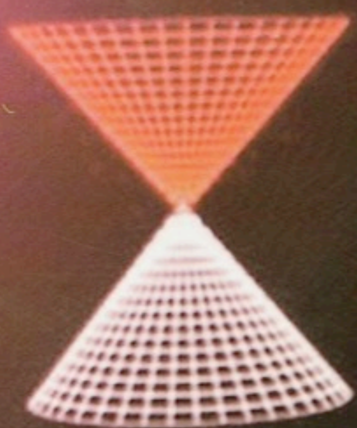
دانشگاه بوعلی سینا
۳۰۴

# مقدمه ای بر نسبیت خاص



نوراله نظری پویا

انتشارات دانشگاه بوعلی سینا
۳۰٤

# مقدمه ای برنسبیت خاص

مؤلف :
نوراله نظری پویا
عضو هیأت علمی دانشگاه بوعلی سینا

چاپ اول
۱۳۸۸

# فهرست مطالب

## فصل سوم فضا ـ زمان نسبیتی

## فصل چهارم دینامیک نسبیتی

## فصل پنجم نسبیت و نظریهٔ الکترومغناطیس

## مقدمه :

آگاهیها و پیشرفتهای بشردربارهٔ جهان پیوسته رو به افزایش است. و همان طور که می دانیم، بخش اعظم این پیشرفت ها در یک قرن اخیر صورت گرفته است. معمولاً دانشمندان بنای کار خود را بر پایهٔ یافته ها و گزارشهای افراد گذشته می گذارند. و در واقع هرگونه پیشرفت در علم، پرسشهای تازه ای را برمی انگیزد. و این موضوع نیز باعث می گردد که تحقیق و تخیل انسان به زمینه هایی کشانده شود که اهمیّت و توجه به آنها قبلاً معلوم نشده است. بعضی از کارهای علم بستگی به مشاهده و اندازه گیریهای دقیق و پرزحمت دارد. اینگونه اندازه گیریها و مشاهدات گاهی اندیشه های جدیدی را مطرح می کند وگاه این ضرورت را آشکار می کنند که نظریه های موجود را تغییر داده یا حتّی آنها را کاملاً کنار بگذاریم. همهٔ اینها به طور کلی، نه تنها ازخصوصیات و ویژگیهای فیزیک، بلکه از ویژگیهای علم به شمار می روند.

فیزیک را می توان مجموعهٔ سازمان یافته ای از اندیشه های آزموده در بارهٔ جهان دانست. درحقیقت، کارمهم فیزیک این است که چند اصل یا قانون بنیادی بیابد تا بتواند با آنها بعضی از قسمتهای این سیل آگاهیها را سازمان داده و آنها را معنی ببخشد. برای آن که با مسیر پیموده شده در فیزیک به طور اجمال آشنا شویم، لازم است ابتدا یک نظریهٔ علمی تعریف شود. اما ساده ترین تعریفی که برای علم می توان در نظر گرفت، این است که آن را به صورت یک مدل یا الگو از یک مجموعهٔ کیهانی یا حتی بخش محدود وکوچکی از آن را در نظر بگیریم و سپس مجموعهٔ قوانین یا روابط بین کمیّتهای موجود درآن بخش یا مدل را به دست آوریم. که البته این مجموعهٔ قوانین یا روابط

باید با توجه به مشاهدات و بررسیهایی که در آن بخش به عمل می آید، تعریف و استخراج گردند.

از طرف دیگر، یک نظریهٔ علمی زمانی نظریه ای کامل و خوب ارزیابی می گردد که دارای دو ویژگی مهم زیر باشد: اولاً آن نظریه بتواند مجموعه وگروه بزرگی از مشاهدات و تحقیقات را درقالب چند رابطه و قانون ساده بیان نماید. ثانیاً اینکه بتواند با بهره گیری از نتایج مشاهدات، پیشگوییهای درست و قاطعی را به دست دهد.

به طورکلی یک نظریهٔ فیزیکی را که قرار است بخش معینی از جهان را توضیح دهد، نمی توان اثبات کرد. درحقیقت، این مهم نیست که نتایج آزمایشات و تحقیقات چند باربا آن نظریه مطابقت می کند و یا آن را تأیید می کند. بلکه آنچه مهم است، این است که نتیجهٔ آزمایش یا تجربه ای آن را نقض نکند. به عبارت دیگر، حتّی اگرنتیجهٔ یک آزمایش یا تحقیق، با پیش بینی های آن نظریه توافق نداشته باشد، می توان آن نظریه را کنار گذاشت. و ما هرگز نمی توانیم اطمینان داشته باشیم که نتیجهٔ آزمایش یا تجربه ای دیگر آن را نقض نکند.

از طرف دیگر، هر بارکه نتیجهٔ یک آزمایش یا مشاهده با پیش بینی های آن نظریه مطابقت پیدا می کند، اعتماد ما نسبت به آن نظریه بیشترمی شود. در غیر این صورت، یا باید به طورکلی آن را کنارگذاشت و یا اینکه درجهت اصلاح وتکمیل آن اقدام نمود. معمولاً در بعضی ازموارد، نظریهٔ جدید جایگزین نظریهٔ پیشین می گردد. مانند نظریهٔ حرکت نیوتنی که نظریهٔ ارسطویی حرکت را به طورکامل کنار گذاشت. و درموارد دیگر، ممکن است نظریهٔ جدید، نظریهٔ پیشین را اصلاح و یا آن را تکمیل نماید. مانند نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین که نظریه و ایده های نیوتن را در مورد حرکت، و همین طور فضا و زمان تکمیل و یا اصلاح کرد. مثال دیگری که دراین مورد می توان ذکر نمود، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین و نظریهٔ گرانشی نیوتن می باشد. که درحقیقت، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین را می توان دنبالهٔ نظریهٔ گرانشی نیوتن در نظر گرفت. امروزه، علی رغم اینکه نظریهٔ نسبیت عام بسیار دقیق تر و کامل تر از نظریهٔ گرانشی نیوتن است، اما دراغلب موارد عملی از نظریهٔ گرانشی نیوتن استفاده می شود. زیرا، اولاً اختلاف بین پیش بینی های این دو نظریه دربعضی از موارد عملی و کاربردی بسیار ناچیز است. ثانیاً اینکه کارکردن با نظریهٔ گرانشی نیوتن آسانتر است. یکی از مواردی که می توان به عنوان مثال آن را ذکر کرد؛ رصد دقیق حرکت سیارهٔ عطارد است. رصدهای بسیاردقیق درمورد حرکت این سیاره نشان می دهند که بین پیش بینی های نظریهٔ گرانشی نیوتن و مشاهدات انجام گرفته، اختلاف ناچیزی وجود دارد. از طرف دیگر، مشاهدات صورت گرفته در این باره با نتایج حاصل از نظریهٔ نسبیت عام مطابقت بیشتری دارد. دراغلب موارد دیگر نیز به گفتهٔ

ریچارد فاینمن فیزیکدان آمریکایی : هر زمان که پیش بینی های اینشتین با نظرات نیوتن اختلاف پیدا کرده، طبیعت حق را به اینشتین داده است.

از طرف دیگر، بررسی سیر تحول علم فیزیک نشان می دهد که روش کار در فیزیک به این منوال بوده است که جهان را به بخش ها و محدوده های مختلفی تقسیم کرده و برای هربخش یا محدوده ای نظریه ای جداگانه ارائه گردیده است. به عنوان مثال، بخش مربوط به فیزیک اتمی و زیر اتمی و ذرات بنیادی؛ حیطهٔ مربوط به پدیده هایی که در مجاورت اجرام با چگالی زیاد رخ می دهند؛ محدوده های مربوط به پدیده های فیزیک در سرعتهای کم و سرعتهای قابل مقایسه با سرعت نورو حیطه های دیگر.

امروزه، نظریه های مختلفی در بخش های مختلف علم فیزیک ارائه شده است. به عنوان مثال در ابعاد اتمی و زیر اتمی، نظریهٔ غالب مکانیک کوانتمی نسبیتی می باشد. درمحدودهٔ سرعتهای بالا و قابل مقایسه با سرعت نور، نظریهٔ نسبیت خاص و همچنین در حیطهٔ سرعتهای معمولی و عادی، قوانین نیوتن پدیده های حرکتی را توضیح می دهند. و در نزدیکی اجرام با چگالی زیاد نیز نظریهٔ نسبیت عام، نظریهٔ غالب محسوب می شود.

اما نکتهٔ دیگری که می توان به آن اشاره نمود، این است که بعضی ازاین نظریه ها که در بخش و محدودهٔ معینی ازطبیعت کاربرد داشته اند، برای مدت زمانی محدود، قابل استفاده بوده و بعد ازمحدودهٔ زمانی معینی به وسیلهٔ نظریه های بعدی کامل تر شده و یا اینکه به طورکلی کنارگذاشته شده اند. نظریهٔ نسبیت خاص نیز یکی از این نظریه هاست که درسال ۱۹۰۵ به وسیلهٔ آلبرت اینشتین، دانشمند بزرگ آلمانی ارائه گردیده است.

اینشتین در اوایل قرن بیستم میلادی با بیان دیدگاههای خود در مورد مفاهیم فضا و زمان و همچنین با کنارگذاشتن مطلق های نیوتنی، نظام فیزیکی نوینی را ارائه داد و به این ترتیب، نظام نیوتنی جهان، جای خود را به نظام اینشتینی می دهد. درحقیقت می توان گفت که ما اکنون در جهان اینشتین زندگی می کنیم. زیرا بدون در نظرگرفتن پیامدهای حاصل از نظریهٔ نسبیت، توضیح و بررسی دقیق بسیاری ازنتایج به دست آمده ازتجربیات آزمایشگاهی در بخش های مختلف فیزیک غیرممکن می باشد. به عبارت دیگر، اگراز فیزیک نیوتنی در این بخش ها و مباحث از فیزیک استفاده شود، با نتایج تجربی کاملاً متناقضی روبرو می شویم.

امروزه، درسرتاسر فیزیک اتمی، هسته ای، حالت جامد و فیزیک انرژی های بالا و ذرات بنیادی، ازنسبیت برای توضیح دقیق ودرست نتایج آزمایشات استفاده می شود. همچنین برای فهم

دقیق نظریهٔ مکانیک کوانتمی و پیامدهای ناشی از این نظریه، ناگزیر به استفاده از نظریهٔ نسبیت هستیم و نیز برای درک درست و صحیح نظریهٔ الکترومغناطیس، ابتدا باید نظریهٔ نسبیت را آموخت. به طوری که می توان ادعا نمود که هدف از ارائه نظریهٔ نسبیت خاص در واقع به دست آوردن یک بینش صحیح و دقیق از نظریهٔ الکترومغناطیس بوده است. به این ترتیب که این نظریه، مشکلات و ناسازگاریهایی که در نظریهٔ الکترومغناطیس و نور شناخت در سالهای قبل از سال ۱۹۰۰ میلادی وجود داشت، به طورکامل توضیح داده و برطرف نمود.

ازطرف دیگر، درحیطهٔ اختر فیزیک وکیهانشناختی، کهکشان های دوردست با سرعتهای نسبیتی حرکت می کنند و پدیده هایی از قبیل ستارگان نوترونی، تپ اخترها، سیاه چاله ها و ... با اثرهای کاملاً نسبیتی سروکاردارند.

اما در مورد اینشتین می توان گفت که وی در دورهٔ دانشجویی با آثار افرادی چون هرتز، در بارهٔ جریانهای الکتریکی و امواج الکترومغناطیس، با نظریهٔ الکترومغناطیس جیمزکلارک ماکسول و پس ازآن با اندیشه های ارنست ماخ در بارهٔ مفاهیم بنیادی فیزیک، آشنا می گردد. از طرف دیگر، وی با نظریهٔ الکترونی ماده که به وسیلهٔ هنریک لورنتس ارائه شده بود و همچنین کارهای فاراده، دربارهٔ الکتریسیته و مغناطیس آشنا می شود. به طوری که اینشتین به مدیون بودن خود درارائه نظریهٔ نسبیت خاص به آنها اذعان داشت و این موضوع را در سخنرانی سال ۱۹۲۱ در لندن، مطرح می کند. وی در واقع، نظریهٔ خود را نتیجهٔ مستقیم یا به عبارت دیگر، تکامل طبیعی کارهای فاراده، ماکسول و لورنتس می داند. اینشتین درحقیقت چیزی بیش از یک فیزیکدان بود. او جایگاه خود را در تاریخ فیزیک تشخیص داده بود؛ به طوری که در سال ۱۹۴۹ در نوشته ای به جایگاه سلف بزرگ خویش، یعنی نیوتن نیز اذعان کرده است:

نیوتن مرا ببخش، تو تنها راه موجودی را یافتی که یافتنش در زمان خودت، برای انسانی با قدرت اندیشه وخلاقیّت والای تو، ممکن بود. مفاهیمی که توخلق کردی حتی امروزه نیز درفیزیک راهنمای تفکر ما هستند. هرچند که وقتی هدف، درک عمیق تر روابط بشود، چاره ای جز جانشین کردن آن مفاهیم با مفاهیمی بسیار خارج از دایرهٔ تجربهٔ خود نداریم.

حال ممکن است روزی برسد که فیزیکدان جوان و بی پروایی بنویسد، اینشتین مرا ببخش، تو تنها راه موجودی را یافتی که یافتنش در زمان خودت، برای انسانی با قدرت اندیشه و خلاقیّت والای تو، ممکن بود. لکن چنین اتفاقی هنوز رخ نداده است.

# ۱

# فضا و زمان نیوتنی

## مقدمه :

مفهوم حرکت را می توان یکی از اساسی ترین پدیده ها درمحیط پیرامون خود به شمارآورد. به طوری که عملاً می توانیم در هر فرایند فیزیکی قابل تصور، رد حرکت چیزی را مشاهده نماییم. فرایندهای فیزیکی مانند، جذب و گسیل نور در داخل اتم، جریان الکتریکی در یک جسم رسانا، فشار در داخل مخزن یک گاز و... که به ترتیب ناشی ازجابجایی یا حرکت الکترونهای داخل اتم ، حرکت الکترونها درداخل جسم رسانا و حرکت مولکولهای گاز در داخل مخزن گازمی باشند. همچنین، واکنشهای شیمیایی که آنها نیز ناشی از بعضی حرکات اتمی بوده وحاصل این نوع از حرکات، تشکیل مولکولهای جدید می باشد. امواج ایجاد شده برروی سطح آب، وزش باد، حرکت برگها و... همگی پدیده های حرکتی به شمارمی روند.

به طورکلی می توان گفت که حرکت هرجسم ناشی از بر هم کنش یا تأثیر متقابل

جسم با محیط اطرافش می باشد. در این میان می توان نقش یک فیزیکدان را هنگام مشاهدهٔ این پدیده های حرکتی یا فیزیکی، شناسایی و کشف علل تمام این حرکتها دانست. حرکت اجسام پیرامون ما به هر شکل و صورتی که باشند، می توان آنها را به وسیلهٔ چند قاعده یا اصل کلی توضیح داد. مجموعهٔ این اصول و قواعد، شاخهٔ مهمی از علم فیزیک را به نام مکانیک تشکیل می دهند. برای بررسی و تحلیل تمامی پدیده های حرکتی ناشی از برهم کنش های گوناگون و همچنین شناسایی ماهیّت آنها باید ازمفاهیم اساسی و مهمی مانند نیرو، اندازه حرکت و انرژی استفاده نمود. درحالی که بدون بهره گرفتن از این مفاهیم، درک دقیق ماهیّت یک پدیدهٔ فیزیکی ناممکن می باشد.

به طورخلاصه، مکانیک را می توان علم حرکت یا به عبارت دیگر، علم نیرو، تکانه و انرژی در نظرگرفت. این شاخه از علم فیزیک را می توان به سه مبحث کلی، یعنی سینماتیک، دینامیک و استاتیک تقسیم کرد. به گونه ای که در مبحث سینماتیک، همان طور که می دانیم، حرکت یک ذره بدون در نظرگرفتن عامل یا علل آن توصیف می شود. در بخش دینامیک، حرکت یک ذره یا سیستمی از ذرات با جزئیات و دقت بیشتر، یعنی با نظرگرفتن عامل یا علت آن بررسی می شود. درمبحث استاتیک نیز تعادل و شریط تعادل اجسام مطالعه می شود.

ما امروزه، علم مکانیک را حاصل تلاش و نبوغ سر ایزاک نیوتن[1] (۱۷۲۷-۱۶۴۲)، دانشمند بزرگ انگلیسی می دانیم. او نظریات خود را در مورد سه مفهوم اساسی در مکانیک، یعنی سکون، حرکت یکنواخت و شتاب، درقالب سه اصل به نام اصول یا قوانین نیوتن، درکتابی به نام پرینسیپیا تدوین کرده است.

نیوتن با ارائهٔ این اصول در مورد حرکت اجسام، نظریهٔ ارسطویی حرکت راکه از قرن چهارم پیش ازمیلاد تا زمان گالیله، یعنی به مدت ۲۰۰۰ سال مورد پذیرش دانشمندان بوده است، به طورکامل کنار می گذارد. البته، دانشمندان دیگری نیز درتکامل و پیشرفت این علم سهیم بوده اند که از جملهٔ آنها می توان به ارشمیدس[2]، ارسطو[3]، گالیله[4]، کپلر[5]، دکارت[6]،

---

1- Newton, Sir Isaac

2- Archimides : ریاضیدان یونانی که بین سالهای ۲۸۷ تا ۲۱۲ پیش از میلاد می زیسته است ⟵

هویگنس[7]، لاگرانژ[8]، هامیلتون[9]، ماخ[10] و اینشتین اشاره نمود. بنابراین، اگر بخواهیم با سیر تحول علم مکانیک به طورفشرده و مختصر آشنا شویم، ابتدا باید با نظریات و ایده های ارسطو و همچنین معاصران او در مورد حرکت اجسام به طور مختصرآشنا شده و سپس دیدگاه های نیوتن را در مورد حرکت و همین طور فضا و زمان مطرح نماییم.

## ۱ - ۱ : نظریهٔ ارسطویی حرکت

قبل ازگالیله و نیوتن نظریات و ایده های مختلفی در مورد حرکت اجسام، یا به عبارت دیگر، سه مفهوم اساسی در مکانیک؛ یعنی سکون، حرکت یکنواخت و شتاب ارائه شده است. همان طورکه اشاره گردید، نظرات کنونی در مورد حرکت اجسام به زمان گالیله و نیوتن، یعنی به زمان انتشارکتاب اصول یا پرینسیپیای نیوتن در سال ۱۶۸۷ بر می گردد. اما قبل ازآنکه به بررسی کارهای گالیله و بعد از آن نیوتن بپردازیم، لازم است اشاره ای مختصروکوتاه به نظریه واندیشه های پیش از آنها، یعنی نظریه و عقاید ارسطو و پیروانش در مورد حرکت داشته باشیم.

طبق نظر ارسطو و پیروانش، تمام مواد و اشیای موجود در جهان از چهار عنصر، یعنی خاک، آب، هوا وآتش تشکیل شده اند. دراین نظریه، برای هرکدام از این عناصر نیز یک جایگاه ویژه وطبیعی در نظرگرفته می شد. به این ترتیب که خاک در پایین ترین وآتش در بالاترین جایگاه قرارداده می شد. ازطرف دیگر، عقیده بر این بودکه هنگامی که هرکدام از این عناصر درمکانی دور از جایگاه طبیعی خود قرار گیرد، آن عنصر سعی می کند که به مکان اولیه یا جایگاه طبیعی خود برگردد. به عنوان مثال، اگر عنصرآتش درمکانی پایین تراز جایگاه

---

→ Aristotle – 3 : فیلسوف نامدار یونانی که بین سالهای ۳۸۴ تا ۳۲۲ پیش از میلاد می زیسته است.

Galileo Galilei - 4 : ( ۱۵۶۴– ۱۶۴۲م)

Johannes Kepler - 5 : (۱۵۷۱– ۱۶۳۰م): اختر شناس آلمانی

Descartes - 6 : (۱۵۹۶ – ۱۶۵۰): بزرگترین دانشمند فرانسوی قرن هفدهم است. وی گذشته از سهمی که در اندیشهٔ پایستگی تکانه دارد؛ دانشمندان او را مخترع دستگاههای مختصات و نمایش نموداری معادلات جبری می دانند. →

طبیعی خود قرار می گرفت، به سمت بالا صعود می کرد و همین طور اگر خاک در مکانی بالاتر ازجایگاه خود واقع می شد به سمت پایین، یعنی جایگاه طبیعی خود سقوط می کرد.

بنابراین، براساس نظرارسطو و پیروانش، حرکت یک جسم واقعی به دو عامل اساسی بستگی داشت. یکی اینکه جسم نسبت به جایگاه طبیعی خود در چه مکانی قرار می گرفت. عامل دیگر، نوع و همچنین نسبت ترکیب آن جسم یا شیئ از عناصرچهارگانه بود. به عنوان مثال، تصور براین بود که چون سنگ بیشتر ازخاک تشکیل شده است تا عناصردیگر، بنابراین، هنگامی که درمکانی بالاتر از جایگاه طبیعی اش رها شود، از میان آتش، هوا و آب می گذرد تا به مکان طبیعی خود، یعنی زمین برسد. در نتیجه، حرکت سنگ به سمت پایین و سقوطی است. همچنین، عقیده بر این بود که حرکت اشیایی مانند بخارآب و دود، باید به سمت بالا و صعودی باشد، زیرا بخارآب ازآتش وآب و دود نیز از آتش و هوا تشکیل شده اند. بنابراین، حرکتشان باید صعودی باشد. بر این اساس حرکت عناصرچهارگانه، و نیز اجسام واقعی که ترکیبی از این عناصر بودند، می بایستی صعودی یا نزولی باشد.

از طرف دیگر، آنها حرکات دیگری را نیز درطبیعت مشاهده می کردند. از جمله حرکت اجرام آسمانی، ستارگان و سیارات که حرکتشان نه صعودی بود ونه نزولی. آنها برای توجیه حرکت اینگونه اشیاء، اظهارمی کردند که این اشیاء از نظر ترکیب و رفتار، با اشیای مجاور زمین متفاوت هستند و تصورآنها این بود که اینگونه اشیاء از عنصر دیگری به نام اثیر یا اتر[11]، تشکیل شده اند. بنابراین، حرکت آنها نیز باید با حرکت اشیای روی زمین یا مجاورآن فرق داشته باشد. به این علت حرکت آنها نه صعودی است ونه نزولی، بلکه گردشی نا محدود بر روی دوایری به گرد مرکز جهان، یعنی زمین خواهد بود. به عبارت

---

← 7- Christian Huygens: (۱۶۹۵ - ۱۶۲۹) فیزیکدان هلندی. وی تلسکوپی پیشرفته ابداع کرد و با آن یکی از قمرهای زحل را کشف نمود. و حلقه های زحل را به وضوح مشاهده کرد. وی نخستین کسی است که رابطهٔ شتاب جانب مرکز، یعنی رابطهٔ $v^2/r$ را در مطالعاتش پیرامون آونگ مخروطی در ۱۶۵۹؛ کشف کرد. تئوری موجی نور را پیدا کرد و یک ساعت آونگدار اختراع نمود. سهم علمی او زیاد است و در واقع اگر تحت الشعاع دانشمند معاصر خود، یعنی نیوتن نبود اعتبار او بیشتر می نمود. →

دیگر، تفاوت درترکیب اشیاء، مستلزم بروز رفتاروحرکت متفاوت از طرف آنها بود. خلاصه اینکه از نظرارسطو و پیروانش، اجرام آسمانی درجایگاه طبیعی خود قرار داشتند، به این علت، نیاز به صعود یا سقوط برای رسیدن به جایگاه طبیعی خود نداشتند.

همچنین، دراین نظریه یک جسم هنگامی حرکت می کند که ازمکان طبیعی خود دور شود. درنتیجه، علت یا عامل حرکت یک جسم، درحقیقت تمایل آن جسم به بازگشت به جایگاه طبیعی اش می باشد. بر این اساس، به اعتقاد ارسطو دو نوع حرکت طبیعی وجود داشت. حرکت صعودی و دیگری حرکت سقوطی یا نزولی. در نتیجه آنها با این تقسیم بندی برای حرکت طبیعی اجسام، بیشتر ازدو نوع نیروی مؤثر در حرکت اجسام، عامل یا نیروی دیگری را نمی شناختند. این دو نیروی مؤثر، یکی نیروی سنگینی بود و دیگری نیروی سبکی. نیروی سنگینی برای حرکت نزولی اجسام، و نیروی سبکی برای حرکت صعودی آنها.

طبق نظرارسطو، هرجسم مانند سنگ، پس از رها شدن می بایستی بلافاصله به یک سرعت نهایی برسد و با آن سرعت تا پایان مسیر به حرکت خود ادامه دهد. در این میان، وزن جسم و همین طور مقاومت محیط، به عنوان دو عامل مؤثر در سرعت نهایی جسمِ درحال سقوط، مطرح می شد. وتصور بر این بود که جسم سنگین تر، سرعت نهایی بیشتری نسبت به جسم سبکتر دارد. علت این مسأله به این صورت توجیه می شد که چون سنگ ازخاک بیشتری تشکیل شده است، بنابراین، تمایل بیشتری برای رسیدن به جایگاه طبیعی خود، یعنی زمین دارد. درنتیجه باید زودتر به زمین برسد. به طورکلی عقیده بر این بودکه جسم سنگین تر زودتر به زمین می رسد. ازطرف دیگر، آنها مشاهده می کردند که سقوط یک جسم در هوا و آب متفاوت است. به این علّت مقاومت محیط را نیز در سرعت نهایی جسم مؤثر می دانستند. همچنین، ارسطومی پنداشت که سرعت سقوط یک جسم، متناسب با وزن آن باید افزایش و متناسب با مقاومت محیط،کاهش یابد و نتیجهٔ کلی اینکه، سرعت واقعی

---

8 - Joseph-Louis Lagrange : (۱۸۱۳ -۱۷۳۶)

9 - Sir wiliam Hamilton (۱۸۶۵-۱۸۰۵)؛ سر ویلیام روان هامیلتون؛ ریاضیدان و ستاره شناس اسکاتلندی

10- Ernst Mack : فیزیکدان اتریشی

11- ether مشتق از کلمهٔ لاتینی aether ؛ به معنی عنصر پنجم .

سقوط در هرمورد، از تقسیم وزن بر مقاومت محیط به دست می آمد.

در نظریهٔ ارسطو علاوه برحرکت طبیعی، یعنی حرکت صعودی یا نزولی اجسام، به نوع دیگری از حرکت نیز بر می خوریم وآن حرکت قَهْری است. درحرکت طبیعی، جسم به سمت جایگاه طبیعی خود روان می شد و نیازی به اعمال نیرو برای ایجاد حرکت وجود نداشت. اما در این نوع ازحرکت، یعنی حرکت قَهْری، جسم از مکان طبیعی خود دور می شد. بنابراین، برای داشتن چنین حرکتی می بایستی دائماً به جسم نیرو وارد شود تا اینکه آن را بر خلاف میلش، از مکان یا جایگاه طبیعی اش دورکند. در این نوع از حرکت، اگر نیرو قطع می شد،حرکت قَهْری نیز متوقف می گردید. لازم به ذکر است که این نظریه در مورد حرکت بعضی از اجسام با تجربهٔ روزانهٔ ما، مثلاً هنگام هل دادن میز یا صندلی بر روی کف اتاق یا همچنین بالا بردن یک قطعه سنگ تا ارتفاعی معین توافق دارد. اما در مورد حرکت اجسامی که به هوا پرتاب می شوند، جوردر نمی آید. زیرا تیری که در هوا پرتاب می شود، بعد از قطع نیرو مسافتی را در هوا طی می کند و بلافاصله بعد از قطع نیروسقوط نمی کند. توجیه ارسطو برای این نوع ازحرکتها، این بودکه هوا نیز در مسیر حرکت تیر تا حدی نیرو اعمال می کند. این نیرو به این صورت ایجاد می شود که وقتی تیر درهوا حرکت می کند، درمسیرخود هوا را می شکافد وکنار می زند و در نتیجه در پشت سرتیر نوعی خلأ ایجاد می گردد. به اعتقاد او وپیروانش چون طبیعت از خلأ بیزار است، هوای اطراف مسیر حرکت تیر بلافاصله برای پر کردن خلأ ایجاد شده هجوم می آورد و به این ترتیب، نیرو برای ادامهٔ حرکت تیر درهوا به وسیلهٔ هوا تأمین می شود. البته در این نظریه، به اندیشه ها و عقاید دیگری نیز بر می خوریم که از طرح آنها صرف نظرمی شود.

اکنون، بعد ازآشنایی مختصر با انواع حرکت در نظریهٔ ارسطویی، می توان نظرات ارسطو را در مورد سه مفهوم مهم **سکون، حرکت یکنواخت وشتاب** بیان کرد.

همان طور که اشاره گردید، دراین نظریه دو نوع حرکت برای اجسام در نظرگرفته می شد: حرکت طبیعی و حرکت قهری. برای داشتن حرکت قهری یا دورکردن جسم از جایگاه طبیعی اش، می بایستی دائماً به جسم نیرو وارد شود. مانند حرکت سنگی که تا ارتفاعی معین بالا برده می شود و نیز تیر یا پرتابه ای که به هوا پرتاب می شود. در نتیجه در

این نظریه برای داشتن حرکت یکنواخت، می بایستی به طور پیوسته به جسم نیرو وارد شود. البته، عقاید و اندیشه های دیگری نیز برای ایجاد یا داشتن حرکت یکنواخت بیان می شد که در همهٔ آنها وجود نیرو برای استمرار و تداوم حرکت یکنواخت ضروری و لازم بود. بنابراین، مفهوم نیرو در نظریهٔ ارسطویی حرکت نقش اساسی و محوری داشته است.

در این نظریه در مورد شتاب اجسامِ در حال سقوط، به اظهارات و عقاید جالبی بر می خوریم که در اینجا به دو مورد آن می توان اشاره ای مختصر کرد. شتاب یک جسمِ در حال سقوط به سادگی توجیه می شد. مثلاً تند شدن سرعت سقوط یک جسم مانند سنگ را به نزدیک شدن آن به مکان طبیعی اش، یعنی زمین وابسته می کردند. به این ترتیب آنها می پنداشتند، جسم برای اینکه هرچه زودتر به مکان یا جایگاه اولیه و طبیعی خود برسد، سرعتش را زیاد و زیادتر می کند. بر این اساس، عده ای عقیده داشتند که عامل شتاب یک جسمِ درحال سقوط، درواقع همان تمایل بی صبرانهٔ جسم، برای رسیدن هرچه زودتر به جایگاه طبیعی اش می باشد. همچنین، بنابه عقیدهٔ عده ای دیگر، هنگامی که جسمی به سمت زمین سقوط می کند، وزن هوای بالای آن زیاد می شود. دراین حال مقدار هوای زیرآن به تدریج کاهش می یابد و نتیجه اینکه مقاومت هوایی که در زیرجسم قرار می گیرد، در مقابل حرکت سقوطی جسم، کم وکمتر شده و سرعت آن به تدریج افزایش می یابد. و بالاخره، مفهوم یا پدیدهٔ سکون نیز در این نظریه به راحتی توجیه می شد؛ زیراآنها عقیده داشتند، برای اینکه یک جسم در حال سکون باشد، باید درجایگاه یا مکان طبیعی خودش قرارگیرد. بنابراین، سنگی که سقوط می کرد و درنهایت در روی زمین به جایگاه طبیعی خود می رسید، به حالت سکون دست می یافت. یا اینکه اگر جسمی حرکت نمی کرد، گفته می شد که درجایگاه طبیعی خود قرار دارد. درحقیقت، سکون به توضیحی بیشتراز این نیاز نداشت.

نظریهٔ ارسطو در مورد حرکت اشیاء، علی رغم داشتن محدودیّتها و نارساییهای زیاد آن، از قرن چهارم قبل از میلاد تا زمان گالیله و نیوتن، یعنی تقریباً به مدت ۲۰۰۰ سال مورد پذیرش وسیع دانشوران درمجامع علمی آن دوران بوده است. اما اینکه چرا تغییرات بنیادی و اساسی در عقاید ارسطو درمورد حرکت اجسام، در این مدت طولانی ایجاد نشده است، می توان به دو دلیل عمده و اساسی اشاره نمود. اول آنکه مطالعهٔ حرکت اجسام، فقط برای

تعداد کمی از دانشوران آن زمان مورد علاقه و توجه بوده است وحتی مطالعهٔ حرکت اجسام تنها بخش کوچکی از مطالعات و تحقیقات ارسطو را به خود اختصاص می داده است. و دلیل دوم را می توان تأکید بسیار ارسطو برمشاهدهٔ مستقیم وکیفی به عنوان مبنا واساس نظریه پردازی دانست. به عبارت دیگر، ریاضیات در این نظریه نقش چندانی ندارد. درواقع، ارسطو عقیده داشت که اصولاًریاضیات برای توصیف پدیده های زمینی ارزشی ناچیز دارد.

از میان دانشوران و دانشمندان مختلفی که در قرن پانزدهم و شانزدهم درجهت تغییر مسیرعلم تلاش کرده اند، سهم گالیله بیش از همه برجسته تر و موفقیّت آمیزتر بوده است. گالیله درسال ۱۵۶۴ در پیزای ایتالیا به دنیا آمد. او ابتدا به رشتهٔ پزشکی علاقمند می شود. اما بعد از خواندن آثار اقلیدس[۱]، ارشمیدس و ارسطو به علوم فیزیکی روی می آورد. او در ۲۶ سالگی استاد ریاضیات در دانشگاه پیزا می شود. و بعد ازکسب این مقام، درگیری بین او و عقاید همکاران بزرگتر از خود آغاز می گردد. او با پشتیبانی از نظریهٔ جهانِ خورشیدْ مرکزی، با دشمنان زیادی مواجه می شود. از طرف دیگر، گالیله نشان می دهد که چگونه می توان با بهره گیری از ریاضیات، حرکت سقوطی یک جسم یا گلولهٔ غلتان بر روی یک سطح شیبدار را به سادگی تو ضیح داد. او با انتشارکتاب گفتگو در بارهٔ دو منظومهٔ جهانی بزرگ (۱۶۳۲) درمورد اخترشناسی و همین طورکتابی در بارهٔ مکانیک و حرکت موضعی اجسام یا دو علم جدید[۲] خود، راه جدیدی را در پیش روی دانشمندان بعد از خود قرار می دهد که البته، همین مسأله منشاء تحولات عظیمی در مسیر علوم فیزیکی می گردد.

همان طورکه قبلاً اشاره شد، مکانیک ارسطویی مدت زمان طولانی، یعنی تقریباً به مدت ۲۰ قرن نظریهٔ غالب برای توصیف پدیده های فیزیکی یا طبیعی به شمارمی رفت. این نظریه بعد از هفده قرن، یعنی در قرن سیزدهم میلادی به اروپا راه می یابد و در واقع، بسیاری ازدانشمندان اروپایی در آن دوران به این باور رسیده بودند که مکانیک ارسطویی، منطقی ترین روش برای بررسی پدیده های طبیعی است. اما بررسیها و مطالعات گالیله در

**Euclid-1**: ریاضیدان یونانی که تقریباً بین سالهای ۳۲۵ تا ۲۶۵ قبل از میلاد می زیسته است.

۲ - گفتارها و برهانهای ریاضی در بارهٔ دو علم جدید مربوط به مکانیک و حرکت موضعی(۱۶۳۸) یا دو علم جدید.

مورد حرکت اجسام، روش و مهارت تجربی، و همین طور استعداد ریاضی او از یک طرف و تلاش خستگی ناپذیرو مداوم اواز طرف دیگر، توانست نظریهٔ ارسطو را در مورد حرکت بی اعتبار کند. علاوه بر این، راه جدیدی را در علوم فیزیکی باز نماید که در نهایت منجر به علوم امروزی گردد.

اما باید در اینجا متذکر شد که اگرچه کارهای گالیله اهمیّت زیادی در پیشرفت علم داشته اند، ولی به تنهایی درایجاد انقلاب در علوم کافی نبوده اند. مثلاً بررسیهای گالیله در مورد سقوط آزاد اجسام و همچین معلوم شدن اینکه، اگر اصطکاک هوا وجود نداشته باشد، تمام اجسام با شتاب یکسان سقوط می کنند، کل نظریهٔ ارسطویی در مورد حرکت سقوطی اجسام را به یکباره بی اعتبار کرد. همین طور،کارهای گالیله در بارهٔ حرکتهای دیگر، مانند حرکت زمین و سیارات به دور خورشید، شک و تردید جدی و اساسی را درمورد صحت اصول و فرضهای کیهانشناسی ارسطویی ایجاد نمود. اگرچه گالیله بسیاری از نظرات و عقاید دانشمندان قبل از خود، مانند ارسطو را اصلاح یا به طور کلی کنار گذاشت، اما وی هرگز قادر به توضیح یا توجیه شتاب حرکت طبیعی اجسام نشد. او دراین باره نوشته است :

"فعلاً به نظر نمی رسد، زمان مناسبی برای تحقیق علّت شتاب حرکت طبیعی باشد."

همچنین، روش تحقیق گالیله در مورد حرکت اجسام، باعث ایجاد روش جدید و مهمی در انجام پژوهشها وتحقیقات علمی گردید. این روش که به روش علمی موسوم است، امروزه نیز اساس کار محققان در شاخه های مختلف علوم قرارمی گیرد. در این روش که گالیله با مهارت تمام در انجام پژوهشهای خود از آن استفاده می کرده است، برای رسیدن به یک نظریهٔ رضایتبخش و کاملِ فیزیکی یا به طورکلی علمی، مراحل زیر پیموده می شود.

مشاهدهٔ کلی ← فرضیه ← تحلیل ریاضی یا استنتاج قیاسی از فرضیه ← آزمون تجربیِ قیاس ← ودر نهایت اصلاح فرضیه با استفاده از تجربه و آزمون.

بنابراین، برای رسیدن به یک نظریهٔ رضایتبخش وکاملِ فیزیکی، ممکن است کل مراحل فوق، ازابتدا تا انتها یا هرکدام از مراحل میانی، بارها وبارها تکرار گردد تا اینکه بتوان به یک نظریهٔ قابل قبول علمی رسید.

## ۱ - ۲ : نظریهٔ نیوتنی حرکت

دراین بخش، به بررسی نظرات و عقاید نیوتن در مورد حرکت، یا به عبارت دیگر، سه مفهوم مهم و اساسی سکون، حرکت یکنواخت و شتاب پرداخته می شود.

همان طورکه قبلاً اشاره شد، نظرات کنونی در مورد حرکت اجسام به زمان گالیله و نیوتن، یعنی به زمان انتشار کتاب اصول نیوتن یا پرینسیپیای[1] او در سال ۱۶۸۷ بر می گردد. در حقیقت، تحقیقات گالیله را می توان زمینه ای برای مطالعات نیوتن درمورد حرکت اجسام دانست. خود نیوتن نیز به این نکته اشاره می کند وگا لیله را پیشاهنگ راهی می داند که او آن را پیموده است.

### ۱- ۲ - ۱ : قانون اول نیوتن

براساس قانون اول نیوتن، هرجسم در مقابل تغییر حالت، یعنی سکون یا حرکت یکنواخت، ازخود مقاومت نشان می دهد. به عبارت دیگر، اگر جسمی درحالت سکون یا حرکت یکنواخت باشد، تمایل داردکه این حالتها، یعنی سکون یا حرکت یکنواخت خود را حفظ کند. ازطرف دیگر، مقاومتی که جسم درمقابل تغییر حالت از خود نشان می دهد، لختی یا اینرسی آن جسم نامیده می شود. بنابراین، قانون اول نیوتن را می توان قانون لختی یا اینرسی نیزنامید. بیان دیگر این قانون به این صورت است که اگر نیرویی به جسمی وارد نگردد، یا اینکه برایند نیروهای وارد برآن صفر باشد، در این حالت، اگرجسم درحال سکون یا حرکت یکنواخت باشد، به حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود ادامه می دهد، مگرآنکه نیرویی برآن وارد گردد.

---

1- Philosophiae Naturalis Principia Mathematica : (۱۶۸۷) اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی

همچنین، باید یاد آور شد که اگرچه این قانون برای اولین بار به وسیلهٔ نیوتن بیان شده است، اما بررسی آثار گالیله نشان می دهد که او تقریباً پنجاه سال قبل از نیوتن، اظهارات مشابهی را با ابداع آزمایشی فکری بیان کرده است. براساس این قانون می توان گفت که حالتهای سکون و حرکت یکنواخت هم ارز می باشند؛ زیرا از تعادل یک جسم به این نتیجه می رسیم که سرعت جسم ثابت است. البته صفر بودن یا مخالف صفر بودن این سرعت ثابت، بستگی به این دارد که سرعت جسم را کدام ناظر اندازه می گیرد. به طور کلی، ازقانون اول نیوتن می توان نتایج زیر را به دست آورد.

- بر اساس نظریهٔ ارسطویی حرکت، برای آنکه جسمی دارای حرکت یکنواخت باشد، باید به طور پیوسته به آن نیرو وارد شود. بنابراین، قانون اول نیوتن نظریهٔ ارسطویی حرکت را به طور کامل کنار می گذارد.
- قانون اول نیوتن را می توان قانونی جهانی دانست. به عبارت دیگر، این قانون را می توان در همه جای جهان، در کرهٔ ماه، زمین ودرسراسر کیهان به کاربرد.
- این قانون مفهوم اینرسی یا لختی یک جسم را بیان می کند. یعنی تمایل همهٔ اجسام برای حفظ حالت سکون یا حرکت یکنواخت.
- براساس این قانون حالتهای سکون وحرکت یکنواخت پدیده هایی کاملاً هم ارزند.

همچنین، می دانیم که دو پدیدهٔ سکون وحرکت یکنواخت مفاهیمی نسبی می باشند. به عبارت دیگر، یک جسم ممکن است نسبت به یک ناظر یا چارچوب مرجع ساکن باشد، اما نسبت به چارچوب مرجعی دیگر دارای حرکت. بنابراین، می توان گفت که قانون اول نیوتن مفهوم چارچوب مرجع یا ناظر را در فیزیک مطرح می کند. براین اساس، می توان از این قانون نتیجه گرفت که صحبت از سکون مطلق یا حرکت یکنواخت مطلق در فیزیک معنایی ندارد.

بنابراین، باتوجه به این قانون، اولین قدمی که برای تشریح حرکت یک جسم باید برداشته شود، تعیین چارچوب مرجع یا انتخاب ناظر می باشد. دراین صورت، با تعیین ناظر یا چارچوب مرجع، می توان حرکت جسم را نسبت به آن تجزیه و تحلیل نمود. همان طورکه می دانیم، یک ناظر معمولاً چارچوب مرجع خود را باید به گونه ای انتخاب نماید که بتواند داده ها ومشاهدات خود را به راحتی تجزیه و تحلیل کند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه برای بررسی حرکت یک جسم ناظرهای مختلف می توانند چارچوبهای مرجع متفاوتی را برگزینند، درنتیجه، برای انطباق و پیوند مشاهدات ناظرهای واقع درچارچوبهای مرجع مختلف، می بایستی قوانین تبدیلی معینی تعریف و معرفی گردند.

### ۱ - ۲ - ۲ : قانون دوم نیوتن

همان طورکه می دانیم، درصورتی می توان ازقانون اول نیوتن برای بررسی حرکت یک جسم استفاده کردکه نیرویی برآن وارد نشود، یا اینکه براینـد نیروهای وارد برآن صفر باشد. اما قانون دوم نیوتن حالتی را در برمی گیرد که براینـد نیروهـای وارد برجسم صفر نیست. درواقع، این قانون مفهوم شتاب را برای یک جسم توضیح می دهد و بیان می کند که آهنگ تغییر سرعت یک جسم، به جرم جسم و نیروی مؤثری که برآن وارد می گردد، بستگی دارد. و درنتیجه ارتباط بین نیرو وجرم به وسیلهٔ این قانون بیان می شود. ازطرف دیگر، برخلاف نظریات ارسطو در مورد شتاب، دراین نظریه عامل شتاب یک جسم، نیرو درنظرگرفته می شود. به این ترتیب، شتاب یک جسم را که گالیله نیز نتوانسته بود آن را به درستی توضیح دهد، نیوتن با ارائهٔ این قانون، شتاب یک جسم را ناشی از نیروی مؤثری می داند که به آن وارد می شود.

### ۱-۲ - ۳ : قانون سوم نیوتن

قانون سوم نیوتن ایدهٔ جدیدی را در بارهٔ نیروها مطرح می کند. براساس این قانون، نیروها همیشه به صورت زوج ظاهر می شوند. به عبارت دیگر، تصوروجود یک نیروی تنها بدون همراه بودن با نیرویی دیگر، بی معنی است. همچنین، این قانون برهم کنش بین اجسام،

درفواصل مختلف را نیز توضیح می دهد. به این ترتیب که اگر جسم $A$ نیروی $\vec{F}_{AB}$ را به جسم $B$ وارد کند، دراین صورت، جسم $B$ نیز نیروی $\vec{F}_{BA}$ را به جسم $A$ وارد خواهد کرد. به طوری که می توان نوشت: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. به بیان دیگر، اندازهٔ نیروهای کنش و واکنش باهم برابر و درخلاف جهت یکدیگرند.

همان طور که می دانیم، قوانین نیوتن همهٔ پدیده های حرکتی را در گسترهٔ وسیعی از سرعتها، یعنی سرعتهای از صفر تا میلیونها کیلومتر در ساعت را با دقت بسیار زیاد تو ضیح می دهند. حال، با توجه به مطالبی که در مورد قانون اول نیوتن بیان شد، حالتهای سکون وحرکت یکنواخت، پدیده هایی هم ارز بوده و هردو پدیده مفاهیمی نسبی می باشند. به بیان دیگر، یک جسم ممکن است نسبت به یک چارچوب مرجع، ساکن باشد، اما نسبت به چارچوبهای مرجع دیگر، متحرک. بنابراین، می توان گفت که قانون اول نیوتن مفهوم مهم و اساسی چارچوب مرجع را در فیزیک مطرح می کند. دربخش بعد، با مفهوم چارچوب مرجع درفیزیک کلاسیک آشنا می شویم.

## ۱-۳ : چارچوب مرجع

حرکت یک ذره را می توان به صورت یک تغییرمکان یا جابه جایی در فضا، ضمن جریان زمان درنظرگرفت. بنابراین، اگربخواهیم حرکت یک ذره را توضیح دهیم، باید بتوانیم درهر لحظه از زمان، مکان آن را در فضا تعیین کنیم. در نتیجه اولین اقدام جهت بررسی حرکت یک ذره، انتخاب یک مبدأ در فضا به عنوان مرجع و همین طورتعیین مقیاسهای مناسب برای اندازه گیری فضا و زمان می باشد. درواقع، مجموعهٔ این مقیاسها و همچنین ابزارهای محاسبه و اندازه گیری فضا و زمان، معمولاً به عنوان **چارچوب مرجع**[1] تعریف می شود.

در حقیقت، این تعریف برای چارچوب مرجع را می توان نتیجه ای ازمفهوم حرکت ذره و مسألهٔ مربوط به آن در نظر گرفت. به بیان دیگر، عبارت "مکان ذره در فضا"، درصورتی دارای معنی و مفهوم خواهد بود که جسمی به عنوان مبدأ یا مرجع، برای تعیین مکان یا موضع ذره نسبت به آن، از قبل مشخص شده باشد. بنابراین، بدون درنظرگرفتن یک نقطه به عنوان

1- Frame of reference or Reference frame

مرجع، صحبت کردن ازحرکت یک ذره کاملاً بی معنی خواهد بود. در واقع، می توان همین جسم یا نقطه ای را که برای مقایسه انتخاب شده است، به عنوان چارچوب مرجع در نظرگرفت.

با این توضیحات می توان گفت که فضا به خودی خود و بدون در نظرگرفتن اجسام واقعی نمی تواند مفهومی داشته باشد. این جسم در یک بیابان ممکن است یک درخت یا یک تکه سنگ باشد. یا در ابعاد بزرگتر، مثلاً درفضای کیهانی ممکن است ستاره ای دردور دست در نظرگرفته شود. بنابراین، بعد از تعیین یک جسم به عنوان مرجع، می توان دستگاه مختصات دکارتی $(x, y, z)$ را به آن وابسته کرد، به نحوی که مبدأ آن در جسم مرجع، مثلاً درمرکزجرم آن واقع شود و محورهای آن درجهت اشیاء مادی معینی قرار گیرند. به این ترتیب، با این کارمی توان فضای جسم مرجع را قابل اندازه گیری و محاسبه کرد.

در تشریح و بررسی حرکت یک ذره، معمولاً هدفی که پیگیری می شود، در واقع، تعیین مکان یا موقعیت آن در فضا، درهرلحظه از زمان می باشد. از طرف دیگر، همان طورکه می دانیم، هنگامی که یک ذره در فضا حرکت می کند در مسیرحرکت خود، نقاط فضا را به طور پیوسته یکی پس از دیگری پشت سرمی گذاردکه از اتصال این نقاط به یکدیگر، می توان منحنی مسیرحرکت ذره را به دست آورد. اکنون سؤالی که ممکن است در اینجا مطرح شود؛ این است که زمان متناظر با مکان ذره یا به بیان دقیق تر، زمان متناظر با هر نقطه از فضا چگونه اندازه گرفته می شود؟ یا به بیان دیگر، ساعت یا وسایل اندازه گیری زمان تا چه اندازه ای برای بررسی حرکت یک ذره ضروری است؟

جواب این سؤال را می توان با توجه به تعریفی که برای حرکت یک ذره در نظرگرفته شد، به دست آورد؛ زیرا ازتعریفی که برای حرکت یک ذره بیان گردید، چنین استنباط می گردد که باید به هرنقطه ازفضا، زمان یا لحظه ای نسبت داده شود. برای این منظور، یعنی برای نسبت دادن زمان به هر نقطه از فضا، باید به ازای هر نقطه از فضا، ساعتی در نظر گرفته شود. بنابراین، با این توضیحات می توان گفت که برای تشریح حرکت یک ذره، به طورکلی بی نهایت ساعت لازم است به نحوی که هرکدام از این ساعتها درنقاط مختلف فضا جایگزین شده اند. اما نکته ای که باید به آن توجه شود، این است که ساعتهای مستقر شده

درنقاط مختلف فضا، باید همزمان[1] بوده و همچنین باید با آهنگ یکسانی کار کنند.

همچنین، بایدتوجه داشت که همزمان بودن ساعتهای مستقر شده در نقاط مختلف فضا، نقش مهم و اساسی درتشریح حرکت یک ذره دارد. معمولاً برای همزمان کردن[2] این ساعتهای بی شمار، می توان ازدو روش زیراستفاده نمود.

- انتقال ساعت مرجع به همه نقاط فضا.
- استفاده از یک سیگنال.

در فیزیک کلاسیک یا نیوتنی، برای همزمان کردن ساعتها می توان با قبول فرضهایی از دو روش فوق استفاده کرد. بنابراین، برای استفاده از روش اول، باید فرض شود که جابه جایی و حرکت ساعت، اثری روی آهنگ کارآن نداشته باشد. و دراستفاده از روش دوم، فرض براین است که سیگنالی با سرعت بی نهایت وجود دارد، به طوری که می توان دریک آن، همه ساعتهای واقع در نقاط مختلف فضا را همزمان کرد.

اینکه چرا در فیزیک کلاسیک، برای همزمان کردن ساعتها از موج یا سیگنال الکترومغناطیسی استفاده نمی شود، به طور خلاصه می توان ادعا نمود که تمامی طرح و مضمون فیزیک کلاسیک، یا به عبارت دیگر، همه مفاهیم و قوانین آن به طورجدی و ناگسستنی با فرض مربوط به وجودسیگنالی باسرعت بی نهایت، ارتباطی تنگاتنگ و نزدیک دارد. این مطلب در این فصل با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار می گیرد.

بنابراین، جسم مرجع، همراه با یک دستگاه مختصات مناسب، مانند دستگاه مختصات دکارتی، کروی، استوانه ای یا ... و مجموعه ای نامتناهی ازساعتهای یکسان و همزمان که در تک تک نقاط فضا مستقر شده اند، چارچوب مرجع را درفیزیک کلاسیک تشکیل می دهند که برای تعریف مفهوم حرکت یک ذره و توصیف آن ضروری است.

همچنین، با توجه به اینکه ممکن است، ناظرهای مختلف برای بررسی حرکت یک ذره، از چارچوبهای مرجع متفاوتی استفاده نمایند، درنتیجه برای انطباق و پیوند مشاهدات ناظرهای واقع درچارچوبهای مرجع مختلف، باید قوانین تبدیلی معینی تعریف و ارائه گردند.

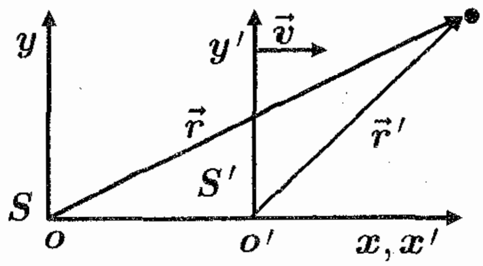
---

1- Synchronous 2- Synchronization

دربخش بعد، روابط تبدیلی در فیزیک کلاسیک بررسی می شود.

## ۱ - ۴ : تبدیلات گالیله

بعد ازتعریف وآشنایی با چارچوب مرجع، اکنون باید بتوانیم روابط تبدیلی بین چارچوبهای مرجع مختلف را به دست آوریم. برای این منظور، مطابق شکل (۱-۱) دوچارچوب $S$ و $S'$ را در نظر می گیریم. همچنین برای ساده سازی مسأله، فرض می کنیم که محورهای مختصات دو چارچوب درحین حرکت نسبی دوچارچوب موازی یکدیگر باشند. به عبارت دیگر، محورهای دو چارچوب نسبت به یکدیگردوران نداشته باشند. همچنین، فرض می کنیم که چارچوب $S'$ با سرعت ثابت $\vec{v} = v\vec{i}$، نسبت به چارچوب $S$ درامتداد محورمشترک $x$ و $x'$ حرکت کند.




شکل (۱-۱) : تبدیل گالیله

اکنون، با توجه به این فرضها و همین طور با در نظرگرفتن شکل(۱-۱)، می توان نوشت:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{oo} \qquad (۱-۱)$$

که درآن $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ به ترتیب بردارهای مکانی ذره درچارچوبهای $S$ و $S'$ بوده و $\overrightarrow{oo'} = vt\vec{i}$ می باشد. همچنین، رابطهٔ برداری (۱-۱) را می توان برحسب مؤلفه های آن به صورت

$$x = x' + vt \ , \ y = y' \ , \ z = z' \ , \ t = t' \qquad (۲-۱)$$

نوشت. و تبدیلات وارون از چارچوب $S'$ به چارچوب $S$ نیز با روابط

$$x' = x - vt \ , \ y' = y \ , \ z' = z \ , \ t' = t \qquad (۳-۱)$$

بیان می شوند. در این صورت، روابط(۱-۲) یا (۱-۳) را تبدیلات گالیلهٔ[1] مختصات می نامند. همچنین، برای به دست آوردن تبدیلات سرعت گالیله می توان از رابطهٔ (۱-۱) نسبت به

1-Galilean transformations

زمان مشتق گرفت. دراین صورت، داریم:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \frac{d}{dt}(vt\vec{i}) \qquad (۴-۱)$$

و با توجه به ثابت بودن اندازه و جهت سرعت نسبی، خواهیم داشت:

$$\vec{u} = \vec{u}' + v\vec{i} \qquad (۵-۱)$$

این رابطه را می توان برحسب مؤلفه های سرعت دردو چارچوب، به صورت

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \quad , \quad u'_x = u_x - v \\ u_y &= u'_y \quad , \quad u'_y = u_y \\ u_z &= u'_z \quad , \quad u'_z = u_z \end{aligned} \qquad (۶-۱)$$

نوشت. اکنون، برای به دست آوردن تبدیل شتاب، از یک چاچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر، می توان از رابطهٔ (۱-۵)، مشتق گرفت. در این صورت، به دست می آوریم

$$\vec{a}' = \vec{a} \qquad (۷-۱)$$

بنابراین، تحت تبدیلات گالیله، شتاب یک ذره در دو چارچوب یکسان یا ناوردا باقی می ماند. از طرف دیگر، طبق تعریف، چارچوبها یا ناظرهایی که نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت حرکت می کنند، چارچوبها یا ناظرهای لخت[1] نامیده می شوند. درنتیجه، تبدیلات گالیله برای مختصات، سرعت و شتاب، ارتباط بین مختصات، سرعت و همین طور شتاب یک ذره را در دو چارچوب مرجع لخت $S$ و $S'$، بیان می کنند.

تبدیلات گالیله ممکن است، درحالت کلی تعدادی ازکمیّات را تغییردهند و تعدادی را بدون تغییرنگه دارند. کمیّاتی که تحت تبدیلات گالیله درگذر از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر بدون تغییر باقی می مانند، ناورداهای تبدیل[2] نامیده می شوند. به عنوان مثال، شتاب یک ذره تحت تبدیلات گالیله،یک کمیّت ناورداست. همچنین اصلی که تعیین می کند، چه کمیّاتی بر اثر تبدیل ازیک چارچوب به چارچوب دیگرناوردا باقی می مانند، به طور کلی اصل نسبیت[3] نامیده می شود. این کمیّات از نظرهمهٔ ناظرهای واقع درچارچوبهای مختلف یکسان بوده ونقش مهمی در فرمولبندی قوانین فیزیک ایفا می کنند.

---

1 - Inertial Observer 2- Invariants of transformation
3 - Principle of relativity

همچنین، براساس تبدیلات گالیله، $\vec{a} = \vec{a}'$ است و چون جرم یک ذره نیز در فیزیک کلاسیک ناورداست، بنابراین $m\vec{a} = m\vec{a}'$ یا $\vec{F} = \vec{F}'$ خواهد بود. به عبارت دیگر، نیرویی که به یک ذره وارد می شود، درچارچوبهای مرجع $S$ و $S'$ یکسان اندازه گیری می شوند. از طرف دیگر، به سادگی می توان نشان داد، ناظرهای مختلف علی رغم اینکه تکانه و انرژیهای متفاوتی را به یک ذره نسبت می دهند، با این حال قوانین پایستگی تکانه و انرژی، درهمهٔ چارچوبهای مرجع لخت برقرار می باشند.

نکتهٔ دیگر اینکه اصول مکانیک نیوتنی و همچنین تبدیلات گالیله ایجاب می کنند که طول، جرم و زمان، یعنی سه کمیّت اساسی در مکانیک ازحرکت نسبی ناظرها یا چارچوبها مستقل باشند. به بیان دیگر، قوانین نیوتن در مورد حرکت یک ذره یا همین طور سیستمی از ذرات، در تمام چارچوبهای لخت یکسان می باشند. این موضوع در واقع بدان معنی است که به وسیلهٔ هیچ آزمایش مکانیکی، نمی توان در مورد حرکت یا سکون یک چارچوب لخت، نسبت به چارچوبهای مرجع لخت دیگر، اطلاعی کسب نمود. البته، این مطلب در صورتی مطرح است که آزمایش مکانیکی، کاملاً در داخل چارچوب مرجع و بدون هیچگونه ارتباطی با محیط بیرون صورت گرفته باشد.

## ۱ - ۵ : اصل نسبیت گالیله و چارچوب مرجع مطلق

اکنون، بعد ازآشنایی با مفهوم چارچوب مرجع و همین طور تبدیلات گالیله، می توان در مورد چارچوبهای مرجع مختلف صحبت کرد. درفیزیک کلاسیک می توان یک چارچوب مرجع اصلی و بنیادی به نام چارچوب مرجع مطلق[1] تعریف کرد. بعد ازتعریف این چارچوب، می توان چارچوبهای مرجع مختلف را دسته بندی نمود. این دسته بندی به وسیلهٔ اصل نسبیت گالیله[2]، صورت می گیرد. اما قبل از بیان این اصل، لازم است ابتدا چارچوب مرجع مطلق را تعریف نماییم. براساس اصول مکانیک نیوتنی، این چارچوب دارای ویژگیهای اساسی زیرمی باشد.

---

1- Absolute reference frame　　2- Galileo's relativity principle

- مبدأ چارچوب مرجع مطلق به جای یک جسم واقعی (به عنوان جسم مرجع)، به فضای کیهانی وابسته است.
- بنا به فرض، چارچوب مرجع مطلق ساکن است.
- فضا و زمان درچارچوب مرجع مطلق، دارای ویژگیهای اساسی زیر می باشند:

الف : فضای این چارچوب، فضایی است مطلق، سه بعدی، پیوسته[1]، اقلیدسی[2]، همگن[3] و همسانگرد[4].

ب : زمان نیز دراین چارچوب، مطلق، یک بعدی، پیوسته، یک سویه و همگن می باشد.

- درچارچوب مرجع مطلق، قوانین اساسی حرکت (قوانین نیوتن) معتبر هستند.

بنابراین، با در نظرگرفتن و پذیرش فرضهایی، می توان چارچوبی با ویژگیهای فوق در فیزیک نیوتنی ایجاد نمود. بعد ازتعریف چارچوب مرجع مطلق، اکنون می توان چارچوبهای مرجع دیگررا با مقایسه با این چارچوب، دسته بندی کردکه برای این منظور، ازاصل نسبیت گالیله استفاده می شود. براساس این اصل، هر چارچوب مرجعی که نسبت به چارچوب مرجع مطلق درحال سکون یا دارای حرکت یکنواخت باشد، یک چارچوب مرجع لَخت محسوب می شود. همین طور، اگر چارچوب مرجعی نسبت به چارچوب مرجع مطلق، دارای شتاب باشد، در این حالت یک چارچوب مرجع نا لخت یا شتابدار خواهد بود.

همچنین، از اصل نسبیت گالیله، می توان نتیجه گرفت که همه چارچوبهای مرجع لخت از نظرمکانیکی هم ارزند و این ویژگی به معنای آن است که :

اولاً : ویژگیهای عمومی فضا و زمان در هر چارچوب مرجع لختی که

---

1- Continuous
2- Euclidean
3- Homogenous
4- Isotropic

به طورجداگانه اختیار شده باشد، کاملاً یکسانند.

ثانیاً : درهمه چارچوبهای لخت، پدیده های مکانیکی از قوانین یکسانی پیروی می کنند.

اکنون، با توجه به مطالبی که بیان شد، می توان نتیجه گرفت که یک چارچوب مرجع واقعی درحالت کلی نمی تواند یک چارچوب مرجع لخت باشد. به عبارت دیگر می توان گفت که یک چارچوب مرجع واقعی، چارچوبی است که گاهی کمتر و گاهی بیشتر با چارچوب مرجع لخت مطابقت می کند. به عنوان مثال، چارچوب مرجع وابسته به مرکز زمین، نسبت به چارچوب مرجع وابسته به مرکز خورشید، کمتر لخت است. در حالی که چارچوب مرجع وابسته به مرکز کهکشان راه شیری، ازچارچوب مرجع وابسته به مرکزخورشید، بیشتر لخت است. اما تجربه نشان می دهد که چارچوب وابسته به ستارگان ثابت بیش ازهرچارچوب دیگری لخت می باشد. به بیان دیگر، ویژگیهای عمومی این چارچوب خیلی نزدیک به ویژگیهای چارچوب مطلق می باشد. به این ترتیب، چارچوب مرجع لخت را می توان یکی از مهمترین انتزاعها والبته نخستین آنها در فیزیک کلاسیک یا به طور کلی در فیزیک به شمارآورد.

درحالت خاص، اگر دو چارچوب لخت $S$ و $S'$، باسرعت نسبی یکنواخت $v$، مفروض باشند. ازنظرمکانیکی ارزشی کاملاً یکسان خواهند داشت. به عبارت دیگر، طبق فرض می توان یکی از این چارچوبها را ساکن در نظر گرفته وتصورنمود که $S$ یا $S'$ با سرعت $2v$، نسبت به دیگری حرکت می کند. بنابراین، اگر درهر یک ازچارچوبهای لخت فوق،آزمایش یا آزمایشهای مکانیکی یکسانی صورت گیرد، نتیجهٔ این آزمایش یا آزمایشها، کاملاً یکسان خواهد بود. بنابراین، با توجه به این توضیحات می توان گفت، که ازروی نتیجه یا نتایجی که ناشی از آزمایشهایی در درون یک چارچوب لخت باشد، به هیچ عنوان نمی توان به حقیقت مربوط به حرکت یا سکون یک چارچوب مرجع لخت نسبت به هر چارچوب مرجع لخت دیگر پی برد.

اکنون، ویژگیهایی که برای فضا و زمان در چارچوب مرجع مطلق در نظرگرفته شد، به

اختصار توضیح داده می شوند. این ویژگیها برای فضای چارچوب مرجع مطلق به صورت زیردر نظرگرفته می شوند.

**فضای مطلق** : بر اساس نظر نیوتن، فضای مطلق به خودی خود، بدون ارتباط با هیچ عامل خارجی، همیشه یکسان وحرکت ناپذیرمی باشد.

**سه بعدی بودن فضا**، به این معناست که هر نقطهٔ آن را می توان به کمک سه پارامتر یا مختصهٔ مانند $(x, y, z)$، معین نمود.

**پیوستگی فضا**، به طور ساده به این مفهوم است که بین اعداد حقیقی و نقاط فضا، می توان یک تناظر یک به یک بر قرار کرد. یعنی همان طورکه مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است، در این صورت، مجموعهٔ نقاط فضا نیز پیوسته می باشند. یا به بیان ساده تر، بین هردو نقطهٔ دلخواه از فضا، می توان نقطهٔ دیگری را در نظر گرفت.

**معیار اقلیدسی بودن فضا**، درواقع، عبارت است از امکان ایجاد دستگاه مختصات دکارتی درآن، به نحوی که فاصلهٔ دو نقطه از فضا را بتوان به صورت $\Delta l^۲ = \Delta x^۲ + \Delta y^۲ + \Delta z^۲$، به دست آورد. بعداً نشان داده می شود که درفضا - زمان چهار بعدی چنین امکانی وجود ندارد.

**همگنی فضا**، نیز به طور ساده به این معناست که همه نقاط آن دارای ارزشی یکسان هستند و هیچ نقطه ای از فضا، نسبت به نقطه ای دیگر ارجحیتی ندارد.

**وهمسانگردی فضا** ، به این مفهوم است که هیچ جهتی درفضا، نسبت به جهات دیگر، ارجحیّت و مزیتی ندارد.

بنابراین، با توجه به این توضیحات می توان گفت که همگنی و همسانگردی فضا به ترتیب، به این صورت تظاهر می کنند که انتقال چارچوب مرجع مطلق به موازات محورهای خود، یا همین طور دوران محورهای آن به اندازهٔ زاویه ای دلخواه، هیچگونه تغییری در ویژگیهای فیزیکی پدیده ها دراین چارچوب مرجع ایجاد نمی کند.

اما ویژگیهای عمومی زمان را نیز می توان به صورت زیر بیان نمود.

**زمان مطلق** ، نیوتن عقیده داشت: زمان کمیّتی مطلق، حقیقی و ریاضی، که براساس خواص

طبیعی خود، به طور یکنواخت، بدون هیچ گونه رابطه ای با عوامل خارجی، جریان دارد.

**یک بعدی بودن زمان،** به این معناست که هر لحظه از زمان را می توان تنها با یک پارامتر معین کرد. بنابراین، می توان مجموعه ای از رویدادها را که در یک نقطه از فضا اتفاق می افتند، با مجموعه ای خطی از این پارامتر شماره گذاری کرد.

**پیوستگی زمان،** نیزمانند پیوستگی فضا به این معناست که بین مجموعهٔ لحظه های مربوط به رویدادهایی که در یک نقطه از فضا روی می دهند و مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، تناظری یک به یک برقراراست. به بیان ساده، می توان گفت که هر لحظه از زمان را می توان با یک عدد حقیقیِ مثبت مشخص کرد.

**یک سویه بودن زمان،** نیزبه این مفهوم است که درمورد دوجهت متقابل جریان زمان، تنها یکی از آنها را می توان درنظرگرفت. به بیان دیگر، می توان گفت که زمان برگشت ناپذیر است.

**وهمگنی زمان** را نیز می توان به این صورت توضیح دادکه همه لحظه های زمان ارزشی یکسان دارند و درحقیقت، هیچ لحظه ای از زمان، نسبت به لحظه های دیگرمزیت و ارجحیّتی ندارد.

به این ترتیب، در بررسی پدیده های فیزیک، همگنی زمان به این صورت تظاهرمی کند که ویژگیهای فیزیکی پدیده ها به زمان یا لحظهٔ خاصی بستگی ندارند. به عبارت دیگر، از همگن بودن زمان می توان به این نتیجه رسید که اگر آزمایش معینی، با شرایط کاملاً یکسان و برابر در دو زمان مختلف انجام گیرد، نتیجه های به دست آمده از هردو آزمایش نباید با یکدیگر اختلاف داشته باشند.

## ۱ - ۶ : پایه های فیزیک کلاسیک

اگرهریک از شاخه های علوم، ازجمله فیزیک را تجزیه و تحلیل نماییم، می توان به این نتیجه رسید که هریک از این شاخه ها براساس یک سری از**اصول موضوع**، استوار می باشند. این اصول، درواقع ابتدائی ترین حکمهایی هستند که تجربهٔ آدمی آنها را تأیید کرده است و معمولاً اثبات نمی شوند. بررسی فیزیک کلاسیک نیز نشان می دهد که شالوده و اساس آن، اصول

موضوع زیرمی باشند.

- اصل نسبیت گالیله
- امکان رسیدن به سرعت ناوردای بی نهایت، درهر یک از چارچوبهای مرجع لخت.
- فرضی که بیان می کند، سرعت نسبی چارچوبهای مرجع لخت، نمی تواند نامتناهی باشد.
- فرض مربوط به مطلق بودن، اقلیدسی بودن، سه بعدی بودن و پیوستگی فضا درچارچوب مرجع مطلق، و همین طور فرض همگنی و همسانگردی فضا در این چارچوب مرجع .
- اصل یا فرض مربوط به همگنی و پیوستگی زمان ، و همین طور یک بعدی و یک سویه بودن آن در چارچوب مرجع مطلق.

دو اصل موضوع اول، همراه باشرط مربوط به متناهی بودن سرعت نسبی چارچوبهای مرجع لخت، درواقع به ویژگیهای عمومی ماده، و همچنین اصول موضوع چهارم و پنجم، درحقیقت، به ویژگیهای عمومی فضا و زمان در چارچوب مرجع مطلق ارتباط پیدا می کنند. از طرف دیگر، اصل مربوط به امکان رسیدن به سرعت بی نهایت، در هر یک ازچارچوبهای مرجع لخت، به معنای آن است که وجود سرعت ناوردای بی نهایت را در همه چارچوبهای مرجع بپذیریم. این سرعت برای فیزیک کلاسیک بنا به دلایل زیر ضروری می باشد.

- بدون داشتن سیگنالی با سرعت بی نهایت، نمی توان ساعتهای واقع در نقاط مختلف فضا را دریک آن یا یک لحظه، همزمان کرد. به عبارت دیگر، بدون فرض وجود سرعت بی نهایت، نمی توان چارچوب مرجع ایجاد نمود.
- قانون کلاسیک جمع سرعتها (تبدیلات گالیلهٔ سرعت) مستقیماً با این

اصل سازگار است.

- **آنی وهمزمان بودن برهم کنشها در فیزیک کلاسیک، تنها با پذیرش اصل وجود این سرعت در فیزیک کلاسیک، امکان پذیر می باشد.**

برای نشان دادن دلیل دوم، فرض کنید که چارچوب لخت $S'$، با سرعت یکنواخت $\vec{v}$ نسبت به چارچوب ساکن $S$، در راستای محورهای مشترک $x$ و $x'$ دوچارچوب حرکت کند. حال اگر فرض کنیم، درچارچوب لخت $S'$، سیگنالی با سرعت بی نهایت، یعنی $u' = \infty$ وجود داشته باشد، به طوری که $\vec{v} \parallel \vec{u}'$ در نظرگرفته شود؛ در این صورت با استفاده از تبدیلات گالیلهٔ سرعت، می توان سرعت سیگنال را در چارچوب لخت $S$ به صورت

$$\begin{aligned} u &= u' + v = \infty + v \\ &= \infty \end{aligned} \tag{۱-۸}$$

به دست آورد. بنابراین، سرعت سیگنال در چارچوب $S$ نیز بی نهایت می باشد. برعکس، اگر فرض کنیم که درفیزیک کلاسیک سرعتی ناوردا وجود داشته باشد. در این صورت با توجه به تبدیل گالیلهٔ سرعت؛ یعنی رابطهٔ $u = u' + v$ و شرط ناوردایی سرعت، یعنی $u = u'$، و همین طور با در نظرگرفتن فرض مربوط به متناهی بودن سرعت نسبی چارچوبهای مرجع لخت، یعنی به ازای مقدار متناهی $v$، معلوم می شود که ناوردا بودن $u$ یا $u'$، تنها درصورتی امکان دارد که داشته باشیم: $u = u' = \infty$.

همان طورکه قبلاً اشاره شد، کمیّتی که درگذر ازیک چارچوب مرجع لخت به چارچوب مرجع لخت دیگربدون تغییر بماند، ناوردا یا مطلق نامیده می شود. بنابراین، سرعت ناوردا را در فیزیک کلاسیک می توان سرعت بی نهایت در نظرگرفت.

درفیزیک کلاسیک براحتی می توان به سرعت بی نهایت دست یافت؛ زیرا برای رسیدن به این سرعت، می توان نیروی ثابتی را درمدت زمان بسیارطولانی به یک ذره اعمال کرد. یعنی بنابر قانون دوم نیوتن، اگر نیروی ثابت $F$ را به ذره ای به جرم $m$ اعمال نماییم، شتاب آن از رابطهٔ $a = F/m$ به دست می آید. با استفاده از رابطهٔ $v = at + v_o$، می توان درمدت زمان بسیارطولانی سرعت ذره را تا بینهایت افزایش داد. به عبارت دیگر، در این

رابطه اگر $t \to \infty$ آنگاه $v \to \infty$ میل می کند. بنابراین، در فیزیک کلاسیک می توان به سرعت بی نهایت به عنوان یک سرعت حدی دست یافت. بعداً خواهیم دید که نقش سرعت حدی درفیزیک نسبیتی را سرعت نور به عهده می گیرد که به عنوان یک سرعت ناوردا درنسبیت مطرح می شود. ناوردا بودن این سرعت نتایجی را به دنبال خواهد داشت که در فصلهای بعد مورد بررسی قرار می گیرند.

حال، برای توضیح دلیل سوم، می دانیم که قانون سوم نیوتن را می توان به صورت $\vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۲۱} = ۰$ نوشت. که در آن $\vec{F}_{۱۲}$ نیرویی است که از طرف جسم ۱ به ۲ وارد می شود و $\vec{F}_{۲۱}$ نیز نیروی واکنش یا نیرویی است که از طرف جسم ۲ به ۱ اعمال می شود. همچنین، می دانیم که رابطهٔ $\vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۲۱} = ۰$، باید در هر لحظه از زمان صادق باشد، حتی اگر دو جسم در فاصله دوری از یکدیگر قرار داشته باشند. براین اساس، بر هم کنش دو جسم آنی و درمدت زمان صفر صورت می گیرد. به عنوان مثال، اگر برهم کنش زمین و خورشید را در نظر بگیریم، این برهم کنش آنی است. یعنی اگر اختلالی درخورشید روی دهد، این اختلال را بلافاصله در روی زمین می توان مشاهده کرد. درحقیقت، آنی و همزمان بودن برهم کنشها در فیزیک کلاسیک، نتیجهٔ پذیرش اصل وجود سیگنالی با سرعت بی نهایت می باشد.

درفیزیک کلاسیک ویژگیهای عمومی فضا و زمان که در اصول موضوع چهارم وپنجم بیان شدند، درهمه چارچوبهای مرجع لخت، اگرهر کدام به طورجداگانه مورد بحث قرار گیرند، کاملاً یکسان خواهند بود. درنتیجه، این ویژگیها را می توان مطلق یا ناوردا نامید. به عبارت دیگر، این ویژگیها به انتخاب چارچوب مرجع لخت معینی بستگی نداشته ومستقل ازآن می باشند.

## ۱ ـ ۷ : پیامد های ناشی از پذیرش اصل وجود سرعت بی نهایت در فیزیک کلاسیک

همان طور که قبلاً اشاره شد، اصل مربوط به امکان رسیدن به سرعت بی نهایت درهرچارچوب مرجع لخت، به معنای آن است که وجود سرعت ناوردای بی نهایت را در همهٔ چارچوبهای مرجع بپذیریم. پذیرش اصل وجود این سرعت در فیزیک کلاسیک، نتایج و پیامدهای

مهمی را به دنبال دارد که در اینجا می توان به اختصار به آنها اشاره نمود. این پیامدها عبارتنداز:

- مطلق بودن زمان
- مطلق بودن همزمانی
- ناوردایی اصل علیّت

قبل ازپرداختن به توضیح نتایج فوق، ابتدا رویداد [1] را تعریف می کنیم. یک رویداد را می توان یک فرایند یا کنش فیزیکی متناهی درفضا و زمان، با ماهیت فیزیکی دلخواه درنظر گرفت. بنابراین، یک رویداد تنها با مکانی که درآن اتفاق افتاده و زمان وقوع آن تعیین می گردد. در نتیجه، یک رویداد دلخواه را می توان به وسیلهٔ چهارمختصه یا مؤلفه نمایش داد. در این صورت، در دستگاه مختصات دکارتی یک رویدا را می توان به شکل $(x,y,z,t)$ نشان داد. مهمترین ویژگی یک رویداد، مطلق یا ناوردا بودن آن است. ناوردا بودن یک رویداد نیز بدان معنی است که اگر رویدادی دریک چارچوب مرجع رخ دهد، این رویداد در همهٔ چارچوبهای مرجع دیگر نیز روی می دهد. به عبارت دیگر، آن رویداد در همهٔ چارچوبهای دیگرنیز قابل مشاهده و بررسی است. درفیزیک کلاسیک می توان رویدادها را به صورت نقطه های چهاربعدی نشان داد. یعنی سه بعد مربوط به مکان یا فضای رویداد، و یک بعد مربوط به زمان وقوع آن. البته، بیان صوریِ نقطه ها به شکل چهاربعدی، یا با چهار پارامتر، از دیدگاه هندسی، نمی تواند نشان دهندهٔ یک فضای متریک [2] باشد. همان طورکه می دانیم، یک فضای متریک را به طور ساده، هنگامی می توان ایجاد کردکه بتوان فاصلهٔ بین نقطه های نزدیک به هم را درآن تعریف کرد. به عنوان مثال، متریک یا فاصله در فضای سه بعدی اقلیدسی، دریک دستگاه مختصات دکارتی به صورت $\Delta s^۲ = \Delta x^۲ + \Delta y^۲ + \Delta z^۲$ بیان می گردد.

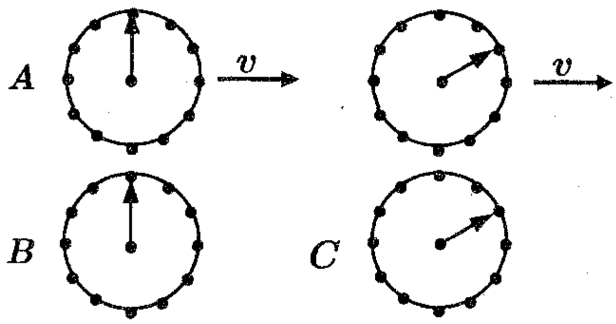
بنابراین، در فیزیک کلاسیک، برای شکلهای مختلف چهاربعدی رویدادها، نمی توان رابطهٔ مشابهی را پیدا کرد. به عبارت دیگر، فضا و زمان در فیزیک کلاسیک از هم مجزا و مستقل بوده و به عنوان دو موجود مطلق به شمار می آیند. اما همان طورکه بعداً خواهیم دید، وضعیت در فیزیک نسبیتی به گونهٔ دیگری مطرح می شود. درواقع، در فیزیک نسبیتی، فضا و

1- Event 2- Metric space

زمان درهم تلفیق می شوند و موجودی واحد به نام فضا ـ زمان[1] را ایجاد می کنند. حال، پس ازآشنایی با مفهوم یک رویداد، نتایج حاصل از پذیرش اصل مربوط به وجود سرعت بی نهایت را در فیزیک کلاسیک را مورد بررسی قرار می دهیم.

نتیجهٔ اول ازاین اصل، مطلق بودن زمان است؛ زیرا با داشتن سیگنالی با سرعت بی نهایت می توان همه ساعتهای واقع در نقاط مختلف فضا را در یک لحظه یا یک آن همزمان کرد. درواقع، این مسأله منجر به ایجاد زمان عام واحد، برای همه چارچوبهای مرجع لخت می گردد.

برای توضیح بیشتر این موضوع، می توان به صورت زیر عمل کرد. با توجه به شکل (۱-۲)، اگر درچارچوب $S$، ساعت متحرک $A$ و دو ساعت ساکن $B$ و $C$ مفروض باشند، دراین صورت، ساعت $A$ که همان زمان ساعت $B$ را درانطباق فضایی دو ساعت نشان می دهد، همان زمان ساعت $C$ را ضمن رسیدن به آن نشان خواهد داد.




شکل (۱-۲): همزمانی ساعتها

درتبدیلات گالیله نیز که با روابط(۱-۲) داده شده اند، رابطهٔ آخر، یعنی $t = t'$ به معنای مطلق یا ناوردا بودن زمان درچارچوبهای مرجع مختلف می باشد. به بیان دیگر، درگذر ازیک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر، زمان بدون تغییر باقی می ماند.

پیامد دومی که از فرض وجود، سیگنال با سرعت بی نهایت درفیزیک کلاسیک مطرح می شود، ناوردایی همزمانی[2] می باشد؛ زیرا از ناوردا بودن زمان درچارچوبهای مرجع مختلف، می توان به این نتیجه رسید که همزمانی نیز در این چارچوبها ناوردا است.

برای نشان دادن این موضوع، فرض کنید که درچارچوب مرجع $S'$، دو رویداد $A'$ و $B'$ که از نظر فضایی درفاصلهٔ $\Delta x'$ از یکدیگرقرار دارند، به طور همزمان روی دهند. به

---

1- Space – time 2- Invariance of Simultaneity

عبارت دیگر، فاصله یا بازهٔ زمانی بین آنها برابر صفر باشد یا $\Delta t' = t'_B - t'_A = 0$ . به طریق زیر می توان نشان داد که این دو رویداد در هرچار چوب مرجع دیگری مانند $S$ نیز همزمان خواهند بود. برای این منظور، با توجه به همزمانی رویدادها درچارچوب $S'$ می توان نوشت:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{0} = c' \longrightarrow \infty \tag{۹-۱}$$

از طرف دیگر، درچارچوب لخت $S$ نیز با استفاده ازفرض وجود سیگنالی با سرعت بی نهایت، می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c' \to \infty \tag{۱۰-۱}$$

دراین صورت، داریم: $\Delta t = 0$. یعنی دو رویداد $A$ و $B$ درچارچوب $S$ نیزهمزمان می باشند. بنابراین، درفیزیک نیوتنی اگر دو رویداد در یک چارچوب به طور همزمان روی دهند، درهمهٔ چارچوبهای دیگر نیز همزمان خواهند بود و نتیجه اینکه همزمانی رویدادها در فیزیک نیوتنی ناوردا ست.

و بالاخره، نتیجه یا پیامد سوم از فرض مربوط به پذیرش اصل وجود سیگنال با سرعت بی نهایت، ناوردایی اصل علیّت[1] می باشد. اگر رویدادهای مختلف را درنظر بگیریم، ممکن است رویدادی نتیجهٔ رویدادی دیگر باشد. دراین صورت، رویداد اول را علّت، و رویداد دوم را معلول رویداد اول می نامند. این ترتیب زمانی وقوع رویدادها را که بین رویدادهای علّت و معلول برقرار است، معمولاً اصل علیّت می نامند. و منظور از ناوردایی اصل علیّت، این است که این ترتیب زمانی برای وقوع رویدادهای علّت و معلول در همهٔ چارچوبهای مرجع به صورت یکسان است. به بیان دیگر، اگر در یک چارچوب دلخواه، مثلاً $S$، ابتدا رویداد $A$ و سپس رویداد $B$ رخ داده باشد، در این حالت، در تمامی چارچوبهای مرجع دیگر نیز ترتیب زمانی وقوع رویدادها، به همین صورت خواهد بود. یعنی ابتدا رویداد علّت $A$، و سپس رویداد معلول یا $B$، اتفاق می افتد. با کمی دقت می توان دریافت که در حقیقت ناوردایی اصل علیّت، ناشی از پذیرفتن وجود سیگنال با سرعت بی نهایت در فیزیک کلاسیک می باشد.

با استفاده از تبدیلات گالیله به راحتی می توان ناوردایی ترتیب زمانی رویدادها را نیز

1- Causality Principle

نشان داد. برای این منظور فرض کنید، درچارچوب $S'$، دو رویداد $A$ و $B$ در مکانهای $x'_A$ و $x'_B$ روی داده باشند. همچنین فرض می کنیم، $x'_B > x'_A > o$ بوده و این رویدادها به ترتیب در زمانهای $t'_A$ و $t'_B$ رخ دهند و $t'_B > t'_A$ باشد. به عبارت دیگر، رویداد $B$، نتیجه ای از رویداد $A$ باشد. اکنون، برای بررسی ترتیب زمانی این دو رویداد در چارچوب $S$، می توان ازتبدیلات گالیله استفاده کرد. در این صورت، می توان نوشت:

$$x_A = x'_A + vt'_A \quad (۱-۱۱)$$

و

$$x_B = x'_B + vt'_B \quad (۱-۱۲)$$

حال، با درنظر گرفتن ناوردایی زمان داریم: $t'_A = t_A$ و $t'_B = t_B$. بنابراین، می توان نوشت:

$$t_B - t_A = t'_B - t'_A \quad (۱-۱۳)$$

اکنون، از رابطهٔ (۱-۱۳) می توان نتیجه گرفت که $t_B > t_A$ است. به عبارت دیگر، در چارچوب $S$ نیز ابتدا رویداد $A$ اتفاق می افتد، سپس رویداد $B$. به همین ترتیب، اگرمکان رویدادها رانیز تعویض کنیم، یعنی اگر $x'_B < x'_A$ و $x'_A , x'_B > \circ$، در نظر گرفته شوند، اما ترتیب زمانی وقوع آنها به همان صورت قبل باشد. در این صورت، با کم کردن رابطهٔ (۱-۱۱) از رابطهٔ (۱-۱۲)، به دست می آوریم:

$$x_B - x_A = (x'_B - x'_A) + v(t'_B - t'_A) \quad (۱-۱۲)$$

یا

$$x_B - x_A = (t'_B - t'_A)(v - u') \quad (۱-۱۳)$$

که در آن سرعت $u'$ به صورت

$$u' = \frac{x'_A - x'_B}{t'_B - t'_A} = -\frac{x'_B - x'_A}{t'_B - t'_A} \quad (۱-۱۴)$$

تعریف شده است. بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۱-۱۳)، اگر $v > u'$ باشد، دراین صورت $x_B > x_A$ خواهد بود. همین طور اگر $v < u'$ باشد، در این حالت $x_B < x_A$ خواهد بود. بنابراین، دراین حالت می توان با توجه به سرعت نسبی دو چارچوب، مکان وقوع رویدادها را در چارچوب دیگر جابه جا کرد. اما در چارچوب $S$، در این حالت نیز ابتدا

رویداد $A$ و سپس رویداد $B$ رخ خواهد داد. درنتیجه جابه جا کردن مکان وقوع رویدادها، تأثیری در ترتیب زمانی وقوع آنها ندارد. بنابراین، درحالت کلی، ترتیب زمانی وقوع رویدادها یا اصل علیّت در چارچوبهای مرجع مختلف ناورداست.

حال، با توجه به مطالبی که بیان گردید، ناوردایی اصل علیّت را درحقیقت می توان پیامدی از وجود سرعت بی نهایت در فیزیک نیوتنی دانست. اما در نسبیت به علت وجود سرعت حدی نور، وضعیّت به گونه ای دیگر است، یعنی ممکن است ترتیب زمانی رویدادها در چارچوبهای دیگر عوض شود. که این مسأله در فصل سوم مورد بررسی قرارمی گیرد.

**خلاصه :**

حال، با توجه به مطالبی که در این فصل بیان گردید، می توان نتیجه گرفت که با پذیرفتن اصول موضوعی که در بخش(۱– ۶) به آنها اشاره شد و همین طور تبدیلات گالیله، تمامی قوانین فیزیک، به استثنای نظریهٔ الکترومغناطیس، درهمهٔ چارچوبهای مرجع لخت به طور هموردا تبدیل می شوند. یعنی شکل این قوانین، درتمامی چارچوبهای لخت یکسان باقی می مانند.

همچنین، در فیزیک کلاسیک به دلیل ماهیّت تبدیلات گالیله، کمیّتهایی مانند، جرم ذرات، زمان و مکان یا فضا ناوردا می باشند. تبدیلات گالیله ایجاب می کنند که شتاب، همزمانی رویدادها و اصل علیّت نیز ناوردا باشند. ازطرف دیگر، برای همزمان کردن ساعتها، جهت ایجاد چارچوب مرجع، باید سرعت حدی و ناوردای بی نهایت را در فیزیک کلاسیک مطرح نماییم. اما در فیزیک نسبیتی مشاهده خواهیم کرد که این مفاهیم و کمیّتها، به علّت سرعت حدی و ناوردای نورهمگی نسبی می باشند.

# ۲

# سینماتیک نسبیتی

## مقدمه :

نظریهٔ نسبیت را می توان یکی از مهمترین مباحث در فیزیک به شمار آورد. دو مبحث کلی در نسبیت مورد بررسی قرار می گیرد: نسبیت خاص[1] و عام[2]. در نظریهٔ نسبیت خاص که در سال ۱۹۰۵ به وسیلهٔ آلبرت اینشتین[3](۱۹۵۵-۱۸۷۹)، دانشمند بزرگ آلمانی ارائه گردیده است، پدیده های فیزیک درچارچوبهای مرجع لخت یا چارچوبهای بدون شتاب مورد بررسی قرار می گیرند. درمبحث نسبیت عام نیز می توان پدیده های فیزیک را در چارچوبهای مرجع نالخت یا شتابدار مورد مطالعه قرار داد. این نظریه نیز به وسیلهٔ اینشتین در

---

1- Special Relativity　　2- General Relativity
3- Einstein, Albert

سال ۱۹۱۶ ارائه شده است. بنابراین، نسبیت خاص، گرانش را در بر نمی گیرد و این مبحث از فیزیک را می توان در نسبیت عام بررسی کرد. در نسبیت خاص، قوانین فیزیک برای همهٔ ناظرهای لخت یکسان است. در صورتی که درنسبیت عام، قوانین فیزیک برای همهٔ ناظرها، یعنی ناظرهای لخت و نا لخت یکسان می باشد. اگرچه معمولاً افتخارفرمولبندی نظریهٔ نسبیت، نصیب آلبرت اینشتین شده است. اما مراحل اولیه و مقدماتی آن را قبل از سال ۱۹۰۴، پوانکاره[1] (۱۹۱۲-۱۸۵۴) و لورنتس[2] (۱۹۲۸-۱۸۵۱) طی کرده بودند.

نکته ای که می توان به آن در اینجا اشاره کرد، این است که اینشتین از برخی کارهای انجام شدهٔ قبلی درزمان انتشاراولین مقاله اش در سال ۱۹۰۵ درخصوص نسبیت، بی اطلاع بود. به طوری که دوستان اینشتین غالباً بیان می کردند که او کم می خواند، ولی زیاد فکر می کرد.

اما سهم به سزای اینشتین در پرداختن به نظریهٔ نسبیت خاص را درحقیقت می توان جانشین سازی یا کنارگذاشتن بسیاری از فرضهای پذیرفته شده به وسیلهٔ لورنتس و سایرین، با دو اصل موضوع بنیادی دانست به طوری که همهٔ نتایج را می شد از آنها استنتاج کرد. علاوه بر این موضوع، اینشتین بعداً درفرمولبندی نظریهٔ نسبیت عام در سال ۱۹۱۶، سهمی اساسی و غیر قابل انکار داشته است؛ زیرا نخستین مقالهٔ او که برای نسبیت عام اهمیت زیادی دارد، یعنی تأملاتی در اثر گرانش بر نور، در ۱۹۰۷ منتشر شده است.

نسبیت خاص را می توان به دو بخش یا مبحث کلی تقسیم نمود: سینماتیک و دینامیک نسبیتی. دربخش سینماتیک، به طورکلی فضا و زمان و همین طور ارتباط بین آنها بررسی می شود. درواقع، می توان گفت که بیشتر پارادوکسها یا باطلنماها که عموماً ناشی از نادیده گرفتن بعضی فرضهای صحیح به وجود می آیند، در این بخش از نسبیت قرار می گیرند. درحالی که بررسی کمّیاتی مانند جرم، انرژی، تکانه و ... در مبحث دینامیک صورت می گیرد.

نظریهٔ نسبیت با همهٔ نتایج غیر عادی و دور از انتظاری که در بر دارد، همهٔ پدیده های شناخته شدهٔ طبیعت را دست کم به خوبی نظریه های قبل از آن توضیح می دهد. از این

---

1 - Poincaré, Jules Henri : ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی

2 - Lorentz, Hendrik Antoon : فیزیکدان و ریاضیدان هلندی.وی در سال ۱۹۰۲ به اتفاق پیتر زیمن به خاطر کشف و توضیح ریاضی اثر زیمن جایزهٔ نوبل را دریافت می کند.

گذشته، پدیده هایی را که با جهانبینی و یا نظریات نیوتنی به زحمت قابل توضیح بودند یا به هیچ عنوان توضیح داده نمی شدند، به طور کامل شرح می دهد. بر این اساس می توان گفت که نظریهٔ اینشتین نه تنها جانشین نظریات نیوتن گردید، بلکه مکمل آن نیز محسوب می گردد؛ زیرا همان طور که می دانیم، اصول و قوانین نیوتن هنوز هم با تقریب و دقت کافی در زندگی عادی و حتی در نجوم معمولی، از قبیل فرستادن ماهواره ها به فضا و قرار دادن آنها در مدارحول زمین و سیارات دیگر، همچنین بررسی حرکات بعضی از سیارات منظومهٔ شمسی به کار می رود.

از طرف دیگر، می توان مهمترین جنبهٔ نظریهٔ نسبیت اینشتین را درحقیقت تکذیب وجود فضای مطلق[1] و زمان مطلق[2] دانست. به عبارت دیگر، بر اساس این نظریه، اندازه گیریهای فضا و زمان بستگی به دستگاه یا چارچوب مرجع انتخاب شده دارد. و این اندازه گیریها نسبی می باشند. و در واقع به همین دلیل نظریه و اظهارات اینشتین در مورد فضا و زمان، تحت عنوان نظریهٔ نسبیت بیان می شوند.

همان طور که در فصل قبل اشاره شد، درفیزیک نیوتنی یا کلاسیک، فضا و زمان مطلق یا ناوردا هستند. درواقع، این دید از فضا و زمان، قرنهای متمادی مورد پذیرش دانشمندان بوده است. اما اینشتین با ارائه نظریهٔ خود در سال ۱۹۰۵، این نگرش از فضا و زمان را به طور کلی نفی کرد. همچنان که هرمان مینکوفسکی[3] (۱۹۰۹-۱۸۶۴) گفته است:

**از این پس فضای تنها وهمین طورزمان تنها، مطرود هستند و تنها نوعی اتحاد از آن دو، وجود مستقلی خواهد داشت.**

ازطرف دیگر، درنسبیت خاص با پذیرش دو اصل به عنوان اصول نسبیت، می توان تمامی قوانین فیزیک، ازجمله نظریهٔ الکترومغناطیس را نیز به طور کامل توضیح داد. اینشتین علاوه بردو اصل نسبیت خاص، اصول موضوع چهارم و پنجم را که دربخش(۱ - ۶) به آنها

---

1- Absolate Space　　2- Absolate time

3 - Mikkowski, Hermann : ریاضیدان روسی ـ آلمانی و یکی از استادان اینشتین می باشد که سهم به سزایی در نظریهٔ ریاضی نسبیت دارد. وی نظریهٔ هندسی اعداد را ابداع و در پیشرفت و تکامل آن تلاش زیادی کرد. و از روش هندسی برای حل بسیاری از مسائل پیچیده در نظریهٔ اعداد ؛ مسائلی در ریاضی فیزیک پیشرفته و نسبیت استفاده کرد.

اشاره شد، به همان صورتی که درفیزیک کلاسیک مطرح می شوند، پذیرفت. همچنین وی در ارتباط با اصل دوم، یعنی وجود سرعت بی نهایت در فیزیک کلاسیک، اصل مربوط به متناهی بودن سرعت نور را مطرح نمود. بالاخره وی در ارتباط با اصل سوم از اصول پذیرفته شده در فیزیک کلاسیک، یعنی متناهی بودن سرعت نسبی چارچوبهای مرجع، اصل زیر را که می توان آن را به عنوان اصل سوم درنظریه نسبیت خاص در نظر گرفت، پذیرفت.

سرعت نسبی چارچوبهای مرجع لخت، همیشه کوچکتر از سرعت حدی نور است.

همان طورکه می دانیم، قوانین فیزیک نیوتنی درحد سرعتهای معمولی بسیار دقیق می باشند و در نتیجه می توان از این قوانین در بررسی پدیده های فیزیک، درمحدودهٔ سرعتهای از صفرتا چند صد هزار کیلومتربرساعت، بدون بروز خطای قابل ملاحظه ای استفاده نمود. درصورتی که این قوانین درمحدودهٔ سرعتهای بالا، یعنی سرعتهای قابل مقایسه با سرعت نور، با شکست مواجه می شوند. به بیان دیگر، نتایج حاصل از آنها درحیطهٔ سرعتهای بالا با تجربه سازگار نیستند. بر این اساس، این قوانین باید به طریقی تعمیم داده شوند یا اصلاح گردند که بتوان از آنها در محدودهٔ سرعتهای صفر تا سرعت نور استفاده نمود. بنابراین، می توان گفت که فیزیک نیوتنی در واقع، حالت خاصی از نظریهٔ نسبیت خاص می باشد.

نکته ای که می توان به آن اشاره نمود، این است که در سال ۱۹۲۱ جایزهٔ نوبل را نه به خاطر سهمی که اینشتین در ارائهٔ نظریهٔ نسبیت داشته است، بلکه به جهت کارها و تحقیقاتش درخصوص اثر فتوالکتریک به او اعطا می گردد.

## ۲ - ۱ : اتر و نظریهٔ الکترومغناطیس

همان طورکه می دانیم، هدف از ارائه نظریهٔ نسبیت خاص در واقع به دست آوردن یک بینش صحیح ازنظریهٔ الکترومغناطیس بوده است. در دههٔ ۱۸۶۰، ماکسول[1] (۱۸۷۹-۱۸۳۱)،چهارمعادلهٔ

---

1- **Maxwell, James Clerk** : ریاضیدان و فیزیکدان نظری اسکاتلندی که در زمینهٔ الکترومغناطیس کارهای اساسی و مهمی را انجام داد و در واقع می توان گفت که با تحقیقاتش در زمینهٔ الکتریسیته و مغناطیس؛ باعث ایجاد تحول و انقلاب بزرگی در این حیطه از فیزیک شد. وی در زمینهٔ نظریهٔ جنبشی گازها نیز تحقیقات وسیعی کرده است.

ساده به دست آورد که با استفاده ازآنها می شد دو موضوع مهم الکتریسیته و مغناطیس را که درآن زمان مورد بحث جدی فیزیکدانان بود، توضیح داد. این معادلات که در سال ۱۸۶۴ منتشر شدند، نه تنها ارتباط میان الکتریسیته و مغناطیس را بیان می کردند، بلکه نشان می دادندکه این دو پدیده نمی توانند مستقل از یکدیگر باشند. به طوری که براساس این معادلات، میدان الکتریکی متغیر نسبت به زمان، باعث ایجاد میدان مغناطیسی می شود. همچنین عکس این مطلب نیز صادق است، یعنی میدان الکتریکی نیز می تواند از میدان مغناطیسی متغیر نسبت به زمان، به وجود آید. در واقع، براساس این نظریه، تنها یک میدان، یعنی میدان الکترومغناطیسی می تواند وجود داشته باشد. گذشته ازآن، ماکسول با در نظرگرفتن کاربرد معادله هایش، دریافت که تغییردرمیدان الکتریکی، سبب تغییردرمیدان مغناطیسی می شود که آن نیز به نوبهٔ خود سبب تغییر درمیدان الکتریکی می گردد. این معادلات پیش بینی می کردندکه میدانهای ایجاد شده درهمهٔ جهات منتشر می شوند. نتیجه آنکه ازحل معادلات ماکسول، تابشی حاصل می شد که دارای خواص موجی بود. درحقیقت، می توان گفت که ماکسول وجود تابش الکترومغناطیسی را با در نظرگرفتن معادلاتش پیش بینی نمود. همچنین براساس این معادلات، محاسبهٔ سرعت موج الکترومغناطیسی به دست آمده نیزامکان پذیر بود و نتیجه ای که برای سرعت انتشار این امواج به دست می آمد، دقیقاً برابر سرعت نور بود.

اولین مدرک تجربی و قطعی که پیش بینی های ماکسول را تأیید می کرد، پس از گذشت تقریباً یک ربع قرن اززمان انتشار معادلات ماکسول، یعنی در سال ۱۸۸۷ به دست آمد. دراین سال هرتز[1] (۱۸۹۴-۱۸۵۷) فیزیکدان آلمانی، تابشی با طول موجهای بلند، تولید و آشکارکرد. به طوری که طول موجهای این تابش به مراتب بلندتر از طول موجهای تابش زیر قرمز معمولی بودند. این تابشها امواج رادیویی نامیده شدند. در واقع، می توان گفت که وی اولین کسی است که انتشارامواج الکترومغناطیسی در خلأ را که معادلات ماکسول آن را پیش بینی کرده بودند، نشان داد.

از طرف دیگر، در اواخر قرن نوزدهم، فیزیکدانان می کوشیدند تا حرکت امواج نور را

---

1- Hertz, Heinrich Rudolf

درخلاء توجیه نمایند. آنها بعد از تلاشهای فراوان، در نهایت به این نتیجه رسیدندکه نور را باید به صورت نوسان یا اغتشاشی در ماده ای فرضی به نام اتردر نظر گرفت؛ زیرا در آن زمان عقیده بر این بود که موج الکترومغناطیسی نیز، مانند سایر امواج مکانیکی برای انتشار، احتیاج به یک محیط مادی دارد. این مادهٔ فرضی یا محمل امواج الکترومغناطیسی، می بایستی درهمهٔ مواد نفوذ کند، یعنی نه تنها صرفاً باید فضای خلاء را پرکرده باشد، بلکه باید بتواند درگازها، آب، شیشه و به طورکلی درهمهٔ مواد شفافی که نور ازآنها می گذرد، نفوذ کند.

علاوه بر این، براساس معادلات ماکسول، امواج الکترومغناطیسی، امواج عرضی بودند و این امواج طبق اصول فیزیک کلاسیک، تنها می توانستند درمحیط مادی منتشر شوند. بنابراین، با در نظرگرفتن این شرایط، مادهٔ اتر می بایستی دارای خواص متناقض و شگفت آوری باشد. اولاً، می بایستی آنچنان صلب باشد تا بتواند سرعتی برابرسرعت نور را منتقل کند. ثانیاً ، این مادهٔ جامد و فوق العاده صلب و همچنین بسیار شفاف، می بایستی آنچنان کسشان و بدون اصطکاک باشد که کمترین مقاومتی درمقابل حرکت اشیا ایجاد نکند.

اما علاوه براین مسائل، مشکل جدی و اساسیتر دیگری که فیزیکدانان با آن روبرو بودند، این بود که آنها قادر به اثبات وجود مادهٔ اتر نبودند و حتی اندازه گیری خواص آن نیز تقریباً برای آنها ناممکن بود. با این حال، آنها وجود آن را مفید می دانستند و مصرانه از وجودش دفاع می کردند. این مشکلات در مورد انتشار امواج الکترومغناطیسی ادامه داشت تا اینکه بالاخره مایکلسون[1] (۱۹۳۱-۱۸۵۲) و مورلی[2] (۱۹۲۳-۱۸۳۸)، دو دانشمند آمریکایی در بین سالهای ۱۸۸۱ تا ۱۸۸۷ میلادی برای یافتن مادهٔ فرضی اتر یا به عبارت دیگر، حرکت مطلق که درآن زمان یک مسأله بسیار پیچیده و مشکل به نظرمی رسید، آزمایشی ترتیب

---

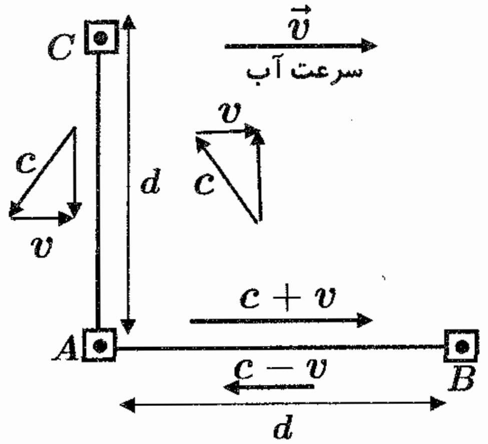
1 - Michelson, Albert Abraham : فیزیکدان آلمانی الاصل، آمریکایی که به خاطر کارهایش در زمینهٔ اندازه گیری سرعت نور و همچنین اثبات عدم وجود اتر مشهور است. وی به دلیل انجام‌آزمایشهای متعدد در زمینهٔ اپتیک ؛ ساختن وسایل نوری بسیار دقیق و انجام پژوهشهایی در زمینهٔ طیف سنجی؛ جایزهٔ نوبل در سال ۱۹۰۷ را در رشتهٔ فیزیک دریافت می کند. وی اولین دانشمند آمریکایی است که جایزهٔ نوبل را دریافت می کند.

2 - Morley, Edward Williams : شیمیدان آمریکایی که شهرت وی بیشتر به خاطر همکاری وی با مایکلسون در آزمایش مایکلسون ـ مورلی می باشد. همچنین برای کارهایی است که برای تعیین وزن اتمی هیدروژن و اکسیژن انجام داده است.

دادند که نتیجهٔ آزمایش آنها وجود مادهٔ فرضی اتر را نفی می کرد.

## ۲ - ۲ : آزمایش مایکلسون و مورلی

دراینجا قبل ازبررسی آزمایش مایکلسون و مورلی، می توان اصول کار دستگاه به کارگرفته شده به وسیلهٔ آنها را با تشبیه و مثال زیر روشن نمود. فرض کنید که دو شناگرسریع و هم قدرت می خواهند مسافت بین دو نشانهٔ ثابت دریک رودخانه را مسابقه دهند. مطابق شکل (۲-۱)، فرض می کنیم که دو شناگر از یک نقطه مانند $A$ شروع به حرکت کرده و یکی از آنها در مسیر $AB$، یعنی در راستای جریان آب رودخانه( نسبت به زمین) و دیگری در مسیر $AC$، یعنی درراستای عمود برجهت جریان آب رودخانه( نسبت به زمین) شنا کنند و پس از رسیدن به نقاط $C$ و $B$ به نقطهٔ شروع مسابقه برگردند. بنابراین، هرکدام از آنها درمسیر خود، یک رفت و یک برگشت انجام می دهند. طول مسیر مسابقه را یکسان و برابر $2d$ درنظرمی گیریم. دراین صورت، می خواهیم زمان انجام مسابقه به وسیلهٔ هرکدام از شناگرها را به دست آوریم. برای این منظور فرض می کنیم که سرعت شناگرها نسبت به آب برابر $c$ باشد و همچنین سرعت رانش آب را نسبت به زمین برابر $v$ در نظر می گیریم.




**شکل (۲-۱) : تشبیه شنا با آزمایش مایکلسون ـ مورلی**

همان طورکه می دانیم، سرعت شناگری که در جهت آب شنا می کند با سرعت آب جمع می شود و سرعت برایند برابر $c+v$ به دست می آید. و زمان رفت از $A$ به $B$، برای این شناگربرابر $d/(c+v)$ خواهد بود. این شناگر درمسیر برگشت باید رانش آب را نیز جبران کند. دراین صورت، سرعت او برابر $c-v$ و زمان برگشت از $B$به $A$ برابر $d/(c-v)$ می باشد.

درنتیجه زمان کل رفت و برگشت برای این شناگر که بستگی به سرعت آب دارد، از رابطهٔ

$$t_{\|} = \frac{d}{(c+v)} + \frac{d}{(c-v)} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} \tag{۲-۱}$$

به دست می آید. ازطرف دیگر، برای شناگری که در راستای عمود برجهت جریان آب شنا می کند، زمان رفت و برگشت برابر است. اما این شناگر برای آنکه در اثر جریان آب، از مسیر خود از $A$ به $C$ و از $C$ به $A$ منحرف نشود ، باید کمی در خلاف جهت جریان آب شنا کند. که در این صورت، مؤلفهٔ سرعت حرکت این شناگر برای رسیدن به $C$ یا $A$، برابر $\sqrt{c^2 - v^2}$ نسبت به زمین خواهد بود. زمان کل رفت و برگشت برای این شناگر نیز که بستگی به سرعت آب دارد، از رابطهٔ

$$t_{\perp} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{۲-۲}$$

به دست می آید. برای مقایسهٔ زمان مسابقهٔ مربوط به این دو شناگر، می توان رابطهٔ (۲-۱) را بر رابطهٔ (۲-۲) تقسیم کرد که در این صورت، داریم:

$$\frac{t_{\|}}{t_{\perp}} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2d} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{۲-۳}$$

حال، با توجه به رابطهٔ (۲-۳) می توان نتیجه گرفت که اگرآب ساکن باشد، یعنی اگر $v = 0$ باشد، این نسبت برابر ۱ بوده و همان طورکه انتظار می رود، نتیجهٔ مسابقه مساوی است. درغیراین صورت، این نسبت بزرگتر از ۱ می باشد. در نتیجه شناگری که عمود بر راستای جریان آب شنا می کند، برندهٔ مسابقه خواهد بود. به بیان دیگر، اگر این دو شناگر درآغاز شنا، به طورهم فاز از نقطهٔ $A$ حرکت را آغاز نمایند، در پایان مسابقه، هنگام بازگشت به نقطهٔ $A$ هم فاز نخواهند بود. همچنین نکته ای که می توان به آن اشاره کرد، این است که با مشاهدهٔ این مسابقه می توان سرعت جریان آب را نسبت به زمین به دست آورد.

درآزمایش مایکلسون، با مقایسهٔ با مثال فوق، مسابقه بین دو پرتو نوری است که در دو مسیر مشابه، یکی موازی و دیگری عمود برجهت رانش اترحرکت می کنند که در ادامه به بررسی و تشریح آن پرداخته می شود.

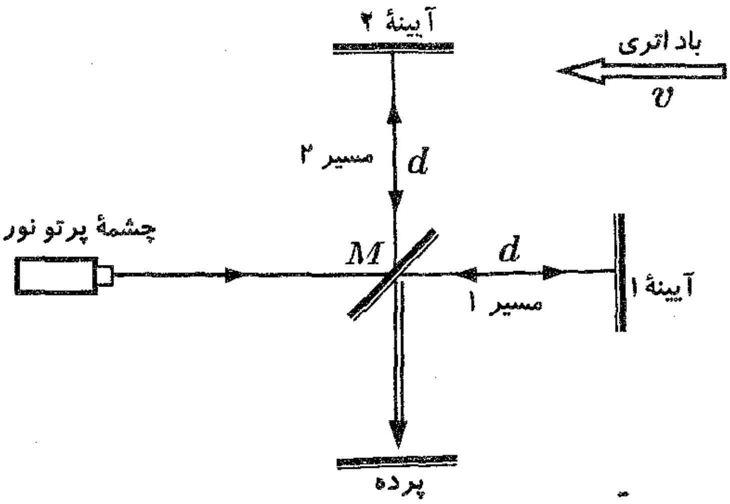
تا قرن نوزدهم کاملاً آشکار شده بود که زمین، خورشید، ستارگان و همهٔ اشیا موجود درجهان درحرکتند. براین اساس، به منظور تعریف حرکت مطلق که قوانین نیوتن مبتنی برآن بود، می بایستی نقطهٔ ثابتی درجهان تعیین می گردید که درسکون مطلق باشد. برای این منظور، یک راه حل به وسیلهٔ خود نیوتن پیشنهاد شده بود. او نظر داده بودکه کالبد خود فضا، یعنی احتمالاً همان مادهٔ فرضی اتر به حال سکون است. درنتیجه با این فرض، می توان درمورد فضای مطلق صحبت کرد. البته در این صورت، اگر اتربدون حرکت و ساکن باشد، می توان حرکت مطلق یک جسم را با تعیین حرکت آن نسبت به چارچوب مرجع متصل به اتر تعیین نمود.

درسال ۱۸۸۱ مایکلسون برای تحقیق این مسأله، آزمایشی را طراحی کرد. طرح و ایدهٔ وی این بود که اگر فرض کنیم که زمین در اتر ساکن حرکت کند، باید بتوانیم باد اتری را که از اطراف زمین عبورمی کند، احساس کنیم؛ زیرا می توان تصورکرد که زمین ساکن است و اتر با سرعتی برابر ۳۰ کیلومتر برثانیه، یعنی سرعت حرکت زمین به دور خورشید، از اطراف زمین می گذرد. بر این اساس، با مقایسه با مثال مسابقهٔ شنا می توان نتیجه گرفت، پرتو نوری که درجهت حرکت زمین فرستاده می شود و پس از بازتابش از آیینه ای بر می گردد، باید مسافتی بیشتراز پرتونوری بپیماید که درجهت عمود برحرکت زمین، ارسال و دریافت می شود.

مایکلسون برای تحقیق و بررسی این مسأله، دستگاهی به نام تداخل سنج[1] را طراحی نمود. با توجه به شکل (۲-۲)، این دستگاه ازآیینه ای نیمه نقره اندود[2]، $M$ تشکیل شده است که نیمی از پرتو نورتابیده شده به آن را ازخود عبور می دهد ونیم دیگر را باز می تاباند. بنابراین، با توجه به شکل (۲-۲)، اگر زمین ساکن در نظرگرفته شود، باید پرتو نوری که درخلاف جهت باد اتری فرستاده می شود و پس از بازتابش برمی گردد، مسافتی بیشتراز پرتو نوری بپیماید که در راستای عمود بر جهت سرعت باد اتری فرستاده می شود و برمی گردد. به عبارت دیگر، زمان کل طی مسیر پرتو نوردر راستای عمود برجهت رانش اتر، کوچکتر از زمان کل طی مسیر به

1- Interferometer 2- semi-transparent mirror

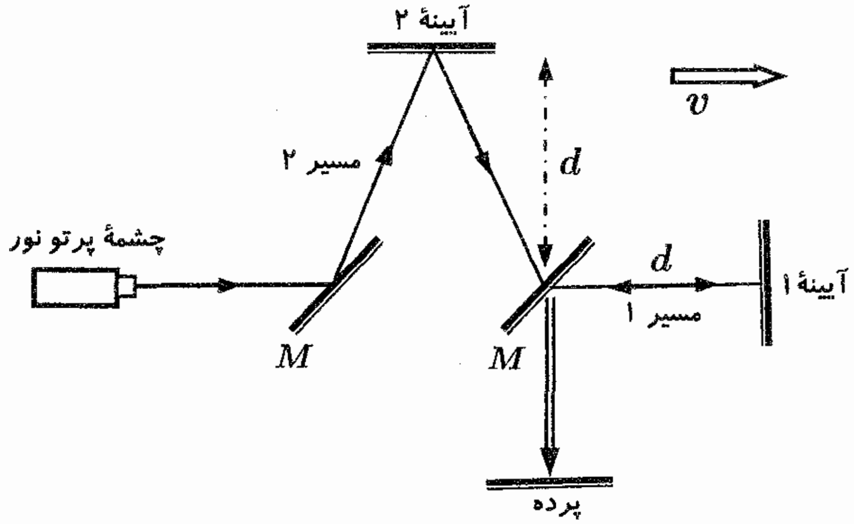
وسیلهٔ پرتو دیگر است. براین اساس، این پرتوها هنگام رسیدن به یک پرده، همفاز نخواهند بود و باید نوارهای تداخلی روی پرده تشکیل شود؛ زیرا از مبحث اپتیک می دانیم که اگر اختلاف دو مسیر طی شده به وسیلهٔ پرتوها، مضرب صحیحی ( شامل صفر) از طول موج نور باشد، تداخل سازنده و خط روشن به دست می آید. اما اگر اختلاف دو مسیر مضرب فردی از نصف طول موج باشد، تداخل ویرانگر بوده و خط تاریک ایجاد می گردد.




شکل (۲-۲) : طرح آزمایش مایکلسون، زمین ساکن

همچنین، دستگاه طوری طراحی شده بود که مسیر این دو دسته پرتو عمود بریکدیگر بودند. پرتو بازتابیده شده ازآیینهٔ $M$، مسیر۲ را طی کرده، پس از برخورد به آیینهٔ ۲ بازمی تابد و مجدداً به آیینه $M$ رسیده و بعد از عبور از آن به سمت پردهٔ محل تشکیل نوارهای تداخلی می رود. همین طور، پرتو عبوری از آیینهٔ $M$، مسیر۱ را طی کرده و پس از برخورد با آیینهٔ ۱ برمی گردد و پس از رسیدن به آیینهٔ $M$، از آن باز تابیده و به سمت پرده می رود.

تشابه بین تداخل سنج مایکلسون و مسابقهٔ شنای مطرح شده واضح است. در این تشبیه، پرتوهای نور به جای شناگرها هستند. و سرعت آن نیز درخلاء نسبت به محیط اتر برابر $c$ می باشد. رانش اتر نیز مانند جریان آب است که سرعت آن نسبت به زمین برابر $v$ می باشد. همان طورکه از مسابقهٔ شنا در رودخانه می توانیم به اندازهٔ سرعت جریان آب پی ببریم در اینجا نیزانتظار داریم که سرعت رانش اتر را از اجرای یک مسابقهٔ نور درمسیرهای موازی و عمود بر راستای رانش اتر به دست آوریم. اکنون، با توجه به شکل(۲-۳)، می توان اختلاف راه پیموده شده به وسیلهٔ دو پرتو نور۱ و ۲ را به راحتی محاسبه نمود.




**شکل(۲-۳): زمین متحرک و اتر ساکن**

برای این منظور، فرض می کنیم که سرعت دستگاه نسبت به اتر برابر $v$ باشد. همچنین، اگر فاصلهٔ بین آیینهٔ $M$ وآیینه های ۱ و۲ ، برابر $d$ در نظرگرفته شود، در این صورت، داریم

$$d_{۲} = ۲\sqrt{(\frac{vt}{۲})^{۲} + d^{۲}} \quad (۴-۲)$$
$$= ct$$

که در آن $d_{۲}$ مسیر طی شده به وسیلهٔ پرتو۲ می باشد. اکنون اگر مقدار $t$ را از رابطهٔ (۲-۴) به دست آورده و در $c$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$ct = \frac{۲d}{\sqrt{(۱ - v^{۲}/c^{۲})}} = d_{۲} \quad (۵-۲)$$

یا

$$d_{۲} = \frac{۲d}{\sqrt{(۱ - v^{۲}/c^{۲})}} \quad (۶-۲)$$
$$\simeq ۲d(۱ + \frac{v^{۲}}{۲c^{۲}})$$

حال، زمان رفت و برگشت پرتو نور را درمسیر۱ با توجه به تبدیلات گالیله به دست می آوریم. درچارچوب مرجع متصل به اتر، آیینهٔ ۱ و $M$ با سرعت $v$ حرکت می کنند. بنابراین، مدت زمانی که طول می کشد تا پرتو نور از آیینهٔ $M$ به آیینهٔ ۱ برسد، از رابطهٔ

$$ct_{+} = d + vt_{+} \quad (۷-۲)$$

به دست می آید. بنابراین، داریم

$$t_{+} = \frac{d}{c-v} \tag{۲-۸}$$

همچنین، مدت زمان برگشت پرتو نور از آینهٔ ۱ به آینهٔ $M$ را نیز می توان از رابطهٔ

$$ct_{-} = d - vt_{-} \tag{۲-۹}$$

به دست آورد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$t_{-} = \frac{d}{c+v} \tag{۲-۱۰}$$

در نتیجه، مسافت کل طی شده به وسیلهٔ پرتو نور در مسیر ۱، برابر

$$\begin{aligned} d_{1} &= (t_{+} + t_{-})c \\ &= d\left(\frac{c}{c+v} + \frac{c}{c-v}\right) \\ &= 2d\frac{1}{(1 - v^{2}/c^{2})} \end{aligned} \tag{۲-۱۱}$$

خواهد بود. بنابراین، با تقریب می توان نوشت:

$$d_{1} \approx 2d\left(1 + \frac{v^{2}}{c^{2}}\right) \tag{۲-۱۲}$$

حال، با توجه به روابط(۲-۶) و (۲-۱۲)، اختلاف مسیرطی شده درمسیرهای ۱ و۲ ، برابر

$$\begin{aligned} \Delta d &= d_{1} - d_{2} \\ &\approx d\left(\frac{v}{c}\right)^{2} \end{aligned} \tag{۲-۱۳}$$

به دست می آید. حال، با در نظر گرفتن $v = 30 km/s$ و $d = 1m$، $\Delta d$ تقریباً برابر $10nm$ خواهد بود. همچنین، می توان اختلاف زمان بین دو پرتو نور را نیز به دست آورد. برای این منظور، با توجه به اینکه نورمسافت $\Delta d$ را درمدت زمان $\Delta t$ طی می کند، در این صورت، داریم: $\Delta d = c\Delta t$. بنابراین، داریم:

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{c} \tag{۲-۱۴}$$

حال، با جایگذاری مقدار $\Delta d$ از رابطهٔ (۲-۱۳)، می توان به دست آورد

$$\Delta t \approx \frac{d}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{2} \tag{۲-۱۵}$$

همچنین، با توجه به تشابهی که بین تداخل سنج مایکلسون و مسابقهٔ شنا مطرح شد، می توان رابطهٔ (۲-۱۵) را با به دست آوردن اختلاف زمان به دست آمده در روابط (۲-۱) و (۲-۲) ؛

یعنی $t_{\parallel} - t_{\perp}$ و با در نظرگرفتن اینکه $c \gg v$ است، به دست آورد.

اما درمورد دقت تداخل سنج مایکلسون، می توان به این نکته اشاره نمود که این دستگاه دراندازه گیری فواصل، به اندازه ای حساس بود که حتی می توانست رشد یک گیاه را ثانیه به ثانیه اندازه بگیرد و همچنین قطر بعضی از ستارگانی را که در بزرگترین تلسکوپها به صورت نقطه های کوچکی نمایان می شوند، اندازه گیری کند. بنابراین، دقت دستگاه تداخل سنج به اندازهٔ کافی بالا بود تا بتواند این اختلاف مسیر را که بین دو پرتو نور ایجاد می شد، با دقت زیاد آشکار کند.

درحقیقت، طرح مایکلسون این بود که تداخل سنج را در جهت های گوناگون، نسبت به حرکت زمین قراردهد و با اندازه گیری اختلاف فاز پرتوهای نور رسیده به پرده، اثر اتر را تشخیص دهد. همچنین، مایکلسون در سال ۱۸۸۷ به کمک همکارش مورلی، آزمایش دقیق تری را که پایهٔ تجربی نظریهٔ نسبیت قرار گرفت، مجدداً انجام داد. در این آزمایش نیز، دسته پرتوتابش درجهت های متفاوت نسبت به حرکت زمین یا باد اتری تابانده شد. اما عملاً هیچ اختلاف فازی مشاهده نگردید. نوارهای تداخلی ایجاد شده روی پرده همواره به طور یکسان ایجاد می شدند. و درحقیقت، نوارهای تداخلی بستگی به جهت دستگاه نداشت. تکرارآزمایش نیز نتیجه ای در بر نداشت و نتیجه برای هر بارآزمایش منفی بود.

اکنون، با به دست آمدن نتیجهٔ منفی ازآزمایش مایکلسون و مورلی، در واقع مبانی فیزیک نیوتنی که مبتنی بر فضای مطلق یا حرکت مطلق بود، متزلزل گردید؛ زیرا با اثبات عدم وجود اتر، حرکت مطلق یا فضای مطلق، دیگرمعنی نداشت. و نتیجه اینکه با زیر سؤال رفتن مفهوم فضای مطلق یا حرکت مطلق، پایه های فیزیک کلاسیک یا نیوتنی که براین مفاهیم استوار شده بودند، فرو ریخت.

اما با این حال، فیزیک نیوتنی باز هم می توانست پدیده های معمولی را در جهان توصیف نماید و حرکت سیارات را باز می شد با قوانین گرانش نیوتن توضیح داد. همین طور، حرکت اجسام روی زمین هنوز هم از قوانین نیوتن پیروی می کردند. درحقیقت، تنها چیزی که مشخص شده بود، این بود که توضیحات کلاسیک برای توصیف همهٔ پدیده های طبیعت کامل نبودند. و می بایستی اصلاح یا کامل گردند. بنابراین، فیزیکدانان به این نتیجه

رسیده بودند که می بایستی خود را برای یافتن پدیده هایی آماده کنند که از قوانین فیزیک کلاسیک پیروی نمی کردند. کاملاً واضح بود که پدیده های مشاهده شده در طبیعت، تغییری نکرده بودند، بلکه نظریه هایی که برای توصیف آنها وضع شده بودند، کامل نبودند و می بایستی تعمیم یابند و یا اصلاح گردند. به گفتهٔ آسیموف[1]، (۱۹۹۲-۱۹۲۰) آزمایش مایکلسون و مورلی را می توان یکی از مهمترین آزمایشها در طول تاریخ علم دانست.

## ۲ - ۳ : توجیه نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون و مورلی

بعد از به دست آوردن نتیجهٔ منفی از آزمایش مایکلسون و مورلی، تلاشهای زیادی برای توجیه نتیجهٔ منفی آن صورت گرفت. یکی از این توجیهات که شاید بتوان آن را یکی از مهم ترین آنها نیز در نظر گرفت، نظریه ای است که در سال ۱۸۹۲ به وسیلهٔ فیتز جرالد[2] (۱۹۰۱-۱۸۵۱)، فیزیکدان تجربی ایرلندی ارائه شده است. وی نظر داده بود که **هر جسم در جهت حرکت خود منقبض می شود و مقدار این انقباض، بستگی به سرعت جسم دارد.** بنابراین، براساس این تعبیر، تداخل سنج همیشه درجهت حرکت واقعی زمین، به اندازه ای منقبض می شود تا اختلاف فاصله یا مسیری را که پرتو نور باید بپیماید، جبران کند. از توضیح فیتز جرالد، می توان نتیجه گرفت که :

**طبیعت همواره اثری تولید می کند که هرگونه اختلافی را که ممکن است در تشخیص حرکت مطلق مؤثر باشد، خنثی کند.**

در نتیجه، به این دلیل، انسان هرگز قادر به اندازه گیری حرکت مطلق نخواهد بود. این پدیدهٔ خنثی کننده، به **انقباض طول فیتز جرالد**[3] موسوم است. فیتز جرالد، برای این اثر معادله ای نیز به دست آورد که برطبق آن، طول هرجسم در راستای حرکت کوتاه به نظر می آید. از طرف دیگر، بر اساس آن معادله، اگرجسمی با سرعت نورحرکت کند، طول آن در جهت حرکت،

---

1- Asimov, Isaac: دانشمند روسی ـ آمریکایی و نویسندهٔ کتابهای علمی

2- George Francis FitzGerald

3 - Fitzgerald contraction in Length

صفر به دست می آید. بنابراین، نتیجهٔ مهم و اساسی دیگری که از معادلهٔ انقباض طول فیتز جرالد گرفته می شد، این بود که چون طولی کوتاهتر از صفر نمی تواند وجود داشته باشد، بنابراین، سرعت نور درخلأ باید بالاترین سرعت ممکن در جهان باشد.

لورنتس تقریباً این فرضیه را پذیرفت وآن را نیز تا اندازه ای تکمیل کرد. همچنین، ازآن درنظریهٔ الکترودینامیک خود نیز استفاده کرد. ازطرف دیگر، لورنتس توانست این انقباض را از طریق نظریهٔ الکترونی خود در مورد ماده که در سال ۱۸۹۲ منتشر کرد، به دست آورد. این نظریه که نظریه ای تقریباً مفصل و پیچیده بود، درگسترش و رشد بعدی فیزیک نظری تأثیر عمیقی برجای نهاد.

لورنتس پس از آن درسال ۱۸۹۵، نتیجهٔ بررسیهای ریاضی خود را که در بارهٔ تأثیرحرکت یا سرعت یک جسم بر شکل آن بود، منتشر نمود. وی در مقالهٔ خود، نظریهٔ فیتز- جرالد را در مورد وابستگی شکل یک جسم به سرعت آن مورد تأیید قرار داد. در واقع، ده سال بعدکه نظریهٔ نسبیت انتشار یافت، معلوم گردید که انقباض طول، یکی از نتایج اولیهٔ نظریهٔ نسبیت اینشتین است. به این دلیل گاهی اوقات، این نظریه را نظریهٔ **انقباض طول لورنتس- فیتز جرالد**[1] نیز می نامند.

نظریهٔ دیگری که برای حفظ مادهٔ فرضی اتر ارائه گردید؛ **فرضیهٔ کشش اتری**[2] بود. طبق این فرضیه، اترهمراه اجسامی که دارای جرم متناهی هستند، کشیده می شود. البته با این فرضیه نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون و مورلی قابل توجیه بود . بنابراین، نیازی به اصلاح یا تکمیل نظریهٔ الکترومغناطیس یا مکانیک کلاسیک نبود. اما مشکل جدیدی که این فرضیه ایجاد می کرد، این بود که پدیده هایی چون ابیراهی نورستاره ای[3] و همین طور، ضریب همرفت فیزو[4] (۱۸۹۶-۱۸۱۹) را نمی شد با این فرضیه توضیح داد. در نتیجه فرضیه کشش اتری، علی رغم توجیه نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون و مورلی، تناقضات و مشکلات

---

1- Lorentz - Fitzgerald Contraction

2- Aether drag hypothesis

3- Aberration of light or stellar aberration

4- Fizeau , Armand Hippolyte Louis :فیزیکدان فرانسوی

جدی تری را به وجود می آورد.

ابیراهی نور که در سال ۱۷۲۵، به وسیلهٔ جیمز برادلی[1] (۱۷۶۲-۱۶۹۳)، ستاره شناس انگلیسی مطرح شده بود، درواقع، به طریق دیگری وجود اتر را نفی می کرد؛ زیرا اگر مادهٔ فرضی اتروجود داشت و همچنین، اگر این ماده، همراه زمین کشیده می شد، در این صورت، پدیدهٔ ابیراهی نور ستاره ای به وجود نمی آمد. نتیجه اینکه با فرضیهٔ کشش اتری، نمی شد نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون و مورلی را توجیه کرد. در بخش ۲ - ۱۱، توضیح بیشتری در مورد ابیراهی نور ستاره ای داده می شود.

علاوه بر این، فرضیهٔ کشش اتری ضریب همرفت فیزو را نیز نمی توانست به درستی توضیح دهد. این ضریب که در سال ۱۸۱۷ به وسیلهٔ فرنل[2] (۱۸۲۷-۱۷۸۸)مطرح شده بود، بیان می کرد که نوریا به طورکلی امواج الکترومغناطیسی به وسیلهٔ محیطهای مادی متحرک، مانند آب تا اندازه ای کشیده می شوند. به عبارت دیگر، سرعت موج الکترومغناطیسی، علاوه بر ضریب شکست محیط به سرعت محیط انتشار موج نیز بستگی دارد. این اثرکه در سال ۱۸۵۱ به وسیلهٔ فیزو به طریق تجربی تأیید وگزارش شده بود، تا ظهور نظریهٔ نسبیت به صورت قانع کننده ای توضیح داده نشد (← مثال ۲ -۱۵).

از طرف دیگر، اینشتین در سال ۱۹۰۵ برای توضیح پدیدهٔ فتوالکتریک، نظریهٔ اساسی و جدیدی را در بارهٔ نور مطرح کرد. این نظریه، درواقع مبتنی بر بسط و تعمیم تئوری کوانتم ماکس پلانک[3] (۱۹۴۷-۱۸۵۸)، فیزیکدان مشهور آلمانی بود. وی نظر داده بود که نور به صورت کوانتم یا فوتون، درفضا حرکت می کند و به این ترتیب، وی عقیدهٔ مربوط به ذره ای بودن نور را که نیوتن در قرن هفدهم مطرح کرده بود، دوباره زنده کرد. اما این بار ذره ها از نوع دیگر بودند؛ زیرا هم خواص موج را داشتند و هم خواص یک ذره. به عبارت دیگر، تابش در بعضی از شرایط، خواص دانه ای آن ظاهر می شود و در بعضی دیگر از

---

1- Bradley , James

2- Fresnel, Augustin Jean : فیزیکدان فرانسوی که درزمینهٔ اپتیک نظری و تجربی کارکرده است

3- Planck, Karl Ernst Ludwig Max : فیزیکدان مشهور آلمانی قرن بیستم و ابداع کنندهٔ نظریهٔ کوانتمی. وی در سال ۱۹۱۸ جایزهٔ نوبل را در فیزیک دریافت می کند

شرایط، خواص موجی آن آشکار می گردد.

لازم به یاد آوری است که همهٔ پیروزی های قرن نوزدهم در بارهٔ مبحث نور، و از آن جمله در بارهٔ طیف نگاری، به دنبال کشف ماهیّت موجی نور صورت گرفته بود. اما از طرف دیگر، فیزیکدانان مجبور بودند که به خاطرماهیّت موجی نور، وجود اتر را نیز بپذیرند. به این دلیل از وجود آن مصرانه دفاع می کردند. اما اکنون با نظریهٔ جدید اینشتین دربارهٔ ماهیّت موج-ذره ای نور، همهٔ پیروزی های قرن نوزدهم درمورد نور و همچنین معادلات ماکسول حفظ می شد. و مهم تراز همه اینکه، الزامی برای پذیرش مادهٔ فرضی اتر ایجاب نمی شد، یعنی اینکه تابش می توانست، همراه با ذراتی که حمل می کنند از خلاء بگذرد، و به این ترتیب به گفتهٔ ایزاک آسیموف:

> **ایدهٔ مربوط به اتر، که با نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون و مورلی مرده بود، با پذیرفتن ماهیّت موج-ذره ای نور، به طور کلی دفن گردید.**

از طرف دیگر، لورنتس در سال ۱۹۰۴ نشان داده بود که شکل معادلات ماکسول یا نظریهٔ الکترومغناطیس، تحت تبدیلات گالیله، درگذر ازیک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگرناوردا نیستند. درنتیجه وی برای حل این مسأله روابط تبدیلی جدیدی را ابداع کرد و نشان داد که نظریهٔ الکترومغناطیس، تحت تبدیلات ابداعی او هموردا می باشند. به عبارت دیگر، شکل معادلات معادلات ماکسول، تحت تبدیلات ابداعی جدید او درچارچوبهای مرجع لخت، ناوردا یا بدون تغییر باقی می مانند.

