ها, $B_{\circ} = \{0\}$

(پ)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \\ -1, & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

$A = B =$ همهٔ اعداد حقیقی,

$A_{\circ} = B_{\circ} =$ همهٔ x هایی که $-2 < x < 1$

۲. برای توابع مذکور در تمرین ۱، تعیین کنید آیا یك به یك یا پوشا (یا هردو) هستند یا خیر.

۳. فرض کنیم $f : A \to B$ یك تابع، $C_1, C_2 \subset B$، و $D_1, D_2 \subset A$ باشند. ثابت کنید

(الف) $f^{-1}(C_1 \cup C_2) = f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2)$

(ب) $f(D_1 \cup D_2) = f(D_1) \cup f(D_2)$

(پ) $f^{-1}(C_1 \cap C_2) = f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)$

(ت) $f(D_1 \cap D_2) \subset f(D_1) \cap f(D_2)$

۴. روابط تمرین ۳ را به‌ازای توابع تمرین ۱ ومجموعه‌های زیر تحقیق کنید:

(الف) $C_1 =$ همهٔ $x > 0$ ها, $\quad D_1 = \{-1, 1\}$,

$C_2 =$ همهٔ $x \leqslant 0$ ها, $\quad D_2 = \{0, 1\}$;

(ب) $C_1 =$ همهٔ $x \geqslant 0$ ها, $\quad D_1 =$ همهٔ $x > 0$ ها,

$C_2 =$ همهٔ $x \leqslant 2$ ها, $\quad D_2 =$ همهٔ $x \geqslant -1$ ها,

(پ) $C_1 =$ همهٔ $x \geqslant 0$ ها, $\quad D_1 =$ همهٔ x ها,

$C_2 =$ همهٔ $x > -1$ ها, $\quad D_2 =$ همهٔ $x > 0$ ها,

۵. ثابت کنید یك تابع $f : A \to B$ یك به‌یك است اگر، وفقط اگر، بدازای هر $y \in B$، $f^{-1}(\{y\})$ شامل حداکثر یك نقطه باشد و یا، اگـر، وفقط اگر، به ازای همهٔ زیـر-مجموعه‌های $D_1, D_2 \subset A$، $f(D_1 \cap D_2) = f(D_1) \cap f(D_2)$. ضوابط مشابهی را برای «پوشایی» تعمیم دهید.

۶. با برقرارکردن تناظری یك‌به‌یك بین $]\circ,۱[$ و اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ نشان دهید که بازهٔ باز[1] $]\circ,۱[=\{x|\circ<x<۱\}$ و اعداد حقیقی دارای تعداد اعضای یکسانی هستند.

۷. فرض کنیم A مجموعه‌ای متناهی با N عضو باشد، و فرض کنیم $\mathcal{P}(A)$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌ها به‌انضمام مجموعهٔ تهی را نشان دهد. ثابت کنید که $\mathcal{P}(A)$ دارای ۲^N عضو است.

۸. ثابت کنید که مجموعهٔ $\{\ldots,۲,۱,\circ,-۱,-۲,\ldots\}$ شمارش‌پذیر است.

۹. نشان دهید که اگر $A_۱$، $A_۲$، ... مجموعه‌هایی شمارش‌پذیر باشند، آنگاه $A_۱\cup A_۲\cup\ldots$ نیز شمارش‌پذیر خواهد بود.

۱۰. فرض کنیم $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ S باشد. برای اجتماع همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ می‌نویسیم $\cup\mathcal{A}$ و به‌طور مشابه $\cap\mathcal{A}$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\mathcal{B}\supset\mathcal{A}$. دراین‌صورت نشان دهید $\cup\mathcal{A}\subset\cup\mathcal{B}$ و $\cap\mathcal{B}\subset\cap\mathcal{A}$.

۱۱. توابع $f:A\to B$، $g:B\to C$، و $h:C\to D$ مفروضند. ثابت کنید که $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ (یعنی، ترکیب توابع شرکت‌پذیر است).

۱۲. ثابت کنید که یك نگاشت $f:A\to B$ یك بیژکسیون است اگر، و فقط اگر، نگاشتی مانند $g:B\to A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که، نگاشت همانی $=f\circ g$ ونگاشت همانی $=g\circ f$. همچنین نشان دهید که $g=f^{-۱}$ و اینکه به‌طور یکتا معین می‌شود.

۱۳. فرض کنیم $f:A\to B$ و $g:B\to C$ دو بیژکسیون باشند. آنگاه $(g\circ f)$ یك بیژکسیون است و $(g\circ f)^{-۱}=f^{-۱}\circ g^{-۱}$. [راهنمایی: از تمرین ۱۲ استفاده کنید.]

۱۴. فرض کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ S و $\mathcal{B}$ گردایهٔ‌مجموعه‌های متمم باشد؛ یعنی $B\in\mathcal{B}$ اگر، و فقط اگر، $S\setminus B\in\mathcal{A}$. قوانین دمورگان را ثابت کنید:

(الف) $S\setminus\cup\mathcal{A}=\cap\mathcal{B}$

(ب) $S\setminus\cap\mathcal{A}=\cup\mathcal{B}$

در اینجا $\cup\mathcal{A}$ اجتماع همهٔ مجموعه‌های واقع در $\mathcal{A}$ را نشان می‌دهد (تمرین ۱۰ و صفحهٔ ۲ را ببینید). مثلاً، اگر $\mathcal{A}=\{A_۱,A_۲\}$، آنگاه تعبیر (الف) می‌شود $S\setminus(A_۱\cup A_۲)=(S\setminus A_۱)\cap(S\setminus A_۲)$ و تعبیر (ب) می‌شود $S\setminus(A_۱\cap A_۲)=(S\setminus A_۱)\cup(S\setminus A_۲)$.

---

۱. دراین کتاب ترجیح می‌دهیم بازه‌های باز را، به‌جای (a,b)، با $]a,b[$ نمایش دهیم. این قرارداد اروپایی از اشتباه گرفتن آن با زوجهای مرتب جلوگیری می‌کند.

۱۵. فرض کنیم $A, B \subset S$. نشان دهید که

$$A \times B = \varnothing \iff A = \varnothing \quad \text{یا} \quad B = \varnothing$$

۱۶. نشان دهید

(الف) $(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$

(ب) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$

۱۷. فرض کنیم $f : A \to B$ ، $g : B \to C$ نگاشتهای مفروضی باشند. نشان دهید که به‌ازای $C' \subset C$ ، $(g \circ f)^{-1}(C') = f^{-1}(g^{-1}(C'))$

فصل ۱

خط حقیقی وفضای n بعدی اقلیدسی

آگاهی کامل ازخط حقیقی وفضای n بعدی برای بررسی دقیق حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیره و همچنین برای درکی روشن ازآن ضروری است. بیشتراین فصل ممکن است مرور موادی باشدکه شاید در دوره‌های ریاضیات قبلی آمده‌اند. به‌هرحال، بحث ما دقیقتر خواهد بود و برای تدارك کارهای بعدی، خواص بیشتری ارائه خواهد داد.

۱.۱ خط حقیقی R

بحث را با خواص اصلی اعداد حقیقی آغاز می‌کنیم. خواننده باید با دلایل اکتشافی (یعنی، شهودی) که اعداد حقیقی را توجیه می‌کنند آشنا باشد. با اعداد صحیح مثبت ۱،۰، ۲، ۳،... شروع می‌کنیم و سپس اعداد صحیح منفی واعدادگویای ناصحیح را به‌آنها ملحق می‌کنیم. دستگاه اعداد حقیقی از الحاق همهٔ حدود ناگویای اعداد گویا به اعداد گویا حاصل می‌شود. مثلاً، عددگنگ $\sqrt{2}$ به‌عنوان حد یك دنبالهٔ افزایشی (یا یکنوای) x_n که درآن $x_n^2 < 2$ و x_n گویاست به‌دست می‌آید. ممکن است یك دنبالهٔ اعشاری از قبیل ۱٫۴،۱ ،۱٫۴۱ ،۱٫۴۱۴ ،۱٫۴۱۴۲ ،... را به‌کار برد. یك قضیهٔ معروف که اولین بار به‌وسیلهٔ اقلیدس ثابت شد آن است که $\sqrt{2}$ گویا نیست (تمرین ۲ واقع در پایان این فصل را ببینید).

اینك این پرسش پیش می‌آیدکه چگونه برنامهٔ بالا را به‌روشی صوری به انجام برسانیم؟ در واقع فرآیندکار اندکی طولانی است ولی مشکل نیست ، از این رو ما در اینجا فقط رئوس مطالب را ارائه می‌کنیم. نخستین‌کاری که باید صورت گیرد مجزا نمودن

مشخصات مهمی است که ما می‌خواهیم اعداد حقیقی دارا باشند. این مشخصات عبارتند از:

(I) اصول موضوع جمع. یك عمل جمع «$+$» وجود دارد به‌طوری که به‌ازای همهٔ اعداد x، y، z داریم

(یك) (تعویض‌پذیری) $x+y=y+x$

(دو) (شرکت‌پذیری) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(سه) عددی مانند ۰ وجود دارد به‌طوری‌که $x+0=x$ (وجود صفر)

(چهار) به‌ازای هر x عددی مانند w وجود داردکه با $-x$ نمایش داده می‌شود و طوری است‌که $x+w=0$ (وجود معکوسهای جمعی)

(II) اصول موضوع ضرب. یك عمل ضرب «.» وجود دارد به‌طوری‌که

(یك) (تعویض‌پذیری) $x\cdot y=y\cdot x$

(دو) (شرکت‌پذیری) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

(سه) عددی مانند $1\neq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $1\cdot x=x$ (وجود واحد)

(چهار) به‌ازای هر $x\neq 0$ عددی مانند v وجود دارد به‌طوری که $x\cdot v=1$ (وجود معکوسها)، می‌نویسیم $v=x^{-1}$ و $\dfrac{y}{x}=yx^{-1}$

(پنج) (قانون توزیع‌پذیری) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

هر مجموعه یا «دستگاه اعداد» مجهز به‌اعمال $+$ و . راکه از این قواعد پیروی کنند یك هیأت می‌نامند. مثلاً، اعداد گویا یك هیأت تشکیل می‌دهند ولی اعداد صحیح این‌طور نیستند. ازحالا به‌بعد به‌جای $x.y$ فقط می‌نویسیم xy.

(III) اصول موضوع ترتیب. یك ترتیب «$\leqslant$» (به‌عبارت دقیقتر، یك رابطه) وجود دارد به‌طوری‌که

(یك) اگر $x\leqslant y$ و $y\leqslant z$، آنگاه $x\leqslant z$ (تعدی)

(دو) (انعکاسی) $(x=y)\Longleftrightarrow(x\leqslant y\,,\,y\leqslant x)$

(سه) به‌ازای هردوعنصر x، y، یا $x\leqslant y$ یا $y\leqslant x$ (تثلیث)

(چهار) اگر $x\leqslant y$، آنگاه $x+z\leqslant y+z$

(پنج) $0\leqslant x$ و $0\leqslant y$ مستلزم آن است که $xy\geqslant 0$.

دستگاهی راکه دارای مشخصات (I)، (II)، و(III) باشد، یك‌هیأت مرتب می‌نامند. بنا بر تعریف، $x<y$ به‌این معناست که $x\leqslant y$ و $x\neq y$. نمادهای آشنای دیگری نیز ممکن است معرفی شوند. مثلاً، بزرگی عددی مانند x عبارت‌است از $|x|$، که اگر $x\geqslant 0$، برابر با x و اگر $x\leqslant 0$، برابر $-x$ تعریف می‌شود. فاصلهٔ بین x و y عبارت است از $|x-y|$. بزرگی در نامساوی مثلثی صدق می‌کند: $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ که درمثال ۱ در پایان همین فصل مورد تحقیق قرارمی گیرد.

ازاین اصول موضوع همهٔ قواعد عملی معمولی که از دبیرستان با آنها آشنایی داریم نتیجه می‌شوند. مثلاً می‌توان این اصول موضوع را برای اثبات آنکه $1>0$ به‌کار برد (مثال ۴ را در پایان همین فصل ببینید). درحال حاضر استفادهٔ کامل ازتمام جزئیات اصول موضوع بالا برای ما اهمیت ندارد وفقط اعتبارقواعد معمولی جبر راکه با آنها آشنایی داریم بدون اثبات خواهیم پذیرفت.

اکنون باید روشن شده باشدکه این اصول موضوع نمی‌توانند برای مشخص کردن اعداد حقیقی کافی باشند، زیرا اعدادگویا نیز ازاین اصول موضوع پیروی می‌کنند. بدین‌سان برای آنکه اطمینان پیداکنیم حدود اعداد گویا در این دستگاه قرار دارند به‌یك شرط دیگر نیاز داریم.

برای بیان این شرط، چند تعریف اضافی مربوط به‌دنباله‌ها مورد نیاز است. فرض کنیم x_n دنبالهٔ داده‌شده‌ای از اعداد باشد. گوییم x_n به‌سمت x همگراست اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$ عددی صحیح مانند N وجود داشته باشد به طوری که، به‌ازای همهٔ اعداد صحیح $n\geqslant N$، $|x_n-x|<\varepsilon$. این مطلب به‌صورت $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ یا $x_n\to x$ وقتی که $n\to\infty$، نوشته می‌شود.

احتمالاً دانشجو قبلاً با همگرایی دنباله‌ها مواجه شده است؛ به طور شهودی معنی آن این است که، وقتی n به‌قدرکافی بزرگ شود، x_n به‌قدر دلخواه به x نزدیك می‌شود. بعداً درفصل ۲ همگرایی را به‌طورمنظم مورد مطالعه قرار خواهیم داد. فعلاً از آن فقط برای مطالعهٔ اصل موضوع تمامیت زیراستفاده می‌شود.

دنبالهٔ x_n را افزایشی (یا ناکاهشی) گویند، اگر به‌ازای‌هر n، $x_n\leqslant x_{n+1}$. دنبالهٔ x_n را کراندار گویند اگرعددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که، به‌ازای هر $n=1,2,3,\ldots$، $|x_n|\leqslant M$.

به‌آسانی دیده می‌شود که دنباله‌ای مانند x_n می‌تواند، حداکثر، به‌سمت یك نقطه همگرا باشد. درواقع فرض کنیم x_n به‌سمت هردوی x و y همگرا باشد. آنگاه، بنابر نامساوی مثلثی، داریم $|x-y|=|x-x_n+x_n-y|\leqslant|x-x_n|+|x_n-y|$. اگر $|x-y|>0$ آنگاه با انتخاب ε برابر با $|x-y|/2$ می‌توان N راآنقدر بزرگ برگزید، که اگر $n\geqslant N$، آنگاه $|x-x_n|<|x-y|/2$ و $|x_n-y|<|x-y|/2$. بدین‌سان نامساوی $|x-y|<|x-y|$ را به‌دست می‌آوریم که غیرممکن است. بنابراین $|x-y|=0$ ودرنتیجه $x=y$.

اکنون اصل موضوع تمامیت را بیان می‌کنیم.

(IV) **اصل موضوع تمامیت.** اگر x_n دنباله‌ای افزایشی باشدکه از بالا کراندار است، آنگاه x_n به‌سمت عددی مانند x همگرا خواهد بود.

با درنظر گرفتن دنبالهٔ افزایشی تقریبات اعشاری: ۱، ۱٫۴، ۱٫۴۱، ۱٫۴۱۴، ... که به سمت $\sqrt{2}$ همگراست موجه بودن شرط (IV) ملاحظه می‌شود.

یك دستگاه اعداد را که دراصول موضوع (I) تا (IV) صدق کند یك هیأت مرتب کامل می‌نامند. شرط (IV) باشرطی که براساس آن، هر دنبالهٔ کاهشی کراندار از پایین همگراست، هم‌ارزاست. این هم‌ارزی را، باتوجه به $(x_n \to x) \iff (-x_n \to -x)$، درمی‌یابیم (تمرین ۱۸ را درپایان همین فصل ببینید).

حال برای تنظیم گزاره‌ای که بحث قبلی را هماهنگ کند آمادگی داریم.

قضیه ۱. دستگاهی «یکتا» از اعداد به نام دستگاه اعداد حقیقی وجود دارد که یك هیأت مرتب کامل است.

دستگاه اعداد حقیقی با **R** نمایش داده می‌شود. فعلاً، $\pm\infty$ در **R** گنجانده نشده‌اند. درقضیهٔ ۱، «یکتایی» به‌معنای آن است که هر دو دستگاهی را که در شرایط (I)-(IV) صدق کنند می‌توان درتناظری یك به‌یك، که با $+$، $\cdot$، و $\leqslant$ سازگار باشد، قرارداد. مثلاً، مقصود از سازگاری با $+$ آن است که عددی که در دستگاه دوم متناظر با مجموع دو عدد در دستگاه اول است، با مجموع دو عدد متناظر در دستگاه دوم، برابر می‌باشد. ما از برهان قضیهٔ ۱ چشم‌پوشی می‌کنیم[1] وازآن بیشتر به‌عنوان نقطهٔ آغاز کارمان استفاده می‌نماییم. این برهان‌مشکل نیست ولی کمی‌زحمت‌دارد. وجود **R** را می‌توان با تحقیق این مطلب که بسطهای اعشاری معمولی خواص مطلوب را دارند ثابت کرد.

همان‌طور که دربالا متذکرشدیم، نمی‌خواهیم وقت زیادی را برای استخراج همهٔ نتایج مفصل اصول موضوع نامبرده صرف نماییم. با این‌حال، یکی از نتایج «واضح» آن شایستهٔ ذکرخاص است . یعنی، خاصیت ارشمیدسی: به ازای هرعدد حقیقی مفروض x عددی صحیح مانند N وجود دارد به‌طوری که $N > x$. (دراینجا اعداد صحیح به‌وسیلهٔ $۱+۱=۲$، $۲+۱=۳$، $۳+۱=۴$، ... تعریف می‌شوند). توجه به این مطلب شگفت‌آور است که این نتیجه به‌اصل موضوع تمامیت بستگی دارد ونمی‌توان آن را تنها از اصول‌موضوع دیگر استنتاج کرد. اثبات خاصیت ارشمیدسی درتمرین ۳۰ واقع‌درپایان همین فصل، ازخواننده خواسته شده است.

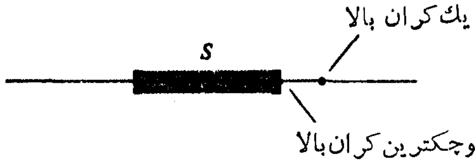
اصل موضوع تمامیت را می‌توان به‌چند صورت بسیار مهم هم‌ارز دیگر بیان کرد. برای بیان‌آنها به‌چند اصطلاح اساسی دیگرنیاز خواهیم داشت.

تعریف ۱. فرض‌کنیم $S \subset \mathbf{R}$ زیر مجموعه‌ای از **R** باشد. بدین‌سان S صرفاً گردایه‌ای از اعداد حقیقی است (مثلاً، همهٔ اعداد گویا بین ۰ و ۱). عددی مانند b را یك کران بالای S می‌نامند اگر به‌ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $x \leqslant b$.
عددی مانند b را یك کوچکترین‌کران بالای S گویند، اگر اولاً b یك کران بالای

---

[1] خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند، به‌عنوان نمونه، برهانی از این قضیه را در L.J. Goldstein, *Abstract Algebra*, Prentice-Hall (1973), Chapter IV بیابد.

S باشد و ثانیاً کوچکتر یا مساوی با هر کران بالای دیگر S باشد. شکل ۱ـ۱ را ببینید.



شکل ۱ـ۱ کوچکترین کران بالا

مجموعهٔ $]a,b[\ = (a,b)=\{x\in\mathbf{R}|a<x<b\}$ را یك بازهٔ باز و $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$ را یك بازهٔ بسته می‌نامند.

مثلاً، بازهٔ بستهٔ [۰,۱]، بازهٔ باز]۰,۱[، و همهٔ اعداد گویای کوچکتر از ۱، همگی دارای یك کوچکترین کران بالا می‌باشند که همان عدد ۱ است.

تبصره: کوچکترین کران بالای S را (که سوپریموم S نیز می‌نامند) با $sup\ (S)$ یا $lub\ (S)$ نمایش می‌دهند. حداکثر یك کوچکترین کران بالا برای S وجود دارد. درواقع اگر b و b' هردو کوچکترین کران بالای S باشند، آنگاه چون b کوچکتر یا مساوی با هر کران بالای دیگر است، $b\leqslant b'$ و به‌طور مشابه، $b'\leqslant b$، ازاین‌رو نتیجه می‌گیریم که $b=b'$. بدین‌سان می‌توانیم از کوچکترین کران بالا (ونه، یك کوچکترین کران بالا. ـ م.) صحبت کنیم.

لازم نیست که حتماً یك مجموعهٔ دلخواه کران بالا داشته باشد. مثلاً، کل دستگاه اعداد حقیقی کران بالا ندارد، و اعداد صحیح مثبت فاقد کران بالا هستند. درحالت «تبهگن» که مجموعهٔ تهی $\varnothing$ موردنظراست، هرعدد رایك کران بالای آن به‌حساب می‌آوریم.

ملاحظه کنید که اگر b یك کران بالای مجموعهٔ S باشد، و $b\in S$، آنگاه b کوچکترین کران بالای آن است. اثبات این مطلب بسیار ساده‌است. باید نشان داده‌شود که اگر d یك کران بالای دلخواه S باشد، آنگاه $b\leqslant d$. اما $b\in S$ و d یك کران بالاست، بنابراین $b\leqslant d$ که مطلوب نظر است.

یك شق مفید دیگر برای تعریف کوچکترین کران بالا در قضیهٔ ۲ بیان می‌شود که گاهی استفاده از آن آسانتر است.

قضیهٔ ۲ . فرض کنیم $S\subset\mathbf{R}$. آنگاه $b\in\mathbf{R}$ کوچکترین کران بالای S است اگر، و فقط اگر، b یك کران بالا باشد وبه ازای هر $\varepsilon>0$ یك $x\in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x>b-\varepsilon$.

برهان آن در پایان این فصل آمده‌است. ولی این قضیه بایستی کاملاً واضح باشد، زیرا b درست بالای مجموعهٔ S (یعنی، در سمت‌راست آن) می‌نشیند و هیچ «رخنه‌ای» بین آن و مجموعهٔ S وجودندارد، بنابراین به‌ازای هر $\varepsilon>0$ می‌توانیم x را درست‌زیر b درفاصلهٔ ε بگیریم. [آگاهی: این نوع استدلال یك استدلال موجه‌نماست ومقصود از آن دادن درکی از

قضیه به شما می‌باشد ـ آن را با یك برهان دقیق اشتباه نگیرید.]

اگر S از بالاکراندار نباشد (کران بالانداشته باشد)، گوییم که $sup(S)$ بینهایت است و می‌نویسیم $sup(S)=+\infty$. به طور مشابه، یك کران پایین یك مجموعهٔ S عددی مانند b است به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in S$ ، $b\leqslant x$. همچنین، b را یك بزرگترین کران پایین نامند اگر، وفقط اگر، یك کران پایین باشد و به‌ازای هر کران پایین c از S، $c\leqslant b$. همانند کوچکترین کرانهای بالا، بزرگترین کرانهای پایین، درصورت وجود یکتا هستند. بزرگترین کران پایین را گاهی اینفیموم نامند و با $inf(S)$ یا $glb(S)$ نمایش می‌دهند. نظیر قضیهٔ ۲ ، عددی مانند c بزرگترین کران پایین یك مجموعهٔ S است اگر، وفقط اگر، c یك کران پایین باشد و به‌ازای هر $\varepsilon>0$ یك $x\in S$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x<c+\varepsilon$. همچنین، اگر S از پایین کراندار باشد، می‌نویسیم $inf(S)=-\infty$.

مفهوم دیگری که به آن نیاز داریم عبارت ازمفهوم دنبالهٔ کوشی[1] است.

تعریف ۲. یك دنبالهٔ x_n در $\mathbf{R}$ را یك دنبالهٔ کوشی نامند، اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$، عددی صحیح مانند N (وابسته به ε) وجود داشته باشد، به طوری که هرگاه $n\geqslant N$ و $m\geqslant N$ ، آنگاه $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

معنای این شرط به‌طور شهودی این است که دنباله «متراکم» می‌شود؛ یعنی همهٔ اعضای دنباله، وقتی که به‌قدرکافی دور می‌روند، به‌طوردلخواه به‌یکدیگرنزدیك‌می‌شوند.

اگرهمگرایی x_n به‌سمت x درست باشد،آنگاه x_n یك دنبالهٔ کوشی‌است. درواقع، به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، عدد صحیح N را طوری انتخاب می‌کنیم که اگر $n\geqslant N$،آنگاه $|x_n-x|<\varepsilon/2$. پس، به‌ازای هر $n,m\geqslant N$ ، داریم

$$|x_n-x_m|=|x_n-x+x-x_m|\leqslant|x_n-x|+|x-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

که حکم را ثابت می‌کند. عکس این گزاره درقضیهٔ ۳ می‌آید. ما دراینجا نامساوی مثلثی $|y+z|\leqslant|y|+|z|$ را به‌کار بسته‌ایم. همانند نمونهٔ بالا، حالت خاص $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$ بسیار مفید است. قضیهٔ بعدی بعضی ازخواص اساسی اعداد حقیقی را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۳.

(یك) فرض‌کنیم S یك مجموعهٔ ناتهی در $\mathbf{R}$ باشد که یك کران بالا دارد. آنگاه S دارای یك‌کوچکترین‌کران بالا در $\mathbf{R}$ می‌باشد.

---

1. Cauchy

(دو) فرض‌کنیم P یك مجموعهٔ ناتهی در $\mathbf{R}$ باشدکه یك‌کران پایین دارد. آنگاه P دارای یك بزرگترین کران پایین در $\mathbf{R}$ است.
(سه) هردنبالهٔ‌کوشی x_n در $\mathbf{R}$ به‌سمت عددی مانند x در $\mathbf{R}$ همگراست.

این نتیجه نیز بایستی‌کاملاً آشکار باشد. درواقع، اگر یك زیرمجموعهٔ‌کراندار $\mathbf{R}$ کوچکترین کران بالا نداشته باشد، آنگاه «حفره»ای در نوك آن وجود خواهد داشت و دنباله‌ای از اعضای S که به‌سمت آن حفره افزایش می‌یابد به‌سمت هیچ عضوی در $\mathbf{R}$ همگرا نخواهد بود. به طور مشابه ما باید (دو) را داشته باشیم. شرط (سه) را به‌این صورت می‌توان فهمید: اگر از N جمله نخست یك دنبالهٔ‌کوشی صرفنظر کنیم، می‌دانیم که جمله‌های مانده به‌هم نزدیك می‌شوند. اگر به‌همین ترتیب از جمله‌های بیشتر و بیشتری صرفنظر کنیم، ماندهٔ دنباله متراکم می‌شود وجمله‌ها به‌عددی حدی، به‌نام‌حد دنباله، نزدیك می‌شوند. دیدن دقیقترچگونگی انجام این عمل‌نیاز به‌توجه بیشتری دارد وبنابراین اثبات واقعی تنها راه برای ماست.

این نکته چندان مشکل نیست که، با استفاده از روشهای اثباتی‌که ارائه می‌کنیم، نشان دهیم هریك ازشرایط (یك)، (دو)، (سه) بااصل موضوع تمامیت دریك هیأت‌مرتب هم‌ارزند.

این مطلب، بحث مختصر و مروری را که برخط حقیقی داشتیم، خاتمه می‌دهد. خواص وتمرین بیشتر درمثالهای حل شده که درزیر و در پایان همین فصل‌آمده‌اند یافت می‌شوند.

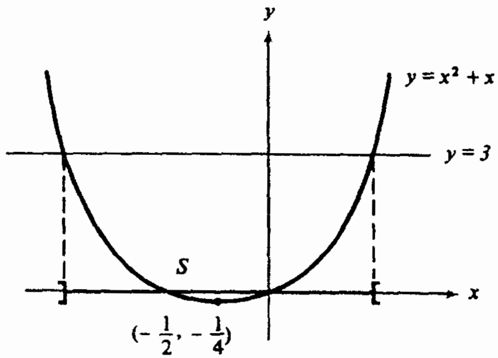
مثال ۱. فرض‌کنیم $S=\{x\in\mathbf{R}|x^{۲}+x<۳\}$. مطلوب است تعیین $sup(S)$ و $inf(S)$.

حل : نمودار $y=x^{۲}+x$ را درنظر می گیریم (شکل ۱ــ۲). براساس حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌بینیم که، به‌ازای $x=-۱/۲$، y یك مینیمم‌دارد. بدین‌سان S می‌تواند به‌صورت شکل۱ــ۲ ترسیم‌شود. روشن است که sup و inf هنگامی رخ می‌دهند که داشته باشیم $x^{۲}+x=۳$ یا، با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم، هنگامی که

$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۱۲}}{۲}=\frac{(-۱\pm\sqrt{۱۳})}{۲}$$

بدین‌سان

$$sup(S)=\frac{(\sqrt{۱۳}-۱)}{۲},\quad inf(S)=\frac{-(\sqrt{۱۳}+۱)}{۲}$$



شکل ۱-۲

مثال ۲. فرض کنیم $x_\circ = \circ$، $x_\text{۱} = \sqrt{\text{۲}}$، $x_\text{۲} = \sqrt{\text{۲} + x_\text{۱}}$، ...، $x_n = \sqrt{\text{۲} + x_{n-\text{۱}}}$، ... نشان دهید که x_n همگرا است.

حل: نشان خواهیم داد که x_n افزایشی است و از بالا کراندار می‌باشد و این حکم را ثابت خواهدکرد. ملاحظه می‌کنیم که هر x_n نامنفی است. پس، ابتدا باید نشان دهیم که $r_n = x_{n+\text{۱}} - x_n \geqslant \circ$. این کاررا به‌وسیلهٔ استقراء به‌انجام می‌رسانیم. آشکارا این رابطه به‌ازای $n = \circ$ برقراراست. فرض کنیم به‌ازای $n - \text{۱}$ هم برقرار باشد؛ آنگاه

$$r_n = x_{n+\text{۱}} - x_n = \sqrt{\text{۲} + x_n} - \sqrt{\text{۲} + x_{n-\text{۱}}} = \frac{x_n - x_{n-\text{۱}}}{\sqrt{\text{۲} + x_n} + \sqrt{\text{۲} + x_{n-\text{۱}}}}$$

$$= \frac{r_{n-\text{۱}}}{(\sqrt{\text{۲} + x_n} + \sqrt{\text{۲} + x_{n-\text{۱}}})}$$

بنابراین $r_{n-\text{۱}} \geqslant \circ$ مستلزم آن است که $r_n \geqslant \circ$ و درنتیجه x_n افزایشی است. اینک می‌خواهیم نشان دهیم که x_n از بالاکراندار است. مثلاً، می‌توان به‌کمک استقراء ثابت نمود که $x_n \leqslant \text{۵}$. آشکارا، $x_\circ, x_\text{۱} \leqslant \text{۵}$. فرض کنیم $x_{n-\text{۱}} \leqslant \text{۵}$. آنگاه

$$x_n = \sqrt{\text{۲} + x_{n-\text{۱}}} \leqslant \sqrt{\text{۲} + \text{۵}} \leqslant \sqrt{\text{۷}} \leqslant \text{۵},$$

وبنابراین x_n افزایشی و از بالاکرانداراست، پس همگرا می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنیم x_n دنباله‌ای ازاعدادحقیقی باشدبه‌طوری که $|x_n - x_{n+\text{۱}}| \leqslant \text{۱}/\text{۲}^n$. نشان دهید که x_n همگرا است.

حل: نشان خواهیم داد که x_n یك دنبالهٔ کوشی است و آنگاه نتیجه از قضیهٔ ۳ (سه) حاصل خواهد شد. بنا بر نامساوی مثلثی می‌توانیم بنویسیم،

$$|x_n - x_{n+k}| \leqslant |x_n - x_{n+۱}| + |x_{n+۱} - x_{n+۲}| + \dots + |x_{n+k-۱} - x_{n+k}|$$

$$\leqslant \frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۲^{n+۱}} + \dots + \frac{۱}{۲^{n+k}}$$

$$\leqslant \frac{۲}{۲^n}$$

(زیرا، به‌ازای $۰ < r < ۱$، داریم $a + ar + ar^۲ + \dots = \frac{a}{۱-r}$).

بدین‌سان اگر $m \geqslant n$ آنگاه $|x_n - x_m| \leqslant ۱/۲^{n-۱}$، و به‌ازای $\varepsilon > ۰$ مفروض، کافی است N را طوری انتخاب کنیم که $۱/۲^{N-۱} < \varepsilon$. بنا بر این یك دنبالهٔ کوشی به‌دست می‌آوریم.

مثال ۴ به‌این سبب آمده است که ادعای ما را، دایر بر اینکه قواعد معمولی جبر همگی از اصول موضوع مورد بحث نـاشی می‌شوند، یاری دهد. در تمرینها، نتایج مشابه اینها را می‌توان مسلم فرض کرد.

مثال ۴. با به‌کار بستن اصول موضوع یك هیأت مرتب ثابت کنید

(الف) منفیها یکتا هستند؛

(ب) به‌ازای هر x، $۰x = ۰$؛

(پ) $(-x)(-y) = xy$؛

(ت) $۰ < ۱$.

حل: برای (الف) ملاحظه می‌کنیم که اگر $x + w = ۰$ و $x + y = ۰$، آنگاه (با افزودن y به $x + w = ۰$)، $y + (x + w) = y + ۰ = y$. بنا بر شرط I (دو) طرف چپ عبارت است از $(y + x) + w = ۰ + w = w$، بنا بر این $y = w$. بدین‌سان نماد $-x$ نامبهم است.

بـرای (ب)، داریم $۰ = ۰ + ۰$ و در نتیجه بنـا بر II (یك) و II (پنج) به دست می‌آوریم $۰ \,.\, x = (۰+۰)x = ۰ \,.\, x + ۰ \,.\, x$. با افزودن $-(۰ \,.\, x)$ به‌هردوطرف، به‌دست می‌آید $۰ \,.\, x = ۰$.

برای (پ) ابتدا ادعا می‌کنیم $(-x)y = -(xy)$. درواقـع، با استفاده از II (یك) و II (پنج) و بنا بر (ب)، $(-x)y + xy = (-x + x)y = ۰ \,.\, y = ۰$. پس‌از آن، داریم $(-۱)(-۱) = ۱$، زیرا $(-۱) = ۰$. $(۱-۱)(-۱) = ۰$ وطرف چپ

عبارت است از $(-۱)(۱)+(-۱)(-۱)=-۱+(-۱)(-۱)$، که پس از افزودن ۱ به‌هردوطرف، به‌دست می‌آوریم $(-۱)(-۱)=۱$. چون ثابت کرده‌ایم $(-۱)(x)=-(۱x)=-x$، دراین‌صورت به‌دست می‌آوریم

$$(-x)(-y)=(-۱)x(-۱)y=(-۱)(-۱)xy=۱xy=xy$$

سرانجام، برای (ت)، بنابر III (سه) تنها امکان دیگر برای $۱>۰$ عبارت است از $۱\leqslant۰$. ازجمع با -۱ به‌دست‌می‌آید $۰\leqslant-۱$ (بااستفاده از III (چهار)). آنگاه با به‌کار بستن $x=-۱$ ، $y=-۱$ در III (پنج) به دست می‌آید $۰\leqslant۱$، زیرا $(-۱)(-۱)=۱$. ازاین‌رو باید داشته باشیم $۱>۰$ ، زیرا $۱\neq۰$.

مثال ۵. ثابت کنید که وقتی $n\to\infty$، $۱/n\to۰$.

حل: طبق تعریف، به‌ازای هرعدد $\varepsilon>۰$ مفروض، باید ثابت کنیم که یک‌عددصحیح N وجود دارد به‌طوری‌که اگر $n\geqslant N$ آنگاه $|۱/n-۰|<\varepsilon$. اما این مشروط برآن است که $۱/N<\varepsilon$ بنابراین‌تنها کافی است $N>۱/\varepsilon$ انتخاب‌شود، که‌این‌هم بنابرخاصیت ارشمیدسی امکان‌پذیر است.

مثال ۶. نشان دهید که وقتی $n\to\infty$ ، $\frac{\sqrt{n^۲+۱}}{n!}\to۰$.

حل: باید نشان دهیم که وقتی n بزرگ می‌شود، $\frac{\sqrt{n^۲+۱}}{n!}$ کوچک می‌گردد.

به‌طریق زیرمی‌توانیم تخمین بزنیم که $\frac{\sqrt{n^۲+۱}}{n!}$ چقدر بزرگ می‌شود:

$$\frac{\sqrt{n^۲+۱}}{n!}\leqslant\frac{\sqrt{۲n^۲}}{n!}=\frac{\sqrt{۲}\,n}{n!}=\frac{\sqrt{۲}}{(n-۱)!}\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{n-۱}$$

بدین‌سان به‌ازای $\varepsilon>۰$ مفروض، N را طوری انتخاب می‌کنیم که $N>\frac{\sqrt{۲}}{\varepsilon}+۱$.
آنگاه $n\geqslant N$ مستلزم آن است که

$$۰\leqslant\frac{\sqrt{n^۲+۱}}{n!}\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{n-۱}\leqslant\frac{\sqrt{۲}}{N-۱}<\varepsilon$$

این نامساوی حکم را ثابت می‌کند.

تمرینهای بند ۱.۱

۱. فرض کنیم $S=\{x|x^{3}<1\}$. مطلوب است تعیین $sup(S)$. آیا S ازپایین کراندار است؟

۲. درمثال ۲، فرض کنیم $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ثابت کنید $\lambda=\sqrt{2+\lambda}$ ، یعنی، λ یك ریشهٔ معادلهٔ $\lambda^{2}-\lambda-2=0$ است. $\operatorname{limit}\limits_{n\to\infty} x_n$ را بیابید.

۳. نشان دهید که $n!/3^{n}$ به‌سمت ۰ همگراست.

۴. یك دنبالهٔ افزایشی x_n راکه از بالاکراندار و به‌سمت x همگراست درنظرمی گیریم. فرض کنیم $S=\{x_n|n=1,2,3,\dots\}$. ثابت کنید که $x=sup(S)$.

۵. فرض کنیم $x_n=\sqrt{n^{2}+1}-n$. مطلوب است محاسبهٔ $\operatorname{limit}\limits_{n\to\infty} x_n$.

۶. فرض کنیم x_n دنباله‌ای باشد به‌طوری که $|x_n-x_{n-1}|<1/n$. آیا فکرمی کنید x_n باید همگرا باشد؟

۷. اگر $P\subset Q\subset \mathbf{R}$ و P و Q از بالاکراندار باشند، نشان دهید که $sup(P)\leqslant sup(Q)$.

۲.۱ فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbf{R}^{n}$

درسراسر این کتاب ما با فضای اقلیدسی یك، دو، یا سه‌بعدی سروکارخواهیم‌داشت. هرچند دربسیاری ازکاربردهای مهم، فضاهای باابعاد بالاترهم ظاهرمی‌شوند. از این‌رو مهم است که حالت کلی را مورد بحث قراردهیم، لیکن برای تصور وشهود معمولاً به‌حالت فضای یك، دو، یا سه‌بعدی متوسل می‌شویم.

با یك تعریف صوری شروع می کنیم.

تعریف ۳. فضای n بعدی اقلیدسی مرکب ازهمهٔ nتایی‌های مرتب ازاعدادحقیقی است که با $\mathbf{R}^{n}$ نمایش داده می‌شود. به‌طورنمادی تعریف چنین است،

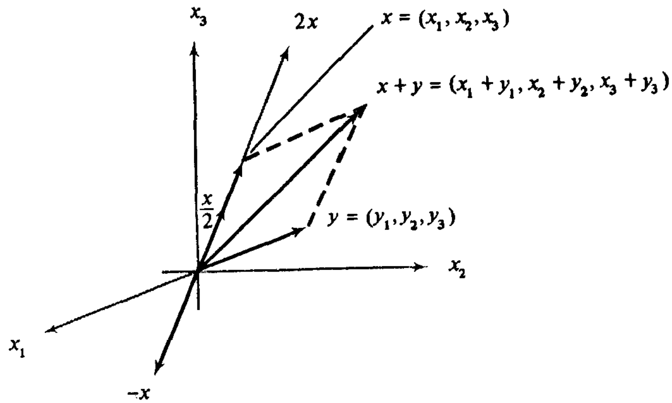
$$\mathbf{R}^{n}=\{(x_1,\dots,x_n)|x_1,\dots,x_n\in\mathbf{R}\}$$

بدین‌سان $\mathbf{R}^{n}$ عبارت است ازحاصل‌ضرب دکارتی n مرتبه $\mathbf{R}$ درخودش، ومی‌توان نوشت $\mathbf{R}^{n}=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\dots\times\mathbf{R}$.

اعضای $\mathbf{R}^{n}$ را معمولاً با یك حرف نمایش می‌دهندکه به جای n تایی می‌نشینند

$(x_1,\cdots,x_n)$ ، $x=$ و از x به‌عنوان نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ صحبت می‌کنیم.
جمع وضرب اسکالر به‌طریق معمول تعریف می‌شوند:

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$



شکل ۱ـ۳ جمع وضرب اسکالر

و

$$\alpha(x_1,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n) \qquad \alpha\in\mathbf{R} \text{ به‌ازای}$$

تعبیر هندسی این اعمال درحالت فضای سه بعدی، $n=۳$ ، درشکل ۱ـ۳ نمایان است.

برای قضیهٔ بعدی خواننده باید تعریف یک فضای برداری، را به‌خاطر آورد.

قضیهٔ ۴. فضای n بعدی اقلیدسی با اعمال جمع و ضرب اسکالرکه قبلاً تعریف شده‌اند یک فضای برداری با بعد n است.

اثبات عبارت است از یک بررسی سرراست اصول موضوع معرف یک فضای برداری، که ما آن‌را درتمرین ۱۶، صفحهٔ ۳۴، به‌عهدهٔ خواننده خواهیم گذاشت. این قضیه نباید شگفت‌آور باشد. از همه گذشته، یک فضای برداری، تجریدی ازخواص اساسی بردارها درفضای اقلیدسی می‌باشد. با نمایش‌دادن یک پایه با n بردار، مثلاً پایهٔ استاندارد $\{e_1=(۱,\circ,\cdots,\circ),e_۲=(\circ,۱,\circ,\cdots,\circ),\cdots,e_n=(\circ,\circ,\cdots,۱)\}$، می‌توانیم نشان دهیم که $\mathbf{R}^n$ دارای بعد n است.

درپایهٔ استاندارد، مؤلفه‌های $x=(x_1,\cdots,x_n)$ درست x_1،...،x_n هستند. در یک پایهٔ دیگر $\mathbf{R}^n$ مؤلفه‌ها متفاوت خواهند بود. این به‌معنای آن است که اگر e_1،...،e_n پایهٔ استاندارد را نشان دهند، $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ ؛ لیکن اگر f_1،...،f_n پایهٔ دیگری باشد، آنگاه

به‌ازای اعداد احتمالاً متفاوت $y_1,\dots,y_n$، خواهیم داشت $x=\sum_{i=1}^{n} y_i f_i$.
بعضی از اعمال اساسی در $\mathbf{R}^n$ درزیر آمده‌اند.

تعریف ۴. طول یا نرم یك بردار در $\mathbf{R}^n$ چنین تعریف می‌شود

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

که در آن $x=(x_1,\dots,x_n)$. فاصلهٔ بین دو بردار x و y عددی حقیقی است که چنین تعریف می‌شود

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$$

حاصلضرب داخلی x و y با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

بدین‌سان خواهیم داشت $\|x\|^2=<x,x>$. در $\mathbf{R}^3$، خواننده با عبارتی دیگر برای $<x,y>$ آشناست. یعنی $<x,y>=\|x\|\,\|y\|\cos\theta$، که در آن $\cos\theta$ عبارت است ازکسینوس زاویه‌ای که x و y تشکیل می‌دهند. شکل ۱ـ۴ را ببینید.
حال خواص اساسی این اعمال را خلاصه کنیم:

قضیه ۵. برای بردارهای واقع در $\mathbf{R}^n$ داریم

(I) خواص حاصلضرب داخلی

(یك) $<x,y_1+y_2>=<x,y_1>+<x,y_2>$

(دو) $<x,\alpha y>=\alpha<x,y>$

(سه) $<x,y>=<y,x>$

(چهار) $<x,x>\geqslant 0,\ <x,x>=0$ اگر، وفقط اگر، $x=0$

(پنج) $|<x,y>|\leqslant\|x\|\,\|y\|$ (نامساوی کوشی ـ شوارتس[1])

تبصره: (پنج) از (یك) ـ (چهار) نتیجه می‌شود.

(II) خواص نرم

(یك) $\|x\|\geqslant 0$

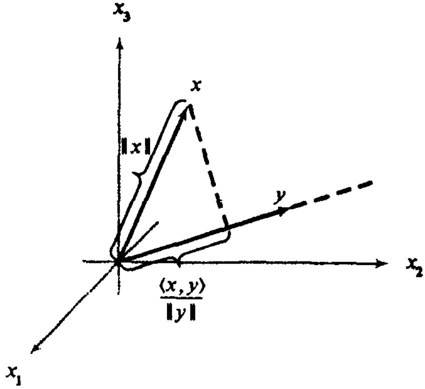
---

1. Schwarz

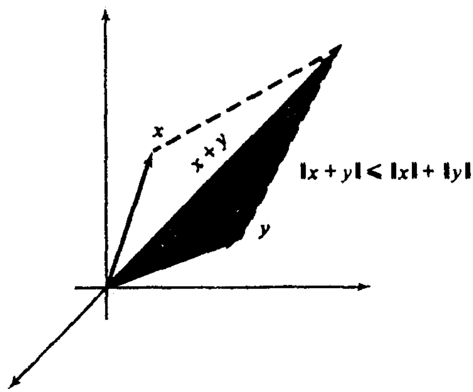
(دو) اگر، وفقط اگر، $x=0$ $\|x\|=0$

(سه) به‌ازای α حقیقی $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

(چهار) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (نامساوی مثلثی)



شکل ۱-۴ طول وحاصل‌ضرب داخلی



شکل ۱-۵ نامساوی مثلثی

(III) خواص فاصله

(یك) $d(x,y)=d(y,x)$

(دو) $d(x,y)\geqslant 0$

(سه) اگر، وفقط اگر، $x=y$ $d(x,y)=0$

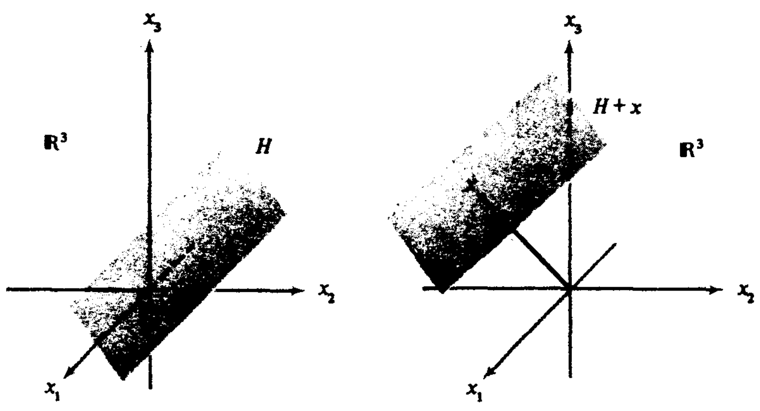
(چهار) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (نامساوی مثلثی نیز نامیده می‌شود).

از نقطه نظر هندسی هر یك از این خواص باید کاملاً آشکار باشد. مثلاً، (چهار) در (II) و (III) صرفاً بیانگر این امر مسلم هستند که طول یك ضلع مثلث کوچکتر یا مساوی با مجموع طولهای دوضلع دیگر است (شکل ۱ــ۵).

مجموعه‌ای با یك تابع d راکه ازقواعد (III) پیروی کند یك فضای متریك می‌نامند. یك فضای برداری با یك نرم را که از قواعد (II) پیروی کند یك فضای نرم‌دار می‌نامند. و یك فضای برداری با یك حاصلضرب داخلی که از قواعد (I) پیروی کند یك فضای حاصلضرب داخلی است. همان‌طور که در برهان خواهیم دید، هر یك از دومجموعه خواص (II) و (III) ازمجموعه خواص بالای خود نتیجه می‌شود[1].

خواننده مفهوم یك زیرفضای خطی را از جبرخطی به‌یاد خواهدآورد. به‌ویژه، یك زیرفضای خطی $(n-1)$ بعدی از $\mathbf{R}^n$ را یك ابر صفحه می‌نامند. یك ابرصفحهٔ مستوی مجموعه‌ای مانند $x+H$ است که درآن H یك ابرصفحه و $x\in\mathbf{R}^n$ می‌باشد؛ $x+H$ به‌معنای همهٔ $(x+y)$هاست وقتی که y در H تغییر کند؛ بدین‌سان $x+H=\{x+y \mid y\in H\}$. شکل ۱ــ۶ را ببینید.

سرانجام، با تعمیم مفاهیم $\mathbf{R}^3$، $x,y\in\mathbf{R}^n$ را متعامد نامیم اگر، و فقط اگر، $\langle x,y\rangle=0$. دو زیرفضای S و T متعامدند اگر، و فقط اگر، به ازای هر $x\in S$ و $y\in T$، $\langle x,y\rangle=0$. به‌علاوه، اگر به‌کمك عمل جمع، S و T، $\mathbf{R}^n$ را تولید کنند



شکل ۱ــ۶ ابرصفحه وابرصفحه مستوی

(یعنی $S+T=\mathbf{R}^n$ ــم.) آنگاه آنها را متمم‌های متعامد می‌نامند. شرط لازم و

---

۱. نامساوی مشهور I (پنج)، به‌دلایل تاریخی، باید نامساوی کوشی ــ بونیاکوفسکی[2]ــ شوارتس نامیده شود، لیکن غیرمعمول نیست که در نوشتارهای انگلیسی نام روسی را حذف کنند و در کارهای روسی نام شوارتس را.

2. Bunyakowski

کافی برای آنکه این حالت رخ دهد آن است که S و T برهم عمود باشند، ومجموع ابعادشان مساوی n شود (تمرین ۲۰). تعریف می‌کنیم

$$S^{\perp}=\{y\in\mathbf{R}^n \mid \langle x,y\rangle=0 \text{ ، } x\in S \text{ به ازای هر } \}$$

دراین‌صورت ملاحظهٔ آنکه S و $S^{\perp}$ متمم‌های متعامد هستند مشکل نیست. بیش‌ازاین مفاهیم اساسی، به‌جبرخطی $\mathbf{R}^n$ درکارمان نیاز نخواهیم داشت، ازاین‌رو بحث بیشتر دراینجا لزومی ندارد.

مثال ۱. مطلوب است تعیین طول پاره خطی که $(۱,۱,۱)$ را به $(۳,۲,۰)$ وصل می‌کند.

حل: این طول عبارت از طول بردار $(۳,۲,۰)-(۱,۱,۱)=(۲,۱,-۱)$ است که نمایانگر برداری از $(۱,۱,۱)$ به $(۳,۲,۰)$ است. طول مورد نظر عبارت است از

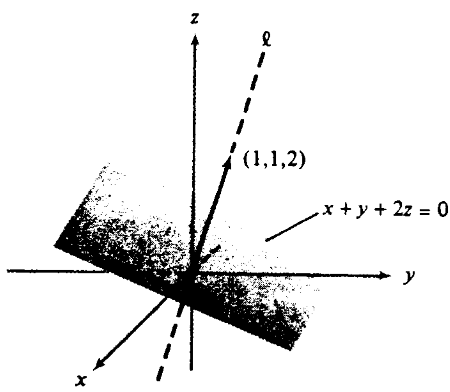
$$\|(۲,۱,-۱)\|=\sqrt{۲^۲+۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۶}$$

مثال ۲. در $\mathbf{R}^۳$، مطلوب است تعیین متمم‌متعامدخط $x=y=z/۲$ (یا با نمادی دیگر، $x_۱=x_۲=x_۳/۲$).

حل: این خط، که آن را l می‌نامیم، زیرفضایی یک بعدی است که به‌وسیلهٔ بردار $(۱,۱,۲)$ تولید شده است (شکل ۱-۷ را ببینید). متمم متعامد یک صفحه است (که از مبدأ می‌گذرد، زیرا یک زیرفضا ست) واز این‌رو معادله‌ای به‌صورت

$$Ax+By+Cz=0$$

دارد، یعنی،



شکل ۱-۷

$$<(A,B,C),(x,y,z)>=0$$

به‌عبارت دیگر، (A,B,C) قائم بر صفحه نامبرده است؛ لیکن $(1,1,2)$ برداری عمود بر این صفحه است، درنتیجه متمم متعامد مطلوب صفحهٔ

$$x+y+2z=0$$

است.

تمرینهای بند ۲.۱

۱. اگر $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ ، به‌طور هندسی ثابت کنید که x و y باید روی خطی مار برمبداء قرار داشته باشند.

۲. زاویهٔ بین $(3,2,2)$ و $(0,1,0)$ را پیدا کنید.

۳. مطلوب است تعیین متمم متعامد صفحهٔ تـولید شده به وسیلهٔ $(3,2,2)$ و $(0,1,0)$ در $\mathbf{R}^3$.

۴. مجموعه‌های $B=\{x\in\mathbf{R}^3 \mid \|x\|\leqslant 3\}$ و $Q=\{x\in\mathbf{R}^3 \mid \|x\|<3\}$ را شرح دهید.

۵. مطلوب است تعیین معادلهٔ خط ماربر $(1,1,1)$ و $(2,3,4)$. آیا این خط یك زیر فضای خطی است؟

برهان قضایای فصل ۱

قضیهٔ ۲. فرض‌کنیم $S\subset\mathbf{R}$. آنگاه $b\in\mathbf{R}$ کوچکترین‌کران بالای S است اگر، وفقط اگر، b یك کران بالا باشد وبه‌ازای هـر $\varepsilon>0$ یك $x\in S$ وجـود داشته باشد به طـوری که $x>b-\varepsilon$.

برهان: ابتـدا فرض‌کنیم $b=\operatorname{lub}(S)=\sup(S)$ و $\varepsilon>0$. باید یك $x\in S$ طوری بیابیم که $b<x+\varepsilon$. اگـر چنین xی یافت نشود، به ازای هـر $x\in S$ خواهیم داشت $b\geqslant x+\varepsilon$ ، یعنی $x\leqslant b-\varepsilon$. بدین‌سان $b-\varepsilon$ یك کـران بالا ست که اکیداً از b کوچکتراست و بنابراین b کوچکترین کران بالا نیست ،که با فرض ما متناقض است.

برعکس فرض کنیم b درشرط مفروض صدق کند. فـرض کنیم d یك کران بالای S باشد. طبق تعریف $\sup(S)$ ، باید نشان دهیم که $b\leqslant d$. در واقع، فرض‌کنیم $b>d$. قرارمی‌دهیم $\varepsilon=b-d$. آنگاه $d=b-\varepsilon$ و $d\geqslant x$ به‌ازای هر $x\in S$ ، مستلزم آن است که $x\leqslant b-\varepsilon$ یا $b\geqslant x+\varepsilon$ ودرنتیجه شرط ما برقرار نیست. بدین‌سان فـرض $b>d$ نادرست‌است ومی‌توانیم‌نتیجه بگیریم که $b\leqslant d$ که مطلوب‌نظراست. این‌مطلب‌استدلال‌را

کامل می‌کند. ■

تبصره: دراین برهان مناسب دیدیم که اصل اساسی زیر درمنطق را مورد استفاده قرار دهیم: اثبات اینکه یك گزارهٔ P مستلزم یك گزارهٔ Q است (با استفاده ازنمادگذاری می‌نویسیم $P \Longrightarrow Q$) هم‌ارز است با اثبات $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ که درآن $\sim Q$ عبارت‌از نقیض Q است. $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ را عکس نقیض $P \Longrightarrow Q$ می‌نامیم، درصورتی‌که $Q \Longrightarrow P$ عکس آن است.

قضیهٔ ۳.

(یك) فرض‌کنیم S یك مجموعهٔ ناتهی در $\mathbf{R}$ باشدکه یك‌کران بالا دارد. آنگاه S دارای یك‌کوچکترین‌کران بالا در $\mathbf{R}$ است.

(دو) فرض‌کنیم P یك‌مجموعهٔ ناتهی در $\mathbf{R}$ باشدکه یك‌کران پایین دارد. آنگاه P دارای یك بزرگترین‌کران پایین در $\mathbf{R}$ است.

(سه) هردنبالهٔ کوشی x_n در $\mathbf{R}$ به‌سمت عددی مانند x در $\mathbf{R}$ همگراست.

برهان[1]: (یك) چون $S \neq \varnothing$ می‌توانیم یك $x_0 \in S$ انتخاب‌کنیم. اگر y یك‌کران‌بالای S باشد می‌نویسیم $S \leqslant y$. حال‌کوچکترین عدد صحیح N را چنان برمی‌گزینیم که $N \geqslant 1$ و $x_0 + N \geqslant S$. چنین عددی صحیح وجود دارد، زیرا S از بالاکراندار است. قرار می‌دهیم $x_1 = x_0 + N - 1$. بدین‌سان $x_1 \geqslant x_0$ وعناصری از S بزرگتر از x_1 وجود دارند ولی هیچ عنصر S از $x_1 + 1$ بزرگتر نیست. به‌همین‌طریق‌کوچکترین عدد صحیح $N_1 \geqslant 1$ را چنان برمی‌گزینیم که $x_1 + N_1/2 \geqslant S$، وآنگاه قرار می‌دهیم

$$x_2 = x_1 + \frac{N_1 - 1}{2}$$

اگرخواننده تصویری از x_1 و x_2 ترسیم‌کند همه‌چیز روشن می‌شود. باتوجه به‌این‌تصویر ملاحظه می‌کنیم‌که N_1 یا ۱ است یا ۲. به‌طور استقرایی تعریف می‌کنیم

$$x_n = x_{n-1} + \frac{N_{n-1} - 1}{2n}$$

که درآن N_{n-1} کوچکترین‌عدد صحیح است‌که در $x_{n-1} + N_{n-1}/n \geqslant S$ صدق می‌کند؛ بدین‌سان N_{n-1} یکی از مقادیر ۱، ۲، ...، n را اختیار می‌کند. درنتیجه عناصری از

---

۱. دراولین قرائت درك این برهان‌کمی‌مشکل **است** وتسلط برآن به‌زمان وتجربه نیازدارد. اگرفعلا این برهان برایتان روشن نیست، پس‌از مطالعهٔ کامل فصل ۲ به‌آن بازگردید.

S وجود دارند که $S \geqslant x_n$ و هیچ عنصر S نمی‌تواند بزرگتر از $x_n + ۱/n$ باشد. به علاوه $\dots \leqslant x_۲ \leqslant x_۱ \leqslant x_۰$ به طوری که x_n یك دنبالهٔ افزایشی و از بالا کراندار است.

اکنون می‌توانیم خاصیت تمامیت $\mathbf{R}$ را به‌کار بریم، ونتیجه بگیریم که به ازای یك $y \in \mathbf{R}$، $x_n \to y$. نشان خواهیم‌داد که y کوچکترین کران بالای S است. ابتدا، ثابت می‌کنیم که y یك کران بالا می‌باشد. فرض‌کنیم که $x \in S$ و $x > y$. n را طوری برمی‌گزینیم که $۰ < ۱/n < x - y$، و این امکان‌پذیر است زیرا، وقتی $n \to \infty$، آنگاه $۱/n \to ۰$. بدین‌سان، x عنصری از S است که بزرگتر از $x_n + ۱/n$ می‌باشد، که این امر، باتوجه به‌نحوهٔ انتخاب x_n دربالا، نمی‌تواند رخ دهد. ازاین‌رو $x \leqslant y$، و y یك کران بالاست. بنابرقضیهٔ ۲، باقی‌می‌ماند اثبات‌اینکه، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، یك $x \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $y < x + \varepsilon$. n را طوری برمی‌گزینیم که $y < x_n + \varepsilon$، واین‌کار امکان پذیر است زیرا $x_n \to y$. بنابرساخت، یك $x \in S$ وجود دارد که $x \leqslant x_n$. بدین سان $y < x_n + \varepsilon \leqslant x + \varepsilon$ و برهان (یك) کامل می‌شود.

(دو) مجموعهٔ $-P = \{-x | x \in P\}$ را درنظرمی گیریم. بنابر(یك)، $-P$ دارای یك کوچکترین کران بالا مانند $c \in \mathbf{R}$ است ($-P$ ازبالاکراندار است زیرا P از پایین کراندار می‌باشد). همچنین، به‌آسانی از تعریف ملاحظه می‌شود که $-c$ بزرگترین کران پایین مطلوب می‌باشد. (برای برهانی دیگرتمرین ۱۷ را ببینید).

(سه) چون، همان‌طورکه هم‌اکنون ثابت‌کردیم، اصل‌موضوع تمامیت مستلزم(یك) و (دو) است، می‌توانیم از آنها برای اثبات (سه) استفاده‌کنیم. بدین‌سان فرض‌کنیم x_n یك دنبالهٔ‌کوشی در $\mathbf{R}$ باشد. به‌ازای هرعدد صحیح $M \geqslant ۱$، مجموعهٔ

$$\{x_M, x_{M+۱}, x_{M+۲}, \cdots\}$$

را درنظرمی گیریم («دُم» دنبالهٔ مفروض).

ابتدا نشان می‌دهیم که این مجموعه از بالا و پایین‌کراندار است. $\varepsilon = ۱$ انتخاب می‌کنیم. Nی وجوددارد به‌طوری‌که $n, m \geqslant N$ مستلزم $|x_n - x_m| < ۱$ است. بدین‌سان همهٔ اعضای x_m، به‌ازای $m \geqslant N$، در فاصله‌ای‌کوچکتر یا مساوی با ۱ از x_N می‌باشند. چون تنها تعدادی متناهی ازجمله‌ها، یعنی $(x_۱, x_۲, \dots, x_N)$، ازقلم می‌افتند، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود (دراینجا رسم یك شکل می‌تواند یاری دهنده باشد).

اینك، ازآنچه در (یك) نشان دادیم معلوم می‌شود که $\sup\{x_M, x_{M+۱}, \dots\}$ موجود است؛ آن‌را A_M می‌نامیم. این دنبالهٔ $\{A_M, A_{M+۱}, \dots\}$، دنباله‌ای‌کاهشی‌وازپایین کراندار است؛ $A_{M+۱} \leqslant A_M$ زیرا $A_{M+۱}$ عبارت است از sup مجموعهٔ $\{x_M, x_{M+۱}, \dots\} \supset \{x_{M+۱}, x_{M+۲}, \dots\}$؛ تمرین ۷ صفحهٔ ۱۹ را ببینید. بدین‌سان A_M به‌سمت نقطه‌ای مانند $a \in \mathbf{R}$ همگراست. همچنین ثابت خواهیم کرد که $x_n \to a$.

برای $0<\varepsilon$ مفروض، N_1 را می‌توان طوری انتخاب کرد که به‌ازای هر $n \geqslant N_1$، آنگاه $0 \leqslant A_n - a < \varepsilon/3$، زیرا $A_n \to a$. چون x_n یک دنبالهٔ کوشی است، N_2ی وجود دارد به‌طوری که $m,n \geqslant N_2$ مستلزم $|x_m - x_n| < \varepsilon/3$ است. حال چون $A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$، بنابر قضیهٔ ۲، N_4ی یافت می‌شود که $0 \leqslant |A_{N_3} - A_{N_4}| < \varepsilon/3$، که در آن N_3 ماکسیمم N_1 و N_2 می‌باشد. اگر N بزرگترین مقدار N_3 و N_4 باشد، و $n \geqslant N$، آنگاه خواهیم داشت:

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{N_4}| + |A_{N_3} - x_{N_4}| + |A_{N_3} - a| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

که حکم را ثابت می‌کند. ■

قبلاً خاطرنشان کردیم که (یک)، (دو)، و (سه) هریک، در یک هیأت مرتب، با اصل موضوع تمامیت هم‌ارزند. ما نیمی از این استلزام را نشان داده‌ایم، یعنی، اصل موضوع تمامیت، در یک هیأت مرتب، مستلزم (یک)، (دو)، و (سه) است. تمرین ۱۱ طرح اثبات این مطلب را، که (یک)، (دو)، و (سه) هریک مستلزم اصل موضوع تمامیت است، ارائه می‌کند.

قضیهٔ ۵. برای بردارهای واقع در $\mathbf{R}^n$ داریم

(I) خواص حاصلضرب داخلی

(یک) $<x, y_1 + y_2> = <x, y_1> + <x, y_2>$

(دو) به‌ازای α حقیقی $<x, \alpha y> = \alpha <x, y>$

(سه) $<x, y> = <y, x>$

(چهار) $<x, x> \geqslant 0$ و $<x, x> = 0$ اگر، وفقط اگر، $x = 0$

(پنج) $|<x, y>| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ (نامساوی کوشی ـ شوارتس)

(II) خواص نرم

(یک) $\|x\| \geqslant 0$

(دو) $\|x\| = 0$ اگر، وفقط اگر، $x = 0$

(سه) به‌ازای α حقیقی $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(چهار) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی)

(III) خواص فاصله

(یک) $d(x, y) = d(y, x)$

(دو) $d(x, y) \geqslant 0$

(سه) اگر، وفقط اگر، $x=y$ $\qquad d(x,y)=0$

(چهار) $\qquad d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (نامساوی مثلثی نیز خوانده می‌شود).

برهان: (I) خواص (یك) تا (چهار) به آسانی، با تکیه بر تعریف $<\ ,\ >$، محقق می‌شوند. خاصیت (پنج) را از (یك) ـ (چهار) استنتاج خواهیم کرد. حال، به‌ازای هر $\lambda\in\mathbf{R}$،

$$0\leqslant||\lambda x+y||^2<\lambda x+y,\lambda x+y>=\lambda^2<x,x>+2\lambda<x,y>+<y,y>$$

اگر عبارت اخیر را یك چند جمله‌ای برحسب λ به حساب آوریم، مینیمم آن در $\lambda=-<x,y>/||x||^2$ حاصل می‌شود (اگر $x=0$، حکم (پنج) به $0\leqslant 0$ تحویل می‌شود، ازاین‌رو می‌توانیم فرض کنیم $x\neq 0$). بدین‌سان، درحالت خاص،

$$0\leqslant\left(-\frac{<x,y>}{||x||^2}\right)^2<x,x>+2\left(-\frac{<x,y>}{||x||^2}\right)<x,y>+<y,y>$$

یعنی

$$0\leqslant\left(-\frac{<x,y>^2}{||x||^2}\right)+||y||^2$$

و $<x,y>^2\leqslant||x||^2||y||^2$. با گرفتن جذر از دوطرف، نامساوی مطلوب حاصل می‌گردد، زیرا $|\alpha|=\sqrt{\alpha^2}$.

(II)، (یك) و (دو) مستقیماً از I (چهار) نتیجه می‌شوند، و(سه) از I (دو). برای (چهار)، با استفاده از I (پنج)، داریم

$$\begin{aligned}||x+y||^2&=<x+y,x+y>=<x,x>+2<x,y>+<y,y>\\&\leqslant||x||^2+2|<x,y>|+||y||^2\\&\leqslant||x||^2+2||x||\ ||y||+||y||^2\\&=(||x||+||y||)^2\end{aligned}$$

که نتیجهٔ مطلوب را خواهد داد.

برای(III)، (یك) صادق‌است، زیرا با استفاده‌از II (سه)، $||x-y||=||y-x||$. همچنین، (دو) از II (یك) نتیجه می‌شود. برای (سه)، II (دو) را به‌کارمی‌بندیم. سرانجام برای (چهار)، III (سه) را به‌طریق زیرمورد استفاده قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}d(x,y)&=||x-y||=||(x-z)+(z-y)||\\&\leqslant||x-z||+||z-y||\end{aligned}$$

$$= d(x\,,z) + d(z\,,y)$$

ملاحظه کنید که چگونه هرمجموعه ازخواص، از مجموعه خواص قبلی منتج می گردد. ■

مثالهای حل شدهٔ فصل ۱

۰۱ برای اعداد حقیقی، ثابت کنید که

(یك) $x \leqslant |x|\,,\ -|x| \leqslant x$

(دو) $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$ که درآن $a \geqslant 0$

(سه) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

حل:

(یك) اگر $x \geqslant 0$، آنگاه $x = |x|$، در حالی که اگر $x < 0$، $|x| \geqslant x$، زیرا $|x| \geqslant 0$. درهرحالت، $x \leqslant |x|$. حکم دیگر مشابهاً برقرار می‌شود.

(دو) اگر $x \geqslant 0$، آنگاه باید نشان دهیم که $-a \leqslant x \leqslant a \iff 0 \leqslant x \leqslant a$ که آشکار است. بـه طور مشابه، اگـر $x < 0$، حکم مورد نظر عبارت می‌شود از $(-a \leqslant x \leqslant a) \iff (0 \leqslant -x \leqslant a)$ که بازآشکاراست. دراینجا ازاین حقیقت استفاده می‌شود که اگر $c \leqslant 0$، آنگاه، $(0 \leqslant x \leqslant y) \iff (0 \geqslant cx \geqslant cy)$

(سه) بنابر (یك)، $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ و $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. از جمع ایـن دو نامساوی بـا هم، به‌دست می آوریم $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$. آنگاه، بنابر (دو)، $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. به‌علاوه این نامساوی را می‌توان با نظر گرفتن حالتهای گوناگون، همان‌طورکه در (دو) انجام دادیم، اثبات کرد. توجه کنید که این قضیه همچنین حالتی خاص ازقضیهٔ ۵، II (چهار) می باشد.

۰۲ فرض کنیم S مجموعه‌ای در $\mathbf{R}$ باشد و $x = \sup(S)$. نشان دهید که دنباله‌ای مانند x_1، x_2، ... وجود دارد به‌طوری که $x_k \to x$، و $x_k \in S$.

حل: با به‌کار بستن قضیهٔ ۲، به‌ازای هر k، x_k ی طوری پیدا می کنیم که $x_k \leqslant x < x_k + 1/k$. آنگاه $x_k \to x$، زیرا به‌ازای یك $\varepsilon > 0$ مفروض، انتخاب می کنیم $N \geqslant 1/\varepsilon$؛ دراین صورت $k \geqslant N$ مستلزم $x_k \leqslant x < x_k + \varepsilon$ یا $|x - x_k| < \varepsilon$ است.

۰۳ برای اعداد x_1، ...، x_n، y_1، ...، y_n، و z_1، ...، z_n، نشان دهید که

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\, z_i\right)^4 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^4\right)$$

حل: نامساوی CBS (قضیهٔ ۵، I (پنج)) مبین آن است که

$$\left(\sum w_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum w_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

با به‌کاربردن این نامساوی به‌ازای اعداد $w_i = x_i z_i$ و y_i خواهیم‌داشت

$$(\sum x_i y_i z_i)^۲ \leqslant (\sum (x_i z_i)^۲)(\sum y_i^۲)$$

دوباره با به‌کاربردن این نامساوی به‌ازای اعداد $x_i^۲$ ، $z_i^۲$ خواهیم‌داشت

$$(\sum x_i^۲ z_i^۲)^۲ \leqslant (\sum x_i^۴)(\sum z_i^۴)$$

یا

$$(\sum (x_i z_i)^۲) \leqslant (\sum x_i^۴)^{۱/۲}(\sum z_i^۴)^{۱/۲}$$

و بنابراین

$$(\sum x_i y_i z_i)^۲ \leqslant (\sum x_i^۴)^{۱/۲}(\sum z_i^۴)^{۱/۲}(\sum y_i^۲)$$

با مربع‌کردن هردوطرف، نتیجه‌حاصل می‌شود. (دراینجا این‌امر مسلم‌را مورد استفاده قرار داده‌ایم‌که اگر $a , b \geqslant ۰$ ، آنگاه $a \leqslant b$ اگر ، وفقط اگر، $a^۲ \leqslant b^۲$.)

۴. فرض‌کنیم $x \in \mathbf{R}$ و $x > ۰$ ؛ نشان دهید که بین ۰ و x عددی گنگ وجود دارد.

حل: اگر x گویا باشد، آنگاه چون $\sqrt{۲}$ گنگ است، $x/\sqrt{۲}$ نیز گنگ می‌باشد (چرا؟) و بین ۰ و x قرار دارد. ازطرف دیگر، اگر x گنگ باشد، آنگاه $x/۲$ نیز گنگ است (چرا؟) وبین ۰ و x قرار دارد.

۵. یادآوری می‌کنیم که e^x را می‌توان با $e^x = ۱ + x + x^۲/۲! + x^۳/۳! + \dots$ تعریف کرد. (بنابرآزمون نسبت، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، این سری‌همگر است. از این‌رو این تعریف e^x با معنی است.) نشان دهید که $e = e^۱$ عددی گنگ است.

حل: فرض‌کنیم که به‌ازای‌اعدادصحیح a و b، $e = a/b$. فرض‌کنیم kعددی صحیح باشد، باشرط $k > b$،وقرارمی‌دهیم $\alpha = k!(e - ۱ - ۱/۲! - ۱/۳! - \dots - ۱/k!)$، به‌طوری که α نیز یك‌عددصحیح ناصفر است. اما، چون $e = ۱ + ۱/۲! + ۱/۳! + \dots$، خواهیم داشت

$$\alpha = \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)} + \dots$$

$$\leqslant \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{(k+۱)^۲} + \dots$$

$$= \frac{۱}{k}$$

(تساوی قبلی از به کار بستن سری هندسی $\circ \leqslant y < ۱ ، y + y^۲ + \ldots = y/(۱ - y)$ نتیجه می‌شود.) لیکن چون α یك عدد صحیح مخالف صفر است ، $\alpha < ۱/k$ غیرممکن است. بدین‌سان $e = a/b$ نیز غیرممکن است، و در نتیجه e گنگ می باشد.

شگفت آور است که ، اثبات آنکه ، به‌ازای r گویا ، e^r گنگ است ، به هیچ وجه ساده نیست، و اثبات آنکه π گنگ است. از آن نیز سختتر می باشد[۱].

۶. فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی در $\mathbf{R}$ باشند که از بالا کرا ندارند. فرض کنیم $a = \sup(A)$، $b = \sup(b)$ و فرض کنیم مجموعهٔ C به‌وسیلهٔ $C = \{xy | x \in A, y \in B\}$ تعریف‌شده باشد. نشان دهید که، به‌طور کلی، $ab \neq \sup(C)$. اگر $a < \circ$ و $b < \circ$، آنگاه ثابت کنید که $ab = \inf(C)$. اگر $a > \circ$ و $b > \circ$ ، و A ، B تنها دارای اعضای مثبت باشند، آنگاه ثابت کنید که $ab = \sup(C)$.

حل: به‌عنوان نمونه‌ای خاص، فرض کنیم

$$A = \{x \in \mathbf{R} | -۱\circ < x < -۱\} =]-۱\circ, -۱[\text{ و } B =]\circ, \tfrac{۱}{۲}[$$

در نتیجه $a = -۱$، $b = ۱/۲$ و $ab = -۱/۲$. لیکن $C =]-۵, \circ[$ و $\sup(C) = \circ$.

حال ثابت می کنیم که اگر $a < \circ$ و $b < \circ$ ، آنگاه $ab = \inf(C)$. برای این کار، مشابه قضیهٔ۲ را بـرای بزرگترین کرانهای پایین ، به‌کار می بریم. ابتدا ، فرض کنیم $x \in A$ و $y \in B$. می‌خواهیم نشان دهیم که $xy \geqslant ab$ لیکن $x \leqslant a$ ، $y \leqslant b$ یـا $-x \geqslant -a \geqslant \circ$ و $-y \geqslant -b \geqslant \circ$ ، درنتیجه (با استفاده از اصل‌موضوع III (پنج) برای $\mathbf{R}$) ، $(-x)(-y) \geqslant (-a)(-b)$ یا $xy \geqslant ab$. به ازای $\varepsilon > \circ$ مفروض ، مـی‌خواهیم $x \in A$ و $y \in B$ را طوری پیدا کنیم کـه $ab > xy - \varepsilon$ یـا $|ab - xy| < \varepsilon$. x و y را طوری انتخاب می کنیم که $a < x + \varepsilon/۲(|b| + ۱)$ ، $b < y + \varepsilon/۲|a|$ ، و $b < y + ۱$. آنگاه چون $|uv| = |u||v|$ و $|y| < |b| + ۱$،

---

۱. مثلاً، کتاب G.H.Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to The Theory of Numbers*, New york, oxford University Press, Fourth Edition,1960. را ببینید . در واقع e و π اعداد متعالی می‌باشند ، به این معنی که این اعداد ریشهٔ هیچ چندجمله‌ای بـا ضرایب گویا نیستند . ایـن حقیقت توسط هرمیت (Hermite) ولیندمان (Lindemann) در ۱۸۷۳ و ۱۸۸۲ کشف شد . بـرای یـك جمعبندی مقـدماتـی ، M. Spivak, Calculus, W.A. Benjamin Co را ببینید.

به‌دست می‌آوریم (با استفاده از نامساوی مثلثی)

$$|ab-xy| \leqslant |ab-ay|+|ay-xy| = |a||b-y|+|a-x||y| < |a|\cdot\left(\frac{\varepsilon}{۲|a|}\right) + \frac{\varepsilon}{۲(|b|+۱)}(|b|+۱) = \varepsilon$$

حکم آخر را می‌توان به‌طریقی مشابه ثابت نمود.

تمرینهای فصل ۱

۱. برای هریك از مجموعه‌های زیرین S ، $\sup(S)$ و $\inf(S)$ را بیابید:

(الف) $\{x\in\mathbf{R} \mid x^۲<۵\}$

(ب) $\{x\in\mathbf{R} \mid x^۲>۷\}$

(پ) $\{۱/n \mid n>۰$ ، عددی صحیح است $n\}$

(ت) $\{-۱/n \mid n>۰$ ، عددی صحیح است $n\}$

(ث) $\{۰/۳, ۰/۳۳, ۰/۳۳۳, \ldots\}$

(ج) بازه‌های $[a,b]$ ، $[a,b[$ ، $]a,b]$ ، یا $]a,b[$.

۲. اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را مرور کنید. [راهنمایی: اگر عددی گویا مانند m/n موجود باشد، که در آن m و n عامل مشترکی نداشته باشند، به‌طوری که $(m/n)^۲=۲$ ، آیا m زوج یا فرد خواهد بود؟]. این اثبات را برای $\sqrt{k}$ ، که در آن عدد صحیح مثبت k مربع کامل نیست ، تعمیم دهید.

۳. (الف) فرض کنیم $۰\leqslant x$ عددی حقیقی باشد به‌طوری که به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ ، $x\leqslant\varepsilon$. نشان دهید که $x=۰$.

(ب) فرض کنیم $S=]۰,۱[$. نشان دهید که به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ ، یك $x\in S$ موجود است به طوری که $x<\varepsilon$ ، $x\neq۰$.

۴. نشان دهید که $d=\inf(S)$ اگر، وفقط اگر، d یك کران پایین S باشد و به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ ، یك $x\in S$ وجود داشته باشد به طوری که $d\geqslant x-\varepsilon$.

۵. فرض کنیم x_n یك دنبالهٔ یکنوای افزایشی باشد که از بالا کراندار است و مجموعهٔ $S=\{x_۱, x_۲, \ldots\}$ را درنظر می‌گیریم. با استفاده ازقضیهٔ ۲ ، نشان دهید که x_n به سمت $\sup(S)$ همگراست. گزاره‌ای مشابه برای دنباله‌های کاهشی بیان کنید.

۶. فرض کنیم A و B دومجموعهٔ ناتهی‌از اعداد حقیقی باشند با این خاصیت که به‌ازای هر $x\in A$ ، $y\in B$ ، $x\leqslant y$. نشان دهید که عددی مانند c متعلق به $\mathbf{R}$ موجود است به

طوری‌که ، به‌ازای هر $x\in A$ ، $y\in B$ ، $x\leqslant c\leqslant y$. مثالی از این گزاره بیاورید که به‌ازای اعداد گویا نادرست باشد (در واقع این هم‌ارزاست با اصل‌موضوع تمامیت و مبنایی برای‌طریق دیگری‌از فرموله‌کردن اصل موضوع تمامیت می‌باشد که به برشهای ددکیند معروف است).

۷. به‌ازای مجموعه‌های $A,B\subset \mathbf{R}$ ، فرض کنیم $A+B=\{x+y \mid x\in A$ و $y\in B\}$. نشان دهید که $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$. گزاره‌ای مشابه برای $\inf(A+B)$ بیان کنید .

۸. به‌ازای مجموعه‌های $A,B\subset\mathbf{R}$، معین کنید کدام یك ازگزاره‌های زیر درست است. گزاره‌های درست‌را ثابت کنید و برای هر کدام که نادرست‌است مثالی‌نقض بیاورید:

(الف) $\sup(A\cap B)\leqslant \inf\{\sup(A),\sup(B)\}$

(ب) $\sup(A\cap B)= \inf\{\sup(A),\sup(B)\}$

(پ) $\sup(A\cup B)\geqslant \sup\{\sup(A),\sup(B)\}$

(ت) $\sup(A\cup B)= \sup\{\sup(A),\sup(B)\}$

۹. ثابت کنید که اگر یك‌زیر دنباله از یك دنبالهٔ کوشی به‌سمت یك‌نقطه همگرا باشد، آنگاه تمام‌دنباله به سمت آن نقطه‌همگرا خواهد بود. اگردنبالهٔ اولیه یك‌دنبالهٔ کوشی نباشد، مثالی نقض بیاورید.

۱۰. برای یك‌دنبالهٔ مفروض a_n ، اعدادزیر را تعریف می‌کنیم:

$$\lim\sup(a_n)=\inf\{\sup\{a_n,a_{n+۱},\cdots\}\mid n=۱,۲,\cdots\}$$

و

$$\lim\inf(a_n)=\sup\{\inf\{a_n,a_{n+۱},\cdots\}\mid n=۱,۲,\cdots\}$$

نشان دهید که

(الف) $\lim\inf(a_n)\leqslant \lim\sup(a_n)$

(ب) $\lim\sup(a_n)=b$ اگر ، و فقط اگر ، به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ ، Nی وجود داشته باشد، به‌طوری که به‌ازای هر $n\geqslant N$ ، $b+\varepsilon>a_n$ ، و به‌ازای یك $n\geqslant N$ ، $b-\varepsilon<a_n$.

(پ) $a_n\to b$ اگر، وفقط اگر، $\lim\sup(a_n)=\lim\inf(a_n)=b$.

(ت) فرض‌کنیم $a_n=(-۱)^n$. مطلوب‌است‌محاسبهٔ $\lim\inf(a_n)$،$\lim\sup(a_n)$.

تبصره: $\lim\sup(a_n)$ و $\lim\inf(a_n)$ همواره تعریف‌می‌شوند (ولی‌می‌توانند $\pm\infty$ باشند) اگرچه لزومی ندارد که $\lim(a_n)$ وجود داشته باشد. همچنین $\lim\sup$ مبین حداعلی و $\lim\inf$ مبین حداسفل است، و اینها گاهی به ترتیب‌به صورت $\overline{\lim}$ و $\underline{\lim}$ نوشته می‌شوند.

۱۱. نشان دهید که (یك)، (دو)، و (سه) قضیهٔ۳ هریك مستلزم‌اصل موضوع‌تمامیت برای

یك هیأت مرتب هستند. [راهنمایی: (یك)$\Longrightarrow$ اصل موضوع تمامیت، تقریباً بی‌درنگ برقرار می‌شود. (دو) مستلزم (یك) است تقریباً به همان‌طریقی ثابت می‌شود که ما در برهان قضیهٔ۳ نشان‌دادیم که (یك) مستلزم (دو) است. بنابراین (دو)$\Longrightarrow$ اصل‌موضوع تمامیت. برای نشان دادن‌آنکه (سه)$\Longrightarrow$ اصل موضوع تمامیت، کافی‌است نشان دهیم که (سه)$\Longrightarrow$(یك). برای انجام این‌کار دنبالهٔ x_n را همان‌طور که در برهان اصل موضوع تمامیت$\Longrightarrow$ (یك)دیدیم تعریف کنید و ثابت‌کنید که x_n یك‌دنبالهٔ‌کوشی‌است. نشان‌دهید که حدآن عبارت‌است از sup مجموعهٔ موردبحث، و این‌هم ازبرهان اصل موضوع تمامیت$\Longrightarrow$ (یك) نتیجه می‌شود.]

۱۲. در $\mathbf{R}^n$ نشان دهید که

(الف) (قانون متوازی‌الاضلاع) $2\|x\|^2+2\|y\|^2=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$

(ب) $\|x+y\|\,\|x-y\| \leqslant \|x\|^2+\|y\|^2$

(پ) (اتحاد قطبی) $4<x,y>=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$

این نتایج‌را به‌طور هندسی برحسب متوازی‌الاضلاع متشکل‌از xوy تعبیر کنید.

۱۳. متمم متعامد فضای تولید شده به وسیلهٔ $(1,0,1,1)$ و $(-1,2,0,0)$ را در $\mathbf{R}^4$ تعیین کنید.

۱۴. (الف) اتحاد لاگرانژ را، با استفاده از فنون جبری، ثابت‌کنید

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i y_j-x_j y_i)^2$$

وبا استفاده از این اتحاد، اثبات‌دیگری از نامساوی شوارتس بیاورید.

(ب) نشان دهید که

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right\}^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

۱۵. فرض کنیم x_n دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد به طوری که $d(x_n,x_{n+1})\leqslant d(x_{n-1},x_n)/2$. دراین‌صورت نشان‌دهید که x_n یك‌دنبالهٔ‌کوشی است.

۱۶. قضیهٔ ۴ را ثابت‌کنید. درواقع، به‌ازای فضاهای برداری V_1، ...، V_n نشان دهید که $V=V_1\times\cdots\times V_n$ یك فضای برداری است.

۱۷. فرض‌کنیم $S\subset\mathbf{R}$ ناتهی و ازپایین‌کراندار باشد. آنگاه نشان دهید که

$$\inf(S)=\sup\{x\in\mathbf{R} \mid \text{است } S \text{ یك‌کران پایین } x\}$$

۱۸. نشان‌دهید که‌در $\mathbf{R}$، $x_n\to x$ اگر، وفقط اگر، $-x_n\to -x$. ازاین‌روثابت‌کنید که اصل موضوع تمامیت با این گزاره که، هردنبالهٔ کاهشی $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\ldots$ و

کراندار از پایین همگر است، هم‌ارز می‌باشد. ثابت کنید که حد این دنباله عبارت است از $\inf\{x_1, x_2, \dots\}$.

۱۹. فرض کنیم $x=(1,1,1)\in\mathbf{R}^3$ به‌صورت $x=\sum_{i=1}^{3} y_i f_i$ نوشته شود که در آن $f_1=(1,0,1)$ ، $f_2=(1,1,0)$ و $f_3=(1,1,0)$. مطلوب است محاسبهٔ مؤلفه‌های y_i .

۲۰. فرض کنیم S و T دو زیرفضای ناصفر متعامد در $\mathbf{R}^n$ باشند. ثابت کنید که اگر S و T متمم‌های متعامد باشند (یعنی، S و T همهٔ $\mathbf{R}^n$ را تولید کنند) آنگاه $S\cap T=\{0\}$ و $\dim(S)+\dim(T)=n$ که در آن $\dim(S)$ نمایانگر بعد S است. مثالهایی در $\mathbf{R}^3$ بیاورید، که در آنها شرط $\dim(S)+\dim(T)=n$ برقرار باشد، ومثالهایی که‌در آنها این‌شرط برقرار نباشد. آیا این‌شرط می‌تواند در $\mathbf{R}^2$ برقرار نباشد؟

۲۱. نشان دهید که دنبالهٔ مذکور در مثال ۲ را می‌توان افزایشی انتخاب نمود.

۲۲. (الف) ثابت کنید: اگر در $\mathbf{R}$ ، $x_k \to x$ ، آنگاه به‌ازای هرعدد a ، $ax_k \to ax$.
(ب) اگر $x_k \to x$ و $y_k \to y$ ، آنگاه ثابت کنید $s_k=x_k+y_k$ به سمت $x+y$ همگرا است.

۲۳. فرض کنیم $P\subset\mathbf{R}$ مجموعه‌ای باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x\in P$، $0\leqslant x$ و به‌ازای هرعدد صحیح k یك $x_k\in P$ موجود باشد به‌طوری که $kx_k\leqslant 1$. آنگاه ثابت کنید که $0=\inf(P)$.

۲۴. اگر $\sup(P)=\sup(Q)$ و $\inf(P)=\text{in}(Q)$ ، آیا $P=Q$ ؟

۲۵. گوییم $P\leqslant Q$ اگربه‌ازای‌هر $x\in P$ ، یك $y\in Q$ وجود داشته باشد که $x\leqslant y$. اگر $P\leqslant Q$ ، آنگاه ثابت کنیدکه $\sup(P)\leqslant\sup(Q)$. آیا درست است که $\inf(P)\leqslant\inf(Q)$ ؟ اگر $P\leqslant Q$ و $Q\leqslant P$ آیا $P=Q$ ؟

۲۶. ثابت کنیدکه اعدادحقیقی مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر تشکیل می‌دهند، لیکن مجموعهٔ اعدادگویا شمارش‌پذیر است. [راهنمایی: ابتدا یادآور می‌شویم چگونه هرعدد x ، $0\leqslant x\leqslant 1$ ، را می‌توان به‌صورت اعشاری نوشت و اینکه هرعدد اعشاری یك عدد حقیقی‌را نمایش می‌دهد. اگر اعداد x ، $0\leqslant x\leqslant 1$ شمارش‌پذیر بودند، می‌توانستیم آنها را به‌صورت $s_n=0/a_{n,1}a_{n,2}\dots$ مرتب کنیم. فرض کنیم $x=0/b_1b_2b_3\dots$ که درآن $b_n=1$ اگر $a_{n,n}\neq 1$ و $b_n=2$ چنانچه $a_{n,n}=1$. نشان‌دهید که به‌ازای هر n ، $x\neq s_n$. برای اعدادگویا، تمرین ۹ درفصل مقدماتی‌را به کار گیرید.]

۲۷. فرض کنیم $a_n\geqslant 0$ ، و وقتی که $n\to\infty$ ، $a_n\to 0$. به‌ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض، نشان دهید که زیردنباله‌ای مانند b_n از a_n وجود دارد به‌طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\varepsilon$.

۲۸. فرض کنیم x_n یك دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}$ باشد و فرض کنیم

$$B_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} \quad \text{و} \quad A_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$$

ثابت کنید A_n به سمت همان حد B_n همگر است، که این به‌نوبهٔ خود باحد x_n برابر می‌باشد.

۲۹. به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $x \geqslant 0$، اصول موضوع $\mathbf{R}$ را مورداستفاده قرار دهید تا وجود یك $y \in \mathbf{R}$ را، به‌طوری که $y^2 = x$، استنتاج کنید.

۳۰. با به‌کاربستن اصول موضوع $\mathbf{R}$ خاصیت ارشمیدسی‌را ثابت کنید: به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ عددی‌صحیح مانند N موجود است به‌طوری که $N > x$. [راهنمایی: اگر به‌ازای‌هر $n = 1, 2, \ldots$، $n \leqslant x$، اصل موضوع تمامیت‌را به‌کار برید تا ثابت کنید که $x_n = n$ همگرا است.]

۳۱. فرض کنیم $A, B \subset \mathbf{R}$ و $f: A \times B \to \mathbf{R}$. آیا درست است که

$$\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in A \times B\} = \sup\{\sup\{f(x,y) \mid x \in A\} \mid y \in B\}$$

یا با نمادی‌دیگر

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} f(x,y) = \sup_{y \in B} (\sup_{x \in A} f(x,y))?$$

۳۲. (الف) تعریفی معقول برای هنگامی که $\operatorname{limit}_{n \to \infty} x_n = \infty$ ارائه دهید.

(ب) فرض کنیم $x_1 = 1$ و به استقراء تعریف می‌کنیم $x_{n+1} = (x_1 + \cdots + x_n)/2$. ثابت کنید که $x_n \to \infty$.

۳۳. (الف) نشان‌دهید که وقتی $x \to \infty$، $(\log x)/x \to 0$. (می‌توانید به‌کتاب‌حساب دیفرانسیل و انتگرال‌خود مراجعه‌کنید و مثلاً قاعده لوپیتال‌را به‌کار گیرید.)

(ب) نشان دهید که وقتی $n \to \infty$، آنگاه $n^{1/n} \to 1$.

فصل ۲

توپولوژی $\mathbf{R}^n$

دراین فصل مطالعه‌آن خواص اساسی $\mathbf{R}^n$ راکه برای مفهوم یك‌تابع‌پیوسته‌اهمیت دارند، آغاز می‌کنیم. مجموعه‌های باز ، کــه بازه‌های بـاز در $\mathbf{R}$ را تعمیم می‌دهند ، و مجموعه‌های بسته راکـه تعمیم‌دهندهٔ بازه‌های بسته هستند مورد مطالعه قرار خواهیم داد . مطالعهٔ مجموعه‌های‌باز و بسته آغازکار توپولوژی است. این‌مطالعه درفصل ۳ ادامه‌خواهد یافت .

بیشتر مواد این‌فصل تنها به‌خواص اساسی‌تابع فاصله‌که درقضیهٔ۵ فصل ۱ عنوان‌شد، وابسته‌اند. یادآور می‌شویم‌که تابع‌فاصلهٔ d با ضابطهٔزیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$$

و خواص اساسی d عبارتند از

(یك) $d(x,y)\geqslant 0$

(دو) $d(x,y)=0$ اگر، وفقط اگر، $x=y$

(سه) $d(x,y)=d(y,x)$

(چهار) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (نامساوی مثلثی)

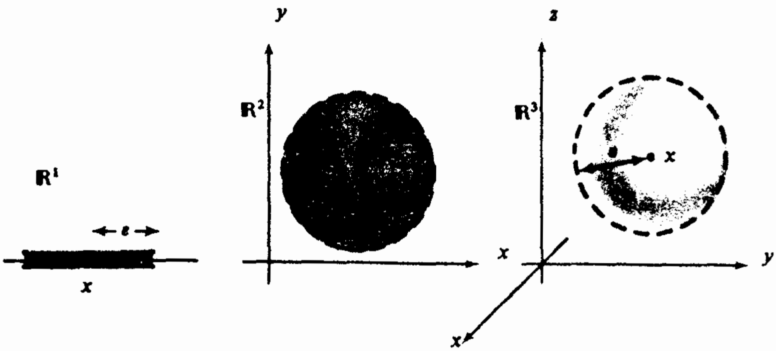
۱.۲ مجموعه‌های باز

برای تعریف مجموعه‌های باز ، ابتدا مفهوم یك εــ گرده را معرفی می‌کنیم.

تعریف۱. به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^n$ ثابت و $\varepsilon>0$ ، مجموعهٔ

$$D(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbf{R}^n \mid d(x,y)<\varepsilon\}$$

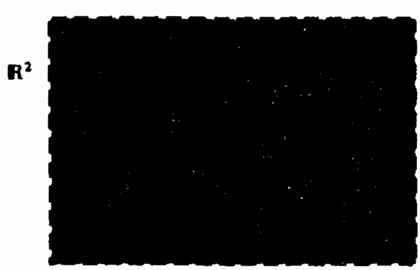
را یك εــ گرده حول x می‌نامند (آن‌را εــ همسایگی یا εــ گوی حول x نیز می‌نامند). شکل ۲ــ۱ را ببینید. یك‌مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ را باز گویند، اگر به ازای هر $x\in A$ یك‌عدد $\varepsilon>0$ موجود باشد به‌طوری که $D(x,\varepsilon)\subset A$.



شکل ۲ـ۱ εــ گرده

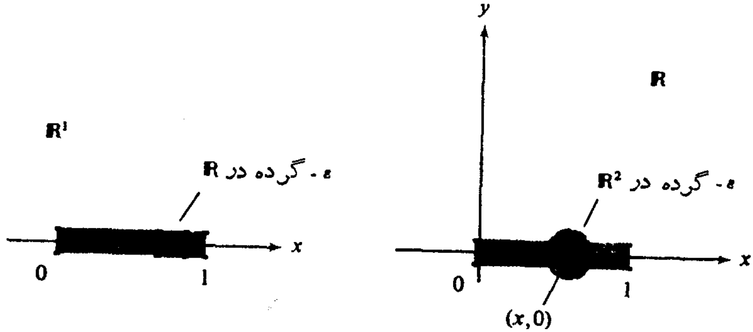
درك این مطلب مهم‌است که ε موردنیاز ممکن است به‌x وابسته باشد. مثلاً، مربع یکهٔ در $\mathbf{R}^2$ بدون درنظرگرفتن «مرز» آن‌باز است، ولی هرچه به مرز نزدیکتر می‌شویم، ε های موردنیاز کوچکتر می‌شوند. اما توجه شودکه به‌ازای هیچ xی، ε نمی‌تواند صفر باشد. شکل۲ــ۲ را ببینید.

بازهٔ بازی، مثلاً $]0,1[$، را در $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$ اختیار می‌کنیم. در واقع، این یك مجموعهٔ‌باز است (شکل ۲ــ۳ را ببینید). درحالی‌که اگراین مجموعه‌را در $\mathbf{R}^2$ به‌حساب آوریم (به‌عنوان زیرمجموعه‌ای‌ازمحور x) دیگرباز نخواهد بود. بدین‌سان برای‌آنکه مجموعه‌ای‌باز باشد، مشخص‌کردن فضای $\mathbf{R}^n$ مورداستفاده اساسی است.



شکل ۲ـ۲ یك مجموعهٔ باز

مثالهای متعددی‌از مجموعه‌هایی‌که باز نیستند وجود دارد. گردهٔیکه بسته در $\mathbf{R}^2$ ، $\{x\in\mathbf{R}^2 | \|x\| \leqslant 1\}$ ، مثالی از این نوع می باشد. ایـن مجموعه باز نیست زیرا به‌ازای هرنقطهٔ واقع بر «مرز» (یعنی نقاط x به طوری که $\|x\| = 1$) هر εــ گرده شامل نقاطی است که درمجموعه قرار ندارند. شکل ۲ــ۴ را ببینید.



شکل ۲ــ۳

قضیهٔ ۱. در $\mathbf{R}^n$ ، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ و $x\in\mathbf{R}^n$ ، مجموعهٔ $D(x,\varepsilon)$ باز است.

پندارهٔ اصلی‌اثبات در شکل ۲ــ۵ مشهود است. دراین شکل توجه شود که هر قدر y به‌مرز نزدیکترشود اندازهٔ گردهٔ حول‌نقطهٔ $y\in D(x,\varepsilon)$ کوچکتر می گردد. قضیهٔ‌نامبرده از روی این شکل «به‌طور شهودی روشن است».

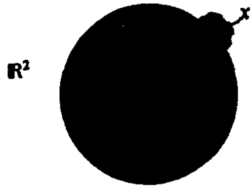
بعضی‌قوانین اساسی که مجموعه های‌باز ازآنها پیروی می کنند در زیر آمده‌اند.

قضیهٔ ۲.

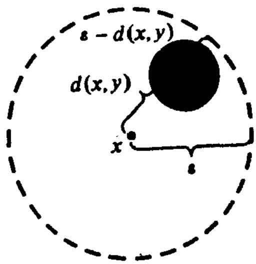
(یك) اشتراك تعدادی متناهی از زیر مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^n$ یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ می باشد.

(دو) اجتماع یك‌گردایهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}^n$ یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ می باشد.

این‌نتیجه شاید تماماً به‌طور شهودی‌روشن‌نباشد. اگرحقیقتاً بدانیم این‌درست‌نیست که اشتراك خانواده‌دلخواهی ازمجموعه های‌باز، باز‌است، آنگاه می توان‌پنداره‌ای‌در بارهٔ تفاوت‌بین احکام (یك) و (دو) به‌دست‌آورد. مثلاً، در $\mathbf{R}^1$، یك‌نقطهٔ تنها (که مجموعه‌ای باز نیست) اشتراك همهٔ‌بازه‌های بازی است که شامل‌آن می‌باشند (چرا؟). بقیهٔ این فصل‌به صورتی اجتناب‌ناپذیر برخواص اساسی مجموعه‌های باز کـه در قضیهٔ ۲ آمده‌اند متکی خواهد بود.



شکل ۲-۴ يك مجموعهٔ غیرباز



شکل ۲-۵ ε-گرده‌ها باز هستند

تبصره: مجموعه‌ای با يك گردایهٔ معین از زیر مجموعه‌ها (بنابر تعریف، موسوم به مجموعه‌های باز) راکه ازقواعد قضیهٔ ۲ پیروی کند و حاوی مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و تمام فضا باشد يك فضای توپولوژيك نامند. دراین کتاب فضاهای توپولوژيك عمومی‌را مورد بحث قرار نخواهیم‌داد، بلکه‌بیشتر به‌حالت $\mathbf{R}^n$ می‌پردازیم. هرچند، اکثرآنچه در زیر گفته می‌شود برای‌حالت‌کلیتر نیز برقرار است.

مثال۱. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲ | ۰<x<۱\}$. نشان دهیدکه S باز است.

حل: درشکل ۲-۶ ملاحظه می‌کنیم که حول هرنقطهٔ $(x,y)\in S$ می‌توان گردهٔ به شعاع $r=min\{x,۱-x\}$ را رسم‌نمودکه تماماً در S واقع می‌گردد. از این‌رو، بنابر تعریف، S باز است.

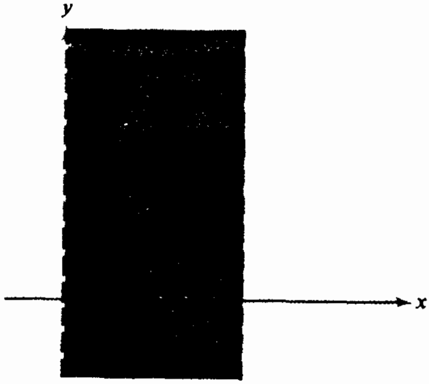
مثال۲. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲ | ۰<x\leqslant ۱\}$. آیا S باز است؟

حل: S باز نیست، زیرا هرگرده حول $(۱,۰)\in S$ حاوی نقاط $(x,۰)$ است که‌در آن $x>۱$.

مثال۳. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ باز باشد و $B\subset\mathbf{R}^n$. تعریف می‌کنیم

$$A+B=\{x+y\in\mathrm{R}^n \mid x\in A \ \text{و}\ y\in B\}$$

ثابت‌کنید $A+B$ باز است.



شکل ۲-۶

حل: فرض کنیم $x\in A$ ، $y\in B$ به طوری که $x+y\in A+B$. بنا بر تعریف ، یک $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری که $D(x,\varepsilon)\subset A$. ادعا می‌کنیم که $D(x+y,\varepsilon)\subset A+B$. در واقع ، فرض کنیم $z\in D(x+y\ ,\ \varepsilon)$ به طوری کـه $d(x+y\ ,\ z)<\varepsilon$. لیکن ، $d(x+y\ ,\ z)=d(x\ ,\ z-y)$ (چـرا ؟) بنـا بـرایـن $z-y\in A$ ، و آنگـاه $z=(z-y)+y\in A+B$. بدین‌سان $D(x+y,\varepsilon)\subset A+B$ ، درنتیجه $A+B$ باز است.

تمرینهای بند ۱.۲

۱. نشان دهید که $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ در $\mathbf{R}^2$ باز است.

۲. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy>1\}$. نشان دهید که S باز است.

۳. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}$ باز باشد و $B\subset\mathbf{R}^2$ به‌وسیلهٔ

$$B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\in A\}$$

تعریف شود. نشان دهید که B باز است.

۴. فرض کنیم $B\subset\mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$C=\{x\in\mathbf{R}^n \mid d(x,y)<1 \text{ ، } y\in B \text{ به‌ازای یک}\}$$

نشان دهید که C باز است. [راهنمایی: نشان دهید که $(C=\bigcup_{y\in B}D(y,1)$]

۵. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}$ باز باشد و $B\subset\mathbf{R}$. تعریف می‌کنیم $AB=\{xy\in\mathbf{R}\mid x\in A \text{ و } y\in B\}$. آیا AB الزاماً باز است؟

۲.۲ درون یك مجموعه

تعریف ۲. برای هرمجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ ، یك‌نقطهٔ $x\in A$ را یك نقطه درونی A نامند هرگاه مجموعه‌ای باز مانند U یافت‌شود به‌طوری‌که $x\in U\subset A$. (روشن است که این باگزارهٔ زیر هم‌ارز است: یك $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $D(x,\varepsilon)\subset A$). درون A عبارت‌است از گــردایهٔ همهٔ نقاط درونی A و با $\operatorname{int}(A)$ نمایش داده می‌شود. این‌مجموعه ممکن‌است تهی باشد.

مثلاً درون یك‌نقطهٔ تنها تهی است. درون گردهٔیکه، به‌انضمام مرزش، گردهٔیکه‌بدون مرزش است.

درون یك مجموعه‌را به‌طریق دیگر هم می‌توان تــوصیف نمود. در واقع درون A عبارت‌است از اجتماع همهٔزیر مجموعه‌های باز A (برهان این مطلب در تمرین ۲۲ صفحهٔ ۵۸ ازخواننده خواسته‌شده است). بدین‌سان، بنا برقضیهٔ ۲، یا مستقیماً، $\operatorname{int}(A)$ بازاست. از این‌رو $\operatorname{int}(A)$ بزرگترین زیر مجموعهٔ باز A است. بنابراین اگر زیرمجموعهٔ بازی‌در A وجود نداشته باشد، آنگاه $\operatorname{int}(A)=\varnothing$. همچنین آشکار است‌که A باز است ، اگر ، وفقط اگر، $\operatorname{int}(A)=A$ (دوباره تمرین ۲۲ را ببینید).

مثال ۱. فرض‌کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,0<x\leqslant 1\}$. مطلوب‌است تعیین $\operatorname{int}(S)$.

حل: برای تعیین نقاط درونی، دقیقاً باید نقاطی را مشخص کنیم کــه می‌توان حول آنها ε گرده‌ای، تماماً مشمول S ، رسم کرد. با درنظر گرفتن شکل ۲ــ۶ ملاحظه می‌کنیم که این‌نقاط ، (x,y) هایی هستندکه در آن، $0<x<1$. بدین‌سان

$$\operatorname{int}(S)=\{(x,y)\,|\,0<x<1\}$$

مثال ۲. آیا درست است که $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)=\operatorname{int}(A\cup B)$ ؟

حل: خیر. درخط‌حقیقی $A=[0,1]$ ، $B=[1,2]$ را درنظر می گیریم. آنگاه $\operatorname{int}(A)=]0,1[$ (چرا؟) و $\operatorname{int}(B)=]1,2[$ ، بنابراین

$$\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)=]0,1[\,\cup\,]1,2[\,=\,]0,2[\setminus\{1\}$$

درحالی‌که $\operatorname{int}(A\cup B)=\operatorname{int}[0,2]=]0,2[$.

تمرینهای بند ۲.۲

۱. فرض‌کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,xy\geqslant 1\}$. $\operatorname{int}(S)$ را پیدا کنید.

۲. فرض‌کنیم $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,0\leqslant x<1, y^2+z^2\leqslant 1\}$. $\operatorname{int}(S)$ را پیدا کنید.

۳. اگر $A\subset B$ باشد آیا $\operatorname{int}(A)\subset\operatorname{int}(B)$ است؟

۴. آیا فکرمی کنید درست‌است که $\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)=\operatorname{int}(A\cap B)$ ؟ سعی کنیدچند

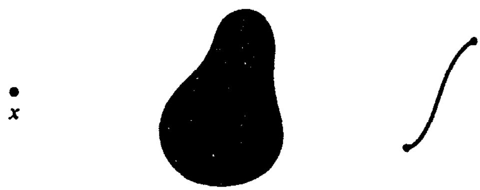
مثال بیاورید.

۳.۲ مجموعه‌های بسته

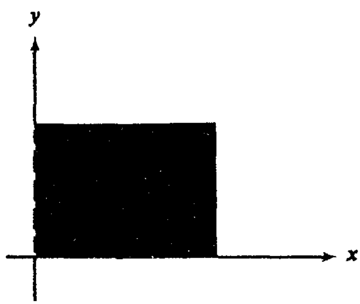
تعریف ۳. یک‌مجموعهٔ B در $\mathbf{R}^n$ را بسته گویند، اگر متمم آن در $\mathbf{R}^n$ (یعنی، مجموعه $\mathbf{R}^n \setminus B$) باز باشد.

مثلاً، یک‌نقطهٔ تنها مجموعه‌ای‌بسته است. مجموعه متشکل‌از دایرهٔیکه با مرزش‌بسته است. قطع‌نظر ازجزئیات، وقتی مجموعه‌ای بسته است که شامل «نقاط مرزیش» باشد (این‌تعبیر شهودی در بند ۶.۲ دقیق‌خواهد شد). شکل ۲ـ۷ را ببینید.

کاملاً ممکن‌است مجموعه‌ای داشته باشیم که نه‌باز باشد ونه بسته. مثلاً، در $\mathbf{R}^1$، بازهٔ نیم‌باز $[0,1[$ نه‌باز ونه‌بسته‌است. بدین‌سان، حتی‌اگر بدانیم A بازنیست، نمی‌توانیم بسته‌بودن یا نبودن‌آن را نتیجه بگیریم. قضیهٔ‌بعدی مشابه قضیهٔ۲ است.



شکل ۲ـ۷ مجموعه‌های بسته



شکل ۲ـ۸

قضیهٔ ۳.

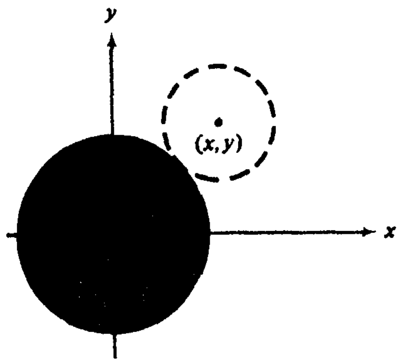
(یک) اجتماع تعدادی متناهی‌از زیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathbf{R}^n$ بسته است.

(دو) اشتراك خانواده‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های بستهٔ $\mathbf{R}^n$ بسته است.

این قضیه مستقیماً از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود، با توجه بــه آنکه وقتی متمم می‌گیریم اجتماع و اشتراك به‌جای هم‌قرار می‌گیرند (تمرین ۱۴ ازفصل مقدماتی‌را ببینید). برهان به‌خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲۳) که همچنین باید نشان‌دهد که (یك) را نمی‌توان با یك‌اجتماع دلخواه جایگزین کرد.

مثال۱. فرض‌کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. آیا S بسته‌است؟

حل: شکل ۲ــ۸ را ببینید. به‌طور شهودی S بسته‌نیست زیرا قسمتی‌از مرزش‌واقع برمحور y در S قرار ندارد. همچنین، متمم آن باز نیست، زیرا هر εــ گرده حول یك نقطهٔ روی محور y، مثلاً $(0,1/2)$، S را قطع خواهدکرد (و از این‌رو در $\mathbf{R}^n\setminus S$ قرار نخواهد گرفت).



شکل ۲ــ۹

مثال۲: فرض‌کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. آیا S بسته است؟

حل: بله. زیرا S درست گردهٔیکه، به‌انضام مرزش، می‌باشد. روشن‌است که متمم آن مجموعه‌ای‌بازمی‌باشد، زیرا به‌ازای $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus S$، گردهٔ‌به‌شعاع $\varepsilon=\sqrt{x^2+y^2}-1$ تماماً در $\mathbf{R}^2\setminus S$ واقع‌خواهد شد (شکل ۲ــ۹).

مثال۳. نشان دهیدکه هرمجموعهٔ متناهی‌در $\mathbf{R}^n$ بسته است.

حل: نقاط تنها بسته‌اند، و بنابراین می‌توانیم قضیهٔ ۳ (یك) را به‌کاربریم.

تمرینهای بند ۲.۳

۱. فرض‌کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x,y\geqslant 1\}$. آیا S بسته است؟

۲. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x=0,\ 0<y<1\}$. آیا S بسته است ؟
۳. مجموعهٔ S درمثال ۳ را اختیار کرده و این بار ثابت نمایید که متمم آن باز است.
۴. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ دلخواه باشد. نشان دهید $\mathbf{R}^n\setminus \operatorname{int}(A)$ بسته است.
۵. فرض کنیم $S=\{x\in \mathbf{R} \mid x$ گویاست$\}$. آیا S بسته است.

۴.۲ نقاط انباشتگی

یك طریق بسیار مفید دیگر برای تعیین بسته‌بودن یا نبودن یك مجموعه وجود دارد که به مفهوم مهم نقطهٔ انباشتگی وابسته است.

تعریف ۴. یك نقطهٔ $x\in \mathbf{R}^n$ را یك نقطهٔ انباشتگی مجموعه‌ای مانند A می‌نامند اگر هرمجموعهٔ باز U حاوی x شامل نقطه‌ای دیگر از A به غیراز x باشد.

به عبارت دیگر، یك نقطهٔ انباشتگی مجموعه‌ای مانند A چنان نقطه‌ای است که نقاط دیگری در A به‌طور دلخواه نزدیك به‌آن وجود دارند. نقاط انباشتگی را نقاط بست نیز می‌نامند .

با استفاده ازقضیهٔ ۱ ، تعریف ما مبنی براینکه x یك نقطهٔ انباشتگی A است هم‌ارز با این گزاره است که به ازای هر $\varepsilon>0$ ، $D(x,\varepsilon)$ شامل نقطه‌ای مانند y از A است به طوری که $y\neq x$.

مثلاً ، در $\mathbf{R}^1$ ، مجموعه‌ای شامل یك نقطهٔ تنها هیچ نقطهٔ انباشتگی ندارد و نقاط انباشتگی بازهٔ باز $]0,1[$ مرکب از همهٔ نقاط $[0,1]$ هستند. توجه کنید که یك نقطهٔ انباشتگی مجموعه‌ای لزومی ندارد درآن مجموعه واقع باشد. تعاریف نقاط انباشتگی و مجموعه‌های بسته ، همان‌طور که درقضیهٔ بعد نشان‌داده شده است، ارتباط تنگاتنگ با یکدیگر دارند.

قضیهٔ ۴. یك مجموعهٔ $A\subset \mathbf{R}^n$ بسته است اگر ، و فقط اگر، همهٔ نقاط انباشتگی A متعلق به A باشند.

توجه شود که یك مجموعه لزومی ندارد که دارای نقطهٔ انباشتگی باشد (مثلاً یك نقطهٔ تنها یا مجموعهٔ اعداد صحیح در $\mathbf{R}^1$ چنین مثالهایی هستند)، که دراین حالت، بازهم قضیهٔ ۴ به‌کار می‌رود و می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعهٔ موردنظر بسته است. یك طریق مفید دیگر برای اثبات بسته‌بودن یك مجموعه در قضیهٔ ۹ داده می‌شود که درآتیه ملاحظه خواهیم کرد.

قضیهٔ ۴ به‌طور شهودی روشن است،زیرا یك مجموعهٔ بسته، قطع نظر ازجزئیات، به معنای آن است که شامل همهٔ نقاط واقع بر «مرزش» می‌باشد، وچنین نقاطی نقاط انباشتگی هستند. این نوع استدلال زمخت دام درچنته دارد ودر واقع بایدبیشتر محتاط باشیم، زیرا بعضی مجموعه‌ها به‌قدر کافی پیچیده هستند که بتوانند شهود ما را به‌خطا بکشانند . مثلاً ،

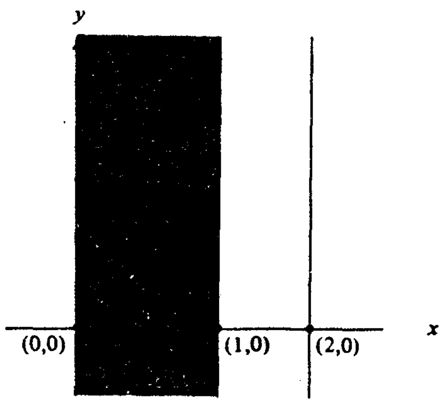
مجموعهٔ $A=\{1/n\in\mathbf{R}|n=1,2,3,\ldots\}\,U\,\{0\}$ را درنظر می گیریم. این یك مجموعهٔ بسته است (تحقیق کنید!) وتنها نقطهٔ انباشتگی آن $\{0\}$ است که در A قرار دارد. لیکن شهودمان دربارهٔ «مرز» مذکور دربالا برای این مجموعه بسیار روشن نیست، ازاین‌رو نیاز به استدلالهای دقیقتر داریم.

مثال۱. فرض کنیم $S=\{x\in\mathbf{R}\,|$ عددی گویاست x و $x\in[0,1]\}$. نقاط انباشتگی S را پیدا کنید.

حل: مجموعهٔ نقاط انباشتگی مرکب از همهٔ نقاط واقع در $[0,1]$ است. درواقع، فرض کنیم $y\in[0,1]$ و $D(y,\varepsilon)=]y-\varepsilon,y+\varepsilon[$ یك همسایگی y باشد. حال می‌دانیم که می‌توان نقاط گویایی در $[0,1]$ به دلخواه نزدیك به y (غیراز y) و به ویژه در $D(y,\varepsilon)$ پیدا کرد. از این‌رو y یك نقطهٔ انباشتگی است. هرنقطهٔ $y\notin[0,1]$ نقطهٔ انباشتگی نیست، زیرا y دارای $\varepsilon-$ گرده‌ای است که شامل آن می باشد، ولی $[0,1]$ و بنابراین S را قطع نمی کند.

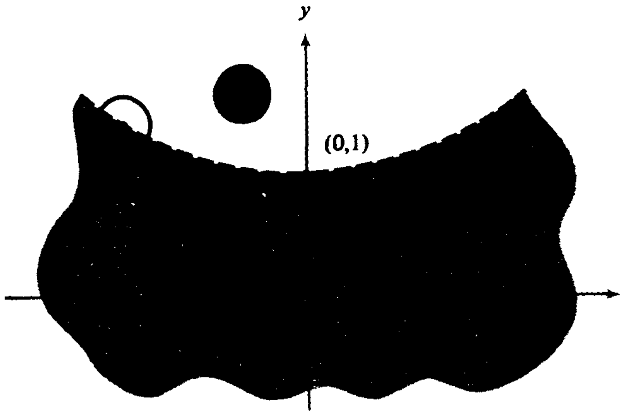
مثال۲. قضیهٔ ۴ را برای مجموعهٔ $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leqslant x\leqslant 1$ یا $x=2\}$ تحقیق کنید.

حل: مجموعهٔ A درشکل ۲ـ۱۰ نمایش داده شده است. آشکارا A بسته است. نقاط انباشتگی A دقیقاً مرکب از خود A است که در A قرار دارد. توجه کنید که در $\mathbf{R}$، نقاط انباشتگی $\{2\}\cup[0,1]$ عبارتند از نقاط $[0,1]$.



شکل ۲ـ۱۰

مثال۳. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y<x^2+1\}$. نقاط انباشتگی S را پیدا کنید.



شکل ۲-۱۱

حل: S درشکل ۲-۱۱ نمایش‌داده شده است. همان‌گونه‌که از شکل پیداست ، نقاط انباشتگی مجموعهٔ $\{(x,y) \mid y \leqslant x^۲+۱\}$ را تشکیل می‌دهند.

تمرینهای بند ۴.۲

۱. نقاط انباشتگی $A=\{(x,y)\in \mathbf{R}^۲ \mid y=۰$ و $۰<x<۱\}$ را پیداکنید.

۲. اگر $A \subset B$ و x یک‌نقطهٔ انباشتگی A باشد آیا x یک‌نقطهٔ انباشتگی B هم‌هست؟

۳. نقاط انباشتگی مجموعه‌های زیررا در $\mathbf{R}^۲$ بیابید.

(الف) $\{(m\,,\,n) \mid$ اعداد صحیح‌اند n ، $m\}$

(ب) $\{(p\,,\,q) \mid$ اعدادگویا هستند q ، $p\}$

(پ) $\{(m/n,۱/n) \mid n\neq ۰$ ، اعداد صحیح‌اند n ، $m\}$

(ت) $\{(۱/n+۱/m,۰) \mid n\neq ۰$ ، $m\neq ۰$ ، اعداد صیحح‌اند n ، $m\}$

۴. فرض‌کنیم $A\subset \mathbf{R}$ و $x=\sup(A)$. آیا x باید یک‌نقطهٔ انباشتگی A باشد؟

۵. قضیهٔ ۴ را برای مجموعهٔ $A=\{(x\,,\,y)\in \mathbf{R}^۲ \mid x^۲+y+۲x=۳\}$ تحقیق کنید.

۵.۲ بست یک مجموعه

درون مجموعه‌ای مانند A عبارت‌است از بزرگترین زیرمجموعهٔ باز A . به طور مشابه ، می‌توانیم کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل یک مجموعهٔ A را تشکیل دهیم. این مجموعه‌را

بست A می‌نامند و آن را با $\mathrm{cl}(A)$ یا گاهی با $\bar{A}$ نمایش می‌دهند.

تعریف۵. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$. مجموعهٔ $\mathrm{cl}(A)$ را به‌صورت اشتراك همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل A تعریف می‌کنیم، (و از این‌رو، بنابر قضیهٔ ۳ (دو)، $\mathrm{cl}(A)$ بسته است).

مثلاً، در $\mathbf{R}^1$، $\mathrm{cl}\,(\,]0,1[\,) = [0,1]$. همچنین، توجه داشته باشید که A بسته است اگر، و فقط اگر، $\mathrm{cl}(A) = A$ (چرا؟). ارتباط بین بست و نقاط انباشتگی در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$. آنگاه $\mathrm{cl}(A)$ مرکب از A به اضافهٔ همهٔ نقاط انباشتگی A است.

به‌عبارت دیگر، برای یافتن بست یك مجموعهٔ A، همهٔ نقاط انباشتگی A را که در آن واقع نیستند به A می‌افزاییم. با توجه به مثالهای قبل قضیهٔ ۵ باید به‌طور شهودی آشکار باشد.

مثال۱. بست $A = [0,1[\, \cup \{2\}$ را در $\mathbf{R}$ بیابید.

حل: نقاط انباشتگی عبارتند از $[0,1]$، از این‌رو بست A عبارت است از $[0,1] \cup \{2\}$. همچنین روشن است که این مجموعه کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A می‌باشد.

مثال۲. به‌ازای هر $A \subset \mathbf{R}^n$، نشان دهید که $\mathbf{R}^n \setminus \mathrm{cl}(A)$ باز است.

حل: $\mathrm{cl}(A)$ یك مجموعهٔ بسته است، و بنا بر تعریف مجموعهٔ بسته، متمم آن باز است.

مثال۳. آیا درست است که $\mathrm{cl}(A \cap B) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$؟

حل: خیر. مثلاً، انتخاب کنیم $A = [0,1]$، $B =]1,2]$. آنگاه، $A \cap B = \varnothing$ و $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) = \{1\}$.

تمرینهای بند ۵.۲

۱. مطلوب است تعیین بست $S = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > y^2 \}$.

۲. بست $\{ 1/n \mid n = 1,2,3, \dots \}$ را در $\mathbf{R}$ پیدا کنید.

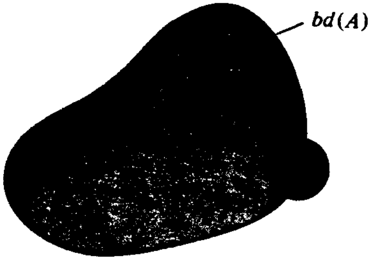
۳. فرض کنیم $A = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x$ گویاست$\}$. $\mathrm{cl}(A)$ را بیابید.

۴. (الف) به‌ازای $A \subset \mathbf{R}^n$، نشان‌دهید $\mathrm{cl}(A) \setminus A$ مرکب از نقاط انباشتگی A است.
(ب) آیا مرکب از همهٔ نقاط انباشتگی A است؟

۵. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}$ و $x = \sup(A)$. نشان‌دهید $x \in \mathrm{cl}(A)$.

۶.۲ مرز یك مجموعه

اگر گردهٔ یکه‌را در $\mathbf{R}^۲$ درنظر بگیریم، می‌دانیم که چه‌چیزی‌را مایل‌هستیم مرزآن بنامیم- روشن است که دایرهٔیکه را انتخاب می‌کنیم. لیکن برای مجموعه‌های پیچیده‌تر، ازقبیل اعداد گویا، به‌طور شهودی چندان‌روشن نیست که چه‌چیزی باید مرز آن باشد. بنا براین نیاز به‌یك تعریف‌دقیق داریم.



شکل ۲-۱۲ مرز یك مجموعه

تعریف ۶. برای‌یك مجموعهٔ A در $\mathbf{R}^n$، مرز آن به وسیلهٔ مجموعهٔ

$$bd(A)=\mathrm{cl}(A)\ \cap\ \mathrm{cl}(\mathbf{R}^n\setminus A)$$

تعریف می‌شود. گاهی نماد $\partial A=\mathrm{bd}(A)$ به‌کار می‌رود.

بدین‌سان، بنا برقضیهٔ۳ (دو)، $\mathrm{bd}(A)$ یك مجموعهٔبسته است. همچنین توجه‌شود که $\mathrm{bd}(A)=bd(\mathbf{R}^n\setminus A)$. ازقضیهٔ ۵، می‌توانیم نتیجه‌بگیریم که مرز یك مجموعه به صورت‌زیر هم‌توصیف می‌شود.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$. آنگاه $x\in\mathrm{bd}(A)$، اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon>0$، $D(x\ ,\ \varepsilon)$ شامل نقاطی‌از A و از $\mathbf{R}^n\setminus A$ باشد (این‌نقاط ممکن است‌خود x باشند). شکل ۲-۱۲ را ببینید.

تعریف اولیه بیان می‌کند‌که $\mathrm{bd}(A)$ عبارت‌است از سرحد بین A و $\mathbf{R}^n\setminus A$. این‌هم همان چیزی است که قضیهٔ ۶ حکم می‌کند و بنا براین قضیهٔ ۶ باید به‌طور شهودی روشن باشد.

مثال۱. فرض‌کنیم $A=\{x\in\mathbf{R}\mid$ و x گویاست $x\in[0,1]\}$. $\mathrm{bd}(A)$ رابیابید.

حل: $\mathrm{bd}\ (A)\ =\ [0\ ,\ 1]$، زیرا به‌ازای هر $\varepsilon>0$ و $x\in[0\ ,\ 1]$، $D(x,\varepsilon)=]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ شامل‌هم‌نقاط گویا وهم‌نقاط گنگ است. خواننده بایدهمچنین با به‌کار بستن تعریف‌اولیه $\mathrm{bd}(A)$ تحقیق‌کند‌که $\mathrm{bd}(A)=[0,1]$. این‌مثال نشان‌می‌دهد

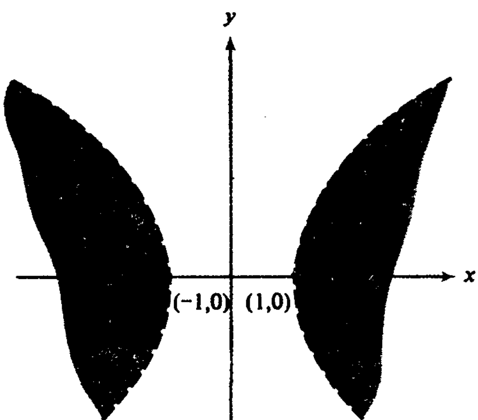
که اگر $A\subset B$ آنگاه لزومی ندارد که $\mathrm{bd}(A)\subset\mathrm{bd}(B)$ (فرض کنیم A مانند بالا و $B=[0,1]$ در $\mathbf{R}$ باشد).

مثال۲. اگر $x\in\mathrm{bd}(A)$ ، آیا x باید یک نقطهٔ انباشتگی باشد؟

حل : خیر. فرض کنیم $A=\{0\}\subset\mathbf{R}$. آنگاه A هیچ نقطهٔ انباشتگی ندارد ، لیکن $\mathrm{bd}(A)=\{0\}$.

مثال۳. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2-y^2>1\}$. $\mathrm{bd}(S)$ را بیابید.

حل: S در شکل ۲-۱۳ نمایش داده شده است. روشن است که $bd(S)$ مرکب از هذلولی $x^2-y^2=1$ می باشد.



شکل ۲-۱۳

تمرینهای بند ۶.۲

۱. مطلوب است تعیین $\mathrm{bd}(A)$ که در آن $A=\{1/n\in\mathbf{R}\mid n=1,2,3,\dots\}$.

۲. اگر $x\in\mathrm{cl}(A)\setminus A$ ، آنگاه نشان دهید $x\in\mathrm{bd}(A)$. آیا عکس آن درست است؟

۳. مطلوب است تعیین $\mathrm{bd}(A)$ که در آن $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\leqslant y\}$.

۴. آیا $\mathrm{bd}(A)=\mathrm{bd}(\mathrm{int}A)$ ؟

۵. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}$ کراندار باشد و $x=\sup(A)$. آیا $x\in\mathrm{bd}(A)$ ؟

۷.۲ دنباله‌ها

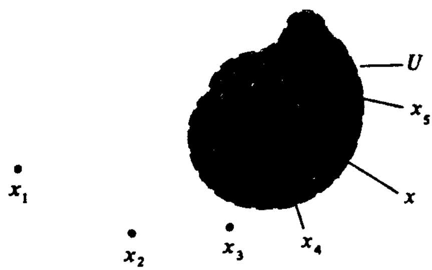
حال می‌پردازیم به‌بررسی‌جوانبی از دنباله‌ها. تعریف همگرایی‌در $\mathbf{R}^n$ بسیار شبیه‌به‌تعریف

همگرایی در اعداد حقیقی است.

