مبتکران
شرکت
آموزشی و فرهنگی
تاسیس
۱۳۶۵

منطق، برهان و مجموعه‌ها

ماروین ال. بیتینگر

ترجمه:

محمود محمدی

میثم خطیبی

منطق، برهان و مجموعه‌ها

ویرایش دوم

ماروین. ال بیتینگر Marvin L.Bitinger

دانشگاه ایندیانا - پوردو

دانشگاه ایندیانا پولیس

ترجمه: محمود محمدی ـ میثم خطیبی

منطق، برهان و مجموعه ها/ مارووین. ال. بیتینگر؛ ترجمهٔ محمود محمدی، میثم خطیبی. ــ (ویرایش دوم). -- تهران: مبتکران، ۱۳۸۳. / ۲۰۸ ص.: مصور، جدول. ــ (انتشارات مبتکران ؛ ۵۱۳)

ISBN : 964 - 486 - 950 - 8

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا. عنوان اصلی:

Logic , Proof , and sets , 2nd ed.,c1982

۱. منطق ریاضی. ۲. برهان. ۳. نظریه مجموعه‌ها. الف. محمدی، محمود، ۱۳۲۵ ــ مترجم. خطیبی، میثم، مترجم. ج . عنوان. ۸ م ۸۷ ب / ۹ /۵۱۱۳

کتابخانه ملی ایران ۱۸۰۴۵ ــ ۸۲ م

شابک: ۸ - ۹۵۰ - ۴۸۶ - ۹۶۴

ISBN: 964 - 486 - 950 - 8

انتشارات مبتکران

شمارهٔ پروانهٔ نشر: ۱۶۷/۱۰۲

www.mobtakeran.com

تهران، انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان شهید نظری، پلاک ۱۱۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱

تلفن ۹۱ ـ ۶۹۵۴۳۹۰ دورنگار ۶۹۵۴۳۹۲ E-Mail: post@mobtakeran.com

نام کتاب	:	منطق، برهان و مجموعه‌ها
تألیف	:	مارووین. ال بیتینگر Bitinger, Marvin L.
ترجمه	:	محمود محمدی، میثم خطیبی
چاپ اول	:	۱۳۸۳
تیراژ	:	۱۵۰۰ جلد
حروفچینی	:	مبتکران
لیتوگرافی	:	ندای دانش
چاپ	:	ایمان

قیمت ۱۵۰۰ تومان

فهرست مطالب

◄ ضمیمه

مقدمه ویرایش دوم مؤلف

هدف این کتاب، فراهم آوردن یک زمینه اصلی در منطق نمادین، که مرتبط با برهانهای ریاضی و قابل دستیابی در یک سطح اولیه در تحصیلات قبل از فارغ‌التحصیلی است، می‌باشد.

چه مطالب جدیدی در ویرایش دوم وجود دارد؟

در ویرایش جدید، تغییرات متعددی به عمل آمده است. پیوستگی فصل ۲، با انتقال خلاقیت در برهان به انتهای فصل و نیز با برداشتن تئوری مجموعه‌ها و قرار دادن آن در یک فصل جدید (۳)، در عین حال افزودن مطالبی در مورد روابط هم ارزی و توابع، بهبود یافته است. تمرینهای زیادی به کتاب اضافه شده است. تمرینهایی که در طول هر بخش پراکنده بودند، در پایان بخشها قرار گرفتند. و نیز پاسخها به انتهای کتاب منتقل شده‌اند. به علاوه، در بسیاری از قسمتها ویراستاری انجام شده تا نقاط مشکل را برای دانش‌آموزان از بین ببریم.

کتاب برای افرادی که مخاطب آن هستند، کاربردهای زیادی دارد. نویسنده، به صورت موثری این کتاب را به عنوان مکملی برای ترم آخر حساب (calculus) [برای تکمیل کتاب دقت بسیاری صرف شده است] و نیز به عنوان مقدمه‌ای به یک دورهٔ ابتدایی درباره دستگاه اعداد حقیقی، مورد استفاده قرار داده است. مشخص شده که دوکاربرد بالا، در مورد دانشجویی که تشکیل نقیض‌ها، شروع برهانهایی توسط عکس نقیض، شروع برهانهایی توسط استقرای ریاضی و از این قبیل را می‌داند، مطالعات بعدی را بسیار سرعت می‌بخشد. این کتاب، همچنین می‌تواند، به عنوان یک مکمل برای بخشهای منطقی در کتب درسی جبر و آنالیز استفاده شود، همچنین زمینه‌ای برای دوره‌های بالاتر را فراهم می‌کند.

مقدمه مترجمین

> نظریه مجموعه‌ها درواقع چیز بدیهی و پیش پا افتاده ایست اما اگر می‌خواهید ریاضیدان شوید باید آن را کمی بشناسید و این "کم" همین است. آنرا بخوانید. جزء وجود خود کنید و فراموشش کنید.
> هالموس

منطق چیست؟ برهان و روشهای آن به چه درد می‌خورد؟ ارتباط ایندو با نظریه مجموعه‌ها چیست؟ اینها نمونه‌ای از سؤالاتی هستند که هر ذهن پویا را به خود مشغول می‌کنند و در صورتی که پاسخ قانع‌کننده‌ای برای آنها یافت نشود مطالعه این موضوعات امری بیهوده جلوه می‌کند. در مکالمات ما، آثار بسیاری از ادوات منطقی دیده می‌شود. «و»، «یا»، «هر»، «همه»، «هیچ» و ... همگی شواهدی هستند بر استفاده ناخودآگاه ما از منطق. همه ما به صورت ناخودآگاه می‌دانیم که در هر موقعیتی از چه عبارت منطقی استفاده کنیم. در واقع منطق ریاضی نقش فوق‌العاده مهمی در تفهیم و تفهم دیگران ایفا می‌کند. از سوی دیگر بدون منطق، بیان اصول ریاضی غیر ممکن است. برهان و اثبات ریاضی هم بدون بکارگیری منطق غیر ممکن است بنابراین برای آموختن روش استدلال که همان برهان ریاضی است، دانستن منطق لازم و ضروری است.

دانستن منطق زمینه را برای شناخت روشهای استدلال ریاضی فراهم می‌کند. آموختن خود منطق، بدون فراگیری تئوری مجموعه‌ها ممکن نیست. در واقع منطق ریاضی بر پایه تئوری مجموعه‌ها استوار است.

بنابراین برای آموختن روشهای استدلال، نیاز به فراگیری تئوری مجموعه‌ها و منطق ریاضی داریم.

کتاب حاضر با تکیه بر این سه مبحث، تلاش می‌کند به‌صورت اصولی و ریشه‌ای، خواننده را با استدلال و روشهای برهان آشنا کند.

با تمرینهای فراوانی که در انتهای هر بخش آمده، خواننده را به حل مسائل کاملاً توانا کند. عدم وجود کتاب یا متنی که به هر سه این مباحث با بیانِ دقیق و ساده پرداخته باشد، مترجمین را بر آن داشت تا کتاب حاضر را به علاقمندان ریاضیات در ایران تقدیم کنند. مسلماً هر علاقمند به ریاضی می‌داند که سفر به دنیای زیبا و بی‌انتهای ریاضی بدون سوار شدن برکشتی برهان، بابادبانهای منطق و سکان تئوری مجموعه‌ها غیر ممکن است.

شناخت و مطالعه **منطق**، **برهان**، **نظریه مجموعه‌ها** می‌تواند مقدمه مفیدی برای حرکت در جهت آمادگی برای المپیادهای ریاضی باشد اینجانبان بر خود واجب می‌دانیم از همکاری آقای یحیی دهقانی، مدیر محترم شرکت آموزشی و فرهنگی مبتکران و خانم افسر صفائیان که ما را در چاپ این کتاب یاری نمودند و نیز از تمام افرادی که به نوعی در به ثمر رسیدن این اثر ما را همراهی کردند، قدردانی به عمل آوریم.

در پایان این ترجمه را تقدیم می‌کنیم به آنهایی که دوستشان داریم: خانمها پروین پرهیز و سارا محمدی

محمود محمدی ـ میثم خطیبی
تابستان ۱۳۸۲

فصل (۱)
منطق

مقدمه

همانطوری که یک هنرمند از ابزار و روشهای مختلفی در کارش استفاده می‌کند، یک ریاضیدان هم همین کار را انجام می‌دهد. هدف این کتاب، مطالعه منطق و مرتبط کردن آن با برهان‌های ریاضی، ابزارهای ریاضیدانان، است.

یک فرد می‌تواند امپرسیونسیم، اکسپرسیونیسم[۱] و از این قبیل را مطالعه کند، می‌تواند تمام چیزها راجع به آبرنگ‌ها، رنگهای روغن و بوم نقاشی را بداند، اما هیچ‌گاه یک هنرمند نباشد. بهرحال، چنان دانشی، زیربنایی محکم جهت هنرمند بودن فراهم می‌کند. مشابهاً، دانش شما در این زمینه توانایی شما را در اثبات هرچه با آن روبرو می‌شوید، تضمین نمی‌کند، اما توانایی شما را برای انجام اثبات‌های ریاضی افزایش می‌دهد.

۱.۱ مجموعه‌ها

این مقدمه مختصر از مجموعه‌ها ، پایه‌ای را جهت مطالعهٔ منطق در این فصل فراهم می‌کند. در فصل ۳ ، نظریهٔ مجموعه‌ها را به صورت رسمی‌تری خواهیم خواند. جدای از این مطلب، از این بخش می‌توانیم صرف‌نظر کنیم یا آن را به صورت سطحی با مطالب قبلی راجع به روشهای پایهٔ مجموعه‌ها بخوانیم.

۱ـ توضیح این لغات در انتهای کتاب آمده است.

نمادگذاری

اغلب جهت نامگذاری مجموعه‌ها، آکولادها بکار می‌روند، برای مثال: مجموعهٔ اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴ می‌تواند به صورت $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ نشان داده شود. این روش، روش "$roster$"[1] در نمایش مجموعه‌هاست.

معمولاً جهت نمایش مجموعه‌ها، روشی که به عنوان «نمایش مجموعه‌ساز» شناخته می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش یک ویژگی مشخصه تعیین می‌شود که در تمام اعضای یک مجموعه برقرار است، مثل $p(x)$، بخوانید پیِ ایکس، به یک گزاره راجع به متغیر x، دلالت می‌کند، برای مثال، $x = ۲۳$ ، x یک عدد زوج است، $۱ \leq x \leq ۴$.

مجموعهٔ تمام عضوهای x به طوری که x در $p(x)$ صدق می‌کند به صورت $\{x|p(x)\}$ نشان داده می‌شود. بنابراین مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ می‌تواند به صورت $\{x|۱ \leq x \leq ۴$ و x یک عدد صحیح است$\}$ نشان داده شود یعنی «مجموعهٔ تمام xهایی که $۱ \leq x \leq ۴$ و x یک عدد صحیح است.»

عضویت

از این به بعد، کلمات «شیء» ، «عنصر» و «عضو» زمانی که راجع به مجموعه‌ها هستند دقیقاً یک معنی را دارا هستند. برای مثال ، اشیاء مجموعه‌ها همان عضوهای مجموعه‌ها هستند و بالعکس.

مجموعه‌ها با حروف بزرگ و عناصر مجموعه‌ها توسط حروف کوچک نمایش داده می‌شوند.

جملات زیر همه یک معنی دارند.

$a \in A$

a در مجموعهٔ A است.

a عضوی از مجموعهٔ A است.

a عنصری از مجموعهٔ A است.

مشابهاً $a \notin A$ به این معنی است که «a عنصری از مجموعهٔ A نیست.»

مثالها:

$۱ \in \{۱, ۲, ۳\}$

$۵ \notin \{۱, ۲, ۳\}$

$۴۰ \in \{x|$ مضربی از ۱۰ می‌باشد $x\}$

۱ـ roster: مفهوم یک لیست یا فهرست یا صورتی از وظایفی است که هر شخص یا هر چیز باید انجام دهد یا به معنی لیست اعضای یک تیم ورزشی می‌آید. در صفحه می‌توان این کلمه را به معنی فهرست تعبیر کرد.

زیرمجموعه‌ها

A یک زیرمجموعه B است اگر هر عضو A، عضوی از B باشد. جملات زیر هم همین معنی را دارد:
$A \subset B$،
هر عضو A یک عضو B است،
اگر $a \in A$ آنگاه $a \in B$،
A مشمول B است،
B شامل A است،
A یک زیرمجموعهٔ B است.

مثالها:

$$\{۱, ۲, ۳\} \subset \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$
$$\{۱, ۳\} \subset \{۱, ۳\}$$

یک مجموعه همواره زیرمجموعهٔ خودش می‌باشد، یعنی برای هر مجموعه مثل A داریم: $A \subset A$. این را بعداً اثبات می‌کنیم. همچنین $A \subset B$ به این معنی است که $B \supset A$.

برابری مجموعه‌ها

اگر A و B نشانگر دو مجموعه باشند، پس $A = B$ یعنی $'A'$ و $'B'$ یک مجموعه را نشان می‌دهند. جملات زیر یک معنی دارند:
$A = B$
A و B یک مجموعه را نمایش می‌دهند.
A و B دقیقاً اعضای یکسانی دارند.
$A \subset B$ و $B \subset A$.

مثالها:

$$\{۱, ۲\} = \{x | (x - ۱)(x - ۲) = ۰\}$$
$$\left\{\frac{۱}{۲}\right\} = \{x | ۲x - ۱ = ۰\}$$
$$\{۱, ۲, ۳\} = \{۳, ۲, ۱\} = \{۱, ۲, ۳, ۳\}$$

توجه داشته باشید که از ترتیب قرارگرفتن اعضا و مرتبهٔ تکرار عناصر صرف‌نظر می‌شود یعنی از تکرار یک عنصر صرف‌نظر می‌کنیم.

مجموعهٔ تهی

مجموعه‌ای که شامل هیچ عنصری نیست به عنوان مجموعهٔ تهی شناخته می‌شود و می‌تواند با $\{\ \}$ نمایش داده شود، اما ما آنرا ϕ می‌نامیم. برای هر مجموعه مثل A، $\phi \subset A$. ما این را بعداً ثابت خواهیم کرد.

اشتراک

اشتراک دو مجموعهٔ A و B عبارت است از مجموعهٔ عناصری که در هر دو مجموعه مشترکند. اشتراک به صورت $A \cap B$ یا $\{x | x \in A$ و $x \in B\}$ نمایش داده می‌شود.

مثالها:

$$\{۱, ۳\} \cap \{۱, ۲, ۳, ۴\} = \{۱, ۳\}$$

$$\{۱, ۳, ۵\} \cap \{۱, ۲, ۳, \dots\} = \{۱, ۳, ۵\}$$

$$\{x | x > ۱\} \cap \{x | x > ۲\} = \{x | x > ۲\}$$

$$\{۲, ۴, ۶, ۸, \dots\} \cap \{۱, ۳, ۵, ۷, \dots\} = \phi$$

در مثال آخر، هیچ عنصر مشترکی وجود نداشت بنابراین اشتراک برابر مجموعهٔ تهی است.

اجتماع

اجتماع دو مجموعهٔ A و B ، مجموعه‌ای از عناصر است که در A یا در B یا در هر دو وجود دارند. اجتماع به صورت $A \cup B$ یا $\{x | x \in A$ یا $x \in B$ یا $x \in A \cap B\}$ نمایش داده می‌شود.

مثالها:

$$\{۱, ۲\} \cup \{۳, ۴, ۵\} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$

$$\{۲, ۴, ۶, ۸, \dots\} \cup \{۱, ۳, ۵, ۷, \dots\} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$$

$$\{x | x > ۱\} \cup \{x | x > ۲\} = \{x | x > ۱\}$$

مجموعهٔ تمرینهای ۱.۱

روش $roster$ را جهت نمایش هر مجموعه بکار برید.

۱. $\{x|$ ۱ $\leq x \leq$ ۸ و x یک عدد صحیح است$\}$

۲. $\{y|$ − ۵ $< y <$ ۰ و y یک عدد صحیح است$\}$

۳. $\{x|$ x یک عدد صحیح زوج است$\}$

۴. $\{x|$ $x =$ ۲k که k عددی صحیح است$\}$

نمایش مجموعه‌ساز را جهت نمایش هر مجموعه بکار برید.

۵. $\{$−۱, ۰, ۱, ۲$\}$

۶. $\{$۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ...$\}$

۷. $\{$۱۰, ۲۰, ۳۰, ۴۰, ...$\}$

۸. $\left\{\frac{۳}{۲}\right\}$

علامت $\in$ یا $\notin$ را در جای خالی قرار دهید به نحوی که گزارهٔ حاصل درست باشد.

۹. ۱ − − − − − − −$\{$۲, ۳$\}$

۱۰. ۳ − − − − − − −$\{$۵, ۷, ۳, ۲$\}$

۱۱. ۲ − − − − − − −$\{x|$ xیک عدد صحیح زوج است$\}$

۱۲. ۱۵ − − − − − − −$\{x|$ xیک عدد صحیح زوج است$\}$

علامت $\subset$ ، $\supset$ یا $=$ را در جای خالی قرار دهید به نحوی که گزارهٔ حاصل درست باشد.

۱۳. $\{$۸, ۹$\}$ − − − − − $\{$۷, ۱۱, ۹, ۸$\}$

۱۴. $\{$۵, ۴, ۳, ۲, ۱$\}$ − − − − − − − − − − − − − −$\{$۱, ۲, ۳$\}$

۱۵. $\{$۴, ۵, ۶$\}$ − − − − − −$\{$۶, ۴, ۵$\}$

۱۶. جفت مجموعه‌هایی که با هم برابرند را پیدا کنید.

$A = \{x^۲ = ۳, \text{ زوج است } x\}$ $\qquad B = \{x|x^۲ = ۴\}$

$C = \{۷, ۲, ۴\}$ $\qquad D = \{۱, ۲\}$

$E = \{۸, ۹, ۷, ۴\}$ $\qquad F = \{۹, ۹, ۴, ۷, ۸\}$

$G = \{۲, ۱\}$ $\qquad H = \{-۲, ۲\}$

تعیین کنید هر عبارت درست است یا غلط.

۱۷. $\{x|x^۲ = ۳, \text{ زوج است } x\} = \phi$

۱۸. $\{۱, ۲\} = \phi$

۱۹. $\{۰\} = \phi$

۲۰. $\{۰\} \subset \phi$

۲۱. $\phi \subset \{۰\}$

۲۲. $\phi \subset \{۱, ۲\}$

هر یک از اشتراکهای زیر را بیابید.

۲۳. $\left\{\frac{۱}{۲}, ۱\right\} \cap \{-۴, ۸\}$

۲۴. $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, \dots\} \cap \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$

۲۵. $\{۱, ۲, ۳\} \cap \phi$

۲۶. برای هر مجموعهٔ A، $A \cap \phi$

۲۷. $\{x|x < ۰\} \cap \{x|x < -۱\}$

هر یک از اجتماع‌های زیر را بیابید.

۲۸. $\left\{\frac{۱}{۲}, ۱\right\} \cup \{-۴, ۸\}$

۲۹. $\{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, \dots\} \cup \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$

.۳۰ $\{۱, ۲, ۳\} \cup \phi$

.۳۱ برای هر مجموعهٔ A، $A \cup \phi$

.۳۲ $\{x|x < ۰\} \cup \{x|x < -۱\}$

۱.۲ مجموعه‌های مرجع

ریاضیدانان ، همواره یک چارچوب مرجع دارند که به آن مجموعهٔ مرجع می‌گویند.

در هندسهٔ مسطحه، مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ تمام نقاط صفحه است. در هندسهٔ فضایی ، صفحه، دیگر نمی‌تواند به عنوان مجموعهٔ مرجع بکار برده شود. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ توابع حقیقی، مجموعه توابع مشتق‌پذیر و مجموعهٔ توابع پیوسته را مجموعه‌های مرجع به حساب می‌آوریم.

معمولاً مشخص است که مجموعهٔ مرجع چیست، گویی می‌توانید از عنوان کتاب یا فصلی که مطالعه می‌کنید یا از بخشی از نوشته تصمیم بگیرید که مجموعهٔ فوق چیست.

متمم

متمم یک مجموعه مثل A به صورت مجموعهٔ تمام عناصر مجموعهٔ مرجع که در A نیستند تعریف می‌شود و با نماد CAنمایش داده می‌شود.

مثال: اگر مجموعهٔ مرجع $U = \{۲, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۸۲\}$ و $A = \{۲, ۹, ۱۱, ۸۲\}$ آنگاه $CA = \{۵, ۷\}$.

توجه داشته باشید که $A \cup CA$ همواره برابر با مجموعهٔ مرجع می‌باشد و همواره $A \cap CA$ برابر ϕ است.

این را بعداً ثابت می‌کنیم.

زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی

از حروف بزرگ زیر برای نشان دادن زیرمجموعه‌های ویژه‌ای از اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم و در بقیهٔ کتاب به آنها رجوع می‌کنیم:

مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت = مجموعهٔ اعداد طبیعی = $N = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد درست = مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی = $N_۰ = \{۰\} \cup N = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح $= \{\ldots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\ldots\} = I$

توجه کنید که $N \subset N_\circ \subset I$.

مجموعهٔ اعداد صحیح منفی $= \{-۱,-۲,-۳,\ldots\} = -N$

$P = \{p | p > ۱$. یک عدد طبیعی است و p تنها به یک و خود p قابل قسمت می‌باشد $p\}$

مجموعهٔ اعداد اول =

بعضی از عناصر p عبارتند از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ ، ۱۷ و ۱۹.

مجموعهٔ اعداد گویا $= \{\frac{a}{b} | a \in I، b \in I ، b \neq ۰\} = Q$

مثالها:

$-\frac{۵}{۴} \in Q, \frac{۲}{۳} \in Q$.

توجه داشته باشید که $N \subset N_\circ \subset I \subset Q$. زیرا بازای هر عدد صحیح a داریم $\frac{a}{۱} = a$.

مجموعهٔ اعداد گنگ = $\{x$ نمی‌تواند به صورت خارج قسمت دو عدد صحیح بیان شود $|x\} = J$

مثالها:

$\sqrt{۲} \in J$

$\pi \in J$

$e \in J (e = ۲/۷۱۸\ldots)$

$۲ \notin J$

$۳/۴ \notin J$

در واقع $Q \cap J = \phi$

مجموعهٔ اعداد حقیقی $= Q \cup J$ $= R$

مجموعهٔ تمرینهای ۱.۲

۱. اگر مجموعهٔ مرجع $U = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۱۰, ۸\}$ باشد، $A = \{۱, ۲, ۳, ۱۰\}$، $B = \{۰, ۱, ۸, ۱۰\}$، $C = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$، مطلوبات زیر را بیابید:

$a)\quad A \cap (B \cup C) \qquad b)\quad \mathcal{C}A$

$c)\quad \mathcal{C}(A \cap B) \qquad d)\quad \mathcal{C}(A \cap B \cap C)$

$e)\quad \mathcal{C}(A \cap (B \cup C)) \qquad f)\quad \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$

$g)\quad (A \cap B) \cap C \qquad h)\quad A \cap (B \cap C)$

$i)\quad (A \cup B) \cup C \qquad j)\quad A \cup (B \cup C)$

اگر R مجموعهٔ مرجع باشد، بیابید:

۲. $Q \cap R$

۳. $I \cap J$

۴. $N \cap J$

۵. $N_{\circ} \cap J$

۶. $I \cap N$

۷. $\mathcal{C}Q$

۸. $N_{\circ} \cup -N$

۹. $\mathcal{C}J$

۱۰. مجموعهٔ $\{x|$ یک عدد صحیح فرد است $x\}$ را به دو روش دیگر نشان دهید.

۱۱. فرض کنید $D = \{x|$ یک عدد صحیح فرد است $x\}$ و $E = \{x|$ یک عدد صحیح زوج است $x\}$،

بیابید:

$$a) D \cap E \qquad b) D \cup E$$

۱۲. مجموعه‌های زیر را به روش $roster$ نمایش دهید.

$a)$ $I_۰ = \{x|x \in I,\quad k \in I$ بازای $x = ۳k\}$

$b)$ $I_۱ = \{x|x \in I,\quad k \in I$ بازای $x = ۳k + ۱\}$

$c)$ $I_۲ = \{x|x \in I,\quad k \in I$ بازای $x = ۳k + ۲\}$

سپس بیابید:

$$d)\ I_۱ \cap I_۰ \qquad e)\ I_۱ \cap I_۲$$

$$f)\ I_۰ \cap I_۲ \qquad g)\ I_۰ \cup I_۱ \cup I_۲$$

روش $roster$ را جهت توضیح مجموعه‌های تمرینهای ۱۸-۱۳ بکار برید.

۱۳. $\{x|x^۲ + ۲x + ۱ = ۰\} \cup \{x|x^۲ + ۴x + ۴ = ۰\}$

۱۴. $\{x|x \in R, x^۲ = -۱\}$

۱۵. $\{x|x \in J, x \in Q\}$

۱۶. $\{x|$ x عدد صحیح است و x زوج نیست $\}$

۱۷. $\{x|$ x عدد صحیح است و x فرد نیست $\}$

۱۸. $\{x|$ x یک عدد صحیح زوج است و x اول است $\}$

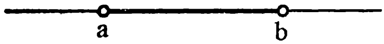
۱۹. بازه‌ها زیرمجموعه‌های مهمی از R هستند. آنها روی خط حقیقی به صورت زیر تعریف و مشخص می‌شوند:

$[a, b] = \{x|a \leq x \leq b\}$

$[a, b) = \{x|a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x|a < x \leq b\}$

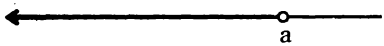
$(a,b) = \{x|a < x < b\}$



$(a,\infty) = \{x|a < x\}$

$[a,\infty) = \{x|a \leq x\}$

$(-\infty,a) = \mathcal{C}[a,\infty)$



$(-\infty,a] = \mathcal{C}(a,\infty)$

بیابید:

$a)\ (-\infty,۳)\cap[۲,\infty)$ $\quad$ $\boldsymbol{b)\ (-\infty,۳)\cup[۳,\infty)}$

$c)\ [-۱,۲)\cup[۱,۴)$ $\quad$ $\boldsymbol{d)\ [-۱,۲)\cap[۱,۴)}$

$e)\ [۳,۳]$ $\quad$ $\boldsymbol{f)\ (۳,۳)}$

$g)\ [-n,n]\cap[-(n+۱),\boldsymbol{n+۱}]$ $\quad$ $\boldsymbol{h)\ [-n,n]}\cup[-(n+۱),n+۱]$

۲۰. اگر u یک مجموعه باشد، آنگاه $\boldsymbol{p(u)}$ ، **مجموعهٔ توانی u**، برابر با $\{A|A\subset u\}$ است. برای مثال، $p(\{a,b\}) = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. **توجه کنید که $p(u)$** مجموعه‌ایست که اعضای آن، مجموعه هستند. بیابید:

$a)\ p(\{۱,۲\})$ $\qquad$ $b)p(\{۰\})$

$c)\ p(\{۱,۲,۳\})$ $\qquad$ $d)\ p(\phi)$

۱.۳ جملات و گزاره‌ها

منطق و برهان ریاضی دقیقاً می‌توانند مثل جبر، هندسه یا حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی و مطالعه شوند. مطالعهٔ منطق، مطالعهٔ زبان ریاضی است.

همانطور که هر فرد از جملات برای بیان ایده‌های خود استفاده می‌کند، ریاضیدانان هم از جملات جهت بیان ایده‌ها استفاده می‌کنند: برای مثال، $x + y = ۱$، $۲ + ۳ = ۵$، $\int_۰^۳ \cos x dx = \sin ۳$، و از این قبیل.

گزاره‌ها

جملات خبری که درست یا غلط باشند اما نه هر دو، گزاره نامیده می‌شوند. آنچه در زیر می‌آید گزاره است.

حسین رضازاده، رکورد وزنه‌برداری جهان را شکست. (درست)

$۲ + ۳ = ۶$ (غلط)

برای هر x، اگر $f(x) = \sin x$ آنگاه $f'(x) = \cos x$ (درست)

رقم ۲۶۰۰۰ ام عدد π برابر با ۴ است.

می‌دانیم مثال آخر یک گزاره است، بدون توجه به اینکه نمی‌دانیم درست است یا غلط. آنچه در زیر می‌آید گزاره نیست.

چرا شما ریاضیات می‌خوانید؟

او یک بازیکن بیسبال است.

$x + ۱ = ۰$

$k - m = b$

متغیرها

به جملهٔ

او یک بازیکن بیسبال است،

نمی‌توان ارزش درست یا غلط داد زیرا، نمی‌دانیم که او کیست.

اگر کلمهٔ او با «رونالد ریگان» جایگزین شود، جملهٔ: **رونالد ریگان** یک بازیکن بیسبال است، را شکل دهد، جملهٔ فوق به یک گزارهٔ (غلط) تبدیل می‌شود. مشابهاً اگر 'x' در جملهٔ $x + ۱ = ۰$ با '۳' جایگزین شود و جملهٔ: $۳ + ۱ = ۰$ را شکل دهد، آنگاه جملهٔ فوق تبدیل به یک گزاره (غلط) می‌شود.

حرف $'x'$ در جملهٔ $x + ۱ = ۰$ یک **متغیر** است. حرف (یا علامت دیگری) که بتواند نشانگر عناصر مختلفی از مجموعهٔ مرجع باشد ، یک **متغیر** نامیده می‌شود.

پس او در جملهٔ:

او یک بازیکن بیسبال است،

یک متغیر است.

می‌توانیم یک جمله را با جایگزینی متغیر آن با اعداد یا با افزودن اصطلاحاتی مثل «برای هر» یا «وجود دارد» ، تبدیل به گزاره کنیم. برای مثال، $x < ۳$ یک گزاره نیست. اما هر یک از جملات زیر یک گزاره است:

$۱ < ۳$،

$۵ < ۳$،

برای هر عدد حقیقی x، داریم $x < ۳$،

xای وجود دارد به قسمی که $x < ۳$.

مجموعه‌های جواب

جانشینان متغیرهای یک جمله همواره از یک مجموعهٔ مرجع انتخاب می‌شوند.

مثال: متغیر جملهٔ: $x + ۱ < ۳$

را با هر یک از عناصر مجموعهٔ مرجع $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ جایگزین کنید و ارزش درستی هر جملهٔ حاصل را تعیین کنید.

(درست) $۰ + ۱ < ۳$

(درست) $۱ + ۱ < ۳$

(نادرست) $۲ + ۱ < ۳$

(نادرست) $۳ + ۱ < ۳$

هر جانشینی که جمله را یک جملهٔ درست می‌کند یک جواب نامیده می‌شود. مجموعهٔ تمام جوابها، مجموعه جواب آن جمله نامیده می‌شود. در مثال بالا مجموعه جواب برابر است با $\{۰, ۱\}$.

احتمالاً شما راه‌حلهای مستقیم دیگری جهت یافتن مجموعه جوابها ، با بکارگیری جبر، می‌شناسید.

از این به بعد، تنها جمله‌هایی را درنظر می‌گیریم که گزاره می‌باشند یا به شکل عباراتی هستند که زمانی که جایگذاری‌های با معنی در تمام متغیرهای آنها شکل می‌گیرد به گزاره تبدیل می‌شوند.

در زمان اثبات، ممکن است جمله‌ای به شکل:

اگر $x = ۱۱$، آنگاه $۳x = ۳۳$

را یک گزاره درنظر بگیریم، چرا که فرض کرده‌ایم که x بیانگر عضوی از یک مجموعهٔ مرجع است.

مجموعهٔ تمرینهای ۱.۳

جملات زیر را برای تمرینهای ۳ـ۱ درنظر بگیرید:

a) $x < ۲$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n = ۱$

c) $x + y = y + x$

d) عدد طبیعی مثل x وجود دارد که $x < ۲$

e) برای هر عدد حقیقی x و هر عدد حقیقی y داریم $x + y = y + x$

f) $۱ < ۲$

g) $۲ + ۳ = ۳ + ۲$

h) این جمله غلط است.

۱. کدام یک از جملات بالا یک گزاره است؟

۲. در هر جمله، متغیرها را تعیین کنید.

۳. کدامیک از جملات، وقتی متغیرها با اعداد جایگزین می‌شوند، تبدیل به گزاره می‌گ

مجموعه جواب هر یک از جملات را با مجموعه مرجع معرفی شده بیابید.

۴. $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ $\quad x - ۲ < ۳$

۵. $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ $\quad |x| + ۱ < ۳$

۶. $\{۵, ۶, ۷\}$ $\quad (x - ۱)(x + ۲) = ۰$

۷. $\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ $\quad (x - ۱)(x + ۲) = ۱$

۸. N $\quad x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$

۹. I $\quad x^{۲} + ۲x + ۱ = ۰$

۱۰. N $\quad ۲x^{۲} + ۳x + ۱ = ۰$

۱۱. $-N$ $\quad ۲x^{۲} + ۳x + ۱ = ۰$

۱۲. I $\quad ۲x^{۲} + ۳x + ۱ = ۰$

۱۳. Q $\quad ۲x^{۲} + ۳x + ۱ = ۰$

۱۴. R $\quad ۲x^{۲} + ۳x + ۱ = ۰$

۱۵. R $\quad x^{۲} + ۱ = ۰$

۱۶. R $\quad \dfrac{x^{۲} - ۴}{x + ۲} = x - ۲$

ارزش درستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا لازم است به یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنید. فرض کنید x بیانگر یک عدد حقیقی و f بیانگر یک تابع حقیقی است.

۱۷. برای هر عدد حقیقی x داریم $x^{۲} = ۰$.

۱۸. اگر $x = ۳$ آنگاه $x < ۲$

۱۹. اگر $f(x) = x^{۲}$ آنگاه $f'(x) = ۲x$

۲۰. اگر $x = ۰$ یا $x = ۱$ آنگاه $x^{۲} = x$

۲۱. برای هر عدد طبیعی x داریم $x^{۲} = x$.

۲۲. عدد طبیعی مثل x وجود دارد که $x^{۲} = x$.

۲۳. $\sqrt{x^{۲}} = |x|$

۲۴. اگر $|x| < ۳$ آنگاه $-۳ < x < ۳$

۲۵. هر عدد گویا را می‌توان به صورت نسبت میان دو عدد صحیح بیان کرد.

۲۶. اگر $f(x) = |x|$ باشد آنگاه f پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست.

۲۷. سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n n^{-۱}$ همگراست اما بصورت مطلق همگرا نیست.

۲۸. اگر یک سری مطلقاً همگرا باشد ، آنگاه همگراست.

۲۹. یک سری همگراست یا واگرا می‌باشد.

۳۰. اگر تابعی پیوسته باشد، آنگاه مشتق‌پذیر است.

۳۱. $\lim_{n\to\infty} n^{-۱} = ۱$

۳۲. برای هر عدد حقیقی x و هر عدد حقیقی y داریم $x + y = ۰$.

۳۳. اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه پیوسته است.

۳۴. عدد حقیقی مثل x وجود دارد که $x < ۲$.

۱.۴ رابطهای گزاره‌ای

ترکیب عطفی

اگر P و Q دو گزاره باشند آنگاه گزاره « P و Q»ترکیب عطفی P و Q نامیده می‌شود و به صورت $P \wedge Q$ نمایش داده می‌شود.

برای هرگزاره تنها دو ارزش درستی ممکن است ، درست (T) یا نادرست (F).

اگر P و Q هر دو درست باشند آنگاه $P \wedge Q$ درست است. اگر یکی از Q و P یا هر دوی آنها نادرست باشند آنگاه $P \wedge Q$ نادرست است. جدول درستی زیر ، ارزش درستی $P \wedge Q$ را برای ارزش درستی تمام ترکیبهای P و Q نشان می‌دهد.

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال. $۳ + ۲ = ۷ \quad \wedge \quad ۲ + ۲ = ۴$ (نادرست)

$\pi > ۰ \quad \wedge \quad \pi$ گنگ است (درست)

ترکیب فصلی

اگر P و Q دو گزاره باشند آنگاه گزارهٔ ' P یا Q' ترکیب فصلی P و Q نامیده می‌شود و به صورت $P \vee Q$ نمایش داده می‌شود. برخلاف ترکیب عطفی، در زبان فارسی «یا» دو کاربرد دارد.

یک کاربرد، انحصاری است یعنی «یکی یا دیگری ولی نه هر دو». برای مثال ، جملهٔ آیا شما بیدارید یا خواب هستید؟

نمی‌تواند با «آری» پاسخ داده شود، زیرا شما نمی‌توانید درعین حال هم خواب باشید و هم بیدار. کاربرد دیگر، فراگیر است یعنی «و/یا» . برای مثال، جملهٔ آیا شما یک پیراهن پوشیده‌اید یا یک پلوور؟

می‌تواند با آری پاسخ داده شود. یعنی ممکن است شخص پاسخگو یک پیراهن، یک پلوور یا هر دو را پوشیده باشد.

ریاضیدانان «یا» را به صورت فراگیر تعریف می‌کنند؛ یعنی $P \vee Q$ زمانی درست است که P درست باشد، Q درست باشد یا هر دو درست باشند. $P \vee Q$ تنها زمانی نادرست است که P و Q هر دو نادرست باشند. جدول درستی $P \vee Q$ به صورت زیر نشان داده می‌شود.

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثالها: "$۵ = ۲ + ۳ \vee ۴ = ۲ + ۲$" درست است، زیرا هر دو گزاره درست است. «π گنگ است $\pi \vee$ گویا است» درست است زیرا «π گنگ است» درست است.

نقیض

نقیض، یا تکذیب، یک گزاره به روشهای مختلفی شکل می‌گیرد. برای مثال، نقیض گزارهٔ " ۲ گویا است: P"،

توسط هر یک از جملات زیر بیان می‌شود:

$\sim P$،

چنین نیست که ۲ گویا است.

۲ گویا نیست،

۲ گنگ است.

جدول درستی نقیض در زیر آمده است.

P	$\sim P$
T	F
F	T

علاوه بر نماد $\sim$، نمادهای دیگری، برای نقیض وجود دارد. برای مثال،
$a \neq b$ یعنی $\sim (a = b)$
$a \geq b$ یعنی $\sim (a < b)$
$a \notin A$ یعنی $\sim (a \in A)$.

ترکیبهای شرطی

اگر P و Q دو گزاره باشند، گزاره
اگر P، آنگاه Q
به صورت $P \rightarrow Q$ نمایش داده می‌شود.

ریاضیدانان همانطور که برای $\sim$، ۸، ۷ جدولهای درستی تعریف می‌کنند، برای $P \rightarrow Q$ هم یک جدول درستی تعریف می‌کنند اما این تعریف ابداً واضح و مشخص نیست. قبل از ارائه تعریف با یک مثال به فهم این مطلب کمک می‌کنیم. گزاره:
اگر من در ریاضیات یک نمرهٔ A بگیریم آنگاه در دورهٔ بعدی ثبت‌نام خواهم کرد، را درنظر بگیرید. فرض کنید این جمله را یک دانشجو بگوید. چه زمانی او راست و کی دروغ می‌گوید؟ چهار حالت زیر را وقتی که:
P یعنی «من در ریاضیات یک نمرهٔ A بگیرم» و
Q یعنی «من در دورهٔ بعدی ثبت‌نام خواهم کرد»
آزمایش کنید.

۱. P (درست): او در ریاضیات یک نمرهٔ A می‌گیرد.

Q (درست): او در دورهٔ بعد ثبت‌نام می‌کند.

۲. P (درست): او در ریاضیات یک نمرهٔ A می‌گیرد.
Q (نادرست): او در دورهٔ بعدی ثبت‌نام نمی‌کند.

۳. P (نادرست): او نمرهٔ A را کسب نمی‌کند.
Q (درست): او در دورهٔ بعدی ثبت‌نام می‌کند.

۴. P (نادرست): او نمرهٔ A را کسب نمی‌کند.

Q (نادرست): او در دورهٔ بعدی ثبت‌نام نمی‌کند.

در (۱) منطقی است که قبول کنیم که دانشجوی فوق راست می‌گفته و ادعای او درست بوده است.

در (۲) به سادگی قبول می‌کنیم که او دروغ گفته و ادعایش نادرست بوده است.

در (۳) شما نمی‌توانید او را دروغگو بنامید چرا که او در دورهٔ بعدی شرکت می‌کند حتی در صورتی که نمرهٔ A را نگرفته باشد.

در (۴) باز هم نمی‌توانید او را دروغگو بنامید زیرا او نمرهٔ A را نگرفته است و در دورهٔ بعدی هم شرکت نکرده است.

تعریف جدول درستی برای $P \to Q$ ، از مثال قبل تبعیت می‌کند. شما باید قاعدتاً در مورد تعریف اشکال داشته باشید، راحت باشید زیرا ریاضیدانان در مورد آن مدت زمانی طولانی بحث کرده‌اند. هر بیان دیگری، مثالی شبیه بالا را تکرار خواهد کرد.

در ریاضیات ، اینجا جایی است که اگر به مشکل برخوردید، راحت‌ترین راه این است که تعریف را پذیرفته و ادامه دهید.

(شماره‌ها مربوط به مثال قبلی است)

	P	Q	$P \to Q$
۱)	T	T	T
۲)	T	F	F
۳)	F	T	T
۴)	F	F	T

گزارهٔ $P \to Q$ یک گزارهٔ **شرطی** نامیده می‌شود با

مقدم P و

تالی Q.

در مجموع ، یک گزارهٔ شرطی زمانی درست است که مقدم نادرست است یا تالی درسه شرطی تنها زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

در ریاضیات ، $P \to Q$ به اشکال مختلفی می‌آید. شما **باید** با تمام این اشکال آشنا با. زیر همه یک معنی دارند:

$P \to Q$،

اگر P آنگاه Q،

P ، Q را نتیجه می‌دهد،
Q اگر P، P فقط اگر Q،
Q به شرط P،
Q هرگاه P، Q وقتی که P،
P برای Q شرط کافیست،
Q برای P شرط لازم است.
(اینها را بخاطر بسپارید.)

یک معنای $P \rightarrow Q$ اینست که P شرط کافی برای Q می‌باشد.

این جمله می‌تواند با جدول درستی‌اش شرح داده شود. هرگاه P درست باشد و $P \rightarrow Q$ درست باشد Q باید درست باشد.

به عبارت دیگر ، هرگاه $P \rightarrow Q$ درست باشد، درستی P کافیست تا نتیجه بگیریم Q درست است.

معنی دیگر $P \rightarrow Q$

آنست که Q برای P شرط لازم است.

این مطلب نیز توسط جدول درستی $P \rightarrow Q$ شرح داده شده است. اگر $P \rightarrow Q$ درست باشد و Q نادرست باشد، P باید نادرست باشد؛ یعنی، اگر Q نادرست باشد، P نیز نادرست است. نادرستی Q، نادرستی P را ایجاب می‌کند.

مثالها: جملات زیر را به شکل $P \rightarrow Q$ تبدیل کنید:

a) یک چند ضلعی قطری ندارد، تنها اگر یک مثلث باشد.

با به کار بردن تبدیل زیر:

P : یک چند ضلعی، قطری ندارد.

Q : چند ضلعی فوق یک مثلث است.

جملهٔ فوق به جمله‌ای از نوع $P \rightarrow Q$ تبدیل می‌شود یا

اگر یک چند ضلعی قطری نداشته باشد، آنگاه آن چند ضلعی یک مثلث است.

b) تابع f پیوسته است هرگاه مشتق‌پذیر باشد.

با بکار بردن تبدیل زیر:

P : یک تابع مشتق‌پذیر است،

Q : یک تابع پیوسته است،

جملهٔ فوق به جمله‌ای از نوع $P \rightarrow Q$ تبدیل می‌شود یا اگر تابعی مشتقپذیر باشد، آنگاه پیوسته است.

تجربه در تشخیص جملات با ساختار «اگر، آنگاه» ، حتی اگر به این شکل بیان نشده است، به برهان و مطالعهٔ ریاضیات خواهد انجامید.

مجموعه تمرینهای ۱.۴

ارزش درستی را بیابید.

۱. e گویاست $\wedge$ $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۱$

۲. $۳ \neq ۴$ $\wedge$ برای هر x داریم $\sqrt{x^۲} = |x|$

۳. π حقیقی است $\vee$ π گویاست.

۴. π یک عدد طبیعی است $\vee$ π یک عدد صحیح است.

۵. $(J \cap Q = R) \vee (\int \sin x dx = \cos x + c)$

۶. $S = \sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ یک سری نامحدود است؛ S واگراست $\vee$ S همگراست.

برای هر گزاره چهار ارائه مختلف نقیض را بنویسید.

۷. $P : ۲ = ۳$

۸. $P :$ e گنگ است.

ارزش درستی هر گزاره را تعیین کنید.

۹. $۳ \neq ۲$

۱۰. $\sim$ (e گنگ است)

برای هر یک گزاره‌های زیر توضیحی ارائه دهید که شامل علامت نقیض نباشد.

۱۱. $\sim (x < y)$

۱۲. $\sim (x > y)$

۱۳. $\sim (۳ \leq y)$

۱۴. $\sim (z^{۲} \geq ۱ + x)$

ارزش درستی را بیابید.

۱۵. $۲ < ۱ \rightarrow ۲ < ۳$

۱۶. $۳ < ۴ \rightarrow ۶ < ۵$

۱۷. $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۱}$ همگراست $\rightarrow ۲ = \sqrt{۴}$

۱۸. $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-۲}$ همگراست $\rightarrow ۲ \geq ۰$

هر گزاره را به شکل «اگر p، آنگاه Q» و $P \rightarrow Q$ تبدیل کنید. مقدم و تالی را مشخص کنید.

۱۹. هرگاه n اول باشد n هیچ تجزیه‌ای ندارد.

۲۰. $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگراست تنها اگر $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = ۰$.

۲۱. $|r| < ۱$ ایجاب می‌کند که $\lim_{n\rightarrow\infty}(a + ar + \cdots + ar^n) = \frac{a}{۱ - r}$

۲۲. x یک عدد صحیح است اگر یک عدد طبیعی باشد. [نمادهای مجموعه‌ها را بکار برید. I، V

۲۳. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} |u_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ هم همگراست.

۲۴. همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} |u_n|$ برای همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$، کافیست.

۲۵. $a \in R$ شرط لازم برای $a \in Q$ است.