نکتهٔ دیگر اینکه، اینشتین اکنون با دو گروه از تبدیلات برای پدیده های فیزیک روبرو بود. این تبدیلات عبارت بودند ازتبدیلات گالیله، برای پدیده های مکانیکی یا نیوتنی و تبدیلات لورنتس، برای پدیده های مغناطیسی یا به طور کلی نظریهٔ الکترومغناطیس. بنابراین، اینشتین که نمی توانست در آن واحد، این دوگروه ازتبدیلات را بپذیرد. بر این اساس، وی روابط تبدیلی لورنتس را بر روابط تبدیلی گالیله ترجیح داد وآنها را به عنوان فرمولها و روابطی عام و قابل اعمال درکلیهٔ پدیده ها ی فیزیکی پذیرفت. درحقیقت، می توان گفت که نظریهٔ نسبیت، پیامدی از این پذیرش و انتخاب او می باشد.

## ۲ - ۴ : اصول نسبیت خاص

تناقضات و ناسازگاریهایی که به علّت پذیرش مادهٔ فرضی اتر به وجود آمده بود و همین طور عدم تبدیل هموردای معادلات ماکسول تحت تبدیلات گالیله، باعث شدند که اینشتین دو راه و نظریه را برای برطرف نمودن این ناسازگاریها بررسی نماید. راه حل اول وی این بود که معادلات ماکسول درتمام چارچوبهای مرجع لخت به استثنای چارچوب مرجع متصل به اتر نادرست هستند. و راه حل دوم اینکه فضا و زمان نیوتنی یا کلاسیک، ممکن است اشتباه باشند.

اما اینشتین برخلاف فیزیکدانان قبل از خودش که سعی درحفظ فرضیهٔ وجود مادهٔ اتر داشتند، راه حل دوم را انتخاب کرد. یعنی او بدون توجه به وجود مادهٔ اتر، روی مسأله مربوط به مطلق بودن فضا و زمان، دردیدگاه نیوتنی آن شک کرد. و این دید از فضا و زمان را به طورکامل کنارگذاشت. در واقع، می توان گفت که مهم ترین جنبهٔ تئوری نسبیت اینشتین کنارگذاشتن مطلقهای نیوتنی، یعنی فضای مطلق و همین طور زمان مطلق بود. به عبارت دیگر، از نظر اینشتین، اندازه گیریهای فضا و زمان بستگی به چارچوب مرجع انتخاب شده یا ناظر دارد. درنتیجه، این اندازه گیریها نسبی می باشند. بر این اساس، می توان گفت که از اینجا بودکه دیدگاههای نیوتن و اینشتین در مورد مفاهیم مهم و اساسی فضا و زمان از یکدیگر جدا شدند.

اینشتین با بیان ایده های خود در مورد فضا و زمان، تحول بزرگی را در فیزیک ایجاد نمود. چرا که با مطلق انگاشتن زمان، ناسازگاریها و تناقضات جدی در بیان قوانین فیزیک، مخصوصاً نظریهٔ الکترومغناطیس ازدید ناظرهای لخت پیش می آمد. اینشتین با ارائهٔ ایده و هندسه ای جدید ازفضا و زمان و طرد نظریهٔ وجود اتر، فضا و زمان را که قبل از او مطلق و مستقل از یکدیگر تصور می شد، درهم ادغام کرد و مفهوم یا موجودی واحد، به نام **فضا ـ زمان** را برای تبیین و بررسی رویدادها مطرح نمود.

درجهان بینی اینشتین، مفاهیم فضا و زمان چنان با یکدیگرتلفیق شده اند که در نظر گرفتن هریک به تنهایی بی معنی خواهد بود. براساس این نظریه، جهان چهار بعدی است و

زمان را می توان به طور واقعی به عنوان یکی از ابعاد آن در نظر گرفت. تلفیق این چهار بعد، یعنی سه بعد فضا و یک بعد زمان را همان طور که قبلاً اشاره شد، غالباً فضا ـ زمان می نامند. مفهوم یا اصطلاح فضا ـ زمان، نخستین بار به وسیلهٔ یکی از استادان اینشتین به نام هرمان مینکوفسکی، ریاضیدان روسی ـ آلمانی در سال ۱۹۰۷؛ یعنی دو سال پس از ارائه نظریه نسبیت خاص پیشنهاد گردید.

اینشتین با توجه به دیدگاه خود درمورد مفاهیم فضا و زمان، اصول نسبیت[1] خود را به صورت زیر بیان نمود :

- **قوانین فیزیک یا طبیعت ( ازجمله نظریهٔ الکترومغناطیس ) در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت یکسان هستند.**
- **سرعت نور درتمام چارچوبهای مرجع لخت ثابت است. یا به عبارت دیگر، سرعت نور مستقل از ناظر یا چارچوب مرجع می باشد.**

در واقع، اینشتین برای ایجاد هندسه ای جدید برای فضا ـ زمان، این دو اصل را بیان کرد. این هندسه را می توان نتیجه ای مستقیم از اصل دوم نسبیت، یعنی مستقل بودن سرعت نور از ناظر درنظر گرفت. همچنین، می توان گفت که هدف اینشتین از بیان این دو اصل، این بود که نظریهٔ الکترومغناطیس یا معادلات ماکسول درتمام چارچوبهای مرجع لخت برقرار باشند.

اما نکته ای که نباید آن را نادیده گرفت، این است که قوانین مکانیک، در صورتی در چارچوبهای لخت برقرار هستند که فضا و زمان، نیوتنی باشند. بنابراین، در فضا ـ زمان مینکوفسکی[2] یا جهان مینکوفسکی[3] ، قوانین مکانیک باید به صورت دیگری اصلاح شوند. در واقع، این قوانین باید به شکلی اصلاح شوند، یا تعمیم یابند که درحد سرعتهای معمولی، به همان قوانین مکانیک نیوتنی تبدیل شوند. تعمیم این اصل به تمام قوانین فیزیک( ازجمله نظریهٔ الکترومغناطیس) گام مهمی است که اینشتین با ارائهٔ نظریهٔ نسبیت خود برداشت. به این ترتیب از اصل اول نسبیت خاص می توان نتیجه گرفت که:

---

1- Principle of Relativity
2- Minkowski Space - time
3- Minkowski universe

**به هیچ طریق، یا با هیچ آزمایشی، نمی توان چارچوبهای مرجع لخت را از یکدیگر متمایز ساخت.**

اما در مورد اصل دوم نسبیت خاص، می توان تنها به این نکته اکتفا کرد که تجربه آن را تأیید می کند؛ زیرا آزمایشهای مختلفی با ابزارها و وسایل بسیار دقیق و پیچیده در دوره های مختلف انجام گرفته اند که همه آنها این اصل، یعنی مستقل بودن سرعت نور از ناظرها را تایید می کنند. البته همان طور که می دانیم، اولین این آزمایشها، آزمایش مایکلسون است که در سال ۱۸۸۱ انجام گرفته است.

## ۲ - ۵ : ناظرهای لخت واصول نسبیت

همان طور که در فصل اول، در مورد چارچوبهای لخت ونا لخت در فیزیک کلاسیک صحبت شد، در اینجا نیز می توان ناظرها یا چارچوبها را به ناظرهای لخت و نالخت تقسیم نمود. ناظرهای لخت می توانند نسبت به یکدیگر با سرعت یکنواخت حرکت کنند. به علاوه هر ناظر می تواند مبدأ مکان و زمان خود را نیز به نحوی دلخواه انتخاب نماید.

از طرف دیگر، می دانیم که قوانین فیزیک نباید بستگی به انتخاب مبدأ زمان یا مکان داشته باشند. این استقلال را در واقع می توان حاکی ازهمگنی فضا و زمان دانست که از تقارنهای مهم فضا و زمان به شمار می آیند. همچنین، هر ناظر لخت مجاز است جهتگیری محورهای دکارتی فضای خود را به دلخواه انتخاب نماید که این استقلال را نیز می توان نشان ازهمسانگردی فضا درنظرگرفت. حال با پذیرفتن این تقارنها برای فضا و زمان، و همچنین، انتخاب دسته خاصی از ناظرها، راه برای ساختن مدلی از فضا ـ زمان که درآن قوانین فیزیک را بتوان مستقل از ناظر، و همین طورمختصات آن بیان کرد، بازمی شود.

همان طور که قبلاً اشاره شد، قوانین نیوتن مستقل از ناظرهای لخت بیان می شوند. به بیان دیگر، صورت قوانین مکانیک دردستگاهها یا چارچوبهای لخت یکسان می باشند. این یکسانی در شکل معادلات را درچارچوبهای گوناگون، ناوردایی صورت یا هموردایی [1] قوانین می نامند.

---

1- Covariance

درفیزیک نیوتنی، استقلال قوانین از ناظر را که بیانگر تقارنهای مهمی از فضا و زمان، یعنی همگنی فضا و زمان و همسانگردی فضا است، اصل نسبیت گالیله تضمین می کند.

البته، باید توجه داشت که اصول نسبیت، به صورتی که بیان شدند، متضمن قرار دادهایی نیز می شوند، مثلاً هر ناظری برای اندازه گیری فضا و زمان باید مجهز به مقیاس فضا یا زمان باشد. براین اساس، هرناظری می تواند واحد زمان و واحد طول خود را به شیوه ای مشخص تعریف کرده و نیز روشی دلخواه و معین برای همزمان کردن ساعتهای دور ازهم اختیارکند. بنابراین، انتخاب نامناسب واحد طول یا همین طور واحد زمان، ممکن است باعث ایجاد نوعی ناهمگنی صوری یا ظاهری در فضا و زمان شود. به این ترتیب که می توان با انتخاب واحدی نامناسب برای واحد های طول یا زمان، ناظری را از ناظر دیگر ممتاز کرد. که البته، این موضوع در واقع با اصل اول نسبیت در تناقض خواهد بود. براین اساس، باید همواره به انتخاب قراردادهای مناسب، دریک چارچوب وحفظ همان قراردادها درچارچوبهای دیگر توجه داشت. این مطلب را در بخش مربوط به نمودارهای فضا و زمان و قرارداد همزمانی پی می گیریم.

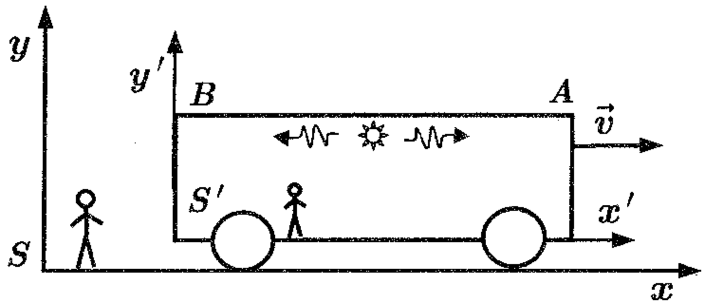
## ۲ - ٦ : نتایج حاصل از اصول نسبیت خاص

در این بخش، می خواهیم بعضی از نتایج و پیامدهای مهم حاصل از اصل دوم نسبیت، یعنی مستقل بودن سرعت نور از ناظررا بررسی نماییم. این نتایج یا اثرهای نسبیتی عبارت انداز نسبیت همزمانی، اتساع زمان و انقباض طول.

### ۲ - ۶ - ۱ : نسبیت همزمانی

همان طورکه درفصل اول اشاره شد، اگر دو رویداد در یک چارچوب مرجع لخت همزمان باشند، درتمام چارچوبهای لخت دیگر نیز همزمان خواهند بود. این مطلب در فیزیک نیوتنی به دلیل وجود سیگنالی با سرعت بی نهایت و مطلق بودن فضا و زمان صادق است. اما در نسبیت، با توجه به دیدگاه اینشتین در مورد مفاهیم فضا و زمان و همین طور، طرح هندسهٔ جدید از فضا ـ زمان ، وضعیّت به صورت دیگری می باشد.

برای نشان دادن نسبیت همزمانی[1] ، واگنی به طول $L$ را در نظر می گیریم. همچنین، فرض می کنیم که در وسط واگن فانوسی قرارگرفته باشد. حال اگر واگن با سرعت ثابت $v$ درجهت مثبت محور $x$ها حرکت کند، دراین صورت از دید ناظر یا چارچوب مرجع متصل به واگن، یعنی $S'$، هنگامی که فانوس روشن می شود، نورآن به طور همزمان به ابتدا و انتهای واگن می رسد. به عبارت دیگر، رویدادهای رسیدن نور به ابتدا و انتهای واگن همزمان می باشند. حال، این دو رویداد را از دید ناظر یا چارچوب واقع بر سطح زمین یا ناظر $S$ بررسی می کنیم.




شکل (۲-۴) : نسبیت همزمانی

با توجه به شکل (۲-۴)، از دید ناظر روی سطح زمین، پرتو نوری که به سمت جلو حرکت می کند، نسبت به پرتو نوری که به سمت عقب حرکت می کند، مسافت بیشتری را باید طی کند تا به قسمت جلوی واگن برسد. بنابراین، از دید ناظر $S$، زمان رسیدن نور فانوس به ابتدا و انتهای واگن همزمان نمی باشند. برای محاسبهٔ این زمانها، اگر $t_A$و $t_B$ به ترتیب زمان رسیدن پرتو نور فانوس، به قسمت ابتدا و انتهای واگن باشند، در این صورت، می توان نوشت:

$$ct_A = \frac{L}{۲} + vt_A \qquad (۱۶-۲)$$

و

$$ct_B = \frac{L}{۲} - vt_B \qquad (۱۷-۲)$$

حال، با محاسبهٔ $t_A$ و $t_B$ از روابط (۲-۱۶) و (۲-۱۷)، به دست می آوریم:

$$t_A = \frac{L}{۲}\left(\frac{۱}{c-v}\right) \qquad (۱۸-۲)$$

و

$$t_B = \frac{L}{۲}\left(\frac{۱}{c+v}\right) \qquad (۱۹-۲)$$

1- Simultaneity of Relativity

حال، با مقایسهٔ روابط(۲-۱۸) و(۲-۱۹)، می توان نتیجه گرفت که $t_A > t_B$ است.یعنی ازدید ناظر $S$ پرتو نور ابتدا به $B$ می رسد و سپس به $A$. اختلاف زمان بین این دو رویداد نیز، برابر

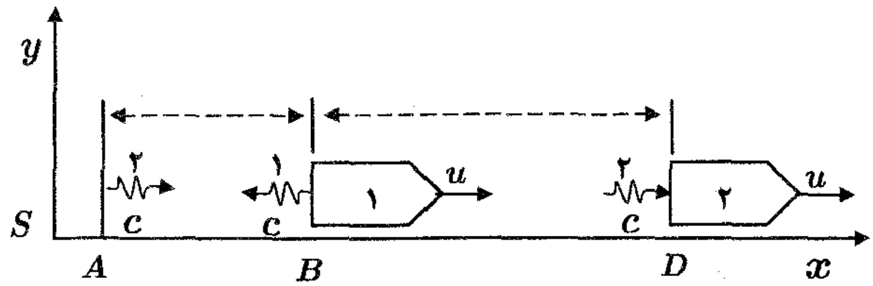
$$\begin{aligned}\Delta t = t_A - t_B &= \frac{L}{2}\Big[(\frac{1}{c-v}) - (\frac{1}{c+v})\Big] \\ &= \frac{Lv}{c^2}(\frac{1}{1-v^2/c^2})\end{aligned} \quad (۲-۲۰)$$

می باشد. اگرچه $\Delta t$ به دست آمده در رابطهٔ (۲-۲۰)، درست نمی باشد، ولی هدفی که ما در اینجا دنبال می کردیم، این رابطه به خوبی آن را بیان می کند. مقدار صحیح $\Delta t$ را می توان بعد از بیان تبدیلات لورنتس به دست آورد.

**مثال ۲ - ۱ : تعیین سرعت ( دور یا نزدیک شدن ) یک جسم متحرک نسبت به یک ناظر**

فرض کنید که ناظر ساکن $S$ می خواهد سرعت دور یا نزدیک شدن یک جسم یا ناظری را نسبت به خودش اندازه بگیرد. برای این منظور، این ناظر می تواند از اصل مربوط به ناوردا بودن سرعت نور یا امواج الکترومغناطیسی استفاده کند. به این ترتیب که این ناظر می تواند با ارسال دو سیگنال یا موج الکترومغناطیسی متوالی به سمت جسم یا ناظر متحرک، ودریافت سیگنالها، پس از بازتابش ازجسم یا ناظر، سرعت دور یا نزدیک شدن آنها را نسبت به خودش به دست آورد.

حال، فرض کنید که ناظر ساکن $S$، دو سیگنال یا علامت الکترومغناطیسی متوالی را به فاصلهٔ زمانی $T_0$ به سمت جسم یا ناظری که نسبت به خودش در حال دور شدن است، ارسال نماید. می دانیم که اگر جسم یا ناظردیگرساکن باشد، در این صورت، فاصلهٔ زمانی دو سیگنال بازتابیده شده از جسم یا ناظر نیز برابر $T_0$ خواهد بود. اما به دلیل حرکت جسم یا ناظر، بازهٔ زمانی دو سیگنال بازتابیده شده ازآنها، در این حالت، از نظر ناظر $S$ برابر $T_0$ نخواهد بود؛ زیرا در این حالت، به خاطر حرکت جسم یا ناظر که با سرعت $u$ از ناظر $S$ دور می شود، سیگنال دوم باید ( از لحظهٔ بازتاب سیگنال اول) به اندازهٔ زمان $2ut_1/c$ نسبت به $T_0$، زمان بیشتری را صرف کند. دراینجا با توجه به شکل (۲-۵) فاصلهٔ $ut_1$ برابر $BD$ است که نقطهٔ بازتاب به اندازهٔ آن جا به جا می گردد.




شکل (۲-۵) : تابش و بازتابش دو سیگنال متوالی از یک جسم متحرک

بنابراین، سیگنال دوم هنگامی، با جسم یا ناظر متحرک برخورد می کند که مسیر $AD$ را پیموده باشد. در نتیجه، زمان $t_۱$ برابر $cT_{\circ}/(c-u)$ خواهد بود. دراین صورت، زمان لازم برای بازگشت سیگنال دوم به ناظر ساکن $S$، برابر

$$T = T_{\circ} + \frac{۲u}{c} t_۱ \qquad (۲۱-۲)$$

می باشد. حال با جایگذاری مقدار $t_۱$ در رابطهٔ فوق می توان به دست آورد:

$$T = T_{\circ} \cdot \frac{۱+\beta}{۱-\beta} \qquad (۲۲-۲)$$

که درآن $\beta = u/c$ می باشد. اکنون می توان مقدار $u$ را از رابطهٔ (۲-۲۲) به دست آورد

$$u = c\,\frac{۱-\alpha}{۱+\alpha} \qquad (۲۳-۲)$$

که درآن $\alpha = T_{\circ}/T$ می باشد. سرعتی که از رابطهٔ (۲-۲۳) به دست می آید؛ سرعت دور شدن جسم یا ناظر متحرک نسبت به ناظر ساکن می باشد. به همین ترتیب می توان سرعت نزدیک شدن جسم یا ناظر متحرک را نسبت به ناظر ساکن به صورت

$$T = T_{\circ} \cdot \frac{۱-\beta}{۱+\beta} \qquad (۲۴-۲)$$

یا

$$u = c\,\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha} \qquad (۲۵-۲)$$

به دست آورد. بنابراین، با این روش می توان با ثبت بازه های زمانی بین دو سیگنال ارسال شده، یعنی $T_{\circ}$ و همین طور، اندازه گیری بازهٔ زمانی بین این دو سیگنال، هنگام دریافت آنها به وسیلهٔ ناظر ساکن $S$ ، پس از بازتابش، یعنی $T$، سرعت جسم یا ناظر متحرک را به دست آورد. ازاین روش می توان برای اندازه گیری سرعت اتومبیلها درجاده ها و بزرگ راهها استفاده کرد.

**مثال ۲ - ۲ :** فرض کنید که دو سفینهٔ فضایی $A$ و $B$ درامتداد یک خط راست و در یک جهت به ترتیب با سرعتهای $u_{\text{۱}}$ و $u_{\text{۲}}$، نسبت به یک ناظر ساکن مانند $S$، درحرکت باشند. حال فرض می کنیم که از سفینهٔ $B$ که به دنبال سفینهٔ $A$ درحرکت است، دو سیگنال الکترومغناطیسی به فاصلهٔ زمانی $T_{\text{۱}}$ به سمت سفینهٔ $A$ ارسال گردد. این دو سیگنال، بعد از بازتاب از سفینهٔ $A$، درچه فاصلهٔ زمانی به سفینهٔ $B$ می رسند؟ مقدار $T_{\text{۱}}$ و فاصلهٔ زمانی مجهول، نسبت به چارچوب یا ناظر ساکن $S$، تعیین می گردند.

**جواب :** دراینجا می توان از نتیجه ای که در مثال ۲- ۱، به دست آمد، استفاده کرد. بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۲-۲۲)، بازهٔ زمانی دو سیگنال که ازسفینهٔ $A$ بازتابیده می شوند. به صورت

$$T_{\text{۲}} = T_{\text{۱}} \cdot \frac{\text{۱} + \beta_{\text{۱}}}{\text{۱} - \beta_{\text{۱}}} \tag{۲-۲۶}$$

به دست می آید. که درآن $\beta_{\text{۱}} = u_{\text{۱}}/c$ می باشد. اما این دو سیگنال پس از بازتابش از $A$، به سفینهٔ $B$ نزدیک می شوند، یعنی جهت حرکت آنها عوض می شود که در این صورت با توجه به رابطهٔ (۲-۲۴)، اختلاف زمانی بین این دو سیگنال هنگام رسیدن به سفینهٔ $B$ از رابطهٔ

$$T = T_{\text{۲}} \cdot \frac{\text{۱} - \beta_{\text{۲}}}{\text{۱} + \beta_{\text{۲}}} \tag{۲-۲۷}$$

به دست می آید.که در آن $\beta_{\text{۲}} = u_{\text{۲}}/c$ می باشد. حال، با جایگذاری مقدار $T_{\text{۲}}$ از رابطهٔ (۲-۲۶) در (۲-۲۷)، فاصلهٔ زمانی مورد نظر برابر

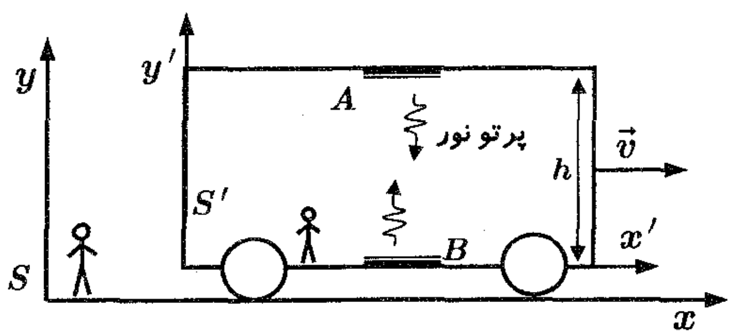
$$T = T_{\text{۱}} \cdot \frac{\text{۱} + \beta_{\text{۱}}}{\text{۱} - \beta_{\text{۱}}} \cdot \frac{\text{۱} - \beta_{\text{۲}}}{\text{۱} + \beta_{\text{۲}}} \tag{۲-۲۸}$$

به دست می آید.

## ۲ - ۶- ۲ : اتساع زمان

یکی دیگر ازجنبه های مهم نظریهٔ نسبیت خاص که هنوز هم سبب بحث در میان فیزیکدانان می شود، تصور و ایدهٔ اینشتین در بارهٔ کند شدن آهنگ کار ساعتهای متحرک است که مربوط به

هندسهٔ فضا ـ زمان[1] می باشد. بنا به گفتهٔ اینشتین، ساعتی که حرکت می کند، نسبت به ساعت ساکن آهسته ترکار می کند. درحقیقت، این اثر نسبیتی، تنها مختص ساعتهای متحرک نمی باشد، بلکه همهٔ پدیده هایی که به نوعی تابع زمان هستند، در هنگام حرکت با آهنگ آهسته تری روی می دهند. به عنوان مثال، سرعت واکنشهای شیمیایی، آهنگ رشد موجودات و همین طورآهنگ ضربان قلب آنها و ... وابسته به سرعت نسبی آنها می باشند. به بیان دیگر، برای چنین پدیده هایی، زمان خود آهسته ترمی گذرد. درسرعتهای معمولی، این اثر ناچیز و قابل چشم پوشی است. اما ساعتی که نسبت به یک ناظر ساکن، با سرعتی برابر ۰/۸۸۳ سرعت نورحرکت می کند، از دید ناظر ساکن، این ساعت هر دو ثانیه را یک ثانیه نشان خواهد داد و درسرعت نور، زمان متوقف می شود. به عبارت دیگر، از دید ناظر ساکن، عقربهٔ ساعت متحرک از حرکت باز می ایستد. به بیان دقیق ترمی توان گفت که ساعت متحرک برای نشان دادن یک ثانیه، به مدت زمان بسیار طولانی یا بی نهایت نیاز دارد. که ما این مطلب را مجدداً درفصل سوم، در بخش نمودارهای مینکوفسکی پی می گیریم. دراینجا نیز برای به دست آوردن رابطهٔ اتساع زمان[2] یا ارتباط بین زمانی که ساعتهای ساکن و متحرک نشان می دهند، می توان مانند شکل (۲-۶) از واگنی استفاده کرد که درکف و سقف آن آینه هایی موازی هم تعبیه شده است.




شکل (۲-۶) : ساعت نوری ـ اتساع زمان

به طوری که پرتو نورمی تواند بین کف و سقف واگن، تابیده و باز تابیده شود. این ساز و کار را در واقع می توان به عنوان یک ساعت نوری[3] درنظرگرفت.

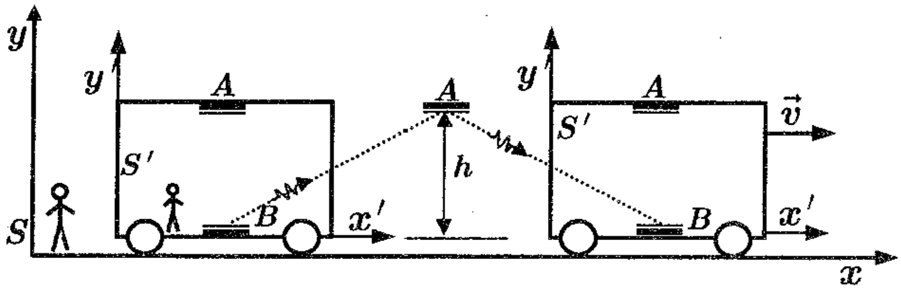
اکنون، با توجه به شکل(۲-۶)، اگرواگن با سرعت ثابت $v$ درجهت مثبت محور $x$ ها حرکت کند. ازدید ناظرهمراه واگن، یعنی $S'$ زمان لازم برای رفت و برگشت پرتو نور، بین

1- Geometry of Space -Time 2- Time dilation
3- Light Clock

دوآینهٔ $A$ و $B$ که در سقف و کف واگن قرار گرفته اند، برابر

$$\Delta t' = T_{S'} = \frac{۲h}{c} \qquad (۲-۲۹)$$

می باشد؛ زیرا پرتو نور نسبت به ناظر واقع در داخل واگن، در راستای قائم به سمت بالا می رود و درهمان راستا بر می گردد. در رابطهٔ (۲-۲۹)، $T_{S'}$ بازهٔ زمانی بین دو رویداد ارسال و دریافت پرتو نور، به وسیلهٔ آیینهٔ $B$ می باشد. البته این دو رویداد نسبت به ناظر $S'$ در یک مکان روی می دهند. اما از نظر ناظر واقع درکنار ریل، یعنی ناظر $S$ مسیری که پرتو نورمی پیماید، بیشتر از $۲h$ خواهد بود.




شکل (۲-۷) : ساعت نوری ـ از نظر ناظر ساکن $S$

اگر $l$ طول مسیر پیموده شده به وسیلهٔ پرتو نور از دید این ناظر باشد، در این صورت با توجه به شکل( ۲- ۷)، خواهیم داشت:

$$l = ۲\sqrt{h^۲ + (\frac{v\Delta t}{۲})^۲} \qquad (۲-۳۰)$$

اکنون، اگر زمان رفت و برگشت پرتو نور از دید ناظر $S$، برابر $\Delta t = l/c$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} \Delta t = T_S &= \frac{l}{c} \\ &= \sqrt{(۲h/c)^۲ + (v\Delta t/c)^۲} \\ &= \sqrt{(T_{S'})^۲ + (v\Delta t/c)^۲} \end{aligned} \qquad (۲-۳۱)$$

دررابطهٔ (۲-۳۱)، $\Delta t = T_S$ بازهٔ زمانی بین دو رویداد ارسال و دریافت پرتو نور، به وسیلهٔ آیینهٔ $B$ از دید ناظر ساکن $S$ می باشد. البته باید توجه کرد که این دو رویداد نسبت به این ناظر در یک مکان روی نمی دهند. اکنون، می توان $T_{S'}$ را از رابطهٔ(۲-۳۱) به دست آورد

$$T_{S'} = T_S\sqrt{۱ - v^۲/c^۲} = \frac{T_S}{\gamma(v)} \qquad (۲-۳۲)$$

درنتیجه، می توان نوشت:

$$T_S = \gamma(v) T_{S'} \qquad (۲-۳۳)$$

در روابط فوق، ضریب $\gamma(v)$ به صورت $\gamma(v) = ۱\Big/\sqrt{۱-v^۲/c^۲}$ تعریف می گردد. بنابراین، ضریب $\gamma(v)$ همیشه بزرگتر یا مساوی یک می باشد. بنابراین، رابطهٔ (۲-۳۳) نشان می دهد که $T_S \geq T_{S'}$ می باشد. این رابطه، ارتباط بین بازه های زمانی را از دید ناظرهای ساکن و متحرک بیان می کند. همچنین، به طور کلی می توان گفت که بازهٔ زمانی بین دو رویدادکه در چارچوب متحرک $S'$ رخ می دهند، نسبت به ناظر ساکن $S$ طولانی تر می شود. رابطهٔ(۲-۳۳) را رابطهٔ اتساع زمان می نامند. نکتهٔ دیگر اینکه $T_{S'}$ را ناظری اندازه می گیردکه نسبت به مکان وقوع دو رویداد ساکن است. بنابراین، $T_{S'}$ را می توان **زمان ویژه**[1] نامید. این رابطه را می توان به همهٔ پدیده ها یا فرایندهای فیزیکی که به طریقی وابسته به زمان می باشند، تعمیم داد.

به عنوان مثال، اگر سرعت واگن برابر $v = ۳c/۵$ در نظر گرفته شود. در این صورت، $\gamma(v)$ برابر ۵/۴ به دست می آید. درنتیجه اگر از دید ناظر $S'$، زمان رفت وبرگشت پرتو نور، یعنی $T_{S'}$ برابر۴ نانوثانیه باشد، دراین صورت از دید ناظر $S$، این زمان، یعنی $T_S$ برابر ۵ نانوثانیه خواهد بود.

اکنون، با توجه به رابطهٔ اتساع زمان، ناظر $S$ مشاهده می کند که ساعت متحرک یا ساعت ساکن در چارچوب $S'$ کند کار می کند. بنابراین، او برای برقراری ارتباط بین بازه های زمانی ثبت شده به وسیلهٔ دو ساعت ساکن و متحرک، می تواند رابطهٔ $T_S = \gamma(v) T_{S'}$ را بنویسد. ازطرف دیگر، ناظر $S'$ نیز ادعا می کند که چارچوب یا ناظر $S$ نیز با سرعت $v$ درخلاف جهت محور $x'$ چارچوب خودش حرکت می کند. بنابراین، او نیز می تواند رابطهٔ اتساع زمان را به صورت $T_{S'} = \gamma(v) T_S$ بنویسد. درنتیجه، او نیز ادعا می کند که ساعت ناظر $S$ آهسته کار می کند. یعنی اینکه، هرکدام ازناظرهای $S$ یا $S'$ ادعا می کنند که ساعت همراه ناظر دیگر، درمقایسه با ساعت خودش کندترکار می کند. از

1- Proper Time

طرف دیگر، با توجه به اینکه اندازهٔ $\gamma(v)$ بستگی به علامت $v$ ندارد، دراین صورت، آهنگ کند شدن کار ساعتهای دو ناظر نیز باید یکسان باشد. بنابراین، اکنون دراینجا ممکن است این سؤال مطرح شود که کدام یک از ناظرها راست می گوید، ناظر $S$ یا $S'$؟

برای پاسخ به این تناقض ظاهری، اگر کمی دقت شود، می توان به جواب این سؤال پی برد؛ زیرا سؤالی که در اینجا مطرح شد، دقیقاً مانند آن است که گفته شود که دو سیب مشابه روی میز است و سپس ادعا شود که سیب اولی بزرگتر از دومی و سیب دومی نیز بزرگتر از اولی است. برای توضیح دقیقتر این تناقض ظاهری، کافی است در رابطهٔ اتساع زمان دقت بیشتری شود. همان طورکه اشاره شد، رابطه ای که ناظر $S$ برای اتساع زمان می نویسد، به صورت $T_S = \gamma(v)T_{S'}$ می باشد. دراین رابطه $T_{S'}$ بازهٔ زمانی بین دو رویداد ارسال و دریافت پرتو نور است که در چاچوب $S'$ در یک نقطه یا مکان رخ می دهند. همین طور، رابطه ای که ناظر $S'$ برای اتساع زمان می نویسد، به صورت $T_{S'} = \gamma(v)T_S$ خواهد بود. دراین رابطه نیز $T_S$، بازهٔ زمانی بین دو رویدادی است که در چاچوب $S$ در یک نقطه یا مکان رخ می دهند. بنابراین، رابطهٔ $T_S = \gamma(v)T_{S'}$، تنها هنگامی صادق است که دو ریداد در چارچوب $S'$ هم مکان باشند و رابطهٔ $T_{S'} = \gamma(v)T_S$، نیز تنها در صورتی صادق است که دو رویداد در چارچوب $S$ دریک مکان روی دهند. درنتیجه، دو رویداد هنگامی که نسبت به یک ناظر هم مکان باشند، نسبت به ناظر دیگر، نمی توانند هم مکان باشند. به عبارت دیگر، روابط $T_S = \gamma(v)T_{S'}$ و $T_{S'} = \gamma(v)T_S$، نمی توانند به طور همزمان نسبت به یک ناظر برقرار باشند. البته درحالت خاص، یعنی هنگامی که $v = ۰$ یا $\gamma(۰) = ۱$ باشد، دو رویداد نسبت به ناظرهای $S$ و $S'$ در یک مکان رخ می دهند که البته در این صورت $T_S = T_{S'}$ خواهد بود.

در نهایت، نتیجه اینکه هیچگونه تناقضی بین ادعای دو ناظر وجود ندارد؛ زیرا هر کدام از آنها برای اندازه گیری زمان از چارچوبهای مرجع مختلفی استفاده می کنند. مثال واضح تر دیگری که می توان در این مورد مطرح نمود، این است که فرض کنید که دو شخص با سرعت معینی درامتداد یک خط راست، از یکدیگر دور می شوند. در این صورت، هر کدام از این دو شخص ادعا خواهند کرد که شخص دیگری کوتاه وکوتاهتر به نظر

می رسد. روشن است که در بیان و ادعای این دو شخص هیچگونه تناقضی وجود ندارد.

نکتهٔ آخر و مهم تر اینکه در واقع، اگر دو ناظر یکدیگر را به طور یکسان مشاهده و ارزیابی نکنند، تناقض ایجاد می شود و این موضوع نشان دهندهٔ نقص نظریهٔ نسبیت خواهد بود؛ زیرا هم ارز بودن چارچوبهای مرجع، یکی از پیامدهای اساسی و مهم نظریهٔ نسبیت خاص می باشد.

---

**مثال ۲ - ۳ :** میونها[1] ذرات بنیادی هستند که شبیه الکترونها بوده، منتها جرم آنها ۲۰۰ برابرجرم الکترونها می باشد. این ذرات در طبقات بالای جو براثر برخورد اشعهٔ کیهانی با مولکولها و یونهای موجود درجو زمین ایجاد می گردند. نیمه عمرمتوسط این ذرات در چارچوب مرجع متصل به آنها یا چارچوب سکونشان،یعنی $S'$، برابر $\tau = ۲\times۱۰^{-۶}$ ثانیه می باشد. این ذرات پس از واپاشی[2] به الکترون و نوترینو[3] تبدیل می شوند. حال، اگر فرض می کنیم که این ذرات در ارتفاع ۵۰ کیلومتری بالای سطح زمین تولید شوند و بدون برخورد با ذرهٔ دیگری، با سرعت $v = ۰/۹۹۹۹c$ در راستای قائم به سمت زمین حرکت کنند. دراین صورت، ازنظر ناظرواقع بر روی سطح زمین، یعنی $S$ بررسی نمایید که آیا این ذرات قبل از واپاشی به سطح زمین می رسند یا خیر؟

**جواب :** این مثال را در واقع، می توان به عنوان تأییدی تجربی برای اثر نسبیتی اتساع زمان در نظر گرفت؛ زیرا اگر برای توضیح فرایند تولید و واپاشی این ذرات، از اثرهای نسبیتی استفاده نشود، به نتیجه ای خواهیم رسید که تجربه آن را تأیید نمی کند؛ زیرا بدون در نظر گرفتن اثر اتساع زمان، حداکثرمسافتی را که میونها قبل از واپاشی می توانند طی کنند، برابر

$$\begin{aligned} h &= vT_{S'} = v\tau \\ &= (۰/۹۹۹۹۸c)(۲/۰\times۱۰^{-۶}\,s) \simeq ۶۰۰m \end{aligned} \qquad (۳۴\text{-}۲)$$

خواهد بود. بنابراین، به نظر می رسد که از نظر ناظر $S$ این ذرات از ارتفاعی که تولید می شوند، هرگز نتوانند به سطح زمین برسند. البته این نتیجه با تجربه سازگار نیست؛ زیرا این ذرات در سطح زمین به طور معمول آشکارسازی و یافت می شوند. نتیجه اینکه از نظر ناظر

---

1- Muons 2- Decay 3- Neutrino

واقع بر روی سطح زمین، نیمه عمر این ذرات باید به اندازه ای باشد یا به طور دقیقتر، باید به اندازه ای طولانی شود تا بتوانند قبل از واپاشی، مسافت ۵۰ کیلومتری بین مکان تولید تا سطح زمین را بپیمایند. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ اتساع زمان، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{T_{S'}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \frac{2/0\times10^{-6}}{\sqrt{1-(0/99998)^2}} = 3/1623\times10^{-4}\, s \end{aligned} \tag{۳۵-۲}$$

دراین صورت، مسافتی را که این ذرات درمدت زمان $T_S$ طی می کنند؛ می توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} h = vT_S &= (0/99998c)(3/1623\times10^{-4}\, s) \\ &\simeq 94/867 km \end{aligned} \tag{۳۶-۲}$$

حال، با توجه به مسافتی که میونها می توانند قبل از واپاشی طی کنند، این ذرات می توانند قبل از واپاشی به سطح زمین برسند.

---

**مثال ۲ - ٤ :** فرض کنید که در چارچوب ساکن $S$، دو ذرهٔ $A$ و $B$ که فاصلهٔ آنها برابر $L_\circ$ می باشد، به طور همزمان، به ترتیب با سرعتهای $v_A = v$ و $v_B = 2v$ به سمت یکدیگر شروع به حرکت کنند. دراین صورت، ساعت واقع درچارچوب سکون ذرات، در لحظهٔ برخورد دو ذره با یکدیگر، چه زمانی را نشان خواهند داد؟

**جواب:** برای حل این مسأله، می توان از رابطهٔ اتساع زمان استفاده کرد. درچارچوب ساکن $S$، مدت زمانی که طول می کشد تا برخورد بین دو ذره روی دهد، از رابطهٔ

$$\begin{aligned} L_o &= (v_A + v_B)T \\ &= (v + 2v)T \\ &= 3vT \end{aligned} \tag{۳۷-۲}$$

به دست می آید. این مدت زمان، برابر $T = L_\circ/3v$ می باشد. حال، با در نظرگرفتن رابطهٔ اتساع زمان، ساعتهای همراه ذرات، هنگام برخورد، به ترتیب زمانهای

$$T_A = \frac{L_\circ}{۳v}\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}} \qquad (۲-۳۸)$$

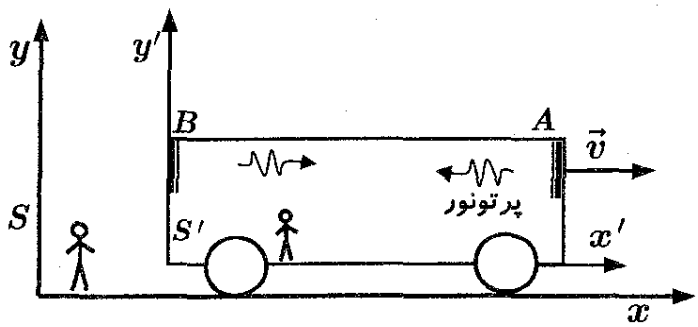
و

$$T_B = \frac{L_\circ}{۳v}\sqrt{۱-۴\frac{v^۲}{c^۲}} \qquad (۲-۳۹)$$

را نشان خواهند داد. که با مقایسهٔ زمانهای به دست آمده $T_A > T_B$ می باشد.

## ۲ - ۶ - ۳ : انقباض طول

برای نشان دادن این اثر نسبیتی نیز می توان از واگنی به طول $L$ استفاده کرد. برای این منظور، فرض می کنیم در ابتدا و انتهای واگن دو آیینهٔ موازی $A$ و $B$ تعبیه شده باشد، به طوری که پرتو نور بتواند بین آنها تابیده و باز تابیده شود.




شکل (۲-۸) : انقباض طول

اکنون، با توجه به شکل (۲-۸) ازنظر ناظر $S'$، یعنی ناظر واقع در واگن، زمان رفت و برگشت پرتو نور بین آیینهٔ های $A$ و $B$ برابر

$$T_{S'} = \frac{۲L_\circ}{c} \qquad (۲-۴۰)$$

می باشد. دراینجا، علت افزودن اندیس صفر به $L$، این است که ابعاد موازی حرکت نسبی از نظر ناظرهای مختلف یکسان نمی باشد. بنابراین، فرض می کنیم که طول واگن از نظر ناظر $S'$ برابر $L_\circ$ باشد. حال، می توان زمان رفت و برگشت پرتو نور را از نظرناظر $S$، یعنی ناظرواقع بر روی سطح زمین نیز محاسبه کرد. با توجه به شکل(۲-۸)، اگر $t_A$ زمان رسیدن پرتو نوراز آیینهٔ $B$ به آیینهٔ $A$ باشد. دراین صورت، می توان نوشت:

$$ct_A = L + vt_A \qquad (۲-۴۱)$$

در نتیجه $t_A$، ازرابطهٔ فوق، به صورت زیر به دست می آید.

$$t_A = \frac{L}{c-v} \quad (۴۲-۲)$$

همچنین، اگر $t_B$، زمان برگشت پرتو نور از آیینهٔ $A$ به آیینهٔ $B$ باشد، خواهیم داشت:

$$ct_B = L - vt_B \quad (۴۳-۲)$$

که $t_B$ نیز از رابطهٔ فوق، برابر

$$t_B = \frac{L}{c+v} \quad (۴۴-۲)$$

به دست می آید. درنتیجه، زمان کل رفت و برگشت پرتونور بین آیینه ها، ازنظرناظر $S$، برابر

$$\begin{aligned} T_S &= (t_A + t_B) \\ &= L\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) \\ &= \frac{2L}{c}\left[\frac{1}{1-(v/c)^2}\right] \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

خواهد بود. حال، با استفاده از ضریب $\gamma(v)$، رابطهٔ فوق را می توان به صورت

$$T_S = \frac{2L}{c}\gamma^2(v) \quad (۴۶-۲)$$

نوشت. اکنون، می توان مقدار $T_S$ را از رابطهٔ(۲-۴۶) و همچنین $T_{S'}$ را از رابطهٔ (۲-۴۰) در رابطهٔ اتساع زمان، یعنی رابطهٔ (۲-۳۳) جایگذاری کرد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} = L_0\sqrt{1-(v^2/c^2)} \quad (۴۷-۲)$$

بنابراین، اگر طول واگن از نظر ناظرساکن درواگن، برابر $L_0$ باشد، در این صورت، طول آن ازنظر ناظر $S$، برابر $L$ خواهد بود. اکنون با توجه به رابطهٔ (۲-۴۷)، می توان نتیجه گرفت که $L \leq L_0$ است. همچنین، هنگامی که $v \ll c$ باشد، طول واگن از نظر هردو ناظر برابر می شوند. $L_0$ را **طول ویژه**[1] می نامند؛ زیرا این طول در چارچوب سکون واگن اندازه گرفته می شود. رابطهٔ (۲-۴۷) انقباض طول را نسبت به ناظر ساکن $S$ نشان می دهد. حال می توان اختلاف بین $L_0$ و $L$ را نیز به دست آورد. بنابراین، داریم:

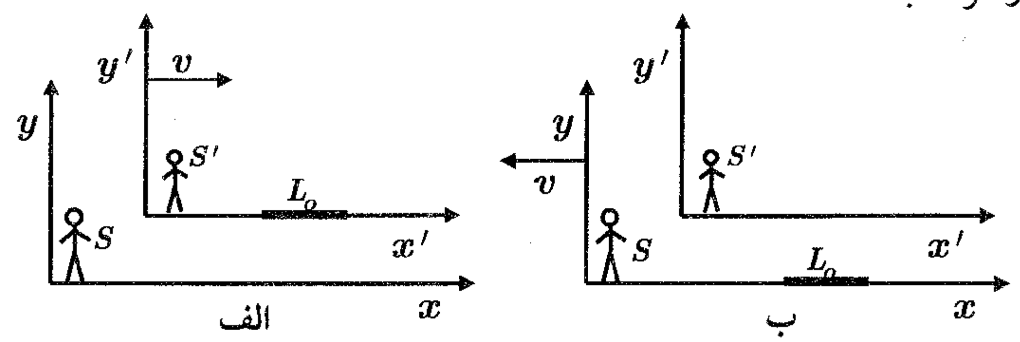
---

**1- Proper Lenght**

$$\begin{aligned}\Delta L &= L_{\circ} - L \\ &= L_{\circ} - L_{\circ}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^{2}} \\ &= L_{\circ}(1-\sqrt{1-(\frac{v}{c})^{2}}) \\ &\simeq L_{\circ}(\frac{1}{2}(\frac{v}{c})^{2})\end{aligned} \tag{۴۸-۲}$$

اکنون به عنوان مثال، فرض کنید که هواپیمایی مسافت ۴۰۰۰ کیلومتر را درمدت زمان ۶ ساعت طی کند. در این حالت $\Delta L$ برابر ۰/۸ میکرون خواهد بود. اما برای پروتونهای پرتو کیهانی که تقریباً با سرعت ۰/۹ سرعت نور حرکت می کنند، اگراین ذرات دایره ای به شعاع ۶۵۰۰ کیلومتر را طی کنند؛ $\Delta L$ برابر ۲۳۰۰ کیلومتر خواهد بود.

حال، فرض کنید که مطابق شکل (۲- ۹)، هرکدام از ناظرهای $S$ و $S'$ میله ای مشابه به طول $L_{\circ}$ دراختیارداشته باشند. $L_{\circ}$ طول ویژهٔ میله ها در هرکدام ازچارچوبهای $S$ و $S'$ می باشد. همچنین، فرض کنید که میله ها در امتداد محورهای مشترک $x$ و $x'$ دو چارچوب مرجع قرارگرفته باشند.




شکل (۲-۹) : دو جانبه بودن انقباض طول

حال، با توجه به شکل(۲- ۹ ) الف، ناظر $S$ طول میلهٔ ساکن درچارچوب متحرک $S'$ را برابر

$$L_S = \frac{L_{\circ}}{\gamma(v)} \tag{۴۹-۲}$$

اندازه می گیردکه این طول، کوتاهتر از اندازهٔ آن درچارچوب $S'$ می باشد. همچنین با توجه به شکل(۲-۹ ) ب، ناظر $S'$ نیزطول میلهٔ ساکن درچارچوب متحرک $S$ را کوتاهتر و برابر

$$L_{S'} = \frac{L_{\circ}}{\gamma(v)} \tag{۵۰-۲}$$

به دست می آورد. اما نکته ای که باید به آن اشاره نمود، این است که این اثرنسبیتی تنها برای

طولهایی که موازی سرعت نسبی دوچارچوب باشند، ظاهر می شود. همچنین، نکتهٔ مهم دیگری که باید دراندازه گیری طول یک جسم متحرک درنظر گرفته شود، این است که ابتدا و انتهای آن باید به طورهم‌زمان اندازه گیری شود. ازطرف دیگر، باید توجه داشت که دو اثر نسبیتی انقباض طول و اتساع زمان، نمی توانند مستقل از یکدیگر باشند؛ زیرا با استفاده از اثرنسبیتی انقباض طول، می توان اثر اتساع زمان را نتیجه گرفت و برعکس.

اکنون، باتوجه به روابط(۲-۴۹) و (۲-۵۰)، می توان نتیجه گرفت که اثر نسبیتی انقباض طول نیزمانند اثراتساع زمان، دو جانبه می باشد. این موضوع نیز، با توجه به نکاتی که درمورد اثر اتساع زمان مطرح گردید، هیچگونه تناقضی را در این مورد ایجاد نمی کند. برای توضیح و برطرف کردن این تناقض ظاهری، مثالی را مطرح می کنیم. فرض کنید که دو ناظر دردو سیارهٔ کاملاً یکسان $A$ و $B$ زندگی می کنند. حال، اگر ناظر ساکن در سیارهٔ $A$، به مشاهدهٔ سیارهٔ $B$ بپردازد. در این صورت، اگر ناظر $A$ مشاهده کند که سیارهٔ $B$ با سرعت ۰/۸۸۳ سرعت نور، نسبت به $A$ ازکنارش بگذرد. و اگردر این هنگام ناظر واقع در سیارهٔ $A$، ابعاد سیارهٔ $B$ را اندازه بگیرد، مشاهده می کند که ابعاد آن در جهت حرکت به اندازهٔ ۵۰ درصد کوتاهتر شده است. یعنی از نظر ناظر $A$، سیارهٔ $B$ به جای آنکه یک سیارهٔ کروی شکل به نظر آید، بیضوی می نماید. ازطرف دیگر، ناظر واقع درسیارهٔ $B$ خودش را ساکن می پندارد و تصورمی کندکه سیارهٔ $A$ با سرعت ۰/۸۸۳ سرعت نورازکنارش عبور می کند. درنتیجه ناظر $B$ نیز شکل سیارهٔ $A$ را بیضوی مشاهده می کند. اما سؤالی که در اینجا بلافاصله مطرح می شود، این است که کدام یک از دوسیاره، ابعادش کوتاه شده است؟ البته جواب این سؤال واضح است؛ زیرا با توجه به توضیحات داده شده در بالا، تنها پاسخ ممکن برای این سؤال، این است که بستگی به چارچوب مرجع یا ناظر دارد.

---

**مثال ۲ - ۵** : در مثال (۲-۳) فرایند تولید و واپاشی میونها را نسبت به ناظر ساکن روی سطح زمین، یعنی $S$ بررسی نمودیم. اکنون، این فرایند را ازدید ناظر همراه میونها، یعنی ناظر $S'$ بررسی نمایید.

جواب : همان طور که درمثال (۲-۳) اشاره شد، نیمه عمرمتوسط میونها نسبت به ناظری که همراه میون است، برابر $\tau = ۲\times۱۰^{-۶}\,s$ می باشد. بنابراین، اگر اثرهای نسبیتی، درحل این مسأله نظر گرفته نشوند، مسافتی که یک میون قبل از واپاشی طی می کند، باید برابر

$$d = vT_{S'} = v\tau$$

$$= (۰/۹۹۹۹۸c)(۲/۰\times۱۰^{-۶}\,s) \simeq ۶۰۰m \qquad (۲-۵۱)$$

باشد. اما این مسافت بسیار کوچکتر ازفاصلهٔ بین مکان تولید این ذرات تا سطح زمین، یعنی فاصلهٔ ۵۰ کیلومتر است. بنابراین، به نظر می رسد که این ذرات هرگز نتوانند به سطح زمین برسند. اما واقعیّت این است که از نظر ناظر $S'$ که نسبت به میون ساکن است، مسافت ۵۰ کیلومتری پیموده می شود. البته، این مطلب درصورتی خواهد داشت که مسافت ۵۰ کیلومتری، ازنظر ناظر $S'$ انقباض پیدا کند. در این صورت، فاصلهٔ ۵۰ کیلومتر ازنظراین ناظر، برابر

$$L_{S'} = \frac{L_\circ}{\gamma(v)} = L_\circ\sqrt{۱-(v/c)^۲}$$

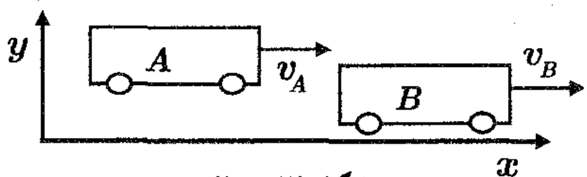
$$= ۵۰۰۰۰m\sqrt{۱-(۰/۹۹۹۹۸)^۲} \qquad (۲-۵۲)$$

$$\simeq ۳۱۶/۲۳m$$

می باشد. درنتیجه، ازدید ناظری که همراه میون حرکت می کند، این ذره قبل از واپاشی به سطح زمین خواهد رسید.

---

**مثال ۲ - ٦ :** مطابق شکل(۲-۱۰)، دو واگن $A$ و $B$ را درنظر بگیرید و فرض کنید که طول ویژهٔ هرکدام ازآنها برابر $L_\circ$ باشد. همچنین، فرض کنید که سرعت آنها به ترتیب برابر $v_A = ۴c/۵$ و $v_B = ۳c/۵$، بوده و دریک جهت حرکت کنند. اکنون، بررسی نمایید که از نظر ناظر ساکن $S$، بعد ازگذشت چه مدت زمان، واگن $A$ از واگن $B$ جلومی زند. یعنی زمان بین لحظه ای که ابتدای $A$ از انتهای $B$، وانتهای $A$ از ابتدای $B$ عبور می کند، چقدر است؟



شکل(۲-۱۰)

**جواب :** با توجه به اثر نسبیتی انقباض طول، ازنظرناظر $S$، طول واگنها برابر

$$L_{AS} = L_{\circ} \sqrt{۱-(v_A/c)^۲} = \frac{۳L_{\circ}}{۵} \qquad (۵۳-۲)$$

و

$$L_{BS} = L_o \sqrt{۱-(v_B/c)^۲} = \frac{۴L_{\circ}}{۵} \qquad (۵۴-۲)$$

می باشند. بنابراین، $L = L_{AS} + L_{BS}$ یا $L = ۷L_{\circ}/۵$ می باشد. بنابراین، سرعت نسبی آنها نیز، نسبت به ناظر $S$، برابر

$$\begin{aligned} v &= v_A - v_B \\ &= \frac{۴c}{۵} - \frac{۳c}{۵} = \frac{c}{۵} \end{aligned} \qquad (۵۵-۲)$$

خواهد بود. دراین صورت، زمان مورد نظر برابر

$$T_S = \frac{۷L_{\circ}/۵}{c/۵} = \frac{۷L_{\circ}}{c} \qquad (۵۶-۲)$$

به دست می آید.

## ۲ - ۷ : تبدیلات لورنتس

اکنون، اگرناظرهای لخت بخواهند، مدلی از فضا - زمان برای خود ایجاد نمایند. هریک از آنها باید یک دستگاه مختصات برای خود انتخاب کنند. بنابراین، فرض می کنیم که این ناظرها مقیاس طول یکسانی داشته باشند و همچنین، برای اندازه گیری زمان، از ساعتهایی استفاده کنند که یکسان بوده و از قبل همزمان شده باشند. همان طورکه در فصل قبل اشاره شد، مجموعهٔ دستگاه مختصات، همراه با مقیاسهای طول و زمان، چارچوب مرجع یا ناظر نامیده می شود. حال، اگرناظر لخت $S$، مختصات

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (x^{\circ}, x^{۱}, x^{۲}, x^{۳}) \\ &= (t, x, y, z) \end{aligned} \qquad (۵۷-۲)$$

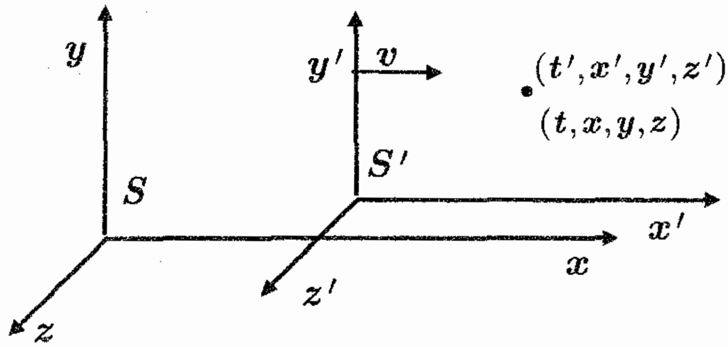
را به یک رویداد نسبت دهد. دراین صورت، ناظر $S'$ نیزمختصات

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= (x'^{\circ}, x'^{۱}, x'^{۲}, x'^{۳}) \\ &= (t', x', y', z') \end{aligned} \qquad (۵۸-۲)$$

را به آن رویداد نسبت خواهد داد. درحالت نسبیتی، روابطی که ارتباط بین مختصات یک

رویداد را درچارچوبهای مرجع مختلف بیان می کنند، تبدیلات لورنتس[1] نامیده می شوند. در واقع، این تبدیلات جایگزین تبدیلات گالیله درحالت غیرنسبیتی می شوند.

اکنون، می خواهیم ارتباط بین مختصات یک رویداد را درچارچوبهای لخت مختلف، مثلاً $S$ و $S'$ به دست آوریم. همچنین، برای ساده سازی مسأله، فرض می کنیم که محورهای مختصات دو چارچوب مرجع، مطابق شکل (۲-۱۱)، در حین حرکت نسبی موازی یکدیگر بوده وچارچوب لخت $S'$ با سرعت ثابت $v$، نسبت به چارچوب لخت $S$، درجهت مثبت محورمشترک $x$ و $x'$ حرکت نماید.




شکل (۲-۱۱) : تبدیلات لورنتس

بنابراین، واضح است که مختصات یک رویداد، دردو چارچوب به صورت زیرتابعی از یکدیگرخواهند بود. یعنی

$$x^{\mu} = x^{\mu}\left(x'^{0}, x'^{1}, x'^{2}, x'^{3}\right), \quad \mu = 0,1,2,3 \qquad (۲-۵۹)$$

و روابط وارون نیز به صورت

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}\left(x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}\right), \quad \mu = 0,1,2,3 \qquad (۲-۶۰)$$

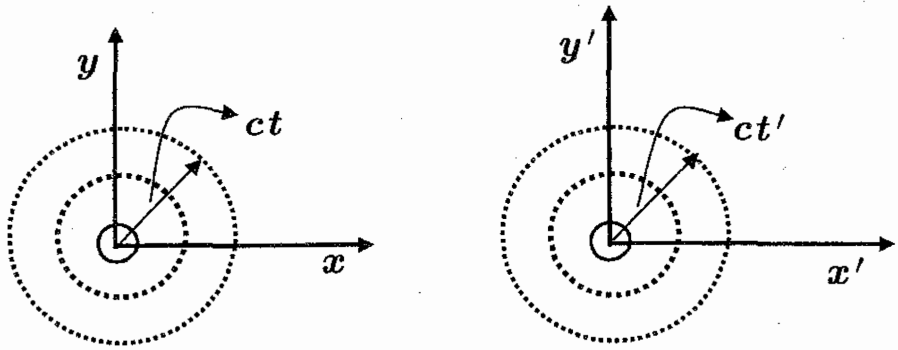
خواهد بود. ازطرف دیگر، چون دو چارچوب لخت می باشند، درنتیجه بنابراصل اول نسبیت، حرکت مستقیم الخط و یکنواخت یک ذره نسبت به ناظر $S$، باید تحت تبدیلات یا روابطی که می خواهیم به دست آوریم، به حرکتی از همان نوع درچارچوب $S'$ تبدیل شود. به بیان دیگر، این تبدیلات بایدجهانخط های راستخط را دریک چارچوب، به جهانخط های راستخط درچارچوب دیگر تبدیل نماید. از طرف دیگر، می دانیم تبدیلی که یک خط راست را به خطی راست تبدیل نماید، و همچنین، خطی را که دربی نهایت نیست، به بی نهایت نبرد، چنین

1- Lorentz Transformations

تبدیلی را خطی می نامند. بنابراین، در روابط(۲-۵۹) و (۲-۶۰)، $x^\mu$ و $x'^\mu$ باید توابعی خطی ازیکدیگر باشند؛ زیرا هرمعادلهٔ درجهٔ دوم دارای دوجواب می باشد. و معادلات با درجات بالاتر نیز جوابهای بیشتری دارند. همچنین، هرمشاهده ای در یک چارچوب، مثلاً، چارچوب $S$ باید تعبیرمنحصر به فردی درچارچوب دیگر، مانند $S'$ داشته باشد. به عبارت دیگر، آنچه هرناظر می بیند می بایستی از یک تناظر یک به یک برخوردار باشد. همچنین، می توان نشان داد که اگر $x^\mu$ و $x'^\mu$ تبدیلی خطی از یکدیگر نباشند، همگنی فضا که به عنوان یک اصل در فیزیک نسبیتی و کلاسیک پذیرفته می شود، نقض می گردد.

اکنون، در اینجا برای ساده سازی و همچنین، برای درک بهتر ساختار این تبدیلات و بررسی دقیق تر پیامدهای اصل نسبیت، تنها بحث را به یک بعد فضا و یک بعد زمان محدود می کنیم. درنهایت،-بعد از به دست آوردن قانون تبدیل مورد نظر، می توان به راحتی تعمیم های لازم را برای بررسی مسأله، درحالت چهار بعد فضا ـ زمان لحاظ کرد.

حال، با توجه به شکل (۲-۱۲)، فرض کنید که درلحظهٔ $t = t' = 0$، مبدأ دوچارچوب مرجع، یعنی $O$ و $O'$ بریکدیگر منطبق باشند. اکنون، اگر فرض کنیم که در این لحظه جرقه ای درمبدأ مشترک دو چارچوب زده شود، در این صورت، این جرقه به صورت یک موج کروی همگن در دوچارچوب منتشرخواهد شد.




**شکل(۲-۱۲) : انتشار موج کروی در چارچوبهای $S$ و $S'$**

از طرف دیگر، می دانیم که بنابراصل دوم نسبیت، سرعت نور در دو چارچوب مرجع باید یکسان باشد. بنابراین، معادلهٔ سطح موج کروی ایجاد شده در دو چارچوب لخت $S$ و $S'$، به ترتیب، با روابط زیر داده می شوند.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \qquad (۲-۶۱)$$

و

$$x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} = (ct')^{2} \tag{۶۲-۲}$$

اکنون، با استفاده از تبدیلات گالیله در رابطهٔ (۲-۶۲)، خواهیم داشت:

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - \underbrace{2xvt + v^{2}t^{2}} = (ct)^{2} \tag{۶۳-۲}$$

دراین صورت، با مقایسهٔ روابط (۲-۶۱) و (۲-۶۳)، نتیجه می گیریم که جملات اضافی $2xvt + v^{2}t^{2}$ که به علت استفاده از تبدیلات گالیله ظاهرشده اند، باید حذف شوند. به عبارت دیگر، می توان نتیجه گرفت که تبدیلات گالیله، نمی توانند نتیجهٔ اصل دوم نسبیت را برآورده نمایند.

بنابراین، برای به دست آوردن تبدیلات صحیح، باید جملات اضافی ظاهر شده در رابطهٔ (۲-۶۳)را حذف نمود. برای این منظور، بنابه فرض همگنی فضا و همین طور بنا به تقارن و با توجه به اینکه سرعت نسبی، اثری روی طولهای عمود بر راستای حرکت نسبی ندارد، می توان $y'$ و $z'$ را برابر $y$ و $z$ در نظر گرفت.

اما نکتهٔ مهمی که در اینجا باید به آن اشاره شود، این است که می توان ظاهر شدن جملات اضافی در رابطهٔ(۲-۶۳) را ناشی ازمطلق دانستن زمان در فیزیک نیوتنی، یعنی رابطهٔ $t' = t$ در نظر گرفت. بنابراین، برای حذف این جملات، $t'$ رامی توان تابعی از $x$ و $t$ در نظرگرفت. اکنون، همان طورکه قبلاً اشاره شد، اگر برای ساده سازی، تنها یک بعد فضا و یک بعد زمان در نظرگرفته شود، در این صورت، با توجه به اینکه همگنی فضا ایجاب می کند که روابط تبدیلی خطی باشند، براین اساس، رابطهٔ (۲-۶۰) را می توان به شکل

$$\begin{aligned} x' &= a_{1}x + a_{2}t \\ t' &= b_{1}x + b_{2}t \end{aligned} \tag{۶۴-۲}$$

نوشت. همچنین، ازخطی بودن روابط(۲-۶۴)، می توان نتیجه گرفت که ضرایب $a_{1}$، $a_{2}$، $b_{1}$ و $b_{2}$ باید مستقل از فضا و زمان بوده و این ضرایب تنها می توانند به سرعت نسبی دو چارچوب مرجع، یعنی $v$ و همین طورسرعت $c$ بستگی داشته باشند.

اکنون، قبل ازجایگذاری روابط (۲-۶۴) در(۲-۶۲)، باید توجه نماییم که مبدأ چارچوب مرجع $S'$ یا $x' = 0$، با سرعت $v$ نسبت به مبدأ چارچوب $S$، حرکت می کند.

درنتیجه، مکان آن درهرلحظه در چارچوب $S$، با رابطهٔ $x = vt$ تعیین می گردد. بنابراین، از رابطهٔ اول (۲-۶۴)، می توان نتیجه گرفت:

$$o = a_1 x + a_2 t \;\Rightarrow\; x = -\frac{a_2}{a_1} t = vt \qquad (۲\text{-}۶۵)$$

یا

$$a_2 = -a_1 v \qquad (۲\text{-}۶۶)$$

حال، با توجه به رابطهٔ(۲-۶۶)، می توان رابطهٔ اول(۲-۶۴) را به صورت

$$x' = a_1 \left(x + \frac{a_2}{a_1} t\right) = a_1 (x - vt) \qquad (۲\text{-}۶۷)$$

نوشت. اکنون، اگر رابطهٔ(۲-۶۷) و رابطهٔ دوم (۲-۶۴) را در(۲-۶۲)، جایگذاری نماییم، خواهیم داشت:

$$[a_1 (x - vt)]^2 + y^2 + z^2 = c^2 (b_1 x + b_2 t)^2 \qquad (۲\text{-}۶۸)$$

که بعد ازمرتب کردن جملات، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}(a_1^2 - c^2 b_1^2) x^2 + y^2 + z^2 = {} & (c^2 b_2^2 - a_1^2 v^2) t^2 \\ & + (2 b_1 b_2 c^2 + 2 a_1^2 v) xt\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۶۹)$$

حال، برای برآورده شدن اصل دوم نسبیت، یا به عبارت دیگر، برای سازگار شدن روابط (۲-۶۹) و (۲-۶۱)، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} a_1^2 - c^2 b_1^2 &= 1 \\ c^2 b_2^2 - a_1^2 v^2 &= c^2 \\ b_1 b_2 c^2 + a_1^2 v &= 0 \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۷۰)$$

که درنهایت می توان با حل سه معادلهٔ (۲-۷۰)، ضرایب $a_1$، $b_1$ و $b_2$ را به دست آورد. برای این منظور، از دو رابطهٔ اول و دوم (۲-۷۰)، داریم

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \frac{a_1^2 - 1}{c^2} \\ b_2^2 &= 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 a_1^2 \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۷۱)$$

همچنین، با درنظر گرفتن رابطهٔ سوم از(۲-۷۰) و جایگذاری روابط(۲-۷۱) در رابطهٔ به دست

آمده از آن، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} b_1^2 b_2^2 c^4 &= a_1^4 v^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{a_1^2 - 1}{c^2}\right)\left[\left(1 + (v/c)^2\, a_1^2\right)\right] c^4 \\ &= a_1^4 v^2 \end{aligned} \tag{۷۲-۲}$$

یا

$$a_1^2 c^2 - c^2 - v^2 a_1^2 = 0 \tag{۷۳-۲}$$

که در این صورت، با حل معادلهٔ فوق می توان به دست آورد

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \pm\gamma(v) \tag{۷۴-۲}$$

دررابطهٔ فوق باید $a_1 = +\gamma(v)$ را انتخاب نماییم؛ زیرا هنگامی که $v \to 0$ میل می کند، باید داشته باشیم: $x = x'$. در غیر این صورت، $x = -x'$ به دست می آید که نادرست می باشد. اکنون، می توان با جایگذاری $a_1 = \gamma(v)$ در روابط (۲-۷۱)، ضرایب $b_1$ و $b_2$ را به دست آورد. درنتیجه، خواهیم داشت:

$$b_1^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{c^2 - v^2}\right) = \frac{v^2}{c^4}\gamma^2 \tag{۷۵-۲}$$

همچنین،

$$b_2^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2} = \gamma^2 \tag{۷۶-۲}$$

بنابراین، $b_2 = \pm\gamma(v)$ می باشد که در اینجا نیز باید برای ضریب $b_2$، مقدار $+\gamma(v)$ را انتخاب نمود؛ زیرا هنگامی که $v \to 0$ میل می کند، باید داشته باشیم $t = t'$. درغیراین صورت $t = -t'$ خواهد بود که نادرست می باشد. همچنین، با توجه به رابطهٔ (۲-۷۵)، ثابت $b_1$ برابر $\pm v\gamma/c^2$، به دست می آید که دراینجا باید علامت منفی را برای $b_1$ انتخاب نماییم؛ زیرا با در نظر گرفتن رابطهٔ سوم در(۲-۷۰)، داریم

$$b_1 = -\frac{a_1^2 v}{b_2 c^2} = -\frac{v}{c^2}\gamma(v) \tag{۷۷-۲}$$

درنهایت، با به دست آوردن ضرایب $a_1$، $a_2$، $b_1$ و $b_2$ می توان تبدیلات لورنتس، یعنی

روابط (۲-۶۴) را به صورت

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(v)(t - \frac{v}{c^{۲}}x) \end{aligned} \qquad (۲-۷۸)$$

بیان کرد. این تبدیلات را می توان با استفاده ازتعریف $\beta = v/c$ به صورت مناسب

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(v)(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(v)(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (۲-۷۹)$$

نیز نوشت. حال، برای به دست آوردن تبدیلات وارون لورنتس، می توان $v$ را به $-v$ یا معادل آن $\beta$ را به $-\beta$، تبدیل کرده و همین طور، جای پریمها را تعویض کرد. یعنی

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(v)(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(v)(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad (۲-۸۰)$$

همچنین، با استفاده از نمادگذاری ماتریسی، می توان رابطهٔ (۲-۷۹) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\beta & ۰ & ۰ \\ -\gamma(v)\beta & \gamma(v) & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (۲-۸۱)$$

لازم به یادآوری است که این تبدیلات، برای اولین بار درسال ۱۹۰۴به وسیلهٔ لورنتس ریاضیدان و فیزیکدان هلندی، برای توضیح برخی پدیده های الکترومغناطیسی به عنوان اصل پذیرفته شدند. اما فرمولهای مربوط به آن را لارمور[1] (۱۹۴۲-۱۸۵۷)، فیزیکدان ایرلندی قبل از سال ۱۹۰۰ به دست آورده بود. و تعمیم کامل این تبدیلات تا زمان انتشار

1- Larmor, Joseph

نظریهٔ نسبیت، تحقق نیافت. درحقیقت، می توان گفت که فویگت[1] (۱۹۱۹-۱۸۵۰)، فیزیکدان آلمانی اولین کسی بود که در ۱۸۸۷ در بحثی مربوط به پدیده های نوسانی، این تبدیلات را به کاربرد.

البته، تبدیلات لورنتس را می توانستیم از ابتدا برای سه بعد فضا و یک بعد زمان به دست آوریم. برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس در حالت کلی، فرض کنید که چارچوب $S$ با سرعت $\vec{v}$ نسبت به چارچوب $S'$ در جهتی دلخواه حرکت نماید. در این حالت نیز برای اینکه چارچوبها لخت باشند، باید محورهای دو چارچوب درحین حرکت نسبی، موازی یکدیگر باقی بمانند؛ زیرا درحالتی که محورهای دو چارچوب نسبت به یکدیگر دوران داشته باشند، دوچارچوب نسبت به یکدیگرنالخت یا شتابدارخواهند بود. اکنون، با این فرض، می توان بردارهای مکانی $\vec{r}$ و $\vec{r}\,'$ را که مکان ذره را نسبت به ناظرهای $S$ و $S'$ معین می کنند، در دو راستای عمود بر $\vec{v}$ و موازی $\vec{v}$ تجزیه کرد. در این صورت، داریم:

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel \qquad (۸۲-۲)$$

و

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_\perp\,' + \vec{r}_\parallel\,' \qquad (۸۳-۲)$$

حال، برای مؤلفه های موازی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\parallel\,' &= \gamma(v)\,[\vec{r}_\parallel - \vec{v}t] \\ &= \gamma(v)\,[\vec{r}_\parallel - \vec{\beta}ct] \end{aligned} \qquad (۸۴-۲)$$

در این صورت، رابطهٔ(۲-۸۳)را می توان به صورت

$$\vec{r}\,' = \gamma(v)\,[\vec{r}_\parallel - \vec{\beta}ct] + \vec{r}_\perp\,' \qquad (۸۵-۲)$$

نوشت. از طرف دیگر، با توجه به تبدیلات دوم و سوم رابطهٔ(۲-۷۹)، می توان $\vec{r}_\perp$ را برابر $\vec{r}_\perp\,'$ در نظر گرفت. درنتیجه، رابطهٔ (۲-۸۵) به صورت

1- Voigt, Woldemar

$$\begin{aligned}\vec{r}\,' &= \gamma(v)[\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}ct] + \vec{r}_{\perp} \\ &= \gamma(v)[\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}ct] + \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} \\ &= \vec{r} + [\gamma(v) - 1]\vec{r}_{\parallel} - \gamma(v)\vec{\beta}ct\end{aligned} \tag{۲-۸۶}$$

نوشته می شود. در رابطهٔ(۲-۸۶) از رابطهٔ (۲-۸۲) استفاده شده است. ازطرف دیگر، بردار $\vec{r}_{\parallel}$ را می توان به شکل

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{\beta^2}\vec{\beta} \tag{۲-۸۷}$$

نیز نوشت. اکنون، با جایگذاری مقدار $\vec{r}_{\parallel}$ از رابطهٔ(۲-۸۷) در رابطهٔ (۲-۸۶)، خواهیم داشت:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + [\gamma(v) - 1]\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{\beta^2}\vec{\beta} - \gamma(v)\vec{\beta}ct \tag{۲-۸۸}$$

همچنین، تبدیل زمان بین دو چارچوب را نیز می توان با رابطهٔ

$$ct' = \gamma(v)[ct - \vec{\beta}\cdot\vec{r}] \tag{۲-۸۹}$$

بیان کرد. درنهایت، برای به دست آوردن تبدیلات وارون،کافی است $\vec{\beta}$ را به $-\vec{\beta}$ تبدیل نموده و جای پریمها را نیز تعویض کرد. در این صورت، تبدیلات وارون مختصات،به صورت

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + [\gamma(v) - 1]\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}\,'}{\beta^2}\vec{\beta} + \gamma(v)\vec{\beta}ct' \tag{۲-۹۰}$$

نوشته می شوند. همچنین، تبدیل وارون برای مختصهٔ زمانی نیز با رابطهٔ

$$ct = \gamma(v)[ct' + \vec{\beta}\cdot\vec{r}\,'] \tag{۲-۹۱}$$

بیان می شود. درپایان، می توان به این نکته اشاره کرد که با توجه به اینکه در فیزیک کلاسیک سرعت حدی، سرعت بینهایت می باشد، بنابراین، برای بررسی حالت حدی این تبدیلات، کافی است در رابطهٔ (۲-۸۸)، سرعت $c$ را به سمت بی نهایت میل دهیم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$x' = x - vt \ , \ y' = y \ , \ z' = z \ , \ t' = t \tag{۲-۹۲}$$

که در واقع، همان تبدیلات گالیله می باشند که فیزیک کلاسیک یا نیوتنی مبتنی برآن می باشد. بنابراین، تبدیلات گالیله را می توان به عنوان یک حالت خاص از تبدیلات لورنتس

در نظر گرفت. یادآوری می کنیم که با وجود سرعت بسیار زیاد زمین به دور خورشید، یعنی تقریباً ۳۰ کیلومتربرثانیه، این سرعت تنها ۰/۰۰۰۰۱ سرعت نور است. در نتیجه، تصحیح مربوط به نسبیت برای مشاهداتی که از زمین انجام می گیرند، درمقایسه با مشاهدات خورشیدی تنها حدود $۵ \times ۱۰^{-۷}$ در صد است.

---

**مثال ۲ – ۷ :** ماتریس تبدیل لورنتس را برای حالتهای زیر به دست آورید.

**الف :** برای حالتی که در آن، چارچوب $S'$ با سرعت $v_x$ در جهت مثبت محور $x$ چارچوب $S$، حرکت می کند.

**ب :** برای حالتی که درآن، چارچوب $S'$ با سرعت $v_y$ درجهت مثبت محور $y$ چارچوب $S$ حرکت می کند.

**ج :** برای حالتی که درآن، چارچوب $S'$ با سرعت $(v_x \, , v_y)$، نسبت به چارچوب $S$ حرکت می کند.

**جواب : الف:** دراین حالت، می توان ماتریس تبدیل را با در نظر گرفتن رابطهٔ (۲-۸۱)، به صورت زیر نوشت:

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma_x & -\gamma_x\beta_x & 0 & 0 \\ -\gamma_x\beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۲-۹۳)$$

که در آن $\gamma_x = \gamma(v_x)$ و $\beta_x = v_x / c$ می باشند.

**ب :** در این حالت نیز تبدیلات لورنتس به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(v_y)(ct - \beta_y y) \\ x' &= x \\ y' &= \gamma(v_y)(y - \beta_y ct) \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (۲-۹۴)$$

درنتیجه، ماتریس تبدیل لورنتس را دراین حالت، می توان به صورت زیر می باشد.

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} \gamma_y & ٠ & -\gamma_y\beta_y & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ -\gamma_y\beta_y & ٠ & \gamma_y & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \qquad (٩٥-٢)$$

ج : اگر ماتریس تبدیل لورنتس را درجهت محور $x$ و سپس درجهت محور $y$ بنویسیم، در این صورت، ازترکیب این دو تبدیل می توان ماتریس تبدیل را برای حالتی نوشت که در آن چارچوب $S'$ با سرعت $(v_x\,,v_y)$ نسبت به چارچوب $S$ حرکت می کند. بنابراین، داریم

$$\Lambda_x\Lambda_y = \begin{pmatrix} \gamma_x\gamma_y & -\gamma_x\beta_x & -\gamma_x\gamma_y\beta_y & ٠ \\ -\gamma_x\gamma_y\beta_x & \gamma_x & \gamma_x\gamma_y\beta_x\beta_y & ٠ \\ -\gamma_y\beta_y & ٠ & \gamma_y & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \qquad (٩۶-٢)$$

همچنین، می توان نشان داد که $\Lambda_x\Lambda_y \neq \Lambda_y\Lambda_x$ می باشد.

---

**مثال ۲ – ۸** : واگنی با طول ویژهٔ $L_٠$، با سرعت $۵c/۱۳$ نسبت به زمین حرکت می کند. در این حالت، توپی با سرعت $c/٣$ نسبت به واگن، از قسمت عقب واگن به سمت جلوی آن پرتاب می شود. حال، ازنظر ناظری که روی زمین ایستاده است؛ چه مدت طول می کشد تا توپ این مسیر را طی کند. همچنین، طول مسیر پیموده شده به وسیله توپ از نظراین ناظرچقدر است؟

جواب : برای حل این مسأله، می توان دو رویداد تعریف کرد. رویداد اول $E_١(x'_١,t'_١)$، برای پرتاب توپ از انتهای واگن و رویداد دوم $E_٢(x'_٢,t'_٢)$، برای رسیدن توپ به ابتدای آن. از نظر ناظر داخل واگن، یعنی $S'$ می توان نوشت:

$$\Delta x_{S'} = \Delta x' = x'_٢ - x'_١ = L_٠$$

$$\Delta t_{S'} = \Delta t' = t'_٢ - t'_١ = \frac{L_٠}{c/٣} = \frac{٣L_٠}{c} \qquad (٩٧-٢)$$

همچنین، با توجه به اینکه $v = ۵c/۱۳$ است بنابراین، $\gamma(v) = ۱۳/۱۲$ خواهد بود. اکنون، با استفاده ازتبدیلات لورنتس، بازهٔ زمانی بین دو رویداد ازنظر ناظر $S$، برابر

$$\begin{aligned} \Delta t_S &= \gamma(v)[\Delta t' + \frac{v}{c^۲}\Delta x'] \\ &= \frac{۱۳}{۱۲}\left(\frac{۳L_۰}{c} + \frac{(۵c/۱۳)}{c^۲}L_۰\right) = \frac{۱۱L_۰}{۳c} \end{aligned} \tag{۲-۹۸}$$

به دست می آید. همین طور بازهٔ مکانی یا فضایی بین دو رویداد نیز، برابر

$$\begin{aligned} \Delta x_S &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ &= \frac{۱۳}{۱۲}[L_۰ + (\frac{۵c}{۱۳})(\frac{۳L_۰}{c})] = \frac{۷L_۰}{۳} \end{aligned} \tag{۲-۹۹}$$

خواهد بود.

## ۲ - ۸ : اثرهای نسبیتی

در بخش ۲- ۶ ، اثرهای نسبیتی، یعنی نسبی بودن همزمانی، اتساع زمان و انقباض طول بدون استفاده ازتبدیلات لورنتس مورد بررسی قرارگرفتند. اکنون، می توان با در نظرگرفتن این تبدیلات، اثرهای نسبیتی فوق را مجدداً بررسی نمود.

### ۲ - ۸ - ۱ : نسبیت همزمانی

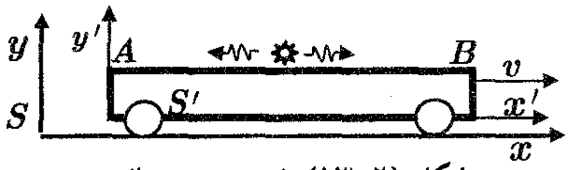
برای نشان دادن نسبی بودن همزمانی، دو رویداد $E'_۱(t'_۱, x'_۱)$ و $E'_۲(t'_۲, x'_۲)$ را در چارچوب $S'$ نظرمی گیریم. حال، فرض می کنیم که این دو رویداد دراین چارچوب به طور همزمان اتفاق بیافتند. دراین صورت، بازهٔ فضا- زمان بین آنها از نظر ناظر $S'$ برابر $(\Delta x', \Delta t') = (\Delta x', ۰)$ خواهد بود. اکنون، با استفاده ازتبدیلات لورنتس داریم

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma(v)(\Delta t' + \frac{v}{c^۲}\Delta x') \\ &= \gamma(v)(۰ + \frac{v}{c^۲}\Delta x') \\ &= \gamma(v)\frac{v}{c^۲}\Delta x' \end{aligned} \tag{۲-۱۰۰}$$

بنابراین، اگرچه دو رویداد از نظر ناظر $S'$ همزمان می باشند، اما ناظر $S$ بازهٔ زمانی بین آن

دو رویداد را برابر $\gamma \frac{v}{c^2}\Delta x'$ اندازه می گیرد.

**مثال ۲ – ۹:** مطابق شکل( ۲-۱۳)، فرض کنید که یک واگن باری به طول $2L_\circ$ با سرعت $v$ نسبت به چارچوب ساکن $S$ حرکت می کند. حال، اگر در وسط واگن فانوسی روشن شود، از نظر ناظر همراه واگن، نور فانوس به طور همزمان به ابتدا و انتهای آن می رسد. این مطلب را از دید ناظر ساکن کنار ریل یا چارچوب $S$ بررسی نمایید.



شکل (۲-۱۳): نسبیت همزمانی

**جواب :** چون از نظر ناظر $S'$، دو رویداد رسیدن پرتو نورفانوس به ابتدا و انتهای واگن همزمان می باشند. بنابراین، $t'_A = t'_B$ خواهد بود. حال، برای بررسی زمان رسیدن پرتو نور به ابتدا و انتهای واگن، ازنظر ناظر $S$، می توان ازتبدیلات لورنتس استفاده کرد. برای این منظور، می توان مبدأ مختصات چارچوب $S'$ را دروسط واگن در نظر گرفت که در این صورت می توان دو رویداد $A$ و $B$، یعنی رسیدن پرتو نور به ابتدا و انتهای واگن را ازدید ناظر $S'$ به صورت $(x'_A, t'_A) = (-L_\circ, T_\circ)$ و $(x'_B, t'_B) = (L_\circ, T_\circ)$ نوشت. به طوری که $T_\circ$ برابر $L_\circ/c$ می باشد. اکنون، با استفاده از تبدیلات لورنتس، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} t_A &= \gamma(v)[t'_A + vx'_A/c^2] \\ &= \gamma(v)[T_\circ - vL_\circ/c^2] \\ &= T_\circ\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)} \end{aligned} \quad (۱۰۱-۲)$$

و

$$\begin{aligned} t_B &= \gamma(v)[t'_B + vx'_B/c^2] \\ &= \gamma(v)[T_\circ + vL_\circ/c^2] \\ &= T_\circ\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} \end{aligned} \quad (۱۰۲-۲)$$

بنابراین، با توجه به روابط فوق، از نظر ناظر $S$، $t_B$ بزرگتراز $t_A$ می باشد یا اینکه پرتو نور ابتدا به $A$ و سپس به $B$ می رسد.

## ۲ - ۸ - ۲ : اتساع زمان

اکنون، برای به دست آوردن رابطهٔ اتساع زمان، فرض می کنیم که دو رویداد $E'_1(t'_1, x'_1)$ و $E'_2(t'_2, x'_2)$ درچارچوب $S'$ دریک مکان روی دهند. دراین صورت، بازهٔ فضا ـ زمان بین این دو رویداد از نظر ناظر $S'$، برابر $(\Delta x', \Delta t') = (0 , \Delta t')$ خواهد بود. حال، اگر از تبدیلات لورنتس استفاده نماییم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma(v)[\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'] \\ &= \gamma(v)[\Delta t' + \frac{v}{c^2}(0)] \\ &= \gamma(v)\Delta t'\end{aligned} \tag{۲-۱۰۳}$$

یا

$$\Delta t = \gamma(v)\Delta t' \quad , \quad \Delta x' = 0 \tag{۲-۱۰۴}$$

چون $\gamma \geq 1$ است، درنتیجه $\Delta t \geq \Delta t'$ می باشد. به عبارت دیگر، بازهٔ زمانی بین دو رویداد از نظر ناظر $S$، بزرگتر یا طولانی تر ازبازهٔ زمانی بین این دو رویداد در چارچوب $S'$ می باشد. $\Delta t'$ را در اینجا می توان زمان ویژه نامید؛ زیرا این بازهٔ زمانی درچارچوب سکون ساعت متحرک اندازه گیری می شود.

اکنون، می توان جای چارچوبهای $S$ و $S'$ را عوض کرد. در این صورت، اگر فرض کنیم که دو رویداد در چارچوب $S$ در یک مکان روی دهند، با این فرض، بازهٔ فضا ـ زمان بین این دو رویداد، برابر $(\Delta x, \Delta t) = (0, \Delta t)$ خواهد بود. در نتیجه، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma(v)[\Delta t - (v/c^2)\Delta x] \\ &= \gamma(v)[\Delta t - (v/c^2)(0)] \\ &= \gamma(v)\Delta t\end{aligned} \tag{۲-۱۰۵}$$

یا

$$\Delta t' = \gamma(v)\Delta t \quad , \quad \Delta x = 0 \tag{۲-۱۰۶}$$

در اینجا نیز با توجه به رابطهٔ (۲-۱۰۶)، $\Delta t' \geq \Delta t$ خواهد بود. به عبارت دیگر، بازهٔ زمانی

بین دو رویداد، از نظر ناظر $S'$ بزرگتر یا طولانی تر از بازهٔ زمانی بین این دو رویداد در چارچوب $S$ می باشد. در رابطهٔ (۲-۱۰۶)، بازهٔ زمانی $\Delta t$ زمان ویژه می باشد؛ زیرا مانند قبل این بازهٔ زمانی در چارچوب سکون ساعت متحرک اندازه گیری می شود. حال، با مقایسهٔ روابط(۲-۱۰۴) و(۲-۱۰۶)، ممکن است چنین تصور شود که دراینجا نیز به نوعی تناقض رسیده ایم. البته دراین مورد قبلاً در بخش ۲-۶-۲، توضیح داده شده است. در اینجا تنها به این نکته اشاره می شود که این تناقض ظاهری هنگامی آشکار می گردد که شرط مربوط به هر کدام از این روابط نادیده گرفته شوند. یعنی رابطهٔ (۲-۱۰۴) زمانی صادق است که داشته باشیم، $\Delta x' = \circ$ و همچنین، رابطهٔ(۲-۱۰۶) در صورتی برقرار است که شرط $\Delta x = \circ$ را در نظر بگیریم. بنابراین، این دو رابطه به طور همزمان نمی توانند برقرار باشند.

---

**مثال ۲ - ۱۰ :** فرض کنید که درچارچوب ساکن $S$، دو سفینهٔ فضایی از نقطهٔ $A$، در یک لحظه ($t = \circ$) با سرعت یکسان $v$ درخلاف جهت یکدیگر شروع به حرکت کنند. بعد ازگذشت زمان $\Delta t$، نسبت به چارچوب $S$، جرقه ای درسفینهٔ دوم زده می شود. فضانورد واقع درسفینهٔ اول، بعد ازگذشت چه مدت زمان (در چارچوب سکون سفینهٔ اول) نور جرقه را مشاهده می کند.

**جواب :** در چارچوب ساکن $S$، هنگامی که جرقه زده می شود، فاصلهٔ دو سفینه برابر $\Delta x = ۲v\Delta t$ می باشد. در نتیجه، نورحاصل از جرقه، بعد از گذشت زمان $\Delta t_۱ = ۲v\Delta t/(c-v)$ به سفینهٔ اول می رسد. بنابراین، از نظر ناظر واقع در چارچوب $S$، فضانورد واقع در سفینهٔ اول، نورجرقه در لحظهٔ $\Delta T = \Delta t + \Delta t_۱$ یا

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta t + \frac{۲v\Delta t}{c-v} \\ &= \frac{c+v}{c-v}\Delta t \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۰۷)$$

دریافت می کند. اکنون، با در نظرگرفتن رابطهٔ اتساع زمان، می توان زمان دریافت نورجرقه را درچارچوب سکون سفینهٔ اول به دست آورد. دراین صورت، با جایگذاری مقدار $\Delta T$ از رابطهٔ (۲-۱۰۷)، در رابطهٔ اتساع زمان، یعنی $\Delta T = \gamma(v)\Delta T'$، خواهیم داشت:

$$\Delta T' = \frac{\Delta T}{\gamma(v)} = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{c+v}{c-v}\Delta t = \Delta t \frac{c+v}{c-v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (۲-۱۰۸)$$

## ۲ - ۸ - ۳ : انقباض طول

یکی دیگر از اثرات نسبیتی ناشی از اصل دوم نسبیت، اثر انقباض طول می باشد. برای محاسبهٔ انقباض طول یک جسم نسبت به یک ناظر، مثلاً ناظر $S$ فرض می کنیم که میله ای به طول ویژهٔ $L_0$ درامتداد محور $x'$ چارچوب $S'$، به حالت سکون قرارگرفته باشد. در این صورت، می خواهیم طول آن را درچارچوب ساکن $S$ به دست آوریم. برای این منظور، می توان دو رویداد به صورت زیر درنظر گرفت. این رویدادها می توانند به ترتیب رویداد اندازه گیری ابتدا و انتهای میله باشند. از طرف دیگر، همان طورکه قبلاً نیز اشاره شد، برای اندازه گیری طول یک میلهٔ متحرک، باید ابتدا و انتهای آن به طور همزمان اندازه گرفته شوند. یعنی بازهٔ زمانی بین دو رویداد از نظرناظر $S$، باید صفر باشد. درنتیجه، $(\Delta x\ ,\ \Delta t) = (\Delta x\ ,\ 0)$ می باشد. حال، اگر از تبدیلات لورنتس استفاده نماییم، خواهیم داشت:

$$\Delta x' = \gamma(v)[\Delta x - v\Delta t] \qquad (۲-۱۰۹)$$

این معادله نشان می دهد که فاصلهٔ اندازه گیری شده بین دو انتهای میله در چارچوب $S$، می تواند مقادیرمختلفی داشته باشد که بستگی به انتخاب $\Delta t$ یا $t_2 - t_1$، یعنی زمان مشاهده یا اندازه گیری دو انتهای میله به وسیلهٔ ناظر $S$ دارد. براین اساس، برطبق تعریف، طول یک میلهٔ متحرک، فاصلهٔ اندازه گیری شده بین دو انتهای آن است، هنگامی که ناظر دو انتهای میله را همزمان اندازه گیری کند. بنابراین، باید $t_1 = t_2$ باشد. دراین صورت، از رابطهٔ (۲-۱۰۹) داریم

$$\Delta x' = \gamma(v)[\Delta x - v(0)] = \gamma(v)\Delta x \qquad (۲-۱۱۰)$$

یا

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma(v)} \quad , \quad \Delta t = 0 \qquad (۲-۱۱۱)$$

بنابراین، با توجه به اینکه $\gamma(v) \geq 1$ است. درنتیجه، $\Delta x \leq \Delta x'$ می باشد. یعنی ناظر $S$ طول

میلهٔ متحرک راکوتاهتر از مقدار اندازه گرفته شده در چارچوب $S'$ اندازه می گیرد. بنابراین، مشاهده می کنیم که انقباض طول فیتز جرالد ـ لورنتس که قبلاً در مورد آن بحث شد، از لحاظ ریاضی کاملاً مشابه انقباض طول در نسبیت می باشد که با معادلهٔ (۲-۱۱۱) داده می شود. اما باید دقت نماییم که این دو معادله برای انقباض طول براساس مفاهیم کاملاً متفاوتی به دست آمده اند. همان طور که می دانیم در انقباض طول فیتز جرالد ـ لورنتس، $v$ سرعت میله نسبت به اتر است، درحالی که درمعادلهٔ نسبیتی انقباض طول، $v$ سرعت میله نسبت به ناظر می باشد.

در اینجا ممکن است این مسأله مطرح شود که اگر فرض کنیم که دقت طیفی ناظر به اندازهٔ کافی بالا باشد، آیا امکان دارد که این ناظر بتواند انقباض یک جسم متحرک را در راستای حرکت آن تشخیص دهد؟ همچنین، اگر فرض کنیم که زاویهٔ دید ناظرکوچک باشد، در این حالت به نظر می آید که ناظر نتواند انقباض جسم متحرک را تشخیص دهد؛ زیرا دراین حالت، وضعیت دقیقاً مشابه حالتی که درآن رابطهٔ (۲-۱۱۱)، به دست آمد، نیست.

اکنون، می توان درمورد اثر نسبیتی انقباض طول نکته ای را یادآور شد. همان طورکه می دانیم، هنگامی که یک شیء را می بینیم، تصویری از آن روی شبکیهٔ چشم ایجاد می گردد که این تصویر نتیجهٔ ورود همزمان فوتونهای نور از نقاط مختلف جسم بر روی شبکیه است. در این صورت، واضح است که همهٔ فوتونهای نور، دریک زمان از نقاط مختلف جسم گسیل نمی شوند. بلکه نقاط دورترجسم می بایستی زودتر ازنقاط نزدیکتر به ناظر، نورگسیل کرده باشند. براین اساس، برای به دست آوردن رابطهٔ (۲-۱۱۱) از رابطهٔ (۲-۱۰۹)، نمی توان $\Delta t = t_۲ - t_۱$ را برابر صفر قرار داد. بنابراین، هنگامی که اختلاف زمانی، گسیل فوتونهای نور ازنقاط مختلف جسم به حساب آورده شوند، در می یابیم که اگر زاویهٔ دید جسم متحرک به وسیلهٔ ناظرکوچک باشد، جسم به جای انقباض، دوران می کند. اما در صورتی که زاویهٔ رؤیت جسم متحرک برای ناظر، بزرگ باشد، در این حالت، انقباض طول برای ناظر قابل مشاهده خواهد بود.

حال، می توان جای چارچوبهای $S$ و $S'$ را عوض کرد. در این صورت، میله در چارچوب $S$ ساکن بوده وناظر $S'$ مشاهده می کند که میله با سرعت $v$ در خلاف جهت

محورمشترک $x$ و $x'$ حرکت می کند. در این حالت بازهٔ فضا ـ زمان بین دو رویداد تعریف شده در بالا، یعنی رویدادهای مربوط به اندازه گیری ابتدا و انتهای میله در $S'$، برابر $(\Delta x', \circ) = (\Delta x', \Delta t')$ خواهد بود. اکنون، با استفاده از تبدیلات لورنتس، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(v)[\Delta x' + v\Delta t'] \\ &= \gamma(v)[\Delta x' + v(\circ)] \\ &= \gamma(v)\Delta x' \end{aligned} \qquad (۱۱۲-۲)$$

یا

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma(v)} \quad , \quad \Delta t' = \circ \qquad (۱۱۳-۲)$$

بنابراین، در این حالت $\Delta x' \leq \Delta x$ خواهد بود. حال با مقایسهٔ دو رابطهٔ (۲-۱۱۱) و(۲-۱۱۳)، ممکن است مانند مورد اثر اتساع زمان، تصور شود که تناقضی در اندازه گیری دو ناظر وجود دارد؛ زیرا هرکدام از آنها طول میلهٔ ساکن درچارچوب دیگری را کوتاهتر اندازه می گیرد. درواقع، علت این تناقض ظاهری را می توان ناشی از نادیده گرفتن شرط مربوط به هرکدام از روابط (۲-۱۱۱) و (۲-۱۱۳) در نظر گرفت. بنابراین، اگر شرط مربوط به هرکدام از روابط (۲-۱۱۱) و(۲-۱۱۳) درنظرگرفته شود، این دو رابطه به طور همزمان نمی توانند برقرار باشند.

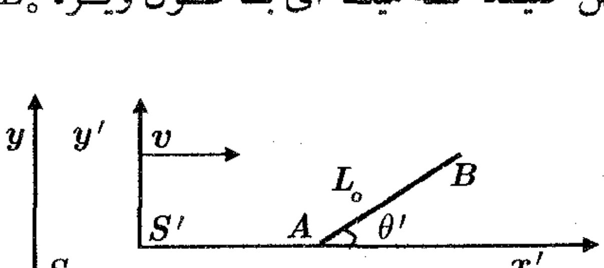
اما ممکن است در اینجا این سؤال مطرح شود که آیا انقباض طول یا همین طور اتساع زمان واقعی؟ یعنی زمان واقعاً اتساع می یابد و میله درجهت حرکت واقعاً منقبض می شود؟

برای پاسخ به این سؤالها، باید ابتدا مشخص نماییم که منظورما ازکلمهٔ واقعاً چیست؟ همان طور که می دانیم، درعلوم فیزیکی، آن چیزی واقعی است که اندازه گیری می شود. و تنها ازطریق اندازه گیری است که می توان اطلاعات مورد نیاز را برای نسبت دادن خواصی به یک ساعت، به یک میله، به یک اتم و غیره به دست آورد. بنابراین، اتساع زمان و انقباض طول به این مفهوم، نمی توانند ظاهری باشند و اثراتی کاملاً واقعی خواهند بود. درنتیجه زمان و طول نمی توانند دارای ماهیّت مطلق باشند. درحقیقت، زمان، طول، سطح، حجم و کمیّتهای دیگر، همگی رابطه هایی بین جسم مورد مشاهده و ناظر می باشند.

اما دراینجا نکتهٔ دیگری که در مورد اثر انقباض طول می توان مطرح نمود، این است

که اگر میلهٔ متحرک به حالت سکون در آید، اثری از انقباض طول در میله برجای نمی ماند. یعنی اگر جسمی بر اثرحرکت به نصف طول خودش برسد و سپس به حال سکون برگردد، اثری از انقباض طول درآن بر جای نمی ماند تا بتوان این تغییرموقتی طول جسم را آشکارکرد. درصورتی که وضعیت در مورد اثراتساع زمان به گونهٔ دیگری است. درحقیقت، اثرمربوط به اتساع زمان بیشترازاثرمربوط به انقباض طول آشفتگی به وجود می آورد و مسأله پیچیده ترمی باشد. برای توضیح بیشتر، فرض کنید که ساعتی به مدت یک ساعت با سرعتی حرکت کند که وقت مذکور را نسبت به یک ناظر ساکن فقط نیم ساعت نشان دهد. حال، اگر این ساعت از حرکت باز داشته شود از آن پس زمان را به طورعادی نشان خواهد داد، اما نیم ساعت عقب خواهد بود. بنابراین، اثراتساع زمان را می توان آشکار سازی کرد. از طرف دیگر، می توان ادعا کرد که همهٔ پدیده هایی که به نوعی تابع زمان هستند، در هنگام حرکت با آهنگ کندتری روی می دهند. در واقع، می توان گفت که بر اثرحرکت، خود زمان کندتر می گذرد. در مورد اثر نسبیتی آهنگ کار ساعتهای متحرک می توان پارادوکس یا باطلنمای دوقلوها[1] را مطرح نمود. که در اغلب کتابهای مربوط به نسبیت این پارادکس به روشهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. این باطلنما، درفصل سوم با استفاده از نمودارهای مینکوفسکی مورد بررسی قرار می گیرد.

**مثال ۲ - ۱۱ :** مطابق شکل (۲-۱۴)، فرض کنید که میله ای با طول ویژهٔ $L_\circ$ درچارچوب $S'$ طوری قرارگرفته است که امتداد آن با محور $x'$ این چارچوب زاویهٔ $\theta'$ می سازد. در این صورت، طول و همین طور، سمتگیری میله را نسبت به ناظر یا چارچوب $S$ به دست آورید.




شکل (۲-۱۴) : سمتگیری میله نسبت به محور $x'$ چارچوب $S'$

**جواب :** مختصات ابتدا و انتهای میله‌ا در چارچوب $S'$ به صورت $(x'_A, y'_A) = (\circ, \circ)$ و $(x'_B, y'_B) = (L_\circ cos\theta', L_\circ sin\theta')$ بیان می شوند. اکنون، می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس(۲-۷۹)، مختصات ابتدا و انتهای میله

1- Twin Paradox

را در چارچوب $S$ به دست آورد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x'_A &= \gamma(v)(x_A - \beta c t_A) = 0 \\ y_A &= y'_A = 0 \end{aligned} \qquad (۱۱۴-۲)$$

و

$$\begin{aligned} x'_B &= \gamma(v)(x_B - \beta c t_B) = L_0 cos\theta' \\ y'_B &= y_B = L_0 sin\theta' \end{aligned} \qquad (۱۱۵-۲)$$

بنـــابراین، از روابـــط(۲-۱۱۴) و (۲-۱۱۵)، داریـــم: $x_A = \beta c t_A$ و $y_A = 0$. همچنـــین، مختصات رویداد $B$ درچارچوب $S$ نیز، برابر

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{L_0 cos\theta'}{\gamma(v)} + \beta c t_B \\ y_B &= L_0 sin\theta' \end{aligned} \qquad (۱۱۶-۲)$$

خواهد بود.درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_B - x_A = \frac{L_0 cos\theta'}{\gamma(v)} + \beta c(t_B - t_A) \\ \Delta y &= y_B - y_A = L_0 sin\theta' \end{aligned} \qquad (۱۱۷-۲)$$

از طرف دیگر، می دانیم که ابتدا و انتهای میله درچارچوب $S$، باید بـه طـور همزمـان انـدازه گرفته شود. یعنی باید $t_A = t_B$ باشـد. بنـابراین، مقـدار $\beta c(t_B - t_A)$ برابـر صـفرخواهد بود. حال، با توجه به رابطهٔ(۲-۱۱۷)، طول میله درچارچوب $S$، برابر

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= L_0 \sqrt{1 - \beta^2 cos^2\theta'} \end{aligned} \qquad (۱۱۸-۲)$$

به دست می آید. همچنین، زاویهٔ بین امتداد میله با محور $x$ در چارچوب $S$ نیز، از رابطهٔ

$$tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L_0 sin\theta'}{L_0 cos\theta'/\gamma(v)} \qquad (۱۱۹-۲)$$

یا

$$\begin{aligned} \theta &= tan^{-1}[\gamma(v)\frac{sin\theta'}{cos\theta'}] \\ &= tan^{-1}[\gamma(v) tan\theta'] \end{aligned} \qquad (۱۲۰-۲)$$

به دست می آید. بنابراین، با توجه به روابط(۲-۱۱۸) و(۲-۱۲۰)، از نظر ناظر واقع در چارچوب $S$، میله علاوه بر انقباض، دوران نیز می کند.

**مثال ۲ - ۱۲ :** درچارچوب ساکن $S$، واگنی به طول $L_\circ$ با سرعت $v$ درحرکت است. حال، اگر درابتدای واگن جرقه ای زده شود، نورحاصل از آن را کدام یک از ناظرهای زیر زودتر مشاهده می کند. ناظرساکن درچارچوب $S$ یا مسافری که درانتهای واگن قرار دارد. مسأله را ازنظر ناظر ساکن $S$ و همین طور از نظر ناظر واقع درچارچوب سکون واگن یا $S'$، بررسی نمایید. فرض کنید که جرقه در لحظه ای( درچارچوب واگن) زده می شود که ناظر $S$ و مسافر در فاصلهٔ یکسان از مبدأ چارچوب $S$ قرارگرفته باشند.

**جواب :** مسأله را ابتدا درچارچوب سکون واگن یا $S'$ بررسی می کنیم. دراین چارچوب، نورحاصل ازجرقه، بعد از مدت زمان $\Delta t' = L_\circ/c$ به مسافر انتهای واگن می رسد. همچنین، در این چارچوب، ناظر ساکن کنار ریل یا $S$، بعد از مدت زمان $\Delta t = L_\circ/(c-v)$، نورحاصل از جرقه را دریافت می کند؛ زیرا درچارچوب سکون واگن، ناظر $S$ با سرعت $-v$ حرکت می کند. بنابراین، دراین چارچوب، مسافر زودتر از ناظر $S$، نورجرقه را مشاهده خواهدکرد.

اکنون، وضعیت را ازنظر ناظر ساکن $S$، بررسی می کنیم. برای این منظور، ابتدا فاصلهٔ بین ناظر $S$ و محل زدن جرقه را به دست می آوریم. برای به دست آوردن این فاصله دو رویداد، تعریف می کنیم. رویداد اول را زدن جرقه و رویداد دوم را قرارگرفتن پهلو به پهلوی مسافر و ناظر $S$ در نظرمی گیریم. حال، با توجه به فرض مسأله، این دو رویداد در چارچوب سکون واگن همزمان می باشند. بنابراین، با استفاده از تبدیل لورنتس، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma(v)\left[\Delta t' + \frac{v}{c^{2}}\Delta x'\right]\\ &= \gamma(v)\left[\circ + \frac{v}{c^{2}}L_\circ\right] \qquad (۱۲۱\text{-}۲)\\ &= \gamma(v)\frac{v}{c^{2}}L_\circ\end{aligned}$$

زیرا در چارچوب $S'$ دو رویداد همزمان بوده و همچنین، بازهٔ فضایی یا فاصلهٔ بین مسافر

انتهای واگن و محل زدن جرقه، برابر $L_\circ$ می باشد. ازطرف دیگر، رابطهٔ (۲-۱۲۱) بیان می کند که لحظهٔ زدن جرقه، به اندازهٔ زمان $\Delta t$، بعد ازآن که مسافر و ناظر $S$ ، روی خط آهن پهلو به پهلو قرار گیرند، روی می دهد. در این صورت، درلحظهٔ زدن جرقه، فاصلهٔ بین ناظر $S$و مسافر، برابر $v\Delta t$ می باشد. بنابراین، فاصلهٔ بین ناظر $S$ و محل زدن جرقه، برابر

$$\begin{aligned} L &= \frac{L_\circ}{\gamma(v)} + v\Delta t \\ &= \frac{L_\circ}{\gamma(v)} + v\left[\gamma(v)\frac{v}{c^{2}}L_\circ\right] \\ &= L_\circ\gamma(v) \end{aligned} \tag{۱۲۲-۲}$$

به دست می آید. دررابطهٔ (۲-۱۲۲) از اثر انقباض طول استفاده شده است. درنتیجه، ناظر $S$، نورحاصل از جرقه را بعد از مدت زمان $\Delta T_1 = L/c$ یا

$$\Delta T_1 = \frac{1}{c}L_\circ\gamma(v) \tag{۱۲۳-۲}$$

دریافت می کند. مسافر نیز بعد از مدت زمان

$$\Delta T_2 = \frac{L_\circ}{\gamma(v)(c+v)} \tag{۱۲۴-۲}$$

نورجرقهٔ زده شده را مشاهده می کند. حال با مقایسهٔ زمانهای به دست آمده در چارچوب چارچوب $S$، می توان دریافت که $\Delta T_2 < \Delta T_1$ می باشد. به عبارت دیگر، در این چارچوب نیز، نورحاصل از جرقه، ابتدا به مسافر انتهای واگن می رسد. و جواب مسأله بستگی به انتخاب چارچوب مرجع لخت نداود.

---

**مثال ۲ - ۱۳ :** اتومبیلی با سرعت $v$ به سمت چراغ راهنما درحرکت است. از نظر ناظر ساکن $S$، هنگامی که فاصلهٔ چراغ راهنما و اتومبیل برابر $L_o$ می شود، چراغ سبز راهنما و چراغ اتومبیل به طور همزمان روشن می شوند. دراین صورت، رانندهٔ اتومبیل، چراغ اتومبیل را قبل از دیدن چراغ سبز راهنما روشن کرده است یا بعد از آن؟

جواب : این مثال را در واقع، می توان مشابه مثال ۲ ـ ۱۲، در نظر گرفت. در اینجا باید مسأله را از نظر ناظر $S'$ یا چارچوب سکون اتومبیل بررسی نماییم. طبق فرض مسأله، روشن

شدن چراغ اتومبیل و چراغ سبز راهنما درچارچوب ساکن $S$، همزمان می باشند. بنابراین، با استفاده از تبدیل لورنتس، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma(v)[\Delta t - \frac{v}{c^۲}\Delta x] \\ &= \gamma(v)[\circ - \frac{v}{c^۲}L_\circ] \\ &= -\gamma(v)\frac{v}{c^۲}L_\circ\end{aligned} \qquad (۱۲۵-۲)$$

زیرا درچارچوب $S$ دو رویداد روشن شدن چراغ اتومبیل و چراغ سبز راهنما، همزمان بوده و در فاصلهٔ فضایی $L_\circ$ ازیکدیگر روی می دهند. بنابراین، اگر درچارچوب $S'$، چراغ اتومبیل درلحظهٔ $t'_۱ = \circ$ روشن شود، چراغ سبز راهنما به اندازهٔ زمان $\Delta t'$ زودتر روشن می گردد. حال، با توجه به اینکه $\Delta t' = t'_۲ - t'_۱$ می باشد، درنتیجه درچارچوب $S'$، چراغ سبز راهنما زودتر و در لحظهٔ

$$t'_۲ = -\gamma(v)\frac{v}{c^۲}L_\circ \qquad (۱۲۶-۲)$$

روشن می شود. در این صورت، درمدت زمان $t'_۲$، اتومبیل به اندازهٔ

$$|d'| = |t'_۲ v| = \gamma(v)\frac{v^۲}{c^۲}L_\circ \qquad (۱۲۷-۲)$$

به چراغ راهنما نزدیک می شود. از طرف دیگر، از نظر ناظر ساکن در چارچوب $S'$ فاصلهٔ $L_\circ$، براساس اثر انقباض طول، کوتاهتر و برابر $L'$ اندازه گرفته می شود. بنابراین، فاصلهٔ کل ناظر $S'$ یا رانندهٔ اتومبیل تا چراغ راهنما برابر

$$\begin{aligned}D' &= d' + L' \\ &= \gamma(v)\frac{v^۲}{c^۲}L_\circ + \frac{L_\circ}{\gamma(v)} \\ &= \gamma(v)L_\circ\end{aligned} \qquad (۱۲۸-۲)$$

خواهد بود. در نتیجه، از نظر رانندهٔ اتومبیل، مدت زمانی که طول می کشد تا نور چراغ سبز راهنما به راننده برسد، برابر

$$t' = \frac{D'}{c} = \frac{۱}{c}\gamma(v)L_\circ \qquad (۱۲۹-۲)$$

می باشد. بنابراین، ناظر $S'$ یا رانندهٔ اتومبیل، نورچراغ سبز راهنما را درلحظهٔ

$$
\begin{aligned}
t'_{3} &= t'_{2} + t' \\
&= -\gamma(v)\frac{v}{c^{2}}L_{0} + \frac{1}{c}\gamma(v)L_{0} \qquad (۱۳۰-۲)\\
&= \frac{L_{0}}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}
\end{aligned}
$$

مشاهده می کند. حال، باتوجه به اینکه زمان به دست آمده در رابطهٔ(۲-۱۳۰) مقداری مثبت است، بنابراین، رانندهٔ اتومبیل نورچراغ سبز راهنما را دیرتر از $t'_{1} = 0$ (که چراغ اتومبیل را در آن لحظه روشن می کند)، می بیند. به عبارت دیگر، درچارچوب سکون اتومبیل، ابتدا چراغ اتومبیل روشن می شود و بعد ازگذشت زمانی به اندازهٔ $t'_{3}$ نور چراغ سبز راهنما دریافت می گردد.

## ۲ - ۹ : تبدیل لورنتس سرعت

دراین بخش، می خواهیم سرعت یک ذره را از نظر دو ناظر بررسی نموده و ارتباط بین سرعت ذره را در دو چارچوب مختلف به دست آوریم. این ارتباط به وسیلهٔ تبدیلات لورنتس سرعت برقرار می گردد. برای به دست آوردن این تبدیلات، دو چارچوب لخت $S$ و $S'$ را در نظر می گیریم. و فرض می کنیم که چارچوب $S'$ با سرعت ثابت $v$، نسبت به چارچوب ساکن $S$، درراستای محورمشترک $x$ و $x'$ حرکت کند. بنابراین، اگر سرعت ذره ای در چارچوب ساکن $S$، برابر $\vec{u}$ باشد. در این صورت، سرعت آن، یعنی $\vec{u}'$ را باید نسبت به ناظر $S'$ به دست آوریم. همان طور که می دانیم، مؤلفه های $x$ و $x'$ سرعت ذره درچارچوبهای $S$ و $S'$ به ترتیب با روابط

$$u_{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (۱۳۱-۲)$$

و

$$u'_{x} = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{dx'}{dt'} \qquad (۱۳۲-۲)$$

تعریف می شوند. به همین ترتیب، می توان روابط مشابهی را برای مؤلفه های $y$ و $z$ سرعت ذره، دردو چارچوب نوشت. اکنون با استفاده از تبدیلات مختصات لورنتس، داریم:

$$u'_{x} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(v)(dx - vdt)}{\gamma(v)\left[dt - (v/c^{2})dx\right]} \qquad (۱۳۳-۲)$$

که با تقسیم صورت و مخرج کسر رابطهٔ(۲-۱۳۳) بر $dt$، خواهیم داشت:

$$u'_x = \frac{(dx/dt) - v}{1 - (v/c^2)(dx/dt)} \tag{۲-۱۳۴}$$

حال، با توجه به رابطهٔ (۲-۱۳۱)، داریم

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \tag{۲-۱۳۵}$$

همچنین، برای به دست آوردن تبدیل سرعتهای عرضی، یعنی $u'_y$ و $u'_z$، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} u'_y = \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{\gamma(v)\left[dt - (v/c^2)dx\right]} \\ &= \frac{dy/dt}{\gamma(v)\left[1 - (v/c^2)(dx/dt)\right]} \end{aligned} \tag{۲-۱۳۶}$$

یا

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left[1 - (vu_x/c^2)\right]} \tag{۲-۱۳۷}$$

همین طور، برای مؤلفهٔ $z$ نیز، داریم:

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\left[1 - (vu_x/c^2)\right]} \tag{۲-۱۳۸}$$

بنابراین، با استفاده از تبدیلات سرعت به دست آمده، می توان ارتباط بین مؤلفه های سرعت یک ذره را در دو چارچوب $S$ و $S'$ به دست آورد. اکنون، اگر در این روابط، $v$ را به $-v$ تبدیل نماییم و همچنین، جای کمیّتهای پریم دار و بدون پریم را عوض کنیم، در این صورت تبدیلات وارون سرعت به دست می آیند. این تبدیلات به صورت

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \tag{۲-۱۳۹}$$

و

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(v)\left[1 + (vu'_x/c^2)\right]} \tag{۲-۱۴۰}$$

و

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(v)\left[1 + (vu'_x/c^2)\right]} \tag{۱۴۱-۲}$$

خواهند بود. ازطرف دیگر، می توان روابط فوق را به صورت مؤلفه هایی در راستای موازی و عمود برسرعت نسبی دو چارچوب، یعنی $\vec{v}$ نیز نوشت. دراین صورت، این تبدیلات با روابط

$$\vec{u}_{\parallel} = \frac{\vec{u}'_{\parallel} + \vec{v}}{\left[1 + (\vec{v}\cdot\vec{u}')/c^2\right]} \tag{۱۴۲-۲}$$

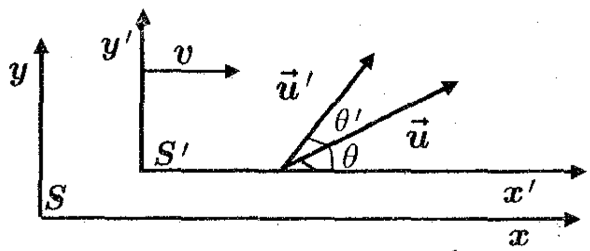
و

$$\vec{u}_{\perp} = \frac{\vec{u}'_{\perp}}{\gamma(v)\left[1 + (\vec{v}\cdot\vec{u}')/c^2\right]} \tag{۱۴۳-۲}$$

بیان می شوند. در روابط فوق اندیسهای $\parallel$ و $\perp$، نشان دهندهٔ مؤلفه های موازی و عمودی سرعت ذره در راستای سرعت نسبی دو چارچوب می باشند.

---

**مثال ۲ - ۱۴ :** مطابق شکل( ۲- ۱۵ )، فرض کنید که ذره ای در چارچوب $S'$، با سرعت $\vec{u}'$ حرکت می کند. حال، اگر راستای سرعت ذره با محور $x'$ در چارچوب $S'$ زاویهٔ $\theta'$ بسازد، در این صورت، سرعت ذره (اندازه وجهت) را در چارچوب $S$ به دست آورید.



**شکل (۲-۱۵) : سرعت ذره نسبت به چارچوبهای $S$ و $S'$**

**جواب :** درچارچوب $S$ و $S'$ مؤلفه های موازی و عمود برسرعت نسبی $\vec{v}$، به صورت

$$u_{\parallel} = u\cos\theta \quad , \quad u_{\perp} = u\sin\theta \tag{۱۴۴-۲}$$

و

$$u'_{\parallel} = u'\cos\theta' \quad , \quad u'_{\perp} = u'\sin\theta' \tag{۱۴۵-۲}$$

نوشته می شوند. همچنین، می توان اندازهٔ سرعت ذره، یعنی $\vec{u}$ را از رابطهٔ

$$u = \sqrt{u_{\perp}^2 + u_{\parallel}^2} \tag{۱۴۶-۲}$$

بــه دســت آورد. اکنــون، اگــر مقــادیر $u_{\parallel}$ و $u_{\perp}$ را از روابــط (۲-۱۴۲)و(۲-۱۴۳) در رابطهٔ(۲-۱۴۶) قرار داده وهمچنین، اگر از رابطهٔ(۲-۱۴۵) استفاده نماییم، خواهیم داشت:

$$u=\frac{\left(u'^{2}+v^{2}+2u'v\cos\theta'-(vu'\sin\theta'/c)^{2}\right)^{1/2}}{1+(u'v\cos\theta'/c^{2})} \tag{۱۴۷-۲}$$

اکنون، برای به دست آوردن جهت سرعت ذره در چارچوب $S$ ، کافی است مقادیر $u_{\parallel}$ و $u_{\perp}$ را از روابط (۲-۱۴۲) و (۲-۱۴۳) در رابطهٔ

$$\tan\theta=\frac{u_{\perp}}{u_{\parallel}} \tag{۱۴۸-۲}$$

جایگذاری نماییم. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\tan\theta=\frac{u'\sin\theta'}{\gamma(v)(u'\cos\theta'+v)} \tag{۱۴۹-۲}$$

از طرف دیگر، با استفاده از رابطهٔ (۲-۱۴۷)، می توان نتیجه گرفت که اگر سرعت ذره ای در چارچوب $S'$ برابر $c$ باشد، در این حالت، سرعت آن در چارچوب $S$ نیز برابر $c$ خواهد بود. یعنی اگر $u'=c$ باشد،در این صورت، از رابطهٔ (۲-۱۴۷) داریم:

$$\begin{aligned}u&=\frac{\left(c^{2}+v^{2}+2cv\cos\theta'-v^{2}(1-\cos^{2}\theta')\right)^{1/2}}{1+(v\cos\theta'/c)}\\&=c\frac{\left[(1+v\cos\theta'/c)^{2}\right]^{1/2}}{1+(v\cos\theta'/c)}=c\end{aligned} \tag{۱۵۰-۲}$$

همچنین، می توان نشان داد که اگر سرعت ذره ای در یک چارچوب کوچکتر از $c$ باشد، درهمهٔ چارچوبهای لخت دیگر نیز، سرعت آن کوچکتر از $c$ خواهد بود. برای این منظور، سرعت ذره را در $S$ برابر $u_x$ وکوچکتر از $c$ در نظر می گیریم. حال، برای ساده سازی مسأله فرض می کنیم که سرعت ذره در راستای $y$ و $z$ مؤلفه ای نداشته باشد. دراین صورت، با استفاده از رابطهٔ (۲-۱۳۵) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}u'_x-c&=\frac{u_x-v}{\left[1-vu_x/c^{2}\right]}-c\\&=\frac{-(c+v)(c-u_x)}{c\left[1-vu_x/c^{2}\right]}\end{aligned} \tag{۱۵۱-۲}$$

اکنون، با توجه به اینکه سرعت نسبی دو چارچوب، یعنی $v$، طبق فرض باید کوچکتر از $c$ باشد. $|v| < c$. در این صورت، به سادگی می توان نشان داد که سمت راست رابطهٔ (۲-۱۳۵)، مقداری منفی است. در نتیجه، $u'_x - c < 0$ یا $u'_x < c$ خواهد بود. از طرف دیگر، مجدداً با استفاده از رابطهٔ(۲-۱۳۵) می توان نوشت:

$$u'_x + c = \frac{u_x - v}{\left[1 - vu_x/c^2\right]} + c$$
$$= \frac{(c + u_x)(c - v)}{c\left[1 - vu_x/c^2\right]} \qquad (۲-۱۵۲)$$

حال، با توجه به فرض $|v| < c$ ، می توان نشان داد که سمت راست رابطهٔ (۲-۱۵۲) مقداری مثبت است. درنتیجه، $u'_x + c > 0$ یا $u'_x > -c$ خواهد بود. و نتیجهٔ نهایی اینکه اگر $|u_x| < c$ باشد در این صورت $|u'_x| < c$ خواهد بود.

قاعده تبدیل یا جمع سرعتها را می توان به راحتی به ۳ بعد نیز تعمیم داد. برای این منظور، از می توان از روابط (۲-۸۸) و(۲-۸۹) استفاده کرد. بنابراین، با توجه به رابطهٔ(۲-۸۸)، داریم

$$d\vec{r}\,' = d\vec{r} + [\gamma(v) - 1]\frac{\vec{\beta}\cdot d\vec{r}}{\beta^2}\vec{\beta} - \gamma(v)\vec{\beta}c\,dt \qquad (۲-۱۵۳)$$

و از رابطهٔ(۲-۸۹) نیز، می توان نتیجه گرفت:

$$dt' = \gamma(v)\left[dt - \vec{\beta}\cdot d\vec{r}/c\right] \qquad (۲-۱۵۴)$$

اکنون، با تقسیم رابطهٔ (۲-۱۵۳) بر(۲-۱۵۴) خواهیم داشت:

$$\vec{u}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \frac{d\vec{r} + [\gamma(v) - 1](\vec{\beta}\cdot d\vec{r}/\beta^2)\vec{\beta} - \gamma(v)\vec{\beta}c\,dt}{\gamma(v)\left[dt - \vec{\beta}\cdot d\vec{r}/c\right]} \qquad (۲-۱۵۵)$$

که با تقسیم صورت و مخرج رابطهٔ (۲-۱۵۵) بر $dt$ می توان رابطهٔ

$$\vec{u}\,' = \frac{1}{\gamma(v)\left[1 - \vec{\beta}\cdot\vec{u}/c\right]}\left(\vec{u} + [\gamma(v) - 1]\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{\beta^2}\vec{\beta} - \gamma(v)\vec{\beta}c\right) \qquad (۲-۱۵۶)$$

را به دست آورد. تبدیل وارون سرعت ذره نیز با تعویض جای کمیّتهای پریم دار و بدون پریم و همین طور با تبدیل $\vec{\beta}$ به $-\vec{\beta}$ به دست می آید

$$\vec{u} = \frac{1}{\gamma(v)[1+\vec{\beta}\cdot\vec{u}'/c]}\left(\vec{u}' + [\gamma(v)-1]\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{u}'}{\beta^2}\vec{\beta} + \gamma(v)\vec{\beta}c\right) \quad (۱۵۷-۲)$$

حال، با توجه به رابطهٔ (۲-۱۵۷)، می توان نشان داد که از طریق جمع سرعتها نمی توان به سرعتی فراترازسرعت $c$ دست یافت. برای این منظور، کافی است که مجذور سرعت $\vec{u}$ را به دست آوریم. که نتیجهٔ آن برابر

$$u^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = c^2\left[1 - \frac{(1-u'^2)(1-v^2)}{(1+\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)^2}\right] \le c^2 \quad (۱۵۸-۲)$$

خواهد شد. اکنون، با توجه به این رابطه مشاهده می شود که از طریق جمع سرعتها نمی توان به سرعتی فراترازسرعت $c$ دست یافت. از طرف دیگر، تساوی در رابطه (۲-۱۵۸) تنها هنگامی برقرار می شود که اندازهٔ سرعت $\vec{u}'$ برابر $c$ باشد.

نکته مهم دیگری که در اینجا می توان به آن اشاره نمود، این است که در تبدیلات لورنتس، سرعت نسبی دو چارچوب؛ یعنی $v$ نمی تواند برابر $c$ باشد. زیرا این تبدیلات به ازای $v = c$ بی معنی می شوند که ما در فصل اول از این موضوع به عنوان اصل سوم درنسبیت خاص یاد کردیم. به عبارت دیگر، سرعت نسبی چارچوبهای لخت را باید کوچکتر از $c$ در نظرگرفت. که البته این یک فرض است که در نسبیت وارد می شود. درحقیقت، این مطلب را می توان تأیید دوباره ای برای ناوردا بودن و نیزحدی بودن سرعت $c$ در نسبیت محسوب نمود.

اکنون، با توجه به رابطهٔ (۲-۱۵۷)، می توان دو حالت خاص را مورد بررسی قرار داد.

۱- اگردررابطهٔ (۲-۱۵۷) فرض کنیم که سرعتهای $\vec{u}'$ و $\vec{v}$ موازی یکدیگر باشند. در این حالت به نتیجهٔ

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}+\vec{u}'}{1+(\vec{v}\cdot\vec{u}'/c^2)} = \frac{v+u'}{1+(vu'/c^2)} \quad (۱۵۹-۲)$$

می رسیم. حال اگر در رابطهٔ فوق $c \to \infty$ میل کند، در این صورت، به رابطهٔ کلاسیک جمع سرعتها، یا تبدیل سرعت گالیله، یعنی رابطهٔ

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}' \quad (۱۶۰-۲)$$

خواهیم رسید.

۲ – اکنون، اگر فرض کنیم که سرعتهای $\vec{u}\,'$ و $\vec{v}$ برهم عمود باشند. در این صورت، از رابطهٔ (۲-۱۵۷)، می توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{\vec{u}\,'}{\gamma(v)} + \vec{\beta}c \\ &= \vec{\beta}c + \vec{u}\,'\sqrt{(1-\beta^{2})} \end{aligned} \qquad (۲-۱۶۱)$$

می باشد. البته این قاعدهٔ جمع، با قاعدهٔ متعارف جمع برداری سرعتها، یعنی رابطهٔ (۲-۱۶۰) که به ازای $c \to \infty$ به دست می آید، تفاوت دارد. علت کاهش جمع سرعتها در این مورد را می توان ناشی ازتغییرمفهوم زمان دانست که تبدیل(۲-۸۹) به همراه دارد.

به این ترتیب، می توان نتیجه گرفت که اصول نسبیت، همراه با فرض همگنی فضا و زمان و همچنین، فرض مربوط به همسانگردی فضا، وجود یک سرعت ناوردا را پیش بینی می کند. البته، نتایج تجربی متعدد نشان می دهند که این سرعت ناوردا همان سرعت نورمی باشد. این سرعت نه تنها مستقل از ناظر، بلکه مستقل از سرعت چشمه و جهت انتشارآن نیز می باشد.

**مثال ۲ – ۱۵ : سرعت نوردر محیط متحرک :** محیطی متحرک مانند آب را درنظر بگیرید. می دانیم اگرآب ساکن باشد، سرعت نور نسبت به آن از رابطهٔ $u = c/n$ به دست می آید. که درآن $n$ ضریب شکست آب می باشد. حال،فرض کنید که آب با سرعت $v$ جریان داشته باشد. در این حالت، اگر سرعت پرتو نور و جریان آب در یک راستا و هم جهت باشند، سرعت پرتو نور را نسبت به ناظر ساکن در چارچوب آزمایشگاه یا $S$ به دست آورید.

**جواب :** فرض می کنیم که $S'$ چارچوب سکون آب باشد، در این صورت، سرعت پرتو نوردر این چارچوب برابر $u' = c/n$ خواهد بود. اکنون، می توان با استفاده ازرابطهٔ(۲-۱۳۹) سرعت پرتو نور را نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا $S$ به دست آورد.

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^{2}} = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + nv/c}{1 + v/nc}\right) \qquad (۲-۱۶۲)$$

یا

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{c}{n}(۱+nv/c)(۱+v/nc)^{-۱} \\
&= \frac{c}{n}(۱+\frac{nv}{c})(۱-\frac{v}{nc}+\cdots) \qquad (۱۶۳-۲) \\
&= \frac{c}{n}(۱+\frac{nv}{c}-\frac{v}{nc}-\frac{v^۲}{c^۲}+\cdots)
\end{aligned}
$$

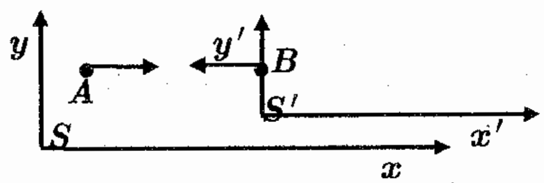
حال، با توجه به اینکه $v \ll c$ می باشد. درنتیجه، می توان از جملات $v^۲/c^۲$ و بالاتر صرف نظر کرد. بنابراین، به دست می آوریم:

$$
u = \frac{c}{n}(۱+\frac{nv}{c}-\frac{v}{nc}) = \frac{c}{n}+v(۱-\frac{۱}{n^۲}) \qquad (۱۶۴-۲)
$$

که با توجه به رابطهٔ(۲-۱۶۴) می توان نتیجه گرفت که سرعت نوردرآب جاری نسبت به حالتی که آب ساکن است، افزایش می یابد. این مقدار افزایش به اندازهٔ کسر $f = ۱-(۱/n^۲)$ از سرعت مایع می باشد. درواقع، می توان گفت که نور به وسیلهٔ آب کشیده می شود. این اثر اولین باردر سال ۱۸۱۷ به وسیلهٔ فرنل پیش بینی گردید و درسال ۱۸۵۱ به طریق تجربی به وسیله فیزو تأیید شد. اما تا ظهور نسبیت به صورت قانع کننده ای توضیح داده نشد.

---

**مثال ۲ - ۱۶:** مطابق شکل (۲- ۱۶) فرض می کنیم که دو ذرهٔ $A$ و $B$ با سرعت یکسان $۰/۹۹c$ به سمت یکدیگر حرکت کنند. در این صورت، سرعت ذرهٔ $A$ را نسبت به ذرهٔ $B$ به دست آورید.



شکل (۲- ۱۶) : سرعت نسبی ذرات

جواب : اگر $S'$، چارچوب سکون ذرهٔ $B$ باشد، دراین صورت، با استفاده از رابطهٔ (۲-۱۳۵)، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{۱-vu_x/c^۲} = \frac{۰/۹۹c-(-۰/۹۹c)}{۱+(۰/۹۹)^۲} \qquad (۱۶۵-۲) \\
&= ۰/۹۹۹۹۵c
\end{aligned}
$$

حال، اگر در این مثال از تبدیلات گالیلهٔ سرعت استفاده شود، به نتیجهٔ

$$
u'_x = u_x - v = ۰/۹۹c-(-۰/۹۹c) = ۱/۹۸c \qquad (۱۶۶-۲)
$$

خواهیم رسید که با اصل دوم نسبیت تناقض دارد. زیرا ذرات با جرم سکون مخالف صفر، نمی توانند با سرعتی بزرگتر از سرعت نورحرکت کنند.

