مقدمه‌ای بر

آمار و احتمال

(برای مهندسان و محققان علوم)

تألیف : ش . م . راس

ترجمه : مجید اسدی - ابولقاسم بزرگ نیا

۱۹۷

انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، شمارهٔ ۱۹۷

مقدمه ای بر

آمـــار و احتمـال

(برای مهندسان و محقّقان علوم)

تألیف

ش . م . راس

ترجمه

مجید اسدی ـ ابوالقاسم بزرگ نیا

فهرست مطالب

فصل سوم ـ متغیرهای تصادفی خاص

فصل چهارم ـ نمونه‌گیری

فصل پنجم ـ برآورد پارامترها

فصل ششم ـ آزمون فرض

فصل هفتم ـ رگرسیون

فصل هشتم ـ آنالیز واریانس

پیشگفتار مترجمین

چون در پیشگفتار مؤلف هدف از تألیف کتاب و رشته‌های مختلفی که می‌توانند از آن بهره‌مند شوند بطور کامل آمده است، لذا لازم ندیدیم که تکرار مکررات کنیم. فقط به‌علت جامع بودن کتاب از لحاظ برنامه‌های درسی در دانشگاههای ایران تصمیم به ترجمه آن گرفتیم انشاءا... که مفید فایده باشد.

مترجمین از معاونت پژوهشی و شورای محترم انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد بخاطر کوششهای بی‌دریغ در انجام این امر همچنین از مدیریت و کارکنان انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد که با دقت و حوصله کافی کار دشوار چاپ این کتاب را به‌نحو احسن به‌انجام رسانده‌اند، بویژه از جناب آقای فنائی و آقای مجید افشاران که زحمت تایپ کتاب و آقای محمود حقیقی‌پور که زحمت تنظیم و صفحه‌آرایی را کشیده‌اند تشکر می‌کنیم.

لازم است که از دانشجویان ممتاز گروه آمار سرکار خانم پریسا رضوانی و سرکار خانم نجمه طرزی که از ابتدای تایپ دستنوشته‌ها با دقت تمام و حوصله زیاد ویرایش و مقابله آن را با نسخه اوّلیه به‌عهده داشته‌اند صمیمانه تشکر نماییم.

در خاتمه چون در هر ترجمه کم و بیش نارساییهایی به‌چشم می‌خورد از اساتید، همکاران و دانشجویان عزیز تقاضا می‌شود هرگونه اشتباه یا نارسایی را یادآور شوند.

محمد اسدی

ابوالقاسم بزرگ‌نیا

پیشگفتار مؤلف

این کتاب به‌عنوان مقدمه‌ای بر آمار و احتمال برای دانشجویان مهندسی، علوم کامپیوتر، ریاضی، آمار و فیزیک نوشته شده است. در تمام کتاب فرض بر این است که خواننده اطلاعات مقدماتی از ریاضی دارد.

فصل ۱ و ۲ مطالب اساسی نظریه احتمال را معرفی می‌کند و فصل ۳ شامل بعضی مطالب خاص در بارهٔ متغیرهای تصادفی است. در مثالهای متنوع کاربرد این متغیرهای تصادفی را نشان داده‌ایم. ضمناً برنامه‌های کامپیوتری که توزیع احتمال متغیرهای: دوجمله‌ای، پواسن، نرمال، t و F و χ^2 را محاسبه می‌کند در آخر کتاب آمده است. این برنامه‌ها برای IBM PC نوشته شده‌اند.

فصل ۴ با نمونه‌گیری مطالعه آمار را شروع می‌کند و کمیتهایی مانند میانگین نمونه، واریانس نمونه، میانه نمونه و هیستوگرام، توابع توزیع تجربی، نمودارهای ساقه و برگ را مورد بحث قرار می‌دهد. توزیع بعضی آماره‌های فوق را و متن جامعه اصلی نرمال است به‌دست می‌آوریم.

فصل ۵ به برآورد پاراسترها تخصیص داده شده است. برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای معرفی می‌شوند و برنامهٔ محاسبهٔ برآوردهای فاصله‌ای درسطوح مطلوب اطمینان‌داده‌می‌شوند. فصل ۶ مربوط به آزمون فرضها است. مفهوم آزمون آماری و سطح معنی‌دار بودن و توان آن معرفی شده است.

برای تمام این آزمونها مقدار ـ p را مستقیماً با محاسبه دنبالهٔ احتمال مناسب به‌دست می‌آوریم. مثلاً، آزمون فیشر ـ ایروین برای تساوی دو پاراستر برنولی و یک برنامه برای محاسبه دقیق مقدار p داده می‌شود. در فصل ۷ مباحث مفیدی از رگرسیون ارائه می‌شود که شامل رگرسیون خطی و آنالیز مانده‌ها و روش کمترین مربعات موزون و رگرسیون چندگانه است.

پیشگفتار برنامه‌ها

این کتاب شامل یک دیسکت با ۳۵ برنامه است. بیشتر این برنامه‌ها جوابهای دقیق را می‌دهند، همچنین توابع توزیع پیوسته و معکوس آنها را با دقت لازم محاسبه می‌کنند.

برای اجرای برنامه‌ها باید فایل BASICA.COM را داشته باشیم، که یک تذکر DOS است. برای اجرا آن را در قسمت A یا B قرار می‌دهیم. حال باید حروف "read" تایپ و سپس از کلید enter استفاده شود. در این صورت پیغامی با عنوان "How to Start" ظاهر می‌شود. اگر نتوانستید برنامه را اجرا کنید همیشه می‌توانید طبق معمول وارد BASIC شدید و سپس کلمات LOAD" A: / PROGRAMS را تایپ کرده از کلید enter استفاده کنید. دراین صورت برنامهٔ 4-3 ثبت می‌شود و بعد از آن با تایپ RUN و فشار کلید enter می‌توانید برنامه را اجرا کنید.

فصل اول

مبانی احتمال

۱ - مقدمه

مفهوم احتمالِ یک پیشامد خاص از یک آزمایش ، موضوعی است با معانی و تفاسیر مختلف. برای مثال وقتی زمین‌شناسی بیان می‌کند که ، «شانس وجود نفت در یک ناحیه معیّن ۶۰ درصد است» ممکن است همه تصوّری شهودی در مورد چنین گفته‌ای داشته باشیم . در واقع شاید یا اکثراً این عبارت را به یکی از دو طریق زیر تعبیر کنیم :

۱ - زمین‌شناس احساس می‌کند که در ۶۰ درصد از نواحی که شرایط ظاهری محیطی آنها خیلی شبیه به شرایط حاکم برنواحی تحت بررسی است به مرور زمان نفت یافت می‌شود .

۲ - زمین‌شناس عقیده دارد که وجود نفت در این ناحیه بیشتر قابل قبول است تا عدم وجود آن . در واقع میزان عقیدهٔ زمین‌شناس در این فرض که «این ناحیه شامل نفت است» 6. می‌باشد .

دو تعبیر مذکور از احتمال یک پیشامد ، تعبیر فراوانی و تعبیر ذهنی (یا شخصی) احتمال نامیده می‌شود . در تعبیر فراوانی ، خاصیت یک برآمد مفروض از یک آزمایش به‌عنوان خاصیتی از آن برآمد در نظرگرفته می‌شود و این طور فرض می‌شود که این خاصیت می‌تواند به‌وسیلهٔ تکرار متناوب آزمایش عملاً تعیین شود . سپس احتمال یک برآمد به صورت نسبتی از آزمایشات که منتج به برآمد موردنظر می‌شود تعریف خواهد شد . این تعبیر از احتمال بیشتر در میان دانشمندان متداول است .

در تعبیر ذهنی ، احتمال یک برآمد به صورت خاصیتی از برآمد در نظر گرفته نمی‌شود بلکه اظهار عقیده یک شخص است که آن‌را در رابطه با وقوع برآمد بیان می‌کند . بنابراین ، این تعبیر احتمال ، یک مفهوم ذهنی یا شخصی می‌شود و خارج از بیان میزان عقیدهٔ شخص مفهومی ندارد . این تعبیر از احتمال غالباً مورد توجه فلاسفه و بعضی از طراحان اقتصادی قرار می‌گیرد .

به هرحال هرتعبیری که شخص از احتمال می‌کند یک اتفاق‌نظر در این که جنبه ریاضی احتمال یکسان است وجود دارد . به‌عنوان مثال ، اگر این احتمال راکه فردا باران ببارد 3. فرض کنید و

احساس کنید احتمال این که هوا ابری باشد ولی باران نبارد 2. است ، آن‌گاه مستقل از تعبیر شخص‌تان از مفهوم احتمال ، باید احساس کنید احتمال این‌که هوا ابری یا بارانی باشد 5. است . در این فصل قوانین یا اصول موضوعهٔ پذیرفته شده در نظریه احتمال را ارائه می‌دهیم . بدین منظور ابتدا به مطالعه مفهوم فضای نمونه و پیشامدهای خاص یک آزمایش نیاز داریم .

۲- فضای نمونه و پیشامدها

آزمایشی را در نظر بگیرید که برآمد آن بطور قطعی از قبل قابل پیش‌بینی نیست . با این وجود فرض کنید که مجموعهٔ تمام برآمدهای ممکن آزمایش معلوم باشد . این مجموعه از برآمدهای ممکن را به‌عنوان «فضای نمونه آزمایش» در نظر می‌گیریم و با S نمایش می‌دهیم . مثالهای زیر را در نظر بگیرد :

۱- اگر برآمد یک آزمایش عبارت از تعیین جنس نوزاد تازه متولد شده باشد ، آن‌گاه

$$S = \{g, b\}$$

که در آن g به معنای دختر و b به معنای پسر است .

۲- اگر آزمایش عبارت از مسابقه دو سرعت میان ۷ اسب به شماره‌های 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 باشد

$$S = \{\text{همه ترتیبهای } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$$

به‌عنوان مثال رُخداد (2, 3, 1, 6, 5, 4, 7) بدین معنی است که اسب شماره ۲ اوّل ، اسب شماره ۳ دوم و اسب شماره ۱ سوم شده است و الی آخر .

۳- فرض کنید علاقه‌مندیم میزان دارویی را که باید به بیمار تجویز شود تا بیمار بهبود یابد تعیین کنیم . فضای نمونه ممکن S برای این آزمایش عبارت است از تمام اعداد مثبت یعنی :

$$S = (0, \infty)$$

که در آن نتیجه x خواهدبود اگر بیمار به‌ازای x مقدار دارو بهبود یابد و برای مقادیر کمتر نه .

هرزیر مجموعهٔ E از فضای نمونه را به‌عنوان یک پیشامد می‌شناسیم . یعنی ، یک پیشامد مجموعه‌ای شامل برآمدهای ممکن یک آزمایش است . اگر برآمد آزمایش داخل E باشد آن‌گاه گوییم E رخ داده است . مثالهایی از پیشامدها به صورت زیر می‌باشند .

در مثال 1 اگر $E = \{g\}$ ، آن‌گاه E این پیشامد است که نوزاد دختر است . بطور مشابه اگر $F = \{b\}$ آن‌گاه F این پیشامد است که نوزاد پسر است .

در مثال ۲ اگر

$F =$ {تمام برآمدهایی در S که با عدد 3 شروع می‌شوند}

آن‌گاه E این پیشامد است که اسب شماره 3 در مسابقه اول شود.

برای هردو پیشامد E و F از فضای نمونهٔ S، پیشامد جدید $E \cup F$ را تعریف می‌کنیم و به آن اجتماع دو پیشامد E و F گوییم که شامل تمام برآمدهایی است که در E یا F یا هردوی آنها باشند. یعنی، پیشامد $E \cup F$ رُخ می‌دهد اگر E یا F رُخ دهد. به‌عنوان نمونـه در مثـال ۱ اگر $E = \{g\}$ و $F = \{b\}$ آن‌گاه $E \cup F = \{g, b\}$ یعنی $E \cup F$ همان فضای نمونهٔ S خواهد بود. در مثال ۲ اگر، $E =$ {تمام برآمدهایی که با عدد ٦ شروع می‌شوند}، این پیشامد باشد که اسب شمارهٔ ٦ اوّل شود و $F =$ {تمام برآمدهایی که عدد ٦ در موقعیت دوم آنهاست}، این پیشامد باشد که اسب شمارهٔ ٦ مقام دوم را به‌دست آورد آن‌گاه $E \cup F$ این پیشامد است که اسب شماره ٦ اوّل یا دوم شود.

بطور مشابه برای هردو پیشامد E و F می‌توان پیشامد جدید EF را تعریف کرد کـه بـه آن اشتراک E و F گوییم و عبارت است از تمام برآمدهایی که در هردوتای E و F قرار دارند. یـعنی پیشامد EF رُخ می‌دهد اگر E و F هردو رُخ دهند. برای نمونه در مثال ۳ اگر $E = (0, 5)$ ایـن پیشامد باشد که مقدار داروی مورد نیاز کمتر از ۵ است و $F = (2, 12)$، این پیشامد باشد که مقدار داروی مورد نیاز بین ۲ و ۱۲ است آن‌گاه $EF = (2, 5)$، این پیشامد است که داروی مورد نیاز بین ۲ و ۵ می‌باشد. در مثال ۲ اگر $E =$ {تمام برآمدهایی که انتهای آنها ۵ است} این پیشامد باشد که اسب شماره ۵ بعد از بقیه برسد و $F =$ {تمام برآمدهایی که در ابتدای آنها ۵ است} این پیشامد باشد که اسب شماره ۵ اوّل شود آن‌گاه پیشامد EF شامل هیچ برآمدی نخواهد بود و بنابراین نمی‌تواند رُخ دهد. چنین پیشامدی را پیشامد تُهی نام‌گذاری می‌کنیم و با $\varnothing$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\varnothing$ نشان‌دهندهٔ پیشامدی است که شامل هیچ برآمدی نباشد. اگر $EF = \varnothing$ یعنی E و F هرگز نمی‌توانند با هم رُخ دهند. در این صورت E و F را پیشامدهای ناسازگار گوییم.

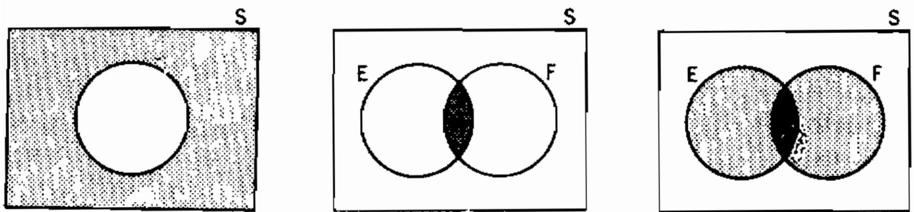
برای هر پیشامد E پیشامد E^c را که متمم پیشامد E است تعریف می‌کنیم. این پیشامد شـامل تمام برآمدهایی از فضای نمونهٔ S است که در E نباشند. یعنی E^c رُخ می‌دهد اگر و فقط اگر E رُخ ندهد. درمثال ۱ اگر $E = \{b\}$، این پیشامدباشدکه نوزادپسراست آن‌گاه $E^c = \{g\}$، این پیشامد است که نوزاددختراست. همچنین توجه کنیدکه چون آزمایش بایدبرآمدی درپی داشته‌باشد، داریم $S^c = \varnothing$.

برای هردو پیشامد E و F اگر تمام برآمدهایی که در E است در F نیز باشد آن‌گاه گوییم E درون F است و می‌نویسیم $E \subset F$ (یا معادل آن $F \supset E$). بنابراین اگر $E \subset F$ آن‌گاه رُخ دادن E لزوماً رُخ دادن F را نتیجه می‌دهد. اگر $E \subset F$ و $F \subset E$ آن‌گاه گوییم E و F مساوی‌اند (یا یکسانند) و می‌نویسیم $E = F$.

همچنین می‌توانیم اجتماع و اشتراک بیش از دو پیشامد را تعریف کنیم . بخصوص اجتماع پیشامدهای $E_1, E_2, ..., E_n$ را که با $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$ یا $\cup_1^n E_i$ نمایش می‌دهیم به صورت پیشامدی که شامل تمام برآمدهایی است که در E_i به ازای حدّاقل یک i ـ $i = 1, 2, ..., n$ ـ هستند تعریف می‌کنیم . بطور مشابه اشتراک پیشامدهای E_i ـ $i = 1, 2, ..., n$ ـ را با $E_1 . E_2 . ... . E_n$ نمایش داده و به صورت پیشامدی مرکب از برآمدهایی که در تمام پیشامدهای E_i ـ $i = 1, 2, ..., n$ ، هستند تعریف می‌کنیم . به‌عبارت دیگر اجتماع E_iها رُخ می‌دهد اگر حداقل یکی از پیشامدهای E_i رُخ دهد . در صورتی‌که اشتراک E_i رُخ می‌دهد هرگاه همه E_i رُخ دهند .

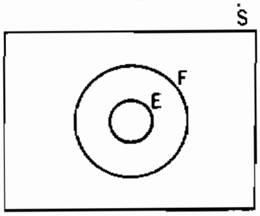
۳- نمودار وِن و جبر پیشامدها

یک نمایش نموداری از پیشامدها که برای نشان دادن ارتباط منطقی بین آنها مفید است ، نمودار وِن می‌باشد . فضای نمونهٔ S را به صورت تمام نقاط واقع در یک مستطیل بزرگ نمایش داده و پیشامدهای $E, F, G, ...$ را به صورت نقاط واقع در دوایری مفروض داخل S نمایش می‌دهند . دراین‌صورت پیشامدهای موردنظر را می‌توان با سایه زدن نواحی مناسب در نمودار مشخص کرد . برای مثال در ۳ نمودار وِن زیر ، سطوح سایه‌خورده به‌ترتیب نمایش $E \cup F$ ، EF و E^c می‌باشد .



E^c EF. $E \cup F$.

نمودار وِن ۱.۳.۱ $E \subset F$ را مشخص می‌کند .



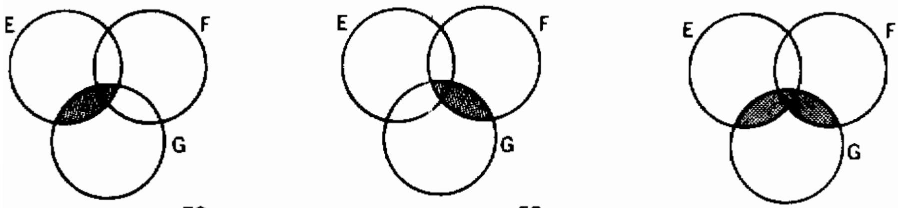
$E \subset F$

نمودار وِن : شکل ۱.۳.۱

عمل ساختن اجتماع ، اشتراک و متمّم پیشامدها از قواعد معینی پیروی می‌کنند که بی‌شباهت با قواعد جبری نیست . چند تا از این قواعد به صورت زیر است .

خاصیت جابه‌جایی	$E \cup F = F \cup E$	$EF = F \cap E$
خاصیت شرکت‌پذیری	$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$	$(EF)\, G = E(FG)$
خاصیت توزیع‌پذیری	$(E \cup F)\, G = EG \cup FG$	$(EF) \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$

صحت این روابط را بدین صورت می‌توان بررسی کرد که هربرآمدی که در پیشامد سمت چپ باشد آن‌گاه در پیشامد سمت راست نیز وجود دارد و برعکس . یک راه دیگر برای نشان دادن درستی این روابط استفاده از نمودار وِن است برای مثال قانون توزیع‌پذیری را می‌توان با استفاده از نمودارهای زیر تحقیق کرد



EG.　　FG.　　$(E \cup F)G = EG \cup FG$

روابط مفید زیربین اعمال اساسی اجتماع ، اشتراک و متمم برقرار است که به **قوانین دمورگان** معروفند

$$(E \cup F)^c = E^c F^c$$
$$(EF)^c = E^c \cup F^c$$

۴- اصول موضوعهٔ احتمال

اگر آزمایشی را در شرایط کاملاً یکسان بطور متوالی تکرار کنیم ، آن‌گاه برای هر پیشامد E این واقعیت تجربی روشن می‌شود که اگر تعداد تکرارها زیاد شود آن‌گاه نسبت دفعاتی که برآمد آزمایش در E می‌باشد به مقداری ثابت میل می‌کند برای مثال اگر سکه‌ای بطور متوالی پرتاب شود و تعداد پرتابها زیاد باشد ، آن‌گاه نسبت پرتابهایی که برآمد آنها شیر است به مقداری ثابت میل می‌کند . این مقدار ثابت فراوانی حدی می‌باشد که غالباً وقتی صحبت از احتمال یک پیشامد می‌کنیم آن‌را در نظر می‌گیریم .

از دیدگاه ریاضی باید فرض کنیم که برای هر پیشامد E از یک آزمایش با فضای نمونهٔ S، عددی مانند $P(E)$ موجود است که در سه اصل زیر صدق می‌کند

اصل ۱ $0 \leq P(E) \leq 1$

اصل ۲ $P(S) = 1$

اصل ۳ : برای هر دنباله از پیشامدهای متقابلاً ناسازگار ... $E_1, E_2,$ (یعنی پیشامدهایی که در آن برای هر j $\neq i$ $E_i \cap E_j = \varnothing$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

$P(E)$ را احتمال پیشامد E گوییم .

بنابراین ، اصل موضوعه ۱ بیان می‌کند که احتمال این‌که برآمد آزمایش در E باشد عددی بین 0 و 1 است . اصل ۲ بیان می‌کندکه با احتمال ۱ برآمد آزمایش باید عضوی از فضای نمونه S باشد . اصل ۳ این مطلب را بیان می‌کند که برای هرمجموعه از پیشامدهای متقابلاً ناسازگار ، احتمال این‌که حداقل یکی ازاین پیشامدها رُخ دهد مساوی است با مجموع احتمالات هریک از پیشامدهای مربوطه .

باید توجه داشت که اگر $P(E)$ را به‌عنوان فراوانی نسبی پیشامد E، وقتی که یک آزمایش به تعداد زیادی تکرار شود ، تعبیر کنیم آن‌گاه $P(E)$ در اصول موضوعهٔ بالا صدق می‌کند به‌عنوان مثال روشن است که نسبت (یا فراوانی) دفعاتی که نتیجهٔ آزمایش در E می‌باشد عددی بین صفر و 1 است و نسبت دفعاتی که نتیجه آزمایش در S باشد ۱ است (زیرا همه برآمدها در S قرار دارند) . همچنین اگر E و F دارای هیچ برآمد مشترکی نباشند آن‌گاه نسبت دفعاتی که نتیجهٔ آزمایش در هریک از E یا F قرار می‌گیرد مساوی است با مجموع هریک از فراوانیهای مربوطه .

برای روشنتر شدن عبارت اخیر فرض کنید آزمایش عبارت از انداختن یک جفت تاس باشد و فرض کنید E این پیشامد باشد که مجموع اعداد روشده ۲ ، ۳ ، یا ۱۲ است و F این پیشامد باشد که مجموع ۷ یا ۱۱ است . در این صورت اگر هردوتاس سالم باشند آن‌گاه 11% از دفعات E رُخ می‌دهد و 22% از دفعات F رُخ می‌دهد . بنابراین 33% از دفعات برآمد آزمایش ۲ ، ۳ ، ۱۲ و ۷ یا ۱۱ خواهد بود .

اکنون اصول موضوعهٔ بالا را برای اثبات دو حکم سادهٔ مربوط به احتمالات مورد استفاده قرار می‌دهیم . ابتدا توجه داریم که E و E^c همواره متقابلاً ناسازگارند و چون $E^c \cup E = S$ از اصول موضوعهٔ ۲ و ۳ داریم

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

یا معادل آن حکم زیر را داریم :

حکم ۱.۴.۱

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

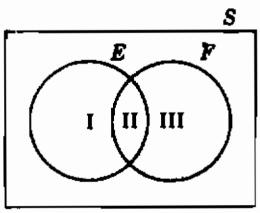
به عبارت دیگر حکم ۱.۴.۱ بیان می‌کند احتمال این‌که یک پیشامد رُخ ندهد برابر است با 1 منهای احتمال این‌که این پیشامد رُخ دهد . برای مثال اگر احتمال به‌دست آوردن شیر از پرتاب یک سکه 3/8 باشد ، آن‌گاه احتمال به‌دست آوردن خط باید 5/8 باشد .

حکم دوم ارتباط بین احتمال اجتماع دو پیشامد را برحسب احتمالات هریک از آنها و احتمال اشتراک آنها ارائه می‌دهد .

حکم ۱.۴.۲

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

برهان : این حکم به‌سادگی با استفاده از نمودار وِن به صورت زیر اثبات می‌شود



از آن‌جایی که نواحی I و II و III متقابلاً ناسازگارند نتیجه می‌شود که

$$P(E \cup F) = P\ (\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})$$
$$P(E) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II})$$
$$P(F) = P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})$$

و این هم نشان می‌دهد که

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

و برهان کامل است زیرا $EF = \text{II}$.

۵- فضاهای نمونه با برآمدهای متساوی‌الاحتمال

برای بسیاری از آزمایشها طبیعی است فرض شود که نقاط فضای نمونه با احتمال مساوی رُخ می‌دهند. یعنی برای بسیاری از آزمایشها که فضای نمونه S به صورت یک مجموعه متناهی مثلاً $S = \{1, 2, ..., N\}$ می‌باشد، غالباً طبیعی است فرض شود که:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = ... = P(\{\text{N}\}) = p \ (\text{مثلاً})$$

اکنون از اصول موضوع ۲ و ۳ نتیجه می‌شود

$$1 = P(S) = P(\{2\}) + ... + P(\{\text{N}\}) = Np$$

و از این به‌دست می‌آوریم

$$P(\{\text{i}\}) = p = 1/N$$

از مطلب فوق و اصل موضوع سوم نتیجه می‌شود که برای هر پیشامد E

$$P(E) = \frac{\text{تعداد نقاط داخل } E}{N}$$

به عبارت دیگر اگر فرض کنیم که هربرآمد از یک آزمایش با احتمال مساوی رُخ می‌دهد آن‌گاه احتمال هرپیشامد E مساوی است با نسبت نقاطی از فضای نمونه S که داخل E قرار می‌گیرند.

بنابراین غالباً برای محاسبه احتمالات لازم است تعداد راههای مختلفی که یک پیشامد مفروض می‌تواند رُخ دهد دقیقاً شمرده شود. بدین منظور از قاعده زیر استفاده می‌کنیم.

قاعده اساسی شمارش

دو آزمایش را در نظر بگیرید. اگر نتیجهٔ آزمایش اوّل دارای m برآمد ممکن و برای هربرآمد از آزمایش اوّل n برآمد ممکن از آزمایش دوم موجود باشد آن‌گاه روی هم mn برآمد ممکن از دو آزمایش وجود دارد.

برهان قاعدهٔ اساسی: قاعدهٔ اساسی را می‌توان با شمارش تمام برآمدهای ممکن دو آزمایش به‌صورت زیر اثبات کرد

$(1, 1), (1, 2), ..., (1, n)$
$(2, 1), (2, 2), ..., (2, n)$
$\vdots$
$(m, 1), (m, 2), ..., (m, n)$

گوییم برآمد حاصل از دو آزمایش (i, j) است اگر نتیجه آزمایش اوّل، iامین برآمد ممکن و نتیجه آزمایش دوم jامین برآمد ممکن باشد. بنابراین مجموعه برآمدهای ممکن عبارت است از mسطر، و هرسطر شامل n برآمد و نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

مثال ۵.۱. الف ـ از ظرفی که شامل ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه است ۲ توپ بتصادف خارج می‌شود. مطلوب است احتمال این که یکی از توپها سفید و دیگری سیاه باشد

حل: اگر به ترتیبی که توپها انتخاب می‌شوند توجه داشته باشیم، آن‌گاه توپ اوّل از بین ۱۱ توپ و توپ دوم از بین ۱۰ توپ باقیمانده انتخاب می‌شود. بنابراین فضای نمونه مرکب از ۱۱۰ = ۱۰ × ۱۱ نقطه می‌باشد. علاوه براین ۳۰ = ۵ × ۶ طریق وجود دارد که توپ انتخابی اوّل سفید و توپ انتخاب‌شده دوم سیاه باشد و بطور مشابه ۳۰ = ۶ × ۵ طریق وجود دارد که توپ اوّل سیاه و توپ دوم سفید باشد. از این که فرض تصادفی بودن استخراج بدین معنی است که هر ۱۱۰ نقطه از فضای نمونه با احتمال مساوی رُخ می‌دهد می‌بینیم، احتمال مطلوب برابر است با:

$$\frac{30 + 30}{110} = \frac{6}{11} \quad \blacksquare$$

هرگاه بیش از دو آزمایش انجام شود قاعده اساسی را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

تعمیم قاعده اساسی شمارش

اگر r آزمایش طوری انجام شوند که ابتدا برای آزمایش اوّل نتیجه یکی از n_1 برآمد ممکن باشد و اگر برای هریک از این n_1 برآمد اوّل، n_2 برآمد ممکن از آزمایش دوم موجود باشد و اگر برای هریک از برآمدهای ممکن دو آزمایش اوّل n_3 برآمد ممکن از آزمایش سوم وجود داشته باشد و الی آخر، آن‌گاه در مجموع $n_1 \,.\, n_2 \,....\, n_r$ برآمد ممکن از آزمایش موجود است.

برای روشنتر شدن این مطلب فرض کنید بخواهیم تعداد طرق مختلفی که می‌توان n شیء متمایز را بطور مرتب در یک ردیف قرار داد تعیین کنیم. برای مثال چند آرایش مرتب متفاوت برای حروف

a, b, c وجود دارد ؟ با استفاده از شمارش مستقیم می‌بینیم که ٦ آرایش مرتب وجود دارد . یعنی abc, acb, bac, bca, cab و cba . هریک از این آرایشهای مرتب را به‌عنوان یک جایگشت می‌شناسیم . بنابراین برای مجموعه‌ای شامل ۳ شیء ، ٦ جایگشت ممکن وجود دارد . همچنین این نتیجه رامی‌توان با استفاده از قاعده اساسی نیز به‌دست آورد . زیرا شیء اوّل در جایگشت می‌تواند هریک از ۳ شیء باشد و دومین شیء در جایگشت را می‌توان از بین ۲ شیء باقیمانده انتخاب کرد و دراین‌صورت سومین شیء درجایگشت شیءباقیمانده‌آخراست. بنابراین ٦ = ۱ × ۲ × ۳ جایگشت ممکن وجود دارد .

اکنون فرض کنید n شیء داریم استدلال مشابه نشان می‌دهد که

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$$

جایگشت متفاوت از n شیء موجود است . برای عبارت اخیر مناسب است نماد $n!$ را (که n فاکتوریل خوانده می‌شود) معرفی کنیم . یعنی

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثلاً $1! = 1$ و $2! = 2 \times 1 = 2$ و $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ و $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ و غیره . بنابه تعریف $0! = 1$.

مثال ۵.۱ ب ـ در کلاس نظریهٔ احتمال ، ٦ پسر و ۴ دختر نام‌نویسی کرده‌اند . امتحانی گرفته می‌شود و دانشجویان طبق نمره‌ای که می‌گیرند مرتب می‌شوند . فرض کنید هیچ دو دانشجوی نمره یکسان به‌دست نمی‌آوردند

الف ـ چند ترتیب متفاوت امکان‌پذیر است . ب ـ اگر تمام ترتیبهای مفروض دارای احتمال مساوی باشند احتمال این‌که دخترها نمره اوّل را کسب کنند چقدر است ؟

حل : الف ـ چون هر ترتیب مانند یک آرایش مرتب خاص از میان 10 نفر است پس جواب این قسمت $10! = 3628800$ است .

ب ـ چون $4!$ رتبهٔ ممکن در بین دخترها و $6!$ رتبه ممکن در بین پسرها وجود دارد از قاعده اساسی نتیجه می‌شود که $(6!)(4!) = (720)(24) = 17{,}280$ ترتیب ممکن وجود دارد بطوری که دخترها ۴ نمره اوّل را به‌دست آورند . بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{6!4!}{10!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{210} \quad \blacksquare$$

مثال ۵.۱ پ ـ اگر n نفر داخل یک اتاق باشند احتمال این‌که هیچ دونفری از آنها سالروز تولدشان یکسان نباشند چقدر است ؟ مقدار n چقدر باشد تا این احتمال کمتر از $1/2$ شود .

حل : چون روز تولدهر شخص می‌تواند یکی از ۳۶۵ روزباشد درمجموع $(365)^n$ برآمدممکن وجود دارد. فرض می‌کنیم که سال کبیسه نباشد، علاوه بر آن، $(365)(364)(363) \dots (365 - n + 1)$ برآمد ممکن موجوداست که هیچ دونفری دارای روز تولد یکسان نباشند.زیراروز تولدشخص اوّل می‌تواند هر یک از ۳۶۵ روزباشد ، شخص‌دوم ۳۶۴ روز باقیمانده وشخص‌بعدی ۳۶۳ روزه باقیمانده و الی آخر . بنابراین با فرض این‌که احتمال برآمد یکسان می‌باشد می‌بینیم که احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{(365)(364)(363) \dots (365 - n + 1)}{(365)^n}$$

یک واقعیت تا حدی عجیب این است که وقتی $n = 23$ احتمال مذکور کمتر از $\frac{1}{2}$ می‌شود . یعنی اگر ۲۳ نفر در اتاق باشند آن‌گاه احتمال این‌که حداقل دو نفر از آنها دارای روز تولد یکسان باشند بیشتر از $\frac{1}{2}$ است . این مطلب برای بسیاری عجیب است و شاید عجیبتر آن باشد که وقتی ۵۰ نفر در اتاق هستند این احتمال از $.970$ تجاوز می‌کند و وقتی ۱۰۰ نفر در اتاق باشند احتمال این‌که حداقل دو نفر دارای روز تولد یکسان باشند بیشتر از $(3 \times 10^6)/(3 \times 10^6 + 1)$ است .

اکنون فرض کنید می‌خواهیم تعداد دسته‌های r تایی متفاوت را که از میان n شیء انتخاب می‌شوند تعیین کنیم . برای مثال چند دسته سه‌تایی متفاوت از ۵ حرف A, B, C, D, E می‌توان ساخت ؟ استدلال زیر جواب این مسأله است . چون ۵ طریق برای انتخاب حرف اوّل و ۴ طریق برای انتخاب حرف دوم و ۳ طریق برای انتخاب حرف آخر وجود دارد ، بنابراین $5 \times 4 \times 3$ طریق برای انتخاب دسته‌های ۳ تایی موجود است که در آنها ترتیب حروف انتخاب شده مهم است . امّا چون هردسته ۳ تایی مثلاً دسته‌ای شامل حروف A, B, C ۶ بار به حساب می‌آید (یعنی هنگامی که ترتیب انتخاب حروف مهم باشد تمام جایگشتهای ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA به حساب می‌آیند) نتیجه می‌شود که تعداد کل دسته‌های متفاوتی که می‌توان ساخت برابر با $(5 \times 4 \times 3)/3 \times 2 \times 1) = 10$ دسته است .

بطورکلی $n(n - 1) \dots (n - r + 1)$ نشان‌دهندهٔ راههای مختلفی است که می‌توان یک دسته شامل r شیء از بین n شیء انتخاب کرد ، که در آنها ترتیب انتخاب مهم باشد (زیرا اولین انتخاب می‌تواند هریک از n شیء باشد و دومین انتخاب هریک از $n - 1$ شیء باقیمانده و الی آخر) و چون هردسته r تایی $r!$ مرتبه در این شمارش به حساب می‌آید نتیجه می‌شود که تعداد دسته‌های متفاوت شامل r شیء که از یک مجموعه شامل n شیء می‌تواند ساخته شود برابر است با

$$\frac{n(n - 1) \dots (n - r + 1)}{r!} = \frac{n!}{(n - r)!r!}$$

نمادگذاری و اصطلاحات

برای هر n ≤ r، نماد $\binom{n}{r}$ را به صورت $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ تعریف می‌کنیم و آن را تعداد ترکیبات r تایی از میان n شیء گوییم.

پس هرگاه ترتیب انتخاب اشیاء مهم نباشد $\binom{n}{r}$ نشان‌دهندهٔ تعداد دسته‌های متفاوت r تایی است که از یک دسته n تایی می‌تواند انتخاب شود. برای مثال $28 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = \binom{8}{2}$ دسته دوتایی متفاوت می‌توان از مجموعه‌ای شامل ۸ نفر انتخاب کرد، و $45 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = \binom{10}{2}$ دسته دوتایی متفاوت را می‌توان از یک مجموعهٔ ۱۰ نفری انتخاب کرد. همچنین با توجه به این‌که $0! = 1$ داریم

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

مثال ۵.۱ ت ـ از گروهی شامل ۶ مرد و ۹ زن کمیته‌ای مرکب از ۵ نفر انتخاب می‌شود. اگر انتخاب به‌تصادف صورت گیرد. احتمال این‌که این کمیته شامل ۳ مرد و ۲ زن باشد چقدر است ؟

حل: فرض کنید تصادفی بودن انتخاب بدین معنی است که هر $\binom{15}{5}$ ترکیب ممکن با احتمال مساوی انتخاب می‌شوند. بنابراین چون $\binom{6}{3}$ انتخاب ممکن شامل ۳ مرد و $\binom{9}{2}$ انتخاب ممکن مرکب از ۲ زن وجود دارد احتمال مطلوب برابر است با

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \quad \blacksquare$$

مثال ۵.۱ ث ـ از مجموعه‌ای شامل n شیء، یک نمونهٔ تصادفی به حجم k انتخاب می‌شود. احتمال این‌که یک شیء مفروض در میان این k شیء انتخاب شده قرار گیرد چقدر است ؟

حل: تعداد انتخابهای متفاوتی که شامل شیء مفروض هستند برابر است با $\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}$. بنابراین احتمال این‌که یک شیء خاص در میان k شیء انتخاب‌شده قرار گیرد برابر است با

$$\binom{n-1}{k-1}\Big/\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}\Big/\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k}{n} \quad \blacksquare$$

مثال ۵.۱ ج ـ یک تیم بسکتبال شامل ۶ بازیکن سیاه‌پوست و ۶ بازیکن سفیدپوست است. این بازیکنان برای تعیین هم‌اتاقی به جفتهای دوتایی تقسیم می‌شوند. اگر این تقسیم‌بندی بتصادف انجام شود. احتمال این‌که هیچ‌یک از بازیکنان سیاه‌پوست دارای هم‌اتاقی سفیدپوست نباشند چقدر است ؟

حل: ابتدا با نشان دادن این‌که چند ۶ جفت، یعنی جفت اوّل، جفت دوم و الی آخر وجود دارد

شروع می‌کنیم . چون $\binom{12}{2}$ انتخاب متفاوت برای جفت اوّل و برای هر انتخاب از جفت اوّل $\binom{10}{2}$ انتخاب متفاوت برای جفت دوم وجود دارد و برای هرانتخاب از دو جفت اوّل $\binom{8}{2}$ انتخاب برای جفت سوم و الی آخر وجود دارد . از تعمیم قاعده اساسی شمارش نتیجه می‌شود

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{(2!)^6}$$

راه برای تقسیم بازیکنان به جفت اوّل ، جفت دوم و الی آخر وجود دارد . بنابراین $(12!)/2^6 6!$ طریق برای تقسیم بازیکنان به ۶ جفت دوتایی (نامرتب) موجود است . علاوه براین با استدلال مشابه چون $6!/2^3 3!$ راه برای جفت کردن بازیکنان سفیدپوست در میان خودشان و $6!/2^3 3!$ راه برای جفت کردن بازیکنان سیاه در بین خودشان وجود دارد نتیجه می‌شود که $(6!/2^3 3!)^2$ جفت موجود است که در آن هیچ سیاه‌پوست و سفیدپوستی هم‌اتاق نیستند . بنابراین اگر تقسیم جفتها بتصادف انجام شود (بطوری که تمام برآمدها دارای احتمال مساوی باشند ، آن‌گاه احتمال مطلوب برابر است با

$$\left(\frac{6!}{2^3 3!}\right)^2 \Bigg/ \frac{(12)!}{2^6 6!} = \frac{5}{231} = .0216$$

در نتیجه تقریباً تنها 2% شانس وجود دارد که این عمل تصادفی ، منتج به این شود که بازیکنان سیاه‌پوست و سفیدپوست با یکدیگر هم‌اتاق نباشند .

۶- احتمال شرطی

در این بخش یکی از مهمترین مفاهیم نظریهٔ احتمال یعنی احتمال شرطی را معرفی می‌کنیم . اهمیت این مفهوم در دو چیز است . اولاً در اغلب موارد هنگامی که اطلاعات جزیی در بارهٔ نتیجهٔ آزمایش داریم علاقه‌مند به محاسبهٔ احتمالات با دوباره محاسبه کردن آنها به کمک اطلاعات اضافی هستیم . در چنین حالاتی احتمالات مطلوب احتمالات شرطی هستند . ثانیاً ، به‌عنوان نوعی مزیت در بسیاری از اوقات معلوم می‌شود که ساده‌ترین راه برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد ، شرطی کردن آن روی رخداد یا عدم رخداد یک پیشامد دیگر است .

به‌عنوان مثالی از احتمال شرطی فرض کنید یک جفت تاس پرتاب می‌شوند . فضای نمونهٔ این آزمایش ، S، می‌تواند ۳۶ برآمد را به صورت مجموعهٔ زیر داشته باشد .

$$S = \{(i, j), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

که در آن گوییم برآمد (i, j) است اگر تاس اوّل از طرف i و تاس دوم از طرف j ظاهر شود . اکنون

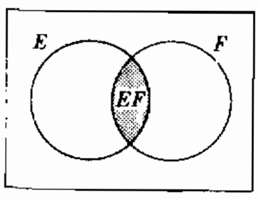
فرض کنید که هر ۳۶ برآمد ممکن متساوی‌الاحتمال هستند ، بنابراین هربرآمد دارای احتمال $1/36$ است . (در چنین حالتی گوییم تاسها سالم هستند) . علاوه برآن فرض کنید که در اوّلین تاس عدد ۳ ظاهر شده است در این صورت احتمال این‌که مجموع دو تاس مساوی ۸ باشد چقدر است ؟ برای محاسبهٔ این احتمال به صورت زیر استدلال می‌کنیم . فرض کنید اولین تاس ۳ باشد در این صورت آزمایش می‌تواند حداکثر ۶ برآمد ممکن داشته باشد . یعنی ، $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)$, $(3, 5)$ و $(3, 6)$. علاوه براین چون هریک از این برآمدها در ابتدا دارای احتمال یکسان برای رُخ دادن بودند احتمال رُخ دادن آنها هنوز یکسان است یعنی ، با فرض این‌که تاس اوّل 3 باشد احتمال (شرطی) هریک از برآمدهای $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$ ، $1/6$ است . زیرا احتمال (شرطی) 30 نقطه دیگر از فضای نمونه 0 می‌باشد . بنابراین احتمال مطلوب $1/6$ خواهد بود .

اگر فرض کنیم E و F به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ این پیشامد باشند که مجموع دوتاس ۸ است و تاس اوّل عدد ۳ است آن‌گاه احتمال به‌دست آمدهٔ بالا را احتمال شرطی E گویند با فرض این‌که F رُخ داده است ، و با $P(E \mid F)$ نمایش می‌دهند .

فرمول کلی $P(E \mid F)$ که برای هر پیشامد E و F معتبر باشد ، به روش مشابه آنچه در بالا شرح داده شد به‌دست می‌آید . یعنی اگر پیشامد F رُخ دهد آن‌گاه برای این‌که پیشامد E رُخ دهد لازم است که رخداد واقعی نقطه‌ای از E و F باشد (یعنی باید در EF باشد) اکنون چون می‌دانیم که F رُخ داده است در نتیجه F فضای نمونه (تقلیل‌یافته) جدید خواهد بود و بنابراین احتمال این‌که پیشامد $E \mid F$ رُخ دهد مساوی با احتمال EF نسبت به احتمال F یعنی

$$P(E \mid F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \qquad (۱.۶.۱)$$

توجه کنید که معادله ۱.۶.۱ فقط هنگامی خوش تعریف است که $P(E) > 0$ و بنابراین $P(E \mid F)$ فقط وقتی تعریف می‌شود که $P(F) > 0$ (شکل ۱.۶.۱ را ببینید)



شکل ۱.۶.۱

مثال ۶.۱ الف ـ جعبه‌ای شامل ۵ ترانزیستور معیوب (بطوری که وقتی مورد استفاده قرار می‌گیرند بلافاصله از کار می‌افتد) و ۱۰ ترانزیستور نیمه معیوب (بطوری که بعد از ۲ ساعت استفاده از کار

می‌افتد) و ۲۵ ترانزیستور سالم است . یک ترانزیستور بتصادف از جعبه انتخاب می‌شود و مورد استفاده قرار می‌گیرد . اگر این ترانزیستور بلافاصله از کار نیفتد احتمال این‌که سالم باشد چقدر است ؟

حل : چون این ترانزیستور بلافاصله ازکار نیافتده است می‌دانیم که یکی از ۵ ترانزیستور معیوب نیست بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$P(\text{سالم باشد} \mid \text{معیوب نیست}) = \frac{P(\text{معیوب نباشد و سالم باشد})}{P(\text{معیوب نباشد})}$$
$$= \frac{P(\text{سالم باشد})}{P(\text{معیوب نباشد})}$$

که در آن تساوی اخیر از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر ترانزیستور سالم باشد ، هم سالم و هم غیرمعیوب خواهد بود . بنابراین با فرض این‌که هر ۴۰ ترانزیستور دارای احتمال مساوی برای انتخاب شدن باشند به‌دست می‌آوریم .

$$P(\text{سالم باشد} \mid \text{معیوب نیست}) = \frac{25/40}{35/40} = \frac{5}{7}$$

باید توجه داشت که همچنین می‌توانستیم این احتمال را مستقیماً با به‌کاربردن فضای نمونهٔ تقلیل‌یافته به‌دست آوریم بدین صورت که چون می‌دانیم ترانزیستور معیوب نیست مسأله تبدیل می‌شود به محاسبهٔ این احتمال که ترانزیستوری که بتصادف از جعبه‌ایی شامل ۲۵ ترانزیستور سالم و ۱۰ ترانزیستور نیمه‌معیوب انتخاب می‌شود سالم باشد . واضح است که این احتمال مساوی $\frac{25}{35}$ است .

مثال ٦.١ ب ـ شخص برای مؤسسه‌ای کار می‌کند . که آن مؤسسه یک مهمانی برای کارمندانی که دارای حداقل یک پسر باشند ترتیب داده است . هریک از کارمندان دعوت شده فقط با جوانترین پسر خود در مهمانی حضور پیدا می‌کند . اگر این شخص دارای دو فرزند باشد ، مطلوب است احتمال شرطی این‌که آنها پسر باشند با این فرض که وی به مهمانی دعوت شده است ؟ فرض کنید فضای نمونهٔ S به‌صورت $S = \{(b, b), (b, g), (g, b), (g, g)\}$ باشد تمام برآمدها متساوی‌الاحتمال باشند [به‌عنوان مثال (b, g) یعنی فرزند جوانتر پسر و فرزند بزرگتر دختر است] .

حل : می‌دانیم که این شخص به مهمانی دعوت شده است و این معادل است با این‌که بدانیم وی دارای حداقل یک پسر است . فرض کنید B نشان‌دهندهٔ این پیشامد است که هردو فرزند پسرند و A این پیشامد که حداقل یکی از آنها پسر است . احتمال مطلوب $P(B \mid A)$ برابر است با

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\{(b, b)\})}{P(\{(b, b), (b, g), (g, b)\})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

بسیاری از خوانندگان به‌اشتباه استدلال می‌کنند که احتمال شرطی دو پسر با فرض این‌که حداقل یکی از آنها پسر است به جای این‌که $1/3$ باشد $1/2$ است . زیرا آنها استدلال می‌کنند که فرزند دیگر که درمهمانی حضور ندارد دارای احتمال مساوی برای دختر یا پسر بودن می‌باشد. اشتباه آنها در این است که فرض می‌کنند این دو امکان دارای احتمال مساوی‌اند . در ابتدا ۴ برآمد متساوی‌الاحتمال هستند . اکنون اطلاع از این‌که حداقل یکی از فرزندان پسر است معادل است با دانستن این‌که برآمد ، (g, g) نیست . بنابراین با ۳ برآمد متساوی‌الاحتمال $(b, b), (b, g), (g, b)$ روبرو هستیم که نشان می‌دهد احتمال دختر بودن فرزند دیگر که در مهمانی شرکت ندارد ۲ برابر احتمال پسر بودن آن است .

با ضرب طرفین معادلهٔ ۱.۶.۱ در $P(F)$ به‌دست می‌آوریم .

$$P(EF) = P(F)P(E \mid F) \tag{۲.۶.۱}$$

به عبارتی معادله ۲.۶.۱ بیان می‌کند ، احتمال این‌که E و F هردو رُخ دهند ، مساوی است با احتمال این‌که F رُخ دهد ضربدر احتمال شرطی E با فرض این‌که F رُخ داده است . معادله ۲.۶.۱ غالباً در محاسبهٔ احتمال اشتراک پیشامدها خیلی مفید است . این مطلب در مثال زیر نشان داده شده است .

مثال ۶.۱ پ ـ شخصی این‌طور تصور می‌کند که شرکتی که در آن کار می‌کند ۳۰ درصد شانس دارد که یک شعبه در مشهد دایر کند . در این صورت او ۶۰ درصد اطمینان دارد که مدیر این شعبه جدید خواهد شد . احتمال این‌که وی مدیر شعبه جدید شود چقدر است ؟

حل : فرض کنید B نشان‌دهندهٔ این پیشامد است که این شرکت یک شعبه در مشهد دایر کند و M این پیشامد که وی مدیر این شعبه جدید شود . در این صورت احتمال مطلوب $P(B \cap M)$ است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید .

$$\begin{aligned} P(BM) &= P(B)\,P(M \mid B) \\ &= (.3)(.6) \\ &= .18 \end{aligned}$$

بنابراین این شخص 18 درصد شانس دارد که مدیر این شعبه شود .

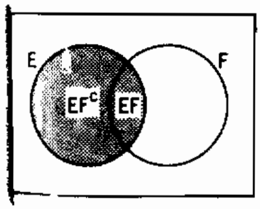
۷- فرمول بیز

فرض کنید E و F دو پیشامد باشند . می‌توانیم E را به صورت

$$E = EF \cup EF^c$$

بیان کنیم ، زیرا برای این‌که یک نقطه در E باشد باید یا در E و F باشد یا در E باشد و در F نباشد . (شکل ۱.۷.۱ را ببینید) چون EF و EF^c متقابلاً ناسازگارند از اصل موضوع 3 داریم .

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c) \qquad (۱.۷.۱)$$
$$= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$
$$= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)].$$



$E = EF \cup EF^c,\ EF = EF^c$

شکل ۱.۷.۱

معادله ۱.۷.۱ بیان می‌کند ، احتمال پیشامد E، یک میانگین موزون از احتمال شرطی E با فرض این‌که F رُخ دهد و احتمال شرطی E با فرض این‌که F رُخ ندهد می‌باشد . بزرگی وزن هراحتمال شرطی به‌اندازهٔ رُخ دادن پیشامدی است که روی آن شرط می‌شود . این فرمول فرمولی بسیار مفید است زیرا غالباً با استفاده از آن می‌توان احتمال یک پیشامد را ابتدا با شرطی کردن روی رخداد و سپس عدم رخداد یک پیشامد دیگر تعیین‌کرد . مثالهای زیادی وجود دارند که‌درآنهامحاسبهٔ احتمال یک پیشامد مشکل است امّا وقتی بدانیم پیشامد دومی رُخ داده است . یا خیر ، محاسبه این احتمال ساده می‌شود .

مثال ۷.۱ الف ـ یک شرکت بیمه معتقد است مردم می‌توانند به دو دسته تقسیم شوند . آنهایی که درمعرض حادثه‌اند و آنهایی که نیستند . کارشناس آمار این شرکت نشان داده است که یک شخص درمعرض حادثه با احتمال 4. در یک دوره ثابت یکساله دچار یک حادثه می‌شود . در حالی‌که این احتمال برای شخصی که در معرض حادثه نیست تا 2. تقلیل پیدا می‌کند . اگر فرض کنیم 30% افراد جامعه در معرض حادثه‌اند احتمال این‌که یک بیمه‌گذار جدید در یک‌سالی که برگ بیمه را خریداری کرده است دچار حادثه شود چقدر است ؟

حل : باید احتمال مطلوب را با شرطی کردن این‌که بیمه‌گذار در معرض حادثه است یا خیر ، به‌دست آوریم . فرض کنید A_1 این پیشامد است که بیمه‌گذار در یک‌سالی که برگ بیمه را خریداری کرده است دچار حادثه شود و فرض کنید A نشان‌دهندهٔ این پیشامد باشدکه‌بیمه‌گذار در معرض حادثه است .

دراین‌صورت احتمال مطلوب ، $P(A_1)$، برابر است با ،

$$P(A_1) = P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c)$$
$$= (.4)(.3) + (.2)(.7) = .26 \quad \blacksquare$$

در مثالهای بعد نشان می‌دهیم که چگونه یک تشخیص احتمالی اولیه را به کمک اطلاعات اضافی (یا جدید) دوباره ارزیابی کنیم . یعنی نشان می‌دهیم که چگونه اطلاعات جدید را با یک تشخیص احتمالی اولیه برای به‌دست آوردن یک احتمال جدید ترکیب کنیم .

مثال ۷.۱ ب ـ مجدداً مثال ۷.۱ الف را در نظر بگیرید و فرض کنید بیمه‌گذار جدید در یک‌سالی که برگ بیمه را خریداری کرده است دچار یک حادثه شود . احتمال این‌که او یک فرد در معرض حادثه بوده باشد چقدر است ؟

حل : در ابتدا ، هنگامی که بیمه‌گذار برگ بیمه را خریداری کرده بود ، فرض کردیم شانس این‌که در معرض حادثه باشد 30% است یعنی $P(A) = .3$. علاوه برآن براساس این واقعیت که او در طول یک‌سال دچار یک حادثه شده است اکنون مجدداً این احتمال راکه او یک فرد در معرض حادثه باشد به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$P(A|A_1) = \frac{P(AA_1)}{P(A_1)}$$
$$= \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)}$$
$$= \frac{(.3)(.4)}{.26} = \frac{6}{13} = .4615 \quad \blacksquare$$

مثال ۷.۱ پ ـ دانشجویی در پاسخ دادن به یک سؤال در آزمون چند جوابی، جواب را یا می داند یا حدس می‌زند . فرض کنید احتمال این که جواب را بداند p و احتمال این که جواب را حدس بزند $1 - p$ باشد . همچنین فرض کنید جوابی را که دانشجو حدس می‌زند با احتمال $1/m$ درست باشد ، که در آن m تعداد انتخابهای ممکن است .

مطلوب است احتمال شرطی این‌که دانشجو جواب سؤال را می‌دانسته ، با این فرض که جوابی را که داده است درست است .

حل : فرض کنید C و K به‌ترتیب نشان‌دهنده این پیشامدها باشند که دانشجو سؤال را درست جواب

بدهد و این که واقعاً جواب را می‌دانسته است . برای محاسبهٔ

$$P(K|C) = \frac{P(KC)}{P(C)}$$

ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} P(KC) &= P(K)P(C|K) \\ &= p \cdot 1 \\ &= p \end{aligned}$$

برای محاسبه احتمال این که دانشجو جواب درست بدهد شرط می‌کنیم روی این که جواب رامی‌دانسته یا نمی‌دانسته . یعنی

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|K)P(K) + P(C|K^c)P(K^c) \\ &= p + (1/m)(1-p) \end{aligned}$$

بنابر این احتمال مطلوب برابر است با

$$P(K|C) = \frac{p}{p + (1/m)(1-p)} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$

برای مثال اگر $m = 5$ ، $p = 1/2$ آن‌گاه احتمال این که دانشجو جواب سؤال را می‌دانسته وقتی جواب را درست داده باشد 5/6 است .

مثال ۷.۱.ت ـ یک آزمایشگاه خون‌شناسی ۹۹ درصد در کشف نوعی بیماری ، وقتی در واقع این بیماری وجود دارد ، مؤثر است . به‌علاوه این آزمایش یک نتیجهٔ «نادرست مثبت» برای یک درصد از افراد سالم آزمایش شده می‌دهد. (یعنی اگر یک شخص سالم آزمایش شود آن‌گاه با احتمال 01. نتیجه آزمایش دلالت بربیماری شخص می‌کند) . اگر 5. درصد افرادجامعه واقعاًدارای بیماری باشند . مطلوب‌است‌احتمال‌این‌که شخص‌آزمایش‌شده بیمار باشد با این فرض که نتیجه آزمایش اومثبت است .

حل : فرض کنید D این پیشامد باشد که شخص آزمایش شده دارای بیماری است و E این پیشامد که

نتیجهٔ آزمایش او مثبت است. احتمال مطلوب $P(D|E)$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \\ &= \frac{(.99)(.005)}{(.99)(.005) + (.01)(.995)} \\ &= .3322. \end{aligned}$$

بنابراین فقط 33 درصد از افرادی که نتیجهٔ آزمایش آنها مثبت است واقعاً بیمار هستند. نظر به این که غالباًبسیاری از دانشجویان از این نتیجه تعجب می‌کنند (زیرابه‌نظر می‌رسد این آزمایش خون یک آزمایش معتبراست و انتظار دارند این عدد خیلی بیشتر باشد) شاید ارائهٔ یک استدلال دیگر، برای روشنترشدن مطلب مفید باشد:

چون 5. درصد از افراد جامعه واقعاً دارای بیماری هستند نتیجه می‌شود که بطور متوسط از هر ۲۰۰ نفر آزمایش شده ۱ نفر دارای بیماری است. آزمایش با احتمال ۰/۹۹ تأئید می‌کند که این شخص دارای بیماری است بنابراین ، این آزمایش تأیید می‌کند که بطور متوسط از هر ۲۰۰ نفر آزمایش شده 99. از آنان دارای بیماری خواهند بود. ازطرف دیگر آزمایش بغلط بیان می‌کند که (بطور متوسط) از هر ۱۹۹ نفر سالم (01.)(199) از آنان بیمارند. بنابراین برای هر 99. افراد بیماری که آزمایش بیماری آنها را درست تشخیص داده است (بطور متوسط) 1.99 شخص سالم وجود دارد که آزمایش بیماری آنان را نادرست تشخیص داده است. بنابراین نسبت دفعاتی که نتیجه آزمایش درست است در حالی که تشخیص داده است که شخص بیمار می‌باشد برابر است با

$$\frac{.99}{.99 + 1.99} = .3322 \quad \blacksquare$$

معادله ۱.۷.۱ همچنین برای وقتی که یک نفر دارای تشخیص احتمالی مشخص به کمک اطلاعات اضافی است مفید می‌باشد. مثالهای زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۷.۱ ت ـ در یک مرحلهٔ معین از تحقیقات جنایی متصدی بازرسی 60. معتقد است که مظنون خاصی مجرم است. فرض کنید که مدرک معتبر جدیدی نشان می دهد که جنایتکار دارای بعضی مشخصات آشکار (مانندچپ دستی ، طاسی و ...) است. اگر 20. افرادجامعه دارای‌این‌مشخصات باشند و مشخص شودکه شخص مظنون درمیان این‌گروه است اکنون مجرم‌بودن اوچگونه باید بررسی شود ؟

حل : فرض کنید G نشان دهندهٔ این‌پیشامد باشد که شخص مظنون مجرم است و C این پیشامد کـه جنایتکار دارای این مشخصات است. داریم

$$P(G|C) = \frac{P(GC)}{P(C)}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} P(GC) &= P(G)P(C|G) \\ &= (.6)(1) \\ &= .6 \end{aligned}$$

برای محاسبه احتمال این‌که شخص مظنون دارای این مشخصات است شرط می‌کنیم که او یـا مـجرم است یا مجرم نیست ، یعنی

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|G)P(G) + P(C|G^c)P(G^c) \\ &= (1)(.6) + (.2)(.4) \\ &= 68 \end{aligned}$$

که در آن فرض کرده‌ایم اگر شخص مظنون در واقع بی‌گناه باشد احتمال این که دارای این مشخصات باشد مساوی با 2. است. یعنی ، نسبتی از جامعه که دارای این مشخصات هستند . بنابراین

$$P(G|C) = \frac{60}{68} = .882$$

پس بازرس باید اکنون 88 درصد به‌جرم شخص مظنون یقین داشته باشد . ■

مثال ۱.۷.ت (ادامه) . اکنون فرض کنیم که مدرک جدید مورد اختلاف تفسیرهای ممکن قرار گرفته است و در واقع فقط نشان می‌دهد که ۹۰ درصد احتمال دارد که شخص جنایتکار مشخصات مفروض را داراباشد .در این حالت چقدر احتمال دارد که شخص مظنون جنایتکار باشد ؟ (مانند قبل فرض کنید که او مشخصات را داراست) .

حل : این حالت نیز مانند قبل است با این تفاوت که احتمال این که شخص مظنون دارای مشخصات باشد با فرض این که او مجرم است 9. می‌باشد (کمتر از 1) بنابراین

$$
\begin{aligned}
P(G|C) &= \frac{P(GC)}{P(C)} \\
&= \frac{P(G)P(C|G)}{P(C|G)P(G) + P(C|G^c)P(G^c)} \\
&= \frac{(.6)(.9)}{(.9)(.6) + (.2)(.4)} \\
&= \frac{54}{62} = .871
\end{aligned}
$$

که مقدار ناچیزی کمتر از حالت قبل می‌باشد (چرا؟) . ■

معادلهٔ ۱.۷.۱ را می‌توان به‌روش زیر تعمیم داد . فرض کنید که $F_1, F_2, \ldots F_n$ پیشامدهای متقابلاً ناسازگار باشند بطوری که

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S$$

به‌عبارت دیگر باید دقیقاً یکی از پیشامدهای $F_1, F_2, \ldots F_n$ رخ دهد . با نوشتن

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i$$

و استفاده از این واقعیت که پیشامدهای EF_i، $i = 1, \ldots, n$ متقابلاً ناسازگارند به‌دست می‌آوریم ،

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)
\end{aligned}
\tag{۲.۷.۱}
$$

بنابراین معادلهٔ ۲.۷.۱ نشان می‌دهد که برای پیشامدهای مفروض $F_1, F_2, \ldots F_n$ که یکی و فقط یکی از آنهاباید رخ دهد چگونه می‌توانیم $P(E)$ رابا شرطی‌کردن روی این‌که یکی از F_i ها رُخ می‌دهد به‌دست آوریم . یعنی بیان می‌کند که $P(E)$ مساوی است با میانگین موزون $P(E|F_i)$ ها ، که وزن هر $P(E|F_i)$ مساوی است با احتمال پیشامدی که روی آن شرط شده است (یعنی $P(F_i)$) .

اکنون فرض کنید که E رخ داده است ، علاقه‌مندیم یقین کنیم که یکی از F_iها نیز رخ داده است . با استفاده از معادله ۱.۷.۲ داریم .

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)} \tag{۳.۷.۱}$$

معادله ۳.۷.۱ به‌نام فیلسوف انگلیسی (توماس بیز) به‌فرمول بیز مشهور است. اگر پیشامدهای F_i را به عنوان «فرضهای» ممکن در رابطه با موضوع مورد مطالعه تصور کنیم آن‌گاه فرمول بیز ممکن است این‌گونه تعبیر شود که نشان می‌دهد چگونه درجهٔ اعتقادمان قبل از آزمایش (یعنی $(P(F_i)$) راجع به‌آن فرضها ، پس از آزمایش تعدیل می‌شود .

مثال ۱.۷.ث ـ هواپیمایی ناپدید شده و این‌طور استنباط می‌شود که باید با احتمال مساوی در یکی از ۳ ناحیهٔ ممکن سقوط کرده باشد . در صورتی که هواپیما در ناحیه i باشد $i = 1, 2, 3$، فرض کنید $1 - \alpha_i$ نشان‌دهندهٔ این احتمال باشد که با جستجو در ناحیه iام پیدا شود . (ثابتهای α_i را **احتمالات ناپدید شدن** گویند زیرآنها نشان‌دهندهٔ این احتمال هستند که هواپیما پیدا نشود و بطور کلی به شرایط محیطی و جغرافیایی نواحی قابل تخصیصند) . مطلوب است احتمال شرطی این که هواپیما در i امین ناحیه باشد $i = 1, 2, 3$ با این فرض که جستجو در ناحیهٔ ۱ با شکست روبرو شده است .

حل : فرض کنید R_i، $i = 1, 2, 3$ این پیشامد باشد که هواپیما در ناحیه i است و E این پیشامد که جستجو در ناحیه ۱ را با شکست مواجه شده است. از فرمول بیز به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(R_1|E) &= \frac{P(ER_1)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E|R_i)P(R_i)} \\ &= \frac{(\alpha_1)(1/3)}{(\alpha_1)(1/3) + (1)1/3 + (1)(1/3)} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2} \end{aligned}$$

برای $j = 2, 3$

$$
\begin{aligned}
P(R_j|E) &= \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} \\
&= \frac{(1)(1/3)}{(\alpha_1)1/3 + 1/3 + 1/3} \\
&= \frac{1}{\alpha_1 + 2}, \qquad j = 2, 3
\end{aligned}
$$

بنابراین برای مثال اگر $\alpha_1 = .4$ آن‌گاه احتمال شرطی این‌که هواپیما در ناحیه ۱ باشد با این فرض که جستجو در این ناحیه با شکست مواجه شده برابر است با 1/6 .

۸- پیشامدهای مستقل

مثالهای بخش قبل نشان داد که $P(E|F)$ ، احتمال شرطی E با فرض F ، در حالت کلی با $P(E)$ ، احتمال غیر شرطی E مساوی نیست ، به‌عبارت دیگر دانستن این‌که F رخ می‌دهد بطور کلی شانس رخ‌دادن E را تغییر می‌دهد در حالت خاصی که $P(E|F)$ مساوی $P(E)$ است گوییم E مستقل از F است ، یعنی ، E مستقل از F است اگر بدانیم که رخ‌دادن F احتمال رُخ دادن E را تغییر نمی‌دهد .

چون $P(E|F) = P(EF)/P(F)$ می‌بینیم که E مستقل از F است هرگاه ،

$$P(EF) = P(E)P(F) \tag{۱.۸.۱}$$

چون این تساوی برحسب E و F متقارن است نتیجه می‌شود که هرگاه E مستقل از F باشد ، F نیز مستقل از E است . بنابراین تعریف زیر را داریم .

تعریف : دو پیشامد E و F را **مستقل** گوییم اگر تساوی ۱.۸.۱ برقرار باشد. دو پیشامد E و F را که مستقل نیستند ، **وابسته** گوییم .

مثال ۸.۱ الف ـ یک کارت به‌تصادف از یک دسته کارت ۵۲ تایی انتخاب می‌شود اگر A پیشامد آس و H پیشامد دل باشد آن‌گاه A و H مستقلند زیرا $P(AH) = 1/52$ در حالی که $P(A) = 4/52$ و $P(H) = 13/52$.

مثال ۸.۱ ب ـ اگر فرض کنیم E نشان‌دهندهٔ این پیشامد باشد که رئیس جمهور بعدی یک جمهوریخواه و F این پیشامد که یک زلزله در سال بعد رخ می‌دهد . آن‌گاه مردم اکثراً می‌پذیرند که E و F مستقلند . امّا شاید بحث‌انگیز باشد که آیا منطقی است فرض شود که E مستقل از G است هرگاه G این پیشامد باشد که ظرف یک سال آینده بحران اقتصادی وجود دارد . ■

اکنون نشان می‌دهیم که اگر E مستقل از F باشد آن‌گاه E از F^c نیز مستقل است .

حکم ۱.۸.۱

اگر E و F مستقل باشند آن‌گاه E و F^c نیز مستقلند .

اثبات : فرض کنید E و F مستقل‌اند . چون $E = EF \cup EF^c$ و EF و EF^c متقابلاً ناسازگارند داریم :

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c)$$

از استقلال E و F

$$= P(E)P(F) + P(EF^c)$$

یا معادل آن

$$P(EF^c) = P(E)(1 - P(F))$$
$$= P(E)P(F^c)$$

و اثبات کامل است .

بنابراین اگر E مستقل از F باشد آن‌گاه احتمال رخ داد E با اطلاع از این که F رخ می‌دهد یا خیر تغییر نمی‌کند .

اکنون فرض کنید که E مستقل از F و همچنین مستقل از G باشد . آیا E لزوماً از FG مستقل است جواب مسأله که تاحدی عجیب به‌نظر می‌آید ، منفی می‌باشد . بدین‌منظور مثال زیر را درنظر بگیرید.

مثال ۸.۱. پ ـ دو تاس سالم پرتاب می‌شوند. فرض کنید E_7 نشان‌دهندهٔ این پیشامد است که مجموع دو تاس ۷ است ، فرض کنید F نشان‌دهندهٔ این پیشامد باشد که تاس اوّل ۴ و T این پیشامد که تاس دوم ۳ است . اکنون می‌توان نشان داد که E_7 مستقل از F و همچنین مستقل از T است . (مسألهٔ ۲۸ را ببینید) . امّا E_7 مستقل از FT نیست (زیرا $P(E_7|FT) = 1$) .

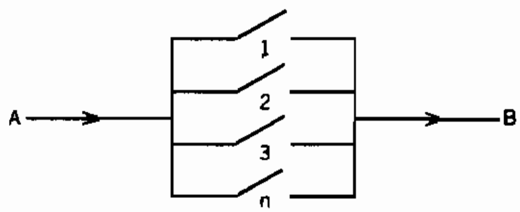
از مثال قبل این نتیجه به‌دست می‌آید که تعریفی مناسب برای استقلال ۳ پیشامد E ، F ، G به‌فرض مستقل‌بودن پیش‌از $\binom{3}{2}$ جفت از پیشامدها احتیاج دارد، برای‌این‌منظور به تعریف زیر هدایت می‌شویم .

تعریف : ۳ پیشامد E ، F و G را مستقل گوییم اگر

$$P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$$
$$P(EF) = P(E)P(F)$$
$$P(EG) = P(E)P(G)$$
$$P(FG) = P(F)P(G)$$

باید توجه داشت که اگر پیشامدهای E ، F ، G مستقل باشند آن‌گاه E از هر پیشامد ساخته شده از F و G مستقل خواهد بود. برای مثال E مستقل از $F \cup G$ است ، زیرا

$$\begin{aligned} P(E(F \cup G)) &= P(EF \cup EG) \\ &= P(EF) + P(EG) - P(EFG) \\ &= P(E)P(F) + P(E)P(G) - P(E)P(FG) \\ &= P(E)[P(F) + P(G) - P(FG)] \\ &= P(E)P(F \cup G) \end{aligned}$$



شکل ۱.۸.۱. سیستم موازی : در صورتی عمل می‌کند که جریان از A به B برقرار باشد

البته می‌توانیم تعریف استقلال را به‌بیش از ۳ پیشامد نیز تعمیم‌دهیم .پیشامدهای $E_1, E_2, ..., E_n$ را مستقل گوییم اگر برای هر زیر مجموعهٔ $E_{1'}, E_{2'}, ..., E_{r'}$ ، $r \leq n$ از این پیشامدها ،

$$P(E_{1'}E_{2'} \cdots E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \cdots P(E_{r'})$$

گاهی اوقات این حالت اتفاق می‌افتد که آزمایش مورد بررسی عبارت از انجام یک دنباله از زیر آزمایشهاست ، برای مثال اگر آزمایش عبارت از پرتاب یک سکه بطور متوالی باشد آن‌گاه می‌توانیم هر پرتاب را به‌عنوان یک زیر آزمایش تصور کنیم . در بسیاری از حالت منطقی است فرض کنیم که برآمدهای هر دسته از زیر آزمایشها تأثیری بر احتمال برآمدهای زیر آزمایشهای دیگر ندارد . اگر چنین حالتی باشد آن‌گاه گوییم که زیر آزمایشها مستقلند .

مثال ۱.۸.ت ـ سیستمی مرکب از n جزء را یک سیستم موازی گوییم اگر وقتی حداقل یکی از اجزای آن عمل کند آن‌گاه تمام سیستم عمل کند . (شکل ۱.۸.۱ راببینید) برای چنین سیستمی اگر جزء i ام مستقل از اجزای دیگر با احتمال P_i عمل کند $i = 1, 2, ..., n$ ، آن‌گاه احتمال این که سیستم عمل کند چقدر است ؟

حل : فرض کنید A_i نشان‌دهندهٔ این پیشامد باشد که مولّفهٔ i عمل کند ؛ در این صورت .

$$\begin{aligned} P\{\text{سیستم عمل کند}\} &= 1 - P\{\text{سیستم عمل نکنند}\} \\ &= 1 - P\{\text{هیچ یک از اجزاء عمل نکنند}\} \\ &= 1 - P\left(\bigcap_i A_i^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \end{aligned}$$

از استقلال ■

مسائل

۱ ـ جعبه‌ای شامل ۳ مهره است، یکی قرمز، یکی سبز و دیگری آبی. آزمایشی را در نظر بگیرید که عبارت است از انتخاب یک مهره از این جعبه و برگرداندن آن به‌جعبه و انتخاب یک مهرهٔ دیگر . فضای نمونه حاصل را توصیف کنید . فضای نمونه را در حالتی که مهرهٔ اوّل جایگذاری نمی‌شود . به‌دست آورید .

۲ ـ آزمایشی عبارت است از پرتاب یک سکه در ۳ مرتبه . فضای نمونهٔ حاصل از این آزمایش چیست ؟ در کدام پیشامدها نتیجه آزمایش نشان‌دهندهٔ این است که تعداد شیرها از تعداد خطها بیشتر است ؟

۳ ـ فرض کنید $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ، $E = \{1,3,5,7\}$ ، $F = \{7,4,6\}$ ، $G = \{1,4\}$. مطلوب است

(a) EF **(c)** EG^c **(e)** $E^c(F \cup G)$
(b) $E \cup FG$ **(d)** $EF^c \cup G$ **(f)** $EG \cup FG$

۴ ـ دو تاس را پرتاب می کنیم. فرض کنید E این پیشامد باشد که مجموع تاسها فرد است و فرض کنید F این پیشامد است که تاس اوّل ۱ و G این پیشامد که مجموع دو تاس ۵ است . پیشامدهای EF ، $E \cup F$ ، FG ، EF^c و EFG را به‌دست آورید .

۵ ـ فرض کنید E ، F و G سه پیشامد باشند . عباراتی برای پیشامدهایی از E ، F و G پیدا کنید بطوری که :

الف) فقط E رخ دهد .

ب) E و G هر دو رخ دهند امّا F رخ ندهد .

پ) حداقل یک پیشامد رخ دهد .

ت) حداقل دو پیشامد رخ دهد .

ث) هر سه پیشامد رخ دهد .

ج) هیچ یک از این پیشامدها رخ ندهد .

چ) حداکثر یکی از آنها رخ دهد .

ح) حداکثر دو تا رخ دهد .

خ) دقیقاً دو تا رخ دهد .

د) حداکثر سه تا رخ دهد .

۶ - شکل سادهٔ پیشامدهای زیر را بنویسید

الف) $E \cup E^c$

ب) EF^c

ت) $(E \cup F)(E \cup F^c)$

ث) $(E \cup F)(E^c \cup F)(E \cup F^c)$

ج) $(E \cup F)(F \cup G)$

۷ - از نمودار وِن یا هر روش دیگر استفاده کرده و نشان دهید که :

الف) $E \subset E \cup F$ و $EF \subset F$

ب) اگر $E \subset F$ آن‌گاه $F^c \subset E^c$

پ) خاصیت جابه‌جایی برقرار است

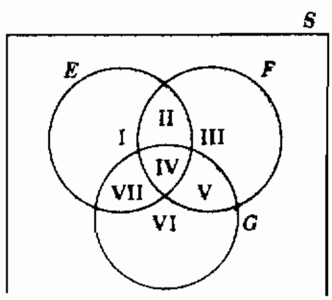
ت) خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است

ث) $F = EF \cup E^cF$

ج) $E \cup F = E \cup E^cF$

چ) قوانین دمورگان برقرار است .

۸ - برای نمودار وِن زیر پیشامدهایی را که توسط اعداد یونانی I تا VII نشان داده شده است برحسب پیشامدهای E، F و G بنویسید .



۹ ـ نشان دهید اگر $E \subset F$ که آن‌گاه $P(E) \leq P(F)$.
راهنمایی : E را برحسب اجتماع دو پیشامد ناسازگار بنویسید که یکی از آنها E باشد .
۱۰ ـ ثابت کنید :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

(این نامساوی را نا مساوی بول می‌نامند)
۱۱ ـ اگر $P(E) = .9$ و $P(F) = .9$ نشان دهید که $P(EF) \geq .8$ بطور کلی ثابت کنید :
(این نامساوی را نامساوی بن فرنی می‌نامند).

$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1$$

۱۲ ـ ثابت کنید:

الف) $P(EF^c) = P(E) - P(EF)$

ب) $P(E^cF^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(EF)$

۱۳ ـ نشان دهید که احتمال این که دقیقاً یکی از پیشامدهای E یا F رُخ دهد مساوی است با

$$P(E) + P(F) - 2P(EF)$$

۱۴ ـ مطلوب است محاسبهٔ $\binom{9}{3}, \binom{9}{6}, \binom{7}{2}, \binom{7}{5}, \binom{10}{7}$

۱۵ ـ نشان دهید که

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

حال یک استدلال ترکیبی برای عبارت قبل با توضیح این که چرا انتخاب r شیء از مجموعه‌ای به‌حجم n مساوی است با انتخاب $n - r$ شیء از این مجموعه بیان کنید.
۱۶ ـ نشان دهید که:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

برای یک استدلال ترکیبی ، مجموعه‌ای از n شیء را در نظر بگیرید و توجّه خود را به یکی از این اشیاء معطوف کنید . چند مجموعهٔ متفاوت به حجم R شامل این شیء وجود دارد ؟ و چند مجموعه وجود دارد که این شیء را در بر ندارد ؟

۱۷ - گروهی شامل ۵ پسر و ۱۰ دختر بتصادف در یک صف قرار می‌گیرند - یعنی فرض می‌شود هر $15!$ جایگشت دارای احتمال مساوی‌اند .
الف) چقدر احتمال دارد شخصی که در موقعیت چهارم قرار می‌گیرد پسر باشد ؟
ب) این احتمال برای موقعیت دوازدهم چقدر است ؟
پ) احتمال این که یک پسر مشخص در موقعیت سوم قرار گیرد چیست ؟

۱۸ - درشهری معین ۵ هتل وجود دارد . اگر ۳ نفر در یک روز به‌وضعیت هتلها رسیدگی کنند ، احتمال این که هریک از آنها به‌هتل متفاوتی رسیدگی کنند چقدر است ؟ در این مورد چه فرضهایی پیش‌بینی می‌کنید ؟

۱۹ - شهری دارای ۴ تعمیرکار تلویزیون است . اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب شود ، احتمال این که دقیقاً ۲ تعمیرکار خواسته شوند چقدر است ؟ در این مورد چه فرضهایی حدس می‌زنید ؟

۲۰ - زنی دارای n کلید است که یکی از آنها درب را باز می‌کند . اگر کلیدها را بطور تصادف امتحان کند و آنهایی که درب را باز نمی‌کنند کنار بگذارد چقدر احتمال دارد در k امین امتحان درب راباز کند ؟ اگر کلیدهایی که درب را بار نمی‌کنند ، کنار نگذارد این احتمال چقدر است ؟

۲۱ - قفسه‌ای شامل ۸ جفت کفش است . اگر چهار کفش بتصادف انتخاب شود احتمال این که الف) جفت نباشند و ب) دقیقاً یک جفت در بین آنها باشد چقدر است ؟

۲۲ - پادشاهی از یک خانواده دو فرزندی انتخاب می‌شود . چقدر احتمال دارد که فرزند دیگر دختر باشد ؟

۲۳ - زوجی دارای دو فرزند می‌باشند . اگر فرزند بزرگتر دختر باشد چقدر احتمال دارد که هردوی آنها دختر باشند ؟

۲۴ - دو توپ به رنگهای سیاه یا طلایی رنگ شده و در یک گلدان قرار داده شده‌اند . فرض کنید هر توپ بطور مستقل و با احتمال $\frac{1}{2}$ سیاه باشد .
الف) فرض کنید که به‌نوعی مطلع می‌شوید که رنگ طلایی استفاده شده است (و بنابراین حداقل یکی از توپها طلایی رنگ است) مطلوب است محاسبهٔ این احتمال که هردو تا توپ طلایی رنگ باشند .
ب) اکنون فرض کنید که گلدان واژگون می‌شود و یک توپ از آن خارج می‌گردد . و می‌بینیم طلایی رنگ‌است . دراین‌حالت احتمال این‌که هر دو توپ طلایی باشند چقدر است ؟ توضیح دهید .

۲۵ - دو قفسه با ظاهر یکسان هریک دارای ۲ کشو است و در هر کشو از قفسهٔ A یک سکه نقره‌ای است و در یکی از کشوهای قفسه B یک سکه نقره‌ای و در دیگری یک سکه طلایی

است . قفسه‌ای به‌تصادف انتخاب کرده و یکی از کشوهای آن را باز می‌کنیم و می‌بینیم که دارای سکه نقره‌ای است . چقدر احتمال دارد که کشوی دیگر شامل سکّهٔ نقره‌ای باشد ؟

۲۶ ـ فرض کنید یک آزمایش تشخیص سرطان در مورد افرادی که بیماری دارند و آنهایی که ندارند 95 درصد درست عمل کند. اگر 4. درصد از افراد جامعه دارای سرطان باشند ، مطلوب است محاسبهٔ این احتمال که یک شخص آزمایش شده دارای سرطان باشد با این فرض که نتیجه آزمایش چنین نشان می‌دهد .

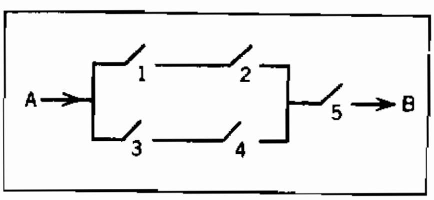
۲۷ ـ فرض کنید یک شرکت بیمه افراد را به ۳ دسته تقسیم کرده است ـ آنهایی که در معرض خطر نیستند ، آنهایی که بطور متوسط در معرض خطرند و آنهایی که پر مخاطره‌اند . تجربه نشان داده است در یک دوره یک ساله آنهایی که در معرض خطر نیستند با احتمال 05. و آنهایی که بطور متوسط در معرض خطرند با احتمال 15. و آنهایی که پر مخاطره‌اند با احتمال 30. دچار یک حادثه می‌شوند . اگر ۲۰ درصد افراد جامعه در معرض خطر نباشند ، ۵۰ درصد بطور متوسط در معرض خطر و ۳۰ درصد پر مخاطره باشند نسبت افرادی که در یک سال دچار حادثه می‌شوند چقدر است ؟ اگر بیمه‌گذار A در سال گذشته دچار حادثه نشده باشد ، احتمال این که او یک فرد در معرض حادثه نباشد چقدر است ؟ چقدر احتمال دارد که بطور متوسط در معرض حادثه باشد ؟

۲۸ ـ یک جفت تاس پرتاب می‌شوند. فرض کنید E نشان‌دهندهٔ این پیشامد است که مجموع تاسها مساوی ۷ است .

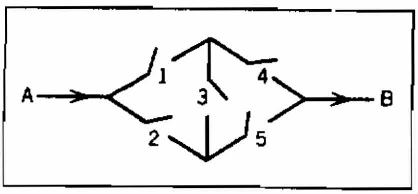
الف) نشان دهید که E از پیشامد «تاس اول ۴ است» مستقل است

ب) نشان دهید که E از پیشامد «تاس دوم ۳ است» مستقل می‌باشد.

۲۹ ـ احتمال این که iامین رِله در مدارهای زیر بسته باشد برابر است با p_i، $i = 1, 2, 3, 4, 5$. اگر تمام رِله‌ها بطور مستقل عمل کنند ، احتمال این که در هر مدار جریانی بین A و B برقرار باشد چقدر است ؟



(الف)



(ب)

۳۰ ـ یک سیستم مهندسی شامل n جزء را یک سیستم k در n $(k \le n)$ گویند هرگاه سیستم عمل کند اگر و تنها اگر حداقل k تا از n مؤلّفه عمل کنند . فرض کنید که اجزا مستقل از

یکدیگر عمل کنند ؛

الف) اگر i امین مؤلفه با احتمال p_i $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ عمل کند مطلوب است احتمال این که یک سیستم ۴-out-of-۲ عمل کند .

ب) قسمت الف را برای یک سیستم ۵-out-of-۳ تکرار کنید .

۳۱ - یک موجود زندهٔ معین دارای یک جفت ژن از ۵ ژن متفاوت است (که آنها را با حروف الفبای انگلیسی نمایش می‌دهیم) . هر ژن به دو صورت ظاهر می‌شود (که با حروف کوچک و بزرگ آنها را مشخص می‌کنیم) . فرض می‌کنیم که حرف بزرگ نشان‌دهندهٔ ژن غالب باشد بدین معنی که اگر موجود زنده دارای جفت ژن xX بود . آن‌گاه دارای ظاهری شبیه به ژن X باشد . برای مثال اگر X نشان‌دهندهٔ چشم قهوه‌ای و x نشان‌دهندهٔ چشم آبی باشد آن‌گاه شخصی که دارای هر یک از جفت ژنهای XX یا xX است دارای چشم قهوه‌ای خواهد بود در حالی‌که شخص با جفت ژن xx دارای چشم آبی خواهد بود . مشخصهٔ ظاهری یک موجود زنده را فنوتیپ گویند در صورتی ساختمان ژنتیکی موجود زنده را ژنوتیپ آن گویند . (بنابراین ۲ موجود زنده به‌ترتیب با ژنوتیپهای aA، bB، dD، ee و AA، BB، cc، DD، ee دارای ژنوتیپهای متفاوت‌اند امّا فنوتیپ یکسان دارند) . در یک لقاح بین ۲ موجود زنده هریک بتصادف یکی از جفت ژنهای خود از هر نوع را شرکت می‌دهند . فرض می‌شود که ۵ جفت ژن هر موجود مستقل از یکدیگر و همچنین مستقل از جفت ژنهای زوج خود می‌باشند . در یک عمل لقاح بین موجوداتی با ژنهایی از نوع aA، bB، cC، dD، eE و aa، bB، cc، Dd، ee . مطلوب است احتمال این که فرزند ۱ - بطور فنوتیپی ۲ - بطور ژنوتیپی شبیه :

الف) اولین والد خود باشد

ب) دومین والد خود باشد

پ) هر دو والد خود باشد

ت) هیچ‌کدام از والدین خود نباشد

۳۲ - ۳ زندانی توسط زندانبان خبر می‌شوند که یکی از آنها بتصادف انتخاب شده و اعدام می‌شود و دونفر دیگر آزاد می‌شوند . زندانی A از زندانبان می‌خواهد که به او بطور محرمانه بگوید که کدام یک از دو زندانی دیگر آزاد خواهند شد و مدعی است که فاش کردن این موضوع ایرادی ندارد زیرا او ، می‌داند که حداقل یکی از این دو آزاد می‌شوند . زندانبان از جواب دادن به‌این سؤال خودداری می‌کند زیرا معتقد است که اگر زندانی A بداند کدام‌یک از دو زندانی دیگر آزاد می‌شوند آن‌گاه احتمال این که خود او اعدام شود از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{2}$ افزایش می‌یابد . در مورد دلیل زندانبان تصور شما چیست ؟

فصل دوم

متغیّرهای تصادفی و امید ریاضی

۱ - متغیّرهای تصادفی

هنگامی که یک آزمایش تصادفی انجام می‌شود غالباً به تمام جزئیات نتیجهٔ آزمایش علاقمند نیستیم ، بلکه فقط به مقدار چند کمیت عددی که توسط نتیجه مشخص می‌شود علاقه‌مندیم. برای مثال معمولاً در پرتاب دو تاس مجموع دو تاس را میخواهیم و نه‌مقدار هریک ازتاسها را. یعنی ممکن است به‌دانستن این‌که مجموع ۷ است علاقه‌مند باشیم و این‌که آیا برآمد واقعی (6 ,1) یا (5 ,2) یا (4 ,3) یا (3 ,4) یا (2 ,5) یا (1 ,6) است مهم نباشد . همچنین یک مهندس عمران ممکن است علاقه‌مند به‌میزان کاهش و افزایش روزانهٔ سطح آب یک سدّ (که می‌تواند به‌عنوان نتیجه آزمایش در نظر گرفته شود) نباشد بلکه ممکن است فقط به‌میزان سطح آب در پایان یک بارندگی فصلی علاقه‌مند باشد . چنین کمیتهایی را که توسط نتیجهٔ آزمایش تعیین می‌شوند **متغیرهای تصادفی** می‌نامیم .

چون مقدار یک متغیر تصادفی توسط برآمد آزمایش تعیین می‌شود ، می‌توانیم احتمالات مقادیر ممکن آن را به‌دست آوریم .

مثال ۲.۱.الف ـ فرض کنید X یک متغیّر تصادفی است که نشان‌دهندهٔ مجموع دو تاس مالم باشد . دراین‌صورت ،

$$
\begin{aligned}
P\{X=2\} &= P\{(1,1)\} = \tfrac{1}{36}\\
P\{X=3\} &= P\{(1,2),(2,1)\} = \tfrac{2}{36}\\
P\{X=4\} &= P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \tfrac{3}{36}\\
P\{X=5\} &= P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = \tfrac{4}{36}\\
P\{X=6\} &= P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = \tfrac{5}{36}\\
P\{X=7\} &= P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = \tfrac{6}{36}\\
P\{X=8\} &= P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = \tfrac{5}{36}
\end{aligned}
\qquad (۱.۱.۲)
$$

$$P\{X=9\}=P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}=\tfrac{4}{36}$$
$$P\{X=10\}=P\{(4,6),(5,5),(6,4)\}=\tfrac{3}{36}$$
$$P\{X=11\}=P\{(5,6),(6,5)\}=\tfrac{2}{36}$$
$$P\{X=12\}=P\{(6,6)\}=\tfrac{1}{36}$$

به عبارت دیگر متغیّر تصادفی X می‌تواند هر مقدار صحیح بین ۲ و ۱۲ را بگیرد و احتمال این که هریک از این مقادیر را بگیرد به‌وسیلهٔ رابطهٔ ۱.۱.۲ ارائه می‌شود. از طرفی چون X باید یکی از این مقادیر را بگیرد، داریم

$$1=P(S)=P\left(\bigcup_{i=2}^{12}\{X=i\}\right)=\sum_{i=2}^{12}P\{X=i\}$$

که به‌راحتی می‌توان آن‌را از رابطه ۱.۱.۲ تحقیق کرد.

متغیّر تصادفی دیگری که ممکن است دراین آزمایش موردعلاقه باشد، مقدارتاس اوّل است. فرض کنید Y نشان‌دهندهٔ این متغیّر تصادفی است، در این صورت هر مقدار بین ۱ تا ۶ را با احتمال مساوی می‌گیرد. یعنی

$$P\{Y=i\}=1/6,\qquad i=1,2,3,4,5,6 \quad ■$$

مثال ۱.۶.ب ـ فرض کنید شخص دو قطعهٔ الکتریکی خریده که هریک از آنها می‌تواند معیوب یا سالم باشد. فرض کنید چهار نتیجه ممکن - (d, d), (d, a), (a, d), (a, a) - به‌ترتیب دارای احتمال .09، .21، .21 و .49 باشند. [که در آن (d, d) بدین معنی است که هر دو قطعه معیوب است و (d, a) یعنی قطعه اوّل معیوب و قطعه دوم سالم است و الی آخر]. اگر فرض کنیم X نشان‌دهندهٔ تعداد قطعات سالم به‌دست آمده در این خرید باشد آن‌گاه X متغیّر تصادفی است که مقادیر 0, 1, 2 را به‌ترتیب با احتمالات زیر می‌گیرد.

$$P\{X=0\}=.09$$
$$P\{X=1\}=.42$$
$$P\{X=2\}=.49$$

اگر وجود حداقل یک قطعهٔ سالم برای ما مهم باشد آن‌گاه باید متغیّر تصادفی I را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$I = \begin{cases} 1 & X = 1 \text{ یا } 2 \quad \text{اگر} \\ 0 & X = 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

اگر A نشان‌دهندهٔ این پیشامد باشد که حداقل یک قطعه سالم به‌دست می‌آید، آن‌گاه متغیّر تصادفی I را متغیّر تصادفی نشانگر برای پیشامد A می‌نامند، و در آن I مساوی است با 1 یا 0، بسته به این که A رُخ دهد یا خیر. احتمالات مربوط به‌مقادیر ممکن I به‌شکل زیر است.

$$P\{I = 1\} = .91$$
$$P\{I = 0\} = .09 \quad \blacksquare$$

در دومثال فوق مقادیر ممکنی که متغیّرهای تصادفی مورد بررسی می‌گیرند متناهی یا شما راست. چنین متغیّرهای تصادفی را **گسسته** می‌نامند. همچنین متغیّرهای تصادفی وجوددارندکه مقادیر ممکن آنها پیوسته است. چنین متغیّرهای تصادفی رامتغیّرهای تصادفی پیوسته می‌نامند. هنگامی‌که فرض می‌شود طول عمر یک‌ماشین هرمقداری را دربازه (a, b) می‌گیرد، آن‌گاه این‌طول عمر یک‌متغیّر تصادفی پیوسته است.

تابع توزیع تجمعی F یا به‌عبارت ساده‌تر **تابع توزیع** F، یک متغیّر تصادفی X، به‌ازای هر عدد حقیقی x به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

یعنی $F(x)$ برابر است با احتمال این که متغیّر تصادفی X مقداری کمتر یا مساوی x بگیرد.

نمادگذاری: از نماد $X \approx F$ بدین منظور استفاده می‌کنیم که X دارای تابع توزیع F است.

تمام سؤالات احتمالی پیرامون X را می‌توان با تابع توزیع آن، F جواب داد. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم $P(a \le X < b)$ را محاسبه کنیم. برای انجام این کار توجّه داریم که پیشامد $\{X \le b)$ را می‌توان به‌صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار $\{X \le a\}$ و $\{a < X \le b\}$ نشان داد. بنابراین با به‌کار بردن اصل موضوع ۳ احتمال داریم

$$P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\}$$

یا

$$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$$

مثال ۲.۱.پ ـ فرض کنید متغیّر تصادفی دارای تابع توزیع زیر باشد

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \exp\{-x^2\} & x > 0 \end{cases}$$

احتمال این‌که X از ۱ تجاوز کند چقدر است؟

حل: احتمال مطلوب به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} P\{X>1\} &= 1-P\{X\le 1\}\\ &= 1-F(1)\\ &= e^{-1}\\ &= .368 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۲- انواع متغیّرهای تصادفی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد یک متغیّر تصادفی را که می‌تواند حداکثر تعدادی شمارا از مقادیر ممکن را بگیرد ، یک متغیر تصادفی **گسسته** گویند . برای یک متغیّر تصادفی گسستهٔ X، **تابع جرم احتمال** $p(a)$را به صورت

$$p(a)=P\{X=a\}$$

تعریف می کنیم ، تابع جرم احتمال $p(a)$برای حداکثر یک تعداد شمارا از مقادیر a مثبت است . یعنی اگر Xیکی از مقادیر ... $x_1, x_2,$را بگیرد آن‌گاه

$$p(x_i)>0, \qquad i=1,2,\ldots$$
$$p(x)=0, \qquad x \text{ برای هر مقدار دیگر}$$

چون Xباید یکی از مقادیر x_iرا بگیرد ، داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$$

مثال ۲.۲.الف ـ متغیّر تصادفی Xرا که یکی از مقادیر 2 ,1 یا 3 را می‌گیرد در نظر بگیرید . اگر بدانیم

$$p(1)=\tfrac{1}{2} \qquad \text{و} \qquad p(2)=\tfrac{1}{3}$$

(چون $p(1)+p(2)+p(3)=1$) آن‌گاه نتیجه می‌شود که

$$p(3)=\tfrac{1}{6}$$

نموداری از $p(x)$در شکل ۱.۲.۲ نمایش داده شده است . ■

شکل ۱.۲.۲

تابع توزیع تجمعی F می‌تواند برحسب $p(x)$ به صورت زیر نمایش داده شود

$$F(a) = \sum_{x \le a} p(x)$$

اگر x یک متغیّر تصادفی گسسته با مجموعه مقادیر ممکن $x_1, x_2, x_3, \dots$ باشد که در آن $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ آن‌گاه تابع توزیع آن ، F ، یک تابع پله‌ایی است . یعنی ، مقدار F در بازه $[x_{i-1}, x_i)$ ثابت است و آن‌گاه یک پله (یا پرش) در x_i به اندازه $p(x_i)$ دارد .

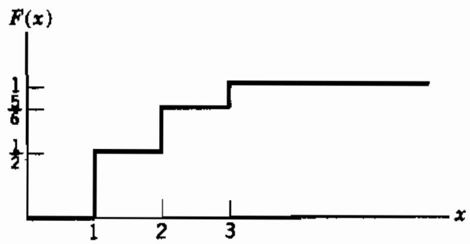
برای مثال فرض کنید X دارای یک تابع جرم احتمال مفروض (در مثال ۲.۲.الف) باشد . یعنی

$$p(1) = \tfrac{1}{2}, \qquad p(2) = \tfrac{1}{3}, \qquad p(3) = \tfrac{1}{6}$$

در این صورت تابع توزیع تجمعی F برابر است با

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le a < 2 \\ \frac{5}{6}, & 2 \le a < 3 \\ 1, & 3 \le a \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل زیر نمایش داده شده است .



شکل ۲.۲.۲ نمودار $f(x)$

در حالی که مجموعه مقادیر ممکن یک متغیّر تصادفی گسسته شمار است ، غالباً باید متغیّر تصادفی را در نظر بگیریم که مجموعه مقادیر آن ناشمارا باشد . فرض کنید X چنین متغیّر تصادفی باشد ، گوییم X یک متغیّر تصادفی پیوسته است اگر تابعی نامنفی مانند $f(x)$ که برای هر $x \in (-\infty, \infty)$ تعریف شده است وجود داشته باشد با این خاصیت که برای هر مجموعه B از اعداد حقیقی

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx$$

(۱.۲.۲)

تابع $f(x)$ را **تابع چگالی احتمال** متغیر تصادفی X می‌نامند.

معادله ۱.۲.۲ بیان می‌کند که احتمال قرارگرفتن X در B می‌تواند با انتگرال تابع چگالی احتمال روی مجموعه B به‌دست آید. چون X باید مقداری را بگیرد $f(x)$ باید در رابطه زیر صدق کند

$$1 = P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

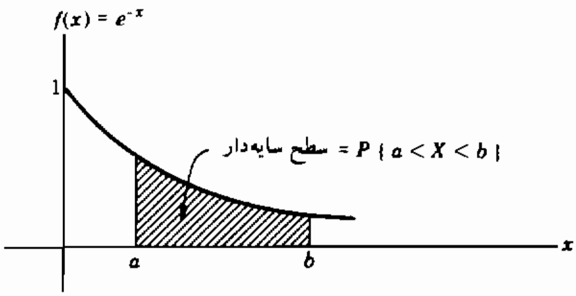
تمام عبارات احتمال در مورد X می‌توانند برحسب $f(x)$ به دست آید. برای مثال فرض کنید $B = [a, b]$، از تساوی (۱.۲.۲) به‌دست می‌آوریم

(۲.۲.۲)

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

اگر در این تساوی فرض کنیم $a = b$ آن‌گاه

$$P\{X = a\} = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$



شکل ۳.۲.۲: تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

بطور خلاصه این تساوی بیان می‌کند، احتمال این که یک متغیّر تصادفی پیوسته مقداری خاص را بگیرد مساوی با صفر است. (شکل ۳.۲.۲)

ارتباط بین تابع توزیع تجمعی $F(.)$ و تابع چگالی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$F(a) = P\{X \in (-\infty, a]\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم

$$\frac{d}{da}F(a) = f(a)$$

یعنی ، تابع چگالی مشتق تابع توزیع تجمعی است. یک تعبیر شهودی از تابع چگالی احتمال میتواند بدین‌صورت به‌دست آید که برای ε کوچک

$$P\left\{a - \frac{\epsilon}{2} \le X \le a + \frac{\epsilon}{2}\right\} = \int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} f(x)\, dx \approx \epsilon f(a)$$

به‌عبارت دیگر احتمال این که X درون بازه‌ای به طول ε حول نقطه a قرار گیرد تقریباً مساوی با $\varepsilon f(a)$ است . از این نتیجه می‌شود که $f(a)$ معیاری است برای چگونگی احتمال این که X نزدیک a باشد .

مثال ۲.۲.ب ـ فرض کنید X یک متغیّر تصادفی پیوسته است با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱ ـ مقدار C را به‌دست آورید

۲ ـ مطلوب است $P(X > 1)$

حل : چون f یک تابع چگالی احتمال است داریم

در نتیجه

$$C\int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = 1$$

یا

$$C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 1$$

یا

$$C = \tfrac{3}{8}$$

بنابراین

$$P\{X > 1\} = \int_1^{\infty} f(x)\, dx = \tfrac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\, dx = \tfrac{1}{2} \quad \blacksquare$$

۳- متغیّرهای تصادفی با توزیع توأم

غالباً در یک آزمایش نه‌تنها به‌توزیع احتمال متغیّرهای تصادفی خاص علاقه‌مندیم بلکه ارتباط بین دو یا چند متغیّر تصادفی نیز برایمان مهم است. برای مثال در یک آزمایش برای تعیین علل سرطان ممکن است به ارتباط بین متوسط سیگارهایی که روزانه یک فرد استعمال کرده و سنّی که فرد در آن مبتلا به سرطان شده است، علاقه‌مند باشیم. بطور مشابه یک مهندس ممکن است بخواهد ارتباط بین قدرت ماشین بُرش و ضخامت یک نمونه ورق فولاد رامشخص کند.

برای مشخص کردن ارتباط بین دو متغیّر تصادفی تابع توزیع احتمال توأم X و Y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(x, y) = P\{ X \leq x, Y \leq y\}$$

دانستن توزیع احتمال توأم دو متغیّر تصادفی، حداقل بطور نظری، این امکان را فراهم می‌سازد که هر عبارت احتمالی در مورد مقادیر X و Y را تعیین کنیم. برای مثال، توزیع احتمال X را که به آن F_x گوییم می‌توان از تابع توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{ X \leq x\} \\ &= P\{ X \leq x, Y \leq \infty\} \\ &= F(x, \infty) \end{aligned}$$

بطور مشابه تابع توزیع Y برابر است با

$$F_Y(y) = F(\infty, y)$$

در حالتی که X و Y هر دو متغیّرهای تصادفی گسسته و به ترتیب دارای مقادیر $x_1, x_2, \ldots$ و $y_1, y_2, \ldots$ هستند **تابع جرم احتمال توأم** آنها، را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$p(x_i, y_j) = P\{ X = x_i, Y = y_j\}$$

تابع جرم احتمال هر یک از متغیّرهای X و Y بسادگی از تابع جرم احتمال توأم با استدلال زیر به‌دست می‌آید. چون Y باید یکی از مقادیر y_j را بگیرد، پیشامد $\{X = x_i\}$ را می‌توان به‌صورت اجتماع پیشامدهای ناسازگار $\{X = x_i, Y = y_j\}$، روی همه jها، نوشت، یعنی

$$\{ X = x_i\} = \bigcup_j \{ X = x_i, Y = y_j\}$$

و بنابراین بااستفاده از اصل موضوع شماره ۳ احتمال داریم

$$P\{X = x_i\} = P\left(\bigcup_j \{X = x_i, Y = y_j\}\right)$$
$$= \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} \qquad (۱.۳.۲)$$
$$= \sum_j p(x_i, y_j)$$

بطورمشابه‌می‌توان $P\{Y = y_j\}$ راباجمع‌بستن $P(x_i, y_j)$ روی‌تمام مقادیر ممکن x_iبه‌دست آورد ، یعنی

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} \qquad (۲.۳.۲)$$
$$= \sum_i p(x_i, y_j)$$

بنابراین با مشخص بودن تابع جرم احتمال توأم همواره توابع جرم احتمال هریک از متغیّرها را می‌توان به‌دست آورد ، امّا باید توجه داشت که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست ، یعنی با دانستن $P(X = x_i)$ و $P(Y = y_j)$ نمی‌توان مقادیر $P\{X = x_i, Y = y_j\}$ را تعیین کرد .

مثال ۱.۳.۲الف ـ فرض کنید از بین تعدادی باتری شامل ۳ باتری نو، ۴ باتری استفاده شده اما قابل استفاده و ۵ باتری کهنه ، ۳ باتری بتصادف انتخاب می‌کنیم . اگر فرض کنیم X، Y به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ تعداد باتریهای سالم و تعداد باتریهای استفاده شده اما قابل استفاده در این انتخاب باشند ، آن‌گاه تابع جرم احتمال توأم X، Y، $p(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$ به‌صورت زیر است .

$$p(0,0) = \binom{5}{3}\Big/\binom{12}{3} = 10/220$$

$$p(0,1) = \binom{4}{1}\binom{5}{2}\Big/\binom{12}{3} = 40/220$$

$$p(0,2) = \binom{4}{2}\binom{5}{1}\Big/\binom{12}{3} = 30/220$$

$$p(0,3) = \binom{4}{3}\Big/\binom{12}{3} = 4/220$$

$$p(1,0) = \binom{3}{1}\binom{5}{2}\Big/\binom{12}{3} = 30/220$$

$$p(1,1) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\Big/\binom{12}{3} = 60/220$$

$$p(1,2) = \binom{3}{1}\binom{4}{2}\Big/\binom{12}{3} = 18/220$$

$$p(2,0) = \binom{3}{2}\binom{5}{1}\bigg/\binom{12}{3} = 15/220$$

$$p(2,1) = \binom{3}{2}\binom{4}{1}\bigg/\binom{12}{3} = 12/220$$

$$p(3,0) = \binom{3}{3}\bigg/\binom{12}{3} = 1/220$$

این احتمالات را می‌توان برای راحتی در جدولی به‌صورت زیر قرار داد :

جدول ۱.۳.۲

$P\{X = i, Y = j\}$

$i \backslash j$	0	1	2	3	جمع سطر $= P\{X = i\}$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
مجموع ستون $P\{Y = j\}$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	

خواننده باید توجّه داشته باشد که طبق معادلهٔ ۱.۳.۲، تابع جرم احتمال X با جمع بستن روی سطرها به‌دست می‌آید در حالی‌که تابع جرم احتمال Y براساس معادلهٔ ۲.۳.۲ با جمع بستن روی ستونها مشخص می‌شود . چون تابع جرم احتمال هر یک از متغیّرهای X و Y بدین صورت در حاشیه جدول ارائه می‌شوند ، اغلب آنها را توابع جرم احتمال حاشیه‌ایی X و Y می‌نامند . باید توجه داشت که برای بررسی صحت چنین جدولی‌بایدعناصرسطر حاشیه‌ای (یا ستون حاشیه‌ایی) را جمع کنیم و تحقیق کنیم‌که‌این‌مجموع مساوی ۱ است (چرابایدمجموع عناصرسطر (یاستون) حاشیه‌ایی‌مساوی ۱ باشد ؟) .

مثال ۳.۲.ب ـ فرض کنید که ۱۵ درصد خانواده‌ها در یک شهر معین دارای فرزند نیستند ، ۲۰ درصد دارای ۱ فرزند ، ۳۵ درصد دارای ۲ فرزند و ۳۰ درصد دارای ۳ فرزند می‌باشند. فرض کنید که در هر خانواده هر فرزند بطورمستقل و با احتمال مساوی می‌تواند پسر یا دختر باشد . اگر یک خانواده بتصادف از این شهر انتخاب شود آن‌گاه B، تعداد پسرها و G، تعداد دخترها در این خانواده دارای تابع جرم احتمال توأم زیرند .

جدول ۲.۳.۲

$P\{B=i, G=j\}$

$i \backslash j$	0	1	2	3	مجموع سطرها = $P\{B=i\}$
0	.15	.10	.0875	.0375	.3750
1	.10	.175	.1125	0	.3875
2	.0875	.1125	0	0	.2000
3	.0375	0	0	0	.0375
مجموع ستونها $P\{G=j\}$	.3750	.3875	.2000	.0375	

این احتمالات به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$P\{B=0, G=0\} = P$ {خانواده بدون فرزند باشد}
$= .15$

$P\{B=0, G=1\} = P$ {خانواده دارای یک دختر باشد و در مجموع ۱ فرزند}
$= P$ {۱ فرزند} P {۱ دختر | ۱ فرزند}
$= (.20)(\frac{1}{2}) = .1$

$P\{B=0, G=2\} = P$ {۲ دختر داشته باشد و در مجموع ۲ فرزند}
$= P$ {۲ فرزند} P {۲ دختر | ۲ فرزند}
$= (.35)(\frac{1}{2})^2 = .0875$

$P\{B=0, G=3\} = P$ {۳ دختر داشته باشد و در مجموع ۳ فرزند}
$= P$ {۳ فرزند} P {۳ دختر | ۳ فرزند}
$= (.30)(\frac{1}{2})^3 = .0375$

تحقیق در مورد بقیهٔ احتمالات جدول ۲.۳.۲ و نشان‌دادن این مطلب را که این خانواده با احتمال ۰/۶۲۵ دارای حداقل یک دختر است، به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

گوییم X و Y، توأماً پیوسته‌اند هرگاه تابعی مانند $f(x, y)$ که برای هر x، y تعریف شده است وجود داشته، باشد به قسمی که برای هر مجموعهٔ C از زوج اعداد حقیقی (یعنی C یک مجموعه در فضای ۲ بعدی است)،

$$P\{(X, Y) \in C\} = \iint_{(x,y)\in C} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (۳.۳.۲)$$

تابع $f(x, y)$ را **تابع چگالی احتمال توأم** X و Y گویند اگر A و B مجموعه‌های دلخواه از اعداد حقیقی

باشند آن‌گاه با تعریف $C = \{(x, y) \; ; \; x \in A, y \in B\}$ از تساوی ۳.۳.۲ می‌بینیم که

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \int_B \int_A f(x, y)\, dx\, dy \tag{۴.۳.۲}$$

چون

$$\begin{aligned} F(a, b) &= P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\} \\ &= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از طرفین (در نقاطی که مشتقات جزئی تعریف شده‌اند) نتیجه می‌شود که

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} F(a, b)$$

تعبیر دیگری از تابع چگالی توأم از معادلهٔ ۴.۳.۲ به صورت زیر به‌دست می‌آید .

$$\begin{aligned} P\{a < X < a + da, b < Y < b + db\} &= \int_{b}^{d+db} \int_{a}^{a+da} f(x, y)\, dx\, dy \\ &\approx f(a, b)\, da\, db \end{aligned}$$

که در آن da و db مقادیر کوچکند و $f(a, b)$ در a و b پیوسته است . بنابراین $f(a, b)$ معیاری است . برای چگونگی احتمال این‌که بردار (X, Y) نزدیک (a, b) باشد .

اگر X و Y تواماً پیوسته باشند آن‌گاه هریک از آنها نیز پیوسته است و تابع چگالی احتمال هریک را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد .

$$\begin{aligned} P\{X \in A\} &= P\{X \in A, Y \in (-\infty, \infty)\} \\ &= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_A f_X(x)\, dx \end{aligned} \tag{۵.۳.۲}$$

که در آن

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

تابع چگالی احتمال X است . بطور مشابه ، تابع چگالی احتمال Y برابر است با

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \tag{۶.۳.۲}$$

مثال ۳.۲.پ ـ فرض کنید تابع چگالی توأم به‌صورت زیر باشد .

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ ۱ ـ $P\{X > 1, Y < 1\}$ ، ۲ ـ $P\{X < Y\}$ و ۳ ـ $P(X < a)$

حل :

$$\begin{aligned} P\{X > 1, Y < 1\} &= \int_0^1 \int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\Big|_1^\infty\right)dy \\ &= e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}\,dy \\ &= e^{-1}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= \iint_{(x,y):\, x<y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y}(1 - e^{-y})\,dy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y}\,dy - \int_0^\infty 2e^{-3y}\,dy \\ &= 1 - \tfrac{2}{3} \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X < a\} &= \int_0^a \int_0^\infty 2e^{-2y}e^{-x}\,dy\,dx \\ &= \int_0^a e^{-x}\,dx \\ &= 1 - e^{-a} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

متغیّرهای تصادفی X و Y را مستقل گوییم اگر برای هر دو مجموعهٔ A و B از اعداد حقیقی

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \tag{۷.۳.۲}$$

به عبارت دیگر ، X و Y مستقلند هرگاه برای هر A و B پیشامدهای $E_A = \{X \in A\}$ و $F_B = \{Y \in B\}$ مستقل باشند .

