چاپ سوم

آ. گ. همیلتن

منطق برای ریاضیدانان

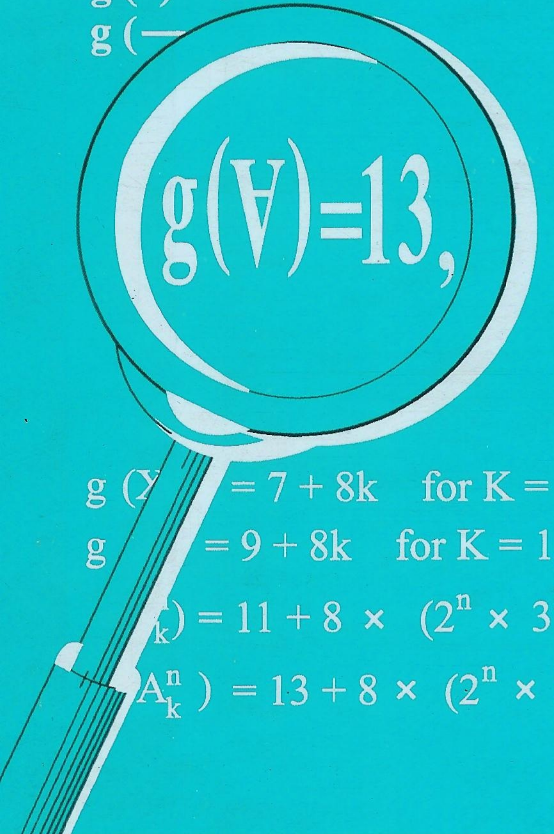
$g\,(() = 3\,,$

$g\,()) = 5\,,$

$g\,(,) = 7,$

$g\,(\sim) = 9,$

$g\,($



$g(\forall)=13,$

ترجمهٔ

دکتر محمد علی پور عبدالله

$g\,(X \quad = 7 + 8k \quad \text{for } K = 1, 2, \ldots,$

$g \quad = 9 + 8k \quad \text{for } K = 1, 2, \ldots,$

$_k) = 11 + 8 \times (2^n \times 3^k) \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$

$A^n_k\,) = 13 + 8 \times (2^n \times 3^k) \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$

منطق
برای ریاضیدانان

تألیف:

آ. گ. همیلتن

ترجمهٔ

دکتر محمد علی پورعبدالله

فهرست مندرجات

پیشگفتار مترجم

درس منطق ریاضی یکی از درسهای تخصصی اصلی گرایش ریاضی‌محض، و تخصصی اختیاری سایر گرایشهای رشتهٔ ریاضی است . اما ارائهٔ آن در بسیاری از گروههای ریاضی دانشگاههای ایران معوق مانده است ، که ظاهرا" دلیل اصلی آن عدم وجودکتابی مناسب برای تدریس این درس می‌باشد . تعداد کتب موجود در این زمینه به زبان فارسی بسیار اندک است و بعضی از آنها با وجود غنای محتوا ، مطابقت ناچیزی با برنامهٔ مصوب این درس دارند ، و به همین علت پایه‌گذاری درس برمبنای آنها تقریبا" غیرممکن است .

کتاب حاضر از لحاظ مطابقت با برنامهٔ مصوب این درس، وضعیتی منحصر به فرد دارد زیرا شش فصل اولیهٔ آن برای پوشاندن این درس کفایت می‌کند ، و فصل هفتم نیز شامل مطالبی است که راهگشای ادامهٔ کار برای کسانی است که بخواهند بر بعضی از کاربردهای منطق در علوم کامپیوتر واقف شوند . از آنجا که این کتاب اصالتا" برای تدریس نوشته شده ، به پایان هربخش مجموعه‌ای از مسائل مناسب افزوده شده است ،که حل آنها به درک مطالب کمک‌فراوان می‌کند .

اختصاص بخشی از کتاب به راهنمایی و حل مسائل برگزیده نیز قطعا" استفاده از این کتاب را برای استاد و دانشجو دلپذیرتر خواهدکرد .

نگارش این کتاب به سال ۱۹۷۸ برمی‌گردد ، ولی ترجمهٔ حاضر برمبنای نشر تجدیدنظر شدهٔ آن ، مربوط به سال ۱۹۸۸ است که شامل اضافاتی نسبت‌به چاپ اول کتاب می‌باشد . باتوجه به اینکه این کتاب تخصصی در مدت ۱۲ سال شش بار در انگلستان تجدیدچاپ شده است ، می‌توان به کیفیت مطلوب آن اطمینان داشت . امیداست این کیفیت در برگرداندن کتاب به زبان فارسی حفظ شده باشد .

تذکر چند نکته پیرامون این ترجمه خالی از فایده نیست :

الف) هرچندکه نام کتاب ، **منطق برای ریاضیدانان** است ، ولی درعمل ، ریاضیات موردنیاز برای فهمیدن آن بسیار مقدماتی است ، و به نظر می‌رسد که نامی‌همچون **منطق ریاضی** یا **منطق علامتی** بهتر می‌توانست بیانگر محتوای کتاب باشد ، باوجود این جهت رعایت امانت ، نام اصلی کتاب حفظ شده است .

ب) شخصا " اصطلاحات وضع شده توسط مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب را بسیار می‌پسندم ، منتها در سالیان اخیر ، نویسندگان کتب ریاضیات جدید دبیرستانی گاهی اصطلاحات متفاوتی را به کار برده و رایج ساخته‌اند که شاید اصالت و صحت اصطلاحات مرحوم مصاحب را نداشته باشند ، ولی از آنجا که ذهن دانش‌آموزان و دبیران با این اصطلاحات خو گرفته است ، بهتر آن دیدم که به خاطر رعایت اکثریت از پافشاری درمورد آن اصطلاحات چشم‌پوشی و از اصطلاحات رایج فعلی پیروی کنم .

پ) ممکن است اهل ادب اصطلاحاتی مانند منطقیدن ، حسابیدن ، و سکولمیدن را نپسندند ، ولی اگر بخواهیم خود را در چارچوب الفاظ طویلی چون منطقی ساختن ، حسابی ساختن ، یا سکولمی ساختن محصور کنیم ، گذشته از آنکه از غرابت استعمال چندان نکاسته‌ایم ، خودرا از سهولت داشتن یک مصدر یک‌کلمه‌ای نیز محروم‌کرده‌ایم ، که این درعمل به شکل مانعی دست‌وپاگیر درخواهدآمد . از این گذشته ساختن چنین مصدرهایی نه فقط در زبان فارسی ، بلکه در اکثر زبانهای اروپایی سابقه‌ای‌طولانی دارد ، و بسیاری معتقدندکه رواج چنین کاری باعث غنای زبان خواهدشد .

دیگراین‌که گرچه مطابق قواعد زبان عربی **اصول موضوعه** جمع **اصل موضوع** است ولی بسیاری ازدانشجویان علت تفاوت **موضوع** و**موضوعه** رامتوجه نمی‌شوند ، و بعضی ازآنها نیز حتی از اصطلاح **اصل موضوع** مفهوم روزمرهٔ **اصل ماجرا** را استنباط می‌کنند . مطابق تجربه چندساله‌ای که دراین‌مورد داشته‌ام کنارگذاشتن این استنباط نیز برای بسیاری ازآنان آسان نیست . درعین‌حال برداشت مفهوم "وضع شده" از کلمهٔ **موضوعه** برای بسیاری ازآنان آسانتر است . به همین جهت ترجیح دادم که درسراسرکتاب بطوریکنواخت از اصطلاحات **اصل موضوع** و **اصول موضوعه** استفاده نمایم .

ت) درمدتی‌که مشغول ترجمهٔ این کتاب بودم ، پیش‌نویس ترجمه دوبار به عنوان جزوهٔ درسی مورد استفاده قرار گرفت . این امر باعث شد که تعدادی از اشتباهات چاپی‌متن اصلی آشکار و برطرف شوند . جا دارد که از دانشجویانی

که در این کار یاور من بوده‌اند صمیمانه سپاسگزاری نمایم .

همچنین وظیفهٔ خود می‌دانم که از خانمها طهرانی و صابری که کار تایپ قسمت عمده‌ای از دستنویس‌ها را با دقت و علاقهٔ فراوان انجام دادند ، آقای شهرام پورعلی که زحمت مقابلهٔ نسخهٔ دستنویس وتایپ شده را به‌عهده داشت ، و فرزندم سیامک که بازخوانی قسمتی ازفرمهای چاپخانه رابه‌عهده‌گرفت صمیمانه تشکر کنم .

ث) کار ویرایش علمی را همکار ارجمندم جناب دکتر بهمن هنری به‌عهده داشت که آن را با سرعت و دقت فراوان به پایان برد . مایلم تشکر عمیق خود را نسبت به او ابراز نمایم .

ج) کارهای فنی چاپ کتاب در مؤسسهٔ چاپ و انتشارات آستان قدس رضوی انجام پذیرفت ، که از همهٔ کارکنان زحمتکش مؤسسه به خاطر بذل توجه فراوان ، و دلسوزیهایشان جهت انجام بهتر کار سپاسگزارم . همچنین از مسئولین بنیاد فرهنگی رضوی، که بامساعدتهای آنان چاپ سریع این کتاب میسر گشت تشکر می‌کنم.

درپایان امیدوارم که این خدمت ناچیز به جامعهٔ علمی ایران مورد قبول اهل نظر واقع شود ، و اشتباهات موجود را ، که احتمالا " تعدادشان کم نیست ، بر بضاعت اندک مترجم ببخشند و راهنمائیهای خود را از او دریغ نکنند .

دکتر محمدعلی پورعبدالله

گروه ریاضی ، دانشگاه فردوسی "مشهد"

پیشگفتار مؤلف

هر ریاضیدانی از این نکته آگاه است که هرگاه در جواب سؤال یک غیر-ریاضیدان ، شغل خود را اظهار نماید چگونه صحبت به سردی کشیده می‌شود و خاتمه می‌یابد . برای یک منطقدان در جمع سایر ریاضیدانان نیز اظهار شغل به همانگونه ، باعث نگاههای بی‌تفاوت ، ابراز عدم اطلاع ، و تغییر موضوع صحبت می‌شود . فاصلهٔ بین ریاضیدانان و عامهٔ مردم مشکلی است که همیشه وجود خواهد داشت (هرچندکه از هیچ فرصتی برای کاستن این فاصله نباید غفلت کرد)، ولی ، به نظر من ، فاصلهٔ بین منطقدانان و ریاضیدانان غیرضروری است . این کتاب کوششی است برای کاستن این فاصله ازطریق فراهم ساختن مدخلی بر منطق برای ریاضیدانانی که شاید نخواهند حتما "منطقدان بشوند .

امروزه منطق ریاضی در بسیاری از دانشگاهها به‌عنوان قسمتی از یک درس دورهٔ لیسانس ریاضی یا کامپیوتر تدریس می‌شود ، و این مبحث اکنون آنقدر جا افتاده است که مجموعهٔ استانده‌ای از مواد اساسی مورد نیاز یک چنین درسی را تشکیل دهد . هدف این کتاب فراهم ساختن یک کتاب درسی برای این درس است ، ولی هدفی فراتر از این نیز دارد ، و آن این‌که نه فقط یک کتاب درسی ، بلکه یک‌کتاب باشد . مطالب عمدا "بطورمستقیم و بخاطرخودشان ارائه شده‌اند ، بدون این که نسبت به هیچ جنبه‌ای از قبیل کاربرد ، یا گسترش موضوع تمایل قبلی وجود داشته باشد . در عین حال کوشش بر این بوده است که مطالب در چارچوب کلی ریاضیات نشانده شوندو بر ارتباط منطق با ریاضیدان تأکید نهاده شود .

طرح کتاب طوری است که برای هر کس با زمینه ریاضی ، از دانشجوی سال اول گرفته ، تا یک ریاضیدان حرفه‌ای که بخواهد ، یا لازم باشد ، چیزی دربارهٔ منطق ریاضی دریابد ، قابل استفاده است . فرض شده است که خواننده اندکی

با نظریهٔ اعداد و جبر مقدماتی آشنا است ، و از آنجا که مفاهیم مجموعه‌های شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر اساسی هستند ، ضمیمه‌ای شامل خاصیتهای لازم افزوده شده است .

مطالب این کتاب حاصل دو درس جداگانهٔ شانزده ساعتی در دانشگاه سترلینگ به دانشجویان سالهای سوم و چهارم است . اولین درس ، فصل‌های ۱ تا ۴ و قسمتی از فصل ۵ ، و درس دوم ، که یک درس پیشرفته‌تر اختیاری بود ، بقیهٔ کتاب را می‌پوشاند . فصل ۶ مشکلترین فصل کتاب است ولی اهمیت قضیهٔ ناتمامیت گدل آنچنان است که مفاهیمی که در ورای برهان آن قرار دارند در کتابی از این نوع باید ظاهر شوند . از آنجا که مطالب فصل ۷ به آنها بستگی ندارند ، می‌توان در اولین دور مطالعهٔ کتاب از جزئیات برهانهایشان صرفنظر کرد .

دامنهٔ عمل این کتاب محدودتر از کتابهای استاندهٔ دیگر در این مبحث است . بویژه نظریهٔ الگوها و نظریهٔ اصل‌موضوعی مجموعه‌ها را به اختصار بسیار بررسی کرده‌ایم . بنابراین خوانندهٔ علاقه‌مند را برای مطالعهٔ بیشتر به فهرست عناوین پایان کتاب ارجاع می‌دهیم . به بعضی از آنها در متن کتاب (تحت‌نام مؤلف) بطورمشخص اشاره شده است . این کتابها درمجموع بسیاری ازموضوعات منطق ریاضی‌را می‌پوشانند ،و مباحث این‌کتاب‌را باعمق بیشتر بررسی‌می‌کنند .

درپایان هربخش تمرینهایی آورده شده است . بطورکلی ، تمرینهای ساده قبل از تمرینهای مشکلتر قرار گرفته‌اند ، ولی همهٔ مثالها به عنوان کاربردهای مستقیم‌بخشهای مربوطه می‌باشند . هدف از آنها روشنترساختن و تحکیم مطالب است ، نه توسیع آنها . راهنمایی یا حل بسیاری از تمرینها را در پایان کتاب آورده‌ایم .

نمادها (همچنین اصطلاحات) بکار رفته در این کتاب تاحدامکان استانده هستند . اما بعضی‌از مواردِاستعمال نیز غیر استانده‌اند ، که هدف از بکاربردن آنها ،روشنترشدن مطلب است .این امرنبایدبرای خواننده‌ای که باموضوع‌آشنایی داردباعث زحمت شود ، هدف‌کمک‌به خواننده‌ای بوده است‌که با موضوع آشنایی ندارد . متأسفانه مؤلفان مختلف از نمادها و نشانهای‌مختلف استفاده می‌کنند. به‌این‌دلیل ، وبخاطر سهولت ارجاع فهرست‌معانی نمادها را به‌کتاب افزوده‌ایم . در تمام‌کتاب نماد ▷ به معنای بازگشت‌به بحث‌اصلی است . پس از آن‌که بخاطر یک حکم ، مثال ، تذکر، نتیجه ، یا تعریف دچار عدم‌تداوم شده باشد .

در پایان باید به مدیون بودن خود در چهار مورد اعتراف کنم . اولین دین من به‌کتاب مندلسن (مدخل منطق ریاضی) است که‌هر کس با آن آشنا باشد این‌را درک خواهدکرد . به‌عنوان یک‌کتاب مقدماتی برای منطقدانان این کتاب کم‌نظیر است . دوم اینکه ، بدون فرصتی که توسط دانشگاه سترلینگ برای من فراهم شد ، نوشتن این‌کتاب ممکن نبود . سوم ،بخاطر خواندن دستنویس کتاب ، و پیشنهادهای ارزشمند متعدد ، از فرانسیس بل سپاسگزارم . و سرانجام ، از آیرین ویلسن و می ایبرهامسن بخاطر زحمت‌صبورانه‌شان‌درتایپ‌کردن‌دستنویس تشکر می‌کنم .

۱۹۷۸ ، آ . گ . همیلتن

۱

حساب غیرصوری گزاره‌ها

۱:۱ گزاره‌ها و رابطها

منطق ، یا حداقل ریاضیات منطقی از استنتاج تشکیل شده است . ما با استفاده از دقتی که یک روش ریاضی را مشخص می‌کند قواعد استنتاج را بررسی خواهیم کرد . در انجام این کار ، اگر اصولاً" قرار است دقتی در کار باشد ، باید ابهام زبان خود را برطرف سازیم ، و روش ریاضی استانده برای تحقق این امر ، معرفی زبانی نمادی است ، با نمادهایی که معانی و موارد استعمال دقیقاً" بیان شده‌ای داشته باشند . قبل از هر چیز جنبه‌ای از زبان روزمره ، یعنی **رابطها** را بررسی می‌کنیم .

هنگامی که می‌کوشیم یک جمله را در زبان فارسی تحلیل کنیم ، ابتدا می‌توانیم ملاحظه کنیم که آیا این جمله ساده است یا مرکب . یک جملهٔ ساده (از نظر دستور زبان) دارای یک موضوع (مبتدا) و یک محمول (خبر) است ، مثلاً" :

ناپلئون مرده است .

حسن به تقی بیست تومان بدهکار است .

همهٔ تخم‌مرغهایی که مربع شکل نیستند مدور هستند .

در هرمورد موضوع را با حروف سیاه چاپ کرده‌ایم ، و آنچه که باقی‌مانده محمول است . یک جملهٔ مرکب بوسیلهٔ رابطها از جمله‌های ساده ساخته می‌شود ، مثلاً" :

ناپلئون مرده است و دنیا به وجد آمده است .

اگر همهٔ تخم مرغها مربع شکل نیستند آنگاه همهٔ تخم‌مرغها مدور هستند .

اگر فشار هوا سقوط کند آنگاه یا باران خواهدآمد یا برف .

این امر را که همهٔ جمله‌های ساده‌ای که ما با آنها سروکار داریم یا درست هستند یا نادرست ، به عنوان یک فرض پایه‌ای تلقی می‌کنیم . قطعاً" می‌توان وجود جمله‌هایی را مطرح کرد که تلقی آنها به عنوان درست یا نادرست ممکن نیست ، و بنابراین ما اصطلاحی متفاوت را بکار خواهیم گرفت . این اصطلاح **گزارهٔ** ساده یا مرکب خواهدبود ، و فرض خواهیم کرد که هر گزاره‌ای یا درست است یا نادرست .

گزاره‌های ساده با حروف بزرگ C, B, A ، . . . نشان داده خواهند شد . بنابراین به منظور نمادی ساختن گزاره‌های مرکب باید نمادهایی برای رابطها ارائه کنیم . رایجترین رابطها ، و نمادهایی که برای نشان دادن آنها بکار خواهند رفت ، درجدول زیر عرضه شده‌اند .

چنین نیست که A	$\sim A$
A و B	$A \wedge B$
A یا B	$A \vee B$
اگر A آنگاه B	$A \rightarrow B$
A اگر و فقط اگر B	$A \leftrightarrow B$

البته اگر قرار است معنای نمادها دقیقاً "تعریف شوند ، باید مطمئن شده باشیم که معنای عبارات ستون سمت راست را دقیقاً" می‌دانیم . بزودی باز هم به سراغ این مطلب خواهیم آمد .

سه‌گزارهٔ مرکب‌فوق‌الذکر رامی‌توانیم(به‌ترتیب) برحسب نمادها به شکل زیر بنویسیم:

$$A \wedge B$$

$$C \rightarrow D$$

$$E \rightarrow (F \vee G)$$

که در آن A بجای " ناپلئون مرده است " ، B بجای " دنیا به وجد آمده است " ، C بجای " همهٔ تخم مرغها مربع شکل نیستند " و . . . بکار رفته است .

توجه داشته باشید که هرگاه یک گزارهٔ مرکب به این طریق نمادی شده باشد آنچه که باقی می‌ماند ، استخوان‌بندی صرفاً "منطقی ، یعنی فقط یک "صورت گزاره‌ای" است که گزاره‌های متفاوت متعددی ممکن است در آن مشترک باشند . دقیقاً "همین نکته است که ما را برتحلیل استنتاج قادر می‌سازد . زیرا که استنتاج با صورتهای گزاره‌های موجود در یک استدلال سروکار دارد نه معانی آنها .

مثال ۱:۱

اگر سقراط انسان است آنگاه سقراط فانی است .

سقراط انسان است .

∴ سقراط فانی است .

این استدلالی است که از لحاظ منطقی قانع‌کننده به‌نظرمی‌رسد .ولی به استدلال زیر توجه کنید :

سقراط انسان است .

∴ سقراط فانی است .

ممکن است فکر کنیم که نتیجه از مقدمه بدست می‌آید ، ولی این بخاطر معانی کلمات "انسان" و "فانی" است نه بخاطر یک استنتاج منطقی صرف . بهتر است این استدلالها را به شکل نمادی درآوریم .

$$\begin{array}{lll} & A \to B & \\ & A & \\ \therefore & B & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} & A \\ \therefore & B \end{array}$$

آنچه که اولین استدلال را معتبر می‌سازد " صورت " آن است . هر استدلال دیگری که دارای همان صورت باشد معتبر خواهد بود . این همان شهود منطقی ما درباره‌ٔ گزاره های اگر . . . آنگاه . . . است . اما استدلال دوم از این خاصیت بهره نمی‌برد . استدلالهای متعددی به این صورت هستند که ما آنها را بطور شهودی معتبر تلقی نمی‌کنیم . مثلا " :

ماه زرد است .

∴ ماه از طلا ساخته شده است .

بنابراین ما بجای بررسی گزاره‌های خاص به‌بررسی **صورتهای گزاره‌ای** می‌پردازیم . حروف p, q, r , . . . **متغیرهای گزاره‌ای** خواهند بود که بجای گزاره‌های سادهٔ غیرمشخص دلخواه بکار خواهند رفت . به تفاوت بین موارد استعمال حروف p, q, r , . . . و حروف A, B, C , . . . توجه داشته باشید . حروف دستهٔ اول متغیرهایی هستند که گزاره‌های سادهٔ مشخصی ممکن است جانشین آنها شوند . حروف دستهٔ دوم صرفا " "نشانه‌هایی" هستند برای گزاره‌های سادهٔ مشخص . متغیرها این امکان را به ما می‌دهند که خاصیتهایی را که گزاره‌ها و رابطها دارند بطورکلی توصیف نماییم . هر گزارهٔ ساده یا درست است یا نادرست ، بنابراین می‌توان تصور کرد که هر متغیر گزاره‌ای یکی از دو **ارزش درستی** زیر را اختیار می‌کند : T (درست = true) یا F (نادرست = false) . نحوهٔ وابستگی درستی‌یانادرستی یک گزارهٔ مرکب یا یک‌صورت‌گزاره‌ای به درستی یا نادرستی گزاره‌های ساده یا متغیرهای گزاره‌ای سازندهٔ آن ، موضوع بخش آینده خواهد بود .

تمرین

۱ ــ گزاره‌های مرکب زیر را به شکل نمادی درآورید :

(آ) اگر تقاضا ثابت بماند و قیمتها ترقی کنند آنگاه فروش باید کاهش داشته باشد .

(ب) ما انتخابات را خواهیم برد بشرط اینکه حسن بعنوان رهبرحزب انتخاب شود .

(پ) اگر حسن بعنوان رهبرحزب انتخاب نشود ، آنگاه یا تقی یا جعفر هیأت دولت

را ترک خواهندکرد و ما انتخابات را خواهیم باخت .

(ت) اگر x عددی گویا و y عددی صحیح باشد آنگاه z حقیقی نیست .

(ث) یا قاتل کشور را ترک کرده است یا کسی او را پناه داده است .

(ج) اگر قاتل کشور را ترک نکرده است آنگاه کسی او را پناه داده است .

(چ) مجموع دو عدد زوج است اگر و فقط اگر یا هر دو فرد باشند یا هر دو زوج .

(ح) اگر y یک عدد صحیح باشد آنگاه z حقیقی نیست به شرط این که x یک عدد گویا باشد .

۲ـ(آ) هر جفت از گزاره‌های موجود در فهرست تمرین ۱ را که دارای صورت یکسانی هستند مشخص کنید .

(ب) هر جفت از گزاره‌های موجود در فهرست تمرین ۱ را که دارای معنای یکسانی هستند مشخص کنید .

۱:۲ . تابعهای درستی و جدولهای درستی

رابطها را به ترتیب مورد بررسی قرار می‌دهیم .

نقیض

نقیض گزارهٔ A را بصورت $\sim A$ می‌نویسیم . واضح است که اگر A درست باشد $\sim A$ نادرست است و اگر A نادرست باشد $\sim A$ درست است . در اینجا معنای A بی‌تأثیر است . این وضعیت را می‌توانیم با **جدول درستی** توصیف کنیم :

p	$\sim p$
T	F
F	T

این جدول ارزش درستی $\sim p$ را می‌دهد مشروط بر این‌که ارزش درستی p داده شده باشد . رابط $\sim$ یک **تابع درستی** مانند $f^{\sim}$ را پدید می‌آورد ، که در این حالت تابعی است از مجموعهٔ $\{T, F\}$ بتوی خودش ، که بوسیلهٔ جدول درستی داده شده است ، از اینرو :

$$f^{\sim}(T) = F,$$

$$f^{\sim}(F) = T.$$

ترکیب عطفی

مانند قسمت قبل به‌آسانی دیده می‌شود که ارزش درستی اختیار شده بوسیلهٔ ترکیب عطفی

$A \wedge B$ فقط به ارزش درستی اختیار شده بوسیلهٔ A و ارزش درستی اختیارشده بوسیلهٔ B بستگی دارد . به جدول زیر توجه می‌کنیم :

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

در این جدول برای هرترکیب ممکن ارزشهای درستی p و q یک سطرداریم .آخرین ستون ، ارزش درستی متناظر را برای $p \wedge q$ می‌دهد . بنابراین رابط $\wedge$ یک تابع درستی دو مکانی ، مانند $f^{\wedge}$ را تعریف می‌کند .

$$f^{\wedge}(T, T) = T, \qquad f^{\wedge}(T, F) = F,$$
$$f^{\wedge}(F, T) = F, \qquad f^{\wedge}(F, F) = F.$$

ترکیب فصلی

ما $A \vee B$ را برای نشان‌دادن " A یا B " بکار برده‌ایم ، ولی در بسیاری از زبانها دو روش استعمال استاندهٔ متمایز برای کلمهٔ "یا" وجود دارد . " A یا B " ممکن است به معنای " A یا B یا هردو" باشد ، یا ممکن است " A یا B ولی نه هردو" معنی دهد . برای اینکه زبان نمادی ما دقیق باشد ، باید فقط یکی از این‌دو را به‌عنوان معنای $\vee$ برگزینیم . ما اولی را برمی‌گزینیم ، برای این کار دلیل خاصی نداریم ، به‌همین‌ترتیب می‌توانستیم دومی را انتخاب کنیم . جدول درستی به قرار زیر است :

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

رابط $\vee$ عینا " مانند $\wedge$ یک تابع درستی دو مکانی تعریف می‌کند .

تذکر : اگر A و B گزاره‌های ساده‌ای باشند می‌توانیم " A یا B ولی نه هر دو" را به صورت نمادین زیر بنویسیم :

$$(A \vee B) \wedge \sim (A \wedge B).$$

به همین ترتیب اگر " A یا B ولی نه هردو" را برای تعریف نماد ترکیب فصلی بکار برده بودیم می‌توانستیم " A یا B یا هردو" را با استفاده از آن ترکیب فصلی همراه با نمادهای $\wedge$ و $\sim$ بیان کنیم .

ترکیب شرطی

$A \to B$ برای نمایش گزارهٔ " اگر A آنگاه B " یا " A مستلزم B است " یا " A ، B را ایجاب می‌کند " بکار می‌رود . در این‌حالت مواردِ استعمال عادی زبان فارسی برای ساختن یک‌جدول‌درستی چندان‌مفیدواقع نمی‌شود ، و جدولی‌که ما بکارمی‌بریم سرچشمهٔ مشترکی برای مشکلات شهودی است . این جدول عبارتست از :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مشکل از آنجا ناشی‌می‌شودکه در حالتی که A نادرست است برای $A \to B$ ارزش T قائل شویم . بررسی مثالهای ترکیبات‌شرطی که در آنها مقدم نادرست باشداحتمالا "به این نتیجه‌گیری منجرخواهد شدکه چنین‌گزاره‌هایی اصولا "فاقدارزش درستی‌هستند .همچنین ممکن‌است اینطور برداشت شودکه چنین گزاره‌هایی مفیدیا بامعنی نیستند . مثلا " گزارهٔ

اگر علف قرمز است آنگاه ماه از پنیر سبز ساخته شده است .

را می‌توان به‌آسانی بی‌معنی بحساب آورد .

ولی ما به‌استنتاج و روشهای برهان ، بخصوص در ریاضیات ، علاقه‌مندیم . در این مبحث اهمیت گزارهٔ شرطی $A \to B$ در این است‌که‌از درستی‌آن ودرستی B می‌توان درستی A را نتیجه‌گرفت ، و از نادرست بودن A چیز خاصی نتیجه نمی‌شود . یک‌نوع بسیار رایج ازگزاره‌های ریاضی ، یعنی یک‌گزارهٔ **کلی**، می‌تواند برای نشان‌دادن این نکته مفید واقع شود ، مثلا " :

به ازای هر عدد صحیح n ، اگر $n > 2$ آنگاه $n^2 > 4$

این گزاره یک گزارهٔ درست دربارهٔ اعداد صحیح تلقی می‌شود . بنابراین باید انتظار داشته باشیم که گزارهٔ

اگر $n > 2$ آنگاه $n^2 > 4$

صرفنظر از مقداری که n اختیار می‌کند درست تلقی شود . مقادیر مختلف n همهٔ ترکیبات ممکن ارزشهای درستی مربوط به " $n > 2$ " و " $n^2 > 4$ " را به‌استثنای‌ترکیب TF پدید می‌آورند . اگر n را مساوی ۳ ، ۱- و ۱ اختیار کنیم ترکیبهای FT, TT , و FF حاصل می‌شوند ، و اینها ترکیباتی هستند که بنابر جدول ارزشمان به استلزام ، ارزش درستی T می‌بخشند . بنابراین درستی شهودی این استلزام تا اندازه‌ای جدول درستی را توجیه می‌کند . نکته‌ای‌که بایدبخاطرسپرد این است‌که تنها وضعیتی که گزارهٔ

$A \to B$ دروغ تلقی می‌شود هنگامی است که A راست و B دروغ باشد .

ترکیب دو شرطی

ما " A اگر و فقط اگر B " را با $A \leftrightarrow B$ نشان می‌دهیم . در اینجا وضعیت روشن است . باید $A \leftrightarrow B$ هنگامی و تنها هنگامی درست باشد که A و B دارای یک ارزش درستی (هردو درست یا هردو نادرست) باشند . بنابراین جدول درستی به شکل زیر است :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

به این ترتیب فهرست رابطهای گزاره‌ای ما کامل می‌شود . واضح است که گزاره‌های مرکب هرقدر هم طویل باشند می‌توانند با استفاده از این رابطها و گزاره‌های ساده ساخته شوند . با استفاده از متغیرهای گزاره‌ای می‌توانیم صورتهای گزاره‌ای با طول دلخواه را بسازیم .

تعریف ۱ : ۲

یک **صورت گزاره‌ای** عبارتی است مشتمل بر متغیرها و رابطهای گزاره‌ای ، که می‌تواند با استفاده از قواعد زیر ساخته شود :

(i) هر متغیر گزاره‌ای یک صورت گزاره‌ای است .

(ii) اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ صورتهای گزاره‌ای باشند ، آنگاه $(\sim\mathscr{A})$, $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$, و $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ صورتهای گزاره‌ای هستند .

مثال ۱ : ۳

$((p \wedge q) \to (\sim(q \vee r)))$ یک صورت گزاره‌ای است. بنابر (i) $p,$ $q,$ r صورتهای گزاره‌ای هستند . بنابر (ii) , $(p \wedge q)$ و $(q \vee r)$ صورتهای گزاره‌ای هستند . بنابر (ii) , $(\sim(q \vee r))$ یک صورت گزاره‌ای است . بنابر (ii) , $((p \wedge q) \to (\sim(q \vee r)))$ یک صورت گزاره‌ای است .

◁ این تعریف مثالی از یک تعریف استقرائی است . هنگامی که بخواهیم دستگاههای صوری را مفصلا "توصیف کنیم این تعریف به عنوان یک نمونه مجددا "بکار خواهد آمد .

رابطهای گزاره‌ای توابع درستی ساده را مشخص می‌کنند . با استفاده از جدول

درستی برای رابطهای گزاره‌ای می‌توانیم یک جدول درستی برای هر صورت گزاره‌ای مفروضی بسازیم . یعنی‌جدولی‌که به ازای هر ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در صورت گزاره‌ای ، ارزش درستی آن را نشان دهد . این جدول درستی ، یک نمایش نموداری یک تابع درستی است . بنابراین هر صورت گزاره‌ای ، یک تابع درستی پدید می‌آورد ، که تعداد شناسه‌های تابع همان تعداد متغیرهای گزاره‌ای مختلفی است‌که در صورت گزاره‌ای ظاهر می‌شوند . این مطلب را با یک مثال نشان می‌دهیم .

مثال ۴:۱

(آ) $((\sim p) \vee q)$

ابتدا جدول درستی را بسازید :

p	q	$(\sim p)$	$((\sim p) \vee q)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

ملاحظه کنید که تابع درستی متناظر با این صورت گزاره‌ای با تابع درستی مشخص شده بوسیلهٔ $(p \to q)$ یکی است .

(ب) $(p \to (q \vee r))$

جدول درستی :

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \to (q \vee r))$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	T

در اینجا تابع درستی تابعی است سه مکانی ، زیرا سه متغیرگزاره‌ای داریم . هر سطر جدول ، ارزش تابع درستی را به ازای ترکیبات مختلف ارزش‌های درستی حروف ارائه می‌کند . توجه کنید که در جدول درستی هر صورت گزاره‌ای شامل سه متغیر گزاره‌ای ، هشت سطر وجود دارد ، همچنین به شیوهٔ نوشته شدن سه ستون اول جدول فوق توجه کنید . این نحوهٔ دسته‌بندی Tها و Fها در زیر r, q, p به ما اطمینان می‌دهد که هر ترکیب ممکنی یک‌بار و فقط یک‌بار ظاهر می‌شود .

◁ درحالت‌کلی برای یک صورت گزاره‌ای شامل n متغیر گزاره‌ای مختلف (که n عدد طبیعی دلخواهی است) ، تابع درستی تابعی خواهد بود با n مکان ، و جدول درستی دارای 2^n سطر خواهد بود ، که هر کدام به یکی از ترکیبهای ممکن ارزشهای درستی متغیرهای گزاره‌ای مربوط می‌شوند . از این گذشته توجه کنید که متناظر با 2^{2^n} روش ممکن قرار دادن T ها و F در آخرین ستون یک جدول درستی دارای 2^n سطر ، 2^{2^n} تابع درستی متمایز وجود دارد . واضح است که تعداد صورتهای گزاره‌ای قابل ساختن با n متغیر گزاره‌ای نامتناهی است . بنابراین صورتهای گزاره‌ای مختلفی ممکن است با تابع ارزش یکسانی متناظر باشند .

برای بررسی بیشتر این موضوع به تعدادی تعریف نیاز داریم .

تعریف ۱:۵

(آ) یک صورت گزاره‌ای یک **راستگو** است اگر به ازای هر ارزش‌دهی به متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در آن ، ارزش T داشته باشد .

(ب) یک صورت گزاره‌ای یک **تناقض** است اگر به ازای هر ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در آن ، ارزش F داشته باشد .

◁ چنین‌نیست‌که‌هر صورت گزاره‌ای دریکی از این دو دسته قرار گیرد . درحقیقت هیچکدام از آنهایی که تاکنون موردبحث قرار گرفته‌اند به این دو دسته تعلق ندارند .

مثال ۱:۶

(آ) $(p \vee (\sim p))$ یک راستگو است .

(ب) $(p \wedge (\sim p))$ یک تناقض است .

(پ) $(p \leftrightarrow (\sim(\sim p)))$ یک راستگو است .

(ت) $(((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (((\sim p) \rightarrow (\sim q)) \rightarrow p))$ یک راستگو است .

◁ این نکته باید از تعریف استنباط شده باشد که همهٔ راستگوهای شامل n متغیر گزاره‌ای تابع درستی n مکانی یکسانی را ، یعنی تابعی که همواره ارزش T را اختیار می‌کند تولید می‌کنند . درمورد تناقض ها نیز نکتهٔ مشابهی را می‌توان ذکر کرد .

تعریف ۱:۷

اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ صورتهای گزاره‌ای باشند $\mathscr{A}$ منطقا " $\mathscr{B}$ را ایجاب می‌کند . اگر $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ یک راستگو باشد ، و $\mathscr{A}$ منطقا " **هم‌ارز** $\mathscr{B}$ است اگر $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ یک راستگو باشد .

مثال ۱:۸

(آ) $(p \wedge q)$ منطقاً p را ایجاب می‌کند .

(ب) $(\sim(p \wedge q))$ منطقاً هم‌ارز $((\sim p) \vee (\sim q))$ است .

(پ) $(\sim(p \vee q))$ منطقاً هم‌ارز $((\sim p) \wedge (\sim q))$ است .

درمورد (آ) : جدول درستی $((p \wedge q) \rightarrow p)$ عبارت است از :

$((p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

درمورد (ب) :

$(\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

در اینجا ما طریق متفاوتی برای نوشتن جدول درستی عرضه کرده‌ایم . برای صورتهای گزاره‌ای پیچیده ، ساختن جدول به این طریق آسانتر است . برای اطمینان از این که هر ترکیبی فقط یک‌بار ظاهر می‌شود کار را با نوشتن Tها و Fهادرزیرمتغیرهای‌گزاره‌ای شروع کنید . البته این کار باید در همه جا بطور یکنواخت انجام شود . سپس ارزشهای درستی قسمتهای‌مختلف‌را در زیر رابطهای آنها قرار دهید ، تا این که ستونی که ارزش درستی‌تمامی‌صورت گزاره‌ای را بیان‌می‌کند پر شود . درمثالهای فوق این ستون بوسیلهٔ یک جفت خط عمودی محصور شده است .

تذکر : فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دوصورت‌گزاره‌ای شامل‌متغیرهای گزاره‌ای یکسان‌باشند . اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ منطقاً "هم‌ارز باشند در این‌صورت تابع‌درستی یکسانی را نمایش می‌دهند . زیرا اگر $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ یک راستگو باشد هیچگاه ارزش F را اختیار نمی‌کند ، و بنابراین $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ باید همواره ارزش درستی یکسانی داشته باشند ، بنابراین تابعهای درستی متناظر با $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ باید یکسان باشند .

تمرین

۳ ــ جدول درستی صورتهای گزاره‌ای زیر را بنویسید :

(آ) $((\sim p) \wedge (\sim q))$

(ب) $\sim((p \rightarrow q) \rightarrow (\sim(q \rightarrow p)))$

پ) $(p \to (q \to r))$

ت) $((p \wedge q) \to r)$

ث) $((p \leftrightarrow (\sim q)) \vee q)$

ج) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$

چ) $(((\sim p) \wedge q) \to ((\sim q) \wedge r))$

ح) $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

۴ ــ نشان دهید که صورت گزاره‌ای $((\sim p) \vee q)$ و $(p \to q)$ دارای یک تابع درستی هستند ، و همچنین $((\sim p) \to (q \vee r))$ و $((\sim q) \to ((\sim r) \to p))$ نیز دارای یک تابع درستی می‌باشند .

۵ ــ کدامیک از صورتهای گزاره‌ای زیر راستگو هستند ؟

آ) $(p \to (q \to p))$

ب) $((q \vee r) \to ((\sim r) \to q))$

پ) $((p \wedge (\sim q)) \vee ((q \wedge (\sim r)) \vee (r \wedge (\sim p))))$

ت) $((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge (\sim q)) \vee r))$

۶ ــ نشان دهید که هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقا " هم‌ارز هستند .

آ) $(p \to q), ((\sim q) \to (\sim p))$

ب) $((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

پ) $(((\sim p) \wedge (\sim q)) \to (\sim r)), (r \to (q \vee p))$

ت) $(((\sim p) \vee q) \to r), ((p \wedge (\sim q)) \vee r)$

۷ ــ نشان دهید که صورت گزاره‌ای $(((\sim p) \to q) \to (p \to (\sim q)))$ یک راستگو نیست . صورتهای گزاره‌ای $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ را طوری بیابید که $(((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B})))$ یک تناقض باشد .

۳:۱ قواعد عمل کردن و جانشین کردن

حکم ۹:۱

اگر $\mathscr{A}$ و $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ راستگو باشند ، آنگاه $\mathscr{B}$ یک راستگو است .

برهان : فرض کنیدکه $\mathscr{A}$ و $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ راستگو باشند ولی $\mathscr{B}$ راستگو نباشد . دراین صورت یک ارزش‌دهی به متغیرهای گزاره‌ای ظاهرشده در $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ وجود داردکه برای $\mathscr{B}$ ارزش F ایجاد می‌کند . ولی همین ارزش‌دهی باید برای $\mathscr{A}$ ارزش T ایجادکند ، زیرا

$\mathscr{A}$ یک راستگو است ، و بنابراین برای $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ ارزش F ایجاد می‌کند . این با فرض راستگو بودن $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ متناقض است . پس $\mathscr{B}$ باید یک راستگو باشد .

$\triangleright$ صورت‌گزاره‌ای $(p \to p)$ را درنظر بگیرید . به آسانی می‌توان نشان داد که این یک راستگو است . اکنون اگر صورت گزاره‌ای $((r \wedge s) \to t)$ را در هر دو مورد جانشین p کنیم خواهیم داشت :

$$(((r \wedge s) \to t) \to ((r \wedge s) \to t))$$

که مجددا "یک راستگو است . بطور شهودی واضح است‌که هر صورت گزاره‌ای دیگری هم جانشین p شود ، بشرط‌این که آن را در همهٔ موارد جانشین p کرده باشیم حاصل یک راستگو خواهدبود (واضح است‌که $(p \to ((r \wedge s) \to t))$ یک راستگو نیست .) این مفاهیم را در یک حکم جمع‌آوری می‌کنیم .

حکم ۱ : ۱۰

فرض کنید $\mathscr{A}$ یک صورت گزاره‌ای باشد که متغیرهای گزاره‌ای $p_1, p_2, \ldots, p_n$ در آن ظاهر می‌شوند ، و فرض کنید $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ صورتهای گزاره‌ای دلخواهی باشند . اگر $\mathscr{A}$ یک‌راستگو باشد آنگاه صورت گزاره‌ای $\mathscr{B}$ که از جانشین‌شدن همهٔ موارد p_i بوسیلهٔ $\mathscr{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ حاصل می‌شود نیز یک راستگو خواهدبود .

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}$ یک راستگو است که $p_1, p_2, \ldots, p_n$ متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در آن می‌باشند ، و فرض کنید $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ صورتهای گزاره‌ای دلخواهی باشند . ارزشهای درستی دلخواهی به متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ تخصیص دهید . اکنون ارزش درستی اختیارشده توسط $\mathscr{B}$ همان ارزش درستی خواهدبود که $\mathscr{A}$ در حالتی که ارزشهایی که $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ اختیار می‌کنندبه $p_1, p_2, \ldots$ و p_n تخصیص داده شود ، یعنی T ، بدست می‌آورد . بنابراین $\mathscr{B}$ به ازای همهٔ ارزشدهی‌ها دارای ارزش T ، و بنابراین یک راستگو است .

$\triangleright$ حکم ۱ : ۱۰ یکی از احکام متعددی است که با آنها برخورد خواهیم کرد و کاربرد آنها وسیع و غالبا " ناخودآگاه است . به‌عنوان مثال ، حکم بعدی نتیجه‌ای مفید است .

حکم ۱ : ۱۱

به ازای صورتهای گزاره‌ای دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ ، $(\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$ منطقا " هم ارز $((\sim\mathscr{A}) \vee (\sim\mathscr{B}))$ و $(\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}))$ منطقا " هم‌ارز $((\sim\mathscr{A}) \wedge (\sim\mathscr{B}))$ است .

برهان : قبلا " دیدیم که

$$(\sim(p \wedge q) \leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q)))$$

یک راستگو است . بنابر حکم ۱ : ۱۰ به ازای هر دو صورت گزاره‌ای دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ ،

$$((\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}))\leftrightarrow((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B})))$$

نیز یک راستگو است . بنابراین $(\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}))$ منطقاً " هم‌ارز $((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B}))$ است ، قسمت دیگر نیز به روشی مشابه ثابت می‌شود .

مثال ۱ : ۱۲

به ازای صورتهای گزاره‌ای دلخواه $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ ، $(\mathscr{A}\wedge(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}))$ منطقاً " هم ارز $((\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\wedge\mathscr{C})$ است . (به همین جهت است که ما معمولاً " پرانتزهای داخلی را حذف کرده و این عبارت را بصورت $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})$ می‌نویسیم .)

صورت گزاره‌ای زیر را درنظر بگیرید :

$$(((p_1\wedge(p_2\wedge p_3))\leftrightarrow((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)))$$

با ساختن یک‌جدول‌درستی به طریق‌معمول می‌توان نشان داد که این یک راستگو است . اکنون $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ را به ترتیب جانشین p_1, p_2 و p_3 کرده و حکم ۱ : ۱۰ را برای بدست‌آوردن نتیجهٔ مطلوب بکار برید .

مثال ۱ : ۱۳

به ازای صورتهای گزاره‌ای دلخواه $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ ، هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقاً " هم‌ارز هستند .

(آ) $(\mathscr{A}\vee(\mathscr{B}\vee\mathscr{C}))$ و $((\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\vee\mathscr{C})$

(ب) $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ و $(\mathscr{B}\wedge\mathscr{A})$

(پ) $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ و $(\mathscr{B}\vee\mathscr{A})$

اثبات اینها مشابه اثبات مثال حل‌شدهٔ قبلی است .

◁ اکنون صورت‌گزاره‌ای $((p\wedge p)\to q)$ را درنظر گیرید . $(p\wedge p)$ که در این صورت گزاره‌ای ظاهر شده است منطقاً " هم‌ارز p است (زیرا $((p\wedge p)\leftrightarrow p)$ یک راستگو است) . اگر p را بجای $(p\wedge p)$ قرار دهیم به $(p\to q)$ می‌رسیم . اکنون $(p\to q)$ منطقاً " هم ارز $((p\wedge p)\to q)$ است (جدول درستی را بررسی کنید) . مجدداً " این نمونه‌ای است از یک حکم کلی دربارهٔ جانشین کردن .

حکم ۱ : ۱۴

اگر $\mathscr{B}_1$ یک صورت گزاره‌ای باشد که از $\mathscr{A}_1$ با جانشین کردن صورت گزاره‌ای $\mathscr{B}$ بجای

یک یا چندمورد از مواردصورت گزاره‌ای $\mathscr{A}$ در $\mathscr{A}_1$ بدست آمده باشدو اگر $\mathscr{B}$ منطقا "هم‌ارز $\mathscr{A}$ باشد ، آنگاه $\mathscr{B}_1$ منطقا " هم‌ارز $\mathscr{A}_1$ است .

برهان : فرض کنید $\mathscr{B}$ منطقا "هم‌ارز $\mathscr{A}$ باشد و فرض کنید $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{A}_1$ به گونه‌ای باشند که در بالا توصیف شد . می‌خواهیم نشان دهیم که $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ یک راستگو است . به همه متغیرهای گزاره‌ای موجود در این صورتهای گزاره‌ای ارزشهایی تخصیص دهید . $\mathscr{B}_1$ فقط از این جهت با $\mathscr{A}_1$ تفاوت دارد که در بعضی جاها که قبلا " $\mathscr{A}$ بوده است فعلا " $\mathscr{B}$ قرار دارد . ارزشهای درستی اختیارشده توسط $\mathscr{B}_1$ باید همان ارزشهای درستی اختیارشده توسط $\mathscr{A}_1$ باشند زیرا $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دارای ارزش درستی یکسانی هستند . بنابراین $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ ارزش T اختیار می‌کند . درنتیجه $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ باید همواره ارزش T اختیار کند ، زیرا ارزشهای درستی اولیهٔ تخصیص داده شده به متغیرهای گزاره‌ای ، دلخواه بودند . از اینرو $(\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1)$ یک راستگو و $\mathscr{A}_1$ منطقا " هم‌ارز $\mathscr{B}_1$ است .

◁ حکم بعدی قسمت عمده‌ای از بحث محسوب نمی‌شود ، ولی ما آن را در اینجا می‌آوریم ، زیرا باعث درک بهتری از روشهایی می‌شود که بعدا " بکار خواهند رفت . به همین جهت برهان آن را با تفصیل بیشتری عرضه می‌کنیم .

حکم ۱:۱۵

یک صورت گزاره‌ای را که فقط شامل رابطهای ~ و ∧ و ∨ باشد یک صورت گزاره‌ای مقید می‌نامیم . فرض کنید $\mathscr{A}$ یک صورت گزاره‌ای مقید باشد ، و فرض کنید که $\mathscr{A}^*$ از تبدیل ∨ و ∧ به یکدیگر و جانشین‌شدن هرمتغیر گزاره‌ای بوسیلهٔ نقیض آن در سراسر $\mathscr{A}$ حاصل شده باشد . در این صورت $\mathscr{A}^*$ منطقا " هم‌ارز $(\sim\mathscr{A})$ است .

برهان : این برهان براساس استقرأ روی تعداد رابطهایی که در $\mathscr{A}$ ظاهر می‌شوند ، (که این تعداد را با n نشان می‌دهیم) انجام می‌شود . کافی است ثابت کنیم که به ازای هر عدد طبیعی n ، هر صورت گزاره‌ای مقید $\mathscr{A}$ که دقیقا " دارای n رابط باشد ، درحکم موردنظر صدق می‌کند .

مرحلهٔ پایه‌ای : $n=0$ ($\mathscr{A}$ شامل هیچ رابطی نیست) . در این حالت $\mathscr{A}$ فقط از یک متغیر گزاره‌ای مانند p تشکیل شده است . بنابراین در اینجا $\mathscr{A}^*$ عبارتست از $(\sim p)$ درنتیجه بدیهی است که $\mathscr{A}^*$ منطقا " هم‌ارز $(\sim\mathscr{A})$ است .

مرحلهٔ استقرأ : فرض کنید $n>0$ ، و $\mathscr{A}$ دارای n رابط است و این که هر صورت گزاره‌ای مقید با کمتراز n رابط ، دارای خاصیت موردنظر است . با درنظرگرفتن روشهایی که صورتهای گزاره‌ای می‌توانند ساخته‌شوند . باید سه حالت زیر را موردتوجه قرار دهیم :

حالت ۱ . $\mathcal{A}$ بصورت $(\sim\mathcal{B})$ است .

حالت ۲ . $\mathcal{A}$ بصورت $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ است .

حالت ۳ . $\mathcal{A}$ بصورت $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ است .

در حالت ۱ ، $\mathcal{B}$ دارای $n-1$ رابط است . پس بنابر فرض استقرأ $\mathcal{B}^*$ منطقا" هم ارز $(\sim\mathcal{B})$ است . ولی $\mathcal{A}^*$ همان $(\sim\mathcal{B}^*)$ است ، بنابراین $\mathcal{A}^*$ منطقا" هم‌ارز $(\sim(\sim\mathcal{B}))$ یعنی $(\sim\mathcal{A})$ است . توجه کنید که تقریبا" بطور ناخودآگاه ، در اینجا از نتیجهٔ حکم ۱ : ۱۴ استفاده کرده‌ایم .

در حالت ۲ ، تعداد رابطهای موجود در هرکدام از $\mathcal{B}$ یا $\mathcal{C}$ کمتر از n است . بنابراین $\mathcal{B}^*$ و $\mathcal{C}^*$ به ترتیب منطقا" هم‌ارز $(\sim\mathcal{B})$ و $(\sim\mathcal{C})$ هستند . اکنون $\mathcal{A}^*$ همان $(\mathcal{B}^* \wedge \mathcal{C}^*)$ است و عبارت اخیر بنابر حکم ۱ : ۱۴ منطقا" هم‌ارز $((\sim\mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}^*)$ است و مجددا" بنابر همان حکم این منطقا" هم‌ارز $((\sim\mathcal{B}) \wedge (\sim\mathcal{C}))$ می‌باشد . قبلا" (در حکم ۱ : ۱۱) دیده‌ایم که این منطقا" هم‌ارز $(\sim(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ ، یعنی $(\sim\mathcal{A})$ است . پس $\mathcal{A}^*$ منطقا" هم‌ارز $(\sim\mathcal{A})$ است .

در حالت ۳ ، مانند حالت ۲ ، $\mathcal{B}^*$ و $\mathcal{C}^*$ به ترتیب منطقا" هم‌ارز $(\sim\mathcal{B})$ و $(\sim\mathcal{C})$ هستند . $\mathcal{A}^*$ همان $(\mathcal{B}^* \vee \mathcal{C}^*)$ است ، که منطقا" هم‌ارز $((\sim\mathcal{B}) \vee \mathcal{C}^*)$ و بنابراین هم‌ارز $((\sim\mathcal{B}) \vee (\sim\mathcal{C}))$ ، یعنی $(\sim\mathcal{A})$ می‌باشد . پس $\mathcal{A}^*$ منطقا" هم‌ارز $(\sim\mathcal{A})$ است .

با فرض این که هر صورت گزاره‌ای مقید با کمتر از n رابط دارای خاصیت مطلوب است ، ثابت کردیم که هر صورت گزاره‌ای مقید دارای n رابط نیز دارای خاصیت مطلوب می‌باشد . بنابراین طبق اصل استقرأ ریاضی ، هر صورت گزاره‌ای مقیدی دارای خاصیت مطلوب است .

نتیجهٔ ۱ : ۱۶

اگر $p_1, p_2, \ldots, p_n$ متغیرهای گزاره‌ای باشند ، آنگاه

$$((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee \ldots \vee (\sim p_n))$$

منطقا" هم‌ارز

$$(\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n))$$

است .

برهان : این حالت خاصی از حکم ۱ : ۱۵ است که در آن $\mathcal{A}$ صورت گزاره‌ای $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$ می‌باشد .

$\lhd$ بامعرفی یک نمادجدید، به منظور اختصار ، می‌توانیم این نتیجه را به صورت

$\left(\bigvee_{i=1}^{n}(\sim p_i)\right)$ منطقاً " هم ارز $\left(\sim\left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i\right)\right)$ است

بنویسیم. می‌توانیم این حکم را برای اثبات "دوگان" این نتیجه نیز بکار بریم، به این معنا که

$$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge \ldots \wedge (\sim p_n))$$

منطقاً " هم ارز

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$$

است ، یعنی $\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim p_i)\right)$ منطقاً " هم ارز $\left(\sim\left(\bigvee_{i=1}^{n} p_i\right)\right)$ است .

حکم ۱ : ۱۷ (قوانین دمورگن)

فرض کنید $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ صورتهای گزاره‌ای دلخواهی باشند . آنگاه

(i) $(\bigvee_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i))$ منطقاً " هم‌ارز $(\sim(\bigwedge_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i))$ است .

(ii) $(\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i))$ منطقاً " هم‌ارز $(\sim(\bigvee_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i))$ است .

برهان : با استفاده از نتیجه‌های بالا و حکم ۱ : ۱۰ ثابت می‌شود .

تمرین

۸ ــ نشان دهید که به ازای صورتهای گزاره‌ای دلخواه $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ هر جفت از صورتهای گزاره‌ای زیر منطقاً " هم‌ارز هستند .

(آ) $(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$ و $((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C})$

(ب) $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ و $(\mathscr{B} \wedge \mathscr{A})$

(پ) $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ و $(\mathscr{B} \vee \mathscr{A})$

(ت) $\mathscr{A}$ و $(\sim(\sim\mathscr{A}))$

۹ ــ نشان دهید که به ازای صورتهای گزاره‌ای دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ صورتهای گزاره‌ای زیر راستگو هستند .

(آ) $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{A})$

(ب) $((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \to \mathscr{B})$

۱۰ ــ با استفاده از حکم ۱ : ۱۴ ثابت کنید که $((\sim((\sim p) \vee q)) \vee r)$ منطقاً " هم‌ارز $((p \to q) \to r)$ است .

۱۱ ــ با استفاده از احکام ۱ : ۱۴ و ۱ : ۱۷ نشان دهید که صورت گزاره‌ای $((\sim(p \vee (\sim q))) \to (q \to r))$ منطقاً " هم‌ارز هر یک از صورتهای گزاره‌ای زیر است .

(آ) $((\sim(q \to p)) \to ((\sim q) \vee r))$

(ب) $(((\sim p) \wedge q) \to (\sim(q \wedge (\sim r))))$

(پ) $((\sim((\sim q)\vee r))\to(q\to p))$

(ت) $(q\to(p\vee r))$

۴:۱ صورتهای نرمال

بازهم به بررسی چیزهایی می‌پردازیم که آنها را صورتهای گزاره‌ای مقید نامیده‌ایم. قبلا "ملاحظه کردیم که با هر صورت گزاره‌ای می‌توانیم یک جدول درستی بسازیم. اکنون عکس این مطلب را ثابت می‌کنیم.

حکم ۱:۱۸

هر تابع درستی عبارت است از یک تابع درستی مشخص شده بوسیلهٔ یک صورت گزاره‌ای که در آن فقط رابطهایی از میان رابطهای $\wedge$, $\sim$, $\vee$ ظاهر شده باشند (یعنی یک صورت گزاره‌ای مقید).

برهان: فرض کنید که تابع مفروض یک تابع n مکانی باشد. با استفاده از متغیرهای $p_1, p_2, \ldots, p_n$ یک صورت گزاره‌ای مانند $\mathscr{A}$ می‌سازیم. ابتدا ملاحظه کنید که اگر تابع درستی به ازای هر ترکیب از ارزشهای درستی ارزش F را اختیار کند، در این صورت با هر تناقضی متناظر می‌شود و بنابراین صورت گزاره‌ای

$$((p_1\wedge(\sim p_1))\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n)$$

کفایت خواهد کرد.

اکنون فرض کنید که تابع درستی حداقل یک بار ارزش T داشته باشد. روش ما از این قرار است که برای هر یک از 2^n ترکیب ارزشهای درستی متغیرهای گزاره‌ای، یک صورت گزاره‌ای بسازیم که به ازای آن ترکیب درست ولی به ازای همهٔ ترکیبهای دیگر نادرست باشد. برای مثال اگر $n=3$ صورت گزاره‌ای $(p_1\wedge(\sim p_2)\wedge(\sim p_3))$ فقط به ازای ترکیب T , F , F ارزشهای درستی p_1, p_2, p_3 درست است، در حالی که $((\sim p_1)\wedge(\sim p_2)\wedge p_3)$ فقط به ازای ترکیب F, F, T درست می‌باشد. این صورتهای گزاره‌ای خاص **ترکیب های عطفی پایه‌ای** نامیده می‌شوند. به ازای هر ارزشدهی به $p_1, p_2, \ldots, p_n$ اگر به p_i ارزش T داده شده باشد، که $1\leq i\leq n$ آنگاه p_i، و اگر ارزش F داده شده باشد $(\sim p_i)$ را در ترکیب عطفی قرار می‌دهیم. در این صورت به ازای ارزشدهی مفروض، هریک از عوامل ترکیب عطفی دارای ارزش T و در نتیجه تمام ترکیب عطفی دارای ارزش T می‌باشد، و در مقابل به ازای هر ارزشدهی دیگر، اقلا "یکی از عوامل ترکیب عطفی دارای ارزش F و در نتیجه تمام ترکیب عطفی دارای ارزش F خواهد بود.

اکنون برای اثبات حکم ، همهٔ ترکیبهای n ارزش درستیی را که به ازای آنها ارزش تابع ارزش ما T است درنظر بگیرید . فرض کنید که $\mathscr{A}$ ترکیب فصلی همه ترکیبهای عطفی پایه‌ای بدست آمده از اختیار کردن این ترکیبها به عنوان ارزشهای درستی $p_1, p_2, \ldots, p_n$ باشد . این $\mathscr{A}$ همان صورت گزاره‌ای مطلوب است . برای ملاحظهٔ این نکته ، برای $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ارزشهای درستی دلخواهی قائل شوید . اگر ارزش تابع ما به ازای این ارزشدهی T باشد ، آنگاه ترکیب عطفی پایه‌ای متناظر با آن در $\mathscr{A}$ ظاهر شده است و به ازای این ارزشدهی دارای ارزش T است ، بنابراین $\mathscr{A}$ نیز دارای ارزش T است . اگر ارزش تابع ما به ازای این ارزشدهی F باشد ، آنگاه ترکیب عطفی متناظر با آن در $\mathscr{A}$ ظاهر نشده است ، و هریک از ترکیبهای عطفی پایه‌ای دیگر که در $\mathscr{A}$ ظاهر شده‌اند به ازای این ارزشدهی مقدار F را اختیار می‌کنند . بنابراین $\mathscr{A}$ نیز ارزش F دارد . پس به ازای هر ارزشدهی ، ارزش درستی تابع $\mathscr{A}$ بوسیلهٔ تابع درستی داده شده است .

◁ بهترین راه فهمیدن این برهان ، فکر کردن دربارهٔ آن در ارتباط با یک مثال ملموس است .

مثال ۱ : ۱۹

بیائید یک تابع درستی را بوسیلهٔ یک جدول مشخص کنیم (این یک تابع سه مکانی است).

T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

ترکیبهایی از ارزشهای درستی که ارزش تابع به ازای آنها T است عبارتند از TTT , TTF و FFF . ترکیبهای عطفی پایه‌ای متناظر با اینها عبارتند از :

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3),$$
$$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)),$$
$$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3)).$$

صورت گزاره‌ای $\mathscr{A}$ که در برهان حکم ساخته شده بود عبارت است از

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$$

این صورت گزاره‌ای با تابع درستی داده شده متناظر است ، و جدول داده شده همان جدول درستی این صورت گزاره‌ای می‌باشد .

نتیجهٔ ۱ : ۲۰

هر صورت گزاره‌ای که یک تناقض نباشد منطقاً " هم‌ارز یک صورت گزاره‌ای مقید مانند $(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}))$ است که در آن هر Q_{ij} یا یک متغیر گزاره‌ای ، یا نقیض یک متغیر گزاره‌ای است . این صورت را **صورت نرمال فصلی** نامند .

برهان : دو صورت گزاره‌ای منطقاً " هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر هردو با یک‌تابع درستی متناظر باشند . اگر یک صورت گزاره‌ای $\mathscr{A}$ داده شده باشد ، جدول درستی آن و تابع درستی تعریف شده بوسیلهٔ آن را بدست آورید . سپس روش برهان حکم ۱ : ۱۸ را درمورد آن بکار برید تا متناظر با این تابع درستی ، یک صورت گزاره‌ای به شکل مطلوب حاصل شود .

نتیجهٔ ۱ : ۲۱

هر صورت گزاره‌ای که یک راستگو نباشد منطقاً " هم‌ارز یک صورت گزاره‌ای مقید به صورت $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij}))$ است که در آن هر Q_{ij} یا یک متغیر گزاره‌ای ، یا نقیض یک متغیر گزاره‌ای است . این صورت را **صورت نرمال عطفی** می‌نامند .

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}$ یک صورت گزاره‌ای باشد که یک راستگو نیست . در این صورت $(\sim\mathscr{A})$ یک‌تناقض نیست . و منطقاً "معادل یک‌صورت گزاره‌ای $(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}))$ با صورت‌نرمال فصلی است . بنابراین $\mathscr{A}$ منطقاً "هم‌ارز $\sim(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}))$ است ، که با استفاده از قوانین دمورگن ، این منطقاً " هم‌ارز $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n}(\sim Q_{ij})))$ است . اکنون اگر همهٔ عبارات مانند $(\sim(\sim q))$ در این صورت گزاره‌ای را به q تبدیل کنیم ، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود .

مثال ۱ : ۲۲

یک صورت نرمال عطفی بیابید که منطقاً " هم‌ارز

$$(((\sim p_1) \vee p_2) \to p_3)$$

باشد .

ابتدا جدول درستی نقیض آن را بدست آورید .

$\sim$	$(((\sim$	$p_1)$	$\vee$	$p_2)$	$\to$	$p_3)$
F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F	F

ترکیبهایی که ارزش T را ایجاد می‌کنند عبارتند از TTF, FTF, FFF . پس یک صورت نرمال فصلی که منطقا" هم‌ارز آن باشد چنین است .

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \vee$$
$$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))).$$

بنابراین صورت گزاره‌ای داده‌شده منطقا "هم‌ارز نقیض این ترکیب است‌که بنابر قوانین دمورگن منطقا "هم‌ارز است با

$$(\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \wedge \sim((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge (\sim p_3)) \wedge$$
$$\sim((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))),$$

یعنی با

$$(((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee (\sim(\sim p_3))) \wedge ((\sim(\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee (\sim(\sim p_3))) \wedge$$
$$((\sim(\sim p_1) \vee (\sim(\sim p_2)) \vee (\sim(\sim p_3))),$$

یعنی با

$$((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee p_3) \wedge (p_1 \vee (\sim p_2) \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3),$$

که یک صورت نرمال عطفی است .

تمرین

۱۲ ــ صورتهای گزاره‌ایی به صورت نرمال فصلی بیابید که منطقا " هم‌ارز ترکیبهای زیر باشند :

(آ) $(p \leftrightarrow q)$

(ب) $(p \to ((\sim q) \vee r))$

(پ) $((p \wedge q) \vee ((\sim q) \leftrightarrow r))$

(ت) $\sim((p \to (\sim q)) \to r)$

(ث) $(((p \to q) \to r) \to s)$

۱۳ ــ صورتهای‌گزاره‌ایی به‌صورت‌نرمال‌عطفی‌بیابید که‌منطقا" هم‌ارزترکیبهای‌زیرباشند :

(آ) $(((\sim p)\vee q)\rightarrow r)$

(ب) $(p\leftrightarrow q)$

(پ) $(p\wedge q\wedge r)\vee((\sim p)\wedge(\sim q)\wedge r)$

(ت) $(((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow s)$

۵:۱ مجموعه‌های کارساز از رابطها

تعریف ۲۳:۱

یک‌مجموعهٔ کارساز از رابطها مجموعه‌ای است از رابطها بطوری که هر تابع درستی را بتوان بوسیلهٔ یک صورت گزاره‌ای که فقط شامل رابطهایی از آن مجموعه باشد نمایش داد .