تعریف ۷. فرض کنیم x_k دنباله‌ای از نقاط $\mathbf{R}^n$ باشد. گوییم که x_k به سمت حدی مانند x در $\mathbf{R}^n$ همگراست، اگر به‌ازای هرمجموعهٔ باز U حاوی x (که آن را یك همسایگی x نیز می‌نامند) ، Nی (وابسته به U) وجود داشته باشد به طوری که ، هرگاه $k \geqslant N$ آنگاه $x_k \in U$. شکل ۲-۱۴ را ببینید .

همان‌طور که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد این‌تعریف همان‌تعریف معمولی ε است.

قضیهٔ ۷. یك دنبالهٔ x_k در $\mathbf{R}^n$ به‌سمت $x \in \mathbf{R}^n$ همگراست اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، Nی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $k \geqslant N$ مستلزم $\| x - x_k \| < \varepsilon$ باشد .



شکل ۲-۱۴ همگرایی یك‌دنباله

این قضیه کاملاً مشابه‌است باآنچه دربارهٔ دنباله‌های‌همگرای اعدادحقیقی می‌دانیم. بند ۱.۱ را ببینید. نتیجه‌دیگری وجود داردکه درارتباط تنگاتنگ باقبلی است. می‌توانیم نشان دهیم که:

قضیهٔ ۸. $x_k \to x$ اگر، وفقط اگر، مؤلفه‌های x_k ، به‌عنوان دنباله‌هایی‌از اعداد حقیقی ، به سمت مؤلفه‌های x همگرا باشند .

همان‌طورکه اثبات آن درصفحهٔ ۵۳ نشان می‌دهد ، این‌قضیه به‌آسانی‌از قضیهٔ ۷ و فرمول‌صریح $\|x_k - x\|$ نتیجه می‌شود.

می‌توانیم دنباله‌هارا برای‌تعیین بسته‌بودن‌یانبودن یك‌مجموعه به‌کار گیریم. روش کار به‌قرار زیراست:

قضیهٔ ۹ .

(یك) یك مجموعهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ بسته‌است اگر ، وفقط اگر، به‌ازای هردنبالهٔ $x_k \in A$ که همگراست، حدآن در A واقع باشد.

(دو) برای یك مجموعهٔ $B \subset \mathbf{R}^n$ ، $x \in \mathrm{cl}(B)$ اگر، و فقط اگر، دنباله‌ای مانند $x_k \in B$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_k \to x$.

درك شهودی این‌قضیه همانند قضایای ۴ و ۵ است. بایستی‌توجه شودکه دنباله‌های مذکور در (یك) و (دو) می‌توانند بدیهی باشند، یعنی به‌ازای هر k ، $x_k = x$.

نظیر حالت $\mathbf{R}^1$ ، می‌توانیم یك‌دنبالهٔ کوشی را در $\mathbf{R}^n$ تعریف کنیم. (مفاهیم دنبالهٔ یکنوا و کوچکترین کران بالا، اگر دربارهٔ مؤلفه‌ها تعبیر شوند باز دارای معنی هستند، اما این مفاهیم در $\mathbf{R}^n$ ، برای $n \neq 1$ ، زیاد مفید نیستند.)

تعریف ۸. یك دنبالهٔ $x_k \in \mathbf{R}^n$ را یك دنبالهٔ کوشی می‌نامند، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، N ی وجود داشته باشد به طوری که $l, k \geqslant N$ مستلزم $\| x_k - x_l \| < \varepsilon$ باشد.

قضیهٔ ۱۰. یك دنبالهٔ x_k در $\mathbf{R}^n$ به سمت نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ همگراست اگر، وفقط اگر، یك دنبالهٔ کوشی باشد.

این‌قضیه تعمیم مستقیم قضیهٔ متناظر برای $\mathbf{R}$ است و از آن نتیجه می‌شود (قضیهٔ ۳ فصل ۱ را ببینید).

همان‌طور که در $\mathbf{R}$ دیدیم، این‌قضیه آزمونی‌مهم برای همگرایی به‌دست‌می‌دهد، زیرا شرط کوشی صریحاً متضمن نقطهٔ حدی نیست. بدین‌سان اغلب می‌توانیم بگوییم که آیا یك دنباله همگراست یا خیر ولو اینکه حدآن‌را ندانیم.

تبصره: در یك‌فضای متریك کلی (یك‌مجموعهٔ S و یك‌تابع فاصله با مقدارحقیقی d که درقواعد قضیهٔ ۵، III ، فصل ۱ صدق می‌کنند) یك‌دنبالهٔ کوشی عبارت‌است‌از یك‌دنبالهٔ $x_k \in S$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، N ی چنان وجود داشته باشدکه $l, k \geqslant N$ مستلزم $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ باشد. فضارا کامل گویند اگر، وفقط اگر، هردنبالهٔ کوشی به سمت نقطه‌ای درفضا همگرا باشد. مثالی از یك فضای ناکامل عبارت است از اعداد گویا همراه با $d(x, y) = | x - y |$. قضیهٔ ۱۰ حکم می‌کند که $\mathbf{R}^n$ یك فضای متریك کامل است.

مثال ۱. نشان دهید که دنبالهٔ $(1/n, 1/n^2)$ ، وقتی که $n \to \infty$ ، به سمت $(0, 0)$ همگراست.

حل: هریك‌از دودنبالهٔ‌مولفه‌ای $1/n$ و $1/n^2$ به‌سمت 0 همگرا ست ، پس، بنابر قضیهٔ ۸، $x_n = (1/n, 1/n^2)$ به‌سمت $(0, 0)$ همگراست.

مثال ۲. فرض‌کنیم $x_n \in \mathbf{R}^m$ دنباله‌ای همگرا باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر n، $\|x_n\| < 1$. آنگاه نشان‌دهیدکه حد x نیز در نامساوی $\| x \| \leqslant 1$ صدق می‌کند. اگر $<$ به‌جای $\leqslant$ جایگزین شود، آیا این گزاره درست است؟

حل: گوی یکه $B=\{y\in\mathbf{R}^m \mid \|y\|\leqslant ۱\}$ بسته است. از این‌رو، بنا بر قضیهٔ ۹ (یك)، $x_n\in B$ مستلزم $x\in B$ است. اگر $<$ به‌جای $\leqslant$ جایگزین شود، این گزاره درست نیست. مثلاً، در $\mathbf{R}$ دنبالهٔ $x_n=۱-۱/n$ را در نظر بگیرید.

مثال ۳. بست $A=\{۱/n\in\mathbf{R} \mid n=۱,۲,\dots\}$ را پیدا کنید.

حل: می‌توانیم، مثلاً، قضیهٔ ۹ (دو) را مورد استفاده قرار دهیم. دنبالهٔ $۱/n \to ۰$، بنابراین $۰\in\mathrm{cl}(A)$. اختیار کردن دنباله‌هایی دیگر در A نقطهٔ جدیدی به بار نخواهد آورد، از این‌رو

$$\mathrm{cl}(A)=A\cup\{۰\}$$

تمرینهای بند ۷.۲

۱. حد دنبالهٔ $[(\sin n)^n/n\ ,\ ۱/n^۲]$ را در $\mathbf{R}^۲$ پیدا کنید.

۲. فرض کنیم $x_n \to x$ در $\mathbf{R}^m$. نشان دهید که $A=\{x_n \mid n=۱,۲,\cdots\}\cup\{x\}$ بسته است.

۳. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^m$، $x_n\in A$، و $x_n\to x$. نشان دهید که $x\in\mathrm{cl}(A)$.

۴. قضیهٔ ۹ (دو) را برای مجموعهٔ $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲ \mid x<y\}$ تحقیق کنید.

۵. فرض کنیم $S=\{x\in\mathbf{R} \mid x^۲<۲$ و x گویاست$\}$. مطلوب است محاسبهٔ $\mathrm{cl}(S)$.

۸.۲ سریها در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^n$

درست نظیر $\mathbf{R}$، می‌توانیم سریهایی در $\mathbf{R}^n$ در نظر بگیریم.

تعریف ۹. گویند سری $\sum_{k=۰}^{\infty} x_k$، که در آن $x_k\in\mathbf{R}^n$، به‌سمت $x\in\mathbf{R}^n$ همگراست اگر دنبالهٔ **حاصل جمعهای جزئی** $s_k=\sum_{i=۰}^{k} x_i$ به‌سمت x همگرا باشد، و اگر چنین باشد می‌نویسیم $\sum_{k=۰}^{\infty} x_k=x$.

نظیر قضیهٔ ۸، $\sum_{k=۰}^{\infty} x_k=x$ هم‌ارز است با همگرایی سریهای مولفه‌ای به‌سمت مولفه‌های x.

کاربرد قضیهٔ ۱۰ در مورد s_k، قضیهٔ ۱۱ را به بار می‌آورد.

قضیهٔ ۱۱. یك سری $\sum x_k$ در $\mathbf{R}^n$ همگراست اگر، وفقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon>۰$، Nی وجود داشته باشد به‌طوری که $k\geqslant N$ مستلزم $\|x_k+x_{k+۱}+\dots+x_{k+p}\|<\varepsilon$، به‌ازای همهٔ اعداد صحیح $p=۰,۱,۲,\dots$، باشد.

به‌ویژه، با انتخاب $p=\circ$ ملاحظه می‌کنیم که اگر $\sum x_k$ همگرا باشد، آنگاه، وقتی که $k\to\infty$ ، $x_k\to\circ$ (تمرین ۲).

سری $\sum x_k$ را مطلقا همگرا گویند اگر، وفقط اگـر ، سری حقیقی $\sum \|x_k\|$ همگرا باشد.

قضیهٔ ۱۲. اگر $\sum x_k$ مطلقا همگرا باشد، آنگاه $\sum x_k$ همگراست.

این قضیه مفید است، زیرا ما را مجاز می‌سازد تا به‌منظور تعیین همگرایی $\sum x_k$ ، آزمونهای معمول برای سریهای حقیقی (ازقبیل آزمون نسبت) را درمورد سری $\sum \|x_k\|$ به‌کار ببریم. البته، امکان این هست که یك آزمون خاص کارگر نشود ولو اینکه $\sum x_k$ همگرا باشد، که در آن حالت روشهای دیگری موردنیاز است.

اینك مهمترین آزمونهای همگرایی یك سری حقیقی را مرور خواهیم کرد. برخی از نکات اصلی درقضیهٔ زیر معرفی می‌شوند. برخی آزمونهای دیگر همگرایی درتمرینها و بعداً درفصل ۵ ارائه خواهند شد.

قضیهٔ ۱۳.

(یك) اگـر $|r|<\text{۱}$ ، آنگـاه $\sum_{n=\circ}^{\infty} r^n$ به سمت $\text{۱}/(\text{۱}-r)$ همگراست و اگر $|r|\geqslant\text{۱}$ ، آنگاه واگر است (همگرا نیست).

(دو) آزمون مقایسه: اگر $\sum_{k=\text{۱}}^{\infty} a_k$ همگرا باشد، $a_k\geqslant\circ$ و $\circ\leqslant b_k\leqslant a_k$ ، آنگاه $\sum_{k=\text{۱}}^{\infty} b_k$ همگراست؛ اگر $\sum_{k=\text{۱}}^{\infty} c_k$ واگرا باشد، $c_k\geqslant\circ$ و $\circ\leqslant c_k\leqslant d_k$، آنگاه $\sum_{k=\text{۱}}^{\infty} d_k$ واگراست.

(سه) آزمون سری p: اگـر $p>\text{۱}$ ، $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} n^{-p}$ همگراست و اگر $p\leqslant\text{۱}$ ، سری نامبرده به سمت ∞ واگر است (یعنی، **حاصل‌جمعهای** جزئی بی‌کران افزایش می‌یابند).

(چهار) آزمون نسبت: فرض می‌کنیم‌که $\lim\limits_{n\to\infty}|(a_{n+\text{۱}}/a_n)|$ موجودبوده واکیداً از ۱ کوچکتر باشد. آنگاه $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست. اگر این حد اکیداً از ۱ بزرگترباشد، سری نامبرده واگراست. اگر این‌حد مساوی با ۱ باشد، آنگاه این آزمون بی‌نتیجه است.

(پنج) آزمون ریشه: فرض می‌کنیم‌که $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|)^{\text{۱}/n}$ موجود بوده واکیداً از ۱ کوچکتر باشد. آنگاه $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست. اگر ایـن حد اکیداً از ۱ بزرگتر باشد، سری نامبرده واگراست. اگر این حد مساوی با ۱ باشد ، آنگاه این آزمون بی‌نتیجه است.

(شش) آزمون انتگرال: اگر f دربازهٔ $[\text{۱},+\infty[$ پیوسته ، نامنفی و به‌طور یکنوا کاهشی باشد، آنگاه $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} f(n)$ و $\int_{\text{۱}}^{\infty} f(x)dx$ هردو باهم همگرا یاواگرا هستند.

مثال۱. فرض کنیم $x_n=(1/n^2\ ,\ 1/n)$. آیا $\sum x_n$ همگراست؟

حل: خیر، زیرا، بنابر (سه)، سری همساز $\sum 1/n$ واگراست.

مثال۲. فرض کنیم $\|x_n\|\leqslant 1/2^n$؛ ثابت کنید $\sum x_n$ همگراست و $\|\sum_0^\infty x_n\|\leqslant 2$.

حل: شرایط قضیهٔ ۱۱ را تحقیق می‌کنیم. داریم

$$\|x_k+\cdots+x_{k+p}\|\leqslant\|x_k\|+\cdots+\|x_{k+p}\|\leqslant\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{k+p}}$$

$$\leqslant\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

(بنابر فرمول $\sum_0^\infty ar^n=a/(1-r)$ برای حاصل جمع یك سری هندسی). بدین‌سان، به‌ازای $0<\varepsilon$ مفروض، N را طوری انتخاب می کنیم که $1/2^{N-1}<\varepsilon$. ازاین‌رو $\sum x_k$ همگراست. به‌علاوه، حاصل‌جمعهای جزئی درنامساوی زیرصدق می کنند

$$\|s_n\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\|x_k\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\leqslant 2$$

بدین‌سان، بنابرمثال۲ بند۷.۲، حد s نیز در $\|s\|\leqslant 2$ صدق‌می‌کند. همچنین‌می‌توانستیم، به‌وسیلهٔ مقایسهٔ مستقیم با سری‌هندسی $\sum 1/2^n$، نشان دهیم که $\sum\|x_n\|$ همگراست.

مثال۳. همگرایی $\sum_{n=1}^\infty n/3^n$ را مورد آزمون قرار دهید.

حل: آزمون نسبت‌قابل اجراست؛

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3}\to\frac{1}{3}$$

بنابراین سری همگراست.

مثال۴. تعیین کنید آیا سری $\sum_{n=1}^\infty n/(n^2+1)$ همگراست یا خیر.

حل: ملاحظه می کنیم که به‌ازای $x\geqslant 1$، $f(x)=x/(x^2+1)$ مثبت‌و پیوسته‌است. چون $f'(x)=(-x^2+1)/(x^2+1)^2\leqslant 0$، f به‌طور یکنوا کاهشی است.

$$\int_1^\infty\frac{x\,dx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \log ((b^2+1)/2)$$

اما،وقتی $b \to \infty$، $\infty \to (1/2 \log((b^2+1)/2)$، ودرنتیجه، بنا بر آزمون انتگرال،سری نامبرده واگراست. به‌طریق زیر نیزمی‌توان عمل کرد: $n/(n^2+1) \geqslant n/(n^2+n^2) = 1/2n$ ، بنابراین، بـا مقایسه با سری واگرای $\sum 1/n$ $(1/2)$ واگرایی سری مفروض نتیجه می‌شود.

تمرینهای بند ۸.۲

۱. تعیین کنید آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} ((\sin n)/n^2 , 1/n^2)$ همگراست یا خیر.

۲. نشان دهید که سری مذکور درمثال ۲ مطلقا همگراست.

۳. فرض کنیم $\sum x_k$ در $\mathbf{R}^n$ همگرا باشد. نشان دهید که $x_k \to 0 = (0,\dots, 0) \in \mathbf{R}^n$.

۴. همگرایی $\sum_{n=3}^{\infty} (2^n+n)/(3^n-n)$ را موردآزمون قرار دهید.

۵. همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} n!/3^n$ را موردآزمون قرار دهید.

برهان قضایای فصل ۲

قضیه ۱ . در $\mathbf{R}^n$ ، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ و $x \in \mathbf{R}^n$ ، مجموعهٔ $D(x,\varepsilon)$ باز است.

برهان: $y \in D(x, \varepsilon)$ را انتخاب می کنیم. باید ε'ی طوری به دست آوریم کـه $D(y , \varepsilon') \subset D(x , \varepsilon)$. شکل ۲ـ۵ پیشنهاد مـی‌کند کـه $\varepsilon' = \varepsilon - d(x , y)$ را آزمایش کنیم که اکیداً مثبت‌است، زیرا $d(x , y) < \varepsilon$. با این‌انتخاب (که به yوابسته است) نشان خواهیم‌داد $D(y , \varepsilon') \subset D(x , \varepsilon)$. فرض کنیم $z \in D(y , \varepsilon')$ ، بنابراین $d(z , y) < \varepsilon'$. باید ثابت کنیم کـه $d(z , x) < \varepsilon$. لیکن، بنابر نـامساوی مثلثی ، $d(z , x) \leqslant d(z , y) + d(y , x) < \varepsilon' + d(y , x)$ ، و بنـابـر انتخـاب ε' ، $\varepsilon' + d(y , x) = \varepsilon$. ازآنجا نتیجه‌حاصل می‌شود. ■

قضیهٔ ۲ .

(یك) اشتراك تعدادی متناهی‌از زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}^n$ یك‌زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ می باشد.

(دو) اجتماع یك‌گردایهٔ‌دلخواه از زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}^n$ یك‌زیر مجموعهٔ‌باز $\mathbf{R}^n$ می باشد.

برهان: (یك) کافی‌است ثابت کنیم که اشتراك دومجموعهٔ باز، باز است، زیرادراین صورت می‌تـوانیم روش استقراء را به کار ببریم و بـا نوشتن $A_1 \cap \dots \cap A_n = (A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n$ ، نتیجهٔ کلی‌را به‌دست آوریم.

فرض کنیم A ، B باز باشند و $C = A \cap B$ ؛ اگر $C = \varnothing$ ، آنگاه C ، بنابر یك

حالت تبهگن تعریف، باز است. بنابراین، فرض کنیم $x \in C$. چون A ، B بازهستند، اعداد $\varepsilon , \varepsilon' > 0$ وجود دارند به طوری که

$$D(x , \varepsilon) \subset A \quad , \quad D(x , \varepsilon') \subset B$$

فرض کنیم ε'' کوچکترین مقدار ε و ε' باشد. در این‌صورت $D(x,\varepsilon'') \subset D(x,\varepsilon)$ و در نتیجه $D(x,\varepsilon'') \subset A$ ، و به‌طور مشابه ، $D(x,\varepsilon'') \subset B$ ، و بنابراین $D(x,\varepsilon'') \subset C$ ، همان چیزی که می‌خواستیم.

(دو) برهان برای اجتماع آسانتر است. فرض کنیم U، V، ... مجموعه‌های بازی باشند که اجتماع آنها A است. برای $x \in A$ ، به‌ازای Uی در گردایهٔ مفروض ، $x \in U$. از این‌رو، چون U باز است ، به‌ازای یك $\varepsilon > 0$ ، $D(x,\varepsilon) \subset U \subset A$ ، که ثابت می‌کند A باز است. ■

قضیهٔ ۴. یك مجموعهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ بسته است اگر، و فقط اگر، همهٔ نقاط انباشتگی A متعلق به A باشند.

برهان: ابتدا، فرض کنیم A بسته باشد. فرض کنیم $x \in \mathbf{R}^n$ یك نقطهٔ انباشتگی باشد و $x \notin A$. قرارمی‌دهیم $U = \mathbf{R}^n \setminus A$، متمم A. بنابر تعریف، U باز است وشامل x می‌باشد واز این‌رو یك همسایگی x است؛ اما $U \cap A = \varnothing$ ، واین نقطهٔ انباشتگی بودن x را نقض می‌کند. بنابراین $x \in A$. برعکس، فرض کنیم A شامل همهٔ نقاط انباشتگی‌اش باشد. قرار می‌دهیم $U = \mathbf{R}^n \setminus A$ ، متمم A. باید نشان‌دهیم که U باز است. فرض کنیم $x \in U$. چون x یك نقطهٔ انباشتگی A نیست، یك $\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که $D(x , \varepsilon) \cap A = \varnothing$. بنابراین $D(x,\varepsilon) \subset U$، و بنابر تعریف ، U باز است. ■

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$. آنگاه $\mathrm{cl}\,(A)$ مرکب از A به اضافهٔ همهٔ نقاط انباشتگی A است .

برهان: فرض کنیم B اجتماع A ونقاط انباشتگی A باشد. بنابرقضیهٔ۴، هرمجموعهٔ بستهٔ شامل A شامل B است. بنابراین، کافی‌است ثابت کنیم که B بسته است، زیرا در این صورت B کوچکترین مجموعهٔ بستهٔشامل A خواهدبود. فرض کنیم x یك نقطهٔ انباشتگی B باشد. می‌خواهیم نشان‌دهیم که $x \in B$. فرض کنیم $x \notin A$ (وگرنه بدیهی است که $x \in B$) . اینك نشان‌داده خواهد شد که x یك نقطهٔ انباشتگی A است ، واین برهان‌را کامل خواهد کرد (بنابرقضیهٔ ۴، B بسته خواهد بود). فرض کنیم U مجموعه‌ای باز شامل x باشد. بنابر تعریف، $y \in U \cap B$ موجود است. حال، یا $y \in A$ ، یا y یك نقطهٔ انباشتگی A است. در حالت‌دوم، $z \in U \cap A$ موجود است. درهرحالت، U شامل عضوی‌از A است (غیراز x، چون $x \notin A$) ، بنابراین x یك نقطهٔ انباشتگی A است ، همان‌چیزی که می‌خواستیم. ■

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$. آنگاه $x \in \mathrm{bd}(A)$ اگر ، و فقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $D(x,\varepsilon)$ شامل نقاطی‌از A واز $\mathbf{R}^n \setminus A$ باشد (این نقاط ممکن‌است مرکب‌ازخودx باشند).

برهان: فرض کنیم $x \in \mathrm{bd}(A) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(\mathbf{R}^n \setminus A)$. اینک ، یا $x \in A$ یا $x \in \mathbf{R}^n \setminus A$. اگر $x \in A$ ، آنگاه، بنا برقضیهٔ ۵ ، x یك نقطهٔ انباشتگی $\mathbf{R}^n \setminus A$ است، ونتیجه حاصل می‌شود. حالت $x \in \mathbf{R}^n \setminus A$ و عکس آن مشابه هستند. ■

قضیهٔ ۷. یك دنبالهٔ x_k در $\mathbf{R}^n$ به سمت $x \in \mathbf{R}^n$ همگراست اگر، و فقط اگر ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، Nی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $n \geqslant N$ مستلزم $\|x - x_n\| < \varepsilon$ باشد.

برهان: فرض کنیم $x_k \to x$ ، و $\varepsilon > 0$. چون $D(x,\varepsilon)$ باز است ، Nی وجود دارد به‌طوری‌که $k \geqslant N$ مستلزم $x_k \in D(x,\varepsilon)$ است، یا $d(x,x_k) = \|x - x_k\| < \varepsilon$ که مطلوب‌نظر است. برعکس فرض کنیم که این شرط برقرار باشد و U یك همسایگی x باشد. $\varepsilon > 0$ را طوری می‌یابیم که $D(x,\varepsilon) \subset U$. آنگاه Nی وجود دارد به طوری که $k \geqslant N$ مستلزم $\|x_k - x\| < \varepsilon$ است، یعنی، $x_k \in D(x,\varepsilon) \subset U$. ■

قضیهٔ ۸. $x_k \to x$ اگر، و فقط اگر، مؤلفه‌های x_k ، به عنوان دنباله‌هایی از اعداد حقیقی، به سمت مؤلفه‌های x همگرا باشند.

برهان: فرض کنیم $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ (برای جلوگیری از اشتباه با k ، در نمایش مؤلفه‌ها از اندیسهای فوقانی استفاده می‌کنیم). فرض کنیم $x_k \to x = (x^1, \ldots, x^n)$. در این‌صورت ، به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض ، N را طوری انتخاب می‌کنیم که $k \geqslant N$ مستلزم $\|x_k - x\| < \varepsilon$ باشد. لیکن

$$|x_k^1 - x^1| \leqslant \|x_k - x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2\right)^{1/2}$$

(چرا؟) ، به طوری که $k \geqslant N$ مستلزم $|x_k^1 - x^1| < \varepsilon$ نیز است. بدین‌سان $x_k^1 \to x^1$ و به‌طور مشابه $x_k^i \to x^i$.

برعکس ، فرض کنیم به‌ازای هر i ، $x_k^i \to x^i$. به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض ، N را چنان انتخاب می‌کنیم که به ازای $k \geqslant N$ و همهٔ $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $|x_k^i - x^i| < \varepsilon/\sqrt{n}$ (که در آن N ماکسیمم Nهای مطلوب برای هر i است). در این‌صورت ، به ازای $k \geqslant N$ ،

$$\|x_k - x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}\right)^{1/2} = \varepsilon$$

بنابراین $x_k \to x$. □

قضیهٔ ۹.

(یك) یك مجموعهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ بسته است اگر ، و فقط اگر، به‌ازای هردنبالهٔ $x_k \in A$ که همگراست، حدآن در A واقع باشد.

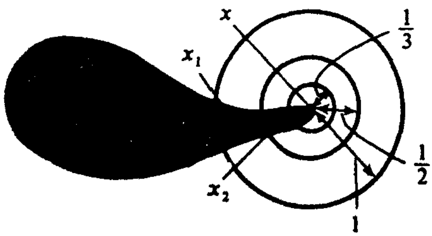
(دو) برای یك مجموعهٔ $B \subset \mathbf{R}^n$، $x \in \mathrm{cl}(B)$ اگر، و فقط اگر، دنباله‌ای مانند $x_k \in B$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_k \to x$.

برهان:

(یك) ابتدا، فرض می‌کنیم A بسته است. فرض کنیم $x_k \to x$ و $x \notin A$. آنگاه x یك نقطهٔ انباشتگی A است، زیرا هرهمسایگی x، به‌ازای kهای بزرگ، شامل $x_k \in A$ است. از این‌رو، بنابرقضیهٔ ۴، $x \in A$.

برعکس، قضیهٔ ۴ را برای نشان‌دادن بسته‌بودن A به‌کار می‌بریم. فرض کنیم x یك نقطهٔ انباشتگی A باشد، و $x_k \in D(x, 1/k) \cap A$ را انتخاب می‌کنیم. آنگاه $x_k \to x$، چون به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توانیم $N \geqslant 1/\varepsilon$ را برگزینیم؛ دراین‌صورت $k \geqslant N$ مستلزم $x_k \in D(x, \varepsilon)$ است ؛ شکل ۲–۱۵ را ببینید. بنابراین، بنابرفرض، $x \in A$، و درنتیجه A بسته است.

(دو) استدلال دراینجا مشابه برهان بالاست وآن‌را به‌عنوان یك تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۷). ■



شکل ۲–۱۵ نقاط انباشتگی یك مجموعه

قضیهٔ ۱۰. یك دنبالهٔ x_k در $\mathbf{R}^n$ به سمت نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ همگراست، اگر، وفقط اگر، یك دنبالهٔ کوشی باشد.

برهان: اگر x_k به سمت x همگرا باشد، آنگاه به‌ازای $\varepsilon > 0$، N را چنان برمی‌گزینیم که $k \geqslant N$ مستلزم $\| x_k - x \| < \varepsilon/2$ باشد. در این صورت، به‌ازای $k, l \geqslant N$، و بنابر نامساوی مثلثی،

$$\| x_k - x_l \| = \| (x_k - x) + (x - x_l) \| \leqslant \| x_k - x \| + \| x - x_l \|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

برعکس، فرض کنیم x_k یك دنبالهٔ کوشی باشد. آنگاه، چون $\| x_k^i - x_l^i \| \leqslant \| x_k - x_l \|$، مؤلفه‌ها نیزدرخط حقیقی دنباله‌های کوشی هستند. بنابرتمامیت $\mathbf{R}$ وقضیهٔ ۳ فصل ۱، x_k^i به‌سمت، مثلاً، x^i همگراست. آنگاه، بنابرقضیهٔ ۸، x_k به‌سمت $x = (x^1, \ldots, x^n)$ همگراست. ■

قضیهٔ ۱۱. یک سری $\sum x_k$ در $\mathbf{R}^n$ همگراست اگر، و فقط اگر، به ازای هر $\varepsilon > 0$، Nی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $k \geqslant N$ مستلزم $\| x_k + x_{k+1} + \cdots + x_{k+p} \| < \varepsilon$، به ازای همهٔ اعداد صحیح $p = 0, 1, 2, \ldots$، باشد.

برهان: فرض کنیم $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$. آنگاه، بنابر قضیهٔ ۱۰، s_k همگراست اگر، وفقط اگر، s_k یک دنبالهٔ کوشی باشد. این درست است اگر، وفقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، بتوان Nی یافت، به‌طوری که $l \geqslant N$ مستلزم $\| s_l - s_{l+q} \| < \varepsilon$، به ازای هر $q = 1, 2, \ldots$، باشد. لیکن، $\| s_{l+q} - s_l \| = \| x_{l+1} + \cdots + x_{l+q} \|$، بنابراین با انتخاب $k = l + 1$ و $p = q - 1$، نتیجه به دست می‌آید. ■

قضیهٔ ۱۲. اگر $\sum x_k$ مطلقا همگرا باشد، آنگاه $\sum x_k$ همگراست.

برهان: این نتیجه بی‌درنگ از قضیهٔ ۱۱ با استفاده از نامساوی مثلثی حاصل می‌گردد.
$\| x_k + \cdots + x_{k+p} \| \leqslant \| x_k \| + \cdots + \| x_{k+p} \|$. ■

قضیهٔ ۱۳.

(یک) اگر $|r| < 1$، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ به سمت $1/(1-r)$ همگراست و اگر $|r| \geqslant 1$، آنگاه واگراست (همگرا نیست).

(دو) آزمون مقایسه: اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد، $a_k \geqslant 0$ و $0 \leqslant b_k \leqslant a_k$، آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگراست؛ اگر $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ واگرا باشد، $c_k \geqslant 0$ و $0 \leqslant c_k \leqslant d_k$، آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ واگراست.

(سه) آزمون سری p: اگر $p > 1$، $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ همگراست و اگر $p \leqslant 1$، سری نامبرده به سمت ∞ واگراست (یعنی، حاصل جمعهای جزئی بی‌کران افزایش می‌یابند).

(چهار) آزمون نسبت: فرض می‌کنیم‌که $\lim_{n \to \infty} | a_{n+1}/a_n |$ موجود بوده و اکیداً از ۱ کوچکتر باشد. آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست. اگر این حد اکیداً از ۱ بزرگتر باشد، سری نامبرده واگراست. اگر این حد مساوی با ۱ باشد، آنگاه این آزمون بی‌نتیجه است.

(پنج) آزمون ریشه: فرض می‌کنیم که $\lim_{n \to \infty} (|a_n|)^{1/n}$ موجود بوده واکیداً از ۱ کوچکتر باشد. آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقا همگراست. اگر این حد اکیداً از ۱ بزرگتر باشد، سری نامبرده واگراست. اگر این حد مساوی با ۱ باشد، آنگاه این آزمون بی‌نتیجه است.

(شش) آزمون انتگرال: اگر f در بازهٔ $[1, +\infty[$ پیوسته، نامنفی و به طور یکنوا کاهشی باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ و $\int_1^{\infty} f(x)dx$ هردو باهم همگرا یا واگرا هستند.

برهان:

(یک) بنابر جبر مقدماتی داریم، اگر $r \neq 1$،

$$1+r+r^2+\dots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

روشن است که اگر $|r|<1$ ، آنگاه وقتی $n\to\infty$ ، $r^{n+1}\to 0$ ، و اگر $|r|>1$ ، آنگاه $|r|^{n+1}\to\infty$. بدین‌سان اگر $|r|<1$ ، همگرایی و اگر $|r|>1$ ، واگرایی خواهیم داشت. روشن است که اگر $|r|=1$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ واگراست، زیرا $r^n \not\to 0$.

(دو) حاصل جمعهای جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یك دنبالهٔ کوشی تشکیل می‌دهند و بدین‌سان حاصل جمعهای جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ نیز یك دنبالهٔ کوشی می‌سازند، زیرا به ازای هر k و p داریم $b_k+b_{k+1}+\dots+b_{k+p}\leqslant a_k+a_{k+1}+\dots+a_{k+p}$. از این‌رو $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگراست. یك سری مثبت فقط می‌تواند به سمت $+\infty$ واگرا باشد، بنابراین به ازای $M>0$ مفروض، می‌توان k_0 را طوری پیدا کرد که $k\geqslant k_0$ مستلزم $c_1+c_2+\dots+c_k\geqslant M$ باشد. در نتیجه، به‌ازای $k\geqslant k_0$ ، $d_1+d_2+\dots+d_k\geqslant M$ ، از این‌رو $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ نیز به سمت ∞ واگراست.

(سه) ابتدا فرض می‌کنیم که $p\leqslant 1$ ؛ در این حالت، به‌ازای هر $n=1,2,\dots$ ، $1/n^p\geqslant 1/n$. بنابراین، بنابر (دو)، اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ نیز واگرا خواهد بود. برهان این‌را، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده‌اید، یادآوری می‌کنیم[1]. اگر $s_k=1/1+1/2+\dots+1/k$ ، آنگاه s_k ، یك دنباله اکیداً افزایشی از اعداد حقیقی مثبت است . s_{2^k} را چنین می‌نویسیم:

$$s_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\dots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}\right)\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{k}{2}$$

بنابراین، اگر k به قدر کافی بزرگ شود، آنگاه s_k می‌تواند به‌دلخواه بزرگ گردد؛ بدین‌سان $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ واگراست.

اینك فرض می‌کنیم که $p>1$. اگر قرار دهیم

---

۱. می‌توانیم (سه) را با استفاده از آزمون انتگرال برای سریهای مثبت نیز ثابت کنیم (قسمت (شش) همین قضیه‌را ببینید). ولی برهانی که در اینجا ارائه شده است آزمون تراکم کوشی را نیز به‌اثبات می‌رساند: فرض کنیم $\sum a_n$ یك سری با جملات مثبت و $a_{n+1}\leqslant a_n$ باشد. در این صورت $\sum a_n$ همگراست اگر، و فقط اگر، $\sum_{j=1}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ همگرا باشد (به مقالهٔ «جانشینی برای آزمون انتگرال سریهای بی‌نهایت»، نوشتهٔ گ. ج. پورتر (G. J. Porter) در *American Mathematical Monthly* 79(1972) ، صفحه ۶۳۴ مراجعه کنید.

$$s_k=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots+\frac{1}{k^p}$$

آنگاه s_k یک دنبالهٔ افزایشی از اعداد حقیقی مثبت است. از طرف دیگر،

$$s_{2^k-1}=\frac{1}{1^p}+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\dots+\frac{1}{(2^k-1)^p}\right)\leqslant\frac{1}{1^p}+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\dots+\frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^p}$$

$$=\frac{1}{1^{p-1}}+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\dots+\frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$$

(چرا؟). بدین‌سان دنبالهٔ $\{s_k\}$ از بالا به‌وسیلهٔ $1/(1-1/2^{p-1})$ کراندار است، از این‌رو $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ همگراست.

(چهار) فرض می‌کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=r<1$. r' را طوری انتخاب می‌کنیم که $r<r'<1$ و فرض کنیم N چنان باشد که $n\geqslant N$ مستلزم

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<r'$$

باشد. دراین صورت $|a_{N+p}|<|a_N|(r')^p$. سری

$$|a_1|+\dots+|a_N|+|a_N|r'+|a_N|(r')^2+|a_N|(r')^3+\dots$$

را درنظر می‌گیریم. این سری به سمت

$$|a_1|+\dots+|a_{N-1}|+\frac{|a_N|}{1-r'}$$

همگراست. بنابر (دو) می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ همگراست. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=r>1$، r' را طوری انتخاب می‌کنیم که $1<r<r'$ و فرض کنیم N چنان باشد که $n\geqslant N$ مستلزم $|a_{n+1}/a_n|>r'$ باشد. بنابراین $|a_{N+p}|>(r')^p|a_N|$، درنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$، درصورتی که اگر حاصل‌جمع همگرا بود این حد باید صفر می‌شد. بدین‌سان $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ واگراست. برای آنکه ملاحظه کنیم این آزمون، هنگامی که $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=1$، بی‌نتیجه است. سری $1+1+1+\dots$، و $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ را، به ازای $p>1$، درنظر می‌گیریم. درهر دو حالت، $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=1$، لیکن سری

نخست واگرا و سری دوم همگرا است.

(پنج) فرض می‌کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n}=r<1$. r' را طوری انتخاب می‌کنیم که $r<r'<1$ و N را چنان برمی‌گزینیم که $n\geqslant N$ مستلزم آن باشد که $|a_n|^{1/n}<r'$؛ به عبارت دیگر، $|a_n|<(r')^n$. سری $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N-1}|+(r')^N+(r')^{N+1}+\cdots$ به‌سمت $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N-1}|+(r')^N/(1-r')$ همگراست، درنتیجه، بنابر(دو)، $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ همگراست. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n}=r>1$ ، r' راطوری انتخاب می‌کنیم که $1<r'<r$ و N راچنان برمی‌گزینیم که $n\geqslant N$ مستلزم $|a_n|^{1/n}>r'$ باشد ، یا به عبارت دیگر ، $|a_n|>(r')^n$. از این‌رو $\lim|a_n|=\infty$ و بنابراین $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ واگراست.

برای آنکه نشان‌دهیم این آزمون، هنگامی‌که $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n}=1$ بی‌نتیجه‌است، ملاحظه می‌کنیم که، بنابر آنالیز مقدماتی

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n}=1$$

(باگرفتن لگاریتم واستفاده‌ازاین‌امرکه، وقتی $x\to\infty$ ، $(\log x)/x\to 0$). اما $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ واگرا و $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ همگراست.

(شش) دراین قسمت برخی‌از قضایای مقدماتی‌را دربارهٔ انتگرالها ، که درحساب دیفرانسیل و انتگرال آموخته‌ایم، می‌پذیریم. درشکل ۲ــ۱۶ (الف) مستطیلهای بامساحتهای a_1 ، a_2 ، . . . ، a_n ، مساحتی بیشتر از مساحت‌زیر خم‌از $x=1$ تا $x=n+1$ دارند. بنابراین داریم

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\int_1^{n+1}f(x)\,dx$$

اینك اگر شکل ۲ــ۱۶ (ب) را درنظر بگیریم و مساحت‌از $x=1$ تا $x=n$ را ملاحظه کنیم ، داریم

$$a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant\int_1^{n}f(x)\,dx$$

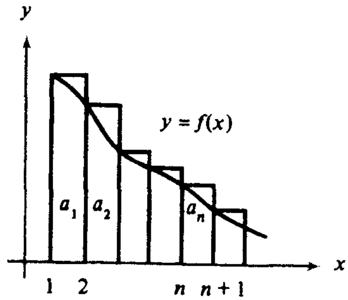
با اضافه‌کردن a_1 به هردوطرف نامساوی خواهیم داشت

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant a_1+\int_1^{n}f(x)\,dx$$

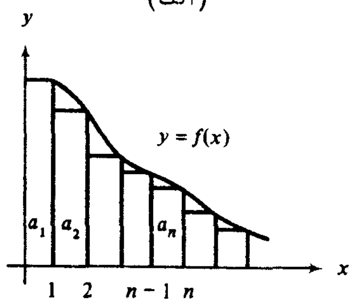
ازترکیب این دونتیجه ، به‌دست می‌آید

$$\int_1^{n+1}f(x)dx\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant a_1+\int_1^{n}f(x)dx$$

اگر انتگرال $\int_1^\infty d(x)dx$ متناهی باشد، آنگاه نامساوی طرف راست مستلزم آن است که سری $\sum_{n=1}^\infty a_n$ نیز، بنا بر خاصیت تمامیت $\mathbf{R}$، متناهی باشد؛ صفحهٔ ۱۲. اما اگر $\int_1^\infty f(x)dx$ نامتناهی باشد، نامساوی طرف چپ نشان می‌دهد که سری نامبرده نیز نامتناهی است. از این رو، سری و انتگرال مورد بحث هر دو با هم همگرا یا واگرا هستند. ■



(الف)



(ب)

شکل ۲ـ۱۶

مسائل حل شدهٔ فصل ۲

۱. فرض کنیم $S=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid |x_1|\leqslant 1 \,,\, |x_2|<1\}$. آیا S باز یا بسته است یا هیچکدام؟ درون S را تعیین کنید.

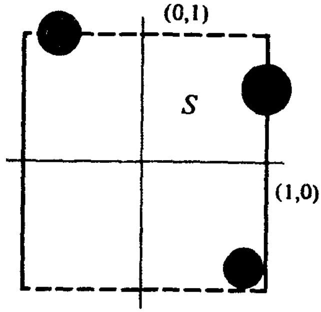
حل: S باز نیست، زیرا هیچ همسایگی حول یک نقطهٔ S با مختص اول $x_1=1$ یافت نمی‌شود که تماماً در S واقع گردد. شکل ۲ـ۱۷ را ببینید. از طرف دیگر، S بسته نیست، زیرا

$$\mathbf{R}^2\setminus S=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid |x_1|>1 \,,\, |x_2|\geqslant 1\}$$

و هیچ همسایگی حول یک نقطهٔ $\mathbf{R}^2\setminus S$ با مختص دوم $x_2=1$ وجود ندارد که تماماً در $\mathbf{R}^2\setminus S$ واقع شود.

به‌طریقی دیگر نیز می‌توان‌دید که S بسته‌نیست و آن عبارت‌از توجه‌به این‌نکته‌است که دنبالهٔ $(0, 1-1/n)$ همگراست، اما نقطهٔ حدی $(0,1)$ در S واقع‌نیست (قضیهٔ۹ را ببینید).

حکم می‌کنیم که $\operatorname{int}(S)=\{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2 \mid |x_1|<1 \,,\, |x_2|<1\}$. صحت این حکم را با نشان دادن اینکه اعضای این مجموعه، نقاط درونی S هستند آشکار می‌سازیم. اگر $|x_1|<1$ ، $|x_2|<1$ ، آنگاه گردهٔ به مرکز (x_1,x_2) و شعاع $r=\min\{1-|x_1| \,,\, 1-|x_2|\}$ در S قرار دارد. همان‌طور که دیدیم نقاط دیگر S ، نقاط درونی نیستند.



شکل ۲–۱۷

۲. نشان دهید که اگر x یک‌نقطهٔ انباشتگی یک مجموعهٔ $S\subset \mathbf{R}^n$ باشد، آنگاه هرمجموعهٔ باز شامل x حاوی تعدادی‌نامتناهی از نقاط S خواهد بود.

حل: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض‌می‌کنیم مجموعه‌ای‌باز مانند U حول‌نقطهٔ x وجود داشته‌باشد که فقط‌شامل تعدادی‌متناهی‌از‌نقاط S است. فرض کنیم x_1،x_2،...،x_m نقاط S واقع در U و متمایز با x باشند. فرض‌کنیم ε مینیمم اعداد $d(x\,,\,x_1)$ ، $d(x,x_2)$،...،$d(x,x_m)$ باشد، به‌طوری‌که $\varepsilon>0$. آنگاه $D(x,\varepsilon)$ حاوی هیچ نقطهٔ S ومتمایز با x نیست ، که این‌متناقض است با‌آنکه x یک‌نقطهٔ انباشتگی S است.

۳. اگر به‌ازای $S\subset \mathbf{R}$ ، $x=\sup(S)$ ، آنگاه $x\in \operatorname{cl}(S)$.

حل: بنا برقضیهٔ ۵، کافی‌است نشان‌دهیم‌که یا $x\in S$ یا آنکه x یک نقطهٔ انباشتگی S است. بنا برقضیهٔ ۲ در فصل۱ ، به ازای $\varepsilon>0$ ، یک $y\in S$ وجود دارد به طوری که $d(x,y)<\varepsilon$. این بدان‌معنی است که اگر $x\notin S$ ، آنگاه x یک‌نقطهٔ انباشتگی S است.

۴. یک‌دنباله می‌تواند حداکثر به‌سمت یک‌نقطه همگرا باشد (حدود یکتا هستند).

حل: فرض‌کنیم $x_k\to x$ و $x_k\to y$. به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، N را طوری انتخاب می‌کنیم که $k\geqslant N$ مستلزم $\|x_k-x\|<\varepsilon/2$ باشد، و M را نیزطوری برمی گزینیم

که $k \geqslant M$ مستلزم $\|x_k - y\| < \varepsilon/2$ باشد. دراین‌صورت اگر $k \geqslant N$ و $k \geqslant M$، خواهیم داشت $\|x - y\| \leqslant \|x - x_k\| + \|x_k - y\| < \varepsilon$ (بنا بر نامساوی مثلثی). چون $0 \leqslant \|x - y\| < \varepsilon$ به ازای هر $\varepsilon > 0$، برقرار است، $\|x - y\| = 0$ و در نتیجه $x = y$.

۵. می‌نویسیم $f = O(g)$، اگر برای xهای به‌قدر کافی بزرگ، $g(x) > 0$ و $f(x)/g(x)$ کراندار باشد. می‌نویسیم $f = o(g)$، اگر f/g به‌سمت صفر بگراید وقتی که x به سمت $+\infty$ میل می‌کند. همچنین می‌نویسیم $f \sim g$ (بخوانید f با g مجانب است) اگر وقتی $x \to \infty$، $f/g \to 1$. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $x^2 + x = O(x^2)$

(ب) $x^2 + x \sim x^2$

(پ) $e^{\sqrt{\log x}} = o(x)$

حل: ملاحظه می‌کنیم که اگر f با g مجانب باشد، آنگاه خودبه‌خود نتیجه خواهد شد که $f = O(g)$ (چرا؟). بدین‌سان (الف) از (ب) به‌دست خواهد آمد. لیکن (ب) آسان است زیرا می‌دانیم که $(x^2 + x)/x^2 = 1 + 1/x$، وقتی x به بی‌نهایت می‌رود، به سمت ۱ میل می‌کند. برای اثبات (پ) ملاحظه می‌کنیم که $x = e^{\log x}$ بنابراین $e^{\sqrt{\log x}}/x = e^{(\sqrt{\log x} - \log x)}$. اما چون، وقتی که $x \to \infty$، $\log x \to \infty$، پس، وقتی که $x \to \infty$، $\sqrt{\log x}/\log x \to 0$، در نتیجه برای x های بزرگ، $\sqrt{\log x} \leqslant (\log x)/2$ و ازاین‌رو، برای xهای بزرگ، $e^{(\sqrt{\log x})}/x \leqslant e^{-(\log x)/2}$، که $e^{-(\log x)/2}$، وقتی $x \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند.

تمرینهای فصل ۲

۱. تحقیق کنید مجموعه‌های زیر بازهستند یا بسته:

(الف) $]1,2[$ در $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ (ب) $[2,3]$ در $\mathbf{R}$

(پ) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-1, 1/n[$ در $\mathbf{R}$ (ت) $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$

(ث) یک ابرصفحه در $\mathbf{R}^n$ (ج) $\{r \in]0,1[\mid r \text{ گویاست}\}$ در $\mathbf{R}$

(چ) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\}$ در $\mathbf{R}^2$ (ح) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ در $\mathbf{R}^n$

۲. درون، بست، و مرز مجموعه‌های تمرین ۱ را تعیین کنید.

۳. فرض کنیم U در $\mathbf{R}^n$ بازباشد و $U \subset A$. آنگاه نشان دهید که $U \subset \operatorname{int}(A)$. گزارهٔ متناظر را برای مجموعه‌های بسته پیدا کنید.

۴. (الف) نشان دهید که اگر $x_n \to x$ در $\mathbf{R}^m$، آنگاه $x \in \operatorname{cl}\{x_2, x_2, \dots\}$. در چه صورت x یک نقطهٔ انباشتگی است؟

(ب) آیا یک دنباله می‌تواند بیش از یک نقطهٔ انباشتگی داشته باشد؟
(پ) اگر x یک نقطهٔ انباشتگی یک مجموعهٔ A باشد، ثابت کنید دنباله‌ای از نقاط متمایز A وجود دارد که به‌سمت x همگراست.

۵. نشان دهید که $x \in \text{int}(A)$ اگر، وفقط اگر، یک $\varepsilon > 0$ وجود داشته‌باشد به‌طوری که $D(x,\varepsilon) \subset A$.

۶. حدود دنباله‌های زیر را در $\mathbf{R}^2$ (درصورت وجود) بیابید.

(الف) $\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ (ب) $\left(1, \frac{1}{n}\right)$

(پ) $\left(\left(\frac{1}{n}\right)(\cos n\pi), \left(\frac{1}{n}\right)\left(\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$ (ت) $\left(\frac{1}{n}, n^{-n}\right)$

۷. فرض کنیم U در $\mathbf{R}^n$ باز باشد. نشان دهید که $U = \text{cl}(U) \setminus \text{bd}(U)$. آیا این برای هرمجموعه در $\mathbf{R}^n$ درست است؟

۸. فرض کنیم $S \subset \mathbf{R}$ و S از بالاکراندار باشد. نشان دهید که اگر S بسته باشد، آنگاه $\sup(S) \in S$.

۹. نشان دهید که $\text{cl}(A) = \mathbf{R}^n \setminus (\text{int}(\mathbf{R}^n \setminus A))$.

۱۰. معلوم کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست هستند.

(الف) $\text{int}(\text{cl}(A)) = \text{int}(A)$

(ب) $\text{cl}(A) \cap A = A$

(پ) $\text{cl}(\text{int}(A)) = A$

(ت) $\text{bd}(\text{cl}(A)) = \text{bd}(A)$

(ث) اگر A باز باشد، آنگاه $\text{bd}(A) \subset \mathbf{R}^n \setminus A$.

۱۱. نشان دهید که در $\mathbf{R}^n$، $x_m \to x$ اگر، وفقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، Nی وجود داشته‌باشد به‌طوری که $m \geqslant N$ مستلزم $\|x_m - x\| \leqslant \varepsilon$ باشد (فرق این باقضیهٔ ۷ در آن است که‌دراینجا «$\leqslant \varepsilon$» به‌جای «$< \varepsilon$» قرار گرفته‌است).

۱۲. خواص زیر را ثابت کنید (برای زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$).

(الف) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$

(ب) $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$

(پ) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$

۱۳. نشان دهید که $\text{cl}(A) = A \cup \text{bd}(A)$ و $\text{int}(A) = A \setminus \text{bd}(A)$.

۱۴. احکام زیر را ثابت کنید (برای زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$).

(الف) $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$

(ب) $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$

(پ) $\mathrm{cl}(A\cap B)\subset \mathrm{cl}(A)\cap \mathrm{cl}(B)$

۱۵. احکام زیر را ثابت کنید (برای زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$).

(الف) $\mathrm{bd}(A)=\mathrm{bd}(\mathbf{R}^n\setminus A)$

(ب) $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(A))\subset \mathrm{bd}(A)$

(پ) $\mathrm{bd}(A\cup B)\subset \mathrm{bd}(A)\cup \mathrm{bd}(B)\subset \mathrm{bd}(A\cup B)\cup A\cup B$

(ت) $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(A)))=\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(A))$

۱۶. فرض کنیم $a_1=\sqrt{2}$ ، $a_2=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ، . . . ، $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}$. نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ موجود است و آن را محاسبه کنید.

۱۷. اگر $\sum x_m$ در $\mathbf{R}^n$ مطلقا همگرا باشد، آنگاه نشان دهید که $\sum x_m \sin m$ همگرا است.

۱۸. اگر $x,y\in\mathbf{R}^n$ و $x\neq y$ ، آنگاه ثابت کنید که مجموعه‌های باز U و V وجود دارند به طوری که $x\in U$ ، $y\in V$ ، و $U\cap V=\varnothing$.

۱۹. $x\in\mathbf{R}^n$ را یك نقطهٔ حدی مجموعه‌ای مانند A گویند، هرگاه، به‌ازای هرهمسایگی x نظیر U ، $U\cap A\neq\varnothing$.

(الف) فرق بین نقاط حدی و نقاط انباشتگی چیست؟ مثالهایی بیاورید.

(ب) اگر x یك نقطهٔ حدی A باشد، آنگاه نشان دهید که دنباله‌ای مانند x_n متعلق به A وجود دارد به طوری که $x_n\to x$.

(پ) اگر x یك نقطهٔ انباشتگی A باشد، آنگاه نشان دهید که x یك نقطهٔ حدی A است. آیا عکس این مطلب درست است؟

(ت) اگر x یك نقطهٔ حدی A باشد و $x\notin A$ ، آنگاه نشان دهید که x یك نقطهٔ انباشتگی است .

(ث) ثابت کنید: یك مجموعه بسته است اگر، و فقط اگر، شامل همهٔ نقاط حدی‌اش باشد.

۲۰. برای یك مجموعهٔ A و $x\in\mathbf{R}^n$ ، فرض کنیم $d(x,A)=\inf\{d(x,y)\mid y\in A\}$ ، و به‌ازای $\varepsilon>0$ ، فرض کنیم $D(A,\varepsilon)=\{x\mid d(x,A)<\varepsilon\}$.

(الف) نشان دهید که $D(A,\varepsilon)$ باز است.

(ب) فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ و $N_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^n\mid d(x,A)\leqslant\varepsilon\}$ ، که در آن $\varepsilon>0$. نشان دهید که N_ε بسته است و نیز A بسته است اگر، و فقط اگر، $A=\cap\{N_\varepsilon\mid \varepsilon>0\}$.

(پ) چند مثال بیاورید.

۲۱. ثابت کنید که دنباله‌ای مانند x_k یك دنبالهٔ کوشی در $\mathbf{R}^n$ است اگر، و فقط اگر، به ازای هر همسایگی U از ۰ ، Nی وجود داشته باشد به‌طوری که $k,l\geqslant N$ مستلزم $x_k-x_l\in U$ باشد.

۲۲. ثابت کنید که درون یك مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ عبارت است از اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌های A که باز هستند. نتیجه بگیرید که A باز است اگر، و فقط اگر، $A=\mathrm{int}\,(A)$.

همچنین، با استفاده از تعاریف، یك برهان مستقیم از قسمت دوم به‌دست دهید.

۲۳. قضیهٔ ۳ را ثابت کنید. [راهنمایی: تمرین ۱۴ ازفصل مقدماتی‌را به‌کارگیرید.]

۲۴. $\mathbf{R}^{n+m}$ را با $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ یکی بگیرید. نشان‌دهیدکه $A\subset\mathbf{R}^{n+m}$ باز است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $(x,y)\in A$، که در آن $x\in\mathbf{R}^n$، $y\in\mathbf{R}^m$، مجموعه‌های باز $U\subset\mathbf{R}^n$، $V\subset\mathbf{R}^m$ موجود باشند به‌طوری که $x\in U$، $y\in V$، $U\times V\subset A$. نتیجه بگیرید که حاصل‌ضرب مجموعه‌های باز مجموعه‌ای باز است.

۲۵. ثابت کنیدکه یك مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ بازاست اگر، وفقط اگر، A را بتوان به‌صورت اجتماع خانواده‌ای از εـ گرده‌ها نوشت.

۲۶. دنبالهٔ اعداد a_n رابه وسیلهٔ

$$a_\circ=۱, a_۱=۱+\frac{۱}{۱+a_\circ}, \dots, a_n=۱+\frac{۱}{۱+a_{n-۱}}$$

تعریف می‌کنیم. نشان‌دهید a_n دنباله‌ای همگراست. حدآن‌را بیابید.

۲۷. فرض کنیم $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲\mid xy>۱\}$ و $B=\{d((x,y),(\circ,\circ))\mid (x,y)\in S\}$. مطلوب است تعیین $\inf(B)$.

۲۸. مثالهایی بیاورید از:

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی‌در $\mathbf{R}$ که هیچ‌نقطهٔ انباشتگی‌نداشته باشد.

(ب) یك زیرمجموعهٔ ناتهی‌از $\mathbf{R}$ که مشمول مجموعهٔنقاط انباشتگی‌اش باشد.

(پ) یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ که دارای‌تعدادی نامتناهی نقطه‌انباشتگی باشد ولی شامل هیچ‌یك ازآنها نباشد.

(ت) یك مجموعهٔ A به‌طوری‌که $\mathrm{bd}(A)=\mathrm{cl}(A)$.

۲۹. فرض‌کنیم A , $B\subset\mathbf{R}^n$ و x یك نقطهٔ انباشتگی $A\cup B$ باشد. آیا x باید یك نقطهٔ انباشتگی A یا B باشد؟

۳۰. نشان‌دهیدکه هرمجموعهٔ باز در $\mathbf{R}$ اجتماعی‌از بازه‌های‌باز جدا ازهم است. آیا این نتیجه‌در $\mathbf{R}^n$، به‌ازای $n>۱$، درست‌است که درآن یك بازهٔ باز را به‌صورت حاصل‌ضرب دکارتی n بازهٔ باز، $]a_۱,b_۱[\times\dots\times]a_n,b_n[$ تعریف می‌کنیم؟

۳۱. فرض‌کنیم A' نمایشگر مجموعهٔ نقاط انباشتگی یك مجموعهٔ A باشد. ثابت‌کنید A' بسته است. آیا، به‌ازای هر A، تساوی $(A')'=A'$ درست است؟

۳۲. فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ بسته و $x_n\in A$ یك‌دنبالهٔ کوشی باشد. ثابت‌کنید x_n به سمت یك نقطه‌در A همگراست.

۳۳. فرض کنیم s_n دنباله‌ای کراندار ازاعدادحقیقی باشد. فرض‌می‌کنیم $۲s_n\leqslant s_{n-۱}+s_{n+۱}$.

نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=0$.

۳۴. فرض کنیم $x_n\in\mathbf{R}^k$ و $d(x_{n+1},x_n)\leqslant rd(x_n,x_{n-1})$ که در آن $0\leqslant r<1$. نشان دهید x_n همگراست .

۳۵. نشان دهید که هر خانواده از مجموعه‌های باز ناتهی و جدا ازهم اعداد حقیقی شمارش پذیراست .

۳۶. فرض کنیم $A,B\subset\mathbf{R}^n$ مجموعه‌های بسته‌ای باشند. آیا باید

$$A+B=\{x+y\,|\,x\in A \text{ و } y\in B\}$$

بسته باشد؟

۳۷. برای $A\subset\mathbf{R}^n$ ، ثابت کنید $\mathrm{bd}(A)=[A\cap\mathrm{cl}(\mathbf{R}^n\setminus A)]\cup[\mathrm{cl}(A)\setminus A]$.

۳۸. فرض کنیم $x_k\in\mathbf{R}^n$ در نامساوی $\|x_k-x_l\|\leqslant 1/k+1/l$ صدق کند . ثابت کنید که x_k همگراست.

۳۹. فرض کنیم $S\subset\mathbf{R}$ از بالا و پایین کراندار باشد. ثابت کنید

$$\sup(S)-\inf(S)=\sup\{x-y\,|\,x\in S \text{ و } y\in S\}$$

۴۰. فرض می کنیم در $\mathbf{R}$ به‌ازای هر n ، $a_n\leqslant b_n$ ، $a_n\leqslant a_{n+1}$ ، و $b_{n+1}\leqslant b_n$. ثابت کنید که a_n همگراست.

۴۱. فرض کنیم A_n زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^n$ باشند ، $A_{n+1}\subset A_n$ ، $A_n\neq\varnothing$ ، اما $\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$. فرض می کنیم $x\in\cap_{n=1}^{\infty}\mathrm{cl}(A_n)$. نشان دهید x یك نقطه انباشتگی A_1 است.

۴۲. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ و $x\in\mathbf{R}^n$. تعریف می کنیم $d(x,A)=\inf\{d(x,y)\,|\,y\in A\}$ (تمرین ۲۰ را نیز ببینید) . آیا باید یك $z\in A$ وجود داشته باشد به طوری که $d(x,A)=d(x,z)$ ؟

۴۳. فرض کنیم $x_1=\sqrt{3}$ ، ... ، $x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

۴۴. یك مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ را در $B\subset\mathbf{R}^n$ چگال گویند اگر $B\subset\mathrm{cl}(A)$. اگر A در $\mathbf{R}^n$ چگال و U باز باشد، ثابت کنید $A\cap U$ در U چگال است. اگر U باز نباشد آیا این حکم درست است؟

۴۵. نشان دهید که $x^{\log x}=o(e^x)$ (مثال ۵ ، صفحهٔ ۶۰ را ببینید).

۴۶. اگر $f=o(g)$ و اگر $g(x)\to 0$ وقتی که $x\to\infty$ ، آنگاه نشان دهید که $e^f=o(e^g)$.

۴۷. با اثبات $x=o(e^{x/2})$ و $\log x=o(e^{x/2})$ نشان دهید که $\lim\limits_{x\to\infty}(x\log x)/e^x=0$.

۴۸. تعمیم‌های زیر ازآزمونهای نسبت و ریشه‌را ثابت کنید:

(الف) اگر $a_n>0$ و $\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n<1$، آنگاه $\sum a_n$ همگراست و اگر $\liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n>1$، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

(ب) اگر $a_n\geqslant 0$ و اگر $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$ (به‌ترتیب $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$) آنگاه $\sum a_n$ همگرا (به‌ترتیب واگرا) است. (بحث مربوط به lim sup و lim inf را در تمرین ۱۰ فصل ۱ ببینید).

۴۹. آزمون راب[1] را ثابت کنید: اگر $a_n>0$ واگر به‌ازای یك مقدار ثابت $A>1$ و n به قدر کافی بزرگ، $a_{n+1}/a_n\leqslant 1-A/n$، آنگاه $\sum a_n$ همگراست. به همین ترتیب نشان‌دهید که اگر $a_{n+1}/a_n\geqslant 1-1/n$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست. [راهنمایی: با درنظر گرفتن $P_n=\Pi_{k=1}^n(1-A/k)$ واثبات $\log P_n=-A\log n+O(1)$ نشان دهید که $a_n=O(n^{-A})$.]

با به‌کاربستن نتیجهٔ بالا ثابت کنید سری‌فوق هندسی که جملهٔ‌عمومی آن

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

است ودر آن α ، β ، و γ اعدادصحیح منفی نیستند، همگراست.

۵۰. نشان‌دهید که به‌ازای xهای به‌قدر کافی بزرگ تابع $f(x)=(x\cos^2 x+\sin^2 x)e^{x^2}$ یکنواست و به سمت $+\infty$ میل می کند ، ولـی نه نسبت $f(x)/x^{1/2}e^{x^2}$ و نه عکس آن کراندار نیستند.

۵۱. (الف) اگر $a_n>0$ ، $n=1,2,\ldots$ ، نشان دهید که

$$\liminf u_{n+1}/u_n\leqslant\liminf\sqrt[n]{u_n}\leqslant\limsup\sqrt[n]{u_n}\leqslant\limsup u_{n+1}/u_n$$

(برای تعریف lim sup و lim inf تمرین ۱۰، فصل۱ را ببینید.)

(ب) نتیجه بگیرید که اگر $\lim u_{n+1}/u_n=A$ آنگاه $\lim\sqrt[n]{n_n}=A$.

(پ) با استفادهٔ از دنبالهٔ $u_{2n}=u_{2n+1}=2^{-n}$ نشان دهید کـه عکس قسمت (ب) نادرست است .

(ت) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=?$

---

1. Raabe

۵۲. همگرایی سریهای زیر را مورد آزمون قرار دهید.

(الف) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k}}{\sqrt{k+1}}$

(ب) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^{2}+1}$

(پ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^{2}-3n+1}$

(ت) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1)-\log k}{\tan^{-1}(2/k)}$

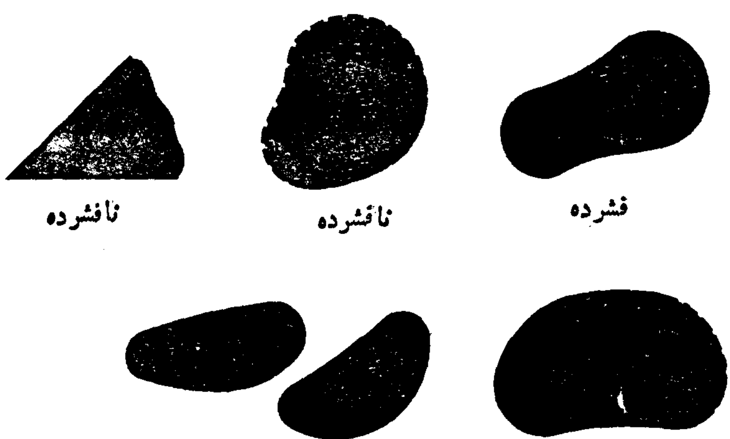
(ث) α حقیقی >0 , $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^{-\alpha})$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3}}{3^{n}}$

فصل ۳

مجموعه‌های فشرده و همبند

دراین فصل، دونوع از مهمترین و مفیدترین انواع زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}^n$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌طور شهودی، می‌خواهیم بگوییم که زیرمجموعه‌ای در $\mathbf{R}^n$ فشرده است هرگاه بسته بوده ودرناحیه‌ای کراندار قرار داشته‌باشد، و می‌گوییم که زیرمجموعه‌ای همبند است هرگاه از «یك‌تکه» تشکیل‌شده باشد. طبق معمول، لازم‌است که این پندارهها را درقالب تعاریف‌دقیق ارائه دهیم. درشکل ۳ــ۱ چند مثال ملاحظه می‌شود. ثمربخش‌بودن این‌مفاهیم، درفصل۴، وقتی‌که درمطالعه توابع پیوسته به‌کار برده می‌شوند، آشکار می‌گردد.



شکل ۳ــ۱ مجموعه‌های فشرده و همبند در $\mathbf{R}^2$

۱۰۳ مجموعه‌های فشرده : قضایای هاینه ـ بورل[1] و بولتسانو ـ وایرشتراس[2]

کار اول ما عبارت‌خواهد بود ازمعرفی چند اصطلاح قبل ازآنکه تعریف دقیقی از فشردگی زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$ داده‌شود. می‌گوییم مجموعهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ کراندار است اگر، وفقط اگر، ثابتی مانند $M \geqslant 0$ موجود باشد به طوری که $A \subset D(0, M)$. بنابراین مجموعه‌ای کراندار است که بتواند درگرده‌ای (بزرگ) مانند $D(0, M)$ حول مبدأ محصور شود؛ به عبارت‌دیگر، به‌ازای هر $x \in A$ ، $\|x\| < M$. یك پوشش مجموعه A یك گردایهٔ $\{U_i\}$ از مجموعه‌هاست که اجتماعشان شامل A باشد؛ این پوشش را یك پوشش باز می‌نامند هرگاه هر U_i باز باشد. یك زیر پوشش پوشش مفروض عبارت‌است‌از زیرگردایه‌ای که اجتماعش شامل A باشد، یا به‌بیان‌دیگر، A را بپوشاند؛ آن‌را زیر پوششی متناهی می‌نامند اگر زیر گردایه مفروض فقط دارای‌تعدادی‌متناهی مجموعه‌باشد. به‌عنوان‌مثال، مجموعهٔ گردایه‌های $\{D((x, 0), 1) \mid x \in \mathbf{R}\}$ در $\mathbf{R}^2$ خط حقیقی را می‌پوشانند، و زیر گردایه همهٔ گرده‌های $D((n, 0), 1)$ ، به مرکز نقاط صحیح واقع بر محور حقیقی، یك‌زیر پوشش‌تشکیل می‌دهند. توجه‌کنید که گرده‌های $D((n, 0), 1)$ به‌مرکز نقاط‌صحیح‌زوج واقع برمحور‌حقیقی، تشکیل یك زیر پوشش نمی‌دهند (چرا؟).

تبصره: پوششهای باز لزوماً گردایه‌های شمارش‌پذیری‌از مجموعه‌های باز نیستند.

حال‌قضیهٔ اصلی‌را بیان‌می‌کنیم‌وسپس تعریف وابسته‌به آن‌را ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$. آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند :

(یك) A بسته و کراندار است.

(دو) هرپوشش باز A دارای یك زیر پوشش متناهی است.

(سه) هردنبالهٔ در A دارای زیردنباله‌ای‌است‌که‌به سمت یك‌نقطهٔA همگرا می‌باشد.

تعریف ۱. زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$ راکه دریکی‌از (وبنابراین درهمهٔ) شرایط (یك)، (دو)، (سه) قضیهٔ ۱ صدق می‌کند فشرده می‌نامند.

هم‌ارزی (یك) و (دو) را اغلب قضیهٔ هاینه ـ بورل‌می‌نامند،ولی‌این‌ادعاراکه (یك) و (سه) هم‌ارز هستند، قضیهٔ بولتسانو ـ وایر شتراس می‌نامند.

تبصره: برای‌فضاهای متریك، درحالت‌کلی (دو) و (سه) هم‌ارز هستند ولی(یك) با (دو) و (سه) هم‌ارز نیست؛ برای‌فضاهای متریك‌دلخواه، فشردگی‌را به‌کمك‌یکی‌ازشرایط (دو) یا (سه) تعریف می‌کنیم. هم‌ارزی (یك) با (دو) و (سه) یك‌خاصیت ویژه وبسیار مهم $\mathbf{R}^n$ است .

به‌طورشهودی‌قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس بسیار معقول‌است. اگرA کراندار باشد، آنگاه هر دنبالهٔ ازنقاط A باید درجایی «تجمع کنند» ، و «نقطهٔ تجمع» (که ممکن است

---

1. Heine - Borel 2. Bolzano - Weierstrass

بیش‌از یکی باشد) بایددر A قرار داشته باشد، اگر A بسته‌باشد (قضیهٔ ۹ ، فصل ۲ را ببینید) .

اما به‌طور شهودی قضیهٔ هاینه ـ بورل دارای وضوح کمتری است. شاید بهترین‌راه برای پی‌بردن به موجه‌بودن‌آن ملاحظهٔ چند مثال باشد.

مثال۱. تمام خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ فشرده نیست، زیراکراندار نیست. ملاحظه می‌کنیم که

$$\{D(n,۱)=]n-۱,n+۱[\ |\ n=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots\}$$

یك پوشش‌باز $\mathbf{R}$ است ولی‌دارای هیچ‌زیرپوشش متناهی‌نیست (چرا؟)

مثال۲. فرض‌کنیم $A=]۰,۱]$. پوشش‌باز $\{\ ]۱/n,۲[\ |\ n=۱,۲,۳,\cdots\}$ را درنظر می‌گیریم. (چرا اجتماعشان شامل‌همهٔ A است؟) این‌پوشش نیز نمی‌تواند دارای یك زیر پوشش‌باز متناهی باشد. این‌بار، شرط (دو) برقرارنیست، زیرا A بسته نیست؛ نقطهٔ ۰ از A «حذف» شده است. این گردایه ازمجموعه‌ها پوششی‌برای $[۰,۱]$ نیست وهرپوشش‌باز $[۰,۱]$ باید دارای‌یك زیرپوشش متناهی باشد ـ پدیدهٔ بالا نمی‌تواند رخ دهد.

نحوهٔ بیان‌دیگری از (سه) و هم‌ارز با آن وجود داردکه بعضی اوقات مفید واقع می‌شود .

(سه)′ هر زیر مجموعهٔ نامتناهی A نقطهٔ انباشتگی در A دارد.

این کار را به عهدهٔ دانشجو واگذار می‌کنیم تانشان دهدکه (سه)′ با (سه) هم‌ارز است. (تمرین۳ را درپایان همین‌فصل ببینید.)

راه دیگری‌برای بیان‌شرط (دو) واین‌بار برحسب مجموعه‌های‌بسته وجود دارد. به کمك «خاصیت اشتراك متناهی‌برای A» آن‌را ارائه می‌کنیم. می‌گوییم که یك‌گردایه از مجموعه‌های $\{A_i\}$ دارای خاصیت اشتراك متناهی برای A است اگر، وفقط اگر، اشتراك هرتعداد متناهی‌از A_iها با A تهی نباشد. دراین‌صورت (دو) با (دو)′ هم‌ارز است.

(دو)′ هرگردایه از مجموعه‌های بسته‌که دارای‌خاصیت اشتراك متناهی‌برای A باشد، با A اشتراکی ناتهی دارد.

همان‌طورکه درجریان اثبات خواهیم‌دید (صفحه ۱۰۶) ، (دو)′ همان گزاره (دو) است‌که برحسب‌گردایه متممهای (بستهٔ) پوشش‌باز (دو)′ بیان‌شده است.

مثال۳. تعیین‌کنیدکدام یك‌از مجموعه‌های زیر فشرده است.

(الف) $\{x\in\mathbf{R}\ |\ x\geqslant ۰\}$.

(ب) $[۰,۱]\cup[۲,۳]$.

(پ) $\{(x,y)\in R^۲\ |\ x^۲+y^۲<۱\}$

حل: (الف) نافشرده‌است، زیرا کراندارنیست. (ب) فشرده‌است، زیرامجموعه‌ای است بسته وکراندار. (پ) نافشرده است، زیرا بسته‌بودن راکم دارد.

مثال۴. فرض‌کنیم x_k دنباله‌ای‌ازنقاط $\mathbf{R}^n$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر k ، $\|x_k\| \leqslant ۳$. نشان‌دهید‌که x_k یك‌زیردنبالهٔ همگرا دارد.

حل: مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant ۳\}$ بسته وکراندار است ، بنابرایـن فشرده است. چون $x_k \in A$ ، می‌توانیم قضیهٔ۱ (سه) را به‌کار بریم ونتیجه را به دست‌آوریم.

مثال۵. آیا می‌توانیم درقضیهٔ۱ (دو) به‌جای‌کلمهٔ «هر» کلمهٔ «بعضی» را بگذاریم؟

حل: خیر. فرض‌کنیم $A = \mathbf{R}$ و پوشش‌باز مرکب‌از تنها مجموعهٔ باز $\mathbf{R}$ را درنظر گیریم. این‌پوشش یقیناً دارای یك‌زیرپوشش متناهی، یعنی‌خودش است ولی $\mathbf{R}$ ، به دلیل بی‌کران‌بودن ، فشرده‌نیست.

مثال۶. فرض‌کنیم $A = \{۰\} \cup \{۱, ۱/۲, \dots, ۱/n, \dots\}$. مستقیماً نشان‌دهید‌که‌شرط(دو) قضیهٔ ۱ برقرار است.

حل: فرض‌کنیم $\{U_i\}$ پوشش‌باز دلخواهی از A باشد. بایدنشان‌دهیم‌که یك زیر پوشش متناهی وجود دارد. می‌دانیم‌که ۰ دریکی‌از این مجموعه‌های‌باز قرار دارد ، مثلاً $۰ \in U_۱$. چون $U_۱$ باز است و $۱/n \to ۰$، عددی‌طبیعی مانند N وجود دارد به‌طوری که $۱/N$، $۱/(N+۱)$، ... در $U_۱$ واقع‌شده‌اند. فرض‌کنیم $۱ \in U_۲$، ...، $۱/(N-۱) \in U_N$. آنگاه $U_۱$ ، ... ، U_N یك‌زیرپوشش متناهی‌است، زیرا یك‌زیرگردایه متناهی $\{U_i\}$ است و شامل‌همهٔ‌نقاط A است . توجه‌داشته‌باشیدکه اگر A عبارت‌بود ازمجموعه $\{۱, ۱/۲, \dots\}$، دیگر این‌استدلال به‌کار نمی‌آمد.

تمرینهای بند ۱.۳

۱. کدام یك‌از مجموعه‌های‌زیر فشرده است؟

(الف) $\{x \in \mathbf{R} \mid ۰ \leqslant x \leqslant ۱$ و x گنگ‌است$\}$.

(ب) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ \mid ۰ \leqslant x \leqslant ۱\}$.

(پ) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ \mid xy \geqslant ۱\} \cap \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ < ۵\}$.

۲. فرض‌کنیم $r_۱$ ، $r_۲$ ، $r_۳$ ، ... یك‌شماره‌گذاری اعدادگویای واقـع‌در $[۰, ۱]$ باشد. نشان‌دهید‌که یك‌زیر دنبالهٔ همگرا وجود دارد.

۳. فرض‌کنیم $x_k \to x$ یك‌دنبالهٔ همگزا در $\mathbf{R}^n$ باشد.

(الف) نشان دهید‌که $\{x_k\} \cup \{x\}$ فشرده است.

(ب) صریحاً شرط (دو) از قضیهٔ ۱ را تحقیق‌کنید.

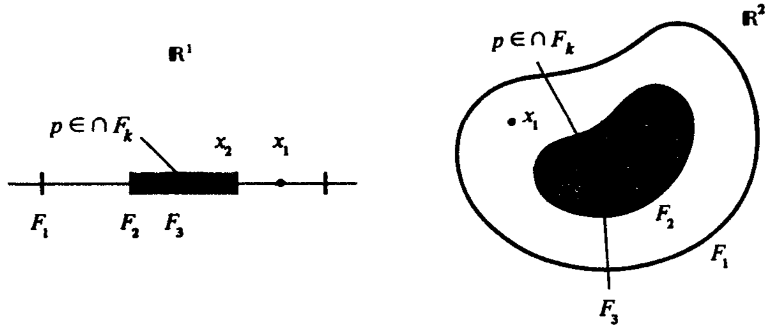
۴. فرض‌کنیم A یك مجموعهٔ‌کراندار باشد. ثابت‌کنیم $\mathrm{cl}(A)$ فشرده است.

۵. فرض‌کنیم A یك‌مجموعهٔ نامتناهی و دارای فقط یك نقطهٔ انباشتگی‌در A باشد. آیا A باید فشرده باشد؟

۲.۳ خاصیت مجموعه‌های تودرتو

نتیجهٔ مهمی از قضیهٔ ۱ موسوم به خاصیت مجموعه‌های تودرتو وجود دارد.

قضیهٔ ۲ . فرض کنیم F_k دنباله‌ای از مجموعه‌های فشردهٔ ناتهی در $\mathbf{R}^n$ باشد به‌طوری که به‌ازای هر $k=۱,۲,\ldots$ ، $F_{k+۱} \subset F_k$. در این‌صورت حداقل یك نقطه در $\bigcap_{k=۱}^{\infty} F_k$ یافت می‌شود.



شکل ۳-۲ خاصیت مجموعه‌های تودرتو

به‌طور شهودی، مجموعه‌های F_k کوچکتر و کوچکتر می‌شوند و به‌همین سبب بسیار معقول به‌نظر می‌رسد که باید نقطه‌ای در همهٔ آنها وجود داشته‌باشد. باوجود این اگر F_kها نافشرده باشند اشتراك آنها ممکن است تهی باشد (مثال ۲ را ببینید). بنابراین اثبات قضیه نیازمند احتیاط بیشتری است.

می‌توان این قضیه‌را دقیقاً با به‌کار بردن قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس به‌اثبات‌رساند. برای هر k ، $x_k \in F_k$ را انتخاب می‌کنیم. آنگاه x_kها ، که همگی‌در مجموعهٔ فشردهٔ $F_۱$ قرار دارند، دارای یك زیر دنبالهٔ همگرا هستند. در ایـن‌صورت نقطهٔ حدی باید در همهٔ مجموعه‌های F_k واقع باشد، زیرا همهٔ‌بسته هستند (شکل۳ـ۲ و تمرین ۴ را ببینید).

اثباتی به مراتب آسانتر، که قضیهٔ۱ $'$(دو) را مورداستفاده قرار می‌دهد در پایان فصل آورده شده است.

مثال۱. قضیهٔ۲ را برای $F_k=[۰,۱/k] \subset \mathbf{R}$ تحقیق کنید.

حل: هر F_k فشرده است و آشکارا $F_{k+۱} \subset F_k$. اشتراك آنها عبارت است از $\{۰\}$ که ناتهی است.

مثال۲. اگر به‌جای «فشردهٔ ناتهی» عبارت «باز ناتهی» یا «بستهٔ ناتهی» را قرار دهیم آیا باز قضیهٔ۲ درست است؟

حل: خیر. فرض کنیم $]k,\infty[$ یا $[k,\infty[$ $=F_k$.

تمرینهای بند ۲.۳

۱. قضیهٔ ۲ را برای $F_k=\{x\in\mathbf{R} \mid x\geqslant 0 \,,\, 2\leqslant x^2\leqslant 2+1/k\}$ تحقیق کنید.

۲. اگر به‌جای «فشردهٔ ناتهی» عبارت «بازکراندار ناتهی» گذاشته شود آیا باز قضیهٔ ۲ درست است؟

۳. فرض کنیم $x_k\to x$ در $\mathbf{R}^n$ همگرا باشد. درستی قضیهٔ۲ را برای $F_k=\{x_l \mid l\geqslant k\}\cup\{x\}$ تحقیق کنید. چه پیش می‌آید اگر $F_k=\{x_l \mid l\geqslant k\}$ ؟

۴. فرض کنیم $x_k\to x$ در $\mathbf{R}^n$ همگرا باشد. فرض کنیم $\mathscr{A}$ خانواده‌ای‌ازمجموعه‌های بسته و دارای این‌خاصیت باشد که برای‌هر $A\in\mathscr{A}$ ، عددی‌طبیعی مانند N وجوددارد به‌طوری که $k\geqslant N$ مستلزم $x_k\in A$ باشد. ثابت کنید که $x\in\bigcap\mathscr{A}$.

۳.۳ مجموعه‌های همبند کمانی

دومین مبحث مهمی که بناست دراین‌فصل موردبحث قرار گیرد مبحث همبندی می‌باشد. به طورشهودی می‌دانیم که واژهٔ «همبندی» را درمورد چه‌نوع مجموعه‌هایی مایل‌هستیم به‌کار گیریم. با وجود این، به‌هنگام قضاوت‌در بارهٔ مجموعه‌های پیچیده‌تر، شهودمامی‌تواندچار اشتباه‌شود. به‌عنوان مثال‌چگونه‌نظر قطعی می‌دهیم که مجموعهٔ $\{(x,\sin 1/x) \mid x>0\}\cup\{(0,y) \mid y\in[-1,+1]\}$ واقــع‌در $\mathbf{R}^2$ همبند است یا نیست؟ شکل ۳ـ۳ را ببینید. بنا براین نیت ما این است که تعریف‌ریاضی محکمی، که بتوانیم به‌آن متکی باشیم، تنظیم کنیم.

حقیقت‌امر این‌است که دومفهوم متفاوت، ولی‌در ارتباط تنگاتنگ بایکدیگر، برای همبندی‌در دست است. از این‌دو، مفهوم همبندی کمانی شهودی‌تر و دارای‌قابلیت کار برد بیشتری است، به‌همین سبب مطلب‌را با آن آغاز می‌کنیم. تعریفمان باید اول معنای یك خم (یا مسیر) واصل بین دونقطه‌را تعریف کند.

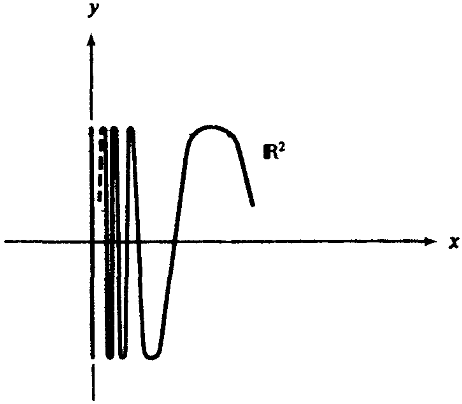
تعریف ۲. یك مسیر پیوسته واصل بین دو نقطهٔ x،y در $\mathbf{R}^n$ عبارت از تابعی مانند $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ است به‌طوری که $\varphi(a)=x$ ، $\varphi(b)=y$ و φ پیوسته باشد. دراینجا x ممکن‌است با y مساوی‌باشد یا نباشد و داریم $b\geqslant a$. درفصل۴، توابع‌پیوسته را بــه تفصیل مطالعه خواهیم‌کرد ولی‌فعلاً φ را پیوسته می‌نامیم اگر

$$(t_k\to t)\implies(\varphi(t_k)\to\varphi(t))$$

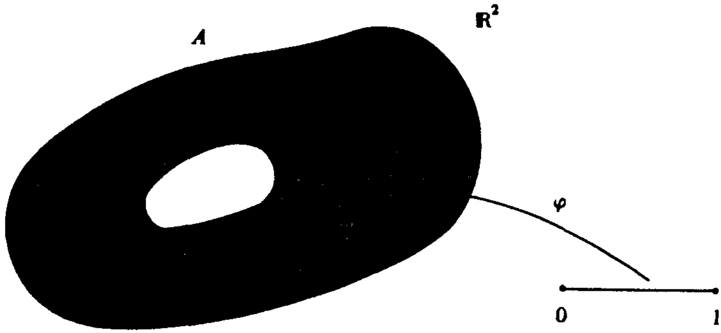
برای هر دنبالهٔ t_k در $[a,b]$ که به سمت یك $t\in[a,b]$ همگراست. (دانشجو از درسهای قبل به‌خاطر می‌آورد که به‌طورشهودی یك مسیر پیوسته‌آن است‌که هیچ‌پارگی یــا جهشی نداشته باشد.) می‌گویند مسیر φ در مجموعهٔ A قرار دارد هرگاه به‌ازای هر $t\in[a,b]$ ، $\varphi(t)\in A$. شکل ۳ـ۴ را ببینید.

می‌گوییم یك‌مجموعهٔ A همبند کمانی است هرگاه هردونقطهٔ‌آن را بتوان، به‌کمك

یك مسیر پیوسته واقع درآن، به‌هم وصل کرد.



شکل ۳ـ۳ همبند است؟



شکل ۳ـ۴ خم واصل بین x ، y واقع‌در A

به عنوان مثال ، آشکار است که ناحیهٔ A درشکل ۳ـ۴ همبندکمانی است . یك مجموعهٔ همبند کمانی دیگر خود بازه $[0,1]$ است . برای اثبات آن ، فرض کنیم $x\,,\,y\in[0,1]$ و $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}$ را با $\varphi(t)=(y-x)t+x$ تعریف می‌کنیم . این تابع، مسیری واصل بین xوy ، ودر $A=[0,1]$ واقع است.

با توجه به تعریف همبندی کمانی فوق‌الذکر، کمی تأمل خواننده را متقاعد خواهد ساخت که مجموعهٔ حاضر درشکل ۳ـ۳ همبندکمانی نیست ، اگرچه اثبات‌جدی‌این‌امر ساده نیست. بیشتر اوقات‌تعیین اینکه آیا مجموعه‌ای همبندکمانی‌است یا خیر نسبتاً آسان است. کافی‌است ببینیم آیا هردو نقطهٔ متعلق‌به آن‌را می‌توان به‌کمك یك‌خم پیوسته ، واقع‌در مجموعهٔ‌مفروض، به‌هم‌وصل کرد یاخیر واین‌مطلب‌معمولاً، ازنقطه‌نظرهندسی، آشکاراست. تحقیق مستقیم دومین مفهوم‌همبندی مشکلتراست ولی مفهوم‌بسیار مفیدی‌خواهد بود. دربند

۴.۳ خواهد آمد .

مثال۱. کدام یك از مجموعه‌های زیر همبندکمانی است؟

(الف) $[0,3]$.

(ب) $[1,2]\cup[3,4]$.

(پ) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x\leqslant 1\}$.

(ت) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$.

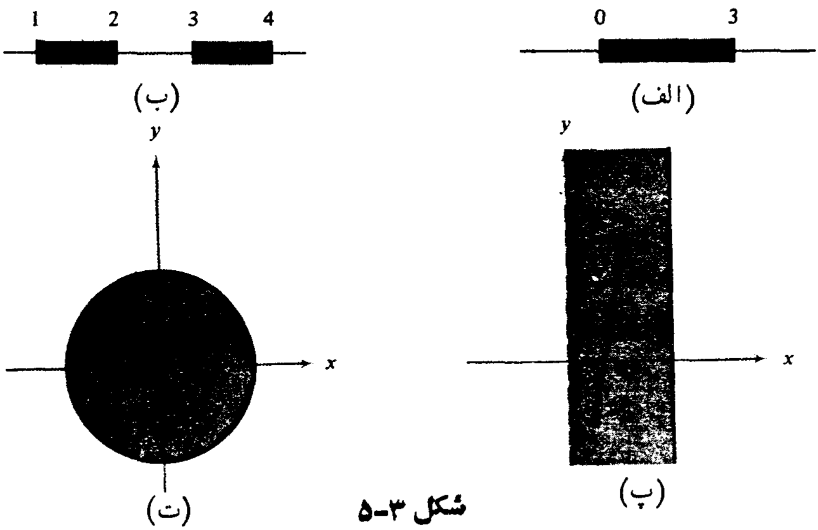
حل: فقط (ب) همبندکمانی نیست و این نکته‌از مطالعه شکل ۳-۵ آشکار می‌گردد.

مثال۲. آیا یك‌مجموعهٔ همبندکمانی بایدبسته باشد؟ یا باز؟

حل: خیر؛ $[0,1]$ ، $]0,1[$ ، $]0,1]$ همگی همبندکمانی هستند.

مثال۳. فرض‌کنیم $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}^3$ یک مسیر پیوسته باشد و $\mathscr{C}=\varphi([0,1])$. نشان دهید که $\mathscr{C}$ همبندکمانی است.

حل: به‌طور شهودی این مطلب‌روشن است، زیرا می‌توانیم خود مسیر φ را، برای وصل‌کردن دونقطهٔ متعلق‌به $\mathscr{C}$ ، مورداستفاده قراردهیم. به‌عبارت دقیقتر، اگر $x=\varphi(a)$، $y=\varphi(b)$ ، که درآن $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$ ، قرارمی‌دهیم $c:[a,b]\to\mathbf{R}^3$، $c(t)=\varphi(t)$. دراین‌صورت c مسیری‌در $\mathscr{C}$ و واصل‌بین x، y است.



شکل ۳-۵

تمرینهای بند ۳.۳

۱. تعیین‌کنیدکدام یك‌از مجموعه‌های زیر همبندکمانی است.

(الف) $\{x\in[\circ,1] \mid x$ گویاست$\}$.

(ب) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy\leqslant 1\ ,\ x\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy\geqslant 1\ ,\ x>1\}$.

(پ) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant z\}\cup\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2>3\}$.

(ت) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \circ\leqslant x<1\}\cup\{(x,\circ) \mid 1<x<2\}$.

۲. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}$ همبندکمانی باشد. براهین موجهی ارائه دهید که A باید یك بازه باشد (بسته، باز، یا نیم باز). آیا در $\mathbf{R}^2$ نیز مطلب به‌همین سادگی است؟

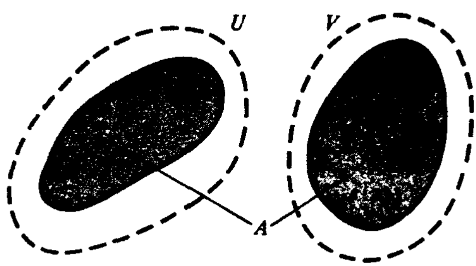
۳. فرض کنیم $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}^3$ مسیری پیوسته و $a<c<d<b$ باشد. فرض کنیم $\mathcal{C}=\{\varphi(t) \mid c\leqslant t\leqslant d\}$ آیا $\varphi^{-1}(\mathcal{C})$ باید همبندکمانی باشد؟

۴.۳ مجموعه‌های همبند

تعریف ۳. یك مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ را همبند می‌نامند، هرگاه دومجموعهٔ بازناتهی U، V وجود نداشته باشند به طوری که $A\subset U\cup V$ ، $A\cap U\neq\varnothing$ ، $A\cap V\neq\varnothing$ ، و $A\cap U\cap V=\varnothing$.

به‌طورشهودی، مجموعه‌های U و V مجموعهٔ A را به دوتکه جدا ازهم تقسیم‌خواهند کرد، و اگرچنین چیزی رخ دهد، خواهیم گفت که A همبند نیست (شکل ۳ـ۶) .

می‌توان نشان‌داد که مجموعهٔواقع درشکل ۳ـ۳ همبند است ولی‌همبندکمانی‌نیست؛ پس این‌دومفهوم یکی‌نیستند. باوجود این‌رابطهٔ معتبری‌بین این دوپنداره وجود دارد که در قضیهٔ‌بعد ارائه می‌شود.



شکل ۳ـ۶ A نه‌همبند است و نه‌همبندکمانی

قضیهٔ۴. اگر یك مجموعهٔ A همبندکمانی باشد، همبند نیز هست.

کاربرد این قضیه شاید آسانترین راه برای‌تشخیص یـك مجموعه همبند باشد. قضیهٔ فوق‌الذکر به‌طورشهودی معقول است. در واقـع قضیه عکس (که نادرست است) نیز معقول است. حال در اینجا مثالی از این دومفهوم ارائه می‌دهیم ، دو مفهومی کـه ارتباط

تنگاتنگ بایکدیگر دارند و به طورشهودی تقریباً یکی هستند ولی‌درعین‌حال تمیز رابطهٔ درست بین آنها نیاز به دقت بیشتری دارد. (مجموعه‌ای که در شکل ۳ـ۳ مشاهده می‌شود همبند هست ولی‌همبندکمانی نیست.)

اگر یك مجموعهٔ A همبند نباشد (و بنابراین همبندکمانی نخواهدبود)، می‌توانیم آن‌را به‌تکه‌هایی، یامؤلفه‌هایی، قسمت کنیم. به‌صورتی‌دقیقتر، یك مؤلفه مجموعهٔ A عبارت ازیك زیرمجموعهٔ همبند $A_{\circ}\subset A$ است به‌طوری‌که، غیراز خود $A_{\circ}$، هیچ مجموعهٔ‌همبند دیگری‌در A شامل $A_{\circ}$ نباشد. شکل ۳ـ۶ را ببینید. درنتیجه ملاحظه می‌کنیم‌که یك مؤلفه عبارت‌از یك‌زیر مجموعهٔ همبند ماکسیمال است. به‌طریق مشابهی، با استفاده از همبندی کمانی به‌جای همبندی، می‌توانیم مؤلفه‌کمانی را تعریف‌کنیم. بعضی از خواص مؤلفه‌ها را می‌توان درتمرینهای‌پایان فصل یافت.

مثال۱. آیا $\mathbf{Z}=\{\dots,-۲,-۱,\circ,۱,۲,\dots\}\in\mathbf{R}$ همبند است؟

حل: خیر، زیرا اگر $U=]۱/۲\ ,\ \infty[$، $V=]-\infty\ ,\ ۱/۴[$، آنگاه $\mathbf{Z}\subset U\cup V$، $\mathbf{Z}\cap U=\{۱,۲,۳,\dots\}\neq\varnothing$، $\mathbf{Z}\cap V=\{\dots,-۲,-۱,\circ\}\neq\varnothing$، و $\mathbf{Z}\cap U\cap V=\varnothing$. بنابراین $\mathbf{Z}$ همبند نیست. همچنین آشکار است‌که $\mathbf{Z}$ همبند کمانی نیست ، ولی‌توجه‌داشته‌باشیدکه مطلب‌اخیررا نمی‌توان برای‌استنتاج ناهمبندی $\mathbf{Z}$ مورد استفاده قرار دارد.

مثال۲. آیا $\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲ \mid \circ<x^۲+y^۲\leqslant ۱\}$ همبند است؟

حل: از مثال ۱ (ت) بند ۳.۳ می‌دانیم‌که این‌مجموعه همبندکمانی است. بنابراین، بنابرقضیهٔ ۳، همبند نیزهست. اثبات مستقیم همبندی‌این مجموعه‌کار دشواری است.

تمرینهای بند ۴.۳

۱. آیا $[\circ,۱]\cup]۲,۳[$ همبند است؟ آن‌را اثبات یا رد کنید.

۲. آیا $\{(x,y)\in\mathbf{R}^۲ \mid \circ\leqslant x\leqslant ۱\}\cup\{(x,\circ)\mid ۱<x<۲\}$ همبند است؟ آن را اثبات یا رد کنید.

۳. فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^۲$ همبندکمانی باشد. اگر $A\subset\mathbf{R}^۳$ را به عنوان زیر مجموعه‌ای از صفحهٔ xy درنظر بگیریم، نشان‌دهیدکه A همبندکمانی‌است. آیامی‌توانید اثبات‌مشابهی برای همبندی ارائه دهید؟

۴. دربارهٔ مؤلفه‌های مجموعه‌های زیرین بحث‌کنید:

(الف) $[\circ,۱]\cup[۲,۳]\subset\mathbf{R}$.

(ب) $\mathbf{Z}=\{\dots,-۲,-۱,\circ,۱,۲,\dots\}$

(پ) $\{x\in[\circ,۱] \mid x$ گویاست$\}$

برهان قضایای فصل ۳

قضیه ۱ . فرض‌کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$. شرایط زیر با یکدیگر هم‌ارز هستند:
(یك) A بسته و کراندار است .
(دو) هرپوشش باز A دارای یك‌زیر پوشش متناهی است.
(سه) هردنبالهٔ در A دارای زیردنباله‌ای است‌که به‌سمت یك نقطهٔ A همگرا می باشد.
$'$(دو) هرگر دایه از مجموعه‌های بسته‌که دارای خاصیت اشتراك متناهی برای A باشد ، با A اشتراکی ناتهی دارد.

برهان: در آغاز ثابت خواهیم‌کرد که (یك) $\Longleftarrow$ (دو) $\Longleftarrow$ (سه) $\Longleftarrow$ (یك) ، و سپس (دو) $\Longleftrightarrow$ $'$(دو). ابتدا، نشان می‌دهیم که (یك) $\Longleftarrow$ (دو) ، که محتملاً مشکلترین قسمت است. بدین‌منظور، کارخودرا با اثبات یك‌حالت‌خاص آغاز می کنیم.

لم ۱ . خاصیت هاینه ـ بورل (دو) برای فواصل بسته $[a,b]$ در $\mathbf{R}$ برقرار است.

برهان: فرض‌کنیم $\mathcal{U}=\{U_i\}$ یك پوشش‌باز $[a,b]$ باشد. تعریف می کنیم $A=\{x\in[a,b] \mid$ مجموعهٔ $[a,x]$ را می‌توان بایك‌گردایه متناهی از U_iها پوشاند$\}$. می‌خواهیم نشان دهیم‌که $A=[a,b]$. برای‌این منظور قرار می‌دهیم $c=\sup(A)$. $\sup$ وجود دارد، زیرا $A\neq\varnothing$ (چون $a\in A$)، و A ازبالا، به‌وسیلهٔ b ، کراندار است. همچنین، به‌دلیل بسته‌بودن $[a,b]$، داریم $c\in[a,b]$ (مثال ۳ فصل ۲ رابببینید). گیریم $c\in U_{i_0}$ ؛ یك‌چنین U_{i_0} وجود دارد، زیرا U_iها $[a,b]$ را می‌پوشانند. چون U_{i_0} بازاست، یك $\varepsilon>0$ وجود دارد، به‌طوری‌که $]c-\varepsilon,c+\varepsilon[\subset U_{i_0}$. اما $c=\sup(A)$، پس‌یك $x\in A$ موجوداست به‌طوری‌که $c-\varepsilon<x\leqslant c$ (قضیه۲ فصل۱ را ببینید). به سبب $x\in A$ ، مجموعهٔ $[a\ ,\ x]$ یك زیرپوشش‌متناهی، مانند U_1 ، ... ، U_N دارد؛ دراین‌صورت $[a,c+\varepsilon/2]$ نیزدارای زیرپوشش متناهی U_1 ، ... ، U_N ، U_{i_0} است. بدین‌سان نتیجه می گیریم که $c\in A$ و علاوه برآن، که $c=b$. در واقع، اگر $c<b$ ، عضوی از A و بزرگتراز c به‌دست می‌آوریم، چرا که $[a,c+\varepsilon/2]$ یك زیر پوشش متناهی دارد. اما این‌امر نمی‌تواند رخ‌دهد، زیرا $c=\sup(A)$. ■

پرسش. چرا این لم برای $]a,b[$،$]a,b]$ یا برای $[a,\infty[$ برقرار نیست؟

لم ۲ . اگر $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده باشد و $x_0\in\mathbf{R}^m$ ، آنگاه $A\times\{x_0\}$ نیز فشرده است.

برهان:
فرض‌کنیم $\mathcal{U}$ یك‌پوشش باز $A\times\{x_0\}$ ، و $\mathcal{V}=\{V \mid V=\{y \mid (y,x_0)\in U\}\ ,\ U\in\mathcal{U}\}$ باشد. دراین‌صورت $\mathcal{V}$ یك‌پوشش‌باز A در $\mathbf{R}$ است، و بنابراین $\mathcal{V}$ یك زیرپوشش متناهی برای A ، مانند $\mathcal{V}'=\{V_1,\dots,V_k\}$ ، دارد. هر $V_i\in\mathcal{V}'$ متناظر با یك $U_i\in\mathcal{U}$ است، ودرنتیجهٔ، $\mathcal{U}'=\{U_1,\dots,U_k\}$ یك‌زیر پوشش متناهی‌در $\mathcal{U}$ برای $A\times\{x_0\}$ می باشد. ■

لم۳. اگر $[-R,+R]^{n-1}\subset \mathbf{R}^{n-1}$ دارای خاصیت هاینه ـ بورل باشد، آنگاه $[-R,R]^n\subset \mathbf{R}^n$ نیز دارای خاصیت هاینه ـ بورل است، که در آن قرار داده‌ایم: $[-R,R]^n=[-R,R]\times\cdots\times[-R,R]$، n مرتبهٔ.

برهان: فرض کنیم $[-R,R]^{n-1}$ دارای خاصیت‌هاینه ـ بورل، و $\mathcal{U}$ یك پوشش باز $[-R,R]^n$ باشد. قرار می‌دهیم

$S=\{x\in[-R,R]\mid$
$[-R,x]\times{}^{n-1}[-R,R]$ را می‌توان با تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\mathcal{U}$ پوشاند$\}$.

حال، داریم $-R\in S$، زیرا، بنابرفرض، $[-R,R]^{n-1}$ در (دو) صدق می‌کند و لذا، بنابرلم۲، $[-R,R]^{n-1}\times\{-R\}$ یك زیرپوشش‌متناهی‌در $\mathcal{U}$ دارد. همچنین S از بالا، به‌وسیلهٔ R، کراندار است و بنابراین S سوپرمومی مانند x_0 دارد. نشان خواهیم داد که $x_0=R$ و این نکته اثبات لم را به پایان می‌رساند.

فرض کنیم $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ یك زیرپوشش متناهی $[-R,R]^{n-1}\times\{x_0\}$ باشد. برای هر $(y,x_0)\in[-R,R]^{n-1}\times\{x_0\}$ یك $\varepsilon_y>0$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{U}'$ مجموعهٔ $D((y,x_0),\sqrt{2}\,\varepsilon_y)$ را می‌پوشاند. اما $V_y=D(y,\varepsilon_y)\times]x_0-\varepsilon_y,x_0+\varepsilon_y[\subset D((y,x_0),\sqrt{2}\,\varepsilon_y)$، بنابراین $\mathcal{U}'$ مجموعهٔ V_y را می‌پوشاند. پوشش‌باز $\mathcal{V}=\{V_y\mid y\in[-R,R]^{n-1}\}$ را برای $[-R,R]^{n-1}\times\{x_0\}$ درنظر می‌گیریم. بنابرلم ۲، $[-R,R]^{n-1}\times\{x_0\}$ دارای یك زیرپوشش متناهی، مانند $\{V_{y_1},\ldots,V_{y_N}\}$، برای $[-R,R]^{n-1}\times\{x_0\}$ است. قرار می‌دهیم $\varepsilon=\inf(\varepsilon_{y_1},\ldots,\varepsilon_{y_N})$. دراین‌صورت $[-R,R]^{n-1}\times]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[\subset\bigcup_{i=1}^{N}V_{y_i}$، و لذا $\mathcal{U}'$ مجموعهٔ $[-R,R]^{n-1}\times]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$ را می‌پوشاند.

اما برای‌این ε، عضوی مانند $x\in S$ موجوداست به‌طوری که $x_0-\varepsilon<x\leqslant x_0$. چون $x\in S$، یك‌زیرپوشش‌متناهی $\mathcal{U}''\subset\mathcal{U}$ وجود دارد که $[-R,R]^{n-1}\times[-R,x]$ را می‌پوشاند، و $\mathcal{U}'\cup\mathcal{U}''$ یك پوشش متناهی برای $[-R,R]^{n-1}\times[-R,x_0+\varepsilon[$ است. بنابراین $x_0\in S$. گیریم $x_0<R$، آنگاه δ را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_0+\delta<x_0+\varepsilon$ و $x_0+\delta<R$. درنتیجه، $\mathcal{U}'\cup\mathcal{U}''$ مجموعهٔ $[-R,R]^{n-1}\times[-R,x_0+\delta]$ رامی‌پوشاند وازآنجا $x_0+\delta\in S$؛ این یك‌تناقض است، پس $x_0=R$. ■

بعداز اثبات یك لم موردنیاز دیگر، قادر خواهیم‌بود قضیهٔ اصلی خودمان را به اثبات برسانیم.

لم ۴. اگر A در (دو) صدق کند، B بسته‌باشد و $B\subset A$، آنگاه B نیزدر (دو) صدق می‌کند.

برهان: فرض کنیم $\{U_i\}$ یك‌پوشش‌باز B باشد، و قراردهیم $V=\mathbf{R}^n\setminus B$. دراین صورت $\{U_i,V\}$ یك پوشش‌باز A است. اگر $\{U_1,\ldots,U_N,V\}$ یك زیرپوشش متناهی A باشد، آنگاه $\{U_1,\ldots,U_N\}$ یك‌زیرپوشش متناهی‌برای B خواهد بود. ■

قضیهٔ ۱، برهان‌اینکه (یك) $\Longrightarrow$ (دو): چون A کراندار است، بنابراین‌درمکعبی

مانند $[-R,R]^n$ قرار دارد. باتوجه به لم۳ و با استقراء روی n، می‌بینیم که این مکعب در (دو) صدق می‌کند. بنابر لم۴، A نیز در (دو) صدق می‌کند، زیرا A بسته است. ■

قضیهٔ ۱، برهان اینکه (دو) $\Longrightarrow$ (سه): فرض کنیم دنبالهٔ $x_k \in A$ دارای هیچ زیر دنبالهٔ همگرا نباشد. به ویژه نتیجه می‌گیریم که x_k دارای بی‌نهایت نقطهٔ متمایز، مانند y_1، y_2، ... است. چون هیچ زیردنبالهٔ همگرایی وجود ندارد، یك همسایگی U_k نقطهٔ y_k وجود دارد که شامل y_i دیگری نیست. علت این امر آن است که اگر هرهمسایگی y_k شامل y_j دیگری می‌بود، باانتخاب همسایگیهای $D(y_k, 1/m)$، $m=1,2,\ldots$، می‌توانستیم یك زیر دنبالهٔ همگرا به سمت y_k استخراج کنیم. همچنین، ادعا می‌کنیم که مجموعهٔ y_1،y_2،... بسته است. در واقع، طبق این فرض که هیچ زیر دنبالهٔ همگرا وجود ندارد، مجموعهٔ اخیر دارای هیچ نقطهٔ انباشتگی نیست (تمرین ۴ پایان فصل ۲ را ببینید). درنتیجه، بنابر لم۳، $\{y_1, y_2, \ldots\}$ در (دو) صدق می‌کند. اما $\{U_k\}$ پوشش بازی است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد، و این یك تناقض است. بنابراین x_k باید یك زیردنبالهٔ همگرا داشته باشد. اثبات اینکه حد این زیردنباله در A قرار دارد، منجر به اثبات بسته بودن A می‌شود. تحقیق آن را، در تمرین ۲۵، به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. ■

قضیه۱، برهان اینکه (سه) $\Longrightarrow$ (یك): ابتدا نشان می‌دهیم که A بسته است. برای این منظور، قضیهٔ ۹، فصل ۲ را مورد استفاده قرار می‌دهیم. دنباله‌ای مانند $x_k \to x$ را، با فرض $x_k \in A$، درنظر می‌گیریم. از (سه) نتیجه می‌گیریم که حد دنباله به A تعلق دارد، بنابراین A بسته است.

پس از آن، ثابت می‌کنیم که A کراندار است. در واقع، فرض کنیم A کراندار نباشد. دراین‌صورت نقاط $x_k \in A$ وجود دارند به‌طوری که $\|x_k\| \geqslant k$، $k=1,2,3,\ldots$. این مطلب نشان می‌دهد که دنبالهٔ x_k نمی‌تواند زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد، زیرا اگر y حد یك زیر دنباله می‌بود، آنگاه $\infty = \|y\| = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\|$ (تمرین ۱۶ را ببینید). اما اگر داشته‌باشیم $y \in \mathbf{R}^n$، نتیجه اخیر غیرممکن است. ■

قضیه۱، برهان اینکه (دو)' $\Longleftrightarrow$ (دو): ابتدا ثابت می‌کنیم (دو) $\Longrightarrow$ (دو)'. فرض کنیم $\{F_i\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد و قرار می‌دهیم $U_i = \mathbf{R}^n \setminus F_i$، بنابراین U_i باز است. فرض کنیم که $A \cap (\cap_{i=1}^{\infty} F_i) = \varnothing$. با در نظرگرفتن متممها، تساوی اخیر بیان می‌کند که U_iها A را می‌پوشانند. چون پوششی باز است، یك زیرپوشش متناهی (بنابر فرض (دو))، مانند $A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_N$ وجود دارد. بنابراین $A \cap (F_1 \cap \ldots \cap F_N) = \varnothing$، و لذا $\{F_i\}$ خاصیت اشتراك متناهی را ندارد. درنتیجه، اگر $\{F_i\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته، با خاصیت اشتراك متناهی باشد، آنگاه $A \cap \{F_i\} \neq \varnothing$.

سرانجام، نشان می‌دهیم (دو)' $\Longrightarrow$ (دو). در واقع، فرض کنیم $\{U_i\}$ یك پوشش باز باشد و قرار دهیم $F_i = \mathbf{R}^n \setminus U_i$. در این صورت $A \cap (\cap_i F_i) = \varnothing$ و لذا، بنابر

(دو)' ، $\{F_i\}$ نمی‌تواند دارای خاصیت اشتراك متناهی برای A باشد. پس، برای اعضایی مانند $F_\text{۱}$ ، ...، F_N در گردایه مفروض، داریم $A \cap (F_\text{۱} \cap \ldots \cap F_N) = \varnothing$. به‌عبارت دیگر $U_\text{۱}$، ...، U_N زیر پوشش متناهی مطلوب است. ■

قضیهٔ ۲. فرض کنیم F_k دنباله‌ای از مجموعه‌های فشردهٔ ناتهی در $\mathbf{R}^n$ باشد به طوری که به ازای هر $k = \text{۱}, \text{۲}, \ldots$ ، $F_{k+\text{۱}} \subset F_k$. آنگاه $\cap_{k=\text{۱}}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

برهان: ملاحظه می‌کنیم که ، درمجموعهٔ فشردهٔ $A = F_\text{۱}$ ، مجموعه‌های $F_\text{۱}$، $F_\text{۲}$، ... دارای خاصیت اشتراك متناهی هستند. در واقع، اشتراك هر گردایه متناهی از آنها با F_k ، که دارای بزرگترین اندیس است، برابر می‌باشد. بدین‌سان چون (دو)' برای مجموعه‌های فشرده برقرار است ، لذا داریم

$$F_\text{۱} \cap \left(\bigcap_{k=\text{۱}}^{\infty} F_k \right) = \bigcap_{k=\text{۱}}^{\infty} \{F_k\} \neq \varnothing \cdot \blacksquare$$

قضیهٔ ۳. اگر یك مجموعهٔ A همبند کمانی باشد، آنگاه A همبند است.

باز کار خودرا با اثبات حالت‌خاصی ازقضیه آغاز می کنیم[1].

لم ۵. بازهٔ $[a,b]$ همبند است.

برهان: فرض کنیم که بازهٔ مفروض همبند نباشد. دراین‌صورت دومجموعهٔ باز U و V وجود دارند به‌طوری که $U \cap [a,b] \neq \varnothing$ و $V \cap [a,b] \neq \varnothing$، $[a,b] \cap U \cap V = \varnothing$ و $[a,b] \subset U \cup V$. به‌علاوه فرض کنیم که $b \in V$. قرار می‌دهیم $c = \sup(U \cap [a,b])$ ، که وجود دارد، زیرا این‌مجموعه ازبالا کراندار است. مجموعهٔ $U \cap [a,b]$ بسته‌است، زیرا متمم آن ، یعنی $V \cup (\mathbf{R} \setminus [a,b])$ ، باز است. بدین‌سان $c \in U \cap [a,b]$ (تمرین ۸ فصل۲ را ببینید) . اما $c \neq b$ ، زیرا $c \notin V$ و $b \in V$. هرهمسایگی c مجموعهٔ $V \cap [a,b]$ را قطع می کند، زیرا $c \neq b$ ، و هیچ‌همسایگی c نمی‌تواند تماماً در U قرار گیرد ، چرا که $c = \sup(U \cap [a,b])$ ، بنابراین c یك نقطهٔ انباشتگی $V \cap [a,b]$ می‌باشد. همان طورکه‌درمورد U عمل کردیم، می‌بینیم که $V \cap [a,b]$ نیز بسته‌است ولذا $c \in V \cap [a,b]$. نتیجهٔ اخیر با $V \cap U \cap [a,b] = \varnothing$ تناقض دارد. ■

برهان قضیهٔ ۳: فرض کنیم A همبند نباشد. آنگاه ، بنابر تعریف ، دو مجموعهٔ باز U، V وجود دارند به طوری که $A \subset U \cup V$ ، $A \cap U \cap V = \varnothing$ ، $U \cap A \neq \varnothing$ ، و $V \cap A \neq \varnothing$. یك $x \in U \cap A$ ویك $y \in V \cap A$ برمی گزینیم. چون A همبند کمانی است، یك مسیر $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ در A ، واصل بین x و y ، وجود دارد . قرار می‌دهیم

---

۱. لازم نیست که ابتدالم۵ را اثبات کنیم؛ مستقیماً هم می‌توانستیم اقدام کنیم، ولی توجه به این‌نکته مفید است که نکتهٔ دشوار استدلال مربوط به همبندی بازه‌ها می‌شود.

$U_\circ=\varphi^{-1}(U)$ و $V_\circ=\varphi^{-1}(V)$ و بنابراین $U_\circ,V_\circ\subset[a,b]$. اما $U_\circ$ بسته است، زیرا اگر $t_k\to t$ ، بافرض $t_k\in U_\circ$ ، ازپیوستگی φ نتیجه می گیریم که $\varphi(t_k)\to\varphi(t)$؛ جون V بازاست، $\varphi(t)\notin V$ ، چراکه درغیراین‌صورت، برای‌مقادیر بزرگ k ، $\varphi(t_k)\in V$. پس $\varphi(t)\in U\cap A$ و ازآنجا حاصل می‌شود $t\in U_\circ$. بنابراین $U_\circ$ بسته است. به طریق مشابهی‌ثابت‌می‌شودکه $V_\circ$ نیز بسته‌است. قرارمی‌دهیم $U'=]-\infty,a[\cup(\mathbf{R}\setminus V_\circ)$، و $V'=]b,\infty[\cup(\mathbf{R}\setminus U_\circ)$، که هردوباز هستند. ملاحظه می کنیم که $U'\cap[a,b]\neq\varnothing$ (زیرا شامل a است)، $V'\cap[a,b]\neq\varnothing$ (زیرا شامل b است)، $U'\cap V'=\varnothing$ ، و $[a,b]\subset U'\cup V'$. درنتیجه $[a,b]$ همبند نیست، که این ناقض لم ۵ می‌باشد. ■

مثالهای حل شدهٔ فصل ۳

۱. نشان دهیدکه $A=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$ فشرده وهمبند است.

حل: برای اثبات فشردگی A ، نشان می‌دهیم‌که بسته و کراندار است. برای اینکه نشان‌دهیم بسته‌است، مجموعهٔ $\mathbf{R}^n\setminus A=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|>1\}=B$ را درنظر می گیریم. برای $x\in B$ داریم $D(x,\|x\|-1)\subset B$ (قضیهٔ ۱ فصل ۲ را ببینید)، پس B باز، ولذا A بسته‌است. آشکارا A کراندار است، زیرا $A\subset D(0,2)$ وبنابراین A فشرده است.

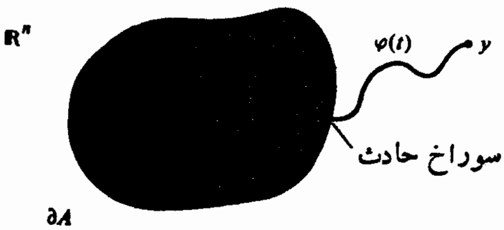
برای اثبات‌همبندی A، نشان می‌دهیم که A همبندکمانی است. فرض‌کنیم $x,y\in A$. دراین‌صورت خط‌راست واصل بین x،y همان مسیرمطلوب است. به عبارت صریحتر، $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ ، $\varphi(t)=(1-t)x+ty$ را به‌کار می‌بریم. می بینیم که $\varphi(t)\in A$، زیرا باتوجه به‌نامساوی‌مثلثی، $\|\varphi(t)\|\leqslant(1-t)\|x\|+t\|y\|\leqslant(1-t)+t=1$.

۲. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $x\in A$ ، و $y\in\mathbf{R}^n\setminus A$. فرض‌کنیم $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ یك مسیر (پیوستهٔ) واصل بین x و y باشد. نشان دهید که یك t وجود دارد به طوری که $\varphi(t)\in\operatorname{bd}(A)$.

حل: به‌طور شهودی، این نتیجه می گوید، مسیری‌که یك مجموعه را به متممش وصل می‌کند، باید مرزآن مجموعه‌را درنقطه‌ای سوراخ‌کند. شکل ۳-۷ را ببینید.

فرض‌کنیم $B=\{x\in[0,1] \mid \varphi([0,x])\subset A\}\subset[0,1]$. داریم $B\neq\varnothing$ ، زیرا $0\in B$. قرار می‌دهیم $t=\sup(B)$. نشان‌خواهیم‌داد‌که $\varphi(t)\in\operatorname{bd}(A)$. فرض‌کنیم U یك‌همسایگی $\varphi(t)$ باشد. انتخاب می کنیم $t_k\in[0,t]$، $t_k\to t$ ، به‌طوری‌که $\varphi(t_k)\in A$. بنابرتعریف B ، این‌امر امکان‌پذیر است. آنگاه، باتوجه به‌پیوستگی φ ، برای مقادیر بزرگ k داریم، $\varphi(t_k)\in U$. بنابرتعریف t ، نقطه‌ای نظیر s_k موجود است به‌طوری که $t\leqslant s_k\leqslant t+1/k$ و $\varphi(s_k)\notin A$. اما $s_k\to t$ ، درنتیجه ، بنابر پیوستگی φ ، برای مقادیر به‌قدرکافی بزرگ k داریم $\varphi(s_k)\in U$. بدین‌سان U شامل نقاطی‌از A واز $\mathbf{R}^n\setminus A$ می‌باشد، ولذا، بنابرقضیهٔ ۶ فصل ۲، $\varphi(t)\in\operatorname{bd}(A)$.

۳. ثابت کنید: یک مجموعهٔ $A\subset \mathbf{R}$ همبند است اگر، وفقط اگر، A یک بازه باشد ـ یک بازه مجموعه‌ای است به‌صورت $[a,b]$ ، $[a,b[$ ، $]a,b]$ ، یا $]a,b[$ ، که درآنها a یا b می‌توانند، دریک انتهای باز بازهٔ مفروض، $\pm\infty$ باشند.



شکل ۳ـ۷ یک مسیر واصل بین A و $\mathbf{R}^n\setminus A$

حل: قبلاً دیدیم که بازه‌ها همبند هستند، زیراکه همبند کمانی می‌باشند. حال، برای اثبات عکس آن، فرض کنیم که A یک بازه نباشد. نشان خواهیم دادکه A همبند نیست. معنای این سخن که A یک بازه نیست این است که نقاط x،y،z وجوددارند به‌طوری که $x<y<z$ ؛ $x,z\in A$ و $y\notin A$ (چرا؟). در این صورت $U=]-\infty\,,\,y[$ و $V=]y,\infty[$ دومجموعهٔ بازهستند و به علاوه داریم $A\subset U\cup V$،$U\cap V\cap A=\varnothing$، $U\cap A\neq\varnothing$ ، و $V\cap A\neq\varnothing$. بنابراین A همبند نیست.

تمرینهای فصل ۳

۱. کدام یک از مجموعه‌های زیرین فشرده است؟ کدام یک همبند است؟

(الف) $\{(x_1\,,\,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid |x_1|\leqslant 1\}$.

(ب) $\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 10\}$.

(پ) $\{x\in\mathbf{R}^n \mid 1\leqslant \|x\|\leqslant 2\}$.

(ت) $\mathbf{Z}=\{$ اعداد صحیح در $\mathbf{R}\}$.

(ث) یک مجموعهٔ متناهی در $\mathbf{R}^n$.

(ج) $\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|=1\}$ (بین‌حالات $n=1$ و $n\geqslant 2$ تمایز قائل شوید).

(چ) محیط مربع واحد در $\mathbf{R}^2$.

(ح) مرز یک مجموعهٔ کراندار.

(خ) اعداد گویای $[0,1]$.

(د) یک مجموعهٔ بسته در $[0,1]$.

۲. ثابت کنید که یک مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ همبند نیست، اگر ، و فقط اگر ، بتوانیم بنویسیم $A\subset F_1\cup F_2$، که‌درآن F_1 ، F_2 بسته هستند و $A\cap F_1\cap F_2=\varnothing$، $F_1\cap A\neq\varnothing$،

$\cdot F_2 \cap A \neq \emptyset$

۳. ادعاهای زیرین‌را اثبات کنید.
(الف) یك‌مجموعهٔ A فشرده‌است اگر، وفقط اگر، هرزیر مجموعهٔ نامتناهی‌آن دارای یك‌نقطهٔ انباشتگی‌در A باشد.
(ب) یك‌مجموعهٔ نامتناهی وکراندار A دارای‌یك‌نقطهٔ انباشتگی‌است (که لزوماً‌در A قرار ندارد).

۴. نشان‌دهید که یك‌مجموعهٔ A کراندار است اگر، وفقط اگر، یك‌ثابت M وجود داشته باشد به‌طوری‌که، به‌ازای‌هر $x, y \in A$ ، $d(x, y) \leqslant M$. تعریف‌قابل‌قبولی برای‌قطر یك مجموعه ارائه‌کنید، وسپس به‌کمك آن، نتیجهٔ قبل‌را مجدداً بیان‌کنید.

۵. باآشکارساختن پوشش‌بازی‌که هیچ‌زیرپوشش متناهی‌ندارد، نشان‌دهید که مجموعه‌های زیرین فشرده نیستند.
(الف) $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$
(ب) $\mathbf{Z}$ ، مجموعهٔ اعدادصحیح واقع‌در $\mathbf{R}$.

۶. درقضیهٔ۲ (خاصیت مجموعه‌های تودرتو) فرض‌کنیم‌که $0 \leftarrow$ قطر (F_k) . نشان‌دهید که دقیقاً یك نقطه‌در $\cap\{F_k\}$ وجود دارد

$$\text{(بنابرتعریف ،} \ \text{قطر}\ (F_k) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in F_k\}\text{)}$$

۷. فرض کنیم x_k دنباله‌ای در $\mathbf{R}^n$ باشد ، که به سمت x همگراست . قرار می‌دهیم $A_k = \{x_k, x_{k+1}, \cdots\}$ ؛ نشان‌دهیدکه $\{x\} = \cap_{k=1}^{\infty} \mathrm{cl}(A_k)$.

۸. فرض‌کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ فشرده و x_n یك‌دنبالهٔ‌کوشی‌در A باشد. دراین‌صورت نشان دهید که x_n به سمت‌نقطه‌ای در A همگراست.

۹. درستی یا نادرستی‌گزاره‌های زیرین‌را معین‌کنید (به‌کمك اثبات یا مثال‌نقض).
(الف) (A فشرده در $\mathbf{R}^n$) $\Longrightarrow$ ($\mathbf{R}^n \setminus A$ همبند).
(ب) (A همبند در $\mathbf{R}^n$) $\Longrightarrow$ ($\mathbf{R}^n \setminus A$ همبند).
(پ) (A همبند در $\mathbf{R}^n$) $\Longrightarrow$ (A باز یا بسته).
(ت) ($A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$) $\Longrightarrow$ ($\mathbf{R}^n \setminus A$ همبند). (راهنمایی: حالات $n = 1$ و $n \geqslant 2$ را بررسی‌کنید.)

۱۰. یك‌مجموعهٔ A راموضعاً همبندکمانی[1] می‌نامند، هرگاه هرنقطهٔ‌آن دارای‌یك‌همسایگی U بوده ، به طوری‌که $A \cap U$ همبندکمانی باشد. نشان دهیدکه (A همبند و موضعاً همبندکمانی) $\Longleftrightarrow$ (A همبندکمانی).

۱۱. (الف) ثابت‌کنیدکه اگر A در $\mathbf{R}^n$ همبند باشد و $A \subset B \subset \mathrm{cl}(A)$ ، آنگاه B نیز

---

۱. این اصطلاح با اصطلاح متداول درکتب توپولوژی استاندارد تاحدی متفاوت است.

همبند است.
(ب) از (الف) نتیجه بگیرید که مؤلفه‌های یك‌مجموعهٔ A به‌طور نسبی بسته هستند. مثالی که در آن، این‌مؤلفه‌ها به‌طور نسبی‌باز نیستند، ارائه دهید. ($C \subset A$) را به طورنسبی‌در A بسته‌می گویند، هرگاه C با، اشتراك یك‌مجموعهٔ بسته‌در $\mathbf{R}^n$ با A، برابر باشد.)
(پ) نشان‌دهید که‌اگر مجموعه‌های B_i و B همبندباشند،و به‌ازای‌هر i، $B_i \cap B \neq \varnothing$، دراین‌صورت $(\cup_i B_i)$ همبند است. مثالهایی ارائه دهید.
(ت) از (پ) نتیجه بگیرید که هرنقطهٔ‌یك مجموعه، فقط به‌یك مؤلفه تعلق‌دارد.
(ث) (پ) را به‌کاربریدو نشان‌دهید که $\mathbf{R}^n$ همبنداست و برای این‌منظور، فقط‌فرض کنید که خطوط‌در $\mathbf{R}^n$ همبند می باشند.

۱۲. فرض کنیم S مجموعه‌ای‌از اعدادحقیقی باشد،که ناتهی واز بالاکراندار است. قرار می‌دهیم $-S = \{x \in \mathbf{R} \mid -x \in S\}$. ثابت کنید که
(الف) $-S$ ازپایین کراندار است،
(ب) $\sup S = -\inf -S$.

۱۳. فرض کنیم M یك‌فضای متریك کامل و F_n گردایه‌ای‌از زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی M، به‌طوری که $F_{n+1} \subset F_n$ و (F_n) قطر $\to 0$، باشند. ثابت کنید که $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ متشکل ازفقط یك‌نقطه است.

۱۴. (الف) یك‌نقطهٔ $x \in A$ ($A \subset \mathbf{R}^n$) را در A تنها می گویند هرگاه یك همسایگی U نقطهٔ x وجود داشته‌باشدبه‌طوری که $U \cap A = \{x\}$. نشان‌دهید که این‌تعریف‌هم‌ارز با این‌است که بگوییم عددی‌مانند $\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای‌هر $y \in A$، $y \neq x$، داشته‌باشیم $d(x, y) > \varepsilon$.
(ب) یك‌مجموعه‌را گسسته‌می‌نامند، هرگاه همهٔ‌نقاطش تنها باشند، چندمثال‌ارائه‌دهید. نشان‌دهید که یك‌مجموعهٔ‌گسسته فشرده‌است اگر، وفقط اگر، متناهی باشد.

۱۵. فرض کنیم $K_1 \subset \mathbf{R}^n$ و $K_2 \subset \mathbf{R}^m$ همبندکمانی (به‌ترتیب ، همبند، فشرده) باشند. نشان دهید که $K_1 \times K_2$ در $\mathbf{R}^{n+m}$ همبندکمانی (به‌ترتیب، همبند، فشرده) است.

۱۶. اگر $x_k \to x$، آنگاه ثابت‌کنیدکه $\|x_k\| \to \|x\|$. آیا عکس این مطلب درست است؟ این‌نتیجه‌را به‌کاربریدوثابت‌کنیدکه مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ بسته‌است.

۱۷. فرض کنیم K یك‌مجموعهٔ بستهٔ ناتهی در $\mathbf{R}^n$، $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$ باشد. نشان دهید که یك $y \in K$ موجود است به‌طوری که $d(x, y) = \inf\{d(x, z) \mid z \in K\}$. آیااین‌مطلب برای مجموعه‌های باز نیزصحت دارد؟

۱۸. فرض‌کنیم $F_n \subset \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $F_n = \{x \mid 2 - 1/n \leqslant x^2 \leqslant 2 + 1/n\}$ تعریف شده باشد. نشان‌دهید که $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. این‌نتیجه‌را برای‌اثبات وجود $\sqrt{2}$ به‌کاربرید.