۲۶. یک عدد صحیح یک عدد گویا می‌باشد. راهنمایی: یک متغیر مثل x و علامات مجموعه‌ها را مثل I, Q بکار برید.

۲۷. اعداد صحیح ، اعدادی گویا می‌باشند.

۲۸. شرط لازم جهت موازی بودن دو خط $l_۱$ و $l_۲$ این است که $l_۱ \cap l_۲ = \phi$.

۲۹. یک مربع، یک مستطیل است.

۳۰. مثلثها، چندضلعی هستند.

۳۱. $3x = 3y$ هرگاه $x = y$.

۳۲. $f'(x) = 2x$ هرگاه $f(x) = x^2$.

۳۳. مربعها، مثلث نیستند.

ترکیبهای دو شرطی و ترکیب رابطهای گزاره‌ای

ترکیبهای دو شرطی:

جمله‌ای به شکل

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

یک ترکیب دو شرطی نامیده می‌شود و با نماد

$$P \leftrightarrow Q$$

نشان داده می‌شود.

وقتی P و Q دو گزاره باشند، جدول درستی $P \leftrightarrow Q$ به شکل

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

می‌باشد و به شکل زیر از جدولهای درستی $\to$ و $\wedge$ بدست آمده است.

ابتدا تمام ترکیبهای ارزشهای درستی P و Q را درنظر می‌گیریم. سپس آنها را جهت یافتن ارزش درستی $P \to Q$ و $Q \to P$ و نهایتاً $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ که برابر است با $P \leftrightarrow Q$ ، بکار می‌بریم.

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ یا $P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

پس، $P \leftrightarrow Q$ زمانی درست است که P و Q هر دو درست باشند یا هر دو نادرست باشند.

در ریاضیات، $P \leftrightarrow Q$ به اشکال مختلفی بیان می‌شود. جملات زیر ، همه یک معنی دارند:

$P \leftrightarrow Q$،

P با Q معادل است،

P شرط لازم و کافی برای Q است،

Q شرط لازم و کافی برای P است،

P اگر و فقط اگر Q،

Q اگر و فقط اگر P،

$PiffQ$ ("iff" علامت اختصاری «اگر و فقط اگر» است)،

اگر P آنگاه Q و بالعکس،

اگر Q آنگاه P و بالعکس.

[این عبارت را به خاطر بسپارید]

برای مثال، $x = ۳$ اگر و فقط اگر $۵x = ۱۵$

را می‌توان به وسیلهٔ

$$P : ۵x = ۱۵$$

$$Q : x = ۳$$

به $P \leftrightarrow Q$ تبدیل نمود.

یک معنی $P \leftrightarrow Q$ به صورت

«P شرط لازم و کافی برای Q است» می‌باشد.

این جمله با تعریف

$$P \leftrightarrow Q : (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

شرح داده می‌شود.

اگر P برای Q شرط لازم باشد داریم $Q \rightarrow P$. اگر P برای Q شرط کافی باشد داریم $P \rightarrow Q$.

ترکیب رابطهای گزاره‌ای

ترکیبهای مختلفی از $\sim$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$، $\wedge$ و $\vee$ معمولاً رخ می‌دهند. مهارت در تشخیص آنها برای مطالعه و برهان ریاضی ضروری است.

مثال. می‌توانیم گزارهٔ،

اگر P اول باشد آنگاه اگر P زوج باشد، P باید کوچکتر از ۷ باشد، را به شکل زیر تبدیل کنیم:

P : p اول است،

Q : p زوج است،

R : p باید کوچکتر از ۷ باشد.

گزاره حاصل به شکل

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

است؛ یعنی، P نتیجه می‌دهد که Q نتیجه می‌دهد R.

مثال. آنچه در زیر می‌آید را به صورت شرطی بنویسید

«اگر a بر b عمود باشد و b بر c عمود باشد ، آنگاه a با c موازی است.»

فرض کنید

P : a بر b عمود است،

Q : b بر c عمود است و

R : a با c موازی است.

بنابراین گزاره شرطی به صورت

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

می‌باشد.

مثال. آنچه در زیر می‌آید را به صورت شرطی بنویسید.

فرض کنید P : دو خط l و m موازی هستند

Q : l و m یکدیگر را قطع می‌کنند،

بنابراین گزاره شرطی به صورت

$$\sim P \rightarrow Q$$

یا نقیض P نتیجه می‌دهد Q، می‌باشد. می‌توانستید فرض کنید

R : دو خط l و m موازی نیستند،

بنابراین گزاره شرطی به صورت $R \rightarrow Q$ در می‌آید.

تغییر شکل نخست مطلوبتر است، زیرا ساختار منطقی بیشتری را نشان می‌دهد. زمانی که شما برهان را مطالعه می‌کنید، چنان ساختاری اهمیت پیدا می‌کند.

مجموعهٔ تمرینهای ۱.۵

ارزش درستی را بیابید.

۱. $۳ < ۲ \leftrightarrow ۱ < ۲$

۲. π گنگ است $\leftrightarrow$ π حقیقی است

۳. ۲ گنگ است $\leftrightarrow$ ۲ حقیقی است

۴. ۲ گویا است $\leftrightarrow$ ۲ حقیقی است

۵. e عدد صحیح است $\leftrightarrow$ e گویا است (نکته: $e = ۲{,}۷۱۸\ldots$؛ e یک **مقدار ثابت** است نه یک متغیر.)

به شکل گزاره دو شرطی $P \leftrightarrow Q$ تبدیل کنید.

۶. $x = ۵$ اگر و فقط اگر $۲x = ۱۰$.

۷. $x \in Q$ برای $x = \dfrac{p}{q}$ شرط لازم و کافیست هرگاه $q \neq ۰$، $p \in I, q \in I$.

۸. شرط لازم و کافی برای اینکه دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ حد داشته باشد این است که قدر مطلق $|x_n - x_m|$ زمانی که m و n به بی‌نهایت می‌روند به صفر میل کند.

۹. $ab = ۰$ اگر و فقط اگر $a = ۰$ یا $b = ۰$.

۱۰. اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد آنگاه باید دو ضلع مقابل برابر داشته باشد.

۱۱. $۲x - ۱ = ۰$ معادل است با اینکه $x = \dfrac{۱}{۲}$.

۱۲. f پیوسته است اگر و فقط اگر مشتق‌پذیر باشد.

گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\rightarrow$، $\leftrightarrow$، $\sim$، $\wedge$، $\vee$ بنویسید.

۱۳. اگر p و q دو عدد صحیح باشند و $q \neq ۰$ آنگاه $\dfrac{p}{q}$ عددی گویا است.

۱۴. اگر ABC یک مثلث باشد و ABC متساوی‌الساقین باشد، آنگاه ABC دو ضلع برابر دارد.

۱۵. اگر a و b، c و x اعداد حقیقی باشند و $a \neq ۰$، $ax^۲ + bx + c = ۰$ و $b^۲ - ۴ac = ۰$ باشد، آنگاه ریشه‌های $ax^۲ + bx + c = ۰$ حقیقی و برابر می‌باشند.

۱۶. اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \to \infty} u_n = ۰$

۱۷. اگر وقتی $n \to \infty$ ، u_n به صفر میل نکند، آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ نمی‌تواند همگرا باشد.

۱۸. اگر a عددی صحیح باشد، آنگاه a زوج یا فرد می‌باشد.

۱۹. f مشتق‌پذیر است و g نیز مشتق‌پذیر است اگر وفقط اگر gof مشتق‌پذیر باشد.

۲۰. اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، uv هم مشتق‌پذیر است و $\frac{d(uv)}{dx} = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dx}\right)$

۲۱. $x \in J$ یا $x \in Q$ شرط لازم و کافی است برای $x \in R$.

۲۲. $x \in -N$ یا $x \in N_۰$ با $x \in I$ معادل است.

۲۳. $x \in A \cap B \quad iff \quad (x \in A, x \in B)$

۲۴. $x \in A \cup B \quad iff \quad (x \in A$ یا $x \in B)$

۲۵. $x \in CA$ شرط لازم و کافی است برای $x \notin A$.

۱.۶ سورها

جملاتی که شامل عبارتهای «برای هر ... » و «وجود دارد ... » هستند هم نقش مهمی در ساختار گزاره‌های ریاضی بازی می‌کنند. برای مثال، گزاره‌های

برای هر x، $x + ۰ = x$ و xای وجود دارد که $x^۲ = ۲$

ویژگیهای بارزی از دستگاه اعداد حقیقی را بیان می‌کنند.

سور عمومی

نماد $\forall$ ، که سور عمومی نامیده می‌شود، عباراتی مثل «برای هر»، «برای همه» و «برای هر یک» را نشان می‌دهد. گزاره‌ای مثل

برای هر x، $P(x)$
به گزارهٔ $\forall x P(x)$ یا $\forall x, P(x)$ تبدیل می‌شود.

گزاره‌های زیر همه یک معنی دارند:

$\forall x$، عددی صحیح است $x \rightarrow x \in Q$،

برای هر x، اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه $x \in Q$،

برای همهٔ xها، اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه $x \in Q$،

برای هر یک از xها، اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه $x \in Q$،

هر عدد صحیح به Q تعلق دارد،

هر عدد صحیح یک عدد گویا است.

در بعضی کتب ریاضیات ، ازگزاره‌ای مثل اگر x عدد صحیح باشد، آنگاه $x \in Q$ مفهومی به صورت $\forall x$، عددی صحیح است $x \rightarrow x \in Q$ برداشت می‌شود. یعنی، سور عمومی فهمیده شده و نوشته نشده است. به این نکته اشاره شده تا شما را به تفسیر جملات قادر سازد، زیرا هر نویسنده‌ای در نوشتن، روش خاص خود را دارد.

به عنوان یک مثال دیگر، در مثلثات گزاره‌های

$\sin^2 u + \cos^2 u \equiv 1$

و $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$،

یعنی $\forall u, \sin^2 u + \cos^2 u = 1$ است که سور راجع به مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

سور وجودی

نماد $\exists$، که سور وجودی نامیده می‌شود، عباراتی مثل «وجود دارد» ، «حداقل یکی وجود دارد»، «برای حداقل یکی» و «بعضی» را نشان می‌دهد. گزاره‌ای مثل xای وجود دارد به طوری که $P(x)$ به $\exists x$ یا ، $\exists x p(x)$ تبدیل می‌شود.

گزاره‌های زیر یک معنی دارند:

$\exists x$ (x عددی طبیعی است)،

x ای وجود دارد که، x یک عدد طبیعی است،

بعضی اعداد طبیعی هستند،

حداقل یک عدد طبیعی وجود دارد.

تشخیص اینکه $\exists$ به معنی «حداقل یکی وجود دارد» است، مهم است؛ دلیلی وجود ندارد که بیش از یکی موجود باشد. برای مثال،گزاره‌های

$x = \circ$ ،$\exists x$ و $\sin x = ۱$ ، $\exists x$ را مقایسه کنید.

در $\exists x$ ، $x = \circ$

می‌دانیم که تنها یک x وجود دارد طوری که $x = \circ$ ، ولی در

$\exists x$ ، $\sin x = ۱$

می‌دانیم که حداقل یکی، در واقع تعداد زیادی x، وجود دارد به طوری که $\sin x = ۱$.

ترکیب سورها

سورها می‌توانند به همراه هم ظاهر شوند. مثالهای زیر را درنظر بگیرید.

گزارهٔ برای هر x و برای هر y، $x + y = \circ$

به $\forall x \forall y$ ، $x + y = \circ$ تبدیل می‌شود.

گزارهٔ برای هر x، y ای وجود دارد که $x + y = \circ$

به $\forall x \exists y$ ، $x + y = \circ$ تبدیل می‌شود.

گزارهٔ xای وجود دارد که برای هر y، $x + y = \circ$ به $\exists x \forall y$ ،$x + y = \circ$ تبدیل می‌شود.

گزارهٔ xای وجود دارد و yای وجود دارد که $x + y = \circ$ به $\exists x \exists y$ ، $x + y = \circ$ تبدیل می‌شود.

سورها ممکن است با هم ظاهر نشوند. برای مثال، گزارهٔ برای هر x، اگر x زوج باشد، آنگاه yای وجود دارد به قسمی که $x = ۲y$.

به $\forall x$ (زوج است $x \rightarrow \exists y, x = ۲y$) تبدیل می‌شود.

ارزش درستی گزاره‌های سوری

سورها به یک مجموعهٔ مرجع مربوط می‌شوند. گاهی اوقات، به مجموعهٔ مرجع اشاره می‌شود، اما گاهی باید از متن استنباط شود. برای مثال، گزارهٔ x یک چند ضلعی است $\rightarrow$ x یک مثلث است ، $\forall x$

را درنظر بگیرید. ممکن است مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اشکال در صفحه باشد، یا مجموعهٔ تمام نقاط صفحه باشد. در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، سورها معمولاً به مجموعه‌های مرجعی از قبیل مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت ، یا مجموعهٔ توابع حقیقی مربوط می‌شوند. از این به بعد، تنها مجموعه‌های مرجع ناتهی را درنظر می‌گیریم. [مجموعهٔ تهی برای مطالعه، چندان جذاب نیست.]

تعریف

a) گزارهٔ

$$\forall x p(x)$$

درست است اگر و فقط اگر مجموعه جواب $p(x)$ برابر مجموعهٔ مرجع باشد. (یا برای هر جایگزینی x با عضو u از مجموعهٔ مرجع ، $p(u)$ درست باشد).

(b) گزارهٔ

$$\forall x p(x)$$

نادرست است اگر و فقط اگر مجموعه جواب $p(x)$ برابر مجموعهٔ مرجع نباشد (یا یک جایگزین مثل u برای x در مجموعهٔ مرجع وجود داشته باشد که $p(u)$ نادرست باشد).

مثالها.

ارزش درستی	مجموعه جواب $p(x)$	مجموعهٔ مرجع	گزارهٔ $\forall x p(x)$
T	$\{۰\}$	$\{۰\}$	$\forall x, x = ۰$
F	$\{۰\}$	$\{۰, ۱\}$	$\forall x, x = ۰$
T	R	R	$\forall x, x < x + ۱$
F	ϕ	N	$\forall x, ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$
F	$\{-۱\}$	$-N$	$\forall x, ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

تعریف

a) گزارهٔ

$\exists x p(x)$

درست است اگر و فقط اگر مجموعه جواب $p(x)$ ناتهی باشد (یا، جانشینی مثل u برای x وجود دارد که $p(u)$ درست است).

b) گزارهٔ

$\exists x p(x)$

نادرست است اگر و فقط اگر مجموعه جواب $p(x)$ تهی باشد (یا، برای هر جایگزینی x با عضو u از مجموعهٔ مرجع، $p(u)$ نادرست است).

مثالها.

ارزش درستی	مجموعه جواب $p(x)$	مجموعهٔ مرجع	گزارهٔ $\exists x p(x)$
T	$\{۰\}$	$\{۰\}$	$\exists x, x = ۰$
T	$\{۰\}$	$\{۰, ۱\}$	$\exists x, x = ۰$
T	R	R	$\exists x, x < x + ۱$
F	ϕ	N	$\exists x, ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$
T	$\{-۱\}$	$-N$	$\exists x, ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

مجموعه تمرینهای ۱.۶

به شکل نمادی منطقی تبدیل کنید.

۱. هر مثلث، یک چند ضلعی است.

۲. برای هر x، اگر x عددی طبیعی باشد، آنگاه x عددی صحیح است.

۳. برای هر عدد طبیعی x، x زوج یا فرد است.

۴. xای وجود دارد که x اول است و x زوج می‌باشد.

۵. xای وجود دارد که $x = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}$

۶. Xای وجود دارد که $n \leq X \leq ۲$ و $\int_n^۲ f(x)dx = (۲ - n)f(X)$.

۷. pای وجود دارد و qای وجود دارد که $p.q = ۳۲$.

۸. برای هر x، yای وجود دارد که $x < y$.

۹. yای وجود دارد که برای هر x، $y = ۰ + x$.

۱۰. xای وجود دارد و yای وجود دارد که x^y گنگ می‌باشد.

۱۱. برای هر x و هر y، $x + y = y + x$.

۱۲. x و yای وجود دارند که $x^۲ = y$.

۱۳. برای هر x, y، $xy = yx$.

۱۴. xای وجود دارد که $۱ < ۲ \rightarrow x < ۲$

۱۵. برای هر x، $K = \sqrt{x}$ نتیجه می‌دهد که yای وجود دارد که $K = \sqrt{y}$.

شکل جملات را با استفاده از $\wedge$، $\vee$، $\sim$، $\rightarrow$، $\exists$ ، $\forall$ و نمادهای زیر برای جملات ، تغییر دهید.

x مثلثی متساوی‌الاضلاع است:	$E(x)$	f مشتق‌پذیر است:	$D(f)$
x مثلثی برابر زاویه است:	$A(x)$	f پیوسته است:	$C(f)$
x زوج است:	$V(x)$	x یک مربع است:	$S(X)$
x فرد است:	$O(x)$	x یک مستطیل است:	$R(x)$
		x متساوی‌الساقین: است	$L(x)$

۱۶. هر تابع مشتق‌پذیر ، پیوسته است.

۱۷. توابع پیوسته‌ای وجود دارند که مشتق‌پذیر نیستند.

۱۸. تمام مثلثهای متساوی‌الاضلاع، برابر زاویه هستند و بعضی مثلثهای برابر زاویه، متساوی‌الاضلاع هستند.

۱۹. اگر هر عدد که زوج است ، فرد نیست، آنگاه بعضی اعداد فرد نمی‌توانند زوج باشند.

۲۰. اگر تمام مثلثهای متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین باشند، آنگاه بعضی مثلثهای متساوی‌الساقین، متساوی‌الاضلاع نمی‌باشند.

۲۱. تمام مربعها، مستطیل هستند.

برای هر گزاره از نوع $\forall x p(x)$ و مجموعهٔ مرجع مشخص شده ، مجموعه جواب $p(x)$ و سپس ارزش درستی $\forall x p(x)$ را بیابید.

	گزارهٔ $\forall x p(x)$	مجموعه مرجع	مجموعه جواب $p(x)$	ارزش درستی
.۲۲	$\forall x, x < ۰$	N		
.۲۳	$\forall x, x < ۰$	I		
.۲۴	$\forall x, x < ۰$	^{-}N		
.۲۵	$\forall x, x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$	R		
.۲۶	$\forall x, x + ۰ = ۰ + x = x$	R		
.۲۷	$\forall x, x^۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱)$	R		

برای هر گزاره از نوع $\exists x p(x)$ و مجموعه مرجع مشخص شده ، مجموعه جواب $p(x)$ و سپس ارزش درستی $\exists x p(x)$ را بیابید.

	گزارهٔ $\exists x p(x)$	مجموعه مرجع	مجموعه جواب $p(x)$	ارزش درستی
.۲۸	$\exists x, x < ۰$	N		
.۲۹	$\exists x, x < ۰$	I		
.۳۰	$\exists x, x < ۰$	^{-}N		
.۳۱	$\exists x, x^۲ + ۲x + ۱ = ۰$	R		
.۳۲	$\exists x, x + ۰ = ۰ + x = x$	R		
.۳۳	$\exists x, x^۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱)$	R		

۳۴. ارزش درستی گزاره‌های $\forall x p(x)$ و $\exists x p(x)$ را در مثالها و تمرینهای قبل مقایسه کنید. در مورد ارزش درستی $\exists x p(x)$ زمانی که $\forall x p(x)$ درست است چه حدس می‌زنید؟

۱.۷ ارزش درستی گزاره‌های سوری پیچیده‌تر

گزارهٔ $\forall x \forall y p(x, y)$

فرض کنید $P(x, y)$ گزاره‌ای با دو متغیر x و y باشد. بنابراین گزارهٔ

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

درست است اگر و تنها اگر به ازای هر جایگزینی x و y با اعضای a و b از مجموعهٔ مرجع، $P(a, b)$ درست باشد.

مثال. گزارهٔ

$$\forall x \forall y, x + y = y + x$$

با مجموعهٔ مرجع $\{۲, ۱, ۰\}$ درست است. توجه کنید که هر یک از گزاره‌های زیر درست است:

$$۲ + ۲ = ۲ + ۲ \qquad ۱ + ۲ = ۲ + ۱ \qquad ۰ + ۱ = ۱ + ۰$$
$$۲ + ۰ = ۰ + ۲ \qquad ۲ + ۱ = ۱ + ۲ \qquad ۱ + ۰ = ۰ + ۱$$
$$۰ + ۰ = ۰ + ۰ \qquad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \qquad ۰ + ۲ = ۲ + ۰$$

مثال. گزارهٔ

$\forall x \forall y, y < x$

با مجموعهٔ مرجع $\{۲, ۱, ۰\}$ نادرست است. هرگاه y با ۲ و x با ۱ جایگزین شود گزارهٔ

$۱ > ۲$ نادرست است.

گزارهٔ $\exists x \exists y p(x, y)$

گزارهٔ

$\exists x \exists y P(x, y)$

درست است اگر و فقط اگر حداقل یک جایگزین مثل b برای x و یک جایگزین مثل c برای y وجود داشته باشد که $P(b, c)$ درست باشد.

مثال. گزارهٔ

$\exists x \exists y, x + ۳ = ۲y$

با مجموعهٔ مرجع I، درست است. هرگاه ۵ جایگزین x و ۴ جایگزین y شود گزارهٔ

$۵ + ۳ = ۲ \cdot ۴$ درست است.

مثال. گزارهٔ

$\exists x \exists y, \dfrac{x}{y} = \sqrt{۲}$

با مجموعهٔ مرجع I نادرست است. زیرا هیچ جایگزینی مثل اعداد صحیح b و c برای x و y وجود ندارد

که گزاره

$\dfrac{b}{c} = \sqrt{۲}$ را درست کند. این را بعداً ثابت می‌کنیم.

گزارهٔ $\forall x \exists y P(x, y)$

گزارهٔ

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

درست است اگر و فقط اگر برای هر جایگزینی x با عضوی از مجموعهٔ مرجع مثل b، $\exists y P(b, y)$ درست باشد.

مثال. گزارهٔ

$$\forall x \exists y, x + y = 0$$

با مجموعهٔ مرجع $\{1, 0, -1\}$ درست است. توجه کنید که:

$\exists y, 0 + y = 0$ ($y = 0$؛ درست)

$\exists y, 1 + y = 0$ ($y = -1$؛ درست)

$\exists y, -1 + y = 0$ ($y = 1$؛ درست)

مثال. گزارهٔ

$$\forall x \exists y, y < x$$

با مجموعهٔ مرجع $\{0, 1, 2\}$ نادرست است. توجه کنید که:

$\exists y, y < 0$ (مجموعه جواب $y < 0$، ϕ است؛ نادرست)

$\exists y, y < 1$ ($y = 0$؛ درست)

$\exists y, y < 2$ ($y = 0$ یا 1؛ درست)

گزارهٔ $\exists y \forall x P(x, y)$

گزارهٔ

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

درست است اگر و تنها اگر جایگزینی مثل c برای y وجود داشته باشد که

$$\forall x P(x, c)$$

درست باشد. پس عدد c گزارهٔ

$$P(b, c)$$

را برای هر b در مجموعهٔ مرجع درست می‌کند.

مثال. گزارهٔ

$$\exists y \forall x, x + y = x$$

با مجموعهٔ مرجع $\{۲, ۱, ۰\}$ درست است، زیرا گزارهٔ

$\forall x, x + ۰ = x$

درست است.

مثال. گزارهٔ

$\exists y \forall x, y > x$

با مجموعه مرجع $\{۲, ۱, ۰\}$ نادرست است، زیرا هر یک از گزاره‌های

$$\forall x, ۰ > x$$

$$\forall x, ۱ > x$$

$$\forall x, ۲ > x$$

نادرست است؛ یعنی جایگزینی مثل b برای y نیست که گزارهٔ

$\forall x, b > x$

را درست کند.

یک فرق مهم بین گزاره‌های $\forall x \exists y P(x, y)$ و $\exists y \forall y P(x, y)$ وجود دارد.

اگر گزارهٔ $\forall x \exists y p(x, y)$ درست باشد، نوعی وابستگی بین x و y وجود دارد.

یعنی y به x وابسته است. اگر گزارهٔ $\exists y \forall x P(x, y)$ درست باشد، y به x هیچ وابستگی ندارد. برای تمام xها، یک y یکسان و ثابت $P(x, y)$ را درست می‌کند.

بعداً ثابت خواهیم کرد که هر گزاره به شکل

$$\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$$

درست است.

مجموعه تمرینهای ۱.۷

ارزش درستی هر یک از گزاره‌ها را با مجموعهٔ مرجع مشخص شده ، تعیین کنید.

۱. مجموعهٔ مرجع $\{۲, ۱, ۰\}$ است.

$a)\ ۲ < ۱ \to \exists x, x < ۰$ $\qquad$ $b)\ \forall x \exists y, y < x$

$c)\ \exists y \forall x, y < x$ $\qquad$ $d)\ \exists y \forall x, y < x + ۱$

$e)\ \forall x \exists y, y \leq x$ $\qquad$ $f)\ \exists y \forall x, y \leq x$

$g)\ \forall x \exists y, x + y = ۰$ $\qquad$ $h)\ \forall x \forall y, x + y = y + x$

$i)\ \exists x \exists y, x + ۵ = ۲ + y$

۲. N مجموعهٔ مرجع است. به سؤالات (a) تا (i) بالا پاسخ دهید. پاسخ‌ها را با پاسخ‌های تمرین ۱ مقایسه کنید.

۳. I مجموعهٔ مرجع است. به سؤالات (a) تا (i) بالا پاسخ دهید. پاسخ‌ها را با پاسخ‌های تمرین ۱ و ۲ مقایسه کنید.

۴. مجموعهٔ تمام توابع حقیقی، مجموعهٔ مرجع است.

a) (f مشتق‌پذیر است) $\forall f$

b) (f پیوسته است $\to$ f مشتق‌پذیر است) $\forall f$

c) (f مشتق‌پذیر است $\wedge f$ پیوسته است) $\exists f$

d) (f مشتق‌پذیر نیست $\wedge f$ پیوسته است) $\exists f$

۵. مجموعهٔ تمام دنباله‌های نامتناهی $\{u_n\}$ از اعداد حقیقی، مجموعهٔ مرجع می‌باشد.

a) ($\sum u_n$ همگرا است $\to$ $\sum |u_n|$ همگراست)، $\forall \{u_n\}$

b) ($\{u_n\}$ واگراست $\vee \{u_n\}$ همگراست)، $\forall \{u_n\}$

c) ($\sum u_n$ همگرا نیست $\wedge$ $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = ۰$)، $\exists \{u_n\}$

شرح دهید.

۶. جمله $x < y$ را با مجموعه مرجع I درنظر بگیرید.

a) ارزش درستی گزارهٔ $\forall x \exists y, x < y$ را تعیین کنید.

b) ارزش درستی گزارهٔ $\exists y \forall x, x < y$ را تعیین کنید.

c) ارزش درستی گزارهٔ $\forall x \exists y$ ،$x < y \to \exists y \forall x$ ،$x < y$ را تعیین کنید.

d) آیا هر گزارهٔ به شکل $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$ درست است؟ چرا؟

e) ارزش درستی گزارهٔ $\exists y \forall x, x < y \to \forall x \exists y, x < y$ را تعیین کنید.

f) از ارزشهای درستی $\forall x \exists y P(x,y)$ و $\exists y \forall x P(x,y)$ با مجموعه‌های مرجعی که قبلاً درنظر گرفته شده است، برای محاسبه ارزش درستی $\exists y \forall x p(x,y) \to \forall x \exists y p(x,y)$ استفاده نمائید.

آیا بنظر می‌رسد که هرگزاره به شکل $\exists y \forall x P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y)$ درست است؟

۷. مقاله: «ارزش درستی $\{\forall \text{، } \exists \text{، } P(x,y)\}$: تقریب گرافیکی» را از «مجلهٔ ریاضیات» ، شمارهٔ ۴۳ ، نوامبر ۱۹۷۰ ، صفحهٔ ۲۶۰ اثر ای. آ. کولس بخوانید.

۸. فرض کنید $p(x)$: x گنگ است.

$Q(x)$: x گویا است.

ارزش درستی هر یک ازگزاره‌های زیر را با مجموعهٔ مرجع R تعیین کنید.

a) $\forall x[p(x) \vee Q(x)]$

b) $\forall x P(x)$

c) $\forall x Q(x)$

d) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

e) $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \to [\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

f) آیا هرگزاره به شکل $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \to [\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)]$ درست است؟

۹. با روشی مشابه تمرین ۸ ، تعیین کنید آیا هرگزاره به شکل $[\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] \to \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ درست است.

۱.۸ گزاره‌های استدلال

ریاضیدانان دستهٔ مشخصی ازگزاره‌ها را قبل از اثبات هرگونه قضیه در یک سیستم ریاضی درست فرض می‌کنند، ما آنها را **گزاره‌های استدلال** یا **قواعد استدلال** می‌نامیم. این اصول توسط ریاضیدان فرض می‌شوند و می‌توانند اصل موضوع استدلال نامیده شوند.

گزاره‌های همیشه درست

دستهٔ مهمی ازگزاره‌های استدلال به عنوان گزاره‌های همیشه درست شناخته می‌شوند. گزارهٔ همیشه درست، گزاره‌ایست که بدون توجه به ارزش درستی اجزای سازنده‌اش درست است. [در اینجا مرور جداول درستی ۸، ∨ ، ∼، → ، ↔ مفید است.]

مثال. گزارهٔ $P \to (P \vee Q)$ یک گزاره همیشه درست است هرگاه P و Q نمایانگر دو گزارهٔ ریاضی دلخواه باشند. این را با یک جدول درستی نشان می‌دهیم. ارزشهای درستی، با تجزیهٔ متوالی گزاره به اجزای سازندهٔ آن و محاسبهٔ ارزش درستی آنها ، بدست می‌آیند. بنابراین

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

توجه داشته باشید که ابتدا ارزش‌های درستی $P \vee Q$ تعیین شدند و در ستون سوم آمدند. سپس از ستونهای اول و سوم جهت تعیین ستون چهارم استفاده شد.

مثال. نشان دهید که $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$ یک گزاره همیشه درست است.

p	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$\sim Q \to \sim P$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

بنابراین وابسته به هر گزارهٔ شرطی مثل $P \to Q$ گزارهٔ شرطی دیگری به صورت $\sim Q \to \sim P$ وجود دارد که عکس نقیض آن نامیده می‌شود.

ما تنها نشان دادیم که هر دو آنها معادلند؛ یعنی، $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$.

مجموعه تمرینهای ۱.۸

با استفاده از جداول درستی تعیین کنید کدامیک از گزاره‌های زیر گزاره‌های همیشه درست هستند.

۱. $[P \wedge (P \to Q)] \to Q$ (قیاس استثنایی $ModusPonens$)

۲. $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$ ، قانون قیاس

این جدول درستی در مجموع به هشت ترکیب مختلف ارزشهای درستی نیاز دارد.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{۳.} & \sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q) \\ \text{۴.} & \sim (P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q) \end{array}\right\} \text{قاعده دمورگان}$$

۵. $\sim (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$

۶. $P \rightarrow Q \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$

۷. $(P \wedge Q) \leftrightarrow P$

۸. $\sim\sim P \leftrightarrow P$

۹. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

۱۰. $(P \rightarrow \sim Q) \rightarrow (Q \rightarrow \sim P)$

۱۱. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

۱۲. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

۱۳. $\sim P \rightarrow P$

۱۴. $[(P \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q)] \rightarrow (R \leftrightarrow Q)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{۱۵.} & [\sim P \rightarrow (R \wedge \sim R)] \rightarrow P \\ \text{۱۶.} & [(P \wedge \sim Q) \wedge (R \wedge \sim R)] \rightarrow (P \rightarrow Q) \end{array}\right\} \text{اثبات با برهان خلف}$$

۱۷. $P \vee \sim P$

۱.۹ استدلالهای معتبر

چند گزاره همیشه درست دیگر

گزاره‌های همیشه درست مجموعه تمرینهای قبلی کاملاً مفیدند. در زیر گزاره‌های همیشه درست مفید دیگری آمده است.

$P \leftrightarrow P$

$P \rightarrow P$

$[P \rightarrow (Q \vee R)] \rightarrow [(P \wedge \sim Q) \rightarrow R]$

قانون قیاس

$[(P \rightarrow S_1) \wedge (S_1 \rightarrow S_2) \wedge \ldots \wedge (S_{n-1} \rightarrow S_n) \wedge (S_n \rightarrow R)] \rightarrow [P \rightarrow R]$

$[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R]$ برهان به روش حالتها

قوانین تعویض‌پذیری
$$\begin{cases}(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)\\ (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)\end{cases}$$

$[P \rightarrow (R \rightarrow Q)] \leftrightarrow [(P \wedge R) \rightarrow Q]$

قوانین شرکت‌پذیری
$$\begin{cases}[P \wedge (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R]\\ [P \vee (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]\end{cases}$$

قوانین پخشی
$$\begin{cases}[P \wedge (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]\\ [P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]\end{cases}$$

$[(P \leftrightarrow Q_1) \wedge \ldots \wedge (Q_n \leftrightarrow Q)] \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

اصل موضوع منطقی۱. هر گزارهٔ همیشه درست یک قاعدهٔ استدلالی است. گزاره‌های همیشه درست قبلی، تمام گزاره‌های همیشه درست موجود نیستند. اگر می‌خواهید براساس یک گزاره استنتاج کنید، جدول درستی آن را چک کنید. اگر یک گزاره، گزارهٔ همیشه درست بود، از آن استفاده کنید. گزاره‌های همیشه درست قضایای استدلالی زیادی را حتی قبل از شروع استنتاج در یک سیستم ریاضی ، فراهم می‌کنند.

منطق صوری دقیقاً دو شاخه دارد: حساب گزاره‌ها، شامل گزاره‌ها و استدلال توسط گزاره‌های همیشه درست؛ و حساب محمولات ، شامل گزاره‌های سوری.

در این متن، منطق را با هدف دادن دانش کاربردی به شما، به صورت غیرصوری مطالعه می‌کنیم. بنابراین به صورت خیلی جزئی وارد این دو شاخه نمی‌شویم. با استفاده از حساب محمولات ، مجموعهٔ

دیگری از گزاره‌های استدلالی را، که بعضی از آنها در اصل موضوع منطقی ۲ فهرست شده‌اند، بدست می‌آوریم. آنها نمی‌توانند به وسیله گزاره‌های همیشه درست اثبات شوند.

اصل موضوع منطقی ۲. فرض کنید U یک مجموعهٔ مرجع است. هر یک از گزاره‌های زیر یک قاعدهٔ استدلال است:

(۱) $[\forall x, P(x) \to Q(x)] \to [\forall x P(x) \to \forall x Q(x)]$

(۲) $\forall x P(x) \leftrightarrow$ برای هر $u \in U$ ، $P(u)$

(۳) $\exists x P(x) \leftrightarrow$ برای بعضی $u \in U$ ، $P(u)$

یک استدلال، یک اثبات است به صورتی که با یک مجموعهٔ خاص از گزاره‌ها مثل $S_1, \ldots, S_n$ (که فرض یا مقدمه نامیده می‌شوند) می‌توان گزاره‌های دیگر مثل Q (که نتیجه یا حکم نامیده می‌شود) را استنتاج کرد.

چنین استدلالی به صورت $S_1, \ldots, S_n \vdash Q$ نمایش داده می‌شود.

استدلالها یا معتبر (درست) یا نامعتبر (نادرست) هستند.

تعریف. S_1، ...، $S_n \vdash Q$ یک استدلال معتبر است اگر و فقط اگر $(S_1 \wedge \ldots \wedge S_n) \to Q$ یک قاعدهٔ استدلال باشد.

قاعدهٔ جانشینی

فرض کنید $P \leftrightarrow Q$. آنگاه P و Q در هر گزاره می‌توانند هر یک جانشین دیگری شوند.

مثال.

$$\begin{array}{l} P \leftrightarrow Q \\ R \to (S \wedge Q) \\ \hline \therefore R \to (S \wedge P) \end{array}$$

می‌توانید یک گزارهٔ همیشه درست را داخل هر مجموعه‌ای از فرضها، جای دهید.

مثال. فرض $P \to Q$

گزاره همیشه درست $(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$

$\therefore \sim Q \to \sim P$

مثال. P ،$P \to Q \vdash Q$ معتبر است زیرا $[P \wedge (P \to Q)] \to Q$ یک گزارهٔ همیشه درست است.

مثال. $P \to Q \vdash P$ ، Q معتبر نیست زیرا $[Q \wedge (P \to Q)] \to P$ یک گزارهٔ همشیه درست نیست.
[چنین حدسی می‌تواند به صورت روش مسخره تعبیر شود.]

مثال. $\forall x P(x) \vdash P(u)$ برای هر $u \in U$ ، که U مجموعهٔ مرجع است، با توجه به بخش دوم اصل موضوع منطقی ۲ یک استدلال معتبر است. بعضی از انواع استدلالهای معتبر آن قدر زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند که به آنها اسامی خاصی می‌دهیم.

قانون قیاس استثنائی

از هر گزارهٔ شرطی $P \to Q$ به همراه P می‌توان Q را نتیجه گرفت؛ یعنی $P \to Q$، P پس Q. این یک استدلال معتبر است و می‌تواند به دو شکل بیان شود.

a) $P \to Q ، P \vdash Q$

b)

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \underline{P \qquad\quad} \\ \therefore Q \end{array}$$

این قاعده بر پایهٔ گزاره همیشه درست $[P \wedge (P \to Q)] \to Q$ استوار است.

زمانی که از قانون قیاس استثنایی استفاده می‌کنید. شکل گزاره مهم است.

$$\begin{array}{l} ۱.(\quad) \to [\quad] \\ \underline{۲.(\quad) \qquad\qquad} \\ ۳. \therefore [\quad] \end{array}$$

با قرار دادن گزاره‌ها در پرانتزها (گزارهٔ یکسانی باید در هر دو جفت پرانتز قرار گیرد) و براکتها، با فرض اینکه گزاره‌های ۱ و ۲ درست است، گزارهٔ ۳ را نتیجه می‌گیریم.

مثال. اگر $f(x) = \sin x$ ، آنگاه $f'(x) = \cos x$

$$\begin{array}{c} \underline{f(x) = \sin x} \\ \therefore f'(x) = \cos x \end{array}$$

مثال. اگر $x = ۵$ آنگاه $۲x = ۱۰$

$$\begin{array}{l} x = ۵ \\ \hline \therefore\ ۲x = ۱۰ \end{array}$$

مثال. از فرضهای $\sim Q$ و $P \to Q$ گزارهٔ $\sim P$ را نتیجه‌گیری کنید.

۱. $\sim Q$ ⎫ فرضها
۲. $P \to Q$ ⎭

۳. $(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$ گزاره همیشه درست

---

۴. $\therefore \sim Q \to \sim P$ بوسیله قیاس استثنایی روی ۲ و ۳

۱. $\sim Q$

۴. $\sim Q \to \sim P$

---

۵. بنابه قیاس استثنایی $\therefore \sim P$

مثال. از فرضهای $\sim S \to H$، $H \to \sim I$ و I، S را نتیجه بگیرید.

۱. $\sim S \to H$ ⎫
۲. $H \to \sim I$ ⎬ فرضها
۳. I ⎭

۴. $(H \to \sim I) \to (I \to \sim H)$ گزاره همیشه درست

---

۵. $\therefore I \to \sim H$ با استفاده از قانون قیاس استثنایی روی ۲ و ۴

۵. $I \to \sim H$

۳. I

---

۶. با استفاده از قانون قیاس استثنایی $\therefore \sim H$

۱. $\sim S \to H$

۷. $(\sim S \to H) \to (\sim H \to S)$ گزاره همیشه درست

---

۸. بنابه قیاس استثنایی $\therefore \sim H \to S$

۸. $\sim H \to S$

۶. $\sim H$

با استفاده از قیاس استثنایی $\therefore S$

مجموعه تمرینهای ۱.۹

کامل کنید.

۱. $۳x = ۱۵$ اگر $x = ۵$

$x = ۵$

$\therefore$ ----------------------

۲. $P \text{،} P \leftrightarrow Q \vdash - - - - - - - -$

۳. P فرض

$P \to (- - - - - - - - - -)$ گزاره همیشه درست

$\therefore \quad P \vee Q$

اعتبار هر یک را تعیین کنید.

۴. $\sim (P \to Q) \vdash P$

۵. $\sim P \wedge \sim Q \vdash \sim P$

۶. $P \to (Q \vee R) \text{،} P \wedge \sim Q \vdash R$

۷. $(P \wedge R) \to Q \text{،} P \wedge R \vdash Q$

۸. $\sim P \text{،} P \vee Q \vdash Q$

۹. $P \to R \text{،} Q \to P \text{،} \sim R \vdash \sim Q$

۱۰. $P \to Q \text{،} R \to \sim Q \vdash R \to \sim P$

۱۱. $P \vee Q \vdash Q$

۱۲. $P \to Q \vdash Q \to P$ ($Q \to P$ **عکس** $P \to Q$ است)

۱۳. $P \wedge Q \vdash P \vee Q$

۱۴. $P \vee Q \vdash P \wedge Q$

۱۵. $P(u)$ برای بعضی از $u \in U$ که U یک مجموعه مرجع است $\vdash \exists x P(x)$

.۱۶ $[\forall x P(x) \to Q(x)] \vdash \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

۱.۱۰ عکس نقیض

بیاد آورید که $P \sim\to Q \sim$ عکس نقیض $P \to Q$ می‌باشد. دو گزارهٔ فوق معادلند. عکس نقیض دیدگاه دیگری را آشکار می‌کند.

مثال. در حساب دیفرانسیل و انتگرال گزارهٔ

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

درست است. اگر گزارهٔ فوق را به

P: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست

Q: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

تبدیل کنیم، $P \to Q$ درست است. عکس نقیض آن هم درست است، زیرا

$(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$ یک گزارهٔ همیشه درست است و توسط قاعدهٔ جانشینی ، $\sim Q \to \sim P$ درست است.

یعنی،

اگر $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ واگراست

درست است.

بیاد بیاورید که برای تعیین همگرایی یک سری تعیین می‌کنید که آیا جملهٔ nام به ۰ همگراست یا نه. اگر نباشد تشخیص می‌دهید که سری نمی‌تواند همگرا شود. عکس نقیض، این را توجیه می‌کند.

مثال. در دستگاه اعداد صحیح، گزارهٔ

x^2 فرد است $\to$ x فرد است

درست است (برای هر x داده شده). بنابراین عکس نقیض آن، x زوج است (نه فرد) $\to$ x^2 زوج است (نه فرد)

درست می‌باشد.

مجموعهٔ تمرینهای ۱.۱۰

۱. عکس نقیض گزارهٔ «اگر $f(x) = \sin x$ ، آنگاه $f'(x) = \cos x$» . را تشکیل دهید. آیا این گزاره درست است؟ چرا؟

عکس نقیض گزاره‌های زیر را تشکیل دهید. از $\rightarrow$ استفاده کنید.

۲. شرط لازم برای اینکه x زوج نباشد این است که x فرد باشد.

۳. شرط کافی برای اینکه x حقیقی باشد این است که x گویا باشد.

۴. اگر f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f پیوسته است.

۵. $x \in A \rightarrow x \in B$

۶. x فرد است $\rightarrow$ $x^{۲}$ فرد است

۷. x زوج است $\rightarrow$ $x^{۲}$ زوج است

۸. اگر x زوج باشد، $x^{۲}$ زوج است.

۹. $A \cap B \neq \phi \rightarrow A \neq \phi$

۱۰. $[\forall e(|x| < e)] \rightarrow x = ۰$

۱۱. $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

۱۲. $x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$

۱۳. $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$

۱۴. $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگراست. $\rightarrow$ $\sum_{n=۱}^{\infty} |u_n|$ همگراست

۱.۱۱ نقیض‌ها

نقیض $\forall x P(x)$ و $\exists x P(x)$.

معمولاً بیان نقیض گزاره‌های $\forall x P(x)$ و $\exists x P(x)$ به اشکال دیگر، مفید است.

قضیهٔ ۱. هر گزاره از نوع

$$\sim \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$$

درست است .

برهان. با نشان دادن یکسانی جدول درستی دو گزارهٔ $\sim \forall x P(x)$ و $\exists x \sim P(x)$ ، ثابت می‌کنیم این دو معادلند.

فرض کنید $\sim \forall x P(x)$ درست است. پس $\forall x P(x)$ نادرست است. بنابراین جانشینی مثل u در مجموعهٔ مرجع برای x وجود دارد که $P(u)$ نادرست است.

پس $\sim P(u)$ بازای این x، درست است. پس $\exists x \sim P(x)$ درست است.

فرض کنید $\sim \forall x P(x)$ نادرست باشد. پس $\forall x P(x)$ درست است، بنابراین بازای هر جانشینی u به جای x، $P(u)$ درست است.

بنابراین بازای هر جانشین مثل u برای x، $\sim P(u)$ نادرست است.

بنابراین $\exists x \sim P(u)$ نادرست است.

بنابراین $\sim \forall x P(x)$ و $\exists x \sim P(x)$ معادلند. ■

(منبعد، ■ پایان برهان را نشان می‌دهد.)

با بکارگیری گزارهٔ همیشه درست $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \leftrightarrow \sim Q)$ برای قضیهٔ قبلی نتیجه می‌گیریم که $\forall x P(x) \leftrightarrow \sim \exists x \sim P(x)$.

به این ترتیب قضیهٔ زیر را اثبات کرده‌ایم.

قضیهٔ ۲. هر گزاره به شکل

$$\forall x P(x) \leftrightarrow \sim \exists x \sim P(x)$$

درست است.

با بکارگیری قضایای ۱ و ۲ می‌توانیم قضایای زیر را اثبات کنیم.

قضیهٔ ۳. هر گزاره به شکل

$$\sim \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$$

درست است.

برهان. از قضیهٔ ۲ داریم، $\sim \exists x \sim\sim P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$ ، که در اینجا $\sim P(x)$ را جایگزین $P(x)$ کرده‌ایم. از یک گزارهٔ همیشه درست بیاد داریم که $\sim\sim P(x) \leftrightarrow P(x)$. بنابراین $\sim \exists x \sim\sim P(x) \leftrightarrow \sim \exists x P(x)$.

