مقدمه ای بر جبر تعویضپذیر

مایکل عطیه - یان مکدونالد

ترجمه :
دکتر مرتضی آقایی
دکتر تقی کریمی
مهرداد ناصر نژاد
اعضای هیئت علمی دانشگاه پیام نور

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه ای بر

جبر تعویضپذیر

مایکل عطیه - یان مک دونالد

ترجمه: دکتر مرتضی آقایی، دکتر تقی کریمی، مهرداد ناصرنژاد

ویرایش: دکتر محمدحسن بیژن زاده، فیصل حسنی

نشر اقلیدس

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجمان

کتاب « مقدمه‌ای بر جبر تعویضپذیر » نوشته عطیه و مکدونالد، در زمره مهمترین مراجع تدریس جبر جابجایی ۱ در بسیاری از دانشگاههای داخل و خارج به شمار می آید و چاپ های مکرر این کتاب گواهی بر پرمحتوایی این اثر است . در واقع، مطالب جامع و تمرینات متنوع از ویژگی‌های بارز این کتاب است .در ترجمه این اثر، واژه‌نامه انجمن ریاضی ایران به عنوان مرجع اصلی واژگان به کار رفته و هر جاکه بیم ابهام می رفت در پاورقی توضیحات لازم ذکر شده است . واضح است که این کتاب خالی از اشکال و اشتباه نیست ، از این رو از هر گونه نظر اصلاحی صمیمانه استقبال می کنیم . امید است که این اثر در ارتقا سطح جبرجابجایی سودمند افتد.

مرتضی آقایی — تقی کریمی — مهرداد ناصرنژاد

پاییز ۱۳۸۷

پیشگفتار مؤلفان

جبر تعویضپذیر در اصل مطالعه حلقه‌های تعویضپذیر است. صرفنظر از جزئیات، به واسطه دو منبع پیشرفت کرده است : (۱) هندسه جبری و (۲) نظریه جبری اعداد. نمونه اصلی از حلقه‌های مطالعه شده در (۱)، حلقه $k[x_1, \cdots, x_n]$ شامل چندجمله‌ای های چندمتغیره روی یک میدان است ؛ همچنین نخستین نمونه در (۲)، حلقه $\mathbf{Z}$ شامل اعداد صحیح گویا می‌باشد. از بین این دو منبع ، حالت جبری—هندسی گسترده تر است و به واسطه پیشرفت جدیدش توسط گروتندیک [۱]، قسمت اعظم نظریه جبری اعداد را در خود جای می‌دهد. جبر تعویضپذیر در حال حاضر یکی از سنگ بناهای هندسه جبری جدید است . در واقع تمام ابزارهای موضعی را برای موضوع فراهم می‌کند همانطور که آنالیز دیفرانسیل ابزارهایی را برای هندسه دیفرانسیل فراهم می‌کند.

این کتاب نتیجه یک دوره از درس های ارائه شده برای دانشجویان سال سوم کارشناسی دانشگاه آکسفورد است و کمترین هدفش فراهم کردن شناختی سریع از موضوع می‌باشد . این کتاب برای مطالعه دانشجویانی که دوره‌ای مقدماتی را در جبر عمومی گذرانده‌اند، در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر، به عنوان جایگزینی برای رساله‌های حجیم تر درباره جبر تعویضپذیر نظیر زاریسکی—ساموئل [۲] [۴] یا بورباکی [۳] [۱]، مد نظر نیست. ما روی عناوین محوری مشخص و حوزه‌هایی وسیع همانند نظریه میدان ها که ملموس نیستند، متمرکز شده‌ایم . به لحاظ محتوایی ، مطالب بیشتری را نسبت به نورثکات [۴] [۳] پوشش می دهیم و برخوردمان به طرز چشمگیری با پیروی از گرایش‌های جدید متفاوت است ، در واقع روی مدول هاو موضعی سازی بسیار تاکید می کنیم .

---

[۱] *Grothendieck*
[۲] *Zariski-Samuel*
[۳] *Bourbaki*
[۴] *Northcott*

مفهوم **محوری در جبر تعویضپذیر**، ایده‌ال اول است. این مفهوم ، تعمیمی مشترک از اعداد اول و نقاط هندسی را فراهم می‌کند. مفهوم هندسی توجه متمرکز « حول یک نقطه» نظیر مشابه جبری آن ، فرایند مهم موضعی کردن یک حلقه در ایده‌الی اول را دارد. لذا تعجب آور نیست که نتایج به دست آمده درباره موضعی سازی می توانند به طور موثری بر حسب اصطلاحات هندسی ، تصور شوند. این کار به طرز روشمندی در نظریه طرحهای گروتندیک و تا اندازه‌ای به عنوان مقدمه‌ای در اثر گروتندیک [۲] انجام شده است و تا حدودی به واسطه شناخت هندسی که ایجاد می‌کند، ما نسخه‌های کلی از بعضی نتایج را به صورت تمرینات و تبصره‌ها اضافه کرده‌ایم.

منبع یادداشت‌های درسی این کتاب، دلیل اصلی سبک نسبتاً فشرده همراه با حداقل شاخ و برگ و نیز شرح کوتاه بسیاری از برهان‌ها، می‌باشد. ما در مقابل وسوسه گسترش دادن کتاب، مقاومت کرده‌ایم به امید اینکه اختصار و فشردگی اعمال شده در ارائه مطالب، ساختار ریاضی آنچه را که اکنون نظریه‌ای جذاب و زیبا می‌باشد روشنتر خواهد ساخت. فلسفه ما، به صورت ساختن قضایای اصلی در یک سلسله گام‌های ساده و حذف کردن اثبات های پیش افتاده ، استوار بوده است.

امروزه هر کسی که درباره جبرتعویضپذیر مطلبی می‌نویسد با وضعیتی دشوار در رابطه با جبر مانستگیی [۱] ، مواجه می‌شود که نقش بسیار مهمی در پیشرفت های جدید بازی می‌کند. یک بحث تمام عیار از جبر مانستگیی در محدوده کتابی کوچک، ناممکن است : از طرف دیگر، به کلی نادیده گرفتن آن، اصلاً عاقلانه نیست . توافقی که اتخاذ کرده‌ایم ، استفاده از روشهای مقدماتی مانستگیی است — شامل دنباله‌های دقیق ، نمودارها و غیره — اما توقفی کوتاه در چنین نتایجی نیازمند مطالعه عمیقی از مانستگی [۲] است. با این روش امیدواریم تا زمینه را برای درسی روشمند درباره جبر مانستگیی فراهم کنیم که خواننده بایستی نسبت به یادگیری آن متعهد شود اگر مایل است که

---

[۱] *homological algebra*
[۲] *homology*

هندسه جبری را عمیقاً دنبال کند.

تعداد قابل ملاحظه‌ای تمرین را در پایان هر فصل تدارک دیده‌ایم . برخی از آنها ساده‌اند و برخی از آنها دشوار هستند. معمولاً راهنمایی های لازم را در اختیار گذاشته‌ایم و گاهی اوقات جواب ها را برای تمرینات دشوار، تکمیل می‌کنیم . همچنین ، مدیون آقای ر.ی .شارپ [۱] هستیم که روی همه آنها کارکرد و ما را از ارتکاب بیش از یکبار اشتباهی ، خلاص کرد.

برای توصیف کمک های ریاضیدانانی که به پیشرفت نظریه‌ای که در این کتاب شرح دادیم یاری کرده‌اند، هیچ تلاشی نکرده‌ایم . اما مایلیم که دین خود را نسبت به جی . پی . سر [۲] و جی . تیت [۳]، ادا کنیم که مطالب را از آنها آموختیم و تاثیرشان در انتخاب ما از مطالب و شیوه ارائه آنها عامل تعیین کننده‌ای بود.

مراجع

[1] N. BOURBAKI. *Algèbre Commutative, Hermann, Paris (1961-65).*

[2] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géometrie Algébrique, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., Nos. 4, 8, 11, ⋯ , Paris (1960-).*

[3] D. G. NORTHCOTT. *Ideal Theory. Cambridge University Press (1953).*

[4] O. ZARISKI and P. SAMUEL. *Commutative Algebra I, II, Van Nostrand, Princeton (1958, 1960).*

---

[۱] *R.Y.Sharp*
[۲] *J.P.Serre*
[۳] *J.Tate*

نماد ها و اصطلاحات

حلقه هاو مدول ها با حروف ایتالیک بزرگ و عناصر آنها با حروف ایتالیک کوچک نشان داده می شوند . یک میدان در اغلب اوقات با k نشان داده می‌شود. ایده ال ها با حروف آلمانی کوچک نمایش داده می شوند . $\mathbf{Z}$ ، $\mathbf{Q}$، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ به ترتیب ، حلقه اعداد صحیح گویا ، میدان اعداد گویا، میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط را نمایش می دهند .

نگاشتها همواره طرف چپ نوشته می شوند ، از این رو تصویر عنصر x تحت نگاشت f به صورت $f(x)$ نوشته می شود و نه به صورت $(x)f$. بنابراین ترکیب نگاشتهای $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ به صورت $g \circ f$ است ، نه به صورت $f \circ g$.

نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک است هرگاه $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه دهد $x_۱ = x_۲$ ؛ پوشا است اگر $f(X) = Y$ ؛ دوسویی است اگر هم یک به یک و هم پوشا باشد.

پایان هر برهان (یا عدم بیان یک برهان) به صورت ♣ علامتگذاری می‌شود.

شمول مجموعه ها با علامت $\subseteq$ نشان داده می شود. ما علامت $\subset$ را به شمول اکید اختصاص می دهیم . از این رو $A \subset B$ به این معنی است که A مشمول در B است و با B برابر نیست .

فصل ۱

حلقه‌ها و ایده‌الها

با مرور سریع تعاریف و ویژگی های مقدماتی حلقه ها شروع خواهیم کرد. دراین صورت ، آن مقداری از مطالب را که می خواهیم خواننده بر عهده گیرد نشان خواهد داد و نیز نماد ها و قرار دادهای ثابت را ارائه خواهد کرد. پس از این مرور، به بحث ایده ال های اول و ماکسیمال می پردازیم. باقیمانده فصل به توصیف اعمال مقدماتی متنوعی که می توانند روی ایده ال ها انجام شوند، اختصاص داده می شود.همچنین ، در تمرینات پایانی فصل به زبان طرح های گروتندیک پرداخته می شود .

حلقه ها و همریختی های حلقه‌ای

حلقه A مجموعه ای است با دو عمل دو تایی (جمع و ضرب) به طوری که

۱) A نسبت به جمع گروهی آبلی است (از این رو A دارای عنصر صفراست که با 0 نشان داده می شود و هر $x \in A$ معکوس (جمعی)، $-x$ ، دارد).

۲) ضرب شرکت‌پذیر است ($(xy)z = x(yz)$) و روی جمع توزیع می‌شود($x(y+z) = xy + xz, \;\; (y+z)x = yx + zx$).

مافقط حلقه هایی را که تعویضپذیر هستند در نظر خواهیم گرفت:

۳) به‌ازای هر $x, y \in A$، $xy = yx$،
و عنصری همانی داریم (که با ۱ نشان داده می شود).
۴) عنصر $1 \in A$ وجود دارد به طوری که به‌ازای هر $x \in A$ ، $x1 = 1x = x$.
در این صورت عنصر همانی یکتا است.

در سراسر این کتاب واژه «حلقه» به معنی حلقه تعویضپذیر یکدار خواهد بود، یعنی ، حلقه ای که در اصول (۱) تا (۴) بالا صدق می کند.

تذکر . امکان اینکه در (۴) ، ۱ با ۰ می تواند برابر شود را نفی نمی کنیم. اگر چنین باشد آنگاه به‌ازای هر $x \in A$ داریم

$$x = x\,1 = x\,0 = 0$$

و در نتیجه A فقط یک عضو، یعنی ۰، دارد. در این حالت A حلقه صفر است که با ۰ نشان داده می شود (با سوء استفاده از نماد گذاری).
یک همریختی حلقه‌ای ، نگاشت f از حلقه A بتوی حلقه B است به طوری که

(الف) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ (لذا f یک همریختی گروههای آبلی است و نیز نتیجه می شود $f(x-y) = f(x) - f(y)$ ، $f(-x) = -f(x)$ و $f(0) = 0$)،
(ب) $f(xy) = f(x)f(y)$،
(پ) $f(1) = 1$.
به عبارت دیگر، f جمع ، ضرب و عنصر همانی را حفظ می کند.

زیر مجموعه S از حلقه A ، زیر حلقه ای از A است اگر S تحت جمع و ضرب بسته باشد و شامل عنصر همانی A باشد. در این صورت نگاشت همانی از S بتوی A یک همریختی حلقه‌ای است.
اگر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ همریختی های حلقه‌ای باشند، در این

صورت ترکیب آنها به صورت $g \circ f : A \longrightarrow C$ است.

ایده ال ها. حلقه های خارج قسمتی

ایده ال $\mathfrak{a}$ از حلقه A، زیر مجموعه ای از A است که زیر گروهی جمعی است و به این صورت است که $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ (یعنی ، $x \in A$ و $y \in \mathfrak{a}$ نتیجه می دهند $xy \in \mathfrak{a}$). گروه خارج قسمتی $A/\mathfrak{a}$، یکتایی ضرب تعریف شده را از A به ارث می برد که آن را به حلقه‌ای تبدیل می کند که حلقه خارج قسمتی (یا حلقه رده مانده‌ای) $A/\mathfrak{a}$ نامیده می شود. عناصر $A/\mathfrak{a}$ ، هم مجموعه های $\mathfrak{a}$ در A هستند و نگاشت $\phi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ که هر $x \in A$ را به هم مجموعه اش $x + \mathfrak{a}$ می نگارد یک همریختی حلقه ای پوشاست.

ما مکرراً از حقیقت زیر استفاده خواهیم کرد:

گزاره ۱.۱. تناظر حافظ ترتیب یک به یکی بین ایده ال های $\mathfrak{b}$ از A که $\mathfrak{a}$ را شامل می شوند و ایده ال های $\bar{\mathfrak{b}}$ از $A/\mathfrak{a}$ ، با ضابطه $\mathfrak{b} = \phi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$ ، وجود دارد.♣

اگر $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای دلخواهی باشد، هسته f $(= f^{-1}(0))$ ایده ال $\mathfrak{a}$ از A است و تصویر f $(= f(A))$ زیر حلقه C از B است؛ و f یکریختی حلقه ای $A/\mathfrak{a} \cong C$ را القا می کند.

ما گاهگاهی نماد $x \equiv y$ (پیمانه $\mathfrak{a}$) را به کار می بریم ؛ که به معنی $x - y \in A$ است.

مقسوم علیه های صفر. عناصر پوچتوان . یکه‌ها

یک مقسوم علیه صفر در حلقه A، عنصری مانند x است که «۰ را عاد می‌کند»، یعنی ، $y \neq 0$ ای در A وجود دارد به طوری که $xy = 0$. حلقه ای که هیچ مقسوم علیه ناصفری ندارد (که‌در آن $1 \neq 0$) حوزه صحیح نامیده

می‌شود. مثلاً، $\mathbf{Z}$ و $k[x_1, \cdots, x_n]$ (که k میدان و x_i ها مجهول ها) حوزه هایی صحیح هستند.

عنصر $x \in A$ پوچتوان است اگر به ازای $n > 0$ ای ، $x^n = 0$. یک عنصر پوچتوان، مقسوم علیه صفراست (مگر $A = 0$)، امّا (در حالت کلی) عکس این حکم درست نیست.

یک یکه در A، عنصری مانند x است که « ۱ را عاد می کند »، یعنی یک عنصر x، به طوری که به ازای $y \in A$ ای، $xy = 1$. در این صورت عنصر y بطور یکتا توسط x تعیین می شود و به صورت x^{-1} نوشته می شود. یکه های در A، یک گروه آبلی (ضربی) تشکیل می دهند.

مضارب ax از عنصر $x \in A$، ایده الی اصلی تشکیل می دهند که با (x) یا Ax نشان داده می شود. x یکه است $\Leftrightarrow$ $(x) = A = (1)$. ایده ال صفر (0) معمولاً با 0 نمایش داده می شود.

یک میدان، حلقه‌ای مانند A است که $1 \neq 0$ و هر عنصر ناصفر، یکه باشد. هر میدان ، حوزه‌ای صحیح است (امّا عکس این حکم برقرار نمی باشد: $\mathbf{Z}$ میدان نیست).

گزاره ۲.۱. فرض کنید A حلقه‌ای ناصفر باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) A میدان است؛

(ب) تنها ایده ال های در A، (0) و (1) هستند؛

(پ) هر همریختی از A بتوی حلقه ناصفر B ؛ یک به یک است.

برهان . (ب) $\Rightarrow$ (الف). فرض کنید $\mathfrak{a} \neq 0$ ایده الی در A باشد. دراین‌صورت ایده‌ال $\mathfrak{a}$ عنصری ناصفر مانند x را شامل می شود؛ x یکه است، ازاین رو $(1) = (x) \subseteq \mathfrak{a}$، در نتیجه $(1) = \mathfrak{a}$.

(پ) $\Rightarrow$ (ب). فرض کنید $\phi : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد. دراین‌صورت $Ker(\phi)$ ایده‌الی مخالف (۱) در A است ، از این رو

$Ker(\phi) = 0$، درنتیجه ϕ یک به یک است .

(الف) $\Rightarrow$ (پ). فرض کنید x عنصری از A باشد که یکه نیست. دراین‌صورت $(1) \neq (x)$ ، از این رو $B = A/(x)$ حلقه صفر نیست. فرض کنید $\phi : A \longrightarrow B$ همریختی طبیعی از A بروی B با هسته (x)، باشد. بنابه فرض، ϕ یک به یک است از این رو $(x) = 0$ ، در نتیجه $x = 0$. ♣

ایده ال های اول و ایده ال های ماکسیمال

ایده ال $\mathfrak{p}$ در A اول است اگر $\mathfrak{p} \neq (1)$ و اگر $xy \in \mathfrak{p}$ آنگاه $x \in \mathfrak{p}$ یا $y \in \mathfrak{p}$.

ایده‌ال m در A ماکسیمال است اگر $m \neq (1)$ و ایده الی مانند $\mathfrak{a}$ موجود نباشد که $m \subset \mathfrak{a} \subset (1)$ (شمول ها اکید هستند). به طور هم ارز :

$\mathfrak{p}$ اول است $\Leftrightarrow$ $A/\mathfrak{p}$ حوزه صحیح باشد؛

m ماکسیمال است $\Leftrightarrow$ A/m میدان باشد (بنابه (۱.۱) و (۲.۱)).

از این رو هر ایده ال ماکسیمال، اول است (امّا عکس این حکم به طور کلی برقرار نیست). ایده ال صفر اول است $\Leftrightarrow$ A حوزه صحیح باشد.

اگر $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد و $\mathfrak{q}$ ایده‌الی اول در B باشد آنگاه $f^{-1}(\mathfrak{q})$ ایده الی اول در A است، زیرا $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ با زیر حلقه‌ای از $B/\mathfrak{q}$ یکریخت است و از این رو دارای مقسوم علیه صفر ناصفری نیست. امّا اگر n ایده الی ماکسیمال از B باشد لزوماً درست نیست که $f^{-1}(n)$ در A ماکسیمال است ؛ تمام آنچه را که با اطمینان می توانیم بگوییم این است که ایده‌الی اول است. (مثال : $A = \mathbf{Z}$، $B = \mathbf{Q}$ و $n = 0$.)

ایده ال های اول برای کل جبر تعویضپذیر، بنیادین هستند. قضیه زیر و نتایجش، اطمینان می دهند که همواره به تعداد کافی از آنها وجود دارد.

قضیه ۳.۱. هر حلقه ناصفر A، دستکم یک ایده ال ماکسیمال دارد. (یادآوری می کنیم که « حلقه » به معنی حلقه تعویضپذیر یکدار است.)

برهان . این اثبات، کاربردی معمولی **از لم** زرن [1] می باشد. فرض کنید $\sum$ مجموعه تمام ایده ال های $\neq (1)$ در A باشد. $\sum$ را با شمول مرتب کنید. $\sum$ ناتهی است، زیرا $0 \in \sum$. برای استفاده از لم زرن، باید نشان دهیم که هر زنجیر در $\sum$ ، کران بالایی در $\sum$ دارد؛ لذا فرض کنید $(\mathfrak{a}_\alpha)$ زنجیری از ایده ال ها در $\sum$ باشد، بنابراین به‌ازای هر زوج از اندیس های α و β داریم $\mathfrak{a}_\alpha \subseteq \mathfrak{a}_\beta$ یا $\mathfrak{a}_\beta \subseteq \mathfrak{a}_\alpha$. فرض کنید $\mathfrak{a} = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$. در این صورت $\mathfrak{a}$ یک ایده ال است (این ادعا را ثابت کنید) و $1 \notin \mathfrak{a}$، زیرا به ازای هر α، $1 \notin \mathfrak{a}_\alpha$ از این رو $\mathfrak{a} \in \sum$ و $\mathfrak{a}$ یک کران بالای زنجیر است. در نتیجه بنا به لم زرن، $\sum$ عنصر ماکسیمال دارد. ♣

نتیجه ۴.۱. اگر $\mathfrak{a} \neq (1)$ ایده الی از A باشد، آنگاه ایده الی ماکسیمال از A که شامل $\mathfrak{a}$ می شود، موجود است.

برهان . با در نظر داشتن (۱.۱)، قضیه (۳.۱) را برای $A/\mathfrak{a}$ به کار ببرید. برای اثباتی دیگر، برهان (۳.۱) را اصلاح کنید.♣

نتیجه ۵.۱. هر عنصر نایکه از حلقه A، در ایده الی ماکسیمال قرار دارد. ♣

تبصره ها . ۱) اگر A نوتری باشد (فصل ۷) می توانیم از به کارگیری لم زرن صرفنظر کنیم: مجموعه تمام ایده ال های $\neq (1)$ ، عنصر ماکسیمال دارد.

۲) حلقه هایی با دقیقاً یک ایده ال ماکسیمال وجود دارند، مثلاً میدان ها. حلقه A با دقیقاً یک ایده ال ماکسیمال m، حلقه موضعی نامیده می شود.

---

[1] فرض کنید S یک مجموعه جزئاً مرتب ناتهی باشد (یعنی اینکه، رابطه $x \leq y$ را روی S ارائه کرده ایم که بازتابی و ترایایی است و چنانچه $x \leq y$ و $y \leq x$ همراه با هم نتیجه دهند که $x = y$). زیر مجموعه T از S ، یک زنجیر است اگر به‌ازای هر زوج از عناصر x,y در T ، $x \leq y$ یا $y \leq x$. در این صورت لم زرن می تواند به صورت زیر بیان شود : اگر هر زنجیر T از S، کران بالایی در S داشته باشد (یعنی، اگر $x \in S$ موجود باشد به طوری که به‌ازای هر $t \in T$، $t \leq x$) آنگاه S دستکم یک عنصر ماکسیمال دارد. برای مشاهده برهانی از معادل بودن لم زرن با اصل انتخاب، اصل خوشترتیبی و غیره، مثلاً کتاب زیر را ببینید،

P. R. Halmos, Naive Set theory , Van Nostrand (1960).

دراین صورت میدان $k = A/m$، میدان مانده‌ای A نامیده می شود.

گزاره ۱.۶. (الف) فرض کنید A یک حلقه و $m \neq (1)$ ایده الی از A باشد به طوری که هر $x \in A - m$ در A یکه است. در این صورت A حلقه ای موضعی و m ایده ال ماکسیمالش است.

(ب) فرض کنید A یک حلقه و m ایده الی ماکسیمال از A باشد به‌طوری که هر عنصر $1 + m$ (یعنی، هر $1 + x$ که $x \in m$) در A یکه است. دراین‌صورت A حلقه‌ای موضعی است.

برهان . (الف) هر ایده ال $\neq (1)$، شامل نایکه ها می شود از این رو مشمول در m است. بنابراین m تنها ایده ال ماکسیمال A است.

(ب) فرض کنید $x \in A - m$. چون m ماکسیمال است، ایده ال تولید شده توسط x و m، (1) است از این رو $y \in A$ و $t \in m$ وجود دارند به طوری که $xy + t = 1$؛ پس $xy = 1 - t$ متعلق به $1 + m$ است و در نتیجه یکه است. حال (الف) را به کار ببرید. ♣

حلقه‌ای که فقط تعدادی متناهی ایده‌ال ماکسیمال دارد، نیم موضعی نامیده می شود.

مثال ها . ۱) $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ ، k یک میدان است. فرض کنید $f \in A$ یک چند جمله ای تحویلناپذیر باشد. بنا به یکتایی تجزیه، ایده ال (f) اول است.

۲) $A = \mathbb{Z}$. هر ایده الی از $\mathbb{Z}$، به ازای $m \geq 0$ ای به صورت (m) است. ایده ال (m) اول است $\Leftrightarrow$ m عددی اول یا صفر باشد. تمام ایده ال های (p)، که p عددی اول است، ماکسیمال هستند: $\mathbb{Z}/(p)$ میدانی با p عنصر است.

مشابه این مطلب ، در مثال (۱) برای $n = 1$ برقرار است امّا برای $n > 1$ برقرار نیست. ایده ال m از تمام چندجمله‌ای‌های در $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ با

جمله ثابت صفر، ماکسیمال است (زیرا هسته‌ی همریختی $k \longleftarrow A$ است که $f \in A$ را به $f(\circ)$ می‌نگارد). امّا اگر $n > ۱$، آنگاه m ایده الی اصلی نیست: در حقیقت ، به حداقل n مولد نیاز دارد.

۳) یک حوزه ایده ال اصلی ، حوزه‌ای صحیح است که هر ایده ال، اصلی است. در چنین حلقه ای هر ایده ال اول ناصفر، ماکسیمال است. زیرا اگر $(x) \neq \circ$ ایده الی اول باشد و $(y) \supset (x)$، آنگاه داریم $x \in (y)$، مثلاً $x = yz$، درنتیجه $yz \in (x)$ و $y \notin (x)$، از این رو $z \in (x)$: مثلاً $z = tx$. در این صورت $x = yz = ytx$ ، درنتیجه $yt = ۱$ و بنابراین $(y) = (۱)$.

پوچ رادیکال و رادیکال جیکوبسن

گزاره ۷.۱. مجموعه $\mathcal{R}$ شامل تمام عناصر پوچتوان حلقه A ، یک ایده ال است و $A/\mathcal{R}$ هیچ عنصر پوچتوان ناصفری ندارد.

برهان . اگر $x \in \mathcal{R}$ ، به وضوح به‌ازای هر $a \in A$، $ax \in \mathcal{R}$. فرض کنید $x, y \in \mathcal{R}$: مثلاً $x^m = \circ$ و $y^n = \circ$. بنا به قضیه دو جمله ای (که در هر حلقه تعویضپذیر معتبر است)، $(x+y)^{m+n-۱}$ مجموعی از مضارب صحیح حاصلضربهایی به صورت $x^r y^s$ است که $r + s = m + n - ۱$؛ ازآنجایی‌که نمی توانیم هر دوی $r < m$ و $s < n$ را داشته باشیم، از این رو هر یک از این حاصلضربها صفر می شوند و بنابراین $(x+y)^{m+n-۱} = \circ$. در نتیجه $x + y \in \mathcal{R}$ و بنابراین $\mathcal{R}$ یک ایده ال است.

فرض کنید $\bar{x} \in A/\mathcal{R}$ با نماینده $x \in A$ باشد. در این صورت $\bar{x}^n$ با نماینده x^n می‌باشد، بنابراین

$\bar{x}^n = \circ \Rightarrow x^n \in \mathcal{R} \Rightarrow (x^n)^k = \circ, k > \circ$ به‌ازای $\Rightarrow x \in \mathcal{R} \Rightarrow \bar{x} = \circ$.♣

ایده ال $\mathcal{R}$، پوچ رادیکال A نامیده می شود. گزاره زیر تعریف دیگری از $\mathcal{R}$ ارائه می کند:

گزاره ۸.۱. پوچ رادیکال A، اشتراک تمام ایده ال‌های اول A است.
برهان . فرض کنید $\mathcal{R}'$ اشتراک تمام ایده ال های اول A را نشان دهد. اگر $f \in A$ پوچتوان باشد و اگر $\mathfrak{p}$ ایده الی اول باشد آنگاه به ازای $n > 0$ ای، $f^n = 0$ ازاین رو $f \in \mathfrak{p}$ (زیرا $\mathfrak{p}$ اول است). درنتیجه $f \in \mathcal{R}'$.
برعکس، فرض کنید f پوچتوان نباشد. فرض کنید $\sum$ مجموعه ایده ال های $\mathfrak{a}$ با این ویژگی باشد که

$$n > 0 \Rightarrow f^n \notin a.$$

دراین صورت $\sum$ ناتهی است زیرا $0 \in \sum$. مشابه قضیه (۳.۱) ، لم زرن می‌تواند برای مجموعه $\sum$ که با شمول مرتب شده است به کار برده شود و درنتیجه $\sum$ عنصر ماکسیمال دارد. فرض کنید $\mathfrak{p}$ عنصر ماکسیمال $\sum$ باشد. نشان خواهیم داد $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول است. فرض کنید $x, y \notin \mathfrak{p}$. در این صورت ایده‌ال‌های $\mathfrak{p} + (x)$ و $\mathfrak{p} + (y)$ ، به طور اکید شامل $\mathfrak{p}$ می باشند و درنتیجه متعلق به $\sum$ نیستند؛ از این رو به ازای m و n ای ،

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), f^n \in \mathfrak{p} + (y).$$

از این رو نتیجه می شود $f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$، لذا ایده ال $\mathfrak{p} + (xy)$ متعلق به $\sum$ نیست و بنابراین $xy \notin \mathfrak{p}$. از این رو یک ایده ال اول $\mathfrak{p}$ داریم که $f \notin \mathfrak{p}$، درنتیجه $f \notin \mathcal{R}'$. ♣

رادیکال جیکوبسن $\mathcal{R}$ از A ، به صورت اشتراک تمام ایده ال های ماکسیمال حلقه A تعریف می شود. همچنین می تواند به صورت زیر توصیف شود:

گزاره ۹.۱. $x \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ به ازای هر $y \in A$، $1 - xy$ یکه باشد.
برهان . $\Leftarrow$: فرض کنید $1 - xy$ یکه نباشد. بنا به (۵.۱) ، به ایده الی ماکسیمال مانند m تعلق دارد؛ امّا $x \in \mathcal{R} \subseteq m$، از این رو $xy \in m$ و در نتیجه $1 \in m$ ، که محال است.

$\Leftarrow$: فرض کنید به ازای ایده الی ماکسیمال مانند m، $x \notin m$. دراین صورت m و x، ایده ال واحد (۱) را تولید می کنند، بنابراین به ازای $u \in m$ ای و $y \in A$ ای به دست می آوریم $u + xy = ۱$. از این رو $۱ - xy \in m$ و در نتیجه عنصری یکه نیست. ♣

اعمال روی ایده ال ها

اگر $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده ال هایی در حلقه A باشند، مجموع آنها $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$، مجموعه همه $x + y$ هایی است که $x \in \mathfrak{a}$ و $y \in \mathfrak{b}$. درواقع کوچکترین ایده الی است که شامل $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ می شود. به طور کلی تر، می توانیم مجموع $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ از خانواده‌ای دلخواه (احتمالاً نامتناهی) از ایده ال های $\mathfrak{a}_i$ از A را تعریف کنیم؛ دراین‌صورت عناصرش تمام مجموعهای $\sum x_i$ هستند، که به‌ازای هر $i \in I$، $x_i \in \mathfrak{a}_i$ و تقریباً همه x_i ها (یعنی، همه بجز تعدادی متناهی) صفر هستند. درواقع کوچکترین ایده الی از A است که تمام ایده ال های $\mathfrak{a}_i$ را شامل می‌شود.

اشتراک هر خانواده دلخواه $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ از ایده ال ها یک ایده ال است. ازاین‌رو ایده ال های A نسبت به شمول ، یک مشبکه کامل تشکیل می دهند.

حاصلضرب دو ایده ال $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ در A، ایده ال $\mathfrak{ab}$ تولید شده توسط حاصلضربهای xy است که $x \in \mathfrak{a}$ و $y \in \mathfrak{b}$. درواقع مجموعه تمام مجموعهای متناهی $\sum x_i y_i$ است که هر $x_i \in \mathfrak{a}$ و $y_i \in \mathfrak{b}$. به طور مشابه، حاصلضرب هر خانواده متناهی از ایده ال ها را تعریف می کنیم. علی‌الخصوص توانهای $\mathfrak{a}^n$ $(n > ۰)$ از ایده ال $\mathfrak{a}$ ، تعریف می شوند؛ به طور قراردادی، $\mathfrak{a}^۰ = (۱)$. ازاین رو $\mathfrak{a}^n$ $(n > ۰)$ ایده ال تولید شده توسط تمام حاصلضربهای $x_۱ x_۲ \cdots x_n$ است که هر عامل x_i متعلق به $\mathfrak{a}$ است.

مثال ها. ۱) اگر $A = \mathbf{Z}$ ، $\mathfrak{a} = (m)$ و $\mathfrak{b} = (n)$ آنگاه $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ایده ال تولید شده توسط ب.م.م m و n است؛ $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ایده ال تولید شده توسط ک.م.م آنها است؛ و $\mathfrak{ab} = (mn)$. ازاین رو (در این حالت) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \Leftrightarrow m$ و n نسبت

به هم اول باشند.

۲)فرض کنید $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ و $\mathfrak{a} = (x_1, \cdots, x_n)$ = ایده‌ال تولید شده توسط x_1 ، $\cdots$ ، x_n . در این صورت $\mathfrak{a}^m$ مجموعه تمام چندجمله‌ای هایی است که دارای جمله‌ای از درجه کوچکتراز m نیستند.

سه عملی که تا اینجا تعریف شدند (مجموع، اشتراک و حاصلضرب) همگی شرکتپذیر و تعویضپذیر هستند. همچنین قانون توزیعپذیری برقرار است

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}$$

در حلقه $\mathbf{Z}$، $\cap$ و $+$ روی یکدیگر توزیعپذیر هستند. این وضعیت، کلی نیست و بهترین قانونی که در این راستا داریم قانون مدولی است

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}.$$

اگر $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}$ یا $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$.

مجدداً در $\mathbf{Z}$ به دست می آوریم $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = \mathfrak{ab}$؛ امّا به طور کلی فقط داریم $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{ab}$ (زیرا $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{ab}$). به وضوح $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$، از این رو $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{ab}$ مشروط به اینکه $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$.

دو ایده ال $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ نسبت به هم اول [1] (یا هم ماکسیمال) گفته می‌شوند اگر $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$. از این رو برای ایده ال های نسبت به هم اول داریم $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{ab}$. به وضوح دو ایده ال $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ نسبت به هم اول هستند اگر و فقط اگر $x \in \mathfrak{a}$ ای و $y \in \mathfrak{b}$ ای موجود باشند به طوری که $x+y = 1$.

فرض کنید A_1،$\cdots$، A_n حلقه هایی دلخواه‌باشند. حاصلضرب مستقیم آنها

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

[1] برای راحتی از واژه « متباین » استفاده خواهیم کرد — م .

مجموعه تمام دنباله های $x = (x_1, \cdots, x_n)$ است که $x_i \in A_i$ $(1 \leq i \leq n)$ و همراه با جمع و ضرب مولفه ای. در این صورت A حلقه‌ای تعویضپذیر با عنصر همانی $(1, 1, \cdots, 1)$ است. همچنین توابع تصویر $p_i : A \longrightarrow A_i$ را با ضابطه $p_i(x) = x_i$ به دست می‌آوریم : آنها همریختی های حلقه ای هستند.

فرض کنید A یک حلقه و $\mathfrak{a}_1$، $\cdots$، $\mathfrak{a}_n$ ایده ال هایی از A باشند. دراین‌صورت همریختی

$$\phi : A \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_i)$$

را با ضابطه $\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, \cdots, x + \mathfrak{a}_n)$ تعریف کنید.

گزاره ۱.۱۰. (الف) اگر $\mathfrak{a}_i$ و $\mathfrak{a}_j$ زمانی که $i \neq j$، متباین باشند، آنگاه $\prod \mathfrak{a}_i = \bigcap \mathfrak{a}_i$.

(ب) $\mathfrak{a}_i$ و $\mathfrak{a}_j$ زمانی که $i \neq j$، متباین باشند $\Leftrightarrow$ ϕ پوشاست.

(پ) $\bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$ $\Leftrightarrow$ ϕ یک به یک است.

برهان. (الف) با استقرا روی n حکم را ثابت می کنیم. حالت $n = 2$ در بالا بررسی شده است. فرض کنید $n > 2$ و حکم برای $\mathfrak{a}_1$، $\cdots$، $\mathfrak{a}_{n-1}$ درست باشد و فرض کنید $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$. چون $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = (1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ لذا معادلات $x_i + y_i = 1$ ($x_i \in \mathfrak{a}_i$ و $y_i \in \mathfrak{a}_n$) را به دست می‌آوریم و در نتیجه

$$\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - y_i) \equiv 1 \quad (\text{پیمانه } \mathfrak{a}_n).$$

از این رو $\mathfrak{a}_n + \mathfrak{b} = (1)$ و بنابراین

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$

(ب) $\Rightarrow$: فرض کنید برای نمونه نشان دهیم $\mathfrak{a}_1$ و $\mathfrak{a}_2$ متباین هستند. دراین‌صورت $x \in A$ ای وجود دارد به طوری که $\phi(x) = (1, 0, \cdots, 0)$؛

ازاین‌رو (پیمانه $\mathfrak{a}_1$) $x \equiv 1$ و (پیمانه $\mathfrak{a}_2$) $x \equiv 0$، بنابراین

$$1 = (1 - x) + x \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2.$$

$\Leftarrow$: کافی است که مثلاً نشان دهیم عنصر $x \in A$ وجود دارد به طوری که $\phi(x) = (1, 0, \cdots, 0)$. چون $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_i = (1)$ $(i > 1)$ لذا معادلات $u_i + v_i = 1$ $(u_i \in \mathfrak{a}_1, v_i \in \mathfrak{a}_i)$ را به دست می‌آوریم. قرار دهید $x = \prod_{i=2}^{n} v_i$ در این صورت (پیمانه $\mathfrak{a}_1$) $x = \prod(1 - u_i) \equiv 1$ و (پیمانه $\mathfrak{a}_i$) $x \equiv 0$، $i > 1$. از این رو $\phi(x) = (1, 0, \cdots, 0)$ همانطور که می خواستیم.

(پ) واضح است، زیرا $\bigcap \mathfrak{a}_i$ ، هسته‌ی ϕ است. ♣

اجتماع $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ از ایده ال ها، به طور کلی یک ایده ال نیست.

گزاره ۱.۱۱. (الف) فرض کنید $\mathfrak{p}_1$ ، $\cdots$ ، $\mathfrak{p}_n$ ایده ال هایی اول باشند و فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی مشمول در $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ باشد. در این صورت به ازای i ای ، $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$.

(ب) فرض کنید $\mathfrak{a}_1$ ، $\cdots$ ، $\mathfrak{a}_n$ ایده ال هایی باشند و فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده الی اول شامل $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ باشد. در این صورت به ازای i ای، $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i$. اگر $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_i$ آنگاه به ازای i ای ، $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$.

برهان . (الف) با استقرا روی n در عبارتی به صورت زیر،حکم ثابت می‌شود

$$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i (1 \leq i \leq n) \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

برای $n = 1$ ، حکم یقیناً درست است. اگر $n > 1$ و نتیجه برای $n - 1$ درست باشد، آنگاه به‌ازای هر i، $x_i \in \mathfrak{a}$ ای وجود دارد به طوری که هرگاه $j \neq i$، $x_i \notin \mathfrak{p}_j$. اگر به ازای i ای به دست آوریم $x_i \notin \mathfrak{p}_i$،آنگاه به انتهای برهان

می‌رسیم. درغیر این صورت به‌ازای هر i، $x_i \in \mathfrak{p}_i$. حال عنصرزیر را در نظر بگیرید

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n;$$

در این صورت به دست می آوریم $y \in \mathfrak{a}$ و $y \notin \mathfrak{p}_i$ $(1 \leq i \leq n)$. از این رو $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.

(ب) فرض کنید به‌ازای هر i، $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}_i$. در این صورت عناصر $x_i \in \mathfrak{a}_i$ و $x_i \notin \mathfrak{p}$ $(1 \leq i \leq n)$ وجود دارند و در نتیجه $\prod x_i \in \prod \mathfrak{a}_i \subseteq \bigcap \mathfrak{a}_i$؛ امّا $\prod x_i \notin \mathfrak{p}$ (زیرا $\mathfrak{p}$ اول است). از این رو $\mathfrak{p} \not\supseteq \bigcap \mathfrak{a}_i$. بالاخره، اگر $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{a}_i$ آنگاه $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}_i$ و از این رو به ازای i ای، $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$. ♣

اگر $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده ال هایی در حلقه A باشند، آنگاه ایده‌ال خارج‌قسمتی آنهابه‌صورت زیر است

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \{x \in A : x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$$

که یک ایده ال است. به ویژه، $(0 : \mathfrak{b})$ پوچساز $\mathfrak{b}$ نامیده می شود و نیز با $Ann(\mathfrak{b})$ نشان داده می شود: در واقع مجموعه همه عناصر $x \in A$ است به‌طوری که $x\mathfrak{b} = 0$. با این نمادگذاری ، مجموعه تمام مقسوم علیه های صفر در A به صورت زیر است

$$D = \bigcup_{x \neq 0} Ann(x).$$

اگر $\mathfrak{b}$ ایده ال اصلی (x) باشد،آنگاه به جای $(\mathfrak{a} : (x))$ خواهیم نوشت $(\mathfrak{a} : x)$.

مثال . اگر $A = \mathbf{Z}$، $\mathfrak{a} = (m)$ و $\mathfrak{b} = (n)$ که مثلاً $m = \prod_p p^{\mu_p}$ و $n = \prod_p p^{\nu_p}$، آنگاه $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (q)$ که $q = \prod_p \lambda^{\gamma_p}$ و

$$\gamma_p = \max(\mu_p - \nu_p, 0) = \mu_p - \min(\mu_p, \nu_p).$$

از این رو $q = m/(m,n)$ که (m,n)، ب.م.م m و n است.

تمرین ۱.۱۲. (الف) $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$

(ب) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$

(پ) $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$

(ت) $(\bigcap_i \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$

(ث) $(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

اگر $\mathfrak{a}$ ایده الی دلخواه از A باشد،آنگاه رادیکال $\mathfrak{a}$ به صورت زیرتعریف می‌شود

$$r(\mathfrak{a}) = \{x \in A : x^n \in \mathfrak{a}, \text{ به ازای } n > 0 \text{ ای}\}.$$

اگر $\phi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$ همریختی متعارف باشد آنگاه $r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathcal{R}_{A/\mathfrak{a}})$ و ازاین‌رو $r(\mathfrak{a})$ بنا به (۱.۷)، یک ایده ال است.

تمرین ۱.۱۳. (الف) $r(\mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{a}$

(ب) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$

(پ) $r(\mathfrak{ab}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$

(ت) $r(\mathfrak{a}) = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$

(ث) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$

(ج) اگر $\mathfrak{p}$ ایده الی اول باشد،آنگاه به ازای هر $n > 0$، $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$.

گزاره ۱.۱۴. رادیکال ایده‌ال $\mathfrak{a}$ ، اشتراک ایده ال های اول شامل $\mathfrak{a}$ است.

برهان . گزاره (۱.۸) را برای $A/\mathfrak{a}$ به کار ببرید. ♣

به طور کلی تر، می توانیم رادیکال $r(E)$ را برای زیر مجموعه دلخواه E از A ، با همین روش تعریف کنیم. در حالت کلی ، رادیکال یک ایده‌ال نیست. درواقع به‌ازای هرخانواده دلخواه از زیر مجموعه های E_α از حلقه A به دست می آوریم، $r(\bigcup_\alpha E_\alpha) = \bigcup r(E_\alpha)$.

گزاره ۱۵.۱. $D = A$ مجموعه مقسوم علیه های صفر $= \bigcup_{x\neq 0} r(Ann(x))$.

برهان . $D = r(D) = r(\bigcup_{x\neq 0} Ann(x)) = \bigcup_{x\neq 0} r(Ann(x))$. ♣

مثال . اگر $A = \mathbf{Z}$ و $\mathfrak{a} = (m)$، آنگاه فرض کنید $\mathfrak{p}_i$ ها $(1 \leq i \leq r)$ مقسوم علیه های اول متمایز m باشند. در این صورت

$$r(\mathfrak{a}) = (p_1 \cdots p_r) = \bigcap_{i=1}^{r} (p_i).$$

گزاره ۱۶.۱. فرض کنید $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده ال هایی در حلقه A باشند به طوری که $r(\mathfrak{a})$ و $r(\mathfrak{b})$ متباین هستند. در این صورت $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ متباین هستند.

برهان . $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b})) = r(1) = (1)$، از این رو بنا به (۱۳.۱)، $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$. ♣

توسیع و انقباض [1]

فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد. اگر $\mathfrak{a}$ ایده الی در A باشد، آنگاه مجموعه $f(\mathfrak{a})$ لزوماً ایده الی در B نیست (مثلاً، فرض کنید f نشاندن $\mathbf{Z}$ در $\mathbf{Q}$، میدان اعداد گویا، باشد و $\mathfrak{a}$ را ایده ال ناصفر دلخواهی در $\mathbf{Z}$ در نظر بگیرید.) توسیع $\mathfrak{a}^e$ از $\mathfrak{a}$ را به عنوان ایده ال $Bf(\mathfrak{a})$ تولید شده توسط $f(\mathfrak{a})$ در B تعریف می کنیم: به طور صریح ، $\mathfrak{a}^e$ مجموعه تمام مجموعهای $\sum y_i f(x_i)$ است که $x_i \in \mathfrak{a}$ و $y_i \in B$.

[1] از واژه « تحدید » نیز استفاده می شود — م.

اگر $\mathfrak{b}$ ایده الی از B باشد آنگاه $f^{-1}(\mathfrak{b})$ همواره ایده الی از A است که انقباض $\mathfrak{b}^c$ از $\mathfrak{b}$ نامیده می شود. اگر $\mathfrak{b}$ اول باشد آنگاه $\mathfrak{b}^c$ اول است. اگر $\mathfrak{a}$ اول باشد، ضرورتی ندارد که $\mathfrak{a}^e$ اول باشد (مثلاً در نظر بگیرید ، $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$ و $\mathfrak{a} \neq 0$؛ دراین‌صورت $\mathfrak{a}^e = \mathbf{Q}$، که ایده الی اول نیست).

در واقع می توانیم f رابه صورت زیر تجزیه کنیم:

$$A \xrightarrow{p} f(A) \xrightarrow{j} B$$

که p پوشاست و j یک به یک است. وضعیت برای p، بنا به (۱.۱)، بسیار ساده است: تناظری یک به یک بین ایده‌ال‌های $f(A)$ و ایده‌ال‌های A که $Ker(f)$ را شامل می شوند وجود دارد و ایده ال های اول با ایده ال های اول متناظرند. از طرف دیگر، وضعیت کلی برای j بسیار پیچیده است. مثالی کلاسیک در این رابطه ، مربوط به نظریه جبری اعداد است.

مثال . در نظر بگیرید $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}[i]$ که $i = \sqrt{-1}$. ایده ال اول (p) از $\mathbf{Z}$ زمانی که به $\mathbf{Z}[i]$ توسیع می یابد ممکن است اول باقی بماند یا باقی نماند. درواقع $\mathbf{Z}[i]$ یک حوزه ایده ال اصلی است (زیرا دارای یک الگوریتم اقلیدسی است) و وضعیت به صورت زیر است :

(الف) $(2)^e = ((1+i)^2)$ ، مربع ایده الی اول در $\mathbf{Z}[i]$.

(ب) اگر $p \equiv 1$ (پیمانه ۴) آنگاه $(p)^e$ حاصلضرب دو ایده ال اول متمایز است (مثلاً، $(5)^e = (2+i)(2-i)$)؛

(پ) اگر $p \equiv 3$ (پیمانه ۴) آنگاه $(p)^e$ در $\mathbf{Z}[i]$ اول است.

از بین اینها، (ب) نتیجه ای بدیهی نیست. در واقع معادل با قضیه‌ای از فرما است که می گوید اگر برای عدد اول p ، $p \equiv 1$ (پیمانه ۴) آنگاه اساساً به طور یکتایی، می‌تواند به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح بیان شود (درنتیجه، $5 = 2^2 + 1^2$، $97 = 9^2 + 4^2$ و غیره).

در حقیقت رفتار ایده ال های اول تحت این نوع توسیع ها، یکی از مسائل عمده در نظریه جبری اعداد است.

فرض کنید $f : A \longrightarrow B$، $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ همانند قبل باشند. در این صورت :

گزاره ۱.۱۷. (الف) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$، $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$؛
(ب) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$، $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$؛
(پ) اگر C مجموعه ایده ال های منقبض [1] در A باشد و اگر E مجموعه ایده ال های منبسط [2] در B باشد آنگاه $C = \{\mathfrak{a} | \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}$ ، $E = \{\mathfrak{b} | \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}$ و $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e$ نگاشتی دوسویی از C بروی E است که وارونش $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}^c$ است.

برهان . (الف) بدیهی است و (ب) از (الف) نتیجه می شود.
(پ) اگر $\mathfrak{a} \in C$ آنگاه $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{a}^{ec}$؛ برعکس، اگر $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$ آنگاه $\mathfrak{a}$ انقباض $\mathfrak{a}^e$ است. به طور مشابه، حکم برای E نیز برقرار است. ♣

تمرین ۱.۱۸. اگر $\mathfrak{a}_1$ و $\mathfrak{a}_2$ ایده ال هایی از A باشند و اگر $\mathfrak{b}_1$ و $\mathfrak{b}_2$ ایده‌ال‌هایی از B باشند، آنگاه

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1{}^e + \mathfrak{a}_2{}^e, \qquad (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1{}^c + \mathfrak{b}_2{}^c,$$

$$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1{}^e \cap \mathfrak{a}_2{}^e, \qquad (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1{}^c \cap \mathfrak{b}_2{}^c,$$

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1{}^e\mathfrak{a}_2{}^e, \qquad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1{}^c\mathfrak{b}_2{}^c,$$

$$(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subseteq (\mathfrak{a}_1{}^e : \mathfrak{a}_2{}^e), \qquad (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subseteq (\mathfrak{b}_1{}^c : \mathfrak{b}_2{}^c),$$

$$r(\mathfrak{a})^e \subseteq r(\mathfrak{a}^e), \qquad r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c).$$

مجموعه ایده ال های E تحت مجموع و حاصلضرب ایده‌ال ها بسته است و C تحت سه عمل دیگر بسته است.

---

[1] از واژه « ایده‌ال‌های تحدیدی » نیز استفاده می شود — م .
[2] از واژه « ایده‌ال‌های توسیعی » نیز استفاده می شود — م .

تمرینات

۱. فرض کنید x عنصری پوچتوان از حلقه A باشد. نشان دهید $1 + x$ در A یکه است. نتیجه بگیرید که مجموع یک عنصر پوچتوان و یکه، یکه است.

۲. فرض کنید A حلقه باشد و فرض کنید $A[x]$ حلقه چندجمله ای های از مجهول x و با ضرایبی در A باشد. فرض کنید $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$. ثابت کنید

(الف) f در $A[x]$ یکه است $\Leftrightarrow$ a_0 در A یکه باشد و a_1 ، $\cdots$ ، a_n پوچتوان باشند. [اگر $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ معکوس f باشد، آنگاه با استقرا روی r ثابت کنید $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$. از این رو نشان دهید a_n پوچتوان است و سپس تمرین ۱ را به کار ببرید.]

(ب) f پوچتوان است $\Leftrightarrow$ a_0، a_1 ، $\cdots$ ، a_n پوچتوان باشند.

(پ) f یک مقسوم علیه صفر است $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ ای در A موجود باشد به‌طوری که $af = 0$. [چند جمله ای $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ را با کمترین درجه m انتخاب کنید به طوری که $fg = 0$. در این صورت $a_n b_m = 0$، از این رو $a_n g = 0$ (زیرا $a_n g$، f را پوچ می‌کند و درجه‌ای کوچکتر از m دارد). حال به استقرا نشان دهید $a_{n-r} g = 0$ $(0 \leq r \leq n)$.]

(ت) f اولیه گفته می شود اگر $(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (1)$. ثابت کنید اگر $f, g \in A[x]$ ، آنگاه fg اولیه است $\Leftrightarrow$ f و g اولیه باشند.

۳ . نتایج تمرین ۲ را به حلقه چند جمله‌ای چند متغیره $A[x_1, \cdots, x_r]$ تعمیم دهید.

۴. نشان دهید در حلقه $A[x]$، رادیکال جیکوبسن با پوچ رادیکال برابر است.

۵. فرض کنید A حلقه باشد و فرض کنید $A[[x]]$ حلقه سریهای توانی صوری $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با ضرایبی در A باشد. نشان دهید

(الف) f در $A[[x]]$ یکه است $\Leftrightarrow$ a_0 در A یکه باشد.

(ب) اگر f پوچتوان باشد آنگاه به‌ازای هر $n \geq 0$، a_n پوچتوان است. آیا

عکس این حکم درست است؟ (فصل ۷، تمرین ۲ را ببینید.)

(پ) f متعلق به رادیکال جیکوبسن $A[[x]]$ است $\Leftrightarrow$ a_0 متعلق به رادیکال جیکوبسن A باشد.

(ت) انقباض ایده ال ماکسیمال m از $A[[x]]$، ایده الی ماکسیمال از A است و m توسط m^c و x ، تولید می شود.

(ث) هر ایده ال اول A، انقباض ایده‌الی اول از $A[[x]]$ است.

۶. حلقه A به‌این صورت است که هر ایده الی که مشمول در پوچ رادیکال نیست، شامل عنصر خودتوان ناصفری است (یعنی، عنصری مانند e به طوری که $e^2 = e \neq 0$). ثابت کنید پوچ رادیکال و رادیکال جیکوبسن A با هم‌برابرند.

۷. فرض کنید A حلقه‌ای باشد به طوری که هر عنصر x برای $n > 1$ ای (وابسته به x) در $x^n = x$ صدق می کند. نشان دهید هر ایده ال اول A، ماکسیمال است.

۸. فرض کنید A حلقه‌ای ناصفر باشد. نشان دهید مجموعه ایده ال های اول A نسبت به شمول، دارای عناصر مینیمال است.

۹. فرض $\mathfrak{a}$ یک ایده ال $\neq (1)$ در حلقه A باشد. نشان دهید $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a}$ اشتراکی از ایده ال های اول باشد.

۱۰. فرض کنید A یک حلقه و $\mathcal{R}$ پوچ رادیکال آن باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) A دقیقاً یک ایده ال اول دارد؛

(ب) هر عنصر A، یکه یا پوچتوان است؛

(پ) $A/\mathcal{R}$ میدان است.

۱۱. حلقه A بولی است اگر به‌ازای هر $x \in A$، $x^2 = x$. در این صورت برای یک حلقه بولی نشان دهید

(الف) به‌ازای هر $x \in A$، $2x = 0$؛

(ب) هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$ ، ماکسیمال است و $A/\mathfrak{p}$ میدانی دو عضوی است؛

(پ) هر ایده ال متناهیاً تولید شده در A، اصلی است.

۱۲. یک حلقه موضعی هیچ عنصر خودتوانی بجز ۰ و ۱ ، ندارد.

ساختن بستار جبری یک میدان (ای . آرتین)

۱۳. فرض کنید K یک میدان باشد و فرض کنید Σ مجموعه تمام چندجمله‌ای های تکین تحویلناپذیر یک متغیره f با ضرایبی در K باشد. فرض کنید A حلقه چند جمله‌ای روی K، تولید شده توسط مجهولات x_f، یکی به‌ازای هر $f \in \Sigma$، باشد. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی از A تولید شده توسط چندجمله‌ای های $f(x_f)$، به‌ازای هر $f \in \Sigma$، باشد. نشان دهید $\mathfrak{a} \neq (1)$.

فرض کنید m ایده‌الی ماکسیمال از A شامل $\mathfrak{a}$ باشد و فرض کنید $K_1 = A/m$. در این صورت K_1 یک زبر میدان [1] K است که هر $f \in \Sigma$ دارای ریشه است. حال فرایند ساختن را با K_1 به جای K تکرار کنید تا میدان K_2 به دست آید و الی آخر. فرض کنید $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. در این صورت L میدانی است که هر $f \in \Sigma$ به طور کامل به عوامل خطی شکافته می شود. فرض کنید $\bar{K}$ مجموعه تمام عناصری از L باشد که روی K جبری هستند. دراین صورت $\bar{K}$ بستار جبری K است.

۱۴. در حلقه A، فرض کنید Σ مجموعه تمام ایده ال هایی باشد که هر عنصری در آنها یک مقسوم علیه صفر است. نشان دهید مجموعه Σ دارای عناصر ماکسیمال است و نیز اینکه هر عنصر ماکسیمال Σ ، ایده‌الی اول است. ازاین‌رو مجموعه مقسوم علیه های صفر حلقه A، اجتماعی ازایده‌ال های اول‌است.

طیف اول یک حلقه

۱۵. فرض کنید A حلقه باشد و فرض کنید X مجموعه تمام ایده‌ال‌های اول A باشد. برای هر زیر مجموعه E از A، فرض کنید $V(E)$ مجموعه تمام ایده‌ال‌های اولی از A باشد که شامل E می شوند. ثابت کنید

[1] از واژه « توسیع میدان » نیز استفاده می شود — م .

(الف) اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌ال تولید شده توسط E باشد آنگاه $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.
(ب) $V(0) = X$ و $V(1) = \emptyset$.
(پ) اگر $(E_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای دلخواه از زیر مجموعه های A باشد آنگاه

$$V(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} V(E_i).$$

(ت) به‌ازای هر ایده ال $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ از A، $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

این نتایج نشان می دهند که مجموعه های $V(E)$ در اصول مجموعه های بسته در یک فضای توپولوژیک صدق می کنند. توپولوژی به دست آمده، توپولوژی‌زاریسکی نامیده می شود. فضای توپولوژیک X ، طیف اول A نامیده می‌شود و به صورت $Spec(A)$ نوشته می شود.

۱۶. تصاویر $Spec(\mathbf{Z})$ ، $Spec(\mathbf{R})$، $Spec(\mathbf{C}[x])$، $Spec(\mathbf{R}[x])$ و $Spec(\mathbf{Z}[x])$ را رسم کنید.

۱۷. به‌ازای هر $f \in A$، فرض کنید X_f متمم $V(f)$ را در $X = Spec(A)$ نشان دهد. مجموعه های X_f باز هستند. نشان دهید که آنها پایه ای از مجموعه های باز برای توپولوژی زاریسکی تشکیل می دهند و نیزاینکه

(الف) $X_f \cap X_g = X_{fg}$؛
(ب) $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ پوچتوان باشد؛
(پ) $X_f = X \Leftrightarrow f$ یکه باشد؛
(ت) $X_f = X_g \Leftrightarrow r((f)) = r((g))$؛
(ث) X شبه فشرده است (یعنی، هر پوشش باز X، زیر پوشش متناهی دارد).
(ج) به طور کلی تر، هر X_f شبه فشرده است.
(چ) یک زیرمجموعه باز X شبه فشرده است اگر و فقط اگر اجتماعی متناهی از مجموعه های X_f باشد.

مجموعه‌های X_f مجموعه‌های باز پایه‌ای $X = Spec(A)$ نامیده می‌شوند.
[برای اثبات (ث)، توجه کنید که کافی است پوششی از X با مجموعه‌های باز

پایه ای X_{f_i} $(i \in I)$ در نظر گرفته شود. نشان دهید که f_i ها ایده‌ال واحد را تولید می کنند و از این رو معادله ای به صورت

$$۱ = \sum_{i \in J} g_i f_i \quad (g_i \in A)$$

وجود دارد که J زیر مجموعه‌ای متناهی از I است. در این صورت X_{f_i}ها $(i \in J)$، X را می پوشانند.]

۱۸. بنا به دلایل روانشناسانه،گاهی مناسب است تا ایده‌الی اول از A را توسط یک حرف مانند x یا y نشان دهیم زمانی که آن را به عنوان نقطه ای از $X = Spec(A)$ تصور کنیم. وقتی که x را به عنوان ایده‌الی اول از حلقه A درنظر می گیریم، آن را با $\mathfrak{p}_x$ نشان می دهیم (البته به لحاظ منطقی همان چیز است). نشان دهید که

(الف) مجموعه $\{x\}$ در $Spec(A)$ بسته است (گوییم x یک « نقطه بسته » است) $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}_x$ ماکسیمال باشد؛

(ب) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$؛

(پ) $y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$؛

(ت) X یک T_0 — فضاست (به این معنی که اگر x و y نقاط متمایزی از X باشند آنگاه یک همسایگی از x وجود دارد که شامل y نمی شود، وگرنه یک همسایگی از y وجود دارد که شامل x نمی شود).

۱۹. فضای توپولوژیک X تحویلناپذیر گفته می شود اگر $X \neq \emptyset$ و همچنین هر زوج از مجموعه های باز ناتهی در X متقاطع باشند یا به طور معادل اگر هر مجموعه باز ناتهی ، در X چگال باشد. نشان دهید که $Spec(A)$ تحویلناپذیر است اگر و فقط اگر پوچ رادیکال A ایده‌الی اول باشد.

۲۰.فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد.

(الف) اگر Y یک زیر فضای تحویلناپذیر (تمرین ۱۹) X باشد آنگاه بستار $\bar{Y}$ از Y، در X تحویلناپذیر است.

(ب) هر زیر فضای تحویلناپذیر X مشمول در یک زیر فضای تحویلناپذیر ماکسیمال است.

(پ) زیر فضاهای تحویلناپذیر ماکسیمال X، بسته هستند و X رامی‌پوشانند. آنها مولفه های تحویلناپذیر X نامیده می شوند. در این صورت مولفه های تحویلناپذیر یک فضای هاسدورف چه چیزهایی هستند؟

(ت) اگر A حلقه‌باشد و $X = Spec(A)$، آنگاه مولفه‌های تحویلناپذیر X، مجموعه‌های بسته $V(\mathfrak{p})$ هستند که $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول مینیمال A است (تمرین ۸).

۲۱. فرض کنید $\phi : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد. فرض کنید $X = Spec(A)$ و $Y = Spec(B)$. اگر $\mathfrak{q} \in Y$ آنگاه $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ ایده‌الی اول از A است، یعنی نقطه ای از X. ازاین رو ϕ نگاشت $\phi^* : Y \longrightarrow X$ راالقا می‌کند. نشان دهید که

(الف) اگر $f \in A$ آنگاه $\phi^{*-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$ و از این رو ϕ^* پیوسته است.

(ب) اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌الی از A باشد آنگاه $\phi^{*-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$.

(پ) اگر $\mathfrak{b}$ ایده‌الی از B باشد آنگاه $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$.

(ت) اگر ϕ پوشا باشد آنگاه ϕ^* یک همسانریختی از Y بروی زیر مجموعه بسته $V(Ker(\phi))$ از X می‌باشد. (به ویژه، $Spec(A)$ و $Spec(A/\mathcal{R})$ (که $\mathcal{R}$ پوچ رادیکال A است) به طور طبیعی همسانریخت هستند .)

(ث) اگر ϕ یک به یک باشد آنگاه $\phi^*(Y)$ در X چگال است. به‌طورصریح‌تر، $\phi^*(Y)$ در X چگال است $\Leftrightarrow$ $Ker(\phi) \subseteq \mathcal{R}$.

(ج) فرض کنید $\psi : B \longrightarrow C$ همریختی حلقه ای دیگری باشد. دراین‌صورت $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

(چ) فرض کنید A حوزه‌ای صحیح با دقیقاً یک ایده ال اول ناصفر $\mathfrak{p}$ باشد و K میدان کسرهای A باشد. فرض کنید $B = (A/\mathfrak{p}) \times K$. دراین‌صورت نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ را با ضابطه $\phi(x) = (\bar{x}, x)$ تعریف کنید که $\bar{x}$ تصویر x در $A/\mathfrak{p}$ است. نشان دهید ϕ^* دوسویی است امّا همسانریختی نیست.

۲۲. فرض کنید $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ حاصلضرب مستقیم حلقه های A_i باشد. نشان دهید $Spec(A)$ اجتماع مجزایی از زیر فضا های باز (و بسته) X_i است

که X_i با $Spec(A_i)$ متعارفاً همسانریخت [۱] است.

برعکس، فرض کنید A حلقه ای دلخواه باشد. نشان دهید گزاره های زیر هم ارزند:

(الف) $X = Spec(A)$ ناهمبند است.

(ب) $A \cong A_1 \times A_2$ که هیچکدام از حلقه های A_1 و A_2، حلقه صفر نیست.

(پ) A شامل عنصر خود توانی بجز 0 و 1 است.

به ویژه، طیف حلقه‌ای موضعی همواره همبند (تمرین ۱۲) است .

۲۳. فرض کنید A حلقه‌ای بولی (تمرین ۱۱) باشد و فرض کنید $X = Spec(A)$.

(الف) به‌ازای هر $f \in A$، مجموعه X_f (تمرین ۱۷) در X هم باز و هم بسته است.

(ب) فرض کنید $f_1, \cdots, f_n \in A$. نشان دهید به ازای $f \in A$ ای، $X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n} = X_f$.

(پ) مجموعه های X_f تنها زیر مجموعه های X هستند که هم باز و هم بسته هستند.

[فرض کنید $Y \subseteq X$ هم باز و هم بسته باشد. چون Y بازاست لذا اجتماعی از مجموعه‌های باز پایه‌ای X_f است. چون Y بسته است و X شبه‌فشرده (تمرین ۱۷) است،در نتیجه Y شبه‌فشرده است. از این رو Y اجتماعی متناهی از مجموعه های باز پایه ای است؛ حال از قسمت (ب) فوق استفاده کنید.]

(ت) X یک فضای هاسدورف فشرده است.

۲۴. فرض کنید L مشبکه‌ای باشد که سوپرمم و اینفیمم دو عنصر a و b به ترتیب با $a \vee b$ و $a \wedge b$ نمایش داده می شوند. L مشبکه‌ای بولی (یا جبر بولی) است اگر

(الف) L دارای کوچکترین عنصر و بزرگترین عنصر باشد (که به ترتیب با

---

[۱] *canonically homeomorphic*

۰ و ۱ نشان داده می شوند).

(ب) هر یک از $\vee$ و $\wedge$ روی دیگری توزیعپذیر باشد.

(پ) هر $a \in L$ دارای « متمم » یکتای $a' \in L$ باشد به طوری که $a \vee a' = 1$ و $a \wedge a' = 0$.

(برای نمونه، مجموعه تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، که با شمول مرتب شده، مشبکه‌ای بولی است.)

فرض کنید L مشبکه‌ای بولی باشد. جمع و ضرب را با قوانین زیر در L تعریف کنید

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b), \qquad ab = a \wedge b.$$

ثابت کنید که به این طریق ، L به حلقه‌ای بولی مثلاً $A(L)$ تبدیل می شود.

برعکس، با شروع از حلقه بولی A، ترتیبی روی A به صورت زیر تعریف کنید: $a \leq b$ یعنی اینکه $a = ab$. نشان دهید که نسبت به این ترتیب، A مشبکه‌ای بولی است. [سوپرمم و اینفیمم به صورت $a \vee b = a + b + ab$ و $a \wedge b = ab$ به دست می آیند و متمم به صورت $a' = 1 - a$ است]. به این طریق ، تناظری یک به یک بین (رده های یکریختی) حلقه های بولی و (رده‌های یکریختی) مشبکه های بولی به دست می آوریم.

۲۵. از دو تمرین قبل، قضیه استون [1] را نتیجه بگیرید مبنی براینکه هر مشبکه بولی با مشبکه زیرمجموعه های باز و بسته از فضای توپولوژیک هاسدورف فشرده ای، یکریخت است.

۲۶. فرض کنید A حلقه باشد. زیر فضای $Spec(A)$ شامل ایده‌ال های ماکسیمال A، نسبت به توپولوژی القایی ، طیف ماکسیمال A نامیده می شود و با $Max(A)$ نشان داده می شود. هر چند برای حلقه های تعویضپذیر دلخواه، دارای ویژگی های تابعگونی زیبای $Spec(A)$ نمی باشد (تمرین ۲۱ را ببینید)، زیرا تصویر معکوس ایده‌الی ماکسیمال تحت یک همریختی حلقه ای، لزوماً ماکسیمال نیست.