می‌توان با استفاده از سه اصل موضوع احتمال نشان داد که تساوی ۷.۳.۲ نتیجه می‌شود اگر و فقط اگر برای هر a و b

$$P\{X \le a, Y \le b\} = P\{X \le a\}P\{Y \le b\}$$

بنابراین ، برحسب تابع توزیع توأم F، X و Y مستقلند اگر

$$F(a, b) = F_X(a)F_Y(b) \qquad \text{برای هر } a \text{ و } b$$

هنگامی که X و Y متغیّرهای تصادفی گسسته‌اند ، شرط استقلال در تساوی ۷.۳.۲ معادل است با

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \qquad \text{برای هر } x\text{، } y \tag{۸.۳.۲}$$

که در آن p_x و p_y توابع جرم احتمال X و Y هستند . معادل بودن آنها بدین دلیل نتیجه می‌شود که ، اگر تساوی ۷.۳.۲ برقرار باشد آن‌گاه با قراردادن $A = \{x\}$، $B = \{y\}$ تساوی ۸.۳.۲ به‌دست می‌آید . از طرفی اگر معادله ۸.۳.۲ برقرار باشد آن‌گاه برای هر دو مجموعه A و B

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p(x, y) \\ &= \sum_{y \in B} \sum_{x \in A} p_X(x)p_Y(y) \\ &= \sum_{y \in B} p_Y(y) \sum_{x \in A} p_X(x) \\ &= P\{Y \in B\}P\{X \in A\} \end{aligned}$$

و بنابراین تساوی ۷.۳.۲ به‌دست می‌آید .

در حالت پیوستگی توأم شرط استقلال معادل است با

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{برای هر } x\text{، } y$$

به‌عبارت غیردقیق X و Y مستقلند اگر دانستن مقدار یکی تأثیری روی توزیع دیگری نگذارد . متغیّرهای تصادفی را که مستقل نباشند ، وابسته می‌نامند .

مثال ۳.۲.ت ـ فرض کنید X و Y متغیّرهای تصادفی مستقل باشند با تابع چگالی احتمال مشترک

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

مطلوب است تابع چگالی احتمال متغیّر تصادفی X/Y

حل : ابتدا تابع توزین X/Y را به‌دست می‌آوریم

$$F_{X/Y}(a) = P\{X/Y \leq a\}$$

$$= \iint_{x/y \le a} f(x, y)\, dx\, dy$$
$$= \iint_{x/y \le a} e^{-x} e^{-y}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-x} e^{-y}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^\infty (1 - e^{-ay}) e^{-y}\, dy$$
$$= \left[-e^{-y} + \frac{e^{-(a+1)y}}{a+1} \right]\Bigg|_0^\infty$$
$$= 1 - \frac{1}{a+1}$$

با مشتق‌گیری از این مقدار تابع چگالی X/Y به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$f_{X/Y}(a) = 1/(a+1)^2, \quad 0 < a < \infty. \quad \blacksquare$$

همچنین می‌توانیم توزیع احتمال n متغیّر تصادفی را کاملاً مشابه روشی که برای $n = 2$ به‌کار بردیم تعریف‌کنیم. برای مثال تابع توزیع احتمال n متغیّر تصادفی $x_1, x_2, ..., x_n$، $F(a_1, a_2, ..., a_n)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = P\{X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_n \le a_n\}$$

اگر این متغیّرهای تصادفی گسسته باشند تابع جرم احتمال توأم آنها $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}$$

علاوه برآن، n متغیّر تصادفی را توأماً پیوسته گوییم اگر تابعی مانند $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ که آن را تابع چگالی احتمال توأم نامیم وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر مجموعه C در فضای n بعدی

$$P\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C\} = \iint \cdots \int_{(x_1, \ldots, x_n) \in C} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

در حالت خاص، برای هر n مجموعهٔ $A_1, A_2, ..., A_n$ از اعداد حقیقی

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\}$$
$$= \int_{A_n} \int_{A_{n-1}} \cdots \int_{A_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

مفهوم استقلال نیز می‌تواند برای بیشتر از دو متغیّر تصادفی تعریف شود. بطورکلی n متغیّر تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ را مستقل گوییم اگر، برای هر مجموعه‌های $A_1, A_2, ..., A_n$ از اعداد حقیقی،

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in A_i\}$$

مانند قبل می‌توان نشان داد که این شرط معادل است با

$$P\{X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_n \le a_n\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_1 \le a_i\} \qquad \text{برای هر } a_1, a_2, \ldots, a_n$$

در خاتمه، یک دسته نامتناهی از متغیّرهای تصادفی را مستقل گوییم اگر هر زیر دستهٔ متناهی از آنها مستقل باشند.

مثال ۲.۳.ث ـ فرض کنید که تغییرات روزانهٔ متوالی قیمت یک کالای مفروض متغیّرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع جرم احتمال زیر باشند.

$$P\{\text{تغییر روزانه } i \text{ باشد}\} = \begin{cases} .05 & -3 \\ .10 & -2 \\ .20 & -1 \\ .30 & 0 \\ .20 & 1 \\ .10 & 2 \\ .05 & 3 \end{cases}$$

در این صورت احتمال این‌که قیمت کالاها در ۳ روز آینده دارای تغییرات متوالی 1، 2، 0 باشد برابر است با

$$P\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0\} = (.20)(.10)(.30) = .006$$

که در آن فرض کرده‌ایم X_i نشان‌دهندهٔ تغییر در روز iام است. ■

۱.۳ توزیعهای شرطی

ارتباط بین دو متغیّر تصادفی رااغلب می‌توان با در نظرگرفتن توزیع شرطی یکی با فرض معلوم بودن دیگری مشخص کرد.

همان‌طور که دیدیم برای هر دو پیشامد E و F، احتمال شرطی E با فرض F، که در آن، $P(F) > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

در این صورت ، اگر X و Y دو متغیّر تصادفی باشند طبیعی است که تابع جرم احتمال شرطی X با فرض $Y = y$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\{X = x | Y = y\} \\ &= \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{Y = y\}} \\ &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

به‌ازای هر مقدار y بطوری که $P_Y(y) > 0$.

مثال ۲.۳.ج ـ اگر در مثال ۲.۳.ب بدانیم که خانوادهٔ انتخاب شده دارای ۱ دختر است ، مطلوب است محاسبهٔ تابع جرم احتمال شرطی تعداد پسرها در این خانواده .

حل : ابتدا با استفاده از جدول ۲.۳.۲ توجّه داریم که

$$P\{G = 1\} = .3875$$

بنابراین

$$P\{B = 0|G = 1\} = \frac{P\{B = 0, G = 1\}}{P\{G = 1\}} = \frac{.10}{.3875} = 8/31$$

$$P\{B = 1|G = 1\} = \frac{P\{B = 1, G = 1\}}{P\{G = 1\}} = \frac{.175}{.3875} = 14/31$$

$$P\{B = 2|G = 1\} = \frac{P\{B = 2, G = 1\}}{P\{G = 1\}} = \frac{.1125}{.3875} = 9/31$$

$$P\{B = 3|G = 1\} = \frac{P\{B = 3, G = 1\}}{P\{G = 1\}} = 0$$

بنابراین با فرض داشتن ۱ دختر ، شانس ۲۳ در ۳۱ وجود دارد که این خانواده دارای حداقل یک پسر نیز باشد . ■

مثال ۲.۳.چ ـ فرض کنید که تابع جرم احتمال X و Y ، $p(x, y)$ به‌صورت زیر باشد

$$p(0,0) = .4, \qquad p(0,1) = .2, \qquad p(1,0) = .1, \qquad p(1,1) = .3.$$

مطلوب است محاسبهٔ تابع جرم احتمال X با فرض $Y = 1$.

حل : ابتدا توجه داریم که

$$P\{Y=1\} = \sum_x p(x,1) = p(0,1) + p(1,1) = .5$$

بنابراین

$$P\{X=0|Y=1\} = \frac{p(0,1)}{P\{Y=1\}} = 2/5$$

$$P\{X=1|Y=1\} = \frac{p(1,1)}{P\{Y=1\}} = 3/5 \quad \blacksquare$$

اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال $f(x,y)$ باشد آن‌گاه‌به‌ازای هرمقدار y که $f_Y(y) > 0$، تابع چگالی احتمال شرطی X با فرض $Y = y$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

به‌عنوان توضیحی برای این تعریف، سمت چپ را در dx و سمت راست را در $(dx\, dy)/dy$ ضرب می‌کنیم . در این صورت به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y)\, dx &= \frac{f(x,y)\, dx\, dy}{f_Y(y)\, dy} \\ &\approx \frac{P\{x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy\}}{P\{y \le Y \le y+dy\}} \\ &= P\{x \le X \le x+dy | y \le Y \le y+dy\} \end{aligned}$$

به‌عبارت‌دیگر ، برای‌مقادیرکوچک dx و dy، $f_{X|Y}(x|y)\, dx$ نشان‌دهندهٔ این‌احتمال‌شرطی است که X بین x و $x + dx$ باشد با فرض این که Y بین y و $y + dy$ است .

با استفاده از چگالیهای شرطی می‌توانیم احتمالات شرطی پیشامدهای مربوط به‌یک متغیر تصادفی را هنگامی که مقدار متغیّر تصادفی دیگر را می‌دانیم ، محاسبه کنیم . یعنی ، اگر X و Y تو أماً پیوسته باشند آن‌گاه برای هر مجموعهٔ A

$$P\{X \in A | Y = y\} = \int_A f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

مثال ۳.۲ ح ـ فرض کنید چگالی تو أم X، Y برابر است با

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{در نقاط دیگر} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه چگالی X با فرض این که $Y = y$، که در آن $0 < y < 1$.

حل : برای $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ داریم

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx} \\ &= \frac{x(2 - x - y)}{\int_0^1 x(2 - x - y)\, dx} \\ &= \frac{x(2 - x \cdots y)}{\frac{2}{3} - y/2} \\ &= \frac{6x(2 - x - y)}{4 - 3y} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۴- امید ریاضی

یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه احتمال مفهوم امید ریاضی یک متغیر تصادفی است. اگر X یک متغیّر تصادفی گسسته با مقادیر ممکن $x_1, x_2, \ldots$ باشد ، آن‌گاه **امید ریاضی** یا **مقدار متوسط** X که آن‌را با $E[X]$ نمایش می‌دهیم به‌صورت

$$E[X] = \sum x_i P\{X = x_i\}$$

تعریف می‌شود . بطور خلاصه امید ریاضی X میانگین موزونی از مقادیر ممکن X است که وزن هر مقدار مساوی است با احتمالی که X آن مقدار را می‌گیرد . برای مثال ، اگر تابع جرم احتمال X برابر باشد با

$$p(0) = \tfrac{1}{2} = p(1)$$

آن‌گاه

$$E[X] = 0(\tfrac{1}{2}) + 1(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

که دقیقاً میانگین معمولی دو مقدار 0 و 1 است که X می‌تواند بگیرد . از طرف دیگر اگر

$$p(0) = \tfrac{1}{3}, \qquad p(1) = \tfrac{2}{3}$$

آن‌گاه

$$E[X] = 0(\tfrac{1}{3}) + 1(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}$$

و این میانگین موزون ۲ مقدار 0 و 1 است که در آن مقدار ۱ دارای وزنی ۲ برابر مقدار 0 است زیرا $p(1) = 2p(0)$.

انگیزهٔ دیگری که باعث تعریف امید ریاضی می‌شود تعبیر فراوانی احتمالات است. در این تعبیر فرض می‌شود که اگر یک دنبالهٔ نامتناهی از آزمایشها انجام شود آن‌گاه برای هر پیشامد E، نسبت دفعاتی که E رخ می‌دهد برابر است با $P(E)$. اکنون یک متغیّر تصادفی مانند X را در نظر بگیرید که یکی از مقادیر $x_1, x_2, ..., x_n$ را به‌ترتیب با احتمالات $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$ می‌گیرد و فرض کنید X نشان‌دهنده مقدار بُرد در یک بازی شانسی باشد. در این صورت با احتمال $p(x_i)$ باید مقدار بُرد x_i باشد، $i = 1, ..., n$. اکنون با استفاده از تعبیر فراوانی نتیجه می‌شود که اگر این بازی متوالیاً انجام شود آن‌گاه نسبت دفعاتی که مقدار بُرد x_i است برابر با $p(x_i)$ خواهد بود. چون به ازای هر i، $i = 1, ..., n$ چنین است، نتیجه می‌شود که متوسط بُرد در این بازی برابر است با

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = E[X]$$

(برای روشنتر شدن این استدلال، فرض کنید که N بازی انجام شود که در آن N یک عدد خیلی بزرگ است بنابراین تقریباً در $Np(x_i)$ دفعه از این بازیها باید مقدار بُرد x_i باشد و در نتیجه مجموع بُرد در این N بازی برابر است با

$$\sum_{i=1}^{n} x_i N p(x_i)$$

و بنابراین متوسط بُرد در این بازیها با صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i N p(x_i)}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = E[X].)$$

مثال ۴.۲.الف ـ اگر X برآمد حاصل از پرتاب یک تاس سالم باشد، $E(X)$ را پیدا کنید.

حل: چون $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$ داریم،

$$E[X] = 1(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{1}{6}) + 3(\tfrac{1}{6}) + 4(\tfrac{1}{6}) + 5(\tfrac{1}{6}) + 6(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{7}{2}$$

باید توجه داشت که در این مثال امید ریاضی X از مقادیر ممکنی که X می‌گیرد نیست. (یعنی پرتاب یک

تاس نمی‌تواند دارای برآمد 7/2 باشد) . بنابراین اگرچه $E(X)$ را امید X می‌نامیم ، امّا نباید به‌عنوان مقداری که برای X انتظار داریم تعبیر شود . بلکه در واقع مقدار متوسط X در یک تعداد زیاد از تکرار آزمایش است . یعنی ، اگر یک تاس سالم را متوالیاً پرتاب کنیم آن‌گاه بعد از تعداد زیادی پرتاب ، متوسط برآمدها تقریباً مساوی 7/2 خواهد بود . (خواننده علاقه‌مند می‌تواند به‌عنوان یک آزمایش این موضوع را نشان دهد) . ■

مثال ۲.۴.ب ـ اگر I یک متغیّر تصادفی نشانگر برای پیشامد A باشد ، یعنی ، اگر

$$I = \begin{cases} 1 & \text{رخ دهد } A \\ 0 & \text{رخ ندهد } A \end{cases}$$

آن‌گاه

$$E[I] = 1P(A) + 0P(A^c) = P(A)$$

بنابراین ، امید ریاضی متغیّر تصادفی نشانگر برای پیشامد A مساوی است با احتمال این‌که A رخ دهد . ■

مثال ۲.۴.پ ـ فرض کنید X یک متغیّر تصادفی است . می‌خواهیم بدانیم در این پیغام که $X = x$ است چقدر اطلاعات وجود دارد ؟ برای مشخص کردن این مطلب ابتدا توجه داریم که میزان اطلاعات در این پیغام ، بستگی به‌مقدار این احتمال که X مساوی x شود دارد . به‌علاوه ، منطقی به‌نظر می‌رسد که این پیغام حاوی اطلاعات بیشتری است ، اگر تساوی $X = x$ غیرمحتملتر باشد . برای مثال اگر X نشان‌دهندهٔ مجموع دو تاس باشد آن‌گاه به‌نظر می‌رسد ، در این پیغام که X مساوی ۱۲ است ، اطلاعات بیشتری نسبت به‌این پیغام که X مساوی ۷ است ، وجود دارد . زیرا اولین پیشامد دارای احتمال 1/36 و دومین پیشامد دارای احتمال 1/6 است .

فرض کنید $I(p)$ میزان اطلاع در این پیغام است که پیشامدی با احتمال p رخ داده است . روشن است که $I(p)$ باید یک تابع نزولی و نامنفی از p باشد . برای تعیین شکل آن ، فرض کنید X و Y متغیّرهای تصادفی مستقلند و فرض کنید $P\{X = x\} = p$ و $P\{Y = y\} = q$. چقدر اطلاعات در این پیغام که X مساوی x و Y مساوی y است وجود دارد ؟ برای جواب به‌این سؤال ، ابتدا توجه می‌کنیم که میزان اطلاعات در این عبارت که X مساوی x است ، برابر $I(p)$ است . همچنین چون دانستن این واقعیت که X مساوی x است تأثیری روی احتمال $Y = y$ ندارد (زیرا X و Y مستقلند) منطقی است که میزان اطلاعات اضافی دراین پیغام که Y مساوی y است برابر $I(q)$ باشد . بنابراین میزان اطلاعات دراین پیغام که X مساوی x و Y مساوی y است برابربا $I(p) + I(q)$ است . امّا ازطرفی داریم

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\} = pq$$

که نتیجه می‌دهد میزان اطلاعات در این پیغام که $X = x$ و $Y = y$ برابر با pq خواهد بود . بنابراین ، تابع I باید در شرط زیر صدق کند

$$I(pq) = I(p) + I(q)$$

حال اگر تابع G را به‌صورت

$$G(p) = I(2^{-p})$$

تعریف کنیم آن‌گاه . با توجه به مطالب بالا می‌بینیم که

$$\begin{aligned} G(p+q) &= I(2^{-(p+q)}) \\ &= I(2^{-p}2^{-q}) \\ &= I(2^{-p}) + I(2^{-q}) \\ &= G(p) + G(q) \end{aligned}$$

امّا می‌توان نشان داد که تنها توابع (یکنوای) G که در روابط تابعی فوق صدق می‌کنند توابعی به‌فرم

$$G(p) = cp$$

هستند که در آن c یک مقدار ثابت است . بنابراین باید داشته باشیم

$$I(2^{-p}) = cp$$

یا با فرض $q = 2^{-p}$ و به‌ازای ثابت مثبت c

$$I(q) = -c\log_2(q)$$

معمولاً متداول است که قرار می‌دهند $c = 1$ و به‌آن اطلاعات اندازه‌گیری شده در واحد بیت (مخفف رقم دو دویی) می‌گویند .

اکنون فرض کنید X یک متغیّر تصادفی است که باید یکی از مقادیر $x_1, \ldots, x_n$ را به ترتیب با احتمالات $p_1, \ldots, p_n$ بگیرد . چون $-\log(pi)$ نشان‌دهندهٔ میزان اطلاع در پیغام $X = x$، می‌باشد ، پس هنگامی که مقداری از X مشخص می‌شود ، متوسط میزان اطلاعاتی که به‌دست می‌آید برابر است با

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2(p_i)$$

کمیت $H(X)$ را در نظریه اطلاع به‌عنوان آنتروپی متغیّر تصادفی X می‌شناسند . ■

همچنین می‌توانیم امید ریاضی یک متغیّر تصادفی پیوسته را تعریف کنیم . فرض کنید که X یک متغیّر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f باشد . چون برای dx کوچک

$$f(x)\,dx \approx P\{x < X < x + dx\}$$

نتیجه می‌شود که یک میانگین موزون از تمام مقادیر ممکن X که در آن وزن هر x مساوی است با احتمال این که X نزدیک x باشد با انتگرال‌گیری از $xf(x)$ روی تمام مقادیر x به‌دست می‌آید . بنابراین منطقی است که امید ریاضی X را به‌صورت

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

تعریف کنیم .

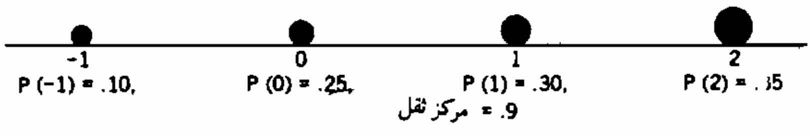
مثال ۲.۴.ت ـ فرض کنید منتظر پیغامی در حدود ساعت ۵ بعداز ظهر هستید و به تجربه می‌دانید ، تعداد ساعاتی که بعداز ساعت ۵ منتظر می‌مانید تا پیغام برسد ، یک متغیّر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است .

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1.5} & 0 < x < 1.5 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

امید ریاضی مدت زمان بعداز ۵ بعداز ظهر تا پیغام دریافت شود برابر است با

$$E[X] = \int_0^{1.5} \frac{x}{1.5}\,dx = .75$$

بنابراین بطور متوسط باید ۳ ربع ساعت منتظر باشید .



شکل ۲.۴.۱

تبصره

الف) مفهوم امید ریاضی مانند مفهوم مرکز ثقل یک جرم است ، یک متغیّر تصادفی گسسته X را با

تابع جرم احتمال $p(x_i)$، $i \geq 1$ در نظر بگیرید . اگر میله‌ای سبک را در نظر بگیریم که وزنه‌هایی به جرم $p(x_i)$، $i \geq 1$ در نقاط x_i از آن قرار گرفته‌اند آن‌گاه نقطه‌ای که میله در آن به‌حالت تعادل در می‌آید مرکز ثقل میله است . (شکل ۱.۴.۲ را ببینید) . اکنون برای خواننده‌هایی که با مکانیک مقدماتی آشنا هستند بسیار ساده است که نشان دهند این نقطه در $E(X)$[1] است .

ب) $E(X)$ دارای واحدی یکسان با واحد اندازه‌گیری X است .

۵- خواص امید ریاضی

اکنون فرض کنید که متغیّر تصادفی X و توزیع احتمال آن (یعنی تابع جرم احتمال آن در حالت گسسته یا تابع چگالی احتمال آن در حالت پیوسته) مفروضند . همچنین فرض کنید می‌خواهیم امید ریاضی تابعی از X، مثلاً $g(X)$، را محاسبه کنیم . چگونه باید این کار را انجام داد ؟ یک روش بدین صورت است که چون $g(X)$ خود یک متغیّر تصادفی است ، باید دارای یک توزیع احتمال باشد که با معلوم‌بودن توزیع X قابل محاسبه است . هنگامی که توزیع $g(X)$ را به‌دست آوردیم می‌توانیم $E[g(X)]$ را با استفاده از تعریف امید ریاضی به‌دست آوریم .

مثال ۵.۲.الف ـ فرض کنید X دارای تابع جرم احتمال زیر باشد .

$$p(0) = .2, \qquad p(1) = .5, \qquad p(2) = .3$$

مطلوب است محاسبه $E[X^2]$.

حل : فرض کنید $Y = X^2$. در این صورت Y یک متغیّر تصادفی است که یکی از مقادیر $0^2, 1^2, 2^2$ را به ترتیب با احتمالات

$$p_Y(0) = P\{Y = 0^2\} = .2$$
$$p_Y(1) = P\{Y = 1^2\} = .5$$
$$p_Y(4) = P\{Y = 2^2\} = .3$$

می‌گیرد . بنابراین

$$E[X^2] = E[Y] = 0(.2) + 1(.5) + 4(.3) = 1.7 \quad \blacksquare$$

---

۱ - برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم که مجموع گشتاورها حول نقطهٔ $E(X)$ مساوی صفر است . یعنی باید نشان دهیم ، $\Sigma_i (x_i - E[X]) P(x_i) = 0$ که نشان دادن آن ساده است .

مثال ۵.۲.ب ـ مدت زمان لازم برحسب ساعت ، برای انجام یک تجزیه الکتریکی در کارخانه‌ای معین یک متغیّر تصادفی است ـ که آن‌را X می‌نامیم ـ با تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

اگر هزینهٔ لازم برای انجام یک تجزیه در مدت x برابر با x^3 باشد ، متوسط هزینه چنین تجزیه‌ای چقدر است ؟

حل : فرض کنید $Y = X^3$ نشان‌دهندهٔ هزینه‌باشد . ابتدا تابع توزیع Y را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم (برای $0 \le a \le 1$) .

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \le a\} \\ &= P\{X^3 \le a\} \\ &= P\{X \le a^{1/3}\} \\ &= \int_0^{a^{1/3}} dx \\ &= a^{1/3} \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از $F_Y(a)$، تابع چگالی Y را به‌دست می‌آوردیم

$$f_Y(a) = \tfrac{1}{3} a^{-2/3}, \qquad 0 \le a < 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E[X^3] = E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} a f_Y(a)\, da \\ &= \int_0^1 a \tfrac{1}{3} a^{-2/3}\, da \\ &= \tfrac{1}{3} \int_0^1 a^{1/3}\, da \\ &= \tfrac{1}{3} \tfrac{3}{4} a^{4/3} \Big|_0^1 \\ &= \tfrac{1}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

در حالی که روش فوق ، بطور نظری ، همواره امکان محاسبه امید ریاضی هر تابعی از X را با معلوم بودن توزیع X فراهم می‌سازد ، امّا روش ساده برای انجام این کار وجود دارد . برای مثال فرض کنید که می‌خواهیم امید ریاضی $g(X)$ را محاسبه کنیم . چون $g(X)$، هنگامی که $X = x$ مقدار $g(x)$ را می‌گیرد ، بطور شهودی به‌نظر می‌رسد که $E[g(x)]$ باید میانگین موزونی از مقادیر $g(x)$ باشد که برای x مفروض ، وزن $g(x)$ مساوی است با احتمال (یا چگالی احتمال در حالت پیوسته) این که X

مساوی x شود . در واقع می‌توان نشان داد که عبارت اخیر درست است و بنابراین حکم زیر را داریم :

حکم ۲.۵.۱ امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی

الف) اگر X یک متغیّر تصادفی با تابع جرم احتمال $p(x)$ باشد آن‌گاه برای هر تابع حقیقی مقدار g

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$$

ب) اگر X یک متغیّر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد آن‌گاه برای هر تابع حقیقی مقدار g

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

مثال ۲.۵.پ ـ با به‌کاربردن حکم ۲.۵.۱ برای ۲.۵ الف به‌دست می‌آوریم

$$E[X^2] = 0^2(0.2) + (1^2)(0.5) + (2^2)(0.3) = 1.7$$

که با نتیجه به‌دست آمده از مثال ۲.۵ الف یکسان است .

مثال ۲.۵.ت ـ استفاده از حکم ۲.۵.۱ در مثال ۲.۵.ب نتیجه می‌دهد

$$E[X^3] = \int_0^1 x^3\,dx \qquad (\text{زیرا } f(x) = 1 \text{، } 0 \le x < 1)$$

$$= \tfrac{1}{4} \quad ■$$

یک نتیجه فوری از حکم ۲.۵.۱ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

نتیجه ۲.۵.۲ ـ اگر a و b ثابت باشند آن‌گاه

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

اثبات در حالت گسسته

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_x (ax + b)p(x) \\ &= a\sum_x xp(x) + b\sum_x p(x) \\ &= aE[X] + b \end{aligned}$$

در حالت پیوسته

$$
\begin{aligned}
E[aX+b] &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\,dx \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx \\
&= aE[X]+b \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

اگر در نتیجه ۲.۵.۲ قرار دهیم $a = 0$، می‌بینیم که

$$E[b] = b$$

یعنی امید ریاضی یک مقدار ثابت مساوی با مقدار آن است. (آیا این مطلب شهودی است؟)
همچنین اگر قرار دهیم $b = 0$ آن‌گاه

$$E[aX] = aE[X]$$

به‌عبارت دیگر امید ریاضی یک مقدا ثابت ضربدر یک متغیّر تصادفی مساوی است با مقدار ثابت ضربدرامید ریاضی متغیّر تصادفی. امید ریاضی متغیّر تصادفی X، $E[X]$ را **میانگین یا گشتاور مرتبهٔ اوّل** X نیز می‌نامند. کمیّت $E[X^n]$، $n \geq 1$ را گشتاور مرتبه nام X می‌نامند. باتوجّه به حکم ۱.۵.۲ داریم

$$
E[X^n] = \begin{cases} \sum\limits_{x} x^n p(x) & \text{گسسته باشد } X \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx & \text{پیوسته باشد } X \end{cases}
$$

حالت دوبعدی حکم ۱.۵.۲ بیان می‌کند که اگر X و Y متغیّرهای تصادفی دلخواه و g تابعی از این دو متغیّر باشد،
آن‌گاه

$$E[g(X,Y)] = \sum_{y}\sum_{x} g(x,y)p(x,y) \qquad \text{در حالت گسسته}$$

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{در حالت پیوسته}$$

برای مثال، اگر $g(X, Y) = X + Y$ آن‌گاه در حالت پیوسته

$$
\begin{aligned}
E[X+Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$$
$$= E[X] + E[Y]$$

نتیجه‌ای مشابه می‌توان برای حالت گسسته به‌دست آورد و در واقع برای هر متغیّر تصادفی X و Y

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \tag{۱.۵.۲}$$

با به‌کاربردن مکرّر معادله ۱.۵.۲ می‌توان نشان داد که امید ریاضی مجموع هر مقدار متغیّر تصادفی مساوی با مجموع امید ریاضی‌های تک تک متغیرهاست. برای مثال

$$E[X+Y+Z] = E[(X+Y)+Z]$$
$$= E[X+Y] + E[Z] \quad \text{از معادله ۱.۵.۲}$$
$$= E[X] + E[Y] + E[Z] \quad \text{مجدداً از معادله ۱.۵.۲}$$

و بطور کلی، به ازای هر n

$$E[X_1 + X_2 \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] \tag{۲.۵.۲}$$

معادلهٔ ۲.۵.۲ یک فرمول بسیار مفید است که اکنون فواید آن را با چند مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۳.۵.۲ث ـ یک شرکت ساختمانی اخیراً پیشنهادهایی برای گرفتن ۳ کار به‌ترتیب با قیمتهای ۱۰، ۲۰، ۴۰ هزار دلار (برحسب سود) فرستاده است. اگر احتمال گرفتن این کارها به‌ترتیب .2، .8 و .3 باشد متوسط کل سود شرکت چقدر خواهد بود؟

حل: فرض کنید X_i، $i = 1, 2, 3$ نشان‌دهندهٔ سود شرکت از کار iام باشد، در این صورت

$$\text{کل سود} = X_1 + X_2 + X_3$$

و بنابراین

$$E[\text{کل سود}] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]$$

اکنون

$$E[X_1] = 10(.2) + 0(.8) = 2$$
$$E[X_2] = 20(.8) + 0(.2) = 16$$
$$E[X_3] = 40(.3) + 0(.7) = 12$$

و در نتیجه امید ریاضی کل سود شرکت ۳۰ هزار دلار است . ■

مثال ۲.۵.ج ـ یک منشی N نامه را همراه با پاکتهای مربوطه تایپ کرده است . اگر ترتیب پاکتها را به‌هم زند و سپس نامه ها را به‌روش کاملاً تصادفی در آنها توزیع کند ، (یعنی هر نامه احتمال مساوی برای قرار گرفتن در هر پاکت داشته باشد) امید ریاضی تعداد نامه‌هایی که در پاکت مربوط به خود قرار می‌گیرند چقدر است ؟

حل : فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد نامه‌هایی است که در پاکت مربوط به‌خود قرار می‌گیرند . می‌توان X را به‌صورت زیر نوشت

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{امین نامه در پاکت خود قرار گیرد } i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون ، چون i امین نامه با احتمال مساوی در هر N پاکت قرار می‌گیرد ، داریم

$$P\{X_i = 1\} = P\{\text{امین نامه در پاکت مربوط به‌خود قرار گیرد } i\} = 1/N$$

و بنابراین

$$E[X_i] = 1P\{X_i = 1\} + 0P\{X_i = 0\} = 1/N$$

در نتیجه ، از معادله ۲.۵.۲ به‌دست می‌آوریم

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_N] = \left(\frac{1}{N}\right)N = 1$$

پس ، صرف‌نظر از تعداد نامه‌ها ، بطور متوسط دقیقاً یکی از نامه‌ها در پاکت خود قرار می‌گیرد . ■

مثال ۲.۵.چ ـ فرض کنید ۲۰ نوع مختلف کوپن وجود دارد و فرض کنید هر بار که شخص کوپنی را به‌دست می‌آورد برای هریک از انواع کوپنها دارای احتمال مساوی باشد . متوسط تعداد کوپنهای متفاوت در یک مجموعه ۱۰ کوپنی که شخص به‌دست می‌آورد چقدر است ؟

حل : فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد کوپنهای متفاوت در مجموعه‌ای شامل ۱۰ کوپن باشد ، اگر

قرار دهیم

$$X = X_1 + \cdots + X_{20}$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{کوپن نوع } i \text{ حداقل یک بار در بین ۱۰ کوپن قرار گیرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{X_i = 1\} \\ &= P\{\text{کوپن نوع } i \text{ حداقل یک بار در بین ۱۰ کوپن قرار گیرد}\} \\ &= 1 - P\{\text{کوپن نوع } i \text{ در بین ۱۰ کوپن قرار نگیرد}\} \\ &= 1 - \left(\tfrac{19}{20}\right)^{10} \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر بدین دلیل نتیجه می‌شود که هر ۱۰ کوپن (بطور مستقل) با احتمال 19/20 از نوع i نیستند.

بنابراین

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_{20}] = 20\left[1 - \left(\tfrac{19}{20}\right)^{10}\right] = 8.025 \quad \blacksquare$$

۶- واریانس

متغیّر تصادفی X با تابع توزیع احتمال آن مفروض است. بسیار مفید است اگر بتوان خواص اساسی توزیع را در بعضی اندازه‌های مناسب و تعریف شده خلاصه کرد. یکی از چنین اندازه‌هایی، امید ریاضی X، $E[X]$ بود. امّا، $E[X]$ با این که میانگین موزون از مقادیر ممکن X است، ولی هیچ چیزی در مورد تغییرات یا پراکندگی این مقادیر به‌دست نمی‌دهد، برای مثال سه متغیّر تصادفی W، Y و Z را با توابع جرم آنها به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$W = 0 \qquad \text{با احتمال } 1$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} -100 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ 100 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱

هر ۳ متغیّر دارای امید ریاضی یکسان و برابر با صفرند. اما مقادیر ممکن Y دارای پراکندگی بیشتری از W است (که مقدار آن ثابت است) و مقادیر ممکن Z دارای پراکندگی بیشتری از مقادیر Y است.

چون انتظار داریم مقادیر X حول $E[X]$ باشند، روشی منطقی برای اندازه‌گیری تغییرات ممکن X این است که ببینیم X، بطور متوسط چقدر از میانگین خود دور است، یک روش ممکن برای به دست آوردن این مقدار در نظر گرفتن کمیّت $E[|X-\mu|]$ است که در آن $\mu = E[X]$ و $|X-\mu|$ نشان‌دهندهٔ قدر مطلق $X-\mu$ می‌باشد. امّا از نظر ریاضی کار کردن با این کمیت ممکن است راحت نباشد و بدین دلیل معمولاً کمیتی را در نظر می‌گیرند که کار کردن با آن راحت‌تر است و آن، امید ریاضی توان دوم اختلاف بین X و میانگین آن است که آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ـ اگر X یک متغیّر تصادفی با میانگین μ باشد آن‌گاه واریانس X که آن‌را با $\mathrm{Var}(X)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

یک فرمول دیگر برای $\mathrm{Var}(X)$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E\left[(X-\mu)^2\right]\\ &= E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]\\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2]\\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2\\ &= E[X^2] - \mu^2\end{aligned}$$

یعنی

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \qquad (۲.۶.۱)$$

بطور خلاصه واریانس X مساوی است با امید ریاضی توان دوم X منهای توان دوم امید ریاضی X. در عمل غالباً برای محاسبه $\mathrm{Var}(X)$ این روش ساده‌تر است.

مثال ۲.۶.الف ـ مطلوب است محاسبهٔ $\mathrm{Var}(X)$ هرگاه X برآمد حاصل از پرتاب یک تاس سالم باشد.

حل: چون

$$P\{X=i\} = 1/6,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

داریم

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{6} i^2 P\{X=i\}$$
$$= 1^2(\tfrac{1}{6}) + 2^2(\tfrac{1}{6}) + 3^2(\tfrac{1}{6}) + 4^2(\tfrac{1}{6}) + 5^2(\tfrac{1}{6}) + 6^2(\tfrac{1}{6})$$
$$= \tfrac{91}{6}$$

همان‌طور که در مثال ۲.۴.الف دیدیم ، $E[X] = 7/2$ بنابراین از معادله ۲.۶.۱ به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \tfrac{91}{6} - \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{35}{12} \quad \blacksquare$$

مثال ۲.۶.ب ـ واریانس متغیّر تصادفی نشانگر . اگر برای پیشامد A تعریف کنیم

$$I = \begin{cases} 1 & \text{پیشامد رخ دهد} \\ 0 & \text{پیشامد رخ ندهد} \end{cases}$$

آن‌گاه

$$\mathrm{Var}(I) = E[I^2] - (E[I])^2$$
$$= E[I] - (E[I])^2 \qquad \text{زیرا (چون } 1^2 = 1 \text{ and } 0^2 = 0\text{)}\ I^2 = I$$
$$= E[I](1 - E[I])$$
$$= P(A)[1 - P(A)] \qquad \text{زیرا از مثال ۲.۴.ب ،}\ E[I] = P(A)$$

یک ویژگی مهم واریانسها این است که برای هر ثابت a و b

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X) \tag{۲.۶.۲}$$

برای اثبات معادلهٔ ۲.۶.۲ فرض کنید $\mu = E[X]$ و خاطرنشان‌می‌کنیم‌که $E[aX + b] = a\mu + b$.
بنابراین با استفاده از تعریف واریانس داریم

$$\mathrm{Var}(aX + b) = E\left[(aX + b - E[aX + b])^2\right]$$
$$= E\left[(aX + b - a\mu - b)^2\right]$$
$$= E\left[(aX - a\mu)^2\right]$$
$$= E\left[a^2(X - \mu)^2\right]$$
$$= a^2 E\left[(X - \mu)^2\right]$$
$$= a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

معادله ۲.۶.۲ به‌ازای بعضی مقادیر خاص a و b دارای نتایج جالبی است . برای مثال با قراردادن $a = 0$ در معادله ۲.۶.۲ به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{Var}(b) = 0$$

یعنی ، واریانس یک مقدار ثابت صفر است (آیا این شهودی است ؟) . بطور مشابه با قرار دادن $a = 1$ به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X)$$

یعنی واریانس یک مقادر ثابت به‌اضافه یک متغیّر تصادفی مساوی است با واریانس متغیّر تصادفی (آیا این شهودی است ؟ در مورد آن فکر کنید) . نهایةً با قرار دادن $b = 0$ داریم

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

کمیت $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ را **انحراف معیار** X می‌نامند . انحراف معیار دارای واحدی یکسان با واحد اندازه‌گیری X است .

تبصره

همانند میانگین که مرکز ثقل جرم می‌باشد ، واریانس در اصطلاح مکانیک نشان‌دهندهٔ گشتاور اینرسی است .

۷- واریانس و کوواریانس مجموع متغیّرهای تصادفی

در بخش ۵ نشان دادیم که امید ریاضی مجموع متغیّرهای تصادفی مساوی با مجموع امید ریاضیهای آنهاست . نتیجه‌ای مشابه برای واریانسها برقرار است امّا نه در حالت کلّی . زیرا

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X + X) &= \mathrm{Var}(2X)\\ &= 2^2\,\mathrm{Var}(X)\\ &= 4\,\mathrm{Var}(X)\\ &\neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

امّا یک حالت مهم وجود دارد که واریانس مجموع متغیّرهای تصادفی مساوی است با مجموع واریانسها ، و آن هنگامی است که متغیّرها مستقل باشند . قبل از اثبات آن لازم است مفهوم

کوواریانس دو متغیّر تصادفی را تعریف کنیم

تعریف ـ کوواریانس دو متغیّر تصادفی X و Y ، که با $\text{Cov}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right]$$

که در آن μ_x و μ_y به‌ترتیب میانگینهای X و Y هستند.

یک شکل مفید از $\text{Cov}(X, Y)$ با بسط طرف راست تعریف کوواریانس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\left[XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x\mu_y\right] \\ &= E[XY] - \mu_x E[Y] - \mu_y E[X] + \mu_x\mu_y \\ &= E[XY] - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x + \mu_x\mu_y \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned} \qquad (۱.۷.۲)$$

از تعریف در می‌یابیم که کوواریانس در خواص زیر صدق می‌کند :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) \qquad (۲.۷.۲)$$

و

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \qquad (۳.۷.۲)$$

خاصیتی دیگری از کوواریاس که بلافاصله از تعریف آن بدست می‌آید این است که برای هر ثابت a

$$\text{Cov}(aX, Y) = a\,\text{Cov}(X, Y) \qquad (۴.۷.۲)$$

اثبات معادلهٔ ۴.۷.۲ به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

کوواریانس مانند امید ریاضی دارای خاصیت جمع‌پذیری است.

لم ۱.۷.۲

$$\text{Cov}(X + Z, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Z, Y)$$

اثبات

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(X + Z, Y) \\ &\quad = E[(X + Z)Y] - E[X + Z]E[Y] \end{aligned}$$

از معادله ۱.۷.۲

$$= E[XY] + E[ZY] - (E[X] + E[Z])E[Y]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y] + E[ZY] - E[Z]E[Y]$$
$$= \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y) \quad \blacksquare$$

لم ۱.۷.۲ را می‌توان به‌سادگی برای نشان دادن

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, Y\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y) \tag{۵.۷.۲}$$

تعمیم داد. (مسألهٔ ۴۲ را ببینید). از این تعمیم حکم زیر را می‌توان اثبات کرد:

حکم ۲.۷.۲

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

اثبات

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right)$$ از معادله ۵.۷.۲

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{m} Y_j, X_i\right)$$ با استفاده از خاصیت تقارن در معادلهٔ ۲.۷.۲

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(Y_j, X_i)$$ دوباره از معادله ۵.۷.۲

و نتیجه با استفاده مجدد از معادلهٔ ۲.۷.۲ به‌دست می‌آید.

استفاده از معادله ۳.۷.۲ فرمول زیر را برای واریانس مجموع متغیّرهای تصادفی به‌دست می‌دهد:

نتیجهٔ ۳.۷.۲

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

اثبات. اثبات مستقیماً از حکم ۲.۷.۲ با قرار دادن $m = n$ و $Y_i = X_j$ به ازای $i = 1, ..., n$ حاصل می‌شود. ■

در حالت $n = 2$ از نتیجه ۳.۷.۲ به‌دست می‌آوریم

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + \text{Cov}(X,Y) + \text{Cov}(Y,X)$$

قضیهٔ ۴.۷.۲

اگر X و Y متغیّرهای تصادفی مستقل باشند آن‌گاه

$$\text{Cov}(X,Y) = 0$$

و بنابراین برای متغیّرهای مستقل $X_1, \ldots, X_n$، داریم

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$$

اثبات ـ باید ثابت کنیم $E[XY] = E[X]\,E[Y]$ بدین منظور در حالت گسسته داریم

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_j \sum_i x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ &= \sum_j \sum_i x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} \qquad \text{از استقلال} \\ &= \sum_y y_j P\{Y = y_j\} \sum_i x_i P\{X = x_i\} \\ &= E[Y]E[X] \end{aligned}$$

چون استدلال مشابهی برای حالت پیوسته وجود دارد، اثبات کامل است.

مثال ۷.۲.الف ـ مطلوب‌است واریانس مجموع برآمدهای حاصل‌از ۱۰ پرتاب مستقل یک‌تاس سالم.

حل : فرض کنید X_i نشان‌دهندهٔ برآمد i امین پرتاب باشد، داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{1}^{10} X_i\right) &= \sum_{1}^{10} \text{Var}(X_i) \\ &= 10\tfrac{35}{12} \qquad \text{از مثال ۲.۶.الف} \\ &= \tfrac{175}{6} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۷.۲.ب ـ مطلوب است محاسبهٔ واریانس تعداد شیرهای حاصل از ۱۰ پرتاب مستقل یک سکه سالم.

حل : فرض کنید

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{امین پرتاب شیر باشد } i \\ 0 & \text{امین پرتاب خط باشد } i \end{cases}$$

در این صورت کل تعداد شیرها مساوی است با $\sum_{j=1}^{10} I_j$ ، بنابراین از قضیه ۴.۷.۲ داریم

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{10} I_j\right) = \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var}(I_j)$$

حال ، چون I_j یک متغیّر تصادفی نشانگر برای پیشامدی با احتمال $\frac{1}{2}$ است ، از مثال ۶.۲.ب نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{Var}(I_j) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}$$

و بنابراین

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{10} I_j\right) = \tfrac{10}{4} \quad \blacksquare$$

کوواریانس دو متغیّر تصادفی به‌عنوان معیار ارتباط بین آنها اهمیت زیادی دارد . برای مثال حالتی را در نظر بگیرید که X ، Y متغیّرهای نشانگر برای پیشامدهای A و B هستند . یعنی برای پیشامدهای A و B ، فرض کنید .

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{اگر } B \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و توجه کنید که

$$XY = \begin{cases} 1 & X = 1, Y = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= P\{X = 1, Y = 1\} - P\{X = 1\}P\{Y = 1\} \end{aligned}$$

و از این نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) > 0 &\Leftrightarrow P\{X = 1, Y = 1\} > P\{X = 1\}P\{Y = 1\}\\ &\Leftrightarrow \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{X = 1\}} > P\{Y = 1\}\\ &\Leftrightarrow P\{Y = 1 | X = 1\} > P\{Y = 1\}\end{aligned}$$

یعنی کوواریانس Xو Y مثبت است اگر برآمد $X = 1$باعث شودکه $Y = 1$ بااحتمال‌بیشتری‌رخ دهد . (با استفاده از تقارن براحتی می‌توان عکس آن را نتیجه گرفت)

در حالت کلی می‌توان نشان داد که مقدار مثبت $\text{Cov}(X, Y)$ دلالت دارد بر این که وقتی Y زیاد می‌شود X نیز زیاد می‌شود ، در حالی‌که مقدار منفی آن دلالت بر این دارد که وقتی Yکم می‌شود ، X زیاد می‌گردد . میزان ارتباط بین Xو Y به‌وسیلهٔ همبستگی بین X، Y تعیین می‌شود ، که یک کمیّت بدون مقیاس است و از تقسیم کوواریانس بر حاصلضرب انحراف معیار X، Y به‌دست می‌آید . یعنی

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\,\text{Var}(Y)}}$$

می‌توان نشان داد که این کمیّت همواره دارای مقداری بین 1- و 1 است . (مسألهٔ ۴۳ را ببینید) .

۸- توابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور متغیّر تصادفی X، $\phi(t)$به‌ازای هر مقدار t به‌صورت زیر تعریف می‌شود .

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E[e^{tX}]\\ &= \begin{cases}\sum_x e^{tx}p(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد}\end{cases}\end{aligned}$$

تابع $\phi(t)$را بدین دلیل تابع مولد گشتاور می‌نامند که تمام گشتاورهای Xرا می‌توان با مشتق‌گیری پی در پی از آن به‌دست آورد ، برای مثال

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{d}{dt}E[e^{tX}]\\ &= E\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right]\\ &= E[Xe^{tX}]\end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi'(0) = E[X]$$

بطور مشابه

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= \frac{d}{dt}\phi'(t)\\ &= \frac{d}{dt}E[Xe^{tX}]\\ &= E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right]\\ &= E[X^2e^{tX}]\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\phi''(0) = E[X^2]$$

در حالت کلی ، nامین مشتق $\phi(t)$ در نقطه $t = 0$ مساوی است با $E[X^n]$، یعنی

$$\phi^n(0) = E[X^n] \qquad n \geq 1$$

یک خاصیت مهم توابع مولد گشتاورها این است که **تابع مولد گشتاور مجموع متغیّرهای تصادفی مستقل مساوی است با حاصلضرب تک تک توابع مولد گشتاور این متغیّرها**. برای دیدن این مطلب ، فرض کنید که X و Y مستقلند و تابع مولد گشتاور هریک به ترتیب $\phi_X(t)$ و $\phi_Y(t)$ باشد . در این صورت اگر $\phi_{X+Y}(t)$ تابع مولد گشتاور $X + Y$ باشد ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}]\\ &= E[e^{tX}e^{tY}]\\ &= E[e^{tX}]E[e^{tY}]\\ &= \phi_X(t)\phi_Y(t)\end{aligned}$$

که در آن تساوی ما قبل آخر از قضیه ۴.۷.۲ نتیجه می‌شود زیرا X و Y مستقلند و بنابراین e^{tX} و e^{tY} نیز مستقلند .

نتیجهٔ مهم دیگر این است که تابع مولد گشتاور بطور منحصر به‌فرد توزیع را مشخص می‌کند . یعنی تناظری یک به یک بین تابع مولد گشتاور و تابع توزیع یک متغیّر تصادفی وجود دارد .

۹- نامساوی چبیشف و قانون ضعیف اعداد بزرگ

این بخش را با اثبات نتیجه‌ای که به نامساوی مارکوف مشهور است شروع می‌کنیم .

حکم ۱.۹.۲ نامساوی مارکوف

اگر X یک متغیّر تصادفی باشد که فقط مقادیر نامنفی را بگیرد آن‌گاه برای هر $a > 0$.

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

اثبات ـ اثبات را در حالی ارائه می‌دهیم که متغیّر تصادفی X پیوسته با تابع چگالی است

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty xf(x)\,dx \\ &= \int_0^a xf(x)\,dx + \int_a^\infty xf(x)\,dx \\ &\geq \int_a^\infty xf(x)\,dx \\ &\geq \int_a^\infty af(x)\,dx \\ &= a\int_a^\infty f(x)\,dx \\ &= aP\{X \geq a\} \end{aligned}$$

و اثبات کامل است . ■

به عنوان یک نتیجه ، حکم ۲.۹.۲ را اثبات می‌کنیم

حکم ۲.۹.۲ نامساوی چبیشف

اگر X یک متغیّر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد ، آن‌گاه برای هر مقدار $k > 0$

$$P\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

اثبات ـ چون $(X - \mu)^2$ یک متغیّر تصادفی نامنفی است ، با به‌کار بردن نامساوی مارکف (به‌ازای $a = k^2$) به‌دست می‌آوریم

$$P\{(X - \mu)^2 \geq k^2\} \leq \frac{E\left[(X - \mu)^2\right]}{k^2} \qquad (۱.۹.۲)$$

امّا چون $(X-\mu)^2 \geq k^2$ اگر و فقط اگر $|X-\mu| \geq k$ ، نامساوی ۱.۹.۲ معادل است .

$$P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

و اثبات کامل است . ■

اهمیت نامساویهای مارکف چبیشف در این است که هرگاه میانگین یا میانگین و واریانس (هردو) از توزیع احتمال معلومند ، با استفاده از آنها می‌توان کرانهایی برای احتمالات به‌دست آورد . البته اگر توزیع معلوم باشد آن‌گاه احتمالات مطلوب می‌توانند دقیقاً محاسبه شوند و نیازی به‌این کرانها نیست .

مثال ۹.۲.الف فرض کنید بدانیم که تعداد کالاهای تولید شده در یک کارخانه در طول یک هفته متغیری تصادفی با میانگین ۵۰ است .

۱ ـ در مورد این احتمال که تولیدات این هفته از ۷۵ تجاوز کند چه می‌توان گفت ؟

۲ ـ اگر واریانس تولیدات هفتگی مساوی ۲۵ باشد آن‌گاه در مورد احتمال این که تولیدات این هفته بین ۴۰ و ۶۰ است چه می‌توان گفت ؟

حل : فرض کنید X تعداد کالاهایی است که در یک هفته تولید می‌شود :

۱ ـ با استفاده از نامساوی مارکف

$$P\{X > 75\} \leq \frac{E[X]}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

۲ ـ با استفاده از نامساوی چبیشف

$$P\{|X-50| \geq 10\} \leq \frac{\sigma^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$P\{|X-50| < 10\} \geq 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

پس احتمال این که تولیدات این هفته بین ۴۰ و ۶۰ باشد حداقل 75. است . ■

درمعادلهٔ ۱.۹.۲ اگربه‌جای k ، $k\sigma$ راقراردهیم‌نامساوی چبیشف رامی‌توان‌به‌صورت‌زیر نوشت

$$P\{|X-\mu| > k\sigma\} \leq 1/k^2$$

این نامساوی بیان می‌کند که احتمال این که یک متغیّر تصادفی از میانگینش بیشتر از k برابر انحراف

معیار اختلاف داشته باشد کمتر یا مساوی $1/k^2$ است .

حال از نامساوی چبیشف برای اثبات قانون ضعیف اعداد بزرگ استفاده کرده و این بخش را به‌پایان می‌رسانیم . این قانون بیان می‌کند ، احتمال این که متوسط n جمله اوّل یک دنباله از متغیّرهای تصادفی مستقل و همتوزیع بیشتر از میانگینش بیشتر از ε اختلاف داشته باشد به‌سمت صفر میل می‌کند هرگاه ، n به‌سمت بی‌نهایت میل کند .

قضیه ۳.۹.۲ قانون ضعیف اعداد بزرگ

فرض کنید ... $X_1, X_2,$ دنباله‌ای از متغیّرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با میانگین $E[X_i] = \mu$ باشند . آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$.

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \to 0 \qquad , \quad n \to \infty$$

اثبات ـ نتیجه را فقط تحت این فرض که متغیّرهای تصادفی دارای واریانس متناهی σ^2اند اثبات می‌کنیم . اکنون ، چون

$$E\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \mu \qquad\qquad \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

از نامساوی چبیشف نتیجه می‌شود که

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \le \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

و اثبات کامل است .

به‌عنوان کاربردی از مطلب فوق ، فرض کنید که یک دنباله از آزمایشهای مستقل انجام شوند . فرض کنید E یک پیشامد ثابت و $P(E)$ نشان‌دهندهٔ احتمال رخ دادن در یک آزمایش مفروض باشد قرار دهید .

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } E \text{ در آزمایش } i \text{ام رخ دهد} \\ 0 & \text{اگر } E \text{ در آزمایش } i \text{ام رخ ندهد} \end{cases}$$

در این صورت $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ نشان‌دهندهٔ تعداد دفعاتی است که E در n آزمایش اوّل رخ

می‌دهـد . چون $E[X_i] = P(E)$ ، از قانون ضعیف اعداد بزرگ نتیجه می‌شود که برای هر عدد مثبت ε ، که مهم نیست چقدر کوچک باشد ، احتمال این که اختلاف نسبت تـعداد رخـدادهـای E در n آزمایش از $P(E)$ بیشتر از ε شود به سمت صفر میل می‌کند ، هرگاه n زیاد شود .

مسائل

۱ - ۵ پسر و ۵ دختر براساس نمره‌ای که در یک امتحان گرفته‌اند ، رتبه‌بندی شده‌اند : فرض کنید هیچ ۲ نمره‌ای یکسان نبوده و تمام !۱۰ رتبه های ممکن متساوی‌الاحتمالند . همچنین فرض کنید X نشان‌دهندهٔ بالاترین رتبهٔ به‌دست آمده توسط یک دختر است (برای مثال اگر $X = 2$ آن‌گاه بالاترین نمـره متعلـق به یک پسر بـوده و نمـره بعـدی متعلـق به یک دخـتر است) مطلوب است $P\{X = i\}$ ، $i = 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10$

۲ - فرض کنید X نشان‌دهندهٔ اختلاف بین تعداد شیرها و تعداد خطهای به‌دست آمده در n بـار پرتاب یک سکه باشد . مقادیر ممکن X را به‌دست آورید .

۳ - در مسألهٔ ۲ ، اگر فرض کنیم سکه سالم است ، برای $n = 3$ احتمالات مربوط بـه مقـادیر مختلف X را به‌دست آورید .

۴ - تابع توزیع متغیّر تصادفی X برابر است :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

۱ - نمودار این تابع را رسم کنید

۲ - $P\{X > \frac{1}{2}\}$ چقدر است ؟

۳ - $P\{2 < X \leq 4\}$ چقدر است ؟

۴ - $P\{X < 3\}$ چقدر است ؟

۵ - $P\{X = 1\}$ چقدر است ؟

۵- فرض کنید تابع توزیع متغیّر تصادفی X، F، مشخص است. توضیح دهید چگونه باید $P\{X = 1\}$ را به‌دست آورد.

راهنمایی: باید از مفهوم حد استفاده کنید.

۶- مدت زمانی که یک کامپیوتر قبل از خراب‌شدن کار می‌کند، برحسب ساعت، یک متغیّر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

احتمال این که کامپیوتر بین ۵۰ و ۱۵۰ ساعت، قبل از خراب شدن، کار کند چقدر است؟ احتمال این که حداقل ۱۰۰ ساعت کار کند چقدر است؟

۷- طول عمر نوعی لامپ رادیو، برحسب ساعت، یک متغیّر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

چقدر احتمال دارد که دقیقاً ۲ لامپ از ۵ لامپ یک رادیو در ۱۵۰ ساعت اوّل کارکرد تعویض شوند؟ فرض کنید که پیشامدهای E_i، $i = 1, 2, 3, 4, 5$، یعنی پیشامدهای تعویض لامپها در این مدت، مستقلند.

۸- اگر تابع چگالی X برابر با

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x}, & 0 < x < \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

باشد. مطلوب است مقدار c، $P\{X > 2\}$ چقدر است؟

۹- جعبه‌ای شامل ۵ ترانزیستور است که ۳ تای آنها معیوبند. ترانزیستورها یکی پس از دیگری امتحان می‌شوند تا اوّلین ترانزیستور معیوب مشخص شود. فرض کنید N_1 نشان‌دهندهٔ تعداد ترانزیستورهای امتحان شده برای به دست آوردن اوّلین معیوب و N_2 تعداد ترانزیستورهای امتحان شده بعدی برای به‌دست آوردن دومین معیوب باشد. تابع جرم احتمال توأم N_1 و N_2 را پیدا کنید.

۱۰- تابع چگالی احتمال توأم X و Y برابر است با

$$f(x, y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

الف) تحقیق کنید که این تابع یک تابع چگالی احتمال توأم است

ب) تابع چگالی احتمال X را محاسبه کنید .
ج) $P\{X > Y\}$ را به‌دست آورید .
۱۱ ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل و هر یک دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, 1)$ باشند . فرض کنید M نشان‌دهندهٔ ماکزیمم $X_1, X_2, \ldots, X_n$ است . نشان دهید که تابع توزیع M ، $F_M(.)$، برابر است با

$$F_M(x) = x^n \qquad 0 \le x \le 1$$

تابع چگالی احتمال M را به‌دست آورید .
۱۲ ـ تابع چگالی توأم X و Y به‌صورت زیر است .

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

الف ـ تابع چگالی X را به‌دست آورید .
ب ـ تابع چگالی Y را به‌دست آورید .
ج ـ آیا X و Y مستقلند .
۱۳ ـ چگالی توأم X و Y برابر است با

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{از سایر نقاط} \end{cases}$$

الف ـ چگالی X را پیدا کنید .
ب ـ چگالی Y را پیدا کنید .
ج ـ آیا X و Y مستقلند ؟
۱۴ ـ اگر تابع چگالی توأم X و Y به حاصلضرب دو تابع تفکیک شود که یکی از آنها فقط به x و دیگری به y بستگی داشته باشد ، نشان دهید که X و Y مستقلند ؛ یعنی ، اگر

$$f(x, y) = k(x)l(y), \qquad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

نشان دهید که X و Y مستقلند .
۱۵ ـ آیا مسایل ۱۲ و ۱۳ در شرط مسألهٔ ۱۴ صدق می‌کنند .
۱۶ ـ فرض کنید X و Y متغیّرهای تصادفی پیوسته و مستقل باشند . نشان دهید که

الف ـ $P\{X + Y \le a\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a - y) f_Y(y)\, dy$.

ب ـ
$$P\{X \le Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y)\, dy$$

که در آن f_y تابع چگالی Y است و F_X تابع توزیع X می‌باشد.

۱۷ ـ هنگامی که جریان I (برحسب آمپر) از مقاومت R (برحسب اهم) عبور می‌کند، توان تولید شده (برحسب وات) برابر است با $W = IR^2$. فرض کنید I و R متغیّرهای تصادفی مستقلند و به‌ترتیب دارای چگالیهای

$$f_I(x) = 6x(1-x) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_R(x) = 2x \qquad 0 \le x \le 1$$

تابع چگالی W را به‌دست آورید.

۱۸ ـ در مثال ۳.۲.ب تابع جرم احتمال شرطی حجم خانواده‌ای را که بتصادف انتخاب شده و دارای ۲ دختر است به‌دست آورید.

۱۹ ـ مطلوب است محاسبهٔ تابع چگالی شرطی X با فرض $Y = y$ الف) مسألهٔ ۱۰ و ب) مسألهٔ ۱۳

۲۰ ـ نشان دهید که X و Y مستقلند اگر و تنها اگر

الف) درحالت گسسته، $P_{X|Y}^{(x|y)} = p_X(x)$

ب) در حالت پیوسته، $f_{X|Y}^{(x|y)} = f_X(x)$

۲۱ ـ امید ریاضی متغیّر تصادفی مفروض در مسألهٔ ۱ را به‌دست آورید.

۲۲ ـ امید ریاضی متغیّر تصادفی مفروض در مسألهٔ ۳ را به‌دست آورید.

۲۳ ـ هر شب هواشناسهای مختلفی این «احتمال» را که روز بعد باران می‌بارد، ارائه می‌دهند. برای قضاوت در مورد چگونگی این پیش‌بینیها به هر یک از آنها به‌صورت زیر نمره می‌دهیم: اگر هواشناسی بگوید که با احتمال P باران می‌بارد آن‌گاه نمره به‌صورت زیر می‌گیرد.

باران ببارد	$1-(1-p)^2$
باران نبارد	$1-p^2$

سپس این نمره‌ها را تا زمان معینی جمع‌آوری کرده و نتیجه می‌گیریم که کدام هواشناس بیشترین میانگین نمره را در پیش‌بینی داشته است. اکنون فرض کنید که یک هواشناس مفروض متوجّه این موضوع باشد و بنابراین بخواهد متوسط نمرهٔ خود را ماکزیمم کند. اگر این شخص صادقانه معتقد باشد که فردا با احتمال P^* باران می‌بارد برای چه مقداری از P

می‌تواند متوسط نمره را ماکزیمم کند ؛

۲۴ ـ تابع چگالی X برابر است با

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اگر $E[X] = \frac{3}{5}$ مطلوب است تعیین a و b.

۲۵ ـ طول عمر یک لامپ الکتریکی برحسب ساعت متغیّری است تصادفی که تابع چگالی احتمال آن برابر است با

$$f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} \qquad x \ge 0$$

امید ریاضی طول عمر این لامپ را به‌دست آورید .

۲٦ ـ فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل و دارای تابع چگالی احتمال مشترک زیر باشند

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوب است الف ـ $E[\text{Max}(X_1, ..., X_n)]$ ب ـ $E[\text{Min}(X_1, ..., X_n)]$

۲۷ ـ فرض کنید X دارای تابع چگالی زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$E[X^n]$ را ابتدا با محاسبهٔ چگالی X^n و استفاده از تعریف امید ریاضی و سپس با استفاده از حکم ۱.۵.۲ به‌دست آورید .

۲۸ ـ زمان لازم برای تعمیر یک کامپیوتر شخصی برحسب ساعت ، یک متغیّر تصادفی است با تابع چگالی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

. هزینهٔ تعمیر بستگی به زمان تعمیر دارد و هرگاه زمان x باشدهزینه برابربا $40 + 30\sqrt{x}$ است . امید ریاضی هزینهٔ تعمیر کامپیوتر را به‌دست آورید .

۲۹- اگـر $E[X] = 2$ و $E[X^2] = 8$ مـطلوب اسـت محـاسبهٔ الـف) $E[(2 + 4X)^2]$ و ب) $E[X^2 + (X + 1)^2]$.

۳۰- از گلدانی شامل ۱۷ توپ سفید و ۲۳ توپ سیاه ، ۱۰ توپ بتصادف انتخاب می‌شود . فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد توپهای سفید در این انتخاب باشد . مطلوب است $E[X]$،
الف) با تعریف مناسب متغیرهای تصادفی نشانگر X_i، $i = 1, ..., 10$ بطوری که

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i$$

ب) با تعریف مناسب متغیّرهای تصادفی نشانگر Y_i، $i = 1, ..., 17$ بطوری که

$$X = \sum_{i=1}^{17} Y_i.$$

۳۱- اجتماعی شامل ۱۰۰ زوج متأهل است . اگـر در طـی یک سـال ۵۰ نـفر از ایـن اجتمـاع فوت‌کنند ، امید ریاضی تعداد زوجهایی که سالم باقی می‌مانند چقدر است ؟ فرض کنید تمام $\binom{200}{50}$ دسته ۵۰ تایی دارای شانس مساوی‌اندبرای آن‌که ۵۰ نفری‌باشندکه‌فوت‌می‌کنند .
راهنمایی : به‌ازای $i = 1, ...,$ فرض کنید

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{هیچ یک از اعضای زوج } i \text{ فوت نکند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۳۲- مطلوب است محاسبهٔ امید ریاضی و واریانس تعداد پیروزیها در n آزمایش مستقل ، کـه در هریک از آنها نتیجهٔ آزمایش با احتمال p پیروزی است . آیا مستقل بودن لازم است ؟

۳۳- فرض کنید X با احتمال مساوی هریک از مقـادیر 1, 2, 3, 4 را مـی‌گیرد . مـطلوب است محاسبهٔ الف) $E[X]$ ب) $\text{Var}(X)$.

۳۴- فرض کنید $P_i = P\{X = i\}$ و فرض کنید $p_1 + p_2 + p_3 = 1$، اگر $E[X] = 2$، به‌ازای چه مقادیری از p_1, P_2, p_3 الف ـ $\text{Var}(X)$ ماکزیمم می‌شود ب ـ $\text{Var}(X)$ مینیمم می‌شود .

۳۵- مطلوب است محاسبهٔ میانگین و واریانس تعداد شیرهایی که در ۳ پرتاب یک سکـه مسالم به‌دست می‌آید .

۳۶- نشان دهید که برای هر متغیّر تصادفی X

$$E[X^2] \geq (E[X])^2$$

۳۷- متغیّر تصادفی X، که نشان‌دهندهٔ وزن یک کالا (برحسب اونس) است ، دارای تابع چگالی

احتمال زیر می‌باشد

$$f_X(z) = \begin{cases} (z-8) & 8 \leqq z \leqq 9 \\ (10-z) & 9 < z \leqq 10 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف ـ میانگین و واریانس متغیّر تصادفی X را محاسبه کنید. ب ـ تولید کننده این کالا آن را به‌قیمت ثابت ۲۰۰ تومان می‌فروشد و ضمانت می‌کند که هرگاه یک مشتری کالایی با وزن کمتر از ۸/۲۵ بخرد، پول آن را پس بدهد. هزینهٔ تولید کالا بستگی به وزن کالا دارد و در واقع برابر با $x/15 + 0.35$ است. امید ریاضی سود کالا را بدست آورید.

۳۸ـ فرض کنید X و Y دارای چگالی توأم زیر باشند

$$f_{XY}(u,v) = \begin{cases} (u+v) & 0 \leqq u, v \leqq 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) چگالیهای حاشیه‌ای X و Y را به‌دست آورید. ب) مطلوب است تعیین $E[X]$ و $\operatorname{var}(X)$.

۳۹ـ محصولی براساس تعداد نقصهایی که دارد و کارخانه‌ای که آن را تولید کرده است، بسته‌بندی می‌شود. فرض کنید متغیّر تصادفی X_1 نشان‌دهندهٔ تعداد نقصها در واحد محصول (و دارای مقادیر ممکن 3 ,2 ,1 ,0) و متغیّر تصادفی X_2 نشان‌دهندهٔ تعداد کارخانه‌ها (و دارای مقادیر ممکن ۱ یا ۲) باشد. اعداد داخل جدول تابع جرم احتمال توأم آنها را نشان می‌دهد.

X_1 \ X_2	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

الف ـ توزیعهای احتمالی کناری X_1 و X_2 را به‌دست آورید ب ـ مطلوب است تعیین $E[X_1]$، $E[X_2]$، $\operatorname{Var}(X_1)$ و $\operatorname{Var}(X_2)$.

۴۰ـ دستگاهی محصولاتی تولید می‌کند که قبل از بارگیری بطور صد در صد بازرسی می‌شوند. وسیلهٔ اندازه‌گیری محصول طوری است که قادر به‌خواندن اعداد بین 1 و $1\frac{1}{3}$ نیست (داده‌ها کُدبندی شده‌اند). بعد از اندازه‌گیری، اندازهای به‌دست آمده دارای چگالی زیرند:

$$f_X(z) = \begin{cases} kz^2 & 0 \leqq z \leqq 1 \\ 1 & 1 < z \leqq 1\frac{1}{3} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف ـ مطلوب است مقدار k. ب ـ چند درصد از محصولات خارج از فاصله 0 و 1 قرار دارند ؟ پ ـ امید ریاضی و واریانس این متغیّر تصادفی را به‌دست آورید .

۴۱ـ تساوی ۴.۷.۲ را تحقیق کنید .

۴۲ـ با استفاده از استقرای ریاضی تساوی ۵.۷.۲ را اثبات کنید .

۴۳ـ فرض کنید X دارای واریانس σ_x^2 و Y دارای واریانس σ_y^2 باشد . ابتدا با استفاده از این که

$$0 \leq \operatorname{Var}\left(X/\sigma_x + Y/\sigma_y\right)$$

نشان دهید

$$-1 \leq \operatorname{Corr}(X, Y)$$

حال با توجه به‌این که

$$0 \leq \operatorname{Var}\left(X/\sigma_x - Y/\sigma_y\right)$$

نتیجه بگیرید که

$$-1 \leq \operatorname{Corr}(X, Y) \leq 1$$

با استفاده ازاین‌واقعیت‌که $\operatorname{Var}(Z) = 0$ نتیجه‌می‌دهد Z ثابت است ، استدلال کنید که اگر 1- یا $\operatorname{Corr}(X, Y) = 1$ آن‌گاه رابطهٔ بین X و Y به‌صورت

$$Y = a + bx$$

که در آن علامت b مثبت است هرگاه همبستگی 1 باشد و منفی است هرگاه 1- باشد .

۴۴ـ در مثال ۵.۲.ج $\operatorname{Cov}(X_i, Y_j)$ را محاسبه کنید و از این نتیجه استفاده کرده نشان دهید که $\operatorname{Var}(X) = 1$

۴۵ـ اگر X_1 و X_2 دارای توزیع احتمال یکسان باشند ، نشان دهید که

$$\operatorname{Cov}(X_1 - X_2, X_1 + X_2) = 0.$$

(توجه کنید که فرض استقلال را نداریم) .

۴۶ ـ فرض کنید X دارای تابع چگالی زیر باشد

$$f(x) = e^{-x} \qquad x > 0$$

تابع مولد گشتاور X را محاسبه کرده و با استفاده از آن میانگین و واریانس X را بدست آورید . با محاسبهٔ مستقیم میانگین ، جواب را با قسمت اوّل مقایسه کنید .

۴۷ ـ اگر تابع چگالی X

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$

باشد $E[e^{tX}]$ را به‌دست آورید . با مشتق‌گیری $E[X^n]$ را به‌دست آورده و جواب را با محاسبهٔ مستقیم $E[X^n]$ مقایسه کنید .

۴۸ ـ فرض کنید X یک متغیّر تصادفی است که میانگین و واریانس آن هر دو مساوی ۲۰ است . در مورد $P\{0 \leq X \leq 40\}$ چه می‌توان گفت ؟

۴۹ ـ یک استاد دانشگاه از تجربیات گذشته می‌داند که نمرهٔ امتحان پایان ترم دانشجویان یک متغیّر تصادفی با میانگین ۷۵ است .

الف ـ یک کران بالای احتمال برای این که نمره یک دانشجو از ۸۵ بیشتر شود ارائه دهید .و همچنین فرض کنید این استاد می‌داند که واریانس نمرهٔ دانشجویان مساوی ۲۵ است .

ب ـ در مورد این احتمال که نمره یک دانشجو بین ۶۵ و ۸۵ باشد چه می‌توان گفت ؟

پ ـ از چه تعدادی دانشجو باید گرفته شود بطوری که با احتمال حداقل ۰/۹ اطمینان حاصل شود که متوسط کلاس بین ۵ و ۷۵ خواهد بود ؟

فصل سوم

متغیّرهای تصادفی خاص

0- مقدمه

بعضی از متغیّرهای تصادفی در عمل کاربردهای زیادی دارند . در این بخش تعدادی از آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهم .

۱ - متغیّرهای تصادفی برنولی و دوجمله‌ای

فرض کنید آزمایشی که برآمد آن را می‌توان به‌عنوان پیروزی یا شکست دسته‌بندی کرد ، انجام شود . اگر فرض کنیم وقتی برآمد پیروزی است $X = 1$ باشد و وقتی برآمد شکست است $X = 0$ آن‌گاه تابع جرم احتمال X برابر است با

$$P\{X=0\} = 1 - p$$
$$P\{X=1\} = p \qquad (۱.۱.۳)$$

که در آن p، $0 \leq p \leq 1$، احتمال آن است که نتیجهٔ آزمایش یک پیروزی باشد .

متغیر تصادفی X را (به‌نام جیمز برنولی ریاضیدان روسی) متغیر تصادفی برنولی گویند ، هرگاه تابع جرم احتمال آن به‌ازای $p \in (0, 1)$ به‌صورت رابطهٔ ۱.۱.۳ باشد . در این صورت

$$E[X] = 1 \cdot P\{X=1\} + 0 \cdot P\{X=0\} = p$$

یعنی ، امید ریاضی متغیّر تصادفی برنولی برابر است با این احتمال که متغیّر تصادفی مساوی ۱ باشد .

اکنون فرض کنید n آزمایش که نتیجهٔ هرکدام یک پیروزی با احتمال p و یا یک شکست با احتمال $1 - p$ است بطور مستقل انجام شوند . اگر X نشان‌دهندهٔ تعداد پیروزیهایی باشد که در n آزمایش رخ می‌دهد آن‌گاه گوییم X یک **متغیّر تصادفی دوجمله‌ای** با پارامترهای (n, p) است .

تابع جرم احتمال متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p) به‌صورت زیر است

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{۲.۱.۳}$$

که در آن $\binom{n}{i} = n!/[(n-i)!i!]$ و برابراست باتعداد دسته‌های i تایی‌متفاوتی‌که‌می‌توان از مجموعه‌ای شامل n شیء انتخاب کرد. درستی تساوی ۲.۱.۳ را می‌توان با توجه نمودن به‌این که با فرض استقلال آزمایشها، احتمال هر دنباله از n برآمد شامل i پیروزی و $n-i$ شکست، برابر است با $p^i(1-p)^{n-i}$ بررسی نمود. حال چون $\binom{n}{i}$ دنبالهٔ متفاوت از n برآمد وجود دارد که به i پیروزی و $n-i$ شکست منتهی می‌شود (و شاید ساده‌تر باشد که بگوییم $\binom{n}{i}$ انتخاب متفاوت وجود دارد که نتیجه آنها i پیروزی است) نتیجهٔ ۲.۱.۳ به‌دست می‌آید. برای مثال اگر $n = 5$ و $i = 2$ آن‌گاه $\binom{5}{2}$ انتخاب وجود دارد که در آنها نتیجهٔ آزمایش ۲ پیروزی است. یعنی هریک از برآمدهای زیر

$$\begin{array}{lll} (s,s,f,f,f) & (f,s,s,f,f) & (f,f,s,f,s) \\ (s,f,s,f,f) & (f,s,f,s,f) & \\ (s,f,f,s,f) & (f,s,f,f,s), & (f,f,f,s,s) \\ (s,f,f,f,s) & (f,f,s,s,f) & \end{array}$$

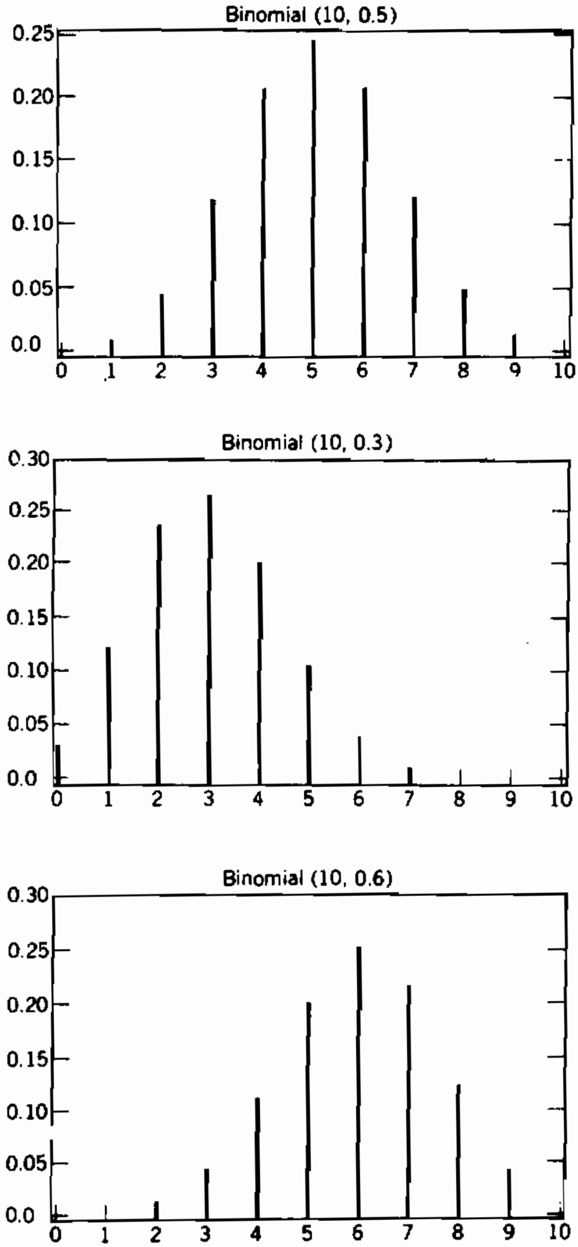
به‌عنوان مثال برآمد (f, s, f, s, f) بدین معنی است که ۲ پیروزی در آزمایشهای ۲ و ۴ رخ داده است چون هر $\binom{5}{2}$ برآمد دارای احتمال $p^2(1-p)^3$ است می‌بینیم که در مجموع احتمال ۲ پیروزی در ۵ آزمایش مستقل برابر است با $\binom{5}{2}p^2(1-p)^3$

با توجه به بسط دوجمله‌ای مجموع احتمالات برابر ۱ است، یعنی

$$\sum_{i=0}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1$$

تابع جرم احتمال ۳ متغیر تصادفی دو جمله‌ای به‌ترتیب با پارامترهای (10, .5) و (10, .3) و (10, .6) در شکل ۱.۱.۳ نمایش داده شده است. اوّلی حول مقدار 5. متقارن است. در حالی که دومی چولگی به راست و سومی چولگی به‌چپ دارد.

مثال ۳.۱.الف ـ دیسکتهای تولید شده به وسیلهٔ شرکتی خاص، هر یک بطور مستقل با احتمال 01. معیوب است. این شرکت دیسکتها را در بسته‌های ۱۰ تایی می‌فروشد و تعهد می‌کند در صورتی که بیشتر از یک دیسکت از ۱۰ دیسکت خراب باشد پول خریدار را بپردازد. نسبت بسته‌هایی که برگشت داده می‌شوند چقدر است؟ اگر شخصی ۳ بسته خریداری کند، احتمال این که دقیقاً یک بسته از آنها را پس بدهد چقدر است؟



شکل ۱.۱.۳ توابع جرم احتمال دوجمله‌ای

حل : اگر X تعداد دیسکتهای معیوب در یک بسته باشد آن‌گاه X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (۱/۰ و ۱۰) است . بنابراین احتمال این که یک بسته باز پس داده شود برابر است با

$$\begin{aligned} P\{X > 1\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - \binom{10}{0}(.01)^0(.99)^{10} - \binom{10}{1}(.01)^1(.99)^9 \approx .005 \end{aligned}$$

بنابراین هر بسته بطور مستقل با احتمال .005 بازپس داده می‌شود و از قانون ضعیف اعداد بزرگ نتیجه می‌شود که به مرور زمان .5 درصد از بسته‌ها بازپس داده می‌شوند .

از مطلب بالا نتیجه می‌شود که تعداد بسته‌هایی که شخص به‌شرکت پس می‌دهد یک متغیّر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $n = 3$ و $p = .005$ است . بنابراین احتمال این که دقیقاً یکی از ۳ بسته پس داده شود برابر است با $\binom{3}{1}(.005)(.995)^2 = .015.$

مثال ۳.۱.ب ـ یک دستگاه مخابراتی شامل n جزء است که هریک بطور مستقل و با احتمال p کار می‌کند . اگر حداقل نصف اجزای دستگاه عمل کنند آن‌گاه کل سیستم بطور مؤثر به‌کار می‌افتد ؛

الف ـ به‌ازای چه مقداری از p یک سیستم شامل ۵ جزء از سیستمی شامل ۳ جزء با احتمال بیشتری بطور مؤثر کار می‌کند .

ب ـ بطور کلی یک سیستم شامل $2k + 1$ جزء چه وقت از یک سیستم شامل $2k - 1$ جزء بهتر است ؟

حل : چون تعداد اجزای عمل کنندهٔ یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) است . در نتیجه احتمال این که یک سیستم شامل ۵ جزء کار کند برابر است با

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5$$

در حالی که این احتمال برای یک سیستم شامل ۳ جزء برابر است با

$$\binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3$$

بنابراین دستگاه شامل ۵ جزء بهتر است اگر

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \geq 3p^2(1-p) + p^3$$

یا بطور خلاصه

$$3(p-1)^2(2p-1) \geq 0$$

و یا

$p \geq \frac{1}{2}$

ب ـ بطور کلی یک سیستم با $2k+1$ جزء بهتر از یک سیستم با $2k-1$ جزء است اگر (و فقط اگر) $p \geq \frac{1}{2}$ برای اثبات سیستمی شامل $2k+1$ جزء را در نظر بگیرید و فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد اجزایی است که در $2k-1$ جزء اوّل کار می‌کنند. در این صورت:

$$P_{2k+1}(\text{کارکند}) = P\{X \geq k+1\} + P\{X = k\}\left(1-(1-p)^2\right) + P\{X = k-1\}p^2$$

زیرا سیستم $2k+1$ جزئی کار می‌کند اگر هریک از ۳ حالت زیر اتفاق افتد

الف ـ $X \geq k+1$

ب ـ $X = k$ حداقل یکی از ۲ جزء باقیمانده عمل کند

ج ـ $X = k-1$ و ۲ جزء بعدی هردو عمل کنند

همچنین:

$$\begin{aligned} P_{2k-1}(\text{کارکند}) &= P\{X \geq k\} \\ &= P\{X = k\} + P\{X \geq k+1\} \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} &P_{2k+1}(\text{کارکند}) - P_{2k-1}(\text{کارکند}) \\ &= P\{X = k-1\}p^2 - (1-p)^2 P\{X = k\} \\ &= \binom{2k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^k p^2 - (1-p)^2\binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^{k-1} \\ &= \binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^k[p-(1-p)] \quad \text{زیرا} \quad \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} \\ &\geq 0 \Leftrightarrow p \geq \tfrac{1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۱.۳.پ ـ فرض کنید ۱۰ درصد از چیپهای[1] تولید شده توسط یک تولیدکننده سخت افزار کامپیوتر معیوب است. اگر ۱۰۰ عدد از این چیپها را مرتب کنیم آیا X، تعداد معیوبهایی که به‌دست می‌آوریم، یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای است.

حل: متغیّر تصادفی X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(100, .1)$ خواهد بود اگر هر چیپ با

1- Chip

احتمال 9. کار کند و کارکرد چیپها مستقل از یکدیگر باشند. حال منطقی است که فرض کنیم معیوب بودن ۱۰ درصد از چیپها به‌عوامل دیگری نیز بستگی دارد؛ برای مثال فرض کنید تمام چیپهای تولید شده در یک روز معین یا سالمند یا معیوب (در ۹۰ درصد از روزها چیپها سالمند). در این حالت اگر بدانیم که تمام ۱۰۰ چیپ تولید شده از همان روز هستند آن‌گاه X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای نیست. زیرا فرض استقلال چیپهای متوالی‌معتبر نیست. درواقع دراین‌حالت خواهیم داشت.

$$P\{X = 100\} = .9$$
$$P\{X = 0\} = .1 \quad \blacksquare$$

چون یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای X، با پارامترهای n و p، تعداد پیروزیها در n آزمایش مستقل که هریک دارای احتمال پیروزی p هستند را نشان می‌دهد، می‌توانیم X را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{۳.۱.۳}$$

که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر نتیجه } i \text{امین آزمایش پیروزی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

امّا چون X_i، $i = 1, \ldots, n$ متغیّرهای تصادفی برنولی هستند داریم

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{X_i = 1\} = p \\ \mathrm{Var}(X_i) &= E[X_i^2] - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

که در آن تساوی اخیر بدین دلیل نتیجه می‌شود که $X^2_i = X_i$ و بنابراین $E(X^2_i) = E(X_i) = p$.
اکنون با استفاده از رابطه ۳.۱.۳ بسادگی می‌توان میانگین و واریانس X را حساب کرد

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ &= np \end{aligned}$$

چون X_iها مستقل هستند

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

اگر X_1 و X_2 متغیّرهای تصادفی دوجمله‌ای و به ترتیب با پارامترهـای (n_i, p) ، $i = 1, 2$ باشند آن‌گاه مجموع آنها نیز دوجمله‌ای با پارامترهای $(n_1 + n_2, p)$ است . این مطلب را مـی‌توان بسادگی با توجه نمودن به این که X_i ، $i = 1, 2$ نشان‌دهندهٔ تعداد پیروزیها در n_i آزمایش مستقل با احتمال پیروزی p است دید . در این صورت $X_1 + X_2$ نشـان‌دهندهٔ تـعداد پیروزیهـا در $n_1 + n_2$ آزمایش مستقل می‌باشد که در آن احتمال پیروزی p است . بنابرایـن $X_1 + X_2$ نیز دوجـمله‌ای بـا پارامترهای $(n_1 + n_2, p)$ خواهد بود .

۱.۱ - محاسبهٔ تابع توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید X دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد . برای محاسبه تابع توزیع آن ، یعنی

$$P\{ X \le i \} = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

از رابطه بین $P\{X = k + 1\}$ و $P\{X = k\}$ که به صورت زیر می‌باشد استفاده می‌کنیم

$$P\{ X = k + 1\} = \frac{p}{1-p}\,\frac{n-k}{k+1} P\{ X = k\} \tag{۴.۱.۳}$$

(اثبات این رابطه به عنوان تمرین واگذار می‌شود) .

مثال ۳.۱.ت ـ فرض کنید X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 6$ و $p = .4$ باشد . در این صورت با توجّه بـه ایـن که $P\{X = 0\} = (.6)^6$ ، با به کـار بـردن پی در پی معادلـه ۴.۱.۳ به‌دست می‌آوریم ،

$$P\{ X = 0\} = (.6)^6 = .0467$$
$$P\{ X = 1\} = \tfrac{4}{6}\tfrac{6}{1} P\{ X = 0\} = .1866$$
$$P\{ X = 2\} = \tfrac{4}{6}\tfrac{5}{2} P\{ X = 1\} = .3110$$
$$P\{ X = 3\} = \tfrac{4}{6}\tfrac{4}{3} P\{ X = 2\} = .2765$$
$$P\{ X = 4\} = \tfrac{4}{6}\tfrac{3}{4} P\{ X = 3\} = .1382$$
$$P\{ X = 5\} = \tfrac{4}{6}\tfrac{2}{5} P\{ X = 4\} = .0369$$
$$P\{ X = 6\} = \tfrac{4}{6}\tfrac{1}{6} P\{ X = 5\} = .0041. \quad \blacksquare$$

برنامهٔ ۳-۱ (که در برنامه‌های ضمیمه آمده است) $P\{X \le i\}$ را محاسبه می‌کند . این برنامه ابتدا $P\{X = 0\} = (1 - p)^n$ را محاسبه و سپس از معـادلـه ۴.۱.۳ بطـور متنـاوب بـرای محـاسبهٔ

$P\{X = 1\}, ..., P\{X = i\}$ استفاده می‌کند امّا این برنامه فقط برای مقادیر مناسبی از n مفید خواهد بود. زیرا در حالتی که n بزرگ باشد به واسطهٔ خطای گرد کردن کامپیوتر $P\{X = 0\} = (1 - p)^n$ مساوی صفر محاسبه می‌شود. اگر این خطا رخ دهد آن‌گاه تمام عبارات بعدی یعنی $P\{X = k\}$، $k = 1, ..., n$ نیز مساوی صفر خواهند بود وبنابراین برنامه باشتباه نتیجه می‌گیرد که $P\{X \le i\} = 0$ زمانی که $(1 - p)^n$ مساوی صفر محاسبه شود برنامه طوری ساخته شده است که با $P(X = 0)$ شروع به محاسبه نمی‌کند بلکه با $P(X = J)$ شروع می‌کند که در آن

$$J = \begin{cases} i & \text{if } i \le np \\ [np] & \text{if } i > np \end{cases}$$

و $[np]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی np است که در برنامه $\text{Int}(np)$ نامیده می‌شود. $P(X = J)$ از تمام احتمالات $P\{X = k\}$، $k = 0, 1, ..., n$ که باید محاسبه شوند یا بزرگتر است یا (در بدترین وضعیت) از لحاظ بزرگی دومین آنهاست (مسألهٔ ۹ را ببینید). بنابراین برنامه $P\{X = J - 1\}$، $P\{X = J - 2\}$ ... $P\{X = 0\}$ را پی در پی محاسبه می‌کند و به‌علاوه اگر $J < i$، $P\{X = J + 1\}, ..., P\{X = i\}$ را نیز محاسبه می‌کند
برای محاسبهٔ

$$P\{X = J\} = \binom{n}{J} p^J (1 - p)^{n-J}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-J+1)}{J(J-1)\cdots 1} p^J (1 - p)^{n-J}$$

ابتدا لگاریتم آن، یعنی

$$\log P\{X = J\} = \sum_{k=1}^{J} \log(n + 1 - k)$$

$$- \sum_{k=1}^{J} \log(k) + J \log p + (n - J)\log(1 - p)$$

محاسبه و سپس قرار داده می‌شود

$$P\{X = J\} = \exp\{\log P\{X = J\}\}$$

مثال ۳.۱.ث ـ الف ـ مطلوب است محاسبهٔ $P\{X \le 50\}$ که در آن $X \approx \text{Bin}(100, .4)$

ب ـ مطلوب است محاسبهٔ $P\{X \leq 325\}$ که در آن $X \approx \text{Bin}(500, .6)$

حل: برنامه ۳-۱ را اجرا می‌کنیم.

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE IS LE
SS THAN OR EQUAL TO i
ENTER n
? 100
ENTER p
? .4
ENTER i
? 50
THE PROBABILITY IS .9832359
OK
```

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIABLE IS LE
SS THAN OR EQUAL TO i
ENTER n
? 500
ENTER p
? .7
ENTER i
? 325
THE PROBABILITY IS 9.055146E-03
OK
```
■

۲- متغیّر تصادفی پواسن

متغیّر تصادفی X که یکی از مقادیر ... ,0, 1, 2 را می‌گیرد، متغیّر تصادفی پواسن، با پارامتر λ گفته می‌شود اگر برای هر $\lambda > 0$ تابع جرم احتمال آن به صورت زیر باشد.

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0, 1, \ldots . \tag{۱.۲.۳}$$

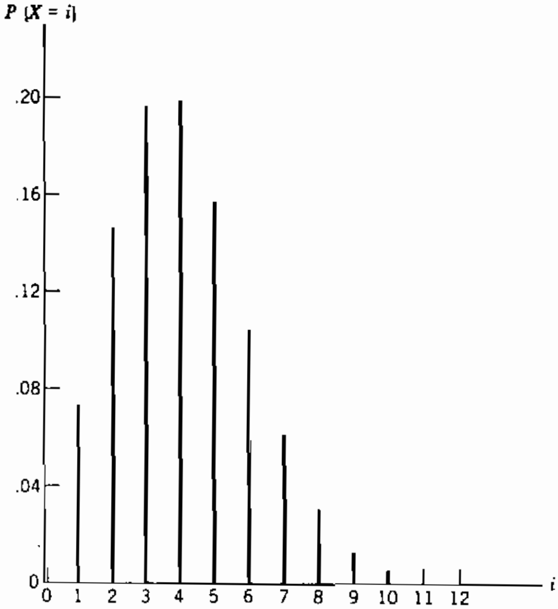
نماد e علامتی است برای یک مقدار ثابت و تقریباً مساوی 2.7183 است. e ثابت مشهوری در ریاضی است که توسط ال. اولر نامگذاری شده و مبنایی برای لگاریتم طبیعی است.

رابطهٔ ۱.۲.۳ یک تابع جرم احتمال است زیرا

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i/i! = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

نمودار این تابع جرم احتمال به ازای $\lambda = 4$ در شکل ۱.۲.۳ نمایش داده شده است

توزیع احتمال پواسن توسط اس. دی پواسن در کتابی که در بارهٔ کاربرد نظریهٔ احتمال در دادخواهی، محاکمهٔ جنایی و امثال آن نوشته شده معرفی گردیده است. (این کتاب درسال ۱۸۳۷ انتشار یافته است)



شکل ۱.۲.۳ : تابع جرم احتمال پواسن با $\lambda = 4$

برای تعیین میانگین و واریانس این متغیّر تصادفی ابتدا تابع مولد گشتاور آن را به‌دست می‌آوریم . بدین منظور داریم

$$\begin{aligned}\psi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1)\}\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از آن نتیجه می‌شود .

$$\psi'(t) = \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

$$\psi''(t) = (\lambda e^t)^2 \exp\{\lambda(e^t - 1)\} + \lambda e^t \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

بنابراین

$$E[X] = \psi'(0) = \lambda$$
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \psi''(0) - (E[X])^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

یعنی میانگین و واریانس هر دو مساوی پارامتر λ هستند.

متغیّر تصادفی پواسن دارای کاربردهای وسیعی در سطوح مختلف است. زیرا می‌توان آن‌را به‌عنوان تقریبی برای یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) هنگامی که n بزرگ و p کوچک است به کار برد. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید X متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) است و فرض کنید $\lambda = np$ در این صورت

$$\begin{aligned}P\{X = i\} &= \frac{n!}{(n-i)!\,i!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}\,\frac{\lambda^i}{i!}\,\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i}\end{aligned}$$

اکنون برای nهای بزرگ و pهای کوچک

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \approx 1 \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

بنابراین برای n بزرگ و p کوچک

$$P\{X = i\} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

به عبارت دیگر اگر n آزمایش مستقل که نتیجه هرکدام با احتمال p پیروزی است انجام شوند آن‌گاه وقتی n بزرگ و p کوچک است تعداد پیروزیهایی که رخ می‌دهد تقریباً یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین $\lambda = np$ خواهد بود.

چند مثال از متغیّرهای تصادفی که معمولاً با تقریب خوبی از توزیع احتمال پواسن پیروی می‌کنند (یعنی به ازای مقداری از λ معمولاً با معادله ۱.۲.۳ سازگارند) عبارتند از

۱ - تعداد غلطهای چاپی در یک صفحه (یا تعدادی از صفحات) از یک کتاب.

۲ - تعداد افرادی در یک جامعه که ۱۰۰ سال سن دارند.

۳ - تعداد تلفنهای اشتباهی که در یک روز گرفته می‌شود.

۴ - تعداد ترازیستورهایی که روز اوّل استفاده‌شان از کار می‌افتد.

۵ ـ تعداد مشتریهایی که در یک روز معین به ادارهٔ پست مراجعه می‌کنند .
۶ ـ تعداد ذرات α که در یک مدت زمان ثابت از یک جسم رادیواکتیو صادر می‌شود .
هریک از حالات بالا و بسیاری دیگر از متغیّرهای تصادفی به دلیل مشابه ـ یعنی تقریب پواسن برای دوجمله‌ای ـ تقریباً دارای توزیع پواسن هستند . به عنوان مثال می‌توانیم فرض کنیم‌که احتمال ضعیف p وجود دارد که هرحرف‌تایپ‌شده دریک‌صفحه غلط باشد . بنابراین تعدادغلطهای‌چاپی‌در یک صفحهٔ مفروض، تقریباً پواسن بامیانگین $\lambda = np$ خواهدبودکه در آن n(احتمالاً) تعداد زیاد حروف در یک صفحه است . بطور مشابه می‌توانیم فرض کنیم که در یک‌جامعهٔ‌مفروض هر شخص‌بطور مستقل دارای احتمال ضعیف p است که به سن ۱۰۰ سال برسد . بنابراین تعداد این‌گونه افراد تقریباً دارای توزیع پواسن با میانگین np است که در آن n تعداد (زیاد) افراد جامعه است . استدلال در این مورد که چرا متغیّرهای تصادفی‌باقیمانده از (۳) تا (۶) تقریباً دارای توزیع پواسن هستند به‌خواننده واگذار می‌شود .

مثال ۳.۲.الف ـ فرض کنید متوسط تعداد تصادفاتی که در طول هفته در امتداد یک بزرگراه رخ می‌دهد مساوی ۳ باشد . مطلوب است احتمال این که حداقل یک تصادف در این هفته رخ دهد .

حل : فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد تصادفاتی باشد که در طول بزرگراه مورد بحث در طی این هفته رخ می‌دهد . چون تعداد زیادی اتومبیل از بزرگراه عبور می‌کند و احتمال رخ دادن تصادف برای هرکدام کم است منطقی است فرض کنیم که تعداد تصادفات تقریباً دارای توزیع پواسن است بنابراین

$$\begin{aligned} P\{X \geq 1\} &= 1 - P\{X = 0\} \\ &= 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-3} \\ &\approx .9502 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۳.۲.ب ـ فرض کنید احتمال این که یک شیء تولیدشده به وسیلهٔ یک ماشین مفروض معیوب باشد 1. است مطلوب است احتمال این که نمونه‌ای به حجم ۱۰ شیء شامل حداکثر یک شیء معیوب باشد . فرض کنید کیفیت اشیاء تولیدشده مستقل از یکدیگر باشند .

حل : احتمال مطلوب برابر است با $\binom{10}{0}(.1)^0(.9)^{10} + \binom{10}{1}(.1)^1(.9)^9 = .7361$، امّا با استفاده از تقریب پواسن مقدار احتمال برابر است با

$$e^{-1}\frac{1^0}{0!} + e^{-1}\frac{1^1}{1!} = 2e^{-1} \approx .7358 \quad \blacksquare$$

مثال ۳.۲.پ ـ آزمایشی را در نظر بگیرید که عبارت است از محاسبه تعداد ذرات آلفایی که از یک گرم ماده رادیواکتیو در مدت یک ثانیه خارج می‌شود . اگر از تجربهٔ قبل بدانیم که بطور متوسط 3.2

ازچنین ذراتی‌خارج‌می‌شوند، یک‌تقریب خوب‌برای‌احتمال‌این‌که‌بیش‌از ۲ ذرهٔ آلفاخارج شود چیست ؟

حل : اگر یک گرم از مادهٔ رادیواکتیو را در نظر بگیریم چون شامل تعداد زیاد (n) از اتمهایی است که هریک دارای احتمال $3.2/n$ برای متلاشی شدن و انتشار یک ذرهٔ α در طی یک ثانیه هستند ، یک تقریب خوب برای تعداد ذرات آلفایی که منتشر می‌شوند یک متغیّر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 3.2$ است . بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$P\{X \leq 2\} = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2}e^{-3.2}$$
$$= .382 \quad ■$$

مثال ۳.۲.ت ـ اگر متوسط تعداد درخواستهای روزانه از یک شرکت بیمه ۵ باشد ، نسبت روزهایی که کمتر از ۳ درخواست می‌شود چقدر است ؟ احتمال این که دقیقاً ۴ درخواست در ۳ روز از ۵ روز آینده وجود داشته باشد چقدر است ؟ (فرض کنید تعداد درخواستها در روزهای مختلف مستقل باشند) .

حل : چون این شرکت احتمالاً تعداد زیادی از مشتریان را بیمه کرده است و احتمال این که در یک روز معین هریک از آنها درخواستی داشته باشند کم است ، منطقی است فرض کنیم که تعداد درخواستهای روزانه که به آن X می‌گوییم یک متغیّر تصادفی پواسن باشد . چون $E(X) = 5$ ، احتمال این که کمتر از ۳ درخواست در یک روز معین وجود داشته باشد برابر است با

$$P\{X < 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$$
$$= e^{-5} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!}$$
$$= \frac{37}{2}e^{-5}$$
$$\approx .1247$$

چون در یک روز معین با احتمال $.125$ کمتر از ۳ درخواست وجود دارد ، از قانون اعداد بزرگ نتیجه می‌شود که سرانجام متجاوز از $12\frac{1}{2}$ درصد از روزها کمتر از ۳ درخواست وجود خواهد داشت .
از فرض استقلال تعداد درخواستها در روزهای متوالی نتیجه می‌شود که تعداد روزهایی که در بین ۵ روز معین دقیقاً ۴ درخواست وجود داشته باشد یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای ۵ و $P(X = 4)$ خواهد بود . از طرفی

$$P\{X = 4\} = e^{-5}\frac{5^4}{4!} \approx .1755$$

پس احتمال این که در ۳ روز از ۵ روز آینده ۴ درخواست وجود داشته باشد برابر است با

$$\binom{5}{3}(.1755)^3(.8245)^2 \approx .0367 \quad ■$$

می‌توان نشان داد که تقریب پواسن تحت شرایط کلیتر از آنچه در بالا اشاره شد نیز معتبر است . به‌عنوان مثال فرض کنید n آزمایش بطور مستقل انجام شوند بطوری که نتیجه i امین آزمایش با احتمال p_i پیروزی است $i = 1, ..., n$ در این صورت می‌توان نشان داد که اگر n بزرگ و p_i کوچک باشد آن‌گاه تعداد آزمایشهای موفق تقریباً دارای توزیع پواسن با میانگین $\sum_{i=1}^{n} p_i$ خواهد بود . در واقع گاهی اوقات حتی اگر آزمایشها مستقل نباشند نیز این نتیجه درست است به شرط این‌که وابستگی آنها ضعیف باشد ؛ برای نمونه مثال زیر را در نظر بگیرید :

مثال ۳.۲.ث ـ n نفر در یک مهمانی کلاههای خود را با هم مخلوط کرده و در وسط اطاق قرار داده‌اند . سپس هر شخص بتصادف یک کلاه را انتخاب می‌کند . اگر X نشان‌دهندهٔ تعداد افرادی باشد که کلاه خودشان را انتخاب می‌کنند ، آن‌گاه برای n های بزرگ ، می‌توان نشان داد که X تقریباً دارای توزیع پواسن با میانگین ۱ خواهد بود . برای بررسی صحت این مطلب فرض کنید

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ امین شخص کلاه خود را انتخاب کند} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در این صورت X را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

پس X را می‌توان به صورت تعداد موفقیتها در n آزمایش در نظر گرفت که در آن نتیجهٔ i امین آزمایش موفقیّت است اگر i امین شخص کلاه خود را انتخاب کند چون شخصی i ام هریک از n کلاه را با احتمال مساوی انتخاب می‌کند داریم

$$P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n} \tag{۲.۲.۳}$$

اکنون فرض کنید که $j \neq i$ و احتمال شرطی این که i امین شخص کلاه خود را انتخاب کند با شرط این‌که j امین شخص کلاه‌خود را انتخاب کرده است یعنی ، $P\{X_i = 1 | X_j = 1\}$ را در نظر بگیرید . حال با فرض این که i امین شخص واقعاً کلاه‌خود انتخاب کرده باشد نتیجه می‌شود که i امین شخص با احتمال مساوی هریک از $n - 1$ کلاه راکه یکی ازآنها متعلق به او است انتخاب می‌کند بنابراین داریم

$$P\{X_i = 1 | X_j = 1\} = \frac{1}{n-1} \tag{۳.۲.۳}$$

حال از مقایسهٔ تساویهای ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳ می‌بینیم که با وجود عدم استقلال آزمایشها، وابستگی آنها ضعیف است (زیرا اگر احتمال شرطی بالا به جای $1/(n-1)$ ، $1/n$ بود آن‌گاه آزمایشهای i و j مستقل بودند) پس خیلی عجیب‌نیست که‌بگوییم X دارای توزیع پواسن است. از تساوی ۲.۲.۳ داریم

$$E[X_i] = P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n} \quad \blacksquare$$

پس $E(X) = 1$. زیرا

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + \cdots + X_n] \\ &= E[X_1] + \cdots + E[X_n] \\ &= n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \end{aligned}$$

توزیع پواسن دارای این خاصیت است که مجموع متغیّرهای تصادفی مستقل پواسن نیز یک متغیّر تصادفی پواسن است برای اثبات فرض کنید X_1 و X_2 متغیّرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای میانگینهای λ_1، λ_2 باشند. در این صورت تابع مورد گشتاور $X_1 + X_2$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} E[e^{t(X_1+X_2)}] &= E[e^{tX_1}e^{tX_2}] \\ &= E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}] \\ &= \exp\{\lambda_1(e^t - 1)\}\exp\{\lambda_2(e^t - 1)\} \\ &= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)\} \end{aligned}$$

چون $\exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)\}$ تابع مولد گشتاور یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین $\lambda_1 + \lambda_2$ است با استفاده ازاین واقعیت که تابع مولدگشتاورها بطور منحصر به فرد توزیع را مشخص می‌کنند $X_1 + X_2$ دارای توزیع پواسن با میانگین $\lambda_1 + \lambda_2$ است.

مثال ۲.۳.ج ـ ثابت شده است که تعداد رادیوهای معیوب تولیدشدهٔ روزانه در یک کارخانه معین دارای توزیع پواسن با میانگین ۴ است. احتمال این که در ۲ روز معین تعداد رادیوهای معیوب از ۳ تجاوز نکند چقدر است؟

حل: فرض کنید X_1، تعداد تولیدات معیوب در اوّلین روز و X_2، تعداد تولیدات معیوب در دومین روز مستقل از هم باشند. در این صورت $X_1 + X_2$ دارای توزیع پواسن با میانگین ۸ است. بنابراین

$$P\{X_1 + X_2 \leq 3\} = \sum_{i=0}^{3} e^{-8}\frac{8^i}{i!} = .04238 \quad \blacksquare$$

۱.۲ : محاسبهٔ تابع توزیع پواسن

اگر X پواسن با میانگین λ باشد آن‌گاه

$$\frac{P\{X=i+1\}}{P\{X=i\}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+1}/(i+1)!}{e^{-\lambda}\lambda^{i}/i!} = \frac{\lambda}{i+1} \tag{۴.۲.۳}$$

با توجه به این که $P(X = 0) = e^{-\lambda}$، به کارگیری متوالی تساوی ۴.۲.۳ نتیجه می‌دهد :

$$P\{X=1\} = \lambda P\{X=0\}$$
$$P\{X=2\} = \frac{\lambda}{2}P\{X=1\}$$
$$\vdots$$
$$P\{X=i+1\} = \frac{\lambda}{i+1}P\{X=i\}$$

برنامه بیسیک ۳-۲ با استفاده از معادلهٔ ۴.۲.۳ ، به ازای هر i، این احتمال راکه متغیّر تصادفی پواسن با میانگین معلوم از i تجاوز نکند ، محاسبه می‌کند . این برنامه ابتدا $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}$ را حساب می‌کند . امّا اگر λ بزرگ باشد کامپیوتر مقدار 0 را به $e^{-\lambda}$ نسبت می‌دهد ، لذا در این حالت لازم است با $P(X = J)$ شروع کند که در آن

$$J = \begin{cases} i & \text{if } i \le \lambda \\ \text{Int}(\lambda) & \text{if } i > \lambda \end{cases}$$

و $\text{Int}(\lambda)$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی λ است . دلیل این انتخاب این است که $P(X = J)$ از تمام مقادیر $P\{X = k\}$، $k = 0, 1, ..., i$ که باید حساب شوند بزرگتر است (مسألهٔ ۱۶ را ببیند) . این برنامه $P(X = J)$ را با محاسبه

$$\log P\{X=J\} = -\lambda + J\log(\lambda) - \sum_{k=1}^{J}\log k$$

و قرار دادن $P\{X = J\} = \exp\{\log P\{X = j\}\}$ حساب می‌کند .
هنگامی که $P\{X = J\}$ محاسبه می‌شود برنامه از معادلهٔ ۴.۲.۳ استفاده می‌کند و بطور متوالی $P(X = J - 1)$، $P(X = J - 2)$، ... ، $P\{X = 0\}$ را محاسبه می‌کند . اگر $i > J$ دوباره از معادلهٔ ۴.۲.۳ استفاده کرده و بطور متوالی $P(X = J + 1), ..., P(X = i)$ را حساب می‌کند . مجموع همه این مقادیر $P(X \le i)$ خواهد بود .

مثال ۲.۳.چ - مطلوب است محاسبهٔ الف - $P(X \le 90)$ که در آن X دارای توزیع پواسن با پارامتر

$\lambda = 100$ است

ب ـ $P(X \leq 1087)$ که در آن X دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = 1000$ است

حل: برنامه ۲.۳ را اجرا می‌کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
IS LESS THAN OR EQUAL TO i
ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE
? 100
ENTER THE DESIRED VALUE OF i
? 90
THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN  100
IS LESS THAN OR EQUAL TO 90 IS .1713914
Ok
```

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
IS LESS THAN OR EQUAL TO i
ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE
? 1000
ENTER THE DESIRED VALUE OF i
? 1087
THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN  1000
IS LESS THAN OR EQUAL TO 1087 IS .9952581
Ok
```

۳- متغیّر تصادفی فوق هندسی

جعبه‌ای شامل $N + M$ باتری است که N تای آنها سالم و M تای دیگر معیوبند. نمونه‌ای به حجم n بتصادف (بدون جایگذاری) انتخاب می‌کنیم، بدین معنی که مجموعه باتریهای انتخاب شده با هر مجموعه به حجم n یعنی، $\binom{N+M}{n}$ دارای احتمال مساوی است. اگر فرض کنیم X نشان‌دهندهٔ تعداد باتریهای سالم در این نمونه باشد آن‌گاه

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \min(N, n) \tag{۱.۳.۳}$$

هر متغیّر تصادفی X را که تابع جرم احتمال آن به شکل ۱.۳.۳ باشد، یک متغیّر تصادفی فوق هندسی با پارامترهای N و M و n می‌باشد. برای محاسبهٔ میانگین و واریانس یک متغیّر تصادفی فوق هندسی که دارای تابع احتمال مفروض در ۱.۳.۳ باشد فرض می‌کنیم که باتریها یکی پس از دیگری خارج شوند و فرض می‌کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{امین انتخاب سالم باشد } i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون چون، iامین انتخاب برای هر $N + M$ باتری که N تای آنها سالم است متساوی‌الاحتمال می‌باشد داریم

$$P\{X_i = 1\} = \frac{N}{N+M} \tag{۲.۳.۳}$$

همچنین برای $i \neq j$

$$\begin{aligned} P\{X_i = 1, \quad X_j = 1\} &= P\{X_i = 1\} P\{X_j = 1 | X_i = 1\} \\ &= \frac{N}{N+M} \frac{N-1}{N+M-1} \end{aligned} \tag{۳.۳.۳}$$

زیرا فرض این که iامین انتخاب سالم باشد، jامین انتخاب برای هر $N + M - 1$ باتری دیگر که $N - 1$ تای آنها سالم است متساوی‌الاحتمال می‌باشد. برای محاسبه میانگین و واریانس X، تعداد باتریهای سالم در نمونه‌ای به حجم n، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

بنابراین

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} P\{X_i = 1\} = \frac{nN}{N+M} \tag{۴.۳.۳}$$

همچنین از نتیجهٔ ۳.۷.۲ فصل (۲) برای واریانس مجموع متغیّرهای تصادفی نتیجه می‌شود

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \sum \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \tag{۵.۳.۳}$$

از طرفی X_i یک متغیّر تصادفی برنولی است، پس

$$\operatorname{Var}(X_i) = P\{X_i = 1\}(1 - P\{X_i = 1\}) = \frac{N}{N+M} \frac{M}{N+M} \tag{۶.۳.۳}$$

همچنین برای $i < j$

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j]$$

اکنون هر دو متغیّر X_i و X_j متغیّر تصادفی برنولی (یعنی $0 - 1$) هستند، در نتیجه $X_i X_j$ نیز یک متغیّر تصادفی برنولی است. پس

$$\begin{aligned} E[X_i X_j] &= P\{X_i X_j = 1\} \\ &= P\{X_i = 1, \quad X_j = 1\} \\ &= \frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)} \end{aligned} \qquad \text{از معادلهٔ ۳.۳.۳} \tag{۷.۳.۳}$$

در نتیجه از تساوی ۲.۳.۳ و عبارت اخیر می‌بینیم که برای هر $j \neq i$

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)} - \left(\frac{N}{N+M}\right)^2$$
$$= \frac{-NM}{(N+M \quad (N+M-1)}$$

چون دومین مجموع در طرف راست تساوی ۵.۳.۳ شامل $\binom{n}{2}$ جمله است از رابطه ۶.۳.۳ به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{nNM}{(N+M)^2} - \frac{n(n-1)NM}{(N+M)^2(N+M-1)}$$
$$= \frac{nNM}{(N+M)^2}\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right) \qquad (۸.۳.۳)$$

اگر فرض کنیم $p = N/(N+M)$ نشان‌دهندهٔ نسبت باتریهای سالم در جعبه باشد، تساویهای ۴.۳ و ۸.۳ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$E(X) = np$$
$$\operatorname{Var}(X) = np(1-p)\left[1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right]$$

باید توجه داشت که برای ثابت P وقتی $N + M$ به سمت ∞ میل می‌کند $\operatorname{var}(X)$ به $np(1-p)$، واریانس متغیّر تصادفی دوجمله‌ای باپارامترهای (n, p) میل می‌کند. (چرا انتظار چنین چیزی می‌رود ؟)

مثال ۳.۳.الف ـ تعدادی مجهول مثلاً N حیوان در یک ناحیه معین زندگی می‌کنند. برای به‌دست آوردن اطلاعاتی در مورد تعداد حیوانات غالباً زیست‌شناسان این آزمایش را انجام می‌دهند: آنها ابتدا یک تعداد مثلاً r تا از این حیوانات را می‌گیرند و به طریقی آنها را علامت‌گذاری کرده و رها می‌کنند. پس از مدتی که حیوانات علامت‌گذاری شده در ناحیه پراکنده شوند تعدادی دیگر مثلاً n تا از آنها را می‌گیرند. فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد حیوانات علامت‌گذاری شده در بین دومین سری از حیوانات گرفته شده باشد. اگر فرض کنیم تعداد حیوانات در این ناحیه در زمان بین دو نمونه‌گیری ثابت و هربار احتمال گرفتن یک حیوان با حیوانات دیگر مساوی است آن‌گاه X یک متغیّر تصادفی فوق هندسی است بطوری که

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{r}{i}\binom{N-r}{n-i}}{\binom{N}{n}} \equiv P_i(N)$$

اکنون فرض کنید X مساوی i مشاهده شود . یعنی به نسبت i/n از حیوانات در دومین نمونه‌گیری علامت‌گذاری شده باشند . با گرفتن این نسبت به عنوان تقریبی برای نسبت حیواناتی که در این ناحیه علامت‌گذاری شده‌اند ، یعنی r/n، برآورد rn/i را برای تعداد حیوانات این ناحیه به‌دست می‌آوریم . برای مثال اگر ابتدا $r = 50$ حیوان گرفته شده ، علامت‌گذاری و سپس رها شوند و بعد $n = 100$ حیوان گرفته و معلوم شود که $X = 25$ تای آنها علامت‌دار هستند آن‌گاه برآورد می‌کنیم که تعداد حیوانات در این ناحیه حدود ۲۰۰ تا می‌باشند . ■

رابطه‌ای بین متغیّرهای تصادفی دوجمله‌ای و توزیع فوق هندسی وجود دارد که در انجام آزمونهای آماری مربوط به دو جامعهٔ دوجمله‌ای مفید واقع می‌شود .