پس توسط قاعدهٔ جانشینی داریم $\sim \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$. ■

قضیهٔ ۴. هر گزاره به شکل

$$\exists x P(x) \leftrightarrow \sim \forall x \sim P(x)$$

درست است.

برهان. به عنوان تمرین باقی می‌ماند.

قوانین

۱) $\sim \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$

۲) $\forall x P(x) \leftrightarrow \sim \exists x \sim P(x)$

۳) $\sim \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$

۴) $\exists x P(x) \leftrightarrow \sim \forall x \sim P(x)$

را نشان داده‌ایم. فایدهٔ این قاعده‌ها، زمانی مشخص می‌شود که برهان توسط عکس نقیض و برهان خلف انجام پذیرد.

نقیض‌های ساده شده

جابجایی نماد نقیض در طول سورهای یک گزاره، تعبیر پرمعنی‌تر و ساده‌تری را از نقیض فراهم می‌کند.

مثال. نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ

$$\exists y \forall x, xy \leq ۲$$

گزارهٔ $\forall y \exists x$ ، $xy > ۲$ می‌باشد.

برای نشان دادن این مطلب، توجه کنید که

بنا به (۳)، $\sim (\exists y \forall x, xy \leq ۲) \leftrightarrow \forall y \sim \forall x$ ، $xy \leq ۲$

بنا به (۱)، $\leftrightarrow \forall y \exists x$ ، $\sim (xy \leq ۲)$

با جانشین کردن $\sim (xy \leq ۲)$ ، $\leftrightarrow \forall y \exists x$ ، $xy > ۲$

با $xy > ۲$

شاید فهمیده باشید که تشکیل یک نقیض ساده شده که با یک سری سور شروع می‌شود، با تبدیل هر سور وجودی به سور عمومی و بالعکس و انتقال نماد نقیض به سمت راست آن سور، انجام می‌شود.

مثال. نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ

$$\forall x \exists y \forall z, xy = z$$

گزارهٔ $\exists x \forall y \exists z$ ، $xy \neq z$ است.

می‌توان با استفاده از گزاره‌های همیشه درست نقیض‌ها را بیش از این ساده کرد.

مثال. نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ

$$\exists x[P(x) \to Q(x)]$$

گزارهٔ $\forall x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ است. این مسئله به شکل زیر نشان داده می‌شود:

بنابه (۳) $\sim (\exists x[P(x) \to Q(x)]) \leftrightarrow \forall x \sim [P(x) \to Q(x)]$

بنابه گزارهٔ همیشه درست $\sim (P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$ $\quad \leftrightarrow \forall x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

مثال. نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ

$$\forall x \exists y[P(x) \wedge y \leq x]$$

گزارهٔ $\exists x \forall y[\sim P(x) \vee y > x]$ است. این مسئله به صورت زیر نشان داده شده است.

$$\sim (\forall x \exists y[P(x) \wedge y \leq x]) \leftrightarrow \exists x \forall y \sim [P(x) \wedge y \leq x]$$

بنابه گزارش همیشه درست $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ $\quad \leftrightarrow \exists x \forall y[\sim P(x) \vee y > x]$

نکات بیشتری در مورد فایدهٔ نقیض‌ها

سورها در داخل یک گزاره، می‌توانند به مجموعه‌های مرجع متفاوتی مربوط شوند. مجموعه‌های مرجع می‌توانند در داخل خود گزاره مشخص شوند؛ برای مثال،

$$\forall n \in N \qquad \exists x > ۰, n^۲ > x$$

مربوط به N مربوط به اعداد حقیقی مثبت

با این حال قواعد نقیض همچنان برقرار است؛ یعنی

$$\sim (\forall n \in N \exists x > ۰, n^۲ > x) \leftrightarrow \exists n \in N \forall x > ۰, n^۲ \leq x$$

فرض کنید یک گزارهٔ پیچیده مثل گزارهٔ تعریف زیر داشته باشیم.

تعریف

A **حد دنبالهٔ** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی مثل m وجود داشته باشد که برای هر $n > m$، داشته باشیم $|a_n - A| < \epsilon$.

مثال.

a) تعریف قبلی را به شکل نمادین منطقی تبدیل کنید.

A **حد دنبالهٔ** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است $\leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists m \in N \forall n > m, |a_n - A| < \epsilon$

b) نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ فوق را تشکیل دهید.

A **حد دنبالهٔ** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **نیست.** $\leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \forall m \in N \exists n > m, |a_n - A| \geq \epsilon$

حال اگر بخواهیم ثابت کنیم که A حد دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ نیست، می‌دانیم که باید چه چیزی را نشان دهیم.

در اینجا دانستن منطق به سه راه کمک می‌کند:

۱) کمک می‌کند تا یک گزارهٔ پیچیده را به حالت نمادین با معنی‌تری تبدیل کنیم.

۲) ما را قادر می‌سازد تا نقیض گزارهٔ فوق را پیدا کنیم.

۳) با این نقیض ، می‌دانیم که برای اثبات نادرستی گزارهٔ اول، چه چیزی باید نشان داده شود.

به عنوان مثالی دیگر، تعریف یک تابع صعودی را درنظر بگیرید.

تعریف

تابعی مثل f **صعودی** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر y؛ اگر $x \leq y$ ، آنگاه $f(x) \leq f(y)$.

مثال.

a) تعریف قبلی را به حالت نمادین منطقی تبدیل کنید.

تابع f **صعودی** است. $\leftrightarrow \forall x \forall y [x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)]$

b) نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ فوق را تشکیل دهید. تابع f **صعودی نیست** $\leftrightarrow \exists x \exists y [x \leq y \wedge f(x) > f(y)]$

مثال. تابع $f(x) = x^2$ صعودی نیست. هرگاه $x = -2$ و $y = 1$، $x \leq y$، $f(x) = 4$، $f(y) = 1$ و $f(x) > f(y)$

مثال نقض. برای اثبات نادرستی گزاره‌ای از نوع

$$\forall x P(x)$$

می‌توان برای اثبات درستی $\exists x \sim P(x)$ تلاش کرد. این به «آوردن یک مثال نقض» مربوط است. بنابراین تابع $f(x) = x^۲$ در مثال قبل، مثال نقض برای گزارهٔ هر تابعی ، صعودی است می‌باشد.

مجموعه تمرینهای ۱.۱۱

نقیض ساده شده، تشکیل دهید.

۱. $\exists x \text{ ،} x < ۰ \wedge Q(x)$

۲. $\forall x \exists y \forall z \forall q \exists j, x + y + z + q + j = ۰$

۳. $(P \wedge \sim Q) \rightarrow \sim R$

۴. $\sim \forall x \forall y \exists z \text{ ،} xz = y$

۵. $\forall e \exists d \forall x [|x - c| < d \rightarrow |f(x) - f(c)| < e]$

۶. $\forall e \exists n \forall_m [m > n \rightarrow |a_m - a| < e]$

۷. $(x \in Q \wedge y \in J) \rightarrow (x + y) \in J$

۸. $(P \wedge Q) \rightarrow R$

۹. $x \in A \wedge x \in B$

۱۰. $x \in A \vee x \in B$

۱۱. $(P_۱ \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$

۱۲. $P \leftrightarrow Q$

۱۳. **خاصیت ارشمیدسی.** برای هر دو عدد مثبت حقیقی a و b ، $n \in N$ وجود دارد که $na > b$.

برای هر تعریف در تمرینهای ۲۸ـ۱۴

a) گزارهٔ تعریف را به صورت منظم به حالت نمادی منطقی درآورید،

b) نقیض ساده شدهٔ گزارهٔ تعریف را به صورت نمادی منطقی تعیین کنید.

۱۴. تابع f **زوج** است اگر و تنها اگر برای هر x، داشته باشیم $f(-x)=f(x)$.

۱۵. تابع f **فرد** است اگر و تنها اگر برای هر x، داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$.

۱۶. تابع f **ثابت** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر y داشته باشیم $f(x)=f(y)$.

۱۷. تابع f **متناوب** است اگر و تنها اگر $p>0$ وجود داشته باشد که برای هر x، $f(x+p)=f(x)$.

۱۸. تابع f **نزولی** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر y اگر $x\leq y$، آنگاه $f(x)\geq f(y)$.

۱۹. تابع f **اکیداً صعودی** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر y؛ اگر $x<y$ آنگاه $f(x)<f(y)$.

۲۰. تابع f **اکیداً نزولی** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر y، اگر $x<y$، آنگاه $f(x)>f(y)$.

۲۱. تابع f **یک به یک** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر y؛ اگر $f(x)=f(y)$، آنگاه $x=y$.

۲۲. تابع f از A به B **پوشا**ست اگر و تنها اگر برای هر $y\in B$، $x\in A$ وجود داشته باشد که $f(x)=y$.

۲۳. تابع f در x_0 دارای **حد** L است اگر و تنها اگر برای هر x و هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ وجود دارد که $|f(x)-L|<\epsilon$ هرگاه $0<|x-x_0|<\delta$.

۲۴. تابع f **کراندار** است اگر و تنها اگر M ای وجود داشته باشد که برای هر x، داشته باشیم $|f(x)|<M$.

۲۵. تابع f در نقطهٔ x_0 **پیوسته** است اگر و تنها اگر برای هر x و هر $\epsilon>0$ $\delta>0$ وجود دارد که اگر $|x-x_0|<\delta$ آنگاه $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

۲۶. تابع f روی **مجموعه** E **پیوسته** است اگر تنها اگر برای هر x در E و $\epsilon>0$، $\delta>0$ وجود داشته باشد که $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ هرگاه y در E باشد و $|x-y|<\delta$.

۲۷. تابع f **به صورت یکنوا بر مجموعهٔ** E **پیوسته** است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ وجود دارد که $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ هرگاه x و y در E باشند و $|x-y|<\delta$.

۲۸. دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **کوشی** است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon>0$، عدد صحیح مثبتی مثل n_0 وجود داشته باشد که $|a_n-a_m|<\epsilon$ هرگاه m و n از n_0 بزرگتر باشند.

برای هر یک از گزاره‌های زیر مثال نقضی بیابید.

۲۹. $[\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست $]$، $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

۳۰. $[\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست $\rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0]$ ، $\forall \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$

۳۱. (f مشتق‌پذیر است $\rightarrow$ f پیوسته است) ، $\forall f$

۳۲. f کراندار است، $\forall f$

فصل (۲)
برهان

۲.۱ دستگاههای ریاضی

یک دستگاه ریاضی از بخشهای زیر تشکیل می‌شود:

a) مجموعه‌ای از مفاهیم تعریف نشده،

b) یک مجموعهٔ مرجع،

c) مجموعه‌ای از روابط (مفهوم «رابطه» را بعداً تعریف خواهیم کرد.)،

d) مجموعه‌ای از اعمال (مفهوم «عمل» را بعداً تعریف خواهیم کرد.)،

e مجموعه‌ای از اصول موضوع منطقی (قوانین منطق استدلالی)،

f) مجموعه‌ای از اصول موضوع غیرمنطقی (این اصول موضوع، در ارتباط با عناصر، روابط و اعمال است؛ موجوداتی که توسط ریاضیدانان مطالعه می‌شوند.

چنین اصل موضوعی ممکن است به شکل: $a + b = c + b \to a = c$ باشد.)،

g) مجموعه‌ای از قضایا،

h) مجموعه‌ای از تعاریف

i) یک نظریهٔ مجموعه‌های پایه (این را در فصل ۳ خواهیم خواند.)

برای مثال، در هندسهٔ مسطحه، مفاهیم تعریف نشده همان نقطه و خط هستند.

مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ نقاط صفحه است: روابط موجود، مفاهیمی همچون برابری، تعامد و توازی هستند. قبلاً اصول موضوع منطقی را مطالعه نموده‌ایم. مثالی از یک اصل موضوع غیرمنطقی:

دو نقطهٔ متمایز، دقیقاً روی یک خط راست قرار دارند.

مثال دیگری ا ز یک دستگاه ریاضی، دستگاه اعداد حقیقی است؛ بعضی از اصول موضوع و قضایای آن، در ضمیمه آمده‌اند. در این فصل، برهانهای این دستگاه را درنظر می‌گیریم. توجه اصلی، به روشهای نزدیک شدن به برهان خواهد بود.

هرگفتار ریاضی به یک دستگاه ریاضی مربوط می‌شود، حتی اگر به وضوح مشخص نشده باشد.

تعریفها

«خپل، با لحنی تمسخرآمیز گفت، «زمانی که یک کلمه را بکار می‌برم، دقیقاً همان معنی را می‌دهد که من گفتم، نه بیشتر، نه کمتر.»

لویس کارول، از **درون آینه**

یک تعریف، یک اختصار است. همانند همهٔ اختصارها، تعریفها می‌توانند کوتاه ، مثل،

$a < b$ اگر و تنها اگر $b > a$

یا بلند، مثل، تابع f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=۱}^{n} f(\delta_j)(x_j - x_{j-۱}) < \infty$$

باشند.

همواره می‌توانید عبارت تعریف شده را با تعریف‌های آن تعویض کنید و بالعکس.

باید بیاموزید که مفهوم «اگر و تنها اگر» یا «معادل» را از یک تعریف درک کنید. تعریفها، اغلب به شکلی بیان می‌شوند که امکان تعویض یک عبارت با عبارت دیگر، بخاطر تعادل موجود، ولی بیان شده، مخفی می‌کنند. برای مثال، تعریفهای زیر را درنظر بگیرید:

یک عدد زوج به شکل $a = ۲k$ می‌باشد، k عددی صحیح است.

یک عدد صحیح زوج است اگر $a = ۲k$، k عددی صحیح است.

هر یک از این دو می‌تواند به شکل:

یک عدد صحیح زوج است اگر و تنها اگر $a = ۲k$ ، k عددی صحیح است.

بیان شود، پس با استفاده از قاعدهٔ جانشینی، هر یک از این عبارات می‌تواند جایگزین دیگری شود.

تمرینهای ۲.۱

تمرینهای ۱ تا ۸ را به شکل «اگر و تنها اگر» درآورید.

۱. اگر $a = ۲k + ۱$ ، آنگاه a فرد است.

۲. یک چهارضلعی یک چند ضلعی با فقط چهار ضلع می‌باشد.

۳. مقدار ماکزیمم f بر روی S، که با $\max\limits_S f$ نشان داده می‌شود، بزرگترین مقداری است که به روی S توسط f بدست می‌آید.

۴. یک سری واگراست اگر همگرا نباشد.

۵. یک مثلث، یک چند ضلعی است که تنها سه ضلع دارد.

۶. یک عدد حقیقی، عددی مثل x است که برابر با یک عدد اعشاری نامتناهی است.

۷. عدد حقیقی x که گویا نیست، یک عدد گنگ است.

۸. اعداد مختلط اعدادی به شکل $x + yi$ هستند که x و y اعدادی حقیقی هستند و $i^۲ = -۱$.

۹. سه مثال از تعریفهایی که در کتب ریاضی نادرست بیان شده‌اند، بیابید.

۱۰. کتاب درسی بیابید که ابتدا مفهوم «اگر و تنها اگر» به دانش‌آموز آموخته شود واکثر تعریفهای آن به صورت معادل بیان شده باشند.

۱۱. تعریف همنهشتی دو مثلث را در یک کتاب درسی هندسه ببینید. این تعریف را تعریفی مختصر می‌دانید یا طولانی؟

۲.۲ برهان

تعریف. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ...، A_k همگی اصول موضوع و قضایای اثبات شدهٔ یک دستگاه ریاضی هستند. یک **برهان رسمی (یا استنتاج)** برای گزارهٔ P دنباله‌ای ازگزاره‌های $S_۱$، $S_۲$، ...، S_n است که

(۱) S_n همان P است (گزارهٔ نهایی P است)

و یکی ازگزاره‌های زیر هم برقرار است:

(۲) S_i یکی از $A_۱$، $A_۲$، ... ، A_k است.

(۳) S_i با استفاده از یک استدلال معتبر، از گزاره‌های قبلی بدست می‌آید.

یک **قضیه** گزاره‌ای است که از اصول موضوع و / یا قضایای قبلی استنتاج می‌شود.

تعریف برهان رسمی نسبتا پیچیده است. ذکر یک مثال در اینجا مفید است.

مثال. فرض کنید یک دستگاه ریاضی تنها شامل اصول موضوع زیر است:

$A_۱: a + b = c \to [x < y \wedge (۲ = ۳)]$

$A_۲: a + b = c$

برهان رسمی برای $x < y$ در زیر آمده است.

بنا به $A_۱$، $S_۱ : a + b = c \to [x < y \ \wedge \ (۲ = ۳)]$

بنا به $A_۲$ $S_۲ : a + b = c$

بنا به قیاس استثنایی بر روی $S_۱$ و $S_۲$، $S_۳ : x < y \ \wedge \ ۲ = ۳$

بنابه گزاره همیشه درست $(P \wedge Q) \to P$، $S_۴ : x < y$

ریاضیدانان در تمرین، برهان‌های رسمی را نمی‌نویسند. بلکه از برهانهای غیررسمی استفاده می‌کنند. یک برهان غیررسمی استدلالیست که وجود یک برهان رسمی را نشان می‌دهد. البته به اندازهٔ کافی برهان رسمی را به قدری که شخص دیگری «قانع» شود، ارائه می‌کند. بنابراین،ممکن است یک برهان غیررسمی را یک «استدلال قانع‌کننده» بنامیم و یک ریاضیدانان سعی می‌کنند سایر ریاضیدانان را متقاعد کند. شما تلاش خواهید کرد که دانشجویان و معلمتان را قانع کنید.

مثال. عبارت زیر، یک برهان غیررسمی برای $x < y$، در دستگاه سابق است:

برهان غیررسمی بنابر $A_۱$ و $A_۲$ نتیجه می‌شود که

$$x < y \wedge (۲ = ۳)$$

پس $x < y$.

از این به بعد تنها برهانهای غیررسمی را خواهیم نوشت. هنر ریاضیات، خلق برهانهاست. همانطور که یک نقاش سبکهای پایه‌ای مثل رنگهای روغنی، آبرنگها و مهرهای چوبی دارد؛ یک ریاضیدان هم سبکهای پایه‌ای جهت برهان دارد. حال این سبکهای برهان را بررسی می‌کنیم.

مجموعه تمرینهای ۲.۲

در دستگاه ریاضی مثال قبل مطلوبات زیر را ارائه دهید.

۱. یک برهان رسمی برای ۳ = ۲.

۲. یک برهان غیررسمی برای ۳ = ۲.

۲.۳ اثبات گزاره‌هایی به شکل $P \to Q$

حال، دو سبک برهان برای گزاره‌هایی به شکل $P \to Q$ ارائه می‌دهیم. بعداً، برهانهای دیگری ارائه خواهیم داد.

قاعدهٔ برهان شرطی RCP

معمولاً در هندسهٔ مسطحه، گزاره‌ای از نوع $P \to Q$ را با فرض P و استنتاج Q، ثابت می‌کنید و Q را حکم درنظر می‌گیرید. در واقع $P \to Q$ حکم است؛ زیرا این گزاره چیزی است که سعی می‌کنید ثابت کنید.

برای اثبات $P \to Q$، ابتدا فرض می‌کنیم P درست است (موقتاً آن را یک اصل موضوع درنظر می‌گیریم). سپس با استفاده از P و دیگر قضایا و اصول موضوع، سعی می‌کنیم Q را نتیجه بگیریم. زمانی که Q در این حالت نتیجه‌گیری شد، برهان $P \to Q$ به پایان می‌رسد. شما درستی Q را نشان نداده‌اید؛ تنها نشان داده‌اید که Q درست است **اگر P درست باشد**. این که آیا P درست است یا نه مسأله دیگری است. همچنین اینکه آیا Q درست است یا نه نیز مسألهٔ دیگری است. آنچه شما درستی آن را نشان داده‌اید، $P \to Q$ است.

برای این که آن را به صورت رسمی‌تری شرح دهیم فرض کنید A_1، ...، A_n اصول موضوع و قضایای از قبل ثابت شده هستند. اثبات $P \to Q$ این است که نشان دهیم:

می‌توانیم از A_1، ...، A_n نتیجه بگیریم که $P \to Q$ یک استدلال معتبر است. برای انجام آن، موقتاً فرض می‌کنیم P یک اصل موضوع است و نشان می‌دهیم:

از $P, A_1, \ldots, A_n$ می‌توانیم Q را نتیجه بگیریم

یک استدلال معتبر است. جملات فوق به **قضیهٔ استنتاج** مربوط است، بنابراین آن را به عنوان یک اصل موضوع برهان درنظر می‌گیریم.

مثال. یادآوری: a یک عدد صحیح زوج است اگر و تنها اگر a بتواند به شکل $a = 2k$ بیان شود، که k عددی صحیح است.

ثابت کنید: a^2 یک عدد صحیح زوج است $\to$ a یک عدد صحیح زوج است.

برهان. فرض کنید a یک عدد صحیح زوج باشد. آنگاه برای عددی صحیح مثل k داریم $a = ۲k$. پس $a^۲ = ۲(۲k^۲)$ و $۲k^۲$ عددی صحیح است، پس $a^۲$ زوج است. ■

در برهان قبل ، از گزارهٔ همیشه درست

$$[(P \to S_۱) \wedge (S_۱ \to S_۲) \wedge \ldots \wedge (S_n \to R)] \to (P \to R).$$

استفاده کردیم. یعنی،

a زوج است $\to a = ۲k \to a^۲ = ۲(۲k^۲) \to a^۲$ زوج است؛

a زوج است $\to a^۲$ زوج است. $\therefore$

تمام برهانها در یک پاراگراف گونه داده می‌شوند، زیرا این راهی است که ریاضیدانان باتجربه برهانها را می‌نویسند. این شکل، با روش ستونهای موازی که در هندسهٔ مسطحه استفاده می‌شود و نوشتنش سخت‌تر است متفاوت است.

قاعدهٔ برهان شرطی

عملاً روش دیگری را برای بیان اینکه یک گزارهٔ شرطی درست است، فراهم می‌کند. برای شرح آن، بیاد آورید که

اگر چمن قرمز باشد آنگاه $۴ = ۳$ (۱)

درست است زیرا مقدم آن نادرست است. این می‌تواند «درستی ساختاری» نامیده شود. آن را با گزارهٔ

اگر $۴x + ۵ = ۱۳$، آنگاه $x = ۲$ (۲)

مقایسه کنید.

حال هر جایگزینی برای x که مقدم $۴x + ۵ = ۱۳$ را نادرست کند، گزارهٔ (۲) را درست می‌کند. بنابراین تنها دغدغه، این است که وقتی $۴x + ۵ = ۱۳$ درست است (۲) درست باشد. برای اینکه نشان دهیم (۲) درست است، براساس درستی $۴x + ۵ = ۱۳$ ، نشان می‌دهیم که (۲) درست است. این حالت می‌تواند «درستی بوسیلهٔ **وابستگی** تالی به مقدم» نامیده شود.

به عنوان مثال دیگری از **قاعدهٔ برهان** شرطی (RCP) ، گزارهٔ استدلال دیگری را استنتاج می‌کنیم.

قضیه. هر گزاره به شکل

$$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$$

درست است.

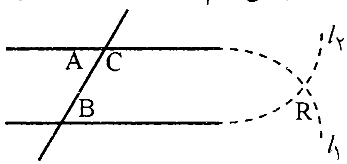
برهان. فرض کنید $\forall x P(x)$ درست است. پس مجموعه جواب $P(x)$ ، مجموعهٔ مرجع است. به این دلیل که مجموعهٔ مرجع ناتهی فرض می‌شود، گزارهٔ $\exists x P(x)$ درست است. ■

پرسیدن این که چرا زمانی که $\forall x P(x)$ نادرست است، $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ درست است، نیز ارزشمند است. این گزاره با توجه به جدول درستی '$\to$' درست است. یعنی، مقدم نادرست است پس ترکیب شرطی درست است.

اثبات $P \to Q$ توسط عکس نقیض

می‌توانیم گزارهٔ
$P \to Q$ را با اثبات عکس نقیض آن یعنی
$\sim Q \to \sim P$ اثبات کنیم.
چرا که هر دو آنها معادلند.

مثال. برهان زیر از هندسهٔ اقلیدسی است. فرض می‌کنیم که دانش‌آموز از اصول موضوع و ویژگیهای آن مطلع است.



ثابت کنید: $\angle A = \angle B \to l_۱ \cap l_۲ = \phi$. **برهان.** با استفاده از عکس نقیض، ثابت خواهیم کرد که

$$l_۱ \cap l_۲ \neq \phi \to \angle A \neq \angle B$$

فرض کنید $l_۱ \cap l_۱ \neq \phi$ باشد؛ یعنی دو خط از نقطه‌ای مثل R مشترکند. پس RCB یک مثلث است، بنابراین: $\angle C + \angle B + \angle R = ۱۸۰^\circ$. همچنین $\angle A$ و $\angle B$ مکملند. پس $\angle C + \angle B + \angle R = \angle A + \angle C$ ، بنابراین $\angle B + \angle R = \angle A$. به یاد آورید که اندازهٔ هر زاویهٔ یک مثلث مثبت است پس $\angle R > ۰$. پس $\angle B < \angle A$.

$P_۱$ در ضمیمه را ببینید.) یا به عبارتی $\angle A \neq \angle B$. ■

توجه کنید که در برهان قبلی، قاعدهٔ برهان شرطی برای اثبات عکس نقیض بکار برده شد.

در مجموع، ما دو روش اثبات $P \to Q$ ، را بررسی کردیم.

۱) $\mathbf{RC}P$. P را فرض کنید، Q را نتیجه بگیرید.

۲) **عکس نقیض.** ثابت کنید $\sim Q \to \sim P$؛ $\sim Q$ را فرض کنید و $\sim P$ را نتیجه بگیرید. بعداً ، سایر روشها را بررسی می‌کنیم .

مجموعه تمرینهای ۲.۳

گزاره شرطی زیر را درنظر بگیرید.

a یک عدد صحیح زوج است $\rightarrow$ a^2 یک عدد صحیح زوج است.

۱. عکس نقیض آن را بیان کنید.

۲. عکس نقیض آن را اثبات کنید.

برای هر یک ازگزاره‌های زیر با استفاده از RCP، یک برهان مستقیم ارائه دهید.

۳. اگر a زوج و b نیز زوج باشد، آنگاه $a+b$ زوج است.

۴. اگر a زوج و b نیز زوج باشد، آنگاه ab زوج است.

۵. اگر a زوج و b فرد باشد ، آنگاه $a+b$ فرد است.

۶. اگر a زوج و b فرد باشد، آنگاه ab زوج است.

۷. اگر a فرد و b نیز فرد باشد، آنگاه $a+b$ زوج است.

۸. اگر a فرد و b نیز فرد باشد، آنگاه ab فرد است.

۹. اگر a فرد باشد، آنگاه a^2 فرد است. (با وجود اینکه از شما خواسته شده که برهانی ارائه دهید، آیا می‌دانید با توجه به پایه‌ای که قبلاً اثبات کرده‌اید چرا اثبات لزومی ندارد؟)

۱۰. **ثابت کنید:** هر گزاره به شکل

$$\exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$$

درست است.

۱۱. توسط عکس نقیض گزاره‌های تمرینهای ۹ و ۱۰ ، اثباتی برای آنها ارائه دهید.

۱۲. اگر a^2 فرد باشد، آنگاه a فرد است. (باز هم، با وجود اینکه از شما خواسته شده که برهانی ارائه دهید، آیا می‌دانید چرا اثبات لزومی ندارد؟)

۱۳. **مقسوم علیه خالص** یک عدد، مقسوم علیهی است که از آن عدد کمتر است. یک عدد **کامل** عددی است که برابر با مجموع مقسوم علیه‌های خالص خود باشد. برای مثال، ۶ عددی کامل است.

ثابت کنید: اگر n (عدد طبیعی) کامل باشد، آنگاه n اول نیست.

۱۴. ریاضیدانان معمولاً گزاره‌ایی به شکل $P \to (Q \wedge R)$ را با اثبات $P \to Q$ و $P \to R$، ثابت می‌کنند. گزارهٔ همیشه درستی پیدا کنید که این عبارت را تایید کند.

۱۵. ریاضیدانان معمولاً گزاره‌ای به شکل $P \to (Q \to R)$ را با اثبات $(P \wedge Q) \to R$ ، ثابت می‌کنند. گزارهٔ همیشه درستی پیدا کنید که این عبارت را تایید کند.

۱۶. ریاضیدانان معمولاً گزاره‌ای به شکل $(P \to Q) \to (S \to R)$ را با اثبات $[(P \to Q) \wedge S] \to R$، ثابت می‌کنند. این عبارت را توسط یک گزارهٔ همیشه درست، تایید کنید.

۲.۴ اثبات گزاره‌هایی به شکل $P \leftrightarrow Q$

ما سه سبک برهان گزاره‌هایی به شکل $P \leftrightarrow Q$ را بررسی می‌کنیم.

اثبات $P \to Q$ **و** $Q \to P$.

یک سبک برهان گزارهٔ

$$P \leftrightarrow Q$$

از تعریف آن:

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

ناشی می‌شود. بنابراین در این برهان دو مرحله وجود دارد:

a) اثبات $P \to Q$؛ مربوط به قسمت «تنها اگر» یا «کفایت»

b) اثبات $Q \to P$؛ مربوط به قسمت «اگر» یا «لزوم»

هر یک از این گزاره‌ها، یک ترکیب شرطی است که می‌تواند توسط سبکهای اثبات که قبلاً بررسی شده‌اند، اثبات شود.

مثال. ثابت کنید: اعداد حقیقی a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + px + q = ۰$ هستند اگر و تنها اگر $a + b = -p$ و $ab = q$.

برهان

a) (تنها اگر، یا کفایت)

ثابت کنید: اگر a و b ریشه‌های $x^2 + px + q = 0$ باشند، آنگاه $a + b = -p$ و $ab = q$.

با استفاده از RCP، فرض کنید a و b ریشه‌های معادله هستند. با استفاده از فرمول درجهٔ دو، می‌دانیم که

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ و } b = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

[علامتهای + و − می‌توانند بدون تاثیر در برهان، با هم عوض شوند.]

آنگاه بااستفاده از جبر، $a + b = -p$ و $ab = q$.

b) (اگر، یا لزوم)

ثابت کنید: اگر $a + b = -p$ و $ab = q$، آنگاه a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ هستند.

دوباره با استفاده از RCP ، فرض کنید $a + b = -p$ و $ab = q$ باشد.

پس $b = -p - a$ و $q = ab = a(-p - a) = -p - a^2$. بخاطر اینکه $a^2 + pa + q = 0$ است، پس a یک ریشهٔ $x^2 + px + q = 0$ است. ■

اثبات $Q \to P$ و $\sim Q \to \sim P$

یک سبک دیگر اثبات

$P \leftrightarrow Q$

این است که مثل قبل $P \to Q$ را ثابت کنیم، اما بعد، عکس نقیض $Q - P$ ، یعنی $\sim Q \to \sim p$ را ثابت کنیم. برای مثال، فرض کنید می‌خواستید با استفاده از سبک اثبات شرح داده شده گزارهٔ، a زوج است اگر و تنها اگر a^2 زوج باشد، را اثبات کنید. گزاره‌هایی که باید ثابت شوند عبارتند از:

a) a^2 زوج است $\to$ a زوج است.

b) a^2 زوج نیست (فرد است) $\to$ a زوج نیست (فرد است)

هستند.

این گزاره‌ها را در مثالهای قبلی ثابت کرده‌ایم.

رشتهٔ اگر و تنها اگر

سبک سوم برهان

$$P \leftrightarrow Q$$

با ساختن رشته‌ای از گزاره‌ها که از P تا Q به شکل زیر پیش می‌روند تحقق می‌یابد.

$$\begin{array}{lcl} P \leftrightarrow Q_1 & & P \leftrightarrow Q_1 \\ Q_1 \leftrightarrow Q_2 & \text{به اختصار} & \quad \leftrightarrow Q_2 \\ & & \\ Q_n \leftrightarrow Q & & \quad \leftrightarrow Q \end{array}$$

هرگاه هر یک از گزاره‌های قبل ثابت شوند، $P \leftrightarrow Q$ توسط گزارهٔ همیشه درست

$$[(P \leftrightarrow Q_1) \wedge \ldots \wedge (Q_n \leftrightarrow Q)] \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

بدست می‌آید.

مثال. ثابت کنید: هر گزاره به شکل

$$\forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$$

درست است.

برهان

با استفاده از رشتهٔ اگر و تنها اگر داریم

$\forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow$ درست است برای هر جایگزینی x و y با اعضای a و b از مجموعهٔ مرجع، $P(a,b)$ درست است.

$\leftrightarrow$ برای هر جایگزینی y و x با اعضای a و b از مجموعهٔ مرجع ، $P(a,b)$ درست است.

$\leftrightarrow$ $\forall y \forall x P(x,y)$ درست است. ■

مثالهای بیشتری از این سبک برهان، در فصل ۳ ، در مورد نظریهٔ مجموعه‌ها، ارائه خواهد شد.

در مجموع، ما سه سبک برهان را برای گزاره‌هایی از نوع $P \leftrightarrow Q$ ارائه دادیم:

a) اثبات $P \rightarrow Q$ و $Q \rightarrow P$. ($Q \rightarrow P$ **عکس** $P \rightarrow Q$ نامیده می‌شود.)

b) **اثبات** $P \to Q$ و $\sim P \to \sim Q$. ($\sim P \to \sim Q$ **نقیض** $P \to Q$ نامیده می‌شود.)

c) **رشتهٔ اگر و تنها اگر.** ساخت رشته‌ای از گزاره‌های هم‌ارز که از P تا Q پیش می‌روند.

«رشتهٔ اگر و تنها اگر» وجه دیگری نیز دارد. برای اثبات $P \leftrightarrow Q$ توسط یک رشته، کافی است که $P \to Q_۱$، $Q_۱ \to Q_۲$، ...، $Q_n \to Q$.

را برای تعدادی گزاره مثل Q_n، ...، $Q_۱$ و $Q \to S_۱$، $S_۱ \to S_۲$، ...، $S_k \to P$ را برای تعدادی گزاره مثل $S_۱, \ldots, S_k$ ثابت کنیم. در حالتی مشابه، مجبوریم ثابت کنیم که T، S، Q، P معادلند.

یک روش که می‌تواند ثابت شود، اثبات $P \to Q \to S \to T \to P$

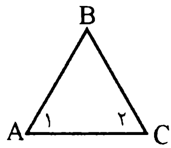
و بنابراین تقلیل تعداد برهانها به نصف که در صورت اثبات $P \leftrightarrow R$، $Q \leftrightarrow S$، $S \leftrightarrow T$ با آن روبرو می‌شویم، می‌باشد.

مجموعهٔ تمرینهای ۲.۴

گزاره‌های تمرینهای ۱ تا ۷ را اثبات کنید.

۱. $a^۲$ یک عدد صحیح فرد است $\leftrightarrow$ a یک عدد صحیح فرد است.

۲. شکل زیر را درنظر بگیرید،



ثابت کنید: $AB = BC \leftrightarrow \angle ۱ = \angle ۲$

۳. $a < b \leftrightarrow a + c < b + c$. از ویژگیهای اعداد حقیقی از ضمیمه استفاده کنید.

۴. x یک عدد صحیح فرد است اگر و تنها اگر $x + ۱$ یک عدد صحیح زوج باشد.

۵. x یک عدد صحیح زوج است اگر و تنها اگر $x + ۲$ یک عدد صحیح زوج باشد.

۶. هر گزاره از نوع

$$\exists x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$$

درست می‌باشد.

۷. هر گزاره از نوع

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)]$$

درست می‌باشد.

۸. ریاضیدانان اغلب گزاره‌ای از نوع $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$ را با اثبات $(P \wedge Q) \rightarrow R$ و $(P \wedge R) \rightarrow Q$ ، ثابت می‌کنند. گزارهٔ همیشه درستی پیدا کنید که این موضوع را تایید کند.

۲.۵ اثبات گزاره‌هایی به شکل $\forall x P(x)$

برای اثبات

$$\forall x P(x)$$

فرض کنید x ، نمایانگر عضوی دلخواه از مجموعهٔ مرجع باشد و ثابت کنید

$$P(x)$$

درست است. پس به این دلیل که x عضوی دلخواه از مجموعهٔ مرجع است، بنابراین

$$\forall x P(x)$$

درست است. این موضوع توسط اصل موضوع منطقی ۲، تایید شده است.

مثال. گزارهٔ

$\forall f$ (f پیوسته است $\rightarrow$ f مشتق‌پذیر است)

را درنظر بگیرید. برای اثبات گزارهٔ فوق ، فرض کنید f تابعی دلخواه باشد و ثابت کنید

f پیوسته است $\rightarrow$ f مشتق‌پذیر است.

با استفاده از RCP، فرض کنید f مشتق‌پذیر است و ثابت کنید f پیوسته است. اثبات را نمی‌آوریم» این اثبات در اکثر کتب حساب پیدا می‌شود. زمانی که ثابت کردیم

f پیوسته است $\rightarrow$ f مشتق‌پذیر است

در واقع ثابت کرده‌ایم

$$\forall f,\ (f \text{ پیوسته است} \rightarrow f \text{ مشتق‌پذیر است})$$

به این دلیل که f تابعی دلخواه بود.

مثالها.

a) گزارهٔ $\forall x(۱ < x \rightarrow ۱ < x^۲)$ را با مجموعهٔ مرجع $\{۲, ۳\}$ درنظر بگیرید.

با درنظر گرفتن

$$۱ < ۲ \rightarrow ۱ < ۲^۲$$

$$\text{و} \quad ۱ < ۳ \rightarrow ۱ < ۳^۲$$

گزارهٔ فوق را با جاگذاری ثابت کرده‌ایم.

b) گزارهٔ $\forall x(۱ < x \rightarrow ۱ < x^۲)$ را با مجموعهٔ مرجع نامتناهی N درنظر بگیرید.

اثبات این گزاره با جاگذاری هر عضو غیرممکن است. برای انجام برهان، فرض کنید x دلخواه باشد، ثابت کنید.

$$۱ < x \rightarrow ۱ < x^۲$$

چنین اثباتی، به اصول موضوع N (ضمیمه را ببینید) که به صورت سور بیان شده‌اند، وابسته است.

برهان

فرض کنید $x > ۱$. حال به این دلیل که $۰ < ۱$ ، بنا به ۰۶، با استفاده از ۰۲ نتیجه می‌گیریم که $۰ < x$.

پس $x > ۱$ و $x > ۰$ ، با استفاده از ۰۴ نتیجه می‌دهد که $x \cdot x > ۱ \cdot x$.

بنابراین $x > ۱$ و $x^۲ > x$ ، با استفاده از ۰۲، نتیجه می‌دهد که $x^۲ > ۱$. بنابراین،

$$۱ < x \rightarrow ۱ < x^۲$$

پس گزارهٔ $\forall x(۱ < x \rightarrow ۱ < x^۲)$ ثابت شده است. ■

برای اثبات $\exists x P(x)$ نشان دهید یا ثابت کنید که xای در مجموعهٔ مرجع وجود دارد که بازای آن $P(x)$ درست است.

مثال. ثابت کنید: $\exists f$ (f پیوسته است $\wedge$ f **مشتق‌پذیر نیست**)

برهان

تابعی که توسط $f(x)=|x|$ بیان می‌شود، پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست. ■

در مورد یک سبک دیگر برهان برای $\exists x P(x)$ ، زمانی که برهان خلف را ارائه دادیم، بحث می‌کنیم.

مجموعه تمرینهای ۲.۵

سبکهایی از برهان را که برای اثبات هر یک از گزاره‌های زیر می‌توانید بکار برید، شرح دهید.

۱. $\forall x$ ($x^{۲}$ زوج است اگر و تنها اگر x زوج باشد)

۲. $\forall a \forall b(a+۸<b+۸$ اگر و تنها اگر $a<b)$

۳. برای هر دو مجموعه ، مثل A و B، $x\in A\cup B$ اگر و تنها اگر $x\in B\cup A$.

۴. برای هر مجموعه مثل A، $A\subset A$.

۵. برای هر مجموعه مثل A، $\phi\subset A$.

۶. $\exists x$ ،$x^{۲}=x$

۷. $\exists\{u_n\}$ (واگراست $\sum_{n=۱}^{\infty}u_n \wedge \lim_{n\to\infty}u_n=۰$)،

۸. $\exists y\forall x$ ،$x+y=x$

۹. $\exists y\forall x$ ،$xy=x$

۲.۶ برهان به روش حالتها

برهان به روش حالتها در روشهای متعددی استفاده شده و شامل رابط $\vee$ (یا) می‌باشد.

اثبات گزاره‌ای به شکل $(P\vee R)\to Q$

این نوع برهان، از گزارهٔ همیشه درست

$$(۱)\quad [(P \to Q) \wedge (R \to Q)] \to [(P \vee R) \to Q]$$

بهره می‌گیرد. برهان با اثبات مقدم (۱)

$$(P \to Q) \wedge (R \to Q)$$

انجام می‌گیرد. پس گزاره‌های $(P \to Q)$ و $(R \to Q)$ باید ثابت شوند. هر سبک برهان گزاره‌های شرطی می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. به صورت شهودی[۱] می‌خواهید ثابت کنید که Q می‌تواند از هر یک از R یا P، نتیجه می‌شود، بنابراین باید نشان دهید که از هر یک، می‌توانید Q را نتیجه بگیرید.

مثال. ثابت کنید: $(a = ۰ \vee b = ۰) \to ab = ۰$

برهان

حالت ۱) گزارهٔ $a = ۰ \to ab = ۰$ را ثابت کنید. فرض کنید $a = ۰$.

پس با استفاده از $P۳$ ، داریم $ab = ۰ \cdot b = ۰$.

حالت ۲) گزارهٔ $b = ۰ \to ab = ۰$ را ثابت کنید. برهان با حالت ۱ مشابه است. ■

مشابهاً، برهان گزارهٔ

$$(P۱ \vee \ldots \vee P_n) \to Q$$

به روش حالتها با اثبات گزاره‌های

$$P_۱ \to Q$$

$$P_۲ \to Q$$

$$P_n \to Q$$

انجام می‌شود. چنین برهانی، n حالت دارد و توسط گزارهٔ همیشه درست

$$[(P_۱ \to Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \to Q)] \to [(P_۱ \vee \ldots \vee P_n) \to Q]$$

تایید می‌شود.

۱ـ که به معنی «مربوط به تجربهٔ ریاضی شما» می‌باشد.

به عنوان یک مرحلهٔ میانی

فرض کنید دوباره گزارهٔ

$$P \to Q$$

را ثابت می‌کنیم. ممکن است کشف کنیم که

$$(۲) \qquad P \to (P_۱ \vee P_۲ \vee \ldots \vee P_n)$$

و $(P_۱ \to Q) \wedge (P_۲ \to Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \to Q)$.
توسط برهان به روش حالتها نشان داده‌ایم که

$$(۳) \qquad (P_۱ \vee P_۲ \vee \ldots \vee P_n) \to Q$$

سپس با استفاده از (۲) و (۳) و قانون قیاس ، نتیجه می‌گیریم که
$P \to Q$.

بنابراین، روش دیگری برای استفاده از برهان به روش حالتها، یک مرحلهٔ میانی است که از مقدم یک گزارهٔ شرطی ناشی شده است.

مثال. تعریف:

$$|x| = x \quad \text{هرگاه} \quad x \geq ۰$$
$$|x| = -x \quad \text{هرگاه} \quad x < ۰$$

را بیاد آورید.

ثابت کنید: اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه $|x| \geq ۰$.

برهان

اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه $x \geq ۰ \vee x < ۰$. ثابت خواهیم کرد

$$(x \geq ۰ \vee x < ۰) \to |x| \geq ۰$$

حالت ۱) $x \geq ۰$. اگر $x \geq ۰$ باشد، آنگاه با استفاده از تعریف داریم $|x| = x$ پس $|x| \geq ۰$.

حالت ۲) $x < ۰$. اگر $x < ۰$ باشد، آنگاه با استفاده از تعریف داریم $|x| = -x$.

با استفاده از خواص، برابریها، اگر $x < ۰$ باشد آنگاه $-x > ۰$ است، پس $|x| > ۰$.

بنابراین $(x < ۰ \vee x \geq ۰) \rightarrow |x| \geq ۰$. پس، اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه $|x| \geq ۰$. ■

هنر ایجاد یک برهان به روش حالتها می‌تواند کشف مجموعه فراگیر حالتهایی باشد که مناسب است.

برای مثال، اگر x عددی حقیقی باشد، می‌توانید از

a) $x < ۰ \vee x \geq ۰$ b) $x < ۰ \vee x = ۰ \vee x > ۰$ c) $x < ۲ \vee x = ۲ \vee x > ۲$

استفاده کنید.

توجه کنید که هر مثال، کامل است. زیرا در هر یک تمام احتمالات رخ داده‌اند.

به عنوان یک مثال دیگر، یک تابع، یا پیوسته است یا ناپیوسته ، یک عدد صحیح یا زوج است یا فرد.

مجموعه تمرینهای ۲.۶

کامل کنید.

۱. اگر A یک زاویه باشد، حالتهایی که می‌توانید در نظر بگیرید.

A حاده است $\vee$ ________ $\vee$ ________،

می‌باشند.

۲. اگر f یک تابع باشد، حالتهایی که می‌توانید درنظر بگیرید.

a) f مشتق‌پذیر است $\vee$ ________.

b) f زوج است $\vee$ ________ $\vee$ f نه زوج است نه فرد.

c) f ثابت است $\vee$ ________.

۳. اگر x عددی صحیح باشد، حالتهایی که می‌توانید درنظر بگیرید.

a) x زوج است $\vee$ ________

b) $x > ۹ \vee$ ________ $\vee x < ۹$.

برای اثبات گزاره‌های زیر از برهان به روش حالتها استفاده کنید.

۴. اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه $|-x| = |x|$.

۵. اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه $|x|^۲ = |x^۲|$.

۶. برای هر عدد حقیقی x، داریم $x \leq |x|$.

۷. اگر x و y اعداد حقیقی باشند، آنگاه $|xy| = |x|.|y|$. راهنمایی:
$x < 0 \wedge y \geq 0$ ، $x \geq 0 \wedge y < 0$، $x < 0 \wedge y < 0$ ، $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

۸. اگر $a > 0$، آنگاه $|x| < a$ اگر و تنها اگر $-a < x < a$.