[1] *Stone's theorem*

فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده باشد و فرض کنید $C(X)$ حلقه تمام توابع پیوسته حقیقی– مقدار روی X را نشان دهد (جمع کردن و ضرب کردن توابع توسط جمع و ضرب مقادیرشان به دست می‌آیند). به‌ازای هر $x \in X$، فرض کنید m_x مجموعه تمام $f \in C(X)$ ها باشد به طوری که $f(x) = ۰$. ایده ال m_x ماکسیمال است، زیرا هسته ی همریختی (پوشای) $C(X) \longrightarrow \mathrm{R}$ است که f را به $f(x)$ می برد. اگر $\tilde{X}$، $Max(C(X))$ را نشان دهد، آنگاه نگاشت $\mu : X \longrightarrow \tilde{X}$، یعنی $x \mapsto m_x$ ، را تعریف کرده ایم.

نشان خواهیم داد μ یک همسانریختی از X بروی $\tilde{X}$ است.

(الف) فرض کنید m ایده ال ماکسیمال دلخواهی از $C(X)$ باشد و فرض کنید $V = V(m)$ مجموعه صفرهای مشترک توابع موجود در m باشد: یعنی،

$$V = \{x \in X : f(x) = ۰، \text{به ازای هر } f \in m\}.$$

فرض کنید V تهی باشد. در این صورت به‌ازای هر $x \in X$، $f_x \in m$ ای وجود دارد به طوری که $f_x(x) \neq ۰$. چون f_x پیوسته است، لذا همسایگی باز U_x از x در X وجود دارد که f صفر نمی‌شود. بنا به فشردگی ، تعداد متناهی از همسایگی ها مثلاً $U_{x_۱}$، $\cdots$ ، U_{x_n} ، X را می پوشانند. فرض کنید

$$f = f_{x_۱}^۲ + \cdots + f_{x_n}^۲.$$

در این صورت f در هر نقطه‌ای از X صفر نمی شود لذا در $C(X)$ یکه است. امّا این نتیجه با فرض $f \in m$ در تناقض است، از این رو V ناتهی است.

فرض کنید x نقطه ای از V باشد. در این صورت $m \subseteq m_x$، از این رو $m = m_x$ زیرا m ماکسیمال است. در نتیجه، μ پوشا است.

(ب) بنا به لم اوریسون [۱] (این مطلب تنها حقیقت نابدیهی مورد نیاز در این بحث است) توابع پیوسته، نقاط X را تفکیک می کنند. از این رو $x \neq y \;\Rightarrow\; m_x \neq m_y$ و لذا μ یک به یک است.

[۱] *Urysohn's lemma*

(پ) فرض کنید $f \in C(X)$؛ فرض کنید

$$U_f = \{x \in X : f(x) \neq \circ\}$$

و فرض کنید

$$\widetilde{U_f} = \{m \in \tilde{X} : f \notin m\}$$

نشان دهید $\mu(U_f) = \widetilde{U_f}$. مجموعه های باز U_f (به ترتیب ، $\widetilde{U_f}$) پایه ای برای توپولوژی X (به ترتیب ، $\tilde{X}$) تشکیل می دهند و بنابراین μ یک همسانریختی است.

ازاین رو X می تواند توسط حلقه توابع $C(X)$، باز سازی شود.

چند گوناهای جبری آفین

۲۷. فرض کنید k میدانی جبری—بسته باشد و فرض کنید

$$f_\alpha(t_\backslash, \cdots, t_n) = \circ$$

مجموعه معادلات چندجمله ای n متغیره با ضرایبی در k باشد.در این صورت مجموعه X شامل تمام نقاط $x = (x_\backslash, \cdots, x_n) \in k^n$ که در این معادلات صدق می کنند یک چندگونای جبری آفین است.

مجموعه تمام چند جمله‌ای های $g \in k[t_\backslash, \cdots, t_n]$ را با این خاصیت که به‌ازای هر $x \in X$، $g(x) = \circ$ در نظر بگیرید. این مجموعه یک ایده ال $I(X)$ در حلقه چندجمله ای است و ایده‌ال چند گونای X نامیده می شود. حلقه خارج قسمتی

$$P(X) = k[t_\backslash, \cdots, t_n]/I(X)$$

حلقه توابع چند جمله ای روی X است، زیرا دو چند جمله ای g و h، تابع چند جمله ای یکسانی را روی X تعریف می کنند اگر و فقط اگر $g - h$ در هر نقطه از X صفر شود، یعنی اگر و فقط اگر $g - h \in I(X)$.

فرض کنید ξ_i تصویر t_i در $P(X)$ باشد. در این صورت ξ_i ها $(1 \leq i \leq n)$ توابع مختصی روی X هستند : اگر $x \in X$ آنگاه $\xi_i(x)$ مختص i ام x است . $P(X)$ به عنوان یک k —جبر ، توسط توابع مختصی تولید می‌شود و حلقه مختصی (یا جبر آفین) X نامیده می شود.

مشابه تمرین ۲٦، به ازای هر $x \in X$ ، فرض کنید m_x ایده ال همه عناصری مانند $f \in P(X)$ باشد به طوری که $f(x) = 0$؛ درواقع ایده‌الی ماکسیمال از $P(X)$ است. از این رو اگر $\tilde{X} = Max(P(X))$ ، آنگاه نگاشت $\mu : X \longrightarrow \tilde{X}$، یعنی $x \mapsto m_x$ ، را تعریف کرده ایم.

به سادگی نشان داده می شود که μ یک به یک است : اگر $x \neq y$، آنگاه به‌ازای i ای $(1 \leq i \leq n)$ باید داشته باشیم $x_i \neq y_i$ و از این رو $\xi_i - x_i$ در m_x است امّا در m_y نیست، بنابراین $m_x \neq m_y$. آنچه که کمتر بدیهی است (اما همچنان درست می باشد) پوشا بودن μ است. این مطلب ، یکی از صورت های قضیه صفرهای هیلبرت است (فصل ۷ را ببینید).

۲۸. فرض کنید f_1، $\cdots$ ، f_m عناصری از $k[t_1, \cdots, t_n]$ باشند. آنها نگاشت چند جمله‌ای $\phi : k^n \longrightarrow k^m$ را تعیین می کنند : اگر $x \in k^n$ ،آنگاه $f_1(x)$، $\cdots$ ، $f_m(x)$ مختصات $\phi(x)$ هستند.

فرض کنید X و Y به ترتیب چندگوناهای جبری آفین در k^n و k^m باشند. نگاشت $\phi : X \longrightarrow Y$ منظم گفته می شود اگر ϕ تحدید نگاشت چندجمله ای از k^n به k^m ، به X باشد.

اگر η یک تابع چندجمله‌ای روی Y باشد آنگاه $\eta \circ \phi$ یک تابع چندجمله‌ای روی X است. از این رو ϕ یک همریختی k —جبر $P(Y) \longrightarrow P(X)$، یعنی $\eta \mapsto \eta \circ \phi$، را القا می کند. نشان دهید به این طریق ، تناظری یک به یک بین نگاشت های منظم $X \longrightarrow Y$ و همریختی های k —جبر $P(Y) \longrightarrow P(X)$، به‌دست می آوریم.

فصل ۲

مدول ها

یکی از چیزهایی که رویکرد جدید به جبر تعویضپذیر را برجسته می کند، تکیه فراوان روی مدول ها به جای تاکید صرف روی ایده ال هاست. « آزادی عمل» فوق العاده‌ای که این رویکرد ارائه می کند باعث سادگی و وضوح زیادی می شود. مثلاً ایده‌ال $\mathfrak{a}$ و حلقه خارج قسمتی اش $A/\mathfrak{a}$ هر دو نمونه هایی از مدول ها هستند و از این رو تا حدودی می توانندبه طور یکسان مورد بررسی قرار گیرند. در این فصل تعریف و ویژگی های مقدماتی مدول ها را ارائه می‌کنیم. همچنین به طور مختصربه حاصلضربهای تانسوری می پردازیم، شامل بحثی که چگونه با دنباله‌های دقیق رفتار می کنند.

مدول ها و همریختی های مدولی

فرض کنید A حلقه باشد(طبق معمول تعویضپذیر). یک $A-$ مدول ، گروه آبلی M (که به طور جمعی نوشته می شود) است که روی A به طور خطی عمل می کند: به طور صریح تر، زوج (M,μ) است که M گروهی آبلی است و μ نگاشتی از $A \times M$ بتوی M است به طوری که اگر به جای $\mu(a,x)$ $(a \in A, x \in M)$بنویسیم ax، اصول زیر برقرار باشند:

$$
\begin{aligned}
a(x+y) &= ax+ay,\\
(a+b)x &= ax+bx,\\
(ab)x &= a(bx),\\
1x &= x \qquad\qquad (a,b\in A;\ x,y\in M).
\end{aligned}
$$

(به طور هم ارز، M گروهی آبلی است همراه با همریختی حلقه ای $E(M) \longrightarrow A$ که $E(M)$ حلقه درونریختی های گروه آبلی M است.)

مفهوم مدول ، تعمیمی مشترک از تعدادی مفاهیم آشناست، همچنانکه مثال‌های زیر نشان می دهند:

مثال ها. ۱) هر ایده ال a از A ، A– مدول است. به ویژه ، خود A یک A– مدول است.

۲) اگر A میدان k باشد آنگاه A– مدول = k– فضای برداری.

۳) اگر $A = \mathbf{Z}$، آنگاه $\mathbf{Z}$–مدول = گروه آبلی (nx را به صورت $x+\cdots+x$ تعریف کنید).

۴) $A = k[x]$ که k یک میدان است ؛ یک A– مدول ، k– فضای برداری همراه با تبدیل خطی است.

۵) G = گروهی متناهی، $A = k[G]$ = جبر گروهی از G روی میدان k (ازاین رو A تعویضپذیر نیست مگر اینکه G تعویضپذیر باشد). در این صورت A– مدول = k– نمایش [1] G .

فرض کنید M و N، A– مدول هایی باشند. نگاشت $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی A– مدولی (یا A– خطی) است اگر به ازای هر $a \in A$ و هر $x, y \in M$،

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x)+f(y)\\
f(ax) &= a.f(x).
\end{aligned}
$$

---

[1] *k-representation*

از این رو f همریختی گروههای آبلی است که با عمل هر $a \in A$، جابجا می شود. اگر A میدان باشد،آنگاه همریختی $A-$ مدولی همان تبدیل خطی فضاهای برداری است.

ترکیب همریختی های $A-$ مدولی مجدداً همریختی $A-$ مدولی است.

مجموعه تمام همریختی های $A-$ مدولی از M به N می تواند به صورت زیر به یک $A-$ مدول تبدیل شود: $f+g$ و af را توسط قاعده های

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(af)(x) = a.f(x)$$

به ازای هر $x \in M$ ، تعریف می کنیم. بررسی برقرار بودن اصول $A-$مدول، امری بدیهی است. این $A-$ مدول با $Hom_A(M,N)$ (یااینکه اگر هیچ ابهامی درباره حلقه A وجود نداشته باشد فقط با$Hom(M,N)$) نشان داده می شود.

همریختی های $u : M' \longrightarrow M$ و $v : N \longrightarrow N''$ نگاشتهای $\bar{u} : Hom(M,N) \longrightarrow Hom(M',N)$ و $\bar{v} : Hom(M,N) \longrightarrow Hom(M,N'')$ را القا می کند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{u}(f) = f \circ u \ , \ \bar{v}(f) = v \circ f.$$

این نگاشتها، همریختی های $A-$ مدولی هستند.

برای هر مدول M ، یکریختی طبیعی $Hom(A,M) \cong M$ وجود دارد: هر همریختی $A-$ مدولی $f : A \longrightarrow M$ به طور یکتایی توسط$f(۱)$ تعیین می شود که می تواند هر عنصری ازM باشد.

زیر مدول ها و مدول های خارج قسمتی

یک زیر مدول M' از M، زیر گروهی از M است که تحت ضرب در عناصر A بسته است. گروه آبلی M/M' ساختار $A-$ مدولی را از M به ارث می برد که

به صورت $a(x + M') = ax + M'$ تعریف می شود.در این صورت، $A-$ مدول M/M' خارج قسمت M بر M' است. نگاشت طبیعی از M بروی M/M'، همریختی $A-$ مدولی است. یک تناظر حافظ ترتیب یک به یک بین زیر مدول‌های M که شامل M' می شوند و زیر مدولهای M'' وجود دارد (دقیقاً مشابه ایده‌ال ها؛ این گزاره حالت خاصی برای ایده‌ال هاست).

اگر $f : M \longrightarrow N$ همریختی $A-$ مدولی باشد،آنگاه هسته f مجموعه

$$Ker(f) = \{x \in M \ : \ f(x) = 0\}$$

است و زیر مدولی از M است. تصویر f مجموعه

$$Im\ f = f(M)$$

است و زیر مدولی از N است. هم هسته f

$$CoKer(f) = N/Im(f)$$

است که یک مدول خارج قسمتی از N می باشد.

اگر M' زیر مدولی از M باشد به طوری که $M' \subseteq Ker(f)$ ، آنگاه f به همریختی $\bar{f} : M/M' \longrightarrow N$ منتهی می شود که‌به صورت زیر تعریف می‌شود : اگر $\bar{x} \in M/M'$ تصویر $x \in M$ باشد آنگاه $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. هسته $\bar{f}$، $Ker(f)/M'$ است. همریختی $\bar{f}$، القا شده توسط f گفته می شود. به ویژه، با در نظر گرفتن $M' = Ker(f)$ ، یکریختی $A-$ مدولی زیر را به دست می آوریم

$$M/Ker(f) \cong Im(f).$$

اعمال روی زیر مدول ها

بیشتر اعمال روی ایده ال ها که در فصل ۱ در نظر گرفته شدند دارای نظیرهایی برای مدول ها هستند. فرض کنید M ، $A-$ مدول باشد و فرض کنید $(M_i)_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مدول های M باشد. مجموع آنها $\sum M_i$، مجموعه تمام مجموعهای (متناهی) $\sum x_i$ است که به ازای هر $i \in I$ ، $x_i \in M_i$ و تقریباً همه x_i ها (یعنی ، همه بجز تعدادی متناهی) صفر هستند.
$\sum M_i$ کوچکترین زیر مدول M است که تمام M_i ها را شامل می شود.

اشتراک $\bigcap M_i$ مجدداً زیرمدولی از M است. از این رو زیر مدول های M نسبت به شمول ، مشبکه‌ای کامل تشکیل می دهند.

گزاره ۱.۲. (الف) اگر $L \supseteq M \supseteq N$، $A-$ مدول هایی باشند آنگاه

$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

(ب) اگر $M_۱$ و $M_۲$ زیر مدول هایی از M باشند آنگاه

$$(M_۱ + M_۲)/M_۱ \cong M_۲/(M_۱ \cap M_۲).$$

برهان. (الف) نگاشت $\theta : L/N \longrightarrow L/M$ را با ضابطه $\theta(x+N) = x+M$ تعریف کنید. در این صورت θ همریختی $A-$ مدولی خوشتعریفی از L/N بروی L/M است و هسته‌ی آن M/N است؛ از این رو (الف) برقرار است.
(ب) همریختی مرکب $M_۲ \longrightarrow M_۱ + M_۲ \longrightarrow (M_۱ + M_۲)/M_۱$ پوشا است و هسته‌ی آن $M_۱ \cap M_۲$ است؛ از این رو (ب) برقرار است.

در حالت کلی نمی‌توانیم حاصلضرب دو زیر مدول را تعریف کنیم اما می‌توانیم حاصلضرب $\mathfrak{a}M$ را که $\mathfrak{a}$ یک ایده ال و M یک $A-$ مدول است

تعریف کنیم؛ در واقع ، مجموعه تمام مجموعهای متناهی $\sum a_i x_i$ است که $a_i \in \mathfrak{a}$ و $x_i \in M$ و زیر مدولی از M می باشد.

اگر N و P زیر مدول هایی از M باشند،آنگاه $(N : P)$ را به عنوان مجموعه همه عناصر $a \in A$ که $aP \subseteq N$ ، تعریف می کنیم؛ این مجموعه ، ایده الی از A است. به ویژه، $(\circ : M)$ مجموعه همه عناصر $a \in A$ است به طوری که $aM = \circ$؛ این ایده ال، پوچساز M نامیده می شود و نیز با $Ann(M)$ نشان داده می شود. اگر $\mathfrak{a} \subseteq Ann(M)$،آنگاه می توانیم M را به صورت زیر به عنوان یک $A/\mathfrak{a}-$ مدول تلقی کنیم : اگر $\bar{x} \in A/\mathfrak{a}$ با نماینده $x \in A$ باشد،آنگاه $\bar{x}m$ را برابر با xm $(m \in M)$ تعریف کنید: این تعریف مستقل از انتخاب نماینده x از $\bar{x}$ است، زیرا $\mathfrak{a}M = \circ$.

یک $A-$ مدول صادق[1] است اگر $Ann(M) = \circ$. اگر $Ann(M) = \mathfrak{a}$ ، آنگاه M به عنوان یک $A/\mathfrak{a}-$ مدول ، صادق است.

تمرین.۲.۲. (الف) $Ann(M + N) = Ann(M) \cap Ann(N)$.

(ب) $(N : P) = Ann((N + P)/N)$.

اگر x عنصری از M باشد، آنگاه مجموعه تمام مضارب ax $(a \in A)$ زیرمدولی از M است که با Ax یا (x) نشان داده می شود. اگر $M = \sum\limits_{i \in I} Ax_i$، آنگاه به x_i ها مجموعه مولدهای M گفته می شود؛ به این معنی که هر عنصر M می‌تواند (نه لزوماً یکتا) به صورت ترکیب خطی متناهی از x_i ها با ضرایبی در A بیان شود.

یک $A-$ مدول M متناهیاً تولید شده گفته می شود اگر دارای مجموعه‌ای متناهی از مولد ها باشد.

---

[1] از واژه «با وفا» نیز استفاده می شود —م.

مجموع و حاصلضرب مستقیم

اگر M و N، $A-$ مدول هایی دلخواه باشند ، آنگاه مجموع مستقیم آنهاکه با $M \oplus N$ نشان داده می شود، مجموعه تمام زوج‌های (x, y) است به طوری که $x \in M$ و $y \in N$. این مجموعه یک $A-$ مدول است اگر جمع و ضرب اسکالر را به طور معمولی تعریف کنیم:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$a(x, y) = (ax, ay).$$

به طور کلی تر، اگر $(M_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای دلخواه از $A-$ مدول ها باشد آنگاه می‌توانیم مجموع مستقیم آنهارا که با نماد $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ نشان می‌دهیم، تعریف کنیم؛ درواقع عناصرش خانواده‌های $(x_i)_{i \in I}$ هستند که به ازای هر $i \in I$، $x_i \in M_i$ و تقریباً همه x_i ها صفر هستند. اگر محدودیت مربوط به تعداد x های ناصفر را حذف کنیم آنگاه حاصلضرب مستقیم $\prod\limits_{i \in I} M_i$ رابه دست می‌آوریم . بنابراین مجموع مستقیم و حاصلضرب مستقیم یکی هستند اگر مجموعه اندیسگذار I متناهی باشد، اما در غیر این صورت ،حکم در حالت کلی برقرار نیست.

فرض کنید حلقهA، حاصلضرب مستقیم $\prod\limits_{i \in I}^{n} A_i$ باشد(فصل ۱). دراین‌صورت مجموعه تمام عناصری از A به صورت

$$(0, \cdots, 0, a_i, 0, \cdots, 0)$$

که $a_i \in A_i$ ، ایده‌ال $\mathfrak{a}_i$ از A است (البته زیر حلقه‌ای از A نیست — بجز در حالت های بدیهی — زیرا شامل عنصر همانیA نمی شود). حلقه A که به‌عنوان $A-$ مدول در نظر گرفته شده، مجموع مستقیم ایده‌ال های $\mathfrak{a}_1$ ، $\cdots$ ، $\mathfrak{a}_n$ است. برعکس، برای تجزیه مدولی دلخواهی برای A

$$A = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$$

به عنوان مجموعی مستقیم از ایده‌ال ها، به دست می آوریم

$$A \cong \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{b}_i)$$

که $\mathfrak{b}_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathfrak{a}_j$. هر یک از ایده ال های $\mathfrak{a}_i$ ، حلقه‌ای (یکریخت با $A/\mathfrak{b}_i$) است. عنصر همانی e_i از $\mathfrak{a}_i$، در A پوچتوان است و $\mathfrak{a}_i = (e_i)$.

مدول های متناهیاً تولید شده

یک A — مدول آزاد، مدولی است که با A– مدولی به صورت $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ، یکریخت است که هر $A \cong M_i$ (به عنوان A– مدول). گاهی اوقات نماد $A^{(I)}$ به کار می رود. از این رو هر A– مدول آزاد متناهیاً تولید شده یکریخت است با $A \oplus \cdots \oplus A$ (n جمعوند) که با A^n نشان داده می شود. (بنابر قرارداد، A^0 مدول صفر است که با 0 نشان داده می شود.)

گزاره ۳.۲. M ، A– مدولی متناهیاً تولید شده است $\Leftrightarrow$ M با خارج قسمتی از A^n به ازای عدد صحیح $n > 0$ ای ، یکریخت باشد.

برهان.$\Leftarrow$: فرض کنید x_1 ، $\cdots$ ، x_n مدول M را تولید کنند. نگاشت $\phi : A^n \longrightarrow M$ را با ضابطه $\phi(a_1, \cdots, a_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ تعریف کنید. در این صورت ϕ یک همریختی A– مدولی بروی M است و در نتیجه $M \cong A^n/Ker(\phi)$.

$\Rightarrow$: فرض کنیم همریختی A– مدولی ϕ را ازA^n بروی M داریم. اگر $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (که ۱ درمکان i ام قراردارد) ، آنگاه e_iها$(1 \leq i \leq n)$ ، A^n را تولید می کنند درنتیجه $\phi(e_i)$ هاM راتولید می کنند.♣

گزاره ۴.۲. فرض کنید M ، A- مدولی متناهیاً تولید شده، $\mathfrak{a}$ ایده‌الی از A و ϕ درونریختی A- مدولی از M باشد به طوری که $\phi(M) \subseteq \mathfrak{a}M$. دراین‌صورت ϕ در معادله‌ای به صورت

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

صدق می کند که a_i ها در $\mathfrak{a}$ هستند.

برهان. فرض کنید x_1 ، ... ، x_n مجموعه مولدهای M باشند. دراین صورت هر $\phi(x_i) \in \mathfrak{a}M$، بنابراین ، مثلاً به دست می‌آوریم $\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(1 \le i \le n\ ;\ a_{ij} \in \mathfrak{a})$، یعنی ،

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}\phi - a_{ij})x_j = 0$$

که δ_{ij} دلتای کرونکر[1] است. با ضرب کردن طرف چپ در الحاقی ماتریس $(\delta_{ij}\phi - a_{ij})$ ، نتیجه می شود که $\det(\delta_{ij}\phi - a_{ij})$ هر x_i را پوچ می کند، لذا درونریختی صفر از مدول M است. با بسط دادن دترمینان، معادله‌ای به شکل مورد نظربه دست می‌آوریم. ♣

نتیجه ۵.۲. فرض کنید M ، A- مدولی متناهیاً تولید شده باشد و فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌الی ازحلقه A باشد به طوری که $\mathfrak{a}M = M$. در این صورت $x \equiv 1$ (پیمانه$\mathfrak{a}$) وجود دارد به طوری که $xM = 0$

برهان . در گزاره (۴.۲) قرار دهید، نگاشت همانی $= \phi$ و $x = 1 + a_1 + \cdots + a_n$. ♣

[1] *Kronecker delta*

گزاره ۶.۲. (لم ناکایاما). فرض کنید M ، A- مدولی متناهیاً تولید شده و $\mathfrak{a}$ ایده‌الی از A، مشمول در رادیکال جیکوبسن $\mathcal{R}$ از A باشد. در این صورت از $\mathfrak{a}M = M$ نتیجه می شود $M = \circ$.

برهان نخست. بنا به (۵.۲)، به ازای $x \equiv \text{۱} (\mathcal{R}$ پیمانه $)$ ای به‌دست می‌آوریم $xM = \circ$. بنا به (۹.۱)، x در A یکه است از این رو، $M = x^{-\text{۱}}xM = \circ$. ♣

برهان دوم . فرض کنید $M \neq \circ$ و فرض کنید $u_\text{۱}$ ، $\cdots$ ، u_n یک مجموعه مینیمال از مولد های M باشد. در این صورت $u_n \in \mathfrak{a}M$، از این رو معادله‌ای را به صورت $u = a_\text{۱}u_\text{۱} + \cdots + a_nu_n$ به دست می‌آوریم که $a_i \in \mathfrak{a}$. در نتیجه

$$(\text{۱} - a_n)u_n = a_\text{۱}u_\text{۱} + \cdots + a_{n-\text{۱}}u_{n-\text{۱}};$$

چون $a_n \in \mathcal{R}$، از(۹.۱) نتیجه می شود که $\text{۱} - a_n$ در A یکه است. ازاین‌رو u_n به زیر مدول M ، تولید شده توسط $u_\text{۱}$ ، $\cdots$ ، $u_{n-\text{۱}}$ ، تعلق دارد: به تناقض رسیدیم . ♣

نتیجه ۷.۲. فرض کنید M ، A- مدولی متناهیاً تولید شده، N زیر مدولی از M و $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{R}$ ایده‌ال باشد. در این صورت $M = \mathfrak{a}M + N \Rightarrow M = N$.

برهان . گزاره (۶.۲) رابرای M/N به‌کار ببرید ، دراین صورت مشاهده می‌شود که $\mathfrak{a}(M/N) = (\mathfrak{a}M + N)/N$. ♣

فرض کنید A حلقه ای موضعی، m ایده‌ال ماکسیمالش و $k = A/m$ میدان مانده‌ای آن باشد. فرض کنید M ، A- مدولی متناهیاً تولیدشده باشد. دراین صورت M/mM توسط m پوچ می‌شود، از این رو به طور طبیعی یک A/m-مدول است، یعنی ، k- فضای برداری و به معنای دقیقتر متناهی—بعد است.

گزاره ۸.۲. فرض کنید x_i ها ($1 \leq i \leq n$) عناصری از M باشند که تصویرهایشان در M/mM، پایه ای برای این فضای برداری تشکیل می دهند. در این صورت، x_i ها M را تولید می کنند.

برهان. فرض کنید N زیر مدولی از M باشد که توسط x_i ها تولید می شود. در این صورت نگاشت مرکب $N \longrightarrow M \longrightarrow M/mM$، N را بروی M/mM می نگارد، از این رو $N + mM = M$، در نتیجه بنا به (۷.۲)، $N = M$. ♣

دنباله های دقیق

دنباله ای از A — مدول ها و A — همریختی ها

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots \qquad (0)$$

در M_i دقیق گفته می شود اگر $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.این دنباله دقیق است اگر در هر M_i دقیق باشد. به ویژه،

(۱) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ دقیق است $\Leftrightarrow$ f یک به یک باشد ؛

(۲) $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ دقیق است $\Leftrightarrow$ g پوشا باشد ؛

(۳) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ دقیق است $\Leftrightarrow$ f یک به یک باشد ، g پوشا باشد و g یک یکریختی را از $CoKer(f) = M/f(M')$ بروی M'' القا کند.

دنباله ای از نوع (۳) ، دنباله دقیق کوتاه[1] نامیده می شود. هر دنباله دقیق طویل (۰) می‌تواند به دنباله‌های دقیق کوتاه شکافته شود: اگر به ازای هر i ، $N_i = Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$،آنگاه دنباله های دقیق کوتاه $0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow 0$ را به دست می‌آوریم .

گزاره ۹.۲. (الف) فرض کنید

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

[1] از واژه « دنباله کامل کوتاه» نیز استفاده می شود — م .

دنباله ای از $A-$ مدول ها و همریختی ها باشد. در این صورت دنباله (۴) دقیق است $\Leftrightarrow$ به ازای هر $A-$ مدول N، دنباله

$$(۴') \qquad \circ \longrightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} Hom(M', N)$$

دقیق باشد.

(ب) فرض کنید

$$(۵) \qquad \circ \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

دنباله ای از $A-$ مدول ها و همریختی ها باشد. در این صورت دنباله (۵) دقیق است $\Leftrightarrow$ به ازای هر $A-$ مدول M، دنباله

$$(۵') \qquad \circ \longrightarrow Hom(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} Hom(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} Hom(M, N'')$$

دقیق باشد.

همه چهار قسمت این گزاره، تمریناتی ساده هستند. مثلاً ، فرض کنید (۴') به ازای هر N، دقیق باشد. نخست اینکه، چون به ازای هر N، $\bar{v}$ یک به یک است نتیجه می شود که v پوشاست. سپس به‌دست می‌آوریم $\bar{u} \circ \bar{v} = \circ$، یعنی به ازای هر $f : M'' \longrightarrow N$ ، $v \circ u \circ f = \circ$. با قرار دادن M'' به جای N و نگاشت همانی به جای f، نتیجه می شود $v \circ u = \circ$، از این رو $Im(u) \subseteq Ker(v)$. سپس قرار دهید $N = M/Im(u)$ و فرض کنید $\phi : M \longrightarrow N$ نگاشت تصویر باشد. در این صورت $\phi \in Ker(\bar{u})$، از این رو $\psi : M'' \longrightarrow N$ وجود دارد به طوری که $\psi \circ v = \phi$. در نتیجه، $Im(u) = Ker(\phi) \supseteq Ker(v)$. ♣

گزاره۲.۱۰. فرض کنید

$$\begin{array}{ccccccccc}
\circ & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & \circ \\
 & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\
\circ & \longrightarrow & N' & \xrightarrow[u']{} & N & \xrightarrow[v']{} & N'' & \longrightarrow & \circ
\end{array}$$

نموداری تعویضپذیر از A — مدول ها و همریختی ها، با سطرهای دقیق باشد. در این صورت دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow Ker(f') \xrightarrow{\bar{u}} Ker(f) \xrightarrow{\bar{v}} Ker(f'') \xrightarrow{d}$$
$$CoKer(f') \xrightarrow{\bar{u'}} CoKer(f) \xrightarrow{\bar{v'}} CoKer(f'') \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

وجود دارد به طوری که $\bar{u}$ و $\bar{v}$ تحدیدهای u و v هستند و $\bar{u'}$ و $\bar{v'}$ توسط u' و v' القا می شوند.

همریختی مرزی d به صورت زیر تعریف می شود: اگر $x'' \in Ker(f'')$ ، آنگاه به ازای $x \in M$ ای به‌دست می‌آوریم $x'' = v(x)$ و $v'(f(x)) = f''(v(x)) = 0$، ازاین رو $f(x) \in Ker(v') = Im(u')$، بنابراین به‌ازای $y' \in N'$ ای ، $f(x) = u'(y')$. در این صورت $d(x'')$ به عنوان تصویر y' در $CoKer(f')$ تعریف می شود. اثبات اینکه d خوشتعریف است و دنباله (۶) دقیق است، تمرینی ساده در تعقیب نموداراست که به خواننده واگذار می‌کنیم. ♣

تبصره. گزاره (۲.۱۰) حالتی خاص از دنباله دقیق مانستگی [1] در جبر مانستگیی [2] است.

فرض کنید C رده ای از A– مدول ها باشد و فرض کنید λ تابعی روی C با مقادیری در Z (یا به طور کلی تر، با مقادیری در یک گروه آبلی G) باشد. تابع λ جمعی است اگر به ازای هر دنباله دقیق کوتاه (۳) که تمام جمله ها متعلق به C هستند، به دست آوریم $\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$.

مثال فرض کنیدA میدان k باشد و فرض کنید C رده تمام k– فضاهای برداری متناهی — بعد V باشد. در این صورت $V \mapsto \dim V$ یک تابع جمعی

[1] *homology*
[2] *homological algebra*

روی C است.

گزاره ۲.۱۱. فرض کنید $\circ \longrightarrow M_\circ \longrightarrow M_\backslash \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \circ$ دنباله‌ای دقیق از A− مدول ها باشد که تمام مدول های M_i و هسته های تمام همریختی ها، متعلق به C باشند. در این صورت به ازای هر تابع جمعی λ روی C داریم

$$\sum_{i=\circ}^{n}(-\backslash)^i\lambda(M_i) = \circ \quad .$$

برهان . دنباله داده شده را به دنباله های دقیق کوتاه زیر بشکافید $(N_\circ = N_{n+\backslash} = \circ)$

$$\circ \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+\backslash} \longrightarrow \circ$$

در این صورت به دست می آوریم $\lambda(M_i) = \lambda(N_i) + \lambda(N_{i+\backslash})$. حال مجموعهای یکی در میان از $\lambda(M_i)$ ها را در نظر بگیرید و مشاهده می شود که هر جمله‌ای حذف می شود. ♣

حاصلضرب تانسوری مدول ها

فرض کنید M ، N و P سه A− مدول باشند. در این صورت نگاشت $f : M \times N \longrightarrow P$، A− دو خطی گفته می شود اگر به ازای هر $x \in M$ ، نگاشت $y \mapsto f(x,y)$ از N بتوی P، A− خطی باشد و به ازای هر $y \in N$ نگاشت $x \mapsto f(x,y)$ از M بتوی P، A− خطی باشد.

یک A− مدول T، به نام حاصلضرب تانسوری از M و N را با این ویژگی خواهیم ساخت که نگاشت های A− دوخطی $M \times N \longrightarrow P$ به ازای هر A−مدول P ، در تناظر یک به یک طبیعی با نگاشت های A− خطی $T \longrightarrow P$

هستند. به طور صریح تر:

گزاره۲.۱۲. فرض کنید M و N، $A-$ مدول هایی باشند. در این صورت زوج (T,g) شامل $A-$ مدول T و نگاشت $A-$ دوخطی $g: M \times N \longrightarrow T$ با ویژگی های زیر وجود دارد :

به ازای هر $A-$ مدول داده شده P و هر نگاشت $A-$ دوخطی $f: M \times N \longrightarrow P$، نگاشت $A-$ خطی یکتای $f': T \longrightarrow P$ وجود دارد به‌طوری که $f = f' \circ g$ (به عبارت دیگر، هر تابع دو خطی روی $M \times N$ از طریق T تجزیه می شود.)

به علاوه، اگر (T,g) و (T',g') دو زوج با این خاصیت باشند ، آنگاه یکریختی یکتای $j: Y \longrightarrow T'$ وجود دارد به طوری که $j \circ g = g'$.

برهان. (الف) یکتایی. با جایگزینی (P,f) با (T',g')، نگاشت یکتای $j: T \longrightarrow T'$ را به دست می آوریم به طوری که $g' = j \circ g$. با تعویض نقش های T و T'، نگاشت $j': T' \longrightarrow T$ را به دست می آوریم به‌طوری که $g = j' \circ g'$. هر یک از ترکیب های $j \circ j'$ و $j' \circ j$ ، باید همانی باشد و از این رو j یکریختی است.

(ب) وجود. فرض کنید C، A–مدول آزاد $A^{(M \times N)}$ را نشان دهد. عناصر C، ترکیبات خطی صوری از عناصر $M \times N$ با ضرایبی در A هستند، یعنی به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} a_i.(x_i, y_i)$ ($a_i \in A$ ، $x_i \in M$ و $y_i \in N$) بیان می شوند.

فرض کنید D زیر مدولی از C، تولید شده توسط تمام عناصری از C از انواع زیر باشد:

$$(x+x', y) - (x,y) - (x',y)$$
$$(x, y+y') - (x,y) - (x,y')$$
$$(ax, y) - a.(x,y)$$
$$(x, ay) - a.(x,y).$$

فرض کنید $T = C/D$. به ازای هر عنصر پایه‌ای از C، فرض کنید $x \otimes y$ تصویرآن را در T نشان دهد. در این صورت T توسط عناصری به شکل $x \otimes y$ تولید می شود و از تعاریفمان به دست می آوریم

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y, \; x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y',$$

$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$$

به طور هم ارز، نگاشت $g : M \times N \longrightarrow T$، با ضابطه $g(x, y) = x \otimes y$، A–دو خطی است.

هر نگاشت f از $M \times N$ بتوی A– مدول P، به واسطه خطی بودن به همریختی A– مدولی $\bar{f} : C \longrightarrow P$ توسیع می یابد. به ویژه، فرض کنید f، A– دو خطی باشد. در این صورت بنا به تعاریف، $\bar{f}$ روی تمام مولدهای D صفر می شود، در نتیجه روی سراسر D و بنابراین A– همریختی خوشتعریف f' را از $T = C/D$ بتوی P القا می کند به طوری که $f'(x \otimes y) = f(x, y)$. نگاشت f' توسط این شرط به طور یکتا تعریف می شود و بنابراین زوج (T, g) در شرایط گزاره صدق می کنند.♣

تبصره ها. (الف) مدول T که در بالا ساخته شد، حاصلضرب تانسوری M و N نامیده می شود که با $M \otimes_R N$ یا اگر هیچ ابهامی درباره حلقه A وجود نداشته باشد، فقط با $M \otimes N$ نشان داده می‌شود. درواقع به عنوان یک A–مدول توسط« حاصلضربهای » $x \otimes y$ تولید می شود. اگر $(x_i)_{i \in I}$ و $(y_j)_{j \in J}$، به ترتیب خانواده‌هایی از مولدهای M و N باشند آنگاه عناصر $x_i \otimes y_j$، $M \otimes N$ را تولید می کنند. به ویژه، اگر M و N متناهیاً تولید شده باشند ، آنگاه $M \otimes N$ نیزمتناهیاً تولید شده است.

(ب) نماد $x \otimes y$ ذاتاً مبهم است مگراینکه حاصلضرب تانسوری مربوط به آن را مشخص کنیم. فرض کنید M' و N' به ترتیب زیر مدول هایی از M و N باشند و فرض کنید $x \in M'$ و $y \in N'$. در این صورت آنچه

راکه می‌تواند رخ دهد این است که $x \otimes y$ به عنوان عنصری از $M \otimes N$ صفر است در حالی که $x \otimes y$ به عنوان عنصری از $M' \otimes N'$ ناصفر است. برای نمونه، قرار دهید $A = \mathbf{Z}$ ، $M = \mathbf{Z}$ و $N = \mathbf{Z}/۲\mathbf{Z}$ و فرض کنید M' زیر مدول ۲Z از Z باشد در حالی که $N = N'$. فرض کنید x عنصری ناصفر از N باشد و $x \otimes ۲$ را در نظر بگیرید. در این صورت به عنوان عنصری از $M \otimes N$، صفر است زیرا $۲ \otimes x = ۱ \otimes ۲x = ۱ \otimes ۰ = ۰$. امّا به عنوان عنصری از $M' \otimes N'$، ناصفر است. مثال های بعد از (۱۸.۲) را ببینید.

با این وجود، نتیجه زیر موجود است :

نتیجه ۱۳.۲. فرض کنید $x_i \in M$ ها و $y_i \in N$ ها به این صورت باشند که در $M \otimes N$ ، $\sum x_i \otimes y_i = ۰$. در این صورت زیر مدول های متناهیاً تولید شده $M_۰$ از M و $N_۰$ از N وجود دارند به طوری که $\sum x_i \otimes y_i = ۰$ در $M_۰ \otimes N_۰$.

برهان. اگر $\sum x_i \otimes y_i = ۰$ در $M \otimes N$، آنگاه بر حسب نمادهای برهان (۱۲.۲) ، به دست می آوریم $\sum(x_i, y_i) \in D$ و بنابراین $\sum(x_i, y_i)$ مجموعی متناهی از مولدهای D است. فرض کنید $M_۰$ زیر مدولی از M ، تولید شده توسط x_i ها و تمام عناصری از M باشد که به عنوان مختصات اول ، در این مولدهای D رخ می دهند و $N_۰$ را به طور مشابه تعریف کنید. در این صورت $\sum x_i \otimes y_i = ۰$ ، به عنوان عنصری از $M_۰ \otimes N_۰$. ♣

(پ) هیچگاه به استفاده از ساختارحاصلضرب تانسوری ارائه شده در (۱۲.۲) ، مجدداً نیاز نخواهیم داشت و خواننده با اطمینان می تواند آن را فراموش کند اگر ترجیح می دهد. آنچه که اساسی است تا به ذهن سپرده شود ، ویژگی تعریف حاصلضرب تانسوری است.

(ت) به جای شروع کردن با نگاشت های دو خطی، می توانستیم بانگاشت‌های چند خطی $f : M_۱ \times \cdots \times M_r \longrightarrow P$ که با همان شیوه تعریف می شوند (یعنی، خطی بر حسب هر متغیر)، شروع کرده باشیم.

در این صورت با دنبال کردن برهان (۱۲.۲)، بایستی به « حاصلضرب چند—تانسوری» $T = M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ ، تولید شده توسط تمام حاصلضربهای $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ ($x_i \in M_i$ ، $1 \leq i \leq r$) منتهی شویم. جزئیات می توانند با اطمینان به خواننده واگذار شوند؛ نتیجه متناظر با (۱۲.۲) به این صورت است:

گزاره*۱۲.۲. فرض کنید M_1 ، $\cdots$ ، M_r، A– مدول هایی باشند. دراین صورت زوج (T, g) شامل A– مدول T و نگاشت A– چند خطی $g : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow T$ با ویژگی زیر ، وجود دارد:

به ازای هر A– مدول دلخواه P و هر نگاشت A– چند خطی $f : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow T$، A– همریختی یکتای $f' : T \longrightarrow P$ وجود دارد به‌طوری که $f' \circ g = f$.

به علاوه، اگر (T, g) و (T', g') دو زوج با این ویژگی باشند آنگاه یکریختی یکتای $j : T \longrightarrow T'$ وجود دارد به طوری که $j \circ g = g'$. ♣

تعدادی « یکریختی های متعارف » معروف وجود دارند، برخی از آنها را در اینجا بیان می کنیم:

گزاره۱۴.۲. فرض کنید M ، N و P، A– مدول هایی باشند. دراین‌صورت یکریختی های یکتای زیر وجود دارند

(الف) $M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$

(ب) $(M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P) \longrightarrow M \otimes N \otimes P$

(پ) $(M \oplus N) \otimes P \longrightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

(ت) $A \otimes M \longrightarrow M$

به طوری که، به ترتیب،

(یک) $x \otimes y \mapsto y \otimes x$

(دو) $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

(سه) $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$

(چهار) $a \otimes x \mapsto ax$.

برهان. در هر یک از موارد، نکته اصلی این است که نشان داده شود نگاشت‌های توصیف شده خوشتعریف هستند. راهکار مورد نظر، ساختن نگاشت‌های دو خطی یا چند خطی مناسب و به کارگیری خاصیت تعریف شده در (۱۲.۲) یا *(۱۲.۲) است تا وجود همریختی های حاصلضرب های تانسوری نتیجه شود. نیمی از برهان قسمت (ب) را به عنوان نمونه ای از روش اثبات، ثابت خواهیم کرد و باقیمانده را به خواننده واگذار می کنیم.

همریختی های زیر را می‌سازیم

$$(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{f} M \otimes N \otimes P \xrightarrow{g} (M \otimes N) \otimes P$$

به طوری که $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$ و $g(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$، به‌ازای هر $x \in M$ ، $y \in N$ و $z \in P$.

به منظور ساختن f، عنصر $z \in P$ را ثابت در نظر می گیریم. نگاشت $(x, y) \mapsto x \otimes y \otimes z$ $(x \in M$ و $y \in N)$ در x و y ، دوخطی است و در نتیجه همریختی $f_z : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes P$ را القا می‌کند به‌طوری که $f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$. سپس، نگاشت $(t, z) \mapsto f_z(t)$ رااز $(M \otimes N) \times P$ بتوی $M \otimes N \otimes P$ در نظر بگیرید. این نگاشت در t و z دوخطی است و درنتیجه همریختی زیر را القا می‌کند

$$f : (M \otimes N) \otimes P \mapsto M \otimes N \otimes P$$

به طوری که $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$.

به منظور ساختن g، نگاشت $(x, y, z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z$ را از $M \times N \times P$ بتوی $(M \otimes N) \otimes P$ در نظر بگیرید. این نگاشت در هر متغیر، خطی است و بنابراین همریختی زیر را القا می‌کند

$$g : M \otimes N \otimes P \mapsto (M \otimes N) \otimes P$$

به طوری که $g(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.

به وضوح $f \circ g$ و $g \circ f$ نگاشت های همانی هستند، از این رو f و g یکریختی هستند. ♣

تمرین ۱۵.۲. فرض کنید A و B حلقه‌هایی دلخواه باشند، فرض M یک A- مدول، P یک B- مدول و N ، (A, B)- دو مدول باشد(یعنی، N به طور همزمان A- مدول و B- مدول است واین دو ساختار سازگارند یعنی اینکه به‌ازای هر $a \in A$ ، $b \in B$ و $x \in N$ ، $(ax)b = a(xb)$).در این صورت $M \otimes_A N$ به طور طبیعی یک B- مدول، $N \otimes_B P$ یک A- مدول است و به‌دست می آوریم

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

فرض کنید $f : M \longrightarrow M'$ و $g : N \longrightarrow N'$ همریختی های A- مدولی باشند. نگاشت $h : M \times N \longrightarrow M' \otimes N'$ را به صورت $h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$ تعریف کنید. به آسانی بررسی می شود که h، A- دو خطی است و بنابراین همریختی A- مدولی زیر را القا می‌کند

$$f \otimes g : M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

به طوری که

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \qquad (x \in M \ , \ y \in N).$$

فرض کنید $f' : M' \longrightarrow M''$ و $g' : N' \longrightarrow N''$ همریختی های A-مدولی باشند. در این صورت به وضوح همریختی های $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ و $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ روی تمام عناصری به صورت $x \otimes y$ در $M \otimes N$، منطبق هستند. از آنجاییکه این عناصر، $M \otimes N$ را تولید می کنند نتیجه می شود

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

تحدید و توسیع اسکالرها

فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ها باشد و فرض کنید N، B–مدول باشد. دراین صورت N دارای ساختاری A– مدولی است که به صورت زیرتعریف می‌شود: اگر $a \in A$ و $x \in N$ آنگاه ax به صورت $f(a)x$ تعریف می‌شود. به این A– مدول، به دست آمده از N با تحدید اسکالرها گفته می‌شود. به ویژه با این روش، f ساختاری A– مدولی روی B تعریف می کند.

گزاره ۱۶.۲. فرض کنید N به عنوان B– مدول ، متناهیاً تولید شده باشد و B به‌عنوان یک A– مدول ، متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت N به‌عنوان A– مدول ، متناهیاً تولید شده است.

برهان . فرض کنید y_1 ، $\cdots$ ، y_n ،N را روی B تولید کنند و فرض کنید x_1 ، $\cdots$ ، x_m، B را به عنوان A– مدول تولید کنند .در این صورت mn حاصلضرب x_iy_j، N را روی A تولید می کنند. ♣

حال فرض کنید M ، A– مدول باشد. چون بنا بر آنچه دیده‌ایم، B می‌تواند به عنوان A– مدول به حساب آید، می توانیم A– مدول $M_B = B \otimes_A M$ را تشکیل دهیم. در واقع M_B ساختاری B– مدولی را نتیجه می دهد به‌طوری که به‌ازای هر $b, b' \in B$ و هر $x \in M$، $b(b' \otimes x) = bb' \otimes x$. دراین صورت به B– مدول M_B ، به دست آمده از M با توسیع اسکالرها گفته می شود.

گزاره۱۷.۲. اگر M به عنوان A– مدول متناهیاً تولید شده باشد آنگاه M_B به عنوان B– مدول ، متناهیاً تولید شده است.

برهان. اگر x_1 ، $\cdots$ ، x_m، M را روی A تولید کنند آنگاه $1 \otimes x_i$ ها، M_B را روی B تولید می کنند. ♣

ویژگی های دقیق بودن حاصلضرب تانسوری

فرض کنید $f : M\times N \longrightarrow P$ نگاشتی $A-$ دو خطی باشد. به‌ازای هر $x \in M$، نگاشت $y \mapsto f(x,y)$ از N بتوی P، $A-$ خطی است از این رو f به نگاشت $M \longrightarrow Hom(N,P)$ منجر می شود که $A-$ خطی است ، زیرا f بر حسب متغیر x خطی است. بر عکس ، هر $A-$ همریختی $\phi : M \longrightarrow Hom_A(N,P)$ نگاشتی دو خطی، یعنی $(x,y) \mapsto \phi(x)(y)$، را تعریف می کند. از این رو مجموعه S شامل نگاشت های $A-$ دو خطی $M\times N \longrightarrow P$ ، در تناظر یک به یک طبیعی با $Hom(M,Hom(N,P))$ است. از طرف دیگر، بنا به ویژگی تعریفی حاصلضرب تانسوری، S در تناظر یک به یک با$Hom(M\otimes N,P)$ است. ازاین رو یکریختی متعارف زیر را به دست می آوریم

$$Hom(M\otimes N,P) \cong Hom(M,Hom(N,P)). \tag{۱}$$

گزاره ۱۸.۲. فرض کنید

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{۲}$$

دنباله‌ای دقیق از A–مدول ها وهمریختی هاباشد و فرض کنید N ، A–مدولی دلخواه باشد. در این صورت دنباله

$$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M''\otimes N \longrightarrow 0 \tag{۳}$$

(که ۱ نگاشت همانی روی N رانشان می دهد) دقیق است.

برهان. فرض کنید E دنباله (۲) را نشان دهد و فرض کنید $E\otimes N$ دنباله (۳) را نشان دهد. فرض کنید P، $A-$ مدولی دلخواه باشد. چون دنباله (۲) دقیق است ، لذا دنباله $Hom(E,Hom(N,P))$ بنا به (۹.۲) ، دقیق است؛ ازاین رو بنا به (۱)، دنباله $Hom(E\otimes N,P)$ دقیق است. مجدداً بنا به (۹.۲)، نتیجه می شود که $E\otimes N$ دقیق است.♣

تبصره ها. (الف) فرض کنید $T(M) = M \otimes N$ و $U(P) = Hom(N, P)$. در این صورت (۱)، به ازای هر A- مدول M و P، به شکل $Hom(T(M), P) = Hom(M, U(P))$ در می آید. به بیان مجرد ، تابعگون T الحاقی چپ U است و U الحاقی راست T است. برهان (۱۸.۲) نشان می دهد که هر تابعگونی که الحاقی چپ است، دقیق راست است. به همین صورت هر تابعگونی که الحاقی راست است، دقیق چپ است.

(ب) در حالت کلی درست نیست که اگر $M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ دنباله‌ای دقیق از A- مدول ها و همریختی ها باشد ،آنگاه دنباله $M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N$ که از حاصلضرب تانسوری با A- مدول دلخواه N به دست آمده، دقیق است.

مثال. قرار دهید $A = \mathbf{Z}$ و دنباله دقیق $\circ \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}$ را در نظر بگیرید که به ازای هر $x \in \mathbf{Z}$ ، $f(x) = ۲x$. اگر با $N = \mathbf{Z}/۲\mathbf{Z}$ حاصلضرب تانسوری کنیم،آنگاه دنباله $\circ \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes N \xrightarrow{f \otimes ۱} \mathbf{Z} \otimes N$ دقیق نیست، زیرا به‌ازای هر $x \otimes y \in \mathbf{Z} \otimes N$، به دست می آوریم

$$(f \otimes ۱)(x \otimes y) = ۲x \otimes y = x \otimes ۲y = x \otimes \circ = \circ,$$

در نتیجه $f \otimes ۱$ نگاشت صفر است، در حالی که $\mathbf{Z} \otimes N \neq \circ$.

ازاین رو تابعگون $T_N : M \mapsto M \otimes_A N$ روی رسته A- مدول ها و همریختی ها در حالت کلی دقیق نیست. اگر T_N دقیق باشد، یعنی اینکه هرگاه با N حاصلضرب تانسوری شود تمام دنباله های دقیق را به دنباله های دقیق تبدیل کند، آنگاه به N ، A- مدولی تخت [1] گفته می شود.

گزاره ۱۹.۲. گزاره‌های زیر به ازای هر A- مدول N، هم ارزند:

(الف) N تخت است.

[1] از واژه « یکدست » نیز استفاده می شود —م .

(ب) اگر $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ دنباله دقیق دلخواهی از A-مدول ها باشد، آنگاه دنباله تانسوری شده زیر دقیق است

$$0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0.$$

(پ) اگر $f : M' \longrightarrow M$ یک به یک باشد ، آنگاه نگاشت $f \otimes 1 : M' \otimes M \longrightarrow M \otimes N$ یک به یک است.

(ت) اگر $f : M' \longrightarrow M$ یک به یک باشد و M و M' متناهیاً تولید شده باشند، آنگاه $f \otimes 1 : M' \otimes M \longrightarrow M \otimes N$ یک به یک است.

برهان. (الف) $\Leftrightarrow$ (ب) با شکافتن دنباله دقیق طویل به دنباله های دقیق کوتاه، حکم برقرار است.

(ب) $\Leftrightarrow$ (پ) از (۱۸.۲) نتیجه می شود.

(ت) $\Rightarrow$ (پ) واضح است.

(پ) $\Rightarrow$ (ت) . فرض کنید $f : M' \longrightarrow M$ یک به یک باشد و فرض کنید $u = \sum x_i \otimes y_i \in Ker(f \otimes 1)$، بنابراین $\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0$ در $M \otimes N$. فرض کنید M'_0 زیر مدولی از M' ، تولید شده توسط x'_i ها باشد و فرض کنید u_0، $\sum x'_i \otimes y_i$ را به عنوان عنصری از $M'_0 \otimes N$ نشان دهد. بنا به (۱۴.۲)، زیر مدول متناهیاً تولید شده M_0 از M وجود دارد که شامل $f(M'_0)$ می‌شود و به طوری که $\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0$ به عنوان عنصری از $M_0 \otimes N$. اگر $f_0 : M'_0 \longrightarrow M_0$ تحدید f باشد، به این معنی است که $(f_0 \otimes 1)(u_0) = 0$. چون M_0 و M'_0 متناهیاً تولید شده هستند، در نتیجه $f_0 \otimes 1$ یک به یک است و بنابراین $u_0 = 0$، از این رو $u = 0$. ♣

تمرین ۲۰.۲. اگر $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد و M ، A- مدولی تخت باشد آنگاه $M_B = B \otimes_A M$ ، B- مدولی تخت است. (یکریختی‌های متعارف (۱۴.۲) و (۱۵.۲)را به کار ببرید.)

جبرها

فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد. اگر $a \in A$ و $b \in B$،آنگاه حاصلضرب را به صورت زیر تعریف کنید

$$ab = f(a)b.$$

این تعریف حاصلضرب اسکالر، حلقه B را به یک $A-$ مدول تبدیل می کند (در واقع نمونه ای خاص از تحدید اسکالرها می باشد). از این رو B علاوه بر ساختار حلقه‌ای ، دارای ساختار $A-$ مدولی است و این دو ساختار سازگار هستند، از این جهت خواننده قادر خواهد بود تا برای خودش الگوبندی کند. به حلقه B که به این ساختار $A-$ مدولی مجهز شده است ، $A-$ جبر گفته می‌شود. از این رو یک $A-$ جبر، بنا به تعریف ، حلقه B همراه با همریختی حلقه ای $f : A \longrightarrow B$ است.

تبصره‌ها. (الف) به ویژه، اگر A میدان K باشد(و $B \neq 0$) آنگاه f بنا به (۲.۱)، یک به یک است و لذا K می تواند به طور متعارفی با تصویرش در B منطبق شود. از این رو $K-$ جبر (K میدان) در واقع حلقه‌ای شامل K به عنوان یک زیر حلقه، می باشد.

(ب) فرض A حلقه‌ای دلخواه باشد. چون A دارای عنصر همانی است، در نتیجه همریختی یکتایی از حلقه اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ بتوی A، یعنی $n \mapsto n.1$، وجود دارد. از این رو هر حلقه به طور خودکار یک $\mathbf{Z}-$ جبر می باشد.

فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ دو همریختی حلقه ای باشند. همریختی $A-$ جبر $h : B \longrightarrow C$، یک همریختی حلقه‌ای است که همریختی $A-$ مدولی نیز می باشد. خواننده باید ثابت کند که h یک همریختی $A-$ جبر است اگر وفقط اگر $h \circ f = g$.

همریختی حلقه‌ای $f : A \longrightarrow B$ متناهی است و B یک A- جبر متناهی است اگر B به عنوان A- مدول ، متناهیاً تولید شده باشد. همریختی f از نوع متناهی است و B ، A- جبری متناهیاً تولید شده است اگر مجموعه‌ای متناهی شامل عناصر x_1 ، $\cdots$ ، x_n در B موجود باشد به طوری که هر عنصری از B بتواند به عنوان یک چند جمله ای بر حسب x_1 ، $\cdots$ ، x_n با ضرایبی در $f(A)$ نوشته شود؛ یا به طور هم ارز، اگر همریختی A- جبری از حلقه چند جمله ای $A[t_1, \cdots, t_n]$ بروی B موجود باشد.

حلقه A متناهیاً تولید شده گفته می شود اگر به عنوان $\mathbf{Z}$- جبر، متناهیاً تولید شده باشد. به این معنی که تعدادی متناهی از عناصر x_1 ، $\cdots$ ، x_n در A موجود باشند به طوری که هر عنصری از A بتواند به عنوان یک چند جمله‌ای بر حسب x_i ها با ضرایب صحیح گویا نوشته شود.

حاصلضرب تانسوری جبرها

فرض کنید B و C دو A- جبر، $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ همریختی های متناظر باشند.چون B و C، A- مدول هستند از این رو می توانیم حاصلضرب تانسوری آنها، یعنی $D = B \otimes_A C$ را تشکیل دهیم، که یک A- مدول است. حال ضربی را روی D تعریف خواهیم کرد.

نگاشت $B \times C \times B \times C \longrightarrow D$ را با ضابطه

$$(b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$$

در نظر بگیرید. این نگاشت نسبت به هر عامل، A- خطی است و لذا بنا به *(۱۲.۲)، همریختی A- مدولی زیر را القا می کند

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \longrightarrow D,$$

از این رو بنا به (۱۴.۲)، همریختی A- مدولی زیر نتیجه می‌شود

$$D \otimes D \longrightarrow D$$

و این همریختی، بنا به (۱۱.۲) ، با نگاشت A− دو خطی

$$\mu : D \times D \longrightarrow D$$

متناظر می شود که به صورت زیراست

$$\mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

البته می توانستیم این فرمول را به طور مستقیم بنویسیم امّا بدون چنین بحثی، هیچ تضمینی را مبنی بر خوشتعریفی μ ارائه نکرده‌ایم.

از این رو ضربی را روی حاصلضرب تانسوری $D = B \otimes_A C$ تعریف کرده‌ایم: برای عناصری به شکل $b \otimes c$ ، به صورت زیر است

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc',$$

و به طور کلی

$$(\sum_i (b_i \otimes c_i))(\sum_j (b'_j \otimes c'_j)) = \sum_{i,j} (b_i b'_j \otimes c_i c'_j).$$

خواننده باید بررسی کند که با این ضرب، D حلقه‌ای تعویضپذیر با عنصر همانی $1 \otimes 1$ است. به علاوه، D یک A− جبر است: نگاشت $a \mapsto f(a) \otimes g(a)$ همریختی حلقه‌ای $A \longrightarrow D$ است.

در واقع نموداری تعویضپذیر از همریختی های حلقه‌ای وجود دارد

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "u"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & D \\ & C \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

که در آن، برای نمونه ، همریختی u به صورت $u(b) = b \otimes 1$ تعریف می شود.

تمرینات

۱. نشان دهید که اگر m و n متباین (نسبت به هم اول) باشند آنگاه

$$(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0.$$

۲. فرض کنید A حلقه، $\mathfrak{a}$ ایده‌ال و M ، A– مدول باشد. نشان دهید $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ با $M/\mathfrak{a}M$ یکریخت است.
[دنباله دقیق $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$ را با M حاصلضرب تانسوری کنید.]

۳. فرض کنید A حلقه‌ای موضعی باشد، M و N، A– مدول هایی متناهیاً تولید شده باشند. ثابت کنید اگر $M \otimes N = 0$ آنگاه $M = 0$ یا $N = 0$.
[فرض کنید m ایده ال ماکسیمال و $k = A/m$ میدان مانده‌ای باشد. بنا به تمرین ۲ ، فرض کنید $M_k = k \otimes_A M \cong M/mM$. در این صورت بنا به لم ناکایاما، $M_k = 0 \Rightarrow M = 0$. امّا $M \otimes_A N = 0 \Rightarrow (M \otimes_A N)_k = 0 \Rightarrow M_k \otimes_k N_k = 0 \Rightarrow M_k = 0$ یا $N_k = 0$ زیرا M_k و N_k فضاهایی برداری روی یک میدان هستند.]

۴. فرض کنید M_i ها$(i \in I)$ خانواده‌ای دلخواه از A– مدول هاباشند و فرض کنید M مجموع مستقیم آنها باشد. ثابت کنید M تخت است $\Leftrightarrow$ هر M_i تخت باشد.

۵. فرض کنید $A[x]$ حلقه چند جمله‌ای های یک مجهولی روی حلقه A باشد. ثابت کنید که $A[x]$ ، A– جبری تخت است. [از تمرین ۴ استفاده کنید.]

۶. برای هر A– مدول، فرض کنید $M[x]$ مجموعه تمام چند جمله‌ای های از مجهول x و با ضرایبی در M را نشان دهد، یعنی، عبارت هایی به صورت

$$m_0 + m_1 x + \cdots + m_r x^r \qquad (m_i \in M).$$

با تعریف حاصلضرب عنصری از $A[x]$ و عنصری از $M[x]$ به طور معمولی ، نشان دهید که $M[x]$ یک $A[x]$– مدول است.

نشان دهید $M[x] \cong A[x] \otimes_A M$.

۷. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول در A باشد. نشان دهید $\mathfrak{p}[x]$ ایده‌الی اول در $A[x]$ است. اگر m ایده الی ماکسیمال در A باشد، آیا $m[x]$ ایده الی ماکسیمال در $A[x]$ است؟

۸. (الف) اگر M و N، A– مدول هایی تخت باشند آنگاه $M \otimes_A N$ نیز تخت است.

(ب) اگر B ، A– جبری تخت باشد و N، B– مدولی تخت باشد آنگاه N نیز A– مدولی تخت است.

۹. فرض کنید $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از A–مدول ها باشد. اگر M' و M'' متناهیاً تولید شده باشند ، آنگاه M نیز متناهیاً تولید شده است.

۱۰. فرض کنید A حلقه و $\mathfrak{a}$ ایده‌الی مشمول در رادیکال جیکوبسن A باشد؛ فرض کنید M یک A– مدول و N ، A– مدولی متناهیاً تولید شده باشد و فرض کنید $u : M \longrightarrow N$ همریختی باشد. اگر همریختی القا شده $M/\mathfrak{a}M \longrightarrow N/\mathfrak{a}N$ پوشا باشد ، آنگاه u پوشا است.

۱۱. فرض کنید A حلقه‌ای ناصفر باشد. نشان دهید که $A^m \cong A^n \Rightarrow m = n$.

[فرض کنید m ایده‌الی ماکسیمال از A باشد و فرض کنید $\phi : A^m \longrightarrow A^n$ یکریختی باشد. در این صورت $1 \otimes \phi : (A/m) \otimes A^m \longrightarrow (A/m) \otimes A^n$ یک یکریختی بین فضاهای برداری با بعدهای m و n روی میدان $k = A/m$ است. از این رو $m = n$.] (رجوع کنید به فصل ۳، تمرین ۱۵.)

اگر $\phi : A^m \longrightarrow A^n$ پوشا باشد آنگاه $m \geq n$.

اگر $\phi : A^m \longrightarrow A^n$ یک به یک باشد آیا حالت $m \leq n$ همواره برقرار است؟

۱۲.فرض کنید M ، A– مدولی متناهیاً تولید شده و $\phi : M \longrightarrow A^n$ یک همریختی پوشا باشد. نشان دهید $Ker(\phi)$ متناهیاً تولید شده است.

[فرض کنید e_1 ، $\cdots$ ، e_n پایه ای برای A^n باشند و $u_i \in M$ را طوری انتخاب

کنید که $\phi(u_i) = e_i$ $(1 \leq i \leq n)$. نشان دهید M مجموع مستقیم $Ker(\phi)$ و زیرمدول تولید شده توسط u_1 ، $\cdots$ ، u_n است.]

۱۳. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای و N ، $B-$ مدول باشد. با در نظر گرفتن N به عنوان $A-$ مدولی با تحدید اسکالرها، $B-$ مدول $N_B = B \otimes_A N$ را تشکیل دهید. نشان دهید همریختی $g : N \longrightarrow N_B$ که y را به $1 \otimes y$ می نگارد، یک به یک است و همچنین ، $g(N)$ جمعوند مستقیم N_B است.

[نگاشت $p : N_B \longrightarrow N$ را با ضابطه $p(b \otimes y) = by$ تعریف کنید و نشان دهید $N_B = Im(g) \oplus Ker(p)$.]

حد های مستقیم

۱۴. مجموعه جزئاً مرتب I، مجموعه‌ای سودار گفته می شود اگر به ازای هر زوج i و j در I، $k \in I$ موجود باشد به طوری که $i \leq k$ و $j \leq k$.

فرض کنید A یک حلقه ، I مجموعه‌ای سودار و $(M_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از $A-$مدول های اندیسگذاری شده توسط I باشد. به ازای هر زوج i و j در I که $i \leq j$، فرض کنید $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ یک $A-$همریختی باشد و فرض کنید که اصول زیر برقرار باشند:

(۱) به ازای هر $i \in I$ ، μ_{ii} نگاشت همانی M_i است ؛

(۲) $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$ زمانی که $i \leq j \leq k$.

در این صورت گوییم مدول های M_i و همریختی های μ_{ij} ، دستگاه مستقیم $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$ را روی مجموعه سودار I تشکیل می‌دهند.

$A-$ مدول M را که حد مستقیم دستگاه $\mathbf{M}$ نامیده می شود ، خواهیم ساخت . فرض کنید C مجموع مستقیم M_i ها باشد و هر مدول M_i را با تصویر متعارفش در C ، یکی بگیرید. فرض کنید D زیرمدولی از C ، تولید شده توسط تمام عناصری به صورت $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ باشد که $i \leq j$ و $x_i \in M_i$. فرض کنید $M = C/D$ ، $\mu : C \longrightarrow M$ نگاشت تصویر و μ_i تحدید μ به M_i باشد.

مدول M یا به طور صحیح تر زوج شامل M و خانواده همریختی های $M \longrightarrow M_i : \mu_i$ ، حد مستقیم دستگاه مستقیم M نامیده می شود و به‌صورت $\varinjlim M_i$ نوشته می شود. از طریقه ساختن واضح است که $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ زمانی‌که $i \leq j$.

۱۵. با شرایط تمرین ۱۴، نشان دهید هر عنصری از M می تواند به ازای $i \in I$ ای و به ازای $x_i \in M_i$ ای، به صورت $\mu_i(x_i)$ نوشته شود.

همچنین ، نشان دهید که اگر $\mu_i(x_i) = \circ$ آنگاه $j \geq i$ وجود دارد به طوری که $\mu_{ij}(x_i) = \circ$ در M_j.

۱۶. نشان دهید حد مستقیم (تا حد یکریختی) با ویژگی زیر مشخص می شود. فرض کنید N ، A– مدول باشد و به ازای هر $i \in I$ ، فرض کنید $\alpha_i : M_i \longrightarrow N$ همریختی A– مدولی باشد به طوری که $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ زمانی‌که $i \leq j$. در این صورت همریختی یکتای $\alpha : M \longrightarrow N$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $i \in I$ ، $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$.

۱۷. فرض کنید $(M_i)_{i \in I}$ خانواده ای از زیر مدول های یک A– مدول باشد به طوری که به ازای هر زوج از اندیس های i و j در I، $k \in I$ موجود باشد به‌طوری که $M_i + M_j \subseteq M_k$. در این صورت $i \leq j$ را به معنی $M_i \subseteq M_j$ تعریف کنید و فرض کنید $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ نگاشت نشاندن از M_i در M_j باشد. نشان دهید که

$$\varinjlim M_i = \sum M_i = \bigcup M_i$$

به ویژه، هر A– مدولی حد مستقیم زیر مدول های متناهیاً تولید شده آن است.

۱۸.فرض کنید $\mathrm{M} = (M_i, \mu_{ij})$ و $\mathrm{N} = (N_i, \nu_{ij})$ دستگاه هایی مستقیم از A– مدول ها روی مجموعه سودار یکسانی باشند. فرض کنید M و N حدهای مستقیم و $\mu_i : M_i \longrightarrow M$ و $\nu_i : N_i \longrightarrow N$ همریختی های وابسته باشند.

بنا به تعریف ، همریختی $\Phi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ خانواده‌ای از همریختی های A–مدولی $\phi_i : M_i \longrightarrow N_i$ است به طوری که $\phi_j \circ \mu_{ij} = \nu_{ij} \circ \phi_i$ زمانی که

$i \leq j$. نشان دهید که ϕ همریختی یکتای $\phi = \varinjlim \phi_i : M \longrightarrow N$ را تعریف می‌کند به طوری که به ازای هر $i \in I$، $\phi \circ \mu_i = \nu_i \circ \phi_i$.