۱۹. فرض کنیم $V_n \subset \mathbf{R}^m$ مجموعه‌هایی باز باشند به‌طوری که $\mathrm{cl}(V_n)$ فشرده است، $V_n \neq \varnothing$، و $\mathrm{cl}(V_n) \subset V_{n-1}$. ثابت کنید $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \varnothing$.

۲۰. به‌طریقی که در زیر می‌آید، ثابت کنید که یك مجموعهٔ A باخاصیت (دو) قضیهٔ ۱ بسته است. فرض کنید x یك نقطهٔ انباشتگی A باشد و گیرید $x \notin A$؛ برای هر $y \in A$، همسایگیهای جدا ازهم U_y و V_y متعلق به y و x را انتخاب کنید. حال پوشش باز $\{U_y\}$ را درنظر بگیرید.

۲۱. (الف) ثابت کنید: یك مجموعهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ همبند است اگر، وفقط اگر، $\varnothing$ و A تنها زیر مجموعه‌هایی از A باشند که نسبت به A، هم باز و هم بسته هستند. (یك مجموعهٔ $U \subset A$ را نسبت به A، باز می‌گویند هرگاه، برای مجموعه‌ای باز مانند $V \subset \mathbf{R}^n$، داشته باشیم $U = V \cap A$؛ بسته نسبت به A نیز به طریق مشابهی تعریف می‌شود).
(ب) ثابت کنید که $\varnothing$ و $\mathbf{R}^n$ تنها زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^n$ هستند که هم باز و هم بسته می‌باشند.

۲۲. دو زیرمجموعهٔ $A, B \subset \mathbf{R}^2$ و یك نقطهٔ $x_0 \in \mathbf{R}^2$ راچنان بیابید که $A \cup B$ همبند نباشد، ولی $A \cup B \cup \{x_0\}$ همبند باشد.

۲۳. فرض کنیم $\mathbf{Q}$، مجموعهٔ اعدادگویا در $\mathbf{R}$ را نمایش دهد. نشان دهید که نه $\mathbf{Q}$ و نه $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$، یعنی مجموعهٔ گنگها، همبند نیستند.

۲۴. ثابت کنید که یك مجموعهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ همبند نیست، اگربتوانیم A را به‌صورت اجتماع دومجموعهٔ جدا ازهم B و C به‌شرط $B \cap A \neq \varnothing$، $C \cap A \neq \varnothing$، و به‌طوری که هیچ کدام از دومجموعهٔ B و C، شامل نقطه انباشتگی از دیگری نباشد، بنویسیم.

۲۵. ثابت کنید دنباله‌ای از اعداد صحیح متمایز مانند $n_1, n_2, \ldots \to \infty$ موجود است به طوری که $\lim\limits_{k \to \infty} \sin(n_k)$ وجود دارد.

۲۶. ثابت کنید که خاصیت مجموعه‌های تودرتو را می‌توان جایگزین کامل بودن $\mathbf{R}$ کرد.

۲۷. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یك دنبالهٔ کراندار در $\mathbf{R}$ باشد. فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی $\{x_n\}$ باشد.
(الف) ثابت کنید که S کراندار و ناتهی است. قرار می‌دهیم $x^* = \sup S$، $x_* = \inf S$. x^* را حد بالایی $\{x_n\}$ نامیده و با $\limsup x_n$ یا $\overline{\lim}\, x_n$ نمایش می‌دهند. x_* را حدپایینی نامیده و با $\liminf x_n$ یا $\underline{\lim}\, x_n$ نمایش می‌دهند.
احکام زیر را ثابت کنید.
(ب) تعریف فوق با تعریفی که درمسئلهٔ ۱۰ فصل ۱ داده‌شد یکی است.
(پ) $x^* \in S$.
(ت) برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $m \in N$ وجود دارد به طوری که $n \geq m \Leftarrow x_n < x^* + \varepsilon$.

(ث) x^* تنها عددی است که هر دو خاصیت (پ) و (ت) را دارد.
(ج) $\{x_n\}$ همگرا است $\Longleftrightarrow$ $x^* = x_*$.
(چ) فرض کنیم $x_n = (-1)^{n-1}(1+1/n)$. x^* و x_* را بیابید.

۲۸. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ همبند و بیش‌از یك نقطه داشته باشد. نشان‌دهید که هر نقطهٔ A یك نقطهٔ انباشتگی A است.

۲۹. فرض کنیم $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$. نشان‌دهید که A فشرده است. آیا همبند هم‌هست؟

۳۰. فرض کنیم U_k دنباله‌ای‌از مجموعه‌های‌باز $\mathbf{R}^n$ باشد. ثابت یا ردکنید که
(الف) $\cup_{k=1}^{\infty} U_k$ باز است،
(ب) $\cap_{k=1}^{\infty} U_k$ باز است.

۳۱. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ فشرده نباشد. نشان دهید که یك دنبالهٔ ... $F_1 \supset F_2 \supset F_3$ از مجموعه‌های بسته وجود دارد به‌طوری که به ازای هر k ، $F_k \cap A \neq \varnothing$ و $(\cap_{k=1}^{\infty} F_k) \cap A = \varnothing$.

(راهنمایی: یك‌مجموعه در $\mathbf{R}^n$ فشرده‌است اگر، وفقط اگر، هر پوشش‌بازشمارش‌پذیر دارای‌یك زیرپوشش متناهی باشد.)

۳۲. (قضیهٔ کاتگوری بر[1] برای $\mathbf{R}^n$.) می‌گویند یك مجموعهٔ $S \subset \mathbf{R}^n$ در هیچ جا چگال نیست اگر، برای هرمجموعهٔ‌باز ناتهی U ، $\mathrm{cl}(S) \cap U \neq U$. نشان‌دهید که‌نمی‌توان $\mathbf{R}^n$ را به‌صورت اجتماع شمارش پذیر از مجموعه‌های هیچ جا چگال نوشت، $\mathbf{R}^n = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$. [راهنمایی: اگر $\mathbf{R}^n = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$ ، یك‌دنبالهٔ کوشی‌ناهمگرای x_k بیابید و برای این‌منظور به انتخاب ظریفانهٔ گویهای تودرتوی $D(x_k, r_k) \subset \mathbf{R}^n \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_k)$ بپردازید.]

۳۳. فرض کنیم x_n دنباله‌ای‌در $\mathbf{R}^3$ باشد به طوری که $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 1/(n^2+n)$ ، $n \geqslant 1$. نشان‌دهید که x_n همگرا است.

۳۴. ثابت‌کنید که هرمجموعه بستهٔ $A \subset \mathbf{R}^n$ با اشتراك شمارش‌پذیری ازمجموعه‌های باز برابر است. [راهنمایی: فرض کنیم

$$U_k = \{y \in \mathbf{R}^n \mid d(x,y) \leqslant 1/k \text{ ، } x \in A \text{ برای‌یك } \}.]$$

۳۵. فرض کنیم دنبالهٔ a_1، a_2، ... در $\mathbf{R}$ باضابطهٔ

$$a_1 = a\,;$$

$$a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1} + 1 \qquad \text{اگر } n > 1$$

---

1. Baire

تعریف شده باشد. برای چه مقدار $a\in\mathbf{R}$ دنبالهٔ مفروض (الف) یکنو است؟ (ب) کراندار است؟ (ج) همگراست؟ درمواردی که دنباله همگراست حد آن را بیابید.

۳۶. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ شمارش‌ناپذیر باشد. ثابت کنید A دارای یك نقطهٔ انباشتگی است.

۳۷. $A,B\subset\mathbf{R}^n$، به‌طوری که A فشرده، B بسته و $A\cap B=\varnothing$ باشد، مفروضند.
(الف) نشان دهید که یك $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in A$، $y\in B$، داشته باشیم $d(x,y)>\varepsilon$.
(ب) اگر A و B صرفاً بسته باشند، آیا باز (الف) برقرار است؟

۳۸. (مجموعهٔ کانتور.) فرض کنیم $F_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$، ازحذف ثلث میانی $[0,1]$، حاصل شده باشد. همین عمل را تکرار می‌کنیم ومجموعهٔ

$$F_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$$

را به‌دست می‌آوریم. به‌طور کلی F_n اجتماعی از بازه‌ها است و F_{n+1}، از حذف ثلثهای میانی این بازه‌ها، حاصل می‌شود. قرار می‌دهیم $C=\bigcap_1^\infty F_n$، مجموعهٔ کانتور. ثابت کنید:
(الف) C فشرده است.
(ب) C دارای بی‌نهایت نقطه است. [راهنمایی: به‌نقاط انتهایی F_n نگاه کنید.]
(پ) $\operatorname{int}(C)=\varnothing$.
(ت) نشان دهید که C کامل است، یعنی، C بسته‌است وهیچ نقطهٔ تنها ندارد.

۳۹. نشان دهید که $A\subset\mathbf{R}^n$ همبند نیست اگر، وفقط اگر، دومجموعهٔ باز جدا ازهم U، V وجود داشته باشند به طوری که $U\cap A\neq\varnothing$، $V\cap A\neq\varnothing$ و $A\subset U\cup V$.
[راهنمایی: فرض کنیم U_1، V_1 دومجموعهٔ باز باشند که در تعریف ناهمبندی وجود دارند؛ قرارمی‌دهیم $A_1=A\cap U_1$، $A_2=A\cap V_1$ و فرض می‌کنیم

$$U=\{x\in\mathbf{R}^n \mid d(x,A_1)<d(x,A_2)\}$$

و

$$V=\{x\in\mathbf{R}^n \mid d(x,A_1)>d(x,A_2)\}$$

باشد.]

۴۰. فرض کنیم F_k دنباله‌ای از مجموعه‌های فشردهٔ تودرتو باشد (یعنی $F_{k+1}\subset F_k$). علاوه‌برآن گیریم که هرکدام از F_k ها همبندباشد. ثابت کنید $\bigcap\{F_k\}$ همبنداست. (می‌توانید نتیجهٔ تمرین ۳۹ را به‌کار ببرید.) با ارائه مثالی نشان دهید که فشردگی یك شرط اساسی است ونمی‌توانیم به‌جای آن درصورت مسئله بگوییم «F_k دنباله‌ای از مجموعه‌های بستهٔ همبند تودرتو است.»

فصل ۴

توابع پیوسته

برای اینکه قادر باشیم قضایای جالب ومفیدی به‌دست آوریم، اغلب لازم می‌آید، که برموجودات ریاضی مورد مطالعه، قیودی تحمیل کنیم. دراین فصل، خواست ما این است که توابع مورد مطالعه پیوسته باشند و بعضی از نتایج حاصل ازاین تحدیدرا بررسی خواهیم کرد. درفصل ۶، حتی قیدی قویتر، یعنی مشتق‌پذیری را، مطالعه می‌کنیم.

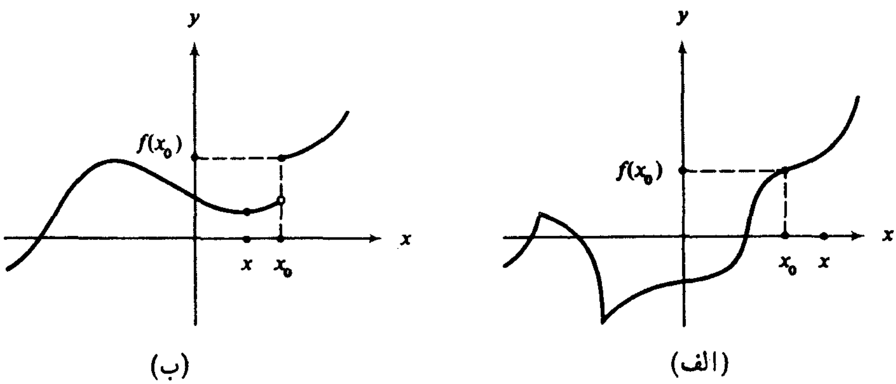
۱.۴ پیوستگی

ابتدا، به‌طور شهودی، مفهوم پیوستگی را برای توابع حقیقی‌معین برخط حقیقی $\mathbf{R}$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شکل ۴ـ۱ (الف) یك تابع پیوسته، و ۴ـ۱ (ب) یك تابع ناپیوسته را نشان می‌دهد. یك تابع پیوسته این خاصیت مهم را داردکه وقتی x نزدیك به x_0 است، $f(x)$ نیز نزدیك به $f(x_0)$ است (همان گونه که در شکل ۴ـ۱ (الف) نشان داده شده است). از طرف دیگر، درشکل ۴ـ۱ (ب). حتی اگر x بسیارنزدیك به x_0 باشد، $f(x)$ ممکن است نزدیك به $f(x_0)$ نباشد. خواننده بایستی، از دوران مطالعه حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی، بااین پنداره‌ها آشنا شده باشد.

برای تعریف کردن پیوستگی درقالب واژه‌های دقیق، ابتدا مفهوم حد یك تابع را دریك نقطه تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $f:A\to\mathbf{R}^m$ ، وگیریم x_0 یك نقطهٔ انباشتگی A باشد. می‌گوییم $b\in\mathbf{R}^m$ حد f در x_0 است، ومی‌نویسیم

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$



شکل ۴-۱ (الف) تابع پیوسته. (ب) تابع ناپیوسته

هرگاه‌به‌ازای‌هر $\varepsilon>0$ مفروض، یك $\delta>0$ (که بستگی به f ، x_0 و ε دارد) وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $x\in A$ ، $x\neq x_0$، از $\|x-x_0\|<\delta$ نتیجه بشود که $\|f(x)-b\|<\varepsilon$.

به‌طور شهودی، این تعریف می‌گوید که وقتی x به x_0 نزدیك می‌شود، $f(x)$ به b نزدیك می‌شود. همچنین می‌نویسیم $f(x)\to b$ وقتی $x\to x_0$. (این را با مفهوم حد یك دنباله مقایسه‌کنید.) توجه داشته باشید که اگر x_0 یك نقطهٔ انباشتگی نباشد، هیچ نقطهٔ $x\neq x_0$ ، $x\in A$ و نزدیك به x_0 وجود نخواهد داشت و لذا تعریف فوق‌الذکر بی‌معنی می‌شود.

توجه‌کنید‌که ممکن است $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وجود نداشته‌باشد؛ به‌عنوان مثال، فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ به‌این صورت تعریف شده باشد‌که $f(x)=1$ اگر $x<0$ و ۲ اگر $x>0$. دراین حال ۰ یك نقطهٔ انباشتگی $\mathbf{R}-\{0\}$ است ولی $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد. اما، اگر $f(x)=1$ برای $x\neq 0$ ، و $f(0)=0$ ، آنگاه $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

مثالی دیگر ازاین قراراست: $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ ، $f(x)=\sin(1/x)$ ؛ این تابع، درنزدیکی ۰ ، تند وتندتر نوسان می‌کند وبنابراین، درآنجا، نمی‌تواند به حدی نزدیك شود. ولی، اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ، وجود داشته باشد، آنگاه منحصر به‌فرد است، وبنابراین می‌توان گفت که تنها حد f در x_0 است . برای روشنتر کردن مطلب ، گیریم b و b' $\lim_{x\to x_0} f(x)=b$. برای نشان دادن $b=b'$ ، فرض‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

در این صورت $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ وجود دارند به طوری که $\|x-x_0\|<\delta_1$ ایجاب می‌کند $\|f(x)-b\|<\varepsilon/2$ و $\|x-x_0\|<\delta_2$ ایجاب می‌کند $\|f(x)-b'\|<\varepsilon/2$. قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$؛ آنگاه $\|x-x_0\|<\delta$ ایجاب می‌کند

$$\|b-b'\|\leqslant\|b-f(x)\|+\|f(x)-b'\|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

بدین‌سان برای هر ε، داریم $\|b-b'\|<\varepsilon$ و لذا $\|b-b'\|=0$، یا $b=b'$. (این را با یکتایی حد یك دنباله مقایسه کنید، صفحهٔ ۵۶)

حال آماده هستیم تا پیوستگی یك تابع را دریك نقطه تعریف کنیم.

تعریف ۲. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$، $f: A\to\mathbf{R}^m$، وفرض کنیم $x_0\in A$. می‌گوییم که f در x_0 پیوسته است هرگاه یا x_0 یك نقطهٔ انباشتگی A نباشد و یا $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

توجه کنید که تعریف فوق، علاوه بروجود $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$، مقدار مشخص این حد را نیز صریحاً دربر دارد. تعریف ۲ را می‌توان به‌صورت زیر مجدداً جمله‌بندی کرد: f درنقطهٔ x_0، متعلق به‌قلمرواش، پیوسته است اگر، وفقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon>0$، یك $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که، به‌ازای هر $x\in A$، $\|x-x_0\|<\delta$ ایجاب کند $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$. درتعریف ۱، نیازداشتیم که شرط $x\neq x_0$ را تصریح کنیم زیرا f لزوماً در x_0 معین نبود، ولی دراینجا نیازی به تصریح $x\neq x_0$ نیست، زیرا برای $x=x_0$، شرط یقیناً برقرار است.

نماددیگری‌وجودداردکه مفید می‌باشد. فرض کنیم، برای یك مقدار $a>x_0$، تابع f، حداقل در $]x_0, a[$ معین باشد. دراین صورت

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=b$$

به‌معنای حدتابع f در قلمرو $A=]x_0,a[$ است. به عبارت دیگر، برای هر $\varepsilon>0$ یك $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $|x-x_0|<\delta$، $x>x_0$ ایجاب کند $|f(x)-b|<\varepsilon$. بدین‌سان درواقع ما داریم‌حدتابع f را، وقتی که x ازسمت راست به x_0 نزدیك‌می‌شود، محاسبه می کنیم. به‌همین طریق می‌توانیم

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=b$$

را تعریف کنیم، یعنی حد f وقتی که x ازسمت‌چپ به x_0 نزدیك می‌شود. به‌دلایل آشکار، این حدود را، حدود یك طرفه می‌نامند. اینك باید برای خواننده روشن شده باشدکه چگونه عباراتی نظیر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ وغیره را، تعریف کند.

تعریف ۳. می‌گویند تابع $f : A \to \mathbf{R}^m$ در مجموعهٔ $B \subset A$ پیوسته است هرگاه f درهرنقطهٔ B پیوسته باشد. اگرفقط بگوییم f پیوسته است، منظورمان این است که f درقلمروش A پیوسته می‌باشد.

راههای مفید دیگری برای فرموله‌کردن مفهوم پیوستگی وجود دارد. یکی‌ازاینها، به‌ویژه، دارای اهمیت است. زیرا فقط براساس‌توپولوژی (یعنی، مجموعه‌های‌باز) تنظیم شده‌است وبنابراین درموقعیتهای کلیتری‌کاربرد دارد.

قضیهٔ ۱. فرض‌کنیم $f : A \to \mathbf{R}^m$، که درآن $A \subset \mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ دلخواه است، یك تابع باشد. دراین صورت احکام زیر با یکدیگر هم‌ارز هستند.

(یك) f در A پیوسته است.

(دو) برای هردنبالهٔ همگرای $x_k \to x_\circ$ در A، داریم $f(x_k) \to f(x_\circ)$.

(سه) برای هرمجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^m$، $f^{-1}(U) \subset A$ نسبت به A بازاست؛ یعنی، برای یك مجموعهٔ باز V داریم $f^{-1}(U) = V \cap A$.

(چهار) برای هرمجموعهٔ بستهٔ $F \subset \mathbf{R}^m$، $f^{-1}(F) \subset A$ نسبت به A بسته است؛ یعنی، برای یك مجموعهٔ بستهٔ G داریم $f^{-1}(F) = G \cap A$.

درواقع شرط (دو) این قضیه دارای نسخهٔ مشابهی برای حدود است که اثباتش‌نیز نظیر (دو) انجام می‌پذیرد. یعنی، اگر $f : A \to \mathbf{R}^m$ و $x_\circ$ یك نقطهٔ انباشتگی A باشد، آنگاه

$$\lim_{x \to x_\circ} f(x) = b$$

اگر، وفقط اگر، برای هردنبالهٔ $x_k \in A$ که به‌سمت $x_\circ$ همگراست،

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = b$$

ازاین قضیه آشکار می‌شود که تعریف ما ازیك مسیر پیوسته، که درفصل ۳ ارائه کردیم، با آن تعریف پیوستگی که دراینجا آوردیم، یکی است. در بند ۳.۴، قضایایی را اثبات خواهیم‌کردکه ما را قادرخواهند ساخت تا پیوستگی توابع معمولی بیشتری را آشکار سازیم.

اینك موجه بودن قضیهٔ ۱ را اجمالاً مورد بحث قرار خواهیم داد. اول از همه، اینکه (یك) و (دو) یکی هستند بایستی روشن باشد، چرا که (یك) به این معناست که، وقتی x نزدیك به $x_\circ$ است، $f(x)$ نیز نزدیك به $f(x_\circ)$ است، و (دو) نیزهمین معنی را دارد بااین تفاوت که دراینجا x، ازطریق دنباله‌ها، به $x_\circ$ نزدیك می‌شود. احکام (سه) و

(چهار)را نیز، اگر به‌یاد آوریم که مجموعه‌های باز متمم مجموعه‌های بسته هستند، یکی می‌باشند.

حال ببینیم که (سه) به‌ما چه می‌گوید. U را مجموعهٔ باز کوچکی که شامل $f(x_\circ)$ باشد برمی‌گزینیم. دراین صورت از باز بودن $f^{-1}(U)$ این نتیجه را می‌گیریم که یك گرده باز حول $x_\circ$ وجود دارد که تماماً در $f^{-1}(U)$ واقع می‌شود. برای هر x در این گرده، x به U، که نمایش دهندهٔ نقاط نزدیك $x_\circ$ است، نگاشته می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگر U را به عنوان اندازهٔ نزدیکی $f(x)$ به $f(x_\circ)$ تلقی کنیم، آنگاه، اگر x به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیك باشد (یعنی، $x\in f^{-1}(U)$)، $f(x)$ نیز نزدیك به $f(x_\circ)$ خواهدبود. در نتیجه این مطلب حاوی همان پنداره بیان شده در (یك) است.

مثال ۱. فرض کنیم $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ تابع همانی $x \to x$ باشد. ثابت کنید که f پیوسته است.

حل : $x_\circ\in\mathbf{R}^n$ را ثابت نگه می‌داریم. بنابر تعریف، باید، برای $\varepsilon>\circ$ مفروض، $\delta>\circ$ را چنان بیابیم به‌طوری که $\|x-x_\circ\|<\delta$ ایجاب کند $\|f(x)-f(x_\circ)\|<\varepsilon$. اما آشکارا اگر $\delta=\varepsilon$ را انتخاب کنیم، تعریف پیوستگی به‌صورت گزارهٔ، $\|x-x_\circ\|<\varepsilon$ ایجاب می‌کند $\|x-x_\circ\|<\varepsilon$ ، درمی‌آید واین گزاره یك راستگواست. پس f پیوسته است .

مثال ۲. فرض کنیم $f :]\circ , \infty[\to \mathbf{R}$ ؛ $x \to 1/x$. نشان دهید که f پیوسته‌است.

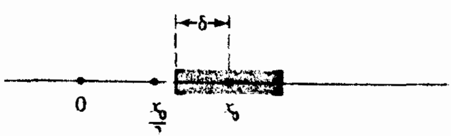
حل : $x_\circ\in]\circ,\infty[$ را ثابت نگه می‌داریم؛ یعنی $x_\circ>\circ$ را ثابت می‌گیریم. برای تعیین اینکه چگونه δ را انتخاب کنیم، عبارت زیررا مطالعه می‌کنیم

$$| f(x)-f(x_\circ) | = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_\circ}\right|$$

$$=\frac{|x_\circ-x|}{|xx_\circ|}$$

اگر $|x-x_\circ|<\delta$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$|f(x)-f(x_\circ)|<\frac{\delta}{|xx_\circ|}=\frac{\delta}{xx_\circ}$$



شکل ۴-۲

حال اگر شرط $x_\circ/۲ > \delta$ را محقق کنیم، آنگاه خواهیم داشت $x > x_\circ/۲$ (شکل ۴-۲)، بنابراین $(۲\delta/x_\circ^۲) > \delta/xx_\circ$. اینک اگر $\varepsilon > \circ$ مفروض باشد، $\delta = \min(x_\circ/۲, \varepsilon x_\circ^۲/۲)$ را انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت استدلال بالا نشان می‌دهد که، برای $|x - x_\circ| < \delta$، داریم $|f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon$. درنتیجه f در $x_\circ$ پیوسته است.

مثال ۳. فرض کنیم $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ پیوسته باشد. نشان‌دهید که $\{x \in \mathbf{R}^n \,|\, \|f(x)\| < ۱\}$ باز است.

حل: مجموعهٔ فوق‌الذکر چیزی جز $f^{-۱}\{y \,|\, \|y\| < ۱\}$، یعنی تصویرمعکوس یك مجموعهٔ باز، نیست، لذا بنابرقضیهٔ ۱ (سه)، بازاست.

تمرینهای بند ۱.۴

۱. (الف) فرض کنیم $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $x \to x^۲$. ثابت کنید که f پیوسته است.
(ب) فرض کنیم $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$، $(x,y) \to x$. ثابت کنید که f پیوسته است.

۲. قسمت (ب) تمرین قبل را به‌کار برید و نشان دهید که اگر $U \subset \mathbf{R}$ باز باشد، آنگاه $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^۲ \,|\, x \in U\}$ نیز باز است.

۳. فرض کنیم $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد. ثابت کنید که $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^۲ \,|\, \circ \leqslant f(x,y) \leqslant ۱\}$ بسته است.

۴. مثالی ازیك تابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و یك مجموعهٔ باز $U \subset \mathbf{R}$ ارائه کنید به‌طوری که $f(U)$ باز نباشد.

۵. مستقیماً ثابت کنید که، درقضیهٔ ۱، ازشرط (سه) شرط (چهار) نتیجه می‌شود.

۲.۴ تصاویرمجموعه‌های فشرده وهمبند

اینك به استنتاج چند نتیجهٔ مهم پیوستگی می‌پردازیم. اولین چیـزی که می‌خواهیم بدانیم این است که، تحت توابع پیوسته، مجموعه‌های فشرده و همبند چگونه رفتار می‌کنند. در این قضایا، وجه تمایز بین واژه‌هـای تصویر و پیش‌تصویر (یعنی، تصویرمعکوس) اهمیت قاطعی دارد؛ قضیهٔ زیررا با قضیه ۱ قبل مقایسه کنید.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $f : A \to \mathbf{R}^m$ یك تابع پیوسته باشد. دراین‌صورت

(یك) اگر $K \subset A$ و K همبند باشد [به‌ترتیب، همبندکمانی]، آنگاه $f(K)$ همبند [به‌ترتیب، همبندکمانی] است.

(دو) اگر $B \subset A$ و B فشرده باشد، آنگاه $f(B)$ فشرده است.

اگر همبندی کمانی را به‌کار ببریم، نتیجهٔ (یك) ازهمه روشنتراست، به‌عبارت دیگر اگر $c(t)$ مسیری در K، واصل بین x و y باشد، آنگاه $f(c(t))$، مسیری در $f(K)$، واصل بین $f(x)$ و $f(y)$ خواهد بود (برای پیوستگی $f(c(t))$ قضیهٔ ۳ زیررا ببینید.) بنابراین $f(K)$ همبندکمانی است.

به‌طورشهودی، نتیجهٔ (دو) کمترآشکار است. اما اگر محك بولتسانو ـ وایرشتراس را برای تشخیص فشردگی به‌کارببریم‌مطلب روشن می‌شود، زیرا اگر $f(x_k)$ دنباله‌ای در $f(B)$ باشد، آنگاه x_k یك زیردنبالهٔ همگرا دارد وبنابراین یك زیردنبالهٔ همگرای‌متناظر برای $f(x_k)$ به‌دست می‌آوریم

مثال ۱. فرض کنیم $K\subset\mathbf{R}^۲$ فشرده باشد. ثابت کنید که

$$A=\{x\in\mathbf{R}\mid (x,y)\in K \text{ به‌طوری‌که } y \text{ وجود دارد}\}$$

نیز فشرده است.

حل: فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}$، $(x,y)\to x$. دراین صورت f پیوسته است (تمرین ۱ بند ۱.۴ را ببینید). ادعا می‌کنیم که $A=f(K)$، بنابراین، طبق قضیهٔ ۲، A فشرده خواهد بود. برای اثبات این ادعا، گیریم $x\in A$. آنگاه برای y ی، داریم $(x,y)\in K$ ولذا $x=f(x,y)\in f(K)$. برعکس، اگر، برای یك $(x,y)\in K$، داشته باشیم $x=f(x,y)$، آنگاه، بنابرتعریف، $x\in A$.

مثال ۲. یك تابع پیوستهٔ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و یك مجموعهٔ فشردهٔ $K\subset\mathbf{R}$ چنان بیابیدکه $f^{-۱}(K)$ فشرده نباشد.

حل: فرض‌کنیم، به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$، $f(x)=۰$ وقرارمی‌دهیم $K=\{۰\}$. دراین صورت $f^{-۱}(K)=\mathbf{R}$ فشرده نیست.

مثال ۳. فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}$ پیوسته‌باشد، وقرارمی‌دهیم $A=\{f(x)\mid \|x\|=۱\}$. نشان دهیدکه A یك بازهٔ بسته است.

حل: آشکارا داریم $A=f(S)$ که درآن $S=\{x\in\mathbf{R}^۲\mid \|x\|=۱\}$ همان دایرهٔ واحد است. اما S همبند وفشرده است، بنابراین A نیز همبند وفشرده است. بنابر

مثال ۳، در پایان فصل ۳، A یك بازه است. ولی تنها فواصل فشرده همان فواصل بسته هستند.

تمرینهای بند ۲.۴

۱. فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد. کدام‌یك از مجموعه‌های زیر لزوماً بسته، باز، فشرده، یا همبند است؟

(الف) $\{x\in\mathbf{R} \mid f(x)=0\}$.

(ب) $\{x\in\mathbf{R} \mid f(x)>1\}$.

(پ) $\{f(x)\in\mathbf{R} \mid x\geqslant 0\}$.

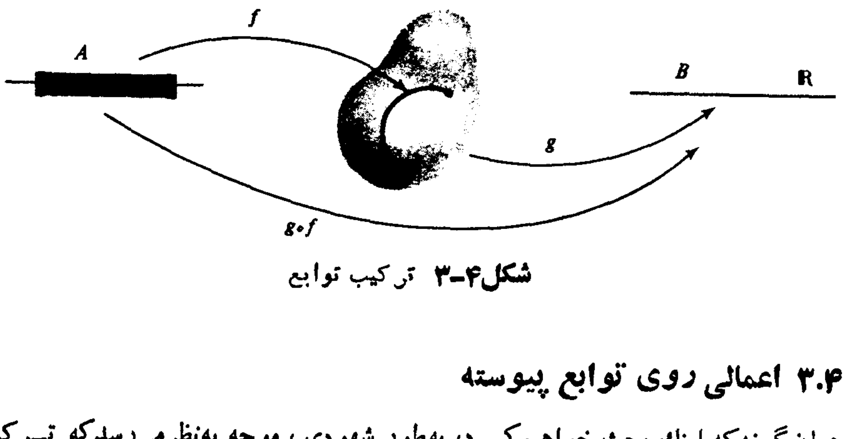
(ت) $\{f(x)\in\mathbf{R} \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

۲. قضیهٔ۲ را برای $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $f(x,y)=x^2+y$، $K=B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ تحقیق کنید.

۳. مثالی از یك تابع پیوستهٔ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و یك مجموعهٔ بستهٔ $B\subset\mathbf{R}$ ارائه کنید به‌طوری که $f(B)$ بسته نباشد. آیا چنین چیزی امکان‌پذیر است، اگرعلاوه بر آن B کراندار باشد؟

۴. فرض کنیم $A,B\subset\mathbf{R}$ ، و گیریم $A\times B\subset\mathbf{R}^2$ همبند باشد. ثابت کنید که A همبند است .

۵. فرض کنیم $A,B\subset\mathbf{R}$ ، وگیریم $A\times B\subset\mathbf{R}^2$ باز باشد. آیا A باید باز باشد؟



شکل۴-۳ ترکیب توابع

۳.۴ اعمالی روی توابع پیوسته

همان گونه که اینك بحث خواهیم کرد، به‌طور شهودی، موجه به‌نظرمی‌رسد که ترکیب توابع پیوسته باید پیوسته باشد. یادآوری کنیم که برای $f:A\to\mathbf{R}^m$ و $g:B\to\mathbf{R}^p$، با فرض $f(A)\subset B$ ، ترکیب $g\circ f:A\to\mathbf{R}^p$ را به وسیلهٔ $x\to g(f(x))$ تعریف می‌کنیم. اگر x نزدیك به x_0 باشد، آنگاه $g\circ f(x)$ نزدیك به $g\circ f(x_0)$ است زیرا که $f(x)$ نزدیك به $f(x_0)$ است؛ بنابراین $g(f(x))$ به $g(f(x_0))$ نزدیك است. شکل ۴-۳ را ببینید.

مطلب بالا دال برموجه بودن نتیجهٔ زیراست.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ و $g:B\to\mathbf{R}^p$ ، بافرض $f(A)\subset B$ ، توابع پیوسته‌ای باشند. دراین صورت $g\circ f:A\to\mathbf{R}^p$ پیوسته است.

به‌عنوان مثال، تابع $e^{\sin x}$ پیوسته است ، زیرا با ترکیب دو تابع پیوستهٔ $f(x)=\sin x$ و $g(x)=e^x$ برابراست.
تبصره: خواص توابع مقدماتی، مانند $\sin x$ ، e^x وغیره را، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموخته‌ایم، می‌پذیریم. اینها را بعداً درمثالهای متعدد به‌کارخواهیم برد.
قضیهٔ زیر بعضی‌از خواص اساسی مربوط به‌محاسبهٔ حدود را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴. فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ ، و گیریم $x_\circ$ یك نقطهٔ انباشتگی A باشد.
(یك) گیریم $f:A\to\mathbf{R}^m$ و $g:A\to\mathbf{R}^m$ دو تابع باشند؛ فرض‌کنیم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)$ وجود داشته و به ترتیب ، با a و b برابر باشند . آنگاه $\lim\limits_{x\to x_\circ} (f+g)(x)$ وجود دارد وبا $a+b$ برابراست(دراینجا $f+g:A\to\mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ تعریف شده است).
(دو) گیریم $f:A\to\mathbf{R}$ و $g:A\to\mathbf{R}^m$ دو تابع باشند ؛ فرض‌کنیم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)$ وجود دارند و به‌ترتیب ، با a و b برابرند.
در این صورت $\lim\limits_{x\to x_\circ} (f\cdot g)(x)$ وجود دارد وبا ab برابر است (در اینجا $f\cdot g : A\to\mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ تعریف شده است).
(سه) گیریم $f:A\to\mathbf{R}$ و $g:A\to\mathbf{R}^m$ دو تابع باشند. فرض کنیم $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)$ وجوددارند، و به‌ترتیب ، با $a\neq\circ$ و b برابرند . آنگاه f دریك همسایگی $x_\circ$ مخالف با صفر است و $\lim\limits_{x\to x_\circ} (g/f)(x)$ وجود دارد وبا b/a برابر است (دراینجا $g/f:A\to\mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ $(g/f)(x)=g(x)/f(x)$ تعریف شده است).

به‌طور شهودی، این نتایج بسیار معقول هستند. به‌عنوان مثال، (یك) می گوید که اگر x نزدیك به $x_\circ$ باشد به‌طوری‌که $f(x)$ نزدیك به a و $g(x)$ نزدیك به b شود، در این صورت $f(x)+g(x)$ نزدیك به $a+b$ است. از قضیهٔ ۴، بعضی از خواص اساسی حساب توابع پیوسته را می‌توانیم بی‌درنگ استنتاج کنیم.

فرع. فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $x_\circ\in A$ یك نقطهٔ انباشتگی A باشد.
(یك) فرض‌کنیم $f : A\to\mathbf{R}^m$ و $g : A\to\mathbf{R}^m$ در $x_\circ$ پیوسته‌باشند؛ دراین‌صورت حاصل‌جمع $f+g : A\to\mathbf{R}^m$ در $x_\circ$ پیوسته است.
(دو) فرض‌کنیم $f: A\to\mathbf{R}$ و $g : A\to\mathbf{R}^m$ در $x_\circ$ پیوسته‌باشند؛ دراین صورت حاصل‌ضرب $f\cdot g : A\to\mathbf{R}^m$ در $x_\circ$ پیوسته است.

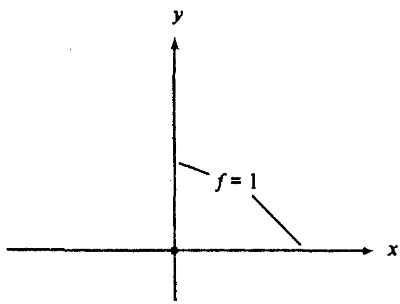
(سه) فرض‌کنیم $f : A \to \mathbf{R}$ و $g : A \to \mathbf{R}^m$ در x_0 پیوسته باشند و $f(x_0) \neq 0$؛ در این صورت f دریک همسایگی U نقطهٔ x_0 مخالف باصفراست وخارج‌قسمت $g/f : U \to \mathbf{R}$ در x_0 پیوسته است.

به‌عنوان مثال دیدیم که تابع $f(x) = x$ از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ پیوسته است و بنابراین $f(x) = x^n$ نیز پیوسته می‌باشد؛ همچنین هرچند جمله‌ای $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ نیز پیوسته است.

حال تابع $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم. f را به‌عنوان تابعی از دو متغیر، $f(x,y)$، تصور می‌کنیم. تمایز قائل شدن بین پیوستگی f (که‌بعضی اوقات پیوستگی توأمان نامیده می‌شود) وپیوستگی نسبت به‌هرمتغیر، جداجدا، دارای اهمیت اساسی‌است. به‌عنوان مثال، تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 1 & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. شکل ۴-۴ را ببینید. نسبت به هریك از دو متغیر، f در $(0,0)$ پیوسته است (توابع $x \to f(x,0)$ و $y \to f(0,y)$ ثابت وبنابراین پیوسته هستند)،



شکل ۴-۴ پیوستگی جداگانه وتوأمان

ولی خود f در $(0,0)$ پیوسته نیست (چرا؟). شرایط کافی مورد نیاز، برای آنکه پیوستگی جداگانه پیوستگی توأمان را ایجاب‌کند، درتمرین ۱۶ پایان همین فصل‌آورده شده‌اند.

مثال ۱. فرض‌کنیم $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $f(x) = x \sin x$. نشان دهیدکه f پیوسته‌است.

حل: می‌دانیم‌که x و $\sin x$ پیوسته هستند و f حاصل‌ضرب دوتابع پیوسته‌است ولذا f پیوسته است.

مثال ۲. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{۲}$ پیوسته باشد. نشان دهید که $g(x)=f(x^{۲}+x^{۳})$ پیوسته است.

حل: g عبارت است از ترکیب f با تابع پیوستهٔ $x\to x^{۲}+x^{۳}$ و بنابراین، بنابرقضیهٔ ۳، پیوسته می‌باشد.

مثال ۳. فرض‌کنیم $f(x)=x^{۲}/(۱+x)$. کجا f پیوسته است؟

حل: ما f را برای $x\neq -۱$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت، بنابرقضیهٔ ۴(سه)، f برای هر $x\neq -۱$ پیوسته است.

تمرینهای بند ۳.۴

۱. درکجا توابع زیر پیوسته هستند؟

(الف) $f(x)=x\sin(x^{۲})$.

(ب) $f(x)=\dfrac{x+x^{۲}}{x^{۲}-۱}$ ، $x^{۲}\neq ۱$، $f(\pm ۱)=۰$.

(پ) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ، $x\neq ۰$، $f(۰)=۱$.

۲. در $\mathbf{R}$، فرض‌کنیم $a_k\to a$ و $b_k\to b$. با استفاده از قضایای ۳ و ۴ ثابت‌کنید $a_kb_k\to ab$.

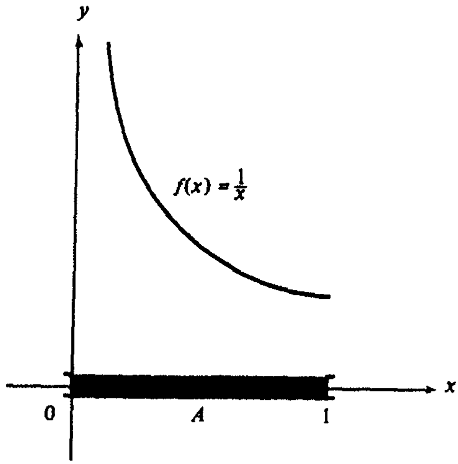
۳. فرض‌کنیم $A=\{x\in\mathbf{R}\mid \sin x=۰٫۵۶\}$. نشان دهیدکه A یك مجموعهٔ بسته است. آیا فشرده است؟

۴. نشان دهید که $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، $x\to\sqrt{|x|}$ پیوسته است.

۵. نشان دهیدکه $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ پیوسته است.

۴.۴ کرانداری توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده

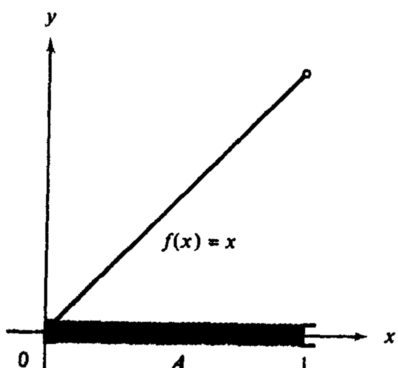
حال آماده هستیم تا یك خاصیت مهم‌توابع پیوستهٔحقیقی را، موسوم به «قضیهٔ‌کرانداری»، اثبات‌کنیم. قضیهٔ کرانداری می‌گویدکه یك تابع پیوسته، معین روی یك مجموعهٔ فشردهٔ،کراندار است و بیشترین مقدار یا مقدار ماکسیمم وکمترین مقدار یا مقدار مینیمم خودرا درنقطه‌ای متعلق به مجموعهٔ مفروض اختیار می‌کند. تعاریف دقیق درقضیهٔ ۵ بیان خواهند شد.



شکل ۴ـ۵ یك تابع پیوستهٔ بی‌کران

برای پی‌بردن به‌ارزش این نتیجه، ببینیم روی یك مجموعهٔ نافشرده، چه چیزی می‌تواند رخ دهد. اول اینکه، یك تابع پیوسته لازم‌نیست کراندار باشد. شکل ۴ـ۵ تابع $f(x)=1/x$ را در بازهٔ باز]۰,۱[نشان می‌دهد. هرچه قدر x به ۰ نزدیکتر شود، تابع مفروض به‌دلخواه بزرگ می‌شود، ولی با وجود این تابع f پیوسته است، زیرا f با خارج قسمت ۱ برتابع پیوستهٔ $x \to x$ ، که در]۰,۱[صفرنمی‌شود، برابر است .

دوم اینکه، می‌توانیم نشان دهیم که حتی اگر تابعی کراندار و پیوسته باشد، ممکن است ماکسیمم خودرا درهیچ‌نقطه‌ای‌ازقلمرواش اختیارنکند. شکل ۴ـ۶ تابع $f(x)=x$ را دربازهٔ [۰,۱[نشان می‌دهد. این تابع هرگز یك مقدار ماکسیمم اختیار نمی‌کند، زیرا اگرچه بی‌نهایت نقطه، به دلخواه، در نزدیکی ۱ وجود دارد، ولی برای هیچ نقطهٔ x



شکل ۴ـ۶ یك تابع بدون ماکسیمم

تساوی $f(x)=1$ برقرار نمی‌شود. از این مثالها، باید نسبتاً آشکار شده باشد، که برای یک تابع پیوسته روی یک مجموعهٔ فشرده، این حالات نامساعد، نمی‌توانند رخ دهند.

حال قضیه را به‌طورصوری بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ و $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد. گیریم $K\subset A$ یک مجموعهٔ فشرده باشد. دراین صورت f در K کراندار است، یعنی $B=\{f(x)\mid x\in K\}\subset\mathbf{R}$ یک مجموعهٔ کراندار است. به علاوه نقاط $x_0, x_1\in K$ وجود دارند به‌طوری‌که $f(x_0)=\inf(B)$ و $f(x_1)=\sup(B)$. $\sup(B)$ را ماکسیمم (مطلق) f در K و $\inf(B)$ را مینیمم (مطلق) f در K می‌نامیم.

در ارزیابی باید توجه‌کنیم که این نتیجه عمیقتراز آزمونهای معمول متکی برمشتق برای تعیین ماکسیمم و مینیمم است که درحساب دیفرانسیل وانتگرال آموخته‌ایم. برای مثال، توابع پیوسته‌ای در $\mathbf{R}$ وجود دارند که درهیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیستند؛ این چنین توابعی را نمی‌توان به‌کمک یک‌خم هموار نمایش داد ولذا شهودما، دراین حالات، چندان روشن نیست (تمرین ۱۹، صفحهٔ ۱۴۴ را ببینید).

مثال ۱. مثالی از یک تابع ناپیوسته دریک مجموعهٔ فشرده ارائه دهید به‌طوری‌که درآن مجموعهٔ کراندار نباشد.

حل: فرض کنیم $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f(x)=1/x$ اگر $x>0$ و $f(0)=0$ تعریف شده باشد. آشکارا این‌تابع، دارای همان خاصیت بی‌کرانی $1/x$ در $]0,1]$ است.

مثال ۲. قضیهٔ ۵ را برای $f(x)=x/(x^2+1)$ در $[0,1]$ تحقیق کنید.

حل: $f(0)=0$، $f(1)=1/2$. مستقیماً تحقیق خواهیم کرد که ماکسیمم در $x=1$ ومینیمم در $x=0$ است. (حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی برای تعیین اینها کمک می‌کند ولی ما مستقیماً تحقیق خواهیم کرد.) اول اینکه، برای $0\leqslant x\leqslant 1$، داریم $x/(x^2+1)\geqslant 0$ زیرا $x\geqslant 0$ و $x^2+1\geqslant 1$؛ بنابراین $f(x)\geqslant f(0)$ برای $0\leqslant x\leqslant 1$. درنتیجه ۰ مینیمم است. دوم آنکه، باتوجه‌به $0\leqslant (x-1)^2=x^2-2x+1$، داریم $x^2+1\geqslant 2x$ ولذا برای $x\neq 0$،

$$\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $f(x)\leqslant f(1)=1/2$؛ درنتیجه $x=1$ نقطهٔ ماکسیمم است.

مثال ۳. نشان دهید که در قضیهٔ ۵، x_0 و x_1 لزوماً منحصر به‌فرد نیستند.

حل: فرض کنیم $f(x)=1$ به‌ازای هر $x\in[0,1]$. دراین‌صورت هر $x_0,x_1\in[0,1]$ پاسخگوی قضیه هستند.

تمرینهای بند ۴.۴

۱. مثالی از یك تابع پیوسته و کراندار در کل $\mathbf{R}$ ارائه دهید که برای آن قضیهٔ ۵ برقرار نباشد.

۲. قضیهٔ ۵ را برای $f(x)=x^3-x$ در $[-1,1]$ تحقیق کنید.

۳. فرض کنیم $f:K\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ در مجموعهٔ فشردهٔ K پیوسته باشد و قرار می‌دهیم: $M=\{x\in K \mid$ ماکسیمم f در K است $f(x)\}$. نشان‌دهید که M یك‌مجموعهٔ فشرده است.

۴. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، $x,y\in A$ و $c:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ یك‌خم واصل بین x و y باشد. نشان دهید که f، درطول این خم، مقادیرماکسیمم ومینیمم خود را اختیار می‌کند.

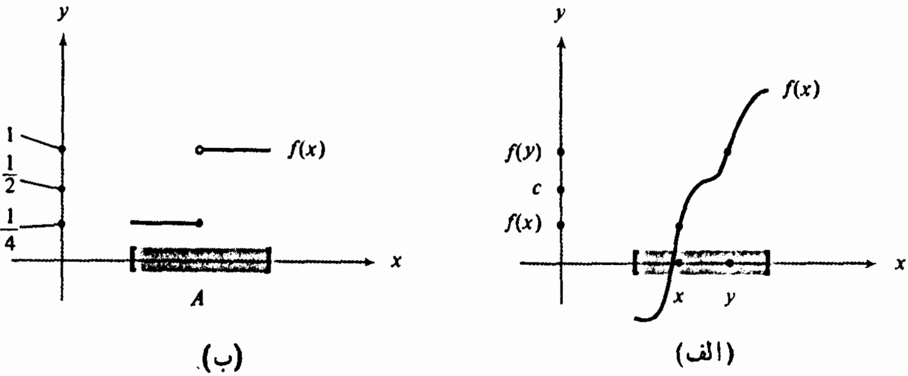
۵. قضیهٔ ۵ را برای $f(x)=(\sin x)/x$ در $]0,\infty[$ مورد مطالعه قراردهید.

۵.۴ قضیهٔ مقدار میانی

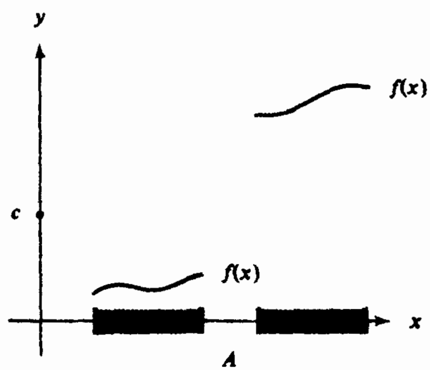
محتملاً باقضیهٔ مقدارمیانی درحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی‌آشنا شده‌اید. این‌قضیه می‌گوید که یك تابع پیوسته دریك بازه، همهٔ مقادیر موجود بین هردومقدار مفروض را اختیار می‌کند. شکل ۴ـ۷ (الف) را ببینید. تابع ناپیوستهٔ f درشکل ۴ـ۷ (ب) هرگز مقدار ۱/۲ را اختیار نمی‌کند. به‌طور اختصار، این قضیه می‌گوید، اگرچه یك تابع ناپیوسته می‌تواند از یك مقدار به مقدار دیگری جهش‌کند، یك تابع پیوسته باید از همهٔ مقادیرمیانی عبورکند.

حالت دیگری که خاصیت مقدار میانی می‌تواند برقرارنباشد، آن است که قلمرو A همبند نباشد؛ این نکته به‌وسیلهٔ تابع پیوسته شکل ۴ـ۸ آشکارشده است.

بنابراین مفروضات اساسی عبارتند از اینکه f پیوسته بوده و دریك ناحیهٔ همبند تعریف شده باشد. خواهیم دیدکه اثبات قضیهٔ ۶، به‌دلیل روشی‌که برای تنظیم مفهوم همبندی به‌کار بردیم، نسبتاً ساده است (مثال ۱ را ذیلاً واثبات قضایا را در پایان همین فصل ببینید).



شکل ۴-۷ قضیه مقدارمیانی



شکل ۴-۸ تابع پیوسته با قلمرو ناهمبند

قضیهٔ ۶. فرض‌کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ و $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد. گیریم $K\subset A$ همبند باشد و $x,y\in K$. برای هرعدد $c\in\mathbf{R}$ به‌طوری که $f(x)\leqslant c\leqslant f(y)$، یك نقطه $z\in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z)=c$.

چون بازه‌ها (باز یا بسته) همبند هستند (این مطلب درمثال ۳، درپایان فصل ۳ به اثبات رسید) لذا قضیهٔ مقدارمیانی معمولی حالت خاصی از قضیهٔ ۶ می‌شود. با وجود این توجه داشته باشید که قضیهٔ ۶ کلیتراست، به‌عنوان مثال می‌توان آن را برای توابع پیوستهٔ حقیقی چند متغیره $f(x_1,\dots,x_n)$ که در کل $\mathbf{R}^n$ تعریف شده‌اند به کاربرد، زیرا $\mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ همبند است.

مثال ۱. با استفاده ازاین امرمسلم که $f(K)$ همبنداست یکی‌ازطرق ممکن‌اثبات قضیهٔ ۶ را مورد بحث قراردهید.

حل: اینکه $f(\mathbf{k})$ همبند است از قضیهٔ ۲ ناشی می‌شود. بنابراین $f(\mathbf{k})$ یك بازه است و شاید هم بازه‌ای نامتناهی. اما اگر $f(x)\,,\,f(y)\in f(\mathbf{k})$ ، آنگاه $[f(x)\,,\,f(y)]\subset f(\mathbf{k})$، زیرا $f(\mathbf{k})$ یك بازه است. بنابراین اگر c نظیر همان عدد قضیهٔ ۶ باشد، $c\in[f(x),f(y)]$ ؛ پس $c\in f(\mathbf{k})$ ، و لذا به‌ازای z، $c=f(z)$. درواقع این یکی از طرق اثبات قضیهٔ ۶ است . طریقهٔ دیگری در بند اثبات قضایا آورده شده است.

مثال ۲. فرض کنیم $f(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ سوم باشد. ثابت کنید که f یك ریشهٔ (حقیقی) $x_\circ$ دارد (یعنی، $f(x_\circ)=\circ$).

حل: $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ که درآن $a\neq\circ$. گیریم که $a>\circ$ باشد. برای $x>\circ$ ، x بزرگ، $ax^{۳}$ بزرگ (و مثبت) است و بزرگتر ازجملات دیگر است، و بنابراین، اگر $x>\circ$ و x بزرگ باشد، $f(x)>\circ$ است. این مطلب نیاز به‌اثبات دقیق دارد، ولی به‌طور شهودی، بایستی آشکار باشد. به‌همین ترتیب ، اگر x بزرگ و منفی باشد، $f(x)<\circ$ است. بنابراین می‌توانیم قضیهٔ مقدارمیانی را به‌کار ببریم و وجود یك نقطهٔ $x_\circ$ را ، که درآن $f(x_\circ)=\circ$، نتیجه بگیریم.

مثال ۳. فرض کنیم $f:[۱,۲]\to[\circ,۳]$ یك تابع پیوسته با $f(۱)=\circ$ ، $f(۲)=۳$ باشد. نشان دهید که f یك نقطهٔ ثابت دارد. یعنی، نشان دهید که یك نقطهٔ $x_\circ\in[۱,۲]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x_\circ)=x_\circ$.

حل: قرار می‌دهیم $g(x)=f(x)-x$. در این صورت f پیوسته است و $g(۱)=f(۱)-۱=-۱$ و $g(۲)=f(۲)-۲=۳-۲=۱$. بنابراین براساس قضیهٔ مقدار میانی، g باید در یك نقطهٔ $x_\circ\in[۱,۲]$ صفر شود و این $x_\circ$ یك نقطهٔ ثابت برای $f(x)$ است .

تمرینهای بند ۵.۴

۱. وقتی روش‌مورد استفاده در مثال ۲ را برچندجمله‌ایهای درجهٔ دوم اعمال‌کنید چه رخ خواهد داد؟ و اگر برچندجمله‌ایهای درجهٔ پنجم اعمال‌کنید؟

۲. فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ پیوسته‌باشد. فرض کنیم $\Gamma=\{(x,f(x))\mid x\in\mathbf{R}^n\}$ نمودار f در $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ باشد. ثابت‌کنید که Γ بسته است.

۳. فرض‌کنیم $f:[\circ,۱]\to[\circ,۱]$ پیوسته باشد. ثابت‌کنید‌که f یك نقطهٔ ثابت دارد.

۴. فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد. نشان دهیدکه برد f یك بازهٔ بستهٔ کراندار است.

۵. ثابت کنید که هیچ تابع پیوسته از $[0,1]$ به روی $]0,1[$ وجود ندارد.

۶.۴ پیوستگی یکنواخت

بعضی اوقات مفید است که یك شکل ساده از تعریف پیوستگی در اختیار داشته باشیم. اغلب اوقات در کاربردها نکاتی فنی، نظیر شیوه‌های تقلیل‌دهندهٔ زحمت در اثباتها، ظاهر می‌شوند. با وجود این مفهوم تابع به‌طور یکنواخت پیوسته مفهومی بنیادی است و وسیعاً به‌کار برده می‌شود. تعریف دقیق ذیلاً می‌آید.

تعریف ۳. فرض کنیم $f:A \to \mathbf{R}^m$ و $B \subset A$. می‌گوییم که f، در مجموعهٔ B، به‌طور یکنواخت پیوسته است هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یك عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که از $x, y \in B$ و $d(x,y) < \delta$ نتیجه بشود $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

تعریف بالا همانند تعریف پیوستگی است با این تفاوت که دراینجا باید قادر باشیم δ را چنان برگزینیم تا برای ε داده شده‌ای، به‌ازای هر x، y مناسب باشد. در مورد پیوستگی از ما فقط خواسته شده بود، تا برای $\varepsilon > 0$ داده شده و یك x_0 بخصوص، δ را برگزینیم. روشن است که اگر f به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

به‌عنوان مثال تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت f یقیناً پیوسته است، ولی به‌طور یکنواخت پیوسته‌نیست. در واقع، برای $\varepsilon > 0$ و $x_0 > 0$ داده شده، $\delta > 0$ مورد نیاز، حداقل به کوچکی $\varepsilon/(2x_0)$ است، بنابراین اگر x_0 را بزرگ انتخاب کنیم، δ باید کوچکتر شود. لذا یك δ واحد، مناسب به‌ازای هر x_0، وجود ندارد. همان‌گونه که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد، این پدیده در مجموعه‌های فشرده نمی‌تواند رخ دهد.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم $f: A \to \mathbf{R}^m$ پیوسته و $K \subset A$ یك مجموعهٔ فشرده باشد. دراین‌صورت f در K به‌طور یکنواخت پیوسته است.

درقضیهٔ ۷، مجموعه‌هایی که صرفاً کراندار هستند به‌کار نمی‌آیند، زیرا ببینیم در مجموعهٔ نافشردهٔ $]0,1[$ چه چیزی می‌تواند رخ دهد. فرض کنیم $f(x) = 1/x$. در این صورت اگر اثبات پیوستگی f (مثال ۲، بند ۱.۴) را مورد بررسی قرار دهیم، مجدداً می‌بینیم که f به‌طور یکنواخت پیوسته نیست. البته نمی‌توانیم f را در مجموعهٔ فشردهٔ $[0,1]$ به‌یك تابع پیوسته مبدل کنیم، زیرا f بی‌کران است.

یك محك بسیار سودمند دیگر برای تشخیص پیوستگی یکنواخت در مثال ۲ زیرین ارائه شده است.

مثال ۱. فرض کنیم $f:]0,1] \to \mathbf{R}$، $f(x) = 1/x$. نشان دهید که، برای $a > 0$، f

در $[a,1]$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

حل: حل مثال را می‌توان بی‌درنگ از قضیهٔ ۷ استنتاج کرد، زیرا $[a,1]$ یک مجموعهٔ فشرده است.

مثال ۲. فرض کنیم $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ مشتق‌پذیر باشد و گیریم $|f'(x)| \leqslant M$. در اینجا، a یا b ممکن است $\pm\infty$ باشند و f' به‌معنای مشتق f است. نشان دهید که f در $]a,b[$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

حل: تعریف پیوستگی یکنواخت از ما می‌خواهد تا مقدار $|f(x)-f(y)|$ را برحسب $|x-y|$ تخمین بزنیم. این مطلب، استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین را به‌ما القا می‌کند (برای بازبینی صفحه ۱۹۹ را ببینید). در واقع، برای یک x_0 بین x و y، داریم

$$f(x)-f(y)=f'(x_0)(x-y)$$

بنابراین

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$$

برای $\varepsilon>0$ داده شده، انتخاب می‌کنیم $\delta=\varepsilon/M$. آنگاه $|x-y|<\delta$ ایجاب می‌کند که

$$|f(x)-f(y)|<M\cdot\delta=M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon$$

درنتیجه f به‌طور یکنواخت پیوسته است.

دراینجا شهود می‌تواند روشنایی بیشتری به‌پیوستگی یکنواخت بدهد. یعنی، این نتیجه می‌گوید که اگر شیب نمودار یک تابع کراندار باشد، آنگاه آن تابع به‌طور یکنواخت پیوسته است. هنگام بررسی توابع مشخص یا نمودارهایشان، نکتهٔ اخیر اغلب راهنمای خوبی است.

مثال ۳. نشان دهید که $\sin x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

حل: قدرمطلق $d(\sin x)/dx=\cos x$ کراندار است، لذا بنابرمثال ۲، $\sin x$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

تمرینهای بند ۶.۴

۱. نتیجهٔ مثال ۱ را مستقیماً، با توجه به‌تعریف اثبات کنید.

۲. ثابت کنید که برای $a>0$، تابع $f(x)=1/x$ در $[a,\infty[$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

۳. آیا فکر می‌کنید که یك تابع پیوسته و کراندار در $\mathbf{R}$ باید به‌طور یکنواخت پیوسته باشد؟

۴. اگر $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشند، آیا باید حاصل‌ضرب $f.g$ به طور یکنواخت پیوسته باشد؟ اگر f و g کراندار باشند چطور؟

۵. فرض کنیم $f(x)=|x|$. نشان دهید که $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

۶. نشان دهید که $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته نیست اگر، وفقط اگر، یك عدد $\varepsilon > 0$ و دنباله‌های x_n و y_n وجود داشته باشد به‌طوری که $|x_n - y_n| < 1/n$ و $|f(x_n)-f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. این نتیجه را به‌کار برید و ثابت کنید که $f(x)=x^2$ به طور یکنواخت پیوسته نیست.

برهان قضایای فصل ۴

قضیهٔ ۱ . فرض کنیم $f : A \to \mathbf{R}^m$، که در آن $A \subset R^n$ یك مجموعهٔ دلخواه است، یك تابع باشد. دراین‌صورت احکام زیر بایکدیگر هم‌ارز هستند.

(یك) f در A پیوسته است.

(دو) برای هردنباله همگرای $x_k \to x_0$ در A، داریم $f(x_k) \to f(x_0)$.

(سه) برای هرمجموعهٔ باز U در $\mathbf{R}^m$، $f^{-1}(U) \subset A$ نسبت به A باز است؛ یعنی، برای یك مجموعهٔ باز V داریم $f^{-1}(U)=V \cap A$.

(چهار) برای هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subset \mathbf{R}^m$، $f^{-1}(F) \subset A$ نسبت به A بسته است؛ یعنی، برای یك مجموعهٔ بستهٔ G داریم $f^{-1}(F)=G \cap A$.

برهان: الگوی اثبات به‌این‌صورت خواهدبود (یك) $\Longrightarrow$ (دو) $\Longrightarrow$ (چهار) $\Longrightarrow$ (سه) $\Longrightarrow$ (یك).

برهان‌اینکه (یك) $\Longrightarrow$ (دو): گیریم $x_k \to x_0$. برای‌نشان‌دادن $f(x_k) \to f(x_0)$، فرض کنیم $\varepsilon > 0$؛ باید یك‌عدد صحیح N بیابیم به طوری که از $k \geqslant N$ نتیجه بشود $d(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon$. برای انجام این منظور، $\delta > 0$ را چنان برمی گزینیم که $d(x,x_0) < \delta$ ایجاب کند $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. پیوستگی f وجود یك‌چنین δای را تضمین کرده است. حال N را چنان انتخاب می کنیم که $k \geqslant N$ ایجاب کند $d(x_k, x_0) < \delta$. این انتخاب N، حکم مطلوب‌را برقرار می‌سازد.

برهان اینکه (دو) $\Longrightarrow$ (چهار): فرض‌کنیم $F \subset \mathbf{R}^m$ بسته باشد. برای آنکه نشان دهیم $f^{-1}(F)$ در A بسته است، از این امرمسلم استفاده می کنیم که یك‌مجموعهٔ B نسبت به A بسته‌است اگر، وفقط اگر، برای‌هردنبالهٔ $x_k \in B$ که به‌سمت یك‌نقطهٔ $x \in A$ همگرا است، داشته باشیم $x \in B$ (قضیهٔ ۹ فصل ۲ را ببینید). خواننده بایستی‌اثبات این‌حکم‌را خود روی کاغذ بیاورد. حال فرض کنیم $x_k \in f^{-1}(F)$ و $x_k \to x$ که در آن $x \in A$. باید نشان دهیم

که $x\in f^{-1}(F)$. اما، بنا بر (دو)، $f(x_k)\to f(x)$ ، وچون $f(x_k)\in F$ و F بسته‌است، نتیجه می گیریم که $f(x)\in F$. بنا براین $x\in f^{-1}(F)$.

برهان‌اینکه (چهار) $\Longrightarrow$ (سه) : اگر U بازباشد، قرارمی‌دهیم $F=\mathbf{R}^m\setminus U$، که یك مجموعهٔ بسته است. دراین صورت، بنابر (چهار) ، برای یك مجموعهٔ بستهٔ G ، داریم $f^{-1}(F)=G\cap A$. بنابراین $f^{-1}(U)=A\cap(\mathbf{R}^n\setminus G)$ ، لذا $f^{-1}(U)$ نسبت به A باز است.

برهان‌اینکه (سه) $\Longrightarrow$ (یك): برای $x_\circ\in A$ و $\varepsilon>\circ$ داده‌شده باید δ را چنان بیابیم که $d(x,x_\circ)<\delta$ ایجاب کند $d(f(x)\ ,\ f(x_\circ))<\varepsilon$. چون $D(f(x_\circ),\varepsilon)$ یك‌مجموعهٔ بازاست، بنابر (سه) ، $f^{-1}(D(f(x_\circ),\varepsilon))$ بازاست. بنابراین، باتوجه به‌تعریف‌مجموعهٔ باز و این واقعیت که $x_\circ\in f^{-1}(D(f(x_\circ),\varepsilon))$ ، یك $\delta>\circ$ وجود دارد به طوری که $D(x_\circ,\delta)\cap A\subset f^{-1}(D(f(x_\circ),\varepsilon))$.مطلب‌اخیرطریقهٔدیگر بیان$(x\in A,d(x,x_\circ)<\delta)$ $\Longrightarrow$ $(d(f(x)\ ,\ f(x_\circ))<\varepsilon)$ است. ■

برای تمرین‌کردن با این مفاهیم ، خواننده باید کوشش‌کند (مستقیماً) استلزامهای دیگر فوق‌الذکر رابه اثبات برساند؛ برای مثال، (یك) $\Longrightarrow$ (سه) ، یا (دو)$\Longrightarrow$ (یك).

قضیهٔ ۲ . فرض‌کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ یك تابع‌پیوسته باشد. دراین‌صورت

(یك) اگر $K\subset A$ همبند باشد، آنگاه $f(K)$ همبنداست؛

(دو) اگر $B\subset A$ فشرده باشد، آنگاه $f(B)$ فشرده است.

برهان:(یك) گیریم$f(K)$ همبندنباشد. دراین‌صورت،بنابرتعریف، می‌توانیم بنویسیم $f(K)\cap U\cup V$، که درآن $U\cap V\cap f(K)=\varnothing$،$U\cap f(K)\neq\varnothing$،$V\cap f(K)\neq\varnothing$، و U ، V مجموعه‌های‌باز هستند. اما، برای یك مجموعهٔ باز U' ، $f^{-1}(U)=U'\cap A$ ، و به همین‌ترتیب برای‌یك مجموعهٔ باز V' ، $f^{-1}(V)=V'\cap A$. باتوجه به شرایطی که برای U ، V قائل‌شدیم، می بینیم که $U'\cap V'\cap K=\varnothing$ ، $K\subset U'\cup V'$ ، $U'\cap K\neq\varnothing$، و $V'\cap K\neq\varnothing$. بنابراین K همبند نیست، واین نکته‌حکم‌را ثابت می کند.

(دو) فرض‌کنیم y_k دنباله‌ای در $f(B)$ باشد. بنابرقضیهٔ۱ فصل۳ باید نشان داده شود که y_k دارای یك زیر دنبالهٔ همگرا، به سمت یك نقطهٔ $f(B)$ است. فرض‌کنیم، برای $x_k\in B$ ، $y_k=f(x_k)$. چون B فشرده است، یك زیر دنبالهٔ همگرا وجود دارد، مثلاً $x_{k_n}\to x$ برای یك $x\in B$. حال، بنابرقضیهٔ۱ (دو)، $f(x_{k_n})\to f(x)$ ، بنابراین$f(x_{k_n})$ یك زیر دنبالهٔ همگرای y_k است. ■

قسمت همبندکمانی قضیه۲ (یك) به همان‌طریقی اثبات می‌شودکه در متن آمد. در اثبات (دو)آن ویژگی مجموعه‌های فشرده‌را به‌کار بردیم که می گوید هردنبالهٔ آن دارای یك‌زیردنبالهٔ همگراست. همچنین می‌توانیم محك هاینه ـ بورل را برای‌مجموعه‌های‌فشرده مورداستفاده قراردهیم (آن‌را انجام دهید). توجه‌کنید‌که، درحالت‌کلی ، لازم نیست که

تصویر پیوستهٔ یك مجموعهٔ بسته، بسته باشد. بنابراین در اثبات اینکه $f(B)$ هم بسته و هم کراندار است، فشردگی B نقش اساسی دارد.

قضیهٔ ۳. گیریم $f:A\to\mathbf{R}^m$ و $g:B\to\mathbf{R}^p$ ، با فرض $f(A)\subset B$ ، توابع پیوسته‌ای باشند. در این صورت $g\circ f:A\to\mathbf{R}^p$ پیوسته است.

برهان: فرض کنیم $U\subset\mathbf{R}^p$ باز باشد. آنگاه $(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$. اما، به‌ازای یك مجموعهٔ باز U' ، $g^{-1}(U)=U'\cap B$ و $f^{-1}(U'\cap B)=f^{-1}(U')$، زیرا $f(A)\subset B$. چون f پیوسته است، برای یك مجموعهٔ U'' داریم $f^{-1}(U')=U''\cap A$. بنابراین، بنابر قضیهٔ ۱، $g\circ f$ پیوسته است. ■

شرایط دیگر قضیهٔ ۱ را نیز می‌توان به همان آسانی برای اثبات قضیهٔ ۳ به‌کار برد. به جای اثبات قضیهٔ ۴، خود را به اثبات فرع آن محدود می‌کنیم. حالت کلی به‌طریق مشابه انجام می‌پذیرد؛ تنها پیچیدگی در نمادگذاری است.

فرع. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$.

(یك) فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ و $g:A\to\mathbf{R}^m$ پیوسته باشند. در این صورت $f+g:A\to\mathbf{R}^m$، که به‌وسیلهٔ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ تعریف می‌شود، پیوسته است.

(دو) فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}$ و $g:A\to\mathbf{R}^m$ پیوسته باشند. در این صورت $f\cdot g:A\to\mathbf{R}^m$، که به‌وسیلهٔ $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ تعریف می‌شود (ضرب اسکالر $f(x)$ در بردار $g(x)$)، پیوسته است.

(سه) فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}$ و $g:A\to\mathbf{R}^m$ در $A\subset\mathbf{R}^n$ پیوسته باشند. اگر به‌ازای هر $x\in A$ ، $f(x)\neq 0$ ، آنگاه g/f در A پیوسته است.

برهان: (یك) فرض کنیم $x_0\in A$ و گیریم $\varepsilon>0$ داده‌شده باشد. $\delta_1>0$ و $\delta_2>0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $d(x,x_0)<\delta_1$ ایجاب کند $d(f(x)\ ,\ f(x_0))<\varepsilon/2$ و $d(x\ ,\ x_0)<\delta_2$ ایجاب کند $d(g(x)\ ,\ g(x_0))<\varepsilon/2$. حال فرض کنیم δ مینیمم δ_1 ، δ_2 باشد. بنابراین، اگر $d(x\ ,\ x_0)<\delta$ ، بنابر نامساوی مثلثی، داریم

$$\|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)\|=\|f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)\|$$

$$\leqslant\|f(x)-f(x_0)\|+\|g(x)-g(x_0)\|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(دو) فرض کنیم $x_0\in A$ و گیریم $\varepsilon>0$. δ_1 را چنان انتخاب می‌کنیم که $d(x,x_0)<\delta_1$ ایجاب کند $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon/2\|g(x_0)\|$ و $|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1$ (چرا این انتخاب امکان‌پذیر است؟). همچنین δ_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که $d(x,x_0)<\delta_2$

ایجاب کند $\|g(x)-g(x_0)\|<\varepsilon/2[|f(x_0)|+1]$. در این صورت برای $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$، ایجاب می‌کند (بنابر نامساوی مثلثی)

$$\|fg(x)-fg(x_0)\|=\|f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+$$
$$f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)\|$$
$$\leqslant|f(x)|\|g(x)-g(x_0)\|+|f(x)-f(x_0)|\|g(x_0)\|$$

(با استفاده از این امر که، برای $x\in\mathbf{R}^n$، $\alpha\in\mathbf{R}$، داریم $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$). اگر تخمین بالا را ادامه دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$\|fg(x)-fg(x_0)\|<(|f(x_0)|+1)\frac{\varepsilon}{2(|f(x_0)|+1)}+\|g(x_0)\|\frac{\varepsilon}{2\|g(x_0)\|}$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(سه) بنابر اثبات (دو) کافی است حالت $1/f$ را در نظر بگیریم، زیرا که $g/f=g\cdot(1/f)$.

برای نشان‌دادن این‌که $1/f$ پیوسته است، به ازای $x_0\in A$ داده شده، δ_1 را چنان انتخاب می‌کنیم که، برای $\|x-x_0\|<\delta_1$، داشته باشیم $|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x_0)|/2$. به‌دلیل پیوستگی f این مطلب امکان‌پذیر است. نتیجه می‌شود که $|f(x)|\geqslant|f(x_0)|/2$. حال برای $\varepsilon>0$ مفروض، δ_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|x-x_0\|<\delta_2$ ایجاب کند

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon|f(x_0)|^2}{2}$$

دراین‌صورت اگر $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$، $\|x-x_0\|<\delta$ ایجاب می‌کند

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right|=\left|\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x_0)f(x)}\right|\leqslant\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|f(x_0)|^2/2}<\varepsilon$$

مطلب اخیر نشان می‌دهد که $1/f(x)$ در x_0 پیوسته است، و بنابراین در A پیوسته می‌باشد. ■

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ و $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد. فرض کنیم $K\subset A$ یك مجموعهٔ فشرده باشد. در این صورت f در K کراندار است، یعنی $B=\{f(x)|x\in K\}\subset\mathbf{R}$ یك مجموعهٔ کراندار است. به‌علاوه نقاط $x_0,x_1\in K$ وجود دارند به‌طوری‌که $f(x_0)=\inf(B)$ و $f(x_1)=\sup(B)$. $\sup(B)$ را ماکسیمم (مطلق) f در K و $\inf(B)$ را مینیمم (مطلق) f در K می‌نامیم.

برهان: اولاً B از بالا کراندار است، زیرا بنا بر قضیهٔ ۲، $B=f(K)$ فشرده است و بنا براین، بنا بر تعریف فشردگی، بسته و کراندار است. ثانیاً می‌خواهیم x_1ی بیابیم به‌طوری که $x_1 \in K$ و $f(x_1)=\sup(B)$. حال، چون B بسته است، $\sup(B)\in B=f(K)$ (تمرین ۸ فصل ۲ را ببینید). در نتیجه، برای یك $x_1\in K$، $\sup(B)=f(x_1)$.
حالت $\inf(B)$ نیز به‌طریق مشابهی بررسی می‌شود. (دانشجو بایستی جزئیات آن را روی کاغذ بیاورد.) ■

تبصره: می‌توانیم حالت $\inf(B)$ را با به‌کار بردن حالت سوپرموم بالا، درمورد $-f$ و با توجه به‌اینکه ماکسیمم $-f$ همان مینیمم f است، به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ و $f:A\to \mathbf{R}$ پیوسته باشد. گیریم $K\subset A$ همبند باشد و $x, y\in K$. برای هرعدد $c\in\mathbf{R}$ به‌طوری که $f(x)\leqslant c\leqslant f(y)$، یك نقطهٔ $z\in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z)=c$.

برهان: فرض کنیم چنین zی وجود نداشته باشد. آنگاه قرار می‌دهیم $U=]-\infty, c[=\{t\in\mathbf{R}|t<c\}$ و $V=]c, \infty[$. آشکاراست که هردوی U و V مجموعه‌های باز هستند. چون f پیوسته است، برای یك مجموعهٔ باز $U_\circ$، داریم $f^{-1}(U)=U_\circ\cap K$ و به‌طور مشابه $f^{-1}(V)=V_\circ\cap K$. بنا بر تعریف U و V داریم $U_\circ\cap V_\circ\cap K=\varnothing$، و با توجه به‌فرض $\{z\in K|f(z)=c\}=\varnothing$، داریم $U_\circ\cup V_\circ\supset K$. همچنین، $U_\circ\cap K\neq\varnothing$، زیرا $x\in U$؛ و $V_\circ\cap K\neq\varnothing$، زیرا $y\in V_\circ$. بنا براین K همبند نیست و این یك تناقض است. ■

قضیهٔ ۷. فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ پیوسته و $K\subset A$ یك مجموعهٔ فشرده باشد. در این صورت f در K به‌طوریکنواخت پیوسته است.

برهان: به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، برای هر $x\in K$، δ_x را چنان انتخاب می‌کنیم که $d(x,y)<\delta_x$ ایجاب کند $d(f(x), f(y))<\varepsilon/2$. مجموعه‌های $D(x,\delta_x/2)$، K را می‌پوشانند و بازهستند. بنا براین یك پوشش متناهی، نظیر $D(x_1,\delta_{x_1}/2)$، ...، $D(x_N,\delta_{x_N}/2)$ وجود دارد. قرار می‌دهیم، مینیمم $\delta=\delta_{x_1}/2, \ldots, \delta_{x_N}/2$. در این صورت اگر $d(x,y)<\delta$، x_iی وجود دارد به‌طوری که $d(x,x_i)<\delta_{x_i}/2$ (زیرا گرده‌های فوق‌الذکر K را می‌پوشانند)، و بنا براین $d(x_i, y)\leqslant d(x,x_i)+d(x,y)<\delta_{x_i}$. درنتیجه، بنا بر انتخاب δ_{x_i}، $d(f(x), f(y))\leqslant d(f(x),f(x_i))+d(f(x_i),f(y))<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. ■

مثالهای حل شدهٔ فصل ۴

۱. فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ به‌صورت

$$f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

نوشته شود. دراین‌صورت نشان دهیدکه f پیوسته است اگر، وفقط اگر، هرمولفهٔ f_i پیوسته باشد، $i=1, \ldots, m$.

حل: فرض کنیم f پیوسته باشد. اگر در A، $x_k \to x$ باید نشان دهیم‌که، برای هر i $f_i(x_k) \to f_i(x)$، اما این نتیجهٔ بی‌درنگ این امراست‌که $f(x_k) \to f(x)$ و اینکه، یك دنباله در $\mathbf{R}^m$ (دراینجا $(f(x_k))$) همگراست اگر ، وفقط اگر، دنباله‌های مؤلفه‌ای‌آن همگرا باشند (بند ۷.۲ را ببینید). همین استدلال عکس مطلب را برقرار می‌سازد.

۲. فرض‌کنیم $f: A \to \mathbf{R}^m$ پیوسته باشد. اگر $K \subset A$ یك مجموعهٔ همبند باشد، نشان دهیدکه $\{(x, f(x)) | x \in K\}$ در $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}$ همبند است. البته‌این مجموعه دقیقاً همان نمودار f است.

حل: تابع $g: K \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ راکه‌با $g(x)=(x, f(x))$ تعریف شده‌است، درنظرمی گیریم. بنا برمثال‌قبل، g پیوسته‌است. اما $g(K)=\{(x, f(x)) | x \in K\}$، و بنا بر قضیهٔ ۲، تصویریك مجموعهٔ همبند، همبند است.

۳. فرض‌کنیم $f: A \to \mathbf{R}^m$ در $x_0 \in A$ پیوسته، A باز و $f(x_0) \neq 0$ باشد. دراین‌صورت نشان دهیدکه f دریك همسایگی x_0 ناصفراست.

حل: بنا بر تعریف پیوستگی، به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض یك همسایگی U نقطهٔ x_0 وجود دارد به‌طوری کــه، به‌ازای هر $x \in U$، $\|f(x)-f(x_0)\| < \varepsilon$. برای منظور خود، $\varepsilon = \|f(x_0)\|$ انتخـاب می‌کنیم. آنگاه $\|f(x)-f(x_0)\| < \|f(x_0)\|$ ایجاب می‌کندکه $f(x) \neq 0$، زیرا این درست نیست‌که $\|-f(x_0)\| < \|f(x_0)\|$ (با هم مساوی هستند). بنابراین درهمسایگی U که به‌وسیلهٔ $\varepsilon = \|f(x_0)\|$ تعیین می‌شود، f ناصفراست.

۴. نشان دهیدکه یك تابع خطی $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ پیوسته است.

حل: نشان خواهیم داد که برای تابع خطی مفروض $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ می‌توانیم عددی مانند M بیابیم به‌طوری‌که، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}^n$، $\|L(x)\| \leqslant M\|x\|$. دراین‌صورت $\|x-x_0\| < \varepsilon / M$ ایجاب می‌کندکه

$$\|L(x)-L(x_0)\| = \|L(x-x_0)\| \leqslant M\|x-x_0\| < \varepsilon$$

و نامساوی اخیر پیوستگی L را اثبات خواهدکرد.

فرض‌کنیم $M_1 = \sup\{\|L(e_1)\|, \ldots, \|L(e_n)\|\}$، که در آن $e_1, \ldots, e_n$ پایهٔ استاندارد $\mathbf{R}^n$ است. آنگاه برای $x=(x_1, \ldots, x_n)$ وبا استفاده از نامساوی مثلثی،

$$\begin{aligned}\| L(x) \| &= \|x_1 L(e_1)+\cdots+x_n L(e_n)\| \\ &\leqslant |x_1|\, \|L(e_1)\|+\cdots+|x_n|\, \|L(e_n)\| \\ &\leqslant M_1(|x_1|+\cdots+|x_n|) \\ &\leqslant M_1 n\|x\|\end{aligned}$$

بدین‌سان می‌توانیم انتخاب کنیم $M=nM_1$ ونتیجه حاصل می‌شود.

۵. یك تابع چند خطی L از $\mathbf{R}^{n_1}\times\mathbf{R}^{n_2}\times\cdots\times\mathbf{R}^{n_k}$ در $\mathbf{R}^m$ به‌صورت تابعی تعریف می‌شود که، برای هر r، $k\geqslant r\geqslant 1$، داشته باشیم

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_r+\lambda b_r, \ldots, a_k)=L(a_1, \ldots, a_r, \ldots, a_k)$$
$$+\lambda L(a_1, a_2, \ldots, b_r, \ldots, a_k)$$

که در آن $a_i\in\mathbf{R}^{n_i}$، $b_r\in\mathbf{R}^{n_r}$، و $\lambda\in\mathbf{R}$. نشان دهید که یك تابع چند خطی پیوسته است.

حل: فرض کنیم e_1، ...، e_n پایهٔ استاندارد $\mathbf{R}^n$ باشد، و بـرای $x\in\mathbf{R}^n$، گیریـم $x=(x^1, \ldots, x^n)=\sum_{i=1}^n x^i e_i$ برای اعداد صحیح i_j با فرض، $j=1,\ldots,k$، $1\leqslant i_j\leqslant n_j$، عناصر ثابت $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ را در $\mathbf{R}^m$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_k}=L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

آنگاه این مطلب صحت دارد که

$$L(x_1, \ldots, x_k)=\sum_{i_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{n_k}\alpha_{i_1,\ldots,i_k}x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k},$$

تساوی اخیر مانند نوشتن یك تبدیل خطی برحسب ماتریس است. در واقع، بنا برخاصیت چندخطی بودن،

$$L(x_1, \ldots, x_k)=L\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_1^{i_1}e_{i_1}, x_2, \ldots, x_k\right)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n_1} x_1^{i_1}L(e_{i_1}, x_2, \ldots, x_k)$$

اگر این عمل را k بار تکرار کنیم نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

ازاین دستور آشکاراست که L پیوسته می‌باشد، زیرا توابع $x_1^{i_1}$، ...، $x_k^{i_k}$ حاصل ضرب توابع پیوسته بوده ولذا پیوسته می‌باشند، و L حاصل‌جمعی ازاین توابع‌است.

راه‌حل دیگری برای این مسئله، که مشابه با مثال ۴ عمل می‌کند، این است که نشان دهیم یك ثابت $M>0$ وجوددارد به‌طوری که $L(x_1,\dots,x_k)\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_k\|$، وازاین نامساوی می‌توان پیوستگی را مستقیماً استنتاج کرد.

تمرینهای فصل ۴

۱. (الف) مستقیماً ثابت‌کنید که تابع $1/x^2$ در $]0,\infty[$ پیوسته است.
(ب) یك‌تابع ثابت $f:A\to\mathbf{R}^m$ آن است که، به‌ازای‌هر $x, y\in A$، $f(x)=f(y)$. نشان دهید که f پیوسته است.
(پ) آیا تابع $f(y)=\sin(\cos(y^3)\cdot e^y)$ پیوسته است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۲. (الف) ثابت‌کنید که اگر $f:A\to\mathbf{R}^m$ پیوسته باشد و $B\subset A$، آنگاه تحدید $f|B$ پیوسته است. ($f|B$ همان تابع f است با این تفاوت که فقط درنقاط B تعریف شده است).
(ب) تابعی‌مانند $g:A\to\mathbf{R}$ ومجموعه‌ای مانند $B\subset A$ طوری بیابید که $g|B$ پیوسته باشد ولی g درهیچ نقطهٔ A پیوسته نباشد. [راهنمایی: فرض‌کنیم $A=[0,1]$ و B مجموعهٔ اعدادگویا باشد.]

۳. (الف) اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ پیوسته و $K\subset\mathbf{R}$ همبند باشد، آیا $f^{-1}(K)$ لزوماً همبند است؟
(ب) نشان دهیدکه اگر $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ درکل $\mathbf{R}^n$ پیوسته و $B\subset\mathbf{R}^n$ کراندارباشد، آنگاه $f(B)$ کراندار است.

۴. با توجه به **آنچه** درحالت $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، $f(x)=0$ اگر $x\neq 0$ و $f(0)=1$ رخ خواهد داد، بحث‌کنیدکه چرا درتعریف $\lim_{x\to x_0} f(x)$ لازم است که داشته باشیم $x\neq x_0$.

۵. نشان دهیدکه $f:A\to\mathbf{R}^m$ در x_0 پیوسته است اگر، و فقط اگر، برای هر $\varepsilon>0$ یك $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ ایجاب کند $\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant\varepsilon$. آیا می‌توانیم $\varepsilon=0$ یا $\delta=0$ را جایگزین $\varepsilon>0$ یا $\delta>0$ کنیم؟

۶. (الف) فرض‌کنیم $\{c_k\}$ یك‌دنبالهٔ در $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهیدکه $c_k\to c$ اگر، وفقط‌اگر، هر زیردنبالهٔ c_k یك زیردنبالهٔ دیگر داشته باشد که به‌سمت c همگراست.
(ب) فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ یك‌تابع‌کراندار باشد. ثابت‌کنید f پیوسته است اگر، وفقط اگر، نمودار f یك زیرمجموعهٔ بسته $\mathbf{R}^2$ باشد. چه می‌توان گفت اگر f بی‌کران باشد؟

۷. یك مجموعهٔ فشرده $B \subset \mathbf{R}^n$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $f:B \to \mathbf{R}^m$ پیوسته و یك به‌یك باشد. دراین‌صورت ثابت کنید که $f^{-1}:f(B) \to B$ پیوسته است. با مثال نشان دهید که، اگر B فشرده نباشد، این نتیجه برقرار نیست. (برای یافتن یك مثال نقض لازم است که $m>1$ گرفته شود.)

۸. توابع $\oplus:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ و $\odot:\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ را به‌عنوان جمع و ضرب اسکالر به‌وسیلهٔ $\oplus(x,y)=x+y$ و $\odot(\lambda, x)=\lambda x$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این توابع پیوسته هستند.

۹. «لم‌چسب» زیر را ثابت کنید: فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$ و $g:[b,c]\to\mathbf{R}^m$ پیوسته باشند. تابع $h:[a,c]\to\mathbf{R}^m$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: $h=f$ در $[a,b[$ و $h=g$ در $[b,c]$. اگر $f(b)=g(b)$، آنگاه h پیوسته‌است. این‌نتیجه را به‌مجموعه‌های $A,B \subset \mathbf{R}^n$ تعمیم دهید.

۱۰. نشان دهید که $f:A\to\mathbf{R}^m$، $A \subset \mathbf{R}^n$ پیوسته است اگر، وفقط اگر، برای هرمجموعهٔ $B \subset A$، $f(\mathrm{cl}\,(B) \cap A) \subset \mathrm{cl}\,(f(B))$.

۱۱. (الف) برای $f:]a,b[\to\mathbf{R}$، نشان دهید که اگر f پیوسته باشد، آنگاه نمودارش Γ همبندکمانی است. به‌طورشهودی استدلال کنید که اگرنمودار f همبندکمانی باشد، آنگاه f پیوسته است. (مطلب اخیر درست است ولی اثبات آن واقعاً مشکلتراست.)
(ب) برای $f:A\to\mathbf{R}^m$، $A \subset \mathbf{R}^n$، نشان دهید که، درحالت $n \geqslant 2$، همبندی نمودار، پیوستگی را ایجاب نمی‌کند. [راهنمایی: برای $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$، یك شکاف در نمودار ایجاد کنید.]
(پ) حالت (ب) را برای $m=n=1$ مورد بحث قرار دهید. [راهنمایی: در $\mathbf{R}$ درنظرمی‌گیریم $f(x)=0$ اگر $x=0$، $f(x)=\sin(1/x)$، $x>0$.]

۱۲. (الف) یك تابع $f:A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ را لیپشیتس[1] می‌نامند اگر یك ثابت $L \geqslant 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که، به‌ازای هر $x,y \in A$، $\|f(x)-f(y)\| \leqslant L\|x-y\|$. نشان دهید که یك تابع لیپشیتس به‌طوریکنواخت پیوسته است.
(ب) یك تابع پیوستهٔ کراندار $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ بیابید که به‌طوریکنواخت پیوسته نباشد.
(پ) آیا حاصل‌جمع (حاصل‌ضرب) دوتابع لیپشیتس باز لیپشیتس است.
(ت) به‌پرسش (ب) برای توابع به‌طوریکنواخت پیوسته پاسخ دهید.

۱۳. فرض کنیم f یك تابع پیوسته کراندار باشد $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. ثابت کنید: برای همهٔ مجموعه‌های باز $U \subset \mathbf{R}^n$، $f(U)$ باز است اگر، وفقط اگر، برای همهٔ مجموعه‌های بازناتهی $V \subset \mathbf{R}^n$ و به‌ازای هر $y \in V$، $\inf_{x \in V} f(x) < f(y) < \sup_{x \in V} f(x)$.

---

1. Lipschitz

۱۴. (الف) یك تابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ چنان بیابید که

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \quad \text{و} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

وجود داشته باشند ولی با هم برابر نباشند.

(ب) یك تابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ چنان بیابید که هر دو حد قسمت (الف) وجود داشته و با هم برابر باشند، ولی f پیوسته نباشد. [راهنمایی: $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ با فرض $f=0$ در $(0,0)$.]

(پ) یك تابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ بیابید که در روی هر خط مار بر مبدأ پیوسته باشد ولی در $\mathbf{R}^2$ پیوسته نباشد. [راهنمایی: به راهنمایی قسمت (ب) نگاه کنید، یا تابع $r\tan(\theta/4)$، $0\leqslant r<\infty$، $0\leqslant\theta<2\pi$ را در مختصات قطبی در نظر بگیرید.]

۱۵. فرض کنیم f_1، ...، f_N توابعی از $A\subset\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}$ باشند. فرض کنیم m_i ماکسیمم f_i باشد، یعنی $m_i=\sup(f_i(A))$. فرض کنیم $f=\sum f_i$ و $m=\sup(f(A))$. نشان دهید که $m\leqslant\sum m_i$. مثالی ارائه دهید که در آن تساوی برقرار نباشد.

۱۶. تابعی مانند $f:A\times B\to\mathbf{R}^m$، که در آن $A\subset\mathbf{R}^n$، $B\subset\mathbf{R}^p$، در نظر می‌گیریم. f را جداجدا پیوسته می‌نامیم اگر برای هر نقطهٔ ثابت $x_0\in A$، تابع $g(y)=f(x_0,y)$ و برای $y_0\in B$، تابع $h(x)=f(x,y_0)$ پیوسته باشند. می‌گوییم f در A نسبت به B به‌طوریکنواخت پیوسته است اگر برای هر $\varepsilon>0$ و $x_0\in A$ یك $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که، به ازای هر $y\in B$، $\|x-x_0\|<\delta$ ایجاب کند $\|f(x,y)-f(x_0,y)\|<\varepsilon$. نشان دهید که اگر f جداجدا پیوسته باشد و اگر در A نسبت به B به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

۱۷. نشان دهید که توابع چندخطی، معین در فضای اقلیدسی، لزوماً به‌طوریکنواخت پیوسته نیستند. [راهنمایی: $f(x,y)=xy$ را امتحان کنید.]

۱۸. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ همبند و $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، و فرض کنیم، به‌ازای هر $x\in A$، $f(x)\neq 0$. حال نشان دهید که، به‌ازای هر $x\in A$، $f(x)>0$، یا به‌ازای هر $x\in A$، $f(x)<0$ است.

۱۹. یك تابع پیوستهٔ $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ و یك مجموعهٔ بستهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ چنان بیابید که $f(A)$ بسته نباشد. در واقع، وقتی که $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ تصویر روی محور xهاست، مطلب را بررسی کنید ($f(x,y)=x$).

۲۰. با به‌کاربردن تعیین فشردگی برحسب زیردنباله‌ها، اثبات دیگری از قضیهٔ ۵ ارائه دهید. [راهنمایی: ابتدا به‌طریق زیر استدلال کنید که $\sup(B)<\infty$. مثلاً $\sup(B)=\infty$ و x_k را چنان انتخاب کنید که $f(x_k)>k$. آنگاه برای نشان‌دادن $\sup(B)\in B$، y_k را طوری انتخاب کنید که $f(y_k)\leqslant\sup(B)\leqslant f(y_k)+1/k$ وسپس بروید به‌سوی انتخاب یك زیردنبالهٔ همگرا.]

۲۱. کدام یك از توابع زیر، معین در $\mathbf{R}$، به‌طور یکنواخت پیوسته است؟

(الف) $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)}$،

(ب) $f(x)=\cos^3 x$،

(پ) $f(x)=\frac{x^2}{(x^2+2)}$،

(ت) $f(x)=x\sin x$.

۲۲. با به‌کاربردن تعیین فشردگی برحسب زیردنباله‌ها (قضیه بولتسانو-وایرشتراس) اثبات دیگری از قضیهٔ ۷، به‌طریق زیر، ارائه دهید. ابتدا، نشان دهید که اگر f به‌طور یکنواخت پیوسته نباشد، یك $\varepsilon>0$ و دنباله‌های x_n، y_n وجود دارند به طوری که $d(x_n, y_n)<1/n$ و $d(f(x_n), f(y_n))\geqslant\varepsilon$، حال بروید به‌سوی زیردنباله‌های همگرا و درمقابل پیوستگی f تناقضی به‌دست آورید.

۲۳. (الف) با بررسی قضیهٔ ۱، فصل ۳، مفهوم یك فضای متریك فشرده را تعریف کنید. نشان‌دهید که همهٔ آن خواص، به‌استثنای (الف)، با یکدیگرهم‌ارزهستند. هریك از اینها را، به‌جز (یك)، به‌عنوان تعریف برگزینید.

(ب) فرض کنیم X، Y فضاهای متریك باشند و $f:X\rightarrow Y$. قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۸۰، را مرورکنید ونشان دهید که بازمعتبرمی‌ماند.

(پ) فرض کنیم X یك فضای متریك فشرده و $f:X\rightarrow Y$ یك ایزومتری باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $x, y\in X$، $d(f(x), f(y))=d(x,y)$. نشان دهید که f پیوسته است و باید یك تناظر دوسویی باشد. [راهنمایی: اگر $x\in X\setminus f(X)$ نشان‌دهید که یك $c>0$ وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $y\in f(X)$، $d(x,y)\geqslant c$. حال‌دنبالهٔ x، $f(x)$، $f(f(x))$، . . . را برای نقض فشردگی X مورداستفاده قرار دهید.]

۲۴. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^m$.

(الف) ثابت کنید f در A به‌طوریکنواخت پیوسته است اگر، و فقط اگر، برای هر زوج از دنباله‌های x_k، y_k در A به طوری که $(x_k-y_k)\rightarrow 0$، داشته باشیم $f(x_k)-f(y_k)\rightarrow 0$.

(ب) فرض کنیم f به‌طور یکنواخت پیوسته، و x_k یك دنبالهٔ کوشی در A باشد. نشان دهید که $f(x_k)$ یك دنبالهٔ کوشی است.

(پ) فرض کنیم f به‌طوریکنواخت پیوسته باشد. نشان دهید که f یك توسیع منحصر به‌فرد به‌یك تابع پیوسته در $\bar{A}=\mathrm{cl}(A)$ دارد.

۲۵. فرض کنیم $f:]0,1[\rightarrow\mathbf{R}$ مشتق پذیرو $f'(x)$ کراندار باشد. نشان دهید که

$\lim_{x\to \circ^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ وجود دارند. این کار را هم (الف) مستقیماً و هم (ب) با به‌کاربستن تمرین ۲۴ (پ) انجام دهید. اگر $f'(x)$ کراندار نباشد مثال نقضی ارائه دهید.

۲۶. فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد؛ یعنی، $f'(x)$ وجود دارد و پیوسته است. ثابت کنید که f به‌طور یکنواخت پیوسته است.

۲۷. مجموع سری $\sum_{k=۴}^{\infty} (۳/۴)^k$ را بیابید.

۲۸. فرض کنیم $f:]\circ,1[\to\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشد. آیا f باید کراندار باشد؟

۲۹. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^۲$ صدق کند. ثابت کنید f یك ثابت است. [راهنمایی: نشان دهید که $f'(x)=\circ$.]

۳۰. (الف) فرض کنیم $f:[\circ,\infty[\to\mathbf{R}$، $f(x)=\sqrt{x}$. ثابت کنید f به‌طور یکنواخت پیوسته است.
(ب) فرض کنیم $k>\circ$ و $f(x)=(x-x^k)/\log x$ برای $\circ<x<1$ و $f(\circ)=\circ$، $f(1)=1-k$، نشان دهید $f:[\circ,1]\to\mathbf{R}$ پیوسته است. آیا f به‌طور یکنواخت پیوسته است؟

۳۱. فرض کنیم، برای $x\neq 1$، $f(x)=x^{1/(x-1)}$، چگونه باید $f(1)$ را تعریف کرد تا f در $x=1$ پیوسته گردد؟

۳۲. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ بازباشد، $x_\circ\in A$، $r_\circ>\circ$ و $B_{r_\circ}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x-x_\circ\|\leqslant r_\circ\}$ گیریم که $B_{r_\circ}\subset A$. ثابت کنید که یك $r>r_\circ$ وجود دارد به‌طوری که $B_r\subset A$.

۳۳. یك مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^n$ را به‌طور نسبی فشرده می‌نامند، اگر $\mathrm{cl}(A)$ فشرده باشد. ثابت کنید که A به‌طور نسبی فشرده است اگر، وفقط اگر، هردنباله در A دارای یك زیر-دنبالهٔ همگرا به‌سمت نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ باشد.

۳۴. به‌فرض آنکه درجهٔ حرارت سطح زمین تابع پیوسته‌ای باشد، ثابت کنید که، روی هردایرهٔ عظیمهٔ زمین، دونقطهٔ متقاطر بادرجهٔ حرارت برابر وجود دارد. [راهنمایی: فرض کنیم $T:[\circ,۲\pi]\to\mathbf{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد به طوری که $T(\circ)=T(۲\pi)$. قرارمی‌دهیم $f(x)=T(x)-T(x-\pi)$؛ نشان دهید که، برای یك $x\in[\circ,۲\pi]$، $f(x)=\circ$.]

۳۵. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ افزایشی وازبالا کراندار باشد. ثابت کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وجود دارد.

فصل ۵

همگرایی یکنواخت

در قسمتهای بعدی این کتاب، بسیاری‌از توابعی‌را که ما موردبحث قرار می‌دهیم به کمك دنباله‌ها یاسریهای نامتناهی تعریف خواهند شد. برای‌مطالعه چنین‌توابعی به‌درك‌مفهوم همگرایی یکنواخت یك‌دنباله یا یك سری ازتوابع (پیوسته) نیاز خواهیم داشت. برای آنکه به‌طور مؤثری مثالها و موقعیتهای مشخص‌را موردبررسی قراردهیم، چند آزمون‌مهم همگرایی یکنواخت‌را نیز درنظر خواهیم گرفت. شاید، درمثالهای خاص، سودمندترین آزمون، آزمون M وایرشتراس برای‌سریها باشد. آزمون‌دیگر محك‌کوشی‌است که‌اساساً مورداستعمال نظری‌دارد. آزمونهای ظریفتر دیریکله[1] و آبل[2] رانیز در این‌مبحث‌می‌گنجانیم.

در ارتباط باهمگرایی یکنواخت، فضایی وارد بحث‌خواهیم کرد که نقاطش توابع هستند. دراین‌فضا نرمی تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم‌که همگرایی نسبت‌به این نرم دقیقاً همان‌همگرایی‌یکنواخت است. ثابت می‌شود که این‌فضا کامل‌است به‌این معنی که‌دنباله‌های کوشی همگرا هستند. یك‌خاصیت اساسی‌دیگر این‌فضا، موسوم به‌قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی[3]، فشردگی‌یك‌زیر مجموعه‌را معین‌می‌کند (به‌این‌معنی‌که دارای‌خاصیت بولتسانو‌ـ‌وایرشتراس است). سپس یك‌نتیجهٔ مهم، موسوم‌به قضیهٔ استون[4] ـ وایر شتراس، ثابت می‌شود. این‌قضیه ما را قادر می‌سازد تا توابع پیوسته را به‌کمك چندجمله‌ایها، یا به‌کمك توابع متعلق به مجموعه‌های مناسب، تقریب بزنیم. سرانجام برخی‌از کاربردهای‌این سازمان در معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال ارائه خواهند شد.

---

1. Dirichlet 2. Abel 3. Arzela - Ascoli 4. Stone

۱.۵ همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت

محتملاً طبیعی‌ترین نوع همگرایی برای یك دنبالهٔ توابع، همگرایی نقطه‌ای (یا ساده) است که به‌طریق زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱. می‌گویند یك‌دنبالهٔ توابع $f_k : A \to \mathbf{R}^m$ ، $A \subset \mathbf{R}^n$ ، نقطه به نقطه (یا به‌طور ساده) همگرا به‌سمت $f : A \to R^m$ است هرگاه، برای‌هر $x \in A$، $f_k(x) \to f(x)$ (همگرایی به‌عنوان دنباله‌ای در R^m). اگر f_k نقطه به‌نقطه به‌سمت f همگرا باشد اغلب می‌نویسیم (نقطه به‌نقطه) $f_k \to f$.

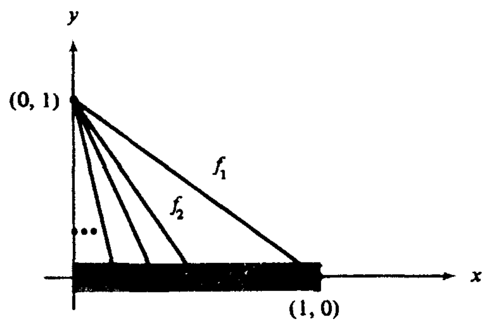
اگرچه این‌نوع همگرایی، برای بعضی‌مقاصد، بسیار مفیداست ولی موقعیتهای دیگری هم هست که چنین نیست. نقص اصلی همگرایی نقطه‌ای در این‌است که حتی اگر توابع f_k پیوسته باشند، لازم نیست f پیوسته باشد. به عنوان مثال، شکل ۵-۱ را درنظر می‌گیریم که در آن

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \geqslant \frac{1}{k} \ , \\ -kx + 1 & , \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{k} \end{cases}$$

دراین حالت، برای‌هر $x \in [0, 1]$ ، $f_k(x)$ همگراست. اگر $x \neq 0$ ، $f_k(x) \to 0$ (زیرا برای k بزرگ، $f_k(x) = 0$) ، در صورتی که اگر $x = 0$ ، $f_k(x) \to 1$ (چون به‌ازای هر k ، $f_k(0) = 1$). بنابراین حدعبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

که تابعی پیوسته نیست .



شکل ۵-۱ همگرایی نقطه‌ای

چگونه می‌توانیم از این نوع رفتار اجتناب کنیم؟ هر قدرهم k بزرگ باشد، نقاطی وجود دارند که در آنجا f_k به f نزدیك نیست. برای اصلاح کردن این رفتار، مفهومی وارد می‌کنیم که تضمین می‌کند f_k، به‌طریق زیر، به‌طوریکنواخت به f نزدیك خواهد بود (یعنی، نزدیکی به‌ازای هر $x\in A$).

تعریف ۲. فرض‌کنیم $f_k: A\to \mathbf{R}^m$ دنباله‌ای از توابع با این خاصیت باشد که برای هر $\varepsilon>0$، یك N وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in A$، $k\geqslant N$ ایجاب کند $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon$. تحت این شرایط می‌گوییم f_k به‌طوریکنواخت همگرا به‌سمت f است ومی‌نویسیم (به‌طور یکنواخت) $f_k\to f$.

شرط $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon$ به‌این معنی است که f_k، همه‌جا، به‌فاصلهٔ ε از f است. می‌توانیم این‌طور تصور کنیم که f_k در «روبانی» به‌پهنای ε حول f قرار دارد. شکل ۵ــ۲ را ببینید.

شاید مثالی دیگراین پنداره را روشنترسازد. در $\mathbf{R}$ دنبالهٔ زیررا درنظر می‌گیریم

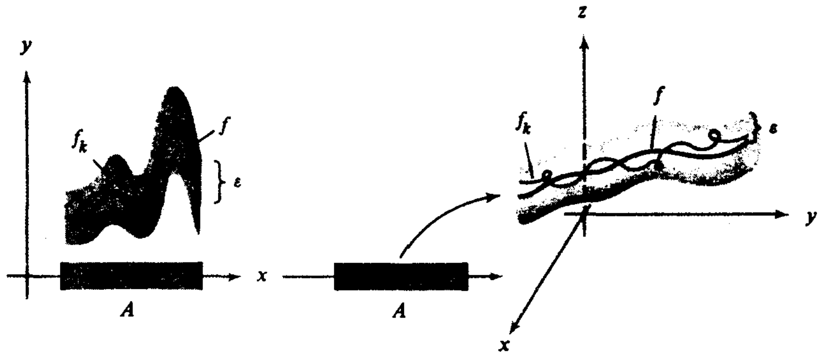
$$f_k(x)=\begin{cases}0\ , & x<k\\ 1\ , & x\geqslant k\end{cases}$$

$(k=1,2,3,\ldots)$. دراین صورت $f_k\to 0$ (نقطه به‌نقطه)، زیرا برای هر $x\in\mathbf{R}$، و برای k بزرگ $f_k(x)=0$ $(k>x)$. اما f_k به‌طوریکنواخت به‌سمت صفرهمگرا نیست، زیرا نقاطی نظیر x وجود دارد به‌طوری‌که، هرچه قدر هم k بزرگ باشد، $f_k(x)-0$ کوچك نیست.

توجه داشته‌باشیم که اگر $f_k\to f$ (به‌طوریکنواخت) آنگاه $f_k\to f$ (نقطه به‌نقطه). علت این امرآن است که برای هر $x\in A$ و $\varepsilon>0$، یك N داریم به‌طوری که، اگر $k\geqslant N$ آنگاه $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon$، یعنی $f_k(x)\to f(x)$. تعاریف مشابهی هم برای یك سری از توابع ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳. می‌گوییم سری $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ نقطه به‌نقطه به‌سمت g همگرا است ومی‌نویسیم (نقطه به‌نقطه) $\sum_{k=1}^{\infty} g_k=g$، هرگاه دنبالهٔ $S_k=\sum_{i=1}^{k} g_i$ نقطه به نقطه به سمت g همگرا باشد. همچنین می‌گوییم (به‌طور یکنواخت) $\sum_{k=1}^{\infty} g_k=g$ یامی‌گوییم $\sum g_k$ به‌طوریکنواخت به‌سمت g همگرا است، هرگاه (به‌طوریکنواخت) $S_k\to g$. برای یك دنبالهٔ f_k (یا سری $\sum g_k$) می‌گوییم که f_k (یا $\sum g_k$) به‌طوریکنواخت‌همگرا است اگرتابعی وجود داشته باشد، که به‌سمت آن به‌طوریکنواخت همگرا باشد.

اولین خاصیت اساسی همگرایی یکنواخت ارتباط آن با توابع پیوسته است که در قضیهٔ بعدی آمده است.



شکل ۵-۲ نزدیکی یکنواخت (الف) $f:A\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$، (ب) $f:A\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}^{3}$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $f_k:A\to\mathbf{R}^m$ توابع پیوسته‌ای باشند، وگیریم که (به‌طوریکنواخت) $f_k\to f$. دراین‌صورت f پیوسته است.

بنابراین همگرایی یکنواخت، برای تضمین اینکه تابع حد یك دنبالهٔ از توابع پیوسته، پیوسته باشد، شرطی به‌قدرکافی قوی است. باتوجه به‌مثالهای قبل این مطلب نباید نامعقول باشد.

فرع ۱. اگر $g_k:A\to\mathbf{R}^m$ هاپیوسته باشند و (به‌طوریکنواخت) $\sum_{k=1}^{\infty} g_k=g$، آنگاه g پیوسته است.

با به‌کاربردن قضیهٔ ۱ درمورد دنبالهٔ حاصل‌جمعهای جزئی، حکم برقرارمی‌شود.

مثال ۱. فرض کنیم $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ،$f_n(x)=(\sin x)/n$. نشان دهیدکه وقتی $n\to\infty$، $f_n\to 0$ به‌طوریکنواخت.

حل: باید نشان دهیم که وقتی $n\to\infty$، $|f_n(x)-0|=|f_n(x)|$ ، مستقل از x، کوچك می‌شود. اما $|f_n(x)|=|\sin x|/n\leqslant 1/n$ کـه وقتی $n\to\infty$، مستقل از x کوچك می‌شود.

مثال ۲. ثابت کنید که سری $\sin x$،

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots$$

$r \geqslant x \geqslant ۰$، به‌طور یکنواخت همگراست.

حل: باید نشان دهیم که

$$S_n(x)=\sum_{k=۰}^{n}\frac{(-۱)^k x^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!}$$

به‌طور یکنواخت به‌سمت $\sin x$ همگراست. برای انجام این منظور، تفاضل:

$$|S_n(x)-\sin x|=\left|\sum_{k=n+۱}^{\infty}(-۱)^k\frac{x^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!}\right|\leqslant\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{(r)^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!}$$

را تخمین می‌زنیم. ولی سمت راست عددی‌است مستقل از x، که وقتی $n\to\infty$، به‌سمت صفرمی گراید، زیرا که عبارت ازماندهٔ یك سری همگراست. بنابراین،همگرایی یکنواخت است. ملاحظه کنید که پیوستگی $\sin x$ ازاین همگرایی یکنـواخت به‌دست می‌آید، و با این نتیجه ازقبل آشنا بودیم.

مثال ۳. فرض کنیم $f_n(x)=x^n$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$. آیا f_n به‌طور یکنواخت همگراست؟

حل: ابتدا حد را نقطه به‌نقطه تعیین می‌کنیـم. به‌ازای هر n داریم $f_n(۰)=۰$ و اگر $x<۱$، $f_n(x)\to ۰$، ولی به‌ازای هر n، $f_n(۱)=۱$، بدین‌سان f_n، نقطه به نقطه، به‌سمت

$$f(x)=\begin{cases}۰\ , & x\neq ۱\\ ۱\ , & x=۱\end{cases}$$

میل می‌کند، دنبالهٔ مذکور نمی‌تواند به‌طور یکنواخت همگرا باشد زیرا این حـد پیوسته نیست (شکل ۵–۳).

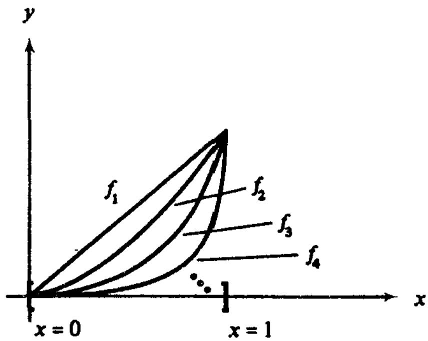
تمرینهای بند ۱.۵

۱. فرض کنیم $f_n(x)=(x-۱/n)^۲$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$. آیا f_n به‌طور یکنواخت همگراست؟

۲. فرض کنیم $f_n(x)=x-x^n$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$. آیا f_n به‌طور یکنواخت همگراست؟

۳. فرض کنیم $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ها به‌طور یکنواخت پیوسته باشند و فرض کنیم f_nها به‌طور یکنواخت به‌سمت f میل کنند. آیا فکر می‌کنید که f به‌طور یکنواخت پیوسته است؟ بحث کنید.

۴. فرض کنیم $f_n(x)=x^n$، $۰\leqslant x\leqslant ۰٫۹۹۹$. آیا f_n به‌طور یکنواخت همگراست؟



شکل ۵-۳ دنبالهٔ $f_n(x)=x^n$

۵. فرض کنیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{n(n!)^2}\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

بحث کنید که چگونه می‌توانید ثابت کنید که f پیوسته است.

۲.۵ آزمون M وایرشتراس

حال چند آزمون برای همگرایی یکنواخت را موردبررسی قرارخواهیم داد. اولین آنها دارای کاربرد نظری است و کاملاً مشابه با محک کوشی برای یک دنبالهٔ در $\mathbf{R}^n$ می‌باشد. آن را محک کوشی نیزمی‌نامند.

قضیه ۲. فرض‌کنیم $f_k:A\to\mathbf{R}^m$ یك دنبالهٔ توابع باشد. آنگاه f_k به‌طوریکنواخت همگراست اگر، وفقط اگر، برای هر $\varepsilon>0$ یک N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $l,\ k\geqslant N$ ایجاب کند، $\|f_k(x)-f_l(x)\|<\varepsilon$ به‌ازای هر $x\in A$.

درحالتی که سریها موردنظرهستند، محك کوشی، وقتی‌درمورد دنبالهٔ حاصل‌جمعهای جزئی (مانند قضیهٔ ۱۰ فصل ۲) اعمال شود، صورت زیررا خواهد داشت:
سری $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ به‌طوریکنواخت همگراست اگر، و فقط اگر، برای هر $\varepsilon>0$ یك N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $k\geqslant N$ ایجاب‌کند $\|g_k(x)+\dots+g_{k+p}(x)\|<\varepsilon$ به‌ازای هر $x\in A$ وهمهٔ اعداد صحیح $p=0,1,2,\dots$.

بااستفاده ازمطلب بالا، می‌توانیم فن مهم زیررا، موسوم به آزمون M وایرشتراس، برای تعیین همگرایی یکنواخت یك سری به‌دست‌آوریم.

قضیهٔ ۳. فرض‌کنیم $g_k:A\to\mathbf{R}^m$ هاتوابعی باشند به‌طوری‌که ثابتهای M_k، با فرض $\|g_k(x)\|\leqslant M_k$ به‌ازای هر $x\in A$ ، و اینکه $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ همگراست، وجود داشته باشند. دراین‌صورت $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ به‌طوریکنواخت(ومطلقاً) همگراست.

همواره این امکان وجود نداردکه‌آزمون M را به‌کارببریم ولی دراکثرموارد قابل اجراست. برای‌آزمونهای ظریفتر، آزمونهای دیریکله وآبل را دربند ۸.۵ ببینید.

در واقع، قضیهٔ ۳، به‌طورشهودی، نسبتاً آشکاراست، زیرا ثابتهای M_k کرانی برای «آهنگ همگرایی» به‌دست می‌دهند ونکته دراین است کـه این کران مستقل از x است. (به‌صورتی‌دقیقتر، ماندهٔ سری $\sum g_k$ ،که خطا رانشان می‌دهد، به‌وسیلهٔ ماندهٔ سری $\sum M_k$ محدود می‌شود وماندهٔ اخیر، مستقل از x است وبه‌سمت صفرمی‌گراید.)

مثال ۱. نشان دهیدکه

$$\sum_{1}^{\infty} g_n(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{(\sin nx)^2}{n^2}$$

به‌طوریکنواخت همگراست.

حل: قرارمی‌دهیم $M_n=1/n^2$. دراینجا $|g_n(x)|\leqslant M_n$، زیرا $|\sin nx|\leqslant 1$.
بنابراین، بنابرقضیهٔ ۳، همگرایی یکنواخت است.

مثال ۲. ثابت‌کنیدکه

$$f\,(x)=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$$

در $\mathbf{R}$ پیوسته است.

حل: دراینجا نمی‌توانیم یك M_n برای‌جملهٔ nام برگزینیم، زیرا x^n کراندارنیست. بنابراین انتظارنداریم که درکل $\mathbf{R}$ همگرایی یکنواخت وجود داشته باشد، ولی با قرار دادن $M_n=(a^n/n!)^2$، که یك کران‌بالایی برای‌جملهٔ nام در $[-a, a]$ است،می‌توانیم همگرایی یکنواخت را در هر بازهٔ $[-a, a]$ ثابت‌کنیم. آزمون نسبت نشان می‌دهدکـه $\sum M_n$ همگراست، زیرا

$$\frac{M_{n+1}}{M_n}=\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2\left(\frac{a^{n+1}}{a^n}\right)^2=\left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

واین نسبت به‌سمت صفر، که‌کمتراز یـك است، میل می‌کنـد. بنابراین، در $[-a\ ,\ a]$، همگرایی یکنـواخت داریم ولذا بنابر قضیـهٔ ۱، پیوستگی f را در $[-a, a]$ استنتاج می‌کنیم. چون a دلخواه بود، پیوستگی f را درکل $\mathbf{R}$ به‌دست می‌آوریم.

مثال ۳. فرض کنیم یك دنبالهٔ $f_n(x)$، $\circ \leqslant x \leqslant ۱$، به‌طوریکنواخت همگرا و f_n مشتق‌پذیر باشد. آیا باید $f'_n(x)$ به‌طوریکنواخت همگرا باشد؟

حل: پاسخ منفی است. به‌طورکلی، ازطریق قضیهٔ مقدارمیانگین، کنترل برمشتقات، کنترل بر توابع را در پی دارد و نه برعکس. به عنوان مثال، فرض کنیم $f_n(x)=[\sin(n^۲x)]/n$. دراین صورت (به‌طوریکنواخت) $f_n \rightarrow \circ$، ولی $f'_n(x)=n\cos(n^۲x)$، حتی نقطه به‌نقطه، همگرا نیست (مثلاً قراردهید $x=\circ$).

تمرینهای بند ۲.۵

۱. همگرایی وهمگرایی یکنواخت دنباله‌های زیررا موردبحث قرار دهید

(الف) $$f_n(x)=\frac{x^n}{n+x^n},\ x\geqslant\circ,\ n=۱,\ ۲,\ \ldots$$

(ب) $$f_n(x)=\frac{e^{-x^۲/n}}{n},\ x\in R,\ n=۱,\ ۲,\ \ldots$$

۲. همگرایی یکنواخت $\sum_{۱}^{\infty}\frac{x^n}{n^۲}$، $\circ\leqslant x\leqslant ۱$ را موردبحث قرار دهید.

۳. ثابت کنید که $f(x)=\sum_{۱}^{\infty}\frac{x^n}{n^۲}$ در $[\circ\ ,\ ۱]$ پیوسته است.

۴. همگرایی‌یکنواخت $\sum_{۱}^{\infty}\frac{۱}{(x^۲+n^۲)}$ را موردبحث قراردهید.

۵. اگر $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا باشد، ثابت‌کنید $\sum_{۱}^{\infty} a_n \sin nx$ به‌طوریکنواخت همگرا است.

۳.۵ انتگرال‌گیری ومشتق‌گیری ازسریها

برای یك دنبالهٔ یا یك سری، که به‌طور یکنواخت همگراست، گزاره‌هایی نیز دربارهٔ انتگرال‌گیری ومشتق‌گیری ازتابع حد می‌توانند مطرح شوند. پرسشی که نیاز به پاسخ دارد این است که آیا این اعمال را می‌توان جمله به‌جمله به‌مورد اجرا گذاشت یا خیر. برای فرایند انتگرال‌گیری، همان‌گونه که ازقضیهٔ بعد می‌توان دید، پاسخ مثبت است. تعریف کلی انتگرال‌پذیری درفصل ۸ آمده است، امافرض براین است که، با خواص اساسی انتگرال‌گیری ومشتق‌گیری، ازحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی برای توابع پیوستهٔ

حقیقی از یک متغیر حقیقی، آشنایی دارید.

قضیهٔ۴. فرض کنیم $f_k:[a,b]\to\mathbf{R}$ توابع پیوسته‌ای باشند $(a,b\in\mathbf{R})$ و (به‌طور یکنواخت) $f_k\to f$. دراین‌صورت

$$\int_a^b f_k(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

فرع ۲. فرض‌کنیم $g_k:[a,b]\to\mathbf{R}$ پیوسته‌باشند و $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ به‌طوریکنواخت‌همگرا باشد. دراین‌صورت می‌توانیم ترتیب انتگرال‌گیری و جمعبندی‌را تعویض‌کنیم

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(x)dx$$

با به‌کار بردن قضیهٔ ۴ درمورد دنبالهٔ حاصل جمعهای جزئی فرع ۲ به‌آسانی حاصل می‌شود.

به‌طور شهودی قضیه‌بایستی نسبتاً روشن باشد، زیرا اگر f_k بسیار نزدیک به f باشد، آنگاه انتگرالش (یعنی مساحت زیرخم آن) باید‌به انتگرال f نزدیک باشد. ولی دراینجا احتیاط کنید. در واقع اگر f_k فقط نقطه‌به‌نقطه همگرا باشد، آنگاه این نتیجه گیری درست نیست! (مثال ۱ را ببینید).

تبصره: در واقع قضیه‌ای بامیدان‌عمل بسیار وسیعتر ازقضیهٔ بالا، موسوم به‌قضیهٔ‌همگرایی زیرسلطهٔ لبگ، وجود دارد. یک‌بیان قضیهٔ‌اخیر این‌است‌که اگر f_k نقطه‌به‌نقطه به‌سمت f همگرا باشد و اگر f_kها به‌طوریکنواخت کراندار باشند (یعنی به‌ازای هر $k=1,2,\ldots$، $x\in[a,b]$، داشته‌باشیم $M\geqslant|f_k(x)|$) دراین‌صورت نتیجهٔ قضیهٔ۴ معتبرمی‌ماند. دراین کتاب‌ما به‌شکل مقدماتی‌تراین‌نتیجه، به‌همان‌صورت که درقضیهٔ۴ آمده است، قانع‌خواهیم بود. (با وجود این‌بند ۸.۸ را ببینید.)

آیا با مشتقات‌نیزهمین آزادی عملها را می‌توانیم داشته‌باشیم؟ پاسخ‌به‌پرسش‌مربوط به مشتق‌گیری جمله‌به جمله یک‌دنباله یا یک سری به‌طور یکنواخت همگرا، همان‌گونه‌که درمثال۳ پیشین دیدیم، منفی است. نتیجه‌گیری مثال۳ تصویرخوبی ازنوع احتیاطی بـه دست می‌دهدکه اغلب موردنیاز است تا یک‌گزارهٔ به‌طورشهودی موجه‌را به یک امرمسلم بالفعل برگردانیم. بنابراین ما به‌مفروضاتی بیشتراز همگرایی‌یکنواخت نیاز داریم. شرایط کافی درقضیهٔ زیر ارائه شده‌اند.

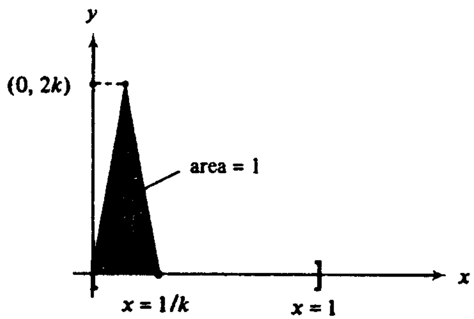
قضیهٔ۵. فرض‌کنیم $f_k:]a,b[\to\mathbf{R}$ یک‌دنبالهٔ ازتوابع مشتق‌پذیر، معین در بازهٔ باز $]a,b[$، بوده که نقطه‌به‌نقطه‌به سمت $f:]a,b[\to\mathbf{R}$ همگراهستند. گیریم‌که مشتقات f_k' پیوسته‌بوده و به‌طور یکنواخت به سمت تابع g همگرا باشند. دراین صورت f مشتق‌پذیر است و $f'=g$.

فرع ۳. اگر g_kها مشتق‌پذیر، g'_kها پیوسته، $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ نقطه‌به‌نقطه همگرا و اگر $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k$$

طبق معمول، فرع بالا از به‌کار بردن قضیهٔ پیشین در مورد دنبالهٔ حاصل‌جمعهای جزئی حاصل می‌شود.

مثال ۱. مثالی از یک دنبالهٔ $f_k:[0,1]\to\mathbf{R}$، نقطه‌به‌نقطه همگرا به سمت صفر، ارائه دهید که برای آن دنبالهٔ $\int_0^1 f_k$ به سمت صفر همگرا نباشد.



شکل ۵-۴

حل: فرض کنیم f_k دارای نمودار ترسیم‌شده در شکل ۵-۴ باشد. بنابراین f_k چنان است که به‌ازای هر $k=1,2,3,\ldots$، $\int_0^1 f_k = 1$. به علاوه برای هر x، وقتی $k\to\infty$، $f_k(x)\to 0$ (اگر $x=0$ باشد، حکم ثابت است و اگر $x>0$ باشد، آنگاه $f_k(x)=0$ به محض آنکه $k>1/x$).

مثال ۲. فرض کنیم $g_n(x)=nx/(1+nx)$، $0\leqslant x\leqslant 1$، قضیه ۵ را در این مورد بررسی کنید.

حل: به ازای $x\neq 0$ می‌بینیم که وقتی $n\to\infty$، $g_n(x)\to 1$، زیرا $g_n(x)=x/(x+1/n)$. اما برای $x=0$، $g_n(x)=0$. بنابراین g_n نقطه‌به‌نقطه، و نه به‌طور یکنواخت، همگراست. همگرایی فقط در هر بازهٔ $[\delta,1]$، که در آن $\delta>0$ است،

یکنواخت می باشد.

مشتق عبارت است از $g_n'(x)=(1/n)/(x+1/n)^2$. این مشتق در بازهٔ $[\delta, 1]$ به طور یکنواخت به سمت صفر همگراست، ولی $g_n'(0)\to\infty$. بنابراین شرایط قضیهٔ ۵ فقط در بازهٔ $[\delta, 1]$، به شرط $\delta>0$، برقرارند. تابع حد در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

مثال ۳. با استفاده از $e^x=\sum_0^\infty x^n/n!$ و قضیهٔ ۴ تحقیق کنید که $\int_0^x e^t dt=e^x-1$.

حل: بنا بر آزمون M وایرشتراس، $e^x=\sum_0^\infty x^n/n!$ به طور یکنواخت، در هر بازهٔ متناهی، همگراست. بنابراین با به کار بستن فرع ۲ درمورد بازهٔ $[0, x]$،

$$\int_0^x e^t dt=\sum_0^\infty \int_0^x \frac{t^n}{n!}dt$$

$$=\sum_0^\infty \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_0^x$$

$$=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$=e^x-1$$

تمرینهای بند ۳.۵

۱. اعتبار قضیهٔ ۴ را دربارهٔ دنبالهٔ f_n که به وسیلهٔ

$$f_n(x)=\frac{nx}{(1+nx^2)}\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

تعریف شده است مورد بررسی قرار دهید.

۲. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ که به وسیلهٔ

$$f_n(x)=n^3x^n(1-x)$$

تعریف شده است، در بازهٔ $[0, 1]$، نقطه به نقطه به سمت $f=0$ همگراست و سپس قضیهٔ ۴ را مورد استفاده قرار داده و نشان دهید که این همگرایی یکنواخت نیست.

۳. اعتبار قضایای ۴ و ۵ را درمورد $f_n(x)=\sqrt{n}x^n(1-x)$ مورد بررسی قرار دهید. [راهنمایی: جای ماکسیمم $f_n(x)$ را تعیین کنید.]

۴. با استفاده از

$$\sin x=\sum_0^\infty (-1)^n\ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

تحقیق کنید که $\int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$.

۵. با استفاده از فرع ۳ وسری مذکور در تمرین ۴ تحقیق کنید که $\sin' x = \cos x$.

۴.۵ فضای توابع پیوسته

یك مجموعهٔ ثابت $A \subset \mathbf{R}^n$ انتخاب کرده، و V، مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A \to \mathbf{R}^m$ را در نظر می گیریم. در این صورت به آسانی دیده می شود که V یك فضای برداری است. در V، بردار صفر عبارت از تابعی است که، به ازای هر $x \in A$، با صفر برابر است . همچنین، برای هر $f, g \in V$، $\lambda \in \mathbf{R}$، تعریف می کنیم $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ و $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$. حال قرار می دهیم $\mathcal{C} = \{ f \in V | f$ پیوسته است$\}$. اگر خطر ابهام وجود داشته باشد، می نویسیم $\mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m)$. آنگاه $\mathcal{C}$ نیز یك فضای برداری است، زیرا حاصل جمع دو تابع پیوسته، پیوسته است، و به ازای هر $\alpha \in \mathbf{R}$ و $f \in \mathcal{C}$ ، داریم $\alpha f \in \mathcal{C}$.