مثال ۳.۳.ب ـ فرض کنید X و Y متغیّرهای تصادفی دوجمله‌ای مستقل و به‌ترتیب با پارامترهای (n, p) و (m, p) باشند تابع جرم احتمال شرطی X با فرض این‌که $X + Y = k$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
P\{X = i \mid X + Y = k\} &= \frac{P\{X = i, \quad X + Y = k\}}{P\{X + Y = k\}} \\
&= \frac{P\{X = i, \quad Y = k - i\}}{P\{X + Y = k\}} \\
&= \frac{P\{X = i\}P\{Y = k - i\}}{P\{X + Y = k\}} \\
&= \frac{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}}{\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}} \\
&= \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}
\end{aligned}$$

در تساوی ماقبل آخر از این واقعیت که $X + Y$ دوجمله‌ای با پارامترهای $(n + m, p)$ است استفاده شده است. بنابراین می‌بینیم که توزیع شرطی X با فرض معلوم بودن مقدار $X + Y$ فوق هندسی است (همان‌طور که مشخص است این توزیع به p بستگی ندارد و این واقعیت در کاربردهای آمار اهمیت دارد) .

۴- متغیّر تصادفی یکنواخت

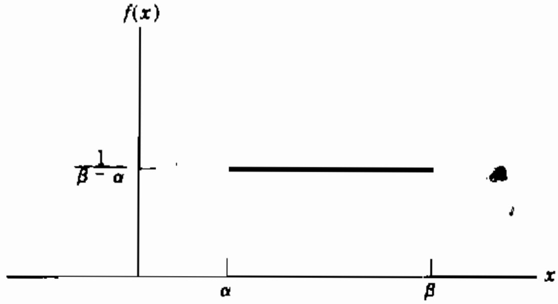
گوییم متغیّر تصادفی X در فاصله $[\alpha, \beta]$ بطور یکنواخت توزیع شده است اگر تابع چگالی

احتمال آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۱.۴.۳ نمایش داده شده است . توجه کنید که تابع مذکور در شرایط یک تابع چگالی احتمال صدق می‌کند زیرا

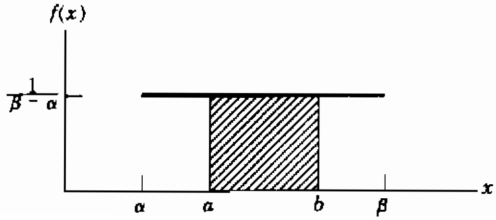
$$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} dx = 1$$



شکل (۱.۴.۳)

در عمل توزیع یکنواخت هنگامی اتفاق می‌افتد که فرض کنیم یک متغیّر تصادفی مفروض با احتمال مساوی در همسایگی هرنقطه از فاصله $[\alpha, \beta]$ قرار گیرد .
احتمال این که X در هر زیربازه از $[\alpha, \beta]$ قرار گیرد مساوی است با طول زیربازه تقسیم بر اندازه بازهٔ $[\alpha, \beta]$. زیرا وقتی $[a, b]$ یک زیربازه از $[\alpha, \beta]$ است ، داریم

$$P\{a < X < b\} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{a}^{b} dx = \frac{b - a}{\beta - \alpha}$$



مثال ۴.۳.الف ـ اگر X در بازه $[0, 10]$ بطور یکنواخت توزیع شود مطلوب است احتمال این که الف ـ $2 < X < 9$ ب ـ $1 < X < 4$ پ ـ $X < 5$ ت ـ $X > 6$

حل ـ جوابها به ترتیب برابرند با الف ـ $7/10$ ب ـ $3/10$ پ ـ $5/10$ ت ـ $4/10$

مثال ۴.۳.ب ـ از ایستگاه معینی از ساعت ۷ صبح به فاصله هر ۱۵ دقیقه اتوبوسها عبور می‌کنند. یعنی در ساعت ۷، ۷:۱۵، ۷:۳۰، ۷:۴۵ و الی آخر. اگر یک عابر در زمانی بین ۷ تا ۷:۳۰ که بطور یکنواخت توزیع می‌شود به ایستگاه مراجعه کند مطلوب است احتمال این که

الف ـ کمتر از ۵ دقیقه برای اتوبوس منتظر بماند

ب ـ حداقل ۱۲ دقیقه برای اتوبوس منتظر بماند.

حل: فرض کنید X نشان‌دهندهٔ زمان برحسب دقیقه بعد از ۷ صبح باشد که شخص به ایستگاه مراجعه می‌کند. چون X یک متغیّر تصادفی یکنواخت در فاصلهٔ $(0, 30)$ است، پس عابر کمتر از ۵ دقیقه منتظر خواهد ماند اگر بین ۷:۱۰ و ۷:۱۵ یا بین ۷:۲۵ و ۷:۳۰ به ایستگاه مراجعه کند. بنابراین احتمال مطلوب در (الف) برابر است با

$$P\{10 < X < 15\} + P\{25 < X < 30\} = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

بطور مشابه او حداقل ۱۲ دقیقه منتظر خواهد ماند اگر بین ۷ و ۷:۵۳ یا بین ۷:۱۵ و ۷:۱۸ مراجعه کند پس احتمال مطلوب در (ب) مساوی است با

$$P\{0 < X < 3\} + P\{15 < X < 18\} = \frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{1}{5} \quad \blacksquare$$

میانگین متغیّر تصادفی یکنواخت در فاصلهٔ $[\alpha, \beta]$ برابر است با

$$E[X] = \int_\alpha^\beta \frac{x}{\beta - \alpha}\, dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{2(\beta - \alpha)}$$

یا

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

به عبارت دیگر امید ریاضی یک متغیّر تصادفی یکنواخت روی $[\alpha, \beta]$ مساوی است با نقطه میانی فاصله $[\alpha, \beta]$ که انتظار آن نیز می‌رود (چرا ؟).

واریانس این توزیع به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x^2\,dx \\
&= \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} \\
&= \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}
\end{aligned}
$$

0.68587	0.25848	0.85227	0.78724	0.05302	0.70712	0.76552	0.70326	0.80402	0.49479
0.73253	0.41629	0.37913	0.00236	0.60196	0.59048	0.59946	0.75657	0.61849	0.90181
0.84448	0.42477	0.94829	0.86678	0.14030	0.04072	0.45580	0.36833	0.10783	0.33199
0.49564	0.98590	0.92880	0.69970	0.83898	0.21077	0.71374	0.85967	0.20857	0.51433
0.68304	0.46922	0.14218	0.63014	0.50116	0.33569	0.97793	0.84637	0.27681	0.04354
0.76992	0.70179	0.75568	0.21792	0.50646	0.07744	0.38064	0.06107	0.41481	0.93919
0.37604	0.27772	0.75615	0.51157	0.73821	0.29928	0.62603	0.06259	0.21552	0.72977
0.43898	0.06592	0.44474	0.07517	0.44831	0.01337	0.04538	0.15198	0.50345	0.65288
0.86039	0.28645	0.44931	0.59203	0.98254	0.56697	0.55897	0.25109	0.47585	0.59524
0.28877	0.84966	0.97319	0.66633	0.71350	0.28403	0.28265	0.61379	0.13886	0.78325
0.44973	0.12332	0.16649	0.88908	0.31019	0.33358	0.68401	0.10177	0.92873	0.13065
0.42529	0.37593	0.90208	0.50331	0.37531	0.72208	0.42884	0.07435	0.58647	0.84972
0.82004	0.74696	0.10136	0.35971	0.72014	0.08345	0.49366	0.68501	0.14135	0.15718
0.67090	0.08493	0.47151	0.06464	0.14425	0.28381	0.40455	0.87302	0.07135	0.04507
0.62825	0.83809	0.37425	0.17693	0.69327	0.04144	0.00924	0.68246	0.48573	0.24647
0.10720	0.89919	0.90448	0.80838	0.70997	0.98438	0.51651	0.71379	0.10830	0.69984
0.69854	0.89270	0.54348	0.22658	0.94233	0.08889	0.52655	0.83351	0.73627	0.39018
0.71460	0.25022	0.06988	0.64146	0.69407	0.39125	0.10090	0.08415	0.07094	0.14244
0.69040	0.33461	0.79399	0.22664	0.68810	0.56303	0.65947	0.88951	0.40180	0.87943
0.13452	0.36642	0.98785	0.62929	0.88509	0.64690	0.38981	0.99092	0.91137	0.02411
0.94232	0.91117	0.98610	0.71605	0.89560	0.92921	0.51481	0.20016	0.56769	0.60462
0.99269	0.98876	0.47254	0.93637	0.83954	0.60990	0.10353	0.13206	0.33480	0.29440
0.75323	0.86974	0.91355	0.12780	0.01906	0.96412	0.61320	0.47629	0.33890	0.22099
0.75003	0.98538	0.63622	0.94890	0.96744	0.73870	0.72527	0.17745	0.01151	0.47200

جدول ۱.۴.۳ ـ جدول اعداد تصادفی

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{12} \\
&= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}
\end{aligned}
$$

مقدار یک متغیّر تصادفی یکنواخت در فاصلهٔ (0, 1) را یک عدد تصادفی می‌نامند. اکثر سیستمهای کامپیوتری دارای زیربرنامه‌ای برای تولید دنباله‌ای از اعداد تصادفی مستقل (یا یک تقریب خیلی خوب از آنها) هستند. برای نمونه جدول ۱.۴.۳ مجموعه‌ای از اعداد تصادفی مستقل را که توسط یک کامپیوتر شخصی IBM تولید شده است نمایش می‌دهد. اعداد تصادفی در آمار و احتمال بسیار مفیدند زیرا با استفاده از آنها بطور تجربی می‌توان انواع مختلف احتمالات و امید ریاضیها را برآورد کرد. مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه اعداد تصادفی می‌توانند برای حل یک مسأله در ترکیبات مورد استفاده قرار گیرند.

مثال ۴.۳.پ : برآورد تعداد درایه‌های متمایز در یک لیست بزرگ ـ لیستی شامل n درایه را در نظر بگیرید که در آن n خیلی بزرگ است و فرض کنید می‌خواهیم d، تعداد درایه‌های متمایز در این لیست را برآورد کنیم . اگر فرض کنیم $m(i)$ نشان‌دهندهٔ تعداد دفعاتی باشد که درایهٔ iام در لیست ظاهر می‌شود آن‌گاه d را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$d = \sum_{i=1}^{n} 1/m(i)$$

به عنوان مثال اگر $n = 9$ و درایه‌ها به صورت 3, 2, 1, 2, 4, 1, 5, 1, 3 باشند آن‌گاه $m(1)= m(9)=2, m(2)=m(4)=2, m(3) = m(6)= m(8)=3, m(5)=1, m(7) = 1$ و

$$d = \sum_{i=1}^{9} 1/m(i) = 2(\tfrac{1}{2}) + 2(\tfrac{1}{2}) + 3(\tfrac{1}{3}) + 1 + 1 = 5.$$

برای برآورد d فرض کنید متغیّر تصادفی X را طوری بسازیم که هریک از مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را با احتمال مساوی بگیرید ، یعنی X طوری است که

$$P\{X = i\} = \frac{1}{n} \qquad i = 1, \ldots, n$$

در این صورت $m(X)$ برابر است با تعداد دفعاتی که درایه موقعیت X در لیست ظاهر می‌شود . داریم

$$E\left[\frac{1}{m(X)}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m(i)} P\{X = i\}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m(i)} = \frac{d}{n}$$

بنابراین اگر فرض کنیم $Y = n/m(X)$ آن‌گاه $E(Y) = d$

از مطلب بالا نتیجه می‌شود که اگر k متغیّر تصادفی مستقل $X_1, X_2, \ldots, X_k$ تولید کنیم به قسمی که هر یک با احتمال مساوی مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را بگیرند و قرار دهیم $Y_i = n/m(X_i)$ آن‌گاه $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ متغیّرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با میانگین d می‌باشند . اکنون از قانون اعداد بزرگ نتیجه می‌شود که برای k بزرگ $\sum_{i=1}^{k} Y_i/k$ تقریباً مساوی d است یعنی

$$d \approx \frac{n}{k} \sum_{i=1}^{k} 1/m(X_i)$$

بنابراین با تعیین $m(X_1), \ldots, m(X_k)$ به‌جای تعیین $m(i)$، به ازای هر i می‌توان d را تخمین زد . فقط باید نشان دهیم که چگونه می‌توان متغیّر تصادفی X را تولید کرد به قسمی که هریک از مقادیر $1, 2, \ldots, n$ را با احتمال مساوی بگیرد . برای انجام این کار فرض کنید U نشان‌دهندهٔ یک عدد تصادفی است (یعنی U روی بازه $(0, 1)$ بطور یکنواخت توزیع می‌شود) در این صورت nU روی بازهٔ $(0, n)$ یکنواخت است و

$$P\{i - 1 < nU < i\} = \frac{1}{n} \qquad i = 1, \ldots, n$$

بنابراین اگر قرار دهیم

$$X = i \qquad \text{if } i - 1 < nU < i \tag{۱.۴.۳}$$

آن‌گاه X دارای توزیع موردنظر است . با استفاده از نماد [ ] ، می‌توانیم X را به صورت خلاصه‌تر برحسب U بیان کنیم که در آن $[x]$ برابر با بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است . با استفاده از این نماد رابطهٔ ۱.۴.۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$X = [nU] + 1$$

بنابراین بطور خلاصه می‌توانیم d را با تولید k عدد تصادفی $U_1, U_2, \ldots, U_n$ و قرار دادن $X_i = [nU_i] + 1$ برآورد کنیم . در این صورت d برابر است با

$$d \approx \frac{n}{k} \sum_{i=1}^{k} 1/m(X_i) \quad ■$$

به‌عنوان توضیحی دیگربرای استفاده ازاعدادتصادفی ، فرض کنید که یک‌مرکزپزشکی قصد داردیک‌داروی‌جدیدراکه‌برای‌کاهش‌میزان‌کلسترول خون ساخته شده‌است آزمون‌کند . برای آزمون تأثیردارو ، این‌مرکز ۱۰۰۰ داوطلب راموردآزمایش قرارمی‌دهد . چون میزان‌کلسترول‌خون‌ممکن است به‌عوامل خارجی (مثلاً شرایط‌تغییرات‌آب وهوایی) نیزبستگی‌داشته‌باشد ، این مرکز داوطلبان را به ۲ دسته ۵۰۰ نفری تقسیم می‌کند ـ یکی‌گروه تیمار که‌دارو رامصرف‌می‌کنند ودیگری‌گروه کنترل که‌به‌آنهاداروی بی‌اثرداده می‌شود . به‌هیچ‌یک ازداوطلبان ومجریان تزریق‌داروگفته‌نمی‌شودکه چه کسی درهرگروه قراردارد . اکنون‌تعیین می‌کنیم که چگونه‌داوطلبان بایدتشکیل‌گروه‌تیمار رابدهند . واضح‌است‌که گروه‌تیماروگروه کنترل‌باید تا جایی‌که ممکن است ازهرحیث مشابه‌باشندبه‌استثنای این که گروه اوّل داروی موردنظر وگروه دیگرداروی بی‌اثر رامصرف‌می‌کنند . دراین‌صورت می‌توان‌نتیجه گرفت که هر اختلاف در جواب بین گروهها در واقع مربوط به داروست . بطورکلی در این که بهترین راه انجام این آزمون ، انتخاب ۵۰۰ داوطلب برای گروه تیمار بطور کاملاً تصادفی است اتفاق‌نظر وجود دارد . یعنی انتخاب باید طوری باشد که هر $\binom{1000}{500}$ زیرمجموعه ۵۰۰ تایی از داوطلبان دارای احتمال مساوی برای تشکیل گروه کنترل را داشته باشند . چگونه این کار را می‌توان انجام داد ؟

مثال ۴.۳.ت : انتخاب زیرمجموعهٔ تصادفی ـ فرض کنید می‌خواهیم از یک مجموعه n عضوی که با اعداد $1, 2, \ldots, n$ شماره‌گذاری شده‌اند یک زیرمجموعه k عضوی تولید کنیم بطوری که هر $\binom{n}{k}$ زیرمجموعه با احتمال مساوی انتخاب شوند چگونه این کار را انجام دهیم ؟

برای جواب به این سؤال فرض کنید وارونه عمل کنیم یعنی فرض کنیم زیرمجموعه‌ای به اندازه k

تولید شده است . حال برای هر $i = 1, ..., n$ قرار دهید

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{عنصر } i \text{ام در زیر مجموعه باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال توزیع شرطی I_j را با فرض $I_1, ..., I_{j-1}$ محاسبه می‌کنیم . ابتدا توجه کنید که احتمال این‌که عنصر ۱ در زیرمجموعهٔ k عضوی باشد برابر است با k/n (صحت این مطلب را می‌توان با توجه نمودن به این که با احتمال $1/n$ عنصر ۱ ، jامین عنصر انتخاب شده خواهد بود $j = 1, ..., n$ یا با توجه نمودن به این که نسبت برآمدهای انتخاب تصادفی که به انتخاب ۱ منتج می‌شود برابر است با $\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}\Big/\binom{n}{k} = k/n$ دید) . بنابراین داریم

$$P\{I_1 = 1\} = k/n \tag{۲.۴.۳}$$

برای محاسبهٔ احتمال شرطی این‌که عنصر ۲ در زیرمجموعه باشد بافرض I_1، توجه کنید که اگر $I_1 = 1$ آن‌گاه با کنار گذاشتن 1 ، $k - 1$ عضو از زیرمجموعه باقی می‌ماند که باید بتصادف از $n - 1$ عنصر باقیمانده انتخاب شود . (بدین معنی که همهٔ زیرمجموعه‌های $k - 1$ عضوی از اعداد $2, ..., n$ دارای احتمال مساوی هستند که عناصر دیگر زیرمجموعه باشند) بنابراین داریم

$$P\{I_2 = 1|I_1 = 1\} = \frac{k-1}{n-1} \tag{۳.۴.۳}$$

بطور مشابه اگر عنصر ۱ در زیرمجموعه نباشد آن‌گاه k عضو زیرمجموعه بتصادف از $n - 1$ عنصر انتخاب خواهند شد و در نتیجه

$$P\{I_2 = 1|I_1 = 0\} = \frac{k}{n-1} \tag{۴.۴.۳}$$

از تساویهای ۳.۴.۳ و ۴.۴.۳ می‌بینیم که

$$P\{I_2 = 1|I_1\} = \frac{k - I_1}{n-1}$$

و بطورکلی داریم

$$P\{I_j = 1|I_1, \ldots, I_{j-1}\} = \frac{k - \sum_{i=1}^{j-1} I_i}{n - j + 1}, \qquad j = 2, \ldots, n \tag{۵.۴.۳}$$

زیرا $\sum_{i=1}^{j-1} I_i$ نشان‌دهندهٔ تعداد $j - 1$ عنصر اوّل است که در زیر مجموعه قرار می‌گیرند و در نتیجه با

معلوم‌بودن $I_1, \ldots, I_{j-1}$، $k - \sum_{i=1}^{j-1} I_i$ عنصر باقی می‌ماند که از $n - (j-1)$ عضو باقیمانده انتخاب می‌شوند.

اگر U یک متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله (0,1) باشد آن‌گاه $P\{U<a\}=a,\ 0 \le a \le 1$. بنابراین برای تولید یک زیر مجموعهٔ تصادفی به حجم k از مجموعه‌ای شامل n عضو معادلات ۲.۴.۳ و ۵.۴.۳ به روش زیر، یعنی تولید دنباله‌ای از اعداد تصادفی ... $U_1, U_2,$ (حداکثر n تا)، منتهی می‌شوند.

$$I_1 = \begin{cases} 1 & U_1 < \dfrac{k}{n} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

در غیر این‌صورت

$$I_2 = \begin{cases} 1 & U_2 < \dfrac{k - I_1}{n-1} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

در غیر این صورت

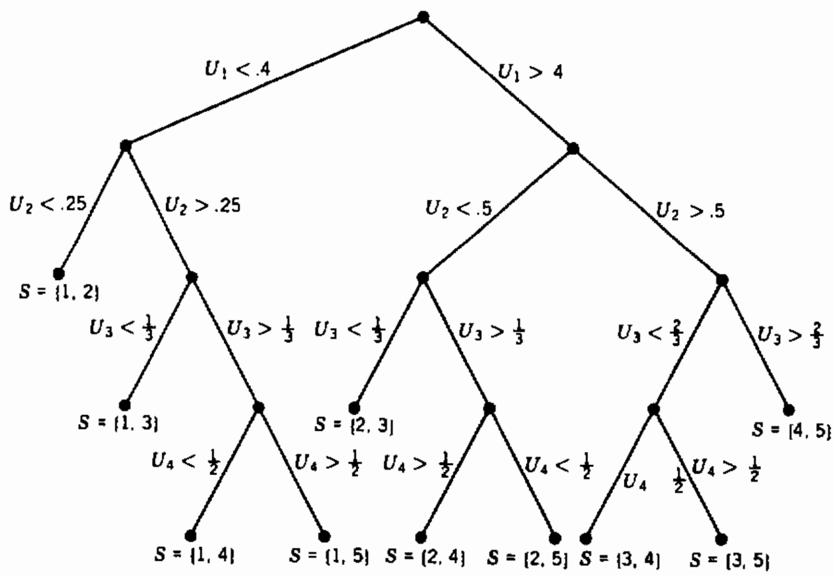
$$\vdots$$

در غیر این صورت

$$I_j = \begin{cases} 1 & U_j < \dfrac{k - I_1 - \cdots - I_{j-1}}{n-j+1} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

این فرآیند هنگامی خاتمه پیدا می‌کند $I_1 + \ldots + I_j = k$ و زیرمجموعه شامل k عنصری است که مقدار I در آنها ۱ است. یعنی $S = \{i : I_i = 1\}$ زیر مجموعهٔ تصادفی است.

برای مثال اگر $k = 2$ و $n = 5$ آن‌گاه نمودار درختی زیر روش بالا را تأیید می‌کند. زیرمجموعهٔ تصادفی S مکان انتهایی درخت است



توجه کنید که احتمال رسیدن به هر نقطه انتهایی مساوی است با ۰/۱ ، که می‌توان با حرکت روی درخت و ضرب احتمالات به این نتیجه رسید . به عنوان مثال احتمال رسیدن به وضعیت $S = \{2, 4\}$ برابر است با

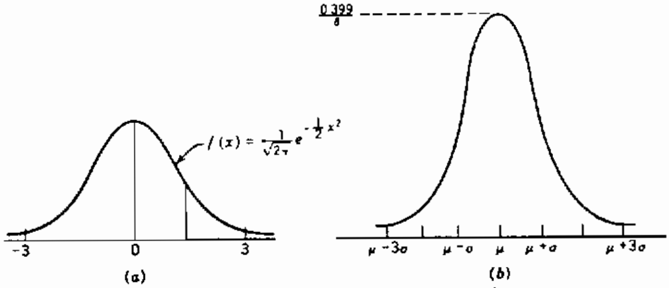
$$P\{U_1 > .4\}P\{U_2 < .5\}P\{U_3 > \tfrac{1}{3}\}P\{U_4 > \tfrac{1}{2}\} = (.6)(.5)(\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{2}) = .1$$

همان‌طور که از نمودار درختی مشخص می‌شود (شاخه انتهای سمت راست را که نتیجه $S = \{4, 5\}$ است ببینید) می‌توانیم تولید اعداد تصادفی را هنگامی خاتمه دهیم که تعداد مکانهای باقیمانده در زیرمجموعهٔ انتخابی مساوی با تعداد عناصر باقیمانده باشد یعنی بطور کلی فرآیند هنگامی خاتمه پیدا می‌کند که $\sum_{i=1}^{j} I_i = k$ یا $\sum_{i=1}^{j} I_i = k - (n - j)$. درحالت اخیر، $S = \{i \leq j : I_i = 1, j + 1, ..., n\}$. ■

تبصره : برای تولید یک زیرمجموعه تصادفی روش مذکور احتیاج به حافظه ، خیلی کمی دارد . یک الگوریتم سریعتر که احتیاج به حافظه نسبةً بیشتری دارد در بخش ۱ فصل ۱۲ معرفی شده است . (الگوریتم اخیر اوّلین k عنصر یک جایگشت تصادفی از $1, 2, ..., n$ را مورد استفاده قرار می‌دهد) . برنامهٔ ۳-۴ که از الگوریتم قبلی برای تولید یک زیرمجموعهٔ تصادفی استفاده می‌کند در برنامه‌های ضمیمه آمده است .

مثال ۴.۳.ث ـ فرض کنید می‌خواهیم یک زیرمجموعه تصادفی به حجم ۵ از اعداد صحیح $1, ..., 25$ بسازیم . برای انجام این کار برنامه ۳-۴ را اجرا می‌کنیم :

```
RUN
THIS PROGRAM GENERATES A RANDOM SUBSET OF SIZE K FROM THE SET 1,2,...N
ENTER THE VALUE OF N
? 25
ENTER THE VALUE OF K
? 5
Random number seed (-32768 to 32767)? 4762
THE RANDOM SUBSET CONSISTS OF THE FOLLOWING 5 VALUES
              7
              10
              13
              16
              19
OK
```



شکل ۱.۵.۳ : تابع چگالی نرمال الف) با $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ ب) با μ و σ دلخواه

۵- متغیّرهای تصادفی نرمال

یک متغیّر تصادفی را دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 گوییم و می‌نویسیم $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ اگر تابع چگالی آن به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty^{\dagger}$$

چگالی نرمال $f(x)$ یک منحنی زنگی شکل دارد که حول μ متقارن است و در $x = \mu$ به‌مقدار ماکزیمم خود $1/\sigma\sqrt{2\pi} \approx 0.399/\sigma$ می‌رسد. (شکل ۱.۵.۳ را ببینید)

توزیع نرمال توسط ریاضیدان فرانسوی آبراهام موآور[1] در سال ۱۷۳۲ م. معرفی شد و آن‌را برای تقریب احتمالات مربوط به متغیّر تصادفی دوجمله‌ای وقتی پارامتر n دوجمله‌ای بزرگ است به کار برد و این نتیجه بعداً توسط لاپلاس[2] و دیگران توسعه یافت. و اکنون در احتمالات به قضیهٔ حد مرکزی معروف است که برای اغلب مطالعات تجربی یک مبنای تئوری ارائه می‌دهد. در عمل بسیاری از پدیده‌های تصادفی، حداقل بطور تقریب از یک توزیع نرمال پیروی می‌کنند. به‌عنوان مثال می‌توان از اندازهٔ قد یک شخص، سرعت مولکول یک گاز در هرمسیر و خطای اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی نام برد.

تابع مولد گشتاور یک متغیّر تصادفی نرمال با پارامتر μ و واریانس σ^2 به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma y} e^{-y^2/2}\,dy \qquad y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\
&= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{y^2 - 2t\sigma y}{2}\right]\right\} dy \\
&= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y - t\sigma)^2}{2} + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\} dy \\
&= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-t\sigma)^2/2}\,dy \\
&= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}
\end{aligned} \qquad (۱.۵.۳)$$

با قرار دادن

1- Abraham Moivre

2- Laplace

و تساوی اخیر بدین دلیل نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-t\sigma)^2/2}$$

چگالی یک متغیّر تصادفی نرمال (با پارامترهای $t\sigma$ و 1) است و بنابراین انتگرال آن باید مساوی 1 باشد. با مشتق‌گیری از تساویهای ۱.۵.۳ به‌دست می‌آوریم

$$\phi'(t) = (\mu + t\sigma^2)\exp\left\{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\}$$

$$\phi''(t) = \sigma^2 \exp\left\{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\} + \exp\left\{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\}(\mu + t\sigma^2)^2$$

در نتیجه

$$E[X] = \phi'(0) = \mu$$

$$E[X^2] = \phi''(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

و همچنین

$$E[X] = \mu$$

$$\operatorname{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \sigma^2$$

یک واقعیت مهم در مورد توزیع نرمال این است که اگر X نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد آن‌گاه $Y = \alpha X + \beta$ نیز نرمال با پارامترهای $\alpha\mu + \beta$ و $\alpha^2\sigma^2$ است. صحت این مطلب را می‌توان براحتی با استفاده از تابع مولد گشتاورها به صورت زیر دید

$$\begin{aligned}
E[e^{t(\alpha X+\beta)}] &= e^{t\beta} E[e^{\alpha t X}] \\
&= e^{t\beta} \exp\left\{\mu\alpha t + \sigma^2(\alpha t)^2/2\right\} \\
&= \exp\left\{t\beta + \mu\alpha t + \sigma^2 \frac{\alpha^2 t^2}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{(\beta + \alpha\mu)t + \alpha^2\sigma^2 \frac{t^2}{2}\right\}
\end{aligned}$$

چون عبارت اخیر تابع مولد گشتاور در یک متغیّر تصادفی نرمال با پارامترهای $\alpha\mu + \beta$ و $\alpha^2\sigma^2$ است، نتیجه به‌دست می‌آید.

از مطلب فوق نتیجه می‌شود که اگر $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ آن‌گاه $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ یک متغیّر تصادفی نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 است. در این حالت متغیّر تصادفی Z را دارای **توزیع نرمال استاندارد یا واحد**

می‌گویند . فرض کنید $\Phi(\cdot)$ نشان‌دهندهٔ تابع توزیع نرمال استاندارد باشد ، یعنی

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy \qquad -\infty < x < \infty$$

این نتیجه که وقتی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد ، متغیّر $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است اهمیّت زیادی دارد . زیرا با استفاده از آن می‌توان هرعبارت احتمالی در مورد X را برحسب Z نوشت .

به‌عنوان مثال برای به‌دست آوردن $P\{X < b\}$ توجه داریم که X کمتر از b است اگر و تنها اگر $(X-\mu)/\sigma$ کمتر از $(b-\mu)/\sigma$ باشد بنابراین

$$\begin{aligned} P\{X < b\} &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

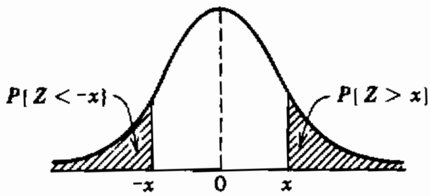
بطور مشابه برای هر $a < b$

$$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\left\{Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} - P\left\{Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

بنابراین کافی است $\Phi(x)$ محاسبه شود . این کار برای بُرد وسیعی از مقادیر نامنفی x انجام شده و نتیجه آن (با چهار رقم اعشار) در جدول ۱.۵.۳ الف ضمیمه ثبت شده است . به‌علاوه یک برنامه بیسیک برای محاسبه در انتهای این بخش طراحی شده و در برنامه‌های ضمیمه نمایش داده شده است .

از آن‌جایی که جدول ۱.۵.۳الف $\Phi(x)$ را فقط برای مقادیر نامنفی x در خود دارد می‌توانیم از این جدول با استفاده از تقارن تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد (حول 0) $\Phi(-x)$ را نیز به‌دست آوریم . یعنی برای $x > 0$ اگر Z نشان‌دهندهٔ متغیّر تصادفی نرمال استاندارد باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= P\{Z < -x\} \\ &= P\{Z > x\} \qquad \text{از تقارن} \\ &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$



بنابراین برای مثال

$$P\{Z < -1\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - .8413 = .1587$$

مثال ۵.۳.الف ـ اگر X یک متغیّر تصادفی نرمال با میانگین $\mu = 3$ و واریانس $\sigma^2 = 16$ باشد مطلوب است

۱- $P\{X < 11\}$

۲- $P\{X > -1\}$

۳- $P\{2 < X < 7\}$

حل:

$$\begin{aligned}
P\{X < 11\} &= P\left\{\frac{X-3}{4} < \frac{11-3}{4}\right\} \\
&= \Phi(2) \\
&= .9772 \\
P\{X > -1\} &= P\left\{\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right\} \\
&= P\{Z > -1\} \\
&= P\{Z < 1\} \\
&= .8413 \\
P\{2 < X < 7\} &= P\left\{\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right\} \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1/4) \\
&= \Phi(1) - (1 - \Phi(1/4)) \\
&= .8413 + .5987 - 1 = .4400 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

مثال ۵.۳.ب ـ فرض کنید یک پیام دوتایی و ـ 0 یا 1 ـ توسط یک سیم باید از موقعیت A به موقعیت B انتقال یابد . امّا اطلاعات عبورکننده از سیم در معرض یک سری پارازیت قرار می‌گیرد و بنابراین برای کاهش خطای ممکن وقتی پیام 1 است عدد 2 و وقتی پیغام 0 است عدد -2 را مخابره می‌کنیم . اگر x، $x = \pm 2$، مقداری باشد که از A فرستاده می‌شود آن‌گاه R، مقداری که به موقعیت B می‌رسد برابر است با $R = x + N$؛ که در آن N پارازیت داخل سیم است . هنگامی که پیام به موقعیت B می‌رسد دریافت‌کننده براساس قاعده زیر پیام را از رمز خارج می‌کند

اگر $R \geq .5$ آن‌گاه پیام را 1 در نظر می‌گیرد
اگر $R < .5$ آن‌گاه پیام را 0 در نظر می‌گیرد

چون پارازیتها معمولاً بطور نرمال توزیع می‌شوند ، احتمال خطا را هنگامی که N متغیّر تصادفی نرمال استاندارد است تعیین می‌کنیم .
دو نوع خطا می‌تواند رخ دهد : یکی این که پیام 1 باشد و بغلط 0 در نظر گرفته شود و دیگر این‌که پیام 0 باشد و آن را 1 در نظر بگیرد . خطای نوع اوّل هنگامی رخ می‌دهد که پیام 1 باشد و $2 + N < .5$ و خطای نوع دوم زمانی رخ می‌دهد که پیام 0 باشد و $-2 + N \geq .5$ بنابراین

$$\begin{aligned} P\,(\text{خطا} \mid \text{پیام 1 باشد}) &= P\{N < -1.5\} \\ &= 1 - \Phi(1.5) = .0668 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P\,(\text{خطا} \mid \text{پیام 0 باشد}) &= P\{N > 2.5\} \\ &= 1 - \Phi(2.5) = .0062 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

نتیجهٔ مهم دیگر در مورد توزیع نرمال این است که مجموع متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال ، یک متغیّر تصادفی نرمال است. برای اثبات فرض کنید که X_i ها ، $i = 1, 2, ..., n$ مستقلند و X_i دارای توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 است دراین صورت تابع مولد گشتاور $\sum_{i=1}^n X_i$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} E\left[e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right] &= E\left[e^{tX_1}e^{tX_2}\dots e^{tX_n}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n E\left[e^{tX_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \left(e^{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2/2}\right) \\ &= e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \end{aligned}$$

که در آن

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad و \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای تابع مولد گشتاوری یکسان با تابع مولد گشتاور یک متغیّر تصادفی نرمال که دارای میانگین μ و واریانس σ^2 است می‌باشد . در نتیجه با توجه به این که تناظری یک به یک بین تابع مولد گشتاور و توزیعها وجود دارد می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{i=1}^{n} X_i$ نرمال است .

به ازای $\alpha \in (0, 1)$ فرض کنید Z_α به قسمی است که

$$P\{Z > z_\alpha\} = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$$

یعنی یک متغیّر نرمال استاندارد با احتمال α بزرگتر از Z_α خواهد بود . (شکل ۲.۵.۳ را ببینید) . به ازای هر α، Z_α را می‌توان از جدول ۱.۵.۳ الف به‌دست آورد . برای مثال چون

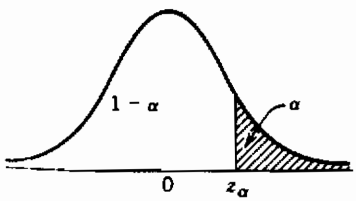
$$1 - \Phi(1.64) = .05$$

$$1 - \Phi(1.96) = .025$$

$$1 - \Phi(2.33) = .01$$

داریم $z_{.05} = 1.64$، $z_{.025} = 1.96$، $z_{.01} = 2.33$

برنامهٔ ۱.۵.۳.ب که در برنامه‌های ضمیمه آمده است z_α را با ۴ رقم اعشار تقریب می‌زند .



شکل ۲.۵.۳ : $P\{Z > z_\alpha\} = \alpha$

۱.۵ : محاسبهٔ تابع توزیع نرمال استاندارد و معکوس آن

برنامهٔ ۳ ـ ۵ ـ ۱ الف انتگرال از 0 تا x تابع $e^{-y^2/2}$ را با انتگرال‌گیری جزء به جزء از ۴۰ عبارت اوّل بسط تیلور

$$e^{-y^2/2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-y^2/2)^i / i!$$

تقریب می‌زند . سپس تابع توزیع نرمال استاندارد را با توجه به این که

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2}\, dy & \text{if } x > 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-y^2/2}\, dy & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

محاسبه می‌کند

برنامهٔ ۳ ـ ۵ ـ B۱ مقدار تقریبی z_α را به ازای هر مقدار مطلوب α محاسبه می‌کند .

مثال ۵.۳ پ

الف ـ مطلوب است محاسبهٔ $\Phi(2, 12)$

ب ـ مطلوب است محاسبهٔ $\Phi(-1.64)$

حل : برنامه ۳ ـ ۵ ـ الف را اجرا کنید .

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A UNIT NORMAL RANDOM VARIABLE IS LESS
 THAN X
ENTER THE DESIRED VALUE OF X
? 2.12
THE PROBABILITY IS .9829972
OK
```

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A UNIT NORMAL RANDOM VARIABLE IS LESS
 THAN X
ENTER THE DESIRED VALUE OF X
? -1.64
THE PROBABILITY IS 5.050236E-02
OK
```

تبصره : یک تقریب سریع از تابع توزیع نرمال استاندارد که تا دو رقم اعشار معتبر است به صورت زیر می‌باشد .

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2}\, dy \approx \begin{cases} x(4.4 - x)/10 & 0 \le x \le 2.2 \\ .49 & 2.2 < x < 2.6 \\ .50 & 2.6 \le x \end{cases}$$

مثال ۵.۳.ت ـ مطلوب است محاسبهٔ $z_{.05}$ و $z_{.09}$

حل: برنامه ۳-۵-۱ را دو بار محاسبه کنید

```
RUN
FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE z  SUCH  THAT THE
PROBABILITY THAT A UNIT NORMAL EXCEEDS z IS EQUAL TO a
ENTER THE DESIRED VALUE OF a
? .05
THE VALUE IS 1.645212
Ok
RUN
FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE z  SUCH  THAT THE
PROBABILITY THAT A UNIT NORMAL EXCEEDS z IS EQUAL TO a
ENTER THE DESIRED VALUE OF a
? .09
THE VALUE IS 1.340969
Ok
```

۲.۵ : قضیهٔ حد مرکزی

در این بخش یکی از جالبترین نتایج احتمال یعنی قضیهٔ حد مرکزی را معرفی می‌کنیم. به عبارت نه چندان دقیق این قضیه بیان می‌کند که مجموع تعداد زیادی از متغیّرهای تصادفی مستقل، تقریباً دارای توزیع نرمال است. بنابراین نه تنها یک روش ساده برای محاسبه تقریبی احتمالات مربوط به مجموع متغیّرهای تصادفی مستقل فراهم می‌کند بلکه کمک می‌کند که بتوان این واقعیت جالب را بیان کرد که فراوانی تجربی بسیاری از جوامع یک منحنی زنگی شکل (یعنی نرمال) را نمایش می‌دهند. ساده‌ترین شکل قضیهٔ حد مرکزی به صورت زیر می‌باشد.

قضیه ۱.۵.۳ : قضیهٔ حد مرکزی

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دنباله‌ای از متغیّرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند. در این صورت برای مقادیر بزرگ n، توزیع

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

تقریباً نرمال استاندارد است. یعنی برای مقادیر بزرگ n

$$P\left\{ \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right\} \approx P\{ Z < x \}$$

که در آن Z یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد است. ■

مثال ۵.۳.ث ـ ستاره‌شناسی علاقه‌مند است فاصلهٔ رصدخانهٔ خود را با یک ستاره دور برحسب سال نوری اندازه‌گیری کند. ستاره‌شناس دارای یک شیوه خاص اندازه‌گیری است. با این وجود می‌داند که در اثر تغییر شرایط جوی و خطای نرمال هر بار که یک اندازه ثبت می‌شود مقدار دقیق فاصله به دست نمی‌آید بلکه تنها برآوردی از آن است. بنابراین ستاره‌شناس تصمیم می‌گیرد یک دنباله از اندازه‌ها را به دست آورده و سپس مقدار متوسط این اندازه‌ها را به‌عنوان مقدار برآورد شده فاصلهٔ واقعی به کار برد. اگر ستاره‌شناس معتقد باشد که مقادیر هر یک از این اندازه‌ها متغیّرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با میانگین مشترک d (فاصلهٔ واقعی) و واریانس مشترک ۴ سال نوری باشند چه تعداد اندازه مورد نیاز است که بطور معقول مطمئن شود که فاصله برآورد شده درست بین $\pm.5$ سال نوری است.

حل: فرض کنید ستاره‌شناس تصمیم گرفته است n مشاهده به‌دست آورد. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$، n اندازه باشند آن‌گاه از قضیهٔ حد مرکزی نتیجه می‌شود که

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nd}{2\sqrt{n}}$$

تقریباً دارای توزیع نرمال استاندارد است. اکنون ستاره‌شناس قصد دارد n مشاهده را طوری انتخاب کند که بطور معقول مطمئن باشد که

$$-0.5 < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - d < 0.5$$

امّا

$$\begin{aligned}
P\left\{-0.5 < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - d < 0.5\right\}
&= P\left\{-0.5 < \frac{2}{\sqrt{n}} Z_n < 0.5\right\} \\
&= P\left\{-0.5\frac{\sqrt{n}}{2} < Z_n < 0.5\frac{\sqrt{n}}{2}\right\} \\
&\approx P\left\{Z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right\} - P\left\{Z < -\frac{\sqrt{n}}{4}\right\}
\end{aligned}$$

$$= P\left\{Z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right\} - P\left\{Z > \frac{\sqrt{n}}{4}\right\}$$
$$= 2P\left\{Z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right\} - 1$$

بنابراین برای مثال اگر ستاره‌شناس بخواهد ۹۵% مطمئن باشد مقداری که برآورد کرده درست بین $\pm.5$ سال نوری است باید n^* اندازه اختیار کند که در آن n^* به قسمی است که

$$2P\{Z < \sqrt{n^*}/4\} - 1 = .95$$

یا

$$P\{Z < \sqrt{n^*}/4\} = .975$$

بنابراین با استفاده از جدول الف ۱.۵.۳ n^* باید طوری اختیار شود که

$$\frac{\sqrt{n^*}}{4} = 1.96$$

یا

$$n^* = (7.84)^2 = 64.47$$

چون n^* مقداری صحیح نیست باید ۶۵ مشاهده اختیار کند .

مثال ۵.۳.ج ـ مهندسان عمران معتقدند که W ، مقدار وزنی که یک پُل (برحسب ۱۰۰۰ پوند) بدون آسیب ساختمانی می‌تواند تحمل کند ، بطور نرمال با میانگین ۴۰۰ ، انحراف معیار ۴۰ توزیع می‌شود . فرض کنید که وزن یک ماشین (دوباره برحسب ۱۰۰۰ پوند) متغیّری است تصادفی با میانگین ۳ و انحراف معیار ۰/۳ . برای آنکه احتمال آسیب به پُل از ۰/۱ تجاوز کند چند ماشین باید روی پُل باشد .

حل : فرض کنید P_n نشان‌دهندهٔ احتمال آسیب ساختمانی به پُل باشد که در آن n تعداد ماشینهای روی پُل است ؛ یعنی

$$P_n = P\{X_1 + \cdots + X_n \geq W\}$$
$$= P\{X_1 + \cdots + X_n - W \geq 0\}$$

که در آن X_i وزن i امین ماشین است $i = 1, \ldots, n$. اکنون از قضیهٔ حد مرکزی نتیجه می‌شود

که $\sum_{i=1}^{n} X_i$ تقریباً نرمال با میانگین $3n$ و واریانس $.09n$ است. از طرفی چون W نرمال و از X_i، $i = 1, ..., n$ مستقل است پس $\sum_{i=1}^{n} X_i - W$ نیز تقریباً نرمال با میانگین و واریانس زیر است

$$E\left[\sum_{1}^{n} X_i - W\right] = 3n - 400$$

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{1}^{n} X_i - W\right) = \operatorname{Var}\left(\sum_{1}^{n} X_i\right) + \operatorname{Var}(W) = .09n + 1600$$

بنابراین اگر فرض کنیم

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - W - (3n - 400)}{\sqrt{.09n + 1600}}$$

آن‌گاه

$$P_n = P\left\{Z \geq \frac{-(3n - 400)}{\sqrt{.09n + 1600}}\right\}$$

که در آن Z تقریباً یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد است. اکنون $P\{Z \geq 1.28\} = .1$ و بنابراین اگر تعداد ماشینها به قسمی باشد که

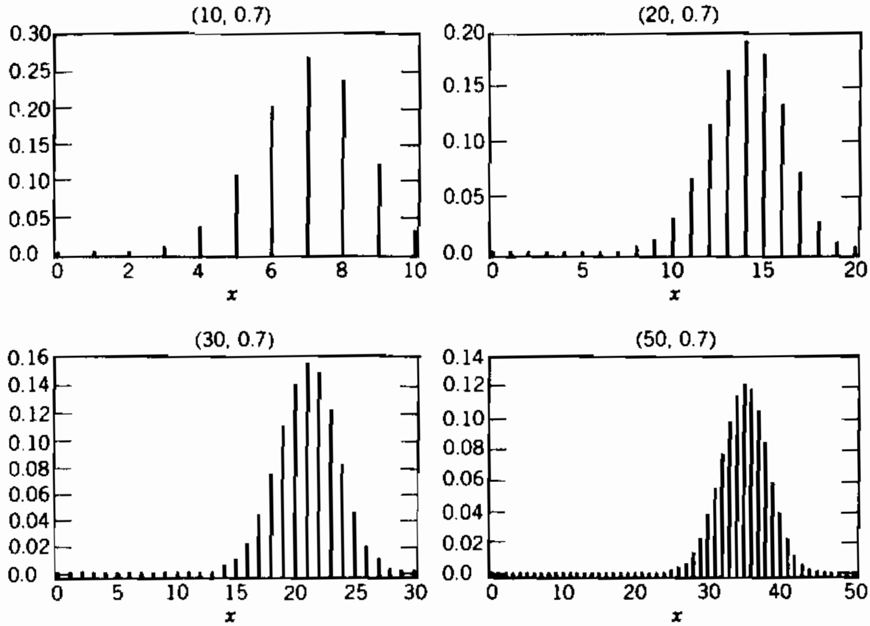
$$\frac{400 - 3n}{\sqrt{.09n + 1600}} \leq 1.28$$

یا

$$n \geq 117$$

آن‌گاه حداقل شانس ۱ در ۱۰ وجود دارد که پُل آسیب ساختمانی ببیند. ■

یکی از مهمترین کاربردهای قضیهٔ حد مرکزی در رابطه با متغیّر تصادفی دوجمله‌ای است. اگر X متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) باشد آن‌گاه X نشان‌دهندهٔ تعداد موفقیّتها در n آزمایش مستقل است که در آن نتیجهٔ هر آزمایش با احتمال



شکل ۳.۵.۳ : توابع جرم احتمال دوجمله‌ای به توزیع نرمال متقارب‌اند

p موفقیت است . بنابراین آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

بطوری که

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر نتیجهٔ } i \text{ امین آزمایش موفقیت باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

چون

$$E[X_i] = p, \qquad \text{Var}(X_i) = p(1-p)$$

از قضیهٔ حد مرکزی نتیجه می‌شود که برای nهای بزرگ

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

تقریباً یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد خواهد بود . (شکل ۳.۵.۳ بطور نموداری نشان می‌دهد که چگونه تابع جرم احتمال متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامتر (n, p) به نرمال میل می‌کند ، هرگاه n بزرگ شود) .

مثال ۳.۵.ج ـ در یک دانشگاه ظرفیت مطلوب کلاس سال اوّل ۱۵۰ دانشجوست . دانشگاه از تجربیات قبلی می‌داند که با استفاده از روشی که برای گزینش ۴۵۰ دانشجو به‌کار می‌برد تنها ۳۰٪ از آنهایی که پذیرفته می‌شوند حضور به هم می‌رسانند . مطلوب است احتمال این که بیش از ۱۵۰ دانشجوی سال اوّل در این دانشگاه حضور به هم رسانند .

حل : فرض کنید X نشان‌دهندهٔ تعداد دانشجویانی باشد که در کلاس حاضر می‌شوند . در این صورت X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 450$ و $p = .3$ است . برای به‌کار بردن تقریب نرمال چون توزیع دوجمله‌ای گسسته و توزیع نرمال پیوسته است بهتر است $P\{X = i\}$ را به صورت $P\{i - .5 < X < i + .5\}$ (که به آن تصحیح پیوستگی گویند) بنویسیم . در این صورت داریم

$$P\{ X > 150.5\} = P\left\{\frac{X - (450)(.3)}{\sqrt{450(.3)(.7)}} \geq \frac{150.5 - (450)(.3)}{\sqrt{450(.3)(.7)}}\right\}$$
$$\approx P\{Z > 1.65\} = .0495$$

بنابراین تنها ۵ درصد از دفعات بیش از ۱۵۰ دانشجو از ۴۵۰ دانشجوی پذیرفته شده حاضر می‌باشند . ■

باید توجه داشت که اکنون دو تقریب ممکن برای احتمالات دوجمله‌ای می‌دانیم : یکی تقریب پواسن که وقتی n بزرگ و p کوچک است به یک تقریب خوب منتهی می‌شود ، و دیگری تقریب نرمال که می‌توان نشان داد هنگامی خوب است که $np(1 - p)$ بزرگ باشد . (در حالت کلی تقریب نرمال برای مقداری از n که در رابطه $np(1 - p) \geq 10$ صدق کند خیلی خوب است) .

مثال ۳.۵.ح ـ قضیهٔ حد مرکزی روشی برای شبیه‌سازی متغیّرهای تصادفی نرمال فراهم می‌کند . اگر $U_1, U_2, \ldots, U_{12}$ نشان‌دهندهٔ متغیّرهای تصادفی یکنواخت در فاصلهٔ $(0, 1)$ باشند آن‌گاه چون

$$E[U_i] = 1/2, \qquad \text{Var}(U_i) = 1/12$$

نتیجه می‌شود که

$$Z \equiv \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$$

دارای میانگین 0 و واریانس 1 است . از قضیهٔ حد مرکزی ، Z باید به صورت نرمال توزیع شود . و در واقع می‌توان نشان داد که مجموع ۱۲ متغیّر تصادفی یکنواخت در فاصلهٔ $(0, 1)$ متغیّری است تصادفی که آن را می‌توان برای هر هدف کاربردی به‌عنوان یک متغیّر تصادفی نرمال در نظر گرفت . بنابراین Z را می‌توان به‌عنوان مقداری از یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد در نظر گرفت .

یک متغیّر تصادفی نرمال X با میانگین μ و واریانس σ^2 را می‌توان ابتدا با کم کردن ۶ از مجموع ۱۲ عدد تصادفی (برای به‌دست آوردن متغیّر تصادفی نرمال استاندارد Z) و آن‌گاه قرار دادن $X = \sigma Z + \mu$ ساخت . یعنی اگر $U_1, U_2, ..., U_{12}$ نشان‌دهندهٔ اعداد تصادفی باشند آن‌گاه

$$X = \sigma \sum_{i=1}^{12} U_i + \mu$$

تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است . ■

۶- متغیّر تصادفی‌نمایی

متغیّر تصادفی پیوسته‌ای را که تابع چگالی احتمال آن برای $\lambda > 0$ به صورت زیر ارائه می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

یک متغیّر تصادفی**نمایی** با پارامتر λ گویند . تابع توزیع تجمعی این متغیّر تصادفی به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy \\ &= 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

در عمل توزیع‌نمایی غالباً به‌عنوان توزیع زمان لازم برای رخ دادن یک پیشامد خاص مطرح می‌شود . به‌عنوان مثال زمان لازم (از اکنون) تا رخ دادن یک زلزله یا تا رخ دادن یک جنگ ، همه اینها متغیّرهای تصادفی هستند که در عمل دارای توزیع‌نمایی می‌باشند . (برای توضیح بخش ۱.۶ را ببینید) . .

تابع مولد گشتاور توزیع‌نمایی به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}\,dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \qquad t<\lambda\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری داریم

$$\Psi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$$

$$\Psi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$

و بنابراین

$$E[X] = \Psi'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= E[X^2] - E^2[X] \\ &= \Psi''(0) - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

لذا λ معکوس میانگین است .

خاصیت کلیدی متغیّر تصادفی‌نمایی خاصیت **فقدان حافظه** است یک متغیّر تصادفی نامنفی X را فاقد حافظه گوییم اگر

$$P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\} \qquad \text{برای هر } t \text{ و } s \geq 0 \tag{۱.۶.۳}$$

برای توضیح این‌که چرا معادلهٔ (۱.۶.۳) را **خاصیت فقدان حافظه** گویند فرض کنید X نشان‌دهندهٔ مدت زمانی است که یک دستگاه خاص قبل از خراب شدن کار می‌کند . اکنون این احتمال را در نظر بگیرید که یک دستگاه که تا زمان t کار کرده است به اندازهٔ حداقل زمان s نیز کار کند . چون در این حالت مجموع طول عمر کارکرد دستگاه از $s+t$ تجاوز می‌کند با این فرض که تا زمان t کار کرده است می‌بینیم که

$$P\,(\text{طول عمر کارکرد دستگاه در زمان } t \text{ از } s \text{ تجاوز کند}) = P\{X > t+s \mid X > t\}$$

بنابراین معادلهٔ ۱.۶.۳ بیان می‌کند که توزیع عمر کارکرد اضافی دستگاه با سن t با توزیع یک دستگاه نو یکسان است . به‌عبارت دیگر هرگاه تساوی ۱.۶.۳ برقرار باشد نیازی به دانستن سن کارکرد یک دستگاه نیست . زیرا مادامی که دستگاه کار می‌کند هنوز بخوبی یک دستگاه نو است . معادلهٔ ۱.۶.۳

معادل است با

$$\frac{P\{X > s + t, \quad X > t\}}{P\{X > t\}} = P\{X > s\}$$

یا

$$P\{X > s + t\} = P\{X > s\}P\{X > t\} \tag{۲.۶.۳}$$

هرگاه X یک متغیّر تصادفی‌نمایی باشد آن‌گاه

$$P\{X > x\} = e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

بنابراین تساوی ۲.۶.۳ برقرار است. (زیرا $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}$) بنابراین **متغیّرهای تصادفی که به صورت‌نمایی توزیع می‌شود دارای خاصیت فقدان حافظه‌اند** (در واقع می‌توان نشان داد که آنها تنها متغیّرهای هستند که دارای این خاصیت می‌باشند).

مثال ۶.۳.الف ـ فرض کنید مقدار کیلومتری که یک ماشین قبل از فرسوده شدن باتری‌اش می‌تواند کار کند به صورت‌نمایی با میانگین ۱۰۰۰۰ کیلومتر توزیع شود. اگر شخصی بخواهد یک مسافرت ۵۰۰۰ کیلومتری برود چقدر احتمال دارد که او مسافرت خود را انجام دهد بدون آن‌که باتری ماشین را عوض کند؟ هنگامی که توزیع‌نمایی نیست چه می‌توان گفت؟

حل: با استفاده از خاصیت فقدان حافظهٔ توزیع‌نمایی نتیجه می‌شود که طول عمر باقی‌مانده (در هزار کیلومتر) باتری‌نمایی است با پارامتر $\lambda = 1/10$ بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} P\{\text{طول عمر باقی‌مانده} > 5\} &= 1 - F(5) \\ &= e^{-5\lambda} \\ &= e^{-1/2} \approx .604 \end{aligned}$$

حال اگر توزیع طول عمر نمایی نباشد آن‌گاه احتمال مطلوب برابر است با

$$P\{\text{طول عمر} > t + 5 \mid \text{طول عمر} > t\} = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)}$$

که در آن t مقدار کیلومتری است که از باتری تا شروع مسافرت استفاده شده است.

به‌عنوان توضیحی دیگر از خاصیت فقدان حافظه مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۶.۳.ب ـ کارخانه‌ای دارای ۳ ماشین قابل تعویض است و برای آن‌که کارخانه فعال باشد باید ۲ تا

از ماشینها کار کنند. کارکرد هر ماشین قبل از خراب شدن دارای توزیع‌نمایی با پارامتر λ است. کارگران این کارخانه تصمیم می‌گیرند ابتدا از ماشینهای A و B استفاده کنند و از ماشین C زمانی استفاده کنند که یکی از ماشینهای A و B از کار بیفتد. در این صورت کارگران آن‌قدر کار را ادامه می‌دهند تا یکی از ماشینها خراب شود. وقتی کارخانه به‌دلیل سالم بودن تنها یک ماشین مجبور است کار را متوقف کند چقدر احتمال دارد که ماشین سالم ماشین C باشد؟

این سؤال را می‌توان بسادگی بدون استفاده از انجام هیچ محاسبه‌ای و با استفاده از خاصیت فقدان حافظه توزیع‌نمایی پاسخ داد. استدلال به‌صورت زیر است: لحظه‌ای را در نظر بگیرید که ماشین C مورد استفاده قرار می‌گیرد در این لحظه یکی از ماشینهای A یا B خراب شده است و فقط یکی از آنها ـ که به آن ماشین 0 گوییم ـ هنوز کار می‌کند اکنون با این‌که ماشین 0 قبلاً مدتی کار کرده است امّا با استفاده از خاصیت فقدان حافظه توزیع‌نمایی نتیجه می‌شود که طول عمر باقیماندهٔ آن دارای توزیعی یکسان با ماشینی است که تازه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین طول عمر ماشین 0 و ماشین C دارای توزیع یکسان است و با استفاده از تقارن، احتمال این‌که ماشین 0 قبل از ماشین C از کار بیفتد برابر است با 1/2. ■

حکم ۱.۶.۳

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل‌نمایی به ترتیب با پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشند آن‌گاه $\min(X_1, \ldots, X_n)$ نیز نمایی، با پارامتر $\Sigma\lambda_i$ است.

اثبات: چون کوچکترین مقدار یک مجموعه از اعداد، بزرگتر از x است اگر و تنها اگر همه مقادیر بزرگتر از x باشند داریم

$$
\begin{aligned}
P\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > x\} &= P\{X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i > x\} \qquad \text{از استقلال} \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} \\
&= e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x}
\end{aligned}
$$

مثال ۶.۳.پ ـ یک سیستم متوالی سیستمی است که عملکرد آن مستلزم آن باشد که تمام اجزای آن کار کنند. برای سیستمی شامل n جزء که طول عمر اجزای آن متغیّرهای تصادفی مستقل‌نمایی به‌ترتیب با پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ است، احتمال این‌که طول عمر آن از t بیشتر باشد چقدر است؟

حل: چون عمر سیستم مساوی است با عمر مولفه‌ای که در بین بقیه اجزا کمترین عمر را دارد از

حکم ۱.٦.۳ نتیجه می‌شود که

$$P\{\text{عمر سیستم از } t \text{ تجاوز کند}\} = e^{-\Sigma_i \lambda_i t} \quad \blacksquare$$

از دیگر خواص مفید متغیّر تصادفی‌نمایی این است که هرگاه X دارای توزیع‌نمایی با پارامتر λ باشد و $c > 0$ آن‌گاه cX نیز دارای توزیع‌نمایی با پارامتر λ/c است ؛ زیرا

$$\begin{aligned} P\{cX \leq x\} &= P\{X \leq x/c\} \\ &= 1 - e^{-\lambda x/c}. \end{aligned}$$

پارامتر λ را شاخص توزیع گوییم .

۱.٦ : فرآیند پواسن

فرض کنید پیشامدهایی در زمانهای تصادفی رخ می‌دهند و فرض کنید $N(t)$ نشان‌دهندهٔ تعداد پیشامدهایی باشد که در بازهٔ زمانی $[0, t]$ رخ می‌دهند . گوییم این پیشامدها تشکیل یک **فرآیند پواسن** با نرخ λ، $\lambda > 0$ می‌دهند اگر

الف ـ $N(0) = 0$

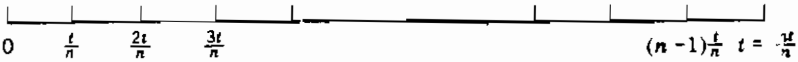
ب ـ تعداد پیشامدهایی که در بازه‌های زمانی مجزّا رخ می‌دهند مستقل باشند

پ ـ توزیع تعداد پیشامدهایی که در یک بازهٔ مفروض رخ می‌دهد تنها به طول بازه وابستگی داشته باشد و نه به موقعیت آنها

ت ـ $$\lim_{h \to 0} \frac{P\{N(h) = 1\}}{h} = \lambda$$

ث ـ $$\lim_{h \to 0} \frac{P\{N(h) \geq 2\}}{h} = 0$$

شرط الف بیان می‌کند که فرآیند در زمان صفر شروع می‌شود . شرط (ب) ـ شرط نموهای مستقل ـ بیان می‌کند که برای مثال تعداد پیشامدهایی که تا زمان t رخ می‌دهد (یعنی $N(t)$) مستقل از تعداد پیشامدهای است که بین t و $t + s$ رخ می‌دهد $[N(t + s - N(t)]$. شرط پ ـ نموهای ایستا ـ بیان می‌کند که توزیع احتمال $N(t + s) - N(t)$ برای هر مقدار t یکسان است . شرطهای (ت) و (ث) بیان می‌کنند که در یک بازهٔ کوچک با طول h احتمال این‌که یک پیشامد رخ دهد تقریباً مساوی با λh است در حالی‌که احتمال این‌که ۲ یا بیشتر رخ دهد تقریباً مساوی صفر است .



شکل ۱.۶.۳

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این فرضها نتیجه می‌دهند که تعداد پیشامدهای که در هر بازه به طول t رخ می‌دهند یک متغیّر تصادفی پواسن با پارامتر λt است. برای دقت بیشتر بازهٔ $[0, t]$ را در نظر می‌گیریم و تعداد پیشامدها راکه در این بازه رخ می‌دهد با $N(t)$ نمایش می‌دهیم. برای به‌دست آوردن مقدار $P\{N(t) = k\}$ بازهٔ $[0, t]$ را به n زیربازه مجزّا هریک به طول $\frac{1}{n}$ تقسیم می‌کنیم (شکل ۱.۶.۳). اکنون k پیشامد در فاصله $[0, t]$ خواهد بود اگر

الف ـ $N(t)$ مساوی k باشد و حداکثر یک پیشامد در هر زیربازه باشد

ب ـ $N(t)$ مساوی k باشد و حداقل یکی از زیربازه‌ها شامل ۲ یا بیشتر از پیشامدها باشد

چون بوضوح این دو امکان ناسازگارند و چون (الف) معادل با این است که k تا از n زیربازه دقیقاً شامل ۱ پیشامد و $n - k$ تای دیگر شامل 0 پیشامد باشند داریم:

$P\{N(t) = k\} = P$ [k تا از زیربازه‌ها شامل دقیقاً ۱ پیشامد $n - k$ تای دیگر شامل صفر پیشامد باشند]

(۳.۶.۳)

$+ P$ [$N(t) = k$ و حداقل ۱ زیر بازه شامل ۲ یا بیشتر از پیشامدها باشند]

حالا با استفاده از شرط (ث) می‌توانیم نشان دهیم که وقتی $n \to \infty$

P [$N(t) = k$ و حداقل یک زیربازه شامل ۲ یا بیشتر از پیشامدها باشد] $\to 0$ (۴.۶.۳)

همچنین از شرط ت و ث نتیجه می‌شود که

P\{دقیقاً یک پیشامد در یک زیربازه\} $\approx \dfrac{\lambda t}{n}$

P\{و پیشامد در یک زیربازه\} $\approx 1 - \dfrac{\lambda t}{n}$

بنابراین چون تعداد پیشامدها در زیربازه‌های مختلف مستقلند (از شرط ب) نتیجه می‌شود که

P[k زیربازه هریک دقیقاً شامل یک پیشامد و $n - k$ تای دیگر شامل 0 پیشامد] (۵.۶.۳)

$$\approx \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

تقریب هنگامی دقیق خواهد شد که تعداد زیربازه‌ها ـ n ـ به سمت بی‌نهایت میل کند. به هرحال احتمال ۵.۶.۳ دقیقاً این احتمال است که یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامتر n و $P = \lambda t/n$

مساوی k باشد . بنابراین هنگامی که n بزرگ می‌شود این تقریب مساوی است با احتمال این‌که یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین $n\lambda t/n = \lambda t$ برابر k شود . در نتیجه از تساویهای ۳.٦.۳ ، ۴.٦.۳ و ٦.۵.۳ می‌بینیم که وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

بنابراین نشان دادیم که ،

حکم ۲.٦.۳

در یک فرآیند پواسن با شاخص λ

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

یعنی تعداد پیشامدها در هر زیربازه با طول t دارای توزیع پواسن با میانگین λt است .

در یک فرآیند پواسن فرض کنید X_1 نشان‌دهندهٔ زمان اوّلین پیشامد باشد . همچنین برای $n > 1$ فرض کنید X_n نشان‌دهندهٔ زمان سپری شده بین $(n-1)$ امین و n اسین پیشامد باشد . دنبالهٔ $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ را دنبالهٔ **زمانهای بین ورود** می‌نامند . به‌عنوان مثال اگر $X_1 = 5$ و $X_2 = 10$ آن‌گاه اوّلین پیشامد از فرآیند پواسن در زمان ۵ و دومین پیشامد در زمان ۱۵ رخ داده‌اند .

اکنون توزیع X_n را تعیین می‌کنیم . برای انجام کار ابتدا توجه کنید که پیشامد $\{X_1 > t\}$ رخ می‌دهد اگر و تنها اگر هیچ پیشامدی از فرآیند پواسن در فاصله $[0, t]$ رخ ندهد ؛ بنابراین

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

لذا X_1 دارای توزیع‌نمایی با میانگین $1/\lambda$ است . برای به‌دست آوردن توزیع X_2 توجه کنید که

$$\begin{aligned}
P\{X_2 > t | X_1 = s\} &= P\{0 \text{ پیشامد در } (s, \quad s + t] | X_1 = s\} \\
&= P\{0 \text{ پیشامد در } (s, \quad s + t]\} \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

که در آن دو رابطهٔ اخیر از نموهای مستقل و نموهای ایستا نتیجه می‌شوند . بنابراین از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که X_2 نیز متغیّر تصادفی‌نمایی با میانگین $1/\lambda$ است و این‌که X_2 مستقل از X_1 می‌باشد . با تکرار استدلالی مشابه نتیجه می‌شود که ،

حکم ۳.۶.۳:

$X_1, X_2, \ldots$ متغیّرهای تصادفی مستقل‌نمایی با میانگین $1/\lambda$ هستند.

۷- توزیع گاما

متغیّر تصادفی X را دارای توزیع گاما با پارامترهای (α, λ)، $\alpha > 0$ و $\lambda > 0$ گوییم اگر تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

که در آن

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}\,dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}\,dy \qquad \text{مناسب } y = \lambda x$$

با استفاده از فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء[1] $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ با قرار دادن $u = y^{\alpha-1}$ و $dv = e^{-y}\,dy,\ v = -e^{-y}$ نتیجه می‌شود[2]

$$\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}\,dy = -e^{-y}y^{\alpha-1}\Big|_{y=0}^{y=\infty} + \int_0^\infty e^{-y}(\alpha-1)\,y^{\alpha-2}\,dy$$
$$= (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-2}\,dy$$

یا

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \qquad (۱.۷.۳)$$

هنگامی که α یک عدد صحیح است مثلاً $\alpha = n$ با تکرار فرمول فوق می‌توانیم نشان دهیم که

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$
$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \qquad \text{با قرار دادن } \alpha = n-1 \text{ در معادلهٔ ۱.۷.۳}$$
$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3) \qquad \text{با قرار دان } \alpha = n-2 \text{ در معادلهٔ ۱.۷.۳}$$
$$\vdots$$
$$= (n-1)!\,\Gamma(1)$$

امّا

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-y}\, dy = 1$$

بنابراین می‌بینیم که

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

تابع $\Gamma(\alpha)$ را تابع گاما می‌نامند.

باید توجه داشت که وقتی $\alpha = 1$ توزیع گاما همان توزیع‌نمایی با میانگین $1/\lambda$ است.

تابع مولد گشتاور متغیّر تصادفی گامای X با پارامترهای (α, λ) به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}\, dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x} x^{\alpha-1}\, dx \qquad (۲.۷.۳) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1}\, dy \qquad [y = (\lambda - t)x] \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha\end{aligned}$$

مشتق‌گیری از تساوی ۲.۷.۳ نتیجه می‌دهد که

$$\Psi'(t) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^{\alpha+1}}$$

$$\Psi''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^{\alpha+2}}$$

بنابراین

$$E[X] = \Psi'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \qquad (۳.۷.۳) \\ &= \Psi''(0) - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}\end{aligned}$$

یک خاصیت مهم توزیع گاما این است که اگر X_1 و X_2 متغیّرهای تصادفی مستقل گاما و به‌ترتیب دارای پارامترهای (α_1, λ) و (α_2, λ) باشند آن‌گاه $X_1 + X_2$ نیز گاما با پارامترهای $(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ است ، زیرا

$$\begin{aligned}\Psi_{X_1+X_2}(t) &= E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right] \\ &= \Psi_{X_1}(t)\Psi_{X_2}(t) \qquad (۵.۷.۳) \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_2} \qquad \text{از معادلهٔ ۲.۷.۳} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\end{aligned}$$

و این تابع مولد گشتاور یک متغیّر تصادفی گاما با پارامترهای $(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ است . چون تابع مولد گشتاور به‌طور منحصر به فرد توزیع را مشخص می‌کند نتیجه به‌دست می‌آید . این نتیجه را بسادگی می‌توان به‌صورت حکم زیر تعمیم داد :

حکم ۱.۷.۳ :

اگر X_i ، $i = 1, ..., n$ متغیّرهای تصادفی مستقل گاما با پارامترهای (α_i, λ) باشند آن‌گاه $\sum_{i=1}^n X_i$ گاما با پارامترهای $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ و λ است .

چون توزیع گاما با پارامترهای $(1, \lambda)$ تبدیل به توزیع نمایی با شاخص λ می‌شود ، می‌توانیم نتیجهٔ مفید زیر را به‌دست آوریم :

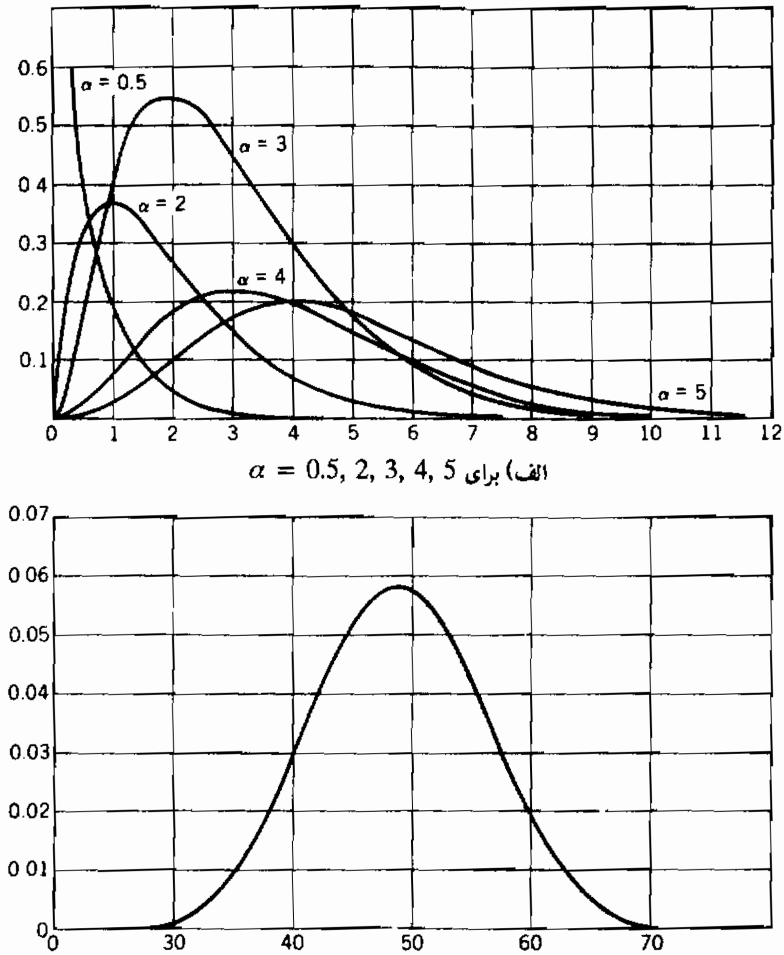
نتیجهٔ ۲.۷.۳ : اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل‌نمایی و هریک با شاخص λ باشند آن‌گاه $\sum_{i=1}^n X_i$ یک متغیّر تصادفی گاما با پارامترهای (n, λ) است .

مثال ۷.۳ الف ـ طول عمر یک باتری دارای توزیع‌نمایی با میانگین λ است . اگر ضبط صوتی برای کارکردن احتیاج به یک باتری داشته باشد آن‌گاه زمان کارکرد یک ضبط صوت با مجموع n باتری متغیّر تصادفی گاما با پارامتری (n, λ) است . ■

شکل ۱.۷.۳ نمودار چگالی گامای $(\alpha, 1)$ را به‌ازای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد . باید توجه داشت که وقتی α زیاد می‌شود چگالی گاما شبیه به‌چگالی نرمال می‌شود . بطور نظری می‌توان این موضوع را باقضیهٔ حدمرکزی تشریح کرد. زیرا یک متغیّر تصادفی گامای (α, λ) را می‌توان به‌صورت مجموع $[\alpha]$ متغیّر نمایی مستقل هریک باشاخص λ و یک متغیّر تصادفی $(\alpha - [\alpha], \lambda)$ درنظر گرفت (که درآن $[\alpha]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یامساوی α است) یعنی می‌توان ازحکم قبل استفاده کرده

و X را به صورت

$$X = \sum_{i=1}^{[\alpha]} X_i + Y$$



الف) برای $\alpha = 0.5, 2, 3, 4, 5$

ب) برای $\alpha = 50$

شکل ۱.۷.۳ نمودارهای چگالی گاما $(\alpha, 1)$

نوشت که در آن X_i، $i = 1, ..., [\alpha]$ متغیّرهای تصادفی مستقل‌نمایی هستند که هریک دارای میانگین ۱ ومستقل‌از Y که‌دارای توزیع‌گاما با پارامترهای $(\alpha - [\alpha], 1)$ می‌باشد، هستند. حال‌قضیهٔ حدمرکزی

نتیجه می‌دهد که وقتی α بزرگ می‌شود توزیع $X/[\alpha]$ تقریباً نرمال است .

۸- توزیعهای حاصل از توزیع نرمال

۸-۱ : توزیع کی‌دو

تعریف : اگر $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد باشند آن‌گاه

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \tag{۱.۸.۳}$$

دارای توزیع کی‌دو با n درجه آزادی است . از علامت $X \sim \chi_n^2$ بدین منظور استفاده می‌کنیم که X دارای توزیع کی‌دو با n درجه آزادی است

اکنون تابع مولد گشتاور یک متغیّر تصادفی کی‌دو با n درجه آزادی را محاسبه می‌کنیم . برای این منظور هنگامی که $n = 1$ داریم

$$\begin{aligned} E\left[e^{tX}\right] &= E\left[e^{tZ^2}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} f_Z(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2(1-2t)/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\bar{\sigma}^2}\, dx \qquad \text{جایی که } \bar{\sigma}^2 = (1-2t)^{-1} \\ &= (1-2t)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\bar{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\bar{\sigma}^2}\, dx \\ &= (1-2t)^{-1/2} \end{aligned} \tag{۲.۸.۳}$$

که در آن تساوی اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که انتگرال چگالی نرمال $(0, \bar{\sigma}^2)$ مساوی ۱ است .
بنابراین در حالت n درجه آزادی داریم

$$\begin{aligned} E\left[e^{tX}\right] &= E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tZ_i^2}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{tZ_i^2}\right] \qquad \text{از استقلال } Z_i \text{ ها} \end{aligned}$$

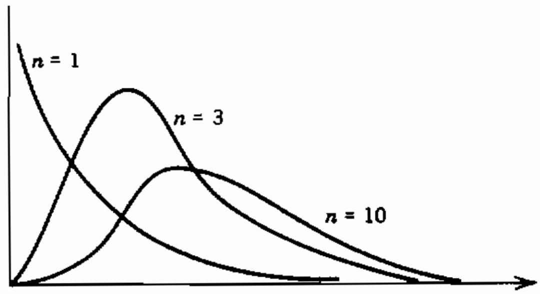
$$= (1 - 2t)^{-n/2}$$

از تساوی ۲.۸.۳

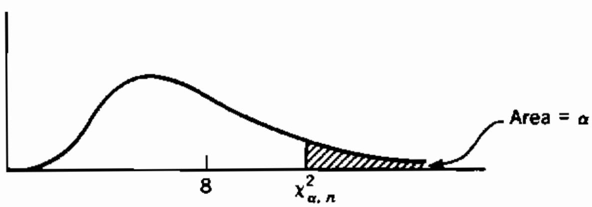
از طرفی می‌بینیم که $[1/(1 - 2t)]^{n/2}$ تابع مولد گشتاور متغیّر تصادفی گاما با پارامترهای $(n/2, 1/2)$ است . بنابراین با استفاده از خاصیت منحصر به فرد بودن توابع مولد گشتاور نتیجه می‌شود که این دو توزیع یعنی کی‌دو با n درجه آزادی و گاما با پارامترهای $n/2$ و $1/2$ یکسانند . بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تابع چگالی X برابر است با

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{-x/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{(n/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad x > 0$$

توزیع کی‌دو با ۱ ، ۳ و ۱۰ درجه آزادی به ترتیب در شکل ۱.۸.۳ رسم شده‌اند .



شکل ۱.۸.۳ تابع چگالی کی‌دو با n درجه آزادی



شکل ۲.۸.۳ تابع چگالی کی‌دو با ۸ درجه آزادی

توزیع کی‌دو دارای این خاصیت جمع‌پذیری است که اگر X_1 و X_2 متغیّرهای تصادفی مستقل کی‌دو به‌ترتیب با n_1 و n_2 درجه آزادی باشند آن‌گاه $X_1 + X_2$ دارای توزیع کی‌دو با $n_1 + n_2$ درجه آزادی خواهد بود . این موضوع را می‌توان با استفاده از توابع مولد گشتاور یا بطور ساده‌تر با توجه به این واقعیت که $X_1 + X_2$ مجموع توان دوم $n_1 + n_2$ متغیّر تصادفی مستقل نرمال استاندارد و بنابراین دارای توزیع کی‌دو با $n_1 + n_2$ درجه آزادی است ، نشان داد .

چون توزیع کی‌دوبا n درجه آزادی با توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = n/2$ و $\lambda = 1/2$ یکسان است از تساویهای ۳.۷.۳ و ۴.۷.۳ نتیجه می‌شود که میانگین و واریانس متغیّر تصادفی X در این توزیع برابر است با

$$E[X] = n, \qquad \mathrm{Var}(X) = 2n$$

اگر X یک متغیّر تصادفی کی‌دو با n درجه آزادی باشد آن‌گاه برای هر $\alpha \in (0, 1)$ کمیت $\chi^2_{\alpha, n}$ را طوری تعریف می‌کنیم که

$$P\{X \geq \chi^2_{\alpha, n}\} = \alpha$$

این مطلب در شکل ۲.۸.۳ نشان داده شده است.

در جدول ۱.۸.۳ الف ضمیمه به ازای مقادیر مختلف α و n (شامل همه مقادیری که برای حل مسائل و مثالهای این کتاب لازم است) $\chi^2_{\alpha, n}$ درج شده است.
دلیل این‌که جدولهای بزرگتر را نیاورده‌ایم این است که برنامه‌های بیسیک (برنامه ۱.۸.۳ الف) و (برنامهٔ ۱.۸.۳ ب) برای تقریب تابع توزیع کی‌دو ارائه شده‌اند.

مثال ۸.۳ الف ـ مطلوب است محاسبهٔ $P\{\chi^2_{25} \leq 30\}$ که درآن χ^2_{25} متغیّر تصادفی کی‌دو با ۲۵ درجه آزادی است.

حل: برنامهٔ ۱.۸.۳ الف را اجرا کنید.

```
 RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A CHI-SQUARED RANDOM VARIABLE WITH N
DEGREES OF FREEDOM IS LESS THAN X
ENTER THE DEGREE OF FREEDOM PARAMETER
? 25
ENTER THE DESIRED VALUE OF X
? 30
THE PROBABILITY IS .7757181
Ok
```

مثال ۸.۳.ب ـ مطلوب است $\chi^2_{.05, 15}$

حل: برنامهٔ ۱.۸.۳. ب را اجرا کنید.

```
RUN
FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE          chisq(a,n)
 SUCH THAT THE PROBABILITY THAT A CHI SQUARE RANDOM VARIABLE WITH n   DEGREES OF
   FREEDOM EXCEEDS chisq(a,n) IS EQUAL TO a
ENTER THE DEGREE OF FREEDOM PARAMETER n
? 15
ENTER THE DESIRED VALUE OF a
? .05
THE VALUE IS 24.99751
Ok
```

۸-۲ توزیع t

اگر Z و X متغیّرهای تصادفی مستقل باشند و به‌ترتیب دارای توزیع نرمال استاندارد و توزیع کی‌دو با n درجه آزادی ، آن‌گاه T_n که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

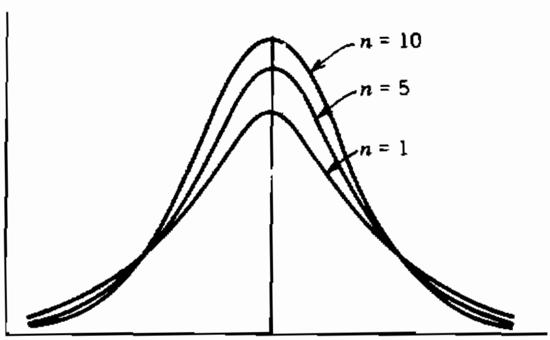
دارای توزیع t با n درجه آزادی است . می‌توان نشان داد که تابع چگالی آن به صورت زیر است

$$f_{T_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

که در آن Γ تابع گامای تعریف شده در بخش ۷ می‌باشد . نموداری از این توزیع در شکل ۳.۸.۳ برای n مساوی ۱ و ۵ و ۱۰ ارائه شده است . همانند چگالی نرمال استاندارد چگالی t حول صفر متقارن است . در مجموع وقتی n بزرگ می‌شود این چگالی بیشتر و بیشتر شبیه به چگالی نرمال استاندارد می‌شود ، زیرا یک متغیّر تصادفی کی‌دو X، با n درجه آزادی را می‌توان به صورت مجموع توان دوم n متغیّر نرمال استاندارد نوشت . یعنی می‌توان X/n را به صورت زیر نوشت

$$\frac{X}{n} = \frac{Z_1^2 + \cdots + Z_n^2}{n}$$

که در آن Z_i ، $i = 1, 2, ..., n$ متغیّرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند . اکنون برای مقادیر بزرگ n با استفاده از قانون ضعیف اعداد بزرگ ، X/n با احتمال ۱ تقریباً مساوی $E(Z_i^2) = 1$ خواهد بود بنابراین برای n های بزرگ $Z/\sqrt{X/n}$ تقریباً دارای همان توزیع Z ، متغیّر تصادفی نرمال استاندارد است .

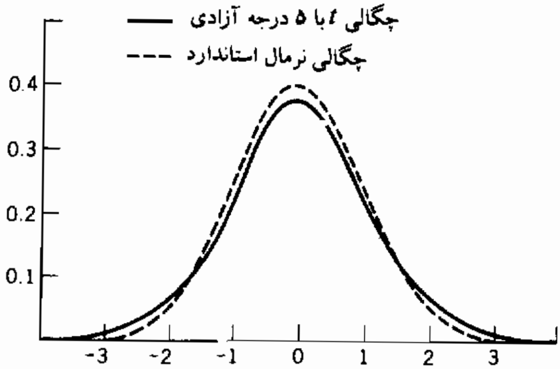


شکل ۳.۸.۳ تابع چگالی T_n

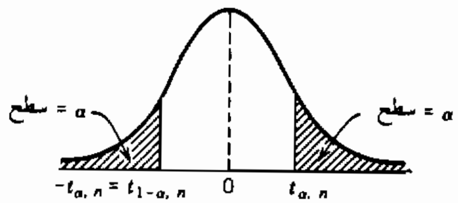
نمودار ۴.۸.۳ نموداری از تابع چگالی t با ۵ درجه آزادی را با چگالی نرمال استانداردمقایسه می‌کند. توجه کنید که چگالی t دارای دنباله‌های ضخیمتر از نرمال استاندارد است که نشانهٔ تغییرپذیری بیشتر می‌باشد. می‌توان نشان داد که میانگین و واریانس T_n مساوی است با

$$E[T_n] = 0, \qquad n > 1$$

$$\operatorname{Var}(T_n) = \frac{n}{n-2}, \qquad n > 2$$



شکل ۴.۸.۳ مقایسهٔ چگالی نرمال استاندارد با چگالی t_5



شکل ۵.۸.۳

بنابراین هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند واریانس T_n به سمت 1 واریانس متغیّر تصادفی نرمال استاندارد میل می‌کند.

برای α، $0 < \alpha < 1$ فرض کنید $t_{\alpha,n}$ به قسمی است که

$$P\{T_n \geq t_{\alpha,n}\} = \alpha$$

از تقارن چگالی t حول صفر نتیجه می‌شود که $-T_n$ دارای توزیع یکسان با T_n است بنابراین

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{-T_n \geq t_{\alpha,n}\} \\ &= P\{T_n \leq -t_{\alpha,n}\}\end{aligned}$$

یا

$$= 1 - P\{T_n \geq -t_{\alpha,n}\}$$

$$P\{T_n \geq -t_{\alpha,n}\} = 1 - \alpha$$

و نهایةً به این نتیجه می‌رسیم که $-t_{\alpha,n} = t_{1-\alpha,n}$ که در شکل ۵.۸.۳ نشان داده شده است . مقدار $t_{\alpha,n}$ برای مقادیر مختلف n و α در جدول ۲.۸.۳ الف ضمیمه درج شده است . همچنین برنامه‌های بیسیک ۲.۸.۳ الف و ۲.۸.۳ ب به‌ترتیب مقادیر تابع توزیع t و مقادیر $t_{\alpha,n}$ را محاسبه می‌کند .

مثال ۸.۳.پ ـ مقدار $P[T_n \leq 1.4]$ را تعیین کنید

حل : برنامهٔ ۲.۸.۳ الف را اجرا کنید

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A t-RANDOM VARIABLE WITH N DEGREES OF
 FREEDOM  IS LESS THAN X
ENTER THE DEGREES OF FREEDOM
? 12
ENTER THE VALUE OF X
? 1.4
THE PROBABILITY IS .9066057
```

مثال ۸.۳.ت ـ مطلوب است $t_{.025,\ 15}$

حل : برنامهٔ ۲.۸.۳ ب را اجرا کنید

```
RUN
FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE t(a,n)    SUCH THAT
 THE PROBABILITY THAT A t-RANDOM VARIABLE WITH n DEGREES OF FREEDOM    EXCEEDS
t(a,n) IS EQUAL TO a
ENTER THE DEGREES OF FREEDOM PARAMETER n
? 9
ENTER THE DESIRED VALUE OF a
? .025
THE VALUE IS 2.262517
Ok
```

۸-۳ توزیع F

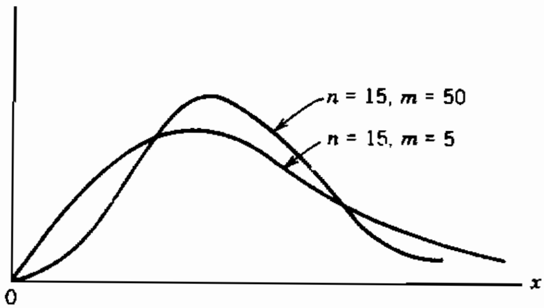
اگر χ^2_n و χ^2_m متغیّرهای تصادفی مستقل کی‌دو به‌ترتیب دارای n_1 و n_2 درجه آزادی باشند آن‌گاه متغیّر تصادفی $F_{n,m}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_{n,m} = \frac{\chi^2_n/n}{\chi^2_m/m}$$

متغیّر تصادفی F با n و m درجه آزادی می‌گوییم . تابع چگالی $F_{n,m}$ به شکل زیر می‌باشد

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right) n^{n/2} m^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{(n-2)/2}}{(m+nx)^{(n+m)/2}}, \qquad x > 0$$

نموداری از این توزیع در شکل ۶.۸.۳ نشان داده شده است :



شکل ۶.۸.۳ تابع چگالی $F_{n,\, m}$

امید ریاضی و واریانس $F_{n,\, m}$ به صورت زیر است

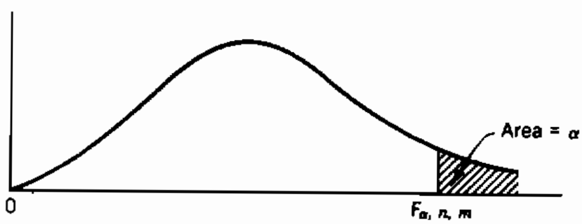
$$E[F_{n,m}] = \frac{m}{m-2} \qquad \text{برای } m > 2$$

$$\mathrm{Var}[F_{n,m}] = \frac{m^2(2m+2n-4)}{n(m-2)^2(m-4)} \qquad \text{برای } m > 4$$

به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ فرض کنید $F_{\alpha,\, n,\, m}$ به قسمی است که

$$P\{F_{n,m} > F_{\alpha,n,m}\} = \alpha$$

شکل ۷.۸.۳ را ببینید



شکل ۷.۸.۳ تابع چگالی $F_{n,\, m}$

به‌ازای مقادیر مختلف n و m و $\alpha \le 1/2$ مقادیر $F_{\alpha, n, m}$ در جدول ۳.۸.۳ الف ضمیمه درج شده است اگر مقدار $F_{\alpha,n,m}$ برای $\alpha > \frac{1}{2}$ موردنظر باشد می‌توان آن‌را با استفاده از نتیجهٔ تساویهای زیر به‌دست آورد

$$\alpha = P\left\{\frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m} > F_{\alpha, n, m}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} < \frac{1}{F_{\alpha, n, m}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} \ge \frac{1}{F_{\alpha, n, m}}\right\}$$

یا معادل آن

$$P\left\{\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} \ge \frac{1}{F_{\alpha, n, m}}\right\} = 1 - \alpha \tag{۲.۸.۳}$$

امّا چون $(\chi_m^2/m)/(\chi_n^2/n)$ دارای توزیع F با m و n درجهٔ آزادی است ، نتیجه می‌شود

$$1 - \alpha = P\left\{\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} \ge F_{1-\alpha, m, n}\right\}$$

و با توجه به معادلهٔ ۲.۸.۳ داریم

$$\frac{1}{F_{\alpha, n, m}} = F_{1-\alpha, m, n}$$

در نتیجه به‌عنوان مثال

$$F_{.9,5,7} = 1/F_{.1,7,5} = 1/3.37 = .2967$$

که در آن مقدار $F_{.1,7,5}$ را از جدول ۳.۸.۳ الف ضمیمه به‌دست آورده‌ایم

برنامه ۳.۸.۳ الف تابع توزیع $F_{n,m}$ را محاسبه می‌کند .

مثال ۸.۳ث ـ مطلوب است محاسبهٔ $P\{F_{6,14} \le 1.5\}$

حل : برنامه ۳.۸.۳ الف را اجرا کنید

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT AN F RANDOM VARIABLE WITH  DEGREES OF
 FREEDOM N AND M IS LESS THAN X
ENTER THE FIRST DEGREE OF FREEDOM PARAMETER
? 6
ENTER THE SECOND DEGREE OF FREEDOM  ARAMETER
? 14
ENTER THE DESIRED VALUE OF X
? 1.5
THE PROBABILITY IS .7518277
```

مسائل

۱ - یک دستگاه ماهواره شامل چهار قسمت است و می‌تواند به اندازه کافی کار کند اگر حداقل ۲ قسمت از ۴ قسمت آن کار کنند. اگر هر قسمت مستقل از دیگر قسمتها با احتمال 6. کار کند چقدر احتمال دارد که ماهواره به اندازه کافی کار کند؟

۲ - یک کانال مخابراتی اعداد 0 و 1 را مخابره می‌کند. امّا براثر بعضی شرایط جوی عدد مخابره‌شده با احتمال 2. نادرست دریافت می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم یک پیام مهم را که به صورت رقمی در مبنای ۲ است، مخابره کنیم. برای کاهش احتمال خطا به‌جای 0، 0000 و به‌جای 1، 1111 را مخابره می‌کنیم. اگر دریافت‌کنندهٔ پیام، برای استخراج رمز، اکثریت را معیار قرار دهد، احتمال این‌که پیام نادرست از رمز خارج شود چقدر است؟ چه فرضهایی در مورد استقلال کرده‌اید؟ (مفهوم به‌کار بردن اکثریت در استخراج رمز این است که پیام صفر در نظر گرفته می‌شود اگر حداقل 3 صفر در پیام دریافت شود و در غیر این‌صورت ۱).

۳ - اگر هر رأی‌دهنده با احتمال ۰/۷ به شخص A رأی دهد، احتمال این‌که از ۱۰ رأی‌دهنده دقیقاً ۷ نفر به شخص A رأی دهند چقدر است؟

۴ - فرض کنید آزمایش خاصی (مثلاً رنگ چشم یا چپ دستی) از شخصی براساس یک جفت ژن انجام شود. فرض کنید که d نشان‌دهنده ژن غالب و r نشان‌دهندهٔ ژن مغلوب باشد. بنابراین شخص با ژن dd غالب خالص و با rr مغلوب خالص و با rd دو رگه است. غالب خالص و دو رگه از نظر ظاهر شبیه به هم هستند. به هر فرزند یک ژن از هر والد می‌رسد. اگر بر حسب آزمایش خاص ۲ والد دو رگه مجموعاً ۴ فرزند داشته باشند، احتمال این‌که ۳ تا از ۴ فرزند دارای ظاهر خارجی غالب باشند چقدر است.

۵ - برای آن‌که یک هواپیما کار کند باید حداقل نیمی از موتورهای آن عمل کنند. اگر هر موتور مستقل از بقیه و با احتمال p عمل کند به ازای چه مقداری از p یک هواپیمای ۴ موتوره با احتمال بیشتری از یک هواپیمای ۲ موتوره کار می‌کند؟

٦ - اگر X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n = 5$ و $p = .3$ باشد مطلوب است:

الف) $P\{X < 17\}$

ب) $P\{13 \leq X \leq 17\}$

۷ - با استفاده از برنامه بیسیک مطلوب است

الف) $P\{X \leq 75\}$

ب) $P\{90 \le X \le 100\}$

ج) $P\{X > 105\}$

که در آن X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 300$ و $p = .3$ است.

۸- اگر X و Y متغیّرهای تصادفی دوجمله‌ای و به ترتیب با پارامترهای (n, p) و $(n, 1-p)$ باشند تساویهای زیر را تحقیق و تفسیر کنید

الف) $P\{X \le i\} = P\{Y \ge n - i\}$

ب) $P\{X = k\} = P\{Y = n - k\}$

۹- اگر X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشد که در آن $0 < p < 1$ نشان دهید که

الف) $P\{X = k + 1\} = \dfrac{p}{1-p}\dfrac{n-k}{k+1}P\{X = k\},\ k = 0, 1, \ldots, n - 1.$

ب) هنگامی که k از 0 تا n تغییر می‌کند $P\{x = k\}$ ابتدا صعود و سپس نزول می‌کند و هنگامی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که k بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $(n + 1)p$ باشد.

۱۰- تابع مولد گشتاور متغیّر تصادفی دوجمله‌ای را به‌دست آورده و با استفاده از آن میانگین و واریانس X را که در متن درس به‌دست آوردیم پیدا کنید.

۱۱- تقریب پواسن را با مقدار واقعی احتمال در توزیع دوجمله‌ای برای حالات زیر مقایسه کنید

الف) $P\{X = 2\}$ وقتی $p = .1, n = 10$

ب) $P\{X = 0\}$ وقتی $p = .1, n = 10$

ج) $P\{X = 4\}$ وقتی $p = .2, n = 9$

۱۲- اگر شخصی یک بلیت قرعه‌کشی را از بین ۵۰ بلیت خریداری کند و احتمال این‌که برنده یک جایزه شود، $\frac{1}{100}$ باشد (به‌طور تقریب) چقدر احتمال دارد که الف) حداقل یک جایزه ب) دقیقاً یکی ج) حداقل دو تا برنده شود؟

۱۳- تعداد دفعاتی که در طول سال شخص کارگری سرما می‌خورد متغیّر تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda = 3$ است. فرض کنید یک داروی جدید وارد بازار شده است که (براساس

زیادی مقدار ویتامین C) پارامتر پواسن را برای ۷۵ درصد از افراد جامعه به $\lambda = 2$ کاهش می‌دهد. برای ۲۵ درصد از دیگر افراد جامعه دارو تأثیری روی سرماخوردگی‌شان ندارد. اگر شخصی دارو را برای یک سال مصرف کرده باشد و تعداد سرماخوردگی‌هایش به صفر برسد چقدر احتمال دارد که دارو برایش مفید بوده باشد؟

۱۴- میزان خودکشی در یک ایالت معین برابر با ۱ خودکشی در هر ۱۰۰۰۰۰ نفر در طول یک ماه است؛

الف) مطلوب است احتمال این‌که در یک شهر ۴۰۰۰۰۰ نفری در بین این ایالت ۸ نفر یا بیشتر در یک ماه معین خودکشی کنند.

ب) چقدر احتمال دارد که حداقل در طی دو ماه از سال ۸ نفر یا بیشتر خودکشی کنند؟

۱۵- احتمال خطا در انتقال یک رقم در مبنای ۲ روی یک کانال مخابراتی $\frac{1}{10^3}$ است. مقدار دقیق احتمال بیش از ۳ خطا را هنگامی که یک رشته 10^3 بیتی انتقال داده می‌شود به‌دست آورید. مقدار تقریبی این احتمال چقدر است؟ (از فرض استقلال استفاده کنید).

۱۶- اگر X متغیّر تصادفی پواسن با میانگین λ باشد، نشان‌دهید که وقتی i صعود می‌کند، $P\{X = i\}$ ابتدا صعود و سپس نزول می‌کند و هنگامی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که i بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی λ باشد.

۱۷- اگر X دارای توزیع پواسن با میانگین ۶۰۰ باشد مطلوب است

الف) $P\{X > 575\}$

ب) $P\{590 \le x \le 610\}$

۱۸- فرض کنید X_1, X_2, X_3 متغیّرهای تصادفی دوجمله‌ای به ترتیب با پارامترهای $(20, .2)$، $(40,.1)$ و $(80,05)$ باشند. مطلوب است $P\{X_i \le 5\}$ برای $i = 1, 2, 3$ و نتیجه‌را با $P(Y \le 5\}$ مقایسه کنید که در آن Y متغیّر تصادفی پواسن با میانگین ۴ است. (از برنامه‌ها استفاده کنید).

۱۹- یک پیمانکار محموله‌ای شامل ۱۰۰ ترانزیستور را خریداری می‌کند. سیاست پیمانکار این است که ۱۰ عدد ترانزیستور را امتحان می‌کند و در صورتی محموله را قبول می‌کند که حداقل ۹ تا از ۱۰ ترانزیستور سالم باشند. اگر محموله شامل ۲۰ ترانزیستور معیوب باشد چقدر احتمال دارد که محموله را بپذیرد.

۲۰- فرض کنید X نشان‌دهندهٔ **متغیر تصادفی فوق هندسی** با پارامترهای n، m و k باشد، یعنی

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \min(k, n)$$

الف) برای $P\{X = i\}$ رابطه‌ای برحسب $P\{X = i - 1\}$ به‌دست آورید
ب) از قسمت الف استفاده کنید و $P\{X = i\}$ را برای $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ هنگامی که $n = m = 10$ و $k = 5$ محاسبه کنید (از $P\{X = 0\}$ شروع کنید).
پ) با تکرار قسمت الف برنامه‌ای برای محاسبه تابع توزیع فوق هندسی بنویسید.
ت) از برنامه قسمت c استفاده کرده و $P\{X \le 10\}$ را هنگامی که $n + m = 30$ و $k = 15$ محاسبه کنید.

۲۱ - آزمایشهایی مستقل که هریک با احتمال p موفقیت است بطور متوالی انجام می‌شوند. فرض کنید X نشان‌دهندهٔ اوّلین آزمایش باشد که نتیجه‌اش موفقیت است، یعنی X مساوی k است اگر $k - 1$ آزمایش اوّل شکست و k امین آزمایش موفقیت باشد. X را **متغیّر تصادفی هندسی** می‌نامند، مطلوب است

الف) $P\{X = k\}$، $k = 1, 2, \ldots$

ب) $E[X]$

فرض کنید Y نشان‌دهندهٔ تعداد آزمایشهای مورد نیاز برای به‌دست آوردن r پیروزی باشد. y را **متغیّر تصادفی دوجمله‌ای منفی** می‌نامند، مطلوب است
پ) $P\{Y = k\}$، $k = r, r + 1$
(راهنمایی: برای آن‌که Y مساوی k باشد در بین $k - 1$ آزمایش اوّل باید چند موفقیت باشد و برآمد آزمایش kام باید چه باشد؟)
ت) نشان دهید که

$$E[y] = \frac{r}{p}$$

(راهنمایی: قرار دهید $Y = Y_1 + \ldots + Y_r$ که در آن Y_i تعداد آزمایشهای مورد نیاز برای رفتن از مجموع $i - 1$ موفقیّت به مجموع i موفقیّت است.

۲۲ - اگر U بطور یکنواخت روی بازهٔ $(0, 1)$ توزیع شود نشان دهید که $a + (b - a)U$ روی بازه (a, b) بطور یکنواخت توزیع می‌شود.

۲۳ - فرض کنید که ساعت ۱۰ به ایستگاه اتوبوس مراجعه می‌کنید و می‌دانید که زمان رسیدن اتوبوس به ایستگاه بین ساعت ۱۰ و ۳۰ : ۱۰ بطور یکنواخت توزیع می‌شود. چقدر احتمال دارد که زمانی بیش از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس باشید؟ اگر تا ساعت ۱۵ : ۱۰ هنوز اتوبوس نرسیده باشد چقدر احتمال دارد که ۱۰ دقیقه دیگر نیز منتظر بمانید؟

۲۴ - اگر X یک متغیّر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 10$ و $\sigma^2 = 30$ باشد مطلوب است

الف) $P\{X > 5\}$ ب) $P\{4 < X < 16\}$

پ) $P\{X < 8\}$ ت) $P\{X < 20\}$

ث) $P\{X > 16\}$

۲۵ ـ اگر بارندگی سالانه (برحسب اینچ) در یک ناحیهٔ معین دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = 40$ و $\sigma = 4$ باشد چقدر احتمال دارد که در ۲ سال از ۴ سال آینده میزان بارندگی از ۵۰ اینچ تجاوز کند؟ (فرض کنید بارندگی در سالهای مختلف از یکدیگر مستقل است).

۲۶ ـ قطر یک دیسک فلزی (برحسب اینچ) متغیّر تصادفی نرمال با $\mu = .9000$ و $\sigma = .0030$ است. دیسک سالم دارای قطری در فاصله $.9000 \pm .0050$ است. چند درصد از دیسکها معیوب هستند؟ اگر قطر این دیسکها دارای توزیع نرمال با $\mu = .9000$ و σ باشند، بزرگترین مقدار σ چقدر باشد تا تعداد معیوبها به حداکثر ۱ در ۱۰۰ برسد؟

۲۷ ـ کارکرد نوع معینی لامپ روشنایی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰۰ ساعت و انحراف معیار ۸۵ ساعت است. یک کران پایین مشخص L را طوری تعیین کنید که فقط ۵ درصد از لامپهای روشنایی تولیدشده معیوب باشد؛ یعنی L را طوری تعیین کنید که $P\{X \geq L\} = .95$، که در آن X کارکرد یک لامپ است.

۲۸ ـ یک کارخانه پیچهایی تولید می‌کند که قطرشان باید بین ۱/۱۹ تا ۱/۲۱ اینچ باشد. اگر در این فرآیند تولید، قطر یک پیچ دارای توزیع نرمال با میانگین ۱/۲۵ و انحراف معیار ۰/۰۰۵ باشد چند درصد از پیچهای تولید شده مناسب تشخیص داده نمی‌شوند.

۲۹ ـ فرض کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$$

الف) نشان دهید که برای هر μ و σ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

معادل است با این که $I = \sqrt{2\pi}$

ب) نشان دهید که $I = \sqrt{2\pi}$. بدین منظور قرار دهید:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$$

و سپس انتگرال دوگانه را تبدیل به انتگرال در مختصات قطبی کنید (یعنی فرض کنید $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$).

۳۰ ـ متغیّر تصادفی X را دارای توزیع لُگ نرمال گوییم اگر $\log X$ دارای توزیع نرمال باشد. اگر X لُگ نرمال باشد با $E[\log X] = \mu$ و $\mathrm{Var}(\log X) = \sigma^2$ تابع توزیع X را تعیین کنید. یعنی $P\{X \leq x\}$ چقدر است؟

۳۱- طول عمر چیپهای کامپیوتری تولید شده توسط یک تولیدکننده معین نیمه هادی دارای توزیع نرمال با میانگین $1/4 \times 10^6$ ساعت و انحراف معیار 3×10^5 ساعت است. اگر یک تولیدکنندهٔ یک کامپیوتر احتیاج به این داشته باشد که در یک دسته بزرگ از چیپها حداقل ۹۰ درصد از آنها دارای طول عمر حداقل $3/8 \times 10^6$ باشند آیا باید با این کارخانه قرارداد ببندد؟

۳۲- در مسألهٔ ۳۱ چقدر احتمال دارد که یک دسته ۱۰۰ تایی از چیپها شامل حداقل ۲۰ چیپ باشد که طول عمرشان کمتر از $4/2 \times 10^6$ ساعت است؟

۳۳- اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 150$ و $p = .6$ باشد مطلوب است محاسبهٔ مقدار دقیق $P\{X \leq 80\}$ و مقایسهٔ آن با مقدار الف) تقریب نرمال با تصحیح پیوستگی ب) تقریب نرمال بدون تصحیح پیوستگی.

۳۴- هر چیپ کامپیوتری تولید شده در یک کارخانه معین مستقل از بقیه با احتمال $\frac{1}{4}$ معیوب است. اگر نمونه‌ای شامل ۱۰۰۰ چیپ امتحان شوند بطور تقریب چقدر احتمال دارد که کمتر از ۲۰۰ تای آنها معیوب باشند؟

۳۵- با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی در مورد این‌که یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین λ، هنگامی که λ بزرگ است، تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس λ است بحث کنید. اگر X دارای توزیع پواسن با میانگین ۱۰۰ باشد مقدار دقیق این احتمال را که X کمتر یا مساوی ۱۱۶ است حساب کنید و آن را با تقریب نرمال در دو حالت تصحیح پیوستگی و بدون تصحیح پیوستگی مقایسه کنید. همگرایی پواسن به نرمال در شکل ۱.۹.۳ نشان داده شده است.

۳۶- از برنامه‌های کامپیوتری معرفی شده در متن برای محاسبهٔ $P\{X \leq 10\}$ هنگامی که X یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 100$ و $p = .1$ است استفاده کنید. اکنون این احتمال را با الف) تقریب پواسن ب) تقریب نرمال مقایسه کنید. در به‌کار بردن تقریب نرمال برای آن‌که تصحیح پیوستگی را مورد استفاده قرار دهید احتمال مطلوب را به صورت $P\{X < 10.5\}$ بنویسید.