۱۹. دنباله ای از دستگاه های مستقیم و همریختی ها، مانند

$$\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{P}$$

دقیق است اگر دنباله متناظر از مدول ها و همریختی های مدولی به ازای هر $i \in I$، دقیق باشد. نشان دهید دنباله $M \longrightarrow N \longrightarrow P$ از حدهای مستقیم، دقیق است. [از تمرین ۱۵ استفاده کنید.]

حاصلضرب های تانسوری باحدهای مستقیم جابجا می‌شوند

۲۰. با حفظ کردن همان نمادهای تمرین ۱۴، فرض کنید N، $A-$ مدولی دلخواه باشد. در این صورت $(M_i \otimes N, \mu_{ij} \otimes 1)$ دستگاهی مستقیم است؛ فرض کنید $P = \varinjlim (M_i \otimes N)$ حد مستقیم آن باشد. برای هر $i \in I$، همریختی $\mu_i \otimes 1 : M_i \otimes N \longrightarrow M \otimes N$ را به دست می آوریم ، از این رو بنا به تمرین ۱٦، همریختی $\psi : P \longrightarrow M \otimes N$ وجود دارد. نشان دهید ψ یکریختی است به طوری که

$$\varinjlim (M_i \otimes N) \cong (\varinjlim M_i) \otimes N.$$

[به ازای هر $i \in I$، فرض کنید $g_i : M_i \times N \longrightarrow M_i \otimes N$ نگاشت دو خطی متعارف باشد. با گرفتن حد، نگاشت $g : M \times N \longrightarrow P$ را به دست می آوریم. نشان دهید g، $A-$ دو خطی است واز این رو همریختی $\phi : M \otimes N \longrightarrow P$ را تعریف کنید.ثابت کنید $\phi \circ \psi$ و $\psi \circ \phi$ نگاشت های همانی هستند.]

۲۱. فرض کنید $(A_i)_{i \in I}$ خانواده ای از حلقه های اندیسگذاری شده توسط مجموعه سودار I باشد و به ازای هر زوج $i \leq j$ در I ، فرض کنید $\alpha_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ همریختی حلقه ای باشد که در شرطهای (۱)و(۲) از تمرین ۱۴ صدق می‌کند. با در نظر گرفتن هر A_i به عنوان $\mathbf{Z}-$ مدول، می توانیم حد مستقیم $A = \varinjlim A_i$ را تشکیل دهیم. نشان دهید که A ساختار حلقه ای را از

A_i ها به ارث می برد، لذا نگاشت های $A_i \longrightarrow A$، همریختی‌های حلقه‌ای هستند. حلقه A، حد مستقیم دستگاه (A_i, α_{ij}) است.

اگر $A = \circ$،آنگاه ثابت کنید که به ازای $i \in I$ ای ، $A_i = \circ$. [به خاطر آورید که تمام حلقه ها دارای عناصر همانی هستند!]

۲۲. فرض کنید (A_i, α_{ij}) دستگاهی مستقیم از حلقه هاباشد و فرض کنید $\mathcal{R}_i$ پوچ رادیکال A_i باشد. نشان دهید $\varinjlim \mathcal{R}_i$، پوچ رادیکال $\varinjlim A_i$ است.

اگر هر A_i حوزه‌ای صحیح باشد آنگاه $\varinjlim A_i$ حوزه‌ای صحیح است.

۲۳. فرض کنید $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده ای از $A-$ جبرها باشد. برای هر زیرمجموعه متناهی از Λ، فرض کنیدB_J حاصلضرب تانسوری (روی A) از B_λ ها را برای $\lambda \in J$، نشان دهد. اگر J' زیر مجموعه متناهی دیگری از Λ باشد و $J \subseteq J'$، آنگاه یک همریختی $A-$ جبر متعارف $B_J \longrightarrow B_{J'}$ وجود دارد. فرض کنید B حد مستقیم حلقه های B_J را نشان دهد زمانی که J روی تمام زیر مجموعه‌های متناهی از Λ تغییر می کند. حلقه B دارای ساختار $A-$ جبر طبیعی است به طوری که همریختی های $B_J \longrightarrow B$، همریختی های $A-$ جبر هستند. در این صورت $A-$ جبر B ، حاصلضرب تانسوری خانواده $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ است.

تخت بودن و تابعگون Tor

در این تمرینات فرض خواهد شد که خواننده با تعریف و خواص پایه ای تابعگون Tor آشنا است.

۲۴. اگر M یک $A-$ مدول باشد ، آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) M تخت است؛

(ب) به ازای هر $n > \circ$ و هر $A-$ مدول N، $Tor_n^A(M,N) = \circ$؛

(پ) به ازای هر $A-$ مدول N، $Tor_1^A(M,N) = \circ$.

[به منظور نشان دادن (ب) $\Rightarrow$ (الف) ، تحلیلی آزاد از N را در نظر بگیرید و آن را با M حاصلضرب تانسوری کنید. چون M تخت است، در نتیجه دنباله

به دست آمده دقیق است و لذا گروههای مانستگی آن که $Tor_n^A(M,N)$ ها هستند، به‌ازای هر $n > ۰$ ، صفر هستند. به منظور نشان دادن (الف) $\Rightarrow$ (پ)، فرض کنید $۰ \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow ۰$ دنباله‌ای دقیق باشد. در این صورت بنا به دنباله دقیق تابعگون Tor ،

$$Tor_۱(M,N'') \longrightarrow M \otimes N' \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M \otimes N'' \longrightarrow ۰$$

دقیق است. چون $Tor_۱(M,N'') = ۰$ ، نتیجه می شود که M تخت است.]

۲۵. فرض کنید $۰ \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow ۰$ دنباله ای دقیق باشد، به طوری که N'' تخت است. در این صورت N' تخت است $\Leftrightarrow$ N تخت باشد.
[تمرین ۲۴ و دنباله دقیق تابعگون Tor را به کار ببرید.]

۲۶. فرض کنید N ، A– مدول باشد. در این صورت ، N تخت است $\Leftrightarrow$ به ازای هر ایده‌ال متناهیاً تولید شده a در A، $Tor_۱(A/\mathrm{a},N) = ۰$.
[نخست با استفاده از (۱۹.۲)، نشان دهید که N تخت است اگر به ازای هر A– مدول متناهیاً تولید شده M، $Tor_۱(M,N) = ۰$. اگر M متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه فرض کنید $x_۱$ ، ... ، x_n مجموعه مولدهای M باشند و فرض کنید M_i زیرمدول تولید شده توسط $x_۱$ ، ... ، x_i باشد. با در نظر گرفتن خارج‌قسمت‌های متوالی $M_i/M_{i-۱}$ و استفاده از تمرین ۲۵، نتیجه بگیرید که N تخت است اگر به ازای هر A– مدول دوری M، یعنی همه‌ی M توسط تک عنصر تولید می شود، داشته باشیم $Tor_۱(M,N) = ۰$ و لذا به ازای ایده‌ال a ای ، به صورت A/a می باشد. بالاخره با استفاده مجدد از (۱۹.۲)، به حالتی که a ایده‌الی متناهیاً تولید شده‌است ، تبدیل کنید.]

۲۷. حلقه A مطلقاً تخت است اگر هر A– مدول ، تخت باشد. ثابت کنید گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) A مطلقاً تخت است.

(ب) هر ایده ال اصلی خودتوان است.

(پ) هر ایده ال متناهیاً تولید شده یک جمعوند مستقیم از A است.

[(ب) $\Rightarrow$ (الف). فرض کنید $x \in A$.در این صورت $A/(x)$ ، $A-$ مدولی تخت است، ازاین رو در نمودار

$$\begin{array}{ccc} (x)\otimes A & \xrightarrow{\beta} & (x)\otimes A/(x) \\ \downarrow & & \downarrow\alpha \\ A & \longrightarrow & A/(x) \end{array}$$

نگاشت α یک به یک است . درنتیجه $Im(\beta) = 0$، از این رو $(x^2) = (x)$.
(پ) $\Rightarrow$ (ب) . فرض کنید $x \in A$. در این صورت به ازای $a \in A$ ای ، $x = ax^2$، از این رو ، $e = ax$ خودتوان است و به دست می آوریم $(e) = (x)$. حال اگر e و f خود توان باشند آنگاه $(e, f) = (e + f - ef)$. از این رو هر ایده‌ال متناهیاً تولید شده، اصلی است و توسط عنصر خودتوان e تولید می شود، در نتیجه جمعوندی مستقیم است زیرا $A = (e) \oplus (1 - e)$. (الف) $\Rightarrow$ (پ) : معیار تمرین ۲۶ را به کار ببرید.]

۲۸. هر حلقه بولی مطلقاً تخت است. حلقه بیان شده در تمرین ۷ از فصل ۱ ، مطلقاً تخت است. هر تصویر همریخت از حلقه‌ای مطلقاً تخت، مطلقاً تخت است. اگر حلقه‌ای موضعی ، مطلقاً تخت باشد آنگاه میدان است.

اگر A مطلقاً تخت باشد ، آنگاه هر نایکه‌ای (عنصر معکوس ناپذیری) در A، یک مقسوم علیه صفر است .

فصل ۳

حلقه‌هاو مدولهای کسرها

تشکیل حلقه های کسرها و فرایند مربوط به موضعی سازی، شاید از مهمترین ابزارهای تکنیکی در جبر تعویضپذیر هستند. آنها در توصیفی جبری—هندسی با توجهی متمرکز روی مجموعه ای باز یا حول یک نقطه، متناظرند و اهمیت این مفاهیم بی نیاز از اثبات است. این فصل تعاریف و ویژگی های ساده‌ای از تشکیل کسرهارا ارائه می کند.

روندی که توسط آن ، میدان اعداد Q از حلقه اعداد صحیح ساخته می‌شود (و Z را در Q می نشاند)، به آسانی به هر حوزه صحیح A گسترش می یابد و میدان کسرهای A را پدید می آورد. این طرز ساختن شامل اختیار کردن تمام زوج های مرتب (a, s) است که $a, s \in A$ و $s \neq ۰$ و قرار دادن رابطه‌ای هم ارزی بین چنین زوج هایی می‌باشد:

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow at - bs = ۰.$$

این تعریف ، فقط اگر A حوزه‌ای صحیح باشد عمل می کند، زیرا اثبات ترایایی بودن این رابطه ، شامل حذف کردن می شود، یعنی این حقیقت که A هیچ مقسوم علیه صفر مخالف ۰ ندارد. ولی، می تواند به صورت زیر تعمیم

داده شود:

فرض کنید A حلقه‌ای دلخواه باشد. زیر مجموعه بسته ضربی A ، زیرمجموعه S از A است به طوری که $1 \in S$ و S تحت ضرب بسته است: به عبارت دیگر، S زیر نیمگروهی از نیمگروه ضربی A است. رابطه $\equiv$ را روی $A \times S$ ، به صورت زیر تعریف کنید:

$$(a,s) \equiv (b,t) \Leftrightarrow (at-bs)u = 0 \text{ ، به ازای } u \in S \text{ ای} .$$

به وضوح این رابطه باز تابی و متقارن است. برای اینکه نشان دهیم این رابطه ترایایی است، فرض کنید $(a,s) \equiv (b,t)$ و $(b,t) \equiv (c,u)$. در این صورت v و w در S وجود دارند به طوری که $(at-bs)v = 0$ و $(bu-ct)w = 0$. عنصر b راازاین دو معادله حذف کرده به دست می آوریم ، $(au-cs)tvw = 0$. چون S تحت ضرب بسته است، درنتیجه داریم $tvw \in S$، از این رو $(a,s) \equiv (c,u)$. پس رابطه‌ای هم ارزی داریم. فرض کنید a/s، رده هم ارزی (a,s) را نشان دهد و فرض کنید $S^{-1}A$ مجموعه رده های هم ارزی را نشان دهد. یک ساختار حلقه ای را روی $S^{-1}A$ با تعریف جمع و ضرب این «کسرهای» a/s با همان شیوه جبر مقدماتی ، قرار می دهیم: یعنی،

$$(a/s) + (b/t) = (at+bs)/st,$$
$$(a/s)(b/t) = ab/st.$$

تمرین . ثابت کنید که این تعاریف، مستقل از انتخاب نماینده های (a,s)و (b,t) می باشند و نیز اینکه $S^{-1}A$ در اصول حلقه تعویضپذیر یکدار صدق می کند.

همچنین همریختی حلقه ای $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ را به صورت $f(x) = x/1$ تعریف می کنیم . این همریختی حلقه ای در حالت کلی یک به یک نیست.

تبصره . اگر A حوزه‌ای صحیح باشد و $S = A - \{۰\}$، آنگاه $S^{-۱}A$ میدان کسرهای A است.

حلقه $S^{-۱}A$، حلقه کسرهای A نسبت به S نامیده می شود. این حلقه دارای خاصیت عام است :

گزاره ۱.۳. فرض کنید $g : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد به طوری که $g(s)$ ، به ازای هر $s \in S$، در B یکه است . در این صورت ، همریختی حلقه‌ای یکتای $h : S^{-۱}A \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $g = h \circ f$.

برهان . (الف) یکتایی . اگر h در شرطها صدق کند آنگاه به ازای هر $a \in A$، $h(a/۱) = hf(a) = g(a)$؛ از این رو اگر $s \in S$، آنگاه

$$h(۱/s) = h((s/۱)^{-۱}) = h(s/۱)^{-۱} = g(s)^{-۱}$$

و در نتیجه $h(a/s) = h(a/۱)h(۱/s) = g(a)g(s)^{-۱}$، بنابراین h توسط g به‌طور یکتا تعیین می شود.

(ب) وجود. فرض کنید $h(a/s) = g(a)g(s)^{-۱}$. در این صورت به وضوح، h همریختی حلقه‌ای خواهد بود مشروط به اینکه خوشتعریف باشد.دراین‌صورت فرض کنید $a/s = a'/s'$؛ پس $t \in S$ ای وجود دارد به‌طوری که $(as' - a's)t = ۰$، از این رو

$$((g(a)g(s') - g(a')g(s))g(t) = ۰;$$

حال $g(t)$ در B یکه است، از این رو $g(a)g(s)^{-۱} = g(a')g(s')^{-۱}$. ♣

حلقه $S^{-۱}A$ و همریختی $f : A \longrightarrow S^{-۱}A$ ، دارای ویژگی های زیر می‌باشند:

۱) $f(s)$ در $S^{-۱}A$ یکه است $\Leftarrow s \in S$ ؛

۲) به ازای $s \in S$ ای ، $f(a) = 0 \Rightarrow as = 0$ ؛
۳) هر عنصر $S^{-1}A$ ، به ازای $a \in A$ ای و $s \in S$ ای ، به صورت $f(a)f(s)^{-1}$ است .

بر عکس، این سه شرط حلقه $S^{-1}A$ را تا حد یکریختی تعیین می کنند. به‌طور صریح تر:

نتیجه ۳.۲. اگر $g : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد به طوری که
(الف) $g(s)$ در B یکه است $s \in S \Rightarrow$؛
(ب) به ازای $s \in S$ ای ، $g(a) = 0 \Rightarrow as = 0$؛
(پ) هر عنصر B به صورت $g(a)g(s)^{-1}$ است؛ در این صورت یکریختی یکتای $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $g = h \circ f$.

برهان . بنا به (۳.۱) ، بایستی نشان دهیم که $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ با ضابطه

$$h(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$$

یکریختی است (در این تعریف، (الف) به کار می رود). بنا به (پ)، h پوشاست . برای نشان دادن اینکه h یک به یک است، به هسته h نگاه کنید: اگر $h(a/s) = 0$ آنگاه $g(a) = 0$، از این رو بنا به (ب)، به ازای $t \in S$ ای به دست می آوریم $at = 0$ ، در نتیجه $(a, s) \equiv (0, 1)$، یعنی $a/s = 0$ در $S^{-1}A$. ♣

مثال ها. ۱) فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A باشد. در این صورت ، $S = A - \mathfrak{p}$ بسته ضربی است (در حقیقت ، $A - \mathfrak{p}$ بسته ضربی است $\mathfrak{p} \Leftrightarrow$ اول باشد). در این حالت به جای $S^{-1}A$ می نویسیم $A_\mathfrak{p}$. عناصر a/s با $a \in \mathfrak{p}$، ایده‌ال m را در $A_\mathfrak{p}$ تشکیل می دهند. اگر $b/t \notin m$ آنگاه $b \notin \mathfrak{p}$، ازاین‌رو $b \in S$ و بنابراین b/t در $A_\mathfrak{p}$ یکه است. در نتیجه ، اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌الی در $A_\mathfrak{p}$ باشد و $\mathfrak{a} \not\subseteq m$ آنگاه $\mathfrak{a}$ شامل عنصری یکه است وبنابراین کل حلقه است. از این رو ، m تنها ایده‌ال ماکسیمال در $A_\mathfrak{p}$ است؛ به عبارت دیگر، $A_\mathfrak{p}$ حلقه ای موضعی است.

فرایند گذار از A به $A_{\mathfrak{p}}$ ، موضعی سازی در $\mathfrak{p}$ نامیده می شود.

۲) $S^{-1}A$ حلقه صفر است $\Leftrightarrow$ $0 \in S$.

۳) فرض کنید $f \in A$ و $S = \{f^n\}_{n\geq 0}$. در این حالت به جای $S^{-1}A$ می نویسیم A_f .

۴) فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی دلخواه در A باشد و فرض کنید $S = 1 + \mathfrak{a}$ برابر با مجموعه تمام $1 + x$ هایی باشد که $x \in \mathfrak{a}$. به وضوح ، S بسته ضربی است.

۵) حالت های خاصی از(۱) و (۳) :

(الف) $A = \mathbf{Z}$ ، $\mathfrak{p} = (p)$ ، p عددی اول ؛ $A_{\mathfrak{p}} =$ مجموعه تمام اعداد گویای m/n که n نسبت به p اول است؛ اگر $f \in \mathbf{Z}$ و $f \neq 0$ ، آنگاه $A_{\mathfrak{p}}$ مجموعه تمام اعداد گویایی است که مخرجشان توانی از f است.

(ب) $A = k[t_1, \cdots; t_n]$ که k یک میدان است و t_i ها مجهول های مستقل هستند و $\mathfrak{p}$ ایده الی اول در A است. در این صورت ، $A_{\mathfrak{p}}$ حلقه تمام توابع گویای f/g است که $g \notin \mathfrak{p}$. اگر V چند گونای تعریف شده توسط ایده ال $\mathfrak{p}$ باشد، یعنی مجموعه همه عناصر $x = (x_1, \cdots, x_n) \in k^n$ به طوری که $f(x) = 0$ زمانی که $f \in \mathfrak{p}$، آنگاه (به شرط اینکه k نامتناهی باشد) $A_{\mathfrak{p}}$ می تواند با حلقه تمام توابع گویا روی k^n که تقریباً در تمام نقاط V تعریف می شوند، منطبق شود؛ در واقع حلقه موضعی k^n در امتداد چند گونای V است . این حلقه، نخستین نمونه از حلقه های موضعی است که در هندسه جبری ظاهر می شوند.

ساختار $S^{-1}A$ می تواند با A—مدول M به جای حلقه A، ادامه داده شود. رابطه $\equiv$ را روی $M \times S$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$(m, s) \equiv (m', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ به طوری که } t(sm' - s'm) = 0.$$

این رابطه ، همانند قبل ، رابطه‌ای هم ارزی است. فرض کنید m/s رده هم ارزی زوج (m, s) را نشان دهد، فرض کنید $S^{-1}M$ مجموعه

چنین کسرهایی را نشان دهد و $S^{-1}M$ با تعاریف معمولی جمع و ضرب اسکالر به $S^{-1}A$– مدول تبدیل می شود. همانند مثال های (۱) و (۳) فوق ، زمانی که $S = A - \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ اول) به جای $S^{-1}M$ می نویسیم $M_{\mathfrak{p}}$ و زمانی که $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$ می نویسیم M_f.

فرض کنید $u : M \longrightarrow N$ همریختی A–مدولی باشد. در این صورت به همریختی $S^{-1}A$–مدولی $S^{-1}u : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$ منجر می شود، یعنی $S^{-1}u$، m/s را به $u(m)/s$ می نگارد. از این رو به دست می آوریم $S^{-1}(v \circ u) = (S^{-1}v) \circ (S^{-1}u)$.

گزاره ۳.۳. عمل S^{-1} دقیق است، یعنی، اگر $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ در M دقیق باشد، آنگاه $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ در $S^{-1}M$ دقیق است.

برهان . از فرض به دست می آوریم $g \circ f = 0$، از این رو $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(0) = 0$، در نتیجه $Im(S^{-1}f) \subseteq Ker(S^{-1}g)$. برای اثبات شمول معکوس ، فرض کنید $m/s \in Ker(S^{-1}g)$، در این صورت $g(m)/s = 0$ در $S^{-1}M''$، از این رو $t \in S$ ای وجود دارد به طوری که $tg(m) = 0$ در M''. امّا $tg(m) = g(tm)$ زیرا g یک همریختی A–مدولی است، در نتیجه $tm \in Ker(g) = Im(f)$ و بنابراین به‌ازای $m' \in M'$ ای ، $tm = f(m')$. از این رو در $S^{-1}M$ به دست می آوریم، $m/s = f(m')/st = (S^{-1}f)(m'/st) \in Im(S^{-1}f)$. در نتیجه ، $Ker(S^{-1}g) \subseteq Im(S^{-1}f)$. ♣

به ویژه، از (۳.۳) نتیجه می شود که اگر M' زیر مدولی از M باشد، آنگاه نگاشت $S^{-1}M' \longrightarrow S^{-1}M$ یک به یک است و بنابراین $S^{-1}M'$ می تواند به عنوان زیر مدولی از $S^{-1}M$ تلقی شود. با این قرار داد نتیجه زیر را داریم ،

نتیجه ۴.۳. صورت بندی [۱] کسرهابا صورت بندی مجموعهای متناهی ، اشتراک های متناهی و خارج قسمت ها جابجا می شود . به طور صریح تر، اگر N و P زیر مدول هایی از A— مدول M باشند آنگاه
(الف) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$
(ب) $S^{-1}(N\cap P) = S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)$
(پ) $S^{-1}A$— مدول های $S^{-1}(M/N)$ و $(S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ یکریخت هستند.

برهان . (الف) از تعاریف به آسانی نتیجه می شود و (ب) به راحتی ثابت می شود: اگر $y/s = z/t$ ($y\in N$، $z\in P$ و $s,t\in S$) آنگاه به ازای $u\in S$ ای ، $u(ty-sz)=0$، از این رو $w = uty = usz \in N\cap P$ و بنابراین $y/s = w/stu \in S^{-1}(N\cap P)$. در نتیجه، $S^{-1}N\cap S^{-1}P \subseteq S^{-1}(N\cap P)$ و شمول معکوس بدیهی است.
(پ) S^{-1} را روی دنباله دقیق $0\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow M/N\longrightarrow 0$ به کار ببرید. ♣

گزاره ۵.۳. فرض کنید M یک A— مدول باشد. دراین صورت $S^{-1}A$—مدول‌های $S^{-1}M$ و $S^{-1}A\otimes_A M$ یکریخت هستند؛ به طور صریح تر، یکریختی یکتای $f: S^{-1}A\otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$ وجود دارد، به طوری که به‌ازای هر $a\in A$ ، $s\in S$ و $m\in M$ ،

$$f((a/s)\otimes m) = am/s. \qquad (۱)$$

برهان . نگاشت $S^{-1}A\times M\longrightarrow S^{-1}M$ با ضابطه

$$(a/s, m)\mapsto am/s$$

A—دو خطی است و لذا بنا به خاصیت عام حاصلضرب تانسوری (۱۲.۲) ، A— همریختی

$$f: S^{-1}A\otimes_A M\longrightarrow S^{-1}M$$

[۱] formation

را القا می کند که در (۱) صدق می کند. به وضوح ، f پوشاست و به طور یکتایی توسط (۱) تعریف می شود.

فرض کنید $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i$ عنصری دلخواه از $S^{-1}A \otimes M$ باشد. اگر $s = \prod_i s_i \in S$ و $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$ آنگاه به دست می آوریم

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m,$$

بنابراین هر عنصری از $S^{-1}A \otimes M$ به شکل $(1/s) \otimes m$ است. فرض کنید $f((1/s) \otimes m) = 0$. در این صورت $m/s = 0$، از این رو به ازای $t \in S$ ای ، $tm = 0$ و بنابراین

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0.$$

از این رو f یک به یک است و بنابراین یکریختی است. ♣

نتیجه ۶.۳. $S^{-1}A$ ، A—مدولی تخت است.

برهان . گزاره های (۳.۲) و (۳. ۵) را به کار ببرید . ♣

گزاره ۷.۳. اگر M و N، A—مدول هایی باشند آنگاه یکریختی یکتای $f : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}(M \otimes_A N)$ از $S^{-1}A$—مدول ها وجود دارد به طوری که

$$f((m/s) \otimes (n/t)) = (m \otimes n)/st.$$

به ویژه، اگر $\mathfrak{p}$ ایده ال اول دلخواهی باشد آنگاه به عنوان $A_\mathfrak{p}$—مدول ها،

$$M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_A N)_\mathfrak{p}.$$

برهان . (۵.۳) و یکریختی های کانونی بیان شده در فصل ۲ را به کار ببرید. ♣

خواص موضعی

به خاصیت P از حلقه A (یا از A—مدول M) خاصیتی موضعی گفته می شود اگر گزاره زیر درست باشد:

A (یا M) دارای خاصیت P است $\Leftrightarrow$ برای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$ از A، $A_{\mathfrak{p}}$ (یا $M_{\mathfrak{p}}$) دارای خاصیت P باشد. گزاره های زیر مثال‌هایی از خواص موضعی ارائه می کنند:

گزاره ۸.۳. فرض کنید M ، A— مدول باشد. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند :

(الف) $M = \circ$؛

(ب) به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$ از A، $M_{\mathfrak{p}} = \circ$؛

(پ) به ازای هر ایده ال ماکسیمال m از A، $M_m = \circ$.

برهان . به وضوح ، (پ) $\Leftarrow$ (ب) $\Leftarrow$ (الف) برقرار است . فرض کنید (پ) برقرار باشد و $M \neq \circ$. فرض کنید x عنصری ناصفر از M باشد و $\mathfrak{a} = Ann(x)$؛ $\mathfrak{a}$ ایده الی $\neq (۱)$ است، از این رو بنا به (۴.۱) ، در ایده ال ماکسیمال m قرار دارد. عنصر $x/۱ \in M_m$ را در نظر بگیرید. چون $M_m = \circ$، درنتیجه به دست می آوریم $x/۱ = \circ$، از این رو توسط عنصری از $A - m$ بی‌اثر می شود؛ امّا این نتیجه محال است ، زیرا $Ann(x) \subseteq m$.♣

گزاره ۹.۳. فرض کنید $\phi : M \longrightarrow N$ همریختی A—مدولی باشد. در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:

(الف) ϕ یک به یک است؛

(ب) به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$، $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ یک به یک است؛

(پ) به ازای هر ایده ال ماکسیمال m، $\phi_m : M_m \longrightarrow N_m$ یک به یک است.

به طور مشابه، «یک به یک» در همه جا با «پوشا» جایگزین می شود.

برهان . (ب) $\Rightarrow$ (الف). چون $N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ دقیق است، از این رو $N_{\mathrm{p}} \longrightarrow M_{\mathrm{p}} \longrightarrow 0$ دقیق است، یعنی ، ϕ_{p} یک به یک است.

(پ) $\Rightarrow$ (ب). زیرا هر ایده ال ماکسیمال ، اول است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ). فرض کنید $M' = Ker(\phi)$ ، در این صورت دنباله $N \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ دقیق است، از این رو بنا به (۳.۳) ، دنباله $N_m \longrightarrow M_m \longrightarrow M'_m \longrightarrow 0$ دقیق است و بنابراین $M'_m \cong Ker(\phi_m) = 0$، زیرا ϕ_m یک‌به‌یک است. از این رو بنا به (۸.۳) ، $M' = 0$ ، در نتیجه ϕ یک‌به‌یک است.

برای قسمت دیگر گزاره ، صرفاً تمام پیکان ها را معکوس کنید. ♣

تخت بودن خاصیتی موضعی است:

گزاره ۱۰.۳. به ازای هر A—مدول M،گزاره های زیر هم ارزند :

(الف) M ، A—مدولی تخت است؛

(ب) به ازای هر ایده‌ال اول p، M_{p} یک A_{p}—مدول تخت است؛

(پ) به ازای هر ایده‌ال ماکسیمال m، M_m یک A_m—مدول تخت است.

برهان . (ب) $\Rightarrow$ (الف). بنا به (۵.۳) و (۲. ۲۰) ، برقرار است .

(پ) $\Rightarrow$ (ب). بدیهی است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ). اگر $N \longrightarrow P$ همریختی A—مدول ها باشد و m ایده ال ماکسیمال دلخواهی از A باشد آنگاه

بنا به (۹.۳) ، یک به یک $\Rightarrow N_m \longrightarrow P_m$ یک به یک $N \longrightarrow P$

بنا به (۱۹.۲) ، یک به یک $\Rightarrow N_m \otimes_{A_m} M_m \longrightarrow P_m \otimes_{A_m} M_m$

بنا به (۷.۳) ، یک به یک $\Rightarrow (N \otimes_A M)_m \longrightarrow (P \otimes_A M)_m$

. بنا به (۹.۳) ، یک به یک $\Rightarrow N \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A M$

از این رو ، بنا به (۱۹.۲) ، M تخت است. ♣

ایده ال های منبسط و منقبض در حلقه های کسرها

فرض کنید A یک حلقه، S زیر مجموعه بسته ضربی از A و $f: A \longrightarrow S^{-1}A$ همریختی طبیعی تعریف شده به صورت $f(a) = a/1$ باشد. فرض کنید C مجموعه ایده ال های منقبض در A و E مجموعه ایده ال های منبسط در $S^{-1}A$ باشد (به (۱.۱۷) رجوع کنید). اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌الی در A باشد آنگاه توسیع آن $\mathfrak{a}^e$ در $S^{-1}A$، به صورت $S^{-1}\mathfrak{a}$ است (هر $y \in \mathfrak{a}^e$ دلخواه ، به صورت $\sum a_i/s_i$ است که $a_i \in \mathfrak{a}$ و $s_i \in S$؛ با مخرج مشترک گرفتن ، کسر مورد نظر را به دست آورید).

گزاره ۳.۱۱. (الف) هر ایده ال در $S^{-1}A$ ، ایده‌الی منبسط است.

(ب) اگر $\mathfrak{a}$ ایده الی در A باشد آنگاه $\mathfrak{a}^{ec} = \cup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$. از این رو $\mathfrak{a}^e = (1)$ اگر و فقط اگر $\mathfrak{a}$، S را قطع کند.

(پ) $\mathfrak{a} \in C \Leftrightarrow$ هیچ عنصری از S ، در $A/\mathfrak{a}$ مقسوم علیه صفر نباشد.

(ت) ایده ال های اول $S^{-1}A$ در تناظر یک به یک $(\mathfrak{p} \leftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p})$ با ایده‌ال‌های اول A که S را قطع نمی کنند، هستند.

(ث) عمل S^{-1} با صورت بندی مجموعهای متناهی، حاصلضرب ها، اشتراک ها و رادیکال ها جابجا می شود.

برهان . (الف) فرض کنید $\mathfrak{b}$ ایده‌الی در $S^{-1}A$ باشد و فرض کنید $x/s \in \mathfrak{b}$. در این صورت ، $x/1 \in \mathfrak{b}$، از این رو $x \in \mathfrak{b}^c$ و در نتیجه $x/s \in \mathfrak{b}^{ce}$. ازآنجاییکه بنا به (۱.۱۷) ، همواره $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$ ، نتیجه می شود $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$.

(ب) به ازای $a \in \mathfrak{a}$ ای و $s \in S$ ای ، $x \in \mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c \Leftrightarrow x/1 = a/s$

$\Leftrightarrow (xs - a)t = 0$ ، به ازای $t \in S$ ای $\Leftrightarrow xst \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow x \in \cup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$.

(پ) $\Leftrightarrow$ (به ازای $s \in S$ ای ، $sx \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \mathfrak{a}$) $\Leftrightarrow \mathfrak{a} \in C \Leftrightarrow \mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$
هیچ $s \in S$ ای در $A/\mathfrak{a}$ مقسوم علیه صفر نیست.

(ت) اگر $\mathfrak{q}$ ایده الی اول در $S^{-1}A$ باشد ، آنگاه $\mathfrak{q}^c$ ایده الی اول در A است (همین قدر برای هر همریختی حلقه ای درست است). برعکس، اگر $\mathfrak{p}$

ایده‌الی اول در A باشد ، آنگاه A/p حوزه صحیح است؛ اگر $\overline{S}$ تصویر S در A/p باشد آنگاه به دست می آوریم $S^{-1}A/S^{-1}\mathrm{p} \cong \overline{S}^{-1}(A/\mathrm{p})$ که یا ۰ است یا در غیر این صورت ، مشمول در میدان کسرهای A/p است و از این رو یک حوزه صحیح است و در نتیجه $S^{-1}\mathrm{p}$ یا اول است یا ایده ال واحد است؛ بنا به (الف)، امکان دوم رخ می دهد اگر و فقط اگر p، S را قطع کند.

(ث) درستی حکم برای مجموعها و حاصلضرب ها، از (۱۸.۱) نتیجه می‌شود؛ برای اشتراک ها از (۴.۳) نتیجه می شود. همین طور برای رادیکال ها از (۱۸.۱) به دست می آوریم $S^{-1}r(\mathrm{a}) \subseteq r(S^{-1}\mathrm{a})$ ، و برهان شمول معکوس، اثباتی عادی است که به خواننده واگذار می کنیم. ♣

تبصره ها . ۱) اگر a و b ایده ال هایی از A باشند آنگاه فرمول

$$S^{-1}(\mathrm{a}:\mathrm{b}) = (S^{-1}\mathrm{a} : S^{-1}\mathrm{b})$$

برقرار است مشروط به اینکه ایده ال b متناهیاً تولید شده باشد: (۱۵.۳) را ببینید.

۲) بنابه برهان (۸.۱)، اگر $f \in A$ پوچتوان نباشد آنگاه ایده ال اولی از A که شامل f نمی شود وجود دارد که می تواند به طور خلاصه تری بر حسب زبان حلقه های کسرها بیان شود. چون مجموعه $S = (f^n)_{n\geq ۰}$ شامل ۰ نیست، در نتیجه حلقه $S^{-1}A = A_f$ حلقه صفر نیست و ازاین رو بنا به (۳.۱)، دارای ایده الی ماکسیمال است که انقباضش در A، ایده ال اول p است که بنا به (۱۱.۳)، S را قطع نمی کند؛ از این رو $f \notin \mathrm{p}$.

نتیجه ۱۲.۳ . اگر $\mathcal{R}$ پوچ رادیکال حلقه A باشد آنگاه $S^{-1}\mathcal{R}$ پوچ رادیکال $S^{-1}A$ است. ♣

نتیجه ۱۳.۳ . اگر p ایده الی اول از حلقه A باشد آنگاه ایده ال های اول حلقه موضعی A_p در تناظری یک به یک با ایده ال های اول A که مشمول در

p هستند، می باشند.

برهان. درقسمت (ت) از گزاره (۱۱.۳) قرار دهید $S = A - \mathrm{p}$. ♣

تبصره . از این رو در گذار از A به A_p، تمام ایده ال های اول بجز آنهایی که مشمول در p هستند حذف می شوند.از طرف دیگر ، در گذار از A به A/p، تمام ایده‌ال های اول بجز آنهایی که شامل p هستند حذف می شوند . ازاین رو اگر p و q ایده ال هایی اول باشند به طوری که $\mathrm{p} \supseteq \mathrm{q}$، آنگاه با موضعی کردن نسبت به p و در نظر گرفتن خارج قسمت به پیمانه q (با هر ترتیبی : این دو عمل ، بنا به (۴.۳) ، جابجا می شوند)، توجه خود را به این ایده ال های اول که بین p و q واقع می شوند، محدود می کنیم. به ویژه، اگر $\mathrm{p} = \mathrm{q}$ ، به میدانی به نام میدان مانده‌ای در p، منجر می شویم که می تواند به عنوان میدان کسرهای حوزه صحیح A/p یا به عنوان میدان مانده‌ای حلقه موضعی A_p به‌دست آید.

گزاره ۱۴.۳. فرض کنید M ، A—مدولی متناهیاً تولید شده و S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد. در این صورت،

$$S^{-1}(Ann(M)) = Ann(S^{-1}M).$$

برهان . اگراین حکم برای دو A— مدول M و N برقرار باشد آنگاه برای $M+N$ نیز برقرار است:

$$\begin{aligned}
S^{-1}(Ann(M+N)) &= S^{-1}(Ann(M)\cap Ann(N)) && \text{بنا به (۲.۲) ،}\\
&= S^{-1}(Ann(M))\cap S^{-1}(Ann(N)) && \text{بنا به (۴.۳) ،}\\
&= Ann(S^{-1}M)\cap Ann(S^{-1}N) && \text{بنا به فرض ،}\\
&= Ann(S^{-1}M + S^{-1}N) = Ann(S^{-1}(M+N)).
\end{aligned}$$

از این رو کافی است که (۱۴.۳) را برای مدول M، تولید شده توسط تک عنصر ثابت کنیم: در این صورت ، (به عنوان A—مدول) $M \cong A/\mathrm{a}$، که $\mathrm{a} = Ann(M)$؛ بنا به (۴.۳) ، $S^{-1}M \cong (S^{-1}A)/(S^{-1}\mathrm{a})$، بنابراین

♣ $.Ann(S^{-1}M) = S^{-1}\mathrm{a} = S^{-1}(Ann(M))$

نتیجه ۱۵.۳. اگر N و P زیر مدول هایی از A—مدول M باشند و اگر P متناهیاً تولید شده باشد ، آنگاه $S^{-1}(N:P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$.

برهان . بنا به (۲.۲)، $(N:P) = Ann((N+P)/N)$؛ حال (۱۴.۳) را به‌کار ببرید. ♣

گزاره ۱۶.۳. فرض کنید $A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد و فرض کنید p ایده الی اول از A باشد. در این صورت ، p انقباض ایده الی اول از B است اگر و فقط اگر $\mathrm{p}^{ec} = \mathrm{p}$.

برهان . اگر $\mathrm{p} = \mathrm{q}^c$ آنگاه بنا به (۱۷.۱) ، $\mathrm{p}^{ec} = \mathrm{p}$. برعکس ، اگر $\mathrm{p}^{ec} = \mathrm{p}$، فرض کنید S تصویر $A - \mathrm{p}$ در B باشد. در این صورت p^e، S را قطع نمی کند ، بنابراین بنا به (۱۱.۳) ، توسیعش در $S^{-1}B$، ایده الی سره است و ازاین رو ، مشمول در ایده الی ماکسیمال مانند m از $S^{-1}B$ است . اگر q انقباض m در B باشد آنگاه q اول است، $\mathrm{q} \supseteq \mathrm{p}^e$ و $\mathrm{q} \cap S = \emptyset$. از این رو ، $\mathrm{q}^c = \mathrm{p}$. ♣

تمرینات

۱. فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه A باشد و فرض کنید M، A—مدولی متناهیاً تولید شده باشد. ثابت کنید $S^{-1}M = \circ$ اگر و فقط اگر $s \in S$ ای موجود باشد به طوری که $sM = \circ$.

۲. فرض کنید a ایده الی از حلقه A باشد و فرض کنید $S = 1 + \mathrm{a}$. نشان دهید که $S^{-1}\mathrm{a}$ مشمول در رادیکال جیکوبسن $S^{-1}A$ است.

این نتیجه و لم ناکایاما را به کار ببرید تا برای (۵.۲) برهانی ارائه کنید که به دترمینان ها وابسته نباشد. [اگر $M = \mathrm{a}M$ آنگاه $S^{-1}M = (S^{-1}\mathrm{a})(S^{-1}M)$،

از این رو بنا به لم ناکایاما به دست می آوریم $S^{-1}M = 0$. حال تمرین ۱ را به کار ببرید.]

۳. فرض کنید A یک حلقه ، S و T دو زیر مجموعه بسته ضربی از A و U تصویر T در $S^{-1}A$ باشد. نشان دهید که حلقه های $(ST)^{-1}A$ و $U^{-1}(S^{-1}A)$، یکریخت هستند.

۴. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه ها و S زیر مجموعه بسته ضربی از A باشد. فرض کنید $T = f(S)$. نشان دهید که $S^{-1}B$ و $T^{-1}B$، به‌عنوان $S^{-1}A$—مدول‌ها، یکریخت هستند.

۵. فرض کنید A حلقه باشد. فرض کنید که به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$، حلقه موضعی $A_\mathfrak{p}$ هیچ عنصر پوچتوان ناصفری نداشته باشد . نشان دهید که A هیچ عنصر پوچتوان ناصفری ندارد . اگر هر $A_\mathfrak{p}$ یک حوزه صحیح باشد، آیا A لزوماً حوزه ای صحیح است؟

۶. فرض کنید A حلقه‌ای ناصفر و $\sum$ مجموعه تمام زیر مجموعه های بسته ضربی S از A باشد به طوری که $0 \notin S$. نشان دهید که $\sum$ عناصر ماکسیمال دارد و نیز اینکه، $S \in \sum$ ماکسیمال است اگر و فقط اگر $A - S$، ایده الی اول مینیمال از A باشد.

۷. به زیر مجموعه بسته ضربی S از حلقه A، اشباع شده گفته می شود اگر

$$xy \in S \Leftrightarrow x \in S \text{ و } y \in S.$$

ثابت کنید که

(الف) S اشباع شده است $\Leftrightarrow$ $A - S$ اجتماعی از ایده ال های اول باشد.

(ب) اگر S زیر مجموعه بسته ضربی دلخواهی از A باشد آنگاه کوچکترین زیر مجموعه بسته ضربی اشباع شده یکتای $\overline{S}$ که شامل S می شود وجود دارد و نیز اینکه $\overline{S}$ متمم، نسبت به A ، از اجتماع ایده ال های اولی است که S را قطع نمی کنند .($\overline{S}$ ، اشباع S نامیده می‌شود.)

اگر $S = 1 + \mathfrak{a}$ که $\mathfrak{a}$ ایده الی از A است، آنگاه $\overline{S}$ را بیابید.

۸. فرض کنید S و T، زیر مجموعه‌های بسته ضربی از A باشند به‌طوری که $S \subseteq T$. فرض کنید $\phi : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$ همریختیی باشد که هر $a/s \in S^{-1}A$ را به a/s، که به عنوان عضوی از $T^{-1}A$ در نظر گرفته شده، می‌نگارد. نشان دهید که عبارت های زیر هم ارز هستند:

(الف) ϕ دوسویی است.

(ب)به ازای هر $t \in T$، $t/1$ در $S^{-1}A$ یکه است.

(پ)به ازای هر $t \in T$، $x \in A$ ای وجود دارد به طوری که $xt \in S$.

(ت) T مشمول در اشباع S (تمرین ۷) است.

(ث) هر ایده ال اولی که T را قطع می کند، S را نیز قطع می کند.

۹. مجموعه S_0 ، شامل تمام نامقسوم علیه های صفر A ، زیر مجموعه بسته ضربی اشباع شده‌ای از A می باشد. از این رو مجموعه D، شامل مقسوم علیه های صفر A، اجتماعی از ایده ال های اول است (فصل ۱، تمرین ۱۴ را ببینید). نشان دهید که هرایده‌ال اول مینیمال A، مشمول در D است.[تمرین ٦ را به کار ببرید.]

حلقه $S_0^{-1}A$، حلقه کلی کسر های A نامیده می شود. ثابت کنید

(الف) S_0 بزرگترین زیر مجموعه بسته ضربی از A است به طوری که همریختی $A \longrightarrow S_0^{-1}A$ یک به یک است.

(ب) هر عنصری در $S_0^{-1}A$، مقسوم علیه صفر یا یکه است.

(پ) هر حلقه‌ای که در آن هر عنصر نایکه ، یک مقسوم علیه صفر است با حلقه کلی کسر هایش برابر است (یعنی، $A \longrightarrow S_0^{-1}A$ دو سویی است) .

۱۰. فرض کنید A حلقه باشد.

(الف) اگر A مطلقاً تخت باشد (فصل ۲، تمرین ۲۷) و S زیر مجموعه بسته ضربی دلخواهی از A باشد آنگاه $S^{-1}A$ مطلقاً تخت است.

(ب) A مطلقاً تخت است $\Leftrightarrow$ به ازای هر ایده ال ماکسیمال m، A_m میدان باشد.

۱۱. فرض کنید A حلقه باشد. ثابت کنید که گزاره های زیر هم ارزند :

(الف) $A/\mathcal{R}$ مطلقاً تخت است ($\mathcal{R}$ پوچ رادیکال حلقه A است).
(ب) هر ایده ال اولی از A، ماکسیمال است.
(پ) $Spec(A)$ ، T_1—فضا است (یعنی، هر زیر مجموعه تک نقطه‌ای ، بسته است).
(ت) $Spec(A)$ هاسدورف است.

اگراین شرطها برقرار باشند آنگاه نشان دهید که $Spec(A)$، فشرده و کلاًناهمبند است (یعنی، تنها زیر مجموعه‌های همبند $Spec(A)$، تک نقطه‌ای‌هاهستند).

۱۲. فرض کنید A حوزه‌ای صحیح و M، A—مدول باشد. عنصر $x \in M$، عنصر تابی M است اگر $Ann(x) \neq 0$، یعنی، اگر x توسط عنصری ناصفراز A بی اثرشود. نشان دهید که عناصرتابی M، زیر مدولی از M تشکیل می‌دهند. این زیر مدول، زیر مدول تابدار M نامیده می‌شود و با $T(M)$ نشان داده می‌شود. اگر $T(M) = 0$ آنگاه‌به مدول M بی تاب گفته می‌شود. نشان دهید

(الف) اگر M، A—مدولی دلخواه باشد آنگاه $M/T(M)$ بی تاب است.
(ب) اگر $f : M \longrightarrow N$ همریختی مدولی باشد آنگاه $f(T(M)) \subseteq T(N)$.
(پ) اگر $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ دنباله ای دقیق باشد آنگاه دنباله $0 \longrightarrow T(M') \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M'')$ ، دقیق است.
(ت) اگر M، A— مدولی دلخواه باشد آنگاه $T(M)$ هسته‌ی نگاشت $x \mapsto 1 \otimes x$، از M بتوی $K \otimes_A M$ است که K میدان کسرهای A است.

[برای اثبات (ت) ، نشان دهید که K می تواند به عنوان حد مستقیم $A\,\xi$ $(\xi \in K)$ ، از زیرمدول هایش ، در نظر گرفته شود؛ با به کار گیری تمرین ۱۵ و تمرین ۲۰ از فصل ۱ ، نشان دهید که اگر $1 \otimes x = 0$ در $K \otimes M$، آنگاه به ازای $\xi \neq 0$ ای ، $1 \otimes x = 0$ در $A\,\xi \otimes M$. نتیجه بگیرید که $\xi^{-1}\, x = 0$.]

۱۳. فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی از حوزه صحیح A باشد. باتوجه به نماد گذاری تمرین ۱۲ ، نشان دهید که $T(S^{-1}M) = S^{-1}(TM)$. نتیجه بگیرید که گزاره های زیر هم‌ارزند:

(الف) M بی تاب است.

(ب) به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$، $M_{\mathfrak{p}}$ بی تاب است.

(پ) به ازای هر ایده ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$، $M_{\mathfrak{m}}$ بی تاب است.

۱۴. فرض کنید M ، A—مدول و $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد. فرض کنید به‌ازای هر ایده ال ماکسیمال $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$، $M_{\mathfrak{m}} = 0$. ثابت کنید $M = \mathfrak{a}M$. [مسأله را به $A/\mathfrak{a}$—مدول $M/\mathfrak{a}M$ تبدیل کنید و از (۸.۳) استفاده کنید.]

۱۵. فرض کنید A یک حلقه و F، A—مدول A^n باشد. نشان دهید که هر مجموعه n مولدی از F، پایه ای برای F است.[فرض کنید $x_1, \cdots, x_n$ مجموعه‌ای از مولد ها و e_1 ، $\cdots$ ، e_n پایه متعارف F باشند. نگاشت $\phi : F \longrightarrow F$ را به صورت $\phi(e_i) = x_i$ تعریف کنید. در این صورت ، ϕ پوشاست و بایستی ثابت کنیم ، یکریختی است. بنا به (۹.۳) ، می‌توانیم فرض کنیم A حلقه‌ای موضعی است. فرض کنید N هسته‌ی ϕ و $k = A/m$ میدان مانده ای A باشد. چون F ، A—مدولی تخت است،از این رو دنباله دقیق $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow 0$، دنباله دقیق $0 \longrightarrow k \otimes N \longrightarrow k \otimes F \xrightarrow{1\otimes\phi} k \otimes F \longrightarrow 0$ را نتیجه می دهد. حال $k \otimes F = k^n$، یک فضای برداری n—بعدی روی k است؛ $1 \otimes \phi$ پوشاست، ازاین رو دوسویی است، در نتیجه $K \otimes N = 0$.

همچنین بنا به تمرین ۱۲ از فصل ۲، N متناهیاً تولید شده است، از این رو بنا به لم ناکایاما، $N = 0$. در نتیجه ϕ یکریختی است.]

نتیجه بگیرید که هر مجموعه از مولد های F، دستکم n عنصر دارد.

۱۶. فرض کنید B یک A—جبر تخت باشد. دراین صورت شرطهای زیرهم‌ارزند:

(الف) به ازای هر ایده ال $\mathfrak{a}$ از A، $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$.

(ب) $Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ پوشاست.

(پ) به ازای هر ایده ال ماکسیمال m از A به دست می آوریم ، $m^e \neq (1)$.

(ت) اگر M یک A—مدول ناصفر دلخواه باشد آنگاه $M_B \neq 0$.

(ث) به ازای هر A—مدول M، نگاشت $x \mapsto 1 \otimes x$ از M بتوی M_B ،

یک‌به‌یک است.

[برای اثبات (ب)⇒(الف)، (۱۶.۳) را به کار ببرید. اثبات (پ) ⇒ (ب) بدیهی است.

(ت) ⇒ (پ): فرض کنید x عنصری ناصفر از M باشد و فرض کنید $M' = Ax$. چون B روی A تخت است، لذا کافی است نشان دهیم که $M'_B \neq 0$. به ازای ایده ال $\mathrm{a} \neq (1)$ ای ، به دست می آوریم $M' \cong A/\mathrm{a}$، ازاین رو $M'_B \cong B/\mathrm{a}^e$. حال به ازای ایده ال ماکسیمال m ای ، $\mathrm{a} \subseteq m$، ازاین‌رو $\mathrm{a}^e \subseteq m^e \neq (1)$. در نتیجه $M'_B \neq 0$.

(ث) ⇒ (ت): فرض کنید M' هسته ی $M \longrightarrow M_B$ باشد. چون B روی A تخت است، لذا دنباله $0 \longrightarrow M'_B \longrightarrow M_B \longrightarrow (M_B)_B$ دقیق است. امّا (بنا به تمرین ۱۳ از فصل ۲ با درنظر گرفتن $N = M_B$) نگاشت $M_B \longrightarrow (M_B)_B$ یک به یک است، از این رو $M'_B = 0$ و در نتیجه $M' = 0$.

(الف) ⇒ (ث): قرار دهید $M = A/\mathrm{a}$.]

B روی A صادقانه تخت گفته می شود.

۱۷. فرض کنید $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ همریختی های حلقه‌ای باشند. اگر $g \circ f$ تخت و g صادقانه تخت باشد آنگاه f تخت است.

۱۸. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی تخت از حلقه ها، q ایده‌الی اول از B و $\mathrm{p} = \mathrm{q}^c$ باشد . در این صورت، $f^* : Spec(B_\mathrm{q}) \longrightarrow Spec(A_\mathrm{p})$ پوشاست. [چون بنا به (۱۰.۳)، B_p روی A_p تخت است و B_q حلقه‌ای موضعی از B_p است، از این رو روی B_p تخت است. در نتیجه B_q روی A_p تخت است و در شرط(۳) از تمرین ۱۶ صدق می کند.]

۱۹. فرض کنید A حلقه و M ، A —مدول باشد. محمل M به عنوان مجموعه $Supp(M)$ شامل ایده ال های اول p از A که $M_\mathrm{p} \neq 0$، تعریف می‌شود. نتایج زیر را ثابت کنید:

(الف) $M \neq 0 \Leftrightarrow Supp(M) \neq \emptyset$.

(ب) $V(\mathrm{a}) = Supp(A/\mathrm{a})$.

(پ) اگر $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق باشد آنگاه

$$Supp(M) = Supp(M') \cup Supp(M'').$$

(ت) اگر $M = \sum M_i$ آنگاه $Supp(M) = \cup Supp(M_i)$.

(ث) اگر M متناهیاً تولید شده باشد آنگاه $Supp(M) = V(Ann(M))$ (و در نتیجه زیر مجموعه بسته ای از $Spec(A)$ است).

(ج) اگر M و N متناهیاً تولید شده باشند آنگاه

$$Supp(M \otimes_A N) = Supp(M) \cap Supp(N).$$

[تمرین ۳ از فصل ۲ را به کار ببرید.]

(چ) اگر M متناهیاً تولید شده باشد و $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد آنگاه $Supp(M/\mathfrak{a}M) = V(\mathfrak{a} + Ann(M))$.

(ح) اگر $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد و M ، A—مدولی متناهیاً تولید شده باشد آنگاه $Supp(B \otimes_A M) = f^{*-1}(Supp(M))$.

۲۰. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای و

$$f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$$

نگاشت وابسته باشد. نشان دهید که

(الف) هر ایده‌ال اول A ، ایده‌الی منقبض است $\Leftrightarrow$ f^* پوشا باشد.

(ب) f^* یک به یک است $\Rightarrow$ هر ایده‌ال اول B ، ایده‌الی منبسط باشد.

آیا عکس (ب) درست است؟

۲۱.(الف) فرض کنید A حلقه،S زیرمجموعه بسته‌ضربی A و $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ همریختی متعارف باشد. نشان دهید $\phi^* : Spec(S^{-1}A) \longrightarrow Spec(A)$ یک همسانریختی‌از $Spec(S^{-1}A)$ بروی تصویرش در $X = Spec(A)$ است. فرض کنیداین تصویربا $S^{-1}X$ نشان داده‌شود.

به ویژه، اگر $f \in A$ آنگاه تصویر $Spec(A_f)$ در X ، مجموعه باز پایه ای X_f است (فصل ۱، تمرین ۱۷).

(ب) فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد. فرض کنید $X = Spec(A)$ و $Y = Spec(B)$ و فرض کنید $f^* : Y \longrightarrow X$ نگاشت وابسته به f باشد. با انطباق $Spec(S^{-1}A)$ با تصویر متعارفش $S^{-1}X$ در X و $Spec(S^{-1}B)\ (= Spec(f(S)^{-1}B))$ با تصویر متعارفش $S^{-1}Y$ در Y، نشان دهید $S^{-1}f^* : Spec(S^{-1}B) \longrightarrow Spec(S^{-1}A)$، تحدید f^* به $S^{-1}Y$ است و نیز اینکه $S^{-1}Y = f^{*-1}(S^{-1}X)$.

(پ) فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی از A و $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$ توسیع آن در B باشد. فرض کنید $\bar{f} : A/\mathfrak{a} \longrightarrow B/\mathfrak{b}$، همریختی القا شده توسط f باشد. اگر $Spec(A/\mathfrak{a})$ با تصویر متعارفش $V(\mathfrak{a})$ در X و $Spec(B/\mathfrak{b})$ با تصویرش $V(\mathfrak{b})$ در Y منطبق شود آنگاه نشان دهید $\bar{f}^*$ تحدید f^* به $V(\mathfrak{b})$ است.

(ت) فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد. در (ب) قرار دهید $S = A - \mathfrak{p}$ و دراین صورت همانند در (پ) به پیمانه $S^{-1}\mathfrak{p}$ تحویل می‌یابد. نتیجه گیری کنید که زیرفضای $f^{*-1}(\mathfrak{p})$ از Y ، به طور طبیعی با $Spec(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = Spec(k(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$ همسانریخت است که $k(\mathfrak{p})$ میدان مانده‌ای حلقه موضعی $A_\mathfrak{p}$ است.

$Spec(k(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$، تار f^* روی $\mathfrak{p}$ نامیده می شود.

۲۲. فرض کنید A حلقه و $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد. در این صورت تصویر متعارف $Spec(A_\mathfrak{p})$ در $Spec(A)$، با اشتراک تمام همسایگی های باز $\mathfrak{p}$ در $Spec(A)$، برابر است.

۲۳. فرض کنید A حلقه ، $X = Spec(A)$ و U مجموعه باز پایه ای در X باشد (یعنی، به ازای $f \in A$ ای ، $U = X_f$: فصل ۱، تمرین ۱۷).

(الف) اگر $U = X_f$ آنگاه نشان دهید که حلقه $A(U) = A_f$ فقط به U وابسته است و به f وابسته نیست.

(ب) فرض کنید $U' = X_g$ مجموعه باز پایه ای دیگری باشد به طوری که

$U' \subseteq U$. نشان دهید معادله‌ای به صورت $g^n = uf$، به ازای عدد صحیح $n > 0$ ای و $u \in A$ ای ، وجود دارد و این نکته را برای تعریف همریختی $\rho : A(U) \longrightarrow A(U')$ (یعنی ، $A_f \longrightarrow A_g$) با تصویر کردن a/f^m به au^m/g^{mn}، به کار ببرید. نشان دهید ρ فقط به U و U' وابسته است. این همریختی، همریختی تحدید نامیده می شود.

(پ) اگر $U = U'$ آنگاه ρ نگاشت همانی است.

(ت) اگر $U \supseteq U' \supseteq U''$ مجموعه های باز پایه ای در X باشند آنگاه نشان دهید نمودار

$$\begin{array}{ccc} A(U) & \longrightarrow & A(U'') \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & A(U') & \end{array}$$

(که پیکانْ ها همریختی های تحدید هستند) تعویضپذیر است.

(ث) فرض کنید $x(=\mathrm{p})$ نقطه ای از X باشد. نشان دهید

$$\varinjlim_{U \ni x} A(U) \cong A_{\mathrm{p}}$$

تخصیص حلقه $A(U)$ به هر مجموعه باز پایه ای U از X و همریختی تحدید ρ، که در شرایط (پ) و (ت) بالا صدق می کنند، یک پیش بافه از حلقه‌ها روی پایه مجموعه‌های باز $(X_f)_{f\in A}$ تشکیل می دهد. قسمت (ث) می‌گوید که ساقه این پیش بافه در $x \in X$، حلقه موضعی متناظر A_{p} است.

۲۴. نشان دهید پیش بافه تمرین ۲۳، دارای ویژگی زیراست. فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ پوششی‌از X، توسط مجموعه‌های باز پایه‌ای باشد. به‌ازای هر $i \in I$، فرض کنید $s_i \in A(U_i)$ به این صورت باشد که به ازای هر زوج اندیس i و j، تصویرهای s_i و s_j در $A(U_i \cap U_j)$ برابر باشند. لذا $s \in A = (A(X))$ یکتایی وجود دارد که تصویرش در $A(U_i)$، به‌ازای هر $i \in I$، s_i است.

(این مطلب اساساً نتیجه می دهد که پیش بافه ، بافه است.)

۲۵. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$، همریختی های حلقه ای باشند و فرض کنید $h : A \longrightarrow B \otimes_A C$ به صورت $h(x) = f(x) \otimes g(x)$

تعریف شده باشد. فرض کنید X، Y، Z و T به ترتیب طیف های اول A، B، C و $B \otimes_A C$ باشند. در این صورت $h^*(T) = f^*(Y) \cap g^*(Z)$.

[فرض کنید $\mathfrak{p} \in X$ و فرض کنید $k = k(\mathfrak{p})$ میدان مانده ای در $\mathfrak{p}$ باشد. بنا به تمرین ۲۱، تار $h^{*-1}(\mathfrak{p})$ طیف $(B \otimes_A C) \otimes_A k \cong (B \otimes_A k) \otimes_k (C \otimes_A k)$ است. از این رو $\mathfrak{p} \in h^*(T) \Leftrightarrow (B \otimes_A k) \otimes_k (C \otimes_A k) \neq 0 \Leftrightarrow B \otimes_A k \neq 0$ و $C \otimes_A k \neq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in f^*(Y) \cap g^*(Z)$.]

۲۶. فرض کنید $(B_\alpha, g_{\alpha\beta})$ دستگاهی مستقیم از حلقه ها و B حد مستقیم باشد. به ازای هر α، فرض کنید $f_\alpha : A \longrightarrow B_\alpha$ همریختی حلقه ای باشد به طوری که $g_{\alpha\beta} \circ f_\alpha = f_\beta$ زمانی که $\alpha \leq \beta$ (یعنی، B_α ها دستگاهی مسقیم از A—جبر ها تشکیل می دهند). در این صورت f_α ها، $f : A \longrightarrow B$ را القا می‌کنند. نشان دهید

$$f^*(Spec(B)) = \bigcap_\alpha {f_\alpha}^*(Spec(B_\alpha)).$$

[فرض کنید $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. در این صورت $f^{*-1}(\mathfrak{p})$ ، طیف

$$B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \cong \varinjlim (B_\alpha \otimes_A k(\mathfrak{p}))$$

است (زیرا حاصلضرب های تانسوری با حد های مستقیم جابجا می شوند: فصل ۲ ، تمرین ۲۰) . بنا به تمرین ۲۱ از فصل ۲ ، نتیجه می شود که $f^{*-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$ اگر و فقط اگر ، به ازای α ای ، $B_\alpha \otimes_A k(\mathfrak{p}) = 0$ ، یعنی اگر و فقط اگر $f_\alpha{}^{*-1}(\mathfrak{p}) = \emptyset$.]

۲۷. (الف) فرض کنید $f_\alpha : A \longrightarrow B_\alpha$ خانواده دلخواهی از A—جبرها باشد و فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ حاصلضرب تانسوری آنها روی A باشد (فصل ۲ ، تمرین ۲۳). در این صورت

$$f^*(Spec(B)) = \bigcap_\alpha {f_\alpha}^*(Spec(B_\alpha)).$$

[مثال های ۲۵ و ۲۶ را به کار ببرید.]

(ب) فرض کنید $f_\alpha : A \longrightarrow B_\alpha$ خانواده متناهی دلخواهی از A—جبرها باشد و فرض کنید $B = \prod_\alpha B_\alpha$. نگاشت $f : A \longrightarrow B$ را به صورت $f(x) = (f_\alpha(x))$ تعریف کنید. دراین صورت

$$f^*(Spec(B)) = \bigcup_\alpha {f_\alpha}^*(Spec(B_\alpha)).$$

(پ)ازاین رو زیرمجموعه‌های $X = Spec(A)$ به‌صورت $f^*(Spec(B))$، که $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه‌ای است، دراصول مجموعه‌های بسته دریک فضای توپولوژیک صدق می کنند. توپولوژی وابسته، توپولوژی ساختپذیر روی X است. این توپولوژی از توپولوژی زاریسکی، قویتراست (یعنی، مجموعه‌های بازبیشتری وجود دارند یا به‌طور هم‌ارز، مجموعه‌های بسته‌بیشتر).

(ت) فرض کنید X_c مجموعه X را که به توپولوژی ساختپذیر مجهز شده است نمایش دهد. نشان دهید X_c شبه فشرده است.

۲۸. (ادامه تمرین ۲۷.) (الف) به ازای هر $g \in A$، مجموعه X_g (فصل ۱، تمرین ۱۷) نسبت به توپولوژی ساختپذیر ، هم باز و هم بسته است.

(ب) فرض کنید C' کوچکترین توپولوژی روی X رانشان دهد به‌طوری که مجموعه‌های X_g هم باز و هم بسته باشند و $X_{C'}$ مجموعه X راکه به‌این توپولوژی مجهز شده‌است، نمایش دهد. نشان دهید $X_{C'}$ هاسدورف است.

(پ) نتیجه گیری کنید نگاشت همانی $X_c \longrightarrow X_{c'}$ ، همسانریختی است. ازاین رو زیر مجموعه E از X، به ازای $f : A \longrightarrow B$ ای به صورت $f^*(Spec(B))$ است اگر و فقط اگر نسبت به توپولوژی C' بسته باشد.

(ت) فضای توپولوژیک X_c فشرده، هاسدورف و کلاً ناهمبند است.

۲۹. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد. نشان دهید که $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ ، نسبت به توپولوژی ساختپذیر، نگاشت بسته پیوسته‌ای است (یعنی، مجموعه‌های بسته رابه مجموعه‌های بسته می‌نگارد).

۳۰. نشان دهید توپولوژی زاریسکی و توپولوژی ساختپذیر روی $Spec(A)$ یکسان هستند اگروفقط اگر $A/\mathcal{R}$ مطلقاً تخت باشد (که $\mathcal{R}$، پوچ رادیکال A است).[تمرین ۱۱ را به کار ببرید.]

فصل ۴

تجزیه ابتدایی

تجزیه یک ایده ال به ایده ال های ابتدایی، پایه‌ای قدیمی از نظریه ایده‌ال هاست. در واقع، مبانی جبری برای تجزیه یک چند گونای جبری به مولفه های تحویلناپذیرش را فراهم می کند — هر چند انصاف حکم می کند که متذکر شویم تصویر جبری، از هندسه طبیعی اظهارشده، پیچیده تراست. از دیدگاهی دیگر، تجزیه ابتدایی تعمیمی از تجزیه یک عدد صحیح به صورت حاصلضربی از توانهای اعداد اول را فراهم می کند. در برخورد مدرن، با تاکیدش روی موضعی سازی، تجزیه ابتدایی ابزار محوری دیگری در این نظریه است. امّا همچنان به خودی خود جالب است و در این فصل قضایای یکتایی کلاسیک را پایه‌ریزی می کنیم.

نخستین نمونه ها از حلقه های تعویضپذیر، $\mathbb{Z}$ و حلقه چند جمله ای های $k[x_۱, \cdots, x_n]$ هستند که k میدان است؛ هر دو اینها حوزه های تجزیه یکتا هستند. این مطلب برای حلقه های تعویضپذیر دلخواه درست نیست، حتی اگر آنها حوزه‌هایی صحیح باشند (مثالی کلاسیک حلقه $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ است که عنصر ۶ دو تجزیه اساساً متمایز ۲.۳ و $(۱ + \sqrt{-۵})(۱ - \sqrt{-۵})$ دارد). امّا صورت تعمیم یافته ای از « تجزیه یکتا » از ایده ال ها (نه از عناصر) در رده وسیعی

از حلقه ها (حلقه های نوتری) وجود دارد.

یک ایده ال اول در حلقه A، از جهاتی تعمیمی از یک عدد اول است. تعمیم متناظر با توانی از یک عدد اول، ایده ال ابتدایی است. ایده ال q در حلقه A ابتدایی است اگر $\mathrm{q} \neq A$ و اگر

به ازای $n > ۰$ ای، $xy \in \mathrm{q} \Rightarrow x \in \mathrm{q}$ یا $y^n \in \mathrm{q}$.

به عبارت دیگر،

q ابتدایی است $\Leftrightarrow$ هر مقسوم علیه صفر در A/q پوچتوان است و $A/\mathrm{q} \neq ۰$.

به وضوح هر ایده ال اول، ابتدایی است. همچنین انقباض ایده الی ابتدایی، ابتدایی است، زیرا اگر $f : A \longrightarrow B$ و اگر q ایده الی ابتدایی در B باشد آنگاه A/q^c با زیر حلقه ای از B/q یکریخت است.

گزاره ۴.۱. فرض کنید q ایده‌الی ابتدایی در حلقه A باشد. در این صورت، $r(\mathrm{q})$ کوچکترین ایده ال اول شامل q است.

برهان . بنا به (۱.۸) کافی است نشان دهیم که $\mathrm{p} = r(\mathrm{q})$ اول است. فرض کنید $xy \in r(\mathrm{q})$، آنگاه به ازای $m > ۰$ ای، $(xy)^m \in \mathrm{q}$ و در نتیجه $x^m \in \mathrm{q}$ یا به ازای $n > ۰$ ای، $y^{mn} \in r(\mathrm{q})$ یعنی $x \in r(\mathrm{q})$ یا $y \in r(\mathrm{q})$.♣

اگر $\mathrm{p} = r(\mathrm{q})$ آنگاه به ایده ال q، $\mathrm{p}-$ ابتدایی گفته می شود.

