ریاضیات برای همه

آ. ای. مارکوشویچ

منحنی‌های جالب

بنگاه نشریات «میر» مسکو

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Популярные лекции по математике

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Издательство «Наука»
Москва

ریاضیات برای همه

آ.ای. مارکوشویچ

منحنی‌های جالب

انتشارات «میر» مسکو

ترجمه : س. والری

На персидском языке

۱. اثر نقطهٔ متحرک

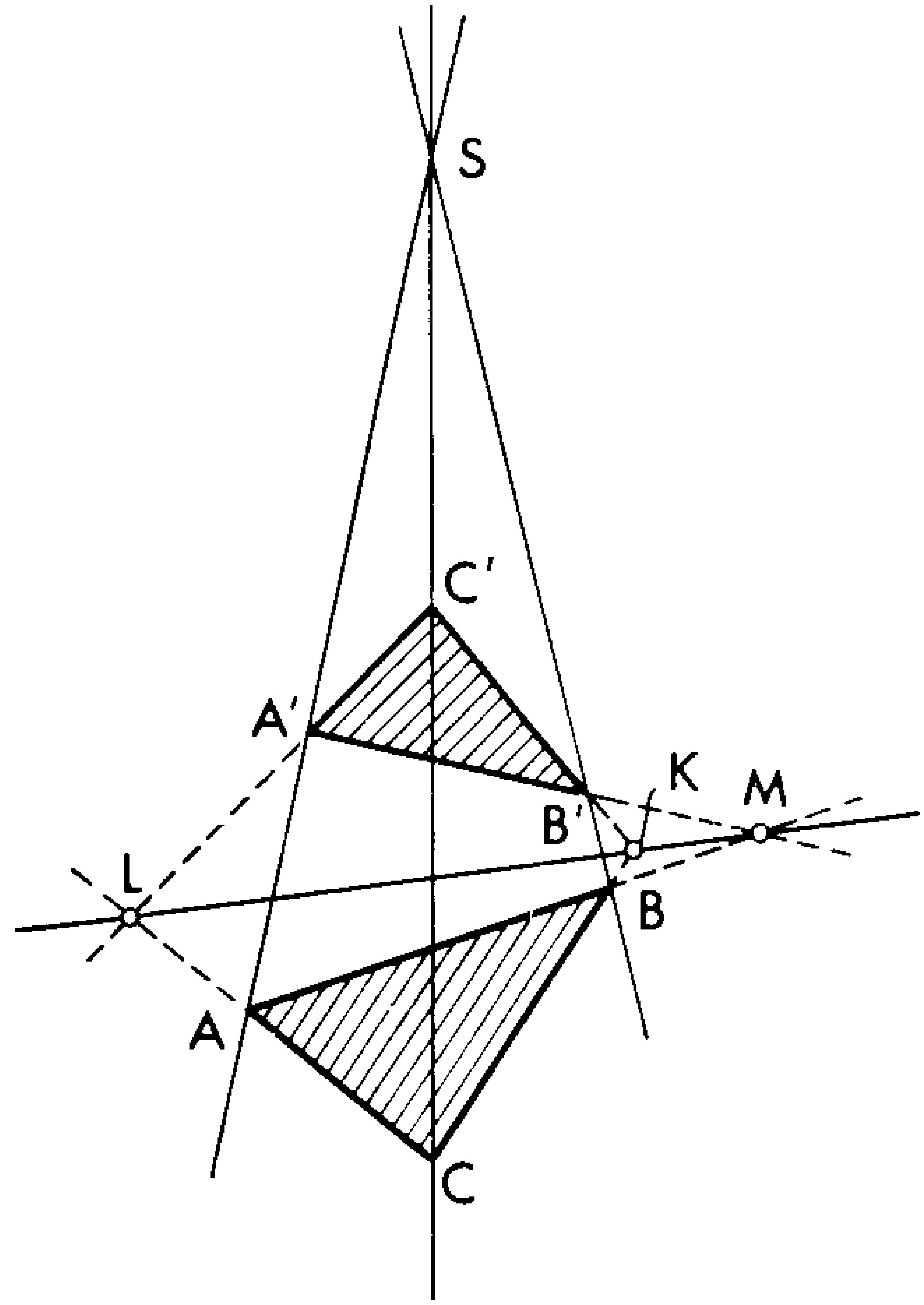
در زبان تکلمی، صفت «منحنی» به هر آنچه که از مستقیم یا راست انحراف دارد اطلاق میشود. در باره چوب منحنی، راه منحنی، آئینهٔ منحنی ممکن است سخن به میان آید. یک ضرب‌المثل هم هست که میگویند: «ثروتمند منحنی و تهی‌دست مستقیم».

ریاضی‌دانان اکثراً کلمهٔ «منحنی» را در نقش اسم بکار میبرند. منظورشان از این کلمه خط منحنی میباشد. پس خط منحنی چیست؟ چگونه میشود همهٔ منحنی‌هائی را که با مداد یا قلم روی کاغذ، با گچ روی تخته‌سیاه، با «ستارهٔ ساقط» یا موشک روی آسمان شب ترسیم میگردد در یک تعریف واحد گنجانید؟

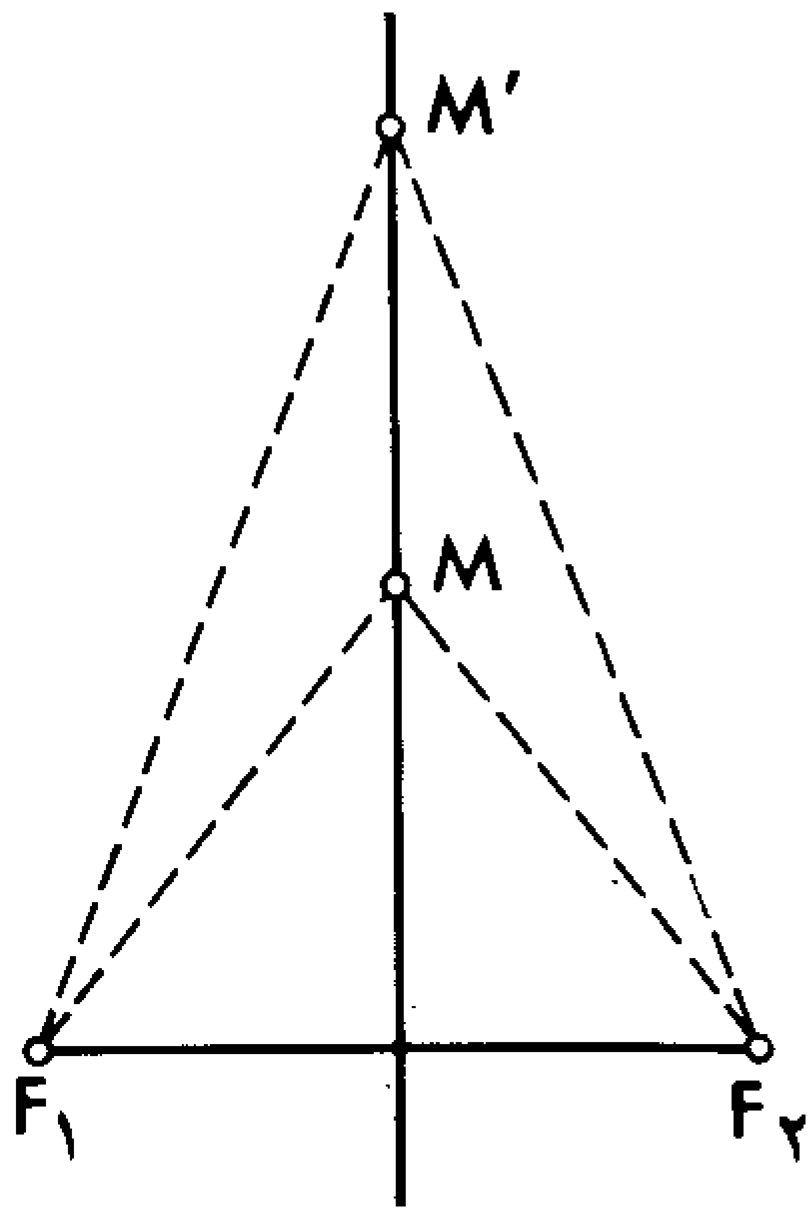
ما این تعریف را میپذیریم: منحنی (یعنی خط منحنی) اثر نقطهٔ متحرک میباشد. در مثال‌های ما چنین نقطه‌ای عبارتست از نوک تیز مداد، لبهٔ تیز گچ، شهاب گداختهٔ در حال عبور از طبقات فوقانی جو یا موشک. از دیدگاه این تعریف، خط راست حالت ویژهٔ منحنی میباشد. در واقع، دلیلی ندارد که نقطهٔ متحرک اثر مستقیم‌الخط از خود باقی نگذارد.

۲. خط راست و دایره

نقطهٔ متحرک وقتیکه از یک وضع به هر وضع دیگری از کوتاه‌ترین راه عبور نماید واقعاً خط راست را ترسیم میکند. برای ترسیم خط راست از خط‌کش استفاده میشود. هرگاه مداد در طول لبهٔ



شکل ۱

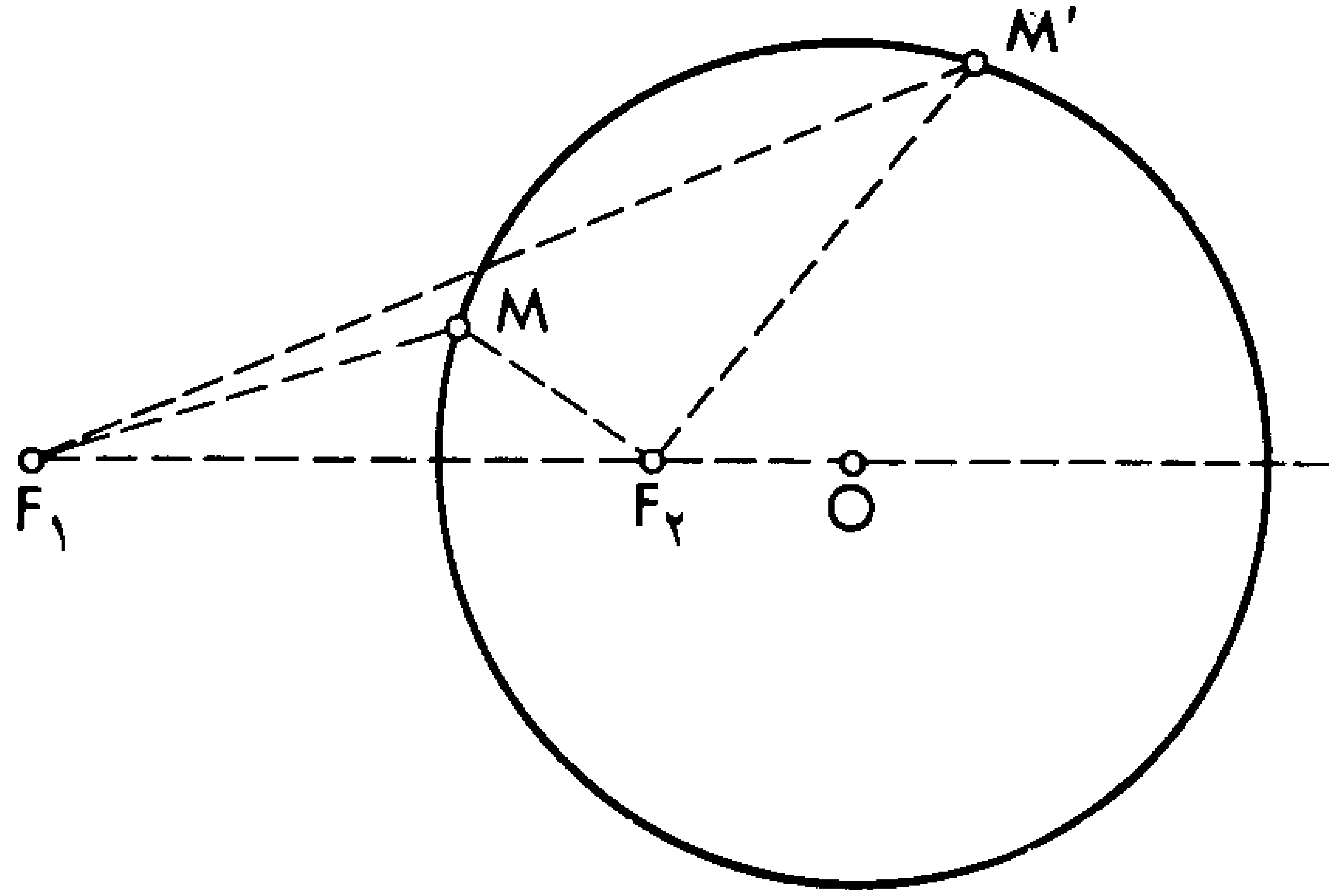


شکل ۲

خط‌کش بلغزد نوک تیز آن یک اثر مستقیم‌الخط را روی کاغذ باقی میگذارد.

اگر نقطه در صفحه حرکت کند و ضمناً فاصلهٔ آن از یک نقطهٔ ثابت همان صفحه بلاتغییر بماند در آن صورت یک دایره ترسیم میگردد. ترسیم دایره با پرگار بر همین خاصیت دایره مبتنی میباشد.

خط راست و دایره، دو منحنی است که در عین سادگی، از نظر خواص خود جالبتر از همه میباشد. خواننده با خط راست و دایره، در مقایسه با سایر منحنی‌ها، آشنائی بیشتر دارد. لکن وی

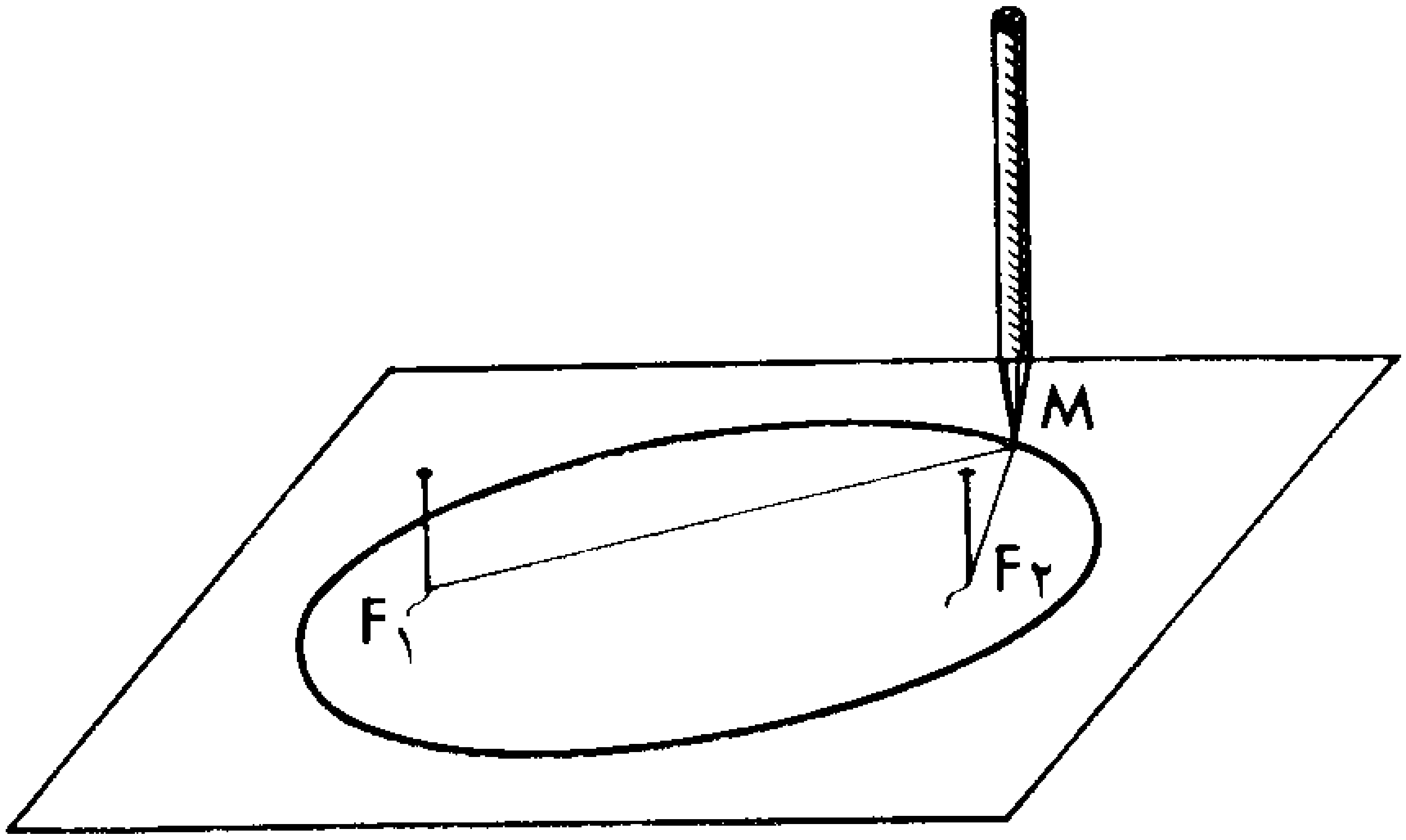


شکل ۳

نباید گمان کند که بخوبی بر همهٔ مهمترین خواص خطوط راست و دوایر واقف است. بطور مثال، آیا او آگاهی دارد که اگر رئوس دو سه‌گوش ABC و $A'B'C'$ بر سه خط راست متلاقی در یک نقطهٔ S واقع باشد (شکل ۱) در آنصورت سه نقطهٔ M، K، L تلاقی اضلاع متناظر سه‌گوشه‌ها، AB با $A'B'$، BC با $B'C'$ و AC با $A'C'$ باید بر یک خط راست واقع باشد؟

البته، خواننده اطلاع دارد که نقطهٔ M که ضمن حرکت در صفحه بطوریکه فاصلهٔ آن تا دو نقطهٔ ثابت همان صفحه، F_1 و F_2، یکی باشد یعنی $MF_1 = MF_2$، خط راست را ترسیم میکند (شکل ۲). اما وی لابد مشکل بتواند به این سوال جواب بدهد که نقطهٔ M چه منحنی‌ای را ترسیم میکند هرگاه فاصلهٔ آن تا نقطهٔ F_1 تعداد معین بار بیشتر از فاصله تا نقطهٔ F_2 باشد (مثلا دو بار مانند شکل ۳). معلوم میشود که این منحنی عبارت از دایره است. پس اگر نقطهٔ M طوری در صفحه حرکت کند که فاصلهٔ آن تا یکی از دو نقطهٔ ثابت F_1 و F_2 صفحه متناسب با فاصله تا نقطهٔ دیگر تغییر نماید:

$$MF_1 = kMF_2$$



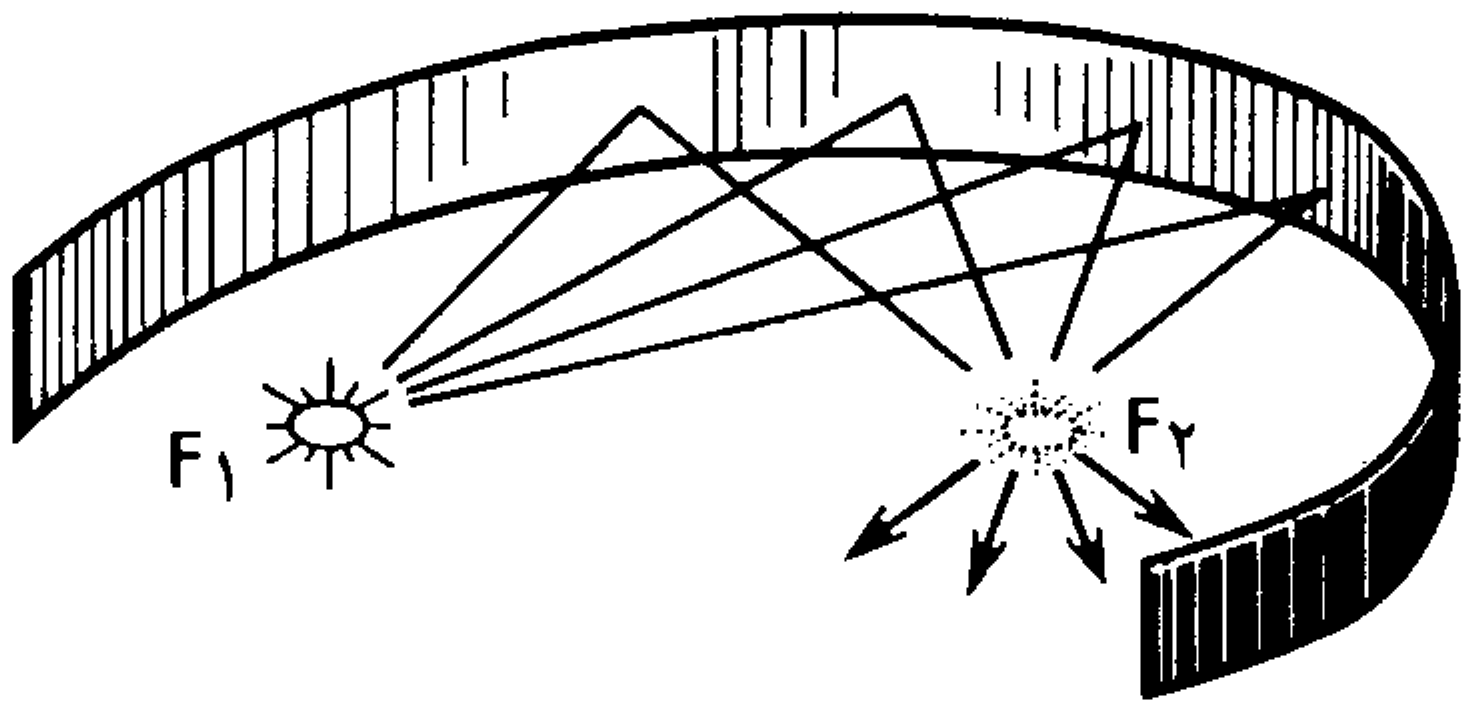
شکل ٤

در آنصورت M یا خط راست را (وقتی که ضریب تناسب k برابر واحد است) و یا دایره را (وقتیکه ضریب تناسب مخالف واحد است) ترسیم مینماید.

۳. بیضی

منحنی‌ای را در نظر میگیریم که توسط نقطهٔ M ترسیم میگردد چنانکه مجموع فواصل این نقطه تا دو نقطهٔ ثابت F_1 و F_2 بلاتغییر میماند. نخی را بر داشته و دو سر آن را به دو سنجاق بسته، سنجاق‌ها را در یک ورق کاغذ فرو میبریم طوریکه نخ در بادی امر کشیده نباشد. حال اگر نخ را بکمک مدادی که در وضع قایم گذاشته شده به طرفی بکشیم و مداد را با فشار خفیف روی کاغذ حرکت دهیم و در ضمن مراقب باشیم که نخ در حالت کشیده باشد (شکل ٤) در آنصورت نوک تیز M مداد یک سنحنی شبیه دایرهٔ کشیده را بنام بیضی ترسیم میکند.

جهت ترسیم بیضی مسدود لازم میآید پس از ترسیم یک نیمهٔ بیضی نخ را به آن طرف سنجاق‌ها بیاندازیم. بدیهی است که مجموع



شکل ۵

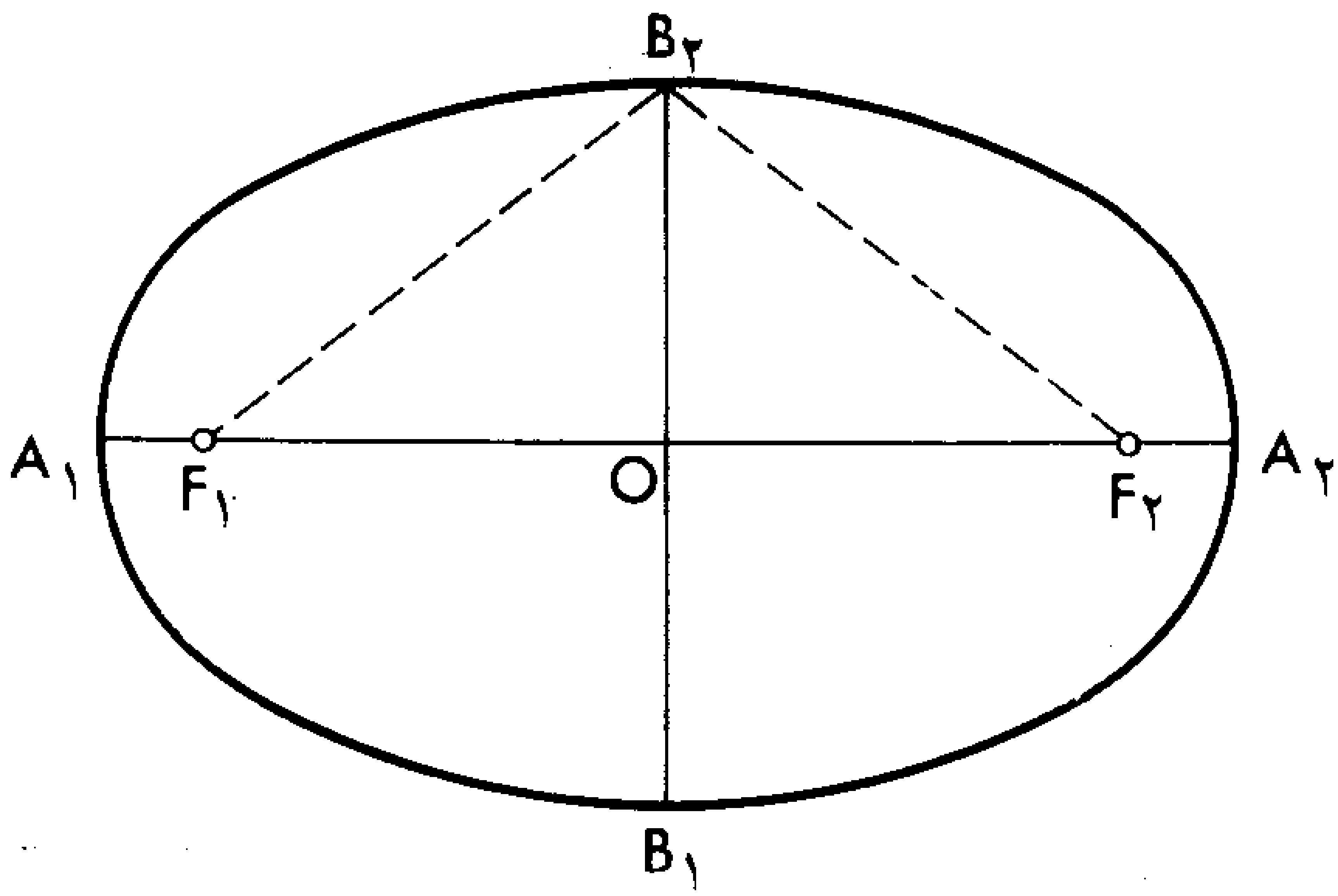
فواصل نوک تیز M مداد تا نوک $F_۱$ و $F_۲$ سنجاق‌ها در تمام مدت حرکت بلاتغییر میماند و برابر طول نخ است.

نوک سنجاق‌ها دو نقطه‌ای بنام کانون بیضی را در کاغذ علامت‌گذاری میکند. کانون معنی اجاق و آتشدان را نیز دارد. وجه تسمیهٔ آن مربوط به یک ویژگی جالب بیضی است که ذیلا تشریح میگردد.

اگر نوار باریکی از فلز صیقلی شده بشکل کمان بیضی خمیده شود و منبع نقطه‌ای نور («آتش») در یک کانون گذاشته شود در آنصورت اشعهٔ نور در نوار منعکس گردیده در کانون دیگر جمع میشود. بنا بر این، در کانون دوم هم «آتشی» که تصویر آتش اولیه است رویت میشود (شکل ۵) .

۴. کانون‌های بیضی

اگر کانون‌های بیضی را با پاره‌خط راست بهم وصل کرده و این پاره‌خط را تا تلاقی با بیضی ادامه دهیم در آنصورت قطر اطول بیضی، $A_۱A_۲$، حاصل میشود (شکل ۶). بیضی نسبت به قطر اطولش قرینگی دارد. اگر پاره‌خط $F_۱F_۲$ را دو نصف کنیم و از وسط عمود بر آن را اخراج نمائیم و عمود را تا تلاقی با بیضی ادامه



شکل ٦

دهیم در آنصورت قطر اقصر بیضی، $B_۱B_۲$ را بدست میآوریم که آن نیز محور تقارن بیضی میباشد. سر اقطار $A_۱$، $A_۲$، $B_۱$ و $B_۲$ را رئوس بیضی گویند.

فواصل نقطهٔ $A_۱$ تا کانون‌های $F_۱$ و $F_۲$ با هم طول نخ را تشکیل میدهد:

$$A_۱F_۱ + A_۱F_۲ = l$$

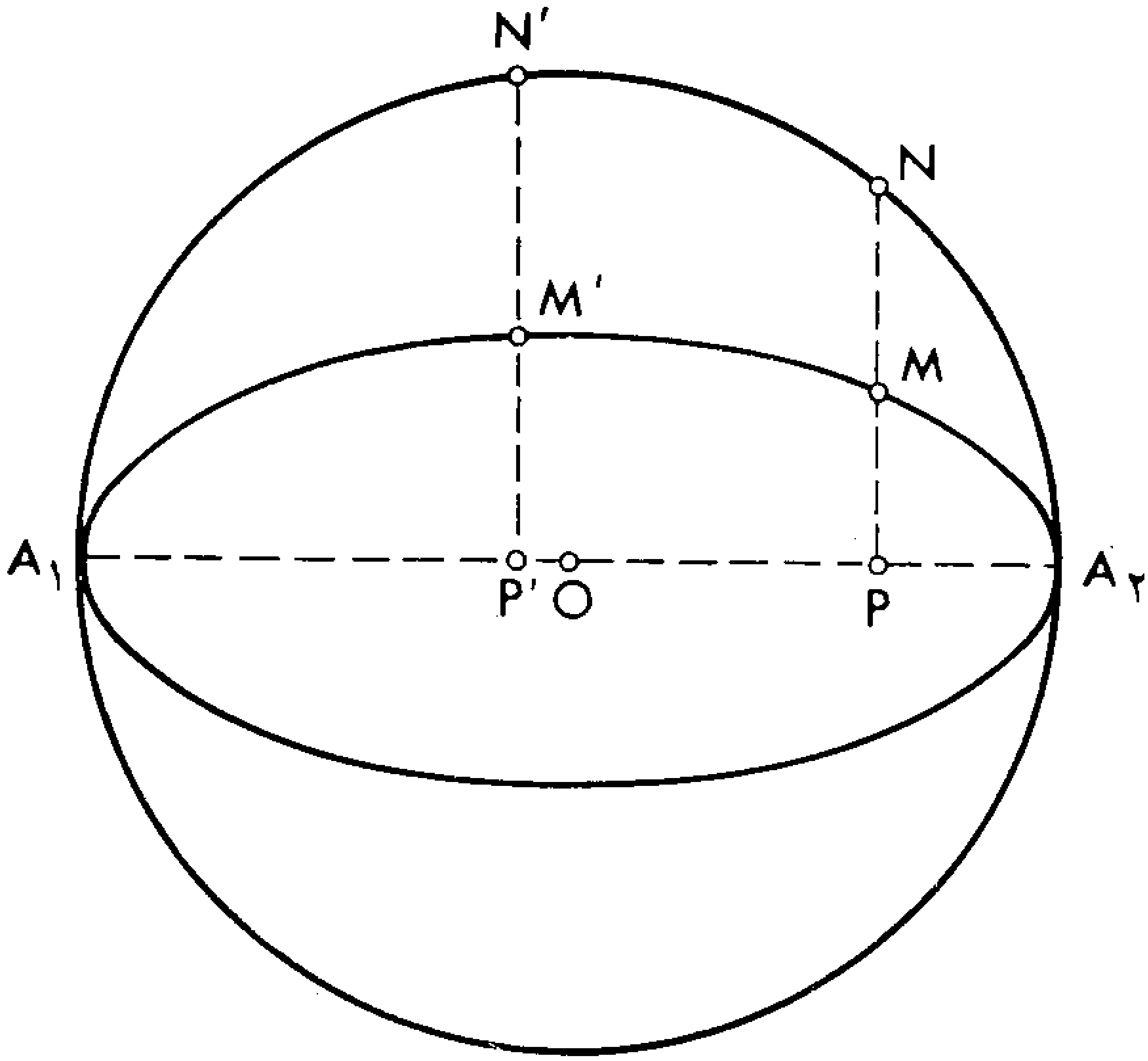
اما

$$A_۱F_۱ = A_۲F_۲$$

بخاطر قرینگی بیضی. بنا بر این، $A_۱F_۱$ را میتوان با $A_۲F_۲$ تعویض نمود و حاصل میکنیم:

$$A_۲F_۲ + A_۱F_۲ = l$$

واضح است که در سمت چپ این برابری، طول قطر اطول بیضی قرار دارد. پس، طول قطر اطول بیضی برابر طول نخ است. بعبارت دیگر، مجموع فواصل هر نقطهٔ بیضی تا کانون‌های بیضی برابر قطر اطول آن است. از اینجا بخاطر قرینگی بیضی نتیجه میشود که