◁یکی از نتایج بحث قبلی این است که $\{\sim,\wedge,\vee\}$ یک مجموعهٔ کارساز از رابطها است . ما با استفاده از این نکته مجموعه‌های کارساز دیگری خواهیم یافت .

حکم ۲۴:۱

زوجهای $\{\sim,\wedge\}$, $\{\sim,\vee\}$ و $\{\sim,\rightarrow\}$ مجموعه‌های کارسازی از رابطها هستند .

برهان : اولا " ، اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ صورتهای گزاره‌ای دلخواه باشند ، $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ منطقا " هم‌ارز $(\sim((\sim\mathscr{A})\wedge(\sim\mathscr{B})))$ است ، پس هر صورت گزاره‌ای که فقط شامل $\{\sim,\wedge,\vee\}$ باشد می‌تواند به یک‌صورت‌گزاره‌ای منطقا "هم‌ارز ، که فقط شامل $\sim$ و $\wedge$ باشد تبدیل شود.

ثانیا" ، به‌همین ترتیب می‌توانیم از هم‌ارزی منطقی $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ یا $(\sim((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B})))$ استفاده و ملاحظه کنیم که $\{\sim,\vee\}$ کارساز است .

ثالثا " ، باید صورتهای گزاره‌ایی بیابیم که منطقا " هم‌ارز $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ و $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ ولی فقط شامل $\sim$ و $\rightarrow$ باشند .

$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ منطقا " هم‌ارز $(\sim(\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{B})))$ است ،

$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ منطقا " هم‌ارز $((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{B})$ است .

با استفاده از اینها می‌توان هرصورت گزاره‌ای شامل $\{\sim,\wedge,\vee\}$ را به یک‌صورت گزاره‌ای منطقا " هم‌ارز آن که فقط شامل $\sim$ و $\rightarrow$ باشد تبدیل کرد .

مثال ۲۵:۱

$(((\sim p_1)\vee p_2)\rightarrow p_3)$ منطقا " هم‌ارز هر یک از صورتهای گزاره‌ای زیر است :

(آ) $(\sim((\sim p_1)\vee p_2)\vee p_3)$

(ب) $\sim(\sim(p_1\wedge(\sim p_2))\wedge(\sim p_3))$

(پ) $((p_1\rightarrow p_2)\rightarrow p_3)$

◁ سه‌روش برای‌انتخاب‌یک زوج کارسازاز میان پنج رابط خود در اختیار داریم . هیچ زوج دیگری کارساز نیست . برای ملاحظه این نکته ، ابتدا یک زوج از رابطها را که هیچیک از آنها '$\sim$' نیست درنظر می‌گیریم و می‌پرسیم : آیا یک تابع‌درستی که همواره ارزش F را اختیار می‌کند می‌تواند فقط با استفاده از چنین زوجی از رابطها بیان شود ؟ جواب‌باید منفی باشد ، زیرا با قائل شدن ارزش T برای همهٔ متغیرهای گزاره‌ای در یک صورت گزاره‌ای از این نوع لزوما "برای کل صورت گزاره‌ای ارزش T ایجاد خواهد شد . هیچ راهی وجود ندارد که این صورت گزاره‌ای یا قسمتی از آن تحت این ارزشدهی ، ارزش F را اختیار کند . بنابراین هیچ صورت گزاره‌ایی که فقط شامل رابطهایی ازمیان $\wedge, \vee, \rightarrow$ و $\leftrightarrow$ باشد نمی‌تواندیک تناقض باشد . اثبات این نکته را که $\{\sim, \leftrightarrow\}$ یک مجموعهٔ کارساز نیست به خواننده واگذار می‌کنیم .

رابطهای دیگری هم وجوددارند ، درحقیقت هر جدول درستی می‌تواند یک رابط تعریف کند ، ولی معنای شهودی آنها چندان روشن نخواهدبود . اما از این میان دو رابط شایان ذکرند .

نقیض یا **Nor**

این رابط با $\downarrow$ نشان داده می‌شود و دارای جدول ارزشی به قرار زیر است :

p	q	$(p\downarrow q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

نقیض و **Nand**

این رابط با $|$ نشان داده می‌شود و دارای جدول ارزشی به قرار زیر است .

p	q	$p\|q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

علت توجه به این رابطها را (که این امر به نتایجی در طرح و مطالعهٔ ماشینهای محاسب منجر شده است) در حکم زیر بیان کرده‌ایم .

حکم ۱ : ۲۶

مجموعه‌های یک‌عضوی $\{\downarrow\}$ و $\{|\}$ مجموعه‌های کارسازی از رابطها هستند . یعنی هر تابع درستی می‌تواند بوسیلهٔ یک صورت گزاره‌ای فقط شامل $\downarrow$ (یا فقط شامل $|$) بیان شود .

برهان : ما فقط باید $\sim$ و $\wedge$ ، یا $\sim$ و $\vee$ را برحسب $\downarrow$ ، و برحسب $|$ بیان کنیم زیرا می‌دانیم که $\{\sim, \wedge\}$ و $\{\sim, \vee\}$ مجموعه‌هایی کارساز هستند . اولا "

$(\sim p)$ منطقا " هم‌ارز $(p \downarrow p)$ است ،

و

$(p \wedge q)$ منطقا " هم‌ارز $((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$ است .

ثانیا "

$(\sim p)$ منطقا " هم‌ارز $(p|p)$ است ،

و

$(p \vee q)$ منطقا " هم‌ارز $((p|p)|(q|q))$ است .

اثبات این مطالب طبق معمول با ساختن جدول درستی انجام می‌گیرد ، و به‌عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌شود .

مثال ۱ : ۲۷

یک صورت گزاره‌ای بیابید که فقط شامل $\downarrow$ بوده و منطقا " هم‌ارز $(p \rightarrow q)$ باشد .

$(p \rightarrow q)$ منطقا " هم‌ارز $\sim(p \wedge (\sim q))$ است .

که این نیز با

$$\sim(p \wedge (q \downarrow q))$$

منطقا " هم‌ارز است ، و این خود با

$$\sim((p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)])$$

منطقا " هم‌ارز است و سرانجام این با

$$\{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\} \downarrow \{(p \downarrow p) \downarrow [(q \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q)]\}$$

منطقا "هم‌ارز می‌باشد . این‌مثال نشان‌می‌دهد که اگر بخواهیم فقط از یک رابط استفاده کنیم چه بهایی را باید به شکل پیچیدگی و طولانی شدن عبارات بپردازیم .

تمرین

۱۴ ــ صورتهایی گزاره‌ای بیابیدکه درآنها فقط رابطهای $\sim$ و $\vee$ ظاهر شوند و باصورتهای گزاره‌ای زیر منطقا " هم‌ارز باشند :

(آ) $(p \to (q \to r))$

(ب) $(((\sim p) \wedge (\sim q)) \to ((\sim r) \wedge s))$

(پ) $(p \leftrightarrow q)$

۱۵ ــ صورتهایی گزاره‌ای بیابیدکه درآنها فقط رابطهای $\sim$ و $\wedge$ ظاهر شوند وبا صورتهای گزاره‌ای زیر منطقا " هم‌ارز باشند :

(آ) $(p \to (q \to r))$

(ب) $((p \vee q \vee r) \wedge ((\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)))$

(پ) $((p \leftrightarrow (\sim q)) \leftrightarrow r)$

۱۶ ــ صورتهایی گزاره‌ای بیابیدکه درآنها فقط رابطهای $\sim$ و $\to$ ظاهر شوندوبا صورتهای گزاره‌ای زیر منطقا " هم‌ارز باشند :

(آ) $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$

(ب) $(p \leftrightarrow q)$

(پ) $(p \wedge q \wedge r)$

۱۷ ــ (آ) ثابت کنید که $\{\wedge, \vee\}$ یک مجموعهٔ کارساز از رابطها نیست .

(ب) (مشکلتر) ثابت کنید که $\{\sim, \leftrightarrow\}$ یک مجموعهٔ کارساز از رابطها نیست .

۱۸ ــ گزاره‌ای بیابیدکه درآن فقط رابط $|$ ظاهر شود ، ومنطقا " هم‌ارز $(p \to q)$ باشد .

۱۹ ــ ثابت کنید که هیچ رابط دوتایی بجز $\downarrow$ و $|$ وجودنداردکه به تنهایی بتواند یک مجموعهٔ کارساز از رابطها را بسازد (راهنمایی : جدول درستی چنین رابطی را در نظر بگیرید) .

۱:۶ استدلال واعتبار

اکنون به‌بحث‌درباره‌ٔاستدلالها بازمی‌گردیم . درحال‌حاضر لزوما" به استدلالهایی محدود شده‌ایم که مقدمات و نتیجهٔ شان همگی به مفهومی که درابتدای فصل تعریف‌شد گزاره‌های ساده یا مرکب هستند . ما دیدیم آنچه که اهمیت داشت "صورت" استدلال بود نه معنای گزاره‌های بکار رفته درآن . بنابراین ما **صورتهای استدلالی** را مورد نظر قرار می‌دهیم . در یک مثال قبلی با صورت استدلالی زیر برخورد کردیم :

$$(p \to q)$$
$$p$$
$$\therefore \quad q$$

درحالت‌کلی ، یک‌صورت استدلالی دنباله‌ای متناهی‌از صورتهای گزاره‌ای است‌که آخرین آنها به عنوان نتیجه و بقیهٔ آن به عنوان مقدمات تلقی می‌شوند .

درتشخیص و تعریف آنچه که یک استدلال را "معتبر" می‌سازد ما به همان مشکلی برخوردمی‌کنیم که درمورد نماد استلزام داشتیم . هنگام ارزشدهی‌به متغیرهای‌گزاره‌ای ظاهرشده در یک‌صورت استدلالی ممکن است دریابیم‌که نتیجه نادرست است و تعدادی از مقدمات نیز نادرست می‌باشند . آیا مقدمات نادرست یک نتیجهٔ نادرست را توجیه می‌کند؟ به یک مفهوم این سؤالی نامربوط است ، زیرا در موارد استعمال عادی ما یک استدلال‌را فقط برای نشان‌دادن این‌که یک نتیجهٔ معین ازمقدمات‌معلومی بدست می‌آید بکار می‌بریم . بنابراین آنچه که از یک استدلال معتبر انتظار داریم این است که تحت هر ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای ، اگر همهٔ مقدمات ارزش T را اختیار کنند ، نتیجه هم ارزش T را اختیار کند . به عبارتی دیگر می‌توانیم تعریف زیر را بیاوریم :

تعریف ۱:۲۸

صورت استدلالی

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore\ \mathscr{A}$$

نامعتبر است ، اگر بتوان یک ارزشدهی برای متغیرهای گزاره‌ای ظاهر شده در آن یافت بطوری‌که هریک از $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ دارای ارزش T باشد ولی $\mathscr{A}$ دارای ارزش F باشد. درغیراین‌صورت استدلال **معتبر** است .

◁ اکنون بامسألهٔ آزمودن اعتبار یک صورت استدلالی روبرو هستیم. بیایید مثال سادهٔ خودمان یعنی $(p \to q), p; \therefore q$ را درنظر بگیریم . یک جدول درستی برای همه صورتهای گزاره‌ایی که به عنوان مقدمات یا نتیجه ظاهر شده‌اند بسازید .

p	q	$(p \to q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

فقط در سطر اول است‌که هردو مقدمه ارزش T را اختیار می‌کنند ، و در این سطر نتیجه هم ارزش T را اختیار می‌کند . از اینرو این استدلال نامعتبر نیست ،یعنی‌معتبر است .

مثال ۱:۲۹

اعتبار صورت استدلالی زیر را بررسی کنید ؛

$$(p \to q), ((\sim q) \to r), r; \therefore p.$$

جدول درستی را بسازید ؛

$(p$	$\to$	$q)$	$((\sim$	$q)$	$\to$	$r)$	r	p	
T	T	T	F	T	T	T	T	T	←
T	T	T	F	T	T	F	F	T	
T	F	F	T	F	T	T	T	T	
T	F	F	T	F	F	F	F	T	
F	T	T	F	T	T	T	T	F	←
F	T	T	F	T	T	F	F	F	
F	T	F	T	F	T	T	T	F	←
F	T	F	T	F	T	F	F	F	

سه سطری‌که با علامت پیکان مشخص شده‌اند آنهایی هستند که همهٔ مقدمات ، ارزش T را اختیار کرده‌اند . اما در سطر پنجم وهفتم ، نتیجه ارزش F را اختیار می‌کند ،ازاینرو این صورت استدلالی نامعتبر است .

◁ بنابراین در اینجاروش تعیین اعتبار یک‌صورت استدلالی را ملاحظه می‌کنید ،که در همهٔ حالات به ما جواب می‌دهد . اما اگر تعداد متغیرهای گزاره‌ای زیادباشد ،جدول درستی ما غیرقابل مهار و غیرعملی خواهدبود . در هر حالت ما برای مقصود خودمان به تمام جدول ارزش احتیاج نداریم . روش ما عبارتست از جستجوی یک‌سطر از یک‌نوع خاص ، و ما بجای روش آزمون و خطای ساختن تمام جدول می‌توانیم جستجویمان را به روشی منظم انجام دهیم . این روش عملی به بهترین وجهی به کمک یک مثال توصیف می‌شود .

مثال ۱:۳۰

اعتبار صورت استدلالی زیر را بیازمائید .

$$((\sim p_1) \vee p_2), (p_1 \to (p_3 \wedge p_4)), (p_4 \to p_2); \therefore (p_2 \vee p_3)$$

سعی‌می‌کنیم با ارزشدهی مناسبی نامعتبربودن این‌صورت‌استدلالی‌را نشان‌دهیم ، یعنی این که مقدمات را درست و نتیجه را نادرست سازیم . برای این که $(p_2 \vee p_3)$ نادرست باشد باید به هر یک از p_2 و p_3 ارزش F داده شود . در این صورت برای این که $(p_2 \to p_4)$ ارزش T را اختیار کند ، باید به p_4 ارزش F داده شود . برای این که $((\sim p_1) \vee p_2)$ ارزش T را اختیار کند ، باید به p_1 ارزش F داده شود . اکنون ارزش

درستی مقدمهٔ دیگر، یعنی $((p_1 \to (p_3 \wedge p_4))$ را تحت این ارزشدهی‌ها می‌آزماییم. از اینرو

p_1	p_2	p_3	p_4
F	F	F	F

ارزشدهیی است که تحت آن همهٔ مقدمات ارزش T، و نتیجه ارزش F را اختیار می‌کنند. درنتیجه این صورت استدلالی نامعتبر است.

توجه کنید که اگر صورت استدلالی معتبر بود، امکان این ارزشدهی به شکلی که در بالا انجام شد برای ما وجود نداشت.

مثال ۱:۳۱

اعتبار صورت استدلالی زیر را بیازمائید.

$$(p_1 \to (p_2 \to p_3)),\ p_2;\ \therefore\ (p_1 \to p_3)$$

سعی کنید که با ارزشدهی مناسبی نامعتبر بودن این صورت استدلالی را نشان دهید. برای این که $(p_1 \to p_3)$ ارزش F را اختیار کند لازم است که p_1 دارای ارزش T و p_3 دارای ارزش F باشد. همچنین لازم است که p_2 ارزش T داشته باشد. تحت این ارزشدهی، مقدمهٔ دیگر، یعنی $((p_1 \to (p_2 \to p_3))$ ارزش F را اختیار می‌کند بنابراین یافتن یک ارزشدهی که مقدمات را درست و نتیجه را نادرست سازد ممکن نیست، و این استدلال معتبر است.

◁ حکم بعدی رابطهٔ بین استدلال و استلزام را، که دربالا بطور مختصر به آن اشاره شد، صراحت می‌بخشد.

حکم ۱:۳۲

صورت استدلالی

$$\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n;\ \therefore\ \mathscr{A}$$

معتبر است اگر و تنها اگر صورت گزاره‌ای

$$((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$$

یک راستگو باشد.

برهان: ابتدا فرض کنید $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n;\ \therefore\ \mathscr{A}$ یک صورت استدلالی معتبر است، وهمچنین فرض کنید که $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ یک راستگو نیست. بنابراین یک ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای وجود دارد بطوری که $(\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n)$ ارزش T و $\mathscr{A}$ ارزش F را اختیار کند. از اینرو به ازای این ارزشدهی، هر $\mathscr{A}_i$، $(1 \leq i \leq n)$، ارزش T و $\mathscr{A}$ ارزش

F را اختیار می‌کند . این با اعتبار صورت استدلالی متناقض است ، و بنابراین $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ باید یک راستگو باشد .

اکنون به عکس فرض کنید که $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ یک راستگو است ، ولی $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n ; \therefore \mathscr{A}$ یک صورت استدلالی معتبر **نیست** . بنابراین یک ارزشدهی وجود داردکه هر $\mathscr{A}_i$ را ، $(1 \leq i \leq n)$ ، درست ، ولی $\mathscr{A}$ را نادرست می‌سازد ، که درنتیجه $((\mathscr{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A})$ ارزش F را اختیار می‌کند ، که این با فرض راستگو بودن این صورت گزاره‌ای متناقض است ، از اینرو $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n ; \therefore \mathscr{A}$ یک صورت استدلالی معتبر است .

◁این فصل را با تذکری دربارهٔ روش "برهان بوسیلهٔ تناقض" یا **برهان خلف** ، که ازقضا در برهان فوق بکار رفته است ، خاتمه می‌دهیم .

چنین برهانی متشکل است از استنتاج یک تناقض از نقیض گزاره‌ای که برهان آن را می‌خواهیم . صحت این روش را برمبنای این فصل می‌توان به قرار زیر ملاحظه نمود . اگر ما استدلالی داشته باشیم که بدانیم نمونه‌ای از یک صورت استدلالی معتبر است ، و بدانیم که نتیجهٔ آن نادرست است ، آنگاه بایداقلا "یکی از مقدمات آن نادرست باشد . اگر بدانیم که همهٔ مقدمات ، بجز یکی از آنها (آنکه فرض شده) درست هستند ، در این صورت استنتاج صحیح این است که این مقدمهٔ فرض شده همان مقدمهٔ نادرست است .

تمرین

۲۰ ــ برای هر یک از استدلالهای زیر ، صورت استدلالی متناظر را بنویسید ، و معتبر بودن یا معتبر نبودن آن را مشخص کنید .

(آ) اگر تابع f پیوسته نباشد ، آنگاه تابع g مشتق‌پذیر نیست . g مشتق‌پذیر است . پس f پیوسته است .

(ب) اگر حسن حرارت‌مرکزی نصب‌کرده باشد ، آنگاه یا اتومبیلش را فروخته‌است یا ازبانک وام‌گرفته است . حسن از بانک وام‌نگرفته است ، پس اگر حسن اتومبیلش را نفروخته باشد ، آنگاه حرارت‌مرکزی نصب نکرده است .

(پ) اگر در پالیگونیا نفت باشد آنگاه یا متخصصین درست تشخیص داده‌اند یا دولت دروغ می‌گوید . در پالیگونیا نفت نیست یا درغیر این صورت متخصصین درست تشخیص نداده‌اند . پس دولت دروغ نمی‌گوید .

(ت) اگر U زیرفضائی از V باشد ، آنگاه U زیرمجموعه‌ای از V است ، U شامل بردار صفر است ، و U بسته است . U زیرمجموعه‌ای از V است و اگر U بسته باشد

آنگاه U شامل بردار صفر است . پس اگر U بسته باشد آنگاه U یک زیرفضای V است .

۲۱ ــ فرض کنیدکه $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ یک صورت استدلالی معتبر باشد . ثابت کنید که $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ نیز یک صورت استدلالی معتبر است .

۲۲ ــ نشان دهید که صورت استدلالی زیر معتبر است

$$p, (p|(q|r)); \therefore r.$$

۲

حساب صوری گزاره‌ها

۲ : ۱ دستگاه صوری L

حداقل قسمتی از هدف ما از مطالعهٔ منطق را تحلیلی از فرآیند استنتاج تشکیل می‌دهد . در فصل اول آموختیم که چگونه صورتهای گزاره‌ها و استدلالها را به منظور بهتر دیدن روابط بین آنها و ارائه تعریفی شهودی از یک استدلال معتبر ، مجرد بسازیم . اما سؤالهای معینی بی‌جواب باقی‌مانده‌اند . مثلا" ، آیا می‌توانیم فرآیند ساده‌ای بیابیم که ما را در ساختن مرحله به مرحلهٔ یک استدلال توانا سازد ، بطوری که در هر مرحله بدانیم که استدلالمان معتبر است ؟ چنین فرآیندی را بر چه چیزی می‌توانیم پایه‌گذاری کنیم ؟ از آنجا که نمی‌توان یک استنتاج را از هیچ به‌عمل آورد ، پس باید بعضی از فرضهای اولیه را داشته باشیم . برای بررسی چنین سؤالاتی است که مفهوم یک **دستگاه قیاسی صوری** را ارائه می‌کنیم . این مفهوم در اصل ادامهٔ همان فرآیند مجردسازی است ، که از آن طریق مفهوم برهان را مجرد می‌سازیم . کلمهٔ " صوری " کلمه‌ای است که مرتبا" بدون هیچ توضیحی در کتب درسی منطق ظاهر می‌شود . هنگامی این کلمه استعمال می‌شود که بخواهند به وضعیتی اشاره کنند که نمادهایی بکار رفته باشند ، و رفتار و خاصیتهای این نمادها ، بوسیلهٔ مجموعهٔ مفروضی از قواعد ، کاملا" مشخص شده باشند . در یک دستگاه صوری نمادها دارای هیچ معنایی نیستند و هنگام کار کردن با آنها باید مواظب باشیم که چیزی بجز آنچه که در دستگاه مشخص شده است دربارهٔ خاصیتهای آنها مفروض نگیریم . تنها از این طریق است که می‌توانیم مطمئن باشیم که هنگام دنبال کردن یک استنتاج همهٔ فرضهایمان صریح هستند ، وتنها از طریق صراحت‌بخشیدن به فرضهایمان است که می‌توانیم چیزی اساسی را دربارهٔ منطق کشف کنیم .

در این کتاب با دو دستگاه صوری خاص سروکار داریم ، ولی گاهی لازم می‌شودکه با دستگاههای دیگری هم ، که تعدیلهایی از آن دودستگاه هستند ، کار کنیم ، بنابراین بهتراست‌که‌کار را با ارائه‌یک تعریف‌کلی از آنچه‌که‌یک‌دستگاه صوری‌راتشکیل‌می‌دهدآغازکنیم .

برای مشخص کردن یک دستگاه صوری به اشیاء زیر نیاز داریم :

۱ــ الفبائی از نمادها .

۲ــ مجموعه‌ای از رشته‌های متناهی این نمادها ، موسوم به فرمولهای خوش ساخت . اینها را باید به عنوان کلمات و جملات در زبانهای صوریمان تلقی کنیم .

۳ــ مجموعه‌ای از فرمولهای خوش ساخت ، موسوم به اصول موضوعه .

۴ــ یک مجموعهٔ متناهی از "قواعد استنتاج" یعنی قواعدی که با آنها بتوان یک فرمول خوش ساخت ، مثلا "$\mathscr{A}$ را ، به عنوان یک "نتیجهٔ مستقیم" مجموعه‌ای متناهی‌از فرمولهای خوش ساخت ، مثلا " $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ بدست آورد .

با داشتن این چهار چیز می‌توانیم ، با اصول موضوعه شروع کرده و فرآیندهای استنتاجی را (که بسته‌به دستگاه صوری‌خاص موردبحث ، می‌توانند به استنتاجهای‌منطقی مربوط باشند ،یا مربوط نباشند) ازطریق بکاربستن‌متوالی قواعد استنتاجی دنبال کنیم. ولی بیان دقیق این مطلب اندکی بعد خواهد آمد .

نمادگذاری : از این به بعد فرمول خوش ساخت را بصورت " فخس " و فرمولهای خوش ساخت را بصورت " فخس‌ها " و فرمولی خوش ساخت را بصورت " **فخسی** " به اختصار درخواهیم آورد .

تعریف ۲ : ۱

دستگاه صوری L از حساب گزاره‌ها به روش زیر تعریف می‌شود :

۱ــ الفبای نمادها (نامتناهی) :

$$\sim, \rightarrow, (\ ,\ ), p_1, p_2, p_3, \ldots$$

۲ــ مجموعهٔ فخس‌ها . بجای این که این مجموعه را صریحا " مشخص کنیم ، یک قاعدهٔ استقرائی شامل سه‌قسمت را عرضه خواهیم کرد (تعریف ۱ : ۲ را ملاحظه کنید) :

(i) به ازای هر $i \geq 1$ ، p_i یک فخس است .

(ii) اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دو فخس باشند ، آنگاه $(\sim\mathscr{A})$ و $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ فخس هستند .

(iii) مجموعهٔ همهٔ فخس‌ها بوسیلهٔ (i) و (ii) تولید می‌شود .

۳ــ اصول موضوعه . تعداد اصول موضوعه نامتناهی است ، بنابراین نمی‌توانیم همهٔ آنها را فهرست کنیم ، ولی می‌توانیم همهٔ آنها را بوسیلهٔ سه **طرح اصل موضوعی** مشخص کنیم . به ازای هر سه فخس دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ ، فخس‌های زیر اصول موضوعهٔ L هستند :

$(L1) \quad (\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})).$

$(L2) \quad ((\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})) \rightarrow ((\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow (\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{C}))).$

$(L3) \quad (((\sim\mathscr{A}) \rightarrow (\sim\mathscr{B})) \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})).$

توجه کنید که اگر همهٔ فخس‌های مختلف L را جانشین $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ کنیم ، هر طرح اصل موضوعی دارای تعدادی نامتناهی " نمونه " خواهدبود .

۴ ــ قواعد استنتاجی : در L فقط یک قاعدهٔ استنتاجی وجود دارد ، که **قیاس استثنائی** است (و مختصرا "با ق نشان داده می‌شود) . این قاعده به شرح زیر است : اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های دلخواه L باشند ، $\mathscr{B}$ نتیجهٔ مستقیم $\mathscr{A}$ و $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ است .

◁ الفبا و مجموعهٔ فخس‌ها برای منعکس ساختن نحوهٔ گسترش فصل قبل برگزیده شده‌اند . ما می‌خواهیم که فخس‌ها بنحوی نمایشگر صورتهای گزاره‌ای باشند ، از اینرو این تعریف با تعریف صورت گزاره‌ای شباهت زیادی دارد . نمادهای $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ در الفبای L ظاهر نمی‌شوند . بنابراین عباراتی که این نمادها در آنها ظاهر شوند قسمتی از L نمی‌باشند . اما دیدیم که $\{\sim, \rightarrow\}$ مجموعه‌ای کارساز از رابطها است ، پس هر تابع درستیی بوسیلهٔ یکی از فخس‌های L نمایش داده می‌شود ، و هرصورت گزاره با یکی از فخس‌های L منطقا "هم‌ارز است . (اما توجه داشته‌باشید که صورتهای گزاره‌ای و هم‌ارزی منطقی مفاهیمی از فصل ۱ هستند ، و در دستگاه صوری L جایی ندارند) . ما تعداد رابطها را در L به این جهت محدود کرده‌ایم که زبان صوریمان را ساده‌تر و مجموعهٔ اصول موضوعه و قواعد استنتاجی را جمع‌وجورتر سازیم . اگر مثلا " $\wedge$ را در الفبای نمادها گنجانده بودیم می‌بایست اصول موضوعه و قواعد استنتاجی حاکم‌بر رفتار آن‌را نیز بگنجانیم (و رابطهٔ آن را با نماد $\rightarrow$ تصریح نماییم) . زیرا نمادهای زبان‌ما دارای هیچ خاصیت ازقبل تعیین‌شده‌ای نیستند . همهٔ خاصیتهای آنها بایداز اطلاعات موجود در تعریف L قابل استخراج باشند .

قاعدهٔ استنتاجی موجود در L بطورشهودی قابل‌قبول بنظر می‌رسد . این قاعده با یکی‌از روشهای استاندهٔ انجام استدلال در زبان روزمره متناظر است . اصول موضوعهٔ L از هر قسمت دیگر این دستگاه از وضوح کمتری برخوردارند . خواننده باید آنها را به دقت بررسی کرده و ملاحظه کند که اگر به عنوان صورتهای گزاره‌ای تلقی شوند همهٔ آنها راستگو هستند . اصول‌موضوعه برای ایجاد پایه‌ای که برمبنای آنها بتوانیم استنتاج انجام دهیم باید وجود داشته باشند و انتخاب آنها به هیچ وجه منحصر بفرد نیست . طرحهای اصل موضوعی فوق برای اثبات دو حکم آتی ، یعنی قضیهٔ استنتاج و قضیهٔ کارسازی مفیدواقع می‌شوند. درجریان کاردلایل انتخاب اصول موضوعه روشنتر خواهندشد .

اکنون باید طبیعت استنتاجی L را تشریح نماییم .

تعریف ۲:۲

یک برهان در L دنباله‌ای است از فخس ها ، مانند $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ بطوری که به ازای هر i ، که $(1 \leq i \leq n)$ یا $\mathscr{A}_i$ یکی از اصول موضوعهٔ L باشد یا $\mathscr{A}_i$ از دو عضو قبلی دنباله ،مانند $\mathscr{A}_j$ و $\mathscr{A}_k$ (که $k < i$ و $j < i$) به‌عنوان نتیجهٔ مستقیم استفاده از قاعدهٔ استنتاجی ق بدست آمده باشد . چنین برهانی را یک برهان $\mathscr{A}_n$ در L ، و $\mathscr{A}_n$ را یک قضیهٔ L می‌نامند .

تذکر ۳:۲

(آ) در تعریف فوق ملاحظه کنیدکه $\mathscr{A}_j$ و $\mathscr{A}_k$ باید لزوما "بصورت $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{B} \to \mathscr{A}_i)$ ، یا بالعکس ، باشند .

(ب) اگـــر $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ یـــک بـرهان‌در L باشدو $k < n$ آنـــگاه $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ هم یک برهان در L است (به وضوح می‌بینیم که در تعریف صدق می‌کند) ، و بنابراین $\mathscr{A}_k$ قضیه‌ای از L است .

(پ) اصول موضوعهٔ L قطعا " قضایای L می‌باشند . برهان آنها در L دنباله‌ای یک‌عضوی است ،

مثال ۴:۲

دنبالهٔ زیر یک برهان در L است .

(1)	$(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	(نمونهٔ $(L1)$)
(2)	$((p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)))$	$(L2)$
(3)	$((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	(از (1) و (2) توسط ق)

درنتیجه $((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$ قضیه‌ای از L است .

◁یک‌برهان در L استنتاجی است که از اصول موضوعه شروع می‌شود . ما به مفهوم کلی‌تر استنتاج از یک مجموعهٔ مفروض از فخس‌ها نیز نیاز داریم .

تعریف ۵:۲

فرض کنیم Γ مجموعه‌ای از فخس‌های L باشد (که می‌توانند اصول موضوعه یـا

قضایای L باشند یا نباشند) . یک دنبالهٔ $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ از فـــخس هـــای L یک **استنتاج از Γ** است اگر به ازای هر i ، که $(1 \leq i \leq n)$ ، یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

(آ) $\mathscr{A}_i$ یک اصل موضوعهٔ L است .

(ب) $\mathscr{A}_i$ عضوی از Γ است ، یا

(پ) $\mathscr{A}_i$ از دو عضو قبلی دنباله به‌عنوان یک نتیجهٔ مستقیم ناشی از ق بدست آمده است .

بنابراین یک استنتاج از Γ دقیقا " عبارتست از یک " برهان " که در آن اعضای Γ به عنوان اصول موضوعهٔ موقتی تلقی شده باشند .

$\mathscr{A}_n$ ، یعنی آخرین عضو دنباله‌ای که یک استنتاج از Γ است ، را **قابل استنتاج از Γ** ، یا یک نتیجهٔ Γ در L می‌نامند .

اگر یک فخس مانند $\mathscr{A}$ آخرین‌عضو ، استنتاجی از Γ باشد ، می‌گوئیم که Γ ، $\mathscr{A}$ **را نتیجه می‌دهد** و می‌نویسیم $\Gamma \vdash_L \mathscr{A}$

توجه کنیدکه یک‌قضیهٔ L از مجموعهٔ تهی فخس‌ها قابل‌استنتاج‌است ، (یک‌برهان در L استنتاجی است از $\varnothing$) ، پس اگر $\mathscr{A}$ یک‌قضیهٔ L باشد می‌توان‌نوشت $\varnothing \vdash_L \mathscr{A}$ معمولا " بخاطر اختصار می‌نویسند $\vdash_L \mathscr{A}$

تذکر : یادآوری این نکته مهم است که " $\vdash$ " یک نماد L نیست ، و بنابراین هرعبارتی‌که این نماد درآن ظاهرمی‌شودنمی‌تواندجزئی از L بـاشـد . مثـلا " $\vdash_L \mathscr{A}$ گذشته ازآن‌که جزئی از L نیست ، گزاره‌ای **دربارهٔ** L است ، یعنی‌این‌گزاره که فخس $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L است .

مثال ۲:۶

اکنون استنتاجی‌در L را می‌آوریم‌که $\{\mathscr{A}, (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))\} \vdash_L (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ را ثابت می‌کند ، که در آن $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ فخس‌های دلخواهی از L هستند .

(1)	$\mathscr{A}$	فرض
(2)	$(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$	فرض
(3)	$(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$	$(L1)$
(4)	$(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$	(1) و (3) و ق
(5)	$((\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})))$	$(L2)$
(6)	$((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$	(2) و (5) و ق
(7)	$(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$	(4) و (6) و ق

◁ این‌مثال و تذکر قبل از آن تمایزی را آشکار می‌سازند که تأکید بر آن اهمیت دارد. درست همانطورکه $\vdash_L \mathscr{A}$ گزاره‌ای دربارهٔ L است، نتیجهٔ این‌مثال هم نتیجه‌ای کلی دربارهٔ L است.

به ازای هر سه فخس دلخواه $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ از L

$$\{\mathscr{A}, (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))\} \vdash_L (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$$

این نتیجه دربارهٔ L قطعاً "جزئی از L نیست". کار ما دارای دو جنبهٔ متفاوت است، یعنی ما نتایجی را دربارهٔ برهانها ثابت می‌کنیم. ما کلمهٔ "قضیه" را دربارهٔ فخس‌هایی در دستگاههای صوری بکار خواهیم برد که به مفهوم مندرج در تعریف ۲:۲ دارای برهان باشند. کلمهٔ "ماورای قضیه" گاهی برای نتایجی بکار می‌رود، ازقبیل آنچه که در بالا ذکر شد، که نتایجی دربارهٔ دستگاههای صوری هستند. قضیه، یک فخس ازنوع خاص است، درحالی‌که ماورای قضیه به زبان معمولی ریاضی نوشته می‌شود. به همین جهت است که برای پرهیز از اختلال، کلمهٔ حکم را بکار می‌بریم. بطورکلی حکم‌ها هرکدام یک ماورای قضیه هستند.

همچنین ملاحظه کنید که حروف خطی $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ و غیره که آنها را بکار برده‌ایم، جزئی از L نیستند. ما آنها را به عنوان ابزاری مناسب برای نشان دادن فخس‌های نامشخص L، یا برای بیان مطالب کلی دربارهٔ L بکار می‌بریم.

ما دستگاه L را به‌عنوان‌دستگاهی‌که در آن می‌توان قضیه بودن فخس‌های معینی را نشان داد برپا کرده‌ایم. طبیعی است که بخواهیم بدانیم که کدام فخس‌های L قضیه هستند. ولی تنها روشی‌که برای‌نشان‌دادن قضیه بودن یک فخس دراختیار داریم نوشتن دنباله‌ای از فخس‌ها است‌که تشکیل یک‌برهان بدهند. این می‌تواندکاری بسیار طولانی باشد، و روشهایی‌که باید در حالات خاص بکار روند همیشه واضح و روشن نیستند.

مثال ۲:۷

به ازای هر دو فخس دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از L داریم

(آ) $\vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{A})$

(ب) $\vdash_L (\sim\mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

در هر حالت برهانی در L را می‌نویسیم. برای (آ):

(1)	$(\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})) \to ((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}))$	$(L2)$
(2)	$(\mathscr{A} \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}))$	$(L1)$
(3)	$((\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}))$	(1) و (2) و ق
(4)	$(\mathscr{A} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{A}))$	$(L1)$
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$	(3) و (4) و ق

برای (ب) :

(1)	$(\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}))$	$(L1)$
(2)	$((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$	$(L3)$
(3)	$((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))\to(\sim\mathscr{B}\to((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})))$	$(L1)$
(4)	$(\sim\mathscr{B}\to((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})))$	(2) و (3) و ق
(5)	$(\sim\mathscr{B}\to((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})))\to((\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})))$	$(L2)$
(6)	$(\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}))\to(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$	(4) و (5) و ق
(7)	$(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$	(1) و (6) و ق

در قسمت فوق بر استفاده از پرانتز کمتر تأکید ورزیده‌ایم . بعضی از عباراتی که دربرهان (ب) بکار رفته‌اند فخس نیستند . مثلا "(1) باید $((\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B})))$ باشد . ولی ما به مختصر ساختن فخس‌ها به این روش ادامه خواهیم داد . فایدهٔ این کار کاملا "روشن است ، ولی باید توجه داشته باشیم که حذف بیش از اندازهٔ پرانتزها باعث ابهام نشود .

◁ یک راه برای آسانتر ساختن برهان قضیه‌ها این است که اجازه دهیم که از میان فخس‌هایی که قبلا "برایشان در L برهان آورده‌شده است بعضی را دربرهان بگنجانیم. این با روش رایج ریاضی در استفاده از قضایای اثبات‌شدهٔ قبلی مطابقت دارد . راه دیگر ، استفاده از بعضی ماورای قضیه‌های کلی است ، که بعضی از آنها عملا "قواعد اضافی برای نتیجه‌گیری می‌باشند . ابزار اصلی حکم زیر است .

حکم ۲ : ۸ (قضیهٔ استنتاج)

اگر $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{B}$ آنگاه $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ که در آن $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های L هستند ، و Γ مجموعه‌ای (شاید گاهی تهی) از فخس‌های L است .

برهان : برهان از طریق استقراء روی تعداد فخس‌های موجود در دنباله‌ای است که استنتاج $\mathscr{B}$ از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ را می‌سازد . برای مرحلهٔ مقدماتی فرض کنید که این دنباله یک عضو دارد . این عضو باید خود $\mathscr{B}$ باشد ، و بنابراین $\mathscr{B}$ یا یکی از اصول موضوعه L است ، یا عضوی از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$

حالت ۱ : $\mathscr{B}$ یکی از اصول موضوعهٔ L است . بنابراین آنچه که ذیلا "ذکر می‌کنیم استنتاج $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ از Γ است .

(1)	$\mathscr{B}$	اصل موضوعهٔ L
(2)	$(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$	$(L1)$
(3)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(1) و (2) و ق

پس $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

حالت ۲ : $\mathscr{B} \in \Gamma$ استنتاج زیر نشان می‌دهد که $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

(1)	$\mathscr{B}$	عضو Γ
(2)	$(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$	$(L1)$
(3)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1) و (2) و ق

حالت ۳ : $\mathscr{B}$ همان $\mathscr{A}$ است. قبلاً "دیده‌ایم که $\vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ ، بنابراین برهان $(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ در L به‌عنوان استنتاجی برای $(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ از Γ بکار می‌آید . از اینرو در این حالت هم داریم $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$. در اینجا مرحلهٔ مقدماتی پایان می‌پذیرد .

اکنون فرض کنیم‌که استنتاج $\mathscr{B}$ از $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ دنباله‌ای است با n عضو ، که $n > 1$ و این که حکم به ازای همهٔ فخس‌هایی مانند $\mathscr{C}$ که می‌توانند با دنباله‌ای دارای کمتراز n فخس از $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ نتیجه شوند برقرار است . این بار باید چهار حالت را بررسی کنیم .

حالت ۱ : $\mathscr{B}$ یکی از اصول موضوعهٔ L است . درست مانند حالت ۱ فوق الذکر نشان می‌دهیم که $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

حالت ۲ : $\mathscr{B} \in \Gamma$ مجدداً "درست‌مانند حالت ۲ فوق الذکر $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

حالت ۳ : $\mathscr{B}$ همان $\mathscr{A}$ است مانند حالت ۳ فوق الذکر عمل می‌کنیم .

حالت ۴ : $\mathscr{B}$ از دو فخس قبلی‌با استنتاج ازطریق بکاربستن ق بدست‌آمده‌است. این دو فخس باید دارای صورتهای $\mathscr{C}$ و$(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$باشند ، و هر یک قطعاً " باید بوسیلهٔ دنباله‌ای دارای کمتر از n عضو از $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ بدست آمده باشند . درهرحالت فقط کافی است که اعضای بعدی را از استنتاج اصلی حذف کنیم آنچه باقی می‌ماند همان دنبالهٔ مطلوب است (به تذکر ۲؛۳(ب) مراجعه کنید) . پس داریم :

$$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L (\mathscr{C} \to \mathscr{B}) \quad \text{و} \quad \Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{C}$$

و با بکار بستن فرض استقراء

$$\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})) \quad \text{و} \quad \Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$$

اکنون به استنتاج $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ از Γ نیاز داریم که به شکل زیر ارائه می‌شود :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \\ \vdots & \\ (k) & (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \end{array}\right\} \text{استنتاج } (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \text{ از } \Gamma$$

$$\left.\begin{array}{ll} (k+1) & \\ \vdots & \\ (l) & (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})) \end{array}\right\} \text{استنتاج } (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})) \text{ از } \Gamma$$

$(l+1)$	$(\mathscr{A}\to(\mathscr{C}\to\mathscr{B}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$	$(L2)$
$(l+2)$	$(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(l) و $(l+1)$ و ق
$(l+3)$	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	(k) و $(l+2)$ و ق
$\therefore$	$\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	و در هر چهار حالت

پس بنابراین اصل استقرأ ریاضی تعداد فخس‌ها در استنتاج $\mathscr{B}$ از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ هرچه باشد حکم برقرار است .

تبصره : ما در برهان این حکم هیچ جا از $(L3)$ استفاده نکرده‌ایم . این امر دارای نتایج مهمی در دستگاههای صوری دیگری که دارای مجموعهٔ دیگری از اصول موضوعه هستند می‌باشد

$\triangleleft$ اثبات عکس قضیهٔ استنتاج آسانتر است .

حکم ۲ : ۹

اگر $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{B}$ آنگاه $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ ، که در آن $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های دلخواه L و Γ مجموعه‌ای (شاید حتی تهی) از فخس‌های L است .

برهان : اگر استنتاج $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ از Γ مفروض باشد می‌خواهیم استنتاجی از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ برای $\mathscr{B}$ بسازیم .

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \\ \vdots & \\ (k) & (\mathscr{A}\to\mathscr{B})\end{array}\right\}\ \text{استنتاج } (\mathscr{A}\to\mathscr{B}) \text{ از } \Gamma$$

$(k+1)$	$\mathscr{A}$	عضو $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$
$(k+2)$	$\mathscr{B}$	(k) , $(k+1)$ و ق

$\triangleleft$ استفاده از قضیهٔ استنتاج در برهان نتیجهٔ زیر، که می‌تواند به‌عنوان یک قاعدهٔ استنتاجی جدید بکار رود ، نشان داده شده است .

نتیجهٔ ۲ : ۱۰

به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ از L ،

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$$

برهان : مراحل استنتاج را به تفصیل می‌نویسیم .

(1)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	فرض
(2)	$(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$	فرض

فرض	$\mathscr{A}$	(3)
(1) و (3) و ق	$\mathscr{B}$	(4)
(2) و (4) و ق	$\mathscr{C}$	(5)

آنچه نشان داده‌ایم عبارتست از

(∗) $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}), (\mathscr{B}\to\mathscr{C}), \mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{C}$

یعنی $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}), (\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\cup\{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{C}$

پس بنابر قضیهٔ استنتاج همانطور که می‌خواستیم داریم

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}), (\mathscr{B}\to\mathscr{C})\} \vdash_L (\mathscr{A}\to\mathscr{C})$$

◁این نتیجه در آینده بطور مکرر بکار خواهد رفت ، و ما آن را قاعدهٔ **قیاس فرضی** می‌نامیم و مختصرا "با ق ف نشان می‌دهیم .

تبصره : چندین راه برای بکاربستن قضیهٔ استنتاج درمورد (∗) فوق الذکر وجود دارد . می‌توانیم هر یک از استنتاجهای زیر را نیز انجام دهیم :

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}), \mathscr{A}\} \vdash_L ((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to\mathscr{C}),$$

$$\{(\mathscr{B}\to\mathscr{C}), \mathscr{A}\} \vdash_L ((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{C}).$$

با بکار بستن مجدد قضیهٔ استنتاج درمورد نتیجهٔ ۲:۱۰ خواهیم‌داشت

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\} \vdash_L ((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$$

و بنابراین

$$\vdash_L ((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})))$$

حکم ۲:۱۱

به ازای هر دو فخس دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از L عبارات زیر قضایای L هستند .

(آ) $(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

(ب) $((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$

برهان : (آ) در مثال ۲:۷ ظاهر شده بود ولی ما آن را در اینجا آورده‌ایم تا سادگی حاصل از استفاده از قاعدهٔ جدید ق ف را نشان دهیم .

برای (آ) :

$(L1)$	$(\sim\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}))$	(1)
$(L3)$	$(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	(2)
(1) و (2) و ق ف	$(\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$	(3)

برای (ب) :

(1)	$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})$	فرض
(2)	$(\sim\mathscr{A}\to(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A}))$	$(L1)$
(3)	$(\sim\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\sim\mathscr{A})\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$	$(L3)$
(4)	$(\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))$	(2) و (3) و ق ف
(5)	$(\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to$ $(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))$	$(L2)$
(6)	$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$	(4) و (5) و ق
(7)	$(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$	(1) و (6) و ق
(8)	$(\sim\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$	$(L3)$
(9)	$(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$	(7) و (8) و ق
(10)	$\mathscr{A}$	(1) و (9) و ق

پس $(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\vdash_L\mathscr{A}$

∴بنابر قضیهٔ استنتاج $\vdash_L((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$. این نتیجه بعدا "بکار خواهدآمد .

تمرین

۱ ــ برای فخس‌های زیر برهانهایی در L بنویسید .

(آ) $(p_1\to p_2)\to((\sim p_1\to\sim p_2)\to(p_2\to p_1))$

(ب) $((p_1\to(p_2\to p_3))\to(p_1\to p_2))\to((p_1\to(p_2\to p_3))\to(p_1\to p_3))$

(پ) $(p_1\to(p_1\to p_2))\to(p_1\to p_2)$

(ت) $(p_1\to(p_2\to(p_1\to p_2)))$

۲ ــ نشان دهید که به ازای هر سه فخس دلخواه $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$ از L استنتاجهای زیر برقرارند :

(آ) $\{(\sim\mathscr{A})\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

(ب) $\{(\sim(\sim\mathscr{A}))\}\vdash_L\mathscr{A}$

(پ) $\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to(\sim\mathscr{A}))\}\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$

(ت) $\{(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))\}\vdash_L(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C}))$

۳ ــ با استفاده از قضیهٔ استنتاج برای L نشان دهید که فخس‌های زیر ، که درآنها $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$ فخس‌های دلخواه L هستند ، قضایای L هستند .

(آ) $(\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A})))$

ب) $((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to ((\sim\mathscr{A}) \to (\sim\mathscr{B})))$

پ) $(((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$

ت) $(\sim(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

۴ ـ فرض کنید L' دستگاه قیاسی صوریی باشد که تنها تفاوت آن با L در این است که بجای $(L3)$ دارای طرح اصل موضوعی

$$(L'3)\ ((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to ((\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$$

می‌باشد. نشان دهید که به ازای هر دو فخس دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از L (و همچنین L') داریم :

(i) $\vdash_{L} ((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to ((\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$

و

(ii) $\vdash_{L'} ((\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

نتیجه بگیرید که یک فخس قضیه‌ای از L است اگر و تنها اگر قضیه‌ای از L' باشد .

۵ ـ قاعدهٔ ق ف مثالی است از یک قاعدهٔ استنتاجی اضافی مجاز برای L . آیا قاعدهٔ زیر به همین معنا قاعده‌ای مجاز است : از فخس‌های $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$ ، فخس $(\mathscr{A} \to \mathscr{C})$ نتیجه می‌شود ؟

۲:۲ قضیهٔ کارسازی برای L

این که مانند حکم ۲:۱۱ فقط ثابت کنیم که فخس‌های معینی از L قضیه‌های L می‌باشند چندان کارمفیدی نیست . همانطورکه قسمت (ب) نشان می‌دهد یافتن راه گاهی مشکل است و محصول نهایی می‌تواند بسیار پیچیده و با یک برهان شهودی بسیار متفاوت باشد . اما این جنبهٔ L نباید مایه نگرانی ما شود . مهمترین دلیل تعریف L کوششی بود برای ساختن یک دستگاه صوری که (از طریق شباهت) بازتابی از مفاهیم شهودی ما دربارهٔ استنتاج ، اعتبار و درستی باشد و از این طریق سعی کنیم که چیزی دربارهٔ آن مفاهیم بیاموزیم .

فصل ۱ مفهوم "درستی منطقی" یعنی مفهوم راستگو را برای ما فراهم نمود . امید به این که این درستیهای منطقی با قضایای L متناظر شوند ، و کوشش برای این که L را با درنظر داشتن چنین هدفی بسازیم نامعقول نخواهدبود . باقیماندهٔ این فصل به نشان دادن این مطلب اختصاص یافته است که L دارای چنین خاصیتی است . این شیوه همچنین نگرشی کلی به درون طبیعت و خواص دستگاههای صوری ، به ما می‌بخشد و در فصلهای بعدی مفید واقع خواهد شد .

هر چند که نمادهای زبان L نمادهای صوری محض انگاشته شده‌اند ، L به طریقی

تعریف شده بود که بتوانیم فخس‌های L را به‌عنوان صورتهای گزاره‌ای تعبیر کرده و سپس هر تابع درستیی را بوسیلهٔ یکی از فخس‌ها نمایش دهیم . پس هرچند که ما نمی‌توانیم دقیقاً "مانند فصل ۱ دربارهٔ ارزشدهی به نمادهای L صحبت کنیم ، ولی می‌توانیم یک شیوهٔ مشابه را تعریف نمائیم .

تعریف ۱۲.۲

یک **ارزشگذاری** تابعی است مانند v که دامنهٔ آن مجموعهٔ فخس‌های L و برد آن مجموعهٔ $\{T, F\}$ باشد ، بطوری که به ازای هر دو فخس $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از L

(i) $\quad v(\mathscr{A}) \neq v(\sim\mathscr{A})$

و

(ii) $\quad v(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) = F$ اگر و فقط اگر $v(\mathscr{A}) = T$ و $v(\mathscr{B}) = F$

توجه کنید که هر "ارزشدهی" به نمادهای p_1 ، p_2 ، ... از L به یک ارزشگذاری منجر می‌شود زیرا هر فخس L (به عنوان یک صورت گزاره‌ای) تحت یک ارزشدهی یکی از دو ارزش درستی را اختیار می‌کند . در این‌صورت (i) و (ii) به وضوح برقرار خواهند بود .

تعریف ۱۳.۲

یک فخس از L مانند $\mathscr{A}$ یک **راستگو** است اگر به‌ازای هر ارزشگذاری v ، $v(\mathscr{A}) = T$.

این درست مانند آن است که $\mathscr{A}$ را به‌عنوان یک صورت گزاره‌ای تلقی کرده و تعریف قبلی را درمورد آن بکار بریم .

◁ ما ثابت خواهیم کرد که یک فخس از L قضیه‌ای از L است اگر و فقط اگر یک راستگو باشد . هم اکنون می‌توانیم یکی از این دو استلزام را ثابت کنیم .

حکم ۱۴.۲ (قضیهٔ صحت)

هر قضیهٔ L یک راستگو است .

برهان : فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک قضیهٔ L باشد . برهان از طریق استقراء روی تعداد فخس‌های موجود در دنباله‌ای از فخس‌ها است که برهانی برای $\mathscr{A}$ در L می‌سازند .

برای مرحلهٔ مقدماتی ، فرض کنید که برهان $\mathscr{A}$ فقط شامل یک فخس ، یعنی همان $\mathscr{A}$ ، است . در این‌صورت $\mathscr{A}$ باید یکی از اصول موضوعهٔ L باشد . همهٔ اصول موضوعهٔ L راستگو هستند . تحقیق این مطلب از طریق ساختن جدولهای درستی است ، و به

عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌شود .

اکنون فرض کنید که برهان $\mathscr{A}$ دارای n فخس است ، که $n > 1$ ، و به عنوان فرض استقراء فرض کنید که همهٔ قضایایی از L که دارای کمتر از n مرحله هستند راستگو می‌باشند . یا $\mathscr{A}$ یکی از اصول موضوعهٔ L است که در این حالت یک راستگو است ، یا $\mathscr{A}$ بوسیلهٔ ق از دو فخس قبلی موجود در برهان بدست می‌آید . این دو فخس باید به صورت $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})$ باشند . ولی $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})$ قضایایی از L هستند با دنباله‌های برهان دارای کمتر از n فخس (یعنی برهان $\mathscr{A}$ را درمحل مناسبی قطع کرده‌ایم) . پس بنابرفرض استقراء $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})$ راستگو هستند ، و بنابراین طبق حکم ۱ : ۹ ، $\mathscr{A}$ یک راستگو است .

از اینرو طبق اصل استقراء ریاضی هر قضیهٔ L یک راستگو است .

◁ برای اثبات عکس مطلب، به دو مفهوم جدید، یعنی **توسیع** L و **سازگاری** نیازمندیم . L دارای سه طرح اصل‌موضوعی است و اینها نقاط شروع برهانهای قضایا هستند . اگر یک طرح اصل‌موضوعی‌جدید یا فقط یک اصل‌موضوع دیگر اضافه کنیم چه پیش خواهد آمد ؟ ما نقاط شروع بیشتری در اختیار داریم و بطورکلی انتظار می‌رودکه بتوانیم قضایای بیشتری ثابت کنیم . همهٔ فخس‌هایی که قبلا "قضیه بوده‌اند قضیه باقی می‌مانند ولی شایدبعضی از فخس‌هایی که قضیه نبوده‌اند قضیه بشوند . درحقیقت قضایای جدید فقط و فقط وقتی ظاهر خواهند شدکه مجموعهٔ جدیداصول موضوعه شامل فخسی باشدکه قبلا " قضیه نبوده است (خواننده می‌تواند فورا "این مطلب را ثابت‌کند) .

تعریف ۲ : ۱۵

یک توسیع L دستگاهی صوری است که از تغییر یا بزرگتر شدن اصول موضوعهٔ L حاصل‌شود بطوری‌که قضایای L قضیه باقی‌بمانند (و شاید قضایای‌جدیدی پدیدآیند) .

کافیست به بعضی از کتابهای‌درسی‌موجود در منطق توجه شود تا ملاحظه گرددکه می‌توان طرحهای اصل موضوعی $(L1)$ ، $(L2)$ ، و $(L3)$ را با طرحهای اصل موضوعی دیگری تعویض‌کردبطوری‌که ردهٔ قضایا تغییرنکند . به‌عنوان‌مثال (تمرین ۲ : ۴ را ملاحظه کنید) می‌توان $(L3)$ راباطرح اصل‌موضوعی‌زیر تعویض کرد بی‌آنکه ردهٔ قضایا تغییرکند :

$$((\sim\mathscr{A} \rightarrow \sim\mathscr{B}) \rightarrow ((\sim\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow \mathscr{A}))$$

تبصره : یک دستگاه صوری می‌تواند توسیعی از L باشد ولی هیچ یک از اصول موضوعه‌اش با L مشترک نباشد .

◁ اگر قرار باشد L را مرتبا "به دستگاههایی با اصول موضوعهٔ بیشتر توسیع دهیم وجود فخسی مانند $\mathscr{A}$ محتملتر خواهدشد بطوری که هم $\mathscr{A}$ و هم $(\sim\mathscr{A})$ قضیه باشند .

واضح است که چنین وضعیتی نامطلوب خواهدبود .

تعریف ۲:۱۶

یک توسیع L **سازگار** است اگر به ازای هیچ فخسی از L مانند $\mathscr{A}$ هم $\mathscr{A}$ و هم $(\sim\mathscr{A})$ قضیه‌های این توسیع نباشند .

البته اگر خود L سازگار نباشد این تعریف بی‌مورد خواهدبود .

حکم ۲:۱۷

L سازگار است .

برهان : فرض کنید L سازگار نباشد ، یعنی فخسی مانند $\mathscr{A}$ وجودداشته باشدکه $\vdash_L \mathscr{A}$ و $\vdash_L (\sim\mathscr{A})$ در این صورت بنابر حکم ۲:۱۴ (قضیهٔ صحت) هم $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ راستگو خواهندبود . این غیرممکن است زیرا اگر $\mathscr{A}$ یک راستگو باشد آنگاه $(\sim\mathscr{A})$ یک تناقض است و اگر $(\sim\mathscr{A})$ یک راستگو باشد آنگاه $\mathscr{A}$ یک تناقض است . پس L باید سازگار باشد .

حکم ۲:۱۸

یک توسیع از L ، مانند L^* ، سازگار است اگر و فقط اگر فخسی وجودداشته باشد که یک قضیهٔ L^* نباشد .

برهان : فرض کنید L^* سازگار باشد . در این‌صورت به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}$ ، یا $\mathscr{A}$ یا $(\sim\mathscr{A})$ یک قضیه نیست (هر دو نمی‌توانند قضیه باشند) .

به عکس، فرض کنیدکه L^* سازگار نیست . نشان خواهیم دادکه فخسی وجودندارد که یک قضیهٔ L^* نباشد . یعنی این که هر فخسی یک قضیهٔ L^* است . فرض کنید $\mathscr{A}$ فخس دلخواهی باشد . L^* سازگار نیست ،پس فخسی مانند $\mathscr{B}$ وجوددارد که $\vdash_{L^*} \mathscr{B}$ و $\vdash_{L^*} (\sim\mathscr{B})$. اکنون بنابرحکم ۲:۱۱ $\vdash_L (\sim\mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$ پس $\vdash_{L^*} (\sim\mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$ زیرا L^* توسیعی از L است . اکنون با دوبار بکار بستن ق خواهیم داشت $\vdash_{L^*} \mathscr{A}$ پس همانطور که می‌خواستیم هر فخسی یک قضیهٔ L^* است .

باید بر دو جنبهٔ این حکم تأکید نهاد . اینها عبارتند از :

(آ) در یک‌توسیع ناسازگار از L هر فخسی یک قضیه است . هنگامی‌که از توسیعی از L استفاده می‌کنیم ، باید به سازگاری توجه بسیار داشته باشیم ، زیرا دستگاهی که در آن هر فخسی قضیه باشد به اندازه دستگاهی که هیچ فخسی در آن قضیه نیست کم

ارزش است .

(ب) شرط کافی برای سازگاری که در این حکم ارائه شد یعنی وجود یک فخس که قضیه نباشد بطرز اعجاب‌آوری ضعیف است . اعجاب مطلب از این‌بابت است‌که در هر دستگاه سازگاری قطعا "تعداد فراوانی فخس خواهد بود که قضیه نیستند ،زیرا مثلا "نقیض هیچ قضیه‌ای قضیه نیست .

اکنون به حکمی می‌رسیم که فنی و کم‌اهمیت بنظر می‌رسد ، ولی ما آن را مکررا " درنتایج بعدی بکار خواهیم‌برد . این حکم یک‌روش برای بدست‌آوردن یک‌توسیع سازگار را توصیف می‌کند .

حکم ۲:۱۹

فرض کنید L^* یک توسیع سازگار از L باشد و فرض کنید که $\mathscr{A}$ فخسی از L باشد که قضیهٔ L^* نیست . در این صورت اگر L^{**} توسیعی از L باشد که از L^* با افزودن $(\sim\mathscr{A})$ به اصول موضوعهٔ آن بدست آید ، آنگاه L^{**} سازگار است .

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از L باشد که قضیه‌ای از L^* نیست . فرض کنید‌که L^{**} ناسازگار باشد . دراین‌صورت‌به ازای فخسی مانند $\mathscr{B}$ داریم $\vdash_{L^{**}} \mathscr{B}$ و $\vdash_{L^{**}} (\sim\mathscr{B})$. اکنون درست مانند برهان حکم ۲:۱۸ نتیجه می‌شود که $\vdash_{L^{**}} \mathscr{A}$. ولی تنها تفاوت L^{**} با L^* در این است‌که L^{**} به‌عنوان یک اصل‌موضوعه شامل $(\sim\mathscr{A})$می‌باشد ، پس $\vdash_{L^{**}} \mathscr{A}$ هم‌ارز است‌با $(\sim\mathscr{A}) \vdash_{L^*} \mathscr{A}$. (یک‌برهان در L^{**} عبارتست از یک استنتاج از$(\sim\mathscr{A})$در L^* .) پس بنابرقضیهٔ استنتاج $\vdash_{L^*} ((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{A})$. ولی بنابرحکم ۲:۱۱ ، $\vdash_L (((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$ پس $\vdash_{L^*} (((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{A})\to\mathscr{A})$. اکنون بنابر ق خواهیم داشت

$$\vdash_{L^*} \mathscr{A}$$

ولی‌این‌بافرض‌این‌که $\mathscr{A}$ یک قضیهٔ L^* نیست متناقض است . پس L^* باید‌سازگارباشد .

◁واضح‌است‌که‌برای‌تعداد فخس‌هایی که می‌توانند به عنوان اصول موضوعهٔ جدید در توسیعی از L با حفظ سازگاری بکار روند محدودیتی‌وجوددارد . رسیدن به آخرین حد این محدودیت هدف حکم بعدی است ، ولی ابتدا وضعیت را دریک‌تعریف توصیف می‌کنیم .

تعریف ۲:۲۰

یک توسیع L **تمام** است اگر به ازای هر فخس $\mathscr{A}$ ، یا $\mathscr{A}$ یا$(\sim\mathscr{A})$ قضیه‌ای از این توسیع باشند .

تذکر : (آ) L ابدا " تمام نیست . مثلا " ، p_1 یک فخس L است ، ولی p_1 و $(\sim p_1)$ هیچکدام قضیه‌ای از L نیستند .

(ب) بنابرحکم ۲:۱۸ ، هر توسیع ناسازگاری از L تمام است .

(پ) اگر L^c یک توسیع سازگار تمام از L باشد ، هر توسیع فراتری از L که ردهٔ قضایای L^c را توسعه ببخشدناسازگار است . زیرا فرض کنیدکه $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L^c نباشد ، در این‌صورت $(\sim\mathscr{A})$ قضیه‌ای از L^c است . پس اگر $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از یک توسیع فراتر باشد ، $(\sim\mathscr{A})$ هم قضیه‌ای از آن توسیع است ، و بنابراین این توسیع فراتر نمی‌تواند سازگار باشد .

حکم ۲:۲۱

فرض کنید L^* یک توسیع سازگار L باشد ، آنگاه یک توسیع سازگار تمام از L^* وجود دارد . (توجه کنید که در اینجا اصطلاحات خود را تعمیم داده‌ایم . یک توسیع L^* از تغییر دادن یا بزرگتر کردن مجموعهٔ اصول موضوعهٔ L^* بدست می‌آید . بطوری که مجموعهٔ قضایا بزرگتر شود . تعریف ۲:۱۵ را ملاحظه کنید) .

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ شمارشی از همهٔ فخس‌های L باشد . این شمارش را می‌توان به روشهای متعددی ساخت . به خواننده توصیه می‌کنیم که درپی ساختن چنین فهرستی برآید . (آشنایی با ساختارهای مشتمل بر مجموعه‌های نامتناهی شمارا در انجام این کار مفید است .) * ما دنباله‌ای مانند $J_0, J_1, J_2, \ldots$ از توسیع‌های L^* به طریق زیر می‌سازیم .

فرض کنید

$$J_0 = L^*$$

اگر $\vdash_{J_0} \mathscr{A}_0$ قرار دهید $J_1 = J_0$ و اگر چنین نیست که $\vdash_{J_0} \mathscr{A}_0$ ، آنگاه $(\sim\mathscr{A}_0)$ را به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید به J_0 بیفزائید و J_1 را بسازید .

در حالت کلی ، برای $n \geq 1$ ، برای ساختن J_n از J_{n-1} : اگر $\vdash_{J_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$ آنگاه $J_n = J_{n-1}$ ولی اگر چنین نیست که $\vdash_{J_{n-1}} \mathscr{A}_{n-1}$ آنگاه J_n توسیعی از J_{n-1} است که از افزودن $(\sim\mathscr{A}_{n-1})$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید به آن حاصل می‌شود .

بنابه فرض ، L^* سازگار است ، یعنی J_0 سازگار است . به ازای $n \geq 1$ اگر J_{n-1} سازگار باشد آنگاه بنابرحکم ۲:۱۹ ، J_n سازگار است . پس به استقراء هر J_n ی سازگار است ، $(n \geq 0)$. اکنون J را به عنوان توسیعی از L^* تعریف کنید ، که اصول موضوعهٔ

---

* فصل ضمیمه را ملاحظه کنید .

آن فخس‌هایی باشند که اصول موضوعهٔ اقلا "یکی از J_n ها هستند .

اکنون نشان می‌دهیم که J سازگار است : فرض کنید چنین نباشد . در اینصورت فخسی مانند $\mathscr{A}$ وجوددارد بطوری‌که $\vdash_J \mathscr{A}$ و $\vdash_J (\sim\mathscr{A})$. اما برهانهای $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ در J دنباله‌هایی‌متناهی از فخس‌ها هستند ،بنابراین هربرهانی می‌توانند شامل مواردی از فقط تعدادی متناهی از اصول موضوعهٔ J باشد . پس باید n ی وجود داشته ، آنقدر بزرگ‌که همهٔ این اصول‌موضوعهٔ بکار رفته اصول‌موضوعهٔ J_n باشند . درنتیجه $\vdash_{J_n} \mathscr{A}$ و $\vdash_{J_n} (\sim\mathscr{A})$ این مطلب با سازگاری J_n متناقض است . پس J باید سازگار باشد .

آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم J تمام است . فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از L باشد $\mathscr{A}$ باید در فهرست $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ ظاهر شود . مثلا " $\mathscr{A}$ ، همان $\mathscr{A}_k$ است . اگر $\vdash_{J_k} \mathscr{A}_k$ در این صورت قطعا " $\vdash_J \mathscr{A}_k$ زیرا J توسیعی از J_k است . اگر چنین نباشد که $\vdash_{J_k} \mathscr{A}_k$ آنگاه بنابر ساختار J_{k+1} ، $(\sim\mathscr{A}_k)$ یک اصل موضوعهٔ J_{k+1} است و بنابراین $\vdash_{J_{k+1}} (\sim\mathscr{A}_k)$ این مستلزم آن است که $\vdash_J (\sim\mathscr{A}_k)$. پس در هر حالتی داریم $\vdash_J \mathscr{A}$ یا $\vdash_J (\sim\mathscr{A})$ و بنابراین J تمام است .

حکم ۲:۲۲

اگر L^* توسیع سازگاری از L باشد آنگاه یک ارزشگذاری وجود دارد که در آن هر قضیه‌ای از L^* ارزش T را اختیار کند .

برهان : v را روی فخس‌های L به شیوهٔ زیر تعریف کنید :

$$v(\mathscr{A}) = T \quad \text{اگر} \quad \vdash_J \mathscr{A}$$

و

$$v(\mathscr{A}) = F \quad \text{اگر} \quad \vdash_J (\sim\mathscr{A})$$

که در آن J یک توسیع سازگار تمام از L^* است به گونه‌ای که در برهان حکم ۲:۲۱ بیان شد . توجه کنید که v به ازای همهٔ فخس‌ها تعریف شده است ، زیرا J تمام است . اما به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}$ داریم $v(\mathscr{A}) \neq v(\sim\mathscr{A})$ زیرا J سازگار است ، وازاینرو تنها باید نشان دهیم که $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ اگر و فقط اگر $v(\mathscr{A}) = T$ و $v(\mathscr{B}) = F$

ابتدا فرض کنید که $v(\mathscr{A}) = T$ و $v(\mathscr{B}) = F$ و $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = T$ پس $\vdash_J \mathscr{A}$ ، $\vdash_J (\sim\mathscr{B})$ و $\vdash_J (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ درنتیجه بنابر ق $\vdash_J \mathscr{B}$. که این با سازگاری J متناقض است . بنابراین $v(\mathscr{A}) = T$ و $v(\mathscr{B}) = F$ مستلزم $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ است . به عکس فرض کنید $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ و درعین حال یا $v(\mathscr{A}) = F$ یا $v(\mathscr{B}) = T$ ، پس $\vdash_J (\sim(\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$ و درعین حال یا $\vdash_J (\sim\mathscr{A})$ یا $\vdash_J \mathscr{B}$ ، اما

$$\vdash_J (\sim\mathscr{A} \to (\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}))$$

و

$$\vdash_J (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$$

پس بنابر ق

$$\vdash_J (\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}) \text{ یا } \vdash_J (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

اما $\vdash_J ((\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$ ، پس در هر حال داریم $\vdash_J (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ ، که این با سازگاری J متناقض است . بنابراین $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ مستلزم $v(\mathscr{A}) = T$ و $v(\mathscr{B}) = F$ است . درنتیجه v یک ارزشگذاری است .

اکنون فرض کنید $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L^* باشد . در این صورت $\vdash_J \mathscr{A}$ زیرا J توسیعی از L^* است . پس $v(\mathscr{A}) = T$.

$\triangleleft$ اکنون در موقعیتی هستیم که بتوانیم نتیجهٔ موردنظر خود را ثابت کنیم .

حکم ۲ : ۲۳ (قضیهٔ کارسازی برای L)

اگر $\mathscr{A}$ فخسی از L و همچنین یک راستگو باشد آنگاه $\vdash_L \mathscr{A}$

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از L و همچنین یک راستگو باشد ، و فرض کنید که $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L نیست . پس بنابرحکم ۲ : ۱۹ ، توسیع L^* ، که از افزودن $(\sim\mathscr{A})$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید حاصل می‌شود ، سازگار است . بنابراین یک ارزشگذاری مانند v وجود دارد که به هر قضیهٔ L^* ارزش T می‌دهد . بویژه $v(\sim\mathscr{A}) = T$. ولی چون $\mathscr{A}$ یک راستگو است $v(\mathscr{A}) = T$، پس به تناقض رسیدیم ، ازاینرو $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L است .

$\triangleleft$ اکنون ثابت کرده‌ایم که دستگاه صوری L دارای این خاصیت اصلی موردلزوم است که فخس‌های قابل اثبات آن دقیقا "همان فخس‌های "منطقا" درست" هستند . اصول موضوعه و قواعد استنتاج در L ، حداقل در این چهارچوب استنتاج منطقی را مشخص می‌کنند . ارزش مطالعهٔ L از این‌بابت است و نه بخاطرمطالعهٔ مفصل فخس‌ها ، برهانها و قضایای L .

مفاهیم و روشهایی که ما برای اثبات قضیهٔ کارسازی بکاربرده‌ایم کاملا "قوی هستند و کاربردهای دیگری نیز دارند ، هرچندکه استعمال آنها دراینجا صرفا "به‌عنوان ابزاری برای یک‌منظور خاص بود . در کتابهای دیگر برهانهای متعدد دیگری برای قضیهٔ کارسازی وجود دارد که بعضی از آنها روشهای کاملا "متفاوتی را بکار می‌گیرند . ما به این جهت این روش را بکار بردیم که در آینده می‌توانیم کم وبیش آن را برای یک قضیهٔ کارسازی

مشابه برای حساب صوری محمولات که پیچیده تر است بکار ببریم . درحقیقت تمامی بحث ما درباره‌ٔ دستگاه L بیشتر برای نشان دادن مفاهیم این مبحث بود تا مطالعه‌ٔ حساب گزاره‌ها بخاطر خود آن . تا جایی که به حساب گزاره‌ها مربوط می‌شود روشهای فصل ۱ دیدگاهی به اندازه‌ٔ کافی روشن در این‌موضوع بر ما می‌گشایند . جدولهای درستی همه‌ٔ اطلاعاتی‌را که ما درباره‌ٔ صورتهای گزاره‌ای و صورتهای استدلالی لازم داریم دراختیار ما می‌گذارند و با استفاده از آنها می‌توانیم بطور کارآمد بین راستگوها ، تناقض‌ها ، و دیگر صورتهای گزاره‌ای فرق بگذاریم . نتیجه این مطلب برای L مهم و مفید است و بنابراین آن را در حکم زیر می‌گنجانیم .

حکم ۲:۲۴

L **تصمیم‌پذیر** است ،یعنی اگر فخس دلخواهی از L داده شده باشد روشی کارآمد برای تصمیم‌گیری درمورد قضیه بودن یا نبودن آن در L وجود دارد .

برهان : برای تشخیص این که فخسی مانند $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L است ، کافی‌است که آن را یک صورت گزاره‌ای فرض کرده و جدول درستی آن را بسازیم این فخس یک قضیه است اگر و فقط اگر یک راستگو باشد .

تذکر ۲:۲۵

این‌موضوع باعث می‌شود که ضرورت ساختن برهانهای بیشتری در L ازمیان برود . جدولهای درستی ، روشی‌مکانیکی ، اما گاهی نه چندان سریع ، برای‌تشخیص قضیه بودن یا نبودن فخسی در L عرضه می‌کنند . البته ما این‌مطلب را تا هم‌اکنون نمی‌دانستیم ، بنابراین‌مثلا "برهان حکم ۲:۱۱ را نمی‌توان تغییرداد ، زیرا نتیجه‌ٔ آن دربرهان قضیه‌ٔ کارسازی بکار رفته بود .

تمرین

۶ ــ ثابت کنید که هر اصل موضوعه‌ٔ L یک راستگو است .

۷ ــ فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از L باشد ، و فرض کنید L^+ توسیعی از L باشد که از افزودن $\mathscr{A}$ به عنوان یک اصل موضوعه‌ٔ جدید حاصل می‌شود .
ثابت کنید که مجموعه‌ٔ قضایای L^+ از مجموعه‌ٔ قضایای L متفاوت است اگر و فقط اگر $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L نباشد .

۸ ــ فرض کنید که فخس $\mathscr{A}$ $((\sim p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_2))$ باشد . نشان دهید که L^+ ، که

از افزودن $\mathscr{A}$ به‌عنوان یک اصل‌موضوعهٔ جدید حاصل می‌شود دارای مجموعهٔ بزرگتری از قضایا نسبت به L است . آیا L^+ یک توسیع سازگار از L است؟

۹ ــ ثابت کنید که اگر $\mathscr{B}$ یک تناقض باشد ، آنگاه $\mathscr{B}$ نمی‌تواند در هیچ توسیع سازگاری از L یک قضیه باشد .

۱۰ ــ فرض کنید L^{++} توسیعی از L باشد که از افزودن

$$((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}))$$

به عنوان یک طرح اصل موضوعی چهارم حاصل می‌شود . نشان دهید که L^{++} ناسازگار است . (راهنمایی: فصل ۱ تمرین ۷ را ملاحظه کنید .)

۱۱ ــ فرض کنید J یک توسیع سازگار تمام از L باشد ، و فرض کنید که $\mathscr{A}$ فخسی از L باشد . نشان‌دهید توسیعی از J که از افزودن $\mathscr{A}$ به‌عنوان یک اصل‌موضوعهٔ اضافی حاصل می‌شود سازگار است اگر و تنها اگر $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از J باشد .

۱۲ ــ فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از L باشد که در آن حروف گزاره‌ای $p_1,\ldots,p_n$ ظاهر می‌شوند و فرض کنید $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\ldots,\mathscr{A}_n$ فخس‌های دلخواهی از L باشند . فرض کنید $\mathscr{B}$ فخسی از L باشد که از جانشین کردن $\mathscr{A}_i$ بجای هر مورد p_i در $\mathscr{A}$ حاصل می‌شود $(1\le i\le n)$. ثابت کنید که اگر $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از L باشد آنگاه $\mathscr{B}$ قضیه‌ای از L است .

۳

حساب غیرصوری محمولات

۳:۱ محمولها و سورها

در فصل ۱ جملەها و استدلالها را تحلیل کرده و آنها را به گزارەهای سادهٔ تشکیل‌دهندهٔ آنان تفکیک نمودیم و این گزارەهای ساده را به عنوان اجزاء ساختمانی تلقی کردیم . به این وسیله توانستیم چیزهایی دربارهٔ آنچه که یک استدلال را معتبر می‌سازد کشف نماییم . اما بعضی از استدلالها پذیرای چنین تمهیداتی نیستند . به عنوان نمونه یکی از مثالهای فصل ۱ را با صورت کمی متفاوتی ذکر می‌کنیم :

همهٔ انسانها فانی هستند

سقراط یک انسان است

∴ سقراط فانی است .

ازنظر شهودی این به‌عنوان‌مثالی از یک استدلال‌معتبر تلقی می‌شود ، ولی اگر بخواهیم آن را مانند فصل ۱ به صورت نمادی درآوریم ، به $p, q, \therefore r$ می‌رسیم . بنابرآنچه که در فصل ۱ دیدیم این یک صورت استدلالی معتبر نیست .

در این حالت اعتبار به رابطهٔ بین مقدمات و نتیجه به عنوان گزارەهای ساده بستگی ندارد ، بلکه به رابطهٔ بین اجزاء گزارەهای بکار رفته و به صورتهای خود گزارەها وابسته است . اگر بخواهیم این‌مطلب را با یافتن یک "صورت گزاره‌ای" مناسب روشنتر سازیم ، چیزی به شکل زیر خواهیم‌داشت :

همهٔ A ها B هستند

C یک A است

∴ C، B است .

باید دو نکته مورد توجه قرار گیرند . اولی عبارتست از طبیعت کلی این مقدمه که " همه A ها B هستند " ، و دومی عبارتست از استعمال نمادهایی برای نمایش دادن اجزاء گزارەهای ساده . این نکات به ترتیب به مفاهیم " سور " و " محمول " مربوط

می‌شوند . هر گزارهٔ ساده در زبان فارسی دارای یک موضوع و یک محمول است ، که هر کدام از آنها ممکن است یک‌کلمه ، یک‌عبارت‌کوتاه ، یا تمامی یک‌بند باشند . به عبارتی غیردقیق ، موضوع چیزی است که گزاره دربارهٔ آن چیزی بیان می‌کند ، و محمول به "خاصیتی" از موضوع مربوط می‌شود .

مثال ۳:۱

در هریک از گزاره‌های زیر آنچه که زیرش خط کشیده شده‌است موضوع و باقیمانده محمول است .

(آ) سقراط انسان است .

(ب) من کتاب می‌نویسم .

(پ) عددی که مجذورش ۱- است حقیقی نیست .

(ت) آسمان کشتی ارباب هنر می‌شکند .

مناسب خواهد بود که محمولها را با حروف بزرگ A, B, C , ... و موضوعها را با حروف کوچک نشان داده و به این طریق گزاره‌هایی مانند گزاره‌های فوق را به شکل زیر به صورت نمادی درآوریم :

(آ) $A(s)$ را می‌توان بجای "سقراط انسان است" درنظر گرفت ، که در آن A یک حرف محمولی است که بجای " انسان است " و s بجای سقراط قرار گرفته است . به همین ترتیب " ناپلئون انسان است " را به صورت نمادی $A(n)$ درمی‌آوریم ، که در آن n بجای ناپلئون قرار دارد .

(ب) به روش مشابهی می‌توان $B(i)$ را بجای "من کتاب می‌نویسم" درنظر گرفت .

(پ) در این حالت محمول یک نقیض است ، بنابراین دو راه درپیش داریم . R را می‌توان به معنی "حقیقی نیست" درنظر گرفت ، بنابراین گزاره به صورت $R(j)$ درخواهد آمد که j بجای عددی که مجذورش ۱- است قرار می‌گیرد . یا می‌توانیم S را به معنی " حقیقی است " بگیریم ، و بنابراین گزاره $(\sim S(j))$ خواهد شد .

(د) $L(w)$ ، مانند (آ) و (ب) .

این مطلب باید روشن باشد که گزاره‌های مرکب را می‌توان با این روش ، فقط با نمادی کردن همهٔ گزاره‌های سادهٔ بکار رفته ، به صورت نمادی درآورد .

◁حال دربارهٔ گزاره‌هایی مانند " همهٔ انسانها فانی هستند" چه می‌توان گفت ؟ دراینجا به چیزی بیش از تحلیل گزاره به موضوع و محمول نیاز داریم ،زیرا معنای گزاره به نیروی کلمهٔ " همه " بستگی دارد . به مثال دیگری توجه کنید .

هر عدد صحیحی دارای یک عامل اول است .

با نمادگذاری معمولی ریاضی این گزاره را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

به ازای هر x ، اگر x یک عدد صحیح باشد ، آنگاه x یک عامل اول دارد . با استفاده از زبان نمادی معرفی شده در بالا این را می‌توان به این صورت نوشت :

به ازای هر x , $(I(x) \rightarrow P(x))$

که در آن $I(x)$ بجای " x یک‌عددصحیح است " و $P(x)$ بجای " x یک‌عامل اول دارد " قرار گرفته است .

مشابها " اگر نمادهای محمولی A و M را به ترتیب بجای " انسان‌است " و "فانی است" بکار ببریم در این صورت "همهٔ انسانها فانی هستند " را می‌توان به این صورت نوشت :

به ازای هر x , $(A(x) \rightarrow M(x))$

عبارت " به ازای هر x " یک **سور عمومی** نامیده شده وبا نماد $(\forall x)$ نشان داده می‌شود توجه کنید که وقتی می‌نویسیم $(\forall x)(A(x) \rightarrow M(x))$ هیچ فرضی دربارهٔ طبیعت شیئی x به عمل نیاورده‌ایم . این استلزام می‌گوید "به ازای هر شیئی x درجهان " ، اگر x انسان باشد آنگاه x فانی است . به ازای هر x ی که انسان نباشد ، فانی بودن آن x خاص مطرح نیست . درستی این استلزام از آنجا ناشی می‌شود که قسمت‌اول آن نادرست است (جدول ارزش $\rightarrow$ را ملاحظه کنید) .

بکارگرفتن نماد x ، هرچند که درجملهٔ اصلی فارسی ظاهرنمی‌شود ، نبایدباعث پریشانی شود . استعمال آن صرفا " برای اختصار ریاضی است ، و روشن است که " هر انسان فانی است " را می‌توان به صورت نمادی زیر هم بیان کرد :

به ازای هر y , $(A(y) \rightarrow M(y))$

ما حروف x و y را به‌عنوان متغیر یا موضوع‌های نامعین بکار می‌بریم . هنگامی‌که آنها را به شیوهٔ فوق در گزاره‌های دارای سور بکارمی‌بریم ،متغیرهای **پابند** نامیده می‌شوند .

نوع دیگری از سور وجودداردکه درنگاه اول دیده می‌شودکه وجودشان برای تبدیل یک جملهٔ فارسی به شکل نمادی لازم است . جملهٔ " بعضی از خوکها بال دارند " را درنظر بگیرید . این جمله را می‌توان اینطور بازنویسی کرد که "حداقل یک خوک هست که بال دارد " ، یا به شیوهٔ فوق‌الذکر

حداقل یک شیئی x وجود دارد بطوری که
x خوک است و x بال دارد .

عبارت " حداقل یک x وجود دارد بطوری که " یک **سور وجودی** نامیده شده و به شکل

نمادی $(\exists x)$ نوشته می‌شود . اکنون می‌توان این جمله را چنین نوشت :

$$(\exists x)(P(x) \wedge W(x))$$

که در آن $P(x)$ و $W(x)$ به ترتیب به‌معنای " x خوک است " و " x بال دارد " می‌باشند .

بطورکلی ، اگر A نمادی باشد که بجای یک محمول قرار می‌گیرد آنگاه عبارات $(\forall x)A(x)$ و $(\exists x)A(x)$ بامعنی‌هستند . اولی به‌این‌معنی‌است‌که هر شیئی دارای خاصیت مشخص شده بوسیلهٔ A است ، و معنای دومی این است که " شیئی وجود دارد که دارای خاصیت مشخص شده بوسیلهٔ A است " .

مثال ۳ : ۲

جملات زیر را به شکل نمادی درآورید :

(آ) چنین نیست که همهٔ پرنده‌ها می‌توانند پرواز کنند .

(ب) هر کسی می‌تواند این کار را بکند .

(پ) بعضی از مردم ابله هستند .

(ت) عدد صحیحی وجود دارد که از هر عدد صحیح دیگری بزرگتر است .

جواب : (البته ممکن است روشهای مختلفی وجود داشته باشد .)

(آ) $\sim(\forall x)(B(x) \to F(x))$

(ب) $(\forall x)(M(x) \to C(x))$

پرداختن به مراحل انجام کار فوق خالی از فایده نیست . " هر کسی می‌تواند این کار را بکند " به این معنی است که " همهٔ مردم می‌توانند این کار را بکنند " و عینا " مانند قبل این بدان‌معنی است که " به ازای هر x ، اگر x یک انسان باشد ، x می‌تواند این کار را بکند " . $M(x)$ بجای " x انسان است " و $C(x)$ بجای " x می‌تواند این کار را بکند " قرار گرفته است .

(پ) $(\exists x)(M(x) \wedge S(x))$

(ت) $(\exists x)(I(x) \wedge (\forall y)(I(y) \to x \geq y))$

خواهیم دید که در اینجا طرحی مشترک ولی غیرعمومی ارائه شده است . غالبا " بعد از یک سور عمومی یک استلزام ظاهر می‌شود ، زیرا یک گزارهٔ عمومی غالبا " بصورت " هر x مفروضی اگر خاصیت A داشته باشد خاصیت B هم دارد . " می‌باشد . بعد از یک سور وجودی غالبا " یک‌ترکیب عطفی ظاهر می‌شود ، زیرا یک گزاره وجودی غالبا " بصورت زیر است " x ی با خاصیت A وجود دارد که دارای خاصیت B هم هست " .

اکنون (آ) را مورد بررسی بیشتری قرار می‌دهیم . همه می‌دانند که این ادعا درست

است و می‌توانیم آن را با ذکر پرندگانی مانند شترمرغ یا پنگوئن توجیه کنیم . ازلحاظ شهودی ما برای توجیه "چنین نیست که همهٔ پرندگان می‌توانند پرواز کنند " به توجیه کردن " پرنده‌ای وجود دارد که نمی‌تواند پرواز کند " متوسل می‌شویم . در اینجا یک ارتباط مهم بین این دو سور ظاهر می‌شود . زیرا اندکی تأمل ما را قانع خواهد ساخت که این دو گزاره دارای یک معنا هستند . اکنون آنها را به شکل نمادی بیان می‌کنیم .

$$\sim(\forall x)(B(x) \rightarrow F(x)) \qquad \text{(i)}$$

و

$$(\exists x)(B(x) \wedge \sim F(x)) \qquad \text{(ii)}$$

برای مقایسهٔ دقیقتر این دو ، اولی را باتوجه به قواعد فصل ۱ به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\sim(\forall x)(\sim B(x) \vee F(x))$$

و سپس آن را به شکل زیر درمی‌آوریم :

$$\sim(\forall x)\sim(B(x) \wedge \sim F(x))$$

ملاحظه کنید که این دارای صورتی مشابه (ii) است با این تفاوت که بجای $(\exists x)$ نماد $\sim(\forall x)\sim$ قرار گرفته است .

توجه به مثالهایی از این قبیل ما را قادر می‌سازند تا بطور شهودی ملاحظه کنیم که P هر خاصیتی باشد دو جملهٔ زیر به یک معنی هستند :

(i) چنین نیست که همه x ها خاصیت P نداشته باشند ،

(ii) x ی هست که خاصیت P دارد .

مثال ۳:۳

هریک از گزاره‌های زیر را به دوصورت نمادی بیان کنید بطوری که اولی فاقد سور عمومی و دومی فاقد سور وجودی باشد .

(آ) همهٔ پرندگان می‌توانند پرواز کنند .

(ب) هیچ انسانی جزیره نیست .

(پ) بعضی از اعداد گویا نیستند .

جواب :

(آ) $\sim(\exists x)(B(x) \wedge \sim F(x))$

$(\forall x)(B(x) \rightarrow F(x)).$

(ب) $\sim(\exists x)(M(x) \wedge I(x))$

$(\forall x)(M(x) \rightarrow \sim I(x)).$

$$(\exists x)(N(x) \wedge \sim R(x)) \quad (\text{پ})$$
$$\sim(\forall x)(N(x) \rightarrow R(x)).$$

(البته روشهای هم ارز دیگری نیز وجود دارد .)

◁ اکنون که شیوهٔ بیان گزاره‌ها به صورت نمادی را می‌دانیم، چگونه می‌توانیم از این امر برای تعیین رابطهٔ بین گزاره‌ها یا اعتبار استدلالها استفاده کنیم ؟ امکان گسترش استفاده از جدولهای درستی وجودندارد ، زیرا جمله‌های ما دیگر پذیرای توابع‌درستی نیستند . استفاده از متغیرها و سورها به این معنی است‌که ارزش درستی یک جمله مانند قبل به ارزش درستی اجزاء سازندهٔ آن بستگی ندارد . همچنین این اجزاء همواره دارای ارزشهای درستی نیستند . به ویژه ، صحبت کردن از ارزش درستی قسمتی از یک جملهٔ شامل متغیر و فاقد سور، مانند " x پرنده است" یا $B(x)$ که در مثال قبلی ظاهر شد ، بی‌معنی است .

تمرین

۱ ــ با استفاده از سورها ، متغیرها ، و نمادهای محمولی ، گزاره‌های زیر را به نمادها ترجمه کنید .

(آ) چنین نیست که هر تابعی مشتق داشته باشد .

(ب) تابعی وجود دارد که پیوسته است ولی مشتق ندارد .

(پ) اگر بعضی از قطارها تأخیر داشته باشند آنگاه همهٔ قطارها تأخیر دارند .

(ت) هر عدد یا فرد است یا زوج .

(ث) هیچ عددی هم فرد و هم زوج نیست .

(ج) بعضی از مردم از همه متنفرند .

(چ) فیل سنگینتر از موش است .

۲ ــ هریک ازگزاره‌های زیر را ابتدا بدون‌استفاده از سور وجودی، سپس بدون استفاده از سور عمومی به نمادها ترجمه کنید .

(آ) چنین نیست که همهٔ اتومبیل‌ها سه چرخ داشته باشند .

(ب) بعضی از مردم یا تنبلند یا احمق .

(پ) هیچ موشی از هیچ فیلی سنگینتر نیست .

(ت) هر عددی یا منفی است یا جذر دارد .

۳ ــ در تمرین‌های ۱ و ۲ هر جفت ازگزاره‌ها را که دارای معانی یکسانی هستند مشخص کنید .

۲:۳ زبانهای مرتبه اول

یک روش تحلیل گزاره‌ها و استدلالهای شامل سورها ، منطق قیاسی است . این مبحث دارای سابقه‌ای طولانی است که از ارسطو شروع شده است و تا به امروز ادامه دارد . خواننده‌ای که به دنبال کردن این موضوع علاقمند باشد می‌تواند به کتابهای دیگر (مانند کتاب کپی ، Copi) رجوع کند ، زیرا که ما در اینجا به آن نخواهیم پرداخت . مبنای این مبحث عبارت‌است از مطالعهٔ تعداد اندکی از صورتهای استدلالی ویژه‌ای که بطور شهودی معتبر فرض می‌شوند ، از آن جمله است صورت استدلالی مذکور در ابتدای این فصل :

همه A ها B هستند

C یک A است

$\therefore C$ ، B است .

هدف این است که اگر استدلال خاصی داده شده باشد آن را بوسیلهٔ یک یا چند تا از استدلالهای پایه‌ای بیان کنیم و از این طریق اعتبار آن را نشان دهیم . این دستگاه برای منطقیون و ریاضی‌دانان نوین بسیار محدودکننده است و بنابراین جستجوهایی برای یافتن روشهای تحلیل متفاوتی به عمل آمده است . حاصل کار ، که ما به مطالعهٔ آن خواهیم پرداخت از لحاظ ریاضی این‌امتیاز بزرگ را داردکه ما را به سرزمینهای‌غنی و نوینی از مطالعات می‌رساند که در منطق قیاسی حتی قابل تصور نبودند .

ما یک دستگاه صوری می‌سازیم . این دستگاه همانطور که انتظار می‌رود از دستگاه ساخته شده در فصل ۲ پیچیده‌تر ولی برمبنای همان اصول خواهدبود . ابتدا باید یک زبان صوری را ، با عرضهٔ الفبای نمادها و قواعد ساختن فرمولهای خوش ساخت توصیف کنیم . در این کار راهنمای ما تجربه‌ای است‌که در ابتدای فصل درموردترجمهٔ گزاره‌های معمولی به نمادها بدست آوردیم ، زیرا هدف ما این است که این زبان صوری را طوری بسازیم‌که بتوانیم جملاتی چنین‌معمولی را به فرمولهای خوش ساخت دستگاه برگردانیم و خاصیتهای منطقی چنین جملاتی را در خاصیتهای فخص‌های دستگاه منعکس سازیم . مجددا "باید دراینجا تصریح شودکه نمادهای این دستگاه صوری نباید هیچ معنایی جز آنچه که در دستگاه صوری مشخص شده است داشته باشند . در مواردی ممکن است آنها را به شیوه‌هایی متفاوت تعبیر کرد ، ولی این تعبیرها جزئی از دستگاه نیستند .

الفبای نمادها عبارتند از :

متغیرها $x_1, x_2, \ldots$

ثابتهای فردی $a_1, a_2, \ldots$

حروف محمولی $A_1^1, A_2^1, \ldots; A_1^2, A_2^2, \ldots; A_1^3, A_2^3, \ldots; \ldots$

حروف تابعی $f_1^1, f_2^1, \ldots; f_1^2, f_2^2, \ldots; f_1^3, f_2^3, \ldots; \ldots$

نقطه‌گذاری $(,),$,

رابطها $\sim, \rightarrow$

سور $\forall$

تذکر ۴:۳

(آ) ثابتهای فردی به این منظور در اینجا گنجانده شده‌اند که در زبانمان فرمولهایی داشته باشیم که بتوانند به عنوان گزاره‌هایی درباره اشیاء خاص تعبیر شوند. برای مثال، گزارهٔ "سقراط انسان است" می‌تواند تعبیری از فرمول $A_1^1(a_1)$ باشد.

(ب) در اینجا یک فهرست از فهرستهای حروف محمولی وجود دارد. اولین فهرست عبارت است از فهرست حروف محمولی یک‌مکانی که برای تعبیر محمولهای یک‌مکانی (مانند "انسان است") درنظر گرفته شده‌اند. دومین فهرست عبارت است از فهرست حروف محمولی دومکانی، که برای نشان دادن رابطه‌ها، یا محمولهای دومکانی (مانند "پدر است") بکار می‌روند. وقس علیهذا. (به‌عنوان مثالی از یک محمول سه مکانی در زبان معمولی می‌توانیم "همخط هستند" رادر گزارهٔ نقاط A و B و C همخط هستند" ذکر کنیم.)

(پ) تا بحال در ترجمهٔ غیرصوری به نمادها با حروفی که نمایشگر توابع باشند برخوردنکرده‌ایم. مفهوم تابع در ریاضیات آنچنان اساسی است که مجاز ساختن حروفی برای توابع در این زبان صوری کاملا" مفید خواهد بود. زیرا تعبیرهای مورد نظر از نمادها اصولا" ریاضی خواهند بود. البته تابع نوعی خاص از رابطه است، و درحقیقت داشتن نمادهایی برای رابطه‌ها (حروف محمولی) کفایت خواهد کرد، ولی ما قصد نداریم که الفبای نمادها را تا سرحد امکان کوچک کنیم. ضابطهٔ دیگری که بکار می‌گیریم وضوح مطلب ازنظر شهودی است. بعدا" هنگامی‌که دستگاههای ریاضی‌خاص را موردبحث قرار می‌دهیم، تأثیر گنجاندن حروف تابعی را به وضوح خواهیم دید. عینا" مانند حروف محمولی، فهرستهای مجزایی ازحروف‌تابعی وجوددارند که برای‌توابع با تعداد شناسه‌های متفاوت درنظر گرفته شده‌اند، در هردوحالت عدد اندیس بالایی مشخص‌کننده تعداد مکانها یا شناسه‌ها است.

(ت) در این زبان فقط یک سور وجود دارد که همان سور عمومی است. دیدیم

که سور وجودی را می‌توان برحسب سور عمومی تعریف کرد . بنابراین همانطور که فقط رابطهای $\sim$ و $\rightarrow$ را اختیار کرده‌ایم ، فقط به یکی از سورها نیاز داریم .

(ث) باوجودآنکه فقط ترکیبهای‌متناهی نمادها به عنوان فرمولهای خوش ساخت مجاز خواهند بود (به قسمت‌پایین مراجعه کنید)ولی فهرستی نامتناهی از نمادها وجود دارد . از این جهت به تعدادی **بالقوه** نامتناهی از نمادها نیاز داریم که می‌خواهیم زبانمان را هرچه ممکن است کلی‌تر سازیم . درعمل تعبیرها را فقط برای بعضی از این نمادها مشخص می‌کنیم ، و بعضی از کاربردها ممکن است‌به نمادهایی بیش ازکاربردهای دیگر نیاز داشته باشند . به همین‌جهت نمی‌خواهیم‌یک کران بالا برای تعداد نمادهای قابل تعبیر قائل شویم .

◁ بطور کلی ، یک **زبان مرتبه اول** $\mathscr{L}$ دارای الفبای نمادی زیر خواهدبود :

متغیرهای $x_1, x_2, \ldots$,

تعدادی (شاید صفر) از ثابتهای فردی $a_1, a_2, \ldots$,

تعدادی (شاید صفر) از حروف محمولی A_i^n ,

تعدادی (شاید صفر) از حروف تابعی f_i^n ,

نمادهای سجاوندی), (و , ,

رابطهای $\sim$ و $\rightarrow$,

سور $\forall$.

واضح است‌که باتوجه به نمادهای برگزیده شده ، زبانهای مرتبه اول متعددی وجود دارند. دراکثرموارد زبانی‌را که بکار گرفته‌ایم مشخص نخواهیم‌کردو بنابراین نتایج بدست‌آمده درمورد هر زبانی بکار می‌روند . اهمیت اصطلاح "مرتبه اول" بعدا "ظاهر خواهد شد ، ولی بد نیست بدانیم که به استفاده از سور عمومی مربوط می‌شود .

برای اینکه یک زبان صوری را کاملا" مشخص کنیم ، باید فرمولهای خوش ساخت را بشناسیم ، ولی قبل از آن به چند مثال توجه می‌کنیم .

مثال ۳:۵

(آ) اگر بخواهیم‌زبان مرتبه اول ما برای گزاره‌هایی دربارهٔ حساب اعدادطبیعی مناسب‌باشد ، $\mathscr{L}$ باید علاوه برمتغیرها ، سجاوندی ، رابطها و سور ، دارای نمادهای‌زیر باشد :

a_1 بجای 0 ,

A_1^2 بجای $=$,

f_1^1 بجای تابع تالی ،

f_1^2 بجای + ،

f_2^2 بجای × .

در این صورت ، به عنوان مثال ،

$$A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$$

دارای تعبیر " $x_1+x_2=x_1x_2$ " خواهدبود .

(ب) اگر بخواهیم زبان‌مرتبه اول ما برای گزاره‌هایی دربارهٔ گروهها مناسب باشد، $\mathscr{L}$ باید علاوه بر متغیرها ، سجاوندی، رابطها و سور، دارای نمادهای زیر باشد :

a_1 بجای عنصر همانی ،

A_1^2 بجای = ،

f_1^1 بجای تابعی که هر عنصر را به معکوسش می‌برد ،

f_1^2 بجای عمل دوتایی گروه .

در این صورت ، به عنوان مثال ،

$$A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$$

دارای تعبیر " $x_1x_1^{-1}$ = همانی " خواهدبود .

تعریف ۶.۳

قبل از تعریف فرمولهای خوش‌ساخت ، به مقدماتی نیاز داریم . فرض کنیم $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد . یک **حد** در $\mathscr{L}$ بصورت زیر تعریف می‌شود .*

(i) متغیرها و ثابتهای فردی حد محسوب می‌شوند

(ii) اگر f_i^n یک حرف تابعی در $\mathscr{L}$ باشد و $t_1, \ldots, t_n$ حدهایی در $\mathscr{L}$ باشند ، آنگاه $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ حدی در $\mathscr{L}$ است .

(iii) مجموعهٔ همهٔ حدها برطبق (i) و (ii) تولید می‌شود .

حدها باید چنان عباراتی در زبان صوری باشند که به عنوان اشیاء تعبیر شوند . یعنی چیزهایی که توابع درمورد آنها بکار می‌روند ، چیزهایی که دارای خاصیتهایی هستند ، و چیزهایی که درمورد آنها حکمی بیان می‌شود .

---

* کلمهٔ حد به‌معنای بکار رفته دراینجا سابقهٔ استعمال‌قدیم داردو نبایدبامفهوم حد که در آنالیز ریاضی بکار می‌رود اشتباه شود . برای دیدن معانی منطقی کلمهٔ حد به فرهنگ فارسی، دکتر محمد معین مراجعه شود . مترجم

یک **فرمول بسیط** در $\mathscr{L}$ اینطور تعریف می‌شود : اگر A_j^k یک حرف محمولی در $\mathscr{L}$ و $t_1, \ldots, t_k$ حدهایی در $\mathscr{L}$ باشند ، آنگاه $A_j^k(t_1, \ldots, t_k)$ یک فرمول بسیط در $\mathscr{L}$ است .

فرمولهای بسیط ساده‌ترین عباراتی در زبان هستند که به‌عنوان بیانی از این قبیل که خاصیت معینی برای اشیاء معینی برقرار است تلقی می‌شوند . البته کلمهٔ "بسیط" به معنی "تجزیه ناپذیر است" .

همانطور که از این اصطلاح انتظار می‌رود ، فرمولهای بسیط چیزهایی هستند که فرمولهای خوش ساخت با آنها ساخته‌می‌شوند . آنها برطبق قواعد منطقی ترکیب می‌شوند و جایگاهی همانند حروف گزاره‌ای در دستگاه صوری قبلی ما دارند .

یک **فرمول خوش ساخت** در $\mathscr{L}$ چنین تعریف می‌شود .

(i) هر فرمول بسیط در $\mathscr{L}$ یک فخس از $\mathscr{L}$ است .

(ii) اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌هایی از $\mathscr{L}$ باشند، $(\sim\mathscr{A})$ ، $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ و $(\forall x_i)\mathscr{A}$ ، که x_i متغیر دلخواهی است ، نیز فخس‌هایی از $\mathscr{L}$ هستند .

(iii) مجموعهٔ همهٔ فخس‌های $\mathscr{L}$ برطبق (i) و (ii) ساخته می‌شود .

تذکر ۷:۳

(آ) فخس‌ها عینا "مانند دستگاه L از فرمولهای بسیط ساخته می‌شوند ، البته به استثنای این که در اینجا سور عمومی هم وارد کار شده است . اگر $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد آنگاه $(\forall x_i)\mathscr{A}$ هم فخسی از $\mathscr{L}$ است ، که در آن x_i متغیری دلخواه است . پس مثلا" اگر $A_1^1(x_2)$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ هم فخسی از $\mathscr{L}$ است . بنابراین لازم نیست که سور با فخسی که به آن وابسته است ارتباط داشته باشد ، هرچندکه به وضوح محتمل است‌که ما با حالتهایی‌که متغیرهای مسوّر (= پابند به یک سور) درفرمولهای بعدی ظاهر شوند بیشتر سروکار داشته باشیم .

(ب) در اینجا هم مانند دستگاه L فقط از رابطهای $\sim$ و $\to$ استفاده می‌کنیم . هدف از این کار ساده‌تر کردن برهانهای خاصیتهای زبان و دستگاه صوری مبتنی بر آن زبان است . به همین‌دلیل است‌که از استعمال نماد $\exists$ نیز پرهیز کرده‌ایم . ولی بعدا" خواهیم دید که استعمال نماد $\exists$ و رابطهای $\wedge$ و $\vee$ به عنوان نمادهای معرّف مناسب خواهدبود . مطابق رهنمون شهودی قبلی

$(\exists x_i)\mathscr{A}$ اختصاری است برای $(\sim((\forall x_i)(\sim\mathscr{A})))$،

$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ اختصاری است برای $(\sim(\mathscr{A} \to (\sim\mathscr{B})))$،

$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ اختصاری است برای $((\sim\mathscr{A}) \to \mathscr{B})$،

فرمولهایی که شامل این نمادها باشند به معنی اکید آن فخس محسوب نمی‌شوند ، ولی درصورت لزوم می‌توان آنها را مجددا "به فخس تبدیل نمود .

(پ) استفاده از پرانتز در فرمولهای خوش ساخت دقیقا " در تعریف ارائه شده است . ولی همانند L ، به شرط این که ابهامی پیش نیاید ، گاهی پرانتزها را حذف می‌کنیم . مانند قبل فرض می‌شود که یک $\sim$ روی کوتاهترین فخسی که بعد از آن قرار دارد عمل می‌کند . مثلا "$(\sim\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ مختصر شده‌ٔ $((\sim\mathscr{A}) \to \mathscr{B})$ است . با سورها نیز به روشی مشابه رفتار می‌کنیم . مثلا " ، $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ در واقع فخسی است که هیچ پرانتزی از آن حذف نشده است، و باید به تفاوت بین این فخس و فخس $(\forall x_i)\ (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ توجه کرد . اکنون در این مورد بعضی از اصطلاحات را معرفی می‌کنیم .

تعریف ۳:۸

در فخس $(\forall x_i)\mathscr{A}$ ، $\mathscr{A}$ را **دامنهٔ عمل** سور می‌نامیم . بطورکلی ، هنگامی که $((\forall x_i)\mathscr{A})$ به‌عنوان قسمتی از فخسی مانند $\mathscr{B}$ ظاهر می‌شود می‌گوئیم که $\mathscr{A}$ دامنهٔ عمل این سور در $\mathscr{B}$ است .

موردی از متغیر x_i در یک فخس را **پابند** می‌نامیم اگر در دامنهٔ عمل یک $(\forall x_i)$ دریک فخس قرار گیرد یا این‌که همان x_i در $(\forall x_i)$ باشد . اگر موردی ازیک متغیر پابند نباشد آن را **آزاد** می‌نامیم .

مثال ۳:۹

(آ) در فخس $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ دامنهٔ عمل سور $(\forall x_1)$ عبارتست از $A_1^1(x_2)$ ، در اینجا متغیر x_2 آزاد و متغیر x_1 پابند است .

(ب) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_2))$ فخسی است که در آن همهٔ موارد x_1 و x_2 پابندهستند . دامنهٔ عمل $(\forall x_1)$ عبارتست از $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_2))$ و دامنهٔ عمل $(\forall x_2)$ عبارتست از $(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^1(x_2))$

(پ) $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$ یک فخس است که در آن x_1 دو بار پابند و x_2 یک بار آزاد و دو بار پابند است . دامنهٔ عمل $(\forall x_1)$ عبارت است از $(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)A_1^2(x_2))$ ، و دامنهٔ عمل $(\forall x_2)$ عبارتست از $A_1^1(x_2)$.

$\triangleleft$ در بالا از نمادهایی ، مانند $\mathscr{A}$و$\mathscr{B}$، استفاده کردیم که قسمتی از زبان صوری نیستند . خواننده بخاطر دارد که در فصل ۲ هم وضع مشابهی داشتیم . این حروف قسمتی از زبان معمولی ریاضی هستند که ما آنها را برای توصیف و بحث دربارهٔ زبان

صوری بکار می‌بریم ، و می‌توانندبجای فرمولهای خوش ساخت(معمولا "دلخواه) در زبان صوری قرار بگیرند . گاهی نیز که به متغیرها (یا حدها)ی خاصی توجه داشته باشیم ، مثلا " ، خواهیم نوشت $\mathscr{A}(x_1)$ یا $\mathscr{B}(x_1, \ldots, x_n)$. چنین عباراتی غالبا " ، ولی نه همیشه ، نشان می‌دهند که متغیرهای ذکر شده در آن فخس، دارای مورد آزاد هستند . اگر x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزادباشد ، آنگاه به ازای هر حدی مانند t ، $\mathscr{A}(t)$ حاصل جانشین کردن t بجای همهٔ موارد آزاد x_i است .

مثال ۳ : ۱۰

اکنون به بررسی موارد استعمال متغیرهای مسور پرداخته و به مثال قبلی خودمان $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ باز می‌گردیم . از لحاظ شهودی مقصود استنباط چیزی نزدیک به این مطلب است که " x_1 بجای هر شیئی قرار گرفته باشد خاصیتی که بوسیلهٔ A_1^1 مشخص می‌شودبرای شیئی که x_2 بجای آن قرار گرفته است برقرار است" واضح استکه این سور غیرضروری استو هر سوردیگری نیز که بجای $(\forall x_1)$ قرار گیرد به همان‌ترتیب غیرضروری خواهدبود . $(\forall x_3)A_1^1(x_2)$ همچنین $(\forall x_7)A_1^1(x_2)$ دارای تعبیر شهودی یکسانی خواهند بود . اما این‌نکته نیز به همان اندازه واضح استکه $(\forall x_2)A_1^1(x_2)$ دارای تعبیر شهودی اساسا " متفاوتی با هر کدام از قبلی‌ها می‌باشد . این تعبیر شهودی از این قرار خواهد بود که " x_2 بجای هر شیئی قرار داشته باشد خاصیتی که بوسیلهٔ A_1^1 مشخص می‌شود برای آن شیئی برقرار است " بدون توسل به معانی شهودی نیز یک تفاوت صوری محض بین $(\forall x_2)A_1^1(x_2)$ و دیگر فرمولها وجودداردکه عبارتست از این که دومتغیر ظاهر شده در آن یکی هستند .

گاهی لازم می‌شود که متغیرها را با متغیرها یا حدود دیگری جانشین سازیم ، ما مایلیم که این کار را به نحوی انجام دهیم که در تعبیر شهودی تفاوتی حاصل نشود . اگر همان مثال قبلی $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ را بکار بگیریم و x_2 را با x_3 تعویض کنیم فخسی بدست خواهیم‌آوردکه تعبیری به همان‌صورت‌قبلی دارد ، ولی اگر x_2 را با x_1 تعویض کنیم فخسی خواهیم‌داشت‌که تعبیر آن دارای صورتی‌متفاوت است . این مطلب این‌طور بیان می‌شود که می‌گوییم جانشینی x_3 به جای x_2 در $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ آزاد است . ولی جانشینی x_1 آزاد نیست . بطور کلی‌تر اگر x_2 را مثلا "با حد $f_1^2(x_1, x_3)$ جانشین کنیم به $(\forall x_1)A_1^1(f_1^2(x_1, x_2))$ می‌رسیم ، که نوعی ارتباط بین سور $(\forall x_1)$ و دامنهٔ عمل آن وجود دارد که قبلا " وجود نداشت . بنابراین می‌گوییم که جانشینی $f_1^2(x_1, x_2)$ به جای x_2 در $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$ آزاد نیست. اکنون این مفاهیم‌را توسط یک‌تعریف‌کلی گسترش می‌دهیم.

تعریف ۳:۱۱

فرض کنیم $\mathscr{A}$ فخس‌دلخواهی در $\mathscr{L}$ باشد . جانشینی حدی مانند t را **به جای** x_i **در** $\mathscr{A}$ **آزاد** می‌گوییم اگر x_i در دامنهٔ عمل $(\forall x_j)$ در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد نباشد ، که x_j متغیر دلخواهی است که در t ظاهر می‌شود .

به‌عبارت‌دیگر (همانند قبل) این بدان‌معنی است‌که t را می‌توان بجای هر مورد آزاد x_i در $\mathscr{A}$ جانشین کرد بدون این‌که **نوعی ارتباط** با سورهای موجود در $\mathscr{A}$ بوجودآید.

مثال ۳:۱۲

بعضی از مثالها را در بالا دیدیم . یک مثال پیچیده‌تر عبارتست از

$$((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_3)A_2^2(x_3, x_1))$$

در اینجا مثلا" جانشینی $f_1^2(x_1, x_4)$ به جای x_2 آزاد نیست ، جانشینی $f_2^2(x_2, x_3)$ به جای x_2 آزاد است ، جانشینی x_2 به جای x_1 آزاد است (توجه کنید که x_1 فقط یک بار بصورت آزاد ظاهر شده است) ، و جانشینی $f_4^2(x_1, x_3)$ به جای x_1 آزاد نیست .

تذکر ۳:۱۳

به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}$ و هر متغیری مانند x_i (چه در $\mathscr{A}$ بصورت آزاد ظاهر شود یا ظاهر نشود) جانشینی x_i به جای x_i در $\mathscr{A}$ آزاد است .

◁اکنون زبانی صوری را، که بکار برده و توسعه خواهیم‌داد، تأسیس کرده‌ایم . به منظور کامل کردن مشخصات دستگاههای صوری که آنها را دستگاههای **حساب محمولات مرتبه اول** می‌نامیم ، مانند فصل ۲ ، کار را با ارائهٔ اصول موضوعه و قواعد استنتاج دنبال می‌کنیم . اما قبل از انجام این کار بهتر است که کلمهٔ مبهم " تعبیر " را که تاکنون چندبار بکار رفته است ، بررسی‌کنیم و بکوشیم‌که معنایی‌دقیق به آن ببخشیم .

تمرین

۴ ــ فرض کنید $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد که الفبای نمادهای آن شامل هیچ حرف تابعی نباشد . مجموعهٔ حدود $\mathscr{L}$ را توصیف کنید .

۵ ــ مجموعهٔ حدود زبان مرتبه اولی را توصیف کنید که الفبای نمادهای آن شامل هیچ ثابت فردی نباشد و فقط شامل یک نماد تابعی f_1^1 باشد .

۶ ــ کدامیک از فرمولهای زیر خوش‌ساخت هستند ؟

(آ) $A_1^2(f_1^1(x_1), x_1)$

ب) $f_1^3(x_1, x_3, x_4)$

پ) $(A_1^1(x_2) \to A_1^3(x_3, a_1))$

ت) $\sim (\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2)$

ث) $((\forall x_2) A_1^1(x_1) \to (\sim A_1^1(x_2)))$

ج) $A_1^3(f_2^3(x_1, x_2, x_3))$

چ) $(\sim A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_2))$

ح) $(\forall x_1) A_1^3(a_1, a_2, f_1^1(a_3))$

۷ ــ کدامیک از موارد x_1 در فخس‌های زیر آزاد و کدامیک پابند هستند ؟

آ) $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1))$

ب) $(A_1^1(x_3) \to (\sim (\forall x_1)(\forall x_2) A_1^3(x_1, x_2, a_1)))$

پ) $((\forall x_1) A_1^1(x_1) \to (\forall x_2) A_1^2(x_1, x_2))$

ت) $(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to (\forall x_1) A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2)))$

جانشینی حد $f_1^2(x_1, x_3)$ در کدامیک از اینها به جای x_2 آزاد است ؟

۸ ــ فرض کنیم $\mathscr{A}(x_i)$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که x_i در آن دارای مورد آزاد است ، و فرض کنید x_j متغیری است که در $\mathscr{A}(x_i)$ دارای مورد آزاد نیست . نشان دهید که اگر جانشینی x_j به جای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد باشد آنگاه جانشینی x_i به جای x_j در $\mathscr{A}(x_j)$ آزاد است . $\mathscr{A}(x_j)$ نتیجهٔ جانشین ساختن x_j به‌جای‌هر مورد آزاد x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ است .

۹ ــ در هریک از حالات زیر فرض کنید $\mathscr{A}(x_1)$ یک فخس مفروض باشد ، و فرض کنید t حد $f_1^2(x_1, x_3)$ باشد ، فخس $\mathscr{A}(t)$ را بنویسیدو سپس مشخص کنیدکه در هر حالت آیا جانشینی t به جای x_1 در فخس مفروض آزاد است یا نه .

آ) $((\forall x_2) A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to A_1^1(x_1))$

ب) $(\forall x_1)(\forall x_3)(A_1^1(x_3) \to A_1^1(x_1))$

پ) $(\forall x_2) A_1^1(f_1^1(x_2)) \to (\forall x_3) A_1^3(x_1, x_2, x_3)$

ت) $(\forall x_2) A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \to (\forall x_3) A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

۱۰ ــ تمرین ۹ را با قرار دادن هر یک از حدود زیر بجای حد t مجددا" حل کنید .

آ) x_2

ب) x_3

پ) $f_1^2(a_1, x_1)$

ت) $f_1^3(x_1, x_2, x_3)$

تعریف ۳: ۱۴

یک تعبیر I از $\mathscr{L}$ مجموعه‌ای است ناتهی مانند D_I (دامنهٔ I) همراه با گردآیه‌ای از عناصر مشخص $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots)$، و یک گردآیه از توابع $(\bar{f}_i^n, i>0, n>0)$ روی D_I، و گردآیه‌ای از روابط $(\bar{A}_i^n, i>0, n>0)$ روی D_I.

◁ قبلا "خاطرنشان شده بود که متغیرهای $x_1, x_2, \ldots$ از $\mathscr{L}$ باید به عنوان " اشیاء " تلقی شوند. مجموعهٔ D_I باید دامنهٔ اشیائی باشد که قرار است متغیرها روی آنها تغییر نمایند. گردآیهٔ عناصر متمایز باید از اشیاء خاصی تشکیل شده باشد که ثابتهای فردی $\mathscr{L}$ بجای آنها قرار می‌گیرند. همچنین توابع و روابط را باید تعبیرهایی ملموس برای حروف محمولی و حروف تابعی مربوط به $\mathscr{L}$ تلقی کرد. توجه داشته باشید که برای یک زبان خاص $\mathscr{L}$، فهرست ثابتها، حروف تابعی و حروف محمولی ممکن است محدود باشد. یک تعبیر از زبانی مانند $\mathscr{L}$ فقط آنقدر عناصر، توابع، و روابط متمایز دارد که با آنها بتوان نمادهای ظاهر شده در $\mathscr{L}$ را تعبیر کرد.

اکنون در وضعیتی هستیم که بتوانیم عبارت "زبان مرتبه اول" را روشنتر سازیم. چنین زبانی دارای متغیرهایی است قابل تعبیر به عنوان اشیائی در دامنهٔ یک تعبیر، و سورهایی مربوط به این متغیرها. بنابراین در یک تعبیر، سورها روی اشیاء واقع در دامنه تغییر می‌کنند. این خاصیت مشخصهٔ یک زبان مرتبه اول است. یک زبان مرتبه دوم علاوه بر این شامل سورهایی است که روی روابط بین اشیاء (و بنابراین روی روابط بین مجموعه‌های اشیاء) واقع در دامنهٔ یک تعبیر تغییر می‌کنند. چنین زبانی دارای دو نوع متغیر خواهد بود، یک نوع برای اشیاء و نوع دیگر برای روابط. ما توجه خود را تماما "معطوف دستگاههای صوری و زبانهای مرتبهٔ اول خواهیم نمود.

مثال ۳: ۱۵

حساب صوری. مثال ۳: ۵(آ) را برای توصیفی از زبان مرتبه اول مناسب ملاحظه کنید. این زبان مشتمل است بر $a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2, f_2^2$، همچنین متغیرها، سجاوندی، رابطها و سور. می‌توانیم یک تعبیر مانند N را به طریق زیر تعریف کنیم. فرض کنید $D_N = \{0, 1, 2, \ldots\}$، مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. تنها عنصر مشخص عبارتست از 0 (تعبیر متغیر فردی a_1). جمع و ضرب اعداد طبیعی به ترتیب تعبیرهایی از دو

حرف تابعی دومکانی f_1^2 و f_2^2 می‌باشند ، و تابع تالی تعبیر f_1^1 است . رابطهٔ = تعبیر حرف محمولی A_1^2 است .

در این زبان فرمولهای خوش ساخت ، می‌توانند به طریق فوق به عنوان گزاره‌هایی دربارهٔ اعداد طبیعی تعبیر شوند . مثلا " فخس

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \sim (\forall x_3)(\sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)) \qquad (*)$$

دارای تعبیر زیر است .

به ازای هر $x, y \in D_N$ چنین نیست که به ازای هر $z \in D_N$

$$x + z \neq y,$$

یا به عبارت معادل

به ازای هر $x, y \in D_N$، وجود دارد $z \in D_N$ به طوری که

$$x + z = y.$$

▷مثالی از یک گزاره دربارهٔ اعداد طبیعی که تعبیری از فخسی از یک زبان مرتبه اول مناسب نباشد از این قرار است : "هرمجموعهٔ ناتهی از اعداد طبیعی دارای یک کوچکترین عضو است ." این گزاره با یک سور عمومی که روی مجموعه‌های اعداد تغییر می‌کند آغاز می‌شود ، و بنابراین با یک فخس از یک زبان صوری مرتبه دوم برای حساب متناظر می‌شود .

فقط وقتی که تعبیری از نمادهای $\mathscr{L}$ داده شده باشد می‌توانیم چیزی دربارهٔ **معنای** فخس‌ها بگوییم ، و بنابراین درچارچوب یک تعبیر است که می‌توانیم درستی یا نادرستی را بررسی کنیم . فخس $(*)$ فوق الذکر دارای معنایی است که در این تعبیر نادرست است ، ولی در یک تعبیر دیگر معنای آن ممکن است درست باشد .

مثال ۳ : ۱۶

فخس $(*)$ دارای معنایی است که در تعبیر I درست است ، که در آن D_I مجموعهٔ اعداد گویای مثبت است . عدد ۱ تعبیر a_1 است ، ضرب تعبیر f_1^2 ، و تقسیم (تابع خارج قسمت) تعبیر f_2^2 است .

$(*)$ در I به این شکل بیان می‌شود

به ازای هر $x, y \in D_I$ یک $z \in D_I$ وجود دارد به طوری که $xz = y$ که این خاصیتی مشهور از اعداد گویا است .

▷مثال اخیر را به این جهت آوردیم که نشان دهیم تعبیرهای اساسا " متفاوتی از یک زبان صوری $\mathscr{L}$ می‌تواند وجود داشته باشد . درمثالهایی که از زبانها می‌آوریم معمولا " تعبیرخاصی را درذهن داریم ، ولی این نباید توجه ما را از دیگر تعبیرها و نتایج ناشی

از وجود آنها بازدارد .

اکنون ممکن است شباهتی بین این وضعیت و وضعیت فصل ۲ مشاهده کنیم . فخس‌هایی از دستگاه L حساب گزاره‌ها وجود دارد که بخودی خود نمی‌توان آنها را درست یا نادرست تلقی‌کرد . درستی و نادرستی فقط وقتی بامعنی تلقی می‌شدند که به متغیرهای گزاره‌ای ارزشهای درستی تخصیص می‌دادیم یا یک ارزشگذاری می‌ساختیم . از این گذشته ، دیدیم که بعضی از فخس‌ها برحسب این ارزشگذاری ممکن است درست یا نادرست باشند . در دستگاه فعلی ما ، که پیچیده‌تر است ، مفهوم تعبیر با تخصیص ارزش درستی متناظر خواهدبود . طبیعی است که این سؤال مطرح شود که آیا نظیری برای یک راستگو وجود دارد؟ جواب مثبت است و تعریف درست همان چیزی است که انتظار می‌رود ، ولی ما بعداً "به سراغ آن خواهیم رفت . اکنون باید مفهوم درستی یک تعبیر را دقیقتر بیان نماییم . باوجود پیچیدگی ظاهری آنچه که بدنبال خواهدآمد ، این مفاهیم مشکل نیستند ، و خواننده باید تصویر شهودی آنچه را که قبلا" ساخته‌ایم درذهن داشته باشد . برای باقیماندهٔ این‌فصل به‌خواننده‌ای که دراین‌موضوع ناآزموده است پیشنهادمی‌شودکه در اول بار از خواندن جزئیات برهانها صرفنظر کند . برهانها برای درک شهودی مفاهیم موردبحث ضرورتی ندارند ، و توجه زیاد به جزئیات ممکن است این مفاهیم را بپوشاند .

تمرین

۱۱ ــ فرض کنید $\mathscr{L}$ زبان مرتبه اولی باشد که (علاوه بر متغیرها ، سجاوندها ، رابطها و سور) شامل‌متغیر فردی a_1 ، حرف‌تابعی f_1^2 و حرف‌محمولی A_2^2 است . فرض کنید $\mathscr{A}$ نمایشگر فخس

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2))$$

باشد . تعبیری مانند I از $\mathscr{L}$ را به طریق زیر تعریف کنید . D_I یعنی $\mathbf{Z}$ ، $\bar{a}_1$ یعنی 0 ، $\bar{f}_1^2(x, y)$ یعنی $x-y$ ، و $\bar{A}_2^2(x, y)$ یعنی $x<y$. تعبیر $\mathscr{A}$ در I را بنویسید . آیا این یک گزارهٔ درست است یا نادرست؟ تعبیر دیگری بیابیدکه در آن $\mathscr{A}$ با یک گزارهٔ دارای ارزش درستی مخالف تعبیر شود .

۱۲ ــ آیا تعبیری (از یک زبان مناسب $\mathscr{L}$) وجود داردکه در آن فخس

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

با گزاره‌ای نادرست تعبیر شود؟ اگر چنین است یک نمونه را با تفصیل ذکر کنید ، وگرنه علت آن را شرح دهید .

۱۳ ــ تمرین ۱۲ را با فخس زیر تکرار کنید ،

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_2))$$

۴:۳ صدق ، درستی

فرض کنید I تعبیری با دامنهٔ D_I از زبان $\mathscr{L}$ باشد , از این به بعد از نمادگذاری تعریف ۱۴:۳ استفاده خواهیم کرد ، تعبیر a_i ، f_i^n و A_i^n در I به ترتیب $\bar{a}_i$ ، $\bar{f}_i^n$ و $\bar{A}_i^n$ خواهد بود . توجه کنید که به ازای هر i ، $\bar{a}_i \in D_I$, $\bar{f}_i^n : D_I^n \to D_I$, $\bar{A}_i^n$ یک رابطهٔ n ـ مکانی بر D_I است .

تعریف ۱۷:۳

یک ارزشگذاری در I تابعی است مانند v از مجموعهٔ حدود $\mathscr{L}$ به مجموعهٔ D_I با این خاصیتها :

(i) به ازای هر متغیر فردی a_i از $\mathscr{L}$ ، $v(a_i) = \bar{a}_i$

(ii) $v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = \bar{f}_i^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$ که در آن f_i^n حرف تابعی دلخواهی در $\mathscr{L}$ است و $t_1, \ldots, t_n$ حدود دلخواهی از $\mathscr{L}$ هستند ,

بنابراین یک ارزشگذاری فقط قاعده‌ای است که به هر حدی از $\mathscr{L}$ شیئی در D_I را نسبت می‌دهد که باید تعبیر آن باشد ، قسمت (ii) فوق‌الذکر سازگاری این قاعده را تضمین می‌کند .

تذکر ۱۸:۳

(آ) بطورکلی ، در یک تعبیر مفروض ارزشگذاری‌های متعددی وجود خواهد داشت .

(ب) یک ارزشگذاری مفروض به هر متغیر x_i از $\mathscr{L}$ عنصری از D_I را نسبت خواهد داد . یک ارزشگذاری مانند v با دادن $v(x_1), v(x_2), \ldots$ کاملا" مشخص خواهد شد ، زیرا $v(a_i)$ ها بنابرتعریف (i) داده شده‌اند ، و به استقراء ، برای هر حد $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ ارزش $v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n))$ بوسیلهٔ (ii) مشخص می‌شود .

◁ در آینده گاهی باارزشگذاری‌هایی برخورد خواهیم کرد که به مفهوم تعریف بعدی تقریبا" یکی هستند .

تعریف ۱۹:۳

دو ارزشگذاری v و v' را i ـ هم‌ارز نامیم اگر به ازای هر $j \neq i$ ، $v(x_j) = v'(x_j)$

ارزشگذاری‌هایی که i - هم ارز هستندبه ازای هر متغیری دارای ارزش یکسان هستند مگر شاید x_i ، ولی توجه داشته باشیدکه بطورکلی ارزشها به ازای هر حدی مانند t که x_i در آن ظاهر شود متفاوت خواهندبود .

◁اکنون فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ را درنظر می‌گیریم . یک ارزشگذاری مفروض ممکن‌است دارای این اثر باشدکه به طریق زیر به $\mathscr{A}$ " یک‌ارزش درستی تخصیص دهد " . هر حدی مانند t را که در $\mathscr{A}$ ظاهر می‌شودبا $v(t)$ و هر حرف‌تابعی و حرف‌محمولی را باتعبیرش در I جانشین کنید . آنچه بدست می‌آید گزاره‌ای است درباره‌ٔ عناصر مجموعهٔ D_I ، که ممکن است درست یا نادرست باشد . اگر درست باشد می‌گوییم که v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند . اکنون این مطلب را بصورت زیر دقیقتر بیان می‌کنیم .

تعریف ۳:۲۰

فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ ، و I تعبیری از $\mathscr{L}$ باشد . گوییم که یک ارزشگذاری مانند v در I در $\mathscr{A}$ **صدق می‌کند** اگر بتوان بطور استقرائی نشان‌داد که در چهار شرط زیر صدق می‌کند .

(i) v درفرمول بسیط $A_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ صدق می‌کند اگر $\bar{A}_j^n(v(t_1), \ldots, v(t_n))$ در D_I درست باشد .

(ii) v در $(\sim\mathscr{B})$صدق می‌کند اگر v در $\mathscr{B}$ صدق نکند .

(iii) v در $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})$ صدق می‌کند اگر v یا در $(\sim\mathscr{B})$ یا در $\mathscr{C}$ صدق کند .

(iv) v در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ صدق می‌کند اگر هر ارزشگذاری i- هم ارز با v ، مانند v' در $\mathscr{B}$ صدق کند .

تذکر ۳:۲۱

(آ) به ازای هر v و $\mathscr{A}$ ، یا v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند یا در$(\sim\mathscr{A})$ صدق می‌کند .

(ب) شاید توضیحی درباره‌ٔ (iv) بی‌مورد نباشد . $(\forall x_i)\mathscr{B}$ بوسیلهٔ گزاره‌ای مانند " به ازای هر $y \in D_I$, ... " تعبیر خواهد شد که در آن y به عنوان تعبیری از x_i تلقی می‌شود . v تعبیری برای متغیرهایی فراهم می‌سازد که در $\mathscr{B}$ ظاهر می‌شوند ، و جا دارد بگوییم‌که v در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ صدق می‌کند اگر اولا" v در $\mathscr{B}$ صدق کند ، ثانیا" هر ارزشگذاری که از v با تعویض $v(x_i)$ حاصل می‌شود نیز در $\mathscr{B}$ صدق کند .

(پ) این نکته ممکن است‌به درک این تعریف کمک کندکه هر یک از عبارات (i) تا (iv) فوق الذکر را می‌توان به عنوان گزاره‌های " اگر و فقط اگر " تلقی کرد ، زیرا که

طبیعت تعریف چنین است .

مثال ۳:۲۲

(آ) در تعبیر حسابی N فخس $A_1^2(f_2^2(x_1, x_2)$ و $f_2^2(x_3, x_4))$ را درنظر بگیرید . هر ارزشگذاری v که در آن $v(x_1) = 2$ ، $v(x_2) = 6$ ، $v(x_3) = 3$ ، $v(x_4) = 4$ در این فخس صدق خواهد کرد ، زیرا $2 \times 6 = 3 \times 4$ در D_N درست است . مشابهاً "هیچ ارزشگذاری w که در آن $w(x_1) = 1$ ، $w(x_2) = 5$ ، $w(x_3) = 4$ ، $w(x_4) = 2$ در آن صدق نخواهد کرد .

(ب) فخس $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_1^2(x_2, x_1))$ در N چنین تعبیرمی‌شود "به ازای هر $nm = mn, n \in D_N$" که قطعاً " درست تلقی می‌شود ، فرض کنید v یک ارزشگذاری در N باشد ، در این صورت $v(x_1)$ و $v(x_2)$ اعدادی طبیعی هستند ، و بنابراین $A_1^2(f_2^2(x_1, x_2)$ و $f_2^2(x_2, x_1))$ بصورت $v(x_1) \times v(x_2) = v(x_2) \times v(x_1)$ تعبیر می‌شود که قطعاً " درست است . پس v در $A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$ صدق می‌کند . پس بنابر (iv) تعریف فوق ، v در $(\forall x_1)(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_1))$ در N صدق می‌کند. از اینرو هر ارزشگذاری v در N در این فخس صدق می‌کند .