۳۷- زمان لازم (برحسب ساعت) برای تعمیر یک ماشین یک متغیّر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است الف) احتمال این‌که زمان تعمیر از ۲ ساعت تجاوز کند چقدر است؟
ب) احتمال شرطی این‌که زمان تعمیر حداقل ۱۰ ساعت وقت ببرد با این فرض که از ۹ ساعت تجاوز کرده است چقدر می‌باشد؟

۳۸- تعداد سالهایی که یک رادیو کار می‌کند دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{8}$ است. اگر شخصی یک رادیوی کار کرده بخرد احتمال این‌که ۱۰ سال دیگر نیز کار کند چقدر است؟

۳۹- شخص A این‌طور تصور می‌کند که تعداد کیلومتری (برحسب ۱۰۰۰) که یک ماشین قبل از

خراب شدن کار می‌کند یک متغیّر تصادفی نمایی با پارامتر $\frac{1}{20}$ است . شخص B ماشینی دارد که معتقد است فقط ۱۰۰۰۰ کیلومتر کار کرده است اگر شخص A این ماشین را بخرد چقدر احتمال دارد که حداقل ۲۰۰۰۰ کیلومتر دیگر برای شخص A کار کند ؟ حال فرض کنید که طول عمر ماشین دارای توزیع نمایی نیست امّا (برحسب ۱۰۰۰ کیلومتر) دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, 40)$ است . در این صورت احتمال مطلوب در قسمت اوّل چقدر است ؟

۴۰ - فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نشان‌دهندهٔ n بازهٔ زمانی در یک فرآیند پواسن است و قرار دهید ،

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$

الف) چه تعبیری برای S_n می‌توان کرد ؟

ب) استدلال کنید که دو پیشامد $\{S_n \le t\}$ و $\{N(t) \ge n\}$ معادلند

پ) از قسمت (ب) استفاده کرده و نشان دهید که

$$P\{S_n \le t\} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t}(\lambda t)^j/j!$$

ت) با مشتق‌گیری از تابع توزیع S_n ـ مفروض در قسمت (پ) ـ نتیجه بگیرید که S_n یک متغیّر تصادفی گاما با پارامترهای n و λ است . (این مطلب از نتیجه ۲.۷.۳ نیز به‌دست آمد)

۴۱ - در یک ناحیهٔ معین زلزله مطابق با فرآیند پواسن با شاخص ۵ زلزله در سال رخ می‌دهد ،

الف) چقدر احتمال دارد که حداقل ۲ زلزله در نیمهٔ اول سال ۱۳۸۹ رخ دهد ؟

ب) فرض کنید پیشامد قسمت (الف) رخ می‌دهد ، چقدر احتمال دارد که در ۹ ماه اوّل سال ۱۳۹۰ زلزله‌ای رخ ندهد ؟

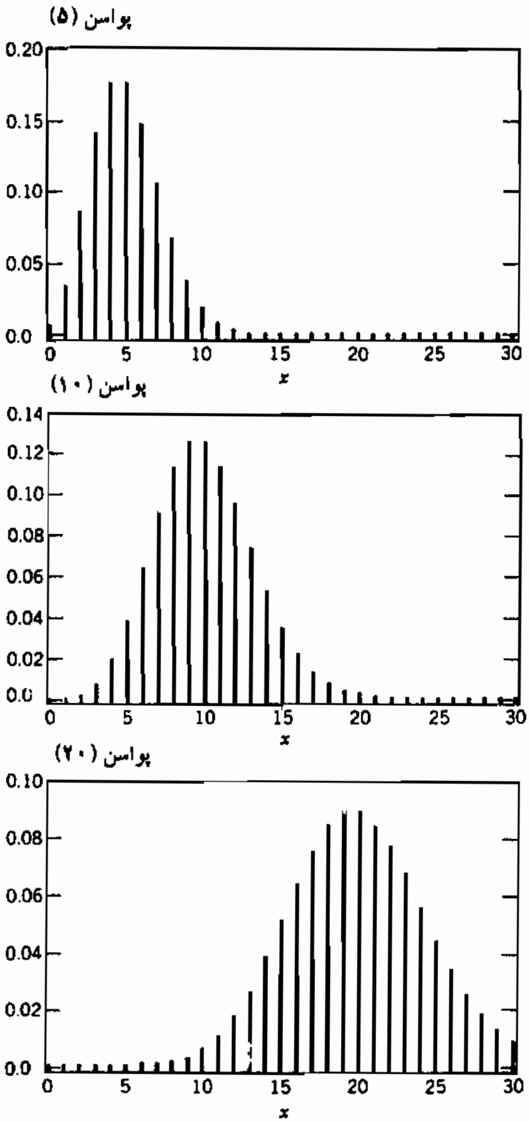
پ) فرض کنید که پیشامد قسمت (الف) رخ داده است چقدر احتمال دارد که حداقل ۴ زلزله در ۹ ماه اوّل سال ۱۳۸۹ رخ دهد ؟

۴۲ - فرض کنید تیری به سمت یک هدف در فضای ۲ بُعدی پرتاب می‌شود . همچنین فرض کنید که طول خطا در سطح افقی یک متغیّر تصادفی نرمال با میانگین 0 و واریانس 4 و طول خطا در سطح عمودی نیز یک متغیّر تصادفی نرمال با میانگین 0 و واریانس 4 است و این دو خطا مستقل از یکدیگرند . اگر D نشان‌دهندهٔ فاصلهٔ بین هدف و نقطه‌ای که تیر اصابت کرده باشد $P\{D > 3.3\}$ را محاسبه کنید .

۴۳ - اگر X یک متغیّر تصادفی کی‌دو با ۶ درجه آزادی باشد ، مطلوب است

الف) $P\{X \leq 6\}$

ب) $P\{3 \leq X \leq 9\}$



شکل ۱.۹.۳ : توابع جرم احتمال پواسن

۴۴ـ اگر X و Y متغیّرهای تصادفی کی‌دو به ترتیب دارای ۳ و ۴ درجه آزادی باشند، مطلوب است احتمال این‌که $X + Y$ از ۱۰ تجاوز کند.

۴۵ـ نشان دهید که

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

راهنمایی: در $\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx$ قرار دهید $x = y^2/2$ و $dx = y\,dy$

۴۶ـ اگر T دارای توزیع t با n درجه آزادی باشد، مطلوب است الف) $P\{T \geq 1\}$، ب) $P\{T \leq 2\}$ و ب) $P\{-1 < T < 1\}$

۴۷ـ اگر T_n دارای توزیع t با n درجه آزادی باشد، نشان دهید که T_n^2 دارای توزیع F با 1 و n درجهٔ آزادی است.

۴۸ـ در بخش ۲.۸ یک استدلال احتمالی ارائه شد که در آن نشان دادیم چگالی t به سمت چگالی نرمال استاندارد میل می‌کند هرگاه درجهٔ آزادی n بزرگ شود. اکنون این مطلب را بطور تحلیلی با استفاده از این واقعیت که

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y \qquad \text{برای هر } y$$

نشان دهید.

راهنمایی: ابتدا چگالی t را به صورت زیر بنویسید

$$f_{T_n}(x) = C_n\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

که در آن C_n به x بستگی ندارد. بنابراین

$$f_{T_n}(x) = \frac{C_n\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-1/2}}{\left(1 + \dfrac{x^2/2}{n/2}\right)^{n/2}}$$

اکنون وقتی $n \to \infty$ نتیجه بگیرید

$$f_{T_n}(x) \to ce^{-x^2/2}$$

که در آن c به x بستگی ندارد. چون انتگرال سمت راست باید ۱ باشد در نتیجه

۴۹ـ اگر $F_{n,m}$ دارای توزیع F با n و m درجه آزادی باشد، مطلوب است

الف) $P\{F_{2,4} > 3\}$

ب) $P\{F_{3,6} > 6\}$

پ) $P\{F_{4,5} < 8\}$

۵۰- نشان دهید که

$$\lim_{m \to \infty} F_{\alpha, n, m} = \frac{\chi^2_{\alpha, n}}{n}$$

فصل چهارم

نمونه‌گیری

۱ - مقدمه

علم آمار با استخراج نتایج از داده‌های مشاهده شده سر و کار دارد. برای مثال در یک مطالعه مهندسی یک حالت واقعی هنگامی رخ می‌دهد که شخصی با دسته‌ای بزرگ یا جامعه‌ای از اشیاء که دارای مقادیر اندازه‌پذیرند روبرو می‌شود و با گرفتن نمونه‌ای مناسب از این جامعه و سپس تحلیل اشیاء نمونه‌گیری شده، امیدوار است بتواند نتایجی را در مورد این جامعه به‌دست آورد.

به منظور استفاده از اطلاعات نمونه برای استنباط در مورد تمام جامعه لازم است فرضهایی در مورد رابطه بین این دو در نظر بگیریم. فرضی که اغلب کاملاً منطقی نیز می‌باشد این است که یک توزیع احتمال (جامعه) وجود دارد بطوری که می‌توان این‌گونه تصور کرد که مقادیر اندازه‌پذیر اشیاء در جامعه، متغیّرهای تصادفی مستقلی از این توزیع هستند.

تعریف: اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقلی با توزیع مشترک F باشند آن‌گاه گوییم تشکیل یک **نمونه** از توزیع F می‌دهند. (گاهی اوقات به آن **نمونهٔ تصادفی** نیز اطلاق می‌شود)

در بیشتر موارد توزیع جامعه، F کاملاً مشخص نیست و شخص باید سعی کند با استفاده از داده‌ها، نتایجی در مورد آن به‌دست آورد. گاهی اوقات فرض می‌شود که F با بعضی پارامترهای مجهول مشخص می‌شود (برای مثال ممکن است فرض شود که F تابع توزیع نرمال است با میانگین و واریانس مجهول یا این که تابع توزیع پواسن است که میانگین آن معلوم نیست) و گاهی اوقات نیز ممکن است فرض شود که تقریباً هیچ چیز در مورد F معلوم نیست (شاید بجز این فرض که یک توزیع پیوسته یا گسسته می‌باشد). مسایلی را که در آنها شکل توزیع جامعه با مجموعه‌ای از پارامترهای مجهول مشخص می‌شود مسایل **استنباط پارامتری** می‌نامند و مسایلی را که در آنها هیچ فرضی در مورد شکل F نمی‌شود، مسایل **استنباط ناپارامتری** می‌نامند.

مثال ۴.۱.۱الف - فرض کنید یک فرآیند جدید برای تولید چیپهای کامپیوتری مورد بهره‌برداری قرار

گرفته و فرض کنید چیپهای متوالی تولید شده توسط این فرآیند دارای طول عمر مفیدی هستند که از یکدیگر مستقل و دارای توزیع مشترک امّا مجهول F می‌باشند. گاهی اوقات دلایل فیزیکی پیشنهاد می‌کنند که باید F یک توزیع‌نمایی باشد. اگر چنین حالتی باشد با یک مسألهٔ آمار پارامتری روبرو هستیم که باید از داده‌های مشاهده شده (یعنی طول عمر چیپهای متوالی تولید شده) استفاده کرده و میانگین مجهول توزیع عمر (نمایی) را برآورد کنیم. از طرف دیگر ممکن است توجیه فیزیکی برای این که F دارای فرم خاصی است، وجود نداشته باشد. در این حالت، استنباط در مورد F یک مسألهٔ استنباط ناپارامتری است. ■

در بخش ۲ بعضی از اندازه‌های گرایش مرکزی بخصوص میانگین، میانه و نما را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین میانگین و میانهٔ نمونه که تابعی از داده‌های نمونه می‌باشند و به ترتیب آنها را به‌عنوان برآوردکننده‌های منطقی برای میانگین و میانه (جامعه) به‌کار می‌بریم، معرفی می‌کنیم. در بخش ۳ در مورد واریانس نمونه و دامنهٔ نمونه به‌عنوان تابعی از مشاهدات که می‌توانند به‌عنوان معیاری برای پراکندگی جامعه مورد استفاده قرار گیرند، بحث خواهیم کرد. در بخش ۴ نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از توابع توزیع تجربی، هسیتوگرامها و نمودارهای ساقه و برگ، می‌توان از نمونه اطلاعاتی در مورد توزیع کل جامعه به‌دست آورد. در بخش ۵ توزیع توأم میانگین و واریانس نمونه را هنگامی که نمونه‌گیری از جامعه نرمال صورت گرفته است مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش پایانی این فصل به‌دست آوردن اطلاعاتی در مورد جامعه را با استفاده از نمونه‌گیری از بعضی اعضای جامعه براساس فرضی متفاوت در مورد ارتباط بین جامعه و اعضای نمونه‌گیری شده از آن مورد بررسی قرار می‌دهیم. بخصوص فرض می‌کنیم که جامعه دارای حجم متناهی است و هر یک از اعضای آن دارای مقداری ثابت و مجهول است و همچنین در ادامه فرض خواهیم کرد که تمام مقادیر جامعه بطور مستقل از یک توزیع مشترک انتخاب شوند مسألهٔ مورد علاقه استفاده از مقادیر داده‌ها در یک زیرمجموعهٔ «تصادفی» انتخاب شده برای استنباط در مورد همه مقادیر است.

۲- اندازه‌های گرایش مرکزی

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع مجهول F باشد. هدف، به‌دست آوردن نتایجی در مورد F است و غالباً سعی می‌کنیم در مورد خواصی از توزیع که توسط مقیاسهای تعریف شدهٔ مناسب توصیف می‌شوند نتایج را به‌دست آوریم. برای مثال ۳ مقیاس موضعی یا گرایش مرکزی از تابع توزیع میانگین، میانه و نما هستند. میانگین تابع توزیع، μ (که گاهی اوقات به آن میانگین جامعه می‌گویند) امید ریاضی متغیّر تصادفی X است که توزیع آن F می‌باشد. یعنی

$$\mu = E[X] = \begin{cases} \sum x_i P\{X = x_i\} & \text{گسسته باشد } F \\ \int x f(x)\, dx & F \text{ پیوسته باشد با تابع چگالی } F \end{cases}$$

میانگین یک مقیاس گرایش مرکزی مفید است زیرا متوسط موزون مقادیر ممکن متغیّر تصادفی می‌باشد که توزیع آن F است و وزن هر مقدار مساوی است با احتمال (یا چگالی در حالت پیوسته) این‌که متغیّر تصادفی آن مقدار را بگیرد.

خاصیت مهّمی از میانگین هنگامی به‌دست می‌آید که بخواهیم مقدار یک متغیّر تصادفی را از قبل پیش‌بینی کنیم. یعنی، فرض کنید که مقدار یک متغیّر X پیش‌بینی شده است. اگر پیش‌بینی کرده باشیم که X مساوی c است آن‌گاه توان دوم خطا $(X - c)^2$ خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که متوسط توان دوم خطا هنگامی می‌نیمم می‌شود که X مساوی μ باشد بدین منظور به ازای هر مقدار ثابت c داریم

$$\begin{aligned} E\left[(X - c)^2\right] &= E\left[(X - \mu + \mu - c)^2\right] \\ &= E\left[(X - \mu)^2 + 2(\mu - c)(X - \mu) + (\mu - c)^2\right] \\ &= E\left[(X - \mu)^2\right] + 2(\mu - c)E[X - \mu] + (\mu - c)^2 \\ &= E\left[(X - \mu)^2\right] + (\mu - c)^2 \quad E[X - \mu] = E[X] - \mu = 0 \quad \text{زیرا} \\ &\geq E\left[(X - \mu)^2\right] \end{aligned}$$

بنابراین برحسب می‌نیمم میانگین توان دوم خطا بهترین مقدار پیش‌بینی شده برای یک متغیّر تصادفی میانگین آن است.

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع F باشد.

تعریف: کمیتی را که تنها به نمونه بستگی داشته باشد و نه پارامتر مجهول دیگر از جامعه، آماره می‌نامیم.

بنابراین هنگامی که نمونه به‌دست می‌آید یک آماره کاملاً تعیین می‌شود.

تعریف: آماره $\bar{X}$ را که به‌صورت

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

تعریف می‌شود میانگین نمونه می‌نامیم.

باید توجه داشت که میانگین نمونه که همان میانگین حسابی مقادیر نمونه است، یک متغیّر تصادفی می‌باشد و میانگین و واریانس آن به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}(E[X_1] + \cdots + E[X_n])$$

$$= \mu$$

$$\operatorname{Var}(\overline{X}) = \operatorname{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}[\operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n)]$$ با توجه به استقلال

$$= \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

که در آن μ و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعه می‌باشند. بنابراین امید ریاضی میانگین نمونه مساوی است با میانگین جامعه، در حالی که واریانس آن $1/n$ واریانس جامعه است. بنابراین می‌بینیم در مواقعی که μ مجهول است میانگین نمونه، $\bar{X}$، یک برآوردکنندهٔ منطقی برای μ است.

از دیگر مقایسهای گرایش مرکزی توزیع میانه آن است:

تعریف: برای یک توزیع دلخواه F گوییم، m میانه توزیع است اگر

$$P\{X \le m\} \ge \tfrac{1}{2} \qquad \text{و} \qquad P\{X \ge m\} \ge \tfrac{1}{2}$$

که در آن $X \approx F$.

پس در حالتی که تابع توزیع F پیوسته است میانهٔ m یک مقدار منحصر به فرد است به قسمی که $F(m) = \frac{1}{2}$. یعنی میانه نقطه میانی توزیع است از این نظر که یک متغیّر با این توزیع دقیقاً دارای احتمال مساوی است که بزرگتر یا کوچکتر از m باشد.

میانه مشابه با میانگین هنگامی مهم است که بخواهیم مقدار متغیّر تصادفی X را پیش‌بینی کنیم. فرض کنیم می‌خواهیم c را به‌عنوان یک مقدار پیش‌بینی برای X طوری اختیار کنیم که مقدار متوسط (نه توان دوم) قدر مطلق خطا را می‌نیمم کنیم. یعنی فرض کنید می‌خواهیم c را طوری انتخاب کنیم که $E[|X-c|]$ می‌نیمم شود. اکنون نشان می‌دهیم که باید $c = m$.

باید ثابت کنیم که وقتی $X \approx F$، $E[|X-c|]$ هنگامی که c مساوی میانه F، یعنی برابر با m است می‌نیمم می‌شود.

برای اثبات فرض کنید F یک توزیع پیوسته است که چگالی آن f می‌باشد (یعنی $(F'(t) = f(t)$) در این صورت

$$\begin{aligned}E[|X-c|] &= \int_{-\infty}^{\infty}|x-c|f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{c}|x-c|f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty}|x-c|f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty}(x-c)f(x)\,dx \\ &= cF(c) - \int_{-\infty}^{c}xf(x)\,dx + \int_{c}^{\infty}xf(x)\,dx - c[1-F(c)]\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dc}E[|X-c|] &= F(c) + cf(c) - cf(c) - cf(c) - 1 + F(c) + cf(c) \\ &= 2F(c) - 1\end{aligned}$$

بنابراین مقدار می‌نیمم هنگامی به‌دست می‌آید که

$$2F(c) - 1 = 0$$

یا

$$F(c) = \tfrac{1}{2}$$

یعنی مقدار می‌نیمم هنگامی به‌دست می‌آید که c مساوی با میانه F باشد. (برای دیدن این که این مقدار می‌نیمم است باید توجه داشت که $(d^2/dc^2)E[|X-c|] = 2f(c) \geq 0)$

مثال ۲.۴.الف ـ تابع توزیع

$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, \qquad 0 < x < \infty$$

حالت خاص توزیعی است که به آن توزیع وایبل[۱] گفته می‌شود و به‌دلیل تنوع آن کاربردهای وسیعی در مهندسی دارد. در ابتدا این توزیع برای تفسیر داده‌های مربوط به خستگی پیشنهاد شده است. امّا اکنون استفاده از آن در بسیاری دیگر از مسائل مهندسی توسعه داده شده است. بخصوص استفاده وسیع آن در میدان پدیده عمر به‌عنوان توزیع طول عمر بعضی از اشیاء مخصوصاً هنگامی که مدل «ضعیف‌ترین ارتباط» بین اشیاء در نظر گرفته می‌شود. مثلاً شیء را در نظر بگیرید که از اجزاء زیادی تشکیل شده است و فرض کنید که هرگاه یکی از اجزاء آن از بین می‌رود، شیء در برابر نابودی تحمل می‌کند. تحت این شرایط (هم بطور نظری و هم تجربی) نشان داده می‌شود که توزیع وایبل، تقریب خوبی برای توزیع طول عمر شیء فراهم می‌کند.

میانه، m، توزیع وایبل، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$1/2 = F(m) = 1 - e^{-m^2}$$

یا

$$e^{-m^2} = \tfrac{1}{2}$$

با گرفتن لگاریتم (در مبنای e)

$$-m^2 = \log\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

یا

$$m^2 = \log 2$$

و در نتیجه

$$m = \sqrt{\log 2} \approx .83255.$$

نمودار F در شکل ۱.۲.۴ نمایش داده شده است.

میانه راگاهی اوقات صدک مرتبه ۵۰ ام نیز می‌نامند. بطورکلی ξ_p را صدک $100p$ ام،

---

* - شکل‌گیری تابع توزیع وایبل به صورت زیر است

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta} \qquad 0 < x < \infty$$

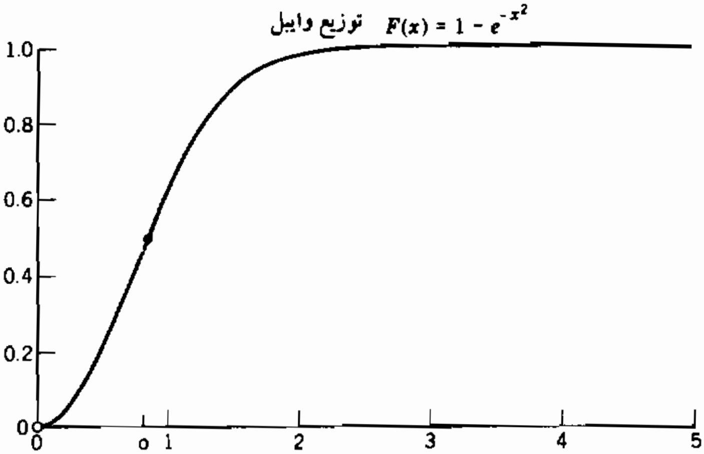
که در آن

$\alpha > 0, \beta > 0$

$0 < p < 1$، توزیع پیوسته F گوییم هرگاه

$$F(\zeta_p) = p$$

صدکهای $\zeta_{1/4}$، $\zeta_{1/2}$، $\zeta_{3/4}$ را چارکهای توزیع می‌نامند. بنابراین چارک میانی دقیقاً مساوی میانه F است. اگر تابع چگالی $F' = f$ را رسم کنیم ۲۵ درصد مساحت زیر f سمت چپ $\zeta_{1/4}$ قرار می‌گیرد، ۲۵ درصد از مساحت بین $\zeta_{1/4}$ و $\zeta_{1/2}$، ۲۵ درصد بین $\zeta_{1/2}$ و $\zeta_{3/4}$ و ۲۵ درصد سمت راست $\zeta_{3/4}$ واقع می‌شود.



شکل ۱.۲.٤: میانه $= 0$

مثال ۴.۲.ب ـ توزیع نمایی را با تابع چگالی زیر در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

چون تابع توزیع به صورت

$$F(y) = \int_0^y f(x)\,dx = 1 - e^{-2y} \qquad y > 0$$

است. می‌توانیم چارکها را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$p = F(\zeta_p) = 1 - e^{-2\zeta_p}$$

یا

یا

$$e^{-2\zeta_p} = 1 - p$$

$$-2\zeta_p = \log(1 - p)$$

یا

$$\zeta_p = \frac{-\log(1 - p)}{2}$$

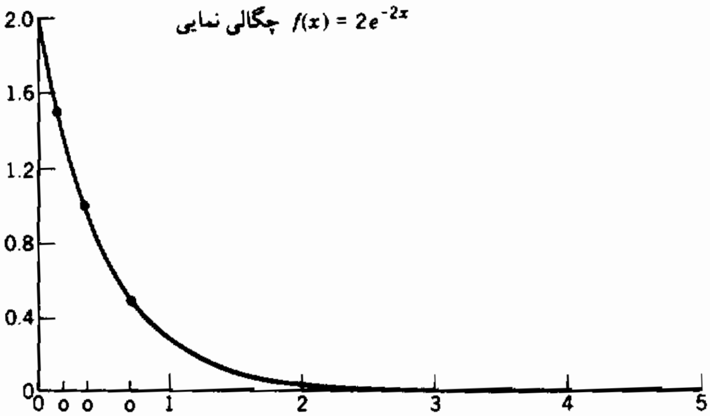
بنابراین چارکها عبارتند از

$$\zeta_{1/4} = \frac{-\log(3/4)}{2} = \frac{\log(4/3)}{2} \approx .1438$$

$$\zeta_{1/2} = \frac{-\log(1/2)}{2} = \frac{\log 2}{2} \approx .3466$$

$$\zeta_{3/4} = \frac{-\log(1/4)}{2} = \frac{\log 4}{2} \approx .6931 \quad \blacksquare$$

چارکهای توزیع روی نمودار تابع چگالی که در شکل ۲.۲.۴ نمایش داده شده مشخص شده‌اند .



شکل ۲.۲.٤

برای تعریف میانه نمونه باید مفهوم یک آمارهٔ مرتب را معرفی کنیم . بدین منظور فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع F باشد و فرض کنید Xها را طوری مرتب کنیم که

$X_{(1)} =$ کوچکترین مقدار $X_1, \ldots, X_n$

$X_{(2)} =$ دومین مقدار از لحاظ کوچکی در بین $X_1, \ldots, X_n$

$\vdots$

$X_{(i)} =$ iامین مقدار از لحاظ کوچکی در بین $X_1, \ldots, X_n$

$\vdots$

$X_{(n)} =$ بزرگترین مقدار $X_1, \ldots, X_n$

تعریف : مقادیر مرتب شده $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$ را آماره‌های مرتب نمونه می‌نامند .

اگر $n = 2k - 1$ یعنی n یک عدد صحیح فرد باشد آن‌گاه $X_{(k)}$ میانه نمونه است . در حالی که $n = 2k$ آن‌گاه $\frac{1}{2}[X_{(k)} + X_{(k+1)}]$ را میانه نمونه می‌نامند .

به عبارت دیگر در نمونه‌ای به حجم ۷ ، میانهٔ نمونه مساوی است با چهارمین عضو نمونهٔ مرتب شده ، در حالی که اگر نمونه‌ای ۸ تایی داشته باشیم ، متوسط ۴ امین و ۵ امین مقادیر نمونه مرتب شده میانه است .

میانه نمونه یک برآوردکنندهٔ منطقی برای میانه جامعه است .

سومین اندازه گرایش مرکزی توزیع F، نما است :

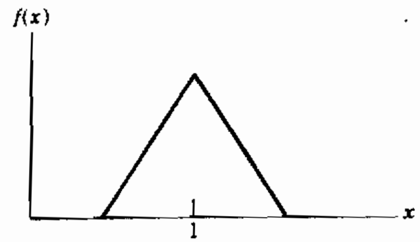
تعریف : فرض کنید X یک متغیّر تصادفی با تابع توزیع F باشد . گوییم a یک نمای F است اگر

$$P(a) = \max_x P(x)$$

که در آن

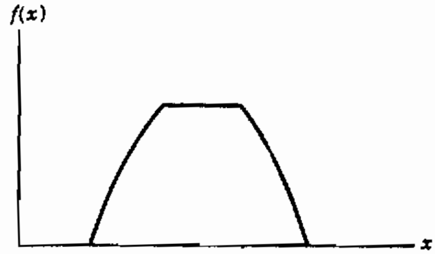
$$P(x) = \begin{cases} P\{X = x\} & F \text{ گسسته باشد} \\ f(x) & F \text{ پیوسته باشد با تابع چگالی} \end{cases}$$

به‌عبارت‌دیگر نما نشان‌دهندهٔ محتمل‌ترین مقدار یک متغیّر تصادفی است. برای مثال توزیعی که چگالی آن در شکل ۳.۲.۴ رسم شده است دارای نمای منحصر به فرد $x = 1$ است .



شکل ۳.۲.٤ : چگالی با نما در $x = 1$

همچنین از اصطلاح نمای نسبی توزیع گسسته (پیوسته) برای توصیف مقداری که تابع جرم احتمال (تابع چگالی احتمال) در آن بطور موضعی بیشترین مقدار را دارد استفاده می‌کنیم. اصطلاحات «چند نمایی» و «دو نمایی» را در ارتباط با یک توزیع هنگامی به‌کار می‌بریم که در حالت اوّل توزیع دارای ناحیه‌ای از نماهای نسبی است و در حالت دوم از چنین نواحی دو تا وجود دارد (شکل ۴.۲.۴ و ۵.۲.۴ را ببینید).



شکل ٤.٢.٤ : یک توزیع چندنمایی (با مقدار نامتناهی نما)

شکل ٥.٢.٤: یک توزیع دونمایی (با یک نمای منحصر به فرد)

تعریف : اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی باشد آن‌گاه مقداری را که دارای بیشترین فراوانی است نمای نمونه می‌نامند.

مثال ۴.۲.پ ـ اگر نمونه به صورت ۵ ، ۸ ، ۳ ، ۲ ، ۳ باشد آن‌گاه نمای نمونه مساوی ۳ است . اگر

نمونه به صورت ۵ ، ۸ ، ۸ ، ۳ ، ۲ ، ۳ باشد آن‌گاه نمونه دارای ۲ نما است یکی ۳ و دیگری ۸ .

۳- واریانس و دامنهٔ نمونه

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع F باشد .

تعریف : آمارهٔ S^2 که به صورت

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

تعریف می‌شود و در آن $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ ، واریانس نمونه و $S = \sqrt{S^2}$ را انحراف معیار نمونه می‌نامند .

یک فرمول محاسباتی مفید برای S^2 به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad (۱.۳.۴)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}(n\overline{X}) + n\overline{X}^2\\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\end{aligned}$$

اگر واریانس توزیع F (که گاهی اوقات به آن وایانس جامعه می‌گویند) σ^2 باشد با استفاده از رابطهٔ ۱.۳.۴ می‌توانیم $E(S^2)$ را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}E\left[(n-1)S^2\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right] - nE\left[\overline{X}^2\right] \qquad (۲.۳.۴)\\ &= nE\left[X_1^2\right] - nE\left[\overline{X}^2\right]\end{aligned}$$

همچنان‌که در بخش ۲ دیدیم با $E(X_i) = \mu$ داریم

$$E\left[\overline{X}\right] = \mu$$
$$\operatorname{Var}\left(\overline{X}\right) = \sigma^2/n$$

و بنابراین با استفاده از این نتیجه که برای هر متغیّر تصادفی مانند U، $\mathrm{Var}(U) = EU^2 - (EU)^2$ یا معادل با آن $EU^2 = \mathrm{Var}(U) + (EU)^2$ می‌بینیم که

$$E[\bar{X}^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

بنابراین چون $E[X_i^2] = \mu^2 + \sigma^2$ از معادله ۲.۳.۴ به‌دست می‌آوریم

$$E[(n-1)S^2] = n(\mu^2 + \sigma^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)$$
$$= (n-1)\sigma^2$$

یا

$$E[S^2] = \sigma^2$$

یعنی امید ریاضی واریانس نمونه مساوی است با واریانس جامعه σ^2.

تعریف: اگر $X_{(i)}$، $i = 1, ..., n$، iامین آمارهٔ مرتب نمونه $X_1, X_2, ...X_n$ باشد آن‌گاه R را که به صورت

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$

تعریف می‌کنیم دامنهٔ نمونه می‌نامیم.

بنابراین اندازهٔ R، اندازه بازه‌ای است که نمونه تصادفی را در بردارد. هر دو کمیت R و S^2 اطلاعاتی در مورد پراکندگی توزیع F ارائه می‌دهند.

۱.۳ - محاسبهٔ واریانس نمونه

هنگام محاسبه با دست معادلهٔ ۱.۳.۴ روش مفیدی برای محاسبه واریانس نمونه ارائه می‌دهد. امّا اگر مجموعهٔ داده‌ها بزرگ باشد و محاسبه روی کامپیوتر انجام شود آن‌گاه به‌دلیل «خطای گرد کردن» استفاده از معادلهٔ ۱.۳.۴ ممکن است همراه با خطا باشد، بخصوص وقتی مقادیر تک تک داده‌ها بزرگ باشد. یعنی کامپیوتر تنها برای سطح معینی از دقت که معمولاً ۸ تا ۱۶ رقم است محاسبه را انجام می‌دهد. و سپس از باقیمانده صرفنظر می‌کند. مثلاً در معادلهٔ ۱.۳.۴ اگر هریک از عبارات بزرگ باشند. هنگامی که یک عدد مثبت از دیگری کم می‌شود خطای گردکردن ممکن است مشکل‌آفرین باشد. در واقع شگفتی ناخوشایندی برای افرادی که با کامپیوتر خود کار می‌کنند هنگامی به‌وجود می‌آید که یک مقدار منفی برای S^2 به‌دست

می‌آورند. بنابراین یک الگوریتم کامپیوتری دیگر (بدون استفاده از معادلهٔ ۱.۳.۴) برای محاسبهٔ S^2 نیاز داریم.

در صورت داشتن کامپیوتر یک روش مستقیم محاسبه این است که ابتدا $\bar{X}$ را حساب کرد و سپس جمع عبارات $(X_i - \bar{X})^2$ را کاملاً دقیق به‌دست آورد. (زیرا حاصل، جمع عبارات نامنفی است). امّا این روش، روش خوبی نیست زیرا کامپیوتر باید مجموعهٔ داده‌ها را دو بار مرور کند [یک بار برای محاسبه $\bar{X}$ و آن‌گاه جمع زدن عبارات $(X_i - \bar{X})^2$]. یک الگوریتم بهتر براساس یک رابطهٔ بازگشتی است که اکنون آن‌را بررسی می‌کنیم

برای شروع فرض کنید

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} X_i}{j} \qquad j \geq 1$$

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{j}\left(X_i - \bar{X}_j\right)^2}{j-1} \qquad j \geq 2$$

یعنی $\bar{X}_i$ و S^2_i به‌ترتیب میانگین و واریانس مقادیر $X_1, \ldots, X_i$، i مقدار نخست داده‌ها هستند. حکم زیر نشان می‌دهد که چگونه این کمیتها می‌توانند به ترتیب محاسبه شوند:

حکم ۱.۳.۴

با $S^2_1 = 0$ برای $j = 1, \ldots, n$

$$\bar{X}_{j+1} = \bar{X}_j + \frac{X_{j+1} - \bar{X}_j}{j+1} \tag{۳.۳.۴}$$

$$S_{j+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{j}\right)S_j^2 + (j+1)\left(\bar{X}_{j+1} - \bar{X}_j\right)^2 \tag{۴.۳.۴}$$

اثبات: تحقیق معادلهٔ ۳.۳.۴ که معادل است با

$$X_{j+1} - \bar{X}_j = (j+1)\left(\bar{X}_{j+1} - \bar{X}_j\right) \tag{۵.۳.۴}$$

کاملاً سر راست است و آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

برای اثبات رابطه ۴.۳.۴ توجه کنید که:

$$jS_{j+1}^2 = \sum_{i=1}^{j+1}\left(X_i - \bar{X}_{j+1}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{j+1} \left[\left(X_i - \overline{X}_j \right) + \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right) \right]^2 \qquad (۶.۳.۴)$$

$$= \sum_{i=1}^{j+1} \left(X_i - \overline{X}_j \right)^2 + \sum_{i=1}^{j+1} \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)^2$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{j+1} \left(X_i - \overline{X}_j \right)\left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)$$

اکنون

از معادلهٔ ۵.۳.۴

$$\sum_{i=1}^{j+1} \left(X_i - \overline{X}_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{j} \left(X_i - \overline{X}_j \right)^2 + \left(X_{j+1} - \overline{X}_j \right)^2$$

$$= (j-1) S_j^2 + \left(X_{j+1} - \overline{X}_j \right)^2$$

$$= (j-1) S_j^2 + (j+1)^2 \left(\overline{X}_{j+1} - \overline{X}_j \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{j+1} \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)^2 = (j+1) \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{j+1} \left(X_i - \overline{X}_j \right)\left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right) = \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right) \sum_{i=1}^{j+1} \left(X_i - \overline{X}_j \right)$$

$$= \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right) \left[\sum_{i=1}^{j} \left(X_i - \overline{X}_j \right) + X_{j+1} - \overline{X}_j \right]$$

$$= \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right) \left[\sum_{i=1}^{j} X_i - j\overline{X}_j + X_{j+1} - \overline{X}_j \right]$$

$$= \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)\left(X_{j+1} - \overline{X}_j \right)$$

چون

$$\sum_{i=1}^{j} X_i - j\overline{X}_j = 0$$

از تساوی ۵.۳.۴

$$= \left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)(j+1)\left(\overline{X}_{j+1} - \overline{X}_j \right)$$

$$= -(j+1)\left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)^2$$

با جایگذاری فوق در معادلهٔ ۶.۳.۴ به‌دست می‌آوریم

یا معادل آن

$$jS_{j+1}^2 = (j-1)S_j^2 + \left[(j+1)^2 + j + 1 - 2(j+1) \right]\left(\overline{X}_j - \overline{X}_{j+1} \right)^2$$

$$jS_{j+1}^2 = (j-1)S_j^2 + (j+1)j\left(\bar{X}_j - \bar{X}_{j+1}\right)^2$$

که با تقسیم طرفین رابطهٔ فوق بر j تساوی مطلوب در ۴.۳.۴ به‌دست می‌آید.

معادلات بازگشتی ۳.۳.۴ و ۴.۳.۴ می‌تواند برای محاسبه $S^2 = S_n^2$, $\bar{X} = \bar{X}_n$ با شروع از $\bar{X}_1 = X_1$ مورد استفاده قرار گیرد.

مثال ۴.۳.الف: اگر $n = 4$ و مقادیر داده‌ها $X_1 = 5$ و $X_2 = 14$ و $X_3 = 9$ و $X_4 = 6$ باشند آن‌گاه

$$\bar{X}_1 = X_1 = 5$$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \frac{X_2 - \bar{X}_1}{2} = 5 + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$$

$$S_2^2 = \left(1 - \frac{1}{1}\right)S_1^2 + 2\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1\right)^2 = \frac{81}{2}$$

$$\dot{X}_3 = \bar{X}_2 + \frac{X_3 - \bar{X}_2}{3} = \frac{19}{2} + \frac{9 - 19/2}{3} = \frac{28}{3}$$

$$S_3^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)S_2^2 + 3\left(\bar{X}_3 - \bar{X}_2\right)^2 = \frac{61}{3}$$

$$\bar{X} = \bar{X}_4 = \bar{X}_3 + \frac{X_4 - \bar{X}_3}{4} = \frac{28}{3} + \frac{6 - \frac{28}{3}}{4} = \frac{17}{2}$$

$$S^2 = S_4^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)S_3^2 + 4\left(\bar{X}_4 - \bar{X}_3\right)^2 = \frac{49}{3} \quad \blacksquare$$

برنامه ۴ـ۳ از معادلات بازگشتی ۳.۳.۴ و ۴.۳.۴ برای محاسبهٔ میانگین، واریانس و انحراف معیار نمونه استفاده می‌کنند.

مثال ۴.۳.ب: مطلوب است محاسبهٔ میانگین، واریانس و انحراف معیار مجموعه داده‌های زیر 143, 147, 154, 158, 175, 139, 130, 157, .63, 166, 174, 169.

حل: برنامه ۴ـ۳ را اجرا کنید

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE SAMPLE MEAN, SAMPLE VARIANCE, AND SAMPLE STANDARD DEVI
ATION OF A DATA SET
ENTER THE SAMPLE SIZE
? 12
ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME
? 143
? 147
? 154
? 158
? 175
? 139
? 130
? 157
? 163
? 166
? 174
? 169
SAMPLE MEAN IS 156.25
SAMPLE VARIANCE IS 202.3868
SAMPLE STANDARD DEVIATION IS 14.22627
```

۴- توابع توزیع تجربی ، هیستوگرام و نمودارهای ساقه و برگ

فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نشان‌دهندهٔ نمونه‌ای تصادفی از تابع توزیع مجهول F باشد و فرض کنید که علاقه‌مندیم از داده‌ها برای برآورد F استفاده کنیم . چون

$$F(x) = P\{X_i \le x\}$$

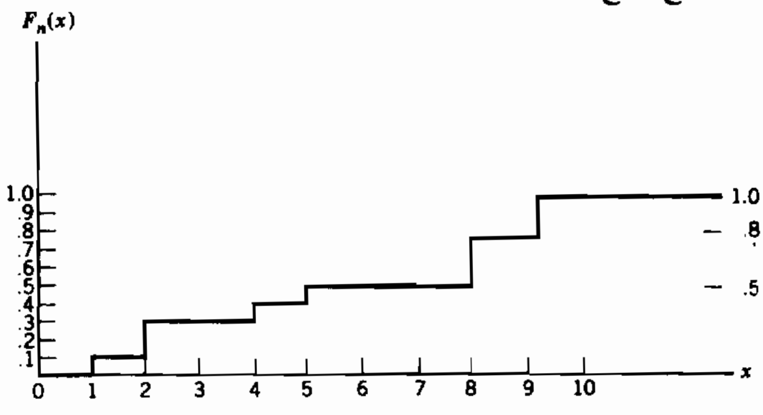
یک برآورد منطقی برای $F(x)$ عبارت است از نسبت X_iهایی در نمونه که کمتر یا مساوی x هستند .

تعریف : تابع $F_n(x)$، $-\infty < x < \infty$ ، را که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_n(x) = \frac{\text{تعداد i ها}\quad i : X_i \le x}{n}$$

تابع توزیع تجربی می‌گویند .

مثال ۴.۴.الف ـ اگر نمونه‌ای به حجم ۱۰ دارای مقادیر ۹ ، ۵ ، ۲ ، ۱ ، ۸ ، ۲ ، ۴ ، ۸ ، ۹ ، ۸ باشد آن‌گاه نمودار تابع توزیع تجربی به صورت زیر است .

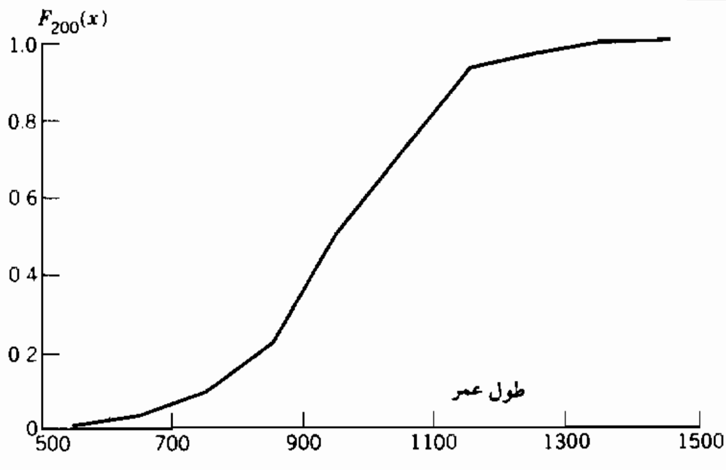


نمودار

مثال ۴.۴.ب ـ جدول زیر طول عمر ۲۰۰ لامپ مهتابی را نشان می‌دهد .
تابع توزیع تجربی مربوط به این جدول در شکل ۱.۴.۴ نمایش داده شده است .

جدول

طول عمر									
1,067	919	1,196	785	1,126	936	918	1,156	920	948
855	1,092	1,162	1,170	929	950	905	972	1,035	1,045
1,157	1,195	1,195	1,340	1,122	938	970	1,237	956	1,102
1,022	978	832	1,009	1,157	1,151	1,009	765	958	902
923	1,333	811	1,217	1,085	896	958	1,311	1,037	702
521	933	928	1,153	946	858	1,071	1,069	830	1,063
930	807	954	1,063	1,002	909	1,077	1,021	1,062	1,157
999	932	1,035	944	1,049	940	1,122	1,115	833	1,320
901	1,324	818	1,250	1,203	1,078	890	1,303	1,011	1,102
996	780	900	1,106	704	621	854	1,178	1,138	951
1,187	1,067	1,118	1,037	958	760	1,101	949	992	966
824	653	980	935	878	934	910	1,058	730	980
844	814	1,103	1,000	788	1,143	935	1,069	1,170	1,067
1,037	1,151	863	990	1,035	1,112	931	970	932	904
1,026	1,147	883	867	990	1,258	1,192	922	1,150	1,091
1,039	1,083	1,040	1,289	699	1,083	880	1,029	658	912
1,023	984	856	924	801	1,122	1,292	1,116	880	1,173
1,134	932	938	1,078	1,180	1,106	1,184	954	824	529
998	996	1,133	765	775	1,105	1,081	1,171	705	1,425
610	916	1,001	895	709	860	1,110	1,149	972	1,002



شکل ۱.۴.۴.

باید توجه داشت که به ازای هر x، $F_n(x)$ یک متغیّر تصادفی است. در واقع

$nF_n(x) =$ تعداد i هایی که $i : X_i \le x$

یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و $F(x)$ است . زیرا هریک از X_iها را بطور مستقل با احتمال $F(x)$ کوچکتر یا مساوی xاست . بنابراین

$$E\left[nF_n(x)\right] = nF(x)$$

یا

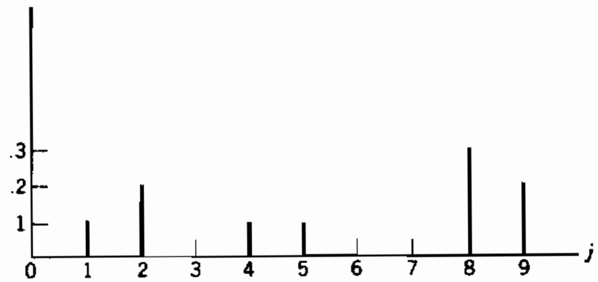
$$E\left[F_n(x)\right] = F(x)$$

هنگامی که F یک توزیع گسسته معلوم است ـ مثلاً جرم را به اعداد صحیح نامنفی نسبت مـی‌دهد ـ غالباً تابع جرم احتمال آن را با $P_n(j)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p_n(j) = \frac{i : X_i = j \text{ تعداد } i \text{ ها}}{n}$$

یعنی $P_n(j)$ نسبت مقادیری است که مساوی j می‌باشند . نمودار $P_n(j),\ i = 1, 2, ..., n$ را **هیستوگرام** می‌نامند .

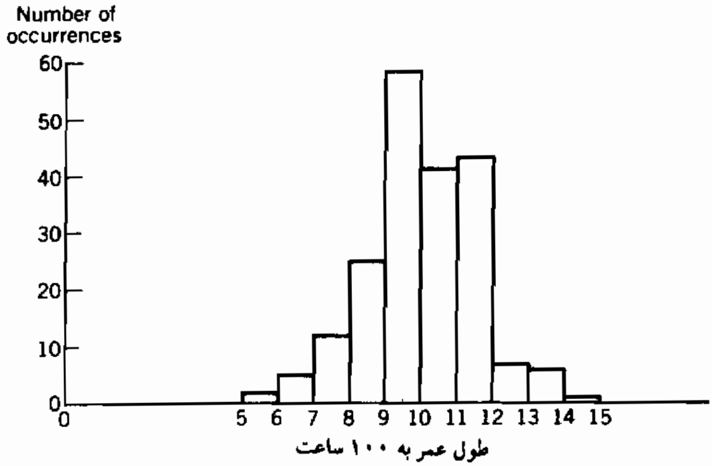
مثال ۴.۴.پ ـ برای داده‌های مثال ۴.۴.الف هیستوگرام به صورت زیر است :



مثال ۴.۴.ت ـ هنگامی که با مجموعه‌ای از داده‌های زیاد سر و کار داریم غالباً بـهتر است داده‌هـا را داخل تعداد ثابتی کلاس طبقه‌بندی کنیم . اگر داده‌های جدول ۱.۴.۴ را در نظر بگیریم و هر مقدار را داخل یکی از کلاسهای 700 − 601 ,600 − 501 و ... طبقه‌بندی کنیم آن‌گاه تعداد داده‌های که در هریک از این دسته‌ها قرار می‌گیرد در جدول ۲.۴.۴ نشان داده شده است . هیستوگرام مربوطه نیز در شکل ۲.۴.۴ نمایش داده شده است .

جدول فراوانی ۲.۴.۴

طبقه	فراوانی
501–600	2
601–700	5
701–800	12
801–900	25
901–1000	58
1001–1100	41
1101–1200	43
1201–1300	7
1301–1400	6
1401–1500	1



شکل ۲.۴.۴

چون $np_n(j)$ یک متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و $p = P(X = j)$ است (چرا ؟) در نتیجه

$$E[p_n(j)] = P\{X = j\}$$

روش دیگری از نمایش نموداری داده‌ها ، مشابه با هسیتوگرام اما با استفادهٔ بیشتری از تمام اطلاعات درمورد داده‌های بین گروهها نمودار ساقه و برگ است که باشال زیر آن را توضیح می‌دهیم .

مثال ۴.۴.ث ـ فرض کنید داده‌های زیر را داریم

92	91	72	56	81
74	67	75	62	77
68	66	74	68	72
81	69	88	80	62
86	70	58	78	59
75	71	57	63	94
66	90	83	81	83
54	87	69	76	81

این مقادیر می‌توانند به صورت نموداری در نمودار ساقه و برگ زیر نمایش داده شوند.

ساقه	برگها
9	0, 1, 2, 4
8	0, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 6, 7, 8
7	0, 1, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8
6	2, 2, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9
5	4, 6, 7, 8, 9

برای مثال سطر اولِ نمودار ساقه و برگ ۴ مقدار از اعداد به ۹۰ یعنی ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۴ را مشخص می‌کند.

همان‌طور که گفتیم یک نمودار ساقه و برگ شبیه نمودار هیستوگرام است به اضافهٔ این‌که مقادیر بین گروهها را نیز نشان می‌دهد.

۵- توزیعهای نمونه‌ای از جامعه نرمال

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌های از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. یعنی X_iها از یکدیگر مستقلند و $i = 1, 2, ..., n, X_i \approx N(\mu, s^2)$. همچنین فرض کنید

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$$

و

$$S^2 = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

به ترتیب نشان‌دهندهٔ میانگین و واریانس نمونه باشند. می‌خواهیم توزیع آنها را به‌دست آوریم.

۱.۵ توزیع میانگین نمونه

چون مجموع متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال دارای توزیع نرمال است (بخش ۵ از فصل ۳ را ببینید) پس $\bar{X}$ نیز دارای توزیع نرمال است با میانگین

$$E[\bar{X}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{E[X_i]}{n} = \mu$$

و واریانس

$$\operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2/n$$

یعنی ، $\bar{X}$، میانگین نمونه ، نرمال است با میانگینی مساوی میانگین جامعه ولی واریانسی با ضریب $1/n$ کمتر از واریانس جامعه . درنتیجه $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد است . یعنی

$$\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

۲.۵- توزیع توام $\bar{X}$ و S^2

در این بخش نه تنها توزیع واریانس نمونه ، S^2، را به‌دست می‌آوریم بلکه یک واقعیت اساسی را در مورد نمونه‌های نرمال کشف می‌کنیم . و آن این است که $\bar{X}$ و S^2 از یکدیگر مستقلند و $(n-1)S^2/\sigma^2$ دارای توزیع کی‌دو با $(n-1)$ درجه آزادی است .

بدین منظور ابتدا به اتحّاد جبری زیر توجه کنید : اگر برای اعداد $x_1, \dots, x_n$ قرار دهیم آن‌گاه برای هر ثابت μ داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2 \qquad (۱.۵.۴)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - \mu)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - \mu)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - \mu)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2
\end{aligned}$$

که در آن تساوی آخر با استفاده از این واقعیت که

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = 0$$

نتیجه می‌شود.

اکنون فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نشان‌دهندهٔ نمونه‌ای تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد از تساوی ۱.۵.۴ به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

یا معادل آن

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\left[\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right]^2 \qquad (۲.۵.۴)$$

چون $(X_i-\mu)/\sigma,\ i=1, ..., n$ متغیّرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند سمت چپ معادلهٔ ۲.۵.۴ یک متغیّر تصادفی کی‌دو با n درجه آزادی است. همچنین در بخش ۱.۵ نشان دادیم که $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)$ نیز یک متغیّر تصادفی استاندارد است. بنابراین توان دوم آن نیز متغیّر تصادفی کی‌دو با ۱ درجه آزادی است. بنابراین در معادلهٔ ۲.۵.۴ یک متغیّر تصادفی کی‌دو با n درجه آزادی مساوی شده است با مجموع دو متغیّر تصادفی که یکی از آنها متغیّر تصادفی کی‌دو با ۱ درجه آزادی است. ثابت می‌شود که مجموع دو متغیّر تصادفی مستقل کی‌دو دارای توزیع کی‌دو با درجه آزادی برابر با مجموع درجات آزادی هر یک از دو متغیّر است. بنابراین به نظر می‌رسد این امکانِ منطقی باشد که دو عبارت سمت راست تساوی ۲.۵.۴ از یکدیگر مستقلند و $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2$ دارای توزیع کی‌دو با $n-1$ درجه آزادی است. چون در واقع می‌توان این نتیجه را اثبات کرد نتیجهٔ اساسی زیر را داریم:

قضیهٔ ۱.۵.۴

اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای از جامعهٔ نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن‌گاه $\bar{X}$ و S^2 متغیّرهای تصادفی مستقلند و $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2/n و $(n-1)S^2/\sigma^2$ دارای توزیع کی‌دو با $n-1$ درجه آزادی است

قضیهٔ ۱.۵.۴ نه تنها توزیع $\bar{X}$ و S^2 از جامد نرمال را مشخص می‌کند که این واقعیت مهم را نیز که آنها از یکدیگر مستقلند ثابت می‌کند. در واقع اثبات این‌که $\bar{X}$ و S^2 از یکدیگر مستقلند یک خاصیت منحصر به فرد از توزیع نرمال است و اهمیت آن در بخشهای بعد معلوم می‌شود.

مثال ۵.۴الف ـ زمانی را که یک فرآیند مرکزی واحد برای تمام کردن نوع معینی کار نیاز دارد دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰ دقیقه و انحراف معیار ۳ دقیقه است. اگر نمونه‌ای ۱۵ تایی از چنین کارهایی مشاهده شود چقدر احتمال دارد که واریانس نمونه از ۱۲ تجاوزکند.

حل : چون حجم نمونه $n = 15$ است و $\sigma^2 = 9$ داریم

$$P\{S^2 > 12\} = P\left\{\frac{14S^2}{9} > \frac{14}{9}\cdot 12\right\}$$

$$= P\{\chi^2_{14} > 18.67\}$$ از برنامهٔ ۳ـ۸ـ۱ـ الف

$$= 1 - .8221$$

$$= .1779 \quad \blacksquare$$

نتیجهٔ زیر از قضیهٔ ۱.۵.۴ به‌دست می‌آید و در بخشهای بعد مفید است . اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم .

نتیجهٔ ۲.۵.۴ : فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای از جامعه نرمال با میانگین μ باشد . اگر $\bar{X}$ نشان‌دهندهٔ میانگین نمونه و S انحراف معیار نمونه باشد آن‌گاه

$$\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$$

یعنی $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)$ دارای توزیع t با $n - 1$ درجه آزادی است .

٦ـ نمونه‌گیری یک مجموعهٔ متناهی

مجموعه‌ای شامل n شیء را در نظر بگیرید که هریک دارای صفتی قابل اندازه‌گیری است ، و فرض کنید v_i نشان‌دهندهٔ این صفت اندازه‌پذیر در فرد iام باشد ، $i = 1, 2, ..., N$. یک وضعیت معمول این است که مجموعهٔ مقادیر $\{v_1, v_2, ..., v_N\}$ مجهول است و می‌خواهیم با بررسی مقادیر نمونه‌ای که بتصادف انتخاب می‌شود در مورد این مجموعه نتایجی به‌دست آوریم .

تعریف : انتخاب یک زیرمجموعه به حجم n از مجموعه‌ای بزرگتر به حجم N را یک نمونهٔ تصادفی نامیم اگر هریک از $\binom{N}{n}$ زیرمجموعه n تایی دارای احتمال مساوی برای انتخاب شدن باشد[1] .

اگر فرض کنیم که انتخاب بطور متوالی صورت می‌گیرد آن‌گاه یک نمونهٔ تصادفی خواهیم داشت اگر در هرانتخاب هریک از اشیاء باقیمانده که هنوز انتخاب نشده‌اند ، شانس مساوی برای انتخاب شدن داشته باشند .

کمیتی که دارای اهمیت می‌باشد میانگین N مقدار یعنی $\bar{v} = \sum_{i=1}^{N} v_i/N$، است . یک روش منطقی برای برآورد $\bar{v}$ این است که نمونه‌ای تصادفی به حجم n شیء انتخاب کنیم و سپس T ،

---

* ـ برنامه ۳ـ۴ می‌تواند برای تولید یک زیرمجموعهٔ تصادفی مورد استفاده قرار گیرد .

مجموع مقادیر این n شیء را تعیین کنیم و T/n را به عنوان برآوردکنندهٔ $\bar{v}$ در نظر بگیریم. برای مثال یک کاربرد مهم از عبارت اخیر این است که قبل از انتخابات، هرفرد در جامعه یا مخالف کاندیدای معینی است یا موافق آن. اگر هنگامی که شخص موافق است، v_i را ۱ وقتی مخالف است صفر بگیریم آن‌گاه $\bar{v} = \sum_{i=1}^{N} v_i/N$ نشان‌دهندهٔ نسبت افرادی در جامعه است که موافق کاندیدا هستند. برای برآورد $\bar{v}$، یک نمونه تصادفی به حجم n از افراد انتخاب کرده و از آنها رأی‌گیری می‌کنیم. نسبت افراد موافق در نمونه، یعنی T/n، اغلب به عنوان برآوردی از $\bar{v}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اکنون می‌خواهیم میانگین و واریانس T/n را محاسبه کنیم. بدین منظور به ازای هر i، $i = 1, 2, ..., n$ متغیّر تصادفی نشانگر I_i را برای نشان دادن این که آیا i امین شیء در نمونه قرار می‌گیرد یا خیر تعریف می‌کنیم. یعنی،

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر شیء } i \text{ام در نمونه تصادفی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون T را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$T = \sum_{i=1}^{N} v_i I_i$$

بنابراین

$$E[T] = \sum_{i=1}^{N} v_i E[I_i]$$

$$\text{Var}(T) = \sum_{i=1}^{N} \text{Var}(v_i I_i) + 2\sum\sum_{i<j} \text{Cov}(v_i I_i, v_j I_j) \tag{۱.۶.۴}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \,\text{Var}(I_i) + 2\sum\sum_{i<j} v_i v_j \,\text{Cov}(I_i, I_j) \tag{۲.۶.۴}$$

چون شیء iام با احتمال n/N در نمونه قرار می‌گیرد نتیجه می‌شود که I_i یک متغیّر تصادفی برنولی است با

$$E[I_i] = \frac{n}{N}$$

بنابراین از تساوی ۱.۶.۴ داریم

$$E[T] = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i$$

و در نتیجه

$$E[T/n] = \sum_{i=1}^{N} \frac{v_i}{N} = \bar{v} \tag{۳.۶.۴}$$

همچنین ، چون واریانس یک متغیّر تصادفی برنولی با میانگین p، مساوی است با $p(1-p)$، نتیجه می‌شود که

$$\text{Var}(I_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \tag{۴.۶.۴}$$

و چون هر دو شیء iام و jام در نمونه باشند

$$I_i I_j = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم .

$$\begin{aligned} E\left[I_i I_j\right] &= P\,(\text{اشیاء } i\text{ام و } j\text{ام در نمونه باشند}) \\ &= P\,(\text{شیء } i\text{ام در نمونه باشد})\,P\,(\text{شیء } j\text{ام در نمونه باشد} \mid \text{شیء } i\text{ام در نمونه است}) \\ &= \frac{n}{N}\,\frac{n-1}{N-1} \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(I_i, I_j\right) &= E\left[I_i I_j\right] - E\left[I_i\right]E\left[I_j\right] \\ &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 \\ &= \frac{-n(N-n)}{N^2(N-1)} \end{aligned} \tag{۵.۶.۴}$$

بنابراین از تساویهای ۲.۶.۴ ، ۴.۶.۴ ، ۵.۶.۴ می‌بینیم که

$$\operatorname{Var}(T) = \frac{n}{N}\left(\frac{N-n}{N}\right)\sum_{i=1}^{N} v_i^2 - \frac{2n(N-n)}{N^2(N-1)}\sum\sum_{i<j} v_i v_j \qquad (۶.۶.۴)$$

این عبارت را می‌توان با استفاده از اتحاد $(v_1 + \cdots + v_N)^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 + 2\sum\sum_{i<j} v_i v_j$ کمی ساده‌تر نوشت . پس از ساده کردن داریم

$$\operatorname{Var}(T/n) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(T) = \frac{N-n}{n(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{v_i^2}{N} - \bar{v}^2\right) \qquad (۷.۶.۴)$$

حالت خاص

الف) اکنون این حالت خاص را که Np تا از v ها مساوی ۱ است و بقیه مساوی صفر در نظر بگیرید . در این حالت T (که یک متغیّر تصادفی فوق هندسی است) دارای میانگین و واریانس زیر است

$$E[T] = n\bar{v} = np \qquad \text{زیرا} \quad \bar{v} = \frac{Np}{N} = p$$

$$\operatorname{Var}(T) = n^2\operatorname{Var}(T/n) = \frac{n(N-n)}{(N-1)}\left(\frac{Np}{N} - p^2\right)$$

زیرا

$$= \frac{n(N-n)}{N-1}p(1-p)$$

که در آن از این واقعیت استفاده کردیم که $\sum_1^N v_i^2 = \sum_1^N v_i = Np$. کمیت T/n مساوی است با نسبت تعداد ۱ ها در نمونه . در این حالت داریم

$$E[T/n] = p$$

$$\operatorname{Var}(T/n) = \frac{(N-n)}{n(N-1)}p(1-p)$$

ب) از دیگر حالتهای خاص مهم هنگامی است که به ازای هر i، $i = 1, \ldots, N$، $v_i = i$. (بخش ۷ از فصل ۹ را ببینید) با استفاده از اتحادهای

$$\sum_{i=1}^{N} i = N(N+1)/2 \qquad \sum_{i=1}^{N} i^2 = N(N+1)(2N+1)/6$$

و تساویهای ۳.۶.۴ و ۷.۶.۴ و پس از مقداری عملیات جبری نتیجه می‌شود که

$$E[T] = n(N+1)/2$$
$$\text{Var}(T) = n(N-n)(N+1)/12$$

مسائل

۱ ـ مجموعه‌ای شامل ۵۰۰ داده جمع‌آوری شده است . هریک از مقادیر این داده‌ها یکی از اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ یا ۵ است و به صورت زیر خلاصه شده‌اند

مقدار	فراوانی
1	84
2	92
3	116
4	110
5	98

مطلوب است تعیین میانگین این نمونه

مقدار	فراوانی
1	f_1
⋮	
i	f_i
⋮	
k	f_k

در حالت کلی اگر داده‌ها به صورت زیر خلاصه شوند میانگین نمونه چقدر است ؟

۲ ـ مسألهٔ را ابتدا برای میانهٔ نمونه و سپس برای نمای نمونه تکرار کنید .

۳ ـ میانه‌ها و نماها برخلاف میانگینها جمع‌پذیر نیستند . برای تحقیق این مطلب فرض کنید X و Y متغیّرهای تصادفی مستقل نمایی و هریک دارای پارامتر $\lambda = 1$ است . نشان دهید که میانهٔ $X + Y$ با مجموع میانه‌ها مساوی نیست و این موضوع را برای نما نیز بررسی کنید .

۴ ـ مطلوب است محاسبه چارکها و نما در توزیع زیر

$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, \qquad 0 < x < \infty$$

۵- مطلوب است تعیین میانه و نما در توزیعی که دار... ...ع چگالی زیر است

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

۶- اقتصاددانی در آمد شهروندادن خود را مطالعه می‌کند. به نظر شماکدامیک از دو کمیت میانه و میانگین درآمد دارای اهمیت بیشتری برای محاسبه‌اند.

۷- فرض کنید $\mathrm{Med}(X)$ نشان‌دهندهٔ میانهٔ توزیع Xاست. نشان دهید که برای اعداد ثابت a و b

$$\mathrm{Med}\,(aX + b) = a\,\mathrm{Med}\,(X) + b$$

۸- فرض کـ... Mo... نشان‌دهندهٔ نمای توزیع X است. با فرض این‌که $\mathrm{Mod}(X)$ منحصربه‌فرد باشد مسألهٔ ۷ را برای $\mathrm{Mod}(X)$ ثابت کنید.

۹- مطلوب است محاسبهٔ میانگین، میانه و نما در توزیعهای زیر

الف) توزیع‌نمایی با پارامتر λ

ب) توزیع یکنواخت روی بازهٔ (a, b)

۱۰- مطالعات نشان داده است که X، فاصله‌ای که توسط یک مسافر (برحسب کیلومتر) در یک مسیر معین اتوبوس به طول ۲ کیلومتر پیموده می‌شود، دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(2 - x)^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

در غیر این‌صورت

مطلوب است

الف) نمودار تابع چگالی

ب) تعیین نمای توزیع

پ) تعین میانه

ت) تعیین میانگین.

۱۱- فرض کنید X یک متغیّر تصادفی نامنفی با میانگین و میانهٔ مساوی ۴ است. (بطور دقیقتر میانگین و میانهٔ توزیع مساوی ۴ است)

الف) میانگین و میانهٔ توزیع $Y = 2X + 5$ چقدر است؟

ب) آیا اطلاعات کافی برای تعیین میانگین و میانهٔ توزیع $Y = X^2$ داریم؟

۱۲- نشان دهید که میانگین، میانه و نمای توزیع نرمال با هم مساوی‌اند.

۱۳- از تساوی $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$ استفاده کرده و ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

۱۴ - مطلوب است محاسبهٔ واریانس نمونهٔ داده‌های زیر ابتدا با استفاده از معادله ۱.۳.۴ و سپس با استفاده از معادله بازگشتی بخش ۱.۳ .

8, 12, 14, 10, 11, 9, 7, 13

۱۵ - تساوی ۵.۳.۴ را تحقیق کنید .

۱۶ - داده‌های زیر نشان‌دهندهٔ طول عمر (برحسب ساعت) نمونه‌ای شامل ۴۰ ترانزیستور است.

112, 121, 126, 108, 141, 104, 136, 134
121, 118, 143, 116, 108, 122, 127, 140
113, 117, 126, 130, 134, 120, 131, 133
118, 125, 151, 147, 137, 140, 132, 119
110, 124, 132, 152, 135, 130, 136, 128

الف) مطلوب است تعیین میانگین ، میانه و نمای نمونه

ب) تابع توزیع تجربی را رسم کنید .

پ) داده‌ها را داخل ۸ کلاس ۱۱۳-۱۰۸ ، ۱۱۹-۱۱۴ ، ۱۲۵-۱۲۰ ، ۱۳۱-۱۲۶ ، ۱۳۷-۱۳۲ ، ۱۴۳-۱۳۸ ، ۱۴۹-۱۴۴ و ۱۵۵-۱۵۰ طبقه‌بندی کرده و سپس هیستوگرام آن را رسم کنید .

۱۷ - در آزمایش درصد چروک‌خوردگی ۵۰ نمونه سفال خشک اندازه‌گیری شده و داده‌های زیر به‌دست آمده است :

18.2	21.2	23.1	18.5	15.6
20.8	19.4	15.4	21.2	13.4
16.4	18.7	18.2	19.6	14.3
16.6	24.0	17.6	17.8	20.2
17.4	23.6	17.5	20.3	16.6
19.3	18.5	19.3	21.2	13.9
20.5	19.0	17.6	22.3	18.4
21.2	20.4	21.4	20.3	20.1
19.6	20.6	14.8	19.7	20.5
18.0	20.8	15.8	23.1	17.0

الف) نمودار ساقه و برگ این داده‌ها را رسم کنید .

ب) مطلوب است محاسبهٔ میانگین ، میانه و نمای داده‌ها .

پ) مطلوب است محاسبهٔ واریانس نمونه .

ت) تابع توزیع تجربی را رسم کنید .

ث) از طبقه ۱۳/۹-۱۳/۵ شروع کرده و داده‌ها را در طبقاتی به طول ۱ درصد طبقه‌بندی کنید و سپس نمودار هسیتوگرام آنها را رسم کنید .

ج) در داده‌های طبقه‌بندی شده اگر در طبقات هر داده دقیقاً روی نقطه میانی طبقه قرار گیرد میانگین و واریانس را محاسبه کرده و نتیجه به‌دست آمده را با نتیجهٔ بالا مقایسه کنید. چرا آنها با هم اختلاف دارند؟

۱۸ - با استفاده از برنامهٔ ۴-۳ مطلوب است محاسبه میانگین و واریانس نمونه برای داده‌های مفروض در مسألهٔ ۱۶.

۱۹ - در مسألهٔ قبل اگر هریک از داده‌ها را ۱۰ واحد اضافه کنیم چه تأثیری روی الف) میانگین نمونه ب) میانهٔ نمونه پ) واریانس نمونه و ت) انحراف معیار نمونه می‌گذارد؟

۲۰ - اسیدیتهٔ خاک در ناحیه‌ای معین هر هفته اندازه‌گیری می‌شود. اندازه‌های تشکیل نمونهٔ تصادفی از جامعه نرمال با میانگین ۵۰ و انحراف معیار ۸ می‌دهند. برای اندازه‌های گرفته شده در ۱۲ هفته متوالی احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) میانگین نمونه از ۵۵ تجاوز کند.

ب) انحراف استاندارد نمونه از ۱۰ تجاوز کند.

پ) با فرض این‌که میانگین جامعه مساوی ۴۸ است قسمت (الف) را دوباره محاسبه کنید.

۲۱ - تولیدکننده‌ای معتقد است قطعات الکتریکی که تولید می‌کند دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ ساعت و انحراف معیار ۲۰ ساعت هستند. نمونه‌ای شامل ۱۰ قطعه امتحان می‌شود

الف) چقدر احتمال دارد که میانگین نمونه کمتر یا مساوی ۸۵ باشد؟

ب) فرض کنید در مورد ادعای تولیدکننده شک دارید. اگر میانگین نمونه مساوی ۸۵ باشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۲ - درجهٔ گرما در دستگاه گرماسنج معینی دارای توزیع نرمال با واریانس σ^2 است. نمونه‌ای تصادفی از این توزیع استخراج و واریانس نمونه S^2 را محاسبه می‌کنیم. چه تعداد مشاهده لازم است تا مطمئن شویم که

الف) $P\{S^2/\sigma^2 \le 1.8\} \ge .95$

ب) $P\left\{.85 \le \dfrac{S^2}{\sigma^2} \le 1.15\right\} \ge .99$

۲۳ - فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. ثابت کنید $\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)/S$ دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

(راهنمایی: از قضیه ۱.۵.۴ و تعریف توزیع t استفاده کنید).

۲۴ - دو نمونهٔ تصادفی مستقل، یکی به اندازه ۱۰ از جامعهٔ نرمال با واریانس ۴ و دیگری به اندازه ۵ از جامعهٔ نرمال با واریانس ۲ را در نظر بگیرید. مطلوب است احتمال این‌که واریانس نمونه

دوم از واریانس نمونه اول بیشتر باشد.

(راهنمایی: از توزیع F استفاده کنید)

۲۵ـ مدیر یک بانک می‌خواهد متوسط میزان پولی را که در حسابهای پس‌انداز این بانک وجود دارد تعیین کنید روشی برای برآورد این کمیت بدون بررسی هریک از حسابها ارائه دهید.

۲۶ـ رئیس یک دانشگاه می‌خواهد متوسط تعداد دانشجویان هرکلاس را در دانشگاه خود تعیین کند. برای برآورد این کمیت از لیست ۱۰۰۰۰ دانشجوی دانشگاه، تعداد ۱۰۰ دانشجو را بتصادف انتخاب کرده و سپس در مورد تعداد دانشجویان کلاسهایشان از آنها سؤال می‌کند. و آن‌گاه از متوسط همه داده‌های به‌دست آمده به عنوان برآورد استفاده می‌کند (برای مثال اگر هردانشجو ۵ کلاس داشته باشد آن‌گاه ۵۰۰ داده وجود خواهد داشت). نظر شما در مورد این روش چیست؟ آیا رئیس دانشگاه واقعاً متوسط اندازه کلاس را برآورد می‌کند؟

۲۷ـ کارگران یک کارخانهٔ صنعتی در نظر دارند یک اتحادیه تشکیل دهند. این موضوع توسط هیأت مدیره بسختی مورد مخالفت قرار می‌گیرد و آنها برای به‌دست آوردن عقیدهٔ کارگران یک ناظر انتخاباتی استخدام می‌کنند تا نسبت افراد موافق با اتحادیه را برآورد کند. شخص ناظر بطور تصادف ۵۰۰ نفر را انتخاب کرده و به آنها تلفن می‌زند. از این ۵۰۰ نفر، ۲۰۰ نفر از صبحت کردن با ناظر خودداری می‌کنند، ۲۰۰ نفر مخالفند و ۱۰۰ نفر با اتحادیه موافقند. سپس گزارش می‌کند که دو سوم کارگران مخالف تشکیل اتحادیه‌اند. نظر شما در مورد این نتیجه‌گیری چیست؟

۲۸ـ تحقیق کنید که معادلهٔ ۷.۶.۴ از معادلهٔ ۶.۶.۴ نتیجه می‌شود.

فصل پنجم

برآورد پارامترها

۱ - مقدمه

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع F_θ باشد که به برداری از پارامترهای مجهول ، θ، بستگی دارد . برای مثال نمونهٔ مذکور ممکن است دارای توزیع پواسن باشد که میانگین آن مجهول است ، ممکن است دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس مجهول باشد . معمولاً در نظریهٔ احتمال فرض می‌شود که تمام پارامترهای توزیع معلومند ، در حالی که در آمار این‌طور نیست و مسألهٔ اصلی این است که با استفاده از داده‌های مشاهده شده نتایجی در مورد پارامتر مجهول به‌دست آوریم .

در بخشهای ۱ و ۲ دو روش متداول برای برآورد پارامترهای مجهول ارائه می‌دهیم که به آنها **روش گشتاورها** و روش **درستنمایی ماکزیمم** گوییم . این گونه برآوردها را **برآورد نقطه‌ای** می‌نامند زیرا کمیتی را به عنوان برآورد به پارامتر θ نسبت می‌دهند . در بخش ۳ مسأله به‌دست آوردن برآوردهای فاصله‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم . در این حالت به جای این که یک مقدار معین را به عنوان برآورد θ تعیین کنیم ، فاصله‌ای از مقادیر که θ را در برداشته باشد را به عنوان برآورد در نظر می‌گیریم . همچنین این سؤال را مطرح می‌کنیم که چقدر می‌توانیم به فاصلهٔ مزبور اطمینان داشته باشیم . سپس این روش را توضیح می‌دهیم با نشان دادن این که وقتی واریانس جامعه نرمال مطرح است چگونه یک برآوررد فاصله‌ای برای میانگین مجهول به‌دست آوریم . و آن‌گاه مسایل متنوعی از برآورد فاصله‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم . بخصوص در بخش ۱.۳ پیداکردن برآورد فاصله‌ای برای میانگین توزیع نرمال را ـ هنگامی که واریانس جامعه مجهول است ـ بررسی می‌کنیم . دربخش ۲.۳ یک فاصلهٔ اطمینان برای تفاضل میانگینها در دوجامعهٔ نرمال هنگامی که واریانسهای آنها معلوم و هنگامی که مجهولند به‌دست می‌آوریم (درحالت اخیر فرض می‌کنیم که واریانسهای مجهول باهم برابرند)

در بخش ۳.۳ به‌دست آوردن فاصلهٔ اطمینان برای واریانس توزیع نرمال را بررسی می‌کنیم . در پایان در بخشهای ۲.۳ و ۵.۳ برآورد فاصله‌ای را برای میانگین متغیّر تصادفی برنولی و میانگین

متغیّر تصادفی‌نمایی به‌دست می‌آوریم .

در بخش ۴ به‌محاسبهٔ برآورد نقطه‌ای برای پارامتر مجهول باز می‌گردیم و نشان می‌دهیم که چگونه با در نظر گرفتن میانگین توان دوم خطا یک برآوردگر را ارزیابی می‌کنیم . اریبی یک برآوردگر مورد بحث قرار می‌گیرد و ارتباط آن را به میانگین توان دوم خطا نشان می‌دهیم .

در بخش ۵ تعیین یک برآورد برای پارامتر مجهول را هنگامی که از قبل اطلاعاتی در دسترس داریم مورد بررسی قرار می‌دهیم . این روش ، **روش بیز** نام دارد و در آن فرض می‌شود که همواره قبل از مشاهدهٔ داده‌ها اطلاعاتی در مورد θ در دسترس است و می‌تواند برحسب توزیع احتمال θ بیان شود . در چنین حالتی نشان می‌دهیم که چگونه برآوردگرهای بیز ، یعنی برآوردگرهایی را که متوسط توان دوم اختلافشان از θ مینیمم است ، محاسبه کنیم .

۱ - برآوردگرهای روش گشتاوری

هر آماره‌ایی را که برای برآورد مقدار یک پارامتر مجهول θ مورد استفاده قرار گیرد ، **برآوردگر** θ می‌نامند . مقدار مشاهده شدهٔ برآوردگرها را **برآورد** می‌گویند . برای مثال همان‌طور که خواهیم دید برآوردگر منطقی میانگین جامعهٔ نرمال براساس نمونهٔ $X_1, ..., X_n$ از این جامعه ، میانگین نمونه $\bar{X} = \sum_i X_i/n$ است . برای مثال اگر یک نمونه به حجم ۳ دارای مقادیر $X_1 = 2$ ، $X_2 = 3$ ، $X_3 = 4$ باشد آن‌گاه برآورد میانگین جامعه که از برآوردگر $\bar{X}$ نتیجه می‌شود برابر ۳ است .

قدیمی‌ترین روش متداول برای تعیین یک برآوردگر برای پارامتر مجهول که توسط کارل پیرسُن در سال ۱۹۸۴ م . معرفی شده است روش گشتاورها است . این روش به صورت زیر است :
فرض کنید $X = (X_1, ..., X_n)$ نمونه‌ایی از توزیع F_θ باشد که در آن θ پارامتر مجهول است و می‌خواهیم آن را برآورد کنیم . همچنین فرض کنید θ را بتوان به صورت تابعی از میانگین توزیع بیان کرد . یعنی ، $\theta = g(E[X])$. در روش گشتاور $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ را به‌عنوان برآورد $E(X)$ در نظر می‌گیریم و سپس θ را توسط $g(\bar{X})$ برآورد می‌کنیم .

در نتیجه در روش گشتاورها برآورد میانگین جامعه همواره میانگین نمونه است . پس اگر نمونه از توزیع پواسن با میانگین مجهول λ باشد ، یا از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ ، در هر دو حالت برآوردگر در روش گشتاورها مساوی با میانگین نمونه است .

اکنون فرض کنید که نوشتن پارامتر مجهول به صورت تابعی از $E[X]$ ممکن نباشد . برای مثال ممکن است نمونه از توزیع نرمال با واریانس مجهول σ^2 باشد . در نتیجه راهی وجود ندارد که σ^2 را به‌صورت تابعی تنها از $E(X)$ نوشت . در این حالت روش گشتاورها به صورت زیر است : گشتاورهای توزیع ، $E[X^k]$ ، $k \geq 1$ ، را در نظر بگیرید و θ را به صورت تابعی از این گشتاورها بنویسید . برای

مثال فرض کنید θ به r گشتاور اوّل بستگی دارد، بنابراین می‌توانیم آن را به صورت زیر بیان کنیم

$$\theta = g(E[X], E[X^2], \ldots, E[X^r])$$

سپس فرض کنید

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}, \qquad k = 1, \ldots, r$$

M_k را k امین گشتاور نمونه می‌نامند و آن را برای برآورد $E[X^k]$ مورد استفاده قرار می‌دهند. دراین‌صورت برآوردگر روش گشتاورها برای θ که آن را با $\hat{\theta}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر است

$$\hat{\theta} = g(M_1, M_2, \ldots, M_r)$$

مثال ۵.۱ الف ـ فرض کنید نمونه‌ایی به حجم n از جامعه نرمال داریم و می‌خواهیم میانگین μ و واریانس σ^2 را برآورد کنیم. چون

$$\mu = E[X]$$

و

$$\sigma^2 = E[X^2] - E^2[X]$$

برآوردگر روش گشتاورها $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}^2$ هستند که برابرند با

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)^2$$

یا

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}$$

که درآن تساوی آخر با استفاده ازاتحادمفیدزیر (که دربخش ۳ ازفصل ۴ اثبات‌شده)به‌دست آمده است

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2 \quad \blacksquare$$

تبصره

نباید انتظار داشته باشیم که یک برآوردگر همواره برآوردی به‌دست دهد که مساوی یا حتی نزدیک

به پارامتر مجهول باشد. در حالت کلی آن چیزی که باید از یک برآوردگر انتظار داشت این است که برآوردهایی ارائه دهد که «بطور متوسط» به پارامتر مجهول نزدیک باشند. بحث در مورد این‌که چگونه می‌توان یک برآوردکننده را ارزیابی کرد در فصل چهارم آمده است.

۲- برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم

فرض کنید که متغیّرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ که دارای توزیع توأمی هستند که تنها به یک پارامتر مجهول بستگی دارد مشاهده شوند. مسألهٔ مورد نظر این است که از مقادیر مشاهدات استفاده کرده، θ را برآورد کنیم. برای مثال X_i ها ممکن است متغیّرهای تصادفی مستقل‌نمایی با پارامتر یکسان و مجهول θ باشند. در این حالت تابع چگالی توأم این متغیّرها به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n)
&= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \\
&= \frac{1}{\theta} e^{-x_1/\theta} \frac{1}{\theta} e^{-x_2/\theta} \cdots \frac{1}{\theta} e^{-x_n/\theta} \qquad 0 < x_i < \infty,\ i = 1, \ldots, n \\
&= \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{ -\sum_1^n x_i/\theta \right\} \qquad 0 < x_i < \infty,\ i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

هدف برآورد θ با استفاده از مقادیر مشاهده شدهٔ $X_1, X_2, ..., X_n$ است.

نوع خاصی از برآوردگرها که آنها را با نام **برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم** می‌شناسیم بطور وسیعی در آمار استفاده می‌شوند. این برآوردگرها با استدلال زیر به‌دست می‌آیند. فرض کنید $f(x_1, ..., x_n | \theta)$ نشان‌دهندهٔ تابع جرم احتمال توأم متغیّرهای تصادفی $X_1, ..., X_n$ باشند هنگامی که گسسته‌اند و نشان‌دهندهٔ تابع چگالی احتمال توأم آنها باشد. وقتی که توأماً متغیّرهای تصادفی پیوسته‌اند. چون فرض می‌شود که θ مجهول است f را به‌صورت تابعی از θ نیز می‌نویسیم. اکنون $f(x_1, ..., x_n | \theta)$ نشان‌دهنده این درستنمایی است که وقتی θ مقدار واقعی پارامتر است مقادیر $X_1, X_2, ..., X_n$ مشاهده شوند؛ به نظر می‌رسد که برآورد منطقی برای θ مقداری باشد که بیشترین درستنمایی را برای مقادیر مشاهده شده بدهد.

به عبارت دیگر برآورد درستنمایی ماکزیمم $\hat{\theta}$، آن مقداری از θ است که وقتی $x_1, ..., x_n$ مشاهده می‌شوند $f(x_1, ..., x_n | \theta)$ را ماکزیمم کند. تابع $f(x_1, ..., x_n | \theta)$ را اغلب **تابع درستنمایی** می‌نامند.

در تعیین مقداری از θ که ماکزیمم‌کننده باشد اغلب استفاده از این واقعیت که $f(x_1, ..., x_n | \theta)$ و $\log[f(x_1, ..., x_n | \theta)]$ به ازای θ ی یکسان ماکزیمم می‌شوند مفید خواهد بود. بنابراین می‌توان θ را طوری تعیین کرد که $\log[x_1, ..., x_n | \theta]$ را ماکزیمم کند.

مثال ۵.۲.الف ـ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم پارامتر برنولی : فرض کنید n آزمایش بطور مستقل هریک با احتمال پیروزی pانجام شوند . برآوردگر درستنمایی ماکزیمم پارامتر pرا به‌دست آورید .

حل : داده‌ها عبارتند از $X_1, \ldots, X_n$که در آن

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{آزمایش } i \text{ام پیروزی باشد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

اکنون

$$P\{X_i = 1\} = p = 1 - P\{X_i = 0\}$$

که می‌توان آن را بطور خلاصه به صورت زیر نوشت

$$P\{X_i = x\} = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

بنابراین با این فرض که آزمایشها مستقلند تابع درستنمایی (یعنی تابع جرم احتمال توأم) داده‌ها به‌شکل زیر است

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n | p) &= P\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | p\} \\ &= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\ &= p^{\Sigma_1^n x_i}(1-p)^{n-\Sigma_1^n x_i} \qquad x_i = 0, 1 \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

برای تعیین مقداری‌از pکه تابع درستنمایی راماکزیمم‌کندابتدا ازتابع‌درستنمایی‌ماکزیمم‌لگاریتم می‌گیریم

$$\log f(x_1, \ldots, x_n | p) = \sum_1^n x_i \log p + \left(n - \sum_1^n x_i\right) \log(1-p)$$

با مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dp} \log f(x_1, \ldots, x_n | p) = \frac{\Sigma_1^n x_i}{p} - \frac{(n - \Sigma_1^n x_i)}{1-p}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق به این نتیجه می‌رسیم که برآورد درستنمایی ماکزیمم ، $\hat{p}$در رابطهٔ

$$\frac{\Sigma_1^n x_i}{\hat{p}} = \frac{n - \Sigma_1^n x_i}{1 - \hat{p}}$$

یا

$$\hat{p} = \frac{\Sigma_{i=1}^n x_i}{n}$$

صدق می‌کند . بنابراین برآوردگر درستنمایی ماکزیمم میانگین مجهول توزیع برنولی به صورت زیر خواهد بود

$$d(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

بطور خلاصه برآوردگر درستنمایی ماکزیمم p با برآوردگر روش گشتاورها یکسان و مساوی نسبت آزمایشهایی است که نتیجه آنها موفقیت است . به عنوان مثال فرض کنید هریک از RAM (حافظه‌ای بطور تصادفی قابل دسترس) چیپهای تولید شده توسط تولیدکننده‌ای معین بطور مستقل با احتمال p از نظر کیفیت پذیرفته می‌شوند . اگر از میان نمونه‌ای ۱۰۰۰ تایی ، ۹۲۱ عدد پذیرفته شوند نتیجه می‌شود که برآورد درستنمایی ماکزیمم p، ۰/۹۲۱ است . ■

مثال ۲.۵ب ـ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم پارامتر پواسن : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل پواسن و هریک دارای میانگین λ را به‌دست آورید .

حل : تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$f(x_1, \ldots, x_n|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!}$$

$$= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_1^n x_i}}{x_1! \cdots x_n!}$$

بنابراین

$$\log f(x_1, \ldots, x_n|\lambda) = -n\lambda + \sum_1^n x_i \log \lambda - \log c$$

که در آن $c = \prod_{i=1}^n x_i!$ به λ بستگی ندارد .

$$\frac{d}{d\lambda} \log f(x_1, \ldots, x_n|\lambda) = -n + \frac{\sum_1^n x_i}{\lambda}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق برآورد درستنمایی ماکزیمم λ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم .

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

و بنابراین برآوردگر درستنمایی ماکزیمم برابر است با

$$d(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

برای مثال فرض کنید تعداد افرادی که در روز وارد یک فروشگاه می‌شوند یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین مجهول λ است که باید برآورد شود. اگر بعد از ۲۰ روز مجموعاً ۸۵۷ نفر به این فروشگاه مراجعه کرده باشند آن‌گاه برآورد درستنمایی ماکزیمم λ برابر است با $857/20 = 42.85$ ؛ یعنی برآورد می‌کنیم که بطور متوسط 42.85 مشتری در یک روز مفروض وارد فروشگاه می‌شوند. ■

مثال ۲.۵پ ـ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم جامعهٔ نرمال : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال و هریک دارای میانگین مجهول μ و انحراف معیار σ باشند. تابع چگالی احتمال توأم آنها برابر است با

$$f(x_1, \ldots, x_n|\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sigma^n} \exp\left[\frac{-\Sigma_1^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر خواهد بود

$$\log f(x_1, \ldots, x_n|\mu, \sigma) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - n\log\sigma - \frac{\Sigma_1^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

برای به‌دست آوردن مقداری از μ و σ که عبارت اخیر را ماکزیمم کنند برحسب μ و σ از این عبارت مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x_1, \ldots, x_n|\mu, \sigma) = \frac{\Sigma_{i=1}^n (x_i-\mu)}{\sigma^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log f(x_1, \ldots, x_n|\mu, \sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\Sigma_1^n (x_i-\mu)^2}{\sigma^3}$$

با مساوی صفر قرار دادن این تساویها

$$\hat{\mu} = \frac{\Sigma_{i=1}^n x_i}{n}$$

و

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{\Sigma_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}{n}\right)^{1/2}$$

بنابراین برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم μ و σ به ترتیب برابرند با

$$\bar{X} \quad \text{و} \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}\right)^{1/2} \tag{۱.۲.۵}$$

باید توجه داشت که برآوردگر درستنمایی ماکزیمم انحراف معیار σ با انحراف معیار نمونه

$$S=\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/(n-1)\right]^{1/2}$$

این تفاوت را دارد که مخرج کسر تساوی (۱.۲.۵) $\sqrt{n}$ است امّا در انحراف معیار نمونه مخرج کسر $\sqrt{n-1}$ است. با این وجود برای nهای با اندازهٔ معقول هر دو برآوردگر σ تقریباً مساوی‌اند. ■

در تمام مثالهای قبل برآوردگر درستنمایی ماکزیمم میانگین جامعه برابر بود با میانگین نمونه. برای نشان دادن این که همواره این‌طور نیست مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۲.۵ت ـ برآورد میانگین توزیع یکنواخت: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ تشکیل نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت روی $(0, \theta)$ بدهند که در آن θ مجهول است. بنابراین چگالی توأم آنها برابر است با

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0<x_i<\theta, \quad i=1,\ldots,n\\ 0 & \text{در غیراین‌صورت}\end{cases}$$

این چگالی با انتخاب کمترین مقدار θ ماکزیمم می‌شود. چون θ حداقل از تمام مقادیر مشاهده شده بزرگتر است نتیجه می‌شود که کوچکترین مقدار θ مساوی است با $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. بنابراین برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ برابر است با

$$\hat{\theta}=\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

بسادگی از عبارت اخیر نتیجه می‌شود که برآوردگر درستنمایی ماکزیمم $\theta/2$، میانگین توزیع، برابر با $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)/2$ است.

ازطرف دیگر چون $E[X]=\theta/2$ یا $\theta=2E[X]$ برآوردگر روش گشتاورها برابر است با

$$d_2=\frac{2\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

پس در این توزیع برآوردگر روش گشتاورها با برآوردگر درستنمایی ماکزیمم یکسان نیست. چگونه می‌توان مشخص کرد که کدام‌یک از برآوردگرها بهترند؟ یک راه برای این کار روش تجربی از طریق مطالعهٔ شبیه‌سازی است. یعنی، فرض کنید مقداری از θ را انتخاب کرده و سپس متغیّرهایی

تصادفی از توزیع یکنواخت $(0, \theta)$ شبیه‌سازی کنیم . آن‌گاه می‌توانیم دو مقدار برآورد شده (یعنی ماکزیمم نمونه و دو برابر میانگین نمونه) را برای دیدن این‌که کدام‌یک بهترند با مقدار واقعی θ مقایسه کنیم . سپس می‌توانیم این روش را (با استفاده از متغیّرهای تصادفی مختلف) تکرار کنیم و ببینیم آیا می‌توانیم یک الگوی کلی برای برتری یکی از برآوردگرهای به‌دست آوریم . اکنون ببینیم چگونه چنین روشی در حالات مورد بررسی به‌کار می‌رود .

برای شروع خاطرنشان می‌کنیم که اگر U متغیّر تصادفی یکنواخت روی $(0, 1)$ باشد (یعنی U یک عدد تصادفی باشد) آن‌گاه θU روی $(0, \theta)$ یکنواخت است . بنابراین می‌توانیم مقادیر حجم نمونه n و θ را انتخاب کنیم و آن‌گاه با کامپیوتر اعداد تصادفی $U_1, U_2, \ldots, U_n$ را تولید کرده و قرار دهیم $X_i = \theta U_i$، $i = 1, \ldots, n$ سپس دو برآوردگر

$$d_1 = \max(X_1, \ldots, X_n) = \theta \max(U_1, \ldots, U_n)$$

و

$$d_2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\theta\, 2\sum_{i=1}^{n} U_i}{n}$$

را با مقدار واقعی θ مقایسه کنیم . در واقع در تمام عبارات قبل می‌توان از θ فاکتور گرفت و مقایسهٔ را با $\theta = 1$ انجام داد . یعنی این روش بدین صورت است که n را انتخاب کرده و اعداد تصادفی $U_1, \ldots, U_n$ را تولید می‌کنیم و آن‌گاه میزان دقت $\max_i U_i$ و $2\sum_{i=1}^{n} U_i/n$ را در برآورد ۱ با هم مقایسه کنیم و این روش را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا بتوان نتیجه گرفت که کدام‌یک از دو برآوردگر بهتر عمل می‌کنند .

برای انجام روش مذکور برنامهٔ بیسیک زیر را برای تولید ۱۲ نمونه ۱۵ تایی از متغیّرهای تصادفی یکنواخت $(0, 1)$ نوشته و سپس دو برآوردگر را برای هر نمونه محاسبه کرده‌ایم . آن‌گاه مقدار مطلق خطا تعیین شده است .

```
10 RANDOMIZE
20 FOR J=1 TO 12
30 M=0
40 T=0
50 FOR I=1 TO 15
60 U=RND
70 IF U>M THEN M=U
80 T=T+U
90 NEXT
100 PRINT "1-MAX = "1-M, "ABS(2*XBAR-1) = "ABS(2*T/15-1)
110 NEXT
120 END
Ok
RUN
Random number seed (-32768 to 32767)? 1324
1-MAX =  .1957145          ABS(2*XBAR-1) =  .1538227
1-MAX =  3.121013E-02      ABS(2*XBAR-1) =  1.537955E-02
1-MAX =  5.913019E-03      ABS(2*XBAR-1) =  .3164175
1-MAX =  .2225734          ABS(2*XBAR-1) =  .2307838
```

```
1-MAX =  .1352978          ABS(2*XBAR-1) =  2.284479E-02
1-MAX =  1.971906E-02      ABS(2*XBAR-1) =  5.976451E-02
1-MAX =  .0321312          ABS(2*XBAR-1) =  .1067939
1-MAX =  1.243359E-02      ABS(2*XBAR-1) =  .1624677
1-MAX =  6.085456E-03      ABS(2*XBAR-1) =  .2474407
1-MAX =  7.542491E-02      ABS(2*XBAR-1) =  5.232442E-02
1-MAX =  3.900433E-02      ABS(2*XBAR-1) =  .0588156
1-MAX =  .0743739          ABS(2*XBAR-1) =  .1999309
Ok
```

همان‌طور که داده‌ها نشان می‌دهند در برآورد θ در جامعهٔ یکنواخت $(0, \theta)$ برای نمونه‌های ۱۵ تایی، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم مطمئناً بهتر از برآورد روش گشتاورها است که با استفاده از دلایل تئوری در بخش ۴ نیز نشان می‌دهیم که مهم نیست حجم نمونه چقدر باشد. ■

۳- برآوردهای فاصله‌ایی

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای از جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد. همان‌طور که نشان دادیم $\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم μ است. با این وجود انتظار نداریم که میانگین نمونه $\bar{X}$، دقیقاً مساوی μ باشد، بلکه انتظار داریم نزدیک به آن باشد. از این رو به‌جای برآورد نقطه‌ایی گاهی اوقات مشخص کردن فاصله‌ایی که با درجهٔ معینی از اطمینان μ را در برگیرد ارزش بیشتری دارد. برای به‌دست آوردن برآوردگر فاصله‌ایی از توزیع احتمال برآوردگر نقطه‌ایی استفاده می‌کنیم. اکنون ببینیم این کار چگونه برای توزیع نرمال انجام می‌شود.

باتوجه به‌مطالب قبل چون $\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)/\sigma$ دارای توزیع نرمال استاندارد است نتیجه می‌شود که

$$P\left\{-1.96 < \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < 1.96\right\} = .95$$

یا معادل آن

$$P\left\{\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = .95$$

یعنی ۹۵ درصد از دفعات μ در فاصلهٔ $1/96\sigma/\sqrt{n}$ واحد از میانگین نمونه قرار می‌گیرد. اکنون اگر میانگین نمونه را مشاهده کنیم و نتیجه بگیریم که $\bar{X} = \bar{x}$ آن‌گاه با اطمینان ۹۵ درصد گوییم

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (۵.۳.۱)$$

یعنی با «اطمینان ۹۵ درصد» ادعا می‌کنیم که میانگین واقعی در فاصله $1.96\sigma/\sqrt{n}$ از میانگین

مشاهده شده نمونه قرار می‌گیرد. فاصلهٔ $(\bar{x} - 1.96\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n})$ را یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای μ گوییم.

فاصلهٔ مفروض در ۱.۳.۵ را یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه می‌نامیم. گاهی اوقات علاقه‌مندیم مقداری را تعیین کنیم که بتوانیم مثلاً با ۹۵ درصد اطمینان ادعا کنیم که μ حداقل به بزرگی آن مقدار است. برای انجام این کار با توجه به این که برای یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد Z،

$$P\{Z < 1.64\} = .95$$

نتیجه می‌شود که

$$P\left\{\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma} < 1.64\right\} = .95$$

یا

$$P\left\{\bar{X} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu\right\} = .95$$

و بنابراین یک بازهٔ اطمینان یک‌طرفه ۹۵ درصد برای μ برابر است با

$$\left(\bar{x} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

که در آن $\bar{x}$ مقدار مشاهده شدهٔ میانگین نمونه است. همچنین می‌توانیم یک بازه اطمینان یک‌طرفه به‌دست آوریم که مشخص کند μ کمتر از یک مقدار معین است. (مسألهٔ ۸ را ببینید)

می‌توان بازه‌های اطمینان را برای هر اندازه مشخص از اطمینان به‌دست آورد. بدین منظور فرض کنید z_α به قسمی است که

$$P\{Z > z_\alpha\} = \alpha \qquad 0 < \alpha < 1$$

که در آن Z نرمال استاندارد است. بنابراین برای هر اندازهٔ اطمینان مشخص $1 - \alpha$ داریم (شکل ۱.۳.۵ را ببینید)

$$P\{-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

در نتیجه

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

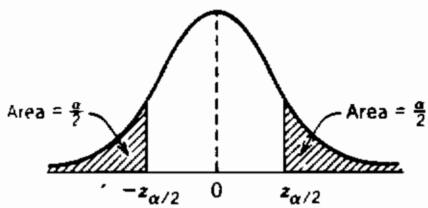
یا

$$P\left\{ \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha$$

بنابراین یک بازهٔ اطمینان دوطرفه $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μ برابر است با

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

که در آن $\bar{x}$ میانگین مشاهده شدهٔ نمونه است . بطور مشابه می‌توانیم فاصله‌های اطمینان یک‌طرفه برای μ را در هر اندازه مطلوب از اطمینان به‌دست آوریم .



شکل ۱.۳.۵

مثال ۳.۵.الف ـ فرض کنید وقتی پیامی با مقدار μ از مکان A فرستاده می‌شود مقداری که به‌مکان B می‌رسد دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس ۴ است . یعنی اگر μ فرستاده شود آن‌گاه مقدار دریافت $\mu + N$ است که N نشان‌دهندهٔ پارازیت ودارای توزیع‌نرمال بامیانگین ۰ و واریانس ۴ است . برای کاهش خطا فرض کنید همان مقدار ۹ مرتبه فرستاده می‌شود . اگر مقادیر دریافت شده ۱۰/۵ و ۶/۵ و ۱۵ و ۱۲ و ۸/۵ و ۵ باشند ، یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای μ بسازید .

چون $\bar{x} = \frac{81}{9} = 9$ در نتیجه با این فرض که مقادیر دریافت شده مستقلند یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای μ برابر است با

$$\left(9 - 1.96\frac{\sigma}{3}, 9 + 1.96\frac{\sigma}{3}\right) = (7.69, 10.31)$$

بنابراین ۹۵ درصد اطمینان داریم که مقدار واقعی پیام بین ۷/۶۹ و ۱۰/۳۱ قرار می‌گیرد .

اگر بخواهیم یک بازهٔ اطمینان یک‌طرفه داشته باشیم که یک کران پایین برای μ ارائه دهد آن‌گاه از این واقعیت استفاده می‌کنیم که

$$P\left\{ \frac{3(\overline{X} - \mu)}{2} < z_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

یا

$$P\left\{\mu > \overline{X} - \tfrac{2}{3} z_\alpha\right\} = 1 - \alpha$$

برای مثال با «۹۵ درصد اطمینان»

$$\mu \in \left(\bar{x} - \tfrac{2}{3}(1.64), \infty\right)$$

یا با «۹۵ درصد اطمینان»

$$\mu \in (7.91, \infty)$$

گاهی اوقات علاقه‌مندیم یک فاصلهٔ اطمینان یک‌طرفه با اندازهٔ اطمینان معین، مثلاً $1 - \alpha$، داشته باشیم و مسألهٔ عبارت از انتخاب حجم نمونه n باشد بطوری که فاصله دارای طول معین باشد. برای مثال فرض کنید می‌خواهیم یک فاصله اطمینان با طول $.1$ داشته باشیم که بتوانیم ادعا کنیم با ۹۹ درصد اطمینـان μ را شامل می‌شود، n باید چه مقدار باشد؟ برای حل این مسأله توجه کنید که $z_{.005} = 2.58$ نتیجه می‌دهد که فاصلهٔ اطمینان ۹۹ درصد برای μ از نمونه‌ایی به حجم n به صورت زیر است

$$\left(\bar{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

بنابراین طول این فاصله برابر است با $5.16\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. پس برای این که طول فاصله مساوی با $.1$ باشد باید داشته باشیم

$$5.16\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = .1$$

یا

$$n = (51.6\sigma)^2$$

تبصره

در تفسیر یک فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد ممکن است اشتباه شود. باید توجه داشت که ادعا نمی‌کنیم که μ با احتمال ۰/۹۷ در فاصله $(\bar{x} - 1.96\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + 1.96\sigma/\sqrt{n})$ قرار می‌گیرد. زیرا متغیّر تصادفی در این فاصله وجود ندارد و بنابراین هیچ چیزی تصادفی نیست. چیزی که ادعا می‌کنیم این است که روش استفاده شده برای به‌دست آوردن این فاصله چنان است که نتیجهٔ ۹۵ درصد دفعاتی که به‌کار برده می‌شود، فاصلهٔ اطمینانی است که μ را در بردارد. به‌عبارت دیگر قبل از این‌که داده‌ها

مشاهده شوند می‌توانیم ادعا کنیم که با احتمال ۰/۹۵ فاصله‌ایی که به‌دست می‌آید شامل μ است در حالی که بعد از این که داده‌ها به‌دست آمدند می‌توانیم تنها ادعا کنیم که فاصله به‌دست آمده در واقع «با اطمینان ۹۵ درصد» شامل μ است .

مثال ۳.۵.ب ـ فرض کنید می‌خواهیم متوسط زمان سرویس CPU (واحد فرآیند مرکزی) کامپیوتر را با امکانات مفروض برآورد کنیم به قسمی که با ۹۵ درصد اطمینان بتوان گفت مقدار برآورد شده در فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ ثانیه از مقدار واقعی قرار دارد . اگر از تجربیات گذشته بدانیم که زمانهای سرویس CPU دارای توزیع نرمال با واریانس $\sigma^2 = 2.25$ (مجذور ثانیه) است حجم نمونه باید چقدر باشد ؟

حل : یک فاصله ۹۵ درصد برای میانگین مجهول μ برمبنای نمونه‌ایی به حجم n عبارت است از

$$\mu \in \left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

چون طول این بازه برابر است با $3.92\sigma/\sqrt{n} = 3.92\sqrt{2.25/n}$. باید n به قسمی اختیار شود که

$$3.92\sqrt{\frac{2.25}{n}} = .5$$

یا

$$n = 2.25 \times (7.84)^2 = 138.298$$

بنابراین حجم نمونه‌ایی برابر با ۱۳۹ مورد نیاز است .

۳.۱ فاصلهٔ اطمینان برای میانگین جامعهٔ نرمال هنگامی که واریانس مجهول است

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد و می‌خواهیم یک فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μ بسازیم . چون σ مجهول است ، برای به‌دست آوردن این فاصله نمی‌توانیم از این واقعیت که $[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)]/\sigma$ دارای توزیع نرمال استاندارد است استفاده کنیم . مع‌هذا با توجه به این که $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ واریانس نمونه است از نتیجهٔ ۲.۵.۴ بخش ۴ می‌دانیم که $[\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)]/S$ دارای توزیع t با $n - 1$ درجه آزادی است ؛ بنابراین برای هر $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$

$$P\left\{ t_{1-\alpha/2, n-1} < \sqrt{n}\,\frac{(\bar{X} - \mu)}{S} < t_{\alpha/2, n-1} \right\} = 1 - \alpha$$

یا با استفاده از این که $t_{1-\alpha/2, n-1} = -t_{\alpha/2, n-1}$

$$P\left\{ \bar{X} - t_{\alpha/2,\,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2,\,n-1}\,\frac{S}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha$$

درنتیجه اگر مشاهده‌شود که $\bar{X} = \bar{x}$ و $S = s$ آن‌گاه می‌توان با «اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد» گفت

$$\mu \in \left(\bar{x} - t_{\alpha/2,\,n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{x} + t_{\alpha/2,\,n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

مثال ۳.۵.پ ـ دوباره مثال ۳.۵.الف را در نظر بگیرید، امّا اکنون فرض کنید که وقتی مقدار μ از مکان A فرستاده می‌شود آن‌گاه مقداری که به مکان B می‌رسد نرمال با میانگین μ و واریانس مجهول σ^2 است. اگر ۹ مقدار متوالی با μ یکسان مانند مثال ۳.۵.الف، 10.5 ,6.5 ,7.5 ,9 ,7 ,15 ,12 ,8.5 ,5 باشند یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای μ به‌دست آورید.

حل: یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $\bar{x} = 9$ و $s^2 = \dfrac{\sum x_i^2 - 9(\bar{x})^2}{8} = 9.5$ یا $s = 3.082$
بنابراین چون (از برنامه ۳ـ۸ـ۲ـ ب و یا جدول الف ۳ـ۸ـ۲) $t_{.025,8} = 2.306$ یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای μ برابر است با

$$\left(9 - 2.306\,\frac{(3.082)}{3},\ 9 + 2.306\,\frac{(3.082)}{3}\right) = (6.63, 11.37)$$

که بزرگتر از فاصله به‌دست آمده در مثال ۳.۵.الف است. دلیل این که چرا این فاصله بزرگتر از فاصله‌ایی است که در مثال ۳.۵.الف به‌دست آمد دو چیز است: اوّل این که یک واریانس برآورده شدهٔ بزرگتر از مثال ۳.۵.الف داریم، یعنی در مثال ۳.۵.الف فرض کردیم که σ^2 معلوم و مساوی ۴ است، در حالی که در این مثال فرض کردیم σ^2 مجهول است و نتیجهٔ برآورد مساوی ۹/۵ شد و نتیجهٔ این فاصله بزرگتر شده است حتی اگر مقدار برآورد σ^2، مساوی ۴ می‌شد فاصلهٔ اطمینان فوق از فاصله ۳.۵.الف بزرگتر می‌شد، زیرا با داشتن برآورد واریانس باید از توزیع t استفاده کرد که دارای واریانس بزرگتر و در نتیجه پراکندگی بیشتر از توزیع نرمال استاندارد است (و این هنگامی به‌کار می‌رود که σ^2 معلوم است). برای مثال اگر $\bar{x} = 9$ و $s^2 = 4$ آن‌گاه فاصلهٔ اطمینان برابر خواهد شد با

$$\left(9 - 2.306 \cdot \tfrac{2}{3},\ 9 + 2.306 \cdot \tfrac{2}{3}\right) = (7.46, 10.54)$$

که بزرگتر از فاصله‌ایی است که در مثال ۳.۵.الف به‌دست آمد.

تبصره‌ها

الف) باید توجه داشت که وقتی σ معلوم است فاصلهٔ اطمینان برای میانگین μ براساس این

واقعیت که $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$ نرمال استاندارد است به‌دست می‌آید . وقتی σ مجهول است ابتدا آن را توسط S برآورد کرده و سپس از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$ دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است .

ب) باید توجه داشت که طول فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μ هنگامی که واریانس مجهول است همیشه بزرگتر نیست . وقتی σ معلوم است طول بازه برابر با $2z_{\alpha}\,\sigma/\sqrt{n}$ است ، در حالی که وقتی σ مجهول است برابر با $2t_{\alpha,\nu-1}S/\sqrt{n}$ می‌باشد . و مطمئناً ممکن است انحراف استاندارد S بتواند خیلی کوچکتر از σ باشد . مع‌هذا می‌توان نشان داد که وقتی σ مجهول است متوسط طول فاصله بیشتر می‌باشد . یعنی می‌توان نشان داد که

$$t_{\alpha,n-1}E[S] \geq z_{\alpha}\sigma$$

در واقع $E(S)$ در بخش ۲ فصل ۱۱ محاسبه شده و برای مثال نشان داده شده است که

$$E[S] = \begin{cases} .94\sigma & n=5 \\ .97\sigma & n=9 \end{cases}$$

چون $z_{.025} = 1.96$ ، $t_{.025,4} = 2.78$ و $t_{.025,8} = 2.31$

وقتی σ معلوم است طول فاصلهٔ اطمینان درنمونه ۵ تایی مساوی‌است با $2 \times 1.96\sigma/\sqrt{5} = 1$.

درحالی‌که‌وقتی σ مجهول است متوسط طول‌بازه‌مساوی‌است‌با $2 \times 2.78 \times .94\sigma/\sqrt{5} = 2.34\sigma$ که به اندازهٔ ۳۳/۷ درصد بزرگتر است . اگر حجم نمونه ۹ باشد آن‌گاه دو مقداری که مقایسه می‌شوند 1.31σ و 1.94σ هستند که دومی ۱۳/۷ درصد بیشتر است . ■

یک فاصلهٔ اطمینان یک‌طرفه راست را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد

$$P\left\{\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}-\mu)}{S} < t_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

یا

$$P\left\{\bar{X}-\mu < \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

یا

$$P\left\{\mu > \bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha,n-1}\right\} = 1-\alpha$$

بنابراین اگر مشاهده شود که $\bar{X}=\bar{x}$ و $S=s$ آن‌گاه می‌توانیم «با اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد» ادعا کنیم که

$$\mu \in \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha, n-1}, \infty\right)$$

بطور مشابه یک فاصلهٔ اطمینان چپ $(1 - \sigma)$ ۱۰۰ درصد برابر است با

$$\mu \in \left(-\infty, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha, n-1}\right)$$

برنامهٔ ۵ـ۳ـ۱ در حالتی که واریانس مجهول است فاصله‌های اطمینان یک‌طرفه و دوطرفه را برای میانگین توزیع نرمال محاسبه می‌کند. این برنامه از برنامهٔ ۳ـ۸ـ۲ـ ب به‌عنوان یک زیربرنامه برای محاسبه مقدار صدک لازم آماره t استفاده می‌کند.

مثال ۵.۳.ت ـ مطلوب است تعیین یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای متوسط ضربان نبضِ اعضای یک باشگاه اگر ۱۵ انتخاب تصادفی از اعضای باشگاه دارای داده‌های زیر باشد

54, 63, 58, 72, 49, 92, 70, 73, 69, 104, 48, 66, 80, 64, 77.

همچنین یک فاصلهٔ اطمینان چپ ۹۵ درصد برای این میانگین به‌دست آورید.

حل: برنامه ۵ـ۳ـ۱ را اجرا می‌کنیم.

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES A 100(1-a)% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN OF
A NORMAL POPULATION WHEN THE VARIANCE IS UNKNOWN
ENTER THE SAMPLE SIZE
? 15
ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME
? 54
? 63
? 58
? 72
? 49
? 92
? 70
? 73
? 69
? 104
? 48
? 66
? 80
? 64
? 77
ENTER THE VALUE OF a
? .05
IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0
IF NO
? 1
THE 95 % CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN IS
(60.86499 , 77.66835 )
```

```
IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1.
IF NO ENTER 0.
? 1
ENTER THE VALUE OF a
? .05
IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0
IF NO
? 0
IS THE ONE-SIDED CONFIDENCE INTERVAL TO BE UPPER OR LOWER? ENTER 1
FOR UPPER AND 0 FOR LOWER
? 0
THE 95
% LOWER CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN IS                    (-INFINITY,
 76.16618 )
IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1.
IF NO ENTER 0.
? 0
Ok
```

۳-۲ برآورد تفاضل میانگینها در دو جامعهٔ نرمال

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ایی به حجم n از جامعه‌ایی نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ^2_1 باشد و $Y_1, ..., Y_m$ نمونه‌ایی به حجم m از جامعه نرمال دیگر با میانگین μ_2 و واریانس σ^2_2 باشد و فرض کنید دو نمونه از یکدیگر مستقلند می‌خواهیم $\mu_1 - \mu_2$ را برآورد کنیم.

چون $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ و $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{m} Y_i/m$ برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم μ_1 و μ_2 هستند بطوری شهودی به نظر می‌رسد (ولی می‌تواند ثابت شود) که $\bar{X} - \bar{Y}$ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم $\mu_1 - \mu_2$ است.