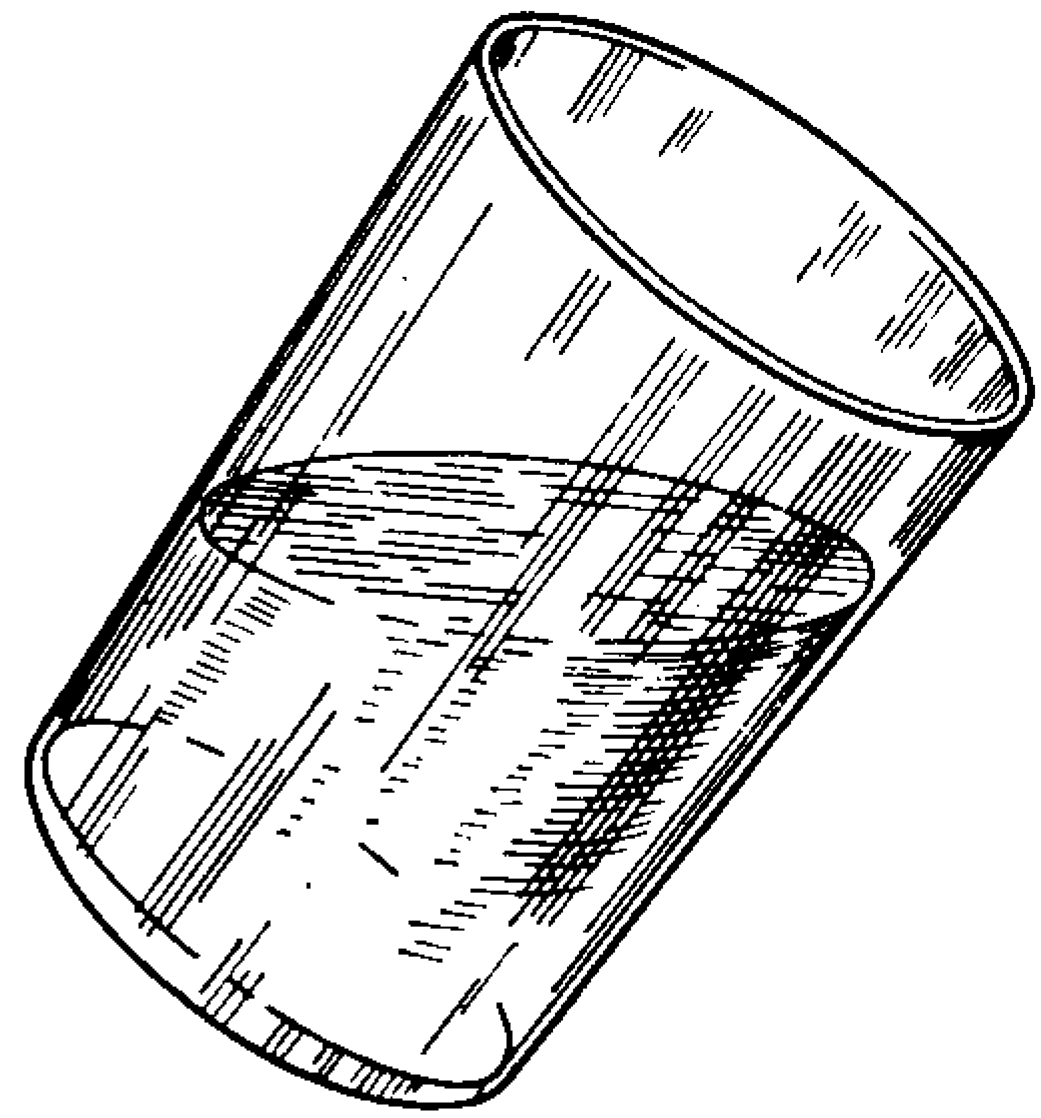


شکل ۷

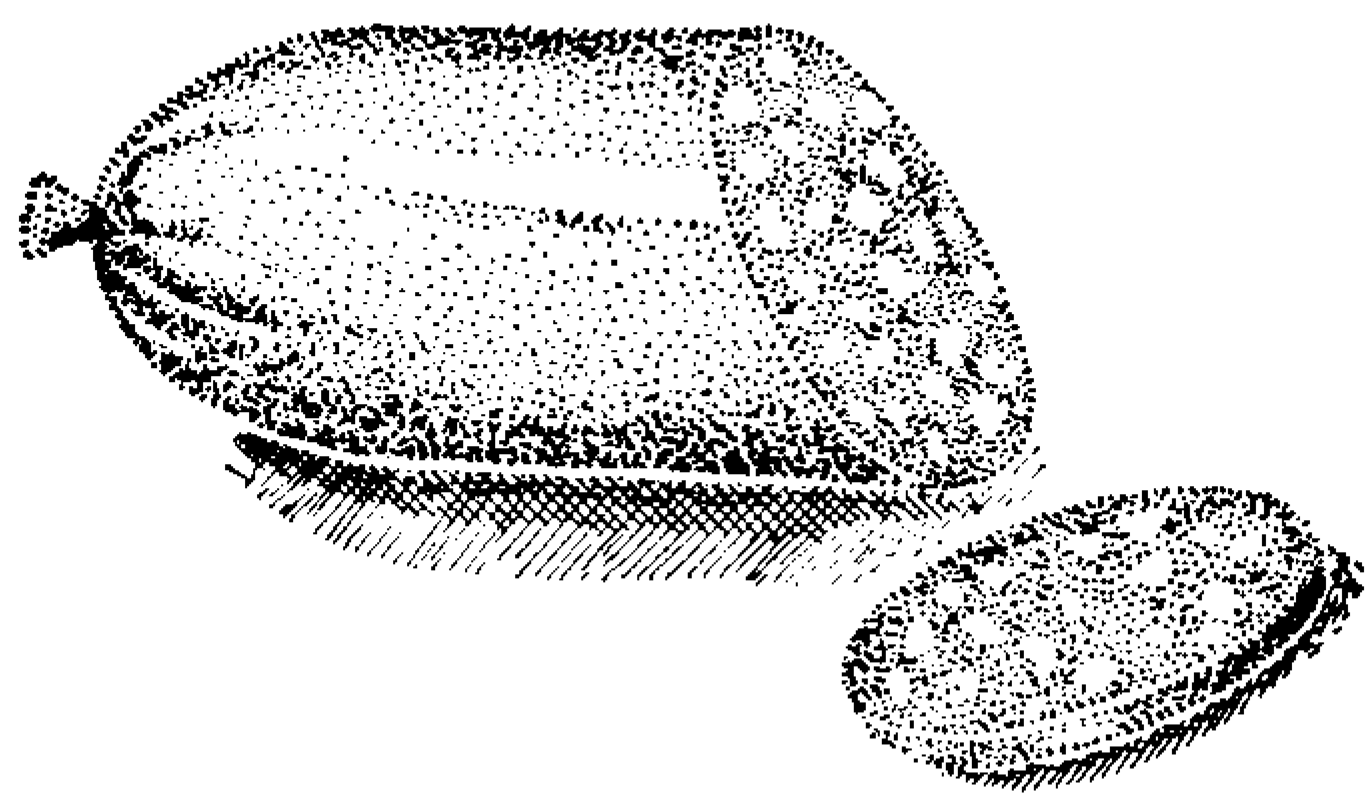
فاصلهٔ راس B_2 (یا B_1) تا هر یک از کانون‌ها برابر نصف طول قطر اطول است. بنا بر این، با دانستن رئوس بیضی بآسانی میتوان کانون‌های آنرا ساخت: باید کمان دایره بمرکز نقطهٔ B_2 و بشعاع برابر نصف A_1A_2 را با قطر اطول تلاقی داد.

۵. بیضی بمثابهٔ دایرهٔ فشرده

دایره‌ای بقطر برابر قطر اطول بیضی روی قطر اطول میسازیم (شکل ۷). از یک نقطهٔ N دایره، عمود NP را به سوی قطر اطول اخراج میکنیم که بیضی را در نقطهٔ M میبرد. واضح است که NP تعداد معین بار بیشتر از MP است. معلوم میشود که اگر هر نقطهٔ



شکل ۸

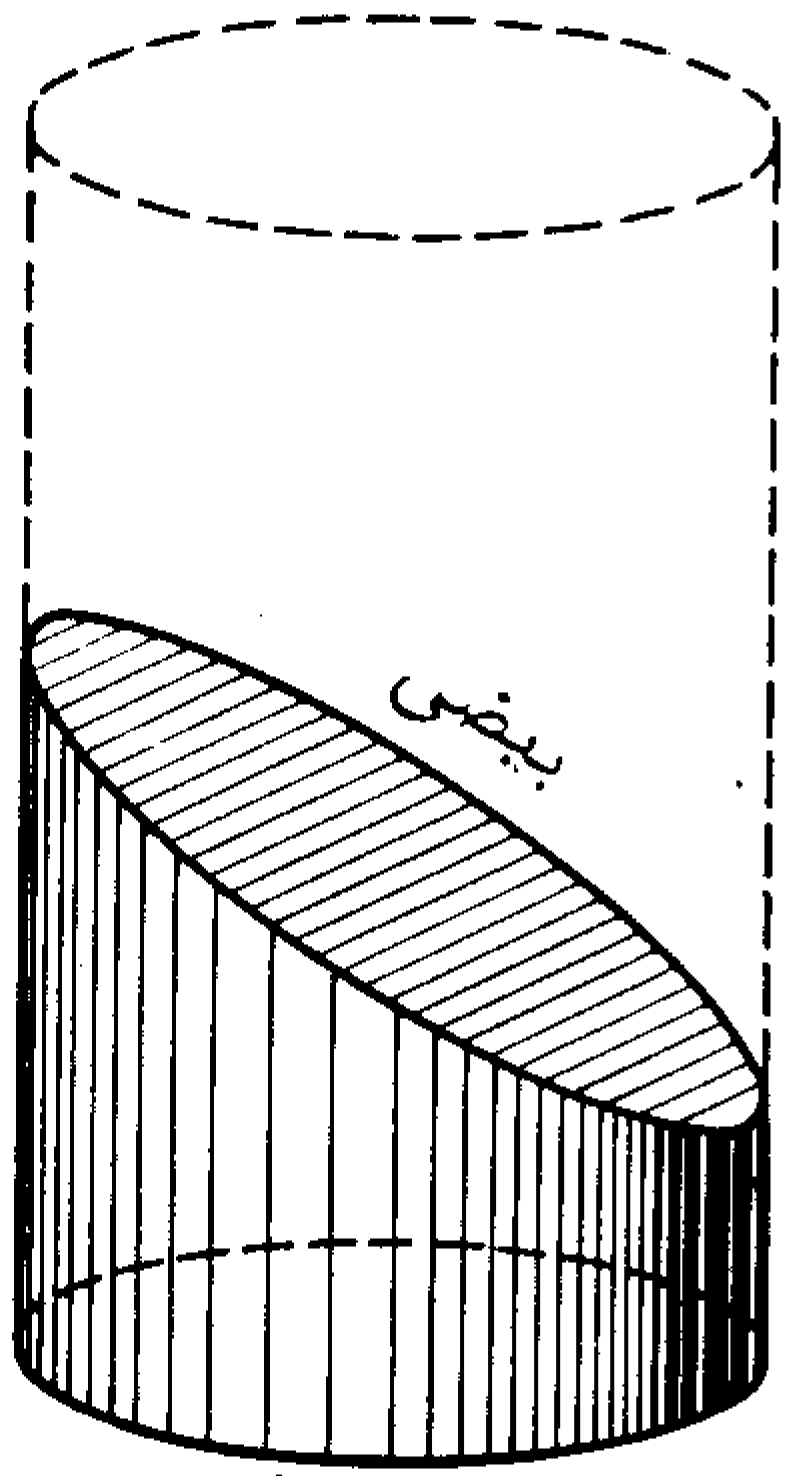


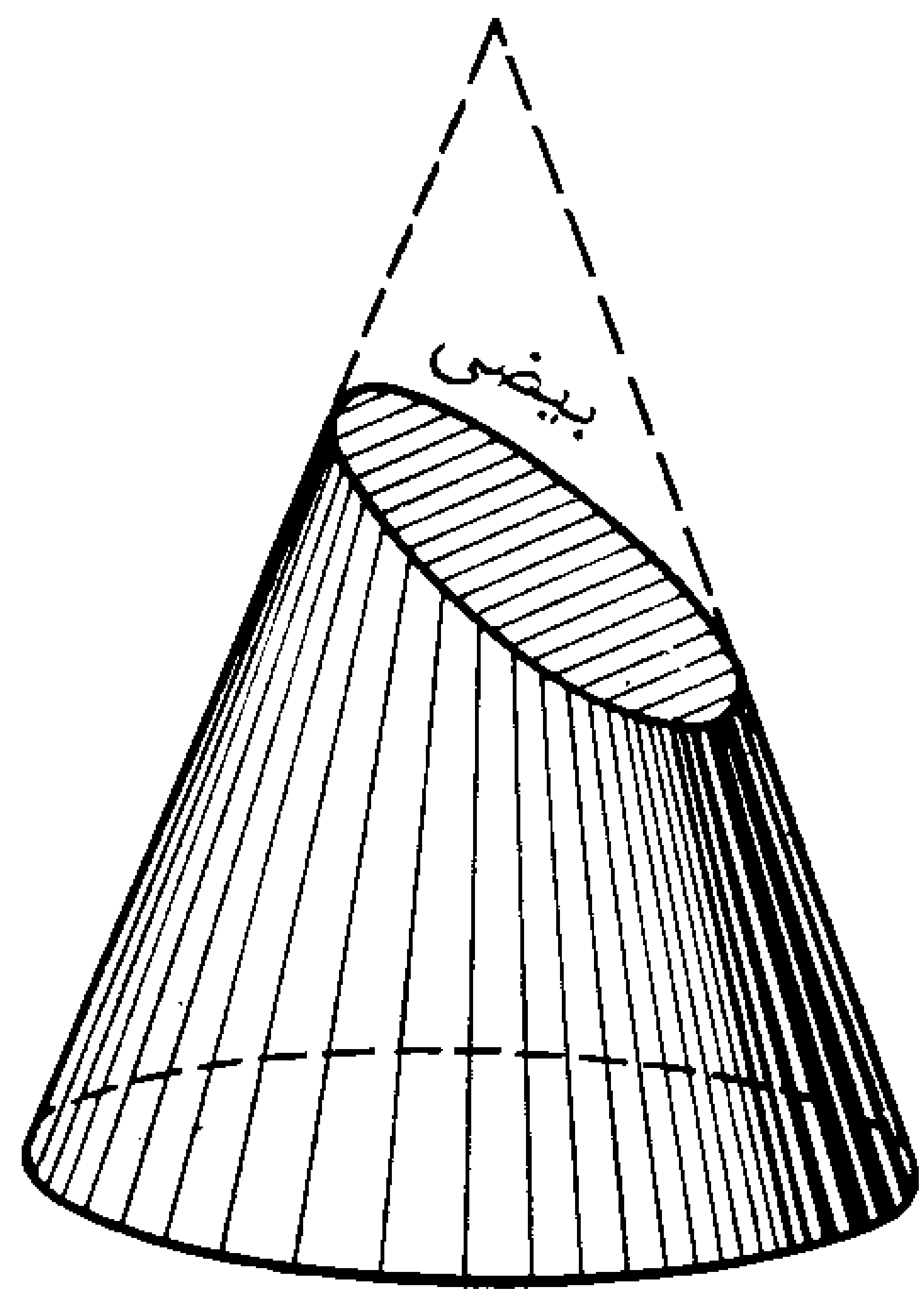
شکل ۹

دیگر دایره، N' را اختیار کرده و همان عملیات را تکرار نمائیم آنگاه $N'P'$ به همان نسبت از پاره خط مربوطه، $M'P'$، بیشتر خواهد بود :

$$\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'}$$

بدیگر سخن، بیضی را میتوان از دایرهٔ محیط بر آن به دست آورد هرگاه همهٔ نقاط دایره را به قطر اطول بیضی، از طریق کوتاه کردن فاصلهٔ نقاط تا قطر اطول به همان نسبت، نزدیک سازیم.



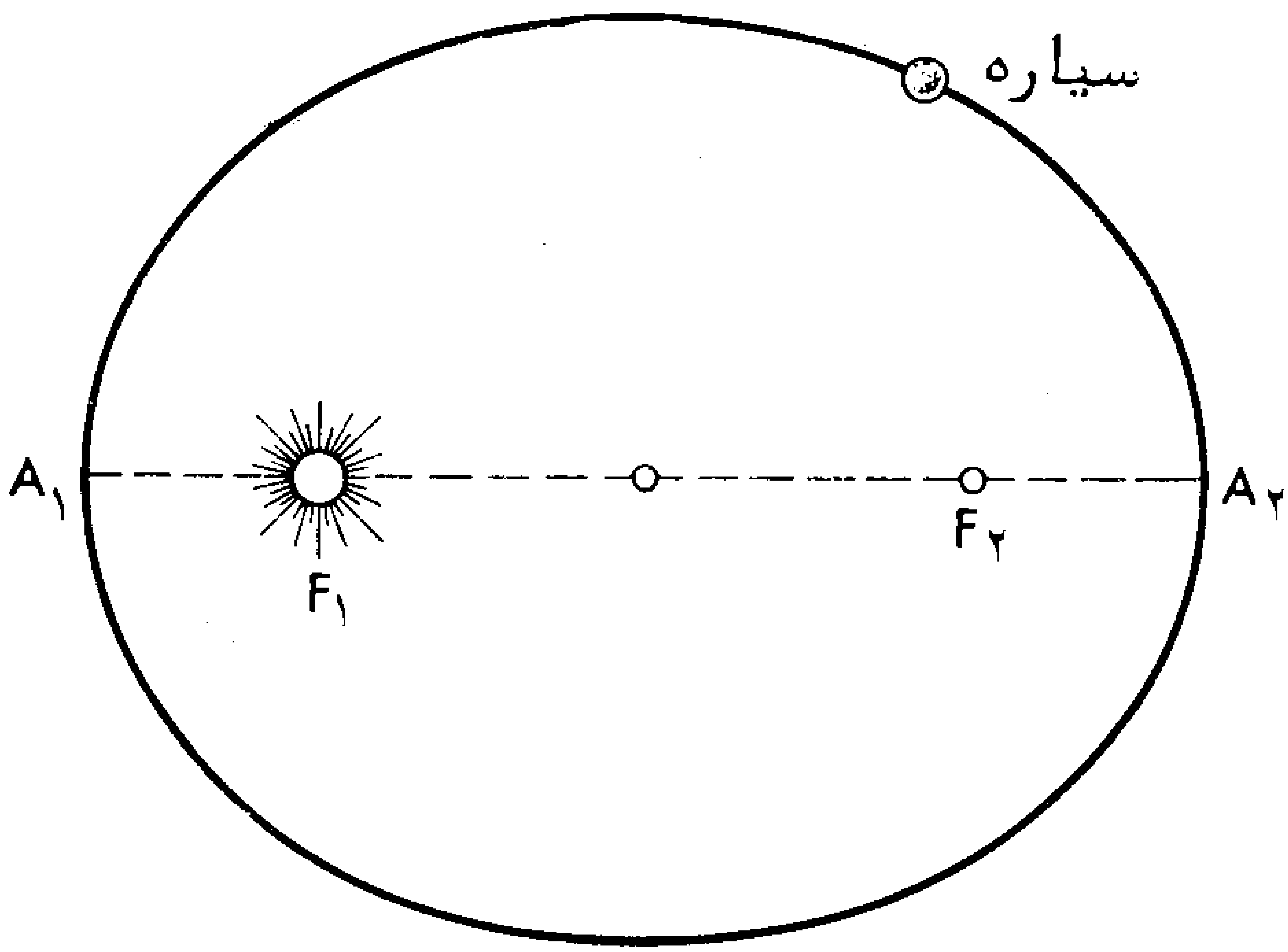


شکل ۱۰

طریقهٔ سادهٔ ساختن بیضی از روی نقاط بر همین خاصیت مبتنی میباشد. دایره را میسازیم، یک قطر آنرا ترسیم میکنیم و سپس نقاط دایره را با نقاط دیگری که روی عمودها بر قطر در فواصل چند برابر نزدیکتر به آن واقع است ($\frac{1}{2}$۱، ۲، ۳ و الخ) تعویض مینمائیم. نقاط بیضی‌ای بدست میآید که قطر اطولش بر قطر دایره منطبق است و قطر اقصر بهمان نسبت ($\frac{1}{2}$۱، ۲، ۳ و الخ) کوچکتر از قطر میباشد.

۶. بیضی‌ها در خانه و طبیعت

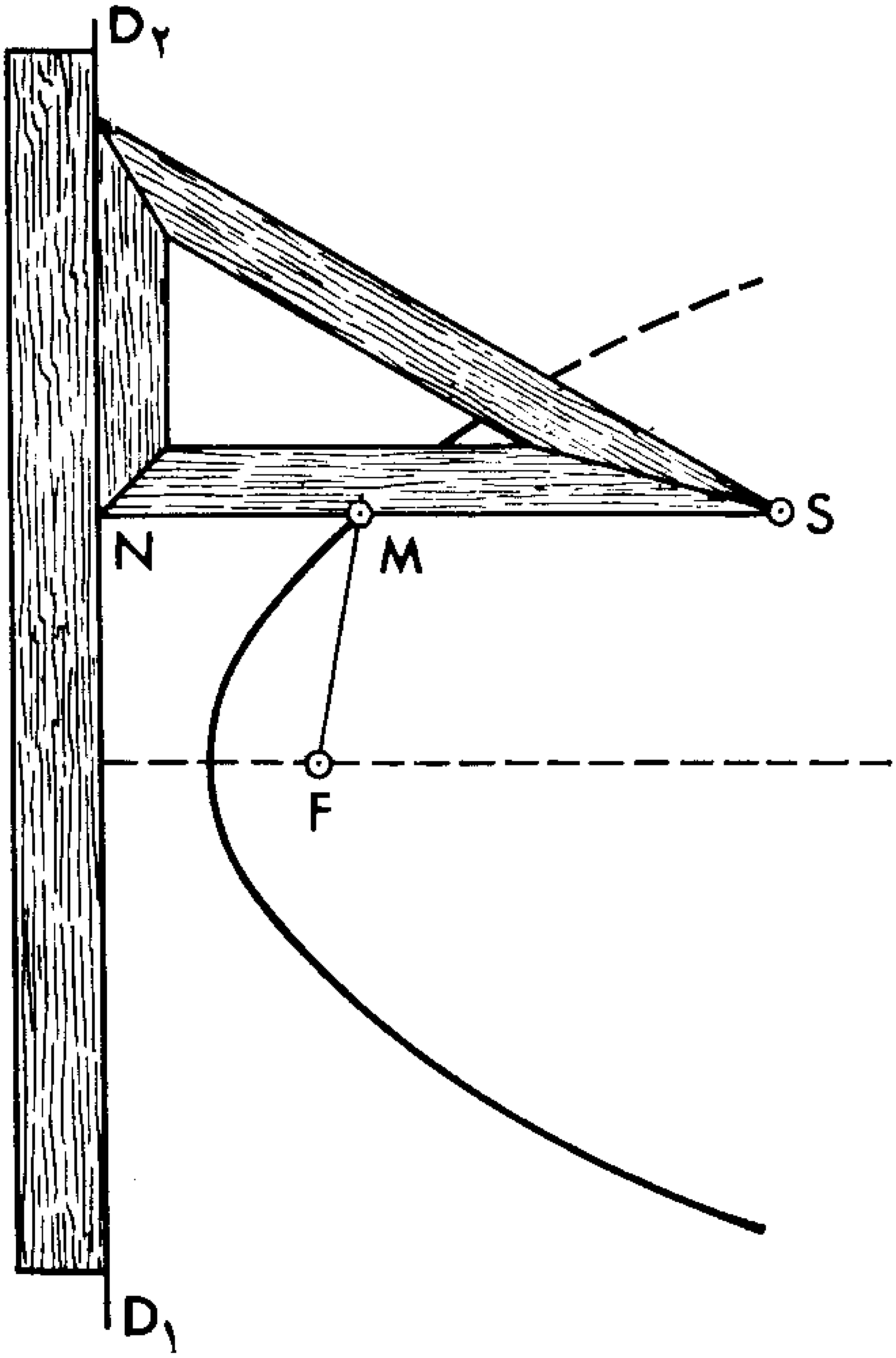
بیضی‌ها را ما اکثراً در زندگی مشاهده میکنیم. مثلا اگر لیوانی با آب را کج کنیم در آنصورت دورهٔ سطح آب شکل بیضی را بخود



شکل ۱۱

سیگیرد (شکل ۸). همینطور هم اگر تکهٔ استوانه‌ای کالباس را با کارد در سمت مایل قاچ کنیم در آن صورت قاچ‌ها شکل بیضی را خواهد داشت (شکل ۹). عموماً اگر استوانه یا مخروط مستقیم را در سمت مایل قطع کنیم (بنحویکه قاعده در این ضمن بریده نشود) در آنصورت مقطعی بشکل بیضی بدست می‌آید (شکل ۱۰).

کپلر (۱۵۷۱ — ۱۶۳۰) کشف کرد که سیارات، بر خلاف آنچه فکر میشد نه در مدار دایروی بلکه در مدار بیضی در حول خورشید دور میزنند و ضمناً خورشید در کانون هر بیضی قرار دارد (شکل ۱۱). طی مدت یک دور، سیاره یک مرتبه در رأس A_1 بیضی که نزدیکتر به خورشید است و حضیض نام دارد قرار میگیرد و یک مرتبه در رأس A_2 که دورتر از خورشید است و به اوج موسوم است. مثلا زمین وقتیکه در نیمکرهٔ ما زمستان است در حضیض قرار



شکل ۱۲

دارد و وقتیکه در نیمکرهٔ ما تابستان است در اوج میباشد. بیضی که زمین در آن حرکت میکند فشردگی ناچیز دارد و ظاهراً شبیه دایره است.

۷. سهمی

یک خط راست D_1D_2 را در برگ کاغذی عبور داده، نقطهٔ F را در خارج از آن اختیار نموده و نوک تیز مداد M را طوری حرکت میدهیم که در هر لحظه فاصلهٔ آن تا خط راست برابر فاصله

تا نقطهٔ F باشد (شکل ۱۲). برای این کار کافیست نخی بطول برابر ضلع SN را با پونز به رأس S مثلث محکم کرده و سر آزاد نخ را به سنجاقی که در نقطهٔ F فرو کرده‌اند ببندیم. حال اگر ضلع دیگر مثلث در طول خط‌کش که بر D_1D_2 منطبق شده باشد بلغزد در آنصورت نوک تیز مداد، M، که نخ را کشیده و به ضلع آزاد مثلث میفشارد، فاصلهٔ یکسان تا خط‌کش و سنجاق خواهد داشت:

$$NM = MF$$

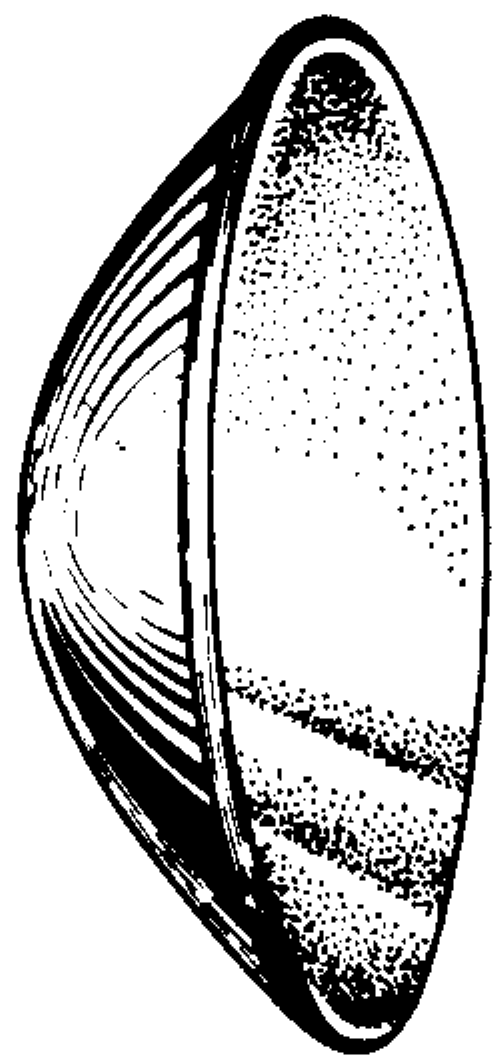
این نوک تیز، قطعه‌ای از خطی موسوم به سهمی را ترسیم میکند. برای ترسیم قطعهٔ بیشتری از این منحنی باید مثلثی با ضلع طولانی‌تر و در صورت لزوم خط‌کش طولانیتری نیز بکار رود. سهمی عبارتست از یک شاخه که تا بینهایت ادامه دارد.

نقطهٔ F را کانون سهمی گویند و عمود اخراج شده از کانون نسبت به خط راست D_1D_2 (موسوم به هادی)، در صورتیکه آنرا ادامه بدهیم، محور تقارن سهمی میباشد و بطور ساده محور سهمی نامیده میشود.

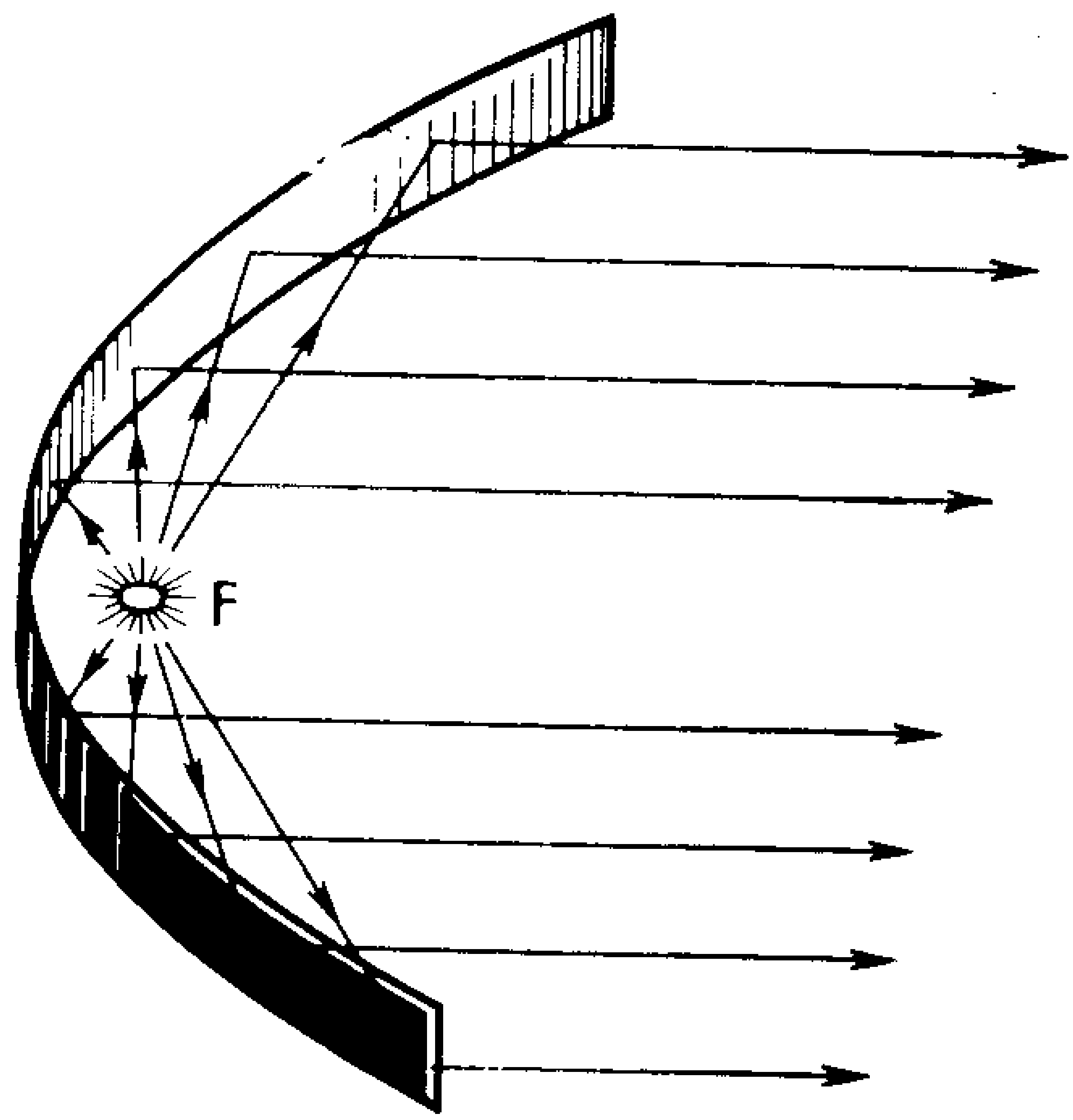
۸. آئینهٔ سهمی

اگر نوار باریکی از فلز خوب صیقلی شده را بشکل کمان سهمی خم کنیم در آن صورت اشعهٔ منبع نقطه‌ای نور واقع در کانون پس از بازتاب در نوار بموازات محور قرار میگیرد (شکل ۱۳). و بر عکس، هرگاه دسته اشعهٔ موازی محور سهمی بر نوارسان بتابد در آنصورت اشعه در کانون جمع میشود.

آئینهٔ سهمی شکل چراغ های اتومبیل و، عموما، نورافکن‌ها بر همین خاصیت سهمی مبتنی میباشد. لکن آنها نه بشکل نوار بلکه



شکل ۱٤



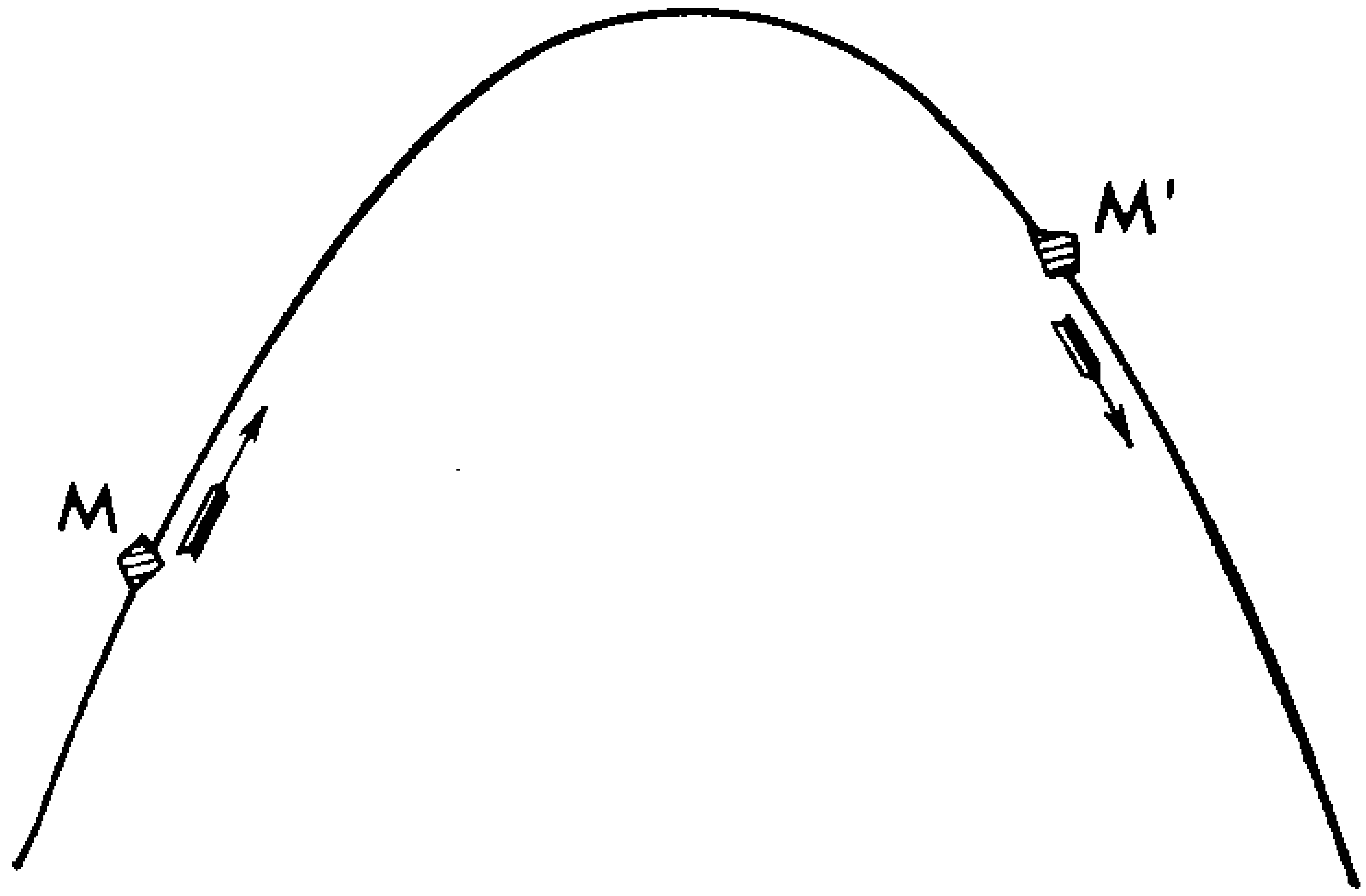
شکل ۱۳

بشکل سهموی دوار صیقلی میشوند. سطح اینگونه آئینه را میتوان از طریق چرخاندن سهمی در حول محورش بدست آورد.