(پ) فخس $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$ بطور شهودی چنین تعبیر می‌شود " به ازای هر $n = 0, n \in D_N$" که نادرست است ، فرض کنید v یک ارزشگذاری در N باشد ، در این صورت $A_1^2(x_1, a_1)$ دارای تعبیر $v(x_1) = 0$ می‌باشد . پس v در $A_1^2(x_1, a_1)$ صدق نمی‌کند مگر این که $v(x_1) = 0$. بنابراین فرض می‌کنیم $v(x_1) = 0$ و می‌پرسیم که آیا v در $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$ صدق می‌کند ، باید بتوان گفت که هر v' ی که با تعویض مقادیر $v(x_1)$ از v بدست آمده باشد نیز در $A_1^2(x_1, a_1)$ صدق می‌کند . ولی نمی‌توانیم . پس هیچ ارزشگذاری در N در $(\forall x_1)A_1^2(x_1, a_1)$ صدق نمی‌کند .

◁ جانشین‌کردن متغیرها بوسیلهٔ متغیرها یا حدود دیگر کار مهمی است که بعداً "به آن خواهیم پرداخت . حکم زیر موردنیاز ما خواهد بود هرچندکه طبیعت فنی آن برهانش را مشکل می‌نماید . این حکم صورتی را که برهانها در این قسمت از بحث اختیار می‌کنند نشان می‌دهد .

حکم ۳:۲۳

فرض کنید $\mathscr{A}(x_i)$ فخسی از $\mathscr{L}$ است که x_i در آن دارای مورد آزاد است ، و فرض کنید t حدی باشد که جانشینی آن بجای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است ، فرض کنید که v یک ارزشگذاری ، و v' یک ارزشگذاری i- هم ارز با v است با این خاصیت که $v'(x_i) = v(t)$

در این صورت v در $\mathscr{A}(t)$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر v' در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق کند .

برهان : ابتدا ملاحظه‌کنیدکه به ازای هر حدی مانند u که x_i درآن ظاهرمی‌شود می‌توانیم با جانشین کردن t بجای x_i درهمه‌جا ، حدی مانند u' بدست بیاوریم و در این صورت $v(u')=v'(u)$. این مطلب را با استقراء بر روی طول u (یعنی تعداد نمادهای موجود در u) ثابت می‌کنیم .

مرحلهٔ پایه‌ای : u همان x_i است ، پس u' همان t است . بنابراین

$$v'(u)=v'(x_i)=v(t) \qquad (\text{بنا به تعریف } v')$$
$$=v(u').$$

مرحلهٔ استقراء : u عبارتست از $f_i^n(u_1, \ldots, u_n)$ که در آن $u_1, \ldots, u_n$ حدودی هستند با طول کوتاهتر ، فرض کنید $u'_1, \ldots, u'_n$ از جانشینی t بجای x_i در همه جا حاصل شده باشد ، پس $u'=f_i^n(u'_1, \ldots, u'_n)$ ، بنابراین

$$v(u')=\bar{f}_i^n(v(u'_1), \ldots, v(u'_n))$$
$$=\bar{f}_i^n(v'(u_1), \ldots, v'(u_n))$$
$$=v'(u) \qquad (\text{طبق فرض استقراء})$$

به این ترتیب $v(u')=v'(u)$ برای هر حدی از $\mathscr{L}$ ثابت شد .

اکنون‌حکم را با استقراء بر روی طول فخس $\mathscr{A}(x_i)$ ، یعنی‌تعداد رابطها و سورهای موجود در $\mathscr{A}(x_i)$ ثابت می‌کنیم .

مرحلهٔ پایه‌ای : $\mathscr{A}(x_i)$ یک فرمول بسیط ، مانند $A_j^n(u_1, \ldots, u_n)$ ، است که در آن $u_1, \ldots, u_n$ حدودی در $\mathscr{L}$ هستند ، فرض‌کنید v' در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق کند ، در این صورت

$\bar{A}_j^n(v'(u_1), \ldots, v'(u_n))$ در تعبیر برقرار است ،

پس

$\bar{A}_j^n(v(u'_1), \ldots, v(u'_n))$ در تعبیر برقرار است ،

که در آن $u'_1, \ldots, u'_n$ به طریقهٔ فوق‌الذکر از جانشین کردن t بجای x_i در همه جا حاصل شده‌اند . (در اینجا از نتیجهٔ مقدماتی فوق استفاده کرده‌ایم) . اکنون v یی داریم که در فخس $A_j^n(u'_1, \ldots, u'_n)$ صدق می‌کند ، یعنی v در $A(t)$ صدق می‌کند . قسمت عکس را می‌توان با پیمودن استدلال از انتها به ابتدا ثابت کرد .

مرحلهٔ استقراء :

* حالت ۱ . $\mathscr{A}(x_i)$ عبارتست از $\sim\mathscr{B}(x_i)$

---

* ــ در متن اصلی $\mathscr{B}(x_i)$ بوده است که اشتباهی بدیهی است . مترجم

حالت ۲ . $\mathscr{A}(x_i)$ عبارتست از $(\mathscr{B}(x_i) \to \mathscr{C}(x_i))$

این حالات ساده هستند و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شوند .

حالت ۳ . $\mathscr{A}(x_i)$ عبارتست از $(j \neq i)$ $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$

فرض کنید که v در $\mathscr{A}(t)$ صدق نمی‌کند . نشان می‌دهیم که v' هم در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق نمی‌کند . یک ارزشگذاری مانند w وجودداردکه j- هم ارز با v است و در $\mathscr{B}(t)$ صدق نمی‌کند . فرض کنید w' ارزشگذاریی باشد i- هم ارز با w ، با این خاصیت که $w'(x_i) = w(t)$. در این صورت با بکار بستن فرض استقراء درمورد $\mathscr{B}(x_i)$ ، داریم که w' در $\mathscr{B}(x_i)$ صدق نمی‌کند (زیرا w در $\mathscr{B}(t)$ صدق نمی‌کند) . اکنون جانشینی t به جای x_i در $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$ آزاد است ، پس x_j در t ظاهر نمی‌شود ، پس $v(t)$ به‌ازای $k \neq j$ فقط به $v(x_k)$ بستگی دارد ولی برای $k \neq j$ داریم $v(x_k) = w(x_k)$ ، پس $v(t) = w(t)$. در نتیجه w' با v' ، j- هم ارز است ، زیرا که w با v ، j- هم ارز است . چون w' در $\mathscr{B}(x_i)$ صدق نمی‌کند پس v' هم در $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$ صدق نمی‌کند ،یعنی v' در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق نمی‌کند . عکس این مطلب دارای استدلالی مشابه است و به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار شده است .

تعریف ۳:۲۴

فخس $\mathscr{A}$ در تعبیری مانند I **درست** است اگر هر ارزشگذاریی در I در $\mathscr{A}$ صدق کند ، $\mathscr{A}$ **نادرست** است اگر ارزشگذاریی در I وجود نداشته باشد که در $\mathscr{A}$ صدق کند .

نمادگذاری : می‌نویسیم $I \models \mathscr{A}$ اگر $\mathscr{A}$ در I درست باشد . این نماد را نباید با $\vdash$ اشتباه کرد ، ولی خواننده باید توجه داشته باشد که هیچکدام از آنها نمادی در زبان صوری نیستند . هر کدام از آنها جزئی از ماوراء زبانی می‌باشند که برای صحبت کردن دربارهٔ زبان صوریمان از آن استفاده می‌کنیم .

تذکر ۳:۲۵

(آ) ممکن است که برای فخس معینی مانند $\mathscr{A}$ بعضی از ارزشگذاریها مانند I در $\mathscr{A}$ صدق کنند و بعضی دیگر صدق نکنند . چنین فخسی در I نه درست است و نه نادرست .

(ب) بنابر تعریف دامنهٔ یک تعبیر ناتهی است ، بنابراین واضح است‌که مجموعهٔ ارزشگذاریها نمی‌تواند تهی باشد . باتوجه به تعریف روشن می‌شود که یک ارزشگذاری مفروض یا در یک فخس مفروض مانند $\mathscr{A}$ صدق می‌کندیا صدق نمی‌کند ، و بنابراین ممکن

نیست که فخسی در یک تعبیر مفروض هم درست و هم نادرست باشد .

(پ) در یک تعبیر مفروض ، فخسی مانند $\mathscr{A}$ نادرست است اگر و فقط اگر $(\sim\mathscr{A})$ درست باشد . این مطلب نتیجهٔ فوری تعریفهای ارزشگذاری و درستی است ، درنتیجه به ازای هیچ فخسی مانند $\mathscr{A}$ چنین نیست که هم $\mathscr{A}$ و هم $(\sim\mathscr{A})$ درست باشند .

(ت) در تعبیرمفروضی مانند I ، فخسی مانند $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ نادرست‌است اگر و فقط اگر $\mathscr{A}$ درست و $\mathscr{B}$ نادرست باشد . برای ملاحظهٔ چگونگی بکار بستن تعریفها ، یک‌طرف این ادعا را ثابت می‌کنیم . فرض کنید $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ در I نادرست باشد . دراین‌صورت هیچ ارزشگذاریی در I در $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ صدق‌نمی‌کند . اگر v ارزشگذاری دلخواهی‌باشد ، آنگاه v در $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ صدق نمی‌کند . بنا به تعریف ۳ : ۲۰ (iii) ، v در هیچیک از $(\sim\mathscr{A})$ و $\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند . بنابراین v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند ولی در $\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند. پس هر ارزشگذاری در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند و در $\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند . درنتیجه $\mathscr{A}$ درست و $\mathscr{B}$ نادرست است .

حکم ۳ : ۲۶

اگر دریک تعبیر خاص مانند I ، فخس‌های $\mathscr{A}$ و $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ درست باشند آنگاه $\mathscr{B}$ هم درست است .

برهان : فرض کنید v یک ارزشگذاری در I باشد . دراین‌صورت v هم در $\mathscr{A}$ وهم‌در $(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$ صدق می‌کند . در این صورت v یا در $(\sim\mathscr{A})$ صدق می‌کند یا در $\mathscr{B}$. اما v نمی‌تواند در $(\sim\mathscr{A})$ صدق کند ، پس v باید در $\mathscr{B}$ صدق کند . درنتیجه هر ارزشگذاری در I در $\mathscr{B}$ صدق می‌کند ، پس $\mathscr{B}$ در I درست است .

حکم ۳ : ۲۷

فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ و I تعبیری از $\mathscr{L}$ باشد . در این صورت $I\vDash\mathscr{A}$ اگر و فقط اگر $I\vDash(\forall x_i)\mathscr{A}$ ، که در آن x_i متغیری دلخواه است .

برهان : فرض کنید $I\vDash\mathscr{A}$ و فرض کنید که v ارزشگذاری دلخواهی در I باشد . در این صورت v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند ، و هر v' ی که i-هم ارز با v باشد نیز در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند ، زیرا که هر ارزشگذاری در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند . پس v در $(\forall x_i)\mathscr{A}$ صدق می‌کند ، و بنابراین هر ارزشگذاریی در $(\forall x_i)\mathscr{A}$ صدق می‌کند ، یعنی $I\vDash(\forall x_i)\mathscr{A}$

اکنون فرض کنید $I\vDash(\forall x_i)\mathscr{A}$ و فرض کنیدکه v ارزشگذاریی‌دلخواهی‌در I باشد . در این صورت v در $(\forall x_i)\mathscr{A}$ صدق می‌کند . پس هر v' ی که i-هم ارز با v باشد در

$\mathscr{A}$ صدق می‌کند . بویژه v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند ،و بنابراین هر ارزشگذاریی در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند . یعنی $I \vDash \mathscr{A}$.

نتیجهٔ ۳:۲۸

فرض کنید $y_1, \ldots, y_n$ متغیرهایی در $\mathscr{L}$ باشند ، و فرض کنید $\mathscr{A}$ **فخسی** از $\mathscr{L}$ باشد . همچنین فرض کنید I یک تعبیر باشد . در این صورت $I \vDash \mathscr{A}$ اگر و فقط اگر

$$I \vDash (\forall y_1) \ldots (\forall y_n)\mathscr{A}$$

برهان : با کاربرد مکرر حکم ۳:۲۷ مطلب ثابت می‌شود .

◁ در این نتیجه دو نکتهٔ شایان ذکر وجود دارد. اولا "افزودن یک سور برای متغیری که در $\mathscr{A}$ مورد آزاد ندارد ، جهت رسیدن به $(\forall x_i)\mathscr{A}$، از لحاظ شهودی تعبیر را عوض نمی‌کند (مثال ۳:۱۰ راملاحظه‌کنید) ، پس تعجب‌آور نیست که در چنین وضعی $\mathscr{A}$ باید درست باشد اگر و فقط اگر $(\forall x_i)\mathscr{A}$ درست باشد . افزودن سوری برای متغیری‌که در $\mathscr{A}$ مورد آزاد دارد ، جهت رسیدن به $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ دارای تأثیر دیگری است . ولی نتیجه فوق خاطرنشان می‌سازد که $\mathscr{A}(x_i)$ درست است اگر و فقط اگر $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ درست‌باشد ، بنابراین هنگامی‌که درستی‌یانادرستی فخس‌های دارای متغیرهای آزاد را بررسی‌می‌کنیم به مفهومی سور (های) عمومی از آنها استنباط می‌شود .

سور وجودی $\exists$ به‌عنوان یک‌نمادمعرف وارد زبان‌صوری شده است . اکنون ارتباط آن را با ارزشگذاری و صدق بررسی می‌کنیم .

حکم ۳:۲۹

در تعبیری مانند I ، یک ارزشگذاری v در فرمول $(\exists x_i)\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر اقلا "یک ارزشگذاری مانند v' وجودداشته باشدکه i - هم ارز v باشد و در $\mathscr{A}$ صدق کند .

برهان : $(\exists x_i)\mathscr{A}$ یعنی $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$. فرض کنیم v در $(\sim\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$ صدق کند . در این صورت v در $(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$ صدق نمی‌کند . پس v' ی وجود دارد که i - هم ارز v است و در $(\sim\mathscr{A})$ صدق نمی‌کند . پس این v' باید در $\mathscr{A}$ صدق کند . قسمت عکس با بکار بستن استدلال فوق درجهت معکوس ثابت می‌شود .

◁ زبان حساب گزاره‌ها شامل رابطهای $\sim$ و $\to$ بود. پس زبان $\mathscr{L}$ نیز چنین است . بنابراین اگر فخسی از L مانند $\mathscr{A}_0$ را اختیار نماییم و هر حرف گزاره‌ای ظاهر شده در آن را با فخسی از $\mathscr{L}$ جایگزین کنیم (یک حرف را همه جا با یک فخس جایگزین کنیم)

فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ بدست‌خواهیم‌آورد . در این صورت $\mathscr{A}$ را یک **نمونهٔ جانشین** $\mathscr{A}_0$ در $\mathscr{L}$ می‌نامیم . مشابها" اگر کار را با فخسی از $\mathscr{L}$ آغاز کنیم ملاحظه خواهیم‌کرد که دارای ساختاری یکسان با فخسی (معمولا "بیش‌از یک) از L است . مثلا "فرض کنید

$$((\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1))$$

این فخس‌از $\mathscr{L}$ یک نمونهٔ جانشین فخس$(p_1 \to p_1)$از L است . در اینجا توجه می‌کنیم که$(p_1 \to p_1)$یک راستگو است . اکنون مفهوم راستگو را برای فخس‌های $\mathscr{L}$ به طریق زیر گسترش می‌دهیم .

تعریف ۳:۳۰

فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ یک راستگو است اگر یک‌نمونهٔ جانشین در $\mathscr{L}$ از یک راستگو در L باشد .

حکم ۳:۳۱

فخسی از $\mathscr{L}$ که راستگو باشد در هر تعبیری از $\mathscr{L}$ درست است .

برهان : روش ما مبتنی‌بر شباهت‌بین تعریفهای ۲:۱۲ و ۳:۳۰ است . فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که یک نمونهٔ جانشین از فخسی مانند $\mathscr{A}_0$ از L است . از هر ارزشگذاری v در یک تعبیر I می‌توانیم یک ارزشگذاری (جزئی) v' از L به طریق زیر بدست آوریم : فرض کنید $p_1, \ldots, p_k$ حرفهای گزاره‌ای ظاهر شده در $\mathscr{A}_0$ باشند ، و فرض کنید $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ فخس‌هایی از $\mathscr{L}$ باشند که برای بدست آوردن $\mathscr{A}$ به جای آنها جانشین شده‌اند . به ازای $1 \le i \le k$ فرض کنید :

$$v'(p_i) = \begin{cases} T & \text{اگر } v \text{ در } \mathscr{A}_i \text{ صدق کند} \\ F & \text{اگر } v \text{ در } \mathscr{A}_i \text{ صدق نکند} \end{cases}$$

اکنون نشان می‌دهیم که v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر $v'(\mathscr{A}_0) = T$. برهان بر مبنای استقراء روی تعداد رابطهای موجود در $\mathscr{A}_0$ است .

مرحلهٔ پایه‌ای : $\mathscr{A}_0$ یک حرف گزاره‌ای مانند p_n است . پس بنا به تعریف v' داریم $v'(p_n) = T$ اگر و فقط اگر v در $\mathscr{A}$ صدق کند .

مرحلهٔ استقراء :

حالت ۱ . $\mathscr{A}_0$ عبارتست از $\sim\mathscr{B}_0$ و بنابراین $\mathscr{A}$ عبارتست از $\sim\mathscr{B}$ ، که $\mathscr{B}$ یک نمونهٔ جانشین $\mathscr{B}_0$ است . پس بنابر فرض استقراء v در $\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند اگر و فقط اگر $v'(\mathscr{B}_0) = F$. درنتیجه v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر باتوجه به تعریفهای ۳:۲۰

(ii) و ۲ : ۱۲ (i)، داشته باشیم $v'(\mathscr{A}_0) = T$

حالت ۲ . $\mathscr{A}_0$ عبارتست از $(\mathscr{B}_0 \rightarrow \mathscr{C}_0)$ و بنابراین $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})$ ، که $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ نمونه‌های جانشین $\mathscr{B}_0$ و $\mathscr{C}_0$ می‌باشند . احکام زیر همگی معادل هستند :

(آ) v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند .

(ب) v یا در $\sim\mathscr{B}$ یا در $\mathscr{C}$ صدق می‌کند (بنابر تعریف ۳ : ۲۰ (iii))

(پ) یا v در $\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند یا v در $\mathscr{C}$ صدق می‌کند .

(ت) یا $v'(\mathscr{B}_0) = F$ یا $v'(\mathscr{C}_0) = T$.

(ث) $v'(\mathscr{B}_0 \rightarrow \mathscr{C}_0) = T$ (بنابر تعریف ۲ : ۱۲)

(ج) $v'(\mathscr{A}_0) = T$

برهان استقرائی در اینجا به پایان می‌رسد. کامل کردن برهان حکم اکنون کاملا "روشن است.

فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که یک راستگو است. بنابراین $\mathscr{A}$ یک نمونهٔ جانشین راستگویی مانند $\mathscr{A}_0$ از L می‌باشد . فرض کنیم v یک ارزشگذاری در تعبیری مانند I باشد ، بنابر آنچه که در بالا گذشت ملاحظه می‌کنیم که v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر $v'(\mathscr{A}_0) = T$. ولی $\mathscr{A}_0$ یک راستگو است ، پس v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند . از اینرو $\mathscr{A}$ در I درست است .

◁ قبلا "دیده‌ایم که در یک تعبیر مفروض لازم نیست هر فخسی درست یا نادرست باشد . مثلا "، فخس $A_1^1(x_1)$ و تعبیری مانند I را درنظر بگیرید بطوری که D_I همان $\mathbb{Z}$ یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح و تعبیر A_1^1 محمول ">0" باشد . در این صورت هر ارزشگذاری مانند v که $v(x_1)>0$ ، در $A_1^1(x_1)$ صدق می‌کند . ولی هیچ ارزشگذاریی مانند w که $w(x_1) \leq 0$ در $A_1^1(x_1)$ صدق نمی‌کند . ازلحاظ شهودی، درست بودن یا نبودن $A_1^1(x_1)$ به تعبیر x_1 بستگی دارد . هنگامی که با یک فخس دارای یک متغیر آزاد سروکار داریم چنین وضعی بسیار پیش می‌آید . نتیجهٔ عمدهٔ بعدی ما می‌گوید که اگر فخسی دارای هیچ متغیر آزادی نباشد در یک تعبیر مفروض یا درست است یا نادرست. ابتدا به مقدماتی نیازمندیم

تعریف ۳ : ۳۲

فخسی از $\mathscr{L}$ مانند $\mathscr{A}$ را **بسته** نامیم اگر دارای هیچ متغیر آزادی نباشد .

حکم ۳ : ۳۳

فرض کنید I تعبیری از $\mathscr{L}$ باشد و فرض کنید که $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ است . اگر v و w ارزشگذاریهایی باشند بطوری که به ازای هر متغیر آزاد x_i از $\mathscr{A}$ ، $v(x_i) = w(x_i)$

آنگاه v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر w در $\mathscr{A}$ صدق کند .

برهان : از طریق استقراء بر روی تعداد رابطها و سورهای موجود در $\mathscr{A}$.

مرحلهٔ پایه‌ای: $\mathscr{A}$ یک فرمول بسیط مانند $A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ است . ارزشگذاریهای v و w به ازای متغیرهای آزادی که در $t_1, \ldots, t_n$ ظاهر می‌شوند و به ازای هر ثابت فردی که ظاهر شده باشد باهم برابرند . پس به ازای $1 \leq i \leq n$ ، $v(t_i) = w(t_i)$. بنابر این v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر w در $\mathscr{A}$ صدق کند .

مرحلهٔ استقراء :

حالت ۱ . $\mathscr{A}$ عبارتست از $\sim\mathscr{B}$.

حالت ۲ . $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$.

این دو حالت صرفاً" با استفاده از تعریفهای مربوطه به آسانی ثابت می‌شوند ، و آنها را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم .

حالت ۳ . $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{B}$.

فرض کنید v در $\mathscr{A}$ صدق کندو فرض کنیدکه w' ، i - هم ارز w باشد . در این صورت چون x_i در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ دارای مورد آزاد نیست اگر y متغیر آزادی از $\mathscr{A}$ باشد داریم $v(y) = w'(y)$. اکنون هر v' ی که i - هم ارز v باشد در $\mathscr{B}$ صدق می‌کند ، پس بویژه فرض کنید v' با روابط زیر مشخص شود

$$v'(x_i) = w'(x_i)$$

$$v'(x_j) = v(x_j) \quad \text{اگر } j \neq i$$

بنابراین هرگاه y متغیر آزادی از $\mathscr{B}$ باشدداریم $w'(y) = v'(y)$. پس بنابر فرض استقراء چون v' در $\mathscr{B}$ صدق می‌کند ، w' در $\mathscr{B}$ صدق می‌کندو بنابراین هر w یی در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ صدق می‌کند .

دقیقاً" به همان روش ثابت می‌کنیم که اگر w در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ صدق کند آنگاه v در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ صدق می‌کند .

به این ترتیب استقراء کامل و نتیجه ثابت می‌شود .

نتیجهٔ ۳ : ۲۴

اگر $\mathscr{A}$ فخس بسته‌ای از $\mathscr{L}$ و I تعبیری از $\mathscr{L}$ باشد ،آنگاه یا $I \models \mathscr{A}$ یا $I \models (\sim\mathscr{A})$

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی بسته ،و I یک‌تعبیر باشد . اگر v و w ارزشگذاریهای دلخواهی‌باشند ، بدیهی‌است‌که اگر y یک‌متغیر آزاد از $\mathscr{A}$ باشد ($\mathscr{A}$ هیچ متغیرآزادی ندارد) آنگاه $v(y) = w(y)$. پس v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر w در $\mathscr{A}$ صدق

کند . بنابراین یا هر ارزشگذاریی در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند یا هیچ ارزشگذاریی در $\mathscr{A}$ صدق نمی‌کند ، یعنی یا $\mathscr{A}$ در I درست است یا $\mathscr{A}$ در I نادرست است . بنابرتذکر ۳ : ۲۵ (پ) یا $I \models \mathscr{A}$ یا $I \models (\sim\mathscr{A})$.

◁ این نتیجه ازلحاظ ما حائز اهمیت فراوان است ، زیرا که مفهوم درستی در یک تعبیر مهمتر از مفهوم صدق بوسیلهٔ یک ارزشگذاری است . آنچه ثابت کرده‌ایم عبارت است از این‌که برای فرمولهای بسته همهٔ ارزشگذاریها در یک تعبیر خاص ازلحاظ صدق کردن یک فرمول مفروض جواب یکسانی را به ما می‌دهند . پس برای بررسی درستی یا نادرستی یک فخس بستهٔ مفروض فقط لازم است این را بررسی کنیم که آیا تعبیری وجود دارد که در آن صدق کند یا نه . همچنین خواهیم‌دید هنگامی که با ریاضیات فی‌نفسه سروکار داریم فرمولهای بسته بیشتر مطرح می‌باشند . درحقیقت فرمولهای دارای متغیرهای آزاد گاهی بنحوی غیرطبیعی رفتار می‌کنند .

تعبیرها به فخس‌های بستهٔ $\mathscr{L}$ ارزشهای درستی می‌بخشند . ممکن است که برای فخس مفروضی از $\mathscr{L}$ مانند $\mathscr{A}$ همهٔ تعبیرهای $\mathscr{L}$ به آن ارزش T ببخشند ، یعنی $\mathscr{A}$ در همهٔ تعبیرهای ممکن $\mathscr{L}$ درست باشد .

تعریف ۳ : ۳۵

فخسی از $\mathscr{L}$ مانند $\mathscr{A}$ را **منطقا "معتبر** می‌نامند اگر $\mathscr{A}$ در هرتعبیری از $\mathscr{L}$ درست باشد . $\mathscr{A}$ **متناقض** است اگر در هر تعبیری نادرست باشد .

این مفاهیم مشابه مفاهیم راستگو و تناقض درفصل ۱ می‌باشند . درست همانطورکه در آنجا فرمولهایی وجودداشتندکه نه راستگو بودندو نه تناقض ، در $\mathscr{L}$ نیز فخس‌هایی وجود دارند که نه منطقا "معتبرند و نه متناقض .

تذکر ۳ : ۳۶

(آ) از حکم ۳ : ۲۶ فورا "نتیجه می‌شودکه اگر فخس‌های $\mathscr{A}$ و $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ منطقا "معتبر باشند $\mathscr{B}$ نیز منطقا "معتبر است .

(ب) به شیوه‌ای مشابه از حکم ۳ : ۲۷ نتیجه می‌شود که اگر فخس $\mathscr{A}$ منطقا "معتبر باشد ، $(\forall x_i)\mathscr{A}$ نیز ، که در آن x_i متغیر دلخواهی است ، منطقا "معتبر است .

مثال ۳ : ۳۷

(آ) دیدیم که هر نمونهٔ جانشین در $\mathscr{L}$ از یک راستگو در L منطقا "معتبر است

(حکم ۳:۳۱) بنابراین ملاحظه می‌شود که ردهٔ فخس‌های منطقاً "معتبر $\mathscr{L}$ شامل ردهٔ راستگوها ست .

(ب) $((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{A})$ به ازای هر فخس مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ منطقاً "معتبر است . اثبات به طریق زیر است :

فرض کنید I تعبیری باشد با دامنهٔ D_I و v یک ارزشگذاری در I باشد . اگر v در $(\forall x_i)\mathscr{A}$ صدق نکند ، پس v در $((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{A})$ صدق می‌کند . اگر v در $(\forall x_i)\mathscr{A}$ صدق کند ، پس هر ارزشگذاری v' که i - هم ارز با v باشد نیز در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند ، پس، بنابر حکم ۳:۲۹ ، v در $(\exists x_i)\mathscr{A}$ صدق می‌کند . از اینرو در این حالت v نیز در $((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{A})$ صدق می‌کند . بنابراین ثابت‌کرده‌ایم که یک ارزشگذاری دلخواه در یک تعبیر دلخواه در فخس مفروض صدق می‌کند . پس این فخس منطقاً "معتبر است .

(پ) $((\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$ منطقاً "معتبر نیست . برهان این مطلب شاید اندکی پیچیدگی داشته باشد ، زیرا کاری که باید بکنیم یافتن تعبیری است که این فخس در آن درست نباشد . باید یک دامنهٔ D_I ، یک تعبیر برای حرف محمولی A_1^2 ، و یک ارزشگذاری که در این فخس صدق نکند انتخاب کنیم .

فرض کنید $D_I = \mathbb{Z}$ و فرض کنید $\bar{A}_1^2(y, z)$ یعنی "$y < z$" . اکنون بدون انتخاب یک ارزشگذاری واضح است که فخس بستهٔ $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ در این تعبیر درست است ، و $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ نادرست می‌باشد . یعنی هر ارزشگذاریی در اولی صدق می‌کند ولی در دیگری صدق نمی‌کند . پس هیچ ارزشگذاریی در فخس مفروض صدق نمی‌کند . پس این فخس در این تعبیر درست نیست ، و نمی‌تواند منطقاً "معتبر باشد .

(ت) $A_1^1(x_1)$ منطقاً "معتبر نیست . همانطورکه قبلاً "دیدیم (بعد از حکم ۳:۳۱) نه تنها این فخس منطقاً "معتبر نیست ، بلکه تعبیری وجود دارد که در آن نه درست است و نه نادرست .

◁ بطور کلی برای اثبات اعتبار منطقی باید نشان دهیم که یک ارزشگذاری دلخواه در یک تعبیر دلخواه در فخس موردنظر صدق می‌کند . برای اثبات این که یک فخس منطقاً "معتبر نیست معمولاً " قدری ابتکار لازم است تا عملاً "تعبیری بسازیم که در آن ارزشگذاریی وجود داشته باشد که در آن صدق نکند .

تمرین

۱۴ — در تعبیر حسابی N از مثال ۳:۵ ، ارزشگذاریی بسازید که اولاً " در فخس‌های

زیر صدق کنند ، ثانیا" در این فخس‌ها صدق نکنند .

آ) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$

ب) $(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3))$

پ) $\sim A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_3))$

ت) $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$

ث) $((\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1) \to A_1^2(x_1, x_2))$

۱۵ ــ در تعبیر توصیف‌شده درتمرین ۱۱ ، ارزشگذاریهایی بسازیدکه اولا" در فخس‌های زیر صدق کنند ، ثانیا" در این فخس‌ها صدق نکنند .

آ) $A_2^2(x_1, a_1)$

ب) $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to A_2^2(a_1, f_1^2(x_1, x_2))$

پ) $\sim A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$

ت) $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$

ث) $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1) \to A_2^2(x_1, x_2)$

۱۶ ــ کدامیک از فخس‌های بستهٔ زیر در تعبیر N درست هستند و کدامیک نادرست ؟

آ) $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1)$

ب) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_2, a_1), x_1))$

پ) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$

ت) $(\exists x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_1, x_1))$

۱۷ ــ کدامیک از فخس‌های بستهٔ زیر درتعبیر تمرین ۱۱ درست هستندوکدامیک نادرست ؟

آ) $(\forall x_1)A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$

ب) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\sim A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1))$

پ) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_2^2(x_1, x_2) \to A_2^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$

ت) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_2^2(x_1, f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2))$

۱۸ ــ ثابت کنید که در یک تعبیر مفروض ، فخس $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ نادرست است اگر و فقط اگر $\mathscr{A}$ درست و $\mathscr{B}$ نادرست باشد (تذکر ۳ : ۲۵ (ت) را ملاحظه کنید .)

۱۹ ــ نشان دهید که هر یک از فخس‌های زیر منطقا" معتبر هستند .

آ) $((\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2))$

ب) $(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to ((\forall x_1)A_2^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2))$

پ) به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$: $(\forall x_1)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_1)\mathscr{A} \to (\forall x_1)\mathscr{B})$

ت) به ازای هر فخس $\mathscr{A}$: $((\forall x_1)(\forall x_2)\mathscr{A} \to (\forall x_2)(\forall x_1)\mathscr{A})$

۲۰ ــ مثالی از یک فخس منطقا " معتبر ارائه کنید که بسته نباشد .

۲۱ ــ نشان دهید که اگر t حدی باشد که جانشینی آن بجای x_i در فخس $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است ، آنگاه فخس $(\mathscr{A}(t)\rightarrow(\exists x_i)\mathscr{A}(x_i))$ منطقا " معتبر است .

۲۲ ــ نشان دهید که هیچکدام از فخس‌های زیر منطقا " معتبر نیستند .

(آ) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow(\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$

(ب) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2)\rightarrow A_1^2(x_2, x_1))$

(پ) $(\forall x_1)((\sim A_1^1(x_1))\rightarrow(\sim A_1^1(a_1)))$

(ت) $((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1)\rightarrow(\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2))$

۲۳ ــ فرض کنید $\mathscr{A}(x_i)$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که در آن x_i دارای مورد آزاد است و فرض کنیدکه t حدی باشدکه جانشینی آن بجای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است . فرض کنید که v ارزشگذاریی باشد بطوری که $v(t)=v(x_i)$. نشان دهید که v در $\mathscr{A}(t)$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر v در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق کند .

۳ : ۵ سکولمیدن*

فخس

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2) \qquad (*)$$

را درنظر بگیرید . بخاطر سادگی فرض می‌کنیم که $\mathscr{B}(x_1, x_2)$ فخسی است که در آن فقط x_1 و x_2 دارای مورد آزاد می‌باشند . می‌توان تصور کردکه این فخس چنین می‌گوید :

به ازای هر x_1 وجوددارد x_2 یی که x_1 و x_2 رابطهٔ بیان شده بوسیلهٔ $\mathscr{B}(x_1, x_2)$ را با یکدیگر دارند .

به‌عبارت‌دیگر این‌فخس‌تناظری‌بین مقادیر نمایش داده شده‌بوسیلهٔ x_1 و x_2 را توصیف می‌نماید . لزومی ندارد که با هر مقدار x_1 یک مقدار منحصر بفرد x_2 همراه باشد ، ولی می‌توان تصور کرد که به ازای هر x_1 انتخابی صورت گرفته باشد ، و ازآنجا تابعی تعریف شود . معنای فخس

$$(\forall x_1)\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$$

شبیه معنای فخس $(*)$ است به شرط این که حرف تابعی h_1^1 از همهٔ حروف تابعی ظاهر شده متمایز باشد . این فخس را **صورت سکولمیدهٔ** $(*)$ و تابع h_1^1 را یک **تابع سکولمی** می‌نامند . برای پرهیز از هرگونه اختلالی نماد تابع سکولمی را از گردایه جدیدی از

* مأخوذ از نام T. Skolem به معنی سکولمی کردن .

نمادها ، که با نمادهای بخش ۲:۳ متفاوت است برمی‌گزینیم .

به‌ازای اعداد صحیح مثبت i و n ، h_i^n یک نماد تابع سکولمی n ـ مکانی خواهد بود .

صورت سکولمیدهٔ یک فخس قطعا "همان معنا را ندارد . بنابراین نمی‌توان انتظار داشت که این دو فخس منطقا " هم‌ارز باشند . ولی به مفهوم ضعیفی هم‌ارز می‌باشند ، یعنی اگر یکی از آنها متناقض باشد دیگری نیز متناقض است . ولی قبل از ادامهٔ کار مفهوم سکولمیدن را گسترش می‌بخشیم .

فرض کنیم که فخس $(\exists x_i)\mathscr{B}$ به عنوان یک فرمول جزء در فخس $\mathscr{A}$ ، و در دامنهٔ عمل سورهای عمومی $(\forall x_{i_1}),\ldots,(\forall x_{i_r})$ ظاهر شود ، در این صورت می‌توان $\mathscr{B}$ را به صورت $\mathscr{B}(x_{i_1},\ldots,x_{i_r},x_i)$ نوشت ، هرچندکه لازم نیست همهٔ این متغیرها صریحا " در $\mathscr{B}$ ظاهر شوند . اکنون سور وجودی $(\exists x_i)$ را حذف کرده و همهٔ موارد x_i را با (مثلا ") $h_1^r(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})$ جانشین کنید .

این کار یک مرحله از فرآیندی را مشخص می‌کند که می‌تواند برای حذف همهٔ سورهای وجودی از یک فخس مفروض بکار رود . اما حالتی‌که فوقا "درنظر گرفته‌نشده است هنگامی است که یک سور وجودی ظاهر می‌شود ولی در دامنهٔ عمل یک سور عمومی قرار ندارد . موارد متغیرهای مسور در این‌حالت بجای حدهای تابعی‌بوسیلهٔ نمادهای ثابت جایگزین می‌شوند . پس علاوه بر حروف‌تابعی سکولمی h_i^r ، به گردآیه‌ای از حروف‌ثابت سکولمی ، مثلا " c_i نیز نیاز داریم .

مثال ۳: ۳۸

(آ)
$$(\forall x_1)(\exists x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow(\exists x_3)\,A_1^3(x_1,x_2,x_3))$$

به صورت سکولمیدهٔ

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,h_1^1(x_1))\rightarrow A_1^3(x_1,h_1^1(x_1),h_2^1(x_1)))$$

منجر می‌شود .

(ب)
$$(\exists x_1)(\forall x_2)((A_1^1(x_1)\wedge(\forall x_3)\,A_1^3(x_1,x_2,x_3))\rightarrow(\exists x_4)(\forall x_5)\,A_1^3(x_1,x_4,x_5))$$

به صورت سکولمیدهٔ

$$(\forall x_2)((A_1^1(x_2)\wedge(\forall x_3)\,A_1^3(c_1,x_2,x_3))\rightarrow(\forall x_5)\,A_1^3(c_1,h_1^1(x_2),x_5))$$

منجر می‌شود .

◁ همانطورکه درحالتهای سادهٔ فوق‌به‌آسانی دیده می‌شود فرآیند سکولمیدن به نتیجه‌ای منتهی‌می‌گردد که مستقل از ترتیب برداشتن سورهای وجودی است . بنابراین

صرفنظر از تغییرات حاصل از انتخاب ثابتها و توابع سکولمی مختلف ، هر فخسی یک صورت سکولمیدهٔ منحصر بفرد دارد .

حکم ۳:۳۹

فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ متناقض است اگر و فقط اگر صورت سکولمیدهٔ آن متناقض باشد .

برهان : برهان این حکم با تمام کلیت آن مفصلتر از آن است که در اینجا آورده شود ، ولی به منظور آشنا شدن با نحوهٔ آن ، برهان یک حالت سادهٔ آن را می‌آوریم. فرض کنید که این فخس به صورت $(\forall x_1)(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$ باشد ، پس صورت سکولمیدهٔ آن ، $\mathscr{A}^{\mathrm{S}}$ ، عبارتست از $(\forall x_1)\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$. آسانتر خواهد بود که حکم را به این صورت تعدیل شده (ولی هم ارز) ثابت کنیم : تعبیری وجود دارد که در آن $\mathscr{A}$ درست است اگر و فقط اگر تعبیری وجود داشته باشد که $\mathscr{A}^{\mathrm{S}}$ در آن درست باشد .

ابتدا فرض کنید که I تعبیری است که فخس $\mathscr{A}$ در آن درست است . در این صورت فخس $(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$ هم بنابر حکم ۳:۲۷ ، در I درست است . این بدان معنی است که هر ارزشگذاری در I ، در $(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$ صدق می‌کند . فرض کنیم $x \in D_I$ و v یک ارزشگذاری باشد بطوری که $v(1) = x$. پس بنابر حکم ۳:۲۹ ، ارزشگذاریی مانند v' در I وجود دارد که 2-هم ارز با v بوده و در $\mathscr{B}(x_1, x_2)$ صدق می‌کند . فرض کنند $\bar{h}_1^1(x) = v'(2)$. این کار را می‌توان برای هر $x \in D_I$ انجام داد و بدین‌گونه مقادیر تابعی مانند $\bar{h}_1^1$ را تعریف کرد . با افزودن $\bar{h}_1^1$ به عنوان تعبیری از h_1^1 ، I را به تعبیری مانند I^{S} از زبانی که شامل تابع سکولمی h_1^1 است توسیع دهید . در این صورت هر ارزشگذاری در I^{S} در $\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$ صدق می‌کند و بنابراین (مجدداً با استفاده از حکم ۳:۲۷) $\mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$ در I^{S} درست است .

اکنون به عکس فرض کنید که تعبیری مانند I^{E} از زبان توسیع یافته (شامل h_1^1) وجود دارد که $\mathscr{A}^{\mathrm{S}}$ در آن درست است . فرض کنید که I تعبیری باشد که با I^{S} یکی است فقط با این تفاوت که فاقد تعبیر h_1^1 است ، و فرض کنید که v یک ارزشگذاری در I باشد . یک ارزشگذاری v' را به این‌طریق بسازید : $v'(2) = \bar{h}_1^1(v(1))$ و به ازای $j \neq 2$ ، $v'(j) = v(j)$. در این صورت v' ارزشگذاریی در I است که در $\mathscr{B}(x_1, x_2)$ صدق می کند و 2-هم ارز با v است . پس بنابرحکم ۳:۲۹ ، v در $(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$ صدق می‌کند . پس همهٔ ارزشگذاریهای در I ، در $(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$ صدق می‌کنند ، و بنابراین $(\forall x_1)(\exists x_2)\mathscr{B}(x_1, x_2)$ همانطور که می‌خواستیم در I درست است .

تمرین

۲۴ ـ فخس‌های زیر را سکولمی نمایید .

آ) $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)\, A_1^3(x_1, x_2, x_3)$

ب) $(\exists x_1)((\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_3)\, A_2^2(x_1, x_2))$

پ) $(\forall x_1)(\sim A_1^1(x_1) \to (\exists x_2)(\exists x_3)(\sim A_1^2(x_2, x_3)))$

ت) $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)((\sim A_1^2(x_1, x_2) \vee A_2^1(x_1)) \to A_2^2(x_3, x_4))$

۴

حساب صوری محمولات

۱:۴ دستگاه صوری $K_{\mathscr{L}}$

درفصل۳ زبانهای صوریی را که بکار خواهیم‌برد توصیف کردیم و دیدیم که چگونه انواع مختلف گزاره‌ها را می‌توان به فخس‌های زبانهای مرتبهٔ اول مناسب برگرداند. همانند فصل ۳، در این فصل هم یک زبان مرتبه اول نامشخص ولی ثابت $\mathscr{L}$ را درنظر می‌گیریم تا نتایج بدست آمده کلی باشند و درمورد همهٔ زبانهای مرتبه اول بکار روند. نمادهای $\mathscr{L}$ را می‌توان به روشهای مختلف متعددی تعبیر نمود، ولی ما فقط به جنبه‌های صوری‌محض زبان توجه داریم و بیشتر روابط منطقی فخس‌ها را بررسی‌می‌کنیم تا خاصیتهایی که به یک تعبیر خاص وابسته هستند. طرح کار شبیه فصل ۲ است. یک دستگاه قیاسی صوری تعریف می‌کنیم، سپس نشان می‌دهیم که این دستگاه خاصیتهای موردنظر را دارد، یعنی این که سازگار است و ردهٔ قضایای آن دقیقا" عبارتست از ردهٔ فخس‌های منطقا" معتبر.

یک زبان مرتبه اول ثابت درنظر بگیرید. با اصول موضوعه و قواعد استنتاجی زیر یک دستگاه قیاسی صوری $K_{\mathscr{L}}$ تعریف کنید.

اصول موضوعه

فرض کنید $\mathscr{A}$، $\mathscr{B}$، $\mathscr{C}$ فخس‌های دلخواهی از $\mathscr{L}$ باشند. اصول موضوعهٔ $K_{\mathscr{L}}$ عبارتند از

(K1) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$.

(K2) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$.

(K3) $(\sim\mathscr{A} \to \sim\mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$.

(K4) $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ به شرط آنکه x_i در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد نباشد

(K5) $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$

به شرط آنکه $\mathscr{A}(x_i)$ فخسی از $\mathscr{L}$ ، و t حدی از $\mathscr{L}$ باشد که جانشینی آن بجای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است .

$$(K6) \quad (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$$

به شرط آنکه $\mathscr{A}$ شامل هیچ مورد آزادی از متغیر x_i نباشد .

توجه داشته باشید که اینها طرحهای اصل موضوعی هستند و هر کدام دارای تعدادی نامتناهی نمونه می‌باشند .

قواعد

(۱) **قیاس استثنائی** ، یعنی از $\mathscr{A}$ و $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ نتیجه می‌شود $\mathscr{B}$ ، که $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های دلخواهی از $\mathscr{L}$ هستند .

(۲) **تعمیم** ، یعنی از $\mathscr{A}$ نتیجه می‌شود $(\forall x_i)\mathscr{A}$ که در آن $\mathscr{A}$ فخس دلخواهی از $\mathscr{L}$ ، و x_i متغیری دلخواه است .

تذکر ۴ : ۱

(آ) طرحهای اصل موضوعی و قواعد استنتاجی برای $K_{\mathscr{L}}$ شامل طرحهای اصل موضوعی و قواعد استنتاجی $\mathscr{L}$ می‌باشند . اصول موضوعه و قاعدهٔ اضافی برای اثبات خاصیتهای مربوط به سورها لازم می‌باشند .

(ب) اصل $(K5)$ به کلی‌ترین صورتش بیان شده است . در عمل ما با نمونهٔ $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ برخورد می‌کنیم که در آن x_i ممکن است در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد باشد یا نباشد . اگر x_i در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد باشد می‌توانیم $\mathscr{A}$ را بصورت $\mathscr{A}(x_i)$ بنویسیم و از $(K5)$ نتیجه می‌شود $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_i))$ ، زیرا جانشینی x_i بجای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است (تذکر ۳ : ۱۳) . اگر x_i در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد نباشد در این صورت بنابر $(K4)$ داریم $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$

تعریف ۴ : ۲

(تعریف ۲ : ۲ را ملاحظه‌کنید) . یک **برهان** در $K_{\mathscr{L}}$ دنباله‌ای از فخس‌های $\mathscr{L}$ مانند $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ است بطوری‌که به ازای هر i، $(1 \le i \le n)$، یا $\mathscr{A}_i$ یکی از اصول موضوعهٔ $K_{\mathscr{L}}$ است و یا این که بوسیلهٔ ق یا تعمیم از اعضای دیگر دنباله نتیجه می‌شود .

اگر Γ دنباله‌ای از فخس‌های $\mathscr{L}$ باشد، یک **صورت استنتاجی** Γ در $\mathscr{L}$ ، دنباله‌ای مشابه است که اعضای Γ را می‌توان در آن گنجاند . (تعریف ۲ : ۵ را ملاحظه کنید) .

فخسی مانند $\mathscr{A}$ یک **قضیهٔ** $K_{\mathscr{L}}$ است اگر آخرین جملهٔ دنباله‌ای باشد که یک برهان

در $K_{\mathscr{L}}$ را تشکیل می‌دهد .

فخسی مانند $\mathscr{A}$ یک **نتیجهٔ منطقی** در $K_{\mathscr{L}}$ از مجموعهٔ Γ از فخس‌ها است ، اگر $\mathscr{A}$ آخرین جملهٔ دنباله‌ای باشد که یک استنتاج از Γ در $K_{\mathscr{L}}$ را تشکیل می‌دهد .

برای نشان دادن این‌که "$\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ است " می‌نویسیم $\vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$ ، و برای نشان دادن این که " $\mathscr{A}$ نتیجهٔ منطقی Γ در $K_{\mathscr{L}}$ است " که در آن Γ مجموعه‌ای از فخس‌های $K_{\mathscr{L}}$ می‌باشد می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$

برای راحتی کار $K_{\mathscr{L}}$ را مختصرا " بصورت K می‌نویسیم مگر این که به‌دلیلی لازم باشد که بر زبان مورد استفاده تأکید گردد .

حکم ۴ : ۳

اگر $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ و همچنین یک راستگو باشد ، در این‌صورت $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از K است . (برخلاف وضعیت موجود در فصل ۲ ، ملاحظه خواهیم کرد که عکس این مطلب نادرست است .)

برهان : فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ یک راستگو است اگر فخسی مانند $\mathscr{A}_0$ از L وجود داشته باشدکه راستگو باشد و $\mathscr{A}$ از آن با جانشین کردن فخس‌های $\mathscr{L}$ بجای متغیرهای گزاره‌ای بدست آمده باشد . فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که راستگو است و فرض کنید $\mathscr{A}_0$ فخس متناظر در L باشد . پس $\mathscr{A}_0$ یک راستگو است و از اینرو $\vdash_{L} \mathscr{A}_0$. برهانی از $\mathscr{A}_0$ در L را می‌توان صرفا "باتعویض متغیرهای گزاره‌ای بوسیلهٔ فخس‌های مناسب $\mathscr{L}$ ، به برهانی از $\mathscr{A}$ در K تبدیل کرد . آنچه که بدست می‌آید برهانی در K است زیرا طرحهای اصل موضوعی $(L1)$, $(L2)$, $(L3)$ و قاعدهٔ ق بین K و L مشترکند . پس همانطور که می‌خواستیم $\vdash_{K} \mathscr{A}$.

◁حکمی مشابه حکم ۲ : ۱۴ برای دستگاه L وجود دارد . این حکم می‌گوید که هر قضیهٔ K منطقا "معتبر است . برهان این حکم شبیه برهان۲ : ۱۴ است و با تحقیق این که اصول موضوعه K منطقا "معتبر هستند آغازمی‌شود . ثابت شده است که همهٔ نمونه‌های $(K1)$,$(K2)$, $(K3)$ازنظر منطقی معتبرند (حکم ۳ : ۲۹) ، زیرا راستگو هستند .

حکم ۴ : ۴

همهٔ نمونه‌های طرحهای اصل موضوعی $(K4)$,$(K5)$, $(K6)$ منطقا "معتبر هستند .

برهان : درمورد $(K4)$ فرض کنید v یک ارزشگذاری در تعبیری مانند I از $\mathscr{L}$ باشد ، و فرض کنید v در $(\forall x_i)\mathscr{A}$ صدق کند . در این صورت هر v' ی که iـ هم ارز

با v باشد در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند . به ویژه v در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند . پس هر ارزشگذاری در I ، در $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ صدق می‌کند ، و بنابراین به ازای هر تعبیر I داریم $\models ((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$، یعنی $((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ منطقا "معتبر است .

درمورد $(K5)$ ، فرض کنید جانشینی t بجای x_i در فخس $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد باشد ، و فرض کنید که v یک ارزشگذاری در تعبیری مانند I باشد . اگر v در $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ صدق نکند آنگاه v در $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$ صدق می‌کند (تعریف ۳:۲۰) . پس فرض کنیدکه v در $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ صدق کند . نشان‌می‌دهیم‌که v در $\mathscr{A}(t)$ نیز صدق می‌کند . هر w یی که i - هم ارز v باشد در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق می‌کند ، به ویژه v' در $\mathscr{A}(x_i)$ صدق می‌کند ، که $v'(x_i) = v(t)$ ، و برای $k \neq i$ ، $v'(x_k) = v(x_k)$. پس بنابر حکم ۳:۲۳ ، v در $\mathscr{A}(t)$ صدق می‌کند . اکنون نتیجه می‌شودکه هر ارزشگذاری مانند v در I ، در $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$ صدق می‌کند،وبنابراین به‌ازای هر I داریم $I \models ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$ یعنی همانطور که می‌خواستیم $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$منطقا "معتبر است .

درمورد $(K6)$، فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌هایی از $\mathscr{L}$ باشند ، و فرض کنید که x_i در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد نیست . فرض کنید v یک ارزشگذاری در تعبیری مانند I باشد . اثبات مطلب همان طرح قبلی را دنبال می‌کند . فرض کنید v در $(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ صدق کند . دراین صورت هر w یی که i - هم ارز v باشد در$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$صدق می‌کند . بنابراین هر چنین w یی یا در $\mathscr{A}$ صدق نمی‌کندیا در $\mathscr{B}$ صدق می‌کند . اکنون اگر یکی از این w ها در $\mathscr{A}$ صدق نکند آنگاه هیچ چنین w یی در $\mathscr{A}$ صدق نمی‌کند ، زیرا (بنابر حکم۳:۲۳) x_i در $\mathscr{A}$ آزاد نیست . v یکی از این w ها است . بنابراین داریم

یا v در $\mathscr{A}$ صدق نمی‌کند

یا هر w یی که i - هم ارز v باشد در $\mathscr{B}$ صدق می‌کند .

ازاینرو

یا v در $\mathscr{A}$ صدق نمی‌کند ، یا v در $(\forall x_i)\mathscr{B}$ صدق می‌کند .

یعنی v در $(\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$ صدق می‌کند . پس هر ارزشگذاری در I در $((\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}))$ صدق می‌کند . بنابراین مانند قبل $((\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}))$ منطقا " معتبر است .

حکم ۵:۴ (قضیهٔ صحت برای K)

به ازای هر فخس مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ ، اگر $\vdash_K \mathscr{A}$ آنگاه $\mathscr{A}$ منطقا " معتبر است .

برهان : با استقراء روی تعداد مراحل موجود در یک برهان $\mathscr{A}$.

مرحلهٔ پایه‌ای : اگر $\mathscr{A}$ دارای برهانی یک‌مرحله‌ای باشد آنگاه $\mathscr{A}$ یک اصل‌موضوعه K است . ما قبلا " نشان داده‌ایم که هر اصل موضوعهٔ K منطقا " معتبر است .

مرحلهٔ استقراء : فرض کنید $\mathscr{A}$ برهانی با n مرحله دارد $(n > 1)$ ، و همهٔ قضایای K که دارای برهانهایی با کمتر از n مرحله هستند ، منطقا " معتبر می‌باشند $\mathscr{A}$ در یک برهان ظاهر می‌شود . پس یا $\mathscr{A}$ یک اصل‌موضوعه است ، یا $\mathscr{A}$ از فخس‌های قبلی موجود در برهان ، با استفاده از ق یا تعمیم حاصل‌می‌شود . اگر $\mathscr{A}$ یک اصل موضوعه باشد در این صورت منطقا "معتبر است ، اگر $\mathscr{A}$ از فخس‌های قبلی $\mathscr{B}$ و$(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})$ موجود در برهان، با استفاده از ق حاصل شود ، در این صورت $\mathscr{B}$ و$(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})$دارای برهانهای کوتاهتری، هستند و بنابراین طبق فرض استقراء منطقا " معتبر می‌باشند . در این صورت بنابر تذکر ۳:۳۶ (آ) ، $\mathscr{A}$ منطقا " معتبر است . همچنین اگر $\mathscr{A}$ از یک فخس قبلی ، مثلا " $\mathscr{C}$ به تعمیم حاصل شده باشد ، در این صورت $\mathscr{C}$ منطقا " معتبر است و $\mathscr{A}$ که عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{C}$ نیز ، بنابر تذکر ۳:۳۶ (ب) منطقا " معتبر است . پس در هر حالتی $\mathscr{A}$ منطقا " معتبر است و به این ترتیب برهان کامل می‌شود .

نتیجهٔ ۴:۶

K سازگار است (یعنی به ازای هیچ فخسی مانند $\mathscr{A}$ ، هم $\mathscr{A}$ و هم$(\sim\mathscr{A})$قضایای K نیستند) .

برهان : فرض کنید به ازای فخسی از $\mathscr{L}$ مانند $\mathscr{A}$ داشته‌باشیم $\vdash_K \mathscr{A}$ و $\vdash_K (\sim\mathscr{A})$. در این صورت بنابر حکم ۴:۵ ، $\mathscr{A}$ و$(\sim\mathscr{A})$ هر دو منطقا " معتبر هستند . بنابراین در هر تعبیر ، هم $\mathscr{A}$ و هم $(\sim\mathscr{A})$ هر دو درست می‌باشند .

این با تذکر ۳:۲۵ (پ) متناقض است . بنابراین K باید سازگار باشد .

⊳همچنانکه برای L دیدیم یافتن برهانهایی در K برای قضیه‌های K مشکل است و ما مجددا " درپی یافتن روشهایی هستیم که پی بردن به قضیه بردن فخس‌های خاص را آسان سازد . ما حکمی‌برای K دراختیار داریم که باقضیهٔ استنتاج (حکم ۲:۸) متناظر ولی‌اندکی‌از آن پیچیده‌تراست. ابتدابه کمک یک‌مثال می‌بینیم که چرا باید چنین باشد.

مثال ۴:۷

می‌دانیم که برای هر فخس $\mathscr{A}$ از K ، $\mathscr{A} \vdash_K (\forall x_1)\mathscr{A}$ (این مطلب به آسانی از قاعدهٔ تعمیم حاصل می‌شود) . اما لزوما " چنین نیست که $\vdash_K (\mathscr{A} \rightarrow (\forall x_1)\mathscr{A})$

برای ملاحظهٔ این نکته فرض کنید $\mathscr{A}$ عبارت باشد از $A_1^1(x_1)$. فرض کنید I

تعبیری است که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد صحیح ، Z ، است و فرض کنید $\bar{A}_1^1$ محمول '$=0$' باشد . بنابراین از لحاظ شهودی $A_1^1(x_1)$ به صورت '$x=0$' تعبیر می‌شود . هر ارزشگذاری در I که در آن $v(x_1)=0$ ، در $A_1^1(x_1)$ صدق می‌کند . اما هر ارزشگذاری 1 - هم ارز با چنین v یی (و متفاوت با آن) در $A_1^1(x_1)$ صدق نخواهد کرد . بنابراین هیچ ارزشگذاریی در I در $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ صدق نمی‌کند . پس ارزشگذاریی وجود دارد که در $A_1^1(x_1)$ صدق می‌کند ولی در $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ صدق نمی‌کند . این ارزشگذاری در $(A_1^1(x_1)\to(\forall x_1)A_1^1(x_1))$ صدق نمی‌کند . و درنتیجه این فخس در I درست نیست . پس منطقا" معتبر نیست و از اینرو بنابر حکم ۴ : ۵ ، نمی‌تواند قضیه‌ای از K باشد .

حکم ۴ : ۸ (قضیهٔ استنتاج برای K)

فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌هایی از $\mathscr{L}$ ، و Γ مجموعه‌ای (شاید خالی) از فخس‌های $\mathscr{L}$ باشد . اگر $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_K\mathscr{B}$ ، و استنتاج متضمن هیچ کاربردی‌از تعمیم نسبت‌به متغیری که در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد است نباشد آنگاه $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

برهان : برهان بوسیلهٔ استقراء روی n ، یعنی تعداد فخس‌های موجود در استنتاج $\mathscr{B}$ از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ ، است .

مرحلهٔ پایه‌ای $n=1$: $\mathscr{B}$ یک اصل موضوعه ، یا همان $\mathscr{A}$ یا عضوی از Γ است . درست به همان طریقی که برهان متناظر در L را انجام دادیم $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ را نتیجه می‌گیریم.

مرحلهٔ استقراء : فرض کنید $n>1$ ، و فرض کنید که اگر $\mathscr{F}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که بتوان آن را از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ بدون استفاده از تعمیم نسبت به متغیری که در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد است ، با استنتاجی که کمتر از n فخس دارد ، نتیجه گرفت آنگاه $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{F})$

حالت ۱ . $\mathscr{B}$ از فخس‌های قبلی موجود در استنتاج بوسیلهٔ ق نتیجه می‌شود . در اینجا مجددا" برهان با L یکسان است .

حالت ۲ . $\mathscr{B}$ یک اصل‌موضوعه ، یا همان $\mathscr{A}$ یا عضوی از Γ است . باز هم برهان با L یکسان است .

حالت ۳ . $\mathscr{B}$ از یک فخس قبلی موجود در استنتاج به تعمیم حاصل می‌شود . پس $\mathscr{B}$ مثلا" بصورت $(\forall x_i)\mathscr{C}$ است ، که $\mathscr{C}$ قبلا" در استنتاج ظاهر شده است . پس $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_K\mathscr{C}$ و این استنتاج کمتر از n فخس دارد ، پس $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$ ، زیرا هیچ تعمیمی نسبت به یک متغیر آزاد $\mathscr{A}$ انجام نشده است . همچنین x_i نمی‌تواند در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد باشد ، زیرا که در تعمیمی در استنتاج $\mathscr{B}$ از $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ بکار رفته است . پس به طریق زیر $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ از Γ نتیجه می‌شود .

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \\ \vdots & \\ (k) & (\mathscr{A}\to\mathscr{C})\end{array}\right\}$$ استنتاج $(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$ از Γ

$(k+1)$	$(\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$	(k) و تعمیم
$(k+2)$	$(\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\to(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{C})$	$(K6)$
$(k+3)$	$(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{C})$	$(k+1), (k+2)$,ق

پس همانطور که می‌خواستیم $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ ، و به این‌ترتیب برهان استقرائی ما خاتمه می‌یابد .

◁ این مفیدترین شکل قضیهٔ استنتاج برای K است . می‌توان شرط اضافی راجع به استفاده از تعمیم را تضعیف‌نمود (ص ۶۱ ، Mendelson را ملاحظه کنید) ، ولی چنین کاری لازم‌نیست . تقویت‌این شرط اضافی به نتیجهٔ زیر منجر می‌شودکه اغلب‌مفیداست .

نتیجهٔ ۴:۹

اگر $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_K\mathscr{B}$ ، و $\mathscr{A}$ یک فخس بسته باشد ، آنگاه $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$.

با وجود این که قضیهٔ استنتاج برای K ظاهرا " از کلیت کمتری برخوردار است ، درست همانطورکه درمورد L ملاحظه شد ، می‌تواندبرای نشان دادن این که فخس‌های معینی قضیه هستند مفید واقع شود .

نتیجه ۴:۱۰

به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$ ، $\mathscr{B}$ ، $\mathscr{C}$ از $\mathscr{L}$ ،

$$\{(\mathscr{A}\to\mathscr{B}),(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\}\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$$

برهان : برهان عینا " شبیه برهان نتیجهٔ ۲:۱۰ است .

◁ از اینجاملاحظه می‌شود که استفاده ازق ف در K نیز مانند L مجاز است . درست مانند L ، قضیهٔ استنتاج برای K نیز دارای یک قضیهٔ عکس است .

حکم ۴:۱۱

فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های $\mathscr{L}$ و Γ مجموعه‌ای از فخس‌های $\mathscr{L}$ باشد ، و $\Gamma\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

در این صورت $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_K\mathscr{B}$

برهان : با برهان حکم ۲:۹ یکی است .

مثال ۴:۱۲

اگر x_i در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد نباشد آنگاه

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})).$$

استنتاج زیر را می‌نویسیم

(1)	$(\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$	فرض
(2)	$(\forall x_i)\mathscr{B} \to \mathscr{B}$	$(K4)$ یا $(K5)$
(3)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1) ، (2) ، ق ف
(4)	$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(3) ، تعمیم

پس داریم

$$(\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}) \vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}).$$

توجه داریم که در این استنتاج تعمیم بکار رفته است ، منتها فقط نسبت‌به متغیر x_i ، که در $(\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$ دارای مورد آزاد نیست . پس می‌توانیم قضیهٔ استنتاج را بکار برده و همانطور که می‌خواستیم داشته باشیم

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})),$$

مثال ۴:۱۳

به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از $\mathscr{L}$ ،

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\exists x_i)\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{B})).$$

مجددا "یک استنتاج می‌نویسیم . مرحلهٔ (۲) در این استنتاج درنظر اول چندان روشن نیست ، ولی دلیل آن را در پایان خواهیم دید .

(1)	$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	فرض
(2)	$(\forall x_i)(\sim\mathscr{B})$	فرض
(3)	$(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	$(K4)$ یا $(K5)$
(4)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(1) ، (3) ، ق
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A})$	راستگو
(6)	$(\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A})$	(4) ، (5) ، ق
(7)	$((\forall x_i)(\sim\mathscr{B}) \to (\sim\mathscr{B}))$	$(K4)$یا$(K5)$
(8)	$(\sim\mathscr{B})$	(2) ، (7) ، ق
(9)	$(\sim\mathscr{A})$	(6) ، (8) ، ق
(10)	$(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$	(9) ، تعمیم

این نشان می‌دهد که

$$\{(\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}), (\forall x_i)(\sim\mathscr{B})\} \vdash_K (\forall x_i)(\sim\mathscr{A}).$$

بنابر قضیهٔ استنتاج داریم

$$(\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash_K ((\forall x_i)(\sim\mathscr{B}) \rightarrow (\forall x_i)(\sim\mathscr{A})),$$

زیرا x_i در $(\forall x_i)(\sim\mathscr{B})$ دارای مورد آزاد نیست . اکنون می‌دانیم که

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\sim\mathscr{B}) \rightarrow (\forall x_i)(\sim\mathscr{A})) \rightarrow (\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A}) \rightarrow \sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{B}))$$

و بنابراین با استفاده از ق داریم

$$(\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash_K (\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A}) \rightarrow \sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{B}))$$

یعنی

$$(\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash_K ((\exists x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{B}).$$

مجددا "با استفاده از قضیهٔ استنتاج

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{B})),$$

تمرین

۱ ــ برای فخس زیر برهانی در $K_{\mathscr{L}}$ بنویسید .

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(x_1)).$$

۲ ــ ثابت کنید که فخس‌های زیر قضایای $K_{\mathscr{L}}$ هستند

(آ) $(\exists x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$

(ب) $((\exists x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow (\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$

به شرط این که x_i در $\mathscr{B}$ دارای مورد آزاد نباشد .

(پ) $(\sim(\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i) \sim \mathscr{A})$

۳ ــ(آ) در استنتاج زیر چه اشکالی وارد است ؟

(1)	$(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$	فرض
(2)	$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$	(1) ، تعمیم
(3)	$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$	$(K5)$
(4)	$(\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$	(2) ، (3) ، ق

بنابراین $(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2)$ ، و از اینرو بنابر قضیهٔ استنتاج

$$\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2).$$

(ب) با یافتن تعبیری مناسب نشان دهید که فرمول

$$((\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_2))$$

منطقا "معتبرنیست، و بنابراین قضیه‌ای از K نمی‌باشد .

تذکر ۱۴:۴

بی‌مناسبت نیست که رابط $\leftrightarrow$ را به عنوان یک نماد تعریف شده به زبانمان وارد کنیم . برای فخس‌های $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از $\mathscr{L}$، $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ را بجای $\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ بکار می‌بریم . مجددا " توجه داشته باشید که $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ فخسی از $\mathscr{L}$ نیست ، ولی ما آن را بجای اختصار مناسبی از فخسی از $\mathscr{L}$ بکار می‌بریم .