فرض کنیم $\mathcal{C}_b$ زیر فضای برداری $\mathcal{C}$ متشکل از توابع کراندار باشد: $\mathcal{C}_b = \{ f \in \mathcal{C} | f$ کراندار است$\}$. یادآوری می کنیم که «f کراندار است» به این معنی است که ثابتی نظیر M وجود دارد به طوری که، به ازای هر $x \in A$ ، $\|f(x)\| \leqslant M$. اگر A فشرده باشد ، در این صورت، بنا بر قضیهٔ ۵، فصل ۴، داریم $\mathcal{C}_b = \mathcal{C}$.

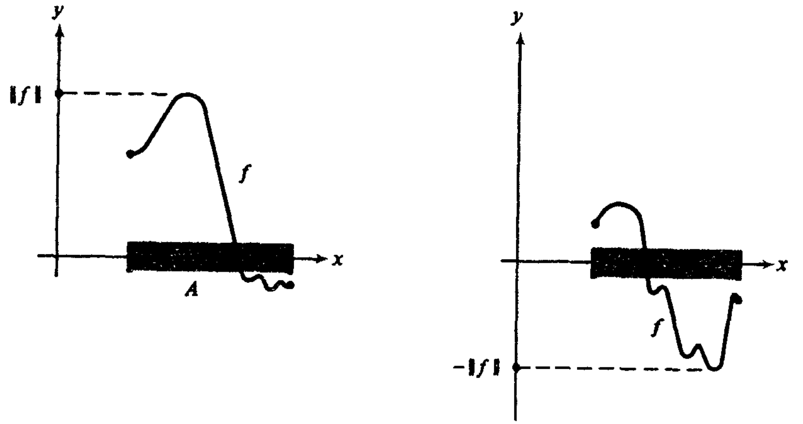
برای $f \in \mathcal{C}_b$ قرار می دهیم $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \,|\, x \in A\}$، که وجود دارد، زیرا f کراندار است. عدد $\|f\|$ مقیاسی برای بزرگی f است و نرم f نامیده می شود. شکل ۵ـ۵ را ببینید. توجه کنید که $\|f\| \leqslant M$ اگر ، و فقط اگر ، به ازای هر $x \in A$ ، $\|f(x)\| \leqslant M$.

آنچه که ما در اینجا تلاش می کنیم تا به انجام برسانیم، این است که به فضای $\mathcal{C}_b$ ، به همان صورتی بنگریم که به $\mathbf{R}^n$ می نگریم. به عبارت دیگر، هر نقطه (یعنی ، بردار) در $\mathcal{C}_b$ (که یك تابع است) یك نرم دارد، لذا می توانیم امیدوار باشیم که بسیاری از مفاهیمی که برای بردارهای $\mathbf{R}^n$ بسط داده شده اند به $\mathcal{C}_b$ تعمیم بیابند. به هنگام کار با آنالیز، یك چنین دیدگاهی سودمند است، و برخی از نتایج مهم (بند ۵.۵ را ببینید) در فضای $\mathcal{C}_b$ را می توان با به کار بستن روشهای $\mathbf{R}^n$ اثبات کرد. برای اینکه این برنامه قرین موفقیت باشد، اولین کار عبارت است از اثبات این مطلب که خواص اساسی یك نرم که در فصل ۱، قضیهٔ ۵، مورد مطالعه قرار گرفتند ، معتبر می مانند.

آگاهی: اگرچه یك نرم داریم، ولی یك حاصل ضرب داخلی وابسته به آن به طوری که $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$ ، نداریم. فضاهای تابعی دیگری را که در آنالیز فوریه مطالعه می کنیم (فصل ۱۰) دارای یك چنین حاصل ضرب داخلی هستند.

قضیهٔ ۶. تابع $\|\cdot\|$ ، معین روی $\mathcal{C}_b(A, \mathbf{R}^m)$ ، در خواص یك نرم صدق می کند:

(یك) $\|f\| \geqslant 0$ و $\|f\| = 0$ اگر، وفقط اگر، $f = 0$ ،



شکل ۵-۵ نرم یك تابع

(دو) برای $f\in\mathcal{C}_b$ ، $\alpha\in\mathbf{R}$ ، $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$ ،

(سه) (نامساوی مثلثی) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

اینها قواعد اساسی موردنیاز ما هستند تا بتوانیم دربارهٔ مجموعه‌های باز، همگرایی، وغیره، سخن بگوییم. به‌عنوان مثال، در $\mathcal{C}_b$ بنویسیم $f_k\to f$ اگر، و فقط اگر، $\|f_k-f\|\to 0$. یادآوری می‌کنیم که یك فضای برداری با یك نرم، که ازقواعد (یك)، (دو)، (سه) پیروی کند، یك فضای نرم‌دار نامیده می‌شود. با به کار بستن همان برهانها، اساساً همهٔ نتایج فصل ۲ باز درچارچوب فضاهای نرم‌دار پابرجا می‌مانند وما بعضی از آنها را درمباحثات و برهانهای زیر به‌کارخواهیم برد. ارتباط با همگرایی یکنواخت، ساده است.

قضیهٔ ۷. (($f_k\to f$ در $\mathcal{C}_b$) $\Longleftrightarrow$ ($f_k\to f$ به‌طور یکنواخت در A)؛ یعنی $\|f_k-f\|\to 0$).

همچنین به‌خاطر آورید که یك دنبالهٔ f_k، یك دنبالهٔ کوشی نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon>0$ یك N وجود داشته باشد به طوری که $k\,,\,l\geqslant N$ ایجاب کند $\|f_k-f_l\|<\varepsilon$. یك فضای نرم‌دار را کامل می‌نامند، اگر هر دنبالهٔ کوشی همگرا باشد. نام‌دیگر برای یك فضای نرم‌دار کامل فضای باناخ است. کامل بودن یك خاصیت فنی مهم برای یك فضاست، زیرا اغلب ممکن است قادر باشیم ثابت کنیم که یك دنباله، دنبالهٔ کوشی است و می‌خواهیم همگرایی آن را به‌سمت عنصری ازفضای مفروض استنتاج کنیم.

قضیهٔ ۸. $\mathcal{C}_b$ یك فضای باناخ است.

فضای $\mathcal{C}_b$ تنها یکی از بی‌شمار فضاهای تابعی بسیار مهم در آنالیز است. اگرچه قواعد مذکور در قضیهٔ ۶ (با قضیهٔ ۵، فصل ۱ مقایسه کنید) ما را مجاز می‌کند تا مفاهیم مجموعه‌های باز، همگرایی، وغیره را، نظیر $\mathbf{R}^n$، وارد کنیم، اما ازجهات دیگر فضای $\mathcal{C}_b$ کاملاً متفاوت از $\mathbf{R}^n$ است. به‌عنوان نمونه، همان‌گونه که متذکر شدیم، در $\mathcal{C}_b$ یک حاصل‌ضرب داخلی که موجد نرم $\|\cdot\|$ باشد وجود ندارد، (تمرین ۴۸، در پایان همین فصل). تفاوت دیگر این است که $\mathcal{C}_b$ متناهی‌البعد نیست. در بندهای ۵.۵، ۶.۵ و ۷.۵ برخی از مثالهای ویژه را، که این نظریهٔ درمورد آنها می‌تواند به‌کار برده شود، خواهیم دید.

مثال ۱. فرض کنیم $B=\{f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})\mid f(x)>0$ ، به‌ازای هر $x\in[0,1]\}$. نشان دهید که B یک مجموعهٔ باز در $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ است.

حل: بنا بر تعریف، برای $f\in B$ باید یک $\varepsilon>0$ بیابیم به‌طوری که $D(f,\varepsilon)=\{g\in\mathcal{C}\mid \|f-g\|<\varepsilon\}\subset B$. لذا $f\in B$ را ثابت نگه می‌داریم. حال، چون $[0,1]$ فشرده است، f درنقطه‌ای از $[0,1]$، دارای یک مقدار مینیمم، مثلاً m، می‌باشد. بنابراین، به‌ازای هر $x\in[0,1]$، $f(x)\geqslant m>0$. گیریم $\varepsilon=m/2$. دراین صورت اگر $\|g-f\|<\varepsilon$، نتیجه‌می گیریم که، برای‌هر x، $|f(x)-g(x)|<\varepsilon=m/2$. ازاین‌رو $g(x)\geqslant m/2>0$ ولذا $g\in B$.

مثال ۲. بست مجموعهٔ B در مثال ۱ چیست؟

حل : حکم می‌کنیم که بست‌عبارت است از $D=\{f\in\mathcal{C}\mid f(x)\geqslant 0$ ، $x\in[0,1]$ به‌ازای‌هر$\}$. این یک‌مجموعهٔ بسته‌است، زیرا اگر $0\leqslant f_n(x)$ و (به‌طوریکنواخت) $f_n\to f$، و بنابراین، نقطه‌به‌نقطه ، آنگاه، به‌ازای هر x ، $f(x)\geqslant 0$. برای نشان دادن اینکه D بست مطلوب است، کافی‌است نشان‌دهیم که برای $f\in D$ ، $f_n\in B$ وجود دارد به‌طوری که $f_n\to f$ (چرا؟). خیلی ساده قرار می‌دهیم $f_n=f+1/n$.

مثال ۳. فرض کنیم یک‌دنبالهٔ $f_n\in\mathcal{C}_b$ داریم به‌طوری که $\|f_{n+1}-f_n\|\leqslant r_n$ ، که در آن، $r_n\geqslant 0$ و $\sum r_n$ همگرا است. ثابت کنید که f_n همگرا می‌باشد.

حل: بنا بر نامساوی مثلثی، داریم

$$\|f_n-f_{n+k}\|\leqslant\|f_n-f_{n+1}\|+\|f_{n+1}-f_{n+2}\|+\cdots+$$
$$\|f_{n+k-1}-f_{n+k}\|\leqslant r_n+r_{n+1}+\cdots+r_{n+k}$$

چون $\sum r_l$ همگراست، وقتی‌که $n\to\infty$ ، عبارت اخیر به سمت‌صفر می گراید؛ علت این امر آن است که این عبارت کوچکتر یا مساوی با $s-s_{n-1}$ می باشد که در آن s_n حاصل جمع جزئی مرتبهٔ n و s حاصل جمع سری‌مفروض‌است. بنابراین f_n یک‌دنبالهٔ کوشی‌است،

و لذا همگراست.

تمرینهای بند ۴.۵

۱. فرض کنیم $B=\{f\in\mathcal{C}_b(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid f(x)>0$ ، بهازای‌هر $x\in\mathbf{R}\}$. آیا B باز است؟ اگر خیر، $\operatorname{int}(B)$ کدام است؟

۲. بست B در تمرین۱ چیست؟

۳. آیا ارتباطی بین مثال۳ بالا وآزمون M وایرشتراس‌می‌بینید؟ بحث کنید.

۴. فرض کنیم

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{nx}{1+nx}\right)\ ,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1$$

نشان دهید که، در $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ ، $f_n\to 0$.

۵. فرض کنیم f_k یك‌دنبالهٔ‌همگرا در $\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$ باشد. ثابت کنید $\{f_k | k=1,2,3,\ldots\}$ در $\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$ کراندار است. آیا بسته هم هست؟

۵.۵ قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی

این‌قضیه با مفهوم‌فشردگی درفضای $\mathcal{C}_b$ ،که دربند ۴.۵ معرفی‌شد، ارتباط تنگاتنگ دارد. همان‌گونه‌که در فصل۳ دیدیم، طرق هم‌ارز متعددی برای فرمول‌بندی مفهوم فشردگی در $\mathbf{R}^n$ وجود دارد. ولی‌در فضاهای کلیتر، مانند $\mathcal{C}_b$ ، این‌طرق مختلف‌هم‌ارز نیستند. به‌طور مشخص، در قضیهٔ ۱ آن فصل، (یك) با قسمتهای‌دیگرهم‌ارز نخواهدبود، اما (دو)، ′(دو)، (سه) و ′(سه) همگی‌دوبه‌دو هم‌ارز هستند. یك‌بررسی‌ازآن برهان‌این مطلب‌رانشان‌می‌دهد (تمرین ۲۱، درپایان همین فصل‌را نیز ببینید).

درفضاهای‌کلیتر، ما یکی‌از (دو) ، ′(دو) ، (سه) یا ′(سه) رابه عنوان‌تعریف* یك مجموعهٔ فشرده‌اختیار می‌کنیم. دلیل‌این انتخاب ونه انتخاب (یك) این‌است‌که، همان‌گونه که در $\mathbf{R}^n$ می‌دانیم، شرایط (دو) تا ′(سه) ، برای اثبات قضایای‌کلیدی، سودمندترین می‌باشند؛ (فصل ۴ را ببینید).

قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی‌شرایطی‌راکه ، تحت آنها، یك مجموعه‌در $\mathcal{C}$ می‌تواندفشرده باشد، ارائه می‌کند. به‌طور مشخص، این‌قضیه برحسب‌خاصیت بولتسانو‌ـ‌وایرشتراس‌اثبات می‌شود. برای‌بیان این‌قضیهٔ به‌اندك اصطلاحاتی‌نیاز داریم.

تعریف۴. فرض کنیم $B\subset\mathcal{C}(A,\mathbf{R}^m)$. می‌گوییم‌که B یك مجموعهٔ همپیوسته‌از توابع‌است، اگر برای هر $\varepsilon>0$ یك $\delta>0$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که اگر

$x, y \in A$ ، آنگاه $d(x,y) < \delta$ ایجاب کند ، $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ به‌ازای هر $f \in B$.

این تعریف همانند تعریف پیوستگی یکنواخت است، با این تفاوت که در اینجا خواست ما این است که δ بتواند، علاوه بر $x_\circ$، مستقل از f انتخاب شود.

قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ فشرده باشد، و فرض کنیم $B \subset \mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m)$. اگر B کراندار و همپیوسته باشد، آنگاه هر دنبالهٔ در B دارای یك زیردنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگراست.

بنابراین یك مجموعه در $\mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m)$ فشرده خواهد بود هرگاه بسته، کراندار، و همپیوسته باشد. حقیقت امر آن است که این نتیجه به‌طور شهودی چندان روشن نیست، اما برای یك آنالیز فضای $\mathcal{C}$ توابع پیوسته، بسیار اساسی است.

مثال ۱. فرض کنیم $f_n : [\circ, \text{۱}] \to \mathbf{R}$ها پیوسته بوده و چنان باشند که $|f_n(x)| \leqslant \text{۱۰۰}$ و گیریم مشتقات f'_n وجود داشته و به‌طور یکنواخت، در $]\circ, \text{۱}[$ ، کراندار باشند. ثابت کنید f_n دارای یك زیردنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگراست.

حل: تحقیق می‌کنیم که مجموعهٔ $\{f_n\}$ همپیوسته و کراندار است. فرض این است که برای یك ثابت M ، $|f'_n(x)| \leqslant M$. بنابراین بنابر قضیهٔ مقدار میانگین،

$$| f_n(x) - f_n(y) | \leqslant M \, |x - y|$$

لذا، برای ε داده‌شده می‌توانیم $\delta = \varepsilon / M$ را، مستقل از x، y، و n انتخاب کنیم . درنتیجه $\{f_n\}$ همپیوسته است . این مجموعه کراندار نیز هست، زیرا

$$\|f_n\| = \sup_{\circ \leqslant x \leqslant \text{۱}} | f_n(x) | \leqslant \text{۱۰۰}$$

مثال ۲. اگر «$|f_n(x)|$ کراندار است» را از قلم بیندازیم، آیا نتیجهٔ مثال ۱ معتبر است؟

حل: خیر، زیرا فرض کنیم $f_n(x) = n$. دراین‌صورت $f'_n = \circ$، ولی آشکار است که هیچ زیر دنبالهٔ همگرا وجود ندارد.

مثال ۳. فرض کنیم $I : \mathcal{C}([\circ, \text{۱}]) \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $I(f) = \int_\circ^\text{۱} f(x)dx$ تعریف شده باشد . ثابت کنید I پیوسته است.

حل: باید نشان دهیم که $f_n \to f$ در $\mathcal{C}$ ، ایجاب می‌کند $I(f_n) \to I(f)$. اما این هم نتیجهٔ آنی قضیهٔ ۴ است.

تمرینهای بند ۵.۵

۱. نشان دهید که درمثال ۱، «f_n کراندار است» می‌تواند به‌وسیلهٔ «$f_n(\circ) = \circ$» جایگزین

شود ونتیجه معتبر بماند.

۲. آیا لازم است که درقضیهٔ ۹، کل‌دنبالهٔ همگرا باشد؟

۳. (الف) نشان دهید که

$$\left\{f\in\mathcal{C}([\circ,1]\,,\,\mathbf{R})\;\middle|\;\int_\circ^1 f(x)dx\in\,]\circ,3[\right\}$$

باز است.

(ب) نشان دهید که، درفضای همهٔ‌توابع‌کراندار، معین در یك مجموعهٔ A، فضای $\mathcal{C}_b$ بسته است.

۴. فرض کنیم $B\subset\mathcal{C}([\circ\,,\,1]\,,\,\mathbf{R})$ بسته، کراندار، و همپیوسته باشد. قرار می‌دهیم $I:B\to\mathbf{R}$ ، $I(f)=\int_\circ^1 f(x)dx$. نشان دهید که یك $f_\circ\in B$ وجود داردکه در آن مقدار I ماکسیمم می‌شود.

۵. فرض کنیم $f_n:[a,b]\to\mathbf{R}$ توابع پیوستهٔ به طور یکنواخت کراندار باشند. قرار می‌دهیم

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt\;,\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

ثابت کنید F_n یك‌زیر دنبالهٔ به‌طور یکنواخت‌همگرا دارد.

۶.۵ نقاط ثابت و معادلات انتگرال

در این‌بند می‌خواهیم اشاره‌کوتاهی به‌این مطلب داشته باشیم‌که چگونه آنالیز فضای $\mathcal{C}(A,\mathbf{R}^n)$ می‌تواند درکاربردهای متعدد مورداستفاده واقع شود.

دربسیاری از مسائل فیزیکی با معادلات انتگرال مواجه می‌شویم؛ این معادلات به صورت

$$f(x)=a+\int_\circ^x k(x,y)f(y)dy \tag{1}$$

می‌باشند که در آن $a=f(\circ)$ و k داده شده‌اند. k را پیوسته فرض می‌کنیم.

به‌عنوان مثال، $f(x)=ae^x$ معادلهٔ دیفرانسیل $df/dx=f(x)$ را حل می‌کند و این معادله همان

$$f(x)=a+\int_\circ^x f(y)dy$$

است.

برای تجزیه وتحلیل معادلهٔ ۱ می‌توان قضیهٔ آرزلاـآسکولی را مورداستفاده قرار داد (همین‌طورتمرین ۴۵ را درپایان این فصل ببینید). با وجود این ما خود را به مطالعهٔ معادلهٔ ۱ تحت چند فرض‌ویژه، که درموردآنها قضیهٔ زیرقابل اعمال است، محدودخواهیم کرد.

قضیهٔ ۱۰ (اصل تابع انقباض). فرض کنیم برای تابع مفروض $T: \mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)\to\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$ یك‌ثابت λ، $0\leqslant\lambda<1$ وجود داشته‌باشد به‌طوری که، به‌ازای هر $f,g\in\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$،

$$\|T(f)-T(g)\|\leqslant\lambda\|f-g\|$$

دراین صورت T (پیوسته است و) یك نقطهٔ ثابت یکتا دارد؛ یعنی، یك‌نقطهٔ یکتای $f_0\in\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$ وجود دارد به‌طوری‌که $T(f_0)=f_0$.

تبصره : در واقع برهان قضیهٔ بالا برای هرفضای متریك کامل معتبر است. دراین حالت شرطی که برای T قائل شدیم به این صورت خوانده می‌شود $d(T(x),T(y))\leqslant\lambda d(x,y)$. یك تابع T این‌چنینی را یك انقباض می‌نامند؛ این تابع فواصل را به‌نسبت عامل‌ضرب $\lambda<1$ کوتاهترمی‌کند.

روش برهان را روش تقریبات متوالی می‌نامند. با یك تابع دلخواه $f\in\mathcal{C}_b$ شروع کرده و دنبالهٔ

$$f,T(f),T^2(f)=T(T(f)),T^3(f)=T(T(T(f))),\ \cdots$$

را تشکیل می‌دهیم. آنگاه نشان می‌دهیم که این دنبالهٔ یك دنبالهٔ کوشی است، ولذا در $\mathcal{C}_b$ همگراست وتابع حد همان جواب مطلوب است . مشاهده می‌کنیم که این روش، سازنده است. متوالیاً می‌توان اعضای دنبالهٔ تقریب کننده را محاسبه‌کرد. ملاحظه می‌کنیم که اگر با جواب شروع می‌کردیم، یا تصادفاً، درجریان عمل، باتکرار جواب برخورد می‌کردیم، آنگاه دنبالهٔ «متوقف می‌شد».

کاربرد قضیهٔ ۱۰. اگر $\sup\limits_{x\in[0,r]}\int_0^x|k(x,y)|dy=\lambda<1$، آنگاه معادلهٔ ۱ یك‌جواب یکتا در $[0,r]$ دارد.

در واقع، $T(f)$ را به‌وسیلهٔ

$$T(f)(x)=a+\int_0^x k\ (x,y)f(y)dy.$$

تعریف می‌کنیم. بنا براین یك جواب معادلهٔ ۱ یك نقطهٔ ثابت T است وبرعکس. برای به کار بردن قضیهٔ ۱۰ باید تحقیق کنیم که T یك انقباض است: $\|T(f)-T(g)\|\leqslant\lambda\|f-g\|$.

دراینجا $A=[\circ,r]$ و $m=1$. حال

$$\|T(f)-T(g)\|=\sup_{x\in[\circ,r]}|T(f)(x)-T(g)(x)|$$
$$=\sup_{x\in[\circ,r]}\left|\int_\circ^x k(x,y)[f(y)-g(y)]dy\right|$$
$$\leqslant(\sup_{x\in[\circ,r]}\int_\circ^x |k(x,y)|dy)\ \|f-g\|$$
$$=\lambda|f-g|$$

زیرا $|f(y)-g(y)|\leqslant\|f-g\|$ و $\|f-g\|$ یك ثابت است. درنتیجه T یك انقباض است، ولذا یك نقطهٔ ثابت یکتا داردکه جواب مطلوب را نمایش می‌دهد.
بعداً دراین کتاب کاربردهای دیگری ازاین نوع روش‌را خواهیم دید. باید این نکته روشن شده باشد که این فنون، در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و انتگرال، دارای اهمیت زیادی هستند.

مثال ۱. مثالی ازیك فضای متریك کامل ویك تابع $T:X\to X$ ارائه‌کنید، به‌طوری که $d(T(x),T(y))\leqslant d(x,y)$ ولی T دارای نقطهٔ ثابت یکتا نباشد.

حل: فرض کنیم $X=\mathbf{R}$ مجهز به‌فاصلهٔ معمولی $d(x,y)=|x-y|$ باشد. فرض کنیم $T(x)=x+1$. آشکارا هیچ xی وجود نداردکه در $x=x+1$ صدق کند. اما $|T(x)-T(y)|=|x-y|$.
این مثال نشان می‌دهد که درقضیهٔ ۱۰، داشتن $\lambda<1$ اساسی است؛ $\lambda=1$ به کار نخواهدآمد.

مثال ۲. نشان دهیدکه روش تقریبات متوالی اعمال شده بر $f(x)=1+\int_\circ^x f(y)dy$ منجربه‌فرمول معمولی برای e^x می‌شود.

حل: با تابع صفر $\circ$ شروع می‌کنیم. چون $T(g)=1+\int_\circ^x g(y)\,dy$، به دست می‌آوریم:

$$T(\circ)=1;$$
$$T^2(\circ)=T(T(\circ))=1+\int_\circ^x dy=1+x;$$
$$T(T^2(\circ))=1+\int_\circ^x (1+y)\,dy=1+x+\frac{x^2}{2};$$

$$T(T^{۳}(۰))=۱+\int_{۰}^{x}\left(۱+y+\frac{y^{۲}}{۲}\right)dy=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳!};$$

$$\vdots$$

$$T^{n}(۰)=۱+x+\cdots+\frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!}.$$

پس این دنبالهٔ به‌سمت e^{x} همگرا می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنیم $k(x,y)=xe^{-xy}$. درکدام بازهٔ $[۰,r]$، روش متن درس، وجود یك جواب برای معادلهٔ ۱ را تضمین می‌کند؟

حل: λ را تخمین می‌زنیم وملاحظه می‌کنیم که $\lambda<۱$. حال

$$\lambda=\sup_{x\in[۰,r]}\int_{۰}^{x}xe^{-xy}dy$$

$$=\sup_{x\in[۰,r]}(۱-e^{-x^{۲}})=۱-e^{-r^{۲}}$$

بنابراین، درهربازهٔ $[۰,r]$، یك جواب یکتا به‌دست می‌آوریم.

تمرینهای بند ۶.۵

۱. برای‌کدام α، $T(x)=\alpha x$ یك انقباض در $\mathbf{R}$ است؟

۲. اگر $k(x,y)=x$ و $a=۱$، برای‌جواب معادلهٔ ۱، در $[۰,\frac{۱}{۲}]$، عبارتی برحسب‌سری بیابید.

۳. برای‌کدام بازهٔ $[۰,r]$، $r\leqslant ۱$، تابع $f:[۰,r]\to[۰,r]$، $x\to x^{۲}$، یك انقباض است؟

۴. فرض کنیم $T:\mathcal{C}([۰,r],\mathbf{R})\to\mathcal{C}([۰,r],\mathbf{R})$ به‌وسیلهٔ
$$T(f)(x)=\alpha f(x)+\int_{۰}^{x}k(x,y)f(y)dy$$
تعریف شده باشد. برای‌کدام α، k، تابع T یك انقباض است؟

۵. معادلهٔ $dy/dx=۳xy$، $y(۰)=۱$ را به‌یك‌معادلهٔ انتگرال برگردانید، وسپس‌طرحی از روش تکرار برای حل‌آن تنظیم‌کنید.

۷.۵ قضیهٔ‌استون-وایرشتراس

درمطالعهٔ توابع‌پیوسته وهمگرایی یکنواخت، دوتا ازاساسی‌ترین نتایج، عبارتند از قضیهٔ

آرزلا ـ آسکولی، که در بالا مورد بحث قرار گرفت، وقضیهٔ استون ـ وایرشتراس کـه در اینجا مورد بحث قرار خواهد گرفت، در دروس توپولوژی این فهرست قضایا گسترش می‌یابد.

هدف قضیهٔ استون ـ وایرشتراس عبارت است از نشان دادن این مطلب که هر تابــع پیوسته را می‌توان به‌طور یکنواخت، به‌وسیلهٔ یك تابع که مطالعهٔ خواص آن آسانتر است، مانند یك چندجمله‌ای، تقریب زد. این چنین فنون تقریب به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها هم از دید نظری وهم در کارهای عددی مهم هستند.[1]

با ارائه قضیه برای حالت خاص خط حقیقی شروع می‌کنیم. این قضیه اولین بار به‌وسیلهٔ وایرشتراس اثبات شد، ولی ما در اینجا صورتی از آن را، که منسوب به برنشتین[2] است، معرفی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۱ . فرض کنیم $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، وفرض کنیم $\varepsilon>0$. دراین صورت یك چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به طوری کـه $\|p-f\|<\varepsilon$. در واقع، دنبالهٔ چندجمله‌ایهای برنشتین

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

وقتی $n\to\infty$، به‌طوریکنواخت به‌سمت f همگراست؛ دراینجا

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

نمایش‌دهندهٔ ضریب دوجمله‌ای است.

در اینجا گزارهٔ اول نتیجه‌ای از دومی است. دومی به‌آسانـی درك می‌شود، هرگاه شخصی با نظریهٔ احتمال آشنایــی مختصر داشته باشد، و ما فقط برای پاراگراف زیرین بحثمان، چنین فرضی خواهیم کرد. گفتن این مطلــب لزومی ندارد کـه بی‌شك، شناخت برنشتین ازنظریهٔ احتمال، وی را درفهم واثبات این قضیهٔ یاری کرده است.

حال، تصویری ازمطلب ارائه می‌کنیم. «سکه»ای را مجسم کنید که احتمال شیرآمدن آن x، وبنابراین، احتمال خط‌آمدنش $1-x$ باشد. دراین صورت محاسبه می‌کنند که در n پرتاب، احتمال اینکه درست k بار شیر بیاید، عبارت‌است از

---

۱. به‌عنوان نمونه، کتاب

Mc Aloon, Tromba ,*Calculus* ,Chapter 12 , Harcourt Brace Jovanovich Inc., 1972

را ببینید.

2. Bernstein

$$\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k}$$

گیریم دریك بازی قمار، به‌نام «nبار پرتاب»، اگر در n پرتاب، دزست k بارشیر بنشیند، $f(k/n)$ دلار پرداخت می‌شود. دراین صورت مبلغ میانگین (در پایان یك شب طولانی بازی «n بار پرتاب») پرداخت شده، هنگامی که n پرتاب انجام می‌پذیرد، برابراست با

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ f(k/n)x^k(1-x)^{n-k}=p_n(x)$$

دراینجا $f(k/n)$، مقدار f به‌ازای کسری از پرتابهاکه شیرمی‌نشینند، است . حال‌مجسم کنید n بسیار بزرگ باشد، یعنی تعداد بسیاری پرتاب داشته باشیم. دراین صورت انتظار داریم که دریك بازی نوعی «n بارپرتاب»، k/n به $x=$ احتمال k بار شیر آمدن ($=$ کسری از k بار شیر آمدن) خیلی نزدیك باشد وبنابراین پرداخت میانگین ما بایدخیلی نزدیك به $f(x)$ باشد. درنتیجه‌وقتی n بزرگ‌است، انتظار داریم $p_n(x)$ به $f(x)$ نزدیك باشد. مطلب بالادلیل شهودی اعتبار قضیهٔ قبلی‌است. برهان واقعی، همان‌گونه‌که‌از پیچیدگی بازی می‌توان انتظار داشت، کمی پیچیده است .

حتی برای یك f ساده، نظیر $f(x)=\sqrt{x}$، یافتن یك چندجمله‌ای تقریب کننده چندان آسان نیست.

می‌توانیم قضیهٔ موردبحث را به‌صورت زیرجمله‌بندی مجدد کنیم. فرض کنیم $\mathcal{P}$ مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای $p:[0,1]\to\mathbf{R}$ رانمایش‌دهد. دراین‌صورت اولین گزارهٔ قضیهٔ حکم می‌کندکه $\mathcal{P}$ در $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ چگال است؛ یعنی $\mathrm{cl}(\mathcal{P})=\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$.

با درنظر گرفتن مجموعه‌های کلیتراز $[0,1]$ وبا جایگزین کردن $\mathcal{P}$ به‌وسیلهٔ یك خانوادهٔ کلیتراز توابع، که درشرایط معینی صدق کنند، استون تعمیمی بسیارمفید ازقضیهٔ بالا راکشف کرد. برهان قضیهٔ اخیرحالت خاص بالا را مورداستفاده قرارمی‌دهد. قضیه‌ای که ازآن صحبت می‌کنیم درشاخه‌های گوناگون آنالیز بسیارسودمند است (به‌عنوان مثال، درفصل ۱۰، آن را برای مطالعهٔ آنالیزفوریه به‌کارخواهیم برد).

قضیهٔ ۱۲ . فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده باشد، وفرض‌کنیم $\mathcal{B}\subset\mathcal{C}(A,\mathbf{R})$ درشرایط زیر صدق‌کند

(یك) $\mathcal{B}$ یك جبراست؛ یعنی، $f,g\in\mathcal{B}$، $\alpha\in R \Longrightarrow f+g\in\mathcal{B}$، $f\cdot g\in\mathcal{B}$، و $\alpha f\in\mathcal{B}$؛

(دو) تابع ثابت $x\to 1$ در $\mathcal{B}$ قرار دارد؛

(سه) $\mathcal{B}$ نقاط را از یکدیگرجدا می‌کند؛ یعنی، برای $x,y\in A$، $x\neq y$ یك $f\in\mathcal{B}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)\neq f(y)$.

دراین‌صورت $\mathcal{B}$ در $\mathcal{C}(A,\mathbf{R})$ چگال است؛ یعنی، $\mathrm{cl}(\mathcal{B})=\mathcal{C}(A,\mathbf{R})$.

مثال ۱. فرض کنیم p_n یك دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا از چندجمله‌ایها باشد و

$f = \lim_{n\to\infty} p_n$. آیا f باید مشتق‌پذیر باشد؟

حل: خیر، زیرا بنا بر قضیهٔ ۱۱، هر تابع پیوسته، خود یك‌چنین حدی است و توابع پیوستهٔ فراوانی، نظیر تابع زیر، وجود دارند که مشتق‌پذیر نیستند

$$f(x)=\begin{cases} ۰, & ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲} \\ ۲x-۱, & \frac{۱}{۲}\leqslant x\leqslant ۱ \end{cases}$$

مثال ۲. ازقضیهٔ ۱۱ یا ازقضیهٔ ۱۲ مستقیماً ثابت کنید که چندجمله‌ایهای معین روی $[a,b]$ در $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$ چگال هستند.

حل: (الف) می‌دانیم که اگر $f:[۰,۱]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، و $۰<\varepsilon$ آنگاه یك چندجمله‌ای p وجود دارد به‌طوری که $\|f-p\|<\varepsilon$. حال گیریم $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشد، تغییرمقیاس داده وقرارمی‌دهیم

$$f(x)=g(x(b-a)+a)\ ,\ ۰\leqslant x\leqslant ۱$$

لذا $f:[۰,۱]\to\mathbf{R}$. مانند بالا p را می‌یابیم و سپس با تغییرمقیاس درجهت عکس، قرار می‌دهیم

$$q(x)=p\left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right),\ a\leqslant x\leqslant b$$

لذا $q:[a,b]\to\mathbf{R}$. بنابراین q هم یك چندجمله‌ای است. ادعا می‌کنیم که $\|g-q\|<\varepsilon$. در واقع

$$|g(x)-q(x)|=\left|\ f\left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right)-p\left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right)\right|$$

لذا $\|g-q\|<\varepsilon$، زیرا $\|f-p\|<\varepsilon$. بنابراین چندجمله‌ایهای معین در $[a,b]$ چگال هستند.

(ب) درقضیهٔ ۱۲، فرض می‌کنیم $A=[a,b]$ وقرارمی‌دهیم

$$\mathcal{B}=\{q\in\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})\,|\,\text{یك چندجمله‌ای است } q\}$$

دراین‌صورت آشکارا $\mathcal{B}$ در(یك) و (دو) صدق می‌کند. در(سه) نیز صدق می‌کند، زیرا برای $x\neq y$ می‌توانیم بنویسیم $f(t)=t$ و لذا $f(x)\neq f(y)$. بنابراین، بنا بر قضیه، $\mathcal{B}$ چگال است.

تمرینهای بند ۷۰۵

۱. نشان دهید که یك چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به طوری که، به ازای هر $\circ \leqslant x \leqslant ۲\pi$، $|p(x)-\sin x|<۱/۱۰۰$.

۲. فرض کنیم p_n دنباله‌ای ازچندجمله‌ایها باشد، که در $[\circ,۱]$ به‌طور یکنواخت به‌سمت f همگراست، و گیریم f چندجمله‌ای نباشد. ثابت کنیدکه درجات p_nها کراندار نیستند. [راهنمایی: یك چندجمله‌ای درجهٔ Nام p به‌طوریکتا، به‌وسیلهٔ مقادیرش در $N+۱$ نقطهٔ $x_\circ$، . . . ، x_N تعیین می‌شود، این نکته از فرمول درونیابی لاگرانژ

$$p(x)=\sum_{i=۱}^{N}\frac{\pi(x)\ p(x_i)}{\pi'(x_i)(x-x_i)}$$

که در آن $\pi(x)=(x-x_\circ)(x-x_۱)\ldots(x-x_N)$، آشکارمی‌شود.]

۳. ثابت کنیدکه چندجمله‌ایها در $\mathcal{C}([a,b]),\mathbf{R})$ باز نیستند. آیا هرگز، دریك فضای‌متریك، یك زیرمجموعه می‌تواند هم باز وهم چگال باشد؟

۴. مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای دومتغیرهٔ $x,y\in[\circ,۱]\times[\circ,۱]$ و $p(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. ثابت کنیدکه این مجموعهٔ در $\mathcal{C}([\circ,۱]\times[\circ,۱],\mathbf{R})$ چگال است.

۵. مجموعهٔ همهٔ توابع معین در $[\circ,۱]$ راکه به‌صورت

$$h(x)=\sum_{j=۱}^{n}a_je^{b_j x}\ ,\ \ a_j\ ,b_j\in\mathbf{R}$$

هستند، درنظرمی‌گیریم. آیا این مجموعه در $\mathcal{C}([\circ,۱],\mathbf{R})$ چگال است؟

۸.۵ آزمونهای دیریکله و آبل

در بعضی از مواردکه می‌خواهیم تعیین کنیم آیا همگرایی یکنواخت داریم، آزمون M وایرشتراس به‌کارنمی‌آید. برای چنین مواردی ریاضیدانان آزمونهای دیگری ابداع کرده‌اند. اولین آزمون زیرین توسط ن.ه. آبل، ریاضیدان نروژی، خلق‌شد و دومی‌منسوب به پ.گ.دیریکله، یك ریاضیدان آلمانی (فرانسوی‌الاصل) است که درنیمهٔ اول قرن هجدهم فعالیت‌کرده است. دربسیاری ازمثالها وبه‌ویژه درجریان مطالعهٔ سریهای فوریه و سریهای توانی، این‌آزمونها بسیار سودمند هستند. وقتی‌که همگرایی یکنواخت، ونه همگرایی مطلق، داریم این آزمونها با اهمیت هستند.

قضیهٔ ۱۳ (آزمون‌آبل). فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^m$ وفرض‌کنیم $\varphi_n:A\to\mathbf{R}$ یك‌دنبالهٔکاهشی ازتوابع باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $x\in A$، $\varphi_{n+۱}(x)\leqslant\varphi_n(x)$. گیریم یك ثابت M وجود دارد به طوری که، به‌ازای هر $x\in A$ و هر n، $|\varphi_n(x)|\leqslant M$. اگر در

A، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به‌طوریکنواخت همگرا باشد، دراین‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)f_n(x)$ نیزچنین خواهد بود.

وقتی‌که درحالت‌خاص φ_nها و f_nها توابع‌ثابتی هستند، آزمونهای سودمندی برای سریهای معمولی به دست می‌آوریم. اگر φ_nها یك دنبالهٔ‌افزایشی‌باشد، با به‌کار بستن قضیهٔ قبلی درمورد $-\varphi_n$، آزمون مشابه دیگری حاصل می‌شود. درارتباط با این‌مطالب، یك آزمون دیگر، آزمون دیریکله است.

قضیهٔ ۱۴ (آزمون دیریکله). فرض‌کنیم، برای یك دنبالهٔ $f_n: A\subset \mathbf{R}^m\to \mathbf{R}$، $S_n(x)=\sum_{m=1}^{n} f_m(x)$. گیریم یك ثابت M وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $x\in A$ وهر n، $|S_n(x)|\leqslant M$. فرض‌کنیم $g_n: A\subset \mathbf{R}^m\to \mathbf{R}$ چنان باشدکه (به‌طور یکنواخت) $g_n\to 0$، $g_n\geqslant 0$، و $g_{n+1}(x)\leqslant g_n(x)$. در این صورت، در A، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$ به‌طوریکنواخت همگراست.

به‌عنوان مثال، سری متناوب $\sum(-1)^n g_n(x)$ را، که در آن $g_n\geqslant 0$، (به‌طور یکنواخت) $g_n(x)\to 0$، و $g_{n+1}\leqslant g_n$، درنظرمی گیریم. قرارمی‌دهیم $f_n(x)=(-1)^n$. دراین‌صورت $|S_n(x)|\leqslant 1$ وبنابراین $\sum(-1)^n g_n(x)$ به‌طور یکنواخت همگراست. توجه‌کنیدکه، درحالت خاص، یك‌سری متناوب، که جملاتش به‌سمت صفرکاهش می‌یابند، همگراست.

دقت کنیدکه این قضایا به یکدیگر شباهت دارند ولی یکی نیستند. شرایط تحمیل شده بر φ_n درقضیهٔ ۱۳ ایجاب نمی‌کنند که φ_n به‌طوریکنواخت همگرا باشد. به همین ترتیب، درقضیهٔ ۱۳، مقررنمی‌کنیم‌که $\varphi_n\geqslant 0$. برهانهای‌این‌قضایا متأثرازابتکاری،معروف به‌فرمول جمعبندی جزئی آبل‌می‌باشد، که در آن برهانها تشریح شده است.

مثال ۱. نشان دهیدکه در $[\delta,\pi-\delta]$، $\delta>0$، سری $\sum_1^{\infty}(\sin nx)/n$ به‌طوریکنواخت همگراست.

حل: با فرض $f_n(x)=\sin nx$ و $g_n(x)=1/n$ می‌خواهیم قضیهٔ ۱۴ را به‌کار ببریم. تنها فرضی‌که آشکارنیست این است‌که $|\sum_{l=1}^{n} f_l(x)|\leqslant M$. برای نشان‌دادن این مطلب نیازمند به‌استفاده ازیك فن هستیم‌که در زیرمی‌آید. می‌نویسیم

$$2\sin(lx)\sin(\tfrac{1}{2}x)=\cos[(l-\tfrac{1}{2})x]-\cos[(l+\tfrac{1}{2})x]$$

وسپس آنها را از $l=1,\ldots,n$ به‌هم می‌افزاییم. دراین عمل جمع، جملاتی دوبه‌دو حذف می‌شوند، لذا

$$۲\sin\left(\frac{۱}{۲}x\right)(\sin x+\cdots+\sin nx)=\cos\frac{۱}{۲}x$$
$$-\cos\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x$$
$$\leqslant ۲$$

بنابراین

$$\sin x+\cdots+\sin nx\leqslant\frac{۱}{|\sin\frac{۱}{۲}x|}$$

که کرانی برای $\sum_{i=۱}^{n}f_i(x)$ به‌دست می‌دهد. تازمانی‌که $\sin x/۲$ صفر نیست، این کران مناسب است. به‌عنوان مثال، در $[\delta,\pi-\delta]$، یك کران مناسب به‌دست می‌آید. توجه کنید که در اینجا، استدلالهای موردنیاز، تا حدی، ظریفتر ازموردآزمون M هستند.

مثال ۲. نشان دهید که $\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^n e^{-nx}/n$، در $[\circ,\infty[$، به‌طور یکنواخت همگراست.

حل: این‌بارقضیهٔ۱۳ را به‌کارمی‌بندیم. قرارمی‌دهیم $\varphi_n(x)=e^{-nx}$. برای $x\geqslant\circ$، φ_n کاهشی است و $|e^{-nx}|\leqslant ۱$ (چرا؟). ازقبل می‌دانیم که $\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^n/n$ همگراست، لذا، بنابرقضیهٔ آبل، سری مفروض به‌طوریکنواخت همگراست.

مثال ۳. فرض‌کنیم

$$f(x)=\sum_{۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n}e^{-nx}$$

نشان دهید f پیوسته است.

حل: ازمثال ۲ و فرع ۱، حل بی‌درنگ حاصل می‌شود.

تمرینهای بند ۸.۵

سریهای زیررا، برای تعیین همگرایی وهمگرایی یکنواخت، موردآزمون قراردهید.

۱. $\sum_{۱}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-nx}$ ، $\circ\leqslant x\leqslant ۱$

۲. $\sum_{۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^n}{n}$ ، $\circ\leqslant x\leqslant ۱$

۳. $\sum_{۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(n+x)}$ ، $\circ\leqslant x<\infty$

۴. $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} e^{-nx}$ ، $0<\delta \leqslant x \leqslant \pi-\delta$

۵. $\sum_{1}^{\infty} nx^n$ ، $0 \leqslant x < 1$

۹.۵ سریهای توانی وجمع‌پذیری چزارو[1] وآبل

دراین بند چند موضوع دلخواه دیگر را، درنظریهٔ سریهای نامتناهی، مورد بررسی قرار می‌دهیم. با مطالعهٔ سریهای توانی آغازخواهیم کرد.

تعریف ۵ . یك سری توانی عبارت ازیك سری به‌صورت $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ است، که در آن ضرایب a_k اعداد ثابت حقیقی (یا مختلط) می‌باشند. قرارمی‌دهیم

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$$

R را شعاع همگرایی سری توانی مفروض می‌نامند و $\{x \mid |x| = R\}$، دایره همگرایی است (x ممکن است حقیقی یا مختلط باشد).

برای تعریف lim sup، تمرین ۱۰ ، فصل ۱ را ببینید و توجه داشته باشید که $0 \leqslant R \leqslant +\infty$؛ R ممکن است ۰ یا $+\infty$ باشد. دلیل نامگذاری موجود درتعریف ۵ ازقضیهٔ زیرین آشکارمی‌شود.

قضیهٔ ۱۵ . برای $|x|<R$، $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ به‌طورمطلق همگراست، برای $|x| \leqslant R'$، که در آن $R'<R$، به‌طور یکنواخت همگراست، و اگر $|x|>R$، و اگراست. (اگر $|x| = R$، این قضیه هیچ اطلاعی دربارهٔ همگرایی نمی‌دهد.)

آشکارا، این خواص همگرایی، R را به‌طوریکتا مشخص می‌کنند.

فرع ۴ . حاصل‌جمع یك سری توانی، یك تابع C^∞ در درون دایرهٔ همگرایش است. می‌توان ازآن جمله به‌جمله مشتق‌گرفت وسری مشتق دارای همان شعاع همگرایی می‌باشد.

روش برهان مبتنی براستفاده از نتایج قبل دربارهٔ مشتق گیری جمله به‌جمله ازسریها است.

اگر بر حسب اتفاق $\lim_{n \to \infty} |a_n / a_{n+1}|$ وجود داشته باشد، آنگاه این حد با R، شعاع همگرایی ، برابراست. با استفاده ازقضیهٔ ۱۵ وآزمون نسبت این مطلب به‌آسانی

---

1. Cesaro

اثبات می‌شود. ازخواننده می‌خواهیم که آن را برای خود اثبات کند.

بعداً، مفهوم جمع‌پذیری چزارو مورد بررسی قرارمی‌گیرد.

تعریف ۶ . قرارمی‌دهیم

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \ , \ \sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$$

بنابراین σ_n میانگین حسابی اولین n حاصل جمع جزئی سری مفروض است. به دستور

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k$$

توجه کنید. می‌گوییم سری $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$، ۱-جمع‌پذیر چزارو یا جمع‌پذیر $(C,1)$ به سمت A است، هرگاه $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A$. دراین‌حالت می‌نویسیم

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A \qquad (C,1)$$

دراینجا پنداره این است که راهی برای معنی دادن به‌سریهای واگرا بیابیم. به عنوان مثال

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots \quad (C,1)$$

دراینجا $S_n=1,0,1,0,\ldots$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=1,1,2,2,3,3,\ldots$$

$\sigma_{2n}=n/2n$، $\sigma_{2n+1}=n+1/(2n+1)$ ولذا $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=1/2$.

باوجود این می‌توانیم، با میانگین گیری از σ_nها، درست‌همان‌گونه که روش $(C,1)$ متکی برمیانگین‌گیری از S_nها بود، یك روش جمعبندی بازهم نیرومندتر را وارد کنیم. به عبارت‌دیگر حاصل‌جمع $(C,2)$ سری‌مفروض‌را به‌صورت $\lim_{n\to\infty}(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n)/n$ تعریف می‌کنیم، مشروط براینکه این حد وجود داشته باشد.

خواننده می‌تواند به‌آسانی ملاحظه‌کند که برای مقادیر دلخواه $r=1,2,\ldots$، چگونه جمع‌پذیری (C,r)را تعریف کند ومتوالیاً روشهای نیرومندترجمعبندی‌را به‌دست آورد. بعضی ازخواص جمع‌پذیری $(C,1)$ به‌قرار زیرند.

(یك) اگر $\sum a_k = A(C,1)$ و $\sum b_k = B(C,1)$، آنگاه

$$\sum(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha A+\beta B(C,1)$$

(دو) اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A(C,1)$، آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} = A-a_1(C,1)$ («قطع سر»)

(سه) نظم: اگر به معنای معمولی، $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = A$، آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A(C,1)$.

(آشکاراست که این خاصیت بنیادی است؛ هر روش جمعبندی درخصوص خود باید آن را دارا باشد.)

برهان (سه): داریم $S_n \to A$. لذا، برای $B<A$، یك n_0 وجود دارد به‌طوری که $n \geqslant n_0 \Longrightarrow S_n \geqslant B$. حال

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(S_1+\cdots+S_{n_0}+S_{n_0+1}+\cdots+S_n)$$

$$\geqslant \frac{1}{n}(S_1+\cdots+S_{n_0})+\frac{n-n_0}{n}B$$

درنتیجه $\liminf_{n\to\infty} \sigma_n \geqslant B$. چون $B<A$ دلخواه بود، $\liminf_{n\to\infty} \sigma_n \geqslant A$.

برهانی مشابه نشان می‌دهد $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant A$. بنابراین، $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A$.

بعد توجه خود را به‌یك روش جمعبندی دیگر، موسوم به جمعبندی آبل (اگرچه در حقیقت توسط اویلر[1] اختراع شد)، معطوف می‌کنیم.

تعریف ۷. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ به معنای آبل به‌سمت A جمع‌پذیر است اگر $\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A$. دراین‌حال می‌نویسیم (آبل) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$.

به‌عنوان نمونه، بازهم داریم

$$\frac{1}{2} = 1-1+1-1+\cdots \quad (\text{آبل})$$

زیرا، برای $|x|<1$، $f(x)=1-x+x^2-\cdots=1/(1+x)$، و وقتی $x\to 1-$، عبارت‌اخیر $\to 1/2$.

توجه داشته باشید که (حداقل دراین مثال) روش آبل به‌همان نتیجه‌ای منجر می‌شود که روش $(C,1)$. در واقع، همان گونه که در زیرخواهیم دید. این حالت همواره رخ می‌دهد. ابتدا ثابت خواهیم کرد که جمع‌پذیری آبل منظم است.

قضیهٔ ۱۶ (آبل). اگر $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$، آنگاه برای $|x|<1$، $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ همگرا است و $\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A$.

بنابراین، اگریك سری توانی، درسرتاسر یك بازهٔ بسته، همگرا باشد حاصل جمع آن، حتی درنقاط انتهایی بازه، پیوسته است.

---

1. Euler

در واقع روش آبل نیرومندتر از روش $(C,1)$ است.

قضیه ۱۷ . $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A(C,1)$ ایجاب می‌کند $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$ (آبل).

جالب توجه است که درپی یافتن شرایطی باشیم که تحت آنها یك‌سری‌جمع‌پذیر به معنای‌چزارو (یا یك‌سری‌جمع‌پذیر به‌معنای آبل، وغیره) واقعاً به‌معنای معمولی‌همگرا باشد. دراین راستا نتیجه‌ای از گ. ه. هاردی[1] ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۸ . اگر $\sum a_n = A(C,1)$ واگر $a_n = O(1/n)$ (یعنی، اگربه‌ازای یك ثابت M وبرای مقادیربزرگ n، $|a_n| \leqslant M/n$)، آنگاه $\sum a_n$ به‌معنای معمولی (به سمت A) همگراست.

تبصره: قضایای از نوع بالا به‌قضایای «تاوبری»، به‌نام آ. تاوبر[2]، مشهورهستند؛وی یك چنین قضیه‌ای را، که جمع‌پذیری به‌معنای آبل را به‌همگرایی معمولی مرتبط می‌کرد، به‌اثبات رساند.

مثال ۱. شعاع همگرایی $\sum x^k$ و $\sum x^k/k!$ را بیابید.

حل: دراین‌حالات می‌توانیم دستور

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

را مورد استفاده قراردهیم. ازمثال‌اول $R=1$ حاصل‌می‌شود و از دومی به‌دست‌می‌آوریم

$$R = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right) = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

بنابراین، اگر $|x|<1$، $\sum x^k$ (به سمت $1/(1-x)$) همگراست و $\sum x^k/k!$ برای همهٔ مقادیر x (به‌سمت e^x) همگرا می‌باشد.

مثال ۲. نشان دهیدکه $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k$، جمع‌پذیر $(C,1)$ نیست.

حل: دراینجا

$$a_n: \quad -1,\ +2,\ -3,\ +4,\ -5,\ +6,\ldots$$

$$S_n: \quad -1,\ +1,\ -2,\ +2,\ -3,\ +3,\ldots$$

$$T_n: \quad -1,\ 0,\ -2,\ 0,\ -3,\ 0,\ldots$$

$$\sigma_{2n} = 0, \quad \sigma_{2n-1} = -\frac{n}{2n-1} \to -\frac{1}{2}$$

---

1. G. H. Hardy 2. A.Tauber

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ وجود ندارد. اما حاصل‌جمع $(C,۲)$ با ۱/۴ — برابر است (تمرین).

مثال ۳. نشان دهید (آبل) $\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k k = -۱/۴$، در اینجا

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k x^k = x\frac{d}{dx}\Sigma(-۱)^k x^k$$

$$= x\frac{d}{dx}\frac{۱}{۱+x}$$

$$= -\frac{x}{(۱+x)^۲}\ ,\ |x|<۱$$

وقتی $x\to -۱$، این عبارت $\to -۱/۴$، لذا

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)k_k = -\frac{۱}{۴} \quad (\text{آبل})$$

تمرینهای بند ۹.۵

۱. مطلوب است محاسبهٔ شعاع همگرایی

$$\Sigma k!\,x^k \quad \text{و} \quad \Sigma x^k/k^۲$$

۲. با مشتق‌گیری از یك سری مناسب، نشان دهید که

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} = \sum_{k=\circ}^{\infty} kx^{k-۱} = \sum_{k=\circ}^{\infty}(k+۱)x^k\ ,\ -۱<x<۱$$

۳. نشان دهید که $(C,۱)$ $\cdots + ۱ - \circ + ۱ - ۱ + \circ + ۱ - ۱ + \circ + ۱ = ۲/۳$.
(توجه داشته باشید که درج صفرها می‌تواند در حاصل جمع چیزی را تغییراتی ایجاد نماید.)

۴. نشان دهید (آبل) $۱+\circ-۱+۱+\circ-\ldots = ۲/۳$

برهان قضایای فصل ۵

قضیه ۱. فرض کنیم $f_k: A\to\mathbf{R}^m$ توابع پیوسته‌ای باشند، و گیریم که (به‌طور یکنواخت) $f_k\to f$. دراین‌صورت f پیوسته است.

برهان: چون (به‌طوریکنواخت) $f_n\to f$، لذا برای $\varepsilon>\circ$، می‌توانیم Nی بیابیم به‌طوری که $k\geqslant N$ ایجاب کند، به‌ازای هر $x\in A$، $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon/۳$. نقطهٔ خاصی مانند $x_\circ\in A$ را در نظر می‌گیریم. چون f_N پیوسته است، یك $\delta>\circ$ وجود دارد

به‌طوری که $(\|x-x_\circ\|<\delta\,,\,x\in A) \Longrightarrow (\|f_N(x)-f_K(x_\circ)\|<\varepsilon/۳)$. دراین صورت، برای $\|x-x_\circ\|<\delta$ داریم

$$\|f(x)-f(x_\circ)\|\leqslant\|f(x)-f_N(x)\|+\|f_N(x)-f_N(x_\circ)\|+\|f_N(x_\circ)-f(x_\circ)\|<\varepsilon/۳+\varepsilon/۳+\varepsilon/۳=\varepsilon$$

چون $x_\circ$ دلخواه است، پس f درهرنقطهٔ A پیوسته است، بنابراین پیوسته است.■

قضیه ۲. فرض‌کنیم $f_k: A\to\mathbf{R}^m$ دنباله‌ای ازتوابع باشد. آنگاه f_k به طور یکنـواخت همگراست اگر، وفقط اگر، برای هر $\varepsilon>\circ$ یك Nوجود داشته باشد به‌طوری که $l,k\geqslant N$ ایجاب‌کند، به‌ازای هر $x\in A$، $\|f_k(x)-f_l(x)\|<\varepsilon$.

برهان: اگر $f_k\to f$ (به‌طوریکنواخت)، دراین صـورت برای $\varepsilon>\circ$ داده شده، می‌توانیـم Nی بیـابیـم بـه طـوری کـه $k\geqslant N$ ایجـاب کنـد، به ازای هر x، $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon/۲$. پس اگر $k,l\geqslant N$،

$$\|f_k(x)-f_l(x)\|\leqslant\|f_k(x)-f(x)\|+\|f(x)-f_l(x)\|<\varepsilon/۲+\varepsilon/۲=\varepsilon$$

برعکس، اگر $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد، می‌توانیم Nی بیابیم به‌طوری‌که $k,l\geqslant N$ ایجاب‌کند، به‌ازای هر x، $\|f_k(x)-f_l(x)\|<\varepsilon$، بنابراین، درهر نقطهٔ x، $f_k(x)$ یك دنبالهٔ کوشی است، لذا $f_k(x)$ یقیناً نقطه به‌نقطه به‌سمت، مثلاً، $f(x)$ همگراست. به‌علاوه می‌تـوانیـم Nی بیابیـم بـه طـوری کـه $k,l\geqslant N$ ایجـاب کند، به ازای هر x، $\|f_k(x)-f_l(x)\|<\varepsilon/۲$. چون درهرنقطهٔ x، $f_k(x)\to f(x)$، می‌توانیم، برای هر x، N_xی بیابیم به‌طوری کـه $l\geqslant N_x \Longrightarrow \|f_l(x)-f(x)\|<\varepsilon/۲$. فرض کنیـم $l\geqslant\max\{N,N_x\}$. آنگاه

$$k\geqslant N\Longrightarrow\|f_k(x)-f(x)\|\leqslant\|f_k(x)-f_l(x)\|+\|f_l(x)-f(x)\|<\varepsilon/۲+\varepsilon/۲=\varepsilon$$

چون درهرنقطهٔ x، این نامساوی برقراراست، پس Nی یافته‌ایم به‌طوری که، به‌ازای هر x، $k\geqslant N\Longrightarrow\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon$. بنابراین (به‌طوریکنواخت) $f_k\to f$.■

قضیهٔ ۳. فرض کنیـم $g_k: A\to\mathbf{R}^m$ توابعـی باشند به‌طـوری‌کـه ثابتهای M_k، با فرض $\|g_k(x)\|\leqslant M_k$ به‌ازای هر $x\in A$ وجود داشته باشند وبه‌علاوه $\sum_{k=۱}^\infty M_k$ همگرا باشد. در این‌صورت $\sum_{k=۱}^\infty g_k$ به‌طوریکنواخت (وبه‌طورمطلق) همگراست.

برهان: چون $\sum M_k$ همگـراست، برای هر $\varepsilon>\circ$، Nی وجود دارد به طوری که $k\geqslant N$ ایجاب کند، به‌ازای هر $p=۱,۲,\ldots$، $|M_k\ldots+M_{k+p}|<\varepsilon$ (قضیهٔ ۱۱، فصل ۲ را ببینید). بنابرنامساوی مثلثی، برای $k\geqslant N$، وبه‌ازای هر $x\in A$، داریم

$$\|g_k(x)+\cdots+g_{k+p}(x)\| \leqslant \|g_k(x)\|+\cdots+\|g_{k+p}(x)\|$$
$$\leqslant M_k+\cdots+M_{k+p}<\varepsilon$$

بنابراین، بنابرمحك کوشی برای سریها، $\sum g_k$ به‌طور یکنواخت همگراست.■

قضیهٔ ۴. فرض‌کنیم $f_k:[a,b]\to\mathbf{R}$ توابع پیوسته‌ای باشند و $f_k\to f$ (به‌طوریکنواخت). دراین‌صورت

$$\int_a^b f_k(x)dx\to\int_a^b f(x)\,dx$$

فرع ۲. فرض‌کنیم $g_k:[a,b]\to\mathbf{R}$ پیوسته باشند و $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد. دراین‌صورت می‌توانیم ترتیب انتگرال‌گیری وجمعبندی را تعویض‌کنیم.

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(x)dx$$

برهان: درمورد انتگرالها، یادآوری می‌کنیم که اگر $|f(x)|\leqslant M$، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant M(b-a)$$

برای $\varepsilon>0$، Nی انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $k\geqslant N$ ایجاب کند
$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon/(b-a)$$

دراین‌صورت

$$\left|\int_a^b f_k(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_k(x)-f(x))dx\right| \leqslant \varepsilon\cdot\frac{(b-a)}{(b-a)}=\varepsilon$$

همان چیزی‌که درپی‌آن بودیم.

برای اثبات فرع، قرارمی‌دهیم $f_k=\sum_{i=1}^{k} g_i$؛ دراین‌صورت (به‌طور یکنواخت) $f_k\to f=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$، وبنابراین، بنابرآنچه‌که دربالا دیدیم،

$$\int_a^b f_k(x)dx\to\int_a^b f(x)dx. \qquad ■$$

قضیه ۵. فرض‌کنیم $f_k:]a,b[\to\mathbf{R}$ دنباله‌ای ازتوابع مشتق‌پذیر، معین‌دربازهٔ باز $]a,b[$، بوده‌که نقطه به‌نقطه به‌سمت $f:]a,b[\to\mathbf{R}$ همگرا هستند. گیریم‌که مشتقات f_k' پیوسته بوده وبه‌طور یکنواخت به سمت تابع g همگرا باشند. در این صورت f مشتق‌پذیر است و $f'=g$.

برهان[1]: می‌نویسیم $f_k(x)=f_k(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'_k(t)\,dt$، که در آن $a<x_0<b$. این مطلب، بنا بر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگـرال، امکان‌پذیراست. با استفاده از قضیهٔ ۴، اگر $k\to\infty$، به‌دست می‌آوریم $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$. بنابراین، باز بنا بر قضیهٔ اساسی، $g=f'$. دراینجا، بنا بر قضیهٔ ۱، g پیوسته است.■

قضیه ۶. تابع $\|\;\|$، معین روی $\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$، درشرایط زیرصدق می‌کند

(یك) $\|f\|\geqslant 0$، و $\|f\|=0$ اگر، وفقط اگر، $f=0$؛

(دو) $\|\alpha f\|=|\alpha|\,\|f\|$ ؛ برای $\alpha\in\mathbf{R}$، $f\in\mathcal{C}_b$؛

(سه) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$ (نامساوی مثلثی).

برهان: (یك) و (دو) واضح هستند. برای (سه)، بنا بر نامساوی مثلثی در $\mathbf{R}^m$، داریم

$$\begin{aligned}\|f+g\|&=\sup\{\|(f+g)(x)\|\;|x\in A\}\\&\leqslant\sup\{\|f(x)\|+\|g(x)\|\;|x\in A\}\end{aligned}$$

حال، چون $\sup(P+Q)=\sup P+\sup Q$ (تمرین ۷ درپایان فصل ۱)، و

$$\{\|f(x)\|+\|g(x)\|\;|x\in A\}\subset\{\|f(x)\|+\|g(y)\|\;|x,y\in A\}$$

داریم

$$\sup\{\|f(x)\|+\|g(x)\|\;|x\in A\}\leqslant\|f\|+\|g\| \blacksquare$$

قضیهٔ ۷. ((به طور یکنـواخت در A) $f_k\to f$) $\Longleftrightarrow$ (در $\mathcal{C}_b$، $f_k\to f$)؛ یعنـی $(\|f_k-f\|\to 0)$.

برهان: برهان چیزی جز رونویسی تعاریف نیست. دانشجـو باید آن را به‌انجام برساند.

قضیهٔ ۸. $\mathcal{C}_b$ یك فضای باناخ است.

برهان: فرض‌کنیم f_k یك دنبالهٔ‌کوشی باشد. بنا برقضیهٔ ۲، f_k به‌طوریکنواخت به سمت f همگراست. چون، برای مقادیربزرگ k، $\|f(x)\|\leqslant\|f_k\|+1$، لذا f کراندار است، و بنا برقضیهٔ ۱، f پیوسته‌است. بنابراین $f\in\mathcal{C}_b$ و درنتیجه f_k در $\mathcal{C}_b$ همگراست.■

برهان قضیهٔ آرزلا_آسکولی کمی طولانی و پیچیده است. درصورت تمایل، دریك

---

۱. تبصره: در واقع می‌توانیم قضیه را، حتی اگر f_k'ها پیوسته نباشند، اثبات کنیم، ولی انجام آن زحمت بیشتری دارد؛ آپوستول، آنالیز ریاضی، صفحه ۴۰۲ را ببینید.

دورهٔ درسی کمتر بلندپروازانه، می‌توان ازاین برهان چشم‌پوشی نمود.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ فشرده باشد و $B\subset \mathcal{C}(A,\mathbf{R}^m)$. اگر B کراندار وهمپیوسته باشد، آنگاه، هردنبالهٔ در B دارای یك زیردنبالهٔ به‌طوریکنواخت همگراست.

برای اثبات این قضیه، بدواً لم زیر را اثبات می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. دراین‌صورت یك مجموعهٔ شمارش‌پذیر $C\subset A$ وجود دارد به‌طوری که بستش شامل A باشد.

برهان: نقاطی در $\mathbf{R}^n$ که مختصاتشان اعدادی گویا هستند یك مجموعهٔ شمارش‌پذیر تشکیل می‌دهند (فصل مقدماتی را ببینید). این نقاط را به‌صورت x_1، x_2، ... نامگذاری می‌کنیم. برای هرعدد صحیح n گردهای زیر را درنظرمی‌گیریم

$$D\left(x_1,\frac{1}{n}\right),D\left(x_2,\frac{1}{n}\right),\ldots.$$

آشکاراست که این گردهاهمهٔ $\mathbf{R}^n$ را می‌پوشانند. هرزمان‌که یکی‌ازاینها، $D(x_l,(1/n))$، A را قطع می‌کند، نقطه‌ای در $A\cap D(x_l,(1/n))$ برمی‌گزینیم، ومجموعه‌ای که به‌این ترتیب حاصل‌می‌شود، همان مجموعهٔ C مطلوب ما خواهد بود. حال C شمارش‌پذیراست، زیراگردایهٔ $\{D(x_l,(1/n))\mid l,n\in\mathbf{N}\}$ شمارش‌پذیراست.

ادعا می‌کنیم کـه $A\subset \mathrm{cl}(C)$. در واقع، فرض کنیـم $x\in A$، $\varepsilon>0$. n را چنان انتخاب‌می‌کنیم‌که $1/n<\varepsilon/2$. حال، به‌ازای مقداری از l، x دریك $D(x_l,(1/n))$ قرار دارد، بنابـراین نقطـه‌ای، مانـند y، در $C\cap D(x_l,(1/n))$ وجـود دارد. در نتیجـه $d(x,y)\leqslant d(x,x_l)+d(x_l,y)\leqslant 1/n+1/n<\varepsilon$، پس $x\in\mathrm{cl}(C)$ و بنـابـراین $\mathrm{cl}(C)\supset A$. ■

به‌طریقی که ذیلاً می‌آید نیازمند به‌بهره‌گیری ازفشردگی A خواهیم بود.

لم ۲. فرض‌کنیم A مجموعه‌ای فشرده و C، مجموعه‌ای نظیرهمان که درلم قبل ساخته شد، باشد، دراین‌صورت برای‌هر $\delta>0$ یك‌مجموعهٔ متناهی $C_1\subset C$، مانند $C_1=\{y_1,\ldots,y_k\}$، وجود دارد به‌طوری‌که هر $x\in A$ درفاصله‌ای‌کمتراز δ ازیك $y_l\in C_1$ قرار داشته باشد.

برهان: n را چنان انتخاب می‌کنیم که $1/n<\delta$. دراین صورت درلم ۱، تعدادی متناهی از گردایهٔ $D(x_1,(1/n))$، $D(x_2,(1/n))$، ... وجود داردکه A رامی‌پوشانند، زیرا A فشرده است. در این گردایهٔ متناهی، آن نقاطی را که برای C انتخاب شده بودند درنظر گرفته ومجموعهٔ آنها را C_1 می‌نامیم. در این‌صورت نتیجهٔ مطلوب، با روالی‌نظیر آنچه درلم ۱ دیدیم، حاصل می‌شود. ■

حال برمی‌گردیم به‌برهان قضیهٔ خودمان. فرض‌کنیم C مجموعه‌ای نظیر همان‌که در

لم ۱ ساخته‌شده، باشد، مثلاً $C = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$. فرض کنیم f_n دنباله‌ای در B باشد. حال $\{f_n\}$ کرانداراست، پس، درحالت خاص، دنبالهٔ $(f_n(x_۱))$ در $\mathbf{R}^m$ کرانداراست. بر اساس قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس‌در $\mathbf{R}^m$ زیردنباله‌ای از $(f_n(x_۱))$، که همگرا ست ، وجود دارد. این زیردنبالهٔ را به‌این‌صورت نمایش می‌دهیم

$$f_{۱۱}(x_۱),\ f_{۱۲}(x_۱),\ \cdots,\ f_{۱n}(x_۱),\ \cdots$$

به‌طریق مشابه، دنبالهٔ $f_{۱k}(x_۲) : k = ۱, ۲, \ldots$ در $\mathbf{R}^m$ کراندار است؛ بنابراین دارای یك زیردنبالهٔ

$$f_{۲۱}(x_۲),\ f_{۲۲}(x_۲),\ \cdots,\ f_{۲n}(x_۲),\ \cdots$$

است که‌همگرامی‌باشد. با ادامهٔاین فرآیند، می‌بینیم که دنبالهٔ $f_{۲k}(x_۳) : k = ۱, ۲, \ldots$ در $\mathbf{R}^m$ کراندار است، لذا زیردنباله‌ای از آن مانند

$$f_{۳۱}(x_۳),\ f_{۳۲}(x_۳),\ \cdots,\ f_{۳n}(x_۳),\ \cdots$$

همگراست. به‌همین‌ترتیب عمل‌کرده وسپس قرار می‌دهیم $g_n = f_{nn}$، لذا g_n عبارت‌است ازتابع nام که در زیردنبالهٔ nام ظاهر می‌شود

از روی نمودار، g_n به‌کمك استخراج قطر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{lllllll}
f_{۱۱} & f_{۱۲} & f_{۱۳} & \cdots & f_{۱n} & \cdots & (\text{زیردنبالهٔ اول}) \\
f_{۲۱} & f_{۲۲} & f_{۲۳} & \cdots & f_{۲n} & \cdots & (\text{زیردنبالهٔ دوم}) \\
f_{۳۱} & f_{۳۲} & f_{۳۳} & \cdots & f_{۳n} & \cdots & (\text{زیردنبالهٔ سوم}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\
f_{n۱} & f_{n۲} & f_{n۳} & \cdots & f_{nn} & \cdots & (\text{زیردنبالهٔ } n \text{ام}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

این شگرد را«فرآیند قطری» می‌نامند و درموقعیتهای متعدد سودمند می‌باشد.

ازطریقهٔ ساختن دنباله g_n ملاحظه می‌کنیم که، درهرنقطهٔ C، این دنباله‌همگراست؛ درحقیقت g_n، زیردنبالهٔ هریك از دنباله‌های $f_{mk} : k = ۱, ۲, \ldots$ می‌باشد.

حال ثابت خواهیم‌کردکه دنبالهٔ g_n، درهرنقطهٔ A، همگراست و این همگرایی، یکنواخت است و این اثبات قضیه را به‌اتمام می‌رساند. به‌این منظور فرض‌کنیم $\varepsilon > ۰$ و فرض‌کنیم δ همان باشدکه در تعریف همپیوستگی آمده است. فرض‌کنیم $C_۱ = \{y_۱, \ldots, y_k\}$ یك زیرمجموعهٔمتناهی C باشد به‌طوری‌که هرنقطهٔ A درفاصله‌ای کمتر از δ ازیك نقطهٔ $C_۱$ قرارداشته باشد (لم ۲ را ببینید). چون دنباله‌های

$$(g_n(y_۱)),\ (g_n(y_۲)),\ \cdots,\ (g_n(y_k))$$

همگی همگرا هستند، یك‌عدد صحیح N وجود دارد به‌طوری‌که اگر $m, n \geqslant N$، آنگاه

$$\|g_m(y_i)-g_n(y_i)\| < \varepsilon \quad i=۱, ۲, \ldots, k \text{ به‌ازای هر }$$

برای هر $x \in A$، یك $y_j \in C_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|x-y_j\| < \delta$. بنابراین، بنابر فرض همپیوستگی، داریم

$$\|g_n(x)-g_n(y_j)\| < \varepsilon$$

به‌ازای هر $n=۱, ۲, \ldots$. درنتیجه، داریم

$$\|g_n(x)-g_m(x)\| \leqslant \|g_n(x)-g_n(y_j)\| + \|g_n(y_j)-g_m(y_j)\| +$$
$$+\|g_m(y_j)-g_m(x)\| < \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = ۳\varepsilon$$

مشروط بر آنکه $m, n \geqslant N$. این نامساوی نشان می‌دهد که

$$\|g_n-g_m\| \leqslant ۳\varepsilon \quad m, n \geqslant N \text{ به‌ازای }$$

بنابراین همگرایی یکنواخت دنبالهٔ g_n، در A، از محك کوشی نتیجه می‌شود (قضیهٔ ۲ را ببینید). ■

به‌جای اثبات قضیهٔ ۱۰، نتیجهٔ کلیتر زیر را به‌اثبات می‌رسانیم.

قضیهٔ ′۱۰. فرض کنیم X یك فضای متریك کامل و $T: X \to X$ یك انقباض باشد: $d(T(x), T(y)) \leqslant \lambda d(x, y)$، که در آن $۰ \leqslant \lambda < ۱$ یك ثابت مفروض است. در این صورت T پیوسته است و یك نقطهٔ ثابت یکتا دارد.

برهان: این نکته که T به‌طور یکنواخت پیوسته است بی‌درنگ نتیجه می‌شود، زیرا برای $\varepsilon > ۰$ داده شده می‌توانیم $\delta = \varepsilon/\lambda$ را مورد استفاده قرار دهیم؛ $d(x, y) < \delta$ ایجاب می‌کند $d(T(x), T(y)) < \lambda\delta = \varepsilon$.

فرض کنیم $x_۰ \in X$، و قرار می‌دهیم $x_۱ = T(x_۰)$، $x_۲ = T(x_۱)$، ...، $x_{n+۱} = T(x_n) = T^{n+۱}(x_۰)$. ادعا می‌کنیم که x_n یك دنبالهٔ کوشی است. توجه کنیم که

$$\begin{aligned}
d(x_{n+۱}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-۱}))\\
&\leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-۱})\\
&= \lambda\, d(T(x_{n-۱}), T(x_{n-۲}))\\
&\leqslant \lambda^۲ d(x_{n-۱}, x_{n-۲})\\
&\;\;\vdots\\
&\leqslant \lambda^n d(T(x_۰), x_۰)
\end{aligned}$$

بنا براین

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})+d(x_{n+1}, x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+k-1}, x_{n+k})$$
$$\leqslant (\lambda^n+\lambda^{n+1}+\cdots+\lambda^{n+k-1})\, d(Tx_0, x_0)$$

حال، چون $\lambda < 1$، $\sum\lambda^n$ یك سری هندسی همگراست، لذا برای $\varepsilon > 0$ داده شده، Nی وجود دارد به‌طوری‌که $n \geqslant N$ ایجاب کند

$$(\lambda^n+\cdots+\lambda^{n+k-1}) < \frac{\varepsilon}{d(Tx_0, x_0)}$$

بنابراین $n \geqslant N$ ایجاب می‌کند $d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$. درنتیجه یك دنبالهٔ کوشی داریم، و بنابرفرض کامل بودن، به‌ازای یك $x \in X$، $x_n \to x$.

ادعا می‌کنیم $Tx = x$. درواقع $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$، لذا، بنابر پیوستگی T، $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$. اما $Tx_n = x_{n+1}$، پس $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$.

سرانجام، x، یعنی نقطهٔ ثابت، یکتاست، زیرا فرض کنیم که $Tx = x$ و $Ty = y$. دراین‌صورت

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leqslant \lambda\, d(x, y)$$

اگر $d(x,y) \neq 0$، به‌دست می‌آوریم $\lambda \geqslant 1$، و این یك تناقض است. در نتیجه $d(x, y) = 0$، ولذا $x = y$.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد و فرض کنیم $\varepsilon > 0$. در این‌صورت یك چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به‌طوری که $\|p-f\| < \varepsilon$. در واقع، دنبالهٔ چندجمله‌ایهای برنشتین

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

وقتی $n \to \infty$، به‌طور یکنواخت به‌سمت f همگراست؛ دراینجا

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-\mathrm{k})!}$$

نمایش‌دهندهٔ ضریب دوجمله‌ای است.

برهان: قضیهٔ دوجمله‌ای حکم می‌کند

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \qquad (1)$$

اگر از معادلهٔ ۱ نسبت به x مشتق بگیریم وسپس در x ضرب کنیم، اتحاد زیرحاصل می‌شود

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^ky^{n-k} \tag{۲}$$

به‌طریق مشابه، با دوبار مشتق‌گیری

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^ky^{n-k}. \tag{۳}$$

قرارمی‌دهیم (تحت عنوان نمادگذاری) $r_k(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. بنابراین معادلات ۱، ۲ و ۳، با فرض $y=1-x$، به‌این صورت خوانده می‌شوند

$$\sum_{k=0}^{n}r_k(x)=1,\quad \sum_{k=0}^{n}kr_k(x)=nx,\quad \sum_{k=0}^{n}k(k-1)r_k(x)=n(n-1)x^2.$$

درنتیجه اتحاد زیرحاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2r_k(x)&=n^2x^2\sum_{k=0}^{n}r_k(x)-2nx\sum_{k=0}^{n}kr_k(x)+\sum_{k=0}^{n}k^2r_k(x)\\&=n^2x^2-2nx\cdot nx+[nx+n(n-1)x^2] \qquad (۴)\\&=nx(1-x).\end{aligned}$$

حال M را چنان انتخاب می‌کنیم که در $[0,1]$، $|f(x)|\leqslant M$. چون f به‌طور یکنواخت پیوسته است، برای $\varepsilon>0$، یك $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که $|x-y|<\delta$ ایجاب کند $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

می‌خواهیم عبارت زیررا برآورد کنیم

$$\begin{aligned}|f(x)-p_n(x)|&=\ f(x)-\sum_{k=0}^{n}f(k/n)r_k(x)\\&=\ \sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)r_k(x)\end{aligned}$$

برای این منظور، این حاصل‌جمع را به‌دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ جملاتی که برایشان $|k-nx|<\delta n$ وجملاتی که برایشان $|k-nx|\geqslant\delta n$. اگر $|k-nx|<\delta n$، آنگاه $|x-k/n|<\delta$، لذا $|f(x)-f(k/n)|<\varepsilon$، وبنابراین، اگر به‌خاطر آوریم که $r_k(x)\geqslant 0$، $\varepsilon\sum r_k(x)=\varepsilon\geqslant$ حاصل‌جمع این جملات. جملات نوع دوم دارای حاصل‌جمع

$$\leqslant 2M \sum_{|k-nx|\geqslant \delta n} r_k(x) \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x)$$

هستند، که سمت راست این نامساوی، بنابرمعادلهٔ ۴، عبارت است از

$$\frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

زیرا $x(1-x) \leqslant 1/4$ (چرا؟). درنتیجه ثابت کردیم که برای هر $\varepsilon > 0$، یك $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$|f(x)-p_n(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2 n}$$

پس اگر n به‌قدرکافی بزرگ باشد، $M/(2\delta^2 n) < \varepsilon$؛ لذا اگر $n \geqslant M/(2\delta^2\varepsilon)$،

$$|f(x)-p_n(x)| < 2\varepsilon$$

بنابراین، $p_n \to f$ (به‌طور یکنواخت). ■

قضیهٔ ۱۲. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ فشرده باشد و فرض کنیم $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(A, \mathbf{R})$ در شرایط زیر صدق کند

(یك) $\mathcal{B}$ یك‌جبر است؛

(دو) تابع ثابت $x \to 1$ در $\mathcal{B}$ قرار دارد؛

(سه) $\mathcal{B}$ نقاط را از یکدیگرجدا می کند.

دراین صورت $\mathcal{B}$ در $\mathcal{C}(A, \mathbf{R})$ چگال است.

برهان: ابتدا چند نماد، به‌صورت زیر، وارد می‌کنیم:

$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)) \quad \text{و} \quad (f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

(شکل ۵-۶ را ببینید.) فرض کنیم $\overline{\mathcal{B}}$ بست $\mathcal{B}$ باشد. دراین صورت، بنابرپیوستگی عمل جمع وعمل ضرب، می‌بینیم که $\overline{\mathcal{B}}$ نیز در (یك) صدق می‌کند. آشکارا در (دو)، (سه) نیز صدق می‌کند. بنابراین $\overline{\mathcal{B}}$ بسته است و آنچه که حال می‌خواهیم نشان دهیم عبارت است‌از $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(A, \mathbf{R})$.

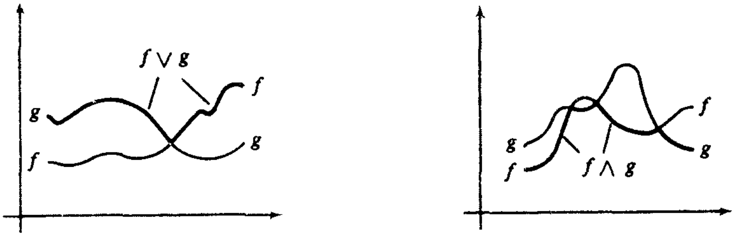
بنابرقضیهٔ پیشین وحل قسمت (الف) مثال ۲، بند ۷.۵، می‌توانیم دنباله‌ای از چند‌جمله‌ایها، نظیر $p_n(t)$، بیابیم به‌طوری که

$$\big||t| - p_n(t)\big| < \frac{1}{n} \qquad \text{برای } -n \leqslant t \leqslant n$$

بنابراین

اگر $-n \leqslant f(x) \leqslant n$، $$||f(x)|-p_n(f(x))|<\frac{1}{n}$$

این ثابت می‌کند که برای $f \in \overline{\mathscr{B}}$، داریم $|f| \in \overline{\mathscr{B}}$،چرا که $p_n \circ f \in \overline{\mathscr{B}}$، زیرا $\overline{\mathscr{B}}$ یك جبر است.



شکل ۵-۶

حال اتحادهای

$$f \vee g=\frac{f+g}{۲}+\frac{|f-g|}{۲},$$

$$f \wedge g=\frac{f+g}{۲}-\frac{|f-g|}{۲}$$

را داریم(تمرینی برای خواننده)، لذا اگر $f\ , g \in \overline{\mathscr{B}}$، آنگاه $f \vee f$ و $g \wedge f$ نیز در $\overline{\mathscr{B}}$ قرار دارند.

فرض کنیم $h \in \mathscr{C}(A, \mathbf{R})$ و $x_۱, x_۲ \in A$، با فرض $x_۱ \neq x_۲$، $g \in \mathscr{B}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $g(x_۱)\neq g(x_۲)$ (و این، بنابر فرض (سه)، امکان‌پذیر است) و قرار می‌دهیم

$$f_{x_۱ x_۲}(x)=\alpha g(x)+\beta$$

که در آن

$$\beta=\frac{[g(x_۱)h(x_۲)-h(x_۱)g(x_۲)]}{[g(x_۱)-g(x_۲)]} \qquad \text{و} \qquad \alpha=\frac{[h(x_۱)+h(x_۲)]}{[g(x_۱)-g(x_۲)]}$$

اعداد α، β چنان انتخاب شده‌اند که $f_{x_۱ x_۲}(x_۱)=h(x_۱)$ و $f_{x_۱ x_۲}(x_۲)=h(x_۲)$.
فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ و $x \in A$. برای $y \in A$ یك همسایگی $U(y)$ نقطهٔ y وجود دارد به‌طوری که

$$f_{yx}(z) > h(z)-\varepsilon \quad z \in U(y) \text{ اگر }$$

این مطلب، بنابر پیوستگی h، واضح است. فرض کنیم $U(y_۱)$، . . .، $U(y_l)$ یك زیر-

پوشش‌متناهی A باشد، که بنا برقضیهٔ هاینه‌ـبورل، وجود دارد. قرارمی‌دهیم

$$f_x = f_{y_1 x} \vee \cdots \vee f_{y_l x}$$

بنابراین، نظیر آنچه در بالا دیدیم، $f_x \in \overline{\mathcal{B}}$، و به‌ازای هر $z \in A$، $f_x(z) > h(z) - \varepsilon$. همچنین، $f_x(x) = h(x)$. درنتیجه یك همسایگی $V(x)$ وجود دارد به‌طوری‌کـه، اگر $y \in V(x)$، $f_x(y) < h(y) + \varepsilon$. فرض کنیم $V(x_1)$، . . .، $V(x_k)$، A را بپوشانند و قرار می‌دهیم

$$f = f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_k}$$

در این صورت، باز $f \in \overline{\mathcal{B}}$. حال، برای هر $z \in A$، $f(z) > h(z) - \varepsilon$، زیرا به‌ازای هر $u \in A$، $f_{x_j}(u) > h(u) - \varepsilon$ و همچنین برای $y \in A$، x_jی وجود دارد به‌طوری‌که $y \in V(x_j)$، لذا $f(y) \leqslant f_{x_j}(y) < h(y) + \varepsilon$. خلاصه آنکه $|f(z) - h(z)| < \varepsilon$، وازآنجا $h \in \overline{\mathcal{B}}$. درنتیجه $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(A, \mathbf{R})$. ■

برای هردو قضیهٔ ۱۳ و ۱۴ که ذیلاً می‌آیند، فرمول جمعبندی جزئی آبل به‌کاربرده می‌شود؛ این نکته مضمون لم بعد را تشکیل می‌دهد.

لم ۰۱ دو دنبالهٔ اعداد حقیقی a_1، a_2، . . . و b_1، b_2، . . . را درنظـر می‌گیریم. فرض کنیم $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. دراین صورت

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k)$$

$$= s_n b_1 + \sum_{k=1}^{n} (s_n - s_k)(b_{k+1} - b_k).$$

برهان: ملاحظه می‌کنیم که داریم $a_n = s_n - s_{n-1}$. بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k,$$

که در آن $s_0 = 0$. حال

$$\sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} - s_n b_{n+1},$$

بنابراین، نتیجهٔ اول را به‌دست می‌آوریم. با قراردادن

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) + b_1$$

در تساوی اول، تساوی دوم حاصل می‌شود. ■

قضیه ۰۱۳ (آزمون آبل). فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^m$ و فرض کنیم $\varphi_n : A \to \mathbf{R}$ یک دنبالهٔ کاهشی از توابع باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $x \in A$، $\varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$. گیریم یک ثابت M وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $x \in A$ و هر n، $M \geqslant |\varphi_n(x)|$. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ در A، به‌طور یکنواخت همگرا باشد، در این‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) f_n(x)$ نیز چنین خواهد بود.

برهان: فرض کنیم

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) f_k(x) \quad \text{و} \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

دراین‌صورت، بنا بر تساوی دوم لم قبل، برای $n > m$، داریم

$$r_n(x) - r_m(x) = (s_n(x) - s_m(x))\varphi_1(x) + \sum_{k=m-1}^{n} (s_n(x) - $$
$$- s_k(x))(\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))$$

و بنابراین

$$|r_n(x) - r_m(x)| \leqslant |s_n(x) - s_m(x)||\varphi_1(x)| +$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n} |s_n - s_k||\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)|$$

زیرا

$$\varphi_{k+1} \leqslant \varphi_k, \quad |\varphi_{k+1} - \varphi_k| = \varphi_k - \varphi_{k+1}.$$

برای $\varepsilon > 0$ داده شده، N را چنان انتخاب می‌کنیم که $n, m \geqslant N$ ایجاب کند، به‌ازای هر $x \in A$، $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon / 3M$. دراین صورت، به‌ازای هر $x \in A$،

$$|r_n(x) - r_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right) \sum_{k=m+1}^{n} [\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)]$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)[\varphi_{m+1}(x) - \varphi_{n+1}(x)]$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)[|\varphi_{m+1}(x)| + |\varphi_{n+1}(x)|]$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{۳}+\frac{\varepsilon}{۳}+\frac{\varepsilon}{۳}=\varepsilon$$

درنتیجه، بنابرمحک کوشی (قضیهٔ ۲)، $f_n(x)$ به‌طور یکنواخت همگراست. ■

قضیهٔ ۱۴. (آزمون دیریکله). فرض کنیم، برای یک دنبالهٔ $f_n:A\subset \mathbf{R}^m\to \mathbf{R}$، $s_n(x)=\sum_{m=۱}^{n} f_m(x)$. گیریم یک ثابت M وجود دارد به‌طوری که، به ازای هر $x\in A$ و هر n، $|s_n(x)|\leqslant M$. فرض کنیم $g_n: A\subset \mathbf{R}^m\to \mathbf{R}$ چنان باشدکه (به‌طور یکنواخت) $g_n\to ۰$، $g_n\geqslant ۰$ و $g_{n+۱}(x)\leqslant g_n(x)$. در ایـن صورت در A، $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ به طور یکنواخت همگراست.

برهان: همان نمادهای برهان قبـل را، به‌فرض $\varphi_n=g_n$، به‌کار می‌بریم. امـا در اینجا، برای محاسبهٔ r_n-r_m، تساوی اول لم قبل را مورد استفاده قرار می‌دهیم. یعنی،

$$r_n(x)-r_m(x)=s_n(x)\varphi_{n+۱}(x)-s_m(x)\varphi_{m+۱}(x)$$

$$-\sum_{k=m+۱}^{n} s_k(x)(\varphi_{k+۱}(x)-\varphi_k(x))$$

بنابراین، چون $\varphi_k\geqslant ۰$ و $\varphi_{k+۱}\leqslant \varphi_k$،

$$\begin{aligned}|r_n(x)-r_m(x)| &\leqslant M(\varphi_{n+۱}(x)+\varphi_{m+۱}(x))\\ &\quad +M\sum_{k=m+۱}^{n}(\varphi_k(x)-\varphi_{k+۱}(x))\\ &=M(\varphi_{n+۱}(x)+\varphi_{m+۱}(x)-\varphi_{n+۱}(x))\\ &=۲M\varphi_{m+۱}(x)\end{aligned}$$

حال، برای $\varepsilon>۰$ داده شده، N را چنان انتخاب می‌کنیم که $m>N$ ایجاب کند، به‌ازای هر x، $\varphi_m(x)<\varepsilon/۲M$. دراین صورت $m,n\geqslant N$ ایجاب می‌کند $|r_n(x)-r_m(x)|<\varepsilon$، و به‌این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

قضیهٔ ۱۵. برای $|x|<R$، $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$ به‌طورمطلق همگراست، برای $|x|\leqslant R'$، که در آن $R'<R$، به‌طور یکنواخت همگراست، و اگر $|x|>R$، واگراست.

برهان: فرض کنیم $R'<R$. R'' را چنان انتخاب می کنیم کـه $R'<R''<R$.

دراین صورت، برای nهای به‌قدرکافی بزرگ،

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R''} \text{ ، یعنی } |a_n| \leqslant \left(\frac{1}{R''}\right)^n$$

پس اگر $|x| \leqslant R'$، داریم

$$|a_n x^n| \leqslant \left(\frac{R'}{R''}\right)^n$$

چون $R'/R'' < 1$، بنابر آزمون M وایرشتراس، درگردهٔ $|x| \leqslant R'$، همگرایی مطلق یکنواخت داریم.

از طرف دیگر، گیریم $\sum a_n x^n$ همگرا باشد. در این صورت $a_n x^n \to 0$، لذا، برای nهای بزرگ، $|a_n x^n| \leqslant 1$. بنابراین، برایnهای بزرگ، $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant |x|^{-1}$. در نتیجه $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant |x|^{-1}$، یعنی، $|x| \leqslant R$. ■

فرع ۴. حاصل‌جمع یک‌سری توانی، یک تابع C^∞ در درون دایرهٔ همگراییش است. می‌توان از آن‌جمله به‌جمله مشتق گرفت و سری مشتق دارای همان شعاع همگرایی است.

برهان: سری حاصل از مشتق‌گیری جمله به‌جمله عبارت از $\sum k a_k x^{k-1}$ است. شعاع همگرایی آن R' است، که در آن

$$\frac{1}{R'} = \limsup \sqrt[k]{k|a_k|}$$

اما $\sqrt[k]{k} \to 1$ (چرا؟)، لذا

$$\frac{1}{R'} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} \text{ ، یعنی } R' = R.$$

بنابراین، بنابر فرع ۳، سری‌مشتق، در درون هردایرهٔ کوچکتر، به‌طور یکنواخت‌همگراست، و در نتیجه با مشتق حاصل‌جمع سری اولیه برابر است. به‌وسیلهٔ روش استقراء، می‌بینیم که سری اولیهٔ به‌دفعات دلخواه مشتق‌پذیر است. ■

قضیهٔ ۱۶. (آبل). اگر $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$، آنگاه برای $|x| < 1$، $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ همگراست و $\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A$.

برهان: با تغییر $a_{\circ}$، می‌توانیم فرض کنیم $A=\circ$. چون a_k کراندار است (درواقع $a_k \to \circ$)، برای $|x|<۱$، بنابر قضیهٔ ۱۵ دربارهٔ شعاع همگرایی، سری $\sum a_k x^k$ همگراست.

می‌نویسیم $S_n=\sum_{k=\circ}^{n} a_k$. چون، وقتی $n\to\infty$، S_n کراندار است، سری $\sum S_k x^k$ نیز برای $|x|<۱$، همگراست. حال، چون $A=\circ$، لذا وقتی $x\to\infty$، $S_n \to \circ$. می‌نویسیم $f(x)=\sum_{k=\circ}^{\infty} a_k x^k$، $|x|<۱$. دراین‌صورت

$$f(x)=S_{\circ}+\sum_{k=۱}^{\infty}(S_k-S_{k-۱})x^k$$

$$=(۱-x)\sum_{k=\circ}^{\infty}S_k x^k$$

چون $S_n\to\circ$، برای $\varepsilon>\circ$ داده‌شده می‌توانیم $n_{\circ}$ را چنان بیابیم که به‌ازای $n>n_{\circ}$ داشته باشیم $|S_n|\leqslant\varepsilon$. آنگاه

$$|f(x)|\leqslant(۱-x)\left|\sum_{k=\circ}^{n_{\circ}}S_k x^k\right|+(۱-x)\sum_{k=n_{\circ}+۱}^{\infty}\varepsilon x^k$$

$$\leqslant(۱-x)\left|\sum_{k=\circ}^{n_{\circ}}S_k x^k\right|+(۱-x)\cdot\varepsilon x^{n_{\circ}+۱}(۱-x)^{-۱}$$

$$\leqslant(۱-x)\left|\sum_{k=\circ}^{n_{\circ}}S_k x^k\right|+\varepsilon.$$

بنابراین، $\limsup_{x\to ۱-}|f(x)|\leqslant\varepsilon$. چون $\varepsilon>\circ$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to ۱-}f(x)=\circ \quad \blacksquare$$

قضیهٔ ۱۷. $\sum_{k=\circ}^{\infty}a_k=A(C,۱)$ ایجاب می‌کند (آبل) $\sum_{k=\circ}^{\infty}a_k=A$.

برهان: نظیر برهان قبل می‌توانیم فرض کنیم $A=\circ$. می‌نویسیم $S_n=\sum_{k=\circ}^{n}a_k$، $T_n=\sum_{k=\circ}^{n}S_k$. دراین صورت، بنابر فرض داریم $T_n=o(n)$. بنابراین

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=o(n) \quad \text{و} \quad S_n=T_n-T_{n-۱}=o(n)$$

درنتیجه، اگر $|x|<1$، هرسه سری $\sum a_k x^k$، $\sum S_k x^k$ و $\sum T_k x^k$ همگرا هستند. همین‌طور

$$f(x)=\sum a_k x^k=(1-x)\sum S_k x^k$$
$$=(1-x)^2\sum T_k x^k$$

حال، چون $T_n=o(n)$، برای $\varepsilon>0$ داده شده می‌توانیم n_0 را چنان انتخاب کنیم که $n\geqslant n_0$ ایجاب کند $|T_n|\leqslant\varepsilon n$. بنابراین،

$$|f(x)|\leqslant(1-x)^2\Big|\sum_{k\leqslant n_0}T_k x^k\Big|+(1-x)^2\sum_{k>n_0}\varepsilon k x^k$$
$$\leqslant(1-x)^2\Big|\sum_{k\leqslant n_0}T_k x^k\Big|+(1-x)^2\cdot\varepsilon x(1-x)^{-2}$$

و از آنجا درمی‌یابیم که $\limsup_{x\to1-}|f(x)|\leqslant\varepsilon$. درنتیجه، نظیر آنچه که درقضیهٔ قبل دیدیم، $\lim_{x\to1-}f(x)=0$. ■

قضیهٔ ۱۸. اگر $\sum a_n=A(C,1)$ و اگر $a_n=o(1/n)$، آنگاه $\sum a_n=A$.

برهان: طبق معمول، می‌توانیم فرض کنیم $A=0$. می‌نویسیم $S_n=\sum_1^n a_k$، $T_n=\sum_1^n S_k$. دراین صورت فرض اول به صورت $T_n=o(n)$ نوشته‌می‌شود. فرض دوم ایجاب می‌کند که یك ثابت C وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر n، $|a_n|\leqslant C/n$.

می‌خواهیم نشان دهیم که $S_n\to0$. اگرغیر ازاین باشد، دراین‌صورت یك $\delta>0$ وجود دارد، به‌طوری که برای اندیسهای n بی‌نهایت زیادی، $|S_n|\geqslant\delta$. می‌توان فرض کرد (درصورت لزوم با تغییردادن همهٔ علامتها) که، برای بی‌نهایت مقدار n، $S_n\geqslant\delta$. اما اگر $S_n\geqslant\delta$ و $r>S$، داریم

$$S_r=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_r$$
$$\geqslant\delta-C\left(\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{r}\right)$$
$$\geqslant\delta-C\log\left(\frac{r}{n}\right)$$

$\geqslant\delta/2$ مقدار اخیر، مشروط بر آنکه $C\log(r/n)\leqslant\delta/2$، یعنی، اگر $r/n\leqslant e^{\delta/2C}=\lambda$. (توجه کنید که $\lambda>1$). بنابر این داریم

$$([\lambda n]-n)\frac{\delta}{2}\leqslant\sum_{r=n+1}^{[\lambda n]}S_r=T_{[\lambda n]}-T_n$$

(دراینجا $[x]$ به‌معنای بزرگترین‌عدد صحیح $\leqslant x$ است.) حال سمت‌راست این نامساوی $o(n)$ است، درصورتی‌که سمت‌چپ از مرتبهٔ $(1-\lambda)\delta n/2$ می‌باشد، و این یك تناقض است. درنتیجه S_n باید به‌سمت ۰ میل کند. ■

مثالهای حل شدهٔ فصل ۵

۱. (یك) بـرای توابع $f, g: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$، اگـر $f_k \to f$ (نقطه به‌نقطه) و $g_k \to g$ (نقطه به‌نقطه)، دراین صورت نشان دهیدکه $f_k + g_k \to f + g$ (نقطه به نقطه).

(دو) به‌پرسش مشابهی دربارهٔ همگرایی یکنواخت پاسخ دهید.

حل:

(یك) برای $x \in A$، بایـد نشان دهیم کـه $(f_k+g_k)(x) \to (f+g)(x)$. به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفـروض، N_1 و N_2 را چنـان انتخاب می‌کنیم کـه $k \geqslant N_1$ ایجـاب کند $\|f_k(x)-f(x)\| < \varepsilon/2$ و $k \geqslant N_2$ ایجاب کند $\|g_k(x)-g(x)\| < \varepsilon/2$. در این صورت فرض‌می‌کنیم $N = \max(N_1, N_2)$، لذا $k \geqslant N$ ایجاب می‌کند (بنابر نامساوی مثلثی)

$$\|(f_k+g_k)(x)-(f+g)(x)\| \leqslant \|f_k(x)-f(x)\|$$
$$+\|g_k(x)-g(x)\| < \varepsilon$$

(دو) استدلال قسمت (یك) را تکرارکنید و توجه‌کنیدکه هرگزارهٔ باید، به‌ازای هر- $x \in A$، برقرار باشد.

۲. ثابت کنیدکه یك دنبالهٔ $f_k : A \to \mathbf{R}^n$ نقطه به‌نقطه (به‌طـور یکنواخت) همگراست اگر، وفقط اگر، مؤلفه‌هایش نقطه بدنقطه (به‌طور یکنواخت) همگرا باشند.

حل: آن قسمت از تمرین‌که مربوط به‌همگرایی نقطه به‌نقطه است ازاین امرمسلم، کـه در $\mathbf{R}^m$، یك دنباله همگراست اگر، وفقط اگـر، مؤلفه‌هایش چنین باشند (فصل ۲ را ببینید)، نتیجه می‌شود. با وجود این، استدلال را مجـدداً می‌نویسیم تا اعتبارش برای همگرایی یکنواخت دیده شود.

فرض‌کنیم $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbf{R}^m$. آنگاه $|x^i| \leqslant \|x\| \leqslant \sum_{i=1}^m |x^i|$، درواقع، نامساوی اول واضح است و دومی از نامساوی مثلثی حـاصل می‌شود مشروط بر آنکه بنویسیم: $x = (x^1, 0, \ldots, 0) + (0, x^2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x^m)$ با اعمال نامساویهای بالا به $f_k = (f_k^1, \ldots, f_k^m)$، داریم

$$|f_k^i(x) - f^i(x)| \leqslant \|f_k(x) - f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^m |f_k^i(x) - f^i(x)|.$$

حال اگر، به‌ازای هر x، $f_k(x)$ یك دنبالهٔ کوشی باشد، بنابر نامساوی اول، $f_k^i(x)$ نیزچنین است. بنابراین همگرایی نقطه به‌نقطهٔ f_k ایجاب می‌کند کـه f_k^i نقطه به‌نقطه همگرا باشد. همان نامساوی وقضیهٔ ۲ نشان می‌دهندکه اگر f_k به‌طور یکنواخت همگرا باشد، f_k^i نیزچنین خواهد بود.

برعکس، گیریم، به‌ازای هـر i و x، $f_k^i(x)$ همگـرا باشد. N_i را چنان انتخاب می‌کنیم‌که $k, l \geqslant N^i$ ایجاب کند $|f_k^i(x)-f_l^i(x)| < \varepsilon/m$. دراین‌صورت اگـر $N = \max(N_1, \ldots, N_m)$، آنگاه $k, l \geqslant N$ ایجاب می‌کند

$$\|f_k(x)-f_l(x)\| < \varepsilon/m + \cdots + \varepsilon/m = \varepsilon$$

لذا $f_k(x)$ همگراست.

برای همگرایی یکنواخت استدلال بالا را تکرار می‌کنیم با توجه به‌اینکه‌هر گزاره باید، به‌ازای هر $x \in A$، برقرار باشد.

۳. مثالی بیابید از دنباله‌ای نظیر f_k، کـه در $[\circ, \infty[$ به‌سمت صفر به‌طـور یکنواخت همگرا باشد، هـریك از $\int_\circ^\infty f_k(x)\,dx$ها وجود داشته باشد (یعنی همگرا باشد)، اما $\int_\circ^\infty f_k(x)\,dx \to +\infty$. این مثال قضیهٔ ۴ را نقض می‌کند؟

حل: فرض کنیم

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \circ \leqslant x \leqslant k^2 \text{ اگر} \\ \circ, & x > k^2 \text{ اگر} \end{cases}$$

دراین صورت (به‌طور یکنواخت) $f_k \to \circ$، زیرا، به‌ازای‌هر x، $|f_k(x)| \leqslant 1/k$.
با وجود این

$$\int_\circ^\infty f_k(x)\,dx = \frac{k^2}{k} = k \to \infty$$

این مثال قضیهٔ ۴ رانقض‌نمی‌کند، زیراقضیهٔ نامبرده با بازه‌های متناهی سروکارداشت.

۴. (قضیهٔ‌دینی[1]). فرض‌کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ فشرده‌و f_k دنباله‌ای ازتوابع پیوسته $f_k : A \to \mathbf{R}$ باشد، به‌طوری که

(الف) به‌ازای $x \in A$، $f_k(x) > \circ$؛

(ب) (نقطه به‌نقطه) $f_k \to \circ$؛

(پ) وقتی $k \geqslant l$، $f_k(x) \leqslant f_l(x)$.

---

1. Dini

ثابت کنید (به‌طور یکنواخت) $f_k \to 0$.

حل: این مثال به کمی احتیاط نیاز دارد، زیرا داریم تلاش می‌کنیم که همگرایی یکنواخت را از همگرایی نقطه‌ای به اضافهٔ چند فرض دیگر استنتاج کنیم و می‌دانیم که این نتیجه، بدون این مفروضات اضافی، درست نخواهد بود (شکل ۵ـ۱ را که در آن همهٔ مفروضات، به استثنای $f_k(0) \to 0$، وقتی $k \to \infty$، برقرارند، مطالعه کنید).

برای $\varepsilon > 0$ داده‌شده می‌خواهیم Nی بیابیم به‌طوری که، به‌ازای هر $k \geqslant N$ و هر $x \in A$، $\varepsilon > |f_k(x)|$. برای هر $x \in A$، N_x را چنان می‌یابیم که اگر $k \geqslant N_x$، آنگاه $|f_k(x)| < \varepsilon/2$. می‌نویسیم N_x تا بر این نکته که این عدد وابسته به x است تأکید کرده باشیم. دراینجا ما فرض (ب) را به‌کار برده‌ایم. بنابر پیوستگی $f_k(x)$، یك همسایگی x، نظیر $U_{x,k}$، وجود دارد به طوری که، به ازای هر $y \in U_{x,k}$، $|f_k(y) - f_k(x)| < \varepsilon/2$. همسایگیهای U_{x,N_x} پوششی برای A هستند، لذا، بنابر فشردگی، یك زیرپوشش متناهی، به مراکز، مثلاً $x_1, \ldots, x_M$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $N = \max(N_{x_1}, \ldots, N_{x_M})$. حال فرض کنیم $x \in A$، $k \geqslant N$. دراین‌صورت، lای وجود دارد که $x \in U_{x_l, N_{x_l}}$، لذا $|f_{N_l}(x) - f_{N_l}(x_l)| < \varepsilon/2$. بنابراین، با استفاده از (پ)، داریم

$$0 \leqslant f_k(x) \leqslant f_N(x) \leqslant f_{N_l}(x) = f_{N_l}(x_l) + [f_{N_l}(x) - f_{N_l}(x_l)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon.$$

در نتیجه، به‌ازای $x \in A$، $k \geqslant N$، $f_k(x) < \varepsilon$ و لذا همگرایی یکنواخت داریم.

۵. مقدمه. سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ را که همگراست (قضیهٔ ۱۴ بالا را ببینید) در نظر می‌گیریم. با وجود همگرایی، نمی‌توانیم به‌جملات این سری تجدید آرایش دهیم، زیرا درغیر این‌صورت ممکن است واگرایی به دست آوریم. درحقیقت، می‌توان این سری را چنان تجدید آرایش داد که حاصل‌جمع آن هرعدد دلخواهی بشود (این مطلب را ریمان کشف کرد (تمرین ۱۷ را ببینید).

برای اینکه بتوانیم سریها را تجدید آرایش دهیم، لازم است که همگرایی مطلق داشته باشیم. ابتدا یك تجدید آرایش را تعریف می‌کنیم. گیریم $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ یك سری باشد. یك تجدید آرایش این سری، عبارت از سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$ است که در آن σ یك جایگشت مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ می‌باشد. یا اگر دقیقتر بگوییم، σ یك تناظر دوسویی $\sigma: \{1,2,3,\ldots\} \to \{1,2,3,\ldots\}$ است.

قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

قضیهٔ. فرض کنیم $g_k \in \mathbf{R}^m$ وگیریم $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ مطلقاً همگرا باشد؛ یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|$ همگراست. در این صورت هرتجدید آرایش سری $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ نیز مطلقاً همگراست و دارای همان حاصل‌جمع می‌باشد.

حل: فرض کنیم $g_{\sigma(k)}$ سری تجدید آرایش شده باشد. برای $\varepsilon>0$ داده‌شده، Nی وجود دارد به‌طوری که $n\geqslant N$ ایجاب کند

$$\|g_n\|+\cdots+\|g_{n+p}\|<\varepsilon$$

حال یک عدد صحیح مثبت N_1 چنان انتخاب می‌کنیم که وقتی $n>N_1$، داشته باشیم $\sigma(n)>N$. (چنین وضعی امکان‌پذیر است، زیرا σ تناظری دوسویی است و لذا تنها تعدادی متناهی عدد صحیح مثبت n وجود دارد به‌طوری که $\sigma(n)\leqslant N$). بنابراین اگر $n>N_1$، داریم $\sigma(n+k)>N$، لذا بنابر نامساوی پیشین

$$\|g_{\sigma(n)}\|+\cdots+\|g_{\sigma(n+p)}\|<\varepsilon$$

درنتیجه، بنابر محک کوشی، $\sum g_{\sigma(n)}$ مطلقا همگراست (قضیهٔ ۱۰ فصل ۲).

برای نشان‌دادن اینکه حدود یکی هستند، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، $N_2>N$ را چنان برمی‌گزینیم، همان N بالا، که اگر $1\leqslant n\leqslant N$، آنگاه، به ازای kی، $1\leqslant k\leqslant N_2$، $n=\sigma(k)$. این بدان علت است که تعداد این چنین kها متناهی و σ پوشاست. در این‌حال قرار می‌دهیم $N_0=\max(N_1,N_2)$ و لذا برای $m>N_0$،

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} g_{\sigma(k)}-\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{m} g_{\sigma(k)}-\sum_{n=1}^{N_0} g_n-\sum_{n=N_0+1}^{\infty} g_n\right\|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{k=1}^{m} g_{\sigma(k)}-\sum_{n=1}^{N_0} g_n\right\|+\left\|\sum_{n=N_0+1}^{\infty} g_n\right\|$$

$$=\left\|\sum_{n=N_0+1}^{m} g_{\sigma(n)}\right\|+\left\|\sum_{n=N_0+1}^{\infty} g_n\right\|$$

$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

در اینجا این امر مسلم را موردتوجه قرار دادیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n=\sum_{n=1}^{N_0} g_n+\sum_{n=N_0+1}^{\infty} g_n$$

و اینکه

$$\sum_{k=1}^{m} g_{\sigma(k)}-\sum_{n=1}^{N_0} g_n=\sum_{n=N_0+1}^{m} g_{\sigma(n)}$$

بنابر طریقهٔ ساختن N_2، این تساویها برقرارند.

بنابراین سری $\sum_{k=1}^{m} g_{\sigma(k)}$ به‌سمت $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ همگراست و این‌همان نتیجه مطلوب

است . نتیجهٔ این مثال در ارتباط تنگاتنگ با قضایای مهم تجدید آرایش سریهای دوگانه است (تمرین ۵۱ را ببینید).

تمرینهای فصل ۵

۱. (الف) فرض کنیم f_k دنباله‌ای از توابع از $A \subset \mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^m$ باشد. گیریم ثابتهای m_k وجود دارند به‌طوری که، به‌ازای هر $x \in A$، $\|f_k(x)-f(x)\| \leqslant m_k$ و $m_k \to 0$. ثابت کنید که (به‌طور یکنواخت) $f_k \to f$.

(ب) اگر $m_k \to m \in \mathbf{R}$، و به‌ازای‌هر $x \in A$، $\|f_k(x)-f_l(x)\| < |m_k-m_l|$، دراین صورت نشان دهید که f_k به‌طور یکنواخت همگرا است.

۲. تعیین کنید کدام یك از دنباله‌های زیر همگراست (نقطه به‌نقطه یا به طـور یکنواخت).

(الف) $\dfrac{(\sin x)}{k}$ در $\mathbf{R}$. (ب) $\dfrac{1}{(kx+1)}$ در $]0,1[$.

(پ) $\dfrac{x}{(kx+1)}$ در $]0,1[$. (ت) $\dfrac{x}{(1+kx^2)}$ در $\mathbf{R}$.

(ث) $\left(\dfrac{(\cos x)}{k^2}, 1\right)$، دنباله‌ای از توابع از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^2$.

۳. تعیین کنید کدام یك از سریهای زیر $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ همگراست (نقطه به‌نقطه یا به‌طور یکنواخت). درهرحالت پیوستگی تابع حد را بررسی کنید.

(الف) $g_k:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$g_k(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant k,\\ (-1)^k, & x<k.\end{cases}$$

(ب) $g_k:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$g_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}, & |x|\leqslant k\\[2mm] \dfrac{1}{x^2}, & |x|>k.\end{cases}$$

(پ) $g_k(x)=\left(\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\cos(kx)$ در $\mathbf{R}$. (ت) $g_k(x)=x^k$ در $]0, 1[$.

۴. فرض کنیم $f_n:[1, 2] \to \mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ $f_n(x)=\dfrac{x}{(1+x)^n}$ تعریف شده باشد.

(الف) ثابت کنید که، برای $x \in [1, 2]$، $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ همگراست

(ب) آیا به‌طور یکنواخت همگراست؟

(پ) آیا $\int_1^2 f_n(x)\,dx \sum_1^\infty = \int_1^2 (\sum_1^\infty f_n(x))dx$ ؟

۵. گیریم (به‌طور یکنواخت) $f_k \to f$ که در آن $f_k : A \to \mathbf{R}$ و (به‌طور یکنواخت) $g_k \to g$ که در آن $g_k : A \to \mathbf{R}$ وفرض کنیم یك ثابت M_1 وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر x، $\|g(x)\| \leqslant M_1$ و یک ثابت M_2 به‌طوری که، به‌ازای هر x، $\|f(x)\| \leqslant M_2$. دراین‌صورت نشان دهید که (به طور یکنواخت) $f_k g_k \to fg$. اگر M_1 یا M_2 وجود نداشته باشد یک مثال نقض بیابید. آیا M_1 و M_2 برای همگرایی نقطه به‌نقطه لازم هستند؟

۶. ثابت کنید که دنبالهٔ $f_k : A \to \mathbf{R}^m$ نقطه به‌نقطه همگراست اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $x \in A$، $f_k(x)$ یك دنبالهٔ کوشی باشد.

۷. برای توابع $f : A \to \mathbf{R}$، $\mathcal{C}_b$ را، نظیر متن درس، تشکیل دهید. نشان دهید که همواره داریم $\|fg\| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$. به‌کمك مثالهای گوناگون دراین بارهٔ بحث کنید.

۸. آیا همگرایی نقطه‌ای توابع پیوسته در یک مجموعهٔ فشرده به‌سمت یک تابع پیوسته، همگرایی یکنواخت در آن مجموعه راایجاب می کند؟

۹. گیریم $\sum_{k=1}^\infty g_k$، در A به طور یکنواخت همگرا باشد. اگر در A، $x_k \to x_0$، ثابت کنید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_k) \to \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x_0)$$

۱۰. دنباله‌ها وسریهای تمرینهای ۲ و ۳ را چه هنگام می‌توان، جمله به‌جمله، انتگرال گیری و مشتق گیری کرد؟

۱۱. (الف) آیا یك انقباض معین دریك فضای متریك، باید یك نقطهٔ ثابت داشته باشد؟ بحث کنید.

(ب) فرض کنیم $f : X \to X$، که در آن X یک فضای متریك کامل است (نظیر $\mathbf{R}$) درشرط، به‌ازای‌هر $x, y \in X$، $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ صدق کند. آیا f باید یك نقطهٔ ثابت داشته باشد؟ بحث کنید. اگر X فشرده باشد پاسخ چیست؟

۱۲. یك تابع $f : A \to \mathbf{R}$، $A \subset \mathbf{R}^n$ را نیم‌پیوستهٔ پایینی می‌نامندهرگاه برای $x_0 \in A$ و $\lambda < f(x_0)$، یک همسایگی نقطهٔ x_0 نظیر U وجود داشته باشد به‌طوری که، به‌ازای هر $x \in U \cap A$، $\lambda < f(x)$. نیم پیوستهٔ بالایی به‌طریق مشابهی تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که f پیوسته است اگر، و فقط اگر، هم نیم‌پیوستهٔ بالایی و هم

نیم‌پیوستهٔ پایینی باشد.

(ب) اگر f_kها نیم‌پیوستهٔ پایینی باشند، $f_k \to f$ نقطه به نقطه و $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$، آنگاه ثابت کنید که f نیم‌پیوستهٔ پایینی است.

(پ) در قسمت (ب) نشان دهید که f لزوماً پیوسته نیست حتی اگر f_kها پیوسته باشند.

(ت) فرض کنیم $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ و قرار دهیم $g(x)=\sup\limits_{\delta>0}\inf\limits_{|y-x|<\delta} f(y)$. ثابت کنید که g نیم‌پیوستهٔ پایینی است.

۱۳. در قضیهٔ ۵، نشان دهید که (به‌طور یکنواخت) $f_k \to f$. [راهنمایی: قضیهٔ مقدار میانگین را به‌کار ببرید].

۱۴. فرض کنیم $f: X \to X$ یك انقباض در یك فضای متریك فشردهٔ X باشد. نشان‌دهید که $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$، که در آن $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n مرتبه)، شامل فقط یك نقطه است. آیا این نتیجه درست است اگر داشته باشیم $X=\mathbf{R}$؟

۱۵. فرض کنیم $g_k \in \mathbf{R}^m$ و فرض کنیم f_k یك زیردنبالهٔ g_k باشد. ثابت کنید که اگر $\sum g_k$ مطلقاً همگرا باشد، در این صورت $\sum f_k$ نیز مطلقاً همگراست. اگر $\sum g_k$ فقط همگرا باشد، یك مثال نقض بیابید.

۱۶. توجه کنید که در مثال ۵، همان استدلال را در هر فضای نرم‌دار می‌توان به‌کار برد. این نکته و فضای $\mathcal{C}_b$ را مورد استفاده قرار دهید و قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

قضیه. فرض کنیم $g_k: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ کراندار و پیوسته باشد، و گیریم $\sum g_k$ به‌طور یکنواخت و مطلقاً همگرا باشد. در این صورت هر تجدید آرایش این سری نیز به‌طور یکنواخت و مطلقاً همگراست و دارای همان حد است.

۱۷. فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یك سری حقیقی همگرا و نه مطلقاً همگرا باشد. به‌ازای هر عدد داده شدهٔ x، نشان دهید که تجدید آرایشی نظیر $\sum b_n$ از سری نامبرده وجود دارد که به‌سمت x همگراست. [راهنمایی: فرض کنیم p_n قسمت مثبت a_n و $-q_n$ قسمت منفی آن باشد. عدم همگرایی مطلق ایجاب می‌کند که هر دو سری $\sum p_n$ و $\sum q_n$ واگرا باشند. قرار می‌دهیم $x_n = x - 1/n$ و $y_n = x + 1/n$. k_1 را چنان انتخاب کنید که، $s_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1} > x_1$ و l_1 را چنان که

$$r_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{l_1} < y_1$$

سپس جملات بیشتری انتخاب کنید به‌طوری که

$$s_2 = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 \cdots - q_{l_1} + p_{k_1} + \cdots + p_{k_2} > x_2$$

اگر این فرآیند را تکرار کنید، یک سری با حاصل‌جمعهای جزئی s_1، r_1، s_2، r_2، . . . حاصل می‌شود. حال استدلال کنید که چون $p_n, q_n \to 0$، به‌ازای k به‌قدر کافی بزرگ، می‌توان $x_k \leqslant s_k \leqslant y_k$ و $x_k \leqslant r_k \leqslant y_k$ انتخاب کرد. نشان دهید که این همان تجدیدآرایش مطلوب است.]

۱۸. مثالی از یک دنبالهٔ توابع ناپیوسته، f_k، ارائه دهید که به‌طور یکنواخت به‌سمت یک تابع حد f، که پیوسته است، همگرا باشد.

۱۹. اگر $x \in [-1/2, 1/2]$، تابع $g(x)$ را به‌وسیلهٔ $g(x)=|x|$ تعریف می‌کنیم و سپس g را چنان گسترش می‌دهیم که متناوب شود. تعریف می‌کنیم

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(x4^{n-1})}{4^{n-1}}$$

(الف) g وچند جملهٔ اول این حاصل‌جمع را رسم کنید.
(ب) آزمون M وایرشتراس را به‌کار ببرید و نشان دهید که f پیوسته است.
(پ) ثابت کنید که f در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست [راهنمایی: برای این منظور سودمند است اگر به مثالهای نقض در آنالیز، نوشتهٔ Gelbaum و Olmsted صفحه ۳۸ مراجعه شود.]

۲۰. ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin nx/n^2)x^3$ یک تابع پیوسته در کل $\mathbf{R}$ تعریف می‌کند.

۲۱. (الف) ثابت کنید که اگر $A\subset \mathbf{R}^n$ فشرده باشد، $B\subset \mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m)$ فشرده است $\Longleftrightarrow$ B بسته، کراندار و همپیوسته است.

تبصره: نیمی از این، یعنی $\Longleftarrow$، درمتن درس به‌اثبات رسید.

(ب) قرار می‌دهیم $D=\{f\in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) \mid \|f\|\leqslant 1\}$. نشان دهید که D بسته وکراندار است، ولی فشرده نیست. در D دنباله‌ای بسازید که همپیوسته نباشد وسپس قسمت (الف) را مورد استفاده قراردهید.

۲۲. فرض کنیم $B\subset \mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m)$ و A فشرده باشد. گیریم برای هر $x_0\in A$، و $\varepsilon>0$، یک $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که $d(x, x_0)<\delta$ ایجاب کند، به‌ازای هر $f\in B$، $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. ثابت کنید B همپیوسته است.

۲۳. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و گیریم $f\circ f$ پیوسته باشد. آیا در این صورت f باید پیوسته باشد؟

۲۴. یک فضای متریک X را شمارش‌پذیر نوع دوم می‌نامند، هرگاه گردایه‌ای شمارش‌پذیر U_1، U_2، . . . از مجموعه‌های باز X وجود داشته باشد به‌طوری که هرمجموعهٔ باز در X اجتماعی از اعضای این گردایه باشد. ثابت کنید که چنین Xی دارای یک زیر-

مجموعهٔ شمارش‌پذیر C است به‌طوری‌که $cl(C)=X$. (در این‌صورت می‌گوییم X جدایی‌پذیر است). ثابت کنید که، برعکس، یك فضای متریك جدایی‌پذیر، شمارش‌پذیر نوع دوم است.

۲۵. فرض کنیم $g:[\circ,\,1]\rightarrow\mathbf{R}$ پیوسته و یك به‌یك باشد. نشان دهید که g یا افزایشی است یا کاهشی.

۲۶. فرض کنیم $k(x,\,y)$ یك تابع حقیقی پیوسته درمربع

$$U=\{(x,\,y)\,|\,\circ\leqslant x\leqslant 1,\ \circ\leqslant y\leqslant 1\}$$

باشد و گیریم که، به‌ازای هر $(x,\,y)\in U$، $|k(x,\,y)|<1$. فرض کنیم $A:[\circ,\,1]\rightarrow\mathbf{R}$ پیوسته‌باشد. ثابت کنید که یك‌تابع حقیقی پیوستهٔ یکتای $f(x)$، معین در $[\circ,\,1]$، وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(x)=A(x)+\int_{\circ}^{1}k(x,\,y)f(y)\,dy$$

۲۷. فرض کنیم $f:\,]a,\,b[\,\rightarrow\mathbf{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته‌باشد، و گیریم که $x_n\rightarrow b$. نشان دهید که $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(x_n)$ وجود دارد.

۲۸. فرض کنیم $f_n(x)=x/n$. آیا f_n، در $[\circ,\,۳۹۶]$ به‌طور یکنواخت همگراست؟ در $\mathbf{R}$ چطور؟

۲۹. دربارهٔ پیوستگی یکنواخت توابع زیر بحث کنید.

(الف) $f(x)=x^{2}$، $x\in\,]-1,\,1[$.

(ب) $f(x)=x^{1/3}$، $x\in\,]\circ,\,\infty[$.

(پ) $f(x)=e^{-x}$، $x\in[\circ,\infty[$.

(ت) $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$، $\circ<x\leqslant 1$، $f(\circ)=\circ$.

(ث) $f(x)=\sin[\ln(1+x^{2})]$، $-1<x\leqslant 1$، $f(-1)=\circ$.

۳۰. گزارهٔ «هرتابع پیوسته دریك فضای متریك فشرده به‌طور یکنواخت پیوسته است» را مورد بحث قرار دهید و ثابت کنید.

۳۱. فرض‌کنیم a_n یك دنبالهٔ همگرا ازاعداد حقیقی باشد، $a_n\rightarrow a$. قرار می‌دهیم $b_n=(a_1+\cdots+a_n)/n$. نشان دهید که به‌همین‌ترتیب $b_n\rightarrow a$.

۳۲. مطلب بعد را مورد بحث قرار دهید و ثابت کنید. فرض‌کنیم X و Y دو فضای‌متریك

و $f: X \to Y$ پیوسته باشد. گیریم که $f(X)$ مرکب از دو نقطهٔ متمایز باشد. در این صورت ثابت کنید X همبند نیست.

۳۳. فرض کنیم $f_n: [۰, ۱] \to \mathbf{R}$ دنباله‌ای از توابع افزایشی در $[۰, ۱]$ باشند و گیریم (نقطه به‌نقطه) $f_n \to ۰$. آیا f_n باید به‌طور یکنواخت همگرا باشد؟ اگر فقط فرض کنیم که f_n نقطه به‌نقطه به‌سمت یك‌حد f همگراست، چطور؟

۳۴. یك دنبالهٔ $f_n: [۰, ۱] \to \mathbf{R}$ از توابع مشتق‌پذیر بیابید به‌طوری که (به‌طور یکنواخت) $f_n \to ۰$، ولی $f'_n(۱/۲)$ به‌سمت ۰ همگرا نباشد.

۳۵. فرض کنیم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته و دوسویی باشد. نشان دهید که $f^{-۱}$ پیوسته است (تمرین ۷ فصل ۴ را ببینید. برای تعمیمی از این مطلب به‌پیوستگی توابع معکوس، نوشتهٔ M. Hoffman مندرج در Mathematica Magazine (هنوز منتشر نشده است)، مراجعه کنید.)

۳۶. فرض کنیم $f(x, y) = x^۲y/(x^۴+y^۲)$. رفتار تابع f رادرنزدیکی $(۰, ۰)$ در ارتباط با حدود زیر مورد بحث قرار دهید

(الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x, y)$،

(ب) $\lim\limits_{x\to ۰}[\lim\limits_{y\to ۰} f(x, y)]$،

(پ) $\lim\limits_{y\to ۰}[\lim\limits_{x\to ۰} f(x, y)]$.

۳۷. گیریم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد، و $f(۱) = ۷$. گیریم که، به‌ازای هر x، $f(x)$ گویا باشد. ثابت کنید f ثابت است.

۳۸. ثابت کنید $\cdots + ۱/۸ + ۱/۴ + ۱/۲ + ۱$ همگراست و $۱ - ۱/۲ + ۱/۳ - ۱/۴ + \cdots$ همگراست، ولی نه به‌طور مطلق.

۳۹. یك تابع $g: [۰,۱] \to \mathbf{R}$ را ساده می‌نامند، هرگاه بتوانیم $[۰, ۱]$ را به‌زیر-بازه‌هایی تقسیم کنیم به‌طوری که g درهر کدام از آنها، به‌استثنای شاید درنقاط انتهایی، ثابت باشد. فرض کنیم $f: [۰, ۱] \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد و $\varepsilon > ۰$. ثابت کنید یك تابع سادهٔ g وجود دارد به‌طوری که $\|f - g\| < \varepsilon$.

۴۰. (الف) تعریف می‌کنیم $\delta: \mathcal{C}([۰, ۱], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$، $f \to f(۰)$. ثابت کنید δ پیوسته وخطی است.

(ب) فرض کنیم $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد. تابع $F: \mathcal{C}([۰,۱],\mathbf{R}) \to \mathcal{C}([۰,۱], \mathbf{R})$ را به‌وسیلهٔ $F(f) = g \circ f$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که F پیوسته است؛ ثابت کنید که اگر g به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، دراین صورت F به‌طور یکنواخت پیوسته است.

۴۱. نشان دهید که یک چندجمله‌ای $p(x)$ وجود دارد به‌طوری که، برای $-۱۰۰۰ \leqslant x \leqslant ۱۰۰۰$ داشته باشیم $|p(x)-|x|^{۳}|<۱/۱۰$.

۴۲. درقضیهٔ ۱۱، امکان جایگزینی دنبالهٔ چندجمله‌ایهای برنشتین را به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای درونیابی لاگرانژ (برای تعریف‌وخواص، تمرین ۲ بند ۷.۵ راببینید) درارتباط با اثرآن بربرهان قضایای بند ۷.۵، مورد بحث قراردهید.