**مثال ۲ - ۱۷ :** ناظر واقع درچارچوب آزمایشگاه یا $S$ مشاهده می کند که دو ذرهٔ $A$ و $B$با سرعتی برابر $\cdot/\lambda c$ و $\cdot/۶c$ به سمت یکدیگر حرکت می کنند. حال، اگر فاصلهٔ ذرات از یکدیگر در یک لحظه برابر ۳ کیلومتر باشد، در این صورت:

**الف :** از نظرناظر $S$ این دو ذره بعد ازچه مدت با یکدیگر برخورد می کنند.

**ب :** سرعت هرکدام از ذرات را نسبت به ذرهٔ دیگر به دست آورید.

**ج :** از نظر ناظر واقع در چارچوب سکون هرکدام از ذرات، این برخورد بعد از چه مدت روی خواهد داد.

**جواب : الف :** برای به دست آوردن سرعت نزدیک شدن ذرات به یکدیگر از نظر یک ناظر ساکن می توان به صورت زیر عمل نمود. فرض کنید که فاصلهٔ دو ذرهٔ $A$ و $B$از یکدیگر برابر $\Delta x$باشد. حال اگر سرعت ذرات به ترتیب برابر $v_A$ و $v_B$ باشد و دو ذره بعد از مدت زمان $\Delta t$ با یکدیگر برخورد کنند. در این صورت، داریم: $\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B$ یا $\Delta x = v_A \Delta t + v_B \Delta t$. درنتیجه، سرعت نزدیک شدن ذرات به یکدیگر، از دید یک ناظر ساکن، برابر $u = \Delta x / \Delta t = v_A + v_B$ خواهد بود.که با نتیجهٔ جمع کلاسیک سرعتها یکسان است. بنابراین، درچارچوب آزمایشگاه، سرعت نزدیک شدن ذرات به یکدیگر، برابر

$$u = v_A + v_B = \cdot/\lambda c + \cdot/۶c = ۱/۴c \qquad (۱۶۷\text{-}۲)$$

به دست می آید. زمان برخورد نیز در این چارچوب، برابر

$$\begin{aligned} t = \frac{l}{v_A + v_B} &= \frac{۳\times ۱\cdot^{۳}\ m}{(۱/۴)(۳\times ۱\cdot^{\lambda}\ m/s)} \\ &= ۷/۱۴\times ۱\cdot^{-۶}\ s \end{aligned} \qquad (۱۶\lambda\text{-}۲)$$

خواهد بود. دراینجا نکته ای که باید به آن اشاره نماییم، این است که اگرچه سرعت نزدیک شدن ذرات از نظر ناظر $S$ بزرگتر از سرعت نور می باشد، اما این سرعت هیچگونه

تناقضی را در نسبیت ایجاد نمی کند؛ زیرا این سرعت به یک ذره نسبت داده نمی شود.

ب : برای به دست آوردن سرعت هرکدام از ذرات در چارچوب سکون ذرهٔ دیگر، می توان از رابطهٔ مربوط به جمع نسبیتی سرعتها استفاده کرد. بنابراین، سرعت ذرهٔ $B$ درچارچوب سکون ذرهٔ $A$، برابر

$$u'_{BA} = \frac{u_B - u_A}{۱ - u_A u_B / c^۲} = \frac{-۰/۶c - ۰/۸c}{۱-(-۰/۶c)(۰/۸c)/c^۲} = -۰/۹۵c \qquad (۱۶۹-۲)$$

همچنین، سرعت ذرهٔ $A$ درچارچوب سکون ذرهٔ $B$ نیز از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$u'_{AB} = \frac{u_A - u_B}{۱ - u_A u_B / c^۲} = \frac{۰/۸c-(-۰/۶c)}{۱-(۰/۸c(-۰/۶c)/c^۲} = ۰/۹۵c \qquad (۱۷۰-۲)$$

ج : برای به دست آوردن زمان برخورد از نظر ناظر واقع درچارچوب سکون هرکدام از ذرات، می توانیم از رابطهٔ اتساع زمان استفاده نماییم. می دانیم که زمان برخورد از نظر ناظر ساکن در چارچوب آزمایشگاه اتساع پیدا می کند. یعنی

$$t = \frac{t'_A}{\sqrt{۱ - u_A^۲ / c^۲}} \qquad (۱۷۱-۲)$$

یا

$$t'_A = t\sqrt{۱ - u_A^۲ / c^۲} \qquad (۱۷۲-۲)$$

که با توجه به قسمت الف، می دانیم که زمان برخورد از نظرناظر ساکن در چارچوب آزمایشگاه، برابر $۷/۱۴ \times ۱۰^{-۶}\, s$ می باشد. درنتیجه، زمان برخورد درچارچوب سکون ذرهٔ $A$، برابر

$$t'_A = t\sqrt{۱ - {u'_A}^۲ / c^۲} = (۷/۱۴\times۱۰^{-۶}\, s)\sqrt{۱-(۰/۸c)^۲/c^۲} = ۴/۲۴\times۱۰^{-۶}\, s \qquad (۱۷۳-۲)$$

بوده و همچنین، زمان برخورد از نظر ناظر واقع در چارچوب سکون ذرهٔ $B$ نیز برابر

$$t'_B = t\sqrt{۱ - {u'_B}^۲ / c^۲} = (۷/۱۴\times۱۰^{-۶}\, s)\sqrt{۱-(۰/۶c)^۲/c^۲} = ۵/۷۱۲\times۱۰^{-۶}\, s \qquad (۱۷۴-۲)$$

به دست می آید.

**مثال ۲ – ۱۸ :** سه چارچوب لخت $S_\circ$، $S_۱$ و $S_۲$ را در نظر بگیرید. و فرض کنید که چارچوب $S_۱$ با سرعت $v$ نسبت به چارچوب $S_\circ$ حرکت می کند. همین طور، چارچوب $S_۲$ نیز با همان سرعت، یعنی $v$ نسبت به $S_۱$ حرکت کند. حال، اگر ذره ای با سرعت $u_۲$ در راستای محور $x_۲$ی چارچوب $S_۲$ حرکت کند. در این صورت، سرعت این ذره را نسبت به ناظر واقع درچارچوب $S_\circ$ به دست آورید. همچنین فرض کنید که چارچوبهای $S_۱$ و $S_۲$ در امتداد محورهای مشترک $x_\circ$، $x_۱$ و $x_۲$ حرکت کنند.

**جواب :** ابتدا سرعت ذره را نسبت به ناظر $S_۱$ به دست می آوریم. بنابراین، داریم

$$u_۱ = \frac{u_۲ + v}{۱ + vu_۲/c^۲} \tag{۱۷۵-۲}$$

یا

$$\beta_۱ = \frac{\beta_۲ + \beta}{۱ + \beta\beta_۲} \tag{۱۷۶-۲}$$

در رابطهٔ فوق $\beta = v/c$ ، $\beta_۱ = u_۱/c$ و $\beta_۲ = u_۲/c$ می باشند. اکنون، می توانیم سرعت ذره را نسبت به ناظر $S_\circ$ نیز به دست آوریم. در این صورت، می توان نوشت:

$$\beta_\circ = \frac{\beta_۱ + \beta}{۱ + \beta\beta_۱} \tag{۱۷۷-۲}$$

حال، اگر مقدار $\beta_۱$ را از رابطهٔ (۲-۱۷۶) در (۲-۱۷۷) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\beta_\circ = \frac{\beta_۲ + \beta + \beta(۱ + \beta\beta_۲)}{(۱ + \beta\beta_۲) + \beta(\beta_۲ + \beta)} \tag{۱۷۸-۲}$$

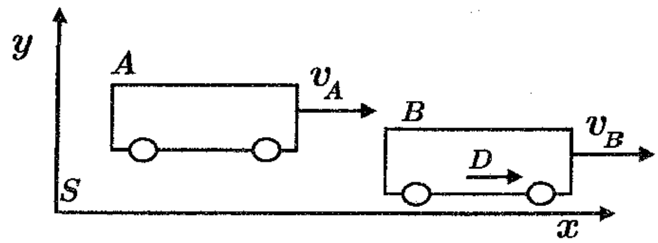
یا

$$\beta_\circ = \frac{\beta_۲(۱ + \beta^۲) + ۲\beta}{(۱ + \beta^۲) + ۲\beta\beta_۲} = \frac{\beta_۲ + ۲\beta/(۱ + \beta^۲)}{۱ + ۲\beta\beta_۲/(۱ + \beta^۲)} \tag{۱۷۹-۲}$$

**مثال ۲ – ۱۹ :** مجدداً مثال( ۲ ـ ۶) را در نظر بگیرید.

**الف :** ازنظر ناظرواقع درواگن $A$، چقدر طول می کشد تا واگن $A$ از واگن $B$ جلو بیافتد

**ب :** از نظرناظرواقع درواگن $B$، چقدرطول می کشد تا واگن $B$ از واگن $A$ جلو بیافتد



شکل (۲–۱۷) : ناظر متحرک $D$

**ج :** فرض کنید که $E_۱$ رویداد عبورقسمت ابتدای واگن $A$ از قسمت انتهای واگن $B$ باشد. و همین طور $E_۲$، رویداد عبور قسمت انتهای واگن $A$ از قسمت ابتدای واگن $B$ باشد. حال، مطابق شکل(۲–۱۷)، فرض کنیدکه ناظر $D$ ازانتهای واگن $B$ به سمت جلوی آن شروع به قدم زدن کند. همچنین، فرض کنید که رویدادهای شروع و پایان قدم زدن ناظر $D$ منطبق بر دو رویداد $E_۱$ و $E_۲$ باشند. یعنی رویداد شروع قدم زدن ناظر $D$ منطبق بر رویداد $E_۱$ و رویداد پایان قدم زدن این ناظر منطبق بر رویداد $E_۲$ باشد. دراین صورت، بازهٔ زمانی بین دو رویداد $E_۱$ و $E_۲$ را از نظر ناظر $D$ به دست آورید.

**جواب : الف :** ابتدا مسأله را از نظر ناظر واقع درچارچوب سکون واگن $A$، بررسی می کنیم. ازنظر این ناظر، سرعت واگن $B$، برابر

$$u_{BA} = \frac{u_B - v}{۱ - vu_B/c^۲} = \frac{(۳c/۵)-(۴c/۵)}{۱-(۳c/۵)(۴c/۵)/c^۲} = -\frac{۵c}{۱۳} \qquad (۲\text{-}۱۸۰)$$

می باشد. درنتیجه، طول واگن $B$ ازنظر ناظر $A$، برابر

$$L_{BA} = L_۰\sqrt{۱-u_{BA}^۲/c^۲} = L_۰\sqrt{۱-(-۵c/۱۳)^۲/c^۲} = \frac{۱۲L_۰}{۱۳} \qquad (۲\text{-}۱۸۱)$$

خواهد بود. بنابراین، از نظر ناظر $A$، واگن $B$ باید مسافت یا طولی برابر $L_۰ + ۱۲L_۰/۱۳$ یا $۲۵L_۰/۱۳$ را برای جلو زدن از واگن $A$ طی کند. دراین صورت، زمان طی این طول در

چارچوب سکون $A$ ، برابر مقدار زیر خواهد بود.

$$t_A = \frac{25L_0/13}{5c/13} = \frac{5L_0}{c} \qquad (۱۸۲-۲)$$

ب : دراینجا نیزسرعت واگن $A$ را نسبت به ناظر $B$ به دست می آوریم. بنابراین، داریم:

$$u_{AB} = \frac{u_A - v}{1 - vu_A/c^2} = \frac{(4c/5)-(3c/5)}{1-(4c/5)(3c/5)/c^2} = \frac{5c}{13} \qquad (۱۸۳-۲)$$

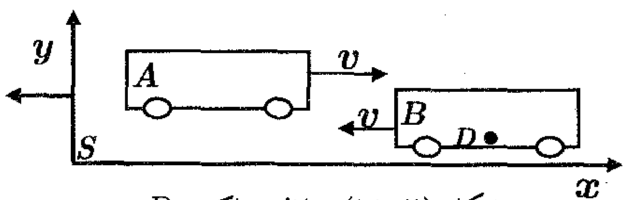
از طرف دیگر، از نظر ناظر $B$ طول واگن $A$ انقباض پیدا می کند. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$L_{AB} = L_0\sqrt{1-u_{AB}^2/c^2} = L_0\sqrt{1-(5c/13)^2/c^2} = \frac{12L_0}{13} \qquad (۱۸۴-۲)$$

بنابراین، از نظر ناظر واقع در واگن $B$ ، واگن $A$ باید مسافت یا طول $L_0 + 12L_0/13$ یا $25L_0/13$ را برای جلو زدن از واگن $B$ طی کند. دراین صورت، زمان طی این طول در چارچوب سکون $B$ ، برابر

$$t_B = \frac{25L_0/13}{5c/13} = \frac{5L_0}{c} \qquad (۱۸۵-۲)$$

می باشد. البته، این مدت زمان باید با زمان به دست آمده در قسمت الف، برابر باشد.



شکل (۲-۱۸) : ناظر ساکن $D$

ج : دراین حالت، ابتدا باید سرعت واگن $A$ را نسبت به ناظر $D$ به دست آوریم. حال، باتوجه به شکل (۲-۱۸)، از نظر این ناظر، دو واگن با سرعتهای یکسان $v$ ، در خلاف جهت یکدیگر حرکت می کنند. بنابراین، سرعت واگن $A$ نسبت به ناظر $D$ ، یعنی $u_{AD}$ برابر

$$u_{AD} = \frac{v-(-v)}{1-v(-v)/c^2} = \frac{2v}{1+v^2/c^2} \qquad (۱۸۶-۲)$$

می باشد. ازطرف دیگر، می دانیم که $u_{AD}$ برابر $u_{AB}$ می باشد.درنتیجه، ازرابطهٔ (۲-۱۸۳)، داریم

$$\frac{۲v}{۱+v^{۲}/c^{۲}}=\frac{۵c}{۱۳} \qquad (۱۸۷-۲)$$

اکنون، با محاسبهٔ مقدار $v$ از رابطهٔ(۲-۱۸۷) به دست می آوریم: $v = c/۵$. درنتیجه، از نظر ناظر $D$، طول واگنهای $A$ و $B$ کوتاهتر به نظر می رسد. بنابراین، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} L_{AD} &= L_{\circ}\sqrt{۱-v^{۲}/c^{۲}} \\ &= L_{\circ}\sqrt{۱-(c/۵)^{۲}/c^{۲}} \\ &= \frac{۲L_{\circ}\sqrt{۶}}{۵} = L_{BD} \end{aligned} \qquad (۱۸۸-۲)$$

دراین حالت، از نظر ناظر $D$، هر کدام از واگنها برای پشت سر گذاشتن واگن مقابل، باید مسافت یا طول منقبض شدهٔ واگنها، یعنی $۲L_{\circ}\sqrt{۶}/۵$ را طی نماید. در نتیجه، زمان طی این طول یا بازهٔ زمانی بین رویدادهای $E_۱$ و $E_۲$، برابر

$$t_D = \frac{۲L_{\circ}\sqrt{۶}/۵}{c/۵} = \frac{۲L_{\circ}\sqrt{۶}}{c} \qquad (۱۸۹-۲)$$

خواهد بود. اکنون، می توان درستی جواب به دست آمده را به روشهای دیگر نیز آزمود.

سرعت ناظر $D$ نسبت به ناظر واقع بر روی زمین، یعنی $S$ را می توان با جمع نسبیتی سرعتهای $۳c/۵$ و $c/۵$، یا با تفاضل نسبیتی سرعتهای $c/۵$ از $۴c/۵$ به دست آورد که نتیجهٔ حاصل ازهردو روش برابر $۵c/۷$ خواهد بود. درواقع، با این استدلال می توان سرعت $c/۵$ را به جای استفاده از رابطهٔ (۲-۱۸۷)، نیز به دست آورد.

حال، با استفاده از نتیجهٔ مثال (۲-۶) و رابطهٔ اتساع زمان، می توان بازهٔ زمانی بین دو رویداد $E_۱$ و $E_۲$ را از نظر ناظر $D$ به دست آورد. در این صورت، می توان نوشت:

$$t_S = \gamma(u_{DS})t_D \qquad (۱۹۰-۲)$$

یا

$$\begin{aligned} t_D &= \frac{t_S}{\gamma(u_{DS})} = \frac{۷L_{\circ}/c}{\gamma(۵c/۷)} \\ &= \frac{۷L_{\circ}/c}{۷/۲\sqrt{۶}} = \frac{۲L_{\circ}\sqrt{۶}}{c} \end{aligned} \qquad (۱۹۱-۲)$$

اما نکته ای که در اینجا باید به آن دقت نمود، این است که رابطهٔ اتساع زمان را می توان بین چارچوبهای $D$ و $S$ نوشت؛ زیرا دو رویداد $E_{۱}$ و $E_{۲}$ درچارچوب $D$ دریک مکان روی می دهند. درصورتی که این رابطه را نمی توان بین چارچوبهای $S$ و $A$ یا $B$ نوشت؛ زیرا این دو رویداد در چارچوبهای $A$ یا $B$ هم مکان نمی باشند. بنابراین، می توان از رابطهٔ اتساع زمان، بین چارچوب $D$ و هر کدام از چارچوبهای $S$، $A$ یا $B$ استفاده کرد.

---

**مثال ۲ - ۲۰ :** میله ای با طول ویژهٔ $L_{\circ}$، با سرعت $u$ در راستای موازی با محور $x$ چارچوب $S$ درحرکت است. طول میله را نسبت به ناظر یا چارچوبهای $S$ و $S'$ به دست آورید.

**جواب :** طول میله نسبت به چارچوب $S$، با توجه به رابطهٔ انقباض طول برابر $L = L_{\circ}\sqrt{۱-\beta^{۲}}$ می باشد. که در آن $\beta = u/c$ است. اما برای به دست آوردن طول میله نسبت به چارچوب $S'$، باید سرعت میله را نسبت به این چارچوب به دست آوریم. برای این منظور، اگر از رابطهٔ (۲-۱۳۵) استفاده نماییم، خواهیم داشت:

$$u'_x = u' = \frac{u_x - v}{۱ - vu_x/c^{۲}} = \frac{u-v}{۱ - vu/c^{۲}} \qquad (۱۹۲-۲)$$

طول میله نیز نسبت به ناظر $S'$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

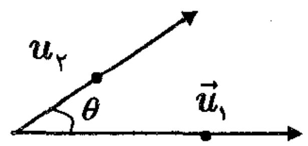
$$L = L_{\circ}\sqrt{۱-\beta'^{۲}} = L_{\circ}\sqrt{۱-u'^{۲}/c^{۲}} \qquad (۱۹۳-۲)$$

حال، با جایگذاری مقدار سرعت $u'$ از رابطهٔ (۲-۱۹۲) در(۲-۱۹۳)، به دست می آوریم:

$$L = \frac{L_{\circ}}{(c^{۲} - uv)}\sqrt{(c^{۲}-v^{۲})(c^{۲}-u^{۲})} \qquad (۱۹۴-۲)$$

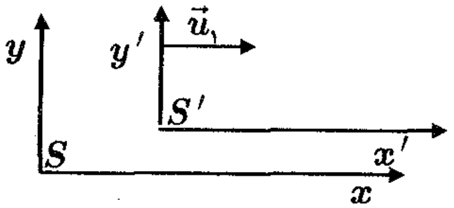
---

**مثال ۲ - ۲۱ :** مطابق شکل( ۲-۱۹) فرض کنید که درچارچوب مرجع $S$، دو ذره با سرعتهای $u_{۱}$ و $u_{۲}$، درجهت نشان داده شده درشکل حرکت نمایند. حال، اگر زاویهٔ بین راستای حرکت ذرات برابر $\theta$ باشد. دراین صورت، سرعت یکی ازذرات را نسبت به چارچوب سکون ذرهٔ دیگر به دست آورید.



**شکل (۲-۱۹) : سرعت نسبی ذرات**

**جواب :** فرض می کنیم که سرعت چارچوب $S'$ نسبت به $S$ برابر $u_1$ باشد. به عبارت دیگر، فرض می کنیم که چارچوب $S'$، چارچوب سکون ذرهٔ ۱ باشد. اکنون، با توجه به شکل (۲ - ۲۰)، می توان سرعت ذرهٔ ۲ را نسبت به ذرهٔ ۱ یا نسبت به چارچوب $S'$ به دست آورد. ازطرف دیگر، سرعت ذرهٔ ۲، را می توان نسبت به چارچوب مرجع $S$، به صورت زیر نوشت:



شکل (۲-۲۰) : سرعت ذرهٔ ۲ نسبت به ذرهٔ ۱

$$\vec{u}_2 = (u_2 cos\theta)\vec{i} + (u_2 sin\theta)\vec{j} \qquad (۱۹۵-۲)$$

حال، با استفاده ازتبدیلات لورنتس و با فرض اینکه $c = 1$ باشد، مؤلفهٔ $x$ سرعت ذرهٔ ۲ ،برابر

$$u'_{2x} = \frac{u_{2x} - v}{1 - (vu_{2x})} = \frac{u_2 cos\theta - v}{[1 - (vu_2 cos\theta)]} \qquad (۱۹۶-۲)$$

خواهد بود. همین طور، برای مؤلفهٔ $y$ سرعت ذرهٔ ۲ نیز می توان نوشت:

$$u'_{2y} = \frac{u_2 sin\theta\sqrt{1 - v^2}}{[1 - (vu_2 cos\theta)]} \qquad (۱۹۷-۲)$$

در نتیجه، اندازهٔ سرعت ذرهٔ ۲ برابر

$$u'_2 = \sqrt{u'^2_{2x} + u'^2_{2y}} \qquad (۱۹۸-۲)$$

یا

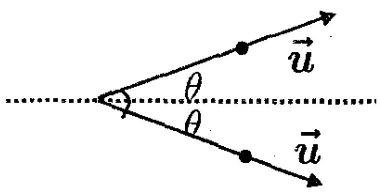
$$u'_2 = \sqrt{1 - \frac{(1 - v^2)(1 - u_2^2)}{(c^2 - vu_2 cos\theta)^2}} \qquad (۱۹۹-۲)$$

خواهد بود. در نهایت، اگر به جای $v$ در رابطهٔ (۲-۱۹۹)، مقدارآن، یعنی $u_1$ را به کار بریم، سرعت ذرهٔ ۲ نسبت به ذرهٔ ۱ ، برابر

$$u'_2 = \sqrt{1 - \frac{(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)}{(1 - u_1 u_2 cos\theta)^2}} \qquad (۲۰۰-۲)$$

به دست می آید.

**مثال ۲ - ۲۲ :** مطابق شکل(۲-۲۱)، فرض کنید که درچارچوب $S$، دو ذره با سرعتهای یکسان $u$، درامتداد مسیرهای مشخص شده در شکل، حرکت می کنند. حال، اگر زاویهٔ بین راستای حرکت ذرات برابر $۲\theta$ باشد. دراین صورت، سرعت یکی از ذرات را نسبت به چارچوب سکون ذرهٔ دیگر به دست آورید.



**شکل (۲-۲۱) : سرعت نسبی**

**جواب : روش اول :** فرض کنید که چارچوب $S'$ در راستای نیمساز مسیرحرکت ذرات حرکت کند. دراین صورت، اگر سرعت نسبی چارچوب $S'$ را برابر $ucos\theta$ در نظر بگیریم. ضریب تبدیل $\gamma$ی بین دو چارچوب $S$ و $S'$، برابر $\gamma = (۱ - u^۲cos^۲\theta)^{-۱/۲}$ خواهد بود. حال، می توان مؤلفه های $x'$ و $y'$ سرعت ذرات را نسبت به چارچوب $S'$ به دست آورد. چون سرعت نسبی چارچوب $S'$، برابر مؤلفهٔ $x$ سرعت ذرات می باشد. بنابراین، در چارچوب $S'$؛ مؤلفهٔ $u'_x$ ذرات برابر صفر خواهد بود. درنتیجه، تنها باید مؤلفهٔ $y'$ ذرات را به دست آوریم. اکنون، با توجه به رابطهٔ (۲-۱۴۰) داریم:

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma[۱ + u'_x(ucos\theta)/c^۲)]} \tag{۲-۲۰۱}$$

یا

$$u_y = usin\theta = \frac{u'_y}{\gamma} \tag{۲-۲۰۲}$$

بنابراین، در چارچوب $S'$، هرکدام از ذرات با سرعتی برابر $u'_y = \gamma usin\theta$، در راستای محور $y'$ حرکت می کنند. در این صورت، سرعت یکی از ذرات، نسبت به چارچوب سکون ذرهٔ دیگر، با استفاده از رابطهٔ جمع نسبیتی سرعتها، برابر

$$u'_۲ = \frac{۲u'_y}{۱ + u'^{۲}_y} \tag{۲-۲۰۳}$$

یا

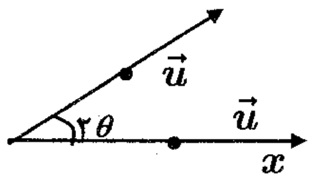
$$u'_۲ = \frac{\dfrac{۲usin\theta}{\sqrt{۱ - u^۲cos^۲\theta}}}{۱ + \dfrac{u^۲sin^۲\theta}{۱ - u^۲cos^۲\theta}} = \frac{۲usin\theta\sqrt{۱ - u^۲cos^۲\theta}}{۱ - u^۲cos۲\theta} \tag{۲-۲۰۴}$$

بنابراین، در نهایت می توان به دست آورد

$$u'_۲ = \sqrt{۱ - \frac{(۱-u^۲)^۲}{(۱-u^۲ cos ۲\theta)^۲}} \qquad (۲۰۵-۲)$$

اکنون، با توجه به نتیجهٔ به دست آمده، می توانیم بعضی از حالتهای خاص را بررسی نماییم برای این منظور، اگر فرض کنیم که $۲\theta = ۲\pi$ باشد، دراین صورت، $u'_۲$ برابر $۲u/(۱+u^۲)$ خواهد بود. و اگر $\theta = ۰$ باشد، $u'_۲$ نیز برابر صفر به دست می آید. همچنین، درصورتی که $\theta$ خیلی کوچک در نظر گرفته شود، در این حالت $u'_۲ \simeq \frac{۲usin\theta}{\sqrt{۱-u^۲}}$

**روش دوم :** در این روش می توان از نتیجهٔ مثال ۲ - ۲۱، استفاده کرد. برای این منظور، می توان مطابق شکل(۲- ۲۲)، راستای حرکت یکی از ذرات را منطبق برمحور $x$ در نظر گرفت. دراین صورت، با توجه به رابطهٔ (۲-۲۰۰)، می توان نوشت:




**شکل (۲-۲۲) : سرعت نسبی ذرات**

$$u'_۲ = \sqrt{۱ - \frac{(۱-u^۲)(۱-u^۲)}{(۱-uucos۲\theta)^۲}} \qquad (۲۰۶-۲)$$

یا

$$u'_۲ = \sqrt{۱ - \frac{(۱-u^۲)^۲}{(۱-u^۲cos۲\theta)^۲}} \qquad (۲۰۷-۲)$$

که همان رابطهٔ (۲-۲۰۵) می باشد.

---

## مثال ۲ - ۲۳ : پرتاب توپ در داخل واگن متحرک

واگنی با طول ویژهٔ $L_۰$ با سرعت $v = c/۲$ نسبت به چارچوب متصل به زمین یا $S$، روی یک مسیر مستقیم حرکت می کند. حال، فرض کنید که توپی با سرعت $c/۳$ نسبت به واگن، از قسمت عقب واگن به سمت قسمت جلوی آن پرتاب شود. اگر مسیرحرکت توپ مستقیم و بر روی کف واگن باشد. دراین صورت، مدت زمان طی مسیر به وسیلهٔ توپ و همین طور، مسافت طی شده به وسیلهٔ آن را درحالتهای زیر به دست آورید.

**الف :** نسبت به ناظر واقع درچارچوب سکون واگن یا $S'$

ب : نسبت به ناظر واقع بر روی سطح زمین، یعنی $S$، با استفاده از تبدیلات سرعت و مختصات لورنتس

ج : نسبت به ناظر همراه توپ، یعنی $S_b$

د : نشان دهید که نسبت مدت زمان طی مسیر، از نظر دو ناظر همراه توپ ( $S_b$ ) و زمین( $S$ ) برابرضریب $\gamma$ ی بین دو ناظر است.

ح : همین طور، نسبت مدت زمان طی مسیر، به وسیلهٔ توپ را از نظر دو ناظر همراه توپ( $S_b$ ) و واگن ( $S'$ ) به دست آورید.

و: نشان دهید که نسبت مدت زمان طی مسیر، ازنظردو ناظر واقع در واگن، یعنی $S'$ و زمین، یعنی $S$، برابرضریب $\gamma$ ی بین دو ناظر نیست و علت را توضیح دهید.

**جواب :**

الف : از نظر ناظر همراه واگن، مسافت طی شده برابر $L_{S'} = L_\circ$ و زمان طی مسیر نیز برابر $T_{S'} = L_\circ/(c/۳) = ۳L_\circ/c$ می باشد.

ب : ۱- سرعت توپ نسبت به زمین یا چارچوب $S$، برابر

$$u_S = \frac{u_{S'} + v}{\left[۱ + (vu_{S'})/c^۲\right]} = \frac{c/۳ + c/۲}{۱ + (c/۳)(c/۲)/c^۲} = \frac{۵c}{۷} \qquad (۲\text{-}۲۰۸)$$

است. همچنین، طول واگن نیز نسبت به چارچوب یا ناظر $S$، از رابطهٔ

$$L_S = \frac{L_\circ}{\gamma(c/۲)} = \frac{L_\circ\sqrt{۳}}{۲} \qquad (۲\text{-}۲۰۹)$$

به دست می آید. حال، برای به دست آوردن زمان طی مسیر، نسبت به ناظر $S$، می توان به صورت زیر عمل نمود. درزمان $T_S$، مکان قسمت جلوی واگن با رابطهٔ $L_S + vT_S$ بیان می شود. همین طور، مکان توپ نسبت به زمین از رابطهٔ $u_S T_S$ به دست می آید. اکنون، با

توجه به اینکه این دو مقدار باید با هم برابر باشند، می توان نوشت:

$$L_S + vT_S = u_S T_S \qquad (۲۱۰-۲)$$

یا

$$(u_S - v)T_S = L_S = \frac{L_\circ \sqrt{۳}}{۲} \qquad (۲۱۱-۲)$$

در نتیجه، داریم:

$$T_S = \frac{(L_\circ \sqrt{۳})/۲}{(۵c/۷) - (c/۲)} = \frac{۷L_\circ \sqrt{۳}}{۳c} \qquad (۲۱۲-۲)$$

همچنین، مسافت طی شده نسبت به ناظر $S$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$d_S = u_S T_S = (\frac{۵c}{۷})(\frac{۷L_\circ \sqrt{۳}}{۳c}) = \frac{۵L_\circ \sqrt{۳}}{۳} \qquad (۲۱۳-۲)$$

۲- درچارچوب سکون واگن، می توان ابتدا و انتهای واگن را به ترتیب با $x'_A$ و $x'_B = L_\circ$ و همین طور $t'_A = ۰$ و $t'_B = ۳L_\circ/c$ نشان داد. بنابراین، با استفاده از تبدیلات لورنتس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} d_S &= \Delta x = \gamma(v)(\Delta x' + v\Delta t') \\ &= \frac{۲}{\sqrt{۳}}[L_\circ + \frac{c}{۲}(\frac{۳L_o}{c})] \qquad (۲۱۴-۲) \\ &= \frac{۵L_\circ}{\sqrt{۳}} = \frac{۵L_\circ \sqrt{۳}}{۳} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، داریم:

$$\begin{aligned} T_S &= \Delta t = \gamma(v)[\Delta t' + \frac{v}{c^۲}\Delta x'] \qquad (۲۱۵-۲) \\ &= \frac{۲}{\sqrt{۳}}[\frac{۳L_\circ}{c} + \frac{c}{۲}\frac{L_\circ}{c^۲}] = \frac{۷L_\circ \sqrt{۳}}{۳c} \end{aligned}$$

که با نتیجهٔ به دست آمده در قسمت ۱ توافق دارد.

ج : از نظر ناظر $S_b$، طول واگن برابر

$$L_b = \frac{L_\circ}{\gamma(c/۳)} = \frac{L_\circ \sqrt{۸}}{۳} \qquad (۲۱۶-۲)$$

می باشد. دراین حالت، ناظر $S_b$ ساکن بوده و واگن با سرعت $c/۳$ مسافت $L_b$ را طی می کند. درنتیجه، می توان نوشت:

$$T_b = \frac{(L_\circ \sqrt{۸})/۳}{c/۳} = \frac{۲ L_\circ \sqrt{۲}}{c} \qquad (۲\text{–}۲۱۷)$$

بوده و فاصلهٔ طی شده نیز برابر $d_b = ۰$ است.

د : سرعت نسبی چارچوبهای $S_b$ و $S$ برابر $۵c/۷$ می باشد. دراین صورت، $\gamma(۵c/۷) = ۷/(۲\sqrt{۶})$ خواهد بود. و داریم:

$$T_S = \gamma T_b \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{۷ L_\circ}{c\sqrt{۳}} = \frac{۷}{۲\sqrt{۶}}\left(\frac{۲ L_\circ \sqrt{۲}}{c}\right) \qquad (۲\text{–}۲۱۸)$$

که البته رابطهٔ درستی است.

ح : در این حالت، سرعت نسبی چارچوبهای $S_b$ و $S'$، برابر $c/۳$ می باشد. بنابراین، $\gamma(c/۳)$ برابر $۳/(۲\sqrt{۲})$ بوده و می توان نوشت:

$$T_{S'} = \gamma T_b \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{۳ L_\circ}{c} = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}}\left(\frac{۲ L_\circ \sqrt{۲}}{c}\right) \qquad (۲\text{–}۲۱۹)$$

این رابطه نشان می دهد که رابطهٔ اتساع زمان بین چارچوبهای $S_b$ و $S'$ نیز برقراراست.

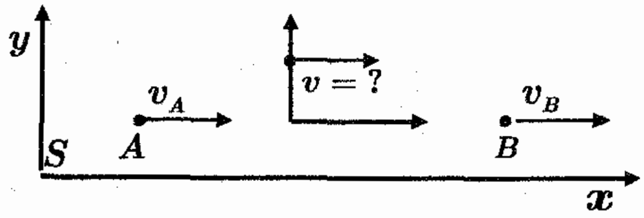
و : سرعت نسبی چارچوبهای $S$ و $S'$، در این حالت برابر $c/۲$ می باشد. بنابراین، ضریب $\gamma$ به ازای $c/۲$ برابر $۲/\sqrt{۳}$ خواهد بود. درنتیجه

$$T_S = \gamma T_{S'} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{۷ L_\circ \sqrt{۳}}{۳c} \neq \frac{۲}{\sqrt{۳}}\left(\frac{۳ L_\circ}{c}\right) \qquad (۲\text{–}۲۲۰)$$

خواهد بود. دراینجا علت این نابرابری را می توان به این صورت توضیح داد که رابطهٔ اتساع زمان را هنگامی می توان بین دو چارچوب نوشت که دو رویداد در یک چارچوب، **هم مکان** باشند. حال، با توجه به این نکته، در این مسأله رویداد پرتاب توپ از قسمت عقب واگن، ورویداد برخورد آن به قسمت جلوی آن، نسبت به ناظر $S_b$ هم مکان می باشند. بنابراین، در قسمتهای(د) و (ح) رابطهٔ اتساع زمان را می توان نوشت. در صورتی که این دو رویداد نسبت به ناظرهای $S$ و $S'$، دریک مکان روی نمی دهند. درنتیجه، رابطهٔ اتساع زمان را نمی توان

بین این دو چارچوب نوشت. بنابراین، $T_S \neq \gamma T_{S'}$ خواهد بود.

**مثال ۲ – ۲٤ :** فرض می کنیم که ذرات $A$ و $B$ مطابق شکل(۲-۲۳)، در چارچوب آزمایشگاه یا $S$، به ترتیب با سرعتهای ۴$c/۵$ و ۳$c/۵$ در یک راستا در حرکت باشند. ناظری مانند $S'$ که در بین آنها قرارگرفته است، با چه سرعتی حرکت کند تا از نظرآن، ذرات با سرعت یکسان به سمت یکدیگر حرکت کنند.




شکل (۲-۲۳) : محاسبهٔ سرعت ناظر $S'$

**جواب : روش اول :** فرض کنید که سرعت ناظر $S'$ نسبت به ناظر ساکن $S$، برابر $v$ باشد. حال، اگر از نظر ناظر $S'$، دو ذرهٔ $A$ و $B$ با سرعت یکسان و برابر $u'$، به سمت یکدیگردرحرکت باشند، دراین صورت، می توان سرعت ذرات را نسبت به چارچوب $S'$ به دست آورد. بنابراین، سرعت ذرهٔ $A$ نسبت به ناظر $S'$، برابر

$$u'_A = \frac{u_A - v}{۱ - vu_A/c^۲} = \frac{۴c/۵ - v}{۱ - v(۴c/۵)/c^۲} \qquad (۲\text{-}۲۲۱)$$

می باشد. همین طور، سرعت ذرهٔ $B$ در این چارچوب از رابطهٔ

$$u'_B = \frac{u_B - v}{۱ - vu_B/c^۲} = \frac{(۳c/۵) - v}{۱ - v(۳c/۵)/c^۲} \qquad (۲\text{-}۲۲۲)$$

به دست می آید. ازطرف دیگر، با توجه به اینکه سرعت ذرات درچارچوب $S'$، با هم برابر و در خلاف جهت یکدیگر می باشند، بنابراین، $u'_A = -u'_B$ خواهد بود. درنتیجه، داریم:

$$\frac{۴c/۵ - v}{۱ - v(۴c/۵)/c^۲} = \frac{-(۳c/۵) + v}{۱ - v(۳c/۵)/c^۲} \qquad (۲\text{-}۲۲۳)$$

یا

$$۳۵v^۲ - ۷۴cv + ۳۵c^۲ = ۰ \qquad (۲\text{-}۲۲۴)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$(۵v - ۷c)(۷v - ۵c) = ۰ \qquad (۲\text{-}۲۲۵)$$

حال ازحل معادلهٔ (۲-۲۲۵)، دو جواب به صورت $v = ۷c/۵$ و $v = ۵c/۷$ به دست می آید که از این دو جواب، سرعت $v = ۷c/۵$، به علت آنکه بزرگتراز $c$ می باشد، کنارگذاشته می شود. در نتیجه، سرعت ناظر $S'$ نسبت به چارچوب $S$، برابر $v = ۵c/۷$ به دست می آید. اکنون، با درنظرگرفتن سرعت $۵c/۷$ برای ناظر $S'$، می توان سرعت ذرات را با استفاده از روابط (۲-۲۲۱) و (۲-۲۲۲)، نسبت به چارچوب $S'$ به دست آورد که با محاسبهٔ این سرعتها به نتیجهٔ $u'_A = u'_B = c/۵$ خواهیم رسید.

روش دوم:

با توجه به صورت مسأله، سرعت ذرات $A$ و $B$ نسبت به ناظر یا چارچوب متصل به زمین، یعنی $S$، به ترتیب برابر $u_A = ۴c/۵$ و $u_B = ۳c/۵$ می باشد. اکنون، می خواهیم چارچوبی را پیدا کنیم، به طوری که این چارچوب دربین ذرات قرار گرفته باشد و سرعت ذرات نسبت به این چارچوب برابر بوده و همچنین، این ذرات در این چارچوب به سمت یکدیگر حرکت نمایند. برای این منظور، می توان ابتدا سرعت چارچوب $S'$ را نسبت به چارچوب $S$ به دست آورد. بنابراین، با توجه به شکل(۲-۲۳)، می توان نوشت:

$$u_A = \frac{u'_A + v}{۱ + vu'_A/c^۲} \qquad (۲\text{-}۲۲۶)$$

که با محاسبهٔ سرعت $v$ از رابطهٔ فوق به دست می آوریم

$$v = \frac{u_A - u'_A}{[۱ - u_A u'_A/c^۲]} \qquad (۲\text{-}۲۲۷)$$

همچنین، برای ذرهٔ $B$ نیز، داریم

$$u_B = \frac{-u'_B + v}{۱ - vu'_B/c^۲} \qquad (۲\text{-}۲۲۸)$$

در رابطهٔ فوق علامت منفی در جلوی $u'_B$، به خاطر آن است که سرعت ذرهٔ $B$ در چارچوب $S'$ در خلاف جهت محور $x'$ بوده و در این چارچوب دو ذره به سمت یکدیگر حرکت می کنند. همچنین، از رابطهٔ (۲-۲۲۸) نیز می توان سرعت $v$ را به دست آورد. دراین صورت، این سرعت برابر

$$v = \frac{u_B + u'_B}{1 + u_B u'_B / c^2} \qquad (۲-۲۲۹)$$

خواهد بود. اکنون، می توان روابط(۲-۲۲۷) و (۲-۲۲۹) را مساوی هم قرار داد و به دست آورد

$$\frac{u_A - u'_A}{1 - u_A u'_A / c^2} = \frac{u_B + u'_B}{1 + u_B u'_B / c^2} \qquad (۲-۲۳۰)$$

رابطهٔ (۲-۲۳۰) بیان می کند که تفاضل نسبیتی سرعت $u'_A$ از سرعت $u_A$ باید برابر جمع نسبیتی سرعت $u'_B$ با سرعت $u_B$ باشد؛ زیرا هردو نتیجه سرعت ناظر $S'$ را نسبت به ناظر ساکن زمینی $S$، به دست می دهند. اما با توجه به اینکه سرعت ذرات در چارچوب $S'$، یعنی $u'_A$ و $u'_B$ باید برابر باشند، بنابراین، رابطهٔ(۲-۲۳۰) را با توجه به مقادیر $u_A$ و $u_B$ می توان به صورت

$$\frac{4c/5 - u'}{[1 - (4c/5)u'/c^2]} = \frac{3c/5 + u'}{1 + (3c/5)u'/c^2} \qquad (۲-۲۳۱)$$

نوشت. دررابطهٔ فوق $u' = u'_A = u'_B$ می باشد. در این صورت، از (۲-۲۳۱) داریم

$$5u'^2 - 26cu' + 5c^2 = 0 \qquad (۲-۲۳۲)$$

یا

$$(5u' - c)(u' - 5c) = 0 \qquad (۲-۲۳۳)$$

اما می دانیم جواب $u' = 5c$ را باید کنار گذاشت. درنتیجه، $u' = c/5$ جواب فیزیکی معادلهٔ(۲-۲۳۳) خواهد بود. اکنون، با جایگذاری مقدار $u'$ در رابطهٔ (۲-۲۲۷) یا (۲-۲۲۹) می توان سرعت چارچوب $S'$ را نسبت به چارچوب $S$ به دست آورد. بنابراین، از رابطهٔ (۲-۲۲۹)، داریم

$$v = \frac{3c/5 + c/5}{1 + (3c/5)(c/5)/c^2} = \frac{5c}{7} \qquad (۲-۲۳۴)$$

**روش سوم :**

در این روش، ابتدا می توان سرعت ذرهٔ $A$ را درچارچوب سکون ذرهٔ $B$ به دست آورد. بنابراین، می توان نوشت:

$$u_{AB} = \frac{u_A - v_B}{1 - v_B u_A / c^2} \qquad (۲-۲۳۵)$$

دررابطهٔ فوق $v_B$، سرعت نسبی چارچوب سکون ذرهٔ $B$ بوده و برابر $u_B$ می باشد. درنتیجه، داریم

$$u_{AB}=\frac{۴c/۵-۳c/۵}{۱-(۴c/۵)(۳c/۵)/c^۲}=\frac{۵c}{۱۳} \qquad (۲-۲۳۶)$$

اما می دانیم که ازنظر ناظر واقع درچارچوب $S'$، دو ذره با سرعت یکسان $u'$ به سمت یکدیگر حرکت می کنند. بنابراین، سرعت نسبی دو ذره در چارچوب $S'$، برابر

$$u'_{AB}=\frac{u'-(-u')}{۱-(u')(-u')/c^۲}=\frac{۲u'}{۱+u'^۲/c^۲} \qquad (۲-۲۳۷)$$

می باشد. از طرف دیگر، $u'_{AB}$ برابر سرعت ذرهٔ $A$ درچارچوب سکون ذرهٔ $B$، یعنی $u_{AB}$ می باشد. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\frac{۲u'}{۱+u'^۲/c^۲}=\frac{۵c}{۱۳} \qquad (۲-۲۳۸)$$

یا

$$۵u'^۲-۲۶u'c+۵c^۲=۰ \qquad (۲-۲۳۹)$$

که همان معادلهٔ (۲-۲۳۲) می باشد. بنابراین، ادامهٔ راه حل مشابه روش دوم خواهد بود.

## ۲ - ۱۰ : شتاب ویژه

فرض کنید که ذره ای با سرعت $v$ در راستای محور $x$ چارچوب $S$ حرکت می کند. شتاب ویژه[1]، طبق تعریف شتابی است که درچارچوب سکون لحظه ای[2] ذره اندازه گیری می شود. بنابراین، اگر سرعت لحظه ای ذره درچارچوب $S$ برابر $v(t)$ باشد، دراین صورت، ذره درچارچوب سکونش، یعنی $S'$ درسکون لحظه ای خواهد بود. درنتیجه، سرعت چارچوب $S'$ نسبت به $S$ برابر $v$ می باشد. اکنون، می توان نشان داد که ارتباط بین شتاب لحظه ای ذره و شتاب ذره درچارچوب $S$، با رابطهٔ

$$a_x=\frac{dv}{dt}=\frac{\alpha}{\gamma^۳(v)} \qquad (۲-۲۴۰)$$

بیان می شود. برای به دست آوردن رابطهٔ(۲-۲۴۰)، می توان از رابطهٔ اول(۲-۸۰) و رابطهٔ

1- Proper Acceleration 2- Instantaneous rest frame

(۲-۱۳۲) استفاده نمود. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} cdt &= \gamma(v)(cdt' + \beta dx') \\ &= \gamma(v)cdt'(1 + \beta u'_x) \end{aligned} \tag{۲-۲۴۱}$$

همچنین، می توان نوشت:

$$du_x = \frac{du_x}{du'_x}du'_x = \frac{du'_x}{\gamma^2(v)[1 + vu'_x/c^2]^2} \tag{۲-۲۴۲}$$

در نتیجه، داریم:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x/dt'}{\gamma^3(v)[1 + \beta u'_x/c][1 + \beta u'_x/c]^2} \tag{۲-۲۴۳}$$

یا

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(v)[1 + \beta u'_x/c]^3} \tag{۲-۲۴۴}$$

اکنون، با توجه به تعریف شتاب لحظه ای، اگر $u'_x$ را برابر صفردر نظر بگیریم و همچنین، اگر شتاب لحظه ای $a'_x$ برابر $\alpha$ باشد. در این صورت، از رابطهٔ (۲-۲۴۴)، داریم

$$a_x = \frac{\alpha}{\gamma^3(v)} \tag{۲-۲۴۵}$$

زیرا در این حالت، سرعت ذره در چارچوب $S$ برابر سرعت نسبی چارچوب سکون ذره یا $S'$ می باشد. به عبارت دیگر، سرعت $v$ برابر $u_x$ خواهد بود. اکنون، فرض کنید که شتاب ویژهٔ ذره ثابت بوده و برابر $\alpha = a_0$ باشد. همچنین، اگر فرض کنیم که ذره در چارچوب $S$، در لحظهٔ $t = 0$ شروع به حرکت کند، در این صورت می توان سرعت ذره را در این چارچوب به دست آورد. برای این منظور، از رابطهٔ (۲-۲۴۵)، داریم

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{a_0}{\gamma^3(v)} \tag{۲-۲۴۶}$$

یا

$$\frac{dv}{dt} = a_0(1 - \beta^2)^{3/2} \tag{۲-۲۴۷}$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{a_0}{c}dt \qquad (۲-۲۴۸)$$

حال، با انتگرال گیری ازطرفین رابطهٔ (۲-۲۴۸)، و با در نظرگرفتن اینکه سرعت ذره در لحظهٔ $t = 0$ برابر صفر است، به دست می آوریم

$$\frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \frac{a_0}{c}t \qquad (۲-۲۴۹)$$

بنابراین، سرعت ذره در چارچوب $S$، برابر

$$\beta(t) = \frac{(a_0 t/c)}{\sqrt{1+(a_0 t/c)^2}} \qquad (۲-۲۵۰)$$

به دست می آید.

---

**مثال ۲ - ۲۵ :** فرض کنید که شتاب ویژهٔ ذره ای برابر $g$ باشد. یعنی $a_0 = g$ باشد. دراین صورت، بعد از گذشت چه مدت زمان، سرعت ذره برابر $\beta_1 = 0/99$ و $\beta_2 = 0/9999$ خواهد شد. این مدت زمان را نسبت به ناظر ساکن $S$، و همین طور، نسبت به ناظر واقع درچارچوب سکون ذره محاسبه نمایید.

**جواب :** از رابطهٔ (۲-۲۴۹)، می توان به دست آورد

$$t = \frac{c}{a_0}\frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \qquad (۲-۲۵۱)$$

درنتیجه، زمان لازم برای رسیدن سرعت ذره به $\beta_1 = 0/99$، از نظر ناظر واقع درچارچوب $S$، برابر

$$t_1 = \frac{c}{a_0}\frac{\beta_1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)}} = \frac{3\times10^8\, m/s}{9/8 m/s^2}\frac{0/99}{\sqrt{1-(0/99)^2}} \qquad (۲-۲۵۲)$$
$$= 2/15\times10^8\, s \simeq 6/81\, years$$

می باشد. به همین ترتیب، مدت زمان لازم برای رسیدن سرعت ذره به $\beta_2$، برابر $t_2 = 68/6$ سال به دست می آید.

اکنون، برای به دست آوردن این زمانها نسبت به ناظر واقع درچارچوب سکون ذره،

یعنی $S'$ می توان از رابطهٔ اتساع زمان استفاده نمود. همان طور که می دانیم، ناظر واقع در چارچوب سکون ذره، زمان ویژه را اندازه می گیرد. بنابراین، داریم:

$$dt = \gamma(v)dt' = \gamma(v)d\tau \qquad (۲-۲۵۳)$$

درنتیجه، با استفاده از رابطهٔ(۲-۲۵۰)، می توان نوشت

$$\tau = \int_{۰}^{t} dt\sqrt{۱-\beta^{۲}(t)} = \int_{۰}^{t} \frac{dt}{\sqrt{۱+(a_{۰}t/c)^{۲}}} \qquad (۲-۲۵۴)$$

یا

$$\tau = \frac{c}{a_{۰}} sinh^{-۱}(\frac{a_{۰}t}{c}) \qquad (۲-۲۵۵)$$

اکنون، می توان $\tau_{۱}$ و $\tau_{۲}$ را ، یعنی مدت زمان لازم برای رسیدن ذره به سرعت $\beta_{۱}$ و $\beta_{۲}$ را از نظر ناظر $S'$ به دست آورد.

$$\begin{aligned}\tau_{۱} &= \frac{c}{a_{۰}} sinh^{-۱}(\frac{a_{۰}t_{۱}}{c})\\ &= \frac{۳\times ۱۰^{۸}\ m/s}{۹/۸ m/s^{۲}} sinh^{-۱}[\frac{(۹/۸ m/s^{۲})}{(۳\times ۱۰^{۸}\ m/s)}(۲/۱۵\times ۱۰^{۸}\ s)] \qquad (۲-۲۵۶)\\ &= ۸/۱۹۹\times ۱۰^{۷}\ s \simeq ۲/۶\ years\end{aligned}$$

به همین ترتیب، $\tau_{۲} = ۴/۸$ سال به دست می آید.

حال، برای آنکه بتوانیم رابطهٔ (۲-۲۵۵) را به شکل بهتری بنویسیم، کمیّت $T = a_{۰}t/c$ را تعریف می کنیم. دراین صورت، ارتباط بین زمان ویژهٔ $\tau$، و زمانی که ناظر ساکن یا $S$ ثبت می کند، به صورت

$$\tau = \frac{c}{a_{۰}} sinh^{-۱}(T) \qquad (۲-۲۵۷)$$

به دست می آید. اکنون، اگر $a_{۰}$ را برابر $g = ۱۰ m/s^{۲}$ درنظر بگیریم، دراین حالت، $c/a_{۰}$ برابر $۳\times ۱۰^{۷}\ s$ یا به طور تقریبی برابر یک سال خواهد بود. درنتیجه، با توجه به تعریفی که برای $T$ در نظر گرفته شد، واحد آن برحسب سال به دست می آید. بنابراین، رابطهٔ (۲-۲۵۷) را می توان به صورت

$$\tau = sinh^{-۱}(T) \qquad (۲-۲۵۸)$$

یا

$$T = sinh\,\tau \qquad (۲-۲۵۹)$$

نوشت. در روابط فوق $T$ و همین طور $\tau$ برحسب واحد سال به دست می آیند.

---

**مثال ۲ - ۲۶ :** اکنون، در مثال قبل فرض کنید که به جای ذره، یک مو شک نسبیتی در نظر گرفته شود. دراین صورت، با استفاده از رابطهٔ (۲-۲۵۰)، مسافت طی شده به وسیلهٔ مو شک را در چارچوب $S$ به دست آورید. و نشان دهید که اگر $a_\circ$، یعنی شتاب موشک درچارچوب سکون لحظه ای آن برابر $۱۰\, m/s^۲$ در نظر گرفته شود، می توان مسافت طی شده به وسیلهٔ موشک را از رابطهٔ

$$X(T) = \sqrt{T^۲ + ۱} - ۱ \qquad (۲-۲۶۰)$$

به دست آورد که در آن $X$ و $T$ به ترتیب برحسب سال نوری و سال بیان می شوند.

**جواب :** با توجه به رابطهٔ $v(t) = dx/dt$ و با استفاده از رابطهٔ(۲-۲۵۰)، داریم

$$dx = \frac{a_\circ t}{\sqrt{۱ + (a_\circ t/c)^۲}}\, dt \qquad (۲-۲۶۱)$$

حال، با انتگرالگیری از طرفین رابطهٔ(۲-۲۶۱)، می توان به دست آورد

$$x(t_۲) - x(t_۱) = \frac{c^۲}{a_\circ}\left[\sqrt{۱ + (a_\circ/c)^۲\, t_۲^۲} - \sqrt{۱ + (a_\circ/c)^۲\, t_۱^۲}\,\right] \quad (۲-۲۶۲)$$

اکنون، اگر $a_\circ$ برابر $g = ۱۰ m/s^۲$ در نظر گرفته شود، در این صورت با توجه به تعریفی که درمثال قبل برای $T$ در نظر گرفته شد، یعنی $T = a_\circ t/c$ و همین طور با تعریف $X = x a_\circ/c^۲$، می توان رابطهٔ (۲-۲۶۲) را به صورت

$$X(T) = [\sqrt{۱ + T^۲} - ۱] \qquad (۲-۲۶۳)$$

نوشت. $t_۱$ در رابطهٔ (۲-۲۶۲) برابر صفر گرفته شده است. از طرف دیگر، با توجه به تعریف $X = x a_\circ/c^۲$ و با در نظر گرفتن $a_\circ = ۱۰ m/s^۲$، واحد $X$ بر حسب واحد سال نوری به دست می آید.

**مثال ۲ - ۲۷ :** فرض کنید که موشک مثال قبل دارای شتاب $a_\circ = ۱۰ m/s^۲$ باشد. همچنین، فرض کنید که موشک مسیرخود را در دو مرحله طی کند. به این ترتیب که درنیمهٔ اول مسیر، شتاب مثبت و در نیمهٔ دوم شتاب منفی باشد. دراین صورت، زمان کل مسافرت را درحالتهای زیر از نظر فضانورد داخل موشک به دست آورید وآن را با زمان به دست آمده از طریق کلاسیک مقایسه نمایید.

**الف :** مسافرت تا کرهٔ ماه که در فاصلهٔ ۳۸۲ هزارکیلومترقرارگرفته است.

**ب :** مسافرت تا سیارهٔ نپتون که در فاصلهٔ $۴/۵ \times ۱۰^۹$ کیلومتر قرار دارد.

**ج :** مسافرت تا ستارهٔ آلفا قنطورس[1] با فاصلهٔ ۴/۳ سال نوری از زمین

**جواب : الف :** با توجه به رابطهٔ (۲-۲۶۳) می توان نوشت:

$$d(t) = \frac{c^۲}{a_\circ}[\sqrt{۱ + (a_\circ/c)^۲ t^۲} - ۱] \qquad (۲\text{-}۲۶۴)$$

بنابراین، زمان $t$ از رابطهٔ(۲-۲۶۴) به صورت

$$t = \sqrt{d(\frac{d}{c^۲} + \frac{۲}{a_\circ})} \qquad (۲\text{-}۲۶۵)$$

به دست می آید. مدت زمانی که از رابطهٔ (۲-۲۶۵) به دست می آید، زمان ثبت شده در چارچوب متصل به زمین یا $S$ می باشد. اکنون، با توجه به رابطهٔ(۲-۲۵۵) می توان زمان مسافرت را از نظر فضانورد همراه موشک به دست آورد. در نتیجه، داریم:

$$\tau = \frac{c}{a_\circ} sinh^{-۱}(\frac{a_\circ t}{c}) \qquad (۲\text{-}۲۶۶)$$

حال، با توجه به روابط(۲-۲۶۴) ، (۲-۲۶۵)) و (۲-۲۶۶)، برای قسمت الف، می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} d_۱ &= (\tfrac{۱}{۲})(۳/۸۲ \times ۱۰^۸)m \\ t_۱ &\simeq ۱/۷۲ hrs \qquad (۲\text{-}۲۶۷) \\ \tau_۱ &\simeq ۱/۷۲ hrs \end{aligned}$$

1- $\alpha$ - Centuri

بنابراین، زمان کل مسافرت از نظر فضانورد، درمسافرت اول برابر $\tau_{tot} = ۲\tau_۱$ یا $\tau_{tot} \simeq ۳/۴۴$ ساعت خواهد بود. همچنین، ازنظرناظر روی زمین نیز زمان کل برابر $t_{tot} = ۲t_۱ \simeq ۳/۴۴$ ساعت می باشد. حال، با محاسبهٔ زمان مسافرت، ازنظر کلاسیک می توان به نتیجهٔ

$$T_{۱cl} = \sqrt{\frac{۲d_۱}{a_۰}} \simeq ۱/۷۲\ hrs \tag{۲-۲۶۸}$$

رسید. درنتیجه، زمان کل مسافرت، برابر $T_{tot} = ۲T_{۱cl}$ یا $T_{tot} \simeq ۳/۴۴$ ساعت می باشد. این مدت زمان درهمهٔ چارچوبها، از جمله چارچوب سکون موشک یا فضانورد و همین طور، چارچوب $S$ یکسان است. درواقع، علت عدم اختلاف زمان کل از نظر فضانورد و همین طور ناظر روی سطح زمین به دلیل سرعت کم موشک درمقایسه با سرعت نور می باشد. بنابراین، مشاهده می کنیم که در مسافتها یا مسافرتهای کوتاه، اختلافی بین نتایج کلاسیک و نسبیتی وجود ندارد.

ب : در این حالت نیز با توجه به روابط (۲-۲۶۴) ، (۲-۲۶۵) و (۲-۲۶۶)، داریم:

$$\begin{aligned} d_۲ &= (\tfrac{۱}{۲})(۴/۵\times ۱۰^{۱۲})m \\ t_۲ &\simeq ۷/۷۶۵\ days \\ \tau_۲ &\simeq ۷/۷۶۴\ days \end{aligned} \tag{۲-۲۶۹}$$

که در این حالت، زمان کل مسافرت از نظر فضانورد، در مسافرت دوم برابر $\tau_{tot} = ۲\tau_۲$ یا $\tau_{tot} \simeq ۱۵/۵$ روز خواهد بود. همچنین، زمان مسافرت دوم از نظر ناظر روی زمین نیز برابر $t_{tot} = ۲t_۲ \simeq ۱۵/۵۳$ روز می باشد. از طرف دیگر، با محاسبهٔ کلاسیک نیز به نتیجهٔ $T_{tot} = ۲T_{۲cl} \simeq ۱۵/۵$ روز می رسیم که زمان به دست آمده از نظر همهٔ چارچوبها یکسان می باشد. مجدداً همان طورکه ملاحظه می گردد، اختلافی بین نتایج کلاسیک و نسبیتی در این مسافرت نیز وجود ندارد.

ج : درمسافرت سوم، یعنی مسافرت تا ستارهٔ آلفا قنطورس که در مقایسه با دو حالت قبلی مسافرت نسبتاً طولانی تری می باشد. مجدداً با استفاده از روابط (۲-۲۶۴) ، (۲-۲۶۵) و

(۲-۲۶۶)، می توان نتایج

$$d_{۳} = (\frac{۱}{۲})(۴/۳)\, lyrs$$
$$t_{۳} \simeq ۲/۹۵\, yrs \qquad (۲-۲۷۰)$$
$$\tau_{۳} \simeq ۱/۷۶\, yrs$$

را به دست آورد. در این حالت، زمان کل مسافرت از نظر فضانورد، درمسافرت سوم برابر $\tau_{tot} = ۲\tau_{۳}$ یا $\tau_{tot} \simeq ۳/۵۲$ سال خواهد بود. همچنین، مدت زمان کل این مسافرت از نظر ناظر روی سطح زمین، برابر $t_{tot} = ۲t_{۳} \simeq ۵/۹$ سال می باشد. دراینجا اختلاف بین زمان کل ثبت شده به وسیلهٔ فضانورد و ناظر ساکن روی زمین، به دلیل افزایش سرعت موشک در نیمهٔ اول مسیر در این مسافرت طولانی می باشد. حال، اگر سرعت موشک را درانتهای نیمهٔ اول مسیر با استفاده از رابطهٔ (۲-۲۵۰) به دست آوریم، به نتیجهٔ $\beta = ۰/۹۵$ می رسیم. بنابراین، درمسافرتهای طولانی اثرهای نسبیتی ظاهر می شوند.

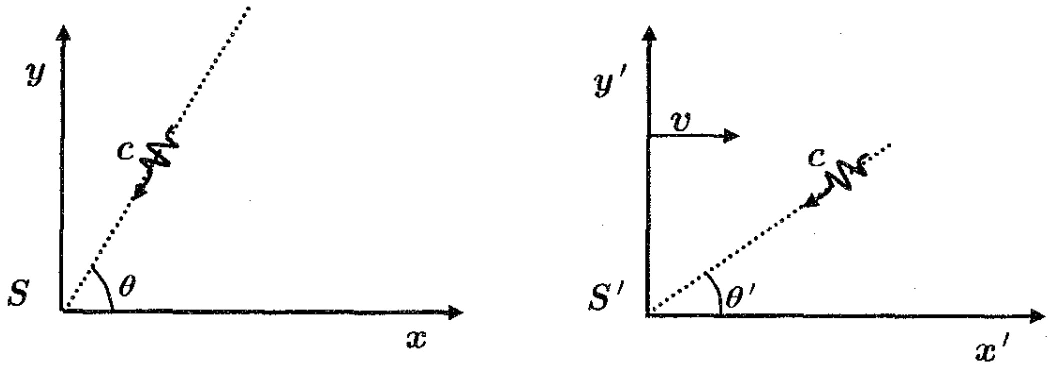
همچنین، با محاسبهٔ کلاسیک نیز به نتیجهٔ $T_{tot} = ۲T_{۳cl} \simeq ۳/۰۵$ سال می رسیم که زمان به دست آمده از نظر همهٔ چارچوبها یکسان می باشد. اکنون، با توجه به نتایج به دست آمده، دراین حالت محاسبات کلاسیک و نسبیتی کاملاً با یکدیگر اختلاف دارند. بنابراین، در مسافرتهای طولانی نمی توان از روابط کلاسیک استفاده نمود.

## ۲ - ۱۱ : ابیراهی نور

پدیدهٔ تغییرامتداد انتشار پرتو نور، ضمن گذر از یک چارچوب مرجع لخت به چارچوب مرجع لخت دیگر، ابیراهی یا انحراف نور نامیده می شود. برای توضیح بیشتر، فرض کنید که درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، پرتو نورچشمه ای تحت زاویهٔ $\theta$ نسبت به محور $x$ این چارچوب دریافت شود. اکنون، اگر فرض کنیم که چارچوب $S'$ با سرعت $v$ درجهت مثبت محور $x$ چارچوب $S$ حرکت کند، در این صورت، باید تعیین نماییم که پرتو نوردر این چارچوب تحت چه زاویه ای نسبت به محور $x'$ دریافت می گردد؟

برای به دست آوردن زاویهٔ $\theta'$ یا راستای دریافت پرتو نور نسبت به محور $x'$، به وسیلهٔ ناظر $S'$، می توان از تبدیلات لورنتس سرعت استفاده کرد. برای این منظور، ابتدا مؤلفه های

سرعت ذرات نوریا فوتونها را در چارچوب $S$ به دست می آوریم. بنابراین، با توجه به شکل(۲-۲۴)، مؤلفه های $x$ و $y$ سرعت فوتونها، یعنی $u=c$ درچارچوب $S$ برابر $u_x=-c\,cos\theta$ و $u_y=-c\,sin\theta$ می باشند.




شکل (۲-۲۴) : ابیراهی نور

حال، با استفاده ازتبدیلات سرعت، یعنی روابط (۲-۱۳۵) و (۲-۱۳۷)، خواهیم داشت:

$$u'_x=\frac{-c\,cos\theta-v}{۱-[v(-c\,cos\theta')]/c^۲}=\frac{-(c\,cos\theta+v)}{۱+(vcos\theta)/c} \qquad (۲-۲۷۱)$$

و مؤلفهٔ $y'$ سرعت، نیز برابر

$$u'_y=\frac{-c\,sin\theta}{\gamma(v)[۱-[v(-c\,cos\theta)]/c^۲)]}=\frac{-csin\theta}{\gamma(v)[۱+(vcos\theta)/c)]} \qquad (۲-۲۷۲)$$

به دست می آید. درنتیجه، زاویهٔ بین راستای انتشار یا دریافت پرتو نور و محور $x'$ را می توان با استفاده از روابط(۲-۲۷۱) و (۲-۲۷۲)، به صورت

$$tan\theta'=\frac{u'_y}{u'_x}=\frac{sin\theta}{\gamma(v)[cos\theta+\beta]} \qquad (۲-۲۷۳)$$

به دست آورد. همچنین، می توان با در نظر گرفتن رابطهٔ(۲-۲۷۱) و با توجه به $u'_x=-c\,cos\theta'$ ، رابطهٔ ابیراهی یا کجنمایی نور را با رابطهٔ

$$cos\theta'=\frac{cos\theta+\beta}{۱+\beta cos\theta} \qquad (۲-۲۷۴)$$

نیز بیان کرد. همچنین، با توجه به رابطهٔ (۲-۲۷۲) و رابطهٔ $u'_y = -c\,sin\theta'$، می توان رابطهٔ ابیراهی نور را به صورت

$$sin\theta' = \frac{sin\theta}{\gamma(v)[1+\beta cos\theta]} \qquad (۲۷۵-۲)$$

نیز نوشت. ازطرف دیگر، برای به دست آوردن روابط تبدیلی زاویهٔ $\theta$ برحسب $\theta'$، می توان جای کمیّتهای پریمدارو بدون پریم عوض نموده و همین طور، $\beta$ را به $-\beta$ تبدیل کرد.

**نکته :** اکنون، اگر فرض کنیم که مطابق شکل (۲-۲۵)، پرتو نور درچارچوب $S$ تحت زاویهٔ $\theta$، نسبت به محور $x$ به جای دریافت، ارسال گردد. دراین صورت، به جای روابط (۲-۲۷۳) و (۲-۲۷۴)، روابط

$$tan\theta' = \frac{sin\theta}{\gamma(v)[cos\theta-\beta]} \qquad (۲۷۶-۲)$$

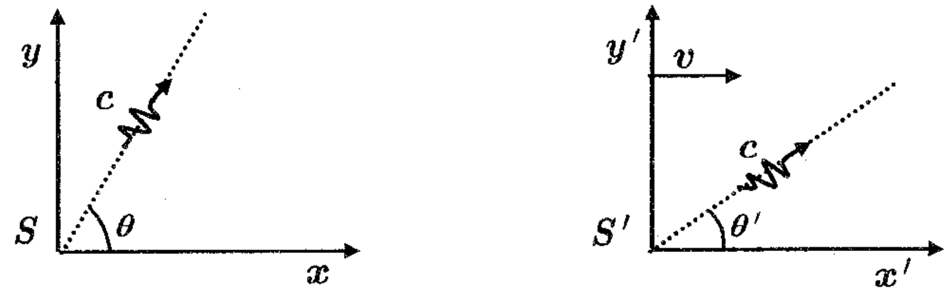
و

$$cos\theta' = \frac{cos\theta-\beta}{1-\beta cos\theta} \qquad (۲۷۷-۲)$$

و

$$sin\theta' = \frac{sin\theta}{\gamma(v)[1-\beta cos\theta]} \qquad (۲۷۸-۲)$$

را خواهیم داشت. پدیدهٔ ابیراهی نورستاره ای[1] که ناشی از حرکت زمین در فضا می باشد، برای اولین بار به وسیلهٔ برادلی در سال ۱۷۲۵ گزارش شده است. و یکی از پدیده هایی است که با فرضیهٔ کشش اتری درتناقض بود. همان طورکه قبلاً اشاره شد، این فرضیه برای توجیه نتیجهٔ منفی آزمایش مایکلسون و مورلی ارائه گردیده است.




**شکل (۲-۲۵) : ابیراهی نورستاره ای**

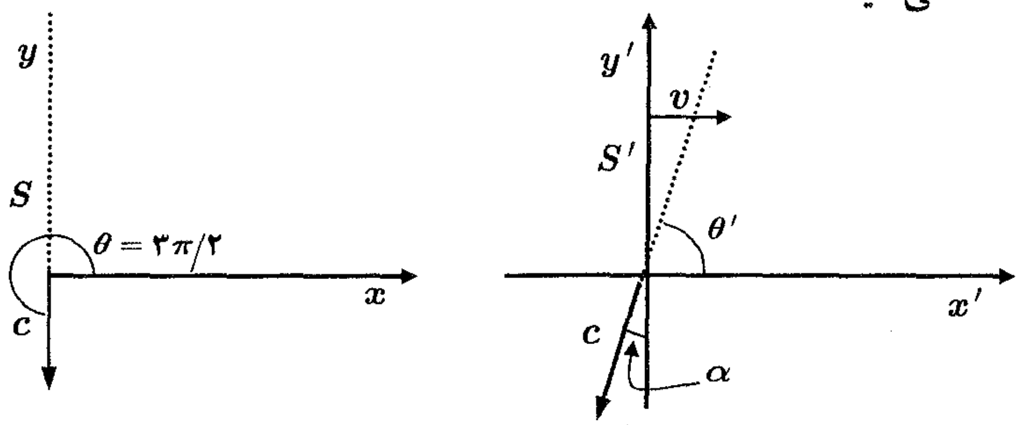
1- Stellar aberration

پدیدهٔ ابیراهی نور درهنگام رصد یک ستاره، به این صورت آشکار می گردد که اگر زمین در فضا حرکت نمی کرد، سمت گیری لولهٔ تلسکوپ برای رصد یک ستارهٔ معین، در طول سال تغییر نمی کرد. اما به دلیل حرکت زمین( که چارچوب مرجع متصل به آن را می توان به عنوان چارچوب $S'$ در نظرگرفت)، زاویهٔ دریافت پرتو نور یک ستارهٔ معین در طول سال تغییر می کند. درنتیجه، لوله یا محورتلسکوپ برای رصد دائمی ستاره درمدت یک سال مخروطی را ایجاد می کند که آن را **مخروط ابیراهی**[1] می نامند. زاویهٔ رأس این مخروط را نیز می توان با استفاده از رابطهٔ (۲-۲۷۳) یا (۲-۲۷۴) به دست آورد.

اکنون، می توان حالتی خاص را در نظرگرفت. برای این منظور، مطابق شکل (۲-۲۶) فرض کنید که در چارچوب $S$ نور ستاره دقیقاً در راستای محور $y$ دریافت گردد. دراین صورت، $\theta = ۳\pi/۲$ خواهد بود. درنتیجه، دراین حالت با توجه به رابطهٔ(۲-۲۷۴)، داریم:

$$cos\theta' = \frac{cos(۳\pi/۲)+\beta}{۱+\beta cos(۳\pi/۲)} = \beta \qquad (۲۷۹-۲)$$

حال اگر $v$، یعنی سرعت مداری زمین برابر $۲۹/۸\ km/s$ در نظرگرفته شود، دراین صورت، $\beta$ برابر $۹/۹۳ \times ۱۰^{-۶}$ خواهد بود. درنتیجه، $\theta' = cos^{-۱}(\beta) = ۸۹/۹۹۴۳۱^{\circ}$ درجه به دست می آید.




**شکل (۲-۲۶) : سمت گیری محور تلسکوپ برای رصد یک ستاره**

بنابراین، برای مشاهده یا رصد ستاره در این وضعیت، باید محور یا لولهٔ تلسکوپ با نیمهٔ مثبت محور $y'$ زاویه ای برابر $\alpha = ۹۰^{\circ} - \theta'$ یا $\alpha = ۵/۶۸۹۴۷ \times ۱۰^{-۴}$ درجه یا ۲۰/۴۹ ثانیهٔ قوسی بسازد. درنتیجه، جهت حرکت پرتو نورستاره نسبت به محور $x'$ برابر $۲۷۰^{\circ} - \alpha^{\circ}$

1-Aberration cone

خواهد بود. در این صورت، قطرظاهری مخروط ابیراهی یا قطرمسیر دایره ای که انتهای لولهٔ تلسکوپ در طول یک سال طی می کند، برابر $(\theta' - \pi)۲ = ۲\alpha$ یا $۲\alpha = ۴۰/۹۸$ ثانیهٔ قوسی به دست می آید.

البته، باید توجه داشت که در اینجا حالتی را در نظرگرفتیم که درآن ستاره دقیقاً در بالای سر ناظر ساکن $S$ قرارگرفته باشد. به عبارت دیگر، پرتوهای نوری که از ستاره به سمت زمین می آیند با صفحهٔ مدار زمین زاویهٔ $\theta = \pi/۲$ می سازد. اما اگر زاویهٔ بین پرتوهای نور رسیده از ستاره و صفحهٔ مدار زمین، برابر $\pi/۲$ نباشد، در این صورت، می توان نشان داد که زاویهٔ $\alpha$ در این حالت برای تقریب مرتبهٔ اول نسبت به $\beta$، از رابطهٔ $\Delta\theta = (v/c)sin\theta'$ به دست می آید. برای این منظور، از رابطهٔ (۲-۲۷۶) می توان با تبدیل $\beta$ به $-\beta$ و تعویض جای پریمها زاویهٔ $\theta$ را برحسب زاویهٔ $\theta'$ به دست آورد:

$$tan\theta = \frac{sin\theta'}{\gamma(v)[cos\theta' + \beta]} \qquad (۲-۲۸۰)$$

حال، در این رابطه با درنظرگرفتن اینکه $v \ll c$ است، می توان رابطهٔ

$$tan\theta = tan\theta'(۱ - \frac{v}{c}cos\theta') \qquad (۲-۲۸۱)$$

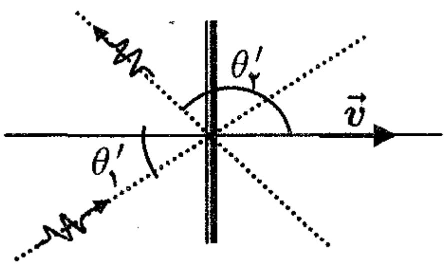
را به دست آورد. حال، با تعریف $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (زاویهٔ ابیراهی)، می توان نوشت:

$$\Delta\theta = \frac{v}{c}sin\,\theta' \qquad (۲-۲۸۲)$$

که همان فرمول مقدماتی برای ابیراهی نور می باشد.

---

**مثال ۲ - ۲۸ :** آینهٔ تختی مطابق شکل(۲-۲۷)، با سرعت $v$ در راستای عمود بر صفحهٔ خود، در چارچوب آزمایشگاه یا $S$ حرکت می کند. درچارچوب سکون آینه یا $S'$، یک پرتو نور تحت زاویهٔ $\theta'_۱$، نسبت به امتداد عمود بر سطح آینه تابیده می شود و تحت زاویهٔ $\theta'_۲$ از آن باز می تابد. در این صورت، زوایای تابش و بازتابش را نسبت به ناظر ساکن $S$ به دست آورید.



شکل(۲-۲۷) : زاویهٔ تابش و باز تابش در چارچوب ساکن $S$

**جواب :** همان طورکه می دانیم، در چارچوب سکون آینه یا $S'$، زوایای تابش و

بازتابش با یکدیگر برابرند. یعنی $\theta'_1 = \theta'_2$. اما این زوایا نسبت به یک ناظر دیگر مانند $S$، برابرنیستند. بنابراین، برای به دست آوردن زوایای تابش و بازتابش در چارچوب $S$، می توان از رابطهٔ (۲-۲۷۷) استفاده کرد. دراین صورت، داریم:

$$cos\,\theta_1 = \frac{cos\theta'_1 + \beta}{1+\beta cos\,\theta'_1} \qquad (۲-۲۸۳)$$

همچنین،

$$cos\,\theta_2 = \frac{cos\theta'_2 + \beta}{1+\beta cos\,\theta'_2} \qquad (۲-۲۸۴)$$

به دست می آیند. ازطرف دیگر، با توجه به شکل(۲-۲۷)، زاویهٔ $\theta'_2$ برابر $\pi - \theta'_1$ می باشد. بنابراین، $cos\,\theta'_1 = -cos\,\theta'_2$ است. درنتیجه، با درنظر گرفتن (۲-۲۸۴) می توان نوشت:

$$cos\,\theta_2 = \frac{\beta - cos\,\theta'_1}{1-\beta cos\,\theta'_1} \qquad (۲-۲۸۵)$$

حال، با توجه به رابطهٔ(۲-۲۸۳)، می توان مقدار $cos\theta'_1$ را با تبدیل $\beta$ به $-\beta$ و تعویض جای پریمها به دست آورده و دررابطهٔ فوق جایگذاری کرد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$cos\,\theta_2 = \frac{2\beta - (1+\beta^2)cos\,\theta_1}{1-2\beta cos\,\theta_1 + \beta^2} \qquad (۲-۲۸۶)$$

رابطهٔ(۲-۲۸۶)، ارتباط بین زوایای تابش و بازتابش را درچارچوب آزمایشگاه یا $S$ نشان می دهد.

## ۲ - ۱۲ : اثردوپلر نسبیتی

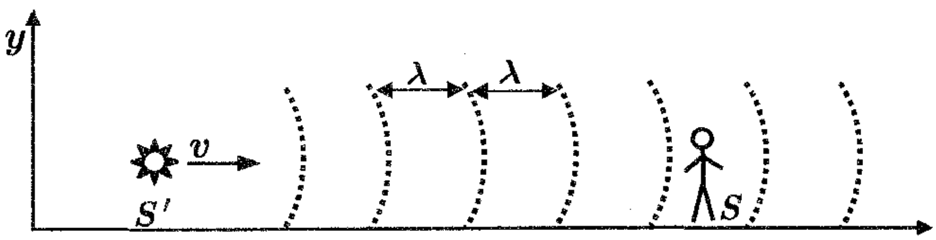
شخصی که درکنارجاده ای ایستاده باشد، بسامد بوق ممتد یک اتومبیل متحرک را هنگام نزدیک یا دور شدن از خود متفاوت احساس می کند. همچنین، اگر منبعی که بوق ممتد ایجاد می کند، ساکن باشد و شخصی با سرعت معینی به منبع، نزدیک یا ازآن دور شود، در این حالت نیز بسامد صوت ایجاد شده به وسیلهٔ منبع، متفاوت خواهد بود. این تغییر بسامد را که بر اثر حرکت نسبی منبع موج صوتی یا ناظر ایجاد می شود، پدیده

یا اثر دوپلر[1] می نامند. این اثردرسال ۱۸۴۲ به وسیلهٔ دوپلر[2] (۱۸۵۳-۱۸۰۳)، ریاضیدان و فیزیکدان اتریشی کشف شده است. پدیدهٔ دوپلر، درمورد همهٔ امواج، مانند امواج صوتی و الکترومغناطیسی مشاهده می گردد و این پدیده راکه درمورد امواج الکترومغناطیسی یا امواج نورانی نیز روی می دهد، اثردوپلرنسبیتی می نامند. در این بخش، پدیدهٔ دوپلر را در سه حالت زیر مورد بررسی قرار می دهیم.

## ۲ - ۱۲ - ۱ : اثردوپلرطولی

برای بررسی اثر دوپلر طولی، فرض کنید که یک چشمهٔ موج الکترومغناطیسی، موجی با بسامد $f_\circ$ و طول موج $\lambda_\circ$ را نسبت به ناظر همراه چشمه یا چارچوب سکون آن، یعنی $S'$ گسیل کند. کمیّتهای $f_\circ$ و $\lambda_\circ$ را می توان به ترتیب **بسامد** و **طول موج ویژه**[3] نامید؛ زیرا این دو کمیّت درچارچوب سکون چشمه یا $S'$ اندازه گیری می شوند. $\lambda_\circ$ در واقع، فاصلهٔ بین سطوح موج ایجاد شده نسبت به ناظر $S'$ می باشد. بنابراین، بازهٔ زمانی بین ارسال یک سطح موج و سطح موج بعدی از نظر این ناظر، برابر $\Delta t_\circ = 1/f_\circ$ خواهد بود.

اکنون، با توجه به شکل (۲-۲۸)، اگر چشمه با سرعت ثابت $v$ درامتداد خطی مستقیم به ناظر ساکن $S$، نزدیک و یا ازآن دورشود و همچنین، اگر ناظر $S$ با سرعت ثابت $v$ درامتداد خطی مستقیم به چشمهٔ ساکن، نزدیک یا از آن دور شود، دراین حالت اثر دوپلر طولی[4] خواهیم داشت. در چنین حالتی، بازهٔ زمانی بین دو سطح موج نسبت به ناظر $S$ با استفاده از رابطهٔ اتساع زمان، برابر $\Delta t = \gamma \Delta t_\circ$ خواهد بود.



شکل (۲-۲۸): اثر دوپلر نسبیتی طولی

بنابراین، مسافتی که یک سطح موج درچارچوب $S$ طی می کند، با توجه به این رابطه، برابر

---
1- Doppler effect
2- Doppler, Christian Andreas
3- Longitudinal Doppler effect
4- Proper Wavelenght and frequence

$$c\Delta t = c\gamma\Delta t_\circ \qquad (۲-۲۸۷)$$

به دست می آید. درهمین مدت زمان، یعنی $\Delta t$، خود چشمه نیز به اندازهٔ

$$v\Delta t = v\gamma\Delta t_\circ \qquad (۲-۲۸۸)$$

به ناظر $S$ نزدیک می شود. درنتیجه، درچارچوب $S$، فاصلهٔ بین سطح موج قبلی و سطح موج بعدی، درست در لحظهٔ گسیل ازچشمهٔ موج، برابر

$$\begin{aligned} \lambda &= c\Delta t - v\Delta t \\ &= (c-v)\Delta t \\ &= (c-v)\gamma\Delta t_\circ \end{aligned} \qquad (۲-۲۸۹)$$

خواهد بود. البته، این نتیجه برای همهٔ سطوح موج گسیل شده از چشمهٔ موج صادق است. $\lambda$ فاصلهٔ بین سطوح موج در چارچوب $S$ یا درواقع، طول موج در این چارچوب می باشد. از طرف دیگر، درچارچوبهای $S$ و $S'$، می توان به ترتیب روابط $c = f\lambda$ و $c = f_\circ\lambda_\circ$ را نیزنوشت. در این صورت، درچارچوب $S$ داریم:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{1}{c}(c-v)\gamma\Delta t_\circ \end{aligned} \qquad (۲-۲۹۰)$$

در نتیجه، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1-(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\Delta t_\circ \\ &= \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t_\circ \end{aligned} \qquad (۲-۲۹۱)$$

یا

$$\frac{1}{f} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{f_\circ} \qquad (۲-۲۹۲)$$

بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۲-۲۹۲) به دست می آوریم:

$$f = f_\circ\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f_\circ\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \qquad (۲-۲۹۳)$$

اکنون، با توجه به رابطهٔ (۲-۲۹۳)، اگرچشمهٔ موج بـه نـاظر سـاکن نزدیـک شـود، یعنـی اگـر $\beta > ۰$ باشد، در این حالت، $f > f_{\circ}$ خواهد بود و پدیدهٔ انتقال به آبی را خـواهیم داشـت. زیرا نورآبی درانتهای بالای طیف نورمرئی یا درناحیهٔ بسامدهای بـالا قـرار دارد. واگرچـشمهٔ موج از ناظر ساکن دور شود، یعنی اگر $\beta < ۰$ باشد در این صورت، خواهیم داشت:

$$f = f_{\circ} \sqrt{\frac{۱-\beta}{۱+\beta}} = f_{\circ} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad (۲\text{-}۲۹۴)$$

در نتیجه، در این حالت $f < f_{\circ}$ می شود و پدیدهٔ انتقال به سرخ را داریم؛ زیرا نـور قرمـز در انتهای پایین طیف نور مرئی یا در قسمت بسامدهای پـایین قـرار دارد. همچنین، اگـر چـشمهٔ موج، ساکن و ناظر $S$ با سرعت ثابت $v$ درامتداد خط مستقیم به چـشمه، نزدیـک و یـا از آن دور شود، در این حالت نیز مجدداً روابط(۲-۲۹۳) و (۲-۲۹۴) به دست می آیند.

اثر دوپلرنسبیتی دراخترشناسی اهمیت زیادی دارد؛ زیرا با توجه به بسامد گسیل شده از یک ستاره، می توان دریافت که آن ستاره نسبت به زمین درحال دور شدن است یـا نزدیـک شدن. مشاهدات و رصدهای صورت گرفته دراخترشناسی، حـاکی از آن اسـت کـه عـالم در حال انبساط است. درواقع، این مشاهدات نشان می دهند که ستارگان دورتر با سرعت بیـشتری از هم دور می شوند. یا به عبارت دیگر، انتقال به سرخ بیشتری دارند.

همان طورکه می دانیم، درنظریهٔ کلاسیک اثردوپلردرمورد امواج صوتی، دوحالت :

**۱- ناظر ساکن و چشمهٔ متحرک** و **۲- ناظر متحرک و چشمهٔ ساکن**

با یکدیگرمتفاوت هستند. اما دراثرنسبیتی دوپلـر، ایـن دو حالـت کـاملاً بـا یکـدیگر یکسان می باشند.

---

**مثـــال ۲ - ۲۹ :** درطیـــف یـــک ســـحابی، خـــط هیـــدروژن $H_{\gamma}$ بـــا طـــول موج $\lambda_{\circ} = ۴/۳۴ \times ۱۰^{-۷}\, m$ به اندازهٔ $۲ \times ۱۰^{-۹}\, m$ به سمت قرمز جابه جـا مـی شـود. سرعت سحابی را نسبت به زمین به دست آورید.

**جواب :** با توجه به این که در اینجا انتقال به سـرخ داریـم، بنـابراین، مـی تـوان از رابطـهٔ (۲-۲۹۴) استفاده نمود. دراین صورت، از این رابطه، داریم

$$v = c\frac{۱-\alpha^۲}{۱+\alpha^۲} \qquad (۲۹۵-۲)$$

که در آن $\alpha = f/f_\circ$ می باشد. ازطرف دیگر، $f\lambda = c$ است. درنتیجه:

$$v = c\frac{۱-\delta^۲}{۱+\delta^۲} \qquad (۲۹۶-۲)$$

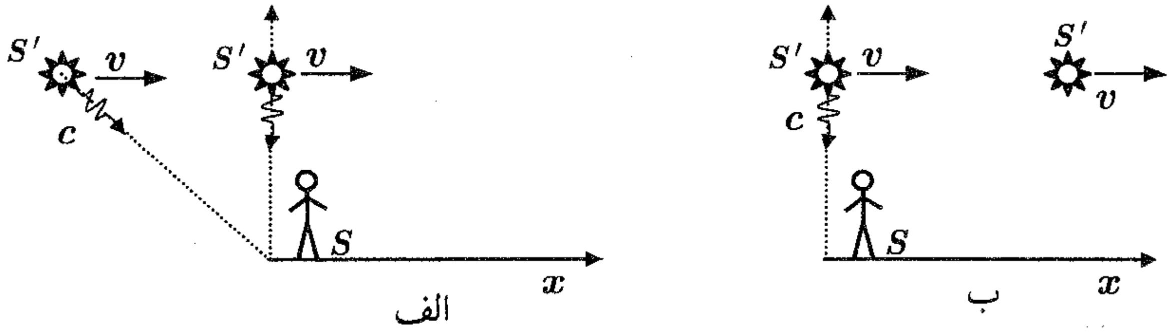
کــه در آن $\delta = \lambda_\circ/\lambda$ مــی باشــد. حــال، بــه ازای $\lambda_\circ = ۴/۳۴\times ۱۰^{-۷}\,m$ و $\lambda = \lambda_\circ + ۲\times ۱۰^{-۹}\,m$ یا $\lambda = ۳/۳۶\times ۱۰^{-۷}\,m$ از رابطهٔ (۲-۲۹۶)، سرعت دور شدن سحابی نسبت به زمین برابر $v = ۰/۰۰۵۳c = ۱۵۹۰\,km/s$ به دست می آید.

## ۲ - ۱۲ - ۲ : اثردوپلرعرضی

در اثردوپلرعرضی[1] خط رؤیت یا راستای دریافت امواج الکترومغناطیسی به وسیلهٔ ناظر $S$، درامتداد سرعت نسبی چشمه و ناظر $S$ نمی باشد. در این حالت، فرض می کنیم که چشمه با سرعت $v$ درجهت مثبت محور $x$ چارچوب $S$ و در امتداد خط مستقیمی که به موازات محور $x$ می باشد، حرکت کند. بنابراین، اگر فاصلهٔ راستای حرکت چشمه از مبدأ چارچوب $S$ برابر $y$ باشد، دراین صورت، می توان دو حالت جداگانه برای اثر دوپلر عرضی در نظر گرفت.

### حالت ۱ :

در این حالت، با توجه به شکل (۲-۲۹) الف، ناظر $S$ موج یا سطوح موجی را دریافت می کند که چشمه قبل از رسیدن به محور $y$ چارچوب $S$، آن را گسیل کرده است.




شکل (۲-۲۹): اثر دوپلرعرضی عرضی

همچنین، درفاصلهٔ زمانی که موج الکترومغناطیسی به ناظر $S$ می رسد، چشمهٔ موج نیز با سرعت $v$، محور $y$ چارچوب $S$ را قطع می کند. یعنی به بالای سر ناظر $S$ می رسد. در این

1- Transverse Doppler Effect

حالت، امتداد مسیرحرکت موج گسیل شده از چشمه با محور $y$ زاویه $\theta$ می سازد. اکنون، اگربسامد موج گسیل شده درچارچوب سکون چشمه یا $S'$، برابر $f_\circ$ باشد، در این صورت، بسامد اندازه گیری شده به وسیلهٔ ناظر $S$، درست در لحظه ای که چشمه، محور $y$ چارچوب $S$ را قطع می کند، چقدر است؟

برای به دست آوردن بسامد موج درچارچوب $S$ می توان به صورت زیر عمل نمود. برای اینکه بتوانیم از رابطهٔ اتساع زمان درچارچوب $S'$ استفاده نماییم، وضعیت را ازدید ناظر $S'$ بررسی می کنیم. بنابراین، ناظر $S'$ مشاهده می کند که ناظر $S$ با سرعت $v$ درجهت منفی محور $x'$ چارچوب خودش حرکت می کند. بنابراین، ناظر $S$ هنگامی موج گسیل شده از چشمه را دریافت می کند که با قسمت منفی محور $y'$ چارچوب $S'$ تلاقی کند. از طرف دیگر، از نظر ناظر $S'$ حوادث درچارچوب $S$ باآهنگ کندتری روی می دهند. همچنین، درچارچوب سکون چشمه یا $S'$، داریم $\Delta t_\circ = 1/f_\circ$. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ اتساع زمان می توان نوشت:

$$\Delta t_\circ = \gamma \Delta t \tag{۲-۲۹۷}$$

یا

$$\Delta t = \frac{\Delta t_\circ}{\gamma} \tag{۲-۲۹۸}$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\Delta t = \frac{1}{f} = \frac{\Delta t_\circ}{\gamma} \tag{۲-۲۹۹}$$

اکنون، با جایگذاری مقدار $\Delta t_\circ$ دررابطهٔ (۲-۲۹۹)، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\gamma f_\circ} \tag{۲-۳۰۰}$$

بنابراین، بسامد موج درچارچوب $S$، درست در لحظه ای که چشمهٔ موج از بالای سر ناظر $S$ عبور می کند، از رابطهٔ

$$f = \gamma f_\circ = \frac{f_\circ}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{۲-۳۰۱}$$

به دست می آید. حال توجه، به رابطهٔ (۲-۳۰۱)، بسامدی که در چارچوب $S$ اندازه گیری

می شود، بزرگتر ازبسامد ویژه می باشد. یعنی $f > f_{\circ}$ است.

اما نکته ای که در اینجا لازم است به آن اشاره شود، این است که علت اینکه وضعیت را ازدید ناظر $S'$ بررسی کردیم. به این دلیل است که اگر بررسی در چارچوب $S$ انجام گیرد، به نتیجه ای نادرست خواهیم رسید. اکنون، این موضوع را مورد بررسی قرار می دهیم.

از دید ناظر $S$ آهنگ گسیل سطوح موج درچارچوب سکون چشمه یا $S'$ کند می شود. یعنی می توان نوشت $\Delta t = \gamma \Delta t_{\circ}$ یا $1/f = \gamma(1/f_{\circ})$ بنابراین،

$$f = \frac{f_{\circ}}{\gamma} = f_{\circ}\sqrt{1-\beta^{2}} \tag{۲-۳۰۲}$$

یعنی $f < f_{\circ}$ است. بنابراین، با این استدلال به نتیجه ای می رسیم که با رابطهٔ (۲-۳۰۱) درتناقض است. اما واقعیت فیزیکی این است که چون چشمه به ناظر $S$ نزدیک می شود، تعداد سطوح موجی که $S$ دریافت می کند، باید افزایش یابد. یعنی باید $f > f_{\circ}$ باشد. علت نادرست بودن رابطهٔ (۲-۳۰۲) را می توان به صورت زیر توضیح داد. رابطهٔ اتساع زمان از دید ناظر $S$ با رابطهٔ $\Delta t = \gamma \Delta t_{\circ}$ بیان می شود. از طرف دیگر، با توجه به رابطهٔ(۲-۶۳) وتوضیحات بعد از آن، رابطهٔ اتساع زمان را در چارچوب $S$، یعنی رابطهٔ $\Delta t = \gamma \Delta t_{\circ}$ را هنگامی می توان نوشت که شرط $\Delta x' = \circ$ برقرار باشد. یعنی دو رویداد درچارچوب $S'$ باید دریک مکان روی دهند. این دو رویداد را می توان ارسال دو سطح موج متوالی درچارچوب سکون چشمه، یعنی $S'$ در نظرگرفت. بنابراین، چون چشمهٔ موج درچارچوب $S'$ به حال سکون است، این دو رویداد در $S'$ هم مکان هستند. یعنی می توان گفت که شرط $\Delta x' = \circ$ برای دو فوق رویداد برقرار است. اما دو رویداد دیگر را نیز باید درنظر بگیریم. این دو رویداد را می توان دریافت این دو سطح موج به وسیلهٔ ناظر $S$ (که در چارچوب $S'$ با سرعت $-v$ حرکت می کند) در نظرگرفت. درنتیجه، رابطهٔ $\Delta t = \gamma \Delta t_{\circ}$ را نمی توان در اینجا به کار برد. بنابراین، رابطهٔ مناسب به صورت $\Delta t_{\circ} = \gamma \Delta t$ با شرط $\Delta x = \circ$ می باشد؛ زیرا مسئلهٔ اصلی دراینجا بررسی بازهٔ زمانی بین دو سطح موجی است که به وسیلهٔ ناظر $S$ دریافت می گردد، نه بازهٔ زمانی بین ارسال این سطوح موج به وسیلهٔ چشمه. به طورخلاصه می توان علت بروز این اشتباه را ناشی

از این مسأله دانست که زمان $\Delta t$ی مربوط به ایجاد دو سطح موج به وسیلهٔ چشمه( به عنوان دو رویداد) در $S$ با زمان $\Delta t$ی مربوط به دریافت این دو سطح موج در $S$ (به عنوان دو رویداد دیگر) فرق می کنند و باید بین این دو زمان تمایز قائل شد.

**حالت ۲ :**

این وضعیت در شکل (۲-۲۹) ب، مشخص شده است. با توجه به شکل، چشمهٔ موج در مسیرحرکت خود، محور $y$ چارچوب $S$ را قطع می کند و به مسیرش با سرعت $v$ ادامه می دهد. اکنون، می خواهیم درچارچوب $S$، بسامد موجی را که درست در لحظهٔ عبورچشمهٔ موج از محور $y$ گسیل می شود، به دست آوریم. دراینجا نیز چارچوب سکون چشمه را $S'$می نامیم. از طرف دیگر، دوسطح موج در فاصلهٔ یکسان از ناظر $S$، به وسیلهٔ چشمه گسیل می شود. بنابراین، ازدید ناظر $S$، رویدادها درچارچوب $S'$ با آهنگ کندتری روی می دهند. درنتیجه، داریم $\Delta t = \gamma \Delta t_\circ$. همچنین، با توجه به روابط $\Delta t = ۱/f$ و $\Delta t_\circ = ۱/f_\circ$ می توان نوشت:

$$\frac{۱}{f} = \gamma \frac{۱}{f_\circ} \tag{۲-۳۰۳}$$

یا

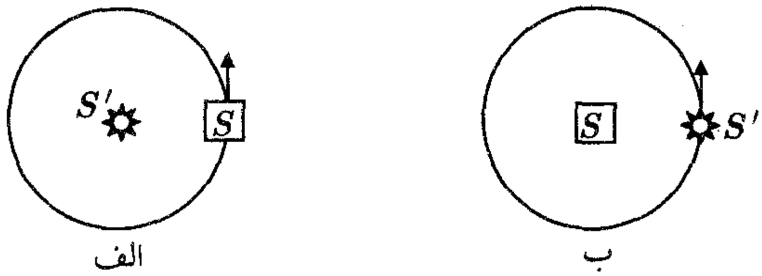
$$f = \frac{f_\circ}{\gamma} = f_\circ \sqrt{۱-\beta^۲} \tag{۲-۳۰۴}$$

در این حالت، مشاهده می گردد که $f < f_\circ$ می باشد.

معمولاً هنگامی که صحبت از پدیدهٔ دوپلرعرضی می شود، در بعضی از کتابها حالت اول و در بعضی دیگر، حالت دوم در نظرگرفته می شود. بنابراین، هنگام بررسی پدیدهٔ دوپلر عرضی باید مشخص شود که کدام حالت مورد نظر است.

در اینجا می توان این دو وضعیت را به شکل صوری به وسیلهٔ شکل های (۲-۳۰) الف و ب، نمایش داد. درشکل(۲-۳۰) الف، وضعیت اول نشان داده شده است. دراین حالت ناظر $S$ با سرعت $v$ دریک مسیردایره ای حول چشمهٔ موج دوران می کند. و شکل(۲-۳۰) ب، حالت دوم اثر دوپلرعرضی را نشان می دهد. به طوری که در این حالت، چشمهٔ موج با

سرعت $v$ حول ناظر $S$ دوران می کند.




شکل (۲-۳۰) : الف : چشمهٔ $S'$ ساکن و ناظر $S$ متحرک.

ب : چشمهٔ $S$ ساکن و ناظر $S'$ متحرک

اکنون، ممکن است در اینجا این سؤال مطرح شود که درشکل های (۲-۳۰) الف و ب، حرکت ناظر $S$ و چشمهٔ موج شتابداراست. درجواب این سؤال می توان گفت که این موضوع مشکلی را ایجاد نمی کند؛ زیرا در رابطهٔ اتساع زمان، سرعت لحظه ای چشمه و ناظر $S$، به کار برده می شود. بنابراین، شتاب آنها در این مورد خاص چندان مهم نیست. البته، بررسی دقیق پدیده های فیزیک نسبت به یک ناظر یا چارچوب مرجع شتابدار در نسبیت عام صورت می گیرد

## ۲ - ۱۲- ۳ : اثردوپلرمیانی

در پایان این بخش می توان اثر دوپلر نسبیتی را در حالت کلی تر به دست آورد. دراین حالت مطابق شکل (۲-۳۱)، فرض می کنیم که زاویهٔ بین راستای دریافت پرتو نور به وسیلهٔ ناظر ساکن $S$ وجهت حرکت نسبی چشمهٔ $S'$ و ناظر $S$ برابر $\theta$ باشد. در این حالت، اثردوپلر میانی[1] را خواهیم داشت. درچنین حالتی نیز بازهٔ زمانی بین دو سطح موج نسبت به ناظر $S$ با استفاده از رابطهٔ اتساع زمان، برابر $\Delta t = \gamma \Delta t_\circ$ خواهد بود. بنابراین، مسافتی که یک سطح موج دراین چارچوب طی می کند، برابر

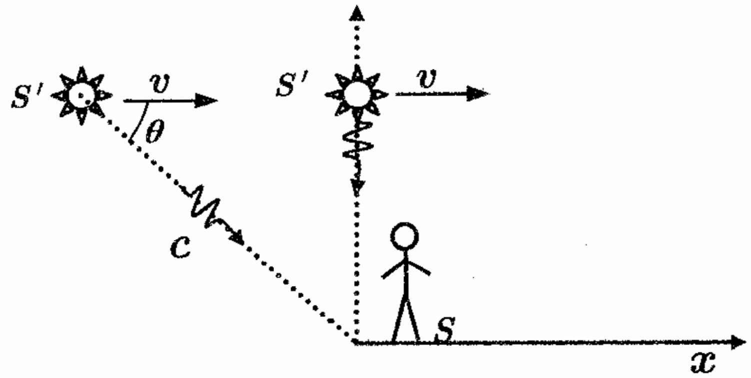
$$c\Delta t = c\gamma \Delta t_\circ \qquad (۲-۳۰۵)$$

می باشد. درهمین مدت زمان، یعنی $\Delta t$، خود چشمهٔ موج نیز به اندازهٔ

$$d = (v cos \theta)\Delta t = (v cos\theta)\gamma \Delta t_\circ \qquad (۲-۳۰۶)$$

به ناظر $S$ نزدیک می شود.

1- Median Doppler effect




شکل (۲-۳۱): اثر دوپلر میانی

در نتیجه، درچارچوب $S$ فاصلهٔ بین سطح موج قبلی و سطح موج بعدی، درست در لحظهٔ گسیل از چشمهٔ موج، از رابطهٔ

$$\begin{aligned} \lambda &= c\Delta t - d \\ &= c\Delta t - (v cos\theta)\Delta t \\ &= (c - v cos\theta)\Delta t \\ &= (c - v cos\theta)\gamma\Delta t_{\circ} \end{aligned} \qquad (۳۰۷-۲)$$

به دست می آید. البته، همان طورکه می دانیم، این نتیجه برای همهٔ سطوح موج گسیل شده از چشمهٔ موج صادق می باشد. طول موج $\lambda$ در این حالت نیز فاصلهٔ بین سطوح موج درچارچوب $S$ یا درواقع، طول موج دراین چارچوب می باشد. از طرف دیگر، درچارچوبهای $S$ و $S'$ می توان به ترتیب روابط $c = f\lambda$ و $c = f_{\circ}\lambda_{\circ}$ را نوشت. بنابراین، درچارچوب $S$ با درنظرگرفتن رابطهٔ (۲-۳۰۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{۱}{f} = \frac{\lambda}{c} \\ &= \frac{۱}{c}(c - v cos\theta)\gamma\Delta t_{\circ} \end{aligned} \qquad (۳۰۸-۲)$$

یا

$$\Delta t = \frac{۱ - \beta cos\theta}{\sqrt{۱ - \beta^{۲}}}\Delta t_{\circ} \qquad (۳۰۹-۲)$$

در نتیجه، می توان نوشت:

$$\frac{۱}{f} = \frac{۱ - \beta cos\theta}{\sqrt{۱ - \beta^{۲}}}\frac{۱}{f_{\circ}} \qquad (۳۱۰-۲)$$

یا

$$f = f_{\circ} \frac{\sqrt{۱-\beta^{۲}}}{(۱-\beta cos\theta)} \qquad (۲-۳۱۱)$$

اکنون، می توان با استفاده از رابطهٔ فوق، دوحالت اثردوپلر طولی و عرضی را به ازای $\theta$ های خاص به دست آورد. در این صورت، به ازای $\theta = \circ$ یا $\theta = \pi$، به ترتیب روابط (۲-۲۹۳) و (۲-۲۹۴) به دست می آیند. همچنین، به ازای $\theta = \pi/۲$ به رابطهٔ (۲-۳۰۴) می رسیم که در آن سرعت نسبی چشمه و ناظر دریک لحظه برابر صفر است.

لازم به یادآوری است که اثر نسبیتی دوپلر از مرتبهٔ $\beta^{۲}$ درسال ۱۹۳۸ به وسیلهٔ ایوز[۱] (۱۸۸۲-۱۹۵۳) و استیل ول[۲] دو دانشمند آمریکایی دربررسی طیف نوری حاصل از اتمهای هیدروژن که با سرعت زیاد حرکت می کردند، مورد تأیید قرارگرفته است. درآزمایش ایوز و استیل ول، پروتونهایی در یک اختلاف پتانسیل ۲۰ کیلوولتی شتاب داده می شوند. و از برخورد این پروتونها با مولکولهای ساکن هیدروژن، اتمهای برانگیخته و سریع $H^*$ تولید می شود. ایوز و استیل ول با بررسی جابه جائیهای دوپلر مربوط به خط طیف $H_\beta$ با طول موج $\lambda_\circ = ۴۸۶۰ A^o$ که در دوسوی مخالف از اتمهای سریع $H^*$ منتشر می شدند، درستی رابطهٔ دوپلر نسبیتی را تا مرتبهٔ $\beta^{۲}$ نشان دادند.

**مثال ۲ — ۳۰ :** در مثال ۲- ۲۸، بسامد پرتو نورتابیده شده به آیینه و باز تابیده شده از آن، درچارچوب سکون آیینه یا $S'$ برابر می باشد. یعنی $f_{\circ ۱} = f_{\circ ۲}$ یا $f'_۱ = f'_۲$ است. بسامد پرتو نورتابیده و بازتابیده شده را درچارچوب ساکن $S$ به دست آورید.

**جواب :** برای به دست آوردن بسامد پرتو نور تابیده شده به آیینه می توان از رابطهٔ (۲-۳۱۱) استفاده کرد. دراین صورت، داریم:

$$f_۱ = f'_۱ \frac{\sqrt{۱-\beta^{۲}}}{(۱-\beta cos\theta_۱)} \qquad (۲-۳۱۲)$$

همچنین، برای بسامد پرتو نور بازتابیده شده نیز می توان نوشت:

---

1- Ives, Herbert Eugene 2- G. R. Stilwell

$$f_{۲} = f'_{۲} \frac{\sqrt{۱-\beta^{۲}}}{(۱-\beta cos\theta_{۲})} \qquad (۲\text{-}۳۱۳)$$

اکنون، با تقسیم رابطهٔ (۲-۳۱۳) بر (۲-۳۱۲) و با درنظرگرفتن اینکه $f'_{۲} = f'_{۱}$ می باشد. خواهیم داشت:

$$f_{۲} = f_{۱} \frac{(۱-\beta cos\theta_{۱})}{(۱-\beta cos\theta_{۲})} \qquad (۲\text{-}۳۱۴)$$

که درآن زوایای $\theta_{۱}$ و $\theta_{۲}$ درمثال۲-۲۸، به دست آمده اند. همچنین، می توان با استفاده از رابطهٔ (۲-۲۸۶)، مقدار $cos\theta_{۲}$ را در رابطهٔ فوق جایگذاری کرد و نتیجهٔ

$$f_{۲} = f_{۱} \frac{(۱-۲\beta cos\theta_{۱}+\beta^{۲})}{(۱-\beta^{۲})} \qquad (۲\text{-}۳۱۵)$$

را برای بسامد $f_{۲}$ به دست آورد. رابطهٔ (۲-۳۱۵)، برای حالتی است که آیینه، مطابق شکل (۲-۲۷) درجهت مثبت محور $x$ از چشمهٔ پرتو نور دور شود. اما اگر آیینه درجهت منفی محور $x$ حرکت کند، یا به عبارت دیگر، آیینه به چشمهٔ پرتو نور نزدیک شود، دراین صورت، به جای رابطهٔ (۲-۳۱۵)، با تبدیل $\beta$ به $-\beta$ ، می توان رابطهٔ

$$f_{۲} = f_{۱} \frac{(۱+۲\beta cos\theta_{۱}+\beta^{۲})}{(۱-\beta^{۲})} \qquad (۲\text{-}۳۱۶)$$

به دست آورد. حال، در اینجا می توان یک حالت خاص را مورد بررسی قرار داد. یعنی حالتی را در نظر می گیریم که درآن پرتو نور به طورعمود بر سطح آیینه تابیده شود. به عبارت دیگر، فرض می کنیم که زاویهٔ تابش درچارچوب $S'$، یعنی $\theta'_{۱} = ۰$ باشد. در این صورت، می توان دو حالت را درنظرگرفت. درحالت اول، فرض می کنیم که آیینه ازچشمهٔ پرتو نور دور شود که درنتیجه در این حالت، با توجه به رابطهٔ (۲-۳۱۵) و با فرض اینکه $\theta'_{۱} = ۰$ است، زاویهٔ $\theta_{۱}$ نیز برابر صفر می شود. بنابراین، خواهیم داشت:

$$f_{۲} = f_{۱} \frac{۱-\beta}{۱+\beta} \qquad (۲\text{-}۳۱۷)$$

همچنین، درحالتی که آیینه به چشمهٔ پرتو نور نزدیک شود، در این حالت می توان در (۲-۳۱۶)، زاویهٔ $\theta_{۱}$ را برابر صفر قرار داد. دراین صورت، داریم:

$$f_{۲} = f_{۱}\,\frac{۱+\beta}{۱-\beta} \qquad (۲-۳۱۸)$$

لازم به تذکر است که از روابط (۲-۳۱۷) و (۲-۳۱۸)، می توان درابزارهای ردیابی، مثلاً برای کنترل سرعت اتومبیلها ازآنها استفاده کرد. به عنوان مثال، اگر سرعت اتومبیلی برابر ۱۰۸ $km/h$ باشد، و به چشمهٔ پرتو نور نزدیک شود، در این صورت تغییر بسامد براثر بازتابش سیگنال موج الکترومغناطیسی از اتومبیل برابر $(f_{۲}-f_{۱})/f_{۱} = \Delta f/f_{۱} = ۲\times۱۰^{-۷}$ خواهد بود. که ردیاب به راحتی می تواند چنین تغییر بسامدی را آشکار و ثبت کند.

## تمرین

۱- طول عمر میانگین یک نوترون به عنوان یک ذرهٔ آزاد درحال سکون برابر ۱۵ دقیقه است. نوترون خود بخود متلاشی شده و از آن یک الکترون، یک پروتون و یک نوترینو به دست می آید. نوترون حداقل باید با چه سرعت میانگینی خورشید را ترک کند تا قبل از واپاشی به زمین برسد. فاصلهٔ زمین تا خورشید برابر ۱۵۰ میلیون کیلومتر می باشد.

۲- یک سفینهٔ فضایی که به سمت ماه درحرکت است، با سرعت $v = ۰/۸c$ از کنار زمین می گذرد.

**الف** : از نظر یک ناظر زمینی، مسافرت از زمین تا ماه چقدر طول می کشد.

**ب** : فاصلهٔ زمین تا ماه از نظر مسافری که درداخل است، سفینهٔ فضایی چقدر است.

ج : این مسافرت از نظر یک مسافر داخل سفینهٔ فضایی چقدر طول می کشد.

فاصلهٔ زمین تا ماه برابر ۳۸۴ هزار کیلومتر می باشد.

۳- یک ذره کیهانی با سرعت $۰/۸c$ در امتداد محور زمین به طرف قطب شمال و ذره دیگری با سرعت $۰/۶c$ به طرف قطب جنوب حرکت می کنند. سرعت یکی از ذرات را نسبت به دیگری پیدا کنید.

۴ - فرض کنید که الکترونی با سرعت $۰/۹c$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا $S$ به طرف راست حرکت می کند. درهمین هنگام یک پروتون نیز با سرعت $۰/۷c$ نسبت به الکترون به سمت راست در حرکت است. سرعت پروتون را نسبت به چارچوب آزمایشگاه به دست آورید.

۵- فرض کنید که رویدادی درچارچوب $S$ در $x = ۶\times۱۰^۸\ m$ و در $S'$ در $x' = ۶\times۱۰^۸\ m$ و $t' = ۴s$ روی دهد. سرعت نسبی چارچوبها را به دست آورید.

۶ - یک هستهٔ رادیو اکتیو با سرعت $v = ۰/۱c$ نسبت به چارچوب مرجع آزمایشگاه یا $S$ حرکت می کند. این هسته، الکترونی با سرعت $v = ۰/۸c$ نسبت به خودش گسیل می کند. دراین صورت، سرعت الکترون را نسبت به چارچوب آزمایشگاه، درحالتهای زیر به دست آورید.

الف : الکترون در چارچوب سکون هسته، درجهت حرکت هسته گسیل شود.

ب : الکترون درچارچوب سکون هسته، در خلاف جهت حرکت هسته گسیل شود.

ج : الکترون در چارچوب سکون هسته، در امتداد عمود بر حرکت هسته منتشر شود.

۷ - فرض کنید، موشکی که طول سکون آن برابر ۶۰ متر است درامتداد یک خط راست از زمین دور می شود. همچنین، فرض می کنیم که در دو انتهای موشک آیینه ای تعبیه شده باشد. حال، اگریک علامت نوری به سمت موشک ارسال گردد، به وسیلهٔ هر دو آیینه منعکس و به زمین برگشت داده می شود. به طوری که علامت اولی در پایان ۲۰۰ ثانیه و علامت دوم ۱/۷۴ ثانیه بعد ازآن، دریافت می گردد. فاصلهٔ موشک از زمین و سرعت آن را نسبت به زمین به دست آورید.

۸ - درچارچوب ساکن $S$، دو سفینهٔ فضایی از نقطهٔ $A$، در یک لحظه ($t=\circ$) با سرعت $v$ و $\text{۳}v$ درخلاف جهت یکدیگر شروع به حرکت می کنند. بعد ازگذشت زمان $\Delta t$، نسبت به چارچوب $S$، جرقه ای در سفینهٔ دوم زده می شود. فضانورد واقع در سفینهٔ اول بعد ازگذشت چه مدت زمان (در چارچوب سکون سفینهٔ اول) نور جرقه را مشاهده می کند.

۹- فرض کنید که چارچوب $S$ با سرعت $\vec{v}$ نسبت به چارچوب $S'$ درجهتی دلخواه حرکت نماید. دراین صورت، نشان دهید که ماتریس تبدیل لورنتس در این حالت به صورت زیر می باشد

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & \text{۱}+\dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_x^{\text{۲}}}{\beta^{\text{۲}}} & \dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_x\beta_y}{\beta^{\text{۲}}} & \dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_x\beta_z}{\beta^{\text{۲}}} \\ -\gamma\beta_y & \dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_x\beta_y}{\beta^{\text{۲}}} & \text{۱}+\dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_y^{\text{۲}}}{\beta^{\text{۲}}} & \dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_y\beta_z}{\beta^{\text{۲}}} \\ -\gamma\beta_z & \dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_x\beta_z}{\beta^{\text{۲}}} & \dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_y\beta_z}{\beta^{\text{۲}}} & \text{۱}+\dfrac{(\gamma-\text{۱})\beta_z^{\text{۲}}}{\beta^{\text{۲}}} \end{pmatrix}$$

که در آن $\beta_x=v_x/c$ ،$\beta_y=v_y/c$ ،$\beta_z=v_z/c$ ،$\beta^{\text{۲}}=\beta_x^{\text{۲}}+\beta_y^{\text{۲}}+\beta_z^{\text{۲}}$ و $\gamma=\text{۱}\Big/\sqrt{\text{۱}-\beta^{\text{۲}}/c^{\text{۲}}}$ می باشند

۱۰ - دو ذرهٔ $A$ و $B$ درچارچوب آزمایشگاه، در یک جهت در حرکتند. اگر سرعت ذرات در این چارچوب به ترتیب برابر $0/5c$ و $0/8c$ باشند، در این صورت سرعت ذرهٔ $A$ در چارچوب سکون ذرهٔ $B$ چقدر است؟

۱۱ - فرض کنید که یک میلهٔ شیشه ای به طول سکون $L_0$، با سرعت $v$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا $S$ درحرکت باشد. حال، اگر جهت حرکت میله در امتداد میله باشد، و دو پرتو نوری، یکی در جهت حرکت میله و دیگری در خلاف جهت حرکت میلهٔ شیشه ای باشد، دراین صورت، اختلاف زمان انتشار دو پرتو نور را نسبت به چارچوب $S$ به دست آورید و نشان دهید که این اختلاف زمان از رابطهٔ

$$\Delta T = \frac{2 L_0 v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$$

به دست می آید. ضریب شکست شیشه را برابر $n$ درنظر بگیرید.

۱۲ - فرض کنید که یک میلهٔ شیشه ای به طول سکون $L_0$، با سرعت $v$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا $S$ درحرکت باشد. همچنین، فرض کنید که جهت حرکت میله در امتداد میله باشد. حال، اگر یک پرتو نوری، یک حرکت رفت و برگشت در امتداد میله انجام دهد. دراین صورت، زمان این حرکت رفت و برگشت را در دو چارچوب $S$ و $S'$ ( چارچوب سکون میله) به دست آورده و نشان دهید که نسبت زمان به دست آمده در چارچوب $S'$، به زمان به دست آمده درچارچوب $S$ برابر $\gamma(v)$ می باشد. ضریب شکست شیشه را $n$ در نظر بگیرید.

۱۳ - اگر ضریب شکست یک محیط مادی مانند شیشه را نسبت به چارچوب سکون شیشه، یعنی $S$، برابر $n$ درنظر بگیریم، در این صورت نشان دهید که ضریب شکست شیشه نسبت به یک ناظر دیگرمانند $S'$، از رابطهٔ

$$n' = \frac{n+\beta}{1+n\beta}$$

به دست می آید. در واقع، این رابطه نشان می دهد که ضریب شکست یک محیط یک کمیّت ناوردا نیست. برای اثبات رابطهٔ فوق از این نکته استفاده نمایید که سرعت نور در

محیطی با ضریب شکست $n$ برابر $c/n$ می باشد.

۱۴ – در مثال ۲– ۱۵ ، فرض کنید که آب در لوله ای به طول $L_\circ$ با سرعت $v$ جریان داشته باشد. و در ابتدا و انتهای لوله یک چشمهٔ نوری و یک آیینهٔ کوچک تعبیه شده باشد. همچنین، فرض کنید که سطح آیینه بر بردار سرعت جریان آب عمود باشد. در این صورت، نشان دهید که زمان انتشار پرتو نورحاصل از چشمه، در یک مسیر رفت و برگشت بین چشمه و آیینه در چارچوب آزمایشگاه یا $S$ ( چارچوب متصل به لوله) از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$T = \frac{۲L_\circ n(۱-\beta^۲)}{c(۱-n^۲\beta^۲)}$$

۱۵– فرض کنید که یک میلهٔ شیشه ای به طول سکون $L_\circ$، با سرعت $v$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا $S$ درحرکت باشد. حال، اگرسرعت میله عمود بر امتداد آن باشد و یک پرتو نور از یک سمت میله وارد و از انتهای دیگرآن خارج گردد، سرعت پرتو نور را نسبت به چارچوب آزمایشگاه به دست آورید. ضریب شکست شیشه را برابر $n$ در نظر بگیرید.

جواب : $u = \sqrt{v^۲ + \frac{c^۲}{n^۲}(۱-\frac{v^۲}{c^۲})}$

۱۶– درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، دو ذره با سرعت یکسان، به هم نزدیک می شوند. اکنون، اگرسرعت نسبی آنها برابر $۰/۷c$ باشد، سرعت هرکدام از ذرات را نسبت به چارچوب آزمایشگاه و همین طور نسبت به چارچوب سکون ذرات به دست آورید.

۱۷ – فرض کنید که درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، دو فوتون به فاصلهٔ $d$ از یکدیگر درامتداد محور $x$ و درجهت مثبت این محورحرکت می کنند. ثابت کنید که فاصلهٔ اندازه گیری شده بین این دو فوتون در چارچوب $S'$، از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$d' = d\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

۱۸– نشان دهیدکه ارتباط بین سرعت یک ذره در دو چارچوب $S$ و $S'$، به وسیلهٔ رابطهٔ

$$c^۲ - u^۲ = \frac{c^۲(c^۲-u'^۲)(c^۲-v^۲)}{(c^۲+u'_x v)^۲}$$

بیان می شود. که در آن $u$ و $u'$، به ترتیب سرعت ذره درچارچوب $S$ و $S'$ می باشد. همچنین، نشان دهید که ضریب $\gamma(u)$ به صورت رابطهٔ زیر بیان می شود.

$$\gamma(u) = \gamma(u')\gamma(v)[1 + \frac{u'_x v}{c^2}]$$

**۱۹**- نشان دهید که می توان تبدیلات لورنتس سرعت را به صورت برداری زیر نوشت

$$\vec{u}\,' = \frac{1}{\gamma(v)(1 - \vec{u}\cdot\vec{v}/c^2)}\left[\vec{u} + [\gamma(v) - 1]\frac{\vec{u}.\vec{v}}{v^2}\vec{v} - \gamma(v)\vec{v}\right]$$

**۲۰**- فرض کنید که چارچوب $S'$ با سرعت $\vec{v}$ نسبت به چارچوب $S$ حرکت کند. حال، اگرشتاب ذره درچارچوب $S$ برابر $\vec{a}$ باشد. در این صورت، نشان دهید که مؤلفه های شتاب، درچارچوب $S'$ با روابط زیر بیان می شوند.

الف:
$$a'_x = (1 - \beta^2)^{3/2}\frac{a_x}{\left(1 - (vu_x/c^2)\right)^3}$$

و

$$a'_y = (1 - \beta^2)\frac{a_y}{\left(1 - (vu_x/c^2)\right)^2} + (1 - \beta^2)\frac{vu_y}{\left(1 - (vu_x/c^2)\right)^3}a_x$$
$$a'_z = (1 - \beta^2)\frac{a_z}{\left(1 - (vu_x/c^2)\right)^2} + (1 - \beta^2)\frac{vu_z}{\left(1 - (vu_x/c^2)\right)^3}a_x$$

ب: نشان دهید که روابط تبدیل شتاب را می توان به صورت برداری زیر نوشت.

$$\vec{a}\,' = \frac{1}{\gamma^3(v)\left[1 - (\vec{u}\cdot\vec{v}/c^2)\right]^3}\left[\vec{a} + (\frac{1}{\gamma(v)} - 1)\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} - \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{u})]\right]$$

ج: نشان دهید که مؤلفه های شتاب در راستای موازی و عمود برسرعت نسبی $\vec{v}$ ازروابط زیر به دست می آیند.

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{\left(1 + (\vec{v}\cdot\vec{u}')/c^2\right)^3}\vec{a}'_{\parallel}$$

و

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{1-\beta^2}{\left(1+(\vec{v}\cdot\vec{u}')/c^2\right)^3}\left[\vec{a}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\vec{v}\times(\vec{a}'\times\vec{u}')\right]$$

**۲۱-** ذره ای درچارچوب آزمایشگاه یا $S$ به گونه ای حرکت می کند که مکان آن در لحظهٔ $t$ با روابط $x = vt$ و $y = at^2/2$ به دست می آید. و مسیر آن یک سهمی است. حال، حرکت ذره را نسبت به ناظر متحرک $S'$ بررسی نمایید. به ویژه مسیر و شتاب آن را در این چارچوب به دست آورید.

**۲۲-** یکی ازدرخشان ترین خطوط طیف هیدروژن، خط $H_\alpha$ می باشد که خط سرخ روشنی با طول موج $656/1 \times 10^{-9}\, m$ است.

**الف :** طول موج پیش بینی شدهٔ خط $H_\alpha$ ی ستاره ای که با سرعت $3000\ km/s$ از زمین دور می شود، چقدر است؟

**ب :** طول موج $H_\alpha$ ی اندازه گرفته شده در روی زمین در دو نقطهٔ مقابل هم، دراستوای خورشید، به اندازهٔ $9\times 10^{-12}\, m$ با یکدیگر فرق دارند. حال، با فرض اینکه این اختلاف به خاطر دوران خورشید باشد، در این صورت، زمان تناوب خورشید، حول محورش چقدر است؟ قطرخورشید را برابر $1/4\times 10^{6}\, km$ در نظر بگیرید.

**۲۳-** فرض کنید که $f_r = 4/5 \times 10^{14}\, Hz$ بسامد ویژهٔ چراغ قرمز و $f_g = 6\times 10^{14}\, Hz$ بسامد ویژهٔ چراغ سبزراهنمایی باشد. حال، اگر راننده ای که به خطا ازچراغ قرمزگذشته است، برای دفاع از خود مدعی باشد که به علت اثردوپلر، نور چراغ راهنمایی را سبز دیده است. در مورد سرعت اتومبیل و ادعای این راننده اظهار نظرکنید.

**۲۴-** یک سفینهٔ فضایی با سرعت ثابت $v$ به سمت زمین بر می گردد. برای تعیین سرعت $v$ ی سفینهٔ فضایی، خلبان یک موج الکترومغناطیسی با بسامد ویژهٔ $f_0 = 6\times 10^{8}\, Hz$ را به زمین ارسال می کند. اگر بسامد علامت برگشتی که به وسیلهٔ خلبان دریافت می شود به اندازهٔ $400\, kHz$ نسبت به بسامد منتشره، تغییرکرده باشد، در این صورت، سرعت سفینهٔ فضایی نسبت به زمین چقدرخواهد بود.

# ۳

# فضا - زمان نسبیتی

## مقدمه:

ناظرهای واقع در چارچوبهای مرجع مختلف، هنگامی که حتی رویداد های یکسان را مشاهده کنند، ازنظرآنها این رویدادها متفاوت به نظر خواهند رسید. به عنوان مثال، وقتی دو رویداد از نظر یک ناظر همزمان باشند، ممکن است از نظر ناظری دیگرهمزمان نباشند. اگرچه طبق اصول نسبیت، همهٔ قوانین فیزیک باید از نظرهمهٔ ناظرها یکسان باشند. همچنین، این اصول ایجاب می کنند که مشاهدات و اندازه گیری ناظرها در چارچوبهای مرجع مختلف، باید تابعی از سرعت آنها باشند.

در این فصل می خواهیم ارتباط بین مشاهدات ناظرهای مختلف را با استفاده از نمودارهای فضا- زمان یا مینکوفسکی[1] به دست می آوریم. این نمودارها در واقع، نمود هندسی تبدیلات لورنتس بوده و ارتباط بین جهانخط ها و رویدادها را به صورت هندسی بیان

---

1- Space - time diagrams , Minkowski diagrams

می کنند. ازطرف دیگر، با استفاده از این نمودارها، بسیاری از مسائل مشکل نسبیت خاص را می توان به سادگی حل نمود.

## ۳ ـ ۱ : ناظرهای لخت در نسبیت

نظریهٔ نسبیت خاص را درحقیقت می توان نظریهٔ فضا ـ زمان دانست. همان طورکه قبلاً اشاره شد، این نظریه به مطالعه و بررسی پدیده های فیزیک در چارچوبهای مرجع لخت می پردازد. از طرف دیگر، هنگامی که درمورد یک پدیدهٔ فیزیکی معین صحبت می کنیم یا می خواهیم نظریهٔ جدیدی را برای توضیح آن فرمولبندی کنیم، اولین گامی که باید برداشته شود، در واقع، تعیین ناظر یا ناظرهایی است که پدیده ها را مشاهده و مختصات زمان و مکان وقوع آنها را با دقت، تعیین و یا اندازه گیری نمایند. همان طور که می دانیم، هر نظریهٔ جدید را نیز در نهایت باید برحسب مشاهدات و اندازه گیری های این ناظرها پایه ریزی و فرمولبندی نمود. علاوه بر این، برای آزمون درستی و یا نادرستی نظریه و یا بررسی صحت نتایج حاصل از پیشگویی های آن، باید ازمشاهدات و اندازه گیری های ناظرهای مختلف استفاده نمود. بر این اساس، مفهوم ناظر یا چارچوب مرجع و همچنین، اندازه گیری بازه های فضایی و زمانی وابسته به هر پدیده یا رویداد فیزیکی، در واقع، از ابتدایی ترین مفاهیم در فیزیک تلقی می شوند.

همان طورکه در فصل اول اشاره شد، یک ناظر به همراه وسایل اندازه گیری فضا و زمان، درحقیقت همان چارچوب مرجع است که تعیین آن برای شروعِ بررسی یک رویداد یا پدیدهٔ فیزیکی ضروری است. بنابراین، یک ناظر را می توان شخص یا دستگاهی در نظرگرفت که مجهز به وسایل اندازه گیری فضا و زمان می باشد.

هنگامی که یک رویداد ازنظرناظرهای واقع در چارچوبهای مرجع مختلف مورد بررسی قرار می گیرد. نتیجهٔ مشاهدات به دست آمده به وسیلهٔ آنها در حالت کلی با یکدیگر اختلاف خواهند داشت. بنابراین، هرناظر به کمک مفاهیم فضا و زمان، یا بازه های فضا و زمان، می تواند مدلی از طبیعت و رویدادهای مربوط به آن را برای خود ایجاد کند. ازطرف دیگر، این ناظرها با توجه به اصول نسبیت، می توانند ارتباط بین مشاهدات یا مدلهای ساخته شده به وسیلهٔ ناظرهای مختلف را به دست آورند. در فصل دوم، این کار، یعنی برقراری ارتباط بین

اندازه گیری های صورت گرفته به وسیلهٔ ناظرها، با استفاده از تبدیلات لورنتس صورت گرفت. اکنون، در این فصل می توان به نمود هندسی این تبدیلات پرداخت.

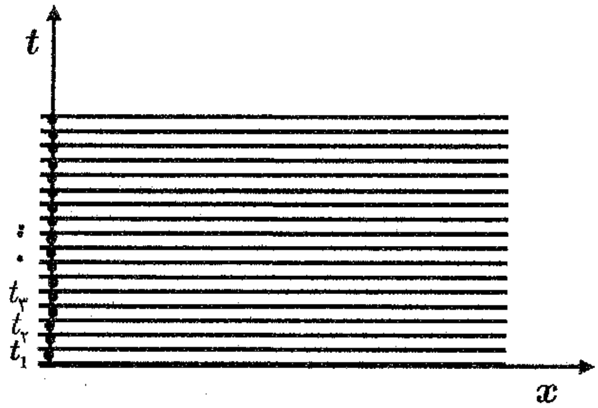
همان طور که قبلاً اشاره شد، یک ناظرمی تواند مبدأ زمان و یا مکان خود را به دلخواه انتخاب نماید؛ زیرا قوانین فیزیک به انتخاب مبدأ برای زمان و مکان بستگی ندارند که این موضوع را می توان ناشی ازهمگنی فضا و زمان دانست که در واقع، از تقارنهای مهم فضا و زمان محسوب می شوند. همچنین، یک ناظر لخت می تواند جهت محورهای فضایی چارچوب مرجع خود را به گونه ای دلخواه اختیار نماید که این مسأله نیز ناشی ازهمسانگردی فضا است. بنابراین، با در نظرگرفتن این تقارنها برای فضا و زمان، و همچنین با درنظرگرفتن ناظر های لخت، می توان مدلی از فضا و زمان ایجاد نمود که بتوان با آن قوانین فیزیک را به طورمستقل از ناظر یا چارچوب مرجع بیان کرد.

اکنون، در اینجا برای درک و تصور صحیح از یک ناظر درنسبیت، چگونگی ساختن فضا ـ زمان به وسیلهٔ یک ناظر، به طور ساده توضیح داده می شود. برای این منظور، فرض کنیدکه یک ناظر برای مشاهده و ثبت مختصات مربوط به فضا و زمان رویدادها، درنقطه ای از فضا قرار گیرد. حال، برای نمایش هندسی این ناظر می توان از یک خط راست جهت دار استفاده کرد. در واقع، این خط راست را می توان تاریخچهٔ این ناظر درنظر گرفت. حال،برای توضیح بیشتر این مطلب می توان به صورت زیر عمل نمود.

فرض کنید که ناظر $S$ در نقطه ای از فضا به حالت سکون قرارگرفته باشد. اکنون، اگردرارتفاعی معین قرارگیریم، به طوری که بتوانیم از او از بالای سر، درفواصل زمانی معینی به طور پیوسته عکس بگیریم، دراین صورت بعد از تهیهٔ تعداد معینی تصویر، می توان در هرکدام از تصاویر تهیه شده ازناظر، مکان او را با نقطه ای مشخص کنیم.

اکنون، می توان مجموعهٔ تصاویر به دست آمده از ناظر $S$ را مطابق شکل(۳-۱)، به ترتیب زمانی، ازاولین تا آخرین آنها روی یکدیگر قرار داد. دراین صورت، می توان مانند شکل(۳-۱)، به مجموعهٔ عکسهایی که روی هم چیده شده اند، از بالا به پایین به گونه ای برش داد که نقاط مشخص کنندهٔ مکان ناظر $S$ درعکسهای متوالی در محل برش قابل مشاهده باشد. اکنون، اگر مانند شکل نقاط به دست آمده یا مکان ناظر را درمجموعهٔ عکسها

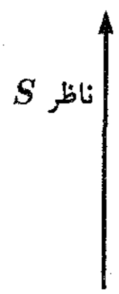
به یکدیگر متصل نماییم، جهانخط[1] ناظر $S$ به دست خواهد آمد.




شکل(۳-۱) : مکان ناظر $S$ در عکسهای متوالی

در شکل(۳-۱)، ترتیب زمانی یا توالی عکسها، در واقع، سپری شدن زمان را برای ناظر $S$ نشان می دهند. بنابراین، برای نشان دادن یک ناظر به صورت هندسی، می توان نموداری را به مانند شکل (۳-۲) رسم نموده و آن را به عنوان ناظر $S$ در نظرگرفت. این ناظر نسبت به خودش ساکن است. یعنی بعد فضایی آن نسبت به خودش تغییر نمی کند. و امتداد خط نیز در واقع، سپری شدن زمان را برای او نشان میدهد و می توان گفت که این خط موقعیت ناظر $S$ را در هرلحظه از زمان معین می کند. در نتیجه، می توان آن را به عنوان جهانخط ناظر $S$ درنظرگرفت. جهانخط یک ناظر یا به طورکلی هر ذره، تاریخچهٔ ناظر یا ذره را بیان می کند.

همان طورکه اشاره شد، روی جهانخط ناظر یا ذره، تغییرات فضایی یا مکانی صفر می باشد و تنها بعد زمان در روی آن تغییرمی کند. درحقیقت، ساعت همراه ناظر یا ذره، سپری شدن زمان را برای آنها نشان می دهد.

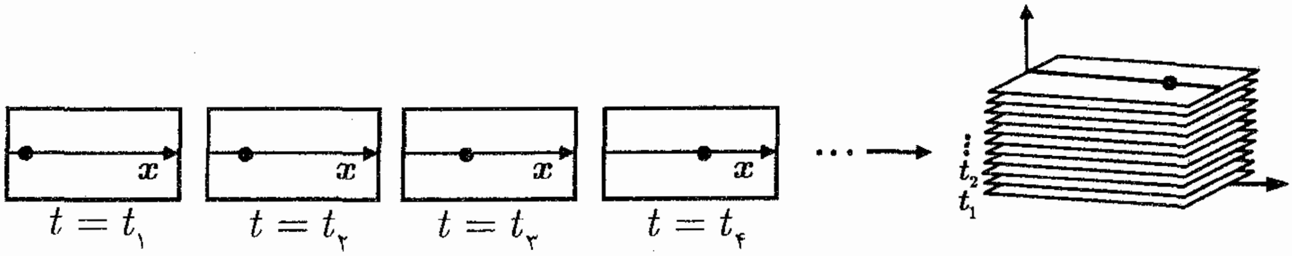



شکل(۳-۲) : ناظر $S$

حال، با توجه به این توضیحات، می توان جهانخط ناظر را به عنوان محور زمان یا محور $t$ ی چارچوبی در نظرگرفت که ناظر مورد نظربرای بررسی پدیده ها آن را اختیارمی کند.