حکم ۱۵:۴

به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ از $\mathscr{L}$، $\vdash_K(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ اگر وفقط اگر $\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ و $\vdash_K(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$

برهان : ابتدا فرض کنیدکه $\vdash_K(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ ، یعنی $\vdash_K\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ اما فخس‌های $(\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$ و $(\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$ راستگو هستند (بررسی امر به‌خواننده واگذار می‌شود) ،وبنابراین طبق حکم ۳:۴ ، قضایای K می‌باشند . سپس ، بنابر ق داریم

$$\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B}) \quad \text{و} \quad \vdash_K(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$$

اکنون فرض کنید $\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ و $\vdash_K(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$. باید نشان دهیم که $\vdash_K\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$. کافیست نشان دهیم که فخس

$$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to((\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to\sim((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{A})))$$

یک راستگو است و این کار با ساختن یک جدول درستی انجام می‌شود .

تعریف ۱۶:۴

اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های $\mathscr{L}$ باشند و $\vdash_K(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ ، می‌گوییم که $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ **بطور قابل اثباتی هم‌ارز** هستند .

نتیجهٔ ۱۷:۴

به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ از $\mathscr{L}$ اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ بطور قابل اثباتی هم‌ارز باشندو $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ بطورقابل‌اثباتی‌هم ارز باشند آنگاه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{C}$بطور قابل اثباتی هم‌ارزهستند.

برهان : فرض کنید $\vdash_K(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ و $\vdash_K(\mathscr{B}\leftrightarrow\mathscr{C})$. در این صورت $\vdash_K(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

و $\vdash_K (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ پس بنابر ق ف داریم $\vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$

همچنین $\vdash_K (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ و $\vdash_K (\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ ،پس مجدداً "بنابر ق ف داریم $\vdash_K (\mathscr{C} \to \mathscr{A})$

بنابراین طبق حکم ۴:۱۵ ، $\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{C})$

◁هنگامی‌که بخواهیم ثابت کنیم دو فخس بطور قابل اثباتی هم ارز هستند حکم اخیر مفیدواقع خواهد شد . تنها لازم است‌نشان‌دهیم که هر دو استلزام قضیه هستند . در قسمت بعدی توصیفمان از K ، که در آن چگونگی جانشینی فخس‌ها و جانشینی متغیرها را بررسی خواهیم‌کرد ، به این مطلب نیاز خواهیم‌داشت . در فصل ۱ این کار را به روشی غیرصوری انجام‌دادیم‌دراینجا حضور متغیرها کار را مشکل‌می‌کند ،بنابراین بعضی از برهانها طولانی‌هستند . اما ، این نتایج در آینده موردا ستفاده خواهندبود ، و ازاینرو برای کار ما لازم می‌باشند .

کار را با بررسی این که چگونه می‌توان متغیرها را جانشین کرد آغاز می‌کنیم . فخس $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ ، (بطور شهودی) بصورت "به ازای هر x_1 ، $\bar{A}_1^1(x_1)$ برقرار است" تعبیر خواهد شد . به همین روش، فخس $(\forall x_2)A_1^1(x_2)$ ، بطور شهودی بصورت "به ازای هر x_2 ، $\bar{A}_1^1(x_2)$ برقرار است" ، تعبیر خواهد شد . پس به‌نظر می‌رسد متغیری که بالفعل در این فخس (دراین‌مورد) ظاهر می‌شود‌بر تعبیر تأثیری ندارد . بنابراین در دستگاه صوری K ، این دو فخس باید از جهتی هم ارز باشند . این‌نکته را درحکم‌بعدی بدقت بیان می‌کنیم .

همانند گذشته فرض کنید $\mathscr{A}(x_i)$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که در آن x_i (شاید بیش‌از یک‌بار) دارای مورد آزاد است . بنابراین به ازای هر متغیر x_j ، $\mathscr{A}(x_j)$ فخسی را نشان می‌دهد که از جانشینی x_j بجای هر مورد آزاد x_i حاصل می‌شود .

حکم ۴:۱۸

اگر x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ دارای مورد آزاد باشد ، و x_j متغیری باشدکه به صورت آزاد یا پابند در $\mathscr{A}(x_i)$ ظاهر نمی‌شود آنگاه

$$\vdash_K ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)).$$

برهان : ابتدا ملاحظه کنیدکه تحت‌شرایط مشخص شده ، جانشینی x_i بجای x_j در $\mathscr{A}(x_j)$ و جانشینی x_j بجای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است . برای نشان دادن این‌که هر دو استلزام ، قضایای K هستند به دو استنتاج نیاز داریم .

(1)	$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$	مقدمه
(2)	$((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_j))$	$(K5)$

(3)	$\mathscr{A}(x_j)$	(1) ، (2) ، ق
(4)	$(\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)$	(3) ، تعمیم

$$\therefore \qquad (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \vdash_K (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j).$$

پس بنابر قضیهٔ استنتاج ،

$$\vdash_K ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)),$$

زیرا x_j در $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ دارای مورد آزاد نیست . دقیقاً " به همین روش ثابت می‌کنیم که

$$\vdash_K ((\forall x_j)\mathscr{A}(x_j) \to (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)).$$

پس بنابر حکم ۴:۱۵ داریم

$$\vdash_K ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)).$$

◁ این حکم نشان می‌دهد که می‌توانیم با تعویض یک متغیر پابند خاص فخسی بدست آوریم که بطور قابل اثباتی هم‌ارز فخس اصلی باشد ، به شرط این‌که متغیر جدید را به طور مناسب انتخاب کنیم . فایده این روش بعداً " آشکار خواهد شد .

حکم ۴:۱۹

فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که متغیرهای آزاد آن $y_1, \ldots, y_n$ می‌باشند .
در این صورت $\vdash_K \mathscr{A}$ اگر و فقط اگر $\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$

برهان : ابتدا فرض کنید که $\vdash_K \mathscr{A}$. با استقراء روی n ، یعنی تعداد متغیرهای آزاد $\mathscr{A}$ کار را آغاز می‌کنیم .

مرحلهٔ پایه‌ای : $n = 1$ (حالتی‌که فرمولها دارای متغیر آزادنباشند بدیهی است) $\mathscr{A}$ دارای یک‌متغیر آزاد یعنی y_1 است . اگر $\vdash_K \mathscr{A}(y_1)$ آنگاه با یک‌بار بکار بستن تعمیم $\vdash_K (\forall y_1)\mathscr{A}(y_1)$

مرحلهٔ استقراء : فرض کنید $n > 1$ ، و فرض کنید که نتیجه برای هر فخسی از $\mathscr{L}$ که دارای $n-1$ متغیر آزاد است برقرار می‌باشد . فخس $(\forall y_n)\mathscr{A}$ را در نظر بگیرید . این فخس دارای $n-1$ متغیر آزاد است . داریم $\vdash_K \mathscr{A}$ پس بنابر تعمیم $\vdash_K (\forall y_n)\mathscr{A}$ درنتیجه بنابر فرض استقراء $\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_{n-1})(\forall y_n)\mathscr{A}$

به عکس ، فرض کنید $\vdash_K (\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$. مشابهاً " با استقراء روی n ، و با استفاده از کاربردهای $(K5)$ ثابت می‌کنیم که $\vdash_K \mathscr{A}$

تعریف ۴:۲۰

اگر $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که شامل مواردآزاد فقط $y_1, \ldots, y_n$ است ، آنگاه فخس

$(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)\mathscr{A}$ بستار عمومی $\mathscr{A}$ نامیده می‌شود . بستار عمومی $\mathscr{A}$ را معمولا" با $\mathscr{A}'$ نشان می‌دهند .

تذکر ۴:۲۱

حکم فوق می‌گوید که به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ ، $\vdash_K \mathscr{A}$ اگر و فقط اگر $\vdash_K \mathscr{A}'$. اما باید توجه داشت که بطور کلی $\mathscr{A}$ و $\mathscr{A}'$ بطور قابل اثباتی هم ارز نیستند . نشان دادن این که $\vdash_K (\mathscr{A}' \to \mathscr{A})$ چندان مشکل نیست ، ولی در مثال ۴:۷ دیدیم که $(\mathscr{A} \to \mathscr{A}')$ لزوما " قضیه‌ای از K نیست .

حکم ۴:۲۲

فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخسهایی از $\mathscr{L}$ باشند ، و فرض کنید که $\mathscr{B}_0$ از جانشین کردن $\mathscr{B}$ بجای یک یا چند مورد از موارد $\mathscr{A}$ در $\mathscr{A}_0$ بدست آمده باشد . در این صورت

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)).$$

برهان: برهان با استقراء روی طول $\mathscr{A}_0$ (یعنی تعداد رابطها و سورهای موجود در آن) است.

مرحلهٔ پایه‌ای : لزوما " فرض می‌کنیم که $\mathscr{A}$ به عنوان یک زیر فرمول در $\mathscr{A}_0$ وجود دارد . $\mathscr{A}_0$ درصورتی کمترین تعداد رابطها و سورها را دارد که $\mathscr{A}_0$ همان $\mathscr{A}$ باشد . در این‌حالت $\mathscr{B}_0$ عینا " همان $\mathscr{B}$ است . در این‌صورت $\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}))$ نمونه‌ای از نتیجهٔ کلی مذکور در تذکر ۴:۲۱ است .

مرحلهٔ استقراء : فرض کنید $\mathscr{A}$ به عنوان یک زیر فرمول اکید در $\mathscr{A}_0$ وجود داشته باشد ، و فرض کنیدکه این نتیجه برای همه فخس‌هایی که کوتاهتر از $\mathscr{A}_0$ می‌باشندو $\mathscr{A}$ را به‌عنوان یک زیر فرمول دربردارند درست‌باشد . مانند برهانهای قبل باید سه حالت را درنظر گرفت .

حالت ۱ : $\mathscr{A}_0$ عبارتست از $\sim\mathscr{C}_0$. در این صورت $\mathscr{B}_0$ عبارتست از مثلا" $\sim\mathscr{D}_0$ ، که در آن $\mathscr{D}_0$ حاصل‌جانشینی $\mathscr{B}$ بجای $\mathscr{A}$ در $\mathscr{C}_0$ است . اکنون تعدادرابطها و سورهای $\mathscr{C}_0$ کمتر از $\mathscr{A}_0$ است ، پس

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$$

چون $((\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0) \to (\sim\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \sim\mathscr{D}_0))$ یک راستگو است ، پس قضیه‌ای از K است و بنا بر ق ف (نتیجهٔ ۴:۱۰) داریم ،

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\sim\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \sim\mathscr{D}_0)),$$

یعنی

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})') \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)).$$

حالت ۲ : $\mathscr{A}_0$ عبارتست از $(\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0)$. در این صورت $\mathscr{B}_0$ عبارتست از $(\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0)$ که در آن $\mathscr{E}_0$ و $\mathscr{F}_0$ به ترتیب حاصل جانشینی $\mathscr{B}$ بجای $\mathscr{A}$ در $\mathscr{C}_0$ و $\mathscr{D}_0$ می‌باشند . اکنون تعداد رابطها و سورهای هر کدام از $\mathscr{C}_0$ و $\mathscr{D}_0$ کمتر از $\mathscr{A}_0$ است ، پس

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{E}_0)),$$

و

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{D}_0 \leftrightarrow \mathscr{F}_0)).$$

به عنوان تمرین نشان دهید که از این قضایا نتیجه می‌شود که

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to ((\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0) \leftrightarrow (\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0))),$$

یعنی

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)).$$

حالت ۳ : $\mathscr{A}_0$ عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{C}_0$. در این صورت $\mathscr{B}_0$ عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{D}_0$ که در آن $\mathscr{D}_0$ حاصل‌جانشینی $\mathscr{B}$ بجای $\mathscr{A}$ در $\mathscr{C}_0$ است . اکنون تعدادرابطها و سورهای $\mathscr{C}_0$ کمتر از $\mathscr{A}_0$ است ، پس

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)).$$

سپس بنابر تعمیم خواهیم داشت

$$\vdash_K (\forall x_i)((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)).$$

چون x_i در $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$ دارای مورد آزاد نیست ، پس به عنوان نمونه‌ای از $K6$ داریم

$$\vdash_K ((\forall x_i)((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)) \to ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\forall x_i)(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$$

بنابراین ، طبق ق ،

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\forall x_i)(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)),$$

و بابکاربستن لم زیرکه برهان آن به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود، به‌نتیجه‌مطلوب خود یعنی

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to ((\forall x_i)\mathscr{C}_0 \leftrightarrow (\forall x_i)\mathscr{D}_0)),$$

و یا

$$\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)),$$

می‌رسیم ، و برهان استقرائی ما کامل می‌شود .

تمرین

لم : اگر $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌های $\mathscr{L}$ باشند ، آنگاه

$$\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \rightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\forall x_i)\mathscr{B}).$$

نتیجهٔ ۴ : ۲۳

فرض کنیم $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0$ همان باشند که در حکم ۴ : ۲۲ ذکر شد . اگر $\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ آنگاه $\vdash_K (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$.

برهان : فرض کنیم $\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ در این صورت بنابر حکم ۴ : ۱۹ $\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$ بنابر حکم ۴ : ۲۲ ، $\vdash_K ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \rightarrow (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0))$. پس بنابر ق ، داریم

$$\vdash_K (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$$

نتیجهٔ ۴ : ۲۴

اگر x_j در فخس $\mathscr{A}(x_i)$ (به صورت آزاد یا پابند) ظاهر نشود ، و فخس $\mathscr{B}_0$ از $\mathscr{A}_0$ با تعویض یک یا چند مورد از موارد $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ بوسیلهٔ $(\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)$ حاصل شده باشد آنگاه $\vdash_K (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$

برهان : کافیست حکم ۴ : ۱۸ ، و نتیجهٔ ۴ : ۲۳ بکار بسته شوند .

تمرین

۴ ــ ثابت کنید به ازای فخس‌های دلخواه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ ،

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \rightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\forall x_i)\mathscr{B})),$$

۵ ــ ثابت کنید به ازای هر فخس $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ ، فرمولهای $\sim(\exists x_i)\mathscr{A}$ و $(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$ در K بطور قابل اثباتی هم ارز هستند .

۶ ــ به دقت ثابت کنید که

(آ) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K (\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(x_2, x_3)$

(ب) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \vdash_K (\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1)$

۷ ــ فرض کنید $\mathscr{A}(x_i)$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که x_i در آن دارای مورد آزاد است ، و فرض کنید x_j متغیری باشد که چه به صورت آزاد و چه به صورت پابند در $\mathscr{A}(x_i)$ ظاهر نمی‌شود . ثابت کنید که $\vdash_K ((\exists x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\exists x_j)\mathscr{A}(x_j))$

۴ : ۳ صورت پیشوندی

در فصل ۱ مفهوم صورتهای نرمال معرفی شد ، و صورتهای نرمال فصلی و عطفی موردبحث قرار گرفتند . یکی از فواید صورتهای نرمال این است که روابط موجود در

ساختار منطقی را ، که ممکن است در صورتهای اصلی آشکار نباشند ، ظاهر می‌سازند . اکنون در وضعیتی هستیم که صورتهای نرمال را برای فخس‌های $\mathscr{L}$ توصیف کنیم و در حالی‌که قبلا" در یک صورت نرمال فقط رابطهای معینی را به روشی‌استانده بکارمی‌بردیم ، در اینجا علاوه بر آن با نحوهٔ قرارگرفتن سورها نیز سروکار داریم .

حکم ۲۵:۴

فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس‌هایی از $\mathscr{L}$ باشند .

(i) اگر x_i در $\mathscr{A}$ دارای مورد آزاد نباشد ، آنگاه

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \rightarrow (\forall x_i)\mathscr{B})),$$

و

$$\vdash_K ((\exists x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \rightarrow (\exists x_i)\mathscr{B})).$$

(ii) اگر x_i در $\mathscr{B}$ دارای مورد آزاد نباشد ، آنگاه

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})),$$

و

$$\vdash_K ((\exists x_i)(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})).$$

برهان : هشت برهان در K لازم‌داریم . یکی‌ازآنها بدیهی‌است ، زیرا که فخس موردبحث نمونه‌ای از$(K6)$است ، یکی‌دیگر قبلا" درمثال ۱۲:۴ عرضه شده بودو دیگری به آسانی از مثال ۱۳:۴ نتیجه می‌شود . دیگر فخس‌ها برهانهای مشابهی لازم دارند که در آنها مکررا" از قضیهٔ استنتاج استفاده می‌شود . این برهانها را به عنوان تمرین واگذار کرده‌ایم .

مثال ۲۶:۴

نشان دهید که فخس

$$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)$$

بطور قابل اثباتی هم ارز فخس زیر است

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_2, x_3)).$$

دنباله‌ای از فخس‌ها می‌نویسیم که هر یک در هر مرحله با استفاده از قسمتی از حکم ۲۵:۴ بطور قابل اثباتی هم ارز بعدی است .

$$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3),$$
$$(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)),$$

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \to (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)),$$
$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3)).$$

◁ فخس‌های $\mathscr{L}$ می‌توانند بسیار پیچیده باشند، و ارتباط دادن سورهای موجود در آنها بطور شهودی بویژه اگر از یکدیگر جدا باشند، می‌تواند مشکل باشد. ما می‌توانیم نتایج فوق دربارهٔ جانشینی و هم ارزی را برای نشان‌دادن این‌که هر فخسی بطور قابل اثباتی هم ارز فخسی است که همهٔ سورهای آن در ابتدای فخس ظاهر شده باشند بکار بریم.

تعریف ۴ : ۲۷

فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$ را دارای **صورت پیشوندی** می‌گوییم اگر به صورت

$$(Q_1x_{i_1})(Q_2x_{i_2}) \ldots (Q_kx_{i_k})\mathscr{D}$$

باشد، که در آن $\mathscr{D}$ فخس فاقد سوری از $\mathscr{L}$، و هر Q_j یا $\forall$ یا $\exists$ است. (یک فخس بدون سور به‌عنوان حالتی بدیهی از یک فخس دارای صورت پیشوندی تلقی می‌شود).

حکم ۴ : ۲۸

به ازای هر فخس $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}$، فخسی دارای صورت پیشوندی مانند $\mathscr{B}$ وجود دارد که بطور قابل اثباتی هم ارز $\mathscr{A}$ است.

برهان: بنابر حکم ۴ : ۱۸، می‌توانیم همهٔ متغیرهای پابند $\mathscr{A}$ را به طریقی تعویض کنیم که با همهٔ متغیرهای آزاد $\mathscr{A}$ متفاوت باشند (ولی متغیرهای آزاد عوض نشوند)، و فخسی مانند $\mathscr{A}_1$ بدست‌آوریم بطوری‌که $\vdash_K (\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{A})$. اکنون با استقراء روی طول (تعداد رابطها و سورهای موجود در) $\mathscr{A}_1$ کار را ادامه می‌دهیم.

مرحلهٔ پایه‌ای: $\mathscr{A}_1$ فرمولی بسیط است. در اینجا چیزی را نباید ثابت کنیم زیرا $\mathscr{A}_1$ از قبل دارای صورت پیشوندی هست.

مرحلهٔ استقراء: فرض کنیم $\mathscr{A}_1$ فرمولی بسیط نباشد و فرض کنیم که هر فخسی که کوتاهتر از $\mathscr{A}_1$ باشد بطور قابل اثباتی هم ارز یک فخس دارای صورت پیشوندی است. سه حالت وجود دارد.

حالت ۱: $\mathscr{A}_1$ عبارتست از $\sim\mathscr{C}$. پس $\mathscr{C}$ کوتاهتر از $\mathscr{A}_1$ است و بنابراین فخسی دارای صورت پیشوندی مانند $\mathscr{C}_1$ وجود دارد که $\vdash_K (\mathscr{C}_1 \leftrightarrow \mathscr{C})$. در نتیجه $\vdash_K (\mathscr{A}_1 \leftrightarrow (\sim\mathscr{C}_1))$ یعنی، مثلاً

$$\vdash_K (\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \sim(Q_1x_{i_1}) \ldots (Q_kx_{i_k})\mathscr{D})$$

پس $\vdash_K (\mathscr{A}_1 \leftrightarrow (Q_1^*x_{i_1}) \ldots (Q_k^*x_{i_k})(\sim\mathscr{D}))$، که در آن به ازای $1 \leq j \leq k$ اگر Q_j، $\forall$

باشد ، Q_j^* عبارتست از $\exists$ ، واگر Q_j ، $\exists$ باشد آنگاه Q_j^* عبارتست از $\forall$.
پس $\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ ، و $\mathscr{B}$ دارای صورت پیشوندی است .

حالت ۲ : $\mathscr{A}_1$ عبارتست از $(\mathscr{C} \to \mathscr{D})$. دراین صورت $\mathscr{C}$ و $\mathscr{D}$ کوتاهتر از $\mathscr{A}_1$ هستند و بنابراین فخس‌هایی دارای صورت پیشوندی مانند $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{D}_1$ وجود دارند بطوری که

$$\vdash_K (\mathscr{C}_1 \leftrightarrow \mathscr{C}) \quad \text{و} \quad \vdash_K (\mathscr{D}_1 \leftrightarrow \mathscr{D})$$

پس بنابر نتیجهٔ ۴ : ۲۳

$$\vdash_K (\mathscr{C} \to \mathscr{D}) \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D})$$

و از اینرو ، بنابر همان نتیجه ، و نتیجهٔ ۴ : ۱۷

$$\vdash_K (\mathscr{C} \to \mathscr{D}) \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1),$$

یعنی

$$\vdash_K (\mathscr{A}_1 \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1)).$$

پس ، بنابر نتیجهٔ ۴ : ۱۷ ، $\vdash_K (\mathscr{A} \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1))$. اکنون $(\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1)$ بصورت

$$((Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_k x_{i_k})\mathscr{C}_2 \to (R_1 x_{j_1}) \ldots (R_l x_{j_l})\mathscr{D}_2)$$

است که در آن $\mathscr{C}_2$ و $\mathscr{D}_2$ شامل هیچ سوری نیستند ، و Q ها و R ها یا $\forall$ هستند یا $\exists$. اکنون با بکاربستن مکرر حکم ۴ : ۲۵ همهٔ سورها را به اول فخس آورده ودرصورت لزوم عوض می‌کنیم . از آنجا که $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ همگی متفاوت هستند و با متغیرهای آزادموجود در $\mathscr{C}_2$ و $\mathscr{D}_2$ نیزمتفاوت می‌باشند، این کار قابل انجام است . پس داریم

$$\vdash_K ((\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1) \leftrightarrow (Q_1^* x_{i_1}) \ldots (Q_k^* x_{i_k})(R_1 x_{j_1}) \ldots (R_l x_{j_l})(\mathscr{C}_2 \to \mathscr{D}_2)).$$

قسمت اخیر فخسی است دارای صورت پیشوندی ، بنابراین همان $\mathscr{B}$ موردنظر می‌باشد .

حالت ۳ : $\mathscr{A}_1$ عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{C}$. در این صورت $\mathscr{C}$ کوتاهتر از $\mathscr{A}_1$ است ، و فخسی دارای صورت پیشوندی وجود دارد که بطور قابل اثباتی هم ارز $\mathscr{C}$ است. مثلاً "

$$\vdash_K (\mathscr{C} \leftrightarrow (Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_k x_{i_k})\mathscr{D}).$$

پس بنابر تعمیم ،

$$\vdash_K (\forall x_i)(\mathscr{C} \leftrightarrow (Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_k x_{i_k})\mathscr{D}),$$

و مانندبرهان حکم ۴ : ۲۲ ، $\vdash_K ((\forall x_i)\mathscr{C} \leftrightarrow (\forall x_i)(Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_k x_{i_k})\mathscr{D})$ نتیجه می‌شود .
بنابراین فخس $(\forall x_i)(Q_1 x_{i_1}) \ldots (Q_k x_{i_k})\mathscr{D}$ همان $\mathscr{B}$ موردنظر است .

به این ترتیب برهان استقرائی ما کامل می‌شود .

مثال ۴ : ۲۹

(آ)فخسی دارای صورت پیشوندی بیابید که بطور قابل اثباتی هم ارز فخس زیرباشد

$$A_1^1(x_1)\to(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2).$$

این مثال با حالت ۲ در برهان استقرائی فوق متناظر است . ابتدا ملاحظه کنید که x_2 تنها متغیر پابند است و در هیچ جا آزاد نیست ، پس لازم نیست هیچ متغیری را عوض کنیم . می‌توانیم حکم ۴ : ۲۵ (i) را مستقیما "بکار بسته و ملاحظه کنیم که

$$(\forall x_2)(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_1,x_2))$$

بطور قابل اثباتی با فخس مفروض هم ارز می‌باشد و دارای صورت پیشوندی است .

(ب)فخسی دارای صورت پیشوندی بیابید که بطور قابل اثباتی هم ارز فخس زیر باشد

$$(((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to\sim(\exists x_2)(A_1^1(x_2))\to(\forall x_1)(\forall x_2)A_2^2(x_1,x_2)).$$

مجددا " روش برهان حکم ۴ : ۲۸ را دنبال می‌کنیم . ابتدا متغیرهای پابند را عوض کنید . روش انجام این کار اهمیتی ندارد ، تنها باید توجه داشت که متغیرهای پابند باید از یکدیگر و از متغیرهای آزاد متفاوت باشند . فرضا " به

$$(((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to\sim(\exists x_3)A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5)),$$

می‌رسیم که بطور قابل اثباتی هم ارز فخس مفروض است . اکنون قدم به‌قدم پیش رفته و حالتهای مختلف برهان استقرائی فوق الذکر را بکار می‌بندیم . ابتدا به سورهایی می‌پردازیم که ~ بلافاصله قبل از آنها قرار دارد (حالت ۱) و بدست می‌آوریم

$$(((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_3)\sim A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5)).$$

اکنون اجزایی را که بصورت $(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$ هستند (حالت ۲) درنظر می‌گیریم . با استفاده از قسمتهای مختلف حکم ۴ : ۲۵ دنباله‌ای از فخس‌ها بدست می‌آوریم که هرکدام بطور اثباتی هم ارز بعدی می‌باشند .

$$((\forall x_3)((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5)),$$
$$((\forall x_3)(\exists x_1)(A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5)),$$
$$(\exists x_3)(\forall x_1)((A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5)),$$
$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(x_3))\to A_2^2(x_4,x_5)).$$

فخس اخیر دارای صورت پیشوندی است و بطور قابل اثباتی هم ارز فخس مفروض است .

◁ توجه داشته باشید که روش اخیر به یک جواب منحصربفرد منجر نمی‌شود . ترتیب انتقال سورها به طرف چپ دلخواه است . مثلا " فخس

$$(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_1)(\exists x_3)((A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(x_3))\to A_2^2(x_4,x_5))$$

نیز یک جواب مثال اخیر است . اما ترتیب سورها در آغاز یک فرمول دارای صورت پیشوندی ، حائز اهمیت است . اگر قرار باشد که فخس بدست آمده بطور قابل اثباتی هم ارز فخس مفروض باشد ، فقط ، در حالتهای خاصی می‌توان ترتیب سورها را عوض

کرد آن هم فقط به شیوه‌های خاص .

صورتهای پیشوندی راهی را برای اندازه‌گیری پیچیدگی فخس‌های K در اختیار ما می‌گذارند . درابتدا ممکن است بنظر برسدکه برای یک فخس دارای صورت‌پیشوندی، هرچه سورهای موجود در آغاز آن بیشتر باشند دارای تعبیر پیچیده‌تری خواهد بود . اما دو فخس زیر را درنظر بگیرید :

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_3, x_4)),$$
$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_1^2(x_3, x_4)).$$

می‌توان ملاحظه کردکه اولی دارای تعبیر بسیار آسانتری است . مثلا "تعبیر حسابی فصل ۳ را درنظر بگیرید . تعبیرهای این فخس‌ها به ترتیب عبارتند از :

به ازای هر $x, y, z, t \in D_N$ ، $x + y = z + t$

و

به ازای هر $x \in D_N$ وجود دارد یک $y \in D_N$ بطوری که به ازای هر $z \in D_N$ وجود دارد یک $t \in D_N$ بطوری که $x + y = z + t$

دومین جمله بسیار پیچیده‌تر است و در نظر اول تشخیص درستی یا نادرستی آن مشکل می‌باشد ، این پیچیدگی‌ها ناشی از عوض شدن سورها می‌باشند ، و تعداد عوض شدنها اندازه‌ای برای میزان پیچیدگی است .

تعریف ۴ : ۳۰

(i) فرض کنید $n > 0$. یک فخس دارای صورت پیشوندی ، یک Π_n ــ صورت است اگر با یک سور عمومی شروع شود و دارای $n - 1$ تعویض سور باشد .

(ii) فرض کنید $n > 0$. یک فخس دارای صورت پیشوندی ، یک Σ_n ــ صورت است اگر با یک سور وجودی شروع شود و دارای $n - 1$ تعویض سور باشد .

ما از این تعریفها استفاده نخواهیم کرد ، ولی این تعریفها در مطالعهٔ بیشتر موضوع حائز اهمیت می‌باشند .

مثال ۴ : ۳۱

(آ) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ یک Π_2 ــ صورت است .

(ب) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_2^1(x_2))$ یک Π_1 ــ صورت است .

(پ) $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_3, x_4))$ یک Σ_3 ــ صورت است .

◁صورت‌ویژهٔ دیگری‌از فخس وجوددارد‌که اخیرا "بخاطر استفاده‌اش در برنامه‌ــ

نویسی منطقی از طریق زبان پرولوگ مورد توجه قرار گرفته است . این همان چیزی است که صورت بندوار نامیده شده است .

تعریف ۴ : ۳۲

فخسی از $\mathscr{L}$ دارای **صورت بندوار** است اگر ترکیب عطفی بندها باشد . یک **بند** ، ترکیبی فصلی از فخس‌ها است که هرکدام از آنها یا یک فرمول بسیط یا نقیض یک فرمول بسیط باشند .

◁ این مطلب را می‌توان پس از تشریح شیوه‌ای که با آن از فخس مفروض یک صورت بندوار بــــدست می‌آید روشنتر ساخت . فرض کنیم $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد .

(i) فخسی دارای صورت پیشوندی مانند $\mathscr{B}$ پیدا کنید که بطور قابل اثباتی هم‌ارز $\mathscr{A}$ باشد . (حکم ۴ : ۲۸ را ملاحظه کنید .)

(ii) $\mathscr{B}$ را سکولمی نمائید ، یعنی همهٔ سورهای وجودی را حذف کرده و همهٔ موارد متغیرهای مسور را با حدهای شامل توابع سکولم یا ثابتهای سکولم تعویض نمائید . به این ترتیب فخسی به‌دست می‌آید که ممکن است با $\mathscr{A}$ هم‌ارز نباشد ، ولی به مفهومی که در حکم ۳ : ۳۹ بیان شد بطور ضعیف هم‌ارز است .

(iii) همهٔ سورهای عمومی را حذف کنید . به این ترتیب فخسی مانند $\mathscr{C}$ به‌دست می‌آید که ممکن است هم‌ارز نباشد ، ولی با همان تعبیر فخس مرحلهٔ قبل درست است . (حکم ۳ : ۲۷ را ملاحظه کنید .)

(iv) فخس $\mathscr{C}$ شامل هیچ سوری نیست ، بنابراین با استفاده از سایر رابطها از فرمولهای بسیط ساخته شده است . اگر فرمولهای بسیط را به‌عنوان متغیرهای گزاره‌ای درنظربگیریم می‌توان $\mathscr{C}$ را به‌عنوان یک صورت گزاره‌ای درحساب گزاره‌ها درنظرگرفت . بنابر نتیجهٔ ۱ : ۲۱ ، اگر $\mathscr{C}$ یک راستگو نباشد ، فخسی به‌صورت نرمال عطفی مانند $\mathscr{D}$ وجود دارد که منطقا" هم‌ارز $\mathscr{C}$ است .

(v) هرعامل عطف در $\mathscr{D}$ یک ترکیب فصلی فرمولهای بسیط یا نقیض فرمولهای بسیط ، یعنی یک بند است . پس $\mathscr{D}$ دارای صورت بندوار می‌باشد .

درک این نکته حائز اهمیت است که مراحل بالا همگی فرمولهای منطقا" هم‌ارزی تولید نمی‌کنند . ضعیفترین مرحله از این لحاظ مرحلهٔ (ii) است ، و هم‌ارزی ضعیفی که در اینجا بوجود می‌آید بیشترین چیزی است که دربارهٔ فخس اولیه و فخس دارای صورت بندوار می‌توان گفت . (یکی از آنها متناقض است اگر و فقط اگر دیگری متناقض باشد .)

حکم ۴ : ۳۳
هر فخسی از $\mathscr{L}$ که یک راستگو نباشد بطور ضعیف هم ارز فحسی دارای صورت بندوار است .

تمرین

۸ ــ برای هریک از فرمولهای زیر ، فرمولی دارای صورت پیشوندی بیابید که بطور قابل اثباتی هم ارز آن باشد .

(آ) $(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

(ب) $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2))$

(پ) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to ((\exists x_2)A_1^1(x_2) \to (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$

(ت) $(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^1(x_1) \to \sim(\exists x_3)A_1^2(x_1, x_3))$

۹ ــ فرض کنید $\mathscr{A}(x_1)$ فخسی باشد که x_2 در آن ظاهر نمی‌شود ، و فرض کنید که $\mathscr{B}(x_2)$ فخسی باشد که x_1 در آن ظاهر نمی‌شود . نشان دهید که فرمول

$$((\exists x_1)\mathscr{A}(x_1) \to (\exists x_2)\mathscr{B}(x_2))$$

بطور قابل اثباتی هم ارز فرمولهایی است دارای صورت پیشوندی ، هم به صورت Σ_2 و هم به صورت Π_2 .

۱۰ ــ فرمولی به صورت Π_3 بیابید که بطور قابل اثباتی هم ارز فرمولی به‌صورت Σ_2 باشد.

۱۱ ــ برای هر یک از فخس‌های تمرین ۸ ، فخسی دارای صورت بندوار بیابید که بطور ضعیف با آن هم ارز باشد .

۴ : ۴ قضیهٔ کارسازی برای K

ما نهایتا " حکم زیر را ثابت خواهیم کرد :

اگر $\mathscr{A}$ فحسی منطقا "معتبر از $\mathscr{L}$ باشد آنگاه $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ است . اما قبل از پرداختن به اثبات آن به کارهایی مقدماتی نیازمندیم که ما را بر بکار بردن مفاهیم مورد استفاده در قضیهٔ کارسازی برای $\mathscr{L}$ توانا سازد .

درابتدا می‌توان مفهوم توسیع را تعمیم داد . (دراینجا نیز مانند قبل بجای $K_{\mathscr{L}}$ می‌نویسیم K ، مگر این که بخواهیم بر زبان مورد استفاده تأکید کنیم .)

تعریف ۴ : ۳۴

یک **توسیع** از K دستگاهی صوری است ،که از تغییر یا افزودن مجموعهٔ اصول موضوعه

حاصل‌شده باشد بطوری‌که قضایای K قضیه باقی بمانند (وشاید قضایای جدیدی حاصل شود) . مشابها "اگر دو توسیع از K داشته باشیم ، یکی توسیعی از دیگری است اگر ردهٔ قضایای آن بزرگتر (یا ، در حالت بدیهی ، با دیگری مساوی) باشد .

تعریف ۴ : ۳۵

یک **دستگاه مرتبه اول** ، عبارتست از توسیعی از $K_{\mathscr{L}}$ ، به ازای زبان مرتبه اولی مانند $\mathscr{L}$.

تعریف ۴ : ۳۶

یک دستگاه مرتبه اول S **سازگار** است اگر به ازای هیچ فخسی مانند $\mathscr{A}$ ، هم $\mathscr{A}$ و هم $(\sim\mathscr{A})$ قضیهٔ S نباشند .

حکم ۴ : ۳۷ (حکم ۲ : ۱۹ را ملاحظه کنید) .

فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول سازگار باشد ، و فرض کنید‌که $\mathscr{A}$ فخسی بسته باشد که قضیهٔ S نیست . در این صورت S^* نیز سازگار است ، که S^* عبارتست از توسیعی از S که با افزودن $(\sim\mathscr{A})$ به‌عنوان یک اصل موضوعهٔ اضافی بدست‌آمده است .

برهان : فرض کنید S^* ناسازگار باشد . در این صورت فخسی مانند $\mathscr{B}$ وجود دارد که $\vdash_{S^*}\mathscr{B}$ و $\vdash_{S^*}(\sim\mathscr{B})$. اکنون بنابر حکم ۴ : ۳ ، $\vdash_{S^*}(\sim\mathscr{B}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$ ، زیرا S^* توسیعی از K است . پس بنابر ق $\vdash_{S^*}(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A})$ ، و مجددا "بنابر ق $\vdash_{S^*}\mathscr{A}$.

پس برهانی برای $\mathscr{A}$ در S^* وجود دارد . چنین برهانی یک استنتاج در S از $(\sim\mathscr{A})$ است . بنابراین داریم

$$(\sim\mathscr{A})\vdash_{S}\mathscr{A}.$$

چون $(\sim\mathscr{A})$ بسته است ، می‌توانیم با بکار بستن قضیهٔ استنتاج نتیجهٔ زیر را بدست آوریم

$$\vdash_{S}((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A}).$$

ولی ، بنابر حکم ۴ : ۳

$$\vdash_{S}(((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A})$$

پس بنابر ق $\vdash_{S}\mathscr{A}$.

این مطلب با فرض این که $\mathscr{A}$ ، قضیه‌ای از S نیست متناقض است ، و بنابراین S^* باید سازگار باشد .

◁توجه کنید‌که این‌حکم مشابه حکم ۲ : ۱۹ است ولی باید شرط بسته بودن فخس

$\mathcal{A}$ را اضافه کرد . این شرط برای ما محدودیتی ایجاد نخواهد کرد .

تعریف ۴:۳۸

یک دستگاه مرتبه اول S میان است ، اگر به ازای هر فخس بسته‌ای مانند $\mathcal{A}$ ، یا $\vdash_S \mathcal{A}$ یا $\vdash_S (\sim\mathcal{A})$.

توجه کنیدکه K نمی‌تواند تمام باشد . مثلا " فخس $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ و نقیض آن هیچ کدام یک قضیهٔ K نیستند .

حکم ۴:۳۹ (حکم ۲:۲۱ را ملاحظه کنید) .

فرض کنید S یک‌دستگاه مرتبه اول سازگار باشد . در این صورت یک توسیع سازگار تمام از S وجود دارد .

برهان : این برهان دقیقا " روش برهان حکم ۲:۲۱ را دنبال می‌کند . فرض کنید $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots$ شمارشی از همهٔ فخس‌های بستهٔ $\mathcal{L}$ باشند . دنباله‌ای مانند $S_0, S_1, \ldots$ از توسیع های K را به طریق زیر می‌سازیم . فرض کنید S_0 همان S باشد . برای $n>0$ اگر $\vdash_{S_{n-1}} \mathcal{A}_{n-1}$ آنگاه S_n را همان S_{n-1} می‌گیریم ، درغیر این صورت S_n را توسیعی از S_{n-1} می‌گیریم که از افزودن $(\sim\mathcal{A}_{n-1})$ به S_{n-1} به عنوان یک اصل‌موضوعهٔ اضافی بدست‌می‌آید . بنابر حکم ۴:۳۷ واضح است‌که هر S_n توسیعی سازگار از K است . فرض کنید S_∞ دستگاه مرتبه اولی‌باشدکه اصول‌موضوعهٔ آن فخس‌هایی هستندکه‌اصول‌موضوعهٔ اقلا " یکی از S_n ها می‌باشند . درست‌مانندبرهان حکم ۲:۲۱ می‌توان نشان‌داد که S_∞ سازگار و تمام است .

◁در این‌مرحله است‌که روش ما باید اساسا " با روش فصل ۲ متفاوت باشد ، اگر می‌خواستیم حکم ۲:۲۲ را به زبان حساب محمولات برگردانیم آنچه بدست می‌آوردیم از این قرار بود : اگر S یک دستگاه مرتبه اول سازگار باشد ، آنگاه تعبیری از $\mathcal{L}$ وجود دارد که در آن هر قضیهٔ S درست است . ما درحقیقت همین مطلب را ثابت خواهیم کرد ، ولی برهان آن تا اندازه‌ای مشکل و متضمن مفاهیمی جدید است .

تاکنون زبان $\mathcal{L}$ هرچندکه دلخواه، ولی‌ثابت‌بوده است . دربرهان‌بعدی‌درمواردی این زبان را با افزودن فهرستی نامتناهی از ثابتهای فردی‌جدید ،مانند $b_0, b_1, \ldots.$ گسترش خواهیم‌داد . این‌کار قطعا "به‌معنی ورود فخس‌های جدید ، اصول‌موضوعهٔ جدید و قضایای جدیددر K خواهدبود (مثلا " فخس جدید $((\forall x_1)A_1^1(x_1) \to A_1^1(b_1))$ یک‌اصل موضوعهٔ این دستگاه دارای زبان‌گسترش‌یافته خواهدبود) . اما اگر S یک‌توسیع سازگار

$K_{\mathscr{L}}$ باشدآنگاه دستگاه جدید S^+ که به طریقهٔ فوق الذکر با گسترش زبان بدست‌می‌آید نیز سازگار خواهدبود ∴ زیرا اگر هم $\mathscr{A}$ و هم$(\sim\mathscr{A})$قضایای S^+ باشند ، آنگاه برهانهای آنها ، که دنباله‌هایی متناهی از فخس‌ها می‌باشند ، فقط شامل تعدادی‌متناهی‌ازنمادهای $b_0, b_1, b_2, \ldots$. خواهد بود . پس با تبدیل این نمادها به متغیرهایی که در هیچ‌جای برهان ظاهر نشده‌اند ، این برهانها را می‌توان به برهانهایی در S تبدیل کرد . و از اینرو از فخسی در $\mathscr{L}$ و نقیض آن برهانهایی در S بدست خواهیم آوردکه این غیرممکن است .

حکم ۴ : ۴۰

فرض کنید S توسیع سازگاری از $K_{\mathscr{L}}$ باشد . در این‌صورت تعبیری از $\mathscr{L}$ وجوددارد که هر قضیهٔ S در آن درست است .

برهان : زبان $\mathscr{L}$ را با افزودن‌دنباله‌ای‌ازثابتهای‌فردی‌جدیدمانند $b_0, b_1, b_2, \ldots$ گسترش دهید . زبان جدید را با $\mathscr{L}^+$ ، و دستگاههای جدید حاصل از S و $K_{\mathscr{L}}$ را به ترتیب با S^+ و K^+ نشان‌دهید . مطابق آنچه قبلاً گفته شد S^+ سازگار است . دنباله‌ای از دستگاههای مرتبه اول مانند $S_0, S_1, \ldots$ بسازیدکه اولین جملهٔ آن همان S^+ است . ابتدافهرستی‌از همهٔ فخس‌های $\mathscr{L}^+$ فراهم کنیدکه فقط یک‌متغیر آزاد داشته باشند ، مثلاً

$$\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \ldots$$

البته $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$ همگی متمایز نخواهندبود . اکنون زیردنباله‌ای مانند $c_0, c_1, c_2, \ldots$ از دنبالهٔ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ انتخاب کنید که

(۱) c_0 در $\mathscr{F}_0(x_{i_0})$ ظاهر نشود ،

و

(۲) برای $n>0$ ، $c_n \notin \{c_0, \ldots, c_{n-1}\}$ و c_n درهیچیک از $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \ldots, \mathscr{F}_n(x_{i_n})$ ظاهر نشود .

از آن جهت چنین انتخابی ممکن است که هر فخسی می‌تواند شامل تعدادی متناهی (شاید صفر) از موارد b_i ها باشد .

به ازای هر k فخس زیر را با $\mathscr{G}_k$ نشان دهید

$$(\sim(\forall x_{i_k})\mathscr{F}_k(x_{i_k}) \rightarrow \sim\mathscr{F}_k(c_k)).$$

اکنون فرض کنید S_0 همان S^+ باشد . و فرض کنید S_1 توسیعی از S_0 باشد که‌از افزودن $\mathscr{G}_0$ به‌عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید به‌آن حاصل می‌شود . به ازای هر $n>0$ ، فرض کنید S_n توسیعی از S_{n-1} باشد که از افزودن $\mathscr{G}_{n-1}$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ

جدید به آن حاصل می‌شود . روشی که بکار می‌بریم عبارتست از نشان‌دادن این که هر S_n ی سازگار است ،و از این‌طریق ،مانندقبل ،ازدنبالهٔ یک S_∞ سازگار بدست‌می‌آوریم ، سپس با بکار بستن حکم ۴:۲۹ یک توسیع سازگار تمام از S_∞ بدست می‌آوریم . این کار باعث خواهد شد که بتوانیم تعبیر موردنظر خود را بسازیم .

S_0 سازگار است . فرض کنید $n>0$ و فرض کنیدکه S_n سازگار ولی S_{n+1} ناسازگار است . پس فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}^+$ وجوددارد بطوری که

$$\vdash_{S_{n+1}} (\sim\mathscr{A}) \quad \text{و} \quad \vdash_{S_{n+1}} \mathscr{A}$$

اما $\vdash_{S_{n+1}} (\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B}))$ ، زیرا $(\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{A}\rightarrow\sim\mathscr{B}))$ به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{B}$ یک راستگو است . پس با دوبار بکار بستن ق داریم ، به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{B}$

$$\vdash_{S_{n+1}} (\sim\mathscr{B})$$

به ویژه

$$\vdash_{S_{n+1}} (\sim\mathscr{G}_n).$$

هر برهانی در S_{n+1} دقیقا" عبارتست از یک استنتاج از $\mathscr{G}_n$ در S_n ، پس داریم

$$\mathscr{G}_n \vdash_{S_n} (\sim\mathscr{G}_n)$$

$\mathscr{G}_n$ بسته است ، پس بنابر قضیهٔ استنتاج

$$\vdash_{S_n} (\mathscr{G}_n\rightarrow(\sim\mathscr{G}_n)).$$

اکنون ، همانطور که قبلا" هم دیدیم ، نتیجه می‌شود

$$\vdash_{S_n} (\sim\mathscr{G}_n),$$

یعنی

$$\vdash_{S_n} \sim(\sim(\forall x_{i_n})\mathscr{F}_n(x_{i_n})\rightarrow\sim\mathscr{F}_n(c_n)).$$

اما

$$\vdash_{S_n} (\sim(\sim(\forall x_{i_n})\mathscr{F}_n(x_{i_n})\rightarrow\sim\mathscr{F}_n(c_n))\rightarrow\sim(\forall x_{i_n})\mathscr{F}_n(x_{i_n}))$$

و

$$\vdash_{S_n} (\sim(\sim(\forall x_{i_n})\mathscr{F}_n(x_{i_n})\rightarrow\sim\mathscr{F}_n(c_n))\rightarrow\mathscr{F}_n(c_n)),$$

زیرا این دو فخس هر دو نمونه‌هایی از راستگوها هستند . پس ، بنابر ق ، داریم

$$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(c_n) \quad \text{و} \quad \vdash_{S_n} \sim(\forall x_{i_n})\mathscr{F}_n(x_{i_n})$$

در برهان $\mathscr{F}_n(c_n)$ ، هر مورد c_n را با y جایگزین کنید ، که y متغیری است که قبلا" در هیچ جای برهان ظاهر نشده است . آنچه بدست می‌آید برهانی است در S_n برای $\mathscr{F}_n(y)$ ، زیرا c_n در هیچیک از اصول موضوعهٔ $\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_{n-1}$ که $\mathscr{F}_n(c_n)$ از آنها در S_n بدست آمده بود ظاهر نشده است . پس

$$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(y).$$

از اینرو بنابر تعمیم

$$\vdash_{S_n} (\forall y)\mathscr{F}_n(y)$$

و درنتیجه بنابر حکم ۱۸:۴ ،

$$\vdash_{S_n} (\forall x_{i_n})\mathscr{F}_n(x_{i_n})$$

به این‌ترتیب سازگاری S_n نقض شده است ، پس باید داشته باشیم : به ازای هر $n \geq 0$ ، اگر S_n سازگار باشد ، S_{n+1} نیز سازگار است . پس بنابر استقراء به ازای هر n ، S_n سازگار است .

فرض کنید S_∞ دستگاهی باشد که همهٔ فخس‌هایی از $\mathscr{L}^+$ را که اصول موضوعهٔ اقلاً " یکی از S_n ها هستند به‌عنوان اصل موضوعه دربردارد . S_∞ سازگار است ، زیرا در غیر این صورت می‌توان با استفاده از فقط تعدادی متناهی از اصول موضوعهٔ آن تناقضی به دست آورد ، و بنابراین n ی وجود خواهد داشت که از S_n تناقضی بدست آید .

پس ، بنابر حکم ۳۹:۴ ، فرض می‌کنیم T توسیعی سازگار و تمام از S_∞ باشد . روشی‌که اکنون برای ساختن تعبیر بکار می‌بریم تا اندازه‌ای جدید است و می‌تواند باعث آشفتگی شود . قبلا "با تعبیرهایی سروکار داشتیم که دامنه‌شان از اشیاء ریاضی ، مثلا "اعدادطبیعی یا اعدادصحیح ، تشکیل شده بود . اما بنابر تعریف ، لازم‌است‌که دامنه فقط مجموعه‌ای ناتهی باشد . تعبیری‌مانند I از $\mathscr{L}^+$را به‌طریق زیر تعریف‌می‌کنیم .

(آ) دامنهٔ D_I عبارتست از مجموعهٔ همهٔ **حدود بستهٔ** $\mathscr{L}^+$ ، یعنی حدودی‌که شامل هیچ متغیری نیستند (یعنی همهٔ ثابتهای فردی ، و همهٔ حدودی که از آنها با استفاده از حروف تابعی ساخته می‌شوند) .

(ب) ثابتهای فردی تعبیر خودشان می‌باشند .

(پ) به ازای $d_1, \ldots, d_n \in D_I$ ، $\bar{A}_i^n(d_1, \ldots, d_n)$ برقرار است اگر $\vdash_T A_i^n(d_1, \ldots, d_n)$ ، و برقرار نیست اگر $\vdash_T (\sim A_i^n(d_1, \ldots, d_n))$. چنین کاری مجاز است ، زیرا T تمام است و $A_i^n(d_1, \ldots, d_n)$ فخسی بسته است .

(ت) به ازای $d_1, \ldots, d_n \in D_I$ ، به $\bar{f}_i^n(d_1, \ldots, d_n)$ همان‌مقدار $f_i^n(d_1, \ldots, d_n)$ داده می‌شود . باتوجه به‌این که $d_1, \ldots, d_n$ حدود بسته می‌باشند $f_i^n(d_1, \ldots, d_n)$ نیز حدی بسته است . به این ترتیب تعبیر I تعریف می‌شود . اکنون باید نشان دهیم که هر قضیهٔ S در I درست است .

لـم : به ازای هر فخس بسته مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}^+$ ، $\vdash_T \mathscr{A}$ اگر و فقط اگر $I \vDash \mathscr{A}$.

برهان: این برهان مبتنی بر استقراء روی تعداد رابطها و سورهای موجود در $\mathscr{A}$ است.

مرحلهٔ پایه‌ای : $\mathscr{A}$ فرمولی بسیط مانند $A_i^n(d_1,\ldots,d_n)$ است ، که در آن $d_1,\ldots,d_n$ لزوما" حدودی بسته می‌باشند .

اگر $\vdash_T \mathscr{A}$ آنگاه $\vdash_T A_i^n(d_1,\ldots,d_n)$ ، پس $\bar{A}_i^n(d_1,\ldots,d_n)$ در I برقرار است ، یعنی $I \vDash \mathscr{A}$. مشابها" اگر $I \vDash \mathscr{A}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\vdash_T \mathscr{A}$.

مرحلهٔ استقراء : فرض کنید $\mathscr{A}$ بسیط نباشد ، وفرض کنید که نتیجه برای هر فخسی که کوتاهتر از $\mathscr{A}$ است برقرار است .

حالت ۱ : $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\sim\mathscr{B})$. اگر $\vdash_T \mathscr{A}$ آنگاه $\vdash_T (\sim\mathscr{B})$.درنتیجه $\mathscr{B}$ قضیه‌ای از T نیست ، زیرا T سازگار است ، پس بنابر فرض استقراء $\mathscr{B}$ در I درست‌نیست ، پس $(\sim\mathscr{B})$در I درست‌است ، زیرا $\mathscr{B}$ بسته‌است،یعنی $I \vDash \mathscr{A}$. به‌عکس ، اگر $I \vDash \mathscr{A}$ ، آنگاه $I \vDash (\sim\mathscr{B})$، و بنابراین $\mathscr{B}$ در I درست نیست پس بنابر فرض استقراء $\mathscr{B}$ قضیه‌ای از T نیست . چون T تمام است ، پس $(\sim\mathscr{B})$ قضیه‌ای از T است ، یعنی $\vdash_T \mathscr{A}$.

حالت ۲ : $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$. فرض کنید که $\mathscr{A}$ در I درست نباشد ، پس $\mathscr{B}$ درست‌و $\mathscr{C}$ نادرست‌است . پس بنابر فرض استقراء $\vdash_T \mathscr{B}$ و چنین‌نیست‌که $\vdash_T \mathscr{C}$. چون T تمام است داریم $\vdash_T \mathscr{B}$ و $\vdash_T (\sim\mathscr{C})$. اکنون $\vdash_T (\mathscr{B} \to ((\sim\mathscr{C}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C})))$ زیرا این فخس نمونه‌ای از یک راستگو است . پس با دوبار بکار بردن ق داریم

$$\vdash_T \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \text{ یعنی } \vdash_T (\sim\mathscr{A})$$

از آنجا که T سازگار است ، $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از T نیست .

به عکس فرض کنید که $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از T نیست . پس بنابر تمامیت T داریم $\vdash_T (\sim\mathscr{A})$ و بنابراین $\vdash_T \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$. اما $(\sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \mathscr{B})$ و $(\sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \sim\mathscr{C})$ راستگو هستند . پس داریم

$$\vdash_T \mathscr{B} \quad \text{و} \quad \vdash_T (\sim\mathscr{C})$$

پس $\vdash_T \mathscr{B}$ و چنین نیست که $\vdash_T \mathscr{C}$ ، زیرا T سازگار است .

بنابراین طبق فرض استقراء

$$I \vDash \mathscr{B} \text{ و چنین نیست که } I \vDash \mathscr{C}$$

پس $\mathscr{B}$ در I درست ، و $\mathscr{C}$ در I نادرست است . بنابراین طبق تذکر ۲۵:۳(ت) ، $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ در I نادرست است ، و درنتیجه در I درست نیست .

حالت ۳ : $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{B}(x_i)$. اولا" اگر x_i در $\mathscr{B}$ دارای مورد آزاد نباشد ، $\mathscr{B}$ بسته است و درنتیجه طبق فرض استقراء $\vdash_T \mathscr{B}$ اگر و فقط اگر $I \vDash \mathscr{B}$. همچنین می‌دانیم که $\vdash_T \mathscr{B}$ اگر و فقط اگر $\vdash_T (\forall x_i)\mathscr{B}$ ، و این که $I \vDash \mathscr{B}$ اگر و فقط اگر $I \vDash (\forall x_i)\mathscr{B}$. پس در این حالت $\vdash_T \mathscr{A}$ اگر و فقط اگر $I \vDash \mathscr{A}$.

ثانیاً ، اگر x_i در $\mathscr{B}(x_i)$ دارای مورد آزاد باشد ، آنگاه تنها متغیر آزاد موجود در $\mathscr{B}(x_i)$ است ، زیرا $\mathscr{A}$ بسته است . پس $\mathscr{B}(x_i)$ یکی از فخس‌های موجود در دنبالهٔ $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \ldots$ است . مثلاً $\mathscr{B}(x_i)$ عبارتست از $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ پس $\mathscr{A}$ عبارتست از $(\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m})$. فرض کنید که $I \vDash \mathscr{A}$ بنابر حکم ۴:۴ ، با استفاده از $(K5)$ داریم .

$$I \vDash ((\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m}) \to \mathscr{F}_m(c_m)).$$

پس $I \vDash \mathscr{F}_m(c_m)$. اکنون تعداد رابطها و سورهای $\mathscr{F}_m(c_m)$ کمتر از $\mathscr{A}$ است ، پس بنابر فرض استقراء ، $\vdash_T \mathscr{F}_m(c_m)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\vdash_T \mathscr{A}$ ، پس خلاف آن را فرض می‌گیریم یعنی از آنجا که T تمام است ، $\vdash_T (\sim\mathscr{A})$ ، یعنی

$$\vdash_T \sim(\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m}).$$

اما

$$\vdash_T (\sim(\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m}) \to \sim\mathscr{F}_m(c_m)),$$

زیرا $\mathscr{G}_m$ یک اصل موضوعهٔ T است . پس بنابر ق ،

$$\vdash_T (\sim\mathscr{F}_m(c_m)).$$

که این سازگاری T را نقض می‌کند ، پس همانطور که می‌خواستیم $\vdash_T \mathscr{A}$.

به عکس ، فرض کنیم $\vdash_T \mathscr{A}$ و فرض کنیم که $\mathscr{A}$ در I درست نیست یعنی ، چنین نیست که $I \vDash (\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m})$. پس عنصری مانند d از D_I وجود دارد به طوری که $I \vDash (\sim\mathscr{F}_m(d))$. برای این‌منظور ملاحظه کنید که ارزشگذاریی در I وجود داردکه در $(\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ صدق نمی‌کند . پس ارزشگذاریی مانند v وجود داردکه‌در $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ صدق نمی‌کند . اکنون $v(x_{i_m}) \in D_I$ ، یعنی $v(x_{i_m})$ حدی بسته ، مثلاً "مانند d است و لزوماً "جانشینی چنین حدی بجای x_{i_m} در $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ آزاد است . همچنین $v(d) = d$ پس $v(x_{i_m}) = v(d)$ ، پس بنابر نتیجهٔ تمرین ۲۳:۳ ، v در $\mathscr{F}_m(d)$ صدق نمی‌کند و بنابراین $\mathscr{F}_m(d)$ در I درست نیست . پس همانطور که می‌خواستیم $I \vDash (\sim \mathscr{F}_m(d))$. اما $\vdash_T (\forall x_{i_m})\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ ، پس بنابر اصل موضوعهٔ $(K5)$ و ق $\vdash_T \mathscr{F}_m(d)$. در این صورت بنابر فرض استقراء $I \vDash \mathscr{F}_m(d)$ اما $\mathscr{F}_m(d)$ و $\sim\mathscr{F}_m(d)$ نمی‌توانند هر دو در I درست باشند . پس در این حالت $\vdash_T \mathscr{A}$ ایجاب می‌کند که $I \vDash \mathscr{A}$.

به این‌ترتیب برهان استقرائی لم خاتمه می‌یابد ، پس اکنون می‌دانیم که هرقضیهٔ T در تعبیر I درست است . هر قضیهٔ S قضیه‌ای از T است ، زیرا T از S فقط با گسترش زبان و افزودن اصول موضوعهٔ جدید حاصل شده بود . پس هر فخسی از $\mathscr{L}^+$ که قضیه‌ای از S باشددر I درست است . البته هر قضیه‌ای از S فخسی از $\mathscr{L}$ است و I شامل تعبیرهای فخس‌هایی بغیر از فخس‌های $\mathscr{L}$ هم می‌باشد . بنابراین I را با کنار

گذاشتن تعبیرهای ثابتهای فردی $b_0, b_1, \ldots$ و حدود وابسته به آنها محدود می‌کنیم ولی D_I را تغییرنمی‌دهیم . به این‌ترتیب تعبیری از $\mathscr{L}$ بدست‌خواهیم آورد و هر قضیهٔ S در این تعبیر درست است .

◁ ماهنوز قضیهٔ کارسازی‌را ثابت‌نکرده‌ایم، ولی کوشش قابل‌ملاحظه‌ای‌که در اثبات حکم۴ : ۴۰ بکار رفت اتمام برهان قضیهٔ کارسازی را برای ما آسان می‌سازد .

حکم ۴ : ۴۱ (قضیهٔ کارسازی برای $K_{\mathscr{L}}$)

اگر $\mathscr{A}$ فخس منطقا "معتبری از $\mathscr{L}$ باشد ، آنگاه $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ است .

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی منطقا "معتبر از $\mathscr{L}$ ، و $\mathscr{A}'$ بستار عمومی آن باشد . بنابر نتیجهٔ ۳ : ۲۸ ، $\mathscr{A}'$ هم باید منطقا "معتبر باشد . فرض کنیدکه $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ نباشد . پس بنابر حکم۴ : ۱۹ ، $\mathscr{A}'$ هم قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ نیست . اگر $\sim\mathscr{A}'$ را به عنوان یک اصل‌موضوعهٔ جدید واردکنیم دستگاه جدیدی مانند $K'_{\mathscr{L}}$ بدست می‌آوریم ، که بنابر حکم۴ : ۳۷ سازگار است . پس بنابر حکم ۴ : ۴۰ تعبیری از $\mathscr{L}$ وجود دارد که هر قضیه‌ای از $K'_{\mathscr{L}}$ در آن درست است . بویژه $\sim\mathscr{A}'$ در این تعبیر درست و بنابراین $\mathscr{A}'$ نادرست است ($\mathscr{A}'$ لزوما "بسته است) . این با اعتبار منطقی $\mathscr{A}'$ متناقض است ، و بنابراین $\mathscr{A}$ باید قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ باشد .

◁ به این ترتیب وظیفهٔ فعلی ما به پایان رسید . ما نشان داده‌ایم‌که قضیه‌های $K_{\mathscr{L}}$ دقیقا "عبارتند از فخس‌های منطقا "معتبر $\mathscr{L}$. هرچندکه برهان این مطلب با مشکلاتی همراه بود (این مطلب ابتدا در ۱۹۳۰ بوسیله گدل (Gödel) اثبات شد ، برهانی که ما ارائه کردیم جدیدتر و اساسا "متعلق به هنکین (Henkin) است) ، ولی نتیجهٔ آن برخلاف انتظار نیست . دستگاه $K_{\mathscr{L}}$ به طریقی ساخته شد که توانایی اثبات هر چیزی را که انتظار اثباتش را داریم ، با روش منطق معمولی یا شهودی داشته باشد . این چیزها عبارتند از " درستی‌های منطقی " (یعنی همهٔ فخس‌های منطقا "معتبر) . باوجوداین قضیهٔ کارسازی اهمیت‌زیادی دارد ، زیرا نشان‌می‌دهدکه $K_{\mathscr{L}}$ انتظاری‌را که از آن می‌رود برآورده می‌سازد .

تمرین

۱۲ ــ نشان دهید که توسیعی مانند S از $K_{\mathscr{L}}$ ناسازگار است اگر و فقط اگر هر فخسی از $\mathscr{L}$ قضیه‌ای از S باشد .

۱۳ ــ فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول سازگار باشد بطوری‌که به ازای هر فخس بسته

از S ، مانند $\mathscr{A}$ ، اگر دستگاه حاصل از افزودن $\mathscr{A}$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ اضافی سازگار بود آنگاه $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S باشد . ثابت کنید که S تمام است .

۱۴ ـ فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ فخس هایی از $\mathscr{L}$ باشند بطوری که $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ است آیا لزوما "چنین است که یا $\mathscr{A}$ یا $\mathscr{B}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ است .

۱۵ ـ فرض کنید $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول با تعدادی نامتناهی حروف محمولی باشد . نشان دهید که $K_{\mathscr{L}}$ دارای تعدادی نامتناهی توسیع سازگار متفاوت می‌باشد .

۵:۴ الگوها

حکم ۴:۴۱ دارای نتایج متعددی است وما بعضی از آنها را در اینجا متذکر می‌شویم . برای انجام چنین کاری مناسب است که مفهوم جدیدی ، یعنی مفهوم الگو را در این مرحله معرفی کنیم .

تعریف ۴:۴۲

(i) فرض کنید Γ مجموعه‌ای از فخس‌های $\mathscr{L}$ باشد . تعبیری از $\mathscr{L}$ که در آن هر عنصر Γ درست باشد یک **الگوی** Γ نامیده می‌شود .

(ii) اگر S یک دستگاه مرتبه اول باشد ، یک **الگوی** S عبارتست از تعبیری که هر قضیهٔ S در آن درست است .

حکم ۴:۴۳

فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول باشد ، و فرض کنید که I تعبیری است که هر اصل موضوعهٔ S در آن درست باشد . در این صورت I یک الگوی S است .

برهان : (به برهان حکم ۴:۵ مراجعه کنید) .

فرض کنید I تعبیری باشد که در آن هر اصل‌موضوعهٔ S درست است . فرض کنید که $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S باشد . با استقراء روی تعداد فخس های موجود در یک برهان $\mathscr{A}$ ، که آن را با n نمایش می‌دهیم ، نشان خواهیم‌داد که $\mathscr{A}$ باید در I درست باشد .

مرحلهٔ پایه‌ای : $n=1$. $\mathscr{A}$ یک اصل موضوعهٔ S است و بنابراین در I درست است .

مرحلهٔ استقراء : $n>1$. فرض کنید هر قضیه‌ای که دارای برهانی کوتاهتر باشد در I درست است .

حالت ۱ . $\mathscr{A}$ از دو فخس قبلی‌برهان‌مانند $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ بوسیلهٔ ق حاصل‌می‌شود .

بنابر فرض استقراء، $\mathscr{B}$ و $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ در I درست هستند ، پس بنابر حکم ۳:۲۶ ، $\mathscr{A}$ در I درست است .

حالت ۲ . $\mathscr{A}$ از یک فخس قبلی برهان با تعمیم حاصل می‌شود . در این صورت $\mathscr{A}$ مثلاً " عبارتست از $(\forall x_i)\mathscr{B}$ و فخس قبلی عبارتست از $\mathscr{B}$. بنابر فرض استقراء ، $\mathscr{B}$ در I درست است . پس بنابر حکم ۳:۲۷ ، $(\forall x_i)\mathscr{B}$ در I درست است .

حالت ۳ . $\mathscr{A}$ یک اصل موضوعهٔ S است که مطابق آنچه که قبلاً " گفته شد ، $\mathscr{A}$ باید در I درست باشد .

به این ترتیب برهان استقرائی ما برای نشان دادن این که هر قضیهٔ S در I درست است کامل می‌شود . درنتیجه I یک الگوی S است .