۴۳. گیریم $\mathcal{C}_e([-۱,۱],\mathbf{R})$، مجموعهٔ توابع‌زوج را در $\mathcal{C}([-۱,۱],\mathbf{R})$ نشان‌دهد.
(الف) نشان دهیدکه $\mathcal{C}_e$ در $\mathcal{C}$ بسته است وچگال نیست.
(ب) نشان دهیدکه چندجمله‌ایهای زوج در $\mathcal{C}_e$، ولی نه در $\mathcal{C}$، چگال هستند.

۴۴. چند پروژه: بررسی‌کنید امکان توسیع قضیه استون-وایرشتراس را به
(الف) توابع با مقادیر مختلط (در $\mathcal{B}$ همهٔ مفروضات را حفظ کنید وعلاوه برآنها بیفزایید «$f \in \mathcal{B}$ ایجاب می‌کند $\overline{f} \in \mathcal{B}$»، که درآن علامت بار، نمایشگر مزدوج مختلط است)؛
(ب) قلمروهای‌نافشرده (به مقدمه‌ای برتوپولوژی و آنالیز نوین، نوشتهٔ Simmons مراجعه‌کنید)؛
(پ) قسمت (ب) رابه‌کار ببرید وچگال‌بودن مجموعهٔ‌توابع هرمیت را درفضای‌مناسبی ازتوابع پیوسته مطالعه‌کنید (توابع هرمیت، به‌عنوان نمونه، در روشهای فیزیک ریاضی، I، اثر Courant–Hilbert، تعریف‌شده‌اندومورد مطالعه قرارگرفته‌اند).

۴۵. فرض‌کنیم $f(t,x)$، برای $a \leqslant t \leqslant b$ و $x \in \mathbf{R}^n$، معین وپیوسته باشد. هدف ازاین تمرین نشان دادن این است که مسئلهٔ $dx/dt=f(t,x)$، $x(a)=x_{۰}$ به‌ازای یك $c>a$، یك جواب دربازهٔ $t \in [a,c]$ دارد (فقط تحت شرایط سخت‌تراین جواب یکتاست). اعمال زیررا انجام دهید: $[a,b]$ را به n قسمت $t_{۰}=a$، ...، $t_n=b$ تقسیم‌کنید ویك تابع پیوستهٔ x_n، به‌وسیلهٔ

$$\begin{cases} x_n'(t)=f(t_i,\ x_n(t_i)),\ t_i<t<t_{i+۱} \\ x_n(a)=x_{۰} \end{cases}$$

تعریف‌کنید. قراردهید $\Delta_n(t)=x_n'(t)-f(t,\ x_n(t))$ به‌طوری‌که

$$x_n(t)=x_{۰}+\int_{۰}^{t}(f(s,\ x_n(s))+\Delta_n(s))\,ds$$

قضیهٔ آرزلا-آسکولی را مورد استفاده قرار دهید، و از x_n، یك زیردنبالهٔ همگرا استخراج‌کنید. این روش را تقریب چندضلعی می‌نامند؛ با بندهای ۶ و ۵.۷ مقایسه کنید.

۴۶. (الف) فرض کنیم $f_n:\mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ دنباله‌ای از توابع‌همپیوسته باشدکه در یك

مجموعهٔ فشردهٔ K، نقطه به نقطه همگراست. ثابت کنید که این همگرایی، یکنواخت است.
(ب) فرض کنیم

$$f_n(x)=\frac{x^{۲}}{[x^{۲}+(۱-nx)^{۲}]},\quad ۰\leqslant x\leqslant ۱$$

نشان دهید که f_n، نقطه به نقطه، ولی نه به‌طور یکنواخت، همگراست. از قسمت (الف) چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

۴۷. فرض کنیم $f_n: K\subset A\to \mathbf{R}^m$ دنباله‌ای از توابع همپیوسته باشد، گیریم که f_n، در زیرمجموعه‌ای چگال از A، همگرا باشد. ثابت کنید که دنبالهٔ نامبرده در کل A همگراست. آیا این مطلب روشنایی خاصی بر برهان قضیهٔ ۹ می‌اندازد؟

۴۸. ثابت کنید که نرم فضای $\mathcal{C}([۰,۱],\mathbf{R})$ از هیچ حاصلضرب داخلی $<,>$ در $\mathcal{C}([۰,۱],\mathbf{R})$، به‌طوری که $\|f\|=\sqrt{<f,f>}$ ، همان‌گونه که در $\mathbf{R}^n$ چنین است، نتیجه نمی‌شود. (یک حاصلضرب داخلی در یک فضای برداری S تابعی است نظیر $<,>:S\times S\to\mathbf{R}$ که دارای خاصیت مندرج در قضیهٔ ۵ فصل ۱ باشد.) [راهنمایی: نشان دهید که خاصیت تمرین ۱۲ (الف)، فصل ۱ برقرار نیست و توجه کنید که این خاصیت فقط ناشی از این امر است که نرم $\mathbf{R}^n$ از یک حاصلضرب داخلی نتیجه می‌شود که در خواص مندرج در قضیهٔ ۵ فصل ۱ صدق می‌کند.]

۴۹. فرض کنیم S یک مجموعه باشد، و فرض کنیم $\mathcal{B}$ مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی کراندار و معین در S، را نشان دهد؛ $\mathcal{B}$ را به نرم sup مجهز کنید. ثابت کنید که $\mathcal{B}$ یک فضای باناخ است.

۵۰. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ یک حد یکنواخت از چندجمله‌ایها باشد. ثابت کنید که f یک چندجمله‌ای است.

۵۱. یک سری دوگانه در نظر می‌گیریم

$$\sum_{m,n=۰}^{\infty} a_{mn},\ a_{mn}\in\mathbf{R},\ m,n=۰,۱,۲,\ldots$$

می‌گوییم این سری به‌سمت S همگراست، هرگاه برای هر $\varepsilon>۰$، Nی وجود داشته باشد به‌طوری که $n,m\geqslant N$ ایجاب کند

$$\left|\sum_{k,l=۰}^{m,n} a_{k,l}-S\right|<\varepsilon$$

همگرایی مطلق را به‌طریقی آشکار تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که اگر $\sum_{n,m=۰}^{\infty}a_{nm}$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه حاصلجمع آن را می‌توان به‌طریق زیر تجدید آرایش داد:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}\right)$$

این نتیجه‌را برحسب جمعبندی درایه‌ها ، سطر به‌سطر وستون به‌ستون ، در یک ماتریس نامتناهی ، تعبیر کنید.

۵۲. آیا می‌توانیم از سری

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

جمله به‌جمله مشتق گیری کنیم؟

۵۳. حدود زیر را بیابید:

(یک) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3^x-2^x}$

(دو) $\lim\limits_{x\to 0+}(1+\sin 2x)^{1/x}$

(سه) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

۵۴. همگرایی یا واگرایی سریهای نامتناهی زیر را موردآزمون قرار دهید:

(یک) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k}\log k}{k^2+2k+3}$

(دو) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k!\,3^k}{k^k}$

(سه) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(k!)^2}{(2k)!}$

۵۵. با شروع از

$$(1+x^2)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\ ,\quad |x|<1$$

ثابت کنید که $\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+\cdots$

۵۶. همگرایی مطلق و همگرایی مشروط سریهای زیر را موردآزمون قرار دهید:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-\alpha}$ ، α حقیقی است.

(ب) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k \log k}{k \log\log k}$

(پ) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\alpha}+(-1)^k}$ ، $\alpha>0$

۵۷. ثابت کنید که اگر

(الف) $f_n(x)$ ، $g(x)$ پیوسته باشند ، $0\leqslant x<\infty$

(ب) $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ ، $0\leqslant x<\infty ، n=1,2,3,\dots$

(پ) $f_n(x)\to f(x)$ (به‌طور یکنواخت) ، $0\leqslant x\leqslant R$ ، به‌ازای هر $R<\infty$ و

(ت) $\int_0^{\infty} g(x)dx<\infty$

دراین‌صورت $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f_n(x)dx=\int_0^{\infty}f(x)dx$.

۵۸. آزمونهای همگرایی زیررا ثابت کنید (به‌عنوان مثال، تمرین ۴۹ صفحه ۶۰ را ببینید).

(الف) $\alpha>1$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n\log n}$ ، $u_n>0 \Longleftarrow \sum u_n$ همگراست.

(ب) $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\log n}$ ، $u_n>0 \Longleftarrow \sum u_n$ واگراست.

۵۹. (الف) فرض کنیم $p>1$ و $1/p+1/q=1$. برای $a, b, t>0$ ثابت کنید که

$$ab\leqslant\frac{a^p t^p}{p}+\frac{b^q+t^{-q}}{q}$$

و اینکه ab مقدار مینیمم سمت‌راست نامساوی بالاست. (یکی‌از راههای اثبات‌آن ، استفاده ازحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است.)

(ب) نامساوی هولدر را ثابت کنید: $a_k,b_k\geqslant 0, p>1, 1/p+1/q=1$

$$\Longrightarrow \sum_1^n a_k b_k\leqslant\left(\sum_1^n a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_1^n b_k^q\right)^{1/q}$$

[راهنمایی : با استفاده از قسمت (الف) ، برهان نامساوی کوشی ـ شوارتس‌را تقلید کنید.]

(ب) نامساوی مینکوفسکی را ثابت کنید: $a_k\,,\,b_k\geqslant ۰\,,\,p>۱$

$$\Longrightarrow\left(\sum_{۱}^{n}(ca_k+b_k)^p\right)^{۱/p}\leqslant\left(\sum_{۱}^{n}a_k^p\right)^{۱/p}+\left(\sum_{۱}^{n}b_k^p\right)^{۱/p}$$

[راهنمایی: بنویسید

$$\sum_{۱}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{۱}^{n}(a_k+b_k)^{p-۱}a_k+\sum_{۱}^{n}(a_k+b_k)^{p-۱}b_k$$

و نامساوی هولدر را هوشیارانه مورد استفاده قرار دهید.]

۶۰. اگر $|x|<۱$ ، سری $\sum_{k=۱}^{\infty}x^k/k$ همگراست. برای چه مقادیر مختلط x ، به شرط $|x|=۱$ ، سری نامبرده همگراست؟

۶۱. فرض کنیم $\sum a_k x^k$ دارای شعاع همگرایی R باشد. نشان دهید $\sum a_k(x-b)^k$ ، در درون گردهٔ به مرکز b و شعاع R ، همگراست.

۶۲. شعاعهای همگرایی

$$\sum x^k k/(k+۱)\ \ ,\ \ \sum x^k/\log k$$

را بیابید.

۶۳. (سری دوجمله‌ای.) سری

$$\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-۱)\cdots(\alpha-k+۱)}{k!}x^k$$

را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم α یك عدد صحیح $\geqslant ۰$ نباشد. نشان دهید که شعاع همگرایی $R=۱$ است. (برای مطالعهٔ رفتار سری در $x=\pm ۱$ ، سریهای فوق‌هندسی را در تمرین ۴۹ ، فصل ۲ ببینید.)

۶۴. آیا $\cdots+۱/۳+۱/۲+۱$ ، $(C,۱)$ همگرا یا (آبل) همگراست؟

۶۵. فرض کنیم $f(x)$ ، $۰\leqslant x<\infty$ پیوسته باشد. معمولاً تعریف می‌کنیم

$$\int_{۰}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{۰}^{R}f(x)dx\ ,$$

مشروط برآنکه حد فوق‌الذکر وجود داشته باشد. مشابه با $(C,۱)$ جمع‌پذیری ، مفهوم «$(C,۱)$ انتگرال‌پذیری از ۰ تا ∞» را تعریف کنید و ثابت کنید که روش انتگرال‌پذیری شما منظم است، یعنی، با $\int_{۰}^{\infty}$ معمولی تطابق دارد مشروط برآنکه انتگرال

اخیر همگرا باشد.

۶۶. t_n را بـه طور استقرایی بـه ایـن صورت تعریـف مـی‌کنیم کـه $t_1 = 1$ ، و $t_{n+1} = t_n/(1+t_n^\beta)$ که درآن β ثابت‌است و $0 \leqslant \beta < 1$. ثابت کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ همگراست. [راهنمایی: سعی کنید تا نشان دهید ثابتی نظیر C وجود دارد به‌طوری که $t_n \leqslant C/n^{1/\beta}$.]

۶۷. فرض کنیم $A = \{j/2^n \in [0,1] \mid n = 1,2,3,\dots,\ j = 0,1,2,\dots,2^n\}$ و فـرض کنیم $f: A \to \mathbf{R}$ درشرط زیر صدق کند: یك‌دنبالهٔ $\varepsilon_n > 0$ وجود دارد به طوری کـه $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ و

$$\left| f\left(\frac{j-1}{2^n}\right) - f\left(\frac{j}{2^n}\right) \right| < \varepsilon_n \ , \quad n > 0 \text{ به‌ازای هر } , \quad j = 1,2,\dots,2^n$$

ثابت کنید که f یك‌توسیع یکتا به یك‌تابع پیوسته‌از $[0,1]$ در $\mathbf{R}$ دارد. [راهنمایی: نشان دهید که، اگر $|t_1 - t_2| \leqslant 1/2^N$، آنگاه $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant 2\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n$ و سپس تمرین ۲۴، فصل۴ را به‌کار ببرید.]

۶۸. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ و $B \subset \mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m)$ فشرده باشند. به طریق زیر ثابت کنید که B همپیوسته است:

(الف) ثابت کنید که تابع $E: \mathcal{C}(A, \mathbf{R}^m) \times A \to \mathbf{R}^m \ , \ (f, x) \to f(x)$ پیوسته است؛

(ب) پیوستگی یکنـواخت تحدید E به $B \times A$ را بـه‌کار ببرید ونتیجهٔ مطلوب را استنتاج کنید.

(این روش اثبات متعلق به J. Allen است.)

پیوست فصل ۵:

چه موقع «فضای متریك» می‌تواند جایگزین $\mathbf{R}^n$ شود؟

نوشتهٔ R. Gulliver

دراین‌کتاب، ما بیشتر توجه خودرا روی فضاهای متریك مشخص، به‌ویژه $\mathbf{R}^n$ ، متمرکز ساختیم. پرسشی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود، این است که تا چه حدنتایجی که به‌دست آوردیم کلی هستند؟ دربسیاری ازتمرینها از خواننده خواسته‌ایم کـه تحقیق کند برخی از نتایج درفضاهای متریك کلی برقرار هستند (به‌عنوان نمونه صفحه ۱۲۶ را ببینید). درجدول زیر برخی‌ازنتایج مهم (شامل برخی‌از قضایاکه درمتن‌درس‌رسماً بیان نشده‌اند) گردآوری شده‌اند، و چارچوبهای کلی که درآنها این نتایج معتبر هستند، بیان شده‌اند. خواننده باید برخی‌از این قضایارا برگزیند، و تحقیق کند که این‌تعمیم واقعاً معتبر است.

قضیه	معتبر در فضاهای متریک؟
فصل ۲	
قضیهٔ ۱ : به‌ازای هر $\varepsilon>0$ و $x\in\mathbf{R}^n$ ، $D(x,\varepsilon)$ باز است.	بلی.
قضیهٔ ۲ : (یک) اشتراک تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز، باز است؛ (دو) اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های باز، باز است.	بلی.
قضیهٔ ۳ : (عکس قضیهٔ ۲ برای مجموعه‌های بسته).	بلی.
قضیهٔ ۴ : $A\subset\mathbf{R}^n$ بسته است اگر، وفقط اگر، همهٔ‌نقاط انباشتگی A در $\mathbf{R}^n$ متعلق به A باشند.	بلی.
قضیهٔ ۵ : $\mathrm{cl}(A)$ مرکب‌از A به علاوهٔ همهٔ نقاط انباشتگی آن در $\mathbf{R}^n$ است.	بلی.
قضیهٔ ۶ : $x\in\mathrm{bd}(A)$ اگر، وفقط اگر، هرهمسایگی x در $\mathbf{R}^n$ شامل نقاطی‌از A و نقاطی‌از $\mathbf{R}^n\setminus A$ باشد.	بلی.
قضیهٔ ۷ : $x_k\to x$ اگر، وفقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon>0$ ، Nی وجوددارد به‌طوری که اگر $k>N$، آنگاه $\|x_k-x\|<\varepsilon$.	بلی.
قضیهٔ ۸ : $x_k , x\in\mathbf{R}^n$: $x_k\to x$ اگر، و فقط اگر، هردنبالهٔ از مؤلفه‌های x_k به‌سمت مؤلفهٔ متناظر x همگرا باشد.	بی‌معنی در یک فضای متریک کلی
قضیهٔ ۹ : $A\subset\mathbf{R}^n$ بسته‌است اگر، وفقط اگر، به‌ازای‌هردنبالهٔ $\{x_k\}$، $x_k\in A$ که در $\mathbf{R}^n$ همگرا باشد، حدآن در A قراردارد.	بلی.
قضیهٔ ۱۰ : یک‌دنبالهٔ $\{x_k\}$ در $\mathbf{R}^n$ همگراست‌اگر، وفقط‌اگر، یک دنبالهٔ‌کوشی باشد.	$\Longleftarrow$ بلی. $\Longrightarrow$ این تعریف یک فضای متریک‌کامل‌است.
قضیهٔ ۱۱ : برای $x_k\in\mathbf{R}^n$: $\sum x_k$ همگراست اگر، وفقط اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ ، Nی وجود داشته باشد به طوری که اگر $k\geqslant N$, $p\geqslant 0$، آنگاه $\|x_k+x_{k+1}+\dots+x_{k+p}\|<\varepsilon$.	معتبر درفضای نرم‌دار کامل (= فضای‌باناخ).
قضیهٔ ۱۲ : $x_k\in\mathbf{R}^k$: اگر $\sum\|x_k\|$ در $\mathbf{R}$ همگرا باشد، آنگاه $\sum x_k$ در $\mathbf{R}^n$ همگراست.	معتبر درفضای‌باناخ.
قضیهٔ ۱۳ : (چهار) اگر $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{k+1}\|/\|x_k\|$ وجود داشته باشد و <1 ، آنگاه $\sum x_k$همگراست((پنج) نیزمعتبراست).	معتبر درفضای‌باناخ.

قضیهٔ	معتبر در فضاهای متریك؟
قضیهٔ کاتگوری بر: اشتراك یك تعداد شمارش‌پذیر زیرمجموعه‌های باز چگال در $\mathbf{R}^n$ ، در $\mathbf{R}^n$ چگال است.	معتبر در فضای متریك کامل
قضیهٔ : $\mathbf{R}^n$ دارای یك زیر مجموعهٔ شمارش‌پذیر چگال است.	این تعریف یك فضای متریك «جدایی‌پذیر» است؛ همواره برقرار نیست. ولی برای $A \subset \mathbf{R}^n$ فشرده ، $\mathcal{C}(A , \mathbf{R}^n)$ جدایی‌پذیر است (با استفاده از قضیهٔ استون ـ وایرشتراس این مطلب را ثابت کنید) .
فصل ۳	
قضیهٔ ۱ : برای $A \subset \mathbf{R}^n$ گزاره‌های زیر هم‌ارزند:	خیر؛ اما (دو) و (سه) هم‌ارزند و هرکدام مستلزم (یك) است.
(یك) A بسته و کراندار است.	اگر A ، (دو) را داشته باشد، آن را فشرده می‌نامیم .
(دو) A دارای خاصیت هاینه ـ بورل است. (سه) A دارای خاصیت بولتسانو ـ وایرشتراس است.	
قضیهٔ ۲ : $\{F_k\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی فشردهٔ $\mathbf{R}^n$ به‌طوری که $F_{k+1} \subset F_k$. آنگاه $\cap_{k=1}^{\infty} F_k$ ناتهی است.	بلی (با استفاده از تعریف مجموعهٔ فشرده که در بالا آمد).
قضیهٔ ۳ : اگر A همبند کمانی باشد، آنگاه همبند است.	بلی.
قضیهٔ : اگر $A \subset \mathbf{R}^n$ باز و همبند باشد، آنگاه همبند کمانی است.	در یك فضای خطی نرم‌دار.
گزارهٔ : $\widetilde{A}$ یك زیر مجموعهٔ بستهٔ A ، A فشرده $\Longleftarrow$ $\widetilde{A}$ فشرده است.	بلی.

قضیهٔ	معتبر در فضاهای متریک؟
گزارهٔ : A یک زیر مجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^n$، $x\notin A$ $\Longrightarrow$ یک $y\in A$ وجود دارد به طوری که $.d(x,y)=\inf\{d(x,z)\mid z\in A\}$	خیر!
فصل ۴	
قضیهٔ ۱ : برای $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $f:A\to\mathbf{R}^m$ ، گزاره‌های زیر هم‌ارزند: (یک) f در A پیوسته است. (دو) برای هر دنبالهٔ $x_k\to x$ ، $x_k\in A$ ، $x\in A$ ، $f(x_k)\to f(x)$ برقرار است. (سه) برای همهٔ مجموعه‌های باز $U\subset\mathbf{R}^m$ ، $f^{-1}(U)$ یک زیرمجموعهٔ نسبتاً باز A است. (چهار) برای همهٔ مجموعه‌های بستهٔ $K\subset\mathbf{R}^m$ ، $f^{-1}(K)$ یک زیرمجموعهٔ نسبتاً بستهٔ A است.	بلی (به جای A یک فضای متریک و به‌جای $\mathbf{R}^m$ فضای متریک دیگری قرار دهید).
قضیه ۲ : $A\subset\mathbf{R}^n$ و $f:A\to\mathbf{R}^m$ پیوسته. دراین‌صورت (یک) اگر $K\subset A$ همبند باشد، آنگاه $f(K)$ همبنداست. (دو) اگر $K\subset A$ فشرده باشد، آنگاه $f(K)$ فشرده است.	بلی.
قضیهٔ ۳ : $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $f:A\to\mathbf{R}^m$ ، $B\subset f(A)\subset\mathbf{R}^m$ ، $g:B\to\mathbf{R}^p$. اگر f و g پیوسته باشند، آنگاه $g\circ f:A\to\mathbf{R}^p$ نیز پیوسته است.	بلی.
قضیهٔ ۴ : مجموع و حاصلضرب عددی توابع پیوسته، بازپیوسته هستند.	دریک فضای نرم‌دار
قضیهٔ ۵ : $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده، $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته. آنگاه $f(A)$ کرانداراست وشامل sup و inf اش است.	بلی.
قضیهٔ ۶ : $A\subset\mathbf{R}^n$ همبند، $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته. به ازای هر $x,y\in A$ و $c\in\mathbf{R}$ به‌شرط $f(x)<c<f(y)$، یک $z\in A$ وجود دارد به‌طوری که $.f(z)=c$	بلی.
قضیهٔ ۷ (قضیهٔ هاینه) : $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده ، $f:A\to\mathbf{R}^m$ پیوسته. آنگاه f به‌طور یکنواخت‌در A پیوسته است.	بلی.

قضیهٔ	معتبر در فضاهای متریک؟
فصل ۵	
قضیهٔ ۱: $f_k , f: A\to\mathbf{R}^m$ ، $f_k\to f$ (به‌طور یکنواخت) : $A\subset\mathbf{R}^n$. اگر هر f_k پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.	بلی.
قضیهٔ ۳ (آزمون M وایرشتراس): $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $g_k: A\to\mathbf{R}^m$ ، $\|g_k\|_{\sup}\leqslant M_k$ و $\sum M_k$ همگرا است. آنگاه $\sum g_k$ به طور یکنواخت همگرا است.	A می‌تواند هر فضای متریکی باشد؛ به جای $\mathbf{R}^m$ باید یک فضای باناخ قرار داد.
قضیهٔ ۸: برای $A\subset\mathbf{R}^n$ ، $\mathcal{C}_b(A,\mathbf{R}^m)$ یک فضای باناخ است.	A هر فضای متریک دلخواه؛ $\mathbf{R}^m$ باید یک فضای باناخ باشد.
قضیهٔ ۹ (آرزلا-آسکولی): $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده، $B\subset\mathcal{C}(A,\mathbf{R}^m)$. B فشرده است اگر، و فقط اگر، B بسته، کراندار، و همپیوسته باشد.	A می‌تواند هر فضای متریک فشردهٔ دلخواهی باشد، ولی $\mathbf{R}^m$ باید $\mathbf{R}^m$ باشد.
قضیهٔ ۱۲ (استون-وایرشتراس): $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده، $B\subset\mathcal{C}(A,\mathbf{R})$. اگر B جبری باشد که نقاط را مجزا کند و اگر توابع ثابت در B قرار داشته باشند، آنگاه B چگال است.	A می‌تواند هر فضای متریک فشردهٔ دلخواهی باشد.

نتایج بیشتری دربارهٔ فضاهای متریک:

قضیه: اگر X یک فضای متریک کامل، و A یک زیرمجموعهٔ بسته X باشد، آنگاه A یک فضای متریک کامل است.

تعریف: یک فضای متریک X تماماً کراندار است، هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ ، یک مجموعهٔ متناهی $\{x_1,\dots,x_n\}\subset X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $X\subset\bigcup_{i=1}^{n}D(x_i,\varepsilon)$.

قضیه: فرض کنیم X یک فضای متریک باشد. X فشرده است اگر، و فقط اگر، X کامل و تماماً کراندار باشد.

فصل ۶

توابع دیفرانسیل‌پذیر

در این فصل مفهوم یك تابع دیفرانسیل‌پذیر از $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^m$ را مورد بحث قرار خواهیم داد. مستقیماً با حالت کلی آغازخواهیم کرد،زیرا خواننده باید با مشتق توابع یك متغیره آشنایی داشته باشد. درصورت نیاز، نکات لازم مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال یك‌متغیره آورده خواهند شد.

با شروع این فصل مقداری جبرخطی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. به‌ویژه دانشجو باید حالا مفهوم یك تبدیل خطی ونمایش ماتریسی آن را مرور کند.[1] ما مشتق‌را به‌عنوان یك تابع خطی تعریف خواهیم‌کرد؛ ارتباط با مشتقات جزئی را در بند ۲.۶ خواهیم یافت. پس ازآن قضایای متداول حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌حالت چند-متغیره تعمیم‌خواهیم‌داد (مانند‌اینکه دیفرانسیل‌پذیری مستلزم‌پیوستگی‌است، قاعدهٔ‌زنجیری، قضیهٔ تیلور[2]، آزمونهایی برای اکسترممها وغیره).

۱.۶ تعریف مشتق

برای یك‌تابع‌ازیك متغیر $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ یادآوری می‌کنیم که f را در $x_0 \in]a, b[$ دیفرانسیل‌پذیر می‌نامند، اگرحد

---

۱. به‌عنوان نمونه، کتاب

M. O'Nan, *Linear Algebra*, Harcourt Brace, Jovanovich, (1971)

را ببینید.

2. Taylor

$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

وجود داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که به‌جای $f'(x)$، df/dx نیز می‌نویسند. هم‌ارز با این تعریف، می‌توانیم فرمول بالا را به‌این صورت بنویسیم که

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)-f'(x_\circ)h}{h}=\circ$$

یعنی،

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)-f'(x_\circ)(x-x_\circ)}{x-x_\circ}=\circ$$

یا، به‌عبارت دیگر،

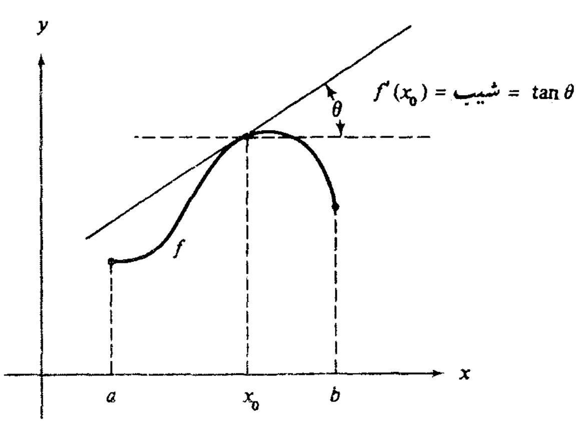
$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{|f(x)-f(x_\circ)-f'(x_\circ)(x-x_\circ)|}{|x-x_\circ|}=\circ$$

یادآوری می‌کنیم که این عدد $f'(x_\circ)$ شیب خط مماس بر نمودار f را در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ نمایش می‌دهد. شکل ۶-۱ را ببینید.

برای تعمیم این مفهوم به‌توابع $f: A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$، تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱. یك تابع $f: A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ را دیفرانسیل‌پذیر در $x_\circ \in A$ می‌نامند، اگر یك تابع خطی، که با $Df(x_\circ): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ نمایش داده می‌شود و مشتق f در $x_\circ$ نام دارد، وجود داشته باشد، به‌طوری که

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{\|f(x)-f(x_\circ)-Df(x_\circ)(x-x_\circ)\|}{\|x-x_\circ\|}=\circ$$



شکل ۶-۱

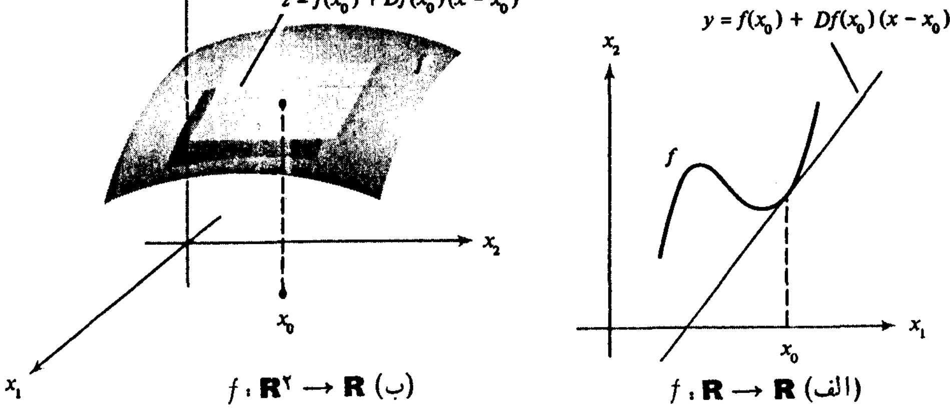
در اینجا، $Df(x_\circ)(x-x_\circ)$ نمایش‌دهنده مقدار تابع خطی $Df(x_\circ)$ به‌ازای بردار $x-x_\circ \in \mathbf{R}^n$ است، از‌این‌رو $Df(x_\circ)(x-x_\circ) \in \mathbf{R}^m$. اغلب به‌جای $Df(x_\circ)(h)$ خواهیم نوشت $Df(x_\circ).h$. (دراین تعریف، طبق معمول، هنگام محاسبهٔ حد موردنظر، $x=x_\circ$ را مستثنی می کنیم، علت این امرآن است که ما عمل تقسیم بر $\|x-x_\circ\|$ را انجام می‌دهیم وسپس با عبور از xهای متعلق به A حد را می‌یابیم).

به‌طور صریحتر می‌توانیم تعریف قبلی را به‌این صورت بیان کنیم که به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ یك $\delta > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in A$، و $\|x-x_\circ\| < \delta$ مستلزم

$$\|f(x)-f(x_\circ)-Df(x_\circ)(x-x_\circ)\| \leqslant \varepsilon \|x-x_\circ\|$$

باشد. در این فرمول‌بندی می‌توانیم $x=x_\circ$ را مجاز بدانیم، زیرا هردوطرف نامساوی بالا برابر صفر می‌شوند.

به‌طور شهودی، $x \to f(x_\circ)+Df(x_\circ)(x-x_\circ)$ بهترین تقریب مستوی[1] برای f درمجاورت $x_\circ$ است. شکل ۶-۲ را ببینید. دراین شکل معادلات صفحات‌مماس برنمودار f را نشان داده‌ایم.



شکل ۶-۲ (الف) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، (ب) $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$

اگر f در هرنقطهٔ A دیفرانسیل‌پذیر باشد، فقط می گوییم f در A دیفرانسیل‌پذیر است. به‌طور شهودی انتظار داریم (همان‌طورکه درشکل ۶-۲ مشهود است) که فقط یك بهترین تقریب خطی می‌تواند وجود داشته باشد. درواقع این مطلب درست است مشروط برآنکه فرض کنیم A یك مجموعهٔ بازاست. اگر تعاریف $Df(x)$ و $df/dx=f'(x)$ را با هم مقایسه کنیم می‌بینیم که $Df(x).h=f'(x).h$ (حاصلضرب اعداد $f'(x)$ و

---

۱. یك نگاشت مستوی عبارت است ازیك نگاشت خطی به‌اضافهٔ یك مقدار ثابت.

($h \in \mathbf{R}$). بدین‌سان نگاشت خطی $Df(x)$ صرفاً عبارت است از ضرب در df/dx.

قضیهٔ ۱. فرض‌کنیم A یك مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^n$ و $f: A \to \mathbf{R}^m$ در x_0 دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه $Df(x_0)$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ f تعیین می‌شود.

مثال ۱ فرض کنیم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $f(x) = x^3$. $Df(x)$ و df/dx را محاسبه کنید.

حل: دراین‌حالت ازحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی (یا از قواعدی‌که درزیر آشکار می‌شوند) می‌دانیم کـه $dx^3/dx = 3x^2$. بدین‌سان در این مثال $Df(x)$ عبارت است از نگاشت خطی

$$h \to Df(x).h = 3x^2 h$$

مثال ۲. نشان دهید که، درحالت کلی، Df به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

حل: به‌عنوان مثال، اگر $A = \{x_0\}$ شامل فقط یك نقطه باشد، آنگاه هر $Df(x_0)$ در تعریف می گنجد، زیرا $x \in A$، $\|x - x_0\| < \delta$ فقـط وقتی برقرار است که $x = x_0$، که در آن حالت عبارت

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|$$

برابر با صفر است. پس تعریف به‌طور آشکار برقرار است.

تبصره: اگربرهان قضیهٔ ۱ راازنزدیك مورد بررسی قراردهیم، می بینیم که $Df(x)$ در محدوده‌ای وسیعتر از گردایهٔ مجموعه‌های باز یکتاست (به‌فـرض وجود). مثلاً، این قضیه برای بازه‌های بستهٔ $\mathbf{R}$ و به‌طورکلی برای گرده‌های بسته در $\mathbf{R}^n$ معتبراست.

دراین مقام مناسب است کـه نکاتی را دربارهٔ مشتقات توابع یـك متغیره یادآوری کنیم. مشخصاً مراحل منطقی راکه به‌قضیهٔ مهم مقدار میانگین منجر می‌شوند. به‌زودی این مفاهیم را به‌توابع چندمتغیره تعمیم خواهیم داد.

نکتهٔ ۱. اگر $f:]a, b[\to \mathbf{R}$ در $c \in]a, b[$ دیفرانسیل‌پذیر ودارای یك ماکسیمم (به‌ترتیب مینیمم) در c باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.

برهان: فـرض‌کنیـم f در c یـك ماکسیمم داشته باشد. آنگـاه بـرای $h \geqslant 0$، $[f(c+h) - f(c)]/h \leqslant 0$؛ وبنا بر این از $h \to 0$، $h \geqslant 0$، به‌دست می‌آوریم $f'(c) \leqslant 0$. به‌طور مشابه برای $h \leqslant 0$ به‌دست می‌آوریم $f'(c) \geqslant 0$. درنتیجه $f'(c) = 0$. ■

خواننده باید با معنای هندسی نتیجهٔ بالا آشنا باشد.

نکتهٔ ۲. (قضیهٔ رل[1]). اگر $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ پیـوسته، دیفرانسیل‌پذیـر در $]a, b[$ باشد و $f(a) = f(b) = 0$، آنگـاه یـك عدد $c \in]a, b[$ وجـود دارد به طـوری که $f'(c) = 0$.

---

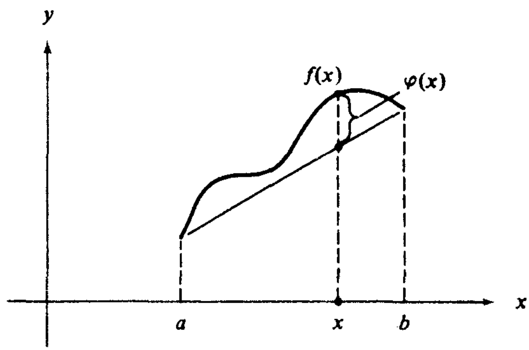
1. Rolle

برهان: اگر به‌ازای هر $x\in[a, b]$، $f(x)=0$، آنگاه می‌توانیم برای c هرعدد دلخواه را برگزینیم. ازاین‌رو فرض می‌کنیم f متحداً برابر صفر نباشد. از فصل ۴ می‌دانیم که نقطه‌ای مانند c_1 وجود دارد که در آن f ماکسیممش و نقطه‌ای مانند c_2 کـه در آن f مینیممش را اختیار می‌کند. بنابر فرض و با توجه به‌این امر که $f(a)=f(b)=0$، حداقل یکی از دو نقطهٔ c_1، c_2 در $]a, b[$ قرار دارد. اگـر $c_1\in]a, b[$؛ بنابرنکتهٔ ۱، به‌دست می‌آوریم $f'(c_1)=0$؛ به‌طور مشابه برای c_2 استدلال می‌کنیم. ■

نکتهٔ ۳. (قضیـهٔ مقدار میانگیـن). اگـر $f:[a, b]\to \mathbf{R}$ پیوسته و در $]a, b[$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، یك نقطهٔ $c\in]a, b[$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

برهان: قرار دهید $\varphi(x)=f(x)-f(a)-(x-a)[f(b)-f(a)]/(b-a)$ (شکل ۶ــ۳ را ببینید) وقضیهٔ رل را به‌کار ببرید. ■



شکل ۶-۳

فرع. اگر، علاوه برآن، در $]a, b[$، $f'=0$، آنگاه f ثابت است.

برهان: اگـر نکته ۳ را درمورد f دربازهٔ $[a,x]$ به‌کار ببریم، خـواهیم داشت $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0$، بنابراین به‌ازای هر $x\in[a, b]$، $f(x)=f(a)$ ودر نتیجه f ثابت است.

این فهرست قضایای اساسی‌ادامه‌می‌یابدواین‌نکات راکـه دیفرانسیل‌پذیری مستلزم پیوستگی است، قاعدهٔ جمع بـرای مشتقات، قاعدهٔ خارج قسمت، قاعدهٔ زنجیری، و قضیهٔ تیلور، دربردارد. همهٔ این مطالب ذیلاً درحالت‌کلی توابع چندمتغیره مورد بررسی‌واقع خواهند شد، ولی خواننده ممکن است تمایل داشته باشدکه قبل از آنها حالت یك‌متغیره را مرور کند.

مثال ۳. فرض کنیم $f:]a, b[\to \mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، و $|f'(x)|\leqslant M$. ثابت

کنید که، به‌ازای هر $x, y \in]a, b[$، $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$.

حل: بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین، به‌ازای یك $c \in]x, y[$،

$$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$$

اگر از دوطرف قدرمطلق بگیریم، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

تمرینهای بند ۱.۶

۱. $Df(x)$ را برای $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $f(x)=x\sin x$ محاسبه کنید.

۲. ثابت کنید که $D(f+g)=Df+Dg$.

۳. فرض کنیم $A=\{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ | ۰ \leqslant x \leqslant ۱, y=۰\}$. ثابت کنید که نتیجه‌گیری قضیهٔ ۱ برای این A نادرست است.
[راهنمایی: مثلاً $f(x, y)=۰$ را بگیرید و نشان دهید که $Df(x, y)=۰$ و $Df(x, y)(h, k)=k$ هردو در تعریف صدق می‌کنند.]

۴. فرض کنیم $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ و فرض کنیم یك ثابت M وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای $x \in \mathbf{R}^n$، $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|^۲$. ثابت کنید که f در $x_۰=۰$ دیفرانسیل‌پذیر است و اینکه $Df(x_۰)=۰$.

۵. اگر $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $|f(x)| \leqslant |x|$، آیا باید $Df(۰)=۰$؟

۶. آیا قضیهٔ مقدار میانگین درمورد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $[۰, ۱]$ کاربرد دارد؟ آیا این قضیهٔ درمورد $g(x)=\sqrt{|x|}$ در $[-۱, ۱]$ کاربرد دارد؟

۲.۶ نمایش ماتریسی

علاوه بر روش قبلی، روش دیگری برای مشتق‌گیری از یك تابع چندمتغیره f وجود دارد. می‌توانیم این تابع را برحسب مؤلفه‌هایش به‌صورت

$$f(x_۱, \ldots, x_n)=(f_۱(x_۱, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_۱, \ldots, x_n))$$

بنویسیم و مشتقات جزئی $\partial f_j/\partial x_i$ را به‌ازای $j=۱, \ldots, m$ و $i=۱, \ldots, n$ محاسبه کنیم که در آن نماد $\partial f_j/\partial x_i$ به‌این معناست که مشتق معمولی f_j را نسبت به x_i، درحالی که متغیرهای دیگر $x_۱$، ...، $x_{i-۱}$، $x_{i+۱}$، ...، x_n را ثابت نگه می‌داریم، محاسبه می‌کنیم. به‌طور صریح، تعریف ۲ را داریم.

تعریف ۲. $\partial f_j/\partial x_i$ به‌وسیلهٔ حد زیر، درصورت وجود، تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0}\left\{\frac{f_j(x_1, \ldots, x_i+h, \ldots, x_n) - f_j(x_1, \ldots, x_n)}{h}\right\}$$

در بند ۱.۶ دیدیم که برای $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، $Df(x)$ صرفاً عبارت است از نگاشت خطی حاصل ازضرب در df/dx. این امر، که با توجه به‌تعاریف آشکار بود، می‌تواند به‌صورتی که درقضیهٔ زیر آمده است تعمیم یابد.

قضیهٔ ۲. فرض‌کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ باز و $f : A \to \mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیرباشد. آنگاه مشتقات جزئی $\partial f_j/\partial x_i$ وجود دارند، و ماتریس نگاشت خطی $Df(x)$ نسبت به‌پایه‌های استاندارد در $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

داده می‌شود که در آن هرمشتق جزئی در $x = (x_1, \ldots, x_n)$ محاسبه شده است. این ماتریس را ماتریس ژاکوبی f می‌نامند.

هنگام انجام محاسبات عملی معمولاً می‌توانیم به‌آسانی ماتریس ژاکوبی را محاسبه‌کنیم و دراین‌صورت قضیهٔ ۲، Df را به‌ما می‌دهد. در بعضی ازکتابها، Df را دیفرانسیل یا مشتق کل f می‌نامند.

باید توجه ویژه‌ای به‌حالت $m = 1$ داشته باشیم، یعنی درحالتی که تابعی حقیقی از n متغیر داریم. دراین صورت Df دارای ماتریس

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

است واثر این مشتق بریك بردار $e = (a_1, \ldots, a_n)$ عبارت است از

$$Df(x) \cdot e = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i$$

باید بر این نکته تاکید شود که درهر $x \in A$، Df یك نگاشت خطی است وتعریف $Df(x)$ مستقل ازپایه‌ای است که‌مورداستفاده قرارمی گیرد. البته‌اگر پایهٔ‌راازپایهٔ‌استاندارد

به‌پایهٔ دیگری تغییردهیم، اجزاء ماتریس مورد بحث تغییرخواهندکرد. اگر تعریف ماتریس یك تبدیل خطی[1] را مورد بررسی قرار دهیم می‌توانیم ببینیم که ستونهای آن ماتریس نسبت به‌پایهٔ جدید عبارت خواهند بود از اثر مشتق $Df(x)$ بر پایهٔ جدید $\mathbf{R}^n$ که برحسب پایهٔ جدید $\mathbf{R}^m$ بیان شوند. البته خود نگاشت خطی $Df(x)$ با تغییر پایهٔ تغییر نمی‌کند. درحالت $m=۱$، $Df(x)$ نسبت به‌پایهٔ استاندارد، یك ماتریس $۱\times n$ است. برداری که مؤلفه‌هایش همان مؤلفه‌های $Df(x)$ هستند گرادیان f نامیده می‌شود و با $\operatorname{grad} f$ یا ∇f نشان داده می‌شود. بدینسان برای $f: A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$،

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_۱},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

(بعضی اوقات می‌گویند که $\operatorname{grad} f$ همان Df است که در آن ویرگول‌هایی درج کرده‌ایم!).

یك حالت ویژهٔ مهم وقتی رخ می‌دهد که $f=L$ خود خطی باشد. دراین‌صورت از تعریف (مثال ۲ را در زیر ببینید) می‌بینیم که $DL=L$، همان‌گونه‌که انتظارش‌راداشتیم، زیرا بهترین تقریب مستوی برای یك‌نگاشت خطی خود آن نگاشت خطی است.بدین‌سان، دراین حالت، ماتریس ژاکوبی L عبارت از ماتریس خود L است. حالت جالب دیگر مربوط به‌یك نگاشت ثابت است . درواقع می‌بینیم که یك نگاشت ثابت دارای مشتق صفراست؛ صفرعبارت از نگاشت خطی $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ است به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^n$، $f(x)=۰=(۰,\ldots,۰)$.

مثال ۱. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}^۳$، $f(x,y)=(x^۲, x^۳y, x^۴y^۲)$. Df را محاسبه کنید.

حل: طبق قضیهٔ ۲، $Df(x,y)$ آن نگاشت خطی است که ماتریس آن

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_۱}{\partial x} & \dfrac{\partial f_۱}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f_۲}{\partial x} & \dfrac{\partial f_۲}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f_۳}{\partial x} & \dfrac{\partial f_۳}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x & ۰\\ ۳x^۲y & x^۳\\ ۴x^۳y^۲ & ۲x^۴y\end{bmatrix}$$

می‌باشد، دراینجا $f_۱(x,y)=x^۲$، $f_۲(x,y)=x^۳y$، $f_۳(x,y)=x^۴y^۲$.

---

۱. فصل ۵ کتاب
M.O'Nan, *Linear Algebra*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, (1971)
را ببینید.

مثال ۲. فرض کنیم $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ یك نگاشت خطی باشد

$$(L(\alpha x)=\alpha L(x) \text{ و } L(x+y)=L(x)+L(y) \text{ یعنی})$$

نشان دهید که $DL(x)=L$.

حل: به‌ازای x_0 و $\varepsilon>0$ مفروض باید یك $\delta>0$ بیابیم به‌طوری که $\|x-x_0\|<\delta$ مستلزم

$$\|L(x)-L(x_0)-DL(x)\cdot(x-x_0)\|\leqslant\varepsilon\|x-x_0\|$$

باشد. اما با انتخاب $DL(x)=L$ سمت‌چپ نامساوی بالا با

$$\|L(x)-L(x_0)-L(x-x_0)\|$$

برابرمی‌شود که این هم صفر است، زیرا بنا برخطی بودن L، $L(x-x_0)=L(x)-L(x_0)$.
بنا براین $DL(x)=\mathrm{L}$ در تعریف صدق می‌کند (به‌ازای هر $\delta>0$ دلخواه).

مثال ۳. فرض می‌کنیم $f(x,y,z)=x(\sin y)/z$. $\operatorname{grad} f$ را محاسبه کنید.

حل: $\operatorname{grad} f=(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$، و در اینجا

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(\sin y)}{z},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(\cos y)}{z},\ \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{x(\sin y)}{z^2}$$

از این‌رو

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\left(\frac{(\sin y)}{z},\ \frac{x(\cos y)}{z},\ -\frac{x(\sin y)}{z^2}\right)$$

تمرینهای بند ۲.۶

۱. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$، $f(x,y,z)=(x^4y, xe^z)$. Df را محاسبه کنید.

۲. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$، $(x,y,z)\to e^{x^2+y^2+z^2}$. Df و $\operatorname{grad} f$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنیم L یك نگاشت خطی از $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$، $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ چنان باشد که $\|g(x)\|\leqslant M\|x\|^2$، و فرض کنیم $f(x)=L(x)+g(x)$. ثابت کنید $Df(0)=L$.

۴. فرض کنیم $f(x,y)=(xy, y/x)$. Df را محاسبه کنید. ماتریس $Df(x,y)$ را نسبت به‌پایهٔ $(1,0)$، $(1,1)$ در $\mathbf{R}^2$ بیابید.

۵. امکان تعریف Df را برای f، نگاشتی از یك فضای نرم‌دار در دیگری، مورد بحث قرار دهید.

۳.۶ پیوستگی توابع دیفرانسیل‌پذیر، مسیرهای دیفرانسیل‌پذیر

خواننده ممکن است از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به‌یاد داشته باشد که یك تابع دیفرانسیل‌پذیر پیوسته است. به‌طور شهودی این مطلب محسوس است ، زیرا داشتن خط (یا صفحهٔ) مماس بر نمودار قویتر از نداشتن پارگی در نمودار است.

برای توابع حقیقی از یك متغیر، برهان این مطلب را یادآوری می کنیم: فرض کنیم $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ در $x_\circ$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. دراین‌صورت

$$\lim_{x \rightarrow x_\circ} (f(x) - f(x_\circ)) = \lim_{x \rightarrow x_\circ} \left(\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}\right) \cdot (x - x_\circ)$$

$$= f'(x_\circ) \cdot \lim_{x \rightarrow x_\circ} (x - x_\circ) = f'(x_\circ) \cdot \circ = \circ$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow x_\circ} (f(x) - f(x_\circ)) = \circ$ که از آن نتیجه می‌شود f در $x_\circ$ پیوسته است.

این پندارهـا به‌آسانی به‌حالت $f: A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ تعمیم‌داده می‌شوند، وقضیهٔ بعدی حاصل می گردد.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ باز و $f: A \rightarrow \mathbf{R}^m$ در A دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه f پیوسته است. در واقع، به‌ازای هـر $x_\circ \in A$، ثابتی مانند $M > \circ$ و یـك $\delta_\circ > \circ$ وجود دارد به طوری که $\|x - x_\circ\| < \delta_\circ$ مستلزم $\|f(x) - f(x_\circ)\| \leqslant M\|x - x_\circ\|$ باشد. (این را خاصیت لیپشیتس می‌نامند.)

قبلاً حالت خاص توابع حقیقی، $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ را بررسی کردیم. حالت مربوط به‌یك تابع $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ نیزدارای اهمیت است. دراینجا c یك خم یا مسیر را در $\mathbf{R}^m$ نمایش می‌دهد. دراین حالت $Dc(t): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ بردار

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dc_1}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{dc_m}{dt} \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود که در آن $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_m(t))$. ایـن بردار با نماد $c'(t)$ نموده می‌شود و به آن بردار مماس یا بردار سرعت بـر خم مفروض می گویند. اگر توجه کنیم که $c'(t) = \lim_{h \rightarrow \circ} (c(t+h) - c(t))/h$ واگر این نکته رامورد استفاده قرار دهیم که $[c(t+h) - c(t)]/h$ وتری است که خط‌مماس بر خم راتقریب‌می کند، می بینیم که $c'(t)$

باید دقیقاً بردار مماس را نمایش دهد (شکل ۶ـ۴ را ببینید). اگرعبارت نقطهٔ متحرك را به‌کار ببریم، $(c(t+h)-c(t))/h$ تقریبی برای‌سرعت‌می باشد، زیرا برابراست با زمان/تغییرمکان، بنابراین $c'(t)$ عبارت است از سرعت لحظه‌ای.

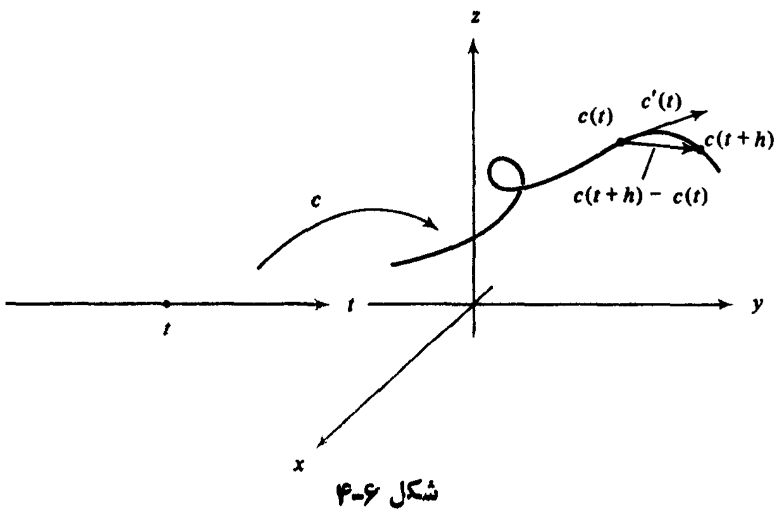
اگر بخواهیم دقیق باشیم باید همواره $c'(t)$ را به‌صورت یك بردارستونی‌نمایش دهیم، زیرا ماتریس $Dc(t)$ یك ماتریس ۱ × ۳ است. اما این طرز نمایش، از نقطه‌نظر چاپ، دشوار است، وازاین‌رو $c'(t)$ را به‌صورت یك بردار سطری خواهیم نوشت.

مثال ۱. ثابت‌کنیدکه $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، $x\to|x|$ درصفر پیوسته است ولی دیفرانسیل‌پذیر نیست.

حل: به‌ازای $x\geqslant 0$، $f(x)=x$ و به‌ازای $x<0$، $f(x)=-x$، بنابراین f در $]0,\infty[$ و $]-\infty,0[$ پیوسته است. چون $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$، f در ۰ نیز پیوسته است، در نتیجه f درهمهٔ نقاط پیوسته می‌باشد. سرانجام f در ۰ دیفرانسیل‌پذیر نیست، زیرا اگرچنین باشد،

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

وجود خواهد داشت. امـا به‌ازای $x>0$، $f(x)/x$ بـا ۱+ برابر است و به‌ازای $x<0$، با ۱− برابراست. درنتیجه آن‌حد نمی‌تواند وجود داشته باشد.



شکل ۶ـ۴

مثال ۲. آیا مشتق یك تابع باید پیوسته باشد؟

حل: پاسخ آن منفی است، اما یافتن مثالی برای ایـن پاسخ چندان آشکار نیست. شاید ساده‌ترین مثال شناخته شده عبارت باشد از

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}\sin\left(\frac{۱}{x}\right), & x\neq ۰ \\ ۰, & x=۰ \end{cases}$$

شکل ۶ـ۵ را ببینید.

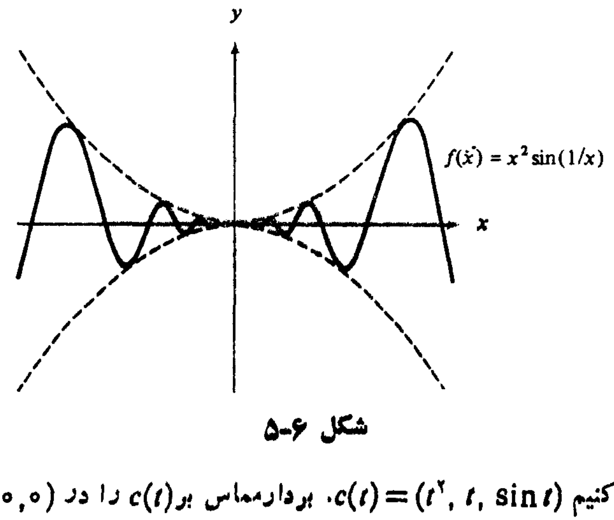
برای اثبات دیفرانسیل‌پذیری در صفر نشان خواهیم داد

$$\frac{f(x)}{x}\to ۰ \text{ وقتی که } x\to ۰$$

درواقع $|f(x)/x|=|x\sin(۱/x)|\leqslant|x|\to ۰$ وقتی که $x\to ۰$. بدینسان $f'(۰)$ وجود دارد و صفر می‌شود . بنابراین f در ۰ دیفرانسیل‌پذیر است. حال، بنابر حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی،

$$f'(x)=۲x\sin\left(\frac{۱}{x}\right)-\cos\left(\frac{۱}{x}\right),\quad x\neq ۰$$

وقتی $x\to ۰$، جملهٔ اول ← ۰، اما جملهٔ دوم بین ۱+ و ۱− نوسان می‌کند، ازاین‌رو $\lim_{x\to ۰} f'(x)$ وجود ندارد.بدین‌سان f' وجود دارد ولی پیوسته نیست.



شکل ۶-۵

مثال ۳. فرض کنیم $c(t)=(t^{۲},t,\sin t)$. بردارمماس بر $c(t)$ را در $c(۰)=(۰,۰,۰)$ بیابید.

حل: $c'(t)=(۲t,۱,\cos t)$. پس از قراردادن $t=۰$، $c'(۰)=(۰,۱,۱)$ که عبارت است از بردار مماس بر $c(t)$ در $(۰,۰,۰)$.

تمرینهای بند ۳.۶

۱. فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases} x^{2}, & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \\ 0, & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \end{cases}$$

نشان دهید $f'(0)$ وجود دارد. آیا f در 0 پیوسته است؟

۲. آیا شرط لیپشیتس درقضیهٔ ۳ برای تضمین دیفرانسیل‌پذیری کافی است؟

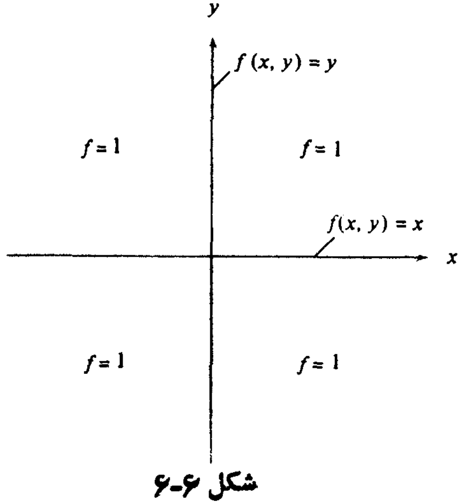
۳. آیا مشتق یك تابع پیوسته باید در ماکسیمم آن تابع وجود داشته باشد؟

۴. فرض کنیم $f(x)=x\sin(1/x)$، $x\neq 0$ و $f(0)=0$. پیوستگی ودیفرانسیل‌پذیری f را در 0 مورد بررسی‌قراردهید.

۵. بردار مماس برخم $c(t)=(3t^{2}, e^{t}, t+t^{2})$ را در $t=1$ بیابید.

۴.۶ شرایطی برای دیفرانسیل‌پذیری

چون ماتریس ژاکوبی روش محاسبهٔ مؤثری در اختیار ما می‌گذارد، می‌خواهیم بدانیم آیا وجود مشتقات جزئی معمولی مستلزم وجود Df هست یا خیر. متأسفانه این مطلب درحالت‌کلی درست نیست. به‌عنوان مثال، تابع $f:\mathbf{R}^{2}\rightarrow\mathbf{R}$ را درنظر می گیریم که به‌این‌صورت تعریف‌شده‌است که‌وقتی $y=0$، $f(x,y)=x$، وقتی $x=0$، $f(x, y)=y$ و درجاهای دیگر $f(x, y)=1$. آنگاه $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در $(0,0)$ وجوددارند و برابر ۱ هستند. با وجود این f در $(0,0)$ پیوسته نیست (چرا؟)، ازاین‌رو مشتق Df



شکل ۶-۶

نمی‌تواند در $(0,0)$ امکان وجود داشته باشد. شکل ۶ـ۶ را ببینید. (برای مثالهای نامأنوستر، مثالها و تمرینها را ببینید.)

فهم چنین رفتاری نسبتاً آسان است. مشتقات جزئی فقط به آنچه در امتداد محورهای x و y رخ می‌دهد بستگی دارند، درصورتی که تعریف Df دربرگیرندهٔ کل رفتار f در تمامی یك همسایگی یك نقطهٔ مفروض است.

با وجود این می‌توانیم حکم زیر را بیان کنیم.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ باز باشد و $f: A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. فرض کنیم $f=(f_1,\ldots,f_m)$. اگر هر یك از مشتقات جزئی $\partial f_j/\partial x_i$ در A وجود داشته باشد، و در آن پیوسته باشد، آنگاه f در A دیفرانسیل‌پذیر است.

حال بپردازیم به‌بحث دربارهٔ مشتق سویی.

تعریف ۳. فرض کنیم تابع حقیقی f دریك همسایگی $x_0\in\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشد، و فرض کنیم $e\in\mathbf{R}^n$ یك بردار یکه باشد. آنگاه

$$\frac{d}{dt}f(x_0+te)\bigg|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}$$

را مشتق سویی f در x_0 درسوی e می‌نامند.

از تعریف آشکار است که مشتق سویی صرفاً عبارت است ازآهنگ تغییر f در سوی e؛ شکل ۶ـ۷ را ببینید.

ادعا می‌کنیم که مشتق سویی درسوی e برابر است با $Df(x_0)\cdot e$. برای این‌منظور کافی است به‌تعریف $Df(x_0)$ به‌ازای $x=x_0+te$ نگاه کنیم؛ به‌دست می‌آوریم

$$\left\|\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}-Df(x_0)\cdot e\right\|\leqslant\varepsilon\|e\|\quad \text{به‌ازای هر } \varepsilon>0$$

مشروط برآنکه $|t|$ به‌قدرکافی کوچك باشد. این نامساوی ثابت می‌کند که اگر f در x_0 دیفرانسیل‌پذیر باشد، آنگاه مشتقات سویی نیز وجود دارند و به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر بیان می‌شوند

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}=Df(x_0)\cdot e$$

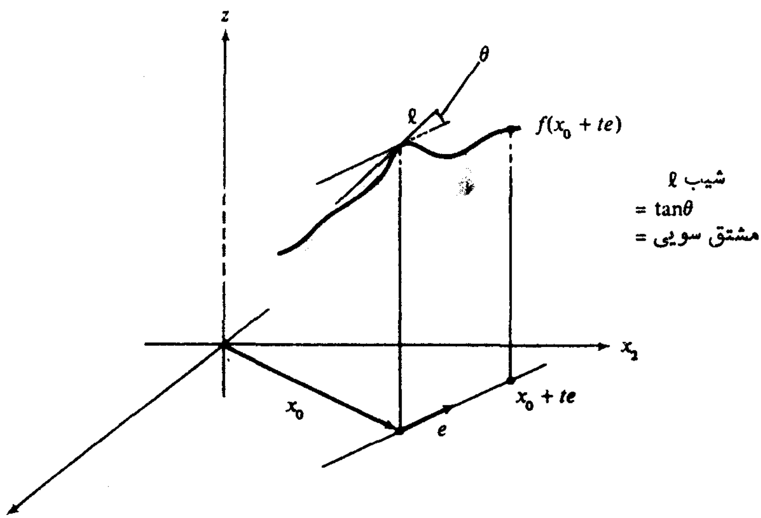
به‌ویژه، ملاحظه‌می‌کنیم که $\partial f/\partial x_i$ عبارت است ازمشتق f درسوی‌محورمختص i ام (پس ازانتخاب $e=e_i=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots 0)$).

توجه داشته باشید که‌برای یك تابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ مشتقات سویی $Df(x_0)\cdot e$

می‌توانند برای تعیین صفحهٔ مماس برنمودار f به‌کار روند (با شکل۶ـ۲ مقایسه‌کنید). به عبارت دیگر ، خط راست $z=f(x_\circ)+Df(x_\circ)\cdot te$ برنمودار f مماس است ، زیرا همان‌طورکه درشکل ۶ـ۷ نموده شده‌است، $Df(x_\circ)\cdot e$ صرفاً آهنگ تغییر f در سوی e است . بدین‌سان صفحهٔ مماس برنمودار f را در$(x_\circ , f(x_\circ))$ می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ

$$z=f(x_\circ)+Df(x_\circ)\cdot(x-x_\circ)$$

توصیف‌نمود (شکل ۶ـ۸ را ببینید). چون مفهوم صفحهٔ مماس بریك رویه را دقیقاً تعریف نکرده‌ایم، از این‌رو معادلهٔ بالا را به عنوان یك تعریف صفحهٔ مماس اختیار خواهیم کرد.



شکل ۶-۷ شیب $l = \tan\theta =$ مشتق سویی

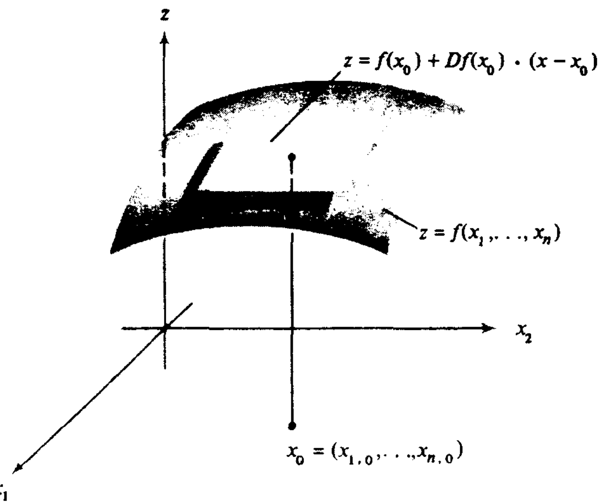
مثال۱. نشان دهیدکه وجودهمهٔ مشتقات‌سویی دریك نقطه مستلزم‌دیفرانسیل‌پذیری نیست.

حل: تابع $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم ،

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y)}\ , & x^2\neq -y\ ,\\ 0\ , & x^2=-y\end{cases}$$

دراین‌صورت اگر $e=(e_1 , e_2)$ ،

$$\frac{1}{t}f(te_1 , te_2)=\frac{1}{t}\ \frac{t^2e_1e_2}{t^2e_1^2+te_2}=\frac{te_1e_2}{t^2e_1^2+te_2}\ \to e_1$$



شکل ۶-۸

وقتی که $t \to 0$ (ولی درحالت $e_2 = 0$، نتیجه‌صفر می‌شود). بدین‌سان هرمشتق سویی در $(0,0)$ وجود دارد، اما f در $(0,0)$ پیوسته نیست، زیرا به‌ازای x^2 نزدیك به $-y$ همراه با اینکه x، y هردو کوچك باشند، f خیلی بزرگ خواهد بود. (مثلاً، به‌ازای δ و M مفروض، (x,y) را چنان انتخاب می‌کنیم که $x^2 = -y + \varepsilon$ و $\|(x,y)\| < \delta$. در این صورت $f(x,y) = xy/\varepsilon$، که برای ε کوچك، می‌تواند بزرگتر از M بشود. بدین‌سان، به‌ازای هر $\delta > 0$ دلخواه، f در $D((0,0),\delta)$ کراندار نیست و از این‌رو در $(0,0)$ پیوسته نیست.) درنتیجه، بنابرقضیهٔ ۳، f در $(0,0)$ دیفرانسیل‌پذیر نیست.

تبصره: این مثال نشان می‌دهد که وجود همهٔ مشتقات سویی تعریف مناسبی برای دیفرانسیل‌پذیری نخواهد بود، زیرا این تعریف احتمالی حتی مستلزم پیوستگی هم نیست. به همین دلیل است که مفهوم مقیدتر موجود در تعریف ۱ را اختیار می‌کنیم.

مثال ۲. فرض کنیم $f(x,y) = x^2 + y$. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر نمودار f را در $x = 1$، $y = 2$ محاسبه کنید.

حل: دراینجا $Df(x,y)$ دارای ماتریس

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 1)$$

است، ازاین‌رو $Df(1,2) = (2,1)$. بدین‌سان معادلهٔ صفحهٔ مماس مطلوب عبارت می‌شود از

$$z = ۳ + (۲, ۱)\begin{pmatrix} x-۱ \\ y-۲ \end{pmatrix} = ۳ + ۲(x-۱) + (y-۲)$$

یعنی،

$$۲x + y - z = ۱$$

تمرینهای بند ۴.۶

۱. با به‌کار بستن قضیهٔ ۴ نشان دهید که

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}}, & (x,y) \neq (۰,۰), \\ ۰, & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

در $(۰,۰)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

۲. دیفرانسیل‌پذیری

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

را در $(۰,۰)$، مشروط برآنکه $f(۰,۰) = ۰$، موردبررسی قرار دهید.

۳. صفحهٔ مماس برنمودار $z = x^۲ + y^۲$ را در $(۰,۰)$ بیابید.

۴. معادلهٔ‌صفحهٔ مماس بر $z = x^۳ + y^۴$ را در $x = ۱$، $y = ۳$ بیابید.

۵. تابعی مانند $f : \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}$ بیابید که درهر نقطه دیفرانسیل‌پذیر باشد، ولی‌مشتقات جزئی آن در $(۰,۰)$ پیوسته نباشند. [راهنمایی: مثال ۲ را در بند ۳.۶ موردمطالعه قرار دهید.]

۵.۶ قاعدهٔ زنجیری یا قضیهٔ تابع مرکب

یکی‌از مهمترین فنون مشتق‌گیری قاعدهٔ‌زنجیری‌است ("قاعدهٔ تابعی‌از یک‌تابع"). به‌عنوان مثال، برای مشتق‌گیری از $(x^۳+۳)^۶$ قرار می‌دهیم $y = x^۳ + ۳$ و ابتدا از $y^۶$ مشتق می‌گیریم، حاصل $۶y^۵$ می‌شود، سپس آن‌را درمشتق $x^۳ + ۳$ ضرب می‌کنیم تا پاسخ نهایی $۶(x^۳+۳)^۵ ۳x^۲$ را به‌دست آوریم. روندمشابهی برای توابع چندمتغیره وجود دارد. مثلاً اگر u، v، و f توابعی‌حقیقی‌از دومتغیر باشند، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial x}f(u(x,y)\ ,\ v(x,y))=\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}$$

حال قضیهٔ کلی را، که حاوی همهٔ اینها به‌عنوان‌حالاتی خاص‌است، ارائه می‌کنیم.

قضیهٔ ۵ . فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ در مجموعهٔ باز $A\subset\mathbf{R}^n$ و $g:B\to\mathbf{R}^p$ درمجموعهٔ باز $B\subset\mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشند، و فرض کنیم $f(A)\subset B$. آنگاه ترکیب $g\circ f$ در A دیفرانسیل‌پذیر است و $D(g\circ f)(x_\circ)=Dg(f(x_\circ))\circ Df(x_\circ)$.

توجه داشته‌باشید که این فرمول منطقی است،زیرا

$$Dg(f(x_\circ)):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^p \text{ و } Df(x_\circ):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$$

بنابراین ترکیب آنها تعریف شده‌است.

یادآوری می‌کنیم که حاصل‌ضرب دوماتریس‌متناظر است باترکیب نگاشتهای خطی متناظری که آن ماتریسها نمایش‌می‌دهند. بدین‌سان‌از قضیهٔ۵ این‌نکتهٔ مهم‌را به‌دست‌می‌آوریم که ماتریس ژاکوبی $g\circ f$ در $x=(x_1,\ ...,\ x_n)$ عبارت است ازحاصل ضرب ماتریس ژاکوبی g درنقطهٔ $f(x)$ و ماتریس ژاکوبی f در نقطهٔ x (با همین‌ترتیب). پس اگر $h=g\circ f$ و $y=f(x)$، آنگاه

$$Dh(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}\cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

که در آن $\partial g_i/\partial y_j$ها در $y=f(x)$ محاسبه می‌شوند و $\partial f_i/\partial x_j$ها در x. اگر این حاصل‌ضرب‌را بسط‌دهیم، به‌دست می‌آوریم، مثلاً،

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_1}{\partial y_j}\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1}$$

این وضعیت‌هنگامی‌رخ می‌دهد که «تعویض متغیر» بدهیم. مثلاً، فرض کنیم $f(x,y)$ یك‌تابع حقیقی باشد، وبرای متغیرهای‌جدید r،θ فرض کنیم $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ (مختصات قطبی). تابع

$$h(r,\theta)=f(r\cos\theta\ \ ,\ \ r\sin\theta)$$

را تشکیل می‌دهیم. دراین‌صورت

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\ ,$$

و

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta$$

خواننده باید فرمولهای مشابهی برای مختصات کروی $(r\ ,\ \varphi\ ,\ \theta)$، کـه در آن $x=r\cos\theta\sin\varphi$، $y=r\sin\theta\sin\varphi$، $z=r\cos\varphi$ بـه دست آورد (مختصات کروی دربند ۵.۹ به‌تفصیل موردبحث قرار می‌گیرند).

قاعدهٔ زنجیری (قضیهٔ ۵) را قضیهٔ تابع مرکب نیز می‌نامند، زیـرا این قضیهٔ به ما می‌گوید که چگونه‌از توابع مرکب‌دیفرانسیل بگیریم.

توضیحی دیگر می‌تواند مطالب را روشنی بخشد. فرض‌می‌کنیم توابع $u(x\ ,\ y)$، $v(x,y)$ ، $w(x,y)$ و $f(u,v,w)$ را داشته باشیم، وتابع , $h(x,y)=f(u(x,y)$ $v(x,y)\ ,\ w(x\ ,\ y))$ را تشکیل می‌دهیم. دراین‌صورت ازقضیهٔ۵ حاصل می‌شود

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\ \frac{\partial w}{\partial x}$$

قطع نظر ازجزئیات می‌توانیم این‌فرمول‌را (به‌عنوان یك‌حالت‌روشنگر) به‌صورت زیر به‌دست‌آوریم، می‌نویسیم

$$\frac{[u(x+\Delta x,y)-h(x,y)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{[f(u(x+\Delta x,y)\ ,\ v(x+\Delta x,y)\ ,\ w(x+\Delta x,y))-f(u(x,y)\ ,\ v(x+\Delta x,y)\ ,\ w(x+\Delta x,y))]}{\Delta x}$$

$$+\frac{[f(u(x,y)\ ,\ v(x+\Delta x,y)\ ,\ w(x+\Delta x,y))-f(u(x,y)\ ,\ v(x,y)\ ,\ w(x+\Delta x,y))]}{\Delta x}$$

$$+\frac{[f(u(x,y)\ ,\ v(x,y)\ ,\ w(x+\Delta x,y))-f(u(x,y)\ ,\ v(x,y)\ ,\ w(x,y))]}{\Delta x}$$

حال، عبارت‌اخیر (با استفاده از $f(u+\Delta u,v,w)-f(u,v,w)\approx\Delta u\partial f/\partial u$) تقریباً

برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial f}{\partial v}\ \frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\partial f}{\partial w}\ \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

بنابراین اگر $\Delta x \to 0$ ، فرمول مطلوب به‌دست می‌آید.

مثال۱. قاعدهٔ زنجیری را برای $f(u,v,w)=u^2v+wv^2$ و $u=xy$ ، $v=\sin x$ ، $w=e^x$ تحقیق کنید.

حل: در اینجا $h(x,y)=f(u(x,y)\ ,\ v(x,y)\ ,\ w(x,y))$ به‌وسیلهٔ عبارت زیر بیان می‌شود

$$h(x,y)=x^2y^2\sin x+e^x\sin^2 x$$

از این‌رو، مستقیماً داریم

$$\frac{\partial h}{\partial x}=2xy^2\sin x+x^2y^2\cos x+e^x\sin^2 x+e^x 2\sin x\cos x$$

ازطرف دیگر،

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\ \frac{\partial w}{\partial x}&=2uv\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial x}+2wv\frac{\partial v}{\partial x}+v^2\frac{\partial w}{\partial x}\\&=2xy^2\sin x+x^2y^2\cos x\\&\quad+2e^x\sin x\cos x+e^x\sin^2 x\end{aligned}$$

که همان نتیجهٔ قبلی است. فرمول متناظر با $\partial h/\partial y$ را نیز می‌توان به‌طور مشابه تحقیق کرد .

مثال۲. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ، و فرض کنیم $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ به وسیلهٔ $F(x,y)=f(xy)$ داده شده باشد. تحقیق کنید

$$x\frac{\partial F}{\partial x}=y\ \frac{\partial F}{\partial y}$$

حل: بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f'(xy)y$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial y}=f'(xy)x$$

از این‌رو گزارهٔ موردبحث آشکار است.

تمرینهای بند ۵.۶

۱. قاعدهٔ زنجیری‌را برای

$$h(x,y,z)=f(u(x,y,z)\ ,\ v(x,y)\ ,\ w(y,z))$$

بنویسید.

۲. قاعدهٔ زنجیری‌را برای

$$u(x,y,z)=xe^{y}\ ,$$

$$v(x,y,z)=(\sin x)yz\ ,$$

و

$$f(u,v)=u^{2}+v\sin u$$

تحقیق کنید، مشروط بر آنکه

$$h(x,y,z)=f(u(x,y,z)\ ,\ v(x,y,z))$$

۳. فرض کنیم $F(x,y)=f(x^{2}+y^{2})$. نشان دهید که $x(\partial F/\partial y)=y(\partial F/\partial x)$.

۴. قاعدهٔ زنجیری‌را برای مختصات کروی، همان‌گونه که ما در متن‌درس برای مختصات قطبی انجام دادیم، بنویسید.

۵. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $F:\mathbf{R}^{2}\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشند و در $F(x,f(x))=0$ صدق کنند و $\partial F/\partial y\neq 0$. ثابت کنید که $f'(x)=-(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y)$ که‌در آن $y=f(x)$.

۶.۶ قاعدهٔ ضرب و گرادیانها

قاعدهٔ معرف‌دیگر درحساب دیفرانسیل‌عبارت است‌از قاعدهٔ ضرب یا قاعدهٔ لایبنیتز[1].

1. Leibnitz

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ باز و $f:A\to \mathbf{R}^m$ و $g:A\to \mathbf{R}$ توابعی دیفرانسیل‌پذیر باشند. آنگاه gf دیفرانسیل‌پذیراست و برای $x\in A$، $D(gf)(x):\mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ دستور

به ازای هر $e\in \mathbf{R}^n$ $D(gf)(x)\cdot e=g(x)(Df(x)\cdot e)+(Dg(x)\cdot e)f(x)$,

بیان می‌شود. (توجه داشته باشید که این دستور با معنی است، زیرا $g(x)\in \mathbf{R}$ و $Dg(x)\cdot e\in \mathbf{R}$).

گاهی نتیجهٔ این قضیه را خلاصه می‌کنیم و می‌گوییم

$$D(gf)=gDf+(Dg)f$$

ولی معنای دقیق آن همان است که در قضیهٔ بیان شده است.

بی‌شك خواننده با قاعدهٔ ضرب، ازحساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی، آشنایی دارد. برحسب مؤلفه‌ها، این قضیه به‌طور ساده بیان می‌کند که

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(gf_k)=g\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)f_k$$

نتیجهٔ مشابهی برای خارج‌قسمتها داریم. اگر $g\neq 0$، آنگاه

$$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{(g\cdot Df-f\cdot Dg)}{g^2}$$

برای اثبات این فرمول کافی است، بنابرقضیهٔ ۶، آن را برای حالت $1/g$ ثابت کنیم. این نکته مطلب مورد بحث را به‌یك مسئلهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی تحویل می‌کند که خواننده باید با آن آشنایی داشته باشد، بنابراین از جزئیات چشم‌پوشی می‌کنیم[1].

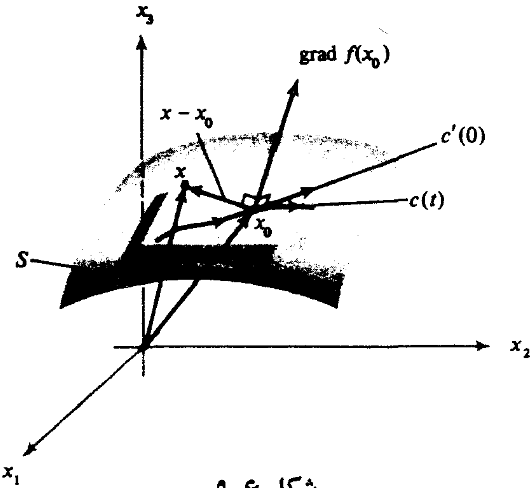
قواعد دیگر دیفرانسیل گیری در این گزاره نهفته‌اندکه D خطی است؛ یعنی، $D(f+g)=Df+Dg$ و به‌ازای ثابت $\lambda\in\mathbf{R}$، $D(\lambda f)=\lambda Df$. خواننده قادر خواهد بود که بدون دشواری برهان این نکات را ارائه کند.

حال هندسهٔ گرادیانها را کمی بیشتر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت داریم

$$\operatorname{grad} f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

---

۱. بند ۳.۳ کتاب
Mc Aloon–Tromba, *Calculus*, Harcourt Brace Jovanovich (1972)
را ببینید.



شکل ۶-۹

بنابراین مشتق سویی درسوی h عبارت است از

$$Df(x) \cdot h = \langle \mathrm{grad}\ f(x), h \rangle$$

$$= \text{آهنگ تغییر } f \text{ درنقطهٔ } x \text{ در سوی } h$$

اینك «رویهٔ» S راکه به‌وسیلهٔ معادلهٔ ثابت $= f(x)$ تعریف می‌شود درنظرمی گیریم. حکم‌می‌کنیم که $\mathrm{grad}\ f(x)$ عمود براین رویه است (این یك مطلب شهودی است چراکه دربارهٔ ماهیت این رویه به‌طور دقیق چیزی نگفته‌ایم- با وجود این بند ۷.۷ را ببینید). برای اثبات، خمی مانند $c(t)$ در S و بردار مماس بر آن یعنی $c'(\circ)$ را درنظرمی گیریم به‌طوری که $c(\circ) = x_\circ$. حکم می‌کنیم که

$$\langle \mathrm{grad}\ f(x_\circ), c'(\circ) \rangle = \circ$$

حال‌چون $c(t) \in S$، ثابت $= f(c(t))$. پس از مشتق گیری واستفاده از قاعدهٔ زنجیری، به‌دست می‌آوریم

$$Df(c(t)) \cdot c'(t) = \circ$$

باقراردادن $t = \circ$ واستفاده از $Df(x) \cdot h = \langle \mathrm{grad}\ f(x), h \rangle$،رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود. شکل ۶-۹ را ببینید.

توجه داشته باشیدکه می‌توانیم صفحهٔ مماس برثابت $S: f(x) =$ را در $x_\circ$ به‌وسیلهٔ $\langle \mathrm{grad}\ f(x_\circ), x - x_\circ \rangle = \circ$ توصیف کنیم، زیرا $\mathrm{grad}\ f(x_\circ)$ بر S عمود است. همچنین ازمعادلهٔ

$$<\text{grad } f(x_\circ), h> = \|\text{grad } f(x_\circ)\| \cos\theta$$

(که در آن ۱ $= \|h\|$ و θ زاویهٔ بین $\text{grad } f(x_\circ)$ و h است) آشکار است که $\text{grad } f(x_\circ)$ سویی است که در آن f سریعترین تغییر را دارد. این مطلب غیرمعقول نیست، زیرا اگر فرض کنیم که f نمایشگر تابعی است که متغیر آن بلندی یک کوه می‌باشد، آنگاه ثابت $= f$ عبارتند از پربندهای تراز. برای اینکه هرچه ممکن است سریعتر از این کوه بالا برویم یا پایین بیاییم، باید در جهت عمود بر این پربندهای تراز گام برداریم (شکل ۶ــ۱۰) را ببینید).

این نکات درمسائل عملی کنترل اپتیمال دارای ارزش هستند. درچنین مسائلی تابعی مانند $f(x_1, \ldots, x_n)$ داده شده است ومسئله عبارت است از بیشینه‌سازی یا «بهینه‌سازی» f به‌وسیلهٔ یک طرح عملی. یک روش متداول این است که یک نقطهٔ آزمایشی مانند $x_\circ$ برمی‌گزینیم و درراستای یک خط راست ودرسوی گرادیان f حرکت می‌کنیم تا به‌نقطهٔ جدیدی برسیم که در آن f بزرگترخواهد بود (حداقل اگرخیلی دور نرویم)، واین عمل را تکرار کنیم.

مثال ۱. قائم بررویه ۳ $= x^2 + y^2 + z^2$ را در (۱،۱،۱) بیابید.

حل: دراینجا $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ دارای گرادیان $\text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$ است ،که درنقطهٔ (۱،۱،۱)، عبارت است از (۲،۲،۲). پس از نرمال کردن، قائم یکه عبارت می‌شود از $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

مثال ۲. سوی بیشترین آهنگ افزایش $f(x, y, z) = x^2 y \sin z$ را در (۳،۲،۰) بیابید.

حل: سوی مطلوب همان سوی بردار گرادیان است ،که عبارت است از $(2xy \sin z, x^2 \sin z, x^2 y \cos z)$ که این هم در (۳،۲،۰) برابر می‌شود با (۰،۰،۱۸).

مثال ۳. صفحهٔ مماس بررویهٔ ۲ $= x^2 - y^2 + xz$ در (۱،۰،۱) کدام است؟

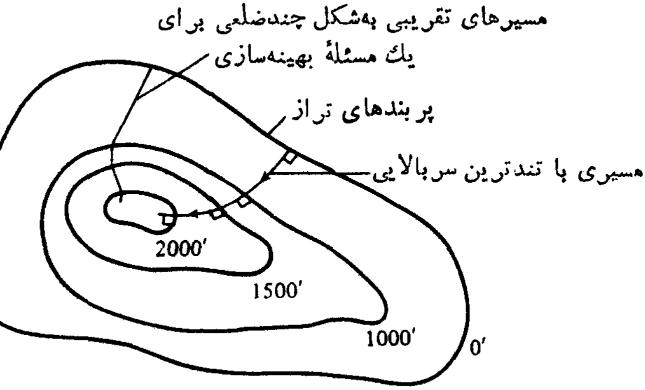
حل: دراینجا $\text{grad } f(1, 0, 1) = (3, 0, 1)$ ، از این رو صفحه مماس عبارت است از: $<(x-1, y, z-1), (3, 0, 1)> = 0$، یعنی $3x + z = 4$.

تمرینهای بند ۶.۶

۱. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، ثابت کنید

$$\frac{d}{dt} f(x_\circ + th) \Big|_{t=0} = Df(x_\circ) \cdot h$$

که در آن $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$.



شکل ۶-۱۰ سوی تندترین سربالایی عمود
بر پربندهای تراز است.

۲. قائم یکه بررویه $x^۲-y^۲+xyz=۱$ را در $(۱,۰,۱)$ بیابید.

۳. معادلهٔ صفحهٔ مماس بررویهٔ $x^۲-y^۲+xyz=۱$ را در $(۱,۰,۱)$ بیابید.

۴. درکدام‌سو $f(x,y)=e^{x^۲}y$ سریعترین افزایش را دارد؟

۵. فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$، $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$، نشان دهید

$$\operatorname{grad}(fg)=f\operatorname{grad}g+g\operatorname{grad}f$$

۶. نشان دهید این نکته‌که $\operatorname{grad}f$ عمود برصفحهٔ مماس‌می‌باشد توصیفی است ازصفحهٔ مماس‌کلیتر از توصیف مندرج دربند ۶.۴.

۶.۷ قضیهٔ مقدار میانگین

حال دوقضیهٔ بسیارمهم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اینها عبارتند ازقضیهٔ مقدار میانگین وقضیهٔ تیلور. ابتدا توجه خود را به‌قضیهٔ مقـدار میانگین معطوف‌می‌کنیم. درنکتهٔ ۳، بند ۶.۱، برهان قضیهٔ مقدارمیانگین‌حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی را یادآوری کردیم، که بیان می‌کرد اگر $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ پیوسته و اگر f در $]a,b[$ دیفرانسیل‌پذیرباشد، نقطه‌ای مانند $c\in]a,b[$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$، که در آن $f'=df/dx$.

متاسفانه، برای $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$، صراحتاً، این‌صورت قضیهٔ مقدارمیانگین

درست نیست. مثلاً، تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{2}$ را، که به وسیلهٔ $f(x)=(x^{2}, x^{3})$ تعریف شده است، درنظر می‌گیریم. سعی می‌کنیم cی بیابیم که داشته باشیم $0\leqslant c\leqslant 1$ و $f(1)-f(0)=Df(c)(1-0)$. این بدان معناست که $(1,1)-(0,0)=(2c, 3c^{2})$، و بدین‌سان $2c=1$ و $3c^{2}=1$. آشکار است که هیچ cی در این معادلات صدق نمی‌کند.

تجربه ما را به‌سوی این اعتقاد سوق می‌دهد که شرطی تحدیدی ممکن است قضیهٔ معتبری برای ما فراهم آورد. دراین‌حالت، برای آنکه صورت بالا برقرار باشد، f باید حقیقی باشد. برای ارائهٔ قضیهٔ درست، ابتدا به ازای $c, x, y\in\mathbf{R}^{n}$، معنای «c بین x و y قرار دارد» را دقیق می‌کنیم.

می‌گوییم c روی پاره‌خط واصل بین x و y، یا بین x و y قراردارد، اگر به‌ازای یك $0\leqslant\lambda\leqslant 1$، $c=(1-\lambda)x+\lambda y$. شکل ۶-۱۱ را ببینید.

حال آماده هستیم تا قضیهٔ بعدی خود را بیان کنیم.

قضیهٔ ۷.

(یك) فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^{n}\to\mathbf{R}$ در یك مجموعهٔ باز A دیفرانسیل‌پذیر باشد. به‌ازای هر $x, y\in A$ به‌طوری که پاره‌خط واصل بین x و y در A قرارداشته‌باشد (که لازم نیست این مطلب برای همهٔ xها و yها برقرار باشد)، یك نقطهٔ c روی آن پاره‌خط وجود دارد به‌طوری که

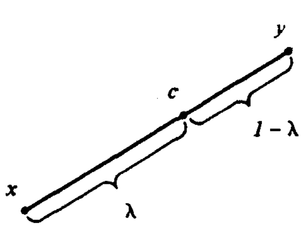
$$f(y)-f(x)=Df(c)(y-x)$$

(دو) فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^{n}\to\mathbf{R}^{m}$ در یك مجموعهٔ باز A دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم پاره‌خط واصل بین x و y در A قرارداشته باشد و $f=(f_{1}, \dots, f_{m})$. آنگاه نقاط c_{1}، ...، c_{m} روی آن پاره‌خط وجود دارند به‌طوری که

$$f_{i}(y)-f_{i}(x)=Df_{i}(c_{i})(y-x),\ \ i=1, \dots, m$$

یك فرمول‌بندی مهم دیگر از قضیهٔ مقدار میانگین درمثال ۵، درپایان همین فصل، ارائه شده است.

مثال ۱. یك مجموعهٔ $A\subset\mathbf{R}^{n}$ را محدب می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر $x, y\in A$، پاره‌خط



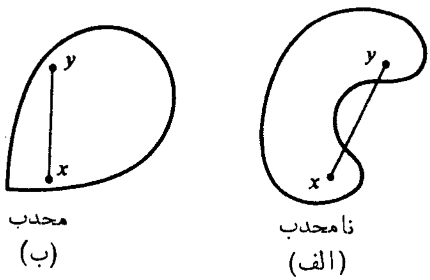
شکل ۶-۱۱

واصل بین x، y نیز در A قرارداشته باشد. شکل ۶ـ۱۲ را ببینید. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ محدب باز و $f: A \to \mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. اگر $Df = 0$، آنگاه نشان دهیدکه f ثابت است. (تعمیم‌هایی ازاین مطلب در تمرین ۹، درپایان همین فصل، آمده است.)

حل: به‌ازای $x, y \in A$ وبرای هرمؤلفهٔ f_i، یك بردار c_i، داریم به‌طوری که

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i(c_i)(y-x)$$

چون $Df = 0$، پس برای هر i، $Df_i = 0$ (چرا؟)، وازاین‌رو $f_i(y) = f_i(x)$. ازآنجا نتیجه می‌شودکه $f(y) = f(x)$ ومعنای این مطلب این است‌که f ثابت است.



شکل ۶-۱۲ (الف) نامحدب (ب) محدب

مثال ۲. فرض کنیم $f: [0, \infty[\to \mathbf{R}$ پیوسته، $f(0) = 0$، f دیفرانسیل‌پذیر در $]0, \infty[$ و f' ناکاهشی باشد. ثابت کنیدکه برای $x > 0$، $g(x) = f(x)/x$ ناکاهشی است.

حل: ازقضیهٔ مقدار میانگین می‌بینیم‌که یك تابع $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ناکاهشی است اگر $h'(x) \geqslant 0$، زیرا $x \leqslant y$ مستلزم آن است‌که

$$h(y) - h(x) = h'(c)(y-x) \geqslant 0$$

حال

$$g'(x) = \frac{[xf'(x) - f(x)]}{x^2}$$

و

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c) \cdot x \leqslant xf'(x)$$

زیرا $0 < c < x$ و $f'(c) \leqslant f'(x)$. بدین‌سان $xf'(x) - f(x) \geqslant 0$، ازاین‌رو $g' \geqslant 0$ وازاین نامساوی نتیجه می‌شودکه g ناکاهشی است.

تمرینهای بند ۷.۶

۱. اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد به‌طوری که $f'(x)>0$، ثابت کنید f (اکیداً) افزایشی است، واژه‌ها را تعریف کنید.

۲. قاعدهٔ لوپیتال[1] را ثابت کنید: اگر f'، g' در x_0 وجود داشته باشند، $g'(x_0)\neq 0$، و اگر $f(x_0)=0=g(x_0)$، آنگاه

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

۳. با استفاده از تمرین ۲ محاسبه کنید

(الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

(ب) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

۴. کدام یك از مجموعه‌های زیر محدب است؟

(الف) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\geqslant 0\}$

(ب) $\{x\in\mathbf{R}^n \mid 0<\|x\|<1\}$

(پ) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

۵. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر و A محدب باشد، و فرض کنیم به‌ازای $x\in A$، $\|\mathrm{grad}\, f(x)\|\leqslant M$. ثابت کنید، برای $x, y\in A$،

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M\|x-y\|$$

فکر می‌کنید اگر A محدب نباشد این نتیجه درست است؟

۶. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم که به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$، $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$. نشان دهید که $g(x)=e^{-x}f(x)$ کاهشی است. اگر f در جایی صفر شود، نتیجه بگیرید که f برابر با صفر است.

۸.۶ قضیهٔ تیلور و مشتقات مراتب بالاتر

بعد، می‌خواهیم بپردازیم به بحث در بارهٔ فرمول تیلور در حالت کلی توابع $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. برای اینکه قادر باشیم به‌انجام این‌کار دست یازیم، ابتدا باید مشتقات مراتب بالاتر را

1. l'Hôpital

مورد بحث قراردهیم. برای $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$، مشکلی برای تعریف مشتقات جزئی مراتب بالاتر وجود ندارد؛ صرفاً روند مشتق‌گیری جزئی را تکرار می‌کنیم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f\right),$$

و به‌همین‌ترتیب الی آخر. اما اگرمشتق را به‌عنوان نگاشتی خطی درنظر بگیریم، به‌دقت بیشتری نیاز داریم.

مشتق دوم، درصورت وجود، با مشتق‌گیری از Df حاصل می‌شود و به‌طریق زیر انجام می‌گیرد.

تعریف ۴. فرض کنیم $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ نمایشگرفضای نگاشتهای خطی از $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^m$ باشد. (اگرپایه‌ای در $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m$ برگزینیم، آنگاه $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ را می‌توان با ماتریسهای $m \times n$ و بنابراین با $\mathbf{R}^{nm}$ یکی گرفت.) حال $Df:A \to L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$؛ یعنی، درهر $x \in A$، یك نگاشت خطی $Df(x_0)$ به‌دست می‌آوریم. اگر از Df در x_0 مشتق بگیریم، بنابر تعریف مشتق، یك نگاشت خطی از $\mathbf{R}^n$ در $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ به دست می‌آوریم. می‌نویسیم $D(Df(x_0)) = D^2 f(x_0)$. نگاشت $B_{x_0}:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم

$$B_{x_0}(x_1, x_2) = [D^2 f(x_0)(x_1)](x_2)$$

این تعریف معنی دارد، زیرا $D^2 f(x_0):\mathbf{R}^n \to L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ و از این‌رو $D^2 f(x_0)(x_1) \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$؛ بنابراین می‌توان آن را بر x_2 اثرداد. دلیل انجام این کار این است که B_{x_0} ما را ازاستفادهٔ غیرلازم از فضای $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \approx \mathbf{R}^{nm}$ که دارای مفهومی دشوار است برحذر می‌دارد.

بنابر تعریف، یك نگاشت دو خطی $B:E \times F \to G$، که در آن E، F، G فضای برداری هستند، نگاشتی است که نسبت به‌هریك ازمتغیرها جداگانه خطی باشد؛ مثلاً، خطی بودن نسبت به‌متغیر اول به‌این معناست که $B(\alpha e_1 + \beta e_2, f) = \alpha B(e_1, f) + \beta B(e_2, f)$، که درآن $e_1, e_2 \in E$، $f \in F$، و $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. به‌آسانی دیده می‌شود که نگاشت B_{x_0} که دربالا تعریف شد یك نگاشت دوخطی از $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ است.

حال، برای هرپایهٔ e_1، …، e_n از E و f_1، …، f_m از F می‌توانیم ماتریسی به‌یك نگاشت دوخطی $B:E \times F \to \mathbf{R}$ وابسته کنیم. یعنی قرار می‌دهیم

$$a_{ij} = B(e_i, f_j)$$

دراین صورت اگر

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_i f_j \quad \text{و} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

خواهیم داشت

$$B(x,\, y)=\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j$$

$$=(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{bmatrix}$$

تبصره: با سوءاستفاده از نمادگذاری، به‌جای نگاشت دوخطی B_{x_0} که از مشتق‌گیری از DF در x_0، همان‌طور که در بالا دیدیم، حاصل شد، بازخواهیم نوشت $D^2f(x_0)$.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم $f: A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ دوبار در مجموعهٔ باز A دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه ماتریس $D^2f(x): \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ نسبت به‌پایهٔ استاندارد به‌وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{bmatrix}$$

بیان می‌شود که در آن هر مشتق جزئی در $x=(x_1,\, \dots,\, x^n)$ محاسبه شده است.

برای مشتقات مراتب بالاتر به‌طریق مشابه عمل می‌کنیم. به‌عنوان نمونه، D^3f، به ازای هر xی، یك نگاشت سه‌خطی است، $D^3f(x): \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. به‌این نگاشت ماتریسی وابسته نمی‌کنیم، درعوض کمیتی با سه اندیس به‌آن منسوب می‌کنیم؛ همانندبالا، این کمیت عبارت است از، به‌ازای هرمؤلفهٔ f_k، $\partial^3 f_k/(\partial x_l\partial x_j\partial x_i)$. (این‌گونه کمیتها را تانسور می‌نامند.)

قبل از پرداختن به‌قضیهٔ تیلور یك خاصیت بسیار مهم مشتق مرتبهٔ دوم داده می‌شود: ماتریس موجود درقضیهٔ ۸ متقارن است، یعنی،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $f: A \to \mathbf{R}$ دوبار در مجموعهٔ باز A دیفرانسیل‌پذیر و D^2f پیوسته باشد (یعنی، توابع $\partial^2 f/(\partial x_i\partial x_j)$ پیوسته باشند). آنگاه D^2f متقارن است؛ یعنی،

$$D^2f(x)(x_1,x_2)=D^2f(x)(x_2,x_1)$$

یا، برحسب مؤلفه‌ها،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

ازاینجا، می‌توان ثابت کرد که، تحت شرایط مشابه، همهٔ مشتقات مراتب بالاتر نیز، متقارن هستند. حالت $f: A \to \mathbf{R}^m$ رامی‌توان باکاربرد مطالب بالا درمورد مؤلفه‌های f، مورد بررسی قرارداد.

تقارن مشتقات مرتبهٔ دوخاصیتی بنیادی را عرضه می‌دارد که در حساب دیفرانسیل وانتگرال یك متغیره با آن برخورد نداشتیم. این اصول را ازخلال یك مثال،موردتحقیق قرار می‌دهیم.

فرض‌می‌کنیم $f(x, y, z) = e^{xy}\sin x + x^2 y^4 \cos^2 z$، بنابراین $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}\cos x + ye^{xy}\sin x + 2xy^4\cos^2 z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\sin x + 4x^2y^3\cos^2 z,$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = xe^{xy}\cos x + e^{xy}\sin x + xye^{xy}\sin x + 8xy^3\cos^2 z$$

که با $\partial^2 f/\partial x \partial y$ یکسان است.

به‌طور شهودی قضیهٔ ۹ چندان‌آشکار نیست. باوجود این، درجریان اثبات،می‌توان درکی شهودی ازآن کسب کرد.

تعریف ۵. تابعی را متعلق به ردهٔ C^r می‌نامیم، اگر r مشتق اول آن وجـود داشته و پیوسته باشند. (به‌عبارت دیگر، این بدان معناست کـه همهٔ مشتقات جزئی تا مرتبهٔ r وجود دارند و پیوسته هستند، قضایای ۲، ۳، و۴ را ببینید). تابعی را هموار یـا متعلق به ردهٔ C^∞ می‌نامیم، اگر به‌ازای‌هرعدد صحیح مثبت r، متعلق به‌ردهٔ C^r باشد.

بااستفاده ازفرمول مـوجود درقضیهٔ ۵ (شکل مؤلفه‌ای آن آسانتراست) می‌تـوان نشان دادکه ترکیب توابع C^r باز C^r است (تمرین ۲۳ را ببینید).

قضیهٔ تیلور به‌قرار زیراست:

قضیهٔ ۱۰. فرض‌می‌کنیم $f: A \to \mathbf{R}$ درمجموعهٔ باز $A \subset \mathbf{R}^n$ متعلق به‌ردهٔ C^r باشد.

فرض کنیم $x, y\in A$ و فرض کنیم کـه پاره‌خط واصل بین x و y در A قرار داشته باشد. آنگاه نقطه‌ای مانند c روی آن پاره خط وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(y)-f(x)=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}D^kf(x)(y-x, \dots, y-x)$$
$$+\frac{1}{r!}D^rf(c)(y-x, \dots, y-x)$$

که در آن $D^kf(x)(y-x, \dots, y-x)$ بیانگر این است‌که $D^kf(x)$، به‌عنوان یك نگاشت k خطی، بر kتایی $(y-x, \dots, y-x)$ اثـر کرده است. برحسب مختصات،

$$D^kf(x)(y-x, \dots, y-x)$$
$$=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\left(\frac{\partial^k f}{\partial_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}\right)(y_{i_1}-x_{i_1})\cdots(y_{i_k}-x_{i_k}).$$

اگر قرار دهیم $y=x+h$، می‌توانیم فرمول تیلور را به‌صورت

$$f(x+h)=f(x)+Df(x)\cdot h+\dots$$
$$+\frac{1}{(r-1)!}D^{r-1}f(x)\cdot(h, \dots, h)+R_{r-1}(x, h)$$

بنویسیم که در آن $R_{r-1}(x, h)$ باقیمانده است. به‌علاوه

$$\frac{R_{r-1}(x, h)}{\|h\|^{r-1}}\to 0 \qquad \text{وقتی } h\to 0$$

اشکال دیگری که جملهٔ باقیمانده درقالب آنها بیان می‌شود وجود داردکه‌درجریان اثبات این قضیهٔ ارائه می‌شوند. ایـن قضیهٔ تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین (که درحالت اخیر $r=1$) و ازقضیهٔ تیلور متعلق به‌حساب دیفرانسیل وانتگرال یك متغیره است[1].

ازقضیهٔ تیلور به‌ساختن سری تیلور حول x_0 هدایت می‌شویم،

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^kf(x_0)(x-x_0, \dots, x-x_0)$$

لازم نیست‌که این‌سری به‌سمت $f(x)$ همگرا باشد حتی اگـر f متعلق به‌ردهٔ C^∞ باشد. اگراین سری، دریك همسایگی x_0، به‌سمت f همگرا باشد می‌گوییم f در x_0 تحلیلی

---

۱. بند ۵.۱۰ کتاب
Mc Aloon and Tromba, *Calculus*, Harcourt Brace Jovanovich (1972)
را ببینید

حقیقی است. برای نشان دادن اینکه f تحلیلی حقیقی است کافی است نشان دهیم که: وقتی $r \to \infty$، جملهٔ باقیمانده $(1/r!)D^r f(c)(x-x_\circ, \ldots, x-x_\circ) \to \circ$. سپس از این مطلب برای نوشتن عبارات سریهای توانی متداول $\sin x$، $\cos x$، وغیره استفاده می‌کنیم. (برای بحث دربارهٔ سریهای توانی بند ۹.۵ را ببینید).

مثال ۱. قضیهٔ ۹ را برای $f(x, y) = yx^۲(\cos y^۲)$ تحقیق کنید.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲xy\cos y^۲,\ \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = ۲x\cos y^۲ - ۴xy^۲\sin y^۲;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^۲\cos y^۲ - ۲y^۲x^۲\sin y^۲, \frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y} = ۲x\cos y^۲ - ۴y^۲x\sin y^۲.$$

مثال ۲. اگر f در $\mathbf{R}$ متعلق به C^∞ باشد و اگر برای هر بازهٔ $[a, b]$ ثابتی مانند M وجود داشته باشد به‌طوری که، به‌ازای هر n و هر $x \in [a, b]$، $|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n$، نشان دهید که f در $x_\circ$ تحلیلی است و

$$f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n$$

حل: باقیمانده عبارت است از

$$\left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_\circ)^n \right| \leqslant \frac{M^n |x - x_\circ|^n}{n!}$$

که $\leftarrow \circ$، وقتی $n \to \infty$، زیرا، بنابر آزمون نسبت، سری متناظر همگراست. توجه کنید که در هر بازهٔ کراندار، این همگرایی، یکنواخت است (چرا؟).

مثال ۳. مثالی از یك تابع C^∞ بیاورید که تحلیلی نباشد.

حل: فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \circ, & x \leqslant \circ \\ e^{-۱/x}, & x > \circ \end{cases}$$

تنها جایی که همواری f شك برانگیز است $x = \circ$ می‌باشد. اما، برای $x > \circ$،

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$$

که $\to$ ۰، وقتی $x \to 0+$ (مثلاً، با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال). به‌همین ترتیب می‌توان دید که، وقتی $x \to 0+$، $f^{(n)}(x) \to 0$. بدین‌سان اگر قضیهٔ مقدار میانگین را به‌کار ببریم می‌بینیم که f در ۰ متعلق به C^∞ است و $f^{(n)}(0)=0$. درنتیجه سری تیلور مطلوب حول $x=0$ متحداً برابر صفر است، بنابراین f با سری تیلور خود حول $x=0$ برابر نیست، وازاین‌رو f تحلیلی نیست.

مثال ۴. فرمول تیلور مرتبهٔ دو را برای $f(x, y)=\sin(x+2y)$، حول $(0,0)$، محاسبه کنید.

حل: دراینجا

$$f(0,0)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\cos(0+2\cdot 0)=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2\cos(0+2\cdot 0)=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0,$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$$

بدین‌سان

$$f(h, k)=h+2k+R_2(h, k),(0,0),$$

که در آن، وقتی $(h, k) \to (0,0)$،

$$\frac{R_2(h,k),(0,0)}{|(h, k)|^2} \to 0$$

تمرینهای بند ۸.۶

۱. قضیهٔ ۹ را برای $f(x, y)=(e^{x^2+y^2x})xy^2$ تحقیق کنید.

۲. مثال ۲ را به‌کار ببرید وسری تیلور وتحلیلی بودن e^x، $\sin x$، $\cos x$ را در تمامی $\mathbf{R}$ ثابت کنید.

۳. فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases} x^۲\sin\left(\frac{۱}{x}\right), & x\in]-۱,+۱[,\ x\neq ۰ \\ ۰, & x=۰ \end{cases}$$

قضیهٔ تیلور را برای f حول نقطهٔ $x=۰$ مورد بررسی قراردهید.

۴. نمایش $\log(۱-x)$، $-۱<x<۱$ را به‌وسیلهٔ سری تیلورحول $x=۰$ بیابید و نشان دهید که این سری، در $-۱<x<۱$، با $\log(۱-x)$ برابر است وهمچنین نشان دهید که این سری، درهرزیربازهٔ بستهٔ $]-۱,۱[$، به‌طور یکنواخت همگراست.

۵. تحقیق کنید که اگر شرایط مثال ۲ برقرار باشند، آنگاه می‌توانیم ازسری تیلور جمله به‌جمله مشتق بگیریم تا $f'(x)$ حاصل شود.

۶. فرمول تیلور مرتبهٔ دورا برای $f(x,y)=e^x\cos y$ حول $(۰,۰)$ محاسبه کنید.

۹.۶ ماکسیمم و مینیمم

یك مورد استعمال بسیارمهم قضیهٔ ۱۰ این‌است که روشی برای تعیین ماکسیممها ومینیممهای توابع دراختیار ما قرار می‌دهد. همان‌طورکه، با توجه به‌معلومات خود از توابع یك‌متغیره، انتظار داریم، این معیارحاوی مشتق دوم است. ابتدا حالت یك متغیرحقیقی را یادآوری می‌کنیم.

اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ یك ماکسیمم یا مینیمم موضعی در $x_۰$ داشته باشد، واگر f در $x_۰$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_۰)=۰$. به‌علاوه اگر f دوبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $x_۰$ یك ماکسیمم موضعی‌است هرگاه $f''(x_۰)<۰$، ویك مینیمم‌موضعی است‌هرگاه $f''(x_۰)>۰$.

حال می‌خواهیم این مطالب را به‌توابع $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ تعمیم دهیم. کار خود را با ارائهٔ تعاریف مربوطه آغاز می‌کنیم.

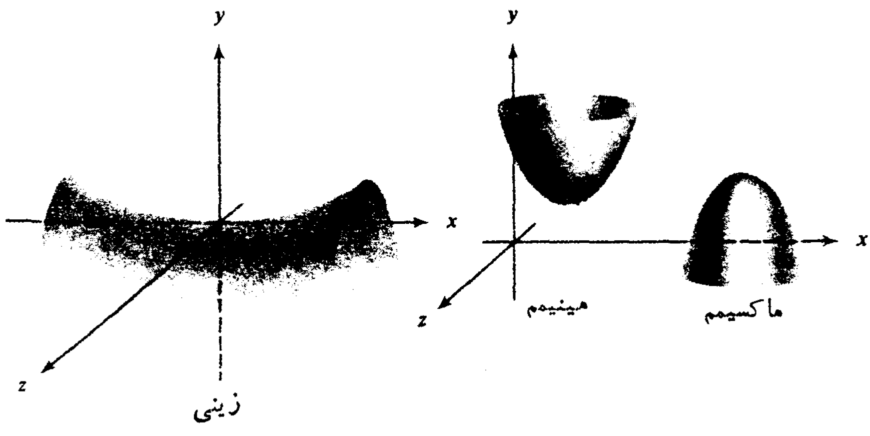
تعریف ۶. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ که درآن A بازاست. اگریك همسایگی $x_۰\in A$ وجود داشته باشد که درآن $f(x_۰)$ یك ماکسیمم باشد، یعنی، اگر به‌ازای هر x واقع دراین همسایگی، $f(x_۰)\geqslant f(x)$، می‌گوییم $f(x_۰)$ یك ماکسیمم موضعی برای f است. به‌طریق مشابه، می‌توانیم یك مینیمم موضعی fرا تعریف کنیم. یك‌نقطه رانهایی نامند اگر یك نقطهٔ مینیمم موضعی یا یك نقطهٔ ماکسیمم موضعی f باشد. یك نقطهٔ $x_۰$ را

یك نقطهٔ بحرانی نامند اگر f در $x_\circ$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و $Df(x_\circ)=\circ$.
اولین مطلب اساسی درقضیهٔ بعد معرفی می‌شود[۱].

قضیهٔ ۱۱.۰ اگر $f:A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر و A باز باشد، و اگر $x_\circ \in A$ یك نقطهٔ نهایی f باشد، آنگاه $Df(x_\circ)=\circ$؛ یعنی، $x_\circ$ یك نقطهٔ بحرانی است.

برهان بسیار همانند حالت مشابه در حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی است. به‌طور شهودی این نتیجه آشکاراست، زیرا دریك نقطهٔ نهایی، نمودار f باید یك صفحهٔ مماس افقی داشته باشد. باوجود این حرف، بحرانی بودن برای تضمین نهایی بودن یك نقطه کافی نیست. مثلاً $f(x)=x^3$ را درنظرمی‌گیریم. $\circ$ یك نقطهٔ بحرانی برای این تابع است، زیرا $Df(\circ)=\circ$. ولی، به‌ازای $x>\circ$، $x^3>\circ$ وبه‌ازای $x<\circ$، $x^3<\circ$، ازاین‌رو $\circ$ یك نقطهٔ نهایی نیست. مثالی دیگر عبارت است از $f(x,y)=y^2-x^2$. در اینجا $(\circ,\circ)$ یك نقطهٔ بحرانی است، زیرا $\partial f/\partial x=-2x$، $\partial f/\partial y=2y$، بنابراین $Df(\circ,\circ)=\circ$. اما درهرهمسایگی $\circ$ می‌توانیم نقاطی بیابیم که در آنها مقدار f از $\circ$ بیشترونقاطی که درآنها مقدار f از $\circ$ کمتراست. نقطه‌ای بحرانی راکه یك نقطهٔ نهایی موضعی نباشد، یك‌نقطهٔ زینی می‌نامند. شکل ۶-۱۳ نشان می‌دهد که چرااین اصطلاح وضع شده است.

درحالت $f:A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ قبلاً متذکرشدیم که اگر $f'(x)=\circ$ و $f''(x)<\circ$،



شکل ۶-۱۳

۱. مسئلهٔ «بیشینه‌سازی» توابع برداری دراقتصاد دارای اهمیت است. صفحه ۵۳۷ کتاب
S. smale, «Global Analysis and Economics»,

در

Dynamical systems, M.M. Peixoto, ed., Academic press, N.Y. (1973)

را ببینید.

آنگاه $f(x)$ یك ماکسیمم موضعی‌است. یادآوری‌می کنیم که، از نقطه‌نظر هندسی، این‌مطلب روشن‌است، زیراکافی است به‌خاطر آوریم که معنی $f''(x) < 0$ این است که f به‌سمت پایین مقعر است . به‌منظور تعمیم این نکته، مفهوم هسین[1] یك تابع g رادریك نقطهٔ x_0 معرفی می کنیم.

تعریف ۷. اگر $g: B \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ متعلق به‌ردهٔ C^2 باشد ، هسین g در x_0 به‌این صورت تعریف‌می‌شودکه عبارت است ازتابع‌دوخطی $H_{x_0}(g): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ به‌طوری‌که $H_{x_0}(g)(x, y) = -D^2 g(x_0)(x, y)$ (به علامت منفی توجه کنید)[2]. بنابراین، به‌صورت ماتریسی، هسین درست برابراست با منفی ماتریس مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم.

یك فرم دوخطی، یعنی یك نگاشت دوخطی $B: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ را معین مثبت می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر $x \neq 0$ در $\mathbf{R}^n$، $B(x, x) > 0$ وآن را نیمه‌معین مثبت می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}^n$، $B(x, x) \geqslant 0$. فرمهای دوخطی معین منفی و نیمه‌معین منفی به‌طور مشابه تعریف می‌شوند .

حال می‌توانیم تعمیم زیرین را به‌حالت چندمتغیره ارائه دهیم.

قضیهٔ ۱۲.

(یك) اگر $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ درمجموعهٔ باز A معین ومتعلق به‌ردهٔ C^2 باشد، و اگر برای یك نقطهٔ بحرانی x_0 این تابع، $H_{x_0}(f)$ معین مثبت باشد، آنگاه f در x_0 یك ماکسیمم موضعی دارد.

(دو) اگر f در x_0 یك ماکسیمم موضعی داشته باشد، آنگاه $H_{x_0}(f)$ نیمه‌معین مثبت است.

با تغییر «مثبت» به «منفی» درقضیهٔ بالا، حالت متناظر بامینیمم به‌دست می آید. توجه داشته باشیدکه یك مینیمم f عبارت است ازیك ماکسیمم $-f$.

همان‌گونه که اشاره کردیم، ماتریس $H_{x_0}(f)$، نسبت به‌پایهٔ استاندارد، عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

1. Hessian

۲. این علامت منفی صرفاً قراردادی است ودارای اهمیت اساسی نیست. خواننده‌ای که تمایل داشته باشدمی‌تواند قراردهد $H_{x_0} = +D^2 g(x_0)$ مشروط برآنکه تغییرات مقتضی را درمتن درس انجام دهد.

که در آن همهٔ مشتقات جزئی در x_0 محاسبه شده‌اند.

وقتی داشته باشیم $n = 1$، قضیهٔ ۱۲ (یک) به‌آزمون یک متغیرهٔ $f''(x_0) > 0$ تحویل می‌شود. همانند حالت $n = 1$، اگر $f''(x_0) = 0$، آنگاه در x_0 می‌توانیم یك ماکسیمم یا یك نقطهٔ زینی یا یک مینیمم داشته باشیم. (در این حالت آزمون فوق‌الذکر به‌کار نمی‌آید). مثلاً، در $x_0 = 0$، $f(x) = -x^4$ یک ماکسیمم، x^5 یك نقطهٔ زینی، و x^4 یك نقطهٔ مینیمم دارد، اگرچه $f''(0) = 0$. برای داشتن آزمونی مناسب این حالات تمرین ۱۷ را ببینید.

اشاره به‌چند نکته ازجبرخطی، که هنگام استفاده از قضیهٔ بالا سودمند خواهند بود، می‌تواند مفید باشد. فرض‌کنیم Δ_k دترمینان ماتریس

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \end{bmatrix}$$

باشد. این ماتریس همین است که $n-k$ سطر وستون آخرین آن برداشته شده‌اند. دراین صورت ماتریس متقارن $H_{x_0}(f)$ معین مثبت است، اگروفقط اگر، به‌ازای هر $k = 1, \ldots, n$، $\Delta_k > 0$ ونیمه معین است، فقط اگر، به‌ازای هر $k = 1, \ldots, n$، $\Delta_k \geqslant 0$. دراینجا این مطلب را درحالت کلی ثابت نمی‌کنیم. درمثال ۲ که ذیلاً می‌آید آن را برای ماتریسهای 2×2 به‌اثبات می‌رسانیم واغلب برای رفع نیازهای ما همین کافی خواهد بود. به‌همین ترتیب محکی برای‌حالت معین منفی وجود داردکه در زیرارائه می‌شود. بدین‌سان اگر، به‌ازای هر $k = 1, \ldots, n$، $\Delta_k > 0$آنگاه f درنقطهٔ بحرانی x_0 یك ماکسیمم (موضعی) دارد. محتملاً این بهترین طریق‌کاربرد قضیهٔ ۱۲ است. اگر، به‌ازای هر k، $\Delta_k < 0$، f نمی‌تواند در x_0 یك ماکسیمم داشته باشد. به‌طور مشابه، اگر $H_{x_0}(f)$ معین منفی باشد، f در x_0، یك مینیمم (موضعی) دارد. با تغییر علامت $H_{x_0}(f)$ درمطالب فوق‌الذکر وبا استفاده ازخواص دترمینانها، نتیجه می‌شود که $H_{x_0}(f)$ معین منفی است، اگر، وفقط اگر، به‌ازای kهای فرد، $\Delta_k < 0$، وبه‌ازای kهای زوج، $\Delta_k > 0$، و $H_{x_0}(f)$ نیمه‌معین منفی است، فقط اگر، به‌ازای kهای فرد، $\Delta_k \leqslant 0$، وبه‌ازای kهای زوج، $\Delta_k \geqslant 0$. بدین‌سان، اگر به‌ازای kهای فرد، $\Delta_k < 0$، وبه‌ازای kهای زوج، $\Delta_k > 0$، آنگاه f در x_0 یك مینیمم دارد.

اگر به‌ازای kی فرد، $\Delta_k > 0$ یا به ازای kی زوج، $\Delta_k < 0$، آنگاه f نمی‌تواند در x_0 یك مقدار مینیمم داشته باشد. درواقع اگر، به‌ازای kی زوج، $\Delta_k < 0$، f در x_0 نه‌ماکسیمم می‌تواندداشته باشد نه‌مینیمم، و x_0 بایدیك نقطهٔ زینی f باشد (تمرین ۲۱ را ببینید).

این‌قضیهٔ درمکانیك نیز سودمند است، زیرا وقتی‌که f عبارت‌باشد از پتانسیل یک دستگاه، درآن صورت‌یك مینیمم متناظر با پایداری‌است، و ماکسیممها ونقاط زینی‌متناظر با ناپایداری هستند[1].

مثال ۱ . نشان دهیدکه ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

معین مثبت‌است اگر، وفقط اگر، $a>0$ و $ad-b^2>0$.

حل : معین مثبت به این معناست‌که

$$[x,y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} > 0 \quad \text{اگر } (x,y)\neq(0,0)$$ ،

یعنی ، $ax^2+2bxy+dy^2>0$. ابتدا ، فرض‌کنیم ، به‌ازای هر $(x,y)\neq(0,0)$ ، چنین باشد. اگر قراردهیم $y=0$ ، $x=1$ ، به‌دست می‌آوریم $a>0$. اگر قراردهیم $y=1$ ، خواهیم‌داشت، به‌ازای هر x، $ax^2+2bx+d>0$. این‌تابع‌یك سهمی است که در $2ax+2b=0$ ، یعنی $x=-b/a$ ، یك مینیمم‌دارد (زیرا $a>0$) . بنابراین

$$a\left(-\frac{b}{a}\right)^2+2b\left(-\frac{b}{a}\right)+d>0$$

به عبارت دیگر، $ad-b^2>0$. عکس‌آن‌را می‌توان به‌طریق مشابه اثبات نمود.

مثال ۲ . ماهیت نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ تابع

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

را مورد بررسی قرار دهید.

حل : در اینجا

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y \ ,$$

---

۱. برای جزئیات، فصل۴ کتاب
Marsden and Tromba, *Vector Calculus*, W. H. Freeman Co. (1975)
را ببینید.

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=۲ \quad ,$$

از این‌رو هسین عبارت است از

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

در اینجا $\Delta_{۱}=-۲<۰$ و $\Delta_{۲}=۴-۱=۳>۰$ ، بنابراین هسین معین منفی است. بدین‌سان یك مینیمم موضعی داریم.

تمرینهای بند ۹.۶

۱. ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

معین منفی است اگر، وفقط اگر، $a<۰$ و $ad-b^{۲}<۰$.

۲. ماهیت نقطهٔ‌بحرانی $(۰,۰)$ تابع $f(x,y)=x^{۲}+۲xy+y^{۲}+۶$ را موردبررسی قرار دهید.

۳. ماهیت نقطهٔ بحرانی $(۰,۰,۰)$ تابع $f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+۲z^{۲}+xyz$ را مورد بررسی قرار دهید.

۴. (دراین تمرین فرض براین است که آشنایی‌خوبی با جبرخطی وجود دارد.) فرض‌کنیم A یك ماتریس متقارن باشد. نشان‌دهید که اگر A معین مثبت باشد، آنگاه مقادیر ویژهٔ A (که وجود دارند وحقیقی هستند، زیرا A متقارن است) مثبت هستند.

۵. ماهیت نقطهٔ‌بحرانـی $(۰,۰)$ تابع $x^{۳}+۲xy^{۲}-y^{۴}+x^{۲}+۳xy+y^{۲}+۱۰$ را تعیین کنید.

برهان قضایای فصل ۶

قضیهٔ ۱ . فرض‌کنیم A یك مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^{n}$ و $f:A\to\mathbf{R}^{m}$ در $x_{۰}$ دیفرانسیل‌پذیرباشد. آنگاه $Df(x_{۰})$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ f تعیین می‌شود.

برهان: فرض کنیم $L_{۱}$ و $L_{۲}$ دو نگاشت خطی باشندکــه در شرایط تعریف ۱ صدق

می‌کنند. باید نشان دهیم که $L_1 = L_2$. $e \in \mathbf{R}^n$ را به‌شرط $\|e\| = 1$ ثابت نگه می‌داریم و قرار می‌دهیم، به‌ازای $\lambda \in \mathbf{R}$ ، $x = x_0 + \lambda e$. آنگاه توجه می‌کنیم که

$$|\lambda| = \|x - x_0\| \quad \text{و} \quad \|L_1 \cdot e - L_2 \cdot e\| = \frac{\|L_1 \cdot \lambda e - L_2 \cdot \lambda e\|}{|\lambda|}$$

چون A باز است، به‌ازای λهای به‌قدر کافی کوچک، $x \in A$. بنابر نامساوی مثلثی

$$\|L_1 \cdot e - L_2 \cdot e\| = \frac{\|L_1(x - x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

$$\leqslant \frac{\|f(x) - f(x_0) - L_1(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

$$+ \frac{\|f(x) - f(x_0) - L_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

وقتی $\lambda \to 0$ ، هریك از این دوجمله $\to 0$ ، از این‌رو $L_1 \cdot e = L_2 \cdot e$. انتخاب e دلخواه بود، به جزاینکه $\|e\| = 1$. اما به‌ازای هر $y \in \mathbf{R}^n$ ، $e = y/\|y\|$ دارای طول ۱ است، و با توجه به خطی بودن ، اگر $L_1(e) = L_2(e)$ ، آنگاه $L_1(y) = L_2(y)$. ■

قضیهٔ ۲. فرض‌کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ باز و $f: A \to \mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه مشتقات جزئی $\partial f_j / \partial x_i$ وجوددارند، وماتریس نگاشت‌خطی $Df(x)$ نسبت به پایه‌های استاندارد در $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m$ به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

داده می‌شودکه درآن هرمشتق جزئی در $x = (x_1, \ldots, x_n)$ محاسبه شده است .

برهان: بنابرتعریف ماتریس یك نگاشت‌خطی ، عنصر ji ام $Df(x)$ عبارت‌است‌از مؤلفهٔ jام بردار $Df(x) \cdot e_i = Df(x)$ که از اثر $Df(x)$ بربردار iام پایهٔ استاندارد، یعنی

e_i، حاصل شده است. این مؤلفه را a_{ji} می نامیم. حال، به ازای $h\in\mathbf{R}$، قرار می دهیم $y=x+he_i$ و توجه کنیم که

$$\frac{\|f(y)-f(x)-Df(x)\cdot(y-x)\|}{\|y-x\|}$$
$$=\frac{\|f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)-hDf(x)\cdot e_i\|}{|h|}$$

چون این عبارت $\to 0$، وقتی $h\to 0$، بنابراین مؤلفهٔ jام صورت نیز به سمت صفر میل می کند، و این بدان معناست که، وقتی $h\to 0$،

$$\frac{|f_j(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n)-f_j(x_1,\ldots,x_n)-ha_{ji}|}{|h|}\to 0$$

بنابراین، داریم

$$a_{ji}=\lim_{h\to 0}\frac{[f_j(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n)-f_j(x_1,\ldots,x_n)]}{h}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \blacksquare$$

قضیهٔ ۴. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ باز و $f:A\to\mathbf{R}^m$ در A دیفرانسیل پذیر باشد. آنگاه f پیوسته است. در واقع، به ازای هر $x_0\in A$، ثابتی مانند $M>0$ و یك $\delta_0>0$ وجود دارد به طوری که $\|x-x_0\|<\delta_0$ مستلزم $\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant M\|x-x_0\|$ است. (این را خاصیت لیپشیتس می نامند.)

برای برهان این قضیهٔ به یادآوری این مطلب نیاز داریم که اگر $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ یك تبدیل خطی باشد، یك ثابت M_0 وجود دارد به طوری که، به ازای هر $x\in\mathbf{R}^n$، $\|Lx\|\leqslant M_0\|x\|$ (مثال ۴ را در پایان فصل ۴ ببینید). در اینجا ما $L=Df(x_0)$ انتخاب خواهیم کرد.

برهان: برای اثبات پیوستگی، کافی است که خاصیت لیپشیتس نامبرده را اثبات کنیم، زیرا به ازای $\varepsilon>0$ مفروض، می توانیم انتخاب کنیم $\delta=\min(\delta_0,\varepsilon/M)$. به این منظور، فرض می کنیم، در تعریف ۱، $\varepsilon=1$. آنگاه δ_0ی وجود دارد به طوری که $\|x-x_0\|<\delta$ مستلزم

$$\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|\leqslant\|x-x_0\|$$

باشد، که به نوبهٔ خود، به

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant\|Df(x_0)(x-x_0)\|+\|x-x_0\|$$

منجر می شود (در اینجا، ما نامساوی مثلثی را به شکل $\|y\|-\|z\|\leqslant\|y-z\|$ به کار می بریم،

که ازنوشتن $y=(y-z)+z$ و ازکاربرد شکل متداول نامساوی مثلثی حاصل می‌شود).
می‌گذاریم $M=M_{\circ}+1$ و این واقعیت‌را مورداستفاده قرار می‌دهیم که

$$||Df(x_{\circ})(x-x_{\circ})||\leqslant M_{\circ}||x-x_{\circ}||$$

تا نتیجهٔ مطلوب به‌دست آید. ■

قضیهٔ۴. فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ یك‌مجموعهٔباز باشد، و $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. فرض کنیم $f=(f_1,\dots,f_m)$. اگر هریك‌از مشتقات‌جزئی $\partial f_j/\partial x_i$ در A وجود داشته‌باشد و درآن پیوسته باشد، آنگاه f در A دیفرانسیل‌پذیر است.

برهان: اگر قرار است $Df(x)$ وجود داشته باشد، نمایش ماتریسی‌آن باید، بنا بر قضیهٔ ۲، ماتریس ژاکوبی باشد. بدین‌سان باید نشان دهیم‌که برای $x\in A$ ثابت، به‌ازای هر $\varepsilon>0$، یك $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که $||y-x||<\delta$، $y\in A$ مستلزم

$$||f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)||<\varepsilon||y-x||$$

باشد.