۹. پرواز سنگ و گلوله توپ

سنگی که در سمت غیر قایم پرتاب شده باشد در مسیر سهمی پرواز میکند. (شکل ۱۵). همین گفته در مورد گلولهٔ توپ نیز صدق میکند. اما در هر دو مورد، مقاومت هوا شکل سهمی را تحریف کرده و عملا یک منحنی دیگر حاصل میشود. لکن اگر حرکت را در خلا مشاهده کنیم در آن صورت سهمی واقعی را بدست می‌آوریم.

اگر گلوله با همان سرعت v از لولهٔ توپ خارج شود در آنصوروت در ازاء زوایای گوناگون میل لوله به افق، سهمی‌های

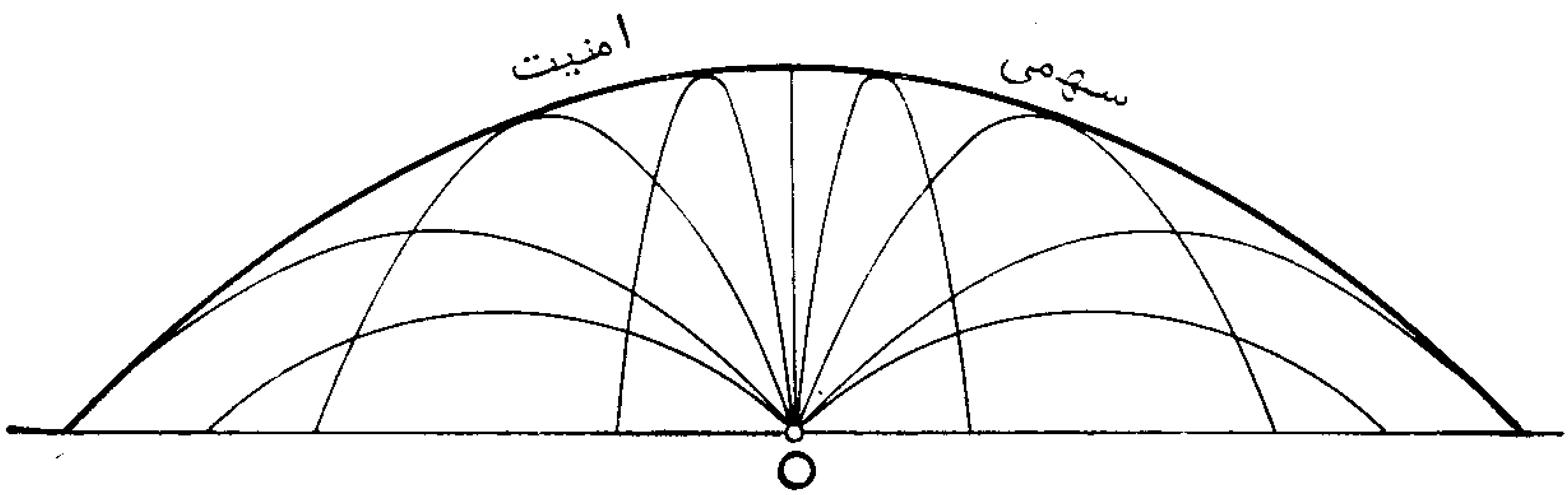


شکل ۱۵

پیمودهٔ گلوله و برد گلوله تغییر میکند. بیشترین برد در ازاء زاویهٔ میل لوله برابر با 45° حاصل میشود. این برد مساوی v^2/g است که g شتاب ثقل میباشد. هرگاه در سمت قایم به بالا تیراندازی شود آنگاه گلوله تا ارتفاعی دو بار کمتر از بیشترین برد، $v^2/2g$، میرسد. به هر سمتی که ما لولهٔ توپ را متوجه کنیم (بگونه‌ایکه در همان صفحهٔ قایم بماند)، همواره در ازاء یک سرعت معین خروج گلوله جاهایی در زمین و هوا وجود خواهد داشت که گلوله بدانجا نمیرسد. معلوم میشود که مرز بین جاهای مذکور و جاهایی که گلوله با نشانه‌گیری مناسب میتواند بدانجا برسد عبارتست از یک سهمی (شکل ۱۶) که بنام سهمی امنیت معروف است.

۱۰. هذلولی

قیاس بر بیضی، منحنی‌هایی را که نقطهٔ M میپیماید میتوان طوری ترسیم نمود که بجای مجموع، تفاضل یا حاصل‌ضرب و یا خارج‌قسمت فواصل آن تا دو نقطهٔ معین F_1 و F_2 بلاتغییر بماند (در مورد اخیر دایره حاصل میشود).

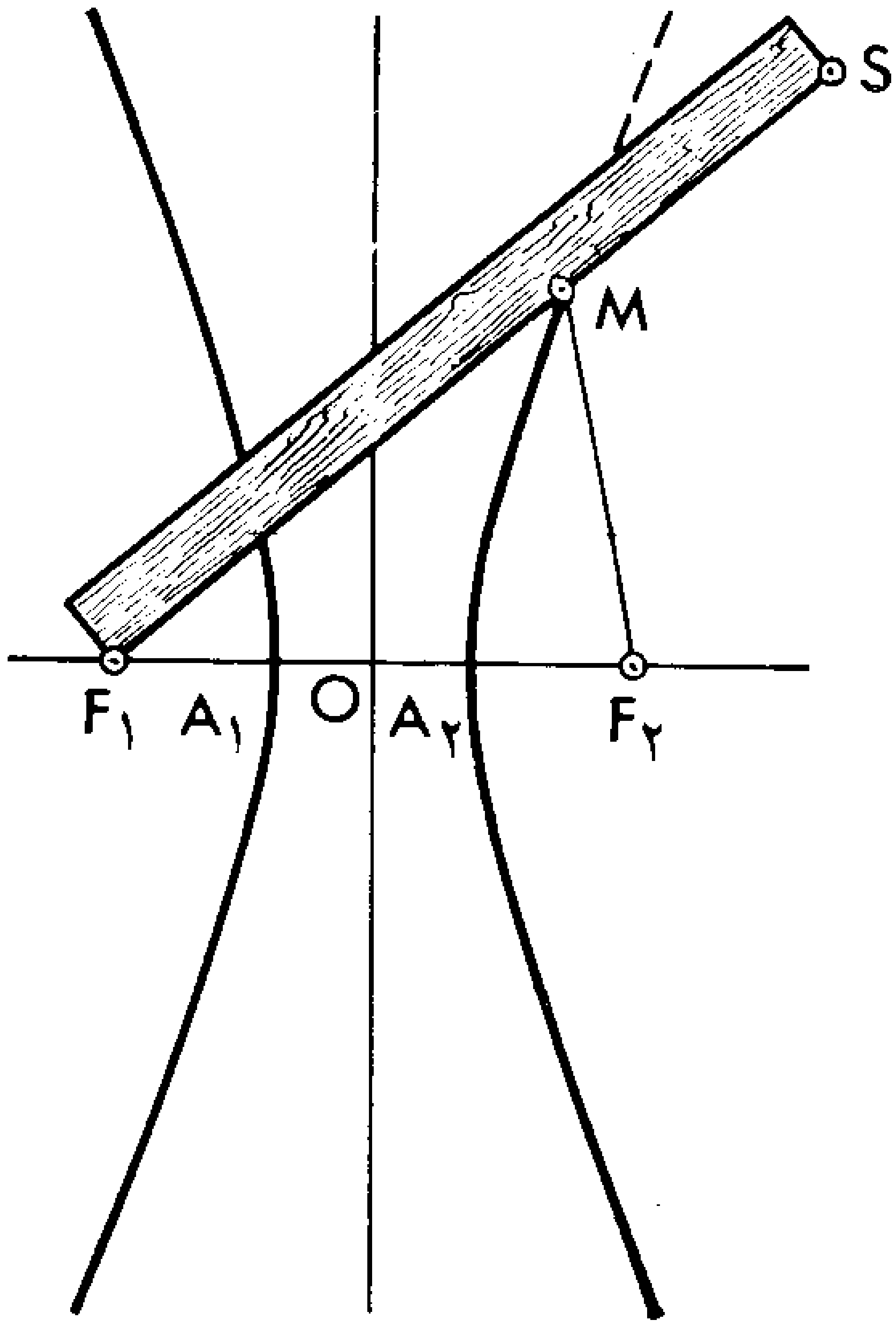


شکل ۱٦

حالت تفاضل را در نظر میگیریم. برای اینکه مداد را وادار کنیم بنحوهٔ ضروری حرکت نماید در نقاط F_1 و F_2 دو سنجاق فرو برده و خط‌کش را به یکی از سنجاق‌ها طوری محکم میکنیم که بتواند در حول آن روی کاغذ بچرخد (شکل ۱۷). یک سر نخی را که طول آن باید کوتاه‌تر از خط‌کش باشد به انتهای S خط‌کش، و سر دیگرش را در F_2 محکم کرده و سپس با نوک تیز M مداد نخ را کشیده و به خط‌کش فشارش میدهیم. آنگاه تفاضل فواصل MF_1 و MF_2 برابر است با تفاضل طول خط‌کش و نخ:

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS)$$

اگر خط‌کش را در حول F_1 دوران بدهیم و همچنان مداد را به آن فشار داده و نخ را در حالت کشیده نگه داریم در آنصورت مداد منحنی‌ای را روی کاغذ ترسیم میکند که اختلاف فواصل هر نقطهٔ آن تا F_1 و F_2 یکی بوده و برابر اختلاف m بین طول خط‌کش و طول نخ میباشد. از این طریق تنها نیمهٔ فوقانی منحنی طرف راست شکل ۱۷ بدست میآید. جهت حصول نیمهٔ تحتانی، لازم است خط‌کش در طرف مقابل سنجاق‌ها قرار گیرد. و بالاخره اگر خط‌کش را



شکل ۱۷

به سنجاق F_2، و سر نخ را به سنجاق F_1 محکم کنیم در آنصورت قسمتی از منحنی طرف چپ همان شکل حاصل میشود. جفت منحنی‌های حاصل شده بعنوان یک منحنی که هذلولی نام دارد تلقی میشود. نقاط F_1 و F_2 کانون‌های آن میباشند. بهر حال کمان‌های ترسیم شده نمایندهٔ تمامی هذلولی نیستند. با تعویض خط‌کش با خط‌کش درازتری و با افزایش دادن طول نخ (منتها بنحوی که اختلاف طولشان تغییر نکند) ما میتوانیم تا بینهایت هذلولی ما را ادامه دهیم درست همانطور که تا بینهایت میتوان، مثلا، پاره‌خط راست را ادامه داد.

۱۱. محورها و مجانب‌های هذلولی

خط راستی را از کانونهای هذلولی عبور میدهیم. این خط راست محور تقارن هذلولی میباشد. محور دیگر تقارن نسبت به اولی عمود

بوده و از وسط پاره‌خط F_1F_2 میگذرد. نقطهٔ تلاقی محورها، O، مرکز تقارن است و بطور ساده مرکز هذلولی نام دارد. محور اول، هذلولی را در دو نقطهٔ A_1 و A_2 بنام رئوس هذلولی قطع میکند. پاره‌خط A_1A_2 موسوم به محور حقیقی هذلولی میباشد. اختلاف فواصل نقطهٔ A_1 هذلولی تا کانونهای F_2 و F_1 باید برابر m باشد:

$$A_1F_2 - A_1F_1 = m$$

اما از روی تقارن هذلولی

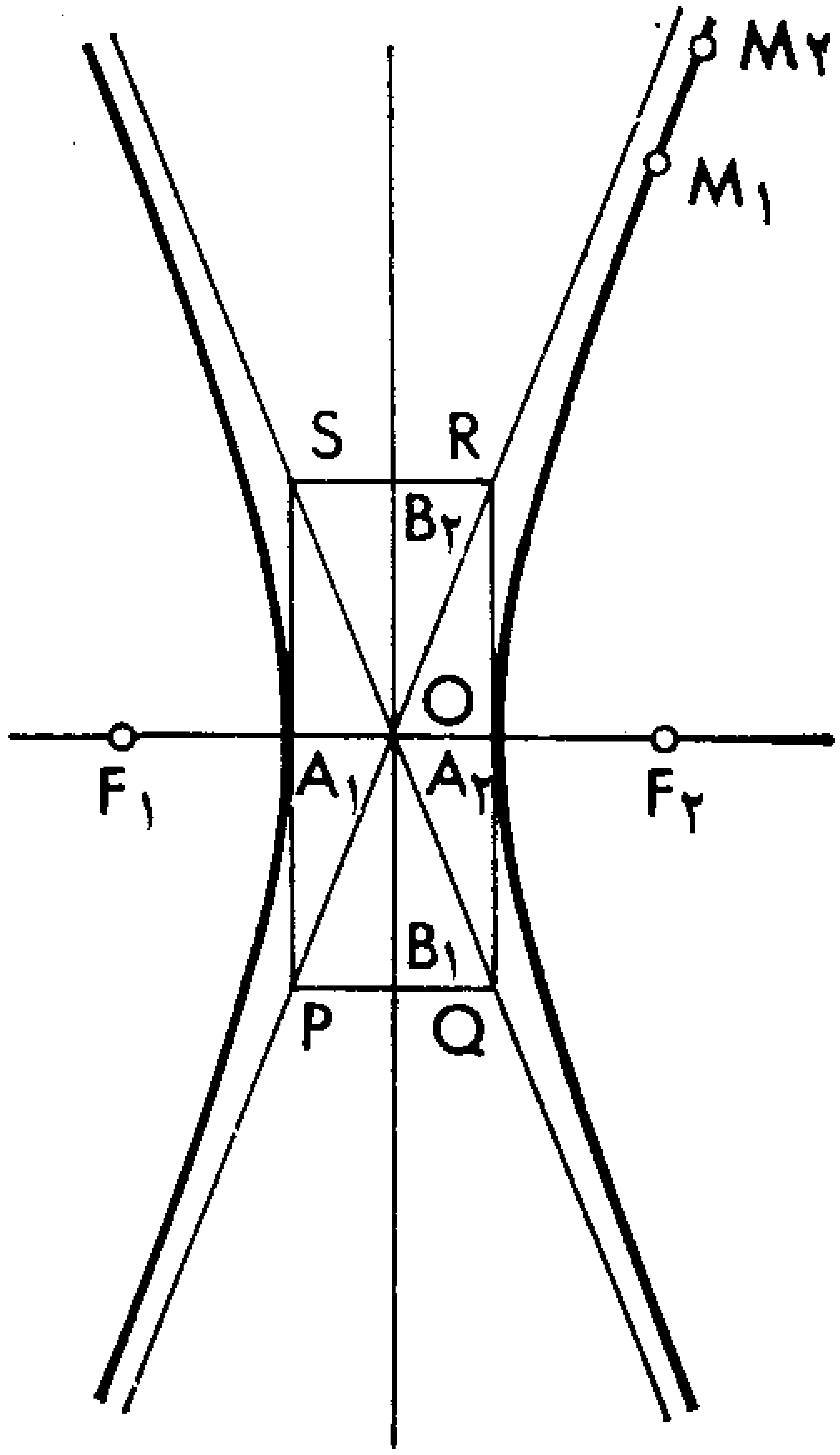
$$A_1F_1 = A_2F_2$$

لذا میتوانیم A_1F_1 را با A_2F_2 تعویض نموده و بدست بیاوریم:

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m$$

واضح است که تفاضل $A_1F_2 - A_2F_2$ برابر A_1A_2 یعنی برابر طول محور حقیقی هذلولی است. بدین‌ترتیب اختلاف m فواصل هر نقطهٔ هذلولی تا کانون‌های آن (فاصلهٔ کمتر را باید از فاصلهٔ زیادتر کم کرد) با طول محور حقیقی هذلولی برابر است.

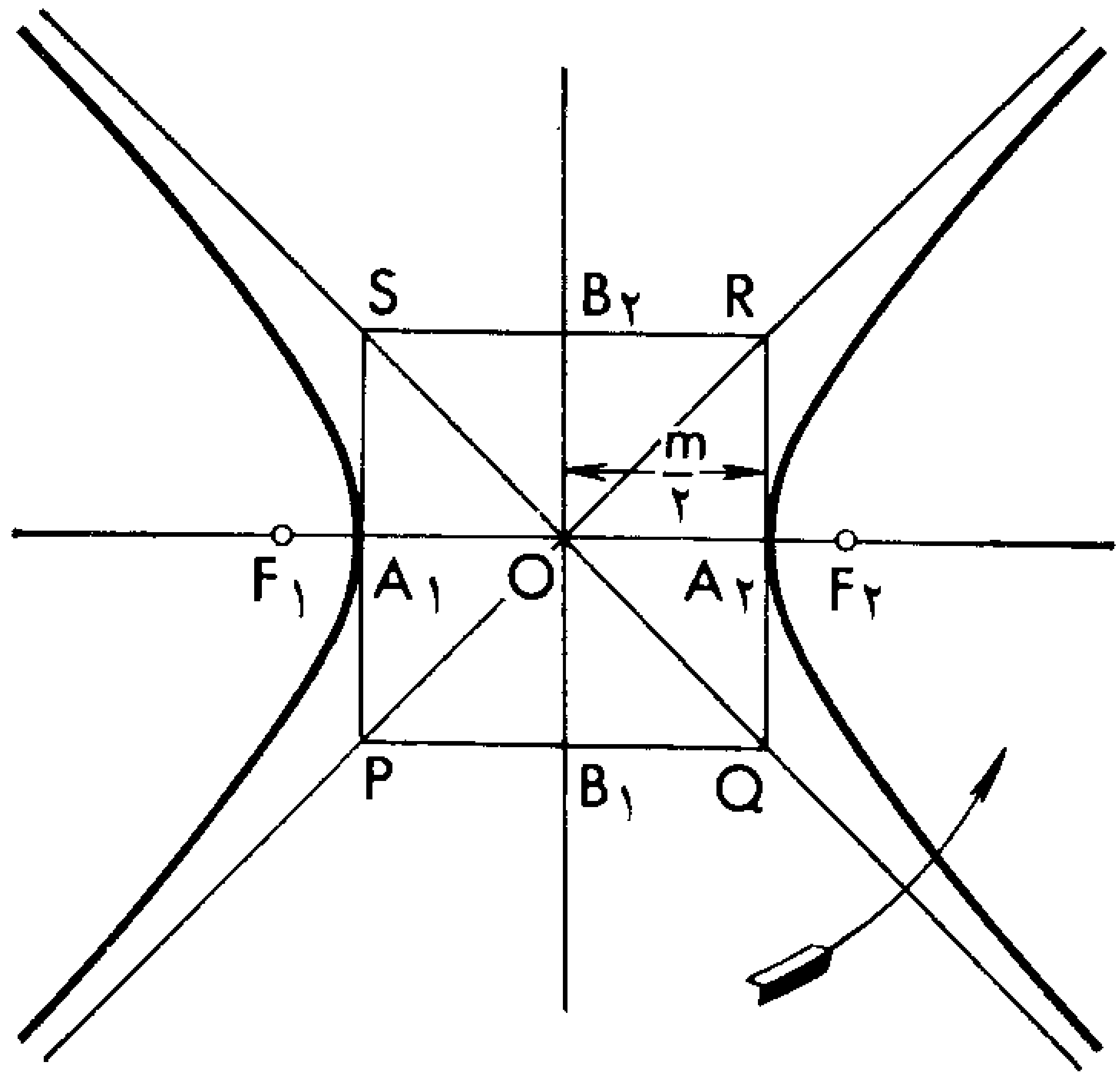
با مرکز در رأس A_1 (یا A_2) کمانی بشعاع برابر بانصف F_1F_2 را بر محور دوم تقارن هذلولی میزنیم و دو نقطه B_1 و B_2 را بدست میاوریم (شکل ۱۸). پاره‌خط B_1B_2 را محور موهومی هذلولی گویند. سپس راست‌گوشهٔ $PQRS$ را میسازیم که اضلاع آن با محورهای هذلولی موازی بوده و از نقاط A_1، A_2، B_1 و B_2 میگذرد. سپس اقطار PR و QS آن را عبور میدهیم. با ادامه دادن آنها تا بی‌نهایت، دو خط راستی بنام مجانب هذلولی را بدست میاوریم. آنها واجد این ویژگی جالبند که هیچ جا هذلولی را قطع نمیکنند گرچه نقاط هذلولی تا فاصلهٔ هر چه کوچکتر به مجانب‌ها نزدیک میشوند و هر قدر این نقاط از مرکز هذلولی دورتر باشند همانقدر بیشتر



شکل ۱۸

به مجانب ها نزدیک میگردند. کمان‌های هذلولی بین دو نقطهٔ دور از مرکز، در شکل تقریباً مانند پاره‌خط راست میباشند (کمان M_1M_2 را در شکل ۱۸ نگاه کنید) گرچه در حقیقت هیچ جا مستقیم‌الخط نیستند اما میزان انحناء آنها ناچیز و لذا تقریبا غیر قابل تشخیص است.

برای ترسیم تقریبی هذلولی در نقشه بدون عملیات دقیق با خط‌کش و نخ باید اینطور عمل نمود: اول محورهای تقارن هذلولی را نمایش میدهیم، سپس بر محور اول کانون‌های F_1 و F_2 را در فواصل برابر تا مرکز علامتگذاری میکنیم، بعد بر همان محور اول، در دو طرف مرکز، پاره‌خط‌های برابر نصف m یعنی نصف اختلاف داده شدهٔ فواصل نقاط هذلولی تا کانون‌ها را جدا نموده و

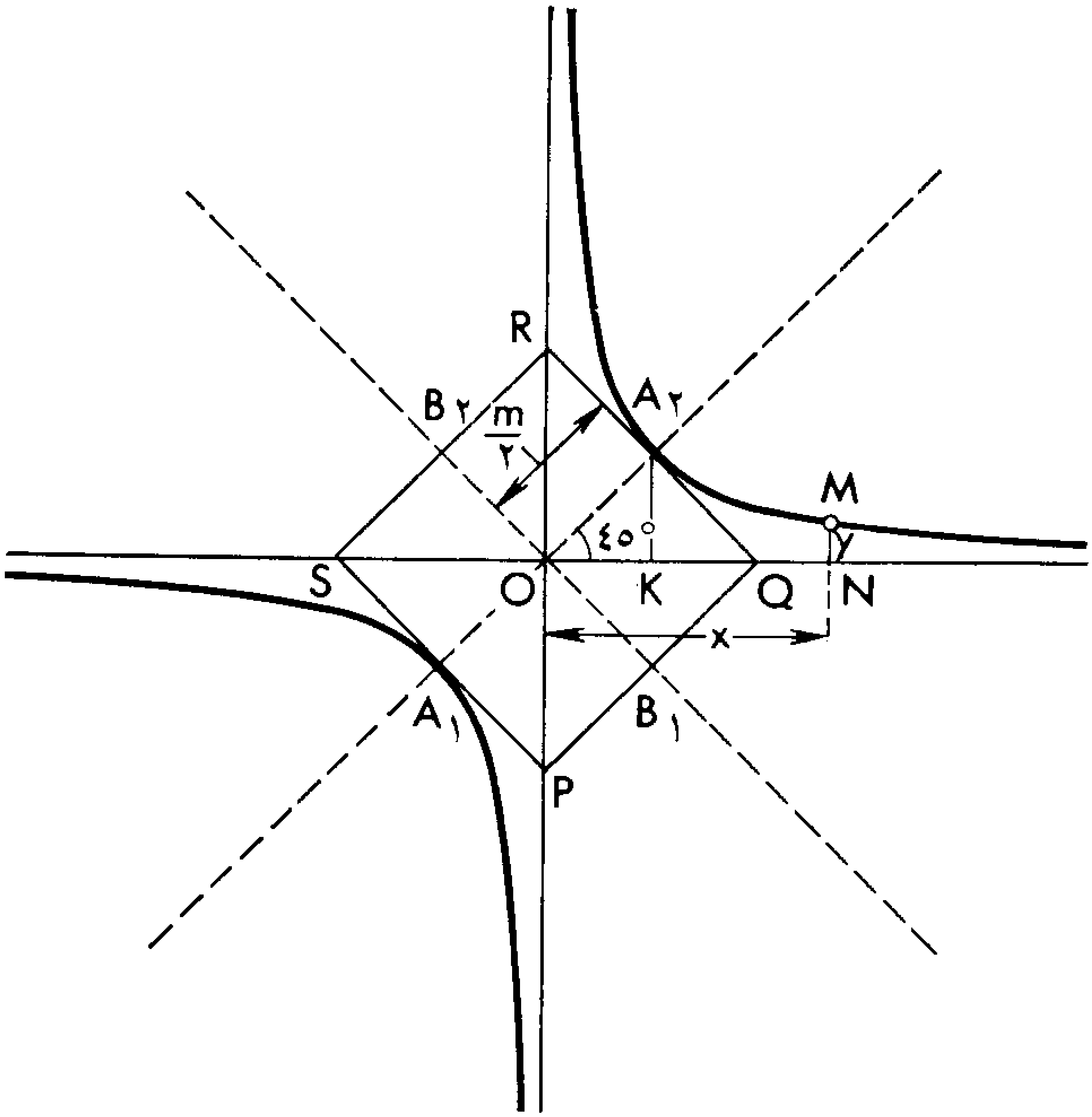


شکل ۱۹

رئوس A_1 و A_2 هذلولی را بدست میآوریم. سپس بر محور دوم، نقاط B_1 و B_2 را با پرگار جدا میکنیم، راست‌گوشه $PQRS$ را میسازیم و سرانجام اقطار آن را عبور و ادامه میدهیم. شکلی مانند شکل ۱۹ بدست میآید. حال باید با دست دو کمان متقارن نسبت به محورها را از نقاط A_1 و A_2 بگذرانیم بنحوی که ملایماً انحناء پیدا کند و به مجانب‌های PR و QS نزدیک و نزدیک‌تر گردد.

۱۲. هذلولی متساوی الساقین

در حالت خاص، راست‌گوشهٔ $PQRS$ میتواند مربع باشد. این امر وقتی و تنها وقتی رخ میدهد که مجانب‌های هذلولی متعامد باشند. اینگونه هذلولی را متساوی‌الساقین گویند. همین حالت در



شکل ۲۰

شکل ۱۹ نمایش داده شده است. برای راحتی بررسی، تمامی شکل را بزاویهٔ °۴۵ در حول نقطهٔ O در جهت سهم میچرخانیم. هذلولی شکل ۲۰ بدست میآید. یک پارهخط $ON = x$ را بر مجانب OQ جدا کرده و عمود $NM = y$ را از نقطهٔ N تا تلاقی با هذلولی اخراج مینمائیم. بین y و x بستگی سادهای وجود دارد: معلوم میشود که هرگاه x را چند برابر کنیم y بهمان نسبت کاهش مییابد. همینطور هم هرگاه x را چند مرتبه کاهش دهیم y نیز بهمان نسبت افزایش

میبابد. بدیگر سخن، طول $NM = y$ با طول $ON = x$ نسبت معکوس دارد:

$$y = \frac{k}{x}$$

هذلولی متساوی‌الساقین در اثر این خاصیت، نمودار نسبت معکوس میباشد. برای توضیح اینکه ضریب نسبت معکوس، k، چگونه با ابعاد هذلولی بستگی دارد رأس $A_۲$ را بررسی میکنیم که برای آن

$$x = OK,\ \ y = KA_۲$$

پاره‌خط‌های OK و $KA_۲$ ساقین سه گوشهٔ متساوی‌الساقین قایم‌الزاویهٔ دارای وتر

$$OA_۲ = \frac{m}{۲}$$

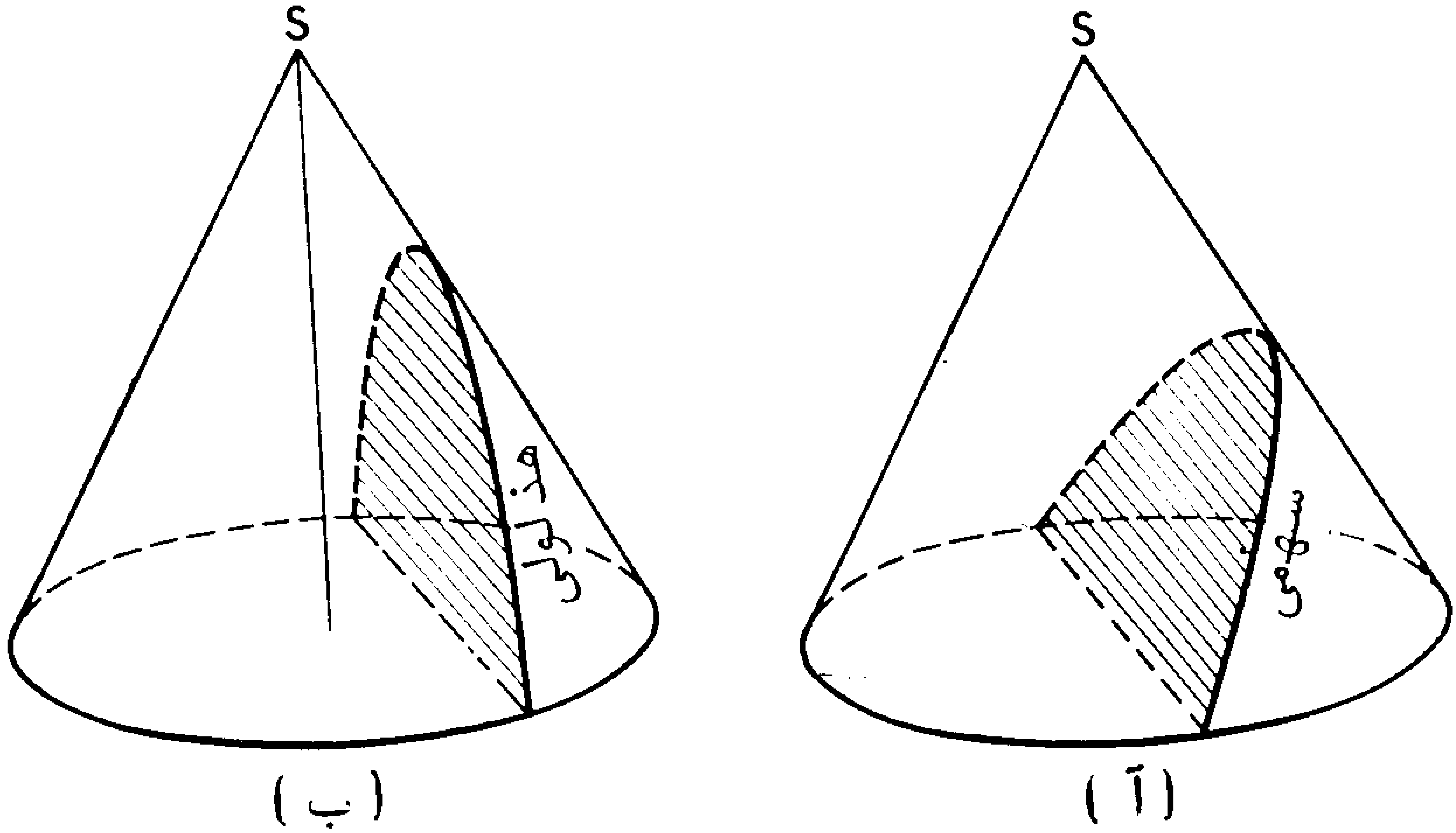
میباشد، لذا

$$x = y, \qquad x^۲ + y^۲ = \left(\frac{m}{۲}\right)^۲ = \frac{m^۲}{٤}$$

و از اینجا $۲x^۲ = \frac{m^۲}{٤}$ یا $x^۲ = \frac{m^۲}{۸}$. از طرف دیگر، از رابطهٔ نسبت معکوس $y = \frac{k}{x}$ نتیجه میشود که $xy = k$ یا، در این حالت که $y = x$، $x^۲ = k$. با مقایسهٔ دو نتیجه، پیدا میکنیم: $k = \frac{m^۲}{۸}$.
بعبارت دیگر، ضریب نسبت معکوس، k، با یک هشتم مربع طول محور حقیقی هذلولی برابر است.