۹. اگر $a > 0$، آنگاه $|x| > a$ اگر و تنها اگر $x > a \vee x < -a$.

۱۰. اگر x و y اعداد حقیقی باشند، آنگاه $|x + y| \leq |x| + |y|$.

۱۱. اگر x و y اعداد حقیقی باشند آنگاه $|x| - |y| \leq |x - y|$.

۱۲. اگر f اکیداً یکنوا باشد، آنگاه f یک به یک است.
راهنمایی: f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است $\rightarrow$ f اکیداً یکنواست.

۱۳. اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه $x^2 - x$ زوج است.

۱۴. اگر x عدد صحیح باشد، آنگاه $x^2 + x + 1$ فرد است.

۱۵. برهانی به روش حالتها برای قانون کسینوس‌ها در یک کتاب مثلثات بیابید. برهان را بیان کنید و کاربرد برهان به روش حالتها را شرح دهید.

۱۶. برای رابطهٔ

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

برهانی به روش حالتها ، در یک کتاب مثلثات بیابید. برهان را بیان کنید و کاربرد برهان به روش حالتها را شرح دهید.

۱۷. برهانی به روش حالتها برای قضیهٔ رول در یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال بیابید. برهان را بیان کنید و کاربرد برهان به روش حالتها را شرح دهید.

۱۸. تابع g که توسط $g(x) = |x|$، $x \neq 0$ تعریف شده است، مشتق‌پذیر است در حالی که تابع f که توسط $f(x) = |x|$ تعریف شده است مشتق‌پذیر نمی‌باشد. با استفاده از برهان به روش حالتها، رابطه‌ای برای g' بیابید. در صورت لزوم از یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کنید.

۱۹. ثابت کنید: هرگزاره به شکل

$$[\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x) \vee Q(x)]$$

درست است.

۲۰. فرض کنید می‌خواهید گزاره‌ای به شکل

$$P \rightarrow (R \wedge Q)$$

را توسط عکس نقیض ثابت کنید. نقش احتمالی برهان به روش حالتها را در چنین برهانی شرح دهید.

۲.۷ استقرای ریاضی

اثبات گزاره‌ی به شکل «برای هر عدد طبیعی n، $P(n)$ یا $\forall n P(n)$ »

را که سوری راجع به مجموعهٔ مرجع $N = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ دارد در نظر بگیرید. یک راه برای اثبات گزاره‌هایی به این شکل ، استفاده از **استقرای ریاضی** است که از یک قاعدهٔ استدلال که هنوز مورد بحث قرار نگرفته، استفاده می‌کند.

عبارت زیر، گزارهٔ استقرای ریاضی است که ریاضیدانان آن را به عنوان یک اصل موضوع **می‌پذیرند.** [این وضعیت دیگری است که در آن ریاضیدان دربارهٔ چگونگی استدلال کردن، فرضهایی می‌کند.]

اصل استقرای ریاضی

فرض کنید $P(n)$ جمله‌ایست که برای هر $n \in N$ یک گزاره می‌باشد، آنگاه

(MI) $\quad [P(۱) \wedge \forall k, P(k) \rightarrow P(k+۱)] \rightarrow \forall n P(n)$.

اگر بتوانیم مقدم MI،

$P(۱) \wedge \forall k[P(k) \rightarrow P(k+۱)]$ را ثابت کنیم، آنگاه با استفاده از قیاس استثنایی، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\forall n P(n)$.

بنابراین ، در برهان $\forall n P(n)$ دو مرحله وجود دارد؛

۱) مرحلهٔ پایه. $P(۱)$ را ثابت کنید،

۲) مرحلهٔ استقرا. ثابت کنید $\forall k, P(k) \rightarrow P(k+۱)$.

یعنی ثابت می‌کنیم $P(۱)$ و برای هر k، $P(k) \rightarrow P(k+۱)$.

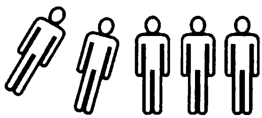
برای اینکه به صورت شهودی شرح دهیم که چگونه $\forall n P(n)$ را ثابت می‌کنند فرض کنید هر دو قسمت برهان استقرایی را کامل کرده باشیم؛ یعنی $P(۱)$ و $\forall k, P(k) \rightarrow P(k+۱)$ ثابت شده باشند. ما یک دنباله بی‌پایان از گزاره‌های

$$\left.\begin{array}{l} P(۱) \\ P(۱) \rightarrow P(۲) \\ P(۲) \rightarrow P(۳) \\ \\ P(n-۱) \rightarrow P(n) \\ \\ \end{array}\right\} \quad \forall k, P(k) \rightarrow P(k+۱)$$

را نتیجه گرفته‌ایم. این فرآیند، به ضربه زدن به یک ردیف سرباز حلبی شباهت پیدا می‌کند، زیرا

$$\begin{array}{l} P(۱) \\ P(۱) \rightarrow P(۲) \\ \hline \therefore P(۲) \end{array} \text{ ، پس } \begin{array}{l} P(۲) \\ P(۲) \rightarrow P(۳) \\ \hline \therefore P(۳) \end{array} \text{ ، پس } \begin{array}{l} P(۳) \\ P(۳) \rightarrow P(۴) \\ \hline \therefore P(۴) \end{array} \text{ و به همین ترتیب، }$$

دنبالهٔ بی‌پایان



$P(۱)$، $P(۲)$، ...، $P(n)$، ... را می‌سازد؛ یعنی ثابت کرده‌ایم $\forall n P(n)$.

از جبر پایه جهت برهانهای زیر استفاده خواهیم کرد.

مثال. ثابت کنید: $\forall n$ ،$۲^n < ۲^{n+۱}$

برهان

$P(n) : ۲^n < ۲^{n+۱}$

۱) مرحلهٔ پایه: $P(۱) : ۲^۱ < ۲^{۱+۱}$ را ثابت کنید. داریم $۲ = ۲^۱$، $۴ = ۲^۲$، پس $۲^۱ < ۲^{۱+۱}$.

۲) مرحلهٔ استقرا، ثابت کنید $\forall k$ ، $P(k) \rightarrow P(k+۱)$.

$P(k) : ۲^k < ۲^{k+۱}$ را فرض کنید.

$P(k+۱) : ۲^{k+۱} < ۲^{k+۲}$ را نتیجه بگیرید.

از $P(k)$ داریم $۲^{k+۱} > ۲^k$ و با استفاده از ویژگی ۰۴ ضمیمه داریم $۲ \cdot ۲^{k+۱} > ۲ \cdot ۲^k$ پس $۲^{k+۲} > ۲^{k+۱}$ یعنی $P(k+۱)$ نتیجه می‌شود. ■

توجه کنید که برهان چگونه خلق شد، دیدیم که ضرب کردن هر دو طرف نامساوی $P(x)$ در ۲ نامساوی $P(k+۱)$ را داد.

هنگام انجام یک برهان توسط استقرای ریاضی ، فهرست کردن

$P(n)$ ،

$P(۱)$ ،

$P(k)$ ،

$P(k+۱)$ به نحوی که در مثال قبل نشان داده شده، مفید می‌باشد.

این کار به تشخیص این که چه چیزی باید فرض شود و چه چیزی باید اثبات شود کمک می‌کند.

معمولاً اثبات $P(۱)$ تنها یک جایگذاری است اما اثبات $\forall k$ ، $P(k) \rightarrow P(k+۱)$ به تلاش بیشتری نیاز دارد. یک روش برای انجام این کار، فهرست کردن $P(k)$ و $P(k+۱)$ ، امتحان کردن $P(k+۱)$ و تلاش برای کشف راهی برای نتیجه گرفتن آن از $P(k)$ می‌باشد. همچنین می‌توانیم از استقرای ریاضی جهت ایجاد تعریفهایی که **تعریف بازگشتی** نامیده می‌شوند، استفاده کنیم.

برای مثال، عبارت زیر تعریفی برای **نماد** $\sum$ **(سیگما)** است.

تعریف. برای هر عدد طبیعی n و اعداد $a_۱, \ldots, a_n$ ، $\sum_{j=۱}^{n} a_j$ به صورت زیر تعریف شده است:

(۱) $\sum_{j=۱}^{۱} a_j = a_۱$

(۲) $\sum_{j=۱}^{k+۱} a_j = (\sum_{j=۱}^{k} a_j) + a_{k+۱}$

این تعریف از بکار بردن رمزآلود نقطه‌ها، همچون

$$\sum_{j=۱}^{n} a_j = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

جلوگیری می‌کند و بنابراین زیباتر است.

مثالها.

(a
$$\sum_{j=۱}^{۴} ۲j = \left(\sum_{j=۱}^{۳} ۲j\right) + ۸ = \left(\sum_{j=۱}^{۲} ۲j\right) + ۶ + ۸$$
$$= \left(\sum_{j=۱}^{۱} ۲j\right) + ۴ + ۶ + ۸ = ۲ + ۴ + ۶ + ۸$$

(b
$$\sum_{j=۱}^{۵} ۳^j = ۳^۱ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۴ + ۳^۵$$

حال بیایید یک برهان استقرایی دیگر انجام دهیم.

مثال. ثابت کنید: برای هر عدد طبیعی n، $\sum_{j=1}^{n} j^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

برهان

$$P(n) : \sum_{j=1}^{n} j^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۱) مرحلهٔ پایه: $P(1) : \sum_{j=1}^{1} j^{2} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

این عبارت از جایگذاری بدست می‌آید:

$$1^{2} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

۲) مرحلهٔ استقرا.

$P(k) : \sum_{j=1}^{k} j^{2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ را فرض کنید.

$$P(k+1) : \sum_{j=1}^{k+1} j^{2} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

را نتیجه بگیرید.

با استفاده از تعریف نماد $\sum$ داریم

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^{2} = \sum_{j=1}^{k} j^{2} + (k+1)^{2}$$

از $P(k)$،

$$= \frac{k.(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^{2}$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{2k^{2}+7k+6}{6}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \blacksquare$$

عبارت زیر، تعریف بازگشتی دیگری در حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

تعریف. فرض کنید y تابعی حقیقی است. $D^n(y)$ نمایانگر **مشتق** nام y نسبت به x است و به صورت زیر تعریف شده است:

۱) $D^{۱}(y) = D(y)$،

۲) $D^{k+۱}(y) = D[D^k(y)]$، مشتق $(k+۱)$ ام، مشتق مشتق k ام است.

حال بیایید یک برهان استقرای ریاضی از حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام دهیم.

مثال. ثابت کنید: برای هر عدد طبیعی n، $D^n(xe^x) = (x+n)e^x$.

برهان.

$$P(n) : D^n(xe^x) = (x+n)e^x$$

۱) مرحلهٔ پایه. $P(۱) : D(xe^x) = (x+۱)e^x$ را ثابت کنید.

با استفاده از قاعدهٔ ضرب برای مشتقها، داریم

$$D(xe^x) = xe^x + e^x = (x+۱)e^x$$

بنابراین $P(۱)$ درست است.

۲) مرحلهٔ استقرا: ثابت کنید $\forall k, P(k) \to P(k+۱)$.

$P(k) : D^k(xe^x) = (x+k)e^x$ را فرض کنید.

$P(k+۱) : D^{k+۱}(xe^x) = [x+(k+۱)]e^x$ را نتیجه بگیرید.

داریم $D^{k+۱}(xe^x) = D[D^k(xe^x)]$ ، زیرا از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم $D^{k+۱} = D(D^k)$.

$= D[(x+k)e^x]$ از $P(k)$،

$= (x+k)e^x + e^x$ با استفاده از قاعدهٔ ضرب برای مشتقها

$= [x+(k+۱)]e^x$

بنابراین داریم، $P(k+۱)$. ■

اهمیت تعریفهای بازگشتی در هر یک از دو مثال قبل را به یاد داشته باشید. تشخیص اینکه استقرای ریاضی می‌تواند برای اثبات هر گزارهٔ $\forall n P(n)$ که راجع به اعداد طبیعی است، بکار رود، اینکه برهان می‌تواند کامل شود یانه، مسئله دیگری است.

هر دو مرحلهٔ پایه واستقرا، در یک برهان توسط استقرای ریاضی ضروری هستند.

گزاره‌هایی مثل $P(n)$ وجود دارند که $P(۱)$ درست است.

اما $\forall n P(n)$ و $\forall x, P(k) \to P(k+۱)$ نادرست هستند.

مثالی از این گزاره $n = n^۲$ است.

گزاره‌هایی مثل $P(n)$ وجود دارند که

$\forall k, [P(k) \to P(k+۱)]$ درست است

اما $P(۱)$ و $\forall n P(n)$ نادرست هستند.

مثالی از این گزاره $n = n + ۱$ است.

در چنین حالتهایی سربازان حلبی را می‌توانیم به ردیف کنیم اما نمی‌توانیم به اولی ضربه‌ای بزنیم.

نیز استقرای ریاضی می‌تواند برای اثبات گزاره‌هایی راجع به زیرمجموعه‌های مشخصی از اعداد صحیح بکار رود.

استقرای ریاضی. برای هر مجموعهٔ مرجع به شکل

$$\{x | x \in I, m \leq x, \text{برای یک } m \in I\}$$

و هر گزارهٔ $P(x)$،

$$[P(m) \wedge \forall k \geq m, P(k) \to P(k+۱)] \to \forall x P(x)$$

برای مثال، برای مجموعهٔ $\{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, \ldots\}$ باید ثابت کنیم، $P(-۳)$ و $P(k) \to P(k+۱)$، $\forall k \geq -۳$. برای $\{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ باید ثابت کنیم $P(۰)$ و $P(k) \to P(k+۱)$ ، $\forall k \geq ۰$. این حالت در مثال بعد توضیح داده شده است. نخست به یک تعریف بازگشتی دیگر نیاز داریم.

تعریف

برای هر عدد طبیعی n و اعداد a_n، ...، $a_۱$، $\prod_{j=۱}^{n} a_j$ به شکل زیر تعریف می‌شود

۱) $$\prod_{j=۱}^{۱} a_j = a_۱$$

۲) $$\prod_{j=۱}^{k+۱} a_j = (\prod_{j=۱}^{k} a_j) \cdot a_{k+۱}$$

مثالها.

(a

$$\prod_{j=1}^{4}\cos j\pi = (\prod_{j=1}^{3}\cos j\pi)\cos 4\pi$$
$$= (\prod_{j=1}^{3}\cos j\pi)\cos 3\pi \cdot \cos 4\pi$$
$$= (\prod_{j=1}^{1}\cos j\pi)\cos 2\pi.\cos 3\pi.\cos 4\pi$$
$$= \cos\pi.\cos 2\pi.\cos 3\pi.\cos 4\pi$$

(b
$$\prod_{j=2}^{5}\left(1-\frac{1}{j}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

در عبارات زیر به دنبال یک الگو بگردید و سعی کنید برای $\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j}\right)$ یک رابطه حدس بزنید.

(a
$$\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(b
$$\prod_{j=2}^{3}\left(1-\frac{1}{j}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(c
$$\prod_{j=2}^{4}\left(1-\frac{1}{j}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

در عبارتهای قبل، شما مشاهداتی انجام دادید و بر پایهٔ **مشاهدات** ، **حدسی** امیدوارانه راجع به رابطه‌ای برای $\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j}\right)$ زدید. این نوع استدلال، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود. این استدلال، از شهود شما (تجربهٔ ریاضی شما) استفاده می‌کند.

شما برای اثبات حدستان هنوز از **استدلال استنتاجی** استفاده نکرده‌اید. به جملات زیر توجه کنید:

$$1+5=6$$
$$19+13=32$$
$$5+7=12$$

از استدلال استقرایی استفاده کرده، یک حدس بزنید. آن حدس به صورت «مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است» می‌باشد. جلوتر، این را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کردیم. در ادامه، از «استقرایی ریاضی» جهت ارائه یک برهان استنتاجی برای $\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}$ استفاده خواهیم کرد.

در اینجا نکته این است که «استقرای ریاضی» ، **کمی بد نامگذاری شده است**، زیرا کاملاً **استدلال استنتاجی** می‌باشد.

مثال. ثابت کنید: برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ ، $\prod_{j=۲}^{n}\left(۱-\frac{۱}{j}\right)=\frac{۱}{n}$.

برهان. گزارهٔ $P(n)$ به صورت $\prod_{j=۲}^{n}\left(۱-\frac{۱}{j}\right)=\frac{۱}{n}$ است با مجموعهٔ مرجع $\{۲,۳,۴,\ldots\}$. پس باید ثابت کنیم $P(۲)$ و برای هر $k \geq ۲$، $P(k) \rightarrow P(k+۱)$.

۱) مرحلهٔ پایه. $P(۲); \prod_{j=۲}^{۲}\left(۱-\frac{۱}{j}\right)=\frac{۱}{۲}$ را ثابت کنید. این عبارت بدست می‌آید. زیرا $\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}$

۲) مرحلهٔ استقرا.

$P(k): \prod_{j=۲}^{k}\left(۱-\frac{۱}{j}\right)=\frac{۱}{k}$ را فرض کنید.

$P(k+۱): \prod_{j=۲}^{k+۱}\left(۱-\frac{۱}{j}\right)=\frac{۱}{k+۱}$ را ثابت کنید.

داریم: با استفاده از تعریف بازگشتی $\prod_{j=۲}^{k+۱}\left(۱-\frac{۱}{j}\right)=\prod_{j=۲}^{k}\left(۱-\frac{۱}{j}\right).\left(۱-\frac{۱}{k+۱}\right)$

$$=\frac{۱}{k}.\left(۱-\frac{۱}{k+۱}\right) \qquad \text{از } P(k)$$

$$=\frac{۱}{k}.\left(\frac{k+۱}{k+۱}-\frac{۱}{k+۱}\right)$$

$$=\frac{۱}{k+۱}. \qquad \blacksquare$$

مجموعه تمرینهای ۲.۷

گزاره‌های زیر را به وسیلهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید.

۱. $\forall n \in N$ ،$۲^n > n$.

۲. $\forall n \in N$ ،$۳^n > n$.

۳. $\forall n \in N$ ،$۲ \leq ۲^n$.

۴. $\forall n \in N$ ،$۲n \leq ۲^n$. راهنمایی: از تمرین ۳ استفاده کنید.

۵. $\forall n \in N$ ،$n < n+۱$.

۶. $\forall n \in N$ ،$2^{n+1} \leq n!$. راهنمایی: $1 = 1!$ ،$(k+1)! = (k+1)k!$

۷. $\forall n \geq 4$ ،$2^n < n!$. ثابت کنید هرگاه $n = 3$ ، $2^n < n!$ نادرست است.

۸. فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبت هستند.
ثابت کنید: $\forall n \in N(a < b \to a^n < b^n)$.

۹. $\forall n \in N$ ،$(2n)! < 2^{2n}(n!)$.

۱۰. $\forall n \in N$ ، $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. راهنمایی: از $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ استفاده کنید.

۱۱. **قضیهٔ دموآور:** $\forall n \in N$ ، $\forall u \in R$:$(\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i\sin(nu)$ $i^2 = -1$.

۱۲. $\forall n \in N$ ، $\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

۱۳. $\sin u \neq 0$.$\forall n \in N$ ، $\prod_{j=2}^{n} \cos 2^{j-1}u = \frac{\sin 2^n u}{2^n \sin u}$.

۱۴. **نامساوی برنولی:** $a > -1 \to \forall n \in N$ ،$(1+a)^n \geq 1 + an$.

۱۵. $\forall n \in N$ ، $D(x^n) = nx^{n-1}$. راهنمایی: فرض کنید $x^0 = 1$ و از قاعدهٔ ضرب مشتق‌ها استفاده کنید.

۱۶. $\forall n \in N$ ، $D^n(\log_e x) = (-1)^{n+1}(n-1)!x^{-n}$.

۱۷. $\forall n \geq 5$ ،$2^n > n^2$.

۱۸. $\forall n \geq 6$ ،$n^3 < n!$.

۱۹. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n^2+2)}{2}$ ؛ یعنی، $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n^2+n)}{2}$.

۲۰. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 2$.

۲۱. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=1}^{n} j.j! = (n+1)! - 1$.

۲۲. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

۲۳. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(j+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

۲۴. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

۲۵. $\forall n \in N$ ، $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} > \sqrt{n}$

۲۶. با اعداد داده شده a_n، . . . ،a_1 و با استفاده از $|x+y| \leq |x|+|y|$، ثابت کنید $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

۲۷. مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه، $n \geq 2$، داده شده‌اند که هیچ سه تایی از آنها در یک امتداد نیستند. ثابت کنید تعداد خطوط مستقیمی که این نقاط را به هم وصل می‌کنند برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

۲۸. $\forall m \geq 2 \quad \forall n \in N$ ،$m^n > n$. راهنمایی: $m \geq 2$ای را به طور دلخواه بگیرید. حال با استفاده از MI ثابت کنید $\forall n \in N$ ،$m^n > n$.

۲۹. $\forall n \in N$ ، $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} (r \neq 1)$

این عبارت ، رابطهٔ مجموع جملات یک تصاعد است.

۳۰.

$$\forall n \in N, a + (a+d) + \cdots + (a+nd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a+nd)$$

این عبارت، رابطهٔ مجموع جملات یک تصاعد حسابی است.

۳۱. چرا گزاره‌های زیر را نمی‌توان توسط MI اثبات کرد؟

a) $\forall n \in N$ ،$3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

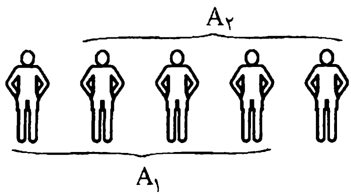
b) $\forall n \in N$ ، $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2 + 3$.

۳۲. اشتباه این برهان را بیابید.

قضیه. همهٔ افراد از یک جنسیت هستند.

برهان. فرض کنید $P(n)$ گزارهٔ زیر باشد.

اگر A مجموعه‌ای شامل n نفر باشد، آنگاه تمام افراد جنسیت یکسانی دارند. بوضوح، $P(۱)$ درست است. فرض کنید $P(k)$ درست باشد. فرض کنید A مجموعه‌ای از $(k+۱)$ نفر باشد. پس A اجتماع دو مجموعهٔ متداخل $A_۱$ ، $A_۲$ هر یک شامل K نفر می‌باشد. (توضیح زیر را هرگاه $n = ۵$ درنظر بگیرید.)



از $P(k)$ داریم که تمام افراد داخل $A_۱$، همجنس هستند، و تمام افراد داخل $A_۲$ هم همجنس می‌باشند. به این دلیل که $A_۱$ و $A_۲$ متداخلند ، تمام افراد داخل A همجنس می‌باشند.

۳۳. برهان به روش حالتها و استقرای ریاضی را جهت اثبات گزارهٔ زیر بکار برید.

برای هر عدد طبیعی n، $-i$ یا i، -۱ ، $i^n = ۱$ که $i^۲ = -۱$.

۳۴. $P(n) : n^۲ = n$ را درنظر بگیرید.

a) با یافتن یک مثال نقض نشان دهید $\forall n P(n)$ نادرست است.

b) $P(۱)$ را ثابت کنید.

c) نقیض $\forall k[P(k) \rightarrow P(k+۱)]$ را تشکیل دهید. نقیض فوق را ثابت کنید.

۳۵. $P(n) : n = n + ۱$ را درنظر بگیرید.

a) با یافتن یک مثال نقض نشان دهید $\forall n P(n)$ نادرست است.

b) ثابت کنید $P(۱)$ نادرست است.

c) $\forall k[P(k) \rightarrow P(k+۱)]$ را ثابت کنید.

۳۶. $$\frac{۱}{۱\cdot۲\cdot۳} + \frac{۱}{۲\cdot۳\cdot۴} + \frac{۱}{۳\cdot۴\cdot۵} + \cdots + \frac{۱}{n(n+۱)(n+۱)} = \frac{n(n+۳)}{۴(n+۱)(n+۲)}$$

۳۷. $$\left(۱+\frac{۱}{۱}\right) + \left(۱+\frac{۱}{۲}\right) + \left(۱+\frac{۱}{۳}\right) \cdots \left(۱+\frac{۱}{n}\right) = n+۱$$

۳۸. $\cos n\pi = (-۱)^n$. [راهنمایی: از اتحاد $\cos(\alpha+\beta)$ استفاده کنید.]

۳۹. $$\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{j(j+۱)} = \frac{۱}{n+۱}$$

۴۰. برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$،

$$\log_a(b_1 b_2 \dots b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_n$$

برای اعداد مختلط دلخواه z_1، ...، z_n گزاره‌های زیر را ثابت کنید هرگاه، $i^2 = -1$ و $\bar{z}$، مزدوج z باشد، (اگر z عدد مختلطی به شکل $z = a + b_i$ باشد، آنگاه $\bar{z} = a - bi$.)

۴۱. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

۴۲. $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$.

۴۳. $\overline{z_1 . z_2 \dots z_3} = \overline{z_1}.\overline{z_2}\dots\overline{z_n}$.

۴۴. i^n برابر با یکی از اعداد، ۱، ۱ـ، i یا $-i$ می‌باشد.

برای اعداد صحیح a و b، b یک عامل a است اگر عدد صحیحی مثل c وجود داشته باشد که $a = bc$. گزاره‌های زیر را برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید.

۴۵. ۳ یک عامل $n^3 + 2n$ است.

۴۶. ۲ یک عامل $n^2 + n$ است.

۴۷. ۵ یک عامل $n^2 - n$ است.

۴۸. ۳ یک عامل $n(n+1)(n+2)$ است.

۴۹. مسئله برج هانوی. سه میخ روی یک تخته موجودند. در روی یک میخ، n دیسک، هر یک کوچکتر از دیسک پایینی، وجود دارد. مسئله، جابجایی این تودهٔ دیسکها به یک میخ دیگر است. ترتیب نهایی باید همین ترتیب باشد، لیکن شما در هر بار تنها می‌توانید یک دیسک را جابجا کنید و نمی‌توانید دیسک بزرگتر را روی دیسک کوچکتر قرار دهید.

a) کمترین تعداد جابجایی‌ها برای انتقال سه دیسک چند تاست؟

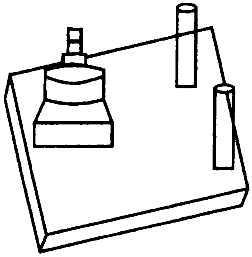
b) کمترین تعداد جابجایی‌ها برای انتقال چهار دیسک چندتاست؟

c) کمترین تعداد جابجایی‌ها برای انتقال دو دیسک چندتاست؟

d) کمترین تعداد جابجایی‌ها برای انتقال یک دیسک چندتاست؟

e) رابطه‌ای برای کمترین تعداد جابجایی‌ها برای انتقال n دیسک حدس بزنید.

آنرا با استقرای ریاضی ثابت کنید.



۲.۸ برهان خلف

سر آرتو کانن دویل، **علامت چهار** «تمام حقایق را حذف کنید، و آنچه می‌ماند باید درستی را نقض کند.» [شرلوک هلمز]

یک **تناقض** گزاره‌ای است که بدون توجه به ارزش درستی اجزای سازنده‌اش، نادرست است. برای مثال، گزارهٔ

$$R\wedge \sim R$$

به صورتی که در جدول درستی آن نشان داده شده است، همواره نادرست است.

R	$\sim R$	$R\wedge \sim R$
T	F	F
F	T	F

یک **برهان توسط تناقض** برای یک گزاره مثل

$$P$$

برهانی است که $\sim P$ را فرض می‌کند و گزاره‌ای به شکل $R\wedge \sim R$ را نتیجه می‌گیرد که R گزاره‌ای شامل P، یک اصل موضوع، یا هر قضیهٔ ثابت شده از قبل می‌باشد. این عبارت توسط اصل موضوع $[\sim P \to (R\wedge \sim R)] \to P$ تایید می‌شود. به صورت شهودی، P تنها می‌تواند درست یا غلط باشد، نه هردوی آنها. اگر نقیض آن را درست فرض کنیم و گزاره‌ای را که هم درست و هم نادرست است، نتیجه بگیریم، آنگاه $\sim P$ نمی‌تواند درست باشد بنابراین P درست است.

عبارات **برهان خلف**، به معنی «ساده کردن به یک عبارت محال» و **برهان غیرمستقیم**، نیز مربوط به برهان توسط تناقض هستند.

هنگام انجام برهان توسط تناقض، اهمیت قادر بودن به تشکیل نقیض گزاره‌ها، مشخص می‌شود. برای شروع این چنین برهانهایی، باید بدانید که چگونه نقیض را تشکیل دهید.

مثالها. برای شروع یک برهان توسط تناقض برای

$\forall x P(x)$ (a

$\exists x P(x)$ (b

$P \to Q$ (c

$Q \to \exists x P(x)$ (d

نقیضهای زیر را فرض می‌کنیم

$\exists x \sim P(x)$ (a

$\forall x \sim P(x)$ (b

$P \wedge \sim Q$ (c

$Q \wedge \forall x \sim P(x)$ (d

برهان توسط تناقض روش برهان دیگری برای اثبات گزاره‌هایی به شکل

$$\forall x P(x)$$

یا

$$\exists x P(x)$$

فراهم می‌کند. در واقع این برهان، روش دیگری را برای اثبات هر گزاره‌ای فراهم می‌کند.

گزاره‌های زیادی به شکل $\exists x P(x)$ را مستقیماً، با نشان دادن xای که $P(x)$ درست باشد اثبات کرده‌ایم. یک برهان توسط تناقض، برای $\exists x P(x)$ ممکن است xای به نمایش نگذارد؛ یعنی می‌توان بدون نمایش یک x، وجود آن را اثبات کرد. این حالت در حساب دیفرانسیل، وقتی یک برهان غیرمستقیم[1] برای گزارهٔ

$$\exists x, \lim_{n\to\infty} \int_{۱}^{n} e^{-y^{۲}} dy = x$$

می‌تواند بدون نمایش یک x داده شود، شرح داده می‌شود.

برهان قضایای وجود در معادلات دیفرانسیل، شرحهای دیگری از این دست را فراهم می‌کنند.

۱ــ توماس، جرج ب. **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی**، انتشارات ادیسون ـ وزلی. ویرایش پنجم، ۱۹۷۹ صفحهٔ ۳۷۹ را مشاهده کنید.

اثبات گزاره‌ای به شکل $P \to Q$ توسط برهان توسط تناقض

بیشتر برهانهای توسط تناقض، برهان گزاره‌هایی به شکل $P \to Q$ هستند. برای اثبات گزاره‌ای به شکل

$$P \to Q$$

با برهان توسط تناقض، نقیض آن

$$\sim (P \to Q)$$

یا $P \wedge \sim Q$ را فرض کنید. سپس P و $\sim Q$ را درست فرض کرده، گزاره‌ای به شکل $R \wedge \sim R$ نتیجه بگیرید.

مثال ۱. ثابت کنید: برای هر x، $x \neq ۰ \to x^{-۱} \neq ۰$.

برهان. به روش برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنیم نقیض آن برقرار باشد عددی مثل x وجود دارد که $x \neq ۰ \wedge x^{-۱} = ۰$.

بنا به $M۴$ داریم،

$$x.x^{-۱} = ۱.$$

بنابراین، با استفاده از $x^{-۱} = ۰$ و $P۳$، $x \cdot x^{-۱} = x \cdot ۰ = ۰$.

پس $۰ = ۱$. بنابراین $۰ = ۱ \wedge ۰ \neq ۱$ که تناقض است.

پس برای هر x،

$$x \neq ۰ \to x^{-۱} \neq ۰. \blacksquare$$

مثال ۲. ثابت کنید: برای هر x و هر y، اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x + y$ گنگ است.

برهان. گزارهٔ فوق به شکل $\forall x \wedge \forall y, (P \wedge Q) \to R$ است که

P: x گویاست،

Q: y گنگ است،

R: $x + y$ گنگ است.

به روش برهان خلف فرض کنید

$$\exists x \exists y, \sim [(P \wedge Q) \to R]$$

یا $\exists x \exists y, (P \wedge Q) \wedge \sim R$.

یعنی فرض کنید x و yی وجود دارند که

x گویاست،

y گنگ است،

$x+y$ گنگ نیست (گویا).

به خاطر اینکه x و $x+y$ گویا هستند، داریم،

$x = \frac{b}{a}$ به ازای اعداد صحیح a و b،

$x+y = \frac{c}{d}$ بازای اعداد صحیح c و d.

پس

$$(x+y) - x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

$$= \frac{cb - da}{db}$$

به این دلیل که $cb - da$ و db هر دو اعدادی صحیح هستند $(x+y) - x$ عددی گویاست ، اما $(x+y) - x = y$ ، پس y گویا است. یعنی، (y گنگ است) $\sim$: $\sim Q$.

بنابراین داریم $Q \wedge \sim Q$، که یک تناقض است. ■

اکنون بیایید سه روش برهان برای اثبات گزاره‌های به شکل $P \to Q$ را مقایسه کنیم. فرض کنید A_n، ...، A_1 اصول موضوع و قضایای ثابت شدهٔ قبلی باشند.

RCP: $A_1, \ldots, A_n, P \vdash Q$

عکس نقیض: $A_1, \ldots, A_n, \sim Q \vdash \sim P$.

تناقض: $A_1, \ldots, A_n, P, \sim Q \vdash R \wedge \sim R$.

مثالها. برهانهای زیر، مثالهایی از برهان خلف هستند.

$$A_1, \ldots, A_n, P, \sim Q \vdash P \wedge \sim P$$

$$A_1, \ldots, A_n, P, \sim Q \wedge \sim Q$$

$$A_1, \ldots, A_n, P, \sim Q \vdash A_i \wedge \sim A_i, A_i \in \{A_1, \ldots, A_n\}$$

با مقایسه سه روش فوق، می‌بینیم که با RCP، P را به قصد صریح نتیجه‌گیری Q فرض می‌کنیم. با عکس نقیض، $\sim Q$ را به قصد صریح نتیجه‌گیری $\sim p$ فرض می‌کنیم. اما در بکارگیری برهان توسط تناقض، **هر دوی** P و $\sim Q$ را فرض می‌کنیم و سعی می‌کنیم هر گزاره‌ای مثل R و نقیضش $\sim R$ را نتیجه بگیریم. $\sim R$ می‌تواند $\sim P$، Q یا $\sim A_i$ بازای A_i شناخته شده، باشد یا یک گزاره و نقیضش که از A_n، ...، A_1، P و $\sim Q$ نتیجه شده باشند، باشد.

برهان توسط عکس نقیض و برهان توسط تناقض در حکم، $\sim P$ مشابهند، ولی یک برهان توسط تناقض برخلاف عکس نقیض، P را فرض می‌کند. برای مثال، در برهان ـ مثال ۱، تناقض در یک حقیقت دانسته از قبل می‌باشد. در برهان مثال ۲ تناقض در یکی از بخشهای تشکیل‌دهندهٔ گزارهٔ فوق است.

مثال ۳. فرض کنید f یک تابع باشد.

ثابت کنید: اگر برای هر $p > \circ$ و هر x، $f(x+p) = f(x)$، آنگاه $f(x)$ ثابت است. (۱)

برهان.

a) گزارهٔ (۱) را به شکل نمادگذاری منطقی تبدیل کنید.

f ثابت است $\rightarrow [\forall p > \circ \forall x, f(x+p) = f(x)]$.

b) نقیض گزارهٔ (۱) را تشکیل دهید.

f ثابت نیست $\wedge [\forall p > \circ \forall x, f(x+p) = f(x)]$.

برای تناقض ، نقیض (۱) را فرض کنید. حال f ثابت نیست اگر و تنها اگر $f(x) \neq f(y)$ ، $\exists x \exists y$.

بنابراین x و y وجود دارند که $f(x) \neq f(y)$. حال $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$.

برای توابع ، همیشه درست است. توسط عکس نقیض، داریم که

$$f(x) \neq f(y) \rightarrow x \neq y.$$

بنابراین، به دلیل اینکه $x \neq y$ ، پس $x < y$ یا $y < x$.

حالت (۱) $x < y$.

با استفاده از $P1$، $p' > \circ$ وجود دارد که $x + p' = y$.

بنابراین $f(x+p') = f(y)$.

اما از آنجا که $p' > \circ$، توسط نقیض (۱) داریم که $f(x+p') = f(x)$.

پس $f(x) = f(y)$. بنابراین تناقض $f(x) = f(y) \wedge f(x) \neq f(y)$، را داریم که از نقیض (۱) نتیجه شده است.

حالت (۲) $y < x$. مشابه حالت ۱.

به این دلیل که در هر دو حالت به تناقض رسیدیم، (۱) را اثبات کرده‌ایم. یعنی، از گزارهٔ نقیض، به یک «یا» رسیدیم و از آن به یک تناقض رسیدیم. ■

مجموعه تمرینهای ۲.۸

هریک ازگزاره‌های زیر را با برهان توسط تناقض ثابت کنید. ابتدا هرگزاره را نقیض کنید. با دقت به تناقض بدست آمده توجه کنید.

برهانهای تمرینهای ۹ـ۱ به دستگاه اعداد حقیقی مربوط است.

۱. برای هر عدد غیرصفر x و هر y، اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x.y$ گنگ است.

۲. برای هر x و هر y، $(x \neq ۰ \wedge y \neq ۰) \rightarrow xy \neq ۰$

۳. برای هر x $x > ۰ \rightarrow x^{-۱} > ۰$.

۴. برای هر x $x < ۰ \rightarrow x^{-۱} < ۰$.

۵. برای هر $x > ۰$، $\sqrt{x+۱} > \sqrt{x}$. راهنمایی: از این حقیقت که برای هر x، $x < x + ۱$ است استفاده کنید.

۶. برای هر $x > ۰$، $x + x^{-۱} \geq ۲$.

۷. a) عدد گنگی مثل a و عدد گنگی مثل b وجود دارد که ، a^b گویاست.

b) آیا این برهان توسط تناقض ، a و b را که a^b گویا باشد نشان می‌دهد؟

۸. در دستگاه اعداد حقیقی گزارهٔ $\forall x$ ،$x + ۰ = ۰ + x = x$ درست است. فرض کنید عدد حقیقی دیگری مثل k وجود دارد طوری که $\forall x$ ،$x + k = k + x = x$ و $k \neq ۰$. یک تناقض بدست آورید.

۹. در دستگاه اعداد حقیقی گزارهٔ $\forall x$ ،$x \cdot ۱ = ۱ \cdot x = x$ درست است.

فرض کنید عدد حقیقی دیگری مثل k وجود داشته باشد که $\forall x$ ،$x.k = k.x = x$ و $k \neq ۱$.

یک تناقض بدست آورید.

برهانهای تمرینهای ۱۵ـ۱۰ به اعداد صحیح مربوطند. حتی در صورت ارائه برهان توسط عکس نقیض در قبل، یک برهان خلف ارائه دهید.

۱۰. برای هر x، اگر $x^۲$ زوج باشد، آنگاه x زوج است.

۱۱. برای هر x، اگر $x^۲$ فرد باشد، آنگاه x فرد است.

۱۲. برای هر x، اگر x زوج باشد، آنگاه $x + 1$ فرد است.

۱۳. برای هر $x > 0$ ، عدد زوج m وجود دارد طوری که $x < m$.

۱۴. برای هر $x > 0$، عدد فرد m وجود دارد طوری که $x < m$.
برهان زیر به دستگاه اعداد حقیقی مربوط است.

۱۵. برای هر عدد مثبت a و هر عدد مثبت b، داریم

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

۲.۹ برهان وجود و یکتایی

گزارهٔ xای وجود دارد که $P(x)$ (۱)
به صورت $\exists x P(x)$ نشان داده می‌شود.
گزارهٔ حقیقتاً یک x وجود دارد که $P(x)$ (۲)
به صورت $\exists ! x P(x)$ نشان داده می‌شود.
دیگر جملاتی که معنی مشابهی (۲) دارند عبارتند از
x یکتایی وجود دارد که $P(x)$،
حداقل یک x وجود دارد که $P(x)$ و حداکثر یک x موجود است که $P(x)$،
یک و تنها یک x وجود دارد که $P(x)$.

اثبات گزاره‌هایی به شکل $\exists ! x P(x)$

در برهان $\exists ! x P(x)$ دو قسمت وجود دارد.
a) **بخش وجود** . اثبات

$$\exists x P(x)$$

یعنی، ثابت کنید xای وجود دارد طوری که $P(x)$ درست باشد.
b) بخش یکتایی. در اینجا باید ثابت کنیم که اگر دو عنصر x و z هستند که $P(x)$ درست است و $P(z)$ درست است، آنگاه آن دو باید مساوی باشند. بنابراین باید ثابت کنیم. $\forall x \forall z\ [P(x) \wedge P(z)] \rightarrow x = z$.

مثال. ثابت کنید: در دستگاه اعداد حقیقی x یکتایی وجود دارد که برای هر y، $x + y = y + x = y$.
با تبدیل به حالت نمادین منطقی می‌بینیم که باید ثابت کنیم $\exists! x \forall y$، $x + y = y + x = y$.
برهان.
a) **بخش وجود.** ثابت کنید

$$\exists x P(x)$$

که $P(x)$ به صورت $\forall y$ ، $x + y = y + x$ می‌باشد.
به این دلیل که $\forall y, \circ + y = y + \circ = y$ می‌دانیم که $\circ$ چنان xای می‌باشد.
b) **بخش یکتایی.** ثابت کنید: $\forall x \forall z$ ،$[P(x) \wedge P(z)] \rightarrow x = z$.
فرض کنید x و z دلخواه باشند و فرض کنید $P(x) \wedge P(z)$ درست باشد.
پس

$$(۱) \qquad \forall y, x + y = y + x = y$$

و

$$(۲) \qquad \forall y, z + y = y + z = y.$$

حال از (۱) می‌توانیم z را با y تعویض کنیم و بدست آوریم

$$x + z = z + x = z.$$

مشابهاً از (۲) می‌توانیم x را با y تعویض کنیم و بدست آوریم

$$z + x = x + z = x.$$

بنابراین $x = z$. ■
برای تکمیل بخش یکتایی برهان، می‌توانستیم یک برهان با تناقض انجام دهیم:
از بخش وجود، می‌دانیم که $\circ$ چنان عددی می‌باشد. حال فرض کنید عدد دیگری مثل k وجود دارد که برای هر x،

$$x + k = k + x = x$$

و طوری که $k \neq \circ$. پس به‌خاطر اینکه این گزاره برای هر x برقرار است، برای $\circ$ هم برقرار است. یعنی،

$$\circ + k = k + \circ = \circ$$

اما، ما همچنین می‌دانیم که $k + \circ = k$. بنابراین $k = \circ$، که این یک تناقض است. ■

مجموعه تمرینهای ۲.۹

گزاره‌های زیر را به حالت نمادی منطقی تبدیل کنید.

۱. خط یکتای l وجود دارد طوری که $P \in l, Q \in l$.

۲. دقیقاً یک خط شامل نقاط P و Q وجود دارد.

۳. دقیقاً یک x وجود دارد طوری که برای هر y، $x + y = y + x = y$.

۴. یک و تنها یک x وجود دارد طوری که برای هر y، $x.y = y.x = y$.

۵. برای هر x و هر y ، z یکتایی وجود دارد که $x + y = z$.

۶. برای هر x، y یکتای موجود است که $x + y = y + x = ۰$.

۷. برای هر x، y یکتایی وجود دارد که اگر $x \neq ۰$، آنگاه $x.y = ۱$.

ثابت کنید:

۸. دقیقاً یک x وجود دارد که برای هر y، $x.y = y.x = y$.

۹. برای هر y, x یکتایی وجود دارد که $x + y = y + x = ۰$.

۱۰. برای هر x، y یکتایی موجود است که اگر $x \neq ۰$، آنگاه $x.y = y.x = ۱$.

۲.۱۰ خلاقیت در برهان

در قسمت قبلی این فصل، شما روشهای متعددی را برای برهان آموختید. مقصود این است که این روشها ، به ابزار برهان شما تبدیل می‌شوند، به همان ترتیب که قلم‌موها و رنگها به ابزار یک هنرمند تبدیل می‌شوند. ولی اینکه یک هنرمند ابزارها را دارا باشد، تضمین نمی‌کند که او بتواند یک نقاشی بوجود آورد. مشابهاً، شناخت روشهای برهان، تضمین نمی‌کند که بتوانید یک برهان ایجاد کنید. اما، رویه‌های کمکی هستند که به عنوان کمکی در خلاقیت برهان، پیگیری شوند. حال این رویه‌ها را بیان می‌کنیم.

تبدیل به حالت نمادین منطقی

یک جملهٔ معمول هنگام انجام برهان این است که «نمی‌دانم از کجا شروع کنم!». یک رویه برای پیگیری، با حل مسئله در جبر پایه قابل مقایسه است.

مقایسه کنید:

مسئله جبری: طول یک مستطیل سه فوت از عرض آن بیشتر است و مساحت آن ۵۴ فوت مربع است.
ابعاد آن را پیدا کنید.
استراتژی:
۱) به یک معادله تبدیل کنید:
$w(w+۳) = ۵۴$
۲) معادله را بررسی کنید، از بین:
a) تجزیه
b) مربع کامل کردن
c) استفاده از فرمول درجهٔ دوم
یک روش حل را انتخاب کنید.

مسئله برهانی: هر مجموع یک عدد گویا با یک عدد گنگ ، گنگ می‌باشد. این را ثابت کنید.
استراتژی:
۱) به نمادگذاری منطقی تبدیل کنید:
$\forall x \forall y$، (x گویا $\wedge$ y گنگ)
$\rightarrow$ $x+y$ گنگ
۲) گزارهٔ تبدیل شده را بررسی کنید، از بین:
a) قاعدهٔ برهان گزاره‌های شرطی
b) عکس نقیض
c) برهان خلف
یک روش برهان را انتخاب کنید.

برای حل یک مسئله جبری می‌توانیم آن را به یک معادله تبدیل کنیم.
آنگاه باتوجه به ساختار معادله، می‌توانیم یک روش حل انتخاب کنیم.
مشابهاً ، برای خلق یک برهان ، می‌توانیم آن را به نمادگذاری منطقی تبدیل کنیم.
آنگاه با توجه به ساختار گزارهٔ تبدیل شده، می‌توانیم یک روش برهان انتخاب کنیم.