برای این‌منظور، کافی است‌که ادعای اخیررا برای هرمؤلفهٔ f جداگانه‌اثبات‌کنیم (چرا؟). بنابراین می‌توانیم فرض‌کنیم $m=1$.
می‌توانیم بنویسیم

$$f(y)-f(x)=f(y_1,\cdots,y_n)-f(x_1,y_2,\cdots,y_n)+f(x_1,y_2,\cdots,y_n)-$$
$$f(x_1,x_2,y_3,\cdots,y_n)+f(x_1,x_2,y_3\cdots,y_n)-f(x_1,x_2,x_3,y_4,\cdots,y_n)+\cdots+$$
$$f(x_1,\cdots,x_{n-1},y_n)-f(x_1,\cdots x_n)$$

حال قضیهٔ مقدار میانگین رابه‌کار می‌بریم و این ما را قادر می‌سازدکه بنویسیم

$$f(y_1,\cdots,y_n)-f(x_1,y_2,\cdots,y_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1,y_2,\cdots,y_n)(y_1-x_1)$$

به‌ازای u_1ی بین x_1 و y_1 (y_2،...،y_n ثابت‌هستند). عبارات مشابهی‌نیز برای‌جملات‌دیگر می‌نویسیم وبه دست می‌آوریم

$$f(y)-f(x)=(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1,y_2,\cdots,y_n))(y_1-x_1)+$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,u_2,y_3,\cdots,y_n))(y_2-x_2)+\cdots+$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},u_n))(y_n-x_n)$$

بنابراین ، چون

$$Df(x)\,(y-x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1\,,\,\cdots\,,\,x_n)\,(y_i-x_i)$$

با استفاده از نامساوی مثلثی و اینکه $|y_i-x_i|\leqslant\|y-x\|$ ، خواهیم داشت

$$\|f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)\|\leqslant\Big\{\Big|\frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1,y_2,\cdots,y_n)-$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\cdots,x_n)\Big|+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},u_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n)\Big|\Big\}\times$$

$$\|y-x\|$$

ولی چون جملات $\partial f/\partial x_i$ پیوسته هستند، و u_i بین y_i و x_i قرار دارد، یك $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که ، به‌ازای $\|y-x\|<\delta$ ، عبارت داخل آکولاد از ε کمتر باشد . ایـن تخمین اثبات حکم را به پایان می‌رساند. ■

قضیهٔ ۵. فرض‌کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ در مجموعهٔ باز $A\subset\mathbf{R}^n$ و $g:B\to\mathbf{R}^p$ در مجموعهٔ باز $B\subset\mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر باشند، وفرض‌کنیم $f(A)\subset B$. آنگاه ترکیب $g\circ f$ در A دیفرانسیل پذیر است و $D(g\circ f)(x_0)=Dg(f(x_0))\circ Df(x_0)$.

برهان: برای نشان‌دادن $D(g\circ f)(x_0)\cdot y=Dg(f(x_0))\cdot(Df(x_0)\cdot y)$، نشان خواهیم داد که

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-Dg(f(x_0))\cdot(Df(x_0)(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|}=0$$

برای به انجام رساندن آن، با استفاده از نامساوی مثلثی ، تخمینی برای صورت کسر اخیر به طریق زیر می‌یابیم:

$$\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-Dg(f(x_0))\cdot(Df(x_0)(x-x_0))\|$$

$$=\|g(f(x))-g(f(x_0)-Dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+$$

$$Dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0))\|$$

$$\leqslant \|g(f(x))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0))\| +$$
$$\|Dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0))\|$$

چون f دیفرانسیل‌پذیر است، بنابر قضیهٔ ۳ ، یك δ_0 و یك $M>0$ وجود دارند به‌طوری که $\|f(x)-f(x_0)\| \leqslant M\|x-x_0\|$ هرگاه $\|x-x_0\|<\delta_0$. حال بنابر تعریف مشتق، برای $\varepsilon>0$ مفروض یك $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که $\|y-f(x_0)\|<\delta_1$ مستلزم

$$\| g(y)-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))\,(y-f(x_0))\|<\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)\|y-f(x_0)\|$$

باشد .

بدین‌سان $\|x-x_0\|<\delta_2=\min\{\delta_0,\delta_1\}$ مستلزم

$$\frac{\|g(f(x))-g(f(x_0))-Dg(f(x_0))\,(f(x)-f(x_0))\|}{\|x-x_0\|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

است. چون $Dg(f(x_0))$ یك نگاشت خطی است، می‌دانیم که یك ثابت M ، که می‌توان فرض کرد $M\neq 0$، وجود دارد به‌طوری که ، به ازای هر $y\in\mathbf{R}^m$،

$$\| Dg(f(x_0))(y) \| \leqslant M\cdot\|y\|$$

حال، بنابر تعریف مشتق، یك $\delta_3>0$ وجود دارد به‌طوری که $\|x-x_0\|<\delta_3$ مستلزم

$$\frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}<\frac{\varepsilon}{2M}$$

باشد. دراین‌صورت $\|x-x_0\|<\delta_3$ مستلزم

$$\frac{\|Dg(f(x_0))(f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0))\|}{\|x-x_0\|}$$

$$\leqslant\frac{M\cdot\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

است. قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_2,\delta_3\}$. بدین‌سان از $\|x-x_0\|<\delta$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_\circ)-Dg(f(x_\circ)).Df(x_\circ)(x-x_\circ)\|}{\|x-x_\circ\|}$$

$$\leqslant\frac{\|g(f(x))-g(f(x_\circ))-Dg(f(x_\circ))(f(x)-f(x_\circ))\|}{\|x-x_\circ\|}$$

$$+\frac{\|Dg(f(x_\circ))(f(x)-f(x_\circ)-Df(x_\circ)(x-x_\circ))\|}{\|x-x_\circ\|}<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

که این هم فرمول مطلوب را به اثبات می‌رساند. ■

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ باز و $f:A\to\mathbf{R}^n$ و $g:A\to\mathbf{R}$ توابعی دیفرانسیل‌پذیر باشند. آنگاه gf دیفرانسیل‌پذیر است و برای هر $x\in A$ ، $D(gf)(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ به‌وسیلهٔ دستور

$$D(gf)(x)\cdot e=g(x)(Df(x)\cdot e)+(Dg(x)\cdot e)f(x)$$

به‌ازای هر $e\in\mathbf{R}^n$ ، بیان می‌شود.

برهان: برای $\varepsilon>\circ$ و $x_\circ\in A$ داده شده، $\delta>\circ$ را چنان بر می‌گزینیم که $\|x-x_\circ\|<\delta$ ایجاب کند

(یك) $\quad |g(x)|\leqslant|g(x_\circ)|+۱=M\;;$

(دو) $\quad \|f(x)-f(x_\circ)-Df(x_\circ)(x-x_\circ)\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{۳M}\|x-x_\circ\|\;;$

(سه) $\quad \|g(x)-g(x_\circ)-Dg(x_\circ)(x-x_\circ)\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{۳\|f(x_\circ)\|}\|x-x_\circ\|\;;$

(چهار) $\quad \|g(x)-g(x_\circ)\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{۳M}$

که در آن $\|Df(x_\circ)y\|\leqslant M\|y\|$ ، (فقط اگر $f(x_\circ)\neq\circ$ و $Df(x_\circ)\neq\circ$ ، (سه) و (چهار) موردنیاز هستند). چرا انتخاب این δ امکان‌پذیر است؟

بنابراین، با استفاده از نامساوی مثلثی، به‌ازای $\|x-x_\circ\|<\delta$ خواهیم داشت

$$\|g(x)f(x)-g(x_\circ)f(x_\circ)-g(x_\circ)Df(x_\circ)(x-x_\circ)-$$
$$[Dg(x_\circ)(x-x_\circ)]f(x_\circ)\|$$

$$\leqslant\|g(x)f(x)-g(x)f(x_\circ)-g(x)Df(x_\circ)(x-x_\circ)\|$$

$$+\|g(x)Df(x_\circ)(x-x_\circ)-g(x_\circ)Df(x_\circ)(x-x_\circ)\|$$

$$+\|g(x)f(x_\circ)-g(x_\circ)f(x_\circ)-[Dg(x_\circ)(x-x_\circ)]f(x_\circ)\|$$

$$\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon\|x-x_\circ\|}{۳M}+\frac{\varepsilon}{۳M}M\|x-x_\circ\|+\frac{\varepsilon\|x-x_\circ\|}{۳\|f(x_\circ)\|}\cdot\|f(x_\circ)\|$$

$$=\varepsilon\|x-x_\circ\|\cdot \ \blacksquare$$

قضیهٔ ۷ .

(یك) فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ درمجموعهٔ باز A دیفرانسیل‌پذیرباشد. به‌ازای هر $x,y\in A$ به‌طوری‌که پاره‌خط واصل بین x و y در A قرار داشته‌باشد، یك نقطهٔ c روی آن پاره خط وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(y)-f(x)=Df(c)(y-x)$$

(دو) فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ در مجموعهٔ باز A دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم پاره‌خط واصل بین x و y در A قرار داشته‌باشد و $f=(f_۱,\dots,f_m)$. آنگاه نقاط $c_۱,\dots,c_m$ روی آن پاره‌خط وجود دارند به‌طوری‌که

$$f_i(y)-f_i(x)=Df_i(c_i)(y-x)\ \ ,\ \ i=۱,\cdots,m$$

برهان: (یك) تابع $h:[\circ,۱]\to\mathbf{R}$ راکه به وسیلهٔ $h(t)=f((۱-t)x+ty)$ تعریف‌شده است درنظر می‌گیریم. تابع h در $]\circ,۱[$ نسبت به t دیفرانسیل‌پذیر است. بنابرقضیهٔ مقدارمیانگین معمولی یك $t_\circ\in]\circ,۱[$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$h(۱)-h(\circ)=h'(t_\circ)(۱-\circ)$$

حال می‌دانیم‌که

$$h(\circ)=f(x)\quad و\quad h(۱)=f(y)$$

پس‌از مشتق‌گیری وبا استفاده ازقاعدهٔ زنجیری ، به‌دست می‌آوریم

$$h'(t_\circ)=Df((۱-t_\circ)x+t_\circ y)(y-x)$$

زیرا مشتق $(۱-t)x+ty$ نسبت‌به t برابر است با $y-x$ (این‌مطلب‌را توضیح دهید). در نتیجه می‌توانیم انتخاب کنیم $c=(۱-t_\circ)x+t_\circ y$.

(دو) اگر (یك) را درمورد هریك‌از مؤلفه‌های f جداگانه به‌کار ببریم، (دو) نتیجه می‌شود. $\blacksquare$

قضیهٔ ۸. فرض کنیم $f:A\subset \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ دوبار در مجموعهٔ باز A دیفرانسیل پذیر باشد. آنگاه ماتریس $D^2f(x):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ نسبت به پایهٔ استاندارد به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} \end{bmatrix}$$

بیان می‌شود که در آن هر مشتق جزئی در $x=(x_1,\dots,x_n)$ محاسبه شده است.

برهان: نمایش ماتریسی $Df:A\to\mathbf{R}^n$ به‌وسیلهٔ بردار سطری $(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n)$ بیان می‌شود، از این‌رو، با به‌کار بستن قضیهٔ ۲ در قالبی مناسب برای بردارهای سطری، $D^2f:A\to\mathbf{R}^{n^2}$ به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} \end{bmatrix}$$

بیان می‌شود. همان‌طور که دقتی مجدد در تعاریف نشان می‌دهد، اگر D^2f را به عنوان یک نگاشت دوخطی در نظر بگیریم در نمایش ماتریسی آن تغییری حاصل نخواهد شد. ■

قضیهٔ ۹. فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}$ دوبار درمجموعهٔ باز A دیفرانسیل پذیر و D^2f پیوسته باشد (یعنی، توابع $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$ پیوسته باشند). آنگاه D^2f متقارن است؛ یعنی،

$$D^2f(x)(x_1,x_2)=D^2f(x)(x_2,x_1)$$

یا، برحسب مؤلفه‌ها،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$

برهان: می‌خواهیم نشان دهیم $D^2f(x)\cdot(y,z)=D^2f(x)\cdot(z,y)$ ؛ یعنی ،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

اگر همهٔ متغیرهای دیگر را ثابت نگه داریم، مسئله به‌حالت دو بعدی منجر می‌شود. بدین‌سان می‌توانیم فرض کنیم که f در $A\subset \mathbf{R}^2$ حقیقی و متعلق به‌ردهٔ C^2 است.

برای $(x,y)\in A$ ثابت و h، k کوچك، کمیت

$$S_{h,k}=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]-[f(x+h,y)-f(x,y)]$$

را درنظر می‌گیریم (شکل ۶-۱۴ را ببینید).

تابع g_k را به وسیلهٔ $g_k(u)=f(u,y+k)-f(u,y)$ تعریف می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که عبارت $S_{h,k}$ را می‌توان به‌صورت

$$S_{h,k}=g_k(x+h)-g_k(x)$$

نوشت. بدین‌سان، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، به‌ازای $c_{k,h}$ی واقع بین x و $x+h$ ، خواهیم داشت $S_{h,k}=g'_k(c_{k,h})$.

بنابراین :

$$S_{h,k}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(c_{k,h},y+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(c_{k,h},\ y)\right\}\cdot h$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(c_{k,h},d_{k,h})\cdot hk$$

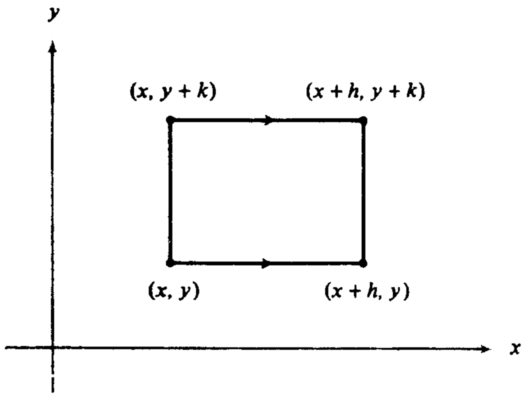
به‌ازای $d_{h,k}$ی واقع بین y و $y+k$.

حال $S_{h,k}$ نسبت به h ، k و x ، y حالت «تقارنی» دارد. با تعویض دو جملهٔ میانی در $S_{h,k}$ ، می‌توانیم (به‌همان طریق بالا) به‌دست بیاوریم که

$$S_{h,k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\widetilde{c_{h,k}},\widetilde{d_{h,k}})\cdot hk$$

با مساوی قراردادن این دو فرمول برای $S_{h,k}$ ، حذف h ، k و سپس میل دادن $h\to 0$ ، $k\to 0$ (و با استفاده از پیوستگی D^2f) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ■

تبصره: نتیجه‌ای ظریفتر از نتیجهٔ قبل این است که : اگر f متعلق به ردهٔ C^1 باشد و اگر $\partial^2 f/\partial x\partial y$ موجود و پیوسته باشد، آنگاه $\partial^2 f/\partial y\partial x$ وجود دارد و باهم برابرند. اثبات این مطلب به زحمت بیشتری نیاز دارد ولی پندارهٔ اثبات همان است (تمرین ۲۴).



شکل ۶-۱۴

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم $f: A \to \mathbf{R}$ در مجموعهٔ باز $A \subset \mathbf{R}^n$ متعلق به ردهٔ C^r باشد. فرض کنیم $x, y \in A$ و فرض کنیم که پاره خط واصل بین x و y در A قرار داشته باشد. آنگاه نقطه‌ای مانند c روی آن پاره‌خط وجود دارد به‌طوری که

$$f(y)-f(x)=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}D^k f(x)(y-x,\cdots,y-x)+$$

$$+\frac{1}{r!}D^r f(c)(y-x,\cdots,y-x)$$

برهان: اگر به‌خاطر آوریم که، به‌دلیل قاعدهٔ زنجیری،

$$\frac{d}{dt}f(x+th)=Df(x+th)\cdot h$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i$$

آنگاه می‌توانیم از دوطرف، از $t=0$ تا $t=1$، انتگرال‌گیری کنیم[1] و از این‌رو به‌دست می‌آوریم

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i dt$$

---

۱. فرض ما بر این است که خواننده با قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنایی دارد. بحث مفصلی در بارهٔ انتگرال‌گیری، که شامل این قضیهٔ خواهد بود، در فصل ۸ ارائه می‌شود.

حال می‌خواهیم از عبارت سمت راست به روش جزء به جزء انتگرال گیری کنیم. فرمول کلی را به‌خاطر بیاورید،

$$\int_{0}^{1} u\frac{dv}{dt}\,dt=-\int_{0}^{1} v\frac{du}{dt}\,dt+uv\Big|_{0}^{1}$$

در حالت مورد نظرما، قرار می‌دهیم $u=(\partial f/\partial x_i)(x+th)h_i$ و $v=t-1$. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i\,dt-\sum_{i,k=1}^{n}\int_{0}^{1}(1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}(x+th)h_ih_k dt+$$

$$+h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

زیرا، بنابرقاعدهٔ زنجیری، داریم

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}(x+th)h_ih_k$$

و

$$uv\Big|_{0}^{1}=(t-1)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i\Big|_{t=0}^{1}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$$

بدین‌سان ما اتحاد

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot h_i+R_1(h,x)$$

را اثبات کردیم که در آن

$$R_1(h,x)=\sum_{i,k=1}^{n}\int_{0}^{1}(1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}(x+th)h_ih_k\,dt$$

چون $|h_i|\leqslant\|h\|$، داریم

$$|R_1(h,x_0)|\leqslant\|h\|^2\left\{\sum_{i,k=1}^{n}\int_{0}^{1}(1-t)\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}(x_0+th)\right|dt\right\}$$

اگر باز از $R_1(h,x_0)$ به روش جزء به‌جزء انتگرال گیری کنیم، وقرار دهیم

$$u=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(x+th)h_ih_k$$

و

$$v=-\frac{(t-1)^2}{2}$$

به‌دست می‌آوریم

$$R_1(h,x)=\sum_{i,j,k}\int_0^1\frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(x+th)h_ih_jh_k\,dt+$$
$$+\sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)h_ih_j$$

بدین‌سان ثابت کردیم که

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{h_ih_j}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)+R_2(h,x)$$

که در آن

$$R_2(h,x)=\sum_{i,j,k}\int_0^1\frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(x+th)h_ih_jh_k\,dt$$

اما تابع زیـر علامت انتگرال دراین فرمول اخیر تابعی پیوسته است و بنابراین در یك همسایگی کوچك x کراندار است (به‌خاطر بیاورید که باید مقدار آن به‌مقدار تابع در x نزدیك باشد). بدین‌سان، برای $\|h\|$ کوچك، به ازای یك ثابت مانند $M\geqslant 0$ به‌دست می‌آوریم،

$$|R_2(h,x)|\leqslant\|h\|^3 M$$

به‌ویژه توجه کنیم که، وقتی $h\to 0$، $R_2(h,x_0)/\|h\|^2\leqslant\|h\|M\to 0$. فرمول ارائه شده درقضیهٔ برای محاسبه باقیمانده (دستور لاگرانژ برای باقیمانده) از به‌کاربستن دومین قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها به‌دست می‌آید. یادآوری کنیم که این قضیهٔ می‌گوید[1]

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

مشروط برآنکه f و g در $[a,b]$ پیوسته باشند و $g\geqslant 0$؛ در اینجا c عددی بین a و b است. بدین‌سان به‌دست می‌آوریم

---

۱. صفحهٔ ۲۸۵ کتاب
Mc Aloon and Tromba, *Calculus* Harcourt Brace Jovanovich (1972)
را ببینید.

$$R_1(h,x_0)=\sum_{i,k=1}^{n}\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}(x+th)\,h_ih_k\,dt$$
$$=\int_0^1(1-t)D^2f(x+th)(h,h)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}D^2f(c)(h,h)$$

که درآن، c درجایی روی‌خط واصل بین x و $y=x+h$ قرار دارد. به‌طریق‌مشابه،

$$R_2(h,x_0)=\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^1\frac{(t-1)^2}{2}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(x+th)h_ih_jh_k dt$$
$$=\int_0^1\frac{(t-1)^2}{2}D^3f(x+th)\cdot(h,h,h)dt$$
$$=\frac{1}{3!}D^3f(c)\cdot(h,h,h)$$

که در آن c در جایی روی خط واصل بین x و $y=x+h$ قرار دارد.

حال‌می‌توانیم به‌استقراو با استفاده ازهمین روش، نتیجه کلی را به‌دست‌آوریم.■

ملاحظات: ۱. درحقیقت می‌توانیم با تلاشی بیشتر قضیهٔ قویتری را اثبات کنیم. یعنی اگر f متعلق به C^r باشد، آنگاه

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}D^kf(x)\cdot(h,\,\dots,\,h)+R_r(x,h)$$

که‌درآن، وقتی $h\in R^n$، $h\to 0$، $R_r(x,h)/\|h\|^r\to 0$. بررسی‌این نکته را به‌خوانندهٔ علاقمند وا گذار می‌کنیم.

۲. برهان دیگری از قضیهٔ ۱۰ موجود است که قضیهٔ تیلور در حساب دیفرانسیل و انتگرال‌توابع‌یك متغیره را به‌صورت زیر مورداستفاده قرار می‌دهد. قرارمی‌دهیم، به‌ازای $x\in[0,1]$، $g(t)=f(x+t(y-x))$. اگر فرمول تیلور را در $\mathbf{R}$ به‌کار ببریم، می‌دانیم که یك $t\in[0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$g(1)-g(0)=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)+\frac{1}{r!}g^{(r)}(\bar{t})$$

ملاحظه‌می‌کنیم که $g(1)=f(y)$ و $g(0)=f(x)$. قرارمی‌دهیم $p(t)=x+t(y-x)$. آنگاه $g=f\circ p$، و به‌ازای هر x، $Dp(t)(1)=y-x$، ازاین رو، بنابرتمرین ۶ب،

$$g^{(k)}(t)=D^kg(t)(1,\,\dots,\,1)=D^kf(p(t))(Dp(t)\,(1),\,\dots,\,Dp(t)(1))$$
$$=D^kf(x+t(y-x))(y-x,\,\dots,\,y-x)$$

پس ازجایگزینی، به‌دست می‌آوریم

$$f(y)-f(x)=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}D^kf(x)(y-x,\ldots,y-x)$$
$$+\frac{1}{r!}D^rf(x+t(y-x))(y-x,\ldots,y-x)$$

که، اگر بنویسیم $c=x+\bar{t}\,(y-x)$، اثبات را به پایان می‌رساند.

قضیهٔ ۱۱. اگر $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر و A باز باشد، و اگر $x_0\in A$ یك نقطهٔ نهایی f باشد، آنگاه $Df(x_0)=0$؛ یعنی، x_0 یك نقطهٔ بحرانی است.

برهان: اگر $Df(x_0)\neq 0$؛ می‌توانیم یك $x\in\mathbf{R}^n$ بیابیم به طوری که $Df(x_0)x=c\neq 0$، مثلاً، فرض کنیم $c>0$. آنگاه می‌توانیم یك $\delta>0$ بیابیم به طوری که

$$\|h\|<\delta\Longrightarrow\|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h\|\leqslant\frac{c}{2\|x\|}\|h\|$$

$\lambda>0$ را چنان برمی‌گزینیم که $\lambda\|x\|<\delta$. آنگاه

$$\|f(x_0+\lambda x)-f(x_0)-Df(x_0)\lambda x\|\leqslant c\lambda\|x\|/2\|x\|=c\lambda/2$$

اما $Df(x_0)\lambda x=\lambda c$. بنابراین باید داشته باشیم $f(x_0+\lambda x)-f(x_0)>0$. به همین ترتیب $\|f(x_0-\lambda x)-f(x_0)+Df(x_0)\lambda x\|\leqslant c\lambda/2$ مستلزم $f(x_0-\lambda x)-f(x_0)<0$ است. چون $f(x_0+\lambda x)>f(x_0)$ و $f(x_0-\lambda x)<f(x_0)$ می‌بینیم که $f(x_0)$ یك مقدار نهایی موضعی نیست. یعنی، می‌توانیم نقاطی، مانند y، به دلخواه نزدیك به x_0 بیابیم به‌طوری که $f(y)>f(x_0)$، و به‌طریق مشابه، نقاطی، مانند y، به دلخواه نزدیك به x_0 وجود دارند به طوری که $f(y)<fx_0)$. ■

قضیهٔ ۱۲.

(یك) اگر $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ در مجموعهٔ باز A معین و متعلق به ردهٔ C^2 باشد و اگر برای یك نقطهٔ بحرانی x_0 این تابع، $H_{x_0}(f)$ معین مثبت باشد، آنگاه f در x_0 یك ماکسیمم موضعی دارد.

(دو) اگر f در x_0 یك ماکسیمم موضعی داشته باشد، آنگاه $H_{x_0}(f)$ نیمه معین مثبت است.

برهان: (یك) اگر به ازای هر $x\neq 0$ در $\mathbf{R}^n$، $H_{x_0}(f)(x,x)>0$، آنگاه، به ازای هر $x\neq 0$ در $\mathbf{R}^n$، $D^2f(x_0)(x,x)<0$. بنابر مثال ۵، فصل ۴، می‌دانیم که یك تابع دوخطی پیوسته است. بنابراین $D^2f(x_0)(x,x)$ تابعی پیوسته از x است. به‌علاوه، $S=\{x\in\mathbf{R}^n|\,\|x\|=1\}$ فشرده است، بنابراین نقطه‌ای مانند $\bar{x}\in S$ وجود دارد به‌طوری که، به ازای هر $x\in S$، $D^2f(x_0)(x,x)\leqslant D^2f(x_0)(\bar{x},\bar{x})<0$. حال قرار می‌دهیم $\varepsilon=-D^2f(x_0)(\bar{x},\bar{x})$. آنگاه، به‌ازای هر $x\neq 0$ در $\mathbf{R}^n$،

$$D^2f(x_0)(x,x)=\|x\|^2D^2f(x_0)(x/\|x\|,x/\|x\|)\leqslant-\varepsilon\|x\|^2$$

چون D^2f پیوسته است، یك $\delta>0$ موجود است به طوری که $\|y-x_0\|<\delta$ مستلزم $\|D^2f(y)-D^2f(x_0)\|<\varepsilon/2$ باشد و به علاوه می‌توانیم δ را چنان برگزینیم که $D(x_0,\delta)\subset A$. اگر $y\in D(x_0,\delta)$، قضیهٔ تیلور را می‌توانیم به‌کار ببریم و ازاین‌رو به‌دست می‌آوریم

$$f(y)-f(x_0)=Df(x_0)(y-x_0)+\left(\frac{1}{2}\right)D^2f(c)(y-x_0,y-x_0)$$

که درآن $c\in D(x_0,\delta)$. بدین‌سان

$$\|D^2f(c)-D^2f(x_0)\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

مستلزم

$$\begin{aligned}D^2f(c)(y-x_0,y-x_0)&\leqslant D^2f(x_0)(y-x_0,y-x_0)\\&\quad+\|D^2f(c)(y-x_0,y-x_0)\\&\quad-D^2f(x_0)(y-x_0,y-x_0)\|\\&\leqslant-\varepsilon\|y-x_0\|^2+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\|y-x_0\|^2\\&=-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\|y-x_0\|^2\end{aligned}$$

است.

به‌خاطر داشته باشید که $Df(x_0)=0$، زیرا x_0 یك نقطهٔ بحرانی است. بدین‌سان ازقضیهٔ تیلور حاصل می‌شود

$$f(y)-f(x_0)=\left(\frac{1}{2}\right)D^2f(c)(y-x_0,y-x_0)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\varepsilon}{2}\|y-x_0\|^2\right)<0$$

بنابراین، به‌ازای هر $y\in D(x_0,\delta)$، $y\neq x_0$، $f(y)<f(x_0)$ و ازاین‌رو f در x_0 یك ماکسیمم موضعی دارد.

(دو) برای اثبات این قسمت از قضیهٔ، از برهان خلف سود می‌جوییم. فرض کنیم f در x_0 یک ماکسیمم موضعی داشته باشد و فرض کنیم، به ازای یک $x\in\mathbf{R}^n$، $D^2f(x_0)(x,x)>0$. حال درنظر می‌گیریم $g(t)=-f(x_0+tx)$. چون f در یك همسایگی x_0 تعریف شده است، g دریك همسایگی 0 معین است . داریم

$$D^2g(0)(1,1)=-D^2f(x_0)(x,x)<0$$

بااستفاده‌از برهان (یك)، δی وجود داردبه‌طوری که $|t|<\delta$، $t\neq0$ مستلزم $g(t)<g(0)$ باشد. بدین‌سان از $|t|<\delta$ حاصل می‌شود $f(x_0+tx)>f(x_0)$، از این رو f در x_0

یك ماکسیمم موضعی ندارد. از این تناقض نتیجه می‌شود که، به ازای هر $x\in\mathbf{R}^n$، $H_{x_0}(f)(x,x)\geqslant 0$. ■

مثالهای حل شدهٔ فصل ۶

۱. فرض کنیم $f:B\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$، که در آن $B=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$، پیوسته باشد و فرض کنیم f در $\mathrm{int}(B)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم در $bd(B)$، $f(x)=0$. نشان دهید که نقطه‌ای مانند $x_0\in\mathrm{int}(B)$ وجود دارد که در آنجا $Df(x_0)=0$.

حل: این شکل چند بعدی قضیهٔ رل است. اگر f متحداً برابر با صفر باشد، این قضیهٔ آشکار است. بنابراین، فرض کنیم، به‌ازای یك $x\in\mathrm{int}(B)$، $f(x)\neq 0$. آنگاه، چون B فشرده است، f در یک نقطهٔ درونی، یک ماکسیمم یا یک مینیمم اختیار می‌کند. بدین‌سان یک نقطهٔ نهایی $x_0\in\mathrm{int}(B)$ وجود دارد و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۱، $Df(x_0)=0$.

۲. نشان دهید که برای یك نگاشت دوخطی $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^p$، داریم

$$Df(x_0,y_0)(x,y)=f(x_0,y)+f(x,y_0)$$

(نگاشت $f(x,y)$ را دو خطی نامند هرگاه نسبت به x و y، به طور جداگانه، خطی باشد؛ مثال ۵ درفصل ۴ را ببینید.)

حل: می‌دانیم که f دیفرانسیل‌پذیر است، زیرا ازنمایش ماتریسی آن می‌بینیم که مشتقات جزئی وجود دارند و پیوسته هستند. چون $f(x,y_0)$ تابعی خطی از x است، مشتق در سوی $(x,0)$ عبارت می‌شود از $Df(x_0,y_0)(x,0)=f(x,y_0)$، همان‌طور که در مثال ۲، بند ۲.۶ ملاحظه کردیم. به همین ترتیب، $Df(x_0,y_0)(0,y)=f(x_0,y)$. بدین‌سان، چون $Df(x_0,y_0)$ خطی است، و $(x,y)=(x,0)+(0,y)$، داریم $Df(x_0,y_0)(x,y)=f(x_0,y)+f(x,y_0)$.

۳. ژاکوبین $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$؛ $f(x,y)=(\sin(x\sin y),(x+y)^2)$ را بیابید.

حل: داریم

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sin(x\sin y))=\cos(x\sin y)\frac{\partial}{\partial x}(x\sin x)=\sin y\cos(x\sin y);$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=2(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)=2(x+y);$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\cos(x\sin y)\frac{\partial}{\partial y}(x\sin y)=\cos(x\sin y)\,x\cos y;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 2(x+y).$$

بدین‌سان، بنا بر قضیهٔ ۲، ماتریس ژاکوبی (که در آن $x = x_1$ و $y = x_2$) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \sin y \cos(x \sin y) & x \cos y \cos(x \sin y) \\ 2(x+y) & 2(x+y) \end{bmatrix}$$

درحالت کلی، ماتریسهای ژاکوبی متقارن نیستند و درواقع لزومی ندارد که مربعی باشند. تقارن، فقط خاصیتی متعلق به مشتق مرتبهٔ دوم یك تابع $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ می باشد.

۰۴ نقاط بحرانی $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$ را بیابید و تعیین کنید که درهر یك از این نقاط بحرانی، آیا f یك ماکسیمم (موضعی)،یك‌مینیمم(موضعی)،یا یك‌نقطهٔ زینی دارد.

حل: نقاط بحرانی دقیقاً آن نقاط (x,y) هستند که برایشان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

پس ازحل معادلهٔ اول نسبت به x، می‌بینیم که $x = 0$ یا $x = 2$. بنابراین نقاط بحرانی f عبارتند از $(0,0)$ و $(2,0)$. ماتریس هسین در (x,y) برابر است با

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x+6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

در $(0,0)$ ماتریس هسین برابر می‌شود با

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

و $\Delta_1 = +6$، $\Delta_2 = -12$. بنابراین‌در $(0,0)$، f یك نقطهٔ زینی‌دارد. در $(2,0)$ ماتریس هسین عبارت است از.

$$\begin{bmatrix} -۶ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

و $\Delta_۱ = -۶$، $\Delta_۲ = ۱۲$ و ازاین‌رو f یك مینیمم موضعی دارد.

۵. فرض‌کنیم A یك مجموعهٔ محدب باز در $\mathbf{R}^n$ و $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر ومشتق آن پیوسته باشد. فرض‌کنیم، بـه ازای هر $x \in A$، $y \in \mathbf{R}^n$، $\|Df(x)y\| \leqslant M\|y\|$. نامساوی مقدار میانگین را ثابت‌کنید:

$$\|f(x_۱) - f(x_۲)\| \leqslant M\|x_۱ - x_۲\|$$

حل: برای $n = ۱$، $m = ۱$، این نتیجه بی‌درنگ ازقضیهٔ مقدارمیانگین حاصل می‌شود. برای به‌دست آوردن نتیجه درحالت کلی، می‌توانیم به‌ترتیب زیر عمل‌کنیم. بنا بر قاعدهٔ زنجیری داریم:

$$\left(\frac{d}{dt}\right) f(tx_۱ + (۱-t)\,x_۲) = Df(tx_۱ + (۱-t)\,x_۲)\cdot(x_۱ - x_۲)$$

از دو طرف این تساوی نسبت به t، از $t = ۰$ تـا $t = ۱$، انتگرال می‌گیریم؛ به دست می‌آوریم $f(x_۱) - f(x_۲) = \int_۰^۱ Df(tx_۱ + (۱-t)x_۲)\cdot(x_۱ - x_۲)dt$. انتگرال اخیر به معنای انتگرال توابع مؤلفه‌ای است. حال با گرفتن قدرمطلق از دو طرف و با استفاده از فرض مربوط به Df، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. در اینجـا این نکته را به‌کار بردیم که قدر مطلق یك انتگرال کوچکتر یا مساوی است بـا انتگرال قدر مطلق؛ این نکته درفصل ۸ مرور خواهد شد (به‌طریق مشابه، حالت مربوط به‌یك تابع برداری را می‌توان بررسی کرد ــ تمرین ۲ درپایان فصل ۸.)

تمرینهای فصل ۶

۱. اگر $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ و $g: B \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ توابعی‌دیفرانسیل‌پذیر درمجموعه‌های (باز) A و B، و α، و β ثابت باشند، ثابت‌کنید که $\alpha f + \beta g: A \cap B \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر است و $D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x)$.

۲. نشان دهیدکـه برای $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$، اگر به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, m$، df_i/dx وجود داشته باشد، آنگاه Df وجود دارد.

۳. فرض‌کنیم $f: [۰,\infty[\to \mathbf{R}$ پیوسته و در $]۰,\infty[$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم $f(۰) = ۰$ و، وقتی‌که $x \to +\infty$، $f(x) \to ۰$. نشان‌دهیدکه‌یك $c \in]۰,\infty[$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(c) = ۰$.

۴. اگر $f: A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ یك تابع ثابت باشد، آنگاه نشان دهید که، به‌ازای هر $x\in A$، $Df(x)=0$.

۵. ژاکوبین توابع زیر را محاسبه کنید.

(الف) $f(x,y)=\sin(x^2+y^3)$

(ب) $f(x,y,z)=(z\sin x, z\sin y)$

(پ) $f(x,y)=xy$

(ت) $f(x,y,z)=x^2+y^2$

(ث) $f(x,y)=(\sin(xy),\cos(xy),x^2y^2)$

(ج) $f(x,y,z)=x^{y+z}$

(چ) $f(x,y,z)=xyz$

(ح) $f(x,y,z)=(z^{xy},x^2,\tan(xyz))$

۶. (الف) اگر $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ و $g:B\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^p$ دوبار دیفرانسیل‌پذیر باشند، و $f(A)\subset B$، آنگاه، به‌ازای $x_0\in A$، $x,y\in\mathbf{R}^n$، نشان دهید که

$$D^2(g\circ f(x_0))(x,y)=D^2(g(x_0))(Df(x_0)\cdot x,Df(x_0)\cdot y)$$
$$+Dg(f(x_0))\cdot D^2f(x_0)(x,y)$$

(ب) اگر $p:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ برابر با یك تابع خطی به اضافهٔ عددی ثابت باشد و اگر $f:A\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^s$، k بار دیفرانسیل‌پذیر باشد، ثابت کنید که

$$D^k(f\circ p)(x_0)(x_1,\dots,x_k)=D^kf(p(x_0))(Dp(x_0)(x_1),\dots,Dp(x_0)(x_k))$$

۷. نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و تعیین کنید آیا این نقاط، ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی یا نقاط زینی هستند.

(الف) $f(x,y)=x^3+6x^2+3y^2-12xy+9x$

(ب) $f(x,y)=\sin x+y^2-2y+1$

(پ) $f(x,y,z)=\cos 2x\cdot\sin y+z^2$

(ت) $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$

۸. نشان دهید که اگر $f:A\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، در $x_0\in A$ یك نقطهٔ بحرانی داشته باشد، و در x_0،

$$\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2$$

آنگاه

(الف) $\Delta>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}>0$ مستلزم این است که f در x_0 یك مینیمم موضعی داشته باشد.

(ب) $\Delta>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}<0$ مستلزم این‌است که f در x_0 یك‌ماکسیمم موضعی داشته باشد.

(پ) $\Delta<0$ مستلزم آن است که x_0 یك نقطهٔ زینی f باشد.

۹. فرض‌کنیم $X\subset\mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای باز همراه با یکی ازخواص (غیرهم‌ارز) زیر باشد.

(۱) به‌ازای‌یك $x_0\in X$، هر $x\in X$ رامی‌توان بایك خط راست به x_0 وصل کرد.

(۲) به‌ازای یك $x_0\in X$، هـر $x\in X$ را می‌توان با یك مسیر دیفرانسیل‌پذیر بـه x_0 وصل کرد.

مثالهایی از چنین مجموعه‌هـایی ارائه دهیدکـه محدب نباشند. اگر $f:X\to\mathbf{R}$ و $Df=0$، آنگاه ثابت‌کنیدکه f ثابت‌است. برای مجموعهٔ باز X، استدلال‌کنیدکه گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند:

(الف) شرط (۲) بالا،

(ب) همبندی‌کمانی،

(پ) همبندی.

[راهنمایی: بـرای $(c)\Leftrightarrow(b)$، تمـرین ۱۱، فصل ۳ را ببینید. نشان دادن $(b)\Rightarrow(a)$ آسان است. برای اثبات $(a)\Leftarrow(b)$، ابتدا نشان‌دهیدکه هردونقطهٔ دلخواه را می‌توان بایك‌گردایهٔ متناهی ازپاره‌خط‌های راست به‌هم وصل‌کرد و سپس گوشه‌ها را «هموارکنید».]

۱۰. مشابه قضیهٔ ۱۲ را برای مینیممها ثابت‌کنید. [راهنمایی: قضیهٔ ۱۲ را درمورد $-f$ به‌کار برید.]

۱۱. مشابه قضیهٔ ۵، فصل ۵ را برای $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ ثابت‌کنید.

۱۲. یك تابع $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ را همگن از درجهٔ m خوانند، اگـر به ازای هـر $x\in\mathbf{R}^n$، $t\in\mathbf{R}$، $f(tx)=t^m f(x)$. اگر f دیفرانسیل‌پذیر باشد، نشان دهید کـه، برای هر $x\in\mathbf{R}^n$،

$$Df(x)x=mf(x)$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=mf(x)$$

[راهنمایی: قرار دهید $g(t)=f(tx)$، و با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، $g'(1)$ را محاسبه کنید.] نشان دهید که نگاشتهای چندخطی k متغیره (مثال ۵، فصل ۴ را ببینید) همگن از درجهٔ k هستند. مثالهای دیگری بیاورید.

۱۳. قاعدهٔ زنجیری را به‌کار ببرید و مشتقات توابع زیر را، که در آن $f(x,y,z)=x^2+yz$، $g(x,y)=y^3+xy$ و $h(x)=\sin(x)$، بیابید.

(الف) $$F(x,y,z)=f(h(x),g(x,y),z)$$

(ب) $$G(x,y,z)=h(f(x,y,z)g(x,y))$$

(پ) $$H(x,y,z)=g(f(x,y,h(x)),g(z,y))$$

همچنین فرمولهای کلی برای محاسبهٔ مشتقات F، G، H را بیابید.

۱۴. (الف) مثال ۲ را به‌حالت نگاشتهای چند خطی تعمیم دهید.
(ب) با به‌کاربستن نتیجهٔ قسمت (الف) درمورد نگاشت دترمینان

$$\det:\mathbf{R}^{n^2}=\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

نشان دهید که $A\in\mathbf{R}^{n^2}$ یك نقطهٔ بحرانی det است اگر، و فقط اگر، A از رتبهٔ $n-2$ باشد.

۱۵. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم هیچ نقطه‌ای مانند $x\in\mathbf{R}$ وجود نداشته باشد به‌طوری که $f(x)=0=f'(x)$. نشان دهید که

$$S=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1, f(x)=0\}$$

متناهی است.

۱۶. اگر $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ دیفرانسیل‌پذیر و Df ثابت باشد، آنگاه نشان دهید که f برابر است با یك تابع خطی به‌اضافهٔ یك ثابت و اینکه قسمت خطی f همان مقدار ثابت Df است.

۱۷. اگر $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ متعلق به ردهٔ C^r باشد و

$$Df(x_0)=0, D^2f(x_0)=0, \ldots, D^{r-1}f(x_0)=0$$

ولی، به‌ازای هر $x\neq 0$، $x\in\mathbf{R}^n$، $D^rf(x_0)(x,\ldots,x)<0$، آنگاه ثابت کنید که f در x_0 یك ماکسیمم موضعی دارد (فرمول تیلور را به‌کار ببرید).

۱۸. ثابت کنید معادلهٔ $x^3+bx+c=0$ که در آن $b>0$، درست یك جواب $x\in\mathbf{R}$ دارد. [راهنمایی: قضیهٔ رل را به‌کار ببرید.]

۱۹. درهریك ازمسائل زیر، فرمول تیلور مرتبهٔ دوم را، برای تابع داده شده، حول نقطهٔ مفروض (x_0,y_0)، تعیین کنید.

(الف) $$f(x,y)=(x+y)^2,\ x_0=0, y_0=0$$

(ب) $f(x,y)=e^{x+y},\ x_0=0, y_0=0$

(پ) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1},\ x_0=0, y_0=0$

(ت) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\cos(xy),\ x_0=0, y_0=0$

(ث) $f(x,y)=\sin(xy)+\cos(xy),\ x_0=0, y_0=0$

(ج) $f(x,y)=e^{(x-1)^2}\cos y,\ x_0=1, y_0=0$

۲۰. فرض کنیم $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ یك نگاشت خطی باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|L\|=\inf\{M \mid \|Lx\|\leqslant M\|x\|, \text{بەازای هر } x\in\mathbf{R}^n\}$$

نشان دهیدکه $\|\cdot\|$ درفضای نگاشتهای خطی از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ یك نرم است.

۲۱. (الف) اگر در x_0، برای $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$، $\Delta_k>0$،بەازای kی‌فرد، یا $\Delta_k<0$، بەازای kی‌زوج، آنگاه نشان دهیدکه f نمی‌تواند در x_0 یك مینیمم (موضعی) داشته باشد.

(ب) اگر، بەازای kی‌زوج،$\Delta_k<0$، ثابت کنیدکه f در x_0 یك نقطهٔ زینی دارد.

۲۲. مثالی‌ازیك تابع پیوستهٔ $f:]0,1[\to\mathbf{R}$ بیاوریدکه نمودارش بسته نباشد. آیا این پدیده می‌تواند برای $f:A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، که درآن A بسته است، رخ دهد؟

۲۳. چهار جملهٔ اول بسط تیلور $\log(\cos x)$ را حول $x=0$ بنویسید.

۲۴. فرض کنیم $f(x,y)$ یك تابع حقیقی، معین در $\mathbf{R}^2$ باشد. برهان قضیهٔ ۹ را بەکار ببرید ونشان دهیدکه اگر f متعلق به ردهٔ C^1 و $\partial^2 f/\partial x\partial y$ موجود وپیوسته باشد، آنگاه $\partial^2 f/\partial y\partial x$ وجود دارد و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

(این شرط ضعیفتر ازآن‌است‌که بگوییم f متعلق بەکلاس C^2 است). تعمیم‌دهید.

۲۵. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ و فرض کنیم، بەازای هر $i=1,\ldots,n$، $\partial f/\partial x_i$ وجود دارد، و بەازای هر $i=1,\ldots,n-1$، $\partial f/\partial x_i$ پیوسته است. آنگاه ثابت کنید که f دیفرانسیل‌پذیر است.

۲۶. (الف) اگر $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و f' در یك همسایگی $x=a$ وجود داشته باشد و $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=l$، آنگاه ثابت کنیدکه $f'(a)=l$. [راهنمایی:قضیهٔمقدار میانگین را بەکار ببرید.]

(ب) آیا $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}$ می‌تواند مشتق تابعی باشد؟

۲۷. فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}$ پیوسته، و $A\subset\mathbf{R}^n$ باز باشد. فرض کنیم که همهٔ مشتقات سویی وجود داشته باشند، و درهر $x_0\in A$، یك نگاشت خطی $Df(x_0)$ تعریف کنند. آیا f باید دیفرانسیل‌پذیر باشد؟ [راهنمایی: تابع

$$f(x,y)=x^2y\sqrt{x^2+y^2}/(x^4+y^2)$$

را، که ف.ویسلر[1] پیشنهاد کرده است، درنظر بگیرید.]

۲۸. فرض کنیم f در $[a,b]$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. تحقیق کنید که $f'(x)$ درنتیجهٔ قضیهٔ مقدار میانی صدق می‌کند (به یاد داشته باشید که لزومی ندارد f' پیوسته باشد) [راهنمایی: اگر به‌دنبال x_0ی هستیم که $f'(x_0)=c$، تابع $g(x)=f(x)-cx$ و $\inf g(x)$ را درنظر می‌گیریم].

۲۹. فرض کنیم $f_n(x)=xe^{-nx}$، $x\in[0,\infty[$، $n=0,1,2,\ldots$.

(الف) نشان دهید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ وجود دارد. f را صریحاً محاسبه کنید.

(ب) آیا f پیوسته است؟

(پ) مجموعهٔ مناسبی بیابید که درآن همگرایی سری نامبرده یکنواخت باشد.

(ت) آیا می‌توانیم جمله به جمله مشتق گیری کنیم؟

۳۰. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ کراندار و دارای مشتق پیوسته باشد. در زنجیرهٔ نتیجه گیریهای زیرین، کدام درست و کدام نادرست است؟

می‌خواهیم ثابت کنیم که T، مجموعهٔ همه نقاطی که در آنها f ماکسیمم (مطلق) خود را اختیار می‌کند، بسته است. چون f دیفرانسیل‌پذیر است، پیوسته است. بنابراین ماکسیمم خود را اختیار می‌کند، یعنی، T تهی نیست. مجموعهٔ نقاطی را که درآنها $f'(x)=0$، با S نمایش می‌دهیم. آنگاه $T\subset S$. ازسوی‌دیگر، اگر $x\in S$، آنگاه $f'(x)=0$، درنتیجه f، درآنجا، یا یك ماکسیمم می‌شود یا یك مینیمم. اگر یك‌ماکسیمم بشود، باید داشته‌باشیم $f(x)\geqslant 0$. بنابراین $T=S\cap\{x\,|\,f(x)\geqslant 0\}$. مجموعهٔ $\{x\,|\,f(x)\geqslant 0\}$ بسته است و S نیز چنین است؛ درنتیجه T بسته است. آیا T واقعاً بسته است یا خیر؟

۳۱. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ فشرده‌باشد وفضای نرم‌دار $\mathcal{C}(A,\mathbf{R})$ را، همان‌گونه‌که درفصل ۵ ملاحظه شد، می‌سازیم. به ازای هر $x_0\in A$، $\delta_{x_0}:\mathcal{C}(A,\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم $f\to f(x_0)$. ثابت کنید δ_{x_0} پیوسته است.

۳۲. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $f(x,y)=(xy(x^2-y^2))/(x^2+y^2)$ اگر $(x,y)\neq(0,0)$ و $f(0,0)=0$. نشان دهید $\partial^2f/\partial x\partial y$ و $\partial^2f/\partial y\partial x$ در $(0,0)$ وجود دارند ولی برابر نیستند.

۳۳. قضیهٔ تیلور را به‌کار ببرید وقضیهٔ دوجمله‌ای را ثابت کنید

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kx^{n-k}$$

1. F. Weisler

۳۴. دنبالهٔ اعداد حقیقی (یک کسر مسلسل)

$$\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)},\ \frac{۱}{۲+\frac{۱}{\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}},\ldots$$

را درنظر می‌گیریم. نشان دهید که این دنباله همگراست و حد آن را بیابید. [راهنمایی: ثابت کنید که جملات زوج وجملات فرد یکنوا هستند.]

۳۵. فرض کنیم $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ دوبار دیفرانسیل‌پذیر باشد. فرض کنیم f در سه نقطهٔ متمایز صفر شود. ثابت کنید یک $c\in]a,b[$ وجود دارد به‌طوری که $f''(c)=۰$.

۳۶. فرض کنیم $f:[۰,۱]\to \mathbf{R}$ پیوسته و در $]۰,۱[$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، و $f(۰)=۰$. فرض کنیم، به ازای هر $۰<x<۱$، $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$. ثابت کنید، به‌ازای هر $x\in[۰,۱]$، $f(x)=۰$.

۳۷. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^۲\to \mathbf{R}$ متعلق به ردهٔ $C^۲$ باشد. f را همساز نامند هرگاه $\partial^۲ f/\partial x^۲+\partial^۲ f/\partial y^۲=۰$. فرض کنیم $(x_۰,y_۰)$ یک ماکسیمم موضعی اکید f و f همساز باشد. ثابت کنید که همهٔ مشتقات مرتبهٔ دوم f در $(x_۰,y_۰)$ صفر می‌شوند.

۳۸. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه‌های زیر را درنقاط داده شده بیابید.

(الف) $z=x^۲+y^۲$، $(۰,۰)$؛

(ب) $z=x^۲-y^۲+x$، $(۱,۰)$؛

(پ) $z=(x+y)^۲$، $(۳,۲)$.

۳۹. رفتار توابع زیر را درنقاط داده شده مورد تجزیه و تحلیل قرار دهید.

(الف) $z=x^۲-y^۲+۳xy$، $(۰,۰)$؛

(ب) $z=Ax^۲-By^۲+Cxy$، $(۰,۰)$.

۴۰. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ S راکه به وسیلهٔ نمودار توابع زیر مشخص شده است، بیابید.

(الف) $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲}+(x^۲+y^۲)$ در $(۱,۰,۲)$؛

(ب) $f(x,y)=\sqrt{x^۲+۲xy-y^۲+۱}$ در $(۱,۱,\sqrt{۳})$.

فصل ۷

قضایای تابع معکوس و تابع ضمنی و موضوعات وابسته

ازجبر خطی می‌دانیم که یك دستگاه معادلات خطی

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n
\end{array}
$$

را می‌توان به‌طوریکتا نسبت به x_1، . . .، x_n حل کرد مشروط بر آنکه ماتریس $A=(a_{ij})$ عادی باشد، یعنی، اگر $\det(A)\neq 0$، که در آن $\det(A)$ نشانگر دترمینان A است. درمورد معادلات تابعی چه می‌توانیم بگوییم؟ چه هنگام می‌توانیم یك دستگاه به‌صورت

$$
\begin{array}{c}
f_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1 \\
\vdots \\
f_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n
\end{array}
$$

را نسبت به x_1، . . .، x_n حل کنیم؟ موجودی که دترمینان را تعمیم می‌دهد دترمینان ژاکوبی

است که به‌وسیلهٔ $Jf(x)=\det(Df(x))$ تعریف‌می‌شود و درآن $x=(x_1, \dots, x_n)$، $(f_1, \dots, f_n)=f$. اگر برحسب‌مؤلفه‌ها در $x=(x_1, \dots, x_n)$ نوشته‌شود، به‌دست می‌آوریم:

$$Jf(x)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

گاهی به‌جای Jf می‌نویسند

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

و به‌جای $Jf(x)$ می‌نویسند

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_1, \dots, x_n)$$

اگر $Jf(x)\neq 0$، می‌توانیم انتظار حل $f(x)=y$ را نسبت به x داشته باشیم. قضیه‌ای کــه چنین نتایجی را توجیه می‌کند موضوع اصلی بند ۱.۷ را تشکیل می‌دهد. همچنین حالتی راکه درآن می‌خواهیم $f(x,y)=0$ را نسبت به y حل‌کنیم (قضیهٔ تابع ضمنی) مورد بررسی قــرار خواهیم داد. در بندهای پایانی، چند قضیهٔ وجودی مشابه را درمورد معادلات دیفرانسیل معمولی و یك‌نتیجه‌نظری مهم، موسوم به «لم مورس»، رابه‌کارخواهیم برد. آخرین بند به‌بررسی مسائل اکسترمم توأم با قیود اختصاص دارد.

۱.۷ قضیهٔ تابع معکوس

ملاحظه می‌کنیم که $Jf(x)\neq 0$ مستلزم این‌است که $Df(x):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یك ایزومرفیسم خطی باشد (یعنی، ماتریس‌آن معکوس‌پذیر باشد). بدین‌سان از این امرکه بهترین تقریب خطی معکوس‌پذیر است، می‌خواهیم نتیجه بگیریم که خود تابع معکوس‌پذیر است.

اما چند محدودیت وجود دارد. برای ارزیابی این محدودیتها، حالت $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بررسی‌می‌کنیم. این‌مطلب درست‌است که اگر f متعلق به ردهٔ C^1 باشد و $f'(x_0)\neq 0$،

آنگاه f، در یك همسایگی $x_{\circ}$، معکوس‌پذیر (یك به یك) است. ازنقطه نظر هندسی، این مطلب واضح‌است، زیرا معنای $f'(x_{\circ})\neq \circ$ این‌است که f در $x_{\circ}$، و درنتیجه درمجاورت $x_{\circ}$، شیبی مخالف باصفر دارد (شکل ۷ـ۱ را ببینید).

بدین‌سان‌علاقهٔ‌اصلی‌ما متوجه معکوس‌پذیری موضعی‌خواهدبود، یعنی‌معکوس‌پذیری $f(x)$ برای xهای نزدیك به $x_{\circ}$ و yهای نزدیك به $y_{\circ}=f(x_{\circ})$.

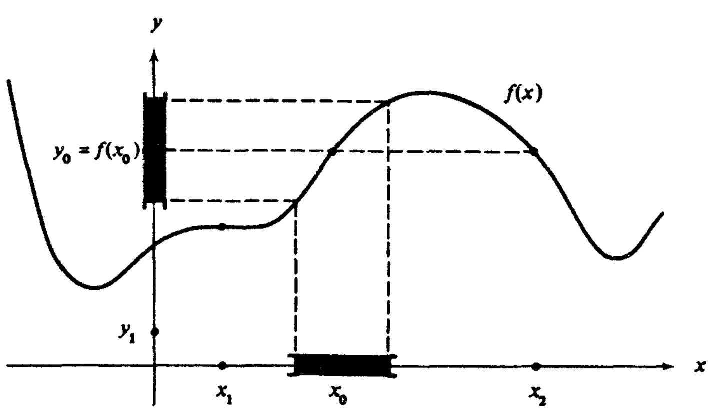
محاسبهٔ مشتق تابع معکوس $f^{-1}(y)$، با استفاده ازقاعدهٔ زنجیری، آسان است: از $x=f^{-1}(f(x))$ به‌دست می‌آوریم $(df^{-1}/dy)\cdot f'(x)=1$، درنتیجه

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=f(x)}=\frac{1}{\dfrac{df}{dx}}$$

برای تحقیق اینکه f^{-1} واقعاً دیفرانسیل‌پذیر است به‌دقت بیشتری نیاز داریم.

اگر $f'(x_{\circ})=\circ$، آنگاه f، درمجاورت $x_{\circ}$، می‌تواند معکوس‌پذیر باشد ومی‌تواند نباشد؛ درشکل۷ـ۱، f، درمجاورت x_1، معکوس‌پذیر نیست، ولی $f(x)=x^3$، درمجاورت $x_{\circ}=\circ$، معکوس‌پذیر است. بنابراین، درحالتی که $f'(x_{\circ})=\circ$، هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان به‌دست آورد (به تجزیه و تحلیل بیشتری نیاز داریم). درحالت‌کلی، شرط $f'(x_{\circ})\neq\circ$ تضمین نمی‌کند کـه بتوانیم، به ازای همهٔ yها، $y=f(x)$ را حل‌کنیم. مثلاً برای y_1 درشکل ۷ـ۱، هیچ x_3ی یافت نمی‌شود به طوری‌کـه $f(x_3)=y_1$. همچنین، از همان شکل مشهود است‌که جوابها، به طورکلی، یکتا نیستند، زیرا $f(x_2)=f(x_{\circ})$. فقط اگر توجه ما به یك همسایگی‌کوچك $x_{\circ}$، که به‌طور مناسب انتخاب شده باشد، معطوف شود، یك جواب یکتا وجود خواهد داشت.

بنابراین، همهٔ آنچه که می‌توانیم انتظار داشته باشیم، این است کـه f درنزدیکی $f(x_{\circ})$ معکوس‌پذیر باشد. یعنی، به‌ازای y نزدیك به $f(x_{\circ})$، می‌توانیم معادلهٔ را به‌طور



شکل۷ـ۱

یکتا حل کنیم و xی نزدیک به x_0 چنان بیابیم که $y=f(x)$. این سؤال که «چقدر نزدیک باشد؟» سؤال ظریفی است که در برهان به تجزیه و تحلیل مفصلی نیاز دارد. خوشبختانه، برای بسیاری از اهداف، این مطلب دارای اهمیت نیست.

قضیهٔ ۱ حاوی وضعیت یك متغیره است که به عنوان یك حالت خاص توصیف شده است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ یك مجموعهٔ باز و فرض کنیم $f:A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ متعلق به ردهٔ C^1 باشد (یعنی، Df وجود داشته باشد و پیوسته باشد). فرض کنیم $x_0\in A$ و $Jf(x_0)\neq 0$. آنگاه یك همسایگی x_0 مانند U در A و یك همسایگی باز $f(x_0)$ مانند W وجود دارد به طوری که $f(U)=W$ و f دارای یك معکوس $f^{-1}:W\to U$ متعلق به C^1 است. به علاوه، برای $y\in W$، $x=f^{-1}(y)$، خواهیم داشت:

$$Df^{-1}(y)=[Df(x)]^{-1}$$

معکوس $Df(x)$ بهمعنای معکوس یك نگاشت خطی (متناظر با ماتریس معکوس) است . اگر f متعلق به ردهٔ C^p، $p\geqslant 1$، آنگاه f^{-1} نیز چنین است[1].

گفتن اینکه f یك معکوس f^{-1} دارد دقیقاً بهاین معناست که میتوانیم، بهازای هر $y\in W$، $f(x)=y$ را بهطور یکتا نسبت به $x\in U$ حل کنیم.

برهان قضیهٔ بالا متکی به یك نوع استدلال وجودی است. یعنی، بهازای y نزدیك به y_0، باید وجود xی را ثابت کنیم بهطوری که $y=f(x)$. ابزار فنی اساسیای که بهکار میگیریم عبارت است از اصل تابع انقباض؛ بند ۶.۵ را ببینید. در بند ۶.۵ دیدیم که چگونه آن نتیجه را میتوان برای اثبات وجود جوابهای بعضی ازمعادلات انتگرال ساده بهکار گرفت. در بند ۵.۷ این نوع استدلالات را برای حل معادلات دیفرانسیل نیز بهکار خواهیم گرفت.

مثال ۱. معادلات $(x^4+y^4)/x=u(x,y)$، $\sin x+\cos y=v(x,y)$ را درنظر میگیریم. در نزدیکی کدام نقاط (x,y) میتوانیم این معادلات را نسبت به x، y برحسب u، v حل کنیم؟

حل: در اینجا توابع عبارتند از: $u(x,y)=f_1(x,y)=(x^4+y^4)/x$ و $v(x,y)=f_2(x,y)=\sin x+\cos y$. میخواهیم نقاطی را بشناسیم که در نزدیکی

---

۱. اگر $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ متعلق به ردهٔ C^1 و $Df(x_0)$ یك به یك باشد، آنگاه f نیز، در نزدیکی x_0، بهطور موضعی یك به یك است. به همین ترتیب اگر $Df(x_0)$ پوشا باشد، آنگاه f دریك همسایگی $f(x_0)$ پوشاست. این نتایج کلیتر، ازقضیهٔ ۱، با استفاده از روشهای بند ۲.۷، حاصل میشوند ؛ تمرین ۱۱ درپایان این فصل را ببینید.

آنها می‌توانیم معادلات نامبرده را نسبت به x، y به صورت توابعی از u و v حل کنیم و همچنین می‌خواهیم $\partial x/\partial u$ و غیره را محاسبه کنیم. طبق قضیهٔ تابع معکوس باید ابتدا $\partial(f_1,f_2)/\partial(x,y)$ را محاسبه کنیم. ملاحظه می کنیم که برای $f=(f_1,f_2)$ قلمرو تعریف عبارت است از $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\neq 0\}$. حال

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{3x^4-y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x}\\ \cos x & -\sin y\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin y}{x^2}(y^4-3x^4)-\frac{4y^3}{x}\cos x$$

بنابراین در آن نقاطی که این عبارت صفر نمی‌شود می‌توانیم معادلات را نسبت به x، y برحسب u و v حل کنیم. به عبارت دیگر می‌توانیم معادلات را نسبت به x، y نزدیک آن x، yهایی حل کنیم که برایشان $x\neq 0$ و $(\sin y)\,(y^4-3x^4)\neq 4xy^3\cos x$. چنین شرایطی را معمولاً نمی‌توان به طور صریح حل کرد. مثلاً، اگر $x_0=\pi/2$، $y_0=\pi/2$، می‌توانیم معادلات را نسبت به x، y نزدیک x_0، y_0 حل کنیم، زیرا در آنجا $\partial(f_1,f_2)/\partial(x,y)\neq 0$.

بنابرقضیهٔ ۱، با معکوس کردن ماتریس ژاکوبی، مشتقات $\partial x/\partial u$ وغیره به دست می‌آیند. درحالت 2×2 نتایج به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{Jf(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-1}{Jf(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{-1}{Jf(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{Jf(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}$$

(برای جزئیات بیشتر، مثال ۲ را درپایان همین فصل ببینید).

دراین مثال،

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{-(x^2\sin y)}{\{(\sin y)(y^4-3x^4)-4y^3x\cos x\}}$$

ملاحظه می کنیم که پاسخ برحسب x و y بیان‌شده‌است ونه u، v. بدین‌سان $\partial x/\partial u$ درنقطهٔ $u(x,y)$، $v(x,y)$ محاسبه می‌شود.

قضیهٔ تابع‌معکوس قضیهٔ مفیدی است، زیرا به‌ما می گوید که برای معادلات، جوابهایی داریم وتوضیح می‌دهد که چگونه ازاین جوابها مشتق‌گیری کنیم، اگرچه ممکن است حل صریح معادلات غیرممکن باشد.

مثال ۲. فرض کنیم $u(x, y)=e^x \cos y$ ، $v(x, y)=e^x \sin y$. نشان دهید که $(x,y) \to (u(x, y), v(x, y))$ به طور موضعی معکوس‌پذیر است، ولی معکوس‌پذیر نیست.

حل: در اینجا

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix}$$

$$=e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)=e^{2x}\neq 0$$

درنتیجه، بنابرقضیهٔ تابع معکوس، نگاشت مورد نظر به‌طور موضعی معکوس‌پذیر است. ولی این نگاشت (کلاً) یك به‌یك نیست، زیرا

$$u(x,y+2\pi)=u(x,y), \quad v(x,y+2\pi)=v(x,y)$$

ملاحظه می‌کنیم که برای $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، اگر f دیفرانسیل‌پذیر باشد و اگر، به‌ازای همهٔ مقادیر x، $f'(x)\neq 0$، آنگاه $f'(x)$ یا >0 است یا <0، زیرا f' در قضیهٔ مقدارمیانی صدق می‌کند (تمرین ۲۸، فصل ۶ را ببینید)، ازاین‌رو f باید (کلاً) یك به یك باشد چراکه f همواره افزایشی یا کاهشی است. مثال بالا نشان می‌دهد که لزومی‌ندارد این امر در $\mathbf{R}^2$ رخ دهد.

تمرینهای بند ۷.۱

۱. فرض کنیم $u(x, y)=x^2-y^2$ ، $v(x, y)=2xy$. نشان دهید که نگاشت $(x,y) \to (u,v)$ درهمهٔ نقاط $(x,y)\neq(0,0)$ به‌طور موضعی معکوس‌پذیر است.

۲. در تمرین ۱، $\frac{\partial x}{\partial u}$، $\frac{\partial x}{\partial v}$، $\frac{\partial y}{\partial u}$، $\frac{\partial y}{\partial v}$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنیم $f(x)=x+2x^2\sin(1/x)$ ، $x\neq 0$ ، $f(0)=0$. نشان دهید که $f'(0)\neq 0$، ولی f در نزدیکی ۰ به طور موضعی معکوس‌پذیر نیست. چرا این امر قضیهٔ ۱ را نقض نمی‌کند؟

۴. فرض کنیم $L:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یك ایزومرفیسم خطی باشد، و $f(x)=L(x)+g(x)$، که درآن $\|g(x)\|\leqslant M\|x\|^2$ و f متعلق به ردهٔ C^1 است. نشان دهیدکه درنزدیکی ۰، f به‌طور موضعی معکوس‌پذیر است.

۵. بررسی کنید آیا دستگاه

$$u(x,y,z)=x+xyz;$$

$$v(x,y,z)=y+xy;$$

$$w(x,y,z)=z+۲x+۳z^{۲}$$

را می‌توان، درنزدیکی $(۰,۰,۰)$، نسبت به x، y، z برحسب u، v، w حل کرد یا خیر.

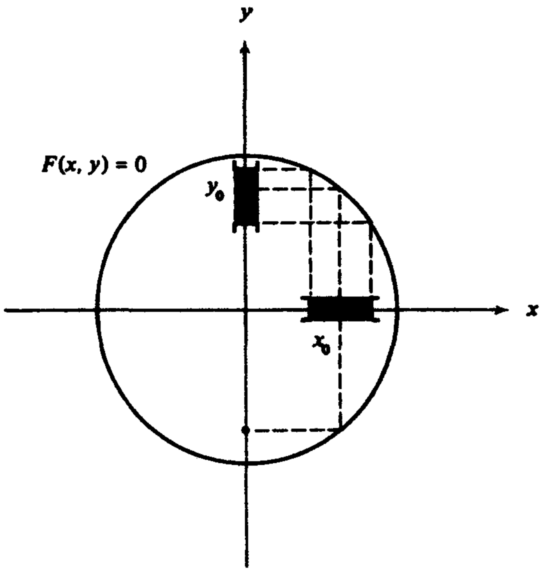
۲.۷ قضیهٔ تابع ضمنی

درجریان مطالعه‌قضیهٔ تابع ضمنی، ما بازهم علاقمند به‌وجود دیفرانسیل‌پذیری‌توابع معینی هستیم. بی‌تردید، دانشجو قبلاً با توابعی‌که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند کارکرده است؛ با وجود این، او (پسر یا دختر) ممکن‌است نداند‌که چرا عملیاتش موجه می‌باشند. پس‌از دیدن چند مثال، پرسشهایی‌که مایلیم مطرح‌کنیم، آشکارتر خواهند شد.

فرض‌کنیم آن x و yهایی را درنظر می‌گیریم‌که به‌وسیلهٔ یك معادلهٔ $F(x,y)=۰$ به‌هم وابسته‌اند. مایلیم بگوییم‌که این معادله تابعی مانند $y=f(x)$ را تعریف می‌کند (می‌گویندکه $y=f(x)$ به طور ضمنی تعریف شده است)، و مایلیم dy/dx را محاسبه کنیم. مانند بند قبلی، برای چنین Fی، درحالت‌کلی نمی‌توانیم آن را صریحاً نسبت به y حل‌کنیم، ازاین‌رو این‌نکته دارای‌اهمیت‌است‌که، بدون الزام به‌حل‌آن، بدانیم چنین‌تابعی واقعاً وجود دارد.

به منظور برانگیختن انگیزه نسبت به نتیجهٔ بعد، تابع $F(x,y)=x^{۲}+y^{۲}-۱$ را درنظرمی‌گیریم. به‌آن x و yهایی علاقمندیم که به‌وسیلهٔ $F(x,y)=۰$ به‌هم‌وابسته‌اند، یعنی دقیقاً دایرهٔیکه. تابعی مانند $f(x)$، یك «جواب» است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر x در قلمرو f، $F(x,f(x))=۰$. روشن است که f باید به وسیلهٔ $f(x)=\pm\sqrt{۱-x^{۲}}$ بیان شود، و هرکدام از اینها یك جواب است. بنابراین ملاحظه می‌کنیم که‌لزومی‌ندارد‌f یکتا باشد. برای $(x_{۰},y_{۰})$ مفروض، به‌طوری‌که $F(x_{۰},y_{۰})=۰$، مایلیم بدانیم آیامی‌توانیم $f(x)$ را چنان بیابیم که $F(x,f(x))=۰$ و f دیفرانسیل‌پذیر و در نزدیکی $(x_{۰},y_{۰})$ یکتا باشد. اگر $x_{۰}\neq\pm۱$، و اگر f را برابربا ریشهٔ دوم مناسب بگیریم، بلی چنین چیزی امکان‌پذیر هست. مقدار مفروض $y_{۰}$ تعیین می‌کندکه کدام ریشهٔ دوم‌باید بر گزیده شود. شکل ۷ـ۲ را ببینید. نقاط $x_{۰}=\pm۱$، به‌دلایل گوناگون، استثنایی هستند. اول‌اینکه F درآنجا دیفرانسیل‌پذیر نیست وثانیاً،درنزدیکی $x_{۰}=\pm۱$، f هریك از دو ریشهٔ دوم می‌تواند باشد، ازاین‌رو به‌طور یکتا معین نیست. این نقاط استثنایی‌دقیقاً همان جاهایی هستند که $\partial F/\partial y=۰$. بدین‌سان، درحالت کلی، ما شرطی مانند $\partial F/\partial y\neq۰$ رامی‌خواهیم که،حداقل به‌طور موضعی، تضمین کندکه ما می‌توانیم یك f دیفرانسیل‌پذیر یکتا چنان بیابیم که $F(x,f(x))=۰$.

درحالت‌کلی تابعی خواهیم‌داشت مانند $F:\mathbf{R}^{n}\times\mathbf{R}^{m}\rightarrow\mathbf{R}^{m}$، و رابطه‌ای درنظر خواهیم‌گرفت مانند $F(x,y)=۰$، یا اگر به‌صورت مبسوط بنویسیم،



شکل ۷-۲

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0\\
\cdot \qquad\qquad & \quad \cdot\\
\cdot \qquad\qquad & \quad \cdot\\
\cdot \qquad\qquad & \quad \cdot\\
F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0
\end{aligned}
$$

و می‌خواهیم این m معادلهٔ را نسبت به m مجهول y_1، . . .، y_m برحسب x_1، . . .، x_n حل کنیم.

قضیهٔ مورد نظر به‌قرار زیر است.

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ تابع ضمنی). فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ یک مجموعهٔ باز و $F: A \to \mathbf{R}^m$ تابعی متعلق به ردهٔ C^p باشد (یعنی F دارای p مشتق پیوسته باشد، که در آن p یک عدد صحیح مثبت است). فرض‌کنیم $(x_0, y_0) \in A$ و $F(x_0, y_0) = 0$.

می‌نویسیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

که در (x_0, y_0) محاسبه شده است و در آن $F = (F_1, \ldots, F_m)$. فرض کنیم که $\Delta \neq 0$. آنگاه یك همسایگی باز $U \subset \mathbf{R}^n$ از x_0 ویك همسایگی V از y_0 در $\mathbf{R}^m$ و یك تابع یکتای $f:U \to V$ وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $x \in U$،

$$F(x, f(x)) = 0$$

به علاوه f متعلق به ردهٔ C^p است.

درواقع خواهیم دیدکه این قضیهٔ، به‌طریقی نسبتاً ساده، ازقضیهٔ تابع معکوس نتیجه می‌شود. دلیل‌شهودی برای‌اعتبار قضیهٔ بالا ولزوم محدودیت $\Delta \neq 0$ باید ازمثال‌قبل آشکار شده‌باشند. ازمعادلهٔ $F(x, f(x)) = 0$، با استفاده‌ازقاعدهٔ زنجیری، Df را می‌توان تعیین کرد. ابتدا، حالت $m = 1$ را می گیریم. آنگاه، بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

بنابراین معادلهٔ مهم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

را به دست می‌آوریم (به علامت منفی توجه کنید). مخصوصاً، خطاب به خواننده، اخطار می‌کنیم که در

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}$$

«حذف» ∂Fها برای یافتن $\partial y/\partial x_i$ نادرست است. بدین‌سان، اگرچه این‌ابتکارات برای از برکردن،گاهی مفید هستند ولی محدودیتهایی دارند.
می‌توانیم جواب کلی را، مانند بالا، فرمول‌بندی کنیم.

فرع ۰۱ درقضیهٔ ۲، $\partial f_i/\partial x_i$ها به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

داده شده‌اند، که در آن $^{-1}$ دلالت بر ماتریس معکوس دارد.

اثبات آن مشابه با حالت $m=1$ است که در بالا داده شد، و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال ۰۱ دستگاه معادلات

$$xu+yv^2=0$$

$$xv^3+y^2u^6=0$$

را درنظر می‌گیریم. آیا این معادلات نسبت به u، v برحسب x و y، در نزدیکی $x=0$، $y=1$، $u=0$، $v=0$، به طور یکتا، قابل حل هستند؟ $\partial u/\partial x$ را، در صورت وجود، در $x=0$، $y=1$ محاسبه کنید.

حل: در اینجا داریم $F(x,y,u,v)=0$ که درآن F به جای سمت چپ معادلات مفروض نشسته است. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توانیم نسبت به $u(x,y)$، $v(x,y)$ حل کنیم. به‌این جهت می‌نویسیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2yv \\ 6y^2u^5 & 3xv^2 \end{vmatrix}$$

که درنقطهٔ داده‌شده، برابر با صفر است. بدین‌سان قضیهٔ تابع‌ضمنی می‌گوید که‌نمی‌توانیم

امیدوار باشیم این معادلات را به‌طور یکتا، نسبت به u، v برحسب x و y حل کنیم. برای اینکه واقعاً حل‌پذیری این دستگاه را تعیین کنیم به‌یك تجزیه و تحلیل مستقیم نیاز داریم که قضیهٔ تابع ضمنی در اختیار ما قرار نداده است.

تمرینهای بند ۲.۷

۱. مستقیماً تحقیق کنید که کجا می‌توانیم معادلهٔ $F(x,y)=y^۲+y+۳x+۱=۰$ را نسبت به y برحسب x حل کنیم.

۲. تحقیق کنید که پاسخ شما درتمرین ۱ با پاسخی که ازقضیهٔ تابع ضمنی انتظار دارید، سازگار است. dy/dx را محاسبه کنید.

۳. $(x,y)\to\left(\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}\,,\,\frac{xy}{x^۲+y^۲}\right)$ را درنظر می‌گیریم. آیا این تابع، در نزدیکی $(۰,۱)$، یك معکوس موضعی دارد؟

۴. حل‌پذیری دستگاه

$$۳x+۲y+z^۲+u+v^۲=۰;$$

$$۴x+۳y+z+u^۲+v+w+۲=۰;$$

$$x+z+w+u^۲+۲=۰,$$

را نسبت به u، v، w برحسب x، y، z در نزدیکی $x=y=z=۰$، $u=v=۰$، $w=-۲$ مورد بحث قرار دهید.

۵. حل‌پذیری

$$y+x+uv=۰;$$

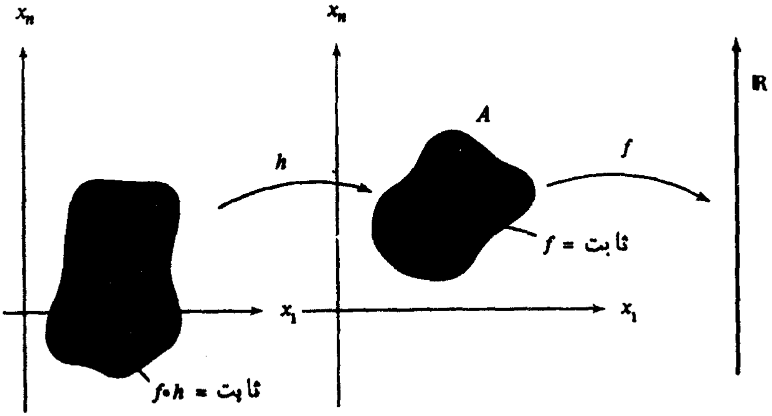
$$uxy+v=۰,$$

را نسبت به u، v برحسب x، y درنزدیکی $x=y=u=v=۰$ موردبحث‌قرار دهید و درستی نتیجه را مستقیماً تحقیق کنید.

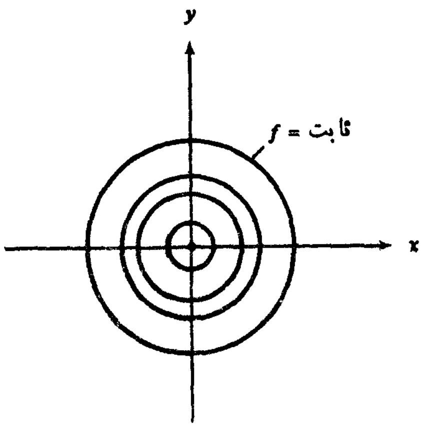
۳.۷ قضیهٔ تسطیح

حال نتیجهٔ دیگری ازقضیهٔ تابع ضمنی را، که درمطالعهٔ رویه‌ها، ابزار فنی با اهمیتی‌است، ارائه می‌کنیم. قطع نظر ازجزئیات، این نتیجه بیان می‌کند که، اگر $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ درنقطه‌ای مانند $x_۰$ دارای مشتقی مخالف با صفر باشد، آنگاه در یك همسایگی $x_۰$، f می‌تواند «تسطیح‌شود»؛ درواقع، f را می‌توان، پس‌از ترکیب کردن با«تعویض‌مختص» یعنی (بنابرتعریف) تابعی هموار که معکوسی هموار داشته باشد، به نگاشتی تبدیل کرد که همان

تصویر بر روی کل محور مختص x_n باشد. شکل ۷ــ۳ را ببینید، که در آن تعویض مختص به‌وسیلهٔ h بیان شده‌است و در آن h، رویه‌های تراز f را، پس‌از تسطیح کردن، به‌صفحات تبدیل می‌کند. نتیجهٔ دقیق در قضیهٔ بعد بیان شده است.



شکل ۷ـ۳



شکل ۷ـ۴

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای باز و $f : A \to \mathbf{R}$ تابعی متعلق به ردهٔ C^p، $p \geqslant 1$ باشد. فرض کنیم $x_0 \in A$ و $Df(x_0) \neq 0$. آنگاه مجموعه‌ای باز مانند U، مجموعه‌ای باز مانند V شامل x_0 و تابعی مانند $h : U \to V$، متعلق به ردهٔ C^p با معکوسی $h^{-1} : V \to U$ متعلق به ردهٔ C^p، وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(h(x_1, \ldots, x_n)) = x_n$$

این قضیهٔ دارای تعمیمی به توابع $f: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$، $m \leqslant n$ است که در تمرین ۳، در پایان همین فصل، آمده است.

موجه بودن این قضیهٔ، از شکل ۷ـ۳ آشکار می‌شود. تابع h بناست که چیزها را چنان بپیچاند تا رویه‌های تراز f، صفحاتی $n-1$ بعدی بشوند. شرط $Df(x_0) \neq 0$ برای این وارد می‌شود که تضمین کند رویه‌های ثابت $= f$ «ناتبهگن» هستند، به‌طور شهودی یعنی $n-1$ بعدی هستند. یك مثال این نکته را روشن خواهد کرد.

مثال ۱. فرض کنیم $f(x,y) = x^2 + y^2$. آیا می‌توانیم f را، در نزدیکی $(0,0)$، «تسطیح کنیم»؟

حل: خیر، لزوماً نمی‌توانیم، زیرا $Df(0,0) = 0$. در حقیقت، این مطلب به طور شهودی آشکار است، زیرا رویه‌های f ثابت، درنزدیکی $(0,0)$، تبهگن می‌شوند چرا که از دوایر به یك نقطه می‌رسند (شکل ۷ـ۴). آشکار است که هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم بدان وسیلهٔ، در نزدیکی $(0,0)$، رویه‌های ثابت $= f$ را به صفحات تبدیل کنیم. اما، درهر نقطهٔ $(x_0, y_0) \neq (0,0)$، این کار را می‌توانیم بکنیم.

مثال ۲. فرض کنیم $f(x, y) = x^3 + x + y$. آیا f می‌تواند، در نزدیکی $(0,0)$، «تسطیح شود»؟

حل: بلی، زیرا $Df(0,0) = (1,1) \neq 0$.

تمرینهای بند ۳.۷

۱. در کدام (x,y)ی، می‌توان $f(x,y) = x^2 - y^2$ را «تسطیح کرد»؟

۲. در تمرین ۱، نمودارهای ثابت $= f$ را رسم کنید و پاسخ خود را، به طور هندسی، توضیح دهید.

۳. آیا $f(x,y) = x^3 + y^2 + 1$ می‌تواند، درنزدیکی $(0,0)$، تسطیح شود؟ درنزدیکی $(0,1)$ چطور؟

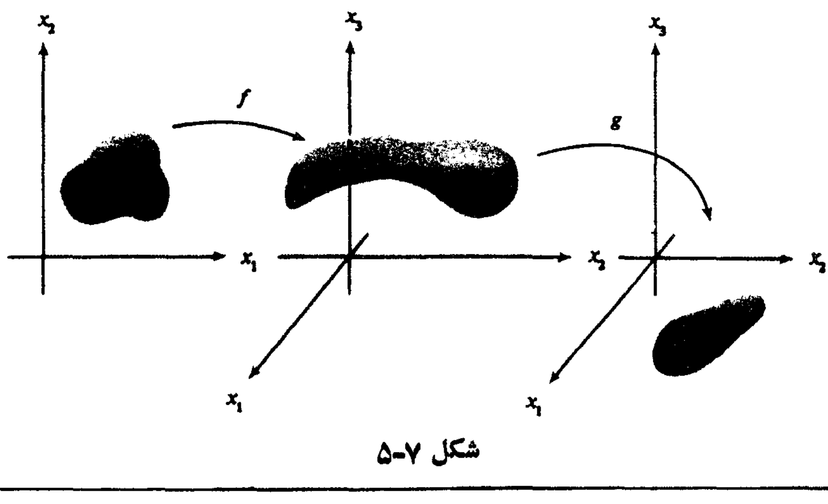
۴.۷ نتایج بیشتری از قضیهٔ تابع ضمنی

قضیهٔ ۳ می‌گوید که می‌توانیم تابعی مانند h بیابیم که قلمرو f را چنان «تسطیح کند» که، خلاصه کلام، $f \circ h$ یك تصویر بشود. نظیر همین مطلب، می‌توانیم درجستجوی تابعی مانند g باشیم که برد f را «تسطیح کند» به‌طوری که $g \circ f$ مانند یك تصویر باشد.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای باز و $f:A\to\mathbf{R}^n$ تابعی متعلق به ردهٔ C^r و $p\leqslant n$ باشند. فرض کنیم $x_0\in A$ و رتبهٔ[1] $Df(x_0)$ برابر با p باشد. دراین‌صورت مجموعه‌هـای بازی مانند U و V در $\mathbf{R}^n$، همراه بـا $f(x_0)\in U$، و تابعی مانند $g:U\to V$، متعلق به‌ردهٔ C^r با معکوسی $g^{-1}:V\to U$، آن هم متعلق به ردهٔ C^r، وجود دارنـد، بـه طـوری کـه، بـه ازای هـر $(x_1,\dots,x_p)\in A$، داشته باشیم $g\circ f(x_1,\dots,x_p)=(x_1,\dots,x_p,0,\dots,0)$.

تصویری ازاین قضیهٔ درشکل ۷ــ۵ آمده است که باید با شکل ۷ــ۳ مقایسه گردد. درحالت مورد بحث فعلی، تابع g تصویر f رامسطح‌می‌کند. توجه داشته باشیم‌که، به‌طور شهودی، این مطلب درست است؛ ما انتظار داریم کـه برد f یك «رویهٔ» p بعدی بشود، ازاین‌رو بایدامکان‌مسطح‌کردن‌آن روی بخشی از $\mathbf{R}^p$ وجود داشته باشد. ملاحظه می‌کنیم که برد یك نگاشت خطی رتبهٔ p، عبارت‌است ازیك زیرفضای‌خطی دقیقاً p بعدی، ازاین‌رو، این نتیجه، به‌یك معنی، تعمیمی ازحالت خطی است.

برای استفاده از قضیهٔ ۳ (یا ۴) باید رتبهٔ Df بـا بعد فضای تصویرش (یا فضای قلمرواش) برابر باشد. اما باز می‌توانیم ازقضیهٔ تابع معکوس استفاده‌کنیم تا به‌ما بگوید که اگر $Df(x)$، دریك همسایگی x_0، دارای رتبهٔ ثابت m است، بتوانیم قلمرو f را با تابع معکوس‌پذیری مانند h، به‌طوری‌که $f\circ h$ فقط به x_1، ...، x_m بستگی داشته باشد، تسطیح‌کنیم. آنگاه می‌توانیم قضیهٔ ۴ را نیز به‌کار ببریم. این، جوهر قضیهٔ بعد و فرع آن است. قطع نظر ازجزئیات، این قضیهٔ می‌گوید که اگر Df در $\mathbf{R}^n$ دارای رتبهٔ m باشد،



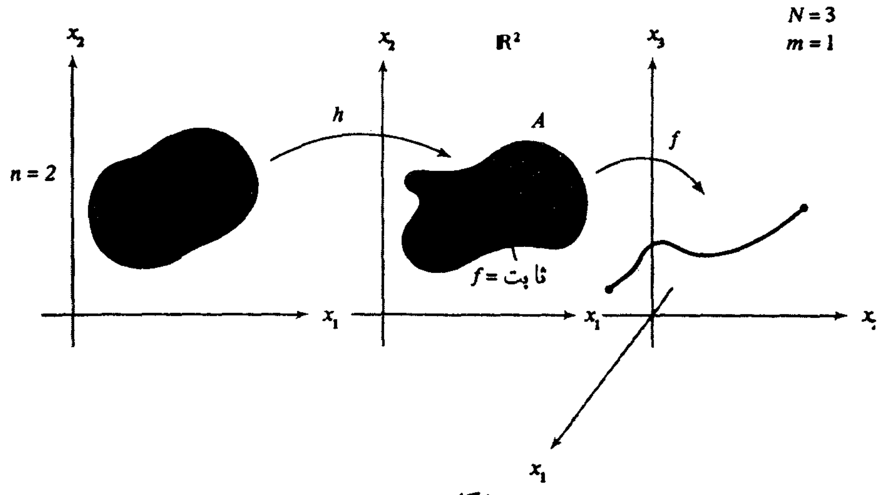
شکل ۷ــ۵

---

۱. یادآوری می‌کنیم که رتبهٔ یك‌نگاشت خطی عبارت است از بعد تصویرآن. به بیانی هم‌ارز، براساس جبرخطی، رتبهٔ عبـارت است از اندازهٔ بزرگترین زیرماتریس مربعی کـه دترمیانی مخالف بـا صفر داشته باشد (بـرای جزئیـات، بـه یك کتـاب جبر خطی دلخواه، مثلا O'Nan, *Linear Algebra*، مراجعه‌کنید).

آنگاه $n-m$ تا از متغیرها زائد هستند و می‌توانند حذف شوند. مثلاً، اگر $f(x,y)=x-y$، $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$، رتبهٔ Df برابر با ۱ است، و بنابراین می‌توانیم f را، با به‌کاربردن فقط یك متغیر، بیان کنیم، یعنی، فرض کنیم $h(x,y)=(x+y,y)$ و درنتیجه $f\circ h(x,y)=x$، که فقط به x بستگی دارد.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^N$ (که درآن A مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^n$ است) یك تابع C^r باشد به طوری که، به‌ازای هر x در یك همسایگی $x_0\in A$، $Df(x)$ دارای رتبهٔ m باشد. آنگاه مجموعه‌ای باز مانند $U\subset\mathbf{R}^n$ و مجموعه‌ای باز مانند $V\subset\mathbf{R}^n$ همراه با $x_0\in V$ وتابعی مانند $h:U\to V$ متعلق به ردهٔ C^r با معکوسی $h^{-1}:V\to U$ متعلق به ردهٔ C^r وجود دارند به‌طوری‌که $f\circ h$ فقط به x_1، ...، x_m بستگی داشته باشد. یعنی، به ازای تابعی مانند $\tilde{f}$ متعلق به C^r، $f\circ h(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=\tilde{f}(x_1,\ldots,x_m)$. شکل ۷-۶ را ببینید.



شکل ۷-۶

فرع ۲. فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^N$ (که درآن A، مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^n$ است) یك تابع متعلق به‌ردهٔ C^r باشد به‌طوری‌که، به ازای هر x در یك همسایگی $x_0\in A$، $Df(x)$ دارای رتبهٔ m باشد. آنگاه مجموعه‌ای باز مانند $U_1\subset\mathbf{R}^n$، مجموعه‌ای باز مانند $U_2\subset\mathbf{R}^n$ همراه با $x_0\in U_2$، مجموعه‌ای باز مانند V_1 حول $f(x_0)$، مجموعه‌ای باز مانند $V_2\subset\mathbf{R}^N$، وتوابعی مانند $h:U_1\to U_2$ و $g:V_1\to V_2$، متعلق به‌ردهٔ C^r وبامعکوسهایی متعلق به ردهٔ C^r وجود دارند به طوری که

$$g\circ f\circ h(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$$

چند کاربرد دیگر از قضیهٔ تابع ضمنی در نظریهٔ رویه‌ها و تکثیرکنهای لاگرانژ (مسائل اکسترمم توأم با قیود)، در بند ۷.۷ داده می‌شوند. همچنین در بندهای زیرین، چند موضوع (اختیاری) را، با همین روشها یا روشهای مشابه، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$، $(x,y) \to (x+y^3, xy, y+y^2)$. آیا برد f را می‌توان، درنزدیکی $(0,0)$، «تسطیح کرد»؟

حل: دراینجا، قضیهٔ ۴ را به‌کارمی‌گیریم. ابتدا،ماتریس ژاکوبی را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3y^2 \\ y & x \\ 0 & 1+2y \end{bmatrix}$$

که، در $(0,0)$، برابر است با

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌دارای رتبهٔ ۲ است (زیرا یك زیرماتریس 2×2 با دترمینان غیرصفر دارد). بنابراین قضیهٔ ۴ به‌کار می‌رود، از این رو می‌توانیم برد آن تابع را تسطیح کنیم. به طور شهودی، درنزدیکی $(0,0)$، این برد عبارت خواهد بود ازیك رویهٔ دو بعدی.

مثال ۲. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$، $f(x,y)=x^2+y$. آیا می‌توان f را، درنزدیکی $(0,0)$، به‌صورت تابعی فقط ازیك متغیر بیان کرد؟

حل: بلی، زیرا (بنابرقضیهٔ ۵)، $Df(0,0)=(0,1)\neq 0$. توجه کنید که می‌توان به‌این پرسش، با استفاده ازقضیهٔ ۳ نیز پاسخ داد.

تمرینهای بند ۴.۷

۱. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$، $(x,y) \to (x+y^2, xy, y^2)$. آیا می‌توان برد آن را، درنزدیکی $(0,0)$ تسطیح کرد؟ درنزدیکی $(0,1)$ چطور؟

۲. قضیهٔ ۵ دربارهٔ $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$، $(x,y,z) \to (x^2+2y^2, z^2+3xy)$، درنزدیکی $(0,0,0)$، چه می‌گوید؟ درنزدیکی $(0,1,0)$ چطور؟

۳. فرع ۲ دربارهٔ $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$، $(x,y,z) \to (x+2y, 6x+12y, x+y^3+z^3)$، درنزدیکی $(0,0,0)$ چه می‌گوید؟

۴. گزارهٔ مندرج در فرع ۲ را، درحالتی‌که f یك نگاشت خطی باشد، مورد بررسی قرار دهید.

۵.۷ یك قضیهٔ وجودی برای معادلات دیفرانسیل معمولی

در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌آموزیم که چگونه معادلات دیفرانسیل خطی ساده را حل کنیم؛ مثلاً، می‌آموزیم که جواب $d^2x/dt^2 + k^2x = 0$ عبارت است از $x(t) = A\cos(kt-\omega)$، که درآن A و ω ثابت هستند. جالب توجه این‌است که‌بررسی کنیم آیا معادلات دیفرانسیل کلی همیشه دارای جواب هستند یا خیر. این مطلب، مشغلهٔ اصلی ما در اینجا خواهد بود. روشهایی را که مورد استفاده قرار می‌دهیم سازنده هستند و برای محاسبات عددی مفید می‌باشند؛ یعنی دنباله‌ای معین از جوابهای تقریبی ساخته می‌شود.

یك مثال می‌تواند به‌این موضوعات روشنی بخشد.

مثال ۱. معادلهٔ غیرخطی $dx/dt = x^2$، $x(0) = 1$ را درنظر می‌گیریم. آیا می‌توانیم $x(1)$ را محاسبه‌کنیم؟

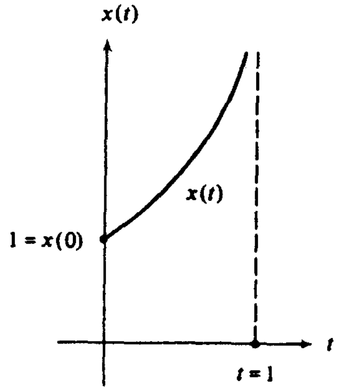
حل: در این حالت می‌توانیم این معادله را به طور صریح حل کنیم: داریم $dx/x^2 = dt$، بنابراین، پس ازانتگرالگیری، $-1/x = t+C$، یعنی، $x = -1/(t+C)$. در $t=0$، داریم $x=1$، ازاین‌رو $C=-1$. بدین‌سان $x = 1/(1-t)$ جواب مطلوب است. این تنها جوابی است که در $t=0$، با $x(0)=1$ آغاز می‌شود. در $t=1$، این جواب $x(t)$ ازبین می‌رود. بدین‌سان $x(1)$ معین نیست. توجه کنید که نمی‌توانیم یك جواب دیفرانسیل‌پذیر $x(t)$، که به ازای همهٔ مقادیر $t \geqslant 0$ معین باشد، بیابیم. (شکل ۷-۷).

این مثال این نکته مهم‌را خاطرنشان می‌سازدکه، درحالت‌کلی، ممکن‌است‌جوابهای $x(t)$ ما، فقط دریك tـ بازهٔ کوچك، معین و دیفرانسیل‌پذیر باشند.

دراینجا مطلب دیگری نیز دارای‌اهمیت است. اگر معادلات دیفرانسیل برداری را مجاز بدانیم، آنگاه ممکن است معادلات مراتب بالاتر به‌معادلات مرتبهٔ اول تحویل‌شوند. مثال ۲ این مطلب را روشن خواهدکرد.

مثال ۲. $d^2x/dt^2 + kx = 0$ را به‌یك معادلهٔ مرتبهٔ اول تحویل کنید.

حل: قرار می‌دهیم $y = dx/dt$ و می‌نویسیم:



شکل ۷-۷

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -kx \end{cases}$$

که نسبت به‌بردار (x,y)، مرتبهٔ اول است، و با معادلهٔ اولیهٔ هم‌ارز می‌باشد.

حال قضیهٔ اصلی وجود و یکتایی ارائه خواهد شد. دراین قضیه، برای نمایش گوی بستهٔ به‌شعاع r حول $x_\circ$، می‌نویسیم $\bar{D}(x_\circ,r)$، ازاین‌رو

$$\bar{D}(x_\circ,r) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|x_\circ - y\| \leqslant r\}$$

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $f:[-a,a]\times \bar{D}(x_\circ,r) \to \mathbf{R}^n$، نگاشت پیوستهٔ مفروضی باشد. قرارمی‌دهیم $C = \sup\{\|f(t,x)\| \mid (t,x) \in [-a,a]\times \bar{D}(x_\circ,r)\}$. فرض کنیم ثابتی مانند K وجود دارد به طوری که، به ازای هر $t\in[-a,a]$، $x,y \in \bar{D}(x_\circ,r)$،

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leqslant K\|x-y\|$$

فرض کنیم $b < \min\{a, r/C, ۱/K\}$. آنگاه یك نگاشت یکتای به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر $x:[-b,b] \to D(x_\circ,r) \subset \mathbf{R}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{cases} x(\circ) = x_\circ & \text{(شرط اولیهٔ)}\,, \\ \dfrac{dx}{dt} = f(t,x(t)) \end{cases}$$

شرط اصلی‌ای که دربارهٔ f فرض می‌کنیم، شرط لیپشیتس زیر است:

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant K\|x-y\|$$

در اینجا K را ثابت لیپشیتس می‌نامند و می‌گوییم f، نسبت به متغیر x، لیپشیتس است. برای تحقیق دراینکه این شرط موجود است، ابتکار زیر اغلب به‌کار می‌رود.

۱ابتکار: اگر، به ازای t ثابت، $D_xf(t,x)$ برمشتق f دلالت کند، و به ازای هر $y\in\mathbf{R}^n$، $\|D_xf(t,x)y\|\leqslant K\|y\|$، آنگاه f لیپشیتس است با ثابت لیپشیتس K. مثلاً، اگر $n=1$ و اگر، برای $-a\leqslant t\leqslant a$ ، $-r\leqslant x-x_0\leqslant r$ ، داشته باشیم $|\partial f(t,x)/\partial x|\leqslant K$، آنگاه شرط فوق‌الذکر برقرار است.

مطلب بالا، با استفاده ازقاعدهٔ زنجیری به‌طریق زیر، آشکار می‌شود:

$$\frac{d}{ds}f(t,y+s(x-y))=D_xf(t,y+s(x-y))\cdot(x-y)$$

بنابراین، پس از انتگرال‌گیری، بین $s=0$ و $s=1$،

$$f(t,x)-f(t,y)=\int_0^1 D_xf(t,y+s(x-y))\cdot(x-y)ds$$

اگر از دو طرف این تساوی قدرمطلق بگیریم، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. معمولاً ابتکار قبلی را به‌عنوان روشی برای تعیین K مورد استفاده قرارمی‌دهیم. توجه‌داشته‌باشید که اگر f متعلق به ردهٔ C^1 باشد، چنین Kای همواره وجود خواهد داشت (چرا؟)

اغلب، f مستقل از t است، که در این حالت می‌گوییم یك دستگاه خودگردان داریم. اگر f فقط پیوسته باشد، وجود (ولی نه یکتایی) $x(t)$ درقضیه ۶ باز قابل اثبات است؛ تمرین ۴۵ را درپایان فصل ۵ ببینید.

پندارهٔ برهان قضیهٔ ۶ متکی براستفاده از تقریبات متوالی است؛ با

$$x_1(t)=x_0,$$

شروع می‌کنیم و می‌نویسیم

$$x_2(t)=x_0+\int_0^t f(s,x_1(s))ds$$
$$x_3(t)=x_0+\int_0^t f(s,x_2(s))ds$$
$$\vdots$$
$$x_n(t)=x_0+\int_0^t f(s,x_{n-1}(s))ds$$

آنگاه می‌خواهیم ثابت کنیم که $x_n(t)$ به‌سمت یک جواب $x(t)$ همگراست که در

$$x(t)=x_\circ+\int_\circ^t f(s,x(s))ds$$

صدق خواهد کرد (این معادلهٔ هم‌ارز است با معادلهٔ دیفرانسیل مفروض به اضافهٔ شرط اولیهٔ).

اگراین مطلب را با بند ۶، فصل ۵، مقایسه کنیم، می‌بینیم آن چیزی که واقعاً جریان دارد، عبارت‌است ازجستجو برای‌یافتن یک‌نقطهٔ ثابت نگاشتی ازیک تابع به‌سوی‌دیگری، که به‌وسیلهٔ

$$y(t)\mapsto x_\circ+\int_\circ^t f(s,y(s))ds$$

مشخص شده است، و ممکن است انتظار داشته باشیم که بتوانیم اصل نگاشت انقباض را مورد استفاده قرار دهیم. در واقع می‌توانیم، و برهان قضیهٔ بالا عملاً این چنین انجام می‌گیرد.

مثال ۳۰ درمثال ۱، b را محاسبه کنید.

حل: در اینجا معادلهٔ ما عبارت است از $dx/dt=x^۲$، $x(\circ)=۱$. فعلاً، فرض کنیم که a، r نامعین باشند. حال

$$C=\sup\{|f(t,x)|\ |-a\leqslant t\leqslant a,\ -r\leqslant x-۱\leqslant r\}$$

$$=\sup\{x^۲|-r\leqslant x-۱\leqslant r\}$$

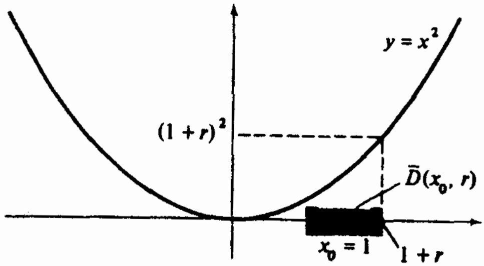
$$=(r+۱)^۲$$

(شکل ۷-۸ را ببینید). بدین‌سان $r/C=r/(r+۱)^۲$. همچنین $\partial f/\partial x=۲x$، ازاین‌رو

$$K=\sup\{۲|x|\ |-r\leqslant x-۱\leqslant r\}$$

$$=۲(r+۱)$$

چون a در این عبارت نقشی ندارد، می‌توانیم a را، به‌قدر کافی بزرگ، چنان انتخاب کنیم که اشکالی پیش نیاورد، مثلاً، $a=۱۰۰$. آنگاه، بنابرقضیهٔ فوق‌الذکر، باید b را چنان برگزینیم که



شکل ۷-۸

$$b < \min\left\{\frac{r}{(r+۱)^۲}, \frac{۱}{۲(r+۱)}\right\}$$

این نوع تخمین، به‌ازای هر r دلخواهی، کارساز است. مثلاً، اگر قرار دهیم $r = ۱$، آنگاه یك‌زمان وجودی مانند $b < ۱/۴$ به‌دست می‌آوریم. این مقدار به‌خوبی آن تخمینی نیست که از بررسی مستقیم حاصل می‌شود (یعنی یك زمان وجودی <۱)، اما می‌توانیم قضیهٔ نامبرده را مجدداً به‌کار ببریم، تا در $t = ۱/۴$، یك زمان وجودی جدید به دست آوریم و همین طور، گام به‌گام، تا هر مقدار $t < ۱$ ادامه دهیم. ولی هرگز نمی‌توانیم فراتر از $t = ۱$ برویم.

تمرینهای بند ۵.۷

۱. به وسیلهٔ روش تقریبات متوالی، $dx/dt = ۱ + x^۲$، $x(۰) = ۰$ را حل کنید. آیا، به‌ازای هر $t \geqslant ۰$، $x(t)$ تعریف شده است؟

۲. در تمرین ۱، b را، با استفاده از قضیهٔ ۶، محاسبه کنید.

۳. نشان دهید که $dx/dt = \sqrt{x}$، $x(۰) = ۰$ دو جواب دارد:

$$x(t) = \begin{cases} ۰, & t \leqslant ۰, \\ \dfrac{t^۲}{۴}, & t > ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad x(t) = ۰$$

آیا این مطلب، قضیهٔ ۶ را نقض می‌کند؟

۴. معادلهٔ $dx/dt = te^{x^۲}\sin x$، $x(۰) = ۱$ را درنظرمی گیریم. تخمینی برای طولانی‌ترین بازه‌ای که در آن جواب $x(t)$ می‌تواند معین باشد، بیابید.

۵. فرض کنیم A یك ماتریس $n \times n$ باشد و دستگاه خطی

$$\frac{dx}{dt}=A\cdot x(t), \qquad x(t)\in\mathbf{R}^n$$

را درنظر می گیریم.

(الف) نشان دهید که یك جواب آن عبارت است از

$$x(t)=e^{tA}x(0) \text{، که درآن } e^B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}$$

(ب) دراینجا زمان وجودی، برای همهٔ tها، گسترش می‌یابد؛ آیا این نکته را نیز می‌توان به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۶ به‌دست آورد؟

۶.۷ لم مورس

درفصل ۶، بند ۹ دیدیم که هسین یك تابع $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$، در یك نقطهٔ بحرانی، رفتار موضعی f را در نزدیکی آن نقطه تعیین می کرد. لم مورس، این نتیجه را یك گام فراتر می‌برد. این لم می گوید که اگر، مثلاً، f درنقطه x_0 یك‌مینیمم موضعی داشته باشد، نه‌فقط f مانند یك سهمیگون است، بلکه می‌توانیم مختصات را چنان تغییر دهیم (همانند بندهای ۳.۷ و ۴.۷) که، درمختصات جدید، f واقعاً یك سهمیگون «باشد». این «لم» (که درواقع یك «قضیهٔ» است) همچنین درمورد رویه‌های زینی کاربرد دارد.

لم مورس، در زمینهٔ کارهای پیشرفته‌تر در شاخه‌های توپولوژی و آنالیز، دارای اهمیت بنیادی است، ولی حتی دراینجا نیز ما را درشناخت شکل توابع، در نزدیکی یك نقطهٔ بحرانی، یاری می‌دهد.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ باز و $f:A\to\mathbf{R}$ یك تابع هموار باشد (یعنی، f بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر باشد). فرض کنیم $Df(x_0)=0$ و هسین f در x_0 عادی باشد. آنگاه یك همسایگی U نقطهٔ x_0 و یك همسایگی V نقطهٔ 0 در $\mathbf{R}^n$ و یك نگاشت هموار $g:V\to U$، با معکوسی هموار، وجود دارند به طوری که $f\circ g=h$ به‌صورت

$$h(y)=f(x_0)-[y_1^2+y_2^2+\cdots+y_\lambda^2]+[y_{\lambda+1}^2+\cdots+y_n^2]$$

درآید، که درآن λ عدد ثابت صحیحی بین 0 و n است.

g را یك تعویض مختصات می‌نامندو از $y=g^{-1}(x)$ به عنوان مختصات جدید یاد می‌کنیم.

یك نقطهٔ بحرانی را که در آن ماتریس هسین $\Delta=-\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$ عادی باشد یك نقطهٔ بحرانی ناتبهگن می‌نامند. بدین‌سان قضیهٔ ۷، توصیف نسبتاً کاملی از توابع، در

همسایگی یك نقطهٔ بحرانی ناتبهگن، به‌دست می‌دهد. عدد λ را اندیس این نقطهٔ بحرانی می‌نامند. شکل ۷-۹ نمودار فرمهای‌درجهٔ دوم $-y_1^2-\dots-y_\lambda^2+y_{\lambda+1}^2+\dots+y_n^2$ را در $\mathbf{R}^2$، برای اندیسهای گوناگون، نشان می‌دهد.

تعیین اندیس برای توابع دو متغیره آسان است؛ یعنی، اگر Δ معین مثبت باشد (بند ۹.۶ را ببینید)، اندیس با ۲ برابر است؛ اگر Δ معین منفی باشد، اندیس با صفر برابر است، و درغیر این دو حالت، اندیس با یك برابر است. (توجه کنیدکه چگونه این مطلب به قضیهٔ ۱۲ ازفصل ۶ گره می‌خورد.)

درحالت کلی، برای یافتن اندیس، به مقدار کمی بیشتر از جبر خطی نیاز داریم. خوانندهٔ مطلع می‌تواند تحقیق کند که اندیس، دقیقاً، برابر است با تعداد مقادیر ویژهٔ مثبت Δ.

مثال ۱. شکل رویهٔ $z=x^2+2xy+2y^2+y^3$، درنزدیکی $(0,0)$، چگونه است؟

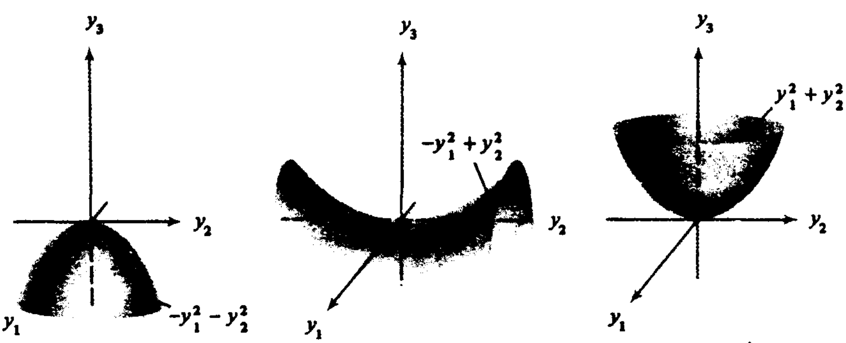
حل: در $(0,0)$ یك نقطهٔ بحرانی داریم و هسین عبارت است از

$$\Delta=\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

که معین‌منفی‌است، زیرا $-2<0$ و $\det(\Delta)=(-2)(-4)-(-2)(-2)>0$. بدین‌سان اندیس باصفر براست، و درنزدیکی $(0,0)$، رویهٔ نامبرده تقریباً یك سهمیگون است، و در دستگاه مختصات دیگری، این رویه دقیقاً یك سهمیگون می‌باشد.

مثال ۲. اندیس $x^2-3xy+y^2+8xy^2+6$ را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

حل: $(0,0)$ یك نقطهٔ بحرانی است و هسین عبارت است از



اندیس = ۲ ‏ ‏ ‏ اندیس = ۱ ‏ ‏ ‏ اندیس = ۰

شکل ۷-۹ (الف) اندیس = ۰. (ب) اندیس = ۱. (پ) اندیس = ۲.

$$\Delta=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

که نه معین مثبت و نه معین منفی است. بدین‌سان اندیسی برابر با ۱ داریم و بنابراین در $(۰,۰)$ یك نقطهٔ زینی داریم.

تمرینهای بند

۱. اندیس $۲x^۲+۶xy-y^۲+y^۴$ را در $(۰,۰)$ محاسبه کنید.

۲. شکل رویهٔ $x^۲+۳xy-y^۲$ در $(۰,۰)$ چگونه است؟

۳. آیا قضیهٔ ۷ درمورد $x^۲-۲xy+y^۲$ کاربرد دارد؟ چه رخ می‌دهد؟

۴. فرض کنیم $f(x,y)=x^۲+y^۲+۳y^۳+۸x^۴+x^۲e^x\sin x+۶$. نشان دهید که مختصات جدیدی مانند ξ، η وجود دارند، که درآن

$$\xi=\xi(x,y),\ \ \eta=\eta(x,y)$$

و برای آنها، درتمامی یك همسایگی $(۰,۰)$،

$$f(x,y)=\xi^۲+\eta^۲+۶$$

۵. (الف) اگر f، در $x_۰\in\mathbf{R}^n$، یك نقطهٔ بحرانی ناتبهگن داشته باشد، نشان دهید که یك همسایگی $x_۰$ وجود دارد که شامل هیچ نقطهٔ بحرانی دیگری نیست.
(ب) نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^۲y^۲$ کدامین هستند؟

۷.۷ اکسترممهای مقید و تکثیر کنهای لاگرانژ

در بعضی از مسائل می‌خواهیم تابعی را، تحت قیود معینی یا شرایطی جنبی، بیشینه سازیم. چنین وضعیتی، مثلاً، در اقتصاد پیش می‌آید. فرض کنیم شما دو نوع کالا می‌فروشید، مثلاً، I و II؛ فرض کنیم x و y بیانگر کمیتهای فروخته‌شده ازهریك از آنها باشد. آنگاه فرض کنیم $f(x,y)$ بیانگر سودی باشد که ازفروش مقدار x از I ومقدار y از II نصیب ما می‌شود. اما تولید ما، به خاطر سرمایه، محدود است، ازاین‌رو مقید هستیم که تحت رابطه‌ای، مثلاً، $g(x,y)=۰$، کار کنیم. بدین‌سان می‌خواهیم $f(x,y)$ را، بین آن x و yهایی که در $g(x,y)=۰$ صدق می‌کنند، بیشینه سازیم. شرط $g(x,y)=۰$ را قید این مسئله می‌نامند.

هدف ازاین بند آن است که، مختصراً، روشهایی را مورد بحث قرار دهیم که ما را

قادر خواهند ساخت تا این وضعیت و وضعیتهای مشابه را مورد بررسی قرار دهیم. نتیجهٔ اصلی دراین زمینه، قضیهٔ ۸ است.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم $f:U\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ و $g:U\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ توابعی متعلق به‌ردهٔ C^1 باشند. فرض کنیم $x_0 \in U$، $g(x_0)=c_0$ و فرض کنیم $S=g^{-1}(c_0)$، مجموعهٔ تراز g، به‌ازای مقدار c_0، باشند. فرض کنیم $\nabla g(x_0)\neq 0$. اگر $f|S$، که به معنای تحدید f به S است (یعنی، به‌آن $x\in U$هایی کـه در $g(x)=c_0$ صدق می‌کنند)، در x_0، یك ماکسیمم یـا مینیمم داشته باشد، آنگـاهٔ یك عدد حقیقی λ وجود دارد به‌طوری که

$$\nabla f(x_0)=\lambda \nabla g(x_0)$$

پندارهٔ اثبات به قرار زیر است. یادآوری می‌کنیم که فضای مماس بر S، در x_0، به‌صورت فضایی‌که بر $\nabla g(x_0)$ عموداست تعریف می‌شود (بند ۶.۶ را ببینید). دلیل این تعریف را، با درنظرگرفتن مماسهای برمسیرهای $c(t)$ کـه در S قرار دارند، به‌صورت زیر بیان‌کردیم: اگر $c(t)$ مسیری در S باشد، $c(0)=x_0$، آنگاه $c'(0)$، برداری مماس بر S در x_0 است، زیرا

$$\frac{d}{dt}\,g(c(t))=\frac{d}{dt}c_0=0$$

و ازطرف دیگر، بنابرقاعدهٔ زنجیری،

$$\left.\frac{d}{dt}\,g(c(t))\right|_{t=0}=\nabla g(x_0)\cdot c'(0)$$

بنابراین $c'(0)$ بر $\nabla g(x_0)$ عمود است.

حال اگر $f|S$ در x_0 یك ماکسیمم داشته باشد، آنگـاه $f(c(t))$ در $t=0$ یقیناً یك ماکسیمم خواهد داشت. درنتیجه،

$$0=\left.\frac{d}{dt}f(c(t))\right|_{t=0}=\nabla f(x_0)\cdot c'(0)$$

بدین‌سان $\nabla f(x_0)$ نیز بـرفضای مماس بر S در x_0 عمود است و ازاین‌رو $\nabla f(x_0)$ و $\nabla g(x_0)$ موازی هستند. چـون $\nabla g(x_0)\neq 0$، نتیجه می گیریم کـه $\nabla f(x_0)$ مضربی از $\nabla g(x_0)$ می‌باشد، که این دقیقاً، همان نتیجهٔ قضیهٔ فوق‌الذکر است.

حال از این برهان، هندسهٔ این وضعیت را استخراج و فرعی به صورت زیر تنظیم می کنیم.

فرع ۰۳ اگر f، وقتی که به رویهٔ S مقید شود، در $x_\circ$ یك ماکسیمم یا مینیمم داشته باشد، آنگاه $\nabla f(x_\circ)$، در $x_\circ$، بر S عمود است (شکل ۷ـ۱۰ را ببینید).

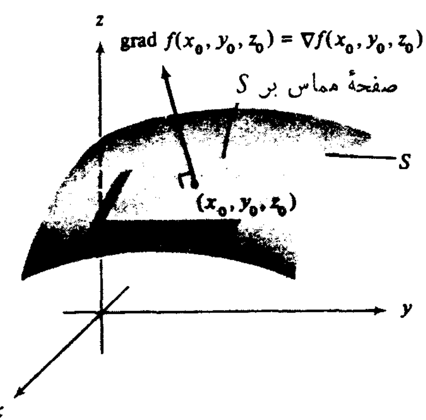
این نتایج به ما می‌گویند که برای یافتن اکسترممهای مقید f، باید به آن $x_\circ$هایی که دراحکام قضیهٔ یا فرع نامبرده صدق می‌کنند، بنگریم. چند مثال ازنحوهٔ کاربرد هرکدام ارائه خواهیم داد.

هنگامی که روش مندرج در قضیهٔ ۸ مورد استفاده قرار می‌گیرد، باید در جستجوی نقطه‌ای مانند $x_\circ$ و ثابتی مانند λ، موسوم بـه یك تکثیرکن لاگرانژ، باشیم به طوری کـه $\nabla f(x_\circ)=\lambda\nabla g(x_\circ)$. این روش، ماهیتاً، بیشتر تحلیلی است، درصورتی که روش فرع ۳ بیشتر هندسی است.

متأسفانه، بـرای مسائل مقید، آزمون ساده‌ای بـرای تمیز ماکسیممها از مینیممها، نظیر آنچه که دربند ۹.۶ درمورد اکسترممهای نامقید دیدیم، وجود ندارد. بنابراین باید هر $x_\circ$ را جداگانه بررسی کنیم و برای این منظور، داده‌های مفروض یا استدلالات دیگر هندسی را، مورد استفاده قرار دهیم.

مثال ۰۱ فرض کنیم $S\subset \mathbf{R}^2$ خطی مار بر $(-1,\circ)$ و با زاویهٔ میل 45° باشد، و فرض کنیم $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $(x,t)\to x^2+t^2$. مینیمم f را، روی S، بیابید.

حل: در اینجا $S=\{(x,y)|y-x-1=\circ\}$، از این رو انتخاب می‌کنیم $g(x,y)=y-x-1$. اکسترممهای نسبی f را باید بین نقاطی یافت، که در آنها، ∇f بر S عمود باشد، یعنی، دارای زاویهٔ میل -45° باشد. امـا $\nabla f(x,t)=(2x,2t)$، و هنگامی شیب مطلوب را داراست، که $x=-t$، یا (x,t) برخط L، ماربر مبدأ و بازاویهٔ میل -45°، قرار داشته باشد. برای نقطه‌ای مانند (x,t) واقع در مجموعهٔ S، فقط وقتی



شکل ۷ـ۱۰ هندسهٔ اکسترممهای مقید

این مطلب پیش می‌آید که برتنها نقطهٔ تقاطع L با S منطبق باشد (شکل ۷ـ۱۱ را ببینید). اشاره به خمهای تراز f براین نکته دلالت دارد که این نقطهٔ، یعنی $(-۱/۲, ۱/۲)$، یك مینیمم نسبی $f|S$ است (ونه f).

مثال ۲. فرض‌کنیم $f:\mathbf{R}^۲ \rightarrow \mathbf{R}$، $(x,y) \rightarrow x^۲ - y^۲$، و S دایـرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۱ باشد. نقاط بحرانی f را برروی S بیابید.

حل: در اینجا $S = g^{-۱}(۱)$، کـه در آن $g:\mathbf{R}^۲ \rightarrow \mathbf{R}$، $(x,y) \rightarrow x^۲ + y^۲$. خمهای تراز، فضاهـای مماس، وگرادیانهـا درشکل ۷ـ۱۲ نمایش داده شده‌اند. آشکار است کـه گرادیان f، درچهار نقطهٔ $(\pm ۱, ۰)$، $(۰, \pm ۱)$، بر S عمود هستند و اینها، به‌ترتیب، عبارتند از، مینیممها و ماکسیممهای نسبی $f|S$.

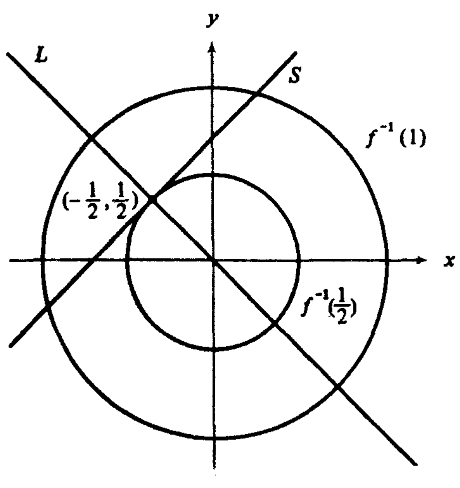
این مسئله را می‌توان، به وسیلهٔ روش تکثیرکنهای لاگرانژ، به‌طور تحلیلی به‌انجام رساند. آشکار است که،

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (۲x, -۲y)$$

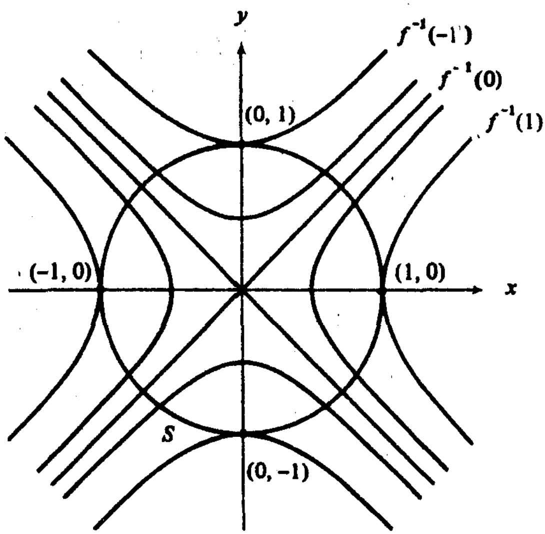
و

$$\nabla g(x,y) = (۲x, ۲y)$$

بدین‌سان، طبق قضیهٔ ۱، تلاش می‌کنیم λی بیابیم که



شکل ۷ـ۱۱ تعیین مکان نقاط بحرانی f مقید به S



شکل ۷-۱۲

$$\begin{cases}(2x,-2y)=\lambda(2x,2y)\\(x,y)\in S, \quad \text{یا} \quad x^2+y^2=1\end{cases}$$

اینها سه‌معادله هستند که می‌توانیم نسبت به‌سه مجهول x، y، و λ حل کنیم. از $2x=\lambda 2x$ نتیجه می‌گیریم که $x=0$ یا $\lambda=1$. اگر $x=0$ آنگاه $y=\pm 1$ و $-2y=\lambda 2y$ مستلزم $\lambda=-1$ است. اگر $\lambda=1$، آنگاه $y=0$ و $x=\pm 1$. بدین‌سان همان نقاط $(0,\pm 1)$، $(\pm 1,0)$ را، که قبلاً به‌دست آورده بودیم، به دست می‌آوریم. همان‌گونه که متذکر شدیم، این روش فقط جای اکسترممهای بالقوه را مشخص می‌کند؛ تعیین اینکه ماکسیمم یا مینیمم هستند یا هیچ‌کدام، باید به وسیلهٔ ابزار دیگری انجام گیرد.

اگر رویهٔ S، به‌وسیلهٔ تعدادی قیود، تعریف شده باشد،

$$\begin{aligned}g_1(x_1,\dots,x_n)&=c_1\\g_2(x_1,\dots,x_n)&=c_2\\&\vdots\\g_k(x_1,\dots,x_n)&=c_k\end{aligned}$$

(در بالا درست یك g داشتیم)، آنگاه قضیهٔ ۸ را می‌توان، به‌قرار زیر، تعمیم داد. اگر f، در $x_\circ$، یك ماکسیمم یا مینیمم برروی S داشته باشد، باید ثابتهایی مانند λ_1، . . .، λ_k وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\nabla f(x_\circ)=\lambda_1\nabla g_1(x_\circ)+\cdots+\lambda_k\nabla g_k(x_\circ)$$

این حکم را می‌توان، با تعمیم روشی که برای برهان قضیهٔ ۸، مورد استفاده قرار دادیم، اثبات کرد. این استدلال را به خوانندهٔ علاقمند واگذار می‌کنیم. حال می‌پردازیم به‌ارائه مثالی ازچگونگی کاربرد این فرمول‌بندی کلی.

مثال ۴. نقاط نهایی $f(x,y,z)=x+y+z$ را، تحت شرایط $x^2+y^2=2$، و $x+z=1$، بیابید.

حل: دراینجا، دوقید وجود دارد،

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$$

و

$$g_2(x,y,z)=x+z-1=0$$

بدین‌سان باید x، y، z و λ_1 و λ_2 را چنان بیابیم که

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)$$

و

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

یعنی،

$$\begin{cases} 1=\lambda_1\cdot 2x+\lambda_2\cdot 1 \\ 1=\lambda_1\cdot 2y+\lambda_2\cdot 0 \\ 1=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+z=1 \end{cases}$$

اینها پنج معادله نسبت به x، y، z، λ_1 و λ_2 هستند. از سومی، $\lambda_2 = 1$ و ازاین‌رو $2x\lambda_1 = 0$، $2y\lambda_1 = 0$. چون دومی مستلزم $\lambda_1 \neq 0$ است، داریم $x = 0$. بدین‌سان $y = \pm\sqrt{2}$ و $z = 1$. بنابراین، نقاطمان عبارتند از $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. پس از بازبینی، می‌توان نشان داد که $(0, \sqrt{2}, 1)$ یك ماکسیمم به‌دست می‌دهد، $(0, -\sqrt{2}, 1)$ یك مینیمم.

مثال ۴. $f(x,y,z) = x + z$ را، تحت قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$، بیشینه سازید.

حل: دراینجا قضیهٔ ۱ را به‌کار می‌بریم. درجستجوی λ و (x,y,z)ی هستیم که

$$1 = 2x\lambda$$

$$0 = 2y\lambda$$

$$1 = 2z\lambda$$

و

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

چون $\lambda \neq 0$، به دست می‌آوریم $y = 0$. از معادلات اول وسوم، حاصل می‌شود $x = z$ و $4\lambda^2x^2 - 4\lambda^2z^2 = 0$؛ از چهارمی، خواهیم داشت $4\lambda^2x^2 + 4\lambda^2z^2 = 4\lambda^2$، که همراه با تساوی قبلی، مستلزم $8\lambda^2x^2 = 4\lambda^2$ است و ازاین‌رو $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$. درنتیجه، نقاطمان عبارتند از $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ و $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. آشکار است که، اولی، ماکسیمم f را به‌دست می‌دهد، دومی، مینیمم را. چون S فشرده است، f باید، روی S، به‌یك ماکسیمم ویك مینیمم برسد.

مثال ۵. بزرگترین حجمی را که یك قوطی، به شکل مکعب مستطیل، تحت این قید که مساحت سطح جانبی برابر بامقدار ثابت ۱۰ متر مربع باشد، می‌تواند اختیار کند، بیابید.

حل: در اینجا، اگر x، y، z، طولهای اضلاع باشند، حجم برابر است با $f(x, y, z) = xyz$. قید موجود این است که $2(xy + xz + yz) = 10$، یعنی، $xy + xz + yz = 5$. بدین‌سان شرایط ما عبارتند از

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(y+x) \\ xy + xz + yz = 5 \end{cases}$$

قبل از همه، $x \neq 0$، زیرا $x = 0$ مستلزم $yz = 5$ و $\lambda z = 0$ است، از این‌رو

$\lambda=0$ و $yz=0$. به همین ترتیب، $y\neq 0$، $z\neq 0$، و $x+y\neq 0$، والی‌آخر. پس از حذف λ از دومعادلهٔ اول، خواهیم‌داشت $yz/(y+z)=xz/(x+z)$، که منجرمی‌شود به $y=x$. به همین ترتیب، $z=y$. اگر از آخرین معادلـه استفاده کنیم، حاصل می‌شود $3x^2=5$، یعنـی، $x=\sqrt{5/3}$. بـدیـن سـان $x=y=z=\sqrt{5/3}$، و از ایـن رو $xyz=(5/3)^{3/2}$. این، جواب‌مطلوب است. از نظر هندسی، باید آشکار باشد که ماکسیمم مورد نظر وقتی رخ می‌دهد که $x=y=z$.

تمرینهای بند ۷.۷

در تمرینهای ۱ــ۵، اکسترممهای f را، تحت قیود بیان شده، بیابید.

۱. $f(x, y, z)=x-y+z, \qquad x^2+y^2+z^2=2$

۲. $f(x, y)=x-y, \qquad x^2-y^2=2$

۳. $f(x, y)=z, \qquad x^2+2y^2=3$

۴. $f(x, y)=3x+2y, \qquad 2x^2+3y^2=3$

۵. $f(x, y, z)=x+y+z, \quad x^2-y^2=1, \quad 2x+z=1$

برهان قضایای فصل ۷

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ یك مجموعـهٔ باز و فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ متعلق به ردهٔ C^1 باشد. فرض‌کنیم $x_0\in A$ و $Jf(x_0)\neq 0$. آنگاه یك همسایگی x_0 مانند U در A و یك همسایگی‌باز $f(x_0)$ مانند W وجود دارد به طوری‌که $f(U)=W$ و f دارای‌یك معکوس $f^{-1}:W\to U$ متعلق به ردهٔ C^1 است. به‌علاوه، برای $y\in W$، $x=f^{-1}(y)$، خواهیم داشت:

$$Df^{-1}(y)=[Df(x)]^{-1}$$

اگر f متعلق به ردهٔ C^p، $p\geqslant 1$، باشد آنگاه f^{-1} نیز چنین است.