۱۳. مقاطع مخروط

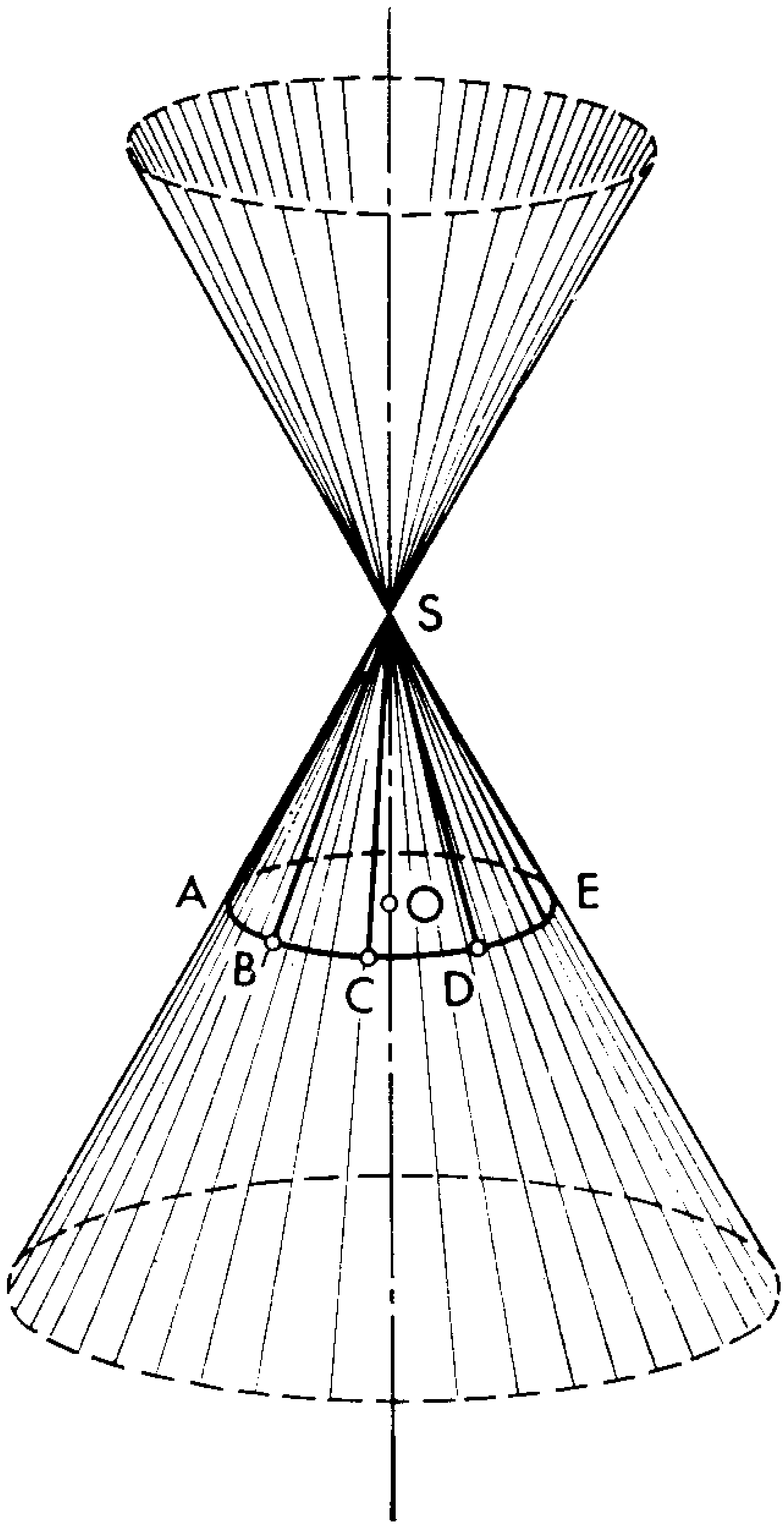
قبلا ما گفتیم که اگر مخروط را با کارد، یا بعبارت هندسی، با صفحه ببریم و ضمناً بنحوی که قاعدهٔ مخروط سالم بماند در آنصورت محیط مقطع بشکل بیضی خواهد بود (به شکل ۱۰ رجوع شود).
معلوم میشود که هرگاه مخروط را با صفحه طوری قطع نمائیم که



شکل ۲۱

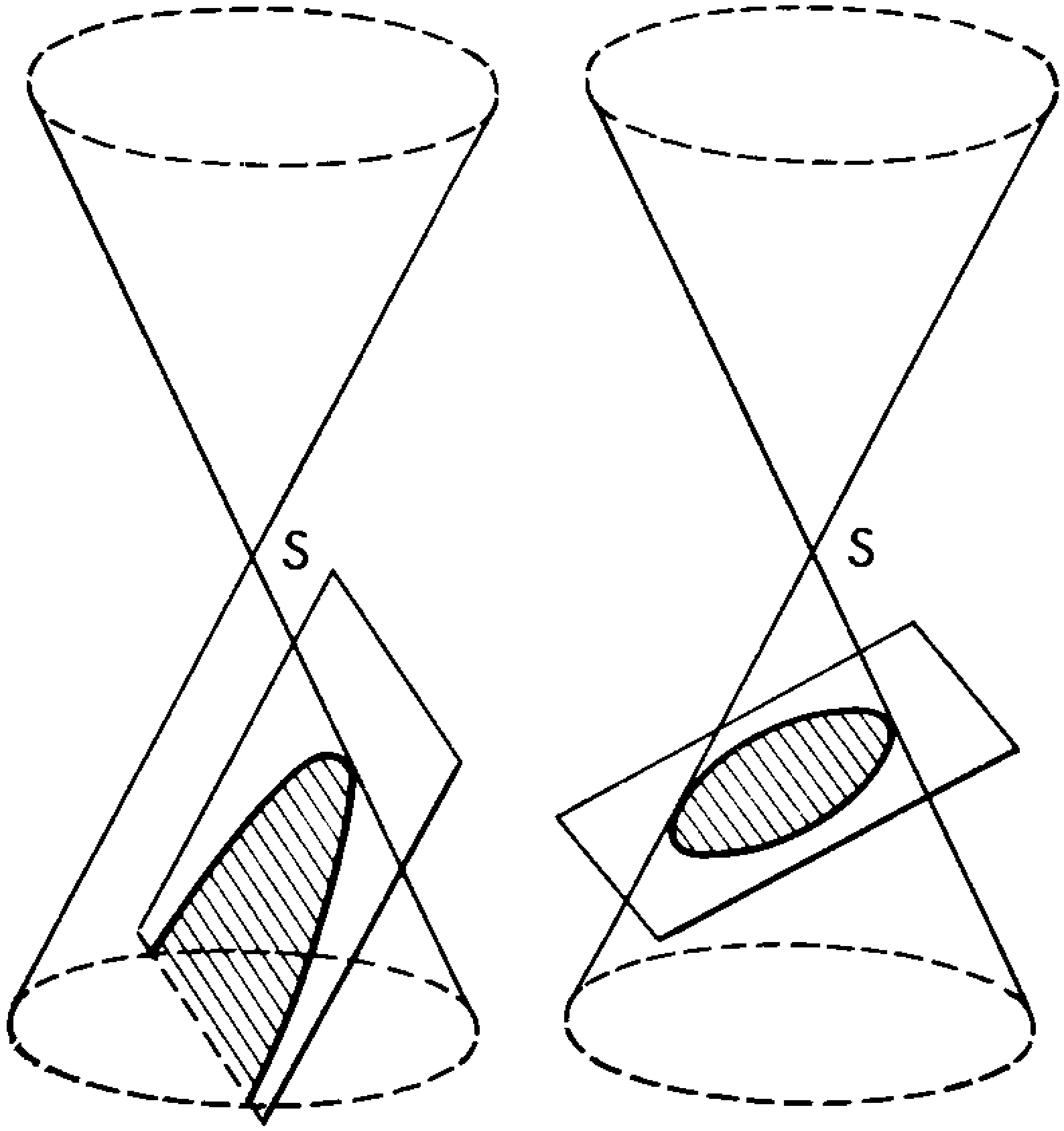
قاعدهٔ آن نیز بریده شود میتوان در مقطع کمان سهمی (شکل ۲۱، الف)، یا کمان هذلولی (شکل ۲۱، ب) را بدست آورد. بدین ترتیب هر سه منحنی بیضی، هذلولی و سهمی مقاطع مخروطی میباشند.

مخروطی را که از آن استفاده کردیم دارای یک نقص است و آن اینکه تنها بیضی میتواند بتمامی روی آن قرار گیرد (شکل ۱۰) اما سهمی و هذلولی، منحنی‌هائیکه تا بی‌نهایت ادامه دارند فقط تا قسمتی میتوانند در آن بگنجند. در شکل ۲۱، ب حتی دیده نمیشود شاخهٔ دوم هذلولی از کجا پیدا میشود. برای رفع این نقیصه، مخروط را با سطح مخروطی که تا بی‌نهایت ادامه دارد تعویض میکنیم. برای این منظور تمام مولدهای مخروط یعنی پاره‌خط‌های راست AS، BS، CS، DS، ES و غیره را که نقاط دایرهٔ قاعدهٔ مخروط را به رأس آن وصل میکنند در هر دو سمت تا بی‌نهایت ادامه میدهیم (شکل ۲۲؛



شکل ۲۲

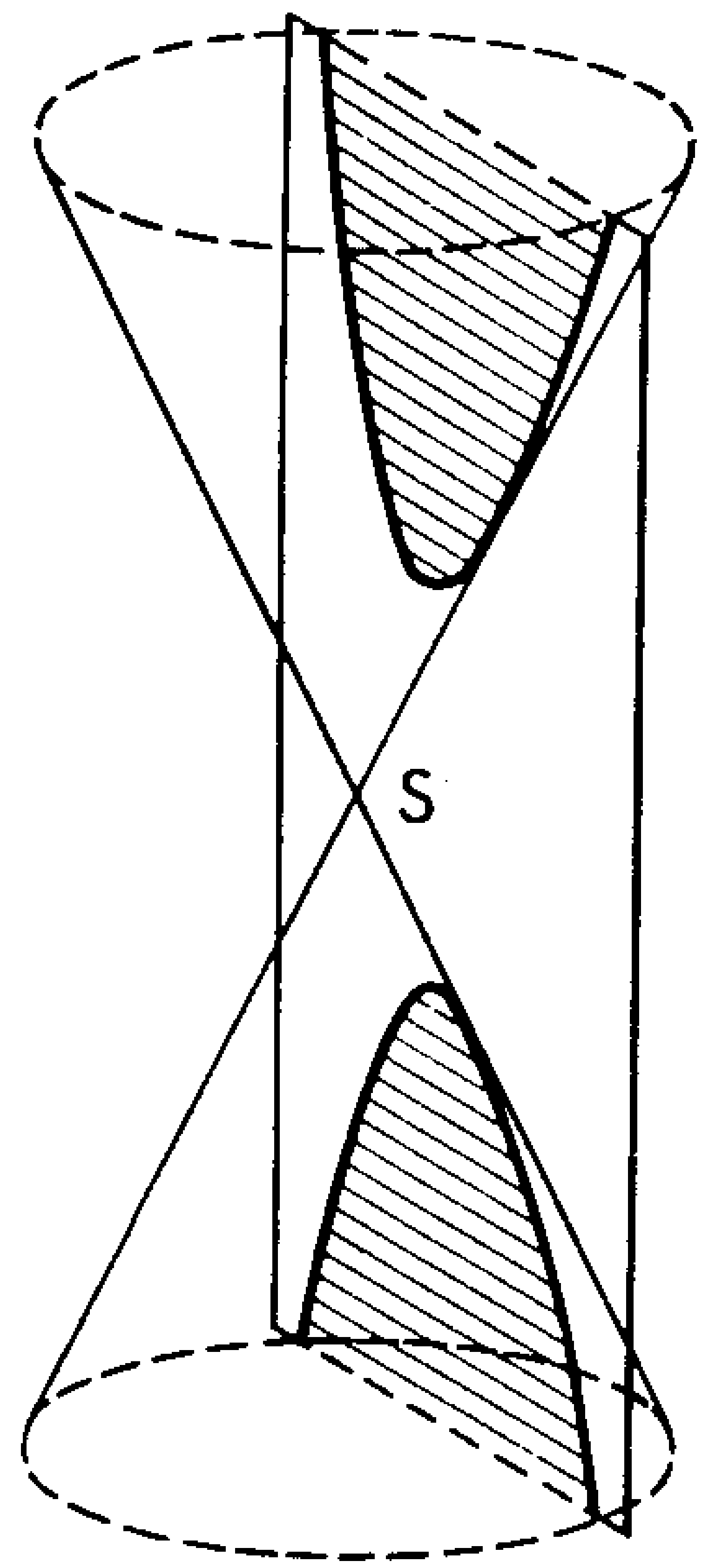
طبیعی است که در این شکل نمیتوان مولدهای بی‌نهایت را نمایش داد، لذا در اینجا باز هم پاره‌خط‌های راست ترسیم گردیده منتها طولشان از پاره‌خط‌های اولیه بیشتر است). در نتیجه، سطح مخروطی مطلوب بدست می‌آید که از دو نیمهٔ بهم بسته در نقطهٔ S تشکیل شده است. این دو نیمه یا دامن تا بی‌نهایت ادامه دارند. تمامی



شکل ۲۳ (آ) (ب)

سطح مخروطی را میتوان مانند اثر خط راست متحرکی که از نقطهٔ S میگذرد و با حفظ زاویهٔ ثابت با محور سطح مخروطی (خط راست OS) میچرخد، تلقی نمود. این خط راست متحرک، مولد سطح مخروطی نامیده میشود. واضح است که با ادامه دادن هر یک از مولدهای مخروط اولیه، ما مولدهای سطح مخروطی را بدست می‌آوریم.

حال تمامی سطح مخروطی را با صفحه قطع میکنیم. هرگاه صفحه همهٔ مولدها را در حدود یک دامن قطع کند آنگاه در مقطع بیضی و یا، در حالت خاص، دایره حاصل میشود (**شکل** ۲۳، الف). هرگاه همهٔ مولدها را باستثنای یک مولد موازی با خود قطع کند آنگاه در مقطع سهمی حاصل میگردد (**شکل** ۲۳، ب). بالاخره هرگاه صفحه



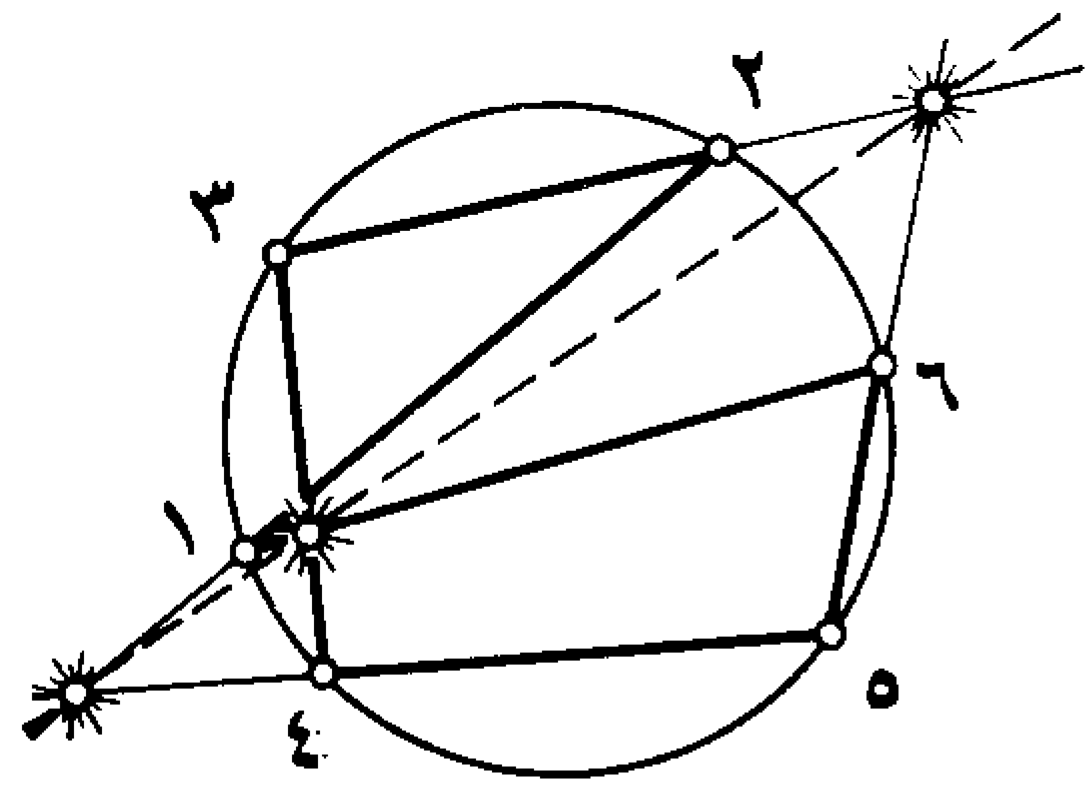
(پ)

شکل ۲۳

تعدادی از مولدها را در حدود یک دامن، و تعداد دیگر را در حدود دامن دیگر ببرد آنگاه در مقطع هذلولی بدست می‌آید (شکل ۲۳، پ). ما می‌بینیم که هم بیضی و هم سهمی در حدود یک دامن سطح جا میگیرند. و اما برای هذلولی تمامی سطح مخروطی ضرور است: یک شاخهٔ هذلولی در یک دامن، و شاخهٔ دیگر در دامن دیگر قرار دارد.

۱۴. قضیهٔ پاسکال

ب. پاسکال (۱۶۲۳ — ۱۶۶۲) هنوز ۱۷ ساله نشده بود که یک ویژگی عمومی جالب مقاطع مخروطی را کشف نمود. اعلانی که



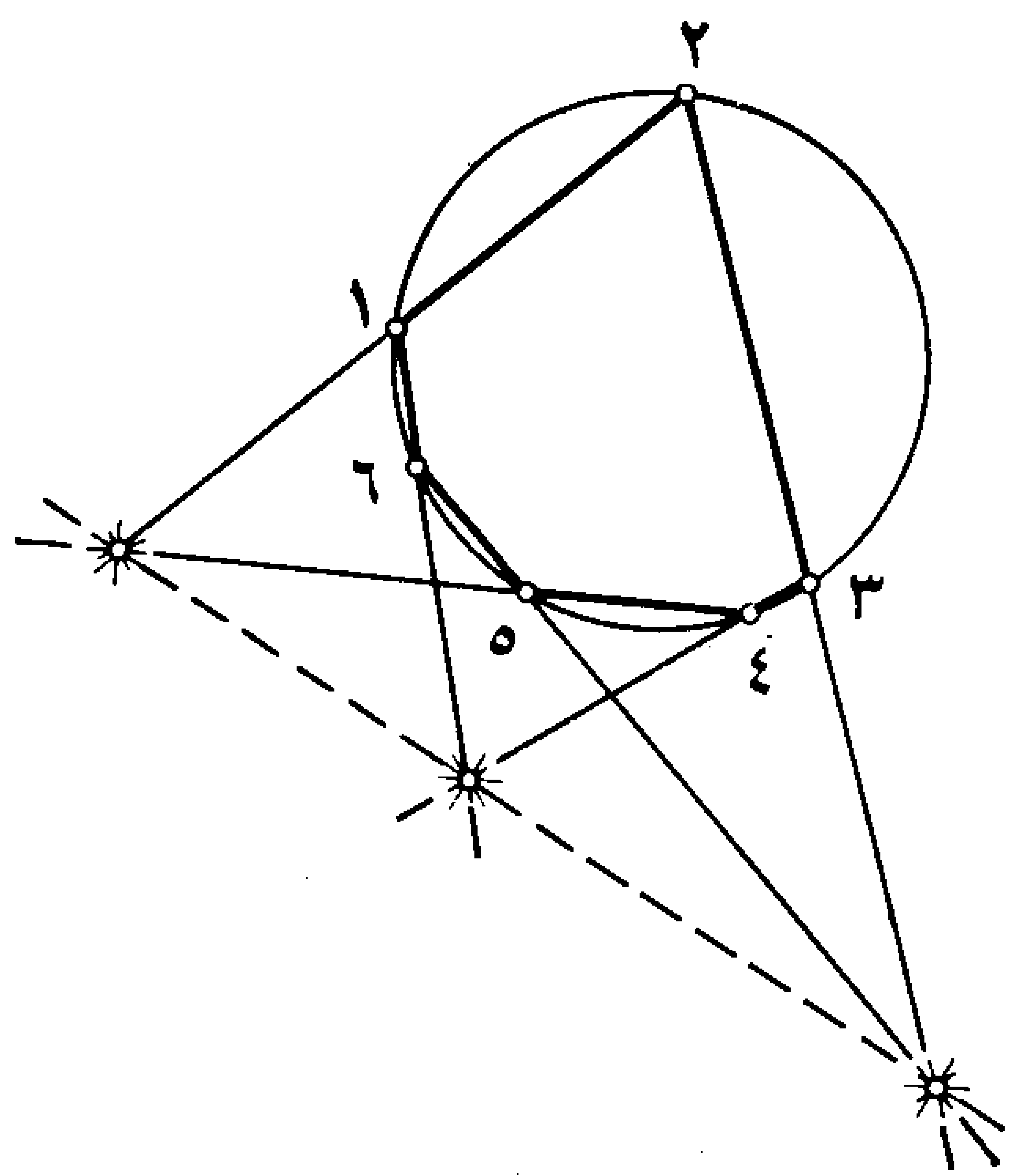
شکل ۲۴

بتعداد ۵۰ نسخه چاپ شده بود کشف وی را مژده داد. تنها دو نسخه تا زمان ما باقی مانده است. چند تا از این اعلانات را روی دیوار خانه‌ها و کلیساهای پاریس زده بودند. این امر نباید باعث شگفتی خواننده گردد زیرا در آن دوران (سال ۱۶۴۰) هنوز مجلهٔ علمی وجود نداشت که در صفحات آن بتوان در بارهٔ کشف خود به سایر دانشمندان اطلاع داد. اینگونه مجلات ربع قرن بعد در فرانسه و انگلستان تقریبا همزمان پیدا شد. و اما به پاسکال بر گردیم.

با اینکه اعلان وی، برخلاف رسم آن زمان، بجای لاتینی بفرانسه چاپ شده بود بعید بود که اهالی پاریس در حالیکه به آن چشم دوخته بودند توانسته باشند از اصل موضوع سر درآورند زیرا این جوان نابغه اندیشهٔ خود را بصورت فوق‌العاده فشرده و بدون توضیحات بیان نموده بود.

در آغاز اعلان، پس از سه تعریف، قضیه‌ای تحت عنوان «لم * ۱» آمده بود که آنرا در اینجا با کلمات دیگر بازگو میکنیم. ۶ نقطهٔ دلخواه را در روی دایره اختیار و شماره‌گزاری میکنیم (نه حتماً به

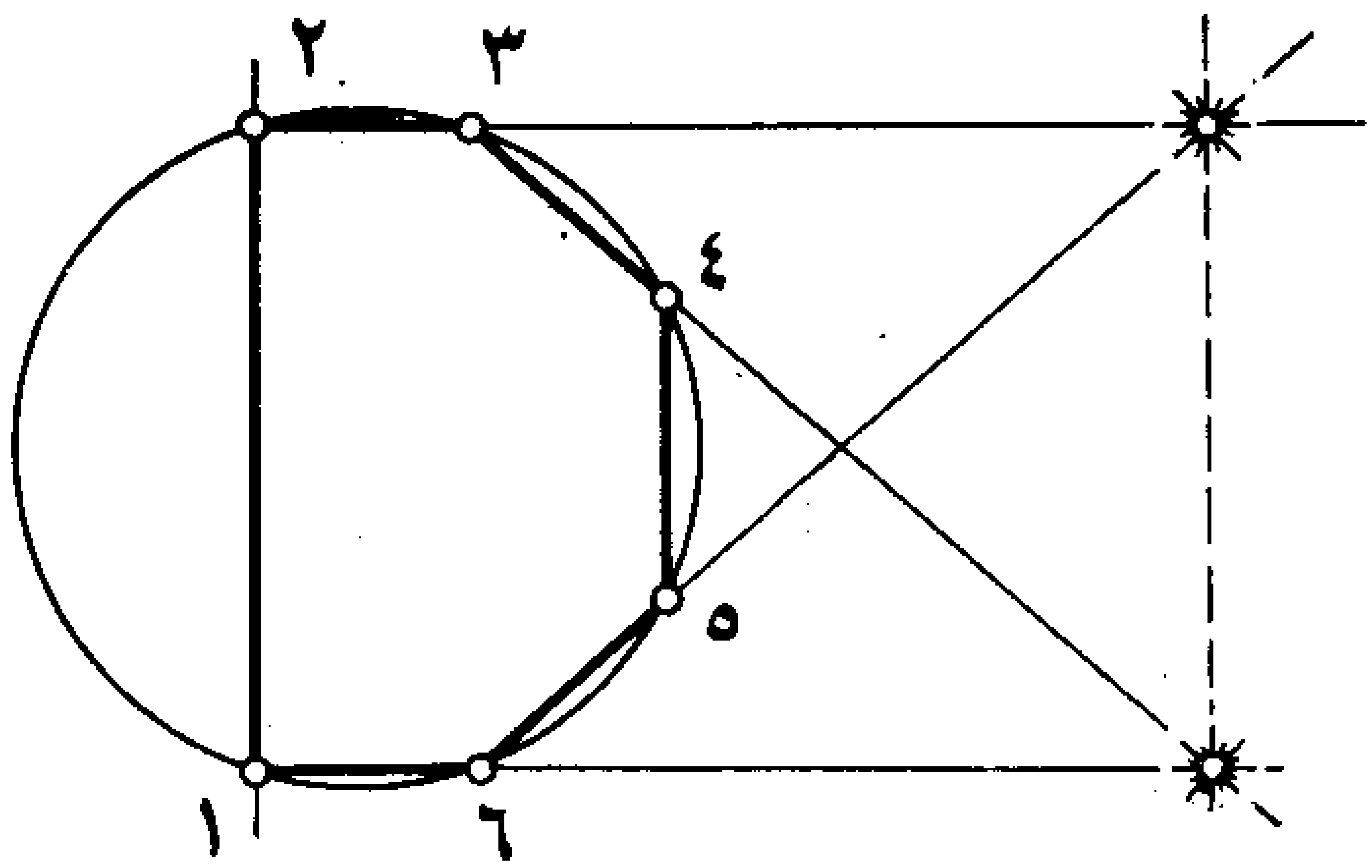
* لم گزارهٔ ریاضی کمکی است که در اثبات یک یا تعداد بیشتر قضایا بکار میرود (مترجم).



شکل ۲٥

ترتیب توالی آنها بر روی دایره) و با پاره‌خط‌های راست آنها را متصل میکنیم. آخرین پاره‌خط نقطهٔ اول را با نقطهٔ ششم مربوط میسازد (شکل ۲٤). قضیهٔ پاسکال تاکید میکند در صورتیکه خطوط راستی که با ادامه دادن این ٦ پاره‌خط بدست می‌آید دو در میان — اولی با چهارمی، دومی با پنجمی، سومی با ششمی — در نظر گرفته شود سه نقطهٔ تلاقی آنها در یک استقامت واقع میگردد.

خودتان نقاط را بترتیب‌های مختلف بر روی دایره انتخاب نموده و چند آزمایش انجام دهید (شکل ۲٥). ضمناً ممکن است اتفاق بیافتد که برخی خطوط راستی که در صدد یافتن نقطهٔ تقاطع آنها بر می‌آئیم، مثلا اولی و چهارمی، متوازی باشند. در اینصورت قضیهٔ پاسکال را باید اینطور معنی کرد: خط راستی که دو نقطهٔ دیگر تقاطع را متصل میسازد با این خطوط راست موازی میباشد (شکل ۲٦). بالاخره، اگر علاوه بر این، خط راست دوم با خط راست پنجم موازی



شکل ۲٦

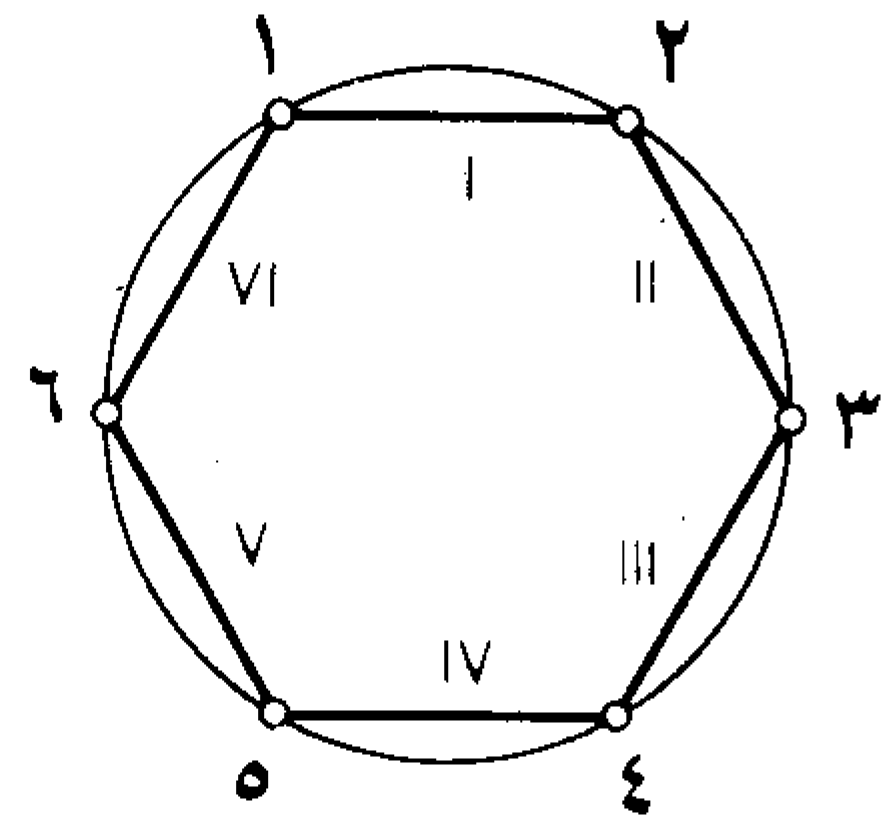
از آب در آید در آنصورت در این حالت ویژه، قضیهٔ پاسکال حاکی است که خطوط راست این جفت اخیر نیز — سومی و ششمی — متوازی از کار در می‌آیند. مثلا ما وقتی با همین حالت مواجه میشویم که نقاط روی دایره، رئوس شش‌ضلعی منتظم محاطی باشند و بترتیب تسلسل خود در روی دایره شماره‌گزاری شده باشند (شکل ۲۷).

پاسکال به صورتبندی قضیهٔ خود تنها در مورد دایره بسنده نکرده بود. وی متوجه شده بود که این قضیه هم‌چنین در مورد هر مقطع مخروطی، اعم از بیضی، سهمی یا هذلولی، باید صادق بماند. شکل ۲۸، نمایش قضیهٔ پاسکال در مورد سهمی میباشد.

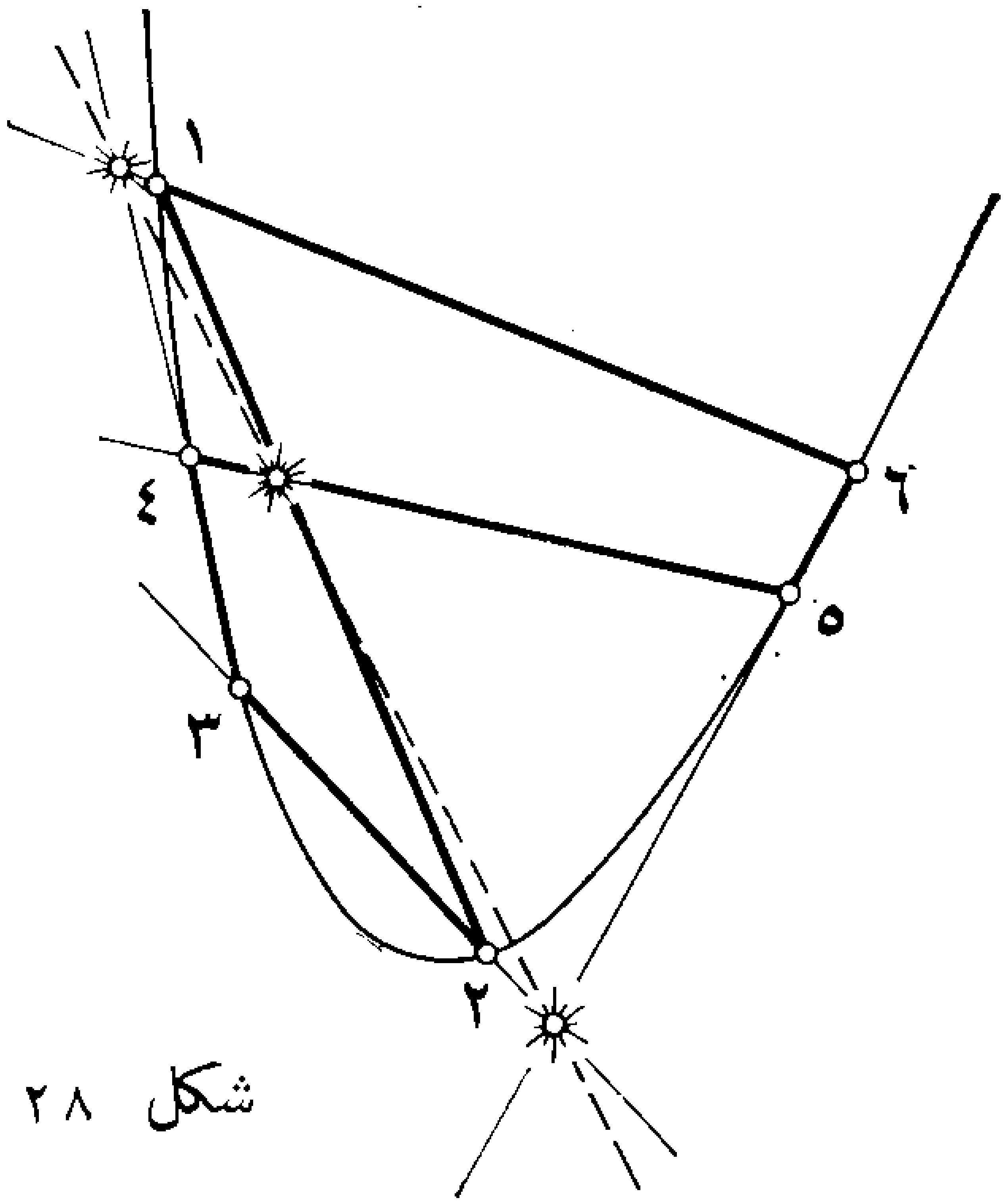
۱۵. قضیهٔ بریانشون

شارل بریانشون ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۸۳ — ۱۸٦٤) در سال ۱۸۰٦ کشف کرد که قضیهٔ زیر که، چنانکه بعداً می‌بینیم، نسبت به قضیهٔ پاسکال معکوس است صادق میباشد.