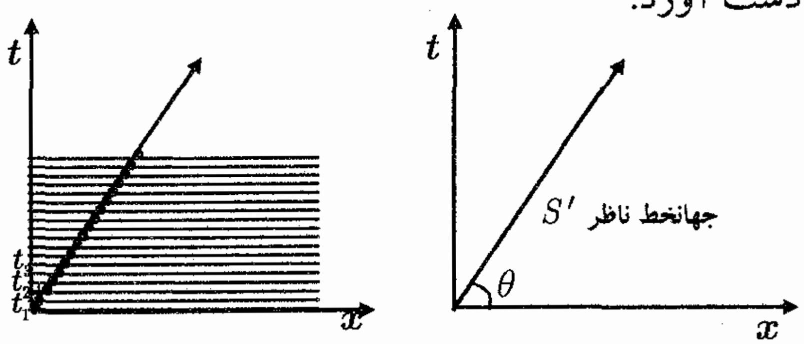
1- World line

اکنون، در اینجا می توان وضعیت دیگری را برای ناظر درنظرگرفت. برای این منظور، فرض کنید که ناظر دیگری مانند $S'$، روی محور $x$ها با سرعت ثابت به سمت راست درحرکت باشد. در این حالت نیز می توان مانند قبل در لحظه های معین $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$ و... تصاویری را ازارتفاعی معین از ناظر متحرک $S'$ تهیه نموده و سپس آنها را مطابق شکل (۳-۳)، روی یکدیگرقرارداد. در اینجا نیز مانند حالت قبل، می توان برشی از بالا به پایین به مجموعهٔ تصاویر داده و سپس نقاط مربوط به مکان ناظر را در لحظه های مختلف به یکدیگر وصل کرد.




شکل (۳-۳): تصاویر تهیه شده از ناظر متحرک $S'$

در صورتی که تصویر برداری از ناظرمتحرک به طور پیوسته صورت گیرد، در این حالت مطابق شکل (۳-۴)، جهانخط ناظر $S'$ در فضا- زمانی که ناظر ساکن، مثلاً $S$ ایجاد نموده به صورت خط راستی به دست می آید که ناظر ساکن $S$ می تواند از روی شیب آن سرعت ناظر $S'$ را به دست آورد.



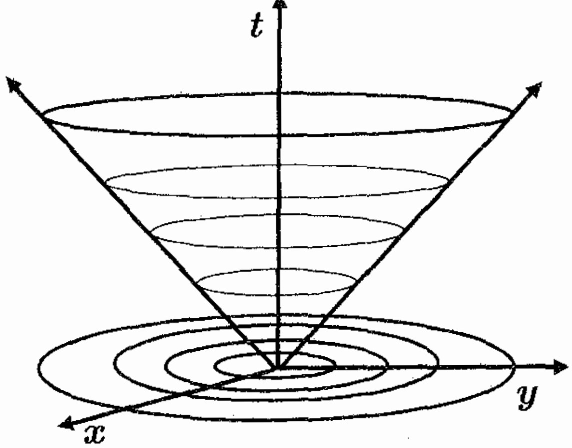

شکل (۳-۴) : جهانخط ناظر متحرک $S'$

دراینجا نیز هنگامی که تصاویر به ترتیب زمانی، از اولین تا آخرین آنها روی یکدیگر قرار داده می شوند، درواقع با این کارگذشت زمان از نظر ناظر $S$ نشان داده می شود. بنابراین در این حالت نیز محور عمودی را می توان به عنوان محورزمان برای ناظر $S$ درنظرگرفت. واضح است که اگر سرعت ناظرثابت نباشد، جهانخط آن به صورت یک خط راست نخواهد بود.

اکنون، به عنوان مثال دیگر، جهانخط امواج ایجاد شده روی سطح آب یک استخر را

در نظرمی گیریم. برای رسم جهانخط این امواج، مجدداً می توان به همان روش قبل عمل کرد. دراینجا فرض کنید که امواج ایجاد شده بر روی سطح آب استخر، ناشی از افتادن تکه سنگی دروسط آب استخر باشد. بنابراین، موج روی سطح آب، درلحظهٔ برخورد سنگ به سطح آب، در ابتدا به صورت یک نقطه بوده و سپس جبههٔ موج به شکل دوایری خواهند بود که شعاع آنها به تدریج بزرگ و بزرگتر شده و درنهایت با کناره های استخر برخورد می کنند. حال اگر از ارتفاع معینی ازموج پیش روندهٔ روی سطح آب، به طورمتوالی تصویر برداری شود، دراولین عکس، نقطه ای دروسط آن مشاهده خواهد شد. و درهرکدام از تصاویر بعدی نیز دوایری را خواهیم داشت که شعاع آنها به تدریج افزایش می یابند.

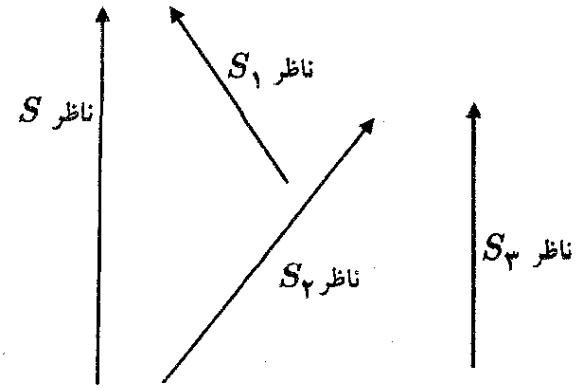
حال، اگرتصاویر به دست آمده، از اولین تا آخرین آنها روی یکدیگر قرار داده شوند و سپس محیط دایره های مربوط به هرتصویر به یکدیگر وصل گردند، جهانخط موج ایجاد شده روی سطح آب مانند شکل(۳-۵)، به صورت یک مخروط خواهد بود.




**(۳-۵) : جهانخط موج ایجاد شده روی سطح آب**

اما نکته ای که در اینجا باید به آن دقت نمود، این است که اینگونه نمودارها را در فضا- زمان، حداکثر می توان ۳ یا (۱+۲) بعدی رسم نمود، یعنی یک بعد برای زمان و دو بعد برای فضا می توان در نظرگرفت.

اکنون، بعد ازآشنایی با جهانخط یک ناظر یا یک ذره، می توان وضعیّت جهانخط ذرات یا ناظرهای مختلف را نسبت به یکدیگر مورد بررسی قرار داد. بنابراین، اگر شکل (۳-۶) را درنظر بگیریم، می توان گفت که ناظر $S_۲$ قبلاً با $S$ ملاقات داشته و با سرعت ثابت به سمت ناظر $S_۳$ در حرکت است و در آینده به $S_۳$ خواهد رسید.




**شکل (۳-۶) : وضعیت ناظر های مختلف نسبت به یکدیگر**

همچنین، ناظر $S_1$ نیز قبلاً با $S_3$ ملاقات داشته و پس از ترک آن در مسیر خود با $S_2$ نیز در حین حرکت ملاقات می کند و سپس به مسیرش به سمت $S$ ادامه می دهد. همین طور، می توان گفت که ناظر $S_3$ نسبت به ناظر $S$ ساکن است.

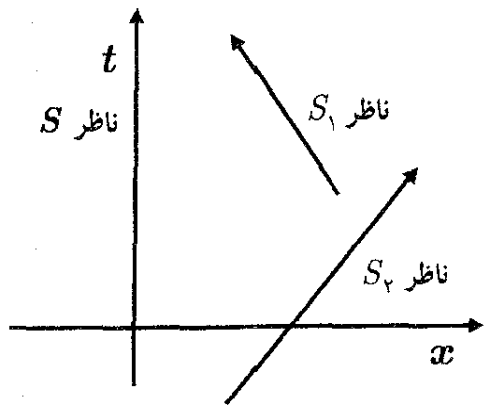
همان طورکه ملاحظه می گردد، تاکنون برای آنکه بتوانیم این ناظرها را آسانتر رسم نماییم، برای آنها تنها یک بعد زمان، یعنی $t$، و همین طوریک بعد فضا یا $x$ را درنظر گرفته ایم. و درمورد بعد زمان یا محور زمان یک ناظر توضیح داده شد. اکنون، می توان بعد فضا را برای یک ناظر با دقت بیشتری بررسی کرد.

برای به دست آوردن بعد فضایی یک ناظرساکن، می توان به صورت زیر استدلال نمود. همان طورکه در بالا بررسی شد، اگر فقط بعد زمانی ناظر تغییر کند، جهانخط ناظر به صورت نمودار (۳-۲) خواهد بود. یعنی ناظر با قرارگرفتن دریک نقطه از فضا، می تواند همه لحظه های مربوط به رویدادهای مختلفی را که در آن نقطه روی می دهند، نسبت به خودش ثبت نماید. بنابراین، با توجه به این موضوع، اکنون می توان حالت عکس را نیز در نظرگرفت و فرض کرد که فقط بعد فضایی ناظر تغییرکند و بعد زمانی آن ثابت، مثلاً صفر باشد. درنتیجه در این حالت، اگر فرض کنیم که فقط یک بعد فضایی، یعنی مختصه $x$ ناظر تغییر کند دراین صورت، ناظر باید بتواند در **یک لحظه**، مثلاً $t = 0$ همه نقاط روی محور $x$ (یک بعد فضا) را مشاهده نماید. که البته، برای چنین منظوری سرعت این ناظر باید نامتناهی باشد. به عبارت دیگر، محور $x$ را می توان جهانخط ناظری در نظرگرفت که سرعت آن نسبت به ناظرِ ساکن در مبدأ، بی نهایت می باشد. بنابراین، با این استدلال

می توان بعد یا محور فضایی یک ناظر ساکن را مانند شکل (۳-۷)، عمود بر جهانخط خودش رسم نمود.

حال، بعد ازتعیین محورهای فضایی و زمانی برای ناظری، مانند $S$ یا به عبارت دیگر، بعد ازمعین شدن مدل فضا و زمان از نظر ناظر $S$ اکنون، می توان فاصلهٔ ناظرها و همین طور، سرعت نسبی آنها را نیز در هرلحظه به دست آورد. به عنوان مثال در شکل (۳-۷)، به آسانی می توان فاصلهٔ بین ناظرهای $S_1$و $S_2$ را درلحظهٔ $t = 0$ یا در هر لحظه دیگر به دست آورد.

همچنین، می توان سرعت ناظرهای $S_1$ و $S_2$ را نیز نسبت به ناظر $S$ با تعیین شیب جهانخط این ناظرها در فضا- زمانی که ناظر $S$ ایجاد کرده است، به دست آورد. همین طور، می توان سرعت آنها را نیز نسبت به یکدیگر محاسبه کرد. که البته، برای این منظور هر کدام از ناظر های $S_1$ یا $S_2$ باید از محورهای فضایی و زمانی مربوط به خودشان استفاده نمایند.




شکل (۳-۷) : سرعت نسبی ناظرهای $S_1$ و $S_2$ نسبت به ناظر $S$

به این ترتیب، با توجه به شکل (۳-۷)، ناظرساکن $S$ مشاهده می کند که ناظر $S_1$و $S_2$ با **سرعتهای** ثابت و متفاوت، به ترتیب به او نزدیک و یا از او دور می شوند. همچنین، ناظر $S$ با توجه به مدلی که از فضا- زمان برای خود ایجاد کرده است، به جای بررسی حرکت دو ناظر $S_1$ و $S_2$ می تواند حرکت ذرات و همین طور، برهمکنش آنها یا هر فرایند فیزیکی دیگر را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قراردهد.

براین اساس، می توان محورهای $x$و $t$ ی انتخاب شده به وسیله ناظر ساکن $S$ را فضای رویدادها یا مدلی در نظرگرفت که $S$ از فضا- زمان برای خودش ایجاد می کند. حال، بعد ازآنکه ناظر $S$ محورهای $x$و $t$ ی خود را با روشی معین درجه بندی یا مقیاس بندی نمود، دراین صورت، می تواند هر نقطه از این فضا را با دو مختصهٔ $x$ و $t$ نمایش دهد. البته، در این

صورت نقاط این فضا را که شامل دو مختصهٔ $x$ و $t$ می باشند، رویداد[1] می نامند.

همان طور که می دانیم، درفیزیک نیوتنی معمولاً از منحنی مسیرحرکت ذره درفضا صحبت می شود. این منحنی درحالت کلی شامل متغیرهای وابسته به زمان $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ می باشد. ازطرف دیگر، منحنی مسیر ذره را می توان از اتصال نقاطی از فضا که ذره از آنها عبور می کند به دست آورد. به این ترتیب، می توان گفت که منحنی مسیرحرکت یک ذره در واقع، تاریخچهٔ کاملی از چگونگی حرکت ذره در فضا را دراختیار ما قرار می دهد.

اما درفضای رویدادها وضعیت به شکل دیگری بیان می گردد. در فضای رویدادها، به جای نقطه در فضا از اصطلاح رویداد در فضا- زمان استفاده می شود. یک رویداد درحالت کلی با چهار مختصهٔ $(x, y, z, t)$معین می شود. همچنین، از به هم پیوستن رویدادها یا از توالی رویدادهای مربوط به یک ذره در فضا- زمان، جهانخط ذره به دست می آید که در حقیقت، یک منحنی یا خط درفضا- زمان چهار بعدی است. درنتیجه جهانخط یک ذره یا ناظر نیز تاریخچهٔ ذره یا ناظر را دردرفضا- زمان چهار بعدی یا فضای رویدادها مشخص می کند.

اکنون، دراینجا ممکن است این سؤال مطرح شود که از دید ناظرهای $S_۱$ و $S_۲$، فضا و زمان چگونه خواهد بود؟ به عبارت دیگر، آنها برای تعیین فضا و زمان رویدادها محورهای خود را چگونه انتخاب می کنند؟ برای اینکه بتوانیم به این پرسشها پاسخ دهیم، باید شناخت بیشترو دقیق تری نسبت به ناظرها به دست آوریم. درادامهٔ این فصل به این پرسشها پاسخ داده می شود.

## ۳ - ۲ : فضا - زمان مینکوفسکی

همان طور که می دانیم، در فضا ی سه بعدی اقلیدسی فاصلهٔ دو نقطه با مختصات $(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $(x_۲, y_۲, z_۲)$را می توان از رابطهٔ

$$L = [(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲]^{۱/۲} \qquad (۱-۳)$$

به دست آورد. حال، اگر این فاصله را بی نهایت کوچک در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

1- Event

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= \delta_{ij} dx^i dx^j \qquad i,j = 1,2,3 \qquad (۲-۳)$$

در رابطهٔ فوق به $dl^2$، همراه با $\delta_{ij}$ اصطلاحاً متریک فضای اقلیدسی[1] گفته می شود. این متریک یا فاصله، مثبت و معین می باشد. درفضای سه بعدی اقلیدسی، مکان یک ذرهٔ ساکن یک نقطه و مسیر یک ذرهٔ متحرک با یک منحنی مشخص می شود. این منحنی از اتصال پیوستهٔ نقاطی به دست می آید که ذرهٔ متحرک از آنها عبور کرده است. منحنی مسیر یک ذره درحالت کلی، شامل مختصات وابسته به زمان $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ می باشد. درواقع، با داشتن منحنی مسیر یک ذره می توان مکان ذره را در هر لحظه از زمان تعیین نمود. به عبارت دیگر، با داشتن منحنی مسیر برای یک ذره می توان چگونگی حرکت ذره در فضا را به طور کامل مشخص کرد. دراین فضا همان طور که در فصل اول اشاره شد، جایی برای نمایش زمان وجود ندارد. با این حال می توان درهر نقطهٔ آن ساعتی را تصور نمود که همگی آنها با روشی معین همزمان شده اند و با آهنگ یکسانی کار می کنند.

اکنون، می توان فضای رویدادها را که ساختار هندسی کاملاً متفاوتی با فضای اقلیدسی[2] دارد، درنظر گرفت. همان طور که می دانیم، هرنقطه دراین فضا به عنوان یک رویداد محسوب می شود. درنتیجه، می توان گفت که جهانخط یک ذره از اتصال پیوستهٔ رویدادهای مرتبط با آن ذره به دست می آید. به عبارت دیگر، جهانخط ذرات در واقع، منحنی مسیر ذرات در این فضا می باشند.

برای شناخت و بررسی دقیق تر این فضا، می توان فاصله یا بازهٔ[3] بین دو رویداد را در آن تعریف کرد. درفضای اقلیدسی فاصلهٔ بین دو نقطه ناورداست. یعنی مستقل از دستگاه مختصات بوده و با دوران یا انتقال دستگاه مختصات بدون تغییر باقی می ماند. به طور کلی می توان گفت که فاصلهٔ بین دو نقطه تحت تبدیل از یک دستگاه به دستگاه مختصات دیگر تغییر نمی کند. بنابراین، وجه مشخصهٔ هر فاصله را می توان ناوردا بودن آن درنظر گرفت.

اکنون، دراینجا این سؤال مطرح می شود که آیا می توان در فضای رویدادها

---

1- Euclidean distance , Euclidean metric
2 - Euclidean Space 3 - Interval

نیز کمیّتی مشابه فاصلهٔ ناوردای بین دو نقطه تعریف کرد یا به دست آورد. برای پاسخ به این سؤال باید به این نکته توجه نماییم که تبدیل مختصات درفضای رویدادها به معنای تبدیل لورنتس می باشد. درنتیجه، با استفاده از این تبدیلات می توان بازهٔ فضایی یا همین طور بازهٔ زمانی میان دو رویداد را از یک چارچوب به چارچوب دیگر تبدیل نمود. به عبارت دیگر، می توان با استفاده از این تبدیلات بازهٔ فضایی یا زمانی میان دو رویداد را از دید ناظرهای مختلف بررسی کرد. برای این منظور، دو رویداد دلخواه، مانند $E_1\,(ct_1\,,x_1\,)$ و $E_2\,(ct_2\,,x_2\,)$ را درنظر بگیرید. اکنون، می توان با استفاده ازتبدیلات مختصات لورنتس رابطهٔ بین مجذور بازهٔ زمانی و مکانی را در دوچاچوب $S$ و $S'$ به دست آورد. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} c^2\,\Delta t'^2 &= [\gamma(c\Delta t-\beta\Delta x)]^2 \\ &= \gamma^2\,[c^2\,\Delta t^2+\beta^2\,\Delta x^2-2(c\Delta t)(\beta\Delta x)] \end{aligned} \qquad (۳-۳)$$

و

$$\begin{aligned} \Delta x'^2 &= [\gamma(\Delta x-\beta c\Delta t)]^2 \\ &= \gamma^2\,[(\Delta x)^2+\beta^2\,(c\Delta t)^2-2(\beta c\Delta t)(\Delta x)] \end{aligned} \qquad (۴-۳)$$

در روابط فوق، $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta t = t_2 - t_1$ می باشند. بنابراین، با توجه به روابط (۳-۳) و (۳-۴)، اگر بازه های فضایی و زمانی را به طورجداگانه در نظر بگیریم، این بازه ها ناوردا نخواهند بود. به عبارت دیگر، $\Delta x \neq \Delta x'$ و همین طور $c\Delta t \neq c\Delta t'$ می باشند. اما اگرترکیبی ازاین بازه ها در نظرگرفته شوند، دراین صورت، این ترکیب که به آن بازهٔ فضا ـ زمان[1] گفته می شود، ناوردا خواهد بود. ناوردایی این بازهٔ را می توان به شکل

$$c^2\,\Delta t'^2-\Delta x'^2 = c^2\,\Delta t^2-\Delta x^2 \qquad (۵-۳)$$

نوشت. برای اثبات رابطهٔ (۳-۵) کافی است که رابطهٔ (۳-۴) را از رابطهٔ (۳-۳) کم کنیم. در این صورت، خواهیم داشت:

1- Space - time Interval

$$\begin{aligned} c^{2}\Delta t'^{2}-\Delta x'^{2} &= \gamma^{2}[c^{2}\Delta t^{2}+\beta^{2}\Delta x^{2}-2(c\Delta t)(\beta\Delta x)] \\ &\quad -\gamma^{2}[(\Delta x)^{2}+\beta^{2}(c\Delta t)^{2}-2(\beta c\Delta t)(\Delta x)] \\ &= \gamma^{2}[c^{2}\Delta t^{2}(1-\beta^{2})-\Delta x^{2}(1-\beta^{2})] \\ &= \gamma^{2}[(1-\beta^{2})(c^{2}\Delta t^{2}-\Delta x^{2})] \\ &= c^{2}\Delta t^{2}-\Delta x^{2} \end{aligned} \tag{۶-۳}$$

در نتیجه، بازهٔ بین دو رویداد را می توان را به صورت

$$\Delta s^{2}=c^{2}\Delta t^{2}-\Delta x^{2} \tag{۷-۳}$$

تعریف نمود. همچنین، برای رویدادهایی که ازنظر فضایی و زمانی بی نهایت به یکدیگر نزدیک هستند، بازهٔ بین اینگونه رویدادها را درفضای رویدادها یا فضا - زمان مینکوفسکی، می توان به صورت

$$\begin{aligned} ds^{2} &= c^{2}dt^{2}-(dx^{2}+dy^{2}+dz^{2}) \\ &= c^{2}dt^{2}-d\vec{r}\cdot d\vec{r} \\ &= c^{2}dt^{2}-dr^{2} \end{aligned} \tag{۸-۳}$$

نوشت. رابطهٔ(۳-۸)، مشابه مورد فضای اقلیدسی، یعنی رابطهٔ (۳-۲)، می باشد. دراینجا نیز متریک $ds^{2}$، بازهٔ ناوردای فضا- زمان میان دو رویداد می باشد. این بازه، مانند فاصلهٔ بین دو نقطه درفضای اقلیدسی ناورداست. به عبارت دیگر، هرانتقال فضایی یا زمانی و همچنین، هر دوران فضایی این بازه را بدون تغییر یا ناوردا نگه می دارد.

از طرف دیگر، همان طورکه درفضای سه بعدی اقلیدسی، مکان یک ذره یا یک نقطه به صورت $x^{i}$ نشان داده می شود، درفضای رویدادها نیز می توان مختصات چهارمولفه ای یک رویداد یا چاربردارمکان آن را به صورت

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (t,x,y,z) \\ &= (x^{0},x^{1},x^{2},x^{3}) \quad (\mu=0,1,2,3) \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

نمایش داد. دراینجا نیز می توانیم، اختلاف مختصات دو رویداد بی نهایت نزدیک به هم را (مشابه با فضای اقلیدسی) با $dx^{\mu}$ نشان دهیم. درنتیجه، بازهٔ ناوردای فضا - زمان، یعنی رابطهٔ (۳-۸) را برای دو رویداد در چارچوب $S$ به صورت

$$ds^{2} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{۳-۱۰}$$

نوشت. در رابطهٔ (۳-۱۰)، $g_{\mu\nu}$ تانسورمتریک برای فضا- زمان تخت بوده و به شکل

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۳-۱۱}$$

تعریف می گردد. حال، اگر $dx'^{\mu}$ بازهٔ مختصاتی همان دو رویداد درچارچوب دیگری مانند $S'$ باشد، در این صورت بازهٔ ناوردای فضا ـ زمان در این چارچوب به صورت

$$ds'^{2} = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \tag{۳-۱۲}$$

بیان می شود. این رابطه، ناوردایی بازهٔ فضا-زمان بین دو رویداد را نشان می دهد. دراینجا نیز مانند مورد فضای اقلیدسی، به $ds^{2}$ همراه با $g_{\mu\nu}$، **متریک مینکوفسکی**[1] گفته می شود. باید توجه داشت که بین متریک اقلیدسی (۳-۲) و متریک (۳-۱۰) یا (۳-۱۲) تفاوت اساسی وجود دارد؛ زیرا همان طورکه قبلاً اشاره شد، متریک اقلیدسی مثبت و معین است، درحالیکه متریک مینکوفسکی معین نبوده و $ds^{2}$ در رابطهٔ (۳-۱۰)، ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد.

همچنین، فضای رویدادها، همراه با متریک (۳-۱۰)، **فضای مینکوفسکی**[2] نامیده می شود. هرمان مینکوفسکی فیزیکدان روسی- آلمانی برای اولین بار در سال ۱۹۰۷، یعنی دو سال بعد از ارائه نظریهٔ نسبت خاص، این فضا را با استفاده از تبدیلات لورنتس تعریف نمود. فضای مینکوفسکی را می توان، یک فضای تخت شبه اقلیدسی درنظرگرفت. از طرف دیگر، نقاط این فضا بیانگر رویدادها می باشند. لازم است اشاره شود که دراین فضا می توان بردارها و تانسورها را مانند مورد اقلیدسی تعریف نمود. دربخش های بعدی این فصل به نمود تصویری خواص دیگر تبدیل لورنتس می پردازیم.

---

**مثال ۳ - ۱ :** نشان دهید که بازهٔ فضا- زمان نسبت به سه ناظر مطرح شده در مثال ۲-۲۳، ناوردا می باشد.

---

1- Minkowski metric        2- Minkowski space

**جواب :** با توجه به مقادیر به دست آمده در مثال ۲ ـ ۲۳ می توان نوشت:

$$\Delta t_{s'}^{۲} - \Delta x_{s'}^{۲} = c^{۲} (۳ L_{\circ} / c)^{۲} - L_{\circ}^{۲} = ۸ L_{\circ}^{۲} \tag{۱۳-۳}$$

و به همین ترتیب، داریم:

$$\begin{aligned} c^{۲} t_s^{۲} - \Delta x_s^{۲} &= c^{۲} (۷ L_{\circ} / c\sqrt{۳})^{۲} - (۵ L_{\circ} / \sqrt{۳})^{۲} = ۸ L_{\circ}^{۲} \\ c^{۲} t_b^{۲} - \Delta x_b^{۲} &= c^{۲} (۲ L_{\circ} \sqrt{۲} / c)^{۲} - \circ^{۲} = ۸ L_{\circ}^{۲} \end{aligned} \tag{۱۴-۳}$$

## ۳ - ۳ : تغییر چارچوب مرجع

یک روش بسیارمفید برای نمایش هندسی تبدیلات لورنتس، رسم محورهای فضا و زمان دو چارچوب ساکن و متحرک در یک نمودار فضا- زمان می باشد. درچنین نمودارهایی دو نکتهٔ مهم را می توان درنظر گرفت.

اول اینکه محور فضایی یک چارچوب معادل خط همزمانی آن چارچوب می باشد که از رویداد مبدأ، یعنی $(ct, x) = (\circ, \circ)$ می گذرد.

و نکتهٔ دوم اینکه محورزمان یک چارچوب نیز معادل خط هم مکانی آن چارچوب است که از رویداد مبدأ،یعنی $(ct, x) = (\circ, \circ)$می گذرد. به عبارت دیگر، محور زمان یک چارچوب معادل جهانخط ناظر واقع در مبدأ آن چارچوب می باشد.

بنابراین اگر رویداد مبدأ در هردو چارچوب، مثلاً $S$ و $S'$ مشترک باشند، دراین صورت، می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس، محورهای فضایی و زمانی هرکدام از چارچوبها را نسبت به محورهای چارچوب دیگر رسم کرد.

حال، برای رسم محورهای چارچوب $S'$، نسبت به محورهای چارچوب $S$، می توان به صورت زیر عمل کرد. همان طورکه می دانیم، محورزمان $ct$ درچارچوب $S$، معادل $x = \circ$ در این چارچوب است. یا برعکس محورفضایی $x$، معادل $ct = \circ$ می باشد. ازطرف دیگر، درچارچوب $S'$ نیز محورزمان $ct'$ معادل $x' = \circ$ بوده و همین طور، محورفضایی $x'$ دراین چارچوب نیز معادل $ct' = \circ$ می باشد. بنابراین، می توان از این نکته استفاده نمود و معادلهٔ محورهای چارچوب $S'$ را نسبت به محورهای چارچوب $S$ رسم کرد. اکنون، برای به

دست آوردن معادلهٔ محور $x'$، نسبت به محورهای چارچوب $S$، می توان ازتبدیل لورنتس

$$ct' = \gamma(v)(ct - \beta x) \qquad (۱۵-۳)$$

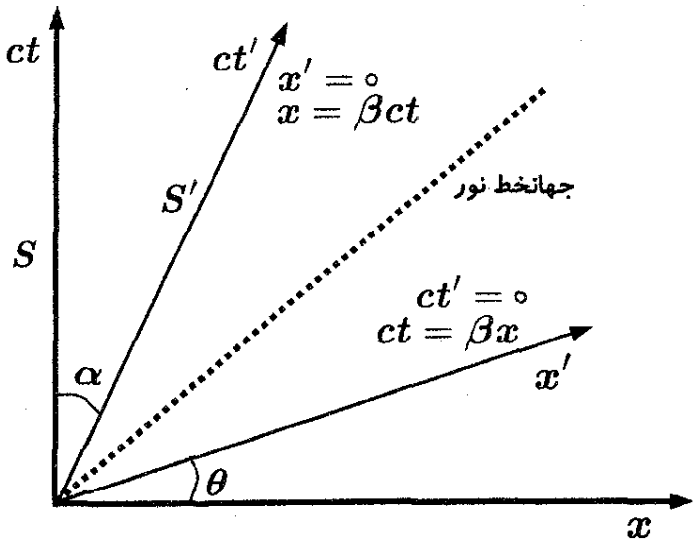
استفاده کرد. حال، اگر در رابطهٔ (۳-۱۵)، $ct'$ را برابر صفر قرار دهیم، معادلهٔ $ct = \beta x$ به دست می آید که درواقع، معادلهٔ محور $x'$ نسبت به محورهای چارچوب $S$ می باشد. همین طور، برای به دست آوردن معادلهٔ محور زمان $ct'$، باید درتبدیل لورنتس

$$x' = \gamma(v)(x - \beta ct) \qquad (۱۶-۳)$$

$x'$ برابرصفر قرار داده شود. دراین صورت، معادلهٔ $x = \beta ct$ به دست می آید. این معادله نیز معادلهٔ محور زمان $ct'$ نسبت به محورهای چارچوب $S$ خواهد بود. اکنون، باداشتن معادلات محورهای فضا و زمان چارچوب $S'$، می توان محورهای این چارچوب را نسبت به محورهای چارچوب $S$، مانند شکل(۳-۸) رسم کرد.

از طرف دیگر، برای یکسان سازی مقیاسهای انتخاب شده برای محورهای فضایی و زمانی چارچوبها، می توان محور زمان را در $c$ ضرب کرد. درواقع، با این کار می توان فاصله را برحسب واحد زمان و یا برعکس، زمان را بر حسب واحد طول بیان کرد.

حال، با توجه به شکل (۳-۸)، می توان شیب محور $x'$ یا شیب خط $ct = \beta x$ را در چارچوب $S$ نیز به دست آورد. دراین صورت، شیب این محور با رابطهٔ $tan\theta = \beta = v/c$ بیان می شود.




شکل (۳-۸) : رسم محورهای فضایی و زمانی چارچوب $S'$ نسبت به محورهای چارچوب ساکن $S$

همچنین، با توجه به شکل (۳-۸)، $tan\alpha = x/ct$ یا $tan\alpha = \beta$ می باشد. بنابراین،

زوایـای $\alpha$ و $\theta$ نیـز برابـر مـی باشـند. همـین طـور، بـا توجـه بـه معادلـهٔ محـور $ct'$، یعنی $x = \beta ct$، شیب محور $ct'$ برابر $1/\beta$ خواهد بود که دراین صورت، خطوط همزمانی در چـاچوب $S'$ یـا بـه عبـارت دیگـر، خطـوط مـوازی محـور $x'$، نـسبت بـه محورهـای چارچوب $S$، دارای شیب $\beta$ خواهند بود. همچنین، خطوط هـم مکـانی در چـاچوب $S'$، یـا خطوط موازی محور $ct'$، نسبت به محورهای چارچوب $S$، دارای شیب $1/\beta$ می باشند. بـه علاوه با توجه بـه رابطـهٔ $tan\theta = \beta = v/c$، اگـر $v \to 0$ میـل کنـد آنگـاه $\theta \to 0$ میـل می کند که در این حالت، محورهای دو چارچوب بریکدیگر منطبق می شوند. همین طـور، اگر $v \to c$ میل کند در این صورت، $\theta \to \pi/4$ میل خواهد کرد. درنتیجه، دراین حالـت محورهای فضایی و زمانی چارچوب $S'$ به سمت یکدیگر میل می کنند. و اگر فـرض کنـیم که $v = c$ باشد در این صورت، به نتیجهٔ $ct' = x'$ می رسیم که در واقع، معادلهٔ جهانخط پرتو نور، نسبت به چارچوب $S$ می باشد.

اکنـون، مـی تـوان وضـعیت محورهـای چـارچوب $S$ را نیـز نـسبت بـه محورهـای چارچوب $S'$ مورد بررسی قرار داد. همان طورکـه مـی دانـیم، نـاظر $S'$ نیـز ماننـد نـاظر $S$، محورهای فضا و زمان چارچوب خود را عمود بر هم رسم می کند؛ زیرا این نـاظر نـسبت بـه خودش ساکن است. دراین حالت، ناظر $S'$ مشاهده مـی کنـد کـه نـاظر $S$، بـا سـرعت $v$ در جهت منفی محور $x'$ چارچوب خودش درحرکت است.

بنابراین، ناظر $S'$ نیز برای به دست آوردن شیب محورهای $ct$ و $x$ نسبت به محورهای چارچوب $S'$، می تواند از تبدیلات وارون لورنتس، یعنی

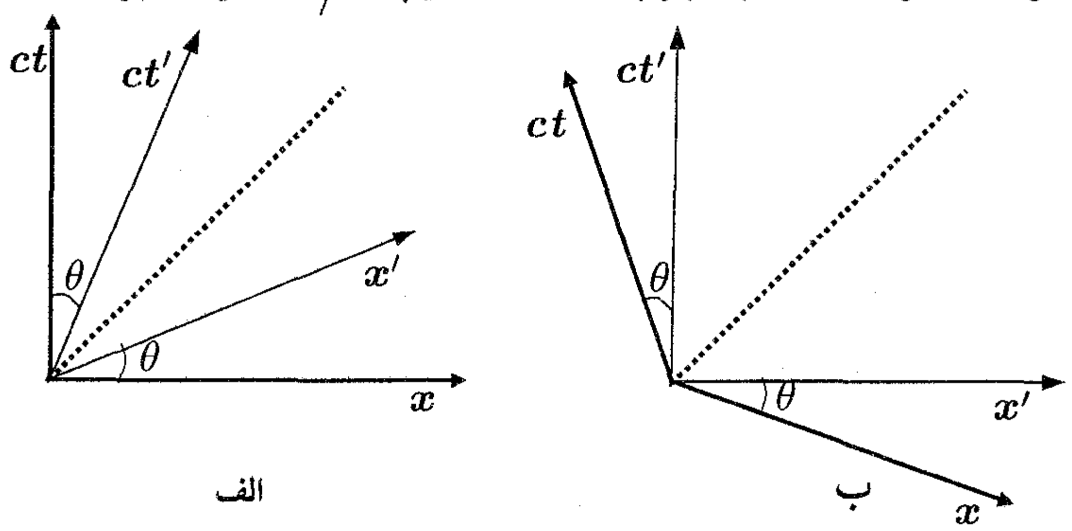
$$ct = \gamma(v)(ct' + \beta x') \tag{۳-۱۷}$$

و

$$x = \gamma(v)(x' + \beta ct') \tag{۳-۱۸}$$

اسـتفاده کنـد. بنـابراین، بـا توجـه بـه شـکل(۳-۹) ب ، محـور $ct$ یـا $x = 0$، معـادل خـط $x' = -\beta ct'$ و همچنـین، محـور $x$ یـا $ct = 0$، معـادل خـط $ct' = -\beta x'$ مـی باشـند. درنتیجـه، خطـوط همزمـانی درچـارچوب $S$، یـا خطـوط مـوازی محـور $x$، در چارچوب $S'$ دارای شیب $-\beta$ می باشند. همین طور، خطوط هم مکانی درچارچوب $S$، یا

خطوط موازی محور $ct$، در چارچوب $S'$ دارای شیب $-۱/\beta$ خواهند بود.




شکل(۳-۹) : تغییر چارچوب مرجع: الف : محورهای چارچوب $S'$ نسبت به ناظر $S$ ب : محورهای چارچوب $S$ نسبت به ناظر $S'$

اما نکته ای که باید دراینجا به آن اشاره نماییم، این است که اگر فضا- زمان را دو بعدی در نظر بگیریم، دراین صورت، در چارچوبهای مختلف می توانیم خطوط همزمانی یا هم مکانی را تعریف کنیم. اما اگر فضا-زمان سه بعدی، یعنی دو بعد فضا و یک بعد زمان در نظرگرفته شود، در این حالت، سطوح همزمانی و همین طور سطوح هم مکانی خواهیم داشت. و درنهایت، اگر فضا-زمان چهاربعدی فرض شود، دراین صورت، می توان فضای همزمانی و فضای هم مکانی برای چارچوبهای مختلف تعریف کرد.

---

**مثال ۳ − ۲:** نشان دهید که تبدیلات لورنتس(۲-۷۹) را می توان به صورت

$$x' = x\,cosh\alpha - ct\,sinh\alpha$$

$$y' = y \quad , \quad z' = z \qquad (۳-۱۹)$$

$$ct' = ct\,cosh\alpha - x\,sinh\alpha$$

نشان داد. که درآن $\alpha$ با رابطهٔ $tanh\alpha = \beta = v/c$ تعریف می گردد.

**جواب :** با توجه به تعریف $\alpha$، می توان ضریب تبدیل $\gamma(v)$را برحسب $\alpha$ به دست آورد. بنابراین، داریم:

$$\gamma(v) = \frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱-tanh^۲\alpha}} = cosh\alpha \qquad (۳-۲۰)$$

همچنین،

$$\beta\gamma(v)=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{tanh\,\alpha}{\sqrt{1-tanh^2\alpha}} \qquad (۳\text{-}۲۱)$$
$$=sinh\alpha$$

حال، باجایگذاری $\beta\gamma(v)$ و $\gamma(v)$ برحسب $\alpha$، درتبدیل لورنتس(۲-۷۹)، می توان رابطهٔ (۳-۱۹) را به دست آورد. همچنین، می توان با استفاده از نمادگذاری ماتریسی،رابطهٔ (۳-۱۹) را به شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cosh\,\alpha & -sinh\,\alpha & 0 & 0 \\ -sinh\,\alpha & cosh\,\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (۳\text{-}۲۲)$$

نیز نوشت. این رابطه، درحالت دو بعدی به صورت سادهٔ

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cosh\,\alpha & -sinh\,\alpha \\ -sinh\,\alpha & cosh\,\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

نوشته می شود که درواقع، مشابه تبدیل معمولی

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

می باشد که حاصل آن، دوران محورها درصفحهٔ $xy$ حول محور $z$ است. بنابراین، نتیجهٔ تبدیلات مختصات لورنتس را در حالت کلی، می توان دوران محورهای چارچوب $S$ در فضا- زمان چهار بعدی و تبدیل آنها به محورهای چارچوب $S'$ در نظرگرفت. دراین صورت، زاویهٔ بین محورهای $S$ و $S'$، درحالت خاص، با رابطهٔ زیر بیان می شود.

$$tan\theta=\beta=tanh\alpha \qquad (۳\text{-}۲۵)$$

## ۳ - ۴ : مقیاس بندی محورهای چارچوب مرجع

بعد از تعیین وضعیّت محورهای دو چارچوب $S$ و $S'$ نسبت به یکدیگر، اکنون می توان با انتخاب واحدهای طول و زمان مناسب، این محورها را مقیاس بندی کرد. بنابراین، برای به

دست آوردن واحدهای طول و زمان درهرکدام از این چارچوبها، یا مقیاس بندی این محورها آنها، می توان ازبازهٔ ناوردای فضا- زمان که با رابطهٔ (۳-۷) تعریف شده است، استفاده کرد. برای این منظور، می توان دو رویداد تعریف کرد، به طوری که یکی از این رویدادها در مبدأ و دیگری در جایی دیگر از فضا-زمان روی دهد. دراین صورت، بازهٔ بین این دو رویداد را با توجه به رابطهٔ(۳-۷) می توان به شکل

$$c^{۲}t^{۲} - x^{۲} = s^{۲} \qquad (۳\text{-}۲۶)$$

نوشت. اکنون، اگر فرض کنیم که $s^{۲} = ۱$ باشد، دراین صورت، خواهیم داشت:

$$c^{۲}t^{۲} - x^{۲} = ۱ \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

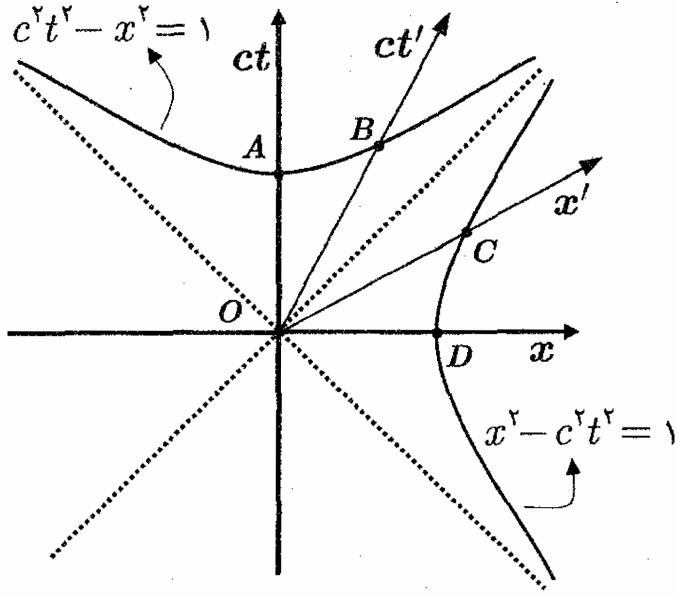
رابطهٔ (۳-۲۷)، همان طور که می دانیم، معادلهٔ یک هذلولی است که معمولاً آن را هذلولی واحد[1] می نامند. حال با یادآوری این نکته که در فضای اقلیدسی، معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۱$، معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ $xy$ است که فاصلهٔ آنها از مبدأ مختصات برابر واحد است. حال به طور مشابه، رابطهٔ (۳-۲۷) را می توان مکان هندسی رویدادهایی در فضا-زمان مینکوفسکی $(ct, x)$ دانست که بازهٔ بین آنها و رویداد واقع در مبدأ برابر واحد می باشد. حال، با توجه به رابطهٔ (۳-۲۷) می توان دو حالت را در نظرگرفت و درنتیجه، دو نوع هذلولی به دست آورد.

درحالت اول، فرض می کنیم که $ct > x$ باشد. دراین صورت، هذلولی رابطهٔ (۳-۲۷) را خواهیم داشت. و درحالت دوم، اگر فرض کنیم، $x > ct$ باشد. در این حالت، هذلولی

$$x^{۲} - c^{۲}t^{۲} = ۱ \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

به دست می آید. اکنون، می توان با رسم این هذلولیها، مانند شکل (۳-۱۰) محورهای دو چارچوب $S$ و $S'$ را مقیاس بندی کرد. با توجه به شکل (۳-۱۰)، نقطهٔ $A$ محل تلاقی محور $ct$ یا $x = ۰$ با هذلولی واحد $c^{۲}t^{۲} - x^{۲} = ۱$ می باشد. دراین صورت، $ct_A = ۱$ خواهد بود. و نقطهٔ $D$ نیز محل تلاقی محور $x$ یا $ct = ۰$، با هذلولی واحد $x^{۲} - c^{۲}t^{۲} = ۱$ می باشد. درنتیجه، $x_D = ۱$ به دست می آید. بنابراین، $ct_A$ و $x_D$ به ترتیب واحد زمان و طول درچارچوب $S$ خواهند بود.

1- Unit Hyperbola




شکل (۳-۱۰) : مقیاس بندی محورهای دو چارچوب $S$ و $S'$

به همین ترتیب، می توان واحد زمان و طول را در چارچوب $S'$ نیز به دست آورد. برای این منظور، مجدداً با توجه به شکل (۳-۱۰)، نقطهٔ $B$ محل تلاقی هذلولی $c^۲t^۲-x^۲=۱$ با محور زمان $ct'$ یا $x=\beta ct$ می باشد. درنتیجه، می توان نوشت:

$$c^۲t_B^۲-(\beta ct_B)^۲=۱ \tag{۳-۲۹}$$

یا

$$ct_B=\frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^۲}}=\gamma \tag{۳-۳۰}$$

همچنین، نقطهٔ $C$، محل تلاقی محور $x'$ یا $ct=\beta x$ با هذلولی واحد $x^۲-c^۲t^۲=۱$ است. دراین صورت، داریم:

$$x_C^۲-(\beta x_C)^۲=۱ \tag{۳-۳۱}$$

یا

$$x_C=\frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^۲}}=\gamma \tag{۳-۳۲}$$

اکنون، باید نشان دهیم که $OB$ و $OC$، به ترتیب واحد زمان و طول درچارچوب $S'$ می باشند. برای این منظور، می توان از تبدیلات لورنتس استفاده کرد. بنابراین، برای اینکه نشان دهیم $OB$ واحد زمان در چارچوب $S'$ است، باید مختصات رویداد $B$ را نسبت به محورهای چارچوب $S$ به دست آوریم. که با توجه به رابطهٔ (۳-۳۰)، مختصهٔ زمانی

رویداد $B$ برابر $ct_B = \gamma$ می باشد. درنتیجه، مختصهٔ فضایی این رویداد نیز برابر $x_B = \beta ct_B$ یا $x_B = \beta\gamma$ خواهد بود. اکنون، با استفاده از تبدیلات لورنتس، داریم

$$\begin{aligned} ct'_B &= \gamma(ct_B - \beta x_B) \\ &= \gamma[\gamma - \beta(\beta\gamma)] \\ &= \gamma^۲(۱-\beta^۲) = ۱ \end{aligned} \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

بنابراین، $OB$ را می توان واحد زمان در چارچوب $S'$ در نظر گرفت. حال، نشان می دهیم که $OC$ نیز واحد طول یا فضا درچارچوب $S'$ می باشد. برای این منظور، با توجه به رابطهٔ (۳-۳۲)، مختصهٔ فضایی رویداد $C$ درچارچوب $S$ برابر $x_C = \gamma$ است. دراین صورت، مختصهٔ زمانی آن نیز برابر $ct_C = \beta x_C$ یا $ct_C = \beta\gamma$ خواهد بود. اکنون، مانند قبل، با استفاده از تبدیل لورنتس، می توان نوشت:

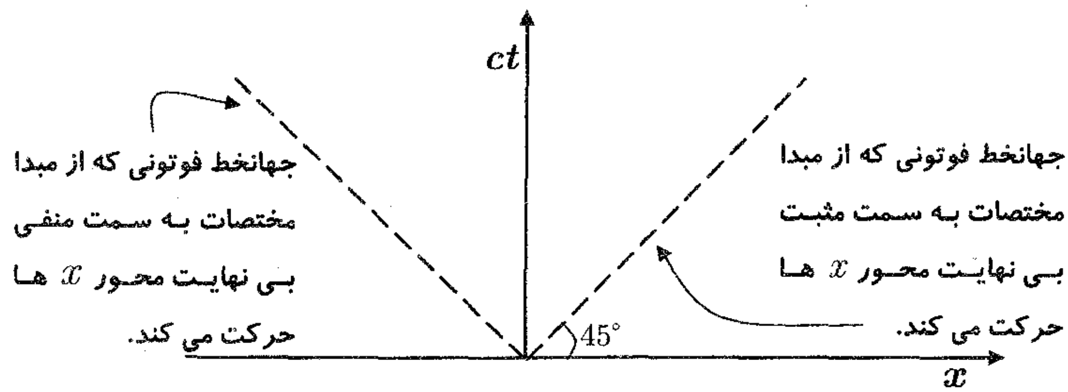
$$\begin{aligned} x'_C &= \gamma(x_C - \beta ct_C) \\ &= \gamma[\gamma - \beta(\beta\gamma)] \\ &= \gamma^۲(۱-\beta^۲) = ۱ \end{aligned} \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

در نتیجه، با توجه به روابط(۳-۳۳) و (۳-۳۴)، $ct'_B$ و $x'_C$، به ترتیب واحد زمان و فضا در چارچوب $S'$ خواهند بود. ازطرف دیگر، با توجه به شکل (۳-۱۰)، می توان دریافت که از نظر ناظر واقع در چارچوب $S$، واحدهای زمان و طول در چارچوب $S'$ بزرگتر از واحدهای مشابه در چار چوب $S$ می باشند.

## ۳ - ۵ : مخروط نور

همان طورکه در فصل گذشته اشاره شد، ذرات با جرم سکون مخالف صفر، نسبت به هرناظر یا چارچوبی مانند $S$، با سرعتی کمتر از سرعت نور حرکت می کنند. از طرف دیگر، می دانیم که سرعت نسبی چارچوبها نیز بایدکوچکتر از سرعت نور باشد. البته، این موضوع، به عنوان یک فرض در نسبیت پذیرفته می شود. اکنون، می توان جهانخط فوتونها یا ذرات نور را نسبت به یک چارچوب ساکن مورد بررسی قرار داد. برای این منظور، فرض کنید که فوتونی که دارای سرعت $u = c$ می باشد، ازمبدأ چارچوب $S$ درجهت مثبت محور $x$ این

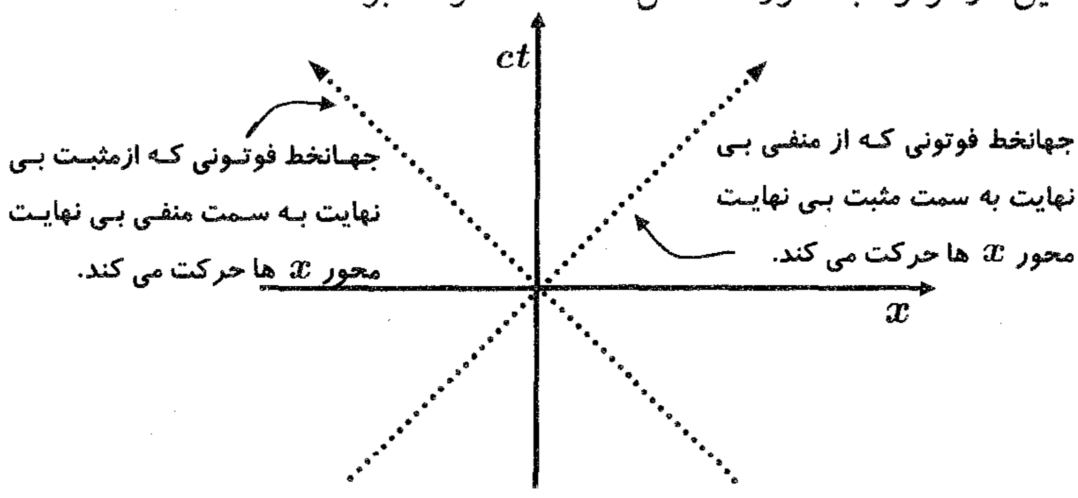
چارچوب شروع به حرکت کند. دراین صورت، با توجه به رابطهٔ $tan\,\theta = u/c$ و شکل (۳-۸)، زاویهٔ $\theta$ برابر $\pi/۴$ به دست می آید. به عبارت دیگر، جهانخط فوتونها مطابق شکل (۳-۱۱)، با محور $x$ چارچوب $S$ زاویه $\pi/۴$ می سازد.




شکل (۳-۱۱) : جهانخط فوتون در دو بعد

البته، باید توجه کرد که نمودار (۳-۱۱)، تنها یک بعد فضا را نشان می دهد. یعنی فوتونهای نور از مبدأ مختصات شروع به حرکت کرده و در روی محور $x$ها در دو راستای مثبت و منفی این محورحرکت می کنند. حال، با توجه به توضیحاتی که در بخش ۳-۱ داده شد، جهانخط این ذرات به صورت نیمسازهای ربع اول و دوم خواهند بود.

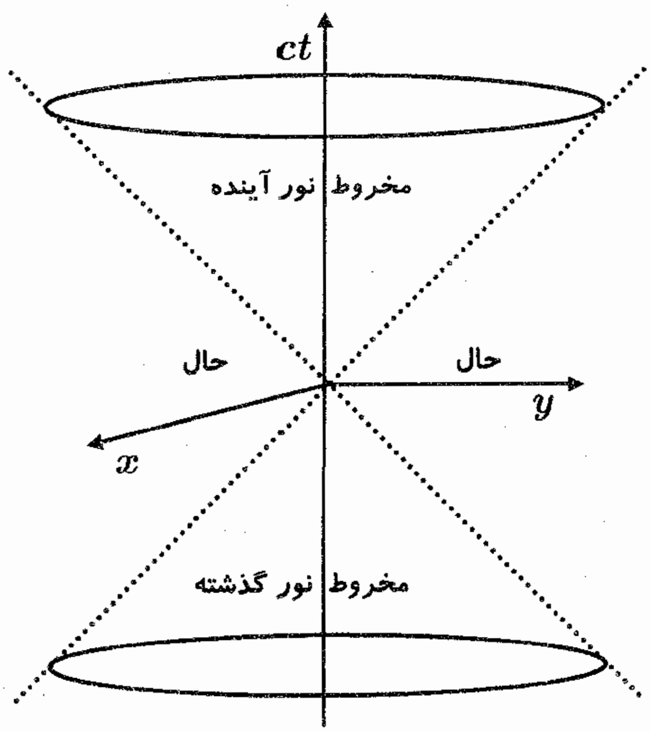
اکنون، می توان وضعیت دیگری را درنظرگرفت. برای این منظور، دو فوتون را درنظر می گیریم، به طوری که یکی از آنها از منفی بی نهایت به سمت مثبت بی نهایت محور $x$، و دیگری از مثبت بی نهایت به سمت منفی بی نهایت این محور حرکت کنند. در این حالت، جهانخط این دو فوتون به صورت شکل (۳-۱۲)، خواهد بود.




شکل (۳-۱۲) : جهانخط دو فوتون که هرکدام در روی محور $x$ها در دو سوی مخالف هم حرکت می کنند.

همان طور که قبلاً اشاره شد، نمودارهای فضا- زمان را می توان حداکثر (۱+۲) بعدی

رسم نمود. یعنی، یک بعد برای زمان و دو بعد برای فضا در نظر گرفت. بنابراین، اگر اکنون دو بعد فضا، یعنی $x$ و $y$ را در نظر بگیریم، دراین صورت می توان تصور کرد که فوتونهایی به صورت کاملاً متقارن، از نقاط واقع در فواصل بسیار دورِ روی صفحهٔ $xy$، از جهات مختلف به سمت مبدأ مختصات چارچوبی ساکن، مانند $S$ حرکت کنند. بنابراین، در این حالت، جهانخط چنین فوتونهایی که در جهت مبدأ همگرا می شوند، به صورت مخروط پایینی شکل (۳-۱۳)خواهد بود که رأس آن در مبدأ چارچوب $S$ واقع است. به عبارت دیگر، می توان گفت که فوتونهایی که به صورت متقارن، از بی نهایت در صفحهٔ $xy$ به سمت مبدأ چارچوب $S$ در حرکتند، یک موج نوریِ دو بعدیی را تشکیل می دهند که جبههٔ آن به صورت دایره می باشد. درنتیجه، با حرکت موج نورِ دو بعدی، به سمت مبدأ، شعاع جبههٔ دایره ای موج که در ابتدا ممکن است یک مقدار بسیار بزرگ باشد، به تدریج کوچک و کوچکتر شده و درنهایت هنگامی که فوتونها به مبدأ می رسند، شعاع جبههٔ موج نیز صفرمی گردد. درحقیقت، می توان گفت که رسیدن فوتونها به مبدأ، به معنای رؤیت رویداد ارسال فوتون ازچشمهٔ آن می باشد که این چشمه ممکن است یک ستاره یا هر چشمهٔ دلخواه دیگر باشد.




شکل (۳-۱۳) : مخروط نور

اکنون، می توان فرض کرد که جرقه ای در مبدأ چارچوب $S$ زده شود و موج نورانی یا فوتونهای حاصل از این جرقه روی صفحهٔ $xy$، درهمهٔ جهات به سمت بی نهایت حرکت

کنند. درنتیجه در این مرحله، یعنی مرحلهٔ دور شدن فوتونها از مبدأ، شعاع جبههٔ موج در مبدأ صفر بوده و به تدریج بزرگ و بزرگتر شده و در نهایت به سمت بی نهایت میل می کند. بنابراین، اگرجهانخط چنین فوتونهایی را رسم نماییم، مخروط بالایی شکل (۳-۱۳) به دست خواهد آمد. این حالت، یعنی هنگامی که فوتونها در همهٔ جهات به صورت متقارن، از مبدأ دور می شوند، مشابه حالت موجی است که درروی سطح آب یک استخر، براثر پرتاب تکه سنگی ایجاد می گردد.

همان طورکه در شکل(۳-۱۳ )، ملاحظه می گردد، مخروط نور[1]، فضا- زمان را به سه ناحیه تقسیم می کند. به این ترتیب که همهٔ رویداهای مربوط به گذشته یا رویدادهایی که با دریافت فوتون ازآنها مشاهده شده اند، در داخل مخروط نورگذشته[2]، قرار می گیرند. همین طور، همهٔ رویدادهایی که مربوط به آینده اند، یا رویدادهایی که هنوز رؤیت نشده اند، یا به بیان دیگر، فوتون گسیل شده از آنها به وسیلهٔ ناظر واقع در مبدأ دریافت نشده است، در داخل مخروط نور آینده[3] واقع می شوند. همچنین، رویدادهایی که در خارج مخروط نور قرار دارند، با رویداد واقع در مبدأ، همزمان می باشند. بنابراین، ناحیهٔ خارج مخروط نور را می توان ناحیهٔ حال یا ناحیهٔ جای دیگر[4] نامید. درحقیقت، رویدادهای واقع در ناحیهٔ حال هنگامی که رؤیت گردند درناحیهٔ مخروط نورگذشته قرار می گیرند.

در اینجا برای اینکه درک روشن تری ازمفاهیم گذشته، حال و آینده به دست آوریم، لازم است توضیح بیشتری در این مورد داده شود. همان طور که قبلاً اشاره شد، برای اینکه بتوانیم محورهای فضا و زمان را برحسب واحدی یکسان بیان نماییم، محور زمان را می توان با $ct$ نشان داد. درواقع، با ضرب محور زمان $t$ در $c$، می توان فواصل فضایی را بر حسب واحد زمان، و همین طور، فاصله های زمانی را برحسب واحد فضا یا طول بیان کرد. معمولاً در نجوم، رسم بر این است که فاصله ها یا بازه های فضایی را برحسب واحد زمان بیان می کنند. همچنین، می دانیم که برای دریافت یا ارسال پیام با محدودیت سرعت مواجه هستیم که درحقیقت، این محدودیت را اصل دوم نسبیت ایجاد می کند. حال، اگرفاصله های

1- Light Cone
2 - Past light cone
3 - Future light cone
4 - Present or Elsewhere

کیهانی درنظرگرفته شوند، دراین صورت، تأثیر این اصل به طور بارزتری آشکار می گردد. به عنوان مثال، هرگاه در علم ستاره شناسی بیان شود که نزدیک ترین ستاره، ۴/۳ سال نوری با ما فاصله دارد، این گفته به این معنی است که برای رسیدن نورآن ستاره به زمین، ۴/۳ سال زمان لازم است. این فاصله تقریباً معادل $۴ \times ۱۰^{۱۳}$ کیلومتر می باشد. یا بیان می شود که قطر خورشید برابر ۴/۶ ثانیه نوری یا ۴/۶ ثانیه است. یا قطر بزرگترین ستارهٔ کهکشان ما ۲۰ دقیقه است. همچنین، فاصلهٔ قدری بزرگتر مانند فاصلهٔ ستارهٔ نسر واقع[1] که ۲۲ سال از ما فاصله دارد.

امروزه، ابزارها و وسایل نجومی این امکان را به بشر می دهند تا بتواند کهکشانها و اختروشهای بسیار دور دست، حتی تا فاصلهٔ ۱۲ میلیارد سال یا بیشتر را رصد نماید. این گفته به این معنی است که برای رسیدن نور این کهکشانها و اختروشها به زمین، زمانی معادل ۱۲ میلیارد سال لازم می باشد. بنابراین، از بیان این فواصل می توان نتیجه گرفت که هنگامی که ستاره ای رصد می شود در واقع، وضعیّت گذشتهٔ آن مشاهده می شود. یعنی هنگامی که گفته می شود، مثلاً ستاره ای ۵ یا ۱۰ میلیون سال با ما فاصله دارد. معنی این گفته این است که ما وضعیت مربوط به ۵ یا ۱۰ میلیون سال قبل ستاره را مشاهده می کنیم. یا هنگامی که خورشید رصد می گردد، درحقیقت وضعیت خورشید را که مربوط به ۸ دقیقه و ۳۰ ثانیهٔ قبل آن است، مشاهده می شود.

بنابراین، باید به این نکته توجه نماییم که هنگامی که ستارگان یا کهکشانها را رصد می کنیم یا آنها را مشاهده می کنیم، گذشتهٔ آنها را می بینیم. بنابراین، به طور کلی می توان گفت که هر آنچه را که مشاهده می کنیم، چه در فاصلهٔ بسیار دور واقع شده باشند، چه در فاصلهٔ بسیار نزدیک، در ناحیهٔ مخروط نورگذشتهٔ ما قرارمی گیرند؛ زیرا برای رؤیت آنها باید فوتونهای نور ازآنها به چشم ما برسند که البته، دراین صورت، مدت زمانی سپری می شود تا اینکه فوتونهای نورگسیل شده از آنها به چشم ما برسند. به تعبیر دیگر، می توان گفت که ما در رأس قلهٔ زمان قرار داریم و هر چیزی را که مشاهده می کنیم مربوط به گذشتهٔ آنهاست. این قله یا مخروط زمان[2] را در نسبیت، اصطلاحاً مخروط نور می نامند.

---

1- Vega
2- Time cone

همچنین مخروط نور یک ناظر یا یک ذره را می توان مجموعهٔ تمام رویدادهایی در نظر گرفت که بازهٔ بین آنها و ناظر یا ذره صفر است که این مطلب در بخش بعد توضیح داده می شود.

حال با این توضیحات، می توان نتیجه گرفت که به علت ثابت و محدود بودن سرعت نور یا اصل دوم نسبیت، امکان اینکه بتوانیم وضعیت عالم را همزمان مشاهده کنیم، یا از وضعیت آن به طور همزمان اطلاع کسب کنیم، وجود ندارد. این در حالی است که در فیزیک نیوتنی به دلیل نداشتن محدودیت سرعت، و اینکه سیگنالها می توانند با سرعت بی نهایت منتقل شوند، وضعیت به گونهٔ دیگری است. یعنی، در فیزیک نیوتنی تصور براین است که در یک آن می توان وضعیت حالِ همهٔ عالم را مشاهده نمود. بنابراین، مفاهیم گذشته، حال و آینده در فیزیک نیوتنی با تصویر نسبیتی این مفاهیم کاملاً اختلاف دارند.

اما نکتهٔ مهمی که در اینجا می توان به آن اشاره نمود، این است که اگر فوتونها در فضای دو بعدی در نظر گرفته شوند، جهانخط آنها به صورت مخروطی در فضا- زمان سه بعدی خواهد بود. بنابراین، در این حالت، اگر محور زمان را با صفحاتی موازی صفحهٔ $xy$ یا با صفحات همزمانی قطع دهیم، سطح مقطع حاصل، دوایری خواهند بود که شعاع این دوایر فاصلهٔ فوتونها یا فاصلهٔ جبههٔ موج نورِ دو بعدی را از مبدأ نشان می دهند. اما حقیقت این است که موج نور یا فوتونها در فضای سه بعدی منتشر می شوند. و جبههٔ موج نور، هنگامی که محیط انتشار سه بعدی است، به صورت کره خواهد بود. بنابراین، جهانخط نور در این حالت، یعنی در فضا- زمان چهار بعدی باید به شکل دیگری باشد. به عبارت دیگر، جهانخط نور را در فضا-زمان چهار بعدی باید به گونه ای در نظر گرفت شود که سطح مقطع آن با صفحات همزمانی به صورت کره باشد.

## ۳ - ۶ : بازه های فضا- زمان و مخروط نور

بعد ازآشنایی با مخروط نور، اکنون، می توان در مورد بازه های فضا- زمان صحبت کرد. با توجه به رابطهٔ (۳-۷) می توان بازهٔ ناوردای فضا- زمان را در سه حالت مورد بررسی قرار داد. در این بخش، این حالتها را بررسی می کنیم.

**حالت اول :**

اگردررابطهٔ (۳-۷)، $\Delta s^۲$ را مثبت در نظر بگیریم، یا اینکه بازهٔ بین دو رویداد حقیقی باشد، در این حالت می گوییم که جدایی بین دو رویداد یا بازهٔ فضا- زمان بین آنها زمانگونه[1] است. بنابراین، در این حالت می توان نوشت:

$$\Delta s^۲ = c^۲\,\Delta t^۲ - \Delta x^۲ > ۰ \qquad (۳\text{-}۳۵)$$

یا $c^۲\,\Delta t^۲ > \Delta x^۲$. درنتیجه، در این حالت $\left|\Delta x/\Delta t\right| < c$ خواهد بود. اکنون می توان $v = \left|\Delta x/\Delta t\right| < c$ را سرعت چارچوبی مانند $S'$ در نظر گرفت که نسبت به چارچوب $S$ در راستای محور $x$ حرکت می کند. حال، اگر سرعت نسبی چارچوب $S'$، یعنی $v$ را در تبدیل مختصات لورنتس قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(v)[\Delta x - v\Delta t]\\ &= \gamma(v)[\Delta x - \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t]\\ &= ۰\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۶)$$

چون در این حالت، $v < c$ است، بنابراین می توان چارچوبی را تعیین کرد، به طوری که درآن چارچوب، بازهٔ فضایی بین دو رویداد، یعنی $\Delta x'$، برابر صفر باشد. به عبارت دیگر، درآن چارچوب دو رویداد در یک مکان، اما در زمانهای مختلف رخ دهند. بنابراین، با توجه به شکل(۳- ۱۴)، دو رویداد $E'_۲(ct', ۰)$ و رویداد واقع در مبدأ، یعنی $O$ در یک مکان، یعنی در مبدأ چارچوب $S'$ روی می دهند، اما در زمانهای مختلف. حال، برای به دست آوردن بازهٔ زمانی بین دو رویداد، می توان از ویژگی ناوردا بودن بازهٔ فضا - زمان، یعنی $\Delta s^۲$ استفاده کرد. دراین صورت، داریم:

$$\begin{aligned}\Delta s^۲ &= c^۲\,\Delta t'^۲ - \Delta x'^۲\\ &= c^۲\,\Delta t'^۲ - ۰\\ &= c^۲\,\Delta t'^۲\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۳۷)$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

---

1- Timelike

$$\Delta t' = \frac{\Delta s}{c} \tag{۳-۳۸}$$

در واقع، $\Delta t'$ بازه زمانی بین دو رویداد، درچارچوب $S'$ می باشد. این زمان را **زمان ویژه** درچارچوب $S'$ می نامند. همچنین، می توان بازهٔ فضا- زمان بین دو رویداد، یعنی $\Delta s$ را نیز با استفاده از تبدیل زمان لورنتس به دست آورد

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(v)[c\Delta t - \beta\Delta x] \\ &= \gamma(v)[c\Delta t - \beta v\Delta t] \end{aligned} \tag{۳-۳۹}$$

در رابطهٔ(۳-۳۹) از $v = \left|\Delta x/\Delta t\right|$، یا سرعت نسبی دو چارچوب استفاده شده است. از این رابطه می توان نتیجه گرفت:

$$c\Delta t' = c\Delta t\sqrt{1-\beta^2} \tag{۳-۴۰}$$

حال، با در نظر گرفتن رابطهٔ (۳-۳۸)، داریم

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= c\Delta t\sqrt{1-\beta^2} \\ &= \Delta s \end{aligned} \tag{۳-۴۱}$$

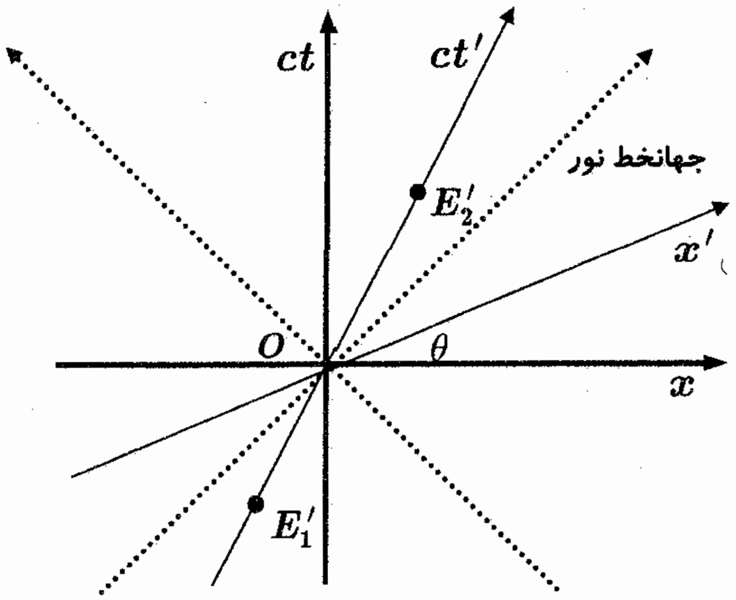
یا

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{۳-۴۲}$$

که در واقع، همان رابطهٔ اتساع زمان با شرط $\Delta x' = 0$ می باشد.

از طرف دیگر، اگر بازهٔ فضا- زمان بین دو رویداد، در یک چارچوب زمانگونه باشد، با توجه به ناوردا بودن بازهٔ فضا- زمان، این بازه در همهٔ چارچوبهای دیگر نیز زمانگونه خواهد بود. همچنین، رویدادهایی که بازهٔ بین آنها زمانگونه است، درداخل مخروط نور واقع می شوند. درنتیجه، بین اینگونه رویدادها می توان ترتیب زمانی معینی را در نظر گرفت. به عنوان مثال، با توجه به شکل( ۳-۱۴)، از نظر ناظر واقع در چارچوب $S'$، سه رویداد $E'_1$، $O$ و $E'_2$ در یک مکان، یعنی $x' = 0$ روی می دهند. و ازنظر ترتیب زمانی، ابتدا رویداد $E'_1$، بعد از آن رویداد $O$ و درنهایت، رویداد $E'_2$ رخ خواهد داد. به طور کلی، با توجه به ترتیب زمانی معینی که بین رویدادهای واقع در داخل مخروط نور وجود دارد، رویدادهایی که قبل از رویداد $O$ اتفاق افتاده اند در داخل مخروط نور پایینی یا در ناحیهٔ گذشتهٔ مطلق، نسبت به $O$

قرار می گیرند. همچنین، رویدادهایی که بعد از رویداد $O$ روی خواهند داد، درداخل مخروط نور بالایی یا از نظر زمانی در ناحیهٔ آیندهٔ مطلق، نسبت به $O$ واقع می شوند.




شکل(۳-۱۴) : بازهٔ فضا ـ زمان بین رویداد مبدأ و رویدادهای واقع درداخل مخروط نور

دراینجا نکتهٔ دیگری که می توان به آن اشاره کرد، این است که رویدادها یی که در داخل مخروط نور قرار می گیرند، می توانند روی یکدیگر اثر بگذارند. بنابراین، دراین صورت، اصل علیّت را می توان درمورد این گونه از رویدادها به کار برد. همان طور که در فصل اول اشاره شد، این اصل بیان می کند که رویداد علّت قبل از رویداد معلول روی می دهد. درنتیجه، برای همهٔ رویدادهایی که در ناحیهٔ داخل مخروط نور قرار می گیرند، ترتیب زمانی معینی وجود دارد و این ترتیب زمانی در همهٔ چارچوبهای دیگر نیز حفظ می شود. براین اساس، ناحیهٔ داخل مخروط نور پایینی را گذشتهٔ مطلق[1] و ناحیهٔ داخل مخروط نور بالایی را آیندهٔ مطلق[2] می نامند.

## حالت دوم :

حال، اگر فرض کنیم که در رابطهٔ (۳-۷)، $\Delta s^۲$ منفی باشد. یا به عبارت دیگر، بازهٔ بین دو رویداد موهومی در نظرگرفته شود، در این حالت، می گوییم که جدایی بین دو رویداد یا

1- Absolute past 2- Absolute future

بازهٔ فضا- زمان بین آنها فضاگونه[1] است. دراین حالت، می توان نشان داد که دو رویداد ممکن است در یک زمان، اما در مکانهای مختلف روی دهند. بنابراین، اگر بازهٔ بین دو رویداد فضاگونه باشد، باید چارچوبی وجود داشته باشد، به طوری که دو رویداد در یک زمان، اما درمکانهای مختلف در آن روی دهند. حال، با در نظرگرفتن بازهٔ ناوردای فضا- زمان، داریم:

$$\Delta s^{۲} = c^{۲}\,\Delta t^{۲} - \Delta x^{۲} < ۰ \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

در نتیجه، برای رویدادهای فضاگونه $\left|\Delta x/\Delta t\right| > c$ یا $v > c$ به دست می آید. به عبارت دیگر، برای برقراری ارتباط بین چنین رویدادهایی به سرعتی بیش ازسرعت نور نیاز داریم. برای یافتن چارچوبی مانند $S'$، که در آن دو رویداد همزمان، اما در مکانهای مختلف روی دهند، می توان از تبدیل زمان لورنتس استفاده کرد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$c\Delta t' = \gamma[c\Delta t - \beta\Delta x] = ۰ \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

حال، با توجه به رابطهٔ(۳-۴۴)، سرعت چارچوب مورد نظر باید برابر $\beta = c\Delta t/\Delta x$ یا $v = c^{۲}/(\Delta x/\Delta t)$ باشد. ازطرف دیگر، می توان با استفاده از بازهٔ ناوردای فضا- زمان، بازهٔ فضایی بین دو رویداد را نیز به دست آورد:

$$\begin{aligned} \Delta s^{۲} &= c^{۲}\,\Delta t'^{۲} - \Delta x'^{۲} \\ &= ۰ - \Delta x'^{۲} \\ &= -\Delta x'^{۲} \end{aligned} \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

بنابراین، $|\Delta x'| = |\Delta s|$ خواهد بود. دراین صورت، $|\Delta s|$ را می توان جدایی یا فاصلهٔ ویژه[2] بین دو رویداد فضاگونه درنظرگرفت. برای به دست آوردن این فاصله، مجدداً می توان از تبدیلات لورنتس استفاده کرد. در این صورت، خواهیم داشت:

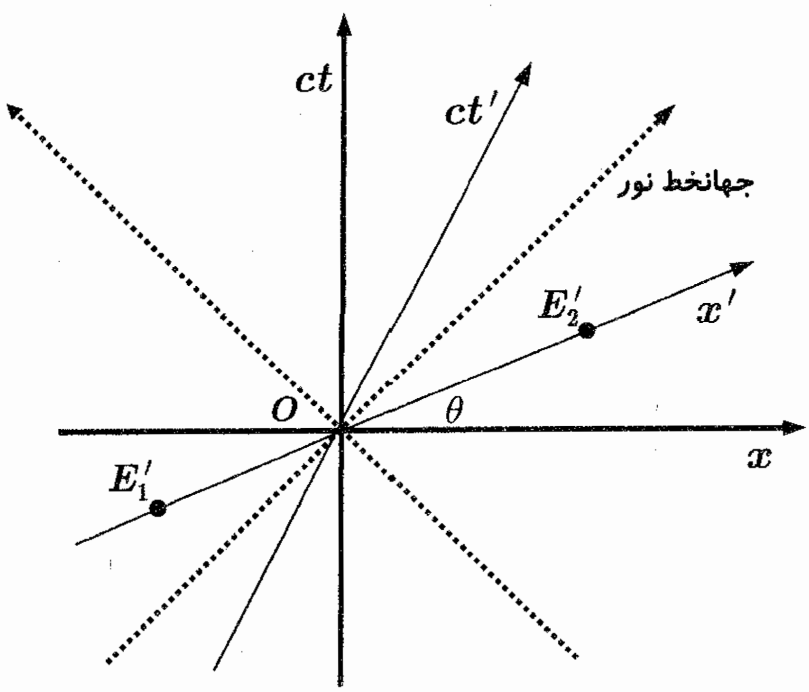
$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma[\Delta x - \beta c\Delta t] \\ &= \gamma\Delta x\left[۱ - \beta\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right] \\ &= \gamma\Delta x[۱ - \beta^{۲}] \\ &= \Delta x\sqrt{۱ - \beta^{۲}} \end{aligned} \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

1- Spacelike 2- Proper separation

که در رابطهٔ(۳-۴۶)، از $\beta = c\Delta t/\Delta x$ ، یا $v = c^{2}\,\Delta t/\Delta x$ استفاده شده است. در نتیجه، برای بازه های فضاگونه، فاصلهٔ ویژهٔ بین دو رویداد برابر

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \Delta s = \Delta x\sqrt{1-\beta^{2}} \\ &= \Delta x\sqrt{1-(c\Delta t/\Delta x)^{2}}\end{aligned} \qquad (۳-۴۷)$$

خواهد بود. اکنون، با توجه به شکل(۳-۱۵)، برای رویدادهای فضاگونه یا رویدادهایی که در ناحیهٔ حال قرار دارند، همواره می توان چارچوبی معین کرد، به طورای که محور فضایی آن چارچوب، ازآن رویداد و رویداد واقع در مبدأ عبور نماید. مانند رویدادهای $E_1'$ و $E_2'$ که در چارچوب $S'$ همزمان با رویداد واقع در مبدأ، یعنی $O$ رخ می دهند.



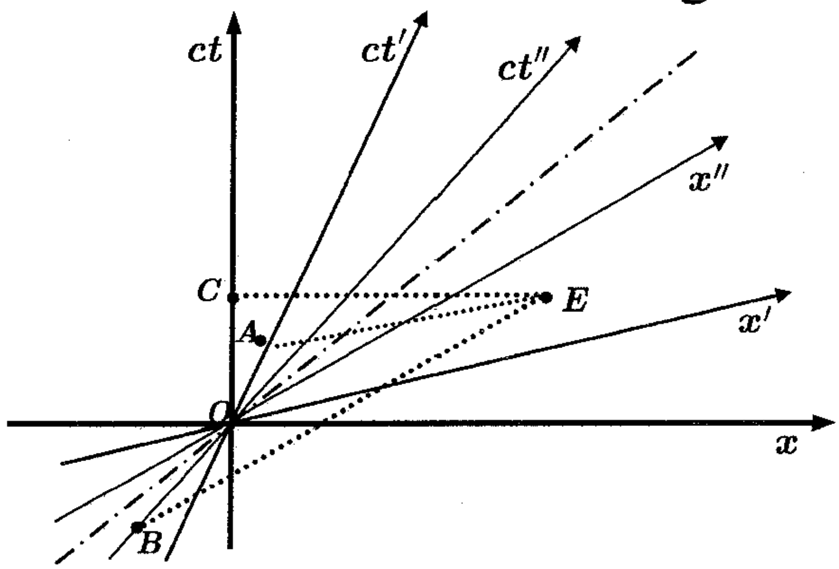

شکل (۳-۱۵) : بازهٔ فضا - زمان بین رویداد مبدأ و رویدادهای واقع در خارج مخروط نور

در این حالت، یعنی برای رویدادهای فضاگونه به دلیل محدودیت سرعت نور، یا اصل دوم نسبیت، ترتیب زمانی معینی بین آنها وجود ندارد. برای نشان دادن این موضوع، می توان از نمودار فضا - زمان استفاده نمود.

با توجه به شکل(۳-۱۶)، اگر رویداد $E$ را که در خارج مخروط نور است، در نظر بگیریم. این رویداد درچارچوبهای $S$ و $S'$ بعد از رویداد $O$ اتفاق می افتد. اما همین رویداد در چارچوب $S''$ قبل از رویداد $O$ رخ می دهد؛ زیرا اگر خطهایی موازی محورهای $x$

، $x'$ و $x''$ مربوط به این چارچوبها رسم نماییم، محورهای زمان $ct$ ، $ct'$ و $ct''$ این چارچوبها را به ترتیب در نقاط $C$ ، $A$ و $B$ قطع می کنند.

همچنین، می توان چارچوب دیگری در نظر گرفت که محور فضایی آن از $E$ بگذرد. دراین صورت، رویداد $E$ همزمان با $O$ خواهد بود. بنابراین، دراین ناحیه مانند ناحیهٔ داخل مخروط نور ترتیب زمانی معینی بین رویدادها وجود ندارد. اما این موضوع، اصل علیت را نقض نمی کند؛ زیرا اساساً اصل علیّت را به دلایل زیر نمی توان در مورد رویدادهای فضاگونه یا رویدادهای واقع در ناحیهٔ حال به کار برد.




شکل (۳-۱۶) : عدم وجود ترتیب زمانی معین بین رویدادهای واقع در خارج مخروط نور.رویداد $E$ درچارچوبهای $S$ و $S'$، بعداز رویداد $O$ ودرچارچوب $S''$ قبل از رویداد $O$ اتفاق می افتد.

اولاً : اصل علیّت را در مورد رویدادهایی می توان به کار برد که در یک مکان از یک چارچوب رخ دهند. در حالی که در ناحیهٔ خارج ازمخروط نور امکان یافتن چارچوبی که دو رویداد فضاگونه در یک مکان، نسبت به آن چارچوب روی دهند، وجود ندارد.

ثانیاً : اگر دو رویداد در یک مکان روی ندهند، همچنین، اگر فرض کنیم که یکی از رویدادها نتیجهٔ رویداد دیگری باشد، دراین صورت، بازهٔ زمانی بین آنها کوچکتر از زمان لازم برای رفتن نور از محل یک رویداد تا محل رویداد دیگر خواهد بود؛ زیرا رویدادهایی که درناحیهٔ فضاگونه قرار دارند، آنقدر سریع رخ می دهند که برای برقراری ارتباط علّی بین آنها باید از علامتی با سرعتی بیش از سرعت نور استفاده نماییم. از طرف دیگر، در این ناحیه ممکن

است دو رویداد به طور همزمان و در دو مکان مختلف اتفاق بیافتند که دراین صورت، برای برقراری ارتباط بین آنها باید از علامت یا سیگنالی با سرعت بی نهایت استفاده شود.

برای توضیح بیشتر این موضوع می توان از تبدیلات لورنتس زمان استفاده کرد. برای این منظور، با در نظرگرفتن این تبدیلات می توان نوشت:

$$t'_{۲} - t'_{۱} = \gamma(v)[(t_{۲} - t_{۱}) - \frac{v}{c^{۲}}(x_{۲} - x_{۱})] \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

حال، با توجه به رابطهٔ فوق، می دانیم که اگر دو رویداد درچارچوب $S$ هم مکان باشند، در این صورت، به رابطهٔ اتساع زمان، یعنی رابطهٔ $\Delta t' = \gamma(v)\Delta t$ با شرط $\Delta x = ۰$، می رسیم. همچنین، اگر دو رویداد درچارچوب $S$، علاوه بر هم مکان بودن، همزمان نیز باشند، یعنی اگر $\Delta t$ هم برابر صفر باشد، در این حالت، از رابطهٔ(۳-۴۸) می توان نتیجه گرفت که درچارچوب $S'$ نیز دو رویداد همزمان رخ می دهند، یعنی $\Delta t'$ نیز برابر صفر است. براین اساس، دو ناظر درصورتی برهمزمان بودن دو رویداد توافق خواهند داشت که این دو رویداد در یکی از دو چارچوب، در یک مکان و به طور همزمان رخ دهند.

اکنون، می خواهیم در مورد رویدادهایی بحث کنیم که هم مکان نیستند. برای این منظور، می توان از رابطهٔ (۳-۴۸) استفاده کرد. با توجه به این رابطه، مشاهده می شود که اگر مقدار داخل کروشه برابر صفر باشد، در این صورت، دو رویداد در چارچوب $S'$ همزمان روی می دهند. و اگر مقدار داخل کروشه، مقداری مثبت باشد، دو رویداد به همان ترتیبی که در چارچوب $S$ رخ داده اند، در چارچوب $S'$ نیز به همان ترتیب روی خواهند داد، یعنی $t'_{۲} > t'_{۱}$ است. اما اگر در رابطهٔ (۳-۴۸)، مقدار داخل کروشه منفی باشد، در این حالت ترتیب زمانی رخ دادن رویدادها درچارچوب $S'$ عوض می شود، یعنی $t'_{۲} < t'_{۱}$ به دست می آید. حال، برای به دست آوردن شرط ریاضی برای این حالت، می توان (۳-۴۸) را به شکل

$$t'_{۲} - t'_{۱} = \gamma(v)(t_{۲} - t_{۱})[۱ - \frac{v}{c}\frac{x_{۲} - x_{۱}}{c(t_{۲} - t_{۱})}] \qquad (۴۹\text{-}۳)$$

نوشت. رابطهٔ (۳-۴۹)، نشان می دهد که در صورتی مقدار داخل کروشه منفی می شود که شرط

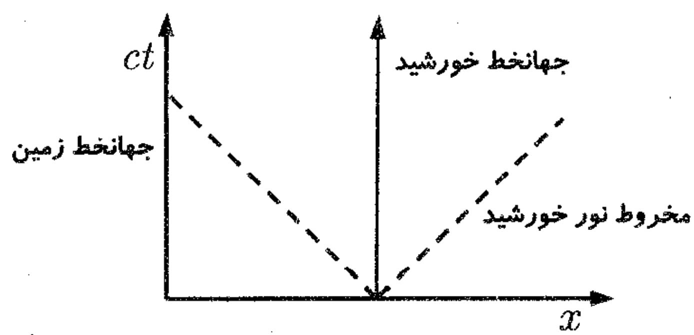
$$\frac{x_{۲} - x_{۱}}{c(t_{۲} - t_{۱})} > \frac{c}{v} \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

یا

$$\frac{\Delta x}{c\Delta t} > \frac{c}{v} \tag{۳-۵۱}$$

برقرار باشد. ازطرف دیگر، رابطهٔ (۳-۵۱)، تنها هنگامی می تواند برقرار باشد که فاصلهٔ بین مکان وقوع رویدادها، یعنی $\Delta x$، بزرگتر از مسافتی باشد که نور درفاصلهٔ زمانی $\Delta t$ طی می کند. حال، اگر بازهٔ مکانی دو رویداد به این بزرگی باشد، در آن صورت، هنگامی که علامت نوری از مکان رویداد ۱ به مکان رویداد ۲ فرستاده می شود، نمی تواند به موقع به مکان رویداد ۲ برسد تا باعث ایجاد آن گردد. درنتیجه، اگر دو رویداد نسبت به دو ناظر، دارای ترتیب زمانی یکسان نباشند، در این صورت یکی از رویدادها نمی تواند علت وقوع رویداد دیگری باشد. در نهایت اینکه دو رویداد علّت و معلول هیچ وقت نمی توانند به ترتیب مخالف یکدیگر، نسبت به دو ناظر رخ دهند. به عبارت دیگر اصل علیّت با نسبیت سازگار است.

حال، بعد از بررسی اصل علیّت در نسبیت، دراینجا ممکن است این سؤال مطرح شود که ناظر واقع در چارچوب $S$، رویدادهای واقع در ناحیهٔ حال را چگونه مشاهده می کند. همان طورکه در بخش مربوط به مخروط نور توضیح داده شد، هنگامی می توان رویدادهای فضاگونه را مشاهده نمود که فوتونهای گسیل شده از آنها را دریافت نماییم. این موضوع را می توان به راحتی به وسیلهٔ نمودار فضا- زمان توضیح داد. برای این منظور فرض کنید که خورشید که در فاصلهٔ تقریباً ۸/۵ دقیقهٔ نوری از زمین قرار دارد، همزمان با رویداد واقع در مبدأ چارچوب $S$، دچار تاریکی شود. از طرف دیگر، می دانیم که برای هر ناظر یا ذره ای می توان یک مخرروط نور در نظر گرفت.




**شکل (۳-۱۷) : رؤیت تاریک شدن خورشید در زمین، پس از قرارگرفتن زمین در مخروط نور خورشید.**

بنابراین، با توجه به شکل (۳-۱۷)، ساکنان زمین بلافاصله تاریک شدن خورشید را

متوجه نخواهند شد؛ زیرا زمین در داخل مخروط نور خورشید قرار ندارد. بنابراین، ساکنان زمین هنگامی متوجه می شوند، خورشید تاریک شده است که جهانخط زمین مخروط نورخورشید را قطع کند. به عبارت دیگر، ساکنان زمین پس از ۸/۵ دقیقه متوجه تاریک شدن خورشید می گردند. که البته، در این حالت، خورشید در ناحیهٔ گذشتهٔ مطلق مخروط نوری مربوط به زمین قرار می گیرد.

**حالت سوم :**

اکنون، اگرفرض کنیم که کمیّت $\Delta s^{۲}$ در رابطهٔ (۳-۷) برابر صفر باشد، به عبارت دیگر، اگر بازهٔ بین دو رویداد را برابر صفر درنظربگیریم. دراین حالت، گفته می شود که جدایی بین دو رویداد یا بازهٔ فضا ـ زمان بین آنها نورگونه[1] است.

همان طورکه می دانیم، بازهٔ بین دو رویداد در فضا- زمان با فاصلهٔ بین دو نقطه در فضای اقلیدسی تفاوت دارد. یعنی اگر فاصلهٔ بین دو نقطه در فضای اقلیدسی صفر باشد، آن دو نقطه برهم منطبق بوده و در واقع، یک نقطه می باشند. درصورتی که در فضای رویدادها اگر بازهٔ بین دو رویداد برابرصفر باشد، وضعیت به گونه ای دیگر تعبیر می شود؛ زیرا با توجه به رابطهٔ (۳-۷)، اگر $\Delta s^{۲}$ برابر صفر باشد، دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\Delta s^{۲} = c^{۲}\, \Delta t^{۲} - \Delta x^{۲} = ۰ \qquad (۳\text{-}۵۲)$$

بنابراین، از رابطهٔ (۳-۵۲) می توان نتیجه گرفت که $c\Delta t = \Delta x$ یا $v = \Delta x/\Delta t = c$ می باشد. به بیان دیگر، در این حالت بازه یا فاصلهٔ فضایی بین دو رویداد با بازهٔ زمانی بین آنها برابر است. همچنین، می توان گفت که اگر ناظری بخواهد از مکان یک رویداد به مکان رویداد دیگربرود، او باید طوری بازهٔ بین دو رویداد را طی کندکه بازهٔ فضایی بین دو رویداد، با بازهٔ زمانی بین آنها برابر باشد. و این در صورتی امکان دارد که سرعت ناظر برابر $c$ باشد. به عنوان مثال، فرض کنید که انفجاری یک ثانیهٔ قبل، درفاصلهٔ ۳۰۰ هزار کیلو متری ناظر $S$ روی داده باشد. حال، اگر این ناظر دقیقاً یک ثانیه بعد از انفجار، پرتو نور حاصل از انفجار را در یافت کند، این وضعیت نشان می دهدکه بازهٔ بین رویداد انفجار و

---

1- Lightlike

رویداد دریافت پرتو نور به وسیلهٔ ناظر $S$، برابر صفر است.

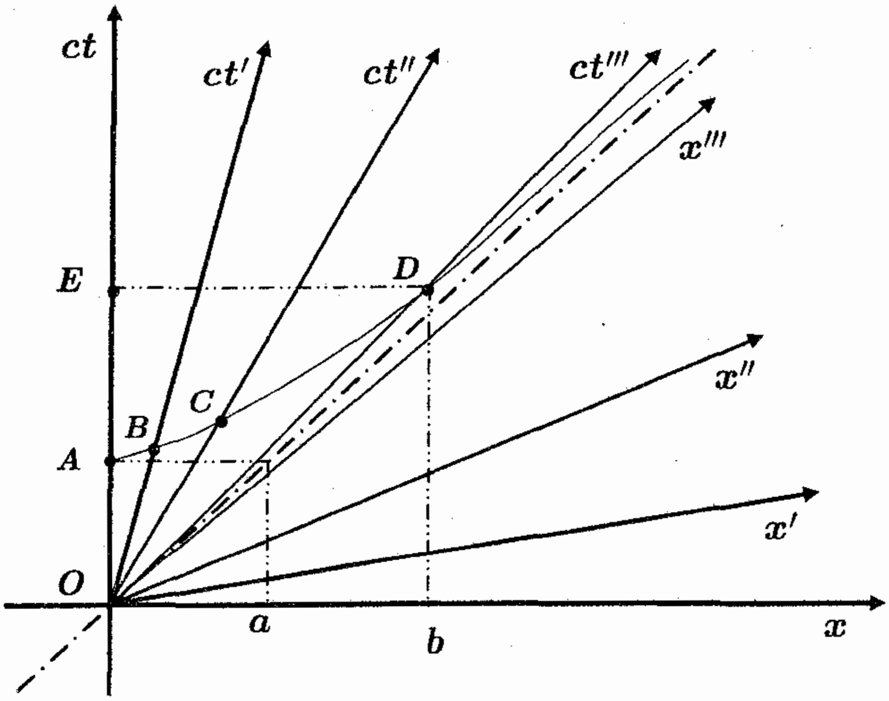
نکته ای که باید در اینجا به آن اشاره نمود، این است که برای صفر شدن بازهٔ بین دو رویداد، لازم نیست که عملاً پرتو نوری از یک رویداد به رویداد دیگر ارسال شود، بلکه تنها کافی است که این امرامکان پذیر باشد. یا اینکه بازهٔ بین دو رویداد، باید طوری باشد که شرط $c\Delta t = \Delta x$، برقرارگردد. بنابراین، با توجه به این توضیحات می توان گفت که اگر بازهٔ بین دو رویداد برابر صفر باشد، نمی توان چارچوبی را یافت که دو رویداد نسبت به آن چارچوب، در یک مکان یا در یک زمان روی دهند. درنتیجه، اینگونه رویدادها، نمی توانند در داخل مخروط نور یا درخارج آن واقع شوند. درنتیجه، چنین رویدادهایی باید روی مخروط نور واقع شوند. درحقیقت ویژگی اساسی این رویدادها به گونه ای است که مختصهٔ فضایی و زمانی آنها با یکدیگر برابرند. و این مطلب به این معنی است که ناظر $S$ برای رسیدن به رویدادهای روی مخروط نورآینده، باید با سرعت نور حرکت نماید. دقیقاً به همان صورتی که این ناظر با رویدادهای روی مخروط نور گذشتهٔ خود، با سرعت نور ارتباط برقرارکرده است. به طور خلاصه می توان گفت که ناظر $S$ تنها در صورتی می تواند با رویدادهای روی مخروط نور آیندهٔ خود ارتباط برقرار نماید که این ارتباط با سرعت نور صورت گیرد.

---

**مثال ۳ – ۳:** با استفاده از نمودار فضا- زمان یا مینکوفسکی، نشان دهید که چگونه ممکن است یک ناظر با سرعتی نزدیک به سرعت نور، مسافت ۶۰۰ هزار کیلومتر را در یک ثانیه طی نماید.

**جواب :** با توجه به نمودار فضا- زمان (۳-۱۸)، یک ناظر می تواند به هر نقطه از فضا- زمان سفرکند. به عنوان مثال، فرض کنید که ناظر ما می خواهد به ستاره ای مسافرت کند که فاصلهٔ آن از زمین یا چارچوب $S$، برابر ۶۰۰ هزارکیلومتر می باشد. و او قصد دارد این مسافرت را در مدت یک ثانیه انجام دهد. درابتدا ممکن است، چنین به نظر برسد که این مسافرت در این مدت زمان امکان پذیر نباشد؛ زیرا پرتو نور در یک ثانیه حداکثرمی تواند ۳۰۰ هزار کیلومتر را طی کند. بنابراین، چطور ممکن است، این ناظر با سرعتی کمتر از

سرعت نور مسافت ۶۰۰ هزار کیلومتر یا یا بیشتر را در مدت یک ثانیه طی نماید. اما با توجه به نمودار (۳-۱۸)، اگر این ناظر به ترتیب چارچوبهای $S'$ ، $S''$ ، $S'''$ و ... را برای مسافرت خود در نظر بگیرد، دراین صورت، با توجه به مطالبی که در بخش۳-۴ ، در بارهٔ مقیاس بندی محورهای چارچوبهای مرجع بیان شد، واحد زمان برای چارچوبهای مرجع انتخابی او به ترتیب $OB$، $OC$، $OD$ و ... خواهد بود. درواقع، $B$، $C$، $D$ و ... محل تلاقی محور زمان چارچوبهای $S'$ ، $S''$ ، $S'''$ و ... با هذلولی واحد $c^۲t^۲-x^۲=۱$ می باشند.




شکل(۳-۱۸) : مقایسهٔ واحد زمان در چارچوبهای مرجع مختلف

بنابراین، اگر این ناظر درامتداد $OD$ مسافرت خود را آغاز نماید، دراین صورت، $OD$ محور زمان یا به عبارت دیگر، جهانخط او خواهد بود و از نظر او $OD$ برابر واحد زمان یا برابر یک ثانیه می باشد. اما می دانیم زمان متناظر درچارچوب ساکن $S$، یعنی $OE$، بزرگتر از یک ثانیه می باشد. همچنین، اگر $oa$ و $ob$را به ترتیب ۳۰۰ هزار و ۶۰۰ هزار کیلومتر در نظر بگیریم، دراین صورت، این ناظرمی تواند در مدت یک ثانیه ۶۰۰ هزار کیلومتر را طی کند.

اکنون، می توان سرعت این ناظر را نیز به دست آورد. از نظر ناظر ساکن $S$، ناظر ما دو واحد فضایی، یعنی $x_b=۲(۳۰۰۰۰۰)km$ را طی می کند. بنابراین، سرعت این ناظر نسبت به چارچوب $S$ برابر $u=x_b/t$ خواهد بود. دراین صورت، با داشتن $t$ می توان سرعت ناظر را به دست آورد. برای به دست آوردن $t$، می توان از هذلولی واحد $c^۲t^۲-x^۲=۱$ استفاده

کرد. بنابراین، از این رابطه داریم: $t = \sqrt{۱ + x^۲/c^۲}$. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$t_b = \sqrt{۱+ x_b^۲/c^۲}$$
$$= \sqrt{۱+ \frac{[۲(۳\times ۱۰^۸\ m)]^۲}{(۳\times ۱۰^۸\ m)^۲}} \qquad (۵۳\text{-}۳)$$
$$= \sqrt{۵}\ s$$

که دراین صورت، سرعت ناظر $u = ۲c/\sqrt{۵}$ یا تقریباً برابر $u \simeq ۰/۹c$ به دست می آید.

همچنین، با توجه به شکل(۳-۱۸) مشاهده می گردد که با افزایش سرعت چارچوبها نسبت به چارچوب $S$، شیب محور زمان یا به عبارت دیگر، جهانخط ناظر واقع در این چارچوبها کاهش یافته و بالعکس شیب محور فضایی یا خط همزمانی این چارچوبها افزایش می یابد. از طرف دیگر، با کاهش شیب محور زمان این چارچوبها نسبت به محورهای چارچوب $S$، اندازهٔ واحد زمان یا فاصلهٔ مبدأ تا محل تلاقی محور زمان این چارچوبها با هذلولی واحد $c^۲t^۲ - x^۲ = ۱$ افزایش می یابد. درنتیجه، با افزایش سرعت یک چارچوب نسبت به چارچوب ساکن $S$، محورهای فضایی و زمانی آن به سمت یکدیگر میل می کنند. و درحد، یعنی اگر فرض نماییم که سرعت چارچوب برابر $c$ باشد، در این حالت محورهای فضا و زمان چارچوب منطبق برجهانخط نور می شوند. بنابراین، می توان گفت که اندازهٔ واحد زمان در چارچوبی که با سرعت نورحرکت می کند، از نظر ناظر واقع در چارچوب ساکن $S$، بی نهایت می گردد. در صورتی که این واحد زمان، از نظر ناظری که با سرعت نور حرکت می کند، همان یک ثانیه است.

همان طور که می دانیم فوتونها ذراتی با جرم سکون صفر می باشند. همچنین، ذرات دیگری مانند نوترینوها که در پرتوهای خورشیدی یافت می شوند، ذراتی با جرم سکون تقریباً صفر هستند. شیب جهانخط اینگونه ذرات، نسبت به محورهای چارچوب ساکن $S$، برابر ۴۵ درجه می باشد. بنابراین، می توان گفت که محورهای فضایی و زمانی این ذرات برهم منطبقند. این مطلب به آن معنی است که جهانخط چنین ذراتی منطبق برخط همزمانی آنها است. یعنی اگر فرض نماییم که (البته، می دانیم فرض نادرستی است)، ناظری بتواند با سرعت نور حرکت کند، دراین صورت، چنین ناظری می تواند همهٔ رویدادهایی را که بازهٔ

فضا- زمان آنها برابر صفر است، به طور همزمان و در یک مکان مشاهده کند؛ زیرا برای چنین ناظری، خطوط همزمانی و هم مکانی بر یکدیگر منطبق می شوند.

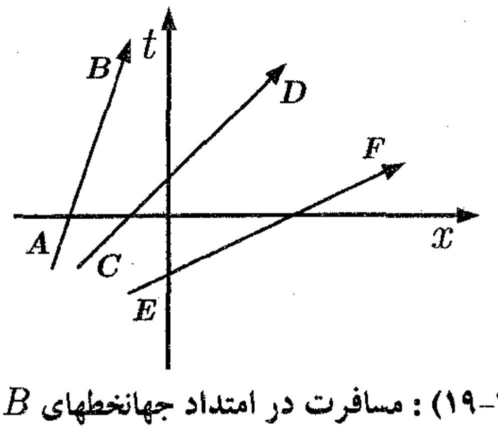
از این توضیحات می توان چنین برداشت کرد که اگر فوتونی بخواهد، مثلاً فاصلهٔ فضایی به اندازهٔ قطر کهکشان راه شیری را طی نماید، از نظر ناظر ساکن $S$، مدت زمان طی این مسافت برابر ۱۰۰ هزار سال می باشد، در صورتی که از نظر ناظر همراه فوتون، این مسافت تنها در مدت یک واحد زمان یا به عبارت دیگر، درمدت یک ثانیه پیموده می شود.

اما نکته ای که در پایان می توان به آن اشاره نمود، این است که با توجه به این که هیچ ذره ای با جرم سکون مخالف صفر، نمی تواند سرعتی برابر سرعت نور یا بزرگتر از آن داشته باشد، درنتیجه شیب جهانخط چنین ذراتی، درهیچ نقطه ای از فضا- زمان، نمی تواند کمتر از ۴۵ درجه شود. به بیان دیگر، جهانخط این گونه ذرات، در هر نقطه از فضا- زمان باید در درون مخروط نور ذره درآن نقطه قرار گیرد.

---

**مثال ۳ – ٤:** با توجه به شکل (۳–۱۹)، توضیح دهید که مسافرت در امتداد کدام یک ازجهانخط های نشان داده شده، برای یک ناظر یا ذره امکان پذیرمی باشد.

**جواب :** با توجه شکل(۳–۱۹)، اگرجهانخط $AB$ را در نظر بگیریم، ذره یا ناظری که در امتداد آن حرکت می کند، در واقع، باید مسافتی کوتاه را در مدت زمانی طولانی طی کند. البته، او می تواند این مسافرت را با سرعتی کوچکتر از سرعت نور انجام دهد.




**شکل (۳–۱۹) : مسافرت در امتداد جهانخطهای $AB$، $CD$ و $EF$.**

حال، اگرجهانخط $CD$ در نظرگرفته شود، با توجه به اینکه شیب این جهانخط برابر ۴۵ درجه است، دراین صورت، این ناظر یا ذره باید دقیقاً یک واحد فضایی را در مدت یک

واحد زمانی طی نماید. و این کار در صورتی امکان دارد که سرعت ناظر یا ذره برابر سرعت نور باشد. بنابراین، اگر ذره یا ناظر ما بدون جرم سکون باشد، مسافرت در امتداد مسیر $CD$ برایش امکان پذیر می باشد؛ زیرا تنها ذراتی می توانند با سرعت $c$ حرکت کنند که جرم سکون آنها برابر صفر باشد. این مطلب در فصل بعد بررسی می گردد.

اکنون، اگر جهانط $EF$ را درنظر بگیریم، یا اگر امتداد $EF$ بخواهد جهانخط یک ذره یا ناظری باشد، دراین صورت، این ذره یا ناظر باید مسافتی طولانی را در مدت زمان کوتاهی طی نماید. در این حالت، شیب جهانخط ذره یا ناظر کوچکتر از ۴۵ درجه بوده و سرعت ذره یا ناظر نیز باید بزرگتر از سرعت نور باشد. بنابراین، مسافرت در امتداد $EF$ امکان پذیر نخواهد بود.

## ۳ - ۷ : زمان ویژه

به طورخلاصه، زمان ویژه[1] را می توان زمانی درنظرگرفت که در چارچوب سکون یک ساعت اندازه گرفته می شود. به عبارت دیگر، بازهٔ زمانی بین دو رویداد را که بر روی جهانخط یک ناظر رخ می دهند، می توان به عنوان زمان ویژه برای آن ناظر درنظرگرفت. بنابراین، برای هر ناظرمتحرک می توان زمان ویژه ای را تعریف کرد. حال، با مراجعه به شکل (۳-۱۸)، بازه های زمانی $OA$، $OB$، $OC$ و ... را می توان به ترتیب زمان ویژه در چارچوبهای مرجع $S$، $S'$ ، $S''$ و ... در نظر گرفت؛ زیرا این بازه ها به وسیلهٔ ساعتهایی ثبت می شوند که در مبدأ این چارچوبها واقع شده اند. درحقیقت، نقاط $A$ ، $B$، $C$ و ... محل تلاقی محور زمان این چارچوبها، یا به عبارت دیگر، جهانخط این ناظرها با هذلولی واحد $c^۲t^۲ - x^۲ = ۱$ می باشند. درنتیجه، درچارچوب $S$، محور زمان چارچوبهای فوق، این هذلولی را در $x$ های مختلف قطع می کنند. درواقع، بازهٔ زمانی بین محل تلاقی محور زمان این چارچوبها با هذلولی فوق، از مبدأ مشترک چارچوبها، برابر زمان ویژه در هرکدام ازاین چارچوبها می باشد. بر این اساس، زمان ویژه در چارچوب $S$، از تلاقی محور زمان ($x = ۰$) این چار چوب با هذلولی $c^۲t^۲ - x^۲ = ۱$ به دست می آید. یعنی

1- Proper time

$$c^2t^2 - x^2 = 1 \Rightarrow c^2t_A^2 - (0)^2 = 1 \qquad (۵۴-۳)$$

که دراین صورت، $c^2t_A^2 = 1$ یا $ct_A = OA = 1$ می باشد. این بازهٔ زمانی، معمولاً با $c\tau_A$ که مقداری ثابت در $S$ است، نشان داده می شود. همچنین، می توان زمان ویژهٔ مربوط به ناظرهای دیگر را نیز با توجه به سرعت آنها نسبت به چارچوب $S$ به دست آورد. برای این منظور، می توان از بازهٔ ناوردای فضا- زمان استفاده نمود. بنابراین، داریم:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (۵۵-۳)$$

حال، با توجه به تعریف زمان ویژه درچارچوبهای مختلف، رابطهٔ(۳-۵۵) را می توان به صورت

$$ds^2 = c^2dt^2 = c^2d\tau^2 \qquad (۵۶-۳)$$

نوشت؛ زیرا همان طور که قبلاً بیان شد، زمان ویژه را می توان بازهٔ زمانی بین دو رویداد معین در نظر گرفت که در امتداد جهانخط ناظر واقع درچارچوبهای مختلف رخ می دهند. دراین صورت، بازهٔ فضایی بین این دو رویداد برابر صفر خواهد بود. اکنون، می توان از روابط (۳-۵۵) و (۳-۵۶)، نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= dt^2\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)\right] \qquad (۵۷-۳) \\ &= dt^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

بنابراین، می توان نوشت:

$$d\tau^2 = dt^2\left[1 - (v^2/c^2)\right] \qquad (۵۸-۳)$$

در(۳-۵۸)، $v$ سرعت ناظر نسبت به چارچوب ساکن $S$ می باشد. بنابراین، از رابطهٔ فوق داریم

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2} \qquad (۵۹-۳)$$

یا

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (۶۰-۳)$$

رابطهٔ (۳-۶۰)، در حقیقت، ارتباط بین زمان ویژهٔ $d\tau$ و زمان $dt$ را نشان می دهد. حال با توجه به شکل(۳-۱۸)، بازهٔ زمانی $oc = \tau_c$ که در چارچوب $S''$ زمان ویژه است، از نظر

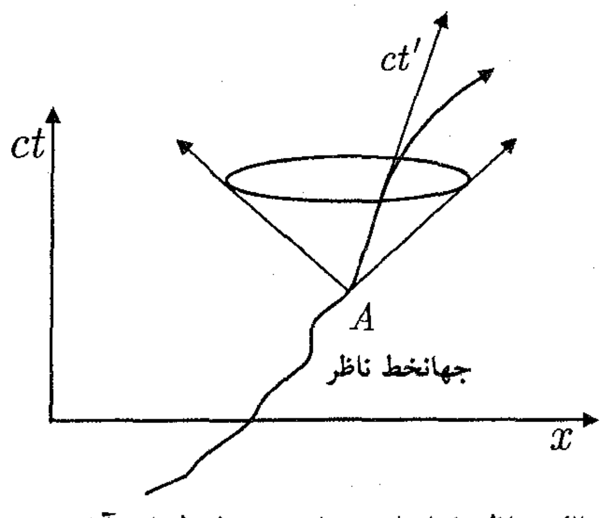
ناظر واقع در چارچوب ساکن $S$، با رابطهٔ

$$t_c = \frac{\tau_c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (۶۱-۳)$$

داده می شود که همان رابطهٔ اتساع زمان می باشد.

## ۳ - ۸ : آهنگ کار ساعت ناظرهای شتابدار

همان طور که قبلاً اشاره گردید، جهانخط یک ناظر یا یک ذره درهر نقطه یا رویداد از جهانخط ناظر یا ذره، باید در داخل مخروط نور مربوط به آن رویداد قرارداشته باشد. در نتیجه، در هرلحظه روی جهانخط ناظر یا ذره، می توان چارچوب لختی تعیین کرد که ناظر یا ذرهٔ شتابدار، نسبت به آن ساکن باشد. این چارچوب را اصطلاحاً، چارچوب سکون آنی[1] یا لحظه ای ناظر یا ذره می نامند. بنابراین، مطابق شکل (۳- ۲۰)، محور زمان این چارچوب، در هر لحظهٔ معین از جهانخط ناظر، مماس برجهانخط ناظرخواهد بود.




شکل (۳-۲۰) : ناظر شتابدار و چارچوب لحظه ای آن و مخروط نور در رویداد $A$ در امتداد جهانخط ناظر $S'$

در نتیجه، دراین حالت با فرض عدم تأثیرشتاب روی آهنگ کار ساعت همراه ناظر، می توان زمان $t'$ را، یعنی زمانی را که به وسیلهٔ ساعت همراه ناظر $S'$ ثبت می شود، با زمان ناظر شتابدار یکسان در نظر گرفت. حال، اگر فرض کنیم که $S'$، چارچوب سکون آنی ناظر یا ذره باشد، دراین صورت، می توان نوشت:

1- Instantaneous rest frame

$$\begin{aligned} ds^{۲} &= c^{۲}dt'^{۲} - dx'^{۲} \\ &= c^{۲}dt'^{۲} - ۰ \\ &= c^{۲}dt'^{۲} \end{aligned} \tag{۶۲-۳}$$

یا

$$ds = cdt' = cd\tau' \tag{۶۳-۳}$$

رابطهٔ (۳-۶۳)، بیان می کند که متریک $ds$، برابر بازهٔ زمانی است که به وسیلهٔ ساعت همراه ناظر شتابدارثبت می شود. از این رو می توان آن را به عنوان زمان ویژهٔ ناظر شتابدار در نظرگرفت. درنتیجه، در این حالت رابطهٔ(۳-۶۰) را می توان به صورت

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{۱-\beta^{۲}(t)}} \tag{۶۴-۳}$$

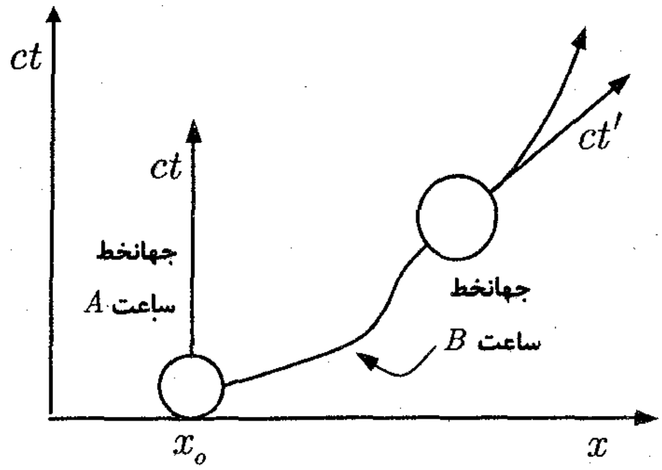
نوشت. که درآن $\beta^{۲}(t)$ سرعت لحظه ای ناظریا ذرهٔ شتابدار، نسبت به چارچوب ساکن $S$ می باشد. از طرف دیگر، می دانیم که زمان ویژه کمیّتی ناوردا ست. بنابراین،در این حالت می توان از آن به عنوان یک پارامتر روی جهانخط ناظر یا ذره استفاده کرد. در نسبیت، ناوردا بودن زمان ویژه اهمیت زیادی دارد. به عنوان مثال، هنگام بحث در مورد دینامیک یک ذره نسبیتی، برای به دست آوردن سرعت آن ، ازچار بردار مکان ذره باید نسبت به پارامترناوردای $s$ یا $\tau$ مشتق گرفت. بنابراین، به طور خلاصه می توان گفت که شتاب تاثیری روی آهنگ کار ساعت ندارد و تجربه نیز این مطلب را تأیید می کند.

## ۳ - ۹ : بستگی زمان ویژه به مسیر

در دو بخش قبل، زمان ویژه برای یک ناظر یا ذره ای که دارای حرکت یکنواخت یا شتابدار باشد، تعریف گردید. با توجه به توضیحاتی که قبلاً داده شد، به طور خلاصه می توان گفت که هرناظر یا ذره ای با توجه جهانخطی که در فضا- زمان طی می کند، زمان را از روی ساعتی که به همراه خود دارد، اندازه می گیرد. و بازهٔ زمانی را که در چارچوب سکون ساعت ثبت می شود، زمان ویژه می نامند. اکنون، می توان نشان داد که زمان ویژه بستگی به مسیرحرکت ساعت متحرک دارد؛ زیرا با توجه به اینکه هر ناظر یا ذره ای در امتداد جهانخط های معینی

حرکت می کنند. درنتیجه، انتظار داریم که هرکدام از این ناظرها، زمان ویژه ای را برای خود تعریف نمایند. برای توضیح بیشتر، دو رویداد مانند $A$ و $B$ را در نظر می گیریم. همچنین، می دانیم که این دو رویداد را می توان به وسیله جهانخط های مختلفی به یکدیگر وصل نمود. دراین صورت، به ازای هرکدام از این جهانخط ها، می توان زمان ویژه ای را در نظرگرفت.

در شکل(۳-۲۱)، جهانخط دو ساعت رسم شده است. به طوری که یکی ازآنها درچارچوب $S$ ساکن است و دیگری درامتداد محور $x$، با سرعت غیر یکنواخت حرکت می کند. حال زمانی که به وسیلهٔ این دو ساعت ثبت می شود، درمقایسه با یکدیگر تفاوت خواهند داشت؛ زیرا با توجه به مطالبی که بیان گردید، هرکدام از این ساعتها که در امتداد جهانخطی حرکت می کنند، دارای زمان ویژهٔ معینی خواهند بود. بنابراین، می توان ادعا نمود که آهنگ کار ساعت بستگی به مسیری دارد که می پیماید.




**شکل (۳-۲۱) : بستگی آهنگ کار ساعت به مسیر**

حال، با این توضیحات می توان نتیجه گرفت که اگر جهانخط معلومی در نظرگرفته شود، دراین صورت، هرناظر یا ذره ای که این جهانخط را طی کند، زمانی که ساعت همراه آنها ثبت می کند، یکسان خواهد بود. درواقع، زمان ویژه برای هر ساعتی دلخواه (اتمی، مکانیکی یا هر نوع دیگر) در طی یک جهانخط معین یکسان خواهد بود.

اکنون، با توجه به شکل(۳-۲۱) و رابطهٔ (۳-۶۴)، می توان بازهٔ زمانی که به وسیلهٔ این ساعتها در امتداد جهانخط مربوط به آنها ثبت می شود، با یکدیگر مقایسه کرد. برای این منظور، فرض کنید که از نظر ناظر $S$، یکی از ساعتها به مدت $\Delta t$ در امتداد محور $x$، با شتاب حرکت کند و ساعت دیگر به مدت $\Delta t$ در نقطهٔ $x_\circ$ ساکن بماند. دراین صورت،

برای ساعت ساکن می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int d\tau = \int_{t_۱}^{t_۲} dt\sqrt{۱-\beta^۲} \\ &= \int_{t_۱}^{t_۲} dt\sqrt{۱-\circ^۲} \qquad (۳\text{-}۶۵) \\ &= \int_{t_۱}^{t_۲} dt = \Delta t \end{aligned}$$

بنابراین، در این حالت $\Delta\tau = \Delta t$ می باشد. $\Delta t$ بازهٔ زمانی است که درچارچوب $S$ اندازه گیری می شود. برای ساعت متحرک نیز خواهیم داشت:

$$\Delta\tau' = \int_{t_۱}^{t_۲} dt\sqrt{۱-\beta^۲(t)} \qquad (۳\text{-}۶۶)$$

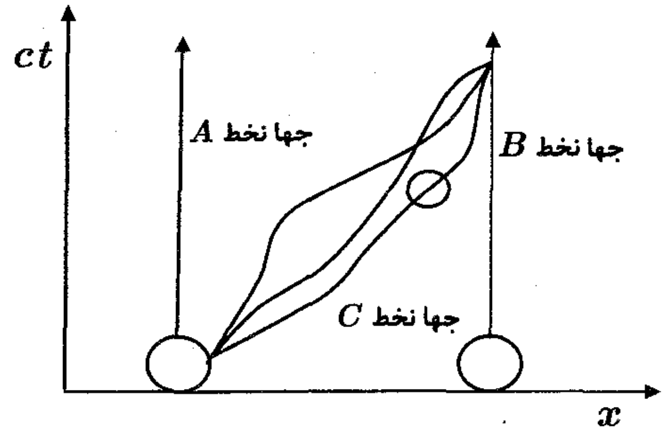
$\beta(t)$ در رابطهٔ(۳-۶۶)، سرعت ناظر شتابدار می باشد. اکنون، با مقایسهٔ روابط(۳-۶۵) و (۳-۶۶) با یکدیگر، می توان نتیجه گرفت که $\Delta\tau' < \Delta\tau$ می باشد؛ زیرا $\beta^۲(t)$ در رابطهٔ(۳-۶۶)، مثبت بوده و انتگرالده در این رابطه همیشه کوچکتر از یک است. بنابراین، به طورکلی می توان گفت که ساعت متحرک با آهنگ کندتری نسبت به ساعت ساکن کار می کند. همچنین، رابطهٔ (۳-۶۶) نشان می دهد که به ازای هرسرعت $\beta(t)$ یا به عبارت دیگر، به ازای هرجهانخط، یک زمان ویژه مانند $\Delta\tau'$ ، مربوط به آن خواهیم داشت. در بخش ۳-۱۶ در مورد ساعتهای متحرک یا باطلنمای دوقلوها مجدداً بحث می شود

## ۳ ـ ۱۰ : همزمان کردن ساعتها

همان طورکه در فصل اول اشاره گردید، درفیزیک کلاسیک می توان به دو روش ساعتهای دور از هم را همزمان کرد. یکی از این روشها استفاده از سیگنال یا علامت با سرعت بی نهایت می باشد که در این روش می توان همهٔ ساعتهای واقع در نقاط مختلف فضا را در یک آن همزمان کرد. درنتیجه، این کار منجر به مطلق یا ناوردا بودن زمان وایجاد یک زمان عام واحد برای همهٔ چارچوبها می گردد. روش دیگری که می توان در فیزیک کلاسیک، برای همزمان کردن ساعتهای دور از هم ازآن استفاده نمود، انتقال ساعت می باشد. البته، استفاده از این روش در صورتی امکان دارد که فرض نماییم که انتقال ساعت از یک نقطه به

نقطهٔ دیگر، تأثیری در طرز کار آن نداشته باشد. اما با توجه به مطالبی که در بخش قبل بیان شد، استفاده از روش انتقال ساعت درنسبیت امکان پذیر نمی باشد، زیرا بازهٔ زمانی که ساعتهای متحرک ثبت می کنند، بستگی به مسیر دارد.

برای توضیح بیشتر، فرض کنید که دو ناظر $A$ و $B$ که در فاصلهٔ دوری از یکدیگر قرار دارند، می خواهند ساعتهای همراه خودشان را با یکدیگرهمزمان نمایند. برای این منظور، با توجه به شکل (۳-۲۲)، اگرآنها ازساعت دیگری مانند ساعت $C$ استفاده کنند. دراین صورت، ابتدا باید ساعت $C$ با قرارگرفتن درمجاورت ساعت $A$، با $A$ همزمان شده و سپس برای همزمان کردن ساعت، $B$ به محل ساعت $B$ منتقل شود.



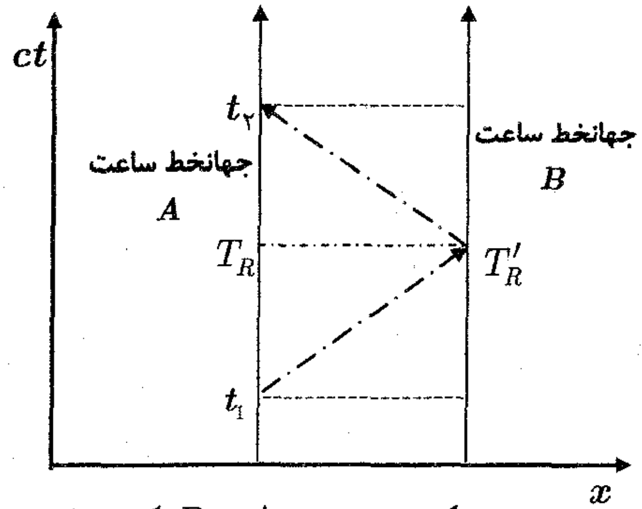

شکل(۳-۲۲) : بستگی زمان ویژه به مسیر

حال، باتوجه به شکل(۳-۲۲)، برای انتقال ساعت $C$ ازمکان ساعت $A$ تا مکان ساعت $B$ می توان جهانخط های مختلفی را انتخاب کرد. درنتیجه، ساعت $C$ بعد از طی هرکدام از این جهانخط ها در هنگام رسیدن به $B$، زمانهای مختلفی را نشان خواهد داد. بنابراین، برای همزمان کردن ساعتهایی که درفاصلهٔ دوری از یکدیگر قرار دارند، استفاده از این روش امکان پذیر نمی باشد. براین اساس، دراین گونه موارد می توان از علائم الکترومغناطیسی استفاده کرد. اکنون، دراینجا این روش را مورد بررسی قرار می دهیم.

در این روش هرکدام از ناظرهای همراه ساعتها، باید وضعیت یا اطلاعات مربوط به ساعتهای $A$ و $B$ ی خود را با ارسال سیگنال یا علامت به ناظر مقابل اطلاع دهد.

حال، با توجه به شکل (۳-۲۳)، فرض کنید که ناظر همراه ساعت $A$، در لحظهٔ $t_1$، یک سیگنال الکترومغناطیسی برای ناظر $B$ ارسال کند. و ناظر $B$ نیز پس ازدریافت سیگنال و ثبت زمان دریافت آن، بلافاصله آن را منعکس کند. درهنگام برگشت سیگنال و دریافت

آن به وسیلهٔ ناظر $A$، ساعت $A$ زمان $t_{۲}$ را ثبت می کند.




شکل (۳-۲۳) : همزمان کردن ساعتهای $A$ و $B$ که در فاصلهٔ دوری از یکدیگر قرار دارند.

از طرف دیگر، چون سرعت نور در هنگام رفت و برگشت ثابت است، بنابراین، ناظر $A$ نتیجه می گیرد که نیمی از زمان سیر نور، صرف رفتن و نیم دیگر صرف برگشتن آن می شود. به این ترتیب، او می تواند براحتی نتیجه بگیرد که رویداد بازتاب، یعنی $T'_R$ به وسیله $B$، باید همزمان با زمان $T_R$ در روی جهانخط $A$ ی خودش باشد. در نتیجه، رویداد $T_R$ دقیقاً در وسط راه زمان بین ارسال سیگنال و زمان دریافت آن به وسیلهٔ $A$ قرار دارد. بنابراین، ناظر $A$ می تواند زمان $T_R$ را از رابطهٔ

$$T_R = t_{۱} + \frac{۱}{۲}(t_{۲} - t_{۱}) = \frac{۱}{۲}(t_{۱} + t_{۲}) \qquad (۳-۶۷)$$

به دست آورد. اکنون، با توجه به این توضیحات، دو ناظر $A$ و $B$ برای همزمان کردن ساعتهایشان می توانند به صورت زیرعمل کنند. ابتدا ناظر $A$ در زمان $t_{۱}$، یک سیگنال به سمت ناظر $B$ ارسال می کند. ناظر $B$ نیز پس از دریافت سیگنال، زمان مربوط به دریافت سیگنال، یعنی $T'_R$ را بلافاصله به ناظر $A$ اطلاع می دهد. ناظر $A$ نیز پیام ارسال شده از جانب ناظر $B$ را در زمان $t_{۲}$ دریافت و آن را ثبت می کند. اکنون، ناظر $A$ با ثبت زمانهای $t_{۱}$ و $t_{۲}$ می تواند زمان $T_R$ را با استفاده از رابطهٔ(۳-۶۷) به دست آورد. درنتیجه این ناظر با داشتن $T_R$ و همچنین $T'_R$، می تواند ساعت خود را روی زمان $t$ که از رابطهٔ

$$t = (T'_R - T_R) + t_{۲} \qquad (۳-۶۸)$$

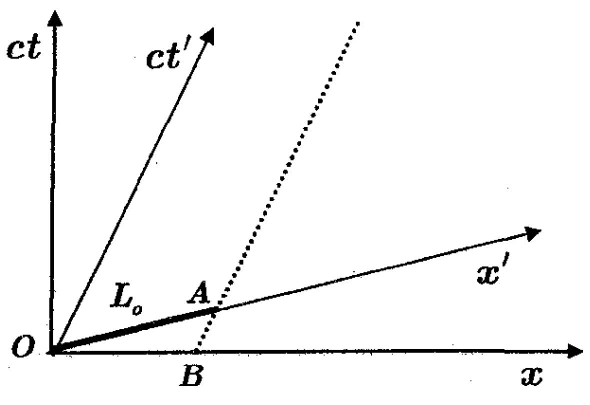
به دست می آید، میزان کند.

این روش را درواقع می توان یک روش عملی برای همزمان کردن ساعتهایی دانست که در فاصلهٔ دوری ازیکدیگر قرار دارند. بنابراین، ناظرهای مختلف با استفاده از این روش می توانند تعریف درستی ازهمزمانی در فضا- زمان به دست آورند. البته، باید توجه داشت که در اینجا حالتی در نظر گرفته شد که درآن، ناظرها نسبت به یکدیگر ساکن بودند. اما اگر آنها نسبت به هم ساکن نباشند، دراین صورت، همان طور که می دانیم، در مورد همزمانی توافق نخواهند داشت. البته، این موضوع نیز مشکلی ایجاد نمی کند؛ زیرا هر ناظرمی تواند برای خود یک تعریف بدون ابهام از همزمانی به دست می آورد.

## ۳ - ۱۱ : انقباض طول

فرض کنید که درچارچوب $S'$، میله ای به طول ویژهٔ $L_\circ$ درامتداد محور $x'$ این چارچوب قرارگرفته باشد. اکنون، می خواهیم با استفاده از نمودار مینکوفسکی ، طول میله را از دید ناظر $S$ به دست آوریم. همان طور که می دانیم، برای اندازه گیری طول میلهٔ متحرک، باید ابتدا وانتهای آن به طورهمزمان اندازه گرفته شود.

حال،با توجه به شکل(۳-۲۴)، در چارچوب $S'$، طول $OA$ برابر $L_\circ$ است. این طول به وسیله ناظر ساکن در $S'$ اندازه گرفته می شود و آن را طول ویژه می نامند؛ زیرا در چارچوب سکون میله اندازه گیری می شود. اکنون، برای به دست آوردن طول میله در چارچوب $S$، با استفاده از نمودار فضا- زمان می توان به صورت زیرعمل کرد.




شکل (۳-۲۴) : انقباض طول

ابتدا معادلهٔ جهانخط انتهای میله را از نظر ناظر واقع در چارچوب $S$ به دست می آوریم. برای این منظور، می توان مؤلفه های فضایی و زمانی مربوط به انتهای میله را با

استفاده از تبدیلات لورنتس به دست آورد. در این صورت، با توجه به اینکه $x'_{\circ} = \circ$ و $x'_A = L_{\circ}$، هستند و چون $ct'_A = \circ$ می باشد، بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_A &= \gamma(x'_A + \beta ct'_A) = \gamma L_{\circ} \\ ct_A &= \gamma(ct'_A + \beta x'_A) = \gamma\beta L_{\circ} \end{aligned} \qquad (۶۹-۳)$$

حال، با داشتن مختصات مربوط به رویداد اندازه گیری انتهای میله درچارچوب $S$، می توان معادله خطی راکه از $A$ می گذرد و موازی محور $ct'$ است، به دست آورد. درنتیجه، داریم:

$$ct - ct_A = \frac{1}{\beta}(x - x_A) \qquad (۷۰-۳)$$

اکنون، با درنظر گرفتن رابطهٔ (۳-۶۹)، می توان نوشت:

$$ct - \gamma\beta L_{\circ} = \frac{1}{\beta}(x - \gamma L_{\circ}) \qquad (۷۱-۳)$$

در نتیجه، با توجه به شکل(۳-۲۴)، محل تلاقی جهانخط انتهای میله را با محور $x$ یا $ct = \circ$ به دست می آوریم. با این کار درواقع، ابتدا و انتهای میله در چارچوب $S$ به طورهمزمان اندازه گرفته می شود. بنابراین،

$$\circ - \gamma\beta L_{\circ} = \frac{1}{\beta}(x_B - \gamma L_{\circ}) \qquad (۷۲-۳)$$

می باشد. دراین صورت، از رابطهٔ (۳-۷۲)، خواهیم داشت:

$$x_B = \frac{L_{\circ}}{\gamma} = L_{\circ}\sqrt{1-\beta^2} \qquad (۷۳-۳)$$

بنابراین، طول میله در چارچوب $S$، از رابطهٔ

$$L = x_B - x_{\circ} = L_{\circ}\sqrt{1-\beta^2} \qquad (۷۴-۳)$$

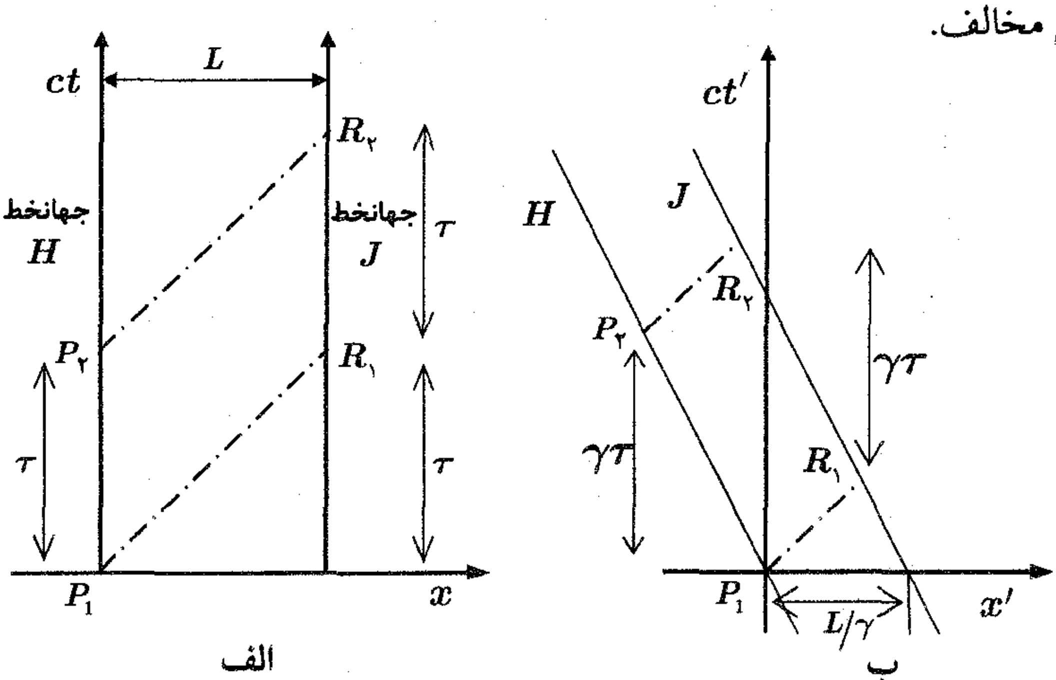
به دست می آید. اگرچه انقباض طول واقعیت دارد، اما مشاهدهٔ آن مشکل است. اگر بخواهیم از یک جسم متحرک عکس بگیریم، بعلت تأخیر زمانی در رسیدن نورازقسمتهای مختلف جسم به دوربین، عکس گرفته شده دارای اعوجاج خواهد بود. بدین معنی که نور از قسمتهایی از جسم که دورتر از دوربین هستند، باید از نورِ مربوط به قسمتهای نزدیکتر به دوربین، زودتر گسیل شود. در نتیجه تصویر گرفته شده از یک جسم که با سرعت نسبیتی حرکت می کند، همیشه دارای اعوجاج خواهد بود. یعنی اینکه جسم علاوه بر انقباض در راستای حرکت، دوران نیز می کند.

**مثال ۳- ۵: الف :** فرض کنید که دو ناظر $H$ و $J$، به ترتیب در سیاره های $A$ و $B$ زندگی می کنند. فاصلهٔ بین دو سیاره برابر $L$ بوده و هردو سیاره در امتداد محور $x$ واقع شده اند. حال، ناظر $H$ تصمیم می گیرد که برای دوستش $J$، دو پیام رادیویی به فاصلهٔ زمانی $\tau$ ارسال نماید. نمودار فضا- زمان مربوط به این دو ناظرو همین طور رویدادهای ارسال و دریافت پیام رادیویی به وسیلهٔ آنها را رسم نمایید.