در جبر، شما روش‌های حل معادلات را قبل از شروع مسائل کاربردی مطالعه کردید. در اینجا ابتدا روشهای برهان را مطالعه کرده‌اید. در باقی کتاب و در هر ریاضیاتی که بعداً می‌خوانید، از این روشهای برهان، استفاده می‌کنیم. دانستن یک روش برهان که می‌تواند استفاده شود، هنوز موفقیت را تضمین نمی‌کند، برای مثال، فرض کنید می‌خواستید گزاره‌ای به شکل $P \rightarrow Q$ را با استفاده از **قاعدهٔ برهان گزاره‌های شرطی**، ثابت کنید. شما باید P را فرض کنید و Q را نتیجه بگیرید. سؤالی که معمولاً پرسیده می‌شود این است که «چگونه از P به Q برسم؟». هیچ مسیر ویژه‌ای به سوی موفقیت وجود ندارد؛ مطمئناً، دانستن اینکه P را فرض کنیم و Q را نتیجه بگیریم، قدمی در جهت صحیح است. روش برهان، ساختار برهان را بدست می‌دهد؛ ساختن این ساختار معمولاً کار خلاقانه‌ای است. رویه‌های زیر، رویه‌های مفیدی در فهم

روشهای برهان می‌باشند.

تشابه

در یکی از مثالهای حل شدهٔ قبلی برهان گزارهٔ

a^2 زوج است $\rightarrow$ a زوج است.

را ارائه دادیم. در تمرینهای سابق، نیز ثابت کردید

a^2 فرد است $\rightarrow$ a فرد است.

آیا توجه کردید که برهانها، مشابه بودند؟ یعنی، برهان مثال فوق باید یک روش اثبات گزارهٔ تمرین را به ذهن رسانده باشد. بنابراین کمک مهمی در انجام برهانها، گرفتن ایده از دیگر برهانها می‌باشد. این عبارت ، با نظرات ریاضیدانانی که معتقدند، برای یک ریاضیدان خوب بودن، شما به تمرین زیادی نیاز دارید؛ قرار گرفتن زیاد در معرض برهانهای مختلف، تایید می‌شود.

فرآیند تحلیلی

(کار رو به عقب)

می‌خواهید $P \rightarrow Q$ را ثابت کنید. با Q شروع کنید و سعی کنید R ای پیدا کنید که $R \rightarrow Q$. سپس سعی کنید S ای پیدا کنید که $S \rightarrow R$. آنگاه احتمالاً کشف می‌کنید که $P \rightarrow S$.

فرض کنید: P

نتیجه بگیرید: Q

فرآیند تحلیلی:

Q اگر R $\quad (R \rightarrow Q)$

R اگر S $\quad (S \rightarrow R)$

S اگر P $\quad (P \rightarrow S)$

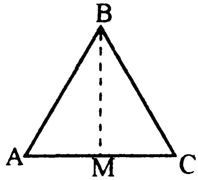
بنابراین $P \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow Q$

$$\therefore P \rightarrow Q$$

هنگام خواندن یک برهان $P \rightarrow Q$ در یک کتاب ، خواننده ممکن است تنها دنبالهٔ $P \rightarrow S \rightarrow$ $R \rightarrow Q$ را مشاهده کند و از چگونگی فهمیدن آن توسط نویسنده متعجب شود. اگر فرآیند تحلیلی صورت

می‌گرفت، این تعجب احتمالاً پیش نمی‌آید.

مثال. ΔABC را درنظر بگیرید.



ثابت کنید: $\overline{AB} \cong \overline{CB} \rightarrow \angle A \cong \angle C$.

برهان. فرض کنید: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

نتیجه بگیرید: $\angle A \cong \angle C$

$\angle A$ و $\angle C$ را درنظر بگیرید. **این زوایا همنهشت هستند اگر زوایای متناظر در مثلثهای همنهشت** باشند. ممکن است به رسم یک خط از B تا نقطهٔ وسط AC یعنی M، فکر کنید. سپس ، به صورت تحلیلی،

$\angle A \cong \angle C$ اگر $\angle AMB = \angle CMB$ $\quad (SSS)$

اگر $\Delta AMB \cong \Delta CMB$

a) $\overline{BM} = \overline{BM}$ (پاره‌خط یکسان)

b) $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ ($\overline{BM}$ ، $\overline{AC}$ را نصف می‌کند)

c) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (فرض شده است)

پس برهان با گامهای (c)، (b) و (a) شروع می‌شود؛ نتیجه می‌گیریم $\Delta AMB \cong \Delta CMB$ و نهایتاً $\angle A \cong \angle C$. ■

شروع با حکم

در یادآوری این که به کار بردن فرآیند تحلیلی از نظر منطقی معتبر است، باید دقت شود. فرآیندی که می‌خواهیم شرح دهیم، ممکن است از نظر منطقی معتبر نباشد، اما می‌تواند به یک عبارت معتبر (برهان) رهنمون شود.

فرض کنید می‌خواهید $P \rightarrow Q$ را ثابت کنید. با Q شروع کنید و هر چقدر می‌توانید از آن نتیجه بگیرید. برای مثال، ممکن است ثابت کنید $Q \rightarrow X \rightarrow S \rightarrow P$، و سپس تلاش کنید تا گامهایتان را برگردانید. این یک برهان نیست، چرا که $(Q \rightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ یک گزارهٔ همیشه درست نمی‌باشد.

با اینکه روش قبل یک برهان نیست، اما می‌توانید گامها را برگردانید تا ببینید که آیا جهت نتیجه‌گیری‌ها

می‌تواند برگردد یا نه:

$$Q \to X \to S \to P$$
$$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$$
$$? \qquad ? \qquad ?$$

اگر چنان باشد، آنگاه $P \to S \to X \to Q$

$$\therefore P \to Q$$

و شما یک برهان خواهید داشت.

مثال. $f(x) = ۲x + ۱$ و $\epsilon > ۰$ داده شده‌اند. $\delta > ۰$ را طوری بیابید که $|x| < \delta \to |f(x) - ۱| < \epsilon$.

با

$$|f(x) - ۱| < \epsilon$$

شروع می‌کنیم. سپس،

$$\begin{aligned} |f(x) - ۱| < \epsilon &\to |(۲x + ۱) - ۱| < \epsilon \\ &\to |۲x| < \epsilon \\ &\to -\epsilon < ۲x < \epsilon \\ &\to \frac{-\epsilon}{۲} < x < \frac{\epsilon}{۲} \\ &\to |x| < \frac{\epsilon}{۲} \end{aligned}$$

با رجوع به عقب، می‌بنیم که هر فلش می‌تواند برعکس شود؟
یعنی برای $\delta = \frac{\epsilon}{۲}$ داریم،

$$|x| < \delta \to |f(x) - ۱| < \epsilon \qquad (۱)$$

معمولاً در چنین برهانی، یک نویسنده می‌گوید «فرض کنید $\delta = \frac{\epsilon}{۲}$ » و سپس (۱) را ثابت می‌کند، چیزی که خواننده را گمراه می‌کند، این است که چگونه نویسنده می‌داند که فرض کند $\delta = \frac{\epsilon}{۲}$. نویسنده آن را می‌داند، زیرا او با حکم شروع کرده است و به صورت بالا ادامه داده است.

مثال ۲. بدست آمدن جوابهای غیرقابل قبول. از حل $x = ۵ + \sqrt{x + ۷}$ $(x \in R)$ می‌توانیم فرض کنیم x عددی است که $x = ۵ + \sqrt{x + ۷}$. توجه کنید که چیزی که، به دنبال آن

هستیم ، جواب است ولی با این فرض که از قبل آن را داریم شروع می‌کنیم. پس،

$$\text{۵} + \sqrt{x + \text{۷}} = x \rightarrow \sqrt{x + \text{۷}} = x - \text{۵}$$
$$\rightarrow x + \text{۷} = (x - \text{۵})^{\text{۲}}$$
$$\rightarrow x^{\text{۲}} - \text{۱۱}x + \text{۱۸} = \text{۰}$$
$$\rightarrow (x - \text{۹})(x - \text{۲}) = \text{۰}$$
$$x = \text{۹} \vee x = \text{۲}$$

آنچه که نشان داده‌ایم این است که

$$\text{۵} + \sqrt{x + \text{۷}} = x \rightarrow x = \text{۹} \vee x = \text{۲}$$

باید درستی $x = \text{۹} \vee x = \text{۲} \rightarrow \text{۵} + \sqrt{x + \text{۷}} = x$ را تعیین کنیم.

برای ۹: $\text{۵} + \sqrt{\text{۹} + \text{۷}} = \text{۵} + \text{۴} = \text{۹}$ (درست)

برای ۲: $\text{۵} + \sqrt{\text{۲} + \text{۷}} = \text{۵} + \text{۳} = \text{۸}$ (نادرست)

می‌بینیم که اگر $x = \text{۹}$ آنگاه $\text{۵} + \sqrt{x + \text{۷}} = x$.

استدلال غلط باعث بدست آمدن جواب غیرقابل قبول $x = \text{۲}$ شده است.

هنگامی که با حکم شروع می‌کنید دیدگاه منطقی را مد نظر داشته باشید

روش نزدیک شدن اتفاقی. (آزمایش و خطا) شما می‌خواهید $P \rightarrow Q$ را با فرض کردن P و نتیجه گرفتن Q، ثابت کنید. شما راه ویژه‌ای برای رسیدن از P به Q ندارید؛ پس شروع کنید، درگیر شوید، کاری انجام دهید، راه‌های مختلف را امتحان کنید، هر چه را می‌توانید اثبات کنید. ممکن است به برهان برسید. این حالت می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$P \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow S$ ،

$P \rightarrow M \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \vee$ ،

موفقیت! $P \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Q$.

روش نزدیک شدن اتفاقی می‌تواند با روشهای مختلف برهان بکار گرفته شود. RCP را امتحان می‌کنید و به جایی نمی‌رسید. ممکن است بتوانید عکس نقیض را ثابت کنید.

هنگام خواندن برهانها در نوشته‌ها و مجلات ریاضی، خواننده از بن‌بستها و تلاشهای ناموفق که به یک برهان موفقیت‌آمیز منجر شده‌اند، آگاه نیست. این برداشت منجر به این می‌شود که آن شخص تصور کند، ریاضیدان فوق، هیچگاه به بن‌بست نرسیده یا هیچگاه اشتباهی انجام نداده است. تجربه و خطا بخشی از خلاقیت ریاضی است.

کاربرد تعریفها

دیگر رویهٔ مفید، یادآوری تمام تعریفهای مربوط می‌باشد. خواندن یک تعریف و از یاد بردن اهمیت آن در برهانهای بعدی، یک تمایل است. برای نشان دادن این مطلب، فرض کنید تعریف زیر در نظریهٔ مجموعه‌ها داده شده است.

تعریف. برای هر دو مجموعهٔ A و B، $A \subset B$ اگر و تنها اگر برای هر x، $x \in A \to x \epsilon B$.

سپس ، قضیهٔ زیر باید اثبات شود.

قضیه. برای هر دو مجموعهٔ A و B، $A \cap B \subset A$.

برای انجام برهان، شخص B و A را دو مجموعهٔ دلخواه می‌گیرد و ثابت می‌کند $A \cap B \subset A$. مانعی که ممکن است در اینجا به آن برخورد کند مگر اینکه از تعریف استفاده کند، این است که تعبیر کند برای $A \cap B$، مشمول شدن در A به چه معنی است. یعنی، با استفاده از تعریف بدست می‌آید که شخص باید گزارهٔ برای هر x، $x \in A \cap B \to x \in A$ را ثابت کند.

کاربرد قضایایی که قبلاً ثابت شده‌اند

در شروع یک برهان نیز امتحان قضایایی که قبلاً ثابت شده‌اند برای گرفتن نتایجی که ممکن است به برهان مربوط باشند، مفید می‌باشد.

اجازه دهید استراتژیها را برای خلاقیت برهان خلاصه کنیم:

(۱) تبدیل به صورت نمادین منطقی.

(۲) امتحان کردن گزارهٔ تبدیل شده، انتخاب یک روش برهان.

(۳) بعد از یک تلاش منطقی با یک روش برهان، دیگری را امتحان کنید.

(۴) برهانهای مشابه را برای گرفتن راهنمایی امتحان کنید.

(۵) از تعاریف استفاده کنید.

(۶) نتایج قضایای قبلی را بکار برید.

(۷) بدانید که تجربه و خطا بخشی از خلاقیت برهان هستند.

وقتی خواندن کتاب را ادامه می‌دهید، بازخوانی این قسمت از کتاب می‌تواند مفید باشد.

مجموعه تمرینهای ۲.۱۰

۱. توضیح دهید فرآیند تحلیلی چگونه می‌تواند برای اثبات عکس نقیض $P \to Q$ بکار رود.

۲. توضیح دهید فرآیند تحلیلی چگونه می‌تواند برای اثبات $P \to \sim Q$ بکار رود.

برای تمرینهای ۳.۱۰ فرض کنید گزاره‌های زیر اثبات شده‌اند.

a) $A \cup B = B \cup A$.

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $x \in Q \land y \in J \to x + y \in J$

d) جواب $x = ۵ + \sqrt{x + ۷}$ برابر $x = ۹$ است.

e) $A \subset B \to \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$

f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

h) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$

فرض کنید می‌خواستید گزاره‌های تمرینهای ۳.۱۰ را ثابت کنید.
برهانی مشابه برای یکی از گزاره‌های بالا که ممکن است برای راهنمایی امتحان کنید، را بیان کنید.

۳. $B \subset \mathcal{C}A \to A \subset \mathcal{C}B$

۴. $|\int f + g| \leq \int |f| + \int |g|$

۵. $A \cap B = B \cap A$

۶. برای $\sqrt{۲x - ۱} = x - ۲$ جوابی وجود دارد.

۷. $x \in Q \land y \in J \to x - y \in J$

۸. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

۹. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۱۰. $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$

۱۱. جوابی برای تمرین ۶ بیابید.

۱۲. $f(x) = 3x + 2$ و $\epsilon > 0$ داده شده‌اند. $\delta > 0$ را طوری بیابید که

$$|x| < \delta \rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon.$$

فصل (۳)
مجموعه‌ها

۳.۱ خواص مقدماتی مجموعه

این فصل هم فصل‌های قبل را تأمین می‌کند و هم برای دوره‌های پیشرفته آمادگی ایجاد می‌نماید. زیربنای هر دستگاه ریاضی تئوری مجموعه‌ها می‌باشد. در این فصل بسیاری از خواص مجموعه‌ها را ثابت می‌کنیم. ما می‌خواهیم روی هم رفته تئوری مجموعه‌ها را به‌طور غیر رسمی مطالعه نماییم. مطالعهٔ رسمی آن بیشتر برای دوره‌های پیشرفته می‌باشد.

نماد "عدد" در ریاضی تعریف نشده است. مع‌هذا، ما از عدد ایده‌ای داریم. برای مثال با تصورکردن سه شیئی، ایده‌ای راجع به سه به‌دست می‌آوریم. به‌طور مشابه، نمادهای "مجموعه‌ها" و "عضوها"ی مجموعه‌ها تعریف نشده‌اند حتی اگر ما برای آنها ایده‌ای داشته باشیم که آنها چه هستند. مجموعه مرجع U را در نظر می‌گیریم (کلمه "مرجع" نیز تعریف نشده است.) به یاد آورید که $a \in A$ به معنی "a عضوی است" از A.

($\in$ رابطه‌ای تعریف نشده بین عضوها و خود مجموعه‌ها می‌باشد.)

اصل موضوع ۱. (تساوی). $A = B \leftrightarrow \forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$

اصل موضوع ۲. a) $A = U \leftrightarrow \forall x, x \in A$،

b) $\forall x, x \in U$.

اصل موضوع ۲ بیان می‌کند که هر عضو در مجموعه مرجع قرار دارد.

اصل موضوع ۳. a) $A = \phi \leftrightarrow \forall x, x \notin A$،

b) $\forall x, x \notin \phi$

اصل موضوع ۳ بیان می‌کند که مجموعه تهی عضوی ندارد.

اصل موضوع ۴. $U \neq \phi$

اصل موضوع ۴ آنچه را در فصل ۱ گفتیم دوباره بیان می‌دارد. ما تنها مجموعه‌های مرجع ناتهی را در نظر می‌گیریم.

اصل موضوع ۵. $A \notin A$، $x \neq \{x\}$

اصول موضوع ۵ و اصل موضوع ۶ که در ذیل آمده است سعی می‌کنند بعضی از مشکلاتی را در اثر توسعه تئوری مجموعه‌ها بین سالهای ۱۸۷۴ و ۱۸۸۴ توسط جرج کانتور (۱۹۱۸_۱۸۴۵) پدید آمده بود برطرف نماید.

مثالها. هر یک از گزارهای زیر نادرست است.

$\{a, b\} \in \{a, b\}$، $\phi \in \phi$

$\phi = \{\phi\}$، $۳ = \{۳\}$.

اجازه دهید ۳ و $\{۳\}$ را مقایسه کنیم. چرا می‌دانیم که $\{۳\} \neq ۳$؟

بنابه اصل موضوع ۵ این را موجه می‌دانیم. اما به‌طور شهودی تصور ذهنی ما از ۳ یک عدد است و از $\{۳\}$ یک مجموعه. عدد ۳ جدای از مجموعه‌های با سه شیء می‌باشد اما $\{۳\}$ یک مجموعه است با یک شیء، آن هم عدد ۳.

بنابراین تصور ذهنی آنها متمایز است.

بیایید ϕ و $\{\phi\}$ را مقایسه کنیم. دوباره بنابه اصل موضوع ۵، $\{\phi\} \neq \phi$ اما اجازه دهید از فکر شهودی استفاده کنیم. نماد ϕ برای مجموعه تهی به کار می‌رود.

این مجموعه هیچ عضوی ندارد. نماد $\{\phi\}$ برای مجموعه‌ای که یک عضو دارد، خود مجموعه تهی، به کار می‌رود. شما می‌توانید ϕ را یک جعبه خالی تصور کنید و $\{\phi\}$ را یک جعبه خالی درون یک جعبه تصور نمایید. دو نماد متمایزند.

تعریف ۱. $A \subset B \leftrightarrow \forall x, x \in A \to x \in B$

مثالها. هر یک از گزاره‌های زیر درست است.

$\{۳\} \subset \{۳, ۴\}$، $\{۳\} = \{۳\}$، $\{۳\} \subset \{۳\}$، $۳ \in \{۳\}$،

$\phi \in \{\phi\}$، $\phi \subset \{\phi\}$، $\phi \subset \phi$، $\phi = \phi$

توجه نمایید که ϕ، هم عضو $\{\phi\}$ و هم یک زیر مجموعه‌ی آن است. یعنی، درست است که بگوییم $\phi \in \{\phi\}$ و $\phi \subset \{\phi\}$.

اما گزاره‌های زیر نادرست است

$\{۳\} \in \{۳\}$ و $۳ \subset \{۳\}$

اولی بنا به اصل موضوع ۵ نادرست است. دومی نادرست است زیرا ۳ یک مجموعه نمی‌باشد.

اصل موضوع ۶. اگر برای هر $x \in U$، $P(x)$ گزاره‌ای دربارهٔ x باشد، آنگاه مجموعه‌ای مانند B وجود دارد به‌طوری که

a) $P(x)$ درست است $\leftrightarrow x \in B$

b) $B = \{x | x \in \cup \wedge p(x)\}$.

توجه داشته باشید که اصل موضوع ۶ وجود یک مجموعه جواب برای نوع گزاره‌ای که شرح داده شد را بیان می‌کند.

تعریف ۲. a) $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

b) $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

تعریف ۳. a) $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

b) $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

دو مجموعه از هم جدا هستند اگر و فقط اگر $A \cap B = \phi$.

تعریف ۴. a) $\mathcal{C}A = \{x | x \notin A\} = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$

b) $x \in \mathcal{C}A \leftrightarrow x \notin A$

قسمت b) در هر یک از تعریفهای ۴ـ۲، که به دنبال کاربرد اصل موضوع ۶ آمده، تا حدی زاید به‌نظر می‌رسد. برای راحتی بیان شده است. اکنون بعضی از قضایا را ثابت می‌کنیم.

شما می‌توانید از منطق و روشهای برهان بررسی شده در قبل استفاده کنید.

در بیشتر برهانها ما روشهای برهان‌های به کار برده شده را ذکر کردیم. چنانچه روشی ذکر نشده باشد می‌توانید خودتان تصمیم بگیرید.

نکته‌های تحلیل، که در انتهای بعضی از برهانها فهرست کرده‌ایم، چگونگی پدید آمدن برهانها را توضیح می‌دهند. مهم است که توجه نمایید چگونه نتیجه‌های منطقی با بیشتر برهانها ربط پیدا می‌کند.

قضیه ۱. $A = \phi \leftrightarrow \sim \exists x, x \in A$

برهان. روش برهان: رشته ـ اگر و تنها اگر

بنا به اصل موضوع ۳، $A = \phi \leftrightarrow \forall x, x \notin A$

بنا به خواص نقیض. $\longleftrightarrow \sim \exists x, x \in A$ ■

تحلیل: قوانین نقیض را به‌خاطر آورید.

قضیه ۲. به‌ازاء هر زیر مجموعه A از مجموعه مرجع U، $\phi \subset A$.

برهان. فرض کنیم A زیر مجموعه‌ی دلخواهی باشد. باید ثابت کنیم $\phi \subset A$. چگونه می‌توانیم این را

ثابت کنیم؟ تعریفها را به‌خاطر آورید. بنا به تعریف ۱ باید ثابت کنیم $\forall x, x \in \phi \to x \in A$. بنا به اصل موضوع ۳ می‌دانیم $\forall x, , x \notin \phi$. یعنی برای هر $x \in U$، $x \in \phi$ نادرست است.

در نتیجه گزاره شرطی

$$x \in \phi \to x \in A$$

همیشه یک مقدم نادرست دارد، و گزاره شرطی همیشه درست است پس $\phi \subset A$. ■

قضیه ۳. $A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

برهان. روش برهان: رشته ـ اگر و تنها اگر

بنابه اصل موضوع ۱. $A = B \leftrightarrow \forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B$

بنابه تعریف، $\leftrightarrow \forall x[(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)]$

$\leftrightarrow (\forall x, x \in A \to x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \to x \in A)$

بنابه قاعده منطق $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)]$

بنابه تعریف ۱. $\leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$، ■

قضیه ۳ راه بسیار مفیدی را برای اثبات تساوی دو مجموعه ارائه می‌دهد.

قضیه ۴. a) $A \cap B = B \cap A$

b) $A \cup B = B \cup A$

برهان.

a) برای اثبات از اصل موضوع ۱ استفاده می‌کنیم. ثابت می‌کنیم

$$\forall x, x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B \cap A$$

فرض کنیم x دلخواه باشد. در این صورت

بنابه تعریف ۳ $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B,$

$\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

بنابه گزارهٔ همیشه درست $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$

بنابه تعریف ۳ $\leftrightarrow x \in B \cap A$ ■

تحلیل: شباهت بین $A \cap B = B \cap A$ و گزارهٔ همیشه درست $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$ ایدهٔ برهان را در اختیار ما می‌گذارد.

b) به‌عنوان یک تمرین باقی می‌ماند.

قضیه ۵. $CCA = A$

ایجاد برهان: آیا می‌توانید به یک گزارهٔ همیشه درست مشابه که ممکن است به شما کمک کند فکر کنید؟

اثبات. فرض کنیم x دلخواه باشد.

$x \in CCA \leftrightarrow x \notin CA$ بنابه تعریف ۴

$\leftrightarrow \sim (x \in CA)$ بنابه تعریف نماد نقیض

$\leftrightarrow \sim (x \notin A)$ بنابه تعریف ۴

$\leftrightarrow \sim\sim (x \in A)$ بنابه تعریف نماد نقیض

$\leftrightarrow x \in A$ بنابه گزارهٔ همیشه درست $\sim\sim P \leftrightarrow P$ ■

قضیه ۶. $A \subset B \leftrightarrow A \cap CB = \phi$

برهان. روش برهان: رشتهٔ ـ اگر و تنها اگر

$A \subset B \leftrightarrow \forall x, x \in A \to x \in B,$ بنابه تعریف ۱

$\leftrightarrow \sim \exists x \sim (x \in A \to x \in B)$ بنابه یکی از قواعد منطق برای نقیض،

$\leftrightarrow \sim \exists x, x \in A \wedge x \notin B$

بنابه گزارهٔ همیشه درست $\sim (P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$

$\leftrightarrow \sim \exists x, x \in A \wedge x \in CB,$ بنابه تعریف ۴

$\leftrightarrow \sim \exists x, x \in A \cap CB,$ بنابه تعریف ۳

$\leftrightarrow A \cap CB = \phi$ بنابه قضیه ۱ ■

قضیه ۷. $A = B \leftrightarrow CA = CB$

برهان. به‌عنوان یک تمرین باقی می‌ماند.

قضیه ۸. $C(A \cup B) = CA \cap CB$

برهان. بنابه اصل موضوع ۱، باید ثابت کنیم:

$$\forall x, x \in C(A \cup B) \leftrightarrow x \in CA \cap CB$$

فرض کنیم x دلخواه باشد.

$x \in \mathcal{C}(A \cup B) \leftrightarrow \ x \notin (A \cup B),$ بنابه تعریف ۴

$\leftrightarrow \sim (x \in A \cup B),$ بنابه تعریف نماد نقیض

$\leftrightarrow \ x \notin A \wedge x \notin B,$

$(\sim P \wedge \sim Q) \leftrightarrow \sim (P \vee Q)$ بنابه گزارهٔ همیشه درست

$\leftrightarrow \ x \in \mathcal{C}A \wedge x \in \mathcal{C}B,$ بنابه تعریف ۴

$\leftrightarrow x \in \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$ بنابه تعریف ۳ ■

بیشتر قضایایی که ثابت شد، اگر تلاش کنیم که برهانها را با دقت بیشتری به کار بریم جواب کوتاهتری خواهد داشت.

قضیه۹. $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$.

برهان. به‌عنوان یک تمرین باقی می‌ماند.

قضیه ۱۰. a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

برهان. a) فرض کنیم x عضو دلخواهی از U باشد. آنگاه

$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow \ x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ بنابه تعریف ۳

$\leftrightarrow \ x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ بنابه تعریف ۲

$\leftrightarrow \ (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$ بنابر گزارهٔ همیشه درست

$\leftrightarrow \ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ بنابر تعریفهای ۲ و ۳ ■

تحلیل: به تشابه بین $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
و گزارهٔ همیشه درست $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ توجه نمایید.

b) به عنوان یک تمرین باقی می‌ماند.

قضیه ۱۱. a) $A \subset A \cup B$

b) $A \cap B \subset A$

برهان. a) $x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$

بنابه گزارهٔ همیشه درست $P \rightarrow (P \vee Q)$

بنابه تعریف ۲ $\rightarrow \quad x \in A \cup B$ ■

b) به‌عنوان یک تمرین باقی می‌ماند.

قضیه ۱۲. $A \subset B \rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$

برهان. بنابه تعریف ۱ $A \subset B \rightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\rightarrow \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$ با استفاده از عکس نقیض

$x \in A \rightarrow x \in B$

$\rightarrow \forall x(x \in \mathcal{C}B \rightarrow x \in \mathcal{C}A)$ بنابه تعریف ۴

$\rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$ بنابه تعریف ۱

بنابراین $A \subset B \rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$ به‌ازاء هر دو زیر مجموعه A و B از U. ■

تحلیل: به تشابه بین $A \subset B \rightarrow \mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$ و گزارهٔ همیشه درست $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ توجه نمایید.

مجموعه تمرینهای ۳.۱

وقتی برهانها را انجام می‌دهید به روشهای برهانهایی که به کار می‌برید توجه نمایید.

چه نکاتی در تحلیلهایتان وجود دارد، یعنی، برای برهان ابتدا چه ایده‌ای را در نظر گرفته‌اید. به عنوان مثال، آیا شما یک برهان همانند برهانهای قبلی به کار بردید، آیا ازروش نزدیک شدن اتفاقی و از این قبیل استفاده کرده‌اید؟

شما می‌توانید از قضایا یا تمرینهای قبلی در برهان استفاده نمایید.

برهانتان را با جواب مقایسه کنید. آنها ممکن است تفاوت داشته باشند. فرض کنید A، B و C زیر مجموعه‌هایی دلخواه از U باشند، آنچه در زیر می‌آید را ثابت کنید.

۱. قضیه ۴ قسمت b

۲. قضیه ۷

۳. قضیه ۹

۴. قضیه ۹، اما برهانی ارائه نمایید که از قضیه‌های ۵ و ۷ و ۸ استفاده کند.

۵. قضیه ۱۰ قسمت b

۶. قضیه ۱۱ قسمت b

۷. $A \subset A$ (a $\qquad$ $A = A$ (b

۸. $\mathcal{C}\phi = U$

۹. $A \subset B$ اگر و تنها اگر $\mathcal{C}A \cup B = U$

۱۰. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۱۱. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۱۲. $A \cup \phi = A$ **راهنمایی:** قضیه ۲ و ۱۱ را به کار ببرید.

۱۳. $A \cup \mathcal{C}A = U$ **راهنمایی:** $P \vee \sim P$ یک گزاره همیشه درست است.

۱۴. $A \cap B \subset A \cup B$

۱۵. $\phi = \mathcal{C}U$

۱۶. $A \cap \phi = \phi$ **راهنمایی:** قضیه‌های ۲، ۳ و ۱۱.

۱۷. $A \subset U$

۱۸. a) $A \cap U = A$ b) $A \cup U = U$

۱۹. $A \cap \mathcal{C}A = \phi$

۲۰. $A \subset \mathcal{C}B \rightarrow B \subset \mathcal{C}A$

۲۱. $A \cup A = A$

۲۲. $A \cap A = A$

۲۳. $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$

راهنمایی: با $A \cup B = B$ شروع کنید و سعی نمایید تا یک گزارهٔ همیشه درست کمکی بیابید.

۲۴. $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$

۲۵. $A \subset \phi \leftrightarrow A = \phi$

۲۶. اگر $A \subset B$ و $B \subset C$، آنگاه $A \subset C$

۲۷. اگر $A \subset B$، آنگاه $A \cup C \subset B \cup C$

تعریف ۵.

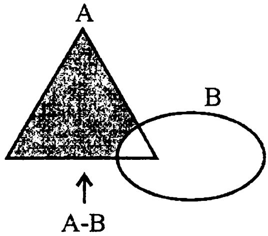
$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \mathcal{C}B$$

تفاضل $B, A =$

۲۹. $A - \phi = A$ **راهنمایی:** تمرینات ۲ و ۱۲ را به کار ببرید.

۳۰. $A - A = \phi$

۳۱. $A \subset B \rightarrow B - (B - A) = A$



۳۲. $(A-B)-C=(A-C)-B$

۳۳. $A-(B-C)=A\cap(\mathcal{C}B\cup C)$

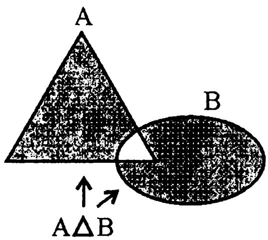
۳۴. فرض کنیم، مجموعه اعداد صحیح $= I$

با پیدا کردن دو مجموعه در I به‌طوری که $A-B\neq B-A$، ثابت کنید که $\forall A\forall B$ ،$A-B=B-A$ نادرست است.

تعریف ۶.

$$A\triangle B=\{x|x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B\}=(A\cup B)-(A\cap B)$$

$= B, A$ تفاضل متقارن



۳۵. $A\triangle B=B\triangle A$

۳۶. $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$

۳۷. $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$

۳۸. $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

۳۹. $A\cap B=\phi\rightarrow A\triangle B=A\cup B$

۴۰. $A\cap B=(A\triangle B)\triangle(A\cup B)$

۳.۲ خواص بیشتری راجع به مجموعه‌ها

مجموعهٔ توانی.

تعریف ۷. $\{B|B \subset A\}$ = **مجموعهٔ توانی** $A = P(A)$. بنابراین، $P(A)$، مجموعه توانی A، مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A می‌باشد، برای مثال، مجموعهٔ $\{a, b\}$ زیر مجموعه‌های زیر را دارد.

$$\{a, b\} \ , \ \{b\} \ , \{a\} \ , \phi$$

بنابراین $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. توجه نمایید که $P(A)$ مجموعه‌ای است که عضوهایش مجموعه هستند.

اجتماع و اشتراک سه مجموعه. اکنون تعریف وسیعتری برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها بیان می‌کنیم. سه مجموعه $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را در نظر بگیرید.

از نتایج قبل می‌دانیم که

$$(A_۱ \cup A_۲) \cup A_۳ = A_۱ \cup (A_۲ \cup A_۳)$$

این عبارت، **قانون شرکت‌پذیری** برای اجتماع مجموعه‌ها می‌باشد. در عمل، این عبارت بیان می‌کند که برای به‌دست آوردن اجتماع سه مجموعه ما اجتماع دو مجموعه را به‌دست می‌آوریم، آنگاه آن مجموعه را با مجموعهٔ سوم اجتماع می‌کنیم. یعنی می‌توانیم پرانتز را حذف کنیم و آنرا به صورت $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$ بنویسیم. بیائید از دیدگاه منطقی به آن نگاه کنیم. $x \in A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$ اگر و تنها اگر $x \in A_۱$ یا $x \in A_۲$ یا $x \in A_۳$.

یعنی $i \in \{۱, ۲, ۳\}$ وجود دارد به‌طوری که $x \in A_i$، یا x در اجتماع است اگر و تنها اگر x در یکی از مجموعه‌ها باشد.

مشابهاً، $x \in A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$ اگر و تنها اگر $x \in A_۱$ و $x \in A_۲$ و $x \in A_۳$. یعنی برای هر $i \in \{۱, ۲, ۳, \}$، $x \in A_i$ یا x در اشتراک است اگر و تنها اگر در تمام مجموعه‌ها باشد.

عبارت فوق ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۸. برای هر مجموعهٔ متناهی از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n وقتی $F = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ یا $\bigcup_{i \in F} A_i$ و $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i$، یا $\bigcap_{i \in F} A_i$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(a $$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = \bigcup_{i \in F} A_i = \{x | \exists i \in F, x \in A_i \text{ به‌طوری که } \}$$

(b $$\bigcap_{i=۱}^{n} A_i = \bigcap_{i \in F} A_i = \{x | \forall_{i \in F}, x \in A_i\}$$

مثال ۱. فرض کنید $A_1 = \{2, 11\}$، $A_2 = \{3, 5, 7, 11\}$، $A_3 = \{4, 6, 11\}$،
و $A_4 = \{5, 11\}$
به‌طوری که $F = \{1, 2, 3, 4\}$. آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \bigcup_{i\in F} A_i = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = \bigcap_{i\in F} A_i = \{11\}$$

F را **مجموعه اندیس‌گذاری** می‌نامند و $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ یا $\{A_i\}_{i=1}^{n}$، یا $\{A_i\}_{i\in F}$، را **خانواده یا مجموعه‌ی مجموعه‌ها** می‌نامند.

مثال ۲. فرض کنید $A_1 = \{x | 1 \leq x \leq 1 + 1\}$ و $A_2 = \left\{x | 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{2}\right\}$، ... و $A_n = \left\{x | 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}\right\}$، چنانچه $F = \{1, 2, \ldots, n\}$ آنگاه

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i\in F} A_i = \left\{x | 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}\right\} = A_n$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i\in F} A_i = \{x | 1 \leq x \leq 1 + 1\} = A_1$$

قضیه ۱۳. برای هر خانواده متناهی از مجموعه‌های $\{A_i\}_{i=1}^{n+1}$،

(a $$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$$

(b $$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}$$

برهان. a). برای اثبات از قضیه ۳ استفاده می‌کنیم. ثابت می‌کنیم هر مجموعه زیر مجموعه دیگری است.

فرض کنیم $x \in \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$، بنابراین $i \in \{1, 2, \ldots, n, n + 1\}$ موجود است به طوری که $x \in A_i$.
چون $\{1, 2, \ldots, n, n + 1\} = \{1, 2, \ldots, n\} \cup \{n + 1\}$، نتیجه می‌شود $x \in A_i$ برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، $x \in A_i$،

در حالتی که $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$، یا $x \in A_{n+1}$.

بنابراین $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}$

فرض کنیم $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}$. برهان اینکه $x \in \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ به عنوان تمرین باقی می‌ماند. ■

توجه کنید که به نظر می‌آید قضیه ۱۳ خیلی شبیه یک تعریف بازگشتی است. در واقع، ما می‌توانستیم قضیه ۱۳ را به‌عنوان تعریف داشته باشیم و تعریف ۸ را به‌عنوان یک قضیه ثابت کنیم. ما تعریف ۸ را به‌کار بردیم چون بسطی دقیق برای حالتی است که اجتماع و اشتراک خانواده‌های متناهی از مجموعه‌ها را به‌دست بیاوریم. قبل از اینکه این کار را انجام دهیم بگذارید قضیه ۱۳ را برای اثبات خاصیت دیگر مجموعه‌ها به کار ببریم. این قضیه حالت عمومیتری از $C(A \cup B) = CA \cap CB$ می‌باشد، که قبلاً اثبات شده است.

قضیه ۱۴. برای هر خانواده متناهی از مجموعه‌های A_n، ...، $A_۲$، $A_۱$

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathcal{C}A_i$$

(متمم اجتماع برابر است با اشتراک متممها.)

برهان. روش برهان: استقرای ریاضی، که

$$P(n) : \mathcal{C}\left(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathcal{C}A_i$$

۱) مرحله پایه: $P(۱)$ را ثابت کنید: $\mathcal{C}(A_۱) = \mathcal{C}A_۱$. واضح است.

۲) مرحله استقراء. ثابت کنید $\forall K[P(K) \to P(K+۱)]$

فرض کنید $P(K)$: $\mathcal{C}\left(\bigcup_{i=۱}^{K} A_i\right) = \bigcap_{i=۱}^{K} \mathcal{C}A_i$

نتیجه بگیرید $P(K+۱)$: $\mathcal{C}\left(\bigcup_{i=۱}^{K+۱} A_i\right) = \bigcap_{i=۱}^{K+۱} \mathcal{C}A_i.$

بنا به قضیه ۱۳ داریم: $\mathcal{C}\left(\bigcup_{i=۱}^{K+۱} A_i\right) = \mathcal{C}\left[\left(\bigcup_{i=۱}^{K} A_i\right) \cup A_{K+۱}\right]$

بنا به $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$ $\quad \mathcal{C}(\bigcup_{i=۱}^{k} A_i) \cap \mathcal{C}A_{k+۱}$

به طوری که $\bigcup_{i=۱}^{k} A_i$ را به عنوان یک مجموعه در نظر بگیریم و $A_{K+۱}$ را مجموعه دیگر،

بنابه $P(K)$ $\quad (\bigcap_{i=۱}^{k} \mathcal{C}A_i) \cap \mathcal{C}A_{k+۱}$

$$= \bigcap_{i=۱}^{K+۱} \mathcal{C}A_i \qquad ■$$

در زیر مثالهایی از خانواده‌های نامتناهی از مجموعه‌ها آمده است.

مثال ۱. برای هر $i \in N$، اعداد طبیعی، یک مجموعه A_i به‌صورت زیر داریم

$A_۱ = \{x | -۱ \leq x \leq ۱\}$، $A_۲ = \{x | -۲ \leq x \leq ۲\}$، ...، $A_n = \{x | -n \leq x \leq n\}$

...، تعداد نامتناهی از مجموعه‌ها در این خانواده وجود دارد.

مثال ۲. برای هر $-r \in R$، اعداد حقیقی، یک مجموعه A_r به‌صورت زیر داریم

$$A_r = \{x| -r \leq x \leq r\}$$

اگر چه در اینجا قصد اثبات آنرا نداریم، مجموعه‌های بیشتری در $\{A_r\}_{r\in R}$ نسبت به $\{A_i\}_{i\in N}$ یافت می‌شود. اکنون تعریف ۸ را بسط می‌دهیم.

تعریف ۹. برای هر خانواده $\{A_i\}_{i\in F}$ و مجموعه ناتهی اندیس‌گذار F،

a) $\bigcup\limits_{i\in F} A_i = \{x|\exists i \in F\ ,\ x \in A_i$ به‌طوری که $\}$

b) $\bigcap\limits_{i\in F} A_i = \{x|\forall i \in F, x \in A_i\}$

مثالها. a) برای مثال ۱ در بالا

مجموعه اعداد حقیقی $R = $ (یا همانطور که گفتیم $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$) $\bigcup\limits_{i\in N} A_i$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \{x|1 \leq x \leq -1\}$$

b) برای مثال ۲ بالا

$$\bigcup_{i\in R} A_i = R\ ,\ \bigcap_{i\in R} A_i = \{0\}$$

به تفاوت آنها توجه نمایید.

مجموعه تمرینهای ۳.۲

۱. فرض کنیم $A_1 = \{2, 4, 5\}$، $A_2 = \{3, 2, 7, 5\}$، $A_3 = \{1, 2, 3, 5\}$ به‌طوری که $F = \{1, 2, 3\}$ باشد.

به‌دست آورید:

a) $\bigcup\limits_{i\in F} A_i$ یا $\bigcup\limits_{i=1}^{3} A_i$

b) $\bigcap\limits_{i\in F} A_i$ یا $\bigcap\limits_{i=1}^{3} A_i$

۲. فرض کنیم $A_1 = \{x|0 \leq x \leq 1\}$، $A_2 = \left\{x|0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$، ... ،

$A_n = \left\{x|0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right\}$ به‌طوری که $F = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد.

به‌دست آورید.

(a $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ، یا $\bigcup\limits_{i\in F} A_i$

(b $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ ، یا $\bigcap\limits_{i\in F} A_i$

۳. ثابت کنید: برای هر خانواده متناهی از مجموعه‌های $\{A_i\}_{i=1}^{n}$

$$C\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} CA_i$$

۴. فرض کنیم $A_1 = \{x|1 \leq x\}$، $A_2 = \{x|2 \leq x\}$، ...، $A_n = \{x|n \leq x\}$، ... به‌دست آورید.

(a $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ (b $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$

(c $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ (d $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

۵. فرض کنیم $A_r = \{x|r \leq x\}$، برای هر $r \in R$. به دست آورید:

(a $\bigcup\limits_{r\in R} A_r$ (b $\bigcap\limits_{r\in R} A_r$

۶. فرض کنیم برای هر $i \in N$، $A_i = \{x|x \in N$ و x مضرب i است$\}$. بنابراین $A_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$، $A_3 = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ و $A_n = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$ باشد.

به‌دست آورید:

(a $A_2 \cap A_3$ (b $A_4 \cap A_5$

(c $A_5 \cap A_6$ (d $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

(e $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$

۷. ثابت کنید: برای هر خانواده متناهی $\{A_i\}_{i=1}^{n}$، و هر مجموعه B

(a $B \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$

(b $B \cup \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$

۸. ثابت کنید: برای هر خانواده $\{A_i\}_{i\in F}$، و مجموعه اندیس‌گذار ناتهی F،

(a $C\left(\bigcup\limits_{i\in F} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in F} CA_i$

$$C\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \bigcap_{i\in F} CA_i \qquad (b$$

۹. ثابت کنید: برای هر خانواده $\{A_i\}_{i\in F}$، و مجموعه اندیس‌گذار ناتهی F، اگر $i_\circ \in F$، آنگاه

$$\bigcap_{i\in F} A_i \subset A_{i_o} \subset \bigcup_{i\in F} A_i$$

تعریف ۱۰. برای هر خانواده $\{A_i\}_{i\in F}$، و مجموعه اندیس‌گذار ناتهی F،

$\{A_i\}_{i\in F}$ **جدا از هم است** $\longleftrightarrow \bigcap_{i\in F} A_i = \phi$

$\{A_i\}_{i\in F}$ **دوبدو متمایز است** $\longleftrightarrow i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \phi$

۱۰. فرض کنیم $A_۱ = \{۲,۳,۴\}$، $A_۲ = \{۳,۴,۵\}$، $A_۳ = \{۶,۷,۸\}$

a) به‌دست آورید: $\bigcap_{i=۱}^{۳} A_i$

b) آیا $\{A_i\}_{i=۱}^{۳}$ از هم جدا هستند؟

c) به‌دست آورید: $A_۱ \cap A_۲$، $A_۲ \cap A_۳$، $A_۱ \cap A_۳$

d) آیا $\{A_i\}_{i=۱}^{۳}$ دوبدو متمایزند؟

e) ثابت یا باطل نمائید:

دوبدو متمایز هستند $\{A_i\}_{i\in F} \longrightarrow$ از هم جدا هستند $\{A_i\}_{i\in F}$

f) ثابت یا باطل نمائید:

از هم جدا هستند $\{A_i\}_{i\in F} \longrightarrow$ دوبدو متمایز هستند $\{A_i\}_{i\in F}$

عبارات زیر را ثابت کنید. **راهنمایی:** عکس نقیض یا تناقض را امتحان کنید.

۱۱. برای هر دو زیر مجموعه A و B از U

$$A\cup B \neq \phi \rightarrow A \neq \phi \text{ یا } B \neq \phi$$

۱۲. برای هر زیر مجموعه A از U، $A \neq CA$

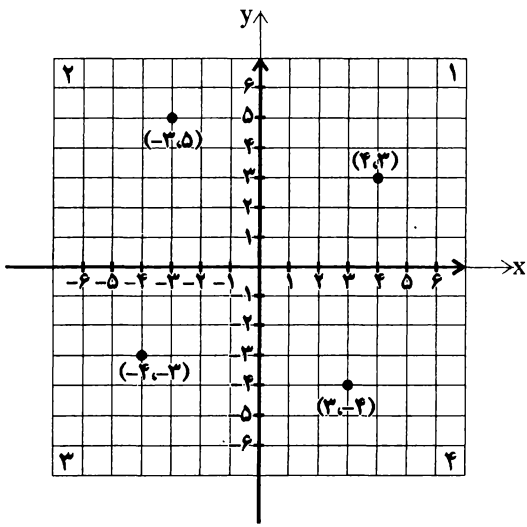
۱۳. برای هر دو زیر مجموعه A و B از U

$$A\cap B \neq \phi \rightarrow A \neq \phi$$

۳.۳ روابط

زوجهای مرتب.

اجازه دهید از جبر معنی نماد (a,b) را که **زوج مرتب** نامیده می‌شود یادآوری کنیم. در زیر نمودار بعضی از زوجهای مرتب نشان داده شده است. به نمودار نگاه کنید و سعی کنید بعضی از خواص زوجهای مرتب را به یاد آورید.