برای به‌دست آوردن یک برآورد فاصله‌ایی احتیاج به توزیع $\bar{X} - \bar{Y}$ داریم، چون

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2/n\right)$$

$$\bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2/m\right)$$

با توجه به این واقعیت که مجموع متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال، نرمال است نتیجه می‌شود که

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

بنابراین با فرض این که σ^2_1 و σ^2_2 معلومند، داریم

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{۲.۳.۵}$$

پس

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

یا معادل آن

$$P\left\{\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}} < \mu_1-\mu_2 < \overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right\} = 1-\alpha$$

بنابراین اگر $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ به ترتیب دارای مقادیر مشاهده شدهٔ $\bar{x}$ و $\bar{y}$ باشند یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای $\mu_1-\mu_2$ برابر است با

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\,,\ \bar{x}-\bar{y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

بازه‌های اطمینان یک‌طرفه برای $\mu_1-\mu_2$ به روش مشابه به‌دست می‌آیند (و به خواننده واگذار می‌کنیم) تحقیق کنید که یک بازهٔ اطمینان یک‌طرفه $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد به صورت زیر است

$$\mu_1-\mu_2 \in \left(-\infty,\bar{x}-\bar{y}+z_\alpha\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}\right)$$

برنامهٔ ۵ ـ ۳ ـ ۲ ـ الف بازه‌های اطمینان یک‌طرفه و دوطرفه برای $\mu_1-\mu_2$ را محاسبه می‌کند.

مثال ۳.۵.ث ـ دو نوع عایق کابل الکتریکی متفاوت اخیراً برای تعیین سطح ولتاژی که تحمل می‌کنند آزمون شده‌اند. هنگامی که از دو نوع کابل، نمونه‌ایی در معرض یک فشار ولتاژ افزایش قرار گرفتند، شکست در ولتاژهای زیر رخ داده است

نوع A		نوع B	
36	54	52	60
44	52	64	44
41	37	38	48
53	51	68	46
38	44	66	70
36	35	52	62
34	44		

فرض کنید بدانیم که میزان ولتاژی که عایق نوع A می‌تواند تحمل کند دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ_A و واریانس معلوم $\sigma^2_A = 40$ است. درحالی‌که توزیع عایق نوع B نرمال با میانگین مجهول μ_B و واریانس معلوم $\sigma^2_B = 100$ است. مطلوب است تعیین یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای $\mu_A - \mu_B$. همچنین مقداری را به‌دست آورید که با اطمینان ۹۵ درصد بتوان ادعا کرد از $\mu_A - \mu_B$ تجاوز می‌کند.

حل: برنامهٔ ۵-۳-۲-الف را اجرا می‌کنیم.

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES A 100(1-a)% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE          DIFFERENCE
 OF MEANS IN TWO NORMAL POPULATIONS HAVING KNOWN VARIANCES
ENTER THE SIZE OF SAMPLE 1
? 14
ENTER THE SAMPLE 1 DATA VALUES ONE AT A TIME
? 36? 44? 41? 53? 38? 36? 34? 54? 52? 37? 51? 44? 35? 44
ENTER THE POPULATION VARIANCE OF SAMPLE 1
? 40
ENTER THE SIZE OF SAMPLE 2
? 12
ENTER THE SAMPLE 2 DATA VALUES ONE AT A TIME
? 52? 64? 38? 68? 66? 52? 60? 44? 48? 46? 70? 62
ENTER THE POPULATION VARIANCE OF SAMPLE 2
? 100
ENTER THE VALUE OF a
? .05
IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0  IF NO
? 1
THE 95 % CONFIDENCE INTERVAL  IS (-19.60556 ,-6.489673 )
IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1. IF NO        ENTER 0.
? 1
ENTER THE VALUE OF a
? .05
IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0  IF NO
? 0
IS THE ONE-SIDED CONFIDENCE INTERVAL TO BE UPPER OR LOWER? ENTER 1   FOR UPPER
AND 0 FOR LOWER
? 0
THE 95 % LOWER CONFIDENCE INTERVAL  IS (-INFINITY,-7.54403 )
IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1. IF NO        ENTER 0.
? 0
Ok
```

اکنون فرض کنید که دوباره می‌خواهیم یک برآوردگر فاصله‌ایی برای $\mu_1 - \mu_2$ به‌دست آوریم امّا واریانسهای σ^2_1 و σ^2_2ی جامعه مجهولند. در این حالت منطقی است که در رابطه ۲.۳.۵، σ^2_1 و σ^2_2 را با واریانسهای نمونه

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

$$S_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{m-1}$$

جای‌گذاری کنیم . یعنی منطقی است که در برآورد فاصله‌ای اساس کار را روی چیزی شبیه

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n + S_2^2/m}}$$

قرار دهیم .

امّا در استفاده از عبارت اخیر برای به‌دست آوردن یک فاصلهٔ اطمینان به توزیع آن نیاز داریم که نباید به هیچ یک از پارامترهای مجهول σ^2_1 و σ^2_2 بستگی داشته باشد . متأسفانه توزیع هم پیچیده است و هم بستگی به پارامترهای مجهول σ^2_1 و σ^2_2 دارد . در واقع فقط در حالت خاصی که $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ می‌توان یک برآوردگر فاصله‌ایی به‌دست آورد . بنابراین فرض می‌کنیم که واریانسهای دو جامعه اگرچه مجهولند امّا با هم برابرند و σ^2 نشان‌دهندهٔ واریانس مشترک می‌باشد . حال از قضیهٔ ۱.۵.۴ فصل ۴ نتیجه می‌شود که

$$(n-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

و

$$(m-1)\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

همچنین چون نمونه‌ها مستقلند در نتیجه این متغیّرهای تصادفی کی‌دو نیز مستقلند . بنابراین از خاصیت جمع‌پذیری متغیّرهای تصادفی کی‌دو که بیان می‌کند مجموع متغیّرهای تصادفی کی‌دو ، یک متغیّر تصادفی کی‌دو است که درجه آزادی آن مساوی با مجموع درجات آزادی آن دو متغیّر است ، نتیجه می‌شود که

$$(n-1)\frac{S_1^2}{\sigma^2} + (m-1)\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}$$

همچنین چون

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}\right) \qquad (۳.۳.۵)$$

می‌بینیم که

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad (۴.۳.۵)$$

اکنون طبق نتیجهٔ اساسی (قضیهٔ ۱.۵.۴ فصل ۴) که $\bar{X}$ و S^2 در توزیع نرمال مستقلند نتیجه می‌شود که $\bar{X}$ و S^2_1 و $\bar{X}_2$ و S^2_2 متغیّرهای تصادفی مستقلند . در نتیجه با استفاده از تعریف توزیع t- استودنت

(نسبت دو متغیّر تصادفی مستقل که صورت کسر دارای توزیع نرمال استاندارد و مخرج کسر جذر یک متغیّر تصادفی کی‌دو است که بر درجهٔ آزادی خود تقسیم شده است) از تساوی ۳.۳.۵ و ۴.۳.۵ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\left(\frac{n+m-2}{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}\right)^{1/2} \sim t_{n+m-2}$$

یعنی متغیّر

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}$$

دارای توزیع t با $n+m-2$ درجهٔ آزادی است . بنابراین

$$P\left\{-t_{\alpha/2,\,n+m-2} \le \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left[\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}\right]}} \le t_{\alpha/2,\,n+m-2}\right\}$$
$$=1-\alpha$$

در نتیجه اگر از داده‌ها به‌دست آوریم ، $\bar{X}=\bar{x}$ ، $\bar{Y}=\bar{y}$ ، $S_1=s_1$ و $S_2=s_1$ فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد زیر را برای $\mu_1-\mu_1$ به‌دست می‌آوریم

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2,\,n+m-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}\right)}\,,\right.$$

و

$$\left.\bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2,\,n+m-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}\right)}\right)$$

فاصله‌های اطمینان یک‌طرفه بطور مشابه به‌دست می‌آیند .

از برنامه‌های ۵-۳-۲- ب می‌توان برای به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان یک‌طرفه و دوطرفه برای تفاضل میانگینها در دو جامعه نرمال با واریانسهای مجهول امّا برابر استفاده کرد .

مثال ۳.۵.ج ـ تولیدکننده‌ایی دو روش مختلف برای تولید باتری به‌کار می‌برد ، ظرفیت ۱۲ باتری تولیدشده (برحسب ساعت) از روش I و ۱۴ باتری تولیدشده از روش II که بتصادف انتخاب شده‌اند به صورت زیر است

روش I		روش II	
140	132	144	134
136	142	132	130
138	150	136	146
150	154	140	128
152	136	128	131
144	142	150	137
		130	135

مطلوب است تعیین یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۰ درصد برای تفاضل میانگینها با فرض این‌که واریانسهای دوجامعه‌برابرند. همچنین یک‌فاصله‌اطمینان‌بالایی ۹۵درصدبرای $\mu_I - \mu_{II}$ به‌دست آورید.

حل: برنامهٔ ۵-۳-۲-ب را اجرا می‌کنیم برای به‌دست آوردن

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES A 100(1-a)% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE DIFFERENCE OF
 MEANS IN TWO NORMAL POPULATIONS HAVING UNKNOWN BUT EQUAL VARIANCES
ENTER THE SIZE OF SAMPLE NUMBER 1
? 12
ENTER THE SAMPLE 1 DATA VALUES ONE AT A TIME
? 140
? 136
? 138
? 150
? 152
? 144
? 132
? 142
? 150
? 154
? 136
? 142
ENTER THE SIZE OF SAMPLE NUMBER 2
? 14
ENTER THE SAMPLE 2 DATA VALUES ONE AT A TIME
? 144
? 132
? 136
? 140
? 128
? 150
? 130
? 134
? 130
? 146
? 128
? 131
? 137
? 135
ENTER THE VALUE OF a
? .1
IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0 IF NO
? 1
THE 90 % CONFIDENCE INTERVAL  IS ( 2.497077 , 11.93148 )
IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1. IF NO ENTER 0.
? 1
ENTER THE VALUE OF a
? .05
IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0 IF NO
? 0
```

```
IS THE ONE-SIDED CONFIDENCE INTERVAL TO BE UPPER OR LOWER? ENTER 1 FOR UPPER AND
 0 FOR LOWER
? 1
THE 95 % UPPER CONFIDENCE INTERVAL  IS ( 2.497077 ,INFINITY)
IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1. IF NO ENTER 0.
? 0
Ok
```

■

۳.۳ فاصلهٔ اطمینان برای واریانس توزیع نرمال

اگر $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی از توزیع نرمال با پارامترهای مجهول μ و σ^2 باشد آن‌گاه می‌توانیم با استفاده از این واقعیت که

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

یک فاصلهٔ اطمینان برای σ^2 به‌دست آوریم. بدین منظور داریم

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}\right\} = 1-\alpha$$

یا معادل با آن

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}}\right\} = 1-\alpha$$

درنتیجه‌هنگامی‌که $S^2 = s^2$، یک‌فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای σ^2 به صورت زیر است

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}}\right)$$

مثال ۳.۵.ج ـ از یک روش استاندارد شده تولید واشر انتظار می‌رود که واشرهایی با انحراف خیلی کم در ضخامت تولید کند. فرض کنید ۱۰ واشر انتخاب و اندازه‌گیری شده‌اند. اگر ضخامت این واشرها برحسب اینچ به صورت زیر باشد

پارامترها

0.123	0.133
0.124	0.125
0.126	0.128
0.120	0.124
0.130	0.126

یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای انحراف معیار ضخامت واشرهای تولید شده با این روش به‌دست

آورید . با اجرای برنامه ۴ - ۳ نتیجه می‌گیریم که

$$S^2 = 1.366 \times 10^{-5}$$

چون $\chi^2_{.05,9} = 16.917$ و $\chi^2_{.95,9} = 3.334$

در نتیجه

$$\sigma^2 \in (9 \times 1.366 \times 10^{-5}/16.917, 9 \times 1.366 \times 10^{-5}/3.334)$$ با اطمینان ۹۰ درصد

یا

$$\sigma^2 \in (7.267 \times 10^{-6}, 36.875 \times 10^{-6})$$ با اطمینان ۹۰ درصد

یا ، باگرفتن ریشهٔ دوم

$$\sigma \in (2.696 \times 10^{-3}, 6.072 \times 10^{-3})$$ با اطمینان ۹۰ درصد

۳-۴ فاصلهٔ اطمینان تقریبی برای میانگین متغیّر تصادفی برنولی

جامعه‌ایی از اشیاء را در نظر بگیرید که هریک بطور مستقل و با احتمال مجهول p مطابق با معیار معینی باشند اگر n عدد از این اشیاء را برای تعیین این که آیا مطابق با معیار هستند امتحان کنیم چگونه می‌توان از نتایج داده‌ها برای به‌دست آوردن یک بازهٔ اطمینان برای p استفاده کرد .

اگر فرض کنیم X نشان‌دهندهٔ تعداد n شیء باشد که مطابق با معیار هستند ، آن‌گاه X یک متغیّر دوجمله‌ایی با پارامترهای n و p است . بنابراین وقتی n بزرگ است . با استفاده از تقریب نرمال برای دوجمله‌ایی ، X تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین np و واریانس $np(1-p)$ است . بنابراین

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \doteq \mathcal{N}(0,1) \qquad (۵.۳.۵)$$

که درآن علامت « $\doteq$ » را برای نشان دادن این که متغیّر تقریباً دارای چنین توزیعی است به‌کار برده‌ایم . بنابراین برای هر $\alpha \in (0, 1)$

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha$$

و در نتیجه اگر X مساوی x مشاهده شود آن‌گاه یک ناحیهٔ اطمینان تقریبی $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد

برای p به صورت زیر است

$$\left\{ p : -z_{\alpha/2} < \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2} \right\}$$

امّا ناحیهٔ مذکور یک فاصله نیست . برای به‌دست آوردن یک فاصله اطمینان برای p از این واقعیت استفاده می‌کنیم که X/n، نسبت اشیایی که مطابق با معیارند ، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم p است . در نتیجه $\sqrt{X[1 - (X/n)]}$ تقریباً مساوی $\sqrt{np(1-p)}$ است . بنابراین از رابطهٔ ۵.۳.۵ می‌بینیم که

$$\frac{X - np}{\sqrt{X\left(1 - \frac{X}{n}\right)}} \doteq \mathcal{N}(0,1)$$

پس برای هر $\alpha \in (0\ ,\ 1)$

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{X - np}{\sqrt{X\left(1 - \frac{X}{n}\right)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha$$

یا معادل با آن

$$P\left\{ \frac{X}{n} - \frac{\sqrt{X\left(1 - \frac{X}{n}\right)}}{n} z_{\alpha/2} < p < \frac{X}{n} + \frac{\sqrt{X\left(1 - \frac{X}{n}\right)}}{n} z_{\alpha/2} \right\} \approx 1 - \alpha$$

و این فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد برای p را ارائه می‌دهد .

مثال ۳.۵.ح ـ فرض کنید از تعداد زیادی ترانزیستور ، ۱۰۰ عدد را بتصادف انتخاب کرده و برای دیدن این که آیا مطابق با استاندارد هستند آزمون می‌کنیم . اگر ۸۰ تا از ۱۰۰ تا مطابق با استاندارد باشند آن‌گاه یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای p ـ نسبت تمام ترانزیستورهای مطابق با استاندارد ـ برابر است با

$$\left(.8 - \frac{\sqrt{80(.2)}}{100}(1.96), .8 + \frac{\sqrt{80(.2)}}{100}(1.96)\right)$$

یعنی ۹۵ درصد اطمینان داریم که p بین 7216. و 8784. است . ■

گاهی اوقات اتفاق می‌افتد که علاقه‌مند باشیم که یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای p با طول مفروض l به‌دست آوریم . در این صورت مسأله ، تعیین حجم نمونه n لازم برای به‌دست آوردن چنین فاصله‌ایی است . اکنون طول فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای p از نمونه‌ایی به حجم n مساوی است با

$$\frac{2}{n}\sqrt{X\left(1-\frac{X}{n}\right)}\,z_{\alpha/2}=\frac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}$$

و چون X/n تقریبی از p است ، طول بازه تقریباً مساوی $2z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$ است . یعنی

$$\text{طول فاصله اطمینان } (1-\alpha)\ ۱۰۰ \text{ درصد از نمونه‌ایی به حجم } n \approx \frac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}$$

متأسفانه p از قبل مجهول است (اگر چنین نبود ، نیازی به سعی برای برآورد آن نبود) و بنابراین نمی‌توان برای به‌دست آوردن n، $2z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)}$ را مساوی l قرار داد . برای انجام این کار می‌توانیم ابتدا یک نمونهٔ اولیه مثلاً به حجم ۳۰ برای برآورد مقدماتی p بگیریم و سپس از این برآورد اوّلیه برای تعیین n استفاده کنیم . یعنی اگر y مساوی تعداد موفقیتها در نمونهٔ اولیه‌ای به حجم ۳۰ باشد آن‌گاه ابتدا p را تقریباً مساوی با $y/30$ برآورد می‌کنیم . در نتیجه برای تعیین یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای p با طول l، تقریباً به حجم نمونه‌ایی احتیاج داریم که

$$\frac{2z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{Y}{30}\left(1-\frac{Y}{30}\right)}=l$$

یا ، با مربع کردن طرفین

$$\frac{(2z_{\alpha/2})^2}{n}\,\frac{Y}{30}\left(1-\frac{Y}{30}\right)=l^2$$

یا

$$n=\frac{(2z_{\alpha/2})^2}{l^2}\left[\frac{Y}{30}\left(1-\frac{Y}{30}\right)\right]$$

بنابراین برای کامل کردن حجم نمونه باید یک نمونهٔ اضافی به حجم $n-30$ بگیریم (اگر $n\le 30$

نیازی به گرفتن نمونه مجدد نیست)

مثال ۳.۵.خ : هر چیپ کامپیوتری تولید شده توسط یک کارخانه مفروض ، یا سالم است یا خیر . تعداد زیادی از چنین چیپهایی تولید شده و فرض می‌شود که هریک از آنها بطور مستقل با احتمال مجهول p سالم است . برای به‌دست آوردن یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹ درصد برای p که طول آن تقریباً .05 باشد نمونه‌ایی مقدماتی به حجم ۳۰ گرفته شده است . اگر ۲۶ عدد از ۳۰ چیپ سالم باشند آن‌گاه برآورد اوّلیه p مساوی است با 26/30 . بنابراین برای داشتن یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹ درصد با طول تقریبی .05 باید تقریباً نمونه‌ایی به حجم

$$n = \frac{4(z_{.005})^2}{(.05)^2}\frac{26}{30}\left(1 - \frac{26}{30}\right) = \frac{4(2.58)^2}{(.05)^2}\frac{26}{30}\frac{4}{30} = 1231$$

بگیریم . در نتیجه اکنون باید یک نمونهٔ اضافی به حجم ۱۲۰۱ چیپ بگیریم و اگر برای مثال ۱۰۴۰ عدد از آنها سالم باشند آن‌گاه بازهٔ اطمینان ۹۹ درصد نهایی برای p به صورت زیر است

$$\left(\frac{1066}{1231} - \sqrt{1066\left(1 - \frac{1066}{1231}\right)}\,\frac{z_{.005}}{1231},\ \frac{1066}{1231} + \sqrt{1066\left(1 - \frac{1066}{1231}\right)}\,\frac{z_{.005}}{1231}\right)$$

یا

$$p \in (.84091, .89101) \quad \blacksquare$$

تبصره

همان‌طور که دیدیم یک بازهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد برای p دارای طول تقریبی l است اگر حجم نمونه برابر باشد با

$$n = \frac{(2z_{\alpha/2})^2}{l^2}p(1 - p)$$

اکنون بسادگی می‌توان نشان داد که تابع $g(p) = p(1 - p)$ در بازهٔ $0 \le p \le 1$ به ازای $p = \frac{1}{2}$ به‌ماکزیمم مقدار خود ، یعنی $\frac{1}{4}$ ، می‌رسد . بنابراین یک کران بالا برای n به صورت زیر است

$$n \le \frac{(z_{\alpha/2})^2}{l^2}$$

بنابراین با انتخاب نمونه‌ایی به حجم حداقل $(z_{\alpha/2})^2/l^2$ می‌توان مطمئن شد که بدون نیاز به نمونه‌گیری مجدد فاصلهٔ اطمینانی به‌دست می‌آید که طول آن از l بیشتر نیست .

۵-۳ فاصلهٔ اطمینان برای میانگین توزیع نمایی

اگر $X_1, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل نمایی و هریک دارای میانگین θ باشند آن‌گاه همان‌طور که در مثال ۴.۵ ت نشان دادیم برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ، $\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ است برای به‌دست آوردن یک فاصلهٔ اطمینان برای θ (از بخش ۷ فصل ۳) خاطرنشان می‌کنیم که $\sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع گاما با پارامترهای n و $1/\theta$ است. در نتیجه (با توجه به ارتباط بین توزیع گاما و توزیع کی‌دو که در بخش ۱.۸ از فصل ۳ نشان داده شد)

$$\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$$

بنابراین برای هر $\alpha \in (0, 1)$

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2,2n} < \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i < \chi^2_{\alpha/2,2n}\right\} = 1-\alpha$$

یا معادل آن

$$P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{\alpha/2,2n}} < \theta < \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}\right\} = 1-\alpha$$

در نتیجه یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای θ به صورت زیر است

$$\theta \in \left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{\alpha/2,2n}}, \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}\right)$$

مثال ۵.۳.د ـ فرض شده است که اشیاء تولید شده متوالی توسط یک تولیدکننده معین دارای عمر مفیدی هستند که مستقل از یکدیگر و دارای چگالی مشترک زیرند

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} \qquad 0 < x < \infty$$

اگر مجموع عمر نخستین ۱۰ شیء تولید شده مساوی ۱۷۴۰ باشد یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه، θ به‌دست آورید.

از برنامهٔ ۳-۸-۱ ب (یا جدول الف-۳-۸-۱ می‌بینیم که

$$\chi^2_{.025,20} = 34.169, \qquad \chi^2_{.975,20} = 9.661$$

و بنابراین با اطمینان ۹۵ درصد می‌توان نتیجه گرفت که

$$\theta \in \left(\frac{2x1740}{34.169}, \frac{2x1740}{9.661}\right)$$

یا معادل آن

$$\theta \in (101.847, 360.211) \quad \blacksquare$$

۴- ارزیابی یک برآوردگر نقطه‌ایی

فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ نمونه‌ایی از یک جامعه است که توزیع آن با پارامتر مجهول θ مشخص می‌شود و فرض کنید $d = d(\mathbf{X})$ یک برآوردگر θ باشد. چگونه می‌توان d را به‌عنوان یک برآوردگر θ تعیین کرد؟ یک روش، استفاده از توان دوم اختلاف بین $d(\mathbf{X})$ و θ است. امّا چون $(d(\mathbf{X}) - \theta)^2$ یک متغیّر تصادفی است قرارداد می‌کنیم که **میانگین توان دوم** خطای برآوردگر d، $r(d, \theta)$، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$r(d, \theta) = E\left[(d(\mathbf{X}) - \theta)^2\right]$$

را به‌عنوان معیار خوبی d به‌عنوان یک برآوردگر θ به‌کار می‌بریم.

یک برآوردگر منفرد d هنگامی خوب است که $r(d, \theta)$ به ازای تمام مقادیر θ مینیمم شود. امّا بجز حالات بدیهی چنین چیزی هرگز اتفاق نمی‌افتد. برای مثال برآوردگر d^* را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید

$$d^*(X_1, \ldots, X_n) = 4$$

یعنی برای برآورد θ بدون توجه به این که نتیجهٔ داده‌های نمونه چه بوده است، برآوردگر d^* را مساوی ۴ اختیار کنیم؛ با این که به نظر می‌رسد این برآوردگر یک برآوردگر بی‌معنی است (زیرا در ساخت آن از داده استفاده نشده است). امّا هنگامی که θ واقعاً مساوی ۴ است میانگین توان دوم خطای آن مساوی صفر است. بنابراین میانگین توان دوم خطای هر برآوردگر دیگری غیر از d^* در اکثر حالات بزرگتر از میانگین توان دوم خطای d^* است هنگامی که $\theta = 4$.

اگرچه مینیمم میانگین توان دوم بندرت وجود دارد، گاهی اوقات امکان دارد برآوردگری پیدا کنیم که در میان برآوردگرهایی که در خاصیت معینی صدق می‌کنند دارای کمترین میانگین توان دوم خطا باشد. چنین خاصیتی نااریبی است.

تعریف ۱.۴.۵ فرض کنید $d = d(\mathbf{X})$ برآوردگری از پارامتر θ باشد. در این صورت

$$b_\theta(d) = E[d(\mathbf{X})] - \theta$$

را اریبی d به‌عنوان برآوردگر θ می‌نامند. اگر به ازای هر θ، $b_\theta(d) = 0$ آن‌گاه گوییم d یک برآوردگر نااریب θ است. به عبارت دیگر یک برآوردگر نااریب است اگر امید ریاضی آن همواره مساوی پارامتری باشد که قصد داریم آن را برآورد کنیم.

مثال ۵-۴ الف ـ فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با میانگین مجهول θ باشد آن‌گاه

$$d_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1$$

و

$$d_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

هر دو برآوردگرهای نااریب θ اند زیرا

$$E[X_1] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] = \theta$$

بطورکلی $d_3(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ یک برآوردگر نااریب θ است هرگاه $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
زیرا

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right] &= \sum_{i=1}^n E[\lambda_i X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i E(X_i) \\ &= \theta \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ &= \theta \quad \blacksquare \end{aligned}$$

اگر $d(X_1, ..., X_n)$ یک برآوردگر نااریب باشد آن‌گاه میانگین توان دوم خطای آن برابر است با

$$\begin{aligned} r(d, \theta) &= E\left[(d(\mathbf{X}) - \theta)^2\right] \\ &= E\left[(d(\mathbf{X}) - E[d(\mathbf{X})])^2\right] \qquad \text{زیرا } d \text{ نااریب است.} \\ &= \operatorname{Var}(d(\mathbf{X})) \end{aligned}$$

بنابراین میانگین توان دوم خطای یک برآوردگر نااریب با واریانس آن مساوی است .

مثال ۴.۵.ب ترکیب برآوردکننده‌های نااریب مستقل ـ فرض کنید d_1 و d_2 نشان‌دهندهٔ برآوردگرهای نااریبی از θ با واریانسهای σ^2_1 و σ^2_2 باشند ، یعنی به ازای $i = 1, 2$

$$E[d_i] = \theta \qquad \mathrm{Var}(d_i) = \sigma_i^2$$

هر برآوردگر به شکل

$$d = \lambda d_1 + (1 - \lambda) d_2$$

نیز نااریب است . برای تعیین مقداری از λ که به‌ازای آن d دارای کمترین میانگین توان دوم خطا باشد ، توجه کنید که

$$r(d, \theta) = \mathrm{Var}(d)$$

$$= \lambda^2 \mathrm{Var}(d_1) + (1 - \lambda)^2 \mathrm{Var}(d_2) \qquad \text{با توجه به استقلال } d_1 \text{ و } d_2$$

$$= \lambda^2 \sigma_1^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma_2^2$$

با گرفتن مشتق داریم

$$\frac{d}{d\lambda} r(d, \theta) = 2\lambda\sigma_1^2 - 2(1 - \lambda)\sigma_2^2$$

برای تعیین $\hat{\lambda}$ ، مقداری از λ که $r(d, \theta)$ را مینیمم کند ، مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$2\hat{\lambda}\sigma_1^2 = 2(1 - \hat{\lambda})\sigma_2^2$$

یا

$$\hat{\lambda} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2}$$

بنابراین وزن بهینه‌ایی که می‌توان به یک برآوردگر نسبت داد (هنگامی که تمام برآوردگرها نااریب و مستقلند) مساوی است با نسبت عکس واریانسهایشان .
به‌عنوان کاربردی از مطالب بالا فرض کنید که سازمان حفاظت منابع طبیعی می‌خواهد مقدار اسیدیتهٔ یک دریاچهٔ مفروض راتعیین کند . برای تعیین این کمیت ، آنها مقداری ازآب این دریاچه را برداشته ،

نمونه‌هایی از آن را به n آزمایشگاه مختلف می‌فرستند. سپس این آزمایشگاهها بطور مستقل با استفاده از وسایل عیارگیری مربوط به خود که در میزان دقت اختلاف دارند میزان اسیدیتهٔ آب را آزمون می‌کنند. فرض کنید d_i، نتیجه آزمون عیارگیری در آزمایشگاه iام یک متغیّر تصادفی با میانگین θ، اسیدیته واقعی نمونه آب، واریانس σ_i^2، n ،..., $i = 1$ باشد. اگر کمیتهای σ_i^2، $i = 1,..., n$ برای سازمان حفاظت منابع طبیعی معلوم باشند. در این صورت آنها باید اسیدیته آب نمونه‌گیری شده از دریاچه را با

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i/\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2}$$

برآورد کنند.

میانگین توان دوم خطای d به صورت زیر است

$$r(d, \theta) = \operatorname{Var}(d)$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2 \sigma_i^2 \qquad \text{زیرا } d \text{ نااریب است}$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2} \quad \blacksquare$$

تعمیمی از این نتیجه که میانگین توان دوم خطای یک برآوردگر نااریب مساوی است با واریانس آن، این است که میانگین توان دوم خطای هر برآوردگر مساوی است با واریانس آن به‌اضافه توان دوم اریبی‌اش؛ زیرا

$$r(d, \theta) = E\left[(d(\mathbf{X}) - \theta)^2\right]$$

$$= E\left[(d - E[d] + E[d] - \theta)^2\right]$$

$$= E\left[(d - E[d])^2 + (E[d] - \theta)^2 + 2(E[d] - \theta)(d - E[d])\right]$$

$$= E\left[(d - E[d])^2\right] + E\left[(E[d] - \theta)^2\right]$$

$$+2E[(E[d] - \theta)(d - E[d])]$$

$$= E\left[(d - E[d])^2\right] + (E[d] - \theta)^2 + 2(E[d] - \theta)E[d - E[d]]$$

زیرا $E[d] - \theta$ ثابت است.

$$= E\left[(d - E[d])^2\right] + (E[d] - \theta)^2$$

تساوی اخیر بدین دلیل نتیجه می‌شود که $E[d - E[d]] = 0$. بنابراین

$$r(d, \theta) = \mathrm{Var}(d) + b_\theta^2(d)$$

مثال ۴.۵.پ ـ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی تصادفی از توزیع یکنواخت $(0, \theta)$ باشد که در آن فرض شده است که θ مجهول است. چون

$$E[X_i] = \frac{\theta}{2}$$

یک برآوردگر «منطقی» که برای θ نااریب باشد $d_1 = d_1(\mathbf{X}) = \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ است. زیرا $E[d_1] = \theta$ در نتیجه

$$\begin{aligned} r(d_1, \theta) &= \mathrm{Var}(d_1) \\ &= \frac{4}{n}\mathrm{Var}(X_i) \\ &= \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} \qquad \text{زیرا} \quad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{\theta^2}{12} \\ &= \frac{\theta^2}{3n} \end{aligned}$$

زیرا

یک برآوردگر ممکن دیگر از θ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم است، که در مثال ۲.۵.ت نشان داده شد برابر است با

$$d_2 = d_2(\mathbf{X}) = \max_i X_i$$

برای محاسبهٔ میانگین توان دوم خطای d_2 به‌عنوان برآوردگری از θ ابتدا نیاز داریم میانگین (برای تعیین اریبی آن) و واریانس آن را محاسبه کنیم. بدین‌منظور توجه کنید که تابع توزیع d_2 به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} F_2(x) &\equiv P\{d_2(\mathbf{X}) \le x\} \\ &= P\left\{\max_i X_i \le x\right\} \\ &= P\{X_i \le x \qquad i = 1, \ldots, n\} \\ &= \prod_{i=1}^n P\{X_i \le x\} \\ &= \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \qquad x \le \theta \end{aligned}$$

به‌ازای

از استقلال

بنابراین با مشتق‌گیری تابع چگالی d_2 به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$f_2(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \qquad x \le \theta$$

در نتیجه

$$E[d_2] = \int_0^\theta x \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\, dx = \frac{n}{n+1}\theta \qquad (۱.۴.۵)$$

همچنین

$$E\left[d_2^2\right] = \int_0^\theta x^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\, dx = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(d_2) &= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \\ &= n\theta^2\left[\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right] = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}\end{aligned} \qquad (۲.۴.۵)$$

پس

$$\begin{aligned}r(d_2,\theta) &= \left(E(d_2) - \theta\right)^2 + \operatorname{Var}(d_2) \\ &= \frac{\theta^2}{(n+1)^2} + \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= \frac{\theta^2}{(n+1)^2}\left[1 + \frac{n}{n+2}\right] = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned} \qquad (۳.۴.۵)$$

چون

$$\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \le \frac{\theta^2}{3n} \quad , \quad n = 1,2,\ldots$$

در نتیجه d_2 برای θ برآوردگر بهتری نسبت به d_1 است .

تساوی ۱.۴.۵ حتی استفاده از برآوردگر دیگری را پیشنهاد می‌کند ـ یعنی برآوردگر نااریب $(1 + 1/n)d_2(\mathbf{X}) = (1 + 1/n)\max_i X_i$ ـ امّا به‌جای این که مستقیماً این برآوردگر را در نظر بگیریم ، فرض کنید تمام برآوردگرهای به شکل

$$d_c(\mathbf{X}) = c \max_i X_i = cd_2(\mathbf{X})$$

را در نظر بگیریم ، که در آن c یک ثابت مفروض است . میانگین توان دوم این برآوردگر برابر است با

$$
\begin{aligned}
r\left(d_c(\mathbf{X}), \theta\right) &= \operatorname{Var}\left(d_c(\mathbf{X})\right) + \left(E\left[d_c(\mathbf{X})\right] - \theta\right)^2 \\
&= c^2 \operatorname{Var}\left(d_2(\mathbf{X})\right) + \left(cE\left[d_2(\mathbf{X})\right] - \theta\right)^2 \\
&= \frac{c^2 n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \theta^2\left(\frac{cn}{n+1} - 1\right)^2 \qquad (۴.۴.۵)
\end{aligned}
$$

از تساوی ۲.۴.۵ و ۱.۴.۵

برای تعیین ثابت c که کمترین میانگین توان دوم خطا را ارائه دهد از $r(d_c(X), \theta)$ مشتق می‌گیریم . داریم

$$
\frac{d}{dc} r\left(d_c(\mathbf{X}), \theta\right) = \frac{2cn\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{2\theta^2 n}{n+1}\left(\frac{cn}{n+1} - 1\right)
$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق می‌بینیم که بهترین c که آن را c^* می‌نامیم طوری است که

$$
\frac{c^*}{n+2} + c^* n - (n+1) = 0
$$

یا

$$
c^* = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2 + 2n + 1} = \frac{n+2}{n+1}
$$

جای‌گذاری این مقدار از c در تساوی ۴.۴.۵ نتیجه می‌دهد :

$$
\begin{aligned}
r\left(\frac{n+2}{n+1} \max_i X_i, \theta\right) &= \frac{(n+2)n\theta^2}{(n+1)^4} + \theta^2\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1\right)^2 \\
&= \frac{(n+2)n\theta^2}{(n+1)^4} + \frac{\theta^2}{(n+1)^4} \\
&= \frac{\theta^2}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

مقایسه‌ایی با تساوی ۳.۴.۵ نشان می‌دهد که برآوردگر (اریب) $(n+2)/(n+1) \max_i X_i$ دارای میانگین توان دوم خطایی تقریباً نصف میانگین توان دوم خطای برآوردگر درستنمایی ماکزیمم $\max_i X_i$ است . ■

روش گشتاور و درستنمایی ماکزیمم دو روش عمومی برای به‌دست آوردن برآوردگرها هستند . در حالی که اساس هر دو برآوردگر اکتشافی است ، تجربه نشان داده است، که هر دو (بخصوص برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم) در حالات متنوع کاربردی خوب عمل می‌کند . در

مجموع برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم بطورکلی بیشتر از برآوردگرهای روش گشتاورها مورد اعتمادند ؛ (گرچه مثالهای نقضی نیز وجود دارد) . در واقع می‌توان نشان داد که برآوردگر درستنمایی ماکزیمم بطور مجانبی دارای میانگین توان دوم خطایی کوچکتر از هر برآوردگر دیگر است وقتی که حجم نمونه به سمت ∞ میل می‌کند . یعنی می‌توان نشان داد که تحت شرایط نظم معین اگر d_n نشان‌دهندهٔ برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ از نمونه‌ایی که به حجم n و d^*_n برآوردگری دلخواه براساس نمونه‌ایی به حجم n باشند آن‌گاه

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r(d_n, \theta)}{r(d_n^*, \theta)} \le 1$$

(همان‌طور که در مثالهای قبل نشان داده شد توزیع یکنواخت $(0\,,\,\theta)$ که در شرایط نظم صدق نمی‌کند مثال نقضی برای مطلب بالا است[۱])

امّا باید توجه داشت که در نمونه‌های کوچک حتی وقتی شرایط نظم برقرار است گاهی اوقات می‌توان برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم را اصلاح کرد . به‌عنوان نمونه مثال زیر راکه برآورد میانگین مجهول یک توزیع‌نمایی است در نظر بگیرید .

مثال ۴.۵.ت ـ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی از توزیع‌نمایی با میانگین مجهول θ باشد . بنابراین تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$f(x_1, \ldots, x_n|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta\right\}$$

برای به‌دست آوردن برآوردگر درستنمایی ماکزیمم از تابع درستنمایی لگاریتم می‌گیریم

$$\log f(x_1, \ldots, x_n|\theta) = -n \log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

با مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{d\theta}\log f(x_1, \ldots, x_n|\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

بامساوی صفرقراردادن‌مشتق وحل آن برحسب θ می‌بینیم‌که‌برآورد درستنمایی ماکزیمم θ برابر است با

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

---

۱ ـ قسمتی از شرایط نظم در حالت پیوسته این است که چگالی $f_\theta(x)$ باید به ازای x ثابت برحسب θ مشتق‌پذیر باشد .

بنابراین در این حالت هر دو برآوردگر درستنمایی ماکزیمم و روش گشتاورها برای θ میانگین نمونه $\bar{X}$ است . چون $\bar{X}$ یک برآوردگر نااریب است در نتیجه میانگین توان دوم خطا مساوی است با

$$\begin{aligned} r(\bar{X}, \theta) &= \operatorname{Var}(\bar{X}) \\ &= \frac{\operatorname{Var}(X_i)}{n} \\ &= \frac{\theta^2}{n} \end{aligned}$$

که در آن دلیل تساوی اخیر این است که واریانس توزیع‌نمایی مساوی است با مربع میانگین آن .

اکنون برآوردگر $c\bar{X}$ را که در آن c یک مقدار ثابت است در نظر بگیرید . میانگین توان دوم خطای این برآوردگر مساوی است با

$$\begin{aligned} r(c\bar{X}, \theta) &= \operatorname{Var}(c\bar{X}) + \left(E[c\bar{X}] - \theta\right)^2 \\ &= c^2 \operatorname{Var}(\bar{X}) + (c\theta - \theta)^2 \\ &= c^2 \frac{\theta^2}{n} + (c-1)^2\theta^2 \qquad (۵.۴.۵) \\ &= \theta^2\left[\frac{c^2}{n} + (c-1)^2\right] \end{aligned}$$

برای انتخاب مقداری از c که این کمیت را مینیمم کند با مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dc} r(c\bar{X}, \theta) = \theta^2\left[\frac{2c}{n} + 2(c-1)\right]$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق می‌توان نشان داد مقداری از c که مینیمم‌کننده است برابر است با

$$c^* = \frac{n}{n+1}$$

یعنی برآوردگر $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n+1} = \frac{n}{n+1}\bar{X}$ ،بطور یکنواخت دارای میانگین توان دوم خطای کمتری از $\bar{X}$ است

در واقع قرار دادن $c = n/(n+1)$ در رابطهٔ ۵.۴.۵ نشان می‌دهد که

$$r\left(\frac{n}{n+1}\bar{X}, \theta\right) = \theta^2\left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{\theta^2}{n+1}$$

در صورتی که

$$r(\bar{X}, \theta) = \frac{\theta^2}{n}$$

در حالی که حجم نمونه بزرگ باشد این اختلاف مهم نیست امّا اگر بخواهیم با حجم نمونه کم برآوردکنیم می‌تواند اهمیت داشته باشد. برای مثال وقتی $n = 10$ میانگین توان‌دوم $n/(n + 1)\bar{X}$، ۹ درصد کمتر از $\bar{X}$ است. ■

برآوردگرهای بیز

در بعضی حالات منطقی به‌نظر می‌رسد، θ را که یک پارامتر مجهول است مقدار یک متغیّر تصادفی از یک توزیع مفروض در نظر گرفت. این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که قبل از مشاهدهٔ نتایج داده‌های $X_1, ..., X_n$ اطلاعاتی در مورد مقدار θ داشته باشیم و این اطلاعات برحسب یک توزیع احتمال (که به آن توزیع **پیشین** می‌گویند) بیان می‌شود. برای مثال فرض کنید که قبل از آزمایش بدانیم θ تقریباً هرمقدار را در فاصله $(0, 1)$ با احتمال مساوی می‌گیرد. بنابراین می‌توان بطور منطقی فرض کرد θ از یک توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ انتخاب شده است.

اکنون فرض کنید که برداشت قبلی ما در مورد θ این است که می‌تواند مقدار یک متغیّر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $p(\theta)$ باشد و فرض کنید درصدد مشاهدهٔ مقدار یک نمونه هستیم که توزیع آن به θ بستگی دارد، بخصوص فرض کنید $f(x \mid \theta)$ نشان‌دهندهٔ این درستمایی است که مقدار داده مساوی x باشد وقتی که θ مقدار پارامتر است، یعنی نشان‌دهندهٔ تابع جرم احتمال در حالت گسسته و تابع چگالی احتمال در حالت پیوسته باشد. اگر مقادیر مشاهده شدهٔ داده‌ها، $X_i = x_i,\ i = 1, ..., n$ باشند آن‌گاه تابع چگالی احتمال جدید با شرطی θ به صورت زیر است.

$$f(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{f(\theta, x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

$$= \frac{p(\theta) f(x_1, \dots, x_n|\theta)}{\int f(x_1, \dots, x_n|\theta) p(\theta)\, d\theta}$$

تابع چگالی شرطی $f(\theta|x_1, ..., x_n)$ را تابع **چگالی پسین** می‌نامند. (بنابراین قبل از مشاهده داده‌ها برداشتمان در مورد θ برحسب توزیع پیشین بیان می‌شود در حالی که وقتی داده‌ها مشاهده شدند توزیع پیشین به شکل جدید یعنی پسین در می‌آید).

در فصل ۴ نشان دادیم که هرگاه توزیع احتمال یک متغیّر تصادفی را بدانیم بهترین برآورد مقدار متغیّر تصادفی از نظر مینیمم متوسط توان دوم خطای میانگین آن است.

بنابراین بهترین برآورد θ با فرض این که مقادیر داده‌ها $X_i = x_i$، $i = 1, ..., n$ است میانگین توزیع پسین $f(\theta|x_1, ..., x_n)$ می‌باشد . این برآوردگر را برآوردگر بیز گویند و به صورت $E[\theta|X_1, ..., X_n)$ نمایش می‌دهند . یعنی اگر $X_i = x_i, i = 1, ..., n$ آن‌گاه مقدار برآوردگر بیز برابر است با

$$E[\theta|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \int \theta f(\theta|x_1, \ldots, x_n)\, d\theta$$

مثال ۵.۵.الف ـ فرض کنید که $X_1, ..., X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل برنولی‌اند و تابع جرم احتمال هریک مساوی است با

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

که در آن θ مجهول است . علاوه برآن فرض کنید که θ از توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ انتخاب می‌شود . مطلوب است محاسبهٔ برآوردگر بیز θ.

حل : باید $E[\theta|X_1, ..., X_n]$ را محاسبه کنیم . چون تابع چگالی پیشین θ چگالی یکنواخت

$$p(\theta) = 1 \qquad 0 < \theta < 1$$

است ، چگالی شرطی θ با فرض $X_1, ..., X_n$ برابر است با

$$\begin{aligned} f(\theta|x_1, \ldots, x_n) &= \frac{f(x_1, \ldots, x_n, \theta)}{f(x_1, \ldots, x_n)} \\ &= \frac{f(x_1, \ldots, x_n|\theta)\, p(\theta)}{\int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n|\theta)\, p(\theta)\, d\theta} \\ &= \frac{\theta^{\Sigma_1^n x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma_1^n x_i}}{\int_0^1 \theta^{\Sigma_1^n x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma_1^n x_i}\, d\theta} \end{aligned}$$

اکنون می‌توان نشان داد که به ازای مقادیر m و r

$$\int_0^1 \theta^m(1-\theta)^r\, d\theta = \frac{m!\,r!}{(m+r+1)!} \tag{۱.۵.۵}$$

بنابراین با قرار دادن $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$f(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n+1)!\,\theta^x(1-\theta)^{n-x}}{x!\,(n-x)!} \tag{۲.۵.۵}$$

لذا

$$E[\theta|x_1,\ldots,x_n] = \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!}\int_0^1 \theta^{1+x}(1-\theta)^{n-x}\,d\theta$$

$$= \frac{(n+1)!}{x!(n-x)!}\,\frac{(1+x)!(n-x)!}{(n+2)!} \quad \text{از معادله ۱.۵.۵}$$

$$= \frac{x+1}{n+2}$$

در نتیجه برآوردگر بیز برابر است با

$$E[\theta|X_1,\ldots,X_n] = \frac{\sum_{i=1}^n X_i + 1}{n+2}$$

به‌عنوان مثال اگر برآمد ۱۰ آزمایش مستقل ـ که نتیجهٔ هریک با احتمال θ پیروزی است ـ ۶ پیروزی باشد آن‌گاه با فرض این که θ روی بازهٔ $(0, 1)$ دارای توزیع یکنواخت است برآورد بیز θ مساوی است با $7/11$ (در صورتی که ، به‌عنوان مثال برآورد درستنمایی ماکزیمم $6/10$ است) .

تبصره

توزیع شرطی θ با فرض $X_i = x_i$ ، $i = 1, \ldots, n$ ، راکه تابع چگالی آن در رابطهٔ ۲.۵.۵ ارائه شده است توزیع بتا با پارامترهای $\sum_{i=1}^n x_i + 1$ و $n = \sum_{i=1}^n x_i + 1$ می‌نامند .

مثال ۵.۵.ب ـ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال باشند که هریک دارای میانگین مجهول θ و واریانس معلوم σ_0^2 هستند . اگر θ نیز از یک جامعهٔ نرمال با میانگین معلوم μ و واریانس معلوم σ^2 انتخاب شده باشد برآوردگر بیز θ را به‌دست آورید .

برای تعیین $E[\theta \mid X_1, \ldots, X_n]$ ابتدا احتیاج داریم که چگالی شرطی θ با فرض مقادیر $X_1, \ldots, X_n$ را تعیین کنیم . داریم

$$f(\theta|x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n|\theta)\,p(\theta)}{f(x_1,\ldots,x_n)}$$

که در آن

$$f(x_1,\ldots,x_n|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_0^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2/2\sigma_0^2\right\}$$

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-(\theta-\mu)^2/2\sigma^2\right\}$$

و

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ \ldots,x_n|\theta)\,p(\theta)\,d\theta$$

به کمک محاسبات جبری می‌توان نشان داد که این چگالی شرطی، چگالی نرمال با میانگین

$$E[\theta|X_1,\ldots,X_n]=\frac{n\sigma^2}{n\sigma^2+\sigma_0^2}\bar{X}+\frac{\sigma_0^2}{n\sigma^2+\sigma_0^2}\mu$$
$$=\frac{\dfrac{n}{\sigma_0^2}}{\dfrac{n}{\sigma_0^2}+\dfrac{1}{\sigma^2}}\bar{X}+\frac{\dfrac{1}{\sigma^2}}{\dfrac{n}{\sigma_0^2}+\dfrac{1}{\sigma^2}}\mu \qquad (۳.۵.۵)$$

و واریانس

$$\mathrm{Var}(\theta|X_1,\ldots,X_n)=\frac{\sigma_0^2\sigma^2}{n\sigma^2+\sigma_0^2}$$

است.

برآوردگر بیز ۳.۵.۵ یک میانگین موزون از $\bar{X}$، میانگین نمونه μ، میانگین توزیع پیشین است. در واقع وزنهای مربوط به این دو کمیت برحسب نسبت معکوس σ_0^2/n (واریانس شرطی میانگین نمونه، $\bar{X}$ با فرض θ) و معکوس σ^2 (واریانس توزیع پیشین) است. ■

تبصره: انتخاب یک توزیع پیشین نرمال

همان‌طور که در مثال ۵.۵.ب نشان داده شد در یک توزیع نرمال، انتخاب توزیع پیشین نرمال برای میانگین مجهول θ از نظر محاسباتی خیلی مناسبتر است، زیرا در این صورت برآوردگر بیز شکل مادهٔ رابطهٔ ۳.۵.۵ خواهد بود. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که چگونه بطور منطقی باید مشخص کنیم که یک توزیع نرمال وجود دارد که نشان‌دهندهٔ برداشت قبلی از میانگین مجهول است.

ابتدا منطقی به نظر می‌رسد مقداری را تعیین کنیم مثلاً μ، که احساس می‌کنیم با احتمال زیادی نزدیک θ است. یعنی ابتدا نمای توزیع پیشین را (که وقتی توزیع نرمال است با میانگین برابر است) تعیین می‌کنیم. سپس باید مشخص کنیم آیا توزیع پیشین حول μ متقارن است یا خیر. یعنی برای هر $a>0$، آیا می‌توان گفت که احتمال قرار گرفتن θ بین $\mu-a$ و μ با قرار گرفتن آن بین μ و $\mu+a$ یکسان است اگر جواب مثبت است آن‌گاه به‌عنوان یک فرض عمومی می‌پذیریم که برداشت قبلی در مورد θ را می‌توان برحسب توزیعی که نرمال با میانگین μ است بیان کرد. برای تعیین σ- انحراف معیار توزیع پیشین - بازهٔ اطمینانی را در نظر می‌گیریم که مرکز آن μ است و برداشت قبلی در

مورد این که θ را شامل شود ۹۰ درصد می‌باشد. برای مثال فرض کنید ۹۰ درصد (نه بیشتر و نه کمتر) معتقدیم که θ بین $\mu - a$ و $\mu + a$ قرار می‌گیرد. در این صورت چون برای یک متغیّر تصادفی نرمال θ با میانگین μ و واریانس σ^2 داریم

$$P\left\{-1.64 < \frac{\theta - \mu}{\sigma} < 1.64\right\} = .90$$

یا

$$P\{\mu - 1.64\sigma < \theta < \mu + 1.64\sigma\} = .90$$

منطقی به نظر می‌رسد که قرار می‌دهیم

$$1.64\sigma = a \qquad \text{یا} \qquad \sigma = \frac{a}{1.64}$$

بنابراین اگر برداشت قبلی را واقعاً بتوان بطور منطقی با یک توزیع نرمال توصیف کرد آن‌گاه این توزیع باید دارای میانگین μ و انحراف معیار $\sigma = a/1.64$ باشد. همچنین به‌عنوان یک آزمون در مورد این که آیا این توزیع برای برداشت قبلی مناسب است یا نه، می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که آیا ۹۵ درصد اطمینان داریم که θ بین $\mu - 1.96\sigma$ و $\mu + 1.96\sigma$ قرار دارد، یا آیا ۹۹ درصد اطمینان داریم که θ بین $\mu - 2.58\sigma$ و $\mu + 2.58\sigma$ قرار می‌گیرد که این فاصله‌ها با تساویهای زیر ارائه می‌شوند

$$P\left\{-1.96 < \frac{\theta - \mu}{\sigma} < 1.96\right\} = .95$$

$$P\left\{-2.58 < \frac{\theta - \mu}{\sigma} < 2.58\right\} = .99$$

که در آن θ نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است.

مثال ۵.۵.پ ـ تابع درستنمایی $f(x_1, \ldots, x_n|\sigma)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که θ دارای توزیع یکنواخت روی فاصله (a, b) است چگالی پسین θ با فرض $X_1, \ldots, X_n$ مساوی است با

$$f(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n|\theta)p(\theta)}{\int_a^b f(x_1, \ldots, x_n|\theta)p(\theta)\,d\theta}$$

$$= \frac{f(x_1, \ldots, x_n|\theta)}{\int_a^b f(x_1, \ldots, x_n|\theta)\,d\theta}\ , \quad a < \theta < b$$

اکنون نمای چگالی $f(\theta)$ مقداری از θ است که $f(\theta)$ را ماکزیمم کند. با توجه به مطلب فوق نتیجه می‌شود که نمای چگالی $f(\theta|x_1, \ldots, x_n)$، مقداری از θ است که $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ را ماکزیمم کند یعنی دقیقاً برآورد درستنمایی ماکزیمم θ [هنگامی که در فاصله (a, b) قرار دارد]. به‌عبارت دیگر هرگاه توزیع پیشین یکنواخت فرض شود برآورد درستنمایی ماکزیمم و نمای توزیع پسین مساوی‌اند. ■

اگر به جای برآورد نقطه‌ایی بخواهیم فاصله‌ایی پیدا کنیم که θ با احتمال مشخص، مثلاً $1-\alpha$ درون آن قرار گیرد می‌توانیم a و b را طوری اختیار کنیم که

$$\int_a^b f(\theta|x_1, \ldots, x_n)\, d\theta = 1 - \alpha$$

مثال ۵.۵.ت ـ فرض کنید که وقتی پیامی با مقدار s از ایستگاه A فرستاده می‌شود، مقدار پیامی که به ایستگاه B می‌رسد دارای توزیع نرمال با میانگین s و واریانس ۶۰ است. همچنین فرض کنید که از قبل بدانیم مقدار پیامی که از ایستگاه A فرستاده می‌شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۴۰ و واریانس ۱۰۰ باشد. اگر مقدار دریافت شده در مکان B، مساوی با ۴۰ باشد فاصله‌ایی تعیین کنید که با احتمال ۰/۹۵ شامل مقدار واقعی فرستاده شده باشد.

حل: از مثال ۵.۵.ب نتیجه می‌شود که توزیع شرطی S، مقدار پیام فرستاده شده، با این فرض که مقدار دریافت شده ۴۰ باشد، توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر است

$$E[S|\text{data}] = \frac{1/60}{1/60 + 1/100}40 + \frac{1/100}{1/60 + 1/100}50 = 43.75$$

$$\text{Var}(S|\text{data}) = \frac{1}{1/60 + 1/100} = 37.5$$

بنابراین با فرض این که مقدار دریافت شده ۴۰ است $(S - 43.75)/\sqrt{37.5}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است و در نتیجه

$$P\left\{-1.64 < \frac{S - 43.75}{\sqrt{37.5}} < 1.64|\text{data}\right\} = .95$$

یا

$$P\{43.75 - 1.64\sqrt{37.5} < S < 43.75 + 1.64\sqrt{37.5}|\text{data}\} = .95$$

یعنی با احتمال ۰/۹۵ مقدار پیام واقعی فرستاده شده در فاصله $(33.71, 53.79)$ قرار می‌گیرد.

مسائل

۱ ـ فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ایی از توزیعی با تابع چگالی زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x \geq \theta \\ 0 & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

الف) برآوردگر روش گشتاورهای θ را به‌دست آورید.

ب) برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ را به‌دست آورید.

۲ ـ الف) نشان دهید که وقتی U دارای توزیع یکنواخت روی $(0, 1)$ است، $-\log U$ دارای توزیع‌نمایی با پارامتر ۱ است.

ب) اگر X دارای توزیع‌نمایی با پارامتر ۱ باشد نشان دهید که $X + \theta$ دارای تابع چگالی مسألهٔ ۱ است.

پ) با استفاده از قسمتهای الف و ب و مقدار ثابت θ، مثلاً $\theta = 0.5$، برنامه‌ایی بنویسید که ۱۰ متغیّر تصادفی از تمرین ۱ را شبیه‌سازی کنند. سپس برآوردگر روش گشتاورها در برآوردگر درستنمایی ماکزیمم را با مقدار 0.5 مقایسه کنید. با استفاده از متغیّرهای تصادفی مختلف این‌کار را ۲۰ مرتبه تکرار کنید. در این حالت به نظر شما کدام‌یک از این ۲ برآوردگر بهترند؟

۳ ـ فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ایی از توزیع با تابع چگالی زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)} & x \geq 1 \\ 0 & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که برآوردگر روش گشتاورها و برآوردگر درستنمایی ماکزیمم با هم مساوی‌اند.

۴ ـ هرگاه $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ایی با تابع چگالی زیر باشد

$$f(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \qquad -\infty < x < \infty$$

برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ را به‌دست آورید.

۵ ـ فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ایی از یک جامعهٔ نرمال μ و σ^2 باشد. برآوردگر درستنمایی ماکزیمم σ^2 را هنگامی که μ معلوم است تعیین کنید. امید ریاضی این برآوردگر چقدر است؟

۶ ـ فرض کنید $X_1, ..., X_{2n+1}$ نمونه‌ایی از جامعهٔ نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم $\sigma^2 = 1$ باشد. دو برآوردگر ممکن μ عبارتند از الف) میانگین نمونه، $\bar{X}$ و ب) میانه نمونه، $X_{(n+1)}$، که برابر است با $(n+1)$ امین مقدار از لحاظ بزرگی در بین $2n+1$ مقدار

$X_1, ..., X_{2n+1}$. برای تعیین این که از لحاظ تجربی کدام‌یک از این دو برآورد بهتر عمل می‌کنند ۹ متغیّر تصادفی نرمال استاندارد شبیه‌سازی کرده و توان دوم خطای هر دو و توان دوم میانهٔ نمونه را محاسبه کنید. این کار را ۱۰ مرتبه تکرار کنید تا بتوانید متوسط توان دوم خطای هر دو برآوردگر را برآورد کنید. (تقریباً متوسط توان دوم خطای میانگین نمونه چقدر باید باشد؟) چه نتیجه‌ایی می‌توانید به‌دست آورید.

۷- در تعیین فاصلهٔ اطمینان برای میانگین جامعه نرمالی که واریانس آن معلوم است، نمونه‌ایی به چه بزرگی لازم است تا فاصله اطمینانی یک سوم فاصله اطمینان زمانی که حجم نمونه مساوی n است به‌دست آید؟

۸- اگر $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ایی ازجامعهٔ نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2 باشد، نشان دهید که $(-\infty, \bar{X} + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}]$ یک فاصله اطمینان چپ $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μ است.

۹- نمونه‌ایی به حجم ۲۰ سیگار برای تعیین محتوای نیکوتین آزمون شده است و متوسط ۱۲ مقدار مشاهده شده ۱/۲ میلی‌گرم بوده است. در صورتی که بدانیم انحراف معیار محتوای نیکوتین سیگارها $\sigma = 0.2$ میلی‌گرم است، یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۹ درصد برای میانگین محتوای نیکوتین این نوع سیگار به‌دست آورید.

۱۰- فرض‌کنید که درمسألهٔ ۹ واریانس‌جامعه قبل ازآزمایش معلوم نیست. اگر واریانس نمونه 0.04 باشد، یک فاصله اطمینان دوطرفه ۹۹ درصد برای میانگین محتوای نیکوتین سیگار پیدا کنید.

۱۱- در مسألهٔ ۱۰ مقدار c را طوری تعیین کنید که با «۹۹ درصد اطمینان» بتوان ادعا کرد که c از میانگین محتوای نیکوتین سیگار بزرگتر است.

۱۲- فرض کنید که وقتی از یک جامعهٔ نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 نمونه گیری می‌کنیم می‌خواهیم حجم نمونه، n، را برای تضمین این که اندازهٔ فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μ از A بزرگتر نیست تعیین کنیم که A و α مقادیر مفروضند. توضیح دهید چگونه می‌توانیم بطور تقریبی با دوبار نمونه گیری، ابتدا با زیرنمونه‌ایی به‌حجم ۳۰ و سپس انتخاب کل نمونه را با استفاده از نتایج زیرنمونهٔ اوّل انجام داد.

۱۳- داده‌های زیر نشان‌دهندهٔ ۲۴ اندازهٔ مستقل از نقطهٔ ذوب سرب می‌باشد

330°C	322°C	345°C
328.6°C	331°C	342°C
342.4°C	340.4°C	329.7°C
334°C	326.5°C	325.8°C
337.5°C	327.3°C	322.6°C
341°C	340°C	333°C
343.3°C	331°C	341°C
329.5°C	332.3°C	340°C

با فرض این که می‌توان این اندازه‌ها را به‌عنوان نمونه‌ایی نرمال در نظر گرفت که میانگین آن نقطهٔ ذوب واقعی سرب است یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۹ درصد به‌دست آورید .

۱۴ ـ اگر نمونه‌ایی به حجم ۱۶ دارای میانگین نمونه‌ایی ۴۲ و انحراف معیار نمونه‌ایی ۴/۶ باشد یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین تعیین کنید . جامعه را نرمال در نظر بگیرید .

۱۵ ـ در مسألهٔ ۱۳ اگر بدانیم که انحراف معیار $4^{\circ}C$ است آن را دوباره حل کنید .

۱۶ ـ بُرد نوع جدیدی گلولهٔ خمپاره مورد تحقیق قرار گرفته است . بُرد مشاهده شدهٔ ۲۰ نوع از این گلوله‌ها برحسب متر به صورت زیر است :

2100	1984	2072	1898
1950	1992	2096	2103
2043	2218	2244	2206
2210	2152	1962	2007
2018	2106	1938	1956

فرض کنید که بُرد گلوله دارای توزیع نرمال است ؛ مطلوب است الف) یک بازهٔ اطمینان دوطرفه ۹۵ درصد و ب) یک بازهٔ اطمینان دوطرفه ۹۹ درصد برای میانگین بُرد گلوله پ) مطلوب است بزرگترین مقدار v به‌قسمی که با «اطمینان ۹۵ درصد» کمتر از میانگین بُرد باشد .

۱۷ ـ در لوس‌آنجلس مطالعاتی برای تعیین غلظت منواکسید کربن در نزدیکی بزرگراهی انجام شده است . روش به‌کار رفته این بوده است که نمونه‌های هوا را در کیسه‌های مخصوص قرار داده و سپس غلظت اکسید کربن آنها را با استفاده از اسپکتروفتومتر تعیین نموده‌اند . اندازه‌ها برحسب ppm (اجزاء در میلیون) در طول یکسال عبارت بودند از 102.2, 98.4, 104.1, 101, 102.2, 100.4, 98.6, 88.2, 78.8, 83, 84.7, 94.8, 105.1, 106.2, 111.2, 108.3, 105.2, 103.2, 99, 98.8 . یک بازهٔ اطمینان ۹۵ دوطرفه برای میانگین غلظت منواکسیدکربن به‌دست آورید .

۱۸ ـ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ نشان‌دهندهٔ نمونه‌ایی تصادفی از توزیع نرمال است که میانگین و واریانس آن مجهول است . می‌خواهیم با استفاده از مقادیر مشاهده شده $X_1, \ldots, X_n$ یک فاصله که آن را فاصلهٔ پیش‌بینی نامیم ، به‌دست آوریم بطوری که با «اطمینان ۹۵ درصد» پیش‌بینی کند که X_{n+1} را شامل می‌شود ؛

الف) مطلوب است تعیین چنین فاصله‌ایی

(راهنمایی : توزیع $X_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ چیست ؟)

ب) معنی عبارت «با اطمینان ۹۵ درصد» را شرح دهید .

۱۹ - غلظت اکسیژن تجزیه شده روزانه در آب جاری یک ناحیه برای ۳۰ روز ثبت شده است اگر میانگین نمونه‌ایی این ۳۰ مقدار برابر ۲/۵ میلی‌گرم برلیتر و انحراف معیار آن ۲/۱۲ میلی‌گرم برلیتر باشد مقداری را تعیین کنید که با اطمینان ۹۵ درصد از میانگین غلظت روزانه تجاوز کند.

۲۰ - یک مهندس عمران می‌خواهد استحکام دو نوع مختلف بتون را اندازه‌گیری کند. یک نمونهٔ تصادفی شامل ۱۰ اندازه از نوع اوّل داده‌های زیر (برحسب psi) را به‌دست داده است

نوع ۱ : 3250, 3268, 4302, 3184, 3266, 3297, 3332, 3502, 3064, 3116

و از یک نمونهٔ ۱۰ تایی از نوع دوم داده‌های زیر به‌دست آمده است

نوع ۲ : 3094, 3106, 3004, 3066, 2984, 3124, 3316, 3212, 3380, 3018

اگر فرض کنیم که این نمونه‌ها نرمالند با یک واریانس مشترک، مطلوب است تعیین

الف) یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۵ درصد برای اختلاف میانگینها، یعنی $\mu_1 - \mu_2$

ب) یک فاصلهٔ اطمینان یک‌طرفه راست ۹۵ درصد برای $\mu_1 - \mu_2$

پ) یک فاصلهٔ اطمینان یک‌طرفه چپ ۹۵ درصد برای $\mu_1 - \mu_2$

۲۱ - نمونه‌های تصادفی مستقل از خروجی دو ماشین در یک خط تولید گرفته شده‌اند و وزن شیء مورد علاقه است. از ماشین اوّل یک نمونهٔ ۳۶ تایی گرفته شده که میانگین نمونه‌ایی وزن در آن ۱۲۰ گرم و واریانس آن ۴ است. از ماشین دوم یک نمونه ۶۴ تایی گرفته شده با میانگین نمونه‌ایی وزن ۱۳۰ گرم و واریانس نمونه‌ایی ۵، فرض شده است که وزن اشیاء از ماشین اوّل دارای توزیع نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ^2 و وزن اشیاء ماشین دوم دارای توزیع نرمال میانگین μ_2 و واریانس σ^2 است. (یعنی فرض شده است که واریانسها مساوی‌اند). یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹ درصد برای اختلاف میانگینها، یعنی $\mu_1 - \mu_2$، بسازید.

۲۲ - مسألهٔ ۲۱ را برای حالتی که از قبل بدانیم واریانسهای جامعه به ترتیب ۴ و ۵ هستند حل کنید.

۲۳ - داده‌های زیر زمانهای سوختن دو نوع مواد مخدر را برحسب ثانیه نشان می‌دهد

نوع I		نوع II	
481	572	526	537
506	561	511	582
527	501	556	605
661	487	542	558
501	524	491	578

یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای تفاضل میانگینهای زمان سوختن به‌دست آورید. فرض کنید توزیعها نرمال با واریانسهای مساوی و مجهول است.

۲۴ ـ ظرفیتهای ۱۰ باتری (برحسب آمپر ساعت) به‌صورت زیر ثبت شده‌اند.

140, 136, 150, 144, 148, 152, 138, 141, 143, 151

الف) واریانس جامعه، σ^2، را برآورد کنید.
ب) یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۹ درصد برای σ^2 به‌دست آورید.
پ) مقدار v راطوری‌تعیین‌کنیدکه‌بتوانیم «بااطمینان ۹۰درصد» بیان‌کنیم‌که σ^2 از v کمتراست.

۲۵ ـ مطلوب است تعیین یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۵ درصد برای واریانس ضخامت نوعی میخ براساس داده‌های زیر

6.68	6.66	6.62	6.72
6.76	6.67	6.70	6.72
6.78	6.66	6.76	6.72
6.76	6.70	6.76	6.76
6.74	6.74	6.81	6.66
6.64	6.79	6.72	6.82
6.81	6.77	6.60	6.72
6.74	6.70	6.64	6.78
6.70	6.70	6.75	6.79

فرض کنید جامعه نرمال است.

۲۶ ـ ۱۰ واحد باروت موشک مورد آزمایش قرار گرفته است و زمان سوخت آنها (برحسب ثانیه) به‌صورت زیر ثبت شده‌اند.

50.6	69.8
54.8	53.6
54.4	66.1
44.9	48
42.1	37.8

مطلوب است تعیین یک فاصله اطمینان دوطرفه برای واریانس زمان سوختن (فرض کنید که جامعه نرمال است).

۲۷ ـ فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی تصادفی از جامعهٔ نرمال است. توضیح دهید که وقتی میانگین جامعه، μ معلوم است چگونه یک بازهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای σ^2 به‌دست می‌آید. توضیح دهید که چرا دانستن μ، برآوردگر فاصله‌ای را در مقایسه با حالتی که مجهول است بهتر می‌کند.

۲۸ ـ مسألهٔ ۲۶ را با این فرض که میانگین زمان سوختن ۵۳/۶ ثانیه است، حل کنید.

۲۹- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ای از جامعه‌ایی نرمال با میانگین معلوم μ_1 و واریانس مجهول σ^2_1 و $Y_1, ..., Y_m$ نمونه‌ایی مستقل از نمونه اوّل و از جامعه‌ایی نرمال با میانگین معلوم، μ_2 و واریانس مجهول σ^2_2 باشند یک فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد برای σ^2_1/σ^2_2 به‌دست آورید.

(راهنمایی: از تعریف متغیّر تصادفی F و این واقعیت که $(n - 1)S^2_x/\sigma^2_1$ و $(m - 1)S^2_y/\sigma^2_2$ متغیّرهای تصادفی مستقل کی‌دواند استفاده کنید).

۳۰- دو متخصص تجزیهٔ نتایج مکرری در مورد شوری آب مشخصی گرفته‌اند. فرض کنید نتایج متخصص i ام تشکیل نمونه‌ایی تصادفی از جامعه نرمال با واریانس σ^2_i بدهد. $i = 1, 2$. مطلوب است یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۵ درصد برای σ^2_1/σ^2_2، هرگاه داده‌ها به صورت زیر باشند.

اندازه‌های کُدبندی شده شوری

متخصص 1	متخصص 2
0.46	0.82
0.62	0.61
0.37	0.89
0.40	0.51
0.44	0.33
0.58	0.48
0.48	0.23
0.53	0.25
	0.67
	0.88

۳۱- در یک بررسی جدید مشاهده شده است که از ۱۴۰ سنگ آسمانی ۷۹ تا با سرعت کمتر از ۲۵ مایل بر ثانیه وارد جوّ شده‌اند اگر $\hat{p} = 79/140$ را به‌عنوان برآوردی از این احتمال که یک سنگ آسمانی دلخواه با سرعتی کمتر از ۲۵ مایل بر ثانیه وارد جوّ بشود، فرض کنیم، در مورد ماکزیمم خطای برآورد با اطمینان ۹۹ درصد چه می‌توان گفت؟

۳۲- در نمونه‌ایی تصادفی شامل ۱۰۰ شیء از یک خط تولید، مشخص شده است که ۱۷ تا از آنها معیوبند. یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفهٔ ۹۵ درصد برای احتمال این که شیء تولید شده معیوب باشد بسازید همچنین یک فاصلهٔ اطمینان بالایی ۹۹ درصد برای این مقدار به‌دست آورید. در این‌جا چه فرضهایی می‌کنید؟

۳۳- از ۱۰۰ مورد افرادی که تصادفاً مشخص شده دارای سرطان ریه‌اند ۷۶ تای آنها کمتر از مدّت ۵ سال پس از کشف سرطان فوت کرده‌اند.

الف) مطلوب است برآورد احتمال این که شخص دچار سرطان ریه، در زمان کمتر از ۵ سال فوت کند.

ب) چند نمونهٔ اضافی لازم است که ۹۵ درصد اطمینان داشت که خطای برآورد احتمال قسمت الف کمتر از ۰/۰۲ است ؟

۳۴ـ فرض کنید طول عمر باتریها دارای توزیع‌نمایی با میانگین θ است . اگر متوسط نمونه‌ایی شامل ۱۰ باتری ۳۶ ساعت باشد یک فاصلهٔ اطمینان دوطرفه ۹۵ درصد برای θ تعیین کنید .

۳۵ـ مطلوب است تعیین فاصله‌های اطمینان یک‌طرفه راست و چپ $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای θ در مسألهٔ ۳۴ .

۳۶ـ در مثال ۴.۵.الف $r(d_i, \theta)$ را برای برآوردگرهای d_1، d_2 و d_3 محاسبه کنید .

۳۷ـ فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ایی تصادفی از جامعه‌ایی است که مقدار میانگین θ در آن مجهول است از نتایج مثال ۴.۵.ب استفاده کنید برای استدلال در مورد این که در میان تمام برآوردگرهای نااریب θ به شکل $\sum^n_{i=1} \lambda_i X_i$ ، $\sum^n_{i=1} \lambda_i = 1$ آن‌که مینیمم میانگین توان دوم خطاست به ازای $\lambda_i = 1/n$ ، $i = 1, ..., n$ به‌دست می‌آید .

۳۸ـ دو نمونهٔ تصادفی مستقل به ترتیب با حجمهای n ، m از دو جامعهٔ نرمال با واریانس یکسان σ^2 را در نظر بگیرید . یعنی $X_1, ..., X_n$ و $Y_1, ..., Y_m$ نمونه‌های مستقل از دو جامعه نرمالند که هر یک دارای واریانس σ^2 می‌باشند ؛ فرض کنید S^2_x و S^2_y نشان‌دهندهٔ واریانسهای نمونه باشند . در این صورت هر دوی S^2_x و S^2_y برآوردگرهای نااریب σ^2 هستند . با استفاده از نتایج مثال ۵.۵.ب و این واقعیت که اگر χ^2_k متغیّر تصادفی کی‌دو با k درجه آزادی باشد آن‌گاه $\mathrm{Var}(\chi^2_k) = 2k$ ، نشان دهید که در بین برآوردگرهای σ^2 به شکل $\lambda S^2_x + 1\ (1-\lambda) S^2_y$ برآوردکنندهٔ زیر دارای می‌نیمم میانگین توان دوم خطاست .

$$\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}$$

این برآوردگر را **برآوردگر روی هم** σ^2 می‌نامند .

۳۹ـ دو برآوردگر d_1 و d_2 از پارامتر θ را در نظر بگیرید . اگر $E(d_1) = \theta$ ، $\mathrm{Var}(d_1) = 6$ ، $E[d_2] = \theta + 2$ ، $\mathrm{Var}(d_2) = 2$ کدام‌یک از این دو برآوردگر بهتر است ؟

۴۰ـ فرض کنید تصادفاتی که روزانه در یک ناحیه معین رخ می‌دهد دارای توزیع پواسن با میانگین مجهول λ است . فرض کنید که آماردان براساس تجربیات قبلی در نواحی صنعتی مشابه می‌تواند برداشت ابتدایی خود را در مورد λ با یک توزیع‌نمایی با پارامتر ۱ بیان کند . یعنی چگالی پیشین برابر است با

$$p(\lambda) = e^{-\lambda} \qquad 0 < \lambda < \infty$$

اگر مجموعاً ۸۳ تصادف در ۱۰ روز آینده صورت گیرد برآوردگر بیز λ را به‌دست

آورید. برآوردگر درستنمایی ماکزیمم λ چیست؟

۴۱- طول عمر کارکرد چیپهای کامپیوتری تولید شده در یک کارخانه مفروض نیمه‌های دارای توزیع‌نمایی با میانگین $1/\lambda$ است. فرض کنید که توزیع پیشین λ، توزیع گاما با تابع چگالی زیر است

$$g(x) = \frac{e^{-x}x^2}{2} \qquad 0 < x < \infty$$

اگر متوسط عمر ۱۰ چیپ اوّلیهٔ آزمایش شده ۴/۶ ساعت باشد، برآوردگر بیز λ را به‌دست آورید.

۴۲- هر شیء که تولید می‌شود بطور مستقل با احتمال p معیوب است. اگر توزیع پیشین p روی $(0, 1)$ یکنواخت باشد، مطلوب است احتمال پسین این‌که p کمتراز ۰/۲ باشد بافرض‌این که

الف) از نمونه‌ایی به حجم ۱۰، ۲ تا معیوب به‌دست آمده است.

ب) از نمونه‌ایی به حجم ۱۰ تعداد ۱ معیوب به‌دست آمده است.

پ) از نمونه‌ایی به حجم ۱۰ تعداد ۱۰ معیوب به‌دست آمده است.

۴۳- مقاومت در برابر پاره شدن نوع معینی پارچه برای یک نمونه ۱۰ تایی اندازه‌گیری شده است. توزیع مورد اندازه‌گیری نرمال با میانگین مجهول λ و انحراف استاندارد ۳ است. همچنین فرض کنید که براساس تجربیات قبلی بدانیم که میانگین مجهول دارای توزیع پیشین نرمال با میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۲ است. اگر متوسط مقاومت در برابر پاره شدن یک نمونه ۲۰ تایی ۱۸۲ باشد، ناحیه‌ایی را تعیین کنید که با احتمال ۰/۹۵، θ را شامل شود.

فصل ششم

آزمون فرض

۱ - مقدمه

مانند فصل قبل ، فرض کنید یک نمونهٔ تصادفی از توزیع جامعه‌ایی که به یک بُردار مجهول از پارامترها بستگی دارد مشاهده شود . امّا به‌جای این که بخواهیم پارامترهای مجهول را برآورد کنیم ، این بار می‌خواهیم از نتایج نمونه ، چند فرض خاص مرتبط با آنها را آزمون کنیم . برای روشن شدن مطلب ، فرض کنید مؤسسه‌ایی مقدار زیادی کابل خریده است . این کابلها تضمین شده‌اند که حداقل متوسط مقاومت آنها ۷۰۰۰ پوند در اینچ است . برای تحقیق درستی این ادّعا ، کارخانه تصمیم می‌گیرد نمونه‌ایی تصادفی به حجم ۱۰ کابل را انتخاب کرده ، مقاومت آنها را تعیین کند و سپس از نتیجهٔ حاصل برای تصمیم‌گیری در مورد پذیرفتن ادّعای سازندهٔ کابلها که میانگین جامعه حداقل برابر ۷۰۰۰ پوند در اینچ است ، استفاده کند .

یک فرض آماری معمولاً گزاره‌ایی راجع به مجموعه‌ایی از پارامترهای توزیع یک جامعه است . علت این که آن را یک فرض می‌نامند . این است که نمی‌دانیم درست است یا خیر . مسألهٔ اصلی تعمیم روشی است برای تعیین این که مقادیر نمونهٔ تصادفی حاصل از جامعه با فرض مورد نظر سازگار است یا خیر . مثلاً جامعه‌ایی را در نظر بگیرید که دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول θ و واریانس ۱ است . گزارهٔ : «θ کمتر از ۱ است» یک فرض آماری است که آن را می‌توانیم با مشاهدهٔ یک نمونهٔ تصادفی از این جامعه آزمون کنیم . اگر نمونه تصادفی با فرض مفروض سازگار باشد ، گوییم فرض «پذیرفته» می‌شود و در غیر این صورت فرض «رد» می‌شود .

باید توجّه داشت که در قبول یک فرض معین ، ادّعا نمی‌کنیم که فرض درست است . بلکه می‌گوییم که داده‌های حاصل به نظر می‌آید که با آن سازگار هستند . برای مثال در حالت نرمال $(\theta, 1)$ اگر از نمونه‌ایی به حجم ۱۰ میانگین ۱/۲۵ به‌دست آید ، آن‌گاه هر چند این نتیجه را نمی‌توان به‌عنوان شاهدی به نفع فرض «$\theta \le 1$» در نظر گرفت ولی با این فرض ناسازگار نیست و در نتیجه پذیرفته می‌شود . از طرف دیگر اگر نمونه‌ایی به حجم ۱۰ دارای میانگین ۳ باشد آن‌گاه هر چند

مقدار حاصل از نمونهٔ به این بزرگی ، حتی وقتی $\theta > 1$ است امکان‌پذیر است ولی بعید به نظر می‌رسد که با این فرض سازگار باشد ، در نتیجه فرض را رد می‌کنیم .

۲- سطوح معنی‌داری

جامعه‌ایی را با توزیع F_θ در نظر بگیرید که در آن θ مجهول است و فرض کنید بخواهیم فرض معینی را در بارهٔ θ آزمون کنیم . این فرض را با H_0 نشان می‌دهیم و آن را **فرض صفر** می‌نامیم . مثلاً اگر F_θ توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس ۱ باشد آن‌گاه دو فرض صفر در باره θ عبارتند از

$$H_0 : \theta = 1$$
$$H_0 : \theta \leq 1$$

اوّلین فرض بیان می‌کند که جامعهٔ نرمال با میانگین ۱ و واریانس ۱ است ، در صورتی که فرض دوم بیان می‌کند که جامعهٔ نرمال با واریانس ۱ و میانگین کمتر یا مساوی ۱ است . باید توجه کرد که فرض صفر (a) وقتی درست است که بطور کامل توزیع جامعه را معین کند ، در صورتی که فرض صفر (b) چنین نیست . فرضی که با درست بودن آن توزیع جامعه بطور کامل معین شود **فرض ساده** نامیده می‌شود ؛ در غیر این صورت آن را **فرض مرکب** گویند .

حال فرض کنید برای آزمون یک فرض صفر معین H_0 نمونه‌ایی به حجم n ، مانند $X_1, ..., X_n$ از این جامعه مشاهده شده است . برمبنای این n مقدار ، باید تصمیم بگیریم که H_0 را بپذیریم یا رد کنیم . یک آزمون برای H_0 را می‌توان با تعریف یک ناحیهٔ C در فضای n بُعدی مشخص کرد . بدین صورت که فرض رد می‌شود اگر نمونهٔ $X_1, ..., X_n$ در C قرار گیرد در غیر این صورت آن را می‌پذیریم . ناحیهٔ C را **ناحیهٔ بحرانی** می‌نامند . به عبارت دیگر آزمون آماری با ناحیه بحرانی C بدین صورت تعیین می‌شود که

فرض H_0 را بپذیریم اگر $\quad (X_1, X_2, \ldots, X_n) \notin C$

و

فرض H_0 را رد کنیم اگر $\quad (X_1, \ldots, X_n) \in C$

برای مثال یک آزمون متداول برای این فرض که θ ، میانگین جامعه نرمال با واریانس ۱ ، مساوی ۱ است دارای ناحیه بحرانی زیر است

$$C = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - 1 \right| > \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right\} \tag{۱.۲.۶}$$

پس این آزمون ، فرض صفر $\theta = 1$ را رد می‌کند وقتی تفاضل میانگین نمونه از ۱ بیشتر از ۱/۹۶

تقسیم بر جذر حجم نمونه باشد.

توجه به این نکته مهم است که در آزمون یک فرض صفر H_0، دو نوع خطا وجود دارد. یکی را **خطای نوع I** می‌نامند و هنگامی رخ می‌دهد که فرض H_0 را رد می‌کنیم در حالی که H_0 درست است و خطای دیگر که **خطای نوع II** نامیده می‌شود زمانی است که فرض H_0 را می‌پذیریم در صورتی که H_0 نادرست است. همان‌طور که قبلاً تذکر داده شد، هدف یک آزمون آماری برای فرض H_0 این نیست که H_0 درست است یا خیر، بلکه تعیین سازگاری اعتبار آن با داده‌های حاصل است. بنابراین، با این هدف منطقی به نظر می‌رسد که H_0 فقط زمانی رد شود که با فرض درست بودن آن، داده‌های حاصل خیلی غیرمحتمل باشند. روش کلاسیک انجام کار عبارت است از تعیین یک مقدار α و سپس پیدا کردن آزمونی با این خاصیت که وقتی H_0 درست است احتمال رد کردن H_0 هرگز از α بیشتر باشد. مقدار α را **سطح معنی‌دار بودن آزمون** می‌نامند و معمولاً آن را از قبل با انتخاب مقادیری مانند $\alpha = 0.1, 0.05, 0.005$ مشخص می‌کنند. به عبارت دیگر روش کلاسیک آزمون بدین صورت است که مقدار ثابتی مانند α را انتخاب می‌کنند و سپس می‌خواهند آزمون دارای این خاصیت باشد که احتمال خطای نوع I هرگز از α بیشتر نشود.

حال فرض کنید که بخواهیم آزمونی را در مورد θ، پارامتر مجهولی در جامعه، انجام دهیم. بخصوص برای مجموعه‌ای از مقادیر پارامتر مانند w، فرض کنید بخواهیم فرض زیر را آزمون کنیم

$$H_0 : \theta \in w$$

یک روش معمول برای آزمون H_0 در سطح معنی‌دار α بدین صورت است که ابتدا یک برآورد نقطه‌ای مانند $d(\mathbf{X})$ را تعیین می‌کنیم. سپس فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر $d(\mathbf{X})$ از ناحیه w «دور» باشد. امّا برای تعیین این که چقدر باید «دور» باشد تا رد H_0 منطقی باشد نیاز به توزیع $d(\mathbf{X})$ هنگامی که H_0 درست است، داریم. زیرا با استفاده از آن می‌توانیم یک ناحیهٔ بحرانی مناسب برای آزمون تعیین کنیم که دارای سطح معنی‌داری α باشد برای مثال آزمون این که میانگین توزیع نرمال $(\theta, 1)$ برابر ۱ است، با معادلهٔ ۱.۲.۶ داده می‌شود و فرض را رد می‌کند هرگاه فاصله برآورد نقطه‌ایی θ ـ یعنی میانگین نمونه ـ از ۱ دورتر از $1/96/\sqrt{n}$ باشد. همان‌طور که در بخش بعد خواهیم دید مقدار $1/96/\sqrt{n}$ برای رسیدن به سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$ انتخاب شده است.

۳- آزمونهای مربوط به میانگین یک توزیع نرمال

۳-۱ حالتی که واریانس معلوم است

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی به حجم n از توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس معلوم σ^2

باشد می‌خواهیم فرض صفر

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

را در مقابل فرض

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

آزمون کنیم که در آن μ_0 یک مقدار ثابت مشخص است .
چون $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ یک برآوردگر نقطه‌ایی منطقی برای μ است ، معقول به‌نظر می‌رسد که فرض H_0 را بپذیریم اگر $\bar{X}$ خیلی از μ_0 دور نباشد. یعنی ناحیهٔ بحرانی این آزمون باید به شکل زیر باشد

$$C = \{ X_1, \ldots, X_n : |\bar{X} - \mu_0| > c \} \qquad (۱.۳.۶)$$

که در آن c بطور مناسب انتخاب می‌شود .
اگر بخواهیم سطح معنی‌داری آزمون ، α باشد در آن صورت باید مقدار بحرانی c در معادلهٔ ۱.۳.۶ به قسمی انتخاب شود که خطای نوع I برابر α شود ، یعنی باید c طوری باشد که

$$P_{\mu_0}\{|\bar{X} - \mu_0| > c\} = \alpha \qquad (۲.۳.۶)$$

که درآن P_{μ_0} نشان می‌دهد که احتمال فوق تحت فرض $\mu = \mu_0$ محاسبه شده است . امّا وقتی $\mu = \mu_0$، $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ_0 و واریانس σ^2/n است . پس متغیّر

$$Z \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است . حال تساوی ۲.۳.۶ معادل است با

$$P\left\{|Z| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = \alpha$$

یا به عبارت دیگر

$$2P\left\{Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = \alpha$$

که در آن Z یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد است . از طرفی می‌دانیم که

$$P\{Z > z_{\alpha/2}\} = \alpha/2$$

در نتیجه

$$\frac{c\sqrt{n}}{\sigma} = z_{\alpha/2}$$

یا

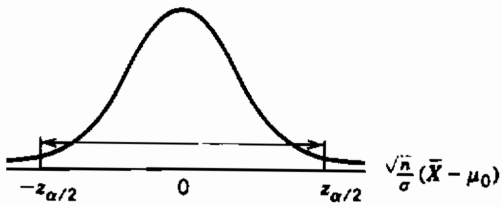
$$c = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

پس ، آزمون با سطح معنی‌داری α ، فرض H_0 را رد می‌کند اگر $|\bar{X} - \mu_0| > z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ و در غیراین‌صورت آن را می‌پذیرد ؛ یا به عبارت معادل

(۳.۳.۶) فرض H_0 رد می‌شود $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu_0| > z_{\alpha/2}$

فرض H_0 پذیرفته می‌شود $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X} - \mu| \leq z_{\alpha/2}$

این مطلب را می‌توان به شکل زیر نشان داد :



شکل ۱.۳.۶

این منحنی ، نمایش تابع چگالی نرمال استاندارد است . [که همان چگالی آمارهٔ آزمون $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$ است ، وقتی که H_0 درست باشد] .

مثال ۳.۶.الف ـ می‌دانیم که هرگاه پیامی با میانگین μ از ایستگاه A فرستاده شود آن‌گاه مقداری که به ایستگاه B می‌رسد دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار ۲ است . یعنی پارازیت تصادفی که به پیام اضافه می‌شود یک متغیّر تصادفی $N(0, 4)$ است . برای افرادی که در ایستگاه B هستند دلایلی وجود دارد که امروز نسبت به ارسال $\mu = 8$ مشکوک باشند . این فرض را آزمون کنید اگر این پیام ۵ بار بطور مستقل ارسال شود و مقدار متوسط دریافت در ایستگاه B برابر با $\bar{X} = 9.5$ شود .

حل : فرض کنید آزمون را در سطح معنی‌داری ۵ درصد انجام دهیم . ابتدا مقدار آمارهٔ آزمون را

محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X}-\mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{2}(1.5) = 1.68$$

چون این مقدار کمتر از $z_{.025} = 1.96$ است فرض پذیرفته می‌شود. به عبارت دیگر داده‌ها با فرض صفر ناسازگار نیستند، بدین معنی که یک میانگین نمونه با این فاصله از ۸، وقتی میانگین واقعی برابر ۸ است، در ۵ درصد از دفعات دور از انتظار نیست ولی باید توجه داشت که اگر سطح معنی‌دار بودن بیشتری انتخاب می‌شد ـ مثلاً $\alpha = .1$ ـ در آن صورت فرض H_0 رد می‌شود. زیرا $z_{.05} = 1.64$ که کمتر از ۱/۶۸ است. پس اگر آزمونی می‌داشتیم که H_0 را در ۱۰ درصد حالات رد می‌کرد، وقتی H_0 درست بود، در آن صورت فرض H_0 رد می‌شد.

سطح معنی‌داری «درست» در یک وضعیت مفروض به شرایط خاص آن وضعیت بستگی دارد. مثلاً اگر در صورتی که H_0 درست باشد، رد کردن آن هزینه‌های زیادی داشته باشد، باید خیلی محتاط عمل کرد و سطح معنی‌داربودن را 0.05 یا 0.01 اختیار نمود. همچنین اگر قویاً احساس می‌شود که H_0 درست است باید شاهد خیلی قوی موجود باشد تا H_0 را رد کنیم. (یعنی در این حالت باید سطح معنی‌داری را خیلی پایین اختیار کنیم). ■

آزمون داده شده در معادلهٔ ۲.۳.۶ را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد: برای یک مشاهده آمارهٔ آزمون $(\sqrt{n}/\sigma)|\bar{X}-\mu_0|$، که به آن v گوییم، آزمون می‌گوید هنگامی که H_0 درست است فرض صفر رد می‌شود اگر احتمال این که آمارهٔ آزمون بزرگتر از v باشد، کمتر یا مساوی سطح معنی‌داری α شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که می‌توان قبول یا رد فرض صفر را ابتدا با محاسبهٔ مقدار آمارهٔ آزمون و سپس محاسبهٔ احتمال این که (قدر مطلق) یک متغیّر تصادفی نرمال استاندارد از این مقدار بیشتر نشود تعیین کرد. این احتمال که به آن "*p-value*" آزمون می‌گویند سطح معنی‌داری بحرانی را مشخص می‌کند. بدین معنی که H_0 پذیرفته می‌شود اگر سطح معنی‌داری α کمتر از "*p*- value" باشد و H_0 رد می‌شود اگر بزرگتر یا مساوی آن باشد.

در عمل، اغلب سطح معنی‌داری از قبل مشخص نمی‌شود بلکه داده‌ها را برای تعیین *p*-value بررسی می‌کنند. گاهی اوقات این سطح معنی‌داری خیلی بیشتر از آن چیزی است که می‌خواهیم و بنابراین می‌توان بلافاصله فرض صفر را پذیرفت.

مثال ۳.۶.ب ـ در مثال ۳.۶.الف فرض کنید میانگین ۵ مقدار دریافت شده مساوی با $\bar{X} = 8.5$ است. در این حالت

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{X}-\mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{4} = .559$$

چون

$$P\{|Z| > .559\} = 2P\{Z > .559\} = 2 \times .288 = .576$$ (از جدول الف -۳-۵-۱- الف یا برنامه ۳-۵-۱- الف

نتیجه می‌شود که p-value برابر .576 است . پس فرض H_0 که می‌گوید پیامی ارسالی دارای مقدار ۸ است ، در هر سطح معنی‌داری $\alpha < .576$ باید پذیرفته شود . چون بدیهی است که ما هیچ وقت فرض صفر را نمی‌خواهیم با سطح معنی‌داری به بزرگی .576 آزمون کنیم ، در نتیجه H_0 پذیرفته می‌شود . ■

تاکنون راجع به احتمال خطای نوع II ، یعنی احتمال قبول فرض صفر وقتی مقدار واقعی میانگین ، μ، برابر μ_0 نیست ، صحبت نکرده‌ایم . این احتمال به مقدار μ بستگی دارد . بنابراین ابتدا $\beta(\mu)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\beta(\mu) = P_\mu\{H_0 \text{ قبول}\}$$
$$= P_\mu\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2}\right\}$$
$$= P_\mu\left\{-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right\}$$

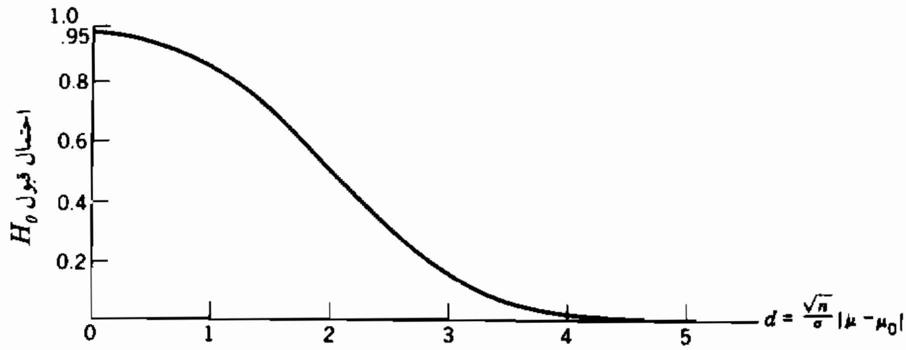
تابع $\beta(\mu)$ را **منحنی شاخص عملکرد** (یا OC) می‌نامند و نشان‌دهندهٔ این احتمال است که H_0 پذیرفته می‌شود هرگاه میانگین واقعی برابر μ است .

برای محاسبهٔ این احتمال از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2/n است ؛ در نتیجه

$$Z \equiv \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

بنابراین

$$\beta(\mu) = P_\mu\left\{-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right\}$$
$$= P_\mu\left\{-z_{\alpha/2} - \frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X}-\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2} - \frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \qquad (۶.۳.۴)$$
$$= P\left\{\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} \le Z \le \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right\}$$
$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right)$$



شکل ۲.۳.۶ : منحنی OC برای آزمون دوطرفهٔ نرمال و سطح معنی‌داری $\alpha = .05$

برای یک مقدار ثابت سطح معنی‌داری α منحنی OC که از معادلهٔ ۲.۳.۶ به‌دست می‌آید نسبت به μ_0 متقارن است و در واقع فقط از طریق $(\sqrt{n}/\sigma)|\mu - \mu_0|$ به μ بستگی دارد . این منحنی با تغییر μ به $d = (\sqrt{n}/\sigma)|\mu - \mu_0|$ در شکل ۲.۳.۶ به ازای $\alpha = .05$ نشان داده شده است .

مثال ۳.۶.پ ـ برای مسألهٔ مثال ۳.۶.الف می‌خواهیم احتمال قبول فرض صفر $\mu = 8$ را وقتی مقدار واقعی برابر ۱۰ است حساب کنیم . بدین منظور داریم

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \times 2 = -\sqrt{5}$$

چون $z_{.025} = 1.96$ احتمال مطلوب است از معادلهٔ ۲.۳.۶ به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
&\Phi(-\sqrt{5} + 1.96) - \Phi(-\sqrt{5} - 1.96) \\
&\quad = 1 - \Phi(\sqrt{5} - 1.96) - [1 - \Phi(\sqrt{5} + 1.96)] \\
&\quad = \Phi(4.196) - \Phi(.276) \\
&\quad = .392. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

تبصره

تابع $1 - \beta(\mu)$ را **تابع توان** آزمون گویند . پس برای یک مقدار مفروض μ توان آزمون برابر احتمال رد H_0 است ، وقتی μ مقدار واقعی است .

تابع شاخص عملگر در تعیین حجم نمونهٔ لازم برای رسیدن به خطای نوع II مفید است . مثلاً ، فرض کنید که بخواهیم حجم نمونه n را به قسمی اختیار کنیم که احتمال قبول $H_0 : \mu = \mu_0$ وقتی مقدار واقعی میانگین μ_1 است بیشتر از β نباشد . یعنی n به قسمی باشد که

$$\beta(\mu_1) = \beta$$

امّا با توجه به معادلهٔ (۴.۳.۶) این تساوی معادل است با

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} + z_{\alpha/2}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} - z_{\alpha/2}\right) = \beta \qquad (۵.۳.۶)$$

هر چند این معادله را نمی‌توان بطور تحلیلی برای n حل کرد، جواب آن را می‌توان از جدول توزیع نرمال استاندارد به‌دست آورد. علاوه بر آن یک مقدار تقریبی آن را می‌توان از معادلهٔ ۵.۳.۶ به‌صورت زیر به‌دست آورد. ابتدا فرض کنید $\mu_1 > \mu_0$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2} \le -z_{\alpha/2}$$

چون Φ یک تابع صعودی است نتیجه می‌شود که

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right) \le \Phi(-z_{\alpha/2}) = P\{Z \le -z_{\alpha/2}\} = P\{Z \ge z_{\alpha/2}\} = \alpha/2$$

پس، می‌توان نوشت

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right) \approx 0$$

در نتیجه از معادلهٔ ۵.۳.۶ داریم

$$\beta \approx \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\alpha/2}\right) \qquad (۶.۳.۶)$$

یا چون

$$\beta = P\{Z > z_\beta\} = P\{Z < -z_\beta\} = \Phi(-z_\beta)$$

از معادلهٔ ۶.۳.۶ داریم

$$-z_\beta \approx (\mu_0 - \mu_1)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} + z_{\alpha/2}$$

یا

$$n \approx \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2\sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \qquad (۷.۳.۶)$$

در حالت $\mu_0 > \mu_1$ نیز همین تقریب به‌دست می‌آید. (جزئیات کار به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود) پس معادلهٔ (۷.۳.۶) در همه حالات، تقریبی معقول برای حجم نمونه لازم خواهد بود، به قسمی که خطای نوع II در مقدار $\mu = \mu_1$ تقریباً برابر β شود.

مثال ۳.۶.ت ـ در مثال ۳.۶.الف چند پیام باید ارسال شود تا آزمون فرض $H_0 : \mu = 8$ در سطح 0.05 با احتمال حداقل ۷۵ درصد فرض صفر را وقتی $\mu = 9.2$ رد کند؟

حل: چون $z_{.025} = 1.96$ و $z_{.25} = .67$ از تقریب ۷.۳.۶ نتیجه می‌شود

$$n = \frac{(1.96 + .67)^2}{(1.2)^2}4 = 19.21$$

پس لازم است نمونه‌ایی به حجم ۲۰ انتخاب کنیم. از معادلهٔ ۴.۳.۶ دیده می‌شود که با $n = 20$

$$\begin{aligned}\beta(9.2) &= \Phi\left(-\frac{1.2\sqrt{20}}{2} + 1.96\right) - \Phi\left(-\frac{1.2\sqrt{20}}{2} - 1.96\right) \\ &= \Phi(-.723) - \Phi(-4.643) \\ &= 1 - \Phi(.723) \\ &= .235. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

۱.۱.۳ آزمونهای یک‌طرفه ـ برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_0$ آزمونی را انتخاب کردیم که وقتی $\bar{X}$ از μ_0 دور بود، فرض صفر رد می‌کرد، یعنی یک مقدار خیلی کوچک یا یک مقدار خیلی بزرگ $\bar{X}$ (به‌عنوان یک‌برآوردگر) دلیل بر آن است که μ مساوی μ_0 نیست. حال اگر فرض مقابل μ مساوی μ_0، فرض μ بزرگتراز μ_0 باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ یعنی اگر فرض مقابل $H_0 : \mu = \mu_0$، فرض $H_1 : \mu > \mu_0$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ روشن است که در این حالت وقتی $\bar{X}$ کوچک است، نباید H_0 را رد کنیم. (زیرا هنگامی که H_0 درست است یک مقدار کوچک برای $\bar{X}$ بیشتر محتمل است تا وقتی که H_1 درست است). بنابراین برای آزمون

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad (۸.۳.۶)$$

باید H_0 را رد کنیم هرگاه $\bar{X}$، برآورد نقطه‌ایی μ_0، خیلی بزرگتر از μ_0 باشد. یعنی، ناحیهٔ بحرانی باید به‌صورت زیر باشد

$$C = \{(X_1, \ldots, X_n) : \bar{X} - \mu_0 > c\}$$

چون احتمال رد H_0، هنگامی که H_0 درست است (یعنی $\mu \geq \mu_0$) باید برابر α باشد، پس c باید

در شرط زیر صدق کند .

$$P_{\mu_0}\{\bar{X}-\mu_0 > c\} = \alpha \qquad (۹.۳.۶)$$

امّا چون ، با فرض درست بودن H_0

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است ، تساوی ۹.۳.۶ معادل است با

$$P\left\{Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = \alpha$$

که در آن Z نرمال استاندارد است . امّا چون

$$P\{Z \ge z_\alpha\} = \alpha$$

داریم

$$c = \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$$

پس ، آزمون فرض ۸.۳.۶ ، فرض H_0 را رد می‌کند اگر $\bar{X} - \mu_0 > z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$ و در غیر این‌صورت آن را می‌پذیرد . یا به عبارت دیگر

(۱۰.۳.۶)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu_0) \le z_\alpha \quad \text{فرض } H_0 \text{ پذیرفته می‌شود اگر}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu_0) > z_\alpha \quad \text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود اگر}$$

و آن را ناحیه بحرانی **یک‌طرفه** می‌نامند . (زیرا فرض H_0 را فقط وقتی رد می‌کند که $\bar{X}$ بزرگ باشد) همین‌طور آزمون فرض

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

یک مسألهٔ آزمون **یک‌طرفه** نامیده می‌شود (در مقابل مسألهٔ دوطرفه که فرض مقابل آن عبارت است از $H_1 : \mu \neq \mu_0$)

برای محاسبهٔ p-value در آزمون یک‌طرفهٔ معادلهٔ ۱۰.۳.۶ ، ابتدا به کمک داده‌ها مقدار آمارهٔ $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$ را محاسبه می‌کنیم . در این صورت p-value برابر است با احتمال آن‌که متغیّر نرمال استاندارد حداقل به بزرگی این مقدار باشد .

مثال ۳.۶.ث ـ در مثال ۳.۶.الف فرض کنید از قبل می‌دانیم که مقدار پیام حداقل به بزرگی ۸ است .

در این حالت چه نتیجه‌ایی می‌توان گرفت ؟

برای دیدن این‌که آیا داده‌ها با این فرض سازگارند ، یعنی میانگین برابر ۸ است فرض

$$H_0 : \mu = 8$$

رادر مقابل فرض یک‌طرفهٔ زیر آزمون می‌کنیم

$$H_1 : \mu > 8$$

مقدار آمارهٔ آزمون برابر است با $\sqrt{n}\ (\bar{X} - \mu_0)/\sigma = \sqrt{5}(9.5 - 8)/2 = 1.68$ ، و p-valueمساوی است با احتمال این‌که متغیّر نرمال استاندارد از 1.68 بیشتر شود ، یعنی

$$p\text{-value} = 1 - \Phi(1.68) = .0465$$

چون این آزمون فرض را در تمام سطوح معنی‌داری بزرگتر یا مساوی 0465. رد می‌کند ، پس فرض صفر در سطح معنی‌داری $\alpha = .05$ رد می‌شود . (بطور شهودی ، چرا فرض صفر $H_0 : \mu = 8$ در سطح معنی‌داری $\alpha = .05$ رد می‌شود در صورتی‌که در مثال ۳.۶.الف در این سطح پذیرفته شد ؟) ■

در آزمون یک‌طرفه ۱۰.۳.۶ تابع شاخص عملگر ، $\beta(\mu) = P_\mu$ (قبول H_0) ، را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= P_\mu\left\{\bar{X} \le \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\\ &= P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right\}\\ &= P\left\{Z \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right\} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)\end{aligned}$$

معادلهٔ اخیر از نرمال استاندارد بودن $\sqrt{n}\ (\bar{X} - \mu)/\sigma$ نتیجه می‌شود . بنابراین می‌توان نوشت

$$\beta(\mu) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)$$

چون Φ یک تابع توزیع است ، صعودی خواهد بود ، $\beta(\mu)$ تابعی نزولی از μ است ، که از نظر شهودی نیز جالب است زیرا مسلماً منطقی است که هر چه میانگین واقعی μ بزرگتر باشد کمتر احتمال دارد که نتیجه بگیریم $\mu \le \mu_0$. همچنین چون $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ ، پس

$$\beta(\mu_0) = 1 - \alpha$$

آزمون داده شده به‌وسیلهٔ معادلهٔ ۱۰.۳.۶ ، که برای آزمون $H_0 : \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1 : \mu > \mu_0$ طرح شده بود می‌تواند برای آزمون فرض یک‌طرفه زیر نیز در سطح معنی‌داری α به‌کار برده شود .

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

درمقابل

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

برای تحقیق این که آزمون در سطح α باقی می‌ماند یا نه ، لازم است که با فرض درست بودن H_0 احتمال رد فرض هرگز بزرگتر از α نباشد . یعنی باید به ازای تمام مقادیر $\mu \leq \mu_0$ داشته باشیم

برای هر
$$P_\mu\left\{ \overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \leq \alpha \qquad ، \qquad \mu \leq \mu_0$$

یا معادل آن

برای هر
$$P_\mu\left\{ \overline{X} \leq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \geq 1 - \alpha \qquad ، \qquad \mu \leq \mu_0$$

یا

$$\beta(\mu) \geq 1 - \alpha \qquad ، \qquad \mu \leq \mu_0$$

امّا قبلاً نشان دادیم که برای آزمون داده شده با معادلهٔ ۱۰.۳.۶ ، $\beta(\mu)$ برحسب μ نزولی است و $\beta(\mu) = 1 - \alpha$. در نتیجه به ازای تمام مقادیر $\mu \leq \mu_0$ داریم

$$\beta(\mu) \geq \beta(\mu_0) = 1 - \alpha \qquad ، \qquad \mu \leq \mu_0$$

که نشان می‌دهد آزمون ارائه شده در رابطهٔ ۱۰.۳.۶ برای آزمون $H_0 : \mu \leq \mu_0$ در مقابل فرض $H_1 : \mu \leq \mu_0$ در سطح α باقی می‌ماند .

تبصره

همچنین می‌توان فرض یک‌طرفهٔ

در مقابل
$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ (or } \mu \geq \mu_0) \qquad ، \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

را در سطح α آزمون کرد ، بدین ترتیب که

H_0 را می‌پذیریم اگر $\quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\bar{X}-\mu_0\right) > -z_\alpha$

H_0 را رد می‌کنیم اگر $\quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\bar{X}-\mu_0\right) \le -z_\alpha$

این آزمون را به صورت دیگری نیز می‌توان انجام داد و آن این که ابتدا مقدار آمارهٔ آزمون $\sqrt{n}\ (\bar{X}-\mu_0)/\sigma$ را محاسبه کنیم ، سپس p-value، یعنی این احتمال را که متغیّر نرمال استاندارد از این مقدار کمتر باشد به‌دست می‌آوریم . حال اگر سطح معنی‌داری بزرگتر یا مساوی این p-value باشد فرض رد می‌شود .

مثال ۳.۶.ج ـ تمام سیگارهای موجود در فروشگاهها بطور متوسط ۱/۶ میلی‌گرم در هرسیگار نیکوتین دارند . یک کارخانهٔ سیگارسازی ادعا می‌کند که روش جدیدی را کشف کرده است که برگهای توتون مصرفی دارای متوسط کمتر از ۱/۶ میلی‌گرم در هر سیگار خواهند بود . برای آزمون این ادعا نمونه‌ایی از ۲۰ سیگار ساخت این کارخانه را انتخاب کرده آنها را آزمایش می‌کنیم . اگر بدانیم انحراف معیارنیکوتین موجود درسیگارها ۰/۸ میلی‌گرم است ، درسطح معنی‌داری ۵ درصد ، چه نتیجه‌ایی می‌گیرید وقتی متوسط نیکوتین موجود در ۲۰ سیگار برابر ۱/۵۴ باشد ؟

تذکر ـ ممکن است این سؤال مطرح شود که چگونه از قبل می‌دانیم که انحراف معیار ۰/۸ است . یک امکان این است که تغییرات نیکوتین سیگارها به تغییر مقدار توتون هر سیگار مربوطه است نه به روش به‌کار رفته برای تهیه آن . پس انحراف معیاری می‌تواند از تجربیات قبلی مشخص شود .

حل : ابتدا باید در مورد فرض صفر مناسب تصمیم بگیریم . همان‌طور که قبلاً تذکر داده‌ایم ، روش ما برای آزمون نسبت به فرضهای صفر و مقابل متقارن نیست . زیرا ، فقط آزمونهایی را در نظر می‌گیریم که احتمال رد فرض صفر وقتی درست است ، هرگز از سطح معنی‌داری α بیشتر نشود . پس در حالی که رد فرض صفر یک گزاره قوی در مورد عدم سازگاری داده‌ها با این فرض است ، وقتی فرض پذیرفته می‌شود یک گزارهٔ مشابه نمی‌توان ساخت ، بنابراین ، چون در این مثال وقتی شاهد خوبی داشته باشیم ، می‌خواهیم ادعای تولیدکننده را تأیید کنیم ، این ادّعا را به‌عنوان فرض مقابل اختیار می‌کنیم ، یعنی باید فرضهای زیر را آزمون کنیم

$H_0 : \mu \ge 1.6$ در مقابل $H_1 : \mu < 1.6$

حال مقدار آمارهٔ آزمون برابر است با

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu_0\right)/\sigma = \sqrt{20}\,(1.34 - 1.6)/.8 = -.336$$

در نتیجه p-valueبرابر است با

$$p\text{-value} = P\{Z < -.336\} \qquad Z \sim N(0,1)$$
$$= .368$$

چون این مقدار بزرگتر از 05. است با داده‌های فوق نمی‌توانیم این فرض را که میانگین نیکوتین موجود بیشتر از ۱/۶ میلی‌گرم است در سطح 05. رد کنیم. امّا با این که شاهد، ادعای سازنده را تأیید می‌کند، به اندازهٔ کافی قوی نیست که آن را اثبات کند. ■

تبصره‌ها

الف) یک تشابه مستقیم بین برآورد فاصلهٔ اطمینان و آزمون فرض وجود دارد. به‌عنوان مثال، برای یک جامعهٔ نرمال با میانگین μو واریانس σ^2، در بخش ۳ فصل ۵ نشان دادیم که یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μعبارت است از

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

که در آن $\bar{x}$میانگین نمونهٔ مشاهده شده است. به عبارت دقیقتر، فاصلهٔ اطمینان فوق معادل است با

$$P\left\{\mu \in \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right\} = 1-\alpha$$

بنابراین، اگر $\mu = \mu_0$، آن‌گاه احتمال این‌که μ_0در فاصله

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

قرارگیرد $1-\alpha$ است. در نتیجه یک آزمون در سطح معنی‌داری αبرای آزمون $H_0: \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1: \mu \neq \mu_0$، فرض H_0را رد می‌کند اگر

$$\mu_0 \notin \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

همین‌طور، چون یک فاصله اطمینان یک‌طرفه $(1-\alpha)$ ۱۰۰ درصد برای μعبارت است از

$$\mu \in \left(\bar{X} - z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \infty\right)$$

در نتیجه یک آزمون در سطح معنی‌داری αبرای $H_0: \mu = \mu_0$ در مقابل $H_0: \mu > \mu_1$، فرض H_0را رد می‌کند اگر $\mu_0 \notin (\bar{X} - z_\alpha\sigma/\sqrt{n},\ \infty)$ یعنی هرگاه $\mu_0 < z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$

ب) اشاره‌ایی در مورد پایایی

آزمونی را که خوب عمل کند ، حتی وقتی که فرضهای اولیه‌ایی که آزمون برمبنای آنها صورت می‌گیرد برقرار نباشند ، یک آزمون پایا می‌نامند . مثلاً ، آزمونهای بخشهای ۳-۱ و ۳-۱-۱ از نرمال بودن توزیع جامعه با واریانس معلوم σ^2 نتیجه شدند . امّا برای به‌دست آوردن این آزمونها فقط از فرض نرمال بودن توزیع $\bar{X}$ استفاده شد . از طرفی نباید قضیهٔ حد مرکزی توزیع جامعه هر چه باشد ، $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال خواهد بود . پس می‌توان نتیجه گرفت که این آزمونها برای هر توزیعی از جامعه با واریانس σ^2 پایا خواهند بود .