**ب :** اکنون، فرض کنید که ناظر $S'$ با سرعت $u$ بین دو سیارهٔ $A$ و $B$، از $A$ به سمت سیارهٔ $B$ درحرکت باشد. دراین صورت، نمودار فضا- زمان را از دید $S'$ نیز رسم نمایید.

**جواب : الف :** فرض کنید که $P_۱$ و $P_۲$، رویدادهای ارسال پیام رادیویی به وسیلهٔ ناظر $H$ باشند. همچنین، فرض کنید که ناظر $J$ این پیامها را به ترتیب در $R_۱$ و $R_۲$ دریافت نماید. دراین صورت، نمودار فضا- زمان رویدادها و همین طور جهانخط ها به صورت شکل(۳-۲۵) الف خواهد بود. این نمودار نسبت به چارچوب سکون $H$ رسم شده است.

**ب :** درچارچوب $S'$، ناظرهای $H$ و $J$ با سرعت $-u$ حرکت می کنند. درنتیجه، جهانخط های $H$ و $J$ درچارچوب $S'$، دقیقاً برابرجهانخط $S'$ در چارچوب $H$ بوده، اما با شیبی مخالف.




شکل (۳-۲۵) : الف : چارچوب سکون $H$ ب : چاچوب سکون $S'$

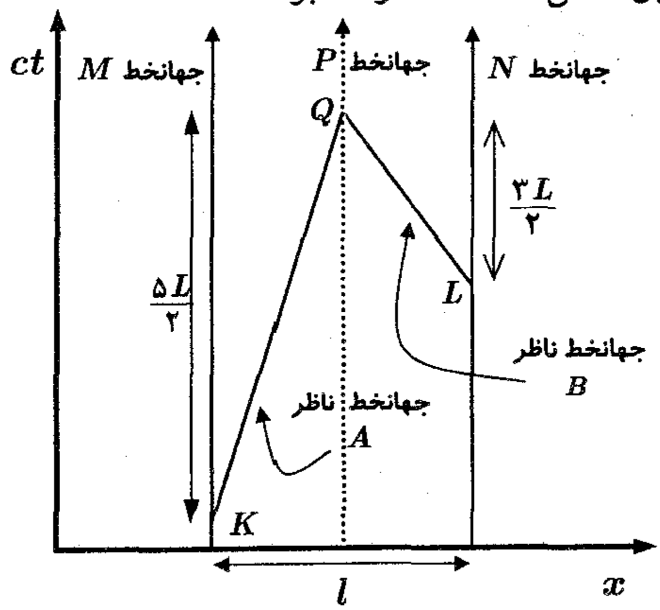
از طرف دیگر، با توجه به اثراتساع زمان، در چارچوب $S'$ بازهٔ زمانی بین دو

رویداد $P_1$ و $P_2$ دیگر برابر $\tau$ نمی باشد، بلکه برابر $\Delta t' = \gamma(u)\tau$ خواهد بود. این مطلب در مورد بازهٔ زمانی بین رویدادهای $R_1$ و $R_2$ نیز صادق است. همچنین، با توجه به پدیدهٔ انقباض طول، از دید $S'$ بازه فضایی بین $H$ و $J$ برابر $L$ نیست، بلکه برابر $\Delta x' = L/\gamma(u)$ می باشد. اما نکتهٔ مهم دیگر اینکه با توجه به اصل دوم نسبیت، سرعت نور در همهٔ چارچوبها یکسان می باشد. بنابراین شیب جهانخط نور یا شیب مربوط به پیامهای را دیویی در هر دوچارچوب $S'$ و $H$ یکسان بوده و برابر $\pi/4$ می باشد. در نتیجه با توجه به این توضیحات، نمودار فضا- زمان در چارچوب $S'$ به صورت شکل (۳-۲۵) ب، خواهد بود.

---

**مثال ۳ – ٦:** فرض کنید که دو ناظر $A$ و $B$ در سیاره های $M$ و $N$ زندگی می کنند. و فاصلهٔ بین دو سیاره را برابر $l$ درنظر بگیرید. همچنین، فرض کنید که دقیقاً دروسط خط واصل دو سیارهٔ $M$ و $N$، سیارهٔ دیگری به نام $P$ قرارگرفته باشد. حال، دوناظر $A$ و $B$ تصمیم می گیرند که در زمان معینی درسیارهٔ $P$، با یکدیگر ملاقات نمایند. همچنین، سرعت ناظرهای $A$ و $B$ را به ترتیب برابر $c/5$ و $c/3$ درنظر بگیرید. دراین صورت، نمودار فضا- زمان دو ناظر را رسم نمایید.

**جواب :** اگر جهت محور $x$ را ازسیارهٔ $M$ به سمت سیارهٔ $N$ رسم نماییم، دراین صورت، جهانخط دو ناظر مطابق شکل(۳-۲۶)، خواهد بود.



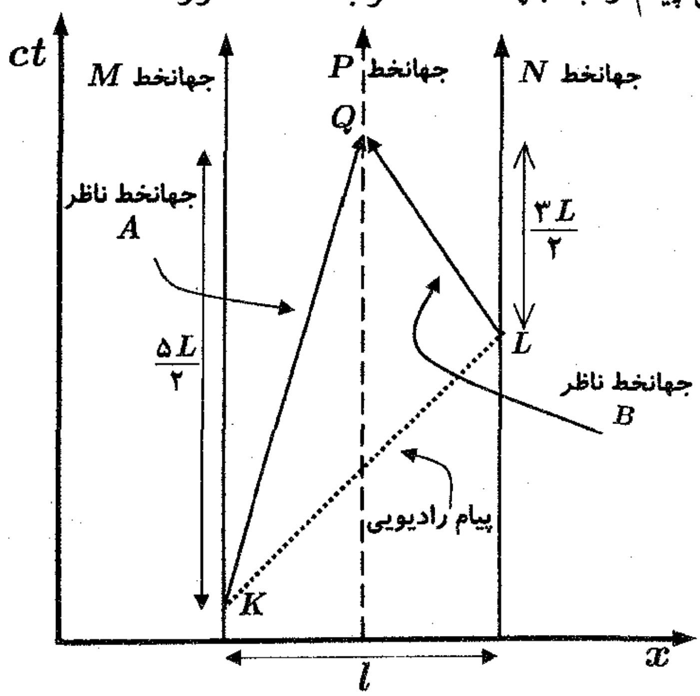

شکل(۳-۲۶) : رسیدن همزمان ناظرهای $A$ و $B$ به سیارهٔ $P$

در شکل(۳-۲۶)، $K$ و $L$، به ترتیب رویدادهای مربوط به ترک دو ناظر $A$ و $B$ از سیاره های

محل زندگی خود می باشند. همچنین، محور زمان $t$ در $c$ ضرب شده است تا $ct$ برحسب فاصله بیان شود. از طرف دیگر، چون محور زمان در $c$ ضرب شده است، در نتیجه عکس شیب، یعنی $\Delta x / c\Delta t$ برابرسرعت ذره برحسب واحد $c$ خواهد بود. به عبارت دیگر، $\beta = v/c$ می باشد. بنابراین، چون هیچ ناظری نمی تواند با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت کند، در نتیجه، شیب مماس بر جهانخط هر ناظر درهیچ نقطه ای واقع بر جهانخط آنها، نمی تواند کوچکتر از ۴۵ درجه باشد

اما سؤالی که دراینجا مطرح است، این است که ناظر $A$ و $B$ درچه زمانهایی باید سیاره های خود را ترک کنند، تا بتوانند به طورهمزمان به سیارهٔ مقصد، یعنی $P$ برسند؟

برای پاسخ به این سؤال می توان از نمودار فضا - زمان (۳-۲۷) استفاده کرد. باتوجه به نمودار(۳-۲۷)، آنها می توانند با یک پیام رادیویی به یکدیگر اطلاع دهند که در چه لحظه ای باید سیاره های محل سکونت خودشان را ترک کنند تا بتوانند به طور همزمان به سیارهٔ $P$ برسند. درشکل (۳-۲۷)، اگر از $L$، یعنی رویداد ترک ناظر $B$ از سیارهٔ $N$، یک پیام رادیویی درخلاف جهت جریان زمان به سمت سیارهٔ $M$ رسم نماییم، با این کار می توان رویداد محل تلاقی پیام را با جهانخط ناظر به دست آورد.




شکل(۳-۲۷) : ترک همزمان ناظرهای $A$ و $B$ از سیاره های $M$ و $N$

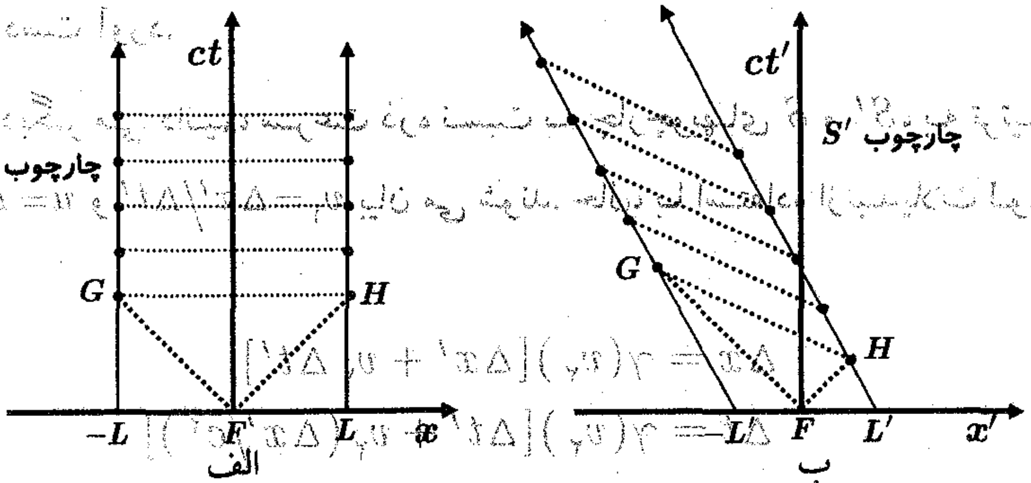
حال، با توجه به شکل این رویداد، دقیقاً منطبق بر رویداد $K$، یعنی رویداد ترک ناظر $A$ از سیارهٔ $M$ می شود. بنابراین، می توان به این نتیجه رسیدکه برای اینکه دو ناظر $A$

و $B$ بتوانند به طور همزمان به سیارهٔ $P$ برسند، ناظر $A$ باید دقیقاً در لحظه ای که سیاره اش را ترک می کند، با یک پیام رادیویی به ناظر $B$ اطلاع دهد که به راه افتاده است. همچنین، ناظر $B$ نیز همزمان با دریافت این پیام، باید سیاره اش را به سمت سیارهٔ $P$ ترک کند. محاسبات مربوط به مدت زمانی که هر کدام از این ناظرها در راه بوده اند در شکل (۳-۲۷) مشخص شده است.

## ۳ - ۱۲ : نسبیت همزمانی

در این بخش، با استفاده از نمودار فضا ـ زمان، نسبی بودن همزمانی را نشان می دهیم. برای این منظور، فرض کنید که می خواهیم دو ساعت را که در فاصلهٔ $2L$ از یکدیگر قرار دارند همزمان کنیم. ساده ترین روش برای همزمان کردن این دو ساعت این است که دقیقاً در وسط فاصلهٔ بین دو ساعت جرقه ای زده شود. و ساعتها که در ابتدا روی عدد صفر میزان شده اند، به محض دریافت نور حاصل از جرقه، شروع به کار نمایند.

درشکل (۳-۲۸) الف، نمودار فضا ـ زمان در چارچوب سکون ساعتها، یعنی $S$ برای همزمان کردن آنها رسم شده است. در این نمودار، ساعتها در مکان $x = \pm L$ قرار گرفته اند و جرقه درمبدأ مختصات چارچوب $S$ زده می شود.




شکل(۳-۲۸) : نسبی بودن همزمانی

رویداد زدن جرقه با $F$ و رویدادهای دریافت پرتو نور حاصل از جرقه، به وسیلهٔ ساعتها با $G$ و $H$ نشان داده شده اند. بعد از همزمان شدن ساعتها، آهنگ تیک تاک حاصل ازکار آنها به صورت رویدادهایی روی جهانخط ساعتها مشخص شده اند. با اتصال رویدادهای متناظر در

دو ساعت به یکدیگر، می توان خطوط همزمانی را نیز به دست آورد.

اکنون، فرض کنید که چارچوب $S'$ نسبت به چارچوب $S$ با سرعت $v$ درجهت مثبت محور $x$ این چارچوب درحرکت باشد. دراین صورت، درچارچوب $S'$ جهانخط ساعتها به صورت قائم نخواهند بود؛ زیرا آنها با سرعت $-v$ نسبت به چارچوب $S'$ حرکت می کنند. از طرف دیگر، با توجه به اصل دوم نسبیت، جهانخط نور درهر دو چارچوب باید دارای شیب ۴۵ درجه باشد. بنابراین، نمودار فضا- زمان و جهانخط ساعتها درچارچوب جدید، به صورت نمودار (۳-۲۸) ب، خواهد بود. با توجه به نمودار(۳- ۲۸) ب، خطوط همزمانی در چارچوب $S'$، دیگربه صورت افقی نیست. درنتیجه، اگر دو رویداد، دریک چارچوب همزمان باشند، در چارچوبهای دیگر در حالت کلی همزمان نخواهند بود.

## ۳ - ۱۳ : جمع نسبیتی سرعتها با استفاده نمودارمینکوفسکی

برای به دست آوردن جمع نسبیتی سرعتها، ابتدا حالت زیر را در نظر می گیریم. فرض کنید که چارچوب $S'$ با سرعت $v_۲$ نسبت به چارچوب $S$، حرکت می کند. همچنین فرض کنید که ذره ای با سرعت $v_۱$ نسبت به چارچوب $S'$، درهمان راستا درحرکت باشد. یعنی $\vec{v}_۱ \parallel \vec{v}_۲$ باشد. دراین صورت، می توان سرعت ذره را نسبت به چارچوب $S$، به صورت زیر به دست آورد.

از طرف دیگر می دانیم، سرعت ذره نسبت به چارچوبهای $S$ و $S'$، به ترتیب با روابط $u = \Delta x/\Delta t$ و $v_۱ = \Delta x'/\Delta t'$ بیان می شوند. حال، با استفاده ازتبدیلات لورنتس داریم:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(v_۲)[\Delta x' + v_۲ \Delta t'] \\ \Delta t &= \gamma(v_۲)[\Delta t' + v_۲ (\Delta x'/c^۲)] \end{aligned} \qquad (۷۵\text{-}۳)$$

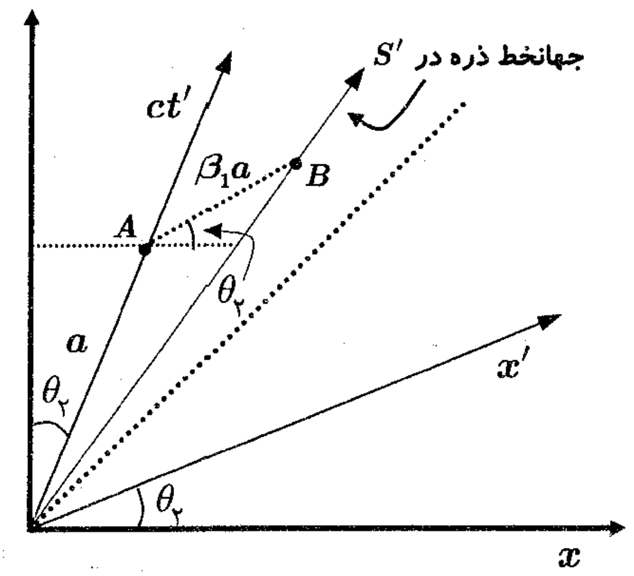
در نتیجه، می توان نوشت:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(v_۲)[\Delta x' + v_۲ \Delta t']}{\gamma(v_۲)[\Delta t' + v_۲ (\Delta x'/c^۲)]} \qquad (۷۶\text{-}۳)$$

اکنون، با تقسیم صورت و مخرج رابطهٔ (۳-۷۶) بر $\Delta t'$، جمع نسبیتی سرعتها به صورت

$$u = \frac{v_۱ + v_۲}{۱ + (v_۱ v_۲ / c^۲)} \qquad (۳\text{-}۷۷)$$

به دست می آید. حال، می خواهیم با استفاده از نمودار فضا- زمان، رابطهٔ(۳-۷۷) را به دست آوریم. برای این منظور، می دانیم که چارچوب $S'$ با سرعت $v_۲$، نسبت به چارچوب $S$ و در راستای مثبت محور $x$ حرکت می کند. همچنین ذره نیز با سرعت $v_۱$، نسبت به چارچوب $S'$، درهمان راستا حرکت می کند.




شکل (۳-۳۰) : جمع نسبیتی سرعتها با استفاده از نمودار فضا ـ زمان

بنابراین، با توجه شکل (۳-۳۰)،می توان نقطه ای مانند $B$ را روی جهانخط ذره مشخص کرد. حال، فرض می کنیم که مختصات این نقطه در $S$ به صورت $(x, ct)$ باشد. درنتیجه، هدف ما دراینجا به دست آوردن $u = x/t$ یا $\beta_u = x/ct$ می باشد. ازطرف دیگر می دانیم که مختصات نقطهٔ $B$ درچارچوب $S'$ برابر $(x', ct')$می باشد. اکنون، اگر $ct'$را برابر $a$ در نظر بگیریم. دراین صورت، با توجه به فرض مسأله، می توان نوشت: $x' = v_۱ t' = \beta_۱ a$؛ زیرا سرعت ذره نسبت به چارچوب $S'$، برابر $v_۱$ می باشد. حال می توان مختصات $(x, ct)$ نقطهٔ $B$ را برحسب $a$ به دست آورد. اما می دانیم که مختصات نقطهٔ $A$ در $S$، به شکل

$$(x_A\, , ct_A\,) = (a sin\theta_۲\, , a\, cos\theta_۲) \qquad (۳\text{-}۷۸)$$

می باشد. همچنین، با توجه به شکل (۳-۳۰)، مختصات نقطهٔ $B$ نیز نسبت به $A$ به صورت

$$(x, ct)_{BA} = (\beta_۱ a cos\theta_۲\, , \beta_۱ a sin\theta_۲\,) \qquad (۳\text{-}۷۹)$$

بیان می شود. به این ترتیب، مختصات نقطهٔ $B$، درچارچوب $S$ را می توان با رابطهٔ

$$(x_B\ ,ct_B\ ) = (asin\theta_۲\ + \beta_۱ acos\theta_۲, acos\theta_۲ + \beta_۱ asin\theta_۲\ ) \quad (۸۰\text{-}۳)$$

بیان کرد. اکنون، می توان نسبت $x$ به $ct$ را در نقطهٔ $B$ به صورت

$$\beta_u = \frac{x_B}{ct_B} = \frac{sin\theta_۲ + \beta_۱ cos\theta_۲}{cos\theta_۲ + \beta_۱ sin\theta_۲} \quad (۸۱\text{-}۳)$$

به دست آورد. که با تقسیم صورت و مخرج کسر رابطهٔ (۳-۸۱)، بر $cos\theta_۲$ به رابطهٔ

$$\beta_u = \frac{tan\theta_۲ + \beta_۱}{۱ + \beta_۱ tan\theta_۲} = \frac{\beta_۲ + \beta_۱}{۱ + \beta_۱\beta_۲} \quad (۸۲\text{-}۳)$$

یا

$$u = \frac{[v_۱ + v_۲\ ]}{[۱ + (v_۱ v_۲ / c^۲)]} \quad (۸۳\text{-}۳)$$

می رسیم؛ زیرا سرعت نسبی چارچوب $S'$ نسبت به $S$ برابر $v_۲$ می باشد. درنتیجه، $tan\theta_۲\ = \beta_۲$ خواهد بود.

## ۳ - ۱۴ : باطلنمای انبار و نردبان

دو کشاورز $A$ و $B$ انباری به طول $L$ و نردبانی به طول $۲L$ دارند و می خواهند نردبان را در انبارجای دهند. اما طول نردبان خیلی بزرگتر ازطول انباراست. کشاورز $B$ که قدری با نسبیت آشناست، پیشنهاد می کند که کشاورز $A$، نردبان را بردارد و با سرعت $u = c\sqrt{۳}/۲$ درامتداد طول انبار به طرف انبار بدود. دلیل او این است که اگر او با این سرعت بدود، ضریب تبدیل $\gamma(u)$ برابر۲ می شود. درنتیجه، طول نردبان به اندازهٔ کافی کوتاه می شود تا بتواند درداخل انبار قرار گیرد. اما کشاورز $A$ با این پیشنهاد مخالفت می کند و استدلال می کند که اگراو با این سرعت به سمت انبار بدود، طول انبار را برابر $L/۲$ می بیند. درحالی که طول نردبان، همچنان برابر $۲L$ است. بنابراین پیشنهاد طرح دویدن برای حل مشکل، آنها را به نتیجه نمی رساند. و نتیجه اینکه هیچکدام از آنها نمی تواند طرف مقابل را متقاعد کند.

ازطرف دیگر، هر کدام ازآنها، مصرانه روی نظرخود پافشاری می کند. حال، به نظر شما کدام یک از آن دو راست می گوید، کشاورز $A$ یا $B$؟

برای رسیدن به جواب درست، فرض کنید که $A$ همراه نردبان با سرعت

$u = c\sqrt{3}/2$، از در جلویی وارد انبار شده و از در انتهای انبار، از آن خارج شود. همچنین، فرض کنید که درهای قسمت جلو و انتهای انبار به سیستمی مجهز باشند که به محض اینکه انتهای نردبان وارد انبار شد، در جلویی آن بسته شود، و همین طور در قسمت انتهای انبار به محض رسیدن ابتدای نردبان به آن باز شود. بنابراین، برای بررسی دقیق این مسأله می توان دو رویداد به صورت زیر تعریف کرد:

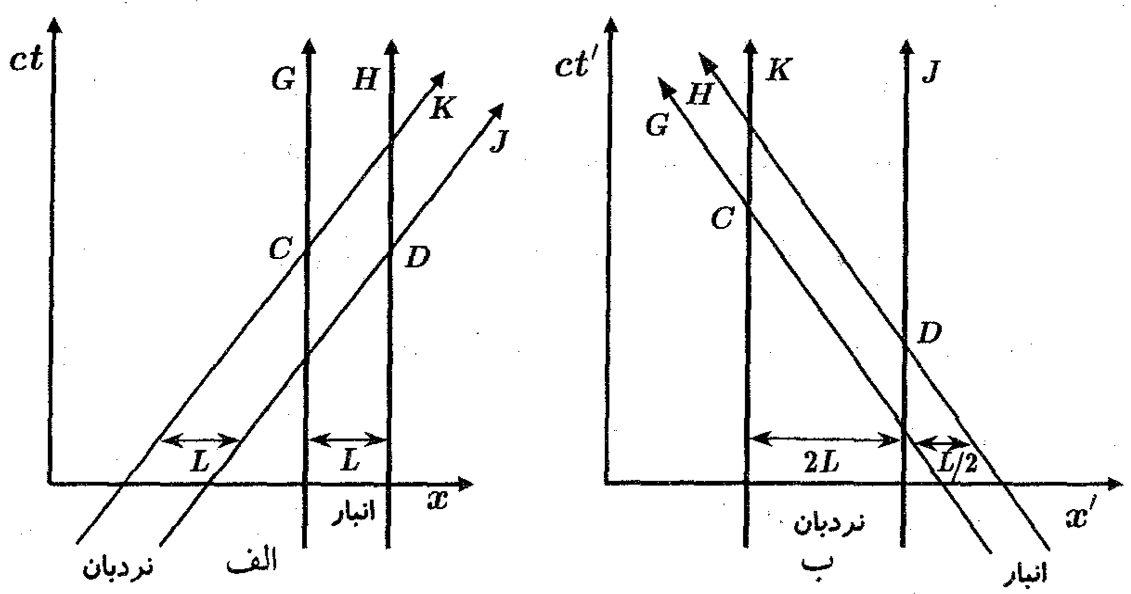
۱ - رویداد $C$: این رویداد را می توان بسته شدن در ورودی انبار، همزمان با ورود انتهای نردبان به داخل انبار درنظر گرفت. بنابراین، اگر انتهای نردبان را با $K$، و همین طور، در ورودی انبار را با $G$ نمایش دهیم، دراین صورت، از نظر ناظر ساکن در کنار انبار، رویداد $C$ درحقیقت محل تلاقی جهانخط ابتدای انبار، یعنی $G$، با جهانخط انتهای نردبان، یعنی $K$ خواهد بود. به طور خلاصه رویداد $C$ را می توان بسته شدن در ورودی انبار درنظر گرفت.

۲ - رویداد $D$: رویداد $D$ نیز به صورت زیر تعریف می شود. فرض کنید که دقیقاً در لحظه ای که ابتدای نردبان به در انتهایی انبار می رسد، در انتهایی انبار بلافاصله باز شود. بنابراین، اگر در انتهایی انبار را با $H$ و ابتدای نردبان را با $J$ نشان دهیم، دراین صورت، ازنظر ناظر ساکن در کنار انبار، رویداد $D$، در واقع، محل تلاقی جهانخط در انتهای انبار، یعنی $H$، باجهانخط ابتدای نردبان، یعنی $J$ می باشد. به طور خلاصه، رویداد $D$ را می توان باز شدن در انتهایی انبار درنظر گرفت.

اکنون، سؤالی که مطرح می شود این است که آیا می توان زمان یا لحظه ای را یافت که در آن رویدادهای $C$ و $D$، به طور همزمان رخ دهند. بنابراین، اگر چنین زمانی وجود داشته باشد، می توان گفت که نردبان در انبار جای می گیرد. در غیراین صورت، این امکان وجود ندارد. حال، می توان با رسم نمودار فضا- زمان یا مینکوفسکی نردبان و انبار، قضاوت کرد که کدام یک از دو کشاورز راست می گوید.

برای رسم نمودار فضا- زمان، اگر در ورودی و انتهایی انبار را به ترتیب با $G$ و $H$ نشان دهیم. همین طور، اگر قسمت ابتدا و انتهای نردبان را نیز به ترتیب با $J$ و $K$ نمایش دهیم، دراین صورت، نمودار فضا- زمان نردبان و انبار را می توان به صورت شکل (۳-۳۱) رسم نمود.

اکنون، با توجه به شکل(۳- ۳۱) الف، درچارچوب سکون انبار یا $S$، یا از نظر کشاورز $B$، رویدادهای $C$ و $D$ همزمان اتفاق می افتند. به عبارت دیگر، درچارچوب $S$، نردبان می تواند درانبار جای می گیرد. درحالی که در چارچوب سکون نردبان یا $S'$، این دو رویداد همزمان نبوده و در واقع، رویداد $D$، مدتها قبل از رویداد $C$ اتفاق می افتد. درنتیجه، می توان گفت که در چارچوب $S'$ ، نردبان درانبار نمی تواند جای گیرد. بنابراین، در این چارچوب نمی توان لحظه ای را یافت که درآن، دو رویداد $C$ و $D$ به طور همزمان روی دهند.




شکل (۳- ۳۱) : نمودار فضا ـ زمان انبار و نردبان : الف : نسبت به چارچوب سکون انبار یا $S$ ، که در این چارچوب نردبان در انبار جای می گیرد. ب : نسبت به چارچوب سکون نردبان یا $S'$ ، که در این چارچوب نردبان در انبار جای نمی گیرد.

حال با توجه به این نتایج، می توان گفت که هر دوی آنها راست می گویند. به بیان دقیق تر، قرارگرفتن نردبان در انبار بستگی به همزمانی دو رویداد دارد که همزمانی نیز، همان طورکه می دانیم یک اثر نسبی است. خلاصه اینکه قرارگرفتن نردبان در انبار بستگی به چارچوب مرجع دارد.

## محاسبات :

اکنون، فرض کنید که ابتدا و انتهای انباردرچارچوب سکون آن یا $S$، به ترتیب در $x = 0$ و $x = L_0$، قرارگرفته باشد. بنابراین، درمرحلهٔ اول، در ورودی انبار باز است و درانتهایی آن بسته می باشد. کشاورز $A$، نردبان را در حالی که موازی محور $x$ نگه داشته

است با سرعت $u$، نسبت به چارچوب $S$، به سمت انبار می دود. کشاورز $A$ درچارچوب $S'$ ساکن است. وطول نردبان در چارچوب سکونش، یعنی $S'$ برابر $۲L_۰$ می باشد. همچنین، فرض کنید که در لحظهٔ $t = t' = ۰$، ابتدای نردبان متحرک بر ابتدای انبار منطبق شود. اکنون، می توان زمان و مکان وقوع رویدادهای $C$ و $D$ را در چارچوب سکون انبار یا $S$، معین نمود.

در چارچوب سکون انبار، ابتدای انبار درهمهٔ لحظه ها در $x_G = ۰$ واقع است. بنابراین، طبق فرض، ابتدای نردبان درلحظهٔ $t = ۰$، برابتدای انبار منطبق می شود. و در لحظهٔ $t = ۰$، ابتدای نردبان در $x_G = x_C = ۰$، قرار دارد و انتهای آن با سرعت $u = c\sqrt{۳}/۲$ به سمت انتهای انبار به حرکتش ادامه می دهد. در نتیجه، انتهای نردبان در لحظهٔ

$$t_C = \frac{L_۰}{u} = \frac{۲L_۰}{c\sqrt{۳}} \qquad (۸۴\text{-}۳)$$

به ابتدای انبار، یعنی $x_G = ۰$می رسد. حال با توجه به تعریف رویداد $C$، که انطباق انتهای نردبان، یعنی $K$ برابتدای انبار، یعنی $H$ می باشد. مختصهٔ فضایی رویداد $C$، در چارچوب سکون انبار برابر $x_G = x_C = ۰$ بوده و مختصهٔ زمانی آن نیز با رابطهٔ (۳-۸۴) داده می شود.

همچنین، رویداد $D$ طبق تعریف، انطباق ابتدای نردبان، یعنی $J$، بر انتهای انبار، یعنی $H$، می باشد. از طرف دیگر، انتهای انبار درچارچوب $S$ در همهٔ لحظه ها در $x_H = L_۰$ قرار دارد. بنابراین، $x_D = L_۰$ خواهد بود. ابتدای نردبان نیز از نقطهٔ $x_G = ۰$ و در لحظهٔ $t = ۰$ شروع به حرکت می کند و در لحظهٔ

$$t_D = \frac{L_۰}{u} = \frac{۲L_۰}{c\sqrt{۳}} \qquad (۸۵\text{-}۳)$$

به انتهای انبار می رسد. بنابراین، در چارچوب $S$، با توجه به روابط(۳-۸۴) و(۳-۸۵)، $t_C = t_D$ می باشد.

اکنون، می توان این دو رویداد را در چارچوب سکون نردبان یا $S'$، مورد بررسی قرارداد. برای این منظور، می توان نشان داد که درانتهایی انبار قبل از بسته شدن در ابتدایی آن، باز می شود. به عبارت دیگر، درچارچوب سکون نردبان رویداد $D$ قبل از رویداد $C$ رخ می دهد. در نتیجه، از نظر ناظر همراه نردبان یا کشاورز $A$، نردبان درانبار نمی تواند جای

گیرد. حال، برای به دست آوردن مختصهٔ زمان و مکانی رویدادهای $C$ و $D$، در چارچوب سکون نردبان یا $S'$، می توان از تبدیلات لورنتس استفاده کرد. در این صورت، با در نظر گرفتن این تبدیلات، رویداد $C$ در $S'$، دارای مختصهٔ زمانی

$$\begin{aligned} t'_C &= \gamma(c\sqrt{۳}/۲)\left[t_C - \frac{۱}{c}\beta x_C\right] \\ &= ۲\left[\frac{۲L_\circ}{c\sqrt{۳}} - \frac{۱}{c}\beta(\circ)\right] \end{aligned} \qquad (۸۶-۳)$$

یا

$$t'_C = \frac{۴L_\circ}{c\sqrt{۳}} \qquad (۸۷-۳)$$

می باشد. همچنین، مختصهٔ مکانی این رویداد نیز در $S'$، برابر

$$\begin{aligned} x'_C &= \gamma(v)\left[x_C - \beta c t_C\right] \\ &= ۲\left[\circ - \beta c\frac{۲L_\circ}{c\sqrt{۳}}\right] \\ &= ۲\left[-\frac{\sqrt{۳}}{۲}c\frac{۲L_\circ}{c\sqrt{۳}}\right] \\ &= -۲L_\circ \end{aligned} \qquad (۸۸-۳)$$

خواهد بود. از طرف دیگر، مختصهٔ زمانی رویداد $D$ نیز در چارچوب $S'$ به صورت

$$\begin{aligned} t'_D &= \gamma(v)\left[t_D - \frac{۱}{c}\beta x_D\right] \\ &= ۲\left[\frac{۲L_\circ}{c\sqrt{۳}} - \frac{۱}{c}\frac{\sqrt{۳}}{۲}L_\circ\right] \end{aligned} \qquad (۸۹-۳)$$

یا

$$t'_D = \frac{L_\circ}{c\sqrt{۳}} \qquad (۹۰-۳)$$

به دست می آید. مختصهٔ مکانی این رویداد نیز، برابر

$$\begin{aligned} x'_D &= \gamma(v)\left[x_D - \beta c t_D\right] \\ &= ۲\left[L_\circ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}c\frac{۲L_\circ}{c\sqrt{۳}}\right] \\ &= \circ \end{aligned} \qquad (۹۱-۳)$$

خواهد بود. اکنون، با مقایسهٔ روابط (۳-۸۷) و (۳-۹۰) می توان نتیجه گرفت که $t'_C = 4t'_D$ می باشد. بنابراین، در چارچوب سکون نردبان یا $S'$، می توان گفت که رویداد $D$، خیلی زودتر از رویداد $C$ رخ می دهد. به عبارت دیگر، از نظر ناظر همراه نردبان یا کشاورز $A$، نردبان در انبار نمی تواند جای گیرد.

همان طور که ملاحظه می شود، دراینجا با تعریف دو رویداد $C$ و $D$ جای گرفتن یا نگرفتن نردبان در انبار، بستگی به چارچوب مرجع پیدا می کند. یعنی در یک چارچوب این دو رویداد همزمان بوده و در چارچوب دیگر همزمان نمی باشند. در بخش بعد، این مسأله مجدداً مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۳ ـ ۱۵ : بررسی مجدد باطلنمای انبار و نردبان

در بخش قبل، برای بررسی باطلنمای انبار و نردبان از اثر نسبیت همزمانی استفاده گردید. و نشان داده شد که از نظر ناظر واقع درچارچوب سکون انبار، یعنی $S$، دو رویداد $C$ و $D$ همزمان بوده و درنتیجه نردبان از نظر این ناظر در انبار جای می گیرد. اما از نظر ناظر واقع درچارچوب سکون نردبان، رویداد $D$ قبل از رویداد $C$ رخ می دهد. بنابراین، از نظر این ناظر، نردبان نمی تواند در انبارجای گیرد.

اکنون، می توان به جای دو رویداد $C$ و $D$، تنها رویداد $C$ را در نظرگرفت. برای این منظور، فرض کنید که درانتهایی انبار با یک دیوارجایگزین شود. دراین صورت، هنگامی که نردبان وارد انبار می شود، دری درانتهای انبار وجود ندارد تا از آن خارج شود. درنتیجه، به جای اینکه پرسیده شود که، آیا رویداد $C$ قبل از $D$ یا بعد ازآن اتفاق می افتد، می توان این سؤال را مطرح نمود که آیا رویداد $C$ در همهٔ چارچوبها رخ می دهد یا نه؟

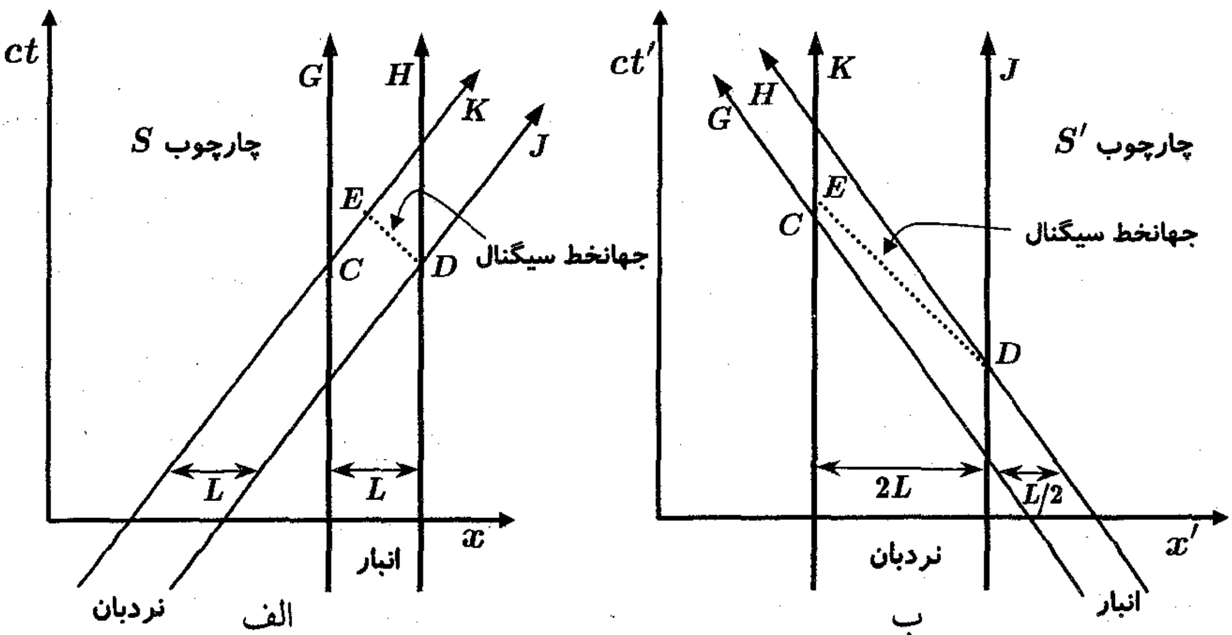
همان طورکه قبلاً بررسی شد، می دانیم بررسی دو رویداد وابسته به چارچوب مرجع است. درصورتی که بررسی یک رویداد مانند $C$، مستقل از چارچوب مرجع می باشد. یعنی اگر این رویداد در یک چارچوب رخ دهد، در همهٔ چارچوبهای دیگر نیز روی می دهد.

درچارچوب سکون انبار یا $S$، رویداد $C$ اتفاق می افتد؛ زیرا همان طور که قبلاً بررسی شد، در چارچوب $S$، رویداد $D$، یعنی باز شدن در انتهایی انبار( هنگام رسیدن ابتدای نردبان

به آن) و رویداد $C$، یعنی بسته شدن دروروودی انبار( دقیقاً بعد ازعبور انتهای نردبان ازآن) همزمان می باشد. بنابراین، پس از آنکه انتهای نردبان وارد انبار می شود، بلافاصله دروروودی انبار بسته می شود. درنتیجه، دراین حالت نیز اگرچه یک دیوارجایگزین در انتهایی انبار شده است، اما باز هم رویداد $C$ اتفاق می افتد. اکنون، باید نشان دهیم که این رویداد در همهٔ چارچوبها، ازجمله چارچوب سکون نردبان یا $S'$ نیز رخ می دهد. یعنی از نظر ناظر واقع در چارچوب $S'$ نیز نردبان در انبار جای می گیرد.

در چارچوب $S'$، همان طور که قبلاً بررسی شد، ابتدای نردبان قبل از آنکه انتهای آن وارد انبار شود، با دیوار انتهایی انبار برخورد می کند. اما این موضوع به آن معنی نیست که انتهای نردبان متوقف شود و وارد انبار نشود یا اینکه رویداد $C$ اتفاق نیافتد. به عبارت دیگر، هنگامی که ابتدای نردبان به دیوار انتهایی انبار برخورد می کند، قسمت انتهایی نردبان از این برخورد بلافاصله آگاه نمی شود. بنابراین، انتهای آن تا زمانی که از برخورد مطلع نشود، به حرکت خود با سرعت $u = c\sqrt{۳}/۲$ ادامه می دهد. اما سؤالی که دراینجا ممکن است مطرح شود، این است که بعد از چه مدت، انتهای نردبان از برخورد مطلع می شود؟

برای پاسخ به این سؤال می توان از نمودار فضا- زمان استفاده کرد. شکل (۳-۳۲)، نمودار فضا-زمان را درچارچوبهای $S$ و $S'$ نشان می دهد.




**شکل (۳- ۳۲): نمودار فضا ـ زمان انبار و نردبان : الف: نسبت به چارچوب سکون انبار یا $S$ ب : نسبت به چارچوب سکون نردبان یا $S'$**

با توجه به نمودار، رویداد برخورد را با $D$ نشان داده ایم . بنابراین، برای اینکه رویداد برخورد، یعنی $D$، به انتهای نردبان اطلاع داده شود، می توان از یک سیگنال که دارای سرعت $c$ است، استفاده کرد. حال، اگر رویداد ارسال سیگنال را که همزمان با رویداد برخورد است با $D$ نشان دهیم و همچنین اگر رویداد دریافت سیگنال ، درانتهای نردبان با $E$ نشان داده شود. دراین صورت، رویداد های $D$ و $E$ به وسیلهٔ جهانخط فوتون از یکدیگر جدا می شوند.

حال، با این توضیحات می توان نتیجه گرفت که انتهای نردبان قبل از آنکه از برخورد مطلع شود، وارد انبار شده و در ورودی انبار بسته می شود؛ زیرا در چارچوب $S'$، مدت زمانی که طول می کشد تا سیگنال از رویداد برخورد $D$ یا ابتدای نردبان، به انتهای آن برسد، برابر $۲L_{\circ}/c$ می باشد. درنتیجه، مسافتی که انتهای نردبان، قبل از اطلاع از برخورد، طی می کند تا متوقف گردد، برابر $(۲L_{\circ}/c)(c\sqrt{۳}/۲)$ یا $L_{\circ}\sqrt{۳}$ می باشد. بنابراین، در چارچوب $S'$، فاصلهٔ بین ابتدا و انتهای نردبان، در واقع، برابر $۲L_{\circ}-L_{\circ}\sqrt{۳}$ یا $۰/۲۷L_{\circ}$ می باشد. این مقدار کوچکتر از $L/۲$، یعنی طول انبار درچارچوب $S'$ است. به طور خلاصه اینکه رویداد $C$ در هر دو چارچوب $S$ و $S'$ روی می دهد. درنتیجه، درهردو چارچوب، نردبان می تواند در انبار جای می گیرد.

## ۳ - ۱۶ : باطلنمای دوقلوها

یکی دیگر از پارادوکسها یا باطلنماهایی که معمولاً در مبحث سینماتیک نسبیتی مطرح می شود، **باطلنمای دوقلوها**[1] است. همان طورکه قبلاً اشاره گردید، اثرهای نسبیتی انقباض طول، اتساع زمان و همچنین پدیدهٔ دوپلر تنها به سرعت نسبی چارچوبهای مرجع بستگی دارند. به عبارت دیگر، این اثرهای نسبیتی معین نمی کنند که کدام چارچوب مرجع ساکن وکدام یک متحرک است. درواقع، این مطلب، همان اصل موضوع نسبیت است که بیان می کند، همهٔ چارچوبهای مرجع لخت هم ارز بوده و نمی توان تمایزی بین چارچوبهای مرجع لخت قائل شد. اما این موضوع در مورد چارچوبهای نالخت یا شتابدار صدق نمی کند

1- Twin paradox

و به راحتی می توان یک چارچوب نالخت را از یک چارچوب لخت، با استفاده از یک دستگاه شتاب سنج متمایز ساخت. درحقیقت، می توان گفت که باطلنمای دوقلوها ناشی از نادیده گرفتن اختلاف بین چارچوبهای لخت و نالخت می باشد. در اینجا ابتدا این باطلنما را مطرح کرده و سپس با استفاده از نمودار فضا - زمان، آن را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

بنابراین، فرض می کنیم $M$ و $N$ دو فرد دو قلوی همسان باشند. یکی از این دوقلوها، مثلاً $M$ تصمیم می گیرد که یک سفر فضایی به سیاره ای دور دست انجام دهد و برگردد. او برای این کار از یک سفینهٔ فضایی که می تواند با سرعتی قابل مقایسه با سرعت نور حرکت کند، استفاده می کند. اما همزاد او، یعنی $N$ در زمین می ماند. $N$ که درخانه مانده است و مسافرت همزادش را بررسی می کند، ادعا می کند که به دلیل اثر نسبیتی اتساع زمان، ساعت همراه $M$ با آهنگ کندتری کار می کند. از طرف دیگر، او می داند که علاوه برآهنگ کار ساعت، همهٔ فرایندهایی که به نوعی تابع زمان می باشند نیز دستخوش این اثر نسبیتی می شوند. بنابراین، او نتیجه می گیرد که $M$ بعد از بازگشت به خانه، باید جوان تر از خودش باشد. اما $M$ نیز که تا اندازه ای با نسبیت آشناست، ادعای مشابهی را مطرح می کند. او نیز بیان می کند که $N$ در این مدت ساکن نبوده است و می گوید، من در سفینه ام مشاهده می کردم که $N$، ابتدا از من دور می شود و سپس به سمت من بر می گردد. بنابراین، او نیز با استدلالی مشابه استدلال $N$، ادعا می کند که اگر بعد از پایان سفر درکنار $N$ قرار گیرد، $N$ باید جوان تر از او باشد.

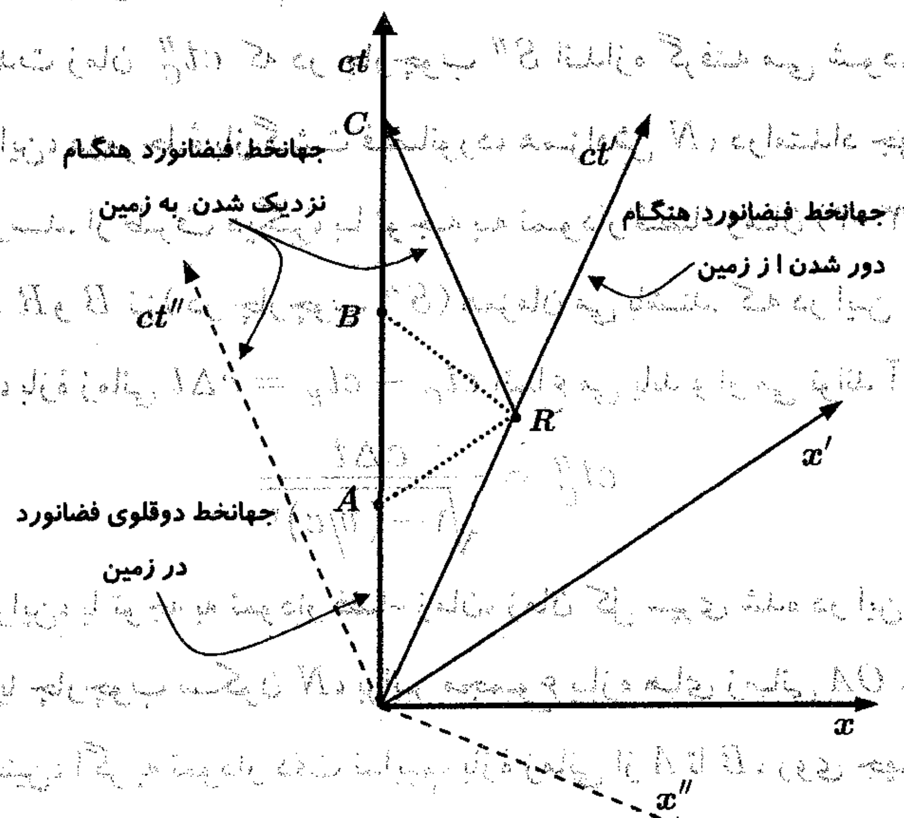
حال، با توجه اظهارات و مشاهدات $M$ و $N$، به نظر شما استدلال کدامیک درست است؟ $M$ یا $N$؟ به عبارت دیگر، $M$ جوان تر است یا $N$؟

برای توضیح این مسأله باید از این واقعیت استفاده نمود که چارچوبهای مرجعی که دوقلوها درآنها قرار دارند هم ارز نمی باشند یعنی اینکه، یکی از این چارچوبها درطول مسافرت لخت است، درصورتی که دیگری نالخت. اما در اینکه فضانورد $M$ درچارچوب شتابدار یا نالخت بوده است تردیدی وجود ندارد؛ زیرا اگر هرکدام از آنها همراه خود یک دستگاه شتاب سنج داشته باشند، بدیهی است که شتاب سنج همراه $M$، در هنگام بازگشت سفینه فضایی به سمت خانه انحراف بزرگی را نشان می دهد. درواقع، او در هنگام بازگشت، شتابهای منفی و مثبت بزرگی را تحمل می کند. بنابراین، حرکتش یکنواخت نمی باشد. به

1- Twin paradox

عبارت دیگر، درهنگام دور زدن فضا پیما، نیروهایی به فضانورد وارد می شود. در صورتی که به $N$ چنین نیروهایی وارد نمی گردد و شتاب سنج همراه $N$، همواره شتاب صفر را نشان می دهد. بنابراین، می توان گفت که مسافرت آنها متقارن نیست. نکتهٔ دیگر اینکه، چون $M$ در یک چارچوب نالخت قرار داشته است، در نتیجه پیشگویی ها و استدلالهای او باید مبتنی بر نظریهٔ نسبیت عام باشد، نه نسبیت خاص.

همان طورکه اشاره گردید، برای به دست آوردن مختصات رویدادها درچارچوبهای نالخت، نمی توان از نظریهٔ نسبیت خاص استفاده کرد. درنتیجه، برای رسیدن به جواب دقیق و کامل این مسأله، باید از نظریهٔ نسبیت عام استفاده کرد. با این حال، می توان با استفاده از پدیدهٔ انتقال دوپلر، به صورت تقریبی بررسی نمود که فضانورد $M$، درحین دور زدن برای بازگشت، پدیده ها را چگونه مشاهده می کند. در واقع، این یکی از روشهایی است که در آن محاسبات، مبتنی بر پدیدهٔ انتقال دوپلر می باشد که می توان این محاسبات را در بیشتر کتابهای مربوط به نسبیت خاص یافت. اما در اینجا می خواهیم، این پاطلنما را با استفاده از نمودار فضا - زمان مورد بررسی قرار دهیم. درشکل (۳-۳۳)، نمودار فضا ـ زمان این پاطلنما رسم شده است.




شکل (۳-۳۳) : نمودار فضا ـ زمان دوقلوها. $S$ چارچوب سکون $N$ می باشد. $S'$ چارچوب فضانورد در هنگام رفتن به سیاره و $S''$ نیز چارچوب فضانورد در هنگام بازگشت به خانه است.

با توجه به نمودار فضا- زمان (۳- ۳۳)، فرض می کنیم که چارچوب سکون فضانورد، درهنگام رفتن به سمت سیارهٔ دور دست، $S'$ باشد. درنتیجه، این چارچوب با سرعت $v$ در امتداد محور $x$ چارچوب $S$، یا چارچوب سکون $N$ حرکت می کند. همچنین، فرض می کنیم که $S''$ نیزچارچوب سکون فضانورد، درهنگام بازگشت او به خانه باشد. این چارچوب نیز در امتداد همین محور با سرعت $-v$ حرکت می کند. این مسافرت از $O$ شروع می شود و دوقلوی فضانورد با توجه به ساعت همراه خودش، در مدت زمان $ct'_R$ به سیاره می رسد. درمرحلهٔ اول مسافرت، یعنی مرحلهٔ رفت، همزادش $N$، در امتداد جهانخط خودش از $O$ به $A$ می رسد. به عبارت دیگر،می توان گفت که در این مرحله، زمان سپری شده برای $N$، برابر $ct_A$ می باشد؛ زیرا رویداد $R$ و $A$ درچارچوب $S'$ همزمان می باشند. بنابراین، از نظر دوقلوی فضانورد، این مدت زمان اتساع یافته و از رابطهٔ

$$ct'_R = \frac{ct_A}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{۳-۹۲}$$

به دست می آید. همچنین، در هنگام بازگشت، فضانورد در چارچوب دیگری مانند $S''$ قرار می گیرد و در مدت زمان $ct''_C$ که در چارچوب $S''$ اندازه گرفته می شود، به خانه بر می گردد. بنابراین، درمرحلهٔ بازگشت فضانورد، همزادش $N$، درامتداد جهانخط خود از $B$ به $C$ می رسد. از طرف دیگر، با توجه به نمودار فضا- زمان (۳- ۳۳)، در لحظهٔ بازگشت، رویداد $R$ و $B$ نیز( در چارچوب $S''$) همزمان می باشند. که در این مرحله نیز از نظر فضانورد $M$، بازهٔ زمانی $ct_C - ct_B = c\Delta t$ اتساع می یابد و او می تواند آن را از رابطهٔ

$$ct''_C = \frac{c\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{۳-۹۳}$$

محاسبه کند. بنابراین، با توجه به نمودار فضا- زمان، زمان کل سپری شده در این سفر فضایی در چارچوب $S$ یا چارچوب سکون $N$، برابر مجموع بازه های زمانی $OA$ ، $AB$ و $BC$ خواهد بود. همچنین، اگر به نمودار دقت نماییم، بازهٔ زمانی از $A$ تا $B$، روی جهانخط $N$، نه به مرحلهٔ رفت مربوط می شود و نه به مرحلهٔ بازگشت فضانورد. اما با این حال این مدت زمان، برای $N$ سپری شده است. این بازهٔ زمانی در واقع، متناظر با **یک لحظه** می باشد که در

آن فضانورد از یک چارچوب، یعنی $S'$، به چارچوب دیگر، یعنی $S''$ منتقل می گردد. در نتیجه، فضانورد درآن لحظه مشاهده می کند که زمان روی جهانخط همزادش $N$، به طور ناگهانی از $ct_A$ به $ct_B$ جهش می کند. اما دلیل این مسأله را می توان به این صورت توضیح داد که فضانورد $M$ به طورآنی و در یک لحظه جهت سرعتش را تغییر می دهد. یا به عبارت دیگر در یک لحظه، چارچوب $S'$ خودش را به $S''$ تبدیل می کند. درواقع، این مسأله باعث می گردد که فضانورد $M$ در هنگام بازگشت، یعنی در رویداد $R$، مشاهده کند که ساعت همزادش $N$، به طور ناگهانی از زمان $ct_A$ به زمان $ct_B$ پرش کرده و از نظر او در امتداد جهانخط $N$، این ناپیوستگی به وجود آید.

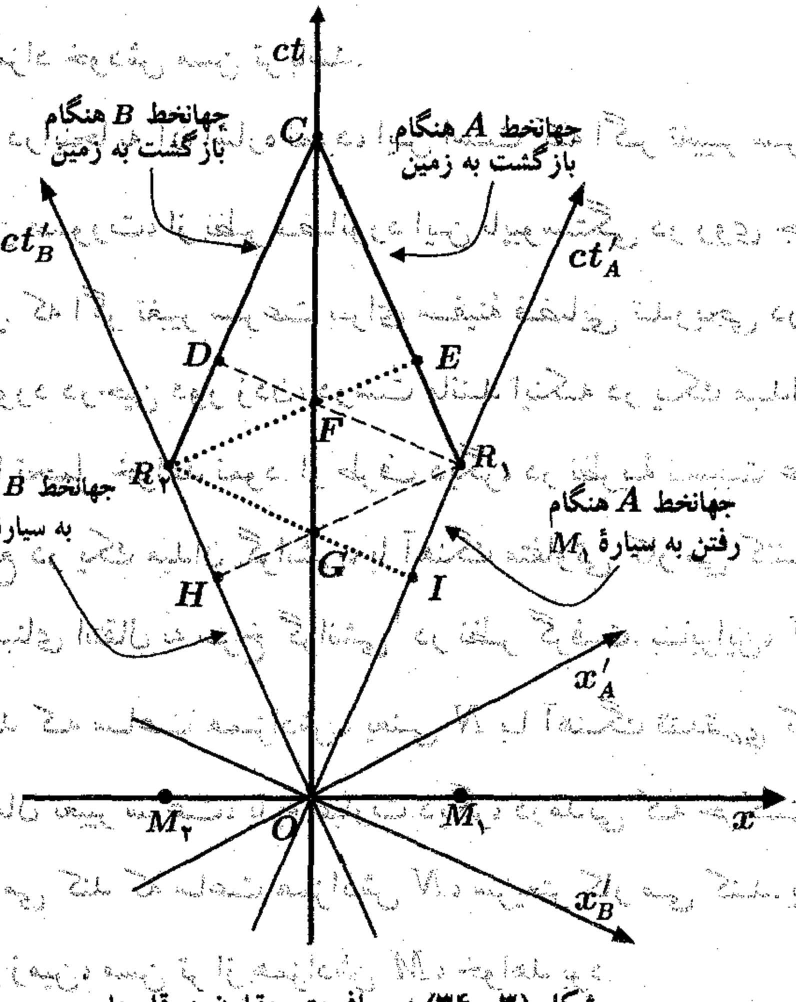
رویداد $R$ را در واقع، می توان انتقال فضانورد از چارچوب $S'$ به چارچوب $S''$ در نظر گرفت. به عبارت دیگر، ساعت $N$، درهنگام وقوع رویداد $R$ به اندازهٔ $ct_B - ct_A$ جلو می پرد و این پدیده باعث می شود که زمان برای $N$ سریعتر بگذرد و درنهایت پس از پایان سفر، او نسبت به همزاد خودش مسن تر باشد.

اما نکته ای که باید دراینجا به آن اشاره نمود، این است که اگر تغییر سرعت سفینهٔ فضایی آنی باشد، دراین صورت، از نظر فضانورد این ناپیوستگی در روی جهانخط $N$ مشاهده می شود. درحالی که اگر تغییر سرعت برای سفینهٔ فضایی تدریجی در نظرگرفته شود، در این حالت فضانورد درحین دور زدن، درست مانند اینکه در یک میدان گرانشی قرارگرفته باشد، شتابی را تحمل خواهد نمود. از طرف دیگر، در نظریهٔ نسبیت عام بررسی می شود که ساعتهای واقع در یک میدان گرانشی، با آهنگ متفاوتی کار می کنند. درواقع، این موضوع را می توان مبنای انتقال به سرخ گرانشی[1] در نظر گرفت. بنابراین، $M$ درحین دور زدن، مشاهده می کند که ساعت همزادش، یعنی $N$ با آهنگ تندتری کار میکند. خلاصه اینکه در مدت زمان تغییر سرعت، یا به عبارت دیگر، درمدتی که حرکت فضانورد شتابدار است، او مشاهده می کند که ساعت همزادش $N$، سریعتر کار می کند. بنابراین، از این نظر نیز، $N$ ساکن در زمین، مسن تر از همزادش $M$، خواهد بود.

1- Gravitational redshift

**مثال ۳-۷ :** فرض کنید که دوقلوی $A$ و $B$ تصمیم می گیرند که هردو به یک مسافرت فضایی بروند. آنها ازیک نقطه از زمین که محل زندگیشان می باشد، مسافرت خود را آغاز می کنند. $A$ و $B$ سیاره های $M_۱$ و $M_۲$ را برای سفر به آنها انتخاب نموده اند. این دو سیاره در دو سوی مخالف زمین و درفاصلهٔ یکسان از زمین واقع شده اند، یعنی یکی در سمت راست و دیگری در سمت چپ زمین قرار دارد. دو قلوی $A$ و $B$ به طورهمزمان و با سرعت یکسان مسافرت خودشان را آغاز می کنند و پس از رسیدن به سیاره ها، بلافاصله با همان سرعت به سمت زمین بازمی گردند. حال، اگر فرض کنیم که آنها به طور همزمان به نقطهٔ شروع مسافرت باز گردند، با رسم نمودار فضا- زمان برای این مسافرت، مشاهدات هر کدام از آنها را توضیح دهید.

**جواب :** با توجه به تقارنی که درمسافرت دوقلوها وجود دارد، نمودار فضا - زمان آنها به صورت نمودار (۳-۳۴) خواهد بود.




شکل (۳- ۳۴) : مسافرت متقارن دوقلوها

دراین نمودار، $S$ چارچوب سکون زمین بوده و $S'_A$ و $S'_B$، به ترتیب چارچوب سکون

دوقلوی $A$ و $B$، درهنگام رفتن به سیاره های مقصد، یعنی $M_۱$ و $M_۲$ می باشند. چارچوب $S'_A$ با سرعت $v$ در جهت مثبت محور $x$، و چارچوب $S'_B$ نیز در امتداد همین محور با سرعت $-v$، از مبدأ چارچوب $S$، حرکت خودشان را آغاز می کنند.

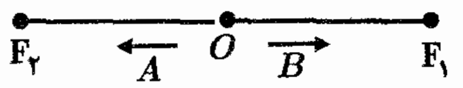
دراینجا ابتدا مشاهدات $A$ را هنگامی که در امتداد جهانخط خودش حرکت می کند، بررسی می کنیم. با توجه به نمودار(۳-۳۴)، $A$ درامتداد جهانخط خود هنگامی که به رویداد $I$ می رسد، مشاهده می کند که همزادش $B$ به سیارهٔ $M_۲$ رسیده است. همچنین، او پس ازگذشت زمان $ct'_{R_۱}$، که در چارچوب $S'_A$ اندازه گرفته می شود، به سیارهٔ $M_۱$ می رسد. این زمان، یعنی $ct'_{R_۱}$ متناظر با زمانهای $ct_G$ و $ct''_H$، در چارچوبهای $S$ و $S'_B$ می باشند. به عبارت دیگر، هنگامی که ساعتهای واقع در چارچوبهای $S$ و $S'_B$، زمان $ct_G$ و $ct''_H$ را نشان می دهند، $A$ به سیارهٔ $M_۱$ می رسد.

لازم به تذکر است که ساعتهایی که همراه دوقلوها می باشند و ساعت واقع در چارچوب $S$ یا زمین، در هنگام شروع مسافرت همزمان شده اند. همچنین، $A$ در مسیر بازگشت به زمین، هنگامی که به رویداد $E$ در امتداد جهانخط خود در مرحلهٔ بازگشت می رسد، مشاهده می کند که $B$ ازسیارهٔ $M_۲$ می خواهد، بازگردد.

نکتهٔ مهم دیگر، اینکه $A$ در رویداد $R_۱$، در لحظهٔ انتقال از چارچوب $S'_A$ به چارچوب $S''_A$، برای بازگشت، مشاهده می کند که زمان در چارچوب $S$، از $ct_G$ به $ct_F$ پرش می کند. به عبارت دیگر، $A$ در رویداد $R_۱$، مشاهده می کند که عقربهٔ ساعت واقع در چارچوب $S$، به اندازهٔ $ct_F - ct_G$ جلو می افتد. همچنین، $A$ در لحظهٔ انتقال از چارچوب $S'_A$ به چارچوب $S''_A$، مشاهده می کند که زمان در چارچوب $S'_B$ نیز از $ct''_H$ به زمان $ct''_D$، درچارچوب $S''_B$ پرش می کند. ( چارچوبهای $S''_A$ و $S''_B$، چارچوبهای سکون $A$ و $B$، درهنگام بازگشت آنها به زمین می باشند که برای پرهیز از شلوغی نمودار رسم نشده اند.)در نهایت $A$، در رویداد $C$ به زمین برمی گردد.

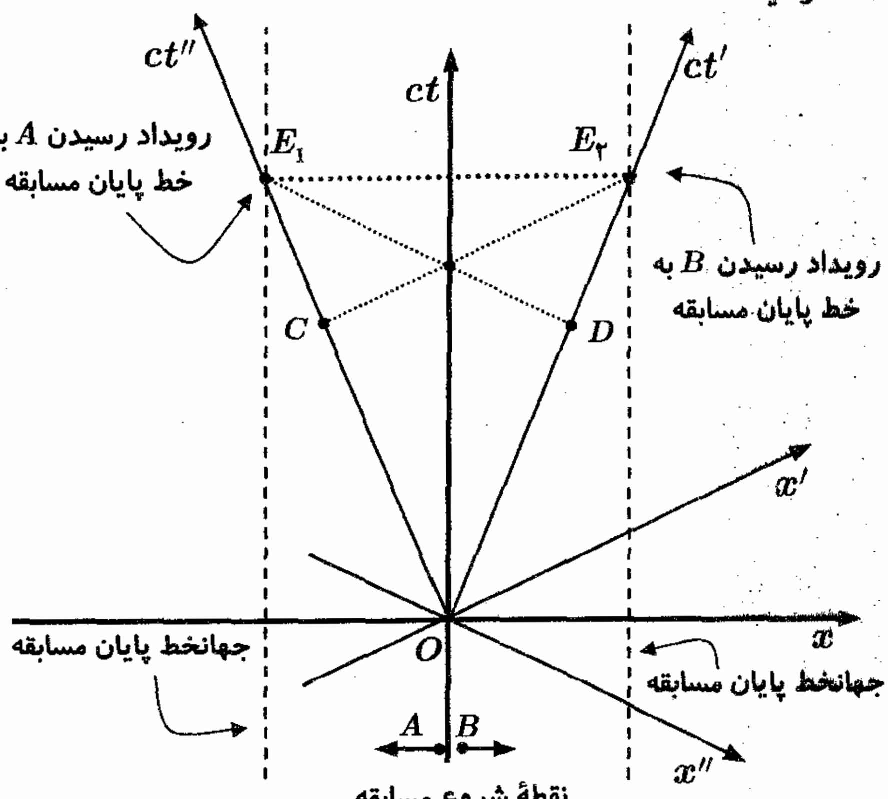
اکنون، با توجه تقارنی که در این دو مسافرت وجود دارد، دو قلوی $B$ نیز مشاهدات مشابهی را درحین مسافرت خود خواهد داشت. بنابراین، پس از پایان مسافرت و بازگشت آنها به خانه، همسن خواهند بود؛ زیرا هرکدام از آنها جهانخط های یکسانی را طی می کنند

مثال ۳-۸ : دو دوندهٔ $A$ و $B$ تصمیم می گیرند که با یکدیگرمسابقه دو دهند. مطابق شکل (۳-۳۵)، آنها برخلاف معمول،تصمیم می گیرند که از یک نقطه، مسابقه را شروع کرده و در دو جهت مخالف هم، مسافت یکسانی را طی کنند. حال، اگر فرض کنیم که آنها مسیرمسابقه را با سرعت ثابت و برابر طی کنند، روشن است که از نظر داور مسابقه که نسبت به زمین ساکن است، $A$ و $B$ به طور همزمان به خط پایان مسابقه می رسند. اکنون، نتیجهٔ مسابقه را از نظر $A$ یا $B$، با رسم نمودار فضا- زمان بررسی نمایید.




شکل (۳-۳۵) : مسا بقهٔ $A$ و $B$ در جهتهای مخالف

جواب : نمودار فضا- زمان $A$ و $B$ در شکل(۳-۳۶) رسم شده است. با توجه به نمودار، $A$ و $B$ هردو از نظرخودشان برندهٔ مسابقه می باشند. همچنین از نظر $B$، هنگامی که او به خط پایان مسابقه رسیده است، $A$ در امتداد جهانخط خودش، هنوز در $C$ قرار دارد. از طرف دیگر، از نظر $A$ نیز هنگامی که او به خط پایان مسابقه رسیده است، $B$ در امتداد جهانخط خودش، هنوز به $D$ رسیده است.




شکل (۳-۳۶) : $A$ و $B$، هردو در چارچوب سکون خودشان برندهٔ مسابقه می باشند.

**مثال ۳- ۹ :** در مثال قبل فرض کنید که دو دوندهٔ $A$ و $B$، مسابقه را به جای آن که از نقطهٔ $O$ شروع کنند، از نقاط پایان خط مسابقه، یعنی از نقاط $F_1$ و $F_2$ شروع کرده و درخلاف جهت هم، مسیر یکسان مسابقه را به سمت نقطهٔ پایان، یعنی $O$ با سرعت برابر طی کنند. در این صورت، واضح است که از نظر داور مسابقه که نسبت به زمین ساکن است، هر دو دونده به طور همزمان به نقطهٔ پایان مسابقه، یعنی $O$ می رسند و نتیجهٔ مسابقه برابر می باشد. حال، با رسم نمودار فضاـ زمان مسابقهٔ دو دونده نسبت به چارچوب زمین یا داور مسابقه:

**الف** : رویداد تلاقی جهانخط $B$ را با جهانخط نقطهٔ شروع خودش، یعنی $F_2$ را معین کنید.

**ب** : درچارچوب سکون دوندهٔ $B$، هنگامی که جهانخط دوندهٔ $B$ با جهانخط نقطهٔ شروع خود، یعنی جهانخط $F_2$ تلاقی می کند، دوندهٔ $A$ درچه نقطه ای از جهانخط خودش قرار دارد.

**ج** : از نظر دوندهٔ $A$، رویداد شروع دوندهٔ $B$ را معین نمایید.

**د** : از نظر داور مسابقه، هر دو دونده به طور همزمان مسابقه را شروع می کنند. اکنون، بررسی نمایید که آیا درچارچوب سکون دونده ها نیز مسابقه به طور همزمان شروع می شود یا خیر؟ اگر جواب منفی است، در این صورت، ترتیب زمانی شروع مسابقه درچارچوب سکون دونده ها چگونه خواهد بود؟

**ه** : از نظر داور مسابقه، هر دو دونده به طور همزمان به خط پایان مسابقه می رسند. حال، با توجه به نمودار فضاـ زمان، معین نمایید که آیا دو دونده نیز در این مورد با یکدیگر توافق دارند یا خیر؟

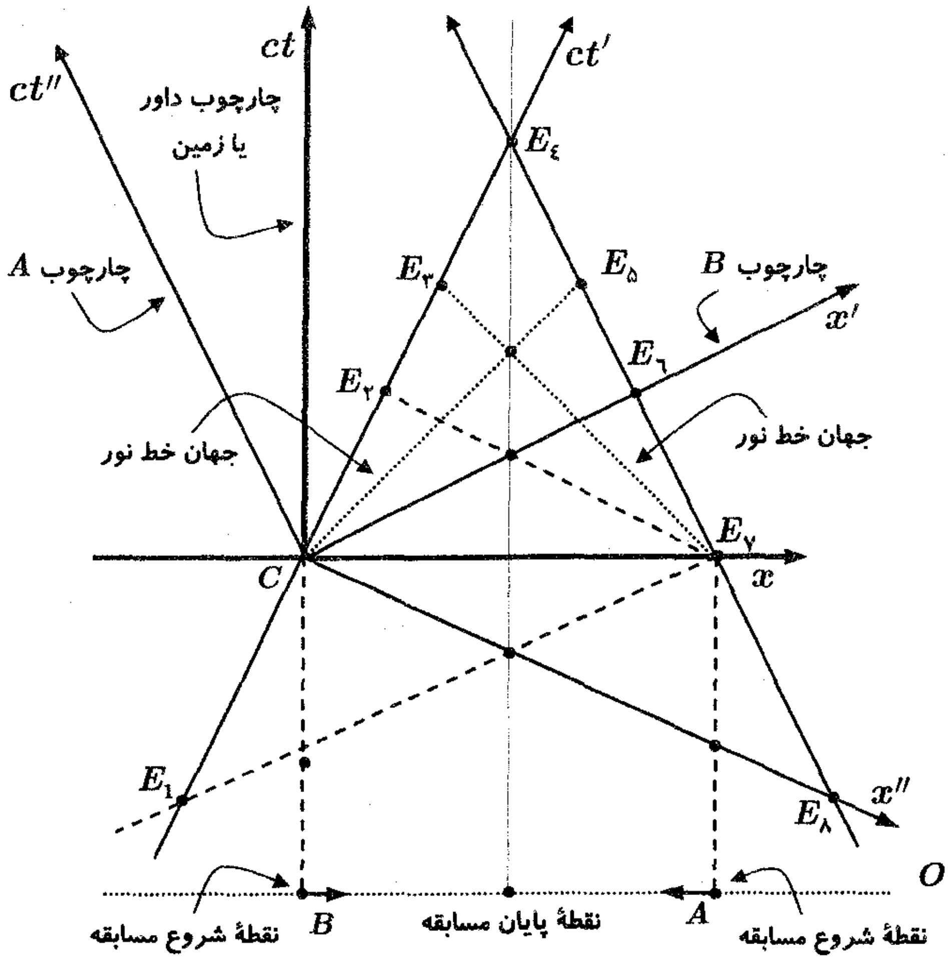
**جواب :** نمودار فضاـ زمان مسابقهٔ دو دونده در شکل (۳ - ۳۷) رسم شده است. حال، با توجه به نمودار، جواب سؤالات مطرح شده به صورت زیر خواهد بود.

**الف** : رویداد تلاقی جهانخط $B$ با جهانخط نقطهٔ شروع خودش، رویداد $C$ می باشد.

**ب** : درچارچوب سکون دوندهٔ $B$، هنگامی که جهانخط دوندهٔ $B$ با جهانخط نقطهٔ شروع خود، تلاقی می کند، دوندهٔ $A$ در رویداد $E_6$ قرار دارد.

**ج** : از نظر دوندهٔ $A$، رویداد شروع دوندهٔ $B$، متناظر با رویداد $E_5$ می باشد.

د : خیر . درچارچوب سکون دونده ها، شروع مسابقه همزمان نمی باشد؛ زیرا دوندهٔ $B$ مسابقه را از نقطهٔ $C$ شروع می کند. در حالی که دوندهٔ $A$ از نقطهٔ $E_۷$ شروع می کند. ازطرف دیگر، درچارچوب سکون دوندهٔ $B$، رویداد $C$ همزمان با رویداد $E_۴$ می باشد که از نظر ترتیب زمانی بعد از رویداد $E_۷$ است. همچنین، در چارچوب سکون دوندهٔ $A$، رویداد $E_۷$ همزمان با رویداد $C$ می باشد که از نظر ترتیب زمانی بعد از $C$ است. بنابراین، در هرکدام از چارچوب سکون دونده ها، دوندهٔ دیگر زودتر مسابقه را شروع می کند. در واقع، دوندهٔ $B$ هنگامی می تواند شروع مسابقهٔ دوندهٔ $A$ را مشاهده کند که در موقعیّت رویداد $E_۳$ از جهانخط خودش قرار گیرد. همچنین، دوندهٔ $A$ هنگامی می تواند شروع مسابقهٔ دوندهٔ $B$ را مشاهده کند که در موقعیّت رویداد $E_۵$ از جهانخط خودش قرار گیرد.




شکل(۳-۳۷) : هرکدام از دونده ها مشاهده می کند که دوندهٔ دیگر مسابقه را زودتر شروع می کند.

**ه :** با توجه به نمودار فضا۔زمان (۳-۳۷)، هردو دونده در مورد رسیدن هم زمان به خط پایان مسابقه توافق دارند؛ زیرا هردو در رویداد $E_۴$ به خط پایان مسابقه می رسند.

## تمرین

۱- با توجه به شکل(۳-۲۵) ب، فرض کنید که $S'$ درخلاف جهت حالت قبل با سرعت $u$ از $B$ به سمت $A$ حرکت کند. اکنون، رویدادها وجهانخط ها را نسبت به $S'$ رسم نمایید.

۲- فرض کنیدکه یک سفینهٔ فضایی با طول ویژهٔ $L_\circ$ با سرعت $v$ درجهت مثبت محور $x$ چارچوب $S$ حرکت می کند و قسمت جلوی سفینه درلحظهٔ $t=\circ$ از نقطهٔ $x=\circ$ می گذرد. همزمان با این رویداد یک سیگنال نوری از قسمت جلوی سفینه به سمت قسمت انتهای آن ارسال می شود. در این صورت:

**الف** : در نمودار فضاـ زمان، جهانخطهای ابتدا و انتهای سفینهٔ فضایی وهمچنین، سیگنال نوری یا فوتون را نسبت به چارچوب $S$ رسم نمایید.

**ب** : از نظر چارچوب $S$ چه مدت طول می کشد تا سیگنال به انتهای سفینهٔ فضایی برسد.

ج : همچنین، از نظر چارچوب $S$، چه مدت طول می کشد تا انتهای سفینهٔ فضایی از نقطهٔ $x=\circ$ بگذرد.

۳- فرض کنید که واگنی با سرعت نسبیتی ازتونلی عبور می کند. حال، نمودار فضاـ زمان واگن و تونل را در چارچوب سکون تونل رسم نموده و با توجه به نمودار رسم شده:

**الف** : رویداد تلاقی جهانخط ابتدای واگن را با جهانخط انتهای تونل را معین کنید.

**ب** : رویداد تلاقی جهانخط انتهای واگن را با جهانخط ابتدای تونل مشخص نمایید.

ج : درچارچوب سکون واگن، هنگامی که ابتدای واگن از تونل خارج می شود، انتهای واگن در چه نقطه ای قرار دارد؟

د : درچارچوب سکون تونل، هنگامی که انتهای واگن داخل تونل می شود، ابتدای واگن در چه نقطه ای قرار دارد؟

ه : درچارچوب سکون تونل بررسی نمایید که آیا امکان دارد واگن در تونل جای گیرد. به عبارت دیگر، طول واگن و تونل در یک لحظه برابر باشند. همچنین، مسأله را در چارچوب سکون واگن بررسی نموده و نتیجهٔ حاصل را با نتیجهٔ به دست آمده در چارچوب سکون تونل مقایسه نمایید. آیا می توان گفت که در اینجا تناقضی وجود دارد؟

۴ - در یک مسابقهٔ دو، دونده های $A$ و $B$ شرکت کرده اند. فرض کنید که دوندهٔ $A$

سریعتر از $B$ باشد و هردو دونده تا انتهای مسابقه با سرعت ثابت بدوند. همچنین، فرض کنید که مسابقه در امتداد یک خط راست بوده و طول مسیر مسابقهٔ دوندهٔ $A$ دو برابر طول مسیر مسابقهٔ دوندهٔ $B$ باشد. اکنون، اگر از نظر داور مسابقه که نسبت به زمین ساکن است، هر دو دونده به طور همزمان به خط پایان مسابقه برسند، در این صورت، نمودار فضا-زمان مسابقه را نسبت به چارچوب سکون زمین رسم نمایید. همچنین، با توجه به نمودار فضا ـ زمان رسم شده :

الف : رویداد تلاقی جهانخط دوندهٔ $A$ را با جهانخط نقطهٔ پایان دوندهٔ $A$، به دست آورید.

ب : رویداد تلاقی جهانخط دوندهٔ $B$ را با جهانخط نقطهٔ پایان دوندهٔ $B$، معین کنید.

ج : درچارچوب سکون دوندهٔ $A$، هنگامی که دوندهٔ $A$ به خط پایان مسابقه می رسد، دوندهٔ $B$ در چه نقطه ای از مسیر مسابقه قرار دارد.

د : در چارچوب سکون دوندهٔ $B$، هنگامی که دوندهٔ $B$ به خط پایان مسابقه می رسد، دوندهٔ $A$ در چه نقطه ای از مسیر مسابقه قرار دارد.

ه : نتیجهٔ مسابقه را نسبت به چارچوب سکون دونده های $A$ و $B$ معین نمایید.

۵ - فرض کنید که دریک خیابان، ۵ چراغ به فاصلهٔ یکسان درامتداد یک خط مستقیم نصب شده باشند. همچنین، چراغها به ترتیب در زمانهای $t_1$، $t_2$، $t_3$، $t_4$ و $t_5$ نسبت به چارچوب زمین به صورت زیر روشن می شوند. ابتدا چراغهای اول و سوم به طور هم زمان روشن شوند، یعنی $t_1 = t_3$ باشد. سپس چراغ آخر در زمان $t_5$ و بعد از آن چراغ چهارم در زمان $t_4$ روشن می گردد. و درنهایت، چراغ دوم در زمان $t_2$ روشن می شود. بنابراین، $t_2 > t_4 > t_5 > t_1 = t_3$ خواهد بود. حال، اگر فرض کنیم که بازهٔ زمانی روشن شدن چراغها برابر باشند، در این صورت، نمودار فضا-زمان مسأله را نسبت به چارچوب سکون چراغها یا زمین رسم نموده و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف : ترتیب زمانی دریافت نور چراغها، توسط ناظر واقع در مبدأ چارچوب زمین چگونه است

ب : اگر ناظری با سرعت ثابت در امتداد خیابان حرکت کند، در این صورت، ترتیب زمانی روش شدن چراغها و همچنین، ترتیب زمانی دریافت نور حاصل از روشن شدن آنها را در چارچوب سکون ناظر به دست آورید.

ج : هنگامی که ناظر متحرک نور چراغ چهارم را دریافت می کند، درکجا قرار دارد؟

# ٤

# دینامیک نسبیتی

## مقدمه:

درمبحث سینماتیک نسبیتی حرکت ذرات را در فضا- زمان، بدون در نظرگرفتن عامل یا علت حرکت و همین طور بدون درنظر گرفتن برهم کنش بین آنها با یکدیگر، مورد بررسی قراردادیم. همچنین، با استفاده از اصول نسبیت، روابطی به دست آمد که در محدودهٔ سرعتهای معمولی با روابط فیزیک کلاسیک توافق کامل دارند. اما در سرعتهای بالا، این روابط به طور بارز و آشکار با روابط نیوتنی مشابه آنها متفاوت هستند.

در مبحث دینامیک نسبیتی نیز به روابطی برمی خوریم که با روابط مشابه نیوتنی آنها اختلاف دارند. درحقیقت، می توان گفت که مکانیک نیوتنی با نظریهٔ نسبیت خاص سازگارنیست. به عبارت دیگر، قوانین آن تحت تبدیلات گالیله ناوردا می باشند نه تبدیلات لورنتس. براین اساس، قوانین نیوتن یا به طور کلی قوانین فیزیک را نمی توان بدون تغییر و اصلاح آنها وارد نسبیت کرد. درنتیجه، درمبحث دینامیک نسبیتی نیز قوانین فیزیک را باید به

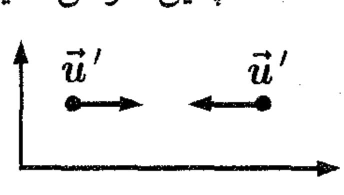
صورتی اصلاح نمود و یا تعمیم داد که با دو اصل نسبیت سازگار باشند. به بیان دیگر، این قوانین باید طوری تعمیم داده شوند تا بر اساس **اصل تناظر یا همخوانی**[1] ، درحیطهٔ سرعتهای معمولی به همان روابط آشنای فیزیک کلاسیک تبدیل شوند. با توجه به این موضوع، قوانین فیزیک در شکل کلاسیک آن را می توان حالت خاصی از این قوانین، درحالت نسبیتی به شمار آورد. حال، برای اصلاح یا تعمیم این قوانین، می توان به دو روش عمل نمود. در روش اول، می توان ازمفاهیم چاربردارها و ناوردایی نسبیتی استفاده کرد. و روش دوم که ساده و قابل درکتر میباشد، این است که از همان مفاهیم آشنای مکانیک نیوتنی شروع کرده و با تعمیم یا اصلاح آنها به مفاهیم مشابه نسبیتی آنها برسیم.

در این فصل ابتدا با استفاده از روش دوم، مفاهیم اساسی دینامیک، یعنی جرم، نیرو، تکانه و انرژی را اصلاح نموده و سپس حرکت ذرات، یا برهمکنش آنها با یکدیگر، با بهره گیری از مفاهیم جدید، باجزئیات بیشتر و دقیق تر مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۴ - ۱ : جرم نسبیتی یک ذره

برای بررسی حرکت یک ذره در مبحث دینامیک نسبیتی، مانند مکانیک کلاسیک، می بایستی از قانون دوم نیوتن استفاده نماییم. برای این منظور، قبل از بیان و تعمیم این قانون به شکل نسبیتی آن، جرم نسبیتی را برای یک ذره تعریف می کنیم.

حال، با توجه به شکل (۴-۱) فرض کنید که درچارچوب $S'$، دو ذره با سرعت یکسان $\vec{u}'$ و جرم سکون $m_\circ$، به سمت یکدیگر حرکت می کنند. همچنین، فرض کنید که در این چارچوب دو ذره پس از برخورد، به یکدیگرچسبیده وتشکیل یک جسم مرکب را می دهند.



شکل (۴-۱): برخورد دو ذره در $S'$

در نتیجه، برای برقراری قانون پایستگی تکانه درچارچوب $S'$، ذرهٔ مرکب پس از برخورد باید به حال سکون در آید. اکنون، می توان برخورد ذرات را در چارچوب دیگری مانند $S$ نیز بررسی نمود.

---

1- Correspondence principle

برای این منظور، فرض کنید که چارچوب $S$، با سرعت نسبی $v$، در جهت منفی محور $x'$ چارچوب $S'$ حرکت کند. در این صورت، در این چارچوب دو ذره دارای سرعت $u_1$ و $u_2$ خواهند بود. این ذرات پس از برخورد با یکدیگر، تشکیل یک جسم مرکب داده و جسم مرکب ایجاد شده با سرعت $v$، یعنی سرعت نسبی دو چارچوب، درجهت مثبت محور $x$ چارچوب $S$ حرکت می کند. حال، اگر ازهمان روابط مشابه مکانیک کلاسیک در اینجا استفاده شود، قانون پایستگی تکانهٔ خطی را می توان در چارچوب $S$، به صورت

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v \tag{۱-۴}$$

نوشت. از طرف دیگر، واضح است که اگر بخواهیم قانون پایستگی تکانهٔ خطی در این چارچوب نیز برقرار باشد، جرم ذرات را در رابطهٔ (۴-۱)، نمی توان مقداری ثابت درنظر گرفت؛ زیرا اگر جرم ذرات درگذر از یک چارچوب به چارچوب دیگر، بدون تغییر باقی بماند، در این صورت رابطهٔ(۴-۱) در چارچوب $S$، نمی تواند برقرار باشد. برای نشان دادن این موضوع کافی است که سرعت ذرات را در چارچوب $S$، با استفاده از تبدیلات لورنتس به دست آورده و سپس در رابطهٔ (۴-۱) جایگذاری نماییم. بنابراین، برای اینکه رابطهٔ(۴-۱)یا به عبارت دیگر، قانون پایستگی تکانه درچارچوب $S$ برقرار باشد، می توان حدس زد که شاید جرم ذرات نیز مانند دو کمیّت طول و زمان درانتقال از یک چاچوب به چارچوبی دیگر، ناوردا یا مطلق نباشند. درنتیجه، جرم ذرات را در چارچوب $S$، می توان برابر $m_1$ و $m_2$ درنظرگرفت. اکنون، می بایستی شرطی را روی جرم ذرات اعمال کرد تا اینکه رابطهٔ (۴-۱) درچارچوب $S$ نیزبرقرار باشد. برای این منظور، با استفاده از تبدیلات لورنتس، سرعت ذرات را درچارچوب $S$ به دست می آوریم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \tag{۲-۴}$$

و

$$u_2 = \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} \tag{۳-۴}$$

حال، می توان سرعتهای $v$ و $u'$ را از روابط(۴-۱)، (۴-۲) و (۴-۳) حذف کرد. برای این منظور، می توان روابط (۴-۲) و (۴-۳) را به ترتیب به صورت

$$u_1 - v = u'[1 - vu_1/c^2] \tag{۴-۴}$$

و

$$u_2 - v = u'[vu_2/c^2 - 1] \tag{۵-۴}$$

نوشت. حال، با تقسیم رابطهٔ (۴-۴) بر رابطهٔ (۴-۵)، خواهیم داشت:

$$\frac{u_1 - v}{u_2 - v} = \frac{c^2 - vu_1}{vu_2 - c^2} \tag{۶-۴}$$

درنهایت، اگر سرعت $v$ را از رابطهٔ (۴-۱) به دست آورده و دررابطهٔ (۴-۶) جایگذاری نماییم دراین صورت، می توان به دست آورد:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1-(u_2/c)^2}}{\sqrt{1-(u_1/c)^2}} \tag{۷-۴}$$

در نتیجه، اگر بخواهیم قانون پایستگی تکانه در چارچوب $S$ نیز برقرار باشد، دراین صورت، جرم ذرات باید در رابطهٔ (۴-۷) صدق کنند. از طرف دیگر، این رابطه بیان می کند که جرم ذرات در چارچوب $S$، متناسب با ضریب تبدیل $\gamma(u)$ می باشد. که در آن $u$ سرعت ذره نسبت به ناظر یا چارچوب $S$ می باشد. همچنین، می توان ثابت تناسب را در رابطهٔ(۴-۷)، برابر $m_0$ درنظرگرفت؛ زیرا هنگامی که ذرات نسبت به ناظر یا چارچوب $S$، ساکن باشند، جرم آنها باید برابر $m_0$ باشد. دراین صورت، می توان نوشت:

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{۸-۴}$$

دررابطهٔ فوق $m_0$، **جرم سکون**[1] یا **جرم ویژهٔ**[2] ذره نامیده می شود. درواقع، می توان آن را جرم ذره، نسبت به چارچوبی دانست که ذره درآن ساکن است. همچنین، می توان $m_0$ را جرم ذره، درچارچوب سکون آن درنظرگرفت. $m(u)$ را که تابعی از سرعت ذره می باشد، **جرم نسبیتی**[3] ذره می نامند. رابطهٔ(۴-۸)، نشان می دهد که جرم ذره، با افزایش سرعت آن، افزایش می یابد. حال، اگر بخواهیم ازجنبهٔ تاریخی به مسأله افزایش جرم، برحسب سرعت آن اشاره نماییم، باید به این مطلب توجه کنیم که یکی از نکات قابل استنتاج از نظریهٔ

---

1- Rest mass 2- Proper mass 3- Relativistic mass

الکترونی لورنتس، افزایش جرم الکترون، با افزایش سرعت آن بود. که صحت این پیش بینی نظری وی نیز بعداً در کلیهٔ آزمایشهایی که در بارهٔ الکترونهای پرتو رادیواکتیو بتا به عمل آمد، مورد تأیید قرارگرفت. به این ترتیب، یک بار دیگر معلوم گردید که نتیجهٔ دیگری از نظریهٔ نسبیت، مدتها قبل از ارائهٔ این نظریه، به وسیلهٔ لورنتس پیش بینی شده بود.

درواقع، آنچه برای این آزمون رابطهٔ (۴-۸)، لازم می باشد، اندازه گیری جرم جسم متحرکی است که با سرعت زیاد نسبت به یک ناظر ساکن حرکت می کند. شاید بتوان گفت که تامسون[1] (۱۹۴۰-۱۸۵۶)، اولین شخصی است که روشی برای آزمودن معادلهٔ تبدیل جرم (۴-۸) را فراهم آورده است؛ زیرا درآزمایش تامسون، اگر بارالکترون ثابت در نظرگرفته شود، اندازه گیری کمیّت $e/m_e$ می تواند، روشی برای برآورد جرم الکترون متحرک، یعنی $m_e$ درنظرگرفته شود. با این حال، اولین آزمون و تأیید تجربی در این مورد را بوچرر[2] (۱۹۲۷-۱۸۶۳)، مطرح کرده است. وی در سال ۱۹۰۸، توانست با استفاده از یک چشمهٔ رادیواکتیو بتا، معادلهٔ تبدیل جرم، یعنی رابطهٔ(۴-۸) را تأیید کند. ازآن پس این معادله به کرات، به وسیلهٔ آزمایشهای گوناگون مورد تأیید قرارگرفته است. درحال حاضر این معادله برای تبدیل جرم، برای فیزیک اتمی، هسته ای و ذرات، معادله ای اساسی به شمار می رود.

اکنون، می توان جرم یک ذرهٔ متحرک را از نظر ناظرهای لخت بررسی نمود. برای این منظور، فرض کنید که چارچوب یا ناظری مانند $S'$، با سرعت $u$ نسبت به چارچوب $S$ حرکت کند. در این صورت، اگر ذره در چارچوب $S'$ ساکن باشد، جرم آن در $S'$ برابر $m_\circ$ خواهد بود. از طرف دیگر، ناظر واقع درچارچوب $S$، جرم $m(u)$ را به ذره نسبت می دهد که مقدار آن را می تواند از رابطهٔ(۴-۸) به دست آورد.

حال، می توان مسأله را به شکل دیگری مطرح کرد. برای این منظور، فرض کنید که

---

1- Thomson, Sir Joseph John فیزیکدان انگلیسی که در زمینهٔ پرتو کاتودی آزمایشهایی انجام داده است وی همچنین به خاطر اختراع دستگاه اسپکترومتری جرمی وکشف ایزوتوپها والکترونها شهرت دارد. وی برندهٔ جایزهٔ نوبل در سال ۱۹۰۴ به خاطر کشف الکترون می باشد

2- Bucherer, Alfred Heinrich فیزیکدان آلمانی که به خاطر کارهایش در زمینهٔ اندازه گیری جرم نسبیتی شناخته می شود.

ذره درچارچوب $S'$ ساکن نباشد، و دارای سرعت $\vec{u}'$ باشد. در این صورت، جرم ذره از نظر ناظر واقع در چارچوب $S$، چقدرخواهد بود؟

برای محاسبهٔ جرم ذره نسبت به ناظر $S$، می توان به صورت زیر عمل کرد. چون ذره نسبت به چارچوب $S'$، با سرعت $\vec{u}'$ حرکت می کند. بنابراین، جرم آن در این چارچوب، باتوجه به رابطهٔ (۴-۸)، برابر $m'$ بوده و از رابطهٔ

$$m' = \frac{m_\circ}{\sqrt{۱-(u'/c)^۲}} \tag{۴-۹}$$

به دست می آید. همچنین، اگر سرعت ذره را نسبت به ناظر $S$، برابر $u$ در نظر بگیریم، در این حالت، جرم آن در این چارچوب برابر $m$ خواهد بود که مقدارآن را می توان از رابطهٔ

$$m = \frac{m_\circ}{\sqrt{۱-(u/c)^۲}} \tag{۴-۱۰}$$

به دست آورد. اکنون، با تقسیم رابطهٔ (۴-۱۰) بر رابطهٔ (۴-۹)، خواهیم داشت:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\sqrt{۱-(u'/c)^۲}}{\sqrt{۱-(u/c)^۲}} \tag{۴-۱۱}$$

که درآن $u$ و $u'$، به ترتیب اندازهٔ سرعت ذره نسبت به چارچوبهای $S$و $S'$ می باشند. حال، اگر فرض کنیم که ذره در صفحهٔ $xy$ یا $x'y'$ حرکت کند، در این صورت $u^۲ = u_x^۲ + u_y^۲$ و $u'^۲ = u_x'^۲ + u_y'^۲$ خواهد بود. بنابراین، می توان از تبدیلات لورنتس سرعت استفاده نموده و به جای $u_x$ و $u_y$، مقادیرشان را برحسب $u_x'$ و $u_y'$ در رابطهٔ (۴-۱۱)، جایگذاری کرد. همین طور، می توان به جای $u_y'$، معادل آن، یعنی $u_y'^۲ = u'^۲ - u_x'^۲$ را قرار داد. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{m}{m'} = \gamma(v)[۱+\frac{vu_x'}{c^۲}] \tag{۴-۱۲}$$

یا

$$m = \gamma(v)m'[۱+\frac{vu_x'}{c^۲}] \tag{۴-۱۳}$$

رابطهٔ (۴-۱۳) را در واقع، می توان تبدیل لورنتس جرم، بین دو چارچوب $S$و $S'$ درنظر

گرفت. این رابطه نشان می دهد که این تبدیل تنها به مؤلفهٔ $x'$ سرعت ذره درچارچوب $S'$ بستگی دارد. ازطرف دیگر، اگرسرعت ذره درچارچوب $S'$ دارای مؤلفهٔ $z$ نیز باشد، در این حالت نیز به راحتی می توان نشان داد که رابطهٔ (۴-۱۳) باز هم برقرار خواهد بود. همچنین، می توان با تعویض جای پریمها و تبدیل $v$ به $-v$، تبدیل وارون جرم را به صورت

$$m' = \gamma(v)m[1-\frac{vu_x}{c^2}] \qquad (۴-۱۴)$$

به دست آورد.

## ۴ - ۲ : تکانهٔ خطی یک ذره

اکنون، بعد از تعریف جرم نسبیتی برای یک ذره، می توان تکانهٔ خطی آن را به شکل نسبیتی آن تعمیم داد؛ زیرا اگر از شکل کلاسیک تکانهٔ خطی یک ذره در نسبیت استفاده شود، دراین صورت:

**اولاً** : شکل نیوتنی یا کلاسیک تکانهٔ خطی یک ذره تحت تبدیلات لورنتس هموردا نخواهد بود.

**ثانیاً** : قانون پایستگی تکانهٔ خطی ممکن است در یک چارچوب برقرار باشد، اما درچارچوب دیگر نباشد. به عبارت دیگر، در این حالت این قانون در نسبیت نمی تواند یک قانون ناوردا باشد. که درواقع، این موضوع با اصل اول نسبیت تناقض دارد.

همان طورکه اشاره شد، اگر ازشکل نیوتنی تکانه درنسبیت استفاده شود، قانون پایستگی تکانه در نسبیت ناوردا نمی ماند. برای نشان دادن این موضوع می توان برخورد دو ذره را دردوچارچوب $S$ و $S'$ بررسی نمود. برای این منظور، فرض کنید که در چارچوب $S$، دو ذرهٔ $A$ و $B$ به جرم $m_{1i}$ و $m_{2i}$ با یکدیگر برخورد کنند. حال، اگر سرعت ذرات قبل از برخورد، برابر $\vec{u}_{1i}$ و $\vec{u}_{2i}$ و همین طورسرعت آنها پس از برخورد، برابر $\vec{u}_{1f}$ و $\vec{u}_{2f}$ باشد. دراین صورت، بااستفاده از پایستگی تکانه در این چارچوب، می توان نوشت:

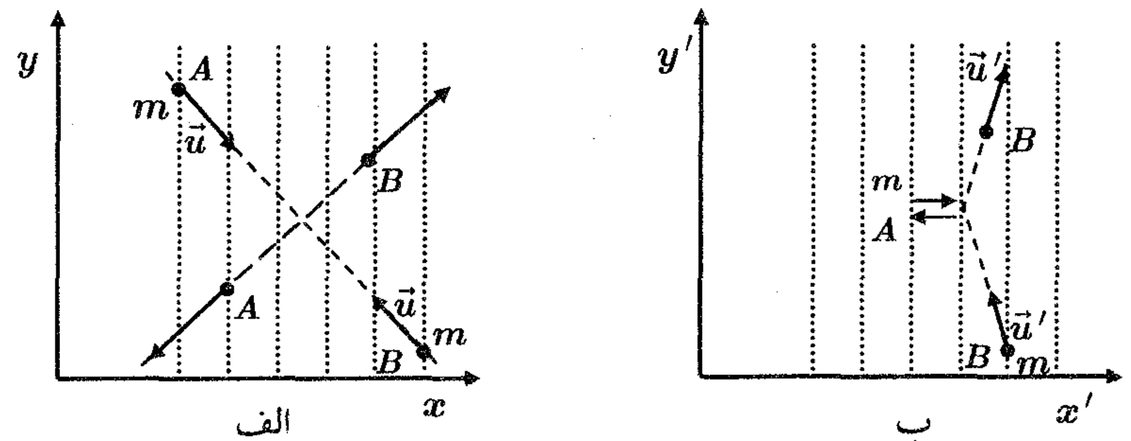
$$m_1\vec{u}_{1i} + m_2\vec{u}_{2i} = m_1\vec{u}_{1f} + m_2\vec{u}_{2f} \qquad (۴-۱۵)$$

اکنون، اگر بخواهیم قانون پایستگی تکانه را درچارچوب $S'$ بنویسیم، باید سرعت ذرات را

با استفاده از تبدیلات لورنتس، قبل و بعد از برخورد به دست آوریم. اگر این محاسبات را انجام داده و مقادیر به دست آمده را در رابطهٔ (۴-۱۵) جایگذاری نماییم، این رابطه در چارچوب $S'$ برقرار نخواهد بود. به عبارت دیگر، این قانون در این چارچوب نمی تواند پایسته باشد. درنتیجه، برای اینکه قانون پایستگی تکانه در همهٔ چارچوبها ناوردا باشد، باید تعریف کلاسیک تکانه را کنارگذاشته و تعریف جدیدی را برای تکانهٔ یک ذره در نسبیت در نظر بگیریم. این رابطهٔ جدید برای تکانهٔ یک ذره، باید طوری نوشته شود که دو شرط اساسی زیر را برآورده نماید.

- **قانون پایستگی تکانه در همهٔ چارچوبها پایسته بماند.**
- **بر اساس اصل تناظر، تکانهٔ نسبیتی یک ذره، درحد سرعتهای معمولی به رابطهٔ نیوتنی تکانه تبدیل شود.**

اکنون، می توان با یک استدلال ساده و نه چندان دقیقی، تکانهٔ یک ذره را در نسبیت به دست آورد. برای این منظور، می توان برخورد دو ذرهٔ یکسان را از نظر دو ناظر یا چارچوب $S$ و $S'$ بررسی کرد. بنابراین، فرض کنید که دو ذرهٔ یکسان $A$ و $B$ با سرعت یکسان $\vec{u}$، در صفحهٔ $xy$ چارچوب $S$، مطابق شکل (۴-۲) الف، به سمت یکدیگر حرکت می کنند.




**شکل (۴-۲) : تعریف تکانهٔ خطی**

در اینجا سرعت ذرات را می توان طوری در نظرگرفت که مولفهٔ $y$ سرعت ذرات، نسبت به مؤلفهٔ $x$ سرعت آنها بسیار بزرگ باشد. می دانیم، پس از برخورد ذرات با یکدیگر، مؤلفهٔ $x$ سرعت آنها وارون می شود و مؤلفهٔ $y$ سرعت ذرات نیز بدون تغییر باقی می ماند. برای

توضیح دقیقتر و مقایسه اندازهٔ مؤلفه های سرعت ذرات، می توان تعدادی خطوط موازی محور $y$، با فاصله های یکسان درچارچوب $S$ رسم کرد. از طرف دیگر، فرض می کنیم که هرکدام از ذرات همراه خود ساعتی حمل می کنند، به طوری که این ساعتها از قبل همزمان شده و با آهنگ یکسانی کار کنند. اکنون، می توان بازه یا واحد زمانی را برای هرکدام از ساعتهای همراه ذرات به صورت زیر تعریف کرد. مدت زمان لازم، برای رسیدن هرکدام ذرات، از یک خط عمودی به خط عمودی بعدی را برابر بازه یا واحد زمان برای هرکدام از ساعتها در نظر می گیریم. این بازه یا واحد زمان را می توانیم با $\Delta t$ یا $T_S$ نشان دهیم. به علت تقارن موجود در برخورد دو ذره درچاچوب $S$، آهنگ کار یا صدای تیک تاک ساعتهای همراه ذرات در این چارچوب کاملاً مشابه خواهد بود.

حال، فرض کنید که چارچوب $S'$ درجهت مثبت محور $y$ چارچوب $S$، با سرعت نسبی، برابرمؤلفهٔ $y$ سرعت ذرهٔ $A$، یعنی با سرعت $v = u_{yA}$ حرکت کند. دراین صورت، در این چارچوب، وضعیت برخورد دو ذره، مانند شکل(۴-۲)ب خواهد بود. در این چارچوب، مؤلفهٔ $y$ ذرهٔ $A$، یعنی $u'_{yA}$ برابر صفر می باشد. و برخورد ذرات در این چارچوب باعث می شود که علامت مؤلفهٔ $x'$ سرعت ذرات قبل و بعد از برخورد تغییر کرده وجهت این مؤلفه ها معکوس شوند. بنابراین، اگر چه مؤلفهٔ $x'$ سرعت ذرات، در این چارچوب قبل و بعد از برخورد برابر نیستند، اما مؤلفهٔ $x'$ تکانهٔ خطی ذرات قبل و بعد از برخورد با هم برابر و درخلاف جهت هم می باشند. همچنین، دراین چارچوب می توان ذرهٔ $A$ را تقریباً ساکن درنظرگرفت. اما اندازهٔ سرعت ذرهٔ $B$، یعنی $u'_B$ بزرگ است. بنابراین، می توان نتیجه گرفت که درچارچوب $S'$، ساعت همراه ذرهٔ $B$، نسبت به ساعت همراه ذرهٔ $A$، با آهنگ کندتری کار می کند. براین اساس، می توان رابطهٔ اتساع زمان را بین ساعتهای همراه ذرات به صورت

$$T'_{SA} = \frac{T'_{SB}}{\sqrt{1-(u'_B/c)^2}} = \gamma(u'_B)T'_{SB} \qquad (۴-۱۶)$$

نوشت. در واقع، رابطهٔ (۴-۱۶) نشان می دهد که در چارچوب $S'$، بازهٔ زمانی بین دو تلاقی متوالی خطوط موازی برای ذرهٔ $B$، طولانی تر از همین مدت زمان برای ذرهٔ $A$ می باشد.

بنابراین، می توان نتیجه گرفت که مؤلفهٔ $x'$ سرعت ذرهٔ $B$ با ضریب $1/\gamma(u'_B)$ کاهش می یابد. و نتیجه اینکه، تکانهٔ ذرهٔ $B$ در راستای محور $x'$ با ضریب $1/\gamma(u'_B)$ از تکانهٔ ذرهٔ $A$ کوچکترخواهد بود. بنابراین، در اینجا رابطهٔ نیوتنی $p'_{xB} = m_\circ u'_{xB}$، برای تکانهٔ یک ذره نمی تواند درست باشد. در نتیجه، می توان نوشت:

$$p'_{xB} = \frac{m_\circ u'_{xB}}{\sqrt{1-(u'_B/c)^2}} = m_\circ \gamma(u'_B) u'_{xB} \tag{۱۷-۴}$$

دراین صورت، می توان گفت که تکانهٔ ذرات در راستای محور $x'$، برابر بوده اما درخلاف جهت هم می باشند؛ زیرا اگرچه مؤلفهٔ $x'$ سرعت ذرات $A$ و $B$ برابر نیستند ($u'_{xB} < u'_{xA}$) اما ضرایب $\gamma$ نیز برای دو ذره یکسان نمی باشد. این ضریب برای ذرهٔ $A$، تقریباً برابر یک بوده و برای ذرهٔ $B$ برابر $\gamma(u'_{xB}) = 1/\sqrt{1-(u'_{xB}/c)^2}$ می باشد. در نتیجه، این ضرایب برای سرعت ذرات در راستای محور $x'$، باعث حذف اثر اختلاف سرعت آنها در این راستا می شود. اکنون، برای به دست آوردن تکانهٔ نسبیتی در سه بعد، می توان از این نکته استفاده کرد که تکانهٔ ذره در جهت سرعت ذره می باشد. بنابراین، تکانهٔ ذرهٔ $B$، در سه بعد با رابطهٔ

$$\vec{p}'_B = \frac{m_\circ \vec{u}'_B}{\sqrt{1-(u'_B/c)^2}} = m_\circ \gamma(u'_B) \vec{u}'_B \tag{۱۸-۴}$$

داده می شود. درنتیجه، تکانهٔ ذره ای که با سرعت $\vec{u}$ حرکت می کند، به طور کلی با رابطهٔ

$$\vec{p} = m(u)\vec{u} = m_\circ \gamma(u) \vec{u} \tag{۱۹-۴}$$

بیان می شود. درواقع، همان تعریف تکانه در فیزیک کلاسیک می باشد، اما با جرم نسبیتی. لازم به تذکر است که در اینجا تکانهٔ نسبیتی، برای یک ذره اثبات نگردید، بلکه تنها از تعداد بیشمار برخوردهایی که ممکن است در طبیعت روی دهند، تنها یک مورد خاص مورد بررسی قرارگرفت. و رابطه ای برای تکانهٔ یک ذره به دست آمد که ممکن است دربرخورد ذرات یا برهمکنش آنها با یکدیگر پایسته بماند. در بخش ۴-۸، تکانه و انرژی نسبیتی را

برای یک ذره به دست می آوریم.

بیان تکانهٔ یک ذره با رابطهٔ (۴-۱۹) باعث می شود که:

اولاً : هموردایی این رابطه تحت تبدیلات لورنتس تضمین شود.

ثانیاً : قانون پایستگی تکانه در نسبیت نیزحفظ شود.

ثالثاً : نتایج تجربی به دست آمده از برهمکنش ذرات، درموارد گوناگون با رابطهٔ (۴-۱۹) سازگار می باشند. و نکتهٔ دیگر اینکه این رابطه برای تکانه، درحد سرعتهای معمولی به رابطهٔ مشابه آن در فیزیک کلاسیک تبدیل می گردد.

## ۴ - ۳ : قوانین نیوتن و نسبیت

همان طورکه می دانیم، درمکانیک کلاسیک برای بررسی حرکت یک ذره یا سیستمی از ذرات قبل از هر چیز بایدچارچوب مرجع مناسب انتخاب گردد. بعد از تعیین چارچوب مرجع مناسب، نیرو یا نیروهایی را که به ذره یا سیستم ذرات وارد می شود، به طور دقیق مشخص نموده و سپس با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادلات حرکت ذره یا سیستم ذرات به دست می آید. همین طور با استفاده از قوانین دوم و سوم نیوتن درغیاب نیروهای خارجی، قانون پایستگی تکانهٔ خطی به دست می آید.

در فصلهای گذشته، پدیده های فیزیک از نظر ناظرها یا چارچوبهای مختلف، بدون در نظرگرفتن نیروها یا برهمکنش بین ذرات با یکدیگر،مورد بررسی قرارگرفت. در اینجا ابتدا قوانین نیوتن را درنسبیت بررسی نموده و سپس در صورت لزوم، اصلاح یا تعمیم لازم را در مورد این قوانین انجام می دهیم. بعد ازآن نیزنیرو را درنسبیت تعریف می کنیم.

### ۴ - ۳ - ۱ : قانون اول نیوتن

در فیزیک کلاسیک، براساس این قانون، اگرجسمی درحال سکون یا در حرکت یکنواخت باشد، به حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود ادامه می دهد، مگرآنکه نیرویی بر آن وارد شود. به بیان دیگر، بر طبق این قانون، جسم در مقابل تغییرحالت، یعنی سکون یا حرکت

یکنواخت از خود مقاومت نشان می دهد که این مقاومت جسم، به لختی یا اینرسی جسم تعبیرمی گردد. همان طورکه در فصل اول اشاره شد، از قانون اول نیوتن یا قانون لختی، می توان برای دسته بندی چارچوبهای مرجع استفاده کرد. به این صورت که اگر قانون اول نیوتن در یک چارچوب معتبر باشد، آن چارچوب را لخت می نامند، درغیراین صورت، نالخت یا شتابدار خواهد بود.

از این قانون بدون تغییر یا اصلاح آن، می توان درنسبیت استفاده کرد. برای نشان دادن این موضوع فرض کنید که ذره ای در چارچوب $S$، در نقطهٔ $x_\circ$ درحال سکون باشد. در این صورت، جهانخط این ذره را می توان با مختصات $(ct, x_\circ)$نشان داد. حال، مختصات مکانی و زمانی ذره را درچارچوبی دیگر، مانند $S'$ که با سرعت $v$ در جهت مثبت محور $x$ چارچوب $S$ حرکت می کند، به دست می آوریم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(v)[ct - \beta x_\circ] \\ x' &= \gamma(v)[x_\circ - \beta ct] \end{aligned} \qquad (۲۰-۴)$$

اکنون، مقدار $ct$ را از رابطهٔ اول(۴-۲۰) به دست می آوریم، بنابراین داریم

$$ct = [\frac{ct'}{\gamma(v)} + \beta x_\circ] \qquad (۲۱-۴)$$

حال، اگر مقدار $ct$ را از رابطهٔ(۴-۲۱)، در رابطهٔ دوم (۴-۲۰) قرارمی دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)[x_\circ - \beta(\frac{ct'}{\gamma(v)} + \beta x_\circ)] \\ &= [\frac{x_\circ}{\gamma(v)} - \beta ct'] \end{aligned} \qquad (۲۲-۴)$$

یا

$$ct' = -\frac{1}{\beta}x' + \frac{x_\circ}{\beta\gamma(v)} \qquad (۲۳-۴)$$

رابطهٔ (۴-۲۳)، در واقع، معادلهٔ جهانخط ذره در چارچوب $S'$ می باشد. این رابطه بیان می کند که ذره درچارچوب $S'$ دارای حرکت یکنواخت می باشد. بنابراین، اگر ذره ای دریک چارچوب درحال سکون باشد، در چارچوب دیگر دارای حرکت یکنواخت خواهد بود. از طرف دیگر، می توان نشان داد که اگر ذره ای در یک چارچوب دارای حرکت

یکنواخت باشد، در چاچوب دیگر نیز ممکن است درحالت سکون یا حرکت یکنواخت باشد. این مطلب درحقیقت، بیان قانون اول نیوتن می باشد. بنابراین، قانون اول نیوتن را می توانیم بدون تغییر یا تجدید نظر در آن، به همان شکل نیوتنی آن، در نسبیت آن را بپذیریم؛ زیرا می دانیم، دو مفهوم سکون و حرکت یکنواخت، مفاهیم هم ارزند. اما در مورد قوانین دوم و سوم نیوتن، وضعیت متفاوت است.

## ۴ - ۳ - ۲ : قانون دوم نیوتن

دراینجا قبل از بیان شکل صحیح قانون دوم نیوتن در نسبیت، به چند مورد از ناسازگاریها و تناقض هایی که ممکن است در به کار بردن شکل کلاسیکی این قانون در نسبیت به وجود آید، اشاره می کنیم. اگر از این قانون، یعنی $\vec{F} = m\vec{a}$ به همین صورت در نسبیت استفاده شود، ناسازگاریهایی مانند، موارد زیر به وجود می آید.

**اولاً** : براساس این قانون می توان با یک نیروی ثابت، به یک جسم شتاب داد و سرعت آن را تا یک مقدارنامتناهی افزایش داد. یعنی می توان با یک نیروی ثابت به سرعتی بیش از سرعت $c$ دست یافت.

**ثانیاً** : اگر به سرعتی فراتر از سرعت نور دست یابیم، ضریب $\gamma$ در تبدیلات لورنتس به یک مقدار موهومی تبدیل می شود. دراین صورت، تبدیلات مختصات لورنتس، فضا- زمان حقیقی، دریک چارچوب لخت را به فضا- زمان موهومی درچارچوب لخت دیگر تبدیل می کند که این نتیجه با اصل اول نسبیت تناقض دارد؛ زیرا براساس این اصل، در نسبیت همهٔ چارچوبهای لخت هم ارز می باشند.

**ثالثاً** : قانون دوم نیوتن به شکل کلاسیکی آن، یعنی $\vec{F} = m\vec{a}$، تحت تبدیلات لورنتس هموردا نیست. بلکه این قانون، به شکل کلاسیکی آن تحت تبدیلات گالیله هموورداست. یعنی این قانون با رابطهٔ $\vec{F} = m\vec{a}$، تحت تبدیلات گالیله به رابطهٔ $\vec{F}' = m\vec{a}'$ درچارچوب دیگر تبدیل می شود.

به طور کلی هموردایی یک رابطه، به این معنی است که شکل ظاهری آن در گذر از

یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر تغییر نکند. بنابراین، این قانون و به طور کلی قوانین دیگرفیزیک را باید به طریقی اصلاح نماییم یا تعمیم دهیم که اولاً، تحت تبدیلات لورنتس هموردا باشند. ثانیاً، بر اساس اصل تناظر، این قوانین درحد سرعتهای معمولی، به قوانین مشابه آنها در فیزیک کلاسیک تبدیل شوند.

اکنون، با به دست آوردن این معیارها برای تعمیم قوانین فیزیک به شکل نسبیتی آنها، می توان قانون دوم نیوتن را به صورت زیر اصلاح نمود. برای این منظور، می توان از قضیهٔ کار-انرژی در فیزیک کلاسیک استفاده کرد. شکل کلاسیکی این قضیه به صورت

$$\begin{aligned} w_{ab} &= \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = m\int_a^b \vec{a}\cdot d\vec{l} \\ &= m\int \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l} \\ &= m\int d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt} \\ &= m\int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} \vec{v}\cdot d\vec{v} \end{aligned} \qquad (۲۴-۴)$$

می باشد. بنابراین، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} w_{ab} &= \frac{۱}{۲}mv_b^۲ - \frac{۱}{۲}mv_a^۲ \\ &= K_b - K_a \\ &= \Delta K \end{aligned} \qquad (۲۵-۴)$$

رابطهٔ(۴-۲۵)، بیان می کند که مقدارکار انجام شده روی یک ذره، درجابه جایی آن از نقطهٔ $a$ تا $b$، برابر تغییر انرژی جنبشی ذره بین دو نقطهٔ $a$ و $b$می باشد. چون کارانجام شده روی ذره، باعث افزایش یا کاهش انرژی جنبشی آن می گردد، درنتیجه، می توان کار انجام شده روی ذره را برابر مقدار انرژی جنبشی کسب شده به وسیلهٔ ذره درنظر گرفت. دراین صورت، توان انجام کار یا تغییر انرژی جنبشی جسم به وسیلهٔ نیرو برابر

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{dk}{dt} \qquad (۲۶-۴)$$

خواهد بود. اکنون، برای تعمیم این قضیه به شکل نسبیتی آن، فرض می کنیم که سمت

راست رابطهٔ (۴-۲۵)، برابر تغییر انرژی نسبیتی ذره باشد. در این صورت، داریم:

$$w_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Delta E \qquad (۴-۲۷)$$

در نتیجه، در این حالت توان نیرو نیز، برابر

$$P = \frac{dE}{dt} \qquad (۴-۲۸)$$

خواهد بود. حال، اگر فرض کنیم که نیرو با رابطهٔ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۴-۲۹)$$

تعریف شود، در این صورت، رابطهٔ (۴-۲۷) را می توان به شکل

$$\begin{aligned} w_{ab} &= \int_a^b \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^b (\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u}) dt = \Delta E \end{aligned} \qquad (۴-۳۰)$$

نوشت. بنابراین، اگر رابطهٔ $\vec{F} = m\vec{a}$، به شکل رابطهٔ (۴-۲۹) تعمیم داده شود، در این حالت رابطهٔ(۴-۳۰) را می توان تعمیم قضیهٔ کار- انرژی، به شکل نسبیتی آن در نظرگرفت. اما این تعمیم در صورتی امکان دارد که مقدار انتگرالده در رابطهٔ (۴-۳۰)، برابر $dE/dt$ باشد. برای این منظور، باید نشان دهیم که

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{dE}{dt} \qquad (۴-۳۱)$$

است. درواقع، طرفین رابطهٔ (۴-۳۱) برابر توان نیروی اعمال شده به ذره می باشد. در اینجا باید نشان دهیم که اگر توان نیروی اعمال شده به ذره، به دو روش محاسبه گردد، درنهایت هردو روش به یک نتیجهٔ یکسان منجرمی شوند. به عبارت دیگر، برقرار بودن رابطهٔ (۴-۳۱)، به این معنی است که می توانیم نیرو را با رابطهٔ(۴-۲۹)، تعریف نماییم.

برای نشان دادن درستی رابطهٔ(۴-۳۱)، می توان طرفین این رابطه را به طور جداگانه محاسبه کرده و نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه نمود. برای این منظور، می توان از رابطهٔ (۴-۱۹) استفاده کرد. بنابراین، داریم:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m_\circ}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{1}{2c^2}\frac{m_\circ\vec{u}}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{d}{dt}\frac{u^2}{c^2}$$

$$=\frac{m_\circ}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{1}{c^2}\frac{m_\circ\vec{u}}{(1-\beta^2)^{3/2}}(u\frac{du}{dt}) \qquad (۳۲-۴)$$

$$=\frac{m_\circ}{(1-\beta^2)^{3/2}}[(1-\beta^2)\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{u}(u\frac{du}{dt})\frac{1}{c^2}]$$

یا

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m_\circ}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{m_\circ}{c^2(1-\beta^2)^{3/2}}[\vec{u}(\vec{u}\cdot\frac{du}{dt})-u^2\frac{d\vec{u}}{dt}] \qquad (۳۳-۴)$$

اما از طرف دیگر، می توان نوشت:

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{u}\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} \qquad (۳۴-۴)$$

در نتیجه، مقدار داخل کروشه را در رابطهٔ(۴-۳۳)، می توان به صورت

$$[\vec{u}(u\frac{du}{dt})-u^2\frac{d\vec{u}}{dt}]=\vec{u}(\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt})-u^2\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$=\vec{u}\times(\vec{u}\times\frac{d\vec{u}}{dt}) \qquad (۳۵-۴)$$

نوشت. در این صورت، رابطهٔ (۴-۳۳) را می توان به شکل

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m_\circ}{(1-\beta^2)^{3/2}}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{1}{c^2}[\vec{u}\times(\vec{u}\times\frac{d\vec{u}}{dt})]\right) \qquad (۳۶-۴)$$

نوشت. حال، اگر طرفین(۴-۳۶) را در بردار سرعت $\vec{u}$ ضرب داخلی نماییم، خواهیم داشت:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u}=\frac{m_\circ}{(1-\beta^2)^{3/2}}(\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u}) \qquad (۳۷-۴)$$

اکنون، می توان مقدار سمت راست رابطهٔ (۴-۳۱)؛ یعنی $dE/dt$ را محاسبه کرد. اگر انرژی کل نسبیتی[1] یک ذره با رابطهٔ

$$E(u)=\frac{m_\circ c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=m(u)c^2$$

$$=m_\circ\gamma(u)c^2 \qquad (۳۸-۴)$$

1-Total relativistic energy

تعریف شود، در این صورت، با مشتق گیری از آن نسبت به زمان می توان به دست آورد

$$\frac{dE}{dt}=\frac{m_\circ c^{۲}}{۲}\frac{۱}{(۱-\beta^{۲})^{۳/۲}}\frac{d}{dt}(\frac{u^{۲}}{c^{۲}})$$
$$=[\frac{m_\circ}{(۱-\beta^{۲})^{۳/۲}}]u\frac{du}{dt} \qquad (۳۹-۴)$$

رابطهٔ فوق نیز در نهایت، با توجه به رابطهٔ (۴-۳۴) به صورت

$$\frac{dE}{dt}=[\frac{m_\circ}{(۱-\beta^{۲})^{۳/۲}}]\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u} \qquad (۴۰-۴)$$

نوشته می شود. اکنون، با با مقایسهٔ روابط(۴-۳۷) و (۴-۴۰) می توان نوشت:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u}=\frac{dE}{dt} \qquad (۴۱-۴)$$

درنتیجه قانون دوم نیوتن را می توان با رابطهٔ جدید یا تعمیم یافتهٔ (۴-۲۹)بیان کرد.

همچنین، به صورت دیگر نیزمی توان نشان داد که اگر قانون دوم نیوتن به شکل رابطهٔ (۴-۲۹) بیان گردد، این تعمیم با نسبیت خاص سازگار است. برای این منظور، اگر فرض کنیم که نیروی ثابت $F=F_\circ$ برذره ای به جرم سکون $m_\circ$ وارد شود، در این صورت از رابطهٔ تعمیم یافتهٔ قانون دوم نیوتن، یعنی $F=dp/dt$ می توان نتیجه گرفت: $dp=Fdt$ در این صورت، داریم:

$$dp=d(F_\circ t) \qquad (۴۲-۴)$$

یا

$$d(p-F_\circ t)=\circ \qquad (۴۳-۴)$$

بنابراین،کمیّت $p-F_\circ t$ را می توان برابرمقدار ثابتی مانند $A$ قرار داد. حال، اگر در لحظهٔ $t=\circ$ داشته باشیم: $p=\circ$، در این صورت، مقدار ثابت $A$ برابر صفر خواهد شد. و درنتیجه، $p=F_\circ t$ به دست می آید. در این حالت، داریم:

$$\gamma(u)m_\circ u=F_\circ t \qquad (۴۴-۴)$$

از طرف دیگر، می دانیم در لحظات اولیهٔ حرکت، رابطهٔ کلاسیک $F_\circ=m_\circ a_\circ$ برقرار است؛ زیرا در این حالت $u\ll c$ بوده و داریم: $p=m_\circ u$ و $a_\circ=F_\circ/m_\circ$. که $a_\circ$ شتاب ذره در لحظات اولیهٔ حرکت، تحت تأثیر نیروی ثابت $F_\circ$ می باشد.

$\gamma(u)m_\circ u = m_\circ a_\circ t$ خواهد. حال، با محاسبهٔ سرعت ذره از این رابطه، خواهیم داشت:

$$u = \frac{a_\circ t}{\sqrt{1+(a_\circ t/c)^2}} \qquad (۴۵-۴)$$

از رابطهٔ (۴-۴۵)، می توان نتیجه گرفت که اگر $t \to \infty$ کند، در این صورت $u \to c$ میل می کند. درغیر این صورت، سرعت ذره هرگز به سرعت حدی $c$ نمی رسد. بنابراین، می توان گفت که بیان قانون دوم نیوتن به شکل رابطهٔ (۴-۲۹) با نسبیت خاص سازگار می باشد.

به این ترتیب، اگر از شکل تعمیم یافتهٔ قانون دوم نیوتن استفاده شود، ناسازگاریها یا تناقض هایی که درهنگام استفاده ازشکل نیوتنی این قانون به وجود می آید، برطرف می گردد. به عبارت دیگر، استفاده از شکل تعمیم یافتهٔ این قانون باعث می شود که:

**اولاً** : براساس رابطهٔ جدید، برای قانون دوم نیوتن، نمی توان برای ذرات با جرم سکون مخالف صفر به سرعتی بیش سرعت نور دست یافت. درنتیجه، ضریب $\gamma$ در تبدیلات لورنتس یک مقدارحقیقی باقی می ماند.

**ثانیاً** : قانون دوم نیوتن به شکل جدید آن تحت تبدیلات لورنتس هموردا می باشد.

**ثالثاً** : پایستگی تکانه درنسبیت خاص تضمین می گردد. همچنین، درحد سرعتهای معمولی، این رابطه به شکل کلاسیکی آن تبدیل می گردد. ازطرف دیگر، تجربه معادلات حرکتی را که بر اساس رابطهٔ (۴-۲۹)، برای ذرات استخراج می شوند، تأیید می کند.

## ۴ - ۳ - ۳ : قانون سوم نیوتن

همان طور که می دانیم، قانون سوم نیوتن در فیزیک نیوتنی به دلیل آنکه بر هم کنش بین ذرات درهمهٔ چارچوبها آنی است، دارای اعتبار می باشد. بنابراین، در نسبیت به استثنای موارد خاص، نمی توان از این قانون استفاده کرد. به عنوان مثال، اگر برهم کنش دو بار نقطه ای $q_1$ و $q_2$ را که در فاصلهٔ دوری از یکدیگر قرار دارند، در نظر بگیریم و همچنین، اگر فرض کنیم که این برهم کنش در یک چارچوب همزمان صورت گیرد، درچارچوب لخت دیگر به دلیل نسبی بودن همزمانی در نسبیت، همزمان نخواهند بود. بنابراین، در صورتی

می توان از این قانون در نسبیت استفاده کرد که برهمکنش بین ذرات یا رویدادهای کنش و واکنش در یک مکان از یک چارچوب روی دهند. درغیر این صورت، مجاز به استفاده از این قانون، درنسبیت نیستیم. اما موردی که درآن می توان از قانون سوم استفاده کرد، می تواند برخورد دو ذره ای باشدکه براثر تماس آنها با یکدیگر صورت می گیرد. در این حالت، نیروهای کنش و واکنش به طور همزمان و دریک مکان ظاهرمی شوند. در نتیجه، درچارچوبهای دیگر نیز همزمانی رویدادهای کنش و واکنش تضمین می گردد. بنابراین، با توجه به این نکات، می بایستی نیروهای کنش از دور را با مفهوم کلاسیک آن کنارگذاشته و از مفاهیم میدان و کنش میدانها روی ذرات استفاده کرد.

## ۴ - ۴ : انرژی جنبشی نسبیتی

بعد ازتعریف نیرو درنسبیت، اکنون می توان انرژی جنبشی نسبیتی[1] یک ذره را به دست آورد. برای این منظور، مقدارکارانجام شده به وسیلهٔ نیروی $\vec{F}$ را درجابه جایی یک ذره به اندازهٔ $d\vec{r}$ به دست می آوریم.

$$dw = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (۴۶-۴)$$

که درآن نیرو با رابطهٔ(۴-۲۹) تعریف می شود، یعنی

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[m(u)\vec{u}] \qquad (۴۷-۴)$$

می باشد. توان این نیرو نیز با استفاده از رابطهٔ(۴-۴۶)، برابر

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} \qquad (۴۸-۴)$$

خواهد بود. از طرف دیگر، مقدارکارانجام شدهٔ $dw$، به وسیلهٔ این نیرو باعث افزایش انرژی جنبشی ذره به اندازهٔ $dk$ میگردد. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} P &= \frac{dk}{dt} = \vec{u}\cdot\vec{F} = \vec{u}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}[m_\circ\gamma(u)\vec{u}] \end{aligned} \qquad (۴۹-۴)$$

1- Relativistic kinetic energy

یا

$$P=\vec{u}\cdot[m_\circ\gamma(u)\frac{d\vec{u}}{dt}+m_\circ\vec{u}\frac{\gamma(u)}{dt}] \tag{۵۰-۴}$$

در نتیجه می توان به دست آورد:

$$P=m_\circ[\gamma(u)\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}]+m_\circ\gamma^{۳}(u)[\frac{u^{۲}}{c^{۲}}u\frac{du}{dt}] \tag{۵۱-۴}$$

اکنون، با فرض موازی بودن $\vec{u}$ و $d\vec{u}/dt$ داریم: $\vec{u}\cdot d\vec{u}/dt=udu/dt$ که در این صورت، رابطهٔ (۴-۵۱) به صورت

$$\frac{dk}{dt}=m_\circ[\gamma(u)+\frac{u^{۲}}{c^{۲}}\gamma^{۳}(u)]u\frac{du}{dt} \tag{۵۲-۴}$$

یا

$$\frac{dk}{dt}=[m_\circ\gamma^{۳}(u)]u\frac{du}{dt} \tag{۵۳-۴}$$

نوشته می شود. درنتیجه، خواهیم داشت:

$$\frac{dk}{dt}=\frac{d}{dt}[m_\circ\gamma(u)c^{۲}] \tag{۵۴-۴}$$

حال، با انتگرال گیری از طرفین رابطهٔ (۴-۵۴)، داریم:

$$k=m_\circ\gamma(u)c^{۲}+const \tag{۵۵-۴}$$

برای به دست آوردن ثابت انتگرال گیری در رابطهٔ فوق باید از شرط اولیه استفاده نمود. اگر سرعت اولیه را برابر صفر درنظر بگیریم، دراین صورت، $k_\circ=\circ$ خواهد بود. درنتیجه ثابت انتگرال گیری برابر $-m_\circ c^{۲}$، به دست می آید. اکنون، با جایگذاری مقدار ثابت انتگرال گیری در رابطهٔ(۴-۵۵)، داریم:

$$k=m_\circ\gamma(u)c^{۲}-m_\circ c^{۲} \tag{۵۶-۴}$$

یا

$$k=m_\circ c^{۲}[\gamma(u)-۱] \tag{۵۷-۴}$$

حال، با تعریف

$$E=m(u)c^{۲}=m_\circ\gamma(u)c^{۲} \tag{۵۸-۴}$$

به عنوان انرژی نسبیتی کل و $E_\circ=m_\circ c^{۲}$، به عنوان انرژی سکون ذره، می توانیم

رابطهٔ(۴-۵۷) را به صورت

$$k = E - E_{\circ} \tag{۵۹-۴}$$

بنویسیم. درنتیجه، انرژی کل ذره از رابطهٔ

$$E = k + E_{\circ} \tag{۶۰-۴}$$

به دست می آید. دراین رابطه، جملهٔ اول ناشی از کار انجام شده روی ذره است. جملهٔ دوم نیز ازجرم ذره ناشی می شود. حال، با تعریف انرژی کل یک ذره با رابطهٔ (۴-۵۸)، می توان گفت که قانون پایستگی انرژی کل در همهٔ چاچوبها نیز برقرار خواهد بود. همچنین، هر ضریبی از $m_{\circ}\gamma(u)c^{2}$، مثلاً $5m_{\circ}\gamma(u)c^{2}$، قانون پایستگی انرژی را برآورده می کند. اما باید به این نکته توجه کرد که رابطه ای را که برای انرژی کل یک ذره در نظر می گیریم، بر اساس اصل همخوانی ، باید درحد سرعتهای معمولی به رابطهٔ کلاسیکی انرژی جنبشی تبدیل گردد. یعنی

$$\begin{aligned} E = m_{\circ}\gamma(u)c^{2} &= \frac{m_{\circ}c^{2}}{\sqrt{1-(u/c)^{2}}} \\ &= m_{\circ}c^{2}\left(1+\frac{u^{2}}{2c^{2}}+\frac{3u^{4}}{8c^{4}}+\cdots\right) \\ &= m_{\circ}c^{2}+\frac{1}{2}m_{\circ}u^{2}+\cdots \end{aligned} \tag{۶۱-۴}$$

که دررابطهٔ فوق چون $u \ll c$ است، می توان از جملات بالاتر صرف نظر نمود.

می دانیم، درفیزیک کلاسیک، دریک برخورد کشسان، انرژی گرمایی تو لید نمی شود. بنابراین، جرم ذرات در هنگام برخورد، بدون تغییر باقی می ماند. در رابطهٔ (۴-۶۱) جملهٔ $m_{\circ}c^{2}$ کمیتی ثابت است. بنابراین، کمیت $m_{\circ}\gamma(u)c^{2}$، برای انرژی کل یک ذره در حد سرعتهای معمولی باید به رابطهٔ آشنای $m_{\circ}u^{2}/2$، تبدیل شود.

همچنین، رابطهٔ (۴-۵۷)، برای انرژی جنبشی یک ذره نیز باید درحد سرعتهای معمولی به رابطهٔ مشابه کلاسیکی آن تبدیل گردد. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} k &= m_{\circ}c^{2}\left[\gamma(u)-1\right] \\ &= m_{\circ}c^{2}\left[\left(1+\frac{u^{2}}{2c^{2}}+\frac{3u^{4}}{8c^{4}}+\cdots\right)-1\right] \\ &\simeq \frac{1}{2}m_{\circ}u^{2} \end{aligned} \tag{۶۲-۴}$$

**مثال ٤ - ١ :** فرض کنید که دریک شتابدهنده، ذره ای با دادن انرژی به آن، تا سرعتی برابر $u = c\sqrt{۳}/۲$ شتاب داده شود. دراین صورت، اگر انرژی جنبشی ذره به شکل کلاسیک محاسبه گردد، میزان اشتباه درمحاسبه چقدرخواهد بود؟

**جواب :** باتوجه به رابطهٔ (۴-۵۷) و همچنین، رابطهٔ $k = m_{\circ} u^{۲}/۲$ برای انرژی جنبشی ذره درحالت کلاسیک می توان نوشت:

$$A = \frac{k_{rel} - k_{cla}}{k_{rel}} = ۱ - \frac{۱}{۲}\beta^{۲}\left[\gamma(u) - ۱\right]^{-۱} \qquad (۶۳-۴)$$

که مقدار خطا به ازای $\beta^{۲} = ۳/۴$، برابر $A = ۳/۸$ یا $A = \%\,۶۳$ به دست می آید.