توجه نمایید که هیچکدام از زوجها مثل هم نیستند. شاید خاصیت
$(a,b)=(c,d) \longleftrightarrow a=c$ و $b=d$، را بیاد آورید.

برای زوج (a,b)، a را **اولین مختص** و b را **دومین مختص** می‌نامند.

کلمه اولین و دومین موجب ترتیب می‌شود. بنابه خاصیت بالا، دو زوج مرتب مساویند اگر اولین مختص آنها مساوی باشند و دومین مختص آنها نیز مساوی باشند. ویژگی بالا را به شیوه‌ای تقریباً عجیب از طریق تئوری مجموعه‌ها می‌توانیم ثابت کنیم.

تعریف ۱۱. $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

از این تعریف معلوم می‌شود که عناصر a و b از زوج (a,b) وجود دارند. مجموعه‌های $\{a\}$ و $\{a,b\}$ وجود دارند، بنابراین مجموعه $\{\{a\},\{a,b\}\}$ یا (a,b) وجود دارد.

قضیه ۱۵. $(a,b)=(c,d) \longleftrightarrow a=c$ و $b=d$

برهان.[1]

a) ثابت کنید: $a = c$ و $b = d \rightarrow (a,b) = (c,b) = (c,d)$.

توجه نمایید که وقتی که می‌خواهیم ثابت کنیم $(a,b) = (c,d)$، تساوی مجموعه‌ها را ثابت می‌کنیم.

از $a = c$ و $b = d$ نتیجه می‌شود که $\{a\} = \{c\}$ و $\{a,b\} = \{c,d\}$ بنابراین $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$، یا $(a,b) = (c,d)$.

b) ثابت کنید: $(a,b) = (c,d) \rightarrow a = c$ و $b = d$.

از $(a,b) = (c,d)$ نتیجه می‌شود که $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$.

از تعریف تساوی مجموعه‌ها نتیجه می‌شود که

$$(\{a\} = \{c,d\} \text{ و } \{a,b\} = \{c\}) \text{ یا } (\{a\} = \{c\} \text{ و } \{a,b\} = \{c,d\})$$

حالت ۱. $\{a\} = \{c\}$ و $\{a,b\} = \{c,d\}$. پس از $\{a\} = \{c\}$، $a = c$.

بنابراین چون $a = c$ و $\{a,b\} = \{c,d\}$ نتیجه می‌شود که $b = d$.

حالت ۲. $\{a,b\} = \{c\}$ و $\{a\} = \{c,d\}$

از $\{a\} = \{c,d\}$ نتیجه می‌شود که تنها یک عضو در $\{c,d\}$ وجود دارد یا $a = c = d$. به‌طور مشابه، از $\{a,b\} = \{c\}$ نتیجه می‌شود که $a = b = c$. بنابراین $a = b = c = d$. به ویژه $a = c$ و $b = d$. ■

تعریف ۱۱ را می‌توان برای سه تایی مرتب (a,b,c) و n تایی مرتب، $(a_۱,\ldots,a_n)$ بسط داد، اما به خاطر مصلحت آنرا حذف می‌کنیم.

تعریف ۱۲. دو مجموعه A و B داده شده است، **حاصلضرب کارتزین**، یا **حاصلضرب خارجی**، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

($A \times B$ مجموعه تمام زوجهای مرتبی است که اولین مختص آن در A و دومین مختص آن در B است.)

مثال ۱. $A = \{۱,۲,۳\}$، $B = \{۳,۴\}$

$$A \times B = \{(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴)\}$$

$$B \times A = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳)\}$$

۱ـ اگر زمان کوتاه است می‌توانید از برهان بگذرید.

توجه نمائید، به‌طور کلی $A \times B \neq B \times A$

مثال ۲. $A = \{۱, ۲\}$

$$A \times A = \{(۱,۱), (۱,۲)(۲,۱)(۲,۲)\}$$

مثال ۳. $A = \{a, b\}$ و $B = \phi$

$$A \times B = \phi$$

برای مجموعه اعداد حقیقی R می‌توان فهمید که $R \times R$ مجموعه نقاط در صفحه است.

روابط. قبل از اینکه "رابطه" را تعریف کنیم، اجازه دهید تصوری از آن بوجود آوریم. رابطه "والد بودن" را در نظر بگیرید. گزاره‌های زیر درست هستند.

پدرتان والد شما است.

یک اولین نفر، **پدر** و یک دومین نفر، **شما** وجود دارند. ما می‌توانیم آنرا به صورت یک زوج مرتب در نظر بگیریم در حقیقت اگر مجموعه تمام مردم را در نظر بگیریم تعداد بسیار زیادی از چنین زوجهای مرتبی وجود دارد. رابطهٔ "کوچکتر از" را در نظر بگیرید.

$x < y$	(x, y)
$۲ < ۳$	$(۲, ۳)$
$-۳ < ۵$	$(-۳, ۵)$
$\frac{۱}{۲} < \pi$	$\left(\frac{۱}{۲}, \pi\right)$

توجه نمائید که $۳ > ۲$ یک "رابطه" بین **اولین** عدد، ۲ و **دومین** عدد، ۳ را نشان می‌دهد. می‌توانیم دوباره آن را با یک زوج مرتب $(۲, ۳)$، نشان دهیم.

تعریف ۱۳. مجموعه‌های A و B مفروضند. **یک رابطه از A به B** زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است، یعنی P یک رابطه از A به B است. اگر و فقط اگر $P \subset A \times B$.

اگر $A = B$، آنگاه P **یک رابطه روی A** است.

امکان دارد ما رابطه‌های زیادی از یک مجموعه A به یک مجموعه B داشته باشیم.

مثال ۱. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ و $P = \{(۱, ۱), (۲, ۴), (۳, ۹)\}$.

توجه کنید که $(۲, ۴) \in P$؛ $(۲, ۴)$ در رابطه P می‌باشد.

اغلب می‌نویسیم $۲P۴$. گاهی اوقات یک رابطه را می‌توانیم با یک گزاره شرح دهیم. برای مثال بالا

$$P = \{(x, y)|x \in A \ , \ y \in B \ , \ y = x^۲\}$$

وقتیکه واضح است که مجموعه‌ها کدامند، امکان دارد، از نمایش غلط استفاده کنیم و جمله $y = x^۲$ به عنوان یک ”رابطه“ بگیریم.

مثال ۲. مجموعه اعداد حقیقی $= R$

$\{(x, y)|x \in R \ , \ y \in R$ و $x + m = y$ به‌طوری که $m > ۰$ وجود دارد$\} =<$ بنابراین

$(۲, ۳) \in <$، یا $۲ < ۳$

$$(-۵, ۷) \in < \quad \text{یا} \quad -۵ < ۷$$

رابطه $<$ یک **رابطه** روی R است.

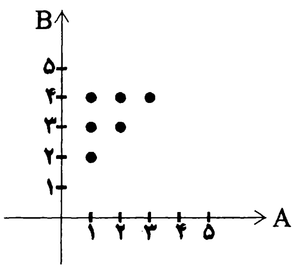
ما می‌توانیم رابطه‌ها را به‌صورت زیر رسم کنیم.

یک **نمودار** شکل هندسی یک رابطه است.

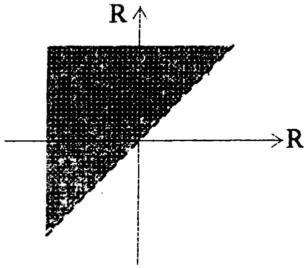
مثال ۳. $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

$$\begin{aligned} < &= \{(x, y)|x \in A, y \in B \ , \ x + m = y \ \ m \ \text{به‌ازاء بعضی اعداد مثبت}\} \\ &= \{(۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۲, ۳), (۲, ۴), (۳, ۴)\} \end{aligned}$$

نمودار $<$:

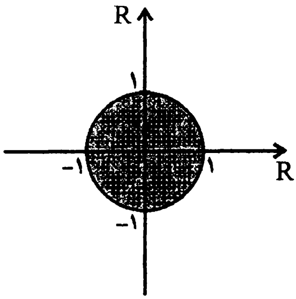


مثال ۴. در زیر نمودار $<$ روی R را نشان داده‌ایم.



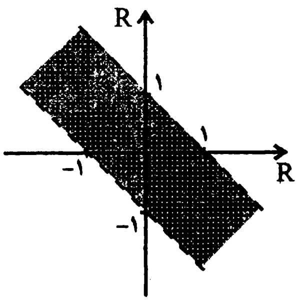
مثال ۵. اعداد حقیقی $= R$

$P = \{(x,y)|x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$



مثال ۶. مجموعه اعداد حقیقی $= R$

$P = \{(x,y)||x+y| < ۱\}$



تعریف ۱۴. داریم، P رابطه‌ای از مجموعه A به مجموعه B است،
دامنه P، $dmnP$، **و برد** P، rgeP، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$dmnP = \{a|a \in A, \exists y \in B, (a,y) \in P\}$ (a

دامنه مجموعه اولین مختصهای زوجهای مرتب در P است.

$rgeP = \{b|b \in B, \exists x \in A, (x,b) \in P\}$ (b

برد مجموعه دومین مختصهای زوجهای مرتب در P است.

مثالها.

a) در مثال ۱، $dmnP = \{۱, ۲, ۳\}$، $\boldsymbol{rgeP = \{۱, ۴, ۹\}}$

b) در مثال ۲، $dmnP = R$، $\boldsymbol{rgeP = R}$

عبارت فوق به این خاطر به‌دست **می‌آید که هر عدد حقیقی از اعداد** حقیقی دیگری کمتر است و هر عدد حقیقی از اعداد حقیقی دیگری **بزرگتر است.**

تعریف ۱۵. رابطه P از A به B **مفروض است، معکوس P که** با $P^{-۱}$ نشان داده می‌شود رابطه‌ای است از B به A که به صورت

$$P^{-۱} = \{(b, a) | (a, b) \in P\}$$

تعریف می‌شود.

بنابراین $(b, a) \in P^{-۱} \leftrightarrow (a, b) \in P$

رابطه $P^{-۱}$ از جابجایی زوجهای **مرتب در P حاصل می‌شود.**

مثال ۷. $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

$$< = \{(۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۲, ۳), (۲, ۴), (۳, ۴)\}$$

$$(<)^{-۱} = \{(۲, ۱), (۳, ۱)(۴, ۱), (۳, ۲), (۴, ۲), (۴, ۳)\} = {}^{-۱}(<)$$

شاید شما کشف کرده باشید که $> = {}^{-۱}(<)$. **(عبارت فوق تساوی مجموعه‌ها** است).

مثال ۸. $A = \{۱, ۲, ۳\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

$$\rho = \{(x, y) | y = ۲x\} = \{(۱, ۲), (۲, ۴), (۳, ۶)\}$$

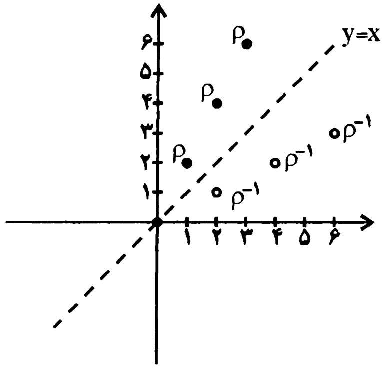
به نمودار ρ شامل نقاط **توپر توجه نمایید.**

$$\rho^{-۱} = \{(y, x) | y = ۴x\}$$
$$= \{(۲, ۱), (۴, ۲), (۶, ۳)\}$$

به $\rho^{-۱}$ شامل نقاط **توخالی توجه نمایید.**

ما نیز می‌توانیم $\rho^{-۱}$ را **به صورت زیر بیان کنیم:**

$$\rho^{-۱} = \{(x, y) | x = ۲y\}$$



مرسوم است که اولین مختص را روی محور افقی یا محور x بگذاریم.

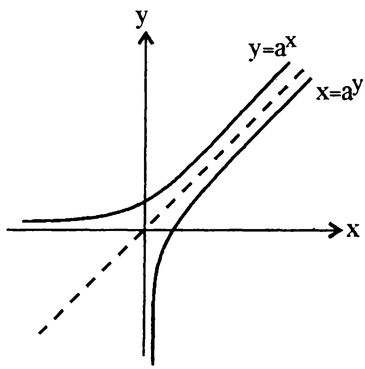
نمودار $\rho^{-۱}$ تصویر آینه‌ای یا قرینه نمودار ρ نسبت به خط $y = x$ است. برای به‌دست آوردن جمله‌ای که $\rho^{-۱}$ را شرح دهد نه تنها جای متغیرهای x و y را عوض می‌کنیم، بلکه متغیر x را به y و y را به x تغییر نام می‌دهیم.

مثال ۹. مجموعه اعداد حقیقی $= R$ و $\rho = \{(x,y)|y = \log_a x$ یا $x = a^y\}$ مفروض است.

a) $\rho^{-۱}$ را بیان کنید.

$$\rho^{-۱} = \{(x,y)|x = \log_a y \text{ یا } y = a^x\}$$

b) با استفاده از مجموعه محورهای یکسان نمودار ρ و $\rho^{-۱}$ را رسم کنید.

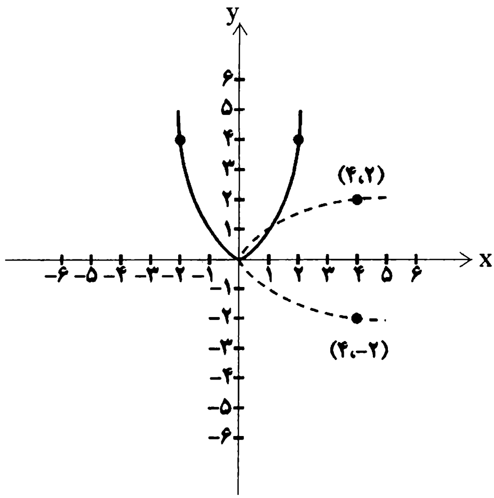


مثال ۱۰. مجموعه اعداد حقیقی $= R$ و $\sigma = \{(x,y)|y = x^۲\}$ مفروض است.

a) $\sigma^{-۱}$ را بیان کنید.

$$\sigma^{-۱} = \{(x,y)|x = y^۲\}$$

b) با استفاده از مجموعه محورهای یکسان نمودار σ و σ^{-1} را رسم کنید.



مجموعه تمرینهای ۳.۳

فرض کنید $A = \{a, b, c\}$، $B = \{5, 6\}$، به‌دست آورید.

۱. $A \times B$ ۲. $B \times A$

۳. $A \times A$ ۴. $B \times B$

۵. آیا $A \times B = B \times A$؟

برای هر یک از رابطه‌ها ۳ زوج مرتب بنویسید.

۶. $L = \{(x, y) | x \in R, y \in R, x^2 + y^2 = 1\}$

۷. $M = \{(x, y) | x \in R, y \in R, x < y^2\}$

۸. در مثالهای ۶ـ۳ دامنه و برد رابطه‌ها را بیابید.

۹. a) $\left\{(x,y)|x\in R, y\in R, \frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱\right\}$ را رسم نمایید.

b) دامنه و برد را بیابید.

ثابت کنید.

۱۰. $(a,a)=\{\{a\}\}$

۱۱. $(a,b)=(b,a)\leftrightarrow a=b$

۱۲. تعیین کنید درست است یا نادرست؟

a) $(a,b)=(b,a)$ $\qquad$ b) $\{a,b\}=\{b,a\}$

c) $(a,b)=\{a,b\}$ $\qquad$ d) $(a,a)=\{a\}$

۱۳. $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,b,c\}$ و $C=\{۲,۳\}$ مفروضند به‌دست آورید:

a) $A\times B$ $\qquad$ b) $A\times C$ $\qquad$ c) $B\times C$

$A\times C$ و $B\times C$ را مقایسه کنید.

d) $B\cup C$ $\qquad$ e) $A\times(B\cup C)$ $\qquad$ f) $(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cup C)$ و $(A\times B)\cup(A\times C)$ را مقایسه کنید.

g) $B\cap C$ $\qquad$ g) $A\times(B\cap C)$

i) $(A\times B)\cap(A\times C)$

$A\times(B\cap C)$ و $(A\times B)\cap(A\times C)$ را مقایسه کنید.

به‌ازاء هر مجموعه A، B، C ثابت کنید

۱۴. $A\subset B\rightarrow A\times C\subset B\times C$

۱۵. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

۱۶. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

۱۷. $A\times A=B\times B\rightarrow A=B$

۱۸. رابطه ρ از A به B را در نظر بگیرید:

$$B = \{۲, ۳, ۴\} \quad , \quad A = \{a, b\}$$
$$\rho = \{(a, ۲), (a, ۳), (a, ۴)\}$$

به‌دست آورید.

a) $dmn\rho$ b) $rge\rho$ c) $\rho^{-۱}$

d) $dmn\rho^{-۱}$ e) $rge\rho^{-۱}$

f) $dmn\rho$ را با $rge\rho^{-۱}$ مقایسه کنید.

g) $rge\rho$ را با $dmn\rho^{-۱}$ مقایسه کنید.

۱۹. ثابت کنید اگر ρ رابطه‌ای از A به B باشد، آنگاه

$$rge\rho^{-۱} = dmn\rho \text{ و } dmn\rho^{-۱} = rge\rho$$

هر یک از رابطه‌های زیر را روی R رسم کنید.

۲۰. $\{(x, y) | y = ۳x - ۱\}$ ۲۱. $\{(x, y) | |x| - |y| \leq ۱\}$

۲۲. $\{(x, y) | x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ ۲۳. $\{(x, y) | x^۲ + y^۲ > ۴\}$

۲۴. $\{(x, y) | |x| + |y| \leq ۲\}$ ۲۵. $\{(x, y) | y \geq x^۲\}$

۲۶. $\{(x, y) | x^۲ + y^۲ = ۴\} \cup \{(x, y) | -۲ \leq x \leq ۲ \text{ و } y = -\sqrt{۲ - x^۲}\} \cup \{(۲, ۲), (-۲, ۲)\}$

برای هر یک از زیر روابط ρ روی R، $\rho^{-۱}$ را بیان کنید و با استفاده از مجموعه محورهای یکسان ρ و $\rho^{-۱}$ را رسم کنید.

۲۷. $\rho = \{(x, y) | y = ۳x - ۱\}$ ۲۸. $\rho = \{(x, y) | y = x^۳\}$

۲۹. $\rho = \left\{(x, y) | \frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} = ۱\right\}$ ۳۰. $\rho = \{(x, y) | y = \sin x\}$

۳۱. $\rho = \{(x,y) | x^۲ + y^۲ = ۱\}$ ۳۲. $\rho = \{(x,y) | xy = ۱\}$

۳۳. $\rho = \{(x,y) | y = \sin x \ , \ ۰ \le x \le ۲\pi\}$

۳۴. $\rho = \{(x,y) | |x| + |y| = ۲\}$

۳.۴ رابطه‌های هم ارزی

در این فصل رابطه‌هایی را روی مجموعه A در نظر می‌گیریم.

یعنی زیر مجموعه‌هایی از $A \times A$. تعدادی از این روابط در زیر آمده است. که ضمن این فصل به آنها رجوع می‌نماییم.

رابطه		مجموعه
$\rho_۱$:	"تساوی" $\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$	$\{۱,۲,۳\}$
$\rho_۲$:	روی قطعهٔ یکسانی از پازل قرارگرفتن	مجموعه‌ی قطعاتی که پازل را تشکیل می‌دهند.
$\rho_۳$	$<$	R
$\rho_۴$	$\perp$	مجموعهٔ خطوط صفحه
$\rho_۵$	«پدر بودن»	مردم

تعریف ۱۶. فرض کنیم ρ رابطه‌ای روی A باشد.

ρ (R) **انعکاسی** است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$، $(a,a) \in \rho$ (یا، $a\rho a$). (هر عضو A با خودش رابطه دارد)

مثالها.

۱) $\rho_۱$ روی $\{۱,۲,۳\}$ انعکاسی است اما $\sigma = \{(۱,۱),(۲,۲)\}$ روی $\{۱,۲,۳\}$ انعکاسی نیست چون $(۳,۳) \notin \sigma$

سور عمومی در اینجا واقعاً مهم است.

۲) $\rho_۲$ انعکاسی است چون هر قطعه به قطعه‌ای از پازل که با خودش یکسان است متعلق است.

۳) $\rho_۳$ انعکاسی نمی‌باشد زیرا، به‌عنوان مثال، $۲ \not< ۲$

۴) $\rho_۴$ انعکاسی نیست. یک خط نمی‌تواند بر خودش عمود باشد.

۵) $\rho_۵$ انعکاسی نیست. یکنفر نمی‌تواند پدر خودش باشد.

تعریف ۱۷.

ρ (S) **متقارن** است اگر و فقط اگر برای هر $a, b \in A$،

$$(a,b) \in \rho \ \rightarrow \ (b,a) \in \rho$$

(برای هر $a, b \in A$، اگر a با b رابطه داشته باشد آنگاه b با a رابطه دارد.)

مثالها.

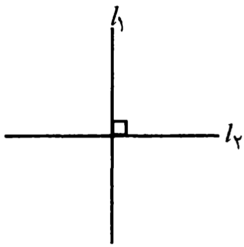
۱) $=$ متقارن است. برای هر $a, b \in A$، $a = b \ \rightarrow \ b = a$.

رابطه $\{(۲,۳),(۲,۱),(۳,۳),(۱,۲)\}$ متقارن نیست.

۲) $\rho_۲$ متقارن است. اگر a روی قطعه یکسانی با b از پازل باشد، آنگاه b روی قطعه یکسان با a است.

۳) $>$ متقارن **نیست**.$۳ > ۲$ و $۲ \not> ۳$.

۴) $\perp$ متقارن است. اگر $l_۲ \perp l_۱$، آنگاه $l_۱ \perp l_۲$.



۵) $\rho_۵$ متقارن **نیست**. b پدر a است $\not\rightarrow$ a پدر b است.

تعریف ۱۸.

$\rho(T)$ **متعدی** است اگر و فقط اگر برای هر $a, b, c \in A$،

$$(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \ \rightarrow \ (a,c) \in \rho$$

(برای هر $a, b, c \in A$، اگر a با b رابطه داشته باشد و b با c رابطه داشته باشد، آنگاه a با c رابطه دارد.)

ممکن است خاصیت تعدی را بعنوان خاصیت "پل" تصور نماییم.

مثالها

۱) متعدی است. اگر $a = b$ و $b = c$، آنگاه $a = c$.

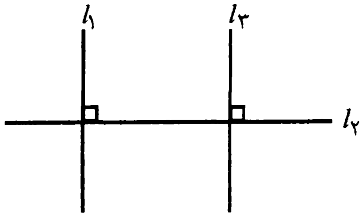
رابطه $\{(۱,۲),(۳,۱),(۲,۳)\}$ متعدی است اما رابطه $\{(۲,۳),(۱,۲)\}$ متعدی نیست.

۲) $\rho_۲$ متعدی است. اگر قطعهٔ a روی جای قطعهٔ b قرار گیرد و قطعهٔ b روی جای قطعهٔ c قرار گیرد. پس قطعهٔ a روی جای قطعهٔ c قرار می‌گیرد.

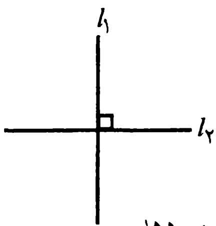
۳) $>$ متعدی است. اگر $a > b$ و $b > c$، آنگاه $a > c$.

۴) $\perp$ متعدی نیست. به دو طریق توضیح می‌دهیم

a) $l_1 \perp l_2$ و $l_2 \perp l_3$ و $l_1 \not\perp l_3$



b) $l_1 \not\perp l_1$ و $l_2 \perp l_1$ و $l_1 \perp l_2$



قسمت b) یک نکته مهم را راجع به سور توضیح می‌دهد.

وقتی می‌گوییم "برای هر $a, b, c, \ldots$" امکان تساوی آنها را کنار **نمی‌گذاریم**.

۵) ρ_5 متعدی نیست.

a پدر c است $\not\leftarrow$ a پدر b است و b پدر c است.

یعنی، یک پدربزرگ پدر نوه‌اش نیست.

تعریف ۱۹. رابطه ρ روی A یک **رابطه هم ارزی** است اگر و فقط اگر آن رابطه، انعکاسی، متقارن، و متعدی باشد.

بنابراین یک رابطه هم ارزی را همچنین یک رابطه (ا ـ م ـ م) می‌نامند.

مثالها. رابطه $=$ و "قرار گرفتن روی یک جای پازل" روابط هم ارزی هستند. روابط ρ_3 و ρ_5 هم ارزی **نمی‌باشند**.

دسته‌های هم ارزی. وقتی یک رابطه هم ارزی ρ را داریم، معمول است که "$a\rho x$" یا "$(a, x) \in \rho$" را به صورت " a هم ارز با x است" بخواهیم.

تعریف ۲۰. فرض کنیم ρ یک رابطه هم ارزی روی A باشد.

برای هر $a \in A$، دستهٔ هم ارزی a، $E(a)$، به صورت

$$E(a) = \{x | x \in A, (a, x) \in \rho \ \text{یا}\ a\rho x\}$$

تعریف شده است.

(دسته‌ی هم ارزی a، $E(a)$، مجموعه تمام عناصری است که با a هم ارز هستند همچنین نماد $cl(a)$ و $[a]$ برای دسته‌های هم ارزی به کار برده می‌شود. مثالهای زیر به روابطی که در تمرینات یا مثالهای قبل شرح داده شده است مربوط است.

	مجموعه	رابطه هم ارزی	دسته هم ارزی
۱)	$\{۱, ۲, ۳, ۴\}$	$\rho_۶ = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳)$ $(۴, ۴)(۴, ۲), (۲, ۴)\}$	$E(۱) = \{۱\}$ $E(۲) = \{۲, ۴\} = E(۴)$ $E(۳) = \{۳\}$
۲)	قطعه‌های پازل	$\rho_۲$ "قرار گرفتن قطعات پازل در یک جا"	قعطه‌های پازل
۳)	مثلثها در صفحه	$\rho_{۱۱}$: تشابه	هر دسته هم ارزی مجموعه مثلثهای متشابه با یک مثلث مفروض است یعنی مثلثهایی اطلاع آنها متناسب است.

اکنون به مجموعه دسته‌های هم ارزی که در نظر گرفته‌ایم به ترتیب می‌نگریم. ببینید چند حدس می‌توانید بزنید.

سپس قضیهٔ زیر را در نظر بگیرید.

قضیه ۱۶. فرض کنیم A یک مجموعه متناهی (مرجع) باشد.

و ρ یک رابطه هم ارزی روی A باشد. آنگاه:

a) برای هر $a \in A$، $a \in E(a)$

(برای هر دسته هم ارزی $E(a)$، $E(a) \neq \phi$).

$$E(a) = E(b) \quad \leftrightarrow \quad (a, b) \in \rho \qquad (b$$

(دسته‌های هم ارزی $E(a)$ و $E(b)$ مساویند اگر و تنها اگر a هم ارز با b باشد.)

c) برای هر $E(a)$ و $E(b)$، $E(a) = E(b)$ یا $E(a) \cap E(b) = \phi$. (دسته‌های هم ارزی یا مساویند یا جدا از هم).

برهان a): فرض کنیم $a \in A$. آنگاه بنابه خاصیت انعکاسی $(a, a) \in \rho$. بنابراین به موجب تعریف ۲۰، $a \in E(a)$.

برهان b):

۱) ثابت کنید: $E(a) = E(b) \quad \rightarrow \quad (a, b) \in \rho$

فرض کنیم $E(a) = E(b)$. به موجب قسمت

a) می‌دانیم $a \in E(a)$. چون $E(a) = E(b)$، $a \in E(b)$.

آنگاه بنابر تعریف ۲۰، $(b, a) \in \rho$ و به موجب تقارن $(a, b) \in \rho$

۲) ثابت کنید: $(a, b) \in \rho \quad \rightarrow \quad E(a) = E(b)$

به عنوان یک تمرین باقی می‌ماند

برهان c): فرض کنیم $E(a)$ و $E(b)$ دسته‌های هم ارزی دلخواه باشند.
به موجب گزاره همیشه درست $P \vee \sim P$ می‌دانیم $E(a) = E(b)$ یا $E(a) \neq E(b)$.
بنابراین واقعاً نیازمندیم که اثبات نماییم.

$$E(a) \neq E(b) \ \rightarrow \ E(a) \cap E(b) = \phi.$$

آنرا با اثبات عکس نقیض اثبات می‌کنیم:

$$E(a) \cap E(b) \neq \phi \ \rightarrow \ E(a) = E(b)$$

فرض کنیم $E(a) \cap E(b) \neq \phi$، بنابراین یک x وجود دارد به‌طوری که $x \in E(a)$ و $x \in E(b)$.
بنابراین، بنا به تعریف ۲۰،

$$(a, x) \in \rho, (b, x) \in \rho$$

آنگاه بنا به تقارن $(x, b) \in \rho$ و بنابه تعدی
$(a, b) \in \rho$. همچنین بنابر قسمت b)، $E(a) = E(b)$. ■

مجموعه تمرین‌های ۳.۴

هر یک از زیر را به نماد منطقی تبدیل کرده و نقیض آنرا بنویسید.

۱. انعکاسی ۲. تقارن ۳. متعدی

در نظر بگیرید:

رابطه	مجموعه
$\rho_۶ : \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۴,۲),(۲,۴)\}$	$\{۱,۲,۳,۴\}$
$\rho_۷ : \{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۲),(۲,۴)\}$	$\{۱,۲,۳,۴\}$
$\rho_۸ : \{(۴,۳),(۳,۴),(۳,۳)\}$	$\{۱,۲,۳,۴\}$
$\rho_۹ : \leq$	R

(همنهشتی) $\cong$: ρ_{10} مجموعه مثلثها در صفحه

(تشابه) $\sim$: ρ_{11} مجموعه مثلثها در صفحه

"هم مساحت بودن" : ρ_{12} مجموعه‌ی مثلثها در صفحه

"برادر بودن" : ρ_{13} مجموعه تمام مردم زنده

"برادر بودن" ρ_{14} مجموعه تمام مردان زنده

(فرض کنید یک مرد برادر خودش است.)

۴. کدامیک از روابط بالا انعکاسی هستند؟

۵. کدامیک از روابط بالا متقارن هستند؟

۶. کدامیک از روابط بالا متعدی هستند؟

۷. کدامیک از رابطه‌های بالا هم ارزی هستند؟

هر یک از تمرینات به یک رابط هم ارزی در مثالها یا تمرینات قبل مربوط است رابطه‌های هم ارزی آن را فهرست نمائید یا شرح دهید.

۸. ρ_1 ۹. ρ_{10} ۱۰. ρ_{12} ۱۱. ρ_{14}

۱۲. در قسمت b) از قضیه ۱۶، ثابت کنید:

$$(a,b) \in \rho \ \rightarrow \ E(a) = E(b)$$

راهنمایی: به خاطر آورید که تساوی مجموعه‌ها را اثبات می‌کنید.

۳.۵ افراز

قضیه ۱۶ در فصل ۳.۴ را دوباره بخوانید. اکنون می‌توانیم نشان دهیم دسته‌های هم ارزی در تعریف زیر صدق می‌کنند.

تعریف ۲۱. افراز یک مجموعه‌ی ناتهی (مجموعه مرجع) U مجموعه $\{A_i\}_{i\in F}$ از زیر مجموعه‌های U است به‌طوری که:

۱) برای هر A_i، $A_i \neq \phi$

۲) برای هر A_i، A_j؛ $A_i = A_j$ یا $A_i \cap A_j = \phi$

۳) $\bigcup\limits_{i\in F} A_i = U$

یعنی، افراز، مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های ناتهی یک مجموعه است که جدا از هم باشند و اجتماع آنها، تمام مجموعهٔ اصلی است. در زیر مثالهایی آمده‌اند.

مثال ۱. فرض کنیم مجموعه تمام قطعه‌های یک پازل $= A$ باشد.

قطعات، یک افراز را تشکیل می‌دهند.

مثال ۲. فرض کنیم اعداد حقیقی $= R$، اعداد گویا $= Q$، و اعداد گنگ $= J$. آنگاه $\{Q, j\}$ یک افراز برای R می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنیم اعداد حقیقی $= R$، اعداد صحیح $= I$ و

$$A_i = \{x | i \leq x < i + ۱\}$$

آنگاه $\{A_i\}_{i\in N}$ یک افراز برای R می‌باشد.

مثال ۴. فرض کنیم $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$.

a) $B_۱ = \{۱, ۲\}$، $B_۲ = \{۲, ۳, ۴\}$، $B_۳ = \{۵\}$

$\{B_i\}_{i=۱}^{۳}$ یک افراز نمی‌باشد زیرا $B_۱ \cap B_۲ \neq \phi$

b) $B_۱ = \{۱\}$، $B_۲ = \{۲, ۳\}$، $B_۳ = \{۵\}$، $\{B_i\}_{i=۱}^{۳}$ یک افراز نمی‌باشد زیرا

$\bigcup\limits_{i=۱}^{۳} B_i \neq U$

قضیه ۱۷. فرض کنیم ρ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه ناتهی A باشد. آنگاه $\{E(a)\}_{a\in A}$، مجموعه تمام دسته‌های هم ارزی،

یک افراز از A می‌باشد (افراز القائی می‌شود.)

ثابت کنید: آنچه که در زیر می‌آید باید ثابت شود

۱) برای هر $a \in A$، $E(a) \neq \phi$.

۲) برای هر $E(a)$، $E(b)$، $E(a) = E(b)$ یا $E(a) \cap E(b) \neq \phi$

۳) $\bigcup\limits_{i\in F} A_i = A$.

برهان. قسمتهای ۱) و ۲) از قضیه ۱۶ نتیجه می‌شوند.

قسمت ۳) به عنوان یک تمرین باقی می‌ماند. ■

بر عکس می‌توانیم یک افراز را در نظر بگیریم و یک رابطه هم ارزی به‌دست آوریم که دسته‌های هم ارزی آن، اعضای افراز فوق باشند.

قضیه ۱۸. فرض کنیم $\{A_i\}_{i\in F}$ یک افراز از A باشد. رابطه‌ای به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای $i \in F$، a و $b \in A_i$ $\leftrightarrow$ $(a,b) \in p$

آنگاه ρ یک رابطه هم ارزی است (**رابطه القایی** نامیده می‌شود.)

برهان (انعکاس): فرض کنیم $a \in A$. چون $\bigcup\limits_{i\in F} A_i = A$ نتیجه می‌شود $a \in A_i$ برای $i \in F$. بنابراین بنا به (۱) $(a,a) \in p$ خواص متقارن و متعدی را به عنوان تمرین باقی می‌مانند. ■

بنابراین افراز و دسته‌های هم ارزی با هم هستند.

هر رابطه هم ارزی یک افراز بوجود می‌آورد، هر افراز یک رابطه هم ارزی ایجاد می‌کند بنابراین وقتی شما به یکی فکر می‌کند به دیگری نیز می‌اندیشید.

مثال. رابطه هم ارزی القایی و مجموعه‌ای که افراز روی آن تعریف می‌شود را بیابید.

$$\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

از $\{a,b\}$ به‌دست می‌آوریم $(a,a),(b,b),(a,b),(b,a) \in \rho$

از $\{c\}$ به‌دست می‌آوریم $(c,c) \in \rho$

از $\{d\}$ به‌دست می‌آوریم $(d,d) \in \rho$

بنابراین رابطه برابر است با $\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c),(d,d)\}$

و این رابطه روی $\{a,b,c,d\}$ تعریف شده است.

چرا روابط هم ارزی را مطالعه می‌کنیم؟ این پرسش چند جواب دارد. اولاً، اگر به تمام هم ارزیهایی که تا حالا در نظر گرفته شده است فکر کنید، بر این عقیده خواهید بود که هم ارزی چقدر ریاضیات را فرا گرفته است. ثانیاً مطالعهٔ ریاضی در آینده، لزوم استفاده از هم ارزی را مشخص خواهد کرد. امکان دارد یک مجموعه "ویژگی بخصوصی" نداشته باشد. رابطه هم ارزیی روی آن مجموعه از زوجهای مرتب تشکیل می‌دهیم و نتیجه، آن خاصیت مفقود را خواهد داشت ثانیاً روابط هم ارزی در هر روز زندگی، بیشتر از آنچه که تصورش را نمایید وجود دارد. به عنوان مثال دسته‌های هم ارزی (افراز) یکی از راههای طبقه‌بندی می‌باشد. دانش‌آموزان کلاس و افراز آنها را که به صورت روابط هم ارزی زیر است تصور کنید:

"در یک ردیف قرار دارند"

"نمره امتحانی یکسانی می‌گیرند"

"جنسیت آنها یکی است"

”هم وزن هستند“

مثالی دیگر، در فرایند آموزشی رخ می‌دهد.

وقتی شما ”مفهوم“ را فرا بگیرید، افراز یا دسته‌های هم ارزی تشکیل می‌دهید در آموزش ”رنگ“ شما به طور ذهنی اشیا را به ”تمام قرمزها“، ”تمام سبز رنگ‌ها “و غیره، تقسیم می‌کنید.

مااین بخش را با یک نوع مهم از رابطه هم ارزی روی مجموعه I از اعداد صحیح به پایان می‌رسانیم. فرض کنیم

$$\rho = \{(x,y)|x \in I, y \in I, x-y = ۳k \ , \ k \in I \text{ یا } x-y \text{ بر ۳ بخش‌پذیر است}\}$$

دسته‌های هم ارزی آن به صورت زیر می‌باشند.

$$E(۰) = \{\dots, -۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹, \dots\}$$

$$E(-۳) = E(۹) = E(۳k), \ \text{ برای هر } k$$

$$E(۱) = \{\dots, -۸, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, ۱۰, \dots\}$$

$$= E(۷) = E(۳k+۱) \ , \ \text{ به‌ازاء هر } k$$

$$E(۲) = \{\dots, -۷, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, ۱۱, \dots\} = E(۷) = E(۸)$$

$$= E(۳k+۲). \ \text{ به‌ازاء هر } k$$

افراز، یا مجموعه دسته‌های هم ارزی، تنها ۳ عضو دارد.

$\{E(۰), E(۱), E(۳)\}$، گاهی اوقات می‌نویسند $I(\mod ۳)$، ”اعداد صحیح به پیمانه ۳“

مجموع تمرینهای ۳.۵

۱. ثابت کنید $I(\mod ۳)$ یک رابطه هم ارزی است.

۲. رابطه زیر که روی I تعریف شده است را در نظر می‌گیریم.

$$\rho = \{(x,y)|x \in I, y \in I \ , \ x-y = ۲k \ \ \forall k \in I\}$$

a) ثابت کنید ρ یک رابطه هم رازی است.

b) $E(۰)$ و $E(۱)$ را به‌دست آورید. نامهای دیگر آنرا بیان کنید.

مجموعه دسته‌های هم ارزی $\{E(۰), E(۱)\}$ را $I(\mod ۲)$ می‌نامند.

۳. رابطه ρ روی I که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید.

$$\rho = \{(x,y) | x \in I, y \in I \ , \ x - y = ۴k \ \ , \ \ \forall k \in I\}$$

a) ثابت کنید ρ یک رابطه هم ارزی است.

b) $E(۰)$، $E(۱)$، $E(۲)$، $E(۳)$ را به‌دست آورید. نامهای دیگر این رابطه هم ارزی را بگویید. مجموعه $\{E(۰), E(۱), E(۲), E(۳)\}$ را $I(\mod ۴)$ می‌نامند.

۴. کار قبلی را به $I(\mod n)$ تعمیم دهید. برای ثابت $n \in N$، تعریف می‌کنیم:

$$\rho = \{(x,y) | x \in I, y \in I, x - y = nK \ \ , \ \ K \in I \ \text{برای}\}$$

a) ثابت کنید ρ یک رابطه هم ارزی است.

b) $E(۰)$، $E(۱)$، ...، $E(n-۱)$ را بیان کنید.

c) چند دسته هم ارزی وجود دارد؟

۵. مجموعه A داده شده است. ثابت کنید:

a) $A \times A$ یک رابطه هم ارزی روی A است.

b) $I_A = \{(a,a) | a \in A\}$ یک رابطه هم ارزی روی A است. رابطه I_A را **رابطه همانی** روی A می‌نامند.

۶. تفاوت روابطی را که قبلاً در موردشان بحث کرده‌ایم مشخص سازید.

a) ا، م، م $\quad$ b) ا متقارن و نامتعدی $\quad$ c) ا و نامتقارن و متعدی

d) ناانعکاسی، م، م $\quad$ e) نامتقارن، نامتعدی $\quad$ ρ) ناانعکاسی، متقارن، نامتعدی

g) ناانعکاسی، نامتقارن، متعدی $\quad$ h) ناانعکاسی، نامتقارن، نامتعدی

۷. عیب "برهان" زیر را مشخص کنید

فرض کنیم ρ یک رابطه روی A باشد.

قضیه: ρ انعکاسی است $\longrightarrow$ ρ متعدی است و ρ متقارن است

برهان. بنا به تقارن اگر $(a,b) \in \rho$ آنگاه $(b,a) \in \rho$

بنا به تعدی $\quad (a,b) \in \rho \ , \ (b,a) \in \rho \ \rightarrow \ (a,a) \in \rho$

بنابراین $(a,a) \in \rho$، پس ρ انعکاس است. ■

۸. مشخص کنید کدامیک از مجموعه‌های P زیر، یک افراز روی مجموعه داده شده‌ی A می‌باشد.
اگر P یک افراز باشد، رابطهٔ هم ارزی القایی را بیان کنید.

a) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ $\quad P = \{\{۱, ۲\}, \{۳\}, \{۴, ۱\}\}$

b) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ $\quad P = \{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴\}, \{۵\}\}$

c) $A = \{a, b, c, d, e\}$ $\quad P = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$

۹. فرض کنیم $p_۱$ و $p_۲$ رابطه‌ها هم ارزی روی مجموعه A باشند.
ثابت یا باطل کنید:

a) $p_۱ \cup p_۲$ یک رابطه هم ارزی است.

b) $p_۱ \cap p_۲$ یک رابطه هم ارزی است.

۱۰. فرض کنیم ρ یک رابطه روی A باشد. ثابت کنید:

a) انعکاسی است $\rho^{-۱} \longrightarrow$ انعکاسی باشد ρ

b) متقارن است $\rho^{-۱} \longrightarrow$ متقارن باشد ρ

c) متعدی است $\rho^{-۱} \longrightarrow$ متعدی باشد ρ

d) یک رابطه هم ارزی است $\rho^{-۱} \longrightarrow$ یک رابطه هم ارزی باشد ρ

e) $\rho^{-۱} \subset \rho \longleftrightarrow$ متقارن باشد ρ

۱۱. قسمت ۳) از قضیه ۱۷ را ثابت کنید.

۱۲. خواص متقارن و متعدی از قضیه ۱۸ را ثابت کنید.

۳.۶ توابع

در مطالعات قبل محتملاً شما با توابع مواجه شده‌اید. می‌توانیم با به کارگیری تئوری مجموعه‌ها تعریف دقیقی از یک تابع را به عنوان حالت خاصی از یک رابطه ارائه دهیم. این ممکن است برای شما جدید باشد. قبل از اینکه این تعریف را بیان کنیم اجازه دهید آنرا با بیان راههای شهودی که ممکن است توابع را مطالعه کرده باشید، ارائه دهیم.

تابع به عنوان یک قاعده. یک تابع F از مجموعه‌ی A به مجموعه ی B قاعده‌ای است که به هر عضو از مجموعه ی A، که دامنه نامیده می‌شود یک عنصر یگانه در مجموعه ی B را متناظر

می‌کند

اغلب رابطه‌ای شبیه

$$f(x) = ۳^x + \frac{۱}{x}$$

داریم که قاعده را توضیح می‌دهد. می‌توانیم این رابطه را با "فضاهای خالی "در نظر بگیریم.

پس یک دستورالعمل داریم $f(\blacksquare) = ۳^{\blacksquare} + \frac{۱}{\blacksquare}$

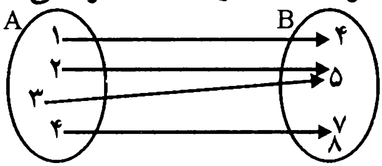
با یک عنصر داده شده، مثل a، در A، آنرا در جاهای خالی قرار می‌دهیم تا بفهمیم به کدام عنصر نسبت داده شده است. دامنه معمولاً مجموعه‌یی از اعداد است که می‌توانیم در جای «خالی» قرار دهیم. برای این تابع دامنه برابر است با $\{x|x \neq ۰\}$.

همچنین ما می‌توانیم ایده و ماشین تابع، را از آن به‌دست آوریم. برای هر وردی درست یک "خروجی" به‌دست بیاوریم.

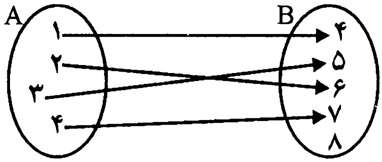
با تصور یک تابع به عنوان یک قاعده بیشتر در فیزیک، شیمی و علوم وابسته مواجه می‌شویم.

تابع به‌عنوان یک تناظر

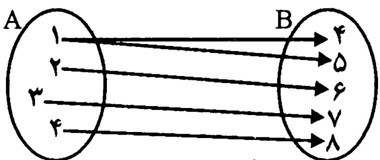
یک تابع از مجموعه A به مجموعه B تناظری است که به هر عضو در مجموعه A یک عضو یگانه در مجموعه‌ی B را متناظر می‌کند.



یک تابع است
(۱)



یک تابع است
(۲)

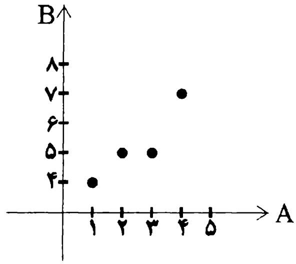


یک تابع نیست
(۳)

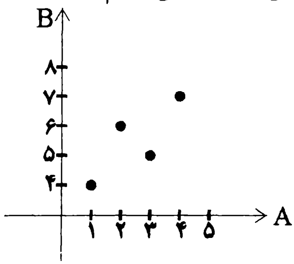
مثالها. توجه کنید که در ۱) ۲ به ۵ متناظر شده است و نه به عضو دیگر B. ۳ به ۵ متناظر شده و نه به عضو دیگر در B. اما در۳) ۱ هم به ۴ و هم به ۵ متناظر شده است بنابراین ۳) یک تابع نیست.