◁ آنچه‌که نشان دادیم این است که یک الگوی یک دستگاه مرتبه اول S ، برطبق تعریف ۴:۴۲ (ii) ، ویک الگوی مجموعه‌ای از اصول موضوعهٔ S ، برطبق تعریف ۴:۴۲ (i) درست یک چیز هستند .

توجه داشته باشید که از حکم ۴:۵ به آسانی نتیجه می‌شود که هر تعبیری از $\mathscr{L}$ الگویی از $K_{\mathscr{L}}$ است ، زیرا هر قضیهٔ $K_{\mathscr{L}}$ در هر تعبیری درست است . مفهوم الگو در مبحث توسیعهای $K_{\mathscr{L}}$ دارای اهمیتی‌بیشتر است ، زیرا در این حالت ردهٔ قضایا وسیعتر است ، و تعبیرهایی وجود دارندکه الگو نیستند .

اکنون می‌توان حکم ۴:۴۰ را به صورت زیر بیان کرد : اگر دستگاه مرتبه اول S سازگار باشد آنگاه دارای یک الگو است . درحقیقت می‌توانیم حکم زیر را بیان کنیم .

حکم ۴:۴۴

یک دستگاه مرتبه اول مانند S سازگار است اگر و فقط اگر دارای الگو باشد .

برهان : یکی از استلزامهای فوق قبلاً "ثابت شده است . فرض کنیدکه S الگویی مانند I دارد ولی ناسازگار است . دراین‌صورت فخسی مانند $\mathscr{A}$ وجود دارد که $\vdash_S \mathscr{A}$ و $\vdash_S (\sim\mathscr{A})$. همهٔ قضیه‌های S در الگوی I درست هستند ، پس $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ هر دو در I درست هستند . بنابر تذکر ۳:۲۵ (ب) این غیرممکن است ، پس S باید سازگار باشد .

مثال ۴:۴۵

فرض کنید $\mathscr{A}$ فخس بسته‌ای از $\mathscr{L}$ باشد بطوری‌که نه $\mathscr{A}$ قضیهٔ K باشد ونه $(\sim\mathscr{A})$. در این صورت بنابر حکم ۴:۳۷ ، دستگاههای K^1 و K^2 که به ترتیب از افزودن $\mathscr{A}$ و

$(\sim\mathscr{A})$ به‌عنوان اصول موضوعهٔ جدید به K حاصل‌می‌شوند هر دو سازگارند. پس K^1 و K^2 هر کدام دارای یک الگو می‌باشند. الگوی K^1 تعبیری مانند I_1 است‌که $\mathscr{A}$ در آن درست است. الگوی K^2 نیز تعبیری است مانند I_2، که $(\sim\mathscr{A})$ در آن درست است. پس I_1 نمی‌تواند یک الگوی K^2 باشد و I_2 نیز نمی‌تواند یک الگوی K^1 باشد. درنتیجه هر دستگاه مرتبه اولی که تمام نباشد (یعنی فخس بسته‌ای مانند $\mathscr{A}$ در آن موجود باشد بطوری‌که $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ هیچکدام قضیه نباشند) اقلا "دارای دو الگوی اساسا" متفاوت می‌باشد.

◁باید توجه‌داشت‌که دچار این تصور باطل نشویم‌که درست‌بودن فخسی در الگویی از یک دستگاه S، به‌معنی این‌است‌که آن فخس قضیه‌ای از S است. مثال فوق نشان می‌دهد که لازم نیست چنین چیزی برقرار باشد. اما به عنوان نتیجه‌ای از حکم ۴۴:۴ می‌توانیم چیزی در این راستا بیان کنیم.

حکم ۴۶:۴

فرض کنید S یک‌دستگاه مرتبه اول سازگار باشد، و فرض کنید‌که $\mathscr{A}$ فخس بسته‌ای باشد که در هر الگوی S درست است. در این صورت $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S است.

برهان: فرض کنید $\mathscr{A}$ فخس بسته‌ای باشد که در هر الگوی S درست است، و فرض کنید‌که $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S نیست. در این صورت بنابر حکم ۳۷:۴، دستگاه S' که از افزودن $(\sim\mathscr{A})$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ اضافی به S حاصل می‌شود سازگار است. پس، بنابر حکم ۴۴:۴، S' دارای الگویی مانند M است. $(\sim\mathscr{A})$ در M درست است و بنابراین $\mathscr{A}$ در M نادرست می‌باشد. ولی M الگویی از S است (زیرا S' یک توسیع S می‌باشد). این مطلب با فرض درست بودن $\mathscr{A}$ در هر الگوی S متناقض است، پس $\mathscr{A}$ باید قضیه‌ای از S باشد.

حکم ۴۷:۴ (قضیهٔ لوونهایم ــ سکولم) (Löwenheim–Skolem Theorem)

اگر یک دستگاه مرتبه اول S دارای یک الگو باشد، آنگاه S دارای الگویی است که دامنهٔ آن شمارش‌پذیر است. (یک مجموعه شمارش‌پذیر است اگر بتوان آن را در تناظری یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعدادطبیعی قرار داد).

برهان: اگر S یک الگو داشته باشد، آنگاه بنابر حکم ۴۴:۴، S سازگار است. اگر S سازگار باشد آنگاه برهان حکم ۴۰:۴ نشان‌می‌دهدکه S دارای الگویی با طبیعتی خاص می‌باشد که دامنهٔ آن مجموعهٔ حدود بسته در یک زبان گسترش یافته است. این مجموعه شمارش‌پذیر است. این را می‌توان با توصیف روشی برای نوشتن فهرستی

(نامتناهی) که سرانجام هر حد بسته‌ای را شامل خواهد شد نشان داد . انجام چنین کاری به روشهای متعدد ممکن است ، و آن‌را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار کرده‌ایم .

◁ این حکم دارای نتایجی جالب توجه است که در یکی از فصول بعدی به آن خواهیم پرداخت .

حکم ۴:۴۸ (قضیهٔ فشردگی)

اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از مجموعهٔ اصول موضوعهٔ یک دستگاه مرتبه اول S دارای یک الگو باشد ، آنگاه خود S نیز یک الگو دارد .

برهان : فرض کنید که هر مجموعهٔ متناهی از اصول موضوعهٔ S دارای یک الگو باشد ولی S دارای یک الگو نباشد . در این صورت ، بنابر حکم ۴:۴۴ ، S ناسازگار است . پس فخسی مانند $\mathscr{A}$ وجود دارد که $\vdash_S \mathscr{A}$ و $\vdash_S (\sim\mathscr{A})$. ولی این برهانها می‌توانند فقط شامل تعدادی متناهی از اصول موضوعهٔ S باشند . فرض کنید Γ مجموعهٔ همهٔ اصول موضوعه‌ای از S باشد که در این برهانها بکار رفته‌اند . Γ متناهی است و بنابراین یک الگو دارد . بنابراین تعبیری مانند I وجود دارد که هر عضوی از Γ در آن درست است . درنتیجه $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ باید هر دو در I درست باشند ، زیرا قواعد استنتاجی ق و تعمیم هردو درستی در یک تعبیر را حفظ می‌کنند (برهان حکم ۴:۴۳ را ملاحظه کنید) . ولی $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ نمی‌توانند هردو در تعبیر I درست باشند ، پس به یک تناقض رسیدیم و بنابراین S باید دارای یک الگو باشد .

◁ این حکم را گاهی به صورت کمی متفاوتی بیان می‌کنند که ما آن را به عنوان یک نتیجه می‌آوریم .

نتیجهٔ ۴:۴۹

فرض کنید Γ مجموعه‌ای نامتناهی از فخس‌های $K_{\mathscr{L}}$ باشد . در این صورت Γ یک الگو دارد اگر هر زیر مجموعهٔ متناهی Γ دارای یک الگو باشد .

◁ روشی وجود دارد که در آن الگوها یک دستگاه مرتبه اول ایجاد می‌کنند . فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول سازگار باشد . بنابراین S دارای الگویی مانند I است . فرض کنید که S تمام نیست ، پس فخس بسته‌ای مانند $\mathscr{A}$ وجود دارد که $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ هیچکدام قضیه‌ای از S نیستند . اما ، این فخس در I یا درست است یا نادرست ، یعنی یا $I \models \mathscr{A}$ یا $I \models (\sim\mathscr{A})$. مشابها " الگوی I به هر فخس بسته‌ای یک "ارزش درستی" می‌دهد . با افزودن همهٔ فخس‌هایی که در I درست هستند به عنوان اصول موضوعه

دستگاه مرتبه اول جدید $S(I)$ را می‌سازیم . در این صورت قضایای $S(I)$ همگی اصول موضوعهٔ $S(I)$ هستند . زیرا هر نتیجهٔ منطقی فخس‌هایی که در I درست هستند نیز در I درست است . $S(I)$ سازگار است زیرا اگر $\vdash_{S(I)} \mathscr{A}$ و $\vdash_{S(I)} (\sim\mathscr{A})$ آنگاه $\mathscr{A}$ و $(\sim\mathscr{A})$ هردو در I درست خواهند بود ، که غیرممکن است . توجه کنید که I یک الگوی $S(I)$ است . همچنین $S(I)$ تمام است ، زیرا اگر $\mathscr{A}$ فخس بستهٔ مفروضی باشد یا $I \vDash \mathscr{A}$ یا $I \vDash (\sim\mathscr{A})$ پس قطعا "داریم یا $\vdash_{S(I)} \mathscr{A}$ یا $\vdash_{S(I)} (\sim\mathscr{A})$.

تمرین

۱۶ ــ فرض کنید Γ مجموعه‌ای از فخس‌های $\mathscr{L}$ ، و M الگویی‌برای Γ باشد ، نشان دهید که اگر $\Gamma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$ آنگاه $\mathscr{A}$ در M درست است . آیا عکس این مطلب برقرار است ؟

۱۷ ــ فرض کنید S توسیع سازگار تمامی از $K_{\mathscr{L}}$ باشد . ثابت کنید که هر دو الگوی S بطور مقدماتی هم ارز هستند ، یعنی هر فخس بسته‌ای که در یک الگو درست‌باشد در الگوی دیگر نیز درست است .

۱۸ ــ فرض کنید S توسیع سازگاری از $K_{\mathscr{L}}$ ، و M الگویی از S باشد . یک توسیع S^+ از S به‌طریق زیر تعریف‌کنید : به‌عنوان اصول موضوعهٔ اضافی همهٔ فرمولهای بسیط $\mathscr{L}$ را که در M درست هستند درنظر بگیرید . ثابت کنید که S^+ سازگار است . آیا S^+ لزوما "تمام است ؟

۱۹ ــ فرض کنید S توسیع سازگاری از $K_{\mathscr{L}}$ ، و M الگویی از S باشد . یک توسیع $\hat{S}$ از S به‌طریق زیر تعریف‌کنید : به عنوان اصول موضوعهٔ اضافی همهٔ فرمولهای بسیط بستهٔ $\mathscr{L}$ را که در M درست هستند و نقیض همهٔ فرمولهای بسیط بسته $\mathscr{L}$ را که در M درست نیستند درنظر بگیرید . ثابت‌کنید که $\hat{S}$ سازگار است . آیا $\hat{S}$ لزوما " تمام است .

۲۰ ــ فرض کنید S توسیع سازگاری از $K_{\mathscr{L}}$ باشد ، که $\mathscr{L}$ زبان مرتبه اولی است مشتمل بر متغیرها ، ثابتهای فردی $a_1, a_2, \ldots$ فقط یک حرف محمولی A_1^1 ، و فاقد حروف تابعی . تعبیری مانند I از $\mathscr{L}$ را می‌توان به‌عنوان مجموعه‌ای مانند D_I تصور کرد با زیر مجموعه‌های مشخص A_I ، متشکل از همهٔ x هایی که $x \in D_I$ بطوری که $\bar{A}_1^1(x)$ در I برقرار است . فرض کنید که به ازای هر $n \geq 1$ الگویی مانند M_n برای S وجود داردکه به ازای $1 \leq i \leq n$ ، $\bar{a}_i \in A_{M_n}$. ثابت کنید که الگویی مانند M برای S وجود دارد که به ازای هر i ، $\bar{a}_i \in A_M$.

۵

دستگاههای ریاضی

۱:۵ مقدمه

مطالب فصلهای ۱ تا ۴ را نمی‌توان ریاضیات بحساب آورد. دستگاههای L و $K_{\mathscr{L}}$ دستگاههای استنتاج منطقی می‌باشد. گرچه مجبور بودیم که بعضی از فنون ریاضی را برای بدست‌آوردن برهانهای احکام بکار ببریم، ولی این فنون دارای طبیعتی مقدماتی وعمدةً "در زمرهٔ خاصیتهای اعداد طبیعی بودند. ریاضیدانی که به‌مبانی کارش علاقه‌مند باشد درصدد روشن ساختن فرضها و روشهای مورد استفاده‌اش خواهد بود. ما می‌توانیم دستگاه $K_{\mathscr{L}}$ را برای این منظور بکار گیریم. $K_{\mathscr{L}}$ دربرگیرندهٔ روشهای استنتاج منطقی، به آن صورتی که مورد استفاده ریاضیدانان است، می‌باشد. دیدیم که عدم وجود محدودیتهایی بر روی زبان $\mathscr{L}$ نتایج مربوط به $K_{\mathscr{L}}$ را بسیار کلی خواهد ساخت، و نمادهای یک $\mathscr{L}$ مفروض را می‌توان به روشهای مختلف متعددی تعبیر کرد. اما به ازای هر $\mathscr{L}$، رده‌ای از فخس‌ها وجود دارد که درستی آنها به تعبیر نمادها بستگی ندارد، که این رده عبارت‌است از ردهٔ فخس‌های منطقاً "معتبر، یعنی ردهٔ قضایای $K_{\mathscr{L}}$. اگر همانطور که در مثالها دیدیم، $\mathscr{L}$ به روش ریاضی تعبیر شود قضایای $K_{\mathscr{L}}$ به عنوان درستی‌های ریاضی تعبیر خواهند شد. آنها گزاره‌هایی ریاضی هستند که بخاطر ساختار منطقی‌شان درست هستند تا محتوای ریاضی‌شان. مثلاً "، در تعبیر حسابی N، فخس

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)),$$

که منطقاً "معتبر است، به عنوان یک گزاره ریاضی تعبیر می‌شود که عبارت است از "به ازای همهٔ اعداد طبیعی x و y، اگر $x = y$ آنگاه $x = y$" که بخاطر ساختار منطقی آن درست است. از طرف دیگر، فخس

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, x_1))$$

به صورت این گزارهٔ ریاضی تعبیر می‌شود که "به ازای همهٔ اعداد طبیعی x و y اگر $x = y$ آنگاه $y = x$" که درست‌است. اما درستی آن نتیجهٔ معنای " = " است تا صرفاً "

ساختار منطقی آن . در واقع این فخس منطقا" معتبر نیست .

یافتن تعبیری که در آن A_1^2 به عنوان = تعبیر نشود و در آن نادرست باشد مشکل نیست . پس این فخس قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ نیست . از اینرو قضایای $K_{\mathscr{L}}$ بخودی خود دارای ارزش ریاضی نیستند . هریک از دستگاههای صوری ریاضی ما توسیعی از یک $K_{\mathscr{L}}$ می‌باشند که از افزودن اصول‌موضوعهٔ اضافی مناسبی بدست آمده‌اند بطوری‌که قضایای دستگاه هم نمایشگر درستی ریاضی باشندو هم‌نمایشگر درستی‌منطقی . اگر قرار است دستگاه صوری ما یک دستگاه ریاضی باشد ، در این صورت بوضوح مطلوب ما اینست که همه فخس‌هایی که تعبیرهایشان درستی‌های ریاضی هستند (یا اگر این‌کار امکان‌پذیر نیست،تعداد هرچه بیشتری از آنها) قضایای دستگاه باشند .

آنچه‌که درستی ریاضی را تشکیل می‌دهد به میزان وسیعی به زمینهٔ موردبحث ریاضی بستگی دارد . مثلا "گزارهٔ

$$(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$$

اگر گزاره‌ای دربارهٔ اعدادطبیعی تلقی‌شوددرست‌است ، ولی اگر گزاره‌ای دربارهٔ عناصر یک گروه دلخواه باشد چنین نیست که لزوما "درست باشد .

مابوسیلهٔ مثالهایی نشان خواهیم دادکه چگونه مباحث مختلف ریاضی رامی‌توان با دستگاههای صوری مختلف نمایش داد ، بطوری که ، بویژه ، گذارهٔ فوق تعبیری ازیک قضیهٔ حساب صوری ، ولی تعبیری از یک غیرقضیه ازنظریهٔ صوری گروهها باشد . زمینهٔ بحث ، زبان $\mathscr{L}$ را (همانند حالت حساب) مشخص خواهد کرد ، همچنین مجموعه‌ای از **اصول موضوعهٔ سره** را مشخص خواهد نمود . کلمهٔ "سره" رابرای فرق گذاشتن بین این اصول و اصول $(K1)$–$(K6)$ که **اصول موضوعهٔ منطقی** می‌باشند و بین همه دستگاهها مشترکند ، بکار برده‌ایم . با مشخص کردن $\mathscr{L}$ ، اصول موضوعهٔ سره ، **فخس**هایی از $\mathscr{L}$ هستند ، که با افزودن آنها به‌عنوان اصول موضوعهٔ جدید ، توسیعی از $K_{\mathscr{L}}$ بدست خواهد آمد که در آن درستیهای ریاضی آن مبحث خاص (و همینطور درستیهای منطقی آن) به‌عنوان تعبیرهای قضایا ظاهر می‌شود .

۲:۵ دستگاههای مرتبه اول دارای تساوی

ریاضیات بندرت‌می‌تواند از رابطهٔ تساوی چشم‌بپوشد . نماد "=" در زبان صوری ما ظاهر نمی‌شود . ولی ما آن را در مثالهایی به عنوان تعبیر نماد محمولی A_1^2 بکار برده‌ایم . در همهٔ مثالهایمان از دستگاههای ریاضی ، A_1^2 را در زبان خواهیم گنجاند ، و "=" تعبیر مورد نظر ما از آن خواهدبود . همانطورکه در بالا ملاحظه‌کردیم ، فخس

$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ نیست ، ولی ما می‌خواهیم که قضیه‌ای از توسیع ریاضی $K_{\mathscr{L}}$ باشد . یک راه اطمینان یافتن از این مطلب گنجاندن آن در زمرهٔ اصول موضوعهٔ سرهٔ هر دستگاه ریاضی است . ولی روشن است که فخس‌های دیگری هم هستند که باید به همین ترتیب بـا آنها رفتار کرد ، از آن جمله است $(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1)$. لازم نیست که همهٔ چنین فخس‌هایی را به عنوان اصول موضوعه بگنجانیم ، ولی‌مجموعه‌ای از آنها را ، که دیگر چنین فخس‌هایی از آنها نتیجه‌می‌شوند ، به عنوان **اصول موضوعهٔ تساوی** اختیار می‌کنیم .

$(E7)$ $\quad A_1^2(x_1, x_1)$

$(E8)$ $\quad A_1^2(t_k, u) \to A_1^2(f_i^n(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n), f_i^n(t_1, \ldots, u, \ldots, t_n))$,

که در آن u و $t_1, \ldots, t_n$ حدودی دلخواه هستند ، و f_i^n حرف تابعی دلخواهی از $\mathscr{L}$ می‌باشد .

$(E9)$ $\quad (A_1^2(t_k, u) \to (A_i^n(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \to A_i^n(t_1, \ldots, u, \ldots, t_n)))$,

که در آن u و $t_1, \ldots, t_n$ حدودی دلخواه هستند ، و A_i^n حرف محمولی دلخواهی از $\mathscr{L}$ می‌باشد .

تبصره‌های ۵ : ۱

(آ) $(E8)$ و $(E9)$ طرحهای اصل‌موضوعی هستند ، که هر کدامشان بسته به تعداد حروف محمولی و نمادهای تابعی در $\mathscr{L}$ ، نمایشگر تعدادی ، شاید نامتناهی از اصول موضوعه می‌باشند .

(ب) در همهٔ این اصول موضوعه مواردی از متغیرهای آزاد وجود دارد . مقصود از نوشتن آنها به این صورت ، سهولت کاربرد بعدی و توجه به روشنی آنها است . اما می‌دانیم که به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}$ که بستار عمومی آن $\mathscr{A}'$ باشد ، $\mathscr{A} \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}'$ و $\mathscr{A}' \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$ ، پس مجموعه‌ای هم ارز از اصول‌موضوعه ، عبارت از بستار عمومی این اصول خواهد بود .

(پ) به عنوان یک نتیجهٔ منطقی (ب) ، و حکم ۴ : ۱۸ راجع به تعویض متغیرهای پابند ، این حقیقت که متغیر خاص x_1 در $(E7)$ ظاهر می‌شود فاقد اهمیت است ، مثلاً " $A_1^2(x_5, x_5)$ بخاطر استنتاج زیر یک نتیجهٔ منطقی $(E7)$ است .

(1)	$A_1^2(x_1, x_1)$	$(E7)$
(2)	$(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1)$	(۱) و تعمیم
(3)	$(\forall x_5)A_1^2(x_5, x_5)$	(۲) و حکم ۴ : ۱۸

$$(4) \qquad (\forall x_5)A_1^2(x_5, x_5) \to A_1^2(x_5, x_5) \qquad (K5)$$

$$(5) \qquad A_1^2(x_5, x_5)$$ (۳) و (۴) و ق

همهٔ دستگاههای ریاضیی‌که ما آنها را توصیف می‌کنیم توسیعهای $K_{\mathscr{L}}$ (به ازای یک $\mathscr{L}$) خواهند بود که $(E7)$ و همهٔ نمونه‌های مناسب $(E8)$ و $(E9)$ (بسته به $\mathscr{L}$) را شامل خواهند بود .

تذکر ۵ : ۲

لزوم گنجاندن $(E7)$ باید روشن باشد . این کار باعث می‌شود که در هر الگویی تعبیر A_1^2 از یک لحاظ مانند " = " رفتار کند . $(E8)$ و $(E9)$ پیچیده‌تر هستند ، ولی گنجاندن آنها باعث می‌شود که در هر الگویی ، تعبیر A_1^2 از یک لحاظ دیگر ، یعنی این که دو چیز مساوی بتوانند جانشین یکدیگر شوند ، مانند " = " رفتار کند .

تعریف ۵ : ۳

اصول موضوعهٔ $(E7)$ ، $(E8)$ و $(E9)$ را **اصول موضوعهٔ تساوی** می‌نامند ، هر توسیعی از $K_{\mathscr{L}}$ که $(E7)$ ، و همهٔ نمونه‌های مناسب $(E8)$ و $(E9)$ را به عنوان اصول موضوعه دربر داشته باشد ، یک **دستگاه مرتبه اول دارای تساوی** نامیده می‌شود .

حکم ۵ : ۴

فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول دارای تساوی باشد . در این صورت فخس‌های زیر قضایای S می‌باشند .

(i) $\qquad (\forall x_1)A_1^2(x_1, x_1),$

(ii) $\qquad (\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1)),$

(iii) $\qquad (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^2(x_2, x_3) \to A_1^2(x_1, x_3))).$

برهان : (i) از $(E7)$ به آسانی با تعمیم بدست می‌آید .

(ii) برهانی در S ارائه می‌کنیم . .

$$(1) \qquad A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^2(x_1, x_1) \to A_1^2(x_2, x_1)) \qquad (E9)$$

$$(2) \qquad (A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^2(x_1, x_1) \to A_1^2(x_2, x_1))) \to ((A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_1)) \to (A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))) \qquad (K2)$$

$$(3) \qquad (A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_1)) \to (A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$$ (۱) و (۲) و ق

(4) $(A_1^2(x_1, x_1) \to (A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_1)))$ $(K1)$

(5) $A_1^2(x_1, x_1)$ $(E7)$

(6) $(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_1, x_1))$ (۴) و (۵) و ق

(7) $(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$ (۳) و (۶) و ق

(8) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$ (۷) و تعمیم

(iii) مجددا "برهانی در S ارائه می‌کنیم .

(1) $(A_1^2(x_2, x_1) \to (A_1^2(x_2, x_3) \to A_1^2(x_1, x_3)))$ $(E9)$

(2) $(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$ (ii) فوق الذکر

(3) $(A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^2(x_2, x_3) \to A_1^2(x_1, x_3)))$ (۱) و (۲) و ق ف

(4) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1, x_2) \to (A_1^2(x_2, x_3) \to$
$A_1^2(x_1, x_3)))$ (۳) و تعمیم

◁ از اینرو ، چون هر یک از (i) و (ii) و (iii) در حکم فوق الذکر باید در هر الگوی S درست باشند، نماد A_1^2 در هر الگویی بصورت رابطه‌ای منعکس، متقارن و متعدی ، یعنی یک رابطهٔ هم ارزی تعبیر می‌شود . اما تعبیر مورد نظر ما برای A_1^2 عبارتست از تساوی . در یک تعبیر دلخواه ، اصول موضوعه می‌توانند نادرست باشند ، بنابراین A_1^2 می‌تواند بوسیلهٔ یک رابطهٔ دوتایی دلخواه تعبیر شود ، ولی در یک الگوی S دیدیم که اصول موضوعه باید درست باشند ، و همانطور که فوقا " اشاره شد A_1^2 باید به عنوان یک رابطهٔ هم ارزی تعبیر شود . اما این اطمینان وجود ندارد که اصول موضوعهٔ $(E7)$ ، $(E8)$ و $(E9)$ باعث شوند که در هر الگوی S تعبیر A_1^2 همان = باشد .

مثال ۵:۵

زبان مرتبه اول $\mathscr{L}$ بامتغیرهای $x_1, x_2, \ldots$ ، حرف تابعی f_1^2 ، و حرف محمولی A_1^2 را درنظر بگیرید . تعبیری مانند I را به طریق زیر تعریف کنید . D_I عبارتست از $\mathbb{Z}$ ، یعنی مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح ، $\bar{f}_1^2(x, y)$ عبارتست از $x+y$ ، و $\bar{A}_1^2(x, y)$ برقرار است ، اگر و فقط اگر به ازای $x, y \in \mathbb{Z}$ ، $x \equiv y \pmod 2$. اصول موضوعهٔ تساوی در این تعبیر درست هستند .

درمورد $(E7)$. تعبیر آن عبارتست از $x \equiv x \pmod 2$ ، که درست است .

درمورد $(E8)$. به عنوان یک حالت خاص فخس زیر را درنظر گیرید

$$A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)).$$

که بصورت زیر تعبیر می‌شود

اگر $x \equiv y \pmod 2$ آنگاه $x+z \equiv y+z \pmod 2$

که درست است . تحقیق $(E8)$ در حالت کلی به عنوان یک تمرین واگذار شده است .

درمورد $(E9)$ ، فقط دو نمونه را باید تحقیق کرد ، زیرا L فقط شامل یک حرف محمولی است . اینها عبارتند از

$$(A_1^2(t, u) \to (A_1^2(t, v) \to A_1^2(u, v)))$$

و

$$(A_1^2(t, u) \to (A_1^2(v, t) \to A_1^2(v, u))).$$

تعبیرهای اینها به ترتیب عبارتند از

اگر $x \equiv y \pmod 2$ آنگاه $x \equiv z \pmod 2$ مستلزم $y \equiv z \pmod 2$ است .

و

اگر $x \equiv y \pmod 2$ آنگاه $z \equiv x \pmod 2$ مستلزم $z \equiv y \pmod 2$ است ، که درست هستند .

◁ این مثال نشان می‌دهد که در یک الگوی $(E7)$ ، $(E8)$ و $(E9)$ نماد A_1^2 لزوما" نباید بوسیلهٔ = تعبیر شود . اما حکم زیر باعث بهبود وضعیت می‌شود .

حکم ۶:۵

اگر S یک دستگاه سازگار مرتبه اول دارای تساوی باشد آنگاه S دارای الگویی است که تعبیر A_1^2 در آن عبارتست از " = " .

برهان : بنابر حکم ۴۴:۴ اگر S سازگار باشد ، آنگاه S دارای الگویی مانند M است . بخاطر حکم ۴:۵ ، $\bar{A}_1^2$ یک رابطهٔ هم ارزی روی D_M است . ردهٔ هم ارزی شامل x را با $[x]$ نشان‌دهید . اکنون تعبیر جدیدی مانند M^* ، به طریق زیر تعریف‌کنید .

دامنهٔ M^* عبارتست از $\{[x] : x \in D_M\}$ ، و به ازای هر i ، a_i بوسیلهٔ $[\bar{a}_i]$ ، و f_i^n بوسیلهٔ $\hat{f}_i^n$ تعبیر می‌شود که به ازای $y_1, \ldots, y_n \in D_M$ ،

$$\hat{f}_i^n([y_1], \ldots, [y_n]) = [\bar{f}_i^n(y_1, \ldots, y_n)],$$

و A_i^n بوسیلهٔ $\hat{A}_i^n$ تعبیر می‌شود که به ازای $y_1, \ldots, y_n \in D_M$ ،

$$\hat{A}_i^n([y_1], \ldots, [y_n])$$

برقرار است اگر و فقط اگر $\bar{A}_i^n(y_1, \ldots, y_n)$ برقرار باشد ، که $\bar{A}_i^n$ ، $\bar{f}_i^n$ ، $\bar{a}_i$ تعبیرهای نمادهای $\mathscr{L}$ در M هستند .

تحقیق این‌که اینها خوشتعریف هستند و این‌که M^* الگویی از S است کاری‌طولانی اما نه چندان مشکل است . مثلا" ، فرض کنید که f یک حرف تابعی یک‌مکانی از $\mathscr{L}$ و $\bar{f}$ تعبیر آن در M باشد . فرض کنید a و b اعضای D_M باشند و $[a]=[b]$. باید نشان

دهیم که $[\bar{f}(a)]=[\bar{f}(b)]$ اما

$$\vdash_S (A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(f(x_1), f(x_2))). \qquad (E8)$$

پس $(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(f(x_1) f(x_2)))$ در M درست است ، زیرا M یک الگو است ، و بنابراین $\bar{A}_1^2(a, b)$ مستلزم $\bar{A}_1^2(f(a), f(b))$ است. یعنی $[a]=[b]$ مستلزم $[\bar{f}(a)]=[\bar{f}(b)]$ است .

همچنین تعبیر A_1^2 در M^*، همان = ، است ، زیرا $\hat{A}_1^2([x],[y])$ برقرار است اگر و فقط اگر $\bar{A}_1^2(x, y)$ برقرار باشد ، یعنی اگر و فقط اگر $[x]=[y]$.

◁ این برهان بوسیلهٔ آخرین مثالمان که در آن الگویی ارائه کردیم که A_1^2 به‌عنوان = تعبیر نشده بود بخوبی نشان داده می‌شود . در آن مثال داشتیم $\bar{A}_1^2(x, y)$ اگر و فقط اگر $x \equiv y \pmod 2$ (x و y اعدادصحیح هستند) . یک الگوی جدید تعریف کنید ، با دامنه $\{[0],[1]\}$ که در آن f_1^2 و A_1^2 بوسیلهٔ $\hat{f}_1^2$ و $\hat{A}_1^2$ تعبیرمی‌شوند که‌چنین تعریف شده‌اند:

$$\hat{f}_1^2([x],[y])=[\bar{f}_1^2(x, y)]=[x+y],$$

$\hat{A}_1^2([x],[y])$ برقرار است اگر و فقط اگر $\bar{A}_1^2(x, y)$ برقرار باشد ،

یعنی ، اگر و فقط اگر $x \equiv y \pmod 2$

یعنی ، اگر و فقط اگر $[x]=[y]$

تعریف ۵:۷

فرض کنید S یک دستگاه مرتبهٔ اول دارای تساوی باشد . یک الگوی **نرمال** برای S الگویی است که A_1^2 در آن به عنوان = تعبیر شود .

در آینده بیشتر با الگوهای نرمال سروکار خواهیم‌داشت ، زیرا که اینها نمایشگر وضعیت‌های ریاضی موردنظر از لحاظ تعبیر A_1^2 می‌باشند .

تبصره : البته انتخاب A_1^2 برای نشان دادن تساوی حائز اهمیتی نیست . ما می‌توانستیم مثلا "A_{17}^2 را انتخاب کنیم که در این صورت اصول موضوعهٔ $(E7)$، $(E8)$، $(E9)$ بجای نماد محمولی A_1^2 این نماد را شامل می‌شدند .

◁ در باقیماندهٔ این‌فصل ما بادستگاههای مرتبه اول ، دارای تساوی سروکار خواهیم داشت که در آنها A_1^2 نشان دهندهٔ تساوی است .

برهان حکم ۵:۴ نشان می‌دهد که چگونه نوشتن برهانها می‌تواند کاری تکراری باشد ،می‌توان این مشکل را با واردساختن نماد = بجای A_1^2 تا اندازه‌ای تخفیف داد .

نماد گذاری : اگر t_1 و t_2 حدودی از $\mathscr{L}$ باشند به جای $A_1^2(t_1, t_2)$ می‌نویسیم $t_1=t_2$. اکنون می‌توان اصول موضوعهٔ $(E7)$، $(E8)$ و $(E9)$ را بصورتی ساده‌تر ، و به

روشی که معنای آنها روشنتر باشد نوشت .

$$(E7')\quad x_1 = x_1$$

$$(E8')\quad (t_k = u \rightarrow (f_i^n(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = f_i^n(t_1, \ldots, u, \ldots, t_n))),$$

که f_i^n و u و $t_1, \ldots, t_n$ همان هستند که در $(E8)$ داشتیم

$$(E9')\quad (t_k = u \rightarrow (A_i^n(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \rightarrow A_i^n(t_1, \ldots, u, \ldots, t_n))),$$

که A_i^n و u و $t_1, \ldots, t_n$ همان هستند که در $(E9)$ داشتیم

نماد = تنها نمادی نیست‌که علاوه بر الفبای اصلی نمادها واردزبان اصلی خود کرده‌ایم. مثلا "$(\exists x_i)$" را به عنوان مختصر شدهٔ $\sim(\forall x_i)\sim$ ، و $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ را به عنوان مختصرشدهٔ $\sim((\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \rightarrow \sim(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}))$ بکار بردیم . گاهی مناسب است که $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ را به عنوان مختصر شدهٔ $(\sim\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ و $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ را به عنوان مختصر شدهٔ $\sim(\mathscr{A} \rightarrow \sim\mathscr{B})$ بکار بریم . این کار با تصور شهودی ما از فصل ۱ مطابقت دارد ، و استفاده از این نمادها دستگاه صوری ما را به هیچ طریقی گسترش نخواهد داد . پرهیز از تکرارهای طولانی نمادها کاری مناسب است . در زمینه‌های مختلف موردبحث که بزودی به سراغ آنها خواهیم رفت ادامهٔ این روش ومعرفی **نمادهای تعریف‌شدهٔ** دیگر کاری است‌ممکن وگاهی مطلوب . بویژه یکی از این نمادها ، که می‌تواند در دستگاههای مرتبه اول دارای تساوی بکار رود ، حائز اهمیت خاص است . این نماد برای عبارت " یک . . . منحصر بفرد وجود دارد که . . . " بکار می‌رود .

نمادگذاری : $(\exists_1 x_i)\mathscr{A}(x_i)$ را به عنوان مختصر شدهٔ فرمول زیر بکار می‌بریم .

$$(\exists x_i)(\mathscr{A}(x_i) \wedge (\forall x_j)(\mathscr{A}(x_j) \rightarrow x_i = x_j))$$

تمرین

۱ ــ در مثال ۵:۵ بطور کامل ثابت کنید که هر نمونه از طرح اصل موضوعی $(E8)$ در تعبیر I درست است .

۲ ــ فرض کنید S یک‌دستگاه مرتبه اول دارای تساوی باشد ، و فرض کنیدکه فخس بستهٔ $\mathscr{A}$ در همهٔ الگوهای نرمال S درست باشد . ثابت‌کنیدکه $\mathscr{A}$ در همهٔ الگوهای S درست است .

۳ ــ فرض کنید $\mathscr{A}(x_1)$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که x_1 در آن دارای مورد آزاد است ، و فرض کنید که x_2 بجای x_1 در $\mathscr{A}(x_1)$ آزاد است ، و فرض کنید که $\mathscr{A}(x_2)$ حاصل جانشینی x_2 بجای یکی از موارد آزاد x_1 در $\mathscr{A}(x_1)$ باشد (توجه کنید که این با روش رایج نمادگذاری ما متفاوت است) . ثابت کنید که فخس

$$(x_1 = x_2 \rightarrow (\mathscr{A}(x_1) \rightarrow \mathscr{A}(x_2)))$$

قضیه‌ای استاز هر توسیعی از K که $(E7')$ ، $(E8')$ و $(E9')$ اصول‌موضوعهٔ آن باشند .
از اینجا نتیجه بگیرید‌که اگر $\mathscr{A}(x_2)$ حاصل جانشینی x_2 بجای بیش از یک‌مورد آزاد x_1 باشد ، باز همان نتیجه برقرار است .

۴ ــ در برهان حکم ۵:۶ ، ثابت کنید که تعریف $\hat{A}_i^n$ خوشتعریف است ، یعنی اگر $y_1, \ldots, y_n \in D_M$ ، $z_1, \ldots, z_n \in D_M$ و $[y_i] = [z_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ ، آنگاه $\bar{A}_i^n(y_1, \ldots, y_n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $\bar{A}_i^n(z_1, \ldots, z_n)$ برقرار باشد .

۵ ــ بیان کنید که چگونه " درست دو . . . . وجوددارد بطوری که . . . . " ، را می‌توان در فخسی از یک دستگاه مرتبه اول دارای تساوی بیان کرد .

۶ ــ فرض کنید $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{L}$ باشد که حدود $t_1, \ldots, t_n$ در آن "آزاد" باشند به این معنی که هر مورد یک متغیر در هر یک از این حدود در $\mathscr{A}$ آزاد است . فرض کنید S توسیعی از $K_{\mathscr{L}}$ باشد‌که شامل $(E7')$ ، $(E8')$ و $(E9')$ باشد . ثابت کنید که به ازای هر حدی مانند u که شامل متغیرهای دارای مورد پابند در $\mathscr{A}$ نباشد داریم

$$\vdash_S ((t_k = u) \rightarrow (\mathscr{A}(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \rightarrow \mathscr{A}(t_1, \ldots, u, \ldots, t_n)))$$

۵:۳ نظریهٔ گروهها

نظریهٔ‌گروهها شاید مأنوس‌ترین شاخه‌ای از ریاضیات‌باشد‌که صریحا "روی مجموعه ساده‌ای از اصول موضوعه پایه‌گذاری شده است . از اینرو این "مبحث ریاضی" را برای نشان‌دادن این‌که چگونه دستگاههای ریاضی به‌عنوان توسیعهای $K_{\mathscr{L}}$ ظاهر می‌شوند بکار می‌بریم .

ابتدا باید یک زبان‌مناسب‌مرتبه اول $\mathscr{L}$ را توصیف‌کنیم ، از اینرو فرض کنید $\mathscr{L}_G$ زبان مرتبه اولی باشد که دارای الفبای نمادهای زیر است :

متغیرهای $x_1, x_2, \ldots$

ثابت فردی a_1 (همانی)

نمادهای تابعی f_1^1 ، f_1^2 ،(معکوس ، حاصلضرب)

نماد محمولی $=$

سجاوندی(و) ، و

نمادهای منطقی $\forall, \sim, \rightarrow$

اکنون $\mathscr{G}$ را به عنوان توسیعی از $K_{\mathscr{L}_G}$ تعریف کنید که اصول موضوعهٔ سرهٔ آن عبارتند از $(E7)$ ، همهٔ موارد مناسب $(E8)$ و $(E9)$ ، و اصول موضوعهٔ زیر

$$(G1) \quad f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3) = f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)) \qquad \text{(قانون شرکت‌پذیری)}$$

$$(G2) \quad f_1^2(a_1, x_1) = x_1 \qquad \text{(همانی چپ)}$$

$$(G3) \quad f_1^2(f_1^1(x_1), x_1) = a_1 \qquad \text{(معکوس چپ)}$$

همانندگذشته، گذاشتن یا نگذاشتن سور عمومی برای هرمتغیرآزاد دراین‌اصول‌موضوعه فاقداهمیت است. بستار عمومی این اصول‌موضوعه، مجموعه‌ای هم ارز از اصول‌موضوعه را تشکیل می‌دهد.

$(G1)$، $(G2)$و$(G3)$ صرفاً "عبارتنداز بـازگردان اصول موضوعهٔ معمولی گروهها. معمولاً $(G2)$ و $(G3)$بصورت "یک همانی چپ وجود دارد"، و "به ازای هر عنصری یک معکوس چپ وجوددارد" بیان می‌شوند. دراینجا اصول‌موضوعه صریحاً "بیان‌کننده وجودنیستند. آنها صرفاً" بیان می‌کنندکه a_1 و$f_1^1(x_1)$، هنگامی که در یک الگو تعبیر شوند، باید دارای خاصیتهای مناسبی باشند. بیان وجود غیرلازم است، زیرا در هر الگویی از این دستگاه تعبیرهایی از a_1 و f_1^1 وجوددارند، و بنابراین همانی و معکوس خودبخود موجود می‌باشند. مشابهاً "اصول موضوعهٔ گروهها راجع به بسته بودن تحت عمل گروه دراینجا غیرلازم است، زیرا تعبیر f_1^2 دریک الگو لزوماً "تابعی‌است‌دومکانی با مقادیری در دامنهٔ الگو.

اگر چنین‌دستگاهی از نظریهٔ گروهها مفروض باشد، می‌توانیم هر برهان استانده‌ٔ یک کتاب درسی جبر، دربارهٔ عناصر گروهها را به یک برهان صوری دردستگاه تبدیل کنیم. چنین روشی دارای فایدهٔ عملی‌ناچیزی می‌باشد، زیرا یک برهان صوری در $\mathscr{G}$ لزوماً "تا اندازه‌ای پیچیده است، و تعداد فراوان مراحل صرفاً "عملیاتی، تصورات شهودی بکار رفته را، همانطور که در مثال بعدی خواهیم‌دید، پنهان خواهدساخت.

مثال ۸:۵

در هر گروه باعنصر همانی e داریم $e(ee) = e$. متناظر با این، یک برهان صوری در دستگاه $\mathscr{G}$ از فخس‌ها ارائه می‌کنیم.

$$f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = a_1.$$

(1) $\quad f_1^2(a_1, x_1) = x_1 \qquad (G2)$

(2) $\quad (\forall x_1)(f_1^2(a_1, x_1) = x_1) \qquad$ (۱) و تعمیم

(3) $\quad (\forall x_1)(f_1^2(a_1, x_1) = x_1) \to (f_1^2(a_1, a_1) = a_1) \qquad (K5)$

(4) $\quad f_1^2(a_1, a_1) = a_1 \qquad$ (۲) و (۳) و ق

(5) $\quad (\forall x_1)(f_1^2(a_1, x_1) = x_1) \to (f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = f_1^2(a_1, a_1)) \quad (K5)$

(6) $f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = f_1^2(a_1, a_1)$ (۲) و (۵) و ق

(7) $(f_1^2(a_1, a_1) = a_1) \to (f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1))$

$= f_1^2(a_1, a_1) \to f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = a_1)$ $(E9)$

(8) $(f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = f_1^2(a_1, a_1)$

$\to f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = a_1)$ (۴) و (۷) و ق

(9) $f_1^2(a_1, f_1^2(a_1, a_1)) = a_1$ (۶) و (۸) و ق

در مقایسه با این برهان ، یک برهان استانده‌ٔ $e(ee) = e$ بسیار بدیهی است . نتایج پیچیده‌تر دربارهٔ گروهها در برهانهای باز هم پیچیده‌تری در $\mathscr{G}$ متجلی می‌شوند . مثالهای خاص چندان‌مفید نیستند ، ولی با کوشش برای اثبات فخس $f_1^2(x_1, a_1) = x_1$ در $\mathscr{G}$ ، پیچیدگی‌هایی را که در این کار وجوددارند بهتر درک می‌کنیم . فخس مزبور با این خاصیت گروهها متناظر است که همانی چپ یک همانی راست نیز هست .

◁ بایدتصریح‌کردکه هر گروه G الگویی از دستگاه $\mathscr{G}$ است به شرط اینکه a_1 به عنوان عنصر همانی G ، f_1^1 به عنوان معکوس ، f_1^2 به عنوان عمل گروه و $=$ به عنوان مساوی است تعبیر شود . اما ، همانطورکه خواهیم‌دید الگوهای دیگری هم‌وجود دارند .

مثال ۵ : ۹

به طریق زیر تعبیری‌مانند I از دستگاه $\mathscr{G}$ بسازید . فرض کنید D_I مجموعهٔ اعداد صحیح ، یعنی $\mathbb{Z}$ باشد ، و فرض کنید که a_1 به عنوان 0 تعبیر شود ، فرض کنید

به ازای $x \in \mathbb{Z}$ $\quad \bar{f}_1^1(x) = -x$

به ازای $x, y \in \mathbb{Z},$ $\quad \bar{f}_1^2(x, y) = x + y$

و فرض کنید که $=$ بوسیلهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m تعبیر شود ، که m عدد صحیح مثبت ثابتی است . (هرچندکه $=$ را به‌عنوان نمادی از $\mathscr{L}_G$ بکار می‌بریم ، ولی همانطور که در بالا مشاهده شد ، لازم‌نیست همیشه آن را به عنوان تساوی واقعی تعبیر کنیم) . I یک الگوی $\mathscr{G}$ است . برای تحقیق این‌مطلب باید نشان دهیم‌که هر اصل موضوعهٔ $\mathscr{G}$ در I درست است . درستی $(K1)$–$(K6)$ احتیاج به تحقیق ندارد ، زیرا که اینها منطقا "معتبر هستند . درستی $(E7)$ ، $(E8)$ و $(E9)$ دقیقا "مانندمثال ۵ : ۵ است . $(G1)$ ، $(G2)$ و $(G3)$ را دقیق‌تر موردبررسی قرار می‌دهیم .

تعبیر $(G1)$ عبارتست از

$$(x + y) + z = x + (y + z) \pmod{m}$$

تعبیر $(G2)$ عبارتست از

$$0+x=x \ (\mathrm{mod}\ m)$$

تعبیر $(G3)$ عبارتست از

$$-x+x=0 \ (\mathrm{mod}\ m)$$

به ازای هر $x, y, z \in \mathbb{Z}$ همهٔ اینها گزاره‌ای درست هستند . پس I الگویی از $\mathscr{G}$ است . اما I یک گروه نیست . درحقیقت دراینجا رابطهٔ نامأنوس همنهشتی درکار است . اما خواننده‌ای که دربارهٔ نظریهٔ گروهها یا نظریهٔ اعداد تجربه داشته باشد ، درک خواهد کرد که در پس این تصویر گروهی وجود دارد که باید کشف شود . با استفاده از الگوی I ، می‌توانیم با روش حکم ۵ : ۶ یک الگوی نرمال I^* بدست آوریم . دامنهٔ I^* عبارت است از مجموعه‌های رده‌های همنهشتی به پیمانه m ، تعبیر a_1 عبارتست از 0_m (ردهٔ شامل 0) ، تعبیر f_1^2 عبارتست از $+$ (که روی رده‌های همنهشتی خوشتعریف است) ، تعبیر f_1^1 عبارتست از " معکوس تحت عمل جمع " ، (که مجددا " خوشتعریف است) ، و تعبیر $=$ عبارتست از تساوی . I^* یک الگوی نرمال و یک گروه است .

◁ بطور کلی، هر گروهی یک الگوی نرمال برای دستگاه صوری نظریهٔ گروهها است ، و به عکس هر الگوی نرمال این دستگاه یک گروه است . بنابراین برای این‌که دستگاه از لحاظ ریاضی برایمان بامعنی باشد بایدتوجه‌مان را معطوف الگوهای نرمال کنیم . اما ، شایدمتأسفانه ، ممکن نیست که اصول موضوعهٔ تساوی را طوری ارائه کنیم که تعبیر آن جز تساوی واقعی چیزدیگری نباشد . همواره می‌توان الگویی ساخت که در آن $=$ با رابطهٔ هم ارزی دیگری تعبیر بشود .

دلیل ساختن این دستگاه صوری برای نظریهٔ گروهها فراهم ساختن راهی میان‌بر یا جدید برای بدست آوردن نتایجی دربارهٔ گروهها و عناصر آنها نیست . همانطورکه دیدیم روشهای برهان موجود در $\mathscr{G}$ آن‌چنان رام‌نشدنی هستند که برای این منظور بی‌فایده می‌باشند . آنچه که از توصیف دستگاه $\mathscr{G}$ حاصل می‌شود این است‌که همهٔ فرضها و روشهایی را که ریاضیدانان در مبحث نظریهٔ گروهها بکار می‌برند ، چه منطقی باشند یا ریاضی، با دقت و صراحت بیان ، و به‌این ترتیب این قسمت از ریاضیات را **روشن** کرده‌ایم.

گروهها به تفصیل موردبررسی قرار گرفته‌اند ، و بررسی‌های مشابهی را می‌توان برای انواع دیگر دستگاههای مجرد جبری ، مثلا " حلقه‌ها ، میدانها ، فضاهای برداری ، شبکه‌ها ، جبرهای بولی ، وغیره ارائه کرد . می‌دانیم که هریک از اینها بوسیلهٔ مجموعه‌ای متناهی از اصول‌موضوعه مشخص می‌شوند ، و آنها را می‌توان به‌آسانی به زبانهای صوری مناسبی ترجمه کرد . درحقیقت هر قسمتی از ریاضیات که بوسیلهٔ مجموعه‌ای از اصول موضوعه مشخص شده باشد می‌تواند به‌روش مشابهی بررسی شود . مثلا " ، هندسهٔ اقلیدسی

را می‌توان برمجموعه‌ای نسبتا "طولانی و پیچیده از اصول موضوعه استوار ساخت، و یک دستگاه صوری باید شامل حروف محمولیی باشدکه بتوان آنها را بصورت "یک نقطه است"، "یک خط است" و "قطع می‌کند"، وغیره تعبیر کرد. همچنین یک دستگاه اصل موضوعی برای اعداد حقیقی را می‌توان بوسیلهٔ اصول موضوعه برای یک میدان مرتب تمام توصیف کرد.

دو قسمت از ریاضیات هست‌که اگر به این طریق بررسی شوند دارای اهمیت خاص می‌باشند. اینها عبارتند از حساب و نظریهٔ مجموعه‌ها. بررسی کامل هرکدام از اینها به یک کتاب کامل احتیاج دارد. ولی ما صرفا "سعی خواهیم کرد که دلیل موقعیت خاص آنها را تشریح کنیم. تنها در چارچوب یک دستگاه صوری صریح است که سؤالات مربوط به سازگاری یا رابطهٔ بین فرضهای مختلف یا موقعیت و استفاده از فرضهای اساسی می‌توانند روشن شوند. نظریهٔ مجموعه‌ها به عنوان زیربنای تمامی ریاضیات عمل می‌کند بنابراین پایهٔ منطقی آن دارای اهمیت بدون چون و چرا است. حساب جزء کوچکی از ریاضیات است، و اهمیت آن بواسطهٔ روشهایی است‌که برای نشان‌دادن بی‌حاصل بودن جستجو برای یافتن یک دستگاه صوری که آزمودن هر حکم ریاضی را ممکن سازد بکار می‌روند. هر دستگاه ریاضی که حساب معمولی را بتوان در آن به انجام رساند نمی‌تواند چنین دستگاه کلیی باشد. زیرا مجموعهٔ قضایای هر توسیع سازگاری از حساب (به مفهومی که بعدا "بطور دقیق بیان خواهد شد) حداقل یک حکم درست را حذف می‌کند. بعضی‌از دستگاههایی‌که توسیع حساب نیستند (مثلا "نظریهٔ‌گروهها) دارای این‌خاصیت‌نمی‌باشند. اما دستگاهی که شامل آنالیز ریاضی باشد، یا بخواهیم که تمام ریاضیات را شامل شود قطعا "شامل حساب خواهدبود، و بنابراین دچار این نقصان خواهد شد. این مطالب با تفصیل بیشتری در فصل ۶ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

تمرین

۷ــ با استفاده از یک زبان صوری فاقد ثابت فردی یک دستگاه مرتبه اول $\mathscr{G}$ نظریهٔ گروهها بسازید. همین کار را با دستگاه مرتبه اولی انجام دهید که شامل ثابت فردی a_1 ولی فاقد نماد تابعی باشد.

۸ــ یک نیمگروه مجموعه‌ای است که یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی آن تعریف شده باشد. یک دستگاه مرتبه اول $\mathscr{S}$ از نظریه نیمگروهها بسازید که دستگاه $\mathscr{G}$ تمرین ۷ توسیعی از $\mathscr{S}$ باشد.

۹ــ اگر دستگاه $\mathscr{G}$ تمرین۷ را با افزودن یک‌ثابت‌فردی a_1 به زبان (ولی بدون افزودن

هیچ اصل موضوعه‌ای) تغییر دهیم در الگوهای $\mathscr{G}'$ چه تغییری حاصل می‌شود ؟ افزودن یک دنباله از ثابتهای فردی مانند $a_1, a_2, \ldots$ چه اثری دارد ؟

۱۰ ــ دستگاه مرتبه اولی توصیف کنید که الگوهای نرمال آن همگی گروههای **نامتناهی** باشند . آیا الگوهای نرمال یک‌دستگاه مرتبه اول می‌توانند همگی گروههای متناهی باشند .

۱۱ ــ یک دستگاه مرتبه اول نظریهٔ حلقه‌ها را توصیف کنید ، یعنی الفبای نمادها را برای یک زبان مرتبه اول مناسب فهرست کنید ، و مجموعه‌ای از اصول موضوعه و طرحهای اصل‌موضوعی بنویسید . الگویی از این‌دستگاه عرضه کنیدکه حلقه نباشد .

۱۲ ــ فرض کنیدکه $\mathscr{F}$ یک دستگاه مرتبه اول نظریهٔ میدانها باشد . الگوهای نرمال این دستگاه ، میدانهایی هستندکه ممکن است دارای مشخصهٔ صفر یا عدد اول p باشند ثابت‌کنیدکه اگر یک‌فخس بسته مانند $\mathscr{A}$ از زبان $\mathscr{F}$ درهمهٔ میدانهای دارای‌مشخصه صفر درست باشد ، آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد بطوری که $\mathscr{A}$ در همهٔ میدانهای دارای مشخصهٔ p ، که $p>n$ درست است .

۱۳ ــ فرض کنید $\mathscr{F}$ همان باشد که در تمرین ۱۲ توصیف شد ، و $\mathscr{A}$ فخسی باشد که به ازای همهٔ p های بزرگتر از عددی مانند n ، میدانی دارای مشخصهٔ p وجوددارد که $\mathscr{A}$ در آن درست باشد . ثابت کنید که میدانی دارای مشخصهٔ صفر وجود دارد که $\mathscr{A}$ در آن درست است .

۴:۵ حساب مرتبه اول

اکنون مفاهیمی را که ابتدا در فصل ۳ در تعبیر حسابی N ارائه شدند گسترش می‌دهیم . زبان $\mathscr{L}_N$ را شامل متغیرهای $x_1, x_2, \ldots$ ، ثابت‌فردی a_1 (برای 0) حروف تابعی f_1^1 و f_1^2 و f_2^2 (تالی ، مجموع و حاصلضرب) ، نماد محمولی = ، و همینطور سجاوندی ، رابطها و سورها اختیار می‌کنیم . زبان مرتبه اولی را ، که از افزودن $(E7)$ ، همهٔ نمونه‌های مناسب $(E8)$ و $(E9)$ شش اصل موضوعه و یک طرح اصل موضوعی زیر به $K_{\mathscr{L}_N}$ حاصل می‌شود با $\mathscr{N}$ نمایش می‌دهیم .

$(N1)$ $(\forall x_1)\sim(f_1^1(x_1)=a_1)$.

$(N2)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_1^1(x_1)=f_1^1(x_2)\rightarrow x_1=x_2)$.

$(N3)$ $(\forall x_1)(f_1^2(x_1, a_1)=x_1)$.

$(N4)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_1^2(x_1, f_1^1(x_2))=f_1^1(f_1^2(x_1, x_2)))$.

$(N5)$ $(\forall x_1)(f_2^2(x_1, a_1)=a_1)$.

$(N6)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2))=f_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_1))$.

$(N7)$ $\mathscr{A}(a_1)\rightarrow((\forall x_1)(\mathscr{A}(x_1)\rightarrow\mathscr{A}(f_1^1(x_1)))\rightarrow(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1))$,

به ازای هر فخس $\mathscr{A}(x_1)$ از $\mathscr{L}_N$ که x_1 در آن دارای مورد آزاد است .

نماد گذاری : ما هنوز نمی‌دانیم‌که آیا در یک الگوی نرمال باید f_1^2 را به عنوان جمع (یا تابعی با همان خاصیتهای جمع) تعبیر کرد ، ولی اگر بلافاصله بجای f_1^2 ، f_2^2 و f_1^1 به ترتیب از + ، × و ' استفاده و $\mathscr{L}_N$ را به این نحو تعدیل‌کنیم درک اصول موضوعه بسیار آسانتر خواهد شد . به عبارت واضحتر

به جای $f_1^2(t_1, t_2)$ می‌نویسیم t_1+t_2 ،

به جای $f_2^2(t_1, t_2)$ می‌نویسیم $t_1\times t_2$ ،

و به جای $f_1^1(t)$ می‌نویسیم t' ،

که t, t_1, t_2 حدود دلخواهی هستند . همچنین بجای a_1 نماد 0 را بکار می‌بریم . اما باید یک بار دیگر خطر این کار را مورد تأکید قرار دهیم . پس از انجام این کار نباید فرض کنیم‌که این نمادهای جدید همیشه لزوما "بوسیلهٔ توابع یا اشیائی که معمولا "توسط آن نمادها نمایش داده می‌شده‌اند تعبیر خواهند شد .

با استفاده از این‌نمادها اصول‌موضوعهٔ $(N1)$–$(N7)$ را می‌توان به طریق زیر نوشت

$(N1^*)$ $(\forall x_1)\sim(x_1'=0)$.

$(N2^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1'=x_2'\rightarrow x_1=x_2)$.

$(N3^*)$ $(\forall x_1)(x_1+0=x_1)$.

$(N4^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1+x_2'=(x_1+x_2)')$.

$(N5^*)$ $(\forall x_1)(x_1\times 0=0)$.

$(N6^*)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1\times x_2'=(x_1\times x_2)+x_1)$.

$(N7^*)$ $\mathscr{A}(0)\rightarrow((\forall x_1)(\mathscr{A}(x_1)\rightarrow\mathscr{A}(x_1'))\rightarrow(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1))$,

به ازای هر فخس $\mathscr{A}(x_1)$ که x_1 در آن دارای مورد آزاد است .

تذکر ۵:۱۰

(آ) خواننده‌ای‌که با اصول پئانو آشنا باشد$(N1)$،$(N2)$و$(N7)$را خواهد شناخت. اصول پئانو مجموعه‌ای از اصول‌موضوعه برای دستگاه اعداد طبیعی هستند که مدتها قبل از مطالعهٔ دستگاههای صوری به شکل فعلیشان ، بیان شده بودند . اینها عبارتند از:

۱ ــ 0 یک عدد طبیعی است .

۲ ــ به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد طبیعی دیگری مانند n' وجود دارد .

۳ ــ اگر n عددی طبیعی باشد ، n' مساوی صفر نیست .

۴ ــ به ازای اعداد طبیعی دلخواه m و n ، اگر $m'=n'$ آنگاه $m=n$.

۵ ــ به ازای هر مجموعهٔ A از اعدادطبیعی که شامل 0 باشد ، اگر $n'\in A$ هرگاه که $n\in A$ ، آنگاه A شامل همهٔ اعداد طبیعی است .

توجه کنید که دو اصل اول با هیچکدام از اصول موضوعهٔ دستگاه $\mathscr{N}$ ما مطابقت ندارند. علت عدم احتیاج ما به آنها این است که ما نمادهایی (یعنی 0 و ′، یا a_1، f_1^1) را در زبان $\mathscr{L}_N$ گنجانده‌ایم که باید در هر الگویی دارای تعبیرهایی باشند، پس در هر الگویی یک عنصر $\bar{a}_1$ وجود دارد، و به ازای هر x باید یک عنصر $\bar{f}_1^1(x)$ وجود داشته باشد.

(ب) تناظر بین $(N7)$ و اصل پنجم پئانو دقیق نیست. هر کدام صورتی از اصل استقراء ریاضی می‌باشند. اما چون در $\mathscr{N}$ ما ملزم به استفاده از زبان مرتبه اول $\mathscr{L}_N$ هستیم، اصل موضوعهٔ $(N7)$ نمی‌تواند مانند اصل پنجم پئانو قوی و جامع باشد. علت این است که اصل پنجم پئانو دارای یک سور مرتبه دوم "به ازای هر مجموعهٔ A از اعداد طبیعی" می‌باشد که در زبان مرتبه اول ما قابل بیان نیست. بهترین کاری که می‌توانیم بکنیم استفاده از مفهوم طرح اصل موضوعی است، بطوری که عملا "سور" به ازای هر فخس $\mathscr{A}(x_1)$ که x_1 در آن دارای مورد آزاد است "، را وارد کار می‌کنیم. توجه کنید که فخسی مانند $\mathscr{A}(x_1)$ در هر تعبیری یک مجموعه، یعنی مجموعهٔ همهٔ عناصری مانند v_1 از دامنهٔ تعبیر را که در $\mathscr{A}(x_1)$ صدق می‌کنند، مشخص می‌کند. (به عبارت دقیقتر، مجموعهٔ همهٔ عناصری مانند v_1 از دامنهٔ تعبیر را مشخص می‌کند که هر ارزشگذاریی مانند v، که داشته باشیم $v(x_1)=v_1$ در $\mathscr{A}(x_1)$ صدق کند.)

پس، اگر خودمان را در چارچوب الگوی $\mathscr{N}$ تصور کنیم، هر نمونهٔ طرح اصل موضوعی $(N7)$ با بیان اصل پنجم پئانو راجع به یک مجموعهٔ خاص متناظر می‌شود. اما باز هم یک تفاوت اساسی وجود دارد. نمونه‌های طرح اصل موضوعی $(N7)$ مجموعه‌ای شمارش پذیر از فخس‌های $\mathscr{L}_N$ تشکیل می‌دهند. اصل پنجم پئانو گزاره‌ای است دربارهٔ همهٔ مجموعه‌های اعداد طبیعی و تعداد این مجموعه‌ها شمارش ناپذیر است. پس $(N7)$ صورت بسیار محدودتری از اصل استقراء است، زیرا فقط به همان گردآیهٔ شمارش پذیر از زیر مجموعه‌های دامنهٔ الگویی مربوط می‌شود که می‌تواند به شیوه‌ای که در بالا ذکر شد بوسیلهٔ فخس‌های $\mathscr{L}_N$ توصیف شود.

(پ) در اصول پئانوی ذکری از مجموع یا حاصلضرب نمی‌شود. این توابع را می‌توان با استفاده از اصل استقراء برحسب تابع تالی تعریف کرد، ولی مناسبتر این است که نمادهای مربوط به آنها را در زبان صوری بگنجانیم. بعد از این کار، اصول موضوعهٔ $(N3)$–$(N7)$ برای تضمین این که در هر الگویی، تعبیرهای این نماد دارای خاصیتهای موردنظر می‌باشند ضرورت خواهند داشت.

◁ ازلحاظ ریاضی یک تفاوت اساسی بین این وضعیت، و وضعیت گروهها وجود دارد.

دستگاه صوری نظریهٔ گروهها الگوهای نرمال متفاوت متعددی (یعنی همهٔ گروهها) را امکان‌پذیر می‌ساخت. دستگاه حساب $\mathcal{N}$، برای این ساخته شده که فقط یک الگوی نرمال‌داشته باشد، که همان مجموعهٔ اعداد طبیعی است، زیرا امیدواریم که خاصیتهای اعداد طبیعی به عنوان قضایای این دستگاه ظاهر شوند. درحالی‌که متخصصین نظریه گروهها ممکن است بخواهند نتایجی کلی که دربارهٔ همهٔ گروهها برقرار باشند بدست آورند، متخصصین نظریهٔ اعداد با نتایج مربوط به یک مجموعه، یعنی مجموعهٔ اعداد طبیعی سروکار دارند. پس طبیعی است اگر بپرسیم که آیا به‌غیراز مجموعهٔ اعداد طبیعی الگوی نرمال دیگری از دستگاه $\mathcal{N}$ وجود دارد؟ سؤال دیگری که طبعاً "پیش می‌آید این است که آیا این دستگاه به اندازه کافی قوی هست؟ به این معنی که همهٔ فخس‌هایی را که مایلیم به‌عنوان قضیه داشته باشیم یعنی همهٔ فخس‌های متناظر با گزاره‌های درست دربارهٔ اعداد طبیعی را، بتواند به عنوان قضیه عرضه کند. این دو سؤال همانطورکه بزودی خواهیم دید، به یکدیگر ربط دارند.

بعضی از خوانندگان ممکن است با این برهان استاندهٔ که اصول پئانو مجموعهٔ اعداد طبیعی را بطور منحصر بفرد مشخص می‌کنند آشنا باشند. فرض کنیم $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{N}$ "الگوهای" اصول پئانو باشند. در این صورت $0\in \boldsymbol{N}$ و $0\in \boldsymbol{M}$. فرض کنید $\boldsymbol{A}$ مجموعهٔ عناصری از $\boldsymbol{N}$ باشد که عنصری از $\boldsymbol{M}$ هم هستند. در این صورت $0\in \boldsymbol{A}$. همچنین اگر $n\in \boldsymbol{A}$ آنگاه $n\in \boldsymbol{N}$ و $n\in \boldsymbol{M}$ پس $n'\in \boldsymbol{N}$ و $n'\in \boldsymbol{M}$، پس $n'\in \boldsymbol{A}$. از اینرو، بنابراصل پنجم پئانو، $\boldsymbol{A}$ شامل همهٔ اعداد طبیعی است، یعنی $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}$، و بنابراین $\boldsymbol{N}\subseteq \boldsymbol{M}$. مشابهاً "$\boldsymbol{M}\subseteq \boldsymbol{N}$ و به این ترتیب $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$. در این برهان اصل پنجم بطور اساسی مورد استفاده قرار گرفته است، و همانطور که قبلاً "متذکر شدیم، $(\boldsymbol{N7})$ دقیقاً" با این اصل متناظر نیست. درحقیقت برهان فوق را نمی‌توان به شکل برهانی در $\mathcal{N}$ درآورد. بنابراین دراینجا امیدی نیست‌که بتوانیم جوابی منفی برای سؤال اولمان دربارهٔ $\mathcal{N}$ بدست بیاوریم.