٦ مماس بر دایره (یا بر هر نوع مقطع مخروطی) را ترسیم، و به ترتیبی شماره‌گزاری کرده و نقاط تقاطع متوالی را یافت مینمائیم



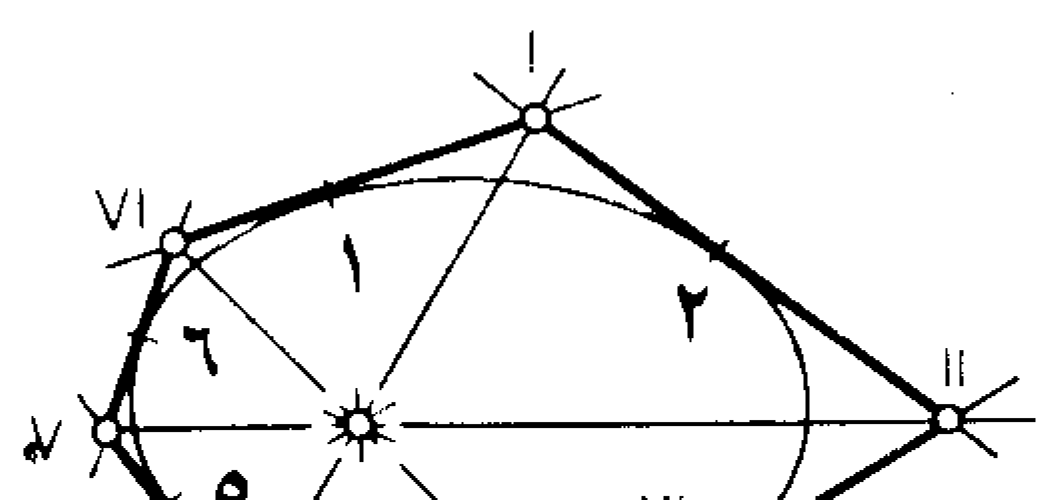
شکل ۲۷



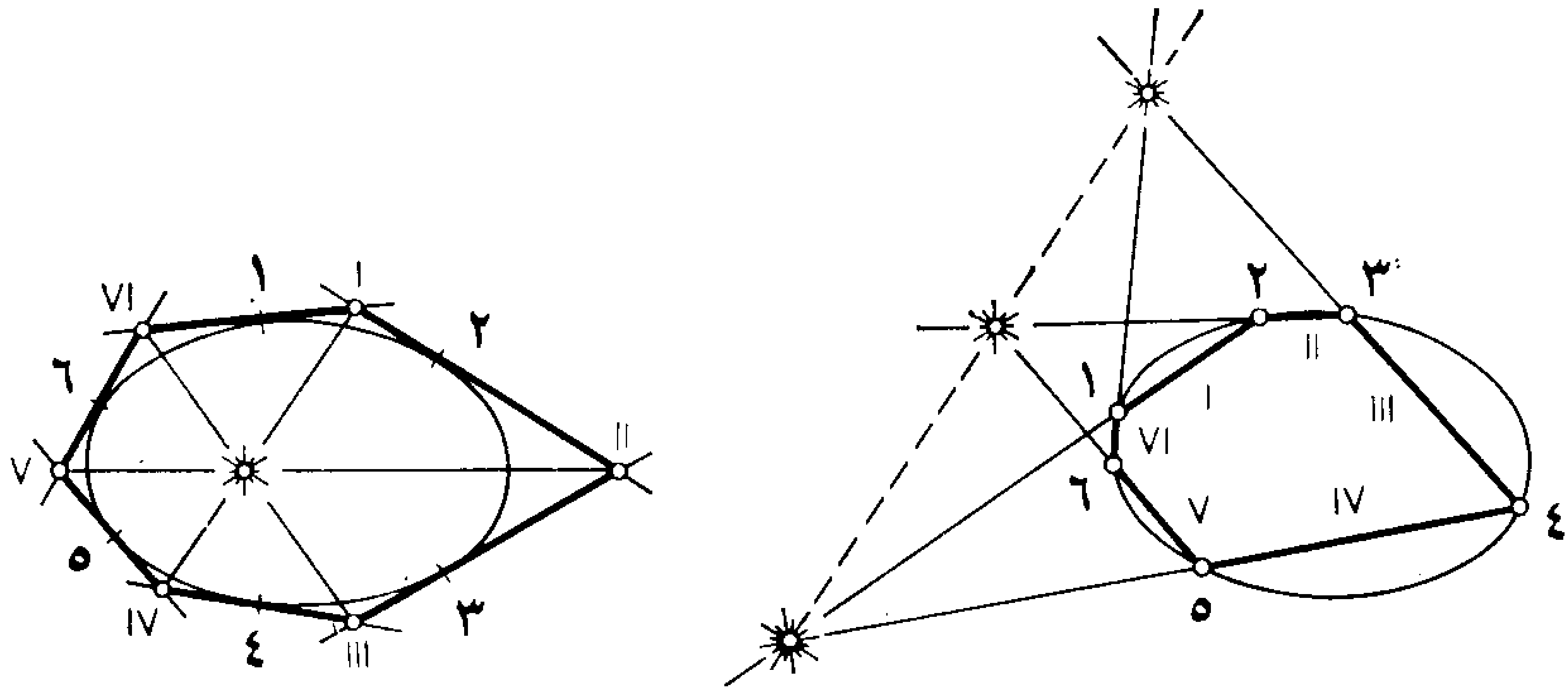
شکل ۲۸

(شکل ۲۹). قضیهٔ بریانشون تاکید میکند که سه خط راست واصل ۶ نقطه، دو نقطه در میان، اولی و چهارمی، دومی و پنجمی، سومی و ششمی، در یک نقطه تقاطع میکنند.

برای نمایش ارتباط نزدیک دو قضیه، بریانشون متن هر دو را در دو ستون، یکی رو بروی دیگری، نوشته بود (مراتب را در شکل ۳۰ پیگیری نمائید که در سمت راست قضیهٔ بریانشون، و در سمت چپ قضیهٔ پاسکال توضیح گردیده است):



شکل ۲۹



شکل ۳۰

قضیهٔ پاسکال

٦ نقطهٔ ۱، ۲، ۳، ٤، ۵، ٦ در مقطع مخروطی مفروضند.

آنها را بترتیب بوسیلهٔ خطوط راست I، II، III، IV، V، VI، متصل کرده و سه نقطهٔ تلاقی این ٦ خط راست را دو در میان، I با IV، II با V، III با VI، پیدا میکنیم.

آنگاه این سه نقطه در یک استقامت واقع میشوند.

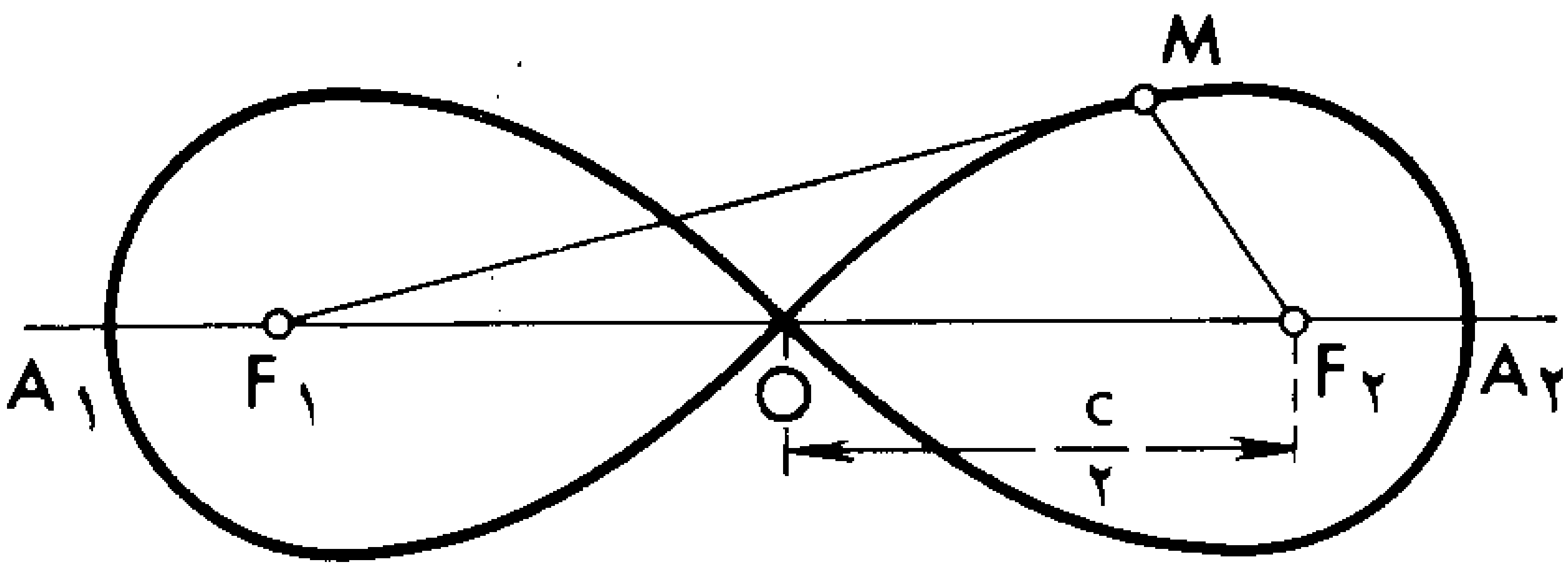
قضیهٔ بریانشون

٦ مماس ۱، ۲، ۳، ٤، ۵، ٦ بر مقطع مخروطی مفروضند.

نقاط تلاقی آنها را بترتیب پیدا میکنیم : I، II، III، IV، V، VI، و این ٦ نقطه را دو در میان متصل میکنیم، I با IV، II با V، III با VI.

آنگاه این سه خط راست در یک نقطه متلاقی میشوند.

واضح است که برای انتقال از یک متن به متن دیگر کافی است که بعضی کلمات و عبارات با کلمات و عبارات دیگر تعویض شود : «نقاط» با «مماس‌ها»، «بوسیلهٔ خطوط راست متصل کردن» با

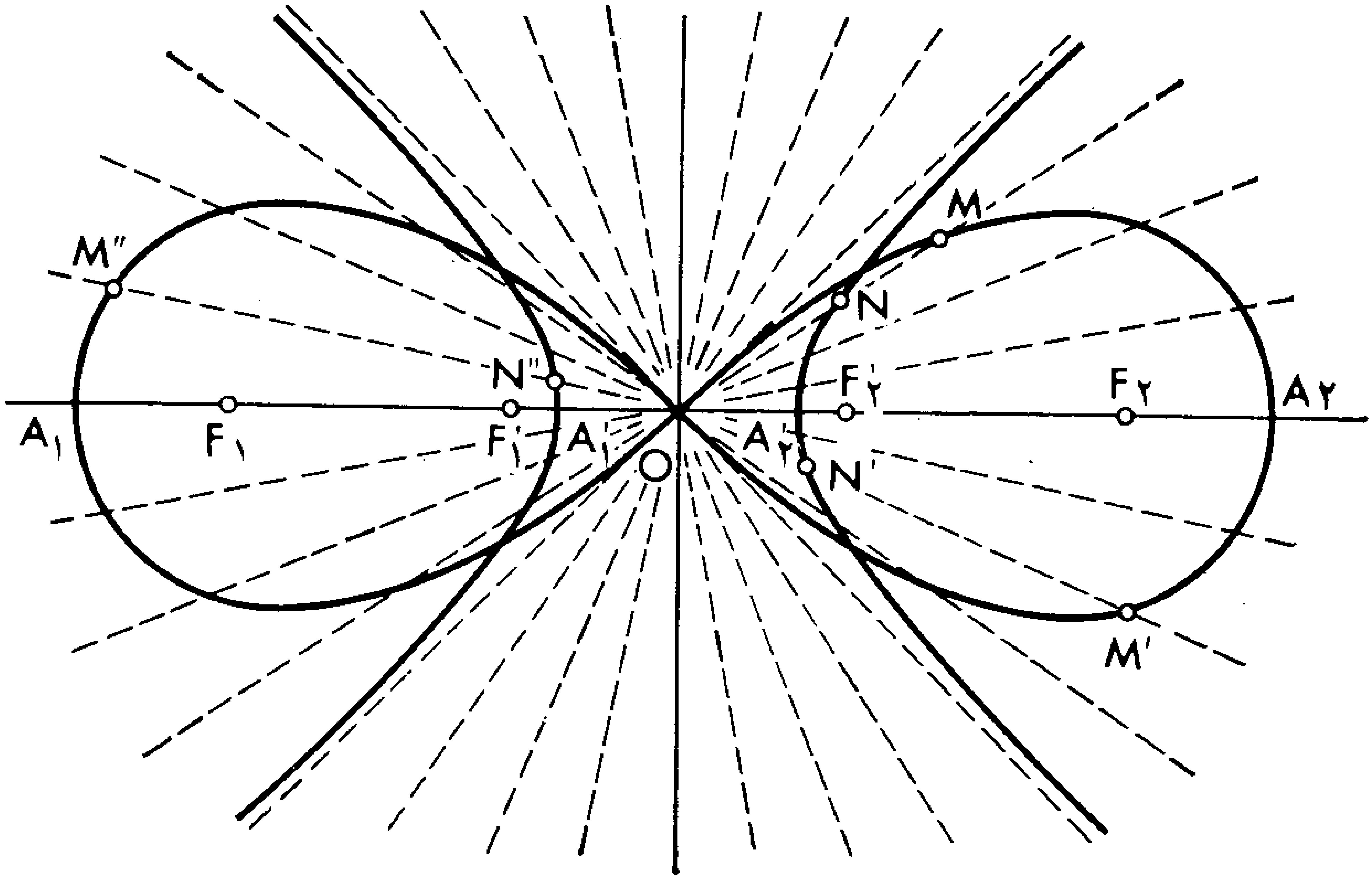


شکل ۳۱

«نقاط تلاقی خطوط راست را پیدا کردن»، «سه نقطه در یک استقامت واقع میشوند» با «سه خط راست در یک نقطه متلاقی میشوند». خلاصه، میتوان گفت که در این انتقال، خطوط راست و نقاط با هم نقش عوض میکنند. در هندسهٔ تصویری، شرایطی مشخص میشود که تحت آنها با تعویض مشابه از یک قضیهٔ صحیح (نه حتماً قضیهٔ پاسکال) یک قضیهٔ دیگر نتیجه میشود که آن هم صحیح است. این اصل که امکان میدهد از دو قضیهٔ هندسی تنها یک قضیه اثبات گردد به اصل دوگانگی مصطلح است. قضیهٔ دیگر، بحساب، بطور خودکار صحیح واقع میگردد.

۱۶. لمنیسکات برنولی

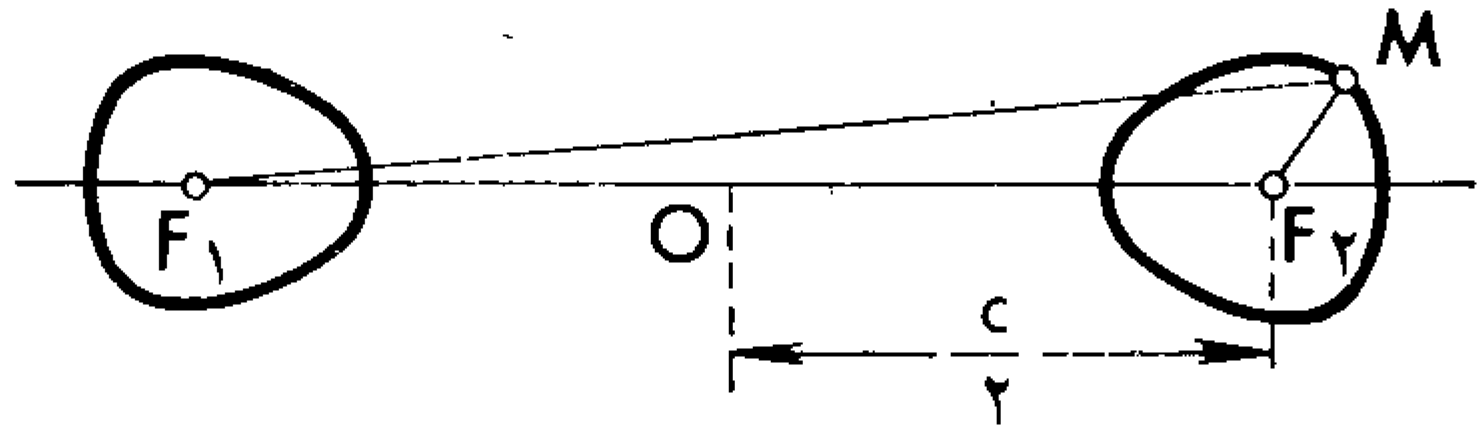
حال به بررسی منحنی‌ای میپردازیم که نقطهٔ M آنرا در صفحه ترسیم میکند چنانکه حاصلضرب P فواصل این نقطه تا دو نقطهٔ معین F_1 و F_2 همان صفحه ثابت بماند. اینگونه منحنی را لمنیسکات گویند (lemniscatus بزبان لاتینی بمعنی «مزین به نوار» است). هرگاه طول پاره‌خط F_1F_2 را به c نمایش دهیم آنگاه فواصل وسط O — ی پاره‌خط F_1F_2 تا F_1 و F_2 برابر $c/2$ و حاصل‌ضرب این فواصل برابر $c^2/4$ است. نخست درخواست کنیم که مقدار p حاصل‌ضرب ثابت درست برابر $c^2/4$ باشد یعنی $MF_1 \times MF_2 = c^2/4$. در اینصورت نقطهٔ



شکل ۳۲

O بر لمنیسکات واقع میگردد و خود لمنیسکات بشکل رقم هشت فرنگی خوابیده میباشد (شکل ۳۱). اگر پاره‌خط F_1F_2 را در هر دو سمت تا تلاقی با لمنیسکات ادامه دهیم در آنصورت دو نقطهٔ A_1 و A_2 بدست می‌آید. فاصله میان آنها، $A_1A_2=x$ را بآسانی میتوان بر حسب فاصلهٔ معلوم $F_1F_2=c$ بیان نمود. برای این منظور یادآور میشویم که فاصلهٔ نقطهٔ A_2 تا F_2 برابر است با $\frac{x}{2}-\frac{c}{2}$، و فاصلهٔ همان نقطهٔ A_2 تا F_1 برابر است با $\frac{x}{2}+\frac{c}{2}$. بنا بر این، حاصل‌ضرب فواصل چنین است:

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{c}{2}\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{c^2}{4}$$



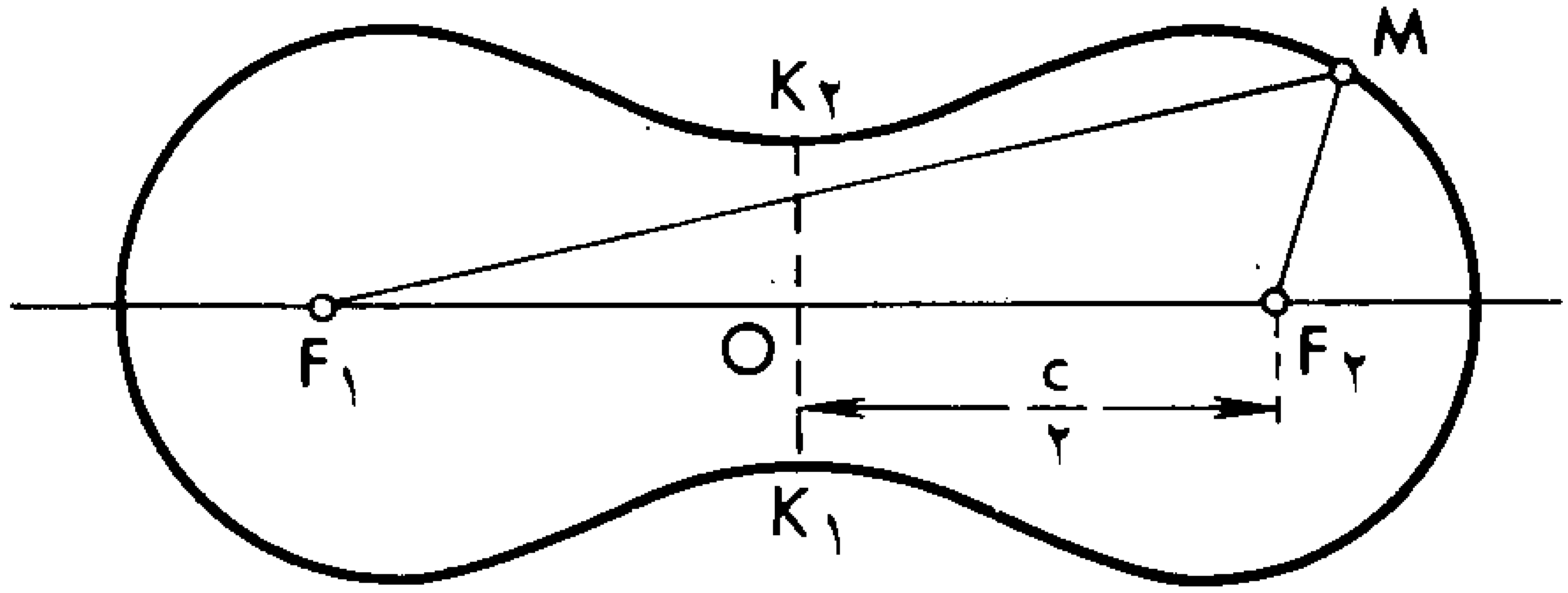
شکل ۳۳

اما، بنا به شرط، این حاصل‌ضرب باید برابر $c^2/4$ باشد، لذا $= \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}$ $= \frac{c^2}{4}$ و از اینجا $x^2 = 2c^2$ و $x = \sqrt{2}c \approx 1{,}414c$.

بین اینگونه لمنیسکات و هذلولی متساوی‌الساقین بستگی جالبی وجود دارد. شعاع های گوناگونی را از نقطهٔ O اخراج کرده و نقاط تقاطع آنها با لمنیسکات را نشانه‌گزاری میکنیم (شکل ۳۲). معلوم میشود مادامیکه زاویهٔ میل شعاع به OF_2 (یا به OF_1) کمتر از 45° باشد شعاع لمنیسکات را، علاوه بر نقطهٔ O، در یک نقطهٔ دیگر نیز قطع میکند. اگر زاویهٔ میل 45° یا بیشتر باشد در آنصورت نقطهٔ دوم تقاطع وجود ندارد. یک شعاع از دسته اول را در نظر میگیریم، بگذار لمنیسکات را در نقطهٔ M (مخالف نقطهٔ O) قطع نماید. بر روی این شعاع، پاره‌خط $ON = \frac{1}{OM}$ را از نقطهٔ O جدا میکنیم. اگر این عمل را در مورد هر شعاع دستهٔ اول انجام دهیم در آنصورت نقاط N متناظر با نقاط M لمنیسکات، همه بر روی هذلولی متساوی‌الساقین با کانون‌های F'_1 و F'_2، چنانکه $OF'_1 = \frac{1}{OF_1}$ و $OF'_2 = \frac{1}{OF_2}$، واقع میگردد.

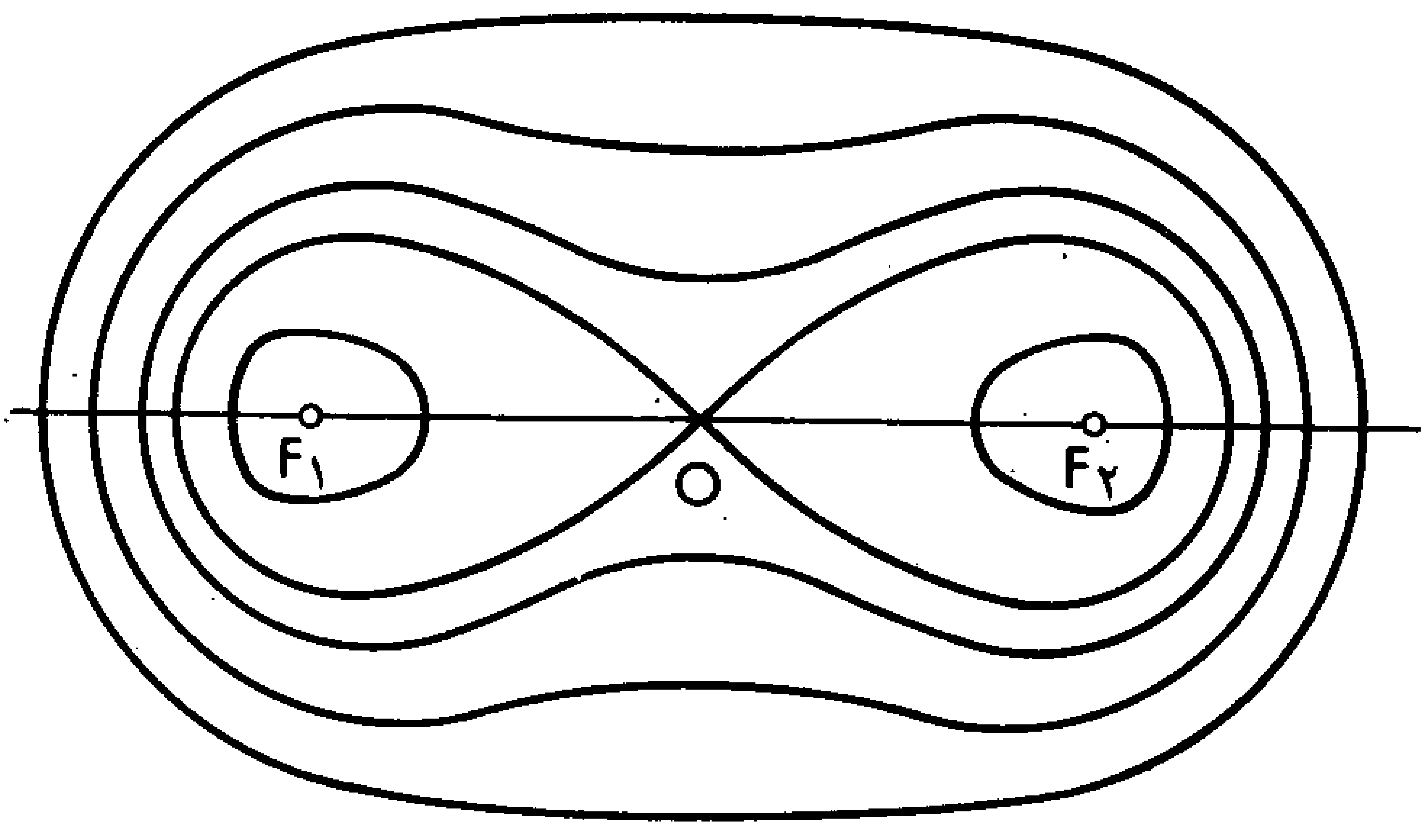
۱۷. لمنیسکات دوکانونی

هرگاه مقدار حاصل‌ضرب ثابت p را مخالف $c^2/4$ قرار دهیم آنگاه لمنیسکات شکل خود را تغییر میدهد. در مواردیکه p کوچکتر از

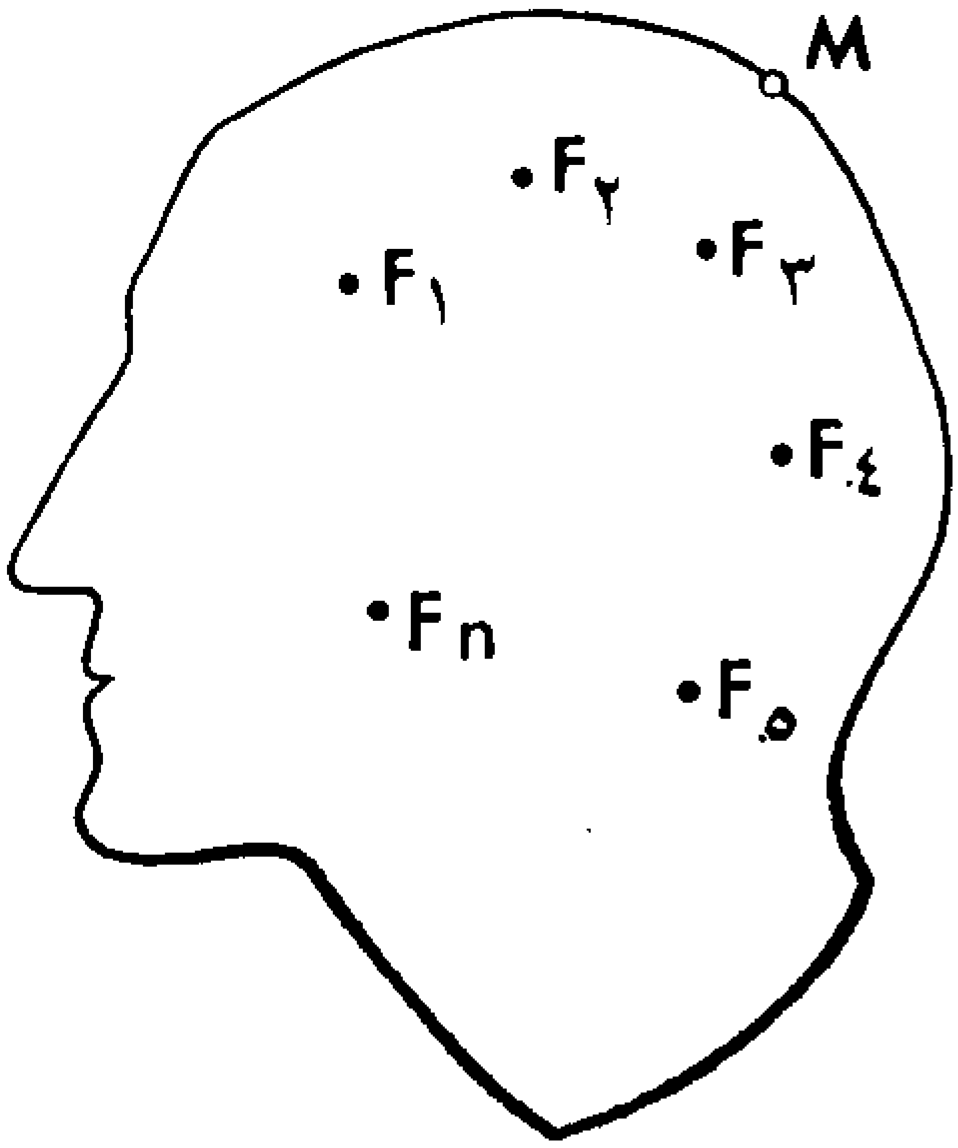


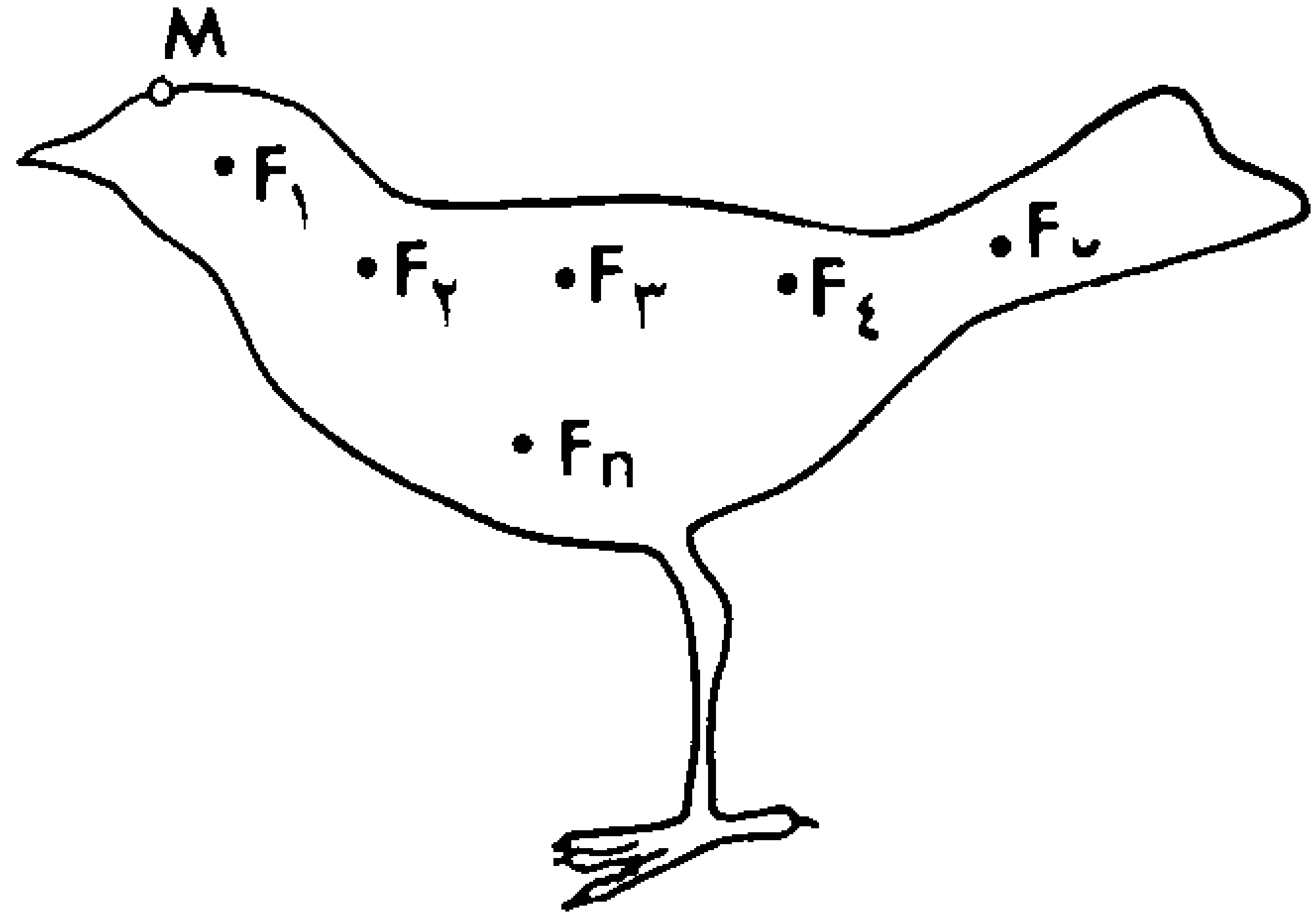
شکل ۳٤

$c^2/_4$ باشد لمنیسکات از دو شبه‌بیضی عبارتست که یکی نقطهٔ F_1، و دیگری نقطهٔ F_2 را در بر دارد (شکل ۳۳). در مواردیکه حاصل‌ضرب p بزرگتر از $c^2/_4$ ولی کوچک‌تر از $c^2/_2$ باشد لمنیسکات شکل بیسکویت را دارد (شکل ۳٤). اگر فرق p با $c^2/_4$ ناچیز باشد در آنصورت «کمر بیسکویت» K_1K_2 خیلی باریک، و شکل منحنی بسیار شبیه رقم هشت فرنگی خوابیده میباشد. و اگر فرق p با $c^2/_2$ ناچیز باشد در آنصورت «بیسکویت» تقریباً «کمر» ندارد. در ازاء p برابر $c^2/_2$ یا



شکل ۳۵





شکل ۳۶

بزرگتر از $c^2/2$ «کمر» از بین رفته و لمنیسکات دوباره بصورت شبه‌بیضی در می‌آید (شکل ۳۵ که در آن لمنیسکات‌های دیگر نیز بمنظور مقایسه نمایش داده شده‌اند).