برهان قضیهٔ تابع معکوس، از نقطه نظر جزئیات فنی، چندان‌آسان نیست، ولی این قضیه یکی از مهمترین سنگ پایه‌های‌آنالیز است ، از این‌رو باید در آن مهارت یافت. برهانی کـه ارائه خواهد شد، متکـی بر لم انقباض است (بند ۶.۵ را ببینید). این فـن سودمندی است چرا که در بسیاری از وضعیتها قابلیت‌کاربرد دارد.

کار خود را با یادآوری لم انقباض شروع می کنیم. در اینجا، ما حالت خاص یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^n$ را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

لم ۱. فرض کنیم M یك زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}^n$، و d، تابع فاصلهٔ در $\mathbf{R}^n$ باشد. فرض کنیم f نگاشتی از M در M باشد. فرض‌کنیم ثابتی مانند K، $0<K<1$، وجود داردبه‌طوری

که، به ازای هر دو نقطهٔ x و y در M، داشته باشیم $d(f(x), f(y)) \leqslant Kd(x, y)$. آنگاه $x\in M$ یکتایی موجود است به‌طوری‌که $f(x) = x$ (x را یك نقطهٔ ثابت f می‌نامند).

قبل از شروع اثبات قضیهٔ تابع معکوس، سودمند است که لم فنی زیر را دربارهٔ مجموعهٔ نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر (یا به‌بیانی هم‌ارز، مجموعهٔ ماتریسهای معکوس‌پذیر) ارائه کنیم. اما یك ماتریس $m\times n$ (یا یك نگاشت خطی $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$) چیزی نیست جز یك mnتایی از اعداد حقیقی، زیرا یك ماتریس A را، که دارای درایه‌های (a_{ij}) باشد، می‌توان به‌صورت یك mnتایی $(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn})$ در نظر گرفت. بنابراین، اگر بگوییم زیرمجموعهٔ معینی ازمجموعهٔ همهٔ ماتریسها، باز است یا اگر بگوییم که نگاشتی از مجموعهٔ ماتریسهای $m\times n$ در مجموعهٔ ماتریسهای $p\times q$، دیفرانسیل‌پذیر است، سخن بامعنایی گفته‌ایم. فرض کنیم $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ بر مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times n$ (یا نگاشتهای خطی از $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$) و $GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ بر مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای معکوس‌پذیر (یا نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر از $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$) دلالت کند؛ این دومی را گروه خطی عمومی می‌نامند. بدین‌سان $GL(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n) = \{A\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n) | \det A \neq 0\}$. فرض کنیم $\mathcal{L}^{-1}: GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \to GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$، آن نگاشتی باشد که یك ماتریس معکوس‌پذیر A را به‌معکوسش A^{-1} مبدل می‌کند. لمی که ما نیازداریم، لم۲ زیر است.

لم ۲.

(یك) $GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$، یك زیرمجموعهٔ باز $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ است.

(دو) $\mathcal{L}^{-1}$ یك نگاشت C^∞ است.

برهان[1]: (یك) نگاشت دترمینان $\det: \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n (n\text{مرتبهٔ}) \to \mathbf{R}$، یك نگاشت nخطی است. (یادآوری می‌کنیم که دترمینانها نسبت به‌سطرها دارای‌خاصیت خطی‌هستند.) درنتیجه، بنابر مثال ۵، فصل ۴، که نشان می‌دهد هر نگاشت چندخطی از $\mathbf{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{n_k}$ در $\mathbf{R}^m$ پیوسته است، نگاشت دترمینان پیوسته می‌باشد، و بنابر مثال ۲، یا تمرین ۱۴ در پایان فصل ۶، این نگاشت دیفرانسیل‌پذیر است. چون مجموعهٔ مرکب از صفر، $\{0\}$، بسته است، نتیجه می‌گیریم که $\det^{-1}(\{0\})$ بسته است (بنا بر قضیهٔ ۱، فصل ۴). بنابراین $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ باز است. اما $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \setminus \det^{-1}(\{0\})$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ آن ماتریسهای $n\times n$ی که دترمینانی مخالف با صفردارند، واینها دقیقاً همهٔ ماتریسهای معکوس‌پذیر $GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ هستند.

(دو) از عبارت صریحی که معکوس یك ماتریس را بیان می‌کند، به‌آسانی می‌بینیم که $\mathcal{L}^{-1}$ متعلق به ردهٔ C^∞ است. در واقع، عبارت بیانگر معکوس A به صورت $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$ است، که در آن $\operatorname{adj} A$ چنان ماتریسی است که $(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(j|i)$، و درآن $\det A(j|i)$، بردترمینان ماتریس حاصل

---

۱. برای برهانی «ذاتی»تر، کتاب Dieudonné تحت عنوان *Foundations of Modern Analysis*، صفحهٔ ۱۷۹، را ببینید.

از A، پس از حذف سطر jام و ستون iام، دلالت دارد. چون $(\det A)^{-1}$، یك تابع حقیقی دیفرانسیل‌پذیر از متغیر A است، فقط باید نشان دهیم که نگاشت $\mathrm{adj}:L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)\to L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$، که هرماتریس‌را به ماتریس‌الحاقیش‌مبدل‌می‌کند، متعلق به‌کلاس C^∞ است. اگر آن‌را به‌عنوان تابعی‌از $\mathbf{R}^{n^2}$ در $\mathbf{R}^{n^2}$ تلقی کنیم، ماتریس‌الحاقی، به‌طور خلاصه، یك n^2تایی‌از توابعی است مانند $(\mathrm{adj}\,A)_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(j|i)$. اما همان‌گونه که متذکر شدیم، یك نگاشت چندخطی از $\mathbf{R}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{R}^{n_k}$ در $\mathbf{R}^m$ متعلق به ردهٔ C^∞ است. بدین‌سان هر کدام از n^2 تابع مؤلفه‌ای adj متعلق به ردهٔ C^∞ می‌باشد. بنابراین نگاشت adj، C^∞ است.■

برهان قضیهٔ ۱ : برای وضوح بیشتر، برهان قضیهٔ ۱ را به تعدادی از مراحل تقسیم می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱: تحویل به یك حالت خاص.

در زیر، قضیهٔ نامبرده را، برای حالتی‌که درآن $Df(x_0)$ عبارت است از تبدیل همانی، اثبات خواهیم کرد. در اینجا نشان می‌دهیم که، در واقع، برای اثبات حالت کلی، همین کافی است.

قرار می‌دهیم $\lambda=Df(x_0)$؛ آنگاه λ^{-1} وجود دارد، و بنابر قاعدهٔ زنجیری

$$D(\lambda^{-1}\circ f(x_0))=D(\lambda^{-1})(f(x_0))\circ Df(x_0)=\lambda^{-1}\circ Df(x_0)=\text{تبدیل همانی}$$

حال اگر قضیهٔ برای $\lambda^{-1}\circ f$ درست باشد، آنگاه قضیهٔ برای f نیز درست است. درواقع، اگر g معکوسی برای $\lambda^{-1}\circ f$ باشد، معکوس f عبارت خواهد بود از $g\circ\lambda^{-1}$.

می‌توانیم فرض اضافی دیگری، که باعث ساده‌تر شدن مسئله می‌شود، وارد کنیم، یعنی، اینکه $x_0=0$ و $f(x_0)=0$. برای دیدن این مطلب، فرض کنیم که قضیهٔ را برای حالت خاص $x_0=0$ و $f(x_0)=0$ ثابت کرده باشیم. می‌خواهیم ببینیم‌چگونه حالت کلی را با تکیه براین‌حالت، ثابت کنیم. قرار می‌دهیم $h(x)=f(x+x_0)-f(x_0)$. آنگاه $h(0)=0$ و $Dh(0)=Df(x_0)$، از این‌رو $Dh(0)$ معکوس‌پذیر است. دراین صورت اگر h، درنزدیکی $x=0$، دارای یك معکوس باشد، معکوس مطلوب برای f، درنزدیکی x_0، به وسیلهٔ

$$f^{-1}(y)=h^{-1}(y-f(x_0))+x_0$$

ارائه می‌شود.

خلاصه، مرحلهٔ اول مبرهن می‌سازد که کافی است قضیهٔ نامبرده را تحت شرایط $x_0=0$، $f(x_0)=0$ و $Df(0)$ تابع همانی است، ثابت کنیم. در ادامهٔ این بحث، این شرایط مفروض خواهند بود.

مرحلهٔ ۲. کاربرد لم انقباض برای دستیابی به یك معکوس موضعی.

اگر تذکرات قبلی‌را به‌خاطر آوریم، نتیجه می‌گیریم که آنچه که می‌خواهیم‌عبارت‌است از دو همسایگی ۰ به طوری‌که، به ازای هر y مفروض در اولین همسایگی، xیکتایی در

دومین همسایگی چنان وجود داشته باشد که $y=f(x)$. به این منظور، تابع g_y را، که به‌وسیلهٔ $g_y(x)=y+x-f(x)$ تعریف‌شده است، در نظر می‌گیریم. اگر برای همسایگی بسته‌ای از صفر، این یك نگاشت انقباض باشد، آنگاه نقطهٔ ثابت یکتایی خواهد داشت، مثلاً x، و بنابراین $x=y+x-f(x)$، یعنی x تنها نقطهٔ متعلق به آن همسایگی است که $y=f(x)$. حال این همسایگی را می‌سازیم: تعریف می‌کنیم $g(x)=x-f(x)$؛ آنگاه $Dg(\circ)=\circ$. فرض کنیم g متعلق به ردهٔ C^p و $p\geqslant ۱$ باشد. این بدان معناست که، درحالت خاص، Dg یك تابع پیوسته است، و از این‌رو بنابر پیوستگی در $\circ$، یك $r>\circ$ وجود دارد به طوری که $\|x\|<r$ مستلزم $\|Dg_i(x)\|<۱/۲n$ باشد، که در آن $g=(g_۱, \dots, g_n)$. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، به ازای $x\in D(\circ, r)$ مفروض، نقاط $c_۱$، $c_۲$، …، c_n در $D(\circ, r)$ وجود دارند به طوری که

$$g_i(x)=g_i(x)-g_i(\circ)=Dg_i(c_i)(x-\circ)=Dg_i(c_i)(x)$$

بنابراین، با استفاده از نامساوی C.B.S،

$$\|g(x)\|\leqslant\sum_{i=۱}^{n}\|g_i(x)\|=\sum_{i=۱}^{n}\|Dg_i(c_i)(x)\|\leqslant\sum_{i=۱}^{n}\|Dg_i(c_i)\|\|x\|<$$

$$<\frac{\|x\|}{۲}<\frac{r}{۲}$$

این مطلب نشان می‌دهد که g، نگاشتی از r گوی بستهٔ $\overline{D}(\circ, r)$ در $r/۲$ گوی بستهٔ $\overline{D}(\circ, r/۲)$ برقرار می‌کند. حال فرض کنیم y عضو دلخواهی از $\overline{D}(\circ\ r/۲)$ باشد. نگاشت g_y، $\overline{D}(\circ, r)$ را در $\overline{D}(\circ, r)$ می‌برد؛ زیرا $\|y\|\leqslant r/۲$ و $x\in\overline{D}(\circ, r)$ مستلزم آنند که

$$\|g_y(x)\|=\|y+g(x)\|\leqslant\|y\|+\|g(x)\|<\frac{r}{۲}+\frac{r}{۲}=r$$

فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ دو نقطهٔ دلخواه در $\overline{D}(\circ, r)$ باشند. آنگاه

$$\|g_y(x_۱)-g_y(x_۲)\|=\|g(x_۱)-g(x_۲)\|$$

و بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، مانند بالا، $\|g(x_۱)-g(x_۲)\|\leqslant(۱/۲)\|x_۱-x_۲\|$، و از این‌رو g_y یك نگاشت انقباض است (با انتخاب $K=۱/۲$). حال لم انقباض را به‌کار می‌بریم، در نتیجه یك نقطهٔ ثابت یکتای $x\in\overline{D}(\circ, r)$ برای g_y وجود دارد، و همان‌طور که قبلاً ملاحظه کردیم، این مستلزم $f(x)=y$ است. معنای این سخن آن است که f معکوسی مانند $f^{-۱}:\overline{D}(\circ, r/۲)\subset\mathbf{R}^n\to\overline{D}(\circ,r)\subset\mathbf{R}^n$ دارد.

مرحلهٔ ۳. تابع معکوس پیوسته است.

فرض کنیم x_1 و x_2 در $\overline{D}(0, r)$ باشند؛ آنگاه، اگر تعریف g را به یادآوریم، خواهیم داشت

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \leqslant$$
$$\|f(x_1) - f(x_2)\| + (1/2)\|x_1 - x_2\|,$$

و بنابراین $\|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\|$. درنتیجه اگر y_1 و y_2 در $\overline{D}(0, 1/2)$ باشند، به دست می‌آوریم $\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leqslant 2\|y_1 - y_2\|$، از این رو f^{-1} پیوسته است.

مرحلهٔ ۴. به ازای r کوچك مناسبی، تابع معکوس، در $D(0, r/2)$، دیفرانسیل‌پذیر است.

می‌دانیم که $Df(0)$ معکوس‌پذیر است، و اینکه $Df : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n^2}$ پیوسته می‌باشد، و نشان دادیم که $GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ در $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ باز است. این نکات، در تلفیق با یکدیگر، نشان می‌دهند که، به ازای هر x متعلق به یك همسایگی حول 0، $[Dg(x)]^{-1}$ وجود دارد. اگر این همسایگی شامل $D(0, r/2)$ نباشد، r را باز کوچکتر می‌کنیم تا این حالت رخ دهد. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که، به‌ازای هر $x \in D(0, r/2)$، $[Df(x)]^{-1}$ وجود دارد. به‌علاوه، بنا بر پیوستگی $Df^{-1}(x)$، می‌توانیم فرض کنیم که، به ازای هر $x \in D(0, r/2)$ و هر $y \in \mathbf{R}^n$، $\|[Df(x)]^{-1}y\| \leqslant M\|y\|$ (مثال ۴، فصل ۴ را ببینید).

حال برای $y_1, y_2 \in D(0, r/2)$، $x_1 = f^{-1}(y_1)$ و $x_2 = f^{-1}(y_2)$،

$$\frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - [Df(x_2)]^{-1}\cdot(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|}$$
$$= \frac{\|x_1 - x_2 - [Df(x_2)]^{-1}\cdot(f(x_1) - f(x_2))\|}{\|f(x_1) - f(x_2)\|}$$
$$= \left[\frac{\|x_1 - x_2\|}{\|f(x_1) - f(x_2)\|}\right] \times$$
$$\times \frac{\|\{[Df(x_2)]^{-1}\}\{Df(x_2)(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\}\|}{\|x_1 - x_2\|}$$

اگر از $\|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\|$ و $\|Df(x_2)^{-1}y\| \leqslant M\|y\|$ استفاده کنیم. نتیجه می‌گیریم که تساوی بالا

$$\leqslant 2M \frac{\|Df(x_2)(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\|}{\|x_1 - x_2\|}$$

بنابر دیفرانسیل‌پذیری f در x_2، وقتی که $\|x_1 - x_2\| \to 0$، عبارت اخیر دارای حدی برابر با صفر است. این نشان می‌دهد که f^{-1} در y_2 دیفرانسیل‌پذیر است و مشتق آن عبارت

است از $[Df(x_۲)]^{-۱} = [Df(f^{-۱}(y_۲))]^{-۱}$.

در قضیهٔ، قرار می‌دهیم $W = D(۰, r/۲)$ و $U = f^{-۱}(W)$، که هر دو مجموعه‌هایی باز هستند.

مرحلهٔ ۵. $f^{-۱}: D(۰, r/۲) \to \mathbf{R}^n$ متعلق به ردهٔ C^p است.

از مرحلهٔ ۴ نتیجه می‌شود که $f^{-۱}: D(۰, r/۲) \to \mathbf{R}^n$ در $D(۰, r/۲)$ دیفرانسیل‌پذیر است و اینکه $Df^{-۱}(y) = [Df(f^{-۱}(y))]^{-۱}$. نشان دادیم که $f^{-۱}: D(۰, r/۲) \to \mathbf{R}^n$ پیوسته است؛ بنابر فرض، Df پیوسته است؛ و نگاشت معکوس از $GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (نگاشتهای خطی معکوس‌پذیر از $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$) در $GL(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ پیوسته و در حقیقت، بنابر لم ۲، متعلق به ردهٔ C^∞ است. از اینجا نتیجه می‌شود که $Df^{-۱}$ نگاشتی پیوسته از $D(۰, r/۲)$ در $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ است . بنابراین $f^{-۱}$ متعلق به ردهٔ $C^۱$ است. باز به $Df^{-۱}(y) = [Df(f^{-۱}(y))]^{-۱}$ نگاه کنید و ملاحظه کنید که، چون $f^{-۱}$ متعلق به ردهٔ $C^۱$ است، Df متعلق به ردهٔ $C^{p-۱}$ است و چون معکوس، متعلق به ردهٔ C^∞ است، $Df^{-۱}$ متعلق به ردهٔ $C^۱$ می‌باشد. در نتیجه $f^{-۱}$ متعلق به ردهٔ $C^۲$ است. اگر به همین ترتیب، به‌روش استقرا، ادامه دهیم، سرانجام به‌دست می‌آوریم که $f^{-۱}$ متعلق به‌ردهٔ C^p است. ■

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ تابع ضمنی.) فرض کنیم $A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ یک مجموعهٔ باز و $F: A \to \mathbf{R}^m$ تابعی متعلق به ردهٔ C^p باشد. فرض کنیم $(x_۰, y_۰) \in A$ و $F(x_۰, y_۰) = ۰$. می‌نویسیم

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_۱}{\partial y_۱} & \cdots & \dfrac{\partial F_۱}{\partial y_m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_۱} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

که در $(x_۰, y_۰)$ محاسبه شده است و در آن $F = (F_۱, \dots, F_m)$. فرض کنیم که $\Delta \neq ۰$. آنگاه یک همسایگی باز $U \subset \mathbf{R}^n$ از $x_۰$ و یک همسایگی V از $y_۰$ در $\mathbf{R}^m$ و یک تابع یکتای $f: U \to V$ وجود دارد به طوری که، به ازای هر $x \in U$،

$$F(x, f(x)) = ۰$$

به‌علاوه f متعلق به ردهٔ C^p است.

برهان: تابع $G: A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ را به‌وسیلهٔ $G(x, y) = (x, F(x, y))$ تعریف می‌کنیم. چون F متعلق به‌ردهٔ C^p است و نگاشت همانی متعلق به‌ردهٔ C^∞ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که G متعلق به‌ردهٔ C^p است. ماتریس مشتقات جزئی G (ماتریس ژاکوبی) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

مقدار دترمینان این ماتریس در (x_0, y_0) برابر است با مقدار

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

در (x_0, y_0). در نتیجه، بنابر فرض، $JG(x_0, y_0) \neq 0$ وبدین سان، بنابر قضیهٔ تابع معکوس، مجموعهٔ بازی مانند W شامل $(x_0, 0)$ و مجموعهٔ بازی مانند S شامل (x_0, y_0) وجود دارد به طوری‌که $G(S) = W$ و اینکه G یك C^p معکوس $G^{-1}: W \to S$ دارد. بنابر تعریف یك مجموعهٔ باز، می‌بینیم که مجموعه‌های باز $U \subset \mathbf{R}^n$ و $V \subset \mathbf{R}^m$، با فرض $x_0 \in U$ و $y_0 \in V$، وجود دارد به طوری که $U \times V \subset S$ (تمرین ۲۴، فصل ۲ را ببینید). قرار می‌دهیم $G(U \times V) = Y \subset W$. بدین‌سان $G: U \times V \to Y$ یك C^p دیفئومرفیسم است (معنای این واژه آن است که G متعلق به ردهٔ C^p است و معکوس آن $G^{-1}: Y \to U \times V$ نیز متعلق به ردهٔ C^p می‌باشد). اما G^{-1} به‌شکل $G^{-1}(x, w) = (x, H(x, w))$ می‌باشد. که در آن H یك تابع C^p از Y در V است، زیرا همان‌طور که به‌آسانی دیده می‌شود،

خود G به این شکل است . فرض‌کنیم $\pi: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ به وسیلهٔ $\pi(x, y) = y$ تعریف شده باشد، از این‌رو،

$$F(x, H(x, w)) = \pi \circ G(x, H(x, w)) = \pi \circ G \circ G^{-1}(x, w) = w$$

همچنین ملاحظه می‌کنیم کـه چون G^{-1} به شکل $G^{-1}(x,w) = (x, H(x, w))$ است، اگر $(x, w) \in Y$، آنگاه $x \in U$. $f: U \to V$ را به‌وسیلهٔ $f(x) = H(x, 0)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، چـون $F(x, H(x, w)) = w$، به دست می‌آوریم $F(x, f(x)) = 0$. همچنین، چون H متعلق به ردهٔ C^p است، f نیز باید متعلق به ردهٔ C^p باشد. بنا بر قضیهٔ ۱، $H(x, w)$ به طور یکتا تعیین مـی‌شود. چون f باید به وسیلهٔ $H(x, 0)$ بیان شود، می‌بینیم که f نیز یکتاست. ■

قضیهٔ ۳. فرض‌کنیم $A \subset \mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای باز و $f: A \to \mathbf{R}$ تابعی متعلق به ردهٔ C^p، $p \geqslant 1$ باشند. فرض کنیم $x_0 \in A$ و $f(x_0) = 0$ و $Df(x_0) \neq 0$. آنگاه مجموعه‌ای باز مانند U، مجموعه‌ای بازمانند V شامل x_0 وتابعی مانند $h: U \to V$، متعلق به ردهٔ C^p با معکوسی $h^{-1}: V \to U$ متعلق به ردهٔ C^p، وجود دارند به طوری که

$$f(h((x_1, \ldots, x_n)) = x_n$$

برهان: چون $Df(x_0) \neq 0$، باید iای موجود باشد به‌طوری که $(\partial f / \partial x_i)(x_0) \neq 0$.

$$g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

را به‌وسیلهٔ $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت جایگشت g خطی، و بنابراین، C^∞ است و چون f متعلق به ردهٔ C^p است، بنا بر قاعدهٔ زنجیری، نتیجـه می‌گیریـم کـه $f \circ g$ متعلق بـه ردهٔ C^p مـی‌بـاشد. از ایـن‌رو $(\partial(f \circ g) / \partial x_n)(g^{-1})(x_0) = \partial f(x_0) / \partial x_i \neq 0$، و از آنجا نتیجه می‌شود که $f \circ g$ تابعی است از آن نوع که درمفروضات قضیهٔ ۲ توصیف شده است، بااین قیدکه $m = 1$. بنابراین، درست مـانند اثبات قضیهٔ ۲، اگـر $G: A \subset \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ را به وسیلهٔ $G(x, y) = (x, f \circ g(x, y))$ تعریف کنیم، مجموعـه‌هـای باز $W \subset \mathbf{R}^n$ و $U \subset \mathbf{R}^n$، با قید $x_0 \in W$ و $(x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}, 0) \in U$، (که در آن $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$) وجود دارند به طوری کـه $G: W \to U$ معکوسی مانند $G^{-1}: U \to W$، متعلق به ردهٔ C^p داشته باشد. حال داریم،

$$(f \circ g) \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (\pi \circ G) \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = x_n$$

که در آن $\pi: \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$، تصویر روی آخرین مختص است . قرار می‌دهیم $V = g(W)$ و $h: U \to V$ را به وسیلهٔ $h = g \circ G^{-1}$ تعریف می‌کنیم، آنگاه h تابعی C^p با معکوسی C^p اســـت ، چـرا کـه هـر دوی g و G^{-1} ایـن خـاصیت را دارنـد؛ و $f(h(x_1, \ldots, x_n)) = x_2$. ■

با استفاده از فنی مشابه، این امکان هست که قضیه‌ای، کلیتر از قضیهٔ بالا اثبات کنیم. یعنی، اگر $f: A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$، $n \geqslant m$، و اگر $Df(x_\circ)$، به‌عنوان نگاشتی خطی، دارای رتبهٔ m باشد، آنگاه می‌توان f را، با ترکیب کردن آن به‌دنبال یك تابع هموار و دارای معکوسی هموار، به‌طور موضعی، به تصویر روی n عامل آخر، تبدیل کرد. در تمرین ۳، این مطلب را دقیقاً بیان می‌کنیم و سپس، به منظور اثبات آن، راهنمایی خواهیم کرد. توجه داشته باشید که در اینجا، برد دارای بعدی کمتر از یا مساوی با بعد قلمرو است. در قضیهٔ زیر، حالت مخالف رخ می‌دهد.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^p$ مجموعه‌ای باز و $f: A \to \mathbf{R}^n$ تابعی متعلق به ردهٔ C^r و $p\leqslant n$ باشند. فرض کنیم $x_\circ \in A$ و رتبهٔ $Df(x_\circ)$ برابربا p باشد. مجموعه‌های بازی مانند U و V در $\mathbf{R}^n$، همراه با $f(x_\circ)\in U$، و تابعی مانند $g: U \to V$، متعلق به ردهٔ C^r با معکوسی $g^{-1}: V \to U$، آن هم متعلق به ردهٔ C^r، وجود دارند، به طوری که، به ازای هر $(x_1, \ldots, x_p)\in A$، داشته باشیم $g\circ f(x_1, \ldots, x_n)=(x_1, \ldots, x_p, \circ, \ldots, \circ)$.

برهان: چون $Df(x_\circ)$ دارای رتبهٔ p است، یك زیرماتریس $p\times p$ از $Df(x_\circ)$، دترمینانی مخالف باصفر دارد. می‌توانیم، درصورت لزوم، باشماره‌گذاری مجدد، فرض کنیم:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^p}{\partial x_p} \end{vmatrix} \neq \circ$$

که‌در آن $f=(f^1, \ldots, f^n)$. $\varphi: A\times \mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{R}^n$ را به‌وسیلهٔ $\varphi(x,y)=f(x)+(\circ, y)$ تعریف می‌کنیم. آنگاه ماتریس $D\varphi$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_p}, & \circ, & \ldots, & \circ \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f^p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^p}{\partial x_p}, & \circ, & \ldots, & \circ \\ \dfrac{\partial f^{p+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{p+1}}{\partial x_p}, & 1, & \ldots, & \circ \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_p}, & \circ, & \ldots, & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$J\varphi(x_\circ,\circ)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_p}\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \dfrac{\partial f^p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^p}{\partial x_p}\end{vmatrix}\neq\circ$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ تابع معکوس، مجموعهٔ بازی مانند U حول $f(x_\circ)$، مجموعهٔ بازی مانند V حول $(x_\circ,\circ)$ و تابعی مانند $g:U\to V$، متعلق به ردهٔ C^r وجود دارد به طوری که $g=\varphi^{-1}$. آنگاه $g(f(x))=g(f(x)+(\circ,\circ))=(x,\circ)$، همان چیزی که می‌خواستیم. ■

قضیهٔ ۰۵ فرض کنیم $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^N$ (که درآن A مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^n$ است) یک تابع C^r باشد به‌طوری‌که، به‌ازای هر x دریک همسایگی $x_\circ\in A$، $Df(x)$ دارای رتبهٔ m باشد. آنگاه مجموعه‌ای بازمانند $U\subset\mathbf{R}^n$ و مجموعه‌ای باز مانند $V\subset\mathbf{R}^n$ همراه با $x_\circ\in V$ و تابعی مانند $h:U\to V$ متعلق به ردهٔ C^r با معکوسی $h^{-1}:V\to U$ متعلق به ردهٔ C^r وجود دارند به‌طوری‌که $f\circ h$ فقط به x_1، ...، x_m بستگی داشته‌باشد. یعنی: به‌ازای تابعی مانند f متعلق به C^r، $f\circ h(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_m)$.

برهان: فرض کنیم $N_\circ$ هستهٔ $Df(x_\circ)$ باشد؛ یعنی فرض کنیم $N_\circ=\{y\in\mathbf{R}^n|Df(x_\circ)\cdot y=\circ\}$ (که زیر فضایی است از $\mathbf{R}^n$ با بعد $n-m$) وفرض کنیم M یک متمم m بعدی $N_\circ$ در $\mathbf{R}^n$ باشد، یعنی، $M\cap N_\circ=\{\circ\}$ و $\{x+y|x\in M,\ y\in N_\circ\}=\mathbf{R}^n$. فرض کنیم c_1، ...، c_m پایه‌ای برای M و c_{m+1}، ...، c_n، پایه‌ای برای $N_\circ$ باشد. حال هر $x\in\mathbf{R}^n$ را می‌توان، به طور یکتا، به صورت $x=\psi_1(x)c_1+\cdots+\psi_n(x)c_n$ نوشت. تعریف می کنیم

$$G(x)=(\circ\cdots,\circ,\psi_{m+1}(x),\cdots,\psi_n(x))$$

آنگاه G خطی و بنابراین، هموار است. اما $Df(x_\circ)$ دارای رتبهٔ m است، از این رو، $Df(x_\circ)(\mathbf{R}^n)$ یک زیر فضای m بعدی $\mathbf{R}^N$ می‌باشد که آن را P می‌نامیم. به‌علاوه، مجموعهٔ $\{d_i=Df(x_\circ)c_i|1\leqslant i\leqslant m\}$ یک پایه برای P است. هر $x\in R^N$ را می‌توان، به‌طوریکتا، به‌صورت

$$x=\varphi_1(x)d_1+\cdots+\varphi_m(x)d_m+\varphi_{m+1}(x)d_{m+1}+\cdots+\varphi_N(x)d_N$$

نوشت، که در آن، d_1،...،d_N یک پایه برای R^N است و d_1،...،d_m همان پایهٔ P است که دربالامعرفی کردیم. $H:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^n$ را به وسیلهٔ $H(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x),\circ,\cdots,\circ)$ تعریف می کنیم.

حال قرار می‌دهیم $g(x)=H(f(x))+G(x)$. آنگاه g، $\mathbf{R}^n$ را در $\mathbf{R}^n$ می‌نگارد، و چون H و G خطی هستند، داریم

$$Dg(x_\circ)\cdot s=DH(f(x_\circ))\circ Df(x_\circ)(s)+DG(x_\circ)(s)=H(Df(x_\circ)(s))+G(s)$$

اگر ماتریس تبدیل خطی $Dg(x_\circ)$ را برحسب پایه c_1، ...، c_n و پایهٔ استاندارد بنویسیم، ماتریس یکه را به‌دست می‌آوریم. درنتیجه $Dg(x_\circ)$ معکوس‌پذیر است. می‌توانیم قضیهٔ تابع معکوس را مورد استفاده قرار دهیم تا مجموعهٔ بازی مانند U، حول $H(f(x_\circ))+G(x_\circ)$ و مجموعهٔ بازی مانند V، حول $x_\circ$، و یك تابع معکوس هموار $g^{-1}:U\to V$، بیابیم. حال، به‌ازای هر $x\in V$، $Dg(x)$ معکوس‌پذیر است. یعنی، $Dg(x)$ باید یك نگاشت خطی یك به‌یك و پوشا از $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$ باشد. می‌توانیم فرض کنیم که، به ازای هر $x\in A$، رتبهٔ $m=\{Df(x)\}$ (درغیر این‌صورت، f را به‌یك همسایگی کوچکتر $x_\circ$ محدود می‌کنیم). برای $x\in A$، $Df(x)(\mathbf{R}^n)$ یك زیر فضای m بعدی، مانند P_x، از $\mathbf{R}^N$ است. حال اگر $s\in M$، $Dg(x)).s=H(Df(x).s)+G(s)=H(Df(x)\cdot s)$، بدین سان اگر $x\in V$، تحدید $Df(x)$ به M باید یك نگاشت خطی یك‌به‌یك و پوشا از M در P_x باشد. اینکه این‌نگاشت پوشاست ناشی ازاین است که M و P_x، هردو دارای بعد m هستند. به همین ترتیب، H باید یك نگاشت خطی یك‌به‌یك و پوشا از P_x در $\mathbf{R}^m$ باشد. معکوس این‌نگاشت را با $L_x:\mathbf{R}^m\to P_x$ نمایش می‌دهیم.

قرار می‌دهیم $h=g^{-1}:U\to V$؛ نشان خواهیم داد که $f\circ h(x_1,\dots,x_n)$ به x_{m-1}،...،x_n بستگی‌ندارد. برای‌نیل به‌این‌منظور، می‌توانیم‌فرض کنیم که Uیك گوی‌است. کافی است نشان دهیم که $D_2f_1=\circ$، که در آن D_2f_1 عبارت‌است ازمشتق $f_1=f\circ h$ که به $\{\circ\}\times\mathbf{R}^{n-m}$ محدود شده باشد، یعنی، می‌خواهیم نشان دهیم که $\partial f_1/\partial x_i=\circ$، $i=m+1,\dots,n$. آشکار است که از آن نتیجه می‌شود که f_1، نسبت به x_{m+1}، ...، x_n، ثابت است. اما $f=f_1\circ g$، ازاین‌رو

$$Df(x)\cdot y=Df_1(g(x))\cdot Dg(x)\cdot y= \qquad (1)$$
$$D_1f_1(g(x))\cdot H(Df(x)\cdot y)+D_2f_1(g(x))\cdot G(y)$$

چون G نگاشتی پوشا از $\mathbf{R}^n$ در $\{\circ\}\times\mathbf{R}^{n-m}$ است، کافی است نشان دهیم که، به ازای هر $y\in\mathbf{R}^n$، $D_2f_1(g(x))\circ G(y)=\circ$. اگر به‌معادلهٔ (۱) بازگردیم وهمانی $L_x\circ H=$ را به‌کار ببریم، به‌دست می‌آوریم، به‌ازای هر $y\in\mathbf{R}^n$،

$$D_2f_1(g(x))\circ G(x)=L_x\circ H(Df(x)\cdot y)-D_1f_1(g(x))\circ H(Df(x)\cdot y) \quad (2)$$
$$=(L_x-D_1f_1(g(x)))\circ H(Df(x)\cdot y)$$

اما $L_x-D_1f_1(g(x))$ در $\mathbf{R}^m\times\{\circ\}$ تعریف شده است و $H\circ Df(x)$ نگاشتی پوشا از M در $\mathbf{R}^m\times\{\circ\}$ می‌باشد. بنابراین، برای نشان‌دادن $L_x-D_1f_1(g(x))=\circ$، کافی است نشان دهیم که، به‌ازای هر $y\in M$،

$$(L_x - D_1 f_1(g(x)))\circ H(Df(x)\cdot y) = 0$$

ولی این برقرار است زیرا که، به ازای $y\in M$، $G(g)=0$، و از این رو $D_2 f_1(g(x))\circ G(y)=0$. بنابراین $L_x - D_1 f_1(g(x))$ متحد با صفر است و بدین‌سان $D_2 f_1(g(x))=0$. ■

فرع ۲. فرض کنیم $f: A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^N$ (که درآن A، مجموعه‌ای باز در $\mathbf{R}^n$ است) یک تابع متعلق به ردهٔ C^r باشد به‌طوری که، به‌ازای هر x در یک همسایگی $x_0\in A$، $Df(x)$ دارای رتبهٔ m باشد. آنگاه مجموعه‌ای بازمانند $U_1\subset\mathbf{R}^n$، مجموعه‌ای بازمانند $U_2\subset\mathbf{R}^n$ همراه با $x_0\in U_2$، مجموعه‌ای بازمانند V_1 حول $f(x_0)$، مجموعه‌ای بازمانند $V_2\subset\mathbf{R}^N$، وتوابعی مانند $g:V_1\to V_2$ و $h:U_1\to U_2$، متعلق به ردهٔ C^r وبا معکوسهایی متعلق به ردهٔ C^r وجود دارند به‌طوری که $g\circ f\circ h(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$.

برهان: بنابر قضیهٔ ۵، یک تابع C^r مانند $h:U\to V$ با معکوسی متعلق به ردهٔ C^r، وجود دارد به‌طوری که به‌ازای $\widetilde{f}:W\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^N$،

$$f\circ h(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)=\widetilde{f}(x_1,\dots,x_m)$$

اما $D\widetilde{f}$ دارای رتبهٔ m است (زیرا h معکوس‌پذیر است). از این‌رو، بنابر قضیهٔ ۴ یک تابع معکوس‌پذیر g_0، متعلق به ردهٔ C^r، وجود دارد به‌طوری که

$$g_0\circ\widetilde{f}(x_1,\dots,x_m)=(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)$$

g را در $\mathbf{R}^n$ به‌وسیلهٔ $g(x_1,\dots,x_n)=(g_0(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_n)$ تعریف می‌کنیم. آنگاه g نیز متعلق به ردهٔ C^r ومعکوس‌پذیر است وداریم

$$g\circ f\circ h(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) \quad ■$$

قضیهٔ ۶. فرض کنیم $f:[-a,a]\times\overline{D}(x_0,r)\to\mathbf{R}^n$، نگاشت پیوستهٔ مفروضی باشد. قرارمی‌دهیم $C=\sup\{\|f(t,x)\| \mid -a\leqslant t\leqslant a, x\in\overline{D}(x_0,r)\}$. فرض کنیم یک $K\in\mathbf{R}$ وجود دارد به‌طوری که، به ازای هر $t\in[-a,a]$ و $x,y\in\overline{D}(x_0,r)$،

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant K\|x-y\|$$

واینکه $b<\min\{a,r/C,1/K\}$. آنگاه یک نگاشت یکتای به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر $x:[-b,b]\to\overline{D}(x_0,r)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x(t)) \text{ و } x(0)=x_0$$

برهان: آشکار است که معادلهٔ دیفرانسیل مفروض وشرط اولیهٔ $x(0)=0$، باشرط

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(s,x(s))ds$$

هم‌ارزند.

فضای $\mathcal{C}([-b,b],\mathbf{R}^n)$ را، که (از فصل ۵، بند۴) می‌دانیم که یك فضای متریك کامل است، درنظرمی گیریم. قرارمی‌دهیم

$$A=\{\varphi\in\mathcal{C}([-b,b],\mathbf{R}^n)|\varphi(\circ)=x_\circ \text{ و } \varphi(t)\in\bar{D}(x_\circ,r)\}$$

در این‌صورت $A\subset\mathcal{C}([-b,b],\mathbf{R}^n)$، بسته است (چرا؟) و بنابراین A نیز یك فضای متریك کامل می‌باشد. اصل نگاشت انقباض را، که در بند ۶.۵ به اثبات رسید، در مورد فضای A به‌کار خواهیم برد.

$F:A\to A$ را به‌وسیلهٔ[1]

$$F(\varphi)(t)=x_\circ+\int_\circ^t f(s,\varphi(s))ds$$

تعریف می کنیم.

ابتدا باید نشان دهیم که $F(\varphi)\in A$. آشکار است که، $F(\varphi)\in\mathcal{C}([-b,b],\mathbf{R}^n)$. همچنین، $F(\varphi)(\circ)=x_\circ$، و به ازای هر $t\in[-b,b]$،

$$\|F(\varphi)(t)-x_\circ\|=\|\int_\circ^t f(s,\varphi(s))ds\|\leqslant\int_\circ^t\|f(s,\varphi(s))\|ds\leqslant b\cdot C<r$$

زیرا $b<r/C$. بدین‌سان $F(\varphi)(t)\in\bar{D}(x_\circ,r)$، از این‌رو $F(\varphi)\in A$.

سپس، به ازای $\varphi,\psi\in A$،

$$\begin{aligned}\|F(\varphi)-F(\psi)\|&=\sup_{-b\leqslant t\leqslant b}\|F(\varphi)(t)-F(\psi)(t)\|\\&=\sup_{-b\leqslant t\leqslant b}\|\int_\circ^t(f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s)))ds\|\\&\leqslant\sup_{-b\leqslant t\leqslant b}\int_\circ^t\|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))\|ds\\&\leqslant\sup_{-b\leqslant t\leqslant b}\int_\circ^t K\|\varphi(s)-\psi(s))\|ds\\&\leqslant\sup_{-b\leqslant t\leqslant b}K\int_\circ^t\|\varphi-\psi\|ds\leqslant Kb\|\varphi-\psi\|\end{aligned}$$

---

۱. پس‌از انتگرال‌گیری از هر مؤلفهٔ f، $\int_\circ^t f(s,\varphi(s))ds$ را به‌دست می‌آوریم؛ حاصل، یك بردار است. نامساوی

$$\|\int_\circ^t f(s,\varphi(s))ds\|\leqslant\int_\circ^t\|f(s,\varphi(s))\|ds$$

را، که مشابه با نتیجه‌ای برای حالت توابع حقیقی است، دراینجا می‌پذیریم؛ برای بحثی مفصل، فصل ۸ را ببینید.

که در آن $Kb<1$.

بنابراین اگر قرار دهیم $k=b.K<1$، $d(F(\varphi), F(\psi))\leqslant kd(\varphi,\psi)$ و از این‌رو، F یك انقباض است و بدین‌سان یك‌نقطهٔ ثابت یکتا دارد: $x=F(x)$. این نقطه ثابت $x(t)$، همان جواب یکتایی است که در جستجویش بودیم.■

عمل تکرار، که درمتن ازآن یادکردیم، رخ می‌دهد، زیرا همان گونه که در اثبات قضیهٔ نگاشت انقباض دیدیم، نقطهٔ ثابت موردبحث عبارت است ازحد $F^n(\varphi)$، به‌ازای‌هر $\varphi\in A$ دلخواه، وقتی‌که $n\to\infty$. ما $\varphi(t)\equiv x_0$ را انتخاب کردیم.

قضیهٔ ۷. فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ باز و $f:A\to\mathbf{R}$ یك تابع‌هموار باشد. فرض‌کنیم $Df(x_0)=0$ و $\Delta=[-\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j]$ عادی باشد. آنگاه‌یك‌همسایگی U نقطهٔ x_0 ویك همسایگی V نقطهٔ ۰ در $\mathbf{R}^n$ ویك نگاشت هموار $g:V\to U$، با معکوسی‌هموار، وجود دارند به‌طوری که، به‌ازای هر $y\in V$،

$$f\circ g(y)=f(x_0)-[y_1^2+\cdots+y_\lambda^2]+[y_{\lambda+1}^2+\cdots+y_n^2]$$

دراینجا λ عدد صحیح ثابتی است، $0\leqslant\lambda\leqslant n$.

برهان[1]: به‌آسانی می‌توان دیدکه، اگرفرض کنیم $x_0=0$ و $f(x_0)=0$، هیچ کلیتی را ازدست نمی‌دهیم. می‌نویسیم

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\int_0^1\frac{df(tx_1,\cdots,tx_n)}{dt}dt$$

$$=\int_0^1\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\cdots,tx_n)dt$$

بدین‌سان می‌بینیم که، اگرقرار دهیم

$$g_i(x_1,\cdots,x_n)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1,\cdots,tx_n)dt,$$

آنگاه

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1,\cdots,x_n)$$

چون $x_0=0$ یك‌نقطهٔ بحرانی است، $\partial f/\partial x_i(0)=g_i(0)=0$. همچنین، g_iها توابع هموراری هستند ــ برای این‌منظور، فقط به توجیه مشتق‌گیری در زیرعلامت انتگرال نیاز داریم ــ می‌توانیم آن را فعلاً بپذیریم، یا، برای توجیه مفصل، مستقیماً به مثال۲، درپایان

---

۱. این اثبات نکاتی چند را، دربارهٔ فرمهای درجهٔ دو، مورد استفاده قرار می‌دهد؛ فصل ۷ کتاب O'Nan, *Linear Algebra*، راببینید. اثباتی‌دیگر، شایدساده‌تر، که A. Tromba لطف‌کرده و دراختیار من‌گذاشته‌اند، درتمرین ۳۳ آورده شده است.

فصل ۹، مراجعه کنید.

چون $g_i(0)=0$، می‌توانیم همان روش بالا را به‌کار بندیم، و به ازای توابع هموار معینی مانند h_{ij}، بنویسیم

$$g_i(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}x_j h_{ij}(x_1,\dots,x_n)$$

وبنابراین

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}x_i x_j h_{ij}(x_1,\dots,x_n)$$

می‌توانیم فرض کنیم، در صورت لزوم با گذاشتن $h_{ij}=1/2(h_{ij}+h_{ji})$ به‌جای h_{ij}، که $h_{ij}=h_{ji}$، و این درعبارت f تغییری ایجاد نمی‌کند. توجه کنید که، درصفر،

$$\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j=2h_{ij}(0)$$

از این‌رو $h_{ij}(0)$ عادی است.

اما f به‌گونه‌ای مشابه با یك فرم درجهٔ دو نوشته می‌شود. آنچه‌که ما می‌خواهیم انجام دهیم عبارت از «قطری‌کردن» آن است. به استقرا عمل می‌کنیم. فرض کنیم، در یك‌همسایگی u_1 نقطهٔ 0، مختصات u_1، ...، u_n وجود دارند به‌طوری‌که در u_1،

$$f=\pm(u_1)^2\pm\cdots\pm(u_{r-1})^2+\sum_{i,j\geqslant r}u_i u_j H_{ij}(u_1,\cdots,u_n) \tag{1}$$

که در آن $r\geqslant 1$ و H_{ij}ها متقارن هستند. برای $r=1$، این‌را همانند بالا داریم. (همان گونه که در متن هم آمده است، مختصات u_1 ، ...، u_n، این معنی را دارند که $(u_1,\dots,u_n)$، توابع معکوس‌پذیری از $(x_1,\dots,x_n)$ هستند.)

به منظور قطری کردن

$$\sum_{i,j\geqslant r}u_i u_j H_{ij}(0)$$

می‌توانیم یك تعویض مختصات خطی در u_r، ...، u_n بدهیم.

به‌ویژه، چون $H_{ij}(0)$ عادی‌است، جملات قطری غیرصفرهستند. بدین‌سان می‌توانیم فرض کنیم $H_{rr}(0)\neq 0$؛ قرار می‌دهیم $g(u_1,\dots,u_n)=|H_{rr}(u_1,\cdots,u_n)|^{1/2}$؛ در یك همسایگی کوچکتر $U_2\subset U_1$ از 0، g یك‌تابع غیر صفرمتعلق به ردهٔ C^∞ خواهد بود. تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} V_i=u_i \quad i\neq r \\[2mm] V_r(u_1,\dots,u_n)=g(u_1,\dots,u_n)\left[\;u_r+\sum_{i>r}\dfrac{u_i H_{ir}(u_1,\cdots,u_n)}{H_{rr}(u_1\cdots,u_n)}\right] \end{cases} \tag{2}$$

ژاکوبین در ۰ عبارت است از

$$\frac{\partial(V_1,\cdots,V_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & 0 \\ \frac{\partial V_r}{\partial x_1} & \cdots & & g(0) & & \cdots & \frac{\partial V_r}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که عادی می‌باشد. درنتیجه بنا برقضیهٔ تابع معکوس، دریك همسایگی کوچکتر U_3 از ۰، $(V_1\cdots,V_n) \longrightarrow (u_1,\ldots,u_n)$ نگاشتی C^∞ است که معکوسی C^∞ دارد. به‌عبارت دیگر، $(V_1,\ldots,V_n)$ می‌توانند به‌عنوان مختصات به‌کار روند.
حال

$$u_r u_r H_{rr}(u_1,\cdots,u_n)+2\sum_{j=r+1}^{n} u_j u_r H_{jr}(u_1,\cdots,u_n) \qquad (3)$$

را، که عبارتند ازجملات‌واقع درمعادلهٔ ۱، با قید i یا $r=j$، درنظرمی گیریم. ما دراینجا تقارن H_{ij} را به‌کار برده‌ایم. از مقایسهٔ معادلات (۱) و (۲) معلوم می‌شودکه (۳) برابر است با

$$\pm V_r V_r-\frac{1}{H_{rr}}\Big[\sum_{i>1} u_i H_{ir}(u_1,\cdots,u_n)\ \Big]^2$$

علامت مثبت یا منفی را خواهیم داشت، زیرا $H_{rr}=\pm g^2$، و می‌نویسیم $+$، اگر H_{rr} مثبت باشد و $-$، اگر H_{rr} منفی باشد.

از اینجا می‌بینیم که معادلهٔ (۱) تبدیل می‌شود به

$$f=\sum_{i\leqslant r}\pm(V_i)^2+\sum_{i,j>r} V_i V_j \widetilde{H}_{ij}(V_1,\cdots,V_n)$$

که در آن $\widetilde{H}_{ij}$ها، توابع متقارن جدیدی هستند. بدین‌سان درمعادلهٔ ۱، به‌طور استقرایی، از

r به $r+1$ رفتیم. بنابراین برای $r=n+1$ درست است، که این اثبات قضیهٔ را به‌پایان می‌رساند[1]. ■

قضیهٔ ۸. فرض‌کنیم $f:U\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ و $g:U\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ توابعی متعلق به ردهٔ C^1 باشند. فرض کنیم $x_0\in U$، $g(x_0)=c_0$ و فرض کنیم $S=g^{-1}(c_0)$، مجموعهٔ‌تراز g، به ازای مقدار c_0، باشند. فرض کنیم $\nabla g(x_0)\neq 0$. اگر $f|S$، در x_0 یک ماکسیمم یا مینیمم داشته‌باشد، آنگاه یک عدد حقیقی λ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\nabla f(x_0)=\lambda \nabla g(x_0)$$

برهان: درطرح اثبات این‌قضیهٔ، که در بند ۷.۷ آمد، تنها چیزی که ناکامل ماند این بود که باید نشان دهیم، اگر $v\perp \nabla g(x_0)$، آنگاه، به ازای یک c^1 خم $c(t)$ در S، با قید $c(0)=x_0$، خواهیم داشت $v=c'(0)$.

این‌نکته را می‌توان به‌صورت زیر برقرار کرد. بنا بر قضیهٔ ۳، تعویض‌مختصاتی‌مانند h وجود دارد به‌طوری‌که $g(h(x_1,\dots,x_n))=x_n$. بدین سان $h^{-1}(S)$ عبارت است از صفحهٔ $x_n=c_0$، موازی با یکی از صفحات مختصات. قرار می‌دهیم $w=Dh^{-1}(x_0).v$. ادعا می‌کنیم که آخرین مختص w صفر است، یعنی، w در صفحهٔ $x_n=c_0$ قرار دارد. در واقع، فرض کنیم $e_n=(0,0,\dots,1)$. نشان خواهیم داد که $0=\langle w,e_n\rangle$. اما، بنابر قاعدهٔ زنجیری، $g(h(x_1,\dots,x_n))=x_n$ مستلزم

$$\langle \nabla g(x_0), Dh(y_0)\cdot w\rangle=\langle w,e_n\rangle$$

است، که درآن $x_0=h(y_0)$. اما سمت‌چپ $0=\langle \nabla g(x_0),v\rangle$ است. حال‌قرارمی‌دهیم $c(t)=h(y_0+tw)$. این در S قرار دارد، $c(0)=x_0$، و بنابر قاعدهٔ زنجیری، $c'(0)=v$.

حال می‌توان اثبات قضیهٔ را، همان‌طور که درمتن ملاحظه شد، به اتمام رساند. ■

مثالهای حل‌شدهٔ فصل ۷

۱. (قاعدهٔ ضرب برای ژاکوبینها) فرض‌کنیم $f:A\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$، $g:B\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$، و $f(A)\subset B$. آنگاه، نشان دهید که، به ازای هر $x\in A$،

$$J_{g\circ f}(x)=J_g(f(x)).J_f(x)$$

(حاصل‌ضرب اعداد حقیقی).

حل: بنا بر قاعدهٔ زنجیری،

---

[1] کاربردهای این‌قضیهٔ در توپولوژی، درسطح نسبتاً پیشرفته‌ای قرار دارند، با وجود این، خوانندهٔ علاقمند به این موضوع، می‌تواندکتاب

J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963

را مورد مشورت قرار دهد.

$$D(g\circ f)(x)=Dg(f(x))\circ Df(x)$$

که می‌توان آن را، یا به‌عنوان ترکیب نگاشتهای خطی، یا بـه عنوان ضرب ماتریسی، تعبیر کرد. چون دترمینان یك حاصل‌ضرب ماتریسی برابر است باحاصل‌ضرب دترمینانها، بی‌درنگ نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌آوریم.

۲. معادلات $u=f_۱(x,y)$ و $v=f_۲(x,y)$ را درنظرمی گیریم. نشان‌دهید که درنزدیکی $(x_۰,y_۰)$ معکوس‌پذیرند اگر، وفقط اگر،

$$\Delta=\frac{\partial f_۱}{\partial x}\frac{\partial f_۲}{\partial y}-\frac{\partial f_۱}{\partial y}\frac{\partial f_۲}{\partial x}$$

در $(x_۰,y_۰)$ صفرنشود. اگر $x(u,v)$، $y(u,v)$ جوابهای آن باشند، نشان دهیدکه

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{۱}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{۱}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{۱}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{۱}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x}$$

حل: این‌درست‌حالت خاصی ازقضیهٔ ۱ است،که در آن $n=۲$. دراینجا Δ دقیقاً عبارت است از دترمینان ژاکوبی. بنابر قضیهٔ ۱، ماتریس مشتقات جوابها برابر است بـا معکوس ماتریس مشتقات $f_۱$، $f_۲$. چون معکوس ماتـریس $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ عبارت است از $۱/\Delta\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$، که در آن $\Delta=ad-bc$، نتیجه مطلوب‌را به‌دست می آوریم.

۳. فرض کنیم $A\subset \mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای بازو $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ یك تابع یك به‌یك به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر باشد به‌طوری که، به ازای هر $x\in A$، $Jf(x)=\det(Df(x))\neq ۰$. نشان دهیدکه $f(A)$ مجموعه‌ای باز و $f^{-۱}:f(A)\to A$ دیفرانسیل‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $y\in f(A)$ و $y=f(x)$. چون f بـه طور پیوسته دیفرانسیل‌پـذیر و $Df(x)$ دارای دترمینانی مخالف با صفر است، قضیهٔ تابع معکوس به ما می‌گوید که همسایگیهای باز U از x و V از y وجود دارند به‌طوری‌که $f|U$ (تحدید f به U) یك $C^۱$ دیفئومرفیسم (یعنی دارای یك $C^۱$ معکوس) پوشا از U در V است. در نتیجه $V\subset f(A)$، از این‌رو $f(A)$ باز است. اما $(f|U)^{-۱}=f^{-۱}|f(U)$ و $(f|U)^{-۱}$، در y، دیفرانسیل‌پذیر است، وبنابراین $f^{-۱}$ در y دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. درنتیجه، $f^{-۱}$ در $f(A)$ دیفرانسیل‌پذیر است.

۴. معادلات زیررا درنظرمی گیریم

$$\begin{cases} x^۲-yu=۰,\\ xy+uv=۰.\end{cases}$$

با استفاده از قضیهٔ تابع ضمنی، توضیح دهید تحت چه شرایطی، این معادلات را می‌توان نسبت‌به u و v حل کرد. آنگاه این‌معادلات را مستقیماً حل‌نمایید و درستی این شرایط را تحقیق کنید.

حل: $f_1:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ را بـه وسیلهٔ $f_1(x,y,u,v)=x^2-yu$ و $f_2:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ را به‌وسیلهٔ $f_2(x,y,u,v)=xy+uv$ تعـریف می‌کنیم. فـرض‌کنیم $f.\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ به وسیلهٔ $f=(f_1,f_2)$ تعریف شود؛ آنگاه f یك‌تابع هموار است. ماتریس

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & 0 \\ v & u \end{bmatrix}$$

دترمینانی برابر با $-yu$ دارد. اگر (x_0,y_0,u_0,v_0) چنان‌باشدکه $y_0u_0\neq 0$، آنگاه، مفروضات قضیهٔ تابع ضمنی برقرارند، و از این رو همسایگیهای A از (x_0,y_0) و B از (u_0,v_0) ویك‌تابع یکتای به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر $g:A \to B$ وجـود دارد به‌طوری‌که، به ازای هر $(x,y)\in A$، $f(x,y,g(x,y))=0$. اگرقرار دهیم $u=g_1$ و $v=g_2$ (که در آن $g=(g_1,g_2)$)، آنگاه u و v جوابهای‌معادلات توأم‌مفروض‌هستند. بدین‌سان، این‌معادلات را می‌توان، به‌طور یکتا، نسبت به u و v، در همسایگیهایی‌حول (x_0,y_0) و (u_0,v_0)، حل‌کرد مشروط‌بر آنکه $y_0u_0\neq 0$، و این‌هم ارز با این‌است‌که بخواهیم $x_0\neq 0$و $y_0\neq 0$، زیـرا $f(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$، یـا $x_0^2-y_0u_0=0$ و $x_0y_0+u_0v_0=0$.

محاسبهٔ مستقیم، جوابها را به این‌صورت $u=x^2/y$ و $v=-y^2/x$ به‌دست می‌دهد، که، به استثنای وقتی‌که $x_0=0$ یا $y_0=0$، معتبرهستند.

۵. (وابستگی تابعی.) فرض‌کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای باز وتوابع $f_1,\dots,f_n:A \to \mathbf{R}$ هموار باشند. می‌گوییم توابع f_1، ...، f_n، در $x_0\in A$، به طورتابعی وابسته‌اند، اگر یك‌همسایگی U از نقطهٔ $(f_1(x_0),\dots,f_n(x_0))\in\mathbf{R}^n$ و یك تابـع هموار $F:U \to \mathbf{R}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که، دریك همسایگی $(f_1(x_0),\dots,f_n(x_0))$، $DF\neq 0$ و به‌ازای هر x دریك همسایگی x_0،

$$F(f_1(x),\dots,f_n(x))=0$$

(یك) نشان دهیدکه اگر f_1،...،f_n در x_0، به‌طورتابعی وابسته باشند، آنگاه، در x_0،

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=0$$

(دو) اگر دریك همسایگی x_0،

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial(f_1,\cdots,f_{n-1})}{\partial(x_1,\cdots,x_{n-1})}\neq 0$$

آنگاه نشان دهید که f_1،...،f_n به طور تابعی وابسته‌اند، و به‌علاوه، به‌ازای Gی،

$$f_n=G(f_1,\cdots,f_{n-1})$$

حل: قرار می‌دهیم $f=(f_1,\dots,f_n)$.

(یك) داریم $F\circ f=0$، از این‌رو $DF(f(x))\circ Df(x)=0$. حال اگر $Jf(x_0)\neq 0$، $Df(x)$، در یك همسایگی x_0، معکوس‌پذیر خواهد بود، و از آنجا $DF(f(x))=0$. بنابر قضیهٔ تابع معکوس، این مستلزم آن است که، درهمه جای یك همسایگی $f(x_0)$، $DF(y)=0$.

(دو) شرایط (دو) مستلزم این هستند که Df دارای رتبهٔ $n-1$ باشد، درنتیجه، بنابر فرع ۲، توابع g، h وجود دارند به‌طوری که

$$g\circ f\circ h(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_{n-1},0)$$

فرض کنیم F آخرین مؤلفهٔ g باشد. آنگاه

$$F(f_1,\cdots,f_n)=0$$

چون g معکوس‌پذیر است، $DF\neq 0$.

ازقضیهٔ تابع ضمنی نتیجه می‌شود که $f_n=G(f_1,\dots,f_{n-1})$، یعنی، می‌توانیم به‌طور موضعی

$$F(f_1,\cdots,f_n)=0$$

را نسبت به $f_n=G(f_1,\dots,f_{n-1})$ حل کنیم، مشروط برآنکه بتوانیم نشان دهیم که $\Delta=\partial F/\partial y_n\neq 0$. اما، همان‌طور که دربالا دیدیم،

$$DF(f(x)).Df(x)=0,$$

یا، برحسب مؤلفه‌ها، اگر $y=f(x)$،

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}=0$$

اگر $\partial F/\partial y_n=0$، خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial y_{n-1}}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\end{bmatrix}=0,$$

یا

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial y_{n-1}}\right)=0,$$

زیرا، بنابر فرض

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_{n-1})}{\partial(x_1,\cdots,x_{n-1})}\neq 0$$

ماتریس مربع معکوس‌پذیر است. از آنجا حاصل می‌شود $DF=0$ که درست نیست. بنابراین $\partial F/\partial y_n\neq 0$ ونتیجهٔ مطلوب را خواهیم داشت.
خواننده باید به شباهت موجود بین‌وابستگی خطی و وابستگی‌تابعی توجه داشته باشد، که دراین‌یکی، شرایط حاکم بررتبهٔ یا دترمینان، توسط شرایط مشابهی روی ماتریس ژاکوبی، جایگزین می‌شوند.

تمرینهای فصل ۷

۱. اگر $f(x,y)=g(x,h(x,y))$ کـه درآن $g,h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، عبارتی برای $\partial f/\partial x$ بنویسید.

۲. مجموعهٔ p معادله با $n+p$ مجهول زیرین را درنظرمی گیریم

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+a_{1,n+1}x_{n+1}+\cdots+a_{1,n+p}x_{n+p}=0$$

$$\vdots$$

$$a_{p1}x_1+\cdots+a_{pn}x_n+a_{1,n+1}x_{n+1}+\cdots+a_{p,n+p}x_{n+p}=0$$

قضیهٔ تابع ضمنی دربارهٔ حل این معادلات نسبت به مجهولات x_{n+1}، ...، x_{n+p} چـه

می‌گویید؟ آیا این مطلب به قضیه‌ای از جبرخطی، که شما می‌دانید، تحویل می‌شود؟

۳. تعمیم زیرین قضیهٔ ۳ را اثبات کنید. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ مجموعه‌ای باز و $f:A\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$، $m\leqslant n$، تابعی متعلق به ردهٔ C^p باشد. فرض کنیم $x_\circ\in A$ و $f(x_\circ)=\circ$ و رتبهٔ $Df(x_\circ)$ برابر m باشد. آنگاه مجموعهٔ بازی مانند U، مجموعهٔ بازی شامل $x_\circ$ مانند V، و یک تابع $h:U\to V$ متعلق به ردهٔ C^p، با معکوسی $h^{-1}:V\to U$ متعلق به‌ردهٔ C^p (یعنی یک C^p دیفئومرفیسم) وجود دارند به طوری‌که

$$f(h(x_1,\cdots,x_n))=(x_{n-m+1},\cdots,x_n)$$

[راهنمایی: اگر $Df(x_\circ)$ دارای رتبهٔ m باشد، باید j_1،...،j_m وجود داشته باشند به طوری‌که ماتریس $(D_{j_k}f_i)$، $1\leqslant i\ ,\ k\leqslant m$، معکوس‌پذیر باشد. نگاشت جایگشت $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ را به‌وسیلهٔ

$$g(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_{j_1-1},x_{n-m+1},x_{j_1+1},\cdots,x_{j_m-1},x_n,x_{j_m+1},\cdots,x_{n-m},x_{j_1},\cdots,x_{j_m})$$

تعریف کنید وسپس دراثبات قضیهٔ ۳، تغییرات مقتضی بدهید.]

۴. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ و $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ توابعی‌متعلق به‌ردهٔ C^1 باشند. $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ را به‌وسیلهٔ $h(x)=f(g_1(x_1),\cdots,g_n(x_n))$، که در آن

$$x=(x_1,\cdots,x_n) \text{ و } g=(g_1,\cdots,g_n)$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که

$$Dh(x)=Df(g_1(x_1),\cdots,g_n(x_n))\begin{bmatrix} g_1'(x_1) & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & g_n'(x_n)\end{bmatrix}$$

۵. (الف) $x:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ را به‌وسیلهٔ $x(r,\theta)=r\ \cos\theta$ و $y:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ را به وسیلهٔ $y(r,\theta)=r\sin\theta$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r_\circ\theta_\circ)=r_\circ$$

(ب) چه وقت می‌توانیم یک تابع معکوس هموار $r(x,y)$، $\theta(x,y)$، تشکیل دهیم؟ این را مستقیماً و به‌وسیلهٔ قضیهٔ تابع معکوس تحقیق کنید.

(پ) تبدیلات زیر را برای مختصات کروی درنظرمی‌گیریم:

$$x(r,\varphi,\theta)=r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y(r,\varphi,\theta)=r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z(r,\varphi,\theta)=r\cos\varphi$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^{2}\sin\varphi$$

(ت) چه وقت می‌توانیم معادلات بالا را نسبت به (r,φ,θ)، بر حسب (x,y,z)، حل کنیم؟

۶. فرض کنیم f در شرایط قضیهٔ تابع معکوس صدق کند و فرض کنیم g معکوس موضعی آن باشد، $g=f^{-1}:W\to U$. فرض کنیم $x_0\in U$ و $y_0=f(x_0)$. حالت $n=3$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که

$$Jf(x_0)D_1g_i'(y_0)=\begin{vmatrix}\delta_{i,1} & D_1f_2(x_0) & D_1f_3(x_0)\\ \delta_{i,2} & D_2f_2(x_0) & D_2f_3(x_0)\\ \delta_{i,3} & D_3f_2(x_0) & D_3f_3(x_0)\end{vmatrix}$$

که در آن $\delta_{i,j}=1$ اگر $i=j$، و 0 اگر $i\neq j$. از این، عبارت زیر را برای D_1g_1 استنتاج کنید:

$$D_1g_1=\frac{\partial(f_2,f_3)/\partial(x_2,x_3)}{\partial(f_1,f_2,f_3)/\partial(x_1,x_2,x_3)}$$

همچنین، عباراتی برای هشت مشتق جزیی دیگر D_jg_i به‌دست آورید.

۷. معلوم کنید آیا، «خمی» را که به‌وسیلهٔ معادلهٔ $x^2+y+\sin(xy)=0$ توصیف شده است، می‌توان، در یک همسایگی $(0,0)$، به‌صورت $y=f(x)$ نوشت. آیا قضیهٔ تابع ضمنی شما را مجاز می‌کند که بگویید معادلهٔ مفروض را می‌توان، در یک همسایگی $(0,0)$، به‌صورت $x=h(y)$ نوشت؟

۸. فرض کنیم که (x_0,y_0,z_0) نقطه‌ای متعلق به آن مکانی باشد که به‌وسیلهٔ

$$z^2+x^2-y^2-b=0 \text{ ،} z^2+xy-a=0$$

تعریف شده است.

(الف) تحت چه شرایطی کافی، آن بخش از مکان نامبرده را که در نزدیکی (x_0,y_0,z_0) قرار دارد، می‌توان به صورت $x=f(z)$، $y=g(z)$ نمایش داد؟

(ب) $f'(z)$ و $g'(z)$ را محاسبه کنید.

۹. فرض کنیم f_1، f_2، f_3 توابعی به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر از $\mathbf{R}^4$ در $\mathbf{R}$ باشند. شرایطی کافی چنان ارائه کنید که معادلات

$$f_1(x,y,z,t)=0,\quad f_2(x,y,z,t)=0,\quad f_3(x,y,z,t)=0$$

را بتوان نسبت به x، y، z برحسب t حل کرد.

۱۰. (الف) فرض کنیم $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ هموار باشد و فرض کنیم که

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

(این معادلات را، معادلات کوشی - ریمان می‌نامند و به طور طبیعی در نظریهٔ متغیرهای مختلط وارد می‌شوند[1].) نشان دهید که $Jf(x,y)=0$ اگر، و فقط اگر، $Df(x,y)=0$؛ بنابراین f موضعاً معکوس‌پذیر است اگر، و فقط اگر، $Df(x,y)\neq 0$. ثابت کنید که تابع معکوس نیز در معادلات کوشی - ریمان صدق می‌کند.

(ب) نشان دهید که، اگر f در معادلات کوشی - ریمان صدق نکند، نتیجهٔ (الف) نادرست است (برای این منظور مثالی بیاورید).

۱۱. (الف) فرض کنیم که $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ متعلق به ردهٔ C^1 و $Df(x_0)$ دارای رتبهٔ m باشد. معنای این سخن آن است که $Df(x_0)$ به‌عنوان یك نگاشت خطی، پوشاست. آنگاه نشان دهید که یك همسایگی $f(x_0)$ وجود دارد که تماماً در تصویر f واقع شده است.

(ب) فرض کنیم $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ متعلق به ردهٔ C^1 و $Df(x_0)$ یك به یك باشد. نشان دهید که، در یك همسایگی x_0، f یك به یك است.

۱۲. نشان دهید که قضیهٔ تابع ضمنی مستلزم قضیهٔ تابع معکوس است.

۱۳. فرع ۱ را ثابت کنید.

۱۴. (برمثال ۵ متکی است.) ثابت کنید که اگر f_1، ...، f_k، در $\mathbf{R}^n$، به طور تابعی مستقل باشند (یعنی، برای $f=(f_1,\dots,f_k)$، $k\leqslant n$، Df دارای رتبهٔ k است) و g، f_1، ...، f_k به‌طور تابعی وابسته باشند، آنگاه، موضعاً، می‌توانیم بنویسیم

$$g=F(f_1,\dots,f_k)$$

۱۵. نگاشت $\mathscr{L}^{-1}:GL(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)\to GL(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$، $A\to A^{-1}$ را، که هر ماتریس را به معکوسش مبدل می‌کند، درنظر می‌گیریم. نشان دهید که مشتق این نگاشت به‌وسیلهٔ

$$D\mathscr{L}^{-1}(A)\cdot B=-A^{-1}\circ B\circ A^{-1}$$

بیان می‌شود (لم ۲ را در اثبات قضیهٔ ۱ مورد مشورت قرار دهید). [راهنمایی: از

---

[1] به‌عنوان نمونه کتاب
J. Marsden, *Basic Complex Analysis,* W.H. Freeman Co. (1973)
را ببینید.

رابطهٔ همانی $\mathscr{L}^{-1}(A)\circ A=$، نسبت به A مشتق بگیرید.]

۱۶. آیا درقضیهٔ ۳، تابع h باید یکتا باشد؟ بحث کنید.

۱۷. برای توابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، اثبات مستقیمی از لم مورس ارائه‌کنید. آیا ایــن لم در مورد توابع

$$\text{(الف)}\ \ f(x)=x^{3}\text{، یا }\ \text{(ب)}\ \ f(x)=x\sin(1/x)$$

کاربرد دارد؟

۱۸. فرض کنیم $f:\mathbf{R}^{4}\to\mathbf{R}^{2}$ عبارت باشد از

$$F(x,y,u,v)=(u^{3}+vx+y,uy+v^{3}-x)$$

درچه‌نقاطی‌می‌توانیم $F(x,y,u,v)=0$ را نسبت‌به u، v، برحسب x، y، حل‌کنیم؟ $\partial u/\partial x$ را محاسبه کنید.

۱۹. فرض کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ متعلق به ردهٔ C^{1} باشد و

$$u=f(x),$$
$$v=-y+xf(x).$$

اگر $f'(x_0)\neq 0$، نشان دهید که این‌تبدیل، درنزدیکی (x_0,y)، معکوس‌پذیر است و این‌معکوس به‌صورت

$$x=f^{-1}(u),$$
$$y=-v+uf^{-1}(u)$$

است.

۲۰. نشان دهید که معادلات

$$x^{2}-y^{2}-u^{3}+v^{2}+4=0$$
$$2xy+y^{2}-2u^{2}+3v^{4}+8=0$$

توابع $u(x,y)$، $v(x,y)$ را، درنزدیکی $x=2$، $y=-1$، چنان تعیین می‌کنند که $u(2,-1)=2$، $v(2,-1)=1$. $\partial u/\partial x$ را محاسبه کنید.

۲۱. «اگر $f(x,y,z)=0$، آنگاه $\partial z/\partial y\cdot\partial y/\partial x\cdot\partial x/\partial z=-1$» به‌نظرشما، واقعاً معنای این چیست؟[1]

۲۲. فرض کنیم، به‌ازای $(x,y)\neq(0,0)$، $f(x,y)=(xy(x^{2}-y^{2}))/(x^{2}+y^{2})$ و $f(0,0)=0$. آیا f متعلق به ردهٔ C^{2} است؟ [راهنمایی: تمرین ۳۲ را در پایان فصل ۶ ببینید.]

---

۱. به‌خاطرچنین گزاره‌های گیج کننده‌ای، کتابهای ترمودینامیك شهرهٔ خاص وعام‌اند.

۲۳. فرض کنیم $C \subset \mathbf{R}^n$ زیرمجموعه‌ای بسته باشد به‌طوری که $x\in C \Longrightarrow \alpha x\in C$، به‌ازای هر $\alpha \geqslant \circ$.

(الف) بحث کنید که C «مثل چیست».

(ب) فرض کنیم $f:C\to \mathbf{R}^n$ پیوسته باشد و به ازای هر $x\in C$، $\alpha\geqslant \circ$،

$$f(\alpha x)=\alpha f(x)$$

نشان دهید که Mی وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in C$،

$$\|f(x)\|\leqslant M\|x\|$$

۲۴. فرض کنیم $f(x,y,z)=x^{۲}-yz-\sin(xz)$ و

$$g(x,y,z)=(x\cos y, x\sin y\cos z, x\sin y\sin z)$$

مشتق $f\circ g$ را محاسبه کنید.

۲۵. فرض کنیم $\overline{D}(\circ,r)=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant r\}$. فرض کنیم $f:\overline{D}(\circ,r)\to\mathbf{R}^n$ نگاشتی باشد که

(الف) $\|f(x)-f(y)\|\leqslant ۱/۳\|x-y\|$ (ب) $\|f(\circ)\|\leqslant ۲/۳r$

ثابت کنید که یک $x\in\overline{D}(\circ,r)$ یکتا وجود دارد به‌طوری که $f(x)=x$.

۲۶. نشان دهید که اعداد مثبت $p>\circ$، $q>\circ$ وجود دارند به‌طوری که توابع یکتای u، v از $]-۱-p,-۱+p[$ در $]۱-q,۱+q[$ موجودند که برای آنها، به‌ازای هر $x\in]-۱-p,-۱+p[$، داشته باشیم

$$xe^{u(x)}+u(x)e^{v(x)}=\circ=xe^{v(x)}+v(x)e^{u(x)}$$

و $u(-۱)=۱=v(-۱)$.

۲۷. تخمینی برای طول زمانی که در آن جواب $dx/dt=t^{۲}x^{۳}e^{tx}$، $x(\circ)=۱$ وجود دارد، به‌دست آورید.

۲۸. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n$ و $B\subset\mathcal{C}(A,\mathbf{R})$ فشرده باشند (بند ۵.۵ را ببینید). نشان دهید دهید که یک $f_\circ\in B$ و یک $x_\circ\in A$ وجود دارند به‌طوری که، به‌ازای هر $g\in B$ و $x\in A$،

$$g(x)\leqslant f_\circ(x_\circ)$$

۲۹. فرض کنیم $a_n\geqslant a_{n+۱}\geqslant\circ$ و $a_n\to\circ$. قرار می‌دهیم $f(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty}a_nx^n$. نشان دهید که $f(x)$ در $[-۱,\circ]$ پیوسته است.

۳۰. آیا امکان دارد

$$xy^{۲}+xzu+yv^{۲}=۳$$

$$u^3yz+2xv-u^2v^2=2$$

را، در نزدیکی $(1,1,1)=(x,y,z)$، $(u,v)=(1,1)$، نسبت به $u(x,y,z)$، $v(x,y,z)$، حل کرد؟ $\partial v/\partial y$ را محاسبه کنید.

۳۱. معادلهٔ $dx/dt=1+tx$، $x(0)=0$ را درنظرمی گیریم. روش تکرار را که درمتن دادیم به‌کار ببرید تا بسط سری توانی جواب آن را به‌دست آورید. شعاع همگرایی این‌سری را مورد بررسی قرار دهید.

۳۲. اندیس تابع $x^2+y^2-7x-8y+xy+16+(x-2)^3$ را در نقطهٔ بحرانی $x=2$، $y=3$، محاسبه کنید. ماهیت این تابع را درنزدیکی این نقطهٔ مورد بحث قرار دهید.

۳۳. اثبات‌دیگری ازقضیهٔ ۷، به‌صورت زیر، ارائه‌دهید. فرض کنیم $x_0=0$ و $f(x_0)=0$. قضیهٔ تیلور را به‌کار ببرید وبنویسید

$$f(x)=1/2D^2f(0)\cdot(x,x)+1/2R_x(x,x)=1/2\langle A_xx,x\rangle$$

که درآن، به‌ازای هر x، A_x یك تبدیل خطی متقارن $\mathbf{R}^n$ است. بنا بر فرض، A_0 یك ایزومرفیسم‌است. بنابر لم ۲، صفحهٔ ۲۹۰، اگر x به ۰ نزدیك باشد، آنگاه A_x یک ایزوفیسم است. قرارمی‌دهیم $Q_x=A_0A_x^{-1}$ به‌طوری که $Q_0=I$. با استفاده از یك سری توانی، می‌توانیم، برای x نزدیك‌به ۰، ریشهٔ دوم Q_x را، که با T_x نمایش می‌دهیم، تعریف کنیم، یعنی $T_x^2=Q_x$. نشان دهید که $Q_xA_x=A_xQ_x^T$، که در آن T به معنای ماتریس ترانهاده است ، و با استفاده از بسط T_x به سری توانی ، نشان دهید که همان معادلهٔ برای T_x برقرار است . قراردهید $S_x=T_x^{-1}$ ونتیجه‌بگیرید که $A_x=S_xA_0S_x^T$. قرار دهید $h(x)=S_x^Tx$ ونشان‌دهید که $Dh(0)=I$؛ حال‌قضیهٔ تابع معکوس را به‌کار بندید ونتیجه بگیرید که h موضعاً معکوس‌پذیراست. قراردهید $g=h^{-1}$. نشان دهید که

$$f(x)=(1/2)\langle A_0h(x),h(x)\rangle$$

ونتیجه بگیرید که $f\circ g(x)=(1/2)D^2f(0)(x,x)$. سرانجام، با استفاده از یك تعویض‌خطی‌مختصات،فرم درجهٔ دو $(1/2)D^2f$ را قطری کنید.

درتمرینهای ۳۴–۳۷، اکسترممهای نسبی $f|S$ را بیابید: هم قضیهٔ ۸ وهم فرع۳ را به‌کار ببرید.

۳۴. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},(x,y)\to x^2+y^2$، $S=\{(x,2)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$

۳۵. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},(x,y)\to x^2+y^2$، $S=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2=1\}$

۳۶. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},(x,y)\to x^2-y^2$، $S=\{(x,\cos x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$

۳۷. $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R},(x,y,z)\to x^2+y^2+z^2$، $S=\{(x,y,z)\,|\,z\geqslant-2+x^2+y^2\}$

۳۸. یك قوطی به شکل مکعب مستطیل وبدون سر، دارای سطحی برابر بـا ۱۶ مترمربع است. آن ابعادی را بیابیدکه حجم آن را بیشینه سازند.

۳۹. طرح یك قوطی استوانه‌ای‌شکل را بریزیدکه گنجایش ۱ لیترآب را داشته باشد، اما برای ساختن‌آن، مقدار مینیمم فلز به‌کار رود.

۴۰. فرض کنیم f_nها، توابع پیوستهٔیکنوای افزایشی ومعینی‌در $[\text{۰},\text{۱}]$ باشند. فرض کنیم، به‌ازای هر $x\in[\text{۰},\text{۱}]$، $F(x)=\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} f_n(x)$ همگرا باشد. ثابت کنیدکه F پیوسته است.

پاسخهای تمرینهای برگزیده

مقدمه

پیش نیازها: مجموعه‌ها و توابع

۱. (الف) $f(A_\circ)=\{1\}$، $f^{-1}(B_\circ)=A$.

(ب) $f(A_\circ)=A_\circ$، $f^{-1}(B_\circ)=B_\circ$.

(پ) $f(A_\circ)=\{1,0,-1\}$، $f^{-1}(B_\circ)=\{x|x\leqslant 0\}$.

۲. (الف) و (پ) نه یک‌به‌یک هستند و نه پوشا، (ب) یک‌به‌یک و پوشاست.

۳. (الف)

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(C_1\cup C_2) &\Longleftrightarrow f(x)\in C_1\cup C_2,\\ &\Longleftrightarrow f(x)\in C_1 \text{ یا } f(x)\in C_2,\\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(C_1) \text{ یا } x\in f^{-1}(C_2),\\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(C_1)\cup f^{-1}(C_2), \end{aligned}$$

بنا براین $f^{-1}(C_1\cup C_2)=f^{-1}(C_1)\cup f^{-1}(C_2)$

(ت) $y\in f(D_1\cap D_2)$ مستلزم این است که عضوی مانند $x\in D_1\cap D_2$ وجود دارد به‌طوری که $y=f(x)$. چون $x\in D_1$ و $x\in D_2$، آنگاه $y\in f(D_1)$ و $y\in f(D_2)$، بنا براین $y\in f(D_1)\cap f(D_2)$.

۴. (الف) برای تحقیق در درستی تمرینهای ۳(الف) و (ت) به‌ازای تابع تمرین ۱(پ)، می‌بینیم که

$$f^{-1}(C_1\cup C_2)=\{1,0,-1\}=\{1\}\cup\{0,-1\}=f^{-1}(C_1)\cup f^{-1}(C_2)$$

و این نشان می‌دهد که در ۳ (الف) صدق می‌کند، و

$$f(D_1\cap D_2)=f(\{1\})=\{1\}=\{1,-1\}\cap\{1\}=f(D_1)\cap f(D_2)$$

که نشان می‌دهد در

$$f(D_1 \cap D_2) \subset f(D_1) \cap f(D_2)$$

صدق می‌کند.

۶. $f:]0,1[\to \mathbf{R}$ را با

$$f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)/x, & 0<x\leqslant\frac{1}{2} \quad \text{اگر} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)/(1-x), & \frac{1}{2}<x<1 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. تحقیق کنید که این یك تناظر دوسویی است.

۸. $\varphi:\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\} \to \{1,2,3,\dots\}$ را با

$$\varphi(n)=\begin{cases}2n, & n>0 \quad \text{اگر} \\ 1, & n=0 \quad \text{اگر} \\ -2n+1, & n<0 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. تحقیق کنید که این یك تناظر دوسویی است.

۹. فرض کنیم $A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$، و تعریف می‌کنیم

$$f:\cup A_i \to \mathbf{N},\ a_{ij} \to i+(k-1)(k-2)/2$$

که در آن $k=i+j$. آنگاه f، $\cup A_i$ را به‌طور یك‌به‌یك روی $\mathbf{N}$ می‌نگارد.

۱۰. برای نشان‌دادن $\cup \mathcal{A} \subset \cup \mathcal{B}$، ملاحظه‌می کنیم که $x\in \cup \mathcal{A}$ مستلزم این‌است که‌عضوی مانند $A\in\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ وجود دارد به‌طوری که $x\in A$، بنابراین $x\in\cup\mathcal{B}$.

۱۱. $f\circ(g\circ h)(x)=f(g\circ h(x))=f(g(h(x)))=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)\circ h(x)$

۱۲. (یك) فرض‌کنیم $f:A \to B$ یك تناظر دوسویی است. $g:B \to A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای $y\in B$، قرار می‌دهیم $g(y)=x$ که در آن $f(x)=y$ (به دلیل پوشا بودن چنین xی وجود دارد و به‌دلیل یك‌به‌یك بودن، این x یکتاست).

(دو) فرض‌کنیم $g:B \to A$ وجود دارد به‌طوری که: همانی $=f\circ g$ و همانی $=g\circ f$. برای نشان دادن اینکه f پوشاست، فرض می‌کنیم $y\in B$ و قرار می‌دهیم $x=g(y)$. آنگاه $f(x)=y$. برای نشان دادن اینکه f یك به یك است، ملاحظه می‌کنیم که اگر $f(x_1)=f(x_2)$ آنگاه $x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$ (تحقیق کنید که $g=f^{-1}$ و یکتاست.)

۱۳. همانی $= f^{-1}\circ f = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = (f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)$، و به‌طور مشابهی، همانی $= (g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})$. بدین‌سان، بنا بر تمرین ۱۲، $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ و $g\circ f$ یك تناظر دوسویی است.

فصل ۱
خط حقیقی و فضای n بعدی اقلیدسی

۱.۱ خط حقیقی $\mathbf{R}^n$

۱. $\sup(S) = 1$؛ S از پایین کراندار نیست.

۳. $\frac{3^n}{n!} = \frac{3\cdot 3\cdots 3}{1\cdot 2\cdots n} \leqslant \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{n} = \frac{27}{2n}$، از این رو انتخاب کنید $N > \frac{27}{2\varepsilon}$.

۵. وقتی $n\to\infty$، $x_n = (\sqrt{n^2+1}-n)\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0$.

۶. خیر؛ مثلاً فرض کنیم $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$.

۷. $\sup(Q)$ یك کران بالایی برای P است، بنابراین $\sup(Q)\geqslant\sup(P)$.

۲.۱ فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbf{R}^n$

۲. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$

۳. داریم
$$\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ y=0 \end{cases}$$
و ازاین‌رو $\{(-2,0,3)\}$ فضای جوابهای این دستگاه معادلات را پدید می‌آورد.

تمرینهای فصل ۱ (واقع در پایان فصل)

۱. (الف) $\sup(S)=\sqrt{5}$؛ $\inf(S)=-\sqrt{5}$.

(ب) نه $\sup(S)$ وجود دارد و نه $\inf(S)$.

(پ) $\sup(S)=1$؛ $\inf(S)=0$.

(ت) $\sup(S)=0$؛ $\inf(S)=-1$.

(ث) $\sup(S)=1/3$؛ $\inf(S)=0{,}3$.

(ج) درهرحالت، $\sup(S)=b$؛ $\inf(S)=a$.

۲. فرض کنیم k فاقد مجذور باشد، یعنی، به طوری که به‌ازای هیچ عدد اول pی داریم $p^2|k$ (p^2، k را می‌شمارد)؛ فرض کنیم، به ازای اعداد صحیحی مانند a، b، داریم $\sqrt{k}=a/b$ و اینکه a و b عوامل مشترکی ندارند. آنگاه $k=a^2/b^2$ مستلزم این است که $b^2k=a^2$ و این خود مستلزم $k|a^2$ (k، a^2 را می‌شمارد) است. ولی k که فاقد مجذور است، ایجاب می‌کند که $k^2|a^2$. (این نتیجه‌ای از این واقعیت است که هرعدد صحیحی دارای تجزیه‌ای یکتا برحسب عوامل اول است.) آنگاه $b^2k=a'^2k^2$ مستلزم این است که $b^2=a'^2k$ و این خود مستلزم $k|b$ است و این ناقض فرضی است که طبق آن a و b عوامل مشترکی ندارند.

۳. (الف) فرض کنیم $0<x$. قرار می‌دهیم $\varepsilon=x/2$. آنگاه $x<x/2$ مستلزم $0<x/2<0$ است و این یك تناقض است. بنابراین $x=0$.
(ب) قرار می‌دهیم $x=\min\{\varepsilon/2,\ 1/2\}$.

۵. بنابراصل موضوع تمامیت، $\sup(S)\in\mathbf{R}$ وجود دارد. بنابرقضیهٔ ۲، نقطه‌ای مانند $x_{n_0}\in S$ وجود دارد به‌طوری که $\sup(S)-x_{n_0}<\varepsilon$. از افزایشی بودن x_n نتیجه می‌شود که، به‌ازای هر $n>n_0$، $\sup(S)\geqslant x_n\geqslant x_{n_0}$، بنابراین، به‌ازای هر $n>n_0$، $0<\sup(S)-x_n<\varepsilon$. بدین‌سان $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup(S)$.

۷. فرض کنیم $a=\sup(A)$ ، $b=\sup(B)$، و $z=x+y\in A+B$. آنگاه $z=x+y\leqslant a+y\leqslant a+b$، بنابراین $a+b$ یك کران بالایی برای $A+B$ است. اگر $0<\varepsilon$، یك $x\in A$ و یك $y\in B$ وجود دارند به طوری که $a<x+\varepsilon/2$، و $b<y+\varepsilon/2$ و این مستلزم این است که

$$(a+b)<(x+y)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=(x+y)+\varepsilon$$

بدین‌سان، بنابرقضیهٔ ۲، $a+b=\sup(A+B)$.

۱۲. (الف)
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,\ x+y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\end{aligned}$$

و به‌طور مشابهی

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$$

با جمع اینها، نتیجه به‌دست می‌آید.
این ثابت می‌کند که حاصل جمع مربعات قطرهای یك متوازی‌الاضلاع برابر است با

دو برابر حاصل جمع مربعات اضلاع آن.

(ب)
$$\|x+y\|^2\|x-y\|^2=[\|x\|^2+2<x,y>+\|y\|^2]\cdot[\|x\|^2-2<x,y>+\|y\|^2]$$
$$=(\|x\|^2+\|y\|^2)^2-4<x,y>^2\leqslant(\|x\|^2+\|y\|^2)^2$$

(پ) مشابه با (الف).

۱۴. (الف) استقراء را روی n به‌کار ببرید. نامساوی شوارتس از آن حاصل می‌شود، زیرا

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqslant 0$$

و بدین‌سان

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

(ب) $(x+y)^2=x(x+y)+y(x+y)$ و بنابر (الف)،

$$\Sigma x_j(x_j+y_j)+\Sigma y_j(x_j+y_j)\leqslant(\Sigma x_j^2)^{1/2}(\Sigma(x_j+y_j)^2)^{1/2}+(\Sigma y_j^2)^{1/2}(\Sigma(x_j+y_j)^2)^{1/2}$$

از ترکیب جملات و تقسیم بر $(\Sigma(x_j+y_j)^2)^{1/2}$، نتیجه حاصل می‌شود.

۱۵. فرض کنیم $r=d(x_1,x_2)$. آنگاه، با استقراء، $d(x_n,x_{n+1})\leqslant r/2^{n-1}$، و ازاین‌رو، بنابر نامساوی مثلثی،

$$d(x_n,x_{n+k})\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+k-1},x_{n+k})$$

$$\leqslant\frac{r}{2^{n-1}}+\frac{r}{2^n}+\cdots+\frac{r}{2^{n+k-2}}$$

$$=r\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^{n+i-1}}=\frac{r}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^i}$$

$$\leqslant\frac{r}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{r}{2^{n-1}}\cdot 2=\frac{r}{2^{n-2}}$$

بدین‌سان، اگر N را به قدر کافی بزرگ بگیریم به طوری که $r/2^{N-2}<\varepsilon$، آنگاه $n>N$ مستلزم $d(x_n,x_{n+k})<\varepsilon$ است. بنابراین، x_n کوشی است.

۱۷. فرض کنیم $L=\{x\in\mathbf{R}\mid$ یك کران پایینی S است $x\}$. آنگاه، به‌ازای هر $y\in L$، $\inf(S)\geqslant y$، بنابراین $\inf(S)\geqslant\sup(L)$. همچنین $\inf(S)\in L$ مستلزم

$\sup(L) \geqslant \inf(S)$ است، و این تساوی مطلوب را به‌دست می‌دهد.

۱۸. (الف) $|x_n - x| = |x - x_n|$ بنابراین $x_n \to x$ اگر، وفقط اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$، Nی وجود داشته باشد به‌طوری که $n \geqslant N$ مستلزم $|x_n - x| = |x - x_n| < \varepsilon$ باشد و این هم با $-x_n \to -x$ هم‌ارز است.

(ب) فرض کنیم هر دنبالهٔ افزایشی که از بالا کراندار است، همگرا باشد (یعنی، اصل موضوع تمامیت را مفروض می‌گیریم). فرض کنیم x_n دنباله‌ای کاهشی باشد که از پایین کراندار است؛ باید نشان دهیم که x_n همگراست. $\{-x_n\}$ دنباله‌ای افزایشی است که از بالا کراندار است، از این رو $-x_n$ به سمت، مثلاً a، همگراست. بدین‌سان، بنابر (الف)، x_n به‌سمت $-a$ همگراست. درجهت عکس نیز به‌همین ترتیب عمل می‌کنیم.

(پ) تمرین ۵ (الف) واین‌امر راکه $\sup\{-x_۱, -x_۲, \cdots\} = -\inf\{x_۱, x_۲, \cdots\}$ به‌کار ببرید.

۱۹. $y_۱ = y_۲ = y_۳ = \frac{۱}{۲}$.

۲۲. (الف) به ازای $\varepsilon > \circ$ داده شده، فرض کنیم N چنان است که $n \geqslant N$ مستلزم $|x_n - x| < \varepsilon / |a|$ است. آنگاه $n \geqslant N$ مستلزم

$$|ax_n - ax| = |a| \cdot |x_n - x| < |a| \cdot \varepsilon / |a| = \varepsilon$$

است، ازاین‌رو $ax_n \to ax$.

۲۳. به‌ازای‌هر $x \in P$، $\circ \leqslant x$، ازاین‌رو $\circ$ یک‌کران پایینی P است؛ همچنین، به‌ازای $\varepsilon > \circ$ داده شده، عضوی مانند $x \in P$، با فرض $x < \circ + \varepsilon$ وجود دارد، یعنی عضوی مانند $x_k \in P$ به‌طوری‌که $kx_k \leqslant ۱$ که در آن $k > ۱/\varepsilon$. بدین‌سان، بنابر تمرین ۴، $\circ = \inf(P)$.

۲۴. خیر؛ قرار می‌دهیم $P =]\circ, ۱[$ و $Q = [\circ, ۱]$، آنگاه $\sup(P) = \sup(Q) = ۱$ و $\inf(P) = \inf(Q) = \circ$ ولی $P \neq Q$.

۲۷. هر b_n را چنان برمی‌گزینیم که $b_n = |b_n| < \varepsilon / ۲^n$ (این امکان‌پذیر است زیرا $a_n \to \circ$). آنگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} b_n < \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\varepsilon}{۲^n} = \varepsilon \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n} = \varepsilon \cdot ۱ = \varepsilon$$

۳۲. $x_{n+۱} = \frac{x_۱ + \cdots + x_{n-۱}}{۲} + \frac{x_n}{۲} = x_n + \frac{x_n}{۲} = \frac{۳}{۲} x_n$، از این‌رو، به‌ازای هر n، $x_n = (۳/۲)^{n-۱}$ (این را با استقراء ثابت کنید). فرض کنیم $M > \circ$. حال $(۳/۲)^n = (۱ + ۱/۲)^n \geqslant ۱ + n/۲$، و بنابر اصل ارشمیدس، Nی وجود دارد

به‌طوری که $N>2M-1$، ازاین‌رو $x_N=(3/2)^{N-1}\geqslant 1+(N-1)/2>M$
و این ثابت می‌کند که $x_n\to\infty$.

۳۳. (الف) بنابر قاعدهٔ لوپیتال، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

(ب) قسمت (الف) و پیوستگی e^x را به‌کار ببرید تا نشان دهید که، به‌ازای همهٔ xهای حقیقی، $x^{1/x}(=e^{(1/x)\log x})\to 1$.

فصل ۲
توپولوژی $\mathbf{R}^n$

۱.۲ مجموعه‌های باز

۱. فرض کنیم $x\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. چون $x\neq(0,0)$، $d(x,(0,0))=r>0$؛ آنگاه $D(x,r)\subset\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$، زیرا $(0,0)\in D(x,r)$ مستلزم این است که $d(x,(0,0))<r=d(x,(0,0))$ که این غیرممکن است. بنابراین $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ باز است.

۳. فرض کنیم $(x_0,y_0)\in B$. آنگاه $x_0\in A$. بنابراین یك $\delta>0$ وجود دارد به طوری که $]x_0-\delta,x_0+\delta[\subset A$. ادعا، $D((x_0,y_0),\delta)\subset B$. درواقع $(x,y)\in D((x_0,y_0),\delta)$ مستلزم این است که $d(x_1,x_0)\leqslant d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$، بنابراین $x\in A$.

۴. قرار می‌دهیم $A=\bigcup\limits_{y\in B}D(y,1)$. آنگاه $x\in A\iff$ یك $y\in B$ وجود دارد به‌طوری که $(d(x,y)<1$ (یعنی، $x\in D(y,1)$ به‌ازای یك $y\in B\iff y\in C$. به‌عنوان اجتماع مجموعه‌هایی باز، C باز است.

۵. خیر؛ فرض کنیم A زیرمجموعهٔ باز دلخواهی از $\mathbf{R}$ باشد و $B=\{0\}$. آنگاه $A.B=\{0\}$ که باز نیست.
تبصره: اگر B نیز باز باشد، آنگاه $A.B$ باز است.

۲.۲ درون یك مجموعه

۱. $\operatorname{int}(S)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|xy>1\}$.

۳. بلی، $x\in\operatorname{int}(A)$ مستلزم این‌است که مجموعهٔ بازی‌مانند U، با فرض $a\in U\subset A\subset B$، وجود دارد، بنابراین $x\in\operatorname{int}(B)$.

۴. بلی. اگر $x\in\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$، آنگاه مجموعه‌های بازی مانند U، V، با فرض $x\in U\subset A$ و $x\in V\subset B$، وجود دارند. حال $x\in U\cap V\subset A\cap B$ و $U\cap V$ باز است، ازاین‌رو $x\in\operatorname{int}(A\cap B)$. اگر $x\in\operatorname{int}(A\cap B)$، آنگاه مجموعهٔ بازی مانند

U، با فرض A و B، $x\in U\subset A\cap B\subset A$ و B، وجود دارد؛ ازاین‌رو $x\in \operatorname{int}(A)\cap \operatorname{int}(B)$.

۳.۲ مجموعه‌های بسته

۱. بلی.

۲. خیر؛ $(1,0)\in \mathbf{R}^2\setminus S$ و نیز همسایگی دلخواه حول $(1,0)$ حاوی نقاطی از S خواهد بود.

۵. خیر. اگر $x\in \mathbf{R}\setminus S=\{x\in\mathbf{R}\mid x \text{ گویاست}\}$، هیچ همسایگی x وجود ندارد که حاوی نقاط گنگ نباشد، بنابراین $\mathbf{R}\setminus S$ باز نیست، و S بسته نیست.

۴.۲ نقاط انباشتگی

۱. $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid y=0 \text{ و } 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

۲. بلی؛ زیرا هرمجموعهٔ باز N که حاوی x است، شامل نقاطی از A غیر از x است که خود نیز نقاطی در B هستند.

۳. (الف) هیچ نقطهٔ انباشتگی ندارد (گویی به شعاع ۱/۲ حول هر (m,n) دلخواه فقط (m,n) را دربردارد).

(ب) همهٔ $\mathbf{R}^2$ (به‌ازای هرنقطهٔ واقع در $\mathbf{R}^2$، نقطه‌ای به‌دلخواه نزدیک آن با مؤلفه‌های گویا وجود دارد).

(پ) محور xها $=\{(x,0)\in\mathbf{R}^2\mid x\in\mathbf{R}\}$.

(ت) $\{(1/n,0)\mid n\neq 0 \text{ یك عدد صحیح، } n\}$ (با رسم نمودار مجموعه‌ها، (پ) و (ت) را ببینید.)

۴. خیر (ولی، بنابرقضیهٔ ۲، فصل ۱، اگر $x\notin A$، پاسخ بلی است)؛ مثلاً اگر $A=\{1\}$ آنگاه $\sup(A)=1$ ولی یك نقطهٔ انباشتگی A نیست (A هیچ نقطهٔ انباشتگی‌ندارد).

۵.۲ بست یك مجموعه

۱. $\operatorname{cl}(S)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\geqslant y^2\}$.

۲. $\{0\}\cup\{1/n\mid n=1,2,3,\ldots\}$.

۳. $\mathbf{R}^2$.

۴. (الف)

$$\operatorname{cl}(A)\setminus A=(A\cup\{A \text{ نقاط انباشتگی}\})\setminus A=(A\setminus A)\cup(\{A \text{ نقاط انباشتگی}\}\setminus A)$$
$$=\{A \text{ نقاط انباشتگی}\}\setminus A\subset\{A \text{ نقاط انباشتگی}\}$$

(ب) نه‌لزوماً، مثلاً $A=]0,1[$. آنگاه هرنقطهٔ A یك نقطهٔ انباشتگی A است، ازاین‌رو $\operatorname{cl}(A)\setminus A=\{0,1\}$ فاقد همهٔ آن نقاط انباشتگی است که نقاط A هستند.

۵. اگر $x\in A$ آنگاه $x\in \mathrm{cl}(A)$. اگر $x\notin A$، قضیهٔ ۲، فصل ۱ را به‌کار ببرید تا نشان‌دهید که x یك نقطهٔ انباشتگی A است.

۶.۲ مرز یك مجموعه

۱. $bd(A)=\{0\}\cup A$.

۲. (الف) فرض کنیم $\mathrm{cl}(A)\setminus A\neq\varnothing$، زیرا درغیراین‌صورت گزارهٔ مورد نظر آشکارا درست است. فرض کنیم $x\in \mathrm{cl}(A)\setminus A$، و N یك همسایگی x باشد. $x\in\mathbf{R}\setminus A$ مستلزم $N\cap\mathbf{R}\setminus A\neq\varnothing$ است، و ازاینکه x یك نقطهٔ انباشتگی A است نتیجه‌می‌شود که یك $y\in A$ وجود دارد به‌طوری که $y\in N$. بنابراین $N\cap A\neq\varnothing$، و بنا برقضیهٔ ۶، $x\in bd(A)$.
(ب) عکس آن درست نیست؛ فرض کنیم A = اعداد گویای واقع در $[0,1]$. آنگاه $bd(A)=[0,1]$، بنابراین $1/2\in bd(A)$، ولی $1/2\in A$، از این رو $1/2\notin \mathrm{cl}(A)\setminus A$.

۳. $bd(A)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=y\}$.

۴. خیر، زیرا اگر $A=\{x \mid$ x گویاست و $x\in[0,1]\}$ آنگاه $\mathrm{int}A=\varnothing$، $bd(\mathrm{int}A)=\varnothing$، ولی $bd(A)=[0,1]$.

۵. بلی.

۷.۲ دنباله‌ها

۱. $(0,0)$.

۲. این مجموعه شامل حدود همهٔ دنباله‌هایش است (زیرا هر زیردنبالهٔ یك دنبالهٔ همگرا، به‌سمت همان حد دنبالهٔ کل، همگراست)، ازاین‌رو قضیهٔ ۹ (یك) را به‌کار ببرید.

۳. قضیهٔ ۹ (دو) را به‌کار ببرید.

۵. $\mathrm{cl}(S)=\{x\in\mathbf{R} \mid x^2\leqslant 2\}=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

۸.۲ سریهای واقع در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^n$

۱. به‌ازای هر k،

$$\sum_{n=1}^{k} x_n=\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{(\sin n)^n}{n^2},\ \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}\right)$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست اگر، وفقط اگر، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n)^n}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا باشند.

بنا بر قضیهٔ ۱۳ (سه)، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست، و چون $\left|\frac{(\sin n)^n}{n^2}\right|=\frac{|\sin n|^n}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$،
بنا بر آزمون مقایسه، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin n)^n}{n^2}$ همگراست. بدین‌سان $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ همگراست.

۴. اگر $n\geqslant ۴$، آنگاه $\frac{۲^n+n}{۳^n-n}\leqslant\left(\frac{۳}{۴}\right)^n$، از این رو، بنا بر قضیهٔ ۱۳ (یك) و ۱۳ (دو)، $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{۲^n+n}{۳^n-n}$ همگراست. آزمون نسبت را نیز می‌توان به‌کار برد.

$$\left(\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=۲/۳\right)$$

۵. $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{۳}\to\infty$، بنابراین $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ همگرا نیست.

تمرینهای فصل ۲ (واقع در پایان فصل)

۱. (الف) فرض کنیم $x\in]۱,۲[$ و $\delta=\min\{۲-x,\ x-۱\}$، آنگاه $]x-\delta,x+\delta[=D(x,\delta)\subset]۱,۲[$، ازاین‌رو $]۱,۲[$ باز است.
(ب) نشان دهید که $\mathbf{R}\setminus[۲,۳]$ باز است.
(پ) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[-۱,\ ۱/n[=[-۱,۰]$ بسته است.
(ت) $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$ باز است.
(ث) بسته است.
(ج) نه باز است نه بسته: تمرین ۵ بند ۳.۲ را ببینید.
(چ) نه باز است نه بسته.
(ح) فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا در $S=\{x\in\mathbf{R}^n\mid\|x\|=۱\}$ باشد، مثلاً $x_n\to x$. حال به ازای هر $x,y\in\mathbf{R}^n$، $|\,\|x\|-\|y\|\,|\leqslant\|x-y\|$؛ بنابراین $x_n\to x$ مستلزم $\|x_n\|\to\|x\|$ است. ولی به ازای هر n، $\|x_n\|=۱$، بنابراین $\|x\|=۱$، ازاین‌رو $x\in S$، که بنا بر قضیهٔ ۹ (یك)، ثابت می‌کند که S بسته است.

۲. (الف) $\operatorname{int}(A)=A$، $\operatorname{cl}(A)=[۱,۲]$، $\operatorname{bd}(A)=\{۱,۲\}$.
(ب) $\operatorname{int}(A)=]۲,۳[$، $\operatorname{cl}(A)=A$، $\operatorname{bd}(A)=\{۲,۳\}$.
(پ) $\operatorname{int}(A)=]-۱,۰[$، $\operatorname{cl}(A)=A$، $\operatorname{bd}(A)=\{-۱,۰\}$.
(ت) $\operatorname{int}(A)=A$، $\operatorname{cl}(A)=A$، $\operatorname{bd}(A)=\varnothing$.
(ث) $\operatorname{int}(A)=\varnothing$، $\operatorname{cl}(A)=A$، $\operatorname{bd}(A)=A$.
(ج) $\operatorname{int}(A)=\varnothing$، $\operatorname{cl}(A)=[۰,۱]$، $\operatorname{bd}(A)=[۰,۱]$.
(چ) $\operatorname{int}(A)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid ۰<x<۱\}$، $\operatorname{cl}(A)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid ۰\leqslant x\leqslant ۱\}$،

$\mathrm{bd}(A)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=0$ یا $x=1\}$.

(ح) $\mathrm{int}(A)=\varnothing$، $\mathrm{cl}(A)=A$، $\mathrm{bd}(A)=A$.

۵. فرض کنیم $x\in\mathrm{int}(A)$؛ آنگاه مجموعهٔ بازی مانند U با فرض $x\in U\subset A$، وجود دارد، و از بازبودن U نتیجه می‌شود که یک $\varepsilon>0$ وجود دارد به طوری که $D(x,\varepsilon)\subset U\subset A$. برعکس، اگر یک $\varepsilon>0$ وجودداشته باشد که $D(x,\varepsilon)\subset A$، آنگاه چون $D(x,\varepsilon)$ باز است، مجموعهٔ بازی مانند $U=D(x,\varepsilon)$ وجود دارد به طوری که $x\in U\subset A$، بنابراین $x\in\mathrm{int}(A)$.

۶. (الف) $x_n=(-1)^n$ حد ندارد.

(ب) $(1,0)$.

(پ) $(0,0)$.

(ت) $(0,0)$ $(1/n^n\leqslant 1/n\to 0)$.

۷. باید نشان دهیم که $U=\mathrm{cl}(U)\setminus(\mathrm{cl}(U)\cap\mathrm{cl}(\mathbf{R}^n\setminus U))$. چون U باز است، $\mathbf{R}^n\setminus U$ بسته است، ازاین‌رو $\mathrm{cl}(\mathbf{R}^n\setminus U)=\mathbf{R}^n\setminus U$. بدین‌سان

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(U)\setminus(\mathrm{cl}(U)\cap\mathrm{cl}(\mathbf{R}^n\setminus U))&=\mathrm{cl}(U)\cap[\mathbf{R}^n\setminus\mathrm{cl}(U)\cap\mathrm{cl}(\mathbf{R}^n\setminus U)]\\&=\mathrm{cl}(U)\cap[\mathbf{R}^n\setminus\mathrm{cl}(U)]\cup\{\mathrm{cl}(U)\cap[\mathbf{R}^n\setminus(\mathbf{R}^n\setminus U)]\}\\&=\varnothing\cup\{\mathrm{cl}(U)\cap U\}\\&=U\end{aligned}$$

بدازای هرمجموعهٔ واقع در $\mathbf{R}^n$، این نتیجه درست نیست؛ مثلاً فرض کنیم $U=[0,1]$. آنگاه $\mathrm{cl}(U)\setminus\mathrm{bd}(U)=[0,1]\setminus\{0,1\}=]0,1[\neq U$.

۸. $S\subset\mathbf{R}$ از بالا کراندار است مستلزم این است که S یک سوپرمم در $\mathbf{R}$ دارد. آنگاه بنابر تمرین ۵، بند ۵.۲، $\sup(S)\in\mathrm{cl}(S)$ و از بسته بودن S نتیجه می‌شود که $S=\mathrm{cl}(S)$.

۱۰. (الف) نادرست است (فرض کنیم $A=$ اعداد گویا؛ آنگاه $\mathrm{int}(A)=\varnothing$، $\mathrm{cl}(A)=\mathbf{R}$، $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))=\mathbf{R}$).

(ب) درست است (زیرا $A\subset\mathrm{cl}(A)$).

(پ) نادرست است (فرض کنیم $A=]0,1[$؛ آنگاه

$$(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A)=\mathrm{cl}(A)=[0,1]\neq A$$

(ت) نادرست است (فرض کنیم $A=$ اعداد گویای واقع در $[0,1]$؛ آنگاه $\mathrm{bd}(A)=[0,1]$، $\mathrm{cl}(A)=[0,1]$، $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(A))=\{0,1\}$).

(ث) درست است (از باز بودن A نتیجه می‌شود که

$$(\mathrm{bd}(A)=\mathrm{cl}(A)\cap(\mathbf{R}^n\setminus A)\subset\mathbf{R}^n\setminus A$$

۱۲. (الف) روشن است که $\mathrm{int}(\mathrm{int}\,A)\subset\mathrm{int}(A)$. برعکس، فرض کنیم $x\in\mathrm{int}(A)$، آنگاه مجموعهٔ بازی مانند U، با فرض $x\in U\subset A$، وجود دارد. قرار می‌دهیم $V=U\cap\mathrm{int}(A)\neq\varnothing$، آنگاه V مجموعهٔ بازی‌است که $x\in V\subset\mathrm{int}(A)$، ازاین‌رو $x\in\mathrm{int}(\mathrm{int}\,A)$.

(ب) فرض کنیم $x\in\mathrm{int}(A)\cup\mathrm{int}(B)$، از این رو $x\in\mathrm{int}(A)$ یا $x\in\mathrm{int}(B)$. اگر $x\in\mathrm{int}(A)$، آنگاه مجموعهٔ بازی مانند U، با فرض $x\in U\subset A\subset A\cup B$، وجود دارد، بنابراین $x\in\mathrm{int}(A\cup B)$. اگر $x\in\mathrm{int}(B)$، با استدلال مشابهی، $x\in\mathrm{int}(A\cup B)$.

(پ) حل تمرین ۴، بند ۲.۲ را ببینید.

۱۶. $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ افزایشی است ($x<(\sqrt{2})^x \Longleftrightarrow (\ln x)/x<\ln\sqrt{2}$، که به ازای هر $0<x$ درست است) و از بالا با ۲ کراندار است، زیرا اگر $2\leqslant a_n$، آنگاه $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}\leqslant(\sqrt{2})^2=2$. مانند محاسبهٔ حد در تمرین ۴۳، $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

۱۷. به‌ازای هر m، $|x_m\sin m|\leqslant|x_m|$ ازاین‌رو، چون $\sum|x_m|$ همگراست، طبق آزمون مقایسه $\sum|x_m\sin m|$ همگراست. بنابراین $\sum x_m\sin m$ مطلقاً همگراست و بدین‌سان، بنابر قضیهٔ ۱۲، همگراست.

۱۸. قرار می‌دهیم $\varepsilon=d(x,y)$، $U=D(x,\varepsilon/2)$، $V=D(y,\varepsilon/2)$.

۲۱. اگر x_k کوشی و U یک همسایگی ۰ باشد، $0<\varepsilon$ را چنان می‌یابیم که $D(0,\varepsilon)\subset U$. آنگاه N را چنان می‌یابیم که $k,l\geqslant N$ مستلزم $\|x_k-x_l\|<\varepsilon$ باشد. آنگاه $k,l\geqslant N$ مستلزم $x_k-x_l\in U$ است. برای عکس آن، به ازای $0<\varepsilon$ مفروض، $U=D(0,\varepsilon)$ انتخاب می‌کنیم.

۲۴. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ باز باشد و فرض کنیم $(x,y)\in A$. $0<\varepsilon$ راچنان برمی‌گزینیم که $D((x,y),\varepsilon)\subset A$. قرار می‌دهیم $\varepsilon'=\varepsilon/\sqrt{2}$؛ آنگاه $D(x,\varepsilon')\times D(y,\varepsilon')\subset A$. برای عکس آن، فرض کنیم $(x,y)\in A$ و فرض کنیم $U\subset\mathbf{R}^n$ و $V\subset\mathbf{R}^m$ مجموعه‌های بازی باشند که $(x,y)\in U\times V\subset A$. $0<\varepsilon$ را چنان برمی‌گزینیم که $D(x,\varepsilon)\subset U$ و $D(y,\varepsilon)\subset V$؛ آنگاه $D((x,y),\varepsilon)\subset U\times V\subset A$، ازاین‌رو A باز است.

۲۶. $$a_n^2-2=\left(\frac{2+a_{n-1}}{1+a_{n-1}}\right)^2-2=\frac{2-a_{n-1}^2}{1+2a_{n-1}+a_{n-1}^2}=k_n(2-a_{n-1}^2)$$

که در آن $k_n=1/(1+2a_{n-1}+a_{n-1}^2)$ عدد مثبتی کوچکتر از ۱ است. از آنجا نتیجه می‌شود که $2-a_n^2$ متناوباً مثبت و منفی است، و بنابراین a_n متناوباً بیشتر و کمتر از $\sqrt{2}$ است. علاوه بر آن، چون $k_n<1$، جملات زوج a_{2n} افزایشی و جملات فرد

$a_{۲n+۱}$ کاهشی هستند. دنبالهٔ نامبرده از بالا و پایین، به‌ترتیب، با ۲ و ۱ کراندار است، ازاین‌رو دنبالهٔ حاصل از جملات فرد و دنبالهٔ حاصل ازجملات زوج (که، به ترتیب، کاهشی و افزایشی هستند) حد دارند. با نوشتن

$$a_n=۱+\frac{۱}{۱+a_{n-۱}},\ a_{n+۱}=۱+\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۱+a_{n-۱}}}$$

و قراردادن

$$\alpha=۱+\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۱+\alpha}}$$

به‌دست می‌آوریم $\alpha=\sqrt{۲}$. بدین‌سان حد هر دو دنبالهٔ حاصل از انتخاب جملات «یك‌درمیان» $\sqrt{۲}$ است و بنابراین یك‌استدلال‌آسان نشان می‌دهدکه $\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{۲}$.

۲۷. $\inf(B)=\sqrt{۲}$.

۲۸. (الف) اعداد صحیح
(ب) هر بازهٔ باز
(پ)

$$\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\dots,\frac{۱}{n},\dots,۱\frac{۱}{۲},۱\frac{۱}{۳},۱\frac{۱}{۴},\dots,۱\frac{۱}{n},\dots,۲\frac{۱}{۲},۲\frac{۱}{۳},\dots,۲\frac{۱}{n},\dots,m+\frac{۱}{۲},\dots,m+\frac{۱}{n},\dots\right\}$$

(ت) نقطه‌ای در $\mathbf{R}$، دایرهٔ یکه در $\mathbf{R}^۲$، یك پاره‌خط (حاوی نقاط انتهایی) در $\mathbf{R}^۲$.

۲۹. بلی.

۳۰. فرض کنیم $U\subset\mathbf{R}$ باز و کراندار باشد. اگر $U=\varnothing$ آنگاه $U=]۱,۱[$. حال فرض کنیم $U\neq\varnothing$ و $x\in U$. از بازبودن U نتیجه می‌شود که یك $y,z\in\mathbf{R}$ وجود دارد به طوری که $]z,x]\subset U$ ، $[x,y[$، بنابراین $H=\{y\,|\,[x,y[\subset U\}$ و $L=\{z\,|\,]z,x]\subset U\}\neq\varnothing$ و هر دوی این مجموعه‌ها کراندار هستند، از این رو $\sup(H)=h\in\mathbf{R}$، $\inf(L)=l\in\mathbf{R}$. قرار می‌دهیم $I_x=]l,h[$ و $I=\{I_x|x\in U\}$. آنگاه $\cup I=U$ و $I_x\cap I_y=\varnothing$. اگر $I_x\neq I_y$، چون $x\in U$ مستلزم $x\in I_x\subset\cup I$ است، $U\subset\cup I$.حال‌فرض‌کنیم $y\in I_x=]a,b[$، ازاین‌رو اگر $x<y<b$، zی وجود دارد به‌طوری که $y\in[x,z[\subset U$، بنابراین $y\in U$، $I_x\subset U$ و $\cup I\subset U$. حال فرض کنیم $I_x=]a,b[$، $I_y=]c,d[\subset U$ به‌طوری که $I_x\cap I_y\neq\varnothing$. $c\notin U$ زیرا در غیراین صورت یك $\varepsilon>۰$ وجود خواهد داشت به طوری که $]c-\varepsilon,y]\subset U$ که این ناقض تعریف c است. بدین‌سان $c\notin]a,b[$، بنابراین $c\leqslant a$ به طور مشابهی $a\leqslant c$ مستلزم $a=c$ و $b=d$ است، بنابراین $I_y=I_x$. این مطلب در $\mathbf{R}^n$ درست نیست؛

مثلاً مجموعهٔ $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ را درنظر می‌گیریم.

۳۲. بی‌درنگ از قضایای ۹ و ۱۰ حاصل می‌شود.

۳۳. (s_n+s_{n-1}) را از دوطرف $s_{n+1}+s_{n-1}\geqslant 2s_n$ کم می‌کنیم تا به دست آوریم $s_{n+1}-s_n\geqslant s_n-s_{n-1}$؛ قرارمی‌دهیم $\alpha_n=s_{n+1}-s_n$، ازاین‌رو α_n افزایشی‌است. علاوه بر آن، α_n کراندار است، زیرا

$$|\alpha_n|=|s_{n+1}-s_n|\leqslant|s_{n+1}|+|-s_n|=|s_{n+1}|+|s_n|\leqslant 2M$$

که در آن M کرانی برای s_n است. بدین‌سان α_n همگراست، $\alpha_n\to\alpha$. فرض کنیم $\alpha\neq 0$، مثلاً $\alpha>0$. چون α_iها به‌سمت α افزایش می‌یابند، Nی وجود دارد به‌طوری که $n>N$ مستلزم $\alpha_n>\alpha/2$ است. بدین‌سان، وقتی $n\to\infty$، داریم

$$s_n=s_0+(s_1-s_0)+\cdots+(s_n-s_{n+1})=s_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$=s_0+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i+\sum_{i=N+1}^{n}\alpha_i\leqslant s_0+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i+(n-N)\frac{\alpha}{2}\to\infty$$

و این یک تناقض‌است، زیرا s_n کراندار است. با فرض $\alpha<0$ تناقض مشابهی به‌دست می‌آوریم. بدین‌سان $\alpha=0$.

۳۴. $$d(x_{n+p},x_n)\leqslant d(x_{n+p},x_{n+p-1})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)$$
$$\leqslant(r^{n+p-1}+\cdots+r^n)\,d(x_0,x_1)$$

حال از $r<1$ نتیجه می‌شود که $\sum r^n$ همگراست، بنابراین به ازای هر $\varepsilon>0$ دلخواه، Mی وجود دارد به‌طوری که $n>M$ مستلزم $|r^{n+p-1}+\dots+r^n|<\varepsilon/d(x_0,x_1)$ است و این خود مستلزم $d(x_{n+p},x_n)<\varepsilon$ است و از این رو $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی است.

۳۸. به ازای $\varepsilon>0$ مفروض، n را به‌قدر کافی بزرگ برمی‌گزینیم که $k>n$ مستلزم $1/k<\varepsilon/2$ باشد. آنگاه از $k,l>n$ نتیجه می‌شود که

$$\|x_k-x_l\|\leqslant\left(\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{l}\right)<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

از این‌رو x_k کوشی است و بدین‌سان همگراست.

۳۹. به ازای هر $x,y\in S$، $\sup(S)\geqslant x$، $-\inf(S)\geqslant -y$ مستلزم $x-y\leqslant\sup(S)-\inf(S)$ هستند، بنابراین $\sup(S)-\inf(S)$ یک کران بالایی برای مجموعهٔ نامبرده است. اگر $\varepsilon>0$، یک $v,w\in S$ وجود دارد به‌طوری که

$v+\varepsilon/2>\sup(A)$، و $-\inf(A)>\varepsilon/2-w$ که از آنجا حاصل می‌شود $(v-w)+\varepsilon>\sup(A)-\inf(A)$، و بنابراین $\sup(A)-\inf(A)$، $\sup$ مجموعهٔ نامبرده است.

۴۱. فرض کنیم U یك همسایگی x باشد؛ باید نشان‌دهیم که U شامل نقطه‌ای از A_1 غیر از x است. چون $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$، nی وجود دارد به‌طوری که $x\notin A_n$. آنگاه، بنابر قضیهٔ ۵، چون $x\in \mathrm{cl}(A_n)$، x یك نقطهٔ انباشتگی A_n است، ازاین‌رو U شامل نقطه‌ای مانند y متعلق به A_n، $y\neq x$ است. اما $A_n\subset A_{n-1}\subset\cdots\subset A_1$، ازاین‌رو $y\in A_1$.

۴۲. خیر؛ فرض کنیم $A=]0,1[$ و $x=0$. آنگاه $d(x,A)=0$ ولی هیچ نقطه‌ای مانند $z\in A$، با فرض $d(z,0)=0$، $0\notin A$ وجود ندارد. به‌عنوان مثالی دیگر، فرض کنیم A گردهٔ یکهٔ باز در $\mathbf{R}^2$ باشد و $x=(1,0)$. آنگاه $d(x,A)=0$ ولی هیچ نقطه‌ای مانند $z\in A$ با فرض $d(x,z)=0$ وجود ندارد. ولی اگر A بسته باشد، حکم نامبرده همواره درست است (تمرین ۱۷ را در پایان فصل ۳ ببینید).

۴۳. روشن است که x_n افزایشی است و با استقراء ثابت می‌کنیم که x_n از بالا با ۳ کراندار است: $x_1=\sqrt{3}<3$. حال فرض کنیم $x_{n-1}<3$. آنگاه

$$x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}<\sqrt{3+3}=\sqrt{6}<3$$

بدین‌سان x_n حد دارد؛ آن را x می‌نامیم. x در $x=\sqrt{3+x}$ صدق می‌کند (کافی است از دو طرف $x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$ حد بگیریم) وازاین‌رو $x=(1\pm\sqrt{13})/2$. چون همهٔ x_nها مثبت هستند، حد نیز باید $\geqslant 0$ باشد، بنابراین $x=(1+\sqrt{13})/2$.

فصل ۳
مجموعه‌های فشرده و همبند

۱.۳ مجموعه‌های فشرده: قضایای هاینه ـ بورل و بولتسانو ـ وایرشتراس

۱. (الف) فشرده نیست زیرا بسته نیست.
(ب) فشرده نیست زیرا کراندار نیست.
(پ) فشرده نیست زیرا بسته نیست.

۲. $[0,1]$ فشرده است، از این رو هر دنبالهٔ دلخواه در آن، بنابر قضیهٔ ۱، یك زیر دنبالهٔ همگرا دارد.

۴. اگر A کراندار باشد، آنگاه $\mathrm{cl}(A)$ کراندار خواهد بود. فرض کنیم Mی وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in A$، $\|x\|<M$. آنگاه $A\subset \mathrm{cl}(D(0,M))$ مستلزم $\mathrm{cl}(A)\subset \mathrm{cl}(D(0,M))$ است. چون $\mathrm{cl}(A)$ بسته نیز است، $\mathrm{cl}(A)$ فشرده است.

۵. خیر؛ فرض کنیم $A=\{۰, ۱/۲, ۲/۳, ۳/۴, ۴/۵, \ldots, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots\}$.
آنگاه A دارای تنها نقطهٔ انباشتگی ۱ است و A نامتناهی است. ولی A فشرده نیست زیرا کراندار نیست.

۲.۳ خاصیت مجموعه‌های تودرتو

۲. خیر؛ مثلاً فرض کنیم $F_k =]۰, ۱/k[$.

۳. اگر $F_k=\{x_l \mid l \geqslant k\}$، آنگاه $\bigcap F_k=\varnothing$. هیچ‌یك ازمجموعه‌های F_k فشرده نیست.

۳.۳ مجموعه‌های همبندکمانی

۱. (الف) همبند کمانی نیست، زیرا هرمسیر بین دوعدد گویا باید شامل یك‌عدد گنگ باشد.
(ب) همبندکمانی است.
(پ) همبندکمانی است.
(ت) همبندکمانی نیست. اگر نقطهٔ $(۰, ۱)$ به آن افزوده شود، مجموعهٔ حاصل همبند کمانی خواهد شد.

۳. خیر. مثلاً، فرض کنیم $\varphi:[۰, ۴] \to \mathbf{R}^۲$ خمی باشد که دوبار دور دایرهٔ یکهٔ واقع در صفحهٔ x-y می‌چرخد به‌طوری که $[۰, ۱]$ به‌نیمهٔ اول دایره، $[۱, ۲]$ به‌نیمهٔ دوم، مجدداً $[۲, ۳]$ به‌نیمهٔ‌اول، و $[۳, ۴]$ به‌نیمهٔ‌دوم فرستاده می‌شوند. قرار می‌دهیم $c=\varphi([۲, ۳])$. آنگاه $\varphi^{-۱}(c)=[۰, ۱]\cup[۲, ۳]$ همبند نیست. (اگر φ یك به یك باشد، آنگاه $\varphi^{-۱}(c)=[c, d]$ همبند است.)

۴.۳ مجموعه‌های همبند

۱. خیر. $]۲, ۳۱/۲[$ و $]-۱/۲, ۱۱/۲[$ دومجموعهٔ باز هستند که اشتراکشان تهی‌است و اجتماعشان شامل A است.

۲. بلی، این مجموعه همبندکمانی است.

۴. (الف) مؤلفه‌ها عبارتند از $[۰, ۱]$ و $[۲, ۳]$.
(ب) مؤلفه‌ها عبارتند از $\ldots, \{۲\}, \{۱\}, \{۰\}, \{-۱\}, \{-۲\}, \ldots$
(پ) هرعددگویا یك مؤلفه است.

تمرینهای فصل ۳ (واقع در پایان فصل)

۱. (الف) همبند است، فشرده نیست.
(ب) همبند وفشرده است.
(پ) همبند وفشرده است.
(ت) نه همبند است نه فشرده.

(ث) فشرده است، اگر بیشتر از یك نقطه داشته باشد، همبند نیست.
(ج) $n=1$، فشرده است وهمبند نیست؛ $n\geqslant 2$، فشرده وهمبند است.
(چ) همبند وفشرده است.
(ح) فشرده است، لزوماً همبند نیست.
(خ) نه فشرده است نه همبند.
(د) فشرده است، لزوماً همبند نیست.

۳. (الف) اگرمجموعه‌ای یك‌نقطهٔ انباشتگی مانند x داشته باشد، آنگاه می‌توانیم‌دنباله‌ای ازنقاط این مجموعه بیابیم کـه به‌سمت x همگرا باشد. بنابراین اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی دارای یك نقطهٔ انباشتگی در A باشد، می‌بینیم کـه A درخاصیت بولتسانو ـ وایرشتراس (قضیهٔ ۱ (سه)) صدق می‌کند و بدین‌سان فشرده است (بین حالت مربوط به یك دنبالهٔ تکراری و حالت مربوط به‌یك دنباله با بی‌نهایت نقطهٔ متمایز، تمایز قائل شوید). برای عکس آن، فرض کنیم A فشرده است. به ازای یك زیرمجموعهٔ نامتناهی داده شده از A، می‌توانیم دنباله‌ای از نقاط متمایز A برگزینیم. چون A فشرده است، این دنبالهٔ دارای زیردنباله‌ای همگرا به سمت نقطه‌ای در A است، کـه باید یك نقطهٔ انباشتگی این زیرمجموعه باشد.

(ب) فرض کنیم B این مجموعهٔ نامتناهی کرانـدار باشد. آنگـاه، بـه ازای Mی، $B\subset D(0,M)$ و بنابراین $B\subset \mathrm{cl}(D(0,M))$. چون $\mathrm{cl}(D(0,M))$ فشرده است، هر زیـرمجموعهٔ نامتناهی آن، بنابـر قسمت (الف)، دارای یك نقطهٔ انباشتگی است. بنابراین B دارای یك نقطهٔ انباشتگی است.

۵. (الف) $F_k=\{x\in\mathbf{R}^2 \mid \|x\|<k/(k+1)\},\ k=1,2,\ldots$

(ب) $F_k=]k-1/3,\ k+1/3[,\ \ k=\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,\ldots$

۶. بنابرقضیهٔ ۲، یك $x\in\cap F_k$ وجود دارد. حال فرض‌کنیم یك $y\in\cap F_k$، $y\neq x$ وجود داشته باشد. آنگاه $d(x,y)\neq 0$. بنابرفرض، Nی وجود دارد به طوری که $n\geqslant N$ مستلزم $\mathrm{diam}(F_n)<d(x,y)$ باشد. آنگاه، چون $x,y\in F_N$،

$$d(x,y)\leqslant \mathrm{diam}(F_N)<d(x,y)$$

که یك تناقض است.