اکنون، این بخش را با به دست آوردن چند رابطهٔ مفید به پایان می بریم. همان طور که می دانیم، در فیزیک کلاسیک، معمولاً انرژی جنبشی یک ذره برحسب تکانهٔ ذره، یعنی به صورت $k = p^{۲}/۲m_{\circ}$ نوشته می شود. در نسبیت نیز می توان رابطهٔ مشابهی را برای یک ذره به دست آورد. برای این منظور، می دانیم، تکانهٔ یک ذره به صورت $p = m_{\circ}\gamma(u)u$، تعریف می شود. حال، با مجذورطرفین این رابطه داریم:

$$\begin{aligned} p^{۲} &= [m_{\circ}\gamma(u)u]^{۲} = m_{\circ}^{۲}\gamma^{۲}(u)c^{۲}[\frac{u^{۲}}{c^{۲}}] \\ &= m_{\circ}^{۲}\gamma^{۲}(u)c^{۲}\beta^{۲} \\ &= \gamma^{۲}(u)m_{\circ}[m_{\circ}c^{۲}]\beta^{۲} \end{aligned} \qquad (۶۴-۴)$$

که با جایگذاری مقدار $m_{\circ}c^{۲}$ از رابطهٔ(۴-۵۷)، در رابطهٔ فوق به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} p^{۲} &= \gamma^{۲}(u)m_{\circ}[m_{\circ}c^{۲}]\beta^{۲} \\ &= \gamma^{۲}(u)m_{\circ}[\frac{k}{\gamma(u) - ۱}]\beta^{۲} \end{aligned} \qquad (۶۵-۴)$$

از طرف دیگر، با محاسبهٔ $\beta$ برحسب $\gamma(u)$، خواهیم داشت:

$$\beta = \frac{۱}{\gamma(u)}\sqrt{\gamma^{۲}(u) - ۱} \qquad (۶۶-۴)$$

اکنون، با جایگذاری مقدار $\beta$، از رابطهٔ (۴-۶۶) در رابطهٔ (۴-۶۵)، داریم:

$$p^{2} = \gamma^{2}(u)m_{0}[\frac{k}{\gamma(u)-1}]\beta^{2}$$
$$= \gamma^{2}(u)m_{0}[\frac{k}{\gamma(u)-1}][\frac{\gamma^{2}(u)-1}{\gamma^{2}(u)}] \quad (۶۷-۴)$$
$$= km_{0}[\gamma(u)+1]$$

یا

$$k = \frac{p^{2}}{m_{0}[\gamma(u)+1]} \quad (۶۸-۴)$$

رابطهٔ فوق، ارتباط بین انرژی جنبشی و تکانهٔ یک ذره را بیان می کند. این رابطهٔ به ازای $u \ll c$ یا $\gamma(u) \simeq 1$، به شکل کلاسیکی آن؛ یعنی $k = p^{2}/2m_{0}$، تبدیل می گردد. همچنین، می توان نشان داد، اگر $\gamma \gg 1$ باشد، در این صورت

$$p \simeq [1-\frac{1}{2\gamma^{2}(u)}]\frac{E}{c} \quad (۶۹-۴)$$

می باشد. برای به دست آوردن این رابطه، می توان (۴-۶۸) را به شکل

$$p^{2} = km_{0}[\gamma(u)+1] \quad (۷۰-۴)$$

نوشت. حال، با جایگذاری مقدار $k$ از رابطهٔ (۴-۵۷) در (۴-۷۰)، خواهیم داشت:

$$p^{2} = m_{0}^{2}c^{2}[\gamma(u)-1][\gamma(u)+1]$$
$$= m_{0}^{2}c^{2}[\gamma^{2}(u)-1] \quad (۷۱-۴)$$

اکنون، با محاسبهٔ مقدار $m_{0}^{2}$ از رابطهٔ $E = m_{0}\gamma(u)c^{2}$ و جایگذاری آن در (۴-۷۱)، می توان به دست آورد:

$$p^{2} = \frac{E^{2}c^{2}}{\gamma^{2}(u)c^{4}}[\gamma^{2}(u)-1]$$
$$= \frac{E^{2}}{c^{2}}[1-\frac{1}{\gamma^{2}(u)}] \quad (۷۲-۴)$$

یا

$$p = \frac{E}{c}[1-\frac{1}{\gamma^{2}(u)}]^{1/2} \quad (۷۳-۴)$$

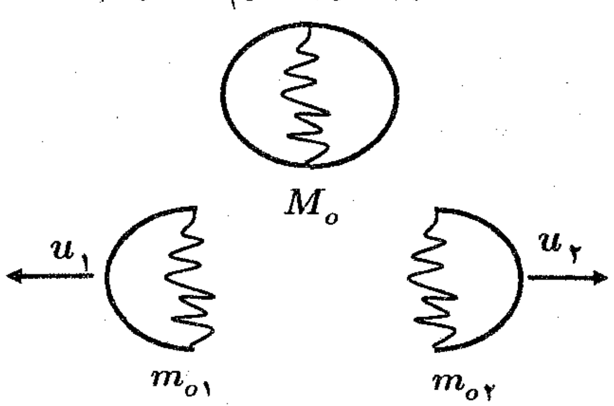
که در نهایت با فرض $\gamma \gg 1$، می توان نوشت:

$$p \simeq \left[1-\frac{1}{2\gamma^{2}(u)}\right]\frac{E}{c} \qquad (74\text{-}4)$$

در پایان این بخش، نکته ای را که باید به آن اشاره نمود، این است که در یک برهم کنش بین ذرات، لزومی ندارد انرژی جنبشی پایسته بماند؛ زیرا ممکن است جرم ذرات در حین برهم کنش تغییرنمایند و بخشی از جرم آنها به انرژی تبدیل گردد. به عنوان مثال، در یک برخورد کاملاً ناکشسان، قبل از برخورد انرژی جنبشی مخالف صفر است در صورتی که بعد از برخورد، اگر ذرات به حالت سکون درآیند، انرژی جنبشی کل صفر می گردد. همچنین، اگر برخوردی را درچارچوب آزمایشگاه مورد بررسی قرار دهیم، در این چارچوب ذرات برخورد کننده، دارای انرژی جنبشی می باشند. درصورتی که در چارچوب مرکز تکانه، انرژی جنبشی ذرات صفر است. ( ⟵ بخش ۴-۱۰) بنا براین، در نسبیت هنگام بررسی برهم کنش ذرات، آنچه مهم است، پایستگی انرژی کل می باشد.

## ۴ - ۵ : هم ارزی جرم و انرژی

یکی ازنتایج بسیار مهم نظریهٔ نسبیت خاص را می توان هم ارزی جرم و انرژی دانست. در اینجا برای توضیح و درک بیشتر این موضوع، می توان فرایند فیزیکی واپاشی یک ذره را در نظرگرفت. درشکل(۴-۳)، ذرهٔ ساکنی به جرم $M_{\circ}$ به دو قطعهٔ کوچکتر به جرم سکون $m_{\circ 1}$ و $m_{\circ 2}$، تقسیم می شود. براساس قانون پایستگی تکانه، ذرات جدید ایجاد شده، هرکدام باید با سرعتهای $u_1$ و $u_2$ در دو راستای مخالف هم حرکت کنند. در اینجا می توان ذرهٔ اولیه را یک هستهٔ رادیواکتیو یا حتی دو ذره در نظرگرفت که به وسیلهٔ یک فنر فشرده به هم متصل شده اند.



شکل(۴-۳) : هم ارزی جرم و انرژی

حال اگر فرض کنیم که ذرهٔ اولیه دریک چارچوب مانند $S$، درحال سکون باشد و ذرات به وجود آمده بعد از واپاشی، دراین چارچوب دارای سرعتهای $u_1$ و $u_2$ باشند. در این صورت، با توجه به قانون پایستگی انرژی کل در این چارچوب، می توان نوشت:

$$E = M_\circ c^۲ = E_۱ + E_۲ \\ = m_{\circ ۱}\gamma(u_۱)c^۲ + m_{\circ ۲}\gamma(u_۲)c^۲ \qquad (۴-۷۵)$$

حال، با استفاده از رابطهٔ(۴-۶۰)، داریم:

$$E = (E_{\circ ۱} + k_۱) + (E_{\circ ۲} + k_۲) \qquad (۴-۷۶)$$

یا

$$E - (E_{\circ ۱} + E_{\circ ۲}) = k_۱ + k_۲ \qquad (۴-۷۷)$$

بنابراین، می توان نوشت:

$$[M_\circ - (m_{\circ ۱} + m_{\circ ۲})]c^۲ = k_۱ + k_۲ \qquad (۴-۷۸)$$

از طرف دیگر می دانیم، انرژیهای جنبشی $k_۱$ و $k_۲$، مقادیر مثبتی هستند. بنابراین، با در نظرگرفتن رابطهٔ(۴-۷۸)، می توان نتیجه گرفت:

$$M_\circ > (m_{\circ ۱} + m_{\circ ۲}) \qquad (۴-۷۹)$$

رابطهٔ(۴-۷۹) نشان می دهد که جرم سکون ذرات ایجاد شده بعداز واپاشی، کوچکتر از جرم سکون ذرهٔ اولیه است. حال، با تعریف

$$\Delta m = M_\circ - (m_{\circ ۱} + m_{\circ ۲}) \qquad (۴-۸۰)$$

و با استفاده از رابطهٔ (۴-۷۸)، خواهیم داشت:

$$\Delta m = \frac{(k_۱ + k_۲)}{c^۲} \qquad (۴-۸۱)$$

در این صورت، با توجه به رابطهٔ فوق، مشاهده می شود که مقداری از جرم ذرهٔ اولیهٔ درحال سکون، براثرواپاشی ناپدید می گردد و به جای آن مقداری انرژی جنبشی، معادل $\Delta mc^۲$ ظاهر می شود. درواقع، می توان نتیجه گرفت که بخشی از جرم ذرهٔ اولیه به صورت انرژی جنبشی، به ذرات تولید شده منتقل می شود.

همچنین، اگر سرعت ذرات ایجاد شده در مقایسه با سرعت نور کوچک باشد، در این حالت، رابطهٔ (۴-۸۱) را می توانیم به صورت

$$\Delta m = \frac{۱}{c^۲}[\frac{۱}{۲}m_{\circ ۱}u_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_{\circ ۲}u_۲^۲] \qquad (۴-۸۲)$$

بنویسیم. البته در این حالت، تنها انرژی های جنبشی نیوتنی ظاهر می گردند. از طرف دیگر،

ممکن است حالت عکس نیز درطبیعت روی دهد. یعنی این امکان وجود دارد که دریک برهم کنش، بخشی ازانرژی ذرات به جرم تبدیل شده و ذره یا ذرات جدیدی درحین برهم کنش ذرات ایجاد گردد. به عنوان مثال، می توان برهم کنش زیر را درنظر گرفت

$$p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p} \qquad (۸۳-۴)$$

در این برهم کنش، بخشی از انرژی پروتونهایی که با یکدیگر برخورد می کنند، به دو ذرهٔ جدید پروتون و پادپروتون تبدیل می گردد. تولید زوج الکترون- پوزیترون[1] و همین طور نابودی زوج[2]، مثالهای دیگری ازاین نوع برهم کنشها می باشند.( ⟵به مثالهای ۴- ۵ و ۴ -۶).

فرایند تولید زوج را می توان یکی از مهمترین فرایندها برای تبدیل انرژی به جرم در نظرگرفت. دراین فرایند، یک فوتون به یک الکترون و یک ذرهٔ مثبت جدید به نام پوزیترون تبدیل می گردد. این ذرهٔ جدید، درسال ۱۹۲۸، به وسیلهٔ دیراک[3] (۱۹۸۴-۱۹۰۲)، هنگامی که به کمک نظریهٔ مکانیک موجی نسبیتی خود در بارهٔ انرژی الکترون کار می کرد، پیش بینی گردید. این ذره چهار سال بعد، یعنی در سال۱۹۳۲ به وسیلهٔ آندرسون[4] (۱۹۹۱-۱۹۰۵)، به طورتجربی مورد تأیید قرار گرفت. آندرسون، پوزیترون را درجریان پژوهشهای خود، درمورد پرتوکیهانی که در اتاقک ابرانجام می داد، کشف کرد.

براین اساس می توان گفت که اگر به جسمی مقداری انرژی، به اندازهٔ $\Delta E$ اضافه یا از آن کم شود، جرم جسم بدون توجه به نوع انرژی، به اندازهٔ $\Delta m = \Delta E / c^{2}$، افزایش یا کاهش خواهد یافت. در اینجا $\Delta E$، ممکن است بیانگر انرژی مکانیکی، گرمایی، الکترومغناطیسی یا هر شکل دیگری از انرژی باشد.

در نتیجه، با توجه به توضیحات داده شده، می توان گفت که در نسبیت اختلاف بین انرژی مکانیکی و شکلهای دیگر انرژی کاملاً برطرف می شود و همهٔ اشکال انرژی به طور

---

1-Pair production , Electron – positron production
2- Pair annihilation
3- Dirac, Paul Adrien Maurice فیزیکدان نظری انگلیسی و یکی ازبنیانگذاران مکانیک کوانتمی . وی در سال ۱۹۳۳ برندهٔ جایزهٔ نوبل در فیزیک می باشد.
4- Anderson, Carl David فیزیکدان آمریکایی که بیشتر به دلیل کشف ذرهٔ پوزیترون شهرت دارد. وی همچنین در سال ۱۹۳۶ به خاطر این کشف برندهٔ جایزهٔ نوبل می گردد.

یکسان مورد بررسی قرار می گیرند. درحالی که در فیزیک کلاسیک باید هرکدام از اشکال گوناگون انرژی، به طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند. همچنین، در نظریهٔ نسبیت، پایستگی انرژی کل یک ذره را درحقیقت، می توان نتیجه و پیامدی از ساختار این نظریه در نظر گرفت. رابطهٔ $E = mc^۲$، برای انرژی کل یک ذره، پیشنهاد جسورانه ای است که اینشتین آن را مطرح کرده است و می توان آن را یکی از پیامدهای بسیارمهم این نظریه محسوب نمود.

ازهم ارزی جرم و انرژی می توان نتیجهٔ مفید دیگری نیز به دست آورد؛ زیرا اکنون، اصل کلی پایستگی انرژی، اصل پایستگی کلی دیگری را نیز در برمی گیرد و آن پایستگی جرم است. درحقیقت می توان گفت که هم ارزی جرم و انرژی که به یک مفهوم واحد، یعنی جرم ـ انرژی منتهی می شود، یکی از عملی ترین نتیجهٔ نظریهٔ نسبیت محسوب می شود. به طوری که چگونگی واکنشها و فرایندهای مربوط فروپاشی هسته ای، این واقعیّت را نشان می دهند که نه جرم و نه انرژی، آنگونه که درنظریهٔ کلاسیک درک می شوند، به طور جداگانه پایسته نمی مانند. بنابراین، در این نظریه می بینیم که قانون پایستگی برای جرم ـ انرژی مطرح می شود. براین اساس، می توان گفت که

> *در هر برهم کنشی؛ جرم کل $m$ ( که انرژی جنبشی را نیز برحسب واحد جرم در بر می گیرد )، قبل و بعد از واکنش پایسته می ماند.*

و به طور مشابه:

> *در هر برهم کنشی؛ انرژی کل $E$ ( که شامل تمام جرمهای سکون برحسب واحد انرژی است )، قبل و بعد از واکنش پایسته می ماند.*

اما می توان گفت که بیشترین استفاده ای که امروزه از هم ارزی جرم و انرژی می شود، مربوط به خورشید است. به این ترتیب که درآن جرم ـ انرژیِ درحال سکون، تبدیل به انرژی حرارتی می گردد. امروزه بشر می تواند، جرم ـ انرژیِ در حال سکون را به انرژی حرارتی تبدیل نماید. شکافت و گداخت هسته ای درحقیقت، روشهای این تبدیل می باشند.

برای توضیح بیشتر، فرض کنید که در چارچوب آزمایشگاه یا $S$، هستهٔ $A_۱$ با هستهٔ

ساکن $A_2$ برخورد کند و بر اثر برهم کنش این هسته ها، هسته های جدید $A_3$ و $A_4$ ایجاد گردند، یعنی داشته باشیم:

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4 \qquad (۸۴-۴)$$

حال، اگر فرض کنیم که جرم سکون هسته ها به ترتیب برابر $m_{01}$، $m_{02}$، $m_{03}$ و $m_{04}$ باشد، دراین صورت می توان مقدار انرژی حاصل از این برهمکنش را به شکل زیر محاسبه کرد.

بر اساس قانون پایستگی انرژی، باید انرژی کل ذرات قبل از واکنش برابر انرژی کل ذرات ایجاد شده بعد از واکنش باشد. یعنی باید داشته باشیم:

$$E_1 + E_2 \rightarrow E_3 + E_4 \qquad (۸۵-۴)$$

حال، با توجه به رابطهٔ (۴-۶۰)، می توان نوشت:

$$(k_1 + m_{01}c^2) + m_{02}c^2 = (k_3 + m_{03}c^2) + (k_4 + m_{04}c^2) \qquad (۸۶-۴)$$

همچنین، رابطهٔ فوق را می توان به شکل زیر نوشت.

$$k_1 + (m_{01} + m_{02})c^2 = (k_3 + k_4) + (m_{03} + m_{04})c^2 \qquad (۸۷-۴)$$

اکنون، می توان اختلاف انرژی جنبشی قبل و بعد از واکنش را به دست آورد. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= (k_3 + k_4) - k_1 \\ &= (m_{01} + m_{02})c^2 - (m_{03} + m_{04})c^2 \end{aligned} \qquad (۸۸-۴)$$

حال، اگر مقدار انرژی جنبشی آزاد شده از واکنش هسته ای فوق را با $Q$ نشان دهیم، در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q &= (m_{01} + m_{02})c^2 - (m_{03} + m_{04})c^2 \\ &= [(m_{01} + m_{02}) - (m_{03} + m_{04})]c^2 \\ &= (m_{012} - m_{034})c^2 \\ &= \Delta m c^2 \end{aligned} \qquad (۸۹-۴)$$

در نتیجه، مقدار $Q$ در واقع، برابراختلاف انرژی سکون هسته های قبل و بعد از واکنش می باشد. اکنون، به عنوان مثالی از این نوع برهمکنش، می توان به واکنش هسته ای

$$^{7}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{8}_{4}Be + {}^{1}_{0}n \qquad (۹۰-۴)$$

اشاره نمود. با محاسبهٔ جرم سکون هسته ها، قبل و بعد از واکنش، و با استفاده از رابطهٔ

(۴-۸۹)، می توان مقدار انرژی آزاد شده در این برهم کنش هسته ای را به دست آورد که نتیجهٔ این محاسبه برابر $Q = ۱۵/۱ \, Mev$ خواهد بود.

## ۴ - ۶ : تبدیلات انرژی و تکانه

اکنون، با به دست آوردن روابطی برای انرژی و تکانهٔ یک ذره، می توان اندازه یا مقدار این کمیّتها را از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر تبدیل نمود. برای این منظور، فرض کنیدکه ذره ای در چارچوب $S'$، دارای سرعت $\vec{u}'$ باشد. بنابراین، در این چارچوب انرژی و تکانهٔ ذره با روابط

$$E' = \gamma(u')m_\circ c^۲ \qquad (۹۱-۴)$$

و

$$\vec{p}' = \gamma(u')m_\circ \vec{u}' \qquad (۹۲-۴)$$

بیان می شوند. اکنون، برای به دست آوردن انرژی و تکانهٔ ذره در چارچوب $S$، می توان سرعت ذره را در این چارچوب به دست آورده و سپس با استفاده از تعریف این کمیّتها در این چارچوب، یعنی، $E = \gamma(u)m_\circ c^۲$ و $p = \gamma(u)m_\circ u$، مقادیر آنها را مشخص نمود. در نتیجه، برای به دست آوردن $E$ و $p$، در چارچوب $S$، ابتدا باید ضریب $\gamma(u)$ را محاسبه نماییم. برای این منظور، می دانیم درضریب

$$\gamma(u) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - u^۲/c^۲}} \qquad (۹۳-۴)$$

سرعت $u^۲$ ، به صورت $u^۲ = u_x^۲ + u_y^۲ + u_z^۲$ می باشد.حال، با استفاده از روابط مربوط به تبدیل لورنتس سرعت برای $u_x$، $u_y$ و $u_z$ یعنی روابط(۲-۱۳۹)، (۲-۱۴۰) و(۲-۱۴۱) وجایگذاری این مقادیر در رابطهٔ (۴-۹۳)، خواهیم داشت:

$$\gamma(u) = \gamma(v)\gamma(u')[۱ + \frac{vu'_x}{c^۲}] \qquad (۹۴-۴)$$

که در آن $\gamma(u')$ برابر

$$\gamma(u') = \frac{۱}{\sqrt{۱ - u'^۲/c^۲}} \qquad (۹۵-۴)$$

می باشد. اکنون، می توان با در نظرگرفتن تعریف انرژی و تکانهٔ ذره، درچارچوب $S$، و همین طور رابطهٔ (۴-۹۴)، اندازهٔ این کمیّتها را در این چارچوب، با توجه به روابط(۴-۹۱) و(۴-۹۲) به دست آورد. در نتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(u)m_\circ c^۲ = \gamma(v)\gamma(u')[۱+\frac{vu'_x}{c^۲}]m_\circ c^۲ \\ &= \gamma(v)[\gamma(u')m_\circ c^۲ + v\gamma(u')m_\circ u'_x] \\ &= \gamma(v)[E' + vp'_x] \end{aligned} \tag{۹۶-۴}$$

ومؤلفه $x$ تکانهٔ ذره در این چارچوب نیز، برابر

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(u)m_\circ u_x \\ &= \gamma(v)\gamma(u')[۱+\frac{vu'_x}{c^۲}]m_\circ u_x \end{aligned} \tag{۹۷-۴}$$

می باشد. حال، با جایگذاری مقدار $u_x$ از رابطهٔ (۲-۱۳۹) در رابطهٔ (۴-۹۷) و با در نظر گرفتن تعریف $E'$ و $p'_x$ در چارچوب $S'$، خواهیم داشت:

$$p_x = \gamma(v)[p_x{}' + \frac{v}{c^۲}E'] \tag{۹۸-۴}$$

به همین ترتیب، می توان نشان داد:

$$p_y = p'_y \quad , \quad p_z = p'_z \tag{۹۹-۴}$$

بنابراین، روابط تبدیلی انرژی و تکانه، بین دو چارچوب $S$ و $S'$، به صورت

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(v)[p'_x + \frac{v}{c^۲}E'] \\ p_y &= p'_y \quad , \quad p_z = p'_z \\ E &= \gamma(v)[E' + vp'_x] \end{aligned} \tag{۱۰۰-۴}$$

به دست می آیند. از طرف دیگر، مانند قبل با تبدیل $v$ به $-v$ و همچنین، با تعویض جای پریمها، می توان روابط وارون تبدیل انرژی و تکانهٔ ذره را در $S'$ نیز به دست آورد، در این صورت، وارون این روابط تبدیلی به شکل زیرخواهند بود.

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(v)[p_x - \frac{v}{c^۲}E] \\ p'_y &= p_y \quad , \quad p'_z = p_z \\ E' &= \gamma(v)[E - vp_x] \end{aligned} \tag{۱۰۱-۴}$$

همچنین، می توان این تبدیلات را به صورت برداری

$$E' = \gamma(v)[E - \vec{p}\cdot\vec{v}]$$
$$\vec{p}\,' = \vec{p} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{v^{2}}\vec{v} + \gamma(v)[\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}}{v^{2}}\vec{v} - \frac{\vec{v}}{c^{2}}E] \qquad (۴-۱۰۲)$$

نیز بیان کرد. اما نکته ای که باید به آن توجه نماییم، این است که روابط (۴-۱۰۰) یا (۴-۱۰۱) تبدیلات خطی می باشند. به عبارت دیگر، اگر سیستمی از ذرات داشته باشیم، دراین صورت، تکانه و انرژی کل ذرات، برابر مجموع تکانه و انرژی تک تک ذرات سیستم خواهد بود. یعنی اگر $\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j$ و $E = \sum_j e_j$ باشند، در این صورت، خواهیم داشت:

$$P'_x = \gamma(v)[P_x - \frac{v}{c^{2}}E]$$
$$E' = \gamma(v)[E - vP_x] \qquad (۴-۱۰۳)$$

و همین طور،

$$P'_{yj} = P_{yj} \qquad , \qquad P'_{zj} = P_{zj} \qquad (۴-۱۰۴)$$

خواهند بود. اکنون، می توان با استفاده از این روابط، قوانین پایستگی انرژی و تکانه را با دقت بیشتری مورد بررسی قرار داد. دراینجا می توان نشان داد که اگر در یک چارچوب قوانین پایستگی تکانه یا انرژی برقرار باشد، در این صورت درهمهٔ چارچوبهای دیگر نیز این کمّیّتها پایسته خواهند بود. برای نشان دادن این موضوع، می توان گفت که چون کمّیّتهای پریم دار یک ترکیب خطی از کمّیّتهای بدون پریم هستند. بنابراین، می توان روابط (۴-۱۰۳) را به صورت

$$\Delta P'_x = \gamma(v)[(\Delta P_x) - \frac{v}{c^{2}}\Delta E]$$
$$\Delta P'_y = \Delta P_y$$
$$\Delta P'_z = \Delta P_z \qquad (۴-۱۰۵)$$
$$\Delta E' = \gamma(v)[\Delta E - v(\Delta P_x)]$$

نوشت. حال، با توجه به رابطهٔ (۴-۱۰۵)، اگر در چارچوب $S$، قانون پایستگی تکانه و انرژی برقرار باشند، یعنی اگر $\Delta P_x$، $\Delta P_y$، $\Delta P_z$ و $\Delta E$، برابرصفرباشند، بلافاصله می توان نتیجه گرفت که $\Delta P'_x$، $\Delta P'_y$، $\Delta P'_z$ و $\Delta E'$ نیز برابر صفر می شوند. یعنی درچارچوب $S'$ نیز دو قانون پایستگی انرژی و تکانه برقرار می باشند.

نکتهٔ دیگری که در اینجا می توان به آن اشاره نمود، این است که اگر قانون پایستگی تکانه در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت برقرار باشد، در این صورت می توان نتیجه گرفت که قانون پایستگی انرژی نیز، در همهٔ چارچوبهای لخت برقرار خواهد بود و بر عکس. این مطلب را می توان به راحتی از روابط(۴-۱۰۵)، نتیجه گرفت؛ زیرا با توجه به این روابط، اگر $\Delta\vec{P}$ و $\Delta\vec{P}'$ برابر صفر باشند، یعنی اگر در چارچوبهای $S$ و $S'$، قانون پایستگی تکانه برقرارباشد، در این صورت از رابطهٔ اول(۴-۱۰۵) می توان نتیجه گرفت، $\Delta E$ برابر صفر است. همچنین، ازرابطهٔ چهارم (۴-۱۰۵)، با توجه به صفر بودن $\Delta E$، می توان نتیجه گرفت که $\Delta E'$ نیز برابر صفر خواهد بود. به عبارت دیگر، پایستگی انرژی در دو چارچوب $S$ و $S'$ نیز بر قرار است.

حال با توجه به این توضیحات، مشاهده می کنیم که پایستگی تکانه در یک چارچوب، منجر به پایستگی انرژی کل درآن چارچوب می شود. به بیان دیگر، پایستگی انرژی نتیجهٔ پایستگی تکانه می باشد درنتیجه، می توان گفت که این دو قانون در نسبیت مستقل از یکدیگر نیستند. درحالی که درمکانیک نیوتنی این دو قانون، یعنی پایستگی انرژی و تکانه مستقل از یکدیگر می باشند.

اکنون، می توان با این توضیحات، موردی خاص، یعنی برخورد دو ذره را از نظردو ناظر $S$ و $S'$، بررسی کرد. برای این منظور فرض کنید که در چارچوب $S$، دو ذره به جرم $m_1$ و $m_2$، با یکدیگر برخورد کنند. همچنین، فرض کنید که در این چارچوب قانون پایستگی انرژی و تکانه برقرار باشد. در این صورت، مؤلفهٔ $x$ تکانهٔ کل ذرات در راستای محور $x$ چارچوب $S$، برابر

$$p_x = p_{1x} + p_{2x} \qquad (۴-۱۰۶)$$

می باشد. حال، با توجه به قانون پایستگی تکانه، $p_x$ یک مقدار ثابت است. یعنی $p_x$ قبل و بعد از برخورد ذرات، ثابت باقی می ماند. حال، اگراین برخورد را از نظر ناظر یا چارچوب دیگری مانند $S'$ بررسی نماییم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{1x} + p_{2x} \\ &= \gamma(v)[p'_{1x} + \frac{v}{c^2}E'_1] + \gamma(v)[p'_{2x} + \frac{v}{c^2}E'_2] \qquad (۴-۱۰۷) \\ &= \gamma(v)[p'_{1x} + p'_{2x}] + \gamma(v)\frac{v}{c^2}[E'_1 + E'_2] \end{aligned}$$

یا

$$p_x = \gamma(v) p'_x + \gamma(v) \frac{v}{c^{۲}} [E'_{۱} + E'_{۲}] \qquad (۱۰۸-۴)$$

حال، با توجه به اینکه $p'_x$ نیز درچارچوب $S'$، مقداری ثابت است، بنابراین می توان از رابطهٔ (۴-۱۰۸)نتیجه گرفت که

$$E' = E'_{۱} + E'_{۲} \qquad (۱۰۹-۴)$$

نیز مقداری ثابت می باشد. یعنی اینکه انرژی کل در چارچوب $S'$ نیز پایسته است. از طرف دیگر، به دلیل آنکه چارچوب $S'$، یک چارچوب دلخواه می باشد، بنابراین می توان نتیجه گرفت که اگردریک چارچوب انرژی پایسته باشد درهمهٔ چارچوبهای لخت دیگر نیز پایسته خواهد بود. اگرچه ممکن است، مقدار انرژی درچارچوبهای مختلف درحالت کلی، مقادیر متفاوتی باشند.

همان طور که دربخش قبل اشاره شد، جرم نیز در حالت کلی ممکن است به انرژی تبدیل شود یا اینکه از انرژی به وجود آید، یعنی اینکه ممکن است، ایجاد یا نابود گردد. بنابراین، با توجه به این نکات، می توان قانون پایستگی انرژی کل را به صورت زیر بیان کرد

**انرژی نسبیتی کل سیستمی از ذرات نسبت به همهٔ چارچوبها همیشه ثابت باقی می ماند، اگرچه ممکن است تعداد کل ذرات در حالت کلی ثابت باقی نماند.**

اکنون، این بخش را با به دست آوردن چند رابطهٔ دیگر به پایان می بریم. اولین رابطه ای که دراینجا به دست می آوریم، ارتباط بین انرژی کل و تکانهٔ یک ذره را بیان می کند. برای این منظور، می توان مجذور انرژی کل ذره را به دست آورد. درنتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} E^{۲} &= [m_\circ \gamma(u) c^{۲}]^{۲} = \frac{m_\circ^{۲} c^{۴}}{۱-\beta^{۲}} \\ &= m_\circ^{۲} c^{۴} [\frac{۱-\beta^{۲}+\beta^{۲}}{۱-\beta^{۲}}] \qquad (۱۱۰-۴) \\ &= m_\circ^{۲} c^{۴} + \frac{m_\circ^{۲} \cancel{c}^{۴}}{۱-\beta^{۲}} \cdot \frac{u^{۲}}{\cancel{c}^{۲}} \end{aligned}$$

یا

$$E^{2} = m_{0}^{2}c^{4} + p^{2}c^{2} \qquad (111\text{-}4)$$

این رابطه ارتباط بین تکانهٔ خطی $p$ ذره و انرژی کل آن، یعنی $E$ را نشان می دهد. حال، با جایگذاری مقدار $E$ از رابطهٔ (۴-۶۰) و حل آن برای تکانهٔ $p$، می توان به دست آورد:

$$p = \sqrt{2m_{0}k + k^{2}/c^{2}} \qquad (112\text{-}4)$$

این معادله شبیه رابطهٔ کلاسیک برای تکانه می باشد که در آن جملهٔ دوم در زیر رادیکال را می توان به عنوان جملهٔ تصحیح نسبیتی در نظر گرفت.

همچنین، کمیّت ناوردایی که دراینجا می توان به آن اشاره کرد، کمیّت $(E/c)^{2} - p^{2}$ می باشد. این کمیّت در صورتی که بتوان از برهم کنش بین ذرات در یک چارچوب، صرف نظر کرد، کمیّتی ناوردا خواهد بود. برای نشان دادن ناوردایی این کمیّت، می توان از تبدیلات لورنتس انرژی و تکانه استفاده کرد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(E'/c)^{2} - p'^{2} &= \gamma(v)^{2}[(E/c)-(vp/c)]^{2} - \gamma(v)^{2}[p-(vE/c^{2})]^{2} \\ &= \gamma(v)^{2}\left([(E/c)^{2} - p^{2}]-(v/c)^{2}[(E/c)^{2} - p^{2}]\right) \\ &= \gamma(v)^{2}[(E/c)^{2} - p^{2}][1-(v/c)^{2}] \\ &= (E/c)^{2} - p^{2}\end{aligned} \qquad (113\text{-}4)$$

همچنین، ناوردایی این کمیّت را می توانیم با استفاده از رابطهٔ(۴-۱۱۱) نیزنتیجه بگیریم. یعنی

$$E^{2} - c^{2}p^{2} = E'^{2} - c^{2}p'^{2} = m_{0}^{2}c^{4} \qquad (114\text{-}4)$$

، داریم:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^{2} - p^{2} = \left(\frac{E'}{c}\right)^{2} - p'^{2} = m_{0}^{2}c^{2} \qquad (115\text{-}4)$$

زیرا مقدار $m_{0}^{2}c^{2}$ یک کمیّت ناوردا می باشد. رابطهٔ دیگری که می توان به دست آورد، ارتباط بین سرعت، تکانه و انرژی کل یک ذره را بیان می کند. برای این منظور، می توانیم از روابط $E = \gamma m_{0}c^{2}$ و $\vec{p} = \gamma m_{0}\vec{u}$ استفاده نماییم. اگرطرفین این دو رابطه را برهم تقسیم کنیم، سرعت ذره به صورت

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{E}c^{2} \qquad (116\text{-}4)$$

به دست می آید. همچنین، با توجه به خطی بودن تبدیلات تکانه و انرژی، رابطهٔ (۴-۱۱۴) را می توان به شکل

$$\begin{aligned}\Delta E^{۲} - c^{۲}\,\Delta p^{۲} &= \Delta E'^{۲} - c^{۲}\,\Delta p'^{۲} \\ &= m_{\circ}^{۲}\, c^{۴}\end{aligned} \qquad (۱۱۷\text{-}۴)$$

نیز نوشت که در واقع، مشابه رابطهٔ

$$\begin{aligned}c^{۲}\,\Delta t^{۲} - \Delta x^{۲} &= c^{۲}\,\Delta t'^{۲} - \Delta x'^{۲} \\ &= \Delta s^{۲}\end{aligned} \qquad (۱۱۸\text{-}۴)$$

در مبحث سینماتیک نسبیتی می باشد.

اکنون، با توجه به ارتباط نزدیک بین کمیّت های انرژی و تکانه، می توان کمیّت واحدی را به نام **چاربردار انرژی-تکانه**[1] تعریف نمود. این کمیّت دارای چهار مؤلفه به صورت

$$p^{\mu} = (E/c, \vec{p}) = (E/c, p_x, p_y, p_z) \qquad (۱۱۹\text{-}۴)$$

می باشد. درنتیجه، چاربردارانرژی - تکانه، برای ذره ای که با سرعت $\vec{u}$ درچارچوب $S$ حرکت می کند، با رابطهٔ زیر بیان می گردد.

$$p^{\mu} = [m_{\circ}\gamma(u)c, m_{\circ}\gamma(u)u_x, m_{\circ}\gamma(u)u_y, m_{\circ}\gamma(u)u_z] \qquad (۱۲۰\text{-}۴)$$

حال، با درنظر گرفتن تعریف چاربردار انرژی- تکانه، می توان قانون پایستگی انرژی و تکانه را در برهم کنش بین ذرات یا درمسائل مربوط به برخورد ذرات، به شکل زیر نوشت.

$$p_i^{\mu} = p_f^{\mu} \qquad \mu = ۰, ۱, ۲, ۳ \qquad (۱۲۱\text{-}۴)$$

که درآن $p_i^{\mu}$ و $p_f^{\mu}$ به ترتیب، چاربردار انرژی- تکانهٔ کل ذرات قبل و بعد از برخورد یا برهم کنش ذرات می باشند.

## ۴ - ۷ : ذرات بدون جرم سکون

اگرجرم سکون ذره ای برابر صفر باشد، در این صورت، با توجه به رابطهٔ(۴-۱۱۴)، خواهیم داشت:

$$E = pc = |\vec{p}|c \qquad (۱۲۲\text{-}۴)$$

این رابطه درواقع، ارتباط بین تکانه و انرژی ذره ای را بیان می کند که دارای جرم سکون

1- Energy – Momentum four vector

صفر است. حال، برای به دست آوردن اندازهٔ سرعت اینگونه ذرات، می توان از روابط (۴-۱۱۶) و (۴-۱۲۲) استفاده نمود. در این صورت، داریم:

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{p}|}{E}c^{2} = \frac{E}{cE}c^{2} = c \qquad (۱۲۳-۴)$$

در نتیجه، ذراتی که دارای جرم سکون صفر می باشند، با سرعت $c$ حرکت می کنند. همچنین، می توان با استفاده از رابطهٔ $E = m_{\circ}\gamma(u)c^{2}$ نیز به همین نتیجه رسید. برای این منظور، این رابطه را می توان به شکل

$$\frac{E}{\gamma(u)} = m_{\circ}c^{2} \qquad (۱۲۴-۴)$$

نوشت. اکنون، اگر دررابطهٔ(۴-۱۲۴)، $m_{\circ}$ را برابر صفر قرار دهیم، در این صورت، ضریب $\gamma(u) \to \infty$ میل می کند که با توجه به تعریف ضریب $\gamma(u)$، می توان نتیجه گرفت که سرعت ذره باید برابر $c$ باشد. ازطرف دیگر، با درنظرگرفتن رابطهٔ(۴-۱۲۲) می توان به اینگونه ذرات، تکانهٔ $p$ و همین طور انرژی $E$ را نسبت داد. همچنین، در مکانیک کوانتمی انرژی و تکانهٔ این ذرات با روابط

$$E = \hbar\omega = hf \qquad (۱۲۵-۴)$$

و

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad (۱۲۶-۴)$$

تعریف می گردند. به عنوان مثال، ذراتی مانند فوتونها و نوترینوها، دارای جرم سکون صفر می باشند. بنابراین، سرعت فوتونها ونوترینوها باید برابرسرعت $c$ باشد. اگرچه ثابت می شود که نوترینوها که در پرتوهای خورشیدی یافت می شوند، دارای جرم سکون بسیار ناچیز می باشد.

براساس نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول، موج نور حامل تکانه می باشد، به عبارت دیگر، هنگامی که یک موج الکترومغناطیسی به وسیلهٔ یک سطح جذب یا از آن گسیل می شود، تکانهٔ موج به سطح منتقل می شود. انتقال تکانهٔ موج به سطح، باعث ایجاد فشار تابشی می شود. محاسبهٔ این فشار تابشی بر پایهٔ ماهیّت موجی نور قدری مشکل است. اما این محاسبه با در نظرگرفتن ماهیّت ذره ای نور، ساده تر می باشد؛ زیرا بر این اساس به ذرات نور یا فوتونها می توان تکانهٔ تعریف شده در رابطهٔ(۴-۱۲۶) را نسبت داد.

از طرف دیگر، می دانیم فوتون یک ذرهٔ نسبیتی است. بنابراین، با در نظر گرفتن فیزیک کلاسیک، نمی توان ویژگیهای آن را به دست آورد. به عنوان مثال، یکی از ویژگیهای فوتونها، این است که بر خلاف ذرات در فیزیک کلاسیک، می توانند تولید یا نابود شوند. درواقع، گسیل یا جذب فوتون به وسیلهٔ یک ماده، معادل تولید یا نابودی فوتونها می باشد که این خاصیّت از فوتونها را نمی توان با قوانین فیزیک کلاسیک به راحتی توضیح داد.

اکنون فرض می کنیم که جرم سکون فوتون مخالف صفر باشد، در این صورت، سرعت آن باید با سرعت $c$ فرق داشته باشد. برای محاسبهٔ سرعت فوتون در این حالت، فرض کنید که جرم سکون فوتون برابر $m_{\circ,ph}$ باشد. با این فرض، انرژی کل فوتون برابر $E_{ph} = m_{\circ,ph}\gamma(u)c^{۲}$ خواهد بود. همچنین فرض کنید که رابطهٔ $E_{ph} = hf$ هنوز هم دارای اعتبار باشد. بنابراین، می توان نوشت:

$$E_{ph} = hf = m_{\circ,ph}\gamma(u)c^{۲} \qquad (۱۲۷-۴)$$

یا

$$(hf)^{۲} = [m_{\circ,ph}\gamma(u)c^{۲}]^{۲} \qquad (۱۲۸-۴)$$

در نتیجه به دست می آید:

$$(hf)^{۲} = [m_{\circ,ph}c^{۲}]^{۲}\frac{۱}{۱-u^{۲}/c^{۲}} \qquad (۱۲۹-۴)$$

حال، با محاسبهٔ مقدار $u^{۲}/c^{۲}$ از رابطهٔ(۴-۱۲۹)، خواهیم داشت:

$$\frac{u^{۲}}{c^{۲}} = ۱-\frac{[m_{\circ,ph}c^{۲}]^{۲}}{(hf)^{۲}} \qquad (۱۳۰-۴)$$

حال، با تعریف $hf_{\circ} = m_{\circ,ph}c^{۲}$، می توان نوشت:

$$\frac{u^{۲}}{c^{۲}} = ۱-\frac{[hf_{\circ}]^{۲}}{(hf)^{۲}} = ۱-\frac{f_{\circ}^{۲}}{f^{۲}} \qquad (۱۳۱-۴)$$

بنابراین، با درنظر گرفتن جرم سکون مخالف صفربرای فوتونها، سرعت اینگونه ذرات از رابطهٔ

$$u = c\sqrt{۱-f_{\circ}^{۲}/f^{۲}} \qquad (۱۳۲-۴)$$

به دست می آید. درنتیجه، با توجه به رابطهٔ(۴-۱۳۲)، اگر برای فوتونها جرم سکون $m_{\circ,ph}$ در نظر گرفته شود، سرعت این ذرات کوچکتر از $c$ به دست می آید. به عبارت دیگر، تنها

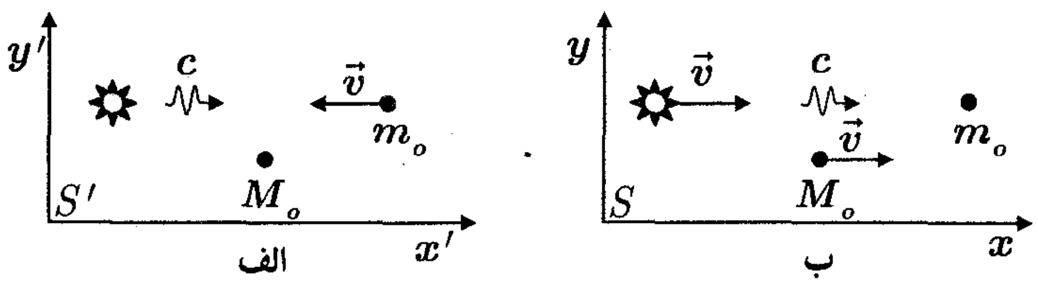
در صورتی که $m_{\circ,ph}$ برابر صفر یا معادل آن $f_\circ$ برابرصفر گردد، سرعت فوتون برابر $c$ می شود. درغیراین صورت، سرعت آنها به بسامد بستگی خواهد داشت که چنین رفتاری را ما در هنگام عبور نور از محیطهای انکساری، مانند شیشه و آب مشاهده می کنیم و به چنین ویژگی نور، پاشندگی نور[1] اطلاق می گردد.

بررسیها در مورد جرم سکون فوتونها نشان می دهد که شاید بتوان یک حد بالایی برای جرم سکون فوتون درنظرگرفت. این بررسیها که بر روی نورگسیل شده به وسیلهٔ تپ اخترها صورت گرفته اند، نشان می دهند که می توان برای جرم سکون فوتون، حدی را معین نمود. این محاسبات که بر روی نورگسیل شده از تپ اختری واقع در سحابی خرچنگ[2] انجام گرفته است، حد بالای $10^{-47}$ کیلوگرم را برای جرم سکون فوتون پیش بینی می کند.

---

**مثال ٤ – ۲ :** نشان دهید که رابطهٔ (۴-۱۲۵) در صورتی که انرژی و بسامد فوتون ناوردا نباشند؛ یعنی اگر انرژی و بسامد فوتون به چارچوب مرجع بستگی داشته باشد، درست است.

**جواب :** این مسأله را می توان با بررسی برخورد یک فوتون با یک ذره، در دو چارچوب لخت $S$ و $S'$ به دست آورد. برای این منظور، مطابق شکل(۴-۴) الف ، فرض کنید که درچارچوب $S'$ ، ذره ای با جرم سکون $m_\circ$ که با سرعت $v$ حرکت می کند، فوتونی با انرژی $E'$ را که ازچشمه ای ساکن گسیل شده است، جذب کند.




شکل (۴-۴) : برخورد فوتون و ذره ای به جرم سکون $m_o$

حال، اگر فرض کنیم که ذره با جذب فوتون به حالت سکون درآید، در این صورت قوانین پایستگی انرژی و تکانه درچارچوب $S'$، با توجه به شکل(۴- ۴) الف، به صورت

---

1- Dispersion of Light 2-Crab Nebula

$$E' + \gamma(v) m_\circ c^۲ = M_\circ c^۲$$
$$\frac{E'}{c} - \gamma(v) m_\circ v = \circ \qquad (۱۳۳-۴)$$

و درچارچوب $S$ نیز به شکل

$$E + m_\circ c^۲ = \gamma(v) M_\circ c^۲$$
$$\frac{E}{c} = \gamma(v) M_\circ v \qquad (۱۳۴-۴)$$

خواهد بود. درروابط فوق $m_\circ$ و $M_\circ$، به ترتیب جرم سکون ذره قبل و بعد از برخورد یا جذب فوتون به وسیلهٔ آن می باشد. حال، با استفاده از روابط (۴-۱۳۳) و (۴-۱۳۴) می توان قانون تبدیل انرژی فوتون را از یک چارچوب به چارچوب دیگر به دست آورد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$E' = E\sqrt{\frac{۱-\beta}{۱+\beta}} \qquad (۱۳۵-۴)$$

که در آن $\beta = v/c$ می باشد. البته، می توان با استفاده از رابطهٔ چهارم (۴-۱۰۱) و با در نظر گرفتن $p_x = E/c$ رابطهٔ (۴-۱۳۵) را به دست آورد. اکنون، فرض می کنیم که چشمهٔ موج که درچارچوب $S'$ ساکن در نظر گرفته شد، موجی با بسامد $f'_\circ$ گسیل کند. اما در چارچوب $S$، چشمهٔ موج با سرعت $v$ به سمت ذره یا گیرندهٔ فوتون حرکت می کند. بنابراین، براساس پدیدهٔ دوپلر، بسامد نور یا فوتون، یعنی $f$، هنگام رسیدن به ذره، به وسیلهٔ رابطهٔ

$$f'_\circ = f\sqrt{\frac{۱-\beta}{۱+\beta}} \qquad (۱۳۶-۴)$$

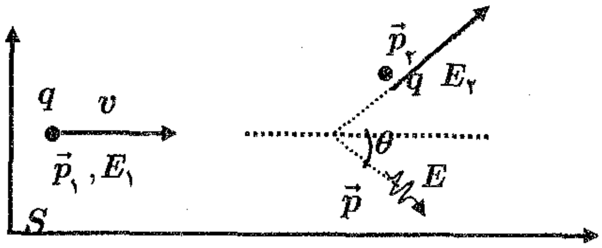
با بسامد $f'_\circ$ ارتباط دارد. اکنون، با استفاده از روابط (۴-۱۳۵) و (۴-۱۳۶) می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{E'}{f'_\circ} = \frac{E}{f} \qquad (۱۳۷-۴)$$

بنابراین، $E/f$ را می توان یک کمیّت ناوردا درنظرگرفت. این مقدار ناوردا را که ثابت پلانک نامیده می شود با $h$ نشان می دهند. به این ترتیب، به رابطهٔ مشهوری می رسیم که به وسیلهٔ آن انرژی فوتون به دست می آید، یعنی $E = hf$.

**مثال ٤ - ۳ : تابش یا اثر چرنکوف:** می دانیم اگر ذره ای باردار، دارای شتاب باشد دراین صورت، این ذرهٔ شتابدار موج الکترومغناطیسی تابش می کند. در اینجا می خواهیم حالتی را درنظر بگیریم که در آن ذرهٔ باردار علی رغم داشتن سرعت ثابت یا یکنواخت، می تواند موج الکترومغناطیسی از خود گسیل کند.

برای بررسی این موضوع، فرض کنید که ذرهٔ باردار $q$ با سرعت ثابت $v$ درمحیطی دی الکتریک با ضریب شکست $n$ حرکت می کند. حال، می توان با استفاده از قوانین پایستگی انرژی و تکانه، نشان داد که این ذرهٔ باردار، اگر با سرعتی بیش از سرعت نوردرمحیط دی الکتریک حرکت کند، در این صورت می تواند موج الکترومغناطیسی از خود گسیل کند. این اثر را اثر یا تابش چرنکوف[1] (۱۹۹۰-۱۹۰۴)می نامند.



شکل (۴-۵) : اثر چرنکوف

اکنون، فرض می کنیم که سرعت نور یا فوتون درمحیط دی الکتریک، برابر $u$ باشد. در این صورت، می دانیم $u = c/n$ می باشد. بنابراین، تکانهٔ فوتون در این محیط برابر $p = E/u$ خواهد بود که درآن $E = hf$ است. درنتیجه، تکانهٔ فوتون درمحیط دی الکتریک برابر $p = nhf/c$ به دست می آید. حال، فرض می کنیم که مطابق شکل(۴- ۵)، ذرهٔ بار $q$ که با سرعت یکنواخت $v$ حرکت می کند، دارای تابش فوتون با انرژی $E$ و تکانهٔ $\vec{p}$ باشدکه اندازهٔ تکانهٔ فوتون برابر $nhf/c$ می باشد. اکنون، با توجه به قوانین پایستگی انرژی و تکانه می توان نوشت:

$$E_۱ = E_۲ + E = E_۲ + hf \tag{۱۳۸-۴}$$

و برای پایستگی تکانه نیز داریم:

$$\vec{p}_۱ = \vec{p}_۲ + \vec{p} \tag{۱۳۹-۴}$$

که با توجه به رابطهٔ (۴-۱۳۹)، می توان نوشت:

1- Pavel Alekseyevich Cerenkov: فیزیک دان روسی و برندهٔ جایزهٔ نوبل در سال ۱۹۵۸

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p} \qquad (۴-۱۴۰)$$

از طرف دیگر، با توجه به رابطهٔ (۴-۴۱)، داریم:

$$\vec{v}\cdot\Delta\vec{p} = \Delta E \qquad (۴-۱۴۱)$$

حال، با جاگذاری مقدار $\Delta\vec{p}$ از رابطهٔ (۴-۱۴۰) در(۴-۱۴۱)، به دست می آوریم:

$$\vec{v}\cdot\vec{p} = \Delta E \qquad (۴-۱۴۲)$$

که با استفاده از رابطهٔ (۴-۱۳۸)، مقدار $\Delta E$ برابر $h\nu$ می باشد. ، از رابطهٔ (۴-۱۴۲) داریم:

$$\vec{v}\cdot\vec{p} = hf \qquad (۴-۱۴۳)$$

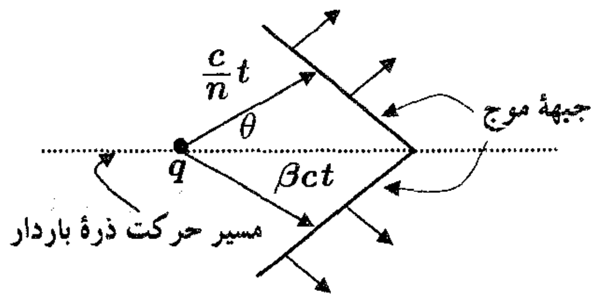
اکنون، با توجه به اینکه زاویهٔ بین راستای گسیل فوتون و راستای حرکت اولیهٔ ذرهٔ بادار $q$ برابر $\theta$ است. بنابراین، با در نظرگرفتن اندازهٔ تکانهٔ فوتون، می توان رابطهٔ(۴-۱۴۲) را به صورت

$$v\left(\frac{nhf}{c}\right)cos\theta = hf \qquad (۴-۱۴۴)$$

نوشت. درنتیجه،

$$cos\theta = \frac{c}{nv} = \frac{u}{v} \qquad (۴-۱۴۵)$$

خواهد بود. به این ترتیب، شرط تابش چرنکوف به دست می آید. رابطهٔ (۴-۱۴۵) درصورتی برقرار است که $v \geq u$ باشد. زیرا $cos\theta \leq ۱$ است. بنابراین، باتوجه به رابطهٔ (۴-۱۴۵)، برای آنکه ذرهٔ باردار $q$ که با سرعت $v$ در محیط دی الکتریک حرکت می کند، ازخود فوتون گسیل کند، باید سرعت ذرهٔ باردار بزرگتر از سرعت فوتون در محیط مفروض دی الکتریک باشد. همچنین، با توجه به رابطهٔ (۴-۱۴۵)، اگر ذرهٔ باردار درخلاء دارای حرکت یکنواخت باشد، یعنی اگر $n = ۱$ باشد، در این صورت فوتونی گسیل نمی کند.




شکل(۴- ۶) : تابش چرنکوف

## ۴ - ۸ : استخراج روابط انرژی و تکانه

دراین بخش، روابط مربوط به انرژی و تکانهٔ نسبیتی یک ذره، با درنظرگرفتن قوانین پایستگی و همچنین، با استفاده از اثردوپلرنسبیتی به دست می آید. برای این منظور، این قوانین را در

فرایند واپاشی یک ذره و تبدیل آن به دو فوتون به کار می بریم. حال، ابتدا رابطهٔ مربوط به انرژی نسبیتی کل یک ذره را به دست می آوریم.

## ۴ - ۸ - ۱ : انرژی نسبیتی کل یک ذره

در اینجا می خواهیم رابطهٔ $E = m(u)c^{۲}$ را که برای انرژی نسبیتی یک ذره بیان شد، با استفاده از قانون پایستگی انرژی و تکانه و همچنین، اثردو پلر نسبیتی به دست آوریم. برای این منظور، می توان از فرایند فیزیکی واپاشی یک ذره و تبدیل آن به دو فوتون استفاده کرد.

بنابراین، فرض کنید که ذره ای با جرم سکون $m_{\circ}$ درچارچوب سکون خود، یعنی $S'$، بعد از واپاشی به دو فوتون تبدیل گردد. از قانون پایستگی تکانه می توان نتیجه گرفت که فوتونهای ایجاد شده دارای تکانهٔ یکسان بوده و در خلاف جهت یکدیگر حرکت می کنند. همچنین فرض کنید که فوتونهای ناشی از واپاشی، در دو راستای مثبت و منفی محور $x'$ حرکت کنند. بنابراین، اگر انرژی ذره درچارچوب سکونش، برابر $E_{\circ}$ باشد، در این صورت، پایستگی انرژی ایجاب می کند که انرژی هرکدام از فوتونهای ایجاد شده دراین چارچوب برابر $E_{\circ}/۲$ باشد.

اکنون، این فرایند واپاشی را می توان از نظر ناظر یا چارچوب دیگری مانند $S$ نیز بررسی کرد. برای این منظور، فرض کنید که این چارچوب با سرعت نسبی $u$ درخلاف جهت محور $x'$ چارچوب $S'$ حرکت کند. درنتیجه، در چارچوب جدید، ذره با سرعت $u$ در جهت مثبت محور $x$ حرکت می کند. همچنین، در این چارچوب، انرژی فوتونهای ایجاد شده از واپاشی ذره، از روابط مربوط به پدیدهٔ انتقال دوپلری، یعنی روابط (۲-۲۹۳) و (۲-۲۹۴) به دست می آیند. از طرف دیگر، می دانیم انرژی یک فوتون با رابطهٔ (۴-۱۲۵) داده می شود که در این صورت، با استفاده از پایستگی انرژی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E &= E_{۱} + E_{۲} = hf_{۱} + hf_{۱} \\ &= \frac{E_{\circ}}{۲}\sqrt{\frac{۱+\beta}{۱-\beta}} + \frac{E_{\circ}}{۲}\sqrt{\frac{۱-\beta}{۱+\beta}} \qquad (۱۴۶\text{-}۴) \\ &= \gamma(u)E_{\circ} \end{aligned}$$

کــه در آن $\beta = u/c$ مــی باشــد. بنــابراین، در چــارچوب $S$، انــرژی ذرهٔ اولیــه برابر $\gamma(u)E_\circ$ خواهد بود.

حال، می توان با استفاده از اصل تناظر یا همخوانی، انرژی $E_\circ$ را برحسب $m_\circ$ به دست آورد. درنتیجه، همان طور که می دانیم، براساس این اصل، روابط نسبیتی درحد سرعتهای معمولی یا غیر نسبیتی، باید به روابط مشابه کلاسیکی یا نیوتنی آنها، تبدیل گردند. بنابراین، در چارچوب $S$، اختلاف انرژی ذرهٔ درحال سکون و ذره ای که با سرعت $u$ حرکت می کند، برابر

$$\Delta E = \gamma(u)E_\circ - E_\circ \tag{۱۴۷-۴}$$

می باشد. این اختلاف انرژی در حالت غیر نسبیتی؛ یعنی هنگامی که $u \ll c$ است، باید به انرژی جنبشی کلاسیکی $m_\circ u^۲/۲$ تبدیل گردد. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{E_\circ}{\sqrt{۱-\beta^۲}} - E_\circ \\ &\simeq E_\circ\,(۱+\tfrac{۱}{۲}\beta^۲+\cdots) - E_\circ \qquad (۱۴۸\text{-}۴) \\ &\simeq (\frac{E_\circ}{c^۲})(\frac{u^۲}{۲}) \end{aligned}$$

در نتیجه، طبق اصل همخوانی، باید داشته باشیم:

$$(\frac{E_\circ}{c^۲})(\frac{u^۲}{۲}) \simeq \frac{۱}{۲} m_\circ u^۲ \tag{۱۴۹-۴}$$

ازطرف دیگر، با توجه به رابطهٔ (۴-۵۶) مقدار $E_\circ$ برابر $m_\circ c^۲$ می باشد. حال با جایگذاری مقدار $E_\circ$ در رابطهٔ (۴-۱۴۶)، رابطهٔ انرژی برای یک ذره در نسبیت، به صورت

$$E = \gamma(u)E_\circ = \gamma(u)m_\circ c^۲ \tag{۱۵۰-۴}$$

به دست می آید.

## ۴ - ۸ - ۲ : تکانهٔ نسبیتی یک ذره

اکنون، برای به دست آوردن رابطهٔ $p = \gamma(u)m_\circ u$، برای تکانهٔ یک ذره، می توان از روشی مشابه روش قبل استفاده کرد. دراینجا نیز فرض می کنیم که در چارچوب سکون ذره، یعنی $S'$، تکانهٔ کل ذره، قبل از واپاشی برابر صفر باشد. براساس قانون پایستگی تکانه، بعد از

واپاشی ذره و تبدیل آن به دو فوتون، باید تکانهٔ کل فوتونها برابر صفر گردد. درنتیجه، تکانهٔ فوتونهای ایجاد شده باید برابر و درخلاف جهت هم باشند. دراین صورت، می توان تکانهٔ فوتونها را درچارچوب سکون ذره، مساوی و برابر $p_\circ/۲$ درنظرگرفت. حال، مانند قبل این واپاشی را ازدید ناظر $S$ که با سرعت نسبی $u$، درخلاف جهت محور $x'$ حرکت می کند، مورد بررسی قرار می دهیم. همان طور که می دانیم، تکانهٔ یک فوتون با رابطهٔ $E = pc$ یا $p = E/c = hf/c$ تعریف می شود. بنابراین، می توان با استفاده از اثر انتقال دوپلری، یعنی روابط (۲-۲۹۳) و (۲-۲۹۴)، تکانهٔ کل فوتونها را درچارچوب $S$، به دست آورد. درنتیجه

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_\circ}{۲}\sqrt{\frac{۱+\beta}{۱-\beta}} - \frac{p_\circ}{۲}\sqrt{\frac{۱-\beta}{۱+\beta}} \\ &= \gamma(u)p_\circ\,(\frac{u}{c}) \qquad (۱۵۱\text{-}۴) \\ &= \gamma(u)p_\circ\,\beta \end{aligned}$$

خواهد بود. بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۴-۱۵۱)، در چارچوب $S$، با در نظرگرفتن قانون پایستگی تکانه، مقدار $p_\circ\gamma(u)\beta$، تکانهٔ ذره ای است که جرم سکون آن برابر $m_\circ$ بوده و با سرعت $u$ حرکت می کند. دراینجا نیز می توان با استفاده از اصل همخوانی، تکانهٔ $p_\circ$ ذره را برحسب $m_\circ$ به دست آورد. بر اساس این اصل، درحد سرعتهای غیر نسبیتی، یعنی $u \ll c$، تکانهٔ نسبیتی ذره باید به رابطهٔ مشابه نیوتنی یا غیر نسبیتی آن تبدیل شود. دراین صورت

$$\begin{aligned} p &= p_\circ\,[\frac{۱}{\sqrt{۱-\beta^۲}}]\beta \\ &= p_\circ\,[۱+\tfrac{۱}{۲}\beta^۲+\cdots]\beta \qquad (۱۵۲\text{-}۴) \\ &= p_\circ\beta \end{aligned}$$

به دست می آید. از طرف دیگر، این مقدار بر اساس اصل همخوانی، باید برابرتکانهٔ غیر نسبیتی $p = m_\circ u$ باشد. دراین صورت، $p_\circ = m_\circ c$ خواهد بود. اکنون، با جایگذاری مقدار $p_\circ$ در رابطهٔ (۴-۱۵۱)، می توان رابطهٔ

$$\begin{aligned} p &= p_\circ\,\gamma(u)\frac{u}{c} \\ &= (m_\circ c)\gamma(u)(\frac{u}{c}) \qquad (۱۵۳\text{-}۴) \\ &= m_\circ\gamma(u)u \end{aligned}$$

را برای تکانهٔ نسبیتی یک ذره به دست می آورد.

**مثال ٤ - ٤ :** فرض کنید که درچارچوب $S$، فوتونی با بسامد $f_\circ$ به آیینه ای که با سرعت $v$ به سمت آن در حرکت است، تابیده شود. حال، اگر راستای حرکت فوتون عمود بر سطح آیینه باشد، دراین صورت، تکانهٔ منتقل شده به آیینه را در دو چارچوب $S$ و $S'$ ( چارچوب سکون آیینه) به دست آورید.

**جواب :** ابتدا اندازهٔ تکانهٔ منتقل شده به آیینه را درچارچوب $S'$ به دست می آوریم. در این چارچوب، تغییر تکانهٔ فوتون، برابر

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}\,' - (-\vec{p}\,') = ۲\vec{p}\,' \qquad (۱۵۴-۴)$$

بنابراین، اندازهٔ تغییر تکانهٔ منتقل شده به آیینه برابر

$$\Delta p' = ۲p' = ۲\frac{E'}{c} \qquad (۱۵۵-۴)$$

که با استفاده از رابطهٔ (۴-۱۳۵)، خواهیم داشت:

$$\Delta p' = ۲h\frac{f'}{c} = ۲\frac{hf_\circ}{c}\sqrt{\frac{۱+\beta}{۱-\beta}} \qquad (۱۵۶-۴)$$

در رابطهٔ فوق از پدیدهٔ دوپلر، درحالتی که چشمه به آیینه یا گیرندهٔ ساکن نزدیک می شود، استفاده شده است. درچارچوب $S$ آیینه با سرعت $v$ حرکت می کند. بنابراین، در این چارچوب می توان از نتیجهٔ مثال ۲-۳۰، یعنی رابطهٔ (۲-۳۱۸) استفاده کرد. دراین حالت بسامد نور فرودی برآیینه برابر $f_\circ$ و بسامد نوری که باز می تابد، برابر $f$ است. در نتیجه، می توان نوشت:

$$f = f_\circ\,\frac{۱+\beta}{۱-\beta} \qquad (۱۵۷-۴)$$

و تغییر تکانهٔ آیینه برابر

$$\Delta p = |\vec{p}_۲ - \vec{p}_۱| = \frac{hf}{c} + \frac{hf_\circ}{c} \qquad (۱۵۸-۴)$$

می باشد که با جایگذاری مقدار $f$ از رابطهٔ (۴-۱۵۷) در(۴-۱۵۸)، می توان به دست آورد:

$$\Delta p = \frac{۲hf_\circ/c}{۱-\beta} \qquad (۱۵۹-۴)$$

## ۴ - ۹ : سیستم یکاها در نسبیت

روابطی که برای انرژی و تکانه در نسبیت، برای یک ذره به دست آمد، ما را به یک سیستم واحد مناسب هدایت می کنند. می دانیم که ضریب $\gamma$ در تبدیلات لورنتس کمیتی بدون بعد و یک عدد مثبت حقیقی بوده و در بازهٔ $۱ \leq \gamma < \infty$، قرار می گیرد. از طرف دیگر، با تعریف $u = \beta c$ برای سرعت یک ذره، $\beta$ نیز که کمیّتی بدون بعد می باشد، در محدودهٔ $\circ \leq \beta \leq ۱$ قرار می گیرد. درواقع، با این تعریف، می توان همهٔ سرعتها را به صورت ضریبی از $c$ به دست آورد.

در فیزیک کلاسیک، برای اندازه گیری کمیّت های جرم و انرژی دو واحد جداگانهٔ کیلوگرم و ژول مورد استفاده قرار می گیرند. در صورتی که در فیزیک نسبیتی، می توان با استفاده از رابطهٔ $E = mc^۲$، اندازهٔ این دو کمیّت را با واحدی یکسان بیان نمود. درنسبیت یا به طور کلی درفیزیک انرژی های بالا ، معمولاً از واحد الکترون- ولت ( $eV$) برای اندازه گیری انرژی یا جرم استفاده می شود. یک الکترون- ولت، طبق تعریف، انرژی پتانسیل یک الکترون است، هنگامی که دراختلاف پتانسیل یک ولت به اندازهٔ یک مترجابه جا شود. با استفاده از رابطهٔ $U = q\Delta V$، می توان نوشت، $۱eV = (۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\,C)(۱V)$ .
همچنین، با توجه به اینکه $۱V = ۱J/C$ است، در نتیجه می توان نوشت:

$$۱eV = (۱/۶۰۲۲ \times ۱۰^{-۱۹}\,C)(۱\frac{J}{C}) = ۱/۶۰۲۲ \times ۱۰^{-۱۹}\,J \qquad (۱۶۰-۴)$$

حال، اگر انرژی سکون پروتون را برحسب ژول محاسبه نماییم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_p &= m_{\circ\, p}c^۲ = (۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,kg)(۳ \times ۱۰^۸\,m/s)^۲ \\ &= ۱/۵ \times ۱۰^{-۱۰}\,J \end{aligned} \qquad (۱۶۱-۴)$$

بنابراین، انرژی سکون پروتون برحسب $eV$، با استفاده از رابطهٔ تبدیلی(۴-۱۶۰)، برابر

$$E_p = ۹۳۸ \times ۱۰^۶\;eV = ۹۳۸MeV \qquad (۱۶۲-۴)$$

به دست می آید. به همین ترتیب، انرژی سکون ذرات دیگر مانند، الکترون و نوترون به ترتیب برابر $E_e = ۰/۵۱۱MeV$ و $E_n = ۹۳۹/۶MeV$ خواهند بود.

ازطرف دیگر، فیزیکدانهای ذرات بنیادی، معمولاً جرم را نیز برحسب واحد انرژی،

یعنی $eV$ بیان می کنند و مثلاً می گویند جرم سکون یک پروتون برابر $938MeV$ است. البته، ممکن است این روش برای بیان واحد جرم برحسب انرژی چندان جالب نباشد؛ زیرا واحد جرم و انرژی با هم برابر نیستند. اما باید توجه داشت که منظورآنها از این بیان، این است که اگر انرژی سکون یک ذره را داشته باشیم، می توان با تقسیم آن بر $c^2$، جرم آن را برحسب کیلوگرم به دست آورد. بنابراین، ارتباط بین واحدهای جرم و انرژی را می توان به صورت

$$1MeV/c^2 = 1/783 \times 10^{-30}\,kg \qquad (۱۶۳-۴)$$

بیان کرد. همچنین، با توجه به رابطهٔ(۴-۱۶۳)، می توان دریافت که چرا بیان جرم به صورت ظاهری، برحسب واحد انرژی مناسبتر است. همچنین، در این سیستم با در نظرگرفتن رابطهٔ $u = E/p$، برای اندازه گیری کمیّت تکانه، از واحد $eV/c$ استفاده می شود؛ زیرا

$$p = \frac{E}{u} = \frac{E}{\beta c} \qquad (۱۶۴-۴)$$

می باشد. بنابراین، الکترونی که با سرعت $u = 0/866c$ حرکت می کند، دارای انرژی

$$E = m_\circ \gamma(v) c^2 = 1/022MeV \qquad (۱۶۵-۴)$$

و تکانهٔ

$$p = \frac{1/022MeV}{0/866c} = 1/18\frac{MeV}{c} \qquad (۱۶۶-۴)$$

خواهد بود.

## ۴ - ۱۰ : چارچوب مرکز تکانه

برای تعریف چارچوب مرکز تکانه[1] یا $S_{com}$، ابتدا یک سیستم $N$ ذره ای را درنظرمی گیریم. انرژی و تکانهٔ کل این سیستم را درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، می توان با استفاده از روابط

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad (۱۶۷-۴)$$

و

$$E = \sum_{i=1}^{N} e_i = \sum_{i=1}^{N} m_i c^2 = Mc^2 \qquad (۱۶۸-۴)$$

1- Center of Momentum frame (the COM frame)

تعیین نمود. در روابط فوق $\vec{p}_i$ و $e_i$ به ترتیب، تکانه و انرژی هر کدام از ذرات سیستم می باشند. دراینجا از برهم کنش بین ذرات سیستم با صرف نظر می شود. از طرف دیگر، می دانیم که تبدیلات لورنتس تکانه و انرژی، یعنی روابط (۴-۱۰۱) خطی می باشند. در نتیجه، می توان از این روابط، برای تبدیل تکانه و انرژی کل ذرات سیستم از چارچوب $S$، به چارچوبی دیگر مانند $S_{com}$، استفاده کرد. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P'_x &= \gamma(v)[P_x - vE/c^۲] \\ P'_y &= P_y \\ P'_z &= P_z \\ E' &= \gamma(v)[E - vP] \end{aligned} \tag{۱۶۹-۴}$$

اکنون، می توان حالتی را در نظر گرفت که تکانهٔ کل سیستم، در چارچوب $S$، موازی سرعت نسبی دو چارچوب باشد. به عبارت دیگر، فرض می کنیم $P_y$ و $P_z$ برابر صفر باشند. حال، با این ساده سازی می توان سرعت نسبی چارچوب $S_{com}$ را طوری به دست آورد که در آن چارچوب، تکانهٔ کل ذرات سیستم برابر صفر گردد. برای این منظور، کافی است که درروابط (۴-۱۶۹)، $P'_x$ را که برابرتکانهٔ کل سیستم در چارچوب $S_{com}$ می باشد، برابرصفر قرار دهیم. بنابراین ، خواهیم داشت:

$$\gamma(v)[P_x - vE/c^۲] = ۰ \tag{۱۷۰-۴}$$

که در این صورت، سرعت نسبی چارچوب مرکز تکانه به صورت

$$v = v_{com} = \frac{c^۲ P_x}{E} \tag{۱۷۱-۴}$$

به دست می آید. حال، با فرض اینکه تکانهٔ کل در چارچوب $S$، در راستای محور $x$ می باشد. و با توجه به رابطهٔ (۴-۱۶۸)، می توان نوشت:

$$v_{com} = \frac{P_{tot}}{M} \tag{۱۷۲-۴}$$

که در آن $M$، جرم نسبیتی کل سیستم است.

بنابراین، اگر ناظر یا چارچوبی دارای سرعت نسبی برابر $v_{com}$ فوق باشد، در این صورت تکانهٔ کل ذرات سیستم نسبت به آن ناظر یا چارچوب برابر صفر خواهد بود. طبق

تعریف، چنین چارچوبی را چارچوب مرکز تکانه می نامند. رابطهٔ(۴-۱۷۱) را می توان مشابه رابطهٔ(۴-۱۱۶) در نظر گرفت که برای یک ذره به دست آمده است.

دراینجا لازم است به دو نکته اشاره شود. نکتهٔ اول اینکه، در حالت نسبیتی نمی توان برای سیستمی از ذرات مرکز جرم تعریف کرد؛ زیرا جرم ذرات سیستم به سرعت ذرات آن بستگی دارد. بنابراین، سرعت $v_{com}$، تعریف شده در رابطهٔ (۴-۱۷۲) را می توان سرعت کل سیستم در نظر گرفت. از طرف دیگر، در نسبیت خاص، به جای چارچوب مرکز جرم که در مکانیک نیوتنی تعریف می گردد، چارچوب مرکز تکانه تعریف می شود و آن را می توان چارچوبی دانست که در آن تکانهٔ کل ذرات سیستم برابرصفر است. همچنین، همان طور که می دانیم، در مکانیک نیوتنی، سرعت تعریف شده دررابطهٔ (۴-۱۷۲)، به مرکز جرم سیستم ذرات نسبت داده می شود.

نکتهٔ دوّم این است که در اینجا از برهم کنش بین ذرات سیستم صرف نظر شده است. به دلیل آن که اگر برهم کنش بین ذرات که به مکان نسبی آنها بستگی دارد، در نظرگرفته شود، ناسازگاریهای جدی در نسبیت به وجود می آید؛ زیرا همان طورکه قبلاً اشاره شد، قانون سوم نیوتن را نمی توان درهمهٔ موارد در نسبیت به کار برد. و این قانون تنها درموارد خاص، ازجمله برای حالتی که نیروهای کنش و واکنش در یک مکان ظاهر شوند، دارای اعتبار می باشد. درغیر این صورت، به دلیل نسبی بودن همزمانی، ممکن است بر هم کنش دو ذره در یک چارچوب همزمان باشد، اما درچارچوبهای دیگر این طور نباشد. بنابراین، مطالعه و بررسی حالتی که در آن مجبور به در نظرگرفتن برهم کنش بین ذرات می باشیم، باید از روشهای دیگری در نسبیت استفاده شود. در نسبیت، استفاده از چارچوب مرکز تکانه برای بررسی سیستم ذرات، مخصوصاً مسائل مربوط به برخورد ذرات بسیار مفید است که این موضوع در بخش بعد بررسی می شود.

دراینجا به عنوان مثال، می توان سیستمی متشکل از دو ذره را که در یک جهت حرکت می کنند، از نظر ناظر واقع در چارچوب مرکز تکانه مورد بررسی قرار داد. برای این منظور فرض کنید که دو ذرهٔ یکسان با جرم سکون $m_0$، و سرعت $u_1$ و $u_2$، درامتداد محور $x$ چارچوب $S$، دریک جهت حرکت کنند. بنابراین، تکانهٔ کل ذرات در این چارچوب، برابر

$$P = p_1 + p_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (۴-۱۷۳)$$

خواهد بود که درآن $m_1$ و $m_2$، جرم نسبیتی ذرات می باشند. همچنین تکانهٔ کل ذرات در چارچوب مرکز تکانه، یعنی $S_{com}$، برابر

$$P_{com} = p_{1com} + p_{2com} \tag{۱۷۴-۴}$$

می باشد. از طرف دیگر می دانیم، دراین چارچوب، تکانهٔ کل برابر صفر است. در نتیجه، می بایستی $p_{1com} = -p_{2com}$ باشد. به عبارت دیگر، درچارچوب مرکز تکانه، دو ذره با تکانهٔ یکسان، اما درخلاف جهت یکدیگرحرکت می کنند. علاوه براین، با توجه به تعریف تکانهٔ یک ذره، یعنی $p = \gamma(u)m_0 u$، وشرط یکسان بودن جرم سکون ذرات، می توان نتیجه گرفت که سرعت ذرات نیز با هم برابر بوده و درخلاف جهت هم می باشد. بنابراین، اگر فرض کنیم که سرعت ذرات در چارچوب مرکز تکانه، برابر $u'$ و $-u'$ باشند، دراین صورت با استفاده از تبدیلات لورنتس سرعت، خواهیم داشت:

$$u_1 = \frac{u' + v_{com}}{1 + u'v_{com}/c^2} \tag{۱۷۵-۴}$$

و

$$u_2 = \frac{-u' + v_{com}}{1 - u'v_{com}/c^2} \tag{۱۷۶-۴}$$

اکنون، می توان روابط(۴-۱۷۵) و (۴-۱۷۶) را به شکل

$$u_1 = v_{com} + \frac{u'(1 - v_{com}^2/c^2)}{1 + u'v_{com}/c^2} \tag{۱۷۷-۴}$$

و

$$u_2 = v_{com} - \frac{u'(1 - v_{com}^2/c^2)}{1 - u'v_{com}/c^2} \tag{۱۷۸-۴}$$

نوشت. حال، با جایگذاری $u_1$ و $u_2$ از روابط فوق در رابطهٔ (۴-۱۷۳)، می توان تکانهٔ کل ذرات را در چارچوب $S$ به دست آورد. درنتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} P &= m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)v_{com} \\ &+ u'(1 - v_{com}^2/c^2)\left[\left(\frac{m_1}{1 + u'v_{com}/c^2}\right) - \left(\frac{m_2}{1 - u'v_{com}/c^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{۱۷۹-۴}$$

اکنـــون، بـــا جایگـــذاری $m_1$ و $m_2$، برحـــسب مقادیرشـــان، یعنـــی $m_1 = \gamma(u_1)m_0$ و $m_2 = \gamma(u_2)m_0$ در رابطهٔ(۴-۱۷۹)، داریم:

$$P = (m_1 + m_2)v_{com} + m_o u'(1 - v_{com}^2/c^2) \times \left(\frac{\gamma(u_1)}{(1 + u'v_{com}/c^2)} - \frac{\gamma(u_2)}{(1 - u'v_{com}/c^2)}\right) \qquad (۴-۱۸۰)$$

حال، اگر مقادیر $u_1$ و $u_2$ را از روابط(۴-۱۷۵) و (۴-۱۷۶) در رابطـهٔ (۴-۱۸۰) قـرار دهـیم، می توان نشان داد که دو جملهٔ داخل کروشه، در رابطهٔ (۴-۱۸۰) با هم برابـر بـوده و درنتیجـه تفاضل آنها برابر صفر می شود. دراین حالت، رابطهٔ(۴-۱۸۰) درنهایت به صورت

$$P = (m_1 + m_2)v_{com} \qquad (۴-۱۸۱)$$

به دست می آید. بالاخره سرعت چارچوب مرکز تکانه، برای این سیستم دو ذره ای برابر

$$v_{com} = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{P}{M} \qquad (۴-۱۸۲)$$

خواهد بود که درواقع، همان رابطهٔ (۴-۱۷۲) می باشد.

بنابراین، سرعت چارچوب مرکز تکانـه و همـین طـور سـرعت چـارچوب مرکـز جـرم، نسبت بـه چـارچوب آزمایـشگاه، درنـسبیت و مکانیـک نیـوتنی از روابـط مـشابهی بـه دسـت می آیند. که البته این سرعت در نسبیت، به کـل سیـستم نـسبت داده مـی شـود. درحـالی کـه درمکانیک نیوتنی، این سرعت را به مرکز جرم سیستم نسبت می دهند.

یکی از مزیتهای استفاده از چارچوب مرکز تکانه، این است که بعضی از مسائل مربـوط به برخورد یا برهم کنش ذرات را که در چارچوب آزمایشگاه، بررسی و محاسبهٔ آنها مـشکل است، می توان به راحتی دراین چاچوب بررسی کرده و پس از آن می توان نتـایج بـه دسـت آمده را از طریق تبدیلات لورنتس به چارچوب آزمایشگاه منتقل کرد.

در پایان، می توان رابطهٔ (۴-۱۱۳) را درچارچوب مرکز تکانه نوشت. درایـن صـورت، اگـر این رابطه در دو چارچوب آزمایشگاه یا $S$ وچارچوب $S_{com}$ نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{E_{com}}{c}\right)^2 - p_{com}^2 \qquad (۴-۱۸۳)$$

اما می دانیم که درچارچوب $S_{com}$، تکانهٔ کل، یعنی $p_{com}$ برابر صفر است. درنتیجه رابطـهٔ

(۴-۱۱۳)، در این حالت به صورت زیر نوشته می شود.

$$(E/c + m_\circ c)^{۲} - p^{۲} = (\frac{E_{com}}{c})^{۲} \qquad (۱۸۴\text{-}۴)$$

**مثال ٤ ـ ٥ :** نشان دهید که یک کوانتم یا فوتون $\gamma$، تنها در صورتی امکان دارد، براثر واپاشی به یک زوج الکترون و پوزیترون تبدیل شود که فرایند واپاشی درکناریک ذره با جرم سکون مخالف صفر روی دهد. همچنین، انرژی آستانه برای ایجاد زوج الکترون ـ پوزیترون را به دست آورید.

**جواب :** برای به دست آوردن جواب، می توان از کمیّت ناوردای $E^{۲} - c^{۲}p^{۲}$ که با رابطهٔ (۴-۱۱۴) تعریف شده است، استفاده کرد. برای این منظور، مقدار این کمیّت ناوردا را قبل از برهم کنش فوتون با ذره ای با جرم سکون $m_\circ$، در چارچوب آزمایشگاه یا $S$، و قبل از برهم کنش درچارچوب $S_{com}$ می نویسیم. البته، فرض می کنیم که درچارچوب $S_{com}$ ذرات درآستانهٔ واکنش باشند. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$(E + m_\circ c^{۲})^{۲} - p^{۲}c^{۲} = (m_\circ + ۲m_e)^{۲} c^{۴} \qquad (۱۸۵\text{-}۴)$$

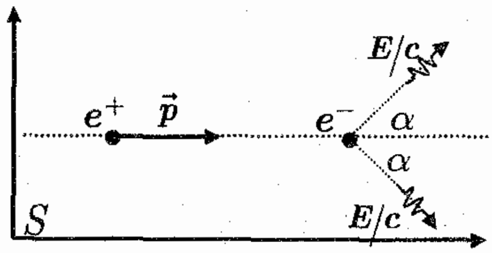
که در آن $p = E/c$ می باشد. حال، با توجه به رابطهٔ (۴-۱۸۵)، اگر $m_\circ$ را برابر صفردر نظربگیریم، در این حالت، تساوی فوق ناممکن خواهد بود. همچنین، از رابطهٔ(۴-۱۸۵) می توان انرژی فوتون $\gamma$ را به صورت

$$E = ۲m_e(۱ + \frac{m_e}{m_\circ})c^{۲} \qquad (۱۸۶\text{-}۴)$$

به دست آورد. بنابراین، برای اینکه فوتون $\gamma$ به یک زوج الکترون و پوزیترون تبدیل شود، باید فرایند واپاشی درحضور ذره ای با جرم سکون مخالف صفر، انجام پذیرد. همچنین، انرژی فوتون حداقل باید برابر مقدار $E$ داده شده در رابطهٔ (۴-۱۸۶) باشد.

**مثال ٤ ـ ٦ :** اکنون، حالت عکس مثال قبل را در نظر بگیرید. یعنی فرض کنید که یک پوزیترون که دارای انرژی جنبشی $k$ است، با الکترون ساکنی برخورد کند و براثر این برهم کنش دو فوتون $\gamma$ با انرژی های یکسان ایجاد شود. دراین صورت، زاویهٔ بین راستای حرکت

دو فوتون $\gamma$ ی ایجاد شده چقدرخواهد بود؟




شکل(۴-۷) : نابودی زوج الکترون ـ پوزیترون

**جواب :** با توجه به شکل(۴- ۷)، قانون پایستگی انرژی را می توان به صورت

$$k + ۲m_{\circ}c^{۲} = ۲E \qquad (۱۸۷-۴)$$

نوشت. همچنین، قانون پایستگی تکانه در راستای محور $x$ را نیز می توان با رابطهٔ

$$p = ۲\frac{E}{c}cos\alpha \qquad (۱۸۸-۴)$$

بیان کرد. در روابط فوق $p$ تکانهٔ پوزیترون، $m_{\circ}$ جرم سکون الکترون و پوزیترون، $E$ انرژی فوتون و $E/c$ تکانهٔ آن می باشد. از طرف دیگر، برای پوزیترون می توان نوشت:

$$(k + m_{\circ}c^{۲})^{۲} = p^{۲}c^{۲} + (m_{\circ}c^{۲})^{۲} \qquad (۱۸۹-۴)$$

حال، با جایگذاری مقدار $p$ از رابطهٔ (۴-۱۸۸) در رابطهٔ (۴-۱۸۹)، خواهیم داشت:

$$(k + m_{\circ}c^{۲})^{۲} = (۲\frac{E}{c}cos\alpha)^{۲}c^{۲} + (m_{\circ}c^{۲})^{۲} \qquad (۱۹۰-۴)$$

و با حذف مقدار $E$ از روابط(۴-۱۸۷) و (۴-۱۹۰) می توان به دست آورد:

$$cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱ + (۲m_{\circ}c^{۲}/k)}} \qquad (۱۹۱-۴)$$

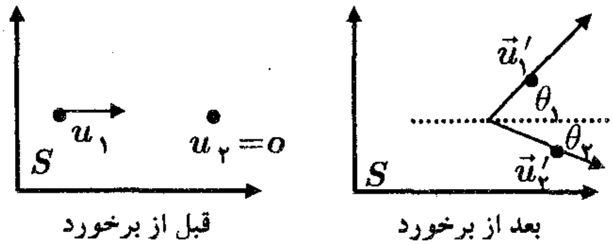
## ۴ - ۱۱ : برخورد ذرات

اکنون، بعد ازآشنایی با چارچوب مرکز تکانه و همین طور قوانین پایستگی انرژی وتکانه، می توان مسأله برخورد ذرات یا برهم کنش آنها را در نسبیت مطرح نمود. همان طورکه قبلاً اشاره گردید، به علت آنکه جرم ذرات به سرعت آنها بستگی دارد، استفاده از چارچوب مرجع مرکز جرم در نسبیت، بی مورد می باشد و باید به جای آن از چارچوب مرکز تکانه استفاده کرد. با این کار می توان مسألهٔ بررسی برخورد ذرات را که ممکن است در چارچوب آزمایشگاه پیچیده باشد، درچارچوب مرکز تکانه به شکل ساده تری بررسی کرد. و سپس با استفاده از تبدیلات لورنتس، روابط و نتایج به دست آمده را به چارچوب آزمایشگاه $S$، منتقل نمود.

در مکانیک نیوتنی، معمولاً برخورد ذرات را به دو دسته تقسیم می کنند. برخوردهای

کشسان و نا کشسان. دربرخوردهای کشسان، قانون پایستگی تکانه و همین طور پایستگی انـرژی جنبشی برقرار می باشد. اما در برخوردهای ناکشسان، فقط قـانون پایـستگی تکانـه برقـرار اسـت. دراینگونه برخوردها ممکن است، بخشی یا تمام انرژی جنبشی ذرات درحین برخورد به گرما یا به انواع دیگر انرژی تبدیل گردد. امـا درمکانیـک نـسبیتی تفـاوتی بـین برخوردهـای کشـسان و ناکشسان وجود ندارد؛ زیرا همان طورکه قبلاً اشاره شد، با تعریف کمیّتی واحد به نام چـاربردار انرژی- تکانه، آنچه در برخوردها باید مورد بررسی قرار گیرد، پایستگی چاربردار انرژی- تکانـه است. یا به عبارت دیگر، برقراری رابطهٔ (۴-۱۲۱) در برهم کنش یا برخورد ذرات می باشد.

بـرای روشـن شـدن مطلـب، مـی تـوان برخـورد دو ذره را از نظـر ناظرهـای واقـع در چارچوب $S$ و $S_{com}$، بررسی کرد. بـرای ایـن منظـور فـرض کنیـد کـه مطـابق شـکل (۴-۸)، ذره ای بـا جـرم سـکون $m_{\circ ۲}$ در چـارچوب $S$ ساکن باشد. و ذرهٔ دیگری با جـرم سـکون $m_{\circ ۱}$ و سرعت $(u_۱, \circ, \circ)$، با آن برخـورد کنـد. درایـن چـارچوب ذرات پـس از برخـورد، تحـت زوایای $\theta_۱$ و $\theta_۲$، نسبت به مسیر اولیهٔ ذرهٔ فرودی یا ذرهٔ ۱، پراکنده می گردند. همـان طورکـه می دانیم، درچارچوب $S_{com}$، تکانهٔ کل برابر صـفر مـی باشـد. یعنـی $\vec{p}_{۱com} = -\vec{p}_{۲com}$ است. همچنین، باید دقت نمود که در اینجا، برخلاف موردی کـه قـبلاً بررسـی شـد، سـرعت ذرات نمی تواند با یکدیگر برابر باشند؛ زیرا جرم سکون ذرات برابر نیستند. حال، اگـر فـرض کنیم که سرعت چارچوب $S_{com}$، نسبت به چارچوب $S$، برابر $v_{com}$ باشد، دراین صورت، می توان سرعت ذرات را در چارچوب $S_{com}$ به دست آورد. بنابراین، اگر سـرعت ذرات را دراین چارچوب با $u_{۱c}$ و $u_{۲c}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:




**شکل (۴-۸): برخورد ذرات در چارچوب $S$**

$$u_{۱c} = \frac{u_۱ - v_{com}}{۱ - u_۱ v_{com}/c^۲} \qquad (۱۹۲\text{-}۴)$$

و

$$u_{۲c} = \frac{u_۲ - v_{com}}{۱ - u_۲ v_{com}/c^۲} = \frac{\circ - v_{com}}{۱ - \circ} = -v_{com} \qquad (۱۹۳\text{-}۴)$$

در نتیجه، با توجه به (۴-۱۹۳)، درچارچوب $S_{com}$، ذرهٔ ۲ ساکن نبوده و با سرعت $u_{2c}$ حرکت می کند. همچنین، با توجه به این رابطه، سرعت نسبی دو چارچوب نیز برابر $v_{com} = -u_{2c}$ خواهد بود. بنابراین، چارچوب $S_{com}$، با سرعتی برابر $u_{2c}$ و دقیقاً درجهت حرکت اولیهٔ ذره ۱ (ذرهٔ فرودی در $S$) حرکت می کند. از طرف دیگر، در $S_{com}$ داریم:

$$p_{1com} = p_{2com} \tag{۴-۱۹۴}$$

یا

$$m_{01} c\beta_{1c}\gamma(\beta_{1c}) = m_{02} c\beta_{2c}\gamma(\beta_{2c}) \tag{۴-۱۹۵}$$

اکنون با استفاده از تبدیلات لورنتس، می توان به دست آورد:

$$p_{1com} = \gamma(u_{2c})[p_1 - \frac{u_{2c}}{c^2}E_1] \tag{۴-۱۹۶}$$

همچنین، با توجه به اینکه $v_{com}$ برابر $u_{2c}$ بوده و در جهت $u_1$ می باشد، خواهیم داشت:

$$p_{1com} = \gamma(v_{com})[p_1 - \frac{v_{com}}{c^2}E_1] \tag{۴-۱۹۷}$$

که با درنظر گرفتن رابطهٔ(۴-۱۹۴)، می توان نوشت:

$$p_{2com} = \gamma(v_{com})[p_1 - \frac{v_{com}}{c^2}E_1] \tag{۴-۱۹۸}$$

در روابط فوق $p_1 = m_{01}u_1\gamma(u_1)$ و $E_1 = m_{01}\gamma(u_1)c^2$ مـی باشـند. همچـنین روابـط (۴-۱۹۷) و (۴-۱۹۸) را می توان به صورت

$$m_{01}\gamma(\beta_{1c})c\beta_{1c} = \gamma(u_{2c})[m_{01}c\beta_1\gamma(\beta_1) - u_{2c}m_{01}\gamma(\beta_1)] \tag{۴-۱۹۹}$$

و

$$m_{02}\gamma(\beta_{2c})c\beta_{2c} = \gamma(u_{2c})[m_{01}c\beta_1\gamma(\beta_1) - u_{2c}m_{01}\gamma(\beta_1)] \tag{۴-۲۰۰}$$

نیز نوشت. دراین صورت، با استفاده ازرابطهٔ $\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$، می تـوان روابـط (۴-۱۹۹) و (۴-۲۰۰) را به شکل

$$\begin{aligned} m_{01}c\sqrt{\gamma^2(\beta_{1c}) - 1} = m_{01}c[\gamma(\beta_{2c})\sqrt{\gamma^2(\beta_1) - 1} \\ - \gamma(\beta_1)\sqrt{\gamma^2(\beta_{2c}) - 1}] \end{aligned} \tag{۴-۲۰۱}$$

و

$$m_{02}c\sqrt{\gamma^2(\beta_{2c})-1} = m_{01}c[\gamma(\beta_{2c})\sqrt{\gamma^2(\beta_1)-1} - \gamma(\beta_1)\sqrt{\gamma^2(\beta_{2c})-1}] \qquad (۲۰۲\text{-}۴)$$

نوشت. حال، اگر از روابط (۴-۲۰۱) و (۴-۲۰۱)؛ $\gamma(\beta_{1c})$ و $\gamma(\beta_{2c})$ را برحسب $\gamma(\beta_1)$ به دست آوریم، خواهیم داشت:

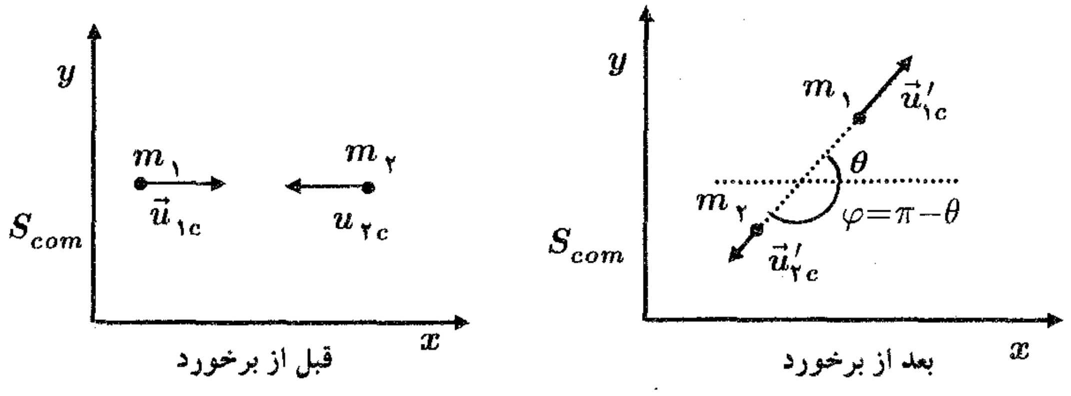
$$\gamma(\beta_{1c}) = \frac{\gamma(\beta_1)+m_{01}/m_{02}}{\sqrt{1+2\gamma(\beta_1)(m_{01}/m_{02})+(m_{01}/m_{02})^2}} \qquad (۲۰۳\text{-}۴)$$

و همچنین $\gamma(\beta_{2c})$ نیز، برابر

$$\gamma(\beta_{2c}) = \frac{\gamma(\beta_1)+m_{02}/m_{01}}{\sqrt{1+2\gamma(\beta_1)(m_{01}/m_{02})+(m_{01}/m_{02})^2}} \qquad (۲۰۴\text{-}۴)$$

به دست می آید. درنتیجه، با داشتن مقادیر $\gamma(\beta_{1c})$ و $\gamma(\beta_{2c})$، تکانهٔ ذرات در چارچوب $S_{com}$ به طور کامل معین می شوند.

درچارچوب $S_{com}$، برخورد دو ذره با توجه به رابطهٔ (۴-۱۹۴) دارای تقارن کامل می باشد. دراین چارچوب، با توجه به شکل (۴-۹)، دو ذره قبل و بعد از برخورد، درخلاف جهت یکدیگرحرکت می کنند. همچنین، به راحتی می توان نشان داد که $u_{1c}$ و $u_{2c}$ به ترتیب، برابر $u'_{1c}$ و $u'_{2c}$ می باشند. یا معادل آنها، $p_{1c}=p'_{1c}$ و $p_{2c}=p'_{2c}$ خواهند بود. بنابراین، درچارچوب $S_{com}$، اندازهٔ تکانهٔ ذرات، قبل و بعد از برخورد با هم برابر بوده و در خلاف جهت یکدیگر می باشند.




**شکل (۴-۹) : برخورد دو ذره درچارچوب مرکز تکانه**

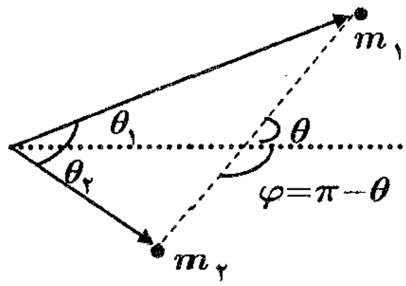
اکنون، با توجه به شکل (۴-۹)، اگر زاویهٔ پراکندگی را دراین چارچوب برابر $\theta$ در نظر بگیریم. در این صورت، تکانهٔ ذرات را بعد از برخورد، درچارچوب مرکز تکانه می توان با روابط

$$\vec{p}\,'_{1c} = m_1 \vec{u}\,'_{1c} = m_1 u'_{1c} cos\theta \vec{i} + m_1 u'_{1c} sin\theta \vec{j}$$
$$= p'_{1c} cos\theta \vec{i} + p'_{1c} sin\theta \vec{j} \qquad (۲۰۵-۴)$$
$$= p_{1c} cos\theta \vec{i} + p_{1c} sin\theta \vec{j}$$

و

$$\vec{p}\,'_{2c} = m_2 \vec{u}\,'_{2c} = -m_2 u'_{2c} cos\theta \vec{i} - m_2 u'_{2c} sin\theta \vec{j}$$
$$= -p'_{2c} cos\theta \vec{i} - p'_{2c} sin\theta \vec{j} \qquad (۲۰۶-۴)$$
$$= -p_{2c} cos\theta \vec{i} - p_{2c} sin\theta \vec{j}$$

بیان کرد. حال، می توان با توجه به شکل (۴-۱۰)، ارتباط بین زوایای پراکندگی را دردو چارچوب به دست آورد.




شکل (۴-۱۰) : زوایای پراکندگی در چارچوبهای $S$ و $S_{com}$

برای این منظور، می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس، مؤلفه های تکانهٔ ذرات را از چارچوب مرکز تکانه به چارچوب $S$ منتقل نمود. درچارچوب $S$، تکانهٔ هرکدام از ذرات، دارای مولفهٔ $x$ و $y$ می باشد. بنابراین، برای ذرهٔ ۱ می توان نوشت:

$$p_{1x} = \gamma(u_{2c})[p_{1cx} + \frac{u_{2c}}{c^2} E_{1c}]$$
$$= \gamma(\beta_{2c})[m_{01} c\beta_{1c}\gamma(\beta_{1c}) cos\theta + m_{01} c\beta_{2c}\gamma(\beta_{1c})] \qquad (۲۰۷-۴)$$
$$= m_{01} c\gamma(\beta_{1c})\gamma(\beta_{2c})[\beta_{1c} cos\theta + \beta_{2c}]$$

همچنین، مؤلفهٔ $y$ تکانهٔ ذره ۱ نیز برابر

$$p_{1y} = p_{1yc} = m_{01} c\beta_{1c}\gamma(\beta_{1c}) sin\theta \qquad (۲۰۸-۴)$$

می باشد. درنتیجه، زاویهٔ پراکندگی ذرهٔ ۱، درچارچوب $S$، با توجه به روابط (۴-۲۰۷) و (۴-۱۶۵) از رابطهٔ

$$tan\theta_1 = \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{sin\theta}{\gamma(\beta_{2c})[cos\theta + \beta_{2c}/\beta_{1c}]} \qquad (۲۰۹-۴)$$

به دست می آید. همچنین، مؤلفهٔ $x$ تکانهٔ ذره ۲ درچارچوب $S$، برابر

$$\begin{aligned} p_{2x} &= \gamma(\beta_{2c})[p_{2xc} + \frac{u_{2c}}{c^2}E_{2c}] \\ &= \gamma(\beta_{2c})[-m_{02}c\beta_{2c}\gamma(\beta_{2c})cos\theta + m_{02}c\beta_{2c}\gamma(\beta_{2c})] \\ &= m_{02}c\beta_{2c}\gamma^2(\beta_{2c})[1-cos\theta] \end{aligned} \qquad (۲۱۰-۴)$$

خواهد بود. حال مؤلفهٔ $y$ تکانهٔ ذره ۲ ، نیزبا توجه به (۴-۲۰۶) درهمین چارچوب به صورت

$$p_{2y} = p_{2yc} = -m_{02}c\beta_{2c}\gamma(\beta_{2c})sin\theta \qquad (۲۱۱-۴)$$

می باشد. درنتیجه، زاویهٔ پراکندگی ذرهٔ ۲ درچارچوب $S$، با درنظرگرفتن روابط(۴-۲۱۰) و (۴-۱۶۸)، از رابطهٔ

$$tan\theta_2 = \frac{p_{2y}}{p_{2x}} = -\frac{sin\theta}{\gamma(\beta_{2c})\left[1-cos\theta\right]} \qquad (۲۱۲-۴)$$

به دست می آید.

اکنون، در اینجا به عنوان یک مورد خاص و جالب، می توان حالتی را درنظرگرفت که در آن جرم سکون ذرات با هم برابر باشند. دراین صورت، $\gamma(\beta_{1c})$ و $\gamma(\beta_{2c})$ با توجه به روابط(۴-۲۰۳) و (۴-۲۰۴) به رابطهٔ سادهٔ زیر تبدیل می شوند.

$$\gamma(\beta_{1c}) = \gamma(\beta_{2c}) = \sqrt{\frac{1}{2}[1+\gamma(\beta_1)]} \qquad (۲۱۳-۴)$$

همچنین، در این حالت، زوایای پراکندگی در چارچوب آزمایشگاه یا $S$، با درنظرگرفتن روابط (۴-۲۰۹) و (۴-۲۱۲)، و همچنین، رابطهٔ (۴-۲۱۳) از روابط

$$tan\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{1+\gamma(\beta_1)}} \cdot \frac{sin\theta}{1+cos\theta} \qquad (۲۱۴-۴)$$

و

$$tan\theta_2 = -\sqrt{\frac{2}{1+\gamma(\beta_1)}} \cdot \frac{sin\theta}{1-cos\theta} \qquad (۲۱۵-۴)$$

به دست می آیند. حال، با ضرب طرفین روابط (۴-۲۱۴) و (۴-۲۱۵) درهم، می توان به رابطهٔ

$$tan\theta_1 tan\theta_2 = -\frac{2}{1+\gamma(\beta_1)} \qquad (۲۱۶-۴)$$

رسید. ازطرف دیگر، همان طورکه می دانیم درمکانیک نیوتنی، دو ذرهٔ یکسان پس از

برخورد در دو راستای عمود بر یکدیگر پراکنده می شوند. برای بررسی این مطلب، کافی است رابطهٔ (۴-۲۱۶) را برای حالت غیر نسبیتی درنظر بگیریم. برای این منظور، اگر در رابطهٔ (۴-۲۱۶) ضریب $\gamma(\beta_۱)$ به سمت یک میل کند، در این حالت نتیجهٔ

$$tan\theta_۱ tan\theta_۲ = -۱ \qquad (۲۱۷\text{-}۴)$$

به دست می آید. بنابراین، در حالت غیر نسبیتی، با توجه به رابطهٔ(۴-۲۱۷)، به نتیجهٔ نیوتنی $\theta_۱ + \theta_۲ = \pi/۲$ می رسیم. همچنین، از رابطهٔ (۴-۲۱۶) می توان نتیجه گرفت که در حالت نسبیتی مجموع زوایای پراکندگی در چارچوب $S$، یا آزمایشگاه کوچکتر از $\pi/۲$ است.

---

**مثال ٤ - ۷ :** فرض کنید که در چارچوب آزمایشگاه یا $S$، ذره ای با جرم سکون $m_{\circ ۱}$ و سرعت $\vec{u}_۱$، با ذره ای ساکن و جرم سکون $m_{\circ ۲}$ برخورد کند.

**الف :** سرعت چارچوب مرکز تکانهٔ دو ذره، یعنی $\vec{v}_{com}$ را به دست آورید.

**ب :** سرعت ذرهٔ ۱ را در چارچوب مرکز تکانه، $S_{com}$ محاسبه نمایید

**جواب : الف :** برای به دست آوردن سرعت چارچوب $S_{com}$، می توان از رابطهٔ (۴-۱۷۱)، استفاده نمود. بنابراین، با توجه به اینکه درچارچوب $S$، ذرهٔ ۲ ساکن است، می توان نوشت:

$$v_{com} = \frac{P}{E}c^۲ = \frac{\gamma(u_۱)m_{\circ ۱}u_۱}{\gamma(u_۱)m_{\circ ۱}c^۲ + m_{\circ ۲}c^۲}c^۲ \qquad (۲۱۸\text{-}۴)$$

یا

$$v_{com} = \frac{u_۱\gamma(u_۱)}{\gamma(u_۱) + (m_{\circ ۲}/m_{\circ ۱})} \qquad (۲۱۹\text{-}۴)$$

یا

$$v_{com} = \frac{u_۱}{۱ + (m_{\circ ۲}/m_{\circ ۱})\sqrt{۱-(u_۱/c)^۲}} \qquad (۲۲۰\text{-}۴)$$

این رابطه نشان می دهد که سرعت نسبی دو چارچوب، یعنی $v_{com}$ و سرعت $u_۱$ در یک راستا می باشند.

ب : با استفاده از تبدیلات سرعت لورنتس، داریم

$$u_{1com} = \frac{u_1 - v_{com}}{1-(u_1 v_{com})/c^2} \qquad (۲۲۱\text{-}۴)$$

حال، با جایگذاری مقدار $v_{com}$ از رابطهٔ (۴-۲۱۹) در رابطهٔ (۴-۲۲۱) می توان به دست آورد:

$$u_{1,com} = \frac{u_1 (m_{\circ 2}/m_{\circ 1})\sqrt{1-(u_1/c)^2}}{1-(\frac{v_{com}}{c})^2 + (m_{\circ 2}/m_{\circ 1})\sqrt{1-(v_{com}/c)^2}} \qquad (۲۲۲\text{-}۴)$$

همچنین، به راحتی می توان نشان داد که سرعت ذرهٔ ۲ ، در این چارچوب؛ یعنی $u_{2,com}$ برابر $-v_{com}$ است. البته، این مطلب در بخش ۴- ۱۱، اثبات شد. حال، اگر فرض کنیم که جرم سکون ذرات برابر باشند، دراین صورت، روابط (۴-۲۲۰) و (۴-۲۲۲) به روابط

$$v_{com} = \frac{u_1}{1+\sqrt{1-(u_1/c)^2}} \qquad (۲۲۳\text{-}۴)$$

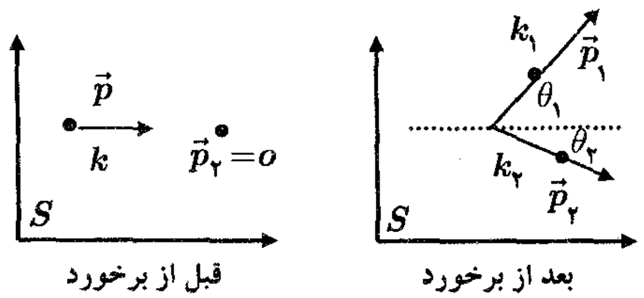
و

$$u_{1,com} = \frac{u_1 \sqrt{1-(u_1/c)^2}}{1-(\frac{v_{com}}{c})^2 + \sqrt{1-(v_{com}/c)^2}} \qquad (۲۲۴\text{-}۴)$$

تبدیل می شوند.

---

**مثال ٤ - ٨ :** درمثال قبل، فرض کنید که دو ذره دارای جرم سکون یکسان باشند. حال، اگرذرهٔ فرودی دارای انرژی جنبشی $k$ باشد و پس از برخورد، ذرهٔ فرودی تحت زاویهٔ $\theta_1$ و ذرهٔ ساکن تحت زاویهٔ $\theta_2$، نسبت به راستای حرکت اولیهٔ ذرهٔ فرودی منحرف شوند، دراین صورت انرژی جنبشی ذرات را پس از برخورد در چارچوب آزمایشگاه به دست آورید.




شکل (۴-۱۱): برخورد ذرات در چارچوب $S$

**جواب :** با توجه به شکل(۴-۱۱)، می توان قوانین پایستگی انرژی و تکانه را برای این برخورد به صورت:

$$(k + m_0 c^2) + m_0 c^2 = (k_1 + m_0 c^2) + (k_2 + m_0 c^2) \qquad (۲۲۵-۴)$$

یا

$$k = k_1 + k_2 \qquad (۲۲۶-۴)$$

و

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad (۲۲۷-۴)$$

نوشت. در نتیجه، از رابطهٔ (۴-۲۲۷) داریم:

$$p_2 = p - 2pp_1 cos\theta_1 + p_1^2 \qquad (۲۲۸-۴)$$

درروابط فوق $p$، اندازهٔ تکانهٔ ذرهٔ فرودی قبل از برخورد، و $p_1$ و $p_2$ تکانهٔ ذرات، بعد از برخورد می باشند. اندازهٔ این تکانه ها با توجه به رابطهٔ (۴-۱۱۱)، برابر

$$p^2 = \frac{1}{c^2}(k + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^2$$

$$p_1^2 = \frac{1}{c^2}(k_1 + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^2 \qquad (۲۲۹-۴)$$

$$p_2^2 = \frac{1}{c^2}(k_2 + m_0 c^2)^2 - m_0^2 c^2$$

می باشند. اکنون، می توان مقادیر $p$، $p_1$ و $p_2$ را از روابط (۴-۲۲۹) در(۴-۲۲۸) جایگذاری نموده و سپس اندازهٔ $k_2$ را با درنظرگرفتن رابطهٔ (۴-۲۲۶) در رابطهٔ به دست آمده قرار داد که در این صورت، انرژی جنبشی ذرهٔ فرودی بعد از برخورد، برابر

$$k_1 = \frac{k cos^2\theta_1}{1 + (k/2m_0 c^2) sin^2\theta_1} \qquad (۲۳۰-۴)$$

خواهد بود. همچنین، برای به دست آوردن اندازهٔ انرژی جنبشی ذرهٔ دوم، می توان با روشی مشابه به نتیجهٔ

$$k_2 = \frac{k cos^2\theta_2}{1 + (k/2m_0 c^2) sin^2\theta_2} \qquad (۲۳۱-۴)$$

رسید.

---

**مثال ٤ - ۹ :** در چارچوب آزمایشگاه دو ذره با جرم سکون $m_0$ و سرعت یکسان $u$ به سمت یکدیگرحرکت می کنند. انرژی کل یکی از ذرات را در چارچوب سکون ذرهٔ دیگر

به دست آورید. همچنین، اگر $u = c\sqrt{۲}/۲$ باشد، انرژی کل ذره چقدر خواهد بود؟

**جواب :** برای به دست آوردن انرژی کل یکی از ذرات، در چارچوب سکون ذرهٔ دیگر، باید سرعت آن را درچارچوب سکون ذرهٔ دیگر به دست آوریم. در این صورت، با توجه به اینکه ذرات تنها در راستای محور $x$ حرکت می کنند و مؤلفه های $y$ و $z$ سرعت ذرات صفر است. درنتیجه، با استفاده از تبدیل لورنتس سرعت، داریم:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{۱ - vu_x/c^۲} = \frac{-u-u}{۱+u^۲/c^۲} \qquad (۲۳۲-۴)$$

یا

$$u'_x = \frac{-۲u}{۱+\beta^۲} \qquad (۲۳۳-۴)$$

در نتیجه، انرژی کل یکی از ذرات در چارچوب سکون ذرهٔ دیگر، برابر

$$E' = m_\circ \gamma(u'_x)c^۲ = \frac{m_\circ c^۲}{\sqrt{۱-(u'_x/c)^۲}} \qquad (۲۳۴-۴)$$

خواهد بود. اکنون، با جایگذاری مقدار $u'_x$ از رابطهٔ (۴-۲۳۳) در (۴-۲۳۴) خواهیم داشت:

$$E' = \frac{m_\circ c^۲(۱+\beta^۲)}{\sqrt{[(۱+\beta^۲)^۲ - ۴\beta^۲]}} \qquad (۲۳۵-۴)$$

یا

$$E' = \frac{m_\circ c^۲(۱+\beta^۲)}{۱-\beta^۲} \qquad (۲۳۶-۴)$$

برای حالت خاص، یعنی اگر $u = c\sqrt{۲}/۲$ باشد، دراین حالت مقدار این انرژی برابر $E' = ۳m_\circ c^۲$ به دست می آید.

---

**مثال ٤ - ۱۰ : انرژی آستانه**

فرض کنید که ذره ای با جرم سکون $m_\circ$ و انرژی کل $E$، با ذره ای ساکن و به جرم سکون $m_\circ$ برخورد کند. انرژی آستانه[1]، برای حالتی که بعد از برخورد، $N$ ذرهٔ یکسان با جرم سکون $m_\circ$ ایجاد شود، چقدر است؟

1- Threshold energy

جواب: انرژی آستانه درحقیقت، حداقل انرژی لازم برای روی دادن یک فرایند یا برهم کنش فیزیکی می باشد. در این مورد برای اینکه حداقل انرژی را برای ایجاد $N$ ذره به دست آوریم، باید وضعیتی را بررسی نماییم که ذرات ایجاد شده، پس از برخورد به حال سکون درآیند. به عبارت دیگر، انرژی آستانه یا اولیهٔ ذرهٔ فرودی باید به اندازه ای باشد که تنها باعث ایجاد ذرات گردد و انرژی اضافی باقی نماند تا به صورت انرژی جنبشی در اختیار ذرات به وجود آمده قرار گیرد. حال، برای به دست آوردن جواب، می توان از پایستگی چاربردار انرژی - تکانه استفاده نمود.

بنابراین، درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، چاربردار انرژی- تکانهٔ ذرات قبل ازبرخورد برابر

$$p_{1}^{\mu}=(\frac{E}{c},p,0,0) \qquad (۲۳۷-۴)$$

و

$$p_{2}^{\mu}=(m_0 c,0,0,0) \qquad (۲۳۸-۴)$$

می باشند. اما درچارچوب مرکز تکانه انرژی کل، برابرمجموع انرژی تک تک ذرات می باشد؛ زیرا دراین چارچوب، ذرات ایجاد شده بعد از برخورد به حال سکون در می آیند. بنابراین، $E_{com}=Nm_0 c^2$ خواهد بود. اکنون، اگر مقدار $E_{com}$ و $p$ را در رابطهٔ (۴-۱۸۴)، جایگذاری نماییم، خواهیم داشت:

$$(E/c+m_0 c)^2-\frac{1}{c^2}[E^2-(m_0 c^2)^2]=(\frac{Nm_0 c^2}{c})^2 \qquad (۲۳۹-۴)$$

در نتیجه، با محاسبهٔ مقدار $E$، از رابطهٔ فوق، انرژی ذرهٔ فرودی باید برابر

$$E=m_0 c^2\,[\frac{N^2}{2}-1] \qquad (۲۴۰-۴)$$

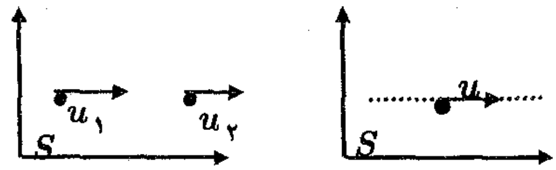
باشد. اما نکته ای که باید در اینجا به آن اشاره شود، این است که ما انرژی ذرهٔ فرودی را در چارچوب $S_{com}$ به حداقل رساندیم، که البته این مسأله معادل مینیمم کردن انرژی در چارچوب $S$ می باشد؛ زیرا می توان رابطهٔ(۴-۲۴۰) را به صورت

$$E=[\frac{NE_{com}}{2}]-m_0 c^2 \qquad (۲۴۱-۴)$$

نیز نوشت. این رابطه نشان می دهد که با حداقل شدن انرژی در چارچوب مرکز تکانه، انرژی

در چارچوب آزمایشگاه یا $S$ نیز به حداقل می رسد؛ زیرا $m_0 c^2$ کمیّتی ناورداست.

**مثال ٤ - ١١ :** در چارچوب $S$ دو ذره با جرم سکون $m_{01}$ و $m_{02}$ و سرعت $u_1$ و $u_2$، مطابق شکل (۴-۱۲)، با یکدیگر برخورد کرده و تشکیل یک ذره با جرم سکون $M_0$ را می دهند. حال، فرض کنید که چارچوب یا ناظر دیگری مانند $S'$ با سرعت $u_2$ نسبت چارچوب $S$ حرکت کند. در این صورت، سرعت و جرم ذرهٔ مرکب حاصل از برخورد را در دو چارچوب $S$ و $S'$ به دست آورید.




قبل از برخورد　　بعد از برخورد

**شکل (۴-۱۲) : برخورد دو ذره در چارچوب** $S$

**جواب: الف:** ابتدا سرعت ذرهٔ مرکب را در چارچوب $S$ به دست می آوریم. برای این منظور، با استفاده از قانون پایستگی انرژی و تکانه درچارچوب $S$، داریم:

$$m_{01}\gamma(u_1)u_1 + m_{02}\gamma(u_2)u_2 = M_0\gamma(u)u \quad : \text{پایستگی تکانه} \qquad (۲۴۲\text{-}۴)$$

و

$$m_{01}\gamma(u_1)c^2 + m_{02}\gamma(u_2)c^2 = M_0\gamma(u)c^2 \quad : \text{پایستگی انرژی} \qquad (۲۴۳\text{-}۴)$$

اکنون، می توان با تقسیم رابطهٔ (۴-۲۴۲) بر(۴-۲۴۳)، سرعت ذرهٔ مرکب به دست آورد.

$$u = \frac{m_{01}\gamma(u_1)u_1 + m_{02}\gamma(u_2)u_2}{m_{01}\gamma(u_1) + m_{02}\gamma(u_2)} \qquad (۲۴۴\text{-}۴)$$

همچنین، جرم ذرهٔ مرکب را نیز می توان از رابطهٔ (۴-۲۴۳) به دست آورد. دراین صورت، داریم:

$$M_0^2 = \frac{[m_{01}\gamma(u_1) + m_{02}\gamma(u_2)]^2}{\gamma^2(u)} \qquad (۲۴۵\text{-}۴)$$

یا

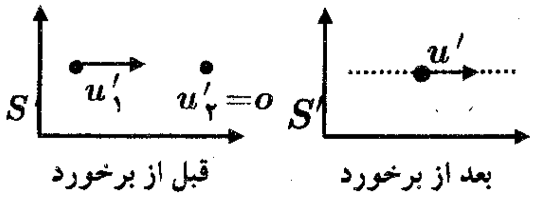
$$M_0^2 = [m_{01}\gamma(u_1) + m_{02}\gamma(u_2)]^2\,(1 - \frac{u^2}{c^2}) \qquad (۲۴۶\text{-}۴)$$

حال، با جایگذاری مقدار $u$ از رابطهٔ (۴-۲۴۴) در رابطهٔ (۴-۲۴۶)، می توان به دست آورد:

$$M_0^2 = (m_{01}^2 + m_{02}^2) + 2(m_{01}m_{02})\gamma(u_1)\gamma(u_2)[1 - \frac{u_1u_2}{c^2}] \qquad (۲۴۷\text{-}۴)$$

**ب:** با توجه به شکل (۴-۱۳)، درچارچوب $S'$، ذرهٔ ۲ ساکن است. و ذرهٔ ۱ نیز با سرعت

$$u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - vu_1/c^2} = \frac{u_1 - u_2}{1 - u_1u_2/c^2} \qquad (۴-۲۴۸)$$




شکل (۴-۱۳): برخورد دو ذره در چارچوب $S'$

با آن برخورد می کند؛ زیرا سرعت نسبی دو چارچوب $v = u_2$ می باشد. بنابراین، ضریب $\gamma(u_1')$ نیز، برابر

$$\gamma(u_1') = \frac{1}{\sqrt{1-(u_1'/c)^2}} \qquad (۴-۲۴۹)$$

می باشد. حال، با جایگذاری مقدار $u_1'$ از رابطهٔ (۴-۲۴۸) در رابطهٔ ((۴-۲۴۹) و پس از ساده کردن آن، خواهیم داشت:

$$\gamma(u_1') = \frac{(c^2 - u_1u_2)}{\sqrt{c^4 + u_1^2u_2^2 - c^2u_1^2 - c^2u_2^2}} \qquad (۴-۲۵۰)$$

یا

$$\gamma(u_1') = \frac{(c^2 - u_1u_2)}{c^2\sqrt{1-(u_1/c)^2}\sqrt{1-(u_2/c)^2}} = \frac{1}{c^2}(c^2 - u_1u_2)\gamma(u_1)\gamma(u_2) \qquad (۴-۲۵۱)$$

از طرف دیگر، با توجه به قوانین پایستگی تکانه و انرژی، می توان نوشت:

$$\text{پایستگی تکانه}:\quad m_{01}\gamma(u_1')u_1' = M_0'\gamma(u')u' \qquad (۴-۲۵۲)$$

و

$$\text{پایستگی انرژی}:\quad m_{01}\gamma(u_1')c^2 + m_{02}c^2 = M_0'\gamma(u')c^2 \qquad (۴-۲۵۳)$$

اکنون، باجایگذاری مقدار $u_1'$ و $\gamma(u_1')$ از روابط (۴-۲۴۸) و (۴-۲۵۱) در روابط فوق می توان به دست آورد

$$M_0'\gamma(u')u' = m_{01}(u_1 - u_2)\gamma(u_1)\gamma(u_2) \qquad (۴-۲۵۴)$$

و

$$M_0'\gamma(u')c^2 = m_{02}c^2 + m_{01}(c^2 - u_1u_2)\gamma(u_1)\gamma(u_2) \qquad (۴-۲۵۵)$$

درنتیجه، برای محاسبهٔ $u'$، یعنی سرعت ذرهٔ مرکب در چارچوب $S'$، کافی است رابطهٔ (۴-۲۵۴) را بر رابطهٔ (۴-۲۵۵)، تقسیم نماییم. دراین صورت، داریم:

$$u' = \frac{m_{\circ 1}c^2(u_1 - u_2)\gamma(u_1)\gamma(u_2)}{m_{\circ 2}c^2 + m_{\circ 1}(c^2 - u_1 u_2)\gamma(u_1)\gamma(u_2)} \qquad (۲۵۶\text{-}۴)$$

همچنین، برای محاسبهٔ $M'_\circ$، می توان از رابطهٔ (۴-۲۵۴) استفاده کرد. بنابراین، داریم:

$$M'^2_\circ = \frac{1}{\gamma^2(u')c^4}[m_{\circ 2}c^2 + m_{\circ 1}(c^2 - u_1 u_2)\gamma(u_1)\gamma(u_2)]^2 \qquad (۲۵۷\text{-}۴)$$

در نهایت با محاسبهٔ $\gamma(u')$ و جایگذاری آن در رابطهٔ (۴-۲۵۷)، می توان به دست آورد:

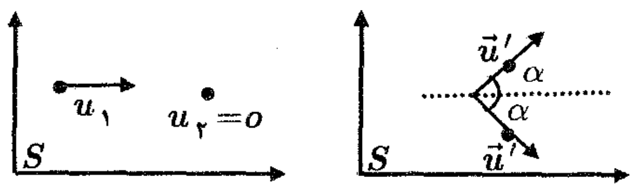
$$M'^2_\circ = (m^2_{\circ 1} + m^2_{\circ 2}) + 2(m_{\circ 1}m_{\circ 2})\gamma(u_1)\gamma(u_2)[1 - \frac{u_1 u_2}{c^2}] \qquad (۲۵۸\text{-}۴)$$

که با مقایسه رابطهٔ فوق با (۴-۲۴۷) به نتیجهٔ $M'_\circ = M_\circ$ می رسیم که درواقع، باید اینگونه باشد.

**مثال ٤ - ۱۲ : برخورد پروتون - پروتون**

مطابق شکل(۴-۱۴)، پروتونی با سرعت $u$، به طور کشسان با پروتون دیگری که ساکن است، برخورد می کند. حال اگر فرض کنیم که پس از برخورد، پروتونها دارای انرژی یکسان باشند، دراین صورت، زاویهٔ پراکندگی بین دو پروتون را بعد از برخورد به دست آورید.

جواب : چون پس از برخورد، پروتونها دارای انرژی یکسان هستند، بنابراین، زاویهٔ انحراف یا پراکندگی برای هردو پروتون برابرخواهد بود. مطابق شکل(۴-۱۴)، زاویهٔ پراکندگی پروتونها را نسبت به راستای حرکت اولیهٔ پروتون فرودی، برابر $\alpha$ در نظر می گیریم. در این صورت، قبل از برخورد برای پروتون فرودی خواهیم داشت:




بعد از برخورد　　　قبل از برخورد

شکل (۴-۱۴) : برخورد پروتون - پروتون

$$\begin{aligned} p_1 &= m_\circ\gamma(\beta_1)u_1 = m_\circ\gamma(\beta_1)\beta_1 c \\ E_1 &= m_\circ\gamma(\beta_1)c^2 \end{aligned} \qquad (۲۵۹\text{-}۴)$$

از طرف دیگر، پایستگی تکانه ایجاب می کند

$$m_\circ\gamma(\beta_1)\beta_1 c = 2m_\circ\gamma(\beta')\beta' \cos\alpha \qquad (۲۶۰\text{-}۴)$$

یا

$$\gamma(\beta_1)\beta_1 = 2\gamma(\beta')\beta' cos\alpha \qquad (۴-۲۶۱)$$

همین طور، قانون پایستگی انرژی نتیجه می دهد:

$$m_\circ c^2 + m_\circ \gamma(\beta_1)c^2 = 2m_\circ \gamma(\beta')c^2 \qquad (۴-۲۶۲)$$

یا

$$1+\gamma(\beta_1) = 2\gamma(\beta') \qquad (۴-۲۶۳)$$

اکنون، با توجه به ضریب $\gamma(\beta_1) = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}$، می توان نوشت:

$$\beta_1\gamma(\beta_1) = \sqrt{\gamma^2(\beta_1)-1} \qquad (۴-۲۶۴)$$

بنابراین، با درنظرگرفتن روابط (۴-۲۶۳) و (۴-۲۶۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\beta'\gamma(\beta') &= \sqrt{\gamma^2(\beta')-1}\\ &= \sqrt{\tfrac{1}{4}[1+\gamma(\beta_1)]^2-1}\end{aligned} \qquad (۴-۲۶۵)$$

حال، با جایگذاری مقدار $\beta'\gamma(\beta')$ از رابطهٔ (۴-۲۶۵)، در(۴-۲۶۱) می توان به دست آورد:

$$\gamma(\beta_1)\beta_1 = (2cos\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{4}[1+\gamma(\beta_1)]^2-1} \qquad (۴-۲۶۶)$$

که با استفادهٔ مجدد از رابطهٔ (۴-۲۶۴)، داریم:

$$\sqrt{\gamma(\beta_1)^2-1} = (2cos\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{4}[1+\gamma(\beta_1)]^2-1} \qquad (۴-۲۶۷)$$

یا

$$\begin{aligned}\gamma^2(\beta_1)-1 &= [\gamma^2(\beta_1)+2\gamma(\beta_1)-3](cos^2\alpha)\\ &= [\gamma(\beta_1)-1][\gamma(\beta_1)+3](cos^2\alpha)\end{aligned} \qquad (۴-۲۶۸)$$

اکنون، می توان از (۴-۲۶۸)، رابطهٔ زیر را نتیجه گرفت.

$$cos^2\alpha = \frac{\gamma(\beta_1)+1}{\gamma(\beta_1)+3} \qquad (۴-۲۶۹)$$

درنهایت، با تعریف $\theta = 2\alpha$، زاویهٔ پراکندگی پروتونها را می توان از رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$cos\theta = 2cos^2\alpha - 1 = \frac{\gamma(\beta_1)-1}{\gamma(\beta_1)+3} \qquad (۴-۲۷۰)$$

**مثال ٤ – ۱۳ : برخورد الکترون ـ الکترون**

فرض کنید که درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، الکترونی که دارای انرژی کل $۱/۴۰ \, MeV$ می باشد، با الکترون ساکنی برخورد کند. در این صورت:

الف: انرژی و تکانهٔ کل، درچارچوب $S$ چقدر است؟

ب: سرعت چارچوب مرکز تکانهٔ $S_{com}$ را به دست آورید.

ج: انرژی کل دو ذره را در چارچوب $S_{com}$ محاسبه نمایید.

د: اگر فرض کنیم که درچارچوب $S_{com}$، الکترون هدف تحت زاویهٔ $\pi/۴$ پراکنده شود. دراین صورت در این چارچوب، الکترون فرودی تحت چه زاویه ای پراکنده می شود؟ انرژی و تکانهٔ الکترون هدف را پس از برخورد، درچارچوب $S_{com}$ نیز به دست آورید.

ح: در چارچوب $S$، اگرالکترون فرودی درراستای محور $x$ پرتاب شود، دراین صورت، مؤلفه های $x$ و $y$ تکانهٔ الکترون هدف را پس از برخورد محاسبه نمایید.

جواب: الف: انرژی کل در چارچوب آزمایشگاه یا $S$، برابر

$$\begin{aligned} E = E_۱ + E_۲ &= E_۱ + m_\circ c^۲ \\ &= ۱/۴۰ MeV + ۰/۵۱ MeV \\ &= ۱/۹۱ MeV \end{aligned} \qquad (۲۷۱\text{-}۴)$$

می باشد که در آن $E_۱$ و $E_۲$ به ترتیب انرژی الکترون فرودی و ساکن می باشد. تکانهٔ کل نیز برابر تکانهٔ الکترون فرودی است. در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} p_{tot} = p_۱ &= \sqrt{(E_۱/c)^۲ - (m_\circ c)^۲} \\ &= \sqrt{(۱/۴۰)^۲ - (۰/۵۱)^۲} = ۱/۳۰ MeV/c \end{aligned} \qquad (۲۷۲\text{-}۴)$$

ب: با توجه به رابطهٔ (۴-۱۷۲)، سرعت چارچوب مرکز تکانهٔ $S_{com}$، با رابطهٔ

$$\vec{v} = \frac{c^۲ \vec{p}}{E} \qquad (۲۷۳\text{-}۴)$$

داده می شود. بنابراین، $v_{com}$ برابر مقدار زیر خواهد بود.

$$v_{com} = \frac{c^{۲}(۱/۳۰ MeV/c)}{۱/۹۱ MeV} = ۰/۶۸c \qquad (۲۷۴-۴)$$

ج: انرژی کل درچارچوب مرکز تکانه، با توجه به رابطهٔ (۴-۱۸۴) و با درنظر گرفتن اینکه $p_{com} = ۰$ است، برابر

$$\begin{aligned} E^{۲} - c^{۲}p^{۲} &= E^{۲}_{com} - c^{۲}p^{۲}_{com} \\ &= E^{۲}_{com} - ۰ \end{aligned} \qquad (۲۷۵-۴)$$

یا

$$\begin{aligned} E_{com} &= \sqrt{E^{۲} - c^{۲}p^{۲}} = \sqrt{(۱/۹۱)^{۲} - (۱/۳۱)^{۲}} \\ &= ۱/۴۰ MeV \end{aligned} \qquad (۲۷۶-۴)$$

می باشد. همچنین، می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس، انرژی الکترون هدف را در چارچوب $S_{com}$، به دست آورد. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} E_{۲com} &= \gamma(v_{com})[E_{۲} + vp_{۲}] \\ &= \gamma(v_{com})E_{۲} \\ &= \gamma(v_{com})m_{o}c^{۲} \\ &= \gamma(۰/۶۸c)(۰/۵۱)MeV \\ &= ۰/۸۵ MeV \end{aligned} \qquad (۲۷۷-۴)$$

از طرف دیگر، چون درچارچوب $S_{com}$، الکترون هدف و فرودی دارای انرژی یکسان می باشند، درنتیجه انرژی کل $E_{com}$، برابر مقدار زیر به دست می آید.

$$E_{com} = ۲E_{۲com} = ۲(۰/۸۵ MeV) = ۱/۴۰ MeV \qquad (۲۷۸-۴)$$

د: در چارچوب $S_{com}$، چون تکانهٔ کل صفر است، بنابراین، $\vec{p}_{۱c} = -\vec{p}_{۲c}$ خواهد بود. همچنین، زاویهٔ انحراف یا پراکندگی برای الکترون فرودی برابر $\alpha = ۵\pi/۴$ می باشد. از طرف دیگر، درچارچوب $S$، قبل از برخورد، الکترون فرودی دارای تکانهٔ $\vec{p}_{۱}$ بوده و در چارچوب $S_{com}$، دارای تکانهٔ

$$p_{1com} = \gamma(v_{com})[p_1 - \frac{v_{com}}{c^2}E_1] \tag{۲۷۹-۴}$$

می باشد. حال، با توجه به اینکه $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_{2com}$ هر دو در راستای محور $x$ قرار دارند. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_{1com} &= \gamma(0/68c)[1/30-(0/68)(1/40)] \\ &= 0/47\frac{MeV}{c} \end{aligned} \tag{۲۸۰-۴}$$

بنابراین دراین برخورد، الکترون فرودی برمی گردد و تکانهٔ الکترون هدف نیز برابر

$$|\vec{p}_{2com}| = |\vec{p}_{1com}| = 0/47\frac{MeV}{c} \tag{۲۸۱-۴}$$

می باشد. همچنین، انرژی الکترون فرودی را نیز می توان از رابطهٔ

$$\begin{aligned} E_{1com} &= \sqrt{c^2 p_{1com}^2 + (m_o c^2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(0/47MeV/c)^2 + (0/51MeV)^2} \\ &= 0/70MeV \end{aligned} \tag{۲۸۲-۴}$$

به دست آورد. البته، همین نتیجه را می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس انرژی برای ذرهٔ فرودی نیز به دست آورد.

$$\begin{aligned} E_{1com} &= \gamma(v_{com})[E_1 - vp_1] \\ &= \gamma(0/68c)[(1/40)-(0/68)(1/30)] \\ &= 0/70MeV \end{aligned} \tag{۲۸۳-۴}$$

ح : درجهت عمود بر راستای حرکت الکترون فرودی، یعنی محور $y$، داریم

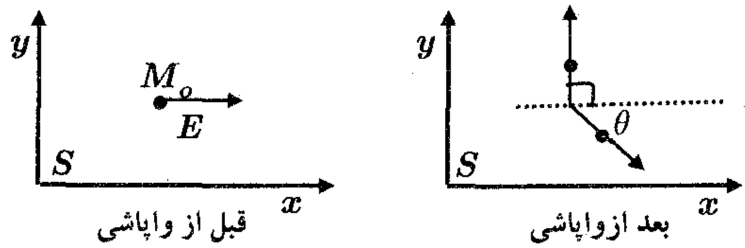
$$\begin{aligned} p_y &= p'_y = p_{2com}\sin\theta \\ &= \frac{0/47}{\sqrt{2}} = 0/34\frac{MeV}{c} \end{aligned} \tag{۲۸۴-۴}$$

همچنین، مؤلفهٔ $x$ تکانه نیز درچارچوب $S$، برابر مقدار زیر می باشد.