اکنون از خودمان می‌پرسیم که آیا $\mathcal{N}$ تمام‌است؟ یعنی آیا به ازای هر فخس بسته $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}_N$ همیشه $\mathscr{A}$ یا $(\sim\mathscr{A})$ قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ است؟ در نگاه اول ممکن است اهمیت این سؤال آشکار نباشد، ولی به هر دو سؤال قبلی مربوط می‌شود. اگر $\mathcal{N}$ تمام نباشد در این صورت به مفهوم فوق‌الذکر به اندازهٔ کافی قوی نخواهدبود، زیرا فخس بسته‌ای مانند $\mathscr{A}$ یافت خواهد شد که نه $\mathscr{A}$ قضیهٔ $\mathcal{N}$ خواهدبود نه $(\sim\mathscr{A})$. ولی در هر تعبیری یک فخس‌بسته یا درست است یا نادرست، بنابراین در تعبیر $\boldsymbol{N}$، یا $\mathscr{A}$ درست‌است یا نادرست، و درحالت‌دوم $(\sim\mathscr{A})$ درست خواهدبود. تعبیر $\mathscr{A}$ در $\boldsymbol{N}$ گزاره‌ای دربارهٔ

اعداد طبیعی است ، و بطور شهودی ، یا $\mathscr{A}$ یا $(\sim\mathscr{A})$ تعبیری دارند که گزاره‌ای درست دربارهٔ اعداد طبیعی است ، ولی نه $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است و نه $(\sim\mathscr{A})$. پس اگر $\mathscr{N}$ تمام نباشد گزارهٔ درستی دربارهٔ اعداد وجود خواهدداشت که فخس متناظر با آن در $\mathscr{N}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نمی‌باشد . قسمتی‌ازهدف اصلی ساختن دستگاه $\mathscr{N}$ این بود که همهٔ فخس‌هایی که در الگوی $\boldsymbol{N}$ درست هستند ، قضیهٔ $\mathscr{N}$ باشند . اما اگر $\mathscr{N}$ تمام نباشد چنین وضع مطلوبی حاصل نخواهد شد .

همچنین اگر فخسی مانند $\mathscr{A}$ وجودداشته باشد که نه $\mathscr{A}$ قضیهٔ $\mathscr{N}$ باشدنه $(\sim\mathscr{A})$ ، در این صورت (به شرط این‌که $\mathscr{N}$ سازگار باشد) درست‌مشابه پایان فصل ۴ ، می‌توانیم با افزودن هر یک از $\mathscr{A}$ یا $(\sim\mathscr{A})$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید ، دو توسیع سازگار متفاوت از $\mathscr{N}$ بدست آوریم . هر یک از این توسیع‌ها دارای یک الگوی نرمال خواهند بود (حکم ۵٫۶) ، و این الگوها قطعا "الگوهایی اساسا "متفاوت از $\mathscr{N}$ هستند زیرا در یکی $\mathscr{A}$ درست است‌و در دیگری $(\sim\mathscr{A})$. پس اگر $\mathscr{N}$ تمام نباشد لزوما " الگوی نرمالی از $\mathscr{N}$ به‌غیراز آن که می‌خواستیم وجود خواهد داشت .

این که $\mathscr{N}$ ، تمام نیست یکی‌از نتایج عمده‌ای بودکه ابتدا بوسیله گدل به دست آمد . درحقیقت او نتیجه‌ای بسیار قوی‌تر ثابت کرد که این نتیجه حالت خاصی از آن است . فصل ۶ به مفاهیم و روشهای بکار رفته در این برهان اختصاص یافته است‌و بعضی از نتایج منطقی آن را بررسی می‌کند . قبل از آن " مبحث ریاضی " مهم دیگر ، یعنی نظریهٔ مجموعه‌ها ، را که قبلا " تذکر دادیم بررسی می‌کنیم .

تمرین

۱۴ ـ یک دستگاه صوری $\mathscr{N}'$ از حساب را می‌توان به طریق زیر مشخص کرد . زبان ، شامل $a_0, a_1, a_2, \ldots, f_1^1, f_1^2, f_2^2, A_1^1$ وعلاوه بر آن مطابق معمول شامل سجاوندی، رابطها و سورها است . اصول موضوعه همان اصول موضوعهٔ $\mathscr{N}$ هستند به علاوه به ازای هر $i>0$ ، $f_1^1(a_i)=a_{i+1}$. بطور شهودی روشن است که $\boldsymbol{N}$ یک الگوی این دستگاه است ، به شرط این که به ازای هر عددصحیح مثبت k تعبیر a_k عبارت باشد از $k-1$. (تعبیر a_0 فاقداهمیت است .) اکنون دستگاهی را درنظر بگیرید که از افزودن همهٔ فخس‌های $\sim(a_0=a_i)$ به ازای $i>0$ به اصول‌موضوعهٔ $\mathscr{N}'$ حاصل می‌شود . با درنظر گرفتن الگوها ، ثابت کنید که این دستگاه جدید سازگار است و بنابراین دارای یک الگوی نرمال است . تفاوت چنین الگویی با $\boldsymbol{N}$ چیست ؟

۵ : ۵ نظریهٔ صوری مجموعه‌ها

مبانی ریاضیات امروزه بر نظریهٔ مجموعه‌ها استوار است ، و از آغاز قرن حاضر ریاضیدانان به‌بررسی فرضهای پایه‌ای راجع به مجموعه‌ها (یعنی اصول‌موضوعه)،و روشهایی که تمام‌ریاضیات باید برمبنای این فرضها ساخته شود پرداخته‌اند . فایدهٔ ساختن یک نظریهٔ صوری مجموعه‌ها در این‌است‌که فرضها صراحت می‌یابند و امکان نقد آنها و کشف روابط متقابل بین آنها فراهم می‌شود . ما به شرح یکی از دستگاههای نظریهٔ صوری مجموعه‌ها خواهیم‌پرداخت . دستگاههای دیگری هم‌وجوددارند ، ولی دستگاه موردنظر ما یکی از دستگاههای استانده ، و از لحاظ مفاهیمی که قبلا" موردبحث قرار گرفته‌اند ، شایدیکی‌از آسانترین‌دستگاهها است . خواننده‌ای‌که با ریاضیات برپایهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آشنایی نداشته باشدشاید خوداصول موضوعه رامشکل بیابد ،ولی آنها را به منظور کامل بودن‌کار و اشارهٔ مختصری به طبیعت آنها ذکر می‌کنیم . امکان ما درحدتوصیف‌دستگاه و تذکر بعضی از راههایی است که نظریهٔ مجموعه‌ها را می‌سازد .

دستگاهی که ما توصیف می‌کنیم دستگاه ZF نامیده می‌شود . این اسم از ارنست تسرملو (Ernst Zermelo) ، که ابتدا در ۱۹۰۵ گردآیه‌ای از اصول موضوعه را برای نظریهٔ مجموعه‌ها بیان کرد ، و ابراهام فرانکل (Abraham Fraenkel) که آنها را در ۱۹۲۰ تعدیل نمود ، مشتق شده است .

زبان مرتبه اولی که برای ZF مناسب است شامل متغیرها ، سجاوندی ، رابطها ، سور ، و نماد محمولی A_2^2 (بدون حرف تابعی یا ثابت فردی) می‌باشد . می‌خواهیم تعبیر A_2^2 عبارت‌باشد از رابطهٔ عضویت ، یعنی $\in$. همان اخطاری‌که درمورد $\mathscr{L}_N$ داده شده اینجا نیز مناسب خواهدبود ، ما $\in$ را به عنوان نمادی از زبان که به جای A_2^2 قرار می‌گیرد بکارخواهیم‌برد ، و اگر t_1 و t_2 حدوددلخواهی‌باشند بجای $A_2^2(t_1, t_2)$ می‌نویسیم $t_1 \in t_2$. توجه کنید که نبودن ثابتهای فردی و حروف تابعی به این معنی است‌که تنها حدود ما عبارتند از متغیرها ، و تنها فرمولهای بسیط ما به‌صورت $x_i = x_j$ یا $x_i \in x_j$ می‌باشند . این ممکن است بسیار محدودکننده بنظر برسد ، ولی اصول‌موضوعه‌ای که ارائه می‌کنیم تضمین خواهندکرد که دستگاه صوری حقیقتا" منعکس‌کنندهٔ کلیت نظریهٔ شهودی مجموعه‌ها خواهدبود ، و ما خواهیم‌توانست نمادهای تعریف شده‌ای متناظر با مفاهیم استاندهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مانند مجموعهٔ تهی ، اجتماع ، مجموعهٔ توانی ، و غیره ارائه کنیم .

ZF به‌عنوان توسیعی از $K_{\mathscr{L}}$ (که $\mathscr{L}$ دربالا توصیف شد) تعریف‌می‌شود که از افزودن

$(E7)$، همهٔ موارد مناسب $(E9)$ و $(ZF8)$ ـ $(ZF1)$ که ذیلاً فهرست شده‌اند ، به عنوان اصول موضوعه حاصل شده باشد ($(E8)$ فاقد موارد غیربدیهی است) .

$$(ZF1) \quad (x_1 = x_2 \leftrightarrow (\forall x_3)(x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2))$$

این اصل را اصل موضوعهٔ گسترش می‌نامند ، و معنای موردنظر از آن این است که دومجموعه مساوی هستند اگر و فقط اگر عناصر آنها یکی باشند . توجه کنید که استلزام از چپ به راست قبلاً "در $(E9)$ آمده است ، و با گنجاندن هر دو استلزام در آن معنای این اصل موضوعه روشنتر می‌شود .

$$(ZF2) \quad (\exists x_1)(\forall x_2) \sim (x_2 \in x_1)$$

این اصل موضوعهٔ مجموعهٔ تهی است ، زیرا وجود مجموعه‌ای بدون عضو را در تعبیر موردنظر تضمین می‌کند . به‌عنوان یک‌نتیجهٔ منطقی $(ZF1)$ داریم که در هر الگوی نرمالی فقط یک چنین مجموعه‌ای وجود دارد . از اینرو می‌توانیم نماد $\varnothing$ را به عنوان یک ثابت فردی واردزبان کنیم ، و به‌این‌ترتیب $(ZF2)$ به‌صورت فخس $(\forall x_2) \sim (x_2 \in \varnothing)$ درمی‌آید .

نماد گذاری : نماد $\subseteq$ را به‌عنوان یک‌علامت‌اختصاری به طریق زیر معرفی می‌کنیم

$$(t_1 \subseteq t_2) \quad \text{یعنی} \quad (\forall x_1)(x_1 \in t_1 \to x_1 \in t_2)$$

که در آن t_1 و t_2 حدود دلخواهی هستند .

$$(ZF3) \quad (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(x_4 \in x_3 \leftrightarrow (x_4 = x_1 \vee x_4 = x_2))$$

این‌را اصل‌موضوعهٔ‌تزویج می‌نامند ، اگر x و y مجموعه‌های دلخواهی‌باشند مجموعه‌ای مانند z وجود دارد که x و y اعضای آن باشند . مجدداً " این اصل موضوعه بیانگر وجود است . و برای نشان دادن شیئی که وجودش بیان شده است ، مناسب است که نمادهای } و { را وارد زبان کنیم . $\{x_1, x_2\}$ به عنوان یک حد تلقی می‌شود ، و در این صورت $(ZF3)$ می‌گوید که :

$$x_4 \in \{x_1, x_2\} \leftrightarrow (x_4 = x_1 \vee x_4 = x_2).$$

$$(ZF4) \quad (\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2 \leftrightarrow (\exists x_4)(x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4))$$

این اصل موضوعهٔ اجتماع است . اگر x مجموعهٔ دلخواهی باشد مجموعه‌ای مانند y وجود دارد که همهٔ اعضای x عضو آن می‌باشند .

نماد گذاری : شیئی را که وجودش در $(ZF4)$ بیان شد با $\bigcup x_1$ نمایش می‌دهیم . این شیئی یک حد است ، بنابراین $\bigcup$ به عنوان یک نماد تابع یک‌مکانی عمل می‌کند . در این صورت می‌توانیم $\cup$ را به طریق زیر معرفی کنیم

$$(t_1 \cup t_2) \quad \text{یعنی} \quad \bigcup\{t_1, t_2\}$$

$$(ZF5) \quad (\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2 \leftrightarrow x_3 \subseteq x_1)$$

این اصل موضوعهٔ مجموعهٔ توانی است . اگر x مجموعهٔ دلخواهی باشد ، مجموعه‌ای مانند y وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های x اعضای آن هستند .

$$(ZF6) \quad (\forall x_1)(\exists_1 x_2)\mathscr{A}(x_1, x_2) \rightarrow$$
$$(\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)(x_5 \in x_4 \leftrightarrow (\exists x_6)(x_6 \in x_3 \wedge \mathscr{A}(x_6, x_5))),$$

به ازای هر فخس $\mathscr{A}(x_1, x_2)$ که x_1 و x_2 در آن دارای مورد آزاد باشند ، (و در آن ، بدون‌نقصان‌کلیت می‌توان‌فرض کرد که سورهای $(\forall x_5)$ و $(\forall x_6)$ظاهر نمی‌شوند) این را طرح اصل موضوعی تعویض می‌نامند . اگر فخس $\mathscr{A}$ تابعی را مشخص کند ، در این صورت به‌ازای هرمجموعهٔ x ، مجموعه‌ای مانند y وجوددارد که همهٔ نقش‌های اعضای x تحت این تابع اعضای آن می‌باشند .

$$(ZF7) \quad (\exists x_1)(\varnothing \in x_1 \wedge (\forall x_2)(x_2 \in x_1 \rightarrow x_2 \cup \{x_2\} \in x_1))$$

(توجه : $\{x_2\}$ مختصرشدهٔ $\{x_2, x_2\}$ ، که در بالا تعریف شد ، می‌باشد .)

این اصل موضوعهٔ بینهایت است ، و بیانگر وجود یک مجموعهٔ نامتناهی در هر الگویی است . اگر این اصل موضوعه را نمی‌پذیرفتیم ، هیچ راهی برای اطمینان از ارتباط این دستگاه صوری با نظریهٔ شهودی مجموعه‌ها ، که شامل مجموعه‌های نامتناهی است ،وجود نمی‌داشت .

$$(ZF8) \quad (\forall x_1)(\sim x_1 = \varnothing \rightarrow (\exists x_2)(x_2 \in x_1 \wedge \sim(\exists x_3)(x_3 \in x_2 \wedge x_3 \in x_1)))$$

این اصل‌موضوعهٔ زیربنا است . هرمجموعهٔ ناتهی x شامل عضوی است که از x مجزا می‌باشد . این یک اصل‌موضوعهٔ فنی است‌که به منظور پرهیز از بی‌نظمی‌های خلاف شهود مانند امکان وجود مجموعه‌ای که عضو خودش باشد به اصول موضوعه الحاق شده است .

ZF یک‌دستگاه صوری نظریهٔ مجموعه‌هاست . اصول‌موضوعه طوری انتخاب شده‌اند که تعبیرهای نمادهای صوری در الگوهای نرمال مانند مجموعه‌ها رفتار کنند . بعضی از اصول موضوعه نسبت‌به سایرین دارای مبنای شهودی قویتری می‌باشند ، ولی این هشت اصل موضوعه درطی مدتی مدید توانسته‌اند درستی‌های پایه‌ای راجع به مجموعه‌ها را بدون هیچ خللی نمایش دهند .

ZF را می‌توان به روش زیر به‌عنوان پایه‌ای برای آنالیز ریاضی بکار برد . بافرض اینکه این‌دستگاه سازگار باشد‌می‌دانیم‌که یک الگوی نرمال برای‌آن وجوددارد . می‌توان نشان‌داد‌که در این‌دستگاه مجموعه‌هایی وجوددارند‌که‌دارای همهٔ خاصیتهای دستگاههای اعداد می‌باشند . جزئیات این امر بسیار طولانی و خارج از حوصلهٔ این کتاب است .

برای مثال ، یک الگو برای دستگاه حساب ، $\mathcal{N}$ ، را می‌توان به عنوان زیر مجموعه‌ای از یک الگوی ZF به طریق زیر تعریف کرد . $\varnothing$ در الگوی ZF دارای تعبیری مانند $\bar{\varnothing}$ است . در این‌صورت $\{\bar{\varnothing}\}$ ، (یعنی‌مجموعه‌ای که تنها عنصرش $\bar{\varnothing}$ است) عنصر متفاوتی از این الگو است ، و $\{\bar{\varnothing}, \{\bar{\varnothing}\}\}$ عنصر دیگر است (این مجموعه دارای دو عنصر $\bar{\varnothing}$ و $\{\bar{\varnothing}\}$ می‌باشد) . این آغاز یک‌فرآیند استقرائی است که دنباله‌ای از مجموعه‌ها را تولید می‌کند . قاعدهٔ کلی از این قرار است : به ازای هر x در این دنباله ، تالی آن عبارت است از $x \cup \{x\}$. می‌توان به‌آسانی تحقیق کرد که عنصر$(k+1)$ام این دنباله دارای k عنصر است ، و می‌توان عدد k را مساوی همین عنصر$(k+1)$ام تعریف کرد . قبلاً" دیده‌ایم که دیگر اعمال حسابی را می‌توان برحسب تابع تالی تعریف کرد . بنابراین اصول موضوعهٔ $(N1)\ldots(N7)$ نتیجهٔ منطقی اصول‌موضوعهٔ ZF و تعریفها می‌باشند . توجه داشته باشید که برای اطمینان از این که گردآیهٔ همهٔ اعضای این دنباله عنصری از این الگوی نرمال ZF باشد به $(ZF7)$ نیاز داریم .

خواننده‌ای که با ریاضیات آشنا باشد ممکن است نحوهٔ ساختن دستگاههای‌اعداد صحیح ، گویا ، حقیقی و مختلط با استفاده از شیوه‌های جبری را بداند . همهٔ‌این‌شیوه‌ها را می‌توان درZF به انجام رساند . برای انجام‌این‌کار جزئیات فراوانی را بایدبررسی کرد ، ولی نتیجهٔ نهایی تائید این امر است که هر الگوی نرمال ZF شامل مجموعه‌ای است که ظاهر و رفتار آن همانند مجموعهٔ اعداد مختلط است (البته این مجموعه دارای زیر مجموعه‌ای است که ظاهر و رفتار آن همانند مجموعهٔ اعداد حقیقی است .)

بغیر از بنیان‌گذاری آنالیز بر پایه‌ای اصل‌موضوعی ، انگیزهٔ دیگری هم در ابتدای این قرن برای مطالعهٔ نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها وجود داشت که عبارت بود از توجیه شهودی استعمال اصول‌معینی‌در ریاضیات (اگر چنین توجیهی وجودداشته باشد). در آن زمان نظرها بسوی دو اصل خاص جلب شده بود ، اصل انتخاب (که می‌دانستند چندین بیان هم ارز دارد) ، و فرض پیوستار . بررسی تاریخچهٔ این اصول از آن زمان تاکنون آموزنده است ، بعضی از ریاضیدانان آنها را به عنوان اصول موضوعهٔ اضافی نظریهٔ مجموعه‌ها تلقی می‌کنند . و ازنظر برخی‌دیگر اینها یا موردشک هستند ، یا حتی نادرست . اصل انتخاب (که آن را با AC مأخوذ از Axiom of Choice نشان می‌دهیم) عبارتست از :

به ازای هر مجموعهٔ ناتهی x مجموعه‌ای مانند y وجود دارد که با هر عضو x دقیقاً "در یک عضو مشترک است .

دوتا از مشهورترین‌هم ارزهای‌اصل انتخاب‌عبارتند از : **لم تسورن** (*Zorn*) :

اگر هر زنجیر در یک‌مجموعهٔ جزءا "مرتب دارای یک کران بالا باشد آنگاه مجموعه دارای عنصری بیشینه است ، و **اصل خوشترتیبی** ؛ هر مجموعه را می‌توان خوشترتیب نمود .

فرض پیوستار (که آن را با CH مأخوذ از Continuum Hypothesis نشان می‌دهیم) عبارتست از :

هر مجموعهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی ، یا شمارش‌پذیر است یا عدد اصلی آن با عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی یکسان است (دو مجموعه دارای عدد اصلی یکسانی هستند اگر یک نگاشت دوسوئی بین آنها موجود باشد .)

چون ریاضیدانان درمورد قابل قبول بودن این دو اصل اتفاق نظر نداشتند این سؤال مطرح شد که : آیا آنها درست‌هستند ؟ سؤال‌بعدی این بود : اگر قرار باشد اینها اثبات شوند ، چنین اثباتهایی باید برمبنای چه اصولی استوار باشند ؟ تسرملو و فرانکل (و دیگران) از آنچه که می‌انگاشتند باید اصول اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها باشد فهرستی فراهم آورند ، و سؤال به این صورت درآمد ، آیا می‌توان (AC) و (CH) را به‌عنوان قضایای دستگاه ZF نظریهٔ مجموعه‌ها به دست آورد ، و در غیر این صورت آیا افزودن یکی یا هردوتای آنها به عنوان اصول موضوعهٔ اضافی ، دستگاه را سازگار باقی خواهد گذاشت ؟

گدل (درسال ۱۹۳۸) یکی‌از این دو سؤال را بابررسی فنی دستگاه صوری نظریهٔ مجموعه‌ها جواب داد . (AC) و (CH) با ZF سازگار می‌باشند . به عبارت دیگر آنها را می‌توان بدون این‌که تناقضی ظاهر شود به‌عنوان اصول موضوعهٔ اضافی درنظر گرفت روش کار بسیار ساده است . با این فرض که ZF سازگار است او الگویی ارائه کرد که (AC) و (CH) در آن درست هستند . پس بنابر حکم های ۴۱:۴ و ۴۲:۴ هردو دستگاه حاصل از افزودن هر یک از (AC) یا (CH) به عنوان یک اصل موضوعهٔ اضافی سازگار می‌باشند . ضمنا " او نشان داد که دستگاه حاصل از افزودن هر دوی (AC) و (CH) نیز سازگار می‌باشد .

پس ازمدتی طولانی (در ۱۹۶۳) کوهن (Cohen) ، با اثبات این که (AC) و (CH) را نمی‌توان به عنوان قضایای ZF بدست آورد . به سؤال دیگر جواب داد . دراینجا هم روش اثبات ساده است‌هرچندکه خوداثبات ساده نیست . کوهن الگوهایی از ZF بدست آورد که درآنها نقیض‌های (AC) و (CH) درست می‌باشند . اما اگر (AC) و (CH) قضایای ZF بودند می‌بایست در هر الگویی درست باشند ، ولی یک فخس و نقیض آن نمی‌توانند هر دو در هر الگویی درست باشند .

نتیجهٔ منطقی همهٔ اینها این است که (AC) و $\sim(AC)$ هیچکدام قضیهٔ ZF

نیستند ، و افزودن هر یک از اینها به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید سازگار است . و همینطور درمورد (CH) و $\sim(CH)$. نظریهٔ صوری مجموعه‌ها زمینهٔ کار را روشن کرده است ، پذیرفتن یا نپذیرفتن (AC) و (CH) وابسته به شهود است یا به یک اصل هنوز کشف نشدهٔ ریاضی که ممکن است در آینده به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید پذیرفته شده و (AC) و (CH) را تائید یا تکذیب کند (ضمناً " کارهای گدل و کوهن نشان دادند که (AC) و (CH) مستقل از یکدیگرند . هیچکدام از آنها یک قضیهٔ دستگاهی که از افزودن دیگری به‌عنوان یک‌اصل‌موضوعه به ZF حاصل می‌شود نیست) . مطالعهٔ الگوهای ZF ، و تعبیرهای مختلف $\in$ ، و وابستگی اصول موضوعه ، و رابطهٔ بین ردهٔ قضایای ZF و ردهٔ گزاره‌های درست نظریهٔ مجموعه‌ها حوزهٔ عمده‌ای از ریاضیات را تشکیل می‌دهد که ما وارد آن نمی‌شویم مگر برای تذکر نکات بعدی .

تمرین

۱۵ — اگر زبان شامل نمادهای a_1 (برای $\varnothing$) ، f_1^2 (برای $\{,\}$) ، و A_3^2 (برای $\subseteq$) باشد اصول موضوعهٔ دستگاه صوری نظریهٔ مجموعه‌ها را چگونه باید تعدیل کرد ؟

فرض کنید مجموعهٔ اعداد طبیعی، همانند متن درس، بوسیلهٔ $0=\varnothing$ و $n+1=n\cup\{n\}$ در یک الگوی ZF تعریف شود . نشان دهید که تعبیری از زبان ZF که دامنهٔ آن این مجموعه است و در آن $\in$ و $=$ به ترتیب به عنوان عضویت واقعی و تساوی واقعی تعبیر شوند ، اصول موضوعهٔ $(ZF1)$ ، $(ZF2)$ ، $(ZF4)$ ، $(ZF8)$ ، درست ، و $(ZF3)$ ، $(ZF5)$ $(ZF7)$ نادرست می‌باشند . آیا $(ZF6)$ درست است یا نادرست؟

۶:۵ سازگاری و الگوها

هر دستگاه مرتبه اولی سازگار است اگر و فقط اگر دارای یک الگو باشد . بنابراین می‌توان اینطور استدلال کرد که دستگاههای ریاضی موردبحث ما از این بابت سازگار هستند که در هریک از حالات ، بوسیلهٔ اصول موضوعه ، خاصیتهای یک الگوی موردنظر را سرمشق قرار داده‌ایم . اما خوانندهٔ هوشمند تا هم‌اکنون ممکن است نگران وجود یک دور در بحث‌های ما شده باشد که از آن‌جمله می‌توان به تعریف یک تعبیر به عنوان یک مجموعه همراه با اعمال و روابط معینی اشاره نمود . در این صورت چگونه می‌توان در بارهٔ تعبیرها یا الگوهای دستگاه صوری نظریهٔ مجموعه‌ها ، ZF ، بدون ظاهر شدن دور صحبت کرد ؟ جواب این سؤال در ماورای نظریهٔ دربرگیرندهٔ فرضهایی که باید برای اثبات نتایجی دربارهٔ دستگاههای صوری به‌عمل آیند نهفته است . هنگامی که ، مثلاً " ،

با $\mathcal{N}$ سروکار داریم ، می‌توان دستگاهی مانند ZF را به عنوان یک ماورای نظریه بکار برد زیرا $\mathcal{N}$ به مفهومی که قبلاً "به آن اشاره شد جزئی از ZF است . اما هنگامی که ZF را مورد بررسی قرار می‌دهیم به اصطلاح به آخر خط رسیده‌ایم . ZF بخاطر طبیعت خاص خودش باید برای نظریهٔ مجموعه‌ها و درنتیجه همهٔ ریاضیات مناسب باشد . اما برای مطالعهٔ ZF ما به روشهای ریاضیی نیاز داریم که قسمتی از ZF نمی‌باشند . مفهوم یک تعبیر ZF را می‌توان فقط برحسب یک ماورای نظریهٔ شهودی مربوط به مجموعه‌های "حقیقی" تعریف‌کرد . عناصر یک الگوی ZF را باید به‌عنوان مجموعه‌هایی که نمادهای ZF را تعبیر می‌کنند تصور نمود . اما دامنهٔ یک الگوی ZF هرچند که ممکن است یک مجموعهٔ "حقیقی" باشد ، نمی‌تواند به همان مفهومی که اعضای دامنه مجموعه هستند یک مجموعه باشد ، زیرا نمی‌تواند تعبیر نمادی از ZF باشد .

قطعاً "در این موضوعات مشکلاتی شهودی و لغوی وجود دارند ، و به همین جهت اثبات سازگاری بوسیلهٔ الگو عموماً "نامناسب تلقی می‌شود . روش قابل قبولتر به قرار زیر است . اگر دو دستگاه مرتبه اول S و S^* داشته باشیم می‌توان با فرض این که یک الگو برای S^* وجوددارد ، کوشید تا الگویی‌برای S ساخته شود . به‌این‌ترتیب برهانی برای **سازگاری نسبی** حاصل می‌شود . وضعیتی وجود داردکه چنین کاری تقریباً "بدیهی است .

حکم ۵ : ۱۱

فرض کنید S^* توسیعی از S باشد ("توسیع" به مفهومی‌که در تعریف ۴ : ۳۲ بکار رفت .) در این صورت اگر S^* سازگار باشد S هم سازگار است .

برهان : فرض کنید که S^* سازگار باشد ولی S سازگار نباشد . بنابراین فخسی مانند $\mathscr{A}$ از S وجود دارد که $\vdash_S \mathscr{A}$ و $\vdash_S (\sim\mathscr{A})$. ولی $\mathscr{A}$ فخسی از S^* هم هست و هر برهانی‌در S برهانی‌در S^* نیز می‌باشد ، پس $\vdash_{S^*} \mathscr{A}$ و $\vdash_{S^*} (\sim\mathscr{A})$ ، که این با سازگاری S^* متناقض است .

◁ این آسانترین‌وضعیتی است که با آن سروکار داریم . در حالاتی که S^* توسیعی به این مفهوم از S نیست ، مثلاً " هنگامی که زبانهای دو دستگاه متفاوت است ، برهان سازگاری نسبی مشکلتر است و ممکن است متضمن ساختن عملی الگویی برای S از یک الگوی مفروض برای S^* باشد . ما به هنگام نشان دادن این که سازگاری ZF مستلزم سازگاری $\mathcal{N}$ است ، چنین ساختاری را ، هرچند به اختصار به انجام رساندیم .

معلوم نیست که ZF سازگار باشد . اکثر منطقیون سازگاری آن را قبول دارند ولی

هرکوششی برای اثبات سازگاری آن به مشکلاتی از آن نوع که قبلا" وصف شد منجر می‌شود. اساسا" این کار مستلزم پذیرفتن سازگاری دستگاهی حتی فراگیرتر از ZF می‌باشد. قطعا" در ابطال سازگاری چنین مشکلاتی وجود نخواهد داشت. برای این کار تنها چیزی که لازم داریم فخسی مانند $\mathscr{A}$ است بطوری که هم $\mathscr{A}$ و هم $(\sim\mathscr{A})$ قضیهٔ ZF باشند. از آنچه که گفتیم بطور ضمنی آشکار است که چنین فخسی هنوز یافت نشده است. هفتاد سال کوشش بی‌حاصل شاهدی است بر عدم وجود چنین فخسی، ولی کار هنوز خاتمه نیافته است.

سرانجام به نتیجه‌ای دربارهٔ الگوهای ZF توجه می‌کنیم که نتیجهٔ منطقی حکم ۴:۴۵ است و در ابتدا متناقض بنظر می‌رسد. ZF یک دستگاه مرتبه اول است. تحت این فرض که ZF سازگار است، حکم ۴:۴۵ می‌گوید که ZF یک الگوی **شمارش‌پذیر** دارد. اما ازنظر شهودی، مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر وجود دارند و بنابراین ما انتظار داریم که الگوهای ZF شمارش‌ناپذیر باشند تا بتوانند چنین مجموعه‌هایی را شامل شوند. این پارادکس بدیهی را پارادکس سکولم می‌نامند. ولی ما به طریق زیر، با درنظر گرفتن چگونگی تشکیل یک الگو، می‌توانیم از یک تناقض مستقیم رهایی یابیم.

مشخصا"، اصل موضوعهٔ $(ZF5)$ چنین تعبیر می‌شود که "اگر x مجموعهٔ دلخواهی باشد، مجموعه‌ای متشکل از همهٔ زیرمجموعه‌های x وجود دارد" اگر x یک مجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر باشد، در این صورت بنابر قواعد نظریه مجموعه‌ها، x دارای تعدادی شمارش‌ناپذیر زیرمجموعه است. چگونه مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مانند این x می‌تواند به یک الگوی شمارش‌پذیر متعلق باشد؟ یک الگوی شمارش‌پذیر ZF از مجموعه‌ها تشکیل شده است. به ازای هر مجموعهٔ "حقیقی" x که به الگو تعلق داشته باشد (واضح است که مجموعه‌هایی "حقیقی" وجود دارند که به الگو متعلق نیستند)، اصل موضوعهٔ $(ZF5)$ می‌گوید که همهٔ زیرمجموعه‌های x که به الگو تعلق دارند مجموعه‌ای مانند y می‌سازند که آن هم باید به الگو متعلق باشد. هنگامی که این مجموعهٔ y را به عنوان یک مجموعهٔ "حقیقی" تلقی کنیم شمارش‌پذیر است. ولی هنگامی که به عنوان یک عنصر الگو تلقی شود شمارش‌ناپذیر خواهد بود. یک مجموعهٔ نامتناهی شمارش‌ناپذیر است، اگر هیچ نگاشت دوسوئی بین این مجموعه و مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود نداشته باشد. در این الگو هیچ نگاشت دوسوئی بین y و مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود نخواهد داشت (به همان طریق که بعضی از زیرمجموعه‌های x در این الگو ظاهر نمی‌شوند، همهٔ نگاشتهای دوسوئی "حقیقی" از این‌گونه نیز ظاهر نمی‌شوند).

۶

قضیهٔ ناتمامیت گدل

۶:۱ مقدمه

در فصل ۵ به اهمیت این سؤال که "آیا دستگاه صوری حساب ، $\mathcal{N}$ ، تمام است ؟" اشاره شد . در این فصل برهان گدل را راجع به این که $\mathcal{N}$ تمام نیست بیان خواهیم کرد . این برهان بسیار فنی است و درحقیقت ما برخی از قسمتهای بسیار فنی آن را حذف خواهیم کرد ، اما به دو دلیل این برهان را با مقداری تفصیل بیان می‌کنیم . اولین دلیل این است که این برهان برای مطالعهٔ دستگاههای صوری و ارزش آنها در مبانی ریاضیات اهمیت بسیار دارد ، و بنابراین درک برهان آن و فهمیدن عمق مطلب جالب توجه است . دومین دلیل این است که این برهان چندین مفهوم جدید را که دارای اهمیت و موارد استعمالی فراتر از استعمالشان در اینجا هستند معرفی می‌کند ، و یکی‌از هدفهای این کتاب معرفی این مفاهیم می‌باشد . مهمترین این مفاهیم عبارتند از توابع و روابط بازگشتی ، عددگذاری گدل ، و بیان‌پذیری که آنها را در بخش‌های بعدی هم بخاطر خودشان و هم بخاطر کاربردشان در برهان قضیهٔ گدل بررسی خواهیم کرد . مفاهیم بازگشت در فصل هفتم نیز ادامه خواهند داشت ، ولی دیگر بخش‌های این فصل پیش نیاز کارهای بعدی نمی‌باشند . چون این فصل دارای چنین ساختاری است ، ممکن است بدست آوردن تصویر کلی برهان از بخش‌های بعدی مشکل باشد ، بنابراین کار را با خلاصه‌ای از روش ساختن برهان آغاز می‌کنیم . خواننده‌ای که به جزئیات فنی برهان علاقه‌مند نباشد می‌تواند از بخش‌های ۲ ، ۴ و ۵ صرف‌نظر کند ، بی‌آنکه در قسمتهای بعدی دچار اشکال شود .

گدل وجود فخس بسته‌ای از $\mathcal{N}$ ، مانند $\mathcal{U}$ را نشان داد که هیچکدام از $\mathcal{U}$ و $\sim\mathcal{U}$ قضیهٔ $\mathcal{N}$ نیستند . این کار بوسیلهٔ توصیف صریحی از $\mathcal{U}$ و اثبات این که فرض قضیهٔ $\mathcal{N}$ بودن $\mathcal{U}$ یا $\sim\mathcal{U}$ به تناقض منجر می‌شود انجام شد . اولین مفهوم فنی عبارتست از مفهوم کدگذاری . روشی (موسوم به عددگذاری گدل) عرضه شده است که به هر فخس

و هر دنباله از فخس‌ها یک عدد کد (صحیح و مثبت) تخصیص یافته است ، بطوری که این فخس یا دنبالهٔ فخس‌ها به‌آسانی از عدد کد شان قابل بازیابی می‌باشند . بوسیلهٔ این کدگذاری گزاره‌های مربوط به اعداد صحیح مثبت را می‌توان به عنوان گزاره‌هایی دربارهٔ اعداد کد عبارتهایی در $\mathcal{N}$ یا حتی دربارهٔ عبارتهایی در $\mathcal{N}$ تلقی کرد . مثلا" یک رابطهٔ دومکانی روی D_N درنظر خواهیم گرفت که آن را با Pf نشان خواهیم داد و چنین تعریف می‌شود : $Pf(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد کد برهانی در $\mathcal{N}$ برای فخسی باشد که عدد کد آن n است .

اما فخس‌هایی از $\mathcal{N}$ که شامل متغیرهای آزاد می‌باشند در N به عنوان روابطی بین اعدادصحیح نامنفی تعبیر می‌شوند ، بنابراین عاقلانه است‌که بپرسیم : آیا فخسی از $\mathcal{N}$ وجوددارد‌که بوسیلهٔ $Pf(m, n)$ تعبیر شود ؟ به دلایلی فنی سؤال را به شکل کمی متفاوتی مطرح می‌کنیم . ابتدا ملاحظه می‌کنیم‌که در زبان $\mathcal{N}$ حدود $0, 0', 0'', \ldots$ وجود دارند‌که نمایشگر (یعنی قابل‌تعبیر در N بوسیلهٔ) اعدادصحیح نامنفی $0, 1, 2, \ldots$ می‌باشند . اینها را با $0, 0^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots$ نشان می‌دهیم . سپس می‌پرسیم : آیا فخسی مانند $\mathscr{P}(x_1, x_2)$ از $\mathcal{N}$ دارای دومتغیرآزاد وجوددارد بطوری‌که به‌ازای هر $m, n \in D_N$ برحسب اینکه $Pf(m, n)$ در N برقرار باشد یا برقرار نباشد $\mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$ یا $\sim\mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$ قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ باشد . اگر چنین فخسی وجود داشته باشد در این صورت Pf را در $\mathcal{N}$ بیان پذیر بوسیلهٔ فخس $\mathscr{P}$ می‌نامیم .

مرحلهٔ بعدی بدست آوردن شرطهایی کافی برای رابطه‌هایی است که باید در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر باشند ، و در این مرحله است که مفهوم بازگشتی بودن وارد کار می‌شود . تعریف را در بخش ۶:۳ ملاحظه کنید ، در اینجا فقط می‌گوییم که یک رابطه در $\mathcal{N}$ بیان پذیر است‌اگر بازگشتی باشد . آزمودن بازگشتی‌بودن آسانتر از آزمودن بیان‌پذیری است و برهان گدل از طریق بازگشتی بودن نشان می‌دهد که یک رابطهٔ خاص در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر است . در واقع رابطهٔ Pf فوق الذکر بازگشتی است ، و این واقعیت در اثبات این‌که W نیز بازگشتی است بکار خواهد رفت‌که W چنین تعریف می‌شود : $W(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد کد فخسی مانند $\mathscr{A}(x_1)$ باشدکه x_1 در آن دارای مورد آزاد است ، و n عدد کد برهانی برای فخس $\mathscr{A}(0^{(m)})$ در $\mathcal{N}$ باشد . اندکی کوشش برای درک‌معنای W بی‌فایده نخواهدبود ، زیرا که ازطریق آن نوعی "ارجاع به خود " ، که در این برهان موجه و حساس است معرفی خواهد شد .

این رابطهٔ W بازگشتی است‌و بنابراین بوسیلهٔ فخسی مانند $\mathscr{W}$ در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر می‌باشد . با استفاده از این $\mathscr{W}$ با روشی کاملا" ساده فخس $\mathscr{U}$ ساخته می‌شود . $\mathscr{U}$ در

N دارای چنین تعبیری است : به ازای هر $n \in D_N$ ، n عدد کد برهانی از فخس $\mathscr{U}$ در $\mathscr{N}$ نیست . بنابراین $\mathscr{U}$ از این لحاظ که اثبات‌ناپذیری خودش را بیان می‌کند ، حاوی صورت اعجاب‌آورتری از ارجاع به خود است . باتوجه دقیق به تمایز بین فخس‌ها و اعداد کدآنها و حدود $0^{(n)}$ و اعدادی که اینها نمایشگرشان هستند می‌توان از مشکلات پرهیز کرد . نشان دادن این که اگر $\mathscr{U}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ باشد تناقض حاصل خواهد شد ، کاملا "آسان است ، و بدست‌آوردن یک تناقض از این فرض که $\sim\mathscr{U}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است، فقط اندکی مشکلتر می‌باشد . البته بطور ضمنی فرض شده است‌که $\mathscr{N}$ سازگار است (زیرا در غیر این صورت هم $\mathscr{U}$ و هم $\sim\mathscr{U}$ قضایای $\mathscr{N}$ خواهندبود) ، و در واقع نشان دادن این که $\sim\mathscr{U}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نیست* به فرضی احتیاج دارد که اندکی از سازگاری قوی‌تر است .

این خلاصه‌ای بود از برهان . در باقیماندهٔ این فصل آن را با تفصیل بیشتری بیان‌خواهیم کرد ، بعضی توسیعها و نتایج منطقی این‌نتیجه دربخش ۶ : ۵ ذکر شده‌اند . بعضی از برهانها حذف شده است ، و خواننده را برای ملاحظهٔ جزئیات فنی به کتاب مندلسن (Mendelson) ارجاع داده‌ایم .

۶ : ۲ بیان پذیری

در اینجا به مطالعهٔ دستگاه حساب یعنی $\mathscr{N}$ ، که در فصل ۵ توصیف شد ، و به مطالعهٔ الگوی مورد نظر مربوط به آن ، یعنی N می‌پردازیم . یکی از مهمترین مفاهیمی که از مطالعهٔ منطق نشأة گرفته است ، یعنی مفهوم بازگشتی بودن ، از رابطهٔ بین این دستگاه صوری و الگوی N ناشی می‌شود . کاربردهای توابع بازگشتی در چهل سال‌گذشته بطور وسیعی گسترش یافته‌اند ، ولی همهٔ آنها در اصل از مسئلهٔ بیان‌پذیری ناشی شده بودند ، که ما هم کار را از همانجا آغاز می‌کنیم .

در فصلهای قبل با نمادهای دستگاههای صوری و روشهایی که می‌توان آنها را تعبیر کرد ، سروکار داشتیم . در وضعیت فعلی این فرآیند را بطور معکوس در پیش می‌گیریم . کار را با الگوی N ، که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد طبیعی است و باز هم آن را با D_N نمایش می‌دهیم ، آغاز می‌کنیم . ابتدا ملاحظه کنیدکه عدد 0 ، تابع تالی ، جمع ، ضرب و تساوی همگی در دستگاه $\mathscr{N}$ به روشی روشن بوسیلهٔ نمادهای $\mathscr{N}$ نمایش داده شده‌اند . ولی به عنوان مثال عدد 5 را درنظر بگیرید . 5 عنصری از D_N است ،

---

* در متن اصلی "است" نوشته شده که اشتباهی بدیهی است . مترجم

ولی نمادی از $\mathcal{N}$ **نیست** . با وجود این 5 تعبیری از یک حد خاص در N ، یعنی $0''''$ یا $f_1^1(f_1^1(f_1^1(f_1^1(f_1^1(a_1)))))$ است . هر عدد طبیعی دیگری هم به روشی مشابه تعبیر حدی از $\mathcal{N}$ است . در مواردی این حدها را بکار خواهیم‌برد و بنابراین معرفی نمادی مناسبتر از این دو ، که کارکردن با آنها مشکل است ، مفید می‌باشد .

نمادگذاری : $0^{(n)}$ را به عنوان مختصر شدهٔ 0 که n بارپریم روی آن گذاشته شده باشد اختیار می‌کنیم . بنابراین **عدد** $n \in D_N$ تعبیر **حد** $0^{(n)}$ در N است . واضح است که $0^{(0)}$ به معنای ثابت فردی 0 در $\mathcal{N}$ می‌باشد .

توجه به این‌نکته اهمیت‌داردکه هرچند ما $0^{(n)}$ را به‌جای حدی از $\mathcal{N}$ بکار می‌بریم ولی خود n نمادی از $\mathcal{N}$ **نیست** ، و n ی را که در $0^{(n)}$ ظاهر می‌شود **نمی‌توان** با یک متغیر جایگزین کرد . ما حدهای $0^{(n)}$ **را حدهای عددی** می‌نامیم .

حکم ۶:۱

فرض کنیم $m, n \in D_N$ ،

(i) اگر $m \neq n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(m)} = 0^{(n)})$

(ii) اگر $m = n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(n)})$

برهان : (i) بدون نقصان کلیت ، فرض می‌کنیم که $m > n$. در این صورت وجود دارد $k > 0$ بطوری که $n = m + k$. بنابر اصل موضوعهٔ $(N2^*)$ ، اگر $m > 0$ آنگاه

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(m+k)} \to 0^{(m-1)} = 0^{(m+k-1)}),$$

و از کاربرد مکرر آن همراه با استعمال قاعدهٔ ق ف خواهیم داشت

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(m+k)} \to 0^{(0)} = 0^{(k)}).$$

(واضح است که اگر $m = 0$ ، این رابطهٔ بطور بدیهی برقرار خواهدبود) .

اما بنابه فرض $k > 0$ ، پس $k - 1 \in D_N$ و

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(k)} = (0^{(k-1)})').$$

(اگر این مطلب روشن نیست آن را به صورت

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\overbrace{0'' \cdots '}^{k} = (\overbrace{0'' \cdots '}^{k-1})').)$$

در نظر بگیرید .)

پس داریم

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(m+k)} \to 0^{(0)} = (0^{(k-1)})').$$

با استفاده از یک راستگو خواهیم داشت

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\sim(0^{(0)} = (0^{(k-1)})') \to \sim(0^{(m)} = 0^{(m+k)})).$$

ولی بنابر اصل موضوعهٔ $(N1^*)$داریم

$$\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(0)} = (0^{(k-1)})'),$$

و بنابر ق همانطور که می‌خواستیم

$$\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(m)} = 0^{(m+k)})$$

(ii) فرض کنید که $m = n$. بنابراین $0^{(m)}$ و $0^{(n)}$ یکی هستند (یعنی حدهای یکسانی از $\mathcal{N}$ هستند). پس $(0^{(m)} = 0^{(n)})$ نمونه‌ای از اصل موضوعهٔ $(E7)$است .

◁ ملاحظه می‌کنیم که مجموعهٔ حدود $\mathcal{N}$ شامل دنباله‌ای مانند $0, 0^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots$ می‌باشد که در N بوسیلهٔ دنبالهٔ اعداد طبیعی تعبیر می‌شود . اما فخس‌های $\mathcal{N}$ ممکن است شامل این حدود باشند ، و قضایایی از $\mathcal{N}$ که شامل این حدود هستند ، در N به‌عنوان درستی‌های حساب تعبیر می‌شوند . سؤال کلیی که ما بررسی می‌کنیم به تناظر بین درستی‌های حساب و قضایای $\mathcal{N}$ مربوط می‌شود . حکم ۶:۱ فوق الذکر به قسمت بسیارمحدودی از این تناظر مربوط می‌شود ، ولی به مفهومی کلی‌تر از بیان‌پذیری منجر خواهد شد . مثال دیگری این نکته را روشنتر خواهدکرد .

مثال ۶:۲

رابطهٔ $\leq$ را روی مجموعهٔ اعداد طبیعی D_N درنظر بگیرید . بطور شهودی $m \leq n$ تعبیر فخس $(\exists x_1)(0^{(m)} + x_1 = 0^{(n)})$ است ،پس $\leq$ در $\mathcal{N}$ به‌این‌معنی "بیان‌می‌شود ".

ولی به معنای قوی‌تری هم بیان می‌شود ، زیرا

اگر $m \leq n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists x_1)(0^{(m)} + x_1 = 0^{(n)})$

و

اگر $m \not\leq n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim (\exists x_1)(0^{(m)} + x_1 = 0^{(n)})$

به عبارتی دیگر برحسب این که یک فخس خاص یا نقیض آن قضیهٔ دستگاه صوری $\mathcal{N}$ باشند یا نباشند این رابطه بین دو عدد طبیعی در D_N برقرار هست یا نیست . ما از ذکر جزئیات بررسی این امر که همهٔ فرمولهای موردلزوم در این مثال خاص قضایای $\mathcal{N}$ هستند صرف‌نظر می‌کنیم .

تعریف ۶:۳

یک رابطهٔ k ــ مکانی R روی اعداد طبیعی **در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر** است اگر فخسی مانند $\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_k)$ دارای k متغیر آزاد موجود باشد بــه طوری کــه به ازای هر $n_1, n_2, \ldots, n_k \in D_N$

(i) اگر $R(n_1, \ldots, n_k)$ در N برقرار باشد آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$

و

(ii) اگر $R(n_1, \ldots, n_k)$ در N برقرار نباشد آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$

تذکر ۶:۴

(آ) حکم ۶:۱ می‌گویدکه رابطهٔ تساوی در N با این معنای دقیق در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر است .

(ب) اگر می‌دانستیم $\mathcal{N}$ تمام است ،تعریف ۶:۳ را می‌توانستیم با ادغام قسمتهای (i) و (ii) به صورت " اگر و فقط اگر " بیان کنیم ، زیرا در این صورت می‌دانستیم که یا $\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$ یا $\sim\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$ لزوما " قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ می‌باشند . اما ممکن است به ازای فخسی مانند $\mathscr{A}$ و اعدادی‌مانند $n_1, \ldots, n_k$ نه $\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$ قضیهٔ $\mathcal{N}$ باشد نه $\sim\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)})$. بنابراین در تعریف ۶:۳ هر دو شرط لازم می‌باشند .

(پ) استدلال قسمت (ب) این امکان را نشان می‌دهد که همهٔ فخس‌های $\mathcal{N}$ که شامل متغیرهای آزاد باشند ممکن است یک رابطه را به این طریق " بیان " نکنند ، در حالی که قطعا " هر چنین فخسی به عنوان یک رابطه در N تعبیر می‌شود .

(ت) زیرمجموعه‌های اعدادطبیعی را می‌توان در این مبحث به عنوان یک رابطهٔ یک ـ تایی تلقی کرد . اگر A زیر مجموعه‌ای از D_N باشد ، در این صورت " $\in A$ " یک رابطهٔ یک ـ تایی روی D_N است که ممکن است به مفهوم فوق در $\mathcal{N}$ قابل تعبیر باشد یا نباشد . مثلا " ، فرض کنید $\mathscr{A}$ مجموعهٔ اعداد زوج باشد . در این‌صورت " $\in A$ " تعبیری است از فخس

$$(\exists x_2)(x_2 \times 0^{(2)} = x_1).$$

خواننده می‌تواند بررسی کند که آیا به ازای هر $m \in D_N$ ، یا $(\exists x_2)(x_2 \times 0^{(2)} = 0^{(m)})$ یا $\sim(\exists x_2)(x_2 \times 0^{(2)} = 0^{(m)})$ باید قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ باشد ؟ یعنی آیا رابطهٔ " زوج است " در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر است .

(ث) تابع نوع خاصی از رابطه است . بطورکلی یک رابطهٔ $(k+1)$ـ مکانی R روی N یک تابع است اگر به ازای هر $n_1, \ldots, n_k \in D_N$ درست یک $n_{k+1} \in D_N$ وجود داشته باشد بطوری که $R(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1})$ برقرار باشد . در بررسی این که آیا یک تابع (به عنوان یک رابطه) در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر است بیجا نخواهدبود که ببینیم آیا این خاصیت یک‌مقداری بودن در فخس مربوطه در $\mathcal{N}$ نیز وجود دارد یا نه .

تعریف ۶:۵

یک تابع k ــ مکانی روی D_N (یعنی یک تابع $D_N^k \to D_N$) در $\mathscr{N}$ **نمایش پذیر** است اگر (به‌عنوان یک رابطهٔ $(k+1)$ـ مکانی) در $\mathscr{N}$ بوسیلهٔ فخسی مانند $\mathscr{A}$ که دارای $k+1$ متغیر آزاد است بیان‌پذیر باشد ، بطوری که به ازای هر $n_1, \ldots, n_k \in D_N$ ،

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1})\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)}, x_{k+1}).$$

تذکر ۶:۶

مجددا "باید فرق بین حدهای $0^{(n)}$ و عناصر D_N را بخاطر بیاوریم . در نگاه اول ممکن است بنظر برسد که شرط

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall x_1) \ldots (\forall x_k)(\exists_1 x_{k+1})\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \qquad (*)$$

با شرط ارائه شده در تعریف هم ارز است . این مطلب درست نیست ، وآسانترین راه برای ملاحظه این که چرا لازم‌نیست این مطلب درست‌باشد این است که الگوی متفاوتی از $\mathscr{N}$ را موردبررسی قرار دهیم . این الگو باید شامل تعبیرهایی برای همهٔ حدهای $0, 0^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots$ باشد ، ولی علاوه بر آن عناصر دیگری را نیز شامل خواهدبود . تعبیر $(*)$ بیانی دربارهٔاین عناصر دیگر ، و درنتیجه بیانی‌قویتر از ترکیب عطفی تعبیرهای $(\exists_1 x_{k+1})\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \ldots, 0^{(n_k)}, x_{k+1})$به ازای هر $n_1, \ldots, n_k$ خواهدبود .

مثال ۶:۷

تابع $f\colon D_N^2 \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ $f(m, n) = m + n$ در $\mathscr{N}$ نمایش‌پذیر است .

فرض کنیم $\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3)$ فخس $x_3 = x_1 + x_2$ باشد . می‌خواهیم روابط زیر را به ازای هر $m, n, p \in D_N$ نشان دهیم

(i) اگر $p = m + n$ آنگاه $\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(p)} = 0^{(m)} + 0^{(n)}$

(ii) اگر $p \neq m + n$ آنگاه $\vdash_{\mathscr{N}} \sim(0^{(p)} = 0^{(m)} + 0^{(n)})$

و

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_3)(x_3 = 0^{(m)} + 0^{(n)}) \quad \text{(iii)}$$

اینها را می‌توان به طریق زیر ثابت کرد . فرض کنیم $m, n \in D_N$. در این صورت $\vdash_{\mathscr{N}} 0^{(m)} + 0^{(n)} = 0^{(m+n)}$. اگر $n = 0$ ، که این درست همان اصل موضوعهٔ$(N1^*)$است . اگر $n > 0$ ، آنگاه $0^{(n)}$ را به صورت$(0^{(n-1)})'$ می‌نویسیم . پس ، بنابر $(N4^*)$ ،

$$\vdash_{\mathscr{N}} (0^{(m)} + 0^{(n)}) = (0^{(m)} + 0^{(n-1)})'.$$

این فرآیند را به تعداد لازم تکرار می‌کنیم تا به رابطهٔ زیر برسیم

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}+0^{(n)}) = (0^{(m)}+0)'' \cdots '$$

یعنی

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}+0^{(n)}) = (\overbrace{0'' \cdots '}^{m})\overbrace{'' \cdots '}^{n}$$

یعنی

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)}+0^{(n)} = 0^{(m+n)}).$$

اکنون (i) و (ii) نتایج بدیهی حکم ۶:۱ هستند . درمورد (iii) باید نشان دهیم که

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\exists x_3)(x_3 = 0^{(m)}+0^{(n)} \wedge (\forall x_i)(x_i = 0^{(m)}+0^{(n)} \rightarrow x_i = x_3)).$$

اما

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m+n)} = 0^{(m)}+0^{(n)}) \wedge (\forall x_i)(x_i = 0^{(m)}+0^{(n)} \rightarrow x_i = 0^{(m+n)}).$$

(جزئیات حذف شده‌اند و مشکل نیستند) با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۳:۲۱ به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم .

مثال ۶:۸

تابع $f: D_N \rightarrow D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ $f(m) = 2m$ در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر است .

فرض کنید $\mathscr{A}(x_1, x_2)$ فخس $x_2 = x_1 \times 0^{(2)}$ باشد . به ازای هر $m, n \in D_N$ ، باید مطالب زیر را ثابت کنیم .

(i) اگر $n = 2m$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)} = 0^{(m)} \times 0^{(2)}$

(ii) اگر $n \neq 2m$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(n)} = 0^{(m)} \times 0^{(2)})$

و

(iii) $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists_1 x_2)(x_2 = 0^{(m)} \times 0^{(2)})$

درمورد(i) فرض‌می‌کنیم‌که $n = 2m$ بطورمختصر برای $0^{(n)} = 0^{(m)} \times 0^{(2)}$ برهانی‌در N ارائه می‌کنیم.

$0^{(m)} \times 0^{(2)} = 0^{(m)} \times 0''$	نمادگذاری
$= (0^{(m)} \times 0') + 0^{(m)}$	$(N6^*)$
$= ((0^{(m)} \times 0) + 0^{(m)}) + 0^{(m)}$	$(N6^*)$
$= (0 + 0^{(m)}) + 0^{(m)}$	$(N5^*)$
$= 0^{(m)} + 0^{(m)}$	$(N3^*)$
$= 0^{(m+m)}$	بنابر مثال قبل
$= 0^{(2m)}$	
$= 0^{(n)}.$	

درمورد (ii) ، فرض کنیم که $n \neq 2m$. پس بنابر حکم ۶:۱ $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(2m)} = 0^{(n)})$ ، و

همانطور که قبلا "دیدیم $\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(2m)} = 0^{(m)} \times 0^{(2)})$. پس با استفاده از اصل موضوعه $(E9')$
خواهیم داشت $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(m)} \times 0^{(2)} = 0^{(n)})$

درمورد (iii) اثبات درست مانند مثال قبلی است .

مثال ۶:۹

تابع دومکانی Z تعریف شده بوسیلهٔ $Z(m, n) = 0$ به ازای هر $m, n \in D_N$ در $\mathcal{N}$ نمایش پذیر است .

فرض کنید $A(x_1, x_2, x_3)$ فخس زیر باشد

$$(x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_3 = 0).$$

مجددا "باید بررسی کنیم که فخس‌های معینی قضایای $\mathcal{N}$ هستند ، یعنی به ازای هر $m, n, p \in D_N$

(i) اگر $Z(m, n) = p$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} (0^{(m)} = 0^{(m)} \wedge 0^{(n)} = 0^{(n)} \wedge 0^{(p)} = 0)$

(ii) اگر $Z(m, n) \neq p$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(m)} = 0^{(m)} \wedge 0^{(n)} = 0^{(n)} \wedge 0^{(p)} = 0)$

و

(iii) $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists_1 x_3)(0^{(m)} = 0^{(m)} \wedge 0^{(n)} = 0^{(n)} \wedge x_3 = 0)$

در مورد (i) ، اگر $Z(m, n) = p$ آنگاه $p = 0$ و هر کدام از $0^{(n)} = 0^{(n)}$, $0^{(m)} = 0^{(n)}$ و $0^{(p)} = 0$ قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ هستند .

درمورد (ii) ، اگر $Z(m, n) \neq p$ آنگاه $p \neq 0$ و بنابراین $\sim(0^{(p)} = 0)$ قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ است (اصل موضوعهٔ $(N1^*)$) . درنتیجه

$$\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(m)} = 0^{(m)} \wedge 0^{(n)} = 0^{(n)} \wedge 0^{(p)} = 0).$$

برای بررسی (iii) کافیست نشان دهیم که $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists_1 x_3)(x_3 = 0)$، یعنی این‌که $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists x_3)(x_3 = 0 \wedge (\forall x_i)(x_i = 0 \rightarrow x_i = x_3))$. این برقرار است زیرا

$$\vdash_{\mathcal{N}} (0 = 0 \wedge (\forall x_i)(x_i = 0 \rightarrow x_i = 0)).$$

در اینجا مجددا " از نتیجهٔ تمرین ۳:۲۱ استفاده می‌کنیم .

◁ اولین سؤال کلی قابل طرح دربارهٔ توابع نمایش پذیر در $\mathcal{N}$ این است که آیا توابعی وجوددارندکه در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر نباشند . اگر تابعی بر D_N داشته باشیم ممکن است بررسی نمایش‌پذیر بودن آن مشکل ، وشاید بررسی نمایش‌پذیر نبودن آن مشکلتر باشد . بعضی از مشکلات کار در مثالهای فوق نشان‌داده شد . بنابراین یک نتیجهٔ کلی مفید خواهد بود .

حکم ۶:۱۰

چنین نیست که همهٔ توابع روی D_N در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر باشند .

برهان : با استدلال تذکر ۵:۱۰ (ب) مقایسه کنید . مجموعهٔ فخس‌های روی $\mathcal{N}$ شمارش‌پذیر است ، پس مجموعهٔ توابع نمایش‌پذیر در $\mathcal{N}$ شمارش‌پذیر می‌باشد . ولی تعداد توابع روی D_N شمارش ناپذیر است . پس توابعی روی D_N وجود دارند که روی $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر نیستند .

نتیجهٔ ۶:۱۱

چنین نیست که همهٔ روابط روی D_N ، در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر باشند .

برهان : شبیه برهان فوق است .

◁ سؤال دیگری که مطرح کردن آن منطقی بنظر می‌رسد از این قرار است : آیا می‌توانیم مجموعهٔ توابع (روابط) روی D_N را که روی $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر (بیان‌پذیر) هستند مشخص کنیم ؟ جواب این سؤال بسیار مهم است ، و در قضیهٔ گدل دربارهٔ ناتمامیت دستگاه $\mathcal{N}$ نقشی کلیدی دارد .

حکم ۶:۱۲

یک تابع (رابطه) روی D_N در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر (بیان‌پذیر) است اگر و فقط اگر بازگشتی باشد.

البته این حکم هنوز برای ما فاقد معنی است ، و در واقع برهان کامل آن خارج از حوزهٔ عمل این کتاب است ، ولی هنگامی که ما توابع و روابط بازگشتی را تعریف کرده باشیم اهمیت آن را درخواهیم یافت .

تمرین

۱ ــ ثابت کنید که به ازای هر $m, n \in D_N$ ، اگر $m \leq n$ ، آنگاه

$$\vdash_{\mathcal{N}} (\exists x_1)(0^{(m)} + x_1 = 0^{(n)}).$$

۲ ــ ثابت کنید که به ازای هر $m, n \in D_N$ ، اگر $m > n$ ، آنگاه

$$\vdash_{\mathcal{N}} \sim(\exists x_1)(0^{(m)} + x_1 = 0^{(n)}).$$

۳ ــ فخس‌هایی در دستگاه $\mathcal{N}$ بنویسید که تعبیرشان در N به قرار زیر باشد .

(آ) N یک عدد اول نیست ؛

(ب) m و n دارای عامل مشترکی نیستند ؛

(پ) $m = \min(p, q)$ ؛

(ت) هر $m \in D_N$ دارای یک عامل اول است ؛

(ث) $sg(m)=n$ (برای تعریف به مثال ۶:۱۶ (ج) مراجعه کنید).

۴ــ بدون استفاده از حکم ۶:۱۲ ثابت کنید که توابع زیر که روی D_N تعریف شده‌اند، در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر می‌باشند.

(آ) sg (برای تعریف به مثال ۶:۱۶ (ث) مراجعه کنید) ؛

(ب) f بطوری که $f(n)=n+3$ ؛

(پ) rm_2 ، که $rm_2(n)$ عبارتست از باقیماندهٔ تقسیم n بر 2 .

۵ــ نشان دهید که تابعی مانند $f: D_N \to D_N$ در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر است اگر فخسی از $\mathcal{N}$ مانند $\mathscr{A}$ وجود داشته باشد، بطوری که

(i) اگر $f(m)=n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \mathscr{A}(0^{(m)}, 0^{(n)})$

و

(ii) به ازای هر $m \in D_N$ ، $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists_1 x_2)\mathscr{A}(0^{(m)}, x_2)$

(این مطلب برای توابعی با هر تعداد متغیر قابل گسترش است.)

۶ــ ثابت کنید که تابع افکنش $p_i^k: D_N^k \to D_N$ ، که بوسیلهٔ $p_i^k(n_1, \ldots, n_k)=n_i$ ، $(n_1, \ldots, n_k \in D_N)$ تعریف می‌شود، به ازای هر $i, k>0$ در $\mathcal{N}$ نمایش‌پذیر است.

۶:۳ روابط و توابع بازگشتی

ردهٔ توابع بازگشتی (بدون ذکر دستگاه $\mathcal{N}$) به طریق زیر تعریف‌می‌شود. توابع معینی که به آسانی قابل تعریف هستند بازگشتی می‌باشند، و همهٔ توابعی هم که با به کار بستن سه قاعده از این توابع بدست می‌آیند بازگشتی هستند.

توابع پایه‌ای عبارتند از :

۱ــ تابع‌صفر $z: D_N \to D_N$ که‌به‌ازای هر $n \in D_N$ بوسیلهٔ $z(n)=0$ تعریف می‌شود.

۲ــ تابع‌تالی $s: D_N \to D_N$ که‌به‌ازای‌هر $n \in D_N$ بوسیلهٔ $s(n)=n+1$ تعریف‌می‌شود.

۳ــ تابع افکنش $p_i^k: D_N^k \to D_N$ که به ازای هر $n_1, \ldots, n_k \in D_N$ بوسیلهٔ $p_i^k(n_1, \ldots, n_k)=n_i$ تعریف می‌شود. توجه کنید که p_1^1 تابع همانی است.

سه قاعده عبارتند از :

I ــ ترکیب ؛ اگر $g: D_N^j \to D_N$ و به ازای $1 \le i \le j$ ، $h_i: D_N^k \to D_N$ ، آنگاه $f: D_N^k \to D_N$ ، که بوسیلهٔ

$$f(n_1, \ldots, n_k)=g(h_1(n_1, \ldots, n_k), \ldots, h_j(n_1, \ldots, n_k)),$$

تعریف می‌شود از ترکیب g و $h_1, \ldots, h_j$ بدست می‌آید.

II ــ بازگشت : اگر $g: D_N^k \to D_N$ و $h: D_N^{k+2} \to D_N$ آنگاه تابع $f: D_N^{k+1} \to D_N$ را که بوسیلهٔ

$$f(n_1, \ldots, n_k, 0) = g(n_1, \ldots, n_k),$$

و

$$f(n_1, \ldots, n_k, n+1) = h(n_1, \ldots, n_k, n, f(n_1, \ldots, n_k, n)),$$

تعریف شده است ، می‌گوییم که از g و h بوسیلهٔ بازگشت بدست آمده است . توجه کنید که در اینجا $n_1, \ldots, n_k$ پارامترهایی هستند که بر تعریف تأثیری ندارند ، و ممکن است در بعضی موارد ظاهر نشوند . تابع تعریف شده بوسیلهٔ

$$f(0) = a \quad (\text{ عضو ثابتی است از } D_N \text{ a })$$

و

$$f(n+1) = h(n, f(n)),$$

هم بطور مشابه بوسیلهٔ بازگشت بدست آمده است .