۳-۲ واریانس مجهول : آزمون t

تا این‌جا فرض کردیم که تنها پارامتر مجهول توزیع نرمال ، میانگین آن است . امّا یک حالت معمولتر این است که میانگین μ و واریانس σ^2 هر دو مجهول باشند در این حالت نیز فرض برابری میانگین را با مقدار معینی مانند μ_0 را در نظر می‌گیریم ، یعنی آزمون فرض

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

را در مقابل فرض

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

باید توجه داشت که فرض صفر یک فرض ساده نیست زیرا مقدار σ^2 مشخص نیست .

مانند قبل ، منطقی به نظر می‌رسد که H_0 را رد کنیم اگر میانگین نمونه ، $\bar{X}$، از μ_0 خیلی فاصله داشته باشد . امّا ، مقدار دور بودن برای رد فرض به واریانس σ^2 بستگی دارد . زیرا به‌خاطر دارید که وقتی σ^2 معلوم بود ، آزمون فرض ، H_0 را رد می‌کرد اگر $|\bar{X} - \mu_0|$ از $z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ بیشتر می‌شد یا به‌عبارت معادل

$$\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$$

حال وقتی σ^2 معلوم نیست ، معقول به نظر می‌رسد که آن را به صورت زیر برآورد کنیم

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}$$

و سپس H_0 را رد کنیم اگر

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|$$

بزرگ باشد .

برای تعیین این که آمارهٔ

$$\left|\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right|$$

به چه بزرگی باشد تا فرض را رد کنیم در صورتی که سطح معنی‌داری آزمون α است ، باید توزیع احتمال این آماره را وقتی H_0 درست است به‌دست آوریم . ولی همان‌طور که در بخش ۵ از فصل ۴ دیدیم آمارهٔ T ، که به صورت زیر تعریف شد

$$T = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S}$$

وقتی $\mu = \mu_0$ دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است ، پس

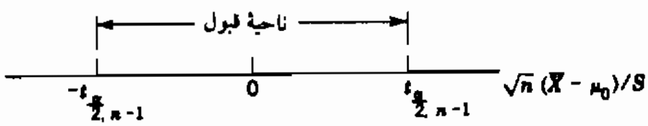
$$P_{\mu_0}\left\{-t_{\alpha/2,\,n-1} \le \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} \le t_{\alpha/2,\,n-1}\right\} = 1-\alpha \qquad (۱۱.۳.۶)$$

که در آن $t_{\alpha/2,\,n-1}$ ، مقدار صدک $100\,\alpha/2$ راست توزیع t با $n-1$ درجهٔ آزادی است . (یعنی ، $P\{T_{n-1} \ge t_{\alpha/2,\,n-1}\} = P\{T_{n-1} \le -t_{\alpha/2,\,n-1}\} = \alpha/2$ ، که در آن T_{n-1} دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است) از معادلهٔ ۱۱.۳.۶ دیده می‌شود که با سطح معنی‌داری مناسب α آزمونِ فرض

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad \text{در مقابل} \qquad H_1: \mu \ne \mu_0$$

وقتی که σ^2 مجهول است به قرار زیر می‌باشد

$$\left|\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right| \le t_{\alpha/2,\,n-1} \quad \text{اگر} \quad H_0 \text{ پذیرفته می‌شود}$$
$$\left|\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right| > t_{\alpha/2,\,n-1} \quad \text{اگر} \quad H_0 \text{ رد می‌شود} \qquad (۱۲.۳.۶)$$



شکل ۳.۳.۶ : آزمون دوطرفهٔ t

آزمون تعریف شده در معادلهٔ ۱۲.۳.۶ را آزمون دوطرفه t گویند. این آزمون در شکل ۳.۳.۶ تشریح شده است

اگر t مقدار مشاهده شده آمارهٔ آزمون $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$ باشد، در آن صورت p-value آزمون عبارت است از احتمال این که $|T|$ از $|t|$ بیشتر باشد وقتی H_0 درست باشد یعنی p-value این احتمال است که قدر مطلق متغیّر تصادفی t با $n - 1$ درجه آزادی از $|t|$ بیشتر شود. در این‌صورت آزمون، فرض H_0 را در تمام سطوح معنی‌داری بیشتر از p-value رد می‌کند و در تمام سطوح معنی‌داری کمتر از آن می‌پذیرد.

برنامهٔ ۶-۳-۲ مقدار آمارهٔ آزمون و p-value متناظر را محاسبه می‌کند. این برنامه را می‌توان برای آزمونهای دوطرفه و آزمونهای یک‌طرفه به‌کار برد. (آزمونهای یک‌طرفه بزودی معرفی خواهند شد).

مثال ۳.۶.چ - از میان بیماران یک کلینیک که دارای سطوح کلسترول خون متوسط به بالا هستند (حداقل ۲۲۰ میلی‌لیتر در هر دسی‌لیتر سرم)، تعدادی داوطلب برای آزمون یک داروی جدید، برای کاهش کلسترول خون در نظر گرفته شده‌اند. به یک گروه ۵۰ نفری از داوطلبان به مدت یک‌ماه این دارو تجویز شد و تغییرات سطوح کلسترول در خون آنها ثبت گردید. اگر متوسط تغییرات کاهش کلسترول خون ۱۴/۸ با انحراف معیار ۶/۴ باشد چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

ابتدا این فرض را آزمون می‌کنیم که تغییرات فقط تصادفی هستند - یعنی، ۵۰ تفاضل به‌دست‌آمده یک نمونه تصادفی نرمال با میانگین 0 است. چون مقدار آمارهٔ T که برای آزمون میانگین صفر توزیع نرمال به‌کار می‌رود به صورت زیر است

$$T = \sqrt{n}\,\bar{X}/S = \sqrt{50}\,14.8/6.4 = 16.352$$

بدیهی است که باید فرض تصادفی بودن تغییرات را رد کرده ولی متأسفانه، تا این‌جا هنوز نتیجه نگرفته‌ایم که تغییرات مربوط به داروی خاص مصرف شده است یا عاملی دیگر. مثلاً، بخوبی می‌دانیم که داروی مصرف شده توسط بیمار (چه برای بیمار مناسب باشد و چه نباشد) اغلب به بهبود شرایط بیمار منجر می‌شود - که آن را اثرات دارویی می‌نامند. همچنین امکان دیگر که لازم است در نظر گرفته شود، شرایط آب و هوایی در طول مدت یک‌ماه آزمون است. زیرا امکان زیادی دارد که در سطح کلسترول خون مؤثر باشد. در واقع نتیجه می‌شود که آزمایش فوق یک آزمایش خیلی ضعیف است، زیرا برای آزمون این که یک تیمار خاص بر بیمار، که ممکن است تحت تأثیر خیلی عوامل قرار داشته باشد، اثر دارد یا خیر، باید آزمایش را به قسمی طرح کنیم که تمام عوامل دیگر را بی‌اثر کند. برای رسیدن به این مقصود، داوطلبان را بطور تصادفی به دو گروه تقسیم کرده به یک

گروه دارو تجویز می‌شود و به گروه دیگر یک دارونما (یعنی قرصهایی که از نظر طعم و شکل مشابه داروی اصلی هستند ، ولی هیچگونه اثر بیولوژیکی ندارند) . نباید به بیماران گفته شود که در کدام گروه هستند . البته بهتر است که حتی پزشکان نیز از این امر بی‌اطلاع باشند تا اریبی خاص در اظهارنظر آنها نقشی نداشته باشد (این آزمون را آزمون چشم بستهٔ مضاعف می‌نامند) .

چون دو گروه بتصادفی از میان داوطلبان انتخاب شده‌اند ، می‌توان امیدوار بود که بطور متوسط تمام فاکتورهای مؤثر در دو گروه یکسان است ، مگر عامل دارو و دارونما . بنابراین ، هر تفاوتی را که بین دو گروه مشاهده شود می‌توان به دارو نسبت داد .

مثال ۶.۳.ج ـ ادارهٔ بهداشت عمومی شهری ادّعا می‌کند که متوسط آب مصرفی در خانه‌ها ۳۵۰ گالن در روز است برای تحقیق در صحت این ادّعا ، ۲۰ خانه بتصادف انتخاب می‌شود . اگر آب مصرفی روزانهٔ آنها به قرار زیر باشد

340	344	362	375
356	386	354	364
332	402	340	355
362	322	372	324
318	360	338	370

آیا داده‌ها با ادعای اداره بهداشت تناقض دارد ؟

حل : برای آزمون $H_0 : \mu = 350$ در مقابل $H_1 : \mu \neq 350$، برنامهٔ ۲.۳.۶ را اجرا می‌کنیم .

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value WHEN TESTING THAT A NORMAL POPULATION WHOSE VA
RIANCE IS UNKNOWN HAS MEAN EQUAL TO MU-ZERO.
ENTER THE VALUE OF MU-ZERO
? 350
ENTER THE SAMPLE SIZE
? 20
ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME
? 340? 356? 332? 362? 318? 344? 386? 402? 322? 360? 362? 354? 340? 372? 338? 37
5
? 364? 355? 324? 370THE VALUE OF THE t-STATISTIC IS .7778385
IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO
? 1
THE p-value IS .4461928
Ok
```

این مقدار بزرگ p-value نشان می‌دهد که داده‌ها با ادعای اداره بهداشت ناسازگار نیست . ■

برای آزمون فرض

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad (\text{or } H_0 : \mu \leq \mu_0)$$ یا

در مقابل فرض

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

می‌توانیم از آزمون یک‌طرفهٔ t استفاده کنیم . در سطح معنی‌داری α ،

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} \le t_{\alpha, n-1} \qquad \text{که } H_0 \text{ را می‌پذیریم}$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} > t_{\alpha, n-1} \qquad \text{که } H_0 \text{ را رد می‌کنیم} \tag{۱۳.۳.۶}$$

با فرض $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S = t$ ، p-value عبارت است از احتمال این‌که متغیّر تصادفی t با $n-1$ درجه آزادی از این مقدار t بیشتر شود .

برای آزمون

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad (\text{or } H_0 : \mu \ge \mu_0)$$

در مقابل

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} \ge -t_{\alpha, n-1} \qquad \text{اگر } H_0 \text{ را می‌پذیریم}$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} < -t_{\alpha, n-1} \qquad \text{اگر } H_0 \text{ را رد می‌کنیم}$$

p-value برای این آزمون برابر است با احتمال این که متغیّر تصادفی t با $n-1$ درجه آزادی کمتر از مقدار مشاهده شدهٔ $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$ باشد .

مثال ۳.٦.خ ـ سازنده یک لاستیک جدید ادّعا می‌کند که متوسط طول عمر لاستیکهایش حداقل ۴۰۰۰۰ مایل است برای تحقیق این ادّعا نمونه‌ایی از ۱۲ لاستیک امتحان می‌شود . طول عمر آنها به‌قرار زیر است

لاستیک	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
طول عمر (به هزار مایل)	36.1	40.2	33.8	38.5	42	35.8	37	41	36.8	37.2	33	36

ادّعای سازنده لاستیک را در سطح ۵ درصد آزمون کنید .

حل : برای تعیین این که داده‌های فوق با این فرض که متوسط طول عمر حداقل ۴۰۰۰۰ مایل است سازگار است ، فرضهای زیر را آزمون می‌کنیم

$H_0: \mu \geq 40{,}000$ در مقابل $H_1: \mu < 40{,}000$

برای این کار برنامهٔ ۲.۳.۴ را اجرا می‌کنیم .

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE p value WHEN TESTING THAT A NORMAL POPULATION WHOSE VA-
RIANCE IS UNKNOWN HAS MEAN EQUAL TO MU-ZERO.
ENTER THE VALUE OF MU-ZERO
? 40
ENTER THE SAMPLE SIZE
? 12
ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME
? 36.1? 40?.2? 33.8? 38.5? 42? 35.8? 37? 41? 36.8? 37.2? 33? 36
THE VALUE OF THE t-STATISTIC IS-3.444766
IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO
? 0
IS THE ALTERNATIVE THAT THE MEAN EXCEEDS MU-ZERO OR THAT IT IS LESS?  ENTER 1 IN
 THE FORMER CASE AND 0 IN THE LATTER
? 0
THE p-value IS 2.762199E-03
```

چون p-value کمتر از $\alpha = .05$ است ، ادّعای سازنده رد می‌شود . ■

۴- آزمون برابری میانگین دو جامعهٔ نرمال

وضعیتی که اغلب در مهندسی با آن مواجهیم این است که تصمیم بگیریم آیا دو روش مختلف به نتیجهٔ یکسان منجر می‌شود یا خیر . این وضعیت را می‌توان معمولاً به صورت آزمون فرض برابری میانگینهای دو جامعهٔ نرمال الگوسازی کرد .

۴-۱ حالت واریانسهای معلوم

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_m$ دو نمونه مستقل از دو جامعه نرمال با میانگینهای مجهول μ_x و μ_y و واریانسهای معلوم σ^2_x ، σ^2_y باشند . حال مسألهٔ آزمون فرضهای زیر را در نظر می‌گیریم

$H_0: \mu_x = \mu_y$

در مقابل

$H_1: \mu_x \neq \mu_y$

چون $\bar{X}$ برآورد μ_x و $\bar{y}$ برآورد μ_y است ، نتیجه می‌شود که $\bar{Y}$ را می‌توان به‌عنوان برآورد $\mu_x - \mu_y$ به کار برد . بنابراین ، چون فرض صفر را می‌توان به صورت $H_0 = \mu_x - \mu_y = 0$ نوشت ، منطقی به‌نظر می‌رسد که فرض صفر را رد کنیم اگر $\bar{X} - \bar{Y}$ با صفر فاصلهٔ زیادی داشته باشد . یعنی آزمون فرض باید به صورت زیر باشد

$$H_0 \text{ را رد کنیم اگر } \quad |\bar{X} - \bar{Y}| > c$$
$$H_0 \text{ را بپذیریم اگر } \quad |\bar{X} - \bar{Y}| \leq c \qquad (۱.۴.۶)$$

که در آن c با توجه به سطح معنی‌داری α لازم است توزیع $\bar{X} - \bar{Y}$ را با فرض درست بودن H_0 مشخص کنیم . ولی همان‌طور که در بخش ۳-۲ از فصل ۵ دیدیم

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$$

در نتیجه

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad (۲.۶.۴)$$

بنابراین وقتی H_0 درست است (یعنی $\mu_x - \mu_y = 0$) ، نتیجه می‌شود که

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است و می‌توان نوشت

$$P_{H_0}\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \qquad (۳.۴.۶)$$

از تساوی ۳.۴.۶ آزمون فرض $H_0 : \mu_x = \mu_y$ در مقابل $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ در سطح معنی‌داری α به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$H_0 \text{ را می‌پذیریم اگر } \quad \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} < z_{\alpha/2}$$

H_0 را رد می‌کنیم اگر

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} > z_{a/2}$$

برنامهٔ ۱.۴.۶ مقدار آمارهٔ آزمون $(\bar{X} - \bar{Y}) / \sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}$ را محاسبه می‌کند.

مثال ۴.۶.الف ـ دو روش برای ساخت یک لاستیک پیشنهاد شده است. برای تعیین این‌که کدام روش بهتر است، ۱۰ لاستیک ساخت روش اوّل و ۸ لاستیک ساخت روش دوم انتخاب می‌شود. نمونهٔ اوّل در جادهٔ A و نمونه دوم در جاده B مورد امتحان قرار می‌گیرد. از تجربیات قبلی می‌دانیم که طول عمر لاستیک که در یکی از این جاده‌ها امتحان می‌شود دارای توزیع نرمال با میانگین مربوط به لاستیک و واریانس مربوط به جاده است بخصوص، می‌دانیم که طول عمر لاستیکهایی که در جادهٔ A آزمون می‌شوند دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۴۰۰۰ کیلومتر و لاستیکهای که در جامعهٔ B آزمون می‌شوند دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۶۰۰۰ کیلومتر است. اگر سازنده بخواهد تفاوت میانگین طول عمر لاستیکها را در سطح ۵ درصد آزمون کند با توجه به داده‌های جدول ۱.۴.۶ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

جدول ۱.۴.۶

طول عمر لاستیک برحسب ۱۰۰ کیلومتر

Tires tested at A	*Tires tested at B*
61.1	62.2
58.2	56.6
62.3	66.4
64	56.2
59.7	57.4
66.2	58.4
57.8	57.6
61.4	65.4
62.2	
63.6	

حل: برنامهٔ ۶ ـ ۴ ـ ۱ را اجرا می‌کنیم.

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE OF THE TEST STATISTIC IN TESTING THAT TWO NORMAL
 MEANS ARE EQUAL WHEN THE VARIANCES ARE KNOWN
ENTER THE SAMPLE SIZES
? 10,8
ENTER THE SAMPLE VARIANCES
? 1600,3600
ENTER THE FIRST SAMPLE ONE AT A TIME
? 61.1? 58.2? 62.3? 64? 59.7? 66.2? 57.8? 61.4? 62.2? 63.6
ENTER THE SECOND SAMPLE ONE AT A TIME
? 62.2? 56.6? 66.4? 56.2? 57.4? 58.4? 57.6? 65.4
THE VALUE OF THE TEST STATISTIC IS          6.579402E-02
```

برای این مقدار کوچک آمارهٔ آزمون (با فرض H_0 دارای توزیع نرمال استاندارد است)، بدیهی است که فرض H_0 پذیرفته می‌شود.

از معادلهٔ ۱.۴.۶ معلوم می‌شود که یک آزمون برای $H_0 : \mu_x = \mu_y$ (یا $H_0 : \mu_x \leq \mu_y$) در مقابل فرض یک‌طرفه $H_1 : \mu_x > \mu_y$ به صورت زیر است

فرض H_0 را می‌پذیریم اگر
$$\bar{X} - \bar{Y} < z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر
$$\bar{X} - \bar{Y} > z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

۴-۲ حالت واریانسهای مجهول

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_m$ نمونه‌های مستقل از جامعه‌های نرمال با پارامترهای (μ_x, σ^2_x) و (μ_y, σ^2_y) باشند. امّا حالا فرض می‌کنیم تمام چهار پارامتر مجهولند و دوباره مسألهٔ آزمون فرضهای زیر را در نظر می‌گیریم

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \qquad \text{در مقابل} \qquad H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

برای تعیین یک آزمون در سطح α لازم است یک فرض اضافی دیگر که برابری واریانسهای مجهول σ^2_x و σ^2_y است را در نظر بگیریم. این مقدار مشترک را σ^2 فرض می‌کنیم، یعنی

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

مانند قبل فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر $\bar{X} - \bar{Y}$ از صفر «فاصلهٔ» زیادی داشته باشد. برای تعیین این فاصله واریانسهای دو نمونه را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}{m-1}$$

سپس همان‌طور که در بخش ۲.۳ از فصل ۵ نشان دادیم

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}\sqrt{1/n + 1/m}} \sim t_{n+m-2}$$

بنابراین وقتی H_0 درست است ، یعنی ، $\mu_x - \mu_y = 0$ آمارهٔ T که به صورت زیر تعریف می‌شود

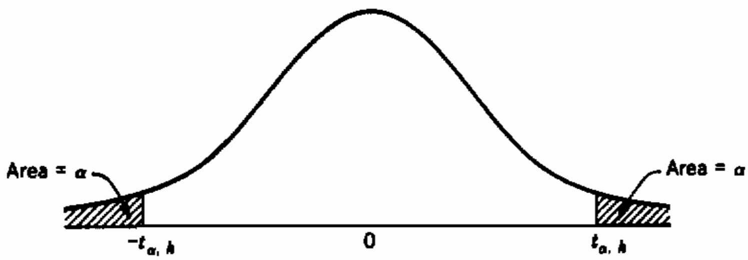
$$T \equiv \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

دارای توزیع t با $n + m - 2$ درجه آزادی است . با استفاده از این آماره فرض $\mu_x = \mu_y$ به‌صورت زیر آزمون می‌شود

$|T| < t_{\alpha/2, n+m-2}$ فرض H_0 پذیرفته می‌شود اگر

$|T| > t_{\alpha/2, n+m-2}$ فرض H_0 رد می‌شود اگر

که در آن $t_{\alpha/2, n+m-2}$ صدک $\alpha/2$ ۱۰۰ درصد متغیّر تصادفی t با $n + m - 2$ درجه آزادی است (شکل ۱.۴.۶) .



شکل ۱.٤.٦ : چگالی متغیر تصادفی t با k درجهٔ آزادی

اگر قدر مطلق مقدار T را با $|t|$ نشان دهیم در آن صورت p-value برای داده‌های آزمون عبارت است از احتمال این که قدر مطلق متغیّر تصادفی t با $n + m - 2$ درجهٔ آزادی از $|t|$ بیشتر شود ، یعنی

$$p\text{-value} = P\{|T_{n+m-2}| \geq |t|\} = 2P\{T_{n+m-2} \geq |t|\}$$

در آزمون یک‌طرفه ، یعنی

$H_0 : \mu_x \leq \mu_y$ در مقابل $H_1 : \mu_x > \mu_y$

به صورت زیر عمل می‌کنیم

فرض H_0 را می‌پذیریم اگر $T \le t_{\alpha, n+m-2}$

فرض H_0 رد می‌کنیم اگر

با فرض $T = t$ ، p-value برابر است با این احتمال که متغیّر تصادفی t با $n + m - 2$ درجهٔ آزادی از t بیشتر شود .

برنامهٔ ۲.۴.۶ مقدار آمارهٔ آزمون و p-value را محاسبه می‌کند .

مثال ۴.۶.ب ـ مثال ۴.۶.الف را در حالتی که واریانسها مجهول ، امّا برابرند دوباره حل کنید .

حل : برنامهٔ ۲.۴.۶ را اجرا کنید

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value WHEN TESTING THAT TWO NORMAL POPULATIONS HAVIN
G EQUAL BUT UNKNOWN VARIANCES HAVE A COMMON MEAN
ENTER THE SIZE OF SAMPLE 1
? 10
ENTER SAMPLE 1 ONE AT A TIME
? 61.1
? 58.2
? 62.3
? 64
? 59.7
? 66.2
? 57.8
? 61.4
? 62.2
? 63.6
ENTER THE SIZE OF SAMPLE 2
? 8
ENTER SAMPLE 2 ONE AT A TIME
? 62.2
? 56.6
? 66.4
? 56.2
? 57.4
? 58.4
? 57.6
? 65.4
THE VALUE OF THE t-STATISTIC IS 1.028025
IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO
? 1
THE p-value IS .3191708
Ok
```

پس فرض صفر در هر سطح معنی‌داری کوچکتر از 3191708. پذیرفته می‌شود .

۳.۴ حالت واریانسها مجهول و نامساوی

حال فرض می‌کنیم که واریانسهای σ^2_x و σ^2_y مجهول و نامساوی‌اند . در این حالت چون S^2_x یک برآورد σ^2_x و S^2_y یک برآورد σ^2_y است به نظر می‌رسد که برای آزمون فرضهای

$H_0 : \mu_x = \mu_y$ در مقابل $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$

می‌توان از آمارهٔ

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}} \qquad (۴.۴.۶)$$

استفاده کرد. ولی این آماره دارای توزیع پیچیده‌ای است که حتی وقتی H_0 درست است، به پارامترهای مجهول بستگی دارد و در حالت کلی نمی‌توان آن را به‌کار برد. یک حالت که در آن از آمارهٔ ۴.۴.۶ می‌توان استفاده کرد این است که n و m هر دو بزرگ باشند. زیرا در این حالت می‌توان نشان داد که با فرض درست بودن H_0 متغیّر ۴.۴.۶ تقریباً دارای توزیع نرمال است. بنابراین، وقتی n و m بزرگ هستند یک آزمون تقریبی در سطح α برای فرض $H_0 : \mu_x = \mu_y$ در مقابل $H_0 : \mu_x \neq \mu_y$ به‌قرار زیر است.

فرض H_0 را می‌پذیریم اگر

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}} < z_{\alpha/2}$$

و در غیر این صورت آن را رد می‌کنیم

مسألهٔ تعیین آزمونی دقیق در سطح α برای آزمون برابری میانگینهای دو جمعیت نرمال با واریانسهای نامساوی و مجهول به مسألهٔ بهرنز ـ فیشر معروف است و هنوز جواب کاملاً رضایت‌بخش برای این مسأله وجود ندارد.

۴.۴ آزمون t برای داده‌های جفت

فرض کنید می‌خواهیم اثر نصب یک صافی را روی اتومبیل در طی مسافت معینی تعیین کنیم. برای آزمون این اثر، مجموعه‌ایی از n اتومبیل را که از این صافی استفاده می‌کنند در نظر می‌گیریم. مسافت پیموده شده در ازای هر گالن بنزین برای هر اتومبیل قبل و بعد از نصب این صافی تعیین می‌شود. فرض بی‌تأثیر بودن صافی مزبور را در مصرف بنزین چگونه آزمون کنیم؟

داده‌ها را می‌توان به‌وسیلهٔ n زوج (X_i, Y_i)، $i = 1, ..., n$ نشان داد، که در آن X_i مصرف بنزین اتومبیل iام قبل از نصب صافی و Y_i همین کمیت بعد از نصب صافی است. توجه به این مطلب حایز اهمیت است که چون هریک از n اتومبیل طبیعةً متفاوتند، نمی‌توانیم $X_1, ..., X_n$ و $Y_1, ..., Y_n$ را نمونه‌های مستقل در نظر بگیریم. مثلاً اگر بدانیم که X_1 بزرگ است (مثلاً ۴۰ مایل در هر گالن) مسلماً انتظار داریم که Y_1 نیز احتمالاً بزرگ باشد. پس نمی‌توانیم هیچ‌یک از روشهای ارائه شده

در این بخش را به‌کار بریم .

یک راه را که بتوان فرض «نصب صافی در مصرف بنزین هیچ تأثیری ندارد» آزمون کرد این است که داده‌های حاصل از تفاضل مسافت طی شده به‌وسیلهٔ هر اتومبیل را در نظر بگیریم . یعنی ، $W_i = X_i - Y_i,\ i = 1, ..., n$. حال اگر تفاوتی وجود نداشته باشد باید W_i دارای میانگین صفر باشد . بنابراین ، می‌توانیم فرض زیر را آزمون کنیم

$$H_0 : \mu_w = 0 \qquad \text{درمقابل} \qquad H_1 : \mu_w \neq 0$$

که در آن فرض می‌شود $W_1, ..., W_n$ نمونه‌ایی از یک جامعهٔ نرمال با میانگین مجهول μ_w و واریانس مجهول σ_w^2 است . در این صورت آزمون t که در بخش ۳-۲ تشریح شد می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد .

فرض H_0 را می‌پذیریم اگر $-t_{\alpha/2, n-1} < \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{W}}{S_w} < t_{\alpha/2, n-1}$

و در غیر این صورت آن را رد می‌کنیم

مثال ۴.۶.پ ـ یک برنامهٔ حفاظتی صنعتی در صنعت ساخت چیپهای کامپیوتری آموزش داده شده است . متوسط اتلاف وقت هفتگی برحسب ساعت (متوسط در ماه محاسبه شده است) به ازای هر فرد در اثر حوادث در ۱۰ طرح مشابه قبل و بعد از اجرای برنامه به قرار زیر است .

طرح	قبل B	بعد A
1	30.5	23
2	18.5	21
3	24.5	22
4	32	28.5
5	16	14.5
6	15	15.5
7	23.5	24.5
8	25.5	21
9	28	23.5
10	18	16.5

تأثیر آموزش این برنامه را در سطح ۵ درصد تعیین کنید .

حل : برای تعیین تأثیر آموزش فرضهای زیر را آزمون می‌کنیم .

$$H_0 : \mu_A - \mu_B \geq 0 \qquad \text{در مقابل} \qquad H_1 : \mu_A - \mu_B < 0$$

برای آزمون این فرضها برنامهٔ ۶.۳.۲ را اجرا می‌کنیم .

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value WHEN TESTING THAT A NORMAL POPULATION WHOSE VA
RIANCE IS UNKNOWN HAS MEAN EQUAL TO MU-ZERO.
ENTER THE VALUE OF MU-ZERO
? 0
ENTER THE SAMPLE SIZE
? 10
ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME
? 7.5? -2.5? 2.5? 3.5? 1.5? -.5? -1? 4.5? 4.5? 1.5
THE VALUE OF THE t-STATISTIC IS 2.265949
IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO
? 0
IS THE ALTERNATIVE THAT THE MEAN EXCEEDS MU-ZERO OR THAT IT IS LESS?  ENTER 1 IN
 THE FORMER CASE AND 0 IN THE LATTER
? 1
THE p-value IS 2.489293E-02
Ok
```

چون p-value کمتر از 05. است ، فرض بی‌تأثیر بودن آموزش رد می‌شود و نتیجه می‌گیریم که مؤثر بوده و باید آموزش داده شود . (حداقل برای هر سطح معنی‌دار بزرگتر از 025.) ■

باید توجه داشت که آزمون t برای نمونه‌های جفت را می‌توان حتی وقتی نمونه‌ها مستقل نیستند و واریانسها دو جامعه نیز مساوی نیستند به‌کار برد . البته عیب کار در این است که به‌جای $2n$ مشاهده در این‌جا از n مشاهده استفاده می‌شود .

۵- آزمونهای فرض مربوط به واریانس جامعهٔ نرمال

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ایی از یک جامعهٔ نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 باشد . فرض کنید می‌خواهیم فرضهای زیر را آزمون کنیم

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

در مقابل

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

که در آن σ^2_0 مقدار معلومی است .

برای به‌دست آوردن آزمون به‌خاطر دارید (از بخش ۵ فصل ۴) که $(n-1)S^2/\sigma^2$ دارای توزیع کی‌دو با $n-1$ درجه آزادی است . بنابراین وقتی H_0 درست است

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

و بنابراین

$$P_{H_0}\left\{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}\right\} = 1-\alpha$$

و یک آزمون در سطح معنی‌داری α به صورت زیر است

فرض H_0 را می‌پذیریم اگر $\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$

و در غیر این صورت H_0 را رد می‌کنیم .

آزمون قبل را می‌توان به این ترتیب انجام داد که ابتدا مقدار آزمون ، یعنی c را محاسبه می‌کنیم .

$$C = (n-1)S^2/\sigma_0^2$$

سپس مقدار احتمال این که یک متغیّر تصادفی کی‌دو با $n-1$ درجه آزادی الف) کمتر از c باشد ب) بیشتر از c باشد را محاسبه می‌کنیم . اگر یکی از این احتمالها از هر $\alpha/2$ کمتر باشد فرض صفر رد می‌شود . به عبارت دیگر p-value برای این آزمون برابر است با

$$p\text{-value} = 2\min\left(P\{\chi^2_{n-1} < c\},\, 1 - P\{\chi^2_{n-1} < c\}\right)$$

کمیت $P\{\chi^2_{n-1} < c\}$ را می‌توان از برنامهٔ ۳ـ۸ـ۱ـ الف به‌دست آورد . p-value برای آزمونهای یک‌طرفه نیز به همین طریق محاسبه می‌شود .

مثال ۵.٦.الف ـ یک ماشین که بطور خودکار مقدار نوار تایپ را کنترل می‌کند جدیداً نصب شده است . نصب این ماشین مفید خواهد بود اگر انحراف معیار نوار روی ماشین ، σ ، کمتر از ۰/۰۲۲۵ سانتی‌متر باشد . اگر در یک نمونه از ۲۰ تایپ داشته باشیم $S^2 = .0225$ آیا می‌توان نتیجه گرفت که ماشین مؤثر است ؟

حل : این فرض را آزمون می‌کنیم که ماشین مؤثر است ، زیرا در این صورت از رد آن می‌توان نتیجه گرفت که ماشین تأثیری نداشته است . پس می‌خواهیم فرضهای زیر را آزمون کنیم

$$H_0: \sigma^2 \le .0225 \quad \text{در مقابل} \quad H_1: \sigma^2 > .0225$$

یعنی فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر S^2 بزرگ باشد . بنابراین p-value آزمون فوق برابر است با احتمال این‌که یک متغیّر تصادفی کی‌دو با ۱۹ درجه آزادی بیشتر از مقدار مشاهده شدهٔ زیر باشد

که با استفاده از برنامهٔ ۳ـ۸ـ۱ـ الف داریم

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P\{\chi^2_{19} > 21.111\} \\ &= 1 - .6693 = .3307 \end{aligned}$$

بنابراین باید نتیجه بگیریم که چون مقدار مشاهده شدهٔ $S^2 = .025$ به اندازهٔ کافی بزرگ نیست ، فرض صفر پذیرفته می‌شود . ■

۵-۱ آزمونهای برابری واریانسهای دو جامعه نرمال

فرض کنید $X_1, ..., X_n$ و $Y_1, ..., Y_m$ نمونه‌هایی مستقل از دو جامعه نرمال با پارامترهای (مجهول) μ_x, σ^2_x و μ_y, σ^2_y باشند . برای آزمونهای فرضهای

$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ در مقابل $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

ابتدا واریانس نمونه‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2}{m-1}$$

همان‌طور که از بخش ۵ ، فصل ۴ می‌دانیم ، آماره‌های

$(m-1)S_y^2/\sigma_y^2$ $\qquad$ $(n-1)S_x^2/\sigma_x^2$

متغیرهای تصادفی مستقل کی‌دو و به ترتیب دارای $n-1$ و $m-1$ درجه آزادی هستند بنابراین

$(S_x^2/\sigma_x^2)/(S_y^2/\sigma_y^2)$

دارای توزیع F با پارامترهای $n-1$ و $m-1$ است . پس وقتی H_0 درست است ، داریم

$S_x^2/S_y^2 \sim F_{n-1, m-1}$

و می‌توان نوشت

$$P_{H_0}\left\{ F_{1-\alpha/2, n-1, m-1} < S_x^2/S_y^2 < F_{\alpha/2, n-1, m-1}\right\} = 1 - \alpha$$

در نتیجه یک آزمون در سطح α به قرار زیر است

فرض H_0 را می‌پذیریم اگر $\qquad F_{1-\alpha/2, n-1, m-1} < S_x^2/S_y^2 < F_{\alpha/2, n-1, m-1}$

در غیر این صورت را رد می‌کنیم

برای حل مسألهٔ فوق ابتدا آماره $v = S^2_x/S^2_y$ را محاسبه می‌کنیم. سپس (با استفاده از برنامهٔ ۳.۸.۳) مقدار $P\{F_{n-1,\, m-1} < v\}$ را به‌دست می‌آوریم که در آن $F_{n-1,\, m-1}$ یک متغیّر تصادفی F با پارامترهای $n-1$ و $m-1$ است. اگر این احتمال کوچکتر از $\alpha/2$ باشد (وقتی این اتفاق می‌افتد که S^2_x کمتر از S^2_y است) یا بزرگتر از $1-\alpha/2$ باشد (یعنی وقتی S^2_x بزرگتر از S^2_y است) آن‌گاه فرض صفر رد می‌شود. به عبارت دیگر p-value برای داده‌های آزمون برابر است با

$$p\text{-value} = 2\min\left(P\{F_{n-1,m-1} < v\}, 1 - P\{F_{n-1,m-1} < v\}\right)$$

در این صورت آزمون فرض را رد می‌کند اگر سطح معنی‌داری α حداقل به بزرگی p-value باشد

مثال ۵.٦.ب ـ برای فعال کردن یک فرآیند شیمیایی دو نوع کاتالیزر وجود دارد. برای آزمون یکسان بودن نتایج هر دو کاتالیزر نمونه‌ایی به حجم ۱۰ با استفاده از کاتالیزر اوّل و یک نمونه به حجم ۱۰ با استفاده از کاتالیزر دوم تهیه می‌شود. اگر از داده‌های حاصل مقادیر $S^2_1 = .14$ و $S^2_2 = .28$ به‌دست آمده باشد آیا فرض برابری واریانسها را می‌توان در سطح ۵ درصد رد کرد؟

حل: با استفاده از برنامه ۳ـ۸ـ۳ـ الف که تابع توزیع تجمعی F را محاسبه می‌کند داریم

$$P\{F_{9,11} \le .5\} = .1539$$

بنابراین p-value برابر است با

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= 2\min\{.1539, .8461\} \\ &= .3074 \end{aligned}$$

پس فرض برابری واریانسها پذیرفته می‌شود. ■

٦- آزمونهای فرض در جامعه‌های برنولی

توزیع دوجمله‌ای اغلب در مسایل مهندسی پیش می‌آید. به‌عنوان مثال یک فرآیند تولید را در نظر بگیرید که در آن اشیاء ساخته شده را بتوان به ۲ گروه تقسیم کرد. گروه قابل قبول و گروه معیوب. فرضی که معمولاً در نظر گرفته می‌شود این است که فرآورده‌ها بطور مستقل تولید شده و احتمال معیوب بودن آنها p است. پس تعداد اشیاء معیوب در یک نمونه n تایی دارای توزیع دوجمله‌ایی با پارامترهای (n, p) خواهد بود. حال آزمون فرضهای زیر را در نظر می‌گیریم.

$$H_0: p \le p_0 \qquad \text{در مقابل} \qquad H_1: p > p_0$$

که در آن p_0 یک مقدار معین است .

اگر X تعداد اشیاء معیوب در نمونه‌ایی به حجم n باشد آن‌گاه واضح است که وقتی فرض H_0 را رد می‌کنیم که X بزرگ باشد . برای آن‌که بدانیم X چه اندازه بزرگ باشد تا فرض H_0 در سطح α رد شود توجه کنید که

$$P\{X \geq k\} = \sum_{i=k}^{n} P\{X = i\} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

بطـور شهـودی (که اثبات نیز می‌شود) مشخص است که $P\{X \geq k\}$ یک تابع صعودی از p است یعنی ، احتمال این‌که نمونه شامل حداقل k معیوب باشد با احتمال معیوب بودن ، p، صعود می‌کند . با استفاده از این مطلب وقتی H_0 درست است (یعنی $p \leq p_0$) داریم

$$P\{X \geq k\} \leq \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i}$$

بنابراین یک آزمون درسطح α برای $H_0: p \leq p_0$ درمقابل $H_1: p > p_0$، فرض H_0 را ردمی‌کند اگر

$$X \geq k^*$$

که در آن k^* کوچکترین مقدار k است که به ازای آن

$$\Sigma_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \alpha$$

یعنی

$$k^* = \min \left\{ k : \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \leq \alpha \right\}$$

برای انجام این آزمون بهتر است ابتدا مقدار آمارهٔ ، یعنی $X = k$ را محاسبه کنیم و سپس p-value را ، که از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P\{B(n, p_0) \geq x\} \\ &= \sum_{i=x}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \end{aligned}$$

برای محاسبهٔ این مقدار می‌توانیم از برنامهٔ ۳ ـ ۱ استفاده کنیم .

مثال ٦.٦.الف ـ کارخانه‌ایی که چیپهای کامپیوتری را می‌سازد ادّعا می‌کند که بیشتر از ۲ درصد چیپهایی که می‌سازد معیوب نیستند. یک شرکت الکترونیکی تحت تأثیر این ادّعا مقدار زیادی از این چیپها را خریداری کرده است. برای تعیین واقعیت امر شرکت تصمیم می‌گیرد نمونه‌ایی از ۳۰۰ چیپ را امتحان کند. اگر ۱۰ تا از آنها خراب باشد آیا ادعای کارخانه رد می‌شود؟

حل: فرض کنید این ادّعا را در سطح $\alpha = 0.05$ آزمون کنیم. برای این کار باید این احتمال را که نمونه‌ایی به حجم ۳۰۰ شامل ۱۰ معیوب است محاسبه کنیم، در حالی که p برابر .02 است. اگر این احتمال کمتر یا مساوی 0.05 باشد در آن صورت ادعای شرکت باید رد شود.

$$\begin{aligned} P_{.02}\{X \geq 10\} &= 1 - P_{.02}\{X < 10\} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{9} \binom{300}{i} (.02)^i (.98)^{300-i} \qquad \text{(از برنامهٔ ۳-۱)} \\ &= 0.0818 \end{aligned}$$

بنابراین ادعای شرکت را در سطح 0.05 نمی‌توان رد کرد. ■

وقتی حجم نمونه بزرگ است می‌توانیم یک آزمون تقریبی برای فرض $H_0 : p \leq p_0$ در مقابل $H_1 : p > p_0$ به‌دست آوریم که با استفاده از تقریب دوجمله‌ایی تا حد زیادی محاسبات را ساده‌تر می‌کند. این کار بدین صورت انجام می‌شود که: چون وقتی n بزرگ است، X دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر است

$$E[X] = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

در نتیجه متغیّر

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

تقریباً دارای توزیع نرمال استاندارد است. پس یک آزمون در سطح α برای رد H_0 عبارت است از

$$\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \geq z_\alpha$$

مثال ٦.٦.ب ـ برای داده‌های مثال ٦.٦.الف مقدار آمارهٔ آزمون برابر است با

$$(X - np_0)/\sqrt{np_0(1-p_0)}$$

$$(10 - 300 \times .02)/\sqrt{300 \times .02 \times .98} = 1.6496.$$

بنابراین با استفاده از تقریب نرمال H_0 در هر سطح معنی‌داری بزرگتر یا مساوی p-value که به‌صورت

زیر محاسبه می‌شود باید رد شود

(از برنامهٔ ۳.۵.۱ الف)

$$p\text{-value} = P\{Z \geq 1.6496\} = .0495$$

مثلاً در سطح $\alpha = 0.05$ فرض H_0 رد می‌شود که با نتیجهٔ آزمون دقیق مثال ۶.۶.الف در تناقض است . این نتیجه نشان می‌دهد که استفاده از آزمون تقریبی کار خطرناکی است ـ یعنی اگر حجم نمونه به اندازهٔ کافی بزرگ نباشد ممکن است به نتیجه‌ایی متفاوت با آزمون دقیق منجر شود . یک قاعدهٔ کلی این است که p-value که از آزمون تقریبی حاصل می‌شود خیلی نزدیک به p-value آزمون دقیق باشد ، یا حجم نمونه به اندازهٔ کافی بزرگ باشد به قسمی که $np_0 = 20$. پس در این‌جا چون $np_0 = 6$ از نتیجه حاصل نباید زیاد متعجب شد . ■

۶-۱ آزمون برابری پارامترها در دو جامعهٔ برنولی

فرض کنید دو روش برای تولید یک نوع ترانزیستور وجود دارد ؛ و فرض کنید هر ترانزیستور در تولید با روش اوّل بطور مستقل با احتمال p_1 معیوب است و برای روش دوم این احتمال p_2 است . برای آزمون فرض $p_1 = p_2$ نمونه‌ایی از n_1 ترانزیستور ساخته شده با روش اوّل و n_2 ترانزیستور ساخته شده با روش دوم انتخاب می‌کنیم .

فرض کنید X_1 مقدار ترانزیستورهای معیوب در نمونه اوّل و X_2 تعداد معیوبها در نمونه دوم باشد . پس X_1 و X_2 متغیّرهای مستقل با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای (n_1, p_1) و (n_2, p_2) هستند . فرض کنید $X_1 + X_2 = k$، یعنی روی هم k ترانزیستور معیوب وجود دارد . حال اگر H_0 درست باشد هریک از $n_1 + n_2$ ترانزیستور تولید شده با احتمال مساوی می‌تواند معیوب باشد . بنابراین تعیین k معیوب دارای توزیع یکسان با توزیع نمونه‌ای تصادفی به حجم k از جامعه‌ایی به حجم $n_1 + n_2$ است که در آن n_1 مهره سفید و n_2 مهره سیاه باشد . به عبارت دیگر اگر بدانیم تعداد معیوبها k است ، توزیع شرطی تعداد ترانزیستورهای معیوب با روش اوّل وقتی H_0 درست است دارای توزیع فوق هندسی زیر است [۱].

$$P_{H_0}\{X_1 = i | X_1 + X_2 = k\} = \frac{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}}{\binom{n_1+n_2}{k}} \qquad i = 0, 1, \ldots, k \qquad (۱.۶.۶)$$

حال برای آزمون

---

* مثال ۳.۳.ب فصل ۳ را ببیند .

$$H_0: p_1 = p_2 \quad \text{در مقابل} \quad H_1: p_1 \neq p_2$$

منطقی به نظر می‌رسد که وقتی تعداد ترانزیستورهای معیوب به روش ۱ خیلی تفاوت با روش ۲ دارد، فرض صفر را رد کنیم. بنابراین، اگر روی هم k ترانزیستور معیوب وجود داشته باشد و H_0 نیز درست باشد، انتظار داریم که X_1/n (نسبت معیوبهای تولید شده به روش ۱) خیلی نزدیک $(k - X_1)/n_2$ (نسبت معیوبهای تولید شده به روش ۲) باشد. زیرا X_1/n_1 و $(k - X_1)/n_2$ وقتی زیاد فاصله دارند که X_1 خیلی کوچک یا خیلی بزرگ باشد. پس به نظر می‌رسد که یک آزمون مناسب در سطح معنی‌داری α از معادلهٔ ۱.۶.۶ به صورت زیر نتیجه شود. اگر $X_1 + X_2 = k$ و $X_1 = x_1$ آن‌گاه

فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر $\quad P\{ X \geq x_1 \} \leq \alpha/2 \quad$ یا $\quad P\{ X \leq x_1 \} \leq \alpha/2$

در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم.

که در آن X یک متغیّر تصادفی فوق هندسی با تابع جرم احتمال زیر است.

$$P\{ X = i \} = \frac{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}}{\binom{n_1+n_2}{k}} \qquad i = 0, 1, \ldots, k \tag{۲.۶.۶}$$

به عبارت دیگر، این آزمون فرض صفر را رد می‌کند اگر سطح معنی‌داری حداقل به بزرگی p-value باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$p\text{-value} = 2 \min \left(P\{ X \leq x_1 \}, P\{ X \geq x_1 \} \right) \tag{۳.۶.۶}$$

این آزمون را **آزمون فیشر ـ اروین** می‌نامند.

۱.۱.۶ محاسبات آزمون فیشر ـ اروین برای استفاده از آزمون فیشر ـ اروین، لازم است تابع توزیع فوق هندسی محاسبه شود. برای این کار اگر X دارای تابع جرم احتمال ۲.۶.۶ باشد آن‌گاه

$$\frac{P\{ X = i+1 \}}{P\{ X = i \}} = \frac{\binom{n_1}{i+1}\binom{n_2}{k-i-1}}{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}} \tag{۴.۶.۶}$$

$$= \frac{(n_1 - i)(k - i)}{(i+1)(n_2 - k + i + 1)} \tag{۵.۶.۶}$$

تحقیق درستی مساوی اخیر به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

برای تعیین p-valueابتدا احتمال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$P\{X = x_1\} = \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{k - x_1}\Big/\binom{n_1 + n_2}{k}$$

از این رابطه ابتدا به کمک لگاریتم، مقدار $\log P\{X = x_i\}$ را محاسبه می‌کنیم و سپس می‌نویسیم

$$P\{X = x_1\} = \exp\{\log P\{X = x_i\}\}$$

حال با روش برگشتی و استفاده از معادلهٔ ۴.۶.۶ مقادیر $P\{X = x_i + 1\}, ..., P\{X = x_i + 2\}$ یا $P\{X = x_i - 1\}, ..., P\{X = x_i - 2\}, ..., P\{x = \text{mix}(0, k - n_2)\}$را محاسبه می‌کنیم که بستگی به حجم دنباله‌ها دارد. با جمع این احتمالات، مقادیر $P\{X = x_0\}$و S مجموع احتمالات که برابر $P\{X > x_0\}$ یا $P\{X < x_0\}$است به دست می‌آید. دو مقدار $1 - S$ و $S + P\{X = x\}$ برابرند با دو مقدار $P\{X \le x_i\}$ و $P\{X \le x_i\}$. زیرا اگر $S = P\{X > x_i\}$ آن‌گاه $1 - S = P\{X \le x_i\}$ و $S + P\{X = x_i\} = P\{X \ge x_i\}$. در حالی که اگر $S = P\{X < x_i\}$ آن‌گاه $1 - S = P\{X \ge x_i\}$ و $S + P\{X = x_i\} = P\{X \le x_i\}$.
بنابراین از معادلهٔ ۳.۶.۶ نتیجه می‌شود

$$p\text{-value} = 2\min(1 - S, S + P\{X = x_i\})$$

برنامهٔ ۱.۶.۶ با استفاده از تحلیل فوق p-valueرا برای آزمون فیشر ـ اروین تساوی دو احتمال برنولی حساب می‌کند. این برنامه وقتی خوب کار می‌کند که برآورد برنولی که در آن شکست (یا معیوب) گفته می‌شود دارای احتمالی کمتر از 5. باشد. مثلاً اگر بیش از نصف تولیدات معیوب باشد، در آن صورت به‌جای آزمون برابری نسبت معیوبها در دو نمونه باید تساوی نسبتهای قابل قبول (سالم) آزمون شوند.

مثال ۶.۶.پ ـ فرض کنید در روش ۱ تعداد ترانزیستورهای معیوب ۲۰ عدد در ۱۰۰ عدد، ولی در روش دوم ۱۲ عدد در ۱۰۰ عدد باشد. آیا می‌توان نتیجه گرفت که در سطح ۱۰ درصد دو روش معادلند؟

پس از اجرای برنامه ۱.۶.۶ داریم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value FOR THE TEST DATA IN THE FISHER-IRWIN TEST
ENTER THE SIZE OF THE FIRST SAMPLE
? 100
ENTER THE SIZE OF THE SECOND SAMPLE
? 100
ENTER THE TOTAL NUMBER OF FAILURES
? 32
ENTER THE NUMBER OF FAILURES IN THE FIRST SAMPLE
? 20
THE p-value IS .1763395
```

بنابراین ، این فرض که دو روش یکسانند پذیرفته می‌شود . ■

وقتی n_1 و n_2 بزرگ باشند ، یک آزمون تقریبی در سطح α برای $H_0 : p_1 = p_2$ بر اساس تقریب نرمال برای دوجمله‌ایی به‌دست می‌آید . (مسألهٔ ۳۱ را ببینید)

۷- آزمون مربوط به میانگین یک توزیع پواسن

فرض کنید X نشان‌دهندهٔ یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین λ باشد و بخواهیم فرضهای

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad \text{،} \qquad H_1 : \lambda \neq \lambda_0$$

در مقابل

را آزمون کنیم . اگر مقدار مشاهده شده X برابر x باشد ، آن‌گاه یک آزمون در سطح α فرض H_0 را رد می‌کند اگر

$$P_{\lambda_0}\{ X \geq x \} \leq \alpha/2 \qquad \text{،} \qquad P_{\lambda_0}\{ X \leq x \} \leq \alpha/2 \tag{۱.۷.٦}$$

که در آن $P_{\lambda 0}$ بدین معنی است که احتمال تحت این فرض که میانگین توزیع پواسن λ_0 است محاسبه می‌شود . از رابطهٔ ۱.۷.٦ p-value به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$p\text{-value} = 2 \min \left(P_{\lambda_0}\{ X \geq x \}, P_{\lambda_0}\{ X \leq x \} \right)$$

محاسبهٔ احتمالات فوق را می‌توان با استفاده از برنامهٔ ۳-۲ انجام داد .

مثال ۷.٦.الف ـ مدیر یک کارخانه ادّعا می‌کند که میانگین تعداد چیپهای معیوب که روزانه ساخته می‌شود از ۲۵ بیشتر نیست و این مطلب مورد بحث است . اگر در نمونه‌ایی از ۵ روز تعداد معیوبها ۲۸ ، ۳۴ ، ۳۲ ، ۳۸ ، ۲۲ باشد ، این ادّعا را آزمون کنید .

چون هر چیپ کامپیوتر با احتمال خیلی کم معیوب خواهد بود ، می‌توان فرض کرد که تعداد چیپهای معیوب روزانه تقریباً یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین λ است . برای قبول یا رد ادّعای فوق فرضهای زیر را آزمون می‌کنیم

$H_0 : \lambda \leq 25$ در مقابل $H_1 : \lambda > 25$

حال با توجه به H_0 تعداد کل چیپهای معیوب در ۵ روز دارای توزیع پواسن با میانگین بیشتر از ۱۲۵ خواهد بود. (زیرا مجموع متغیّرهای تصادفی پواسن یک متغیّر پواسن است) چون این تعداد برابر ۱۵۴ شده است مقدار p را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P_{125}\{X \geq 154\} \\ &= 1 - P_{125}\{X \leq 153\} \qquad \text{(از برنامه ۳-۲)} \\ &= .0066 \end{aligned}$$

بنابراین، ادّعای فوق در سطح ۵ درصد رد می‌شود (حتی در سطح ۱ درصد). ■

تبصره

اگر میانگین در محاسبهٔ احتمال پواسن در استفاده از برنامهٔ ۳-۲ خیلی بزرگ باشد، می‌توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که یک متغیّر تصادفی پواسن با میانگین λ، وقتی λ بزرگ است، تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس λ خواهد بود.

۷-۱ - آزمون رابطهٔ بین دو پارامتر پواسن

فرض کنید X_1 و X_2 متغیّرهای تصادفی مستقل پواسن و به ترتیب با میانگینهای λ_1 و λ_2 باشند و بخواهیم فرضهای زیر را آزمون کنیم

$H_0 : \lambda_2 = c\lambda_1$ در مقابل $H_1 : \lambda_2 \neq c\lambda_1$

که در آن c یک عدد ثابت است. آزمون فرضهای فوق (مشابه آزمون فیشر ـ اروین در بخش ٦-۱) شرطی خواهد بود و مبتنی بر این واقعیت است که توزیع شرطی X_1 وقتی مجموع X_1 و X_2 داده می‌شود یک توزیع دوجمله‌ای است. بخصوص حکم زیر را داریم

حکم ۱.۷.٦

$$P\{X_1 = k | X_1 + X_2 = n\} = \binom{n}{k}[\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)]^k[\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)]^{n-k}$$

اثبات

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 = k|X_1 + X_2 = n\} &= \frac{P\{X_1 = k, X_1 + X_2 = n\}}{P\{X_1 + X_2 = n\}} \\
&= \frac{P\{X_1 = k, X_2 = n - k\}}{P\{X_1 + X_2 = n\}} \\
&= \frac{P\{X_1 = k\}P\{X_2 = n - k\}}{P\{X_1 + X_2 = n\}} \qquad \text{از استقلال} \\
&= \frac{\exp\{-\lambda_1\}\lambda_1^k/k!\exp\{-\lambda_2\}\lambda_2^{n-k}/(n-k)!}{\exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)\}(\lambda_1 + \lambda_2)^n/n!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}[\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)]^k[\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)]^{n-k} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

از حکم ۱.۷.۶ نتیجه می‌شود که اگر H_0 درست باشد، توزیع شرطی X_1 با فرض $X_1 + X_2 = n$ یک توزیع دوجمله‌ایی با پارامترهای n و $p = 1/(1 + c)$ است. با توجه به این مطلب اگر $X_1 + X_2 = n$، فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر مقدار مشاهده X_1 یعنی x_1 به قسمی باشد

$$P\{\text{Bin}(n, 1/(1 + c)) \geq x_1\} \leq \alpha/2$$

یا

$$P\{\text{Bin}(n, 1/(1 + c)) \leq x_1\} \leq \alpha/2$$

مثال ۶.۷.ب ـ در صنعتی دو طرح بزرگ را اجرا کرده است. اگر تعداد حوادث در طرح ۱ در طول ۸ هفته گذشته، ۱۶، ۱۸، ۹، ۲۲، ۱۷، ۱۹، ۲۴، ۸ و تعداد حوادث طرح ۲ در ۶ هفته، گذشته، ۲۲، ۱۸، ۲۶، ۳۰، ۲۵، ۲۸ باشد، آیا می‌توان در سطح ۵ درصد نتیجه گرفت که شرایط مصون بودن در دو طرح متفاوت است؟

چون احتمال مواجه شدن هر فرد با حوادث در هر لحظه کوچک است، به نظر می‌رسد که تعداد حوادث هفتگی باید تقریباً دارای توزیع پواسن باشد. اگر فرض کنیم X_1 نشان‌دهندهٔ تعداد کل حوادث در یک دوره ۸ هفته‌ایی در طرح ۱ و X_2 نشان‌دهندهٔ این تعداد در یک دوره ۶ هفته‌ایی در طرح ۲ باشد آن‌گاه اگر تعداد حوادث در دو طرح اختلاف نداشته باشد باید داشته باشیم

$$\lambda_2 = \tfrac{3}{4}\lambda_1$$

که در آن $\lambda = E[X_i], i = 1, 2$. بنابراین، چون $X_1 = 133$ و $X_2 = 149$، p-value برای آزمون فرضهای

$$H_0 : \lambda_2 = \tfrac{3}{4}\lambda_1 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \lambda_2 \neq \tfrac{3}{4}\lambda_1$$

به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= 2 \min \left(P\left\{ \text{Bin}\left(282, \tfrac{4}{7}\right) \geq 133 \right\}, P\left\{ \text{Bin}\left(282, \tfrac{4}{7}\right) \leq 133 \right\} \right) \\ &= 9.408 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

(از برنامه ۳ـ۱)

پس فرض برابری سوانح در دو طرح رد می‌شود .

مسایل

۱ ـ در یک فرآیند شیمیایی لازم است محلول به‌کار برده شده دارای pH دقیقاً 8/2 باشد . روشی برای تعیین pH این قبیل محلولها وجود دارد که اندازه‌ها را با توزیع نرمال با میانگین pH واقعی و انحراف معیار 0.02 می‌دهد . فرض کنید ۱۰ اندازهٔ مستقل از مقادیر pH به قرار زیر است

8.18	8.17
8.16	8.15
8.17	8.21
8.22	8.16
8.19	8.18

الف ـ در سطح $\alpha = .10$ چه نتیجه‌ایی به‌دست می‌آید ؟

ب ـ در سطح $\alpha = .05$ چه نتیجه‌ایی به‌دست می‌آید ؟

۲ ـ میانگین مقاومت یک نوع فیبر معین لازم است حداقل ۲۰ پوند باشد . از تجربیات قبلی می‌دانیم که انحراف معیار مقاومت برابر ۵ پوند است . اگر نمونه‌ایی به حجم ۸ قطعه از این نوع فیبر امتحان شود و داشته باشیم

210	198
195	202
197.4	196
199	195.5

آیا در سطح معنی‌دار 0.5. می‌توان نتیجه گرفت که فیبر قابل قبول است ؟ در سطح $\alpha = .1$ چه می‌توان گفت ؟

۳ - متوسط قد مردان در ایالت متحده ۵ فوت و ۱۰ اینچ و انحراف معیار ۳ اینچ است . برای آزمون این فرض که مردان در یک ایالات معین دارای «متوسط» قد هستند نمونه‌ایی به حجم ۲۰ مرد انتخاب شده‌اند . اندازهٔ قد این مردان به صورت زیر است

مرد	اندازه قد برحسب اینچ		مرد
1	72	70.4	11
2	68.1	76	12
3	69.2	72.5	13
4	72.8	74	14
5	71.2	71.8	15
6	72.2	69.6	16
7	70.8	75.6	17
8	74	70.6	18
9	66	76.2	19
10	70.3	77	20

چه نتیجه‌ایی به‌دست می‌آورید ؟ توضیح دهید چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید .

۴ - فرض کنید در مسألهٔ ۱ می‌خواهیم آزمونی را طرح کنیم که اگر pH واقعاً برابر 8/2 باشد این نتیجه با احتمال 0.95 به‌دست می‌آید . از طرف دیگر اگر pH از 8/2 به اندازه 0.03 (از هر سمت) اختلاف داشته باشد می‌خواهیم احتمال چنین چیزی از 0.95 بیشتر می‌باشد :

الف) برای این آزمایش چه روشی به‌کار می‌برید

ب) حجم لازم نمونه چقدر است ؟

پ) اگر pH واقعی 8.32 باشد ، احتمال این که مقدار pH غیر از 8.20 غیر از 8.20 باشد معتبر می‌باشد .

۵ - تحقیق کنید تقریب در معادله ۷.۳.۶ حتی وقتی $\mu_0 < \mu_1$ باشد معتبر می‌باشد .

۶ - در مورد اتومبیلی چنین تبلیغی می‌شود که مسافت طی شده آن به ازای هر گالن بنزین در بزرگراهها حداقل ۳۰ مایل است . اگر مسافت طی شده به ازای هر گالن برای ۱۰ اتومبیل به قرار زیر باشد

آیا تبلیغ فوق را باور خواهید کرد ؟ چه فرضهایی در نظر می‌گیرید ؟

۷ ـ تولیدکننده‌ای ادّعا می‌کند که میانگین طول عمر یک نوع باتری حداقل ۲۴۰ ساعت است . از نمونه‌ایی به حجم ۱۸ باتری نتایج زیر به‌دست آمده است :

237	242	232
242	248	230
244	243	254
262	234	220
225	236	232
218	228	240

اگر فرض کنیم طول عمر باتریها تقریباً نرمال است آیا داده‌ها ، ادّعای تولیدکننده را رد می‌کنند ؟

۸ ـ در ساختن میله‌های استوانه‌ایی با مقطع دایره که باید داخل لوله‌ایی قرار گیرند لازم است میانگین قطر قاعدهٔ آن 5.00 سانتی‌متر باشد . برای آن‌که صحت ماشین تراش را آزمون کنیم از نمونه‌ایی به حجم ۱۰ نتایج زیر را به‌دست آورده‌ایم :

5.036	5.031
5.085	5.064
4.991	4.942
4.935	5.051
4.999	5.011

فرض درستی ماشین تراش را در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید . چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید ؟

۹ ـ شرکتی ورقه‌های پلاستیکی برای مصارف صنعتی تهیه می‌کند . یک نوع لاستیک جدید تولید شده و شرکت معتقد است که متوسط مقاومت این محصول جدید حداقل 30.0 پوند در اینچ مربع است . نمونهٔ تصادفی زیر از خط تولید گرفته شده است . برمبنای این نمونه چه نتیجه‌ایی به‌دست می‌آید ؟

30.1	32.7	22.5	27.5
27.7	29.8	28.9	31.4
31.2	24.3	26.4	22.8
29.1	33.4	32.5	21.7

(فرض کنید جامعه نرمال است)

۱۰- نمونه‌ایی به حجم ۱۰ ماهی از دریاچهٔ A گرفته شده و غلظتهای PCB آنها با روش خاص اندازه‌گیری شده است. نتایج حاصل برحسب یک درمیلیون به‌قرار زیر است:

Lake A: 11.5, 10.8, 11.6, 9.4, 12.4, 11.4, 12.2, 11, 10.6, 10.8

علاوه براین یک نمونهٔ دیگر شامل ۸ ماهی از دریاچهٔ B گرفته شده و سطح PCB آنها با روشی دیگر اندازه‌گیری شده است. نتایج به‌دست آمده عبارتند از

Lake B: 11.8, 12.6, 12.2, 12.5, 11.7, 12.1, 10.4, 12.6

اگر بدانیم که روش اندازه‌گیری از دریاچه A دارای واریانس 0.09 است در حالی که روش استفاده شده در دریاچهٔ B، 0.16؛ آیا (در سطح معنی‌دار ۵ درصد) می‌توان ادّعای یکسان بودن آلودگی دو دریاچه را رد کرد؟

۱۱- دو تولیدکنندهٔ نوعی موشک را در نظر بگیرید. یک نمونه ۱۰ تایی از هر تولیدکننده را انتخاب کرده و زمان سوخت آنها را برحسب ثانیه اندازه‌گرفته‌ایم. نتایج به صورت زیر است

تولیدکننده (۱)	تولیدکننده (۲)
50.7	60.3
54.8	58.8
48.6	56.2
36.9	48.6
52.4	40
51.6	42.8
53	58
38	44.3
42.2	55
50.3	48.6

تساوی زمانهای سوخت را آزمون کنید. چه فرضهایی را لازم است در نظر بگیرید؟

۱۲- داده‌های زیر طول عمر نمونه‌ایی از دو نوع لامپ الکترونیکی را برحسب ساعت نشان می‌دهد. تجربیات گذشته نشان می‌دهد که توزیع طول عمر را می‌توان لُگ نرمال در نظر گرفت. یعنی لگاریتم داده‌ها به‌صورت نرمال توزیع می‌شود. با این فرض که واریانس لگاریتمها در دو جمعیت یکسان است، در سطح ۵ درصد فرض یکسان بودن توزیعهای دو جامعه را آزمون کنید

نوع ۱	32, 84, 37, 42, 78, 62, 59, 74
نوع ۲	39, 111, 55, 106, 90, 87, 85

۱۳ ـ چسبندگی دو روغن موتور مختلف اندازه‌گیری شده و نتایج حاصل به قرار زیر است .

روغن ۱	10.62, 10.58, 10.33, 10.72, 10.44, 10.74
روغن ۲	10.50, 10.52, 10.58, 10.62, 10.55, 10.51, 10.53

فرض برابری میانگین چسبندگی دو روغن را آزمون کنید ، در حالتی که جامعه‌ها دارای توزیع نرمال با واریانس یکسانند .

۱۴ ـ به نظر می‌رسد مقاومت سیم A بیشتر از مقاومت سیم B است . با استفاده از نتایج زیر آزمایشهایی برای هریک از دو نوع سیم بسازید .

سیم A	سیم B
0.140 ohm	0.135 ohm
0.138	0.140
0.143	0.136
0.142	0.142
0.144	0.138
0.137	0.140

در سطح ۱۰ درصد چه نتیجه‌ایی می‌توان گرفت ؟ با چه فرضهایی مسأله را حل می‌کنید .

۱۵ ـ در آزمایشگاهی روش A برای تهیهٔ بنزین از نفت خام مورد بررسی است . قبل از کامل کردن آزمایش یک روش جدید B پیشنهاد می‌شود . تمام شرایط دیگر را یکسان در نظر می‌گیریم ، تصمیم گرفته می‌شود که اگر متوسط حاصل از روش B به اندازهٔ قابل توجهی از روش A بیشتر باشد ، روش B را بر روش A ترجیح دهیم . فرض می‌کنیم تولید هر یک از دو روش دارای توزیع نرمال است . ولی زمان کافی برای محاسبهٔ انحراف معیارهای واقعی وجود ندارد و در ضمن دلیلی وجود ندارد که واریانسها برابر نباشند . از نظر هزینه مجبوریم حجم نمونه‌ها را محدود انتخاب کنیم . برمبنای نمونه‌های تصادفی زیر در سطح یک درصد ، توصیهٔ شما چه خواهد بود . اعداد درصد تولید از نفت خام را نشان می‌دهد .

A	23.2, 26.6, 24.4, 23.5, 22.6, 25.7, 25.5
B	25.7, 27.7, 26.2, 27.9, 25.0, 21.4, 26.1

۱۶ ـ به ده زن باردار برای کاهش درد زایمان آمپول پیتوسین تزریق می‌شود . فشار خون سیستولیک آنها قبل و بعد از تزریق اندازه‌گیری می‌شود . داده‌های حاصل به قرار زیر است :

بیمار	قبل	بعد
1	134	140
2	122	130
3	132	135
4	130	126
5	128	134
6	140	138
7	118	124
8	127	126
9	125	132
10	142	144

آیا داده‌ها تغییری را در فشار خون در اثر مصرف این دارو نشان می‌دهند ؟

۱۷ - یک سؤال مهم پزشکی این است که آیا آهسته دویدن در کاهش ضربان قلب مؤثر است . برای آزمون این فرض ۸ داوطلب که قبلاً نمی‌دویدند حاضر شدند تا برنامهٔ دویدن را به‌مدت یک‌ماه اجرا نمایند . بعد از یک‌ماه اندازه‌های ضربان تعیین گردید و با مقادیر قبل مقایسه شد . اگر داده‌ها به صورت زیر باشد ، آیا می‌توان نتیجه گرفت که آهسته دویدن در میزان ضربان قلب مؤثر است .

شماره	1	2	3	4	5	6	7	8
نرخ ضربان قبل	74	86	98	102	78	84	79	70
نرخ ضربان بعد	70	85	90	110	71	80	69	74

۱۸ - اگر $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای از یک جامعهٔ نرمال با پارامترهای مجهول μ و σ^2 باشد ، آزمونی در سطح α برای فرضهای

$H_0 = \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ در مقابل $H_1 = \sigma^2 > \sigma_0^2$

پیشنهاد کنید .

۱۹ - در مسأله ۱۸ اگر مقدار μ معلوم باشد ، چه تغییری در آزمون حاصل می‌شود .

۲۰ - وسیله‌ای تفنگ مانند بتازگی ساخته شده است که جانشین سُرنگهای تزریقاتی شود . با این وسیله مقادیر مختلفی می‌توان تزریق کرد ولی به علت نوسانات تصادفی ، مقدار واقعی تزریق شده دارای توزیع نرمال با میانگین تعیین شده و واریانس مجهول σ^2 است . اگر انحراف معیار σ از 1. بیشتر شود به‌کار بردن این وسیله خطرناک است . اگر یک نمونهٔ تصادفی ۵۰ تایی از این وسیله دارای انحراف معیار 08. باشد آیا باید استعمال آن را متوقف ساخت ؟ فرض کنید سطح معنی‌داری برابر است با $\alpha = .10$.

۲۱ - یک شرکت داروسازی ، داروی خاصی را تولید می‌کند که وزن آن دارای انحراف معیار ۰/۵ میلی‌گرم است تیم تحقیقات این شرکت روش جدیدی را برای تهیه این دارو پیشنهاد کرده است ، ولی این پیشنهاد مستلزم هزینهٔ اضافی است و فقط وقتی پذیرفته می‌شود که انحراف معیار وزن به ۰/۴ کاهش پیدا کند . اگر در نمونه‌ایی به حجم ۱۰ وزنهای زیر به‌دست آمده باشد آیا می‌توان روش جدید را پذیرفت .

5.728	5.731
5.722	5.719
5.727	5.724
5.718	5.726
5.723	5.722

۲۲ - در تهیه ترانسفورماتورها و خازنهای بزرگ از مواد (PCB) استفاده می‌شود که فوق‌العاده خطرناک است دو روش برای نشان دادن سطوح PCB پیشنهاد شده است و می‌دانیم که هر روش وابسته به یک متغیّر تصادفی نرمال خاص است . اگر فیش مربوطه را ۸ بار به‌وسیلهٔ هریک از دو روش اندازه بگیریم و نتایج به قرار زیر باشد فرض برابری واریانسها را در سطح $\alpha = .10$ آزمون کنید

روش ۱	6.2, 5.8, 5.7, 6.3, 5.9, 6.1, 6.2, 5.7
روش ۲	6.3, 5.7, 5.9, 6.4, 5.8, 6.2, 6.3, 5.5

۲۳ - در مسأله ۱۳ ، برابری واریانسهای دو جامعه را آزمون کنید .

۲۴ - اگر $X_1, ..., X_n$ ، $Y_1, ..., Y_n$ دو نمونهٔ مستقل از دو جامعهٔ نرمال به ترتیب با واریانسهای σ_x^2 و σ_y^2 باشند یک آزمون در سطح معنی‌داری α برای فرضهای زیر بسازید

$H_0 : \sigma_x^2 < \sigma_y^2$ در مقابل $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$

۲۵ - فرض کنید سیزان موم در سطح کیفهایی که از کاغذهای مومی ساخته می‌شود دارای توزیع نرمال است ، ولی به دلایلی واریانس این مقدار برای سطوح داخلی بیشتر از سطوح خارجی است . در نمونه‌ای به حجم ۷۵ مقدار معرفی شده هر سطح این کیفها اندازه‌گیری شده و نتایج به‌صورت زیر به‌دست آمده است

موم برحسب پوند در واحد سطح نمونه

سطح داخلی	سطح خارجی
$\bar{y} = 0.652$	$\bar{x} = 0.948$
$\Sigma y_i^2 = 82$	$\Sigma x_i^2 = 91$

آزمونی بسازید که تعیین کند تغییرات موم در سطح داخلی بزرگتر از سطح خارجی است . $(\alpha = 0.05)$

۲۶ - یک داروی استاندارد در ۷۵ درصد حالات برای یک بیماری خاص مؤثر است . داروی جدیدی که در ۵۰ مورد مصرف شده است در ۴۲ مورد مؤثر بوده است . برمبنای این اطلاعات آیا در سطح ۵ درصد می‌توان یکسان بودن اثرات دو دارو را پذیرفت ؟ از یک آزمون دقیق استفاده کنید p-value چقدر است ؟

۲۷ - مسألهٔ ۲۶ را با استفاده از آزمونی مبتنی بر تقریب دوجمله‌ای با نرمال حل کنید .

۲۸ - در یک رأی‌گیری جدید از ۲۰۰ نفر ، ۵۴ نفر ادّعا کرده‌اند که اسلحهٔ شخصی دارند . در بررسی مشابهی که قبلاً انجام شده است از ۱۵۰ نفر ۳۰ نفر این ادّعا را داشته‌اند . آیا این اطلاعات ثابت می‌کند که افراد در حال حاضر اسلحه بیشتری دارند (یا حداقل چنین ادّعا می‌کنند) یا نسبت افرادی که اسلحهٔ شخصی دارند تغییر نکرده است و این اختلاف بطور تصادفی در نمونه‌گیری پیش آمده است ؟

۲۹ - اگر X_1 متغیّر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n_1, p_1) و X_2 متغیّر تصادفی دوجمله‌ایی مستقل با پارامترهای (n_2, p_2) باشد ، آزمونی مشابه آزمون فیشر ـ اروین برای فرضهای

$$H_0: p_1 \leq p_2 \qquad \text{در مقابل} \qquad H_1: p_1 > p_2$$

بسازید .

۳۰ - ثابت کنید معادلهٔ ۵.٦.٦ از معادله ۴.٦.٦ به‌دست می‌آید .

۳۱ - فرض کنید X_1 و X_2 متغیّرهای تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n_1, p_1) و (n_2, p_2) باشند . ثابت کنید وقتی n_1 و n_2 بزرگ هستند یک آزمون تقریبی در سطح α برای فرضهای

$$H_0: p_1 = p_2 \quad \text{در مقابل} \quad H_1: p_1 \neq p_2$$

به قرار زیر است :

H_0 را رد می‌کنیم اگر

$$\frac{|X_1/n_1 - X_2/n_2|}{\sqrt{\dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}\left(1 - \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}\right)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} > z_{\alpha/2}$$

راهنمایی : الف) ثابت کنید که اگر n_1 و n_2 بزرگ باشند ،

$$\frac{\dfrac{X_1}{n_1} - \dfrac{X_2}{n_2} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \doteq N(0,1)$$

که در آن ~ یعنی «بطور تقریب دارای این توزیع است»

ب) حال استدلال کنید که وقتی H_0 درست است ، یعنی $p_1 = p_2$، بهترین برآورد مقدار مشترک آنها را می‌توان به‌وسیله $(X_1 + X_2)/(n_1 + n_2)$ به‌دست آورد .

۳۲- آزمون تقریبی مسألهٔ ۳۱ را برای داده‌های مسألهٔ ۲۸ به‌کار برید .

۳۳- این فرض را که میانگین زمین‌لرزه‌های سالانه در جزیرهٔ معینی ۵۲ است در سطح .05 آزمون کنید در صورتی که تعداد آنها در ۸ سال گذشته به قرار زیر باشد :

46, 62, 60, 58, 47, 50, 59, 49.

فرض کنید توزیع زمین‌لرزه‌ها پواسن است ، در مورد درستی این فرض بحث کنید .

۳۴- در داده‌های زیر ، نمونهٔ اوّل از یک توزیع پواسن با میانگین λ_1 و نمونه دوم از یک توزیع پواسن با میانگین λ_2 به‌دست آمده است ؛ فرض $\lambda_1 = \lambda_2$ را آزمون کنید .

نمونه ۱	24, 32, 29, 33, 40, 28, 34, 36
نمونه ۲	42, 36, 41

فصل هفتم

رگرسیون

۱ - مقدمه

دربسیاری ازمسائل علمی و مهندسی لازم است رابطه‌ایی بین مجموعه‌ایی از متغیّرها تعیین کنیم. مثلاً، در یک واکنش شیمیایی، ممکن است بخواهیم رابطه‌ایی بین نتیجهٔ آزمایش، درجهٔ حرارتی که واکنش انجام گرفته و مقدار کاتالیزور به‌کار رابه‌دست آوریم. دانستن چنین رابطه‌ایی کمک می‌کند که نتیجه را برای مقادیر مختلف درجه حرارت و میزان کاتالیزور پیش‌بینی کنیم.

در بسیاری موارد یک **متغیّر جواب** Y که به آن متغیّر وابسته نیز گفته می‌شود وجود دارد که به مقدار مجموعه‌ایی از **ورودیها** یا متغیّرهای مستقل $x_1, \ldots, x_r$ بستگی دارد. ساده‌ترین نوع رابطه بین متغیّر وابستهٔ Y و متغیّرهای ورودی $x_1, \ldots, x_r$ یک رابطهٔ خطی است. یعنی برای مقادیر ثابت $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r$ باید معادلهٔ

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r \qquad (۱.۱.۷)$$

برقرار باشد. اگر این رابطه بین Y و $x_1, \ldots, x_r$ برقرار باشد آن‌گاه ممکن است (پس از محاسبهٔ β_i ها) پاسخ را به‌درستی برای هر مجموعه از مقادیر ورود پیش‌بینی کرد. امّا در عمل به چنین دقتی دسترسی نداریم، حداکثر چیزی که انتظارش را داریم این است که معادلهٔ (۱.۱.۷) با یک مقدار **خطای تصادفی** برقرار باشد. با توجه به این مطلب رابطهٔ صریح به صورت زیر نوشته می‌شود

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r + e \qquad (۲.۱.۷)$$

که درآن، e خطای تصادفی رانشان می‌دهد و فرض می‌شود یک متغیّر تصادفی با میانگین صفر است. در واقع یک روش دیگر برای بیان معادلهٔ ۲.۱.۷ به صورت زیر است

$$E[Y|\mathbf{x}] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_r x_r$$

که در آن $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_r)$ مجموعه متغیّرهای مستقل است . $E[Y|\mathbf{x}]$ جواب مورد انتظار با فرض ورودیهای $\mathbf{x}$ است .
معادلهٔ ۲.۱.۷ را **معادلهٔ رگرسیون خطی** گویند . این معادلهٔ رگرسیون ، Y را بر مجموعه متغیّرهای مستقل $x_1, ..., x_r$ توصیف می‌کند . کمیتهای $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_r$ را **ضرایب رگرسیون** نامند و معمولاً باید از مجموعهٔ داده‌ها برآورد شوند . هر معادلهٔ رگرسیون که فقط شامل یک متغیّر مستقل باشد ـ یعنی معادله‌ایی با $r = 1$ ـ **معادلهٔ رگرسیون ساده** نامیده می‌شود . ولی معادلات با متغیّرهای مستقل بیشتر را معادلهٔ رگرسیون **چندگانه** گویند .

پس یک الگوی رگرسیون خطی ساده رابطه خطی ساده‌ای بین میانگین پاسخ و مقدار متغیّر مستقل فرض می‌کند . این الگو را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

که در آن x مقدار متغیّر مستقل ، یا سطح ورودی ، Y پاسخ و e خطای تصادفی را نشان می‌دهد که یک متغیّر تصادفی با میانگین صفر است .

مثال ۱.۷.الف ـ ده زوج از داده‌های (x_i, y_i) ، $i = 1, ..., 10$ درصد محصول یک تجربهٔ آزمایشگاهی y را به درجهٔ حرارت انجام آزمایش x، نشان می‌دهد .

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	100	45	6	150	68
2	110	52	7	160	75
3	120	54	8	170	76
4	130	63	9	180	92
5	140	62	10	190	88

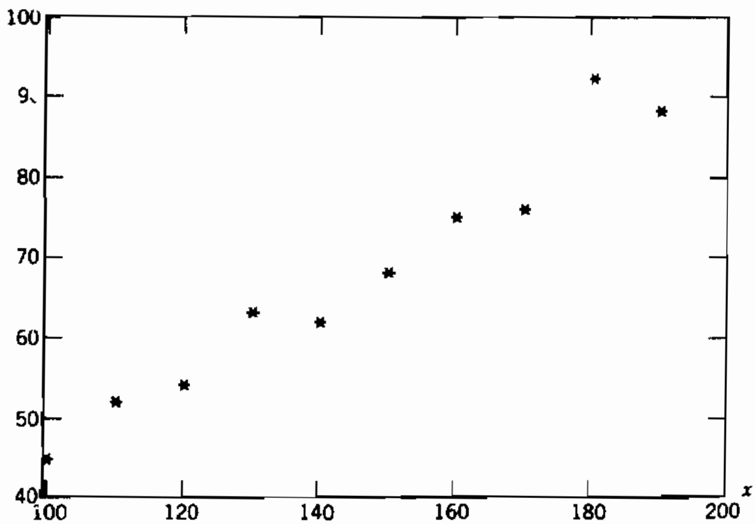
یک عدد y_i در مقابل x_i ـ به نام نمودار پراکنش ـ در شکل ۱.۱.۷ داده شده است همان‌طور که این نمودار پراکنش نشان می‌دهد با توجه به یک خطای تصادفی رابطهٔ خطی بین y و x به صورت یک الگوی رگرسیون خطی ساده مناسب به نظر می‌رسد . ■

۲ - برآوردگرهای کمترین مربعات پارامترهای رگرسیون

فرض کنید پاسخهای Y_i متناظر با متغیّرهای ورودی x_i ، $i = 1, ..., n$ مشاهده شده‌اند . از آنها برای برآورد α و β در یک الگوی رگرسیون خطی ساده استفاده می‌کنیم . برای تعیین برآوردگرهای α و β به صورت زیر استدلال می‌کنیم : اگر A برآوردگر α و B برآوردگر β باشد آن‌گاه برآوردگر پاسخ

متناظر با متغیّر ورودی x_i باید $A + Bx_i$ باشد . چون پاسخ واقعی Y_i است ، مجذور تفاضل این دو برابر است با $(Y_i - A - Bx_i)^2$ و در نتیجه اگر A و B برآوردگرهای α و β باشند آن‌گاه مجموع مربعات تفاضلها بین پاسخهای برآوردشده ومقادیر پاسخ واقعی ـ به نام SS ـ به صورت زیر داده می‌شود .

$$SS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A - Bx_i)^2$$



شکل ۱.۱.۷ نمودار پراکندگی

در روش کمترین مربعات ، برآوردگرهای α و β مقادیری مانند A و B هستند که SS را مینیمم سازند . برای تعیین این برآوردگرها مشتق SS را ابتدا نسبت‌به A وسپس نسبت‌به B به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم :

$$\frac{\partial SS}{\partial A} = -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - A - Bx_i)$$

$$\frac{\partial SS}{\partial B} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(Y_i - A - Bx_i)$$

اگر این مشتقات نسبی را برابر صفر قرار دهیم معادلات زیر برای محاسبهٔ A و B به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = nA + B\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_iY_i = A\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (۱.۲.۷)$$

معادلات ۱.۲.۷ را معادلات نرمال گویند. با فرض

$$\overline{Y} = \sum_i Y_i/n, \qquad \bar{x} = \sum_i x_i/n$$

اولین معادلهٔ نرمال به صورت زیر نوشته می‌شود

$$A = \overline{Y} - B\bar{x} \tag{۲.۲.۷}$$

اگر این مقدار را دومین معادلهٔ نرمال قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\sum_i x_i Y_i = (\overline{Y} - B\bar{x})n\bar{x} + B\sum_i x_i^2$$

یا

$$B\left(\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \sum_i x_i Y_i - n\bar{x}\overline{Y}$$

یا

$$B = \frac{\sum_i x_i Y_i - n\bar{x}\overline{Y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

بنابراین با استفاده از معادلهٔ ۲.۲.۷ و توجه به تساوی $n\overline{Y} = \sum_{i=1}^n Y_i$ قضیهٔ زیر اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۱.۲.۷

برآوردگرهای کمترین مربعات β و α متناظر با مجموعه داده‌های x_i, y_i، $i = 1, \ldots, n$ به ترتیب عبارتند از

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$A = \overline{Y} - B\bar{x}$$

خط مستقیم $A + Bx$ را خط رگرسیون برآورد شده می‌نامند.

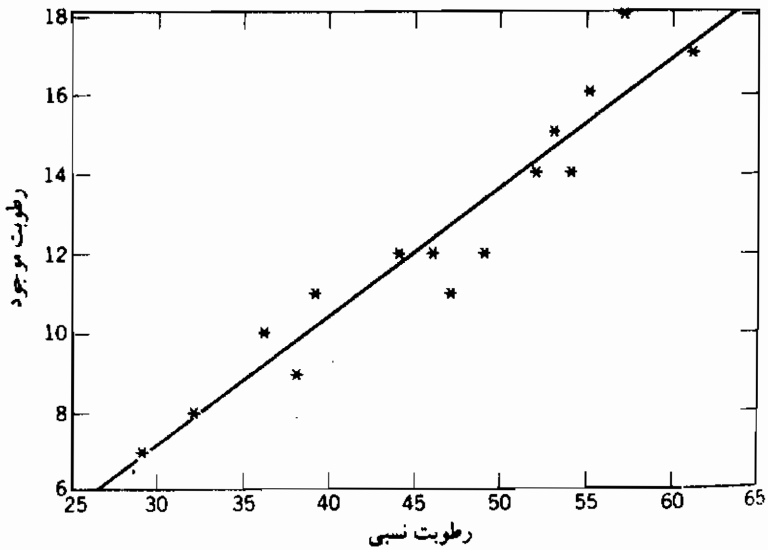
برنامهٔ ۷-۲ ـ برآوردگرهای کمترین مربعات A و B را محاسبه می‌کند. این برنامه علاوه بر این، چند آماره دیگر را که مقادیرشان در بخشهای بعد ضروری است محاسبه می‌کند.

مثال ۷-۲-الف ـ مواد خام مصرف شده در تولید یک فیبر مصنوعی در محلی نگه‌داری می‌شود که

درجهٔ حرارت آن کنترل نمی‌شود . اندازه‌های رطوبت نسبی در محل نگه‌داری و رطوبت موجود نمونه‌ای از مواد خام در طول ۱۵ روز (به درصد) به قرار زیر است .

رطوبت نسبی	46	53	29	61	36	39	47	49	52	38	55	32	57	54	44
رطوبت موجود	12	15	7	17	10	11	11	12	14	9	16	8	18	14	12

این داده‌ها در شکل ۷-۲-۱ رسم شده است .



شکل ۷-۲-۱ مثال ۲.۷.الف

برای محاسبه برآورد کمترین مربعات و برآورد خط رگرسیون برنامهٔ ۷-۲ را اجرا می‌کنیم :

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE LEAST SQUARES ESTIMATORS AND RELATED STATISTICS IN SIM
PLE LINEAR REGRESSION MODELS
ENTER THE NUMBER OF DATA PAIRS n
? 15
ENTER THE n  SUCCESSIVE PAIRS x,Y ONE PAIR AT A TIME
? 46,12
? 53,15
? 29,7
? 61,17
? 36,10
? 39,11
? 47,11
? 49,12
? 52,14
? 38,9
? 55,16
? 32,8
? 57,18
? 54,14
? 44,12
THE LEAST SQUARES ESTIMATORS ARE  AS FOLLOWS
A = -2.510452
B =  .3232035
THE ESTIMATED REGRESSION LINE IS  Y = -2.510452  +  .3232035  x
DO YOU WANT OTHER COMPUTED VALUES? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO.
? 0
Ok
```

۳- توزیع برآوردگرها

برای تعیین توزیع برآوردگرهای A و B لازم است مفروضات دیگری در باره خطاهای تصادفی ، علاوه بر صفر بودن میانگین ، در نظر بگیریم . معمولاً فرض می‌کنیم که خطاهای تصادفی مستقل نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند . یعنی فرض می‌کنیم که اگر Y_i پاسخ متناظر با مقدار ورودی x_i باشد ، آن‌گاه $Y_1, ..., Y_n$ مستقل هستند و داریم

$$Y_i \sim \mathcal{N}\left(\alpha + \beta x_i, \sigma^2\right)$$

باید توجه داشت که در بالا فرض می‌شود که واریانس خطای تصادفی به مقدار ورودی وابسته نبوده بلکه یک مقدار ثابت است . همچنین فرض نمی‌شود که این مقدار معلوم است بلکه باید از داده‌ها برآورد شود .

چون برآورد کمترین مربعات B از β را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$B = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad (۱.۳.۷)$$

می‌بینیم که این رابطه یک ترکیب خطی از متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال Y_i و $i = 1, ..., n$ ، است و در نتیجه خودش دارای توزیع نرمال است . با استفاده از معادلهٔ ۱.۳.۷ میانگین و واریانس B به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
E[B] &= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) E[Y_i]}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \\
&= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(\alpha + \beta x_i)}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \\
&= \frac{\alpha \sum_i (x_i - \bar{x}) + \beta \sum_i x_i (x_i - \bar{x})}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \\
&= \beta \frac{\left[\sum_i x_i^2 - \bar{x} \sum_i x_i\right]}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \text{زیرا} \quad \sum_i (x_i - \bar{x}) = 0 \\
&= \beta
\end{aligned}$$

پس $E[B] = \beta$ و در نتیجه B یک برآوردگر ناریب از β است . حال واریانس B را محاسبه می‌کنیم

$$\mathrm{Var}(B) = \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})Y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)^2} \qquad (۲.۳.۷)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\,\mathrm{Var}(Y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)^2} \qquad \text{بنا به استقلال متغیّرها}$$

$$= \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

که در آن تساوی آخر از اتحاد زیر نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2$$

با استفاده از معادلهٔ ۱.۳.۷ و توجه به رابطهٔ

$$A = \sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{n} - B\bar{x}$$

معلوم می‌شود که A را نیز می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال Y_i ، $i = 1, \ldots, n$ نوشت و در نتیجه A نیز دارای توزیع نرمال است و میانگین آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E[A] = \sum_{i=1}^{n}\frac{E[Y_i]}{n} - \bar{x}E[B]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{(\alpha + \beta x_i)}{n} - \bar{x}\beta$$
$$= \alpha + \beta\bar{x} - \bar{x}\beta$$
$$= \alpha$$

در نتیجه A یک برآوردگر ناریب است . واریانس A به این طریق محاسبه می‌شود که ابتدا A را به‌صورت ترکیب خطی از Y_i بنویسیم . نتیجه (که جزئیات آن به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود) عبارت است از

$$\mathrm{Var}(A) = \frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} \qquad (۳.۳.۷)$$

کمیتهای $Y_i - A - Bx_i$، $i = 1, \ldots, n$ را که تفاضل بین پاسخهای واقعی (یعنی Y_i ها) و برآوردگرهای کمترین مربعات (یعنی $A + Bx_i$) را نشان می‌دهد مانده‌ها می‌گویند. مجموع مربعات مانده‌ها

$$SS_R = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A - Bx_i)^2$$

را می‌توان برای برآورد واریانس مجهول خطا، σ^2 به کار برد. در واقع می‌توان نشان داد که

$$\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

یعنی SS_R/σ^2 دارای توزیع کی‌دو با $n-2$ درجهٔ آزادی است درنتیجه

$$E\left[\frac{SS_R}{\sigma^2}\right] = n - 2$$

یا

$$E\left[\frac{SS_R}{(n-2)}\right] = \sigma^2$$

یعنی SS_R/σ^2 یک برآوردگر نااریب برای σ^2 است. علاوه براین می‌توان نشان داد که SS_R مستقل از A و B است

تبصره

یک استدلال معقول که چرا SS_R/σ^2 دارای توزیع کی‌دو با $n-2$ درجهٔ آزادی است و از A و B مستقل است به صورت زیر است:

چون Y_i ها متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال هستند نتیجه می‌گیریم که

$$(Y_i - E[Y_i])/\sqrt{\mathrm{Var}(Y_i)}, \; i = 1, \ldots, n$$

مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - E[Y_i])^2}{\mathrm{Var}(Y_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

حال اگر برآوردگرهای A و B را به جای α و β قرار دهیم ۲ درجه آزادی از دست می‌دهیم و در نتیجه جای تعجب نیست که SS_R/σ^2 دارای یک توزیع کی‌دو با $n-2$ درجه آزادی است.

دلیل مستقل بودن SS_R از A و B مشابه این نتیجهٔ اساسی است که در نمونه‌گیری از توزیع

نرمال $\bar{X}$ و S^2 مستقل هستند . در واقع این نتیجه بیان می‌کند که اگر $Y_1, \ldots, Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال بامیانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن‌گاه اگر در مجموع مربعات $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2/\sigma^2$ ، که دارای توزیع کی‌دو با n درجه آزادی است ، برآوردگر $\bar{Y}$ را به جای μ قرار دهیم تا مجموع جدید $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2/\sigma^2$ به‌دست آید آن‌گاه این کمیت [یا معادل آن $(n-1)S^2/\sigma^2$] از $\bar{Y}$ مستقل است و دارای توزیع کی‌دو با $n - 1$ درجه آزادی است . چون SS_R/σ^2 از جانشین کردن A و B به‌جای α و β در مجموع مربعات $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \alpha - \beta x_i)^2/\sigma^2$ به‌دست می‌آید می‌توان انتظار داشت که این کمیت مستقل از A و B باشد .

نماد ـ با قرار دادن .

$$S_{xY} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2$$

برآوردگرهای کمترین مربعات را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$B = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}$$

$$A = \bar{Y} - B\bar{x}$$

اتحاد محاسباتی زیر را برای SS_R، مجموع مربعات مانده‌ها می‌توان به‌دست آورد .

اتحاد محاسباتی برای SS_R

$$SS_R = \frac{S_{xx}S_{YY} - S_{xY}^2}{S_{xx}} \tag{۴.۳.۷}$$

قضیهٔ زیر نتایج این بخش را خلاصه می‌کند .

قضیهٔ ۱.۳.۷

فرض کنید Y_i ، $i = 1, \ldots, n$ متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگینهای $\alpha + \beta x_i$ و واریانس مشترک σ^2 باشند . برآوردگرهای کمترین مربعات α و β به ترتیب برابرند با

$$B = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}, \qquad A = \overline{Y} - B\overline{x}$$

علاوه بر آن توزیعهای A و B به صورت زیرند

$$A \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \frac{\sigma^2 \sum_i x_i^2}{nS_{xx}}\right)$$

$$B \sim \mathcal{N}\left(\beta, \sigma^2/S_{xx}\right)$$

همچنین اگر

$$SS_R = \sum_i (Y_i - A - Bx_i)^2$$

مجموع مربعات مانده‌ها را نشان دهد آن‌گاه

$$\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

و SS_R از برآوردگرهای کمترین مربعات A و B مستقل است . در ضمن SS_R را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد

$$SS_R = \frac{S_{xx}S_{YY} - (S_{xY})^2}{S_{xx}}$$

برنامه بیسیک ۲.۷ برآوردگرهای کمترین مربعات A و B همچنین $\bar{x}$، $\sum_i x_i^2$، S_{xy}، S_{yy}، SS_R را محاسبه می‌کنند .

مثال ۳.۷.الف ـ داده‌های زیر میزان رطوبت یک محصول تر ، x را به چگالی محصول تمام شده ، Y مربوط می‌سازد .

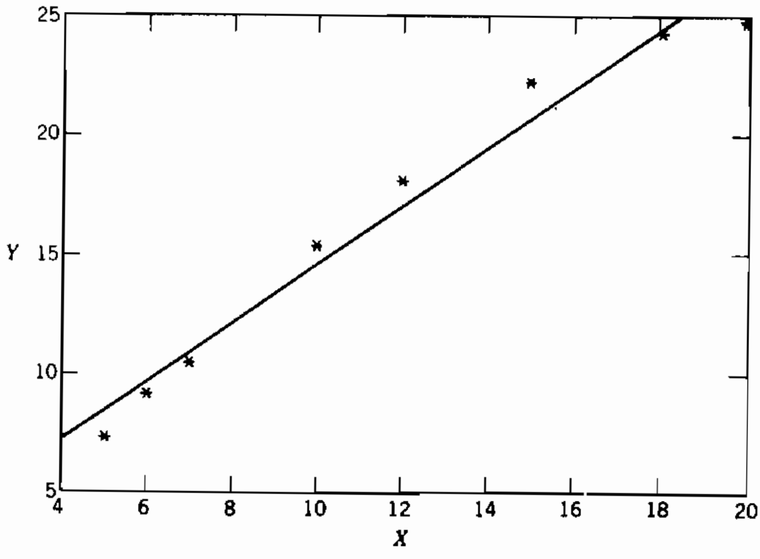
x_i	Y_i
5	7.4
6	9.3
7	10.6
10	15.4
12	18.1
15	22.2
18	24.1
20	24.8

یک منحنی خطی به این داده‌ها برازش دهید . همچنین SS_R را تعیین کنید .

برای حل این مسأله برنامه ۲.۷ را اجرا می‌کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE LEAST SQUARES ESTIMATORS AND RELATED STATISTICS IN SIM
PLE LINEAR REGRESSION MODELS
ENTER THE NUMBER OF DATA PAIRS n
? 8
ENTER THE n  SUCCESSIVE PAIRS x,Y ONE PAIR AT A TIME
? 5,7.4
? 6,9.3
? 7,10.6
? 10,15.4
? 12,18.1
? 15,22.2
? 18,24.1
? 20,24.8
THE LEAST SQUARES ESTIMATORS ARE  AS FOLLOWS
A =  2.463487
B =  1.206367
THE ESTIMATED REGRESSION LINE IS  Y =  2.463487  +  1.206367  x
DO YOU WANT OTHER COMPUTED VALUES? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO.
? 1
S(x,Y) = 267.6626
S(x,x) = 221.875
S(Y,Y) = 332.3692
SSR = 9.46993
THE AVERAGE x VALUE IS 11.625
THE SUM OF THE SQUARES OF THE x VALUES IS 1303
Ok
```

نمودار نقاط داده‌ها و خط رگرسیون برآورد شده در شکل ۱.۳.۷ نشان داده شده است



شکل ۱.۳.۷ مثال ۳.۷ الف

۴- استنباط آماری در مورد پارامترهای رگرسیون

با استفاده از قضیهٔ ۱.۳.۷ بآسانی آزمونهای فرض و فاصله‌های اطمینان برای پارامترهای رگرسیون به‌دست می‌آید .

۴-۱ استنباطهایی در مورد β

یک فرض مهم در مورد الگوی رگرسیون خطی ساده

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

فرض $\beta = 0$ است . اهمیت این فرض در این است که این فرض معادل است با این‌که میانگین پاسخ به‌ورودی بستگی ندارد یا به عبارت دیگر روی متغیّر ورودی ، رگرسیون وجود ندارد . برای آزمون

$$H_0 : \beta = 0 \qquad \text{در مقابل} \qquad H_1 : \beta \neq 0$$

از قضیهٔ ۱.۳.۷ نتیجه می‌شود

$$\frac{B - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / S_{xx}}} = \sqrt{S_{xx}}\,\frac{(B - \beta)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{۱.۴.۷}$$

که از متغیّر زیر مستقل است

$$\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

بنابراین با توجه به تعریف متغیّر تصادفی t نتیجه می‌شود که

$$\frac{\sqrt{S_{xx}}\,\dfrac{(B - \beta)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{SS_R}{\sigma^2 (n - 2)}}} \sim t_{n-2} \tag{۲.۴.۷}$$

یعنی ، $\sqrt{(n - 2) S_{xx} / SS_R}\,(B - \beta)$ دارای توزیع t با $n - 2$ درجه آزادی است . بنابراین اگر H_0 درست باشد (یعنی $\beta = 0$) آن‌گاه

$$\sqrt{\frac{(n - 2) S_{xx}}{SS_R}}\, B \sim t_{n-2}$$

و از آن آزمون فرض H_0 زیر نتیجه می‌شود .

آزمون فرض $H_0 : \beta = 0$ یک آزمون معنی‌داری در سطح γ برای H_0 عبارت است از :

H_o را رد می‌کنیم اگر

$$\sqrt{\frac{(n-2)S_{xx}}{SS_R}}\,|B| > t_{\gamma/2,\,n-2}$$

در غیر این صورت H_0 را می‌پذیریم

این آزمون را می‌توان به صورت زیر انجام داد : ابتدا مقدار آمارهٔ آزمون $\sqrt{(n-2)S_{xx}/SS_R}\,|B|$ را محاسبه می‌کنیم و آن را v می‌نامیم سپس H_0 را رد می‌کنیم اگر سطح معنی‌داری مطلوب حداقل به بزرگی مقدار زیر باشد

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P\{|T_{n-2}| > v\} \\ &= 2P\{T_{n-2} > v\} \end{aligned}$$

که درآن T_{n-2} یک متغیّر تصادفی t با $n-2$ درجهٔ آزادی است . احتمال اخیر را می‌توان با استفاده از برنامهٔ ۲.۸.۳ الف به‌دست آورد .

مثال ۴.۷الف ـ اصطلاح رگرسیون ابتدا توسط فرانسیس گالتن در توصیف قانونهای ارثی معرفی شد . گالتن معتقد بود که قوانین ارثی باعث می‌شود که مقادیر حداکثر و حداقل در جامعه «به سمت میانگین برگشت کنند» ، بدین معنی که فرزندان اعضایی از جامعه که مقادیر حداکثر یا حداقل یک صفت را دارند ، دارای مقادیری کمتر از حداکثر یا بیشتر از حداقل نسبت به والدین خود خواهند بود . کارل پیرسن آماردان انگلیسی ، نمودار اندازه قد ۱۰ پسر را که بتصادف انتخاب کرده بود در مقابل قد پدرانشان رسم کرد . داده‌های نتیجه (برحسب اینچ) به قرار زیر بودند

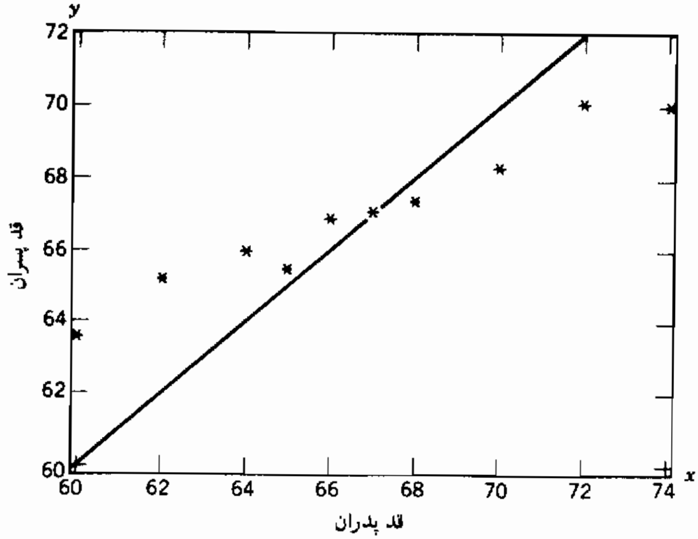
اندازه قد پدران	60	62	64	65	66	67	68	70	72	74
اندازه قد پسران	63.6	65.2	66	65.5	66.9	67.1	67.4	68.3	70.1	70

لازم به تذکر است گرچه داده‌ها نشان می‌دهند که پدران قد بلند دارای پسران قد بلند هستند ، ولی این مطلب را نیز روشن می‌سازند که پسران پدرانی که خیلی کوتاه قد یا بلند قد هستند بیشتر از پدرانشان به سمت «متوسط» میل می‌کنند ـ یعنی یک «برگشت به سمت میانگین» وجود دارد .