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(v_{com})[p_{1x,com} + (\frac{v_{com}}{c^2})E_{1com}] \\ &= \gamma(0/68c)[(0/34)+(0/68)(0/70)] \\ &= 1/11(\frac{MeV}{c}) \end{aligned} \tag{۲۸۵-۴}$$

**مثال ٤ - ١٤ : فرایند واپاشی یک ذره**

ذره ای با جرم سکون $M_{\circ}$ و انرژی کل $E$، بعد از واپاشی به دو ذرهٔ یکسان تبدیل می شود. حال، اگردرچارچوب آزمایشگاه یا $S$، ذرات ایجاد شده مطابق شکل (۴-۱۵)، در دو راستا که با راستای حرکت ذرهٔ اولیه زوایای $\theta$ و $\pi/۲$ می سازند، پراکنده شوند. دراین صورت، انرژی هر کدام از ذرات تولید شده از این واپاشی چقدر است؟




شکل (۴-۱۵) : واپاشی یک ذره

**جواب**: فرایندواپاشی ذرات نیز اساساً مشابه برخورد ذرات می باشند. ما می توانیم در این نوع برهم کنشها نیزاز قوانین پایستگی انرژی و تکانه استفاده کنیم. بنابراین، چاربردار انرژی ـ تکانهٔ ذره، قبل ازواپاشی برابر

$$p^{\mu} = (E/c, p, ۰, ۰) \qquad (۲۸۶-۴)$$

می باشد. که درآن $p$ برابر

$$p = \frac{۱}{c}\sqrt{E^{۲} - m_{\circ}^{۲}c^{۴}} \qquad (۲۸۷-۴)$$

است. اکنون، فرض می کنیم که جرم سکون ذرات ایجاد شده برابر $m_{\circ}$ باشد. درنتیجه، چاربردارانرژی ـ تکانهٔ ذرات تولید شده با روابط

$$p_{۱}^{\mu} = (E_{۱}/c, ۰, p_{۱}, ۰) \qquad (۲۸۸-۴)$$

و

$$p_{۲}^{\mu} = (E_{۲}/c, p_{۲}\cos\theta, -p_{۲}\sin\theta, ۰) \qquad (۲۸۹-۴)$$

بیان می گردند. از طرف دیگر، از پایستگی تکانه در راستای محور $x$ می توان نوشت: $p_{۲}\cos\theta = p$. حال، با تقسیم طرفین این رابطه بر $\sin\theta$ می توان این رابطه را به صورت $p_{۲}\sin\theta = p\tan\theta$ نوشت. بنابراین، می توان چار بردار انرژی- تکانهٔ ذرات را پس از واپاشی به شکل

$$p_{۱}^{\mu} = (E_{۱}/c, ۰, p\tan\theta, ۰) \qquad (۲۹۰-۴)$$

و

$$p_2^{\mu} = (E_2/c, p, -p\tan\theta, 0) \qquad (۲۹۱-۴)$$

نوشت. ازطرف دیگر، ازقانون پایستگی انرژی داریم، $E = E_1 + E_2$. حال، اگر این رابطه را برحسب تکانه و جرم ذرات بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E &= c\sqrt{p^2\tan^2\theta + m_0^2c^2} \\ &+ c\sqrt{p^2(1+\tan^2\theta) + m_0^2c^2} \end{aligned} \qquad (۲۹۲-۴)$$

یا

$$\begin{aligned} E &= E_1 + \sqrt{p^2c^2(1+\tan^2\theta) + m_0^2c^4} \\ &= E_1 + \sqrt{E_1^2 + p^2c^2} \end{aligned} \qquad (۲۹۳-۴)$$

اکنون، می توان در رابطهٔ(۴-۲۹۳)، با بردن $E_1$ به سمت چپ و مجذورکردن طرفین رابطه، مقدار $E_1$ را به دست آورد.

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2c^2}{2E} = \frac{M_0^2c^4}{2E} \qquad (۲۹۴-۴)$$

درنتیجه، انرژی کل ذرهٔ ۲ نیز از رابطهٔ

$$\begin{aligned} E_2 &= E - E_1 = \frac{E^2 + p^2c^2}{2E} \\ &= \frac{2E^2 - M_0^2c^4}{2E} \end{aligned} \qquad (۲۹۵-۴)$$

به دست می آید.

---

**مثال ٤ – ۱۵ :** فرض کنید که ذره ای با جرم سکون $M_0$ و سرعت $u$ به سمت ذرهٔ ساکن و کوچکتر $m_0$ حرکت می کند و پس از برخورد، به آن می چسبد. دراین صورت، جرم و سرعت ذرهٔ مرکب را به دست آورید. همچنین، نتیجه را برای حالت $M_0 \gg m_0$ بررسی نمایید و مقدار افزایش جرم را در این برخورد معین کنید.

**جواب:** درچارچوب $S$، با توجه به پایستگی انرژی و تکانه، ذرهٔ مرکب دارای انرژی

$$E = m_0c^2 + \gamma(u)M_0c^2 \qquad (۲۹۶-۴)$$

و تکانهٔ

$$p=\gamma(u)M_\circ u \tag{۴-۲۹۷}$$

می باشد. حال، با توجه به رابطهٔ(۴-۱۱۱)، خواهیم داشت:

$$M'^{۲}c^{۴}=E^{۲}-(pc)^{۲} \tag{۴-۲۹۸}$$

که در آن $M'$، جرم ذرهٔ مرکب می باشد. حال، با جایگذاری مقدار $E$ و $p$ در رابطهٔ (۴-۲۹۸)، می توان به دست آورد:

$$M'^{۲}c^{۴}=[m_\circ c^{۲}+\gamma(u)M_\circ c^{۲}]^{۲}-[\gamma(u)M_\circ uc]^{۲} \tag{۴-۲۹۹}$$

و با محاسبهٔ مقدار $M'$ از رابطهٔ فوق، داریم:

$$M'=\sqrt{m_\circ^{۲}+۲\gamma(u)M_\circ m_\circ+M_\circ^{۲}} \tag{۴-۳۰۰}$$

برای محاسبهٔ سرعت ذرهٔ حاصل از برخورد، می توان از رابطهٔ (۴-۱۱۶)، استفاده کرد. دراین صورت، اگر سرعت ذرهٔ مرکب را با $u'$ نشان دهیم، در این صورت، داریم:

$$u'=\frac{M_\circ u}{M_\circ+m_\circ\gamma^{-۱}(u)} \tag{۴-۳۰۱}$$

اکنون، اگر فرض کنیم که $M_\circ \gg m_\circ$ باشد، در این صورت، می توان از $m_\circ^{۲}$، در مقایسه با دو جملهٔ دیگر در زیر رادیکال صرف نظر کرد. در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{aligned}M'&=\sqrt{۲\gamma(u)M_\circ m_\circ+M_\circ^{۲}}\\&\simeq M_\circ\sqrt{۱+\frac{۲\gamma(u)m_\circ}{M_\circ}}\\&\simeq M_\circ\left(۱+\frac{\gamma(u)m_\circ}{M_\circ}\right)\\&\simeq[M_\circ+\gamma(u)m_\circ]\end{aligned} \tag{۴-۳۰۲}$$

که این مقدار جرم به دست آمده، درمقایسه با اندازهٔ جرم ذره مرکب در حالت غیر نسبیتی، یعنی $(M_\circ+m_\circ)$ بزرگتر است. اما مقدارجرم به دست آمده برای ذرهٔ مرکب کاملاً بدیهی است؛ زیرا می توانیم چارچوبی را در نظر بگیریم که در آن چارچوب، جرم بسیار بزرگتر $M_\circ$ ساکن باشد و ذرهٔ کوچکتر $m_\circ$ با سرعت $u$، یا به عبارت دیگر با انرژی کل $\gamma(u)m_\circ c^{۲}$، با آن برخورد کند. چون ذرهٔ $M_\circ$ بسیار بزرگتر از ذرهٔ $m_\circ$ می باشد، در

نتیجه بعد از برخورد ساکن باقی می ماند. و انرژی کل ذرهٔ فرودی، یعنی $\gamma(u)m_{\circ}c^{2}$ به طور کامل به جرم تبدیل می شود. بنابراین، در این چارچوب، انرژی سکون ذرهٔ مرکب ایجاد شده پس از برخورد، برابر $M_{\circ}c^{2} + \gamma(u)m_{\circ}c^{2}$ خواهد بود. درنتیجه، جرم آن برابر $M_{\circ} + \gamma(u)m_{\circ}$ به دست می آید. البته، این یک نتیجهٔ کلی است؛ زیرا هنگامی که یک ذرهٔ بسیار کوچک با یک ذرهٔ ساکن بسیار بزرگ برخورد می کند، با توجه قانون پایستگی تکانه، سرعت ذرات پس از برخورد، متناسب با $m_{\circ}/M_{\circ}$ (البته در حالت نسبیتی با افزودن یک ضریب $\gamma$) خواهد بود. بنابراین، انرژی جنبشی ذرهٔ ساکن با توجه سرعت بسیار کم آن، قابل اغماض خواهد بود.

اکنون می توان مقدار افزایش جرم، در این برخورد را نیز به صورت

$$\begin{aligned}\Delta m &= M' - (M_{\circ} + m_{\circ}) \\ &= [M_{\circ} + \gamma(u)m_{\circ}] - (M_{\circ} + m_{\circ}) \\ &= \gamma(u)m_{\circ} - m_{\circ} \\ &= m_{\circ}[\gamma(u) - 1]\end{aligned} \qquad (۴-۳۰۳)$$

به دست آورد.این مقدار افزایش جرم ناشی از تبدیل انرژی جنبشی به جرم می باشد.

## ۴ - ۱۲ : نیرو در نسبیت

در بخش ۴– ۳ – ۲ ، با قانون دوم نیوتن در نسبیت آشنا شدیم. اکنون دراین بخش، این قانون را مجدداً مورد بررسی قرار می دهیم. همان طور که می دانیم درمکانیک نیوتنی، با توجه به قانون دوم نیوتن، نیرویی که به یک ذره وارد می شود و شتاب ناشی از آن در یک راستا و هم جهت می باشند. اما در دینامیک نسبیتی، نیرو و شتاب درحالت کلی ممکن است دریک راستا نباشند و هم جهت نباشند. در اینجا، ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که در آن نیرو تنها دارای یک مؤلفه یا یک بعدی می باشد. سپس حالتی را بررسی می کنیم که درآن نیرو بیش از یک مؤلفه دارد.

### ۴ - ۱۲- ۱ : نیرو دریک بعد

دربخش ۴-۳ - ۲، قانون دوم نیوتن به شکل

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}[m_\circ \gamma(u) u] \qquad (۳۰۴-۴)$$

تعمیم داده شد. اکنون، می توان با توجه به رابطهٔ فوق، ارتباط بین شتاب و نیرو را به دست آورد. برای این منظور، رابطهٔ(۴-۳۰۴) را می توان به صورت

$$F = m_\circ [\gamma(u)\dot{u} + (\dot{\gamma}(u)u] \qquad (۳۰۵-۴)$$

نوشت. از طرف دیگر، $\dot{\gamma}(u)$ نیز برابر

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(u) &= \frac{d\gamma(u)}{dt} = \frac{u\dot{u}}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{c^2}\gamma^3(u) u a \end{aligned} \qquad (۳۰۶-۴)$$

می باشد. حال، با جایگذاری مقدار $\dot{\gamma}(u)$ در رابطهٔ (۴-۳۰۵)، می توان به نتیجهٔ

$$\begin{aligned} F &= m_\circ \dot{u}\gamma(u)[\gamma^2(u)\frac{u^2}{c^2} + 1] \\ &= \gamma^3(u) m_\circ a \end{aligned} \qquad (۳۰۷-۴)$$

رسید. بنابراین، ملاحظه می شود که درنسبیت رابطهٔ (۴-۳۰۷) برای نیرو در یک بعد، با رابطهٔ $F = m_\circ a$ درفیزیک نیوتنی تفاوت دارد.

اکنون، اگر کمیّت $dE/dx$ را نیزمحاسبه نماییم، دراین صورت می توان به دست آورد:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}(m_\circ \gamma(u) c^2) = \gamma^3(u) m_\circ u \frac{du}{dx} \qquad (۳۰۸-۴)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$u\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} = a \qquad (۳۰۹-۴)$$

در نتیجه، با درنظر گرفتن رابطهٔ (۴-۳۰۹)، می توان رابطهٔ (۴-۳۰۸) را به صورت

$$\frac{dE}{dx} = \gamma^3(u) m_\circ a \qquad (۳۱۰-۴)$$

نوشت. حال، با مقایسهٔ روابط (۴-۳۰۷) و (۴-۳۱۰)، خواهیم داشت:

$$\frac{dE}{dx} = F = \frac{dp}{dt} \qquad (۳۱۱-۴)$$

بنابراین، رابطهٔ $F = dp/dt$ و همچنین، $F = dE/dx$، دقیقاً مشابه روابط نیوتنی می باشند، بجز آنکه $p$ و $E$ در روابط فوق، کمیّت های تعمیم یافته هستند. ازطرف دیگر، رابطهٔ $F = dE/dx$ را می توان روش دیگری برای محاسبهٔ انرژی کل $E = m_\circ \gamma(u) c^۲$ در نظرگرفت. برای نشان دادن این موضوع فرض کنید که نیروی $F = dE/dx$ به ذره ای اعمال شود. دراین صورت کار انجام شده به وسیلهٔ این نیرو روی ذره، برابر

$$\begin{aligned} w_{۱\to۲} &= \int_{x_۱}^{x_۲} F dx = \int_{x_۱}^{x_۲} \gamma^۳ (u) m_\circ a dx \\ &= \int_{x_۱}^{x_۲} \gamma^۳ (u) m_\circ [u \frac{du}{dx}] dx \\ &= \int_{u_۱}^{u_۲} \gamma^۳ (u) m_\circ u du \\ &= m_\circ c^۲ \gamma(u) \Big|_{u_۱}^{u_۲} \end{aligned} \qquad (۳۱۲\text{-}۴)$$

خواهد بود. حال، می توان انرژی پتانسیل را مشابه حالت کلاسیک، به صورت

$$V(x) = -\int_{x_\circ}^{x} F(x) dx \qquad (۳۱۳\text{-}۴)$$

تعریف نمود. دررابطهٔ فوق، $x_\circ$ یک نقطهٔ مرجع دلخواه می باشد. در نتیجه با توجه به روابط (۴-۳۱۲) و (۴-۳۱۳) می توان رابطهٔ

$$V(x_۱) + m_\circ c^۲ \gamma(u)\Big|_{u_۱} = V(x_۲) + m_\circ c^۲ \gamma(u)\Big|_{u_۲} \qquad (۳۱۴\text{-}۴)$$

را به دست آورد. رابطهٔ (۴-۳۱۴) نشان می دهد که کمیّت $V + m_\circ c^۲ \gamma(u)$، مستقل از $x$ بوده وچیزی جز مجموع انرژی کل ذره، یعنی $m_\circ \gamma(u) c^۲$ و یک جملهٔ اضافی و ثابت نیست. درحقیقت، می توان آن را مشابه کلاسیکی، کمیّت $V + k(u)$ که برابر مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی ذره است، در نظرگرفت.

## ۴ - ۱۲- ۲ : ارتباط بین نیرو و شتاب

اکنون، فرض کنید که نیرو دارای بیش از یک مؤلفه باشد. در این صورت، می توان نشان داد که نیرو و شتاب ممکن است در حالت کلی در یک راستا و هم جهت نباشند. هنگامی که نیرو بیش از یک مؤلفه داشته باشد، قانون دوم نیوتن را می توان به صورت برداری نوشت.

یعنی اگر ذره تحت تأثیر نیروی $\vec{F}$ قرارگیرد، معادلهٔ حرکت ذره با رابطهٔ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[\frac{m_\circ \vec{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}] \tag{۳۱۵-۴}$$
$$= \frac{d}{dt}[m_\circ \gamma(u)\vec{u}]$$

بیان می شود. درنتیجه، این رابطه را می توان به شکل

$$\vec{F} = m_o [\gamma(u)\frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\frac{d\gamma(u)}{dt}] \tag{۳۱۶-۴}$$

نوشت. اکنون، با جایگذاری مقدار $d\gamma(u)/dt$ از(۴-۳۰۶)، دررابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\vec{F} = m_\circ [\gamma(u)\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\vec{u}}{c^2}\gamma^3 (u) u\frac{du}{dt}] \tag{۳۱۷-۴}$$
$$= m_\circ \gamma(u)[\vec{a} + \frac{ua}{c^2}\gamma^2 (u)\vec{u}]$$

با محاسبهٔ شتاب ذره از رابطهٔ (۴-۳۱۷)، می توان به دست آورد:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_\circ \gamma(u)} - [\frac{ua}{c^2}\gamma^2 (u)]\vec{u} \tag{۳۱۸-۴}$$

بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۴-۳۱۸)، می توان دریافت که درنسبیت، درحالت کلی ممکن است نیرو و شتاب در یک راستا و هم جهت نباشند؛ زیرا جملهٔ دوم دررابطهٔ فوق درجهت سرعت $\vec{u}$ می باشد. حال، باتوجه به رابطهٔ(۴-۳۱۸)، می توانیم دوحالت خاص را نیز مورد بررسی قرار دهیم.

**حالت اول :** دراین حالت فرض می کنیم که ذره روی یک مسیرمستقیم حرکت کند. دراین صورت سرعت، شتاب و نیروی وارد بر ذره دریک راستا خواهند بود. بنابراین، با توجه به رابطهٔ (۴-۳۱۷)، داریم:

$$F = m_\circ \gamma(u)[1 + \frac{u^2}{c^2}\gamma^2 (u)]a$$
$$= m_\circ [\gamma(u) + \frac{u^2}{c^2}\gamma^3 (u)]a \tag{۳۱۹-۴}$$
$$= \frac{m_\circ a}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$F = m_\circ \gamma^{۳} (u) a \tag{۴-۳۲۰}$$

حال، می توان این رابطه را به صورت

$$F_t = m_t a_t \tag{۴-۳۲۱}$$

نوشت. در رابطهٔ فوق $m_t$ ، **جرم طولی**[1] نامیده می شود و به شکل $m_t = m_\circ \gamma^{۳} (u)$ تعریف می گردد. مثالی که می توان دراین مورد مطرح کرد، حرکت یک ذرهٔ باردار در داخل میدان الکتریکی یکنواخت می باشد. در این حالت سرعت، شتاب و نیرویی که از طرف میدان الکتریکی به ذرهٔ باردار وارد می شود، در یک راستا قرار می گیرند.

**حالت دوم :** اکنون، فرض کنید که سرعت ذره عمود بر شتاب و نیروی وارد برذره باشد. به عنوان مثال، مانند حرکت دایره ای یکنواخت که درآن نیرو و شتاب ذره با هم موازی بوده و هردو عمود برسرعت ذره می باشند. در این حالت، اگرطرفین رابطهٔ (۴-۳۱۸) را در $\vec{a}$ ضرب داخلی نماییم، در این صورت، می توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} F_n &= m_\circ \gamma(u) a \\ &= m_n a_n \end{aligned} \tag{۴-۳۲۲}$$

در رابطهٔ فوق $m_n$ را برابر $m_\circ \gamma(u)$، در نظرگرفته و آن را **جرم عرضی**[2] ذره می نامیم. حرکت یک ذرهٔ باردار درداخل میدان مغناطیسی یکنوخت را می توان به عنوان یک مثال برای این حالت در نظرگرفت.

**مثال ٤ – ١٦ : نوسانگر هماهنگ نسبیتی**

فرض کنید که ذره ای با جرم سکون $m_\circ$ در امتداد محور $x$، تحت تأثیر نیروی باز گردانندهٔ $F = -m_\circ \omega^{۲} x$ قرار دارد. اگر دامنهٔ حرکت ذره برابر $b$ باشد، در این صورت، نشان دهید که زمان تناوب این نوسانگر از رابطهٔ

$$T = \frac{۴}{c} \int_\circ^b \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^{۲} - ۱}} dx \tag{۴-۳۲۳}$$

1- Longitudinal mass 2- Transverse mass

به دست می آید که درآن $\gamma = ۱ + (\omega^۲/۲c^۲)(b^۲ - x^۲)$ می باشد.

**جواب:** با توجه به تعریف نیرو، یعنی رابطهٔ(۴-۲۹)، معادلهٔ حرکت ذره را می توان با رابطهٔ

$$\frac{d}{dt}[m_\circ \gamma(u) u] = -m_\circ \omega^۲ x \qquad (۴\text{-}۳۲۴)$$

بیان کرد. حال، با درنظرگرفتن رابطهٔ (۴-۳۰۷)، می توان این معادله را به صورت

$$\gamma^۳ (u) \frac{du}{dt} = -\omega^۲ x \qquad (۴\text{-}۳۲۵)$$

نوشت. اکنون، برای حل این معادلهٔ دیفرانسیل، می توان طرفین این رابطه را در $u = \dot{x}$ ضرب کرد. همچنین، اگر از رابطهٔ (۴-۳۰۶) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$c^۲ \dot{\gamma} = -\omega^۲ x \dot{x} \qquad (۴\text{-}۳۲۶)$$

یا

$$\frac{d}{dt}\gamma(u) = -\frac{\omega^۲}{c^۲} x \frac{dx}{dt} \qquad (۴\text{-}۳۲۷)$$

حال، با انتگرال گیری از طرفین این رابطه می توان به دست آورد:

$$\gamma(u) = -\frac{۱}{۲c^۲}\omega^۲ x^۲ + k \qquad (۴\text{-}۳۲۸)$$

اکنون، برای به دست آوردن ثابت انتگرال گیری، می توان از شرایط اولیه استفاده کرد. برای این منظور می دانیم که سرعت ذره در انتهای مسیر آن برابرصفر است. در نتیجه، در $x = b$، $\gamma(\circ) = ۱$ خواهد بود. بنابراین، ثابت انتگرالگیری $k$، برابر

$$k = \frac{۱}{۲c^۲}\omega^۲ b^۲ + ۱ \qquad (۴\text{-}۳۲۹)$$

خواهد بود. حال، با قراردادن مقدار $k$ در رابطهٔ (۴-۳۲۸)، می توان نوشت:

$$\gamma(u) = ۱ + \frac{\omega^۲}{۲c^۲}(b^۲ - x^۲) \qquad (۴\text{-}۳۳۰)$$

از طرف دیگر، می دانیم که زمان تناوب یک نوسانگر با رابطهٔ

$$T = ۴\int_\circ^b \frac{dx}{u} \qquad (۴\text{-}۳۳۱)$$

تعریف می شود. همچنین، با توجه به ضریب $\gamma(u)$، می توان سرعت $u$ را از این رابطه به صورت $u = \frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^۲ - ۱}$ دست آورد. درنتیجه با جایگذاری مقدار $u$ در رابطهٔ (۴-۳۳۱)، زمان تناوب این نوسانگر را می توان به صورت:

$$T = \frac{۴}{c}\int_{۰}^{b} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^{۲}-۱}}\,dx \qquad (۴\text{-}۳۳۲)$$

به دست آورد.

## ۴ - ۱۳ : تبدیلات لورنتس نیرو

بعد از تعریف کمیّت نیرو درنسبیت، اکنون می توان تبدیلات لورنتس آن را نیز به دست آورد. برای این منظور، فرض کنیدکه درچارچوب $S'$، ذره ای به جرم $m'$، دارای سرعت $\vec{u}'$ باشد. حال، اگر نیروی $\vec{F}'$ به آن اعمال گردد، سرعت و درنتیجه جرم آن تغییر می کند. از طرف دیگر، می دانیم که نیرو در دو چارچوب $S$ و $S'$ به ترتیب با روابط

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[m(u)\vec{u}] \qquad (۴\text{-}۳۳۳)$$

و

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{d}{dt'}[m'(u')\vec{u}'] \qquad (۴\text{-}۳۳۴)$$

بیان می شوند. بنابراین، مؤلفه های نیرو را در این دو چارچوب می توان به ترتیب به صورت

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}[m(u)u_i] \quad , \quad i = ۱,۲,۳ \qquad (۴\text{-}۳۳۵)$$

و

$$F_i' = \frac{dp_i'}{dt'} = \frac{d}{dt'}[m'(u')u_i'] \quad , \quad i = ۱,۲,۳ \qquad (۴\text{-}۳۳۶)$$

بیان کرد. دراینجا ابتدا تبدیل لورنتس مؤلفهٔ $x$ نیرو را به دست می آوریم. برای این منظور، با توجه به رابطهٔ(۴-۳۳۶)، مؤلفهٔ $x'$ نیرو درچارچوب $S'$ با رابطهٔ

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'} = \frac{d}{dt'}[m'(u')u_x'] \qquad (۴\text{-}۳۳۷)$$

داده می شود. ازطرف دیگر، از رابطهٔ (۴-۱۴)داریم:

$$m'(u') = \gamma(v)m(u)[۱-\frac{v}{c^{۲}}u_x] \qquad (۴\text{-}۳۳۸)$$

حال، با ضرب طرفین این رابطه در $u_x'$، خواهیم داشت:

$$m'u_x' = \gamma(v)m(u)[۱-\frac{v}{c^{۲}}u_x]u_x' \qquad (۴\text{-}۳۳۹)$$

همچنین، اگرمقدار $u'_x$ را با استفاده از تبدیل لورنتس سرعت، به دست آورده و در رابطهٔ (۴-۳۳۹) جایگذاری نماییم، در این صورت می توان به دست آورد:

$$m'u'_x = \gamma(v)m(u)(1-vu_x/c^2)[\frac{u_x - v}{1-vu_x/c^2}] \qquad (۴-۳۴۰)$$
$$= \gamma(v)m(u)(u_x - v)$$

درنتیجه، با درنظرگرفتن مقدار $m'u'_x$، می توان رابطهٔ (۴-۳۳۷) را به شکل

$$F'_x = \frac{d}{dt'}[m'(u')u'_x]$$
$$= \gamma(v)\frac{d}{dt'}[m(u)(u_x - v)] \qquad (۴-۳۴۱)$$
$$= \gamma(v)\frac{d}{dt'}[m(u)u_x - m(u)v]$$

نوشت. همچنین، می دانیم

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt} \qquad (۴-۳۴۲)$$

است. بنابراین، داریم:

$$F'_x = \gamma(v)\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}[m(u)u_x - m(u)v]$$
$$= \gamma(v)\frac{dt}{dt'}\left(\frac{d}{dt}[m(u)u_x] - v\frac{dm(u)}{dt}\right) \qquad (۴-۳۴۳)$$
$$= \gamma(v)\frac{dt}{dt'}[F_x - v\frac{dm(u)}{dt}]$$

اکنون، باید مقادیر $dt/dt'$ و $dm/dt$ را محاسبه کرده و در رابطهٔ(۴-۳۴۳)، جایگذاری نماییم. برای محاسبهٔ $dt/dt'$، می توان از رابطهٔ

$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial t}dt + \frac{\partial t'}{\partial x}dx \qquad (۴-۳۴۴)$$

استفاده کرد. برای این منظور، با توجه به تبدیل لورنتس $t' = \gamma(v)[t - vx/c^2]$ و رابطهٔ (۴-۳۴۴)، می توان نوشت:

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma(v)[1 - \frac{v}{c^2}u_x] \qquad (۴-۳۴۵)$$

که در نتیجه $dt/dt'$، برابر

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{۱}{\gamma(v)[۱ - \frac{v}{c^۲} u_x]} \qquad (۳۴۶-۴)$$

به دست می آید. برای محاسبهٔ $dm/dt$ نیز می توان از طرفین رابطهٔ $E = mc^۲$ نسبت به زمان مشتق گرفت. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{dE}{dt} = c^۲ \frac{dm}{dt} \qquad (۳۴۷-۴)$$

حال، می توان به جای $dE/dt$ مقدارش را از رابطهٔ(۴-۴۱) جایگذاری کرد. درنتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{۱}{c^۲}\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{u} = \frac{۱}{c^۲}\vec{F}\cdot\vec{u} \\ &= \frac{۱}{c^۲}[F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z] \end{aligned} \qquad (۳۴۸-۴)$$

درنهایت، می توان با جایگذاری مقدار $dt/dt'$ و $dm/dt$ از روابط (۴-۳۴۶) و (۴-۳۴۸) در(۴-۳۴۳)، تبدیل لورنتس مؤلفهٔ $x$ نیرو را بین دو چارچوب $S$و $S'$ به صورت

$$F_x' = F_x - \frac{vu_y}{(c^۲ - vu_x)}F_y - \frac{vu_z}{(c^۲ - vu_x)}F_z \qquad (۳۴۹-۴)$$

به دست آورد. حال، به همین ترتیب، می توان تبدیلات لورنتس را برای مؤلفه های $y$ و $z$ نیرو نیز به دست آورد که نتیجهٔ این محاسبات به صورت زیر خواهد بود.

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(v)[۱ - vu_x/c^۲]} \qquad (۳۵۰-۴)$$

و

$$F_z' = \frac{F_z}{\gamma(v)[۱ - vu_x/c^۲]} \qquad (۳۵۱-۴)$$

همچنین، تبدیلات وارون نیرو را نیز می توان با تعویض جای پریمها و تبدیل $v$ به $-v$، به دست آورد. ، تبدیلات وارون نیرو با روابط زیر بیان می شوند.

$$F_x = F_x' + \frac{vu_y'}{(c^۲ + vu_x')}F_y' + \frac{vu_z'}{(c^۲ + vu_x{}')}F_z' \qquad (۳۵۲-۴)$$

و

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma(v)[۱ + vu_x'/c^۲]} \qquad (۳۵۳-۴)$$

$$F_z = \frac{F'_z}{\gamma(v)[1 + vu'_x/c^2]} \qquad (۳۵۴-۴)$$

## ۴ - ۱۴ : تبدیل نیروهای ویژه

بعد ازاستخراج روابط تبدیلی برای نیرو بین دو چارچوب لخت $S$ و $S'$، اکنون، می توان حالتی را در نظر گرفت که درآن، ذره درچارچوب $S'$ درحالت سکون لحظه ای باشد. در این صورت، به نیرویی که در این لحظه به ذرهٔ ساکن در $S'$ وارد می شود، *نیروی ویژه*[1] گفته می شود. بنابراین، با توجه به روابط تبدیلی نیرو، اگر درچارچوب $S'$، سرعت ذره، یعنی $\vec{u}'$ برابرصفر باشد، در این حالت نیروی $\vec{F}'$ را نیروی ویژه می نامند. روابط تبدیلی برای مؤلفه های نیروی ویژه با توجه به روابط (۴-۳۵۲) تا (۴-۳۵۴) به صورت

$$F_x = F'_x \qquad (۳۵۵-۴)$$

و

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma(v)} \quad , \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma(v)} \qquad (۳۵۶-۴)$$

خواهند بود. این روابط با قرار دادن $\vec{u}' = 0$ در روابط (۴-۳۵۲) تا (۴-۳۵۴) به دست می آیند. بنابراین، با توجه به این تبدیلات، مؤلفهٔ $x$ نیرو یا مؤلفهٔ نیرو در راستای موازی سرعت نسبی دو چارچوب، بدون تغییر باقی می ماند و تنها مؤلفه های $y$ و $z$ نیرو یا مؤلفه های عمود برسرعت نسبی نیرو تغییر می کنند که تبدیلات این مؤلفه ها نیز با روابط(۴-۳۵۶) بیان می گردند.

## ۴ - ۱۵ : سیستمهای با جرم متغیر

تاکنون، حرکت ذراتی را مورد بررسی قراردادیم که جرم آنها تنها وابسته به سرعت بودند. اما تغییرجرم ممکن است براثر برخورد یا برهم کنش ذرات با یکدیگر نیز به وجود آیدکه دراین حالت، جرم ذرات پس از برخورد، معمولاً کمتر از جرم آنها قبل از برخورد می باشد. دراین بخش، حالتی در نظرگرفته می شود که درآن جرم یک سیستم به طور پیوسته تغییر

---

1- Proper force

می کند واین تغییرجرم، درواقع، ممکن است ناشی از ورود پیوستهٔ جرم به سیستم یا همین طور، بر اثر از خروج جرم ازآن می باشد.

یکی از مواردی که معمولاً برای بررسی سیستم های با جرم متغییر مورد مطالعه قرار می گیرد، حرکت موشک می باشد. درمسألهٔ موشک، درحقیقت ما با وضعیتی روبرو هستیم که براثر تبدیل جرم (سوخت) به انرژی( گاز)، از جرم کل موشک به عنوان یک سیستم، کاسته می شود. همچنین، مورد دیگری را که می توان به عنوان یک سیستم با جرم متغییر مطرح نمود، عبارت است از واگن رو بازی است که جرم (مثلاً شن) با آهنگ ثابتی به آن افزوده می شود. یا برعکس واگنی که دانه های شن با آهنگ ثابتی از آن به بیرون می ریزد.

بنابراین، دراینجا موشکی را که با سرعت نسبیتی حرکت می کند، به عنوان یک سیستم با جرم متغیر مورد بررسی قرار می گیرد. همچنین، در این بررسی فرض می کنیم که نیرویی از خارج به موشک یا سیستم وارد نمی شود. درموشک نسبیتی، جرم یا سوخت آن با آهنگ ثابتی به گاز تبدیل شده و از قسمت انتهایی موشک با سرعت $u$ نسبت به موشک خارج می گردد. همچنین، اگر فرض کنیم که جرم لحظه ای موشک برابر $m$ بوده و موشک با سرعت لحظه ای $v$ نسبت به چارچوب متصل به زمین یا $S$، درحرکت باشد، در این حالت می خواهیم نشان دهیم که رابطهٔ بین سرعت و جرم لحظه ای موشک به صورت

$$\frac{dm}{m}+\frac{1}{u}\frac{dv}{(1-v^2/c^2)}=0 \qquad (۳۵۷-۴)$$

می باشد. از طرف دیگر، در رابطهٔ(۴-۳۵۷)، جرم از طریق وابستگی سرعت به زمان؛ به زمان وابسته می باشد. همچنین می توان نشان داد که اگر جرم اولیهٔ موشک، یعنی هنگامی که سرعت آن برابرصفر است برابر $M_0$ باشد. در این صورت، جرم لحظه ای موشک از رابطهٔ

$$m=M_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{c}{2u}} \qquad (۳۵۸-۴)$$

به دست می آید. حال، برای به دست آوردن این روابط، می توان از قوانین پایستگی تکانه، انرژی و همین طور ازقانون دوم نیوتن درنسبیت استفاده کرد. درادامه، مسأله موشک نسبیتی را با در نظرگرفتن این قوانین به دو روش مورد بررسی قرار می دهیم.

### روش اول :

دراین روش، از پایستگی تکانه درچارچوب متصل به زمین یا $S$ استفاده می شود. برای این منظور، ابتدا تبدیل مقدار $dm$ ازجرم سوخت موشک را به گاز، بر اثر احتراق آن بررسی می کنیم.

بنابراین، اگر فرض کنیم که مقداری به اندازهٔ $dm$ از جرم سوخت موشک، به گاز تبدیل شود، دراین صورت، جرم موشک از مقدار $m$ به $m + dm$ تغییر می یابد. درواقع، در اینجا المان جرم $dm$، مقداری منفی در نظرگرفته شده است. درنتیجه، درچارچوب سکون موشک، یعنی $S'$، انرژی کل گازهای خارج شده از قسمت انتهایی موشک، براثر این تبدیل، برابر $E_{S'} = (-dm)c^۲$ خواهد بود. همچنین، اگر سرعت خروج گاز نسبت به موشک یا چارچوب $S'$، برابر $u$ در نظرگرفته شود، در این حالت، تکانهٔ گازهای خروجی حاصل از تبدیل سوخت به اندازهٔ $dm$ به گاز، برابر $p_{S'} = (dm)u$ به دست می آیدکه البته مقداری منفی است. اکنون، فرض می کنیم که سرعت لحظه ای موشک نسبت به ناظر ساکن روی زمین یا $S$، برابر $v$ باشد. در این صورت، می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس، تکانهٔ گازهای خارج شده از موشک را نسبت به چارچوب $S$ به دست آورد. درنتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} p_S &= \gamma(v)[p_{S'} + \frac{v}{c^۲}E_{S'}] \\ &= \gamma(v)[(dm)u + \frac{v}{c^۲}(-dmc^۲)] \\ &= \gamma(v)(u-v)dm \end{aligned} \qquad (۳۵۹-۴)$$

که مقدار به دست آمده برای $p_S$ نیز مقداری منفی است.

اکنون، می توان پایستگی تکانه را در چارچوب $S$ نیز به دست آورد. بنابراین، تکانهٔ موشک، قبل از تبدیل مقدار $dm$ ازجرم سوخت به گاز، برابر $p_i = m\gamma(v)v$ می باشد. همچنین، تکانهٔ کل بعد از این تبدیل، برابرتکانهٔ جرم $dm$ تبدیل شده به گاز، به علاوهٔ تکانهٔ جدید موشک، یعنی $p_f$. زیرا جرم و سرعت موشک، براثر تبدیل جرم $dm$ به گاز تغییر می کند. درنتیجه، با توجه به رابطهٔ (۴-۳۵۹)، می توان نوشت:

$$p_i = \gamma(v)(u-v)dm + p_f \qquad (۳۶۰\text{-}۴)$$

یا

$$[m\gamma(v)v]_i = \gamma(v)(u-v)dm + [m\gamma(v)v]_f \qquad (۳۶۱\text{-}۴)$$

از طرف دیگر، رابطهٔ (۴-۳۶۱) را می توان به صورت

$$\gamma(v)(u-v)dm + [m\gamma(v)v]_f - [m\gamma(v)v]_i = 0 \qquad (۳۶۲\text{-}۴)$$

یا به شکل

$$\gamma(v)(u-v)dm + d[m\gamma(v)v] = 0 \qquad (۳۶۳\text{-}۴)$$

نیز نوشت. حال، باید مقدار $d[m\gamma(v)v]$ را در رابطهٔ (۴-۳۶۳) محاسبه نماییم. دراین صورت، می توان به دست آورد

$$\begin{aligned} d[m\gamma(v)v] &= dm[\gamma(v)v] + d\gamma(v)[mv] + m\gamma(v)[dv] \\ &= dm[\gamma(v)v] + m[\frac{1}{c^2}\gamma^3(v)v(dv)]v + m\gamma(v)[dv] \\ &= dm[\gamma(v)v] + m\gamma(v)[\frac{1}{c^2}\gamma^2(v)v^2 + 1]dv \\ &= dm[\gamma(v)v] + m\gamma^3(v)dv \end{aligned} \qquad (۳۶۴\text{-}۴)$$

در رابطهٔ فوق از $d\gamma = \gamma^3 v dv/c^2$ که قبلاً در رابطهٔ(۴-۳۰۶) به دست آمده است، استفاده شده است. اکنون، با جایگذاری مقدار رابطهٔ (۴-۳۶۴) در(۴-۳۶۳)، خواهیم داشت:

$$\gamma(v)(u-v)dm + dm[\gamma(v)v] + m\gamma^3(v)dv = 0 \qquad (۳۶۵\text{-}۴)$$

که با ساده کردن آن می توان رابطهٔ

$$u\gamma(v)dm + m\gamma^3(v)dv = 0 \qquad (۳۶۶\text{-}۴)$$

را به دست آورد. بنابراین، می توان از رابطهٔ فوق به نتیجهٔ

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\frac{dv}{(1-v^2/c^2)} \qquad (۳۶۷\text{-}۴)$$

رسید که همان رابطهٔ (۴-۳۵۷) می باشد.

همچنین، برای به دست آوردن رابطهٔ(۴-۳۵۷)، می توان از طرفین رابطهٔ (۴-۳۶۷) انتگرال گرفت. بنابراین، داریم:

$$\int_{M_0}^{m}\frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\int_0^v \frac{dv}{(1-v^2/c^2)} \qquad (۳۶۸\text{-}۴)$$

یا

$$ln\frac{m}{M_\circ}=-\frac{۱}{u}\int_\circ^v\frac{dv}{(۱-v^۲/c^۲)} \tag{۴-۳۶۹}$$

حال برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست رابطهٔ (۴-۳۶۹)، می توان به صورت زیر عمل کرد

$$\int_\circ^v\frac{dv}{(۱-v^۲/c^۲)}=\frac{۱}{۲}\int_\circ^v[\frac{۱}{۱+\beta}+\frac{۱}{۱-\beta}]dv$$

$$=\frac{c}{۲}[ln(۱+\beta)-ln(۱-\beta)]\Big|_\circ^v \tag{۴-۳۷۰}$$

$$=\frac{c}{۲}ln\frac{(۱+\beta)}{(۱-\beta)}$$

که در آن $\beta=v/c$ می باشد. اکنون، می توان با جایگذاری جواب انتگرال از رابطهٔ (۴-۳۷۰) در رابطهٔ (۴-۳۶۹)، به دست آورد

$$ln\frac{m}{M_\circ}=-\frac{c}{۲u}ln\frac{(۱+\beta)}{(۱-\beta)} \tag{۴-۳۷۱}$$

که در نهایت با محاسبهٔ جرم موشک از رابطهٔ (۴-۳۷۱)، برحسب سرعت آن به نتیجهٔ

$$m=M_\circ\left(\frac{۱-\beta}{۱+\beta}\right)^{\frac{c}{۲u}} \tag{۴-۳۷۲}$$

می رسیم که در واقع، همان رابطهٔ (۴-۳۵۸) می باشد.

از طرف دیگر، با داشتن جرم موشک می توان انرژی کل موشک را نسبت به چارچوب $S$ نیز به دست آورد که نتیجه، برابر

$$E=m\gamma(v)c^۲$$
$$=M_\circ c^۲\gamma(v)\left(\frac{۱-\beta}{۱+\beta}\right)^{\frac{c}{۲u}} \tag{۴-۳۷۳}$$

خواهد بود. حال، برای محاسبهٔ سرعت موشک نسبت به چارچوب $S$، می توان از رابطهٔ (۴-۳۲۰) استفاده کرد. دراین صورت، رابطهٔ (۴-۳۷۲) را می توان به صورت

$$\frac{۱-\beta}{۱+\beta}=(\frac{m}{M_\circ})^{\frac{۲u}{c}} \tag{۴-۳۷۴}$$

نوشت. درنتیجه، از رابطهٔ (۴-۳۷۴)، سرعت موشک به شکل

$$v = c\frac{\left[1-(m/M_0)^{2u/c}\right]}{\left[1+(m/M_0)^{2u/c}\right]} \tag{۳۷۵-۴}$$

به دست می آید.

## روش دوم :

این روش مبتنی بر رابطهٔ نیرو، یعنی $F = dp/dt$ می باشد. بنابراین، فرض کنید که $t'$ نمایش زمان درچارچوب سکون موشک، یعنی $S'$ باشد. دراین صورت، در چارچوب $S'$، کمیّت $dm/dt'$ بیانگرآهنگ کاهش جرم( سوخت) موشک و تبدیل آن به گاز خواهد بود که $dm$ مانند قبل مقداری منفی درنظرگرفته می شود. در نتیجه، آهنگ تغییرتکانهٔ گازهای خروجی، برابر $dp/dt = udm/dt'$ می باشد. از طرف دیگر، می دانیم که نیرو معادل آهنگ تغییر تکانه می باشد. بنابراین، درچارچوب سکون موشک، نیرویی برابر $F'_{r\to g} = udm/dt'$، گازهای حاصل از احتراق سوخت موشک را به سمت عقب می راند. همچنین، با توجه به قانون سوم نیوتن، نیرویی معادل همین مقدار، اما درخلاف جهت آن، یعنی $F'_{g\to r} = -udm/dt'$ موشک را به جلو می راند.

اما نکته ای که در اینجا لازم است یادآوری شود، این است که در این مسأله می توان از قانون سوم نیوتن استفاده کرد؛ زیرا همان طور که قبلاً درمورد این قانون درنسبیت اشاره شد، دو نیروی کنش و واکنش به عنوان دو رویداد، درچارچوب $S'$، دریک مکان و همزمان روی می دهند. بنابراین، همزمانی این دو رویداد درچارچوبهای دیگر نیز تضمین می شود.

اکنون، وضعیت را درچارچوب متصل به زمین، یعنی $S$ مورد بررسی قرار می دهیم. از تبدیلات لورنتس، برای نیروی ویژه، یعنی رابطهٔ(۴-۳۵۵)، می دانیم که مؤلفهٔ $x$ یا موازی سرعت نسبی، درهردو چارچوب برابر می باشند. درواقع، در اینجا نیرویی که از طرف گازهای خروجی به موشک وارد می شود، نیروی ویژه می باشد؛ زیرا این نیرو درچارچوب سکون موشک، یعنی $S'$، اندازه گرفته می شود. بنابراین، نیروی $F'_{g\to r} = -udm/dt'$ که از طرف گازهای خروجی به موشک ( که در $S'$ درحال سکون لحظه ای است) وارد می شود، نیروی ویژه خواهد بود. درنهایت اینکه نیروی $F'_{g\to r} = -udm/dt'$ درهر دو چارچوب $S$

و $S'$ یکسان می باشند.

ازطرف دیگر می دانیم که ارتباط زمان اندازه گیری شده در دو چارچوب، با رابطهٔ اتساع زمان، یعنی $t = \gamma(v)t'$ داده می شود؛ زیرا خروج گازها درچارچوب $S'$، دریک مکان روی می دهند. رابطهٔ اتساع زمان نشان می دهد که درچارچوب $S$،گازهای حاصل از سوخت موشک، با آهنگ کندتری از قسمت انتهایی موشک خارج می گرد. بنابراین، داریم

$$F_{g\to r} = F'_{g\to r} = -u\gamma(v)\frac{dm}{dt} \tag{۳۷۶-۴}$$

همچنین، می توان از ابتدا نیرویی را که از طرف گازهای خروجی به موشک وارد می شود، مستقیماً درچارچوب $S$ محاسبه کرد. برای این منظور، کافی است که تغییر تکانهٔ مقدارجرم $-dm$ از سوخت موشک را محاسبه نماییم. در نتیجه، فرض می کنیم که جرمی به اندازهٔ $-dm$، از سوخت موشک به گاز تبدیل شده باشد. تکانهٔ اولیهٔ این جرم برابر $p_i = -dm\gamma(v)v$ می باشد؛ زیرا جرم $-dm$ قبل از تبدیل به گاز با سرعت $v$ (سرعت موشک) حرکت می کند. این مقدار جرم پس از احتراق، به گاز تبدیل شده و از انتهای موشک خارج می گردد. وتکانهٔ آن پس از تبدیل شدن به گاز، با توجه به رابطهٔ (۴-۳۵۹) برابر $p_f = \gamma(v)[u-v]dm$ خواهد بود. اکنون، می توان تغییر تکانه را برای جرم $-dm$ محاسبه کرد. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_f - p_i \\ &= \gamma(v)[u-v]dm - [-dm\gamma(v)v] \\ &= u\gamma(v)dm - v\gamma(v)dm + v\gamma(v)dm \\ &= u\gamma(v)dm\end{aligned} \tag{۳۷۷-۴}$$

بنابراین، نیرویی به اندازهٔ

$$F_{r\to g} = \frac{dp}{dt} = u\gamma(v)\frac{dm}{dt} \tag{۳۷۸-۴}$$

از طرف موشک به گازهای خروجی وارد می گردد که در این حالت، براساس قانون سوم نیوتن، نیرویی برابر $F_{g\to r} = -F_{r\to g}$، از طرف گازهای خروجی به موشک وارد می شود. حال، با درنظر گرفتن رابطهٔ (۴-۳۷۸)، این نیرو برابر

$$F_{g\to r} = -u\gamma(v)\frac{dm}{dt} \tag{۳۷۹-۴}$$

خواهد بود که درواقع، برابرهمان نیرویی است که با رابطهٔ (۴-۳۷۶) داده شده است. اکنون، می توان ادامهٔ مسأله را با توجه به رابطهٔ (۴-۳۷۶) یا (۴-۳۷۹) ادامه داد.از طرف دیگر، می توان آهنگ تغییرتکانهٔ موشک را نیزمحاسبه کرد. درنتیجه، داریم:

$$\begin{aligned} F_{g\to r} &= \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}[m\gamma(v)v] \\ &= [m\dot{\gamma}(v)v + m\gamma(v)\dot{v}] + \gamma(v)v\dot{m} \\ &= m[(\frac{۱}{c^۲}\gamma^۳(v)v\dot{v})v + \gamma(v)\dot{v}] \\ &= m\gamma(v)\dot{v}[(\frac{۱}{c^۲}\gamma^۲(v)v^۲ + ۱] \end{aligned} \tag{۳۸۰-۴}$$

یا

$$F_{g\to r} = m\gamma^۳(v)\dot{v} \tag{۳۸۱-۴}$$

جرم $m$ در رابطهٔ (۴-۳۸۰)، جرم لحظه ای موشک بوده و نیروی $F_{g\to r}$، درهرلحظه به آن وارد می شود، بنابراین، $\dot{m} = dm/dt$ برابر صفر خواهد بود. حال، با توجه به روابط (۴-۳۷۹) و (۴-۳۸۱)، داریم:

$$-u\gamma(v)\frac{dm}{dt} = m\gamma^۳(v)\frac{dv}{dt} \tag{۳۸۲-۴}$$

یا

$$\frac{dm}{m} = -\frac{۱}{u}\frac{dv}{۱-(v^۲/c^۲)} \tag{۳۸۳-۴}$$

که همان رابطهٔ (۴-۳۶۷) می باشد. حال ادامهٔ راه حل مانند روش قبل خواهد بود.

## موشک نسبیتی به صورتی دیگر

اکنون می توان حالتی را درنظر گرفت که در آن جرم سوخت به جای تبدیل شدن به گاز، مستقیماً به انرژی یا فوتون تبدیل شده واز قسمت انتهای آن خارج می گردد. دراین صورت، سرعت فوتونهای خروجی از موشک، یعنی $u$ برابر $c$ خواهد بود. درنتیجه، رابطهٔ (۴-۳۷۲) به

$$m = M_\circ\left(\frac{۱-\beta}{۱+\beta}\right)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۳۸۴-۴}$$

تبدیل می شود. وانرژی کل موشک نیز در این حالت، با توجه به رابطهٔ ((۴-۳۷۳)، از روابط

$$
\begin{aligned}
E &= m\gamma(v)c^{۲} \\
&= M_{\circ}c^{۲}\gamma(v)\left(\frac{۱-\beta}{۱+\beta}\right)^{\frac{۱}{۲}}
\end{aligned}
\tag{۳۸۵-۴}
$$

یا

$$E = \frac{M_{\circ}c^{۲}}{۱+\beta} \tag{۳۸۶-۴}$$

به دست می آید. دراین حالت، سرعت موشک نیزبا درنظرگرفتن (۴-۳۷۵) می توان از رابطهٔ

$$v = c\frac{[۱-\sqrt{(m/M_{\circ})}]}{[۱+\sqrt{(m/M_{\circ})}]} \tag{۳۸۷-۴}$$

به دست آورد.

اما نکته ای که در اینجا می توان به آن اشاره نمود، این است که تاکنون ارتباط بین جرم و سرعت موشک را به دست آورده ایم که این ارتباط با رابطهٔ (۴-۳۷۲) یا(۴-۳۷۵) بیان می شود. حال،با توجه به این دو رابطه، جرم یا سرعت موشک مستقل از آهنگ تبدیل سوخت به گاز یا انرژی (فوتون) می باشد.

اکنون می خواهیم با توجه به شرط اخیر، یعنی تبدیل مستقیم سوخت به فوتون یا انرژی، ارتباط بین سرعت موشک و زمان را درچارچوب $S$ به دست آوریم. برای این منظور فرض کنید که آهنگ تبدیل سوخت به فوتون (انرژی ) درچارچوب سکون موشک، یعنی $S'$، برابر $\eta' = -dm/dt'$ باشد. درنتیجه، با توجه به رابطهٔ اتساع زمان، یعنی $dt = \gamma(v)dt'$، آهنگ تبدیل سوخت به فوتون، درچارچوب $S$ برابر

$$\eta = -\gamma(v)\frac{dm}{dt} \tag{۳۸۸-۴}$$

خواهد بود. اکنون، با مشتقگیری از رابطهٔ (۴-۳۸۴)، می توان به دست آورد:

$$dm = -\frac{۱}{c}\frac{M_{\circ}dv}{(۱+\beta)\sqrt{۱-\beta^{۲}}} \tag{۳۸۹-۴}$$

همچنین، اگر $dm$ را از رابطهٔ (۴-۳۳۶) به دست آورده و مقدار آن را در رابطهٔ (۴-۳۸۹) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{c\eta dt}{M_0} = \frac{\gamma(v)dv}{(1+\beta)\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (۴-۳۹۰)$$

یا

$$\frac{c\eta dt}{M_0} = \frac{dv}{(1+\beta)(1-\beta^2)} \qquad (۴-۳۹۱)$$

حال، با انتگرال گیری از طرفین رابطهٔ (۴-۳۹۱)، می توان رابطهٔ

$$\frac{c\eta}{M_0}\int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{(1+\beta)(1-\beta^2)} \qquad (۴-۳۹۲)$$

به دست آورد. درنتیجه، داریم:

$$\frac{c\eta t}{M_0} = \int_0^v \frac{dv}{(1+\beta)(1-\beta^2)} \qquad (۴-۳۹۳)$$

اکنون،برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست رابطهٔ(۴-۳۹۳)، می توان به صورت زیر عمل کرد.

$$\begin{aligned}\int \frac{dv}{(1+\beta)(1-\beta^2)} &= \int \frac{dv}{(1+\beta)(1-\beta)(1+\beta)} \\ &= \frac{1}{2}\int [\frac{1}{(1+\beta)} + \frac{1}{(1-\beta)}]\frac{dv}{(1+\beta)} \qquad (۴-۳۹۴) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1+\beta)^2} + \frac{1}{4}\int [\frac{1}{(1+\beta)} + \frac{1}{(1-\beta)}]dv\end{aligned}$$

یا

$$\int \frac{dv}{(1+\beta)(1-\beta^2)} = -\frac{c}{2(1+\beta)} + \frac{c}{4}ln\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \qquad (۴-۳۹۵)$$

حال، با جایگذاری جواب انتگرال از رابطهٔ(۴-۳۹۵) در(۴-۳۹۳)، ارتباط بین زمان و سرعت موشک، درچارچوب $S$ به زیر

$$\frac{\eta t}{M_0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\beta)} + \frac{1}{4}ln\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \qquad (۴-۳۹۶)$$

برقرار می گردد. اما با توجه به رابطهٔ (۴-۳۹۶)، واضح است که نمی توانیم سرعت موشک را برحسب زمان به دست آوریم.

## تمرین

۱- اندازه حرکت یک الکترون ۹۰٪ بیش از اندازه حرکت کلاسیکی آن است.

الف : سرعت این الکترون چقدر است؟

ب : اگر ذره را پروتون درنظربگیریم، سرعت آن چقدر خواهد بود؟

جرم الکترون و پروتون به ترتیب برابر $m_e = ۹/۱۰۹۳۸۹۷ \times ۱۰^{-۳۱}\, kg$ و $m_p = ۱/۶۷۲۶۲۳۱ \times ۱۰^{-۲۷}\, kg$ می باشد.

۲- پروتونی با سرعت $۰/۹c$ درحرکت است. انرژی سکون، انرژی کل و انرژی جنبشی آن را به دست آورید.

۳- ذرات پیون و میون هر یک دارای انرژی $۱۰\, Gev$ می باشند. اگر این ذرات در یک مسابقهٔ دو ۱۰۰ متر شرکت کنند، کدامیک برندهٔ مسابقه خواهد بود؟

۴- اگر انرژی کل یک ذره ۵۰٪ بیش از انرژی سکون آن باشد، در این صورت سرعت آن چقدرخواهد بود؟

۵- در یک شتاب دهنده، به یک پروتون انرژی جنبشی برابر $۶۰\, Gev$ داده می شود. اندازه حرکت و سرعت آن را به دست آورید.

۶- برای رساندن سرعت یک الکترون، الف : از $۰/۶c$ به $۰/۸c$ ب : از $۰/۹c$ به $۰/۹۹c$ چقدر انرژی لازم است؟

۷- یک ایزوتوپ رادیوم با گسیل یک ذرهٔ $\alpha$ به صورت واکنش

$$ {}^{۲۲۶}_{۸۸}Ra \rightarrow {}^{۲۲۲}_{۸۶}Rn + {}^{۴}_{۲}He $$

وامی پاشد. دراین واکنش چقدر انرژی آزاد می گردد. جرم اتمی $Ra$ ، $Rn$ و $He$ به ترتیب برابر $۲۲۶/۰۲۵۴\, amu$ ، $۲۲۲/۰۱۷۵\, amu$ و $۴/۰۰۲۶\, amu$ می باشد.
$۱amu = ۱/۶ \times ۱۰^{-۲۷}\, kg$

۸- سرعت یک ذره چقدر باید باشد تا اندازه حرکت آن برابر $m_\circ c$ گردد. دراین حالت، انرژی کل و جنبشی ذره را به دست آورید.

۹- نشان دهید که سرعت یک ذره را می توان از رابطهٔ

$$\beta = \left[ ۱ - (m_{\circ} c^{۲} / E)^{۲} \right]^{۱/۲}$$

به دست آورد. حال، با استفاده از رابطهٔ فوق سرعت یک ذره را به ازای انرژی $E$ برابر

**الف** : انرژی سکون آن　　　**ب** : دو برابرانرژی سکون آن

ج : ده برابر انرژی سکون آن　　　د : هزار برابرانرژی سکون آن

به دست آورید.

۱۰- اندازه حرکت، انرژی کل و انرژی جنبشی یک پروتون را که در چارچوب آزمایشگاه با سرعت $۰/۹۹c$ حرکت می کند، درحالتهای زیر به دست آورید.

**الف** : درچارچوب آزمایشگاه

ب : درچارچوبی که به وسیلهٔ پروتون تعریف می گردد.

ج : درچارچوب مرکز تکانه که به وسیلهٔ پروتون و یک اتم هلیوم ساکن درآزمایشگاه تعریف می شود.

۱۱- پروتونی با انرژی جنبشی برابر $۱۰^{۹}\ ev$ با پروتون ساکنی برخورد می کند.

**الف** : سرعت چارچوب مرکز تکانه چقدر است؟

ب : تکانه و انرژی کل را درچارچوب آزمایشگاه به دست آورید.

ج : انرژی جنبشی ذرات را درچارچوب مرکزتکانه محاسبه نمایید.

۱۲- میانگین انرژی خورشید که به سطح زمین می رسد، برابر $۱/۴ \times ۱۰^{۳}\ W/m^{۲}$ است. در این صورت،درهر ثانیه چه مقدار از جرم خورشید به انرژی تبدیل می گردد.

۱۳- در یک آزمایش مربوط به برخورد باریکه ها، دو باریکهٔ پروتون که در دو جهت مخالف حرکت می کنند با یکدیگر برخورد سر به سر انجام می دهند. اگر انرژی هر کدام از پروتونها برابر $۱۰\ Bev$ باشد، در این صورت

**الف** : سرعت پروتونها ازنظر ناظر ساکن در چارچوب آزمایشگاه چقدر است؟

**ب** : سرعت یکی از پروتونها را نسبت به پروتون دیگر به دست آورید.

ج : اگر سرعت $v$ ی پروتونها خیلی نزدیک به سرعت نور باشد، در این صورت با قرار

دادن $\eta = c - v$؛ نشان دهید که انرژی $E$ ی پروتون را به طور تقریبی می توان از رابطهٔ $E = E_{\circ}\,(۲\eta/c)^{-۱/۲}$ به دست آورد. که در آن $E_{\circ}$ انرژی سکون پروتون می باشد.

**۱۴-** ذره ای با جرم سکون $m_{\circ}$ و سرعت $۳c/۵$ درنظر بگیرید. همچنین، فرض کنید که ذرهٔ دیگری با جرم سکون $m_{\circ}$، ساکن باشد. دراین صورت

**الف:** انرژی و تکانهٔ ذرات را درچارچوب آزمایشگاه یا $S$ به دست آورید.

**ب :** با استفاده از رابطهٔ جمع نسبیتی سرعتها، سرعت چارچوب مرکز تکانهٔ ذرات، یعنی $v_{com}$ را به دست آورید.

**ج :** انرژی و تکانهٔ ذرات در چارچوب $S_{com}$ چقدراست؟

**د :** نشان دهید که انرژی و تکانهٔ ذرات که در قسمتهای الف و ج به دست آمدند، به وسیلهٔ تبدیلات لورنتس با یکدیگر مرتبط هستند.

**۱۵-** یک فوتون با انرژی $E$، با یک ذرهٔ ساکن و جرم سکون $m_{\circ}$ برخورد می کند و پس از برخورد، یک ذرهٔ واحد تشکیل می شود. جرم و سرعت این ذره را به دست آورید.

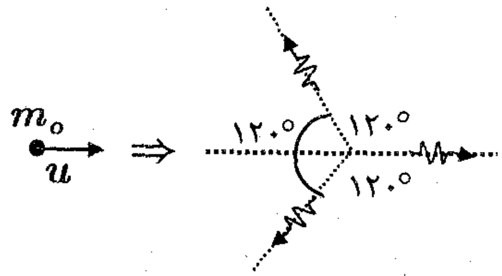
**۱۶-** دو ذره با جرم سکون $m_{\circ}$ و سرعت برابر $u$ درخلاف جهت هم در چارچوب $S$ یا آزمایشگاه، به یکدیگر نزدیک می شوند. انرژی کل یکی از ذرات را درچارچوب سکون ذره دیگربه دست آورید. (جواب حالت خاص: $\beta^{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow E = ۳m_{\circ}c^{۲}$)

**۱۷-** ذره ای به جرم سکون $m_{\circ}$ و سرعت نسبیتی $v$، با ذرهٔ ساکنی به جرم سکون $m_{\circ}$ برخورد می کند و به آن می چسبد. سرعت نهایی ذره مرکب چقدر است؟

**۱۸-** در چارچوب آرمایشگاه یا $S$، ذره ای با جرم سکون $m_{\circ}$ و سرعت $v$، به طرف ذرهٔ درحال سکون دیگری به جرم $m_{\circ}$ در حرکت است. سرعت چارچوب لختی که درآن تکانه کل صفر باشد، چیست؟

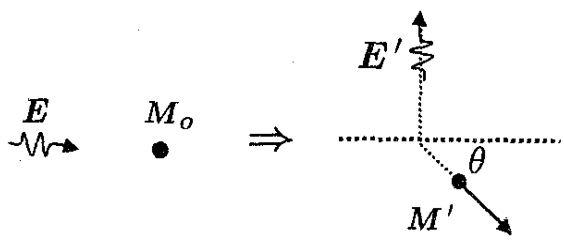
**۱۹-** ذره ای به جرم سکون $M_{\circ}$ پس ازواپاشی به یک فوتون و ذره ای به جرم سکون $m_{\circ}$ تبدیل می شود. اگر سرعت ذره برابر $u$ باشد، در این صورت، جرم $m_{\circ}$ و همچنین انرژی فوتون را برحسب $M_{\circ}$ و $u$ به دست آورید.

۲۰- ذره ای به جرم سکون $m_\circ$ که با سرعت $u$ حرکت می کند، پس از واپاشی، مطابق شکل(۴-۱۶) به سه فوتون تبدیل می شود. انرژی هر کدام از فوتونها را به دست آورید.



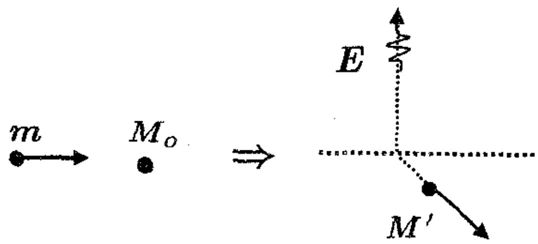

شکل (۴-۱۶) : واپاشی یک ذره به سه فوتون

۲۱- مطابق شکل(۴-۱۷)، یک فوتون با انرژی $E$، به ذرهٔ ساکنی با جرم سکون $M_\circ$ برخورد می کند. ذرهٔ $M_\circ$ تحت یک زاویهٔ معین $\theta$ پراکنده می گردد. اگر فوتون ایجاد شده عمود بر راستای حرکت فوتون فرودی پراکنده شود، انرژی آن چقدر خواهد بود؟




شکل (۴-۱۷) : مسأله ۲۱

۲۲- ذره ای با جرم سکون $m_\circ$، با سرعت $u = ۴c/۵$ با ذرهٔ ساکنی با جرم سکون $M_\circ$، برخورد می کند. پس از برخورد، یک فوتون و یک ذره با جرم سکون $M'_\circ$ ایجاد می گردد. فوتون مطابق شکل (۴-۱۸)، در راستای عمود بر جهت حرکت ذرهٔ فرودی $m_\circ$ پراکنده می شود. اگر ذرهٔ تولید شدهٔ $M'_\circ$، در یک راستای دیگر پراکنده شود، اندازهٔ $M'_\circ$ را برحسب $m_\circ$ و $E$ به دست آورید. همچنین اندازهٔ $E$ چقدر باید باشد تا این برهم کنش روی دهد.



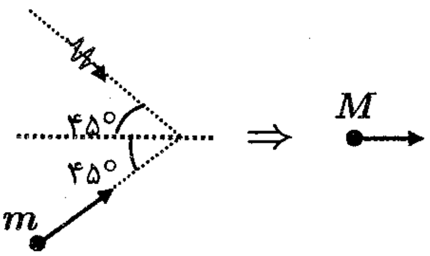

شکل (۴-۱۸) : مسأله ۲۲

۲۳- درچارچوب آزمایشگاه، دو ذرهٔ یکسان با جرم سکون $m_\circ$، تحت زاویهٔ $\pi/۲$، نسبت به یکدیگر حرکت می کنند. فرض کنیم که سرعت ذرات یکسان و برابر $u$ باشد، دراین صورت، اگر برخورد دو ذره را ناکشسان درنظر بگیریم، نشان دهید که جرم ذرهٔ مرکب حاصل از برخورد از رابطهٔ

$$M = ۲m_\circ \gamma(u)\sqrt{۱-\frac{u^۲}{۲c^۲}}$$

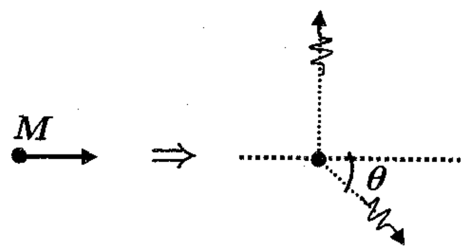
به دست می آید. سرعت ذرهٔ مرکب را نیز به دست آورید.

۲۴- مطابق شکل(۴-۱۹)، ذره ای به جرم سکون $m_\circ$، با سرعت $۴c/۵$ با یک فوتون برخورد می کند. پس از برخورد ذره ای به جرم سکون $M_\circ$ ایجاد می گردد. سرعت و جرم ذرهٔ ایجاد شده را به دست آورید. انرژی فوتون چقدر است؟



شکل (۴-۱۹) : برخورد یک ذره و فوتون

۲۵- ذره ای با جرم سکون $M_\circ$، با سرعت $۳c/۵$ در حرکت است. این ذره پس از واپاشی به دو فوتون و یک ذره به جرم سکون $M_\circ /۴$ تبدیل می گردد. اگر ذرهٔ تولید شده پس از واپاشی به حال سکون درآید و فوتونها مطابق شکل (۴-۲۰) پراکنده گردند، اندازهٔ زاویهٔ $\theta$ را به دست آورید.



شکل (۴-۲۰) : مسأله ۲۵

۲۶- سه ذره با جرم سکون $m_\circ$ و سرعت یکسان $u = ۴c/۵$، در مبدأ با یکدیگر برخورد می کنند. پس از برخورد، ذره ای با جرم سکون $M_\circ$ تولید می گردد. اگرجهت حرکت ذرات به ترتیب، به سمت شمال، شمال شرقی و شمال غربی در نظر گرفته شوند، سرعت و جرم ذرهٔ ایجاد شده را به دست آورید.

۲۷- یک فوتون و ذره ای به جرم سکون $m_\circ$، درخلاف جهت یکدیگرحرکت می کنند. اگرپس از برخورد، ذرهٔ جدیدی ایجاد گردد و انرژی کل سیستم برابر $E$ باشد، در این صورت، این انرژی به چه صورت بین فوتون و جرم $m_\circ$ تقسیم شود تا جرم ذرهٔ ایجاد شده بیشترین مقدار شود؟

۲۸- ذره ای که با سرعت $v$ حرکت می کند، به دو فوتون تجزیه می شود. انرژی فوتونهای به دست آمده به ترتیب برابر $E_۱$ و $E_۲$ می باشد. همچنین، راستای حرکت آنها با راستای اولیهٔ حرکت ذره، زوایای $\alpha$ و $\beta$ ساخته و در دو طرف این راستا قرار می گیرند. در این صورت، ثابت کنید:

$$tan(\frac{\alpha}{۲})tan(\frac{\beta}{۲}) = \frac{c-v}{c+v}$$

می باشد. همچنین، نتیجه بگیرید که اگر فوتونی به دو فوتون تجزیه شود، در این صورت دو

فوتون ایجاد شده باید در همان راستای فوتون اولیه حرکت کنند. برای این منظور، توجه کنید که اگر انرژی فوتون برابر $E$ باشد، تکانهٔ آن $E/c$ خواهد بود.

**۲۹-** یک پیون با انرژی جنبشی $Mev$ ۱۶۰۰ روی پروتون ساکنی فرود می آید و بعد از برخورد، با توجه به واکنش $\pi + p \to p + n\pi$، تعدادی پیون تولید می گردد. حال، با استفاده از چارچوب مرکز تکانه، بیشینهٔ تعداد $(n)$ پیونهای ایجاد شده را در این برخورد به دست آورید. انرژی سکون پروتون و پیون به ترتیب برابر $Mev$ ۹۳۸ و $Mev$ ۱۴۰ می باشد.

**۳۰-** کمترین انرژی، برای یک مزون $\pi^-$ در واکنش

$$\pi^- + p \to \pi^- + \pi^- + \pi^+ + p$$

چقدر می تواند باشد. جرم سکون $\pi^-$ یا $\pi^+$ برابر $Mev$ ۱۳۹/۵۶ می باشد.

**۳۱-** ذره ای با جرم سکون $m_\circ$، با سرعت $v$ با ذرهٔ دیگری به جرم سکون $m_\circ$ که با سرعت $v$، درخلاف جهت ذرهٔ اول درحرکت است، برخورد می کند. اگر دو ذره پس از برخورد به یکدیگر بچسبند، در این صورت، تغییرجرم در این برخورد چقدر است؟ اگر $m_\circ$ برابر یک گرم و سرعت $v$ برابر $km/s$ ۱۰ باشد، $\Delta m$ را به دست آورید.

**۳۲-** یک مزون $\pi$ به جرم سکون $m_\pi$، به یک مزون $\mu$ به جرم سکون $m_\mu$ و یک نوترینو با جرم سکون صفر وا می پاشد. دراین صورت، نشان دهید که انرژی جنبشی $K_\mu$ی مزون $\mu$ از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$K_\mu = \frac{(m_\pi - m_\mu)^۲}{۲m_\pi} c^۲$$

**۳۳-** در پدیدهٔ کامپتون، فرض کنید که زاویهٔ پراکندگی یا انحراف ذرهٔ ساکن $m_\circ$ برابر $\varphi$ باشد. در این صورت، نشان دهید که انرژی جنبشی ذرهٔ $m_o$، پس از برخورد با رابطهٔ

$$k = \frac{۲E(E/E_\circ)cos^۲\varphi}{۱+۲(E/E_\circ) + (E/E_\circ)sin^۲\varphi}$$

$$= \frac{h\nu(۲\alpha cos^۲\varphi)}{(۱+\alpha)^۲ - \alpha^۲ cos^۲\varphi}$$

بیان می شود که درآن $E_\circ = m_\circ c^۲$، انرژی سکون الکترون، $E$ انرژی فوتون تابیده شده

و $\alpha$ نیز برابر $h\nu/m_{\circ}c^{2}$ می باشد.

**۳۴-** با توجه به اثر کامپتون، فوتونی با انرژی $h\nu$، با ذرهٔ آزادی به جرم $m_{\circ}$ که در حال سکون است، برخورد می کند. اگر فوتون پراکنده شده، تحت زاویهٔ $\theta$ خارج شود. زاویه پراکندگی ذره ساکن، یعنی $\varphi$ را محاسبه کنید و نشان دهید :

$$cot\varphi = (1 + \frac{h\nu}{m_{\circ}c^{2}})\, tan(\theta/2)$$

**۳۵-** فرض کنید که ذره ای با جرم سکون $m_{\circ 1}$ و تکانهٔ $p_{1}$، با ذره ای به جرم سکون $m_{\circ 2}$ که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است، برخورد می کند و تحت زاویهٔ $\theta$ پراکنده می شود. نشان دهید که تکانه و انرژی ذرهٔ فرودی $m_{\circ 1}$ را پس از برخورد می توان از روابط

$$p_{3} = p_{1}\frac{(m_{\circ 1}^{2}c^{2} + m_{\circ 2}E_{1})cos\theta + (E_{1} + m_{\circ 2}c^{2})\sqrt{m_{\circ 2}^{2} - m_{\circ 1}^{2}sin^{2}\theta}}{(E_{1}/c + m_{\circ 2}c)^{2} - p_{1}^{2}cos^{2}\theta}$$

$$E_{3} = \frac{(E_{1} + m_{\circ 2}c^{2})(m_{\circ 1}^{2}c^{2} + m_{\circ 2}E_{1}) + c^{2}p_{1}^{2}cos\theta\sqrt{m_{\circ 2}^{2} - m_{\circ 1}^{2}sin^{2}\theta}}{(E_{1}/c + m_{\circ 2}c)^{2} - p_{1}^{2}cos^{2}\theta}$$

به دست آورد.

**۳۶-** در مسأله قبل اگر ذرهٔ ساکن $m_{\circ 2}$، بعد از برخورد تحت زاویهٔ $\varphi$ نسبت به راستای حرکت ذرهٔ فرودی پس زده شود، در این صورت، نشان دهید که تکانه و انرژی آن را می توان از روابط زیر به دست آورد.

$$p_{4} = p_{1}\frac{2m_{\circ 2}(E_{1} + m_{\circ 2}c^{2})cos\varphi}{(E_{1}/c + m_{\circ 2}c)^{2} - p_{1}^{2}cos^{2}\varphi}$$

$$E_{4} = m_{\circ 2}c^{2}[1 + \frac{2p_{1}^{2}cos^{2}\varphi}{(E_{1}/c + m_{\circ 2}c)^{2} - p_{1}^{2}cos^{2}\varphi}]$$

**۳۷-** در دو مسأله قبل فرض کنید که جرم سکون ذرهٔ هدف و ذرهٔ فرودی یکسان باشد. دراین صورت، ذرهٔ فرودی بعد از برخورد، درچارچوب مرکز تکانهٔ $S_{com}$، تحت زاویهٔ $\psi$ نسبت به راستای حرکت اولیهٔ خود و ذرهٔ دیگر درجهت مخالف آن حرکت می کند. حال، نشان دهید که زوایای $\theta_{1}$ و $\theta_{2}$، یعنی زوایای پراکندگی درچارچوب آزمایشگاه، از روابط

زیر به دست می آیند.

$$tan\theta_۱ = \sqrt{۱-\beta^۲}\, tan\frac{\psi}{۲}$$
$$tan\theta_۲ = \sqrt{۱-\beta^۲}\, cotan\frac{\psi}{۲}$$

**۳۸-** ذره ای به جرم سکون $m_۰$، بعد از واپاشی به دو ذره، به جرمهای سکون $m_{۰۱}$ و $m_{۰۲}$ تبدیل می گردد. نشان دهید که درچارچوب مرکز تکانهٔ $S_{com}$، انرژی ذرات را می توان از روابط زیر به دست آورد. تکانهٔ ذرات را نیز به دست آورید.

$$E_{۱,com} = \frac{(m_۰^۲ + m_{۰۱}^۲ - m_{۰۲}^۲)c^۲}{۲m_o}$$
$$E_{۲,com} = \frac{(m_۰^۲ + m_{۰۲}^۲ - m_{۰۱}^۲)c^۲}{۲m_۰}$$

**۳۹-** در چارچوب آزمایشگاه، فوتونی با انرژی $E_۱$ با ذره ای ساکن و جرم سکون $m_{۰۲}$ برخورد می کند. بعد از برخورد، دو ذره با جرم سکون $m_{۰۲}$ و $m_{۰۳}$، ایجاد می گردد. نشان دهید که انرژی آستانه برای این واکنش برابر مقدار زیر می باشد.

$$E_۱ = m_{۰۳}\,[۱+(\frac{m_{۰۳}}{۲m_{۰۲}})]c^۲$$

**۴۰-** دو ذرهٔ یکسان با جرم سکون $m_۰$، در فاصلهٔ $x$ از یکدیگر درحال سکون هستند. حال، یکی از ذرات با اعمال نیروی ثابت $F$ به آن، به سمت ذرهٔ دیگر شتاب داده می شود تا اینکه ذرات با یکدیگر برخورد کرده ویک ذرهٔ جدید تشکیل گردد. در این صورت، بعد از گذشت چه مدت برخورد صورت می گیرد. همچنین، جرم ذرهٔ حاصل از برخورد، چقدر است؟

**۴۲-** یک موشک فوتونی نسبیتی، یعنی موشکی که برای پیش راندن خود، فوتونهایی با سرعت $c$ پرتاب می کند، در نظر بگیرید. این موشک از حالت سکون شتاب می گیرد و به حرکت در می آید و پس از طی مسافتی، شتاب منفی می گیرد و با همان فرایند به مکان اولیه برمی گردد. حال، اگر جرم سکون اولیهٔ موشک برابر $m_۰$ باشد، نشان دهید که جرم نهایی آن برابر $m_۰/۱۶\gamma^۴$ می باشد. توجه نمایید که وقتی که سرعت موشک بیشینه شود، $\gamma \gg ۱$ خواهد بود.

# ۵

## نسبیت و نظریهٔ الکترومغناطیس

### مقدمه :

اینشتین طی مقاله ای که درسال ۱۹۰۵ درمورد الکترودینامیک اجسام متحرک ارائه داد، به وحدت کامل بین الکتریسیته و مغناطیس اشاره کرده است. این مقاله همان طورکه قبلاً اشاره شد، سنگ بنای نسبیت خاص محسوب می شود. دراین مقاله اینشتین نشان داده است که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نمی توانند مستقل از یکدیگر باشند. درحقیقت، اینکه چه چیزی میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی است، بستگی به ناظر یا چارچوب مرجع دارد و این میدانها، تحت روابط تبدیلی لورنتس به یکدیگر تبدیل می شوند. به عبارت دیگر، ممکن است دریک چارچوب، صرفاً میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی وجود داشته باشد، اما درچارچوب لخت دیگر، هردو میدان الکتریکی و مغناطیسی مشاهده شود.

با توجه به وحدت بین فضا و زمان و همچنین جملهٔ مشهور مینکوفسکی که گفته است: از این پس فضای تنها و همین طورزمان تنها، مطرود هستند و تنها نوعی اتحاد از آن دو وجود

مستقلی خواهد داشت. دراینجا نیز با اقتباس از این گفتهٔ مینکوفسکی، می توان بیان کرد که:

**ازاین پس میدان الکتریکی تنها و همین طور میدان مغناطیسی تنها، مطرود هستند و تنها نوعی اتحاد از آن دو، واقعیّت و وجود مستقل خواهد داشت.**

اگرچه هنوزهم دربیشتر کتابهای مربوط به الکترودینامیک، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را به طور جداگانه و به عنوان دو پدیدهٔ مستقل بررسی می کنند، اما برای به دست آوردن درک و بینش عمیق تری از اتحاد بین این میدانها، باید فرمولبندی چهاربعدی این معادلات به دست آیند. به بیان دیگر، باید نظریهٔ الکترومغناطیس را ازدیدگاه نسبیتی مورد بررسی قرارداد. همان طورکه در فصل دوم اشاره شد، هدف از ارائهٔ نظریهٔ نسبیت، درحقیقت به دست آوردن یک بینش صحیح و عمیق از برهم کنش های الکترومغناطیسی بوده است. از طرف دیگر، می دانیم معادلات ماکسول اساس نظریهٔ الکترومغناطیس محسوب می شوند. درواقع، می توان گفت که معادلات ماکسول همان اهمیتی را درنظریهٔ الکترومغناطیس دارندکه قوانین حرکت نیوتن درمکانیک. اما باید اشاره شود که میان این دو موضوع تفاوت فاحشی وجود دارد. زیرا اینشتین نظریهٔ نسبیت را در سال ۱۹۰۵، یعنی تقریباً ۲۰۰ سال پس از اعلام قوانین نیوتن و حدود۴۰ سال پس از معرفی معادلات ماکسول ارائه داده است و همان طورکه می دانیم، درحالتهایی که سرعت اجسام به سرعت نور نزدیک می شوند، باید قوانین نیوتن به طورجدی تصحیح شوند. درحالی که معادلات ماکسول را می توان در این حالتها بدون احتیاج به تغییر یا اصلاحی به کار برد. درحقیقت، نظریهٔ نسبیت خاص ازتفکر عمیق و دقیق اینشتین دربارهٔ معادلات ماکسول نشأت گرفته است و این معادلات با نظریهٔ نسبیت خاص کاملاً سازگار می باشند.

## ۵ - ۱ : نظریهٔ الکترومغناطیس

همان طورکه می دانیم، ذرات باردار، مانند الکترونها و پروتونها، به یکدیگر نیروی الکتریکی اعمال می کنند. این نیرو مانند نیروی گرانش، یک نیروی دوربرد بوده و بسته به ماهیّت ذرات باردارممکن است جاذبه یا دافعه باشد. اندازهٔ این نیرو را نیز می توان با استفاده از قانون

تجربی کولن[1] (۱۸۶۰-۱۷۳۶)به دست آورد و درواقع، می توان گفت که اولین رابطه ای که درالکترواستاتیک با آن برخورد می کنیم، قانون کولن است که بخشی از برهم کنشهای بین ذرات باردار را می توان به وسیلهٔ آن توضیح داد. افراد زیادی در زمینهٔ برهم کنشهای مربوط به الکتریسیته و مغناطیس کارکرده اند که از جملهٔ آنها می توان به فرانکلین[2]، کولن ، گاؤس[3] ، اورستد[4]، فاراده[5] ، هانری[6] ، آمپر[7]، هوی ساید[8]، ماکسول ، هرتز، لورنتس و اینشتین و ... اشاره کرد. از بین این افراد، نقش فاراده، آمپر و ماکسول بیش از دیگران برجسته می باشد و در واقع فارده یکی از بهترین این افراد محسوب می شود. او آزمایشگری با استعداد و صاحب نبوغی سرشارو دارای درک فیزیکی عمیقی بوده است. به طوری که دریادداشتهای آزمایشگاهی او حتی یک معادلهٔ ریاضی هم به چشم نمی خورد. ماکسول که در سال ۱۸۳۱، یعنی سال کشف قانون القای فاراده زاده شد، درسال ۱۸۷۹، یعنی سالی که اینشتین درآن تولد یافت، به سن ۴۸ سالگی درگذشت. ماکسول بیشتر عمرکوتاه، اما پربار خود را در راه تدوین مبانی نظری کشفهای تجربی فاراده صرف کرد و ایده های فاراده را به شکل ریاضی درآورد. کشف بزرگ ماکسول این بود که نشان داد، نور یک موج الکترومغناطیسی است و سرعت آن را می توان با اندازه گیریهای صرفاً الکتریکی و مغناطیسی به دست آورد و در حقیقت، با این کشف، علم قدیمی اپتیک را به الکتریسیته و مغناطیس مربوط کرد. از طرف دیگر، پس ازگذشت تقریباً یک ربع قرن از زمان انتشار معادلات ماکسول، یعنی در سال ۱۸۸۷، هرتز نیز با تولید امواج الکترومغناطیسی یا ماکسولی درآزمایشگاه خود، گام مؤثری را در پیشبرد نظریهٔ الکترومغناطیس برداشت.

ماکسول نظریهٔ الکترومغناطیس خود را درکتابی مفصل، موسوم به رساله ای در بارهٔ

---

1- Coulomb, Charles Augustus : فیزیکدان فرانسوی که در سال ۱۷۸۵ نیروی الکتریکی بین کره های کوچک فلزی باردار را با استفاده دستگاه ترازوی پیچشی به دست آورده است.

2- Franklin, Benjamin (1706 – 1790) : فیزیکدان آمریکایی که آزمایشهایی در زمینهٔ قانون عکس مجذوری کولن در سال ۱۷۵۵ انجام داده است. همچنین نامهای مثبت و منفی برای بارهای الکتریکی از اوست.

3- Gauss, Karl Friedrich (1717-1855) : ریاضیدان، اختر شناس و فیزیکدان آلمانی

←

الکتریسیته و مغناطیس را که درسال ۱۸۷۳، یعنی درست ۶ سال پیش از مرگش انتشار یافت، ارائه داده است. مطالعهٔ این کتاب تقریباً مشکل است و واقعیّت این است که در این رساله، معادلات ماکسول به شکل کنونی آنها نیستند. و به نظر می آید که هوی ساید، فیزیکدان انگلیسی نظریهٔ ماکسول را در قالب چهار معادله ای که امروزه می شناسیم، درآورده است. این معادلات که دردههٔ ۱۸۶۰ به دست آمده اند، با استفاده ازآنها می شد دو موضوع مهم الکتریسیته و مغناطیس را که درآن زمان مورد بحث جدی فیزیکدانان بود، با بینش و درک عمیق تری بررسی کرد و نشان می دهندکه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مستقل از یکدیگر نیستند. به این ترتیب که یک میدان مغناطیسی متغیر نسبت به زمان، باعث ایجاد میدان الکتریکی می شود و برعکس. همچنین، براساس این معادلات تنها یک میدان، یعنی میدان الکترومغناطیسی وجود دارد.

این معادلات در حالت ایستا، یعنی هنگامی که چشمهٔ میدان الکتریکی، $\rho(\vec{r})$ و چشمهٔ میدان مغناطیسی، یعنی $\vec{J}(\vec{r})$ مستقل از زمان باشند، به صورت

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{r}) && (۱)\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r})=0 && (۲)\\
&\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=0 && (۳)\\
&\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r})=\mu\vec{J}(\vec{r}) && (۴)
\end{aligned} \qquad (۵-۱)$$

بیان می شوند. اماکار مهم و اساسی که ماکسول انجام داده است، در واقع تعمیم این معادلات برای حالت کلی تر، یعنی حالت غیرایستا می باشد. در حالت غیر ایستا به دلیل وابستگی

4 -Oersted, Hans Christian (1777- 1851): ⟵ فیزیکدان دانمارکی، وی اولین کسی بود که در سال ۱۸۲۰ نشان داد که جریان الکتریکی، عقربهٔ مغناطیسی قطب نما را منحرف می کند و به این ترتیب علوم مجزای لکتریسیته و مغناطیس را به هم مربوط ساخت.

5- Faraday, Michael (1791 – 1867): شیمیدان و فیزیکدان انگلیسی، کاشف قانون القای فاراده درسال ۱۸۳۱

6- Henry, Joseph (1797 – 1878) : فیزیکدان آمریکایی، وی مستقل از فاراده، تقریباً به طور همزمان قانون القای فاراده را کشف کرد.

7- Ampere, Andre Marie (1775-1836) : فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی

8- Heaviside, Oliver (1850 – 1925) : فیزیکدان انگلیسی که معادلات ماکسول را به شکل کنونی آنها درآورده

چشمه های باروجریان به زمان، میدانها نیز تابعی از زمان می باشند.

در روابط (۵-۱)، معادلهٔ اول و دوم، یعنی معادلات دیورژانس، در حالت غیر ایستا نیز به همین شکل بیان می شوند. اما معادلات سوم و چهارم، یعنی معادلات کرل، برای حالت غیر ایستا باید اصلاح گردند. اصلاح معادلهٔ سوم، به قانون القای فاراده[1] منجر می شود. همچنین، ماکسول برای سازگارکردن این معادلات درحالت غیر ایستا، با معادلهٔ پیوستگی بار الکتریکی[2]، یعنی رابطهٔ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r},t)+\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (۵-۲)$$

جملهٔ $\partial\vec{D}(\vec{r},t)/\partial t$ را به سمت راست معادلهٔ چهارم یا قانون آمپر[3] در روابط (۵-۱) اضافه کرد و درنتیجه، معادلات تعمیم یافته را برای حالت غیر ایستا، به صورت

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t) && (۱)\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0 && (۲)\\
&\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} && (۳)\\
&\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)=\mu\vec{J}(\vec{r},t)+\mu\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} && (۴)
\end{aligned} \qquad (۵-۳)$$

بیان می کند. درحقیقت، می توان گفت که کار اساسی و مهمی که ماکسول انجام داده است، افزودن جملهٔ $\partial\vec{D}(\vec{r},t)/\partial t$ به سمت راست قانون آمپر می باشد؛ زیرا وجود این جمله در قانون آمپر است که انتشار امواج الکترومغناطیسی را درخلأ پیش بینی می کند. جملهٔ $\partial\vec{D}(\vec{r},t)/\partial t$ را معمولاً با $\vec{J}_D$ نشان داده وآن را بردارچگالی جریان جابه جایی[4] می نامند. لازم است اشاره شود که در معادلات فوق برای یک محیط مادی خطی و همسانگرد، $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ و $\vec{B}=\mu\vec{H}$ بوده و برای محیط خلأ $\varepsilon=\varepsilon_0$ و $\mu=\mu_0$ می باشند.

معادلهٔ اول از معادلات ماکسول یا قانون گاؤس، نشان می دهد که چگونه می توان با داشتن یک توزیع بارمعین، میدان الکتریکی حاصل از آن را محاسبه کرد. معادلهٔ سوم از این

---

1- Faraday's law of induction
2- Continuity equation of electric charge
3- Ampe're law
4- Displacement current density vector

معادلات نیز نشان می دهدکه میدان الکتریکی را می توان ازمیدان مغناطیسی وابسته به زمان به دست آورد. همچنین، معادلهٔ چهارم یا قانون آمپر- ماکسول، نیز بیان می کند که چگونه چگالی جریان و میدان الکتریکی وابسته به زمان، میدان مغناطیسی ایجاد می کنند. این معادله را درحالتی که چگالی جریان، یعنی $\vec{J}$ برابر صفر باشد، با مقایسه با قانون القای فاراده، می توان قانون القای ماکسول نیز نامید. معادلهٔ دوم نیز بیان می کندکه بارمغناطیسی درطبیعت وجود ندارد تا خطوط میدان بتوانند از آن شروع یا به آن ختم شوند. براین اساس، خطوط میدان مغناطیسی، خطوط بسته ای را تشکیل می دهند.

همان طورکه اشاره شد، این معادلات در ابتدا براساس بررسیها و تحقیقات تجربی که تقریباً به مدت دو قرن طول کشیده است، به طورکاملاً مستقل ازیکدیگر به دست آمده اند و تقریباً بعد ازگذشت چهل سال، اینشتین کشف می کند که تمام این معادلات، با روابط تبدیلی لورنتس به هم مربوط هستند. درحقیقت، باید گفته شود که اینشتین با دقت و تعمق زیاد درمعادلات ماکسول به سوی نظریهٔ نسبیت رهنمون شده است.

بنابراین، معادلات ماکسول از دیدگاه نسبیت دارای یک انسجام منطقی بوده و یک مجموعهٔ سازگار و متقارن را تشکیل می دهند و در واقع، می توانند توصیف کاملی از رابطهٔ بین میدان الکترومغناطیسی و توزیعهای بار و جریان الکتریکی یا به طورکلی برهم کنشهای الکترومغناطیسی را فراهم کنند. به این ترتیب که می توان با استفاده از قانون کولن یا شکل دیگرآن، یعنی قانون گاؤس (درحالتی که توزیع باردارای تقارن باشد)، میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار معین را به دست آورد. همچنین، می توان با استفاده از قانون بیو- ساوار[1] یا قانون آمپر(درحالتی که چگالی جریان دارای تقارن باشد،) میدان مغناطیسی ناشی از یک چگالی جریان معین را به دست آورد.

از طرف دیگر، ازترکیب معادلات ماکسول، می توان معادلات موج ناهمگنی را برای پتانسیل نرده ای الکتریکی[2] و برداری مغناطیسی[3]، یعنی $\varphi(\vec{r},t)$ و $\vec{A}(\vec{r},t)$ به شکل

$$\nabla^{2}\varphi(\vec{r},t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^{2}}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t) \qquad (۴-۵)$$

---

1- Biot – Savart law  2-Electric scalar potentials
3- Magnetic vector potentials

و

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r},t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}(\vec{r},t) \qquad (۵-۵)$$

به دست آورد. حال، می توان با به دست آوردن جواب معادلات ناهمگن فوق، یعنی $\varphi(\vec{r},t)$ و $\vec{A}(\vec{r},t)$ و جایگذاری این جوابها در روابط

$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)-\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (۶-۵)$$

و

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (۷-۵)$$

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ایجاد شده به وسیلهٔ چشمه های بار $\rho(\vec{r},t)$ جریان $\vec{J}(\vec{r},t)$ را معین کرد. به این ترتیب، می توان گفت که معادلات ماکسول و معادلهٔ پیوستگی بار الکتریکی یا رابطهٔ (۵-۲)، همراه با نیروی لورنتس[1] ، یعنی رابطهٔ

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}) \qquad (۸-۵)$$

اساس نظریهٔ الکترومغناطیس را تشکیل می دهند.

درپایان لازم به تذکر است که معادلات ماکسول، به صورتی که بیان شدند، دارای محدودیتهایی نیز می باشند. این معادلات درمورد پدیده های ماکروسکوپی الکترومغناطیسی مانند پدیده های مربوط به آنتهای فرستنده و گیرنده، مدارهای الکتریکی، مخابرات ماهواره ای، اخترشناسی رادیویی و پدیده های مربوط به پراش، تداخل و غیره به طور کاملاً دقیق عمل می کنند. اما باید بدانیم که برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین ذرات بنیادی، به ویژه درمحدودهٔ انرژیهای بالا، باید به شیوه ای متفاوت و براساس قوانین مکانیک کوانتمی مورد بررسی قرارگیرند. این روش یا شیوهٔ جدید، شاخه ای را درفیزیک برای بررسی پدیده های الکترومغناطیسی در انرژیهای بالا ، مطرح می کند که الکترودینامیک کوانتمی[2] نامیده می شود. این نظریه که فیزیک کوانتمی را با نظریهٔ نسبیت ترکیب می کند، شاید موفق ترین نظریه ای باشد که برمبنای نتایج پیشگویی شده با تجربه سازگار است. اما با وجود

1- Lorentz force 2-Quattum Electrodynamics (QED)

این محدودیتهایی که برای معادلات ماکسول وجود دارد، بازهم می توان با تقریب مناسب و قابل قبولی از این معادلات، برای بررسی برهم کنشهای الکترومغناطیسی بین ذرات بنیادی استفاده کرد که این روش یا شاخه از فیزیک را الکترودینامیک کلاسیک[1] می نامند.

حال، بعد ازآشنایی مختصر با نظریهٔ الکترومغناطیس، می توان این نظریهٔ را از دیدگاه نسبیتی مورد بررسی قرار داد.

## ۵ - ۲ : تبدیلات گالیله و نظریهٔ الکترومغناطیس

همان طورکه در فصل دوم اشاره شد، قوانین مکانیک کلاسیک تحت تبدیلات گالیله هموردا می باشند. اکنون، سؤالی که دراینجا ممکن است مطرح شود، این است که آیا نظریهٔ الکترومغناطیس نیز تحت این تبدیلات همورداست یا خیر؟ به عبارت دیگر، آیا شکل معادلات ماکسول تحت تبدیلات گالیله، درگذر ازیک چارچوب مرجع لخت به چارچوب مرجع لخت دیگر تغییر می کنند یا خیر؟

برای پاسخ به این سؤال، ابتدا زمینهٔ علمی قبل از اینشتین را در این مورد مطرح می کنیم. لورنتس در سال ۱۹۰۴ نشان داد که شکل معادلات ماکسول یا به طورکلی نظریهٔ الکترومغناطیس، تحت تبدیلات گالیله درگذر از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر ناوردا نیستند. براین اساس، وی اقدام به وضع روابط تبدیلی جدیدی کرد و نشان داد که نظریهٔ الکترومغناطیس، تحت تبدیلات ابداعی او هموردا می باشند. به عبارت دیگر، شکل این معادلات تحت تبدیلات ابداعی جدید، از یک چارچوب به چارچوب مرجع دیگرناوردا یا بدون تغییر باقی می مانند. درحقیقت، می توان گفت که بزرگترین کمک به پیشرفت فیزیک نظری را لورنتس در سال ۱۹۰۴ ، با ارائهٔ تبدیلات جدید خود، به عمل آورده است.

از طرف دیگر، اینشتین در بررسی پدیده های مربوط به نظریهٔ الکترومغناطیس با دو گروه از تبدیلات، یعنی تبدیلات گالیله برای پدیده های مکانیکی یا نیوتنی و تبدیلات لورنتس، برای پدیده ها یا نظریهٔ الکترومغناطیس مواجه بود. اما اوکه نمی توانست درآن

1- Classical Electrodynamics

واحد دوگروه از تبدیلات را بپذیرد، درنتیجه وی روابط تبدیلی لورنتس را بر روابط تبدیلی گالیله ترجیح داد و آنها را به عنوان فرمولها و روابطی عام و قابل اعمال درکلیهٔ پدیده های فیزیکی پذیرفت. و می توان گفت که نظریهٔ نسبیت، درواقع پیامدی از این پذیرش و انتخاب او محسوب می شود.

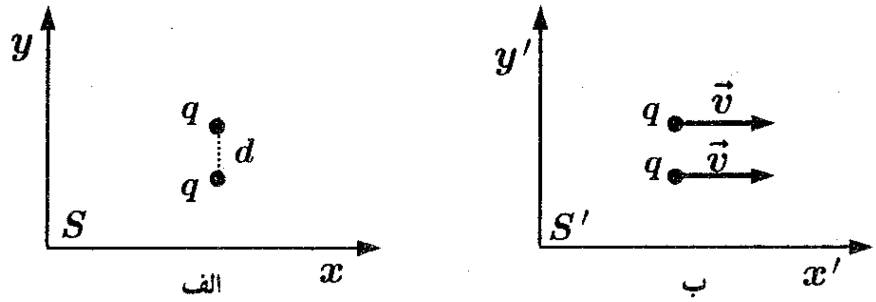
در اینجا برای توضیح بیشتر این مطلب، می توان سرعت امواج الکترومغناطیس یا نور را با در نظرگرفتن تبدیلات گالیلهٔ سرعت، بررسی کرد. برای این منظور، اگر سرعت نور، تنها نسبت به چارچوب مرجع متصل به اتر برابر $c$ باشد، دراین صورت، اگرناظری با سرعت $v$ نسبت به چارچوب مرجع متصل به اتر حرکت کند، در این حالت باتوجه به تبدیلات گالیله، این ناظر سرعت نور را برابر $c + v$ یا $c - v$ به دست خواهد آورد. به عبارت دیگر، اگرتبدیلات گالیلهٔ سرعت، درمورد یک موج الکترومغناطیسی به کار برده شود، به نتیجه ای خواهیم رسید که تجربه آن را تأیید نمی کند. به این ترتیب که اگرسرعت نور درخلأ نسبت به یک چارچوب مرجع لخت $c$، باشد و ناظری با سرعت $v$ موج الکترومغناطیسی را دنبال کند، دراین صورت، با توجه به تبدیل گالیله، سرعت موج نسبت به این ناظر، برابر $c - v$ خواهد بود. و درحالت خاص، یعنی اگر فرض نماییم که ناظر با سرعت $v$ برابر $c$، موج الکترومغناطیسی را دنبال کند، سرعت موج نسبت به این ناظربرابر صفرخواهد شد. بنابراین، دراین حالت می توان گفت که موج نسبت به ناظر به صورت یک میدان الکتریکی و مغناطیسی ایستا آشکارخواهد شد. ازطرف دیگر، می دانیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ایستا، تنها در نزدیکی بارهای ساکن[1] و جریانهای پایا[2] مشاهده می شوند. بنابراین، میدانهایی که ناظر مشاهده می کند، با میدانهای حاصل از حل معادلات ماکسول، تناقص خواهند داشت. به بیان دیگر، این نوع میدانها، یعنی میدانهای ساکن یا ایستا درفضایی که بار ساکن یا جریان پایایی وجود ندارد، نمی توانند ایجاد شوند. همان طورکه خود اینشتین نیزدراین باره نوشته است:

"پس از ده سال تفکر روی تناقضی که در شانزده سالگی با آن مواجه

1- Static charges 2- Steady currents

شده بودم، به این نتیجه رسیدم که اگر یک پرتو نور را با سرعت $c$ دنبال کنم، این پرتو را باید به صورت یک میدان الکترومغناطیسی ساکن یا ایستا مشاهده کنم. اما این مسأله را نه تجربه تأیید می کند و نه معادلات ماکسول"

همچنین، می توان عدم هموردایی معادلات ماکسول را دررفتار ظاهراً متفاوت بارهای ساکن و متحرک، به طور تجربی نیز مشاهده نمود. برای این منظور، با توجه به شکل(۵-۱) فرض کنید که دو بارالکتریکی هرکدام به بزرگی $q$ درچارچوب لخت $S$، درفاصلهٔ $d$ از یکدیگر، درحالت سکون قرار داشته باشند.




شکل (۵-۱): نیروی بین دو بار الکتریکی، الف: نسبت به ناظر $S$ دافعهٔ الکتریکی و ب: نسبت به ناظر $S'$ جاذبهٔ مغناطیسی است

از نظر ناظرواقع دراین چارچوب، نیرویی که دو بار الکتریکی به یکدیگر وارد می کنند، دافعه بوده و اندازهٔ آن نیز از قانون کولن به دست می آید. اکنون، اگر فرض کنیم که ناظر $S'$ با سرعت $v$، نسبت به چارچوب $S$ درجهت عمود برخط واصل دو بار و درخلاف جهت محور $x$ چارچوب $S$ حرکت کند، در این صورت، از دید این ناظر، مسأله به شکل دیگری مطرح می شود؛ زیرا ازنظر این ناظر نیروی بین دو بار، جاذبهٔ مغناطیسی خواهد بود. به این ترتیب که می توان تصور کرد که ناظر $S'$ ساکن است و دو بار الکتریکی با سرعت $v$ به سمت راست حرکت می کنند. درنتیجه، به علت حرکت بارهای الکتریکی به سمت راست، از نظر ناظر $S'$ جریانهای الکتریکی هم جهت به وجود خواهد آمد که در این صورت، نیروی بین آنها جاذبهٔ مغناطیسی خواهد بود. حال، با توجه توضیحات فوق مشاهده می شود که دریک چارچوب، نیروی بین دو بار، الکتریکی بوده، اما درچارچوب دیگر این نیرو، مغناطیسی است. ازطرف دیگر می دانیم که همهٔ چارچوبهای لخت باید هم ارز باشند. بنابراین، دراینجا با این مسأله یا باطلنما روبرو هستیم که آیا نیروی بین دو بار، الکتریکی است

یا مغناطیسی؟

اکنون، مثال یا باطلنمای دیگری را مطرح می کنیم، به این صورت که: فرض کنید، در چارچوب لخت $S$، بارالکتریکی $q_۱$ با سرعت $\vec{u}_۱$ حرکت کند. در این صورت، براثرحرکت بار $q_۱$، میدان مغناطیسی $\vec{B}_۱$ در این چارچوب ایجاد می شود. حال فرض می کنیم که بارالکتریکی دیگری مانند $q_۲$، با سرعت $\vec{u}_۲$ در داخل میدان مغناطیسی حاصل از بار $q_۱$، یعنی $\vec{B}_۱$ حرکت کند. با این فرض، نیروی مغناطیسی $\vec{F}_{۱\to۲} = q_۲\vec{u}_۲ \times \vec{B}_۱$، از طرف بار $q_۱$ به بار $q_۲$ وارد خواهد شد. حال، می توان فرض کرد که چارچوب دیگری مانند $S'$، با سرعت $\vec{u}_۱$ یا $\vec{u}_۲$، نسبت به چارچوب $S$ درحرکت باشد، در این حالت می توان گفت که در چارچوب $S'$، نیروی مغناطیسی بین دو بار ظاهر نمی شود؛ زیرا اگر سرعت نسبی چارچوب $S'$ را برابر $\vec{u}_۱$ درنظر بگیریم، دراین صورت بار $q_۱$ در این چارچوب ساکن بوده و میدان مغناطیسی ایجاد نمی کند. همچنین، اگر سرعت نسبی $S'$ برابر $\vec{u}_۲$ باشد، دراین حالت، بار $q_۲$ درچارچوب $S'$ ساکن می باشد و درنتیجه نیروی مغناطیسی به آن وارد نمی شود. بنابراین، درچارچوب $S'$ درهردو حالت نیروی مغناطیسی برابر صفر خواهد بود. به این ترتیب دراینجا نیز با این باطلنما روبرو هستیم که در یک چارچوب لخت، نیروی مغناطیسی وجود دارد، اما درچارچوب لخت دیگر، نیروی مغناطیسی برابر صفر است. اما می دانیم که همهٔ چارچوبهای لخت، هم ارزند. حال باید به سؤال، جواب داده شود که آیا نیروی مغناطیسی وجود دارد یا ندارد؟

در پایان این بخش، می توان معادلات ماکسول را به طورمستقیم نیز تحت تبدیلات گالیله بررسی نمود. برای این منظور، می دانیم این معادلات درچارچوب لخت $S$، به شکل

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = o \tag{۹-۵}$$

و

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{۱۰-۵}$$

بیان می شوند. حال می توان با استفاده ازتبدیلات گالیله، این معادلات را درچارچوب لخت $S'$ به دست آورد. برای این منظور، با درنظرگرفتن تبدیلات گالیلهٔ مختصات، یعنی

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \quad , \quad t' = t \tag{۱۱-۵}$$

و با استفاده از مشتق گیری زنجیره ای

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad i, j = ۱,۲,۳ \tag{۱۲-۵}$$

می توان نشان داد که در دو چارچوب $S$ و $S'$، ارتباط بین مشتقات فضایی و زمانی با روابط

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}' \tag{۱۳-۵}$$

و

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}' \tag{۱۴-۵}$$

بیان می شوند. و درحالت خاص، یعنی هنگامی که سرعت نسبی دو چارچوب به صورت $\vec{v} = v\vec{i}$ درنظرگرفته شود، رابطهٔ (۵-۱۴)به شکل سادهٔ

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'} \tag{۱۵-۵}$$

بیان می شود. اکنون، با استفاده از روابط (۵-۱۳) و (۵-۱۵)، می توان معادلات ماکسول را در چارچوب $S'$، تحت تبدیلات گالیله به دست آورد که نتیجهٔ این تبدیل به صورت

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_\circ} \quad , \quad \vec{\nabla}'\cdot\vec{B}' = o \tag{۱۶-۵}$$

و

$$\begin{gathered} \vec{\nabla}'\times(\vec{E}' + \vec{v}\times\vec{B}') = -\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t} \\ \vec{\nabla}'\times(\vec{B}' - \frac{۱}{c^۲}\vec{v}\times\vec{E}') = \mu\vec{J}' + \frac{۱}{c^۲}\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t} \end{gathered} \tag{۱۷-۵}$$

خواهد بود. در روابط فوق $\rho' = \rho$ ، $\vec{B}' = \vec{B}$ و $\vec{E}' = \vec{E}$ بوده و همچنین چگالی جریان درچارچوب $S'$ به شکل $\vec{J}' = \vec{J} + \rho\vec{v}$ می باشد. بنابراین، مشاهده می شود که تبدیلات گالیله درچارچوب $S'$، جریانی ایجاد می کنند که درچارچوب $S$، وجود ندارد. درنتیجه، می توان گفت که شکل معادلات ماکسول تحت این تبدیلات، هموردا نبوده وتغییرمی کنند.

حال، با توجه به مثالها و باطلنماهایی که مطرح شدند، مشاهده می شود که نمی توان از تبدیلات گالیله درنظریهٔ الکترومغناطیس استفاده کرد؛ زیرا پیدا کردن جواب چنین مسائلی با

درنظر گرفتن تبدیلات گالیله ممکن نیست، و الزاماً می بایستی از تبدیلات جدیدی به جای این تبدیلات استفاده کرد. این تبدیلات جدید، درواقع همان تبدیلات لورنتس می باشند.

## ۵ - ۳ : برهم کنش بین دو ذرهٔ باردار با حرکت یکنواخت

همان طورکه قبلاً اشاره شد، اگر دو ذرهٔ باردار نسبت به یک ناظر، ساکن باشند، برهم کنش بین آنها نسبت به آن ناظر الکتریکی می باشد و اگر این ذرات نسبت ناظری دارای حرکت باشند، در این صورت برهم کنش بین بارها الکترومغناطیسی خواهد بود. دراینجا می خواهیم برهم کنش مغناطیسی[1] یا تأثیر متقابل بین دو بار متحرک را با دقت بیشتری بررسی نماییم. اما قبل از بررسی این نوع از برهم کنش بین ذرات باردار، اشاره ای مختصردرمورد برهم کنش الکتریکی[2] بین آنها می شود.

همان طورکه می دانیم، ابتدا تصور براین بودکه نیروی بین ذرات باردار، یک برهم کنش مستقیم و بی واسطه است که به طور آنی، ذرات به یکدیگر وارد می کنند. اما امروزه میدان الکتریکی یا مغناطیسی، به عنوان یک واسطه دربین ذرات باردار درنظرگرفته می شود. به این ترتیب که اگر دو ذرهٔ باردار $q_1$ و $q_2$ را درنظر بگیریم، دراین صورت، اگر بار $q_1$ ساکن باشد، یک میدان الکتریکی درفضای اطراف خود ایجاد می کند و این میدان روی ذرهٔ باردار $q_2$ اثر می گذارد که این برهم کنش به صورت نیروی $\vec{F}_{1\to 2}$ وارد بر $q_2$ ظاهر می شود. همچنین، می توان گفت که $q_1$ نیز در میدان حاصل از ذرهٔ $q_2$ قرار دارد. بنابراین، نیروی $\vec{F}_{2\to 1}$ به آن وارد می شود. این نیروها را به عنوان برهم کنش الکتریکی یا مغناطیسی بین دو ذرهٔ باردار درنظرمی گیریم. به طوری که اگر ذرات باردار نسبت به یک ناظرساکن باشند، برهم کنش بین آنها نسبت به آن ناظر،الکتریکی است. و درصورتی که ذرات باردار متحرک باشند، برهم کنش بین آنها، الکتریکی و مغناطیسی خواهد بود.

برای توضیح بیشتر، فرض کنیدکه ذرات باردار $q_1$ و $q_2$، نسبت به یک ناظر، ساکن باشند. دراین صورت، برهم کنش بین آنها الکتریکی بوده و این برهم کنش تنها به فاصلهٔ بین

---

1- Magnetic interaction 2- Electric interaction

ذرات و همچنین، به اندازهٔ دو بار بستگی خواهد داشت. درنتیجه، برهم کنش الکتریکی یا نیروی بین دو بار $q_1$ و $q_2$ از قانون کولن، یعنی رابطهٔ

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2}(\vec{r}_2) = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \tag{۱۸-۵}$$

به دست می آید که درآن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ مکان بارها را نسبت به یک ناظر، مثلاً $S$ نشان می دهند. و $\vec{F}_{1\rightarrow 2}(\vec{r}_2)$ نیز نیرویی است که از طرف بار $q_1$ به بار $q_2$ وارد می شود که این نیرو درمکان بار $q_2$ محاسبه می شود. همچنین، نیرویی که از طرف بار $q_2$ به بار $q_1$ اعمال می شود، نیز از رابطهٔ

$$\vec{F}_{2\rightarrow 1}(\vec{r}_1) = q_1 \vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} \tag{۱۹-۵}$$

به دست می آید. همان طورکه ملاحظه می شود، اندازهٔ دو نیروی $\vec{F}_{1\rightarrow 2}(\vec{r}_2)$ و $\vec{F}_{2\rightarrow 1}(\vec{r}_1)$ با هم مساوی بوده و درخلاف جهت یکدیگر می باشند. بنابراین، می توان گفت که قانون کنش و واکنش یا قانون سوم نیوتن درمورد این نوع از برهم کنشها معتبر است؛ زیرا نیروها در این حالت ایستا یا تابعی از مکان می باشند. یا به بیان دیگر، مستقل از زمان هستند.

اما برهم کنش مغناطیسی بین ذرات باردارکه ناشی ازحرکت ذرات باردار می باشد، به حرکت آنها بستگی دارد. درواقع، می توان گفت که برهم کنش مغناطیسی، یک نیروی وابسته به سرعت ذرات باردار است، یعنی دریک نقطهٔ معین از فضا، میدان مغناطیسی ذرهٔ متحرک نسبت به یک ناظر، به سرعت ذره و همین طور به فاصلهٔ ذره از ناظر بستگی دارد. براین اساس، میدانهای مغناطیسی و الکتریکی حاصل از ذرات باردار متحرک، دریک نقطهٔ معین از فضا، تابعی از زمان خواهند بود.

حال، برای توضیح بیشتر، فرض می کنیم که ذرات باردار $q_1$ و $q_2$، به ترتیب با سرعت $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$، نسبت به ناظری ساکن، مثلاً $S$ درحرکت باشند، دراین صورت، میدان مغناطیسی حاصل از بار متحرک $q_1$ در مکان $\vec{r}$، از رابطهٔ زیر به دست می آید

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1[\vec{u}_1 \times (\vec{r}-\vec{r}_1)]}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \qquad (۵-۲۰)$$

بنابراین، می توان نیروی مغناطیسی که ازطرف بار $q_1$ به بار متحرک $q_2$ وارد می شود را از رابطهٔ

$$\vec{F}_{1\to 2}(\vec{r}_2) = q_2\vec{u}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) \qquad (۵-۲۱)$$

به دست آورد. در رابطهٔ (۵-۲۱)، $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک $q_1$، در مکان بار متحرک $q_2$ یا $\vec{r}_2$ می باشد که می توان آن را از رابطهٔ (۵-۲۰) با جایگذاری $\vec{r}_2$ به جای بردار $\vec{r}$، به دست آورد. همچنین، می توان میدان مغناطیسی حاصل از بارمتحرک $q_2$ را نیز در نقطهٔ $\vec{r}$ از رابطهٔ

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\vec{u}_2 \times (\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \qquad (۵-۲۲)$$

به دست آورد. درنتیجه، نیروی مغناطیسی که بار $q_2$ به بار متحرک $q_1$، وارد می کند از رابطهٔ

$$\vec{F}_{2\to 1}(\vec{r}_1) = q_1\vec{u}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \qquad (۵-۲۳)$$

به دست می آید. در رابطهٔ (۵-۲۳) نیز $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$، میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک $q_2$، در مکان بار متحرک $q_1$ یا $\vec{r}_1$ می باشد که آن را می توان از رابطهٔ(۵-۲۲)، با جایگذاری $\vec{r}_1$ به جای $\vec{r}$ به دست آورد. اکنون، با مقایسهٔ روابط (۵-۲۱) و (۵-۲۳)، می توان دریافت که این نیروها به سرعت ذرات باردار بستگی دارد. اما نکتهٔ مهم تر اینکه نیروهای $\vec{F}_{1\to 2}(\vec{r}_2)$ و $\vec{F}_{2\to 1}(\vec{r}_1)$، نه تنها دریک راستا نیستند، بلکه اندازهٔ آنها نیز با هم برابر نمی باشد؛ زیرا نیروی $\vec{F}_{1\to 2}(\vec{r}_2)$ عمود بر $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ و $\vec{u}_2$ می باشد، درحالی که $\vec{F}_{2\to 1}(\vec{r}_1)$ عمود بر $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$ و $\vec{u}_1$ است. واضح است که اندازهٔ این نیروها نیز برابر نیست. براین اساس، قانون سوم نیوتن را نمی توان در مورد برهم کنشهای مغناطیسی به کار برد.

اکنون، اگر نیروی الکتریکی بین ذرات باردار را نیز درنظربگیریم، در این صورت، نیروی الکترومغناطیسی یا نیروی لورنتس بین ذرات باردار، به شکل

$$\vec{F}_{1\to 2}(\vec{r}_2) = q_2[\vec{E}_1(\vec{r}_2) + \vec{u}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)] \qquad (۵-۲۴)$$

و همچنین

$$\vec{F}_{2\to 1}(\vec{r}_1) = q_1[\vec{E}_2(\vec{r}_1) + \vec{u}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)] \tag{۵-۲۵}$$

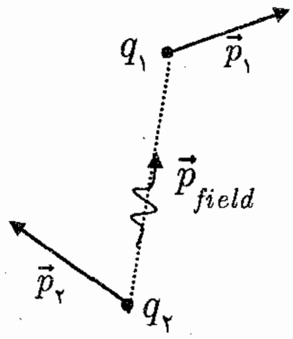
بیان می شوند. حال، با توجه به توضیحاتی که داده شد، چنین استنباط می شود که اگر ذرات باردار درحال حرکت باشند، برهم کنش آنها نمی تواند به طورآنی روی دهد. به این ترتیب که اگر بخواهیم برهم کنش از دور را برای ذرات باردار مطرح نماییم، یک راه حل این است که از مفهوم میدان استفاده کنیم. در این صورت، باید سرعتی را به انتشار برهم کنش یا انتشار میدان نسبت دهیم. بنابراین، برای اینکه برهم کنش ذرات باردار که در فاصلهٔ دوری از یکدیگر قرار دارند، به طورآنی روی دهد، دو حالت را می توان در نظرگرفت. حالت اول این است که فرض کنیم، سرعت انتشار برهم کنش یا سرعت میدان حاصل از بارها، بی نهایت باشدکه البته، این حالت را با توجه به اصل مربوط به محدود بودن سرعت انتشار علائم الکترومغناطیسی، نمی توان پذیرفت. وحالت دوم اینکه برهم کنش بین ذرات باردار، نسبت به یک ناظردریک مکان روی دهد. بنابراین هم مکان بودن دو رویداد کنش و واکنش الکترو مغناطیسی باعث می شودکه برهم کنش بین ذرات نسبت به ناظر دیگر، همزمان باشد. بنابراین، دراین دو حالت می توان قانون سوم نیوتن را در مورد برهم کنش بین ذرات باردار متحرک به کار برد.

اما نکتهٔ مهمی که دراینجا باید به آن اشاره شود، این است که اگر قانون سوم نیوتن را نتوانیم دربرهم کنشهای الکترومغناطیسی به کار بریم، دراین صورت، به نظر می آیدکه قوانین پایستگی تکانهٔ خطی و زاویه ای درمورد چنین برهم کنشهایی اعتبار ندارند؛ زیرا همان طورکه می دانیم این قوانین پایستگی، نتیجه ای از قانون سوم نیوتن(به شکل قوی و ضعیف آن) می باشند. اما برای توضیح بیشتر، عدم اعتبارظاهری این قوانین مهم پایستگی، باید دقت نماییم که هنگامی می توان، قانون پایستگی تکانهٔ خطی را برای سیستمی متشکل ازدو ذره، به صورت

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte \tag{۵-۲۶}$$

نوشت که $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$، به طورهمزمان اندازه گیری شده باشند. اما در مورد برهم کنشهای الکترومغناطیسی به دلیل همزمان نبودن برهم کنش بین ذرات باردار، نمی توان رابطه ای نظیر (۵-۲۶) نوشت. به عبارت دیگر، درحضور برهم کنشی که با سرعت محدود $c$ منتشر

می شود، اثر تأخیر زمانی[1] ایجاب می کند که آهنگ تغییرتکانهٔ یک ذره در یک زمان معین، مربوط به تغییر تکانهٔ ذرهٔ دیگردرهمان لحظه نباشد، بلکه این تغییر تکانه به لحظه ای درگذشته مربوط باشد و برعکس. براین اساس، اگر تکانهٔ مربوط به ذرات، به طور همزمان اندازه گیری نشده باشند، دراین صورت، نباید انتظار داشته باشیم که مجموع تکانهٔ ذرات، یعنی $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ثابت باشد. درنتیجه، برای برقراری قوانین مهم پایستگی تکانهٔ خطی و زاویه ای باید برهم کنشهای الکترومغناطیسی را نتیجه و پیامد تبادل تکانه، بین دو ذرهٔ باردار درنظرگرفت. بنابراین، برای برقراری قوانین پایستگی، باید تکانه ای که بین ذرات مبادله می شود، درنظر بگیریم.




**شکل (۵-۲): برهم کنش الکترو مغناطیسی بین دو ذرهٔ باردار**

اکنون، با توجه به اینکه واسطهٔ برهم کنش بین ذرات باردار، میدانها می باشند، دراین صورت، این مسئله ایجاب می کند که تکانه ای را به میدانها نسبت دهیم. به طوری که میدان، این تکانه را با سرعت محدود $c$ از یک ذره به ذرهٔ دیگر منتقل می کند. با این توضیحات، قانون پایستگی تکانهٔ خطی را باید در برهم کنشهای الکترومغناطیسی، به صورت

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{field} = cte \qquad (۵-۲۷)$$

نوشت. شکل (۵-۲). بنابراین، برای آنکه قوانین پایستگی تکانهٔ خطی و زاویه ای و همچنین، انرژی را دربرهم کنشهای الکترومغناطیسی داشته باشیم، می بایستی به میدان الکترمغناطیسی، تکانهٔ خطی و زاویه ای و همچنین انرژی معینی را نسبت دهیم.

## ۵ - ۴ : تبدیل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

همان طورکه می دانیم، براساس اصل نسبیت، همهٔ قوانین فیزیک باید درتمام چارچوبهای لخت یکسان باشند. بنابراین، دراین بخش می خواهیم ارتباط بین میدانهای الکتریکی و

---

1- Retarded time

مغناطیسی را دردو چارچوب لخت، به شکلی به دست آوریم که روابط تبدیلی اصل نسبیت را نقض نکنند. برای این منظور، می توان فرض کرد که دو بارنقطه ای $q_۱$ و $q_۲$ درچارچوب $S'$ ساکن باشند. دراین صورت، این دو بار نسبت به چارچوب $S$ متحرک خواهند بود. اکنون، می توان برهم کنش دو بار را از نظر دو ناظر $S$ و $S'$ بررسی کرد. از نظر ناظر $S'$ وضعیت ساده تر می باشد؛ زیرا دراین چارچوب، نیرو یا برهم کنش بین بارها، الکتریکی است که نیروی بین بارها را می توان از رابطهٔ

$$\vec{F}'_{۲\to۱} = q'_۱\vec{E}'_۲ \qquad (۲۸-۵)$$

به دست آورد. در رابطهٔ فوق $\vec{E}'_۲$، میدان الکتریکی ناشی از بار $q_۲$ در محل بار $q_۱$ می باشد. و $\vec{F}'_{۲\to۱}$، نیرویی است که از طرف بار ۲ به بار ۱ اعمال می شود.

حال، برهم کنش بین دو بار را از نظر ناظر $S$، بررسی می کنیم. در این چارچوب، هر دو بار الکتریکی متحرک هستند. بنابراین، بار $q_۲$، علاوه بر میدان الکتریکی $\vec{E}_۲$، میدان مغناطیسی $\vec{B}_۲$ را نیز ایجاد می کند. درنتیجه، به بار $q_۱$، که در داخل میدانهای حاصل از بار $q_۲$ درحرکت است، هم نیروی الکتریکی و هم نیروی مغناطیسی وارد می شود. این نیرو با توجه به رابطهٔ (۵-۸)، برابر

$$\vec{F}_{۲\to۱} = q_۱[\vec{E}_۲ + (\vec{v}\times\vec{B}_۲)] \qquad (۲۹-۵)$$

می باشد. اما می دانیم، سرعت نسبی دو چارچوب به صورت $\vec{v} = v\vec{i}$ می باشد. دراینجا برای راحتی در نوشتن، می توان اندیسها را کنارگذاشت. درنتیجه، داریم

$$\vec{F} = q_۱[\vec{E} + (\vec{v}\times\vec{B})] \qquad (۳۰-۵)$$

درنوشتن رابطهٔ(۵-۲۹) از ناوردایی بار الکتریکی استفاده شده است. یعنی در چارچوب $S$ و $S'$، اندازهٔ بار $q_۱$ یکسان می باشد. زیرا عدم ناوردایی بار الکتریکی، قانون پایستگی بار را نقض می کند. و نقض این قانون نیز باعث به وجود آمدن تناقضاتی در معادلات حرکت ذرات باردار درالکترودینامیک می شود. از طرف دیگر، ناوردایی بار الکتریکی را تجربه نیز تأیید می کند. به این ترتیب که اگر اندازهٔ بار الکترون به سرعت آن بستگی داشته باشد، در این صورت مولکولی که درحالت سکون خنثی است، باید درحال حرکت، دارای بارخالص

باشد که این موضوع را تجربه تأیید نمی کند و در مولکولهای خنثی با هر سرعتی که حرکت کنند، خنثی باقی می مانند. بنابراین، در روابط (۵-۲۹) و (۵-۲۹)، می توان اندازهٔ بار $q_1$ و $q'_1$ را یکسان درنظر گرفت. اکنون، رابطهٔ (۵-۳۰) را که درچارچوب $S$ نوشته شده است، می توان به برحسب مؤلفه هایش به شکل

$$F_x = q_1 E_x \quad , \quad F_y = q_1 (E_y - vB_z) \quad , \quad F_z = q_1 (E_z + vB_y) \qquad (۵-۳۱)$$

نوشت. ازطرف دیگر، درچارچوب $S'$ نیز با توجه به رابطهٔ (۵-۲۸)، وحذف اندیس $\vec{F}'$ و $\vec{E}'$ در آن، داریم

$$F'_x = q_1 E'_x \quad , \quad F'_y = q_1 E'_y \quad , \quad F'_z = q_1 E'_z \qquad (۵-۳۲)$$

حال، با استفاده از تبدیلات لورنتس نیروی ویژه، یعنی روابط(۴-۳۵۵) و (۴-۳۵۶)، می توان با جایگذاری مؤلفهٔ نیروها در دوچارچوب، در روابط(۴-۳۵۵) و (۴-۳۵۶) و حذف ضریب مشترک $q_1$ ازطرفین روابط به دست آمده، نوشت:

$$E'_x = E_x \quad , \quad E'_y = \gamma(v)[E_y - vB_z] \quad , \quad E'_z = \gamma(v)[E_z + vB_y] \qquad (۵-۳۳)$$

روابط (۵-۳۳) را تبدیلات لورنتس میدان می نامند. این تبدیلات نشان می دهند که با وجود آنکه درچارچوب $S'$ تنها میدان الکتریکی وجود دارد، اما درچارچوب $S$، هردو میدان الکتریکی و مغناطیسی قابل مشاهده می باشند. حال، برای به دست آوردن تبدیلات عکس می توان جای پریمها را تعویض کرده و سرعت $v$ را نیز به $-v$ تبدیل کرد. در این صورت، اگر درچارچوب $S'$، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ را داشته باشیم، می توان با تبدیلات عکس لورنتس، یعنی

$$E_x = E'_x \quad , \quad E_y = \gamma(v)[E'_y + vB'_z] \quad , \quad E_z = \gamma(v)[E'_z - vB'_y] \qquad (۵-۳۴)$$

میدان الکتریکی $\vec{E}$ را که ناظر $S$ مشاهده می کند، به دست آورد. تبدیلات (۵-۳۴) درحالت خاص، بیان می کنند که اگردرچارچوب لختی مانند $S'$، تنها میدان مغناطیسی وجود داشته باشد، یعنی اگر $\vec{E}' = 0$ و $\vec{B}' \neq 0$ باشد، دراین صورت، درچارچوب لخت دیگری مانند $S$، علاوه بر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی هم وجود خواهد داشت، یعنی $\vec{E} \neq 0$ و $\vec{B} \neq 0$ خواهند بود.

اکنون، می خواهیم تبدیلات میدان $\vec{B}$ را به دست آوریم. برای این منظور، می توان فرض کرد که درچارچوب $S'$، برخلاف حالت قبل، هم میدان الکتریکی وجود داشته باشد و هم میدان مغناطیسی. بنابراین، برای داشتن هردو میدان درچارچوب $S'$، فرض می کنیم که بار الکتریکی $q_۲$ دراین چارچوب متحرک باشد. در این حالت، برهم کنش بین دو بار در $S'$، الکتریکی و مغناطیسی خواهد بود. بنابراین، اگر ناظر $S'$، میدانهای $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ را مشاهده کند، دراین صورت، باید این میدانها را از دید ناظر $S$ به دست آوریم.

برای به دست آوردن این روابط، یک روش این است که مؤلفه های $\vec{E}'$ را که در رابطهٔ(۵-۳۳) بیان شده اند، در تبدیلات عکس(۵-۳۴)، جایگذاری نموده و سپس از روابط به دست آمده، مؤلفه های $\vec{B}'$، یعنی $B'_x$، $B'_y$ و $B'_z$ را محاسبه کنیم که دراین صورت، خواهیم داشت:

$$B'_x = B_x \ , \ B'_y = \gamma(v)[B_y + \frac{v}{c^۲}E_z] \ , \ B'_z = \gamma(v)[B_z - \frac{v}{c^۲}E_y] \quad (۳۵\text{-}۵)$$

تبدیلات عکس نیز برای این روابط، با تعویض جای کمیّتهای پریم دار و بدون پریم و همچنین، تبدیل سرعت نسبی $v$ به $-v$ به دست می آیند. بنابراین، داریم

$$B_x = B'_x \ , \ B_y = \gamma(v)[B'_y - \frac{v}{c^۲}E'_z] \ , \ B_z = \gamma(v)[B'_z + \frac{v}{c^۲}E'_y] \quad (۳۶\text{-}۵)$$

روابط تبدیلی (۵-۳۵) درحالت خاص، بیان می کنند که اگر درچارچوب لختی مانند $S$، تنها میدان الکتریکی خالص داشته باشیم، یعنی اگر $\vec{B} = ۰$ و $\vec{E} \neq ۰$ باشد، دراین صورت، در چارچوب لخت دیگری، مانند $S'$ علاوه بر میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی هم وجود خواهد داشت. یعنی $\vec{E}' \neq ۰$ و $\vec{B}' \neq ۰$ خواهد بود. بنابراین، با توجه به روابط تبدیلی میدانها می توان نتیجه گرفت که

**تنها چیزی که مستقل ازچارچوب مرجع لخت است، میدان الکترومغناطیسی می باشد. به طوری که این میدان ممکن است در یک چارچوب لخت، به شکل میدان خالص الکتریکی و در چارچوب لخت دیگر به صورت میدان خالص مغناطیسی ظاهر شود. بنابراین، می توان نتیجه گرفت که میدان الکترومغناطیسی ماهیّتی کاملاً نسبیتی دارد.**

روش دیگر برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس میدانهای الکتریکی و مغناطیسی این است که از تبدیلات نسبیتی نیرو، یعنی روابط(۴-۳۴۹) تا (۴-۳۵۱) استفاده نماییم.

اکنون، با توجه به رابطهٔ اول (۵-۳۳) و (۵-۳۵)، می توان نتیجه گرفت که مؤلفهٔ میدان الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ در راستای حرکت نسبی، بدون تغییر می مانند، یعنی

$$E'_x = E_x \quad , \quad B'_x = B_x \tag{۵-۳۷}$$

می باشد. از طرف دیگر می دانیم که محورهای دو چارچوب $S$و $S'$، نسبت به یکدیگر دوران نمی کنند. بنابراین، $\vec{i} \equiv \vec{i}'$، $\vec{j} \equiv \vec{j}'$ و $\vec{k} \equiv \vec{k}'$ خواهند بود. درنتیجه در $S$، داریم

$$\vec{E}_\perp = E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \quad , \quad \vec{B}_\perp = B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \tag{۵-۳۸}$$

و در چارچوب $S'$ نیز، داریم

$$\vec{E}'_\perp = E'_y\vec{j}' + E'_z\vec{k}' \quad , \quad \vec{B}'_\perp = B'_y\vec{j}' + B'_z\vec{k}' \tag{۵-۳۹}$$

بنابراین، با درنظرگرفتن اینکه $\vec{\beta} = (v/c)\vec{i}$ است، می توان از ترکیب روابط(۵-۳۳)، (۵-۳۵) و (۵-۳۷)، روابط تبدیلی بین میدانها را به صورت

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \quad , \quad \vec{E}'_\perp = \gamma(\beta)[\vec{E}_\perp + c(\vec{\beta}\times\vec{B})] \tag{۵-۴۰}$$

و

$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel \quad , \quad \vec{B}'_\perp = \gamma(\beta)[\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E})] \tag{۵-۴۱}$$

به دست آورد. حال، باتوجه به روابط (۵-۴۰)و(۵-۴۱)، می توان دو حالت خاص را در نظر گرفت.

۱- دراین حالت فرض می کنیم که درچارچوب $S$ میدان مغناطیسی صفر باشد. در نتیجه، با توجه به رابطهٔ (۵-۴۱)، خواهیم داشت:

$$\vec{B}'_\perp = -\gamma(\beta)[\frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E})] \tag{۵-۴۲}$$

بنابراین، $\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel = 0$ بوده و می توان اندیس $\perp$ را در رابطهٔ (۵-۴۲) حذف کرد.

$$\vec{B}' = -\gamma(\beta)[\frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E})] \tag{۵-۴۳}$$

حال رابطهٔ (۵-۴۳) را با در نظرگرفتن (۵-۳۳)، می توان به شکل زیر نوشت.

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E}') \tag{۵-۴۴}$$

۲ - دراین حالت فرض می کنیم که میدان الکتریکی $\vec{E}$ درچارچوب $S$ برابر صفر باشد. با این فرض، با استفاده از رابطهٔ(۵-۴۰)، داریم

$$\vec{E}'_{\perp} = c\gamma(\beta)[(\vec{\beta}\times\vec{B})] \qquad (۵\text{-}۴۵)$$

بنابراین، $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} = 0$ بوده و دراینجا نیزمی توان اندیس $\perp$ را در رابطهٔ (۵-۴۵) حذف کرد.

$$\vec{E}' = c\gamma(\beta)[(\vec{\beta}\times\vec{B})] \qquad (۵\text{-}۴۶)$$

اکنون، می توان رابطهٔ (۵-۴۵) را با توجه به (۵-۳۵)، به شکل

$$\vec{E}' = c(\vec{\beta}\times\vec{B}'))] \qquad (۵\text{-}۴۷)$$

نوشت. درنتیجه، اگر میدان $\vec{E}$ یا $\vec{B}$ در یک چارچوب برابر صفر باشد، دراین صورت، در هر چارچوب دیگری مانند $S'$ میدانها از روابط سادهٔ (۵-۴۴) و (۵-۴۷) به دست می آیند.