مثال ها . ۱) ایده ال های ابتدایی در $\mathbf{Z}$، (۰) و (p^n) هستند که p عددی اول است. زیرا، اینها تنها ایده ال هایی در $\mathbf{Z}$ با رادیکال اول هستند و بلافاصله بررسی می‌شود که ابتدایی هستند.

۲) فرض کنید $A = k[x, y]$ و $\mathrm{q} = (x, y^۲)$. دراین صورت

$$A/\mathrm{q} \cong k[y]/(y^۲)$$

که مقسوم علیه های صفر، تمام مضارب y هستند، از این رو پوچتوان هستند. در نتیجه q ابتدایی است و رادیکالش p، یعنی (x, y)، می باشد. در نتیجه ،

$\mathfrak{p}^۲ \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ (شمول ها اکید هستند)، بنابراین ایده الی ابتدایی لزوماً توانی از یک ایده ال اول نیست.

۳) برعکس، توانی از یک ایده ال اول مانند $\mathfrak{p}^n$ لزوماً ابتدایی نیست، هرچند رادیکالش ایدہال اول $\mathfrak{p}$ است. مثلاً، فرض کنید $A = k[x, y, z]/(xy - z^۲)$ و فرض کنید $\bar{x}, \bar{y}$ و $\bar{z}$ به ترتیب تصاویر x, y و z را در A نشان دهند. دراین صورت $\mathfrak{p} = (\bar{x}, \bar{z})$ اول است (زیرا، $A/\mathfrak{p} \cong k[y]$ حوزه صحیح است)؛ درنتیجه، $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}^۲ \in \mathfrak{p}^۲$ امّا $\bar{x} \notin \mathfrak{p}^۲$ و $\bar{y} \notin r(\mathfrak{p}^۲) = \mathfrak{p}$؛ از این رو $\mathfrak{p}^۲$ ابتدایی نیست. ولی نتیجه زیر وجود دارد:

گزاره ۲.۴. اگر $r(\mathfrak{a})$ ماکسیمال باشد آنگاه $\mathfrak{a}$ ایده الی ابتدایی است. به‌ویژه، توان های ایده ال ماکسیمال m، $m-$ ابتدایی هستند.

برهان . فرض کنید $r(\mathfrak{a}) = m$. تصویر m در $A/\mathfrak{a}$، پوچ رادیکال $A/\mathfrak{a}$ است، درنتیجه بنا به (۸.۱)، $A/\mathfrak{a}$ فقط یک ایده ال اول دارد. از این رو هر عنصری از $A/\mathfrak{a}$ ، یکه یا پوچتوان است و بنابراین هر مقسوم علیه صفر در $A/\mathfrak{a}$، پوچتوان است. ♣

قصد داریم نمایش های یک ایده ال را به عنوان اشتراکی از ایده ال های ابتدایی مطالعه کنیم. نخست دو لم را بیان می کنیم :

لم ۳.۴. اگر $\mathfrak{q}_i$ ها $(۱ \leq i \leq n)$ $\mathfrak{p}-$ ابتدایی باشند آنگاه $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=۱}^n \mathfrak{q}_i$، $\mathfrak{p}-$ابتدایی است.

برهان . $r(\mathfrak{q}) = r(\bigcap_{i=۱}^n \mathfrak{q}) = \bigcap r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$. فرض کنید $xy \in \mathfrak{q}$ و $y \notin \mathfrak{q}$. دراین صورت به ازای i ای به دست می آوریم $xy \in \mathfrak{q}_i$ و $y \notin \mathfrak{q}_i$، از این رو $x \in \mathfrak{p}$ ، زیرا $\mathfrak{q}_i$ ابتدایی است. ♣

لم ۴.۴. فرض کنید $\mathfrak{q}$ ، $\mathfrak{p}-$ابتدایی و x عنصری از A باشد. در این صورت

(الف) اگر $x \in \mathfrak{q}$ آنگاه $(\mathfrak{q} : x) = (1)$؛
(ب) اگر $x \notin \mathfrak{q}$ آنگاه $(\mathfrak{q} : x)$، $\mathfrak{p}$—ابتدایی است و در نتیجه $r(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{p}$؛
(پ) اگر $x \notin \mathfrak{p}$ آنگاه $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.
برهان . (الف) و (پ) بلافاصله از تعاریف نتیجه می شوند.
(ب) اگر $y \in (\mathfrak{q} : x)$ آنگاه $xy \in \mathfrak{q}$، از این رو (چون $x \notin \mathfrak{q}$) به دست می‌آوریم $y \in \mathfrak{p}$. درنتیجه $\mathfrak{q} \subseteq (\mathfrak{q} : x) \subseteq \mathfrak{p}$؛ با رادیکال گرفتن ، به دست می آوریم $r(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{p}$. فرض کنید $yz \in (\mathfrak{q} : x)$ به طوری که $y \notin \mathfrak{p}$؛ در این صورت $xyz \in \mathfrak{q}$، از این رو $xz \in \mathfrak{q}$ ، درنتیجه $z \in (\mathfrak{q} : x)$.♣

یک تجزیه ابتدایی از ایده ال $\mathfrak{a}$ در A، نمایشی از $\mathfrak{a}$ به صورت اشتراکی متناهی از ایده‌ال های ابتدایی است، یعنی

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i. \qquad (1)$$

(در حالت کلی ، چنین تجزیه ابتدایی لزوماً موجود نیست؛ در این فصل توجه خود را به ایده ال هایی که تجزیه ابتدایی دارند محدود می کنیم.) به علاوه، اگر (الف) $r(\mathfrak{q}_i)$ ها متمایز باشند و (ب) داشته باشیم $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j$ $(1 \leq i \leq n)$ آنگاه به تجزیه ابتدایی (۱) مینیمال (یا نافزونه یا تحویل یافته یا نرمال و ...) گفته می شود. بنا به (۳.۴) ، می‌توانیم (الف) را انجام دهیم و در این صورت می توانیم هر جمله اضافی را حذف کنیم تا (ب) را انجام دهیم ؛ ازاین‌رو هر تجزیه ابتدایی می تواند به تجزیه ابتدایی مینیمال تحویل شود. گوییم $\mathfrak{a}$ تجزیه‌پذیر است اگر تجزیه ابتدایی داشته باشد.

قضیه ۵.۴. (اولین قضیه یکتایی). فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی تجزیه پذیر باشد و فرض کنید $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه ابتدایی مینیمال $\mathfrak{a}$ باشد. فرض کنید $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. در این صورت $\mathfrak{p}_i$ ها دقیقاً ایده‌ال های اولی هستند که در مجموعه ایده ال های $r(\mathfrak{a} : x)$ $(x \in A)$ رخ می دهند و از این رو مستقل

از تجزیه خاصی از $\mathfrak{a}$ هستند.

برهان . برای هر $x \in A$ داریم $(\mathfrak{a} : x) = (\bigcap \mathfrak{q}_i : x) = \bigcap (\mathfrak{q}_i : x)$ ، ازاین‌رو بنا به (۴.۴) ، $r(\mathfrak{a} : x) = \bigcap_{i=1}^{n} r(\mathfrak{q}_i : x) = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_j} \mathfrak{p}_j$. فرض کنید $r(\mathfrak{a} : x)$ اول باشد؛ در این صورت بنا به (۱۱.۱) به ازای j ای به دست می آوریم $r(\mathfrak{a} : x) = \mathfrak{p}_j$. از این رو هر ایده ال اولی به صورت $r(\mathfrak{a} : x)$ ، یکی از $\mathfrak{p}_j$ ها است. برعکس، به ازای هر i ، وجود دارد $x_i \notin q_i$ و $x_i \in \bigcap_{j \neq i} q_j$، زیرا تجزیه مینیمال است؛ و به دست می آوریم $r(\mathfrak{a} : x_i) = \mathfrak{p}_i$. ♣

تبصره ها . ۱) برهان فوق همراه با قسمت آخر (۴.۴)، نشان می دهد که به ازای هر i، x_i ای در A وجود دارد به طوری که $(\mathfrak{a} : x_i)$، $\mathfrak{p}_i-$ ابتدایی است.

۲) با در نظر گرفتن $A/\mathfrak{a}$ به عنوان $A-$ مدول ، (۵.۴) هم ارز است با اینکه گفته شود $\mathfrak{p}_i$ ها دقیقاً ایده ال های اولی هستند که به عنوان رادیکال های پوچسازهای عناصر $A/\mathfrak{a}$ رخ می دهند.

مثال . فرض کنید $\mathfrak{a} = (x^2, xy)$ در $A = k[x, y]$. در این صورت $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2$ که $\mathfrak{p}_1 = (x)$ و $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$. ایده ال $\mathfrak{p}_2^2$ بنا به (۲.۴) ، ابتدایی است. بنابراین ایده‌ال های اول ، $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{p}_2$ هستند. در این مثال $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$؛ درنتیجه داریم $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$ ، امّا $\mathfrak{a}$ ایده الی ابتدایی نیست.

به ایده ال های اول $\mathfrak{p}_i$ در (۵.۴) ، متعلق به $\mathfrak{a}$ یا وابسته به $\mathfrak{a}$ گفته می‌شوند. ایده‌ال $\mathfrak{a}$ ابتدایی است اگر و فقط اگر تنها یک ایده ال اول وابسته داشته باشد. عناصر مینیمال مجموعه $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ ، ایده‌ال های اول تنها یا مینیمال متعلق به $\mathfrak{a}$ گفته می‌شوند. همچنین بقیه آنها، ایده ال های اول نشانده شده نامیده می شوند. در مثال بالا، $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$ نشانده شده است.

گزاره ۶.۴. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی تجزیه پذیر باشد. در این صورت هر ایده‌ال اول $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$، ایده‌ال اول مینیمالی متعلق به $\mathfrak{a}$ را شامل می شود و از این رو

ایده‌ال‌های اول مینیمال $\mathfrak{a}$ ، دقیقاً عناصر مینیمال در مجموعه تمام ایده ال های اول شامل $\mathfrak{a}$ هستند.

برهان . اگر $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$، در این صورت $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{p}) \supseteq \bigcap r(\mathfrak{q}_i) = \bigcap \mathfrak{p}_i$. ازاین رو بنا به (۱۱.۱) ، به ازای i ای به دست می آوریم $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$؛ در نتیجه $\mathfrak{p}$ شامل ایده ال اول مینیمالی از $\mathfrak{a}$ است. ♣

تبصره ها . ۱) اسامی تنها و نشانده شده ، از هندسه می آیند. ازاین‌رو اگر $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ که k میدان است آنگاه ایده ال $\mathfrak{a}$ به چند گونای $X \subseteq k^n$ منجر می‌شود (فصل ۱ ، تمرین ۲۵ را ببینید). ایده ال های اول مینیمال $\mathfrak{p}_i$، با مولفه های تحویلناپذیر X متناظرند و ایده ال های اول نشانده شده ، با زیرچندگوناهایی از اینها متناظرند، یعنی ، چندگوناها در مولفه های تحویلناپذیر نشانده می شوند. از این رو در مثال قبل از (۶.۴)، چندگونای تعریف شده توسط $\mathfrak{a}$، خط $x = 0$ است و ایده ال نشانده شده $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$، با مبدأ $(0, 0)$ متناظر می شود.

۲) این گزاره که تمام مولفه های ابتدایی، مستقل از تجزیه هستند، درست نیست. مثلاً ، $(x^2, xy) = (x) \cap (x, y)^2 = (x) \cap (x^2, y)$ دو تجزیه ابتدایی مینیمال متمایز هستند . هرچند ، تعدادی خواص یکتایی وجود دارند: (۱۰.۴) را ببینید.

گزاره ۷.۴. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌الی تجزیه پذیر ، $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه ابتدایی مینیمال و $r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ باشد . در این صورت

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \{x \in A : (\mathfrak{a} : x) \neq \mathfrak{a}\}.$$

به ویژه، اگر ایده ال صفر تجزیه پذیر باشد آنگاه مجموعه D شامل مقسوم علیه‌های صفر A، اجتماع ایده ال های اول متعلق به 0 است.

برهان . اگر $\mathfrak{a}$ تجزیه پذیر باشد آنگاه 0 در $A/\mathfrak{a}$ تجزیه پذیر است؛

یعنی $\bigcap \bar{\mathfrak{q}}_i = 0$ که $\bar{\mathfrak{q}}_i$، تصویر $\mathfrak{q}_i$ در $A/\mathfrak{a}$ است و ابتدایی است. از این رو کافی است عبارت پایانی (۷.۴) را ثابت کنیم. بنا به (۱۵.۱) ، به دست می‌آوریم $D = \bigcup_{x \neq 0} r(0:x)$؛ بنا به برهان (۵.۴) ، به ازای j ای به دست می آوریم ، $r(0:x) = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_j} \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_j$ ، از این رو $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. امّا همچنین بنا به (۵.۴) ، هر $\mathfrak{p}_i$ به ازای $x \in A$ ای به صورت $r(0:x)$ است، در نتیجه $\bigcup \mathfrak{p}_i \subseteq D$. ♣

از این رو (در صورت تجزیه پذیر بودن ایده ال صفر)

D = مجموعه مقسوم علیه های صفر
= $\bigcup$ تمام ایده ال های اول متعلق به 0 ;
$\mathcal{R}$ = مجموعه عناصر پوچتوان
= $\bigcap$ تمام ایده ال های اول مینیمال متعلق به 0 .

سپس رفتار ایده ال های ابتدایی را تحت موضعی سازی بررسی می کنیم.

گزاره ۸.۴. فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی از A باشد و فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌الی $\mathfrak{p}$—ابتدایی باشد.

(الف) اگر $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$ آنگاه $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$.

(ب) اگر $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ آنگاه $S^{-1}\mathfrak{q}$، $S^{-1}\mathfrak{p}$—ابتدایی است و انقباضش در A، $\mathfrak{q}$ است. ازاین رو ایده‌ال های ابتدایی باایده‌ال های ابتدایی در تناظر (۱۱.۳) ، بین ایده‌ال های در $S^{-1}A$ و ایده ال های منقبض در A، متناظرند.

برهان . (الف) اگر $s \in S \cap \mathfrak{p}$ آنگاه به ازای $n > 0$ ای ، $s^n \in S \cap \mathfrak{q}$؛ ازاین‌رو $S^{-1}\mathfrak{q}$ شامل $s^n/1$ می شود که در $S^{-1}A$ یکه است.

(ب) اگر $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ آنگاه از $s \in S$ و $as \in \mathfrak{q}$ نتیجه می دهند که $a \in \mathfrak{q}$، از این رو بنا به (۱۱.۳) ، $\mathfrak{q}^{ec} = \mathfrak{q}$. همچنین از (۱۱.۳) به دست می آوریم، $r(\mathfrak{q}^e) = r(S^{-1}\mathfrak{q}) = S^{-1}r(\mathfrak{q}) = S^{-1}\mathfrak{p}$. اثبات اینکه $S^{-1}\mathfrak{q}$ ابتدایی است ، ساده است. بالاخره ، انقباض ایده‌الی ابتدایی، ابتدایی است. ♣

برای ایده ال دلخواه a و زیر مجموعه بسته ضربی دلخواه S در A، انقباض ایده‌ال $S^{-1}\mathrm{a}$ در A ، با $S(\mathrm{a})$ نشان داده می شود.

گزاره ۹.۴. فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد و فرض کنید a ایده‌الی تجزیه پذیر باشد. فرض کنید $\mathrm{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{q}_i$ یک تجزیه ابتدایی مینیمال a باشد. فرض کنید $\mathrm{p}_i = r(q_i)$ و فرض کنید q_i ها طوری شماره گذاری شوند که S ایده ال های $\mathrm{p}_{m+1}, \cdots, \mathrm{p}_n$ را قطع کند امّا $\mathrm{p}_1, \cdots, \mathrm{p}_m$ را قطع نکند. در این صورت

$$S^{-1}\mathrm{a} = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathrm{q}_i \quad , S(\mathrm{a}) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{q}_i$$

و این تجزیه های ابتدایی مینیمال هستند.

برهان . $S^{-1}\mathrm{a} = \bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}\mathrm{q}_i = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathrm{q}_i$ که تساوی اول بنا به (۱۱.۳) و تساوی دوم بنا به (۸.۴) برقرار است و برای $i = 1, \cdots, m$، $S^{-1}\mathrm{q}_i$، $S^{-1}\mathrm{p}_i$—ابتدایی است. چون p_i ها متمایز هستند، در نتیجه $S^{-1}\mathrm{p}_i$ ها ($1 \leq i \leq m$) نیز متمایزند، از این رو تجزیه ابتدایی مینیمالی را به دست می آوریم . با منقبض کردن طرفین ، مجدداً بنا به (۸.۴)، به دست می آوریم $S(\mathrm{a}) = (S^{-1}\mathrm{a})^c = \bigcap_{i=1}^{m} (S^{-1}\mathrm{q}_i)^c = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{q}_i$. ♣

به مجموعه $\sum$ شامل ایده ال های اول متعلق به a، تنها گفته می شود اگر در شرط زیر صدق کند: اگر p' ایده ال اولی متعلق به a باشد و برای $\mathrm{p} \in \sum$ ای، $\mathrm{p}' \subseteq \mathrm{p}$ آنگاه $\mathrm{p}' \in \sum$.

فرض کنید $\sum$ مجموعه‌ای تنها از ایده ال های اول متعلق به a باشد و فرض کنید $S = A - \bigcup_{\mathrm{p} \in \Sigma} \mathrm{p}$. در این صورت S بسته ضربی است و برای هر ایده ال اول p' متعلق به a، به دست می آوریم

$$\mathrm{p}' \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{p}' \cap S = \emptyset;$$

$$\mathrm{p}' \notin \Sigma \Longrightarrow \mathrm{p}' \not\subseteq \cup_{\mathrm{p}\in\Sigma} \mathrm{p} \text{ ((بنا به (۱۱.۱)) } \Rightarrow \mathrm{p}' \cap \mathrm{S} \neq \emptyset.$$

بنابراین از (۹.۴) ، نتیجه می گیریم

قضیه ۱۰.۴. (دومین قضیه یکتایی). فرض کنید a ایده‌الی تجزیه پذیر باشد، فرض کنید $\mathrm{a} = \cap_{i=1}^{n} \mathrm{q}_i$ تجزیه ابتدایی مینیمالی از a و $\{\mathrm{p}_{i_1}, \cdots, \mathrm{p}_{i_m}\}$ مجموعه‌ای تنها از ایده ال های اول a باشد. در این صورت $\mathrm{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathrm{q}_{i_m}$، مستقل از تجزیه است.

به ویژه:

نتیجه ۱۱.۴. مولفه های ابتدایی تنها (یعنی ، مولفه های ابتدایی q_i که با ایده‌ال های‌اول مینیمال p_i متناظرند) به طور منحصر به فردی توسط a تعیین می شوند.

برهان (۱۰.۴) . نتیجه می گیریم $\mathrm{q}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathrm{q}_{i_m} = S(\mathrm{a})$ که $S = A - \mathrm{p}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathrm{p}_{i_m}$ ، ازاین رو فقط به a بستگی دارد (زیرا p_i ها فقط به a بستگی دارند).♣

تبصره . از طرف دیگر ، به طور کلی مولفه های ابتدایی نشانده شده به طور منحصر به فردی توسط a تعیین نمی شوند. در حقیقت ، اگر A حلقه‌ای نوتری باشد آنگاه تعدادی نامتناهی انتخاب برای هر مولفه نشانده شده وجود دارند(تمرین ۱۱ از فصل ۸ را ببینید).

تمرینات

۱. اگر ایده ال a دارای تجزیه ابتدایی باشد آنگاه $Spec(A/\mathrm{a})$ فقط تعدادی متناهی مولفه تحویلناپذیر دارد.

۲. اگر $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ آنگاه $\mathfrak{a}$ هیچ ایده‌ال اول نشانده شده ندارد.

۳. اگر A مطلقاً تخت باشد آنگاه هر ایده ال ابتدایی ، ماکسیمال است.

۴. در حلقه چند جمله ای $\mathbb{Z}[t]$، ایده ال $m = (۲, t)$ ماکسیمال است و ایده‌ال $q = (۴, t)$، m—ابتدایی است ، امّا توانی از m نیست.

۵. در حلقه چند جمله ای $K[x, y, z]$ که K میدان است و x،yوz مجهولات مستقل هستند، فرض کنید $\mathfrak{p}_۱ = (x, y)$، $\mathfrak{p}_۲ = (x, z)$ و $m = (x, y, z)$؛ $\mathfrak{p}_۱$ و $\mathfrak{p}_۲$ اول هستند و m ماکسیمال است. فرض کنید $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_۱ \mathfrak{p}_۲$. نشان دهید $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_۱ \cap \mathfrak{p}_۲ \cap m^۲$ تجزیه ابتدایی تحویل یافته‌ای از $\mathfrak{a}$ است. کدام یک از مولفه‌ها، تنها هستند و کدام یک نشانده شده هستند؟

۶. فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده نامتناهی و $C(X)$ حلقه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی X باشد (فصل ۱، تمرین ۲۶). آیا در این حلقه ، ایده‌ال صفر تجزیه پذیر است؟

۷. فرض کنید A حلقه باشد و $A[x]$ حلقه چند جمله‌ای های تک متغیره روی A را نشان دهد. به ازای هر ایده ال $\mathfrak{a}$ از A، فرض کنید $\mathfrak{a}[x]$ مجموعه تمام چند جمله ای های در $A[x]$ با ضرایبی در $\mathfrak{a}$ را نشان دهد.

(الف) $\mathfrak{a}[x]$ توسیع $\mathfrak{a}$ به $A[x]$ است.

(ب) اگر $\mathfrak{p}$ ایده الی اول در A باشد آنگاه $\mathfrak{p}[x]$ ایده الی اول در $A[x]$ است.

(پ) اگر $\mathfrak{q}$ ایده الی $\mathfrak{p}$— ابتدایی در A باشد آنگاه $\mathfrak{q}[x]$ ایده الی $\mathfrak{p}[x]$—ابتدایی در $A[x]$ است. [تمرین ۲ از فصل ۱ را به کار ببرید.]

(ت) اگر $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه ابتدایی مینیمالی در A باشد آنگاه $\mathfrak{a}[x] = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathfrak{q}_i[x]$ تجزیه ابتدایی مینیمالی در $A[x]$ است.

(ث) اگر $\mathfrak{p}$ ایده ال اول مینیمالی از $\mathfrak{a}$ باشد آنگاه $\mathfrak{p}[x]$ ایده ال اول مینیمالی از $\mathfrak{a}[x]$ است.

۸. فرض کنید k میدان باشد. نشان دهید در حلقه چند جمله ای $k[x_۱, \cdots, x_n]$ ، ایده‌ال های $\mathfrak{p}_i = (x_۱, \cdots, x_i)$ $(۱ \leq i \leq n)$ اول هستند و توان‌های آنها ابتدایی هستند. [تمرین ۷ را به کار ببرید.]

۹. در حلقه A، فرض کنید $D(A)$ مجموعه ایده ال های اول $\mathfrak{p}$ را نشان دهد که در شرط زیر صدق می کنند: عنصر $a \in A$ موجود است به طوری که $\mathfrak{p}$ در مجموعه ایده‌ال های اول شامل $(\circ : a)$ مینیمال باشد. نشان دهید $x \in A$ مقسوم علیه صفر است $\Leftrightarrow$ به ازای $\mathfrak{p} \in D(A)$ ای، $x \in \mathfrak{p}$.

فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد و $Spec(S^{-1}A)$ را با تصویرش در $Spec(A)$ یکی بگیرید (فصل ۳، تمرین ۲۱). نشان دهید

$$D(S^{-1}A) = D(A) \cap Spec(S^{-1}A).$$

اگر ایده ال صفر تجزیه ابتدایی داشته باشد آنگاه نشان دهید $D(A)$ مجموعه ایده‌ال های اول وابسته به $\circ$ است.

۱۰. به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$ در حلقه A، فرض کنید $S_{\mathfrak{p}}(\circ)$ ، هسته‌ی همریختی $A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ را نشان دهد. ثابت کنید

(الف) $S_{\mathfrak{p}}(\circ) \subseteq \mathfrak{p}$

(ب) $\mathfrak{p}$ ایده الی اول مینیمال از A است $\Leftrightarrow$ $r(S_{\mathfrak{p}}(\circ)) = \mathfrak{p}$.

(پ) اگر $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}'$ آنگاه $S_{\mathfrak{p}}(\circ) \subseteq S_{\mathfrak{p}'}(\circ)$.

(ت) $\bigcap_{\mathfrak{p}\in D(A)} S_{\mathfrak{p}}(\circ) = \circ$، که $D(A)$ در تمرین ۹ تعریف شده است.

۱۱. اگر $\mathfrak{p}$ ایده الی اول مینیمال از حلقه A باشد آنگاه نشان دهید $S_{\mathfrak{p}}(\circ)$ (تمرین ۱۰) کوچکترین ایده ال $\mathfrak{p}$—ابتدایی است.

فرض کنید $\mathfrak{a}$ اشتراک ایده ال های $S_{\mathfrak{p}}(\circ)$ باشد به طوری که $\mathfrak{p}$ روی ایده‌ال‌های اول مینیمال A تغییر می کند. نشان دهید که $\mathfrak{a}$ مشمول در پوچ‌رادیکال A است.

فرض کنید ایده ال صفر تجزیه پذیر است. ثابت کنید $\mathfrak{a} = \circ$ اگر و فقط اگر هر ایده ال اولی از $\circ$، تنها باشد.

۱۲. فرض کنید A یک حلقه و S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد. به ازای هر ایده ال $\mathfrak{a}$، فرض کنید $S(\mathfrak{a})$ انقباض $S^{-1}\mathfrak{a}$ را در A نشان دهد. ایده ال $S(\mathfrak{a})$، اشباع $\mathfrak{a}$ نسبت به S نامیده می شود. ثابت کنید

(الف) $S(\mathfrak{a}) \cap S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

(ب) $S(r(\mathrm{a})) = r(S(\mathrm{a}))$
(پ) a، S را قطع می کند $\Leftrightarrow$ $S(\mathrm{a}) = (1)$
(ت) $S_1(S_2(\mathrm{a})) = (S_1 S_2)(\mathrm{a})$.

اگر a تجزیه ابتدایی داشته باشد آنگاه ثابت کنید مجموعه ایده ال های $S(\mathrm{a})$ (که S روی تمام زیر مجموعه های بسته ضربی A تغییر می کند) متناهی است.

۱۳. فرض کنید A یک حلقه و p ایده الی اول از A باشد.در این صورت توان نمادین n ام p (باتوجه به نماد گذاری تمرین ۱۲) به صورت ایده ال

$$\mathrm{p}^{(n)} = S_{\mathrm{p}}(\mathrm{p}^n)$$

تعریف می شود که $S_{\mathrm{p}} = A - \mathrm{p}$. نشان دهید

(الف) $\mathrm{p}^{(n)}$ ایده‌الی p—ابتدایی است؛

(ب) اگر p^n تجزیه ابتدایی داشته باشد آنگاه $\mathrm{p}^{(n)}$، مولفه p— ابتدایی آن است؛

(پ) اگر $\mathrm{p}^{(m)}\ \mathrm{p}^{(n)}$ تجزیه ابتدایی داشته باشد آنگاه $\mathrm{p}^{(m+n)}$، مولفه p—ابتدایی آن است؛

(ت) $\mathrm{p}^{(n)} = \mathrm{p}^n \Leftrightarrow \mathrm{p}^{(n)}$، p—ابتدایی است .

۱۴. فرض کنید a ایده الی تجزیه پذیر در حلقه A باشد و فرض کنید p عنصری ماکسیمال از مجموعه ایده ال های $(\mathrm{a} : x)$ باشد که $x \in A$ و $x \notin \mathrm{a}$. نشان دهید که p ایده ال اول متعلق به a است.

۱۵. فرض کنید a ایده الی تجزیه پذیر در حلقه A ، Σ مجموعه تنهای ایده‌ال های اول متعلق به a و q_Σ اشتراک مولفه‌های ابتدایی متناظر باشد. فرض کنید f عنصری از A باشد به طوری که برای هر ایده‌ال اول p متعلق به a داشته باشیم، $f \in \mathrm{p} \Leftrightarrow \mathrm{p} \notin \Sigma$ و فرض کنید S_f مجموعه تمام توان های f باشد. نشان دهید که به ازای هر n به اندازه کافی بزرگ ، $\mathrm{q}_\Sigma = S_f(\mathrm{a}) = (\mathrm{a} : f^n)$.

۱۶. اگر A حلقه ای باشد که هر ایده ال آن دارای تجزیه ابتدایی است آنگاه نشان دهید هر حلقه کسرهای $S^{-1}A$ دارای همین ویژگی است .

۱۷. فرض کنید A حلقه ای با ویژگی زیر باشد.

$(L1)$ به ازای هر ایده ال $\mathfrak{a} \neq (1)$ در A و هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$، $x \notin \mathfrak{p}$ وجود دارد به‌طوری که $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} : x)$، که $S_{\mathfrak{p}} = A - \mathfrak{p}$.

در این صورت هر ایده الی در A، اشتراکی (احتمالاً تعدادی نامتناهی) از ایده ال های ابتدایی است.

[فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی $\neq (1)$ در A و $\mathfrak{p}_1$ عنصری مینیمال از مجموعه ایده ال های اول شامل $\mathfrak{a}$ باشد. در این صورت $\mathfrak{q}_1 = S_{\mathfrak{p}_1}(\mathfrak{a})$، $\mathfrak{p}_1$—ابتدایی است (بنا به تمرین ۱۱) و به ازای $x \notin \mathfrak{p}_1$ ای، $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{a} : x)$. نشان دهید $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap (\mathfrak{a} + (x))$.

حال فرض کنید $\mathfrak{a}_1$ عنصری ماکسیمال از مجموعه ایده‌ال های $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ باشد که $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ و $\mathfrak{a}_1$ را طوری انتخاب کنید که $x \in \mathfrak{a}_1$، و در نتیجه $\mathfrak{a}_1 \not\subseteq \mathfrak{p}_1$. این طرز ساختن را با شروع از $\mathfrak{a}_1$، تکرار کنید و به همین منوال ادامه دهید. در مرحله n ام به دست می آوریم $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \cap \mathfrak{a}_n$ که $\mathfrak{q}_i$ ها ایده ال هایی ابتدایی هستند و $\mathfrak{a}_n$ در میان ایده‌ال های $\mathfrak{b}$ که شامل $\mathfrak{a}_{n-1} = \mathfrak{a}_n \cap \mathfrak{q}_n$ هستند به‌طوری که $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \cap \mathfrak{b}$ و $\mathfrak{a}_n \not\subseteq \mathfrak{p}_n$، ماکسیمال است. اگر در مرحله‌ای به دست آوریم $\mathfrak{a}_n = (1)$ آنگاه فرایند متوقف می شود و $\mathfrak{a}$ اشتراک متناهی از ایده ال های ابتدایی می شود. در غیر این صورت، با استقرای ترامتناهی ادامه دهید، ملاحظه کنید که هر $\mathfrak{a}_n$ اکیداً شامل $\mathfrak{a}_{n-1}$ است.]

۱۸. شرط زیر را روی حلقه A در نظر بگیرید:

$(L2)$ برای ایده ال دلخواه $\mathfrak{a}$ و زنجیر کاهشی $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$ از زیر مجموعه های بسته ضربی A، عدد طبیعی n موجود باشد به طوری که $S_n(\mathfrak{a}) = S_{n+1}(\mathfrak{a}) = \cdots$. ثابت کنید گزاره های زیر هم ارزند :

(الف) هر ایده الی در A، تجزیه ابتدایی دارد؛

(ب) A درشرطهای $(L1)$ و $(L2)$ صدق می کند.

[برای اثبات (ب) $\Rightarrow$ (الف)، تمرینات ۱۲ و ۱۵ را به کار ببرید. برای اثبات (الف) $\Rightarrow$ (ب)، باتوجه به نمادگذاری اثبات تمرین ۱۷، نشان دهید که اگر

$S_n = S_{\mathfrak{p}_1} \cap \cdots \cap S_{\mathfrak{p}_n}$ آنگاه S_n، $\mathfrak{a}_n$ را قطع می‌کند از این رو $S_n(\mathfrak{a}_n) = (1)$ و در نتیجه $S_n(\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$. حال $(L2)$ را به کار ببرید تا نشان دهید که این طرز ساختن بایستی پس از تعدادی متناهی مرحله به پایان برسد.]

۱۹. فرض کنید A حلقه و $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد. نشان دهید هر ایده‌ال $\mathfrak{p}$ــ ابتدایی ، شامل $S_{\mathfrak{p}}(0)$، هسته ی همریختی متعارف $A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$، می شود.

فرض کنید A در شرط زیر صدق کند:

به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$،اشتراک تمام ایده ال های $\mathfrak{p}$ــ ابتدایی A، برابر $S_{\mathfrak{p}}(0)$ باشد. (حلقه های نوتری در این شرط صدق می کنند : فصل ۱۰ را ببینید.) فرض کنید $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ ایده ال های اول متمایزی باشند که هیچکدام ایده ال اول مینیمالی از A نیست. در این صورت ایده‌ال $\mathfrak{a}$ ای در A وجود دارد که ایده ال های اول وابسته‌اش ، $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ هستند.

[حکم را با استقرا روی n ثابت کنید . حالت $n = 1$ بدیهی است (قرار دهید $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1$). فرض کنید $n > 1$ و فرض کنید $\mathfrak{p}_n$ در مجموعه $\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$ ، ماکسیمال باشد. بنا به فرض استقرا، ایده‌ال $\mathfrak{b}$ و تجزیه ابتدایی مینیمال $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{n-1}$ وجود دارد که هر $\mathfrak{q}_i$، $\mathfrak{p}_i$ــابتدایی است. اگر $\mathfrak{b} \subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0)$ آنگاه فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول مینیمال A، مشمول در $\mathfrak{p}_n$ باشد. در این صورت $S_{\mathfrak{p}_n}(0) \subseteq S_{\mathfrak{p}}(0)$، ازاین‌رو $\mathfrak{b} \subseteq S_{\mathfrak{p}}(0)$. با رادیکال گرفتن و به کارگیری تمرین ۱۰، به دست می آوریم $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{n-1} \subseteq \mathfrak{p}$، از این رو $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ ای، در نتیجه $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$، زیرا $\mathfrak{p}$ مینیمال است. این نتیجه یک تناقض است ، زیرا هیچ $\mathfrak{p}_i$ ای مینیمال نیست. از این رو $\mathfrak{b} \not\subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0)$ و در نتیجه ایده ال $\mathfrak{p}_n$ــابتدای $\mathfrak{q}_n$ وجود دارد که $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{q}_n$. نشان دهید $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ دارای ویژگی های مورد نظر است .]

تجزیه ابتدایی مدول ها

در واقع کل این فصل می تواند با متنی از مدول هایی روی یک حلقه A ، تعویض شود. تمرینات زیر به چگونگی انجام این کار اشاره می کنند.

۲۰ . فرض کنید M، A—مدولی ثابت و N زیر مدولی از M باشد. رادیکال N در M، به صورت زیر تعریف می شود

$$r_M(N) = \{x \in A : x^q M \subseteq N، \text{ به ازای } q > 0 \text{ ای}\}$$

نشان دهید $r_M(N) = r(N : M) = r(Ann(M/N))$. به ویژه ، $r_M(N)$ یک ایده ال است.

همانند (۱۳.۱) ، فرمول هایی را برای r_M بیان و اثبات کنید.

۲۱. عنصر $x \in A$ ، یک درونریختی ϕ_x از M را تعریف می کند، یعنی $m \mapsto xm$. به عنصر x یک مقسوم علیه صفر (به ترتیب، پوچتوان) در M گفته می‌شود اگر ϕ_x یک‌به‌یک نباشد (به ترتیب، پوچتوان باشد). زیرمدول Q از M، در M ابتدایی است اگر $Q \neq M$ و هر مقسوم علیه صفر در M/Q ، پوچتوان باشد.

نشان دهید اگر Q در M ابتدایی باشد آنگاه $(Q : M)$ ایده الی ابتدایی است و از این رو $r_M(Q)$ ، ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ است. گوییم Q (در M)، $\mathfrak{p}$— ابتدایی است.

نظیرهای (۳.۴) و (۴.۴) را ثابت کنید.

۲۲. یک تجزیه‌ای ابتدایی از N در M، نمایشی از N به صورت اشتراک

$$N = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$$

از زیر مدول های ابتدایی M است؛ همچنین ، تجزیه ابتدایی مینیمال است اگر ایده ال های $\mathfrak{p}_i = r_M(Q_i)$، همگی متمایز باشند و اگر هیچکدام از مولفه های Q_i نتواند از اشتراک حذف شود، یعنی اگر $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j\neq i} Q_j$ $(1 \leq i \leq n)$.

مشابه (۵.۴) ، ثابت کنید که ایده ال های اول $\mathfrak{p}_i$ فقط به N (و M) بستگی دارند. آنها ایده ال های اول متعلق به N در M نامیده می شوند. نشان دهید که آنها ایده ال های اول متعلق به 0 در M/N نیز هستند.

۲۳. نظیرهای (۶.۴) تا (۱۱.۴) را بیان و اثبات کنید. (قرار دادن $N = 0$ از کلیت مساله نمی کاهد.)

فصل ۵

وابستگی صحیح و ارزه ها

در هندسه جبری کلاسیک، منحنی ها به دفعات توسط تصویرشان بروی یک خط و در نظر گرفتن منحنی به عنوان پوششی (منشعب) از خط، مطالعه می‌شوند. این موضوع کاملاً مشابه رابطه بین میدان اعداد و میدان اعداد گویا است — یا به بیان دقیق تر، بین حلقه های اعداد صحیح آنها — و سیمای جبری مشترک، مفهوم وابستگی صحیح است. در این فصل چند نتیجه را درباره وابستگی صحیح ثابت می‌کنیم. به‌ویژه قضایای کوهن—سیدنبرگ [۱] (قضایای « بالارو » و « پایین رو ») که به ایده ال های اول در یک توسیع صحیح مربوط می شوند را ثابت می کنیم. در تمرینات پایانی، وضعیت جبری—هندسی و به ویژه ، لم نرمالسازی را مورد بحث قرار می دهیم.

همچنین بحث کوتاهی از ارزه ها را ارائه می کنیم.

وابستگی صحیح

فرض کنید B یک حلقه و A زیر حلقه ای از B باشد (در نتیجه ، $1 \in A$). به عنصر x از B، روی A صحیح گفته می شود اگر x ریشه ای از یک

[۱] *Seidenberg*

چندجمله‌ای تکین با ضرایبی در A باشد، یعنی اگر x در معادله ای به صورت

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (1)$$

صدق کند که a_i ها عناصری از A هستند. به وضوح هر عنصری از A، روی A صحیح است.

مثال ۵.۰. در نظر بگیرید $A = \mathbf{Z}$ و $B = \mathbf{Q}$. اگر عدد گویای $x = r/s$ روی $\mathbf{Z}$ صحیح باشد که r و s هیچ عامل مشترکی ندارند آنگاه بنا به (۱) ، به‌دست می آوریم

$$r^n + a_1 r^{n-1} s + \cdots + a_n s^n = 0$$

که a_i ها اعداد صحیح گویایی هستند. از این رو، s، r^n را عاد می کند پس $s = \pm 1$ ، در نتیجه $x \in \mathbf{Z}$.

گزاره ۵.۱. گزاره های زیر هم ارزند :

(الف) $x \in B$ روی A صحیح است؛

(ب) $A[x]$ ، A— مدولی متناهیاً تولید شده است؛

(پ) $A[x]$ مشمول در زیر حلقه C از B است به طوری که C ، A— مدولی متناهیاً تولید شده است ؛

(ت) $A[x]$—مدول صادق M وجود دارد که به عنوان A—مدول ، متناهیاً تولید شده است.

برهان . (ب) $\Rightarrow$ (الف). بنا به (۱) ، به ازای هر $r \geq 0$ به دست می آوریم

$$x^{n+r} = -(a_1 x^{n+r-1} + \cdots + a_n x^r);$$

از این رو ، بنا به استقرا، تمام توان های مثبت x در A— مدول تولید شده توسط $1, x, \ldots, x^{n-1}$ ، قرار می گیرند. در نتیجه $A[x]$ (به عنوان A —مدول) توسط $1, x, \ldots, x^{n-1}$ تولید می شود.

(پ) $\Leftarrow$ (ب). در نظر بگیرید $C = A[x]$.

(ت) $\Leftarrow$ (ب). در نظر بگیرید $M = C$ که $A[x]$ —مدولی صادق است (زیرا، $yC = \circ \Rightarrow y.\backslash = \circ$).

(الف) $\Leftarrow$ (ت). این حکم از (۴.۲) نتیجه می شود : ϕ را به صورت ضرب در x در نظر بگیرید و $\mathrm{a} = \mathrm{A}$ (به دست می آوریم $xM \subseteq M$ ، زیرا M یک $A[x]$—مدول است)؛ چون M صادق است، در نتیجه به ازای $a_i \in A$ ای مناسب به دست می آوریم ، $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. ♣

نتیجه ۲.۵. فرض کنید x_i ها $(1 \leq i \leq n)$ عناصری از B باشند که هر کدام روی A صحیح است . در این صورت حلقه $A[x_1, \cdots, x_n]$ ، A—مدولی متناهیاً تولید شده است.

برهان . با استقرا روی n حکم را ثابت می کنیم . حالت $n = 1$ قسمتی از (۱.۵) است. در نظر بگیرید $n > 1$ و فرض کنید $A_r = A[x_1, \cdots, x_r]$؛ دراین صورت بنا به فرض استقرا، A_{n-1} یک A —مدول متناهیاً تولید شده است. $A_n = A_{n-1}[x_n]$ ، A_{n-1}—مدولی متناهیاً تولید شده است (بنا به حالت $n = 1$، چون x_n روی A_{n-1} صحیح است). ازاین رو بنا به (۱۶.۲) ، A_n به عنوان A —مدول ، متناهیاً تولید شده است. ♣

نتیجه ۳.۵. مجموعه C شامل عناصری از B که روی A صحیح هستند، زیرحلقه‌ای از B است که شامل A می شود.

برهان . اگر $x, y \in C$ آنگاه $A[x, y]$ بنا به (۲.۵)، A—مدولی متناهیاً تولید شده است. ازاین رو $x \pm y$ و xy، بنا به قسمت (پ) ازگزاره (۱.۵)، روی A صحیح هستند.♣

حلقه C در (۳.۵) ، بستار صحیح A در B نامیده می شود. اگر $C = A$ آنگاه به A صحیحاً بسته در B گفته می شود. اگر $C = B$ آنگاه به حلقه B

صحیح روی A گفته می‌شود.

تبصره . فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد درنتیجه B یک A —جبر است. در این صورت به f صحیح گفته می شود و به B یک A—جبر صحیح گفته می شود اگر B روی زیر حلقه اش $f(A)$، صحیح باشد. با این اصطلاح، نتایج بالا نشان می دهد که

. متناهی = صحیح + نوع متناهی

نتیجه ۴.۵. اگر $A \subseteq B \subseteq C$ حلقه هایی باشند و اگر B روی A صحیح باشد و C روی B صحیح باشد آنگاه C روی A صحیح است (ترایایی بودن وابستگی صحیح).

برهان . فرض کنید $x \in C$، در این صورت معادله‌ای را به صورت

$$x^n + b_۱ x^{n-۱} + \cdots + b_n = ۰ \quad (b_i \in B)$$

به دست می آوریم . حلقه $B' = A[b_۱, \cdots, b_n]$ بنا به (۲.۵) ، A —مدولی متناهیاً تولید شده است و $B'[x]$ ، B' —مدولی متناهیاً تولید شده است (زیرا ، x روی B' صحیح است). از این رو $B'[x]$ بنا به (۱٦.۲)، A—مدولی متناهیاً تولید شده است و بنا به قسمت (پ) از گزاره (۱.۵)، x روی A صحیح است . ♣

نتیجه ۵.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند و فرض کنید C بستار صحیح A در B باشد. در این صورت C در B، صحیحاً بسته است.

برهان . فرض کنید $x \in B$ روی C صحیح باشد. بنا به (۴.۵) ، x روی A صحیح است ، از این رو $x \in C$.♣

گزاره بعدی نشان می دهد که وابستگی صحیح با گذار به خارج قسمت ها و حلقه های کسرها حفظ می شود :

گزاره ۶.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند که B روی A صحیح است.

(الف) اگر $\mathfrak{b}$ ایده الی از B باشد و $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$، آنگاه $B/\mathfrak{b}$ روی $A/\mathfrak{a}$ صحیح است.

(ب) اگر S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد آنگاه $S^{-1}B$ روی $S^{-1}A$ صحیح است.

برهان . (الف) اگر $x \in B$ آنگاه مثلاً داریم $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ که هر $a_i \in A$. این معادله را به پیمانه $\mathfrak{b}$ تحویل کنید.

(ب) فرض کنید $x/s \in S^{-1}B$ ($s \in S$ و $x \in B$). در این صورت معادله فوق ، معادله زیر را نتیجه می دهد

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s^n = 0$$

که نشان می‌دهد x/s روی $S^{-1}A$ صحیح است. ♣

قضیه بالارو

گزاره ۷.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حوزه هایی صحیح باشند و B روی A صحیح است . در این صورت B میدان است اگر و فقط اگر A میدان باشد.

برهان . تصور کنید A یک میدان است ؛ فرض کنید $y \in B$ و $y \neq 0$. فرض کنید

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A)$$

معادله وابستگی صحیح برای y ، با کوچکترین درجه ممکن باشد. چون B حوزه صحیح است لذا داریم $a_n \neq 0$، از این رو $y^{-1} = -a_n^{-1}(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \in B$. در نتیجه، B میدان است.

برعکس ، تصور کنید B میدان است؛ فرض کنید $x \neq 0, x \in A$. دراین‌صورت $x^{-1} \in B$ ، از این رو روی A صحیح است، بنابراین معادله زیر را

به دست می آوریم

$$x^{-m} + a'_۱ x^{-m+۱} + \cdots + a'_m = ۰ \quad (a'_i \in A).$$

درنتیجه $x^{-۱} = -(a'_۱ + a'_۲ x + \cdots + a'_m x^{m-۱}) \in A$، بنابراین A میدان است. ♣

نتیجه ۸.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند و B روی A صحیح است ؛ فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌الی اول از B باشد و فرض کنید $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$. دراین صورت $\mathfrak{q}$ ماکسیمال است اگر و فقط اگر $\mathfrak{p}$ ماکسیمال باشد.

برهان . بنا به (۶.۵)، $B/\mathfrak{q}$ روی $A/\mathfrak{p}$ صحیح است و هر دوی این حلقه‌ها، حوزه هایی صحیح هستند. حال (۷.۵) را به کار ببرید. ♣

نتیجه ۹.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند؛ فرض کنید $\mathfrak{q}$ و $\mathfrak{q}'$ ایده‌ال‌هایی اول از B باشند به طوری که $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ و مثلاً $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}$. در این صورت $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

برهان . بنا به (۶.۵)، $B_\mathfrak{p}$ روی $A_\mathfrak{p}$ صحیح است . فرض کنید m توسیع $\mathfrak{p}$ در $A_\mathfrak{p}$ باشد و فرض کنید n و n' به ترتیب توسیع های $\mathfrak{q}$ و $\mathfrak{q}'$ در $B_\mathfrak{p}$ باشند. دراین صورت m ایده‌الی ماکسیمال از $A_\mathfrak{p}$ است؛ $n \subseteq n'$ و $n^c = n'^c = m$. بنابه (۸.۵) ، نتیجه می شود که n و n' ماکسیمال هستند ، از این رو $n = n'$، درنتیجه بنابه قسمت (ت)از گزاره (۱۱.۳) ، $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. ♣

قضیه ۱۰.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند که B روی A صحیح است و فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A باشد. در این صورت ایده ال اول $\mathfrak{q}$ از B وجود دارد به طوری که $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

برهان . بنا به (۶.۵) ، $B_\mathfrak{p}$ روی $A_\mathfrak{p}$ صحیح است و نمودار

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ A_\mathfrak{p} & \longrightarrow & B_\mathfrak{p} \end{array}$$

(که پیکان های افقی ، نگاشت هایی یک به یک هستند) تعویضپذیر است. فرض کنید n ایده‌الی ماکسیمال از B_{p} باشد؛ در این صورت بنا به (۸.۵)، $m = n \cap A_{\mathrm{p}}$ ماکسیمال است ، ازاین رو ایده ال ماکسیمال یکتای حلقه موضعی A_{p} است. اگر $\mathrm{q} = \beta^{-1}(n)$ آنگاه q اول است و به دست می آوریم $\mathrm{q} \cap A = \alpha^{-1}(m) = \mathrm{p}$. ♣

قضیه ۱۱.۵. (« قضیه بالارو »). فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند که B روی A صحیح است ؛ فرض کنید $\mathrm{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{p}_n$ زنجیری ازایده‌ال‌های اول A و $\mathrm{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{q}_m$ $(m < n)$ زنجیری از ایده‌ال‌های اول B باشد به طوری که $\mathrm{q}_i \cap A = \mathrm{p}_i$ $(1 \leq i \leq m)$. در این صورت زنجیر $\mathrm{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{q}_m$ می تواند به زنجیر $\mathrm{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{q}_n$ توسیع داده شود به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $\mathrm{q}_i \cap A = \mathrm{p}_i$.

برهان . توسط استقرا، بلافاصله حکم را به حالت $m = 1$ و $n = 2$ ساده می کنیم . فرض کنید $\bar{A} = A/\mathrm{p}_1$ و $\bar{B} = B/\mathrm{q}_1$؛ در این صورت $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ و بنا به (۶.۵)، $\bar{B}$ روی $\bar{A}$ صحیح است. از این رو بنا به (۱۰.۵)، ایده‌ال اول $\bar{\mathrm{q}}_2$ از $\bar{B}$ وجود دارد به‌طوری که $\bar{\mathrm{q}}_2 \cap \bar{A} = \bar{\mathrm{p}}_2$، یعنی تصویر p_2 در $\bar{A}$. حال $\bar{\mathrm{q}}_2$ را به B بازگردانید و لذا ایده ال اول q_2 را باویژگی‌های مورد نظر به‌دست می‌آوریم . ♣

حوزه های صحیح صحیحاً بسته

قضیه پایین رو

قسمت (ب) از گزاره (۶.۵) ، می تواند دقیق تر شود:

گزاره ۱۲.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند و C بستار صحیح A در B باشد. فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد. در این صورت $S^{-1}C$ بستار صحیح $S^{-1}A$ در $S^{-1}B$ است.

برهان . بنا به (۶.۵)، $S^{-1}C$ روی $S^{-1}A$ صحیح است. برعکس ، اگر

$b/s \in S^{-1}B$ روی $S^{-1}A$ صحیح باشد آنگاه معادله ای را به صورت

$$(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0$$

به دست می آوریم که $a_i \in A$ و $s_i \in S$ $(1 \leq i \leq n)$. فرض کنید $t = s_1 \cdots s_n$ و تمام جملات این معادله را در $(st)^n$ ضرب کنید. در این صورت به معادله وابستگی صحیح برای bt روی A ، تبدیل می شود. از این رو $bt \in C$ و بنابراین $b/s = bt/st \in S^{-1}C$. ♣

یک حوزه صحیح، صحیحاً بسته گفته می شود (بدون هیچ قید و شرطی) اگر در میدان کسرهایش صحیحاً بسته باشد. مثلاً ، $\mathbf{Z}$ صحیحاً بسته است ((۵.۰) را ببینید). بحثی مشابه نشان می دهد هر حوزه تجزیه یکتا، صحیحاً بسته است. به ویژه، حلقه چند جمله ای $k[x_1, \cdots, x_n]$ روی یک میدان، صحیحاً بسته است.

بستار صحیح ، خاصیتی موضعی است:

گزاره ۱۳.۵. فرض کنید A حوزه‌ای صحیح باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) A صحیحاً بسته است؛

(ب) به ازای هر ایده ال اول $\mathfrak{p}$، $A_\mathfrak{p}$ صحیحاً بسته است؛

(پ) به ازای هر ایده ال ماکسیمال m، A_m صحیحاً بسته است.

برهان . فرض کنید K میدان کسرهای A ، C بستار صحیح A در K و $f : A \longrightarrow C$ نگاشت همانی از A بتوی C باشد. در این صورت A صحیحاً بسته است $\Leftrightarrow$ f پوشا باشد و بنا به (۱۲.۵) ، $A_\mathfrak{p}$ (به ترتیب A_m،) صحیحاً بسته است $\Leftrightarrow$ $f_\mathfrak{p}$ (به ترتیب f_m،) پوشا باشد. حال (۹.۳) را به کار ببرید. ♣

فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه هایی باشند و فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد. به عنصری از B، صحیح روی $\mathfrak{a}$ گفته می شود اگر در معادله وابستگی صحیح

روی A که تمام ضرایب در $\mathfrak{a}$ قرار می گیرند، صدق کند. بستار صحیح $\mathfrak{a}$ در B، مجموعه تمام عناصری از B است که روی $\mathfrak{a}$ صحیح هستند.

لم ۱۴.۵. فرض کنید C بستار صحیح A در B باشد و فرض کنید $\mathfrak{a}^e$ توسیع $\mathfrak{a}$ را در C نشان دهد. در این صورت بستار صحیح $\mathfrak{a}$ در B، رادیکال $\mathfrak{a}^e$ است (وبنابراین تحت جمع و ضرب بسته است).

برهان . اگر $x \in B$ روی $\mathfrak{a}$ صحیح باشد آنگاه معادله‌ای را به صورت

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

به‌دست‌می آوریم که a_1 ، $\cdots$ ، a_n در $\mathfrak{a}$ هستند. ازاین‌رو $x \in C$ و $x^n \in \mathfrak{a}^e$، یعنی $x \in r(\mathfrak{a}^e)$. برعکس ، اگر $x \in r(\mathfrak{a}^e)$ آنگاه به ازای $n > 0$ ای، $x^n = \sum a_i x_i$ که a_i ها عناصری از $\mathfrak{a}$ هستند و x_i ها عناصری از C هستند. ازآنجایی که هر x_i روی A صحیح است، از (۲.۵) نتیجه می شود $M = A[x_1, \cdots, x_n]$، A—مدولی متناهیاً تولید شده است و به دست می آوریم $x^n M \subseteq \mathfrak{a} M$. از این رو بنا به (۴.۲) (در اینجا با در نظر گرفتن ϕ به صورت ضرب در x^n) می بینیم که x^n روی $\mathfrak{a}$ صحیح است، در نتیجه x روی A صحیح است. ♣

گزاره ۱۵.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حوزه‌هایی صحیح ، A صحیحاً بسته و $x \in B$ روی ایده ال $\mathfrak{a}$ از A صحیح باشد. در این صورت x روی میدان کسرهای K از A، صحیح است و اگر چند جمله ای مینیمالش روی K به صورت $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ باشد آنگاه a_1 ، $\cdots$ ، a_n در $r(\mathfrak{a})$ قرار می‌گیرند.

برهان . به وضوح ، x روی K جبری است. فرض کنید L زبر میدان K باشد که شامل تمام مزدوج های x_1 ، $\cdots$ ، x_n از x می باشد. هر x_i در همان معادله وابستگی صحیح x صدق می کند، از این رو هر x_i روی $\mathfrak{a}$ صحیح است. ضرایب چند جمله ای مینیمال x روی K، چندجمله‌ای هایی بر حسب x_i ها هستند، در نتیجه بنا به (۱۴.۵) ، روی $\mathfrak{a}$ صحیح هستند. چون A

صحیحاً بسته است، مجدداً بنا به (۱۴.۵) ، باید در $r(\mathfrak{a})$ قرار گیرند. ♣

قضیه ۱۶.۵.(« قضیه پایین رو »). فرض کنید $A \subseteq B$ حوزه‌هایی صحیح باشند، A صحیحاً بسته و B روی A صحیح باشد. فرض کنید $\mathfrak{p}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{p}_n$ زنجیری ازایده‌ال‌های اول A باشد و فرض کنید $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ $(m < n)$ زنجیری از ایده‌ال های اول B باشد که $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ $(1 \le i \le m)$. در این صورت زنجیر $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ می‌تواند به زنجیر $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$ توسیع داده‌شود به طوری که $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ $(1 \le i \le n)$.

برهان . همانند (۱۱.۵)، بلافاصله حکم را به حالت $m = 1$ و $n = 2$ ساده می کنیم . دراین صورت بایستی نشان دهیم $\mathfrak{p}_2$ انقباض ایده‌الی اول در حلقه $B_{\mathfrak{q}_1}$ است، یا به طور هم ارز ، بنا به (۱۶.۳)، $B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$.

هر $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2$ به صورت y/s است که $y \in B\mathfrak{p}_2$ و $s \in B - \mathfrak{q}_1$. بنابه (۱۴.۵)، y روی $\mathfrak{p}_2$ صحیح است و از این رو بنا به (۱۵.۵) ، معادله مینیمالش روی K، میدان کسرهای A، به صورت

$$y^r + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_r = 0 \qquad (1)$$

است که u_1 ، $\cdots$ ، u_r در $\mathfrak{p}_2$ قرار دارند.

حال فرض کنید $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A$. در این صورت $s = yx^{-1}$ که $x^{-1} \in K$ ، درنتیجه معادله مینیمال برای s روی K ، با تقسیم (۱) بر x^r به دست می آید و بنابراین ، مثلاً به صورت زیر است

$$s^r + v_1 s^{r-1} + \cdots + v_r = 0 \qquad (2)$$

که $v_i = u_i/x^i$. در نتیجه

$$x^i v_i = u_i \in \mathfrak{p}_2 \quad (1 \le i \le r). \qquad (3)$$

امّا s روی A صحیح است ، از این رو بنا به (۱۵.۵) (با در نظر گرفتن (۱) = (a)، هر v_i در A قرار دارد. فرض کنید $x \notin \mathfrak{p}_2$. در این صورت (۳) نشان می دهد که هر $v_i \in \mathfrak{p}_2$، ازاین رو (۲) نشان می دهد که $s^r \in B\mathfrak{p}_2 \subseteq B\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{q}_1$ و بنابراین $s \in \mathfrak{q}_1$، که تناقض است. از این رو $x \in \mathfrak{p}_2$ و بنابراین $B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ همانطور که می خواستیم. ♣

در برهان گزاره بعدی ، حقایقی متعارف از نظریه میدان ها را می پذیریم.

گزاره ۱۷.۵. فرض کنید A حوزه ای صحیحاً بسته، K میدان کسرهایش، L توسیع جبری تفکیکپذیر متناهی K و B بستار صحیح A در L باشد. در این صورت پایه v_1 ، $\cdots$ ، v_n برای L روی K وجود دارد به طوری که $B \subseteq \sum_{j=1}^{n} Av_j$.

برهان . اگر v عنصری دلخواه از L باشد آنگاه v روی K جبری است و بنابراین در معادله ای به صورت

$$a_0 v^r + a_1 v^{r-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_i \in A)$$

صدق می کند. با ضرب کردن این معادله در $a_0{}^{r-1}$، می بینیم که $a_0 v = u$ روی A صحیح است و در نتیجه در B قرار می گیرد. از این رو برای هر پایه دلخواه L روی K ، می توانیم عناصر پایه را در عناصری مناسب از A ضرب کنیم تا پایه u_1 ، $\cdots$ ، u_n را به‌دست آوریم به طوری که هر $u_i \in B$.

فرض کنید T ، اثر (از L به K) را نشان دهد. چون L/K تفکیکپذیر است، در نتیجه صورت دو خطی $(x,y) \mapsto T(xy)$ روی L (که فضایی برداری روی K در نظر گرفته شده) نا تباهیده است و از این رو پایه دوگان v_1 ، $\cdots$ ، v_n را برای L روی K به دست آوریم که به‌صورت $T(u_i v_j) = \delta_{ij}$ تعریف می شود. فرض کنید $x \in B$، مثلاً $x = \sum_j x_j v_j$ $(x_j \in K)$. در نتیجه ، $xu_i \in B$ (زیرا $u_i \in B$) و بنابراین بنا به (۱۵.۵)، $T(xu_i) \in A$ (زیرا اثر یک عنصر ، مضرب

یکی از ضرایب چند جمله‌ای مینیمال است). امّا

$$T(xu_i) = \sum_j T(x_j u_i v_j) = \sum_j x_j T(u_i v_j) = \sum_j x_j \delta_{ij} = x_i.$$

از این رو $x_i \in A$. در نتیجه $B \subseteq \sum_j A v_j$. ♣

حلقه های ارزه

فرض کنید B حوزه‌ای صحیح و K میدان کسرهایش باشد. در این صورت B یک حلقه ارزه[1] K است اگر برای هر $x \neq 0$ آنگاه یا $x \in B$ یا $x^{-1} \in B$ (یا هر دو).

گزاره ۱۸.۵. (الف) B حلقه ای موضعی است.

(ب) اگر B' حلقه ای باشد به طوری که $B \subseteq B' \subseteq K$ آنگاه B' حلقه ارزه K است.

(پ) B در K صحیحاً بسته است .

برهان . (الف) فرض کنید m مجموعه نایکه های B باشد، بنابراین $x \in m \Leftrightarrow (x = 0$ یا $x^{-1} \notin B)$. اگر $a \in B$ و $x \in m$ آنگاه به دست می آوریم $ax \in m$، زیرا در غیر این صورت $(ax)^{-1} \in B$ و در نتیجه $x^{-1} = a.(ax)^{-1} \in B$. سپس فرض کنید x و y عناصری ناصفر از m باشند. در این صورت $xy^{-1} \in B$ یا $x^{-1}y \in B$. اگر $xy^{-1} \in B$ آنگاه $x + y = (1 + xy^{-1})y \in Bm \subseteq m$ و اگر $x^{-1}y \in B$ آنگاه استدلال ، مشابه است . از این رو m یک ایده ال است و در نتیجه، بنا به (۶.۱)، B حلقه ای موضعی است.

(ب) بنا به تعاریف ، واضح است.

(پ) فرض کنید $x \in K$ روی B صحیح باشد. در این صورت، مثلاً

[1] از واژه« حلقه ارزیاب » نیز استفاده می شود—م .

به‌دست می آوریم

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

به‌طوری که هر $b_i \in B$. اگر $x \in B$ آنگاه چیزی برای اثبات وجود ندارد . وگرنه، دراین صورت $x^{-1} \in B$ ، از این رو

$$x = -(b_1 + b_2 x^{-1} + \cdots + b_n x^{1-n}) \in B.\clubsuit$$

فرض کنید K یک میدان و Ω میدانی جبری—بسته باشد. فرض کنید Σ مجموعه تمام زوج های (A, f) باشد که A زیر حلقه‌ای از K و f یک همریختی از A بتوی Ω است. مجموعه Σ را به صورت زیر ، جزئاً مرتب می‌کنیم:

$$(A, f) \leq (A', f') \Leftrightarrow A \subseteq A', \quad f'_{|A} = f.$$

به وضوح شرایط لم زرن برقرارند و در نتیجه مجموعه Σ دستکم یک عنصر ماکسیمال دارد.

فرض کنید (B, g) عنصری ماکسیمال از Σ باشد. می خواهیم ثابت کنیم B حلقه ارزه K است. نخستین گام در برهان ، لم زیر است :

لم ۱۹.۵. B حلقه ای موضعی است و $m = Ker(g)$ ایده‌ال ماکسیمالش است.

برهان . از آنجایی که $g(B)$ زیرحلقه‌ای از یک میدان است و بنابراین یک حوزه صحیح است در نتیجه ایده‌ال $m = Ker(g)$ اول است . می توانیم g را با قرار دادن $\bar{g}(b/s) = g(b)/g(s)$ ، به ازای هر $b \in B$ و هر $s \in B - m$ ، به همریختی $\bar{g} : B_m \longrightarrow \Omega$ توسیع دهیم، زیرا $g(s)$ صفر نخواهد شد. به دلیل

اینکه زوج (B,g) ماکسیمال است نتیجه می شود که $B = B_{\mathfrak{m}}$ ، از این رو B حلقه ای موضعی است و $\mathfrak{m}$ ایده ال ماکسیمالش است. ♣

لم ۲۰.۵. فرض کنید x عنصری ناصفر از K باشد. فرض کنید $B[x]$ زیرحلقه‌ای از K، تولید شده توسط x روی B باشد و $\mathfrak{m}[x]$ توسیع $\mathfrak{m}$ در $B[x]$ باشد. در این صورت $\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$ یا $\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.

برهان . فرض کنید $\mathfrak{m}[x] = B[x]$ و $\mathfrak{m}[x^{-1}] = B[x^{-1}]$. در این صورت معادلاتی به صورت

$$u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1 \quad (u_i \in \mathfrak{m}) \tag{1}$$

$$v_0 + v_1 x^{-1} + \cdots + v_n x^{-n} = 1 \quad (v_j \in \mathfrak{m}) \tag{2}$$

به دست آوریم که می توانیم فرض کنیم درجه های m و n کوچکترین مقادیر ممکن هستند. فرض کنید $m \geq n$ و طرفین (۲) را در x^n ضرب کنید:

$$(1 - v_0)x^n = v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n. \tag{3}$$

ازآنجایی که $v_0 \in \mathfrak{m}$، از (۱۹.۵) نتیجه می شود که $1 - v_0$ در B یکه است و بنابراین معادله (۳) می تواند به صورت

$$x^n = w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n \quad (w_i \in \mathfrak{m})$$

نوشته شود. از این رو در معادله (۱) می توانیم x^m را با $w_1 x^{m-1} + \cdots + w_n x^{m-n}$ جایگزین کنیم و این نتیجه، مینیمال بودن توان m را نقض می کند. ♣

قضیه ۲۱.۵. فرض کنید (B,g) عنصری ماکسیمال از Σ باشد. دراین‌صورت ، B یک حلقه ارزه میدان K است.

برهان . بایستی نشان دهیم که اگر $x \neq 0$ عنصری از K باشد آنگاه $x \in B$ یا $x^{-1} \in B$. همچنین بنا به (۲۰.۵) ، می توانیم فرض کنیم $\mathfrak{m}[x]$

ایده ال واحد حلقه $B' = B[x]$ نیست. در این صورت $m[x]$ مشمول در ایده ال ماکسیمال m' از B' است و به دست می آوریم $m' \cap B = m$ (زیرا $m' \cap B$ ایده‌الی سره‌از B است و شامل m می شود). از این رو نشاندن B در B'، نشاندن میدان $k = B/m$ در میدان $k' = B'/m'$ را القا می کند؛ همچنین $k' = k[\bar{x}]$ که $\bar{x}$ تصویر x در k' است، ازاین رو $\bar{x}$ روی k جبری است و بنابراین k' توسیع جبری متناهی k است.

حال همریختی g، نشاندن $\bar{g}$ از K در Ω را القا می کند، زیرا بنا به (۱۹.۵)، m هسته‌ی g است. چون Ω جبری — بسته است، لذا $\bar{g}$ می تواند به نشاندن $\bar{g}'$ از k' بتوی Ω توسیع یابد. از ترکیب $\bar{g}'$ با همریختی طبیعی $B' \longrightarrow k'$، مثلاً به دست می آوریم $g' : B' \longrightarrow \Omega$ که g را توسیع می دهد. چون زوج (B, g) ماکسیمال است، نتیجه می شود $B' = B$ و بنابراین $x \in B$. ♣

نتیجه ۲۲.۵. فرض کنید A زیر حلقه ای از میدان K باشد. در این صورت بستار صحیح $\bar{A}$ از A در K، اشتراک تمام حلقه های ارزه K است که شامل A می شوند.

برهان . فرض کنید B یک حلقه ارزه K باشد به طوری که $A \subseteq B$. چون B بنا به قسمت (پ) ازگزاره (۱۸.۵) صحیحاً بسته است، پس نتیجه می شود $\bar{A} \subseteq B$.

برعکس ، فرض کنید $x \notin \bar{A}$. در این صورت x در حلقه $A' = A[x^{-1}]$ نیست. ازاین رو x^{-1} در A' نایکه است و بنابراین مشمول در ایده‌ال ماکسیمال m' از A' است . فرض کنید Ω بستار جبری میدان $k' = A'/m'$ باشد. دراین‌صورت تحدید همریختی طبیعی $A' \longrightarrow k'$ به A ، یک همریختی از A بتوی Ω تعریف می کند. بنا به (۲۱.۵)، این همریختی می تواند به حلقه ارزه $B \supseteq A$، توسیع داده شود. چون x^{-1} به صفر نگاشته می شود پس نتیجه می‌شود که $x \notin B$. ♣

گزاره ۲۳.۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حوزه هایی صحیح و B روی A متناهیاً تولید شده باشد. فرض کنید v عنصری ناصفر از B باشد. در این صورت $u \neq 0$ ای با ویژگی زیر در Aوجود دارد: هر همریختی f از A بتوی میدان جبری—بسته Ω که $f(u) \neq 0$، می تواند به همریختی g از B بتوی Ω که $g(v) \neq 0$، توسیع داده شود.