یک تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب

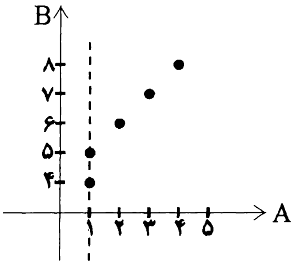
نمودارهای زیر را برای تناظرهای قبلی در نظر می‌گیریم.



(۱) یک تابع است



(۲) یک تابع است



(۳)یک تابع نیست

به خاطر آورید که مجموعه زوجهای مرتبی که در ۱و ۲ رسم شده است تابع می‌باشند. توجه داشته باشید که در ۱ و ۲ خط عمودی که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند وجود ندارد. اما برای شکل ۳ خط عمودی وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین نمودار ۳ بیانگر نمودار یک تابع نمی‌باشد. از این رو می‌توانیم تابع را به صورت **مجموعه‌ای از زوجهای مرتب که در آن دو زوج مرتب متمایز که مختص اول آنها برابر باشد، وجود ندارد، تعریف کنیم.**

تابع به‌عنوان یک رابطه اکنون می‌توانیم یک تعریف با نظریهٔ مجموعه‌ها برای تابع ارائه دهیم.

تعریف ۲۲. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. یک تابع f از A به B، که به صورت $f : A \to B$ نشان داده می‌شود، رابطه‌ای است از A به B به‌طوری که

a) $dmnf = A$

b) $(a, b_1) \in f$ و $(a, b_2) \in f \to b_1 = b_2$ ، $b_1, b_2 \in B$ ، $\forall a \in A$.

همچنین می‌گوییم $(x, y) \in f$ یعنی $y = f(x)$ می‌باشد. و $f(x)$ که (اِفِ x) خوانده می‌شود، مقدار تابع در x را مشخص می‌کند. بنابراین قسمت b را به صورت یک رابطه در می‌آوریم.

b') $a_1 = a_2 \longrightarrow f(a_1) = f(a_2)$ ، $\forall a_1, a_2 \in A$.

قسمت b یا b' یگانگی را تضمین می‌کند. برای دیدن این یگانگی عکس نقیض را می‌نویسیم

b'') $\forall a_1, a_2 \in A$ و $f(a_1) \neq f(a_2) \longrightarrow a_1 \neq a_2$

در حقیقت، اختلاف نظرهای زیادی راجع به تعریف تابع بین ریاضیدانان وجود دارد، که در مثالها و مراجع در تمرینات دیده می‌شود.

یک راه نشان دادن این موضوع آن است که به کتابخانه مراجعه کنید، پنج کتاب ریاضی به تصادف بگیرید، و به تعریفهای توابع نگاه کنید و آنها را مقایسه نمایید. تابع $f : R \to R$ ، $f = \{(x, y) | y = 3^x + \sin x\}$

را به‌صورتهای زیر هم می‌توان نشان داد.

$$f = \{(x, f(x)) | f(x) = ۳^x + \sin x\}$$

$f : R \to R$ یا توسط $f(x) = ۳^x + \sin x$ بیان می‌شود.

توجه کنید که تحت تعریف دقیق ما از تابع، اصطلاحات زیر نادرستند (با وجود این، مورد استفاده قرار می‌گیرند):

۱) " تابع $y = ۳^x + \sin x$ "

۲) " تابع $f(x) = ۳^x + \sin x$ "

۳) " تابع $f(x)$ "

چرا که ۱ و ۲، به جملات مربوطند نه مجموعه‌ها"، و ۳ به مقدار تابع در x اشاره می‌کند نه مجموعه‌ای از زوجهای مرتب.

مثالها. دامنه و برد را به‌دست آورده، تعیین کنید کدامیک تابع است.

فرض کنیم برای ۱، ۲، $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c, d, e\}$.

۱) $f : A \longrightarrow B$ توسط $f = \{(a, b)(a, c), (b, d), (c, e)\}$

$$dmn = \{a, b, c\} \quad , \quad rge = \{b, c, d, e\}$$

نماد $f : A \to B$ نادرست است زیرا $(a, b) \in f$، $(a, c) \in f$: بنابراین f تابع نیست.

۲) $g : A \to B$ توسط $g = \{(a, c), (b, d), (c, e)\}$ $dmng = \{a, b, c\}$، $rgeg = \{c, d, e\}$. نماد $g : A \to B$ صحیح است، پس g تابع است. توجه نمایید که $rgeg \neq B$؛ این مانع تابع شدن آن نمی‌شود.

۳. $h : R \to R$ توسط $h(x) = \frac{۱}{x^۲}$

$$rgeh = \{y | y > ۰\} \text{ ، } dmnh = \{x | x \neq ۰\} = R - \{۰\}$$

این تابع نیست زیرا $R - \{۰\} \neq R$. اما آنچه در ذیل بیاید تابع است.

$$h^۱ : (R - \{۰\}) \to R \text{ توسط } h^۱(x) = \frac{۱}{x^۲}$$

مجموعه تمرینهای ۳.۶

هر یک از رابطه‌های زیر را در R رسم کنید. سپس تعیین کنید کدامیک تابع است.

۱. $\{(x,y)|y=x^۲\}$ ۲. $\{(x,y)|x=y^۲\}$

۳. $\{(x,y)|y=۴\}$ ۴. $\{(x,y)|x=-۲\}$

۵. $\{(x,y)|y>x\}$ ۶. $\{(x,y)|۴x^۲+۹y^۲=۳۶\}$

دامنه و برد را مشخص کنید و سپس تعیین کنید کدامیک تابع است.

برای تمرینهای ۱۱ـ۷ فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

۷. $f_۷ : A \to B$؛ $f_۷=\{(a,۱),(b,۲),(c,۳)\}$

۸. $f_۸ : A \to B$؛ $f_۸=\{(a,۱),(b,۲),(c,۳),(d,۴)\}$

۹. $f_۹ : A \to B$؛ $f_۹=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

۱۰. $f_{۱۰} : A \to B$؛ $f_{۱۰}=\{(۱,a),(۲,a),(۳,c),(۴,c),(۵,d)\}$

۱۱. $f_{۱۱} : A \to B$؛ $f_{۱۱}=\{(a,۱),(b,۱),(c,۳),(d,۵)\}$

تعریف ۲۳. تابع $f : A \to B$ **پوشا** است اگر و فقط اگر برای هر عضو $b \in B$ وجود داشته باشد یک عضو $a \in A$، به‌طوری که $f(a)=b$.

۱۲. a) تعریف تابع پوشا را به صورت نماد منطقی درآورید.

b) نقیض تعریف تابع پوشا را بنویسید.

۱۳. کدامیک از توابع در تمرینهای ۱ و ۳ از مجموعه اعداد حقیقی به مجموعه اعداد حقیقی پوشا می‌باشند؟

۱۴. کدامیک از توابع در تمرینات ۱۱ـ۷ به مجموعه B پوشا هستند؟

تعریف ۲۴. تابع $f : A \to B$ **یک به یک** است اگر و فقط اگر برای هر عضو a و هر عضو b از مجموعه A، اگر $f(a)=f(b)$، آنگاه $a=b$.

a) تعریف تابع یک به یک را به‌صورت نماد منطقی درآورید.

b) نقیض تعریف تابع یک به یک را بنویسید.

۱۶. کدامیک از توابع در تمرینات ۱ و ۳ یک به یک می‌باشند؟

۱۷. کدامیک از توابع در تمرینات ۱۱ـ۷ یک به یک می‌باشند؟

۱۸. فرض کنیم A مجموعه متناهی $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,\ldots,a_n\}$ باشد

با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید مجموعه‌ی تمام توابع از A به B که هم یک به یک و هم پوشا هستند دارای $n!$ عضو می‌باشد.

ضمیمه

دستگاه اعداد حقیقی

دستگاه اعداد حقیقی را با R نشان می‌دهند. R مجهز به یک ساختار جبری است، بعضی از خواص آن در زیر فهرست شده است. وقتی خاصیتی برای مجموعه‌ی اعداد طبیعی، مجموعه اعداد صحیح I، یا مجموعه اعداد گویای Q برقرار باشد، با نماد مناسب را در سمت راست فهرست می‌نماییم.

جمع.

$(A_1$ بسته بودن (نسبت به جمع) $\forall a \forall b (a + b \in R)$ N, I, Q

$(A_2$ (قانون شرکت‌پذیری) $\forall a \forall b \forall c [a + (b + c) = (a + b) + c]$ N, I, Q

$(A_3$ (همانی جمعی) یک عضو که با نماد 0 نشان می‌دهیم وجود دارد I, Q

به‌طوری که به‌ازاء هر a، $a + 0 = 0 + a = a$

$(A_4$ (معکوس جمعی) $\forall a \exists (-a)[a + (-a) = (-a) + a = 0]$ I, Q

$(A_5$ (قانون تعویض‌پذیری) $\forall a \forall b (a + b = b + a)$ N, I, Q

ضرب

$(M_1$ بسته بودن (نسبت به جمع) $\forall a \forall b (ab \in R)$ N, I, Q

$(M_2$ (قانون شرکت‌پذیری) $\forall a \ \forall b \ \forall c \ [a(bc) = (ab)c]$ N, I, Q

$(M_3$ (همانی ضربی) عضوی که با نماد 1 نشان می‌دهیم وجود N, I, Q

دارد به‌طوری که $\forall a (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$

$(M_4$ (معکوس ضربی) $\forall a [a \neq 0 \ \rightarrow \ \exists a^{-1} (a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1)]$ Q

$(M_5$ (قانون تعویض‌پذیری) $\forall a \ \forall b (ab = ba)$ $N, I, Q,$

$(D$ (قانون توزیع‌پذیری) $\forall a \ \forall b \ \forall c [a(b + c) = ab + ac]$ N, I, Q

$(E$ $1 \neq 0$

خواص ترتیب

۰۱) (قانون تثلیث) به‌ازاء هر دو عدد حقیقی a، b دقیقاً یکی از موارد زیر درست است.

a) $a < b$، b) $a = b$ c) $a > b$ $\qquad N, I, Q,$

برای مثال، $a < \circ$ یا $a > \circ \longrightarrow a \neq \circ$

۰۲) (قانون متعدی) $\forall a\, \forall b\, \forall c[(a < b \wedge b < c) \;\to\; a < c] \qquad N, I, Q$

۰۳) $\forall a\, \forall b\, \forall c(a < b \;\to\; a + c < b + c) \qquad N, I, Q$

$\forall a\, \forall b\, \forall c(a \leq b \;\to\; a + c \leq b + c) \qquad N, I, Q$

۰۴) $\forall a\, \forall b\, \forall c(a < b \wedge c > \circ \;\to\; ac < bc) \qquad N, I, Q$

$\forall a\, \forall b\, \forall c(a \leq b \wedge c > \circ \;\to\; ac \leq bc) \qquad N, I, Q$

۰۵) $\forall a\, \forall b\, \forall c(a < b \wedge c < \circ \;\to\; ac > bc) \qquad N, I, Q$

$\forall a\, \forall b\, \forall c(a \leq b \wedge c < \circ \;\to\; ac \geq bc) \qquad N, I, Q$

۰۶) $۱ > \circ$

خواص دیگر

P_1) $\forall a\, \forall b[a < b \;\leftrightarrow\; \exists p > \circ (a + p = b)] \qquad N, I, Q,$

P_2) تعریف $\forall a[(a \geq \circ \;\to\; |a| = a) \wedge (a < \circ \;\to\; |a| = -a)] \qquad N, I, Q$

آنگاه $\forall a(a \neq \circ \;\to\; |a| > \circ)$

P_3) $\forall a(a \cdot \circ = \circ \cdot a = \circ) \qquad I, Q$

مسائل ویژه (از مترجمان)

درستی یا نادرستی گزاره‌ها را ثابت کنید:

۱. $$\frac{۱\cdot۳\cdot۵\cdot\ldots\cdot(۲n-۱)}{۲\cdot۴\cdot۶\cdot\ldots\cdot(۲n)} \leq \frac{۱}{\sqrt{n+۱}}$$

۲. $$(a_۱a_۲\ldots a_۲n)^{\frac{۱}{۲n}} \leq \frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{۲n}}{۲n}$$
که $n \in \mathrm{N}$ و a_iها اعداد مثبت هستند.

۳. $۲ - ۳^n + ۷^n$ برای هر $n \in \mathrm{N}$ بر ۸ قابل قسمت است.

۴. فرض کنید $۱ < n$ نفر طوری جا داده شده‌اند که هر یک تنها یک «نزدیکترین همسایه» دارد حال فرض کنید که هر فرد کیکی دارد که به سمت نزدیکترین همسایه‌اش پرتاب شده است. کسی که کیکی به او اصابت نکرده، زنده نامیده می‌شود.

a) مثالی ارائه دهید که نشان دهد اگر n زوج باشد، زنده‌ای وجود نخواهد داشت.

b) نشان دهید اگر n فرد باشد، همواره حداقل یک زنده وجود خواهد داشت.

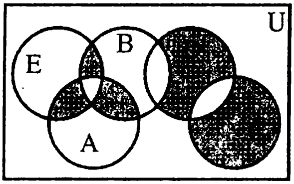
۵. ثابت کنید $۶|(n^۳+۵n)$.

۶. ثابت کنید $۵|(n^۵-n)$.

۷. ثابت کنید در هر دایره به شعاع ۳^n که $n \in \mathrm{N}$ باشد، حداقل ۷^n دایرهٔ واحد جای می‌گیرد. به‌طوری که هیچ دو دایره‌ای در بیش از یک نقطه با هم اشتراک نداشته باشند.

۸. اگر $Q = \{(x,y) \mid |x+y| < ۲۱\}$, $P = \{(x,y) \mid |x-۱| < ۱۰, |y-۱| < ۹\}$، ثابت کنید $P \subset Q$

۹. عبارتی بنویسید که مجموعه مشخص شده با نمودار ون در زیر را نشان دهد.



مجموعه‌ای که با نمودار ون نشان داده شده است

۱۰. ثابت کنید $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

حل مسائل

۱. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\forall n \in \mathbf{N} \quad P(n) : \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲n - ۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲n)} \leq \frac{۱}{\sqrt{n + ۱}}$

ابتدا $P(۱)$ را بررسی می‌کنیم:

$$P(۱) : \frac{۱}{۲} \leq \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین $P(۱)$ درست است. این گام پایهٔ استقرا است. حال مرحلهٔ استقرا را انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم $P(k)$ درست می‌باشد یعنی:

$$P(k) : \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲k - ۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲k)} \leq \frac{۱}{\sqrt{k + ۱}}$$

حال درستی $P(k + ۱)$ را ثابت می‌کنیم.

$$P(k + ۱) : \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲k - ۱) \cdot (۲(k + ۱) - ۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲k) \cdot (۲(k + ۱))} = \left[\frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲k - ۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲k)}\right]$$

بنا به $P(k)$: $\left[\frac{۲k + ۱}{۲k + ۲}\right] \leq \frac{۱}{\sqrt{k + ۱}} \left(\frac{۲k + ۱}{۲k + ۲}\right) = A$

که A تنها یک نماد است.

اما داریم:

$$۴k^۳ + ۱۲k^۲ + ۹k + ۲ \leq ۴k^۳ + ۱۲k^۲ + ۱۲k + ۴$$

چون k عددی مثبت است.

بنابراین

$$(4k^2+4k+1)(k+2) \leq (4k^2+8k+4)(k+1)$$
$$\to \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} \leq \frac{k+1}{k+2} \quad \to \quad \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}$$
$$\to \ A \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)+1}}$$
$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2(k+1)-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2(k+1))} \leq \frac{1}{\sqrt{(k+1)+1}} : \ P(K+1)$$

بنا به استقرا چون $P(1)$ درست است و با فرض $P(k)$، درستی $P(k+1)$ نتیجه می‌شود، گزارهٔ صورت مسأله درست است.

۲. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) : (a_1a_2\ldots a_2n)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_2n}{2n}$

که a_i ها اعداد مثبت هستند.

ابتدا درستی $P(1)$ را بررسی می‌کنیم:

$$P(1) : (a_1a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$$

داریم:

$$(a_1-a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0 \quad \to \quad a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 4a_1a_2 \geq 4a_1a_2$$
$$\to \ (a_1^2+2a_1a_2+a_2^2) \geq 4a_1a_2 \quad \to \quad (a_1+a_2)^2 \geq 4a_1a_2$$
$$\to \ 2\sqrt{a_1a_2} \leq a_1+a_2 \quad \to (a_1a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{a_1+a_2}{2} \quad : P(1)$$

یعنی $P(1)$ درست است. این گام پایهٔ استقرا است. حال مرحلهٔ استقرا را انجام می‌دهیم: فرض می‌کنیم $P(k)$ درست است.

$$P(k) : (a_1a_2\ldots a_2k)^{\frac{1}{2^k}} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_2k}{2^k}$$

حال درستی $P(k+1)$ را ثابت می‌کنیم:

$$P(k+1) : (a_1a_2\ldots a_2^k a_{2^k+1}\ldots a_2^{k+1})^{\frac{1}{2^{k+1}}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_2k+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$
$$(a_1a_2\ldots a_2^k a_{2^k+1}a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}} = \sqrt{(a_1a_2\ldots a_2k)^{\frac{1}{2^k}}(a_{2^k+1}\ldots a_2^{k+1})^{\frac{1}{2^k}}}$$
$$\leq \frac{(a_1a_2\ldots a_2^k)^{\frac{1}{2^k}} + (a_{2^k+1}+\cdots+a_2^{k+1})^{\frac{1}{2^k}}}{2} \quad \text{بنا به } P(1)$$

بنا به $P(k)$:

$$\leq \frac{\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{۲k}}{۲^k}+\frac{a_{۲^k+۱}+\cdots+a_{۲^{k+۱}}}{۲^k}}{۲}$$
$$=\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{۲^{k+۱}}}{۲^{k+۱}}$$

بنابراین $P(k+۱)$ درست است. پس با توجه به اثبات دو مرحلهٔ استقراء، صورت مسئله درست است.

۳. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\forall n \;\; P(n) : ۸|۷^n+۳^n-۲$

ابتدا $P(۱)$ را بررسی می‌کنیم: $P(۱) : ۷+۳-۲=۸ \overset{۸}{\equiv} ۰$

یعنی $۸|۸$ پس $P(۱)$ درست است. این گام پایه است. حال گام استقرا را انجام می‌دهیم.

فرض می‌کنیم $P(k)$ درست است.

$$P(k) : ۸|۷^k+۳^k-۲$$

یعنی $۷^k+۳^k \overset{۸}{\equiv} ۲$. حال درستی $P(k+۱)$ را ثابت می‌کنیم:

$$P(k+۱) : ۸|۷^{k+۱}+۳^{k+۱}-۲$$

طبق $P(k)$: $۷^{k+۱}+۳^{k+۱}=۳(۷^k+۳^k)+۴(۷^k) \overset{۸}{\equiv} ۳(۲)+۴(۷^k)$

داریم $۷ \overset{۸}{\equiv} -۱$ بنابراین $۷^k \overset{۸}{\equiv} (-۱)^k$ خواهیم داشت:

$$۷^{k+۱}+۳^{k+۱} \overset{۸}{\equiv} ۶+۴(-۱)^k=\begin{cases} ۶+۴ & k \text{ زوج} \\ ۶-۴ & k \text{ فرد}\end{cases}$$
$$=\begin{cases} ۱۰ & k \text{ زوج} \\ ۲ & k \text{ فرد}\end{cases}$$

در هر دو حالت: $۳^{k+۱}+۷^{k+۱} \overset{۸}{\equiv} ۲ \quad \rightarrow$

بنابراین $P_{(k+۱)}$ برقرار است. پس با توجه به طی هر دو گام استقرا، داریم: $\forall n \in \mathbb{N} : ۸|۳^n+۷^n-۲$

۴. a) ساده‌ترین مثال حالتی است که تنها دو نفر وجود دارند، دراین حالت هر یک از دو نفر «نزدیکترین همسایه» دیگری است و بنابراین کیک هر یک به دیگری اصابت می‌کند. بنابراین هیچکدام زنده نخواهند بود.

b) طبق قسمت قبل می‌دانیم که اگر تعداد، زوج باشد، قطعاً هیچ زنده‌ای وجود نخواهد داشت.

حال فرض کنیم تعداد فردی از مردم داشته باشیم و فرض کنیم که حکم برقرار نباشد یعنی هیچ زنده‌ای وجود نداشته باشد. حال اگر یک نفر را در فاصله‌ای بسیار دور قرار دهیم به‌طوری که نزدیکترین همسایهٔ هیچکس نباشد، تعدادی زوج از مردم داریم که شرایط مسئله در آنها برقرار است ولی در بین آنها زنده وجود دارد و این یک تناقض است. پس حکم برقرار است.

۵. می‌خواهیم ثابت کنیم $۶|(n^۳ + ۵n)$ یا به عبارتی $P(n) : (n^۳ + ۵n) \overset{۶}{\equiv} ۰$ ابتدا $P(۱)$ را بررسی می‌کنیم.

$$P(۱) : ۱ + ۵ = ۶ \overset{۶}{\equiv} ۰$$

این مرحلهٔ پایه است. حال مرحلهٔ استقرا را انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم $P(k)$ درست باشد یعنی

$$P(k) : (k^۳ + ۵k) \overset{۶}{\equiv} ۰$$

حال درستی $P(k + ۱)$ را ثابت می‌کنیم:

$$P(k + ۱) : (k + ۱)^۳ + ۵(k + ۱)$$

بنا به $P(k)$

$$= k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱ + ۵k + ۵ = k^۳ + ۳k^۲ + ۸k + ۶ \overset{۶}{\equiv} ۳k^۲ + ۳k$$
$$= ۳(k + ۱)k \overset{۶}{\equiv} ۰ \quad : \quad P(k + ۱)$$

بنابراین خواهیم داشت: $\forall n \in \mathbb{N} \;\; ۶|(n^۳ + ۵n)$

۶. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\forall n \in \mathbb{N} \quad ۵|(n^۵ - n)$ یا به عبارتی $P(n) : (n^۵ - n) \overset{۵}{\equiv} ۰$ ابتدا $P(۱)$ را بررسی می‌کنیم:

$$P(۱) : ۱ - ۱ = ۰ \overset{۵}{\equiv} ۰$$

این گام پایه است. حال مرحلهٔ استقرا را انجام می‌دهیم:

فرض می‌کنیم $P(k)$ درست است:

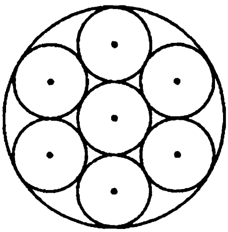
$$P(k) : (k^۵ - k) \overset{۵}{\equiv} ۰$$

حال درستی $P(k+۱)$ را ثابت می‌کنیم:

$$P(k+۱):(k+۱)^۵-(k+۱)$$
$$=k^۵+۵k^۴+۱۰k^۳+۱۰k^۲+۵k+۱-(k+۱)$$
$$=k^۵+۵k^۴+۱۰k^۳+۱۰k+۴k \overset{۵}{\equiv} ۵k^۴+۱۰k^۳+۱۰k^۲+۵k \quad :P(k)$$ بنا به
$$=۵(k^۴+۲k^۳+۲k^۲+k)\overset{۵}{\equiv}۰ : \quad P(k+۱)$$

بنابراین داریم: $\forall n\in\mathbb{N}: ۵|(n^۵-n)$

۷. فرض می‌کنیم:
$P(n)$ در هر دایره به شعاع ۳^n، می‌توان ۷^n دایرهٔ واحد جا دارد.



ابتدا $P(۱)$ را بررسی می‌کنیم. دایره‌ای به شعاع ۳ را در نظر می‌گیریم. ۷ دایرهٔ واحد در آن جا داده شده است. حال فرض می‌کنیم $P(k)$ درست است. یعنی در یک دایره به شعاع ۳^k، می‌توان ۷^k دایرهٔ واحد جا داد.

حال درستی $P(k+۱)$ را ثابت می‌کنیم.

دایره‌ای به شعاع $۳^{k+۱}$ یعنی $۳^k\times ۳$ را در نظر می‌گیریم. بنابه $P(۱)$ می‌توان ۷ دایره به شعاع ۳^k را در آن جا داد و بنا به $P(k)$، در هر دایرهٔ به شعاع ۳^k می‌توان ۷^k دایره به شعاع واحد جا داد. بنابراین در دایرهٔ فوق به شعاع $۳^{k+۱}$، می‌توان $۷^k\times ۷$ دایرهٔ واحد یعنی $۷^{k+۱}$ دایرهٔ واحد جا داد.

بنابراین حکم مسئله درست است.

۸. اثبات: برای اثبات $P\subset Q$ باید نشان دهیم هر عضو P، عضو Q است و Q حداقل شامل یک عضو می‌باشد که در P نیست. $|x+y|$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|x+y|=|[(x-۱)+۱]+[(y-۱)+۱]|$$
$$\leq|(x-۱)+۱|+|(y-۱)+۱|$$
$$\leq|x-۱|+۱+|y-۱|+۱$$
$$\leq|x-۱|+|y-۱|+۲$$

اکنون جانشین می‌کنیم $|x - ۱| < ۱۰$ و $|y - ۱| < ۹$.

$$|x + y| \le |x - ۱| + |y - ۱| + ۲ < ۱۰ + ۹ + ۲ = ۲۱$$

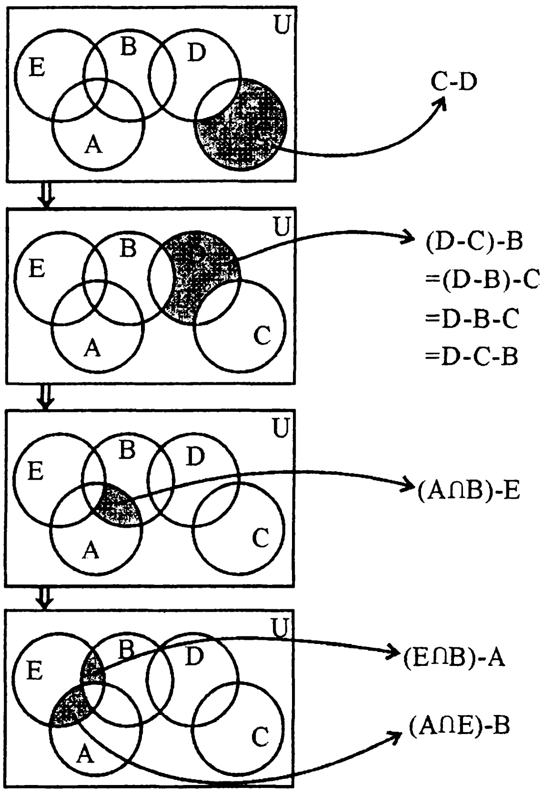
$$* \; |x + y| < ۱۰ + ۹ + ۲ = ۲۱$$

$$|x + y| < ۲۱$$

بنابراین تمام عناصر P در شرط $|x + y| < ۲۱$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر هر عضو P، عضو Q است. از طرفی با بررسی معلوم می‌شود $(۱۲, -۹)$ به Q تعلق دارد اما به P تعلق ندارد، بنابراین حداقل یک زوج مرتب مانند $(x_۰, y_۰) = (۱۲, -۹)$ وجود دارد به طوری که صدق نمی‌کند، زیرا $|۱۲ - ۹| = ۳ < ۲۱$، اما $|۱۲ - ۱| = ۱۱ \not< ۱۰$ و $|-۹ - ۱| = ۱۰ \not< ۹$، بنابراین $p \subset Q$

.۹

حل ابتدا عبارتی برای یک ناحیه کوچک سایه خورده را نشان دهد، می‌نویسیم. برای هر ناحیه این عمل را انجام می‌دهیم سپس از اجتماع استفاده می‌کنیم.



مجموعه برابر است با

$$(C-D)\cup(D-B-C)\cup(A\cap B-E)\cup(A\cap E-B)\cup(E\cap B-A)$$

.۱۰

(اثبات)

$x\in(A-B)\cup(B-A)$

$\Rightarrow\ \{x : x\in(A-B) \text{ یا } x\in(B-A)\}$

$\Rightarrow\ \{x : (x\in A\ ,\ x\notin B) \text{ یا } (x\in B\ ,\ x\notin A)\}$

$\Rightarrow\ \{x : x\in B \text{ یا } (x\in A\ ,\ x\notin B)\ ,\ x\notin A \text{ یا } (x\in A\ ,\ x\notin B)\}$

$\Rightarrow\ \{x : (x\in B \text{ یا } x\in A),(x\in B \text{ یا } x\notin B),(x\notin A \text{ یا } x\in A),(x\notin A \text{ یا } x\notin B)\}$

$\Rightarrow \{x : (x\in A\cup B, x\notin\phi), x\notin\phi, x\notin A\cap B\}$

$\Rightarrow \{x : x\in A\cup B, x\notin A\cap B\}$

$\Rightarrow \{x : x\in(A\cup B-A\cap B)\}$

بنابراین $(A-B)\cup(B-A)\subset(A\cup B)-(A\cap B)$

به طور مشابه $(A\cup B)-(A\cap B)\subset(A-B)\cup(B-A)$

در نتیجه $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B-A\cap B$

به عنوان مثال فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\ ,\ B=\{۲,۴,۶,۸\}$

$A-B=\{۱,۳,۵\}, B-A=\{۸\}$

$(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۳,۵,۸\}$

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸\}\quad A\cap B=\{۲,۴,۶\}\quad A\cup B-A\cap B=\{۱,۳,۵,۸\}$

جواب تمرینات منتخب

مجموعه تمرینات ۱.۱

۱. $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ ۳. $\{\dots, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, \dots\}$

۵. $\{x| = ۱ \le x \le ۲$ ، x عدد صحیح است$\}$ ۶. $\{x|x > ۹$ ، x عدد صحیح است$\}$

$\{x|x \ge ۱۰$, ، x عدد صحیح است$\}$ ۷. $\{x|x = ۱۰k,$ k به‌ازاء هر عدد طبیعی$\}$

۹. $\notin$ ۱۱. $\in$ ۱۳. $\in$ ۱۵. $=$ ۱۶. $D = C$ ، $E = F$ ، $B = H$

۱۷. T ۱۹. F ۲۱. T ۲۳. ϕ ۲۵. ϕ ۲۷. $\{x|x < -۱\}$

۲۹. $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$ ۳۱. A

مجموعه تمرینات ۱.۲

۱. a) A،
b) $\{۰, ۸\}$،
c) $\{۰, ۲, ۳, ۸\}$،
d) $\{۰, ۲, ۳, ۱۰, ۸\}$،
e) $\{۰, ۸\}$،
f) $\{۰, ۸, ۲, ۳\}$،
g) $\{۱\}$،
h) $\{۱\}$،
i) U
j) U

۲. Q

۳. ϕ

۴. ϕ

۵. ϕ

۶. j

۷. I

۸. Q

۹. $\{x \mid x = ۲k + ۱$ ، k به‌ازاء هر عدد صحیح$\}$، یا $\{\ldots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, ۷, \ldots\}$

۱۰. a) ϕ،
b) I

۱۱. a) $\{\ldots, -۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹, \ldots\}$،
b) $\{\ldots, -۸, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, ۱۰, \ldots\}$
d) ϕ،
e) ϕ،
f) ϕ،
g) I

۱۲. $\{-۱, -۲\}$

۱۳. ϕ،

۱۴. ϕ

۱۵. $\{\ldots, -۲, ۰, ۲, \ldots\}$

۱۶. $\{۲\}$

۱۷. a) $[۲, ۳)$،
b) R،
c) $[-۱, ۴)$،
d) $[۱, ۲)$،

e) $\{۳\}$،

f) ϕ،

g) $[-n, n]$،

h) $[-(n+۱), n+۱]$

۱۸. b) $\{\phi, \{o\}\}$

d) $\{\phi\}$

مجموعه تمرینات ۱.۳

۱. g, b, d, e, f

۲. a) x،

b) n،

c) x, y،

d) x،

e) x, y

۳. a, c

۴. $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$

۵. $\{۰, ۱\}$

۶. ϕ

۷. $\{۱, -۲\}$

۸. ϕ

۹. $\{-۱\}$

۱۰. ϕ

۱۱. $\{-۱\}$

۱۲. $\{-۱\}$

۱۳. $\left\{-۱, -\frac{۱}{۲}\right\}$

۱۴. $\left\{-۱, -\frac{۱}{۲}\right\}$

۱۵. ϕ

۱۶. $\{x|x \in R, x \neq -۲\}$

۱۷. نادرست، $۱^۲ \neq ۰$

۱۸. نادرست

۱۹. درست

۲۰. درست

۲۱. نادرست، $۲^۲ \neq ۲$

۲۲. درست

۲۳. درست

۲۴. درست

۲۵. درست

۲۶. درست

۲۷. درست

۲۸. درست

۲۹. درست

۳۰. نادرست

تمرین ۲۶ را ببینید

۳۱. نادرست

۳۲. نادرست $۲ + ۳ \neq ۰$

۳۳. درست

۳۴. درست

مجموعه تمرینات ۱.۴

۱. نادرست

۲. درست

۳. درست

۴. نادرست

۵. نادرست

۶. درست

۷. $\sim P$، $\sim (۳ = ۲)$، $۳ \neq ۲$، نادرست است که $۳ = ۲$، یعنی درست نیست که $۳ = ۲$

۸. $P \sim$، e گنگ نیست، e گویا است، نادرست است که e گنگ است، درست نیست که e گنگ است

۹. درست

۱۰. نادرست

۱۱. $x \geq y$

۱۲. $x \leq y$

۱۳. $۳ > y$

۱۴. $z^۲ < ۱ + x$

۱۵. درست

۱۶. درست

۱۷. نادرست

۱۸. درست

در ۱۳ـ۱۹ $P \to Q$ را می‌توان با "اگر P آنگاه Q" جایگزین کرد و بر عکس

۱۹. اگر n اول باشد آنگاه n تجزیه نمی‌شود

۲۰. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} u_n = ۰$.

۲۱. اگر $|r| < ۱$ آنگاه $\lim_{n\to\infty}(a + ar + \cdots + ar^n) = \frac{a}{۱ - r}$

۲۲. اگر $x \in N$ آنگاه $x \in I$.

۲۳. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} |u_n|$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگرا است.

۲۵. $a \in R \quad \to \quad a \in Q$

۲۶. $x \in Q \quad \to \quad x \in I$

۲۸. $l_۱ \cap l_۲ = \phi \to l_۱$ موازی با $l_۲$

۲۹. x مستطیل است $\to$ x مربع باشد.

۳۰. x چند ضلعی است $\to$ x مثلث باشد

۳۱. $۳x = ۳y \quad \to \quad x = y$

۳۲. $f'(x) = ۲x \quad \to \quad f(x) = x^۲$

۳۳. x مثلث نیست $\to$ x مربع باشد.

مجموعه تمرینات ۱.۵

۱. نادرست

۲. درست

۳. نادرست

۴. درست

۵. درست

۶. $۲x = ۱۰ \quad \leftrightarrow \quad x = ۵$

۷. $\left(x = \frac{p}{q}\right.$ به‌طوری که $\left. p \in I \wedge q \in I \wedge q \neq ۰\right) \quad \leftrightarrow \quad x \in Q$

۸. وقتی که m، n به بینهایت می‌روند $|x_m - x_n| \quad \to \quad ۰ \quad \leftrightarrow \quad \{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ حد دارد.

۹. $ab = \circ \quad \leftrightarrow \quad (a = \circ \vee b = \circ)$

۱۰. دو ضلع مساوی هستند $\leftrightarrow$ مثلث متساوی‌الساقین است

اگر ما متغیر x را برای مثلث تعبیر نماییم گزاره تبدیل می‌شود به:

x دو ضلع مساوی دارد $\leftrightarrow$ x مثلث متساوی‌الساقین است.

۱۱. $۲x - ۱ = \circ \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{۱}{۲}$

۱۲. f مشتق‌پذیر است $\leftrightarrow$ f پیوسته است

۱۳. $(p \in I \wedge q \in I \wedge q \neq \circ) \quad \rightarrow \frac{p}{q} \in Q$

۱۴. ABC دو ضلع مساوی دارد $\longrightarrow$ (ABC متساوی‌الساقین است $\wedge ABC$ مثلث است)

۱۵. $(a, b, c, x$ اعداد حقیقی هستند $\wedge\ a \neq \circ \wedge ax^۲ + bx + c = \circ \wedge b^۲ - ۴ac = \circ) \quad \rightarrow$

ریشه‌های $ax^۲ + bx + c = \circ$ حقیقی و مساوی هستند.

۱۶. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \circ \quad \rightarrow \quad \sum\limits_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگرا است.

۱۷. $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} u_n$ همگرا نیست $\rightarrow \quad \lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq \circ$

۱۸. (a زوج است $\vee\ a$ فرد است) $\longrightarrow a \in I$

۱۹. gof مشتق‌پذیر است $\rightarrow$ (g مشتق‌پذیر است $\wedge f$ مشتق‌پذیر است.)

۲۰. $\left[uv \right.$ مشتق‌پذیر است $\left. \wedge \frac{d(uv)}{dx} = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dx}\right)\right] \rightarrow$ (u و v توابعی مشتق‌پذیر بر حسب x هستند)

۲۱. $(x \in J \vee x \in Q \quad \leftrightarrow \quad x \in R)$

۲۲. $(x \in N^- \vee x \in N_\circ) \quad \leftrightarrow \quad x \in I$

۲۳. $x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

۲۴. $x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

۲۵. $x \in CA \leftrightarrow x \notin A$

مجموعه تمرینات ۱.۶

۱. x چند ضلعی است $\longrightarrow$ x مثلث باشد، $\forall x$

۲. x عدد صحیح است $\longrightarrow$ x عدد طبیعی باشد، $\forall x$

۳. (x زوج است $\vee$ x فرد است) $\longrightarrow$ x عدد طبیعی باشد، $\forall x$

۴. x زوج است $\wedge x$ اول است، $\exists x$

۵. $\exists x \ , \ x = \lim_{n \to \infty} \frac{۱}{n}$

۶. $\exists x[n \leq x \leq ۲ \wedge \int_n^۲ f(x)dx = (۲ - n)f(x)$

۷. $\exists p \exists q \ , \ p \cdot q = ۳۲$

۸. $\forall x \ \exists y$ ،$x < y$

۹. $\exists y \forall x \ , \ x + ۰ = y$

۱۰. xy اصم است، $\exists x \ \exists y$

۱۱. $\forall x \ \forall y$ ،$x + y = y + x$

۱۲. $\exists x \ \exists y, x^۲ = y$

۱۳. $\forall x \ \forall y$ ،$xy = yx$

۱۴. $۱ < ۲ \rightarrow \exists x(x < ۲)$

۱۵. $\forall x[\sqrt{x} = k \rightarrow \exists y(\sqrt{y} = k)]$

۱۶. $\forall f, D(f) \rightarrow C(f)$

۱۷. $\exists f, C(f) \wedge \sim D(f)$

۱۸. $[\forall x, E(x) \rightarrow A(x)] \wedge [\exists x\ ,\ A(x) \wedge E(x)]$

۱۹. $[\forall x, V(x) \rightarrow \sim O(x)] \rightarrow [\exists x, O(x) \wedge \sim V(x)]$

۲۰. $[\forall x, \exists(x) \rightarrow L(x)] \rightarrow [\exists x, L(x) \wedge \sim (E(x)]$

۲۱. $\forall x\ ,\ S(x) \rightarrow R(x)$

۲۲. ϕ، نادرست

۲۳. N^- یا، $\{-۱, -۲, -۳, \ldots\}$، نادرست

۲۴. N^-، نادرست

۲۵. $\{-۱\}$، نادرست

۲۶. R، درست

۲۷. R، درست

۲۸. ϕ

۲۹. N^-، درست

۳۰. N^-، درست

۳۱. $\{-۱\}$، درست

۳۲. R، درست

۳۳. R، درست

۳۴. اگر $\forall x R(x)$ درست باشد، آنگاه $\exists x P(x)$ درست است. (به یادآورید که مجموعه مرجع مخالف تهی است.)
این را بعداً ثابت خواهیم کرد.

مجموعه تمرینات ۱.۷

۱. a) درست
b) نادرست، گزارهٔ $\exists y(y < ۰)$ نادرست است.
c) نادرست، هر گزاره $\forall x(۰ < x)$، $\forall x(۱ < x)$، $\forall x(۲ < x)$ نادرست است.
d) درست، $y = ۰$
e) درست، x مفروض است وجود دارد yی که $y = x$، در این صورت $y \leq x$
f) درست، درست است $\forall x(۰ \leq x)$،
g) نادرست، در مجموعه عددی وجود ندارد که چنانچه به آن اضافه شود صفر شود،
h) این قانون تعویض‌پذیری جمع است
i) نادرست

۲. a) درست،
b) نادرست
c) نادرست
d) درست
e) درست
f) درست
g) نادرست
h) درست

i) درست

۳. a) درست

b) درست

c) نادرست

d) نادرست

e) درست

f) نادرست

g) درست

h) درست

i) درست

۴. a) نادرست، تابع f که با $f(x) = |x|$ مشخص می‌شود در صفر مشتق‌پذیر نیست و در نتیجه مشتق‌پذیر نیست.

b) درست

c) درست، توابع زیادی وجود دارد برای مثال $f(x) = \sin x$

d) درست، جواب a را نگاه کنید.

۵. a) درست

b) درست

c) درست، $\sum u_n = \sum n^{-۱}$

۶. a) درست،

b) نادرست

c) نادرست

d) نه، " $n < y$ " یک گزاره نادرست از این نوع است. به (c) نگاه کنید.

e) درست،

f) بله، بعداً ثابت می‌کنیم.

۸. a) درست

b) نادرست

d) نادرست

e) نادرست

f) نه

۹. نه، هرگزاره‌ای از این نوع درست است.

مجموعه تمرینات ۱.۸

۱ تا ۱۰، ۱۵، ۱۶، ۱۷ گزاره‌های همیشه درست هستند. ۱۱ تا ۱۴ نیستند.

مجموعه تمرینات ۱.۹

۱. $۳x = ۱۵$

۲. Q

۳. $P \vee Q$

۴. معتبر

۵. معتبر

۶. معتبر

۷. معتبر

۸. معتبر

۹. معتبر

۱۰. معتبر

۱۱. نامعتبر

۱۲. نامعتبر

۱۳. معتبر

۱۴. نامعتبر

۱۵. معتبر

۱۶. معتبر

مجموعه تمرینات ۱.۱۰

۱. اگر $f'(x) \neq \cos x$، آنگاه $f(x) \neq \sin x$. بله، زیرا گزاره قبلی درست است و عکس نقیض آن معادل با آن است.

۲. x زوج است $\rightarrow$ x فرد نیست.

۳. x گویا نیست $\rightarrow$ x حقیقی نیست.

۴. f مشتق‌پذیر نیست $\rightarrow$ f ناپیوسته است.

۵. $x \notin A \rightarrow x \notin B$

۶. x^2 زوج است $\rightarrow$ x زوج است

۷. x^2 فرد $\rightarrow$ x فرد

۸. x فرد $\rightarrow$ x^2 فرد

۹. $A \cap B = \phi \rightarrow A = \phi$

۱۰. $x \neq \circ \quad \longrightarrow \quad \sim \forall e(|x| < e)$

۱۱. $x \neq y \;\; f(x) \neq f(y)$

۱۲. $f(x) > f(y) \quad \to \quad x > y$

۱۳. $f(x) \geq f(y) \quad \to \quad x \geq y$

۱۴. واگرا $|u_n|$ $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}$، واگرا u_n $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}$

مجموعه تمرینات ۱.۱۱

۱. $\forall x, x \geq \circ \vee \sim Q(x)$

۲. $\exists x \forall y \exists z \; \exists q \; \forall j \;\; , \;\; x+y+z+q+j \neq \circ$

۳. $p \wedge \sim Q \wedge R$

۴. $\forall x \;\; \forall y \;\; \exists z, xz = y$

۵. $\exists e \forall d \exists [|x-c| < d \wedge |f(x) - f(c)| \geq e]$

۶. $\exists e \;\; \forall n \exists m [m > n \wedge |a_m - a| \geq e]$

۷. $x \in Q \wedge y \in j \wedge x + y \in Q$ یا $x \in Q \wedge y \in j \wedge x + y \notin j$

۸. $p \wedge Q \wedge \sim R$

۹. $x \notin A \vee x \notin B$

۱۰. $x \notin A \wedge x \notin B$

۱۱. $p_۱ \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim Q$

۱۲. $(p\wedge \sim Q)\vee(Q\wedge\sim P)$

۱۳. $\exists a>\circ\exists b>\circ\forall n\in N, na\leq b$

۱۴. a) $\forall x\ ,\ f(-x)=f(x)$

b) $\exists x\ ,\ f(-x)\neq -f(x)$

۱۵. a) $\forall x, f(-x)=-f(x)$

b) $\exists x f(-x)\neq -f(x)$

۱۶. a) $\forall x\ \forall y\ ,\ f(x)=f(y)$

b) $\exists x\ \exists y$ ،$f(x)\neq f(y)$

۱۷. a) $\exists p>\circ, \forall x\ ,\ f(x+p)=f(x)$

b) $\forall p>\circ, \exists x\ ,\ f(x+p)\neq f(x)$

۱۸. a) $\forall x\ \forall y[x\leq y\ \ \rightarrow f(x)\geq f(y)]$

b) $\exists x\exists y[x\leq y\wedge f(x)<f(y)]$

۱۹. a) $\forall x\ \ \forall y[x<y\ \ \rightarrow\ \ f(x)<f(y)]$

b) $\exists x\exists y[x<y\wedge f(x)\geq f(y)]$

۲۰. a) $\forall x\ \ \forall y[x<y\ \ \rightarrow\ \ f(x)>f(y)]$

b) $\exists x\exists y[x<y\wedge f(x)\leq f(y)]$

۲۱. $\forall x\ \ \forall y[f(x)=f(y)\ \ \rightarrow\ \ u=y]$

b) $\exists x\exists y[f(x)=f(x)\wedge x\neq y]$

۲۲. $\forall y\ \in B\exists x\in A\ ,\ f(x)=y$

b) $\exists y\in B\forall x\in A\ \ m\ \ f(x)\neq y$

۲۳. a) $\forall x\ \ \forall \in>\circ\exists\delta>\circ, \circ<|x-x.|<\delta\ \ \rightarrow\ \ |f(x)-L|<\epsilon$

$\exists x \exists e > \circ \forall \delta > \circ, \circ < |x - x_\circ| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon$ (b

۲۴. (a $\exists M \forall x \ , \ |f(x)| \leq M$

(b $\forall M \exists x, |f(x)| > M$

۲۵. (a $\forall x \forall \in > \circ \exists \delta > \circ, |x - x_\circ| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - f(x_\circ)| > \epsilon$

(b $\exists x \exists \in > \circ \forall \delta > \circ, |x - x_\circ| < \delta \wedge |f(x) - f(x_\circ)| \geq \in$

۲۶. (a $\forall x \in \exists \forall \in > \circ \exists \delta > \circ \forall y \in E, |x - y| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \in$

(b $\exists x \in E \exists \in > \circ \forall \delta > \circ \exists y \in E, |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y) \geq \in$

۲۷. (a $\forall \in > \circ \exists \delta > \circ \forall x \in \exists \forall y \in \exists \forall y \in E, |x - y| < \delta \ \rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \in$

(b $\exists \in > \circ \forall \delta > \circ \exists x \in E \exists y \in E, |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y) \geq \in$

۲۸. (a $\forall \in > \circ \exists n_\circ \in N \forall m \in N \forall n \in N (m > n_\circ \wedge n > n_\circ) \ \rightarrow \ |a_n - a_m| < \in$

(b $\exists \in > \circ \forall n_\circ \in N \exists m \in N \exists n \in N \ , \ (m > n_\circ \wedge n > n_\circ) \wedge |a_n - a_m| \geq \in$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ همگرا نیست

۳۰. برای اینکه نشان دهیم همگرا نیست $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\lim_{n\to\infty} u_n = \circ \wedge$ ، $\exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ در نظر بگیرید

همگرا نیست $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} n^{-1} = \circ \wedge$

۳۱. مثال نقض $f(x) = |x|$

۳۲. مثال نقض $f(x) = x^2$

مجموعه تمرینات ۲.۱

۱. $a = 2k + 1$ اگر و فقط اگر a فرد باشد.