اگر واقعاً یک برگشت به سمت میانگین وجود داشته باشد ، و در آن صورت پاسخ Y (که اندازه قد یک پسر است) باید بزرگتر از مقدار ورودی x(اندازه قد پدر) باشد هنگامی که xکوچک است و کوچکتر از xشود وقتی که xبزرگ است . در نتیجه شیب خط رگرسیون باید کمتر از ۱ باشد

(شکل ۱.۴.۷ را ملاحظه کنید) . حال تعیین می‌کنیم که آیا این داده‌ها یک رگرسیون به سمت میانگین را قویاً نشان می‌دهند یا خیر . برای این‌کار فرض مقابل را که «ضریب خط رگرسیون کمتر از ۱ نیست» آزمون می‌کنیم . یعنی فرض زیر

$H_0 : \beta \geq 1$ در مقابل $H_1 : \beta < 1$



شکل ۱.٤.۷ مثال ٤.۷. الف برای x کوچک $y > x$ و برای x بزرگ $y < x$

برای آزمون H_0 برنامهٔ ۲.۷ را اجرا می‌کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE LEAST SQUARES ESTIMATORS AND RELATED STATISTICS IN SIM
PLE LINEAR REGRESSION MODELS
ENTER THE NUMBER OF DATA PAIRS n
? 10
ENTER THE n  SUCCESSIVE PAIRS x,Y ONE PAIR AT A TIME
? 60,63.6
? 62,65.2
? 64,66
? 65,65.5
? 66,66.9
? 67,67.1
? 68,67.4
? 70,68.3
? 72,70.1
? 74,70
THE LEAST SQUARES ESTIMATORS ARE  AS FOLLOWS
A =  35.97757
B =  .4645573
THE ESTIMATED REGRESSION LINE IS  Y =  35.97757  +  .4645573  x
DO YOU WANT OTHER COMPUTED VALUES? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO.
? 1
S(x,Y) = 79.71875
S(x,x) = 171.6016
S(Y,Y) = 38.53125
SSR = 1.497325
THE AVERAGE x VALUE IS 66.8
THE SUM OF THE SQUARES OF THE x VALUES IS 44794
Ok
```

چون مقدار مشاهده شدهٔ $\sqrt{(n-2)S_{xx}/SS_R}$ برابر با $30.28045 = \sqrt{8 \times 171.6/1.49721}$ است ، توجه کنید که اگر H_0 درست باشد یعنی $\beta \geq 1$ آن‌گاه باید داشته باشیم

$$\sqrt{\frac{(n-2)S_{xx}}{SS_R}}\,(B-\beta) \leq (.4645797-1)30.28045 = -16.212721$$

بنابراین مقدار p داده‌ها ، به صورت زیر است

$$\text{مقدار} \; p = P\{T_8 \leq -16.212721\}$$

$$< 10^{-4} \qquad \text{بنا به برنامهٔ ۲.۸.۳ الف}$$

پس فرض $\beta \geq 1$ حتی در سطح معنی‌دار $\alpha = 10^{-4}$ باید رد شود و داده‌ها بشدت یک برگشت به میانگین را نشان می‌دهند . ■

فاصلهٔ اطمینان برای β بآسانی از معادله ۲.۴.۷ به‌دست می‌آید . در واقع از معادلهٔ ۲.۴.۷ معلوم می‌شود که برای هر a، $0 < a < 1$.

$$P\left\{-t_{a/2,\,n-2} < \sqrt{\frac{(n-2)S_{xx}}{SS_R}}\,(B-\beta) < t_{a/2,\,n-2}\right\} = 1-a$$

یا معادل آن

$$P\left\{B - \sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)S_{xx}}}\,t_{a/2,\,n-2} < \beta < B + \sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)S_{xx}}}\,t_{a/2,\,n-2}\right\} = 1-a$$

و از آن نتیجه زیر به‌دست می‌آید .

فاصله اطمینان برای β. یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)$ 100 درصد برای β عبارت است از

$$\left(B - \sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)S_{xx}}}\,t_{a/2,\,n-2}, \qquad B + \sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)S_{xx}}}\,t_{a/2,\,n-2}\right)$$

تبصره

از نتیجهٔ

$$\frac{B-\beta}{\sqrt{\sigma^2/S_{xx}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

نمی‌توان بلافاصله برای استنباط در بارهٔ β استفاده کرد زیرا شامل پارامتر مجهول σ^2 است . در واقع از این آماره هنگامی استفاده می‌کنیم که به جای σ^2 از برآورد آن $SS_R/(n-2)$ استفاده کنیم که با این تغییر توزیع آماره از نرمال استاندارد تبدیل به توزیع t با $n-2$ درجه آزادی می‌شود .

۴-۲ استنباطهایی در مورد α

تعیین فاصلهٔ اطمینان و آزمونهای فرض برای α دقیقاً مانند β انجام می‌شود . بخصوص از قضیهٔ ۱.۳.۷ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{\frac{n(n-2)S_{xx}}{\sum_i x_i^2 SS_R}}\,(A-\alpha) \sim t_{n-2} \qquad (۳.۴.۷)$$

از این رابطه برآوردگر فاصله اطمینان زیر برای α به‌دست می‌آید

برآوردگر فاصله اطمینان برای α. فاصلهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد برای α عبارت است از

$$A \pm \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2 SS_R}{n(n-2)S_{xx}}}\, t_{a/2,\,n-2}$$

آزمونهای فرض برای α از رابطه ۳.۴.۷ بآسانی به‌دست می‌آید و محاسبهٔ آن به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود .

۴-۳ استنباطهایی در باره میانگین پاسخ $\alpha+\beta x$

اغلب می‌خواهیم از داده‌های جفت (x_i, y_i)، $i=1,\ldots,n$ برای برآورد $\alpha+\beta x_0$ میانگین پاسخ برای یک مقدار ورودی x_0 استفاده کنیم . اگر یک برآوردگر نقطه‌ایی مورد نظر باشد آن‌گاه برآوردگر منطقی عبارت است از $A+Bx_0$، که یک برآوردگر نااریب است زیرا

$$E[A+Bx_0] = E[A] + x_0E[B] = \alpha + \beta x_0$$

ولی اگر یک فاصلهٔ اطمینان مورد نظر باشد یا بخواهیم فرضی را در بارهٔ میانگین پاسخ آزمون کنیم آن‌گاه ابتدا لازم است توزیع احتمال برآوردگر $A+Bx_0$ را معلوم کنیم . اکنون این کار را انجام می‌دهیم .
با استفاده از عبارت B در معادلهٔ ۱.۳.۷ داریم

$$B = c\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})Y_i$$

که در آن

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{1}{S_{xx}}$$

چون

$$A = \bar{Y} - B\bar{x}$$

دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} A + Bx_0 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - B(\bar{x} - x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \left[\frac{1}{n} - c(x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_0) \right] \end{aligned}$$

چون Y_i ها متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال هستند معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که $A + Bx_0$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال بیان کرد ، در نتیجه خودش نیز دارای توزیع نرمال است ، چون از قبل میانگین آن را می‌دانیم فقط لازم است واریانس آن را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} &\operatorname{Var}(A + Bx_0) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n} - c(x_i - \bar{x})(\bar{x} - x_0) \right]^2 \operatorname{Var}(Y_i) \\ &\quad = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n^2} + c^2(\bar{x} - x_0)^2 (x_i - \bar{x})^2 - 2c(x_i - \bar{x}) \frac{(\bar{x} - x_0)}{n} \right] \\ &\quad = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + c^2(\bar{x} - x_0)^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 - 2c(\bar{x} - x_0) \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})}{n} \right. \\ &\quad = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{S_{xx}} \right] \end{aligned}$$

که در آخرین تساوی به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 1/c = S_{xx}, \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

بنابراین نشان دادیم که

$$A + Bx_0 \sim \mathcal{N}\left(\alpha + \beta x_0, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right) \qquad (۴.۴.۷)$$

علاوه بر این ، چون $A + Bx_0$ از متغیّر

$$SS_R/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$$

مستقل است نتیجه می‌شود

$$\frac{A + Bx_0 - (\alpha + \beta x_0)}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)}}} \sim t_{n-2} \qquad (۵.۴.۷)$$

حال رابطهٔ ۵.۴.۷ را می‌توان برای به‌دست آوردن برآوردگر فاصلهٔ اطمینان $\alpha + \beta x_0$ به‌کار برد .

برآوردگر فاصلهٔ اطمینان $\alpha + \beta x_0$. با اطمینان $(1-\alpha)$ 100 درصد $\alpha + \beta x_0$ داخل فاصلهٔ زیر قرار می‌گیرد

$$A + Bx_0 \pm \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)}}\, t_{\alpha/2, n-2}$$

در مثال ۴.۷.ب ـ با استفاده از داده‌های مثال ۴. الف ، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای متوسط قد تمام پسرانی که قد پدرانشان ۶۸ اینچ است پیدا کنید .

حل : چون مقادیر مشاهده شده عبارتند از

$$n = 10, \qquad x_0 = 68, \qquad \bar{x} = 66.8, \qquad S_{xx} = 171.6, \qquad SS_R = 1.49721$$

داریم

$$\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\sqrt{\frac{SS_R}{(n-2)}} = .1424276$$

همچنین ، چون

$$t_{.025,8} = 2.306 \qquad A + Bx_0 = 67.56751$$

فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد زیر به‌دست می‌آید

$$\alpha + \beta x_0 \in (67.239, 67.896). \quad \blacksquare$$

۴.۴ فاصلهٔ پیش‌بینی برای یک پاسخ بعدی

اغلب اتفاق می‌افتد که بخواهیم مقدار واقعی یک پاسخ آینده را به جای مقدار میانگین پاسخ برآورد کنیم. مثلاً، اگر آزمایشی در درجهٔ حرارت x_0 انجام شود، ممکن است بخواهیم $Y(x_0)$ را از این آزمایش پیش‌بینی کنیم تا این مقدار مورد انتظار $E[Y(x_0)] = \alpha + \beta x_0$ را برآورد کنیم. (از طرف دیگر اگر یک سری از آزمایشها در سطح ورودی x_0 انجام شود آن‌گاه ممکن است بخواهیم میانگین حاصل، $\alpha + \beta x_0$ را برآورد کنیم.

ابتدا فرض کنید که می‌خواهیم یک مقدار تنها را به‌عنوان پیش‌بینی $Y(x_0)$، پاسخ در سطح x_0، مورد استفاده قرار دهیم. بدیهی است که بهترین پیش‌بینی‌گر $Y(x_0)$ مقدار میانگین آن، $\alpha + \beta x_0$ است. [در واقع خیلی هم بدیهی نیست زیرا می‌توان گفت که بهترین پیش‌بینی‌کننده یک متغیّر تصادفی عبارت است از: ۱ ـ میانگین آن ـ که امید ریاضی توان دوم تفاضل بین پیش‌بینی‌گر و مقدار واقعی را مینیمم می‌کند، ۲ ـ میانهٔ آن ـ که امید ریاضی قدر مطلق تفاضل پیش‌بینی‌گر و مقدار واقعی را مینیمم می‌سازد و ۳ ـ نمای آن ـ که محتملترین مقداری است که رخ می‌دهد. ولی چون میانگین، میانه و نمای یک متغیّر تصادفی نرمال همه برابرند و متغیّر پاسخ بنا به فرض دارای توزیع نرمال خواهد بود در این حالت مشکلی وجود ندارد چون α و β معلوم نیستند، منطقی به‌نظر می‌رسد که به جای آنها برآوردگرهای A و B را مورد استفاده قرار داده و در نتیجه $A + Bx_0$ را به‌عنوان برآوردگر یک پاسخ جدید در سطح ورودی x_0 به‌کار بریم.

حال فرض کنید به جای تعیین یک مقدار تنها برای پیش‌بینی متغیّر پاسخ، بخواهیم یک فاصلهٔ پیش‌بینی پیدا کنیم که با درجه‌ایی از اطمینان شامل پاسخ باشد. برای به‌دست آوردن چنین فاصله‌ایی فرض می‌کنیم پاسخ آینده، Y در سطح ورودی x_0 باشد. حال توزیع احتمال پاسخ منهای مقدار پیش‌بینی آن ـ یعنی، توزیع $Y - A - Bx^0$ را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم که

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\alpha + \beta x_0, \sigma^2\right)$$

و همان‌طور که در بخش ۳.۴ نشان داده شد

$$A + Bx_0 \sim \mathcal{N}\left(\alpha + \beta x_0, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right)$$

بنابراین چون Y از مقادیر قبلی داده‌ها ، $Y_1, \ldots, Y_n$ که برای تعیین A و B به‌کار رفته‌اند مستقل است نتیجه می‌شود که Y از $A + Bx_0$ نیز مستقل خواهد بود ، پس

$$Y - A - Bx_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right)$$

یا معادل آن

$$\frac{Y - A - Bx_0}{\sigma\sqrt{\dfrac{(n+1)}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{۶.۴.۷}$$

حال با استفاده مجدد از این نتیجه که SS_R از A و B (همچنین از Y) مستقل است و

$$\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

و با جانشین کردن $SS_R/n - 1$ به‌جای σ^2 در رابطهٔ ۶.۴.۷ نتیجه می‌شود که

$$\frac{Y - A - Bx_0}{\sqrt{\dfrac{(n+1)}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\sqrt{\dfrac{SS_R}{(n-2)}}} \sim t_{n-2}$$

پس برای هر مقدار α، $0 < \alpha < 1$

$$P\left\{-t_{\alpha/2, n-2} < \frac{Y - A - Bx_0}{\sqrt{\dfrac{(n+1)}{n} + \dfrac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\sqrt{\dfrac{SS_R}{(n-2)}}} < t_{\alpha/2, n-2}\right\} = 1 - \alpha$$

مطالب فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد .

فاصله پیش‌بینی برای یک پاسخ در سطح ورودی x_0. بر مبنای مقادیر پاسخ Y_i متناظر با مقادیر ورودی x_i، $i = 1, \ldots, n$ با $(1 - \alpha)$ 100 درصد اطمینان پاسخ Y در سطح ورودی x_0 در فاصله زیر قرار دارد

$$A + Bx_0 \pm t_{\alpha/2, n-2}\sqrt{\left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\frac{SS_R}{(n-2)}}$$

تبصره

اغلب تفاوت بین فاصلهٔ اطمینان و فاصله پیش‌بینی روشن نیست . فاصلهٔ اطمینان فاصله‌ایی است که با درجهٔ اطمینان معینی یک پارامتر ثابت را در برد دارد . از طرف دیگر فاصلهٔ پیش‌بینی فاصله‌ایی است که با درجهٔ اطمینان مفروض شامل متغیّر تصادفی مورد نظر باشد .

مثال ۴.۷.پ ـ در مثال ۴.۷. الف فرض کنید می‌خواهیم فاصله‌ایی پیدا کنیم که با ۹۵ درصد اطمینان شامل قد پسری باشد که قد پدرش ۶۸ اینچ است . با محاسبهٔ ساده‌ای نتیجه می‌شود که فاصلهٔ پیش‌بینی برابر است با

$$Y(68) \in 67.568 \pm 1.050$$

یا با ۹۵ درصد اطمینان قد این شخص بین ۶۶/۵۱۸ و ۶۸/۶۱۸ خواهد بود . ■

۵.۴ خلاصه نتایج توزیعی

حال نتایج توزیعی این بخش را خلاصه می‌کنیم .

الگو: $Y = \alpha + \beta x + e \qquad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

داده‌ها: $(x_i, Y_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

استنباط در مورد	از نتیجهٔ توزیعی زیر استفاده کنید
β	$\sqrt{\frac{(n-2)S_{xx}}{SS_R}}\,(B-\beta) \sim t_{n-2}$
α	$\sqrt{\frac{n(n-2)S_{xx}}{\sum_i x_i^2 SS_R}}\,(A-\alpha) \sim t_{n-2}$
$\alpha + \beta x_0$	$\dfrac{A + Bx_0 - \alpha - \beta x_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)\left(\frac{SS_R}{(n-2)}\right)}} \sim t_{n-2}$
$Y(x_0)$	$\dfrac{Y(x_0) - A - Bx_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)\left(\frac{SS_R}{(n-2)}\right)}} \sim t_{n-2}$

۵- شاخص برازش

اگر برازش کمترین مربعات داده‌های جفت (x_i, Y_i) ، $i = 1, ..., n$ را به الگوی

$$Y = \alpha + e \tag{۱.۵.۷}$$

در نظر بگیریم آن‌گاه بآسانی بررسی می‌شود که برآوردگر کمترین مربعات α برابر $\bar{Y}$ است و در نتیجه کمترین مقدار ممکن مجموع مربعات مانده‌ها بر مبنای این الگو در معادلهٔ ۱.۵.۷ برابر $\Sigma_i(Y_i - \bar{Y})^2$ است. از طرف دیگر چون الگوی رگرسیون خطی

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

دارای انعطاف‌پذیری بیشتری از معادلهٔ ۱.۵.۷ است نتیجه می‌گیریم که SS_R در این حالت کمتر یا مساوی $\Sigma_i(Y_i - \bar{Y})^2$ است ـ در واقع اکیداً کمتر است مگر آن‌که برآورد کمترین مربعات β برابر صفر باشد کمیت R^2 را که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R^2 = 1 - \frac{SS_R}{\Sigma_i\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{SS_R}{S_{YY}}$$

$$= \frac{S_{xY}^2}{S_{xx}S_{YY}} \qquad \text{از } (۴.۳.۷)$$

ضریب تعیین می‌نامند. مقدار این کمیت بین 0 و 1 قرار دارد (که 0 به ازای $\beta = 0$ حاصل می‌شود و 1 به ازای برازش کامل و در نتیجه $SS_R = 0$ به‌دست می‌آید). مقدار R^2 گاهی به‌عنوان نسبت تغییرات جوابهای Y که به‌وسیلهٔ سطوح ورودی x بیان می‌شود تعبیر می‌گردد.

کمیت $R = \sqrt{R^2}$ را **شاخص برازش** می‌نامند و اغلب به‌عنوان شاخص خوبی برای برازش الگوی رگرسیون به داده‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرد. امّا باید احتیاط کرد که مقداری بزرگ برای R، لزوماً به این معنی نیست که الگوی رگرسیون خطی درست است. همچنین مقدار کوچک R، لزوماً بدین معنی نیست که الگو نادرست است؛ زیرا در واقع مقدار R تنها یک شاخص بهتر بودن برازش الگوی رگرسیون $Y = \alpha + \beta x + e$ نسبت به الگوی $Y = \alpha + e$ است.

مثال ۵.۷.الف ـ از مثال ۴.۷.الف دیده می‌شود که

$$SS_R = 1.497 \qquad S_{YY} = 38.5344$$

و در نتیجه

$$R^2 = .9612 \qquad R = .9804.$$

این مقدار بزرگ R نشان می‌دهد که الگوی رگرسیون برازش بهتری به داده‌ها دارد تا وقتی که فرض کنیم هیچ رابطه‌ایی بین قد پدر و پسر وجود ندارد. ■

شاخص برازش R را **ضریب همبستگی نمونه** نیز می‌نامند. این نام‌گذاری از این‌جا ناشی می‌شود که هر چند فرض می‌کنیم که سطوح ورودیهای متوالی مقادیر مفروض هستند امّا غالباً به‌جای آن‌که ثابت باشند واقعاً متغیّرهای تصادفی‌اند. در چنین حالتی اغلب منطقی است که فرض کنیم زوجهای X_i ، Y_i، $i = 1, \ldots, n$ مستقل و دارای توزیع توأم هستند، که در آن X_i ورودی و Y_i پاسخ iام است. حال فرض کنید که بخواهیم مقدار ρ، همبستگی بین X_i و Y_i را برآورد کنیم؛ یعنی

$$\rho = \frac{E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}$$

که در آن X و Y هر یک از زوجهای X_i و Y_i را نشان می‌دهد. یک برآوردگر منطقی برای ρ به صورت زیر به‌دست می‌آید

مقدار $E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ را با $\sum_{i=1}^{n} \frac{[(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})]}{n}$ برآورد می‌کنیم

مقدار $\operatorname{Var}(X)$ را با $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$ برآورد می‌کنیم

مقدار $\operatorname{Var}(Y)$ را با $\sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{n}$ برآورد می‌کنیم

در نتیجه یک برآوردگر منطقی ρ عبارت است از

$$\hat{\rho} = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X_i - \bar{X})^2 \Sigma(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$= \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}} = R$$

به‌عبارت دیگر شاخص برازش R ضریب همبستگی بین ورودی و پاسخ را برآورد می‌کند.

۶- آنالیز مانده‌ها : ارزیابی الگو

مرحلهٔ اوّل برای اثبات این که الگوی رگرسیون خطی سادهٔ

$$Y = \alpha + \beta x + e, \qquad e \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

در یک وضعیت مناسب است رسیدگی به نمودار پراکنش است . در واقع این کار اغلب برای متقاعد شدن این که الگوی رگرسیون درست است یا خیر ، کافی خواهد بود . وقتی نمودار پراکنش ، الگو را پیش‌بینی نکند ، برآوردگرهای کمترین مربعات Aو Bرا باید محاسبه و مانده‌ها $Y_i - (A + Bx_i)$، $i = 1, \ldots, n$ را تحلیل کرد . تحلیل مانده‌ها با استاندارد کردن مانده‌ها به‌وسیلهٔ تقسیم برآورد انحراف استاندارد Y_i یعنی $\sqrt{SS_R/(n-2)}$ انجام می‌شود . کمیتهای حاصل

$$\frac{Y_i - (A + Bx_i)}{\sqrt{SS_R/(n-2)}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

را **مانده‌های استاندارد شده** گویند

وقتی الگوی رگرسیون خطی صحیح باشد ، مانده‌های استاندارد شده تقریباً متغیّرهای تصادفی نرمال مستقلند و همچنین باید تصادفاً حول صفر توزیع شوند و تقریباً ۹۵ درصد از مقادیر آن بین $2-$ و $2+$ قرار گیرد . (زیرا $P\{-1.96 < Z < 1.96\} = .95$) . علاوه بر آن نمودار مانده‌های استاندارد شده یک الگوی مشخص را نشان نمی‌دهد . در واقع هر اثری از یک الگوی مشخص نشان می‌دهد که باید به درستی فرض مدل رگرسیون خطی شک کرد .

شکل ۱.۶.۷ سه نمودار پراکنش متفاوت را با مانده‌های استاندارد شده مربوطه نشان می‌دهد . در اوّلین آنها ، همان‌طور که از نمودار پراکنش و همچنین وضعیت تصادفی مانده‌های استاندارد شده مشخص است یک مدل خطی کامل می‌توان به داده‌ها برازش داد . در دومین نمودار ، مانده‌ها از یک الگوی مشخص پیروی می‌کنند ، بطوری که وقتی سطح ورودی افزایش پیدا می‌کند مانده‌ها ابتدا نزول و سپس صعود می‌کنند . این بدین معنی است که ترتیب بیشتر جملات مستلزم شرح رابطه‌ایی بین ورودی و پاسخ است ، که در واقع توسط نمودار پراکنش نیز مشخص است . سومین مانده‌های استاندارد شده نیز یک الگو را نشان می‌دهند که در آن وقتی سطح ورودی افزایش پیدا می‌کند ، قدر مطلق مانده‌ها و بنابراین توان دوم آنها صعودی هستند . و این غالباً نشان می‌دهد که واریانس پاسخ ثابت نیست و با افزایش سطح ورودی زیاد می‌شود .

۷- تبدیل به مدل خطی

در بسیاری حالات مشخص می‌شود که میانگین پاسخ تابعی خطی از سطح ورودی نیست . در چنین حالتی اگر شکل رابطه را بتوان تعیین کرد . آن‌گاه ممکن است با یک تغییر متغیّر بتوان آن را تبدیل به‌شکل خطی نمود . برای مثال در بعضی کاربردها می‌دانیم که $W(t)$، شدت یک پیغام در زمان t بعد از شروع ، تقریباً با t رابطه‌ایی به فرم تابعی زیر دارد

$$W(t) \approx ce^{-dt}$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین این رابطه داریم

$$\log W(t) \approx \log c - dt$$

اگر قرار دهیم

$$Y = \log W(t)$$
$$\alpha = \log c$$
$$\beta = -d$$

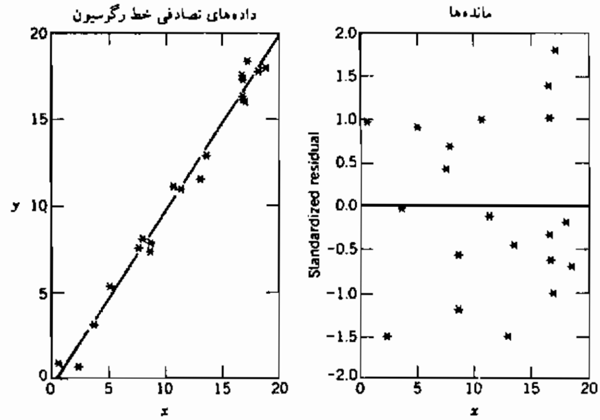
آن‌گاه عبارت اخیر را می‌توان به شکل زیر به مدل رگرسیونی تبدیل کرد

$$Y = \alpha + \beta t + e$$

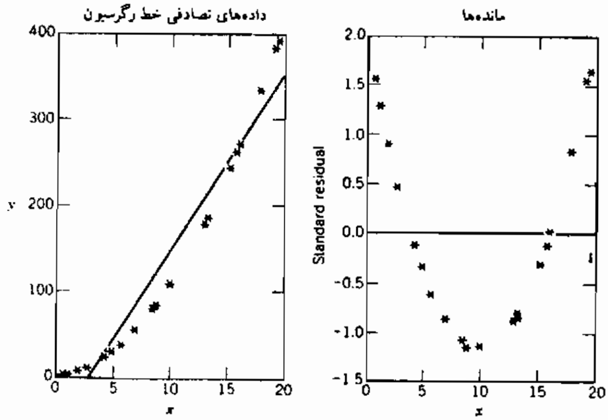
در این صورت پارامترهای α و β را می‌توان از روش معمولی کمترین مربعات برآورد کرد و روابط تابعی اصلی را به صورت زیر می‌توان پیش‌بینی کرد :

$$W(t) \approx e^{A+Bt}$$

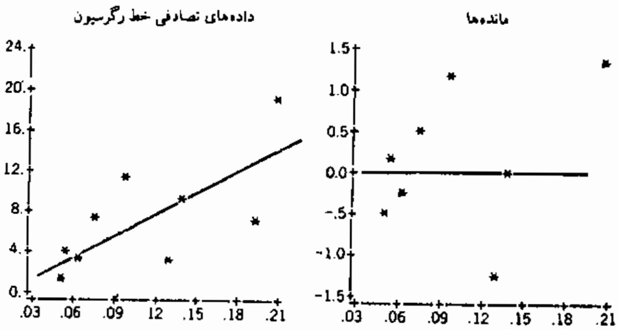
مثال ۷.۷.الف ـ تحقیقات نشان داده است که احتمال ابتلاء به سرطان در ۲۰ سال آینده برای یک فرد سیگاری ۴۰ ساله که از ۱۰ سال قبل سیگار استعمال می‌کند تابعی از تعداد متوسط سیگارهایی است که مصرف می‌کند . داده‌های زیر نتیجه یک تحقیقات وسیع است .



شکل ۱.٦.۷ الف



شکل ۱.٦.۷ ب



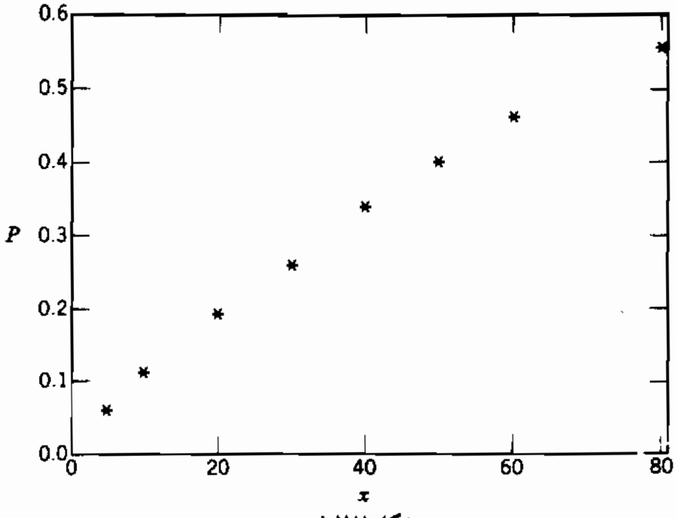
شکل ۱.٦.۷ پ

احتمال ابتلا به سرطان ریه	تعداد سیگارهایی که شخص روزانه مصرف کرده است
.061	5
.113	10
.192	20
.259	30
.339	40
.401	50
.461	60
.551	80

می‌خواهیم از این داده‌ها استفاده کرده و این احتمال را که فردی مبتلا به سرطان ریه شود با این فرض که روزانه ۳۵ سیگار مصرف کند برآورد کنیم.

فرض کنید اگر شخص بطور مدام، روزانه i سیگار استعمال کند، $P(i)$ خطی باشد (شکل ۱.۷.۷ را ببینید) امّا می‌توانیم با در نظر گرفتن یک شکل تابعی غیرخطی برازش را بهتر کنیم. برای به‌دست آوردن چنین رابطه تابعی بین $P(i)$ و i به صورت زیر استدلال می‌کنیم. فرض کنید که هریک از سیگارهای استعمال شده با احتمال ثابت موجب سرطان ریه شوند (احتمالاً با آسیب به DNA داخل یک سلول ریه). بنابراین اگر شخص روزانه i سیگار استعمال کند آن‌گاه احتمال این‌که سرطان ریه به‌علت سیگار کشیدن نباشد برابر است با حاصلضرب احتمالهای این‌که هریک از این i سیگار موجب سرطان نباشد. چون ابتلاء به سرطان ریه ممکن است علل دیگری نیز داشته باشد، به نظر می‌رسد که

$$1 - P(i) = P\{\text{مبتلا نشدن به سرطان ریه اگر روزانه } i \text{ سیگار بکشد}\}$$
$$\approx c\left(P\{\text{مبتلا نشدن به سرطان ریه اگر روزانه یک سیگار بکشد}\}\right)^i$$



شکل ۱.۷.۷

که درآن $c - 1$ احتمال ابتلاء به‌سرطان‌ریه به‌علل دیگراست. این‌رابطه‌رامی‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$1 - P \simeq c(1-d)^x$$

یا

$$\log(1-P) \simeq \log c + x\log(1-d)$$

پس با فرض

$$Y = -\log(1-P)$$
$$\alpha = -\log c$$
$$\beta = -\log(1-d)$$

معادلهٔ رگرسیون معمولی زیر به‌دست می‌آید

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

برای آن‌که ببینیم داده‌ها الگو را تأیید می‌کنند یا خیر ، می‌توانیم نمودار $-\log(1-P)$ را در مقابل xرسم‌کنیم . داده‌های‌تبدیل شده درجدول ۱.۷.۷ ونمودارآنهادرشکل ۲.۷.۷ نمایش‌داده‌شده است .

$A = .0154$
$B = .0099$

جدول ۱.۷.۷

$-\log(1-P)$	تعداد سیگاریها
.063	5
.120	10
.213	20
.300	30
414	40
.512	50
.618	60
.801	80

اگر این مقادیر را مجدداً به متغیّرهای اولیه برگردانیم برآورد c و d عبارتند

$$\hat{c} = e^{-A} = .9847$$
$$1 - \hat{d} = e^{-B} = .9901$$

بنابراین برآورد رابطهٔ تابعی عبارت است از

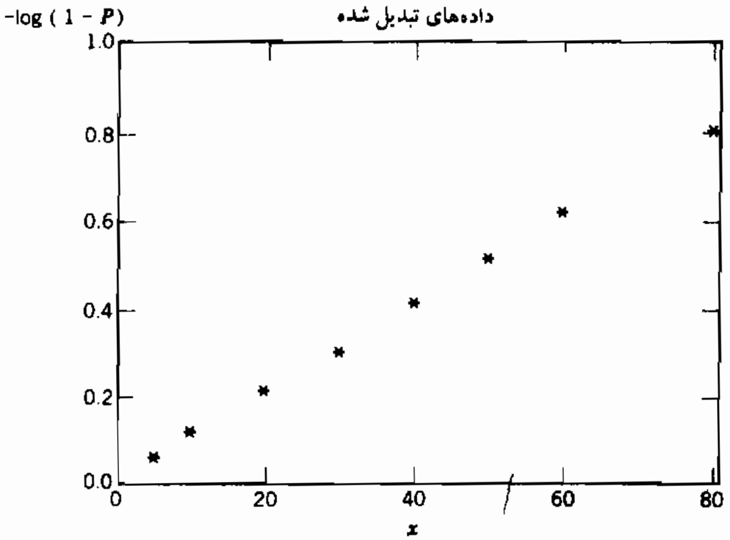
$$\hat{P} = 1 - .9847\,(.9901)^{x}$$

و مانده‌ها ، یعنی مقادیر $P - \hat{P}$ در جدول ۲.۷.۷ داده شده است .

تبصره

اگر P نسبت افرادی در جمعیت باشد که در سطح x در معرض ابتلاء به یک بیماری قرار دارند آن‌گاه در مثال ۷.۷. الف مدل زیر را مورد استفاده قرار می‌دهیم .

$$-\log(1 - P) = \alpha + \beta x + e$$



شکل ۲.۷.۷

جدول ۲.۷.۷

x	P	$\hat{P}$	$P - \hat{P}$
5	.061	.063	−.002
10	.113	.109	.040
20	.192	.193	−.001
30	.259	.269	−.010
40	.339	.339	.000
50	401	.401	.000
60	.461	.458	.003
80	.551	.556	−.005

الگوی دیگری که اغلب به کار می‌رود، الگوی لجستیک (یا لجیت) نامیده می‌شود که به صورت زیر است .

$$\log\left(\frac{P}{1-P}\right) = \alpha + \beta x + e$$

کمیت $P \,/\, (1-P)$ را نسبت تباین نامند . مثلاً اگر احتمال رخ دادن یک پیشامد $P = 3/4$ باشد نسبت تباین عبارت است از $P \,/\, (1-P) = 3/1$، که تباین را در مقابل پیشامد نشان می‌دهد .

۸-کمترین مربعات موزون

در الگوی رگرسیون

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

اغلب دیده می‌شود که واریانس یک پاسخ ثابت نیست و به ورودی بستگی دارد . اگر این واریانسها معلوم باشند ـ حداقل با یک ضریب ـ آن‌گاه پارامترهای رگرسیون α و β را با مینیمم کردن مجموع مربعات موزون به‌دست می‌آوریم ؛ بخصوص اگر

$$\mathrm{Var}(Y_i) = \frac{\sigma^2}{w_i}$$

آن‌گاه برآوردهای A و B باید به قسمی اختیار شوند که عبارات زیر را مینیمم سازند .

$$\sum_i \frac{[Y_i - (A + Bx_i)]^2}{\mathrm{Var}(Y_i)} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_i w_i (Y_i - A - Bx_i)^2$$

اگر نسبت به A و B مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم معادلات زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_i w_i Y_i = A\sum_i w_i + B\sum_i w_i x_i \qquad (۱.۸.۷)$$

$$\sum_i w_i x_i Y_i = A\sum_i w_i x_i + B\sum_i w_i x_i^2$$

این معادلات بآسانی حل می‌شوند و برآوردهای کمترین مربعات به‌دست می‌آیند .

مثال ۸.۷.الف ـ برای روشن شدن علت این که چرا برآوردگرها باید از مینیمم کردن مجموع مربعات موزون بـه جای مجموع مربعات معمولی به‌دست آید ، وضعیت زیر را در نظر بگیرید . فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 هستند . علاوه بر این فرض کنید که X_i مستقیماً قابل مشاهده نیست ، بلکه فقط Y_1 و Y_2 که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Y_1 = X_1 + \cdots + X_k \qquad Y_2 = X_{k+1} + \cdots + X_n \qquad k < n$$

مستقیماً قابل مشاهده‌اند. بر مبنای Y_1 و Y_2 چگونه می‌توان μ را برآورد کرد؟

در حالی که بهترین برآوردگر μ برابر $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n = (Y_1 + Y_2)/n$ است، ببینیم برآوردگر کمترین مربعات معمولی چه خواهد بود؛ چون

$$E[Y_1] = k\mu \qquad E[Y_2] = (n-k)\mu$$

برآوردگر کمترین مربعات μ مقداری است که عبارت زیر را مینیمم سازد

$$(Y_1 - k\mu)^2 + (Y_2 - [n-k]\mu)^2$$

اگر از این عبارت مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم آن‌گاه برآوردگر کمترین مربعات μ که آن را $\hat{\mu}$ می‌نامیم. به قسمی است که

$$-2k(Y_1 - k\hat{\mu}) - 2(n-k)[Y_2 - (n-k)\hat{\mu}] = 0$$

یا

$$\left[k^2 + (n-k)^2\right]\hat{\mu} = kY_1 + (n-k)Y_2$$

یا

$$\hat{\mu} = \frac{kY_1 + (n-k)Y_2}{k^2 + (n-k)^2}$$

پس می‌بینیم با این که برآوردگر کمترین مربعات معمولی یک برآوردگر نااریب برای μ است - زیرا

$$E[\hat{\mu}] = \frac{kE[Y_1] + (n-k)E[Y_2]}{k^2 + (n-k)^2} = \frac{k^2\mu + (n-k)^2\mu}{k^2 + (n-k)^2} = \mu$$

- امّا بهترین برآوردگر یعنی $\bar{X}$ نیست.

حال برآوردگر را با مینیمم کردن مجموع مربعات موزون به‌دست می‌آوریم. یعنی مقداری از μ را که با μ_w نمایش می‌دهیم به قسمی تعیین می‌کنیم که عبارت زیر را مینیمم کند

$$\frac{(Y_1 - k\mu)^2}{\mathrm{Var}(Y_1)} + \frac{[Y_2 - (n-k)\mu]^2}{\mathrm{Var}(Y_2)}$$

چون

$$\operatorname{Var}(Y_1) = k\sigma^2 \qquad \operatorname{Var}(Y_2) = (n-k)\sigma^2$$

پس مقدار μرا به قسمی انتخاب می‌کنیم که عبارت زیر مینیمم شود

$$\frac{(Y_1 - k\mu)^2}{k} + \frac{[Y_2 - (n-k)\mu]^2}{n-k}$$

اگر مشتق این عبارت را مساوی صفر قرار دهیم ، می‌بینیم که μ_wدر معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{-2k(Y_1 - k\mu_w)}{k} - \frac{2(n-k)[Y_2 - (n-k)\mu_w]}{n-k} = 0$$

یا

$$Y_1 + Y_2 = n\mu_w$$

یا

$$\mu_w = \frac{Y_1 + Y_2}{n}$$

یعنی برآوردگر کمترین مربعات موزون در واقع همان بهترین برآوردگر یعنی $\hat{X}$است . ■

تبصره

الف) مجموع مربعات موزون را می‌توان به‌عنوان یک کمیت مناسب برای مینیمم ساختن ، با ضرب معادلهٔ رگرسیون

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

در $\sqrt{w}$ در نظر گرفت . این حاصلضرب عبارت است از

$$Y\sqrt{w} = \alpha\sqrt{w} + \beta x\sqrt{w} + e\sqrt{w}$$

حال در این معادله جملهٔ خطا ، یعنی $e\sqrt{w}$ ، دارای میانگین صفر و واریانس ثابت است . بنابراین برآوردگرهای مجموع مربعات معمولی α و β، مقادیر Aو Bهستند که عبارت زیر را مینیمم می‌کنند

$$\sum\left(Y_i\sqrt{w_i} - A\sqrt{w_i} - Bx_i\sqrt{w_i}\right)^2 = \sum w_i(Y_i - A - Bx_i)^2$$

ب) در روش مجموع مربعات موزون بیشترین تأکید روی داده‌های با بیشترین وزن (و بنابراین با کوچکترین واریانس در جمله خطا) است .

در این‌جا معلوم می‌شود که روش کمترین مربعات موزون چندان مناسب نیست ، زیرا باید

واریانس پاسخ به ازای یک مقدار دلخواه ورودی با تقریب یک ضریب ثابت معلوم باشد . ولی با تجزیه الگویی که داده‌ها را تولید می‌کند ، تعیین این مقادیر اغلب امکان‌پذیر است . در دو مثال زیر این مطلب را توضیح می‌دهیم .

مثال ۸.۷.ب ـ داده‌های زیر زمان مسافرت به مرکز یک شهر را نشان می‌دهد . متغیّر ورودی یا متغیّر مستقل طول مسیر مسافرت است

فاصله	.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10
زمان رسیدن (دقیقه)	15.0	15.1	16.5	19.9	27.7	29.7	26.7	35.9	42	49.4

یک رابطهٔ خطی به صورت زیر بین Y ، زمان مسافرت ، و x، فاصله متناظر ، در نظر می‌گیریم

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

پارامترهای α و β را چگونه برآورد کنیم ؟ برای استفاده از روش مجموع مربعات موزون ، باید واریانس Y به صورت تابعی از x با یک ضریب ثابت معلوم باشد . حال نشان می‌دهیم که $\mathrm{Var}(Y)$ باید متناسب با x باشد .

فرض کنید که d طول یک **بلوک شهری** باشد . در این صورت مسافرتی در طول x شامل x/d بلوک خواهد بود . اگر Y_i ، $i = 1, \ldots$ و x/d ، زمان عبور از بلوک i ام باشد آن‌گاه زمان کل به صورت زیر داده می‌شود

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{x/d}$$

از طرفی در بسیاری از کاربردها شاید منطقی باشد که Y_i ها را متغیّرهای مستقل با واریانس مشترک فرض کنیم ، بنابراین

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(Y_1) + \cdots + \mathrm{Var}(Y_{x/d}) \\ &= (x/d)\,\mathrm{Var}(Y_1) && \text{زیرا} \quad \mathrm{Var}(Y_i) = \mathrm{Var}(Y_1) \\ &= x\sigma^2 && \text{که در آن} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(Y_1)/d \end{aligned}$$

بدین ترتیب معلوم می‌شود که برآوردگرهای A و B باید به قسمی انتخاب شوند که عبارت زیر مینیمم شود

$$\sum \frac{(Y_i - A - Bx_i)^2}{x_i}$$

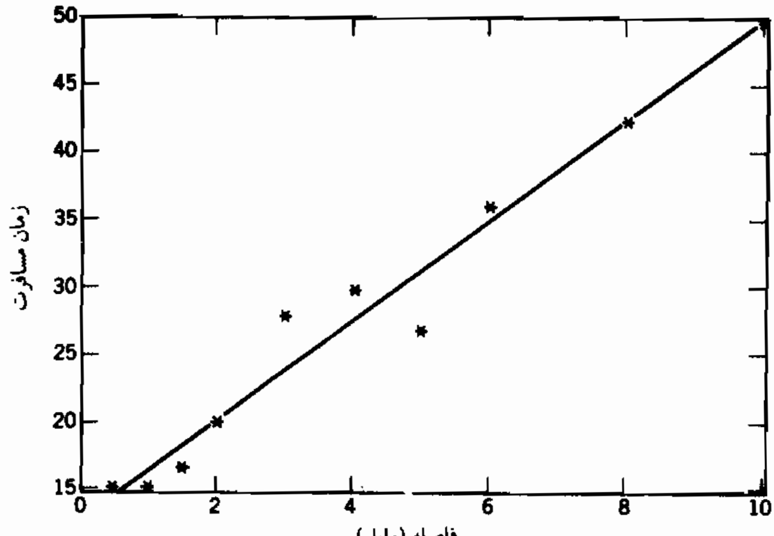
با استفاده از داده‌هایی با وزن $w_i = 1/x_i$ ، معادلات کمترین مربعات ۱.۸.۷ به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$104.22 = 5.34A + 10B$$
$$277.9 = 10A + 41B$$

که دارای جوابهای زیر است

$A = 12.561 \qquad B = 3.714$

نمودار برآورد خط رگرسیون حاصل $Y = 12.561 + 3.714x$ همراه نقاط مربوط به داده‌ها در شکل ۱.۸.۷ نشان داده شده است . برای کنترل کمی مسأله ، توجه کنید که خط رگرسیون وقتی به داده‌ها بهتر برازش دارد که سطوح ورودی ، همان‌طور که انتظار داریم ، کوچک باشد زیرا وزنها با عکس ورودیها متناسب است . ■



شکل ۱.۸.۷ مثال ۷.۸.ب

مثال ۷.۸.پ ـ رابطهٔ بین Y ، مقدار تصادفات یک بزرگراه شلوغ ، و x تعداد اتومبیلهایی که از این بزرگراه عبور می‌کنند را در نظر می‌گیریم . با کمی تأمل به نظر می‌رسد که الگوی زیر مناسب است

$$Y = \alpha + \beta x + e$$

امّا دلیلی وجود ندارد که $\mathrm{Var}(Y)$ به سطح ورودی x بستگی نداشته باشد . لذا نمی‌توانیم روش

کمترین مربعات معمولی را برای برآورد α و β به‌کار بریم . در واقع ثابت می‌کنیم که روش کمترین مربعات موزون با وزنهای $1/x$ باید به‌کار برده شود . یعنی A و B را به قسمی اختیار می‌کنیم که عبارت زیر مینیمم شود .

$$\sum_i \frac{(Y_i - A - Bx_i)^2}{x_i}$$

منطق ادعای فوق این است که می‌توان توزیع Y را بطور تقریب پواسن کرد . زیرا می‌توان تصور کرد که هر یک از x اتومبیل با احتمال خیلی کوچک ممکن است تصادف کند . بنابراین برای مقادیر بزرگ x، تعداد تصادفات باید تقریباً یک متغیّر پواسن باشد . چون واریانس یک متغیّر تصادفی پواسن برابر میانگین آن است ، داریم

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &\approx E[Y] \\ &= \alpha + \beta x \\ &\approx \beta x \qquad \text{(برای } x \text{های بزرگ)} \end{aligned}$$

تبصره

الف) روش دیگری که اغلب ، وقتی واریانس پاسخ به سطح ورودی بستگی دارد ، به‌کار برده می‌شود این است که با یک تبدیل مناسب واریانس را ثابت نگه‌داریم . مثلاً اگر Y متغیّر تصادفی پواسن با میانگین λ باشد آن‌گاه می‌توان نشان داد [تبصره (ب)] که $\sqrt{Y}$ تقریباً دارای واریانس .25 است و به λ بستگی ندارد . بر مبنای این واقعیت می‌توانیم $E[\sqrt{Y}]$ را به صورت الگوی یک تابع خطی از ورودی بنویسیم ، یعنی

$$\sqrt{Y} = \alpha + \beta x + e$$

در این صورت میانگین پاسخ تقریباً یک تابع خطی از ورودی است . ولی بطورکلی روشن نیست که چرا میانگین ریشه دوم پاسخ نیز باید همین رابطه را با سطح ورودی داشته باشد . دومین دلیل است که نویسنده ترجیح می‌دهد از روش کمترین مربعات موزون استفاده شود .

(ب) **اثبات در $\text{Var}(\sqrt{Y}) \approx .25$ ، که در آن Y دارای توزیع پواسن با میانگین λ است .**
بسط سری تیلور تابع $g(y) = \sqrt{y}$ را حول مقدار λ در نظر بگیرید . اگر از تمام جملات شامل مشتقات مراتب ۲ به بعد صرف‌نظر کنیم ، داریم

$$g(y) \approx g(\lambda) + g'(\lambda)(y-\lambda) + \frac{g''(\lambda)(y-\lambda)^2}{2} \qquad (۲.۸.۷)$$

چون

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \qquad g''(\lambda) = -\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}$$

با محاسبهٔ معادلهٔ ۲.۸.۷ در $y = Y$ داریم .

$$\sqrt{Y} \approx \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}(Y-\lambda) - \frac{1}{8}\lambda^{-3/2}(Y-\lambda)^2$$

اگر از طرفین امید ریاضی بگیریم نتیجه می‌شود

$$E[Y-\lambda] = 0 \qquad E\left[(Y-\lambda)^2\right] = \mathrm{Var}(Y) = \lambda$$

و

$$E[\sqrt{Y}] \approx \sqrt{\lambda} - \frac{1}{8\sqrt{\lambda}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(E[\sqrt{Y}])^2 &\approx \lambda + \frac{1}{64\lambda} - \frac{1}{4}\\ &\approx \lambda - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\sqrt{Y}) &= E[Y] - (E[\sqrt{Y}])^2\\ &\approx \lambda - \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

۹- رگرسیون چند جمله‌ای

در مواردی که رابطهٔ تابعی موجود بین پاسخ Y و متغیّر مستقل x را نمی‌توان با یک رابطهٔ خطی تقریب زد ، گاهی اوقات امکان دارد یک چند جمله‌ای برازش معقولی داشته باشد . یعنی می‌توان داده‌ها را با تابعی به صورت زیر برازش داد

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_r x^r + e$$

که در آن $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ ضرایب رگرسیون هستند که باید برآورد شوند . اگر مجموعهٔ داده‌ها از n زوج (x_i, Y_i) ، $i = 1, \ldots, n$ تشکیل شده باشد آن‌گاه برآوردگرهای کمترین مربعات $\beta_0, \ldots, \beta_r$ـ یعنی $B_0, \ldots, B_r$ـ مقادیری هستند که عبارت زیر را مینیمم سازند

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - B_0 - B_1x - B_2x^2 - \cdots - B_rx^r\right)^2$$

برای تعیین این برآوردگرها مشتقات نسبی عبارت فوق را نسبت به $B_0, \ldots, B_r$ حساب می‌کنیم وسپس آنها را مساوی صفر قرار می‌دهیم . اگر معادلات حاصل را مرتب کنیم ، برآوردگرهای کمترین مربعات $B_1, B_2, \ldots, B_r$ در $r+1$ معادلهٔ خطی زیر که به آنها معادلات نرمال گویند ، صدق می‌کنند .

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Y_i &= B_0 n + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + B_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + B_r \sum_{i=1}^{n} x_i^r \\
\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i &= B_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \cdots + B_r \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+1} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 Y_i &= B_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \cdots + B_r \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+2} \\
&\ \vdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^r Y_i &= B_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^r + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{r+1} + \cdots + B_r \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r}
\end{aligned}$$

برای برازش یک چند جمله‌ای به مجموعه‌ای از داده‌ها اغلب می‌توان درجهٔ لازم چند جمله‌ای را با رسم نمودار تعیین کرد . در این جا تأکید می‌شود که همیشه باید کمترین درجهٔ ممکن برای توصیف داده‌ها انتخاب شود [بنابراین به‌عنوان مثال هر چند پیدا کردن یک چند جمله‌ای درجهٔ n که از تمام n نقطه (x_i, Y_i) ، $i = 1, \ldots, n$ بگذرد امکان‌پذیر است ولی اطمینان به چنین برازشی مشکل خواهد بود .]

مثال ۹.۷.الف ـ یک چند جمله‌ای به داده‌های زیر برازش دهید

x	Y
1	20.6
2	30.8
3	55
4	71.4
5	97.3
6	131.8
7	156.3
8	197.3
9	238.7
10	291.7

با رسم نمودار این داده‌ها (شکل ۱.۹.۷) دیده می‌شود که یک رابطهٔ درجهٔ دوم، مانند

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e$$

ممکن است مناسب باشد، چون

$$\sum_i x_i = 55, \quad \sum_i x_i^2 = 385, \quad \sum_i x_i^3 = 3025, \quad \sum_i x_i^4 = 25333$$
$$\sum_i Y_i = 1291.1, \quad \sum_i x_i Y_i = 9549.3, \quad \sum_i x_i^2 Y_i = 77758.9$$

برآوردهای کمترین مربعات جواب معادلات زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} 1291.1 &= 10B_0 + 55B_1 + 385B_2 \\ 9549.3 &= 55B_0 + 385B_1 + 3025B_2 \\ 77758.9 &= 385B_0 + 3025B_1 + 25333B_2 \end{aligned} \qquad (۱.۹.۷)$$

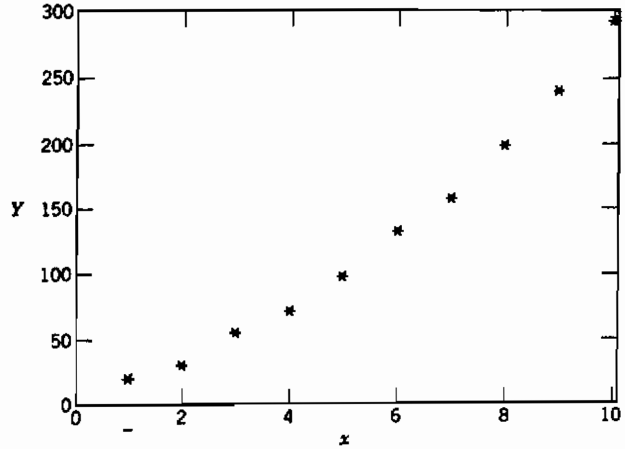
از حل این معادلات برآوردهای کمترین مربعات به‌صورت زیربه‌دست می‌آیند (تبصرهٔ زیر را ببینید).

$$B_0 = 12.59326 \qquad B_1 = 6.326172 \qquad B_2 = 2.122818$$

بنابراین معادلهٔ رگرسیون درجه ۲ عبارت است از

$$Y = 12.59 + 6.33x + 2.12x^2$$

این معادلهٔ همراه با داده‌ها در شکل ۲.۹.۷ رسم شده است. ■



شکل ۱.۹.۷

تبصره

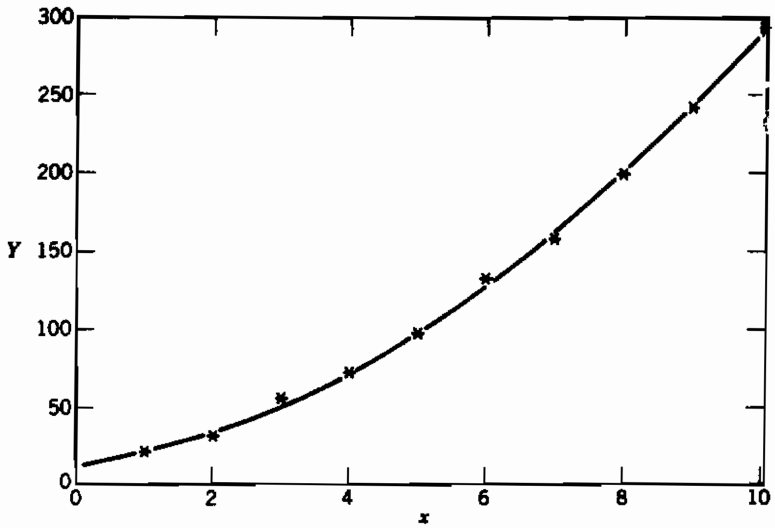
با نماد ماتریسی معادلهٔ ۱.۹.۷ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} 1291.1 \\ 9549.3 \\ 77758.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

که دارای جواب زیر است .

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1291.1 \\ 9549.3 \\ 77758.9 \end{bmatrix}$$

برنامهٔ Inv ضمیمه را می‌توان برای محاسبهٔ معکوس ماتریس به‌کار برد .



شکل ۲.۹.۷

۱۰ - رگرسیون خطی چندگانه

در اغلب کاربردها پاسخ یک آزمایش را بطور کاملتر می‌توان بر مبنای مجموعه‌ای از متغیّرهای مستقل

به‌جای یک متغیّر ورودی پیش‌بینی کرد . یک نمونه از این وضعیت وقتی است که مجموعه‌ایی از k متغیّر ورودی با پاسخ Y به صورت زیر مرتبطند

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + e$$

که در آن x_i ، $i = 1, ..., k$ سطح i امین متغیّر ورودی و e متغیّر خطاست که فرض می‌شود دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است . پارامترهای $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ و σ^2 مجهولند و باید از داده‌ها برآورد شوند ، که فرض می‌شود داده‌ها عبارتند از $Y_1, ..., Y_n$ که در آن Y_i پاسخ متناظر با k سطح ورودی $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}$ است . یعنی رابطه با این سطوح ورودی به قرار زیر است

$$E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}$$

اگر $B_0, B_1, ..., B_k$ برآوردگرهای $\beta_0, ..., \beta_k$ باشند آن‌گاه مجموع مربعات تفاضلهای بین Y_i و برآورد مقادیر میانگین آنها عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - B_2 x_{i2} - \cdots - B_k x_{ik})^2$$

برآوردگرهای کمترین مربعات مقادیری از $\acute{B}_0, B_1, ..., B_k$ هستند که کمیت فوق را مینیمم سازند .
برای تعیین برآوردگرهای کمترین مربعات مشتقات نسبی مجموع مربعات فوق را ابتدا نسبت به B_0 و سپس ... B_1، و بالاخره B_k محاسبه‌می‌کنیم . اگر $k + 1$ کمیت حاصل را برابر صفر قرار دهیم . مجموعه معادلات زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - B_2 x_{i2} \cdots - B_k x_{ik}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}(Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - \cdots - B_k x_{ik}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}(Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - \cdots - B_k x_{ik}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik}(Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - \cdots - B_i x_{ik}) = 0$$

اگر این معادلات را به صورت زیر مرتب کنیم آنها را **معادلات نرمال** می‌نامند .

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = nB_0 + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} + B_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} + \cdots + B_k \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \qquad (۱.۱۳.۷)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}Y_i = B_0\sum_{i=1}^{n} x_{i1} + B_1\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 + B_2\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} + \cdots + B_k\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ik}Y_i = B_0\sum_{i=1}^{n} x_{ik} + B_1\sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i1} + B_2\sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i2} + \cdots + B_k\sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2$$

قبل از حل معادلات نرمال بهتر است نمادهای زیر را معرفی کنیم

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

در این صورت $\mathbf{Y}$ یک ماتریس $n \times 1$، $\mathbf{X}$ یک ماتریس $n \times p$ و $\boldsymbol{\beta}$ یک ماتریس $p \times 1$ و $\mathbf{e}$ یک ماتریس $n \times 1$ است که در آن $p = k + 1$.

حال الگوی رگرسیون چندگانه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$

به‌علاوه اگر

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}$$

ماتریس برآوردگرهای کمترین مربعات باشد آن‌گاه معادلات نرمال ۱.۱۰.۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{X'XB} = \mathbf{X'Y}$$

که در آن $\mathbf{X}'$ ترانهادهٔ $\mathbf{X}$ است.
برای آن‌که نشان دهیم معادلهٔ ۲.۱۰.۷ با معادلات نرمال ۱.۱۰.۷ معادل است توجه کنید که

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & & & \\ x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & \sum_i x_{i1} & \sum_i x_{i2} & \cdots & \sum_i x_{ik} \\ \sum_i x_{i1} & \sum_i x_{i1}^2 & \sum_i x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_i x_{i1}x_{ik} \\ \vdots & & & & \\ \sum_i x_{ik} & \sum_i x_{ik}x_{i1} & \sum_i x_{ik}x_{i2} & \cdots & \sum_i x_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum_i Y_i \\ \sum_i x_{i1}Y_i \\ \vdots \\ \sum_i x_{ik}Y_i \end{bmatrix}$$

حال بآسانی دیده می‌شود که معادلهٔ ماتریسی

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

با مجموعه معادلات نرمال ۱.۱۰.۷ معادل است. اگر فرض کنیم که $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ وجود دارد (تقریباً این چنین است) با ضرب طرفین معادلهٔ فوق در آن، برآوردگرهای کمترین مربعات به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

برنامهٔ ۱۰.۷ برآوردهای کمترین مربعات ، معکوس ماتریس $(X'X)^{-1}$ و SS_R را محاسبه می‌کند .

مثال ۱۰.۷.الف ـ داده‌های زیر تعداد خودکشیها را در ارتباط با حجم جامعه و تعداد طلاقها در ۸ ناحیهٔ مختلف را نشان می‌دهد

ناحیه	جامعه در هزار	میزان طلاق در صد هزار	میزان خودکشی در صد هزار
Akron, Ohio	679	30.4	11.6
Anaheim, Ca.	1420	34.1	16.1
Buffalo, N.Y.	1349	17.2	9.3
Austin, Texas	296	26.8	9.1
Chicago, Ill.	6975	29.1	8.4
Columbia, S.C.	323	18.7	7.7
Detroit, Mich.	4200	32.6	11.3
Gary, Indiana	633	32.5	8.4

یک الگوی رگرسیون خطی به‌این‌داده‌هابرازش‌دهید ، یعنی‌الگویی‌به‌صورت زیربه‌داده‌هابرازش دهید

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + e$$

که در آن Y میزان خودکشی ، x_1 جامعه و x_2 میزان طلاق است .

برنامهٔ ۱۰.۷ را اجرا می‌کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE LEAST SQUARES ESTIMATES OF THE COEFFICIENTS AND THE
 SUM OF SQUARES OF THE RESIDUALS IN MULTIPLE LINEAR REGRESSION
IT BEGINS BY COMPUTING THE INVERSE OF THE X-TRANSPOSE*X MATRIX
ENTER THE NUMBER OF ROWS OF THE X-MATRIX
? 8
ENTER THE NUMBER OF COLUMNS OF THE X-MATRIX
? 3
ENTER ROW 1 ONE AT A TIME
? 1? 679? 30.4
ENTER ROW 2 ONE AT A TIME
? 1? 1420? 34.1
ENTER ROW 3 ONE AT A TIME
? 1? 1349? 17.2
ENTER ROW 4 ONE AT A TIME
? 1? 296? 26.8
ENTER ROW 5 ONE AT A TIME
? 1? 6975? 29.1
ENTER ROW 6 ONE AT A TIME
? 1? 323? 18.7
ENTER ROW 7 ONE AT A TIME
? 1? 4200? 32.6
ENTER ROW 8 ONE AT A TIME
? 1? 633? 32.5
THE INVERSE MATRIX IS AS FOLLOWS
 2.783111   1.707031E-05 -9.727136E-02
```

```
1.707031E-05  2.69611E-08 -2.55E-06

?.727136E-02 -2.55E-06  3.697616E-03

ENTER THE RESPONSE VALUES ONE AT A TIME
 ?1.6? 16.1? 9.3? 9.1? 8.4? 7.7? 11.3? 8.4
HE ESTIMATES OF THE REGRESSION COEFFICIENTS ARE AS FOLLOWS

              B( 0 )= 3.507385
              B( 1 )=-2.47709E-04
              B( 2 )= .2609463
THE SUM OF SQUARES OF THE RESIDUALS IS  SS(R) = 34.1192
```

در نتیجه برآورد خط رگرسیون عبارت است از

$$Y = 3.5073 - .0002x_1 + .2609x_2$$

مقدار B_1 نشان می‌دهد که جامعه نقش مهمی در پیش‌بینی میزان خودکشی ندارد (حداقل وقتی میزان طلاق نیز داده شود) شاید چگالی جامعه، به جای جامعهٔ واقعی بیشتر فایده داشته باشد. ■

از معادلهٔ ۳.۱۰.۷ نتیجه می‌شود که برآوردهای کمترین مربعات $B_0, B_1, \ldots, B_k$ ـ عناصر ماتریس $\mathbf{B}$ ـ همه ترکیبات خطی از متغیّرهای تصادفی نرمال $Y_1, \ldots, Y_n$ هستند و بنابراین خود آنها نیز دارای توزیع نرمال خواهند بود. در واقع در چنین وضعیتی ـ یعنی وقتی هر یک از اعضای مجموعه‌ایی از متغیّرهای تصادفی را بتوان به صورت ترکیبی از متغیّرهای نرمال نوشت ـ می‌گوییم این مجموعه متغیّرهای تصادفی دارای توزیع توأم نرمال چند متغیّره هستند.

برآوردهای کمترین مربعات نااریب هستند. این مطلب را می‌توان به صورت زیر اثبات کرد

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{B}] &= E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right] \\
&= E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e})\right] \qquad\qquad \mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \\
&= E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{e}\right] \\
&= E\left[\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{e}\right] \\
&= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E[\mathbf{e}] \\
&= \boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

واریانس برآوردگرهای کمترین مربعات را می‌توان از ماتریس $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ به‌دست آورد. در واقع، مقادیر این ماتریس به کوواریانسهای B_iها مربوط می‌شوند. بخصوص عنصر سطر $(i + 1)$ و ستون $(j + 1)$ ماتریس $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ برابر با $\mathrm{Cov}\,(B_i, B_j)/\sigma^2$ است.

برای اثبات مطلب فوق در ارتباط با $\mathrm{Cov}\,(B_i, B_j)$ می‌نویسیم

$$\mathbf{C} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

چون $\mathbf{X}$ یک ماتریس $n \times p$ و $\mathbf{X}'$ یک ماتریس $p \times n$ است، ماتریس $\mathbf{X}'\mathbf{X}$، مانند $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ یک ماتریس $p \times p$ خواهد بود. در نتیجه $\mathbf{C}$ نیز ماتریس $p \times n$ است.
اگر C_{ij} عنصر سطر iام و ستون jام این ماتریس باشد، می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_{i-1} \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \mathbf{CY} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \\ C_{i1} & \cdots & C_{in} \\ \\ C_{p1} & \cdots & C_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \\ \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$B_{i-1} = \sum_{l=1}^{n} C_{il} Y_l$$

$$B_{j-1} = \sum_{r=1}^{n} C_{jr} Y_r$$

پس

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(B_{i-1}, B_{j-1}) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{l=1}^{n} C_{il} Y_l, \quad \sum_{r=1}^{n} C_{jr} Y_r \right) \\ &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} C_{il} C_{jr} \operatorname{Cov}(Y_l, Y_r) \end{aligned}$$

از طرفی Y_l و Y_r، $(l \neq r)$ مستقل هستند، بنابراین

$$\operatorname{Cov}(Y_l, Y_r) = \begin{cases} 0 & \text{if } l \neq r \\ \operatorname{Var}(Y_r) & \text{if } l = r \end{cases}$$

چون $\operatorname{Var}(Y_r) = \sigma^2$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(B_{i-1}, B_{j-1}) &= \sigma^2 \sum_{r=1}^{n} C_{ir} C_{jr} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{CC}')_{ij} \end{aligned} \qquad (۴.۱۰.۷)$$

که در آن $(\mathbf{CC'})_{ij}$ عنصر سطر iام و ستون jام ماتریس $\mathbf{CC'}$ است .
حال اگر $\mathrm{Cov}(\mathbf{B})$ ماتریس کوواریانسها باشد ، یعنی

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(B_0, B_0) & \cdots & \mathrm{Cov}(B_0, B_k) \\ \vdots & & \\ \mathrm{Cov}(B_k, B_0) & \cdots & \mathrm{Cov}(B_k, B_k) \end{bmatrix}$$

آن‌گاه از معادلهٔ ۴.۱۰.۷ نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{B}) = \sigma^2 \mathbf{CC'} \tag{۵.۱۰.۷}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \mathbf{C'} &= \left((\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right)' \\ &= \mathbf{X}\left((\mathbf{X'X})^{-1}\right)' \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1} \end{aligned}$$

تساوی اخیر با توجه به تقارن $(\mathbf{X'X})^{-1}$ به‌دست می‌آید (زیرا $\mathbf{X'X}$ متقارن است) . پس

$$\begin{aligned} \mathbf{CC'} &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'X}(\mathbf{X'X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X'X})^{-1} \end{aligned}$$

بنابراین از معادلهٔ ۵.۱۰.۷ نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{B}) = \sigma^2 (\mathbf{X'X})^{-1}$$

چون $\mathrm{Cov}(B_i, B_i) = \mathrm{Var}(B_i)$ ، معلوم می‌شود که برآوردگرهای کمترین مربعات از ضرب σ^2 در عناصر قطری ماتریس $(\mathbf{X'X})^{-1}$ به‌دست می‌آیند .

کمیت σ^2 را می‌توان با استفاده از مجموع مربعات مانده‌ها برآورد کرد . یعنی اگر بنویسیم

$$SS_R = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - B_2 x_{i2} - \cdots - B_k x_{ik})^2$$

آن‌گاه می‌توان نشان داد که

$$\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-(k+1)}$$

بنابراین

$$E\left[\frac{SS_R}{\sigma^2}\right] = n - k - 1$$

یا

$$E\left[SS_R/(n - k - 1)\right] = \sigma^2$$

یعنی $SS_R/(n - k - 1)$ یک برآوردگر نااریب برای σ^2 است . به‌علاوه ، مانند حالت رگرسیون خطی ساده ، SS_R از برآوردگرهای کمترین مربعات $B_0, B_1, ..., B_k$ مستقل است

تبصره

اگر r_i مانده iام باشد ، یعنی

$$r_i = Y_i - B_0 - B_1 x_{i1} - \cdots - B_k x_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

آن‌گاه

$$\mathbf{r} = \mathbf{Y} - \mathbf{XB}$$

که در آن

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} SS_R &= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \qquad (۷.۱۰.۷) \\ &= \mathbf{r}'\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{XB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{XB}) \\ &= \left[\mathbf{Y}' - (\mathbf{XB})'\right](\mathbf{Y} - \mathbf{XB}) \\ &= (\mathbf{Y}' - \mathbf{B}'\mathbf{X}')(\mathbf{Y} - \mathbf{XB}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{XB} - \mathbf{B}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \mathbf{B}'\mathbf{X}'\mathbf{XB} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{XB} \end{aligned}$$

که در آن تساوی آخر از معادلات نرمال زیر بدست می‌آید

$$\mathbf{X'XB} = \mathbf{X'Y}$$

از طرف دیگر چون $\mathbf{Y}'$ ماتریس $n \times 1$ و $\mathbf{X}$ ماتریس $n \times p$ و $\mathbf{B}$ یک ماتریس $p \times 1$ است نتیجه می‌شود $\mathbf{Y'XB}$ یک ماتریس 1×1 خواهد بود. یعنی $\mathbf{Y'XB}$ یک عدد خواهد بود و در نتیجه با ترانهادهٔ خود برابر است و نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}\mathbf{Y'XB} &= (\mathbf{Y'XB})' \\ &= \mathbf{B'X'Y}\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از معادلهٔ ۷.۱۰.۷ اتحاد زیر ثابت می‌شود

$$SS_R = \mathbf{Y'Y} - \mathbf{B'X'Y}$$

این رابطه برای محاسبهٔ SS_R بسیار مفید است (امّا باید در استفاده از آن مواظب خطای گرد کردن باشیم).

مثال ۷.۱۰.ب ـ برای داده‌های مثال ۷.۱۰.الف داریم $SS_R = 34.12$. چون $n = 8$ و $k = 2$ برآورد σ^2 عبارت است از $34.12/5 = 6.824$. ■

مثال ۷.۱۰.پ ـ قطر یک درخت در ارتفاع یک متری تحت تأثیر عوامل زیادی است. داده‌های زیر رابطهٔ قطر نوع خاصی اکالیپتوس را با سن، متوسط باران، ارتفاع زمین و نیروی ثقل در ناحیهٔ جنگلی نشان می‌دهد.

	سن (سال)	ارتفاع (۱۰۰۰ فوت)	باران (اینچ)	نیروی ثقل	قطر درخت (در ارتفاع یک‌متری)
1	44	1.3	250	.63	18.1
2	33	2.2	115	.59	19.6
3	33	2.2	75	.56	16.6
4	32	2.6	85	.55	16.4
5	34	2.0	100	.54	16.9
6	31	1.8	75	.59	17.0
7	33	2.2	85	.56	20.0
8	30	3.6	75	.46	16.6
9	34	1.6	225	.63	16.2
10	34	1.5	250	.60	18.5
11	33	2.2	255	.63	18.7
12	36	1.7	175	.58	19.4
13	33	2.2	75	.55	17.6
14	34	1.3	85	.57	18.3
15	37	2.6	90	.62	18.8

یک الگوی رگرسیون خطی زیر را در نظر بگیرید

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + e$$

که در آن x_1سن ، x_2ارتفاع ، x_3مقدار باران ، x_4نیروی ثقل و Y قطر درخت است . فرض $\beta_2 = 0$ را آزمون کنید یعنی با فرض معلوم بودن سه عامل دیگر ، ارتفاع درخت تأثیری روی قطر آن ندارد .

برای آزمون فرض فوق از برنامهٔ ۱۰.۷ استفاده می‌کنیم که علاوه بر مقادیر دیگر ، کمیتهای زیر را نیز خواهد داد

$$(\mathbf{X'X})^{-1}_{3,3} = .379 \qquad SS_R = 19.262 \qquad B_2 = .075$$

حال از معادلهٔ ۶.۱۰.۷ معلوم می‌شود که

$$\mathrm{Var}(B_2) = .379\sigma^2$$

چون B_2 نرمال است و

$$E[B_2] = \beta_2$$

داریم

$$\frac{B_2 - \beta_2}{.616\sigma} \sim N(0,1)$$

اگر به جای σ از برآورد آن $SS_R/10$ استفاده کنیم کمیت فوق دارای توزیع t با $10(= n - k - 1)$ درجه آزادی خواهد بود ، یعنی

$$\frac{B_2 - \beta_2}{.616\sqrt{SS_R/10}} \sim t_{10}$$

پس اگر $\beta_2 = 0$ آن‌گاه

$$\frac{\sqrt{10/SS_R}\,B_2}{.616} \sim t_{10}$$

چون مقدار این آماره برابر $.088$ و p-value برای آزمون $\beta_2 = 0$ برابر است با

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P\{|T_{10}| > .088\} \\ &= 2P\{T_{10} > .088\} \qquad \text{(برنامه ۲.۸.۳الف)} \\ &= .9316 \end{aligned}$$

فرض صفر پذیرفته می‌شود (و در واقع در هر سطح کمتر از 9316. پذیرفته خواهد شد)

تبصره

کمیت

$$R^2 = 1 - \frac{SS_R}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}$$

که کاهش مجموع مربعات مانده‌ها را در استفاده از الگوی

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + e$$

در مقابل الگوی

$$Y = \beta_0 + e$$

نشان می‌دهد ، **ضریب تعیین چندگانه** نامیده می‌شود . مقدار

$$R = \sqrt{R^2}$$

را **ضریب همبستگی چندگانه** بین Y و مقادیر ورودی گویند .

۱.۱۰ پیش‌بینی پاسخهای آینده

حال فرض کنید یک سری آزمایش با استفاده از ورودیهای $x_1, \ldots, x_k$ انجام شود . برمبنای داده‌های مربوط به پاسخهای $Y_1, \ldots, Y_n$ می‌خواهیم میانگین پاسخ را پیش‌بینی کنیم . چون میانگین پاسخ برابر است با

$$E[Y|x] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$$

یک برآورد نقطه‌ایی آن عبارت است از $\sum_{i=0}^{k} B_i x_i$ ، که در آن $x_0 \equiv 1$.

برای پیدا کردن یک فاصلهٔ اطمینان احتیاج به توزیع $\sum_{i=0}^{k} B_i x_i$ داریم . چون این را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از متغیّرهای مستقل نرمال Y_i ، $i = 1, \ldots, n$ ، نوشت نتیجه می‌شود که این متغیّر نیز دارای توزیع نرمال است . میانگین و واریانس آن به صورت زیر به‌دست می‌آید .

$$E\left[\sum_{i=0}^{k} x_i B_i\right] = \sum_{i=0}^{k} x_i E[B_i]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} x_i \beta_i \qquad E[B_i] = \beta_i \tag{۸.۱۰.۷}$$

یعنی یک برآوردگر ناریب است . همچنین با استفاده از این واقعیت که واریانس یک متغیّر تصادفی برابر است با کوواریانس بین متغیّر تصادفی و خودش ، می‌توان نوشت

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{k} x_i B_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=0}^{k} x_i B_i, \quad \sum_{j=0}^{k} x_j B_j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} x_i x_j \,\mathrm{Cov}(B_i, B_j) \tag{۹.۱۰.۷}$$

اگر فرض کنیم

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

آن‌گاه با توجه به این که $\mathrm{Cov}(B_i, B_j)/\sigma^2$ عنصر سطر $i + 1$ و ستون $j + 1$ ماتریس $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ است ، معادلهٔ ۹.۱۰.۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{k} x_i B_i\right) = \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}\sigma^2 \tag{۱۰.۱۰.۷}$$

با استفاده از معادلات ۸.۱۰.۷ و ۱۰.۱۰.۷ دیده می‌شود که

$$\frac{\sum_{i=0}^{k} x_i B_i - \sum_{i=0}^{k} x_i \beta_i}{\sigma\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}} \sim N(0,1)$$

حال اگر به جای σ از برآورد آن $\sqrt{SS_R/(n-k-1)}$ استفاده کنیم ، داریم

$$\frac{\sum_{i=0}^{k} x_i B_i - \sum_{i=0}^{k} x_i \beta_i}{\sqrt{\dfrac{SS_R}{(n-k-1)}}\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}} \sim t_{n-k-1}$$

و با استفاده از این برآورد فاصله‌ایی برای $\Sigma_{i=0}^{k} x_i\beta_i$ به‌دست می‌آید .

فاصلهٔ اطمینان برای $E[Y|\mathbf{x}] = \Sigma_{i=0}^{k} x_i\beta_i$ $(x_0 \equiv 1)$

یک فاصلهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد برای $E[Y|\mathbf{x}] = \Sigma_{i=0}^{k} x_i\beta_i$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\sum_{i=0}^{k} x_i b_i \pm \sqrt{\frac{ss_r}{(n-k-1)}}\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}} \qquad t_{a/2,\, n-k-1}$$

که در آن $b_0, \ldots, b_k$ مقادیر برآوردگرهای کمترین مربعات $B_0, B_1, \ldots, B_k$ هستند و SS_r مقدار SS_R می‌باشد .

مثال ۱۰.۷.ت ـ یک‌شرکت‌فولادسازی ورقه‌های فولادی با 15. درصد مس در درجهٔ حرارت ۱۱۵۰ (فارنهایت) تولیدمی‌کند وعلاقه‌مند است استحکام‌ورقه‌ها رابرآوردکندبرای این کار داده‌های زیر را از ۱۰ قطعهٔ‌مختلف‌ورقه فولادبا درصدمس و سرعت‌کاهش درجه‌حرارت‌متفاوت‌جمع آوری‌کرده است .

سختی	درصد مس	درجه حرارت برحسب F ۱۰۰۰
79.2	.02	1.05
64.0	.03	1.20
55.7	.03	1.25
56.3	.04	1.30
58.6	.10	1.30
84.3	.15	1.00
70.4	.15	1.10
61.3	.09	1.20
51.3	.13	1.40
49.8	.09	1.40

متوسط استحکام را برآورد کنید و یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای آن به‌دست آورید .

برای حل این مسأله ابتدا برنامهٔ ۱۰.۷ را اجرا می‌کنیم ، نتایج حاصل به قرار زیر است

```
THE INVERSE MATRIX IS AS FOLLOWS
 9.427627 -5.223003 -7.290261

-5.223003  43.74858  1.304812

-7.290261  1.304812  5.886853

THE ESTIMATES OF THE REGRESSION COEFFICIENTS ARE AS FOLLOWS

            B( 0 )= 160.292
            B( 1 )= 16.65271
            B( 2 )=-80.80713
THE SUM OF SQUARES OF THE RESIDUALS IS  SS(R) = 67.01172
```

ازطرفی $\mathbf{x}' = (1, .15, 1.15)$ ودرنتیجه با استفاده از معکوس ماتریس که قبلاً داده شده است ، داریم

$$\sqrt{\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}} = .5607 \qquad \sum_i x_i B_i = 69.862 \qquad \sqrt{\frac{SS_R}{7}} = 3.094$$

بنابراین یک برآورد نقطه‌ایی متوسط استحکام فولادی که شامل ۱۵/۰ درصد مس است در درجه حرارت ۱۱۵۰ برابر ۶۹/۸۶۲ است . علاوه بر این چون $t_{.025,7} = 2.365$ یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای این مقدار عبارت است از

$$69.862 \pm 4.130 \quad \blacksquare$$

هنگامی که یک آزمایش در سطوح ورودی $x_1, ..., x_k$ انجام شده است ، بیشتر به پیش‌بینی پاسخ واقعی علاقه‌مندیم تا میانگین آن ؛ یعنی علاقه‌مندیم که با استفاده از مجموعه داده‌های $Y_1, ..., Y_n$ کمیت زیر را پیش‌بینی کنیم

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i + e \qquad x_0 = 1$$

یک پیش‌بینی نقطه‌ایی عبارت است از $\sum_{i=0}^{k} B_i x_i$ که در آن B_iها برآوردگرهای کمترین مربعات β_i ، $i = 1, ..., k$ ، بر مبنای مجموعه جوابهای قبلی $Y_1, ..., Y_k$ هستند .

برای تعیین یک فاصلهٔ برای $Y(x)$ توجه کنید که چون $B_0, ..., B_k$ مبتنی بر پاسخهای اولیه هستند از $Y(x)$ مستقل خواهند بود . بنابراین $Y(\mathbf{x}) - \sum_{i=0}^{k} B_i x_i$ دارای توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس زیر است .

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[Y(\mathbf{x}) - \sum_{i=0}^{k} B_i x_i\right] &= \mathrm{Var}\left[Y(\mathbf{x})\right] + \mathrm{Var}\left(\sum_{i=0}^{k} B_i x_i\right) && \text{(با توجه به استقلال)} \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x} && \text{(از معادلهٔ ۷.۱۰.۱۰)}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{Y(\mathbf{x}) - \sum_{i=0}^{k} B_i x_i}{\sigma\sqrt{1 + \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}} \sim N(0,1)$$

که اگر به جای σ برآورد آن را قرار دهیم ، داریم

$$\frac{Y(\mathbf{x}) - \sum_{i=0}^{k} B_i x_i}{\sqrt{\dfrac{SS_R}{(n-k-1)}}\sqrt{1 + \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}}} \sim t_{n-k-1}$$

پس **فاصلهٔ پیش‌بینی** برای $Y(x)$ با $100(1-\alpha)$ درصد اطمینان عبارت است از

$$\sum_{i=0}^{k} x_i b_i \pm \sqrt{\frac{SS_r}{(n-k-1)}}\sqrt{1+\mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}} \quad t_{\alpha/2,\, n-k-1}$$

که درآن b_o, ..., b_k مقادیر برآوردگرهای کمترین مربعات B_o, ..., B_k هستند و SS_r مقدار SS_R است .

مثال ۷.۱۰.ث ـ اگر در مثال ۷.۱۰.پ بخواهیم فاصله‌ایی را پیدا کنیم که یک ورقهٔ فولادی با ۰/۱۵ درصد مس و حرارت 1150F در آن قرار گیرد ، نقطهٔ میانی فاصله پیش‌بینی همان است که قبلاً محاسبه شده ولی نصف طول فاصله پیش‌بینی از نصف طول فاصلهٔ اطمینان برای میانگین ، در عامل $\sqrt{.3144} / \sqrt{1.3144}$ تفاوت دارند . یعنی فاصلهٔ پیش‌بینی ۹۵ درصد عبارت است از

$$69.862 \pm 8.389 \quad \blacksquare$$

مسایل

۱ ـ داده‌های زیر رابطهٔ بین x، درجه رطوبت محصول خاص را با Y ، چگالی محصول تمام شده نشان می‌دهد

x_i	Y_i
5	7.4
6	9.3
7	10.6
10	15.4
12	18.1
15	22.2
18	24.1
20	24.8

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید .

ب) یک خط به داده‌ها برازش دهید .

۲ ـ داده‌های زیر رابطهٔ بین واحدهای کالایی را که به صورت تابعی از قیمت در ۶ ناحیه سفارش

شده است نشان می‌دهد

تعداد سفارشات	88	112	123	136	158	172
قیمت	50	40	35	30	20	15

اگر قیمت کالایی ۲۵ باشد، فکر می‌کنید تعداد سفارشات چقدر است؟

۳ـ زنگ‌زدگی فلز خاصی در اکسیژن خشک در ۵۰۰ درجهٔ سانتی‌گراد مطالعه می‌شود. در این آزمایش اضافه وزن حاصل در زمانهای متفاوت به‌عنوان مقدار جذب اکسیژن در نظر گرفته می‌شود. داده‌های حاصل به قرار زیر است

ساعت	درصد اضافه وزن
1.0	.02
2.0	.03
2.5	.035
3.0	.042
3.5	.05
4.0	.054

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید.

ب) یک رابطهٔ خطی برازش دهید.

پ) وقتی نمونه ۳/۲ ساعت در معرض اکسیژن قرار دارد، درصد اضافه وزن را چقدر پیش‌بینی می‌کنید.

۴ـ داده‌های زیر رابطهٔ بین x، وزن مخصوص نمونه‌ایی از چوب را با Y، ماکزیمم استحکام آن در مقابل فشار قایم نشان می‌دهد

x_i	y_i (psi)
0.41	1850
0.46	2620
0.44	2340
0.47	2690
0.42	2160
0.39	1760
0.41	2500
0.44	2750
0.43	2730
0.44	3120

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید .
ب) ضرایب رگرسیون را محاسبه کنید .
پ) استحکام ماکزیمم یک نمونه چوب با وزن مخصوص ۰/۴۳ چقدر است ؟

۵ - داده‌های زیر پیشرفت در سرعت خواندن ۱۰ دانشجو را درمقابل هفته‌های تدریس نشان می‌دهد

تعداد هفته	پیشرفت در سرعت خواندن
2	21
3	42
8	102
11	130
4	52
5	57
9	105
7	85
5	62
7	90

الف) نمودار پراکنش داده‌ها را رسم کنید .
ب) برآورد کمترین مربعات ضرایب رگرسیون را پیدا کنید .
پ) متوسط پیشرفت در سرعت را برای دانشجویی که قصد دارد از برنامه ۷ هفته‌ایی استفاده کند محاسبه کنید .

۶ - معادلهٔ ۳.۳.۷ را ثابت کنید . این معادله بیان می‌کند که

$$\operatorname{Var}(A) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

۷ - در مسأله ۴
الف) واریانس یک پاسخ را برآورد کنید .
ب) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای واریانس پیدا کنید .

۸ - ثابت کنید

$$SS_R = \frac{S_{xx} S_{YY} - S_{xY}^2}{S_{xx}}$$

۹ - جدول زیر تعداد لکه‌های خورشید را در هر سال ، از ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۳ ، در ارتباط با تعداد تلفات در اثر تصادفات اتومبیل در طول سال نشان می‌دهد .

سال	لکه‌های خورشید	تعداد تلفات اتومبیل (1000s)
70	165	54.6
71	89	53.3
72	55	56.3
73	34	49.6
74	9	47.1
75	30	45.9
76	59	48.5
77	83	50.1
78	109	52.4
79	127	52.5
80	153	53.2
81	112	51.4
82	80	46
83	45	44.6

این فرض راکه «تعداد تلفات اتومبیل با تعداد لکه‌های خورشید در ارتباط نیست» آزمون کنید. همچنین یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای α به‌دست آورید.

۱۰ـ رابطهٔ ۳.۴.۷ راکه بیان می‌کند

$$\sqrt{\frac{n(n-2)S_{xx}}{\sum_i x_i^2 SS_R}}\,(A-\alpha) \sim t_{n-2}$$

آزمون کنید.

۱۱ـ داده‌های زیر رابطهٔ بین تعداد خطاهای متوالی و تعداد پُرچهای ضایع شده را برای ۱۰ هواپیمای مختلف نشان می‌دهد.

$x =$ تعداد پُرچهای ضایع شده	$y =$ تعداد خطاهای متوالی
13	7
15	7
10	5
22	12
30	15
7	2
25	13
16	9
20	11
15	8

الف) یک نمودار پراکنش رسم کنید .
ب) ضرایب رگرسیون را محاسبه کنید .
پ) فرض $\alpha = 1$ را آزمون کنید .
ت) میانگین خطاهای متوالی یک هواپیما را با ۲۴ پرچ ضایع شده محاسبه کنید .
ث) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای قسمت (ت) به‌دست آورید .
مسایل ۱۲ تا ۱۶ بر مبنای داده‌های زیر که از ۴۳ ایالت و حومهٔ کلمبیا جمع‌آوری شده ، طرح گردیده‌اند.

سیگاریها و میزان مرگ و میر بر اثر سرطان

ایالت	تعداد سیگارها به‌ازای هر فرد	تعداد مرگ و میرها در سال (برحسب ۱۰۰۰۰۰)			
		سرطان مثانه	سرطان ریه	سرطان کلیه	سرطان خون
Alabama	1,820	2.90	17.05	1.59	6.15
Arizona	2,582	3.52	19.80	2.75	6.61
Arkansas	1,824	2.99	15.98	2.02	6.94
California	2,860	4.46	22.07	2.66	7.06
Connecticut	3,110	5.11	22.83	3.35	7.20
Delaware	3,360	4.78	24.55	3.36	6.45
District of Columbia	4,046	5.60	27.27	3.13	7.08
Florida	2,827	4.46	23.57	2.41	6.07
Idaho	2,010	3.08	13.58	2.46	6.62
Illinois	2,791	4.75	22.80	2.95	7.27
Indiana	2,618	4.09	20.30	2.81	7.00
Iowa	2,212	4.23	16.59	2.90	7.69
Kansas	2,184	2.91	16.84	2.88	7.42
Kentucky	2,344	2.86	17.71	2.13	6.41
Louisiana	2,158	4.65	25.45	2.30	6.71
Maine	2,892	4.79	20.94	3.22	6.24
Maryland	2,591	5.21	26.48	2.85	6.81
Massachusetts	2,692	4.69	22.04	3.03	6.89
Michigan	2,496	5.27	22.72	2.97	6.91
Minnesota	2,206	3.72	14.20	3.54	8.28

تعداد مرگ و میرها در سال (برحسب ۱۰۰۰)

ایالت	تعداد سیگارها به‌ازای هر فرد	تعداد مرگ و میرها در سال (برحسب ۱۰۰۰۰۰) سرطان مثانه	سرطان ریه	سرطان کلیه	سرطان خون
Mississippi	1,608	3.06	15.60	1.77	6.08
Missouri	2,756	4.04	20.98	2.55	6.82
Montana	2,375	3.95	19.50	3.43	6.90
Nebraska	2,332	3.72	16.70	2.92	7.80
Nevada	4,240	6.54	23.03	2.85	6.67
New Jersey	2,864	5.98	25.95	3.12	7.12
New Mexico	2,116	2.90	14.59	2.52	5.95
New York	2,914	5.30	25.02	3.10	7.23
North Dakota	1,996	2.89	12.12	3.62	6.99
Ohio	2,638	4.47	21.89	2.95	7.38
Oklahoma	2,344	2.93	19.45	2.45	7.46
Pennsylvania	2,378	4.89	22.11	2.75	6.83
Rhode Island	2,918	4.99	23.68	2.84	6.35
South Carolina	1,806	3.25	17.45	2.05	5.82
South Dakota	2,094	3.64	14.11	3.11	8.15
Tennessee	2,008	2.94	17.60	2.18	6.59
Texas	2,257	3.21	20.74	2.69	7.02
Utah	1,400	3.31	12.01	2.20	6.71
Vermont	2,589	4.63	21.22	3.17	6.56
Washington	2,117	4.04	20.34	2.78	7.48
West Virginia	2,125	3.14	20.55	2.34	6.73
Wisconsin	2,286	4.78	15.53	3.28	7.38
Wyoming	2,804	3.20	15.92	2.66	5.78
Alaska	3,034	3.46	25.88	4.32	4.90

[a] Estimated from cigarette tax revenues.

۱۲ ـ الف) نمودار پراکنش سیگارهای مصرفی را درمقابل‌میزان‌مرگ‌ومیرسرطان مثانه رسم کنید.

ب) آیا این نمودار امکان وجود همبستگی خطی را نشان می‌دهد.

پ) بهترین برازش خطی را پیدا کنید.

ت) اگر متوسط تعداد سیگارهای مصرف شده در سال آینده ۲۵۰۰ نفر باشد، پیش‌بینی شما در مورد نسبت مرگ و میر در اثر سرطان مثانه چیست؟

۱۳ ـ الف) یک نمودار پراکنش که در ارتباط بین سیگارهای استفاده شده و میزان مرگ و میر در اثر سرطان ریه را نشان دهد رسم کنید.

ب) پارامترهای رگرسیون، α و β را برآورد کنید.

پ) فرض‌بی‌تأثیربودن سیگار درمیزان‌مرگ‌ومیرسرطان ریه را درسطح ۰/۰۵ آزمون کنید.

p-valueبرای آزمون در حالت (پ) چقدر است؟

۱۴ ـ الف) نمودارپراکنش‌سیگارهای‌مصرفی‌رادرمقابل میزان مرگ‌ومیردراثرسرطان‌کلیه‌رسم کنید.

ب) خط رگرسیون را برآورد کنید.
پ) p-valueبرای آزمون صفر بودن ضریب خط رگرسیون چقدر است ؟

۱۵ - الف) نمودار پراکنش سیگارهای مصرف شده را در مقابل میزان مرگ و میر در اثر سرطان خون رسم کنید.
ب) ضرایب رگرسیون را برآورد کنید.
پ) فرض عدم وجود رگرسیون میزان مرگ و میر از سرطان خون را روی تعداد سیگارها آزمون کنید.
ت) یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای نرخ مرگ و میر در ایالتی که افراد آن بطور متوسط ۲۵۰۰ سیگار می‌کشند پیدا کنید.

۱۶ - الف) واریانسها را در مسایل ۱۲ تا ۱۵ برآورد کنید.
ب) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای واریانس داده‌های مربوط به‌سرطان ریه‌به‌دست آورید.
پ) داده‌های سرطان را به دو قسمت تقسیم کنید ـ قسمت اول مربوط به ایالاتی که متوسط مصرف سیگار آن کمتر از ۲۳۰۰ و قسمت دوم بیشتر از آن باشد. یک الگوی رگرسیون خطی برای هر دو قسمت داده‌ها فرض کنید. برابری واریانسهای هر دو مجموعه را چگونه آزمون می‌کنید ؟
ت) آیا آزمون (پ) در سطح ۰/۰۵ معنی‌دار است ؟

۱۷ - مانده‌های استاندارد شده و داده‌های مسأله ۱ را رسم کنید. داده‌ها در مورد فرض الگوی رگرسیون خطی چه چیز نشان می‌دهند ؟

۱۸ - تعیین مقاومت خالهای جوش داده شده در مقابل بُرش نسبةً مشکل است، در صورتی که اندازه‌گیری قطر خالهای جوش نسبةً ساده می‌باشد، در نتیجه اگر بتوانیم مقدار مقاومت در مقابل برش خالهای جوش را از روی اندازه قطر آن پیش‌بینی کنیم مفید خواهد بود. داده‌ها به قرار زیرند

قطر خال جوش ۰/۰۰۰۱ اینچ	مقاومت برش (psi)
400	370
800	780
1250	1210
1600	1560
2000	1980
2500	2450
3100	3070
3600	3550
4000	3940
4000	3950

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید .
ب) برآوردهای کمترین مربعات ضرایب رگرسیون را پیدا کنید .
پ) فرض برابر ۱ بودن ضریب خط رگرسیون را در سطح ۰/۰۵ آزمون کنید .
ت) امید ریاضی مقاومت را وقتی قطر خال جوش ۰/۲۵۰۰ است پیدا کنید .
ث) بازهٔ پیش‌بینی را برای مقاومت متناظر با قطر خال ۰/۲۲۵ پیدا کنید .
ج) مانده‌های استاندارد شده را رسم کنید .
چ) آیا نمودار (ج) فرضهای استاندارد شده به الگو را تأیید می‌کند ؟

۱۹ - کارخانه‌ایی پیچ تولید می‌کند و می‌خواهد به مشتریانش اطلاعاتی در مورد طول اسمی و طول واقعی پیچها بدهد . نتایج زیر (برحسب اینچ) به‌دست آمده است

x اندازه اسمی		y اندازه واقعی	
$\frac{1}{4}$	0.262	0.262	0.245
$\frac{1}{2}$	0.496	0.512	0.490
$\frac{3}{4}$	0.743	0.744	0.751
1	0.976	1.010	1.004
$1\frac{1}{4}$	1.265	1.254	1.252
$1\frac{1}{2}$	1.498	1.518	1.504
$1\frac{3}{4}$	1.738	1.759	1.750
2	2.005	1.992	1.992

الف) ضرایب رگرسیون را برآورد کنید .
ب) واریانس مربوط به ساختن یک پیچ را برآورد کنید .
پ) برای مجموعه بزرگی از پیچها با اندازهٔ اسمی ۱ اینچ بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای متوسط طول پیدا کنید .
ت) یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای طول واقعی پیچهایی به طول اسمی ۱ اینچ پیدا کنید.
ث) مانده‌های استاندارد شده را رسم کنید .
ج) آیا مانده‌های (ث) نشان‌دهندهٔ این است که الگوی رگرسیون ایرادی دارد ؟
چ) شاخص برازش را تعیین کنید .

۲۰ - شیشه در تحقیقات جنایی نقش مهمی بازی می‌کند ، زیرا اعمال مجرمان اغلب باعث شکستن پنجره و سایر اشیاء شیشه‌ای می‌شود . چون ذرات شیشه اغلب روی لباس مجرم باقی می‌ماند ، برای شروع کار کشف جرم از اهمیت زیادی برخوردار است . دو خاصیت فیزیکی شیشه که در این کار مفیدند یکی ضریب انعکاس آن است که تا حدی آسان اندازه‌گیری می‌شود و دیگری چگالی آن که خیلی مشکلتر اندازه‌گیری می‌شود . با این وجود اندازه‌گیری دقیق

چگالی خیلی آسان می‌شود اگر بتوان برآورد خوبی از این مقدار قبل از عملیات آزمایشگاهی برای تعیین مقدار دقیق آن به‌عمل آورد . بنابراین کاملاً مفید است اگر از ضریب انعکاس برای برآورد چگالی آن استفاده کنیم .
داده‌های زیر ضریب انعکاس و چگالی ۱۸ قطعه شیشه را نشان می‌دهد :

چگالی	ضریب انعکاس	چگالی	ضریب انعکاس
2.4843	1.5161	2.4801	1.5139
2.4858	1.5165	2.4819	1.5153
2.4950	1.5178	2.4791	1.5155
2.4922	1.5181	2.4796	1.5155
2.5035	1.5191	2.4773	1.5156
2.5086	1.5227	2.4811	1.5157
2.5117	1.5227	2.4765	1.5158
2.5146	1.5232	2.4781	1.5159
2.5187	1.5253	2.4909	1.5160

الف) چگالی یک قطعه شیشه را که ضریب انعکاس آن ۱/۵۲ است پیش‌بینی کنید .
ب) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای چگالی شیشه (الف) به‌دست آورید .

۲۱ - الگوی رگرسیون

$$Y = \beta x + e, \qquad e \sim N(0, \sigma^2)$$

را رگرسیون گذرنده از مبدأ می‌نامند ، زیرا از قبل فرض می‌شود که میانگین پاسخ متناظر با سطح ورودی $x = 0$ مساوی صفر است . فرض کنید (x_i, Y_i) ، $i = 1, ..., n$ مجموعه‌ایی از داده‌های این الگو باشد .
الف) برآوردگر کمترین مربعات B از β را به‌دست آورید .
ب) توزیع B چگونه است ؟
پ) SS_R را تعریف کرده توزیع آن را به‌دست آورید .
ت) فرض $H_0 : \beta = \beta_0$ را در مقابل $H_1 : \beta \neq \beta_0$ را آزمون کنید .
ث) یک بازهٔ اطمینان $100(1 - \alpha)$ درصد برای $Y(x_0)$ ، مقدار پاسخ در سطح ورودی x_0 ، پیدا کنید .

۲۲ - تساوی زیر را ثابت کنید .

$$R^2 = \frac{S_{xY}^2}{S_{xx} S_{YY}}$$

۲۳ ـ وزن و فشارسیستولیک‌خون یک نمونه تصادفی از مردان در گروه سنی ۲۵ تا ۳۰ در جدول زیر داده شده است

فرد	وزن (پوند)	فشار خون (BP)	فرد	وزن (پوند)	فشار خون (BP)
1	165	130	11	172	153
2	167	133	12	159	128
3	180	150	13	168	132
4	155	128	14	174	149
5	212	151	15	183	158
6	175	146	16	215	150
7	190	150	17	195	163
8	210	140	18	180	156
9	200	148	19	143	124
10	149	125	20	240	170

الف) ضرایب رگرسیون را برآورد کنید.

ب) آیا داده‌ها این ادعا را که فشارسیستولیک‌خون به وزن افراد بستگی ندارد تأیید می‌کند؟

پ) اگر فشار خون تعداد زیادی از زنان به وزن ۱۸۲ پوند اندازه‌گیری شود یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین فشار خون به‌دست آورید.

ت) مانده‌های استاندارد شده را تحلیل کنید.

ث) شاخص برازش را تعیین کنید.

۲۴ ـ رابطهٔ بین سختی (S) و تعداد چرخه‌های شکست (N) برای آلیاژ فلز خاصی به صورت زیر داده می‌شود

$$S = \frac{A}{N^m}$$

که در آن A و m ثابتهای مجهولند. بر اثر تجربه‌ای داده‌های زیر به‌دست آمده است

سختی (برحسب هزار psi)	N (برحسب میلیون چرخه شکست)
55.0	0.223
50.5	0.925
43.5	6.75
42.5	18.1
42.0	29.1
41.0	50.5
35.7	126
34.5	215
33.0	445
32.0	420

مقادیر A و m را برآورد کنید .

۲۵ - در سال ۱۹۵۷ یک مهندس صنعت در آلمان الگوی زیر را برای زمان لازم انجام یک کاردستی ارائه داد که به صورت تابعی از تعداد دفعاتی است که آن کار تمرین شده است .

$$T \approx ts^{-n}$$

که در آن T زمان و n تعداد دفعاتی است که کار تمرین شده است و t و s پارامترهایی هستند که به کار و شخصی که آن را انجام می‌دهد مربوط می‌شود . مقادیر t و s را به کمک مجموعه داده‌های زیر برآورد کنید .

T	22.4	21.3	19.7	15.6	15.2	13.9	13.7
n	0	1	2	3	4	5	6

۲۶ - باقی‌ماندهٔ کلر در استخری در زمانهای مختلف پس از تمیز کردن به قرار زیر است

زمان (به ساعت)	ماندهٔ کلر (در میلیون pt)
2	1.8
4	1.5
6	1.45
8	1.42
10	1.38
12	1.36

یک منحنی به شکل زیر به داده‌ها برازش دهید .

$$Y \approx ae^{-bx}$$

پیش‌بینی می‌کنید چه مقدار کلر ، ۱۵ ساعت پس از تمیز کردن باقی‌مانده باشد .

۲۷ - نسبت حرارت منتشر شده در زمان t پس از قطع منبع حرارتی به صورت زیر است .

$$P = 1 - e^{-\alpha t}$$

که در آن α ثابت مجهول است . با توجه به داده‌های زیر

P	0.07	0.21	0.32	0.38	0.40	0.45	0.51
t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7

مقدار α را برآوردکنید. مقدار t راکه درآن نصف مقدار گرما منتشر شده باشد برآورد کنید.

۲۸ـ داده‌های زیر تعداد باکتریهای شمرده شده توسط ۵ نفر را در زمانهای مختلف بعد از مایه‌کوبی نشان می‌دهد.

روزهای بعد از واکسیناسیون	تعداد باکتریها
3	121,000
6	134,000
7	147,000
8	210,000
9	330,000

الف) یک منحنی به داده‌ها برازش دهید

ب) تعداد باکتریهای یک بیمار جدید را پس از ۸ روز برآورد کنید.

۲۹ـ داده‌های زیر مقدار هیدروژن موجود (برحسب میلیون) در درون حفاریهایی به حجم ثابت را در فاصله‌های زیر (برحسب فوت) از پایهٔ قالب خلأ نشان می‌دهد

فاصله	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
مقدار هیدروژن	1.28	1.50	1.12	0.94	0.82	0.75	0.60	0.72	0.95	1.20

الف) نمودار پراکنش را رسم کنید.

ب) یک منحنی به شکل زیر به داده‌ها برازش دهید

$$Y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + e$$

۳۰ـ داروی جدیدی روی موشها امتحان شود تا اثر آن روی کاهش غدد سرطانی معین گردد. آزمونها روی ۱۰ موش که هر یک غده‌ای به اندازهٔ ۴ گرم دارند با تغییر مقدار دارو اجرا می‌شود و سپس نتیجهٔ آن را به صورت کاهش وزن غده تعیین می‌کنند. داده‌ها به قرار زیرند

میزان دارو (کُدبندی شده)	کاهش وزن غده
1	.50
2	.90
3	1.20
4	1.35
5	1.50
6	1.60
7	1.53
8	1.38
9	1.21
10	.65

مقدار کاهش ماکزیمم و مقدار دارو را با برازش معادلهٔ رگرسیون درجه دوم به صورت زیر برآورد کنید.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + e$$

۳۱- داده‌های زیر رابطهٔ بین قوطیهای صدمه دیده در حمل و نقل و سرعت ماشین حامل آنها را نشان می‌دهد

سرعت	تعداد قوطیهای صدمه دیده
3	54
3	62
3	65
5	94
5	122
5	84
6	142
7	139
7	184
8	254

الف) این داده‌ها را با یک الگوی رگرسیون خطی تحلیل کنید.

ب) مانده‌های استاندارد شده را رسم کنید.

پ) آیا نتایج (ب) خدشه‌ای به الگو وارد می‌سازند.

ت) اگر جواب قسمت (پ) مثبت است یک الگوی بهتر پیشنهاد کنید و تمام پارامترهای مربوطه را برآورد نمایید.

۳۲- مسأله ۵ را با این فرض که واریانس پیشرفت سرعت در خواندن با مقدار هفته‌های اجرای برنامه متناسب است حل کنید.

۳۳- داده‌های زیر از الگوی

$$Y = 20 + 4x + e$$

تولید شده‌اند که در آن e یک متغیّر نرمال با میانگین صفر و واریانس $15/(5 + x)$ است.

x_i	y_i
1	23.9
2	27.9
3	31.0
4	36.8
5	41.8
6	43.6
7	48.0
8	49.9
9	56.0
10	59.7

الف) نمودار داده‌ها را رسم کنید .
ب) با روش کمترین مربعات معمولی یک خط به داده‌ها برازش دهید
پ) با روش کمترین مربعات موزون داده را برازش دهید .
ت) خطهای به‌دست آمده در (ب) و (پ) را رسم کنید .

۳۴ـ مجموعه داده‌های زیر از مثال ۸.۷.پ گرفته شده است .

تعداد ماشینها (روزانه)	تعداد تصادفات (ماهانه)
2000	15
2300	27
2500	20
2600	21
2800	31
3000	16
3100	22
3400	23
3700	40
3800	39
4000	27
4600	43
4800	53

الف) تعداد تصادفات را در یک ماه وقتی تعداد ماشینهایی که از بزرگراه عبور می‌کنند ۳۵۰۰ ماشین است برآورد کنید .
ب) با استفاده از الگوی

$$\sqrt{Y} = \alpha + \beta x + e$$

قسمت (الف) را دوباره حل کنید .

۳۵ـ ماکزیمم تخلیهٔ یک رودخانه از نظر بسیاری از مهندسان طراحی ، عاملی مهم است . برآورد این پارامتر را می‌توان از ارتباط بین آن و ناحیه تحت پوشش (x_1) و شیب رودخانه (x_2) برآورد کرد . این رابطه را به کمک داده‌های زیر برآورد کنید .

x_1 (mi^2)	x_2 (ft/ft)	ماکزیمم تخلیه (ft^3/sec)
36	0.005	50
37	0.040	40
45	0.004	45
87	0.002	110
450	0.004	490
550	0.001	400
1200	0.002	650
4000	0.0005	1550

۳۶- مقدار رسوب در یک رودخانه بستگی دارد به حجم فاضلابهایی که به آن وارد می‌شود (x_1) و همچنین متوسط خروجی رودخانه (x_2)؛ این بستگی را از داده‌های زیر برآورد کنید.

ناحیه $(\times 10^3\ mi^2)$	تخلیه (ft^3/sec)	رسوب حاصل (میلیون تن در سال)
8	65	1.8
19	625	6.4
31	1,450	3.3
16	2,400	1.4
41	6,700	10.8
24	8,500	15.0
3	1,550	1.7
3	3,500	0.8
3	4,300	0.4
7	12,100	1.6

۳۷- یک معادلهٔ رگرسیون چندگانه به مجموعه داده‌های زیر برازش دهید.

x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	11	16	4	275
2	10	9	3	183
3	9	4	2	140
4	8	1	1	82
5	7	2	1	97
6	6	1	−1	122
7	5	4	−2	146
8	4	9	−3	246
9	3	16	−4	359
10	2	25	−5	482

۳۸ـ

سن	ضریب عدم تناسب	مدتی که بیمار زنده مانده (به روز)
51.0	1.32	624
42.5	0.61	46
54.6	1.89	64
54.1	0.87	1350
49.5	1.12	280
55.3	2.76	10
43.4	1.13	1024
42.8	1.38	39
58.4	0.96	730
52.0	1.62	136
45.0	1.58	836
64.5	0.69	60

الف) اگر متغیّر وابسته لگاریتم زمان حیات باشد یک رگرسیون روی متغیّرهای مستقل عدم تناسب و سن برازش دهید.

ب) واریانس جملهٔ خطا را برآورد کنید.

۳۹ـ الف) یک معادلهٔ رگرسیون چندگانه به مجموعه داده‌های زیر برازش دهید.

x_1	x_2	x_3	y
7.1	.68	4	41.53
9.9	.64	1	63.75
3.6	.58	1	16.38
9.3	.21	3	45.54
2.3	.89	5	15.52
4.6	.00	8	28.55
.2	.37	5	5.65
5.4	.11	3	25.02
8.2	.87	4	52.49
7.1	.00	6	38.05
4.7	.76	0	30.76
5.4	.87	8	39.69
1.7	.52	1	17.59
1.9	.31	3	13.22
9.2	.19	5	50.98

ب) فرض $\beta_0 = 0$ را آزمون کنید.

پ) فرض $\beta_3 = 0$ را آزمون کنید.

ت) فرض «میانگین پاسخ در سطوح $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ برابر ۸/۵ است» را آزمون کنید.

۴۰ـ این‌طور تصور می‌شود که قدرت مقاومت یک فیبر مصنوعی به درصد پنبهٔ مصرفی در آن ،

x_1، و زمان خشک کردن ، x_2، بستگی دارد . آزمون ۱۰ قطعه از این فیبر در شرایط متفاوت نتایج زیر را داده است :

$Y =$ قدرت مقاومت	$x_1 =$ درصد پنبه	$x_2 =$ زمان خشک کردن
213	13	2.1
220	15	2.3
216	14	2.2
225	18	2.5
235	19	3.2
218	20	2.4
239	22	3.4
243	17	4.1
233	16	4.0
240	18	4.3

الف) یک معادلهٔ رگرسیون چندگانه برازش دهید .

ب) یک بازهٔ اطمینان ۹۰ درصد برای میانگین قدرت مقاومت فیبر مصنوعی که ۲۱ درصد پنبه دارد و خشک شدن آن ۳/۶ است پیدا کنید .

۴۱ - زمان خراب شدن قسمتی از یک ماشین به ولتاژ برق (x_1) ، سرعت موتور در دقیقه (x_2) و درجه حرارت (x_3) بستگی دارد . طرحی آزمایشی به منظور یک کار تحقیقی اجرا شده و داده‌های زیر به‌دست آمده است :

y	x_1	x_2	x_3
2145	110	750	140
2155	110	850	180
2220	110	1000	140
2225	110	1100	180
2260	120	750	140
2266	120	850	180
2334	120	1000	140
2340	130	1000	180
2212	115	840	150
2180	115	880	150

که در آن y زمان خراب شدن دستگاه برحسب دقیقه است .

الف) یک الگوی رگرسیون چندگانه به این داده‌ها برازش دهید .

ب) واریانس خطا را برآورد کنید .

پ) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین زمان خراب شدن وقتی ولتاژ ۱۲۵ و سرعت

موتور ۹۰۰ و درجه حرارت ۱۶۰ است پیدا کنید.

۴۲- برای همین داده‌ها توضیح دهید چرا یک بازهٔ پیش‌بینی برای زمان خرابی همواره شامل بازهٔ اطمینان متناظر با میانگین پاسخ است.

۴۳- مجموعه داده‌های زیر را در نظر بگیرید.

x_1	x_2	y
5.1	2	55.42
5.4	8	100.21
5.9	−2	27.07
6.6	12	169.95
7.5	−6	−17.93
8.6	16	197.77
9.9	−10	−25.66
11.4	20	264.18
13.1	−14	−53.88
15	24	317.84
17.1	−18	−72.53
19.4	28	385.53

الف) رابطه خطی بین y و x_i برازش دهید.

ب) واریانس جملهٔ خطا را معین کنید.

پ) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای مقدار پاسخ وقتی ورودیها $x_1 = 10.2$ و $x_2 = 17$ است پیدا کنید.

۴۴- هزینهٔ تولید برق برحسب کیلووات ساعت تابعی از بار تحمیلی و قیمت زغال برحسب نسبت در هر میلیون Btu است. داده‌های زیر از ۱۲ کارخانه به‌دست آمده‌اند.

هزینه برق	هزینه زغال	بار تحمیل شده (به درصد)
4.1	14	84
4.4	16	81
5.6	22	73
5.1	24	74
5.0	20	67
5.3	29	87
5.4	26	77
4.8	15	76
6.1	29	69
5.5	24	82
4.7	25	90
3.9	13	88

الف) رابطهٔ بین آنها را برآورد کنید.
ب) این فرض را که ضریب عامل بار برابر صفر است آزمون کنید.
پ) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای هزینه برق وقتی بار تحمیلی ۸۵ و هزینهٔ ذغال ۲۰ است به‌دست آورید.

۴۵ - داده‌های زیر رابطهٔ بین فشار سیستولیک خون را با سن (x_1) و وزن (x_2) در مجموعه‌ایی از افراد مشابه از نظر بدن و طرز زندگی نشان می‌دهد.

سن	وزن (پوند)	فشار خون
25	162	112
25	184	144
42	166	138
55	150	145
30	192	152
40	155	110
66	184	118
60	202	160
38	174	108

الف) این فرض را که وقتی وزن یک فرد معلوم است، سن هیچ اطلاع اضافی برای پیش‌بینی فشار خون در اختیار نمی‌گذارد آزمون کنید.
ب) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای متوسط فشار خون تمام افراد ۴۵ ساله با وزن ۱۸۰ پوند به‌دست آورید.
پ) یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای فشار خون یک فرد از جامعهٔ فوق پیدا کنید در صورتی که سن او ۴۵ سال و دارای وزن ۱۸۰ پوند است.

فصل هشتم

آنالیز واریانس

۱ – مقدمه

یک شرکت بزرگ که به صورت عمده خرید می‌کند می‌خواهد از چهارشنبه نرم‌افزار کامپیوتری مختلف یک بسته را برای تدریس یک زبان جدید برنامه‌نویسی انتخاب کند. به نظر یکی از مسؤولین شرکت، این چهار بستهٔ نرم‌افزاری می‌توانند به جای یکدیگر مورد استفاده قرار گیرند و انتخاب هریک اثر ناچیزی روی نتیجه کار انتخاب‌کننده خواهد داشت. برای آزمون این فرض شرکت تصمیم می‌گیرد که ۱۶۰ نفر از مهندسان خود را انتخاب کرده و آنها را به ۴ گروه ۴۰ نفری تقسیم کند. به هریک از اعضای گروه i، بسته iام $i = 1, 2, 3, 4$ تدریس می‌شود تا زبان جدید را بیاموزند. پس از مطالعهٔ کامل مهندسان، شرکت می‌خواهد یک امتحان جامع را برای تعیین تعویض‌پذیری بسته‌ها به‌عمل آورد. این کار را به چه صورت انجام داد؟

قبل از جواب دادن به این سؤال باید توجه داشت، هنگامی می‌توانیم بوضوح تصمیم بگیریم که کار بسته‌ها یکسان است که متوسط نمرات آزمون تمام گروهها یکسان باشند و وقتی بسته‌ها تفاوت اساسی دارند که اختلاف زیادی بین این نمرات به چشم بخورد. با این وجود برای آن‌که به این نتیجه برسیم باید توجه کنیم که روش تقسیم ۱۶۰ مهندس به ۴ گروه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زیرا فرض کنید نمرات اعضای گروه اوّل بطور قابل ملاحظه‌ایی از سایر گروهها بیشتر باشد. از این مشاهده چه نتیجه‌ایی به‌دست می‌آید؟ آیا این نتیجه نشان‌دهندهٔ بهتر بسته شماره ۱ است یا مربوط است به این که قدرت یادگیری مهندسان گروه ۱ بیشتر بوده است؟ برای آن‌که نتیجه‌گیری قبلی درست باشد لازم است ۱۶۰ مهندس به ۴ گروه به قسمی تقسیم شوند که هیچ‌یک از گروهها نسبت به دیگری برتری نداشته باشد. روش موجود برای انجام این‌کار، تقسیم مهندسان به ۴ گروه، به‌صورتی کاملاً تصادفی است. یعنی باید به قسمی صورت پذیرد که تمام تقسیمها دارای احتمال یکسان باشند؛ زیرا در این حالت غیرمحتمل است که یکی از گروهها بطور قابل ملاحظه‌ایی برتر از سایر گروهها باشد. (یکی از راههای معمول این است که ۱۶۰ مهندس را بدلخواه شماره‌گذاری

کنیم ، سپس یک جایگشت تصادفی از اعداد 160 ,... ,2 ,1 به‌دست آوریم . و ۴۰ عدد اوّل جایگشت را در گروه ۱ ، و آنهایی که شماره‌شان با شماره‌های چهل و یکم تا هشتاد یکم جایگشت برابر است در گروه دوم و الی آخر قرار دهیم (برای توضیح بیشتر مثال ۱.۱۲ الف را ببینید) .

بدین ترتیب منطقی به نظر می‌رسد که فرض کنیم نمرهٔ هر یک از افراد تقریباً یک متغیّر تصادفی نرمال است که پارامترهای آن به بستهٔ نرم‌افزاری بستگی دارد که برای آموختن انتخاب شده است . همچنین معقول است که فرض کنیم اگرچه متوسط نمرهٔ آزمون یک مهندس به بستهٔ نرم‌افزاری بستگی دارد ، تغییرپذیری در نمرات آزمون از تغییرات ذاتی ۱۶۰ فرد مختلف نتیجه می‌شود نه از به‌کارگیری بستهٔ خاص . پس اگر فرض کنیم X_{ij}، $i = 1, ..., 4$ ، $j = 1, ..., 4$ نمرهٔ مهندس jام را در گروه i نشان دهد یک الگوی مناسب این خواهد بود که فرض کنیم X_{ij}ها متغیّرهای تصادفی مستقل هستند به قسمی که X_{ij} دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ_i و واریانس مجهول σ^2 است .

در این صورت فرض تعویض‌پذیری بسته‌ها معادل است با فرض $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

اکنون نشان می‌دهیم که این فرض را چگونه آزمون کنیم .

۲- آنالیز واریانس یک طرفه

m نمونهٔ مستقل هریک به حجم n را در نظر بگیرید که در آن اعضای نمونه iام ، X_{i1}, X_{i2}, X_{in} متغیّرهای تصادفی نرمال با میانگین مجهول μ_i و واریانس مجهول σ^2 هستند . یعنی

$$X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n$$

حال فرض کنید بخواهیم فرض H_0 را که تمام میانگینها برابرند آزمون کنیم ، یعنی

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m$$

یک روش که در این مورد به نظر می‌رسد این است که فرض کنیم m تیمار مختلف داریم به قسمی که نتیجهٔ عمل تیمار iام روی یک فرد یک متغیّر تصادفی نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ^2 است . حال می‌خواهیم این فرض را که اثرات تیمارها یکسان هستند با به‌کار بردن هر تیمار روی یک نمونه (متفاوت) به حجم n آزمون کنیم و سپس نتیجه را تحلیل نماییم .

روش کاربردی آزمون فرض فوق محاسبهٔ دو برآوردگر مستقل برای σ^2 است ، برآوردگر اوّل ، چه H_0 درست باشد و چه غلط معتبر است ؛ امّا برآوردگر دوم فقط هنگامی معتبر است که H_0 درست باشد . علاوه بر این نشان می‌دهیم که برآوردگر دوم ، وقتی H_0 نادرست است مقدار σ^2 را با تقریب اضافی برآورد می‌کند . سپس این دوبرآورد را مقایسه می‌کنیم و فرض H_0 را رد می‌کنیم اگر

برآوردگر دوم بطور معنی‌داری بزرگتر از اولی باشد.