در پایان این بخش، لازم است اشاره شود که روابط تبدیلی (۵-۴۰) و (۵-۴۱) برای حالتی به دست آمده اندکه سرعت نسبی، یعنی $\vec{\beta}$ موازی محور مشترک $xx'$ دو چارچوب می باشد. درحالت کلی تر، یعنی هنگامی که سرعت نسبی دو چارچوب به صورت $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$، درنظرگرفته شود، روابط تبدیلی میدانها به از روابط زیر به دست می آیند.

$$\vec{E}' = \gamma(\beta)[\vec{E} + (c\vec{\beta}\times\vec{B})] - \frac{\gamma^{2}(\beta)}{\gamma(\beta)+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})\vec{\beta} \qquad (۵\text{-}۴۸)$$

و

$$\vec{B}' = \gamma(\beta)[\vec{B} - (\frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E})] - \frac{\gamma^{2}(\beta)}{\gamma(\beta)+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{B})\vec{\beta} \qquad (۵\text{-}۴۹)$$

حال، با توجه به روابط تبدیلی که برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به دست آمدند، ملاحظه می شود که این میدانها نباید به صورت دوکمیّت جدای از یکدیگر در نظر گرفته شوند. بلکه این میدانها، درحقیقت مؤلفه های موجود واحدی به نام میدان الکترومغناطیسی می باشند. نکتهٔ دیگر اینکه تجزیهٔ میدان الکترومغناطیسی به مؤلفه های آن، یعنی میدان الکتریکی و مغناطیسی، نمی تواند چیز مطلقی محسوب شود؛ زیرا باتوجه به توضیحاتی که داده شد، این امر بستگی به حرکت بارها نسبت به ناظر یا چارچوب مرجع

دارد. و خلاصه اینکه بررسی برهم کنشهای الکتریکی و مغناطیسی، به عنوان دو فرایند جدای از یکدیگر نادرست می باشد و می بایست این دو برهم کنش را به عنوان دو جنبه از برهم کنش کلی الکترومغناطیسی در نظر گرفت.

**مثال ۵ - ۱ :** روابط تبدیلی چگالی جریان و چگالی بار الکتریکی را ازیک چارچوب لخت، به چارچوب لخت دیگر را به دست آورید.

**جواب:** دراینجا ابتدا حالتی را در نظرمی گیریم که درآن توزیع بار در $S'$ ساکن است. بنابراین، دراین چارچوب چگالی جریان الکتریکی، یعنی $\vec{J}$ برابر صفرمی باشد. حال، برای به دست آوردن تبدیل لورنتس چگالی بار، می توان به صورت زیر عمل کرد. فرض می کنیم، $dV'$ که برابر $dx'dy'dz'$ می باشد، عنصرحجم درچارچوب $S'$ باشد. این عنصرحجم را با $dV_0$ نشان داده و آن را **عنصرحجم ویژه** می نامیم؛ زیرا ناظری که آن را اندازه می گیرد، نسبت به آن ساکن است. همچنین، فرض می کنیم که $dx'$ دراین چارچوب موازی سرعت نسبی دو چارچوب باشد. در این صورت، با توجه به اثر انقباض طول، داریم

$$dx = dx'\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad (۵-۵۰)$$

ازطرف دیگر، ناظر $S$، حجم $dV'$ یا $dV_0$ را برابر $dV$ اندازه می گیرد. بنابراین،

$$\begin{aligned} dV = dxdydz &= [dx'\sqrt{1-v^2/c^2}\,]dy'dz' \\ &= dV'\sqrt{1-v^2/c^2} \\ &= dV_0\sqrt{1-v^2/c^2} \end{aligned} \qquad (۵-۵۱)$$

که درآن $v$، سرعت عنصرحجم نسبت به ناظر $S$ می باشد. اکنون، با توجه به اصل ناوردایی بار الکتریکی تحت تبدیلات لورنتس، می توان نوشت: $dq = dq'$ یا $\rho dV = \rho_0 dV_0$. در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{\rho_0\, dV_0}{dV} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (۵-۵۲)$$

که درآن $\rho_0$، چگالی باروبژه است؛ زیرا درچارچوب سکون بارها اندازه گرفته می شود.

همان طورکه اشاره شد، توزیع باردرچارچوب $S'$ ایستا می باشد. درنتیجه، چگالی جریان دراین چارچوب برابرصفر است. اما این توزیع بارنسبت به چارچوب $S$، با سرعت $v$ حرکت می کند. بنابراین، دراین چارچوب، چگالی جریان را می توان با رابطهٔ $\vec{J} = \rho\vec{v}$ بیان کرد. دراین صورت، با استفاده از(۵-۵۲)، چگالی جریان درچارچوب $S$ از رابطهٔ

$$\vec{J} = \frac{\rho_\circ \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{۵-۵۳}$$

به دست می آید. در رابطهٔ فوق $\vec{v} = v\vec{i}$ می باشد. اکنون، اگر بردار چگالی جریانی $\vec{J}$ را با مؤلفه های $j_x$، $j_y$ و $j_z$ درنظر بگیریم، در این صورت، می توان نوشت:

$$j_x = \rho v_x \quad , \quad j_y = \rho v_y \quad , \quad j_z = \rho v_z \tag{۵-۵۴}$$

یا

$$j_x = \gamma(v)\rho_\circ\, v_x \;\; , \;\; j_y = \gamma(v)\rho_\circ\, v_y \;\; , \;\; j_z = \gamma(v)\rho_\circ\, v_z \tag{۵-۵۵}$$

بنابراین، با توجه به روابط فوق، مشاهده می شود که اگردریک چارچوب، صرفاً چگالی بار وجود داشته باشد، درچارچوب دیگر چگالی بار و جریان خواهیم داشت. دراینجا نتیجهٔ مهمی که می توان گرفت، این است که اگر در یک چارچوب، صرفاً چگالی بار وجود داشته باشد، در آن چارچوب تنها میدان الکتریکی داریم. اما درچارچوبهای لخت دیگر، به علت ظاهر شدن چگالی جریان، میدان مغناطیسی نیز ایجاد می شود. براین اساس، می توان گفت که میدان مغناطیسی یک پدیدهٔ کاملاً نسبیتی می باشد.

اکنون، در اینجا می توان حالت کلی تری را بررسی نمود. برای این منظور، فرض کنید که در چارچوب $S'$، علاوه بر چگالی بار $\rho'$، چگالی جریان $\vec{J}'$ نیز وجود داشته باشد. در این حالت، برای به دست آوردن روابط تبدیلی چگالیهای بار و جریان الکتریکی می توان از روابط (۵-۵۲) و (۵-۵۵)، استفاده کرد. این روابط در چارچوب $S'$ به صورت

$$\begin{aligned} j'_x &= \gamma(u')\rho_\circ\, u'_x \quad , \quad j'_y = \gamma(u')\rho_\circ\, u'_y \\ j'_z &= \gamma(u')\rho_\circ\, u'_z \quad , \quad \rho' = \gamma(u')\rho_\circ \end{aligned} \tag{۵-۵۶}$$

نوشته می شوند. در این روابط، $\vec{u}'$ سرعت بارها در چارچوب $S'$ است. این روابط درچارچوب $S$ نیز به شکل

$$j_x = \gamma(u)\rho_\circ u_x \quad , \quad j_y = \gamma(u)\rho_\circ u_y$$
$$j_z = \gamma(u)\rho_\circ u_z \quad , \quad \rho = \gamma(u)\rho_\circ \qquad (۵۷-۵)$$

بیان می شوند. حال، با استفاده از رابطهٔ(۴-۹۴)، رابطهٔ اول (۵-۵۷) را می توان به صورت

$$j_x = \gamma(u)\rho_\circ u_x = \gamma(v)\gamma(u')[1+\frac{vu'_x}{c^2}]\rho_\circ u_x$$
$$= \gamma(v)[\gamma(u')+\frac{vu'_x}{c^2}\gamma(u')]\rho_\circ u_x \qquad (۵۸-۵)$$

نوشت. اکنون، با جایگذاری مقدار $u_x$ از رابطهٔ (۲-۱۳۹) در (۵-۵۸) و با درنظرگرفتن روابط (۵-۵۶)، خواهیم داشت:

$$j_x = \gamma(v)[j'_x + \rho' v] \qquad (۵۹-۵)$$

به همین ترتیب، می توان نشان داد که

$$j_y = j'_y \quad , \quad j_z = j'_z \qquad (۶۰-۵)$$

و

$$\rho = \gamma(v)[\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x] \qquad (۶۱-۵)$$

بنابراین، روابط تبدیل از چارچوب $S$ به چارچوب $S'$ برای $\vec{J}$ و $\rho$ به صورت

$$j_x = \gamma(v)[j'_x + \rho' v]$$
$$j_y = j'_y \quad , \quad j_z = j'_z \qquad (۶۲-۵)$$
$$\rho = \gamma(v)[\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x]$$

بیان می شوند. روابط تبدیلی عکس نیز با تعویض جای پریمها و تبدیل سرعت $v$ به $-v$ به دست می آیند. بنابراین، داریم:

$$j'_x = \gamma(v)[j_x - \rho v]$$
$$j'_y = j_y \quad , \quad j'_z = j_z \qquad (۶۳-۵)$$
$$\rho' = \gamma(v)[\rho - \frac{v}{c^2} j_x]$$

**مثال ۵ – ۲** : نشان دهید که عملگر موج، یعنی رابطهٔ

$$\Box^{2} = \nabla^{2} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \qquad (۶۴\text{–}۵)$$

تحت تبدیلات لورنتس ناورداست.

جواب : با توجه به تبدیلات لورنتس(۲–۸۰) ، می توان مشتقات جزئی را با در نظر گرفتن رابطهٔ (۵–۱۲)، به دست آورد. بنابراین، مشتقات جزئی نسبت به مختصات مختلف با روابط

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma v}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t'}\\ &= \gamma[\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t'}]\end{aligned} \qquad (۶۵\text{–}۵)$$

و

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -\gamma v\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\\ &= \gamma[\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}]\end{aligned} \qquad (۶۶\text{–}۵)$$

بیان می شوند. همچنین، بامحاسبهٔ مشتق دوم روابط(۵–۶۵) و (۵–۶۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \gamma^{2}(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t'})(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t'})\\ &= \gamma^{2}(\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}} - \frac{2v}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial x'\partial t'} + \frac{v^{2}}{c^{4}}\frac{\partial^{2}}{\partial t'^{2}})\end{aligned} \qquad (۶۷\text{–}۵)$$

به همین ترتیب، داریم:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} = \gamma^{2}(v^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}} - 2v\frac{\partial^{2}}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^{2}}{\partial t'^{2}}) \qquad (۶۸\text{–}۵)$$

اکنون، با جایگذاری مشتقات دوم درعملگر موج، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} =\\ &= (\gamma^{2} - \frac{\gamma^{2}v^{2}}{c^{2}})\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y'^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z'^{2}} + (\frac{\gamma^{2}v^{2}}{c^{4}} - \frac{\gamma^{2}}{c^{2}})\frac{\partial^{2}}{\partial t'^{2}}\\ &= \gamma^{2}(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}})\frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y'^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z'^{2}} - \frac{\gamma^{2}}{c^{2}}(1 - \frac{v^{2}}{c^{2}})\frac{\partial^{2}}{\partial t'^{2}}\\ &= \frac{\partial^{2}}{\partial x'^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y'^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z'^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t'^{2}}\end{aligned} \qquad (۶۹\text{–}۵)$$

**مثال ۵ – ۳ :** نشان دهید که برای اینکه قانون پایستگی بار الکتریکی تحت تبدیلات لورنتس هموردا باشد، باید چگالیهای بار و جریان الکتریکی، مطابق روابط (۵-۶۳) تبدیل شوند.

**جواب :** می دانیم، معادلهٔ پیوستگی بار الکتریکی درچارچوب $S$، به صورت

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r},t)+\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (۵-۷۰)$$

بیان می شود .اکنون، باید ثابت کنیم که این معادلهٔ در صورتی در چارچوب $S'$ به شکل

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}'(\vec{r}',t')+\frac{\partial\rho'(\vec{r}',t')}{\partial t'}=0 \qquad (۵-۷۱)$$

نوشته می شود که چگالیهای بار وجریان مطابق روابط (۵-۶۳) تبدیل شوند. برای این منظور، کافی است که مقدار $\vec{J}$ و $\rho$ را که با روابط (۵-۶۲) داده شده اند، در رابطهٔ (۵-۷۰)، جاگذاری کرده و به رابطهٔ (۵-۷۱) در چارچوب $S'$ برسیم. بنابراین، (۵-۷۰) را می توانیم به صورت

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (۵-۷۲)$$

بنویسیم. اکنون، با استفاده از روابط تبدیلی(۵-۶۲)، وجایگذاری مؤلفه های $\vec{J}$ در رابطهٔ (۵-۷۲)، خواهیم داشت:

$$\gamma\frac{\partial}{\partial x}(j'_x+\rho' v)+\frac{\partial j'_y}{\partial y}+\frac{\partial j'_z}{\partial z}+\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\rho'+\frac{v}{c^2}j'_x)=0 \qquad (۵-۷۳)$$

حال، با استفاده از روابط (۵-۶۵) و (۵-۶۶)، و با توجه به مشتقات جزئی $\partial/\partial y=\partial/\partial y'$ و $\partial/\partial z=\partial/\partial z'$ می توان نوشت:

$$\frac{\partial j'_x}{\partial x'}+\frac{\partial j'_y}{\partial y'}+\frac{\partial j'_z}{\partial z'}+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}=0 \qquad (۵-۷۴)$$

یا

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}=0 \qquad (۵-۷۵)$$

بنابراین، معادلهٔ پایستگی بار الکتریکی نیز تحت تبدیلات لورنتس هموردا می باشد.

**مثال ۵ – ٤ :** نشان دهید که معادلهٔ سوم از معادلات (۵-۳)، یعنی قانون القای فاراده تحت تبدیلات لورنتس همورداست. به عبارت دیگر، شکل این قانون تحت این تبدیلات ناورداست.

جواب : می دانیم این قانون در چارچوب $S$ به صورت زیر بیان می شود.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (۷۶-۵)$$

بنابراین، باید نشان دهیم که این معادله درچارچوب $S'$ نیز به همین شکل نوشته می شود. یعنی

$$\vec{\nabla}'\times\vec{E}'(\vec{r}',t')=-\frac{\partial\vec{B}'(\vec{r}',t')}{\partial t'} \qquad (۷۷-۵)$$

می باشد. برای این منظور، می توانیم از رابطهٔ (۵-۷۶) شروع کرده و نشان دهیم که طرفین این رابطه تحت تبدیلات لورنتس به رابطهٔ (۵-۷۷) تبدیل می شود. بنابراین، اگر رابطهٔ (۵-۷۶) را برحسب مؤلفه های آن بنویسیم، در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\frac{\partial B_y}{\partial t}\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\end{aligned} \qquad (۷۸-۵)$$

اکنون، باید مؤلفه های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را که با روابط تبدیلی (۵-۳۴) و (۵-۳۶) بیان شده اند، در روابط (۵-۷۸) جایگذاری نماییم و سپس ازآنها نسبت به متغییرهای $x$، $y$، $z$و $t$مشتق بگیریم. برای محاسبهٔ این مشتقات باید از تبدیلات لورنتس مختصات، یعنی روابط(۲-۸۰) استفاده کنیم. اما مشتقات $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial t$ با روابط (۵-۶۵) و(۵-۶۶) بیان شده اند و با توجه به تبدیلات لورنتس برای مختصات $y$ و $z$ نیز داریم: $\partial/\partial y=\partial/\partial y'$ و $\partial/\partial z=\partial/\partial z'$. اکنون، با در نظر گرفتن این مشتقات و روابط (۵-۳۴) و (۵-۳۶)، می توان رابطهٔ اول (۵-۷۸) را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial y}[\gamma(E_z'-vB_y')]-\frac{\partial}{\partial z}[\gamma(E_y'+vB_z')]=-\frac{\partial B_x'}{\partial t} \qquad (۷۹-۵)$$

که با استفاده از روابط مربوط به مشتقات جزئی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}=v(\frac{\partial B'_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'})-\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \tag{۸۰-۵}$$

از طرف دیگر، به سادگی می توان نشان داد که در چارچوب $S'$، نیز

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}=0 \tag{۸۱-۵}$$

یا

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{B}'=0 \tag{۸۲-۵}$$

است. درنتیجه، رابطهٔ اول (۵-۷۸) به صورت

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}=-\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \tag{۸۳-۵}$$

در چارچوب $S'$ به دست می آید. به همین ترتیب، می توان نشان داد که روابط دوم و سوم (۵-۷۸)، درچارچوب $S'$ نیز به صورت

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'}-\frac{\partial E'_z}{\partial x'}=-\frac{\partial B'_y}{\partial t'} \quad , \quad \frac{\partial E'_y}{\partial x'}-\frac{\partial E'_x}{\partial y'}=-\frac{\partial B'_z}{\partial t'} \tag{۸۴-۵}$$

بیان می شوند. بنابراین، شکل قانون فاراده درگذر از یک چارچوب لخت به چارچوب لخت دیگر، تحت تبدیلات لورنتس بدون تغییر می ماند.

---

**مثال ۵ - ۵ :** فرض کنید که بارالکتریکی $q$ با سرعت یکنواخت $v$ درچارچوب آزمایشگاه یا $S$ حرکت می کند. میدان حاصل از این بار را در چارچوب سکون بار و همچنین درچارچوب $S$ به دست آورید.

**جواب :** درچارچوب سکون ذره یا $S'$، صرفاً میدان الکتریکی وجود دارد؛ زیرا در این چارچوب بار $q$ ساکن است. حال، اگرفرض کنیم که بار $q$ درمبدأ این چارچوب قرارگرفته باشد، دراین صورت، میدان الکتریکی $\vec{E}'$ در این چارچوب از رابطهٔ

$$\vec{E}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} \tag{۸۵-۵}$$

به دست می آید. برای محاسبهٔ میدانها درچارچوب $S$، می توان از معکوس روابط تبدیلی (۵-۴۰) و (۵-۴۱) استفاده کرد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$$
$$\vec{E}_{\perp} = \gamma(\beta)[\vec{E}'_{\perp} - c(\vec{\beta}\times\vec{B}')] = \gamma(\beta)\vec{E}'_{\perp} \qquad (۵\text{-}۸۶)$$

و میدان مغناطیسی نیز برابر

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0$$
$$\vec{B}_{\perp} = \gamma(\beta)[\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E}')] = \frac{1}{c}\gamma(\beta)(\vec{\beta}\times\vec{E}') \qquad (۵\text{-}۸۷)$$

می باشد. حال، با توجه به روابط (۵-۸۶) و (۵-۸۷)، می توان نتیجه گرفت که مؤلفهٔ موازی میدانها بدون تغییر می ماند. اما مؤلفهٔ عمود بر سرعت نسبی آنها به اندازهٔ ضریب $\gamma(\beta)$ افزایش می یابد. ازطرف دیگر، میدان مغناطیسی ناشی از بار متحرک، براساس رابطهٔ (۵-۸۷)، عمود بر سرعت $\vec{\beta}$ی یکنواخت بارالکتریکی می باشد. وخطوط میدان مغناطیسی دوایر بسته ای به مرکز خط یا راستای حرکت بارالکتریکی تشکیل می دهند. این مثال در بخش ۵ - ۵، به طور کامل بررسی می گردد.

---

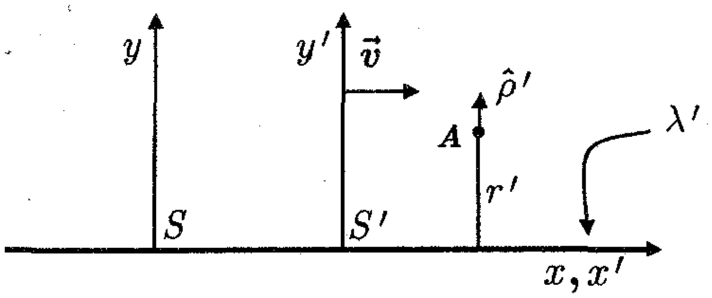
**مثال ۵ - ٦ :** مطابق شکل (۵-۳) فرض کنیدکه خط بارنامحدودی با چگالی خطی یکنواخت $\lambda'$، منطبق بر محور $x'$ چارچوب سکون خط بار یا $S'$ باشد. در این صورت، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل از این خط بار را در چارچوب آزمایشگاه یا $S$ و همچنین $S'$ به دست آورید.

**جواب :** می دانیم، درچارچوب سکون خط بار یا $S'$ بارهای الکتریکی توزیع شده روی خط بارساکن می باشند. بنابراین، در این چارچوب تنها میدان الکتریکی قابل مشاهده است. این میدان در چارچوب $S'$، از رابطهٔ

$$\vec{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'}\hat{\rho}' \qquad (۵\text{-}۸۸)$$

به دست می آید. در رابطهٔ (۵-۸۸)، بردار یکهٔ $\hat{\rho}'$ برداری شعاعی در راستای شعاع استوانه ای است که محورآن منطبق بر خط بار بوده و $r'$ نیز فاصلهٔ عمودی از خط بار در

چارچوب $S'$ می باشد.




شکل (۵-۳): میدان حاصل از خط بار $\lambda'$ در چارچوب $S$ و $S'$

اکنون، وضعیّت را در چارچوب $S$ یا آزمایشگاه بررسی می کنیم. دراین چارچوب، خط بار با سرعت $v$ در راستای محور $x$ این چارچوب حرکت می کند. بنابراین، در این چارچوب یک جریان الکتریکی در راستای محور $x$ خواهیم داشت. درنتیجه دراین چارچوب، علاوه بر میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی نیز وجود دارد. برای به دست آوردن این میدانها می توان از تبدیلات لورنتس، یعنی روابط (۵-۳۴)، استفاده کرد. درچارچوب $S'$، می توان میدان الکتریکی را درنقطه ای خاص مانند $A$ که در صفحهٔ $x'y'$ و به فاصلهٔ $y' = r'$ ازخط بار قرار دارد، به دست آورد. در این صورت، رابطهٔ (۵-۸۸) را درنقطهٔ $A$، می توان به شکل

$$E'_x = \circ \quad , \quad E'_y = \frac{\lambda'}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ r'} \quad , \quad E'_z = \circ \qquad (\text{۵-۸۹})$$

نوشت. حال، با استفاده از روابط تبدیلی(۵-۳۴) و رابطهٔ (۵-۸۹)، داریم

$$E_x = \circ \quad , \quad E_y = \gamma(v) E'_y \quad , \quad E_z = \circ \qquad (\text{۵-۹۰})$$

یا

$$E_x = \circ \quad , \quad E_y = \gamma(v) \frac{\lambda'}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ r'} \quad , \quad E_z = \circ \qquad (\text{۵-۹۱})$$

اکنون، با استفاده از معکوس روابط تبدیلی(۵-۳۵) و (۵-۸۹)، می توان نوشت:

$$B_x = B_y = \circ \quad , \quad B_z = \gamma(v) \frac{v}{c^{\text{۲}}} E'_y \qquad (\text{۵-۹۲})$$

بنابراین، با جایگذاری مقدار $E'_y$ از رابطهٔ (۵-۸۹) در رابطهٔ (۵-۹۲)، داریم

$$B_x = B_y = \circ \quad , \quad B_z = \gamma(v) \frac{v}{c^{\text{۲}}} \frac{\lambda'}{\text{۲}\pi\varepsilon_\circ r'} \qquad (\text{۵-۹۳})$$

حال، اگر خط بارمنطبق بر محور مشترک $xx'$ باشد، دراین صورت، فاصلهٔ نقطهٔ $A$ از خط باردردو چارچوب برابر خواهد بود؛ زیرا این فاصله عمود بر سرعت نسبی دو چارچوب

مـی باشـد. در پایـان بـرای بـه دسـت آوردن ارتبـاط بـین $\lambda$ و $\lambda'$، یعنـی چگـالی خطـی درچارچوب $S$ و $S'$ می توان از ناوردا بودن بارالکتریکی استفاده کـرد. بـرای ایـن منظـور، می توان عنصر باری روی خط باردر نظرگرفت. بنابراین، اندازهٔ این عنصر بار بایـد نـسبت بـه دو چارچوب یکسان باشد، یعنی $dq = dq'$. درنتیجه، می توان نوشت:

$$\lambda dx = \lambda' dx' \tag{۹۴-۵}$$

که با در نظرگرفتن اثر انقباض طول، یعنی رابطهٔ $dx = dx'\sqrt{1-\beta^2}$، داریم

$$\lambda' = \frac{\lambda dx}{dx'} = \lambda\sqrt{1-\beta^2} \tag{۹۵-۵}$$

حال، با جایگذاری مقدار $\lambda'$ در روابط (۵-۹۱) و (۵-۹۳)، خواهیم داشت:

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad , \quad E_z = 0 \tag{۹۶-۵}$$

و

$$B_x = B_y = 0 \quad , \quad B_z = \frac{v}{c^2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{۹۷-۵}$$

از طرف دیگر می دانیم، کمیّت $\lambda v$ در چارچوب $S$، برابـر جریـان الکتریکـی $I$ مـی باشـد؛ زیرا $I = dq/dt$ است که درآن $dq$ برابر $\lambda dx$ بـوده $dt = dx/v$، نیـز زمـان مربـوط بـه حرکـت بـار $dq$ بـا سـرعت $v$ بـه انـدازهٔ $dx$ مـی باشـد. همچنـین، بـا توجـه بـه رابطهٔ $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$، می توان رابطهٔ (۵-۹۷) را به شکل

$$B_x = B_y = 0 \quad , \quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{۹۸-۵}$$

نوشت که در واقع، همان رابطهٔ آشنای میـدان مغناطیسی حاصـل از یـک جریـان یکنواخـت نامحدود می باشد. بنابراین، مشاهده می کنیم که قانون آمپر با نسبیت سازگار است.

**مثال ۵ - ۷ :** فرض کنیدکه درچارچوب آزمایشگاه یا $S$، یک میدان الکترومغناطیـسی عمود برهم برقرارشده باشد، به طوری که $\vec{E} = E\vec{j}$ و $\vec{B} = B\vec{k}$ باشـند. دراین صـورت، میـدانهای الکتریکـی و مغناطیسی را درچـارچوب $S'$ بـه دسـت آوریـد. سـرعت نـسبی دو چارچوب را برابر $v = E/B$ درنظر بگیرید.

**جواب :** در چارچوب $S$ داریم:

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = E \quad , \quad E_z = 0 \tag{۵-۹۹}$$

و

$$B_x = 0 \quad , \quad B_y = 0 \quad , \quad B_z = B \tag{۵-۱۰۰}$$

حال با استفاده از تبدیلات لورنتس(۵-۳۳) و (۵-۳۵)، داریم:

$$E'_x = 0 \quad , \quad E'_y = \gamma(v)[E - vB] \quad , \quad E'_z = 0 \tag{۵-۱۰۱}$$

و

$$B'_x = 0 \quad , \quad B'_y = 0 \quad , \quad B'_z = \gamma(v)[B - \frac{v}{c^2}E] \tag{۵-۱۰۲}$$

اکنون، با قرار دادن $v = E/B$ در روابط(۵-۱۰۱) و (۵-۱۰۲)، خواهیم داشت:

$$E' = 0 \quad , \quad B' = B'_z = B\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{۵-۱۰۳}$$

بنابراین، مشاهده می کنیم که درچارچوب $S'$ میدان الکتریکی صفر بوده و میدان مغناطیسی دراین چارچوب نیز کوچکتر از میدان مغناطیسی در چارچوب $S$می باشد و میدانها نیز در دو چارچوب هم جهت هستند.

## ۵ - ۵ : میدان حاصل از یک بارنقطه ای با حرکت یکنواخت

همان طور که می دانیم، جریان الکتریکی باعث ایجاد میدان مغناطیسی می شود. بنابراین، می توان گفت که یک بار الکتریکی متحرک نیز باید میدان مغناطیسی ایجاد کند؛ زیرا جریان الکتریکی در واقع، ناشی از جریان یا حرکت بارهای الکتریکی می باشد. دراینجا ابتدا میدان حاصل از یک بار الکتریکی متحرک را که دارای حرکت یکنواخت می باشد، در حالت غیر نسبیتی بررسی نموده و سپس مسأله را درحالت نسبیتی پی می گیریم.

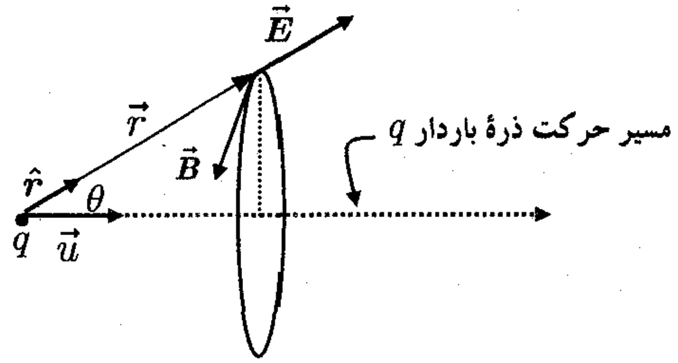
برای به دست آوردن میدان مغناطیسی ناشی از بار الکتریکی $q$ که با سرعت یکنواخت و غیر نسبیتی $\vec{u}$، حرکت می کند، می توان از قانون بیو ـ ساوار استفاده کرد. بر اساس این قانون، میدان مغناطیسی بارمتحرک $q$ را درحالت غیر نسبیتی، می توان از رابطهٔ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{u} \times \vec{r}}{r^3} \tag{۵-۱۰۴}$$

به دست آورد. در رابطهٔ فوق، $\vec{u}$ سرعت بارالکتریکی و بردار $\vec{r}$، مکان نقطهٔ مشاهدهٔ میدان را نشان می دهد. اندازهٔ میدان مغناطیسی نیز از رابطهٔ

$$B = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{qusin\theta}{r^۲} \qquad (۵-۱۰۵)$$

به دست می آید و جهت آن نیز باتوجه به شکل(۵-۴) بر بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{u}$ عمود می باشد. بنابراین، خطوط نیروی مغناطیسی دوایری هستند که مرکز آنها منطبق برخط یا راستای حرکت بار $q$ می باشند. همچنین با توجه به رابطهٔ(۵-۱۰۵)، اندازهٔ میدان مغناطیسی در راستای حرکت بار صفرمی باشد و در صفحه ای که شامل بار الکتریکی بوده و بر راستای حرکت بارعمود است، بیشینه است.




شکل (۵-۴) : میدان الکتریکی و مغناطیسی حاصل از ذرهٔ باردار $q$ در حرکت یکنواخت و غیر نسبیتی

میدان الکتریکی حاصل از بار $q$ نیز از رابطهٔ

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۳} \qquad (۵-۱۰۶)$$

به دست می آید. حال برای به دست آوردن ارتباط بین میدان الکتریکی و مغناطیسی، می توان روابط(۵-۱۰۵) و (۵-۱۰۶) با هم ترکیب کرده و رابطهٔ

$$\vec{B} = \mu_\circ\,\varepsilon_\circ\,\vec{u}\times\vec{E} = \frac{۱}{c^۲}\vec{u}\times\vec{E} \qquad (۵-۱۰۷)$$

را به دست آورد. بنابراین، مشاهده می شود که بارالکتریکی متحرک، علاوه بر میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی نیز ایجاد می کند که ارتباط بین این میدانها به وسیلهٔ رابطهٔ (۵-۱۰۷)، برقرار می شود. درنتیجه، می توان گفت که این میدانها دو جنبه از یک ماهیّت اساسی و ذاتی ماده می باشند. درحقیقت، برای بررسی پدیده هایی که درآنها با بارهای الکتریکی متحرک مواجه هستیم، می بایستی ازکمیّت یا موجود واحدی به نام میدان

الکترومغناطیسی استفاده نماییم. ازطرف دیگر، تجربه نشان می دهد، درحالتی که بارالکتریکی $q$ دارای سرعت یکنواخت و نسبیتی است، روابط (۵-۱۰۴) و (۵-۱۰۶)، برای میدانها نمی توانند درست باشند. بنابراین، باید این روابط برای حالت نسبیتی تعمیم داده شوند. یعنی باید روابطی را برای میدان الکتریکی و مغناطیسی به دست آوریم که شامل سرعتهای نسبیتی نیز بشود. به عبارت دیگر، این روابط باید درگسترهٔ سرعت صفر تا سرعتهای نسبیتی دارای اعتبار باشند. رای این منظور، فرض کنید که مطابق شکل (۵ - ۵) ذرهٔ باردار $q$ درچارچوب $S$، با سرعت $v$ درجهت مثبت محور $x$ این چارچوب درحرکت باشد. همین طور فرض کنید که چارچوب $S'$، دارای سرعت نسبی $v$ (برابر سرعت ذرهٔ باردار) درجهت محور مشترک $xx'$ باشد. در این صورت، می توان با استفاده از تبدیلات لورنتس، میدان حاصل از بار $q$ را به دست آورد.

در چارچوب سکون ذرهٔ باردار، یعنی $S'$، اگر ذرهٔ باردار در مبدأ این چارچوب باشد، همان طور که می دانیم، دراین چارچوب میدان مغناطیسی برابر صفر بوده و تنها میدان الکتریکی مشاهده می شود. بنابراین، داریم

$$\vec{E}'(\vec{r}') = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q\vec{r}'}{r'^۳} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{q}{r'^۲}\hat{r}' \quad , \quad \vec{B}' = ۰ \qquad (۵\text{-}۱۰۸)$$

اکنون می توان با استفاده از وارون تبدیلات لورنتس، یعنی روابط (۵-۳۴) و (۵-۳۶)، میدان الکتریکی و مغناطیسی را درچارچوب $S$، به دست آورد. این تبدیلات به صورت

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x \\ E_y &= \gamma(v)(E'_y + \beta c B'_z) \\ E_z &= \gamma(v)(E'_z - \beta c B'_y) \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۱۰۹)$$

و

$$\begin{aligned} B_x &= B_x{}' \\ B_y &= \gamma(v)[B'_y - \beta E'_z/c] \\ B_z &= \gamma(v)[B'_z + \beta E'_y/c] \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۱۱۰)$$

می باشند. اکنون، باتوجه به اینکه درچارچوب $S'$، میدان مغناطیسی برابر صفر است، در

نتیجه میدان $\vec{E}$، با توجه به روابط (۵-۱۰۹)، درچارچوب $S$، از روابط

$$E_x = E'_x \quad , \quad E_y = \gamma(v)E'_y \quad , \quad E_z = \gamma(v)E'_z \qquad (۵\text{-}۱۱۱)$$

به دست می آیند. میدان $\vec{B}$ نیز دراین چارچوب، با توجه به روابط (۵-۱۱۰)، برابر

$$B_x = ۰ \quad , \; B_y = -\beta\gamma(v)E'_z/c \quad , \quad B_z = +\beta\gamma(v)E'_y/c \qquad (۵\text{-}۱۱۲)$$

می باشند. حال، با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۰۸)، باید مؤلفه های $\vec{E}'$ را در چارچوب $S'$، به دست آوریم. در این صورت، رابطهٔ (۵-۱۰۸) را می توان به شکل

$$\vec{E}'(x',y',z') = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')}{(x'^۲ + y'^۲ + z'^۲)^{۳/۲}} \qquad (۵\text{-}۱۱۳)$$

نوشت. اکنون، با توجه به تبدیلات مختصات لورنتس، یعنی روابط(۲-۷۹) ، و با استفاده از روابط (۵-۱۱۱) و (۵-۱۱۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q\gamma(v)[x-\beta ct]}{۴\pi\varepsilon_۰\,(\gamma^۲(v)[x-\beta ct]^۲ + y^۲ + z^۲))^{۳/۲}} \\ E_y &= \frac{qy}{۴\pi\varepsilon_۰\,(\gamma^۲(v)[x-\beta ct]^۲ + y^۲ + z^۲))^{۳/۲}} \\ E_z &= \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰\,(\gamma^۲(v)[x-\beta ct]^۲ + y^۲ + z^۲))^{۳/۲}} \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۱۱۴)$$

به همین ترتیب، مؤلفه های میدان مغناطیسی نیز با توجه به روابط (۵-۱۱۲) و (۵-۱۱۳)، به صورت:

$$\begin{aligned} B_x &= o \\ B_y &= \frac{۱}{c}\beta\gamma(v)E'_z = \frac{-vq\gamma(v)z}{۴\pi\varepsilon_۰ c^۲\,(\gamma^۲(v)[x-\beta ct]^۲ + y^۲ + z^۲))^{۳/۲}} \\ B_z &= \frac{۱}{c}\beta\gamma(v)E'_y = \frac{vq\gamma(v)y}{۴\pi\varepsilon_۰ c^۲\,(\gamma^۲(v)[x-\beta ct]^۲ + y^۲ + z^۲))^{۳/۲}} \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۱۱۵)$$

به دست می آیند. ازطرف دیگر، در چارچوب $S$، با توجه به شکل(۵-۵)، فاصلهٔ ذرهٔ باردار از نقطهٔ مشاهدهٔ میدان، یعنی $\vec{r}$ برابر

$$\begin{aligned} \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_۱ &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - (vt\vec{i} + y_۱\vec{j} + z_۱\vec{k}) \\ &= (x-\beta ct)\vec{i} + (y-y_۱)\vec{j} + (z-z_۱)\vec{k} \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۱۱۶)$$

می باشد. حال، برای ساده سازی ، فرض می کنیم، $y_1 = z_1 = 0$ باشد، بنابراین، داریم:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} = \frac{1}{R^3} = \frac{1}{[(x-\beta ct)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \qquad (117\text{-}5)$$

در نتیجه، مخرج کسر در روابط مربوط به مؤلفه های میدان، برابر

$$\begin{aligned} &\frac{1}{[\gamma^2(v)[x-\beta ct]^2 + y^2 + z^2)]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\gamma^3(v)[(x-\beta ct)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\gamma^3(v)[R^2 - \beta^2(y^2+z^2)]^{3/2}} \end{aligned} \qquad (118\text{-}5)$$

به دست می آید. ازطرف دیگر، چون $\vec{\beta}\cdot\vec{R} = \beta(x-\beta ct)$ است، بنابراین، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \beta^2(y^2+z^2) &= \beta^2 R^2 - (\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2 \\ &= \beta^2 R^2[1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2] \end{aligned} \qquad (119\text{-}5)$$

که در آن $\hat{R}$ و $\hat{\beta}$، بردارهای یکه می باشند و به صورت $\hat{R} = \vec{R}/|R|$ و $\hat{\beta} = \vec{\beta}/\beta$، تعریف می شوند. درنهایت، باجایگذاری مقدار (۵-۱۱۹) در (۵-۱۱۸)، می توا ن به دست آورد

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma^3(v)[R^2 - \beta^2(y^2+z^2)]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\gamma^3(v)R^3[1-\beta^2(1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2)]^{3/2}} \end{aligned} \qquad (120\text{-}5)$$

اکنون، برای به دست آوردن میدان الکتریکی درچارچوب $S$، کافی است که مقدار رابطهٔ (۵-۱۲۰) را در (۵-۱۱۴) جایگذاری کنیم، در این صورت، خواهیم داشت:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[(x-\beta ct)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}]}{R^3\gamma^2[1-\beta^2(1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2)]^{3/2}} \qquad (121\text{-}5)$$

یا

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y,z) &= \frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{1}{\gamma^2[1-\beta^2(1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2)]^{3/2}} \\ &= \frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{1-\beta^2}{[1-\beta^2(1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2)]^{3/2}} \end{aligned} \qquad (122\text{-}5)$$

همچنین، اگر فرض کنیم که زاویهٔ بین $\hat{\beta}$ و $\hat{R}$ برابر $\psi$ باشد، در این صورت، رابطهٔ (۵-۱۲۲) را می توان به صورت

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 sin^2\psi)^{3/2}} \qquad (۵\text{-}۱۲۳)$$

نوشت. از طرف دیگر، میدان مغناطیسی نیز با استفاده از روابط (۵-۱۱۵) یا وارون رابطهٔ دوم (۵-۴۱) به دست می آید که نتیجه، برابر

$$B_x=B'_x=0 \quad , \quad \vec{B}_\perp=\gamma(v)\frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E}'_\perp) \qquad (۵\text{-}۱۲۴)$$

خواهد بود. حال، با توجه به رابطهٔ (۵-۱۱۱)، $\vec{E}'_\perp$ برابر $\vec{E}_\perp\big/\gamma(v)$ می باشد. در نتیجه، رابطهٔ (۵-۱۲۴) را می توان به صورت

$$\vec{B}_\perp=\frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E}_\perp) \qquad (۵\text{-}۱۲۵)$$

نوشت. همچنین، با توجه به اینکه $B_x=B'_x=0$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{B}=\frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 cR^3}\frac{(\vec{\beta}\times\vec{R})}{\gamma^2\left[1-\beta^2\left(1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2\right)\right]^{3/2}} \qquad (۵\text{-}۱۲۶)$$

یا

$$\vec{B}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 cR^3}\frac{(\vec{\beta}\times\vec{R})}{\gamma^2\left[1-\beta^2\left(1-(\hat{\beta}\cdot\hat{R})^2\right)\right]^{3/2}} \qquad (۵\text{-}۱۲۷)$$

در نتیجه:

$$\vec{B}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 cR^3}\frac{(\vec{\beta}\times\vec{R})}{\gamma^2\left[1-\beta^2 sin^2\psi)\right]^{3/2}} \qquad (۵\text{-}۱۲۸)$$

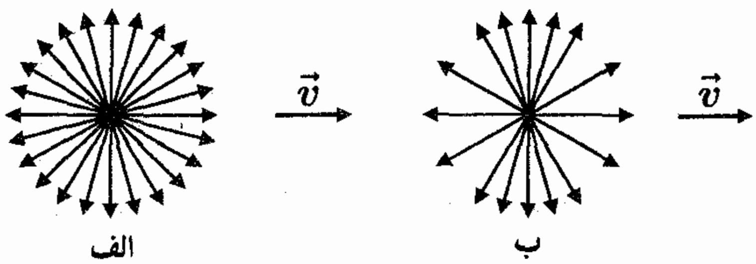
به دست می آید. اکنون، با درنظر گرفتن نتایج به دست آمده، می توان دو حالت حدی یا خاص را مورد بررسی قرار داد. برای این منظور، با توجه به روابط (۵-۱۲۳) و (۵-۱۲۸)، اگر $\beta\to 0$ میل کند، میدان الکتریکی به رابطهٔ $\vec{E}\to q\vec{R}\big/4\pi\varepsilon_0 R^3$ میل می کند. بنابراین، در این حالت، میدان الکتریکی حاصل از بار $q$ دارای تقارن کروی خواهد بود. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ نیز به سمت صفر میل می کند. همچنین، درحد سرعتهای معمولی، یعنی هنگامی که $\beta \ll 1$ باشد، دراین حالت با توجه به رابطهٔ (۵-۱۲۸)، و با در نظر گرفتن

رابطهٔ $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$، برای میدان مغناطیسی عبارت

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\vec{\beta}\times\vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(\vec{u}\times\vec{R})}{R^3} \qquad (۵-۱۲۹)$$

به دست می آید که در واقع همان قانون بیو-ساوار است.

اکنون، اگر اندازهٔ میدان الکتریکی درچارچوب $S$، برحسب زاویهٔ $\psi$ بررسی شود، می توان اثر حرکت ذرهٔ باردار $q$ را روی خطوط میدان حاصل از آن را مشاهده نمود. با توجه به شکل(۵-۵)، درحالتی که $\hat{R} \parallel \hat{\beta}$ است، یا به عبارت دیگر، اگر $\psi = 0$ یا $\psi = \pi$ باشد، دراین صورت، با توجه به رابطهٔ (۵-۱۲۳)، اندازهٔ میدان الکتریکی کوچکترین مقدار را خواهد داشت.



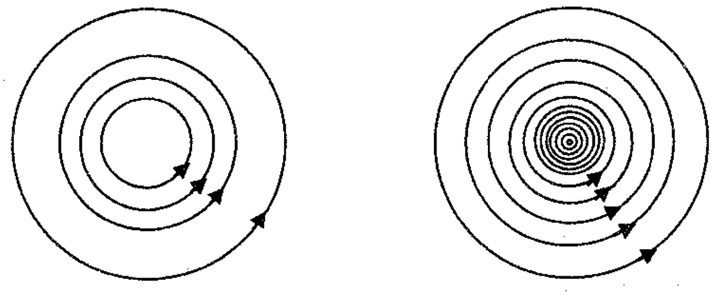

شکل (۵-۶): میدان الکتریکی حاصل از بار متحرک در چارچوب $S$ یا آزمایشگاه؛ الف: بار در حال سکون یا دارای حرکت غیر نسبیتی است.
ب: بارالکتریکی دارای سرعت نسبیتی است.

همچنین، درحالتی که $\psi = \pi/2$ باشد، دراین حالت اندازهٔ میدان الکتریکی بیشترین مقدار را خواهد داشت. ازطرف دیگر، در صورتی $\psi$ برابر صفر یا $\pi$ خواهد بود که ناظر $S$، یا به عبارت دیگر، نقطهٔ مشاهدهٔ میدان در امتداد خط حرکت ذرهٔ باردار قرارگیرد. در این حالت، زاویهٔ $\psi$ برابر صفر یا $\pi$ می باشد. همچنین، اگر نقطهٔ مشاهدهٔ میدان در راستای عمود بر مسیرحرکت ذرهٔ باردار $q$ در نظرگرفته شود، در این حالت، زاویهٔ $\psi$ برابر $\pi/2$ خواهد شد و اندازهٔ میدان الکتریکی با توجه به رابطهٔ (۵-۱۲۳)به کمترین مقدارکاهش می یابد.

شکل(۵-۶)، خطوط میدان الکتریکی حاصل از ذرهٔ باردار متحرک را درچارچوب $S$ یا آزمایشگاه، برای حالتی که سرعت ذره، نسبیتی و غیر نسبیتی باشد، نشان می دهد.

همچنین، شکل(۵-۷) خطوط میدان مغناطیسی را برای ذرهٔ بارداری که با سرعت یکنواخت در راستای عمود بر صفحهٔ کتاب و به سمت بیرون صفحه درحرکت است، نشان می دهد. با توجه به شکل(۵-۷)، خطوط میدان مغناطیسی به شکل دوایری هستند که مرکز

آنها روی خط حرکت ذرهٔ باردار می باشد. در اینجا ذرهٔ باردار مثبت می باشد، درنتیجه جهت خطوط میدان مغناطیسی با استفاده از قانون دست راست، درخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت خواهد بود. در شکل(۵-۷) الف، خطوط میدان مغناطیسی برای حالتی است که ذرهٔ باردار در پشت صفحهٔ کتاب است و هنوز به صفحهٔ کتاب نرسیده است. و میدان در روی خط حرکت ذره صفر می باشد. و درشکل(۵-۷) ب، ذرهٔ باردار بر روی صفحهٔ کتاب است و میدان در مرکز آن نامتناهی است.



ب الف

**شکل (۵-۷) : خطوط میدان مغناطیسی ناشی از ذرهٔ باردار متحرک که با سرعت یکنواخت در راستای عمود بر صفحهٔ کتاب و به سمت خارج آن در حرکت است. الف : بار الکتریکی در پشت صفحهٔ کتاب است. ب : بار الکتریکی در روی صفحهٔ کتاب می باشد.**

بنابراین، درشکل(۵-۷) ب، با توجه به رابطهٔ(۵-۱۲۸)، می توان گفت که $\psi = \pi/2$ می باشد. و در شکل(۵-۷) الف، زاویهٔ $\psi$ روی خط حرکت ذرهٔ باردار، برابر صفر است. درنتیجه، میدان مغناطیسی روی خط یا راستای حرکت ذرهٔ باردار کمترین مقدار، یعنی صفر می باشد. این نتیجه را می توان با در نظرگرفتن رابطهٔ (۵-۱۲۸) نیز به دست آورد؛ زیرا در رابطهٔ (۵-۱۲۸)، درحالتی که $\psi = 0$ باشد، $\hat{R} \parallel \hat{\beta}$ بوده و $\vec{\beta} \times \vec{R} = 0$ می شود.

---

**مثال ۵ - ۸ :** فرض کنیدکه درچارچوب مرجع $S$، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت، $\vec{E} = E_0 \vec{i}$ و $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$ برقرار باشند. همچنین، فرض کنید که اندازهٔ میدان $\vec{B}$ برابر $2E_0/c$ باشد. دراین صورت، چارچوبی مانند $S'$ را بیابید، به طوری که در آن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی موازی یکدیگر باشند.

**جواب :** فرض می کنیم که سرعت نسبی چارچوب $S'$ نسبت به چارچوب $S$،

درجهت محور $z$ باشد، یعنی اگر $\vec{v} = v\vec{k}$ یا $\vec{k} \parallel \vec{\beta}$ باشد، دراین صورت، $\vec{\beta}\cdot\vec{E} = \vec{\beta}\cdot\vec{B} = ۰$ خواهد بود. بنابراین، روابط تبدیل میدان با توجه به روابط (۵-۴۸) و (۵-۴۹)، به صورت

$$\vec{E}' = \gamma(\beta)[\vec{E} + (c\vec{\beta}\times\vec{B})] \qquad (۵\text{-}۱۳۰)$$

و

$$\vec{B}' = \gamma(\beta)[\vec{B} - \frac{۱}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E})] \qquad (۵\text{-}۱۳۱)$$

به دست می آیند. از طرف دیگر، درچارچوب $S$ نیز، داریم

$$\vec{E} = E_\circ \vec{i} \quad , \quad \vec{B} = (۲E_\circ/c)[cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j}] \qquad (۵\text{-}۱۳۲)$$

بنابراین، با توجه به روابط (۵-۱۳۰) و (۵-۱۳۱) و همچنین با درنظرگرفتن $\vec{\beta} = \beta\vec{k}$، داریم

$$\vec{E}' = \gamma(\beta)[E_\circ(۱ - ۲\beta sin\theta)\vec{i} + (۲E_\circ\beta cos\theta)\vec{j}] \qquad (۵\text{-}۱۳۳)$$

و

$$\vec{B}' = \gamma(\beta)[(۲E_\circ/c)cos\theta\,\vec{i} - \frac{E_\circ}{c}(۲sin\theta - \beta)\vec{j})] \qquad (۵\text{-}۱۳۴)$$

اکنون، با توجه به روابط(۵-۱۳۳) و (۵-۱۳۴)، می توان نتیجه گرفت که

$$\vec{B}' = B'_x\,\vec{i}' + B'_y\,\vec{j}' \quad , \quad \vec{E}' = E'_x\,\vec{i}' + E'_y\,\vec{j}' \qquad (۵\text{-}۱۳۵)$$

حال، باید $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$ باشد، بنابراین با درنظرگرفتن روابط(۵-۱۳۳) و (۵-۱۳۴)، می توان نوشت:

$$tan\theta' = \frac{(۲sin\theta - \beta)}{۲cos\theta} = \frac{(۲\beta cos\theta)}{(۱ - ۲\beta sin\theta)} \qquad (۵\text{-}۱۳۶)$$

یا

$$۲\beta^۲ sin\theta - ۵\beta + ۲sin\theta = ۰ \qquad (۵\text{-}۱۳۷)$$

که با حل این .معادله به دست می آوریم

$$\beta = \frac{۱}{۴\,sin\theta}\left[۵ - \sqrt{۲۵ - ۱۶\,sin^۲\theta}\right] \qquad (۵\text{-}۱۳۸)$$

در رابطهٔ (۵-۱۳۸)، باید دقت شود که علامت مثبت کنار گذاشته می شود؛ زیرا $\beta$

باید کوچکتر از ۱ باشد. اکنون، با توجه به رابطهٔ (۵–۱۳۸)، می توان با در نظر گرفتن $\theta$های مختلف، $\beta$های متفاوتی را به دست آورد. به عنوان مثال اگر $\theta = \pi/۴$ باشد، دراین صورت، با توجه به رابطهٔ (۵–۱۳۸)، $\beta$ برابر ۰/۳۱ به دست می آید. به عبارت دیگر، اگر ناظر $S'$، با سرعت $\vec{\beta} = ۰/۳۱\,\vec{k}$ حرکت کند، از نظر این ناظر زاویه ای که میدانهای موازی $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ با محور $x'$ چارچوب $S'$ می سازند، با توجه به رابطهٔ (۵–۱۳۶)، برابر $\theta' = ۳۷/۹۵^{\circ}$ درجه خواهد بود.

## ۵ - ۶ : حرکت ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

حرکت یک ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت را می توان در دو حالت مختلف مورد بررسی قرار داد. درحالت اول، فرض می کنیم که ذرهٔ باردار بدون سرعت اولیه در داخل میدان یکنواخت رها شود. درحالت دوم، ذرهٔ بار دار با سرعت اولیهٔ $\vec{u}$ به داخل میدان یکنواخت پرتاب می شود. دراینجا این دو حالت را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می دهیم.

### الف : حرکت ذرهٔ باردار در داخل میدان الکتریکی یکنواخت ـ بدون سرعت اولیه

اگر این مسأله را بخواهیم درحالت غیرنسبیتی یا با در نظر گرفتن ملاحظات مکانیک نیوتنی حل کنیم، به روابط حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت می رسیم. یعنی اگر فرض کنیم که میدان الکتریکی درجهت محور $x$ باشد، سرعت و مکان ذرهٔ باردار، به ترتیب از روابط $u = at$ و $x = at^۲/۲$ به دست می آیند. شتاب ذره نیز برابر $a = qE_{\circ}/m_{\circ}$ خواهد بود. اما اگر این مسأله درحالت نسبیتی بررسی شود، روابطی به دست می آیند که با نتایج حالت کلاسیک کاملاً متفاوت می باشند. برای حل مسأله در حالت نسبیتی، فرض کنید که ذرهٔ باردار $q$ بدون سرعت اولیه درمبدأ مختصات چارچوب $S$ یا آزمایشگاه قرار داده شود. در این صورت، اگر میدان الکتریکی را به شکل $\vec{E} = E_{\circ}\,\vec{i}$ در نظر بگیریم، در این حالت معادلهٔ حرکت ذره، با توجه به رابطهٔ (۴–۲۹) به صورت

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = qE_{\circ}\,\vec{i} \qquad (۵\text{–}۱۳۹)$$

یا

$$m_\circ \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = qE_\circ \qquad (۱۴۰-۵)$$

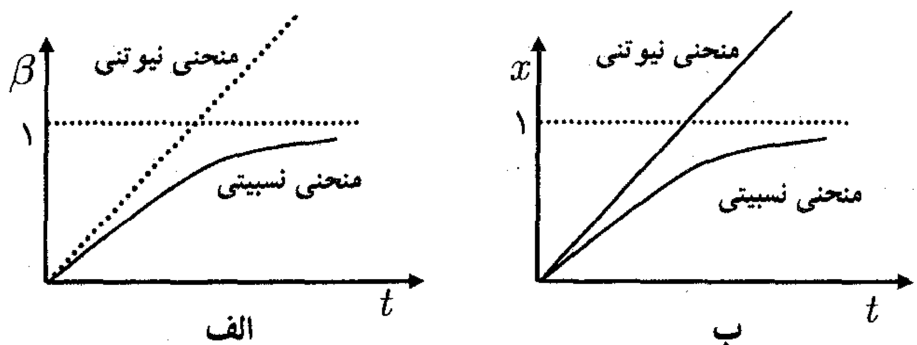
بیان می شود که درآن $\beta = u/c$ می باشد. حال، با انتگرالگیری از طرفین رابطهٔ (۵-۱۴۰)، و با توجه به اینکه در $t=\circ$ سرعت اولیهٔ ذره برابر صفر است، می توان به دست آورد

$$\frac{m_\circ \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = qE_\circ t \qquad (۱۴۱-۵)$$

بنابراین، سرعت ذرهٔ باردار به صورت

$$\beta = \left(\frac{qE_\circ t}{m_\circ c}\right)\left[1+(qE_\circ t/m_\circ c)^2\right]^{1/2} \qquad (۱۴۲-۵)$$

به دست می آید. درشکل (۵-۸)، تغییرات $\beta$ برحسب زمان رسم شده است. شکل، تقریب نیوتنی و منحنی نسبیتی مربوط به سرعت ذره را نشان می دهد. برای به دست آوردن تقریب نیوتنی، می توان در رابطهٔ(۵-۱۴۲)، از مقدار $(qE_\circ t/m_\circ c)^2$ در زیر رادیکال، در زمانهای مربوط به شروع حرکت ذره، درمقایسه با ۱ صرف نظرکرد. به عبارت دیگر، برای $t$ های بسیارکوچک، $(qE_\circ t/m_\circ c)^2 \ll 1$ می باشد. درنتیجه، رابطهٔ (۵-۱۴۲)، با توجه به این تقریب به رابطهٔ نیوتنی $u = (qE_\circ/m_\circ)t$ تبدیل می شود.




شکل (۵-۸) : الف، تغییرات سرعت ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت برحسب زمان ب : تغییرات مکان ذره نسبت به زمان

از طرف دیگر، برای $t$ های بسیار بزرگ، $(qE_\circ t/m_\circ c)^2 \gg 1$ خواهد بود. بنابراین، به ازای $t$ های بسیار بزرگ، از رابطهٔ (۵-۱۴۲) می توان نتیجه گرفت که $\beta \to 1$ میل می کند. همچنین، با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۴۲)، می توان انرژی نسبیتی ذرهٔ باردار را برای $t$ های بسیار بزرگ نیز به دست آورد که در این صورت، خواهیم داشت:

$$\mathcal{E} = \frac{m_\circ c^۲}{\sqrt{۱-\beta^۲}} \simeq \frac{m_\circ c^۲}{\sqrt{(m_\circ c/qE_\circ t)^۲}} \simeq qE_\circ ct \qquad (۱۴۳-۵)$$

در رابطهٔ فوق از $\mathcal{E}$ به جای $E$ برای انرژی ذرهٔ باداراستفاده شده است تا با میدان الکتریکی اشتباه نشود. رابطهٔ (۵-۱۴۳)، درواقع، یک حد بالا را برای انرژی ذره نشان می دهد. به عبارت دیگر، در $t$های بسیار بزرگ، انرژی نسبیتی ذره به صورت خطی افزایش یافته، اما نامتناهی نمی گردد. همچنین، تکانهٔ نسبیتی ذرهٔ باردار نیز به ازای $t$های بزرگ، برابر

$$p = \frac{m_\circ \beta c}{\sqrt{۱-\beta^۲}} \simeq qE_\circ t \qquad (۱۴۴-۵)$$

خواهد بود. حال، برای محاسبهٔ مکان ذرهٔ باردار برحسب زمان نیز می توان از رابطهٔ (۵-۱۴۲) استفاده کرد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$x(t) = (\frac{m_\circ c^۲}{qE_\circ})[\sqrt{۱+(qE_\circ t/m_\circ c)^۲} - ۱] \qquad (۱۴۵-۵)$$

دراینجا نیزمی توان با بسط رادیکال داخل کروشه وحذف جملات بالاتر به ازای $t$های کوچک، به رابطهٔ کلاسیک $x(t) = (qE_\circ t^۲/۲m_\circ)$ رسید. همچنین، برای $t$های بزرگ می توان دررابطهٔ (۵-۱۴۵) از ۱ درمقایسه با جملهٔ $(qE_\circ t/m_\circ c)^۲$ صرف نظر کرد. دراین صورت، مکان ذرهٔ باردار از رابطهٔ $x = ct - (m_\circ c^۲/qE_\circ)$ به دست می آید. شکل (۵-۸) ب، تغییرات $x(t)$ را برحسب زمان نشان می دهد.

### ب : حرکت ذره باردار درداخل میدان الکتریکی یکنواخت ـ با سرعت اولیه

دراین حالت، فرض می کنیم که ذرهٔ باردار با سرعت اولیه به داخل یک میدان الکتریکی یکنواخت پرتاب شود. دراینجا نیز اگر مسأله، درحالت غیر نسبیتی حل شود، یک حرکت پرتابی ساده خواهیم داشت که معادلهٔ مسیر ذره به صورت یک سهمی خواهد بود. اما درحالت نسبیتی، مسأله کمی پیچیده ترمی باشد.

برای حل مسأله در این حالت، فرض کنید که میدان الکتریکی یکنواخت با

رابطهٔ $\vec{E} = E_\circ \vec{j}$ داده شود و ذرهٔ باردار $q$، با سرعت اولیهٔ $\vec{u} = u_{\circ x} \vec{i} + u_{\circ y} \vec{j}$ بـه داخـل میدان پرتاب شود. دراین حالت، معادلهٔ حرکت ذره با توجه به رابطهٔ(۵-۸) یا (۴-۲۹)، به صورت

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} = qE_\circ \vec{j} \qquad (۵-۱۴۶)$$

خواهد بود. حال، دراینجا باتوجه به اینکه میدا الکتریکی و سرعت اولیهٔ ذره، مؤلفه ای در امتداد محور $z$ ندارند، بنابراین می توان نتیجه گرفت که حرکت در صفحهٔ $xy$ صورت می گیرد. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{dp_y}{dt} = qE_\circ \quad , \quad \frac{dp_x}{dt} = \circ \qquad (۵-۱۴۷)$$

در نتیجه،

$$p_y = qE_\circ t \quad , \quad p_x = p_{\circ x} = cte \qquad (۵-۱۴۸)$$

از طرف دیگر، انرژی کل ذره بدون در نظرگرفتن انرژی پتانسیل ناشی از میدان الکتریکی، برابر

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{(pc)^۲ + (m_\circ c^۲)^۲} \\ &= \sqrt{(p_{\circ x} c)^۲ + (qE_\circ tc)^۲ + (m_\circ c^۲)^۲} \qquad (۵-۱۴۹) \\ &= \sqrt{\mathcal{E}_\circ^۲ + (qE_\circ tc)^۲} \end{aligned}$$

خواهد بود که در آن $\mathcal{E}_\circ^۲$، با رابطهٔ $\mathcal{E}_\circ^۲ = (p_{\circ x} c)^۲ + (m_\circ c^۲)^۲$، داده می شود. دراین بخش نیز انرژی ذره را به جای $E$ با $\mathcal{E}$ نشان می دهیم، تا با میدان الکتریکی در نمادگذاری اشتباه نشود. حال، باتوجه به اینکه از طرف میدان الکتریکی به ذرهٔ باردار نیرو وارد می شود. بنابراین، مقدارکاری که میدان الکتریکی روی ذره انجام می دهد، باعث تغییر انرژی آن می گردد.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F}_{elec} \cdot \vec{u} = q\vec{E} \cdot \vec{u} \qquad (۵-۱۵۰)$$

یا

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = qE_\circ u_y = qE_\circ \frac{dy}{dt} \qquad (۵-۱۵۱)$$

در نتیجه، می توان نوشت:

$$\int_{\mathcal{E}_\circ}^{\mathcal{E}} d\mathcal{E} = qE_\circ \int_\circ^y dy \qquad (۵-۱۵۲)$$

حال، با انتگرالگیری از رابطهٔ فوق، داریم

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\circ + qE_\circ y \tag{۱۵۳-۵}$$

اکنون، باستفاده از روابط(۵-۱۴۹) و (۵-۱۵۳)، می توان زمان $t$ و $y(t)$ را به دست آورد.

$$t = \frac{۱}{qE_\circ c}\sqrt{(\mathcal{E}_\circ + qE_\circ y)^۲ - \mathcal{E}_\circ^۲} \tag{۱۵۴-۵}$$

و

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{۱}{qE_\circ}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_\circ) \\ &= \frac{\mathcal{E}_\circ}{qE_\circ}[\sqrt{۱ + (qcE_\circ t)^۲/\mathcal{E}_\circ^۲} - ۱] \end{aligned} \tag{۱۵۵-۵}$$

اکنون، برای به دست آوردن معادلهٔ مسیر می توان به صورت زیر عمل کرد.

$$\begin{aligned} \frac{p_y}{p_x} &= \frac{\gamma(u)m_\circ u_y}{\gamma(u)m_\circ u_x} = \frac{u_y}{u_x} \\ &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{۱۵۶-۵}$$

حال، با جایگذاری مقدار $p_x$ و $p_y$، از رابطهٔ (۵-۱۴۸) در (۵-۱۵۶)، به دست می آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x} = \frac{qE_\circ t}{p_{\circ x}} \tag{۱۵۷-۵}$$

که با جایگذاری مقدار $t$ از رابطهٔ (۵-۱۵۴) در(۵-۱۵۷)، خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{p_{\circ x} c}\sqrt{(\mathcal{E}_\circ + qE_\circ y)^۲ - \mathcal{E}_\circ^۲} \tag{۱۵۸-۵}$$

یا

$$\frac{۱}{p_{\circ x} c}dx = \frac{dy}{\sqrt{(\mathcal{E}_\circ + qE_\circ y)^۲ - \mathcal{E}_\circ^۲}} \tag{۱۵۹-۵}$$

حال، با انتگرالگیری ازطرفین رابطهٔ (۵-۱۵۹)، می توان به دست آورد:

$$\frac{۱}{p_{\circ x} c}\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{(\mathcal{E}_\circ + qE_\circ y)^۲ - \mathcal{E}_\circ^۲}} \tag{۱۶۰-۵}$$

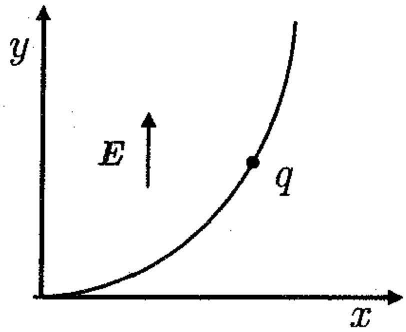
درنتیجه، داریم

$$\frac{x}{p_{\circ x} c} = \frac{۱}{qE_\circ} cosh^{-۱}(\frac{qE_\circ y}{\mathcal{E}_\circ}) + C \tag{۱۶۱-۵}$$

اکنون، برای محاسبهٔ ثابت انتگرالگیری $C$ در رابطهٔ (۵-۱۶۱) می توان از شرط اولیه، یعنی $x_\circ = y_\circ = \circ$ استفاده کرد. درنهایت، معادلهٔ مسیر ذره پس از به دست آوردن ثابت انتگرال گیری و جایگذاری آن در رابطهٔ (۵-۱۶۱) به صورت

$$y = \frac{\mathcal{E}_\circ}{qE_\circ}[cosh(\frac{qE_\circ x}{p_{\circ x} c}) - ۱] \qquad (۱۶۲\text{-}۵)$$

به دست می آید. شکل (۵- ۹)، منحنی مسیرحرکت ذره نشان می دهد.




**شکل (۵-۹): منحنی مسیر ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت**

از طرف دیگر، می توان مختصهٔ $x(t)$ مسیرحرکت ذره را نیز به دست آورد. برای این منظور، می توان از رابطهٔ (۴-۱۱۶)، یعنی رابطهٔ

$$u_x = \frac{p_{\circ x}}{\mathcal{E}} c^۲ \qquad (۱۶۳\text{-}۵)$$

استفاده کرد. حال، با استفاده از رابطهٔ (۵-۱۴۹)، می توان مقدار $\mathcal{E}$ را در رابطهٔ فوق جایگذاری کرد. در این صورت، خواهیم داشت:

$$u_x = \frac{p_{\circ x}}{\mathcal{E}} c^۲ = \frac{p_{\circ x} c^۲}{\sqrt{\mathcal{E}_\circ^۲ + (qE_\circ ct)^۲}} \qquad (۱۶۴\text{-}۵)$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_{\circ x} c^۲}{\sqrt{\mathcal{E}_\circ^۲ + (qE_\circ ct)^۲}} \qquad (۱۶۵\text{-}۵)$$

حال، با ضرب طرفین رابطهٔ (۵-۱۶۵) در $dt$ و انتگرالگیری از طرفین آن، داریم

$$\int_\circ^x dx = \int_\circ^t \frac{p_{\circ x} c^۲}{\sqrt{\mathcal{E}_\circ^۲ + (qE_\circ ct)^۲}} dt \qquad (۱۶۶\text{-}۵)$$

که در این صورت $x(t)$ ذره به صورت:

$$x(t) = (\frac{p_{\circ x}\, c}{qE_\circ}) sinh^{-1} [\frac{qE_\circ\, ct}{\mathcal{E}_\circ}] \qquad (۱۶۷-۵)$$

به دست می آید. به همین ترتیب، می توان برای به دست آوردن معادلهٔ مسیر ذرهٔ باردار، پارامتر $t$ را از روابط (۵- ۱۵۵) و (۵-۱۶۷) حذف نمود. برای این منظور، می بایستی $t$ را از رابطهٔ (۵-۱۶۷) به دست آورده و در(۷- ۱۵۵) جایگذاری کرد. درنتیجه، با این کار می توان رابطهٔ (۵-۱۶۲) را به دست آورد. اکنون، بعد از به دست آوردن معادلهٔ مسیر، می توان مسأله را در دو حالت حدی زیر بررسی نمود.

**الف : حرکت ذرهٔ باردار درلحظات اولیهٔ حرکت**

برای لحظه های اولیهٔ حرکت ذرهٔ باردار، یعنی هنگامی که $qE_\circ\, ct \ll \mathcal{E}_\circ$ یا $(qE_\circ\, ct/\mathcal{E}_\circ) \ll ۱$ است، می توان $x(t)$ و $y(t)$ را به تقریب به دست آورد. برای این منظور، با استفاده از رابطهٔ (۵- ۱۶۷)، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} x(t) &= (\frac{p_{\circ x}\, c}{qE_\circ}) sinh^{-1} [\frac{qE_\circ\, ct}{\mathcal{E}_\circ}] \\ &\simeq (\frac{p_{\circ x}\, c}{qE_\circ})(\frac{qE_\circ\, ct}{\mathcal{E}_\circ}) \simeq \frac{۱}{\mathcal{E}_\circ} p_{\circ x}\, c^{۲} t \end{aligned} \qquad (۱۶۸-۵)$$

و همچنین، برای $y(t)$ نیز با استفاده از رابطهٔ (۵- ۱۵۵)، داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\mathcal{E}_\circ}{qE_\circ} [\sqrt{۱ + (qcE_\circ\, t)^{۲} / \mathcal{E}_\circ^{۲}} - ۱] \\ &\simeq \frac{\mathcal{E}_\circ}{qE_\circ} [۱ + \frac{۱}{۲} \frac{(qcE_\circ\, t)^{۲}}{\mathcal{E}_\circ^{۲}} - ۱] \qquad (۱۶۹-۵) \\ &\simeq \frac{۱}{۲} \frac{qE_\circ}{\mathcal{E}_\circ} (ct)^{۲} \end{aligned}$$

اکنون، با حذف $t$ از روابط (۵- ۱۶۸) و (۵- ۱۶۹)، معادلهٔ مسیر برای زمانهای کوچک یا لحظات اولیهٔ حرکت ذرهٔ باردار درمیدان الکتریکی یکنواخت به دست می آید.

$$y(x) \simeq \frac{۱}{۲} \frac{qE_\circ\, \mathcal{E}_\circ}{(p_{\circ x}\, c)^{۲}} x^{۲} \qquad (۱۷۰-۵)$$

که در واقع معادلهٔ یک سهمی می باشد.

**ب : حرکت ذرهٔ باردار بعد از گذشت زمان طولانی**

در این حالت، $qE_\circ ct \gg \mathcal{E}_\circ$ یا $(qE_\circ ct/\mathcal{E}_\circ) \gg ۱$ می باشد. بنابراین، $x(t)$ با توجه به رابطهٔ (۵- ۱۶۷)، به تقریب برابر

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (\frac{p_{\circ x}c}{qE_\circ})sinh^{-۱}[\frac{qE_\circ ct}{\mathcal{E}_\circ}] \\
&= (\frac{p_{\circ x}c}{qE_\circ})Ln[\frac{qE_\circ ct}{\mathcal{E}_\circ}+\sqrt{(qE_\circ ct/\mathcal{E}_\circ)^۲+۱}] \qquad (۱۷۱\text{-}۵) \\
&\simeq (\frac{p_{\circ x}c}{qE_\circ})Ln[\frac{۲qE_\circ ct}{\mathcal{E}_\circ}]
\end{aligned}
$$

خواهد بود. همچنین، $y(t)$ نیز در این حالت با توجه به رابطهٔ (۵- ۱۵۵)، برابر

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\mathcal{E}_\circ}{qE_\circ}[\sqrt{۱+(qcE_\circ t)^۲/\mathcal{E}_\circ^۲}-۱] \\
&\simeq \frac{\mathcal{E}_\circ}{qE_\circ}\frac{(qcE_\circ t)}{\mathcal{E}_\circ} \simeq ct
\end{aligned} \qquad (۱۷۲\text{-}۵)
$$

به دست می آید. اکنون، برای به دست آوردن معادلهٔ مسیر در این حالت می توان $t$ را از روابط (۵- ۱۷۱) و (۵- ۱۷۲) حذف کرد که در این صورت، خواهیم داشت:

$$
y(x) \simeq (\frac{\mathcal{E}_\circ}{۲qE_\circ})exp[\frac{qE_\circ x}{p_{\circ x}c}] \qquad (۱۷۳\text{-}۵)
$$

در نتیجه، در این حالت، یعنی برای $t$های بزرگ، معادلهٔ مسیر ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی یکنواخت به صورت نمایی خواهد بود.

در پایان این بخش، افزایش نسبی سرعت ذره را برحسب افزایش نسبی انرژی آن بررسی می کنیم. برای این منظور، می توان از رابطهٔ

$$
\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_\circ^۲+(pc)^۲} \qquad (۱۷۴\text{-}۵)
$$

استفاده کرد. حال،اگراز رابطهٔ (۵- ۱۷۴)، سرعت ذره را به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$
u = c\sqrt{[۱-\mathcal{E}_\circ^۲/\mathcal{E}^۲]} \qquad (۱۷۵\text{-}۵)
$$

اکنون، می توان از طرفین رابطهٔ (۵- ۱۷۵)، $Ln$ گرفت. دراین صورت، داریم

$$
Lnu = Lnc + \frac{۱}{۲}Ln[۱-\mathcal{E}_\circ^۲/\mathcal{E}^۲] \qquad (۱۷۶\text{-}۵)
$$

و با دیفرانسیل گیری از این رابطه، به دست می آوریم

$$\frac{du}{u}=\frac{\mathcal{E}_\circ^{2}}{\mathcal{E}^{2}-\mathcal{E}_\circ^{2}}\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \tag{۱۷۷-۵}$$

ازطرف دیگرمی دانیم که اگر سرعت و انرژی ذره به ترتیب به اندازهٔ $du$ و $d\mathcal{E}$ تغییر کنند، در این صورت، تغییرات نسبی در سرعت و انرژی ذره، با روابط $du/u$ و $d\mathcal{E}/\mathcal{E}$ بیان می شوند. حال، اگر انرژی کل ذره، یعنی $\mathcal{E}$ از انرژی سکون ذره، یعنی $\mathcal{E}_\circ$، خیلی بزرگ باشد، دراین حالت می توان در رابطهٔ (۵- ۱۷۷) از $\mathcal{E}_\circ$ در مقایسه با $\mathcal{E}$ صرف نظر کرد. بنابراین، دراین حالت، رابطهٔ (۵- ۱۷۷) را می توان به صورت

$$\frac{du}{u}\simeq\frac{\mathcal{E}_\circ^{2}}{\mathcal{E}^{2}}\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \tag{۱۷۸-۵}$$

نوشت. ازطرف دیگر، به دلیل آنکه $\mathcal{E}_\circ^{2}/\mathcal{E}^{2}$، همیشه کوچکتر از یک است، درنتیجه، در انرژیهای بالا تغییر نسبی در سرعت، درمقایسه با تغییر نسبی در انرژی بسیارکوچک خواهد بود. به عبارت دیگر، درانرژیهای بالا ممکن است بتوانیم انرژی ذره را به مقدار زیادی افزایش دهیم، اما این مقدار افزایش در انرژی، افزایش قابل ملاحظه ای را درسرعت ذره ایجاد نمی کند.

همان طور که می دانیم، درحالت غیر نسبیتی، انرژی جنبشی یک ذره با رابطهٔ $k=m_\circ u^{2}/2$ بیان می شود. بنابراین، سرعت ذره در این حالت از رابطهٔ $u=\sqrt{(2k/m_\circ)}$ به دست می آید. اکنون، با محاسبه ای مشابه حالت نسبیتی، می توان رابطهٔ $dk/k=2du/u$ را برای حالت کلاسیک به دست آورد. درنتیجه درحالت غیر نسبیتی یا کلاسیک، افزایش نسبی درانرژی جنبشی ذره، باعث افزایش نسبی در سرعت ذره، با ضریب ۲ می گردد. همچنین، می توان با استفاده از رابطهٔ (۵- ۱۷۴) نشان داد که $d\mathcal{E}/\mathcal{E}\simeq dp/p$ می باشد.

**مثال ۵ - ۹ :** ذرهٔ بارداری به جرم سکون $m_\circ$ و بار $q$، بدون سرعت اولیه، تحت تأثیر اختلاف پتانسیل $\Delta U$ قرار می گیرد. سرعت ذرهٔ باردار دراین اختلاف پتانسیل چقدر است؟

**جواب :** با توجه به اینکه تغییر انرژی کل ذره برابر کار نیروی اعمال شده به ذره است، بنابراین، می توان نوشت:

$$W = \Delta k = q\Delta U \qquad (۱۷۹-۵)$$

از طرف دیگر، از رابطهٔ (۴-۵۶) داریم:

$$\Delta k = \gamma(v)m_0 c^2 - m_0 c^2 = q\Delta U \qquad (۱۸۰-۵)$$

حال، با محاسبهٔ سرعت $v$ی ذره از رابطهٔ (۵-۱۸۰)، خواهیم داشت:

$$v = \frac{1}{1 + q\Delta U/m_0 c^2}\sqrt{(2q\Delta U/m_0)(1 + q\Delta U/2m_0 c^2)} \qquad (۱۸۱-۵)$$

اکنون، با توجه به رابطهٔ فوق، اگر $q\Delta U \ll m_0 c^2$ باشد، دراین صورت، می توان نوشت:

$$v = \sqrt{2q\Delta U/m_0}\,[1 - (3q\Delta U/4m_0 c^2)] \ll c \qquad (۱۸۲-۵)$$

و اگر $q\Delta U \gg m_0 c^2$ در نظرگرفته شود، دراین حالت

$$v = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_0 c^2}{q\Delta U}\right)^2\right] \approx c \qquad (۱۸۳-۵)$$

خواهد بود.

## ۵ ـ ۷ : حرکت ذره باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت

دراین بخش، حرکت یک ذرهٔ باردار را در میدان مغناطیسی یکنواخت بررسی می کنیم. برای این منظور، فرض کنید که ذرهٔ باردار $q$ با جرم سکون $m_0$، با سرعت $\vec{u}$ به داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت، مانند $\vec{B} = B_0\vec{k}$، پرتاب شود. دراین صورت، معادلهٔ حرکت ذرهٔ باردار با توجه به رابطهٔ(۵-۸) یا (۴-۲۹)، به شکل

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left[\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right] \qquad (۱۸۴-۵)$$

نوشته می شود که درآن میدان $\vec{E}$ برابرصفر است. ازطرف دیگر، باتوجه به رابطهٔ (۴-۴۱)، داریم

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{u}\cdot\vec{E} \qquad (۱۸۵-۵)$$

دراین بخش نیز برای آنکه میدان الکتریکی $E$، با انرژی ذره درنمادگذاری اشتباه نشود، انرژی ذره را با $\mathcal{E}$ نشان می دهیم. بنابراین، با درنظرگرفتن اینکه میدان الکتریکی برابر صفر است، روابط(۵-۱۸۴) و (۵-۱۸۵) را می توان به صورت

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{u}\times\vec{B} \quad , \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \qquad (۱۸۶-۵)$$

نوشت که در آن $\vec{p} = m_\circ \gamma(u)\vec{u}$ و $\mathcal{E} = m_\circ c^۲ \gamma(u)$ می باشند. همچنین، از رابطهٔ دوم (۵-۱۸۶) می توان نتیجه گرفت که $\mathcal{E}$ مقداری ثابت است. و از رابطهٔ $\mathcal{E} = m_\circ c^۲ \gamma(u)$ می توان نتیجه گرفت که $\gamma(u)$ ثابت می باشد. درنهایت، از ثابت بودن $\gamma(u)$، می توان نتیجه گرفت که $u$، سرعت ذره نیز ثابت است. نتیجه اخیر با این واقعیت که نیروی مغناطیسی، عمود بر سرعت ذره است وکاری انجام نمی دهد و نهایتاً اینکه در انرژی ذرهٔ باردار تغییری به وجود نمی آورد، سازگار می باشد. اکنون، با توجه به ثابت بودن ضریب $\gamma(u)$، و با در نظرگرفتن اینکه نیروی دیگری بجز نیروی مغناطیسی به ذره وارد نمی شود، (از نیروی وزن ذره صرف نظر می کنیم، زیرا در مقایسه با این نیرو بسیارکوچک است.) در این صورت، می توان معادلهٔ حرکت ذره را به شکل

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q\vec{u} \times \vec{B}}{m_\circ \gamma(u)} \qquad (۵-۱۸۷)$$

یا

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u} \times \vec{\omega}_b \qquad (۵-۱۸۸)$$

نوشت، $\vec{\omega}_b$ در رابطهٔ فوق به صورت

$$\vec{\omega}_b = \frac{q\vec{B}}{m_o \gamma(u)} = \frac{q c^۲ \vec{B}}{m_\circ \gamma(u) c^۲} \qquad (۵-۱۸۹)$$

یا

$$\vec{\omega}_b = \frac{q c^۲ \vec{B}}{\mathcal{E}} \qquad (۵-۱۹۰)$$

تعریف می شود. $\omega_b$ در رابطهٔ (۵-۱۹۰)، فرکانس زاویه ای یا سیکلوترون[1] حرکت تقدیمی[2] نامیده می شود. حال، با توجه به رابطهٔ (۵-۱۹۰)، $\vec{\omega}_b$ درجهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$، بوده و $\mathcal{E}$ نیزانرژی کل ذره می باشد. لازم به یاد آوری است که مقداری که از رابطهٔ (۵-۱۹۰) برای $\omega_b$ به دست می آید، به طور تجربی در شتابدهنده های ذرات (سیکلوترون و سنکروترون[3]... ) تأیید شده است.

1- Cyclotron frequency 2- Precessional motion
3 -Synchrotron

از طرف دیگر، از رابطهٔ (۵-۱۸۸) می توان نتیجه گرفت که ذرهٔ باردار حول خطوط میدان مغناطیسی، دارای حرکت دایره ای یکنواخت بوده و درامتداد خطوط میدان نیز دارای یک حرکت انتقالی یکنواخت می باشد. به عبارت دیگر، ذرهٔ باردار از ترکیب این دو حرکت یکنواخت، دارای یک حرکت مارپیچی[1] در امتداد خطوط میدان مغناطیسی خواهد بود.

اکنون، برای به دست آوردن معادلهٔ مسیر ذره، می توان از رابطهٔ (۵- ۱۸۷) استفاده کرد. در این صورت، از این رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= u_y B_z = u_y B_\circ \\ \frac{dp_y}{dt} &= -u_x B_z = -u_x B_\circ \\ \frac{dp_z}{dt} &= \circ \end{aligned} \tag{۱۹۱-۵}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{qB_\circ}{m_\circ \gamma(u)} u_y = \omega_b u_y \\ \frac{du_y}{dt} &= -\frac{qB_\circ}{m_\circ \gamma(u)} u_x = -\omega_b u_x \\ \frac{dp_z}{dt} &= \circ \Rightarrow m_\circ \gamma(u) \frac{du_z}{dt} = \circ \end{aligned} \tag{۱۹۲-۵}$$

از معادلهٔ سوم رابطهٔ فوق می توان نتیجه گرفت که $u_z = u_{\circ z}$ مقداری ثابت است. در نهایت، با استفاده از تعریف $\omega_b$، یعنی رابطهٔ (۵- ۱۹۰) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{u}_x - \omega_b u_y &= \circ \\ \dot{u}_y + \omega_b u_x &= \circ \end{aligned} \tag{۱۹۳-۵}$$

حال، برای به دست آوردن $u_x$ و $u_y$ ازمعادلات جفت شدهٔ (۵- ۱۹۳)، می توان به صورت زیر عمل کرد. ابتدا رابطهٔ دوم (۵- ۱۹۳) را در $i$ ضرب کرده و سپس دو رابطه را با یکدیگر جمع می کنیم. در این صورت، به دست می آید

$$(\dot{u}_x + i\dot{u}_y) + i\omega_b (u_x + iu_y) = \circ \tag{۱۹۴-۵}$$

1- Helical motion

حال، با تعریف $\xi$، به صورت $\xi = u_x + iu_y$، خواهیم داشت:

$$\dot{\xi} + i\omega_b \xi = 0 \qquad (۱۹۵\text{-}۵)$$

همان طور که می دانیم، جواب معادلهٔ (۵- ۱۹۵)، به صورت

$$\xi(t) = Ae^{-i\omega_b t} = A(\cos\omega_b t - i\sin\omega_b t) \qquad (۱۹۶\text{-}۵)$$

می باشد. اکنون، با در نظر گرفتن تعریف $\xi$، داریم:

$$u_x = A\cos\omega_b t \quad , \quad u_y = -A\sin\omega_b t \qquad (۱۹۷\text{-}۵)$$

بنابراین، سرعت ذرهٔ باردار درجهت عمود بر میدان مغناطیسی، برابر

$$\begin{aligned} \vec{u}_\perp &= u_x\vec{i} + u_y\vec{j} \\ &= A(\cos\omega_b t\,\vec{i} - \sin\omega_b t\,\vec{j}) \end{aligned} \qquad (۱۹۸\text{-}۵)$$

به دست می آید.حال، برای به دست آوردن مقدارثابت $A$، باید از شرط اولیه استفاده شود. برای این منظور، اگر درلحظهٔ $t = 0$، اندازهٔ سرعت ذره درراستای عمود بر $\vec{B}$، برابر $u_{0\perp}$ باشد، در این صورت با توجه به رابطهٔ (۵- ۱۹۸)، مقدارثابت $A$ برابر $u_{0\perp}$ خواهد بود. در نتیجه، سرعت ذره را می توان با رابطهٔ

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_{0z}\vec{k} \\ &= u_{0\perp}(\cos\omega_b t\,\vec{i} - \sin\omega_b t\,\vec{j}) + u_{0z}\vec{k} \end{aligned} \qquad (۱۹۹\text{-}۵)$$

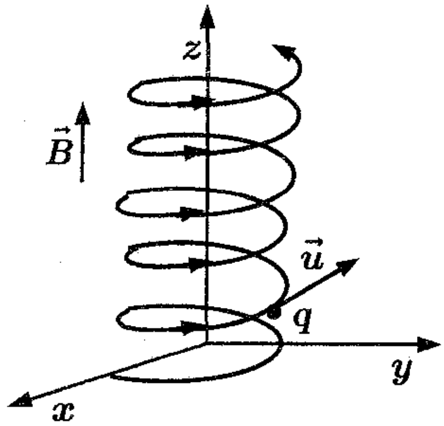
بیان کرد. ازطرف دیگر، برای به دست آوردن مسیرحرکت ذرهٔ باردار، می توان از رابطهٔ (۵- ۱۹۹) انتگرال گرفت. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\vec{r}(t) = \frac{u_{0\perp}}{\omega_b}[\sin\omega_b t\,\vec{i} + (\cos\omega_b t - 1)\,\vec{j}] + u_{0z}t\vec{k} + \vec{r}_0 \qquad (۲۰۰\text{-}۵)$$

که در آن $\vec{r}_0$، بردارمکان اولیهٔ ذره می باشد. رابطهٔ (۵- ۲۰۰)، نشان می دهد که ذرهٔ باردار با سرعت زاویه ای $\omega_b$، حول محور $z$ یا $\vec{B}$ درخلاف جهت حرکت عقربه های ساعت دوران می کند. در نتیجه، مسیرحرکت ذرهٔ باردار به صورت یک مارپیچ به شعاع $a$ خواهد بود.

شکل (۵-۱۰)، منحنی مسیر حرکت ذرهٔ باردار را نشان می دهد. درشکل، ذرهٔ باردارحول خطوط میدان مغناطیسی دارای یک حرکت دایره ای یکنواخت بوده و در امتداد

محور $z$ نیز دارای حرکت انتقالی یکنواخت می باشد.




شکل(۵-۱۰) : مسیر حرکت ذرهٔ باردار $q$ در میدان مغناطیسی یکنواخت

برای به دست آوردن شعاع دوران[1]، یعنی $a$ می توان از رابطهٔ $u_{\circ\perp} = a\,\omega_b$ استفاده کرد. در نتیجه، شعاع مارپیچ[2]، یعنی $a$ به صورت

$$a = \frac{u_{\circ\perp}}{\omega_b} = \frac{u sin\alpha}{qB} m_\circ \gamma(u) \qquad (۲۰۱-۵)$$

یا

$$a = \frac{m_\circ\, u sin\alpha}{qB\sqrt{1-\beta_u^2}} \qquad (۲۰۲-۵)$$

به دست می آید که درآن $\alpha$، زاویهٔ بین سرعت اولیهٔ ذره و میدان مغناطیسی است. به عبارت دیگر، زاویهٔ بین سرعت اولیهٔ ذره و محور $z$ می باشد که زاویهٔ گام نامیده می شود. گام مارپیچ[3]، نیز با رابطهٔ

$$d = u_{\circ z}\, T = \frac{2\pi m_\circ\, (u cos\alpha)}{qB}\sqrt{1-\beta_u^2} \qquad (۲۰۳-۵)$$

بیان می شود. اکنون، دراینجا می توان کمیّت دیگری به نام تکانهٔ عرضی $p_\perp$ یا تکانه ای که عمود بر میدان مغناطیسی است، تعریف نمود. این تکانه به صورت

$$Ba = \frac{p_\perp}{q} \qquad (۲۰۴-۵)$$

تعریف می شود. رابطهٔ (۵-۲۰۴)، نشان می دهد که حاصلضرب $B$ در شعاع دوران $a$، برابر نسبت تکانهٔ نسبیتی عرضی ذره بر بار آن است. $p_\perp$ نیز برابر $m_\circ\,\gamma(u)u_\perp$ می باشد.

1- Radius of gyration 2- Radius of helix
3-Pitch of helical

کمیّت $Ba$ راسختی مغناطیسی[1] ذره می نامند. از طرف دیگر، می توان با تعیین شعاع دایره ای که ذرهٔ باردار $q$ در یک میدان یکنواخت معین $B$ طی می کند، تکانهٔ نسبیتی ذره را به دست آورد. استفاده از رابطهٔ (۵- ۲۰۴)، برای تعیین تکانهٔ یک ذرهٔ باردار، از روی شعاع اندازه گیری شده با استفاده از ردی که ذره در اتاقک حباب ایجاد می کند، درحقیقت کار روزمره و عادی فیزیکدانهایی است که در بخش فیزیک انرژیهای بالا کار می کنند.

درنهایت، می توان بحث را به صورت زیر خلاصه کرد. به این ترتیب که اگر سرعت اولیهٔ ذره، عمود بر میدان مغناطیسی باشد، در این حالت ذرهٔ باردار روی یک مسیر دایره ای به شعاع $a$ و با فرکانس زاویه ای $\omega_b$ حول خطوط میدان دارای یک حرکت دورانی یکنواخت خواهد بود. و اگر سرعت اولیه با میدان $\vec{B}$ زاویه بسازد، در این صورت، مسیرحرکت ذره به شکل یک منحنی مارپیچی حول خطوط میدان مغناطیسی می باشد. بنابراین، حرکت ذره را می توان ترکیبی از دو نوع حرکت درنظرگرفت. یک حرکت خطی یکنواخت درامتداد میدان $\vec{B}$ و یک حرکت دایره ای یکنواخت به شعاع $a$ و فرکانس زاویه ای $\omega_b$ که در صفحهٔ عمود بر $\vec{B}$ روی می دهد.

دربخش بعد، حرکت یک ذرهٔ باردار را برای حالتی بررسی می کنیم که ذره تحت تأثیر همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی قرار می گیرد.

## ۵ – ۸ : حرکت ذرهٔ باردار در میدان الکترومغناطیسی

دردو بخش قبل، حرکت ذرهٔ باردار را در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به طور جداگانه مورد بررسی قرار دادیم. اکنون دراین بخش، وضعیّتی را درنظر می گیریم که در آن حرکت ذره تحت تأثیر همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی قرار می گیرد. برای بررسی این حالت، می توان برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، حالتهای متفاوتی را در نظرگرفت. بنابراین، دراینجا برای ساده سازی مسأله فرض می کنیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر عمود بوده و اندازهٔ آنها نیز ثابت باشند.

1- Magnetic rigidity

برای این منظور، می توان میدانها را به صورت، $\vec{E} = E\vec{k}$ و $\vec{B} = B\vec{i}$ درنظر گرفت. همچنین، برای بررسی ساده ترمسأله، می توان چارچوبی مانند $S'$ معین کرد، به طوری که درآن چارچوب، یکی ازمیدانها برابر صفر باشد. درنتیجه، با این کار می توانیم وضعیّت را به یکی ازحالتهایی که دربخشهای ۵-۶ و ۵-۷، مورد بررسی قرارگرفتند، تبدیل نماییم. بنابراین، اکنون باید چارچوبی مانند $S'$ را معین کنیم، به طوری که درآن $\vec{E}'$ یا $\vec{B}'$ برابر صفر باشد. برای این منظور، می توان از تبدیلات لورنتس میدانها، یعنی روابط (۵-۴۰) و (۵-۴۱)، استفاده کرد. درنتیجه، داریم:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad , \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\beta)[\vec{E}_{\perp} + c(\vec{\beta} \times \vec{B})] \qquad (۵\text{-}۲۰۵)$$

و

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad , \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\beta)[\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}(\vec{\beta} \times \vec{E})] \qquad (۵\text{-}۲۰۶)$$

حال با توجه به این روابط می توان دو حالت زیررا درنظرگرفت.

**حالت اول :** در این حالت می توان فرض کرد که درچارچوب $S$، میدان الکتریکی کوچکتر ازمیدان مغناطیسی باشد، یعنی $E < B$ باشد. دراین صورت، درچارچوب $S'$ می توان میدان الکتریکی $\vec{E}'$ را برابرصفردرنظر گرفت.

**حالت دوم :** دراین حالت نیز می توان فرض کرد که درچارچوب $S$ یا آزمایشگاه، $E > B$ باشد. دراین صورت، می توان درچارچوب $S'$، میدان مغناطیسی $\vec{B}'$ را برابر صفر قرار داد.

حال، برای بررسی مسأله درحالت اول، اگر فرض کنیم که سرعت نسبی دو چارچوب $S$ و $S'$، برابر

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \qquad (۵\text{-}۲۰۷)$$

باشد، دراین صورت، میدان الکتریکی $\vec{E}'$ در چارچوب $S'$ برابر صفر می شود. اما قبل از ادامهٔ بحث باید بررسی نماییم که آیا چنین چارچوبی را می توان معین کرد یا نه؟ زیرا سرعت این چارچوب باید کوچکتر از $c$ باشد. برای بررسی این موضوع کافی است که

رابطهٔ (۵-۲۰۷) را به صورت

$$\vec{\beta}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{cB^{2}}=\frac{E}{B}\vec{j} \qquad (۵\text{-}۲۰۸)$$

بنویسیم. حال، با توجه به اینکه $E<B$ است بنابراین، $\beta<1$ خواهد بود. درنتیجه، وجود چنین سرعتی یا چارچوبی از نظر فیزیکی امکان پذیرمی باشد. ازطرف دیگر، با توجه به جهت میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$، سرعت نسبی $\vec{\beta}$ در راستای محور $y$ چارچوب $S$ می باشد که در این صورت، مؤلفه های موازی $\vec{\beta}$ی میدانها دردو چارچوب، برابر صفر خواهند بود، یعنی

$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}=0 \qquad (۵\text{-}۲۰۹)$$

است. بنابراین، می توان اندیس $\perp$ را از رابطهٔ دوم (۵-۲۰۵) حذف کرد؛ زیرا میدان در این حالت، تنها مؤلفهٔ عمودی خواهد داشت. حال، با جایگذاری مقدار $\vec{\beta}$ از رابطهٔ (۵-۲۰۷) در رابطهٔ دوم (۵-۲۰۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\vec{E}'&=\gamma(\beta)\Big(\vec{E}+\frac{c}{B^{2}}[(\vec{E}\times\vec{B})\times\vec{B}]\Big)\\&=\gamma(\beta)[\vec{E}-\vec{E}]=0\end{aligned} \qquad (۵\text{-}۲۱۰)$$

اکنون، برای محاسبهٔ میدان $\vec{B}'$ در چارچوب $S'$ می توان از رابطهٔ (۵-۲۰۶) استفاده کرد. که باتوجه به(۵-۲۰۹)، داریم

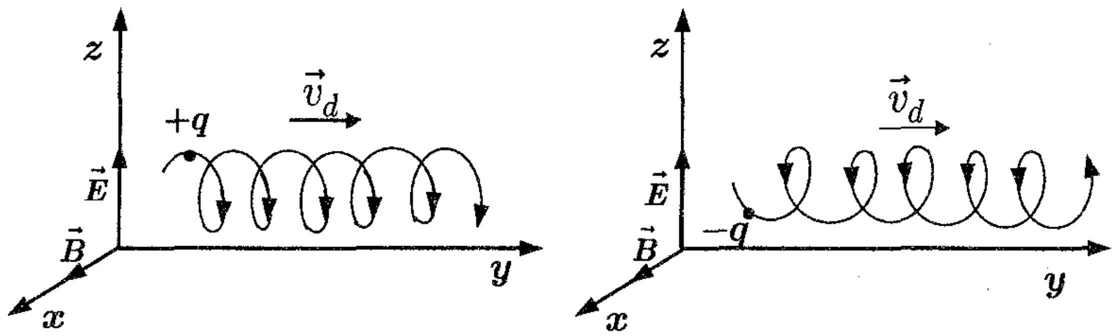
$$\begin{aligned}\vec{B}'&=\gamma(\beta)\Big(\vec{B}-\frac{1}{c^{2}B^{2}}[(\vec{E}\times\vec{B})\times\vec{E}]\Big)\\&=\gamma(\beta)[\vec{B}-\frac{\vec{B}E^{2}}{c^{2}B^{2}}]\\&=\gamma(\beta)\vec{B}[1-\beta^{2}]\\&=\vec{B}\sqrt{1-\beta^{2}}\end{aligned} \qquad (۵\text{-}۲۱۱)$$

در رابطهٔ فوق $\beta=E^{2}/c^{2}B^{2}$ می باشد. بنابراین، مشاهده می کنیم که درچارچوب $S'$ صرفاً میدان مغناطیسی ظاهر می شود. براین اساس، درچارچوب $S'$ ذرهٔ باردار تحت تأثیر میدان مغناطیسی خالص[1] قرار می گیرد که این مسأله در بخش ۵-۷ مورد بررسی قرار

1-Pure magnetic field

گرفت. بنابراین، حرکت ذرهٔ باردار در چارچوب $S'$، حرکت دایره ای یکنواخت خواهد بود.

اکنون، می توان با درنظرگرفتن نتایج به دست آمده درچارچوب $S'$، حرکت ذرهٔ باردار را درچارچوب مرجع آزمایشگاه یا $S$، مورد بررسی قرار داد. با توجه به شکل (۵-۱۱) از نظر ناظر واقع در چارچوب آزمایشگاه، حرکت ذرهٔ باردار ترکیبی از دو نوع حرکت خواهد بود. به این ترتیب که ذرهٔ باردار علاوه برحرکت مارپیچی، دارای یک حرکت انتقالی با سرعت سوق یا رانش[1]، درراستای عمود بر میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ نیزخواهد بود. به عبارت دیگر، درچارچوب آزمایشگاه باید به حرکت مارپیچی، یک حرکت انتقالی با سرعت سوق نیز در راستای عمود بر میدانهای $\vec{E}$و $\vec{B}$ اضافه کنیم.




**شکل (۵-۱۱): مسیر حرکت ذرهٔ باردار مثبت و منفی $q$ در میدان الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت و عمود برهم با شرط $E < B$**

برای توضیح بیشتر این مطلب، می توان به این صورت تصورکرد: هنگامی که ذره باردار حول خطوط میدان $\vec{B}$ دوران می کند، ازطرف میدان الکتریکی نیز نیرویی به ذرهٔ باردار اعمال می شود. بنابراین، ذرهٔ باردار علاوه بر اینکه حول خطوط $\vec{B}$ دوران می کند، در امتداد میدان $\vec{E}$ نیز شتاب می گیرد. درنتیجه، منحنی مسیرحرکت ذره به صورت یک منحنی سیکلوئیدی[2] یا به طوردقیق تر به شکل یک منحنی شبه سیکلوئیدی[3] خواهد بود؛ زیرا با توجه به نسبی بودن همزمانی و همین طور انقباض طول، یکنواختی و تقارن منحنی سیکلوئیدی از بین می رود. رانش یا سوق ذرهٔ باردار، درجهت $\vec{E}\times\vec{B}$ را گاهی اوقات، سوق $\vec{E}\times\vec{B}$ می نامند. ازطرف دیگر، می توان گفت که چون نیرویی که بر ذرهٔ باردار در چارچوب $S$ اعمال می گردد، نیروی الکتریکی و مغناطیسی است، درنتیجه این چارچوب، دریک نیمهٔ

1- Drift velocity
2- Cycloidal curve
3- Quasi cycloidal curve

حرکت دایره ای ذره، میدان الکتریکی درجهت حرکت ذره بوده و باعث افزایش انرژی آن شده و نتیجه اینکه حرکت ذره دارای شتاب افزاینده خواهد بود. و نتیجهٔ این افزایش شتاب، افزایش شعاع مسیرحرکت ذره خواهد بود. اما در نیمهٔ دیگر مسیر دایره ای، جهت حرکت ذره و جهت میدان الکتریکی درخلاف جهت هم بوده و این مسئله باعث کاهش انرژی ذره شده و درنتیجه شتاب آن دراین نیمه کاهنده خواهد بود. بنابراین، دراین نیمه، شعاع انحنای[1] مسیرحرکت ذره کاهش می یابد. در نهایت، اینکه در یک نیم تناوب، ذره از میدان الکتریکی انرژی می گیرد و در نیم تناوب دیگر، میدان الکتریکی باعث اتلاف انرژی آن می گردد. بنابراین، می توان گفت که در یک نیم تناوب، شعاع انحنای مسیر حرکت ذره، افزایش یافته و در نیم تناوب دیگرکاهش می یابد که از ترکیب این دو حرکت، یک حرکت عرضی برایند در امتداد عمود بر $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یا در جهت $\vec{E}\times\vec{B}$، خواهیم داشت. مسیر حرکت ذرهٔ باردار درحالتی که ذره دارای بار مثبت یا منفی باشد در شکل (۵-۱۱) رسم شده است.

**حالت دوم :**

برای حل مسئله در این حالت، فرض می کنیم که سرعت نسبی چارچوب $S'$ نسبت به چارچوب $S$ برابر $\vec{\beta}$ باشد. دراینجا نیز مانند حالت قبل، سرعت نسبی دو چارچوب را عمود بر میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ درنظرمی گیریم و فرض می کنیم که $\vec{E}$ و $\vec{B}$ نیز بریکدیگر عمود باشند. بنابراین، در این حالت نیز باید سرعت $\vec{\beta}$ی چارچوب $S'$ را طوری به دست آوریم که درآن میدان مغناطیسی حذف شده و تنها میدان الکتریکی $\vec{E}'$وجود داشته باشد.

برای پیداکردن سرعت چنین چارچوبی، کافی است که در رابطهٔ (۵-۴۱)، میدان مغناطیسی را مساوی صفر قراردهیم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\vec{B}' = \gamma(\beta)[\vec{B} - \frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E})] = 0 \qquad (۵\text{-}۲۱۲)$$

درنتیجه، می توان به دست آورد.

$$\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{\beta}\times\vec{E}) \qquad (۵\text{-}۲۱۳)$$

---

1- Radius of curvature

اکنون، می توانیم با ضرب خارجی $\vec{E}$ درطرفین رابطهٔ (۵-۲۱۳)، $\vec{\beta}$ را از این رابطه به دست آوریم. دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\vec{E}\times(\vec{\beta}\times\vec{E}) \tag{۵-۲۱۴}$$

حال، با توجه به اینکه میدانها برهم عمود هستند، بنابراین، سرعت $\vec{\beta}$ به صورت

$$\vec{\beta}=c\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{E^{2}} \tag{۵-۲۱۵}$$

به دست می آید. ازطرف دیگر، می دانیم سرعت نسبی دو چارچوب باید کوچکتر از $c$ باشد. درنتیجه، سرعت به دست آمده برای چارچوب $S'$، هنگامی دارای معنای فیزیکی خواهد بود که شرط $E>cB$ برقرار باشد. اکنون، با درنظرگرفتن سرعت نسبی $\vec{\beta}$ی رابطهٔ (۵-۲۱۵) برای چارچوب $S'$، می توان تبدیلات لورنتس میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را در چارچوب $S'$ به دست آورد. برای این منظور، اگر از روابط (۵-۴۰) و (۵-۴۱) استفاده کنیم، می توان نوشت:

$$\vec{B}'_{\parallel}=0 \quad , \quad \vec{B}'_{\perp}=0 \tag{۵-۲۱۶}$$

و

$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}=0 \quad , \quad \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\beta)\vec{E}[1-\frac{c^{2}B^{2}}{E^{2}}] \tag{۵-۲۱۷}$$

که درآن

$$\gamma(\beta)=\frac{1}{\sqrt{1-c^{2}B^{2}/E^{2}}} \tag{۵-۲۱۸}$$

می باشد. در نتیجه، می توان نوشت:

$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}=0 \quad , \quad \vec{E}'_{\perp}=\frac{\vec{E}_{\perp}}{\gamma(\beta)} \tag{۵-۲۱۹}$$

بنابراین، به طور خلاصه می توان گفت که در چارچوب $S'$، صرفاً میدان الکتریکی $\vec{E}'$ وجود دارد که با توجه به رابطهٔ (۵-۲۱۹)، هم جهت با میدان الکتریکی $\vec{E}$ بوده و اندازهٔ آن نیزکوچکتر از $\vec{E}$ در چارچوب $S$ می باشد. یعنی

$$\vec{E}'=\frac{\vec{E}}{\gamma(\beta)} \tag{۵-۲۲۰}$$

حال، با توجه به رابطهٔ(۵-۲۲۰) درچارچوب $S'$، تنها نیرویی که به ذرهٔ باردار وارد می شود، نیروی الکتریکی بوده و این نیرو باعث شتاب ذره دراین چارچوب می گردد که این حالت را در بخش ۵-۶ مورد بررسی قرار دادیم.

اکنون، می توان با در نظرگرفتن نتیجهٔ به دست آمده در چارچوب $S'$، حرکت ذرهٔ باردار را درچارچوب $S$ بررسی کرد. برای این منظور، می توان با استفاده ازتبدیلات شتاب، شتاب ذره را در چارچوب $S$ یا آزمایشگاه به دست آورد.

درپایان، لازم به یاد آوری است که در این بخش، برای ساده سازی مسأله، حالتی در نظرگرفته شدکه درآن میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بریکدیگر عمود بودند و همچنین فرض کردیم که این میدانها نیز یکنواخت باشند. برای بررسی مسأله درحالت کلی تر، می توان وضعیّتی را در نظرگرفت که درآن میدانها بر یکدیگر عمود نبوده و یکنواخت نیز نباشند.

**تمرین:**

۱- ثابت کنید که کمیّت $c^2\rho^2-(j_x^2+j_y^2+j_z^2)$ ناوردا بوده و برابر $c^2\rho_0^2$ می باشد.

۲- الف: نشان دهید که $E^2-c^2B^2$ و $\vec{E}\cdot\vec{B}$ تحت تبدیلات لورنتس ناوردا هستند.

ب: نشان دهید که امواج تخت، تحت تبدیلات لورنتس به امواج تخت در چارچوب دیگر تبدیل می شوند.

۳- فرض کنید که میدان الکتریکی بین صفحات یک خازن مسطح درچارچوب سکون آن یا $S'$ برابر $E_0'$ باشد. حال، اگر این خازن با سرعت $v$ در راستای موازی با صفحاتش حرکت کند، در این صورت با استفاده از تبدیلات لورنتس، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و همچنین چگالی بار و جریان را در در چارچوب $S$ به دست آورید.

۴- مسألهٔ ۳ را برای حالتی حل کنید که در آن خازن مسطح در راستایی عمود بر صفحاتش با سرعت $v$ حرکت می کند.

۵- با استفاده از نتیجهٔ قسمت الف مسئله ۲ نشان دهید که اگر در یک چارچوب لخت $E=cB$ باشد، در هرچارچوب دیگری مانند $S'$ نیز $E'=cB'$ خواهد بود. همین طور، اگر در یک چارچوب لخت $E>cB$ باشد، در این صورت، هر چارچوب لخت دیگری مانند $S'$ نیز $E'>cB'$ می باشد.

۶- فرض کنید که دو بار الکتریکی $q_1$ و $q_2$ درچارچوب $S'$ روی محور $x'$ این چارچوب به فاصلهٔ $d'$ از یکدیگر به حال سکون قرارگرفته باشند. در این صورت، نیروی بین دو بار را نسبت به ناظر یا چارچوب $S$ و $S'$ به دست آورید. همچنین، مسأله را برای حالتی که بارها روی محور $y'$ چارچوب $S'$ قرار گرفته باشند، تکرار کنید.

۷- فرض کنید که یک میدان الکترومغناطیسی یکنواخت $\vec{E}$ و $\vec{B}$ در چارچوب $S$ یا آزمایشگاه وجود داشته باشد. حال، اگر میدانهای $\vec{E}$ و $\vec{B}$ بر هم عمود باشند. دراین صورت:

**الف :** نشان دهید که اگر چارچوبی مانند $S'$ با سرعت

$$\vec{\beta}=\frac{\hat{n}}{2c\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|}\left(E^2+c^2B^2-\sqrt{(E^2-c^2B^2)^2+4c^2(\vec{E}\cdot\vec{B})^2}\right)$$

حرکت کند، دراین حالت، میدانها درآن چارچوب با یکدیگر موازی خواهند بود. یعنی $\vec{B}' \parallel \vec{E}'$ خواهد بود. که در آن $\hat{n}$ بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ $\vec{E}$ و $\vec{B}$ می باشد.

راهنمایی: از رابطهٔ(۵-۴۹) استفاده نمایید و با این فرض که $\vec{E}' \times \vec{B}' = 0$ می باشد.

**ب :** همچنین، اندازهٔ میدانها را در چارچوب $S'$، با استفاده از نتیجهٔ الف مسألهٔ ۲ به دست آورید.

۸ - استوانه ای طویل و رسانا حامل جریان $I$ می باشد. همچنین، فرض کنید که استوانه دارای چگالی بار یکنواخت $\lambda$ نیز باشد. حال، اگر محور استوانه منطبق بر محور $z$ در چارچوب سکون استوانه، یا $S$ باشد. در این صورت، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل از این توزیع بار- جریان را در چارچوب $S$ و $S'$ به دست آورید. فرض کنید که چارچوب $S'$ در راستای عمود بر محور استوانه با سرعت $v$ حرکت می کند. توجه نمایید که به علت طویل بودن استوانه، میدانها تابعی از $z$ و $z'$ نیستند.

۹ - درچارچوب آزمایشگاه یا $S$ ذره ای باردار با سرعت $\vec{v}$ حرکت می کند. حال، اگر در چارچوب $S'$ که با سرعت $\vec{v}$ نسبت به چارچوب $S$ حرکت می کند، تنها نیروی الکتریکی $\vec{F}' = q\vec{E}'$ به ذرهٔ باردار وارد شود، در این صورت، با استفاده از تبدیلات نیرو و میدانها، نشان دهید که در چارچوب $S$ نیروی لورنتس به ذرهٔ باردار اعمال می گردد.

۱۰ - خط بار طویلی با چگالی خطی یکنواخت $\lambda$ درامتداد محور $y$ چارچوب $S$ قرار گرفته است. حال، اگر بار نقطه ای $q$ را به فاصلهٔ $d$ از آن روی محور $x$ قرار دهیم، در این صورت، نیروی وارد به ذرهٔ باردار را در دو چارچوب $S$ و $S'$ به دست آورید.

۱۱ - مسألهٔ قبل را در حالتی که چارچوب $S'$ با سرعت $v$ در امتداد محور $y$ حرکت کند، تکرار کنید.

۱۲ - میدان حاصل از یک صفحهٔ باردار نامحدود و چگالی یکنواخت $\sigma_0$ را در چارچوبهای $S$ و $S'$ به دست آورید. فرض کنید که صفحهٔ باردار منطبق بر صفحهٔ $xy$ چارچوب $S$ باشد.

# منابع:


۱- الیس، جورج ف . ر ؛ و روث م . ویلیامز. ۱۳۷۶ . *فضا- زمان تخت و خمیده* ، ترجمۀ یوسف امیر ارجمند، تهران ، مرکز نشر دانشگاهی، ۴۰۱ صفحه

۲ - اوهانیان، هانس . سی؛ ۱۳۷۸. *الکترودینامیک کلاسیک*. ترجمۀ محی الدین شیخ الاسلامی، تهران ، مرکز نشر دانشگاهی، ۶۴۲ صفحه

۳ - برنشتاین، جرمی . ۱۳۶۱. *اینشتاین*، ترجمۀ احمد بیرشک، تهران، انتشارات خوارزمی

۴ - راکر، رودلف. ۱۳۷۴ . *هندسه نسبیت و بعد چهارم*، ترجمۀ یوسف امیر ارجمند، تهران، انتشارات انجمن فیزیک ایران، ۲۰۰ صفحه

۵ - رزنیک، ر . ۱۳۶۳ . *آشنایی با نسبیت خاص*، ترجمۀ جعفر گودرزی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۲۵۴ صفحه

۶ - ریندلر، ولفگانگ. ۱۳۷۵. *نسبیت خاص و عام و کیهانشناختی*، ترجمۀ رضا منصوری، تهران، مرکزنشر دانشگاهی، ۳۵۰ صفحه

۷ - کوزنتسوف، ب.۱۳۷۴ . آلبرت اینشتاین، ترجمۀ رضا رضایی، تهران، انتشارات انجمن فیزیک ایران، ۴۰۰ صفحه

۸ - لیف شیتز م؛ و لانداؤ ل. د . ۱۳۶۴ . *مکانیک و الکترودینامیک*، ترجمۀ رضا منصوری، تهران ، مرکز نشر دانشگاهی، ۲۷۰ صفحه

۹ - هال، لویس ویلیام هلزی. ۱۳۶۹ . *تاریخ و فلسفهٔ علم*، ترجمهٔ عبدالحسین آذرنگ، تهران، انتشارات سروش

10 - Vaderlinde J, Clasaical Electromagnetic Theory,Wiley & Sons, New York, 1993

11 - Jackson J D, Clasaical Electrodynamics, Wiley & Sons, New York, 1975 Chapters 11, 12

12 - Lucas J, R & Hodgson P.E, Spacetime and Electromagnetism, Clarendon Press, Oxford, 1990

13 - Ridler W, Introduction to Special Relativity, Oxford University Press, 2nd ed. (1991).

14 - Ulrich E. Schroder, Special Relativity, World Scientific, 1990

15 - McComb W.D, Dynamics and Relativity, Oxford Uneversity Press,1999

16 - Cresser, J D, Special Relativity, Wiley & Sons, 2005

17 - Marzlin P, Electrodynamics and Special Relativity, University of Calgary, 2006

18 - Hogg D W, Special Relativity, Institute for Advanced Study Olden Lane Princeton, 1997

# واژه نامهٔ

# فارسی ـ انگلیسی

آزمایش مایکلسون ـ مورلی
Michelson – Morley experiment

آلفا قنطورس — $\alpha$ – Centuri

آیندهٔ مطلق — Absolute future

---

ابیراهی نور — Aberrration of light

ابیراهی ستاره ای — Stellar Aberrration

اتاقک ابر ویلسون
Wilson cloud chamber

اتساع زمان — Time dilation

اثرچرنکوف — Cerenkov effect

اثردوپلر — Doppler effect ,

اثر دوپلر عرضی
Transverse Doppler effect

اثر دوپلر نسبیتی
Relativistic Doppler effect

اثردوپلر طولی
Longitudinal Doppler effect

اثردوپلر میانی — Median Doppler effect

اثیر، اتر — Ether ,aether

اصل تناظر یا همخوانی، تطابق
Correspondence principle

اصل علیّت — Causality Principle

اصل نسبیت — Relativity principle,
Principle of Relativity

اصل نسبیت گالیله

الکترودینامیک کلاسیک

Classical Electrodynamics

الکترودینامیک کوانتمی

Quattum Electrodynamics (QED)

Galileo's relativity principle

انتقال به سرخ گرانشی

Gravitational redshift

انتقال تکانه

Momentum transport, Momentum transfer

انرژی آستانه Threshold energy

انرژی جنبشی نسبیتی

Relativistic kinetic energy

انرژی سکون Rest energy

انرژی کل نسبیتی

Total relativistic energy

انقباض طول Lenght contraction

انقباض طول فیتز جرالد

Fitzgerald contraction in Length

---

بارهای ساکن Static charges

بازهٔ فضا - زمان Space – time interval

باطلنمای انبار و نردبان

Barn and Ladder paradox

باطلنمای دوقلوها Twin paradox

برخورد الکترون ـ الکترون

Electron – Electron collision

برخورد پروتون ـ پروتون

Proton -Proton collision

برخورد کشسان Elastic collision

برخورد ناکشسان Inelastic collision

بردارچگالی جریان جابه جایی

Displacement current density vector

برهم کنش الکتریکی

Electric interaction

برهم کنش مغناطیسی

Magnetic interaction

بسامد ویژه Proper frequency

---

پاشندگی نور Dispersion of light

پایستگی انرژی Conservation of energy

پایستگی تکانه

Conservation of momentum

پایستگی جرم Conservation of mass

پتانسیل برداری مغناطیسی

Magnetic vector potentials

پتانسیل نرده ای الکتریکی

Electric scalar potentials

پدیدهٔ انتقال دوپلری

Doppler shift Phenomenon,

Doppler frequency Phenomenon

پدیدهٔ فتوالکتریک

photoelectric Phenomenon

پراکندگی کامپتون Compton scattering,

Compton process

پراکندگی کشسان Elastic scattering

پس زنی Recoil

پس زنی کامپتون Compton recoil

پیوستگی زمان Continuity of time

پیوستگی فضا Continuity of space

تأخیر زمانی Retarded time

تابش چرنکوف Cerenkov radiation

تانسورمتریک Metric tensor

تبدیل نیروهای ویژه

Transformation of proper forces

تبدیل لورنتس Lorentz Transformation

تبدیل لورنتس انرژی

Lorentz Transformation of energy

تبدیل لورنتس تکانه

Lorentz Transformation of omentum

تبدیل گالیله Galilean Transformation

تبدیل لورنتس سرعت

Lorentz Transformation of velocity

تداخل Interference

تداخل سنج مایکلسون

Michelson interfrometer

تبدیل لورنتس نیرو

Lorentz Transformation of force

تکانهٔ تعمیم یافته Generalized momentum

تکانهٔ عرضی Transverse momentum

تکانهٔ موج Wave momentum

تکانهٔ نسبیتی Relativistic momentum

تولید زوج Pair production, pair creation

Electron - positron production

تلاشی، تلاشی هسته ای Decay ,Spallation,

Nuclear spallation

---

جابه جایی خط طیف، انتقال خط طیف

Shift of spectral line

جبههٔ موج Wavefront

جدایی یا فاصلهٔ ویژه

Proper separation, proper distance

جرم سکون Rest mass

جرم طولی Longitudinal mass

جرم عرضی Transverse mass

جرم نسبیتی Relativistic mass

جرم ویژهٔ proper mass

جریانهای پایا Steady currents

جمع نسبیتی سرعتها

Relativistic addition of velocities

جهان ـ خط Worldline

جهان مینکوفسکی Minkowski Universe

---

چار- بردار انرژی ـ تکانه

Energy - Momentum four vector

چار- بردار سرعت Velocity four - vector

چاربردار مکان Position four - vector

چارچوب آزمایشگاه Laboratory frame

چارچوب سکون Rest frame

چارچوب سکون آنی یا لحظه ای ناظر

Instantaneous rest frame,
Instantaneous frame of observer

چارچوب مرجع

Frame of reference, reference frame

چارچوب مرجع لخت

Inertial reference frame

چارچوب مرجع مطلق

Absolute reference frame

چارچوب مرکز تکانه

Center of Momentum frame
(COM frame)

چارچوب مرجع نالخت
Noninertial reference frame

---

حرکت تقدیمی Precessional motion
حرکت دایره ای یکنواخت
Uniform circular motion
حرکت سقوطی یا نزولی Falling motion
حرکت طبیعی Natural motion
حرکت قَهری Driven motion,
forced motion
حرکت صعودی Rising motion
حرکت مارپیچی Helical motion
حرکت یکنواخت Uniform motion

---

خطوط همزمانی Lines of simultaneity,
Simultaneous lines
خطوط هم مکانی Equiposition lines

---

دینامیک نسبیتی Relativistic dynamics

---

روش علمی Scientific method
رویداد Event

---

زاویهٔ پراکندگی Scattering angle
زمان اتساع یافته Dilated time
زمان حال Present
زمان مطلق Absolute time
زمان ویژه Proper time
زمان گونه Time like

---

ساعت نوری Light clock
ستارهٔ نسر واقع Vega
سحابی خرچنگ Crab Nebula
سختی مغناطیسی Magnetic rigidity
سرعت سوق یا رانش Drift velocity
سطح فضاگونه Spacelike surface
سطوح هم مکانی Equiposition surfaces
سطوح همزمانی Simultaneous surfaces,
surfaces of simultaneity

سفینهٔ فضایی Spacecraft,
Space ship, Space vehicle
سکون لحظه ای Stationary Instantaneous
سیستمهای با جرم متغییر
Mass variable systems
سنکروترون Synchrotron
سیکلوترون Cyclotron

---

شتاب Acceleration
شتابدهنده های ذرات
Particle accelerators
شتاب ویژه Proper Acceleration
شعاع انحنا Radius of curvature
شعاع دوران Radius of gyration
شعاع مارپیچ Radius of helix

---

ضدپروتون Anti- proton
ضریب همرفت فیزو
Fizeau Coefficient convection

طول موج ویژه Proper wavelength

متریک اقلیدسی Euclidean distance, Euclidean metric

متریک مینکوفسکی Minkowski metric

مخروط ابیراهی Aberration cone

مخروط زمان Time cone

مخروط نور Light cone

مخروط نور آینده Future light cone

مخروط نور گذشته Past light cone

مرکز جرم Center of mas

معادلهٔ پیوستگی بار
Continuity equation of electric charge

منحنی سیکلوئیدی Cycloidal curve

منحنی شبه سیکلوئیدی
Quasi cycloidal curve

میدان مغناطیسی خالص
Pure magnetic field

منظومهٔ جهانی بزرگ
Great universal system

موشک نسبیتی Relativistic rocket

میدان گرانشی Gravitational feild

میون Muons

---

نابودی زوج Pair annihilation

ناظر ساکن Stationary observer

ناظرهای لخت Inertial observers

ناظرهای نا لخت Noninertial observers

ناوردا Invariant

ناوردا یی بازهٔ فضا – زمان
Invariance of space – time interval

ناورداهای تبدیل

طول ویژه Proper Length

---

عملگر موج Wave operator

---

فرایند تولید میون
Muon Production process

فرایند واپاشی میون Muon decay process

فرضیهٔ کشش اتری Ether drag hypothesis

فشار تابشی Radiation pressure

فضا ـ زمان Space - time

فضاـ زمان مینکوفسکی
Minkowski space - time

فضاگونه Space like

فضای اقلیدسی Euclidean Space

فضای متریک Metric space

فضای مطلق Absolate Space

فضای مینکوفسکی Minkowski space

---

قانون اینرسی، قانون لختی Law of inertia

قانون القای فاراده
Faraday's law of induction

قانون بیوـ ساوار Biot – Savart law

قضیهٔ کارـ انرژی Work - energy theorem

---

کمیّت پایسته Conserved quantity

کمیّت ناوردا Invariant quantity

---

گام مارپیچ Pitch of helical

گذشتهٔ مطلق Absolute past

Invariants of transformation

ناوردایی اصل علیّت

Invariance of Causality Principle

Covariance ناوردایی صورت یا هموردایی

ناوردایی همزمانی

Invariance of Simultaneity

نسبیت همزمانی

Simultaneity of Relativity

نظریهٔ ذره ای نور

Corpuscular theory of light

Quantum Theory نظریهٔ کوانتمی

Wave theory of light نظریهٔ موجی نور

نظریهٔ نسبیت عام

Theory of General Relativity

نمودار فضا- زمان

Space –Time diagram

نمودار مینکوفسکی

Minkowski diagram

Neutrino نوترینو

Lightlike نورگونه

نوسانگر هماهنگ نسبیتی

Relativistic harmonic oscillator

Restoring force نیروی بازگرداننده

Weight force نیروی سنگینی

Lorentz force نیروی لورنتس

Proper force نیروی ویژه

---

Decay واپاشی

Spontaneous decay واپاشی خود به خود

---

Unit hyperbola هذلولی واحد

Synchronization همزمان کردن

Isotropy همسانگردی

Isotropic of space همسانگردی فضا

Homogenous همگن

Homogeneity of time همگنی زمان

Homogeneity of space همگنی فضا

هندسهٔ فضا ـ زمان

Geometry of Space -Time

# واژه نامهٔ
# انگلیسی ـ فارسی

Aberration cone مخروط ابیراهی

Aberrration of light ابیراهی نور

Aberrration Stellar ابیراهی نور ستاره ای

Absolate Space فضای مطلق

Absolute reference frame
چارچوب مرجع مطلق

Absolute future آیندهٔ مطلق

Absolute past گذشتهٔ مطلق

Absolute time زمان مطلق

Acceleration شتاب

Ampe're law قـانون آمپـر

Anti - proton ضد پروتون

Barn and Ladder paradox
باطلنمای انبار و نردبان

Biot – Savart law قانون بیو ـ ساوار

---

Causality Principle اصل علیّت

Center of Momentum frame
(COM frame) چارچوب مرکز تکانه

Center of mas مرکز جرم

Cerenkov effect اثر چرنکوف

Cerenkov radiation تابش چرنکوف

Classical Electrodynamics
الکترودینامیک کلاسیک

Coefficient convection Fizeau

ضریب همرفت فیزو

Compton process فرایند کامپتون

Compton recoil پس زنی کامپتون

Compton scattering پراکندگی کامپتون

Conservation of energy پایستگی انرژی

Conservation of mass پایستگی جرم

Conservation of momentum
پایستگی تکانه

Conserved quantity کمّیت پایسته

Continuity equation of electric charge
معادلهٔ پایستگی بار الکتریکی

Continuity of time پیوستگی زمان

Continuity of space پیوستگی فضا

Corpuscular theory of light
نظریهٔ ذره ای نور

Correspondence principle
اصل تناظر ، تطابق، هم خوانی

Covariance هموردایی

Crab Nebula سحابی خرچنگ

Cycloidal curve منحنی مارپیچی

Cyclotron frequency بسامد سیکلوترون

---

Decay واپاشی

Dilated time زمان تأخیری

Dispersion of light پاشندگی نور

Displacement current density vector
بردار چگالی جریان جابجایی

Doppler effect اثر دوپلر

Doppler frequency Phenomenon
پدیدهٔ دوپلر

Doppler shift Phenomenon,
دیدهٔ انقال دوپلر

Drift velocity سرعت سوق یا رانش

Driven motion حرکت قهری

Elastic collision برخورد کشسان

Elastic scattering پراکندگی کشسان

Electric interaction برهم کنش الکتریکی

Electric scalar potential
پتانسیل نرده ای الکتریکی

Electron – Electron collision
برخورد الکترون ـ الکترون

Electron - positron production
تولید الکترون ـ پوزیترون

Energy - Momentum four vector
چاربردار انرژی ـ تکانه

Equiposition lines خطوط هم مکان

Equiposition surfaces سطوح هم مکان

Ether drag hypothesis فرضیهٔ کشش اتر

Ether, aether اتر، اثیر

Euclidean distance, Euclidean metric
متریک اقلیدسی

Euclidean Space فضای اقلیدسی

---

Falling motion حرکت نزولی، سقوطی

Faraday's law of induction
قانون القای فاراده

Fitzgerald contraction in Length
انقباض طول فیتز ـ جرالد

Forced motion حرکت قهری، اجباری

Frame of reference, Reference frame

چارچوب مرجع

Future light cone مخروط نور آینده

---

Galilean Transformation
تبدیلات گالیله

Galileo's relativity principle
اصل نسبیت گالیله

Generalized momentum
تکانهٔ تعمیم یافته

Geometry of Space -Time
هندسهٔ فضا ـ زمان

Gravitational feild میدان گرانشی

Gravitational redshift انتقال سرخ گرانشی

Great universal system
منظومهٔ جهانی بزرگ

---

Helical motion حرکت مارپیچ

Homogeneity of space همگنی فضا

Homogeneity of time همگنی زمان

Homogenous همگن

---

Inelastic collision برخورد ناکشسان

Inertial observers ناظر لخت

Inertial reference frame
چارچوب مرجع لخت

Instantaneous rest frame,
چارچوب سکون آنی

Instantaneous frame of observer
چارچوب لحظه ای ناظر

Invariance of Causality Principle
ناوردایی اصل علیّت

Invariance of Simultaneity
ناوردایی همزمانی، مطلق بودن همزمانی

Invariance of space - time interval
ناوردایی بازهٔ فضاـ زمان

Invariant quantity کمیّت ناوردا

Invariants of transformation
ناورداهای تبدیل

Isotropic of space همسانگردی فضا

Isotropy همسانگردی

Laboratory frame چارچوب آزمایشگاه

Law of inertia قانون لختی

Length contraction انقباض طول

Light clock ساعت نوری

Light cone مخروط نوری

Lightlike نورگونـه

Lines of simultaneity
خطوط همزمانی

Longitudinal Doppler effect
اثر دوپلر طولی

Longitudinal mass جرم طولی

Lorentz force نیروی لورنتس

Lorentz Transformation
تبدیل لورنتس

Lorentz transformation of momentum
تبدیل لورنتس تکانه

Lorentz Transformation of energy
تبدیل لورنتس انرژی

Lorentz Transformation of force
تبدیل لورنتس نیرو

Lorentz Transformation of velocity
تبدیل لورنتس سرعت

ناظرهای نالخت، ناظرهای شتابدار

Noninertial reference frame
چارچوبهای مرجع نالخت، شتابدار

Nuclear spallation واپاشی هسته ای

---

Pair annihilation نابودی زوج

Pair production pair creation,
تولید زوج

Past light cone مخروط نور گذشته

Photoelectric phenomenon
پدیدهٔ فتوالکتریک

Position four – vector
چاربردار پوزیترون

Precessional motion حرکت تقدیمی

Present حال

Principle of Special Relativity
اصل نسبیت خاص

Proper Acceleration شتاب ویژه

Proper force نیروی ویژه

Proper frequency بسامد ویژه

Proper Length طول ویژه

proper mass جرم ویژه

Proper separation, proper distance
جدایی ویژه ، فاصلهٔ ویژه

Proper time زمان ویژه

Proper wavelength طول موج ویژه

Proton – Proton collision
برخورد پروتون - پروتون

Pure magnetic field
میدان مغناطیسی خالص

---

Magnetic interaction
برهم کنش مغناطیسی

Magnetic rigidity سختی مغناطیسی

Magnetic vector potentials
پتانسیل برداری مغناطیسی

Mass variable systems
سیستمهای با جرم متغییر

Median Doppler effect
اثر دوپلر میانی

Metric space فضای متریک

Metric tensor تانسور متریک

Michelson interfrometer
تداخل سنج مایکلسون

Michelson- Morley expriment
آزمایش مایکلسون و مورلی

Minkowski diagram نمودار مینکوفسکی

Minkowski metric متریک مینکوفسکی

Minkowski space فضای مینکوفسکی

Minkowski space - time
فضا ـ زمان مینکوفسکی

Minkowski Univers جهان مینکوفسکی

Momentum transfer, Momentum transport انتقال تکانه

Muon Production process
فرایند تولید میون

Muon decay process
فرایند واپاشی میون

---

Natural motion حرکت طبیعی

Noninertial observers

---

Quantum Theory — نظریهٔ کوانتم

Quasi cycloidal curve — منحنی شبه سیکلوئید

Quantum Electrodynamics (QED) — الکترودینامیک کوانتمی

---

Radiation pressure — فشار تابشی

Radius of gyration — شعاع دوران

Radius of curvature — شعاع انحنا

Radius of helix — شعاع مارپیچ

Recoil — پس زنی

Relativistic addition of velocities — جمع نسبیتی سرعتها

Relativistic Doppler effect — اثر نسبیتی دوپلر

Relativistic dynamics — دینامیک نسبیتی

Relativistic harmonic oscillator — نوسانگر هماهنگ نسبیتی

Relativistic kinetic energy — انرژی جنبشی نسبیتی

Relativistic mass — جرم نسبیتی

Relativistic momentum — تکانهٔ نسبیتی

Relativistic rocket — موشک نسبیتی

Relativity principle — اصل نسبیت

Rest energy — انرژی سکون

Rest frame — چارچوب سکون

Rest mass — جرم سکون

Restoring force — نیروی بازدارنده

Retarded time — زمان تأخیری

Rising motion — حرکت صعودی

---

Scattering angle — زاویهٔ پراکندگی

Scientific method — روش علمی

Simultaneity of Relativity — نسبیت همزمانی

Simultaneity of surfaces — سطوح همزمانی

Smimultaneous surfaces, — سطوح همزمانی

Simultaneous lines — خطوط همزمانی

Space - time — فضا ـ زمان

Space - time interval — بازهٔ فضا ـ زمان

Space like — فضا گونه

Space - Time diagram — نمودارفضا ـ زمان

Spacecraft, Space ship, Space vehicle — کشتی فضای

Spacelike surface — سطح فضاگونه

Spallation, — واپاشی

Spontaneous decay — واپاشی خود به خودی

Static charges — بارهای ساکن

Stationary Instantaneous frame — چارچوب سکون لحظه ای

Stationary observer — ناظر ساکن

Steady currents — جریانهای پایا

Synchronization — همزمان سازی

Synchrotron — سنکروترون

---

Theory of General Relativity — نظریهٔ نسبیت عام

Threshold energy — انرژی آستانه

| | |
|---|---|
| Time cone | مخروط زمان |
| Time dilation | اتساع زمان |
| Time like | زمان گونه |
| Total Relativistic energy | انرژی نسبیتی کل |
| Transformation of proper force | تبدیل نیروی ویژه |
| Transverse Doppler effect | اثر دوپلر عرضی |
| Transverse mass | جرم عرضی |
| Twins paradox | باطلنمای دوقلوها |

---

| | |
|---|---|
| Uniform motion | حرکت یکنواخت |
| Unit hyperbola | هذلولی واحد |
| Velocity four - vector | چاربردار سرعت |

---

| | |
|---|---|
| Wave momentum | تکانهٔ موج |
| Wilson cloud chamber | اتاقک ابر ویلسون |
| Worldline | جهان خط |

# راهنمای کتاب