۱۸. لمنیسکات با تعداد دلخواه کانون‌ها

حال تعداد دلخواه نقاط F_1، F_2، ...، F_n را در صفحه اختیار نموده و نقطهٔ M را چنان بحرکت وا میداریم که حاصل‌ضرب فواصل آن تا هر یک از نقاط مزبور ثابت بماند. در نتیجه، منحنی‌ای را بدست می‌آوریم که شکل آن به وضع قرارگیری متقابل نقاط و به مقدار حاصل‌ضرب ثابت بستگی دارد. این منحنی را لمنیسکات n — کانونی گویند.

در فوق، ما لمنیسکات‌های دوکانونی را بررسی کردیم. با انتخاب تعداد مختلف کانون‌ها و تغییر دادن وضع قرارگیری آنها و همچنین

با تعیین کردن این یا آن مقدار برای حاصل‌ضرب فواصل میتوان لمنیسکات‌های دارای شکل‌های بس عجیب و غریب را بدست آورد. نوک تیز مداد را از نقطهٔ A طوری روی کاغذ برانیم که از کاغذ جدا نشده و بالاخره به نقطهٔ مبدأ بر گردد. در اینصورت نوک مداد یک منحنی را ترسیم مینماید. تنها یک شرط را وضع میکنیم و آن اینکه این منحنی هیچ جا خود را قطع نکند. بدیهی است که از این طریق میتوان مثلا منحنی‌هایی را بدست آورد که شکل سر انسان یا شکل مرغ را داشته باشند (شکل ۳۶). معلوم میشود که برای چنین منحنی دلخواهی تعداد n و مواضع کانون‌های

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$$

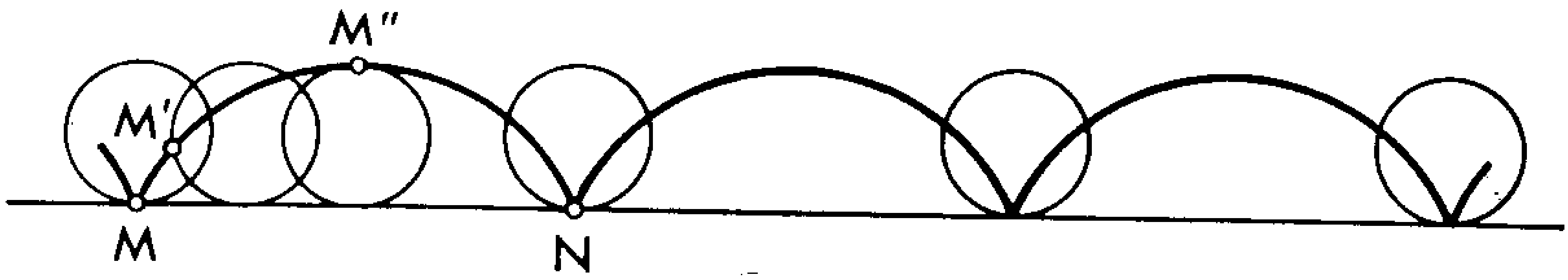
و مقدار حاصل‌ضرب ثابت فواصل

$$MF_1 \times MF_2 \times \ldots \times MF_n = p$$

را طوری میتوان انتخاب کرد که لمنیسکات نظیر ظاهراً با آن فرقی نداشته باشد. بدیگر سخن، انحرافات ممکنهٔ نقطهٔ M ترسیم کنندهٔ لمنیسکات از منحنی داده شده، از پهنای اثر مداد تجاوز نخواهد کرد (ضمناً نوک مداد را میتوان تا درجهٔ دلخواه تیز نمود چنانکه اثرش بسیار باریک باشد). این حقیقت جالب که از تنوع و غنای خارق‌العادهٔ شکل‌های لمنیسکات‌های چندکانونی حاکی میباشد بگونهٔ کاملا دقیق ولی بسیار پیچیده بکمک ریاضیات عالی اثبات میشود.

۱۹. سیکلوئید یا چرخ زاد

خط‌کش را روی لبهٔ پائینی تخته‌سیاه قرار داده و یک حلقه یا دایرهٔ چوبی یا مقوایی را بر روی آن بغلتانیم و ضمناً آنرا به تخته‌سیاه



شکل ۳۷

و خط‌کش بفشاریم. اگر تکه گچی را به حلقه یا دایره (در نقطهٔ تماس آن با خط‌کش) محکم کنیم در آنصورت گچ منحنی شکل ۳۷ را بنام سیکلوئید یا چرخ‌زاد ترسیم مینماید (سیکلوئید در زبان یونانی بمعنی شبه دایره است). با یک دور حلقه، یک طاق $MM'M''N$ چرخ‌زاد متناظر است. با غلتاندن بعدی حلقه طاق‌های تازه و تازه‌تر همان چرخ‌زاد را بدست می‌آوریم.

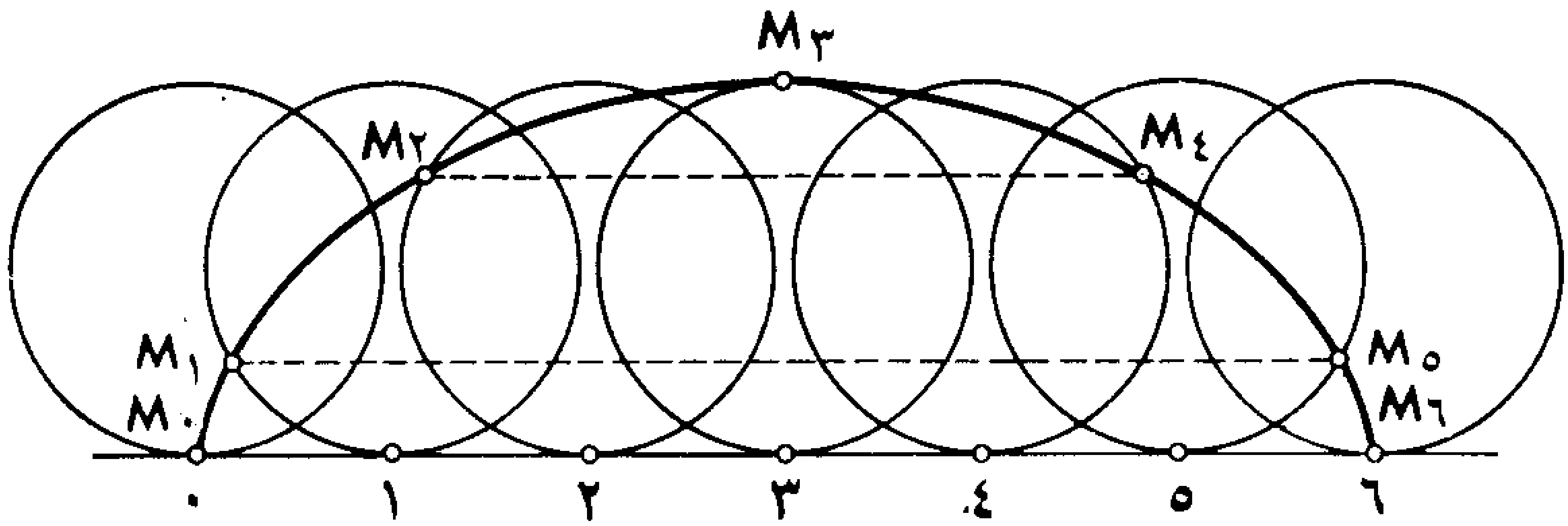
برای ساختن یک طاق تقریبی چرخ‌زاد حاصل شده در اثر غلتاندن حلقه‌ای مثلا بقطر ۳ سانتی‌متر، پاره‌خطی برابر

$$۳ \times ۳,۱۴ = ۹,۴۲ \text{ cm}$$

را روی خط راست جدا می‌نمائیم و پاره‌خطی را بدست می‌آوریم که طول آن برابر طول پیراسون حلقه یعنی طول پیراسون دایره بقطر ۳ سانتی‌متر میباشد. سپس این پاره‌خط را به تعدادی قسمت‌های مساوی، مثلا به ۶ قسمت، تقسیم میکنیم و در هر نقطهٔ تقسیمات حلقه را در وضع مربوطه، وقتیکه بر آن تکیه دارد نمایش میدهیم و هر وضع را بترتیب شماره‌گزاری میکنیم:

۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶

برای انتقال از یک وضع به وضع مجاور، حلقه باید یک ششم دور کامل بزند (زیرا فاصله میان نقاط مجاور برابر یک ششم پیراسون



شکل ۳۸

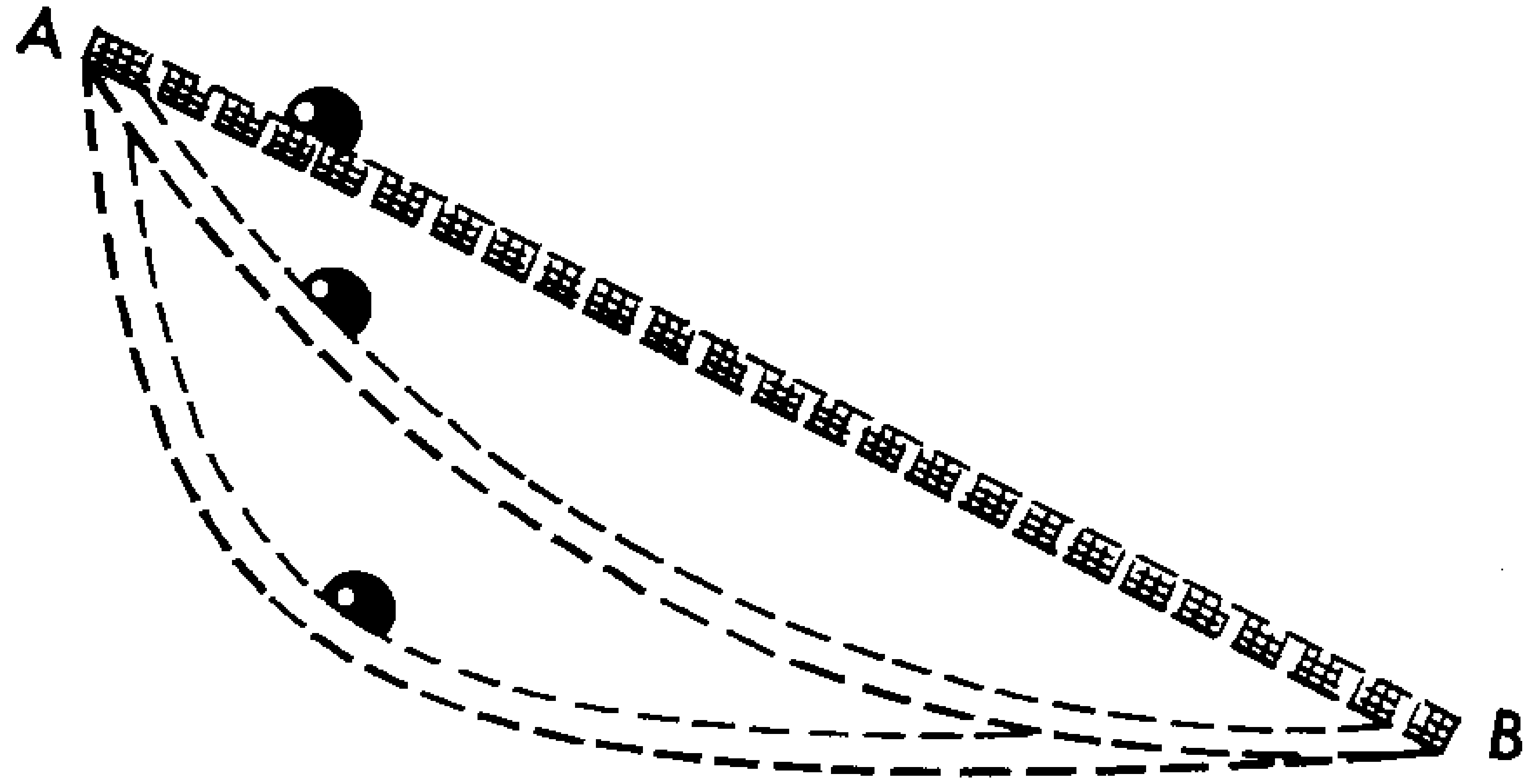
دایره است). بنا بر این، اگر در وضع صفر گچ در نقطهٔ $M_{۰}$ باشد در آنصورت در وضع ۱ گچ در نقطهٔ $M_{۱}$ در فاصلهٔ یک ششم پیرامون دایره از نقطهٔ تماس، در وضع ۲ در نقطهٔ $M_{۲}$ در فاصلهٔ دو ششم از نقطهٔ تماس قرار دارد و الخ. برای دریافت نقاط $M_{۱}$، $M_{۲}$، $M_{۳}$ و غیره تنها لازم است روی دایرهٔ مربوطه شعاع برابر ۱٫۵ cm را با پرگار از نقطهٔ تماس جدا نمائیم، ضمناً در وضع ۱ یک بار، در وضع ۲ دو بار، در وضع ۳ سه بار شعاع را جدا میکنیم و الخ. حال برای ترسیم چرخ‌زاد نقاط

$$M_{۰},\ M_{۱},\ M_{۲},\ M_{۳},\ M_{٤},\ M_{۵},\ M_{٦}$$

را بوسیلهٔ منحنی ملایمی متصل میکنیم (با دست).

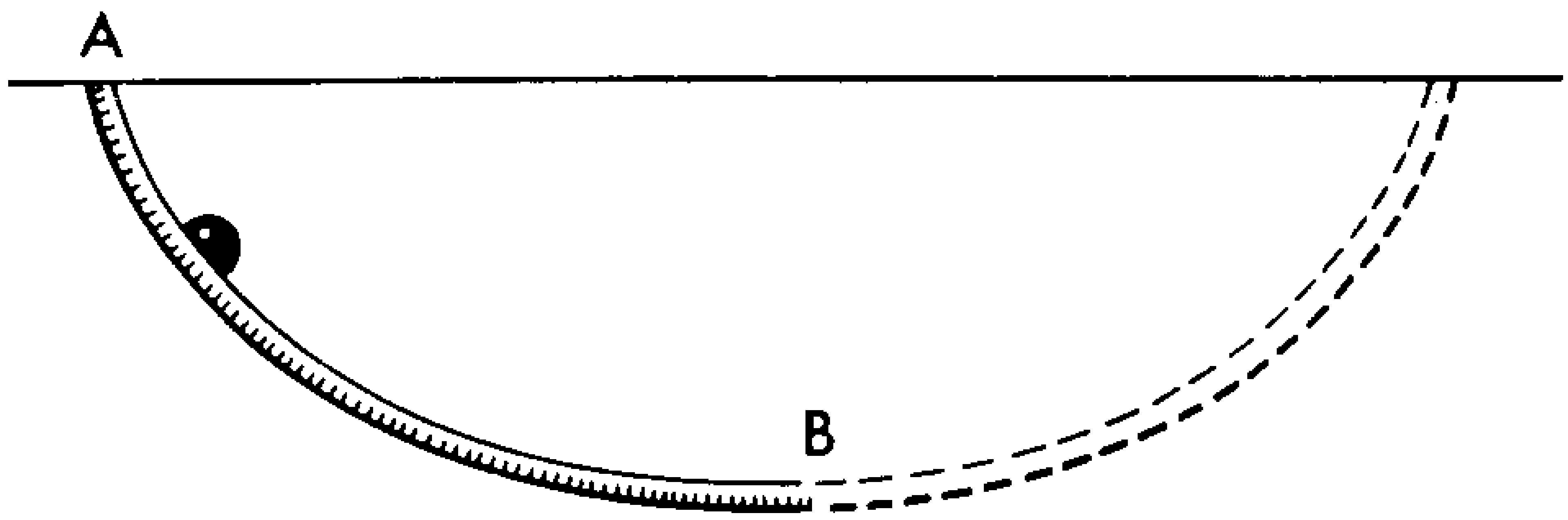
۲۰. منحنی کوتاه‌ترین وقت

در میان ویژگی‌های جالب متعدد چرخ‌زاد یکی را ذکر میکنیم که بموجب آن این منحنی را «براخیستوخرون» هم میگویند. این اصطلاح از دو کلمهٔ یونانی «براخیستوس» بمعنی «کوتاه‌ترین» و «خرونوس» بمعنی «وقت» تشکیل شده است.



شکل ۳۹

مسئلهٔ زیر را بررسی میکنیم: ناودان فلزی خوب صیقلی شدهٔ واصل دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B بچه شکلی باید باشد تا گلولهٔ فلزی صیقلی شده در کوتاه‌ترین وقت از طریق این ناودان از نقطهٔ A به نقطهٔ B سرازیر گردد (شکل ۳۹)؟ در برخورد اول بنظر میرسد که ناودان باید مستقیم باشد زیرا تنها در این صورت راه از A به B کوتاه‌ترین است. لکن صحبت از کوتاه‌ترین وقت و نه از کوتاه‌ترین راه در میان است. وقت نه تنها به طول راه بلکه به سرعت غلتیدن گلوله هم بستگی دارد. اگر ناودان را بسوی پائین خم کنیم در آنصورت قسمتی از آن که از نقطهٔ A شروع میشود شیب بیشتری نسبت به ناودان مستقیم خواهد داشت و گلوله در موقع سرازیر شدن از آن سرعت بیشتری نسبت به قسمت ناودان مستقیم با همان طول پیدا میکند. و اگر قسمت ابتدایی را بسیار پرشیب و نسبتاً طولانی بسازیم در آنصورت قسمت مجاور نقطهٔ B بسیار کم‌شیب و نسبتاً طولانی میشود. گلوله قسمت اول را با سرعت خیلی زیاد، و قسمت دوم را با سرعت خیلی کم پیموده و ممکن است دیر به



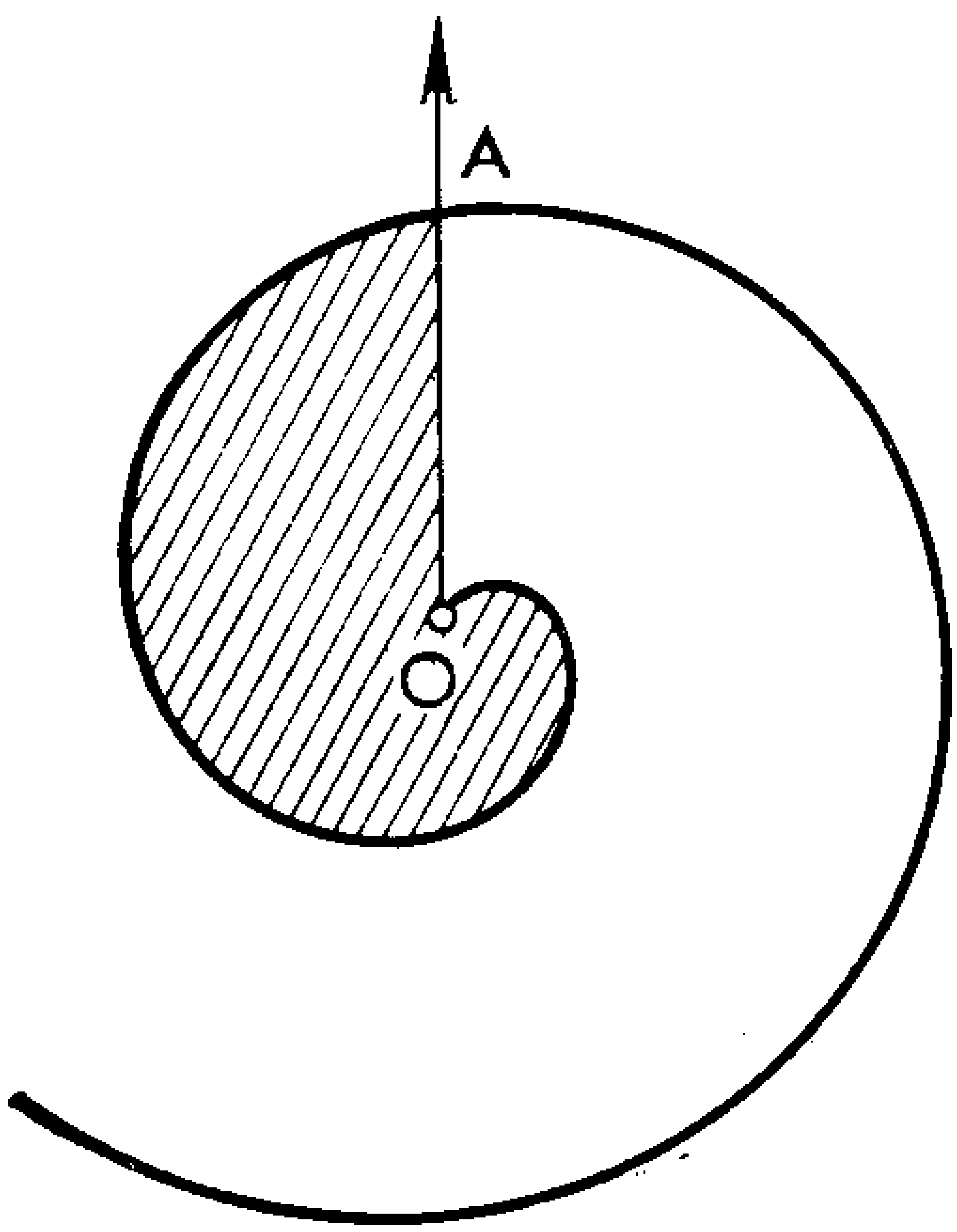
شکل ۴۰

نقطهٔ B برسد. بنا بر این، بدیهی است که ناودان باید در جهت طولی مقعر باشد منتها انحناء نباید خیلی زیاد باشد.

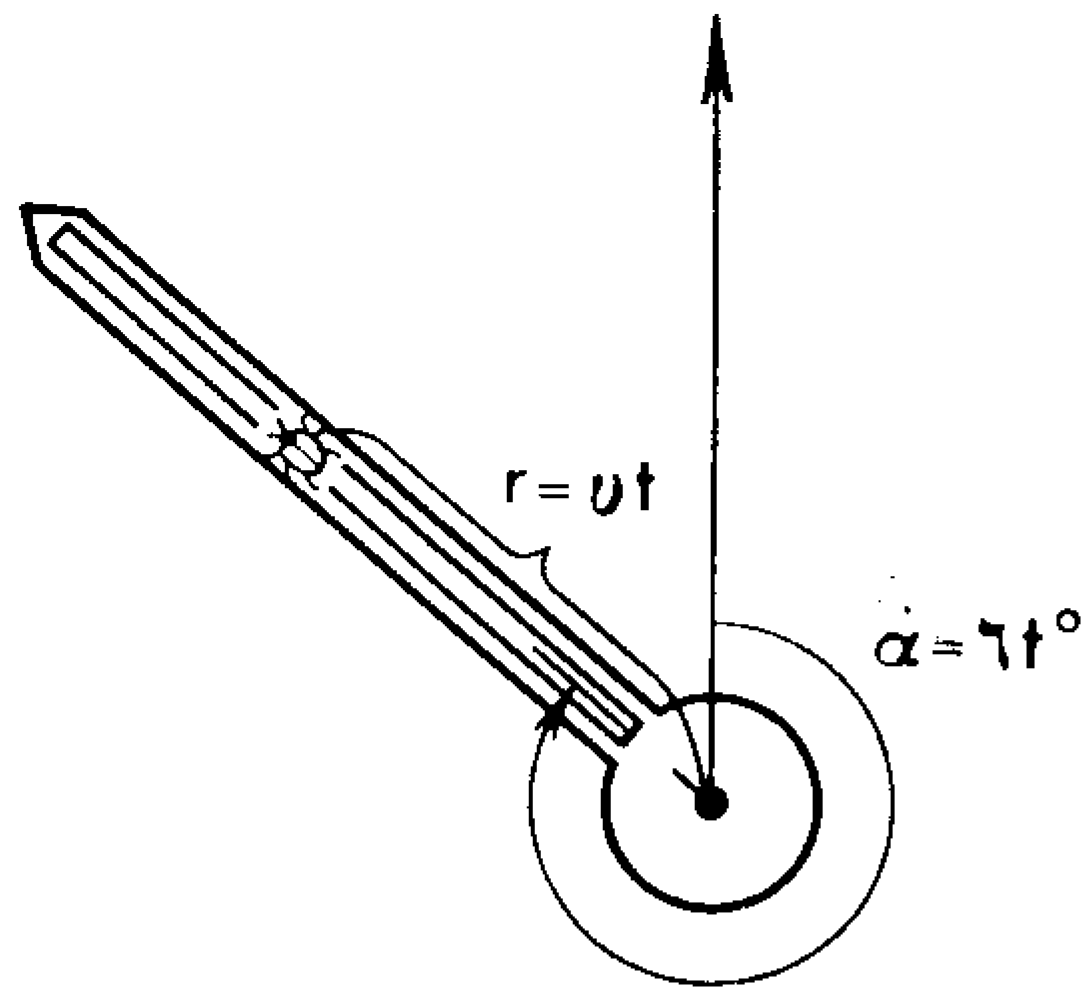
گالیله فیزیکدان و منجم ایتالیایی (۱۵۶۴ — ۱۶۴۲) عقیده داشت که ناودان کوتاه‌ترین وقت باید بشکل کمان دایره باشد. لکن برادران برنولی ریاضی‌دانان سویسی قریب سیصد سال پیش، از طریق محاسبهٔ دقیق ثابت کردند که اینطور نیست و ناودان را باید بشکل کمان چرخ زاد، شکم به پائین، خم کرد (شکل ۴۰). از آن ببعد چرخ زاد «ورنام» براخیستو خرون را گرفت و اثبات برنولی سرآغاز رشتهٔ نوینی از ریاضیات بنام حساب متغیرات واقع گردید. موضوع این حساب عبارتست از دریافت نوع منحنی‌هایی که این یا آن کمیت مورد نظرمان برای آنها به کمترین (و در بعضی موارد به بیشترین) حد خود میرسد.

۲۱. حلزونی ارشمیدس

عقربهٔ ثانیه‌شمار دارای طول بی‌نهایت را در نظر میگیریم که از مرکز دوران، سوسک کوچکی با سرعت ثابت v cm/s روی آن میدود. پس از یک دقیقه، سوسک در فاصلهٔ v ۶۰، پس از دو



شکل ۴۲

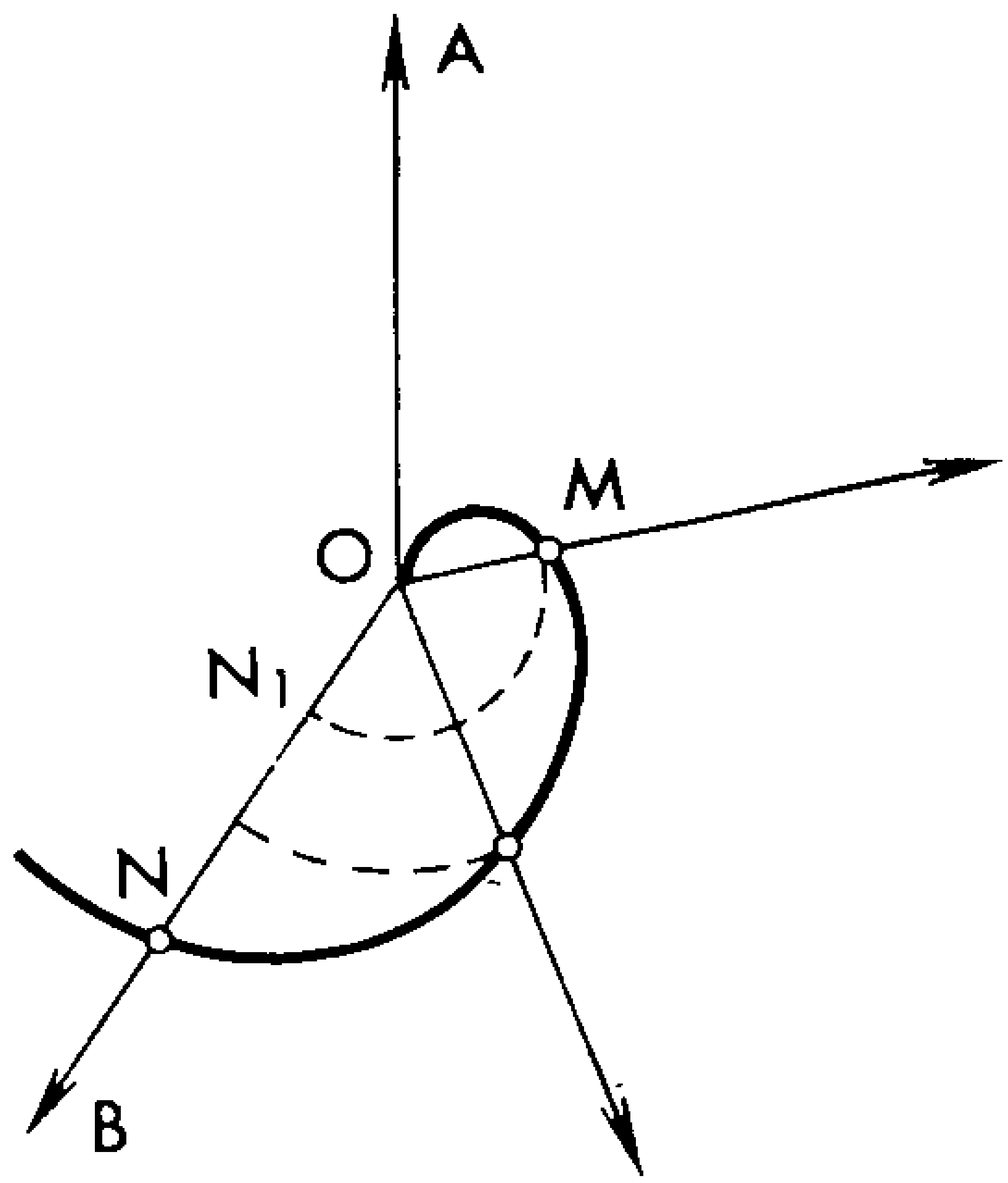


شکل ۴۱

دقیقه در فاصلهٔ v ۱۲۰ و الخ از مرکز قرار میگیرد. عموما بعد از t ثانیه، فاصلهٔ سوسک از مرکز برابر vt cm میشود. در این مدت زمان عقربه بزاویهٔ ٦t° تغییر مکان میدهد (زیرا در یک ثانیه عقربه بزاویهٔ ٦° = ٦۰ : ٣٦۰° گردش میکند). بنا بر این، وضع قرارگیری سوسک در صفحهٔ ساعت پس از مدت دلخواه t ثانیه بعد از آغاز حرکت بشرح زیر پیدا میشود. زاویهٔ α شامل ٦t° را از موقعیت اولیهٔ عقربه در جهت گردش آن جدا نموده و در طول عقربهٔ واقع در مکان جدید، مسافت $r = vt$ cm را از مرکز دوران نشانه‌گزاری میکنیم و در همین موضع به سوسک میرسیم (شکل ۴۱).

واضح است که رابطه بین زاویهٔ گردش عقربه، α، (بر حسب درجه) و مسافت r پیموده شده (بر حسب سانتی‌متر) از قرار زیر است:

$$r = \frac{v}{٦}\,\alpha$$



شکل ۴۳

بعبارت دیگر، r با α نسبت مستقیم دارد و ضمناً ضریب تناسب $k = \frac{v}{6}$.

به این دوندهٔ ما، ظرف کوچکی با ذخیرهٔ پایان‌ناپذیر رنگ سیاه محکم کرده و فرض مینمائیم که رنگ از سوراخ بسیار کوچک بیرون ریخته و اثر سوسک سوار بر عقربه را روی کاغذ بگذارد. در اینصورت منحنی‌ای روی کاغذ نقش میبندد که آنرا برای اولین بار ارشمیدس (۲۸۷ — ۲۱۲ قبل از میلاد مسیح) بررسی نمود. بافتخار وی، آنرا حلزونی ارشمیدس نامیده‌اند. ناگفته نماند که ارشمیدس با عقربهٔ ثانیه‌شمار یا سوسک سروکار نداشت. در آن دوران ساعت کوکی وجود نداشت، تنها در قرن ۱۷ اختراع شد. ما به این دو تنها بمنظور تفهیم عینی موضوع متوسل شدیم.

حلزونی ارشمیدس از تعداد بی‌پایان دور تشکیل شده است. آن در مرکز صفحهٔ ساعت آغاز گردیده و با ازدیاد دور از مرکز دور میشود. در شکل ۴۲، دور اول و قسمتی از دور دوم نمایش داده شده است.