برای به‌دست آوردن برآورد اولیه σ^2 می‌نویسیم

$$\bar{X}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{ij}}{n}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

که میانگین نمونهٔ iام را نشان می‌دهد، و

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}\right)^2}{n-1}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

که واریانس نمونه iام را نشان می‌دهد. حال با توجه به نتیجهٔ اساسی توزیع تؤام میانگین و واریانس نمونه یک جامعهٔ نرمال (بخش ۵ فصل ۴ را ببینید) معلوم می‌شود که $\bar{X}_{i\cdot}$ و S^2_i مستقل هستند و

$$(n-1)\frac{S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

همچنین چون مجموع متغیّرهای مستقل کی‌دو یک متغیّر تصادفی کی‌دو است (با درجهٔ آزادی برابر با مجموع درجات آزادی هریک از متغیّرها) نتیجه می‌شود که

$$\frac{n-1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} S_i^2 \sim \chi^2_{m(n-1)} \tag{۸.۲.۱}$$

پس

$$\begin{aligned} E\left[\frac{n-1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} S_i^2\right] &= E\left[\chi^2_{m(n-1)}\right] \\ &= m(n-1) \end{aligned}$$

یا

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i^2}{m}\right] = \sigma^2$$

پس $\sum_{i=1}^{m} S_i^2/m$ را به عنوان برآوردگر اولیه σ^2 در نظر می‌گیریم ـ همچنین باید توجه داشت که حتی وقتی H_0 درست نباشد این برآوردگر برای σ^2 نااریب است. فرض کنید

$$SS_w = (n-1)\sum_{i=1}^{m} S_i^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - X_{i.})^2$$

SS_w را مجموع مربعات داخل نمونه گویند. از رابطهٔ ۱.۲.۸ نتیجه می‌شود

$$\frac{SS_w}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m(n-1)} \tag{۲.۲.۸}$$

برای به‌دست آوردن برآوردگر دوم σ^2 (که فقط وقتی معتبر است که H_0 درست باشد و در غیراین‌صورت آن را با تقریب اضافی برآورد می‌کند) واریانس بین نمونه‌ها را در نظر می‌گیریم. بدین منظور توجه کنید که میانگینهای نمونه ، $\bar{X}_i$ ، $i = 1, ..., m$ متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ^2/n هستند ؛ یعنی

$$\bar{X}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{ij}}{n} \sim N(\mu_i, \sigma^2/n)$$

بنابراین اگر H_0 درست باشد دنبالهٔ میانگینهای نمونه ، $\bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_m$ تشکیل یک نمونهٔ تصادفی از جامعهٔ نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2/n می‌دهد. واریانس نمونه برای این داده‌ها عبارت‌است از

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{m-1}$$

که در آن

$$\bar{X}_{..} = \frac{\bar{X}_{1.} + \cdots + \bar{X}_{m.}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{nm}$$

برابر با میانگین کل mn داده است. دوباره با توجه به نتیجهٔ اساسی نمونه‌های نرمال ، با فرض درست‌بودن H_0 داریم

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{\sigma^2/n} \sim \chi^2_{m-1} \tag{۳.۲.۸}$$

همچنین چون $\bar{X}_i$ از S_i^2 مستقل است ، آمارهٔ قبل ، از

$$SS_w = (n-1)\Sigma_{i=1}^{m} S_i^2$$

مستقل خواهد بود .
حال SS_b را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$SS_b = n\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$

و آن را مجموع مربعات بین تیمار می‌نامیم . در این صورت از رابطهٔ ۳.۲.۸ نتیجه می‌شود که وقتی H_0 درست است

$$\frac{SS_b}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1} \qquad (۴.۲.۸)$$

و بنابراین

$$E\left[\frac{SS_b}{\sigma^2}\right] = E\left[\chi^2_{m-1}\right] = m-1$$

یا

$$E\left[\frac{SS_b}{m-1}\right] = \sigma^2$$

اکنون نشان می‌دهیم که وقتی H_0 نادرست است میانگین $SS_b/(m-1)$ از σ^2 بیشتر است .

قضیهٔ ۱.۲.۸

با توجه به تعریف فوق

$$E\left[\frac{SS_b}{m-1}\right] = \sigma^2 + \frac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - \bar{\mu})^2$$

که در آن $\bar{\mu} = \Sigma_{i=1}^{m}\mu_i/m$ میانگین μ_iها است .
اثبات : با استفاده از اتحاد

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{m}y_i^2-m\bar{y}^2 \qquad (۵.۲.۸)$$

که در آن $\bar{y}=\sum_{i=1}^{m}y_i/m,$ می‌توان نوشت

$$\frac{SS_b}{n}=\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{..})^2$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_{i.}^2-m\bar{X}_{..}^2 \qquad (۶.۲.۸)$$

تساوی آخر از معادلهٔ ۵.۲.۸ به‌دست می‌آید زیرا $\bar{X}_{..}=\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_{i.}/m$. حال چون $\bar{X}_{i.}$ میانگین نمونه‌ایی به حجم n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است نتیجه می‌شود که

$$E[\bar{X}_{i.}]=\mu_i, \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}_{i.})=\frac{\sigma^2}{n}$$

پس

$$E[\bar{X}_{i.}^2]=E^2[\bar{X}_{i.}]+\mathrm{Var}(\bar{X}_{i.})=\mu_i^2+\frac{\sigma^2}{n} \qquad (۷.۲.۸)$$

همچنین با توجه به

$$\bar{X}_{..}=\sum_{i=1}^{m}\frac{X_{i.}}{m}$$

داریم

$$E[\bar{X}_{..}]=\sum_{i=1}^{m}\frac{E[X_{i.}]}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\mu_i}{m}=\bar{\mu}$$

و با توجه استقلال $\bar{X}_{1.}, \bar{X}_{2.}, \ldots, \bar{X}_{m.}$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_{..})=\frac{\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Var}(\bar{X}_{i.})}{m^2}$$
$$=\frac{m\sigma^2}{nm^2}=\frac{\sigma^2}{nm}$$

بنابراین

$$E\left[\bar{X}_{..}^2\right] = \bar{\mu}^2 + \frac{\sigma^2}{nm} \qquad (۸.۲.۸)$$

حال با توجه به معادلات ۶.۲.۸ ، ۷.۲.۸ و ۸.۲.۸ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} E\left[\frac{SS_b}{n}\right] &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2 + \frac{m\sigma^2}{n} - m\bar{\mu}^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= (m-1)\frac{\sigma^2}{n} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^2 - m\bar{\mu}^2 \\ &= (m-1)\frac{\sigma^2}{n} + \sum_{i=1}^{m} (\mu_{i.} - \bar{\mu})^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

بدین ترتیب ثابت شد که SS_w و SS_b مستقل هستند و داریم

$$\frac{SS_w}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m(n-1)}$$

و اگر H_0 درست باشد

$$\frac{SS_b}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

علاوه بر آن از قضیهٔ ۱.۲.۸ دیده می‌شود که وقتی H_0 درست نیست ، SS_b عموماً بزرگتر از وقتی است که H_0 درست است .

به‌خاطر دارید که اگر χ^2_k و χ^2_l، متغیّرهای تصادفی مستقل کی‌دو به ترتیب با k و l درجهٔ آزادی باشند آن‌گاه

$$\frac{\chi^2_k/k}{\chi^2_l/l} \sim F_{k,l}$$

بنابراین وقتی H_0 درست است داریم

$$\frac{\dfrac{SS_b}{\sigma^2}\Big/(m-1)}{\dfrac{SS_w}{\sigma^2}\Big/m(n-1)} \sim F_{m-1,\,m(n-1)}$$

و

$$\frac{\dfrac{SS_b}{(m-1)}}{\dfrac{SS_w}{m(n-1)}} \sim F_{m-1,\,m(n-1)}$$

و چون هنگامی که H_0 نادرست است SS_b بزرگتر می‌شود یک آزمون طبیعی فرض $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$ در سطح α این است که فرض را رد کنیم اگر

$$\frac{\frac{SS_b}{(m-1)}}{\frac{SS_w}{m(n-1)}} > F_{\alpha,\, m-1,\, m(n-1)}$$

که در آن $F_{\alpha,\, m-1,\, m(n-1)}$ به قسمی محاسبه می‌شود که داشته باشیم

$$P\{F_{m-1,\, m(n-1)} > F_{\alpha,\, m-1,\, m(n-1)}\} = \alpha$$

و $F_{m-1,\, m(n-1)}$ دارای توزیع F با پارامترهای $m-1$ و $m(n-1)$ است.

مطالب فوق در جدول $ANOVA$ (آنالیز واریانس) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود.

جدول ۱.۲.۸

جدول یک طرفه $ANOVA$

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	مقدار آماره F
بین تیمارها	$SS_b = n\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$	$m-1$	$F_{m-1,\, m(n-1)} = \frac{SS_b/(m-1)}{SS_w/m(n-1)}$
داخل تیمارها	$SS_w = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$	$m(n-1)$	

اگر مقدار X_{ij} را به صورت زیر بنویسیم یک اتحاد مفید به‌دست می‌آید

$$X_{ij} = \underbrace{\bar{X}_{..}}_{\text{میانگین کل}} + \underbrace{\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}}_{\text{انحراف حاصل از سطر}} + \underbrace{X_{ij} - \bar{X}_{i.}}_{\text{جملهٔ خطا یا باقیمانده}}$$

در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\bar{X}_{..} + (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{i.})\right]^2 \tag{۹.۲.۸}$$

اگر سمت راست معادلهٔ ۹.۲.۸ را بسط دهیم تمام حاصلضربهای صفر می‌شوند زیرا

$$\sum_i \sum_j \bar{X}_{..}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) = \sum_j \bar{X}_{..} \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$$

زیرا
$$= 0 \qquad ، \quad \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) = 0$$

$$\sum_i \sum_j \bar{X}_{..}(X_{ij} - \bar{X}_{i.}) = \sum_i \bar{X}_{..} \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.})$$

زیرا
$$= 0 \qquad ، \quad \sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.}) = 0$$

$$\sum_i \sum_j (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})(X_{ij} - \bar{X}_{i.}) = \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.})$$

زیرا
$$= 0 \qquad ، \quad \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.}) = 0$$

بنابراین از بسط معادلهٔ ۹.۲.۸ اتحاد زیر به‌دست می‌آید.

اتحاد مجموع مربعات

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 = nm\bar{X}_{..}^2 + n\sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 \qquad (۱۰.۲.۸)$$

تبصره:

اتحاد مجموع مربعات غالباً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 \qquad (۱۱.۲.۸)$$

چرا این تساوی با ۱۰.۲.۸ معادل است؟

محاسبات آنالیز واریانس یک طرفه. بهترین راه محاسبه SS_b و SS_w با دست به قرار زیر است:

$$SS_b = n\sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \qquad (۱۲.۲.۸)$$
$$= n\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_{i.}^2 - nm\bar{X}_{..}^2$$

که این تساوی از اتحاد زیر به‌دست آمده است

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - k\bar{y}^2, \qquad \bar{y} = \sum_{1}^{k} y_i/k \tag{۱۳.۲.۸}$$

مقدار SS_b را باید با استفاده از معادله ۱۲.۲.۸ محاسبه کرد و سپس SS_w از اتحاد زیر به‌دست می‌آید .

$$\begin{aligned} SS_w &\equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 - nm\bar{X}_{\cdot\cdot}^2 - SS_b \end{aligned} \tag{۱۴.۲.۸}$$

فرمولهای SS_b و SS_w در معادلات ۱۲.۲.۸ و ۱۴.۲.۸ با استفاده از اتحاد ۱۳.۲.۸ به‌دست می‌آیند ولی همان‌طور که در بخش ۱.۳ فصل ۴ یادآور شدیم معادله ۱۳.۲.۸ از نظر صرفه‌جویی در وقت برای محاسبه با دست مناسبتر است . این فرمول در مسایل بزرگ به‌خاطر خطاهای گرد کردن به‌وسیله ماشین ممکن است جوابهای نادرست بدهد . برنامهٔ ۲.۸ کمیتهای SS_b و SS_w را بدون استفاده از اتحاد مجموع مربعات محاسبه می‌کند . در واقع این برنامه از روش برگشتی بخش ۱.۳ فصل ۴ برای محاسبهٔ مقدار آمارهٔ F به‌وسیله برنامه با استفاده از برنامهٔ ۳.۸.۳ الف احتمال این‌که متغیّر تصادفی F با $m-1$ و $m(n-1)$ درجهٔ آزادی از این مقدار بیشتر شود محاسبه می‌گردد . این احتمال مساوی است با p-value آزمون و فرض صفر در سطح معنی‌داری α رد می‌شود اگر α بیشتر از p-value شود .

مثال ۲.۸ الف ـ یک شرکت تاکسی‌رانی ۳ نوع بنزین را به‌وسیلهٔ ۱۸ موتور کم و بیش یکسان و با سرعت ثابت آزمون می‌کند . به هر ٦ موتور از ۱۸ موتور بنزین G_i ، $i = 1, 2, 3$ داده می‌شود . هر موتور در مسیر پیموده شده ۱۰ گالن بنزین مصرف می‌کند . طول مسیرهای پیموده شده به‌قرار زیر است .

بنزین G_1	بنزین G_2	بنزین G_3
220	244	254
252	236	272
238	258	232
246	242	238
260	221	256
224	230	250

این فرض را که طول مسیر پیموده شده به نوع بنزین بستگی ندارد آزمون کنید .

حل : با استفاده از برنامهٔ ۲.۸ نتیجه زیر به‌دست می‌آید

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE OF THE F-STATISTIC AND ITS p-value IN A ONE WAY
ANOVA
ENTER THE NUMBER OF SAMPLES
? 3
ENTER THE SIZE OF THE SAMPLES
? 6
ENTER SAMPLE 1 ONE AT A TIME
? 220
? 252
? 238
? 246
? 260
? 224
ENTER SAMPLE 2 ONE AT A TIME
? 244
? 236
? 258
? 242
? 221
? 230
ENTER SAMPLE 3 ONE AT A TIME
? 254
? 272
? 232
? 238
? 256
? 250
SSw/(M*(N-1))= 203.3888
SSb/(M-1)= 249.0553
THE VALUE OF THE F-STATISTIC IS 1.224528
THE p-value IS .3177825
Ok
```

پس فرض یکسان بودن بنزینها در هر سطح معنی‌داری $\alpha \le 0317$ پذیرفته می‌شود.

فرض صفر مثال قبل (که تمام میانگینهای نمونه یکسان هستند) از اصول اولیه قبل نتیجه می‌شود ـ بخصوص با استفاده از این‌که میانگین و واریانس نمونهٔ حاصل از یک جامعهٔ نرمال مستقل است و با یک ضریب ثابت واریانس نمونه‌برداری توزیع کی‌دو با درجهٔ آزادی برابر با حجم نمونه منهای ۱ است. در واقع این آزمون را می‌توانیم با استفاده از اتحاد مربعات به‌دست آوریم. ولی قبل از ارائهٔ این روش لازم است راجع به درجهٔ آزادی صحبت کنیم.

درجهٔ آزادی مجموع مربعات برابر است با مقدار جملات آن منهای تعداد روابط خطی (قیدها) موجود بین آنها. مثلاً تعداد درجات آزادی مربوط به عبارت

$$SS_w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \bar{X}_{i.} \right)^2$$

برابر است با mn، تعداد جملات $X_{ij} - \bar{X}_i$ منهای تعداد قیدهای خطی بین این جملات امّا برای هر تیمار (یعنی نمونه) مجموع انحرافات از میانگین باید مساوی صفر باشد ـ یعنی

$$\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-\bar{X}_{i.}\right)=0 \qquad i=1,\ldots,m$$

بنابراین برای هر نمونه یک خطی داریم و چون m نمونهٔ به‌کار رفته است ، درجهٔ آزادی مربوط به SS_w برابر است با

$$nm-m=m(n-1).$$

حال نتیجهٔ مفید زیر را که به‌قضیهٔ افراز یا قضیه کگران معروف‌است بدون اثبات بیان می‌کنیم .

قضیهٔ افراز

فرض کنید $Z_1, \ldots, Z_N$ متغیّرهای تصادفی نرمال استاندارد باشند و

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i^2 = T_1+\cdots+T_k$$

که درآن T_i مجموع‌مربعات‌با v_i ، $i=1, \ldots, k$ درجهٔ‌آزادی‌است آن‌گاه‌شرط لازم و کافی برای آن‌که $T_1, \ldots, T_k$ متغیّرهای‌تصادفی مستقل با توزیع کی‌دو و درجات آزادی $v_1, v_2, \ldots, v_k$ باشند آن است که

$$v_1+\cdots+v_k=N \quad \blacksquare$$

حال نشان می‌دهیم که چگونه قضیهٔ افراز را می‌توان برای ارائهٔ مطلب فوق به‌کار برد . فرض کنید H_0 درست باشد و μ میانگین مشترک باشد ؛ یعنی $\mu_i=\mu$ ، $i=1, \ldots, m$ در این صورت با توجه به این که فرض H_0 درست است ، متغیّرهای

$$Z_{ij}=(X_{ij}-\mu)/\sigma \qquad i=1,\ldots,m, \;\; j=1,\ldots,n$$

مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند . حال اگر اتحاد مجموع مربعات ۱۰.۲.۸ را برای Z_{ij} به‌کار ببریم نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}^2 = nm\bar{Z}_{..}^2+n\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{Z}_{i.}-\bar{Z}_{..}\right)^2+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(Z_{ij}-\bar{Z}_{i.}\right)^2 \qquad (۱۵.۲.۸)$$

ولی چون $Z_{ij}=(X_{ij}-\mu/\sigma)$ ، می‌توان نوشت

$$\bar{Z}_{..} = \frac{\bar{X}_{..} - \mu}{\sigma}, \qquad \bar{Z}_{i.} = \frac{\bar{X}_{i.} - \mu}{\sigma}$$

در نتیجه

$$\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..} = \frac{\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}}{\sigma}, \qquad Z_{ij} - \bar{Z}_{i.} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_{i.}}{\sigma}$$

پس معادلهٔ ۱۵.۲.۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}^2 = \frac{nm(\bar{X}_{..} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

حال از تعریف درجهٔ آزادی نتیجه می‌شود

$$\frac{nm(\bar{X}_{..} - \mu)^2}{\sigma^2}$$ دارای یک درجه آزادی است

$$\frac{SS_b}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$ دارای $m - 1$ درجه آزادی است

$$\frac{SS_w}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$ دارای $nm - m$ درجه آزادی است

چون

$nm = 1 + m - 1 + nm - m$

از قضیهٔ افراز می‌توان نتیجه گرفت که وقتی H_0 درست است SS_b/σ^2 و SS_w/σ^2 متغیّرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای دارای $m - 1$ و $m(n - 1)$ درجهٔ آزادی هستند . و بنابراین

$[SS_b/(m - 1)]/ SS_w/m(n - 1)]$

دارای توزیع F با پارامترهای $m - 1$ و $m(n - 1)$ است .

۳- آنالیز واریانس یک‌طرفه وقتی حجم نمونه‌ها برابر نیست

در الگوی بخش قبل فرض کردیم . در هر نمونه تعداد مشاهدات برابرند . اگرچه این وضعیت مطلوبی است (به تبصره پایان این بخش مراجعه شود) ولی اغلب امکان‌پذیر نیست . با توجه به این مطلب فرض

کنید m نمونهٔ نرمال به حجمهای $n_1, ..., n_m$ داریم . یعنی داده‌ها شامل $\sum_{i=1}^{m} n_i$ متغیّر تصادفی مستقل X_{ij}، $j = 1, ..., n_i$، $i = 1, ..., m$ است که در آن

$$X_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

در این‌جا نیز می‌خواهیم فرض H_0 را که تمام میانگینها برابرند آزمون کنیم .
برای به‌دست آوردن آزمونی برای H_0 از اتحاد زیر که بآسانی اثبات می‌شود استفاده می‌کنیم .

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i \bar{X}_{..}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}_{\text{مجموع مربعات بین نمونه‌ها} = SS_b} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2}_{\text{مجموع مربعات داخل نمونه‌ها} = SS_w}$$

حال اگر H_0 درست باشد و μ میانگین مشترک باشد و قرار دهیم

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij} - \mu}{\sigma}$$

آن‌گاه Z_{ij}، $j = 1, ..., n_i$، $i = 1, ..., m$ مجموعه‌ایی از $\sum_{i=1}^{m} n_i$ متغیّر نرمال استاندارد مستقل تشکیل می‌دهد . با استفاده از این اتحاد برای Z_{ij} می‌توان نوشت

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}^2}_{\text{با } \sum_{i=1}^{m} n_i \text{ درجه آزادی}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{Z}_{..}^2}_{\text{با } 1 \text{ درجه آزادی}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2}_{\text{با } m-1 \text{ درجه آزادی}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2}_{\text{با } \sum_{i=1}^{m} n_i - m \text{ درجه آزادی}}$$

حال بنا به قضیهٔ افراز وقتی H_0 درست است ، نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 = \frac{SS_b}{\sigma^2}$$

و

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 = \frac{SS_w}{\sigma^2}$$

متغیّرهای تصادفی مستقل با توزیع کی‌دو و به ترتیب با درجات آزادی $m - 1$ و

$\sum_{i=1}^{m} n_i - m$ هستند . پس اگر H_0 درست باشد ،

$$\frac{\frac{SS_b}{(m-1)}}{\frac{SS_w}{(\sum_i n_i - m)}} \sim F_{m-1,\sum_i^m n_i - m}$$

از این عبارت نتیجه می‌شود که فرض $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m$ در سطح α رد می‌شود ، اگر

$$\frac{\frac{SS_b^*}{(m-1)}}{\frac{SS_w}{(\sum_i n_i - m)}} > F_{\alpha, m-1, \sum_i^m n_i - m}$$

تبصره

وقتی نمونه‌ها دارای حجم مختلف باشند حالت نامتعادل نامیده می‌شود . در صورت امکان بهتر است از یک طرح متعادل استفاده کنیم . از یک طرف ، آمارهٔ آزمون در یک طرح متعادل نسبت به یکسان بودن واریانسها حساسیت نسبی دارد . (یعنی طرح متعادل قوی‌تر از طرح نامتعادل است) . مزیت دیگر آن این است که برای مقدار ثابت $\sum_{i=1}^{m} n_i$ توان آزمون در طرح متعادل ماکزیمم می‌شود .

۴- آنالیز واریانس دوطرفه

گرچه الگوی بخشهای ۲ و ۳ مطالعهٔ اثر یک متغیّر را در یک تجربه امکان‌پذیر می‌سازد ، اثر چندین متغیّر را روی یک تجربه نیز می‌توان بررسی کرد . تجربه‌ایی را در نظر بگیرید که داده‌های حاصل از آن را بتوان به صورت ماتریس زیر نوشت

$$\text{داده‌ها} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & & & \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{in} \\ \vdots & & & \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم توزیع متغیّر تصادفی مفروض X_{ij} به سطر و ستون بستگی داشته باشد بخصوص فرض خواهیم کرد که X_{ij}ها مستقلند با توزیع زیر

$$X_{ij} \sim \mathcal{N}\left(\alpha_i + \beta_j, \sigma^2\right), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n$$

می‌خواهیم فرض صفر زیر را آزمون کنیم

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m$$

و

$$H_0' = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$$

بنابراین H_0 بیان می‌کند که اثر سطری وجود ندارد ـ یعنی توزیع متغیّر داده شد فقط به ستون آن بستگی دارد نه به سطر ـ و H_0' بیان می‌کند که اثر ستونی وجود ندارد.

فرض کنید

$$\bar{X}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{ij}}{n}$$

$$\bar{X}_{.j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{X_{ij}}{m}$$

$$\bar{X}_{..} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{X}_{i.}}{m} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{X}_{.j}}{n} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{X_{ij}}{nm}$$

به عبارت دیگر $\bar{X}_{i.}$ میانگین داده‌های سطر i ام. $\bar{X}_{.j}$ میانگین ستون jام و $\bar{X}_{..}$ میانگین تمام داده‌ها است.

تجزیهٔ هر مقدار داده به صورت زیر مفید خواهد بود.

$$X_{ij} = \underbrace{\bar{X}_{..}}_{\text{میانگین کل}} + \underbrace{\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}}_{\text{انحراف مربوط به اثر سطری}} + \underbrace{\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}}_{\text{انحراف مربوط به اثر ستونی}} + \underbrace{X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..}}_{\text{جمله باقیماندهٔ یا خطا}}$$

با استفاده از نمادهای قبل می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\bar{X}_{..} + \left(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}\right) + \left(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}\right) + \left(X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..}\right)\right]^2$$

با بسط طرف راست این معادله می‌توان نشان داد که تمام مجموعه‌های مربوط به جملات حاصلضرب برابر صفرند و در نتیجه اتحاد زیر برای مجموع مربعات به‌دست می‌آید.

اتحاد مجموع مربعات

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_{..}^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2 \qquad (۱.۴.۸)$$

برای یافتن آزمونی برای H_0 یا H_0' از مجموع مربعات فوق در ارتباط با قضیهٔ افراز استفاده می‌کنیم. فرض کنید H_0 درست باشد و دانسته باشیم $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m$ و α مقدار مشترک آنها باشد، می‌نویسیم

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij} - \alpha - \beta_j}{\sigma} \qquad (۲.۴.۸)$$

و توجه داریم که تحت H_0، Z_{ij}ها متغیّرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد هستند.

$$\bar{Z}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}}{n} = \frac{\bar{X}_{i.} - \alpha - \beta_.}{\sigma}$$
$$\bar{Z}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{m} Z_{ij}}{m} = \frac{\bar{X}_{.j} - \alpha - \beta_j}{\sigma} \qquad (۳.۴.۸)$$
$$\bar{Z}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Z_{ij}}{nm} = \frac{\bar{X}_{..} - \alpha - \beta_.}{\sigma}$$

که در آن

$$\beta_. = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{n}$$

از این روابط نتیجه می‌شود

$$\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..} = \frac{\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}}{\sigma}$$
$$\bar{Z}_{.j} - \bar{Z}_{..} = \frac{\bar{X}_{.j} - \beta_j - \bar{X}_{..} + \beta_.}{\sigma}$$
$$Z_{ij} - \bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{.j} + \bar{Z}_{..} = \frac{X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..}}{\sigma}$$

با استفاده از این روابط و معادلهٔ ۱.۴.۸ در مورد متغیّرهای Z_{ij} داریم

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(\bar{X}_{..} - \alpha - \beta_.)^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{\sigma^2}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(\bar{X}_{.j} - \beta_j - \bar{X}_{..} + \beta_.)^2}{\sigma^2}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2}{\sigma^2}$$

حال می‌توان نشان داد که

(۴.۸.۸)

$$nm\frac{(\bar{X}_{..} - \alpha - \beta_.)^2}{\sigma^2}$$ با یک درجه آزادی

$$n\sum_{i=1}^{m} \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{\sigma^2}$$ با $m-1$ درجه آزادی

$$m\sum_{j=1}^{n} \frac{(\bar{X}_{.j} - \beta_j - \bar{X}_{..} + \beta_.)^2}{\sigma^2}$$ با $n-1$ درجه آزادی

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2}{\sigma^2}$$ با $(n-1)\ (m-1)$ درجه آزادی

در مورد سه مجموع اوّل درجهٔ آزادی بسهولت به‌دست می‌آید. درجهٔ آزادی مجموع آخر با توجه به قیدهای خطی حاصل تعیین می‌شود، زیرا مجموع تمام سطرها یا ستونها باید برابر صفر باشد، یعنی

$$\sum_i (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..}) = \sum_i (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) - \sum_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) = 0 - 0$$
$$\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..}) = \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{i.}) - \sum_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) = 0 - 0$$

حال در یک ماتریس با m سطر و n ستون برای آن‌که مجموع سطرها و ستونها برابر صفر شود باید $m-1$ سطر اوّل همچنین $n-1$ ستون اوّل برابر صفر باشند و مجموع تمام جملات صفر باشند (چرا؟) این شرایط به $m-1+n-1+1 = m+n-1$ قید خطی منجر می‌شود و در نتیجه تعداد درجات آزادی متناظر با مجموع مربعات آخر در رابطهٔ ۴.۸.۸ برابر با $mn-(m+n-1) = (m-1)\ (n-1)$ است.

حال از قضیهٔ افراز نتیجه می‌شود که اگر

$$SS_r = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2$$

آن‌گاه وقتی H_0 درست است ، SS_r/σ^2 و SS_e/σ^2 متغیّرهای تصادفی مستقل کی‌دو با $(n-1)$ و $(n-1)\ (m-1)$ درجه آزادی است ، در نتیجه

$$\frac{\dfrac{SS_r}{(m-1)}}{\dfrac{SS_e}{(m-1)(n-1)}} \sim F_{m-1,(m-1)(n-1)}$$

پس یک آزمون در سطح α برای فرض

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m$$

عبارت است از این که فرض H_0 را رد کنیم اگر

$$\frac{\dfrac{SS_r}{(m-1)}}{\dfrac{SS_e}{(m-1)(n-1)}} > F_{\alpha,\, m-1,(m-1)(n-1)}$$

و در غیر این صورت بپذیریم .

کمیت SS_r را مجموع مربعات بین سطرها و SS_e را مجموع مربعات خطا می‌نامند .

تحلیلی مشابه می‌توان برای آزمون فرض بی‌اثر بودن ستونها

$$H_0' : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$$

انجام داد . بدین ترتیب که فرض H_0 را در سطح α رد می‌کنیم اگر

$$\frac{\dfrac{SS_c}{(n-1)}}{\dfrac{SS_e}{(m-1)(n-1)}} > F_{\alpha,\, n-1,(m-1)(n-1)}$$

که در آن SS_c مجموع مربعات بین ستونهاست و به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$SS_c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..}\right)^2 = m \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..}\right)^2$$

مطالب فوق را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

جدول ۱.۴.۸

آنالیز واریانس دوطرفه

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	مقدار آماره F
ستون	$SS_r = n\sum_{i=1}^{m}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2$	$m-1$	$\dfrac{SS_r/(m-1)}{SS_e/(m-1)(n-1)}$
سطر	$SS = m\sum_{j=1}^{n}(X_{.j} - \overline{X}_{..})^2$	$n-1$	$\dfrac{SS_c/(n-1)}{SS_e/(m-1)(n-1)}$
خطا	$SS_e = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{..})^2$	$(m-1)(n-1)$	

برنامهٔ ۴.۸ مقادیر آماره‌های F و مقدار p متناظر را محاسبه می‌کند.

مثال ۴.۸. الف ـ ۵ اتومبیل در یک طرح تجربی برای مقایسه مسافت طی شده به ازای هر گالن از ۳ نوع بنزین، به‌کار گرفته شده و نتایج زیر به‌دست آمده است:

اتومبیل	بنزین I	II	III
1	21.2	23.1	22.1
2	24.8	26.4	23.6
3	28.6	30.2	29
4	32	34.2	31.8
5	18	23.8	22

۱) آیا می‌توان سه نوع بنزین را از نظر مسافت یکسان در نظر گرفت؟

۲) آیا اتومبیلها تفاوت دارند؟

حل: برنامهٔ ۴.۸ را اجرا می‌کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUES OF THE F-STATISTICS AND THEIR ASSOCIATED p-valu
es IN A TWO WAY ANOVA
ENTER THE NUMBER OF ROWS
? 5
ENTER THE NUMBER OF COLUMNS
? 3
ENTER ROW 1 ONE AT A TIME
? 21.12
? 23.1
? 22.1
ENTER ROW 2 ONE AT A TIME
? 24.8
? 26.4
? 23.6
ENTER ROW 3 ONE AT A TIME
? 28.6
? 30.2
? 29
ENTER ROW 4 ONE AT A TIME
? 32
? 34.2
? 31.8
ENTER ROW 5 ONE AT A TIME
? 18
? 23.8
? 22
THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO ROW EFFECT IS
 54.96949
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO ROW EFFECT IS LESS THAN .0001
THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO COLUMN EFFECT IS
 7.085873
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO COLUMN EFFECT IS 1.625574E-02
Ok
```

بنابراین هر دو فرض ـ یکسان بودن ۳ نوع بنزین و یکسان بودن اتومبیلها ـ در هر سطح آزمون بالاتر از $\alpha = .016$ رد می‌شود.

مثال ۸.۴.ب ـ داده‌های زیر تعداد گونه‌های مختلف بی‌مهره گان کوچک را که در ۶ ایستگاه واقع در نزدیکی یک پایگاه حرارتی زندگی می‌کنند نشان می‌دهد. این داده‌ها از سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۷۷ جمع آوری شده‌اند.

	ایستگاه					
سال	1	2	3	4	5	6
1970	53	35	31	37	40	43
1971	36	34	17	21	30	18
1972	47	37	17	31	45	26
1973	55	31	17	23	43	37
1974	40	32	19	26	45	37
1975	52	42	20	27	26	32
1976	39	28	21	21	36	28
1977	40	32	21	21	36	35

برای آزمون این فرض که داده‌ها الف) سال به سال و ب) ایستگاه به ایستگاه تغییر نکرده‌اند برنامهٔ ۸.۴ را اجرا کنید.

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUES OF THE F-STATISTICS AND THEIR ASSOCIATED p-valu
es IN A TWO WAY ANOVA
ENTER THE NUMBER OF ROWS
? 8
ENTER THE NUMBER OF COLUMNS
? 6
ENTER ROW 1 ONE AT A TIME
? 53
? 35
? 31
? 37
? 40
? 43
ENTER ROW 2 ONE AT A TIME
? 36
? 34
? 17
? 21
? 30
? 18
ENTER ROW 3 ONE AT A TIME
? 47
? 37
? 17
? 31
? 45
? 26
ENTER ROW 4 ONE AT A TIME
? 55
? 31
? 17
? 23
? 43
? 37
ENTER ROW 5 ONE AT A TIME
? 40
? 32
? 19
? 26
? 45
? 37
ENTER ROW 6 ONE AT A TIME
? 52
? 42
? 20
? 27
? 26
? 32
ENTER ROW 7 ONE AT A TIME
? 39
? 28
? 21
? 21
? 36
? 28
ENTER ROW 8 ONE AT A TIME
? 40
? 32
? 21
? 21
? 36
? 35
THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO ROW EFFECT IS
 3.729852
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO ROW EFFECT IS 4.042626E-03
THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO COLUMN EFFECT IS
 22.47898
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO COLUMN EFFECT IS LESS THAN .0001
Ok
```

بنابراین هر دو فرض عدم وجود اثر سطر و اثر ستون در هر سطح معنی‌داری رد می‌شود.

۵- آنالیز واریانس دوطرفه با اثر متقابل

در بخش ۴ آزمایشهایی را در نظر گرفتیم که در آنها توزیع داده‌ها به دو عامل بستگی داشت ـ که آنها را عامل «سطر» و عامل «ستون» نامیدیم . بخصوص فرض کردیم که مقدار میانگین X_{ij} در سطر i ام را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت که یکی به سطر و دیگری به ستون آن بستگی دارد . یعنی فرض کردیم که

$$X_{ij} \sim \mathcal{N}\left(\alpha_i + \beta_j, \sigma^2\right), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, n$$

امّا یک حالت ضعیفتر این الگو این است که فرض کنیم اثرات سطر و ستون جمعی هستند و اثر متقابل سطر و ستون وجود ندارد .

برای نمونه در مثال ۴.۸. الف آزمایشی را در نظر گرفتیم که برای مقایسهٔ مسافت طی شده به ازای هر گالن در اثر مصرف سه نوع بنزین در ۵ اتومبیل مختلف طرح شده بود . در تحلیل نتایج ، فرض کردیم که مسافت بیشتر طرح شده در اثر مقدار معینی بنزین برای تمام اتومبیلها یکسان است . ولی کاملاً ممکن است که یک بنزین خاص اثر شدیدی روی ماشین بخصوصی داشته باشد . پس یک اثر متقابل بنزین ـ اتومبیل وجود دارد که الگوی فوق آن را در نظر نگرفته است .

برای در نظر گرفتن اثر متقابل ممکن سطر و ستون می‌نویسیم

$$\mu_{ij} = E\left[X_{ij}\right]$$

و μ_{ij} را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم

$$\bar{\mu}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{ij}}{n}, \qquad \bar{\mu}_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_{ij}}{m}$$

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{ij}}{nm} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{\mu}_{i\cdot}}{m} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{\mu}_{\cdot j}}{n}$$

کمیت $\bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}$ را اثر سطر i ام و $\bar{\mu}_{\cdot j} - \bar{\mu}$ را اثر ستون i ام گوییم . همچنین کمیت

$$\mu_{ij} - \left(\bar{\mu} + \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu} + \bar{\mu}_{\cdot j} - \bar{\mu}\right) = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{\cdot j} + \bar{\mu}$$

را اثر متقابل بین سطر i و ستون j ام گوییم و آن تفاوت کمیت μ_{ij} از مقدار میانگین $(\bar{\mu})$ به‌اضافهٔ نمو مربوط به سطر i ، $(\bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu})$ به اضافه نمو مربوط به ستون j ، $(\bar{\mu}_{\cdot j} - \bar{\mu})$ است . در نتیجه اندازه‌ایی است از تبدیل حالت جمعی به اثرات سطر و ستون .

اگر بنویسیم

$$\alpha_i = \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}$$
$$\beta_j = \bar{\mu}_{\cdot j} - \bar{\mu}$$
$$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{\cdot j} + \bar{\mu}$$

دیده می‌شود که

$$\underbrace{\mu_{ij}}_{\text{میانگین سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام}} = \underbrace{\bar{\mu}}_{\text{متوسط مقدار میانگین}} + \underbrace{\alpha_i}_{\text{نموّ مربوط به سطر}} + \underbrace{\beta_j}_{\text{نموّ مربوط به ستون}} + \underbrace{\gamma_{ij}}_{\text{نموّ مربوط به سطر } i \text{ام و ستون } j \text{ام}}$$

به عبارت زیر که اثبات آن به عنوان تمرین واگذار می‌شود توجه کنید

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0 \qquad (۱.۵.۸)$$

همان‌طور که خواهیم دید برای آن‌که بتوانیم فرض نبود اثر متقابل سطر و ستون را آزمون کنیم ـ یعنی این‌که تمام $\gamma_{ij} = 0$ باید بیش از یک مشاهده برای هر یک از عوامل داشته باشیم. پس فرض می‌کنیم که l مشاهده برای هر یک از سطر و ستونها داشته باشیم. یعنی فرض می‌کنیم که داده‌ها عبارتند از $\{X_{ijk},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, l\}$ که در آن X_{ijk} مشاهده kام در سطر iام و ستون jام است. فرض می‌شود که تمام مشاهدات متغیّرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال با واریانس مشترک σ^2 باشند؛ در این صورت الگو به صورت زیر نوشته می‌شود

$$X_{ijk} \sim \mathcal{N}\left(\bar{\mu} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}, \sigma^2\right)$$

که در آن

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} = 0$$

می‌خواهیم فرضهای زیر را آزمون کنیم

$$H_0^r: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$
$$H_0^c: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$$
$$H_0^{int}: \gamma_{ij} = 0 \quad \text{به ازای هر} \quad i,\ j$$

یعنی $H^r{}_0$ و $H^c{}_0$ فرضهای عدم اثرات سطر و ستون و H_0^{int} عدم وجود اثر متقابل سطر و ستون است. برای بسط آزمونهای فرضهای قبل می‌نویسیم

$$\bar{X}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^{l} X_{ijk}}{l} = \text{متوسط عناصر سطر } i \text{ام و ستون } j\text{ام}$$
$$= \text{برآورد} \quad \mu_{ij}$$
$$\bar{X}_{i..} = \frac{\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} X_{ijk}}{ln} = \text{متوسط تمام عناصر سطر } j\text{ام}$$
$$= \text{برآورد} \quad \bar{\mu}_{i.}$$
$$\bar{X}_{.j.} = \frac{\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} X_{ijk}}{lm} = \text{متوسط تمام عناصر سطر } i\text{ام}$$
$$= \text{برآورد} \quad \bar{\mu}_{.j}$$
$$\bar{X}_{...} = \frac{\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} X_{ijk}}{nml} = \text{متوسط تمام عناصر}$$
$$= \text{برآورد} \quad \bar{\mu}$$

توجه کنید که

$$\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...} = \text{برآورد} \quad \alpha_i$$
$$\bar{X}_{.j.} - \bar{Y}_{...} = \text{برآورد} \quad \beta_j$$
$$\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...} = \text{برآورد} \quad \gamma_{ij}$$

حال می‌نویسیم

$$X_{ijk} = \bar{X}_{...} + (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...}) + (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...}) + (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}) + (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})$$

با استفاده از رابطهٔ بالا داریم

$$\sum_k\sum_j\sum_i X_{ijk}^2 = \sum_k\sum_j\sum_i \Big[\bar{X}_{...} + (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...}) + (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...}) + (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}) + (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})\Big]^2$$

به کمک اعمال جبری می‌توان نشان داد که مجموع تمام جملات حاصلضرب برابر صفر است . در نتیجه اتحاد مجموع مربعات به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\sum_k \sum_j \sum_i X_{ijk}^2 = \sum_k \sum_j \sum_i \bar{X}_{...}^2 + \sum_k \sum_j \sum_i (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})^2$$

$$+ \sum_k \sum_j \sum_i (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})^2 \qquad (۲.۵.۸)$$

$$+ \sum_k \sum_j \sum_i (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...})^2$$

$$+ \sum_k \sum_j \sum_i (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2$$

اگر قرار دهیم

$$SS_r = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})^2$$

$$= ln \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})^2 = \text{مجموع مربعات سطر}$$

$$SS_c = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})^2$$

$$= ml \sum_{j=1}^{n} (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})^2 = \text{مجموع مربعات ستون}$$

$$SS_{int} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...})^2$$

$$= l \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...})^2 = \text{مجموع مربعات اثرات متقابل}$$

$$SS_e = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2 = \text{مجموع مربعات خطا}$$

$$SS_T \equiv \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (X_{ijk} - \bar{X}_{...})^2 = \text{مجموع مربعات کل}$$

آن‌گاه معادله ۲.۵.۸ به صورت زیر در می‌آید

$$SS_T = SS_r + SS_c + SS_{int} + SS_e$$

درجهٔ آزادی مربوط به جملات سمت راست اتحاد مجموع مربعات در معادلهٔ ۲.۵.۸ به قرار زیر است .

$$lmn\bar{X}^2_{...}$$ با ۱ درجه آزادی

$$SS_r = ln\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...}\right)^2$$ با $m-1$ درجه آزادی

$$SS_c = lm\sum_{j=1}^{n}\left(\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...}\right)^2$$ با $n-1$ درجه آزادی

$$SS_{int} = l\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}\right)^2$$ با $(n-1)\ (m-1)$ درجه آزادی

$$SS_e = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(X_{ijk} - \bar{X}_{ij.}\right)^2$$ با $mn\ (l-1)$ درجه آزادی

دلیل این که $\bar{X}^2_{...}$ ، SS_r و SS_c دارای درجات آزادی فوق هستند بدیهی است و به خوانـنده واگـذار می‌شود . درجهٔ آزادی SS_{int} با توجه به این‌که به ازای تمام i و jها می‌توان نوشت

$$\sum_i\left(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}\right) = \sum_j\left(X_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}\right) = 0$$

به‌دست می‌آید و همان‌طور که در بخش ۴ گفته شد صفر شدن مجموعه‌های m سطر و n ستون معادل با داشتن $m+n-1$ قید خطی است . بنابراین درجهٔ آزادی SS_{int} برابر است با

$$nm - (n + m - 1) = (n - 1)(m - 1)$$

(تحقیق درستی درجه آزادی مربوط به SS_e به عنوان تمرین گذاشته است)

برای آزمون عدم وجود اثرات متقابل سطر و ستون ـ یعنی برای هر i و j

$$H_0^{int}: \gamma_{ij} = 0$$

توجه کنید که تحت فرض H_0^{int} متغیّرهای تصادفی

$$Z_{ijk} \equiv \frac{(X_{ijk} - \bar{\mu} - \alpha_i - \beta_j)}{\sigma}$$

به ازای هر i و j و k متغیّرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد هستند . همچنین

$$\bar{Z}_{ij.} = \frac{\bar{X}_{ij.} - \bar{\mu} - \alpha_i - \beta_j}{\sigma}$$

$$\bar{Z}_{i..} = \frac{\bar{X}_{i..} - \bar{\mu} - \alpha_i}{\sigma} \qquad \left(\text{زیرا} \quad \beta_. = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{n} = 0 \right)$$

$$\bar{Z}_{.j.} = \frac{\bar{X}_{.j.} - \bar{\mu} - \beta_j}{\sigma} \qquad \left(\text{زیرا} \quad \alpha_. = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{m} = 0 \right)$$

$$\bar{Z}_{...} = \frac{\bar{X}_{...} - \bar{\mu}}{\sigma}$$

از این روابط نتیجه می‌شود

$$\bar{Z}_{ij.} - \bar{Z}_{i..} - \bar{Z}_{.j.} + \bar{Z}_{...} = \frac{\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...}}{\sigma}$$

$$Z_{ijk} - \bar{Z}_{ij.} = \frac{X_{ijk} - \bar{X}_{ij.}}{\sigma}$$

بنابراین چون $\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Z_{ijk}^2$ دارای توزیع کی‌دو با lnm درجه آزادی است با به‌کاربردن اتحاد مجموع مربعات معادلهٔ ۲.۵.۸ برای Z_{ijk} و استفاده از قضیهٔ افراز وقتی H_0^{int} درست است متغیّرهای

SS_{int}/σ^2 و SS_e/σ^2

مستقل و دارای توزیع کی‌دو و به ترتیب با $(m-1)\ (n-1)$ و $nm(l-1)$ درجهٔ آزادی هستند . پس اگر H_0^{int} درست باشد

$$[SS_{int}/(n-1)(m-1)]/[SS_e/nm(l-1)]$$

دارای توزیع F با $(m-1)\ (n-1)$ و $nm(l-1)$ درجه آزادی خواهد بود .

می‌توان نشان داد که نتایجی مشابه برای آزمون $H_0 : \alpha_i = 0$ به ازای هر i و $H_0 : \beta_i = 0$ برای هر i برقرار است . جدول آنالیز واریانس در جدول ۱.۵.۸ ارائه شده است .

توجه کنید که تمام آزمونهای قبل ، فرض صفر را رد می‌کنند اگر آمارهٔ F مربوطه بزرگ

باشد . دلیل این‌که فقط مقادیر بزرگ (نه کوچک) فرض صفر را رد می‌کنند این است که صورت آمارهٔ F وقتی بزرگتر می‌شود که H_0 نادرست است . در حالی که توزیع مخرج آماره F یکسان خواهد بود . چه H_0 درست باشد و چه نادرست . برای نشان دادن این مطلب می‌توان ثابت کرد

$$E\left[\frac{SS_r}{(m-1)}\right] = \sigma^2 + \frac{nl}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2$$

$$E\left[\frac{SS_c}{(n-1)}\right] = \sigma^2 + \frac{ml}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2$$

$$E\left[\frac{SS_{int}}{(n-1)(m-1)}\right] = \sigma^2 + \frac{l}{(n-1)(m-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ij}^2$$

$$E\left[\frac{SS_e}{nm(l-1)}\right] = \sigma^2$$

بنابراین دیده می‌شود که وقتی فرض صفر درست نیست (و در نتیجه پارامترهای ـ α ها ، β ها یا γ ها همه صفر نیستند) میانگین صورت آمارهٔ F صعود می‌کند در صورتی که $E[SS_e/mn(l-1)]$ همواره برابر σ^2 است . (و در نتیجه $SS_e/mn(l-1)$ را همواره می‌توان به عنوان برآورد σ^2 به کار برد) .

برنامهٔ ۵.۸ مقادیر آماره‌های F و p-value متناظر را محاسبه می‌کند .

مثال ۵.۸ الف ـ طول عمر یک مولد خاص به مواد مصرفی و درجهٔ حرارت محیط بستگی دارد . داده‌های زیر مربوط به ۲۴ مولد است که از ۳ نوع ماده ساخته شده و در ۲ درجه حرارت مختلف به کار گرفته شده‌اند آیا داده‌ها نشان می‌دهند که مواد سازندهٔ مولدها و درجه حرارت محیط در طول عمر آنها مؤثر است ؟ آیا شاهدی برای وجود اثرات متقابل وجود دارد ؟

	درجه حرارت	
ماده	10°C	18°C
1	135, 150	50, 55
	176, 85	64, 38
2	150, 162	76, 88
	171, 120	91, 57
3	138, 111	68, 60
	140, 106	74, 51

جدول ۸.۵۱

جدول آنالیز واریانس (ANOVA) دوطرفه با l مشاهده

منبع تغییرات	درجات آزادی	مجموع مربعات	آماره	سطح آزمون α
سطر	$m-1$	$SS_r = ln\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_{i..}-\bar{X}_{...})^2$	$F_r = \frac{SS_r/(m-1)}{SS_e/nm(l-1)}$	H_0^r را رد می‌کنیم اگر $F_r > F_{\alpha, m-1, nm(l-1)}$
ستون	$n-1$	$SS_c = lm\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_{.j.}-\bar{X}_{...})^2$	$F_c = \frac{SS_c/(n-1)}{SS_e/nm(l-1)}$	H_0^c را رد می‌کنیم اگر $F_c > F_{\alpha, n-1, nm(l-1)}$
اثر متقابل	$(n-1)(m-1)$	$SS_{int} = l\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_{ij.}-\bar{X}_{i..}-\bar{X}_{.j.}+\bar{X}_{...})^2$	$F_{int} = \frac{SS_{int}/(n-1)(m-1)}{SS_e/nm(l-1)}$	H_0^{int} را رد می‌کنیم اگر $F_{int} > F_{\alpha,(n-1)(m-1), nm(l-1)}$
خطا	$nm(l-1)$	$SS_e = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(X_{ijk}-\bar{X}_{ij.})^2$		

حل : برنامهٔ ۵.۸ را اجرا می‌کنیم

```
RUN
THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUES OF THE F-STATISTICS AND THEIR ASSOCIATED p-valu
es IN A TWO WAY ANOVA WITH L OBSERVATIONS IN EACH ROW-COLUMN CELL
ENTER THE NUMBER OF ROWS
? 3
ENTER THE NUMBER OF COLUMNS
? 2
ENTER THE NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH ROW-COLUMN CELL
? 4
ENTER THE 4 VALUES IN ROW 1 COLUMN 1 ONE AT A TIME
? 135? 150? 176? 85ENTER THE 4 VALUES IN ROW 1 COLUMN 2 ONE AT A TIME
? 50? 55? 64? 38ENTER THE 4 VALUES IN ROW 2 COLUMN 1 ONE AT A TIME
? 150? 162? 171? 120ENTER THE 4 VALUES IN ROW 2 COLUMN 2 ONE AT A TIME
? 76? 88? 91? 57ENTER THE 4 VALUES IN ROW 3 COLUMN 1 ONE AT A TIME
? 138? 111? 140? 106ENTER THE 4 VALUES IN ROW 3 COLUMN 2 ONE AT A TIME
? 68? 60? 74? 51THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO ROW
 EFFECT IS 2.479762
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO ROW EFFECT IS .1092952
THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO COLUMN EFFECT IS
 69.63223
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO COLUMN EFFECT IS LESS THAN .0001
THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO INTERACTION EFFECT IS
 .6462455
THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO INTERACTION EFFECT IS .5328998
Ok
```

همان‌طور که دیده می‌شود مواد مصرفی تفاوتی نمی‌کنند. ولی واضح است که درجه حرارت مؤثر بوده است و لذا فرض عدم اثر متقابل پذیرفته می‌شود.

مسایل

۱ - در فرآیند تصیفهٔ نوعی مادهٔ شیمیایی که به صورت محلول است، از صمغی استفاده می‌شود که مواد ناخالص را جذب می‌کند مهندس شیمی می‌خواهد کارآیی ۳ نوع صمغ را آزمون کند. بدین منظور یک محلول شیمیایی را انتخاب کرده آن را به ۱۵ قسمت تقسیم می‌کند هر صمغ را ۵ بار آزمون کرده و غلظت ناخالصی داده‌ها عبارتند از

غلظت ناخالصی		
صمغ I	صمغ II	صمغ III
.046	.038	.031
.025	.035	.042
.014	.031	.020
.017	.022	.018
.043	.012	.039

این فرض راکه تفاوتی در کارآیی صمغها وجود ندارد، آزمون کنید.

۲ - می‌خواهیم بدانیم چه نوع فیلتری روی پرده اسیلوسکوپ اشعهٔ کاتد قرار دهیم تا هدفهای ارائه شده بآسانی خوانده شوند. برای این کار آزمونی انجام می‌شود. ابتدا یک صدا به‌کاربرده می‌شود به قسمی که هدف بسختی خوانده شود. یک علامت دیگر ارسال می‌گردد به قسمی که هدف را مشخص کند و شدت آن از صفر افزایش داده می‌شود تا هدف توسط ناظر کاملاً قابل رؤیت باشد شدتی راکه برای اولین بار ناظر علامت، هدف را می‌بیند ثبت می‌گردد. این آزمایش ۲۰ بار با هر یک از فیلترها تکرار می‌شود. مقادیر عددی حاصل در جدول زیر متناسب با شدتی است که ناظر برای اولین بار هدف را دیده است.

فیلتر شماره ۱	فیلتر شماره ۲	فیلتر شماره ۳
90	88	95
87	90	95
93	97	89
96	87	98
94	90	96
88	96	81
90	90	92
84	90	79
101	100	105
96	93	98
90	95	92
82	86	85
93	89	97
90	92	90
96	98	87
87	95	90
99	102	101
101	105	100
79	85	84
98	97	102

در سطح ۵ درصد فرض یکسان بودن فیلترها را آزمون کنید .

۳ـ توضیح دهید که چرا نمی‌توان فرض $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_m$ را به کمک آزمونهای t روی $\binom{m}{2}$ زوج نمونه آزمون کرد .

۴ـ کارگاهی دارای ۳ کوره برای حرارت دادن نمونه‌های فلزی است . فرض می‌کنیم درجهٔ حرارت هر سه یکسان است و برای آزمون این فرض درجه حرارت ۵ قطعهٔ گرم شده را اندازه می‌گیریم که داده‌های زیر به‌دست آمده است .

کوره	درجه حرارت
1	492.4, 493.6, 498.5, 488.6, 494
2	488.5, 485.3, 482, 479.4, 478
3	502.1, 492, 497.5, 495.3, 486.7

آیا کوره‌ها یکسان عمل می‌کنند ؟ در سطح معنی‌دار ۵ درصد آزمون کنید . مقدار p چقدر است ؟

۵ـ چهار روش شیمیایی استاندارد برای تعیین منیزیم یک ماده شیمیایی وجود دارد . هر یک از روشها ۴ بار روی ماده مفروض مورد استفاده قرار می‌گیرد و داده‌های حاصل به قرار زیرند

روش			
1	*2*	*3*	*4*
76.42	80.41	74.20	8[illegible].20
78.62	82.26	72.68	86.04
80.40	81.15	78.84	84.36
78.20	79.20	80.32	80.68

آیا داده‌ها نشان می‌دهند که روشها نتایج یکسان دارند ؟

۶ـ توضیح دهید چگونه قضیهٔ افراز را می‌توان برای به‌دست آوردن توزیع توأم $\bar{X}$ و S^2 در نمونه‌گیری نرمال به‌کار برد ؟

۷ـ هر یک از ۳ نوع گوشت از نظر درصد به‌وسیلهٔ ۵ نفر آزمون می‌شود . داده‌های زیر (برحسب درصد چربی در هر گرم) به‌دست آمده است

نوع	*1*	*2*	*3*
مقدار چربی	32	41	36
	34	32	37
	31	33	30
	35	29	28
	33	35	33

آیا مقدار چربی به نوع گوشت بستگی دارد ؟

۸- ۲۰ نفر سنگین وزن که هر یک بیش از ۴۰ پوند اضافه وزن دارند بتصادف تحت دو رژیم غذایی قرارمی‌گیرند. پس از ۱۰ هفته کل وزن کم‌شده (برحسب پوند) به صورت زیر است.

کسر وزن	
رژیم ۲	رژیم ۱
24.2	22.2
16.8	23.4
14.6	24.2
13.7	16.1
19.5	9.4
17.6	12.5
11.2	18.6
9.5	32.2
30.1	8.8
21.5	7.6

در سطح معنی‌داری ۵ درصد فرض برابری اثر دو رژیم غذایی را آزمون کنید.

۹- گلهای گیاهی برای تعیین مقدار ماده مورد نظر مطالعه می‌شوند. این ماده در ساخت حشره‌کشها مصرف می‌شود چهار روش برای تهیهٔ این ماده مورد استفاده قرار می‌گیرد و نمونه‌ها گلهایی هستند که به ۳ طریق مختلف نگه‌داری شده‌اند، یعنی گلهای تازه، گلهایی که یک‌سال در انبار مانده است و گلهایی که یک‌سال در انبار بوده ولی تحت مراقبت کامل قرار داشته است. فرض می‌شود که اثر متقابل وجود ندارد. داده‌ها عبارتند از:

درصد ماده مورد نظر

شرایط نگهداری	روش			
	A	*B*	*C*	*D*
1	1.35	1.13	1.06	0.98
2	1.40	1.23	1.26	1.22
3	1.49	1.46	1.40	1.35

الف) آیا روشهای تهیه کردن تفاوت دارند؟

ب) آیا شرایط نگه‌داری در مقدار مادهٔ حاصل مؤثر است؟ آزمونها را در سطح $\alpha = .01$ انجام دهید.

۱۰- یک آزمایش برای تعیین اثرات ۳ نوع مختلف بنزین با ۳ نوع ماده اضافی انجام می‌شود. آزمایش روی ۹ موتور مشابه که هر یک محتوی ۵ گالن از بنزین است انجام می‌شود. داده‌ها عبارتند از

مسافت طی شده

	ماده اضافی		
بنزین	۱	۲	۳
1	124.1	131.5	127
2	126.4	130.6	128.4
3	127.2	132.7	125.6

الف) فرض بی‌اثر بودن بنزین روی مسافت طی شده را آزمون کنید.
ب) برابری اثر مواد اضافه شده را آزمون کنید.
پ) چه فرضهایی را در نظر گرفته‌اید؟

۱۱ - در مسألهٔ ۸ فرض کنید برای هر رژیم غذایی ۱۰ نفر منظور شده است که ۵ نفر آنها مرد و ۵ نفر دیگر زن است. داده‌ها عبارتند از

	رژیم ۱	رژیم ۲
زن	7.6	19.5
	8.8	17.6
	12.5	16.8
	16.1	13.7
	18.6	21.5
مرد	22.2	30.1
	23.4	24.2
	24.2	9.5
	32.2	14.6
	9.4	11.2

الف) اثر یکسان بودن رژیمهای غذایی را روی مردان و زنان آزمون کنید.
ب) عدم اثر متقابل را بین جنس و رژیم غذایی آزمون کنید.

۱۲ - محققی می‌خواهد مقاومت تخته سه‌لایی را که از ۳ نوع چسب و ۳ نوع چوب درست شده‌اند را مقایسه کند. برای مقایسه ۵ قطعه از هر یک از ۹ ترکیب ساخته شده انتخاب می‌کند و سپس آنها را تحت فشار قرار می‌دهد. جدول زیر فشار قابل تحمل هر قطعه را نشان می‌دهد

چسب / چوب	G_1		G_2		G_3	
W_1	196	208	214	216	258	250
	247	216	235	240	264	248
	221		252		272	
W_2	216	228	215	217	246	247
	240	224	235	219	261	250
	236		241		255	
W_3	230	242	212	218	255	251
	232	244	216	224	261	258
	228		222		247	

الف) فرض بی‌اثر بودن نوع چوب را در مقاومت حاصل آزمون کنید.
ب) فرض بی‌اثر بودن نوع چسب را در مقاومت حاصل آزمون کنید.
پ) فرض جمعی بودن اثر چوب و چسب را آزمون کنید.

۱۳- اثر یک دارو روی غلظت خون ۲۴ ساعت بعد از تزریق با توجه به سن و جنس مطالعه می‌شود. تجزیهٔ خون نمونه‌های ۴۰ نفری که از دارو استفاده کرده‌اند نتایج زیر را داده است (برحسب میلی‌گرم در یک سانتی‌متر مکعب)

	گروه سنی			
	۱۱-۲۵	۲۶-۴۰	۴۱-۶۵	بیش از ۶۵
مرد	52	52.5	53.2	82.4
	56.6	49.6	53.6	86.2
	68.2	48.7	49.8	101.3
	82.5	44.6	50.0	92.4
	85.6	43.4	51.2	78.6
زن	68.6	60.2	58.7	82.2
	80.4	58.4	55.9	79.6
	86.2	56.2	56.0	81.4
	81.3	54.2	57.2	80.6
	77.2	61.1	60.0	82.2

الف) فرض عدم تأثیر جنسیت داروی غلظت خون آزمون کنید.
ب) فرض عدم تأثیر سن را روی غلظت خون آزمون کنید.
پ) فرض عدم اثر متقابل بین سن و جنس را آزمون کنید.

۱۴- در مسألهٔ ۱۰ فرض کنید عدم وجود اثر متقابل بین بنزین و مواد اضافه شده مورد اختلاف است. برای آزمون وجود اثر متقابل تصمیم می‌گیرند ۳۶ موتور را مورد استفاده قرار دهند.

(در هر گروه ۴ موتور) نتایج زیر به‌دست آمده است

بنزین	مواد اضافی ۱	۲	۳
۱	126.2	130.4	127
	124.8	131.6	126.6
	125.3	132.5	129.4
	127.0	128.6	130.1
۲	127.2	142.1	129.5
	126.6	132.6	142.6
	125.8	128.5	140.5
	128.4	131.2	138.7
۳	127.1	132.3	125.2
	128.3	134.1	123.3
	125.1	130.6	122.6
	124.9	133.0	120.9

الف) آیا داده‌ها اثر متقابل را نشان می‌دهند ؟

ب) آیا بنزینها مختلف اثر یکسان دارند ؟

پ) آیا مواد اضافه شده اثر متفاوت دارند یا اثر آنها یکسان است ؟

ت) چه نتیجه‌ایی به‌دست می‌آید .

۱۵ - یک آزمایش برای آزمون این فرض که قدرت حافظهٔ اشخاص معین به‌وسیلهٔ مجموعه‌ایی از «معادلات اکسیژنی» بیشتر می‌شود انجام می‌گیرد گروهی از متخصصان این معالجات را در مورد مردان و زنان انجام می‌دهند . این افراد بتصادف به ۴ گروه ۵ تایی تقسیم مـی‌شوند و افراد گروه i به تعداد $(i - 1)$ هفته $i = 1, 2, 3, 4$ تحت معالجه قرار می‌گیرند (۲ گروه نیز که تحت معالجه قرار نگرفته‌اند به عنوان گروههای «کنترل» در نظر گرفته مـی‌شوند) . معالجات به قسمی انجام می‌شود که تمام افراد تصور می‌کنند که در طول مدت ۳ هفته تحت معالجه هستند . پس از اتمام کار آزمون قدرت حافظه انجام می‌شود . نتایج به قرار زیر است . (امتیاز بیشتر نشان‌دهندهٔ قدرت حافظهٔ بیشتر است) .

امتیازات

	تعداد هفته‌های تحت مراقبت *0*	*1*	*2*	*3*
مرد	42	39	38	42
	54	52	50	55
	46	51	47	39
	38	50	45	38
	51	47	43	51
زن	49	48	27	61
	44	51	42	55
	50	52	47	45
	45	54	53	40
	43	40	58	42

الف) فرض عدم تأثیر طول معالجه در قدرت حافظه را آزمون کنید .

ب) آیا جنسها اثر متفاوت دارند ؟

پ) آزمون کنید که آیا اثر متقابل وجود دارد یا خیر .

ت) گروهی شامل ۵ مرد مسن بتصادف انتخاب می‌شوند و هیچ‌گونه معالجه‌ای روی آنها صورت نمی‌گیرد .

از این گروه آزمون قدرت حافظه به‌عمل آمده است و امتیازات آنها عبارتند از ۳۷ ، ۳۵ ، ۳۳ ، ۳۹ و ۲۹ . چه نتیجه‌ایی می‌توانید بگیرید ؟

۱۶ - در الگوی بخش ۵ نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} = 0$$

۱۷ - برای الگوی آنالیز واریانس دوطرفه بخش ۵ نشان دهید که درجهٔ آزادی همان است که با معادلهٔ ۳.۵.۸ داده شده است .

۱۸ - برای الگوی آنالیز واریانس دوطرفه بخش ۵ ثابت کنید

$$E[SS_e] = nm(l-1)\sigma^2$$

ضمیمه‌ها

برنامه‌ها

تابع توزیع دوجمله‌ای 3-1

```
L I(5)
10 PRINT"THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A BINOMIAL(n,p) RANDOM VARIA
BLE IS LESS THAN OR EQUAL TO i"
20 PRINT "ENTER n"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER p"
50 INPUT P
60 PRINT "ENTER i"
70 INPUT I
80 S=(1-P)^N
90 IF S=0 GOTO 180
100 A=P/(1-P)
110 T=S
120 IF I=0 GOTO 390
130 FOR K=0 TO I-1
140 S=S*A*(N-K)/(K+1)
150 T=T+S
160 NEXT K
170 GOTO 390
180 J=I
190 IF J>N*P THEN J=INT(N*P)
200 FOR K=1 TO J
210 L=L+LOG(N+1-K)-LOG(J+1-K)
220 NEXT K
230 L=L+J*LOG(P)+(N-J)*LOG(1-P)
240 L=EXP(L)
250 B=(1-P)/P
260 F=1
270 FOR K=1 TO J
280 F=F*B*(J+1-K)/(N-J+K)
290 T=T+F
300 NEXT K
310 IF J=I GOTO 380
320 C=1/B
330 F=1
340 FOR K=1 TO I-J
350 F=F*C*(N+1-J-K)/(J+K)
360 T=T+F
370 NEXT K
380 T=(T+1)*L
390 PRINT "THE PROBABILITY IS";T
400 END
```

تابع توزیع پواسن 3-2

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE
         IS LESS THAN OR EQUAL TO i"
20 PRINT "ENTER THE MEAN OF THE RANDOM VARIABLE"
30 INPUT C
40 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF i"
50 INPUT I
60 S=EXP(-C)
70 IF S=0 GOTO 150
```

```
80 T=S
90 IF I=0 GOTO 340
100 FOR K=0 TO I-1
110 S=S*C/(K+1)
120 T=T+S
130 NEXT K
140 GOTO 340
150 J=I
160 IF J>C THEN J=INT(C)
170 FOR K=1 TO J
180 FAC=FAC+LOG(K)
190 NEXT K
200 L=-C-FAC+J*LOG(C)
210 L=EXP(L)
220 F=1
230 FOR K=1 TO J
240 F=F*(J+1-K)/C
250 T=T+F
260 NEXT K
270 IF J=I GOTO 330
280 F=1
290 FOR K=1 TO I-J
300 F=F*C/(K+J)
310 T=T+F
320 NEXT K
330 T=(T+1)*L
340 PRINT "THE PROBABILITY THAT A POISSON RANDOM VARIABLE WITH MEAN " C "IS LESS
 THAN OR EQUAL TO" I "IS";T
350 END
Ok
```

3-4 زیرمجموعه تصادفی

```
10 PRINT "THIS PROGRAM GENERATES A RANDOM SUBSET OF SIZE K FROM THE SET 1,2,...N
"
20 PRINT "ENTER THE VALUE OF N"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE VALUE OF K"
50 INPUT K
60 RANDOMIZE
70 PRINT "THE RANDOM SUBSET CONSISTS OF THE FOLLOWING" K "VALUES"
80 I=1
90 FOR J=1 TO N
100 IF RND < (K-S)/(N-J+1) THEN PRINT , I :S=S+1
110 I=I+1
120 NEXT
130 END
Ok
```

3-5-1-A تابع توزیع نرمال استاندارد

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A UNIT NORMAL RANDOM VARIAB
LE IS LESS THAN X"
20 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF X"
30 INPUT X
40 U=ABS(X)
50 IF U>4 GOTO 180
60 Y=U^2
70 I=U
80 FOR J=1 TO 40
90 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
100 I=I+U
110 NEXT
120 I=I/SQR(2*3.14159)
130 IF X<0 GOTO 160
140 PRINT "THE PROBABILITY IS".5+I
150 GOTO 220
160 PRINT "THE PROBABILITY IS".5-I
170 GOTO 220
```

```
180 IF X<0 GOTO 210
190 PRINT "THE PROBABILITY IS GREATER THAN" 1-10^-4
200 GOTO 220
210 PRINT "THE PROBABILITY IS LESS THAN" 10^-4
220 END
```

3-5-1-B معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد

```
10 PRINT "FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE z  SUCH
THAT THE  PROBABILITY THAT A UNIT NORMAL EXCEEDS z IS EQUAL TO a"
20 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF a"
30 INPUT A
40 T=SQR(-2*LOG(A))
50 C=2.515517
60 D=.802853
70 E=.010328
80 F=1.432788
90 G=.189269
100 H=.001308
110 Z=T-(C+D*T+E*T^2)/(1+F*T+G*T^2+H*T^3)
120 PRINT "THE VALUE IS" Z
130 END
```

3-8-1-A تابع توزیع کی‌دو

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A CHI-SQUARE RANDOM VARIABL
E WITH N DEGREES OF FREEDOM IS LESS THAN X"
20 PRINT "ENTER THE DEGREE OF FREEDOM PARAMETER"
30 INPUT N
40 S=(N-1)/2
50 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF X"
60 INPUT X
70 M=X/2
80 D=X/2-N/2+1/3
90 D=D-.04/N
100 IF N=1 GOTO 160
110 IF S=M GOTO 180
120 H=S/M
130 X=(1-H*H+2*H*LOG(H))/(1-H)^2
140 X=D*SQR((1+X)/M)
150 GOTO 190
160 X=D*SQR(2/M)
170 GOTO 190
180 X=D/SQR(M)
190 U=ABS(X)
200 IF U>4 GOTO 330
210 Y=U^2
220 I=U
230 FOR J=1 TO 40
240 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
250 I=I+U
260 NEXT
270 I=I/SQR(2*3.14159)
280 IF X<0 GOTO 310
290 PRINT "THE PROBABILITY IS".5+I
300 GOTO 370
310 PRINT "THE PROBABILITY IS".5-I
320 GOTO 370
330 IF X<0 GOTO 360
340 PRINT "THE PROBABILITY IS GREATER THAN" 1-10^-4
350 GOTO 370
360 PRINT "THE PROBABILITY IS LESS THAN" 10^-4
370 END
Ok
```

3-8-1-B تابع معکوس توزیع کی‌دو

```
10 PRINT "FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE
chisq(a,n) SUCH THAT THE PROBABILITY THAT A CHI SQUARE RANDOM VARIABLE WITH n
DEGREES OF   FREEDOM EXCEEDS chisq(a,n) IS EQUAL TO a"
20 PRINT "ENTER THE DEGREE OF FREEDOM PARAMETER n"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF a"
50 INPUT A
60 T=SQR(-2*LOG(A))
70 C=2.515517
80 D=.802853
90 E=.010328
100 F=1.432788
110 G=.189269
120 H=.001308
130 X=T-(C+D*T+E*T^2)/(1+F*T+G*T^2+H*T^3)
140 W=N*(X*SQR(2/(9*N))+1-2/(9*N))^3
150 B=1
160 K=N/2
170 IF K=INT(K) GOTO 230
180 FOR I=1 TO K-1/2
190 B=B*(K-I)
200 NEXT
210 B=B*SQR(3.14159)
220 GOTO 260
230 FOR I=1 TO K-1
240 B=B*I
250 NEXT
260 M=W/2
270 S=(N-1)/2
280 D=M-N/2+1/3
290 D=D-.04/N
300 IF N=1 GOTO 360
310 IF S=M GOTO 380
320 H=S/M
330 X=(1-H*H+2*H*LOG(H))/(1-H)^2
340 X=D*SQR((1+X)/M)
350 GOTO 390
360 X=D*SQR(2/M)
370 GOTO 390
380 X=D/SQR(M)
390 U=ABS(X)
400 IF U>4 GOTO 530
410 Y=U^2
420 I=U
430 FOR J=1 TO 40
440 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
450 I=I+U
460 NEXT
470 I=I/SQR(2*3.14159)
480 IF X<0 GOTO 510
490 E=.5+I
500 GOTO 570
510 E=.5-I
520 GOTO 570
530 IF X<0 GOTO 560
540 E=.9999
550 GOTO 570
560 E=.0001
570 E=1-A-E
580 B=2^(-N/2)*B^-1*EXP(-W/2)*W^(N/2-1)
590 W=W+E/B
600 PRINT "THE VALUE IS" W
610 END
```

3-8-2-A تابع توزیع t

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT A t-RANDOM VARIABLE WITH N
DEGREES OF FREEDOM  IS LESS THAN X"
20 PRINT "ENTER THE DEGREES OF FREEDOM"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE VALUE OF X"
50 INPUT X
60 A=N-2/3+1/(10*N)
70 B=LOG(1+X^2/N)/(N-5/6)
80 IF X>0 THEN X=A*SQR(B) ELSE X=-A*SQR(B)
90 U=ABS(X)
100 IF U>4 GOTO 230
110 Y=U^2
120 I=U
130 FOR J=1 TO 40
140 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
150 I=I+U
160 NEXT
170 I=I/SQR(2*3.14159)
180 IF U>X GOTO 210
190 PRINT "THE PROBABILITY IS".5+I
200 GOTO 270
210 PRINT "THE PROBABILITY IS".5-I
220 GOTO 270
230 IF X<0 GOTO 260
240 PRINT "THE PROBABILITY IS GREATER THAN" 1-10^-4
250 GOTO 270
260 PRINT "THE PROBABILITY IS LESS THAN" 10^-4
270 END
```

3-8-2-B معکوس تابع توزیع t

```
10 PRINT "FOR A GIVEN INPUT a, 0<a<.5, THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE t(a,n)
 SUCH THAT THE PROBABILITY THAT A t-RANDOM VARIABLE WITH n DEGREES OF FREEDOM
 EXCEEDS t(a,n) IS EQUAL TO a"
20 PRINT "ENTER THE DEGREES OF FREEDOM PARAMETER n"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF a"
50 INPUT A
60 T=SQR(-2*LOG(A))
70 C=2.515517
80 D=.802853
90 E=.010328
100 F=1.432788
110 G=.189269
120 H=.001308
130 X=T-(C+D*T+E*T^2)/(1+F*T+G*T^2+H*T^3)
140 W=X+(X+X^3)/(4*N) + (5*X^5+16*X^3+3*X)/(96*N^2) + (3*X^7+19*X^5+17*X^3-15*X)
/(384*N^3)
150 PRINT "THE VALUE IS" W
160 END
```

3-8-3-A تابع توزیع F

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE PROBABILITY THAT AN F RANDOM VARIABLE WITH
DEGREES OF FREEDOM N AND M IS LESS THAN X"
20 PRINT "ENTER THE FIRST DEGREE OF FREEDOM PARAMETER"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE SECOND DEGREE OF FREEDOM PARAMETER"
50 INPUT M
60 PRINT "ENTER THE DESIRED VALUE OF X"
70 INPUT X
```

```
80 S=(M-1)/2
90 T=(N-1)/2
100 K=(N+M)/2-1
110 P=M/(N*X+M)
120 Q=1-P
130 D=S+1/6-(K+1/3)*P+.02*(Q/(S+.5)-P/(T+.5)+(Q-.5)/(K+1))
140 A=S/(K*P)
150 B=T/(K*Q)
160 IF A=0 THEN C=1 ELSE C=(1-A*A+2*A*LOG(A))/(1-A)^2
170 IF B=0 THEN E=1 ELSE E=(1-B*B+2*B*LOG(B))/(1-B)^2
180 X=D*SQR((1+Q*C+P*E)/((K+1/6)*P*Q))
190 U=ABS(X)
200 IF U>4 GOTO 310
210 Y=U^2
220 I=U
230 FOR J=1 TO 40
240 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
250 I=I+U
260 NEXT
270 I=I/SQR(2*3.14159)
280 IF X<0 THEN Z=.5-I ELSE Z=.5+I
290 PRINT "THE PROBABILITY IS";Z
300 GOTO 350
310 IF X<0 GOTO 340
320 PRINT "THE PROBABILITY IS GREATER THEN .9999"
330 GOTO 350
340 PRINT "THE PROBABILITY IS LESS THAN .0001"
350 END
```

4-3 میانگین ، واریانس ، انحراف معیار نمونه

```
LIST
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE SAMPLE MEAN, SAMPLE VARIANCE, AND SAMPLE STA
NDARD DEVIATION OF A DATA SET"
20 PRINT "ENTER THE SAMPLE SIZE"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME"
50 INPUT M
60 FOR J=1 TO N-1
70 INPUT X
80 A=M
90 M = M + (X-M)/(J+1)
100 S = (1-1/J)*S + (J+1)*(M-A)^2
110 NEXT J
120 PRINT "SAMPLE MEAN IS";M
130 PRINT "SAMPLE VARIANCE IS";S
140 PRINT "SAMPLE STANDARD DEVIATION IS";SQR(S)
150 END
Ok
```

5-3-1 فاصله اطمینان برای میانگین نرمال وقتی واریانس معلوم است

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES A 100(1-a)% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN OF
          A NORMAL POPULATION WHEN THE VARIANCE IS UNKNOWN"
20 PRINT "ENTER THE SAMPLE SIZE"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME"
50 INPUT M
60 FOR J=1 TO N-1
70 INPUT X
80 A=M
90 M=M+(X-M)/(J+1)
100 S=(1-1/J)*S+(J+1)*(M-A)^2
110 NEXT J
120 PRINT "ENTER THE VALUE OF a"
```

```
130 INPUT A
140 PRINT "IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0
          IF NO"
150 INPUT I
160 IF I=0 GOTO 220
170 B=A/2
180 L=N-1
190 GOSUB 350
200 PRINT "THE"100*(1-A)"% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN IS
        ("M-T*SQR(S)/SQR(N)","M+T*SQR(S)/SQR(N)")"
210 GOTO 310
220 B=A
230 L=N-1
240 GOSUB 350
250 PRINT "IS THE ONE-SIDED CONFIDENCE INTERVAL TO BE UPPER OR LOWER? ENTER 1
          FOR UPPER AND 0 FOR LOWER"
260 INPUT K
270 IF K=0 GOTO 300
280 PRINT "THE" 100*(1-A)"% UPPER CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN IS
          ("M-T*SQR(S)/SQR(N)",INFINITY)"
290 GOTO 310
300 PRINT "THE" 100*(1-A)"% LOWER CONFIDENCE INTERVAL FOR THE MEAN IS
          (-INFINITY,"M+T*SQR(S)/SQR(N)")"
310 PRINT "IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1.
          IF NO ENTER 0."
320 INPUT Y
330 IF Y=1 GOTO 120
340 GOTO 450
350 W=SQR(-2*LOG(B))
360 C=2.515517
370 D=.802853
380 E=.010328
390 F=1.432788
400 G=.189269
410 H=.001308
420 Z=W-(C+D*W+E*W^2)/(1+F*W+G*W^2+H*W^3)
430 T=Z+(Z+Z^3)/(4*L)+(5*Z^5+16*Z^3+3*Z)/(96*L^2)+(3*Z^7+19*Z^5+17*Z^3-15*Z)/(38
4*L^3)
440 RETURN
450 END
Ok
```

5-3-2-A فاصلهٔ اطمینان برای تفاضل دو میانگین نرمال با واریانسهای معلوم

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES A 100(1-a)% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE
DIFFERENCE OF MEANS IN TWO NORMAL POPULATIONS HAVING KNOWN VARIANCES"
20 FOR I=1 TO 2
30 PRINT "ENTER THE SIZE OF SAMPLE" I
40 INPUT N(I)
50 PRINT "ENTER THE SAMPLE" I "DATA VALUES ONE AT A TIME"
60 FOR J=1 TO N(I)
70 INPUT X
80 V(I)=V(I)+X
90 NEXT
100 PRINT "ENTER THE POPULATION VARIANCE OF SAMPLE" I
110 INPUT C(I)
120 NEXT
130 W=SQR(C(1)/N(1)+C(2)/N(2))
140 U=V(1)/N(1)-V(2)/N(2)
150 PRINT "ENTER THE VALUE OF a"
160 INPUT A
170 PRINT "IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0
IF NO"
180 INPUT I
190 IF I=0 GOTO 240
200 B=A/2
210 GOSUB 360
220 PRINT "THE"100*(1-A)"% CONFIDENCE INTERVAL  IS ("U-Z*W","U+Z*W")"
230 GOTO 320
240 B=A
250 GOSUB 360
```

```
260 PRINT "IS THE ONE-SIDED CONFIDENCE INTERVAL TO BE UPPER OR LOWER? ENTER 1
FOR UPPER  AND 0 FOR LOWER"
270 INPUT K
280 IF K=0 GOTO 310
290 PRINT "THE" 100*(1-A)"% UPPER CONFIDENCE INTERVAL  IS ("U-Z*W",INFINITY)"
300 GOTO 320
310 PRINT "THE" 100*(1-A)"% LOWER CONFIDENCE INTERVAL  IS (-INFINITY,"U+Z*W")"
320 PRINT "IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1. IF NO
ENTER 0."
330 INPUT Y
340 IF Y=1 GOTO 150
350 GOTO 450
360 T=SQR(-2*LOG(B))
370 C=2.515517
380 D=.802853
390 E=.010328
400 F=1.432788
410 G=.189269
420 H=.001308
430 Z=T-(C+D*T+E*T^2)/(1+F*T+G*T^2+H*T^3)
440 RETURN
450 END
```

5-3-2-B فاصلهٔ اطمینان برای تفاضل دو میانگین نرمال با واریانسهای مجهول برابر

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES A 100(1-a)% CONFIDENCE INTERVAL FOR THE DIFFEREN
CE OF MEANS IN TWO NORMAL POPULATIONS HAVING UNKNOWN BUT EQUAL VARIANCES"
20 K=K+1
30 PRINT "ENTER THE SIZE OF SAMPLE NUMBER" K
40 INPUT N(K)
50 PRINT "ENTER THE SAMPLE"K"DATA VALUES ONE AT A TIME"
60 INPUT M
70 FOR J=1 TO N(K)-1
80 INPUT X
90 A=M
100 M=M+(X-M)/(J+1)
110 S=(1-1/J)*S+(J+1)*(M-A)^2
120 NEXT J
130 M(K)=M
140 S(K)=S
150 IF K=1 GOTO 20
160 U=SQR((1/N(1)+1/N(2))*((N(1)-1)*S(1)+(N(2)-1)*S(2))/(N(1)+N(2)-2))
170 L=N(1)+N(2)-2
180 PRINT "ENTER THE VALUE OF a"
190 INPUT A
200 PRINT "IS A TWO-SIDED INTERVAL DESIRED? ENTER 1 IF THE ANSWER IS YES AND 0 I
F NO"
210 INPUT I
220 IF I=0 GOTO 270
230 B=A/2
240 GOSUB 390
250 PRINT "THE"100*(1-A)"% CONFIDENCE INTERVAL  IS ("M(1)-M(2)-T*U","M(1)-M(2)+T
*U")"
260 GOTO 350
270 B=A
280 GOSUB 390
290 PRINT "IS THE ONE-SIDED CONFIDENCE INTERVAL TO BE UPPER OR LOWER? ENTER 1 FO
R UPPER AND 0 FOR LOWER"
300 INPUT K
310 IF K=0 GOTO 340
320 PRINT "THE" 100*(1-A)"% UPPER CONFIDENCE INTERVAL  IS ("M(1)-M(2)-T*U",INFIN
ITY)"
330 GOTO 350
340 PRINT "THE" 100*(1-A)"% LOWER CONFIDENCE INTERVAL  IS (-INFINITY,"M(1)-M(2)+
T*U")"
350 PRINT "IS ANOTHER CONFIDENCE INTERVAL DESIRED? IF YES ENTER 1. IF NO ENTER 0
."
360 INPUT Y
370 IF Y=1 GOTO 180
380 GOTO 490
390 W=SQR(-2*LOG(B))
```

```
400 C=2.515517
410 D=.802853
420 E=.010328
430 F=1.432788
440 G=.189269
450 H=.001308
460 Z=W-(C+D*W+E*W^2)/(1+F*W+G*W^2+H*W^3)
470 T=Z+(Z+Z^3)/(4*L)+(5*Z^5+16*Z^3+3*Z)/(96*L^2)+(3*Z^7+19*Z^5+17*Z^3-15*Z)/(38
4*L^3)
480 RETURN
490 END
```

6-3-2 مقدار p برای آزمون یک‌طرفه t

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value WHEN TESTING THAT A NORMAL POPULATIO
N WHOSE VARIANCE IS UNKNOWN HAS MEAN EQUAL TO MU-ZERO."
20 PRINT "ENTER THE VALUE OF MU-ZERO"
30 INPUT MU
40 PRINT "ENTER THE SAMPLE SIZE"
50 INPUT N
60 PRINT "ENTER THE DATA VALUES ONE AT A TIME"
70 INPUT; M
80 FOR J=1 TO N-1
90 INPUT; D
100 A=M
110 M=M+(D-M)/(J+1)
120 S=(1-1/J)*S+(J+1)*(M-A)^2
130 NEXT J
140 X=SQR(N)*(M-MU)/SQR(S)
150 PRINT "THE VALUE OF THE t-STATISTIC IS"X
160 N=N-1
170 A=N-2/3+1/(10*N)
180 B=LOG(1+X^2/N)/(N-5/6)
190 IF X>0 THEN X=A*SQR(B) ELSE X=-A*SQR(B)
200 U=ABS(X)
210 IF U>4 GOTO 430
220 Y=U^2
230 I=U
240 FOR J=1 TO 40
250 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
260 I=I+U
270 NEXT
280 I=I/SQR(2*3.14159)
290 PRINT "IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO"
300 INPUT TWO
310 IF TWO =0 GOTO 340
320 PRINT "THE p-value IS" 1-2*I
330 GOTO 570
340 PRINT "IS THE ALTERNATIVE THAT THE MEAN EXCEEDS MU-ZERO OR THAT IT IS LESS?
 ENTER 1 IN THE FORMER CASE AND 0 IN THE LATTER"
350 INPUT AL
360 IF AL=0 GOTO 400
370 IF X<0 GOTO 410
380 PRINT "THE p-value IS" .5-I
390 GOTO 570
400 IF X<0 GOTO 380
410 PRINT "THE p-value IS" .5+I
420 GOTO 570
430 PRINT "IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO"
440 INPUT A
450 IF A=0 GOTO 480
460 PRINT "THE p-value IS LESS THAN" .0001
470 GOTO 570
480 PRINT "IS THE ALTERNATIVE THAT THE MEAN EXCEEDS MU-ZERO OR THAT IT IS LESS?
ENTER 1 IN THE FORMER CASE AND 0 IN THE LATTER"
490 INPUT B
500 IF B=0 GOTO 550
510 IF X<0 GOTO 530
520 GOTO 460
530 PRINT "THE p-value IS GREATER THAN " 1-10^-4
540 GOTO 570
550 IF X<0 GOTO 460
```

```
560 GOTO 530
570 END
```

6-4-1 آمارهٔ آزمون برابری دو میانگین نرمال ، واریانسهای معلوم

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE OF THE TEST STATISTTC IN TESTING THAT
TWO NORMAL MEANS ARE EQUAL WHEN THE VARIANCES ARE KNOWN"
20 PRINT "ENTER THE SAMPLE SIZES"
30 INPUT N,M
40 PRINT "ENTER THE SAMPLE VARIANCES"
50 INPUT C1,C2
60 PRINT "ENTER THE FIRST SAMPLE ONE AT A TIME"
70 FOR I=1 TO N
80 INPUT ;X
90 SX=SX+X
100 NEXT
110 PRINT "ENTER THE SECOND SAMPLE ONE AT A TIME"
120 FOR I=1 TO M
130 INPUT ;Y
140 SY=SY+Y
150 NEXT
160 PRINT "THE VALUE OF THE TEST STATISTIC IS", (SX/N-SY/M)/SQR(C1/N+C2/M)
170 END
Ok
```

6-4-2 مقدار p در آزمون t برای دو نمونه

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value WHEN TESTING THAT TWO NORMAL POPULAT
IONS HAVING EQUAL BUT UNKNOWN VARIANCES HAVE A COMMON MEAN"
20 FOR J=1 TO 2
30 PRINT "ENTER THE SIZE OF SAMPLE" J
40 INPUT N(J)
50 PRINT "ENTER SAMPLE" J "ONE AT A TIME"
60 INPUT M(J)
70 FOR I=1 TO N(J)-1
80 INPUT X
90 A=M(J)
100 M(J)=M(J)+(X-M(J))/(I+1)
110 S(J)=(1-1/I)*S(J)+(I+1)*(M(J)-A)^2
120 NEXT I
130 NEXT J
140 R=(N(1)-1)*S(1)+(N(2)-1)*S(2)
150 R=R*(1/N(1)+1/N(2))/(N(1)+N(2)-2)
160 X=(M(1)-M(2))/SQR(R)
170 PRINT "THE VALUE OF THE t-STATISTIC IS"X
180 N=N(1)+N(2)-2
190 A=N-2/3+1/(10*N)
200 B=LOG(1+X^2/N)/(N-5/6)
210 IF X>0 THEN X=A*SQR(B) ELSE X=-A*SQR(B)
220 U=ABS(X)
230 IF U>4 GOTO 450
240 Y=U^2
250 I=U
260 FOR J=1 TO 40
270 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
280 I=I+U
290 NEXT
300 I=I/SQR(2*3.14159)
310 PRINT "IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO"
320 INPUT TWO
330 IF TWO =0 GOTO 360
340 PRINT "THE p-value IS" 1-2*I
350 GOTO 590
360 PRINT "IS THE ALTERNATIVE THAT THE MEAN OF SAMPLE ONE EXCEEDS THE MEAN OF SA
MPLE TWO  OR THAT IT IS LESS?  ENTER 1 IN THE FORMER CASE AND 0 IN THE LATTER"
370 INPUT AL
380 IF AL=0 GOTO 420
390 IF X<0 GOTO 430
```

```
400 PRINT "THE p-value IS" .5-I
410 GOTO 590
420 IF X<0 GOTO 400
430 PRINT "THE p-value IS" .5+I
440 GOTO 590
450 PRINT "IS THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS TWO-SIDED? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO"
460 INPUT A
470 IF A=0 GOTO 500
480 PRINT "THE p-value IS LESS THAN" .0001
490 GOTO 590
500 PRINT "IS THE ALTERNATIVE THAT THE MEAN OF SAMPLE ONE EXCEEDS THE MEAN OF SA
MPLE TWO  OR THAT IT IS LESS? ENTER 1 IN THE FORMER CASE AND 0 IN THE LATTER"
510 INPUT B
520 IF B=0 GOTO 570
530 IF X<0 GOTO 550
540 GOTO 480
550 PRINT "THE p-value IS GREATER THAN " 1-10^-4
560 GOTO 590
570 IF X<0 GOTO 480
580 GOTO 550
590 END
```

6-6-1 مقدار p برای آزمون فیشر

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE p-value FOR THE TEST DATA IN THE FISHER-IRWI
N TEST"
20 PRINT "ENTER THE SIZE OF THE FIRST SAMPLE"
30 INPUT N1
40 PRINT "ENTER THE SIZE OF THE SECOND SAMPLE"
50 INPUT N2
60 PRINT "ENTER THE TOTAL NUMBER OF FAILURES"
70 INPUT K
80 PRINT "ENTER THE NUMBER OF FAILURES IN THE FIRST SAMPLE"
90 INPUT X1
100 P=1
110 FOR J=0 TO X1-1
120 P=P*(N1-J)/(N1+N2-J)
130 NEXT J
140 FOR J=0 TO K-X1-1
150 P=P*(N2-J)/(N1+N2-X1-J)
160 NEXT J
170 U=N1-X1
180 IF K<N1 THEN U=K-X1
190 D=X1
200 IF K>N2 THEN D=X1-K+N2
210 IF U<D GOTO 300
220 F=1
230 FOR J=1 TO D
240 F=F*(X1+1-J)*(N2-K+X1+1-J)/((N1-X1+J)*(K-X1+J))
250 T=T+F
255 NEXT J
260 GOTO 350
300 F=1
310 FOR J=1 TO U
320 F=F*(N1+1-X1-J)*(K+1-X1-J)/((X1+J)*(N2-K+X1+J))
330 T=T+F
340 NEXT J
350 C=1
353 FOR J=1 TO X1
356 C=C*(K+1-J)/(X1+1-J)
359 NEXT J
370 V1=(T+1)*P*C
380 V2=1-T*P*C
390 V=V1
400 IF V>V2 THEN V=V2
410 PRINT "THE p-value IS"2*V
420 END
```

7-2 حل رگرسیون خطی ساده

```
LIST
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE LEAST SQUARES ESTIMATORS AND RELATED STATIS
ICS IN SIMPLE LINEAR REGRESSION MODELS"
20 PRINT "ENTER THE NUMBER OF DATA PAIRS n"
30 INPUT N
40 PRINT "ENTER THE n  SUCCESSIVE PAIRS x,Y ONE PAIR AT A TIME"
50 FOR I=1 TO N
60 INPUT X,Y
70 TXY=TXY+X*Y
80 TXX=TXX+X*X
90 TYY=TYY+Y*Y
100 MX=MX+X
110 MY=MY+Y
120 NEXT
130 SXY=TXY-MX*MY/N
140 SXX=TXX-MX*MX/N
150 SYY=TYY-MY*MY/N
160 B=SXY/SXX
170 A=(MY-B*MX)/N
180 SSR=(SXX*SYY-SXY*SXY)/SXX
190 PRINT "THE LEAST SQUARES ESTIMATORS ARE  AS FOLLOWS"
200 PRINT "A = " A
210 PRINT "B = " B
220 PRINT "THE ESTIMATED REGRESSION LINE IS  Y = "A" + "B" x"
230 PRINT "DO YOU WANT OTHER COMPUTED VALUES? ENTER 1 IF YES AND 0 IF NO."
240 INPUT Z
250 IF Z=0 GOTO 320
260 PRINT "S(x,Y) =" SXY
270 PRINT "S(x,x) =" SXX
280 PRINT "S(Y,Y) =" SYY
290 PRINT "SSR =" SSR
300 PRINT "THE AVERAGE x VALUE IS"  MX/N
310 PRINT "THE SUM OF THE SQUARES OF THE x VALUES IS" TXX
320 END
```

7-10 حل رگرسیون خطی چندگانه

```
LIST
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE LEAST SQUARES ESTIMATES OF THE COEFFICIENTS
AND THE     SUM OF SQUARES OF THE RESIDUALS IN MULTIPLE LINEAR REGRESSION"
20 PRINT "IT BEGINS BY COMPUTING THE INVERSE OF THE X-TRANSPOSE*X MATRIX"
30 PRINT "ENTER THE NUMBER OF ROWS OF THE X-MATRIX"
40 INPUT N
50 PRINT "ENTER THE NUMBER OF COLUMNS OF THE X-MATRIX"
60 INPUT P
70 DIM A(N,P)
80 FOR I=1 TO N
90 PRINT "ENTER ROW" I "ONE AT A TIME"
100 FOR J=1 TO P-1
110 INPUT ;A(I,J)
120 NEXT J
130 INPUT A(I,P)
140 NEXT I
150 DIM X(P,2*P)
160 FOR I=1 TO P
170 FOR J=1 TO I
180 FOR K=1 TO N
190 X(I,J)=X(I,J)+A(K,I)* A(K,J)
200 NEXT K
210 NEXT
220 NEXT
230 FOR I=1 TO P
240 FOR J=1 TO P
250 X(I,J)=X(J,I)
260 NEXT
270 NEXT
280 FOR K=1 TO P
290 X(K,P+K)=1
```

```
300 NEXT K
310 FOR K=1 TO P
320 IF X(K,K)=0 GOTO 510
330 C=1/X(K,K)
340 FOR J=1 TO 2*P
350 X(K,J)=X(K,J)*C
360 NEXT J
370 FOR I=1 TO K-1
380 D=X(I,K)
390 FOR J=1 TO 2*P
400 X(I,J)=X(I,J)-D*X(K,J)
410 NEXT J
420 NEXT I
430 FOR I=K+1 TO P
440 D=X(I,K)
450 FOR J=1 TO 2*P
460 X(I,J)=X(I,J)-D*X(K,J)
470 NEXT J
480 NEXT I
490 NEXT K
500 GOTO 600
510 FOR I=K+1 TO P
520 IF X(I,K)=0 GOTO 570
530 FOR J=1 TO 2*P
540 X(K,J)=X(K,J)+X(I,J)
550 NEXT J
560 GOTO 340
570 NEXT I
580 PRINT "THE INVERSE DOES NOT EXIST"
590 GOTO 900
600 PRINT "THE INVERSE MATRIX IS AS FOLLOWS"
610 FOR I=1 TO P
620 FOR J=1 TO P-1
630 PRINT X(I,P+J);
640 NEXT J
650 PRINT X(I,2*P)
660 PRINT
670 NEXT I
680 PRINT "ENTER THE RESPONSE VALUES ONE AT A TIME"
690 DIM Y(N)
700 FOR I=1 TO N
710 INPUT ;Y(I)
720 NEXT
730 DIM XTY(P)
740 FOR I=1 TO P
750 FOR K=1 TO N
760 XTY(I)=XTY(I)+A(K,I)*Y(K)
770 NEXT
780 NEXT
790 DIM B(P)
800 FOR I=0 TO P-1
810 FOR J=1 TO P
820 B(I)=B(I)+X(I+1,P+J)*XTY(J)
830 NEXT
840 NEXT
850 PRINT "THE ESTIMATES OF THE REGRESSION COEFFICIENTS ARE AS FOLLOWS"
860 PRINT
870 FOR I=0 TO P-1
880 PRINT, "B("I")="B(I)
890 NEXT
900 FOR I=1 TO N
910 YTY=YTY+(Y(I))^2
920 NEXT
930 FOR I=0 TO P-1
940 BTXTY=BTXTY+B(I)*XTY(I+1)
950 NEXT
960 PRINT "THE SUM OF SQUARES OF THE RESIDUALS IS  SS(R) =" YTY-BTXTY
970 END
Ok
```

8-2 مقادیر p در آنالیز واریانس یک‌طرفه

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUE OF THE F-STATISTIC AND ITS p-value IN
A ONE WAY ANOVA"
20 PRINT "ENTER THE NUMBER OF SAMPLES"
30 INPUT M
40 PRINT "ENTER THE SIZE OF THE SAMPLES"
50 INPUT N
60 DIM M(M)
70 FOR I=1 TO M
80 PRINT "ENTER SAMPLE" I "ONE AT A TIME"
90 INPUT A
100 FOR J=1 TO N-1
110 INPUT X
120 B=A
130 A=A+(X-A)/(J+1)
140 S=(1-1/J)*S+(J+1)*(A-B)^2
150 NEXT J
160 SS=SS+S
170 M(I)=A
180 NEXT I
190 DEN=SS/M
200 PRINT "SSw/(M*(N-1))=";DEN
210 T=M(1)
220 FOR K=1 TO M-1
230 A=T
240 T=T+(M(K+1)-T)/(K+1)
250 V=(1-1/K)*V+(K+1)*(T-A)^2
260 NEXT K
270 NUM=V*N
280 PRINT "SSb/(M-1)=";NUM
290 PRINT "THE VALUE OF THE F-STATISTIC IS";NUM/DEN
300 Y=N
310 N=M-1
320 M=M*(Y-1)
330 X=NUM/DEN
340 S=(M-1)/2
350 T=(N-1)/2
360 K=(N+M)/2-1
370 P=M/(N*X+M)
380 Q=1-P
390 D=S+1/6-(K+1/3)*P+.02*(Q/(S+.5)-P/(T+.5)+(Q-.5)/(K+1))
400 A=S/(K*P)
410 B=T/(K*Q)
420 IF A=0 THEN C=1 ELSE C=(1-A*A+2*A*LOG(A))/(1-A)^2
430 IF B=0 THEN E=1 ELSE E=(1-B*B+2*B*LOG(B))/(1-B)^2
440 X=D*SQR((1+Q*C+P*E)/((K+1/6)*P*Q))
450 U=ABS(X)
460 IF U>4 GOTO 570
470 Y =U^2
480 I=U
490 FOR J=1 TO 40
500 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
510 I=I+U
520 NEXT
530 I=I/SQR(2*3.14159)
540 IF X<0 THEN Z=.5+I ELSE Z=.5-I
550 PRINT "THE p-value IS";Z
560 GOTO 610
570 IF X<0 GOTO 600
580 PRINT "THE p-value IS LESS THAN .0001"
590 GOTO 610
600 PRINT "THE p-value IS GREATER THAN .9999"
610 END
```

8-4 مقادیر p در آنالیز واریانس دوطرفه با اثر متقابل

```
LIST
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUES OF THE F-STATISTICS AND THEIR ASSOCIA
TED p-values IN A TWO WAY ANOVA"
20 PRINT "ENTER THE NUMBER OF ROWS"
```

```
30 INPUT M
40 PRINT "ENTER THE NUMBER OF COLUMNS"
50 INPUT N
60 DIM X(M,N)
70 DIM R(M)
80 DIM C(N)
90 FOR I=1 TO M
100 PRINT "ENTER ROW" I "ONE AT A TIME"
110 FOR J=1 TO N
120 INPUT X(I,J)
130 R(I)=R(I)+X(I,J)
140 C(J)=C(J)+X(I,J)
150 NEXT J
160 G=G+R(I)
170 NEXT I
180 G=G/(N*M)
190 FOR I=1 TO M
200 R(I)=R(I)/N
210 SSR=SSR+(R(I)-G)^2
220 NEXT I
230 FOR J=1 TO N
240 C(J)=C(J)/M
250 SSC=SSC+(C(J)-G)^2
260 NEXT J
270 FOR I=1 TO M
280 FOR J=1 TO N
290 SSE=SSE+(X(I,J)-R(I)-C(J)+G)^2
300 NEXT J
310 NEXT I
320 F(1)=N*(N-1)*SSR/SSE
330 F(2)=M*(M-1)*SSC/SSE
360 N(1)=M-1
370 N(2)=N-1
380 FOR H=1 TO 2
382 IF H=1 THEN A$="ROW" ELSE A$="COLUMN"
390 PRINT "THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFE
CT IS";F(H)
400 N=N(H)
410 M=N(1)* N(2)
420 X=F(H)
430 S=(M-1)/2
440 T=(N-1)/2
450 K=(N+M)/2-1
460 P=M/(N*X+M)
470 Q=1-P
480 D=S+1/6-(K+1/3)*P+.02*(Q/(S+.5)-P/(T+.5)+(Q-.5)/(K+1))
490 A=S/(K*P)
500 B=T/(K*Q)
510 IF A=0 THEN C=1 ELSE C=(1-A*A+2*A*LOG(A))/(1-A)^2
520 IF B=0 THEN E=1 ELSE E=(1-B*B+2*B*LOG(B))/(1-B)^2
530 X=D*SQR((1+Q*C+P*E)/((K+1/6)*P*Q))
540 U=ABS(X)
550 IF U>4 GOTO 660
560 Y=U^2
570 I=U
580 FOR J=1 TO 40
590 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
600 I=I+U
610 NEXT
620 I=I/SQR(2*3.14159)
630 IF X<0 THEN Z=.5+I ELSE Z=.5-I
640 PRINT "THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFECT IS";Z
650 GOTO 700
660 IF X<0 GOTO 690
670 PRINT "THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFECT IS LESS THAN .
0001"
680 GOTO 700
690 PRINT "THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFECT IS GREATER THA
N .9999"
700 NEXT H
710 END
Ok
```

مقادیر pدر آنالیز واریانس دوطرفه 8-5

```
10 PRINT "THIS PROGRAM COMPUTES THE VALUES OF THE F-STATISTICS AND THEIR ASSOCIA
TED p-values IN A TWO WAY ANOVA WITH L OBSERVATIONS IN EACH ROW-COLUMN CELL"
20 PRINT "ENTER THE NUMBER OF ROWS"
30 INPUT M
40 PRINT "ENTER THE NUMBER OF COLUMNS"
50 INPUT N
60 PRINT "ENTER THE NUMBER OF OBSERVATIONS IN EACH ROW-COLUMN CELL"
70 INPUT L
80 DIM X(M,N,L)
90 DIM Y(M,N)
100 DIM R(M)
110 DIM C(N)
120 FOR I=1 TO M
130 FOR J=1 TO N
140 PRINT "ENTER THE" L "VALUES IN ROW" I "COLUMN" J "ONE AT A TIME"
150 FOR K=1 TO L
160 INPUT; X(I,J,K)
170 Y(I,J)=Y(I,J)+X(I,J,K)
180 NEXT K
190 R(I)=R(I)+Y(I,J)
200 C(J)=C(J)+Y(I,J)
210 NEXT J
220 G=G+R(I)
230 NEXT I
240 G=G/(M*N*L)
250 A=1/L
260 B=1/(N*L)
270 C= 1/(M*L)
280 FOR I=1 TO M
290 R(I)=B*R(I)
300 SSR=SSR+(R(I)-G)^2
310 NEXT
320 SSR=SSR*L*N
330 FOR J=1 TO N
340 C(J)=C*C(J)
350 SSC=SSC+(C(J)-G)^2
360 NEXT
370 SSC=SSC*L*M
380 FOR I=1 TO M
390 FOR J=1 TO N
400 Y(I,J)=A*Y(I,J)
410 SSINT=SSINT+(Y(I,J)-R(I)-C(J)+G)^2
420 NEXT
430 NEXT
440 SSINT=SSINT*L
450 FOR I=1 TO M
460 FOR J=1 TO N
470 FOR K=1 TO L
480 SSE=SSE+(X(I,J,K)-Y(I,J))^2
490 NEXT
500 NEXT
510 NEXT
520 F(1)=N*M*(L-1)*SSR/((M-1)*SSE)
530 F(2)=N*M*(L-1)*SSC/((N-1)*SSE)
540 F(3)=N*M*(L-1)*SSINT/((N-1)*(M-1)*SSE)
550 IF H=1 THEN A$="ROW" ELSE A$="COLUMN"
560 N(1)=M-1
570 N(2)=N-1
580 N(3)=(N-1)*(M-1)
590 M=(N(1)+1)*(N(2)+1)*(L-1)
600 FOR H=1 TO 3
610 IF H=1 THEN A$="ROW"
620 IF H=2 THEN A$="COLUMN"
630 IF H=3 THEN A$="INTERACTION"
640 PRINT "THE VALUE OF THE F-STATISTIC FOR TESTING THAT THERE IS NO "A$ " EFFEC
T IS";F(H)
650 N=N(H)
660 X=F(H)
670 S=(M-1)/2
680 T=(N-1)/2
690 K=(N+M)/2-1
```

```
700 P=M/(N*X+M)
710 Q=1-P
720 D=S+1/6-(K+1/3)*P+.02*(Q/(S+.5)-P/(T+.5)+(Q-.5)/(K+1))
730 A=S/(K*P)
740 B=T/(K*Q)
750 IF A=0 THEN C=1 ELSE C=(1-A*A+2*A*LOG(A))/(1-A)^2
760 IF B=0 THEN E=1 ELSE E=(1-B*B+2*B*LOG(B))/(1-B)^2
770 X=D*SQR((1+Q*C+P*E)/((K+1/6)*P*Q))
780 U=ABS(X)
790 IF U>4 GOTO 900
800 Y=U^2
810 I=U
820 FOR J=1 TO 40
830 U=-U*Y*(2*J-1)/(2*J*(2*J+1))
840 I=I+U
850 NEXT
860 I=I/SQR(2*3.14159)
870 IF X<0 THEN Z=.5+I ELSE Z=.5-I
880 PRINT "THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFECT IS";Z
890 GOTO 940
900 IF X<0 GOTO 930
910 PRINT "THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFECT IS LESS THAN
0001"
920 GOTO 940
930 PRINT "THE p-value FOR TESTING THAT THERE IS NO " A$ " EFFECT IS GREATER THA
N .9999"
940 NEXT H
950 END
Ok
```

جدولها

جدول توزیع نرمال

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	9.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول توزیع کی‌دو

n	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	13.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.484	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.772	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

$x^2_{0.9,9} = 4.2 \quad P(x^2_{16} < 14.3) = 0.425 \quad P(x^2_{11} < 17.1875) = 0.8976.$

جدول توزیع t

n	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.474	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$P\{T_8 < 2.541\} = 0.9825$ $P\{T_8 < 2.7\} = 0.9864$ $P\{T_{11} < 0.7635\} = 0.77$ $P\{T_{11} < 0.934\} = 0.81$ $P\{T_{11} < 1.66\} = 0.94$ $P\{T_{12} < 2.8\} = 0.984.$

جدول توزیع F

m = درجه آزادی مخرج	n = درجه آزادی صورت				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	161	200	216	225	230
2	18.50	19.00	19.20	19.20	19.30
3	10.10	9.55	9.28	9.12	9.01
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85
17	3.45	3.59	3.20	2.96	2.81
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21

$F_{0.1,7,5} = 0.337$ $P\{F_{7,7} < 1.376\} = 0.316$ $P\{F_{20,14} < 2.461\} = 0.911$ $P\{F_{9,4} < 0.5\} = 0.1782.$

جواب بعضی از مسائل

فصل ۱

19. 0.3281   21. 0.6154, 0.3692   26. 0.0709   27. 0.825, 0.2303
31. 0.0703, 0.0703, 0.1416, 0.8594, 0.0313, 0.0313, 0.0625, 0.9375

فصل ۲

1. 0.5, 0.2778, 0.1389, 0.0595, 0.0198   6. 0.3834, 0.6321   7. 0.3292
8. 0.0183   21. 1.833   24. $a = 0.6$, $b = 1.2$ 28. 68.284
29. 148, 21   31. 56.156   33. $\mathrm{Var}(X) = 1.25$ 35. 10.5, 8.75
38. $\mathrm{Var}(X) = 0.0764$ 39. $\mathrm{Var}(X_1) = 1.234$, $\mathrm{Var}(X_2) = 0.25$
40. $\mathrm{Var}(X) = 0.067$

فصل ۳

1. 0.8208   2. 0.9421   3. 0.2668   4. 0.4219   5. $p > 2/3$
12. 0.3935, 0.3033, 0.0902   13. 0.8908   14. 0.0511, 0.1229
19. 0.3630   24. 0.7977, 0.6827, 0.3695, 0.9522, 0.1587   25. 0.00023
26. 0.0956, < 0.00194 27. 2139.4   28. 0.0456   31. 0.9772
32. 0.6076   34. 0.0001   37. 0.3679, 0.6065   38. 0.2865
41. 0.7127, 0.0235   42. 0.2531

فصل ۴

4. 0.5364, 0.8326, 1.1774, $1/g^2$ 10. median = 0.4126   20. 0.0152, 0.1024, 0.00121   21. 0.00885   24. 0.1782

فصل ۵

9. (1.085, 1.315)   10. (1.072, 1.328)   11. 1.3136   13. (331.06, 336.93), (330.01, 337.98)   14. (39.55, 44.45)   16. (2013.9, 2111.6), (1996.0, 2129.5), 2022.4   17. (93.94, 103.40)   19. 3.453   21. $(-11.18, -8.82)$
22. $(-11.12, -8.88)$ 23. $(-74.97, 41.97)$ 24. 32.23, 112.3, 153.81, 69.6
25. (0.00206, 0.00529)   26. (53.2, 269.8)   31. it will be less than 0.108
32. (0.096, 0.244), (0.073, 0.267)   33. 0.67, 2024   34. (21.1, 74.2)
40. 7.64, 8.3   43. (182.57, 185.07)

فصل ۶

Unless otherwise mentioned, the answer given is the p-value of the relevant test.

1. 0.001 2. 0.31 3. 0.002 4. $n = 6$ 6. 0.005 7. 0.14
8. 0.38 9. 0.04 11. 0.28 12. 0.103 13. 0.67
14. 0.100013 15. 0.122 16. 0.044 17. 0.25 20. 0.023
21. < 0.0001 22. 0.4 23. 0.006 25. 0.0008 26. 0.18
27. 0.14 28. 0.16 32. 0.13 33. 0.47 34. 0.06

فصل ۷

2. 147.34 3. 0.045 4. 2439.8 5. 85.22 7. 105,659, (54,518, 308,521) 9. p-value = 0.016, (42.93, 49.95) 11. p-value = 0.035, 12.6, (11.99, 13.22) 12. 4.125 18. p-value = 0.026, 2459.7, (2186, 2237)
19. 10340, (0.997, 1.005), (0.983, 1.018), 0.9998 20. 2.4998, 0.004
23. p-value < 0.0001, 144.37, 4.17, 0.76 24. $m = 0.07$, $A = 50.86$
25. $t = 22.5$, $s = 1.1$ 26. 1.22 27. 0.66 28. 216448.1
32. 85.5 34. 31.29, 30.35 38. 2.45 39. $SS_R = 202$, p-values = 0.46, 0.37, 0.125 40. 238.0, 3.9 41. 2309.6, 28.8 43. 225.70, 20.07
44. 4.645, 0.615 45. p-value = 0.81, 135.41, 17.24 and 51.27

فصل ۸

1. 0.954 2. 0.727 4. 0.00245 5. 0.0043 7. 0.849
8. 0.9998 9. row: 0.0014 column: 0.0170 10. row: 0.706 column: 0.0214
11. row: 0.1001 column: 0.9995 interaction: 0.1065 12. row: 0.9867 column: < 0.0001 interaction: 0.0445 13. row: 0.028 column: < 0.0001 interaction: 0.0278 14. row: 0.0003 column: 0.0003 interaction: 0.00005 15. row: 0.3815 column: 0.7611 interaction: 0.9497 additional: 0.0065

واژه‌نامه

م

FERDOWSI UNIVERSITY OF MASHHAD

Publication No. 197

INTRODUCTION TO

Probability and Statistics

(For Engineers and Scientists)

by

Sheldon M. Ross

Translated by

M. ASADI - A. BOZORGNIA

FERDOWSI UNIVERSITY PRESS