برهان . با استقرا روی تعداد مولد های B روی A بلافاصله حکم را به حالتی که B روی A توسط تک عنصر x تولید می شود ساده می کنیم .

(الف) فرض کنید x روی A متعالی باشد، یعنی چند جمله‌ای ناصفری با ضرایبی در A که x ریشه‌ای از آن باشد موجود نباشد. فرض کنید $v = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ و در نظر بگیرید $u = a_0$. در این صورت اگر $f : A \longrightarrow \Omega$ به این صورت باشد که $f(u) \neq 0$ آنگاه $\xi \in \Omega$ ای وجود دارد به طوری که $f(a_0)\xi^n + f(a_1)\xi^{n-1} + \cdots + f(a_n) \neq 0$، زیرا Ω نامتناهی است. نگاشت $g : B \longrightarrow \Omega$ را به عنوان توسیع f، با قرار دادن $g(x) = \xi$، تعریف کنید. در این صورت $g(v) \neq 0$ همانطور که می خواستیم .

(ب) حال فرض کنید x روی A جبری است (یعنی روی میدان کسرهای A). در این صورت v^{-1} نیز جبری است، زیرا v یک چند جمله‌ای بر حسب x است. از این رو معادلاتی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \quad (a_i \in A) \tag{۱}$$

$$a'_0v^{-n} + a'_1v^{1-n} + \cdots + a'_n = 0 \quad (a'_j \in A). \tag{۲}$$

فرض کنید $u = a_0a'_0$ و $f : A \longrightarrow \Omega$ به این صورت باشد که $f(u) \neq 0$. در این صورت ، f نخست می تواند به همریختی $f_1 : A[u^{-1}] \longrightarrow \Omega$ (به طوری که $f_1(u^{-1}) = f(u)^{-1}$)توسیع داده شود و سپس بنا به (۲۱.۵) ، به همریختی $h : C \longrightarrow \Omega$ که C حلقه ارزه شامل $A[u^{-1}]$ است . بنا به (۱) ، x روی $A[u^{-1}]$ صحیح است ، از این رو بنا به (۲۲.۵) $x \in C$ ، بنابراین C شامل B است و به ویژه $v \in C$. از طرف دیگر ، بنا به (۲) ، v^{-1} روی $A[u^{-1}]$

صحیح است و بنابراین مجدداً بنا به (۲۲.۵)، در C قرار می گیرد. درنتیجه v در C یکه است و از این رو $h(v) \neq \circ$. حال g را به عنوان تحدید h به B درنظربگیرید. ♣

نتیجه **۲۴.۵**. فرض کنید k میدان و B، k—جبری متناهیاً تولید شده باشد. اگر B میدان باشد آنگاه یک توسیع جبری متناهی از k است.

برهان . در نظر بگیرید $A = k$ ، $v = ۱$ و بستار جبری $\Omega = k$. ♣

نتیجه (۲۴.۵) یکی از صورت های قضیه صفرهای هیلبرت است. برای مشاهده برهانی دیگر ، گزاره (۹.۷) را ببینید.

تمرینات

۱. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی صحیح حلقه ها باشد. نشان دهید $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشتی بسته است ، یعنی مجموعه‌های بسته را به مجموعه‌های بسته تصویر می کند. (این مطلب هم ارز هندسی (۱۰.۵) است .)

۲. فرض کنید A زیر حلقه ای از حلقه B باشد به‌طوری که B روی A صحیح است و فرض کنید $f : A \longrightarrow \Omega$ یک همریختی از A بتوی میدان جبری — بسته Ω باشد. نشان دهید f می تواند به یک همریختی از B بتوی Ω توسیع داده شود. [(۱۰.۵) را به کار ببرید.]

۳. فرض کنید $f : B \longrightarrow B'$ همریختی A—جبرها و C یک A—جبر باشد. اگر f صحیح باشد آنگاه ثابت کنید $f \otimes ۱ : B \otimes_A C \longrightarrow B' \otimes_A C$ صحیح است. (این نتیجه ، قسمت (ب) از گزاره (٦.۵) را به عنوان حالتی خاص شامل می‌شود.)

۴. فرض کنید A زیر حلقه ای از حلقه B باشد به‌طوری که B روی A صحیح است. فرض کنید n ایده الی ماکسیمال از B باشد و فرض کنید $m = n \cap A$ ایده‌ال ماکسیمال متناظر از A باشد. آیا لزوماً B_n روی A_m صحیح است؟

[زیر حلقه $k[x^۲ - ۱]$ را از $k[x]$، که k میدان است، در نظر بگیرید و فرض کنید $n = (x - ۱)$. آیا عنصر $۱/(x + ۱)$ می تواند صحیح باشد؟]

۵. فرض کنید $A \subseteq B$ حلقه‌هایی باشند و B روی A صحیح است.

(الف) اگر $x \in A$ در B یکه باشد آنگاه در A یکه است.

(ب) رادیکال جیکوبسن A، انقباض رادیکال جیکوبسن B است.

۶. فرض کنید $B_۱$ ، $\cdots$ ، B_n، A—جبر هایی صحیح باشند. نشان دهید $\prod_{i=۱}^{n} B_i$ ، A—جبری صحیح است.

۷. فرض A زیر حلقه‌ای از حلقه B باشد به طوری که مجموعه $B - A$ تحت ضرب بسته است. نشان دهید A در B صحیحاً بسته است.

۸. (الف) فرض کنید A زیر حلقه‌ای از حوزه صحیح B و C بستار صحیح A در B باشد. فرض کنید f و g چند جمله ای هایی تکین در $B[x]$ باشند به طوری که $fg \in C[x]$. در این صورت f و g در $C[x]$ هستند. [میدانی شامل B در نظر بگیرید که در آن چند جمله ای های f و g به عوامل خطی تجزیه می شوند: مثلاً، $f = \prod(x - \xi_i)$ و $g = \prod(x - \eta_j)$. هر ξ_i و هر η_j، ریشه ای از fg است ، از این رو روی C صحیح است. بنابراین ضرایب f و g روی C صحیح هستند.]

(ب) همین نتیجه را بدون این فرض که B (یا A) حوزه‌ای صحیح است، ثابت کنید.

۹. فرض کنید A زیر حلقه ای از حلقه B و C بستار صحیح A در B باشد. ثابت کنید $C[x]$ بستار صحیح $A[x]$ در $B[x]$ است. [اگر $f \in B[x]$ روی $A[x]$ صحیح باشد آنگاه

$$f^m + g_۱ f^{m-۱} + \cdots + g_m = ۰ \quad (g_i \in A[x]).$$

فرض کنید r عدد صحیحی بزرگتر از m و درجات g_1 ، $\cdots$ ، g_m باشد و فرض کنید $f_1 = f - x^r$، بنابراین

$$(f_1 + x^r)^m + g_1(f_1 + x^r)^{m-1} + \cdots + g_m = 0$$

یا به عبارت دیگر

$$f_1^m + h_1 f_1{}^{m-1} + \cdots + h_m = 0$$

که $h_m = (x^r)^m + g_1(x^r)^{m-1} + \cdots + g_m \in A[x]$. حال تمرین ۸ را برای چند جمله‌ای های $-f_1$ و $f_1{}^{m-1} + h_1 f_1{}^{m-2} + \cdots + h_{m-1}$ به کار ببرید.]

۱۰. گوییم همریختی حلقه ای $f : A \longrightarrow B$ ویژگی بالا رو (به ترتیب، ویژگی پایین رو) دارد اگر نتیجه قضیه بالا رو (۱۱.۵) (به ترتیب، قضیه پایین رو (۱٦.۵)) برای B و زیر حلقه اش $f(A)$ برقرار باشد.

فرض کنید $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشت وابسته به f باشد.

(الف) سه عبارت زیر را در نظر بگیرید:

(۱) f^* نگاشتی بسته است.

(۲) f ویژگی بالا رو دارد.

(۳) فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده ال اول دلخواهی از B باشد و فرض کنید $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$. دراین صورت $f^* : Spec(B/\mathfrak{q}) \longrightarrow Spec(A/\mathfrak{p})$ پوشا است.

ثابت کنید (۳) $\Leftrightarrow$ (۲) $\Leftarrow$ (۱). (همچنین فصل ٦، تمرین ۱۱ را ببینید.)

(ب) سه عبارت زیر را در نظر بگیرید:

($'$۱) f^* نگاشتی باز است.

($'$۲) f ویژگی پایین رو دارد.

($'$۳) به ازای هرایده ال $\mathfrak{q}$ از B، اگر $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ آنگاه

$$f^* : Spec(B_{\mathfrak{q}}) \longrightarrow Spec(A_{\mathfrak{p}})$$

پوشاست.

ثابت کنید $(3') \Leftrightarrow (2') \Rightarrow (1')$. (همچنین فصل ۷، تمرین ۲۳ را ببینید.)

[برای اثبات $(3') \Rightarrow (1')$، ملاحظه کنید که $B_\mathfrak{q}$ حد مستقیم حلقه‌های B_t است که $t \in B - \mathfrak{q}$؛ از این رو بنا به تمرین ۲۶ از فصل ۳، به دست می آوریم $f^*(Spec(B_\mathfrak{q})) = \cap_t f^*(Spec(B_t)) = \cap_t f^*(Y_t)$. چون Y_t یک همسایگی باز $\mathfrak{q}$ در Y است و چون f^* باز است پس نتیجه می شود که $f^*(Y_t)$ یک همسایگی باز $\mathfrak{p}$ در X است و از این رو شامل $Spec(A_\mathfrak{p})$ می شود .]

۱۱. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی تخت حلقه ها باشد. در این صورت f ویژگی پایین رو دارد. [فصل ۳، تمرین ۱۸.]

۱۲. فرض کنید G گروه متناهی خودریختی های حلقه A باشد و فرض کنید A^G زیر حلقه G – ناورداها را نشان دهد، یعنی همه عناصری مانند $x \in A$ به طوری که به ازای هر $\sigma \in G$ ، $\sigma(x) = x$. ثابت کنید A روی A^G صحیح است. [اگر $x \in A$ آنگاه مشاهده کنید که x ریشه‌ای از چند جمله ای $\prod_{\sigma \in G} (t - \sigma(x))$ است.]

فرض کنید S زیر مجموعه بسته ضربی A باشد به طوری که به ازای هر $\sigma \in G$، $\sigma(S) \subseteq S$ و فرض کنید $S^G = S \cap A^G$. نشان دهید که عمل G روی A ، به عملی روی $S^{-1}A$ توسیع می یابد و نیز اینکه $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

۱۳. باتوجه به شرایط تمرین ۱۲ ، فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده ال اول A^G و P مجموعه ایده ال های اول A باشد که انقباضشان $\mathfrak{p}$ است . نشان دهید که G به‌طور ترایایی روی P عمل می کند. به ویژه، P متناهی است. [فرض کنید $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \in P$ و $x \in \mathfrak{p}_1$. در این صورت $\prod_\sigma \sigma(x) \in \mathfrak{p}_1 \cap A^G = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_2$، از این رو به ازای $\sigma \in G$ ای ، $\sigma(x) \in \mathfrak{p}_2$. نتیجه بگیرید $\mathfrak{p}_1$ مشمول در $\bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{p}_2)$ است و سپس (۱۱.۱) و (۹.۵) را به‌کار ببرید.]

۱۴. فرض کنید A حوزه ای صحیحاً بسته، K میدان کسرهایش و L توسیع تفکیکپذیر نرمال متناهی از K باشد. فرض کنید G گروه گالوای L روی K و B بستار صحیح A در L باشد. نشان دهید به ازای هر $\sigma \in G$، $\sigma(B) = B$ و نیز

اینکه $A = B^G$.

۱۵. فرض کنید A و K همانند تمرین ۱۴ باشند ، فرض کنید L میدان توسیع متناهی دلخواهی از K و B بستار صحیح A در L باشد. نشان دهید اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول دلخواهی از A باشد آنگاه مجموعه ایده‌ال‌های اول $\mathfrak{q}$ از B که به $\mathfrak{p}$ منقبض می شوند، متناهی است (به عبارت دیگر ، $Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ دارای متناهی تار است).

[حکم مساله را به دو حالت ساده کنید (الف) L روی K تفکیکپذیر است و (ب) L صرفاً روی K تفکیکناپذیر است. در حالت (الف) ، L را در توسیع تفکیکپذیر نرمال متناهی از K بنشانید و تمرینات ۱۳ و ۱۴ را به کار ببرید. در (ب) حالت ، اگر $\mathfrak{q}$ ایده‌الی اول از B باشد که $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ آنگاه نشان دهید $\mathfrak{q}$ مجموعه همه $x \in B$ است به طوری که به ازای $m \geq 0$ ای ، $x^{p^m} \in \mathfrak{p}$ که p مشخصه K است و ازاین رو دراین حالت، $Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ دوسویی است.]

لم نرمالسازی نوتر

۱۶. فرض کنید K یک میدان و $A \neq 0$، k—جبری متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت عناصر $y_1, \cdots, y_r \in A$ وجود دارند که روی k جبری—مستقل هستند و این طورند که A روی $k[y_1, \cdots, y_r]$ صحیح است.

فرض خواهیم کرد k نامتناهی است. (اگر k متناهی باشد آنگاه نتیجه همچنان درست است امّا برهان متفاوتی لازم است.) فرض کنید x_1،$\cdots$،x_n، A را به عنوان یک k—جبر تولید کنند. می توانیم x_i ها را مجدداً شماره‌گذاری کنیم به طوری که x_1 ، $\cdots$ ، x_r روی k جبری — مستقل باشند و هر یک از x_{r+1} ، $\cdots$ ، x_n روی $k[x_1, \cdots, x_r]$ جبری باشد . حال با استقرا روی n ادامه دهید. اگر $n = r$ آنگاه چیزی برای انجام دادن وجود ندارد، بنابراین فرض کنید $n > r$ و نتیجه برای $n - 1$ مولد درست باشد. ازآنجایی که مولد x_n روی $k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ جبری است، در نتیجه چند جمله ای n متغیره

ناصفر f وجود دارد به طوری که $f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=0$. فرض کنید F، قسمت همگن با بزرگترین درجه در f باشد. چون k نا متناهی است پس $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}\in k$ وجود دارند به طوری که $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},1)\neq 0$. قرار دهید $x'_i=x_i-\lambda_i x_n$ $(1\leq i\leq n-1)$. نشان دهید x_n روی حلقه $A'=k[x'_i,\cdots,x'_{n-1}]$ صحیح است و از این رو A روی A' صحیح است. دراین صورت فرض استقرا را برای A' به کار ببرید تا برهان کامل شود.

از برهان نتیجه می شود که y_1 ، $\cdots$ ، y_r می توانند به صورت ترکیب های خطی از x_1 ، $\cdots$ ، x_n انتخاب شوند. این نتیجه دارای تعبیر هندسی زیر است: اگر k جبری — بسته باشد و X چندگونای جبری آفین در k^n با حلقه مختصی ناصفر A باشد آنگاه زیر فضای L با بعد r در k^n و نگاشتی خطی از k^n بروی L که X را بروی L تصویر می کند ، موجود است . [تمرین ۲ را به کار ببرید.]

قضیه صفرها (صورت ضعیف).

۱۷. فرض کنید X یک چند گونای جبری آفین در k^n باشد که k میدانی جبری — بسته است و فرض کنید $I(X)$ ایده‌الی از X در حلقه چند جمله ای $k[t_1,\cdots,t_n]$ باشد (فصل ۱ ، تمرین ۲۷). اگر $I(X)\neq(1)$ آنگاه X ناتهی است. [فرض کنید $A=k[t_1,\cdots,t_n]/I(X)$ حلقه مختصی X باشد. در این صورت $A\neq 0$ ، از این رو بنابر تمرین ۱۶، زیر فضای خطی L با بعد ی بزرگتر از یا مساوی با صفر در k^n ونگاشتی از X بروی L وجود دارد. از این رو $X\neq\emptyset$.]

نتیجه گیری کنید که هر ایده ال ماکسیمال در حلقه $k[t_1,\cdots,t_n]$ به صورت $(t_1-a_1,\cdots,t_n-a_n)$ است که هر $a_i\in K$.

۱۸. فرض کنید k یک میدان و B، k—جبری متناهیاً تولید شده باشد. فرض کنید B میدان است. در این صورت B یک توسیع جبری متناهی از k است. (این نتیجه نسخه دیگری از قضیه صفرهای هیلبرت است. برهان زیر منسوب به زاریسکی است. برای مشاهده برهان های دیگر، (۲۴.۵) و (۹.۷) را ببینید.)

فرض کنید x_1 ، $\cdots$ ، x_n، B را به عنوان k—جبر تولید کنند. برهان با استقرا روی n انجام می شود. اگر $n = 1$ آنگاه نتیجه به وضوح درست است، بنابراین در نظر بگیرید $n > 1$. فرض کنید $A = k[x_1]$ و $K = k(x_1)$ میدان کسرهای A باشد. بنا به فرض استقرا، B یک توسیع جبری متناهی از K است، ازاین‌رو هر یک از x_2 ، $\cdots$ ، x_n در معادله یک چند جمله‌ای تکین با ضرایبی در K، یعنی ضرایبی به صورت a/b که a و b در A هستند ، صدق می کند. اگر f حاصلضرب مخرج های تمام‌این ضرایب باشدآنگاه‌هریک‌از x_2،$\cdots$،x_n روی A_f صحیح است. ازاین رو B و در نتیجه k، روی A_f صحیح است.

فرض کنید x_1 روی k متعالی باشد. در این صورت A صحیحاً بسته است زیرا یک حوزه تجزیه یکتا است. از این رو A_f صحیحاً بسته است (۱۲.۵) و در نتیجه $A_f = K$ که به وضوح محال است. از این رو x_1 روی k جبری است، در نتیجه K (و بنابراین B) یک توسیع متناهی از k است.

۱۹. نتیجه تمرین ۱۷ را از تمرین ۱۸ استنتاج کنید.

۲۰. فرض کنید A زیر حلقه ای از یک حوزه صحیح B باشد به‌طوری‌که B روی A متناهیاً تولید شده است. نشان دهید $s \neq 0$ ای در A و عناصر y_1،$\cdots$،y_n در B وجود دارند که روی A، جبری — مستقل هستند و نیز اینکه B_s روی B'_s صحیح است که $B' = A[y_1, \cdots, y_n]$. [فرض کنید $S = A - \{0\}$ و $K = S^{-1}A$ میدان کسرهای A باشد . در این صورت $S^{-1}B$، K—جبری متناهیاً تولید شده است و در نتیجه بنا به لم نرمالسازی (تمرین ۱۶) x_1،$\cdots$،x_n در $S^{-1}B$ وجود دارند که روی K ، جبری — مستقل هستند و نیز اینکه $S^{-1}B$ روی $K[x_1, \cdots, x_n]$ صحیح است. فرض کنید z_1 ، $\cdots$ ، z_m، B را به عنوان یک A —جبر تولید کنند. در این صورت هر z_j (که به عنوان عنصری از $S^{-1}B$ در نظر گرفته می شود) روی $K[x_1, \cdots, x_n]$ صحیح است. با نوشتن معادله وابستگی صحیح برای هر z_j، نشان دهید $s \in S$ ای وجود دارد به طوری که $x_i = y_i/s$ $(1 \le i \le n)$ با $y_i \in B$ و نیز اینکه هر sz_j روی B' صحیح است. نتیجه بگیرید که این s در شرایط بیان شده صدق می کند.]

۲۱. فرض کنید A و B همانند تمرین ۲۰ باشند. نشان دهید $s \neq 0$ ای در A وجود دارد که اگر Ω میدانی جبری — بسته و $f : A \longrightarrow \Omega$ یک همریختی باشد که $f(s) \neq 0$ آنگاه f می تواند به یک همریختی $B \longrightarrow \Omega$ توسیع داده شود. [باتوجه به نمادگذاری تمرین ۲۰ ، f ابتدا می تواند به کل B' توسیع داده شود، مثلاً با تصویر هر y_i به ۰ ؛ سپس به B'_s (زیرا $f(s) \neq 0$) و بالاخره به B_s (بنابه تمرین ۲ ، زیرا B_s روی B'_s صحیح است).]

۲۲. فرض کنید A و B همانند تمرین ۲۰ باشند. اگر رادیکال جیکوبسن A صفر باشد آنگاه رادیکال جیکوبسن B نیز صفر است.
[فرض کنید $v \neq 0$ عنصری از B باشد. بایستی نشان دهیم ایده‌الی ماکسیمال از B وجود دارد که شامل v نمی شود. با به کار گیری تمرین ۲۱ برای حلقه B_v و A به عنوان زیر حلقه‌اش ، عنصر ناصفر s را در A به دست می آوریم. فرض کنید m ایده‌ال ماکسیمال A باشد به طوری که $s \notin m$ و فرض کنید $k = A/m$. در این صورت نگاشت متعارف $k \longrightarrow A$ به همریختی g از B_v بتوی بستار جبری Ω از k، توسیع می‌یابد. نشان دهید $g(v) \neq 0$ و نیز اینکه $Ker(g) \cap B$ ایده‌الی ماکسیمال از B است.]

۲۳. فرض کنید A یک حلقه باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر هم ارزند :

(الف) هر ایده ال اول در A، اشتراکی از ایده ال های ماکسیمال است.

(ب) در هر تصویر همریخت از A، پوچ رادیکال با رادیکال جیکوبسن برابر است.

(پ) هر ایده‌الی اول در A که ماکسیمال نیست ، با اشتراک ایده ال های اولی که اکیداً شامل آن می شوند برابر است.

[قسمت مشکل فقط (ب) $\Rightarrow$ (پ) است. فرض کنید (ب) نادرست باشد، دراین صورت ایده‌الی اول وجود دارد که اشتراکی ازایده‌ال های ماکسیمال نیست. با تبدیل کردن مساله به مساله‌ای در حلقه خارج قسمتی می توانیم فرض کنیم A یک حوزه صحیح است که $\mathcal{R}$ به عنوان رادیکال جیکوبسن آن ، ناصفر است. فرض کنید f عنصری ناصفر از $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت

$A_f \neq 0$، در نتیجه A_f ایده‌الی ماکسیمال دارد که انقباضش در A ایده ال اول $\mathfrak{p}$ است به طوری که $f \notin \mathfrak{p}$ و نسبت به این ویژگی ماکسیمال است. در این صورت $\mathfrak{p}$ ماکسیمال نیست و با اشتراک ایده‌ال‌های اولی که اکیداً شامل $\mathfrak{p}$ هستند، برابر نیست.]

یک حلقه A با سه ویژگی هم ارز بالا، حلقه جیکوبسن نامیده می شود.

۲۴. فرض کنید A یک حلقه جیکوبسن (تمرین ۲۳) و B، A—جبر باشد. نشان دهید اگر B، (الف) روی A صحیح یا (ب) به عنوان A—جبر متناهیاً تولیدشده باشد ، آنگاه B جیکوبسن است. [برای قسمت (ب) از تمرین ۲۲ استفاده کنید.]

به ویژه، هر حلقه متناهیاً تولید شده و هر جبر متناهیاً تولید شده روی یک میدان، یک حلقه جیکوبسن است.

۲۵. فرض کنید A یک حلقه باشد. نشان دهید گزاره های زیر هم ارزند :

(الف) A یک حلقه جیکوبسن است؛

(ب) هر A—جبر متناهیاً تولید شده B که میدان است، روی A متناهی باشد.

[(ب) $\Rightarrow$ (الف). حکم را به حالتی که A زیر حلقه ای از B است ساده کنید و تمرین ۲۱ را به کار ببرید. اگر $s \in A$ همانند در تمرین ۲۱ باشد آنگاه ایده ال ماکسیمال m از A وجود دارد که شامل s نمی شود و همریختی $A \longrightarrow A/m = k$ به همریختی g از B بتوی بستار جبری k توسیع می یابد. چون B میدان است پس g یک به یک است و $g(B)$ روی k جبری است، درنتیجه روی k جبری متناهی است.

(الف) $\Rightarrow$ (ب). معیار (پ) از تمرین ۲۳ را به کار ببرید . فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A باشد که ماکسیمال نیست و فرض کنید $B = A/\mathfrak{p}$. فرض کنید f عنصری ناصفر از B باشد. در این صورت B_f ، A—جبری متناهیاً تولید شده است. اگر میدان باشد آنگاه روی B متناهی است ، در نتیجه روی B صحیح است و بنابراین بنا به (۷.۵) ، میدان است. از این رو B_f میدان نیست و بنابراین دارای ایده‌ال اول ناصفری است که انقباضش در B ، ایده ال ناصفر

$\mathfrak{p}'$ است به طوری که $f \notin \mathfrak{p}'$.]

۲۶. فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد. یک زیر مجموعه X موضعاً بسته است اگر اشتراک مجموعه‌ای باز و مجموعه ای بسته باشد ، یا به طور هم‌ارز اگر در بستارش باز باشد.

شرطهای زیر روی زیر مجموعه $X_\circ$ از X هم ارز هستند:

(۱) هر زیر مجموعه موضعاً بسته ناتهی X، $X_\circ$ را قطع می کند؛

(۲) به ازای هر مجموعه بسته E در X به دست می آوریم $\overline{E \cap X_\circ} = E$؛

(۳) نگاشت $U \mapsto U \cap X_\circ$ از گردایه مجموعه‌های باز X بروی گردایه مجموعه‌های باز $X_\circ$، دوسویی است.

به زیر مجموعه $X_\circ$ که در این شرایط صدق می کند، خیلی چگال در X گفته می شود.

اگر A حلقه باشد آنگاه نشان دهید گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) A حلقه جیکوبسن است؛

(ب) مجموعه ایده ال های ماکسیمال A در $Spec(A)$ ، خیلی چگال است.

(پ) هر زیر مجموعه موضعاً بسته از $Spec(A)$ که شامل تک نقطه می‌باشد، بسته است.

[(ب) و (پ) ، فرمولبندی های [۱] هندسی شرطهای (ب) و (پ) از تمرین ۲۳ هستند.]

حلقه های ارزه و ارزه ها

۲۷. فرض کنید A و B دو حلقه موضعی باشند.گوییم حلقه B غالب بر حلقه A است اگر A زیر حلقه ای از B باشد و ایده‌ال ماکسیمال m از A مشمول در ایده‌ال ماکسیمال n از B باشد (یا به طور هم ارز، اگر $m = n \cap A$). فرض کنید K یک میدان و $\sum$ مجموعه تمام زیر حلقه های موضعی K باشد. اگر $\sum$ با رابطه غلبه مرتب شده باشد ، نشان دهید $\sum$ دارای عناصر ماکسیمال است و

---

[۱] *formulations*

نیز اینکه $A \in \sum$ ماکسیمال است اگر و فقط اگر A یک حلقه ارزه K باشد. [(۲۱.۵) را به کار ببرید.]

۲۸. فرض کنید A یک حوزه صحیح و K میدان کسرهایش باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر هم ارزند :

(۱) A یک حلقه ارزه K است؛

(۲) اگر $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ دو ایده ال A باشند آنگاه $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ یا $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

نتیجه بگیرید که اگر A یک حلقه ارزه و $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A باشد آنگاه $A_{\mathfrak{p}}$ و $A/\mathfrak{p}$ حلقه های ارزه میدان های کسرهایشان هستند.

۲۹. فرض کنید A یک حلقه ارزه میدان K باشد . نشان دهید هر زیرحلقه‌ای از K که شامل A می شود، حلقه ای موضعی از A است.

۳۰. فرض کنید A یک حلقه ارزه میدان K باشد. گروه U شامل یکه های A، زیرگروهی از گروه ضربی K^* از K است.

فرض کنید $\Gamma = K^*/U$. اگر $\xi , \eta \in \Gamma$ با نماینده های $x, y \in K$ باشند آنگاه $\xi \geq \eta$ را به معنی $xy^{-1} \in A$ تعریف کنید. نشان دهید که این رابطه یک ترتیب کلی را روی Γ تعریف می‌کند که با ساختار گروه سازگار است (یعنی ، به‌ازای هر $\omega \in \Gamma$ ، $\xi \geq \eta \Rightarrow \xi\omega \geq \eta\omega$). به عبارت دیگر، Γ یک گروه آبلی کلاًمرتب است. این گروه، گروه ارزشی A نامیده می‌شود.

فرض کنید $v : K^* \longrightarrow \Gamma$ همریختی متعارف باشد. نشان دهید به ازای هر $x, y \in K^*$ ، $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

۳۱. برعکس، فرض کنید Γ یک گروه آبلی کلاً مرتب (که به طور جمعی نوشته می شود) و K یک میدان باشد. یک ارزه K با مقادیری در Γ، نگاشت $v : K^* \longrightarrow \Gamma$ است به طوری که به ازای هر $x, y \in K^*$ ،

(۱) $v(xy) = v(x) + v(y)$،

(۲) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

نشان دهید مجموعه عناصر $x \in K^*$ به طوری که $v(x) \geq 0$، حلقه ارزه K است. این حلقه، حلقه ارزه v نامیده می شود و زیر گروه $v(K^*)$ از Γ، گروه

ارزشی v است.

از این رو اساساً مفاهیم حلقه ارزه و ارزه هم ارزند.

۳۲. فرض کنید Γ یک گروه آبلی کلاً مرتب باشد . زیر گروه Δ از Γ، در Γ تنها است اگر زمانی که $\alpha \leq \beta \leq 0$ و $\alpha \in \Delta$ آنگاه داشته باشیم $\beta \in \Delta$. فرض کنید A یک حلقه ارزه میدان K، با گروه ارزشی Γ (تمرین ۳۱) باشد. اگر $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد آنگاه نشان دهید $v(A - \mathfrak{p})$ مجموعه عناصر بزرگتراز یا مساوی با صفر، در زیر گروه تنهای Δ از Γ است و نیز اینکه نگاشت تعریف شده از $Spec(A)$ بتوی مجموعه زیرگروههای تنهای Γ، دوسویی است.

اگر $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد آنگاه گروههای ارزشی حلقه‌های ارزه $A/\mathfrak{p}$ و $A_{\mathfrak{p}}$، چه چیزهایی هستند؟

۳۳. فرض کنید Γ یک گروه آبلی کلاً مرتب باشد. در این صورت طرز ساختن میدان K و ارزه v از K همراه با Γ به عنوان گروه ارزشی را نشان خواهیم داد. فرض کنید k میدانی دلخواه و $A = k[\Gamma]$ جبر گروهی Γ روی k باشد. بنا به تعریف، A به عنوان یک k—فضای برداری توسط عناصر $x_\alpha(\alpha \in \Gamma)$، به طور آزاد تولید شده است به‌طوری که $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha+\beta}$. نشان دهید که A یک حوزه صحیح است.

اگر $u = \lambda_1 x_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n}$ عنصر ناصفر دلخواهی از A باشد که هر $\lambda_i \neq 0$ است و $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$، آنگاه $v_0(u)$ را برابر با α_1 تعریف کنید. نشان دهید نگاشت $v_0 : A - \{0\} \longrightarrow \Gamma$ در شرطهای (۱) و (۲) از تمرین ۳۱ صدق می کند.

فرض کنید K میدان کسرهای A باشد . نشان دهید v_0 به طور یکتایی می‌تواند به ارزه v از K ، توسیع یابد و نیز اینکه گروه ارزشی v ، دقیقاً Γ است.

۳۴. فرض کنید A یک حلقه ارزه و K میدان کسرهایش باشد. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد به طوری که $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشتی بسته باشد. در این صورت اگر $g : B \longrightarrow K$ همریختی A—جبر دلخواهی باشد (یعنی، اگر $g \circ f$ نشاندن A

در K باشد) آنگاه به دست می آوریم $g(B) = A$.
[فرض کنید $C = g(B)$؛ بدیهی است که $C \supseteq A$. فرض کنید $\mathfrak{n}$ ایده‌الی ماکسیمال از C باشد. چون f^* بسته است $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$ ایده‌الی ماکسیمال از A است، در نتیجه $A_{\mathfrak{m}} = A$. همچنین حلقه موضعی $C_{\mathfrak{n}}$ بر $A_{\mathfrak{m}}$ غلبه می‌کند. ازاین رو بنا به تمرین ۲۷ به دست می آوریم $C_{\mathfrak{n}} = A$ و در نتیجه $C \subseteq A$.]

۳۵. از تمرینات ۱ و ۳ نتیجه می شود که اگر $f : A \longrightarrow B$ صحیح باشد و C، A—جبری دلخواه باشد آنگاه نگاشت

$$(f \otimes 1)^* : Spec(B \otimes_A C) \longrightarrow Spec(C)$$

نگاشتی بسته است.

برعکس، فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ دارای این ویژگی باشد و نیز اینکه B حوزه‌ای صحیح باشد. در این صورت f صحیح است. [با جایگزینی A با تصویرش در B، حکم را به حالتی که $A \subseteq B$ و f یک به یک است ساده کنید. فرض کنید K میدان کسرهای B باشد و فرض کنید A' حلقه ارزه K شامل A باشد. بنا به (۲۲.۵) ، کافی است نشان داده شود که A' شامل B می شود . بنا به فرض ، $Spec(B \otimes_A A') \longrightarrow Spec(A')$ نگاشتی بسته است. نتیجه تمرین ۳۴ را برای همریختی $B \otimes_A A' \longrightarrow K$ که به صورت $b \otimes a' \mapsto ba'$ تعریف شده است، به کار ببرید. در این صورت به ازای هر $b \in B$ و هر $a' \in A'$ ، نتیجه می شود $b'a \in A'$ ؛ با قرار دادن $a' = 1$، آنچه را که می‌خواستیم، به دست می آوریم .]

نشان دهید نتیجه‌ای که‌اکنون ثابت شد، معتبر باقی می ماند اگر B حلقه ای با صرفاً تعدادی متناهی ایده ال اول مینیمال باشد (مثلاً ، اگر B نوتری باشد).
[فرض کنید $\mathfrak{p}_i$ ها ایده‌ال های اول مینیمال باشند. دراین صورت هر همریختی مرکب $A \longrightarrow B \longrightarrow B/\mathfrak{p}_i$ صحیح است، از این رو $A \longrightarrow \prod(B/\mathfrak{p}_i)$ صحیح است ، در نتیجه $A \longrightarrow B/\mathcal{R}$ صحیح است (که $\mathcal{R}$ پوچ رادیکال B است) ، ازاین رو سرانجام $A \longrightarrow B$ صحیح است.]

فصل ٦

شرطهای زنجیری

تاکنون حلقه های تعویضپذیر (یکدار) کاملاً دلخواهی را در نظر گرفته ایم. ولی برای ادامه دادن و به دست آوردن قضایای پیچیده تر، نیازمندیم تا بعضی شرطهای متناهی بودن را تحمیل کنیم. مناسب ترین راه به صورت «شرطهای زنجیری» است. این شرطها برای هر دوی حلقه ها و مدول ها به کار می روند و در این فصل حالت مدول ها را در نظر می گیریم. اکثر مباحث نسبتاً از نوع صوری هستند و به این دلیل، تقارنی بین زنجیرهای فزاینده و کاهشی وجود دارد — تقارنی که در حالت حلقه ها محو می شود همچنانکه در فصل های بعدی خواهیم دید.

فرض کنید Σ مجموعه ای جزئاً مرتب با رابطه $\leq$ باشد (یعنی، $\leq$ بازتابی و ترایایی است و به این صورت است که $x \leq y$ و $y \leq x$ به همراه یکدیگر نتیجه می‌دهند $x = y$).

گزاره ۱.٦. شرطهای زیر روی Σ هم ارزند:

(الف) هر دنباله صعودی $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ در Σ مانا [1] است (یعنی، n ای

[1] از واژه «ایستا» نیز استفاده می شود — م .

وجوددارد به طوری که $(x_n = x_{n+1} = \cdots)$.

(ب) هر زیر مجموعه ناتهی از $\sum$، عنصر ماکسیمال دارد.

برهان . (ب) $\Rightarrow$ (الف). اگر (ب) نادرست باشد آنگاه زیر مجموعه ناتهی T از $\sum$ وجود دارد که هیچ عنصر ماکسیمالی ندارد و لذا می توانیم به طور استقرایی، دنباله اکیداً صعودی نامختومی را در T بسازیم.

(الف) $\Rightarrow$ (ب). مجموعه $(x_m)_{m\geq 1}$ عنصری ماکسیمال، مثلاً x_n، دارد. ♣

اگر $\sum$ مجموعه زیر مدول های مدول M، مرتب شده با رابطه $\subseteq$ باشد آنگاه (الف) شرط زنجیر فزاینده [1] (مختصراً ش.ز.ف. [2]) و (ب) شرط ماکسیمال نامیده می شود. به مدول M که در یکی از این شرطهای هم ارز صدق کند، نوتری گفته می شود (به تقلید از امی نوتر). اگر $\sum$ با $\supseteq$ مرتب شده باشد آنگاه (الف) شرط زنجیر کاهشی (مختصراً ش.ز.ک. [3]) و (ب) شرط مینیمال است. به مدول M که در این شرطها صدق کند آرتینی گفته می شود (به تقلید از امیل آرتین).

مثال ها. ۱) هر گروه آبلی متناهی (به عنوان $\mathbf{Z}$—مدول) در هر دوی ش.ز.ف. و ش.ز.ک. صدق می کند.

۲) حلقه $\mathbf{Z}$ (به عنوان $\mathbf{Z}$ —مدول) در ش.ز.ف. صدق می کند ولی در ش.ز.ک. صدق نمی کند. زیرا اگر $a \in \mathbf{Z}$ و $a \neq 0$ آنگاه به دست می آوریم $(a) \supset (a^2) \supset \cdots \supset (a^n) \supset \cdots$ (شمول ها اکید هستند).

۳) فرض کنید G زیر گروهی از $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ، شامل تمام عناصری باشد که مرتبه آنها توانی از p است که p عدد اول ثابتی است. در این صورت G به ازای هر $n \geq 0$، دقیقاً یک زیر گروه G_n از مرتبه p^n دارد و $G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots$ (شمول ها اکید هستند) بنابراین G در شرط

[1] از واژه « شرط زنجیر افزایشی » نیز استفاده می شود — م .
[2] $a.\ c.\ c.$
[3] $d.\ c.\ c.$

ش.ز.ف. صدق نمی کند. از طرف دیگر، تنها زیر گروههای سره G، G_n ها هستند بنابراین G در ش.ز.ک. صدق نمی‌کند.

۴) گروه H شامل تمام اعداد گویا به صورت m/p^n ($m, n \in \mathbf{Z}$ و $n \geq 0$) در هیچیک از شرطهای زنجیری صدق نمی کند. زیرا دنباله دقیق $0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0$ را به دست می آوریم ، بنابراین H در ش.ز.ک. صدق نمی کند زیرا $\mathbf{Z}$ صدق نمی کند؛ و H در ش.ز.ف. صدق نمی‌کند زیرا G صدق نمی کند.

۵) حلقه $k[x]$ (k میدان و x مجهول) در ش.ز.ف. روی ایده‌ال هاصدق می‌کند امّا در ش.ز.ک. روی ایده‌ال ها صدق نمی کند.

۶) حلقه چند جمله ای $k[x_1, x_2, \cdots]$ با تعدادی نامتناهی از مجهول های x_n، در هیچ شرط زنجیری روی ایده‌ال هاصدق نمی‌کند: زیرا دنباله $\cdots \subset (x_1, x_2) \subset (x_1)$ اکیداً صعودی است و دنباله $\cdots \supset (x_1{}^3) \supset (x_1{}^2) \supset (x_1)$ اکیداً نزولی است.

۷. بعداً خواهیم دید حلقه ای که در ش.ز.ک. روی ایده‌ال ها صدق کند باید در ش.ز.ف. روی ایده‌ال ها نیز صدق کند. (این حکم در حالت کلی برای مدول ها درست نیست: مثال های ۲ و ۳ فوق را ببینید.)

گزاره ۶.۲. هر زیر مدولی از M متناهیاً تولید شده است $\Leftrightarrow$ M یک A—مدول نوتری باشد.

برهان. $\Rightarrow$: فرض کنید N زیرمدولی از M و Σ مجموعه تمام زیرمدول‌های متناهیاً تولید شده از N باشد. در این صورت Σ ناتهی است (زیرا $0 \in \Sigma$) و بنابراین عنصری ماکسیمال مانند N_0، دارد. اگر $N \neq N_0$، آنگاه زیر مدول $N_0 + Ax$ را که $x \in N$ و $x \notin N_0$ را در نظر بگیرید؛ این زیر مدول متناهیاً تولید شده است و اکیداً شامل N_0 است ، بنابراین به تناقض رسیدیم. ازاین رو $N = N_0$ و بنابراین N متناهیاً تولید شده است.

$\Leftarrow$: فرض کنید $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ زنجیری فزاینده از زیر مدول های M

باشد. دراین صورت $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ زیر مدولی از M است ، از این رو متناهیاً تولید شده است مثلاً توسط x_1 ، $\cdots$ ، x_r تولید می شود . فرض کنید $x_i \in M_{n_i}$ و $n = \max_{i=1}^{r} n_i$ ؛ در این صورت هر $x_i \in M_n$ ، از این رو $M_n = M$ و بنابراین زنجیر مورد نظر مانا است. ♣

به واسطه (۲.٦) ، مدول های نوتری از مدول های آرتینی مهمترند: به دلیل اینکه شرط نوتری بودن دقیقاً معادل شرط متناهی بودن است لذا در تعداد زیادی از قضیه‌هابا این شرط کار می‌کنیم. با این وجود ، تعدادی از ویژگی های صوری مقدماتی، برای مدول های نوتری و آرتینی به طور یکسانی به کار می‌روند.

گزاره ۳.٦. فرض کنید $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از A—مدول ها باشد. در این صورت

(الف) M' و M'' نوتری هستند $\Leftrightarrow$ M نوتری باشد؛

(ب) M' و M'' آرتینی هستند $\Leftrightarrow$ M آرتینی باشد.

برهان . قسمت (الف) را ثابت خواهیم کرد؛ برهان قسمت (ب) مشابه است.

$\Rightarrow$: زنجیری فزاینده از زیر مدول های M' (یا M'') به زنجیری در M منجر می‌شود ، از این رو مانا است .

$\Leftarrow$: فرض کنید $(L_n)_{n\geq 1}$ زنجیری فزاینده از زیرمدولهای M باشد؛ دراین‌صورت $(\alpha^{-1}(L_n))$ زنجیری در M' است و $(\beta(L_n))$ زنجیری در M'' است. هردوی این زنجیرها برای n به اندازه کافی بزرگ ، مانا هستند و نتیجه می‌شود که (L_n) مانا است. ♣

نتیجه ۴.٦. اگر M_i ها $(1 \leq i \leq n)$ نوتری (به ترتیب، آرتینی) باشند

آنگاه $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ نیز نوتری (به ترتیب، آرتینی) است.
برهان . استقرا و (۳.٦) را برای دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

به کار ببرید. ♣

به حلقه A نوتری (به ترتیب، آرتینی) گفته می شود اگر به عنوان A–مدول نیز به همین صورت باشد، یعنی اگر در ش.ز.ف. (به ترتیب ، ش.ز.ک.) روی ایده‌ال ها صدق کند.

مثال ها . ۱) هر میدان هم نوتری و هم آرتینی است؛ همین طور حلقه $\mathbf{Z}/(n)$ $(n \neq 0)$. حلقه $\mathbf{Z}$ نوتری است امّا آرتینی نیست (تمرین ۲ قبل از (۲.٦)).

۲) هر حوزه ایده ال اصلی ، نوتری است (بنا به (۲.٦) : هر ایده ال متناهیاً تولید شده است).

۳) حلقه $k[x_1, x_2, \cdots]$ نوتری نیست (تمرین ٦ فوق). امّا حوزه‌ای صحیح است ، از این رو دارای میدان کسرها می باشد. بنابراین زیر حلقه‌ای از یک حلقه نوتری لزوماً نوتری نیست.

۴) فرض کنید X فضای هاسدورف نامتناهی فشرده و $C(X)$ حلقه توابع پیوسته حقیقی – مقدار روی X باشد. دنباله اکیداً نزولی $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ از مجموعه های بسته‌ی در X را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathfrak{a}_n = \{ f \in C(X) : f(F_n) = 0\}$. دراین صورت $\mathfrak{a}_n$ ها دنباله‌ای اکیداً صعودی از ایده‌ال های در $C(X)$ تشکیل می دهند: بنابراین $C(X)$ حلقه‌ای نوتری نیست.

گزاره ۵.٦. فرض کنید A حلقه ای نوتری (به ترتیب ، آرتینی) و M، A–مدولی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت M نوتری (به ترتیب،

آرتینی) است.

برهان . M ، به ازای n ای ، خارج قسمتی از A^n است ؛ حال (۴.۶) و (۳.۶) را به کار ببرید. ♣

گزاره ۶.۶. فرض کنید A نوتری (به ترتیب، آرتینی) و $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد. در این صورت $A/\mathfrak{a}$ حلقه‌ای نوتری (به ترتیب ، آرتینی) است.

برهان . بنا به (۳.۶) ، $A/\mathfrak{a}$ به عنوان A—مدول ، نوتری (به ترتیب، آرتینی) است، از این رو به عنوان $A/\mathfrak{a}$—مدول نیز به همین صورت است. ♣

زنجیری از زیر مدول های مدول M، دنباله (M_i) $(0 \leq i \leq n)$ از زیرمدول‌های M است به طوری که

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$$ (شمول ها اکید هستند) .

طول زنجیر، n (تعداد « پیوند ها») است. سری ترکیبی M، زنجیری ماکسیمال است ، یعنی هیچ زیر مدول اضافی نتواند درج شود : این مطلب با این گفته هم ارز است که هر خارج قسمت M_{i-1}/M_i $(1 \leq i \leq n)$ ساده است (یعنی هیچ زیر مدولی بجز ۰ و خودش ندارد).

گزاره ۷.۶. فرض کنید M دارای سری ترکیبی به طول n باشد. در این صورت هر سری ترکیبی M دارای طول n است و هر زنجیری در M می تواند به یک سری ترکیبی توسیع داده شود.

برهان . فرض کنید $l(M)$ کوچکترین طول سری ترکیبی مدول M را نشان دهد. ($l(M) = +\infty$ اگر M هیچ سری ترکیبی نداشته باشد.)

(الف) $N \subset M \Rightarrow l(N) < l(M)$. فرض کنید (M_i) سری ترکیبی M با طول مینیمم باشد و زیر مدول های $N_i = N \cap M_i$ از N را در نظر بگیرید. چون $N_{i-1}/N_i \subseteq M_{i-1}/M_i$ و آخری مدولی ساده است در نتیجه $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ یا $N_{i-1} = N_i$ ؛ از این رو با کنار

گذاشتن جملات تکراری یک سری ترکیبی را از N به دست می‌آوریم، بنابراین $l(N) \leq l(M)$. اگر $l(N) = l(M) = n$ آنگاه به ازای هر $i = 1, 2, \cdots, n$، $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$؛ ازاین رو $M_{n-1} = N_{n-1}$، درنتیجه $M_{n-2} = N_{n-2}, \cdots$ و بالاخره $M = N$.

(ب) هر زنجیری در M دارای طولی کوچکتراز یا مساوی با $l(M)$ است. فرض کنید $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$ زنجیری به طول k باشد. دراین صورت بنا به (الف) به دست می آوریم $l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$ ، درنتیجه $l(M) \geq k$.

(پ) سری ترکیبی دلخواهی از M را در نظر بگیرید. اگر به طول k باشد آنگاه بنا به (ب)، $k \leq l(M)$ ، ازاین رو بنا به تعریف $l(M)$، $k = l(M)$. درنتیجه همه سری های ترکیبی طول یکسانی دارند. بالاخره، زنجیر دلخواهی را در نظر بگیرید. اگر طول آن $l(M)$ باشد بنا به (ب) ، باید یک سری ترکیبی باشد؛ اگر طولش کوچکتر از $l(M)$ باشد آنگاه یک سری ترکیبی نیست پس ماکسیمال نیست و در نتیجه جملات جدیدی می توانند درج شوند تا طول زنجیر $l(M)$ شود. ♣

گزاره ۸.۶. M در هر دو شرط زنجیری صدق می کند $\Leftrightarrow$ M سری ترکیبی داشته باشد .

برهان . $\Leftarrow$: تمام زنجیر های موجود در M با طول کراندار هستند، از این رو هر دوی ش.ز.ف. و ش.ز.ک. برقرار هستند.

$\Rightarrow$: یک سری ترکیبی را از M به صورت زیر می‌سازیم . چون $M = M_0$ بنا به (۱.۶) ، در شرط ماکسیمم صدق می کند لذا زیر مدول ماکسیمال $M_0 \supset M_1$ دارد. مشابهاً M_1 زیر مدول ماکسیمال $M_1 \supset M_2$ دارد و الی آخر. از این رو زنجیر اکیداً نزولی $M_0 \supset M_1 \supset \cdots$ را به دست می آوریم که بنا به ش.ز.ک. ، باید متناهی باشد و از این رو یک سری ترکیبی از M است . ♣

مدولی که در هر دوی ش.ز.ف. و ش.ز.ک. صدق کند مدولی با طول متناهی نامیده می شود. بنا به (۷.٦) ، تمام سری های ترکیبی M دارای طول یکسان $l(M)$ هستند که طول M نامیده می شود. قضیه ژوردان — هلدر برای مدول‌های با طول متناهی به کار می رود: اگر $(M_i)_{0\leq i\leq n}$ و $(M'_i)_{0\leq i\leq n}$ دو سری ترکیبی دلخواه از M باشند آنگاه تناظری یک به یک بین مجموعه خارج قسمتهای $(M_{i-1}/M_i)_{1\leq i\leq n}$ و مجموعه خارج قسمتهای $(M'_{i-1}/M'_i)_{1\leq i\leq n}$ وجود دارد به طوری که خارج قسمتهای متناظر، یکریخت هستند. برهان این قضیه مشابه گروههای متناهی است.

گزاره ۹.٦. طول $l(M)$ روی رده تمام A—مدول های با طول متناهی، تابع جمعی است.

برهان . بایستی نشان دهیم اگر $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق باشد آنگاه $l(M) = l(M') + l(M'')$. برای این منظور، هر سری ترکیبی از M' را تحت α تصویر کنید و از هر سری ترکیب M'' تحت β تصویر معکوس بگیرید؛ از جفت کردن اینها با هم، یک سری ترکیبی از M به دست می آید، از این رو نتیجه حاصل می شود. ♣

حالت خاصی از مدول های روی یک میدان k، یعنی k—فضا های برداری را در نظر بگیرید:

گزاره ۱۰.٦. برای k—فضاهای برداری V، گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) متناهی — بعد هستند؛

(ب) با طول متناهی هستند؛

(پ) در شرط ش.ز.ف. صدق می کنند؛

(ت) در شرط ش.ز.ک. صدق می کنند.

به علاوه ، اگر این شرطها برقرار باشند، بعد = طول.

برهان . (ب) $\Leftarrow$ (الف) اثبات آسان است؛ (پ) $\Leftarrow$ (ب) و (ت) $\Leftarrow$ (ب)

از (۸.٦) به دست می‌آیند. برهان (الف) $\Rightarrow$ (پ) و (الف) $\Rightarrow$ (ت) باقی می‌مانند. فرض کنید (الف) نادرست باشد ، در این صورت دنباله نامتناهی $(x_n)_{n\geq ۱}$ از عنصر های خطی — مستقل V وجود دارد. فرض کنید U_n (به ترتیب، V_n) فضای برداری تولید شده توسط $x_۱, \cdots, x_n$ (به ترتیب ، $x_{n+۱}, x_{n+۲}, \cdots$) باشد. در این صورت زنجیر $(U_n)_{n\geq ۱}$ (به ترتیب، $(V_n)_{n\geq ۱}$) نامتناهی و اکیداً فزاینده (به ترتیب، اکیداً کاهشی) است. ♣

نتیجه ۱۱.٦. فرض کنید A حلقه ای باشد که ایده ال صفر به صورت حاصلضرب $m_۱ \cdots m_n$ از ایده ال های ماکسیمال (نه لزوماً متمایز) است. دراین صورت A نوتری است اگر و فقط اگر A آرتینی باشد.

برهان . زنجیر ایده ال های $A \supset m_۱ \supseteq m_۱ m_۲ \supseteq \cdots \subseteq m_۱ \cdots m_n = ۰$ را در نظر بگیرید. هر عامل $m_۱ \cdots m_{i-۱}/m_۱ \cdots m_i$، فضایی برداری روی میدان A/m_i است. از این رو به ازای هر عامل ، ش.ز.ک. $\Leftrightarrow$ ش.ز.ف. امّا با استفاده مکرر از (۳.٦) ، نتیجه می گیریم ش.ز.ف. (به ترتیب، ش.ز.ک.) به ازای هر عامل $\Leftrightarrow$ ش.ز.ف. (به‌ترتیب، ش.ز.ک.) برای A . ازاین رو ، ش.ز.ف. $\Leftrightarrow$ ش.ز.ک. برای A. ♣

تمرینات

۱. (الف) فرض کنید M، A—مدولی نوتری و $u : M \longrightarrow M$ یک همریختی مدولی باشد. اگر u پوشا باشد آنگاه u یکریختی است.

(ب) اگر M آرتینی و u یک به یک باشد آنگاه مجدداً u یکریختی است.

[برای اثبات قسمت (الف) ، زیر مدول های $Ker(u^n)$ را در نظر بگیرید؛ برای اثبات قسمت (ب) ، مدول های خارج قسمتی $CoKer(u^n)$ را در نظر بگیرید.]

۲. فرض کنید M، A—مدول باشد. اگر هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های متناهیاً تولید شده M دارای عنصر ماکسیمال باشد آنگاه M نوتری است.

۳. فرض کنید M، A—مدول باشد و فرض کنید N_1 و N_2 زیر مدول هایی از M باشند. اگر M/N_1 و M/N_2 نوتری باشند آنگاه $M/(N_1 \cap N_2)$ نیز نوتری است. به طور مشابه ، همین نتیجه با آرتینی به جای نوتری برقرار است.

۴. فرض کنید M، A —مدولی نوتری و $\mathfrak{a}$ پوچساز M در A باشد. ثابت کنید $A/\mathfrak{a}$ حلقه ای نوتری است.

اگر در این نتیجه، « نوتری » را با « آرتینی » جایگزین کنیم، آیا این نتیجه همچنان درست است؟

۵. فضای توپولوژیک X را نوتری گوییم اگر زیر مجموعه های باز X در شرط زنجیر فزاینده (یابه طور هم ارز، شرط ماکسیمال) صدق کنند. چون زیرمجموعه های بسته، متمم های زیر مجموعه های باز هستند، با این گفته که زیرمجموعه‌های بسته X در شرط زنجیر کاهشی (یا به طورهم‌ارز، شرط مینیمال) صدق می کنند، یکسان است. نشان دهید اگر X نوتری باشد آنگاه هر زیر فضایی از X نوتری است و نیز اینکه X شبه فشرده است.

٦. ثابت کنید گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) X نوتری است.

(ب) هر زیر فضای بازی از X، شبه فشرده است.

(پ) هر زیر فضایی از X، شبه فشرده است.

۷. هر فضای نوتری ، اجتماع تعدادی متناهی از زیر فضا های بسته تحویلناپذیر است . [مجموعه Σ شامل زیر مجموعه های بسته X را که اجتماعهای متناهی از زیر فضا های بسته تحویلناپذیر نیستند ، در نظر بگیرید.] از این رو مجموعه مولفه های تحویلناپذیر از فضایی نوتری، متناهی است.

۸. اگر A حلقه ای نوتری باشد آنگاه $Spec(A)$ فضای توپولوژیکی نوتری است. آیا عکس این گزاره درست است؟

۹. از تمرین ۸ نتیجه بگیرید که مجموعه ایده ال های اول مینیمال در حلقه‌ای نوتری ، متناهی است.

۱۰. اگر M مدولی نوتری (روی حلقه دلخواه A) باشد آنگاه $Supp(M)$، زیر فضای نوتری بسته ای از $Spec(A)$ است.

۱۱. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه ای باشد و فرض کنید $Spec(B)$ فضایی نوتری (تمرین ۵) باشد. ثابت کنید $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشتی بسته است اگر و فقط اگر f ویژگی بالارو داشته باشد (فصل ۵، تمرین ۱۰) .

۱۲. فرض کنید A حلقه ای باشد به طوری که $Spec(A)$ فضایی نوتری است. نشان دهید مجموعه ایده ال های اول A ، در شرط زنجیر فزاینده صدق می کند. آیا عکس این گزاره درست است ؟

فصل ۷

حلقه‌های نوتری

یادآوری می‌کنیم که حلقه A را نوتری گوییم اگر در سه شرط هم‌ارز زیر صدق کند:

۱) هر مجموعه ناتهی از ایده‌ال‌های A دارای عنصر ماکسیمال باشد.

۲) هر زنجیر فزاینده از ایده‌ال‌های A، مانا باشد.

۳) هر ایده‌الی از A ، متناهیاً تولید شده باشد.

(هم‌ارزی این شرطها در (۱.۶) و (۲.۶) ثابت شده است.)

حلقه‌های نوتری از هر نظر مهمترین رده از حلقه‌های موجود در جبر تعویضپذیر هستند: ما قبلاً مثال‌هایی را در فصل ۶ دیده‌ایم. در این فصل، نخست نشان می‌دهیم حلقه‌های نوتری خودشان را تحت اعمال آشنای گوناگونی، باز تولید می‌کنند— به ویژه، قضیه معروف پایه هیلبرت را ثابت می‌کنیم. سپس برای ایجاد تعدادی از استنتاج های مهم از شرط نوتری، شامل وجود تجزیه‌های ابتدایی، اقدام می‌کنیم.

گزاره ۱.۷. اگر A نوتری و ϕ یک همریختی از A بروی حلقه B باشد آنگاه B نوتری است.

برهان. این گزاره از (۶.۶) نتیجه می‌شود، زیرا $B \cong A/\mathfrak{a}$ که $\mathfrak{a} = \ker(\phi)$.♣

گزاره ۲.۷. فرض کنید A زیرحلقه‌ای از B باشد؛ فرض کنید A نوتری است و نیز B به عنوان A—مدول، متناهیاً تولید شده است. در این صورت B (به عنوان یک حلقه) نوتری است.

برهان. بنابه (۵.٦)، B به عنوان A—مدول نوتری است ،ازاین‌رو به عنوان B—مدول نیز نوتری است.♣

مثال. $B = \mathbf{Z}[i]$، یعنی حلقه اعداد صحیح گوسی را در نظر بگیرید . دراین صورت بنابه (۲.۷)، B نوتری است. به‌طور کلی‌تر، حلقه اعداد صحیح در هر میدان اعداد جبری، نوتری است.

گزاره ۳.۷. اگر A نوتری و S زیرمجموعه بسته ضربی دلخواهی از A باشد آنگاه $S^{-1}A$ نوتری است.

برهان. بنابه (۱۱.۳—(الف)) و (۱۷.۱—(پ))، ایده‌ال‌های $S^{-1}A$ در تناظر حافظ ترتیب یک‌به‌یکی با ایده‌ال‌های منقبض A هستند، از این‌رو در شرط ماکسیمال صدق می‌کنند. (برهانی دیگر: اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌الی دلخواه از A باشد آنگاه $\mathfrak{a}$ مجموعه‌ای متناهی از مولدها مانند $x_1, \cdots, x_n$ دارد و واضح است که $S^{-1}\mathfrak{a}$ توسط $x_1/1$ ، $\cdots$ ، $x_n/1$ تولید می‌شود.)♣

نتیجه ۴.۷. اگر A نوتری باشد و $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A باشد آنگاه $A_\mathfrak{p}$ نوتری است. ♣

قضیه ۵.۷. (قضیه پایه هیلبرت). اگر A نوتری باشد آنگاه حلقه چندجمله‌ای $A[x]$ نوتری است.

برهان. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌الی در $A[x]$ باشد. در این صورت ضرایب پیشرو چندجمله‌ای‌های موجود در $\mathfrak{a}$، ایده‌ال I را در A تشکیل می‌دهند. چون A نوتری است پس I متناهیاً تولید شده است مثلاً توسط a_1 ، $\cdots$ ، a_n تولید

می‌شود. به ازای هر $i = 1, \cdots, n$، چندجمله‌ای $f_i \in A[x]$ به صورت (جملات از درجه پایین تر)$+f_i = a_i x^{r_i}$ وجود دارد. فرض کنید $r = \max_{i=1}^{n} r_i$. دراین صورت f_i ها ایده‌ال $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$ را در $A[x]$ تولید می‌کنند.

فرض کنید (جملات از درجه پایین تر)$+f = ax^m$ عنصری دلخواه از $\mathfrak{a}$ باشد؛ لذا داریم $a \in I$. اگر $m \geq r$ آنگاه می‌نویسیم $a = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$ که $u_i \in A$؛ در این صورت $f - \sum u_i f_i x^{m-r_i}$ در $\mathfrak{a}$ قرار دارد و درجه‌ای کوچکتر از m دارد. با ادامه این فرایند، می‌توانیم حذف کردن عناصر $\mathfrak{a}'$ از f را ادامه دهیم تا یک چندجمله‌ای مانند g را با درجه‌ای کوچکتر از r به دست آوریم؛ یعنی داریم $f = g + h$ که $h \in \mathfrak{a}'$.

فرض کنید M، A—مدول تولید شده توسط ۱ ، x ، $\cdots$ ، x^{r-1} باشد؛ در این صورت آنچه را که ثابت کرده‌ایم این است که $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$. حال M، A—مدولی متناهیاً تولید شده است، از این‌رو بنابه (۵.٦) ، نوتری است، در نتیجه $\mathfrak{a} \cap M$ (به عنوان A—مدول) بنابه (۲.٦) ، متناهیاً تولید شده است. اگر g_1 ، $\cdots$ ، g_m، $\mathfrak{a} \cap M$ را تولید کنند آنگاه واضح است که f_iها و g_iها، $\mathfrak{a}$ را تولید می‌کنند. از این‌رو $\mathfrak{a}$ متناهیاً تولید شده است و بنابراین $A[x]$ نوتری است.♣

تبصره. همچنین این نتیجه که A نوتری $\Leftarrow$ $A[[x]]$ نوتری ، درست است ($A[[x]]$ حلقه سریهای توانی صوری از مجهول x با ضرایبی در A است). برهان تقریباً به موازات (۵.۷) دنبال می‌شود بجز اینکه خواننده با جملاتی با کوچکترین درجه در سری توانی متعلق به $\mathfrak{a}$، آغاز می‌کند. همچنین (۲۷.۱۰) را ببینید.

نتیجه ٦.۷. اگر A نوتری باشد آنگاه $A[x_1, \cdots, x_n]$ نیز نوتری است.

برهان. با استقرا روی n، از (۵.۷) نتیجه می شود .♣

نتیجه ۷.۷. فرض کنید B، A—جبری متناهیاً تولید شده باشد. اگر A

نوتری باشد آنگاه B نیز نوتری است.

به ویژه، هر حلقه متناهیاً تولید شده و هر جبر متناهیاً تولید شده روی یک میدان، نوتری است.

برهان. B تصویر همریخت حلقه چندجمله‌ای $A[x_1, \cdots, x_n]$ است که بنابه (۶.۷) ، نوتری است.♣

گزاره ۸.۷. فرض کنید $A \subseteq B \subseteq C$ حلقه‌هایی باشند. فرض کنید A نوتری است، C به عنوان A—جبر متناهیاً تولید شده است و C یا (الف) به عنوان B—مدول متناهیاً تولید شده است یا (ب) روی B صحیح است. در این صورت B به عنوان A—جبر، متناهیاً تولید شده است.

برهان. از (۱.۵) و (۲.۵) نتیجه می‌شود که شرطهای (الف) و (ب) در این وضعیت، هم‌ارزند. بنابراین می‌توانیم روی (الف) متمرکز شویم.

فرض کنید x_1 ، $\cdots$ ، x_m، C را به عنوان A—جبر تولید کنند و فرض کنید y_1 ، $\cdots$ ، y_n، C را به عنوان B—مدول تولید کنند. در این صورت عبارت هایی به صورت

$$x_i = \sum_j b_{ij} y_j \quad (b_{ij} \in B) \tag{۱}$$

$$y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \quad (b_{ijk} \in B) \tag{۲}$$

وجود دارند. فرض کنید B_0 جبر تولید شده روی A توسط b_{ij} ها و b_{ijk} ها باشد. چون A نوتری است پس بنابه (۷.۷)، B_0 نیز نوتری است و $A \subseteq B_0 \subseteq B$.

هر عنصری از C، یک چندجمله‌ای برحسب x_iها با ضرایبی در A است. جایگزین کردن (۱) و استفاده مکرر از (۲) ، نشان می‌دهد که هر عنصری از C ترکیب خطی y_jها با ضرایبی در B_0 است و از این‌رو C

به‌عنوان $B_\circ$– مدول متناهیاً تولید شده است. چون $B_\circ$ نوتری است و B زیرمدولی از C است لذا (از (۵.۶) و (۲.۶)) نتیجه می‌شود که B به عنوان $B_\circ$– مدول متناهیاً تولید شده است . چون $B_\circ$ به عنوان A–جبر متناهیاً تولید شده است، نتیجه می‌شود که B به عنوان A–جبر متناهیاً تولید شده است.♣

گزاره ۹.۷. فرض کنید k میدان و E، k–جبری متناهیاً تولید شده باشد. اگر E میدان باشد آنگاه یک توسیع جبری متناهی از k است.

برهان. فرض کنید $E = k[x_1, \cdots, x_n]$. اگر E روی k جبری نباشد آنگاه می‌توانیم x_i هاراطوری تجدید شماره‌گذاری کنیم به‌طوری که x_1، $\cdots$، x_r روی k، جبری – مستقل باشند که $r \geq 1$ و هر یک از x_{r+1} ، $\cdots$ ، x_n روی میدان $F = k(x_1, \cdots, x_r)$ جبری است. از این‌رو E یک توسیع جبری متناهی از F است و بنابراین به عنوان F – مدول متناهیاً تولید شده است . با به کارگیری (۸.۷) برای $k \subseteq F \subseteq E$ ، نتیجه می‌شود که F ، k– جبری متناهیاً تولید شده است ، مثلاً $F = k[y_1, \cdots, y_s]$. هر y_j به صورت f_j/g_j است که f_j و g_j چندجمله‌ای هایی بر حسب x_1 ، $\cdots$ ، x_r هستند.

حال تعداد نامتناهی چندجمله‌ای تحویلناپذیر در حلقه $k[x_1, \cdots, x_r]$ وجود دارند (برهان اقلیدس را برای وجود تعداد نامتناهی عدد اول تطبیق دهید). از این‌رو چندجمله‌ای تحویلناپذیر h وجود دارد که نسبت به هر یک از g_jها اول است (مثلاً، $h = g_1 g_2 \cdots g_s + 1$ مناسب است) و عنصر h^{-1} از F ، نمی‌تواند یک چندجمله‌ای بر حسب y_jها باشد. این نتیجه یک تناقض است. از این‌رو E روی k جبری است و در نتیجه جبری متناهی است.♣

نتیجه ۱۰.۷. فرض کنید k میدان و A، k–جبری متناهیاً تولید شده باشد. فرض کنید m ایده‌الی ماکسیمال از A باشد. در این صورت میدان A/m یک توسیع جبری متناهی از k است. به ویژه، اگر k جبری – بسته باشد آنگاه $A/m \cong k$.

برهان. در (۹.۷) قرار دهید $E = A/m$.♣

نتیجه (۱۰.۷) به نسخه « ضعیف » قضیه صفرهای هیلبرت ($Nullstellensatz =$)[1] معروف است. برهانی که در اینجا ارائه شد به آرتین و تیت[2] منسوب است. برای معنی هندسی آن و صورت « قوی » قضیه، تمرینات پایانی فصل را ببینید.

تجزیه ابتدایی در حلقه‌های نوتری

دو لم بعدی نشان می‌دهند که هر ایده‌ال $\neq (1)$ در حلقه‌ای نوتری، تجزیه ابتدایی دارد.

ایده‌ال $\mathfrak{a}$ را تحویلناپذیر گوییم هرگاه

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \Rightarrow (\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ یا } \mathfrak{a} = \mathfrak{c}).$$

لم ۱۱.۷. در حلقه نوتری A ، هر ایده‌الی اشتراک متناهی از ایده‌ال‌های تحویلناپذیر است.

برهان. فرض کنید این صور نباشد؛ در این صورت مجموعه ایده‌ال‌هایی در A که در لم صدق نمی‌کنند ناتهی است، از این‌رو دارای عنصر ماکسیمال $\mathfrak{a}$ است. چون $\mathfrak{a}$ تحویلناپذیر است پس به دست می آوریم $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ که $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$. در نتیجه هر یک از $\mathfrak{b}$ و $\mathfrak{c}$، اشتراکی متناهی از ایده‌ال‌های تحویلناپذیر است و بنابراین $\mathfrak{a}$ نیز تحویلناپذیر است : به تناقض رسیدیم .♣

لم ۱۲.۷. در یک حلقه نوتری هر ایده‌ال تحویلناپذیر، ابتدایی است.