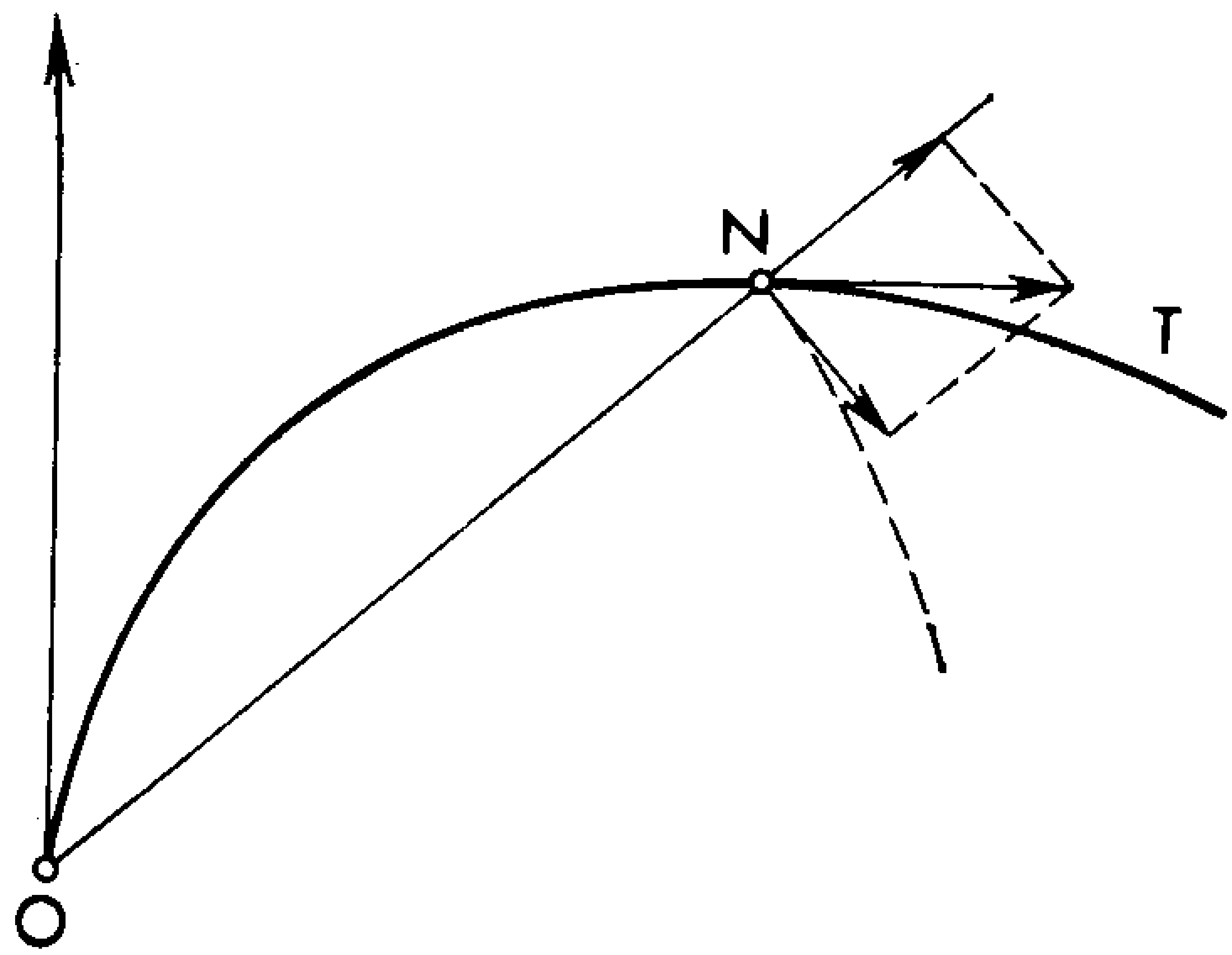
شما لابد شنیده‌اید که بکمک پرگار و خط‌کش نمیتوان هر زاویهٔ دلخواه را سه قسمت کرد (این مسئله در حالات خاصی که زاویه برابر ۱۸۰°، ۱۳۵° یا ۹۰° باشد بآسانی حل میشود). لکن اگر از حلزونی ارشمیدس که بدقت ترسیم شده استفاده کنیم در آنصورت هر زاویهٔ دلخواه را به تعداد دلخواه قسمتهای برابر میشود تقسیم نمود.

مثلا زاویهٔ AOB را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنیم (شکل ۴۳). هرگاه قبول کنیم که عقربه درست به این زاویه گردش کرده باشد آنگاه سوسک در نقطهٔ N پهلوی زاویه واقع میگردد. اما وقتیکه زاویهٔ گردش سه بار کوچکتر بود سوسک نیز سه بار نزدیکتر به مرکز O قرار داشت. برای یافتن این موقعیت او، نخست پاره‌خط ON را به سه قسمت مساوی بکمک پرگار و خط‌کش تقسیم میکنیم و پاره‌خط ON_1 را که طول آن سه بار کمتر از ON می‌باشد بدست می‌آوریم. برای باز گرداندن سوسک به حلزونی باید (باز هم بکمک پرگار!) آنرا با کمانی بشعاع ON_1 قطع نمود. نقطهٔ M بدست می‌آید. زاویهٔ AOM سه بار کوچکتر از زاویهٔ AON خواهد بود.

۲۲. مسایل ارشمیدس

اما خود ارشمیدس سرگرم مسایل دیگر و مشکلتری بود که خودش آنها را مطرح و حل نمود: ۱) تعیین مساحت شکل محدود به دور اول حلزونی (قسمت هاشوری شکل ۴۲)؛ ۲) یافتن طریقهٔ ترسیم مماس بر حلزونی در یک نقطهٔ N آن.

نکتهٔ جالب آنست که هر دو مسئله قدیمیترین مثال مسایلی است که به آنالیز ریاضی مربوط میباشد. از قرن ۱۷ میلادی، ریاضی‌دانان مساحت اشکال را بکمک انتگرال محاسبه، و مماس‌ها را



شکل ٤٤

بکمک مشتق ترسیم میکنند. بنا بر این، ارشمیدس را میتوان منادی آنالیز ریاضی نامید.

برای اولی از مسایل مذکور، ما بسادگی نتیجهٔ حاصلهٔ ارشمیدس را می‌آوریم : مساحت شکل دقیقا ۱/۳ مساحت دایره‌ای بشعاع OA را تشکیل میدهد. برای مسئلهٔ دوم میشود طرز حل آنرا نشان داد و ضمناً استدلالات خود ارشمیدس را کمی ساده کرد. مطلب اینجاست که سرعت سوسک هنگام پیمودن حلزونی، در هر نقطهٔ N در جهت سماس بر حلزونی در همان نقطه متوجه است. اگر ما جهت این سرعت را بدانیم در آنصورت سماس را هم ساخته‌ایم.

اما حرکت سوسک در نقطهٔ N از دو حرکت مختلف تشکیل میشود (شکل ٤٤) : یکی در جهت سهم با سرعت v cm/s و دیگری دورانی در مسیر دایره‌ای به مرکز O و شعاع ON. برای کسب تصور از حرکت اخیرالذکر فرض کنیم که سوسک برای یک لحظه در نقطهٔ N خشکش بزند. در اینصورت او یکجا با عقربه در مسیر دایره‌ای بشعاع ON منتقل میگردد. سرعت حرکت دورانی در جهت سماس بر دایره متوجه است. و اما مقدار آن

3—1901

چند است؟ اگر سوسک میتوانست دایرهٔ کاملی بشعاع ON را بپیماید در آنصورت ظرف ۶۰ ثانیه مسافتی برابر $2\pi ON$ سانتی‌متر را میپیمود. چون در این ضمن مقدار سرعت ثابت میماند لذا برای دریافت آن لازم است طول راه بر مدت زمان تقسیم گردد. بدست می‌آوریم

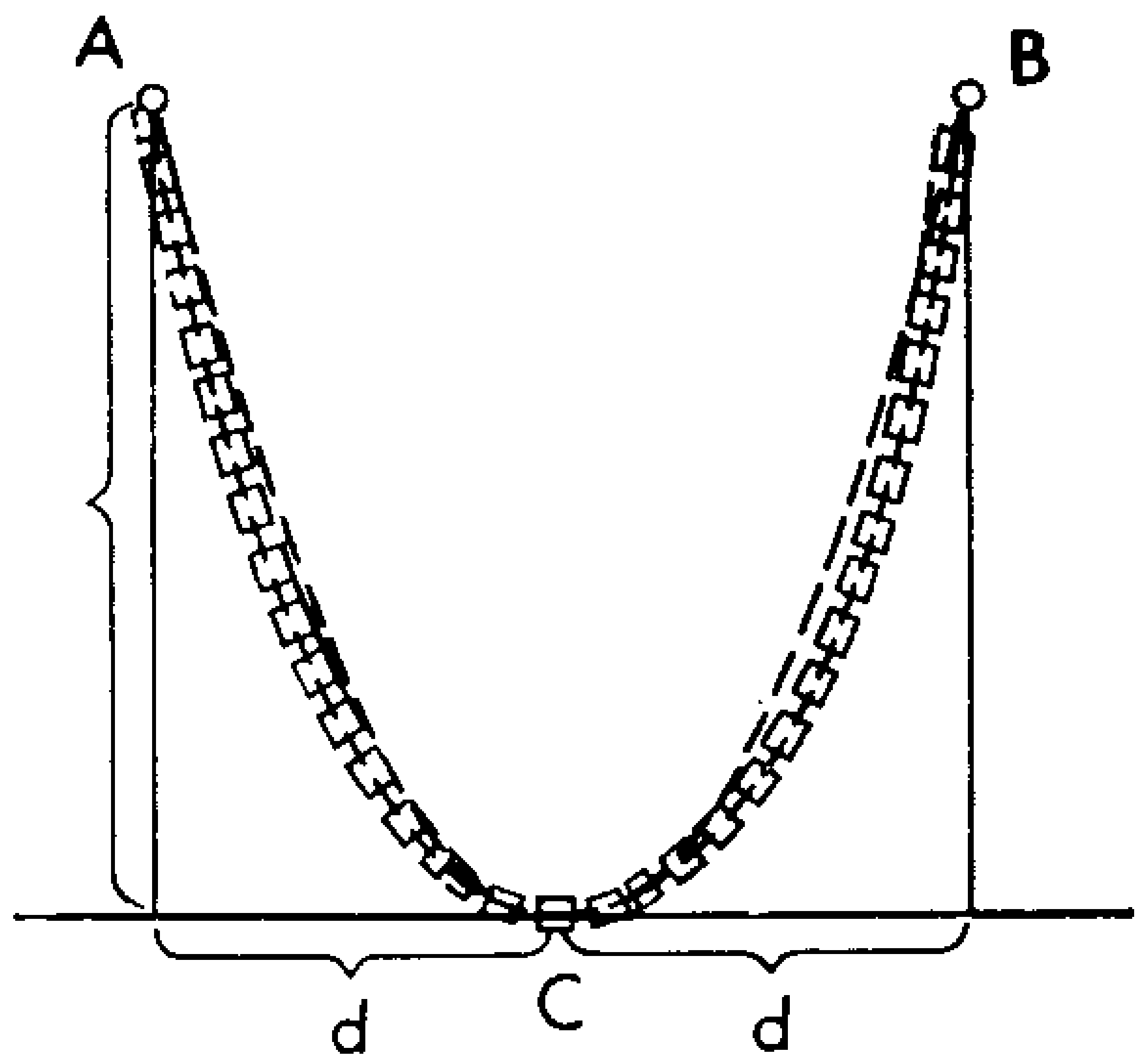
$$\frac{2\pi ON}{60}=\frac{\pi ON}{30}\text{ cm/s}$$

یا کمی بیشتر از ON ۰٫۱ سانتی‌متر در ثانیه زیرا $0{,}105 \approx \frac{3{,}14}{30} \approx \frac{\pi}{30}$.

حال که ما هر دو سرعت مولفه را در نقطهٔ N میدانیم، یکی برابر v cm/s در جهت ON و دیگری عمود بر اولی و مساوی $\frac{\pi ON}{30}$ cm/s، میتوانیم آنها را طبق قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع جمع کنیم. قطر متوازی الاضلاع نمایشگر سرعت حرکت مرکب و در عین‌حال تعیین‌کنندهٔ جهت مماس NT بر حلزونی در نقطهٔ مفروض میباشد.

۲۳. زنجیر گالیله

در کتاب گالیله «محاورات و اثبات‌های ریاضی راجع به دو علم جدید» که برای نخستین بار بزبان ایتالیایی در شهر لیدن هلند در سال ۱۶۳۸ چاپ شده بود اتفاقاً چنین طریقه‌ای برای ساختن سهمی پیشنهاد میشد: «دو میخ در ارتفاع یکسان بالای افق به دیوار میکوبیم چنانکه فاصله میان آنها دو برابر عرض مربع مستطیلی باشد که نیمه سهمی روی آن باید ساخته شود. میان این دو میخ زنجیر نازکی را طوری آویزان میکنیم که به پایین افتاده و پایین‌ترین نقطه‌اش در فاصلهٔ برابر ارتفاع راست‌گوشه از خط میخ‌ها قرار گیرد (شکل ۴۵).



شکل ٤٥

این زنجیر به پایین افتاده شکل سهمی را بخود میگیرد. اثر آن را روی دیوار با خطچین نشانه گذاری کرده و سهمی را بدست میآوریم که عمود گذرنده از وسط خط واصل دو میخ آنرا دو نصف میکند».

این طریقه، ساده و عینی بوده ولی دقیق نیست. خود گالیله نیز از این موضوع آگاه بود. در واقع اگر سهمی را طبق تمام قواعد مربوطه ترسیم کنیم در آنصورت میان آن و زنجیر فاصله میافتد. فاصله‌ها در همان شکل ٤٥ که سهمی مربوطه با خطچین نمایش داده شده است مرئی است.

٢٤. خط زنجیری

تنها نیم قرن پس از انتشار کتاب گالیله، یاکوب ارشد برادران برنولی از طریق نظری محض فرمول دقیق تعیین کنندهٔ شکل زنجیر آویزان را پیدا کرد. وی در اعلام جواب خود به این مسئله عجله نکرده و سایر ریاضی‌دانان را به مسابقه دعوت نمود تا کاری را که

او انجام داده انجام بدهند. این امر در سال ۱۶۹۰ بوقوع پیوست. در سال ۱۶۹۱، علاوه بر خود ی. برنولی، کریستیان هویگنس، گوتفرید ویلهلم لایبنیتز و یوهان برادر کوچکتر یاکوب برنولی، جواب درست را منتشر ساختند. برای حل مسئله، همهٔ آنها اولا از قوانین مکانیک، و دوما از مشتق و انتگرال، وسایل نیرومند آنالیز ریاضی که تازه کشف شده بود استفاده نمودند.

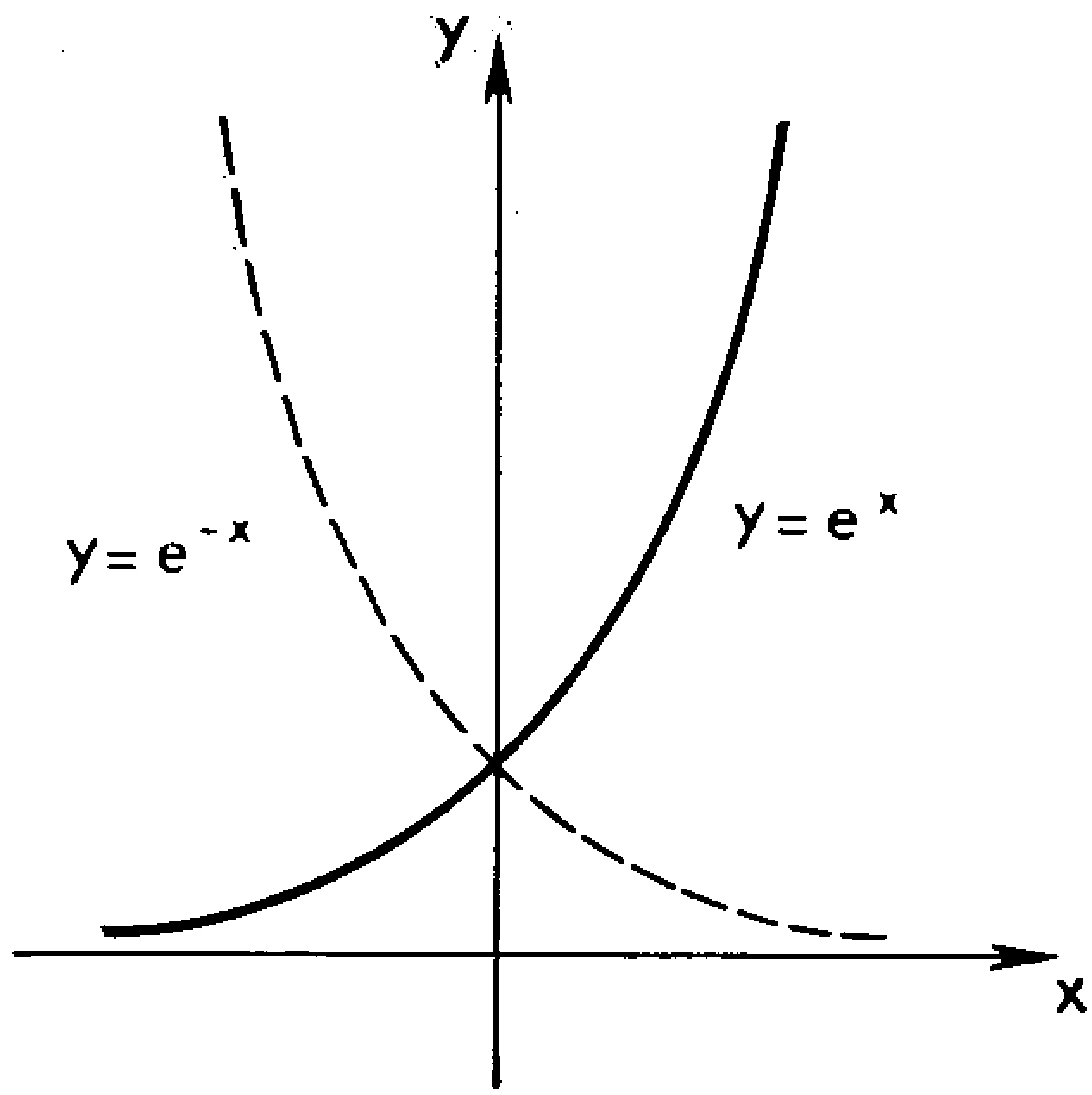
هویگنس منحنی‌ای را که زنجیر از دو سر آویزان شده بشکل آن قرار میگیرد خط زنجیری نام نهاد.

نظر باینکه طول زنجیرها و فاصلهٔ دو سر آنها ممکن است مختلف باشد یعنی نزدیکتر یا دورتر نسبت به یکدیگر قرار گیرد نه یک بلکه تعداد زیاد خطوط زنجیری وجود دارد. اما تمام آنها متشابهند درست مانند دوایر که همه با هم شبیهند.

۲۵. نمودار تابع نمایی

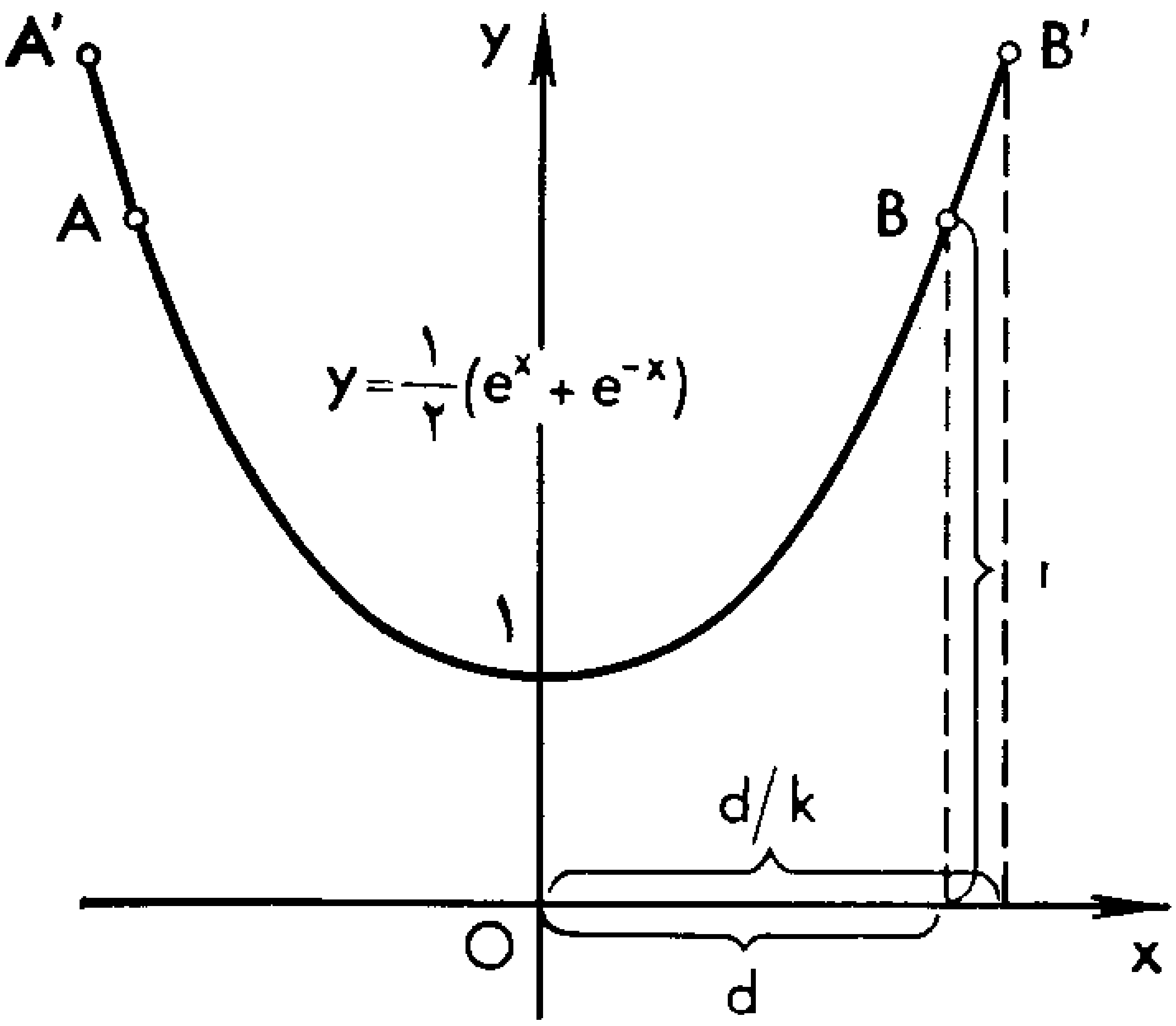
معلوم شد که کلید حل معمای خط زنجیری در تابع نمایی نهفته است. در قرن ۱۸ این تابع تازگی داشت در صورتیکه اکنون هر دانش‌آموز باید آنرا بداند. این تابع بشکل $y=a^x$ است که a در آن یک عدد مثبت مخالف ۱ می‌باشد. محاسبات نشان داده است که برای ترسیم خط زنجیری بهتر است a را برابر عددی بنام عدد نپر قرار داد. این عدد به e نمایش داده می‌شود. نام این عدد به جان نپر (۱۵۵۰ — ۱۶۱۷) ریاضی‌دان اسکاتلندی، یکی از مخترعین لگاریتم ارتباط دارد. این عدد تقریباً مانند عدد π معروف است. مقدار تقریبی آن با دقت ۰٫۰۰۰۵ عبارتست از $e \approx ۲٫۷۱۸$.

در شکل ۴۶، با خط ممتد، نمودار تابع نمایی $y=e^x$، و با

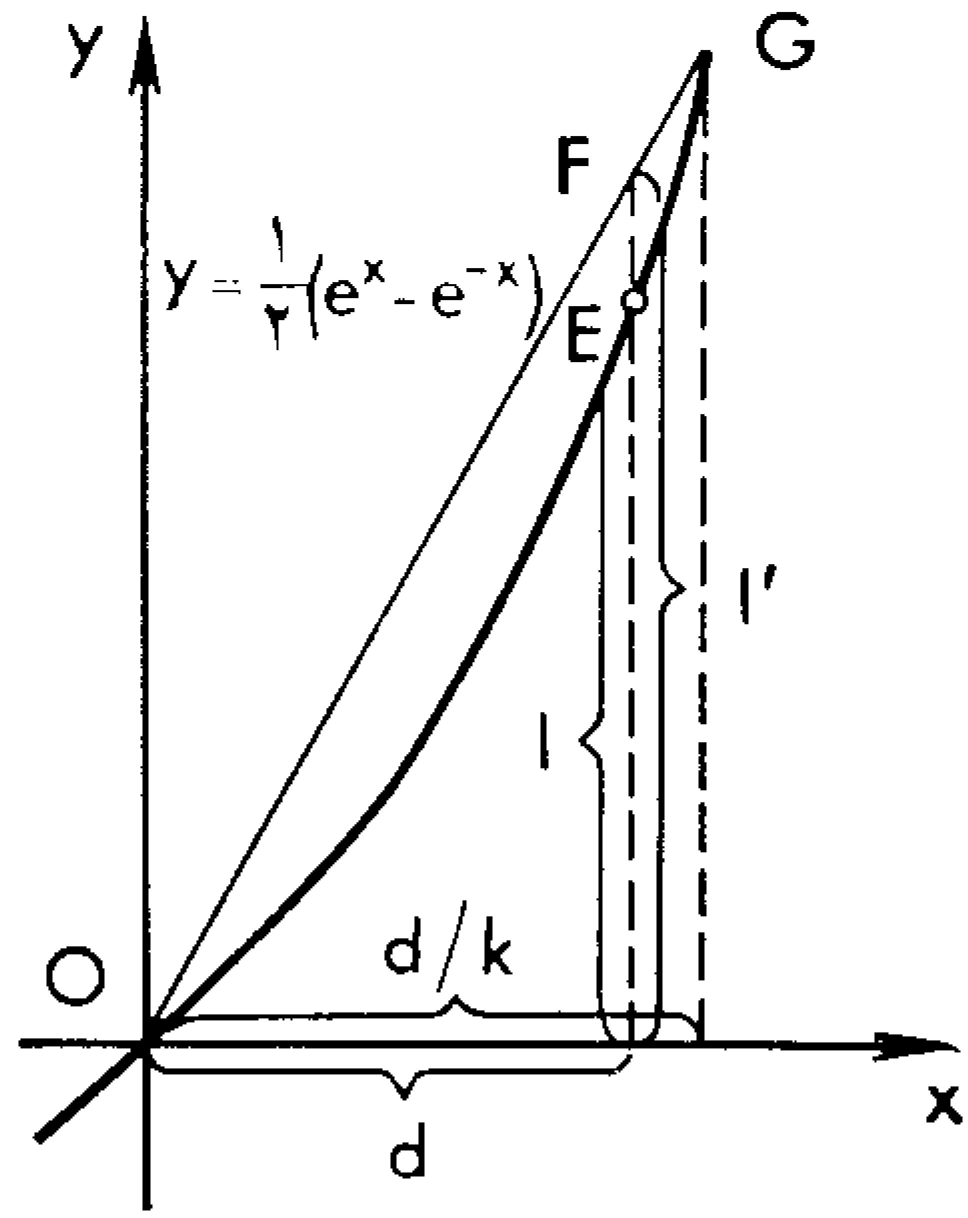


شکل ٤٦

خطچین نمودار تابع نمایی دیگری نمایش داده شده است که با اولی ارتباط نزدیک دارد : $y=(1/e)^x$ که در آن $1/e \approx$ ٠,٣٦٨ .
بیاری نمای منفی توان، تابع اخیر را میتوان بصورت $y=e^{-x}$ درآورد. حال، واضح میگردد که هر دو نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است و این امر در شکل ٤٦ نمایش داده شده است.
حال، دو تابع تازه، یکی بصورت نصف مجموع مقادیر این توابع نمایی، و دیگری را بصورت نصف اختلاف مقادیر آنها تشکیل میدهیم و بترتیب حاصل میکنیم $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ و $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. نمودارهای این دو تابع تازه در شکل ٤٧ و شکل ٤٨ نمایش داده شده است. معلوم میشود که اولی همانا یکی از خطوط زنجیری میباشد. از این نمودار، از طریق تبدیلات ساده‌ای که در زیر تشریح میشود، میتوان هرگونه خط زنجیری متقارن نسبت به محور عرض‌ها را بدست آورد. و اما نموداری را که در شکل ٤٨ نمایش داده شده است ما بمشابهٔ وسیلهٔ کمکی انتقال از خط زنجیری شکل ٤٧ به حالت کلی‌تر خط زنجیری بکار می‌بریم.



شکل ۴۸

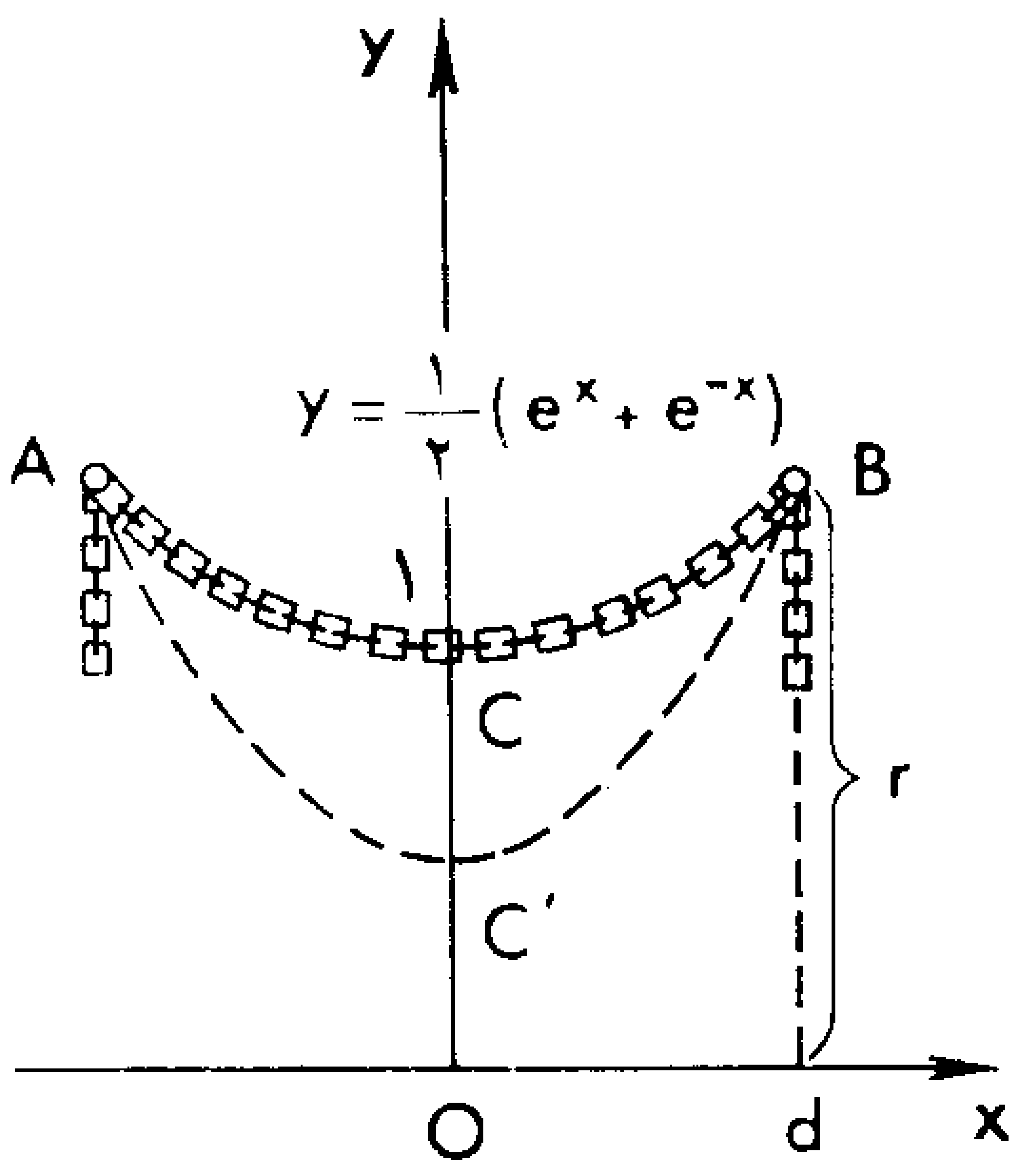


شکل ۴۷

۲۶. انتخاب طول زنجیر

ارتباط میان منحنی‌ای که در شکل ۴۷ نمایش داده شده و شکل زنجیر آویزان را با تفصیل بیشتر بررسی مینمائیم. در نظر خود مجسم میکنیم که این منحنی روی دیوار کاملا قایم و هموار ترسیم شده و ما اجازه داریم در نقاط مختلف منحنی میخ بکوبیم. میخ ها را طبق توصیهٔ گالیله در نقاط A و B، در یک خط افقی میکوبیم (اتفاقا شرط اخیر چندان مهم نیست). حال، زنجیر نازکی را که طول آن دقیقاً برابر طول کمان AB یعنی ۲l است انتخاب و دو سر آن را در نقاط A و B محکم میکنیم. در اینصورت زنجیر بر کمانی را که ترسیم کرده بودیم دقیقاً منطبق میشود. هیچ فاصله‌ای بین زنجیر و این منحنی دیده نمی‌شود.