۲. یک چند ضلعی چهار ضلعی است اگر و فقط اگر درست چهار ضلع داشته باشد.

۳. $\max f$ ماکسیمم مقدار f روی S است. اگر و فقط اگر بزرگترین مقدار f روی S باشد.

۶. x عدد حقیقی است اگر و فقط اگر x مساوی با یک اعشاری نامتناهی باشد.

۷. x گنگ است اگر و فقط اگر x یک عدد حقیقی باشد که گویا نباشد.
۸. یک عدد، مختلط است اگر و فقط اگر به شکل $x + yi$ باشد، به‌طوری که x و y اعداد حقیقی باشند و $i^۲ = -۱$.

مجموعه تمرینات ۲.۲

۱. متن را ببینید.

مجموعه تمرینات ۲.۳

۱. $a^۲$ عدد صحیح فرد است $\longleftarrow$ a عدد صحیح فرد باشد.
۲. برهان. فرض کنیم a یک عدد صحیح فرد باشد آنگاه $a = ۲k + ۱$ به‌ازاء هر عدد صحیح k.
بنابراین $a^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲(۲k^۲ + ۲k) + ۱$ بنابراین $a^۲$ یک عدد صحیح فرد است.
۴. فرض a زوج و b زوج باشد. آنگاه اعداد صحیح k و m وجود دارند به‌طوری که $a = ۲k$ و $b = ۲m$.
آنگاه $ab = (۲k) \cdot (۲m) = ۲(k۲m)$
بنابراین ab زوج است.
۶. فرض کنیم a زوج و b فرد باشد. آنگاه اعداد صحیح k و m وجود دارند به‌طوری که $a = ۲k$ و $b = ۲m + ۱$. در نتیجه $ab = ۲k(۲m + ۱)$، بنابراین ab زوج است.
۱۰. فرض کنیم $\exists y \forall x \ , \ P(x, y)$. جانشینی مثل b برای y وجود دارد به‌طوری که $\forall x, P(x, b)$ درست است. بنابراین به‌ازاء هر μ در مجموعه مرجع $P(\mu, b)$ درست است. پس به‌ازاء هر μ، b یک گزاره درست می‌دهد.
بنابراین به‌ازاء هر μ، $\exists y, P(u, y)$ درست است.
پس $\forall x \exists y \ , \ p(x, y)$ درست است.
۱۳. $[p \rightarrow (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(p \rightarrow Q) \wedge (p \rightarrow R)]$
۱۵. $[(p \rightarrow Q) \rightarrow (S \rightarrow R)] \leftrightarrow [((P \rightarrow Q) \wedge s) \rightarrow R]$

مجموعه تمرینات ۲.۴

۱. اثبات کنید: فرد $a^۲$ → فرد a و (زوج) فرد است $a^۲$ → (زوج) فرد نباشد. اثباتهای هر دو قبلاً آمده است.

۳. a) اثبات کنید: $a < b \quad \rightarrow \quad a + c < b + c$ این بنابه ۰۳ در ضمیمه برقرار است.

b) اثبات کنید. $a + c < b + c \quad \rightarrow \quad a < b$ فرض کنیم $a + c < b + c$

آنگاه بنا بر $A_۴$ و ۰۳، $(a + c) + (-c) < (b + c) + (-c)$

بنابر $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ $a + [c + (-c)] < b + [c + (-c)]$، $a + ۰ < b + ۰$ و $a < b$

۴. a) اثبات کنید: $x \rightarrow x + ۱$. فرض کنیم x فرد باشد. آنگاه به‌ازاء هر k $x = ۲k + ۱$. آنگاه $x + ۱ = ۲k + ۲ = ۲(k + ۱)$ بنابراین $x + ۱$ زوج است

b) اثبات در $x \rightarrow$ زوج $x + ۱$. فرض کنیم $x + ۱$ زوج باشد

آنگاه به‌ازاء هر عدد صحیح k، $x + ۱ = ۲k$ بنابراین $x = ۲k - ۱ = ۲k - ۱ + ۲ - ۲ = ۲k - ۲ + ۱ = ۲(k - ۱) + ۱$ بنابراین x فرد است.

۸. $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \rightarrow R \wedge (P \wedge R) \rightarrow Q]$

مجموعه تمرینات ۲.۵

۱. فرض کنیم x دلخواه باشد. اثبات کنید: "$x^۲$ زوج است اگر و فقط اگر x زوج باشد" با اثبات

a) اگر $x^۲$ زوج باشد، آنگاه x زوج است و

b) اگر x زوج باشد آنگاه $x^۲$ زوج است.

۸. نشان دهید یا ثابت کنید y موجود است به‌طوری که $\forall x(x + y = x)$ برای اثبات، فرض کنید x دلخواه باشد و ثابت کنید $x + y = x$

مجموعه تمرینات ۲.۶

۱. یک قائمه؛ یک منفرجه

۲. a) f مشتق‌پذیر نیست

b) f فرد است

c) f ثابت نیست.

۳. a) x فرد است

b) $x = ۹$

۴. $x \to x > \circ \vee x < \circ \vee x = \circ \to x$ حقیقی

حالت ۱)

$x > \circ \to |x| = x$

$x > \circ \to -x < \circ \to |-x| =$

$-(-x) = x$

$\therefore |-x| = |x|$

حالت ۲)

$x < \circ \to |x| = -x$

$x < \circ \to -x > \circ \to |-x| = -x$

$\therefore |-x| = |x|$

حالت ۳)

$x = \circ \to |x| = x$

$x = \circ \to -x = \circ \to |-x| = \circ = x$

$\therefore |-x| = |x|$

x حقیقی باشد. $\to x \geq \circ \vee x < \circ$

حالت ۱)

$x \geq \circ \to x^۲ \geq \circ \to |x^۲| = x^۲$

$x \geq \circ \to |x| = x \to |x|^۲ = x^۲$

$\therefore |x|^۲ = |x^۲|$

حالت ۲)

$x < \circ \to x^۲ > \circ \to |x^۲| = x^۲$

$x < \circ \to |x| = -x \to |x|^۲ = (-x)(-x) = x^۲$

$\therefore |x^۲| = |x|^۲$

۱۳. x زوج یا فرد است $\to$ x عدد صحیح باشد

حالت ۱)

x زوج باشد. $x = ۲k$ به‌ازاء هر $k \in I$

بنابراین

$x^۲ - x = (۲k)^۲ - ۲k = ۴k^۲ - ۲k = ۲(۲k^۲ - k)$

بنابراین $x^۲ - x$ زوج است

حالت ۲)

x فرد باشد. بنابراین $x = ۲k + ۱$ به‌ازاء هر $k \in I$

خودتان اثبات را کامل کنید.

۱۴. مشابه تمرین ۱۳

۱۸. $x \neq \circ \to x > \circ$ یا $x < \circ$

حالت ۱)

$x > \circ \to f(x) = |x| = x \to f'(x) = ۱$

حالت ۲)

$$x < \text{۰} \rightarrow f(x) = |x| = -x \rightarrow f'(x) = -\text{۱}$$

مجموعه تمرینات ۲.۷

در بیشتر این جوابها تنها مرحله استقرا داده شده است شما با مرحله پایه، قادر به کامل کردن آن هستید.

۱) فرض کنیم

$$P(k) : \text{۲}^k > k$$

نتیجه می‌گیریم $P(k+\text{۱}) : \text{۲}^{k+\text{۱}} > k + \text{۱}$

بنا $P(k)$ $\text{۲}^{k+\text{۱}} = \text{۲} \times \text{۲}^K > \text{۲}k$

$$\text{۲}k = k + k \geq k + \text{۱}$$

چون برای هر عدد طبیعی k ، $k \geq \text{۱}$

با استفاده از خاصیت ۳۰ ضمیمه

۲. تحلیل مشابه تمرین ۱

۳. فرض کنیم $P(k) : \text{۲} \leq \text{۲}^k$

نتیجه می‌گیریم $P(k+\text{۱}) : \text{۲} \leq \text{۲}^{k+\text{۱}}$

اکنون $\text{۲}^{k+\text{۱}} \geq \text{۲}^k$

بنا به $p(k)$ $\geq \text{۲}$

۴.

فرض کنیم $P(k) : \ \text{۲}k \leq \text{۲}^k$

نتیجه می‌گیریم $p(k+\text{۱}) : \ (\text{۲}k+\text{۱}) \leq \text{۲}^{k+\text{۱}}$

اکنون $\text{۲}(k+\text{۱}) = \text{۲}k + \text{۲} \leq \text{۲}^k + \text{۲}$ بنا به $P(k)$

بنا به تمرین ۳ $\leq \text{۲}^k + \text{۲}^K$

$$= \text{۲}(\text{۲}^k) = \text{۲}^{K+\text{۱}}$$

۶. فرض کنیم $P(K): ۲^{k-۱} \leq k!$

نتیجه می‌گیریم $P(K+۱): \quad ۲^{k} \leq (k+۱)!$

اکنون $P(k)$ بنا به : $۲^{k} = ۲(۲^{k-۱}) \leq ۲ \times k!$

$\leq (k+۱)k!$

چون $K \geq ۱ \rightarrow k+۱ \geq ۱+۱ = ۲$

$= (k+۱)!$

۷. مرحلهٔ پایه

$$P(۴): ۲^{۴} \leq ۴!$$

اکنون $۱۶ = ۲^{۴}$ و $۲۴ = ۴!$ بنابراین $۲^{۴} < ۴!$

مرحلهٔ استقراء

فرض $P(k): ۲^{k} < k!$

نتیجه $P(k+۱): ۲^{k+۱} < (k+۱)$

بنا به $P(k)$ $۲^{k+۱} = ۲(۲^{k}) < ۲ \times k!$

$< (k+۱)k!$

$= (k+۱)!$

۹. مرحله استقراء

فرض کنیم

فرض کنیم $P(K): \quad (۲K)! < ۲^{۲K}(K!)^{۲}$

نتیجه $P(K+۱): \quad [۲(K+۱)]! < ۲^{۲K+۲}[(K+۱)!]^{۲}$

اکنون $[۲(K+۱)]! = (۲K+۲)(۲K+۱)(۲K)! = (۴K^{۲}+۶K+۲)(۲K)!$

و

$$
\begin{aligned}
2^{2K+2}[(K+1)!]^2 &= 2^{2K+2}\cdot[(K+1)(K!)]^2 \\
&= 2^{2K+2}\cdot(K+1)^2(K!)^2 \\
&= 2^{2K}\times 2^2(K^2+2K+1)(K!)^2 \\
&= 2^{2K}(4K^2+8K+4)(K!)^2
\end{aligned}
$$

توجه شود که

$$(4K^2+6K+2) < 4K^2+8K+4$$

و با استفاده از $P(K)$ $\quad [2(K+1)]! = (4K^2+6K+2)(2K)!$

بنا به $P(K)$ $\quad < (4K^2+6K+2)\cdot 2^{2K}\cdot(K!)^2$

$$
\begin{aligned}
&< 2^{2K}\times(4K^2+8K+4)(K!)^2 \\
&= 2^{2K+2}[(K+1)]^2
\end{aligned}
$$

تحلیل: دو بیان $P(K+1)$ را بسط دادیم تا ببینیم که از $P(K)$ می‌توان استفاده کرد. برهان به‌وسیله $P(k)$ و نامساوی یادداشت شده ادامه می‌یابد.

۱۰. مرحله استقراء

فرض کنیم $\quad P(k):\ \ |\sin Kx| \le |\sin x|$

نتیجه $\quad P(K+1):\ \ |\sin(K+1)x| \le (K+1)|\sin x|$

اکنون $|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)|$

با توجه به فرمول راهنمایی $= |\sin kx \cos x| \cos kx \sin x|$

با توجه به $\leq |\sin kx| \cos x| + \cos kx \sin x|$

$|p+q| \leq |p| + |q|$

$= |\sin kx| \cdot |\cos x| + |\cos kx| \cdot |\sin x|$

چون $|pq| = |p| \cdot |q|$

$\leq |\sin kx| + |\sin x|$

چون $|\sin x| \leq 1 \quad , \quad |\cos x| \leq 1$

بنا به $P(k)$ $\leq k|\sin x| + |\sin x|$

$= (k+1)|\sin x|$

۱۳. مرحله پایه

اثبات $P(2) : \cos 2u = \dfrac{\sin 2u}{2 \sin u}$

$$\frac{\sin 2u}{2\sin u} = \frac{2\sin u \cos u}{2 \sin u} = \cos u$$

مرحله استقراء

فرض کنیم $P(k) : \cos u \ldots \cos 2^{k-1}u = \dfrac{\sin 2^k u}{2^k \sin u}$

نتیجه $P(k+1) : \cos u \ldots \cos 2^{k-1}u \cos 2^k u = \dfrac{\sin 2^{k+1}u}{2^{k+1}\sin u}$

اکنون

بنا به $P(k)$ $\cos u \ldots \cos 2^{k-1}u \cdot \cos 2^k u = \dfrac{\sin 2^k u}{2^k \sin u} \cdot \cos 2^k u$

$$= \frac{\sin 2^k u \cdot \cos 2^k u}{2^k \sin u}$$

چون $2\sin u \cos u = \sin 2u$ ، $= \dfrac{\frac{1}{2}\sin 2(2^k u)}{2^k \sin u}$

$$= \frac{\sin 2^{k+1} u}{2^{k+1} \sin u}$$

۱۹. مرحله استقراء

فرض کنیم $P(K): \sum_{j=1}^{K} j = \frac{K^2+K}{2}$

نتیجه $P(K+1): \sum_{j=1}^{K+1} j = \frac{(K+1)^2+(K+1)}{2} = \frac{K^2+3K+2}{2}$

اکنون $\sum_{j=1}^{K+1} j = \sum_{j=1}^{K} j + (K+1)$

بنا به تعریف $\sum$

$$= \frac{K^2+K}{2} + (K+1) \quad \text{بنا به } P(K)$$
$$= \frac{K^2+K}{2} + \frac{2(K+1)}{2}$$
$$= \frac{K^2+3K+2}{2}$$

۳۲. وقتی ثابت می‌کنیم $P(1) \rightarrow P(2)$ متغیر مستقلی را آزمایش می‌نماییم.

۴۹. e) $2^n - 1$

مجموعه تمرینات ۲.۸

۱. مانند مثال ۲

۲. فرض کنیم نقیض آن برقرار باشد. بنابراین وجود دارد یک x و y به‌طوری که $x \neq 0$ و $y \neq 0$ و $xy = 0$. آنگاه

$$x^{-1} \cdot (xy) = (x^{-1} \cdot x)y = 1 \times y = y$$

بنا به M_4 و M_5، چون $xy = 0$،

$$x^{-1} \cdot (xy) = x^{-1}0 = 0$$

بنابراین $y = 0$ اما فرض کرده بودیم $y \neq 0$

۳. فرض کنیم نقیض آن برقرار باشد بنابراین وجود دارد یک x به‌طوری ه $x > 0$ و $x^{-1} \leq 0$. آنگاه $x \cdot x^{-1} \leq x0$، بنا به ۰۳. اما $x \cdot x^{-1} = 1$ و $x \cdot 0 = 0$. بنابراین $1 \leq 0$. اما بنا به ۰۷، $1 > 0$

۵. فرض کنیم نقیض آن برقرار باشد بنابراین وجود دارد یک x به‌طوری که $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$، $\exists x > 0$
بنابراین $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ بنا به ۰۳ چون $\sqrt{x} > 0$

$$\geq \sqrt{x+1}\sqrt{x+1} \quad \text{بنا به فرض}$$
$$= x + 1$$

بنابراین $x \geq x + 1$، که تناقضی با راهنمایی است.

۷. راهنمایی از نفی گزاره استفاده می‌کنیم $\sqrt{2}$ اصم است و $a = (\sqrt{2})$ در نظر می‌گیریم و $b = \sqrt{2}$ (b نه

۸. چون به‌ازاء هر عدد حقیقی x، $x + k = k + x = x$ بنابراین $0 = 0 + k = k + 0$، اما می‌دانیم $k = 0 + k$ در نتیجه $k = 0$، بنابراین $k \neq 0$ و $k = 0$ که تناقض است.

۱۴. فرض کنیم تناقض برقرار باشد بنابراین وجود دارد $x > 0$ به‌طوری که برای هر عدد زوج m، $m \leq x$.
این بدان مفهوم است که هر عدد زوج کوچکتر یا مساوی x است. $2x$ را در نظر می‌گیریم، یعنی یک عدد زوج به‌طوری که $2x > x$، چون $x > 0$، این تناقض دارد با اینکه هر عدد زوج کمتر از x است.

مجموعه تمرینات ۲.۹

۱. $\exists! l \; p \in l \wedge Q \in l$

۲. مانند ۱

۳. $\exists! x \forall y \; , \; x + y = y + x = y$

۴. $\exists! x \forall y, x \cdot y = y \cdot x = y$

۵. $\forall x \forall y \exists! z, x + y = z$

۶. $\forall x \exists! y, x + y = y + x = 0$

۷. $\forall x \exists! y, x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \cdot y = 1$

۸. شبیه مثال ۹ وجود A_4 را ضمیمه را نگاه کنید.

یگانگی: فرض کنیم x دلخواه باشد، فرض کنیم وجود داشته باشد دو عضو z و y به‌طوری که $x+y=y+x=\circ$ و $x+z=z+x=\circ$

آنگاه $(y+x)+z=z$ چون $\circ+z=z$

$y+(x+z)=z$ $A_۲$ قانون شرکت‌پذیری

$y+\circ=z$ چون $x+z=\circ$

$y=z$ چون $y+\circ=y$

مجموعه تمرینات ۲.۱۰

۱. فرض کنیم: $\sim Q$

نتیجه: $\sim P$

مراحل تحلیلی: $\sim P$ اگر $(R \to \sim P)$ R

R اگر $(S \to R)$ S

S اگر $(\sim Q \to; S)$ $\sim Q$

بنابراین $\sim Q \to S \to R \to \sim P$

$$\therefore \sim Q \to \sim P$$

۳. e

۴. f

۵. a

۶. d

۷. c

۸. b

۹. g

۱۰. h

۱۱. $x=۵$

۱۲. $\delta=\frac{\epsilon}{۳}$

مجموعه تمرینات ۳.۱

برهانها خلاصه یا راهنمایی‌ها معمولاً تنها یک تحلیل، درست می‌دهند.

۱. تحلیل: نگاه کنید به قضیه $a-4$

۳. تحلیل: قضیه ۸ را ببینید.

۴. $\mathcal{C}[\mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B] = \mathcal{C}\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}\mathcal{C}B$ بنا به قضیه ۸

$A \cap B$ بنا به قضیه ۵

آنگاه بنا به قضیه ۷ $\mathcal{C}\mathcal{C}[\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B] = \mathcal{C}(A \cap B)$ و بنا به قضیه ۵ $\mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B = \mathcal{C}(A \cap B)$

۷. $x \in A \;\rightarrow\; x \in A$ بنا به همیشه درست $P \;\rightarrow\; P$

۹. $A \cap \mathcal{C}B = \phi \;\leftrightarrow\; A \subset B$ بنا به قضیه ۶

بنا به قضیه ۷ $\mathcal{C}(A \cap \mathcal{C}B) = \mathcal{C}\phi \;\leftrightarrow\; \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}\mathcal{C}B = U \leftrightarrow$

بنا به قضیه ۹ و تمرین ۸

بنا به قضیه ۵ $\mathcal{C}A \cup B = U \leftrightarrow$

۱۰. تحلیل: توجه نمایید به تشابه

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

با $$P \vee (Q \vee R) \;\leftrightarrow\; (P \vee Q) \vee R$$

۱۲. $A \subset A \cup \phi$ بنا به قضیه ۱۱

برای اثبات $A \cup \phi \subset A$ توجه نمایید که $x \in A \cup \phi \;\rightarrow\; x \in A \vee x \in \phi$

بنا به تعریف ۲

چون $x \in \phi$ نادرست است $x \in A \;\rightarrow$

$$x \in A \vee x \notin A$$

۱۳.

درست است بنا به همیشه درست $P \vee \sim P$

به‌ازاء هر x $x \in A \vee x \in \mathcal{C}A \;\rightarrow$

به‌ازاء هر x، $x \in A \cup \mathcal{C}A \;\rightarrow$

$\rightarrow \quad \forall x, x \in AUCA$

با توجه به اصل موضوع ۲ $\rightarrow A \cup CA = U$

۱۵. راهنمایی: از تمرین ۸ و قضایای ۵ و ۷ استفاده کنید.

۱۷. برای اثبات در نظر بگیرید. $\forall x(x \in A \quad \rightarrow \quad x \in U)$

$x \in A \;\rightarrow\; x \in U \qquad x \in A \;\rightarrow\; x \in U$

F همیشه درست — درست همیشه درست

درست |→| بنابه تعریف — درست |→| بنابه تعریف

۲۰. تحلیل: از قضیه ۱۲ و ۱۵ استفاده کنید.

۲۳.

بنا به اصل موضوع ۱، $A \cup B = B \leftrightarrow \forall\, x(x \in A \cup B \;\leftrightarrow\; x \in B)$

بنا به تعریف ۲ $\leftrightarrow \forall\, x[(x \in A \vee x \in B) \;\leftrightarrow\; x \in B]$

$\leftrightarrow \forall\, x(x \in A \;\rightarrow\; x \in B),$

بنابه همیشه درست $[(P \vee Q) \;\leftrightarrow\; Q] \;\leftrightarrow\; (P \;\rightarrow\; Q)$

بنابه تعریف ۱ $\leftrightarrow\; A \subset B$

۲۴. تحلیل: مانند تمرین ۲۳

۲۵. تحلیل: از قضایای ۲ و ۳ استفاده کنید.

۲۸. $A - \phi = A \cap C\phi = A \cap U = A$

۳۰.

$$\begin{aligned} B - (B - A) &= B \cap C(B \cap CA) \\ &= B \cap (CB \cup A) \\ &= (B \cap CB) \cup (B \cap A) \\ &= \phi \cup (B \cap A) \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

اکنون $A \subset B \;\rightarrow\; B \cap A = A$. در نتیجه $A \subset B \;\rightarrow\; B - (B - A) = A$

۳۳. فرض کنیم $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۲, ۳, ۴\}$

مجموعه تمرینات ۳.۲

۲. a) A_1،

b) A_n

۳. جهت برهان همانند قضیه ۱۴ را ببینید.

۴. a) A_1،

b) ϕ،

c) A_1،

d) ϕ

۶. a) ϕ،

b) N،

e) ϕ،

۱۰. a) ϕ،

b) بله

c) $\{۳, ۴\}$، ϕ، ϕ

d) نه،

e) مجموعه‌های این تمرینات با مثال نقضی ثابت می‌شود،

f) درست

۱۱. **برهان.** اثبات عکس نقیض، $A = \phi$ ،$B = \phi \ \rightarrow\ A \cup B = \phi$ ،

فرض کنیم $A = \phi$ و $B = \phi$ آنگاه بنا به تمرین ۱۲ مجموعه تمرینات ۳.۱ داریم $A \cup B = \phi \cup \phi = \phi$

۱۲. ضد آن را فرض کنیم، زیر مجموعه‌ی A از U وجود داشته باشد که برای آن داشته باشیم $A = CA$. یادآوری می‌نماییم که مجموعه مرجع (عمومی) مخالف تهی است. بنابراین حداقل یک عضو x در U وجود دارد. پس داریم $U = A \cup CA$. بنابراین اگر x در U باشد x در A یا CA باشد. **حالت ۱** فرض کنیم $x \in A$ بنا به تعریف $x \notin CA$ پس $A \neq CA$. **حالت ۲** فرض کنیم $x \in CA$، بنا به تعریف $x \notin A$، بنابراین $A = CA$. در هر حالت تناقض داریم.

مجموعه تمرینات ۳.۳

۱. $\{(a, ۵), (a, ۶), (b, ۵), (b, ۶), (c, ۵), (c, ۶)\}$

۷. $(۴, ۲), (۴, -۲), (۳, \sqrt{۳})$

۸. $dmnM = \{x|x \geq ۰\}$، $rgeM = R$

۹. a) یک بیضی با رأسهای (۰,۵)، (۰,−۵)، (۲,۰)، (−۲,۰)

b) $\{x| -۲ \leq x \leq ۲\}$، $\{y| -۵ \leq y \leq ۵\}$

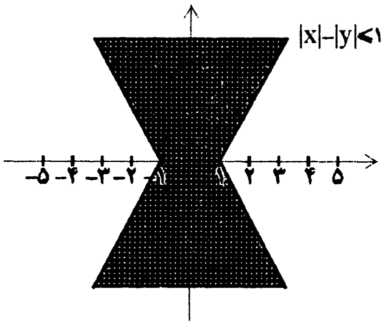
۱۱. فرض کنیم $(a,b) = (b,a)$. آنگاه $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{b\},\{b,a\}\}$

آنگاه $\{a\} = \{b\}$، بنابراین $a = b$

۱۲. همه نادرست

۲۰. خط شامل نقاط (۱,۰) و (۱,۲)

۲۱.



۲۳. خارج دایره‌ای به مرکز (۲,۰) و شعاع ۲

۲۷. $P^{-۱} = \{(x,y)|x = ۳y - ۱\}$

۳۲. $\rho = \rho^{-۱}$

مجموعه تمرینات ۳.۴

۲. P متقارن است $\leftrightarrow \forall a, \forall b \in A, (a,b) \in P \rightarrow (b,a) \in P$

P متقارن نیست. $\leftrightarrow \exists a \exists b \in A, (a,b) \in P \wedge (b,a) \notin P$

۴. ۱۴ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۶

۵. ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۷ و ۶

۷. ۱۴ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۶

۹. به‌ازاء هر مثلث T، مجموعه‌ی تمام مثلثهای همنهشت با T = $E(T)$.

مجموعه تمرینات ۳.۵

۱. به ازا هر عدد صحیح a، $a - a = \circ = ۳ \times \circ$ بنابراین $(a,a) \in P$ و P منعکس است.
فرض کنیم به‌ازاء عدد صحیح a و b، ثابت اما دلخواه، $(a,b) \in P$. آنگاه $a - b = ۳k$ به‌ازاء هر عدد صحیح K. آنگاه $b - a = ۳(-K)$، و چون $-K$ عدد صحیح است، $(b,a) \in P$، بنابراین P متقارن است. فرض کنیم $(a,b) \in P$ و $(b,c) \in P$. آنگاه $a - b = ۳k$ و $b - c = ۳m$ به‌ازاء هر عدد صحیح K و m، آنگاه $a - c = (a-b) + (b-c) = ۳K + ۳m = ۳(K+m)$ بنابراین P متعدی می‌باشد.

۷. شما نمی‌دانید که به‌ازاء هر a، b، $(a,b) \in P$

۸.

$$\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)$$
$$,(b,c),(c,b),(d,e),(e,d)\}$$

مجموعه تمرینات ۳.۶

۱ و ۳ تابع هستند. بقیه نیستند. ۱۱_۷ همه تابع هستند.

۷. $dmnf = \{a,b,c\} \qquad rgef = \{۱,۲,۳\}$

۱۱. $dmnf = \{a,b,c,d\}$

$$rgef = \{۱,۳,۵\}$$

۱۲. a) $f : A \rightarrow B$ به رو است $\leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A, f(b) = a$

b) f به رو نیست $\leftrightarrow \exists b \in B \forall a \in A\ , \ f(b) \neq a$

۱۳. هیچکدام

۱۴. هیچکدام

۱۵. a) $f :\ A \rightarrow\ B$ یک به یک است $\forall a \in A\ \forall b \in B$

$$f(a) = f(b) \ \rightarrow \ a = b$$

b) f یک به یک نیست $\leftrightarrow \exists a \in A, \exists b \in b \in B, f(a) = f(b) \wedge a \neq b$

۱۶. هیچکدام

۱۷. ۷ و ۸

اکسپرسیونیسم (eksperesionism)، شیوه‌ای در هنر (نقاشی، پیکرتراشی، ادبیات و سینما)، که هدف آن انتقال عواطف و احساسات درونی هنرمند به جهانی مرئی است. در آغاز قرن بیستم، در کشورهای اروپایی مرکزی و شمالی نهضت بزرگی بر ضد مکتب امپرسیونیسم نیرو می‌گرفت؛ اندک‌اندک شیوه‌ای تازه از آن به بار آمد و به سال ۱۹۱۲، هنگامی که هنوز در فرانسه ناشناخته بود، در آلمان نام اکسپرسیونیسم بر آن نهاده شد. یقین معنای دقیق این کلمه دشوار است، استعمال آن در آغاز جنبه‌ی منفی داشت، و برای مقابله با عنوان امپرسیونیسم علم شد. برخی از صاحبنظران بر این عقیده بودند که اکسپرسیونیسم گویای معنویت و حالات ذهنی هنرمند است، و باید جایگزین عینیت شیوه‌ی امپرسیونیسم شود. می‌گفتند که با حلول شیوه‌ی اکسپرسیونیسم در هنر، تصویرهای زاده از ادراک عینی جای خود را به جهانی تازه داده است، که از نقشها و شکلهای ذهنی و عاطفی و پنداری منبعث می‌باشد.

عنوان اکسپرسیونیسم در هنر نو، بر روی‌هم، در مورد آثاری به کار می‌رود که در آنها ارائه‌ی طبیعت تحت شعاع بیان عواطف و احساسات درونی قرار می‌گیرد.

وان گوگ هلندی و ف، هودلر سوئیسی در پیدایش این شیوه سخت موثر بودند، ولی وان گوگ معمولاً در عداد نقاشان مکتب فرانسه شمار می‌آید، و رسماً جزء نقاشان مکتب اکسپرسیونیسم محسوب می‌شود. اما هوولر، با آنکه کارهای استادانه‌اش از هیچگونه بدعت فنی برخوردار نیست، سبب تلاش بی‌پروائی که برای تبدیل حرکت امپرسیونیسم (ampersionism)

[از لفظ فرانسوی امپرسیون = احساس، تاثر] نهضتی در نقاشی که در قرن ۱۹ م از اندیشه‌ی آزاد کردن این هنر از قید قوانین متصلب نقاشی کلاسیک در فرانسه بوجود آمد، و اساس آن تاثرات بصری گذرای هنرمند بود. پایه‌گذاران آن ک. مونه، پ. ا. رنوار، ا. مانه، ک. پیسارو، آ. سیله، پ. سزان، ا. دگا، ژ. ب. آ. گیومن، وب. موریزو بودند . این نقاشان از آنرو آمپرسیونیست (ampersinoist) خوانده شدند که روزنامه‌نگاری یکی از نقاشیهای مونه راکه امپرسیون طلوع خورشید نام داشت دستاویزکرد، و این نام را برایشان نهاد؛ گمانش بر این بود که بدین طریق آنان وکارهای غریب و دور از سنت ایشان را مسخره کرده است. اما نقاشان بندگسل، که از زیادتی کار فرصت جستن نامی برای خود نیافته بودند، همین نام را با چهره‌ی باز پذیرفتند. اما این نامگذاری دقیق نبود و هر یک از هنرمندان، بر حسب نظرهایی که در باره‌ی جهان و زیبایی و فن نقاشی داشتند، به آن معنائی بخشیدند. این نقاشان تازه جو، که قالب‌های کهن را برای بیان یافته‌های تازه‌ی خود کافی نمیدیدند، اعتماد به القائات جهان پهناوری بستند که خود بر آن دست یافته بودند. این القائات بهیج وجه یکسان نبود، اما عوامل مشترکی وجود داشت که نقاشان را، در عین اختلاف، بهم پیوند میداد، نخست آنکه، به پیروی از کور به، نقاش واقع‌پرداز (رئالیست)، که پایان عمرش مقارن با اوج امپرسیونیسم بود، افراز نقاشی را ازکارگاه ... آزاد منتقل کردند، و مانند او به صحنه‌های عادی روزانه توجه داشتند. دیگر آنکه همگی برای یافتن ترکیبهای تازه‌ی شکل و رنگ در تکاپو بودند، و نیز نظریه‌ها وکشفیات فیزیکی در مورد نور و رنگ در آنان سخت موثر افتاده بود، و

بدین جستجوهاشان حاصلی مشترک نیز داد: دریافتند که از روشنی یا تیرگی هر رنگی بیاری رنگی دیگر کاسته یا بر آن افزوده می‌شود. رنگ دوم را مکمل رنگ اول خواندند، و از اینجا نظریه‌ی مشهور "رنگهای مکمل" پدید آمد؛ از این قرار: روشنی یا تیرگی هر یک از سه رنگ اصلی (سرخ و آبی و زرد) برحسب رنگهای مکمل آن شدت و ضعف می‌آید. رنگ سبز (ترکیب آبی و زرد) مکمل رنگ اصلی سرخ است؛ نارنجی (ترکیب زرد و سرخ) مکمل آبی است؛ و بنفش (ترکیب آبی و قرمز) مکمل زرد است. (به همین سبب، مونه به گل شقایق، چترهای آفتابی سرخ، سبزه‌ها و تابش نارنجی خورشید بر آبهای آبی رنگ و به سایه‌های آبی رنگ بر دیواره‌های نارنجی سخت علاقه نشان می‌داد) این کشف نقاشان را چنان بخود مشغول داشت که از آن پس از طبیعت تنها صحنه‌هایی را برای کار برمی‌گزیدند که استفاده از نظریه‌ی رنگهای مکمل را امکان‌پذیر می‌ساخت.

در جستجوی مناظر پرنور و بازیگری نور در آب، نخست در جنگل فونتنبلو به کار پرداختند، و سپس کناره‌ی رود سن و ساحل دریای مانش را برگزیدند. پس از چندی، بجدا کردن مایه‌های مختلف هر یک از رنگها در کنار هم، شیوه‌ای جدید پدید آوردند، و بیاری آن راه تازه‌ای برای نشان دادن تابش نور یافتند. این شیوه باروترین و مهمترین خصیصه‌ی مکتب امپرسیونیسم است.

نقاشان امپرسیونیست این شیوه را بسط دادند، و با حرکات تند قلم مو (خصیصه‌ی دیگر این مکتب) آسمان و خانه‌ها و تپه‌ها و دیگر عناصر دورنما را نیز دربرگرفتند. خطوطی را که حدود اشیاء را نشان می‌داد رها کردند، و نیز سایه روشن و جزئیاتی را که تا آن زمان مقبول بود یکسو نهادند. بدین طریق "اشکال گشوده" پدید آمد، و تصاویر حالتی زنده و متحرک، و در نتیجه، "ناتمام" بخود گرفت، که معاصران و نیز نقاشان بعدی را سخت بخود مشغول داشت. امپرسیونیسم، پس از آنکه بعنوان مکتبی مهم در نقاشی تثبیت شد، و سنتها و قوانین خاص خود را بوجود آورد، مانند هر مکتب دیگری کم کم بحد خود رسید، و شور نخستین را از دست داد، بطوری که تا سال ۱۸۹۰، بیشتر پیروان سرسخت این مکتب روی از آن برتافتند، و هر یک راهی جداگانه در پیش گرفتند. اما نقاشیهای این مکتب، که زمانی مطرود بشمار آمده بود، قبول عام یافت. اثر آزادیبخش امپرسیونیسم در سیر هنر نقاشی بیحساب است. اصلاح امپرسیونیسم در موسیقی به نهضتی که در اواخر قرن ۱۹ م در فرانسه بتوسط دبوسی آغاز شد نیز اطلاق می‌گردد. این اصطلاح در ادبیات نیز به کار می‌رود.

بطرحهایی از خطوط موازی و هماهنگ به کار مینبردد از پیشگامان اکسپرسیونیسم به شمار رست. از ناحیه‌ی فلاندر، نقاشیهای شاعرانه و خروشان ج. انسور با این شیوه هماهنگ بود. اکسپرسیونسم آلمان تحت تأثیر ا. مونک نروژی قرار گرفت، و گروه‌های تازه‌ای پدید آورد. در کارهای ا. نولده هراس و آشفتگی با خشونت و عواطف مذهبی آمیخته است. اما ا. کوکوشکا (اتریشی)، در عین خشونت و آشفتگی، شاعری افسانه‌پرداز است. باید گفت که در کشورهای لاتینی، شیوه‌ی اکسپرسیونیسم رونق چندانی نیافت، مگر آنکه حالت و شیوه‌ی طبیعی برخی از نقاشان اسپانیا را نوعی اکسپرسیونیسم بدانیم.[۱]

۱- نقل از دایرة‌المعارف مصاحب

فرهنگ اصطلاحات انگلیسی ـ فارسی

A

Analogy,discovery proofs by	تشابه
Analytic process	فرایند تحلیلی
Antecedent	مقدم [ترکیب شرطی]
Archimedean property	خاصیت ارشمیدسی
Argument	استدلال
invalid	معتبر [منطق]
valid	نامعتبر [استنتاج]
Associative law	قاعدهٔ شرکت‌پذیری

B

Basis step	مرحلهٔ پایه
Bernoulli's inequality	نابرابری برنولی
Biconditional proof of	ترکیب دو شرطی

C

Cantor, George	جرج کانتور
Carroll, Lewis	لوییس کارول
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
cases,profby	حالتها
cauchy sequence	دنباله کوشی
Combination of connectives	ترکیب رابطه‌های گزاره‌ای
Commutative law,	قانون تعویضپذیری
complement of a set,	متمم مجموعه
conditional,	ترکیب شرطی
conjunction,	ترکیب عطفی
consequent,	تالی [ترکیب شرطی]
contradiction, proof by	تناقض
contra positive, proof by,	عکس نقیض

converse,	عکس [رابطه، گزاره]
coordinates,	مختصات
counterexample,	مثال نقض
creativity,proof	خلاقیت

D

deduction,	استنتاج
Deduction theorem,	قضیه استنتاج
Deductive veasoning,	استدلال استنتاجی
Definition,	تعریف
recursive,	بازگشتی
Demoivre theorem,	قضیه دمواور
Demorgan Law	قانون دمورگلن
Difference,	تفاضل
Symmetric,	متقارن
Disjointy sets	مجموعه‌های از هم جدا
Pairwise,	دوبه دو
Disjunction,	ترکیب فصلی
Distributive Law,	قاعدهٔ توزیع‌پذیری
Divisor, Proper,	مقسوم علیه
Domain,	دامنه
Dolye,sir Arthur Conan,	سرآرتورکانن دویل

E

e,	عدد نپر
Emptyset,	مجموعه تهی
Equivalence calss	دسته‌ی هم ارزی
Equivalence relations,	روابط هم ارزی
Equivalent Sentencse,	گزاره‌های معادل

Existential quantifier,	سور وجودی

F

Family of sets,	خانوادهٔ مجموعه‌ها
infinite,	نامتناهی
Function(s),	تابع
bounded,	محدود
canstant,	ثابت
Continuous,	پیوسته
Correspondence	تناظر
decreasing,	نزولی
even,	زوج
Increasing,	صعودی
limit,	حد
odd,	فرد
one - to - one	یک به یک
onto,	به روی
periodic,	متناوب
as a relation,	به‌عنوان یک رابطه
as arule,	به‌عنوان یک قاعده
as a set of ordered pairs,	به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب
Strictly decreasing,	اکیداً نزولی
Strictly increasing,	اکیداً صعودی
uniformly continu ous,	پیوسته به‌صورت یکنوا

I

iff,	اگر و تنها اگر
iff - string,	رشتهٔ اگر و تنها اگر
Indexed Intersections,	اشتراک بسط یافته
Indexed unions,	اجتماع بسط یافته
Indexing set,	مجموعهٔ اندیس‌گذاری

Inndirect proof,	برهان غیر مستقیم
Induction	استقراء
Induction step,	مرحلهٔ استقراء
Inductive reasoning,	استدلال استقرائی
Integer,	عدد صحیح
Intersecton of sets,	اشتراک مجموعه‌ها
Interval,	بازه
Invalid argument,	استدلال نامعتبر
Inverse relation,	رابطه وارون
irrational number	عدد گنگ، عدد اصم

L

Law of syllogism,	قانون قیاس
Laws	قوانین
Associative,	شرکتپذیری
Commutative,	تعویضپذیر
Demorgans,	دمورگان
Distributive,	توزیعپذیری
limit,	حد
logic	منطق

M

Mathematical induction,	استقراء ریاضی
Principle	اصل
Mathematical system,	دستگاه ریاضی
Modus ponens, rule	قاعده قیاس استثنایی

N

Natural number,	عدد طبیعی
Necessary condition,	شرط لازم
Negation,	نقیض
Simplified,	ساده شده

Number	عدد
Integer	عدد صحیح
irrational,	گنگ
natural,	طبیعی
perfect,	کامل
prime,	اول
rational,	گویا
Whole	درست
orderd pair	زوج مرتب
partition	افراز
induced,	القایی
power set,	مجموعه‌ی توانی
premise,	فرض
prime unmber,	عدد اول
proof,	برهان، اثبات
by cases,	با روش حالتها
by contradiction,	با تناقض
by contrupositive,	با عکس نقیض
by mathematical induction	با استقراء ریاضی
creativity,	خلاقیت
formal,	رسمی
indirect,	غیرمستقیم
informal	غیر رسمی
of biconditional sentences,	گزاره‌های دوشرطی
of conditional sentence,	گزاره‌های شرطی
of existness and uniqueness,	وجود و یکتایی

of quantified sentences,	گزاره‌های سوری

Q

Quantified sentences,proof of	گزاره‌های سوری
truth value	ارزش درستی
Quantifier,	سور
Combination	ترکیب
existentiol,	وجودی
universal	مرجع

R

Range,	برد، حوزه مقادیر
Rational number,	عدد گویا، عدد منطق
Real number system	دستگاه اعداد حقیقی
Reasoning,	استدلال
deductive,	استنتاجی
inductive,	استقرائی
Reasoning sentence,	گزارهٔ استدلالی
Recursive definitions,	تعریفهای بازگشتی
Reductio ad absurdum,	برهان خلف
Reflexive,	انعکاسی
Relation,	رابطه
equivalence,	هم ارزی [رابطه]، معادله [منطق]
identity,	اتحاد
induced,	القایی
inverse,	معکوس
roster	روش
Rule of Conditional proof,	قاعدهٔ برهان گزارهٔ شرطی
Rule of modus ponens,	قاعدهٔ قیاس استثنایی
Rule of substitution,	قاعدهٔ جانشینی

Sentences,	گزاره
biconditional,	ترکیب دو شرطی
conditional,	ترکیب شرطی
equivalent	همانند، معادل [منطق، سری]
quantified,	سوری
reasoning,	استدلال
Sentence Connectives,	رابطهای گزاره‌ای
set(s)	مجموعه
collection of,	مجموعه
complement	متمم
disjoint	از هم جدا
pairwise,	دو به دو
empty,	تهی
equality	برابری، تساوی
family of,	خانوادهٔ
infinite,	نامتناهی
indexed intersections,	اشتراک بسط یافته
indexed unions,	اجتماع بسط یافته
indexing,	اندیسگذاری
intersection,	اشتراک
membership,	عضویت
power,	توان
property,	خاصیت
solution,	حل، جواب
subset	زیر مجموعه
Symbolism for,	نمادگذاری
union,	اجتماع
universal,	مرجع
set theory,	نظریهٔ مجموعه‌ها

sigma notution,	نماد سیگما
solution sets,	مجموعه جواب
statement,	گزاره
subset,	زیر مجموعه
of real unmber,	عدد حقیقی
substitution, rule of,	جانشینی
sufficient condition,	شرط کافی
syllogism, law of,	قیاس
symmetric,	متقارن
symmetric difference,	تفاضل متقارن

T

tautology	گزارهٔ همیشه درست
theorem	قضیه
thomus, George B,	جورج توماس
tower of Hanoi problem,	مسئله برج هانوی
transitive,	تعدی
truth table,	جدول درستی
Truth value,	ارزش درستی

u

union of sets,	اجتماع مجموعه‌ها
universal quantifier,	سور عمومی
universal set,	مجموعه مرجع

v

valid arguments,	استدلالهای معتبر
variable	متغیر
whole numbers,	اعداد درست

ISBN: 964 - 486 - 950 - 8
9789644869501

انتشارات مبتکران www.mobtakeran.com
تهران، خیابان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان وحیدنظری، پلاک ۱۱۹
کدپستی : ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱ تلفکس: ۹۲ - ۶۹۵۴۳۹۰
e-mail: info @ mobtakeran.com
مرکز پخش : تهران، صندوق پستی: ۱۵۹۶ - ۱۳۱۴۵
تلفکس: ۹۵ - ۶۹۵۴۳۹۳