برهان. با تبدیل کردن حکم به حکمی در حلقه خارج قسمتی ، کافی است نشان دهیم اگر ایده‌ال صفر تحویلناپذیر باشد آنگاه ابتدایی است. فرض کنید $xy = 0$ که $y \neq 0$ ، و زنجیر ایده‌ال‌های $Ann(x) \subseteq Ann(x^2) \subseteq \cdots$ را در نظر بگیرید. بنابه ش.ز.ف.، این زنجیر مانا است، یعنی به ازای

[1] صفر یک چندجمله‌ای = $Nullstelle$ + قضیه= $Satz$ —م .

[2] $Tate$

n ای داریم $\cdots = Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n)$. در این صورت نتیجه می‌شود $(x^n) \cap (y) = 0$؛ زیرا اگر $a \in (y)$ آنگاه $ax = 0$ و اگر $a \in (x^n)$ آنگاه $a = bx^n$، از این‌رو $bx^{n+1} = 0$، لذا $b \in Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n)$، در نتیجه $bx^n = 0$؛ یعنی، $a = 0$. چون (0) تحویلناپذیر است و $(y) \neq 0$، بنابراین باید داشته باشیم $x^n = 0$ و این نتیجه نشان می‌دهد که (0) ابتدایی است.♣

از این دو لم، هم زمان به دست می آوریم :

قضیه ۱۳.۷. در حلقه نوتری A، هر ایده‌الی تجزیه ابتدایی دارد.♣

از این‌رو تمام نتایج فصل ۴، برای حلقه‌های نوتری قابل استفاده هستند.

گزاره ۱۴.۷. در حلقه نوتری A، هر ایده‌ال $\mathfrak{a}$ شامل توانی از رادیکالش است.

برهان. فرض کنید x_1، $\cdots$، x_k، $r(\mathfrak{a})$ را تولید کنند: مثلاً $x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$ $(1 \leq i \leq k)$. فرض کنید $m = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$. در این صورت $r(\mathfrak{a})^m$ توسط حاصلضربهای $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$ تولید می‌شود به طوری که $\sum r_i = m$؛ بنابه تعریف m، برای دستکم یک اندیس i باید داشته باشیم $r_i \geq n_i$، از این‌رو هر یک از چنین تک جمله‌ای هایی در $\mathfrak{a}$ قرار می‌گیرد و بنابراین $r(\mathfrak{a})^m \subseteq \mathfrak{a}$.♣

نتیجه ۱۵.۷. در یک حلقه نوتری، پوچ رادیکال پوچتوان است.

برهان. در گزاره (۱۴.۷) قرار دهید $\mathfrak{a} = (0)$.♣

نتیجه ۱۶.۷. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری، m ایده‌الی ماکسیمال از A و $\mathfrak{q}$ ایده‌الی دلخواه از A باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) $\mathfrak{q}$، m—ابتدایی است.

(ب) $r(\mathfrak{q}) = m$.

(پ) به ازای $n > 0$ ای، $m^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq m$.

برهان. (ب) $\Rightarrow$ (الف) واضح است؛ (الف) $\Rightarrow$ (ب) از (۲.۴) نتیجه می‌شود؛ (پ) $\Rightarrow$ (ب) از (۱۴.۷) به دست می‌آید؛ (ب) $\Rightarrow$ (پ) با رادیکال گرفتن به دست می‌آید: $m = r(m^n) \subseteq r(\mathfrak{q}) \subseteq r(m) = m$. ♣

گزاره ۱۷.۷. فرض کنید $\mathfrak{a} \neq (1)$، ایده‌الی در حلقه‌ای نوتری باشد. دراین صورت ایده‌ال‌های اول متعلق به $\mathfrak{a}$، دقیقاً ایده‌ال‌های اولی هستند که در مجموعه ایده‌ال‌های $(\mathfrak{a} : x)(x \in A)$ رخ می‌دهند.

برهان. با تبدیل کردن حکم به حکمی در حلقه خارج قسمتی $A/\mathfrak{a}$، می‌توانیم فرض کنیم $\mathfrak{a} = 0$. فرض کنید $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = 0$ تجزیه ابتدایی مینیمال ایده‌ال صفر و $\mathfrak{p}_i$ رادیکال $\mathfrak{q}_i$ باشد. فرض کنید $\mathfrak{a}_i = \bigcap\limits_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \neq 0$. در این صورت از برهان (۵.۴)، به‌ازای هر $x \neq 0$ در $\mathfrak{a}_i$ به دست می آوریم $r(Ann(x)) = \mathfrak{p}_i$، بنابراین $Ann(x) \subseteq \mathfrak{p}_i$.

چون $\mathfrak{q}_i$، $\mathfrak{p}_i$—ابتدایی است بنابه (۱۴.۷)، عدد صحیح m وجود دارد به‌طوری که $\mathfrak{p}_i^m \subseteq \mathfrak{q}_i$ و بنابراین $\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^m \subseteq \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{p}_i^m \subseteq \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{q}_i = 0$. فرض کنید $m \geq 1$ کوچکترین عدد صحیحی باشد به طوری که $\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^m = 0$ و فرض کنید x عنصری ناصفر در $a_i\mathfrak{p}_i^{m-1}$ باشد. در این صورت $\mathfrak{p}_i x = 0$، بنابراین برای چنین x ای به دست می آوریم $Ann(x) \supseteq \mathfrak{p}_i$ و از این‌رو $Ann(x) = \mathfrak{p}_i$.

بر عکس، اگر $Ann(x)$ ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ باشد آنگاه $r(Ann(x)) = \mathfrak{p}$ و لذا بنابه (۵.۴)، $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول متعلق به 0 است.♣

تمرینات

۱. فرض کنید A حلقه‌ای غیرنوتری و Σ مجموعه ایده‌ال‌هایی در A باشد

که متناهیاً تولید شده نیستند. نشان دهید Σ دارای عناصر ماکسیمال است و نیز اینکه عناصر ماکسیمال Σ، ایده‌ال‌هایی اول هستند.

[فرض کنید $\mathfrak{a}$ عنصری ماکسیمال از Σ باشد و فرض کنید $x, y \in A$ موجود باشند به طوری که $x \notin \mathfrak{a}$ و $y \notin \mathfrak{a}$ و $xy \in \mathfrak{a}$. نشان دهید ایده‌ال متناهیاً تولید شده $\mathfrak{a}_\circ \subseteq \mathfrak{a}$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{a}_\circ + (x) = \mathfrak{a} + (x)$ و نیز اینکه $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\circ + x.(\mathfrak{a} : x)$. چون $(\mathfrak{a} : x)$ اکیداً شامل $\mathfrak{a}$ می‌شود پس متناهیاً تولید شده است و بنابراین $\mathfrak{a}$ نیز متناهیاً تولید شده است.]

از این‌رو حلقه‌ای که در آن هر ایده‌ال اول متناهیاً تولید شده است، نوتری است (آی.اس .کوهن . [۱])

۲. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری باشد و فرض کنید $f = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$. ثابت کنید f پوچتوان است اگر و فقط اگر هر یک از a_n ها پوچتوان باشد.

۳. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌ال تحویلناپذیری در حلقه A باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) $\mathfrak{a}$ ابتدایی است ؛

(ب) به‌ازای هر زیرمجموعه بسته ضربی S از A نتیجه می گیریم که به‌ازای $x \in S$ ای، $(S^{-1}\mathfrak{a})^c = (\mathfrak{a} : x)$ ؛

(پ)به ازای هر $x \in A$ ، دنباله $(\mathfrak{a} : x^n)$ مانا است.

۴. کدام یک از حلقه‌های زیر نوتری هستند؟

(الف) حلقه توابع گویا از مجهول z که دارای هیچ قطبی روی دایره $|z| = ۱$ نیستند.

(ب) حلقه سریهای توانی از مجهول z که دارای شعاع همگرایی مثبت هستند.

(پ) حلقه سریهای توانی از مجهول z که دارای شعاع همگرایی نامتناهی هستند.

---

[۱] *I.S. Cohen*

(ت) حلقه چندجمله‌ای‌های از مجهول z که k مشتق اول آنها در مبدا صفر می‌شوند (k عدد صحیح ثابتی است).

(ج) حلقه چندجمله‌ای‌های از مجهول های z و w که همه مشتقات جزئی آنها نسبت به w، به ازای $z = 0$ صفر می‌شوند.

در تمام حالت ها، ضرایب اعدادی مختلط هستند.

۵. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری، B یک A—جبر متناهیاً تولید شده، G گروهی متناهی از A—خودریختی‌های B و B^G مجموعه تمام عناصری از B باشد که با هر عنصری از G، ثابت باقی می‌مانند. نشان دهید B^G، A—جبری متناهیاً تولید شده است.

۶. اگر حلقه متناهیاً تولید شده K، میدان باشد آنگاه میدانی متناهی است. [اگر دارای K مشخصه 0 باشد آنگاه نتیجه می گیریم $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subseteq K$. چون K روی $\mathbf{Z}$ متناهیاً تولید شده است پس روی $\mathbf{Q}$ نیز متناهیاً تولید شده است ازاین‌رو بنابه (۹.۷)، $\mathbf{Q}$—مدولی متناهیاً تولید شده است. حال (۸.۷) را به کار ببرید تا به تناقض برسید. ازاین‌رو K دارای مشخصه $p > 0$ است در نتیجه به عنوان $\mathbf{Z}/(p)$—جبر، متناهیاً تولید شده است. برای تکمیل برهان، (۹.۷) را به کار ببرید.]

۷. فرض کنید X یک چندگونای جبری آفین باشد که توسط خانواده‌ای از معادلات $f_\alpha(t_1, \cdots, t_n) = 0$ $(\alpha \in I)$ به دست آمده است (فصل ۱، تمرین ۲۷). نشان دهید زیرمجموعه متناهی I_0 از I موجود است به طوری که X توسط معادلات $f_\alpha(t_1, \cdots, t_n) = 0$، به‌ازای هر $\alpha \in I_0$، به دست می آید.

۸. اگر $A[x]$ نوتری باشد آیا لزوماً A نوتری است؟

۹. فرض کنید A حلقه‌ای باشد به طوری که

(۱) به ازای هر ایده‌ال ماکسیمال m از A، حلقه موضعی A_m نوتری است.

(۲) به ازای هر $x \neq 0$ در A، مجموعه ایده‌ال‌های ماکسیمال A که شامل x می‌شوند، متناهی است.

نشان دهید A نوتری است.

[فرض کنید $\mathfrak{a} \neq 0$ ایده‌الی در A باشد. فرض کنید m_1 ، $\cdots$ ، m_r ایده‌ال‌هایی ماکسیمال باشند که شامل $\mathfrak{a}$ هستند. حال $x_0 \neq 0$ را در $\mathfrak{a}$ انتخاب کنید و فرض کنید m_1 ، $\cdots$ ، m_{r+s} ایده‌ال‌هایی ماکسیمال باشند که شامل x_0 هستند. چون m_{r+1} ، $\cdots$ ، m_{r+s} شامل $\mathfrak{a}$ نمی‌شوند پس $x_j \in \mathfrak{a}$ ای وجود دارد به طوری که $x_j \notin m_{r+j}$ $(1 \leq j \leq s)$. چون هر یک از A_{m_i}ها $(1 \leq i \leq r)$ نوتری است پس توسیع $\mathfrak{a}$ در A_{m_i}، متناهیاً تولید شده‌است. ازاین‌رو عناصر x_{s+1}، $\cdots$، x_t در $\mathfrak{a}$ وجود دارند که تصویرهایشان در A_{m_i}، $A_{m_i}\mathfrak{a}$ را به‌ازای $i = 1, \cdots, r$ ، تولید می‌کنند. فرض کنید $\mathfrak{a}_0 = (x_0, \cdots, x_t)$. نشان دهید $\mathfrak{a}_0$ و $\mathfrak{a}$ ، به‌ازای هر ایده‌ال ماکسیمال m، توسیع یکسانی در A_m دارند و بنابه (۹.۳) ، نتیجه بگیرید $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$.]

۱۰. فرض کنید M، A—مدولی نوتری باشد. نشان دهید $M[x]$ (فصل ۲، تمرین ٦) $A[x]$—مدولی نوتری است.

۱۱. فرض کنید A حلقه‌ای باشد به طوری که هر حلقه موضعی $A_{\mathfrak{p}}$ نوتری است. آیا لزوماً A نوتری است؟

۱۲. فرض کنید A یک حلقه و B، A— جبری صادقانه تخت (فصل ۳، تمرین ۱٦) باشد. اگر B نوتری باشد آنگاه نشان دهید A نوتری است. [شرط زنجیر فزاینده را به کار ببرید.]

۱۳. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای از نوع متناهی باشد و فرض کنید $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشت وابسته به f باشد. نشان دهید تارهای f^*، زیرفضاهای نوتری B هستند.

قضیه صفرها، صورت قوی

۱۴. فرض کنید k میدانی صحیحاً بسته ، A حلقه چندجمله‌ای $k[t_1, \cdots, t_n]$ را نشان دهد و $\mathfrak{a}$ ایده‌الی در A باشد. فرض کنید V چندگونایی در k^n باشد که توسط ایده‌ال $\mathfrak{a}$ تعریف می‌شود، بنابراین V مجموعه تمام عناصری مانند $x = (x_1, \cdots, x_n) \in k^n$ است به طوری که به‌ازای هر $f \in \mathfrak{a}$، $f(x) = 0$.

فرض کنید $I(V)$ ایده‌الی از V باشد، یعنی ایده‌ال تمام چندجمله‌ایهای $g \in A$ به طوری که به‌ازای هر $x \in V$، $g(x) = ۰$. در این صورت $I(V) = r(\mathrm{a})$.
[به وضوح، $r(\mathrm{a}) \subseteq I(V)$. بر عکس، فرض کنید $f \notin r(\mathrm{a})$، در این صورت ایده‌ال اول p شامل a وجود دارد به طوری که $f \notin \mathrm{p}$. فرض کنید $\bar{f}$ تصویر f در $B = A/\mathrm{p}$، $C = B_f = B[۱/\bar{f}]$ و m ایده‌الی ماکسیمال از C باشد. چون C، k—جبری متناهیاً تولید شده است، بنابه (۹.۷) به دست می آوریم $C/m \cong k$. از این‌رو تصاویر x_iها از مولدهای t_i از حلقه A در C/m، نقطه $x = (x_۱, \cdots, x_n) \in k^n$ را تعریف می‌کنند و طرز ساختن نشان می‌دهد که $x \in V$ و $f(x) \neq ۰$.]

۱۵. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری، m ایده‌ال ماکسیمالش و k میدان مانده‌ای آن باشد و فرض کنید M، A—مدولی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) M آزاد است ؛

(ب) M تخت است ؛

(پ) نگاشت از $m \otimes M$ بتوی $A \otimes M$، یک به یک است ؛

(ت) $Tor_۱^A(k, M) = ۰$.

[به منظور نشان دادن (الف) $\Rightarrow$ (ت)، فرض کنید $x_۱$، $\cdots$، x_n عناصری از M باشند که تصویرهایشان در M/mM، k—پایه‌ای برای این فضای برداری تشکیل می دهند. بنابه (۸.۲)، x_iها M را تولید می‌کنند. فرض کنید F، A—مدولی آزاد با پایه $e_۱$، $\cdots$، e_n باشد و $\phi : F \longrightarrow M$ را به صورت $\phi(e_i) = x_i$ تعریف کنید. فرض کنید $E = \ker(\phi)$. در این صورت دنباله دقیق، $۰ \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow ۰$ دنباله دقیق زیر را نتیجه می دهد

$$۰ \longrightarrow k \otimes_A E \longrightarrow k \otimes_A F \xrightarrow{۱\otimes\phi} k \otimes_A M \longrightarrow ۰.$$

چون $k \otimes F$ و $k \otimes M$، فضاهایی برداری با بعد یکسان روی k هستند، نتیجه می‌شود که $۱ \otimes \phi$ یکریختی است، از این‌رو $k \otimes E = ۰$، در نتیجه بنابه لم ناکایاما $E = ۰$ (E متناهیاً تولید شده است، زیرا زیرمدولی از F است و A

نوتری است).]

۱۶. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری و M، A—مدولی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) M، A—مدولی تخت است ؛

(ب) به ازای هر ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$، $M_{\mathfrak{p}}$ یک $A_{\mathfrak{p}}$—مدول آزاد است ؛

(پ) به ازای هر ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$، $M_{\mathfrak{m}}$ یک $A_{\mathfrak{m}}$—مدول آزاد است.

به عبارت دیگر، تخت بودن = موضعاً آزاد بودن. [تمرین ۱۵ را به کار ببرید.]

۱۷. فرض کنید A یک حلقه و M، A—مدولی نوتری باشد. در این صورت (با تقلید از برهان‌های (۱۱.۷) و (۱۲.۷)) نشان دهید که هر زیرمدول N از M، تجزیه ابتدایی دارد (فصل ۴، تمرینات ۲۳ — ۲۰).

۱۸. فرض کنید A حلقه نوتری، $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A و M، A—مدولی متناهیاً تولید شده باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) $\mathfrak{p}$ متعلق به 0 در M است ؛

(ب) $x \in M$ ای وجود دارد به طوری که $Ann(x) = \mathfrak{p}$ ؛

(پ) زیرمدولی از M، یکریخت با $A/\mathfrak{p}$ موجود است .

نتیجه بگیرید زنجیری از زیرمدول‌ها

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

وجود دارد به طوری که هر خارج‌قسمت M_i/M_{i-1} به صورت $A/\mathfrak{p}_i$ است که $\mathfrak{p}_i$ ایده‌الی اول از A است.

۱۹. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌الی در حلقه نوتری A باشد. فرض کنید

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{b}_i = \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{c}_j$$

دو تجزیه مینیمال $\mathfrak{a}$، به صورت اشتراک‌های ایده‌ال‌های تحویلناپذیر باشند. ثابت کنید $r = s$ و نیز اینکه (احتمالاً پس ازتجدید اندیسگذاری برای $\mathfrak{c}_j$ ها)

به‌ازای هر i، $r(\mathfrak{b}_i) = r(\mathfrak{c}_j)$.
[نشان دهید به‌ازای هر $i = 1, \cdots, r$، jای وجود دارد به طوری که

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_{i-1} \cap \mathfrak{c}_j \cap \mathfrak{b}_{i+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_r.]$$

نتیجه مشابهی را برای مدول‌ها بیان و اثبات کنید.

۲۰. فرض کنید X فضایی توپولوژیک و $\mathcal{F}$ کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های X باشد که تمام زیرمجموعه‌های باز X را شامل می‌شود و نسبت به تشکیل اشتراک‌ها و متمم‌های متناهی ، بسته است.

(الف) نشان دهید زیرمجموعه E از X، متعلق به $\mathcal{F}$ است اگر و فقط اگر E اجتماعی متناهی از مجموعه‌هایی به صورت $U \cap C$ باشد که U باز و C بسته است.

(ب) فرض کنید X تحویلناپذیر باشد و $E \in \mathcal{F}$. نشان دهید E در X چگال است (یعنی، $\bar{E} = X$) اگر و فقط اگر E شامل مجموعه ناتهی بازی در X باشد.

۲۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک نوتری (فصل ٦، تمرین ۵) باشد و $E \subseteq X$. نشان دهید $E \in \mathcal{F}$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر مجموعه بسته تحویلناپذیر $X_0 \subseteq X$، $\overline{E \cap X_0} \neq X_0$ یا در غیر این صورت $E \cap X_0$ شامل زیرمجموعه ناتهی بازی از X_0 باشد. [فرض کنید $E \notin \mathcal{F}$. دراین صورت گردایه مجموعه‌های بسته $X' \subseteq X$ به طوری که $E \cap X' \notin \mathcal{F}$، ناتهی است و بنابراین عنصر مینیمال X_0 دارد. نشان دهید X_0 تحویلناپذیر است و سپس اینکه هر یک از انتخاب های فوق به این نتیجه که $E \cap X_0 \in \mathcal{F}$ منجر می‌شود.]
مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{F}$، زیرمجموعه‌های ساختپذیر X نامیده می‌شوند.

۲۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک نوتری و E زیرمجموعه‌ای از X باشد. نشان دهید E در X باز است اگر و فقط اگر به‌ازای هر زیرمجموعه بسته تحویلناپذیر X_0 در X، $E \cap X_0 = \emptyset$ یا در غیر این صورت $E \cap X_0$ شامل زیرمجموعه ناتهی بازی از X_0 باشد. [اثبات مشابه تمرین ۲۱ است.]

۲۳. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری و $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای از نوع متناهی باشد (بنابراین B نوتری است). فرض کنید $X = Spec(A)$،

$Y = Spec(B)$ و X و $f^* : Y \longrightarrow X$ نگاشت وابسته به f باشد. در این صورت تصویر زیرمجموعه ساختپذیر E از Y تحت f^*، زیرمجموعه‌ای ساختپذیر از X است.

[بنابه تمرین ۲۰ کافی است قرار دهیم $E = U \cap C$ که U باز است و C در Y بسته است؛ در این صورت با جایگزینی B با تصویر همریخت، حکم را به حالتی که E در Y باز است ساده می کنیم . چون Y نوتری است درنتیجه E شبه فشرده است و بنابراین اجتماعی متناهی از مجموعه‌های باز به صورت $Spec(B_g)$ است. از این‌رو حکم را به حالت $E = Y$ ساده کنید. برای نشان دادن اینکه $f^*(Y)$ ساختپذیر است معیار تمرین ۲۱ را به کار ببرید. فرض کنید $X_\circ$ زیرمجموعه بسته تحویلناپذیری از X باشد به‌طوری که $f^*(Y) \cap X_\circ$ در $X_\circ$ چگال است . در این صورت به دست می آوریم $f^*(Y) \cap X_\circ = f^*(f^{*^{-1}}(X_\circ))$ و $f^{*^{-1}}(X_\circ) = Spec((A/\mathrm{p}) \otimes_A B)$ که $X_\circ = Spec(A/\mathrm{p})$. ازاین‌رو مساله را به‌حالتی که A حوزه‌ای صحیح و f یک‌به‌یک است، ساده کنید . اگر Y_1،...،Y_n مولفه‌های تحویلناپذیر Y باشندکافی است نشان دهیم $f^*(Y_i)$ای شامل مجموعه ناتهی بازی در X می‌شود. بنابراین، سرانجام به وضعیتی تنزل کردیم که در آن A و B حوزه‌هایی صحیح هستند و f یک به یک است (و همچنان از نوع متناهی)؛ حال برای تکمیل برهان، تمرین ۲۱ از فصل ۵ را به کار ببرید.]

۲۴. با نمادها و مفروضات تمرین ۲۳، f^* نگاشتی باز است $\Leftrightarrow$ f ویژگی پایین رو داشته باشد (فصل ۵، تمرین ۱۰). [فرض کنید f ویژگی پایین رو داشته باشد. همانند تمرین ۲۳، مساله را به اثبات اینکه $E = f^*(Y)$ در X باز است ساده کنید. ویژگی پایین رو اظهار می‌کند که اگر $\mathrm{p} \in E$ و $\mathrm{p}' \subseteq \mathrm{p}$ آنگاه $\mathrm{p}' \in E$: به عبارت دیگر، اگر $X_\circ$ زیرمجموعه بسته تحویلناپذیری از X باشد و $X_\circ$، E را قطع کند آنگاه $E \cap X_\circ$ در $X_\circ$ چگال است. بنابه تمرینات ۲۰ و ۲۲، E در X باز است.]

۲۵. فرض کنید A نوتری و $f : A \longrightarrow B$ از نوع متناهی و تخت باشد (یعنی، B به عنوان یک A—مدول تخت است). در این صورت

$f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ نگاشتی باز است. [تمرین ۲۴ از این فصل و تمرین ۱۱ از فصل ۵ را به کار ببرید.]

گروههای گروتندیک

۲۶. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری و $F(A)$ مجموعه تمام رده‌های یکریختی از A—مدول‌های متناهیاً تولید شده را نشان دهد. فرض کنید C گروه آبلی آزاد تولید شده توسط $F(A)$ باشد. به هر دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ از A – مدول‌های متناهیاً تولید شده، عنصر $(M') - (M) + (M'')$ از C را مربوط می‌سازیم که (M) رده یکریختی M است والی آخر. فرض کنید D زیرگروهی از C، تولید شده توسط این عناصر، به ازای تمام دنباله‌های دقیق کوتاه باشد. گروه خارج‌قسمتی C/D، گروه گروتندیک A نامیده می‌شود و با $K(A)$ نشان داده می‌شود. اگر M، A—مدولی متناهیاً تولید شده باشد آنگاه فرض کنید $\gamma(M)$ یا $\gamma_A(M)$، تصویر (M) را در $K(A)$ نشان دهند.

(الف) نشان دهید $K(A)$، ویژگی عام زیر را دارد: به‌ازای هر تابع جمعی λ روی رده A—مدول‌های متناهیاً تولید شده با مقادیری در گروه آبلی G، همریختی یکتای $\lambda_0 : K(A) \longrightarrow G$ موجود است به طوری که به‌ازای هر M، $\lambda(M) = \lambda_0(\gamma(M))$.

(ب) نشان دهید $K(A)$ توسط عناصری به صورت $\gamma(A/\mathfrak{p})$ که $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A است، تولید می‌شود.

(پ) اگر A میدان باشد یا به طور کلی تر، اگر A یک حوزه ایده‌ال اصلی باشد آنگاه $K(A) \cong \mathbf{Z}$.

(ت) فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای متناهی باشد. نشان دهید که تحدید اسکالرها به همریختی $f_! : K(B) \longrightarrow K(A)$ منجر می‌شود به‌طوری که به ازای B—مدول N ای، $f_!(\gamma_B(N)) = \gamma_A(N)$. اگر $g : B \longrightarrow C$ همریختی حلقه‌ای متناهی دیگری باشد آنگاه نشان دهید

$.(gof)_! = f_! o g_!$

۲۷. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری و $F_1(A)$ مجموعه تمام رده‌های یکریختی از A—مدول‌های تخت متناهیاً تولید شده باشد. با تکرار طرز ساختن بیان شده در تمرین ۲۶، گروه $K_1(A)$ را به دست می‌آوریم. فرض کنید $\gamma_1(M)$ تصویر (M) را در $K_1(A)$ نشان دهد.

(الف) نشان دهید حاصلضرب تانسوری مدول‌ها روی A، ساختار حلقه‌ای تعویضپذیری را روی $K_1(A)$ القا می‌کنند به طوری که $\gamma_1(M).\gamma_1(N) = \gamma_1(M \otimes N)$. عنصر همانی این حلقه $\gamma_1(A)$ است.

(ب) نشان دهید حاصلضرب تانسوری، یک ساختار $K_1(A)$—مدولی روی گروه $K(A)$ القا می‌کند به طوری که $\gamma_1(M).\gamma(N) = \gamma(M \otimes N)$.

(پ) اگر A یک حلقه موضعی (نوتری) باشد آنگاه $K_1(A) \cong \mathbf{Z}$.

(ت) فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای و B نوتری باشد. نشان دهید توسیع اسکالرها به همریختی حلقه‌ای $f^! : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$ منجر می‌شود به طوری که $f^!(\gamma_1(M)) = \gamma_1(B \otimes_A M)$. [اگر M تخت و روی A متناهیاً تولید شده باشد آنگاه $B \otimes_A M$ تخت است و روی B متناهیاً تولید شده است.] اگر $g : B \longrightarrow C$ همریختی حلقه‌ای دیگری (با C نوتری) باشد آنگاه $(fog)^! = f^! o g^!$.

(ث) $f : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه‌ای متناهی باشد آنگاه به ازای هر $x \in K_1(A)$ و $y \in K(B)$،

$$f_!(f^!(x)y) = xf_!(y).$$

به عبارت دیگر، با در نظر گرفتن $K(B)$ به عنوان یک $K_1(A)$—مدول توسط تحدید اسکالرها، همریختی $f^!$ یک همریختی $K_1(A)$—مدولی است.

تبصره. چون $F_1(A)$ زیرمجموعه‌ی از $F(A)$ است درنتیجه همریختی گروهی $\epsilon : K_1(A) \longrightarrow K(A)$ را با ضابطه $\epsilon(\gamma_1(M)) = \gamma(M)$ به دست می‌آوریم . اگر حلقه A متناهی — بعد و منظم باشد یعنی، اگر تمام حلقه‌های

موضعی $A_\mathfrak{p}$ آن منظم باشند (فصل ۱۱) آنگاه بتوان نشان داد که ϵ یکریختی است.

فصل ۸

حلقه‌های آرتینی

یک حلقه آرتینی حلقه‌ای است که در ش.ز.ک. (یا به طور هم‌ارز، شرط مینیمال) روی ایده‌ال‌ها صدق می‌کند.

با این وجود، تقارن ظاهری با حلقه‌های نوتری غلط‌انداز است. در حقیقت نشان خواهیم داد که یک حلقه آرتینی لزوماً نوتری است و از نوع بسیار خاصی است. به تعبیری، حلقه آرتینی ساده ترین نوع حلقه بعد از میدان است و آنها را نه به خاطر عمومیتشان بلکه به دلیل سادگی آنها مطالعه می‌کنیم.

گزاره ۱.۸. در حلقه آرتینی A هر ایده‌ال اول، ماکسیمال است.

برهان. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از A باشد. در این صورت $B = A/\mathfrak{p}$ یک حوزه صحیح آرتینی است. فرض کنید $x \in B$ و $x \neq ۰$. بنابه ش.ز.ک. به‌ازای n ای نتیجه می گیریم $(x^n) = (x^{n+۱})$ ، از این‌رو به ازای $y \in B$ ای، $x^n = x^{n+۱}y$. چون B حوزه‌ای صحیح است و $x \neq ۰$ پس نتیجه می‌شود که می‌توانیم x^n را حذف کنیم، لذا $xy = ۱$. از این رو x دارای معکوسی در B است و بنابراین B میدان است، در نتیجه $\mathfrak{p}$ ایده‌الی ماکسیمال است.♣

نتیجه ۲.۸. در یک حلقه آرتینی، پوچ رادیکال با رادیکال جیکوبسن برابر

است.♣

گزاره ۳.۸. هر حلقه آرتینی فقط تعدادی متناهی ایده‌ال ماکسیمال دارد.

برهان. مجموعه تمام اشتراک‌های متناهی $m_1 \cap \cdots \cap m_r$ که m_i ها ایده‌ال‌هایی ماکسیمال هستند ، در نظر بگیرید. این مجموعه عنصری ماکسیمال مانند $m_1 \cap \cdots \cap m_n$، دارد؛ از این‌رو به‌ازای هر ایده‌ال ماکسیمال m به دست می آوریم $m \cap m_1 \cap \cdots \cap m_n = m_1 \cap \cdots \cap m_n$ و بنابراین $m \supseteq m_1 \cap \cdots \cap m_n$. بنابه (۱۱.۱) به ازای i ای $m \supseteq m_i$ ، از این‌رو $m = m_i$ زیرا m_i ماکسیمال است.♣

گزاره ۴.۸. در یک حلقه آرتینی پوچ رادیکال $\mathcal{R}$، پوچتوان است.

برهان. بنابه ش.ز.ک. ، به‌ازای $k > 0$ ای به دست می آوریم ، مثلاً $\mathfrak{a} = \cdots = \mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k$. فرض کنید $\mathfrak{a} \neq 0$ و Σ مجموعه تمام ایده‌ال‌های $\mathfrak{b}$ را نشان دهد به طوری که $\mathfrak{ab} \neq 0$. در این صورت Σ ناتهی است، زیرا $\mathfrak{a} \in \Sigma$. فرض کنید $\mathfrak{c}$ عنصری مینیمال از Σ باشد؛ در این صورت $x \in \mathfrak{c}$ وجود دارد به طوری که $x\mathfrak{a} \neq 0$؛ $(x) \subseteq \mathfrak{c}$ ، از این‌رو بنابه مینیمال بودن $\mathfrak{c}$، $(x) = \mathfrak{c}$. امّا $(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq 0$ و $x\mathfrak{a} \subseteq (x)$، لذا $x\mathfrak{a} = (x)$ (مجدداً بنابه مینیمال بودن). از این‌رو به ازای $y \in \mathfrak{a}$ ای ، $x = xy$ و بنابراین $x = xy = xy^2 = \cdots = xy^n = \cdots$. امّا $\mathcal{R} \supseteq \mathfrak{a} = \mathcal{R}^k \ni y$ ، در نتیجه y پوچتوان است و بنابراین $x = xy^n = 0$. این نتیجه، با طرز انتخاب x در تناقض است و بنابراین $\mathfrak{a} = 0$.♣

زنجیری از ایده‌ال‌های اول حلقه A را به عنوان دنباله اکیداً صعودی متناهی $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ معنی می‌کنیم؛ دراین صورت طول زنجیر، برابر با n است. بُعد A را به عنوان سوپرمم طول‌های تمام زنجیرهای ایده‌ال‌های اول موجود در A، تعریف می‌کنیم: بعد A عددی صحیح بزرگتر از یا مساوی با صفر است

یااینکه $+\infty$ (با فرض $A \neq \circ$) است . یک میدان دارای بعد $\circ$ است ؛ حلقه $\mathbf{Z}$ دارای بعد ۱ است .

قضیه ۵.۸. حلقه A آرتینی است $\Leftrightarrow$ A نوتری باشد و $\dim \ A = \circ$.

برهان. $\Leftarrow$: بنابه (۱.۸) ،نتیجه می گیریم $\dim \ A = \circ$. فرض کنید m_i ها ($1 \leq i \leq n$) ایده‌ال‌های ماکسیمال متمایزی از A باشند (۳.۸). در این صورت $\prod_{i=1}^{n} m_i^k \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} m_i)^k = \mathcal{R}^k = \circ$. از این‌رو بنابه (۱۱.٦)، A نوتری است.

$\Rightarrow$: چون ایده‌ال صفر بنابه (۱۳.۷) ، تجزیه ابتدایی دارد پس حلقه A فقط تعدادی متناهی ایده‌ال اول مینیمال دارد و همه اینها ماکسیمال هستند زیرا $\dim \ A = \circ$. از این‌رو، مثلاً $\mathcal{R} = \bigcap_{i=1}^{n} m_i$؛ بنابه (۱۵.۷) به دست می آوریم $\mathcal{R}^k = \circ$ ، در نتیجه همانند قسمت قبلی برهان، $\prod_{i=1}^{n} m_i^k = \circ$. از این‌رو بنابه (۱۱.٦)، A حلقه‌ای آرتینی است.♣

اگر A یک حلقه موضعی آرتینی با ایده‌ال ماکسیمال m باشد آنگاه m تنها ایده‌ال اول A است و بنابراین m پوچ رادیکال A است. از این‌رو هر عنصری از m پوچتوان است و در نتیجه خود m پوچتوان است. از این رو هر عنصری از A یکه یا پوچتوان است. مثالی از چنین حلقه‌ای $\mathbf{Z}/(p^n)$ است که p عددی اول و $n \geq 1$ است.

گزاره ٦.۸. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری و m ایده‌ال ماکسیمالش باشد. در این صورت دقیقاً یکی از دو عبارت زیر درست است:

(الف) به‌ازای هر n، $m^n \neq m^{n+1}$؛

(ب) به ازای n ای $m^n = \circ$، در چنین حالتی A یک حلقه موضعی آرتینی است.

برهان. فرض کنید به ازای n ای، $m^n = m^{n+1}$. بنابه لم ناکایاما (٦.۲) ،

نتیجه می گیریم $m^n = \circ$. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول دلخواهی از A باشد. دراین صورت $m^n \subseteq \mathfrak{p}$، از این رو (با رادیکال گرفتن) به دست می آوریم $m = \mathfrak{p}$. درنتیجه m ، تنها ایده‌ال اول A است و بنابراین A آرتینی است.♣

قضیه ۷.۸. (قضیه ساختاری برای حلقه‌های آرتینی). حلقه آرتینی A به‌طوریکتایی (با تقریب یکریختی) حاصلضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های موضعی آرتینی است.

برهان. فرض کنید m_i ها $(\textup{۱} \leq i \leq n)$ ایده‌ال‌های ماکسیمال متمایز A باشند. بنابه برهان (۵.۸)، به ازای $k > \circ$ ای به دست می آوریم $\prod_{i=\textup{۱}}^{n} m_i^k = \circ$. بنابه (۱۶.۱)، ایده‌ال‌های m_i^k دوبه‌دو متباین هستند، از این‌رو بنابه (۱۰.۱) ، $\prod m_i^k = \bigcap m_i^k$. در نتیجه مجدداً بنابه (۱۰.۱)، نگاشت طبیعی $A \longrightarrow \prod_{i=\textup{۱}}^{n}(A/m_i^k)$ یکریختی است. هر A/m_i^k یک حلقه موضعی آرتینی است، از این‌رو A حاصلضرب مستقیم حلقه‌های موضعی آرتینی است.

برعکس، فرض کنید $A \cong \prod_{i=\textup{۱}}^{m} A_i$ که A_iها حلقه‌های موضعی آرتینی هستند. در این صورت به‌ازای هر i، همریختی پوشای طبیعی (تصویر روی عامل i ام) $\phi_i : A \longrightarrow A_i$ را به دست می آوریم . فرض کنید $\mathfrak{a}_i = \ker(\phi_i)$. بنابه (۱۰.۱) ، $\mathfrak{a}_i$ها دوبه‌دو متباین هستند و $\bigcap \mathfrak{a}_i = \circ$. فرض کنید $\mathfrak{q}_i$ ایده‌ال اول یکتای A_i باشد و $\mathfrak{p}_i$ انقباضش $\phi_i^{-\textup{۱}}(\mathfrak{q}_i)$ باشد. ایده‌ال $\mathfrak{p}_i$ اول است و بنابراین بنابه (۱.۸)، ماکسیمال است. چون $\mathfrak{q}_i$ پوچتوان است نتیجه می‌شود $\mathfrak{a}_i$، $\mathfrak{p}_i$—ابتدایی است و لذا $\bigcap \mathfrak{a}_i = (\circ)$ تجزیه ابتدایی ایده‌ال صفر در A است. چون $\mathfrak{a}_i$ها دوبه‌دو متباین هستند پس $\mathfrak{p}_i$ها نیز این طور هستند و بنابراین ایده‌ال‌های اول تنهای $(\circ)$ هستند. از این‌رو تمام مولفه‌های ابتدایی $\mathfrak{a}_i$ ، تنها هستند و بنابراین بنابه دومین قضیه یکتایی (۱۱.۴)، به طور یکتایی توسط A تعیین می‌شوند. ازاین‌رو حلقه‌های $A/\mathfrak{a}_i \cong A_i$ به طور یکتایی توسط A تعیین می‌شوند.♣

مثال. حلقه‌ای که فقط یک ایده‌ال اول دارد لزومی ندارد نوتری باشد(وبنابراین حلقه‌ای آرتینی نیست). فرض کنید $A = k[x_1, x_2, \cdots]$ حلقه چندجمله‌ای با مجموعه شمارای نامتناهی از مجهول‌های x_n روی میدان k و $\mathfrak{a}$ ایده‌ال $(x_1, x_2^2, \cdots, x_n^n, \cdots)$ باشد. در این صورت حلقه $B = A/\mathfrak{a}$ فقط یک ایده‌ال اول دارد (یعنی تصویر $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$)، از این‌رو B حلقه‌ای موضعی با بعد ۰ است. امّا B نوتری نیست، زیرا دیدن اینکه ایده‌ال اولش متناهیاً تولید شده نیست، دشوار نمی‌باشد.

اگر A حلقه‌ای موضعی، m ایده‌ال ماکسیمالش و $k = A/m$ میدان مانده‌ای آن باشد آنگاه A—مدول m/m^2 توسط m پوچ می‌شود و بنابراین ساختار k—فضای برداری دارد. اگر m متناهیاً تولید شده باشد (مثلاً، اگر A نوتری باشد) آنگاه تصاویر مجموعه مولدهای m در m/m^2، m/m^2 را به عنوان فضایی برداری تولید خواهد کرد و بنابراین $\dim_k(m/m^2)$ متناهی است. ((۸.۲) را ببینید.)

گزاره ۸.۸. فرض کنید A یک حلقه موضعی آرتینی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) هر ایده‌ال در A، اصلی است؛

(ب) ایده‌ال ماکسیمال m، اصلی است؛

(پ) $\dim_k(m/m^2) \leq 1$.

برهان. (پ) $\Rightarrow$ (ب) $\Rightarrow$ (الف). واضح است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ) : اگر $\dim_k(m/m^2) = 0$ آنگاه $m = m^2$، از این‌رو بنابه لم ناکایاما (۲.۶)، $m = 0$ و بنابراین A میدان است و چیزی برای اثبات وجود ندارد.

اگر $\dim_k(m/m^2) = 1$ آنگاه بنابه (۸.۲)، m ایده‌الی اصلی است (درآنجا درنظر بگیرید $M = m$)، مثلاً $m = (x)$. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌الی از A، بجز (0)

و (۱)، باشد. پس نتیجه می گیریم $m = \mathcal{R}$، از این‌رو بنابه (۴.۸)، m پوچتوان است و بنابراین عدد صحیح r وجود دارد به طوری که $\mathrm{a} \subseteq m^r$ و $\mathrm{a} \not\subseteq m^{r+1}$؛ ازاین‌رو $y \in \mathrm{a}$ ای وجود دارد به طوری که $y = ax^r$ و $y \notin (x^{r+1})$؛ در نتیجه $a \notin (x)$ و a در A یکه است. ازاین‌رو $x^r \in \mathrm{a}$، بنابراین $m^r = (x^r) \subseteq \mathrm{a}$ و درنتیجه $\mathrm{a} = m^r = (x^r)$. پس ایده ال a اصلی است.♣

مثال. حلقه‌های $\mathbf{Z}/(p^n)$ (p عدد اول)، $k[x]/(f^n)$ (که f تحویلناپذیر است) در شرایط (۷.۸) صدق می‌کنند. از طرف دیگر، حلقه موضعی آرتینی $k[x^۲, x^۳]/(x^۴)$ این طور نیست: در اینجا m توسط $x^۲$ و $x^۳$ (به پیمانه $x^۴$) تولید می‌شود، بنابراین $\mathrm{m}^۲ = ۰$ و $\dim(\mathrm{m}/\mathrm{m}^۲) = ۲$.

تمرینات

۱. فرض کنید $\mathrm{q}_۱ \cap \cdots \cap \mathrm{q}_n = ۰$ تجزیه ابتدایی مینیمال ایده‌ال صفر در حلقه‌ای نوتری باشد و فرض کنید q_i، p_i—ابتدایی باشد. فرض کنید $\mathrm{p}_i^{(r)}$ توان صوری r ام p_i باشد (فصل ۴، تمرین ۱۳). نشان دهید به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، عدد صحیح r_i موجود است به طوری که $\mathrm{p}_i^{(r_i)} \subseteq \mathrm{q}_i$.

فرض کنید q_i یک مولفه ابتدایی تنها باشد. در این صورت A_{p_i} یک حلقه موضعی آرتینی است، از این‌رو اگر m_i ایده‌ال ماکسیمالش باشد آنگاه به‌ازای هر r به اندازه کافی بزرگ به دست می آوریم $m_i^r = ۰$ ، از این‌رو به‌ازای هر r بزرگ $\mathrm{q}_i = \mathrm{p}_i^{(r)}$.

اگر q_i مولفه ابتدایی نشانده شده باشد آنگاه A_{p_i} آرتینی نیست، ازاین‌رو توان‌های m_i^r، همگی متمایز هستند و بنابراین $\mathrm{p}_i^{(r)}$ها همگی متمایز هستند. ازاین‌رو در تجزیه ابتدایی داده شده، می‌توانیم q_i را با هر مجموعه نامتناهی دلخواهی از ایده‌ال‌های p_i—ابتدایی $\mathrm{p}_i^{(r)}$ که $r \geq r_i$، جایگزین کنیم و بنابراین

تعداد نامتناهی تجزیه‌های ابتدایی مینیمال از 0 وجود دارند که فقط در $\mathfrak{p}_i$—مولفه‌ها تفاوت دارند.

۲. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری باشد. ثابت کنید گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) A آرتینی است؛

(ب) $Spec(A)$ گسسته و متناهی است؛

(پ) $Spec(A)$ گسسته است.

۳. فرض کنید k یک میدان و A، k—جبری متناهیاً تولید شده باشد. ثابت کنید گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) A آرتینی است؛

(ب) A یک K—جبر متناهی است.

[برای اثبات (ب) $\Rightarrow$ (الف)، (۷.۸) را به کار ببرید تا حکم به حالتی که A یک حلقه موضعی آرتینی است ساده شود. بنابه قضیه صفرها، میدان مانده‌ای A یک توسیع متناهی از k است. حال این حقیقت را که A به عنوان A—مدول دارای طول متناهی است به کار ببرید. برای اثبات (الف) $\Rightarrow$ (ب)، ملاحظه کنید که ایده‌ال‌های A، k—زیرفضاهای برداری هستند و بنابراین در ش.ز.ک. صدق می‌کنند.]

۴. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای از نوع متناهی باشد. عبارت‌های زیر را در نظر بگیرید:

(الف) f متناهی است؛

(ب) تارهای f^*، زیرفضاهای گسسته $Spec(B)$ هستند؛

(پ) به ازای هر ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ از A، حلقه $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ یک $k(\mathfrak{p})$—جبر متناهی است ($k(\mathfrak{p})$ میدان مانده‌ای $A_\mathfrak{p}$ است)؛

(ت) تارهای f^*، متناهی هستند.

ثابت کنید (ت) $\Rightarrow$ (پ) $\Leftrightarrow$ (ب) $\Rightarrow$ (الف). [تمرینات ۲ و ۳ را به کار ببرید.]

اگر f صحیح باشد و تارهای f^* متناهی باشند، آیا لزوماً f متناهی است؟

۵. در تمرین ۱۶ از فصل ۵، نشان دهید X پوششی متناهی از L است (یعنی، تعداد نقاطی از X که به ازای نقطه مفروضی از L انجام نشده باقی می‌مانند متناهی و کراندار است).

۶. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری و q ایده‌الی $\mathfrak{p}$—ابتدایی در A باشد. زنجیرهای ایده‌ال‌های ابتدایی از $\mathfrak{q}$ به $\mathfrak{p}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید تمام چنین زنجیرهایی دارای طول کراندار متناهی هستند و نیز اینکه تمام زنجیرهای ماکسیمال طول یکسانی دارند.

فصل ۹

حلقه‌های ارزه گسسته و حوزه‌های ددکیند

همانطور که قبلاً خاطر نشان کرده‌ایم، نظریه جبری اعداد یکی از منابع تاریخی جبر تعویضپذیر است. این فصل را به نمونه‌ای جالب در نظریه اعداد یعنی حوزه‌های ددکیند اختصاص می‌دهیم.در واقع تجزیه یکتای ایده‌ال‌ها را در حوزه‌های ددکیند از قضایای کلی تجزیه ابتدایی نتیجه می‌گیریم. هر چند، قطعاً امکان‌پذیر است که شیوه‌ای مستقیم، خردمندانه‌تر از شیوه ما را در متنی دقیق از نظریه اعداد در جبر تعویضپذیر به دست آورد . یک اهمیت دیگر از رده حوزه‌های ددکیند در ارتباط با منحنی‌های جبری ناتکین رخ می‌دهد. در حقیقت، توصیف هندسی شرط ددکیند به این صورت است: ناتکین با بعد یک.

درانتهای فصل به حلقه‌های نوتری با بعد صفر پرداخته می‌شود. در اینجا با ملاحظه ساده‌ترین حالت بعدی، یعنی حوزه‌های صحیح نوتری با بعد یک، شروع می‌کنیم: یعنی، حوزه‌های نوتری که در آن هر ایده‌ال اول ناصفر، ماکسیمال است. نخستین نتیجه به این صورت است که در چنین حلقه‌ای ، قضیه تجزیه یکتا برای ایده‌ال‌ها را به دست می آوریم :

گزاره ۱.۹. فرض کنید A حوزه‌ای نوتری با بعد ۱ باشد. در این صورت هر ایده‌ال ناصفر $\mathfrak{a}$ در A، می‌تواند به طور یکتایی به صورت حاصلضربی از ایده‌ال‌های ابتدایی که رادیکال‌هایشان همگی متمایز هستند، بیان شود.

برهان. چون A نوتری است در نتیجه ایده ال $\mathfrak{a}$ بنابه (۱۳.۷)، تجزیه ابتدایی مینیمالی مانند $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ دارد که هر $\mathfrak{q}_i$ مثلاً $\mathfrak{p}_i$—ابتدایی است. چون $\dim A = ۱$ و A یک حوزه صحیح است پس هر ایده‌ال اول ناصفر از حلقه A ماکسیمال است، از این‌رو $\mathfrak{p}_i$ ها ایده‌ال‌های ماکسیمال متمایزی هستند (زیرا $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{q}_i \supseteq \mathfrak{a} \neq ۰$) و بنابراین دوبه‌دو متباین هستند. از این‌رو بنابه (۱۶.۱)، $\mathfrak{q}_i$ ها دوبه‌دو متباین هستند و در نتیجه بنابه (۱۰.۱) به دست می آوریم $\prod \mathfrak{q}_i = \bigcap \mathfrak{q}_i$. بنابراین $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{q}_i$.

برعکس، اگر $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{q}_i$ آنگاه بحثی مشابه نشان می‌دهد که $\mathfrak{a} = \bigcap \mathfrak{q}_i$؛ درواقع این یک تجزیه ابتدایی مینیمال از $\mathfrak{a}$ است که هر $\mathfrak{q}_i$ یک مولفه ابتدایی تنها است و ازاین رو بنابه (۱۱.۴)، یکتا است.♣

فرض کنید A حوزه‌ای نوتری با بعد یک باشد به طوری که در آن هر ایده‌ال ابتدایی، توانی از یک ایده ال اول است. بنابه (۱.۹)، در چنین حلقه‌ای تجزیه یکتای ایده‌ال‌های ناصفر به حاصلضرب ایده‌ال‌های اول را خواهیم داشت. اگر A را نسبت به ایده‌ال اول ناصفر $\mathfrak{p}$، موضعی‌سازی کنیم آنگاه حلقه موضعی $A_{\mathfrak{p}}$ را به دست می‌آوریم که در همان شرایط A صدق می‌کند و بنابراین در $A_{\mathfrak{p}}$ هر ایده‌ال ناصفر، توانی از ایده‌ال ماکسیمال است. چنین حلقه‌های موضعی می‌توانند به روشهای دیگری مشخصه‌سازی شوند.

حلقه‌های ارزه گسسته

فرض کنید K میدان باشد. یک ارزه گسسته روی K، نگاشت v از K^* بروی $\mathbf{Z}$ است (که $K^* = K - \{۰\}$ گروه ضربی K است) به طوری که

۱) $v(xy) = v(x) + v(y)$، یعنی v همریختی است؛

۲) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.
مجموعه شامل ۰ و هر $x \in K^*$ به طوری که $v(x) \geq 0$، یک حلقه است که حلقه ارزه v نامیده می شود . در واقع یک حلقه ارزه از میدان K است. بعضی اوقات مناسب است که v به سراسر K، با قرار دادن $v(0) = +\infty$، توسیع یابد .

مثال‌ها. دو مثال متعارف به صورت زیر هستند:

۱) فرض کنید $K = \mathbf{Q}$. عدد اول ثابت p را در نظر بگیرید، در این صورت هر $x \in \mathbf{Q}$ ناصفر می‌تواند به طور یکتایی به صورت $p^a y$ نوشته شود که $a \in \mathbf{Z}$ و هردوی صورت و مخرج y، نسبت به p اول هستند. حال $v_p(x)$ را برابر با a تعریف کنید. در این صورت حلقه ارزه v_p، حلقه موضعی $\mathbf{Z}_{(p)}$ است.

۲) در نظر بگیرید $K = k[x]$، که k یک میدان و x یک مجهول است. چندجمله‌ای تحویلناپذیر ثابت $f \in k[x]$ را در نظر بگیرید و v_f را دقیقاً همانند در مثال (۱) تعریف کنید. دراین صورت حلقه ارزه v_f، حلقه موضعی $k[x]$ نسبت به ایده‌ال اول (f) است.

حوزه صحیح A یک حلقه ارزه گسسته است اگر ارزه گسسته v از میدان کسرهایش یعنی K ، موجود باشد به طوری که A حلقه ارزه v است . بنابه (۱۸.۵)، A حلقه‌ای موضعی است و ایده‌ال ماکسیمالش m، مجموعه همه عناصر $x \in K$ است به طوری که $v(x) > 0$.

اگر دو عنصر x و y از A ، مقدار یکسانی داشته باشند یعنی اگر $v(x) = v(y)$ آنگاه $v(xy^{-1}) = 0$ و بنابراین $u = xy^{-1}$ در A یکه است. از این‌رو $(x) = (y)$.

اگر $\mathfrak{a} \neq 0$ ایده‌الی در A باشد آنگاه کوچکترین عدد صحیح k موجود است به طوری که به ازای $x \in \mathfrak{a}$ ای، $v(x) = k$. در نتیجه، ایده ال $\mathfrak{a}$ هر عنصر $y \in A$ را که $v(y) \geq k$ ، شامل می‌شود و بنابراین تنها ایده‌ال‌های ناصفر در A، ایده‌ال‌های $m_k = \{y \in A : v(y) \geq k\}$ هستند. این ایده‌ال‌ها تک زنجیر $m \supset m_2 \supset m_3 \supset \cdots$ را تشکیل می‌دهند و بنابراین A نوتری است.

به علاوه، چون $v : K^* \longrightarrow \mathbf{Z}$ پوشاست پس $x \in m$ ای وجود دارد

به‌طوری‌که $v(x) = ۱$ و در نتیجه $m = (x)$ و $m_k = (x^k)$ $(k \geq ۱)$. از این‌رو m تنها ایده‌ال اول ناصفر A است و در نتیجه A یک حوزه موضعی نوتری با بعد یک است که در آن هر ایده‌ال ناصفر، توانی از ایده‌ال ماکسیمال است. درحقیقت تعدادی از این خواص ، مختص حلقه‌های ارزه گسسته هستند.

گزاره ۲.۹. فرض کنید A یک حوزه موضعی نوتری با بعد یک، m ایده‌ال ماکسیمالش و $k = A/m$ میدان مانده‌ای آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) A یک حلقه ارزه گسسته است؛

(ب) A صحیحاً بسته است؛

(پ) m ایده‌الی اصلی است؛

(ت) $\dim_k(m/m^۲) = ۱$؛

(ث) هر ایده‌ال ناصفر به صورت توانی از m است؛

(ج) عنصر $x \in A$ وجود دارد به طوری که هر ایده‌ال ناصفر به صورت (x^k)، $k \geq ۰$، می‌باشد .

برهان. پیش از اینکه اثبات را شروع کنیم، دو تبصره را بیان می‌کنیم:

(یک) اگر a ایده‌الی مخالف (۰) و (۱) باشد آنگاه a، m—ابتدایی است و به‌ازای n ای، $\mathrm{a} \supseteq m^n$. برای اینکه $r(\mathrm{a}) = m$، زیرا m تنها ایده‌ال اول ناصفر است؛ حال (۱۶.۷) را به کار ببرید.

(دو) به ازای هر $n \geq ۰$، $m^n \neq m^{n+۱}$. این حکم از (۶.۸) نتیجه می‌شود.

(ب) $\Leftarrow$ (الف). از (۱۸.۵) به دست می آید .

(پ) $\Leftarrow$ (ب). فرض کنید $a \in m$ و $a \neq ۰$. بنابه تبصره (۱) ، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $m^n \subseteq (a)$ و $m^{n-۱} \not\subseteq (a)$. حال $b \in m^{n-۱}$ و $b \notin (a)$ راانتخاب کنید و فرض کنید $x = a/b \in K$، میدان کسرهای A. لذا نتیجه می گیریم $x^{-۱} \notin A$ (زیرا $b \notin (a)$)، از این‌رو $x^{-۱}$ روی A صحیح نیست و بنابراین بنابه (۱.۵) به دست می آوریم $x^{-۱}m \not\subseteq m$ (زیرا اگر $x^{-۱}m \subseteq m$

آنگاه m ، $A[x^{-1}]$—مدولی صادق و به عنوان A—مدول ، متناهیاً تولید شده خواهد بود). امّا از طرز ساختن x نتیجه می شود که $x^{-1}m \subseteq A$ ، از این‌رو $x^{-1}m = A$ و بنابراین $m = Ax = (x)$.

(ت) $\Rightarrow$ (پ). از (۸.۲) نتیجه می گیریم $\dim_k(m/m^2) \leq 1$ و بنابه تبصره (دو) $m/m^2 \neq 0$.

(ث) $\Rightarrow$ (ت). فرض کنید ایده ال $\mathfrak{a} \neq (0)$ و (1) باشد. بنابه تبصره (یک)، به ازای n ای نتیجه می گیریم $\mathfrak{a} \supseteq m^n$؛ بنابه (۸.۸) (که برای A/m^n استفاده شده است) نتیجه می شود که $\mathfrak{a}$ توانی از m است.

(ج) $\Rightarrow$ (ث). بنابه تبصره (دو)، $m \neq m^2$ ، از این‌رو عنصر $x \in m$ وجود دارد که $x \notin m^2$. امّا بنابه فرض $(x) = m^r$، در نتیجه $r = 1$، $(x) = m$ و $(x^k) = m^k$.

(الف) $\Rightarrow$ (ج). به وضوح $(x) = m$، از این‌رو بنابه تبصره (دو)، $(x) \neq (x^{k+1})$. درنتیجه اگر a عنصر ناصفر دلخواهی از A باشد آنگاه برای دقیقاً یک مقدار از k نتیجه می گیریم $(a) = (x^k)$. حال تعریف کنید $v(a) = k$ و v را به K^* با تعریف $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$ توسیع دهید. بررسی کنید که v خوشتعریف است و یک ارزه گسسته است و نیز اینکه A حلقه ارزه v است.♣

حوزه‌های ددکیند

قضیه ۳.۹. فرض کنید A حوزه‌ای نوتری با بعد یک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) A صحیحاً بسته است؛

(ب) هر ایده‌ال ابتدایی در A به صورت توانی از یک ایده‌ال اول است؛

(پ) هر حلقه موضعی $A_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} \neq 0)$، یک حلقه ارزه گسسته است.

برهان. (پ) $\Leftrightarrow$ (الف). از (۲.۹) و (۱۳.۵) نتیجه می شوند .

(پ) $\Leftrightarrow$ (ب). از گزاره (۲.۹) استفاده کنید و همچنین از این حقیقت که ایده‌ال‌های ابتدایی و توان های ایده‌ال‌ها تحت موضعی‌سازی خوش‌رفتار هستند:

(۸.۴) و (۱۱.۳) را به کار ببرید. ♣

حلقه‌ای که در شرطهای (۳.۹) صدق می‌کند یک حوزه ددکیند نامیده می‌شود.

نتیجه ۴.۹. در یک حوزه ددکیند هر ایده‌ال ناصفر، دارای تجزیه‌ای یکتا به صورت حاصلضربی از ایده‌ال‌های اول است.

برهان. از (۱.۹) و (۳.۹) نتیجه می شود. ♣

مثال‌ها. ۱) هر حوزه ایده‌ال اصلی A یک حوزه ددکیند است. برای اینکه A نوتری (زیرا هر ایده‌ال، متناهیاً تولید شده است) و با بعد یک است (مثال ۳ بعد از (٦.۱)را ببینید). همچنین هر حلقه موضعی $A_\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} \neq 0)$ یک حوزه ایده‌ال اصلی است، از این‌رو بنابه (۲.۹) یک حلقه ارزه گسسته است، درنتیجه بنابه (۳.۹)، A یک حوزه ددکیند است.

۲) فرض کنید K یک میدان اعداد جبری (یعنی یک توسیع جبری متناهی روی $\mathbf{Q}$) باشد. همچنین A به عنوان حلقه اعداد صحیح آن، بستار صحیح $\mathbf{Z}$ در K باشد. (مثلاً، اگر $K = \mathbf{Q}(i)$ آنگاه $A = \mathbf{Z}[i]$ یعنی حلقه اعداد صحیح گوسی.) در این صورت، A یک حوزه ددکیند است.

قضیه ۵.۹. حلقه اعداد صحیح در میدان اعداد جبری K، یک حوزه ددکیند است.

برهان. K توسیع تفکیکپذیر $\mathbf{Q}$ است (زیرا مشخصه، صفر است) ازاین‌رو بنابه (۱۷.۵)، پایه v_1، $\cdots$، v_n برای K روی $\mathbf{Q}$ وجود دارد به طوری که $A \subseteq \sum \mathbf{Z} v_j$. در نتیجه A به عنوان $\mathbf{Z}$—مدول متناهیاً تولید شده است و بنابراین نوتری است. همچنین بنابه (۵.۵)، A صحیحاً بسته است. برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم هر ایده‌ال اول ناصفر $\mathfrak{p}$ از A، ماکسیمال است و این حکم از

(۸.۵) و (۹.۵) نتیجه می‌شود: (۹.۵) نشان می‌دهد که $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}\neq 0$، از این رو $\mathfrak{p}\cap\mathbb{Z}$ ایده‌الی ماکسیمال از $\mathbb{Z}$ است و درنتیجه بنابه (۸.۵)، $\mathfrak{p}$ در A ماکسیمال است.♣

تبصره. قضیه تجزیه یکتا (۴.۹) ، در اصل برای حلقه‌های اعداد صحیح در میدان اعداد جبری ثابت شد. از این رو قضایای یکتایی فصل ۴ می‌توانند به عنوان تعمیم‌هایی از این نتیجه تلقی شوند: ایده‌ال های اول تواندار بایستی با ایده‌ال‌های ابتدایی و حاصلضرب‌ها با اشتراک‌ها جایگزین شوند.

ایده‌ال های کسری

فرض کنید A یک حوزه صحیح و K میدان کسرهایش باشد. در این صورت A—زیرمدول M از K، ایده‌الی کسری از A است اگر به ازای $x\neq 0$ ای در A، $xM\subseteq A$. به ویژه، ایده‌ال‌های «معمولی» که (اکنون ایده‌ال‌های صحیح نامیده می‌شوند) ایده‌ال‌هایی کسری هستند (قرار دهید $x=1$). هر عنصر $u\in K$، ایده‌الی کسری تولید می‌کند که با (u) یا Au نشان داده می‌شود و اصلی نامیده می‌شود. اگر M ایده‌الی کسری باشد آنگاه مجموعه همه عناصر $x\in K$ به طوری که $xM\subseteq A$ به صورت $(A:M)$ نشان داده می‌شود.

هر A—زیرمدول متناهیاً تولید شده M از K، ایده‌الی کسری است. زیرا اگر M توسط $x_1,\cdots,x_n\in K$ تولید شود آنگاه می‌توانیم بنویسیم $x_i=y_iz^{-1}$ $(1\leq i\leq n)$ که y_i و z در A هستند و در نتیجه $zM\subseteq A$. برعکس، اگر A نوتری باشد آنگاه هر ایده‌ال کسری متناهیاً تولید شده است، زیرا به ازای ایده‌ال صحیح $\mathfrak{a}$ ای ، به صورت $x^{-1}\mathfrak{a}$ می‌باشد .

یک A—زیرمدول M از K، ایده‌الی وارونپذیر است اگر زیرمدول N از K موجود باشد به طوری که $MN=A$. در این صورت مدول N یکتاست و برابر است با $(A:M)$، زیرا داریم $N\subseteq(A:M)=(A:M)MN\subseteq AN=N$. در نتیجه M متناهیاً تولید شده است و بنابراین ایده‌الی کسری است:

زیرا از آنجایی که $M.(A:M)=A$ نتیجه می شود که عناصر $x_i \in M$ و $y_i \in (A:M)$ $(1 \le i \le n)$ وجود دارند به طوری که $\sum x_i y_i = 1$ و از این‌رو به ازای هر $x \in M$ به دست می آوریم $x = \sum (y_i x) x_i$: هر $y_i x \in A$، بنابراین M توسط x_1، ...، x_n تولید می‌شود.

به وضوح هر ایده‌ال کسری اصلی ناصفر (u)، وارونپذیر است و معکوسش به صورت (u^{-1}) است. ایده‌ال‌های وارونپذیر نسبت به ضرب یک گروه تشکیل می‌دهند که عنصر همانی آن $(1) = A$ است.

وارونپذیری خاصیتی موضعی است:

گزاره ۶.۹. به‌ازای هر ایده‌ال کسری M، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:
(الف) M وارونپذیر است؛
(ب) M متناهیاً تولید شده است و به‌ازای هر ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$، $M_{\mathfrak{p}}$ وارونپذیر است؛
(پ) M متناهیاً تولید شده است و به‌ازای هر ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$، $M_{\mathfrak{m}}$ وارونپذیر است.

برهان. (ب) $\Rightarrow$ (الف): بنابه گزاره(۱۱.۳) و نتیجه (۱۵.۳)، به‌دست می‌آوریم $A_{\mathfrak{p}} = (M.(A:M))_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}.(A_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}})$ (برای اینکه M متناهیاً تولید شده است، زیرا وارونپذیر است).

(پ) $\Rightarrow$ (ب): طبق معمول برقرار است.

(ت) $\Rightarrow$ (پ): فرض کنید $\mathfrak{a} = M.(A:M)$ که ایده‌الی صحیح است. به‌ازای هر ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$ داریم ، $A_{\mathfrak{m}} =$ (بنابه (۱۱.۳) و (۱۵.۳)) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}.(A_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}})$ ، زیرا $M_{\mathfrak{m}}$ وارونپذیر است. از این‌رو $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}$. درنتیجه $\mathfrak{a} = A$ و بنابراین M وارونپذیر است.♣

گزاره ۷.۹. فرض کنید A یک حوزه موضعی باشد. در این صورت A یک حلقه ارزه گسسته است $\Leftrightarrow$ هر ایده‌ال کسری ناصفر از A، وارونپذیر باشد.

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنید x مولدی از ایده‌ال ماکسیمال m از A باشد و فرض کنید $M \neq 0$ ایده‌الی کسری باشد. در این صورت عنصر $y \in A$ وجود دارد به‌طوری که $yM \subseteq A$: از این‌رو yM ایده‌الی صحیح است، مثلاً (x^r) و بنابراین $M = (x^{r-s})$ که $s = v(y)$.

$\Rightarrow$: هر ایده‌ال صحیح ناصفر وارونپذیر است و بنابراین متناهیاً تولید شده است، درنتیجه A نوتری است. بنابراین کافی است ثابت کنیم هر ایده‌ال صحیح ناصفر به صورت توانی از m است. تصور کنید این حکم نادرست باشد؛ فرض کنید Σ مجموعه ایده‌ال‌های ناصفری باشد که به صورت توانی از m نیستند و فرض کنید $\mathfrak{a}$ عنصر ماکسیمال Σ باشد. در این صورت $\mathfrak{a} \neq m$، از این رو $\mathfrak{a} \subset m$؛ در نتیجه $m^{-1}\mathfrak{a} \subset m^{-1}m = A$ یک ایده‌ال (صحیح) سره است و $m^{-1}\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}$. اگر $m^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ آنگاه $\mathfrak{a} = m\mathfrak{a}$ و بنابراین، بنابه لم ناکایاما (۶.۲)، $\mathfrak{a} = 0$ ؛ از این‌رو $m^{-1}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}$ و در نتیجه $m^{-1}\mathfrak{a}$ به صورت توانی از m است (بنابه ماکسیمال بودن $\mathfrak{a}$). از این‌رو $\mathfrak{a}$ به صورت توانی از m است: به تناقض رسیدیم. ♣

نسخه دوم «کلی» از (۷.۹)، به صورت زیر است:

قضیه ۸.۹. فرض کنید A یک حوزه صحیح باشد. در این صورت A یک حوزه ددکیند است $\Leftrightarrow$ هر ایده‌ال کسری ناصفر از A وارونپذیر باشد .

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنید $M \neq 0$ ایده‌الی کسری باشد. چون A نوتری است، M متناهیاً تولید شده است. به‌ازای هر ایده‌ال اول $\mathfrak{p} \neq 0$، $M_{\mathfrak{p}}$ ایده‌ال کسری ناصفری از حلقه ارزه گسسته $A_{\mathfrak{p}}$ است، از این‌رو بنابه (۷.۹)، وارونپذیر است. در نتیجه بنابه (۶.۹)، وارونپذیر است.