۷. به‌ازای هر k، $\mathrm{cl}(A_k)=\{x_k,x_{k+1},\ldots\}\cup\{x\}$، بنابراین $x\in\mathrm{cl}(A_k)$ به‌ازای‌همهٔ kها، مستلزم $x\in\cap\mathrm{cl}(A_k)$ است. حال‌فرض‌کنیم $y\in\cap\mathrm{cl}(A_k)$، $y\neq x$. Nی وجود دارد به طوری کـه از $n\geqslant N$ نتیجه می‌شود $\|x_n-x\|<d(x,y)$. ولـی $y\in A_n$، ازاین‌رو $y=x_j$، $j\geqslant N$ وبدین‌سان $\|y-x\|<d(x,y)$ که این یك‌تناقض‌است.

۹. (الف) نادرست؛ $[0,1]$ فشرده است ولـی $\mathbf{R}\setminus[0,1]$ همبند نیست. بـه‌ازای $\mathbf{R}^n$،

$A=\{x\in\mathbf{R}^n \mid 1\leqslant\|x\|\leqslant 2\}$ فشرده است ولی $\mathbf{R}^n\setminus A$ همبند نیست.
(ب) نادرست؛ همان مثالهای قسمت (الف).
(پ) نادرست؛ $[a,b[$ همبند است ولی نه باز است نه بسته.
(ت) به ازای $n=1$ نادرست است، به ازای $n\geqslant 2$ درست است. (به ازای $n\geqslant 2$، $\mathbf{R}^n\setminus A$ همبندکمانی است.)

۱۱. (الف) فرض کنیم $B\subset U\cup V$ که در آن $B\cap U\neq\varnothing$، $B\cap V\neq\varnothing$؛ $B\cap U\cap V\neq\varnothing$، و U، V باز هستند. آنگاه $A\subset U\cup V$ و $A\cap U\cap V=\varnothing$، و این نکته باقی می‌ماند که نشان دهیم $U\cap A\neq\varnothing$ و $V\cap A\neq\varnothing$ (زیرا در آن صورت نشان داده‌ایم که A همبند نیست، که یك تناقض است). $B\cap U\neq\varnothing$، از این‌رو فرض می کنیم $x\in B\cap U$. اگر $x\in A$، تمرین حل‌شده‌است؛ اگر $x\notin A$، آنگاه چون $x\in B\subset \mathrm{cl}(A)$، می‌بینیم که x یك نقطهٔ انباشتگی A است. بدین‌سان هر همسایگی x شامل نقاطی از A است، از این‌رو، درحالت خاص، U شامل نقاطی از A است، بنابراین $U\cap A\neq\varnothing$. به طور مشابهی $V\cap A\neq\varnothing$.

۱۳. فرض کنیم x_n دنباله‌ای از نقاط، باشرط $x_n\in F_n$، باشد. آنگاه روشن است که x_n یك دنبالهٔ کوشی است (زیرا $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$ و $F_{n+1}\subset F_n$) و بدین‌سان به‌سمت، مثلاً x، همگرا است، زیرا M کامل است. به ازای هر n، x حد دنباله‌ای از عناصر F_n است، ازاین‌رو چون همهٔ F_nها بسته هستند، بـه‌ازای هر n، $x\in F_n$، یعنی $x\in\bigcap F_n$. برای مشاهدهٔ این امر که x تنها عنصر واقع در $\bigcap F_n$ است، استدلالی مشابه با آنچه درتمرین ۶ آمد، به‌کار ببرید.

۱۶. $\big|\,\|x_k\|-\|x\|\,\big|\leqslant\|x_k-x\|$. بنابراین به‌ازای $\varepsilon>0$، Nی وجود دارد به‌طوری که $k\geqslant N$ مستلزم $\|x_k-x\|<\varepsilon$ باشد و این خود مستلزم $\big|\,\|x_k\|-\|x\|\,\big|<\varepsilon$ است، ازاین‌رو $\|x_k\|\to\|x\|$. عکس آن نادرست است. بـه عنوان مثال $x_k=(-1)^k$.
فرض کنیم $\{x_k\}$ دنباله‌ای در $D=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$، بـا شرط $x_k\to x$، باشد. باید نشان دهیم که $\|x\|\leqslant 1$، یعنی‌اینکه هردنبالهٔ همگرا در D به‌سمت نقطه‌ای در D همگرا است. طبق مطالب بالا، $\|x_k\|\to\|x\|$. ولی $\{\|x_k\|\}$ دنباله‌ای‌در $[0,1]$ است، که بسته است، بنابراین $\|x\|\in[0,1]$، و $\|x\|\leqslant 1$.

۱۷. یك دنبالهٔ $z_n\in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x,z_n)\to d(x,A)$ (برای اثبات، مثال ۲ واقع در پایان فصل ۱ را الگو قرار دهید). Nی وجود دارد به طوری کـه $n\geqslant N$ مستلزم $d(x,z_n)-d(x,A)<1$ باشد، یعنی، $d(x,z_n)<1+d(x,A)$. بدین‌سان، دنبالهٔ z_n، جداشده ازنخستین N جملهٔ خود، درگوی بستهٔ به‌شعاع $1+d(x,A)$ حول x قرار دارد؛ این گوی‌فشرده است، ازاین‌رو نتیجه می گیریم که z_n دارای‌یك‌زیردنبالهٔ همگرا، مثلاً z_{n_i}، $z_{n_i}\to z$ است. چون $d(x,z_{n_i})$ یك زیـردنبالهٔ $d(x,z_n)$ است و $d(x,z_n)\to d(x,A)$، نتیجه می‌شود که $d(x,z_{n_i})\to d(x,A)$. ثابت خواهیم کرد

که $d(x,z_{n_i}) \to d(x,z)$ و بدین‌سان، بنابریکتایی حدود، $d(x,A)=d(x,z)$. طبق نامساوی مثلثی داریم $|d(z_{n_i},x)-d(z,x)| \leqslant d(z,z_{n_i}) \to ۰$ مشروط بر آنکه $n_i \to \infty$. این نکته باقی می‌ماند که نشان دهیم $z\in A$؛ این نیز درست است، زیرا $z\in \mathrm{cl}(A)$ و A بسته است.

۱۸. مجموعه‌های F_n درمفروضات قضیهٔ ۲ صدق می کنند، بنابراین $\bigcap F_n \neq \varnothing$. علاوه‌برآن، $\mathrm{diam}(F_n) \to ۰$، ازاین رو، بنابرتمرین ۶، $\bigcap F_n$ دقیقاً دارای یك نقطهٔ x است. $x^۲ \leqslant ۲$ و $x^۲ \leqslant ۲$، بنابراین $x^۲ = ۲$.

۲۱. (الف) نخست ملاحظه می کنیم که $\varnothing$ و A، نسبت به A، باز و بسته هستند، چون $A \cap \varnothing = \varnothing$ و $\varnothing$ در $\mathbf{R}^n$ باز و بسته است، و $A = \mathbf{R}^n \cap A$ و $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^n$ باز و بسته است. حال فرض کنیم A همبند نباشد، یعنی $A \subset U \cup V$ که درآن U و V بازهستند، $A \cap U \cap V = \varnothing$، $A \cap U \neq \varnothing$، و $A \cap V \neq \varnothing$. آنگاه $U \cap A$، نسبت به A، باز و بسته است، زیرا $U \cap A = U \cup A$ که در آن U در $\mathbf{R}^n$ باز است، و $U \cap A = (\mathbf{R}^n \setminus V) \cap A$ که در آن $\mathbf{R}^n \setminus V$ در $\mathbf{R}^n$ بسته است ($U \cap A = (\mathbf{R}^n \setminus V) \cap A$ زیرا $U \cap V \cap A = \varnothing$). در جهت عکس، فرض کنیم زیرمجموعه‌ای از A مانند W وجود دارد به طوری که $W \neq \varnothing$، $W \neq A$، و $W = V \cap A = U \cap A$ و با این شرط که در $\mathbf{R}^n$، V باز و U بسته است. فرض کنیم $\mathbf{R} = V$ و $S = \mathbf{R}^n \setminus V$؛ آنگاه $A \subset \mathbf{R} \cup S$، $\mathbf{R}$ و S بازهستند، $A \cap \mathbf{R} \cap S = \varnothing$، $A \cap \mathbf{R} \neq \varnothing$، و $A \cap S \neq \varnothing$؛ بدین‌سان A همبند نیست.

(ب) $\mathbf{R}^n$ همبند کمانی‌است وبنابراین همبند است، ازاین‌رو، بنابرقسمت (الف)، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

۲۳. $\mathbf{Q} \subset]-\infty, \sqrt{۲}[\cup]\sqrt{۲}, \infty[$؛ هردوبازه، بازهستند و اشتراکشان تهی‌است وغیره ($\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} =]-\infty, ۱/۲[\cup]۱/۲, \infty[$ (که درآن، به عنوان مثال، $]-\infty, \sqrt{۲}[$ به‌صورت $\{x\in \mathbf{R} | x < \sqrt{۲}\}$ تعریف شده است).

۲۵. دنبالهٔ $\sin(n)$، $n = ۱, ۲, \ldots$، درمجموعهٔ فشردهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد و بنابراین دارای یك زیردنبالهٔ همگرای $\sin(n_k)$ است.

۲۶. خاصیت مجموعه‌های تو در تو را مفروض می گیریم. فرض کنیم x_n یك دنبالهٔ کوشی باشد. برای نشان‌دادن اینکه این دنبالهٔ همگراست، قرارمی‌دهیم $A_k = \{x_k, x_{k+۱}, \cdots\}$ و ازخاصیت مجموعه‌های تودرتو، انتخاب می کنیم $F_k = \mathrm{cl}(A_k)$. (برای تعریف ویژهٔ تمامیت $\mathbf{R}$، یعنی اینکه هر دنبالهٔ افزایشی‌که از بالا کراندار است، همگراست، همین کار را انجام دهید.)

۲۸. فرض کنیم $x\in A$ وفرض کنیم x یك نقطهٔ انباشتگی A نباشد؛ فرض کنیم U یك‌همسایگی x باشد به‌طوری که $U \cap A = x$. فرض کنیم ε چنان باشدکه $D(x, ۲\varepsilon) \subset U$. قرار

می‌دهیم $W=D(x,\varepsilon)$ و $V=\mathbf{R}^n\setminus \mathrm{cl}(W)$. آنگاه V و W باز هستند، $A\subset V\cup W$، $A\cap V\cap W=\varnothing$، $A\cap V\neq\varnothing$ (چون A شامل نقاطی غیر از x است)، و $A\cap W\neq\varnothing$ (شامل x است). بدین‌سان A همبند نیست که یك تناقض است.

۲۹. A هم فشرده است و هم همبند.

۳۰. (الف) درست است؛ قضیهٔ ۲، فصل ۲ را به‌کار ببرید.
(ب) نادرست است؛ قرار می‌دهیم $U_k=]-1/k,1/k[$ در $\mathbf{R}$. آنگاه $\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k=\{0\}$.

۳۳. وقتی $n\to\infty$، $\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\|$

$$\leqslant\frac{1}{(n+p-1)^2+(n+p-1)}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+p-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2}\to 0$$

زیرا $\sum_{j=1}^{\infty}(1/j^2)$ همگراست؛ بدین‌سان x_n کوشی است، از این رو همگراست.
تبصره: اگر فقط $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant a_n$، که در آن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ یك سری همگرای دلخواه است، داده شده باشد باز این مسئله درست است.

۳۵. (الف) اگر $a=0,1$ آنگاه، به‌ازای هر n، $a_n=1$، ازاین‌رو $\{a_n\}$ ثابت است. حال فرض کنیم $a\neq 0,1$. آنگاه

$$a_n-a_{n-1}=1-a_{n-1}+a_{n-1}^2-a_{n-1}=(1-a_{n-1})^2>0$$

بنابراین a_n به‌طور یکنوا افزایشی است.
(ب) فرض کنیم $1>a>0$، آنگاه، به ازای هر n، $a_n<1$. فرض کنیم $a_{n-1}<1$، آنگاه $1>a_{n-1}-a_{n-1}^2>0$ و $0<a_n=1-(a_{n-1}-a_{n-1}^2)<1$. بنابراین اگر $1>a>0$، آنگاه $\{a_n\}$ کراندار است. حال فرض کنیم $a=1+h$، $h>0$. آنگاه می‌توان نشان‌داد که، وقتی $n\to\infty$، $a_n\geqslant 1+(n-1)h^2\to\infty$، بنابراین a_n بی‌کران است. سرانجام، اگر $a<0$، آنگاه، وقتی $n\to\infty$،

$$|a_n|>1+(n-1)a^2\to\infty$$

بنابراین $\{a_n\}$ فقط وقتی کراندار است که $0\leqslant a\leqslant 1$.
(پ) با توجه به قسمتهای (الف) و (ب)، اگر $0\leqslant a\leqslant 1$، آنگاه $\{a_n\}$ کراندار و ناکاهشی است، بنابراین همگراست، و اگر $a\neq 0,1$، آنگاه $a_n\to\infty$.

۳۶. $\mathbf{R}^n$ را به مکعبهای n بعدی به‌ضلع ۱ تقسیم می‌کنیم؛ بدین‌سان تعداد شمارش‌پذیری مکعب به دست می‌آوریم. باید مکعبهایی شامل تعدادی شمارش‌ناپذیر، بنابراین تعدادی نامتناهی، نقطهٔ متعلق به A وجود داشته باشد، درغیراین صورت A فقط دارای تعدادی شمارش‌پذیر نقطهٔ خواهد بود. ازاین‌رو یك دنبالهٔ نامتناهی ازنقاط متمایز a_n واقع در

$A\cap S$ می‌گیریم. چون $\mathrm{cl}(S)$ فشرده است، a_n دارای یك زیردنبالهٔ همگراست، $a_{n_i}\to a$، و a یك نقطهٔ انباشتگی A است.

۳۸. (الف) $C\subset[0,1]$ و از این رو کراندار است. همچنین، هر F_n بسته است، زیرا اجتماع تعدادی متناهی مجموعهٔ بسته است؛ بنابراین مجموعهٔ کانتور بسته است، زیرا اشتراك گردایهٔ مجموعه‌های بستهٔ $\{F_n\}$ است. بدین‌سان C فشرده است.
(ب) نقاط انتهایی هر بازهٔ متعلق به F_n عناصری از هر F_n و بنابراین عناصری از $\cap F_n$ هستند. 2^n بازه در F_n وجود دارند و تعداد F_nها بی‌نهایت است.
(پ) فرض کنیم $]a,b[\subset C$، $a\neq b$، آنگاه C شامل بازه‌ای به طول $(b-a)$ است. ولی بازه‌های واقع در F_n دارای طولی برابر با $1/3^n$ هستند و Nی وجود دارد به طوری که $1/3^N<b-a$، از این رو $]a,b[\not\subset F_N$؛ بنابراین $]a,b[\not\subset\cap F_n$.
($Nancy\ Hildreth$ این استدلال را آورده است.)

۴۰. فرض کنیم $\cap F_k$ همبند نباشد، آنگاه بنابر تمرین ۳۹، مجموعه‌های بازی مانند U، V وجود دارند به طوری که $\cap F_k\subset U\cup V$، $U\cap V=\varnothing$، $\cap F_k\cap U=\varnothing$، $\cap F_k\cap V=\varnothing$. ادعا می‌کنیم که $U\cup V$ شامل یك F_k است که این یك تناقض خواهد بود، زیرا همهٔ F_kها همبند هستند. فرض کنیم $U\cup V$ شامل هیچ F_kی نباشد؛ آنگاه، به‌ازای هر k، یك $x_k\in F_k$ وجود دارد به‌طوری که $x_k\notin U\cup V$. چون به ازای هر k، $x_k\in F_1$ و F_1 فشرده است، یك زیردنبالهٔ همگرای $x_{k_i}\to x$ وجود دارد، و داریم $x\notin U\cup V$ چون $U\cup V$ باز است، و به‌ازای هر i، $x_{k_i}\notin U\cup V$. اما چون x حد دنباله‌ای واقع در هریك ازمجموعه‌های بستهٔ F_k است، به‌ازای هر k، $x\in F_k$ و این مستلزم $x\in\cap F_k$ است که این یك تناقض است، زیرا $\cap F_k\subset U\cup V$. بدین‌سان $U\cup V$ باید شامل F_kی باشد، و این همان تناقض مطلوب است. حال مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد فرض فشردگی لازم است؛ قرار می‌دهیم

$$F_n=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid |y|\geqslant 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid |x|\geqslant x\}$$

آنگاه $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های همبند بستهٔ تو در تو است ولی $\cap_{n=1}^{\infty}F_n=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid |y|\geqslant 1\}$ همبند نیست.

فصل ۴
توابع پیوسته

۱.۴ پیوستگی

۱. (الف) قرار می‌دهیم $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$، آنگاه $|x-x_0|<\delta$ مستلزم

$|x^{2}-x_{\circ}^{2}|=|x-x_{\circ}|\ |x+x_{\circ}|\leqslant\delta(|x|+|x_{\circ}|)\leqslant\delta(\delta+2|x_{\circ}|)$ است، زیرا $\delta>|x-x_{\circ}|>|x_{\circ}|-|x|$، از این‌رو $|x|<\delta+|x_{\circ}|$. سرانجام

$$|x^{2}-x_{\circ}^{2}|\leqslant\delta(1+2|x_{\circ}|)<\varepsilon$$

(ب) فرض کنیم $(x_n,y_n)\to(x_{\circ},y_{\circ})$؛ آنگاه (همان‌طور که در فصل ۱ ثابت شد) $x_n\to x_{\circ}$، ازاین‌رو، بنابرقضیهٔ ۱ (دو)، f پیوسته است.

۲. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $x\ \longmapsto(x,y)$. آنگاه $A=f^{-1}(U)$، و چون بنابرتمرین ۱ (ب)، f پیوسته است، و U نیز باز است، پس A باز است.

۳. $A=f^{-1}([\circ,1])$، و f پیوسته است، از این‌رو بسته بودن $[\circ,1]$ مستلزم بسته بودن A است.

۴. (الف) $f(x)=1$، هرمجموعهٔ باز دلخواه $=U$؛

(ب) اگر $U=]-1,2[$

$$f(x)=\begin{cases}\circ & x\leqslant\circ \text{ اگر}\\ x & x>\circ,x<1\\ 1 & x\geqslant 1 \text{ اگر}\end{cases}$$

$f(U)=[\circ,1]$، بسته است.

۲.۴ تصاویر مجموعه‌های فشرده و همبند

۱. (الف) بسته است، لزوماً فشرده یا همبند نیست.

(ب) باز است، لزوماً فشرده یا همبند نیست.

(پ) همبند است، لزوماً فشرده، باز یا بسته نیست.

(ت) فشرده و همبند است؛ لزوماً باز یا بسته نیست.

۳. اگر $f(x)=x/(1+x)$، هرگاه $x>\circ$، $x/(1-x)$ هرگاه $x<\circ$، $B=\mathbf{R}$ آنگاه $f(B)=]-1,1[$. اگر B کراندار نیز باشد آنگاه B فشرده است، ازاین‌رو $f(B)$ فشرده خواهد بود و $f(B)$ بسته خواهد بود.

۴. $A=f(A\times B)$ که در آن $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $f(x,y)=x$. بدین‌سان، اگر $A\times B$ همبند باشد، A همبند خواهد بود، زیرا f پیوسته است (تمرین ۱ (ب) بند ۱.۴ را ببینید).

۵. بلی. فرض کنیم $x\in A$، و $y\in B$. آنگاه یك $\delta>\circ$ وجود دارد به طوری که $D((x,y),\delta)\subset A\times B$. آنگاه $\{(z,y)|z\in]x-\delta,x+\delta[\}\subset D((x,y),\delta)$ مستلزم این است که $]x-\delta,x+\delta[\subset A$، بنابراین A باز است.

۳.۴ اعمال روی توابع پیوسته

۱. (الف) همه‌جا
(ب) f روی $\mathbf{R}\setminus\{1,-1\}$ پیوسته است.
(پ) همه‌جا

۲. فرض کنیم $p_1:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $(x,y)\to x$، $p_2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$، $(x,y)\to y$، $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، $x\to x$. بنا بر تمرینهای قبلی، p_1 و p_2 پیوسته هستند، از این‌رو، بنا بر قضیهٔ ۳، $f\circ p_1$، $f\circ p_2$، پیوسته هستند. قرار می‌دهیم $h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$،

$$(x,y)\to(f\circ p_1)(x,y)(f\circ p_2)(x,y)$$

آنگاه بنا بر قضیهٔ ۴، h پیوسته‌است. آنگاه اگر $a_k\to a$، $b_k\to b$، $(a_k,b_k)\to(a,b)$ و $h(a_k,b_k)=(f\circ p_1)(a_k,b_k)\cdot(f\circ p_2)(a_k,b_k)=a_k\cdot b_k\to h(a,b)=a\cdot b$.

۳. این نکته را، که $\{0ر56\}$ بسته است و اینکه $\sin x$ پیوسته است، به‌کار ببرید.

۴. کافی است نشان دهیم که $g(x)=|x|$ و $h(x)=\sqrt{x}$ پیوسته هستند، زیرا $f=g\circ h$.

۵. $f=g\circ h$ که در آن $g(x)=\sqrt{x}$، $h(x)=x^2+1$، و g، h پیوسته هستند.

۴.۴ کراندار بودن توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده

۱. فرض کنیم $f(x)=x/(1+|x|)$، آنگاه f کراندار است، $\sup f(\mathbf{R})=1$، $\inf f(\mathbf{R})=-1$، ولی f به‌هیچ‌یك از این مقادیر روی $\mathbf{R}$ نمی‌رسد.

۳. M کراندار است، زیرا $M\subset K$ و K کراندار است. M بسته است، زیرا $M=f^{-1}\{\sup f(K)\}$، f پیوسته و $\{\sup f(K)\}$ بسته است. بنابراین M فشرده است.

۴. $f\circ c$ پیوسته و $[0,1]$ فشرده است. بـه طور خلاصه، c پیوسته و $[0,1]$ فشرده است، از این‌رو $c([0,1])$ فشرده‌است. چون f پیوسته‌است، f روی $c([0,1])$ به ماکسیمم و مینیمم خود می‌رسد.

۵. قرار می‌دهیم $A=]0,\infty[$، آنگاه $\sup(A)=1$، که f آن را روی $]0,\infty[$ اختیار نمی‌کند. (به‌ازای هر $x\in]0,\infty[$، $|\sin x|<x$، و $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$).

۵.۴ قضیهٔ مقدار میانی

۱. لزومی ندارد که چند جمله‌ایهای درجهٔ دوم درجایی منفی شوند، از این‌رو روش نامبرده کارساز نیست؛ ولی این روش برای چند جمله‌ایهای درجهٔ پنجم، و به طور کلی، برای چند جمله‌ایهای با درجهٔ فرد کارساز است.

۲. فرض کنیم $\{x_n, f(x_n)\}$ دنبالهٔ همگرای دلخواهی در Γ باشد، $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$. اگر $y = f(x)$، آنگاه $(x, y) \in \Gamma$، و لذا ثابت خواهد شد که Γ بسته است. f پیوسته است، بنابراین $x_n \to x$ مستلزم $f(x_n) \to f(x)$ است، از این رو $(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$. بدین‌سان، $y = f(x)$.

۵. دراین‌صورت $f([\circ, \text{۱}])$ باید بسته باشد (زیرا $[\circ, \text{۱}]$ فشرده است)، و $]\circ, \text{۱}[$ بسته نیست.

۶.۴ پیوستگی یکنواخت

۱. $\left|\frac{\text{۱}}{x} - \frac{\text{۱}}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \leqslant \left|\frac{x-y}{a^{\text{۲}}}\right|$. قرار می‌دهیم $\delta = a^{\text{۲}}\varepsilon$، آنگاه $|x-y| < \delta$ مستلزم $\left|\frac{\text{۱}}{x} - \frac{\text{۱}}{y}\right| < \frac{\delta}{a^{\text{۲}}} = \varepsilon$ است.

۲. حل تمرین ۱ را ببینید یا این نکته را مورد استفاده قرار دهید که $f'(x)$ کراندار است.

۴. خیر؛ فرض کنیم $f(x) = g(x) = x$. اگر f و g کراندار باشند، بلی؛ فرض کنیم M چنان باشد که، به‌ازای هر x، $|f(x)| < M$ و $|g(x)| < M$، وفرض کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. δ را چنان بر می گزینیم که $|x-y| < \delta$ مستلزم $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/\text{۲}M$ و $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/\text{۲}M$ باشد. آنگاه $|x-y| < \delta$ مستلزم

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |f(x)||g(x) - g(y) + |g(y)| \times$$
$$\times |f(x) - f(y)| < M(\varepsilon/\text{۲}M) + M(\varepsilon/\text{۲}M) = \varepsilon$$

است.

تمرینهای فصل ۴ (واقع در پایان فصل)

۱. (الف) کافی است نشان دهیم که، به ازای هر $a > \circ$، f روی $]a, \infty[$ پیوسته است. فرض کنیم $x_\circ \in]a, \infty[$ و فرض کنیم $x_\circ = a + \eta$. قرار می‌دهیم $\delta = \inf\{\text{۱}, \eta, a^{\text{۴}}\varepsilon/(\text{۱} + \text{۲}x_\circ)\}$. آنگاه $|x - x_\circ| < \delta$ مستلزم

$$\left|\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{x_\circ^{\text{۲}}}\right| = \left|\frac{x^{\text{۲}} - x_\circ^{\text{۲}}}{x^{\text{۲}}x_\circ^{\text{۲}}}\right| \leqslant \left|\frac{x^{\text{۲}} - x_\circ^{\text{۲}}}{a^{\text{۴}}}\right|$$

است، زیرا $x_\circ, x > a$ و

$$\left|\frac{\text{۱}}{x^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{x_\circ^{\text{۲}}}\right| \leqslant \frac{|x + x_\circ| \cdot |x - x_\circ|}{a^{\text{۴}}} \leqslant \frac{|x - x_\circ|(|x| + |x_\circ|)}{a^{\text{۴}}} < \frac{\delta(\delta + \text{۲}|x_\circ|)}{a^{\text{۴}}}$$
$$\leqslant \frac{\delta(\text{۱} + \text{۲}|x_\circ|}{a^{\text{۴}}} = \varepsilon$$

(ب) به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، قرارمی‌دهیم، $\delta=$ هرچیز >0.
(پ) بلی؛ زیرا ترکیبی از توابع پیوسته است.

۲. (الف) پیوسته‌بودن f درهر نقطهٔ A مستلزم پیوسته‌بودن f درهر نقطهٔ B است.

۳. (الف) خیر، مثلاً فرض کنیم $f(x)=\sin x$، $K=\{1\}$.
(ب) f روی تمامی $\mathbf{R}^n$ پیوسته است، ازاین‌رو f روی $\mathrm{cl}(B)$، که فشرده است، پیوسته است. $f(\mathrm{cl}(B))$ فشرده و بدین‌سان کراندار است؛ ازاین‌رو، چون $f(B)\subset f(\mathrm{cl}(B))$، $f(B)$ نیز کراندار است.

۶. (الف) اگر c_k همگرا باشد آنگاه هر زیردنبالهٔ آن به سمت همان حد همگراست، ازاین‌رو از یک‌سو مسئله روشن است. ازسوی‌دیگر، فرض کنیم $x_n \not\to c$؛ زیردنباله‌ای از x_n خواهیم یافت که دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرا به‌سمت c نباشد. چون $x_n \not\to c$، یک $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر N یک $n>N$، بافرض $|x_n-c|>\varepsilon$، موجود است. ازاین‌رو فرض کنیم n_i چنان باشد که $n_i>i$ و $|x_{n_i}-c|>\varepsilon$. آنگاه $\{x_{n_i}\}$ زیردنباله‌ای است که دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرا به‌سمت c نیست.

(ب) اگر f پیوسته باشد، آنگاه نمودار f بسته است (حل تمرین ۲، بند ۵.۴ را ببینید). درجهت عکس، فرض کنیم نمودار f بسته و f کراندار باشد. فرض کنیم $x_n \to x$؛ می‌خواهیم نشان دهیم که $f(x_n)\to f(x)$. بنابر (الف) کافی است نشان دهیم که هرزیردنبالهٔ $f(x_n)$ دارای‌زیردنبالهٔ دیگری‌است که به‌سمت $f(x)$ همگراست. فرض کنیم $f(x_{n_i})$ زیر دنباله‌ای از $f(x_n)$ باشد؛ چون مجموعهٔ مقادیر f کراندار است، $f(x_{n_i})$ دارای یک زیردنبالهٔ همگراست $f(x_{n_{ij}})\to y$. بدین‌سان $(x_{n_{ij}}, f(x_{n_{ij}}))\to (x,y)$؛ ولی دراین صورت، چون نمودار f بسته است، (x,y) باید متعلق به‌نمودار f باشد، یعنی $y=f(x)$. بدین‌سان هر زیردنبالهٔ $f(x_n)$ دارای‌زیردنبالهٔ دیگری‌است که‌به‌سمت $f(x)$ همگراست، ازاین‌رو $f(x_n)\to f(x)$، و بنابراین f پیوسته است. اگر f بی‌کران باشد این قضیهٔ درست نیست، مثلاً فرض کنیم $f(x)=1/x$ هرگاه $x\neq 0$، 0 هرگاه $x=0$. آنگاه نمودار f بسته است ولی f پیوسته نیست.

۷. نشان خواهیم داد که، به ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ C از مجموعهٔ B، $(f^{-1})^{-1}(C)$ بسته است. فرض کنیم C یک زیرمجموعهٔ بستهٔ مجموعهٔ B باشد. آنگاه C کراندار است و ازاین‌رو C فشرده است. بنابراین $f(C)$ فشرده است، از این رو $f(C)$ بسته است. مثالی که درآن، با فرض نافشرده بودن B، نتیجهٔ بالا نادرست است: فرض کنیم $B=]0,2\pi]$، $f:B\to\mathbf{R}^2$، $f(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta)$. آنگاه f^{-1} پیوسته نیست چون وقتی δ کوچک است $(\cos\delta, \sin\delta)$ به $(\cos 2\pi, \sin 2\pi)$ نزدیک‌است ولی δ به 2π نزدیک نیست (لازم است که این بیان را دقیق کنید).

۹. فرض کنیم $A=[a,b]$، $B=[b,c]$. فرض کنیم V در $\mathbf{R}^m$ بسته باشد؛ نشان می‌دهیم که $h^{-1}(V)$ بسته است.

$$h^{-1}(V)=h^{-1}(V)\cap(A\cup B)=(h^{-1}(V)\cap A)\cup(h^{-1}(V)\cap B)$$
$$=f^{-1}(V)\cup g^{-1}(V)$$

که اجتماعی از دو مجموعهٔ بسته است و بنابراین بسته است. تعمیم به $A,B\subset\mathbf{R}^n$: فرض کنیم $f:A\to\mathbf{R}^m$ و $g:B\to\mathbf{R}^m$ پیوسته باشند، و فرض کنیم، روی $A\cap B$، $g=f$. فرض کنیم $h:A\cup B\to\mathbf{R}^m$ با $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر } x\in A \\ g(x) & \text{اگر } x\in B\end{cases}$ تعریف شود؛ آنگاه h پیوسته است. (اثبات کاملاً مشابه بالاست.)

۱۲. (الف) به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، قرار می‌دهیم $\delta=\varepsilon/L$. آنگاه $\|x-y\|<\delta$ مستلزم $\|f(x)-f(y)\|\leqslant L\|x-y\|<L\delta<L\varepsilon/L=\varepsilon$ است.

(ب) قرار می‌دهیم $f(x)\doteq\sin x^2$.

(پ) حاصل‌جمع دو تابع لیپشیتس f، g، لیپشیتس است، زیرا اگر L_1، L_2، به‌ترتیب، ثابتهای لیپشیتس آنها باشند، آنگاه

$$\|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)\|\leqslant\|f(x)-f(y)\|+\|g(x)-g(y)\|$$
$$\leqslant L_1\|x-y\|+L_2\|x-y\|=(L_1+L_2)\cdot\|x-y\|$$

حاصل‌ضرب دو تابع لیپشیتس لزوماً لیپشیتس نیست، مثلاً اگر $f(x)=x$، آنگاه $f(x)\cdot f(x)=x^2$ حتی به‌طور یکنواخت پیوسته نیست.

(ت) حاصل‌جمع دو تابع به طور یکنواخت پیوسته، به طور یکنواخت پیوسته است، ولی حاصل‌ضرب آنها لزوماً به طور یکنواخت پیوسته نیست.

۱۴. (الف) قرار می‌دهیم $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } y>x \\ 1 & \text{اگر } x\geqslant y\end{cases}$.

آنگاه $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$ و $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

۱۵. باید نشان دهیم

$$\sup\{f_1(x)+\cdots+f_N(x)\mid x\in A\}\leqslant\sup\{f_1(x)\mid x\in A\}+\cdots$$
$$+\sup\{f_N(x)\mid x\in A\}$$

نخست ملاحظه می‌کنیم که طرف راست برابر است با

$$\sup\{f_1(x_1)+\cdots+f_N(x_N)\mid x_1,\ldots,x_N\in A\}$$

(تمرین ۷، فصل ۱ را ببینید). آنگاه چون

$$\{f_1(x)+\cdots+f_N(x)|x\in A\}\subset\{f_1(x_1)+\cdots+f_N(x_N)|x_1,\cdots,x_N\in A\}$$

نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. و به عنوان مثالی که در آن تساوی برقرار نیست، قرار می‌دهیم $A=[0,1]$ وفرض کنیم $f_1:[0,1]\to\mathbf{R}$ با

$$f_1(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 1/2 \text{ اگر}\\ 1 & x>1/2 \text{ اگر}\end{cases}$$

و $f_2:[0,1]\to\mathbf{R}$ با

$$f_2(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 1/2 \text{ اگر}\\ 0 & x>1/2 \text{ اگر}\end{cases}$$

تعریف شده باشند. آنگاه $m=1$، $m_1+m_2=1+1=2$.

۱۶. تخمین

$$\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\|\leqslant\|f(x,y)-f(x_0,y)\|+\|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\|$$

را به‌کار ببرید.

۱۸. قضیهٔ مقدار میانی (قضیهٔ ۶) را به‌کار ببرید.

۱۹. فرض کنیم $A\subset\mathbf{R}^2$ نمودار $\tan x$، $-\pi/2<x<\pi/2$ باشد. آنگاه A بسته است زیرا $\tan x$ پیوسته است (تمرین ۶ یا تمرین ۲، بند ۵.۴ را ببینید). اگر $f(x,y)=x$، آنگاه $f(A)=]-\pi/2,\pi/2[$، که بسته نیست.

۲۱. (الف) بلی، $f'(x)$ کراندار است.
(ب) بلی، $f'(x)$ کراندار است.
(پ) بلی، $f'(x)$ کراندار است.
(ت) خیر؛ باید یك $\varepsilon>0$ بیابیم به طوری که به‌ازای هر $\delta>0$، یك x، y، با فرض $|x-y|<\delta$ و $|x\sin x-y\sin y|>\varepsilon$، وجود داشته باشد. قرار می‌دهیم $\varepsilon=1$ و $\delta>0$ دلخواهی برمی‌گزینیم. انتخاب می‌کنیم $n>1/\pi\sin(\delta/2)$. قرار می‌دهیم $x=n\pi+\delta/2$، $y=n\pi$. آنگاه $|x-y|=\delta/2<\delta$، ولی

$$\begin{aligned}|(n\pi+\delta/2)\sin(n\pi+\delta/2)-n\pi\sin(n\pi)|&=|(n\pi+\delta/2)\sin(n\pi+\delta/2)|\\&=|(n\pi+\delta/2)\sin(\delta/2)|\\&>|n\pi\sin(\delta/2)|\end{aligned}$$

۲۵. (الف) مستقیماً: نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to ۰+} f(x)$ وجود دارد. به‌ازای هر $x\in]۰,۱[$ داریم $|f'(x)|\leqslant M$. بنابراین، طبق قضیهٔ مقدار میانگین، به ازای هر $x, y\in]۰,۱[$، $|f(x)-f(y)|/|x-y|\leqslant M$، از این رو، به ازای هر $x, y\in]۰,۱[$، $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$. فرض کنیم $x_n\to ۰+$، یعنی، $x_n\to ۰$، $x_n\in]۰,۱[$. آنگاه، چون $|f(x_n)-f(x_m)|\leqslant M|x_n-x_m|$، $f(x_n)$ کوشی است، درنتیجه به‌ازای $\varepsilon>۰$ داده شده، N را چنان برمی‌گزینیم که از $n,m\geqslant N$ نتیجه بشود $|x_n-x_m|<\varepsilon/M$؛ آنگاه $n,m\geqslant N$ مستلزم $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$ است. بدین‌سان $f(x_n)$ به سمت، مثلاً a، همگراست. این نکته باقی می‌ماند که نشان دهیم به‌ازای هر دنبالهٔ دلخواه دیگر $y_n\to ۰+$، بازداریم $f(y_n)\to a$. می‌دانیم $f(y_n)$ به سمت، مثلاً a، همگراست (همان طور که $f(x_n)$ بود). فرض کنیم $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. $N_۱$، $N_۲$، $N_۳$ و $N_۴$ را چنان برمی‌گزینیم که $n\geqslant N_۱$ مستلزم $|x_n|<\varepsilon/۶M$، $n\geqslant N_۲$ مستلزم $|y_n|<\varepsilon/۶M$، $n\geqslant N_۳$ مستلزم $|b-f(y_n)|<\varepsilon/۳$ و $n\geqslant N_۴$ مستلزم $|f(x_n)-a|<\varepsilon/۳$ باشد. قرار می‌دهیم $N=\max\{N_۱,N_۲,N_۳,N_۴\}$. آنگاه از $n\geqslant N$ نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}|b-a| &\leqslant |b-f(y_n)|+|f(y_n)|-|f(x_n)-a|\\ &<\varepsilon/۳+M|x_n-y_n|+\varepsilon/۳\\ &\leqslant\varepsilon/۳+M(|x_n|+|y_n|)+\varepsilon/۳\\ &<\varepsilon/۳+M(\varepsilon/۶M+\varepsilon/۶M)+\varepsilon/۳=\varepsilon\end{aligned}$$

بدین‌سان، چون ε دلخواه بود، خواهیم داشت $b=a$.

(ب) به‌طور غیرمستقیم: به‌ازای هر x، داریم $|f'(x)|\leqslant M$، از این رو بنا بر مثال ۲، بند ۶.۴، f به طور یکنواخت پیوسته است. بدین‌سان بنا بر تمرین ۲۴ (پ)، f دارای توسیع یکتای پیوسته‌ای مانند f^* بـه $[۰,۱]$ است، از این رو بنا بر تعریف $\lim\limits_{x\to ۰+} f(x)$ و تعریف پیوستگی f^* در ۰، $\lim\limits_{x\to ۰+} f(x)$ وجود دارد و با $f^*(۰)$ برابر است.

۲۶. اگر f' پیوسته باشد، آنگـاه $f'([a,b])$ فشرده است، زیـرا $[a,b]$ فشرده است. بدین‌سان f' روی $[a,b]$ کراندار است، ازاین‌رو f روی $[a,b]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

۲۷. $\dfrac{۸۱}{۶۴}$.

۲۸. بلی.

۲۹. به‌ازای هر $x,y\in\mathbf{R}$ داریم $|f(x)-f(y)|/|x-y|\leqslant|x-y|$. نشان خواهیم

دادکه، به‌ازای هر $x_0\in\mathbf{R}$، $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)$ وجود دارد و با ۰ برابر است. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و $\varepsilon=\delta$. آنگاه $|x-x_0|<\delta$ مستلزم $|(f(x)-f(x_0))|/(x-x_0)-0|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon$ است؛ بدین‌سان $f'(x_0)$ وجود دارد و با ۰ برابر است، ازاین‌رو، بنابرحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، f ثابت است.

۳۰. (الف) فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و $\varepsilon^2=\delta$. نشان می‌دهیم که، به‌ازای هر $x,y\geqslant0$، $|x-y|<\delta$ مستلزم $(\sqrt{x}-\sqrt{y})<\varepsilon$ است، یا به عبارت دیگر، که به ازای هر $x,y\geqslant0$، $|x^2-y^2|<\delta$ مستلزم $|x-y|<\varepsilon$ است. ولی $|x^2-y^2|<\varepsilon^2$ مستلزم $|x-y||x+y|<\varepsilon^2$ است و این خود مستلزم $|x-y||x-y|<\varepsilon^2$ است (زیرا به‌ازای‌هر $x,y\geqslant0$ داریم $|x-y|\leqslant|x+y|$) و این‌نیز مستلزم $|x-y|<\varepsilon$ است. بدین‌سان $\sqrt{x}$ روی $[0,\infty[$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

(ب) می‌دانیم که $\dfrac{x-x^k}{\log x}$ روی $]0,1[$ پیوسته‌است؛ باقی می‌ماند نشان‌دادن‌پیوستگی f در ۰و۱؛ یعنی اینکه $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x^k}{\log x}=0$ و $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^k}{\log x}=1$. این هم به‌آسانی، با استفاده ازقاعدهٔ لوپیتال، انجام می‌گیرد. چون f روی یک‌مجموعهٔ فشرده پیوسته است، بنابراین به‌طور یکنواخت پیوسته است.

۳۳. نخست فرض کنیم‌که A به‌طور نسبی فشرده باشد یعنی، $\mathrm{cl}(A)$ فشرده باشد. بنابرقضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس، هردنبالهٔ واقع در $A\subset\mathrm{cl}(A)$ دارای یک زیردنبالهٔ است که به‌سمت‌نقطه‌ای واقع در $\mathrm{cl}(A)\subset\mathbf{R}^n$ همگراست. برعکس، فرض‌کنیم هردنبالهٔ‌واقع در A دارای یک زیردنبالهٔ باشدکه به‌سمت نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$ همگراست. برای‌نشان‌دادن اینکه $\mathrm{cl}(A)$ فشرده است، دنباله‌ای مانند y_n در $\mathrm{cl}(A)$ می‌گیریم و نشان می‌دهیم که دارای یک زیردنبالهٔ همگراست. فرض‌کنیم $x_n\in A$ چنان باشدکه $d(x_n,y_n)<1/n$. x_n دارای یک زیردنبالهٔ همگراست، $x_{n_i}\to x\in\mathbf{R}^n$. ادعا می‌کنیم که $y_{n_i}\to x$. برای اثبات این ادعا، به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، N_1 را چنان برمی‌گزینیم که $n_i\geqslant N_1$ مستلزم $d(x_{n_i},x)<\varepsilon/2$ باشد، و N_2 را باشرط $N_2>2/\varepsilon$ انتخاب‌می‌کنیم. قرار می‌دهیم $N=\max\{N_1,N_2\}$. آنگاه $n_i\geqslant N$ مستلزم

$$d(y_{n_i},x)\leqslant d(y_{n_i},x_{n_i})+d(x_{n_i},x)\leqslant 1/n_i+\varepsilon/2<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

است. چون $\{y_{n_i}\}$ دنباله‌ای‌واقع‌درمجموعهٔ بستهٔ $\mathrm{cl}(B)$ است، $x\in\mathrm{cl}(B)$. بدین‌سان، $\{y_n\}$ دارای یک زیردنبالهٔ همگراست، و $\mathrm{cl}(B)$ فشرده است.

فصل ۵
همگرایی یکنواخت

۱.۵ همگرایی نقطه به‌نقطه و یکنواخت

۱. بلی، زیرا اگر $\varepsilon>0$ و $N>3/\varepsilon$، آنگاه $n>N$ مستلزم این است که، به ازای هر $x\in[0, 1]$،

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|x^2-\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}-x^2\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n^2}-\frac{2x}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}+\left|\frac{2}{x}x\right|\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\leqslant\frac{3}{n}<\varepsilon$$

زیرا مستقل از x، $|x|\leqslant 1$.

۲. خیر، زیرا تابع‌حد، یعنی $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1[\text{ اگر } \\ 0 & x=1 \text{ اگر } \end{cases}$ پیوسته‌نیست درحالی‌که هر f_n پیوسته است.

۴. بلی، روی $[0, 0.999]$، $\{f_n\}$ به‌طوریکنواخت به‌سمت $f=0$ همگراست، زیرا وقتی $n\to\infty$، مستقل از x داریم $|f_n(x)-f(x)|=|x^n|\leqslant|0.999^n|\to 0$.

۵. $f_k(x)=\sum_0^k \frac{x^{n/2}}{n(n!)^2}$ به طور یکنواخت به سمت $f(x)$ همگراست، زیرا مستقل از x، $|f_k(x)-f(x)|=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{n(n!)^2}\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n(n!)^2}<\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\to 0$، چراکه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ یك سری همگراست. بدین‌سان، چون f_kها پیوسته هستند، f پیوسته است.

۲.۵ آزمون M وایرشتراس

۱. (الف) نقطه به‌نقطهٔ همگراست، به‌طور یکنواخت همگراست.
(ب) به طور یکنواخت $f_n(x)=e^{-x^2/n}/n\to f(x)=0$. برای نشان دادن یکنواختی می‌بینیم که، مستقل از x،

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|=1/ne^{x^2/n}<1/n\to 0$$

۲. $|x^n/n^2|\leqslant 1/n^2=M_n$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ همگراست، بنابرآزمون M، $f_k(x)=\sum_{n=1}^{k}x^n/n^2$ به‌طور یکنواخت همگراست.

۴. بنابر آزمون M وایرشتراس، این سری به طور یکنواخت روی $\mathbf{R}$ همگراست، زیرا

$$\cdot\frac{1}{x^2+n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}=M_n$$

۵. با قرار دادن $M_k=|a_k|$، آزمون M وایرشتراس را به‌کار ببرید.

۳.۵ انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از سریها

۱. تابع حد عبارت است از $f(x)=\begin{cases}1/x & x>0 \text{ اگر } \\ 0 & x=0 \text{ اگر }\end{cases}$ که پیوسته نیست، بنابراین همگرایی این دنباله، یکنواخت نیست و قضیهٔ ۴ را نمی‌توان به‌کار برد.

۲. به‌ازای $x=0,1$، $0\to 0=f_n(x)$. به‌ازای $x<1$، $\sum_0^\infty n^3x^n$، بنابر آزمون نسبت، همگرا است، از این رو $n^3x^n\to 0$ و $f_n(x)=n^3x^n(1-x)\to 0$. بدین‌سان، $f_n\to f=0$ نقطهٔ به نقطهٔ روی $[0,1]$. ولی این همگرایی یکنواخت نیست، زیرا

$$\int_0^1 f_n(x)dx=n^3\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n^3}{(n+1)(n+2)}\to\infty$$

درحالی که

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0\,dx=0$$

۳. به‌طور یکنواخت $f_n\to 0$، زیرا که چون ماکسیمم f_n در $\frac{n}{(n+1)}$ قرار دارد، $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\frac{\sqrt{n}}{n+1}\to 0$. $|f_n(x)|\leqslant\sqrt{n}$. بدین‌سان، قضیهٔ ۴ معتبر است. مشتقات آن، نقطهٔ به‌نقطهٔ و نه به‌طور یکنواخت، به‌سمت صفر همگرا هستند، از این رو مفروضات قضیهٔ ۵ برقرار نیستند. آیا نتیجه معتبر است؟

۴.۵ فضای توابع پیوسته

۱. خیر. مثلاً فرض کنیم $\cdot f(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 1\\ 1/x & x>1\end{cases}$

آنگاه $f\in B$. فرض کنیم $\varepsilon>0$ و $\cdot g(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 1\\ 1/x-\varepsilon/2 & x>1\end{cases}$

آنگاه $g\notin B$، چون اگر $x>2/\varepsilon$، $g(x)=1/x-\varepsilon/2<\varepsilon/2-\varepsilon/2=0$. ولی

$\|f-g\|<\varepsilon$، بنابراین $D(f,\varepsilon)\subset B$، از این‌رو B باز نیست، همچنین،
$\text{int}(B)=\{f\in\mathcal{C}_b(\mathbf{R},\mathbf{R})|f>\delta$ یك $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که $\}$

۲. $\text{cl}(B)=\{f\in\mathcal{C}_b(\mathbf{R},\mathbf{R})|f(x)\geqslant 0$ ، $x\in\mathbf{R}$ به‌ازای هر $\}$.

۴. وقتی $n\to\infty$، مستقل از x، $f_n(x)=\frac{1}{n}\cdot\frac{nx}{1+nx}\leqslant\frac{1}{n}\cdot 1\to 0$. بنابراین $f_n\to 0$ به‌طور یکنواخت، یعنی، در $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$، $f_n\to 0$.

۵. N را چنان برمی‌گزینیم که $n\geqslant N$ مستلزم $\|f_n-f\|<1$ باشد. آنگاه

$$M=\max\{\|f_1\|,\cdots,\|f_N\|,1+\|f\|\}$$

یك کران برای $\{\|f_n\|\}$ است. اگر f عنصری از آن نباشد، یعنی اگر به‌ازای n ها، $f_n=f$ نباشد، مجموعهٔ نامبرده بسته نیست.

۵.۵ قضیهٔ آرزلا ـ آسکولی

۱. از $f_n(0)=0$ نتیجه‌می‌شود که f_n کراندار است، زیرا فرض‌کنیم M چنان باشد که، به‌ازای‌هر n و به‌ازای‌هر $x\in[0,1]$، $|f_n'(x)|\leqslant M$، آنگاه طبق قضیهٔ مقدارمیانگین،

$$|f_n(x)-f_n(0)|=|f_n(x)|\leqslant M|x-0|=M|x|\leqslant M$$

۲. خیر، مثلاً فرض‌کنیم $f_n(x)=1$ هرگاه n زوج باشد، ۲ هرگاه n فرد باشد.

۴. بنابـر توضیح بعد از قضیهٔ ۹، B فشرده است، و I پیوسته است (مثـال ۳ را ببینید). بنابراین I تابعی پیوسته روی یك مجموعهٔ فشرده است، از این رو در نقطه‌ای مـانند $f_0\in B$، ماکسیمم خود را اختیار می‌کند.

۶.۵ نقاط ثابت و معادلات انتگرال

۱. $|\alpha|<1$.

۲. $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}$.

۳. $r<\frac{1}{2}$.

۵. $f(x)=1+\int_0^x 3xf(y)dy$. قرار می‌دهیم $T(f)(x)=1+\int_0^x 3xf(y)dy$ و $T(0)(x)$، $T^2(0)(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

۷.۵ قضیهٔ استون ـ وایرشتراس

۱. بنابرمثال ۲، چندجمله‌ایهای معین روی $[0,2\pi]$، چگال هستند، از این رو چون $\sin x$

روی $[0,2\pi]$ پیوسته است، یك چندجمله‌ای مانند p وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $x\in[0,2\pi]$، $|p(x)-\sin x|<\varepsilon$. فرض می‌کنیم $\varepsilon=1/100$.

۳. پاسخ قسمت دوم، بلی است.

۴. قضیهٔ ۱۲ را به‌کار ببرید.

۵. بنابرقضیهٔ ۱۲، بلی.

۸.۵ آزمونهای دیریکله و آبل

۱. بنابرآزمون M، با فرض $M_n=\frac{1}{n!}$، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-nx}$ به طور یکنواخت همگراست، زیرا $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e<\infty$.

۲. بنابرآزمون دیریکله، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ به طور یکنواخت همگراست. حاصل جمعهای جزئی $\sum f_n(x)=\sum(-1)^n$ با ۱ کراندارند، و $g_n(x)=\frac{x^n}{n}$ غیرمنفی و با n کاهشی هستند و به‌طور یکنواخت $\to 0$، زیرا مستقل از x، $|g_n(x)|=\left|\frac{x^n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}\to 0$.

۴. بنابرآزمون آبل، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}e^{-nx}$ به‌طور یکنواخت همگراست، زیرا بنابرمثال ۱، $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ به طور یکنواخت همگراست، و توابع $\varphi_n(x)=e^{-nx}$ با افزایش n کاهش می‌یابند و با ۱ کراندارند.

۹.۵ سریهای توانی و جمع‌پذیری به معنای چزارو و آبل

۱. $R=1$، $R=0$.

۲. با استفاده ازفرع ۴، از $\sum x^k=\frac{1}{(1-x)}$ مشتق بگیرید.

۳. $S_n=1,1,0,1,1,0,\ldots$، ازاین‌رو $\sigma_n\to 2/3$.

۴. $\frac{1-x^2}{1-x^3}=1-x^2+x^3-x^5+\ldots$، یا اینکه قضیهٔ ۱۷ را به‌کار ببرید.

تمرینهای فصل ۵ (واقع در پایان فصل)

۱. (الف) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. K را چنان برمی‌گزینیم کـه $k \geqslant K$ مستلزم $m_k < \varepsilon$ باشد. آنگـاه از $k \geqslant K$ نتیجه مـی‌شود کـه، بـه ازای هـر $x \in A$، $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$، یعنی $f_k \to f$ به‌طور یکنواخت روی A.
(ب) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده‌باشد. چون $m_k \to m$، $\{m_k\}$ کوشی است. ازاین‌رو K را چنان برمی‌گزینیم کـه از $k, l \geqslant K$ نتیجه بشود کـه $|m_k - m_l| < \varepsilon$. آنگـاه $k, l \geqslant K$ مستلزم این است که، به‌ازای‌هر $x \in A$، $\|f_k(x) - f_l(x)\| < \varepsilon$؛ ازاین‌رو، بنا بر قضیهٔ ۲ (محك کوشی) f_k به‌طور یکنواخت روی A همگرا است.

۲. (الف) مستقل از x، $\left|\dfrac{\sin x}{k}\right| \leqslant \dfrac{1}{k} \to 0$، بدین‌سان $\dfrac{\sin x}{k} \to f = 0$ بـه طـور یکنواخت. روشن است که تابع حد یعنی $f = 0$ پیوسته است.

(ب) $\dfrac{1}{kx+1} \to 0$ که پیوسته‌است. ایـن همگرایی، یکنواخت‌نیست، زیرا به‌ازای هر k، $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{2}$.

(پ) $\dfrac{x}{kx+1} \to 0$ که پیوسته است. ایـن همگرایی، یکنواخت است، زیرا مستقل از x، $\dfrac{x}{kx+1} = \dfrac{1}{k+\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{1}{k} \to 0$.

(ت) $f'_k(x) = \dfrac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$، ازاین‌رو ماکسیمم f_k در $x = 1/\sqrt{k}$ رخ مـی‌دهد و مقدار آن $1/2\sqrt{k}$ است؛ بدین‌سان، به ازای $\varepsilon > 0$، انتخاب می‌کنیم $K > 1/4\varepsilon^2$. آنگاه $k > K$ مستلزم این است که، به‌ازای‌هر x، $|f_k(x)| < \varepsilon$؛ ازاین‌رو $f_k \to 0$ به‌طور یکنواخت.

(ث) $1 \to 1$ به‌طوریکنواخت و $\dfrac{\cos x}{k^2} \to 0$ به طور یکنواخت، زیرا مستقل از x، $\left|\dfrac{\cos x}{k^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^2} \to 0$، ازاین‌رو $\left(1, \dfrac{\cos x}{k^2}\right) \to (1, 0)$ بـه طـور یکنواخت. این نکته باقی می‌ماند کـه تحقیق کنیم همگرایی یکنواخت توابع مؤلفه، مستلزم همگرایی یکنواخت تابع موردنظر است. این را هم می‌توان به‌طریقی مشابه باهمگرایی‌معمولی مؤلفه‌ها انجام داد.

۳. (الف) هیچ‌جا همگرا نیست، زیرا $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=K}^{\infty} (-1)^k$، که‌در آن K کوچکترین

عدد صحیح بزرگتر از x است، همگرا نیست.
(ب) بنابرآزمون M وبا فرض $M_k = ۱/k^۲$، به‌طور یکنواخت روی $\mathbf{R}$ همگراست. بدین‌سان، تابع $g(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} g_k(x)$ پیوسته است.
(پ) بنابر آزمون دیریکله، با فرض $f_n(x) = (-۱)^n$، و $g_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$، به‌طور یکنواخت همگراست، در واقع $g_n \to ۰$ به‌طور یکنواخت، زیرا مستقل از x، $\left|\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{۱}{\sqrt{n}} \to ۰$. بدین‌سان تابع حد، یعنی $g(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} g_k(x)$ پیوسته است.
(ت) به سمت تابع پیوستهٔ $g(x) = x/(۱-x)$ همگراست (آزمون سری هندسی را در فصل ۲ ببینید). ولی، این همگرایی، یکنواخت نیست، زیرا اگر یکنواخت باشد، خواهیم داشت $\sum_{۱}^{\infty} g_k(x) = \dfrac{x - x^{n+۱}}{۱-x} \to \dfrac{x}{۱-x}$ به طور یکنواخت، یعنی، $\dfrac{x^{n+۱}}{۱-x} \to ۰$ به طور یکنواخت. حال این مستلزم این است که $\dfrac{x^{n+۱}}{۱-x}$ به طور یکنواخت کراندار باشد، این یک تناقض است، زیرا نزدیک $x = ۱$، مخرج به سمت ۰ می‌رود وصورت ازپایین با ۱/۲ کراندار است، بنابراین کمیت نامبرده به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد.

۷. قرارمی‌دهیم $S_۱ = \{|f(x)|\cdot|g(x)| \mid x \in A\}$ و $S_۲ = \{|f(x)|\cdot|g(y)| \mid x, y \in A\}$. آنگاه $S_۱ \subset S_۲$، از این رو $\sup(S_۱) \leqslant \sup(S_۲)$. روشن است که $\|fg\| = \sup(S_۱)$ و $\|f\|\cdot\|g\| = \sup(S_۲)$. مثالی که در آن تساوی برقرار است عبارت است از $A = [۰,۱]$، $f(x) = g(x) = x$ و مثالی که در آن نامساوی اکید برقرار است عبارت است از $A = [۰,۱]$، $f(x) = x+۱$، $g(x) = ۱/(x+۱)$. آنگاه $\|f\| = ۲$، $\|g\| = ۱$، $\|f\|\cdot\|g\| = ۲$، ولی $\|fg\| = ۱$ زیرا $f\cdot g = ۱$.

۸. خیر.

۱۱. (الف) خیر، کامل بودن لازم است. مثلاً فرض کنیم $f(x) = x^۲$ روی فضای متریک ناکامل $]۰, ۱/۳]$ (ناکامل است، زیرا که دنبالهٔ کوشی $\{۱/۳, ۱/۴, \ldots, ۱/n, \ldots\}$ همگرا نیست) معین باشد. f یک انقباض است، زیرا

$$|x^۲ - y^۲| = |x-y||x+y| \leqslant ۲/۳|x-y|$$

ولی هیچ نقطهٔ ثابتی وجود ندارد، زیرا $f(x) = x$ مستلزم $x^۲ = x$ است که خود مستلزم $x = ۰$ یا ۱ است و ۰، ۱ درفضای متریک نامبرده قرار ندارند.

(ب) خیر. فرض کنیم $X=[۲,\infty[$، $f(x)=x+۱/x$. اگـر X فشرده باشد این وضع پیش نمی‌آید. تابـع $g:X\to \mathbf{R}$، $g(x)=d(f(x),x)$ را درنظر می‌گیریم. چون f پیوسته است و چون تابع فاصله نیز پیوسته‌است، g پیوسته است. از این‌رو، چون X فشرده است، g به‌مینیمم خود روی X، مثلاً در $x_۰\in X$، می‌رسد. ادعا می‌کنیم که $x_۰$ یك نقطهٔ ثابت f است. فرض کنیم $x_۰$ نقطهٔ ثابت نباشد؛ آنگاه $d(f(x_۰),x_۰)>۰$ از این‌رو $d(f(x_۰),x_۰)>d(f(f(x_۰)),f(x_۰))$، که این یك تناقض است، زیرا g مینیمم خود را در $x_۰$ اختیار می‌کند.

۱۳. می‌دانیم که $f_k\to f$ نقطه‌به‌نقطه. $x_۰\in]a,b[$ را انتخاب و $N_۱$ را چنان تعیین می‌کنیم که‌از $k\geqslant N_۱$ نتیجه‌بشود $|f_k(x_۰)-f(x_۰)|<\varepsilon/۲$. $f'_k\to f'$ به‌طوریکنواخت، از این‌رو $N_۲$ی وجود دارد به طوری که $k\geqslant N_۲$ مستلزم این است کـه، به ازای هر $x\in]a,b[$، $|f'_k(x)-f'(x)|<\varepsilon/۲(b-a)$ پس از اعمال قضیهٔ مقدار میانگین بر تابع (f_k-f)، $|(f_k(x)-f(x))-(f_k(x_۰)-f(x_۰))|\leqslant M|x-x_۰|$. بدین‌سان،

$$|f_k(x)-f(x)|<(\varepsilon/۲(b-a))|x-x_۰|+|f_k(x_۰)-f(x_۰)|<\varepsilon/۲+\varepsilon/۲=\varepsilon$$

۱۴. قرار می‌دهیم $S=\cap_{n=۱}^{\infty}f^n(X)$. $S\neq\varnothing$، زیرا $x_۰\in S$ که درآن $x_۰$ عبارت است‌از نقطهٔ ثابت f. برای نشان دادن اینکه $x_۰$ تنها نقطهٔ S است، فرض کنیم $x\in S$. آنگاه، به‌ازای هر n، x_nی وجود دارد به‌طوری که $x=f^n(x_n)$. چون X فشرده است، x_n دارای یك زیردنبالهٔ همگرای $x_{n_k}\to y$ است. داریم:

$$d(f^{n_k}(y),x)=d(f^{n_k}(y),f^{n_k}(x_{n_k}))\leqslant\lambda^{n_k}d(y,x_{n_k})\to ۰\;(\lambda<۱)$$

بدین‌سان $f^{n_k}(y)\to x$. ولی $f^{n_k}(y)\to x_۰$ (اثبات قضیهٔ تابع انقباض را ببینید). بدین‌سان $x=x_۰$ زیرا حدود یکتا هستند.

۱۵. قضیهٔ ۱۱، فصل ۲ را به‌کار ببرید. به‌عنوان مثالی نقض که در آن $\sum g_k$ فقط همگرا باشد، قرار می‌دهیم $g_n=(-۱)^n/n$. بنا بر آزمون دیریکله و با فرض $f_k(x)=(-۱)^k$، $g_k(x)=۱/k$، $\sum g_k$ همگرا است. ولـی زیـر سری متشکـل از جملات زوج، یعنی $\sum ۱/۲n=(۱/۲)\sum ۱/n$، همگرا نیست.

۱۸. فرض کنیم $f_k:[۰,۱]\to[۰,۱]$ با

$$f_k(x)=\begin{cases}۱/k, & x<۱/k \text{ اگر}\\ ۰, & x\geqslant ۱/k \text{ اگر}\end{cases}$$

تعریف شده باشد. آنگاه $f_k\to ۰$ به طور یکنواخت، زیـرا بـه ازای $\varepsilon>۰$ و

$K>1/\varepsilon$، $k\geqslant K$ مستلزم

$$|f_k(x)-0|=|f_k(x)|=\begin{cases}0, & x\geqslant 1/k\\ 1/k, & 0<x<1/k\end{cases}<\varepsilon$$

۲۲. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. به‌ازای $x\in A$، فرض کنیم δ_x همان باشد که در مسئله داده شده است. پوشش باز $\{D(x,\delta_x/2)\,|\,x\in A\}$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $\{D(x_n,\delta_n/2)\,|\,n=1,\ldots,N\}$ یک زیرپوشش متناهی باشد. فرض کنیم $x\in A$؛ آنگاه nی وجود دارد به طوری که $d(x,x_n)<\delta_n/2$. قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_1/2,\ldots,\delta_N/2\}$. آنگاه $d(x,y)<\delta$ مستلزم

$$d(y,x_n)\leqslant d(y,x)+d(x,x_n)<\delta_n/2+\delta_n/2=\delta_n$$

است که این خود نیز مستلزم این است که، به‌ازای هر $f\in B$، $d(f(x),f(y))<\varepsilon$.

۲۳. خیر. فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \text{ اگر}\\ 1, & x\geqslant -1 \text{ اگر}\end{cases}$. آنگاه $f\circ f\equiv 1$.

۲۵. قضیهٔ مقدارمیانی را به‌کار ببرید. (اگر $f(0)<f(1)$ نشان دهید که f افزایشی است؛ اگر $f(0)>f(1)$، نشان دهید که f کاهشی است.) قضیهٔ مقدار میانی را به‌کار ببرید تا نشان‌دهید که اگر $x<y<z$ و $f(x)<f(z)<f(y)$، آنگاه f یک‌به‌یک نیست.

۲۶. فرض کنیم $T:\mathcal{C}[0,1]\to\mathcal{C}[0,1]$ عبارت باشد از تابع

$$T(f)(x)=A(x)+\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

نشان خواهیم داد که T یک انقباض است، و بدین‌سان T دارای یک نقطهٔ ثابت خواهد بود، زیرا $\mathcal{C}[0,1]$ یک فضای متریک کامل است. قرار می‌دهیم

$$M=\max_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}|k(x,y)|$$

داریم $M<1$. آنگاه

$$\begin{aligned}\|T(f)-T(g)\| &= \sup_{x\in[0,1]}\left|A(x)+\int_0^1 k(x,y)f(y)dy-A(x)\right.\\ &\left.-\int_0^1 k(x,y)g(y)dy\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 k(x,y)[f(y)-g(y)]dy\right|\\ &\leqslant \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 M(f(y)-g(y))dy\right|\leqslant M\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1|f(y)-g(y)|dy\\ &=M\|f-g\|.\end{aligned}$$

بدین‌سان، با فرض $M=\lambda$، T یك انقباض است.

۲۷. روش تمرین ۲۵، فصل ۴ (یا خود این تمرین، قسمتهای (ب) یا (پ) آن) را به‌کار ببرید.

۲۸. روی $[۰,۳۹۶]$، بلی، زیرا مستقل از x، $f_n(x)=x/n\leqslant ۳۹۶/n\to ۰$. ولی روی $\mathbf{R}$، f_n به‌طور یکنواخت همگرا نیست. مثلاً فرض کنیم $۱=\varepsilon$، آنگاه، به‌ازای هر n، xی وجود دارد به‌طوری‌که $f_n(x)>۱$، یعنی هر $x>n$ دلخواه.

۲۹. (الف) f روی $[-۱,۱]$ به طور یکنواخت پیوسته است، از این‌رو اگر $\varepsilon>۰$، δی وجود دارد به طوری‌که، به ازای هر $x, y\in]-۱,۱[\subset[-۱,۱]$، $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$، بنابراین f روی $]-۱,۱[$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.
(ب) بلی؛ این تابع روی مجموعهٔ فشردهٔ $[۰,۱]$ به‌طوریکنواخت پیوسته است، ومشتق آن روی $[۱,\infty[$ کراندار است، از این‌رو این تابع درآنجا به‌طوریکنواخت پیوسته است. بدین‌سان تابع نامبرده روی $[۰,\infty[$ به طور یکنواخت پیوسته است.
(پ) بلی، زیرا مشتق f کراندار است.
(ت) بلی. f روی $[۰,۱]$ پیوسته است، بنابراین روی $[۰,۱]$ به‌طور یکنواخت پیوسته است، و درنتیجه روی $]۰,۱]$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.
(ث) خیر. وقتی $x\to -۱$، $\ln(۱+x^۳)$ به‌سمت $-\infty$ کاهش می‌یابد. بدین‌سان، $\sin(\ln(۱+x^۳))$ بین $+۱$ و -۱ در هر همسایگی دلخواه $x=-۱$ بی‌نهایت بار نوسان می‌کند، ازاین‌رو $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد، و f روی $[-۱,۱]$ پیوسته نیست.

۳۰. اثبات قضیهٔ ۷، فصل ۴ را ببینید. اثبات داده شده بر هرتابع $f:K\to B$، که در آن K یك فضای متریك فشرده و B یك فضای متریك است، قابل اعمال است.

۳۱. فرض کنیم $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. N را چنان برمی‌گزینیم که از $n\geqslant N$ نتیجه بشود $|a_n-a|<\varepsilon/۲$. M را چنان برمی‌گزینیم که از $n\geqslant M$ نتیجه بشود $\left|\dfrac{a_۱+a_۲+\cdots+a_N-Na}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{۲}$. آنگاه $n\geqslant M$ مستلزم

$$|b_n-a|=\left|\frac{a_۱+\cdots+a_n-na}{n}\right|=\left|\frac{(a_۱-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(a_۱-a)}{n}+\cdots+\frac{(a_N-a)}{n}+\frac{(a_{N+۱}-a)}{n}+\cdots+\frac{(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{(a_۱-a)}{n}+\cdots+\frac{(a_N-a)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N+۱}-a)}{n}+\cdots+\frac{(a_n-a)}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{a_1+\cdots+a_N-Na}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N+1}-a)}{n}+\cdots+\frac{(a_n-a)}{n}\right|$$

$$<\varepsilon/2+(n\varepsilon/2)/n=\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

۳۳. (الف) بلی. به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض، N را چنان برمی‌گزینیم که $n\geqslant N$ مستلزم $|f_n(0)|<\varepsilon$ و $|f_n(1)|<\varepsilon$ باشد. آنگاه $n\geqslant N$ مستلزم این است که، به‌ازای هر $x\in[0, 1]$، $-\varepsilon<f_n(0)\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(1)<\varepsilon$، زیرا ازافزایشی بودن هر f_n نتیجه‌می‌شود که، به‌ازای هر x، $|f_n(x)|<\varepsilon$، ازاین‌رو $f_n \to 0$ به‌طور یکنواخت.

(ب) خیر. مثلاً فرض کنیم $f_n(x)=x^n$. تابع حد یعنی $f(x)=\begin{cases}0, & x<1 \text{ اگر } \\ 1, & x=1 \text{ اگر }\end{cases}$ پیوسته نیست، از این رو همگرایی مورد بحث یکنواخت نیست، ولی همه f_nها افزایشی هستند.

۳۶. (الف) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(0)=0$.

(ب) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}(0)=0$.

(پ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)$ وجود ندارد.

فرض کنیم درامتداد مسیر (x,cx^2)، که در آن c یك ثابت است، $(x,y)\to(0,0)$. آنگاه $f(x, cx^2)=\dfrac{cx^4}{x^4+cx^4}=\dfrac{c}{1+c^2}$، و حد آن، وقتی در امتداد این مسیر $(x,y)\to(0,0)$، با $\dfrac{c}{1+c^2}$ برابر است که به‌ازای هر c مقدار آن متفاوت است. بدین‌سان، حد وجود ندارد.

۳۸. بنابرآزمون سری هندسی، $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ همگراست، بنابرآزمون دیریکله، بافرض $f_n(x)=(-1)^n$، $g_n(x)=\frac{1}{n}$،

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

همگراست، و بنابرآزمون سریهای p، $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ همگرا نیست. (فصل ۲ را ببینید.)

۳۹. فرض کنیم $\varepsilon>\circ$؛ آنگاه چون f روی یك مجموعهٔ فشرده پیوسته است، یك $\delta>\circ$ وجود دارد به طوری که، به ازای هر $x, y\in[\circ, ۱]$، $|x-y|<\delta$ مستلزم $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ باشد. فرض کنیم n چنان باشد که $۱/n<\delta$، و $[\circ,۱]$ را به بازه‌های $[j/n, (j+۱)/n]$، $j=\circ, \ldots, n$ تقسیم می‌کنیم. تعریف می کنیم $g(x)=f(j/n)$ اگر $x\in[j/n,(j+۱)/n[$، و $g(۱)=f(۱)$. آنگاه به‌ازای هر $x\in[\circ,۱[$، j ی وجود دارد به‌طوری‌که $x\in[j/n,(j+۱)/n[$ مستلزم $x-j/n<\delta$ است که این خود مستلزم $|f(x)-f(j/n)|=|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ است، و اگر $x=۱$، $f(x)-g(x)=\circ$. بدین‌سان $\|f-g\|<\varepsilon$، و g ساده است.

۴۰. فرض کنیم $\varepsilon>\circ$ و $f_\circ\in\mathcal{C}([\circ,۱],\mathbf{R})$؛ چون $f_\circ$ پیوسته است، $f_\circ([\circ,۱])$ باید یك بازهٔ بسته، مانند $[a, b]$، باشد. چون g روی $\mathbf{R}$ پیوسته است، g روی $[a',b']=[a-۱,b+۱]$ به‌طوریکنواخت پیوسته‌است: ازاین‌رو یك $\delta>\circ$ وجود دارد به طوری که $\delta<۱$ و، به ازای هر $x, y\in[a, b]$، $|x-y|<\delta$ مستلزم $|g(x)-g(y)|<\varepsilon/۲$ باشد. فرض کنیم $f\in\mathcal{C}([\circ, ۱], \mathbf{R})$ چنان باشدکه $\|f-f_\circ\|<\delta$. آنگاه، به‌ازای هر $x\in[\circ, ۱]$، $|g(f(x))|-g(f(x_\circ))|<\varepsilon/۲$ زیرا $|f(x)-f_\circ(x)|<\delta$. بنابراین $\|g\circ f-g\circ f_\circ\|<\varepsilon$ و F پیوسته است.

حال فرض کنیم g به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، و $\varepsilon>\circ$. آنگاه δی وجود دارد به طوری که، به ازای هر $x,y\in\mathbf{R}$، $|x-y|<\delta$ مستلزم $|g(x)-g(y)|<\varepsilon/۲$ باشد. فرض کنیم $f_۱, f_۲\in\mathcal{C}([\circ, ۱], \mathbf{R})$، $\|f_۲-f_۱\|<\delta$، آنگاه به‌ازای هر $x,y\in[\circ,۱]$، $|f_۱(x)-f_۲(x)|<\delta$ مستلزم $|g\circ f_۱(x)-g\circ f_۲(x)|<\varepsilon/۲$ است که این خود مستلزم $\|g\circ f_۱-g\circ f_۲\|<\varepsilon$ است، بنابراین F به‌طوریکنواخت پیوسته است.

۴۱. بنابرمثال ۲، بند ۷.۵، چندجمله‌ایها در $\mathcal{C}([-۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ], \mathbf{R})$ چگال هستند. چون $f(x)=|x|^۳\in\mathcal{C}([-۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ], \mathbf{R})$، آنگاه یك چند جمله‌ای مانند p وجود داردبه‌طوری که، به‌ازای‌هر $x\in[-۱\circ\circ\circ,۱\circ\circ\circ]$، $|p(x)-|x|^۳|<۱/۱\circ$.

۴۶. (الف) نخست نشان می‌دهیم که تابع حد، یعنی f، به طور یکنواخت پیوسته است. فرض کنیم $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد. $\delta>\circ$ را چنان برمی گزینیم که از $\|x-y\|<\delta$ نتیجه‌بشود که، به‌ازای‌هر n، $\|f_n(x)-f_n(y)\|<\varepsilon/۳$. فرض کنیم $\|x-y\|<\delta$؛ Nرا چنان برمی گزینیم که $\|f(x)-f_N(x)\|<\varepsilon/۳$ و $\|f_N(y)-f(y)\|<\varepsilon/۳$. داریم:

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\|f(x)-f_N(x)\|+\|f_N(x)-f_N(y)\|+$$
$$\|f_N(y)-f(y)\|<\varepsilon/۳+\varepsilon/۳+\varepsilon/۳=\varepsilon$$

بدین‌سان $\|x-y\|<\delta$ مستلزم $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$ است، از این رو f به‌طور

یکنواخت پیوسته است. حال نشان می‌دهیم که این همگرایی، یکنواخت است. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. $\delta_1>0$ را چنان برمی‌گزینیم که از $\|x-y\|<\delta_1$ نتیجه بشود که، به‌ازای هر n، $\|f_n(x)-f_n(y)\|<\varepsilon/3$؛ و $\delta_2>0$ را چنان که از $\|x-y\|<\delta_2$ نتیجه بشود که $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon/3$. قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. به ازای $x\in A$، N_x را چنان برمی‌گزینیم که از $n\geqslant N_x$ نتیجه بشود $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon/3$. پوشش باز $\{D(x,\delta)|x\in A\}$ مجموعهٔ A را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $\{D(x_n,\delta)|n=1,2,\ldots,M\}$ یك زیرپوشش متناهی باشد. قرار می‌دهیم $N=\max\{N_{x_1},\ldots,N_{x_M}\}$. حال فرض کنیم $x\in A$؛ فرض کنیم $\|x-x_i\|<\delta$. آنگاه $n\geqslant N$ مستلزم

$$\|f_n(x)-f(x)\|\leqslant\|f_n(x)-f_n(x_i)\|+\|f_n(x_i)-f(x_i)\|+\|f(x_i)-f(x)\|$$

است. جملهٔ نخست $<\varepsilon/3$، زیرا $\|x-x_i\|<\delta\leqslant\delta_1$؛ جملهٔ دوم $<\varepsilon/3$، زیرا $n\geqslant N\geqslant N_{x_i}$؛ و جملهٔ سوم $<\varepsilon/3$، زیرا $\|x-x_i\|<\delta\leqslant\delta_2$. بدین‌سان می‌بینیم که $n\geqslant N$ مستلزم این است که، به ازای هر $x\in A$، $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$، از این‌رو این همگرایی، یکنواخت است.

(ب) $f_n\to 0$ نقطه به‌نقطه (این امر روشن‌است). ولی $f_n\nrightarrow 0$ به‌طور یکنواخت، زیرا $f_n(1/n)=\dfrac{1/n^2}{(1/n^2)+0}=1\nrightarrow 0$ (یعنی، به‌ازای $\varepsilon<1$، هر قدر هم n بزرگ باشد، همواره xی وجود دارد، مشخصاً $x=1/n$، به طوری که $|f_n(x)|\geqslant\varepsilon$). از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم که f_nها همپیوسته نیستند.

۴۸. $f(x)=\begin{cases}1/2, & \text{اگر } x<1/2\\ x, & \text{اگر } x\geqslant 1/2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x, & \text{اگر } x<1/2\\ 1/2, & \text{اگر } x\geqslant 1/2\end{cases}$. آنگاه $(f+g)(x)=x+1/2$ و $(f-g)(x)=|x-1/2|$. به دست می‌آوریم $2\|f\|^2+2\|g\|^2=2\cdot1^2+2\cdot1^2=4$ ولی

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=(3/2)^2+(1/2)^2=10/4\neq 4$$

فصل ۶

توابع دیفرانسیل‌پذیر

۱.۶ تعریف مشتق

۱. $Df(x)=\sin x+x\cos x$.

.۲

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]-[Df(x_0)+Dg(x_0)](x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$

$$+\lim_{x\to x_0}\frac{\|g(x)-g(x_0)+Dg(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0$$

بدین‌سان، بنابر تعریف مشتق، $D(f+g)=Df+Dg$.

۴. نخست $f(0)=0$، زیرا $\|f(0)\|\leqslant M\cdot 0^2=0$. حال فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و $\delta=\varepsilon/M$. آنگاه $\|x\|<\delta$ مستلزم

$$\frac{\|f(x)-f(0)-0\|}{\|x-0\|}=\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\leqslant M\|x\|<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon$$

است، بنابراین $\lim_{x\to 0}\frac{\|f(x)-f(0)-0\|}{\|x-0\|}=0$.

۵. خیر. مثلاً فرض کنیم $f(x)=x$، آنگاه، به‌ازای هر x، $Df(x)=1$.

۶. برای $f(x)=\sqrt{x}$ روی $[0,1]$ بلی، ولی برای $g(x)=\sqrt{|x|}$ روی $[-1,1]$ خیر، زیرا g در 0 دیفرانسیل‌پذیر نیست.

۲.۶ نمایش ماتریسی

۱. $Df(x,y,z)=\begin{pmatrix}4yx^3 & x^4 & 0\\ e^z & 0 & xe^z\end{pmatrix}$.

۲. $Df(x,y,z)=\operatorname{grad}f(x,y,z)=(2xe^{x^2+y^2+z^2},2ye^{x^2+y^2+z^2},2ze^{x^2+y^2+z^2})$

۳. بنابر تمرین ۲، بند ۱.۶، $D(L+g)(0)=DL(0)+Dg(0)$، و بنابر تمرین ۴، بند ۱.۶، $Dg(0)=0$، بنابراین طبق مثال ۲، $Df(0)=DL(0)+0=L$.

۳.۶ پیوستگی توابع دیفرانسیل‌پذیر، مسیرهای دیفرانسیل‌پذیر

۱. نشان می‌دهیم $f'(0)=0$. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد، و $|x-0|=|x|<\varepsilon$، آنگاه $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|<\varepsilon$. f در 0 پیوسته است، زیرا در آنجا دیفرانسیل‌پذیر است.

۲. خیر، مثلاً $f(x)=|x|$، به‌ازای هر x، که‌در آن $M=1$، در 0 دیفرانسیل‌پذیر نیست.

۳. خیر؛ فرض کنیم $f(x)=-|x|$. ماکسیمم f در $x=0$ پیش می‌آید ولی f در آنجا دیفرانسیل‌پذیر نیست.

۴. f در 0 پیوسته است ولی در آنجا دیفرانسیل‌پذیر نیست.

۵. $c'(1)=(6,e,3)$.

۴.۶ شرایطی برای دیفرانسیل‌پذیری

۱. نشان دهید که $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در $(0,0)$ پیوسته هستند.

۲. با محاسبهٔ حد خارج قسمت تفاضلها به‌دست می‌آوریم $\partial f(0,0)/\partial x=\partial f(0,0)/\partial y=0$. بدین‌سان، اگر f دیفرانسیل‌پذیر باشد، $Df(0,0)$ باید تابع ثابت 0 باشد (بنا بر قضیهٔ ۲). ولی

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)-0|}{\|(x,y)-(0,0)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{x^2+y^2}$$

وجود ندارد، زیرا اگر در امتداد مسیر $y=Mx$ حرکت کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{|xy|}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{Mx^2}{x^2+M^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{M}{1+M^2}=\frac{M}{1+M^2}$$

که به‌ازای هر M مقدار متفاوتی دارد. این مثالی از تابعی است که همهٔ مشتقات سویی آن در هر نقطه وجود دارند، ولی خودش دیفرانسیل‌پذیر نیست.

۳. $z=0$.

۴. $f(x,y)=x^3+y^4$ و $Df(x,y)=(3x^2,4y^3)$، از این رو $Df(1,3)=(3,108)$. بدین‌سان، صفحهٔ مماس عبارت است از

$$z=82+(3,108)\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}=-245+3x+108y$$

۵.۶ قاعدهٔ زنجیری یا قضیهٔ تابع مرکب

۰۱ $$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

که درآن $\frac{\partial f}{\partial u}$، $\frac{\partial f}{\partial v}$ و $\frac{\partial f}{\partial w}$ در $g(x, y, z)$ محاسبه شده‌اند و مشتقات جزئی f را، به‌ترتیب، نسبت به متغیرهای اول، دوم و سوم f نشان می‌دهند و $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$ و غیره، در (x,y,z) محاسبه شده‌اند.

۳. $\frac{\partial F}{\partial y}=۲yf'(x^۲+y^۲)$، از این‌رو $x\frac{\partial F}{\partial y}=۲xyf'(x^۲+y^۲)$ و

$\frac{\partial F}{\partial x}=۲xf'(x^۲+y^۲)$، از این‌رو $y\frac{\partial F}{\partial x}=۲xyf'(x^۲+y^۲)$

۴. اگر $h(r, \theta, \varphi)=f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ که در آن $f:\mathbf{R}^۳\to\mathbf{R}$، آنگاه

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\sin\varphi$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}r\sin\theta\cos\varphi-\frac{\partial f}{\partial z}r\sin\varphi$$

که درآن $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ در $(r\cos\theta\sin\varphi\ ,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)$ محاسبه شده‌اند.

۵. چون، ثابت $=F(x, f(x))=۰$، داریم $\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}=۰$. بدین‌سان

$$\circ=\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x,f(x))}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x,f(x))}\cdot f'(x)\right)$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x,f(x))}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x,f(x))}\cdot f'(x)\right)$$

ونتیجهٔ مطلوب از آن حاصل می‌شود.

۶.۶ قاعدهٔ حاصل‌ضرب وگرادیانها

۱. فرض کنیم $g(t)=x_\circ+th$. آنگاه $Dg(t)=h$ و

$$\frac{d}{dt}f(x_\circ+th)\bigg|_{t=\circ}=\frac{d}{dt}f\circ g(t)\bigg|_{t=\circ}=Df(g(\circ))\cdot Dg(\circ)=Df(x_\circ)\cdot h$$

۲. فرض کنیم $F(x,y,z)=x^{۲}-y^{۲}+xyz-۱$، آنگاه

و
$$\operatorname{grad} F(x,y,z)=(۲x+yz,-۲y+xz,xy)$$

$$\operatorname{grad} F(۱,\circ,۱)/\|\operatorname{grad} F(۱,\circ,۱)\|=(۲,۱,\circ)/\sqrt{۵}$$

۳. معادلهٔ مطلوب عبارت است از

$$<\operatorname{grad} F(۱,\circ,۱),(x,y,z)>=<(۲,۱,\circ),(x-۱,y,z-۱)>$$

$$=۲x+y-۲=\circ$$

۴. درسوی $\operatorname{grad} f(x,y)=(۲xye^{x^۲},e^{x^۲})$.

۶. رویهٔ $z=f(x_۱,\ldots,x_n)$ را در $\mathbf{R}^{n+۱}$ می‌توان به‌صورت مجموعهٔ آن نقاطی‌مانند $(x_۱,\ldots,x_n,z)$ نوشت که در $F(x_۱,\ldots,x_n,z)=\circ$ صدق می‌کنند و در آن $F(x_۱,\ldots,x_n,z)=f(x_۱,\ldots,x_n)-z$. صفحهٔ مماس در $(x_\circ,z_\circ)$ عبارت است از $<(x-x_\circ,z-z_\circ),\operatorname{grad} F(x_\circ,z_\circ)>=\circ$ که به صورت $z=z_\circ+Df(x_\circ)\cdot(x-x_\circ)$ درمی‌آید، کرهٔ یکهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ در $\mathbf{R}^۳$ عبارت است از رویه‌ای به‌صورت $F(x,y,z)=c$ که‌نمودار یك‌تابع نیست، ازاین‌رو تحلیل صفحهٔ ۲۰۹ به‌کار نمی‌آید.

۷.۶ قضیهٔ مقدار میانگین

۱. فرض کنیم $x,y\in\mathbf{R}$، $x<y$. آنگاه یك $c\in]x,y[$ وجود دارد به طوری که $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$، وچون $f'(c)>\circ$،

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)>\circ$$

؛بنا براین $f(y)>f(x)$.

۲. $$\frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}}{\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}}=\lim_{x\to x_\circ}\left(\frac{f(x)-\circ}{g(x)-\circ}\right)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}$$

۳. (الف) $\lim\limits_{x\to\circ}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\circ}\dfrac{\cos x}{۱}=\cos\circ=۱$.

(ب) $\lim\limits_{x\to\circ}\dfrac{e^x-۱}{x}=\lim\limits_{x\to\circ}\dfrac{e^x}{۱}=e^\circ=۱$.

۵. این، نتیجهٔ بی‌درنگی از قضیهٔ ۷ (یك) است. اگر A محدب نباشد، این مطلب لزوماً درست نیست. مثلاً فرض کنیم $A=\{x\in\mathbf{R}|x<\circ$ یا $x>۱\}$ و $f:A\to\mathbf{R}$ را با $f(x)=\begin{cases}۱, & x>۱\\ \circ, & x<\circ\end{cases}$ تعریف می‌کنیم. آنگاه f روی A دیفرانسیل‌پذیر است، و به‌ازای هر $x\in A$، داریم $f'(x)=\circ$، ازاین‌رو، به‌ازای هر $x\in A$، $|f'(x)|<۱/۱\circ$، ولی اگر $x=-y=۲$، $|f(x)-f(y)|=۱>(۱/۱\circ)|x-y|=۴/۱\circ$.

۸.۶ قضیهٔ تیلور و مشتقات بالاتر

۲. شرایط مثال ۲ را تحقیق کنید.

۳. f متعلق به $C^۱$ نیست وفقط دیفرانسیل‌پذیر است. ولی، به‌ازای $r=۱$، قضیهٔ تیلور به صورت $f(\circ+h)=f(\circ)+f'(\circ)\,.\,h+R_۱(\circ,h)$، کــه درآن، وقتی $h\to\circ$، $R_۱(\circ,h)/h\to\circ$، معتبر است.

۴. نمایش آن به‌صورت سری تیلور عبارت است از

$$-x-(۱/۲)x^۲-(۱/۳)x^۳-\dots=\sum_{k=۱}^{\infty}(۱/k)x^k$$

حال، به ازای $k>۱$، $|f^{(k)}(\circ)|=|(-۱)(k-۱)|=k-۱<۲^k$، از این رو، بنا برمثال ۲، به‌ازای $x\in]-۱,۱[$، $\log(۱-x)=\sum_{k=۱}^{\infty}-(۱/k)x^k$. سرانجام، فرض کنیم δ چنان باشد کــه $\circ<\delta<۱$. آنگـاه، بـه ازای هـر $x\in[-\delta,\delta]$، $|a_n|=|(-۱)x^n/n|<\delta^n$، وچون $\sum_{k=۱}^{\infty}\delta^k$ همگراست، ازآزمون M وایرشتراس نتیجه می‌شود که، $\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)x^k/k$ به‌طور یکنواخت روی $[-\delta,\delta]$ همگراست.

۶. $f(h,k)=۱+h+h^۲/۲-k^۲/۲+R_۲((h,k),\circ)$ کــه در آن، وقتی $(h,k)\to(\circ,\circ)$، $R_۲((h,k),\circ)/|(h,k)|^۲\to\circ$.

۹.۶ ماکسیمم و مینیمم

۲. $\circ=(\text{۲}x+\text{۲}y,\ \text{۲}x+\text{۲}y)=Df(x,y)$ اگر، و فقط اگر، $x=-y$. حال $-D^{\text{۲}}f(x,y)=\begin{pmatrix}-\text{۲} & -\text{۲}\\ -\text{۲} & -\text{۲}\end{pmatrix}$، ازاین‌رو $\Delta_{\text{۱}}=-\text{۲}$ و $\Delta_{\text{۲}}=\circ$ و بدین‌سان آزمون مورد بحث به‌کار نمی‌آید. باوجود این، $f(x,y)=(x+y)^{\text{۲}}+\text{۶}$، بنابراین $(\circ,\circ)$ یك مینیمم است.

۳. مینیمم موضعی است.

۴. فرض‌کنیم A مثبت معین باشد، وفرض کنیم $Ax=\lambda x$. آنگاه

$$<x,Ax>=<x,\lambda x>=\lambda<x,x>$$

مثبت است زیـرا هم $<x,x>$ و هم λ مثبت هستند. تبصره: عکس آن نیز درست است، یعنی اگرمقادیر ویژهٔ A مثبت باشند، نتیجه می‌شود که A مثبت معین است و اثبات آن دشوار نیست وکافی‌است این‌امر را مورد استفاده‌قرار دهیم که می‌توان یك‌ماتریس متقارن را به وسیلهٔ یك ماتریس متعامد، قطری کرد.

تمرینهای فصل ۶ (واقع درپایان فصل)

۲. از دیفرانسیل‌پذیر بودن f_i نتیجه می‌شود که یك $\delta_i>\circ$ وجود دارد به طوری‌که، اگر $|x-x_\circ|<\delta$، آنگاه

$$\left|f_i(x)-f_i(x_\circ)-\frac{df_i}{dx}(x_\circ)(x-x_\circ)\right|<\frac{\varepsilon}{m}|x-x_\circ|$$

قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_i\,|\,i=\text{۱},\ldots,m\}$، آنگاه $|x-x_\circ|<\delta$ مستلزم

$$\left\|f(x)-f(x_\circ)-\left(\frac{df_{\text{۱}}}{dx}(x_\circ),\ldots,\frac{df_m}{dx}(x_\circ)\right)(x-x_\circ)\right\|$$

$$=\left\|f_{\text{۱}}(x)-f_{\text{۱}}(x_\circ)-\frac{df_{\text{۱}}}{dx}(x_\circ)(x-x_\circ),\ldots,f_m(x)-f_m(x_\circ)\right.$$

$$\left.-\frac{df_m}{dx}(x_\circ)(x-x_\circ)\right\|\leqslant\left|f_{\text{۱}}(x)-f_{\text{۱}}(x_\circ)-\frac{df_{\text{۱}}}{dx}(x_\circ)(x-x_\circ)\right|+\cdots$$

$$+\left|f_m(x)-f_m(x_\circ)-\frac{df_m}{dx}(x_\circ)(x-x_\circ)\right|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{m}+\cdots+\frac{\varepsilon}{m}\right)|x-x_\circ|$$

$$=\varepsilon|x-x_\circ|$$

است، بنابراین f در $x_\circ$ دیفرانسیل‌پذیر است.

۳. اگر $f=0$، تمرین کامل است، از این‌رو فرض کنیم یك $x_0\in[a,\infty[$ وجود دارد به‌طوری که $f(x_0)\neq 0$، مثلاً $f(x_0)>0$. (اگر $f(x_0)<0$، استدلال مشابه‌خواهد بود) بنا بر قضیهٔ مقدار میانی، یك $x_1\in]0,x_0[$ وجود دارد به طوری که $f(x_1)=f(x_0)/2$. چون $f(x)\to 0$، یك $y>x_0$ وجود دارد به طوری که $f(y)<f(x_0)/2$، از این رو، باز بنا بر قضیهٔ مقدار میانی، یك $x_2\in]x_0,y[$ وجود دارد به طوری که $f(x_2)=f(x_0)/2$. آنگاه اگر $g(x)=f(x)-f(x_0)/2$، $g(x_1)=g(x_2)=0$، و بنابراین، طبق قضیهٔ رل، یك $x_3\in]x_1,x_2[$ وجود دارد به‌طوری که $g'(x_3)=f'(x_3)=0$.

۵. (الف) $(2x\cos(x^2+y^3)\quad 3y^2\cos(x^2+y^3))$.

(ب) $\begin{pmatrix} z\cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z\cos y & \sin y\end{pmatrix}$

(پ) $(y\quad x)$

(ت) $(2x\quad 2y)$

(ث) $\begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \\ 2y^2x & 2x^2y\end{bmatrix}$

(ج) $((y+z)x^{y+z-1}\quad (\ln x)x^{y+z}\quad (\ln x)x^{y+z})$

(چ) $(yz\quad xz\quad xy)$

(ح) $\begin{bmatrix} (y\ln z)z^{xy} & (x\ln z)z^{xy} & (xy)z^{xy-1} \\ 2x & 0 & 0 \\ yz/\cos^2(xyz) & xz/\cos^2(xyz) & xy/\cos^2(xyz)\end{bmatrix}$

۷. (الف) $(3,6)$ یك مینیمم موضعی است و $(1,2)$ یك نقطهٔ زینی است.
(ب) به ازای n زوج، $(\pm n\pi+\pi/2, 1)$ نقاط زینی هستند؛ به ازای n فرد، $(\pm n\pi+\pi/2, 1)$ مینیممهای موضعی هستند.
(ت) نقاط بحرانی عبارتند از صفحهٔ $z=-x-y$. همهٔ آنها مینیمم موضعی هستند، زیرا در آنجا، $f(x,y,z)=0$ و بررسی نشان می‌دهد که همواره $f(x,y,z)\geqslant 0$. (قضایای مربوط به هسین به‌کار نمی‌آیند زیرا هسین دارای $\Delta_3=0$ است).

۸. (الف)، (ب)، و (پ) نتایج بی‌درنگی هستند از قضیهٔ ۱۲، تعریف $H_{x_0}(f)$، و شرایط مثبت معین ومنفی معین بودن یك ماتریس که درصفحهٔ ۲۳۲ داده شده‌اند.

۱۲. فرض کنیم، به‌ازای $x\in\mathbf{R}$، $h_x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$، $t\to tx$، و $g=f\circ h_x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، ازاین‌رو $g(t)=f(tx)=t^m f(x)$. آنگاه پس از مشتق‌گیری

$$Dg(t)=Df(h_x(t))\circ Dh_x(t)=Df(tx)(x)=\frac{d}{dt}(tf(x))=mt^{m-1}f(x)$$

بنابراین، با گذاشتن $t=1$ ، $Df(x)(x)=mf(x)$. حال فرض کنیم $L:\mathbf{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{R}^{n_k}\to\mathbf{R}^m$ چند خطی باشد. آنگاه

$$L(tx)=L(tx_1,\cdots,tx_k)=tL(x_1,tx_2,\cdots,tx_k)=\ldots=t^kL(x_1,\ldots x_k)$$

وبنابراین L همگن درجهٔ k است.

۱۳. (الف) فرض کنیم $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$، $(x,y,z)\to(h(x),g(x,y),z)$، آنگاه $F=f\circ T$ و $DF(x,y,z)=Df(T(x,y,z))\circ DT(x,y,z)$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial h}\,\frac{\partial f}{\partial g}\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(T(x,y,z))}\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x} & 0 & 0\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x,y,z)}$$

فرمول کلی برای $DF(x,y,z)$ است.

(ب)

$$\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial x}=\frac{dh}{dw}\,(f(x,y,z)\cdot g(x,y))\times$$

$$\times\left[f(x,y,z)\,\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}+g(x,y)\,\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right],\ \frac{\partial G(x,y,z)}{\partial y}$$

$$=\frac{dh}{dw}(f(x,y,z)\cdot g(x,y))\cdot\left[f(x,y,z)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}+g(x,y)\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right],$$

$$\frac{\partial G(x,y,z)}{\partial z}=\frac{dh}{dw}\,(f(x,y,z)\cdot g(x,y))\cdot g(x,y)\cdot\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

فرمولهای کلی هستند. به‌ازای f، g و h مشخص واقع در این مسئله، داریم:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\cos\left((x^2+yz)\cdot(y^3+xy)\right)\cdot(2xy^3+3x^2y+y^2z),$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\cos((x^{۲}+yz)(y^{۳}+xy))\cdot(۳x^{۲}y^{۲}+x^{۳}+۴y^{۳}z+۳xyz),$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}=\cos((x^{۲}+yz)(y^{۳}+xy))\cdot(y^{۴}+y^{۲}x)$$

۱۵. $S=f^{-۱}(\{۰\})$ بسته است، زیرا f پیوسته است، و $S\subset[۰,۱]$، ازاین‌رو کراندار است، بنابراین S فشرده است. اگر S نامتناهی باشد، بنابرقضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس، S دارای یک نقطهٔ انباشتگی مانند $x_۰\in S$ است، ازاین‌رو $f(x_۰)=۰$. $\{x_n\}\subset B$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_n\to x_۰$، و به ازای هر n، $x_n\neq x_۰$. آنگاه $f'(x_۰)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_۰)}{x_n-x_۰}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۰-۰}{x_n-x_۰}=۰$، و این ناقض فرض مسئله است که طبق آن هیچ $x\in\mathbf{R}$ وجود ندارد به طوری که $f(x)=۰=f'(x)$. بدین‌سان S متناهی است.

۱۶. قرار می‌دهیم $g(x)=f(x)-Df(۰)(x)$. آنگاه چون $Df(۰)=Df(x_۰)$، به‌ازای $\|h\|<\delta(\varepsilon)$،

$$\begin{aligned}\|g(x_۰+h)-g(x_۰)\|&=\|f(x_۰+h)-Df(۰)(x_۰+h)-f(x_۰)+Df(۰)(x_۰)\|\\&=\|f(x_۰+h)-f(x_۰)-Df(۰)(h)\|<\varepsilon\|h\|\end{aligned}$$

بنابراین $Dg(x_۰)=۰$، و چون $x_۰$ دلخواه بود، به ازای هر $x\in\mathbf{R}^n$، $Dg(x)=۰$، مستلزم این است که g تابع ثابتی است وبدین‌سان $f=Df(۰)+c$، $c\in\mathbf{R}^m$.

۱۷. اثبات قضیهٔ ۱۲ را الگو قرار دهید.

۱۸. بنابرقضیهٔ مقدار میانی، $f(x)=x^{۳}+bx+c$ دارای حداقل یک ریشه است زیرا، وقتی $x\to\infty$، $f\to\infty$، و وقتی $x\to-\infty$، $f\to-\infty$. حال فرض کنیم $x_۱<x_۲$ و $f(x_۱)=f(x_۲)=۰$، آنگاه یک $x_۳\in]x_۱,x_۲[$ وجود دارد به‌طوری که $f'(x_۳)=۳x_۳^{۲}+b=۰$، یعنی $۳x_۳^{۲}=-b$؛ ولی $b>۰$، و ازاین‌رو یک تناقض داریم.

۱۹. (الف) $f(x,y)=x^{۲}+۲xy+y^{۲}+۰$

(ب) $f(x,y)=۱+x+y+\frac{۱}{۲}(x^{۲}+۲xy+y^{۲})+R_۲(x,y)$

۲۰. (الف) روشن است که $\|۰\|=۰$. برعکس، فرض کنیم $\|L\|=۰$، آنگاه، به‌ازای هر $\varepsilon>۰$، یک $M<\varepsilon$ وجوددارد به‌طوری که، به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}^n$، $\|Lx\|\leqslant M\|x\|$. فرض کنیم $x\in\mathbf{R}^n$ و $\varepsilon>۰$، ازاین‌رو یک $M<\varepsilon/\|x\|$ وجود دارد به طوری که

$\varepsilon > \|Lx\| \leqslant M\|x\|$. چون x و ε دلخواه هستند، $L(x)=0$، و $L=0$.

(ب) فرض کنیم $a\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\|aL\| &= \inf\{M \mid \|aL(x)\| \leqslant M\|x\| \text{ به‌ازای هر } x\}\\ &= \inf\{M \mid |a|\ \|Lx\| \leqslant M\|x\| \text{ به‌ازای هر } x\}\\ &= |a|\inf\{M \mid \|Lx\| \leqslant M\|x\|\} = |a|\ \|L\|\end{aligned}$$

(پ) روشن است که، به‌ازای هر L، $0 \leqslant \|L\|$.

(ت) داریم $\|L_1+L_2\| = \inf\{M \mid \|(L_1+L_2)x\| \leqslant M\|x\| \text{ به‌ازای هر } x\}$.

$$\begin{aligned}A &= \{M \mid \|(L_1+L_2)x\| \leqslant M\|x\| \text{ به‌ازای هر } x\}\\ &\supset \{M \mid \|L_1(x)\| + \|L_2(x)\| \leqslant M\|x\| \text{ به‌ازای هر } x\}\\ &\supset \{M \mid \|L_1\| + \|L_2\| \leqslant M\} = B\end{aligned}$$

۲۱. این مطلب یك نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۱۲ و بحث واقع درصفحهٔ ۲۳۲ است.

۲۲. خیر (تمرین۲، بند۵.۴ و تمرین ۶ واقع در پایان فصل ۴ را ببینید). $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، به‌ازای $f:]0,1[\to\mathbf{R}$، $f(x)=x$. در حقیقت، هرتابع پیوستهٔ کراندار دلخواه $f:]0,1[\to\mathbf{R}$ دارای نموداری است که بسته نیست. اگر A بسته باشد، آنگاه نمودار f باید بسته باشد. اگر $\{(x_k, f(x_k))\}$ دنباله‌ای همگرا واقع درنمودار Gی تابع f باشد، آنگاه $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x\in A$، چون A بسته است. بنابرپیوستگی f، $f(x_k)\to f(x)$، بنابراین $(x_n, f(x_n))\to(x, f(x))\in G$. (این حل را Dave Nishball دراختیار ما گذاشته است.)

۲۳. $0+0-1/2x^2+0-2/41x^4+0$.

۲۵. اثبات قضیهٔ ۴ را مرور کنید و توجه داشته باشید که پیوستگی $\partial f/\partial x^n$ لازم نیست.

۲۶. (الف) بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، به‌ازای یك $x_h\in]a,h[$،

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^+}f'(x_h)$$

ازاین‌رو $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}f'(x_h)=l$.

(ب) خیر، زیرا $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq f(0)$.

۲۸. لم. فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ روی $[a,b]$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و فرض کنیم $f'(b)>0$ و $f'(a)<0$. آنگاه‌یك $x_0\in]a,b[$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(x_0)=0$.

برهان: چون $f'(a) > 0$، f در a دارای یك ماکسیمم موضعی است. به‌طور مشابهی از $f'(b) > 0$ نتیجه می‌شود که f در b یك ماکسیمم موضعی دارد. بنا بر فشردگی $[a,b]$، به‌ازای یك $x_0 \in [a, b]$، $\inf f([a, b]) = f(x_0)$. بنا بر آنچه در بالا آمد، $x \neq a$ و $x_0 \neq b$، بنابراین $x_0 \in]a,b[$، ازاین‌رو $f(x_0)$ یك مینیمم موضعی f روی بازه‌ای باز است و درنتیجه $f'(x_0) = 0$. حال فرض کنیم $f'(b) > c > f'(a)$. می‌خواهیم نشان دهیم که یك $x_0 \in]a, b[$ وجود دارد به‌طوری که $f'(x_0) = c$. قرارمی‌دهیم $g(x) = f(x) - cx$. آنگاه $g'(x) = f'(x) - c$ و $f'(b) > c > f'(a)$ مستلزم این است که $f'(b) - c = g'(b) > 0 > f'(a) - c = g'(a)$. بنابراین، طبق لم بالا، یك $x_0 \in]a,b[$ وجود دارد به‌طوری که $g'(x_0) = 0 = f'(x_0) - c$، یعنی، $f'(x_0) = c$. (Cindy Fleming این استدلال را آورده است.)

۲۹. (الف) آزمون سری هندسی را به‌کار ببرید. $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x > 0 \text{ اگر} \\ e^x - 1, & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$.

(ب) خیر؛ قاعدهٔ لوپیتال را به‌کار ببرید.

(پ) روی $[0,\infty[$ خیر، به‌ازای هر $\delta > 0$، روی $[\delta,\infty[$ بلی.

(ت) روی $[0,\infty[$ خیر، روی $]0,\infty[$ بلی (روی هر بازهٔ $[\delta,\infty[$، $\delta > 0$؛ آزمون M را به‌کار ببرید).

۳۵. دیفرانسیل‌پذیری f مستلزم پیوستگی f است. f ممکن است ماکسیمم خود را اختیار نکند، بنابراین T ممکن است تهی باشد. از $f'(x) = 0$ نتیجه نمی‌شود که f یك ماکسیمم یا مینیمم دارد. از اینکه $f(x)$ دارای یك ماکسیمم است نتیجه نمی‌شود که در آنجا، $f(x) \geqslant 0$ (مثلاً، $f(x) = -3$). $T \neq S \cap \{x \mid f(x) \geqslant 0\}$. ($\{x \mid f(x) \geqslant 0\}$ و S بسته‌هستند، زیرا f و f' پیوسته می‌باشند.) T واقعاً بسته‌است، زیرا $T = f^{-1}(a)$ $(a = \sup(f))$، $\{a\}$ بسته و f پیوسته است.

۳۲. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$ و اگر $(x,y) \neq 0$،

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

ازاین‌رو

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k^5}{k \cdot k^4} = -1$$

به‌طور مشابهی،

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^5}{h^4h}=+1\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

۳۴. $x_n=1/2+x_{n-1}$؛ $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}-1$. (برای ملاحظهٔ روشهای مشابه، حل تمرین ۲۶، فصل ۲ را ببینید.)

۳۵. فرض کنیم $x_1, x_2, x_3\in]a, b[$ چنان باشند که

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0 \quad \text{و} \quad x_1<x_2<x_3$$

آنگاه، بنابر قضیهٔ رل، یك $x_4\in]x_1, x_2[$ و یك $x_5\in]x_2, x_3[$، با فرض $f'(x_4)=f'(x_5)=0$، وجود دارند. حال قضیهٔ رل را بر f' اعمال می‌کنیم، ازاین‌رو یك $c\in]x_4,x_5[$ وجود خواهد داشت به‌طوری‌که $f''(c)=0$.

فصل ۷
قضایای تابع معکوس و تابع ضمنی و مباحث وابسته

۱.۷ قضیهٔ تابع معکوس

۱. $\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4x^2+4y^2=0$ اگر، وفقط اگر، $(x,y)=(0,0)$.

۳. این مطلب قضیهٔ ۱ را نقض نمی‌کند، زیرا f، در $x=0$، C^1 نیست.

۵.

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}_{(0,0)}=\begin{vmatrix}1+yz & xz & xy\\ y & 1+x & 0\\ 2 & 0 & 1+6z\end{vmatrix}_{(0,0)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

ازاین‌رو دستگاه مورد بحث، درهمسایگی $(\circ, \circ, \circ)$، معکوس‌پذیر است.

۲.۷ قضیهٔ تابع ضمنی

۲. $\frac{\partial F}{\partial y} = ۲y + ۱ = \circ$ اگر، وفقط اگر، $y = -\frac{۱}{۲}$.

۴.

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial F_۱}{\partial u} & \frac{\partial F_۱}{\partial v} & \frac{\partial F_۱}{\partial w} \\ \frac{\partial F_۲}{\partial u} & \frac{\partial F_۲}{\partial v} & \frac{\partial F_۲}{\partial w} \\ \frac{\partial F_۳}{\partial u} & \frac{\partial F_۳}{\partial v} & \frac{\partial F_۳}{\partial w} \end{matrix}\right|_{(\circ,\circ,\circ,\circ,\circ,-۲)} = \left|\begin{matrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & ۱ \\ \circ & \circ & ۱ \end{matrix}\right| = ۱ \neq \circ$$

ازاین‌رو می‌توان u، v، w را برحسب x، y، z، به‌ازای (x, y, z) واقع در یك همسایگی $(\circ, \circ, \circ)$، بیان کرد.

۳.۷ قضیهٔ تسطیح

۱. $x \neq \circ$ و $y \neq \circ$.

۳. قضیهٔ این بند درنزدیکی $(\circ, \circ)$ قابل اعمال نیست، زیرا

$$Df(\circ, \circ) = (۳x^۲, ۲y)_{(\circ,\circ)} = (\circ, \circ)$$

ولی، چون $Df(\circ, ۱) = (\circ, ۲) \neq \circ$، f را می‌توان درنزدیکی $(\circ, ۱)$ تسطیح کرد.

۴.۷ نتایج دیگری ازقضیهٔ تابع ضمنی

۱. درنزدیکی $(\circ, ۱)$، بلی.

۵.۷ یك قضیهٔ وجودی برای معادلات دیفرانسیل معمولی

۳. روشن است که $x = \circ$ یك جواب است؛ وچون، به‌ازای $t \geqslant \circ$،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^۲}{۴}\right) = \frac{t}{۲} = \sqrt{\frac{t^۲}{۴}} \ ,$$

$x(t) = \begin{cases} \circ, & t \leqslant \circ \\ t^۲/۴, & t > \circ \end{cases}$ یك جواب است. آنگاه، بنابرقضیهٔ ۶، $f(x, t) = \sqrt{x}$ نمی‌تواند، دریک همسایگی $x = \circ$، لیپشیتس باشد.

۵. (الف) سری $e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}(t^n/n!)A^n$ مطلقاً همگراست؛ می‌توان از آن، جمله به‌جمله، مشتق گرفت؛ و $(d/dt)(e^{tA}x(0))=A\sum_{n=0}^{\infty}(t^n/n!)A^n x(0)=Ae^{tA}x(0)$.
(ب) بلی، می‌توان آن‌را، با انتقال مبدأ زمان، یعنی $e^{tA}=e^{(t-b)A}e^{bA}$، به ∞ توسیع داد. زمانهای گوناگون عبارتند از b، $2b$، ...، nb، ... .

۶.۷ لم مورس

۱. اندیس $=1$.

۳. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$، $(0,0)$ یك نقطهٔ بحرانی تبهگن است.

۵. (الف) قضیهٔ ۷ و این امر را به‌کار ببرید که، با تعویض مختصات، نقاط بحرانی «حفظ می‌شوند». برای اثبات این مطلب، می‌توانید قضیهٔ تیلور را نیز به‌کار ببرید.

۷.۷ اکسترممهای مقید و تکثیرکنهای لاگرانژ

۱. $(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3})$ یك ماکسیمم است و $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{-2/3})$ یك مینیمم است.

۲. هیچ اکسترممی ندارد.

۳. $(\pm\sqrt{3}, 0)$.

۴. $(9/\sqrt{70}, 4/\sqrt{70})$ (ماکسیمم) و $(-9\sqrt{70}, -4\sqrt{70})$ (مینیمم).

تمرینهای فصل ۷ (واقع در پایان فصل)

۱. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

۴. فرض کنیم $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$، $x\to(g_1(x_1),\ldots,g_n(x_n))$، آنگاه $h=f\circ L$، و در نمایش ماتریسی،

$$Dh(x)=Df(L(x))\circ DL(x)=Df(L(x))\begin{bmatrix}\dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial L_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial L_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial L_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$$=Df(L(x))\begin{bmatrix}g_1'(x_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & g_n'(x_n)\end{bmatrix}$$

۶. چون $Jf(x)\neq 0$، با توجه به آموخته‌های جبرخطی داریم

$$Dg(y_0)=(Df(x_0))^{-1}=\frac{1}{Jf(x_0)}\operatorname{adj}(Df(x_0))$$

و

$$\operatorname{adj}(Df(x_0))=\begin{bmatrix} \frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(x_2,x_3)} & -\frac{\partial(f_1,f_3)}{\partial(x_2,x_3)} & \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_2,x_3)} \\ \frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(x_1,x_3)} & \frac{\partial(f_1,f_3)}{\partial(x_1,x_3)} & -\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_3)} \\ \frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(x_1,x_2)} & -\frac{\partial(f_1,f_3)}{\partial(x_1,x_2)} & \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} \end{bmatrix}_{(x_0)}$$

بنابراین

$$D_1g_1(y_0)=\frac{1}{Jf(x_0)}\cdot\frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(x_2,x_3)}$$

وغیره، وچون

$$\frac{\partial(f_2,f_3)}{\partial(x_2,x_3)}=\begin{vmatrix} D_2f_2(x_0) & D_2f_3(x_0) \\ D_3f_2(x_0) & D_3f_3(x_0)\end{vmatrix},$$

وغیره، پس از ترکیب آنها به‌دست می‌آوریم

$$Jf(x_0)D_1g_i(y_0)=\begin{vmatrix} \delta_{i,1} & D_1f_2(x_0) & D_1f_3(x_0) \\ \delta_{i,2} & D_2f_2(x_0) & D_2f_3(x_0) \\ \delta_{i,3} & D_3f_2(x_0) & D_3f_3(x_0)\end{vmatrix}$$

۱۰. (الف)

$$Jf(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2=0$$

اگر، وفقط اگر، $0=\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial x}$ اگر، و فقط اگر، $\frac{\partial f_2}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}=0$.

ازاین‌رو قضیهٔ تابع ضمنی می‌گوید که اگر f درمعادلات کوشی ـ ریمان صدق کند و $Df(x,y)\neq 0$، آنگاه f موضعاً معکوس‌پذیر است.

۱۱. (الف) تمرین ۳ را به‌کار ببرید.
(ب) قضیهٔ ۴ را به‌کار ببرید.

۱۶. خیر.

۱۸.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{vmatrix} = 9u^2v^2 - xy$$

ازاین‌رو اگر $9u_0^2v_0^2 \neq x_0 y_0$، می‌توان u و v را، در نزدیکی (x_0, y_0)، به صورت توابعی از x و y بیان کرد. و

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

به‌ویژه داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}\right)$$

۲۳. (الف) در $\mathbf{R}^2$ مثالی از چنین Cی عبارت است از هنگامی که C مرکب است از نیم‌خطهایی مرسوم ازمبدأ، وسطح بین‌آنها.
(ب) قرارمی‌دهیم $I=\{x \mid x\in C$ و $\|x\|=1\}$. C بسته‌است، بنابراین I فشرده‌است، و چون f روی I پیوسته است، یک $x_0\in I$ وجود دارد به طوری که $f(x_0)=\sup\{\|f(x)\| \mid x\in I\}$. آنگاه، به‌ازای هر $x\in C$، $x\neq 0$، $x/\|x\|\in I$ و
$\|f(x)\|=\|x\|\,\|f(x/\|x\|)\|\leqslant\|x\|\,\|f(x_0)\|\|(x/\|x\|)\|=\|f(x_0)\|\|x\|$،
ازاین‌رو قرار می‌دهیم $\|f(x_0)\|=M$. اگر $x=0$، به‌ازای هر $y\in\mathbf{R}^n$، $\|f(x)\|=\|f(0\cdot y)\|=0\|f(y)\|=0=M=0$.

۲۵. نشان دهید که f، $\mathrm{cl}(D(0,r))$ را (که یک مجموعهٔ فشرده‌است) درخودش می‌نگارد، و درمفروضات اصل تابع انقباض صدق می‌کند.

۲۹. به‌بندهای ۸.۵ و ۹.۵ مراجعه کنید.

۳۱. $x(\circ)=\circ, \qquad x_{\backslash}(t)=\circ, \qquad x_{\text{۲}}(t)=\circ+\int_{\circ}^{t}(\text{۱}+\circ)ds=t,$

$$x_{\text{۳}}(t)=\int_{\circ}^{t}(\text{۱}+s^{\text{۲}})ds=t-\frac{t^{\text{۳}}}{\text{۳}}, \cdots,$$

$$x_n(t)=t+\frac{\text{۱}}{\text{۳}}t^{\text{۳}}+\frac{\text{۱}}{\text{۳}\cdot\text{۵}}t^{\text{۵}}+\cdots+\frac{\text{۱}}{\text{۳}\cdot\text{۵}\cdots(\text{۲}k-\text{۳})}t^{\text{۲}k-\text{۳}}, \cdots$$

ازاین‌رو

$$x(t)=\sum_{k=\text{۲}}^{\infty}\frac{\text{۱}}{\text{۳}\cdot\text{۵}\cdots(\text{۲}k-\text{۳})}t^{\text{۲}k-\text{۳}}$$

شعاع همگرایی ازفرمول زیر به‌دست می آید

$$\frac{\text{۱}}{R}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{|a_{n+\text{۱}}|}{|a_n|}=\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{\text{۱}}{(\text{۲}k-\text{۱})(\text{۲}k-\text{۲})}=\circ$$

و ازآنجا نتیجه می‌شود $R=\infty$.

۳۲. اندیس این تابع ∘ است.

واژه‌نامه

آزمون آبل	Abel's test
آزمون انتگرال	integral test
آزمون تراکم کوشی	Cauchy condensation test
آزمون دیریکله	Dirichlet test
آزمون راب	Raabe's test
آزمون ریشه	root test
آزمون سری p	p–series test
آزمون مقایسه	comparison test
آزمون M وایرشتراس	Weierstrass M–test
آزمون نسبت	ratio test
ابر صفحهٔ مستوی	affine hyperplane
اتحاد قطبی	polarization identity
اتحاد لاگرانژ	Lagrange's identity
اجتماع	union
اصل موضوع تمامیت	completeness axiom
اصول موضوع ترتیب	order axioms
اصول موضوع جمع	addition axioms
اصول موضوع ضرب	multiplication axioms
افزایشی	increasing
اکسترمم مقید	constrained extremum
انتگرال گیری	integration
اندیس نقطهٔ بحرانی	index of critical point
انقباض	contraction

اینفیموم	infimum
بازه	interval
بازهٔ باز	open interval
بازهٔ بسته	closed interval
بازتابی	reflexivity
برد	range
بردار	vector
بردار مماس	tangent vector
بریدگیهای ددکیند	Dedekind Cuts
بزرگی	magnitude
بزرگترین کران پایینی	greatest lower bound
بست	closure
بستگی تابعی	functional dependence
بهترین تقریب مستوی	best affine approximation
به‌طور نسبی بسته	relatively closed
به‌طور نسبی فشرده	relatively compact
به‌طور ضمنی تعریف شده	defined implicitly
پاره خط	line segment
پایداری	stability
پایهٔ استاندارد	standard basis
پوشش باز	open cover
پیش‌تصویر	pre-image
پیوستگی	continuity
پیوستگی توأمان	joint continuity
پیوستگی جداگانه	separate continuity
پیوستگی یکنواخت	uniform continuity
پربندهای تراز	level contours
تابع	function
تابع به‌طور یکنواخت پیوسته	uniformly continuous function
تابع پوشا	surjection function
تابع ثابت	constant function

Dirac δ- function	تابع دلتای دیراك
simple function	تابع ساده
distance function	تابع فاصله
bounded function	تابع کراندار
Lipschitz function	تابع لیپشیتس
inverse function	تابع معکوس
lower semicontinuous function	تابع نیم‌پیوستهٔ پایینی
nowhere differentiable function	تابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر
injection function	تابع یك‌به‌یك
tensor	تانسور
transformation	تبدیل
trichotomy	تثلیث
restriction	تحدید
analytic	تحلیلی
composition	ترکیب
image	تصویر
inverse image	تصویر معکوس
transitivity	تعدی
change of variables	تعویض متغیرها
change of coordinates	تعویض مختصات
polynomial approximation	تقریب چند جمله‌ای
polygonal approximation	تقریب چندضلعی
uniform approximation	تقریب یکنواخت
Lagrange multipliers	تکثیرکنهای لاگرانژ
bijection correspondence	تناظر دوسویی
one-to-one correspondence	تناظر یك‌به‌یك
isolated	تنها
extension	توسیع
permutation	جایگشت
algebra	جبر
ordered pair	جفت مرتب
Abel summation	جمعبندی آبل
Cesaro summability	جمع‌پذیری چزارو
jump	جهش

چگال	dense
چندجمله‌ایهای برنشتین	Bernstein polynomials
چندجمله‌ایهای درونیاب لاگرانژ	Lagrange interpolation polynomials

حاصل‌ضرب داخلی	inner product
حاصل‌ضرب دکارتی	cartesian product
حد	limit
حد بالایی	superior limit
حد پایینی	inferior limit
حد چپ	limit from the left
حد راست	limit from the right
حد یکتا	unique limit
حد یکطرفه	one-sided limit
حفره	hole

خاصیت ارشمیدسی	Archimedean property
خاصیت اشتراك متناهی	finite intersection property
خاصیت لیپشیتس	Lipschits property
خاصیت مجموعه‌های تودرتو	nested set property
خم	curve

دایرهٔ همگرایی	circle of convergence
دترمینان ژاکوبی	Jacobian determinant
درایه	entry
درون	interior
دستگاه اعداد حقیقی	real number system
دستگاه خطی	linear system
دستگاه خودگردان	autonomous system
دنبالهٔ کراندار	bounded sequence
دنبالهٔ کوشی	Cauchy sequence
دنبالهٔ یکنوا	monotone sequence
دیفرانسیل گیری	differentiation

رتبهٔ	rank

gap	رخنه
class	ردهٔ
method of successive approximations	روش تقریبات متوالی
finite subcover	زیر پوشش متناهی
subsequence	زیر دنبالهٔ
subset	زیر مجموعهٔ
series	سری (سریها)
power series	سری توانی
Taylor series	سری تیلور
double series	سری دوگانه
hypergeometric series	سری فوق هندسی
alternating series	سری متناوباً مثبت ومنفی
absolutely convergent series	سری مطلقاً همگرا
geometric series	سری هندسی
instantaneous velocity	سرعت لحظه‌ای
supremum	سوپرموم
conditions of differentiability	شرایط دیفرانسیل‌پذیری
side conditions	شرایط فرعی
Lipschitz condition	شرط لیپشیتس
associativity of composition	شرکت‌پذیری ترکیب
radius of convergence	شعاع همگرایی
countable	شمارش‌پذیر
second countable	شمارش‌پذیر نوع دوم
uncountable	شمارش‌ناپذیر
tangent plane	صفحهٔ مماس
binomial coefficient	ضریب دوجمله‌ای
length	طول
cardinality	عدد اصلی

عدد صحیح مثبت	positive integer
عضو	member
عضو یك مجموعه	member of a set
فرآیند قطری	diagonal process
فرمول تیلور	Taylor's formula
فرمول جمعبندی جزئی آبل	Abel's partial summation formula
فرمول درونیابی لاگرانژ	Lagrange interpolation formula
فضای n بعدی اقلیدسی	Euclidean n-space
فضای باناخ	Banach space
فضای توابع پیوسته	space of continuous functions
فضای توپولوژیك	topological space
فضای متریك	metric space
فضای متریك تماماً کراندار	totally bounded metric space
فضای متریك فشرده	compact metric space
فضای متریك کامل	complete metric space
فضای نرمال کامل	complete normal space
فضای نرم دار	normed space
فضای نرم دار کامل	complete normed space
فن	technique
قاعدهٔ تابع تابع	function of a function rule
قاعدهٔ زنجیری	chain rule
قاعدهٔ لایبنیتس	Leibnitz rule
قاعدهٔ لوپیتال	l'Hôpital's rule
قانون توزیع‌پذیری	distributive law
قانون متوازی‌الاضلاع	parallelelogram law
قضیهٔ آرزلا-آسکولی	Arzela-Ascoli theorem
قضیهٔ استون-وایرشتراس	Stone-Weierstrass theorem
قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس	Bolzano-Weierstrass theorem
قضیهٔ تابع ضمنی	implicit function theorem
قضیهٔ تابع معکوس	inverse function theorem
قضیهٔ تاوبری	Tauberian theorem
قضیهٔ تجدید آرایش	rearrangement theorem
قضیهٔ تسطیح	straightening-out theorem

Taylor's theorem	قضیهٔ تیلور
Dini's theorem	قضیهٔ دینی
Rolle's theorem	قضیهٔ رل
boundedness theorem	قضیهٔ کرانداری
mean-value theorem	قضیهٔ مقدار میانگین
intermediate value theorem	قضیهٔ مقدار میانی
Baire category theorem	قضیهٔ مقولهٔ بر
composite mapping theorem	قضیهٔ نگاشت مرکب
existence theorem	قضیهٔ وجودی
Heine's theorem	قضیهٔ هاینه
Heine-Borel theorem	قضیهٔ هاینه-بورل
Lebesgue's dominated convergence theorem	قضیهٔ همگرایی مغلوب لبگ
uniqueness theorem	قضیهٔ یکتایی
domain	قلمرو
de Morgan's laws	قوانین دمورگان

upper bound	کران بالایی
lower bound	کران پایینی
continued fraction	کسر مسلسل
least upper bound	کوچکترین کران بالایی

collection	گردایه
disc	گرده
general linear group	گروه خطی عمومی
discrete	گسسته
irrational	گنگ

contraction lemma	لم انقباض
glueing lemma	لم چسب
Morse lemma	لم مورس

Jacobian matrix	ماتریس ژاکوبی
absolute maximum	ماکسیمم مطلق
local maximum	ماکسیمم موضعی

متعامد	orthogonal
متعالی	transcendental
متمم	complement
متمم متعامد	orthogonal complement
مجانبی	asymptotic
مجموعهٔ باز	open set
مجموعهٔ بسته	closed set
مجموعهٔ تهی	empty set
مجموعهٔ تیلور	Taylor Set
مجموعهٔ فشرده	compact set
مجموعهٔ کانتور	Cantor set
مجموعهٔ کراندار	bounded set
مجموعهٔ محدب	convex set
مجموعهٔ متناهی	finite set
مجموعهٔ نامتناهی	infinite set
محك کوشی	Cauchy criterion
مختصات استوانه‌ای	cylindrical coordinates
مختصات قطبی	polar coordinates
مختصات کروی	spherical coordinates
مرز	boundary
مسیر	path
مسیر پیوسته	continuous path
مسیر دیفرانسیل‌پذیر	differentiable path
مشتق	derivative
مشتق جزئی	partial derivative
مشتق سویی	directional derivative
مشتق کل	total derivative
مشتق گیری	derivation
معادلهٔ انتگرال	integral equation
معادلهٔ دیفرانسیل معمولی	ordinary differential equation
معادلات کوشی-ریمان	Cauchy-Riemann equations
معکوس‌پذیری	invertibility
معین مثبت	positive definite
معین منفی	negative definite

مینیمم مطلق	absolute minimum
مینیمم موضعی	local minimum
موضعاً همبندکمانی	locally path-connected
مولفهٔ	component
ناپایداری	instability
نامساوی مثلثی	triangle inequality
نامساوی مینکوفسکی	Minkowski inequality
نامساوی هولدر	Hölder inequality
ناکاهشی	non-decreasing
نرم	norm
نسبی	relative
نقطهٔ انباشتگی	accumulation point
نقطهٔ بحرانی	critical point
نقطهٔ بحرانی ناتبهگن	non-degenerate critical point
نقطهٔ بست	cluster point
نقطهٔ ثابت	fixed point
نقطهٔ حدی	limit point
نقطهٔ زینی	saddle point
نقطهٔ داخلی	interior point
نقطهٔ نهایی	extreme point
نگاشت مستوی	affine mapping
نگاشت چند خطی پیوسته	continuous multilinear map
نگاشت خطی پیوسته	continuous linear map
نگاشت دوخطی	bilinear map
نگاشت دیفرانسیل‌پذیر	differentiable map
نگاشت همانی	identity map
نمودار	graph
نیم‌پیوستگی بالایی	upper semi-continuity
نیم معین	semi-definite
هدف	target
هم‌ارزی	equivalence
همبند	connected
همبندی	connectedness

path-connected	همبند کمانی
path-connectedness	همبندی کمانی
equicontinuous	همپیوسته
harmonic	همساز
convergence	همگرایی
convergence to a limit	همگرایی به سمت یك حد
simple convergence	همگرایی ساده
pointwise convergence	همگرایی نقطه به نقطه
uniform convergence	همگرایی یکنواخت
homogeneous	همگن
smooth	هموار
geometry of gradients	هندسهٔ گرادیانها
field	هیأت
ordered field	هیأت مرتب
complete order field	هیأت مرتب کامل
nowhere dense	هیچ‌جا چگال

فهرست راهنما