انتخاب زنجیری بطول ضروری را میتوان از طریق آزمایش انجام داد. زنجیر طولانی‌تری باصطلاح با زاپاس برداشته و آنرا از حلقه های



شکل ۴۹

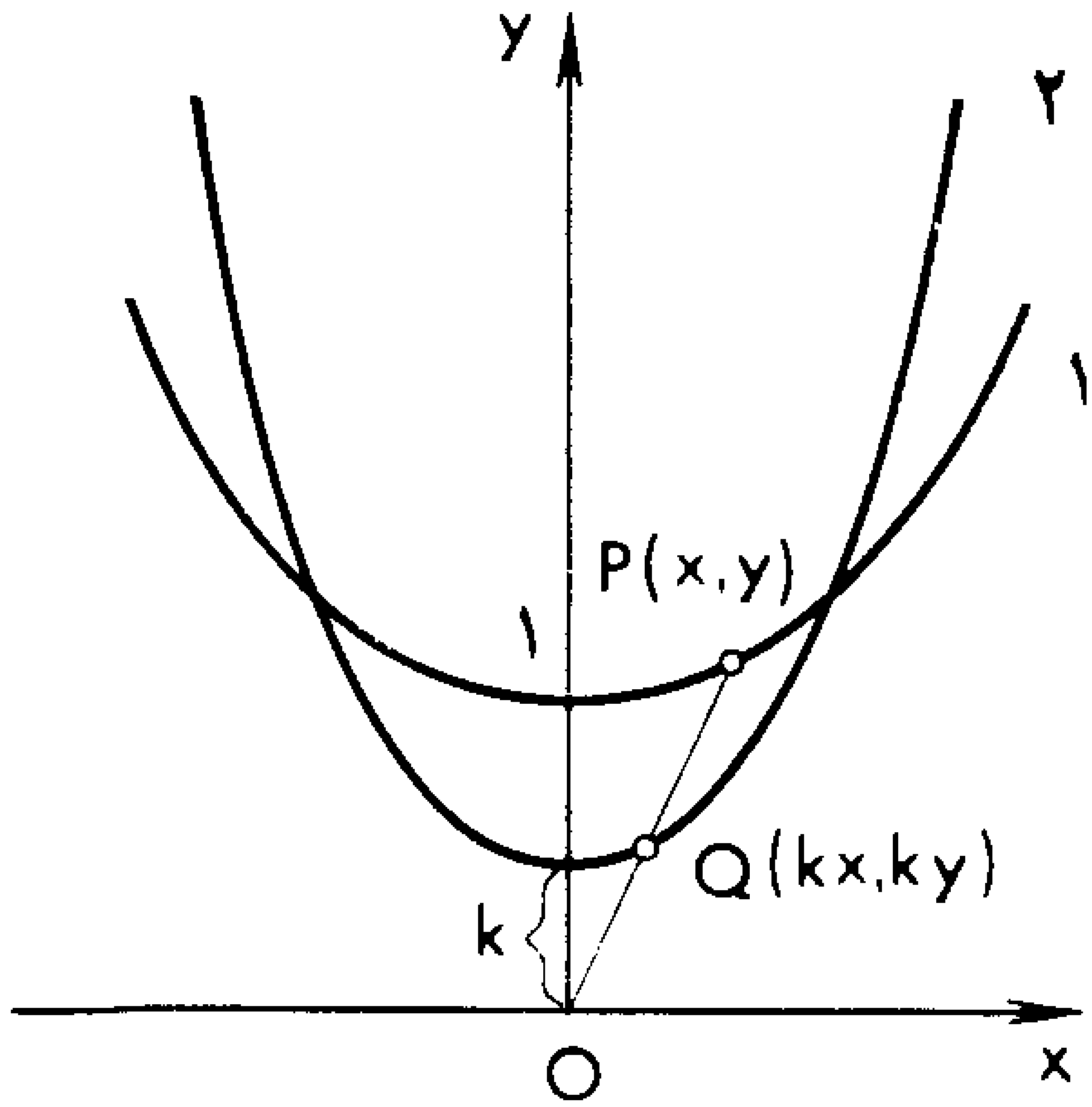
مختلف به نقاط A و B آویزان، و بر حسب اقتضاء، طول قسمت وسطی را تا لحظهٔ انطباق کم یا زیاد میکنیم (شکل ۴۹). اما بطریق دیگر نیز میشود عمل کرد: با علم به d (نصف فاصلهٔ میان دو سیخ)، l (نصف طول کمان AD) را حساب نموده و زنجیری بطول دقیقاً برابر $۲l$ را تهیه کرد. این محاسبه بیاری انتگرال عملی میشود. در اینجا نتیجه را ذکر میکنیم: $l = {}^{۱}/_{۲}(e^d - e^{-d})$. از اینجا بر می‌آید که هرگاه در نمودار تابع $y = {}^{۱}/_{۲}(e^x - e^{-x})$ (شکل ۴۸) $x = d$ قرار دهیم آنگاه عرض نظیر در نقطهٔ E این نمودار برابر l خواهد بود. از آنجا که $l = {}^{۱}/_{۲}(e^d - e^{-d}) < r = {}^{۱}/_{۲}(e^d + e^{-d})$ (شکل ۴۹)، نتیجهٔ جالبی بدست می‌آید: طول کمان CB خط زنجیری شکل ۴۹ (نصف طول کامل زنجیر) از عرض نقطهٔ تعلیق کوتاه‌تر است. از سوی دیگر داریم: $l > d$ یعنی این طول از طول نقطهٔ تعلیق بیشتر است.

۲۷. اگر طول زنجیر مناسب نباشد چطور؟

اگر برای نقاط تعلیق مفروض A و B، طول $2l'$ زنجیر مخالف طول $2l$ کمان AB سنحنی $y = 1/2(e^x + e^{-x})$ باشد چگونه میشود معادلهٔ خط زنجیری را پیدا نمود؟ در جستجوی جواب، ما بر واقعیت فوق‌الذکر مبنی بر اینکه تمام خطوط زنجیری متشابهند تکیه میزنیم.

برای مثال فرض کنیم که $l' > l$. آنگاه زنجیر بشکل یک کمان $AC'B$ واقع در زیر کمان ACB میافتد (شکل ۴۹). ما نشان میدهیم معادلهٔ مطلوب خط زنجیری شامل کمان $AC'B$ در دو مرحله پیدا میشود. مرحلهٔ اول عبارتست از گذار از سنحنی (۱)، $y = 1/2(e^x + e^{-x})$، به یک سنحنی (۲)، $y = k/2(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$، که بیاری تبدیل تشابه به مرکز در نقطهٔ O و ضریب تشابه k (k عدد مثبتی می‌باشد) از (۱) بدست می‌آید. مرحلهٔ دوم عبارتست از انتقال از سنحنی (۲) به سنحنی (۳)، $y = b + k/2(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$، بیاری جابجایی سنحنی (۲) در جهت محور عرض‌ها (به بالا یا به پایین، بسته به اینکه $b > 0$ یا $b < 0$).

حیله در آنست که ضریب تشابه k تعیین گردد. برای این منظور در صفحهٔ منحنی کمکی ترسیم شده در شکل ۴۸، نقطهٔ F بمختصات $x = d$ و $y = l'$ را نشانه‌گذاری میکنیم. از آنجا که $l' > l$، این نقطه نه در منحنی بلکه بالاتر از آن واقع میگردد. OF را تا تقاطع با سنحنی در یک نقطهٔ G ادامه میدهیم (میتوان ثابت نمود که علاوه بر نقطهٔ O یک و تنها یک نقطهٔ تقاطع پیدا خواهد شد). $OF/OG = k$ قرار میدهیم (در حالت مورد نظر $1 > k > 0$). در اینصورت مختصات نقطهٔ G عبارت خواهد بود از اعداد $x = d/k$،

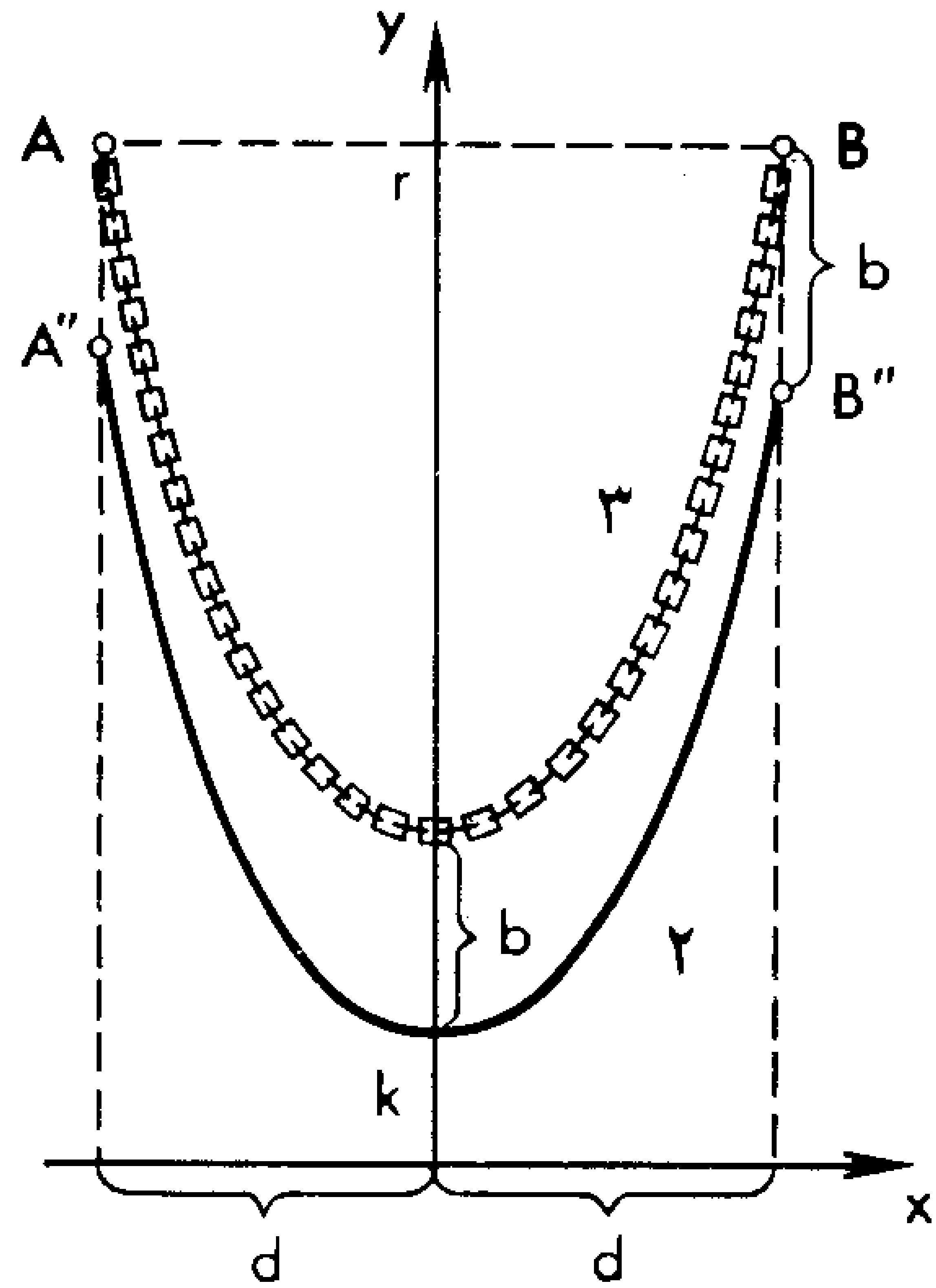


شکل ۵۰

$y = l'/k$ (این را نشان بدهید!). لذا این مختصات را معادلهٔ منحنی $l'/k = \frac{1}{2}(e^{\frac{d}{k}} - e^{-\frac{d}{k}})$ به هم مربوط میسازد. از اینجا بر می‌آید که هرگاه نقاط A' و B' بطول‌های $-\frac{d}{k}$ و $\frac{d}{k}$ را روی منحنی (۱) اختیار کنیم (شکل ۴۷) آنگاه طول کمان $A'B'$ واصل آنها برابر $2l'/k$ خواهد بود (مراتب مذکور در بند ۲۶ را بیاد بیاورید).

۲۸. همهٔ خطوط زنجیری متشابهند

عدد حاصلهٔ k را بمشابهٔ ضریب تشابه در تبدیل منحنی (۱) بکار میبریم. مبدأ مختصات، O را بعنوان مرکز تشابه بر میگزینیم. در اینصورت به هر نقطهٔ $P(x, y)$ منحنی (۱)، نقطهٔ $Q(kx, ky)$ منحنی تبدیل یافتهٔ (۲) متناظر خواهد بود (شکل ۵۰). اگر $X = kx$، $Y = ky$ قرار دهیم در آنصورت $x = X/k$، $y = Y/k$. اعداد اخیر باید در معادلهٔ (۱) صدق کند چونکه نقطهٔ $P(x, y)$ بر روی



شکل ۵۱

منحنی نظیر قرار دارد. بدست می‌آوریم : $Y/k = {}^1/_2 (e^{\frac{X}{k}} + e^{-\frac{X}{k}})$.
و این هم معادلهٔ منحنی (۲) است که در نتیجهٔ تبدیل بدست آمده است. حروف بزرگ نمایشگر مختصات را در اینجا میشود با حروف کوچک تعویض نمود هرگاه بخاطر داشته باشیم که اکنون دیگر اینها مختصات نقطهٔ دلخواه منحنی (۲) است.

یادآور میشویم که با نقاط A' و B' منحنی (۱) بطولهای $-\frac{d}{k}$ و $+\frac{d}{k}$ ، نقاط A'' و B'' منحنی (۲) بطولهای $-d$ و $+d$ متناظر است (شکل ۵۱). نظر به تشابه کمانهای $A'B'$ و $A''B''$، طول $A''B''$ برابر $\frac{2l'}{k} \times k = 2l'$ یعنی برابر طول داده شدهٔ زنجیر است. مزیت منحنی (۲) بر منحنی اولیهٔ (۱) در همین است. و اما نارسایی آن در آنست که بر خلاف منحنی (۱) که از نقاط تعلیق داده شدهٔ A و B

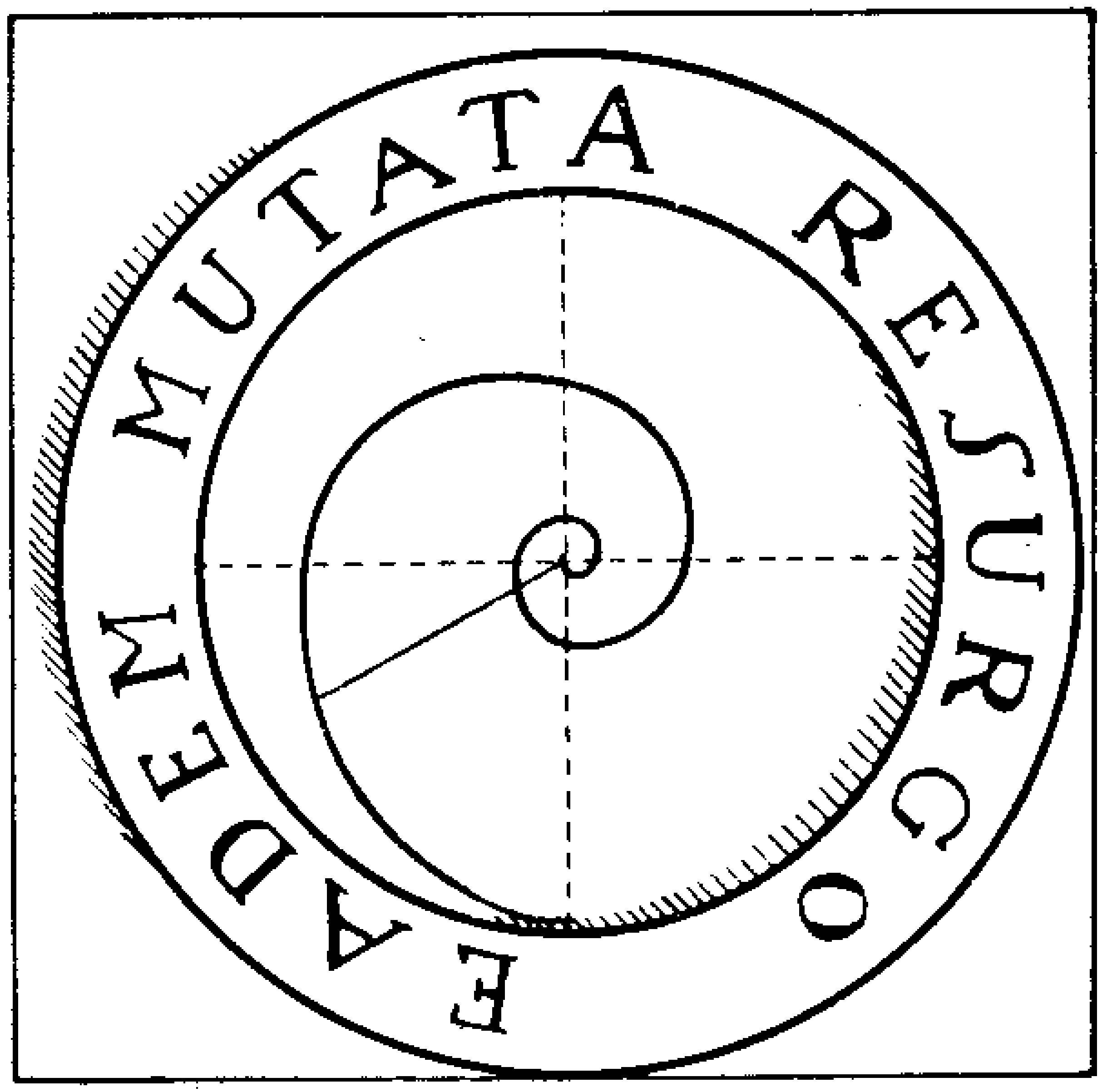
میگذشت منحنی (۲) میتواند از این نقاط عبور نکند. ولی رفع این نارسایی آسان است. هرگاه عرض نقطهٔ B'' (یا A'')، $k/_{2}(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}})$، برابر r نباشد یعنی B'' بر B منطبق نباشد آنگاه $r - k/_{2}(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}}) = b$ قرار میدهیم.

در نتیجهٔ جابجایی منحنی (۲) در جهت محور عرض‌ها بمقدار b، این منحنی به منحنی (۳)، $y = b + k/_{2}(e^{\frac{d}{k}} + e^{-\frac{d}{k}})$. منحنی اخیر، اولا، به منحنی (۱) شبیه بوده و در نتیجه، خودش یک خط زنجیری میباشد. ثانیاً، از نقاط تعلیق داده شده، $A\ (-d\ ,r)$ و $B\ (d, r)$ میگذرد. و ثالثاً، طول کمان AB با طول $2l'$ زنجیر داده شده برابر است. بطوریکه هویگنس، برنولی و لایبنیتز نشان داده‌اند در نتیجهٔ همین شرایط است که زنجیر عیناً بشکل کمان AB آویزان میشود.

۲۹. حلزونی لگاریتمی

این منحنی را میشد بنام دکارت نامید چونکه برای نخستین بار در یکی از نامه‌هایش بآن اشاره نمود (سال ۱۶۳۸). و لیکن تنها نیم قرن بعد یاکوب برنولی بتفصیل خواص آنرا بررسی نمود. این خواص در ریاضی‌دانان هم‌عصر وی تاثیری بسیار کرد. روی سنگ قبر این ریاضی‌دان بزرگ دورهای حلزونی لگاریتمی حک شده است (شکل ۵۲).

ما دیدیم (بند ۲۱) که حلزونی ارشمیدس را نقطه‌ای ترسیم میکند که در امتداد شعاع (یا عقربه‌ای بی‌نهایت دراز) حرکت مینماید بنحویکه فاصلهٔ آن تا ابتدای شعاع متناسب با زاویهٔ گردش آن افزایش یابد یعنی $r = k\alpha$. حلزونی لگاریتمی در صورتی بدست می‌آید



شکل ۵۲

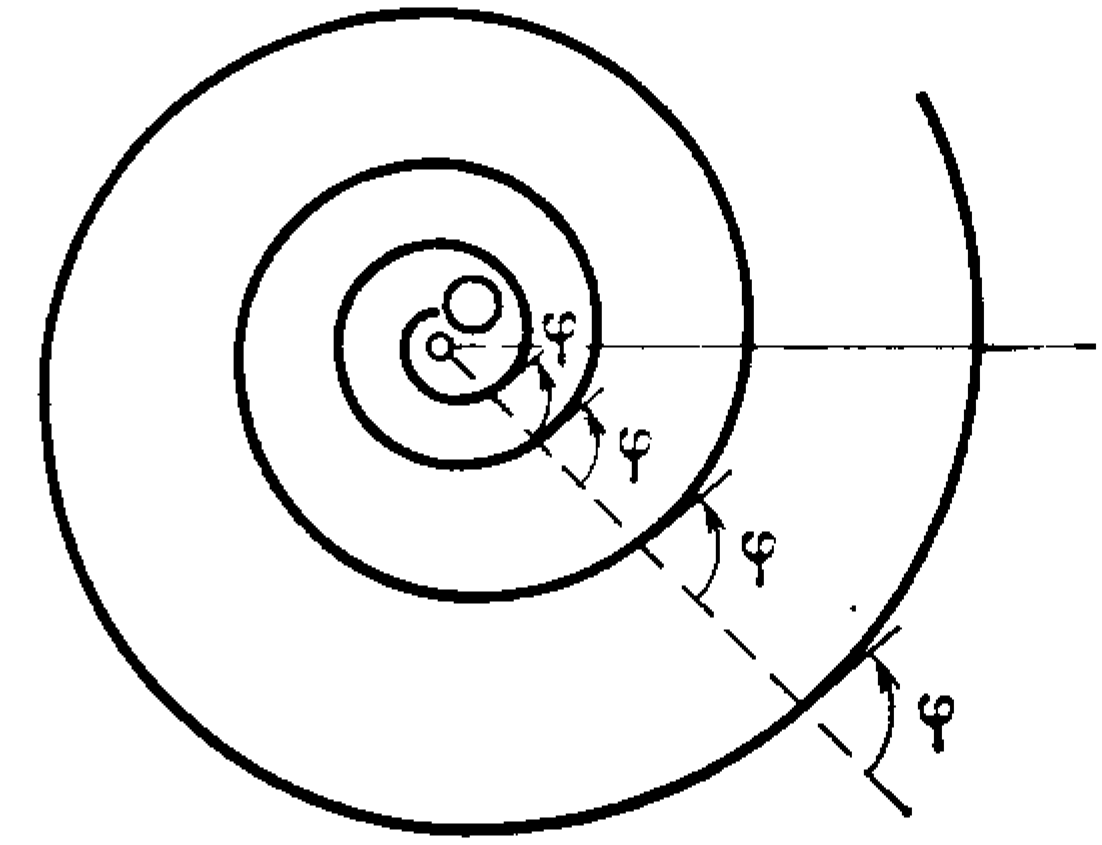
که اگر درخواست شود تا بجای خود فاصله، لگاریتم آن متناسب با زاویهٔ گردش افزایش یابد. معمولا معادلهٔ حلزونی لگاریتمی را با استفاده از عدد نپر e (بند ۲۵) بعنوان پایهٔ دستگاه لگاریتمی مینویسند. اینگونه لگاریتم عدد r را لگاریتم طبیعی میگویند و به $\ln r$ نمایش میدهند. بدینترتیب، معادلهٔ حلزونی لگاریتمی بصورت

$$\ln r = k\alpha$$

یا بشکل

$$r = e^{k\alpha}$$

که ماهیت هر دو یکی است نوشته میشود. البته، زاویهٔ گردش α را میشود همچنان بر حسب درجه اندازه‌گیری کرد. لکن ریاضی‌دانان ترجیح میدهند آنرا به رادیان اندازه بگیرند یعنی نسبت طول کمان دایرهٔ محصور بین طرفین زاویهٔ سرکزی به شعاع این دایره را بمثابهٔ میزان زاویه در نظر بگیرند. در اینصورت گردش عقربه بزاویهٔ قایمه با عدد $\frac{\pi}{۲} \approx ۱,۵۷$، بزاویهٔ نیم‌دور با عدد $\pi \approx ۳,۱۴$،



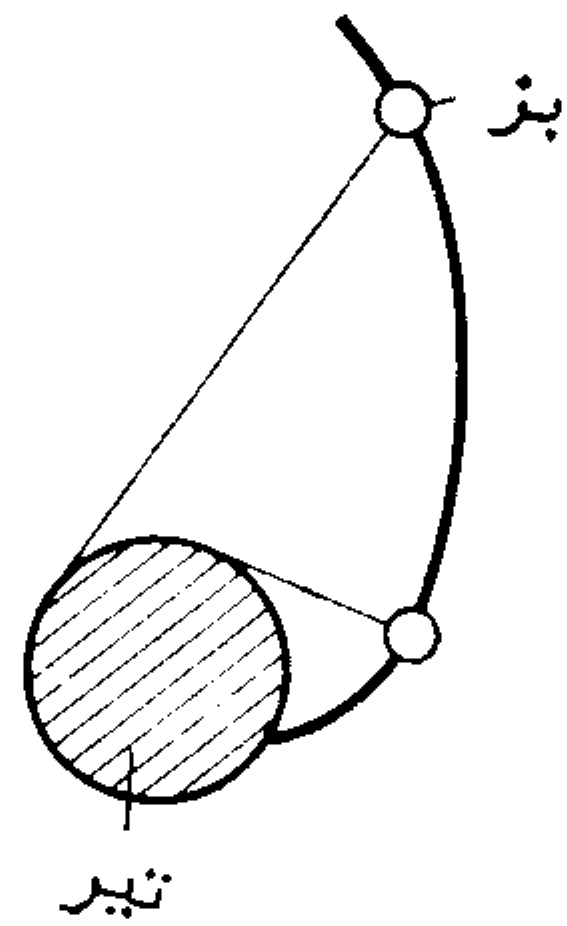
شکل ۵۳

و بدور کامل یا $360°$، بر حسب رادیان، با عدد $2\pi \approx 6{,}28$ بیان میشود.

از جملهٔ خواص متعدد حلزونی لگاریتمی تنها یکی را ذکر میکنیم و آن اینکه هر شعاع خارج شده از مبدأ، هر دور حلزونی را تحت همان زاویه قطع میکند. اندازهٔ این زاویه تنها به عدد k وارد در معادلهٔ حلزونی بستگی دارد. ضمناً منظور از زاویهٔ میان شعاع و حلزونی، زاویهٔ بین این شعاع و مماس بر حلزونی در نقطهٔ تقاطع میباشد (شکل ۵۳).

۳۰. گستردهٔ دایره

بزی را در نظرتان مجسم کنید که در مرغزار میچرد. بز با ریسمان طولانی به تیر دارای مقطع عرضی مدور بسته شده است. بز در حالیکه ریسمان را کشیده است سبزه میخورد و متوجه نمیشود که بندش بروی تیر پیچیده و کوتاه میگردد. بالاخره بز کیپ نزدیک تیر میشود. بز فکرش نمیرسد که اکنون راه خروج از این وضع دشوار تنها در جهت معکوس است برای اینکه ریسمان از روی تیر باز شود. در اینصورت بز چه منحنی‌ای را میپیماید؟ برای اینکه در ترسیم بز بخود زحمت ندهیم ما آنرا در شکل ۵۴ بصورت دایرهٔ کوچکی نمایش دادیم. شما میتوانید آنرا بمشابهٔ گردنبندی قبول کنید که سر ریسمان بآن بسته شده است. حال بدانید که کمانی

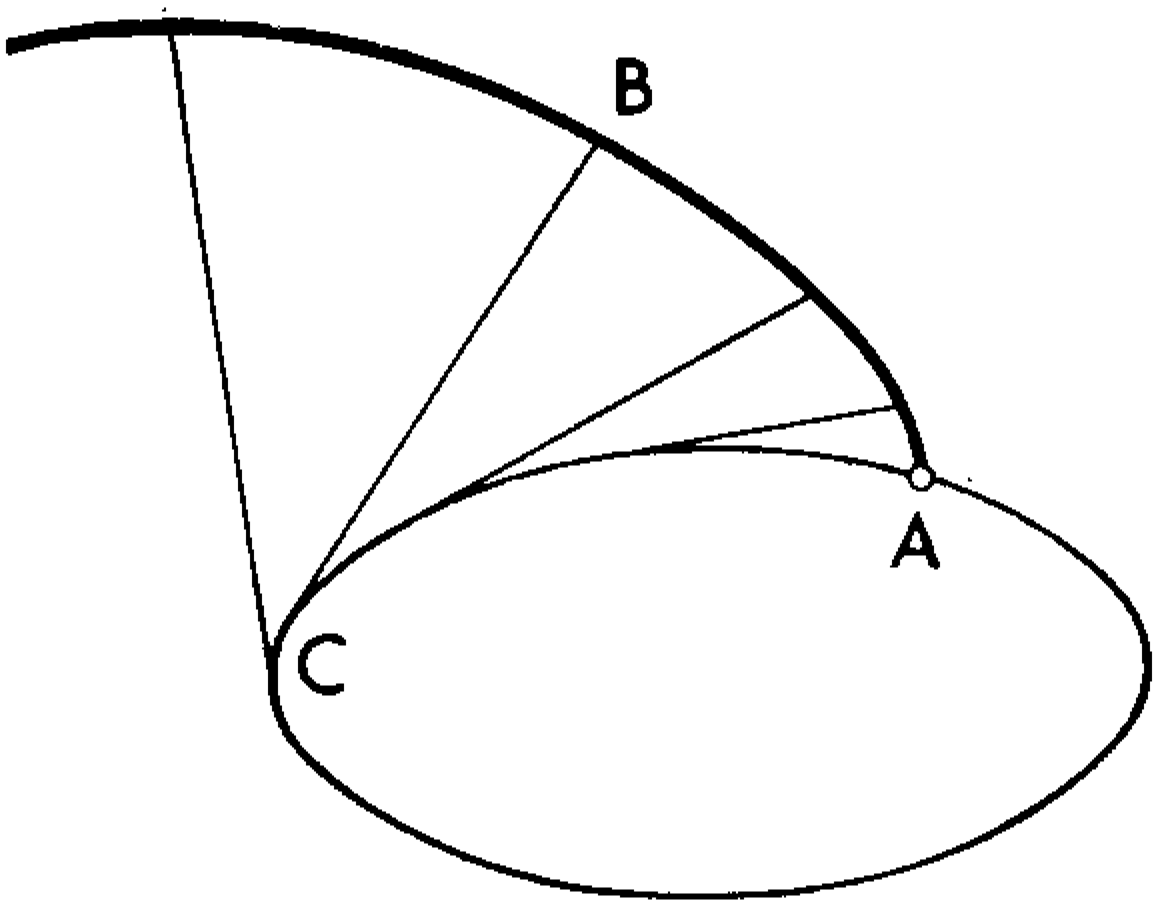


شکل ٥٤

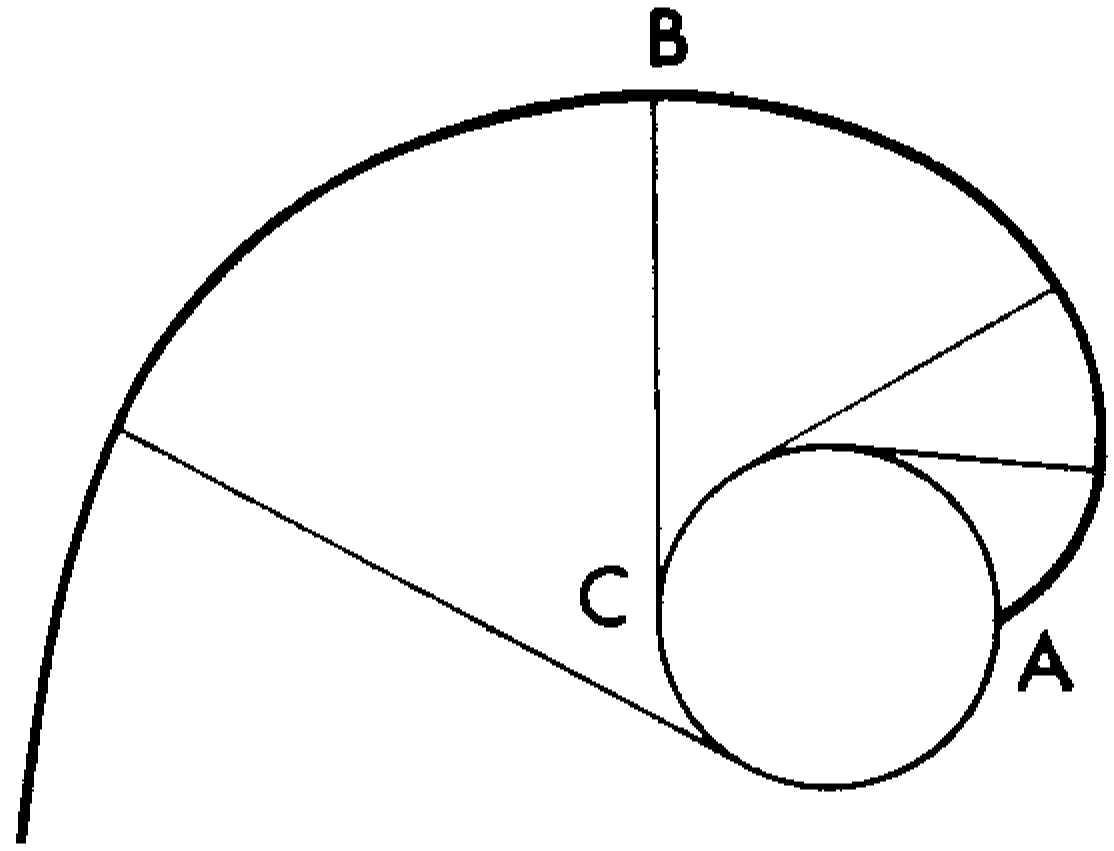
که بز در آن از تیر دور میشود (در صورتیکه قبلا در همان کمان به تیر نزدیک شد) به منحنی بی‌پایانی بنام گسترده یا بسط دایره متعلق است. ریاضی‌دانان برای نخستین بار در قرن ١٨ — م با این منحنی رو برو شدند. دنی دیدرو فیلسوف و نویسندهٔ فرانسوی (١٧١٣ — ١٧٨٤) در سال ١٧٤٨ خواص آنرا بررسی کرد.

حال، تعریف دقیقتری برای گستردهٔ دایره می‌آوریم. نخ بی‌پایان، غیر قابل کش و بی‌نهایت نازکی را در نظرمان مجسم میکنیم که بروی یک دایره پیچیده شده و سر دیگرش آزاد است. نوک تیز مداد یا سرقلم را بآن محکم میکنیم. هرگاه به باز کردن نخ شروع کنیم چنانکه شاخهٔ آزاد آن همواره کشیده بماند آنگاه نوک تیز در صفحهٔ دایره یک منحنی حلزونی گون را ترسیم خواهد نمود که بنام بسط یا گستردهٔ دایره معروف است (شکل ٥٥). از تعریف بر می‌آید که طول بخش آزاد نخ BC تا هر نقطهٔ دلخواه B روی منحنی دقیقاً برابر طول کمان دایره، $\breve{AC}$، است.

هرگاه نخ، بجای دایره، از روی یک منحنی دیگر باز شود، مثلا بیضی، آنگاه سر آن، گستردهٔ این منحنی، بویژه، گستردهٔ بیضی را ترسیم خواهد کرد (شکل ٥٦).



شکل ۵۶



شکل ۵۵

۳۱. پایان سخن

در اینجا ما شرح منحنی‌های جالب را به پایان میرسانیم. ما تنها تعداد کمی از آنها را بررسی نموده و بهیچ وجه همگی خواص‌شان را احاطه نکرده‌ایم. هدف ما عبارت از آن بود که در خوانندگانی که تنها با مبادی ریاضی و برخی واقعیات جالب از گنجینهٔ دانش ریاضی آشنا هستند علاقه و کنجکاوی را برانگیزیم. در ضمن قاعدتاً از تفصیلات استدلال و اثبات صرف نظر گردیده است.

اگر در صدد تشبیه به گردش در باغ وحش برآئیم میتوانیم بگوییم که نگارندهٔ این جزوه خواننده را در نوعی «باغ منحنی‌ها» راهنمایی کرده و تنها برای مدت کوتاهی در برابر قفس‌های جداگانه مکث نمود تا نشان دهد کدام منحنی در آنجا «ساکن است» و بشرح سادهٔ «سلوک» آن بسنده کرد. نا گفته نماند که آموزش تفصیلی خواص منحنی‌ها، دانش عمیقتر ریاضی و بویژه آشنایی به حساب دیفرانسیل و انتگرال را ایجاب مینماید.

فهرست مطالب