$\Rightarrow$: هر ایده‌ال صحیح ناصفر وارونپذیر است ، از این‌رو متناهیاً تولید شده است، در نتیجه A نوتری است. نشان خواهیم داد که هر $A_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} \neq 0)$ یک حلقه ارزه گسسته است. برای این منظور کافی است نشان داده شود که هر ایده‌ال

صحیح ناصفر در $A_\mathfrak{p}$، وارونپذیر است و سپس (۲.۹) را به کار ببرید. فرض کنید $\mathfrak{b} \neq 0$ ایده‌الی (صحیح) در $A_\mathfrak{p}$ باشد و فرض کنید $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$. دراین صورت $\mathfrak{a}$ وارونپذیر است، از این‌رو $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ بنابه (۷.۹)، وارونپذیر است.♣

نتیجه ۹.۹. اگر A یک حوزه ددکیند باشد آنگاه ایده‌ال‌های کسری ناصفر A نسبت به ضرب ، یک گروه تشکیل می‌دهند.♣

این گروه، گروه ایده‌ال‌های A نامیده می‌شود؛ آن را با I نشان می‌دهیم. با این اصطلاح ، (۴.۹) می‌گوید که I یک گروه (آبلی) آزاد است که توسط ایده‌ال‌های اول ناصفر A تولید می‌شود.

فرض کنید K^* گروه ضربی میدان کسرهای K از A را نشان دهد. هر $u \in K^*$، ایده‌ال کسری (u) را تعریف می‌کند و نگاشت $u \mapsto (u)$، همریختی $\phi : K^* \longrightarrow I$ است. تصویر P تحت ϕ، گروه ایده‌ال‌های کسری اصلی است: گروه خارج‌قسمتی $H = I/P$ گروه رده‌ای ایده‌ال A نامیده می‌شود. در این صورت هسته‌ی U از ϕ، مجموعه همه عناصر $u \in K^*$ است به طوری که $(u) = (1)$، در نتیجه گروه یکه‌های A است.ازاین‌رو دنباله دقیق $1 \longrightarrow U \longrightarrow K^* \longrightarrow I \longrightarrow H \longrightarrow 1$ را به دست می آوریم .

تبصره. برای حوزه‌هایی ددکیند که در نظریه اعداد رخ می‌دهند، قضایای کلاسیکی در ارتباط با گروه‌های H و U وجود دارند. فرض کنید K یک میدان اعداد جبری و A حلقه اعداد صحیح آن باشد که بنابه (۵.۹)، یک حوزه ددکیند است. در این حالت:

۱) H گروهی متناهی است. دراین صورت ، h به عنوان مرتبه این گروه، عدد رده‌ای میدان K است. گزاره‌های زیر هم‌ارزند: (الف) $h = 1$؛ (ب) $I = P$؛ (پ) A یک حوزه ایده‌ال اصلی است؛ (ت) A یک حوزه تجزیه یکتا است.

۲) U گروه آبلی متناهیاً تولید شده است. به طور صریح‌تر، می‌توانیم تعداد مولدهای U را مشخص کنیم. نخست اینکه، عناصری با مرتبه متناهی در U، دقیقاً ریشه‌های واحد هستند که در K قرار می‌گیرند و گروه دوری متناهی W را تشکیل می‌دهند؛ U/W بی‌تاب است. تعداد مولدهای U/W به صورت زیر به‌دست می‌آید: اگر $(K:\mathrm{Q}) = n$ آنگاه n نشاندن متمایز $K \longrightarrow \mathrm{C}$ وجود دارند (C میدان اعداد مختلط است). از بین اینها، مثلاً به تعداد r_1، K را بتوی R می‌نگارد و زوج‌های باقیمانده را به مثلاً r_2 زوج، می‌نگارد (اگر α یکی از آنها باشد آنگاه $w \circ \alpha$ یکی دیگر است که w آن خودریختی از C است که به‌صورت $w(z) = \bar{z}$ تعریف می‌شود): از این‌رو $r_1 + 2r_2 = n$. در این صورت تعداد مولدهای U/W، $r_1 + r_2 - 1$ است.

برهان‌های این نتایج، متعلق به نظریه جبری اعداد است و به جبر تعویضپذیر ارتباطی ندارد: آنها تکنیک‌هایی را با طبیعتی متفاوت از آنچه که در این کتاب به کار رفت، نیاز دارند.

مثال‌ها. ۱) درنظر بگیرید $K = \mathrm{Q}(\sqrt{-1})$؛ $n = 2$، $r_1 = 0$، $r_2 = 1$، $r_1 + r_2 - 1 = 0$. در این صورت، تنها یکه‌های موجود در $A = \mathrm{Z}[i]$، چهار ریشه از واحد هستند یعنی، $\pm 1, \pm i$.

۲) در نظر بگیرید $K = \mathrm{Q}(\sqrt{2})$؛ $n = 2$، $r_1 = 2$، $r_2 = 0$، $r_1 + r_2 - 1 = 1$. در این صورت، $W = \{\pm 1\}$ و U/W دوری نامتناهی است. در حقیقت یکه‌های موجود در $A = \mathrm{Z}[\sqrt{2}]$، به صورت $\pm(1+\sqrt{2})^n$ هستند که n عدد صحیح گویای دلخواهی است.

تمرینات

۱. فرض کنید A حوزه‌ای ددکیند و S زیرمجموعه بسته ضربی از A باشد.

نشان دهید $S^{-1}A$ یا یک حوزه ددکیند است یا میدان کسرهای A.

فرض کنید $S \neq A - \{0\}$ و فرض کنید H و H' به ترتیب ، گروههای رده‌ای ایده‌ال از A و $S^{-1}A$ باشند. نشان دهید توسیع ایده‌ال‌ها، همریختی پوشای $H \longrightarrow H'$ را القا می‌کند.

۲. فرض کنید A حوزه‌ای ددکیند باشد. اگر $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ایی با ضرایبی در A باشد آنگاه قدر f ، ایده‌ال $c(f) = (a_0, \cdots, a_n)$ در A است. لم گوس را ثابت کنید ، یعنی $c(fg) = c(f)c(g)$.

[در هر ایده‌ال ماکسیمال موضعی‌سازی کنید.]

۳. یک حلقه ارزه (بجز یک میدان) نوتری است اگر و فقط اگر یک حلقه ارزه گسسته باشد.

۴. فرض کنید A حوزه‌ای موضعی باشد که میدان نیست و نیز اینکه ایده‌ال ماکسیمال m اصلی است و $\bigcap_{n=1}^{\infty} m^n = 0$. ثابت کنید A یک حلقه ارزه گسسته است.

۵. فرض کنید M مدولی متناهیاً تولید شده روی یک حوزه ددکیند باشد. ثابت کنید M تخت است $\Leftrightarrow$ M بی‌تاب باشد.

[تمرین ۱۳ از فصل ۳ و تمرین ۱۶ از فصل ۷ را به کار ببرید.]

۶. فرض کنید M یک مدول متناهیاً تولید شده تابدار $(T(M) = M)$ روی حوزه ددکیند A باشد. ثابت کنید M به طور یکتا نمایشپذیر، به صورت مجموع مستقیم متناهی از مدول‌های $A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$ است که $\mathfrak{p}_i$ها ایده‌ال‌های اول ناصفری از A هستند. [به‌ازای هر $\mathfrak{p} \neq 0$، $M_\mathfrak{p}$ یک $A_\mathfrak{p}$—مدول تابدار است؛ حال قضیه ساختاری برای مدول های روی یک حوزه ایده‌ال اصلی را به کار ببرید.]

۷. فرض کنید A حوزه‌ای ددکیند و $\mathfrak{a} \neq 0$ ایده‌الی در A باشد. نشان دهید هر ایده‌ال در $A/\mathfrak{a}$، اصلی است.

نتیجه بگیرید هر ایده‌ال در A، می‌تواند توسط حداکثر ۲ عنصر تولید شود.

۸. فرض کنید $\mathfrak{a}$، $\mathfrak{b}$ و $\mathfrak{c}$ سه ایده‌ال در حوزه‌ای ددکیند باشند. ثابت کنید

$$\mathrm{a} \cap (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \cap \mathrm{b}) + (\mathrm{a} \cap \mathrm{c})$$
$$\mathrm{a} + (\mathrm{b} \cap \mathrm{c}) = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) \cap (\mathrm{a} + \mathrm{c})$$

[موضعی‌سازی کنید.]

۹. (قضیه باقیمانده چینی). فرض کنید $\mathrm{a}_۱$ ، $\cdots$ ، a_n ایده‌ال‌هایی باشند و فرض کنید $x_۱$ ، $\cdots$ ، x_n عناصری در حوزه ددکیند A باشند. در این صورت دستگاه همنهشتی‌های (پیمانه $x \equiv x_i(\mathrm{a}_i$ $(۱ \leq i \leq n)$ دارای جواب x در A است $\Leftrightarrow$ (پیمانه $x_i \equiv x_j(\mathrm{a}_i + \mathrm{a}_j$ زمانی که $i \neq j$.

[این حکم هم‌ارز است با اینکه گفته شود دنباله

$$A \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=۱}^{n} A/\mathrm{a}_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i<j} A/(\mathrm{a}_i + \mathrm{a}_j)$$

از A—مدول‌ها دقیق است که ϕ و ψ به صورت زیر تعریف می‌شوند: $\phi(x) = (x+\mathrm{a}_۱, \cdots, x+\mathrm{a}_n)$؛ $\psi(x_۱+\mathrm{a}_۱, \cdots, x_n+\mathrm{a}_n)$ دارای مولفه (i,j)—ام به صورت $x_i - x_j + \mathrm{a}_i + \mathrm{a}_j$ است. برای اینکه نشان داده شود این دنباله دقیق است کافی است نشان داده شود وقتی که در هر $\mathrm{p} \neq ۰$ موضعی‌سازی می‌شود، دقیق است: به عبارت دیگر می‌توانیم فرض کنیم A یک حلقه ارزه گسسته است و در این صورت بقیه کار ساده است.]

فصل ۱۰

تکمیل شده‌ها

در هندسه جبری کلاسیک (یعنی ، روی میدان اعداد مختلط) می توانیم از روشهای متعالی استفاده کنیم. این سخن به این معنی است که یک تابع گویا را به عنوان تابعی تحلیلی (از یک یا چند متغیر) تلقی می کنیم و آن را بسط سری توانی حول یک نقطه در نظر می گیریم. در هندسه جبری مجرد، بهترین کاری که می توانیم انجام دهیم این است که سریهای توانی صوری متناظر را درنظر بگیریم. این کار در حالت تمامریخت [1] موثر نیست امّا می تواند ابزاری بسیار سودمند باشد. فرایند جایگزینی چندجمله‌ای ها با سریهای توانی صوری مثالی از یک تدبیر کلی معروف به تکمیل شده [2] است. نمونه مهم دیگری از تکمیل شده در نظریه اعداد در تشکیل اعداد p- ای[3] رخ می دهد. اگر p عددی اول در $\mathbf{Z}$ باشد آنگاه می توانیم با حلقه های خارج قسمتی متعدد $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ کار کنیم: به عبارت دیگر، می توانیم همنهشتی های به پیمانه p^n را برای مقادیر بسیار بزرگی از n، امتحان و حل کنیم. این مطلب مشابه است با تقریب های متوالی که توسط جمله های بسط تیلور به دست می آیند و همانطور که معرفی سریهای توانی صوری مناسب است ، معرفی اعداد p- ای

---

[1] *holomorphic*

[2] از واژه‌های « تکمیل » یا« تتمیم » نیز استفاده می شود — م .

[3] *p-adic*

نیز مناسب است، اینها حد های معینی از Z/p^nZ هستند وقتی که $n \longrightarrow \infty$. امّا از طرفی، اعداد p- ای بسیار پیچیده تر از سریهای توانی صوری (مثلاً از یک متغیر x) هستند. نظر به اینکه چند جمله ای های از درجه n به طور طبیعی در سریهای توانی نشانده می شوند، گروه Z/p^nZ نمی تواند در Z نشانده شود. هر چند عدد صحیح p-ای می تواند به عنوان سری توانی $\sum a_n p^n$ $(0 \leq a_n < p)$ تصور شود، این نمایش تحت اعمال حلقه، خوش رفتار نیست.

در این فصل فرایند کلی تکمیل شده « p-ای » که عدد اول p با ایده الی کلی جایگزین می شود را توصیف خواهیم کرد. در واقع مناسب تر است که بر حسب جملات توپولوژیکی بیان شود امّا خواننده بایستی از به کار گیری توپولوژی اعداد حقیقی به عنوان راهنمای شهودی، حذر کند. در عوض، لازم است که توپولوژی سریهای توانی را در نظر بگیرد که در آن سری توانی «کوچک» است اگر صرفاً جملاتی از مرتبه بالاتر داشته باشد. روش دیگر این است که می تواند توپولوژی p- ای روی Z در نظر گرفته شود که درآن عددی صحیح « کوچک» است اگر بر توان بزرگی از p ، تقسیمپذیر باشد.

تکمیل شده، همانند موضعی سازی، روش ساده کردن اشیا با متمرکز شدن حول یک نقطه (یا عدد اول) است. هر چند که تکمیل شده، ساده سازی موثرتری نسبت به موضعی سازی می باشد. مثلاً در هندسه جبری، حلقه موضعی از نقطه ای ناتکین روی یک چند گونای با بعد n همواره دارای حلقه سریهای توانی صوری n متغیره برای تکمیل شده‌اش می باشد (این مطلب به‌طور اساسی در فصل ۱۱ ثابت خواهد شد). از طرف دیگر، حلقه های موضعی از دو نقطه اینچنینی نمی توانند یکریخت باشند مگر اینکه چند گوناهایی که روی آنها قرار می گیرند به طور دوسو گویایی [1] هم ارز باشند (یعنی اینکه، میدان های کسرهای دو حلقه موضعی یکریخت هستند).

دو ویژگی مهم موضعی سازی به این صورت هستند که دقیق بودن و ویژگی

[1] *birationally*

نوتری را حفظ می‌کند. به طور مشابه برای تکمیل شده درست است — زمانی که به مدول های متناهیاً تولید شده محدود می شویم — امّا برهان ها بسیار دشوار تر هستند و بخشهای اعظم این فصل را در بر می گیرند. نتیجه مهم دیگر، قضیه کرول [۱] است که بخشی از حلقه را که توسط تکمیل شده «بی‌اثر[۲]» شده است یکی می کند. صرفنظر از جزئیات، قضیه کرول مشابه این حقیقت است که یک تابع تحلیلی توسط ضرایب بسط تیلورش معین می شود. این قیاس برای حلقه موضعی نوتری واضح تر است که در این حالت قضیه دقیقاً ادعا می‌کند $\bigcap m^n = 0$ که m ایده ال ماکسیمال است. قضیه کرول و ویژگی دقیق بودن تکمیل شده، نتایجی ساده از «لم آرتین — ریس» معروف، هستند و به این لم در بحثمان جایگاهی محوری می دهیم.

به منظور مطالعه تکمیل شده ها، در خواهیم یافت که معرفی حلقه‌های مدرج ضروری است. نخستین نمونه از حلقه‌ای مدرج، حلقه چند جمله‌ای‌های $k[x_1, \cdots, x_n]$ است که درجه بندی همان درجه بندی معمولی است که با قرار دادن درجه هر متغیر برابر با ۱، به دست می آید. همانطور که حلقه‌های نامدرج مبانی هندسه جبری آفینی هستند، حلقه‌های مدرج مبانی هندسه جبری تصویری هستند. لذا دارای اهمیت هندسی قابل توجه‌ای هستند. ساختار مهم حلقه مدرج وابسته $G_{\mathfrak{a}}(A)$ مربوط به ایده ال $\mathfrak{a}$ از A، که با آن آشنا خواهیم شد، دارای تعبیر هندسی بسیار روشنی است. مثلاً ، اگر A حلقه موضعی نقطه P روی چندگونای V با ایده ال ماکسیمال $\mathfrak{a}$ باشد آنگاه $G_{\mathfrak{a}}(A)$ با مخروط مماسی تصویری در P، یعنی تمام خطوط گذرنده از P که به V در P مماس هستند، متناظر است. این تصویر هندسی بایستی به توصیف مفهوم $G_{\mathfrak{a}}(A)$ در ارتباط با خواص V حول P و به ویژه در ارتباط با مطالعه تکمیل شده $\hat{A}$، کمک کند.

توپولوژی ها و تکمیل شده ها

فرض کنید G یک گروه آبلی توپولوژیکی (که به طور جمعی نوشته می شود)

[۱] *Krull's Theorem*
[۲] *killed*

باشد، که لزوماً هاسدورف نیست: از این رو G هم فضایی توپولوژیک و هم گروهی آبلی است و دو ساختار روی G سازگار هستند به این معنی که نگاشت های $G \times G \longrightarrow G$ و $G \longrightarrow G$ که به ترتیب به صورت $(x, y) \mapsto x + y$ و $x \mapsto -x$ تعریف می شوند، پیوسته هستند. اگر $\{\circ\}$ در G بسته باشد آنگاه قطر در $G \times G$ بسته است (در واقع تصویر معکوس $\{\circ\}$ تحت نگاشت $(x, y) \mapsto x - y$ است) و بنابراین G هاسدورف است. اگر a عنصری ثابت از G باشد آنگاه انتقال T_a با ضابطه $T_a(x) = x + a$ یک همسانریختی از G بروی G است (زیرا T_a پیوسته است و معکوسش T_{-a} است)؛ازاین رو اگر U یک همسایگی دلخواه از $\circ$ در G باشد آنگاه $U + a$ یک همسایگی از a در G است و برعکس، هر همسایگی a به این صورت ظاهر می شود. از این رو توپولوژی G به طور منحصر به فردی توسط همسایگی های $\circ$ در G، تعیین می شود.

لم ۱.۱۰. فرض کنید H اشتراک تمام همسایگی های $\circ$ در G باشد. دراین‌صورت

(الف) H زیر گروه است.

(ب) H بستار $\{\circ\}$ است.

(پ) G/H هاسدورف است.

(ت) $H = \circ \Leftrightarrow G$ هاسدورف است.

برهان . (الف) از پیوستگی عمل های گروه نتیجه می شود. برای (ب) داریم:

$$\text{به‌ازای هر همسایگی } U \text{ از } \circ،\quad x \in H \Leftrightarrow \circ \in x - U$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{\{\circ\}}.$$

قسمت (ب) نتیجه می دهد که هم مجموعه های H، همگی بسته هستند؛ ازاین‌رو نقاط در G/H بسته هستند و بنابراین G/H هاسدورف است. در نتیجه، G هاسدورف است $\Leftarrow H = \circ$ و عکس حکم بدیهی است. ♣

برای سهولت فرض کنید $G \ni 0$ دارای یک دستگاه اصلی شمارا [1] ازهمسایگی‌هاباشد.دراین صورت تکمیل شده $\hat{G}$ از G، می تواند به طور معمولی به معنای دنباله های کوشی تعریف شود. یک دنباله کوشی در G به صورت دنباله (x_ν) از عناصر G تعریف می شود به طوری که به ازای هر همسایگی U از 0 ، عدد صحیح $s(U)$ با ویژگی زیر موجود باشد

$$\text{به ازای هر } \mu, \nu \geq s(U)\text{،} \quad x_\mu - x_\nu \in U.$$

دو دنباله کوشی هم ارز هستند اگر $x_\nu - y_\nu \longrightarrow 0$ در G. مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی دنباله های کوشی با $\hat{G}$ نشان داده می شود. اگر (x_ν) و (y_ν) دنباله های کوشی باشند آنگاه دنباله $(x_\nu + y_\nu)$ نیز کوشی است و رده‌اش در $\hat{G}$ فقط به رده های (x_ν) و (y_ν) بستگی دارد. از این رو یک عمل جمع در $\hat{G}$ داریم که نسبت به آن ، $\hat{G}$ گروهی آبلی است. به ازای هر $x \in G$ رده دنباله ثابت (x)، عنصر $\phi(x)$ از $\hat{G}$ است و $\phi : G \longrightarrow \hat{G}$ یک همریختی گروههای آبلی است. توجه کنید که ϕ در حالت کلی یک به یک نیست. درحقیقت به‌دست می آوریم

$$Ker\phi = \bigcap U$$

که U روی تمام همسایگی های 0 در G ، تغییر می کند و ازاین رو بنا به (۱.۱۰) ، ϕ یک به یک است اگر و فقط اگر G هاسدورف باشد.

اگر H گروه توپولوژیکی آبلی دیگری باشد و $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی پیوسته، آنگاه تصویر دنباله کوشی در G تحت f، دنباله ای کوشی در H است و بنابراین f همریختی $\hat{f} : \hat{G} \longrightarrow \hat{H}$ را القا می کند که پیوسته است. اگر داشته باشیم $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$ ، آنگاه $\widehat{gof} = \hat{g}o\hat{f}$.

تا کنون کاملاً کلی بحث کرده‌ایم و به عنوان نمونه ، G می تواند گروه جمعی اعداد گویا با توپولوژی معمولی باشد، بنابراین $\hat{G}$ اعداد حقیقی خواهد شد. ولی در حال حاضر خودمان را به نوع خاصی از توپولوژی ها که در جبر تعویض‌پذیر

---

[1] *countable fundamental system*

رخ می دهند محدود می کنیم؛ یعنی فرض می کنیم که $\circ \in G$ دارای دستگاه اصلی همسایگی های شامل زیر گروهها است . از این رو دنباله‌ای را به صورت زیر از زیر گروهها به دست می آوریم

$$G = G_\circ \supseteq G_\backslash \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots$$

و $U \subseteq G$ همسایگی ۰ است اگر و فقط اگر شامل G_n ای باشد. مثالی نوعی، توپولوژی $p-$ ای روی $\mathbf{Z}$ است که در آن $G_n = p^n\mathbf{Z}$. توجه کنید که در چنین توپولوژی‌هایی، زیر گروههای G_n از G هم باز و هم بسته هستند. در حقیقت اگر $g \in G_n$ آنگاه $g + G_n$ یک همسایگی از g است؛ چون $g + G_n \subseteq G_n$ پس نشان می دهد که G_n باز است. از این رو به ازای هر h، هم مجموعه $h + G_n$ باز است و بنابراین $\bigcup\limits_{h \notin G_n} (h + G_n)$ باز است؛ چون این مجموعه متمم G_n در G است پس نتیجه می شود که G_n بسته است.

برای توپولوژی های به دست آمده توسط دنباله های زیر گروهها، تعریف صرفاً جبری دیگری از تکمیل شده وجود دارد که اغلب مرسوم است. فرض کنید (x_ν) دنباله ای کوشی در G باشد. در این صورت تصویر x_ν در G/G_n، سرانجام ثابت است مثلاً برابر با ξ_n است. اگر $n + ۱$ را به n تبدیل کنیم آنگاه واضح است که تحت نگاشت تصویر

$$G/G_{n+۱} \xrightarrow{\theta_{n+۱}} G/G_n$$

به دست می آوریم $\xi_{n+۱} \mapsto \xi_n$. از این رو دنباله کوشی (x_ν) در G ، دنباله منسجم [۱] (ξ_n) را به معنی زیر تعریف می‌کند

$$\text{به ازای هر } n \text{،} \quad \theta_{n+۱}\xi_{n+۱} = \xi_n.$$

به علاوه، واضح است که دنباله های کوشی هم ارز، دنباله (ξ_n) یکسانی را تعریف می‌کنند. بالاخره، برای دنباله منسجم دلخواه (ξ_n)، می توانیم دنباله

[۱] *coherent sequence*

کوشی (x_n) را که منجر به آن می‌شود. با انتخاب کردن x_n به عنوان عنصری در هم مجموعه ξ_n، بسازیم (از این رو $x_{n+1} - x_n \in G_n$). در نتیجه $\hat{G}$ نیز می‌تواند به عنوان مجموعه دنباله های منسجم (ξ_n) با ساختار گروهی معمولی تعریف شود.

اکنون به حالت خاصی از حدهای معکوس رسیده ایم. به طور جامع تر، دنباله‌ای دلخواه از گروههای $\{A_n\}$ و همریختی های زیر را در نظر بگیرید

$$\theta_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow A_n.$$

به اینها یک دستگاه معکوس می گوییم و گروه تمام دنباله‌های منسجم (a_n) (یعنی، $a_n \in A_n$ و $\theta_{n+1}a_{n+1} = a_n$) حد معکوس دستگاه نامیده می شود. دراین صورت ، معمولاً به صورت $\varprojlim A_n$ نوشته می‌شود که همریختی های θ_n مفروض دانسته می شوند. با این نمادگذاری نتیجه می گیریم

$$\hat{G} \cong \varprojlim G/G_n.$$

تعریف $\hat{G}$ به صورت حد معکوس ، مزیت های فراوانی دارد. البته عیب اصلی اش، بدیهی فرض کردن انتخاب ثابتی از زیر گروههای G_n است. حال می توانیم دنباله‌های متفاوتی از G_n داشته باشیم که توپولوژی یکسان و درنتیجه تکمیل شده یکسانی را تعریف می کنند. البته می توانیم مفاهیم دستگاه‌های معکوس « هم ارز » را تعریف کنیم امّا مزیت زبان توپولوژیکی دقیقاً این است که چنین مفاهیمی هم اکنون به آن صورت در آورده می شوند.

خواص دقیق بودن تکمیل شده ها به کمک حدهای معکوس به بهترین شکل مطالعه می شوند. نخست ملاحظه می کنیم که دستگاه معکوس $\{G/G_n\}$ دارای این ویژگی خاص است که همواره θ_{n+1} پوشاست. هر دستگاه معکوس با این ویژگی را دستگاهی پوشا خواهیم نامید. حال فرض کنید $\{A_n\}$، $\{B_n\}$ و $\{C_n\}$ ، سه دستگاه معکوس باشند و همچنین نمودارهای تعویضپذیری از دنباله‌های دقیق را داشته باشیم

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

در این صورت خواهیم گفت که دنباله‌ای دقیق از دستگاه های معکوس را به دست آورده‌ایم . به طور حتم نمودارهای بالا، همریختی های زیر را القا می‌کنند

$$0 \longrightarrow \varprojlim A_n \longrightarrow \varprojlim B_n \longrightarrow \varprojlim C_n \longrightarrow 0$$

امّا این دنباله همواره دقیق نیست. ولی گزاره زیر را داریم :

گزاره ۲.۱۰. اگر $0 \longrightarrow \{A_n\} \longrightarrow \{B_n\} \longrightarrow \{C_n\} \longrightarrow 0$ دنباله ای دقیق از دستگاه‌های معکوس باشد آنگاه دنباله زیر

$$0 \longrightarrow \varprojlim A_n \longrightarrow \varprojlim B_n \longrightarrow \varprojlim C_n$$

همواره دقیق است. به علاوه، اگر $\{A_n\}$ دستگاهی پوشا باشد آنگاه دنباله زیر

$$0 \longrightarrow \varprojlim A_n \longrightarrow \varprojlim B_n \longrightarrow \varprojlim C_n \longrightarrow 0$$

دقیق است.

برهان . فرض کنید $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ و نگاشت $d^A : A \longrightarrow A$ را به صورت $d^A(a_n) = a_n - \theta_{n+1}(a_{n+1})$ تعریف کنید. در این صورت $Ker d^A \cong \varprojlim A_n$. همچنین B، C و d^B، d^C را به طور مشابه تعریف کنید. در این صورت دنباله دقیق دستگاه های معکوس، نمودار تعویضپذیر زیر را با دنباله‌هایی دقیق تعریف می کند

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & d^A \downarrow & & d^B \downarrow & & d^C \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

و از این رو بنا به (۱۰.۲) ، دنباله دقیق زیر به دست می آید

$$0 \longrightarrow Kerd^A \longrightarrow Kerd^B \longrightarrow Kerd^C$$
$$\longrightarrow CoKerd^A \longrightarrow CoKerd^B \longrightarrow CoKerd^C \longrightarrow 0.$$

جهت تکمیل برهان فقط بایستی ثابت کنیم

$$\text{پوشا } \{A_n\} \Rightarrow \text{ پوشا } d^A,$$

امّا این حکم واضح است، زیرا برای نشان دادن اینکه d^A پوشاست، فقط لازم است که به طور استقرایی معادلات زیر را

$$x_n - \theta_{n+1}(x_{n+1}) = a_n$$

برای $x_n \in A_n$ و عنصردلخواه $a_n \in A_n$، حل کنیم. ♣

تبصره . گروه $CoKer\ d^A$ معمولاً به صورت $\varprojlim{}^1 A_n$ نشان داده می شود، زیرا تابعگون مشتق شده[1] به تعبیر جبر مانستگیی است.

نتیجه ۳.۱۰. فرض کنید $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \xrightarrow{p} G'' \longrightarrow 0$ دنباله‌ای دقیق از گروهها باشد. فرض کنید G دارای توپولوژی تعریف شده توسط دنباله $\{G_n\}$ از زیر گروهها باشد و توپولوژی های القا شده برای G' و G'' را نیز ارائه می دهند، یعنی توسط دنباله های $\{G'_n \cap G_n\}$ و $\{pG_n\}$. در این صورت $0 \longrightarrow \hat{G'} \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \hat{G''} \longrightarrow 0$ دقیق است.

برهان . گزاره (۲.۱۰) را برای دنباله های دقیق زیر به کار ببرید

$$0 \longrightarrow \frac{G'}{G' \cap G_n} \longrightarrow \frac{G}{G_n} \longrightarrow \frac{G''}{pG_n} \longrightarrow 0. ♣$$

علی الخصوص ، می توانیم (۳.۱۰) را با $G' = G_n$ به کار ببریم، در این صورت $G'' = G/G_n$ دارای توپولوژی گسسته است بنابراین $\hat{G''} = G''$. ازاین‌رو

[1] derived functor

نتیجه می گیریم

نتیجه ۴.۱۰. $\hat{G}_n$ زیر گروهی از $\hat{G}$ است و

$$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n. \clubsuit$$

همچنین با گرفتن حدهای معکوس در نتیجه (۴.۱۰) ، گزاره زیر را نتیجه می‌گیریم

گزاره ۵.۱۰. $G \cong \hat{G}$. $\clubsuit$

اگر $\phi : G \longrightarrow \hat{G}$ یکریختی باشد آنگاه خواهیم گفت که G کامل است. ازاین رو (۵.۱۰)، اظهار می کند که تکمیل شده G، کامل است. توجه کنید که تعریف ما از کامل، شامل هاسدورف می شود (بنا به (۱.۱۰)).

مهمترین رده از مثال های گروههای توپولوژیک از این نوع که در نظر می‌گیریم، باقراردادن $G = A$ و $G_n = \mathrm{a}^n$ که a ایده الی در حلقه A است، به دست می‌آیند. در این صورت توپولوژی تعریف شده روی A، توپولوژی a–ای[1] یا صرفاً a–ای نامیده می شود. چون a^n ها ایده‌ال هستند پس بررسی اینکه A با این توپولوژی یک حلقه توپولوژیک است یعنی اعمال حلقه پیوسته هستند، دشوار نیست. بنا به (۱.۱۰)، این توپولوژی هاسدورف است $\Leftrightarrow \bigcap \mathrm{a}^n = (\circ)$. تکمیل شده $\hat{A}$ از A، مجدداً یک حلقه توپولوژیک است؛ نگاشت $\phi : A \longrightarrow \hat{A}$ همریختی حلقه‌ای پیوسته است که هسته‌اش به صورت $\bigcap \mathrm{a}^n$ است .

همچنین ، به ازای هر A– مدول M: قرار دهید $G = M$ و $G_n = \mathrm{a}M$. لذا a– توپولوژی را روی M تعریف می کند و تکمیل شده $\hat{M}$ از M یک $\hat{A}$– مدول توپولوژیک است (یعنی ، $\hat{A} \times \hat{M} \longrightarrow \hat{M}$ پیوسته است). اگر $f : M \longrightarrow N$ همریختی A –مدولی دلخواهی باشد آنگاه $f(\mathrm{a}^n M) = \mathrm{a}^n f(M) \subseteq \mathrm{a}^n N$

[1] a-*adic topology*

و بنابراین f (نسبت به $\mathfrak{a}$– توپولوژی های روی M و N) پیوسته است و درنتیجه، $\hat{f} : \hat{M} \longrightarrow \hat{N}$ را تعریف می کند.

مثال ها . ۱) در نظر بگیرید $A = k[x]$ که k یک میدان و x یک مجهول است؛ همچنین ،$\mathfrak{a} = (x)$. در این صورت $\hat{A} = k[[x]]$، یعنی حلقه سریهای توانی صوری .

۲) در نظر بگیرید $A = \mathbf{Z}$، $\mathfrak{a} = (p)$ و که p اول است . در این صورت $\hat{A}$ حلقه اعداد صحیح p– ای است. در واقع عناصرش سریهای نامتناهی به صورت $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ هستند که $0 \leq a_n \leq p - 1$. ازاین رو به دست می آوریم $p^n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

پالایش ها

$\mathfrak{a}$– توپولوژی از یک A– مدول M با در نظر گرفتن زیر مدول های $\mathfrak{a}^n M$ به‌عنوان همسایگی های پایه‌ای از ۰ تعریف شد، امّا روشهای دیگری برای تعریف همین توپولوژی وجود دارند. یک زنجیر(نامتناهی) $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ که M_n ها زیر مدول های M هستند یک پالایش M نامیده می شود و با (M_n) نشان داده می شود. در واقع یک $\mathfrak{a}$–پالایش است اگر به ازای هر n، $\mathfrak{a}M_n \subseteq M_{n+1}$ و $\mathfrak{a}$– پالایش پایدار است اگر به ازای هر n به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$. از این رو $(\mathfrak{a}^n M)$ یک $\mathfrak{a}$– پالایش پایدار است.

لم ۱۰.۶. اگر (M_n) و (M'_n)، $\mathfrak{a}$– پالایش هایی پایدار از M باشند آنگاه تفاضل کراندار[1] دارند : یعنی ، عدد صحیح n_0 وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq 0$، $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ و $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$. از این رو تمام $\mathfrak{a}$– پالایش های پایدار، توپولوژی یکسانی را روی M تعیین می کنند، یعنی همان $\mathfrak{a}$– توپولوژی.

[1] *bounded difference*

برهان . کافی است قرار دهیم $M'_n = \mathfrak{a}^n M$. چون به ازای هر n، $\mathfrak{a}M_n \subseteq M_{n+1}$ پس به دست می آوریم $\mathfrak{a}^n M \subseteq M_n$؛ همچنین به ازای هر $n \geq n_0$ ای $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$، از این رو $M_{n+n_0} = \mathfrak{a}^n M_{n_0} \subseteq \mathfrak{a}^n M$. ♣

حلقه ها و مدول های مدرج

یک حلقه مدرج، حلقه A همراه با خانواده $(A_n)_{n\geq 0}$ از زیر گروههای گروه جمعی A است به طوری که $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ و به ازای هر $m, n \geq 0$، $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$. از این رو A_0 زیر حلقه ای از A است و هر A_n یک A_0–مدول است.

مثال . در نظر بگیرید $A = k[x_1, \cdots, x_r]$ و $A_n =$ مجموعه همه چندجمله‌ای های همگن از درجه n.

اگر A حلقه‌ای مدرج باشد آنگاه یک A– مدول مدرج، A– مدول M همراه با خانواده $(M_n)_{n\geq 0}$ از زیر گروههای M است به طوری که $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ و به‌ازای هر $m, n \geq 0$، $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$. از این رو هر M_n، A_0– مدول است. عنصر x از مدول M، همگن است اگر به ازای n ای $x \in M_n$ داشته‌باشیم ($n=$درجهx). هر عنصر $y \in M$ می تواند به طور منحصر به فردی به صورت مجموع متناهی $\sum x_n y_n$ نوشته شود که به ازای هر $n \geq 0$، $y_n \in M_n$ و همه، بجز تعدادی متناهی از y_n ها، 0 هستند. مولفه‌های ناصفر y_n، مولفه‌های همگن y نامیده می شوند.

اگر M و N، A–مدول هایی مدرج باشند آنگاه همریختی A–مدول های مدرج یک همریختی A مدولی $f : M \longrightarrow N$ است به طوری که به ازای هر $n \geq 0$، $f(M_n) \subseteq N_n$.

اگر A حلقه‌ای مدرج باشد آنگاه فرض کنید $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$. درواقع A_+ ایده الی از A است.

گزاره ۷.۱۰. گزاره‌های زیر، به ازای هر حلقه مدرج A، هم ارزند:
(الف) A حلقه ای نوتری است؛
(ب) A_0 نوتری است و A به عنوان یک A_0 – جبر، متناهیاً تولید شده است.

برهان . (ب) $\Rightarrow$ (الف). از آنجایی که $A_0 \cong A/A_+$، در نتیجه نوتری است. چون A_+ ایده‌الی از A است ازاین رو متناهیاً تولید شده‌است ، مثلاً توسط $x_1,\cdots,x_s$ تولید می‌شود که می توانیم به عنوان عناصری همگن از A، مثلاً با درجه های k_1 ، $\cdots$ ، k_s (همگی بزرگتر از صفر) در نظر بگیریم. فرض کنید A' زیرحلقه‌ای از A، تولید شده توسط x_1 ، $\cdots$ ، x_s روی A_0 باشد. با استقرا روی n نشان‌خواهیم‌داد که به ازای هر $n \geq 0$، $A_n \subseteq A'$. این حکم به طور حتم برای $n = 0$ درست است. فرض کنید $n > 0$ و فرض کنید $y \in A_n$. چون $y \in A_+$، در نتیجه y یک ترکیب خطی از x_i هاست ، مثلاً به صورت $y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$ که $a_i \in A_{n-k_i}$ (به طور قراردادی، $A_m = 0$ اگر $m < 0$). چون هر $k_i > 0$ در نتیجه فرض استقرا نشان می دهد که هر a_i یک چند جمله ای برحسب x ها با ضرایبی در A_0 است. از این رو، همین بحث برای y نیز درست است و بنابراین $y \in A'$. در نتیجه $A_n \subseteq A'$ و بنابراین $A = A'$.
(الف) $\Rightarrow$ (ب): بنا به قضیه پایه هیلبرت (۶.۷)، حکم برقرار است. ♣

فرض کنید A یک حلقه (نامدرج) و $\mathfrak{a}$ ایده‌الی از A باشد. دراین صورت می‌توانیم حلقه مدرج $A^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ را تشکیل دهیم. به طور مشابه، اگر M، A–مدول و M_n یک $\mathfrak{a}$– پالایش M باشد آنگاه $M^* = \bigoplus_n M_n$ یک A^*–مدول مدرج است، زیرا $\mathfrak{a}^m M_n \subseteq M_{m+n}$.

اگر A نوتری باشد آنگاه $\mathfrak{a}$ متناهیاً تولید شده، مثلاً توسط $x_1,\cdots,x_r$ تولید می شود ؛ در این صورت $A^* = A[x_1,\cdots,x_r]$ و بنا به (۶.۷) ، نوتری است.

لم ۸.۱۰. فرض کنید A حلقه ای نوتری، M یک A – مدول متناهیاً تولید شده و (M_n) یک a– پالایش M باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) M^* ، A^*– مدولی متناهیاً تولید شده است؛

(ب) پالایش (M_n) پایدار است.

برهان . هر M_n متناهیاً تولید شده است، از این رو هر $Q_n = \bigoplus_{r=0}^{n} M_r$ نیز متناهیاً تولید شده است: در واقع زیر گروهی از M^* است امّا (در حالت کلی) یک A^*–زیرمدول نیست. ولی چنین چیزی را تولید می کند، یعنی

$$M_n^* = M_0 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \mathrm{a}M_n \oplus \mathrm{a}^2 M_n \oplus \cdots \oplus \mathrm{a}^r M_n \oplus \cdots \quad .$$

چون Q_n به عنوان یک A–مدول، متناهیاً تولید شده است لذا M_n^* به عنوان A^*–مدول، متناهیاً تولید شده است. در واقع M_n^* ها زنجیری فزاینده تشکیل می دهند که اجتماع آنها M^* است. چون A^* نوتری است پس M^* به عنوان A^*– مدول متناهیاً تولید شده است $\Leftrightarrow$ زنجیر بایستد، یعنی به ازای n_0 ای، $M^* = M_{n_0}^*$ $\Leftrightarrow$ به ازای هر $r \geq 0$، $M_{n_0+r} = \mathrm{a}^r M_{n_0}$ $\Leftrightarrow$ پالایش پایدار باشد. ♣

گزاره ۹.۱۰. (لم آرتین – ریس). فرض کنید A حلقه ای نوتری، a ایده‌الی از A، M یک A– مدول متناهیاً تولید شده و (M_n) یک a–پالایش پایدار M باشد. اگر M' زیر مدولی از M باشد آنگاه $(M' \cap M_n)$ یک a–پالایش پایدار M' است.

برهان . از آنجایی که $\mathrm{a}(M' \cap M_n) \subseteq \mathrm{a}M' \cap \mathrm{a}M_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$، درنتیجه $(M' \cap M_n)$ یک a– پالایش است. از این رو، A^*– مدول مدرجی را تعریف می‌کند که زیر مدولی از M^* است و بنابراین متناهیاً تولید شده است (زیرا A^* نوتری است). حال از لم (۸.۱۰) استفاده کنید. ♣

با قرار دادن $M_n = \mathfrak{a}^n M$، آنچه را که معمولاً به عنوان لم آرتین – ریس شناخته می‌شود، به دست می آوریم:

نتیجه ۱۰.۱۰. عدد صحیح k ای وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geq k$،

$$(\mathfrak{a}^n M) \cap M' = \mathfrak{a}^{n-k}((\mathfrak{a}^k M) \cap M').\clubsuit$$

از طرف دیگر، از ترکیب (۹.۱۰) با لم مقدماتی (۶.۱۰)، نسخه بسیار مهمی را به دست می آوریم:

قضیه ۱۱.۱۰. فرض کنید A حلقه ای نوتری، $\mathfrak{a}$ یک ایده ال ، M یک A–مدول متناهیاً تولید شده و M' زیر مدولی از M باشد. دراین صورت پالایش‌های $\mathfrak{a}^n M'$ و $(\mathfrak{a}^n M) \cap M'$ دارای تفاضل کراندار هستند. به ویژه، $\mathfrak{a}$–توپولوژی M' با توپولوژی القا شده توسط $\mathfrak{a}$– توپولوژی M، منطبق می‌شود.$\clubsuit$

تبصره . در این فصل از قسمت آخر قضیه (۱۱.۱۰) که مربوط به توپولوژی ها می باشد، استفاده خواهیم کرد. هر چند در فصل آینده، نتیجه قویتری درباره تفاضلات کراندار مورد نیاز خواهد بود.

به عنوان نخستین کاربرد از (۱۱.۱۰)، آن را با (۳.۱۰) ترکیب می کنیم تا ویژگی مهم دقیق بودن تکمیل شده را به دست آوریم:

گزاره ۱۲.۱۰. فرض کنید

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای دقیق از مدول های متناهیاً تولید شده روی حلقه نوتری A باشد. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد، در این صورت دنباله تکمیل شده‌های $\mathfrak{a}-$ ای

$$0 \longrightarrow \hat{M}' \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow \hat{M}'' \longrightarrow 0$$

دقیق است. ♣

از آنجایی که همریختی طبیعی $A \longrightarrow \hat{A}$ را داریم لذا می توانیم $\hat{A}$ را به‌عنوان یک $A-$ جبر در نظر بگیریم و در نتیجه به ازای هر $A-$ مدول M می‌توانیم $\hat{A}-$ مدول $\hat{A} \otimes_A M$ را تشکیل دهیم. در این صورت طبیعی است پرسیده شود که این مدول چگونه با $\hat{A}-$ مدول $\hat{M}$ مقایسه می شود. حال همریختی A-مدولی $M \longrightarrow \hat{M}$، همریختی $\hat{A}-$ مدولی زیر را تعریف می کند

$$\hat{A} \otimes_A M \longrightarrow \hat{A} \otimes_A \hat{M} \longrightarrow \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}.$$

در حالت کلی، برای A و M دلخواه، این همریختی نه یک به یک است و نه‌پوشا، البته گزاره زیر را داریم:

گزاره ۱۳.۱۰. برای حلقه دلخواه A، اگر M متناهیاً تولید شده باشد آنگاه $\hat{A} \otimes_A M \longrightarrow \hat{M}$ پوشا است. به علاوه، اگر A نوتری باشد آنگاه $\hat{A} \otimes_A M \longrightarrow \hat{M}$ یکریختی است.

برهان . با به کار گیری (۳.۱۰) یا حتی بدون آن، واضح است که تکمیل شده $\mathfrak{a}$-ای با مجموع های مستقیم متناهی، جابجا می شود. از این رو، اگر $F \cong A^n$ آنگاه به دست می آوریم $\hat{A} \otimes_A F \cong \hat{F}$. حال فرض کنید M متناهیاً تولید شده است از این رو دنباله دقیق زیر را نتیجه می گیریم

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

این دنباله به نمودار تعویضپذیر زیر منجر می شود

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \hat{A}\otimes_A N & \longrightarrow & \hat{A}\otimes_A F & \longrightarrow & \hat{A}\otimes_A M & \to & \circ \\ & & \downarrow\gamma & & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha & & \\ \circ & \longrightarrow & \hat{N} & \longrightarrow & \hat{F} & \xrightarrow{\delta} & \hat{M} & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

که در آن سطر بالا دقیق است (بنا به (۱۸.۲)). بنا به (۳.۱۰)، δ پوشاست. چون β یکریختی است در نتیجه α پوشاست که قسمت نخست گزاره ثابت می شود. حال فرض کنید A نوتری باشد ، در این صورت N نیز متناهیاً تولید شده است پس γ پوشاست و بنا به (۱۲.۱۰)، سطر پایین دقیق است. حال با کمی تعقیب نمودار، ثابت می شود که α یک به یک است و در نتیجه یکریختی است. ♣

گزاره‌های (۱۲.۱۰) و (۱۳.۱۰) همزمان اظهار می کنند که تابعگون $M \mapsto \hat{A}\otimes_A M$ روی رسته A — مدول های متناهیاً تولید شده (زمانی که A نوتری است) دقیق است. طبق آنچه که در فصل ۲ نشان داده شد، این مطلب ثابت می کند که :

گزاره ۱۴.۱۰. اگر A حلقه‌ای نوتری، $\mathfrak{a}$ یک ایده ال و $\hat{A}$ تکمیل شده $\mathfrak{a}$-ای A باشد آنگاه $\hat{A}$ یک A — جبر تخت است. ♣

تبصره . برای مدول های متناهیاً تولید نشده، تابعگون $M \mapsto \hat{M}$ دقیق نیست: در واقع تابعگون معتبری که دقیق است، $M \mapsto \hat{A}\otimes_A M$ می باشد و این دو تابعگون روی مدول‌های متناهیاً تولید شده، منطبق هستند.

حال با مطالعه مفصل‌تری از حلقه $\hat{A}$، ادامه می دهیم. نخست چند ویژگی مقدماتی را بررسی می‌کنیم:

گزاره ۱۵.۱۰. اگر A نوتری و $\hat{A}$ تکمیل شده $\mathfrak{a}$- ای آن باشد آنگاه

(الف) $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a} \cong \hat{A}\otimes_A \mathfrak{a}$؛

(ب) $(\mathfrak{a}^n)^\wedge = (\hat{\mathfrak{a}})^n$؛

(پ) $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$؛

(ت) $\hat{\mathfrak{a}}$ مشمول در رادیکال جیکوبسن $\hat{A}$ است.

برهان . چون A نوتری است پس $\mathfrak{a}$ متناهیاً تولید شده است. در این صورت از (۱۳.۱۰) نتیجه می شود که نگاشت

$$\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \longrightarrow \hat{\mathfrak{a}}$$

که تصویرش $\hat{A}\mathfrak{a}$ است، یکریختی است. این نتیجه، (الف) را اثبات می کند. حال (الف) را برای $\mathfrak{a}^n$ به کار می بریم و نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}^n)^\wedge = \hat{A}\mathfrak{a}^n &= (\hat{A}\mathfrak{a})^n \quad \text{، (۱۸.۱) بنا به} \\ &= (\hat{\mathfrak{a}})^n \quad \text{، (الف) بنا به .}\end{aligned}$$

حال با استفاده از (۴.۱۰) ، نتیجه می گیریم

$$A/\mathfrak{a}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n$$

که با در نظر گرفتن خارج قسمت ها، (پ) نتیجه می شود. در این صورت بنابه (ب) و (۵.۱۰)، می بینیم که $\hat{A}$ نسبت به $\hat{\mathfrak{a}}-$ توپولوژی آن ، کامل است. ازاین رو به ازای هر $x \in \hat{\mathfrak{a}}$ ،

$$(۱ - x)^{-۱} = ۱ + x + x^۲ + \cdots$$

در $\hat{A}$ همگراست، بنابراین $۱ - x$ یکه است. لذا بنا به (۹.۱) ، نتیجه می‌شود که $\hat{\mathfrak{a}}$ مشمول در رادیکال جیکوبسن $\hat{A}$ است. ♣

گزاره ۱۶.۱۰. فرض کنید A حلقه موضعی نوتری و m ایده ال ماکسیمالش باشد. در این صورت تکمیل شده $m-$ ای $\hat{\mathfrak{a}}$ از A، حلقه‌ای موضعی با ایده ال ماکسیمال $\hat{m}$ است.

برهان . بنا به قسمت (پ) از گزاره (۱۵.۱۰)، به دست می آوریم $\hat{A}/\hat{m} \cong A/m$، ازاین‌رو $\hat{A}/\hat{m}$ میدان است و در نتیجه $\hat{m}$ ایده الی ماکسیمال است. بنا به قسمت (ت) از گزاره (۱۵.۱۰)، نتیجه می شود که $\hat{m}$، رادیکال جیکوبسن $\hat{A}$ است و بنابراین ایده ال ماکسیمال منحصر به فرد است. از این رو $\hat{A}$ حلقه ای موضعی است. ♣

پرسش مهمی که چقدر به خاطر تکمیل شده از دست می دهیم، با قضیه کرول پاسخ داده می شود:

قضیه ۱۷.۱۰. فرض کنید A حلقه ای نوتری، $\mathfrak{a}$ یک ایده ال، M یک A-مدول متناهیاً تولید شده و $\hat{M}$، $\mathfrak{a}$- تکمیل شده M باشد. در این صورت هسته‌ی $M \longrightarrow \hat{M}$ به صورت $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$ است که شامل همه عناصر $x \in M$ است که توسط عنصری از $\mathfrak{a} + ۱$ پوچ می شود.

برهان . از آنجایی که E اشتراک تمام همسایگی های $M \ni ۰$ است درنتیجه توپولوژی القا شده روی آن بدیهی است یعنی اینکه ، E تنها همسایگی $E \ni ۰$ است. بنا به (۱۱.۱۰)، توپولوژی القا شده روی E با $\mathfrak{a}$-توپولوژی آن ، منطق می شود. چون $\mathfrak{a}E$ یک همسایگی نسبت به $\mathfrak{a}$-توپولوژی است ازاین رو نتیجه می شود $\mathfrak{a}E = E$. از آنجایی که M متناهیاً تولید شده است و A نوتری است در نتیجه E نیز متناهیاً تولید شده است و بنابراین می توانیم (۵.۲) را به کار ببریم و از $\alpha E = E$ نتیجه بگیریم که به ازای $\alpha \in \mathfrak{a}$ ای، $(۱-\alpha)E = ۰$. عکس حکم بدیهی است: اگر $(۱-\alpha)x = ۰$ آنگاه

$$x = \alpha x = \alpha^۲ x = \cdots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = E. \clubsuit$$

تبصره ها . ۱) اگر S مجموعه بسته ضربی $\mathfrak{a} + ۱$ باشد آنگاه قضیه

(۱۷.۱۰) اظهار ـی کند که

$$A \longrightarrow \hat{A} \text{ و } A \longrightarrow S^{-1}A$$

دارای هسته یکسانی هستند. به علاوه، به ازای هر $\alpha \in \hat{\mathfrak{a}}$،

$$(1-\alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$$

در $\hat{A}$ همگراست، از این رو هر عنصری از S در $\hat{A}$ یکه می شود. بنا به ویژگی عام $S^{-1}A$، این نتیجه به‌این معنی است که همریختی طبیعی $S^{-1}A \longrightarrow \hat{A}$ وجود دارد و از قضیه (۱۷.۱۰) نتیجه می شود که یک به یک است. ازاین رو، $S^{-1}A$ می‌تواند با زیر حلقه ای از $\hat{A}$، یکی گرفته شود.

۲) اگر حلقه A نوتری نباشد آنگاه قضیه کرول (۱۷.۱۰) ممکن است نادرست باشد. فرض کنید A حلقه تمام توابع C^∞ روی خط اعداد حقیقی باشد و فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده ال تمام توابعی مانند f باشد که در مبدأ صفر می‌شوند ($\mathfrak{a}$ ماکسیمال است زیرا $A/\mathfrak{a} \cong \mathbf{R}$). در حقیقت، $\mathfrak{a}$ توسط تابع همانی x تولید می شود و $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ مجموعه همه توابعی مانند $f \in A$ است که تمام مشتق هایشان در مبدأ صفر می شوند. از طرف دیگر، f توسط عنصری به صورت $1+\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{a})$ پوچ می شود اگر و فقط اگر f در یک همسایگی از ۰، متحد با صفر باشد. تابع معروف e^{-1/x^2} در همسایگی ۰ متحد با صفر نیست ولی دارای مشتق هایی برابر با صفر در ۰ است، لذا نشان می دهد که هسته های

$$A \longrightarrow \hat{A}, A \longrightarrow S^{-1}A \quad (S = 1 + \mathfrak{a})$$

منطبق نیستند. از این رو A نوتری نیست.

قضیه کرول دارای چندین نتیجه است:

نتیجه ۱۸.۱۰. فرض کنید A یک حوزه نوتری و $\mathfrak{a} \neq (1)$ ایده الی از A باشد. در این صورت، $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

برهان . از آنجایی که $\mathfrak{a}+1$ شامل هیچ مقسوم علیه صفری نمی‌باشد درنتیجه حکم برقرار است. ♣

نتیجه ۱۹.۱۰. فرض کنید A حلقه ای نوتری، $\mathfrak{a}$ ایده الی از A مشمول در رادیکال جیکوبسن و M یک A — مدول متناهیاً تولید شده باشد. دراین‌صورت، $\mathfrak{a}$— توپولوژی M هاسدورف است، یعنی $\bigcap \mathfrak{a}^n M = 0$.

برهان . بنا به (۹.۱)، هر عنصری از $\mathfrak{a}+1$ یکه است. ♣

به ویژه یک حالت خاص مهم را از (۱۹.۱۰) نتیجه می گیریم :

نتیجه ۲۰.۱۰. فرض کنید A حلقه یک موضعی نوتری، m ایده ال ماکسیمالش و M، A— مدولی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت، m—توپولوژی M، هاسدورف است. به ویژه، m— توپولوژی A، هاسدورف است. ♣

می توانیم نتیجه (۲۰.۱۰) را تا حدودی متفاوت تکرار کنیم درصورتی که یادآوری کنیم یک ایده ال m— ابتدایی از A ، دقیقاً ایده‌الی است که مشمول بین m و توانی از آن به صورت m^n است ((۲.۴) و (۱۴.۷) را به کار ببرید). ازاین‌رو از (۲۰.۱۰) نتیجه می شود که اشتراک تمام ایده ال های m— ابتدایی از A، صفر است. حال اگر A یک حلقه نوتری دلخواه و $\mathfrak{p}$ ایده الی اول باشد آنگاه می توانیم این نسخه از (۲۰.۱۰) را برای حلقه موضعی $A_\mathfrak{p}$ به کارببریم. ازاین رو با بازگشت به A و به کار گیری تناظر یک به یک (۸.۴) بین ایده‌ال‌های $\mathfrak{p}$— ابتدایی A و ایده‌ال‌های m— ابتدایی $A_\mathfrak{p}$ (که $m=\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$) نتیجه می‌گیریم :

نتیجه ۲۱.۱۰. فرض کنید A یک حلقه نوتری و $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد.

در این صورت اشتراک تمام ایده ال های p− ابتدایی از A، هسته ی $A \longrightarrow A_{\mathrm{p}}$ است. ♣

حلقه مدرج وابسته

فرض کنید A یک حلقه و a ایده الی از A باشد. در این صورت تعریف کنید

$$G(A)(=G_{\mathrm{a}}(A)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}^n/\mathrm{a}^{n+1} \qquad (\mathrm{a}^0 = A).$$

در واقع یک حلقه مدرج است که در آن عمل ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود:

به ازای هر $x_n \in \mathrm{a}^n$، فرض کنید $\bar{x}_n$ تصویر x_n در $\mathrm{a}^n/\mathrm{a}^{n+1}$ را نشان دهد؛ دراین صورت $\bar{x}_m\bar{x}_n$ را به صورت $\overline{x_m x_n}$ تعریف کنید، یعنی تصویر $x_m x_n$ در $\mathrm{a}^{m+n}/\mathrm{a}^{m+n+1}$؛ بررسی کنید که $\bar{x}_m\bar{x}_n$ به انتخاب نماینده های خاصی بستگی ندارد.

به طور مشابه، اگر M یک A− مدول باشد و (M_n) یک a− پالایش M باشد آنگاه تعریف کنید

$$G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}$$

که به طور طبیعی یک $G(A)$− مدول مدرج است. فرض کنید $G_n(M)$ نشاندهنده M_n/M_{n+1} باشد.

گزاره ۲۲.۱۰. فرض کنید A حلقه ای نوتری و a ایده الی از A باشد. دراین صورت

(الف) $G_{\mathrm{a}}(A)$ نوتری است؛

(ب) $G_{\mathrm{a}}(A)$ و $G_{\hat{\mathrm{a}}}(\hat{A})$، به عنوان حلقه هایی مدرج، یکریخت هستند؛

(پ) اگر M، A− مدولی متناهیاً تولید شده باشد و (M_n) یک a− پالایش پایدار M باشد آنگاه $G(M)$ یک $G_{\mathrm{a}}(A)$− مدول مدرج متناهیاً تولید شده است.

برهان . (الف) چون A نوتری است پس $\mathfrak{a}$ متناهیاً تولید شده است، مثلاً توسط x_1 ، $\cdots$ ، x_s تولید می‌شود. فرض کنید $\bar{x}_i$ تصویر x_i در $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ باشد، دراین صورت $G(A) = (A/\mathfrak{a})[\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_s]$. چون $A/\mathfrak{a}$ نوتری است پس $G(A)$ بنابه قضیه پایه هیلبرت، نوتری است.

(ب) بنا به قسمت (پ) از گزاره (۱۵.۱۰)، نتیجه می‌شود $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$.

(پ) $n_\circ$ ای وجود دارد که به ازای هر $r \geq 0$، $M_{n_\circ+r} = \mathfrak{a}^r M_{n_\circ}$، ازاین‌رو $G(M)$ توسط $\bigoplus_{n \leq n_\circ} G_n(M)$ تولید می شود. از آنجایی که هر $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ نوتری است و توسط $\mathfrak{a}$ پوچ می شود، در نتیجه $A/\mathfrak{a}$–مدولی متناهیاً تولید شده است، از این رو $\bigoplus_{n \leq n_\circ} G_n(M)$ (به عنوان $A/\mathfrak{a}$–مدول) توسط تعدادی متناهی از عناصر تولید می شود، در نتیجه $G(M)$ به عنوان یک $G(A)$– مدول، متناهیاً تولید شده است. ♣

آخرین نتیجه عمده از این فصل، به این صورت است که تکمیل شده $\mathfrak{a}$–ای از یک حلقه نوتری، نوتری است. قبل از اینکه بتوانیم برهان را شروع کنیم، به لم ساده ای در ارتباط با تکمیل شده هر گروه پالایش شده و گروه مدرج وابسته، نیازمندیم.

لم ۲۳.۱۰. فرض کنید $\phi : A \longrightarrow B$ یک همریختی از گروههای پالایش شده باشد، یعنی $\phi(A_n) \subseteq B_n$ و فرض کنید $G(\phi) : G(A) \longrightarrow G(B)$ و $\hat{\phi} : \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ همریختی‌های القا شده از گروههای مدرج وابسته و کامل شده باشند. در این صورت

(الف) $G(\phi)$ یک به یک $\Leftarrow$ $\hat{\phi}$ یک به یک؛

(ب) $G(\phi)$ پوشا $\Leftarrow$ $\hat{\phi}$ پوشا.

برهان . نمودار تعویضپذیری از دنباله های دقیق را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \longrightarrow & A_n/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_n & \longrightarrow & \circ \\ & & \downarrow G_n(\phi) & & \downarrow \alpha_{n+1} & & \downarrow \alpha_n & & \\ \circ & \longrightarrow & B_n/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_n & \longrightarrow & \circ. \end{array}$$

این نمودار، دنباله دقیق زیر را نتیجه می‌دهد

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & KerG_n(\phi) & \longrightarrow & Ker\alpha_{n+1} & \longrightarrow & Ker\alpha_n \\ & \longrightarrow & CoKerG_n(\phi) & \longrightarrow & CoKer\alpha_{n+1} & \longrightarrow & CoKer\alpha_n & \longrightarrow \circ. \end{array}$$

در این صورت از این دنباله دقیق، با استقرا روی n، استنباط می‌کنیم که یا $Ker\alpha_n = \circ$ (حالت (الف)) یا $CoKer\alpha_n = \circ$ (حالت (ب)). به علاوه، در حالت (ب) نتیجه می‌گیریم $Ker\alpha_{n+1} \longrightarrow Ker\alpha_n$ پوشاست. از این رو با حد معکوس گرفتن از همریختی های α_n و به کار گیری (۲.۱۰)، لم نتیجه می‌شود. ♣

حال نتیجه‌ای را می‌توانیم تشکیل دهیم که عکس جزئی قسمت (ب) از لم (۲۲.۱۰) می‌باشد و گام اصلی در نشان دادن اینکه $\hat{A}$ نوتری است، محسوب می‌شود.

گزاره ۲۴.۱۰. فرض کنید A یک حلقه، $\mathfrak{a}$ ایده الی از A، M یک A−مدول و (M_n) یک $\mathfrak{a}$−پالایش از M باشد. فرض کنید که A نسبت به $\mathfrak{a}$−توپولوژی، کامل و M نسبت به توپولوژی پالایش آن ، هاسدورف باشد (یعنی، $\bigcap\limits_n M_n = \circ$). همچنین فرض کنید که $G(M)$، $G(A)$− مدولی متناهیاً تولیدشده است. دراین صورت M یک A− مدول متناهیاً تولید شده است.

برهان . مجموعه ای متناهی از مولد های $G(M)$ انتخاب کنید و آنها را به مولفه‌های همگن خودشان تجزیه کنید، مثلاً ξ_i ها $(1 \leq i \leq v)$ که هر ξ_i دارای درجه ای مانند $n(i)$ است و بنابراین تصویری از عنصری مانند $x_i \in M_{n(i)}$ است. فرض کنید F^i، مدول A با $\mathfrak{a}$− پالایش پایدار به دست آمده توسط

$F_k^i = \mathrm{a}^{k+n(i)}$ باشد و قرار دهید $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F^i$. در این صورت تصویر مولد ۱ از هر F^i به x_i، همریختی

$$\phi : F \longrightarrow M$$

از گروههای پالایش شده را تعریف می کند و $G(\phi) : G(F) \longrightarrow G(M)$ یک همریختی از $G(A)$—مدول هاست. از طرز ساختن نتیجه می‌شود که $\phi(G)$ پوشاست. از این رو بنا به قسمت (ب) از لم (۲۳.۱۰) نتیجه می‌شود که $\hat{\phi}$ پوشاست.

حال نمودار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & M \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ \hat{F} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{M} \end{array} .$$

از آنجایی که F آزاد است و $A = \hat{A}$ ،پس نتیجه می شود که α یکریختی است. چون M هاسدورف است پس β یک به یک است. از این رو پوشا بودن $\hat{\alpha}$، پوشا بودن ϕ را نتیجه می دهد و به این معنی است که x_1 ، $\cdots$ ، x_r، M را به عنوان A– مدول تولید می کنند.♣

نتیجه ۲۵.۱۰. با توجه به فرض های گزاره (۲۴.۱۰)، اگر $G(M)$ یک $G(A)$ – مدول نوتری باشد آنگاه M یک A– مدول نوتری است.

برهان . بنا به گزاره (۲.۶)، بایستی نشان دهیم که هر زیر مدول M' از M، متناهیاً تولید شده است. فرض کنید $M'_n = M' \cap M_n$ ؛ دراین صورت (M'_n) یک a – پالایش M' است و نشاندن $M'_n \longrightarrow M_n$ به همریختی یک به یک $M'_n/M'_{n+1} \longrightarrow M_n/M_{n+1}$ منجر می شود، در نتیجه به نشاندن از $G(M')$ در $G(M)$. چون $G(M)$ نوتری است پس بنابه (۲.۶)، $G(M')$ متناهیاً تولید شده است؛ همچنین M' هاسدورف است، زیرا $\bigcap M'_n \subseteq \bigcap M_n = 0$؛ ازاین رو بنا به (۲۴.۱۰)، M' متناهیاً تولید شده است. ♣

حال می توانیم نتیجه ای که در پی آن بودیم، استنتاج کنیم:

قضیه ۲۶.۱۰. اگر A یک حلقه نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد آنگاه $\mathfrak{a}$–تکمیل شده $\hat{A}$ از A، نوتری است.

برهان . با توجه به (۲۲.۱۰) ، می دانیم که

$$G_{\mathfrak{a}}(A) = G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$$

نوتری است. حال (۲۵.۱۰) را برای حلقه کامل $\hat{A}$، با قرار دادن $M = \hat{A}$ به‌کار ببرید (در واقع توسط $\hat{\mathfrak{a}}^n$ پالایش شده است و لذا هاسدورف می‌باشد). ♣

نتیجه ۲۷.۱۰. اگر A یک حلقه نوتری باشد آنگاه حلقه سریهای توانی $B = A[[x_1, \cdots, x_n]]$ از n متغیر، نوتری است. به ویژه، $k[[x_1, \cdots, x_n]]$ (k یک میدان) نوتری است.

برهان . بنا به قضیه پایه هیلبرت، $A[x_1, \cdots, x_n]$ نوتری است و تکمیل‌شده‌اش نسبت به توپولوژی $(x_1, \cdots, x_n)$– ای، B، است. ♣

تمرینات

۱. فرض کنید $\alpha_n : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ نگاشت یک به یک گروههای آبلی با ضابطه $\alpha_n(1) = p^{n-1}$ باشد و فرض کنید $\alpha : A \longrightarrow B$ مجموع مستقیم تمام α_nها باشد (که A مجموع مستقیم شمارایی از نسخه های $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ است و B مجموع مستقیم $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ هاست). نشان دهید تکمیل شده p– ای A، دقیقاً A است ولی تکمیل شده A نسبت به توپولوژی القا شده از توپولوژی p–ای روی B، حاصلضرب مستقیم $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ هاست. در این صورت

نتیجه بگیرید که تکمیل شده p-ای، یک تابعگون دقیق راست روی رسته تمام $\mathbf{Z}$- مدول ها نیست.

۲. در تمرین ۱، فرض کنید $A_n = \alpha^{-1}(p^n B)$ و دنباله دقیق زیر را در نظر بگیرید

$$\circ \longrightarrow A_n \longrightarrow A \longrightarrow A/A_n \longrightarrow \circ.$$

نشان دهید که $\varprojlim$، دقیق راست نیست و $\varprojlim^{1} A_n$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید A حلقه ای نوتری، $\mathfrak{a}$ ایده ال و M، A- مدولی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت با به کار گیری قضیه کرول و تمرین ۱۴ از فصل ۳، ثابت کنید

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = \bigcap_{m \supseteq \mathfrak{a}} Ker(M \longrightarrow M_m),$$

که m روی تمام ایده ال های ماکسیمال شامل $\mathfrak{a}$، تغییر می کند.

در این صورت نتیجه بگیرید

$$\hat{M} = \circ \Leftrightarrow Supp(M) \cap V(\mathfrak{a}) = \emptyset \quad (\text{در } Spec(A)) \ .$$

[خواننده باید $\hat{M}$ را به عنوان « بسط تیلور » M، قاطعی [1] به زیر طرح $V(\mathfrak{a})$ در نظر بگیرد: در این صورت ، نتیجه بالا نشان می دهد که M در یک همسایگی از $V(\mathfrak{a})$ توسط بسط تیلور آن تعیین می شود.]

۴. فرض کنید A حلقه ای نوتری، $\mathfrak{a}$ ایده الی در A و $\hat{A}$ تکمیل شده $\mathfrak{a}$-ای باشد. به ازای هر $x \in A$، فرض کنید $\hat{x}$ تصویر x در $\hat{A}$ باشد. نشان دهید

x یک مقسوم علیه صفر در A نیست $\Rightarrow$ $\hat{x}$ یک مقسوم علیه صفر در $\hat{A}$ نیست.

آیا از این نتیجه می‌توان استنباط کرد که

A حوزه ای صحیح است $\Rightarrow$ $\hat{A}$ حوزه ای صحیح است؟

[خاصیت دقیق بودن تکمیل شده را برای دنباله $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{x} A$ به کار ببرید.]

---

[1] $transversal$

۵. فرض کنید A نوتری و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده ال هایی در A باشند. اگر M، A-مدولی دلخواه باشد آنگاه فرض کنید $M^{\mathfrak{a}}$ و $M^{\mathfrak{b}}$ به ترتیب تکمیل شده های $\mathfrak{a}$-ای و $\mathfrak{b}$-ای آن را نشان دهند. اگر M متناهیاً تولید شده باشد آنگاه ثابت کنید $(M^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}} \cong M^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

[از دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b}^m M \longrightarrow M/\mathfrak{b}^m M \longrightarrow 0$$

تکمیل شده $\mathfrak{a}$- ای بگیرید و (۱۳.۱۰) را به کار ببرید. سپس یکریختی

$$\varprojlim_m(\varprojlim_n M/(\mathfrak{a}^n M + \mathfrak{b}^m M)) \cong \varprojlim_n M/(\mathfrak{a}^n M + \mathfrak{b}^n M)$$

و شمول های $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{2n} \subseteq \mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^n \subseteq (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n$ را به کار ببرید.]

۶. فرض کنید A حلقه ای نوتری و $\mathfrak{a}$ ایده الی در A باشد. ثابت کنید $\mathfrak{a}$ مشمول در رادیکال جیکوبسن A است اگر و فقط اگر هر ایده ال ماکسیمال A نسبت به $\mathfrak{a}$- توپولوژی ، بسته باشد. (حلقه توپولوژیکی نوتری که در آن توپولوژی تعریف شده توسط یک ایده‌ال، مشمول در رادیکال جیکوبسن است یک حلقه زاریسکی نامیده می شود. حلقه های موضعی و (بنا به قسمت (ت)از گزاره (۱۵.۱۰)) تکمیل شده های $\mathfrak{a}$- ای ، مثال هایی از این نوع هستند.)

۷. فرض کنید A حلقه ای نوتری، $\mathfrak{a}$ ایده الی از A و $\hat{A}$ تکمیل شده $\mathfrak{a}$- ای باشد. ثابت کنید $\hat{A}$ روی A صادقانه تخت (فصل ۳، تمرین ۱۶) است اگر وفقط اگر A یک حلقه زاریسکی (نسبت به $\mathfrak{a}$- توپولوژی) باشد.

[چون $\hat{A}$ روی A تخت است پس کافی است نشان دهیم :

A; زاریسکی باشد $\Leftrightarrow$ به ازای هر M متناهیاً تولید شده، $M \longrightarrow \hat{M}$یک به یک است

حال (۱۹.۱۰) و تمرین ۶ را به کار ببرید.]

۸. فرض کنید A حلقه موضعی مبدا در $\mathbb{C}^n$ باشد (یعنی ، حلقه تمام توابع گویای $f/g \in \mathbb{C}(z_1, \cdots, z_n)$ به طوری که $g(0) \neq 0$)، فرض کنید B حلقه‌سریهای توانی ازمتغیرهای z_1،$\cdots$،z_n باشد که دریک همسایگی از مبدا،

همگرا هستند و فرض کنید C حلقه‌سریهای توانی صوری ازمتغیرهای $z_1, \dots, z_n$ باشد، از این رو $A \subset B \subset C$. نشان دهید که B حلقه ای موضعی است و نیز اینکه تکمیل شده اش نسبت به توپولوژی ایده ال ماکسیمال، C است. با فرض اینکه B نوتری است، ثابت کنید که B یک $A-$ تخت است. [تمرین ۱۷ از فصل ۳ و تمرین ۷ بالا را به کار ببرید.]

۹. فرض کنید A حلقه‌ای موضعی و m ایده ال ماکسیمالش باشد. تصور کنید A به طور $m-$ ای کامل است . به ازای هر چند جمله ای دلخواه $f(x) \in A[x]$، فرض کنید $\bar{f}(x) \in (A/m)[x]$ تحویل آن را به پیمانه m نمایش دهد. دراین صورت لم هنسل [1] را ثابت کنید: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای تکین از درجه n باشد و اگر چند جمله ای های تکین متباین $\bar{h}(x) \in (A/m)[x]$ و $\bar{g}(x)$ از درجه های r و $n-r$، وجود داشته باشند به‌طوری که $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)\bar{h}(x)$ آنگاه می توانیم $\bar{g}(x)$ و $\bar{h}(x)$ را به چند جمله‌ای های تکین $h(x), g(x) \in A[x]$ برگردانیم به‌طوری‌که $f(x) = g(x)h(x)$.

[فرض کنید که به طور استقرایی، $g_k(x), h_k(x) \in A[x]$ را ساخته‌ایم به‌طوری‌که $g_k(x)h_k(x) - f(x) \in m^k A[x]$. سپس از این حقیقت استفاده کنید که چون $\bar{g}(x)$ و $\bar{h}(x)$ متباین هستند پس می توانیم $\bar{a}_p(x)$ و $\bar{b}_p(x)$ را به‌ترتیب از درجاتی کوچکتر از یا مساوی با $n-r$ و r ، پیدا کنیم به‌طوری که $x^p = \bar{a}_p(x)\bar{g}_k(x) + \bar{b}_p(x)\bar{h}_k(x)$ که p عدد صحیح دلخواهی است به‌طوری که $1 \le p \le n$. بالاخره از کامل بودن A استفاده کنید تا نشان دهید که دنباله‌های $g_k(x)$ و $h_k(x)$ به $g(x)$ و $h(x)$ مورد نظر همگرا هستند.]

۱۰. (الف) با توجه به نماد های تمرین ۹ ، از لم هنسل نتیجه بگیرید که اگر $\bar{f}(x)$ دارای ریشه ساده $\alpha \in A/m$ باشد آنگاه $f(x)$ دارای ریشه ساده $a \in A$ است به طوری که $\alpha = a$ (پیمانه m).

(ب) نشان دهید که عدد ۲ در حلقه اعداد صحیح ۷– ای، یک مجذور [1] است.

---

[1] *Hensel's lemma*

[1] *square*

(پ) فرض کنید $f(x, y) \in k[x, y]$، که k میدان است و فرض کنید که $f(\circ, y)$ دارای $y = a_\circ$ به عنوان ریشه‌ای ساده باشد. ثابت کنید سری توانی صوری $y(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ وجود دارد به طوری که $f(x, y(x)) = \circ$.

(این نتیجه، « شاخه تحلیلی » منحنی $f = \circ$، گذرنده از نقطه $(\circ, a_\circ)$ را به‌دست می دهد.)

۱۱. نشان دهید که عکس قضیه (۲٦.۱۰) برقرار نیست، حتی اگر فرض کنیم که A موضعی و $\hat{A}$ یک A — مدول متناهیاً تولید شده باشد.

[A را به عنوان حلقه نطفه های [1] توابع C^∞ از x در $x = \circ$، در نظر بگیرید و قضیه بورل [2] را مبنی بر اینکه هر سری توانی به صورت بسط تیلور یک تابع C^∞ رخ می دهد، به کار ببرید.]

۱۲. اگر A نوتری باشد آنگاه $A[[x_1, \cdots, x_n]]$ یک A — جبر صادقانه تخت است. [همریختی $A \longrightarrow A[[x_1, \cdots, x_n]]$ را به صورت ترکیبی از توسیع‌های تخت، بیان کنید و قسمت (ث) از تمرین ۵ از فصل ۱ را به کار ببرید.]

---

[1] *germs* - جهت اطلاعات بیشتر به کتاب
« توابع یک متغیره مختلط / جان ب . کانوی ، ترجمه محمد علی رضوانی »
مراجعه کنید — م .

[2] *Borel's Theorem*

فصل ۱۱

نظریه بعد

یکی از مفاهیم پایه ای در هندسه جبری، بعد یک چندگونا است. این مفهوم، اساساً مفهومی موضعی است و همانطور که در این فصل نشان خواهیم داد نظریه بسیار رضایت بخشی برای حلقه های موضعی نوتری کلی وجود دارد. قضیه اصلی، هم ارزی سه تعریف متفاوت از بعد را اظهار می کند. دو مورد از این تعاریف دارای محتوای هندسی نسبتاً بدیهی هستند، امّا سومی که شامل تابع هیلبرت است، کمتر قابل تصور است. ولی مزیت های تکنیکی بسیاری دارد و کل نظریه کارآمدتر می شود اگر در گام اولیه ارائه شود.

پس از پرداختن به بعد، شرح کوتاهی از حلقه های موضعی منظم را ارائه می کنیم که با مفهوم ناتکینی در هندسه جبری، متناظر است. همچنین ، معادل بودن سه تعریف انتظام [۱] را اثبات می کنیم.

سرانجام نشان می دهیم که چگونه در حالت چندگوناهای جبری روی یک میدان، بعدهای موضعی که تعریف کرده ایم با درجه تعالی میدان تابعی [۲] منطبق می شوند.

---

[۱] *regularity*
[۲] *function field*

توابع هیلبرت

فرض کنید $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ حلقه مدرج نوتری باشد. دراین صورت بنا به (۷.۱۰)، A_0 حلقه‌ای نوتری است و A (به عنوان A_0- جبر) توسط عناصری مانند x_1، $\cdots$، x_s تولید می شود که می توانیم آنها را همگن با درجات $k_1، \cdots، k_s$ (همگی بزرگتر از صفر) در نظر بگیریم.

فرض کنید M یک $A-$ مدول متناهیاً تولید شده مدرج باشد. دراین صورت M توسط تعدادی متناهی از عناصر همگن مانند m_j ها $(1 \leq j \leq t)$ تولید می‌شود؛ فرض کنید $r_j = \deg m_j$. ازاین رو هر عنصری از M_n، یعنی مولفه همگن M از درجه n، به صورت $\sum_j f_j(x) m_j$ است که $f_j(x) \in A$، همگن از درجه $n - r_j$ است (و بنابراین صفر است اگر $n < r_j$). در این صورت نتیجه می شود که M_n به عنوان یک A_0 — مدول، متناهیاً تولید شده است یعنی توسط تمام $g_j(x) m_j$ ها تولید می شود که $g_j(x)$ یک تک جمله‌ای بر حسب x_i ها با درجه کلی $n - r_j$ است.

فرض کنید λ یک تابع جمعي (با مقادیری در $\mathbf{Z}$) روی رده تمام A_0-مدول‌های متناهیاً تولید شده باشد (فصل ۲). سری پوانکاره M (نسبت به λ) تابع مولد $\lambda(M_n)$ است، یعنی سری توانی زیر می باشد

$$P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n \in \mathbf{Z}[[t]].$$

قضیه ۱.۱۱. (هیلبرت، سر[1]). $P(M,t)$ برحسب متغیر t، یک تابع گویا به صورت $f(t)/\prod_{i=1}^{s}(1 - t^{k_i})$ است که $f(t) \in \mathbf{Z}[t]$.

برهان . با استقرا روی s، یعنی تعداد مولد های A روی A_0، حکم را ثابت می کنیم. با $s = 0$ شروع کنید؛ این فرض به این معناست که به ازای هر $n > 0$، $A_n = 0$، بنابراین $A = A_0$ و M یک A_0 مدول متناهیاً تولید شده است، ازاین رو به ازای تمام n های بزرگ، $M_n = 0$. لذا در این حالت ،

---
[1] Serre

$P(M,t)$ یک چند جمله ای است.

حال فرض کنید $s > ۰$ و قضیه برای $s - ۱$ برقرار باشد. در این صورت ضرب در x_s، یک همریختی $A-$ مدولی از M_n به توی M_{n+k_s} است، از این رو دنباله‌ای دقیق نظیر دنباله زیر را نتیجه می دهد

$$(۱) \qquad ۰ \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{x_s} M_{n+k_s} \longrightarrow L_{n+k_s} \longrightarrow ۰.$$

فرض کنید $K = \bigoplus_n K_n$ و $L = \bigoplus_n L_n$؛ هردوی اینها، $A-$ مدول‌هایی متناهیاً تولید شده هستند (زیرا، K زیر مدول و L مدول خارج قسمتی M است) و هردوی آنها توسط x_s پوچ می شوند، از این رو $A_۰[x_۱, \cdots, x_{s-۱}]-$ مدول‌هایی هستند. با به کار گیری λ بر (۱)، از (۱۱.۲) نتیجه می گیریم

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = ۰;$$

لذا با ضرب کردن در t^{n+k_s} و جمع کردن بر حسب n، به دست می آوریم

$$(۲) \qquad (۱ - t^{k_s})P(M,t) = P(L,t) - t^{k_s}P(K,t) + g(t)$$

که $g(t)$ یک چند جمله ای است. حال با استفاده از فرض استقرا، نتیجه به دست می آید. ♣

مرتبه قطب $P(M,t)$ را در $t = ۱$، با $d(M)$ نشان خواهیم داد؛ دراین‌صورت اندازه « بزرگی » M (مربوط به λ) را فراهم می کند. به ویژه $d(A)$ تعریف شده است. علی الخصوص حالتی که هر $k_i = ۱$ باشد، خیلی ساده است:

نتیجه ۲.۱۱. اگر هر $k_i = ۱$ آنگاه برای هر n به اندازه کافی بزرگ، $\lambda(M_n)$ یک چند جمله‌ای بر حسب n (با ضرایبی گویا) از درجه[1] $d - ۱$ است .

[1] در اینجا قرار دادی را اتخاذ می کنیم مبنی بر اینکه درجه چند جمله ای صفر، -۱ است: همچنین برای ضرایب دو جمله‌ای ، به ازای هر $n \geq ۰$ قرار می‌دهیم $\binom{n}{-۱} = ۰$ و $\binom{-۱}{-۱} = ۱$.

برهان . بنا به (۱.۱۱) به دست می آوریم

$$\lambda(M_n) = \text{ضریب } t^n \text{ در } f(t).(۱-t)^{-s}$$

در این صورت با حذف توان های $(۱-t)$، می توانیم فرض کنیم $s=d$ و $f(۱)\neq ۰$. فرض کنید $f(t)=\sum_{k=۰}^{N} a_k t^k$؛ از آنجایی که

$$(۱-t)^{-d} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{d+k-۱}{d-۱} t^k$$

پس نتیجه می گیریم که به ازای هر $n \geq N$،

$$\lambda(M_n) = \sum_{k=۰}^{N} a_k \binom{d+n-k-۱}{d-۱}$$

و مجموع طرف راست، یک چند جمله ای بر حسب n با جمله پیشرو $(\sum a_k)n^{d-۱}/(d-۱)! \neq ۰$ است . ♣

تبصره ها. ۱) برای اینکه چند جمله‌ای $f(x)$ دارای این ویژگی باشد که به‌ازای هر عدد صحیح n، $f(n)$ عددی صحیح است در این صورت لازم نیست که ضرایب f صحیح باشند: مثلاً، $\frac{۱}{۲}x(x+۱)$.

۲) چند جمله‌ای ذکر شده در (۲.۱۱)، معمولاً تابع هیلبرت (یاچندجمله‌ای هیلبرت) M (نسبت به λ) نامیده می شود.

حال با بازگشت به دنباله (۱)، x_s را با عنصر دلخواه $x \in A_k$ که در M مقسوم علیه صفر نیست (یعنی اگر $xm=۰$ که $m\in M$، آنگاه $m=۰$)، جایگزین کنید. در این صورت $k=۰$ و معادله (۲) نشان می دهد که

$$d(L) = d(M) - ۱.$$

در نتیجه، گزاره بعدی را ثابت کرده ایم:

گزاره ۳.۱۱. اگر $x \in A_k$ در M مقسوم علیه صفر نباشد آنگاه $d(M/xM) = d(M) - ۱$. ♣

قضیه (۱.۱۱) را در حالتی که $A_۰$ حلقه ای آرتینی (در حالت خاص ، میدان) است، به کار خواهیم برد و $\lambda(M)$ طول $l(M)$ از $A_۰$– مدول متناهیاً تولید شده M است. در این صورت بنا به (۹.۶)، $l(M)$یک تابع جمعی است.

مثال . فرض کنید $A = A_۰[x_۱, \cdots, x_s]$ که $A_۰$ حلقه ای آرتینی است و x_iها مجهول های مستقل هستند. در این صورت A_n یک $A_۰$ – مدول آزاد، تولید شده توسط تک جمله ای های $x_۱^{m_۱} \cdots x_s^{m_s}$ است که $\sum m_i = n$؛ درواقع تعدادشان $\begin{pmatrix} s+n-۱ \\ s-۱ \end{pmatrix}$ است ، از این رو $P(A,t) = (۱-t)^{-s}$.

حال توابع هیلبرت به دست آمده از یک حلقه موضعی را با تبدیل کردن به حلقه‌های مدرج وابسته همانند در فصل ۱۰، در نظر خواهیم گرفت.

گزاره ۴.۱۱. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری، $\mathfrak{m}$ ایده ال ماکسیمالش، $\mathfrak{q}$ ایده الی $\mathfrak{m}$– ابتدایی، M یک A– مدول متناهیاً تولید شده و (M_n) یک $\mathfrak{q}$–پالایش پایدار M باشد. در این صورت

(الف) به ازای هر $n \geq ۰$، M/M_n دارای طول متناهی است؛

(ب) به ازای هر n به اندازه کافی بزرگ، این طول یک چند جمله ای $g(n)$ برحسب n با درجه ای کوچکتراز یا مساوی با s است که s کمترین تعداد مولد های $\mathfrak{q}$ است؛

(پ) درجه و ضریب پیشرو $g(n)$ فقط به M و $\mathfrak{q}$ بستگی دارند و به پالایش انتخاب شده بستگی ندارند.

برهان.(الف)فرض کنید $G(A) = \bigoplus_n \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+۱}$ و $G(M) = \bigoplus_n M_n/M_{n+۱}$.

در این صورت تقریباً بنا به (۵.۸) ، $G_۰(A) = A/\mathfrak{q}$ یک حلقه موضعی

آرتینی است؛ همچنین $G(A)$ نوتری است و بنا به (۲۲.۱۰)، $G(M)$ یک $G(A)$-مدول مدرج متناهیاً تولید شده است. از آنجایی که هر $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ یک A-مدول نوتری است که توسط q پوچ می شود، لذا یک A/q- مدول نوتری و در نتیجه دارای طول متناهی است (زیرا A/q آرتینی است). ازاین رو، M/M_n دارای طول متناهی است و

$$l_n = l(M/M_n) = \sum_{r=1}^{n} l(M_{r-1}/M_r). \qquad (1)$$

(ب) اگر x_1 ، $\cdots$ ، x_s، ایده‌ال q را تولید کنند آنگاه تصاویر $\bar{x}_i$ ها از x_i ها در q/q^2، $G(A)$ را به عنوان A/q- جبر تولید می کنند و هر $\bar{x}_i$ از درجه ۱ است. از این رو بنا به (۲.۱۱) به دست می آوریم ، مثلاً $l(M_n/M_{n+1}) = f(n)$، که $f(n)$ یک چندجمله‌ای برحسب n از درجه کوچکتراز یامساوی با $s-1$ ، برای همه n های بزرگ است. چون از (۱) به دست می‌آوریم $l_{n+1} - l_n = f(n)$، پس I_n یک چندجمله‌ای $g(n)$ از درجه کوچکتراز یا مساوی باs ، برای n های بزرگ است.

(پ) فرض کنید $(\tilde{M}_n)$، q- پالایش پایدار دیگری از M باشد و فرض کنید $\tilde{g}(n) = l(M/\tilde{M}_n)$. در این صورت بنا به (۶.۱۰)، این دو پالایش دارای تفاضل کراندار هستند، یعنی عدد صحیح n_0 ای وجود دارد به طوری که به‌ازای‌هر $n \geq 0$، $M_{n+n_0} \subseteq \tilde{M}_n$ و $\tilde{M}_{n+n_0} \subseteq M_n$؛ از این رو به دست می‌آوریم $g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n)$ و $\tilde{g}(n+n_0) \geq g(n)$. چون g و $\tilde{g}$، به ازای n های بزرگ، چند جمله ای هستند از این رو به دست می‌آوریم $\lim_{n\longrightarrow\infty} g(n)/\tilde{g}(n) = 1$ و بنابراین g و $\tilde{g}$ دارای درجه و ضریب پیشرو یکسانی هستند. ♣

چند جمله ای $g(n)$ متناظر با پالایش $(\mathrm{q}^n M)$ با $\chi_{\mathrm{q}}^M(n)$ نشان داده می شود:

$\chi_{\mathrm{q}}^M(n) = l(M/\mathrm{q}^n M)$ برای n های بزرگ .

اگر $M = A$، آنگاه به جای $\chi_{\mathrm{q}}^A(n)$ می نویسیم $\chi_{\mathrm{q}}(n)$ و آن را چند جمله‌ای مشخصه ایده‌ال m- ابتدایی q می نامیم. در این حالت از (۴.۱۱) نتیجه

می‌شود:

نتیجه ۵.۱۱. به ازای n های بزرگ، طول $l(A/\mathfrak{q}^n)$ یک چند جمله ای $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ از درجه‌ای کوچکتر از یا مساوی با s است، که s کمترین تعداد مولد های $\mathfrak{q}$ است. ♣

چند جمله‌ای های $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ به ازای انتخاب های متفاوت از ایده‌ال m-ابتدایی $\mathfrak{q}$، دارای درجه یکسانی هستند، همان طور که گزاره بعدی نشان می‌دهد:

گزاره ۶.۱۱. اگر A ، m و q همانند بالا باشند، آنگاه

$$deg\chi_q(n) = deg\chi_m(n).$$

برهان . بنا به نتیجه (۱۶.۷)، به ازای r ای به دست می آوریم $m \supseteq q \supseteq m^r$، از این رو $m^n \supseteq q^n \supseteq m^{rn}$، و بنابراین
. به ازای n های بزرگ، $\chi_m(n) \leq \chi_q(n) \leq \chi_m(rn)$
حال فرض کنید $n \longrightarrow \infty$ و به یاد داشته باشید که χ ها چند جمله‌ای هایی برحسب n هستند.♣

درجه مشترک $\chi_q(n)$ ها با $d(A)$ نشان داده خواهد شد: با توجه به (۲.۱۱)، به این معنی است که قرار می دهیم $d(A) = d(G_m(A))$ که $d(G_m(A))$ عددی صحیح است که قبلاً به عنوان قطب در $t = ۱$ از تابع هیلبرت $G_m(A)$، تعریف شد.

نظریه بعد حلقه های موضعی نوتری

فرض کنید A حلقه یک موضعی نوتری و m ایده ال ماکسیمالش باشد.

فرض کنید، $\delta(A)=$ کمترین تعداد مولد های ایده ال $m-$ ابتدایی A. هدف ما، به اثبات رساندن $\delta(A)=d(A)=\dim A$ است. لذا این حکم را با اثبات اینکه $\delta(A)\geq d(A)\geq \dim A\geq \delta(A)$ ، انجام خواهیم داد. استفاده هم زمان از (۵.۱۱) و (۶.۱۱)، نخستین حلقه‌ی این زنجیر را فراهم می کنند:

گزاره ۷.۱۱. $\delta(A)\geq d(A)$. ♣

سپس مشابه (۱۱.۳) را برای حلقه های موضعی ثابت خواهیم کرد. توجه کنید که این برهان از نسخه قوی لم آرتین– ریس (که فقط قسمت توپولوژیکی حذف می شود) استفاده می کند.

گزاره ۸.۱۱. فرض کنید A، m و q همانند قبل باشند. فرض کنید M، $A-$مدولی متناهیاً تولید شده، $x\in A$ یک نا مقسوم علیه صفر[1] در M و $M'=M/xM$ باشد. در این صورت

$$\deg \chi_q^{M'} \leq \deg \chi_q^{M} - ۱.$$

برهان . فرض کنید $N=xM$؛ در این صورت به واسطه فرض مطرح شده روی x ، یکریختی $A-$ مدولی $N\cong M$ نتیجه می‌شود. فرض کنید $N_n=N\cap \mathfrak{q}^nM$. در این صورت دنباله‌های دقیق زیر را به دست می آوریم

$$\circ \longrightarrow N/N_n \longrightarrow M/\mathfrak{q}^nM \longrightarrow M'/\mathfrak{q}^nM' \longrightarrow \circ.$$

از این رو اگر $g(n)=l(N/N_n)$، آنگاه برای n های بزرگ به دست می آوریم

$$g(n)-\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n)+\chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n)=\circ.$$

حال بنا به آرتین – ریس (۹.۱۰)، (N_n) یک $\mathfrak{q}$ – پالایش پایدار N است. چون $N\cong M$، در نتیجه از قسمت (پ) گزاره (۴.۱۱) نتیجه می شود که $g(n)$

[1] *non-zero-divisor*

و $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ دارای جمله پیشرو یکسانی هستند؛ از این رو نتیجه مورد نظر به‌دست می آید. ♣

نتیجه ۱۱.۹. اگر A یک حلقه موضعی نوتری و x نامقسوم علیه صفری در A باشد آنگاه $d(A/(x)) \leq d(A) - ۱$.

برهان . کافی است که در گزاره (۱۱. ۸) ، قرار دهید $M = A$. ♣

حال می توانیم نتیجه تعیین کننده را ثابت کنیم :

گزاره ۱۱.۱۰. $d(A) \geq \dim A$.

برهان . با استقرا روی $d = d(A)$ ، حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $d = ۰$ آنگاه $l(A/m^n)$، برای n های بزرگ ، مقداری ثابت است از این رو به ازای n ای ، $m^n = m^{n+۱}$ ، لذا بنا به لم ناکایاما (۲.۶)، $m^n = ۰$. بنابراین A حلقه‌ای آرتینی است و $\dim A = ۰$.

در نظر بگیرید $d > ۰$ و فرض کنید $\mathfrak{p}_۰ \subset \mathfrak{p}_۱ \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$، زنجیری دلخواه از ایده‌ال های اول حلقه A باشد. فرض کنید $x \in \mathfrak{p}_۱$ و $x \notin \mathfrak{p}_۰$؛ $A' = A/\mathfrak{p}_۰$ و x' تصویر x در A' باشد. در این صورت $x' \neq ۰$ و A' یک حوزه صحیح است، از این رو بنا به (۱۱.۹)، به دست می آوریم

$$d(A'/(x')) \leq d(A') - ۱.$$

همچنین، اگر m' ایده ال ماکسیمال A' باشد، آنگاه A'/m'^n تصویر همریخت A/m^n است، از این رو $l(A/m^n) \geq l(A'/m'^n)$ و بنابراین $d(A) \geq d(A')$. درنتیجه

$$d(A'/(x')) \leq d(A) - ۱ = d - ۱.$$

از این رو، بنا به فرض استقرا، طول هر زنجیر از ایده‌ال های اول $A'/(x')$، کوچکتر از یا مساوی با $d - ۱$ است. امّا تصویر های $\mathfrak{p}_۱$ ، $\cdots$ ، $\mathfrak{p}_r$ در $A'/(x')$،

زنجیری با طول $r-1$ تشکیل می دهند، از این رو $r-1 \leq d-1$ و در نتیجه $r \leq d$. بنابراین $\dim A \leq d$. ♣

نتیجه ۱۱.۱۱. اگر A یک حلقه موضعی نوتری باشد، آنگاه $\dim A$ متناهی است. ♣

اگر A حلقه ای دلخواه و $\mathfrak{p}$ ایده الی اول از A باشد آنگاه ارتفاع $\mathfrak{p}$ به‌عنوان سوپرمم زنجیر های ایده ال های اول $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ که به $\mathfrak{p}$ ختم می شوند، تعریف می شود: بنا به (۱۳.۳)، $\text{height } \mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}}$. لذا از (۱۱.۱۱)، نتیجه می شود :

نتیجه ۱۲.۱۱. در یک حلقه نوتری، هر ایده‌ال اول ارتفاع متناهی دارد و بنابراین مجموعه ایده‌ال های اول در یک حلقه نوتری در شرط زنجیر فزاینده صدق می کند.♣

تبصره . به همین صورت می توانیم ژرفا[1] $\mathfrak{p}$ را با در نظر گرفتن زنجیرهایی از ایده ال های اولی که با $\mathfrak{p}$ شروع می شوند، تعریف کنیم: به وضوح ، $\text{depth } \mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}$. امّا ژرفای یک ایده ال اول، حتی در یک حلقه نوتری، ممکن است نامتناهی باشد (مگر اینکه حلقه مورد نظر موضعی باشد). به‌عنوان مثالی در این مورد، تمرین ۴ را ببینید.

گزاره ۱۳.۱۱. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری با بعد d باشد. دراین صورت ایده الی $m-$ ابتدایی در A وجود دارد که توسط d عنصر $x_1, \cdots, x_d$، تولید می‌شود و بنابراین $\dim A \geq \delta(A)$.

برهان . x_1 ، $\cdots$ ، x_d را به طور استقرایی طوری بسازید که هرایده‌ال

[1] از واژه «عمق» نیز استفاده می شود — م .

اول شامل $(x_1,\cdots,x_i)$، به ازای هر i، دارای ارتفاعی بزرگتر از یا مساوی با i، باشد. فرض کنید $i > 0$ و x_1 ، $\cdots$ ، x_{i-1} ساخته شده‌اند. فرض کنید $\mathfrak{p}_j$ ها $(1 \le j \le s)$ ایده‌ال های اول مینیمال $(x_1,\cdots,x_{i-1})$ (درصورت وجود) باشند که دارای ارتفاعی دقیقاً برابر با $i-1$ هستند. چون $i-1 < d = \dim A = \text{height } m$ در این صورت به دست می‌آوریم $m \neq \mathfrak{p}_j$ $(1 \le j \le s)$، از این رو بنا به (۱۱.۱)، $m \neq \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$. عنصر $x_i \in m$ و $x_i \notin \cup \mathfrak{p}_j$ را انتخاب کنید و فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌ال اول دلخواهی شامل $(x_1,\cdots,x_i)$ باشد. در این صورت $\mathfrak{p}$ شامل ایده‌ال اول مینیمال $\mathfrak{p}$ ای به صورت $(x_1,\cdots,x_{i-1})$ است. اگر به ازای j ای، $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ آنگاه به دست می‌آوریم $x_i \in \mathfrak{q}$ و $x_i \notin \mathfrak{p}$، از این رو $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ و بنابراین $\text{height } \mathfrak{q} \ge i$؛ اگر $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$ $(1 \le j \le s)$ آنگاه $\text{height } \mathfrak{p} \ge i$، از این رو $\text{height } \mathfrak{q} \ge i$. در نتیجه، هر ایده‌ال اول شامل $(x_1,\cdots,x_i)$ دارای ارتفاعی بزرگتر از یا مساوی با i است.

در این صورت $(x_1,\cdots,x_d)$ را در نظر بگیرید. اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول از این ایده‌ال باشد، آنگاه $\mathfrak{p}$ دارای ارتفاعی بزرگتر از یا مساوی با d است، ازاین‌رو $\mathfrak{p} = m$ (زیرا، $\mathfrak{p} \subset m \Rightarrow \text{height } \mathfrak{p} < \text{height } m = d$). در نتیجه ، ایده‌ال $(x_1,\cdots,x_d)$، m-ابتدایی است. ♣

قضیه ۱۴.۱۱. (قضیه بعد) به ازای هر حلقه موضعی نوتری A، سه عدد صحیح زیر برابر هستند:

(الف) حداکثر طول زنجیر های ایده ال های اول در A؛

(ب) درجه چند جمله ای مشخصه $\chi_m(n) = l(A/m^n)$؛

(پ) کمترین تعداد مولدهای ایده‌الی $m-$ ابتدایی از A.

برهان . بنا به گزاره‌های (۷.۱۱)، (۱۰.۱۱) و (۱۳.۱۱)، حکم برقرار است. ♣

مثال . فرض کنید A حلقه چند جمله ای $k[x_1,\cdots,x_n]$ باشد که در ایده‌ال

ماکسیمال $m = (x_1, \cdots, x_n)$ موضعی شده است. باشد. در این صورت، $G_m(A)$ یک حلقه چندجمله ای از n مجهول است و بنابراین سری پوانکاره مربوط به آن، $(1-t)^{-n}$ است. از این رو، با به کار گیری هم ارزی (الف) و (ب) در قضیه (۱۴.۱۱)، نتیجه می گیریم $\dim A_m = n$.

نتیجه ۱۵.۱۱. $\dim A \le \dim_k(m/m^2)$.

برهان . اگر $x_i \in m$ ها $(1 \le i \le s)$ این طور باشند که تصویرهایشان در m/m^2، پایه ای برای این فضای برداری تشکیل دهند آنگاه x_iها بنا به (۸.۲)، m را تولید می کنند؛ از این رو بنا به (۱۳.۱۱)، $\dim_k(m/m^2) = s \ge \dim A$.♣

نتیجه ۱۶.۱۱. فرض کنید A حلقه‌ای نوتری باشد و $x_1, \cdots, x_r \in A$. در این صورت، هر ایده ال مینیمال $\mathfrak{p}$ متعلق به $(x_1, \cdots, x_r)$، دارای ارتفاعی کوچکتر از یا مساوی با r است.

برهان . ایده ال $(x_1, \cdots, x_r)$ در $A_\mathfrak{p}$، $\mathfrak{p}^e-$ ابتدایی می شود، از این رو، $r \ge \dim A_\mathfrak{p} = \text{height } \mathfrak{p}$. ♣

نتیجه ۱۷.۱۱. (قضیه ایده ال اصلی کرول). فرض کنید A حلقه ای نوتری و x عنصری از A باشد که نه مقسوم علیه صفر است و نه یکه. دراین‌صورت، هر ایده ال اول مینیمال $\mathfrak{p}$ از (x)، دارای ارتفاع ۱ است.

برهان . بنا به (۱۶.۱۱)، به دست می‌آوریم $\text{height } \mathfrak{p} \le 1$. اگر $\text{height } \mathfrak{p} = 0$ آنگاه $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اول متعلق به ۰ است، از این رو هر عنصری از $\mathfrak{p}$، بنا به (۷.۴)، یک مقسوم علیه صفر است: به تناقض رسیدیم، زیرا $x \in \mathfrak{p}$. ♣

نتیجه ۱۸.۱۱. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری و x عنصری از m باشد که مقسوم علیه صفر نیست. در این صورت $\dim A/(x) = \dim A - 1$.

برهان . فرض کنید $d = \dim A/(x)$. در این صورت بنا به (۹.۱۱) و

(۴.۱۱) به دست می‌آوریم $d \leq \dim A - ۱$. از طرف دیگر، فرض کنید x_iها ($۱ \leq i \leq d$) عناصری از m باشند که تصویرهایشان در $A/(x)$، ایده‌الی $m/(x)-$ ابتدایی تولید می‌کنند. در این صورت ایده‌ال $(x, x_۱, \cdots, x_d)$ در A، $m-$ ابتدایی است، از این رو $\dim A \leq d + ۱$. ♣

نتیجه ۱۹.۱۱. فرض کنید $\hat{A}$ تکمیل شده $m-$ ای A باشد. در این صورت $\dim A = \dim \hat{A}$.

برهان . از گزاره (۱۵.۱۰) به دست می‌آوریم $A/m^n \cong \hat{A}/\hat{m}^n$، از این رو $\chi_m(n) = \chi_{\hat{m}}(n)$. ♣

اگر $x_۱$ ، $\cdots$ ، x_d ایده‌الی $m-$ ابتدایی تولید کنند و $d = \dim A$، آنگاه $x_۱، \cdots، x_d$ را دستگاه پارامترها می نامیم. آنها دارای ویژگی استقلال معینی هستند که در گزاره زیر توصیف شده است.

گزاره ۲۰.۱۱. فرض کنید $x_۱$ ، $\cdots$ ، x_d یک دستگاه پارامترها برای A باشد و فرض کنید $\mathfrak{q} = (x_۱, \cdots, x_d)$ ایده ال $m-$ ابتدایی تولید شده توسط آنها باشد. فرض کنید $f(t_۱, \cdots, t_d)$ یک چند جمله‌ای همگن از درجه s با ضرایبی در A باشد و در نظر بگیرید

$$f(x_۱, \cdots, x_d) \in \mathfrak{q}^{s+۱}.$$

در این صورت، تمام ضرایب f در m قرار می گیرند.

برهان . بروریختی

$$\alpha : (A/\mathfrak{q})[t_۱, \cdots, t_d] \longrightarrow G_{\mathfrak{q}}(A)$$

را با ضابطه $t_i \longrightarrow \bar{x}_i$ در نظر بگیرید که t_i ها مجهول ها هستند و $\bar{x}_i$ با x_i به پیمانه $\mathfrak{q}$ همنهشت است. در این صورت از فرض قضیه درباره f، نتیجه می‌شود که $\bar{f}(t_۱, \cdots, t_d)$ (تحویل f به پیمانه $\mathfrak{q}$) هسته α است. فرض کنید

امکان داشته باشد که ضریبی از f یکه باشد، در این صورت $\bar{f}$ مقسوم علیه صفر نیست (رجوع کنید به فصل ۱، تمرین ۳). در این صورت به دست می آوریم

$$\begin{aligned} d(G_q(A)) &\leq d((A/q)[t_1,\cdots,t_d]/(\bar{f})) && \text{زیرا } \bar{f} \in Ker(\alpha)\text{،} \\ &= d((A/q)[[t_1,\cdots,t_d]) - 1 && \text{بنا به (۳.۱۱)،} \\ &= d-1 && \text{بنا به مثال بعد از (۳.۱۱)،} \end{aligned}$$

امّا بنا به قضیه اصلی (۱۴.۱۱)، $d(G_{\mathfrak{q}}(A)) = d$. این نتیجه، تناقض مورد نظر را ارائه می‌کند. ♣

این گزاره صورت ساده ای به خود می گیرد اگر A شامل یک میدان k باشد که به طور یکریخت بروی میدان مانده‌ای A/m نگاشته می‌شود.

نتیجه ۲۱.۱۱. اگر $k \subset A$ میدانی به طور یکریخت نگاشته شده بروی A/m باشد و اگر x_1 ، $\cdots$ ، x_d دستگاه پارامترها باشد آنگاه x_1 ، $\cdots$ ، x_d روی k جبری—مستقل هستند.

برهان . فرض کنید $f(x_1,\cdots,x_d) = 0$ که f یک چند جمله‌ای باضرایبی در k است. اگر $f \not\equiv 0$ آنگاه‌می‌توانیم‌بنویسیم، $f = f_s +$جملاتی‌ازدرجات بالاتر که f_s همگن از درجه s است و $f_s \not\equiv 0$. در این صورت (۲۰.۱۱) را برای f_s به کار برده و نتیجه می گیریم که تمام ضرایب f_s در m قرار دارند. چون f_s دارای ضرایبی در k است، پس نتیجه می شود $f_s \equiv 0$، به تناقض رسیدیم. ازاین رو x_1 ، $\cdots$ ، x_d روی k جبری—مستقل هستند.♣

حلقه های موضعی منظم

در هندسه جبری، تمایز مهمی بین نقاط تکین و ناتکین وجود دارد (تمرین ۱ را ببینید). حلقه های موضعی نقاط ناتکین ، دارای تعمیم مشابه ای (نسبت به حالت غیر هندسی) هستند، آنچه که حلقه های موضعی منظم نامیده می‌شوند: این حلقه ها در هر یک از شرایط (هم ارز) (الف)—(پ) از قضیه

بعدی. صدق می کنند.

قضیه ۲۲.۱۱. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری با بعد d، m ایده‌ال ماکسیمالش و $k = A/m$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:

(الف) $G_m(A) \cong k[t_1, \cdots, t_d]$، که t_i ها مجهول های مستقل هستند؛

(ب) $\dim_k(m/m^2) = d$؛

(پ) m می تواند توسط d عنصر تولید شود.

برهان . (ب) $\Leftarrow$ (الف) واضح است. (پ) $\Leftarrow$ (ب) بنا به (۸.۲) برقرار است: برهان نتیجه (۱۵.۱۱) را ببینید. (الف) $\Leftarrow$ (پ): فرض کنید $m = (x_1, \cdots, x_d)$، در این صورت بنا به (۲۰.۱۱)، نگاشت $k[x_1, \cdots, x_d] \longrightarrow G_m(A)$ یکریختی حلقه‌های مدرج است. ♣

یک حلقه موضعی منظم، لزوماً یک حوزه صحیح است: این حکم، پیامدی از نتیجه کلی تر زیر است.

لم ۲۳.۱۱. فرض کنید A یک حلقه و $\mathfrak{a}$ ایده الی از A باشد به طوری که $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = 0$. فرض کنید $G_\mathfrak{a}(A)$ یک حوزه صحیح باشد. دراین صورت A یک حوزه صحیح است.

برهان . فرض کنید x و y عناصری ناصفر از A باشند. در این صورت، چون $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = 0$ لذا $r, s \geq 0$ وجود دارند به طوری که $x \in \mathfrak{a}^r$، $x \notin \mathfrak{a}^{r+1}$، $y \in \mathfrak{a}^s$ و $y \notin \mathfrak{a}^{s+1}$. فرض کنید $\bar{x}$ و $\bar{y}$، به ترتیب تصویرهای x و y را در $G_r(A)$ و $G_s(A)$ نشان دهند. در این صورت $\bar{x} \neq 0$ و $\bar{y} \neq 0$، از این رو $\bar{x}\bar{y} = \bar{x}.\bar{y} \neq 0$، درنتیجه $xy \neq 0$. ♣

از این رو بنا به (۲.۹)، حلقه های موضعی منظم با بعد ۱ دقیقاً حلقه های ارزه گسسته هستند.

همچنین می توان نشان داد که اگر A یک حلقه نوتری موضعی و $G_m(A)$ یک حوزه صحیح صحیحاً بسته باشد آنگاه A صحیحاً بسته است. از این رو نتیجه می شود که یک حلقه موضعی منظم، صحیحاً بسته است؛ امّا حوزه های موضعی صحیحاً بسته ای با بعد بزرگتر از ۱ وجود دارند که منظم نیستند.

گزاره ۲۴.۱۱. فرض کنید A یک حلقه موضعی نوتری باشد. دراین‌صورت، A منظم است اگر و فقط اگر $\hat{A}$ منظم باشد.

برهان . بنا به (۱۶.۱۰)، (۲۶.۱۰) و (۲۹.۱۱)، می دانیم که $\hat{A}$ یک حلقه موضعی نوتری با همان بعد A است و $\hat{m}$ ایده‌ال ماکسیمالش محسوب می‌شود. حال گزاره (۲۲.۱۰) را به کار ببرید که اظهار می کند $G_m(A) \cong G_{\hat{m}}(\hat{A})$ و نتیجه مورد نظر به دست می آید. ♣

تبصره ها . ۱) از آنچه که دربالا گفته‌ایم نتیجه می‌شود که $\hat{A}$ نیز یک حوزه صحیح است. بیان هندسی این مطلب، به‌این صورت است که (به طورموضعی)

تحویلناپذیری تحلیلی $\Leftarrow$ ناتکینی

یا اینکه، در نقطه ای ناتکین، فقط یک «شاخه» تحلیلی وجود دارد.

۲) اگر A شامل میدان k باشد که به طور یکریختی بروی A/m نگاشته می‌شود (حالت هندسی) آنگاه از (۲۲.۱۱) نتیجه می شود که $\hat{A}$ یک حلقه سری توانی صوری روی k از d مجهول است. از این رو، تکمیل شده های حلقه‌های موضعی نقاط ناتکین روی چند گوناهای $d-$ بعدی روی k، همگی یکریخت هستند.

مثال . فرض کنید $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ (k میدانی دلخواه و x_i ها مجهول‌های مستقل هستند)؛ فرض کنید $m = (x_1, \cdots, x_n)$. در این صورت A_m (حلقه موضعی فضای آفین k^n در مبدا) یک حلقه موضعی منظم است: برای اینکه، $G_m(A)$ یک حلقه چند جمله ای از n متغیر است.

بعد متعالی

این بحث کوتاه از نظریه بعد را با نشان دادن چگونگی ارتباط بین بعد حلقه های موضعی با بعد چند گوناهایی که به طور کلاسیک برحسب میدان تابعی تعریف می شوند، نتیجه خواهیم گرفت.

برای سادگی فرض کنید k میدانی جبری — بسته و V یک چندگونای آفین تحویلناپذیر روی k باشد. از این رو حلقه مختصی $A(V)$ به صورت زیر است

$$A(V) = k[x_۱, \cdots, x_n]/\mathrm{p}$$

که p ایده الی اول است. میدان کسرهای حوزه صحیح $A(V)$، میدان توابع گویا روی V نامیده می شود و با $k(V)$ نشان داده می شود. در واقع توسیعی متناهیاً تولید شده از k است و بنابراین دارای درجه تعالی متناهی روی k است—حداکثر به تعداد عناصر جبری مستقل. این عدد به عنوان بعد V تعریف می‌شود. حال یادآوری می کنیم که بنا به قضیه صفرها، نقاط V به طور دوسویی باایده‌ال‌های ماکسیمال $A(V)$ متناظرند. اگر P نقطه‌ای با ایده‌ال ماکسیمال m باشد آنگاه $\dim A(V)_m$ را بعد موضعی V در P خواهیم نامید. پیشنهاد می کنیم که ثابت کنید

قضیه ۲۵.۱۱. به ازای هر چندگونای تحویلناپذیر V روی k، بعد موضعی V در هر نقطه با $\dim V$ برابر است.

تبصره . از قبل ، بنا به (۲۱.۱۱)، می دانیم که به ازای هر m، $\dim V \geq \dim A_m$. اما مساله عمده، اثبات عکس نامساوی است و برای این منظور، لم اصلی به صورت زیراست:

لم ۲۶.۱۱. فرض کنید $B \subseteq A$ حوزه هایی صحیح باشند به طوری که B صحیحاً بسته و A روی B صحیح است. فرض کنید m ایده ال ماکسیمال A

باشد و $n = m \cap B$. در این صورت، n ماکسیمال است و $\dim A_m = \dim B_n$.

برهان . این حکم نتیجه‌ای ساده از نتایج فصل ۵ است. نخست اینکه بنا به (۸.۵)، ایده‌ال n ماکسیمال است. سپس اینکه، اگر

$$m \supset \mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_d \tag{1}$$

زنجیری اکید از اول های در A باشد آنگاه اشتراکش با B، بنا به (۹.۵)، زنجیری اکید از اول هابه صورت زیر است

$$n \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_d. \tag{2}$$

این نتیجه ثابت می کند که $\dim B_n \geq \dim A_m$. برعکس، برای زنجیر اکید دلخواه (۲)، بنا به (۱٦.۵)، می توانیم این زنجیر را به زنجیری (لزوماً اکید) به صورت (۱) باز گردانیم : از این رو $\dim A_m \geq \dim B_n$.♣

حال می توانیم برهان قضیه را شروع کنیم:

برهان (۲۵.۱۱). بنا به لم نرمالسازی (فصل ۵، تمرین ۱٦)، می‌توانیم حلقه چند جمله ای $B = k[x_1, \cdots, x_d]$، مشمول در $A(V)$ را طوری بیابیم که $d = \dim(V)$ و $A(V)$ روی B صحیح باشد. چون B صحیحاً بسته است (بنا به نکته بعد از (۱۲.۵)) از این رو می توانیم از (۲٦.۱۱) استفاده کنیم و لذا وظیفه ما به صورت اثبات (۲۵.۱۱) برای حلقه B، یعنی برای فضای آفین، ساده می‌شود. امّا هر نقطه‌ای از فضای آفین می تواند به عنوان مبدا مختصات در نظر گرفته شود و همانطور که قبلاً دیده ایم، موضعی شده $k[x_1, \cdots, x_d]$ در ایده‌ال ماکسیمال $(x_1, \cdots, x_d)$، حلقه‌ای موضعی با بعد d است. ♣

نتیجه ۲۷.۱۱. به ازای هر ایده‌ال ماکسیمال m از $A(V)$، نتیجه می گیریم

$$\dim A(V) = \dim A(V)_m.$$

برهان . از تعریف نتیجه می‌شود، $\dim A(V) = \sup_m \dim A(V)_m$. امّا بنا به (۲۵.۱۱)، همه $A(V)_m$ ها دارای بعد یکسانی هستند. ♣

تمرینات

۱. فرض کنید $f \in k[x_1, \cdots, x_n]$ چند جمله‌ای تحویلناپذیری روی میدان جبری ــ بسته k باشد. در این صورت، نقطه P روی چندگونای $f(x) = 0$، ناتکین است $\Leftrightarrow$ همه مشتقات جزئی $\partial f / \partial x_i$ در P صفر نشوند. فرض کنید $A = k[x_1, \cdots, x_n]/(f)$ و m ایده ال ماکسیمال A، متناظر با نقطه P باشد. ثابت کنید P ناتکین است $\Leftrightarrow$ A_m یک حلقه موضعی منظم باشد.
[بنا به (۱۸.۱۱) به دست آوریم، $\dim A_m = n - 1$. حال

$$m/m^2 \cong (x_1, \cdots, x_n)/(x_1, \cdots, x_n)^2 + (f)$$

و بعد $n - 1$ دارد اگر و فقط اگر $f \notin (x_1, \cdots, x_n)^2$.]

۲. در نتیجه (۲۱.۱۱) فرض کنید که A کامل باشد. ثابت کنید همریختی $A \longrightarrow k[[t_1, \cdots, t_d]]$ با ضابطه $t_i \mapsto x_i$ $(1 \leq i \leq d)$ یک به یک است و نیز اینکه A یک مدول متناهیاً تولید شده روی $k[[t_1, \cdots, t_d]]$ است. [از گزاره (۲۴.۱۰) استفاده کنید.]

۳. قضیه (۲۵.۱۱) را به‌میدان های ناجبری—بسته [1] گسترش دهید. [اگر $\overline{k}$ بستارجبری k باشد آنگاه $\overline{k}[x_1, \cdots, x_n]$ روی $k[x_1, \cdots, x_n]$ صحیح است.]

۴. مثالی از یک حوزه نوتری با بعد نامتناهی ارائه کنید (ناگاتا[2]). فرض کنید k میدان و $A = k[x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots]$ حلقه چند جمله ای روی k با مجموعه شمارای نامتناهی از مجهول ها باشد. فرض کنید m_1، m_2، $\cdots$ دنباله ای صعودی از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که به ازای هر $i > 1$، $m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$. فرض کنید $\mathfrak{p}_i = (x_{m_i+1}, \cdots, x_{m_{i+1}})$ و S متمم اجتماع ایده ال های $\mathfrak{p}_i$ در A باشد.

---

[1] *non-algebraically-closed fields*
[2] *Nagata*

هر $\mathfrak{p}_i$ ایده الی اول است و بنابراین مجموعه S، بسته ضربی است. حلقه $S^{-۱}A$، بنا به تمرین ۹ از فصل ۷، نوتری است. هر $S^{-۱}\mathfrak{p}_i$ دارای ارتفاعی برابر با $m_{i+۱} - m_i$ است، از این رو $\dim S^{-۱}A = \infty$.

۵. قضیه (۱.۱۱) را بر حسب گروه گروتندیک $K(A_{\circ})$ (فصل ۷ ، تمرین ۲۶) دوباره فرمولبندی کنید.

٦. فرض کنید A حلقه‌ای (نه لزوماً نوتری) باشد. ثابت کنید

$$۱ + \dim A \leq \dim A[x] \leq ۱ + ۲ \dim A.$$

[فرض کنید $f : A \to A[x]$ نشاندن باشد وتار $f^* : Spec(A[x]) \to Spec(A)$ را روی ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ از A در نظر بگیرید. این تار می تواند با طیف $k \otimes_A A[x] \cong k[x]$ که k میدان مانده ای در p است، یکی گرفته شود (فصل ۳، تمرین ۲۱) و $\dim k[x] = ۱$. حال تمرین ۷ (ب) از فصل ۴ را به کار ببرید.]

۷. فرض کنید A یک حلقه نوتری باشد. در این صورت

$$\dim A[x] = ۱ + \dim A,$$

و از این رو، با استقرا روی n، نتیجه می شود

$$\dim A[x_۱, \cdots, x_n] = n + \dim A.$$

[فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌الی اول با ارتفاع m در A باشد. در این صورت، عناصر $a_۱, \cdots, a_m \in \mathfrak{p}$ وجود دارند به طوری که $\mathfrak{p}$ ایده ال اول مینیمال متعلق به ایده‌ال $\mathfrak{a} = (a_۱, \cdots, a_m)$ است. بنا به تمرین ۷ از فصل ۴، $\mathfrak{p}[x]$ ایده ال اول مینیمال $\mathfrak{a}[x]$ است و بنابراین $\text{height } \mathfrak{p}[x] \leq m$. از طرف دیگر، زنجیری از ایده ال های اول $\mathfrak{p}_{\circ} \subset \mathfrak{p}_۱ \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}$ به زنجیر $\mathfrak{p}_{\circ}[x] \subset \mathfrak{p}_۱[x] \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m[x] = \mathfrak{p}[x]$ منجر می شود، از این رو، $\text{height } \mathfrak{p}[x] \geq m$. لذا $\text{height } \mathfrak{p}[x] = \text{height } \mathfrak{p}$. حال از بحث مطرح شده در تمرین ٦ استفاده کنید.]

واژه نامه فارسی به انگلیسی

پالایش پایدار –a .... stable a– filtration

A– دو خطی .... A– bilinear

A– خطی .... A– linear

اثر .... trace

ارتفاع .... height

اشباع .... saturation

اشباع شده .... saturated

القا شده توسط f .... induced by f

انتظام .... regularity

انقباض .... contraction

اولیه .... primitive

ایده‌ال ابتدایی .... primary ideal

ایده‌ال اول .... prime ideal

ایده‌ال اول تنها .... isolated prime ideal

ایده‌ال اول نشانده شده .... embedded prime ideal

ایده‌ال اول وابسته .... associated prime ideal

ایده‌ال اول متعلق به a .... prime ideal belonging to a

ایده‌ال تجزیه پذیر .... decomposable ideal

ایده‌ال تحویلناپذیر .... irreducible ideal
ایده‌ال خارج قسمتی .... quotient ideal
ایده‌ال کسری .... fractional ideal
ایده‌ال ماکسیمال .... maximal ideal
ایده‌ال منبسط .... extended ideal
ایده‌ال منقبض .... contracted ideal
ایده‌ال واحد .... unit ideal
ایده‌ال وارونپذیر .... invertible ideal
ایده‌ال های متباین .... comaximal ideals - coprime ideals
الحاقی .... adjoint

بافه .... sheaf
بستار صحیح .... integral closure
بسط تیلور .... Taylor expansion
به طور آزاد تولید شده .... freely generated
بعد .... dimension
بعد متعالی .... transcendental dimension
بی تاب .... torsion - free

پالایش .... filtration
پوچتوان .... nilpotent
پوچساز .... annihilator
پوچ رادیکال .... nilradical
پوشش .... covering

تاب .... torsion

تابع جمعی	additive function
تابعگون Tor	Tor functor
تابعگون پادورد	contravariant functor
تابعگون هموردا	covariant functor
تابع هیلبرت	Hilbert function
تار	fiber
تجزیه ابتدایی	primary decomposition
تجزیه ابتدایی مینیمال	minimal primary decomposition
تحدید اسکالرها	restriction of scalars
تحلیل آزاد	free resolution
تصویر	image
تفاضل کراندار	bounded difference
تکمیل شده	completion
تمامریخت	holomorphic
توابع مختصی	coordinate functions
توان نمادین	symbolic power
توپولوژی a– ای	a-adic topology
توپولوژی زاریسکی	Zariski topology
توپولوژی ساختپذیر	constructible topology
توسیع اسکالرها	extension of scalars
توسیع یک ایده‌ال	extension of an ideal
جبر	algebra
جبرگروهی	group algebra
جبرمتناهی	finite algebra
جبری — بسته	algebraically closed

جبر مانستگی	homology algebra
جبر مانستگیی	homological algebra
جبری — هم ارز	algebraically equivalent
چندگونا	variety
چندگونای جبری آفین	affine algebraic variety
حاصلضرب تانسوری جبرها	tensor product of algebras
حاصلضرب تانسوری مدول ها	tensor product of modules
حاصلضرب چند—تانسوری	multi-tensor product
حاصلضرب مدول ها	product of modules
حاصلضرب مستقیم	direct product
حد مستقیم	direct limit
حد معکوس	inverse limit
حلقه آرتینی	Artinian ring
حلقه ارزه گسسته	discrete valuation ring
حلقه بولی	Boolean ring
حلقه جیکوبسن	Jacobson ring
حلقه زاریسکی	Zariski ring
حلقه صفر	zero ring
حلقه کسرها	ring of fractions
حلقه مختصی	coordinate ring
حلقه مطلقاً تخت	absolutely flat ring
حلقه موضعی	local ring
حلقه موضعی منظم	regular local ring
حلقه نیم موضعی	semi-local ring
حلقه نوتری	Noetherian ring

حوزه ایده‌ال اصلی .... principal ideal domain
حوزه تجزیه یکتا .... unique factorization domain
حوزه صحیح .... integral domain
حوزه صحیحاً بسته .... integrally closed domain
حوزه ددکیند .... Dedekind domain

خودتوان .... idempotent
خیلی چگال .... very dense

درجه تعالی .... transcendence degree
دستگاه اصلی شمارا .... countable fundamental system
دستگاه پارامترها .... system of parameters
دستگاه پوشا .... surjective system
دستگاه مستقیم .... direct system
دستگاه معکوس .... inverse system
دنباله دقیق .... exact sequence

دنباله منسجم .... coherent sequence
دوسو گویا .... birationally

رادیکال .... radical
رادیکال جیکوبسن .... Jacobson radical
رده مانده‌ای .... residue class

رسته .... category
زبر میدان .... extension field

زیر حلقه .... subring
زیرمدول .... submodule
زیرمدول تابدار .... torsion submodule

ژرفا .... depth

سازگار .... compatible
سری پوانکاره .... poincare′ series
سری ترکیبی .... composition series

شبه فشرده .... quasi - compact
شرط زنجیر فزاینده .... ascending chain condition
شرط زنجیر کاهشی .... descending chain condition
شرطهای زنجیری .... chain conditions
شکافتن .... split
شمول اکید .... strict inclusion

طرح .... scheme
طول .... length
طیف اول .... prime spectrum
طیف ماکسیمال .... maximal spectrum

عامل .... factor
عدد رده‌ای .... class number
عنصر تابی .... torsion element
عنصر صحیح .... integral element

غالب بودن .... dominate
غلبه .... domination

فرمولبندی .... formulation
قانون مدولی .... modular law
قدر .... content
قضیه ایده‌ال اصلی کرول .... Krull's principal ideal theorem
قضیه بالارو .... going - up theorem
قضیه پایه هیلبرت .... Hilbert basis theorem
قضیه پایین رو .... going - down theorem
قضیه صفرهای هیلبرت .. Hilbert Nullstellensatz - Hilbert zeros theorem

کامل .... complete

گروه ارزشی .... value group
گروه رده‌ای ایده‌ال .... ideal class group
گروه گروتندیک .... Grothendick group

لم آرتین — ریس .... Artin - Rees lemma
لم زرن .... Zorn's lemma
لم ناکایاما .... Nakayama's lemma
لم نرمالسازی .... normalization lemma
لم هنسل .... Hensel's lemma

مانا .... stationary
متناهیاًتولید شده .... finitely generated

مجموع ایده‌ال ها .... sum of ideals
مجموع مستقیم .... direct sum
مجموعه بسته ضربی .... multiplicatively closed set
مجموعه سودار .... directed set
محمل .... support
مدول آرتینی .... Artinian module
مدول آزاد .... free module
مدول تخت .... flat module
مدول خارج قسمتی .... quotient module
مدول دوری .... cyclic module
مدول ساده .... simple module
مدول صادق .... faithful module
مدول صادقانه تخت .... faithfully flat module
مدول مدرج .... graded module
مدول نوتری .... Noetherian module
مشبکه .... lattice
مشخصه .... characteristic
مقسومٌ علیه صفر .... zero-divisor
موضعاً بسته .... locally closed
موضعی سازی .... localization
مولدهای یک مدول .... generators of a module
مولفه‌های همگن .... homogeneous components
میدان اعداد جبری .... algebraic number field
میدان مانده‌ای .... residue field

ناتباهیده .... non-degenerate

ناتکین .... non-singular
نامقسوم علیه صفر .... non-zero-divisor
ناوردا .... invariant
نطفه .... germ
نوع متناهی .... finite type
نیمگروه .... semigroup

ویژگی عام .... universal property

هاسدورف .... Hausdorff
هسته .... Kernel
همریختی جبری .... algebra homomorphism
همریختی حلقه‌ای .... ring homomorphism
همریختی مدولی .... module homomorphism
همریختی مرزی .... boundary homomorphism
همسانریختی .... homeomorphism
هم هسته .... CoKernel

یکریختی متعارف .... canonical isomorphism
یکه .... unit

واژه نامه انگلیسی به فارسی

A-bilinear .... A– دوخطی
A-linear .... A– خطی
absolutely flat ring .... حلقه مطلقاً تخت
additive function .... تابع جمعی
a-adic topology .... توپولوژی a– ای
adjoint .... الحاقی
affine algebraic variety .... چندگونای جبری آفین
algebra .... جبر
algebra homomorphism .... همریختی جبری
algebraic number field .... میدان اعداد جبری
algebraically closed .... جبری — بسته
algebraically equivalent .... جبری — هم ارز
annihilator .... پوچساز
Artinian module .... مدول آرتینی
Artinian ring .... حلقه آرتینی
Artin-Rees lemma .... لم آرتین — ریس
ascending chain condition .... شرط زنجیر فزاینده
associated prime ideal .... ایده‌ال اول وابسته

birationally .... دوسو گویا

Boolean ring .... حلقه بولی
boundary homomorphism .... همریختی مرزی
bounded difference .... تفاضل کراندار

canonical isomorphism Cauchy sequence .. یکریختی متعارف دنباله کوشی
category .... رسته
chain conditions .... شرطهای زنجیری
characteristic .... مشخصه
class number .... عدد رده‌ای
coherent sequence .... دنباله منسجم
CoKernel .... هم هسته
comaximal ideals - coprime ideals .... ایده‌ال های متباین
compatible .... سازگار
complete .... کامل
completion .... تکمیل شده
composition series .... سری ترکیبی
constructible topology .... توپولوژی ساختپذیر
content .... قدر
contracted ideal .... ایده‌ال منقبض
contraction .... انقباض
contravariant functor .... تابعگون پادورد
coordinate functions .... توابع مختصی
coordinate ring .... حلقه مختصی

countable fundamental system	دستگاه اصلی شمارا
covariant functor	تابعگون هموردا
covering	پوشش
cyclic module	مدول دوری
decomposable ideal	ایده‌ال تجزیه پذیر
Dedekind domain	حوزه ددکیند
depth	ژرفا
descending chain condition	شرط زنجیر کاهشی
dimension	بعد
direct limit	حد مستقیم
direct product	حاصلضرب مستقیم
direct system	دستگاه مستقیم
direct sum	مجموع مستقیم
direct set	مجموعه سودار
discrete valuation ring	حلقه ارزه گسسته
dominate	غالب بودن
domination	غلبه
embedded prime ideal	ایده‌ال اول نشانده شده
exact sequence	دنباله دقیق
extended ideal	ایده‌ال منبسط
extension field	زبرمیدان
extension of an ideal	توسیع یک ایده‌ال
extension of scalars	توسیع اسکالرها
factor	عامل

faithfull module .... مدول صادق
faithfully flat module .... مدول صادقانه تخت
fiber .... تار
filtration .... پالایش
finite algebra .... جبر متناهی
finite type .... نوع متناهی
finitely generated .... متناهیاً تولید شده
flat module .... مدول تخت
formation .... صورت بندی — تشکیل
formulation .... فرمولبندی
fractional ideal .... ایده‌ال کسری
free module .... مدول آزاد
freely generated .... به طور آزاد تولید شده
free resolution .... تحلیل آزاد

G-invariant .... G– ناوردا
generators of a module .... مولدهای یک مدول
germ .... نطفه
going - down theorem .... قضیه پایین رو
going - up theorem .... قضیه بالا رو
graded module .... مدول مدرج
Grothendieck group .... گروه گروتندیک
group algebra .... جبرگروهی

Hausdorff .... هاسدورف
height .... ارتفاع

لم هنسل .... Hensel's lemma
قضیه پایه هیلبرت .... Hilbert basis theorem
تابع هیلبرت .... Hilbert function
قضیه صفرهای هیلبرت .. Hilbert Nullstellensatz - Hilbert zeros theorem
تمامریخت .... holomorphic
همسانریختی .... homeomorphism
مولفه‌های همگن .... homogeneous components
جبر مانستگی .... homology algebra
جبر مانستگیی .... homological algebra

گروه رده‌ای ایده‌ال .... ideal class group
خودتوان .... idempotent
تصویر .... image
القاشده توسط f .... induced by f
بستار صحیح .... integral closure
حوزه صحیح .... integral domain
عنصر صحیح .... integral element
حوزه صحیحاً بسته .... integrally closed domain
اشتراک ایده‌ال ها .... intersection of ideals
حد معکوس .... inverse limit
دستگاه معکوس .... inverse system
ایده‌ال تحویلناپذیر .... irreducible ideal
تنها .... isolated
ایده‌ال اول تنها .... isolated prime ideal
ایده‌ال وارونپذیر .... invertible ideal

Jacobson radical	رادیکال جیکوبسن
Jacobson ring	حلقه جیکوبسن
Kernel	هسته
Krull's principal ideal theorem	قضیه ایده‌ال اصلی کرول
lattice	مشبکه
length	طول
local ring	حلقه موضعی
locally closed	موضعاً بسته
localization	موضعی سازی
maximal ideal	ایده‌ال ماکسیمال
maximal spectrum	طیف ماکسیمال
minimal primary decomposition	تجزیه ابتدایی مینیمال
modular law	قانون مدولی
module homomorphism	همریختی مدولی
multiplicatively closed set	مجموعه بسته ضربی
multi-tensor product	حاصلضرب چند—تانسوری
Nakayama's lemma	لم ناکایاما
nilpotent	پوچتوان
nilradical	پوچ رادیکال
Noetherian module	مدول نوتری
Noetherian ring	حلقه نوتری
non - degenerate	ناتباهیده
non - singular	ناتکین

normalization lemma .... لم نرمالسازی

Poincare′ series .... سری پوانکاره
primary decomposition .... تجزیه ابتدایی
primary ideal .... ایده‌ال ابتدایی
prime ideal .... ایده‌ال اول
prime ideal belonging to a .... ایده‌ال اول متعلق به a
prime spectrum .... طیف اول
primitive .... اولیه
principal ideal domain .... حوزه ایده‌ال اصلی
product of modules .... حاصلضرب مدول ها

quasi - compact .... شبه فشرده
quotient ideal .... ایده‌ال خارج قسمتی
quotient module .... مدول خارج قسمتی

radical .... رادیکال
radical of a submodule .... رادیکال یک زیر مدول
regular local ring .... حلقه موضعی منظم
regularity .... انتظام
residue class .... رده مانده‌ای
residue field .... میدان مانده‌ای
restriction of scalars .... تحدید اسکالرها
ring homomorphism .... همریختی حلقه‌ای
ring of fractions .... حلقه کسرها

saturated .... اشباع شده
saturation .... اشباع
scheme .... طرح
semigroup .... نیمگروه
semi - local ring .... حلقه نیم موضعی
sheaf .... بافه
simple module .... مدول ساده
spectrum .... طیف
split .... شکافتن
stable a- filtration .... a– پالایش پایدار
stalk .... ساقه
stationary .... مانا
strict inclusion .... شمول اکید
strictly .... اکیداً
submodule .... زیرمدول
subring .... زیرحلقه
sum of ideals .... مجموع ایده‌ال ها
support .... محمل
surjective system .... دستگاه پوشا
symbolic power .... توان نمادین
system of parameters .... دستگاه پارامترها

Taylor expansion .... بسط تیلور
tensor product of algebras .... حاصلضرب تانسوری جبرها
tensor product of modules .... حاصلضرب تانسوری مدول ها
Tor functor .... تابعگون *Tor*
torsion .... تاب

torsion element .... عنصر تابی
torsion - free .... بی تاب
torsion submodule .... زیرمدول تابدار
trace .... اثر
transcendence degree .... درجه تعالی
transcendental dimension .... بعد متعالی

unique factorization domain .... حوزه تجزیه یکتا
unit .... یکه
unit ideal .... ایده‌ال واحد
universal property .... ویژگی عام

value group .... گروه ارزشی
variety .... چند گونا
very dense .... خیلی چگال

Zariski ring .... حلقه زاریسکی
Zariski topilogy .... توپولوژی زاریسکی
zero - divisor .... مقسوم علیه صفر
zero ring .... حلقه صفر
Zorn's lemma .... لم زرن

فهرست راهنما