III ــ **عملگر کوچکترین عدد** : فرض کنیم $g: D_N^{k+1} \to D_N$ تابعی باشد با این خاصیت که به ازای هر $n_1, \ldots, n_k \in D_N$ حداقل یک $n \in D_N$ وجود دارد بطوری که $g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0$. آنگاه می‌گوییم تابع $f: D_N^k \to D_N$ که بوسیلهٔ " $f(n_1, \ldots, n_k)$ مساوی است با کوچکترین $n \in D_N$ بطوری‌که $g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0$ " تعریف شده است ، با استفاده از عملگر کوچکترین عدد از g بدست آمده است .

نمادگذاری: کوچکترین عدد n بطوری که $g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0$ با $\mu n[g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0]$ نشان داده می‌شود .

تذکر ۶:۱۳

بدیهی است که برای تضمین کلی بودن تابع f لازم است g در این شرط صدق کند که به ازای هر $n_1, \ldots, n_k$ حداقل یک n وجود داشته باشد بطوری که $g(n_1, \ldots, n_k, n) = 0$ ، یعنی این تابع به ازای هر k ــ تایی از اعداد طبیعی دارای مقدار باشد . در آینده گاهی از عملگر کوچکترین‌عدد بدون این شرط استفاده می‌کنیم . واضح است‌که این کار به ارائهٔ توابع جزئی منجر خواهد شد . اما فعلا " این شرط برقرار باقی می‌ماند و همهٔ توابع ما توابع کلی هستند .

مثال ۶:۱۴

(آ) تابع $f: D_N^2 \to D_N$ که بوسیلهٔ $f(m, n) = m^2 + mn$ تعریف شده است از

ترکیب توابع جمع ، ضرب ، و افکنش بدست آمده است ، زیرا (اگر f_1 مجموع ، و f_2 حاصلضرب را نشان دهد) .

$$f(m, n)=f_2(p_1^2(m, n), f_1(m, n)).$$

(ب) تابع $g: D_N^3 \to D_N$ که بوسیلهٔ $g(m, n, p)=n^2$ تعریف‌شده است از ترکیب بدست آمده است ، زیرا

$$g(m, n, p)=f_2(p_2^3(m, n, p), p_2^3(m, n, p)),$$

که f_2 حاصلضرب را نشان می‌دهد .

(پ) تابع جمع بوسیلهٔ بازگشت از p_1^1 و ترکیب s با p_3^3 بدست آمده است زیرا

$$f_1(m, 0)=p_1^1(m)$$

$$f_1(m, n+1)=s(p_3^3(m, n, f_1(m, n))).$$

(ت) مشابها" تابع ضرب بوسیلهٔ بازگشت از تابع مجموع بدست آمده است .

(ث) فرض کنیم $f(n)$ کوچکترین عدد q باشد که

$$n+q \equiv 0 \ (m\,0\,d\,p) \ (n, p, q \in D_N)$$

آنگاه f با عملگر کوچکترین عدد از تابع g بدست آمده است که $g(n, p, q)$ عبارتست از باقیماندهٔ تقسیم $n+q$ بر p .

تعریف ۶:۱۵

تابعی بر D_N **بازگشتی** است کـه از توابع ۱ ، ۲ ، ۳ فوق‌الذکر با بکار بستن قواعد I و II و III بـه دفعاتی‌متناهی بدست‌آمده باشد . بنابراین ردهٔ توابع بازگشتی کوچکترین ردهٔ توابع روی D_N است که همهٔ توابع ۱ ، ۲ ، ۳ را شامل بوده و تحت قواعد I ، II ، III بسته است .

تابعی **بازگشتی اولیه** است اگر از توابع ۱ ، ۲ ، ۳ فقط با بکار بستن قواعد I و II حاصل شده باشد . توابع بازگشتی اولیه رده‌ای اکیدا" کوچکتر از توابع بازگشتی را تشکیل می‌دهند (این‌مطلب نیازمندبرهان است ولی ما به آن نمی‌پردازیم) . این‌توابع در برخی شاخه‌های این مبحث حائز اهمیت هستند ، ولی ما احتیاجی نداریم که آنها را بطور مشخص درنظر بگیریم .

مثال ۶:۱۶

(آ) تابع‌مجموع ، بازگشتی (اولیه) است . برای ملاحظهٔ این نکته به مثال ۶:۱۴ (پ) مراجعه کنید که درآنجا تابع مجموع بوسیلهٔ بازگشت از یک تابع افکنش و تابع

تالی بدست آمده است .

(ب) تابع حاصلضرب، بازگشتی (اولیه) است. برای ملاحظهٔ این نکته $f_2: D_N^2 \to D_N$ را به طریق زیر تعریف کنید

$$f_2(m, 0) = z(m)$$
$$f_2(m, n+1) = h(m, n, f_2(m, n)),$$

که $h(m, n, p) = f_1(p_3^3(m, n, p),\ p_1^3(m, n, p))$. در اینجا f_2 بوسیلهٔ بازگشت از z ، که بازگشتی است ، و h ، که بازگشتی است ، زیرا از ترکیب f_1 ، p_3^3 و p_1^3 بدست آمده تعریف شده است .

(پ) مثال ۱۴.۶ (ب) یک تابع بازگشتی را نشان می‌دهد .

(ت) تابع $f: D_N \to D_N$ ، که بوسیلهٔ $f(n) = n!$ تعریف شده است ، بازگشتی (اولیه) است . زیرا f بوسیلهٔ

$$f(0) = 1$$
$$f(n+1) = f_2(s(n), f(n)),$$

تعریف شده است ، و بنابراین بوسیلهٔ بازگشت (و ترکیب) از توابع تالی و ضرب ، که بازگشتی (اولیه) هستند ، بدست آمده است .

(ث) همهٔ توابع ثابت بازگشتی هستند . تابع ثابت دارای مقدار k را می‌توان بوسیلهٔ تابع افکنش p_2^2 به این طریق تعریف کرد

$$f(0) = k$$
$$f(n+1) = p_2^2(n, f(n)).$$

می‌توان با استفاده از دیگر توابع افکنش ، بازگشتی بودن توابع ثابت دارای بیش از یک متغیر را ملاحظه کرد .

(ج) توابع $sg, \overline{sg}: D_N \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ

$$\overline{sg}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ اگر} \\ 0 & n \neq 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad sg(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ اگر} \\ 1 & n \neq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

بازگشتی هستند ، زیرا

$$sg(0) = 0$$
$$sg(n+1) = 1 \qquad \text{(تابع ثابت)}$$

و

$$\overline{sg}(0) = 1$$
$$sg(n+1) = 0.$$

◁ممکن است به نظر برسد که بکار بستن این تعریف به همان اندازهٔ تعریف تابع نمایش‌پذیر در $\mathcal{N}$ ایجاد اشکال می‌نماید ، ولی چنین نیست و طبیعت استقرائی آن ما را به آسانی و فوریت قادر می‌سازد که گردآیهٔ بزرگی را از توابعی که می‌دانیم بازگشتی هستند فراهم کنیم . اما ، بحث دربارهٔ بازگشتی بودن با فایده دیگری همراه است که به محاسبه پذیری مربوط می‌شود ، و بعدا" دربارهٔ آن بیشتر گفتگو خواهیم کرد .

مفهوم بازگشتی‌بودن به کمک‌مفهوم تابع مشخصه ، درمورد روابط گسترش می‌یابد .

تعریف ۶:۱۷

فرض کنیم R یک رابطهٔ k ــ مکانی روی D_N باشد . **تابع‌مشخصهٔ** R (که با C_R نشان داده می‌شود) چنین تعریف می‌شود

$$C_R(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } R(n_1, \ldots, n_k) \text{ برقرار باشد} \\ 1 & \text{اگر } R(n_1, \ldots, n_k) \text{ برقرار نباشد} \end{cases}$$

تعریف ۶:۱۸

یک رابطهٔ R روی D_N **بازگشتی** است اگر تابع مشخصهٔ آن تابعی بازگشتی باشد .

مثال ۶:۱۹

تابع دوتایی R ، که $R(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $m+n$ زوج باشد ، بازگشتی است . برای اثبات باید نشان دهیم که تابع f تعریف شده بوسیلهٔ

$$f(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m+n \text{ زوج باشد} \\ 1 & \text{اگر } m+n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

تابعی بازگشتی است . فرض کنیم $rm_2: D_N \to D_N$ تابعی باشد که بوسیلهٔ

" $rm_2(n)$ عبارت است از باقیماندهٔ تقسیم n بر 2 "

تعریف شده است . rm_2 بازگشتی است ، زیرا

$$rm_2(0) = 0$$

$$rm_2(n+1) = \overline{sg}(rm_2(n)) = \overline{sg}(p_2^2(n, rm_2(n))).$$

اما $f(m, n) = rm_2(m+n)$، پس، بنابرترکیب، f بازگشتی است چون $+$ و rm_2 بازگشتی هستند.

مثال ۶:۲۰

رابطهٔ $\leq$ بازگشتی است .

برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم که تابع g ، تعریف شده بوسیلهٔ

$$g(m, n)=\begin{cases}0 & m \leq n \text{ اگر} \\ 1 & m>n \text{ اگر}\end{cases}$$

بازگشتی است . این مستلزم چندمرحله است . ابتدا ، تابع p ، تعریف شده بوسیلهٔ

$$p(n)=\begin{cases}n-1 & n>0 \text{ اگر} \\ 0 & n=0 \text{ اگر}\end{cases}$$

بازگشتی است . برای ملاحظهٔ این مطلب با استفاده از بازگشت داریم

$$p(0)=0$$
$$p(n+1)=n$$

سپس ، تابع $\dot{-}$ ، تعریف شده بوسیلهٔ

$$m \dot{-} n=\begin{cases}m-n & m \geq n \text{ اگر} \\ 0 & n>m \text{ اگر}\end{cases}$$

بازگشتی است . برای ملاحظهٔ این مطلب با استفاده از بازگشت داریم

$$m \dot{-} 0=m$$
$$m \dot{-}(n+1)=p(m \dot{-} n)$$

توجه کنیدکه در اینجا نمی‌توان از تابع تفریق صحبت کرد ، زیرا به مقادیر منفی منجر می‌شود و دامنهٔ اعداد ما فقط از اعداد صحیح نامنفی تشکیل شده است . تابع نشان داده شده بوسیلهٔ $\dot{-}$ یک تفریق تعدیل یافته است .

اکنون می‌توانیم ببینیم که g را چگونه باید آنطور که لازم است تعریف کرد . $g(m, n)=sg(m \dot{-} n)$ ، با استفاده از ترکیب .

◁ تعریف بازگشتی بودن را می‌توان درمورد مجموعه‌های اعداد هم بکار برد . اگر $A \subseteq D_N$ ، گوییم A بازگشتی است اگر تابع مشخصهٔ A بازگشتی باشد . (تابع مشخصهٔ مجموعهٔ A عبارتست از تابع مشخصهٔ رابطهٔ " $\in A$ ") .

مثال ۶:۲۱

(آ) مجموعهٔ D_N بازگشتی است ، زیرا تابع مشخصهٔ آن تابع صفر است ، که بازگشتی می‌باشد .

(ب) $\varnothing$ بازگشتی است ، زیرا تابع مشخصهٔ آن تابعی ثابت است .

(پ) مجموعهٔ اعداد زوج بازگشتی است . برای ملاحظهٔ این مطلب باید نشان دهیم که تابع h تعریف شده بوسیلهٔ

$$h(n)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

بازگشتی است . ولی h همان تابع rm_2 تعریف شده در مثال ۶:۱۹ می‌باشد .

حکم ۶:۲۲

اگر R و S روابط k ـ مکانی بازگشتی باشند آنگاه $\bar{R}$ و $R \wedge S$ و $R \vee S$ بازگشتی هستند . ($\bar{R}$ رابطه‌ای است که برای یک k ـ تایی مفروض برقرار است اگر و فقط اگر R برای آن k ـ تایی برقرار نباشد . $R \wedge S$ برای یک k ـ تایی مفروض برقرار است اگر و فقط اگر R و S هر دو برقرار باشند . $R \vee S$ برای یک k ـ تایی مفروض برقرار است اگر و فقط اگر هر کدام از R یا S برقرار باشند .)

برهان : تابع مشخصهٔ $\bar{R}$ عبارتست از $\overline{sg}(C_R)$ ، که بازگشتی است اگر C_R بازگشتی باشد . همچنین

$$C_{R\wedge S}(n_1, \ldots, n_k)=sg(C_R(n_1, \ldots, n_k)+C_S(n_1, \ldots, n_k))$$

و

$$C_{R\vee S}(n_1, \ldots, n_k)=C_R(n_1, \ldots, n_k)\times C_S(n_1, \ldots, n_k).$$

پس با فرض این که C_R و C_S بازگشتی باشند $C_{R\wedge S}$ و $C_{R\vee S}$ بازگشتی هستند .

نتیجهٔ ۶:۲۳

به ازای مجموعه‌های بازگشتی دلخواه A و B ، متمم A ، اشتراک A و B ، و اجتماع A و B بازگشتی هستند .

برهان : این فقط حالت خاصی از حکم فوق است ، زیرا مجموعه‌های A و B دارای توابع مشخصه‌ای هستند که توابع مشخصهٔ روابط "$\in A$" و "$\in B$" می‌باشند .

◁از اینجا به بعد می‌توان به اثبات بازگشتی بودن توابع ، روابط و مجموعه‌های خاص پرداخت ، و در واقع برای اثبات حکم ۶:۱۲ و ناتمامیت دستگاه $\mathcal{N}$ چنین کاری لازم است . درحقیقت یافتن تابع یا رابطه‌ای که بازگشتی **نباشد** مشکلتر است ، زیرا عملا "همهٔ توابع و روابطی که به آسانی قابل توصیف هستند بازگشتی می‌باشند . ما به منظور آشنایی با روشی که برای این کار وجود دارد ، این فرآیند را تا حدی دنبال خواهیم‌کرد و تا اندازه‌ای با مشکلات‌توصیف یک تابع یا رابطهٔ غیربازگشتی آشنا خواهیم شد .

حکم ۶:۲۴

هر زیر مجموعهٔ یک عضوی از D_N بازگشتی است .

برهان : بایدنشان‌دهیم‌که به ازای هر $k \in D_N$ ، تابع $S_k : D_N \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ

$$S(n)=\begin{cases}0 & \text{اگر } n=k\\ 1 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

بازگشتی است . این کار را با استقراء انجام می‌دهیم .

مرحلهٔ پایه‌ای :

$$S_0(n)=\begin{cases}0 & \text{اگر } n=0\\ 1 & \text{اگر } n\neq 0\end{cases}$$

S_0 همان تابع sg و بنابراین بازگشتی است .

مرحلهٔ استقراء : فرض کنیم که $k>0$ و S_{k-1} بازگشتی است

$$S_k(n)=\begin{cases}0 & \text{اگر } n=k\\ 1 & \text{اگر } n\neq k\end{cases}$$

پس داریم

$$S_k(0)=1,$$

و به ازای هر $n \in D_N$

$$S_k(n+1)=S_{k-1}(n)$$

پس S_k بوسیلهٔ بازگشت از S_{k-1} بدست آمده و بنابراین بازگشتی است .

از اینرو به استقراء ، به ازای هر $k \in D_N$ ، S_k بازگشتی است ، پس نتیجه ثابت شده است .

مثال ۶:۲۵

(آ) هرمجموعهٔ متناهی بازگشتی است . این نتیجهٔ منطقی حکم ۶:۲۴ و نتیجهٔ ۶:۲۳ است ،زیرا یک‌مجموعهٔ متناهی را می‌توان بصورت اجتماعی متناهی‌از مجموعه‌های یک عضوی نوشت .

(ب) $p : D_N \to D_N$ را بوسیلهٔ

"$p(n)$عبارتست از n امین عدد اول فرد ، اگر $n>0$، و $p(0)=2$"

تعریف می‌کنیم . p تابعی بازگشتی است . این مطلب ممکن است اعجاب‌آور باشد ، زیرا می‌دانیم که p دارای هیچ بیان جبری ساده‌ای نیست . با وجود این با استفاده از

تعریف (وتعدادی مراحل میانی) می‌توان نشان داد که p به ردهٔ توابع بازگشتی تعلق دارد.

(پ) بنابر نظریهٔ مقدماتی اعداد، هر عدد طبیعی را می‌توان بطور منحصربفرد به صورت حاصلضرب توانهای اعداد اول بیان کرد. به ازای هر $i \in D_N$، تابع e_i را چنین تعریف کنید:

"$e_i(n)$ مساوی است با نمای عدد اول $p(i)$ در تجزیهٔ n بصورت حاصلضرب توانهای اعداد اول، اگر $p(i)$ در آن تجزیه ظاهر شده باشد، وگرنه صفر است".

در این صورت به ازای هر i، e_i تابعی بازگشتی است.

(ت) تابع $d: D_N^2 \to D_N$ که

$d(m, n) =$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n

بازگشتی است.

◁ با توابع و قواعد پایه‌ای ساده، می‌توان توابع بازگشتی پیچیده‌ای ساخت و واضح است که برای پیچیدگی کاربرد قواعد I، II و III حدی متصور نیست. برهان حکم ۱۲:۶ که می‌توان آن را در کتاب مندلسن یافت، نسبتاً "طولانی است و به میزان قابل توجهی به برهانهای بازگشتی بودن توابع و روابط خاص، و چگونگی ترکیب توابع بازگشتی برای بدست آوردن توابع و روابط بازگشتی جدید بستگی دارد.

به عنوان نتیجه‌ای بر حکمهای ۶:۱۰ و ۱۲:۶ می‌توانیم این نتیجهٔ نه چندان مفید را بدست آوریم که همهٔ توابع روی D_N بازگشتی نیستند. در واقع این را می‌توان بطور مستقیم‌تر با یک استدلال مبتنی بر شمارش‌پذیری و بدون استفاده از این حکمها نشان داد.

مجموعهٔ توابع بازگشتی شمارش‌پذیر است، و این واقعیت ما را قادر می‌سازد تابعی بسازیم که بازگشتی نباشد. شمارشی مانند $f_1, f_2, \ldots$ از همهٔ توابع بازگشتی یک‌مکانی درنظر بگیرید. تابع $g: D_N^2 \to D_N$ را بوسیلهٔ

$$g(m, n) = f_m(n).$$

تعریف کنید. این تابع g تابعی غیربازگشتی است. زیرا فرض کنید که g بازگشتی باشد، h را بوسیلهٔ

$$h(m) = g(m, m) + 1 \qquad (m \in D_N).$$

تعریف کنید. h بازگشتی است زیرا g بازگشتی است. بنابراین h با یکی از توابع f_k یکی است. به ازای این k داریم

$$h(k) = f_k(k) = g(k, k) + 1 = f_k(k) + 1.$$

از این تناقض نتیجه می‌گیریم که g بازگشتی نیست.

۷ ــ نشان دهید که توابع زیر بازگشتی هستند

(آ) $e: D_N^2 \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ $e(m, n) = m^n$

(ب) $\min: D_N^2 \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ

$$\min(m, n) = \begin{cases} m & \text{اگر } m \leq n \\ n & \text{اگر } m > n \end{cases}$$

(پ) $q: D_N^2 \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ

$$q(m, n) = \begin{cases} \text{خارج قسمت تقسیم } n \text{ بر } m & \text{اگر } m \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } m = 0 \end{cases}$$

۸ ــ فرض کنید R یک رابطه بازگشتی $(k+1)$ ــ مکانی باشد بطوری که به ازای هر $n_1, \ldots, n_k \in D_N$ حداقل یک $n_{k+1} \in D_N$ وجود داشته باشد بطوری که $R(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1})$ برقرار باشد. ثابت کنید که تابع f تعریف شده بوسیلهٔ

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \mu x[R(n_1, \ldots, n_k, x)] \quad (n_1, \ldots, n_k) \in D_N$$

بازگشتی است.

۹ ــ فرض کنید $e_2: D_N \to D_N$ چنین تعریف شود:

$e_2(n)$ عبارتست از نمای 2 در تجزیهٔ n به حاصلضرب توانهای اعداد اول.

($e_2(n) = 0$ اگر 2 در این تجزیه ظاهر نشود.)

ثابت کنید که e_2 تابعی بازگشتی است.

۱۰ ــ تمرین ۹ را تکرار کنید در حالتی که e_2 با e_k، که مقدارش نمای عدد اول p_k (k ثابت) است، تعویض شده باشد.

۱۱ ــ فرض کنید f و g توابعی بازگشتی باشند. نشان دهید که تابع h تعریف شده بوسیلهٔ

$$h(x) = f(x)^{g(x)} \qquad (x \in D_N)$$

بازگشتی است.

۱۲ ــ ثابت کنید که به ازای هر $n > 1$، اگر $R_1, \ldots, R_n$ روابط بازگشتی k ــ مکانی باشند، آنگاه $R_1 \wedge \ldots \wedge R_n$ و $R_1 \vee \ldots \vee R_n$ روابطی بازگشتی هستند.

۱۳ ــ ثابت کنید که به ازای هر $n > 1$، اگر $A_1, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی بازگشتی باشند آنگاه $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ و $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ مجموعه‌هایی بازگشتی هستند.

۱۴ ــ فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی روی D_N، و k یک عدد طبیعی ثابت باشد. روابطی یک ــ مکانی (یعنی محمولهایی) را روی D_N چنین تعریف کنید:

$S(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $m < k$ بطوری که $R(m, n)$ برقرار باشد.

$T(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $R(m, n)$ به ازای هر $m < k$ برقرار باشد .

ثابت کنید که اگر R رابطه‌ای بازگشتی باشد آنگاه S و T هم بازگشتی هستند .
آیا می‌توانید برهان خود را طوری تعدیل کنید ، که درمورد روابطی که شرط " $< k$ " برای آنها برداشته شده باشد هم بکار رود .

۶:۴ اعداد گدل

یکی از فنون اساسی مورد استفادهٔ گدل در اثبات قضیهٔ ناتمامیت $\mathcal{N}$ ، که بصورت شیوه‌ای استانده در منطق و سایر مباحث درآمده است ، عبارتست از مفهوم **اعداد کد .** بطور کلی ، اطلاعات را می‌توان با یک زبان مانند زبان فارسی ، یا هر زبان دیگر ، یا یک زبان نمادی مجرد ارائه کرد . برای بحث ، انتقال ، یا تحلیل این اطلاعات شاید مناسب (یا حتی لازم) باشد که این اطلاعات بصورت عددی درآورده شوند . مثلا" ، هنگامی‌که باید اطلاعات بوسیلهٔ یک ماشین تحلیل شوند غالبا" ابتدا آنها را بصورتی عددی درمی‌آورند . به عنوان یک‌مثال خیلی‌خام از نحوهٔ انجام این کار ، کلمات یک فرهنگ‌لغات‌فارسی را می‌توان با‌حفظ ترتیب (مثلا") با اعدادبزرگتراز ۲۰ ، و نمادهای سجاوندی استانده را با اعدادکوچکتر از ۲۰ شماره‌گذاری کرد . در این‌صورت یک‌جملهٔ زبان فارسی را می‌توان بصورت دنباله‌ای از اعداد نوشت .

کار گدل عبارت بود از عرضهٔ ساختاری مشابه برای زبان مرتبه اول $\mathscr{L}$ (که هنوز هم دلخواه و نامشخص فرض می‌شود ، به نحوی که هر نماد ، حد ، فخس ، و دنبالهٔ فخس‌های $\mathscr{L}$ دارای یک عدد کد باشد بطوری‌که از هر عدد کد مفروضی ، بیان متناظرش در $\mathscr{L}$ به آسانی قابل استخراج باشد . برای این کار راههای متعددی وجود دارد که ما یکی از آنها را شرح می‌دهیم .

ابتدا تابعی مانند g روی مجموعهٔ نمادهای $\mathscr{L}$ به طریق زیر تعریف کنید :

$g(() = 3,$

$g()) = 5,$

$g(,) = 7,$

$g(\sim) = 9,$

$g(\rightarrow) = 11,$

$g(\forall) = 13,$

$g(x_k) = 7 + 8k$ به ازای $k = 1, 2, \ldots,$

$g(a_k) = 9 + 8k$ به ازای $k = 1, 2, \ldots,$

$g(f_k^n) = 11 + 8 \times (2^n \times 3^k) \quad n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots,$ به ازای

$g(A_k^n) = 13 + 8 \times (2^n \times 3^k) \quad n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots$ به ازای

توجه‌کنید که به هرنمادی یک‌عدد صحیح مثبت‌فرد متفاوت تخصیص یافته است . همچنین توجه کنید که هر عدد صحیح مثبت فردی را (اگر با نمادی متناظر باشد) می‌توان برای یافتن نماد مربوط به آن به آسانی تفکیک کرد .

مثال ۶:۲۶

(آ) نماد متناظر با عدد 587 را (درصورت وجود) بیابید .

اگر 587 با نمادی متناظر باشد ، این‌نماد باید یکی‌از نمادهای f_k^n, a_k, x_k یا A_k^n باشد . بنابراین باید باقیمانده تقسیم آن بر 8 را بدست آوریم

$$587 = 8 \times 73 + 3 = 8 \times 72 + 11,$$

و $72 = 2^3 \times 3^2$، پس 587 با حرف تابعی f_2^3 متناظر است .

(ب) نشان دهید که 333 با هیچکدام از نمادهای $\mathscr{L}$ متناظر نیست .

$$333 = 8 \times 41 + 5 = 8 \times 40 + 13,$$

اما $40 = 2^3 \times 5$ که به‌صورت $2^n \times 3^k$ نیست ،پس 333 با هیچ نمادی‌از $\mathscr{L}$ متناظر نمی‌شود .

$\triangleright$ البته‌در یک زبان‌خاص مانند $\mathscr{L}$، همهٔ نمادها ظاهر نمی‌شوند ، پس همهٔ اعداد کد مورد استفاده نخواهند‌بود .

هر حد یا فخسی در $\mathscr{L}$ رشته‌ای از نمادهای $\mathscr{L}$ است ، و ما می‌توانیم به طریق زیر اعداد را به چنین رشته‌هایی تخصیص دهیم . اگر $u_1, \ldots, u_k$ نمادهایی در $\mathscr{L}$ باشند رشتهٔ این نمادها را (که می‌تواند حدی از $\mathscr{L}$ باشد یا نباشد) با $u_1 u_2 \ldots u_k$ نشان می‌دهیم و اینطور تعریف می‌کنیم :

$$g(u_1 u_2 \ldots u_k) = 2^{g(u_1)} \times 3^{g(u_2)} \times \ldots \times p_k^{g(u_k)},$$

که در آن به ازای هر $i > 0$ ، p_i نشان‌دهندهٔ i امین عدد اول است و $p_0 = 2$. چون هر عددی را می‌توان بطور منحصربفرد بصورت حاصلضرب اعداد اول نوشت ، روشی بدیهی برای یافتن رشتهٔ نمادهای متناظر با یک‌عدد مفروض وجوددارد (به شرط این که چنین رشته‌ای وجود داشته باشد) . همچنین رشته‌های متفاوت از نمادها لزوما "دارای اعداد کد متفاوت می‌باشند .

مثال ۶:۲۷

(آ) $g(f_1^1(x_1)) = 2^{g(f_1^1)} \times 3^{g(()} \times 5^{g(x_1)} \times 7^{g())}$

$$= 2^{59} \times 3^3 \times 5^{15} \times 7^5.$$

(ب) $g((A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^1(x_1)))$

$$= 2^{g(()} \times 3^{g(A_1^2)} \times 5^{g(()} \times 7^{g(x_1)} \times 11^{g(,)} \times 13^{g(x_2)} \times 17^{g())}$$
$$\times 19^{g(\rightarrow)} \times 23^{g(A_1^1)} \times 29^{g(()} \times 31^{g(x_1)} \times 37^{g())} \times 41^{g())}$$
$$= 2^3 \times 3^{109} \times 5^3 \times 7^{15} \times 11^{75} \times 13^{23} \times 17^5 \times 19^{11} \times 23^{61} \times 29^3$$
$$\times 31^5 \times 37^{15} \times 41^5.$$

(پ) هرعددی که یک‌عدداول دارای توان زوج در آن ظاهر شود ، یا در دنبالهٔ اعداداول موجوددر آن انقطاعی پیش‌آمده باشد ، نمی‌تواند با هیچ رشته‌ای از نمادها متناظر باشد .

تذکر ۶:۲۸

اعداد کدنمادها اعدادی فرد هستند . اعداد کد رشته‌های نمادها زوجند (زیرا عدداول 2 همیشه بانمای‌مخالف‌صفر در عددکدرشته ظاهر می‌شود) . بنابراین براحتی می‌توان بین انواع اعداد کد فرق گذاشت .

می‌توان با گسترش این‌فرآیندبه دنباله‌های‌متناهی از رشته‌های نمادها نیز اعداد کد تخصیص داد . فرض کنید $s_1, s_2, \ldots, s_r$ رشته‌هایی از نمادهای $\mathscr{L}$ باشد ، در این صورت تعریف زیر را می‌آوریم

$$g(s_1, s_2, \ldots, s_r) = 2^{g(s_1)} \times 3^{g(s_2)} \times \ldots \times p_r^{g(s_r)}.$$

توجه کنیدکه به این طریق یک‌عدد مفروض نمی‌تواند هم عدد کد یک دنباله و هم عدد کد یک رشته از نمادها باشد ، زیرا (بنابر تذکر ۶:۲۸) نمای 2 در عدد کد یک دنباله زوج و در عدد کد یک رشته فرد است .

تا اینجا یک تابع g از مجموعهٔ همهٔ نمادها ، رشته‌های نمادها ، و دنباله‌های متناهی رشته‌های نمادهای $\mathscr{L}$ بتوی D_N تعریف کرده‌ایم . این تابع یک‌به‌یک است ولی همانطورکه دیدیم پوشا نیست . این تابع به‌طریقی تعریف‌شدکه یک شیوهٔ کارآمد (یعنی استفاده از عبارت بصورت حاصلضربی از توانهای اعداداول) برای‌محاسبهٔ g^{-1}به‌ازای هر عدد واقع در برد g وجود دارد . مقادیر g را اعداد گدل می‌نامیم . هر حد یا فخسی از $\mathscr{L}$ رشته‌ای از نمادها است ، و بنابراین دارای یک‌عدد گدل است . یک برهان با یک استنتاج در$K_{\mathscr{L}}$ دنباله‌ای متناهی از رشته‌های نمادها است ، و بنابراین یک‌عدد گدل دارد .

مقصود گدل از این کدگذاری این بودکه ادعای راجع‌به دستگاه (مثلا " $\mathscr{N}$) را به

ادعاهایی درباره‌ٔ اعداد تبدیل‌کرده وسپس این ادعاها را دردستگاه صوری بیان کند. ادعاهای راجع به یک دستگاه صوری به فخس‌ها قضایا و برهانها مربوط می‌شود. مثلا "دنباله‌ٔ $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k, \mathscr{A}$ یک برهان در $\mathscr{N}$ برای فخس $\mathscr{A}$ است" این ادعا می‌گوید که رابطه‌ٔ معینی بین دنباله‌ای از فخس‌ها و یک فخس معین وجود دارد. بوسیله‌ٔ اعداد گدل این ادعا به رابطه‌ای روی D_N، مثلا "مانند$Pf(m, n)$، منجر می‌شودکه تعریف آن از این قرار است :$Pf(m, n)$برقرار است اگر و فقط اگر m عدد گدل دنباله‌ای از فخس‌های روی $\mathscr{N}$ باشدکه برهانی را در $\mathscr{N}$ برای فخسی که عددگدل آن n است تشکیل می‌دهند.

دیگر خاصیتهای $\mathscr{N}$، و ادعاهای راجع‌به آن، به روشی‌مشابه به روابطی روی D_N منجر می‌شوند. در این‌مرحله است که مسأله‌ٔ بیان پذیری اهمیت پیدا می‌کند، زیرا، با دنبال کردن مثال فوق، اگر رابطه‌ٔ Pf در $\mathscr{N}$ بیان پذیر باشد فخسی مانند $\mathscr{P}(x_1, x_2)$ از $\mathscr{L}_N$ وجود خواهد داشت بطوری که به ازای هر $m, n \in D_N$

اگر$Pf(m, n)$ برقرار باشد آنگاه $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$

و

اگر $Pf(m, n)$ برقرار نباشد آنگاه $\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{P}(0^{(m)}, 0^{(n)})$

به عبارت دیگر فخسی مانند $\mathscr{P}(x_1, x_2)$ وجود خواهد داشت که درمورد این "ماورای سؤال" که آیا دنباله‌ٔ دلخواه فخس‌های $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k, \mathscr{A}$ برهانی در $\mathscr{N}$ را تشکیل می‌دهند **در داخل دستگاه** تصمیم بگیرد. کاری که می‌کنیم نهایتا" به این معنی است که می‌خواهیم‌دستگاه $\mathscr{N}$ را (حداقل‌بطورجزئی) به‌عنوان یک ماورای دستگاه ،به مفهومی که در فصل‌های قبل بیان‌شد، درمورد خودش بکار بریم. ظاهرا "چنین روشی خطرناک و مستعد تناقض بنظر می‌رسد، ولی ما می‌دانیم که فقط روابط بازگشتی روی D_N در $\mathscr{N}$ بیان پذیر هستند، و استفاده از $\mathscr{N}$ به عنوان ماورای قضیه‌ٔ خودش لزوما "جزئی خواهد بود. به همین جهت می‌توان از تناقض پرهیز کرد.

مرحله‌ٔ بعد دربرهان قضیه‌ٔ گدل نشان‌دادن این مطلب است که روابط معینی روی D_N که به این طریق از بررسی فخس‌ها، قضایا و برهانها ناشی می‌شوند بازگشتی‌بوده و درنتیجه در $\mathscr{N}$ بیان‌پذیر می‌باشند. از ذکر جزئیات صرفنظر می‌کنیم و فقط بعضی‌از این روابط را نام می‌بریم.

حکم ۶:۲۹

روابط زیر روی D_N بازگشتی می‌باشند و بنابراین در $\mathscr{N}$ بیان پذیرند.

(i) $Wf(n)$ $Wf(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گدل فخسی از $\mathscr{N}$ باشد.

Lax (ii) $Lax(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گدل یک اصل موضوعهٔ منطقی $\mathcal{N}$ باشد .

$Prax$ (iii) $Prax(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گدل یک اصل موضوعهٔ سرهٔ $\mathcal{N}$ باشد .

Prf (iv) $Prf(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گدل یک برهان در $\mathcal{N}$ باشد .

Pf (v) $Pf(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد گدل برهان فخسی باشد که عدد گدل آن n است .

$Subst$ (vi) $Subst(m, n, p, q)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد گدل نتیجهٔ جانشینی حدی با عدد گدل p بجای همهٔ موارد آزاد متغیری با عدد گدل q در عبارتی با عدد گدل n باشد .

W (vii) $W(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد گدل فخسی باشد مانند $\mathscr{A}(x_1)$ ، که در آن x_1 دارای مورد آزاد است ، و n عدد گدل برهانی در $\mathcal{N}$ برای $\mathscr{A}(0^{(m)})$ باشد .

D (viii) $D(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد گدل فخسی باشد مانند $\mathscr{A}(x_1)$ ، که در آن x_1 دارای مورد آزاد است ، و n عدد گدل فخس $\mathscr{A}(0^{(m)})$ باشد .

تمرین

۱۵ ـ نمادهایی از $\mathscr{L}$ را (در صورت وجود) بیابید که با اعداد کد زیر متناظر باشند .

(آ) 65 (ب) 299

(پ) 109 (ت) 421

۱۶ ـ فخس های $\mathscr{L}$ متناظر با اعداد کد زیر را بیابید .

(آ) $7^{5} \times 2^{61} \times 3^3 \times 5^{15} \times 7^5$

(ب) $2^9 \times 3^{61} \times 5^3 \times 7^{15} \times 11^5$

(پ) $2^3 \times 3^{13} \times 5^{15} \times 7^5 \times 11^{61} \times 13^3 \times 17^{15} \times 19^5$

۱۷ ـ هر عدد طبیعی از طریق تجزیه‌اش به عوامل اول با دنبالهٔ منحصر بفردی از اعداد طبیعی متناظر است . مثلا "عدد $2^4 \times 3 \times 5^7 \times 11^2$ با دنبالهٔ 4, 1, 7, 0, 2 متناظر است . دو دنباله را می‌توان از طریق پیوند با یکدیگر ترکیب کرد . یعنی عناصر یکی از آنها را بدنبال عناصر دیگری قرار داد . مثلا " اگر s دنبالهٔ 2, 3, 5 و t دنبالهٔ 4, 7, 9, 10 باشد آنگاه دنبالهٔ 2, 3,5, 4, 7, 9, 10 را با $s * t$ نشان می‌دهیم .

تابع $f: D_N^2 \to D_N$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$f(m, n)$ عبارتست از عدد کد $s*t$ که در آن s و t دنباله‌هایی هستند که اعداد کدشان m و n می‌باشد .

ثابت کنید که f بازگشتی است .

۵:۶ برهان ناتمامیت

رابطهٔ W تعریف شده در حکم ۲۹:۶ در برهان ناتمامیت نقشی کلیدی دارد ، بنابراین سعی می‌کنیم که معنای آن را دریابیم . توجه داشته باشید که این رابطه به جانشینی حد $0^{(m)}$ (که با عدد m متناظر است) در فخس $\mathscr{A}(x_1)$، که عدد گدل آن m است ، مربوط می‌شود .

W در $\mathscr{N}$ بیان پذیر است ، پس فخسی مانند $\mathscr{W}(x_1, x_2)$ وجود دارد که فقط x_1 و x_2 در آن دارای مورد آزاد می‌باشند ، بطوری که

اگر $W(m, n)$ برقرار باشد آنگاه $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{W}(0^{(m)}, 0^{(n)})$

و

اگر $W(m, n)$ برقرار نباشد آنگاه $\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{W}(0^{(m)}, 0^{(n)})$

فخس زیر را در نظر بگیرید .

$$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(x_1, x_2).$$

فرض کنید عدد گدل این فخس p باشد ، و بالاخره فخس حاصل از جانشینی $0^{(p)}$ به جای x_1 یعنی

$$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2).$$

را در نظر بگیرید .

فخس اخیر را با $\mathscr{U}$ نمایش دهید . برای ملاحظهٔ اهمیت $\mathscr{U}$ بی‌مناسبت نیست که توصیف خاصی از آن را در این مرحله ارائه کنیم . اولا "W تعبیر $\mathscr{W}$ است . پس $\mathscr{U}$ را می‌توان چنین تعبیر کرد :

" به ازای هر $n \in D_N$، $W(p, n)$ برقرار نیست "

اگر بخواهیم آن را بیشتر تشریح نماییم به شکل زیر درمی‌آید :

" به ازای هر $n \in D_N$ چنین نیست که p عدد گدل فخس $\mathscr{A}(x_1)$ است که x_1 در آن دارای مورد آزاد است ، و n عدد گدل برهانی برای $\mathscr{A}(0^{(p)})$ در $\mathscr{N}$ می‌باشد . "

اکنون p عدد گدل فخسی است که x_1 در آن دارای مورد آزاد است ، که این فخس عبارتست از $(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(x_1, x_2)$، و اگر این فخس با $\mathscr{A}(x_1)$ نشان داده شود آنگاه $\mathscr{A}(0^{(p)})$

همان $\mathscr{U}$ است . پس تعبیر $\mathscr{U}$ هم ارز است با :

" به ازای هر $n \in D_N$ ، n عدد گدل برهانی برای فخس $\mathscr{U}$ در $\mathscr{N}$ نیست "

پس ، از جهتی می‌توان تصور کرد که فخس $\mathscr{U}$ اثبات ناپذیری خودش را اظهار می‌کند .

اگر $\mathscr{N}$ سازگار نباشد در این صورت بدیهی است که تمام است ، زیرا هر فخسی قضیهٔ آن خواهدبود . بنابراین قضیهٔ ناتمامیت محتاج فرض سازگاری $\mathscr{N}$ است . درحقیقت برهان گدل مستلزم فرضی است اندکی قویتر ، که اکنون به بررسی آن می‌پردازیم .

تعریف ۶:۳۰

یک دستگاه مرتبه اول S ، که زبان آن با زبان $\mathscr{N}$ یکی است ، **ω ـ سازگار** است . درصورتی که به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}(x_1)$ ، که x_1 در آن دارای مورد آزاد است ، چنانچه به ازای هر $n \in D_N$ ، $\mathscr{A}(0^{(n)})$ قضیه‌ای از S بود آنگاه $\sim(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$ قضیه‌ای از S نباشد .

همانطورکه قبلاً دیدیم (تذکر ۶:۶ را ملاحظه کنید) اگر $\mathscr{A}(0^{(n)})$ به ازای هر n ، یک قضیه باشد ، لازم نیست که $(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$ حتماً یک قضیه باشد . ω ـ سازگاری می‌گوید که اگر هر $\mathscr{A}(0^{(n)})$ قضیه باشد آنگاه $\sim(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$ قضیه **نیست** ، چه $(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$ قضیه باشد یا نباشد .

حکم ۶:۳۱

فرض کنید S یک دستگاه مرتبه اول باشد که زبان آن با زبان $\mathscr{N}$ یکی است . اگر S ، ω ـ سازگار باشد آنگاه S سازگار است .

برهان : فرض کنید $\mathscr{A}(x_1)$ فخس دلخواهی باشد بطوری‌که به ازای هر n ، $\mathscr{A}(0^{(n)})$ قضیهٔ S است . مثلاً $\mathscr{A}(x_1)$ می‌تواند $x_1 = x_1$ باشد . دراین‌صورت بنابر ω ـ سازگاری $\sim(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$ قضیهٔ S نیست . پس S سازگار است (زیرا فخسی وجود دارد که قضیهٔ نیست) .

حکم ۶:۳۲ (قضیهٔ ناتمامیت گدل)

با فرض این که $\mathscr{N}$ ، ω ـ سازگار است ، نه $\mathscr{U}$ قضیهٔ $\mathscr{N}$ است ، و نه نقیض آن . بنابراین اگر $\mathscr{N}$ ، ω ـ سازگار باشد ، $\mathscr{N}$ تمام نیست .

برهان : ابتدا فرض کنید $\mathscr{U}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است و فرض کنید که q عدد گدل برهانی برای $\mathscr{U}$ در $\mathscr{N}$ باشد . همانطور که قبلاً داشتیم فرض کنید که p عدد گدل

$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(x_1, x_2)$ باشد ، پس $W(p, q)$برقرار است . W در $\mathscr{N}$ بوسیلهٔ $\mathscr{W}$ بیان‌پذیر است . پس داریم

$$\underset{\mathscr{N}}{\vdash} \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)}).$$

اما $\underset{\mathscr{N}}{\vdash} \mathscr{U}$ ، یعنی $\underset{\mathscr{N}}{\vdash} (\forall x_2) \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$ پس بنابر $(K5)$ و ق ، $\underset{\mathscr{N}}{\vdash} \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$ این با سازگاری $\mathscr{N}$ متناقض است ، پس $\mathscr{U}$ نمی‌تواند قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ باشد .

$\mathscr{U}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نیست ، یعنی برهانی برای $\mathscr{U}$ در $\mathscr{N}$ وجود ندارد . پس q هر عددی باشد q عدد گدل برهانی برای $\mathscr{U}$ ، یعنی برای$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$در $\mathscr{N}$ نیست . پس $W(p, q)$ به ازای هیچ q یی برقرار نیست . پس

به ازای هر q $\quad \underset{\mathscr{N}}{\vdash} \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$

پس ، بنابر ω ــ سازگاری

$$\sim (\forall x_2) \sim \mathscr{W}(0^{(p)}, x_2)$$

قضیهٔ $\mathscr{N}$ نیست ، یعنی $(\sim \mathscr{U})$ قضیهٔ $\mathscr{N}$ نیست .

تذکر ۶ : ۳۳

ما فرض ω ــ سازگاری را صریحاً" بیان کرده‌ایم ، هرچندکه یک اثبات واضح برای ω ــ سازگاری $\mathscr{N}$ با استفاده از الگوی N وجود دارد . اما همانطورکه قبلاً" تذکر داده شد استدلالهایی که از الگو استفاده می‌کنند اغلب شامل فرضهایی دربارهٔ سازگاری دیگر دستگاههای صوری هستند ، و بنابراین بنظر می‌رسد که مطلب موردنظر را درخود مفروض گرفته‌اند . همچنین ، می‌توان حکم ۶ : ۳۲ را به‌منظور دربرگرفتن دیگردستگاههای صوری ، یعنی توسیعهای $\mathscr{N}$ ، تعمیم‌داد . و دراین‌صورت‌در غیاب هرگونه اطلاع مشخصی قطعاً" باید ω ــ سازگاری را مفروض گرفت .

$\triangleright$ این فصل تا اینجا خلاصه‌ای از برهان قضیهٔ ناتمامیت گدل بوده است . علت گنجاندن آن این بودکه خواننده با روشهای بکار رفته آشنایی پیدا کند و توضیح نکاتی دربارهٔ اهمیت آن آسان شود . اکنون به بررسی بعضی نتایج منطقی و تعمیمهای آن ، تا مرحلهٔ فعلی می‌پردازیم .

حکم ۶ : ۳۴ (با فرض ω ــ سازگاری $\mathscr{N}$)

$\mathscr{N}$ شامل فخس بسته‌ای است که‌درالگوی N درست‌است‌ولی قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نیست .

برهان : فخس $\mathscr{U}$ فخسی بسته است ، نه $\mathscr{U}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است و نه$(\sim \mathscr{U})$. اما چون N یک تعبیر است یا $\mathscr{U}$ در N درست است ، یا$(\sim \mathscr{U})$ ،

◁ درحقیقت می‌توان فرض بکار رفته در این حکم را تضعیف کرد .

حکم ۶:۳۵ (با فرض سازگاری $\mathcal{N}$)

$\mathcal{N}$ شامل فخسی بسته است که در الگوی $\boldsymbol{N}$ درست است ولی قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ نیست .

برهان : باید برهان حکم ۶:۳۲ را که با این فرضهای تضعیف شده هم برقرار است تعدیل کرد ، ولی فخس $\mathcal{U}$ را هم باید تعدیل نمود . از ذکر جزئیات صرفنظر می‌شود.

◁ $\mathcal{N}$ تمام نیست. ممکن است اولین چیزی که بنظر برسد این باشد : آیا می‌توانیم $\mathcal{N}$ را تمام کنیم ؟ شاید مجموعهٔ نامناسبی از اصول موضوعهٔ $\mathcal{N}$ را انتخاب کرده باشیم . شاید اگر فخس $\mathcal{U}$ را به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید اضافه کنیم دستگاه جدید تمام خواهد بود . اندکی تفکر دربارهٔ روشی که در این فصل بکار گرفته شد باید نشان دهد که افزودن $\mathcal{U}$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید مفید واقع نخواهد شد . فرض کنید $\mathcal{N}^+$ دستگاه بدست آمده از $\mathcal{N}$ با افزودن $\mathcal{U}$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید باشد . این تغییر در اصول موضوعه بر این نتیجه که هر رابطهٔ بازگشتی بیان‌پذیر است اثری نخواهد گذاشت ، (هرچندکه ممکن است عکس آن را مورد تأثیر قرار دهد) . اما ممکن است بر بازگشتی‌بودن رابطه‌های $\boldsymbol{Prax}$ و $\boldsymbol{Pf}$ ، و رابطه‌های دیگری که برحسب اینها تعریف شده‌اند تأثیر بگذارد . اما افزودن یک اصل‌موضوعه بر بازگشتی‌بودن مجموعهٔ اعداد گدل اصول موضوعه تأثیر نخواهد داشت ، زیرا هر مجموعهٔ یک‌عضوی ، بازگشتی است و اجتماع هر دو مجموعهٔ بازگشتی نیز بازگشتی است . رابطهٔ $\boldsymbol{Prax}$ بازگشتی باقی خواهد ماند ، و به روشی مشابه می‌توان مشاهده کرد که $\boldsymbol{Pf}$ و بقیه ، ازجمله $\boldsymbol{W}$ ، بازگشتی می‌باشند ، هر چندکه تعریف آنها به $\mathcal{N}^+$ مربوط می‌شود نه $\mathcal{N}$. سپس می‌توان همانطور که درمورد $\mathcal{N}$ عمل کردیم درمورد $\mathcal{N}^+$ عمل کنیم و به یک قضیهٔ ناتمامیت مشتمل بر فخس جدیدی مانند $\mathcal{U}'$ برسیم .

با یک استدلال مشابه کلی‌تر به حکم زیر می‌رسیم .

حکم ۶:۳۶

فرض کنیم $\boldsymbol{S}$ توسیعی از $\mathcal{N}$ باشد بطوری که مجموعهٔ اعداد گدل اصول موضوعهٔ یک مجموعهٔ بازگشتی باشد ، آنگاه (به شرط این که $\boldsymbol{S}$ سازگار باشد) $\boldsymbol{S}$ تمام نیست .

تذکر ۶:۳۷

فرض مربوط به $\boldsymbol{S}$ صرفاً " عبارتست از این که رابطهٔ $\boldsymbol{Prax_S}$ که بصورت زیر تعریف

شده است بازگشتی باشد :

$Prax_S(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گدل یک اصل موضوعهٔ سرهٔ S باشد .

همین فرض است که امکان اثبات حکمی نظیر حکم ۶:۲۹ را درمورد S فراهم می‌سازد .

◁ ازحکم اخیر نتیجه می‌شود که نمی‌توان با افزودن مجموعه‌ای از اصول موضوعهٔ اضافی ، که اعداد گدل آنها یک مجموعهٔ بازگشتی متناهی یا نامتناهی می‌سازند ، $\mathcal{N}$ را تمامیت بخشید .

همانطورکه ملاحظه کردیم دستگاه $\mathcal{N}$ از یک جهت خاص ناقص است ، به این معنی که اصول موضوعهٔ آن فقط حالت ضعیفی از اصل استقراء ریاضی را دربردارند . علت این امر استفاده از زبان مرتبه اول است . آیا می‌توان با بکار گرفتن یک دستگاه حساب دوم از این مشکل پرهیز کرد ؟ در این کتاب ما عمداً " ازمشکلات اضافی ناشی ازدستگاههای مرتبه دوم پرهیز کرده‌ایم ، بنابراین بررسی این سؤال فراتر از حوزهٔ عمل ما است . اما معلوم شده است که زبان مرتبهٔ دوم نیز دارای همان خاصیت است ، یعنی این‌که یک دستگاه مرتبه دوم حساب که در آن مجموعهٔ (اعداد گدل) اصول موضوعهٔ سره بازگشتی باشد ، تمام نیست .

نتایج قضیهٔ گدل از این هم عمیقتر هستند . دیدیم که دستگاه اعداد طبیعی را می‌توان در درون دستگاه صوری ZF تعریف کرد . هر دستگاه صوری نظریهٔ مجموعه‌ها ، اگر برای نظریهٔ مجموعه‌ها کارساز باشد ، این خاصیت را خواهدداشت ، و درحقیقت دستگاههایی محدودتر از ZF هم این خاصیت را خواهندداشت (به عنوان یک مثال از یک دستگاه فاقداین‌خاصیت می‌توانیم ازدستگاه صوری نظریه گروهها نام ببریم‌که بسیار محدود است) .

حکم ۶:۳۸

هر دستگاه مرتبهٔ اول که به اندازهٔ کافی قوی باشد ، و مجموعهٔ (اعداد گدل) اصول موضوعهٔ آن بازگشتی و خود دستگاه سازگار باشد ، تمام نیست . (یک دستگاه به اندازهٔ کافی قوی است اگر بتوان دستگاه اعداد طبیعی را به طریق فوق در آن تعریف کرد ، و بنابراین اصول موضوعهٔ حساب ، قضایای آن باشند .) بویژه اگر ZF سازگار باشد تمام نیست .

◁ سرانجام به نکته‌ای می‌پردازیم که ممکن است خوانندهٔ نکته‌سنج قبلاً "به آن توجه کرده باشد ، وآن عبارتست از این‌که توسیعی از $\mathcal{N}$ وجوددارد که تمام است . فرضهای قضیهٔ ناتمامیت گدل شامل این‌شرط بودندکه دستگاه صوری موردبحث‌دارای مجموعه‌ای

از اصول‌موضوعهٔ سره باشدکه اعداد گدل آنها یک مجموعهٔ بازگشتی بسازند . این فرض برای برهان لازم بود ، زیرا برهان شامل این مطلب بود که روابط معینی نیز بازگشتی بودند . این که یک دستگاه مرتبه اول حساب وجود دارد که سازگار و تمام است ، و بنابراین در این شرط صدق نمی‌کند ، می‌تواندبا استفاده از شیوه‌ای که درفصل ۴ ارائه شد ملاحظه گردد .

توسیعی از $\mathcal{N}$ را درنظر بگیریدکه از افزودن همه فخس‌هایی از $\mathcal{N}$ ، که درالگوی $\boldsymbol{N}$ درست‌هستند بدست آمده باشد . این توسیع سازگار و تمام است به شرط این که $\mathcal{N}$ سازگار باشد (نتیجه۴ : ۴۷ را ملاحظه‌کنید) . پس بنابر حکم ۶ : ۳۶ مجموعهٔ اعدادگدل اصول موضوعهٔ سرهٔ این توسیع نمی‌تواند بازگشتی‌باشد . درنتیجه مجموعهٔ اعداد گدل فخس‌های $\mathcal{N}$ که در $\mathcal{N}$ درست می‌باشند نمونه‌ای است از یک مجموعهٔ غیربازگشتی .

بنابراین اگر اجازه دهیم‌که مجموعه‌های اصول‌موضوعهٔ سرهٔ ما غیربازگشتی‌باشند می‌توانیم یک دستگاه مرتبه اول حساب داشته باشیم‌که سازگار و تمام باشد . اما اکنون این‌سؤال مطرح می‌شود : چرامجموعه‌های بازگشتی‌درقضیهٔ ناتمامیت گدل دارای چنین اهمیتی هستند ؟ درست‌نیست‌که بگوییم هیچ دستگاه صوری سازگار حساب تمام نیست . آنچه می‌توان‌گفت این‌است‌که چنین‌دستگاهی ، اگر مجموعهٔ (اعدادگدل) اصول موضوعه آن بازگشتی باشد تمام نیست . جواب در مفهوم محاسبه‌پذیری ، کارآمدبودن والگوریتم و رابطهٔ آنها با مفهوم بازگشتی‌بودن نهفته است . در فصل بعد به سراغ این مطالب می‌رویم .

تمرین

۱۸ ــ فرض کنید فخس $\mathcal{U}$ همان باشد که درخلال متن تعریف شد . $\mathcal{U}$ قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ نیست ، پس (با فرض‌این‌که $\mathcal{N}$ سازگاراست) توسیع حاصل از افزودن $(\sim\mathcal{U})$ به عنوان یک اصل موضوعهٔ اضافی ، سازگار است . نشان دهید که این توسیع ω ــ سازگار نیست .

۷

محاسبه‌پذیری
حل ناپذیری
تصمیم ناپذیری

۱:۷ الگوریتمها و محاسبه‌پذیری

در کنگرهٔ جهانی ریاضیدانان در سال ۱۹۰۰ ، هیلبرت لیست مشهور مسائل حل نشدهٔ ریاضی خود را عرضه کرد . یکی از اینها (که اکنون مسألهٔ دهم هیلبرت نامیده می‌شود) عبارت‌بوداز یافتن شیوه‌ای برای تصمیم دربارهٔ این‌که آیا هر معادلهٔ دیوفانتوسی بسجمله‌ای‌دارای جوابی برحسب اعداد صحیح می‌باشد . جواب این مسأله (که اخیرا " بدست آمد ، به [1] Davis مراجعه‌کنید) با عباراتی بیان شده بودکه مستمعین هیلبرت را در ۱۹۰۰ (وحتی شاید خود هیلبرت را) به تعجب وا می‌داشت . این جواب شامل مجموعه‌ای از دستورالعمل‌ها برای شیوهٔ موردنظر نبود ، بلکه برهانی بود برای این مطلب که چنین شیوه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد . مسألهٔ دهم هیلبرت مثالی است از آنچه که امروز عموما " یک " مسألهٔ لاینحل " نامیده می‌شود . بررسی این مسأله و مسائل مشابه آن ، ریاضیدانان اوائل این قرن را بر آن داشت تا به بررسی معنای کلمهٔ " شیوه " که در این مسأله مطرح شده است ، بپردازند . این بررسی‌ها به مفاهیم و کاربردهایی منجر شدند که در این فصل توصیف می‌گردند .

در این مبحث کلمهٔ دیگری که با " شیوه " هم‌معنی است " الگوریتم " می‌باشد ، و ما معمولا " کلمهٔ اخیر را بکار می‌بریم ، زیرا کلمهٔ قبلی دارای معانی دیگری در خارج از این مبحث است ، که ممکن است به سوء تفاهم منجر شوند . مفهوم الگوریتم مفهومی شهودی است ، نه مفهومی‌که از لحاظ ریاضی دقیق باشد . درعین‌حال می‌توانستیم آن را به طریق زیر تعریف کنیم .

تعریف ۱:۷

یک الگوریتم عبارتست از یک‌مجموعهٔ کارآمد صریح از دستورالعملهایی برای یک شیوه محاسباتی (که لزوما "عددی‌نیست) وممکن است برای‌یافتن جوابهای ردهٔ مفروضی

از سؤالات بکار رود .

هنگامی که مطلب به این نحوه مطرح شود سؤالات مربوط به وجود الگوریتمهای مناسب برای " رده‌های سؤالات " مختلف بطور طبیعی مطرح خواهند شد .

در مسأله‌ٔ دهم هیلبرت ردهٔ سؤالات بصورت زیر است :

{E یک معادلهٔ بسجمله‌ای دیوفانتوسی است | آیا E ریشهٔ صحیح دارد ؟}*

مثال ۷ : ۲

رده‌های سؤالات را می‌توان از هر نوع درنظر گرفت . مثلا "

(آ) $\{n \in D_N|$ مقدار $f(n)$ چیست ؟$\}$ (f یک تابع ثابت است .)

(ب) $\{n \in D_N|$ آیا n عضوی ازمجموعهٔ A است ؟$\}$ (A یک‌مجموعهٔ ثابت‌است.)

(پ) {$\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{N}$ است | آیا $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است ؟}

مثال ۷ : ۳

(آ) $\{n \in D_N|$ آیا 2 یک عامل n است ؟$\}$

الگوریتمی وجوددارد‌که برای چنین سؤالاتی جواب فراهم می‌کند . اگر n عدددلخواه مفروضی باشد ، باقیماندهٔ تقسیم آن بر 2 را (با یکی از چندروش شناخته شدهٔ مقدماتی دبستانی‌برای‌تقسیم) بیابید . اگر باقیمانده 0 باشد جواب مثبت‌می‌دهیم ،اگر باقیمانده 1 باشد جواب منفی می‌دهیم .

(ب) $\{n \in D_N|$ آیا n به مجموعهٔ اعداد اول تعلق دارد ؟$\}$

الگوریتمی وجوددارد‌که برای چنین سؤالاتی جواب فراهم‌می‌کند . اگر n عدد مفروضی باشد ، به ازای هر m که $(1<m<n)$،روشهای استاندهای برای یافتن باقیماندهٔ تقسیم n بر m وجود دارد . اگر هیچیک از این باقیمانده‌ها صفر نباشد ، آنگاه n یک عدد اول است . اگر یک یا چند باقیمانده صفر باشند ، آنگاه n یک عدد اول نیست .

(پ) $\{n \in D_N|$ مقدار $f(n)$ چیست ؟$\}$ ، که f تابع تعریف‌شده بوسیلهٔ $f(n)=2n$ ، $(n \in D_N)$ است .

در این‌حالت حساب‌مقدماتی دبستانی الگوریتمی برای محاسبهٔ مقدار f فراهم‌می‌کند .

(ت) {E یک معادلهٔ درجه دوم با ضرایب صحیح است . | جوابهای معادلهٔ E در اعداد مختلط کدامند ؟}

---

* چون این یک مجموعه است بایدابتداجملهٔ سمت چپ وسپس جملهٔ سمت راست را خواند . مترجم

یک رابطهٔ جبری مشهور وجود دارد که الگوریتمی برای این مورد فراهم می‌کند .

◁ملاحظه خواهد شد که یک " رده از سؤالات " ، در این مبحث مفهومی بسیار کلی است . اکنون موقتا " خودمان را به الگوریتمهای مربوط به رده‌های سؤالاتی با طبیعت خاص ، یعنی سؤالاتی شبیه ۳:۷(پ) فوق الذکر ، محدود می‌کنیم . به عبارتی دیگر می‌خواهیم مفهوم " توابع محاسبه‌پذیر بوسیلهٔ الگوریتم " ، را موردبررسی قرار دهیم. ازنظر تاریخ تحول این مبحث ، این جنبه بود که قبل از همه موردتوجه قرار گرفت ، محققین متعددی کوشیدندکه به روشی ریاضی مفهوم الگوریتم را دقت‌بخشندو به روشی ریاضی ردهٔ توابع محاسبه پذیر بوسیلهٔالگوریتم را مشخص نمایند . البته این‌که توصیف ریاضی‌خاصی از این‌مفهوم دقیقا "با تصور شهودی آن مطابقت‌داشته باشد چیزی نیست که قابل اثبات باشد . اما همانطور که خواهیم‌دید دلایل موجهی وجود دارند که فرض کنیم توصیف‌های معینی از الگوریتم آنقدر کلیت دارند که همهٔ الگوریتمهای شهودی را دربربگیرند .

توصیفهای ارائه شده توسط پژوهشگران اولیه دارای صورتهای متفاوتی بود که اجمالا " می‌توان آنها را به صورت زیر دسته‌بندی کرد :

(آ) ماشینهای محاسب (دقیقا "تعریف‌شدهٔ) مجرد ،

(ب) ساختارهای صوری شیوه‌های محاسباتی ،

و

(پ) ساختارهایی صوری که به رده‌های توابع منجر می‌شوند .

دو تعریف اول خود مفهوم الگوریتم را مشخص می‌کنند (ازلحاظ اصولی تفاوتی بین(آ) و (ب)نیست).آخرین تعریف‌ردهٔتوابع محاسبه پذیر بوسیلهٔ الگوریتم را توصیف می‌نماید .

ماشینهای تورینگ (*Turing*) که دردههٔ ۱۹۳۰ بوسیلهٔ تورینگ ابداع شدندمثالی از (آ) می‌باشند . این مفهوم عبارتست از یک ماشین خیالی که دارای یک نوار خیالی است که روی آن یک عدد (یا اعداد) ورودی ، با پیروی از قواعد ساده و محدود ازقبل تعیین شده‌ای به صورت کد چاپ شده است ، ودرپایان محاسبات عدد خروجی را مشابها " به‌صورت کد ارائه می‌کند . ادعا می‌شود که هر الگوریتمی برای محاسبهٔ مقادیر یک تابع ، قابل تبدیل به دستوراتی برای چنین ماشینی می‌باشد .

دستگاههای تیو (*Thue*) که دستگاههایی‌هستندصرفا "صوری، که درآنها بوسیلهٔ قواعد معینی دنباله‌هایی از نمادها را می‌توان به عنوان نتیجهٔ منطقی دنباله‌هایی از نمادها استنتاج کرد ، مثالی‌از (ب) می‌باشند . بنابراین ،اگر یک‌دنبالهٔورودی‌داده‌شده باشد ،قواعداجازه‌می‌دهندکه‌آن‌رابه‌دنبالهٔخروجی‌تبدیل‌کنیم.(Davis [2] راملاحظه‌کنید.)

توابع بازگشتی مثالی از (پ) می‌باشند. توابع و قواعد پایه‌ای، یک ساختار صوری برای تولید یک رده از توابع می‌باشند.

همهٔ این ساختارها در یک چیز مشترکند، و آن این‌که شامل توابع جزئی می‌باشند. بنابراین نابجا نخواهد بود اگر بگوییم که یک تابع جزئی بوسیلهٔ الگوریتم قابل محاسبه است اگر الگوریتمی وجود داشته‌باشد که مقدار تابع را هرگاه که تعریف شده باشد بدهد.

درمورد ماشین تورینگ این بمنزلهٔ مجاز ساختن قواعدی برای ماشین است که به محاسبهٔ بدون‌پایان منجر می‌شوند و بنابراین هیچگاه یک خروجی بدست نمی‌آید. درمورد توابع بازگشتی، همانطورکه در تذکر ۶:۱۳ خاطرنشان شد، این بمنزلهٔ مجاز ساختن استفاده از عملگر کمترین عدد به طریقی نامقید است.

نکتهٔ حساس این است که همهٔ مشخص سازیهای مختلف توابع (جزئی) قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم به یک رده، یعنی ردهٔ توابع جزئی بازگشتی منجر شد. این مطلب قابلیت برهان دارد و به اثبات رسیده است. آنچه که قابلیت برهان ندارد این است که آیا ردهٔ توابع جزئی دقیقا" همان ردهٔ توابع قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم است. اما، باتوجه به وجود شواهدی در این‌مورد، و عدم وجود شواهدی برخلاف این مطلب، **نظر چرچ** (*Church*) را با مضمون زیر می‌پذیریم:

ردهٔ توابع جزئی قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم همان ردهٔ توابع جزئی بازگشتی است.

تذکر ۷:۴

پذیرفتن نظر چرچ صرفا" به‌معنی تبلور متناظر ساختن تصور شهودی ما از الگوریتم باتوصیفهای ریاضی، که قبلا" ارائه شده‌اند، می‌باشد. شواهدی بر نامعقول بودن چنین چیزی وجود ندارد.

◁اکنون با پذیرفتن نظر چرچ، بررسی سؤالات مربوط به وجود الگوریتم از لحاظ ریاضی آسانتر است. مثلا"، این سؤال که آیا الگوریتمی وجود دارد که مقادیر یک‌تابع خاص را بدهد، به این سؤال که آیا آن تابع بازگشتی است، تبدیل‌می‌شود، وهمینطور این سؤال که آیا الگوریتمی وجود دارد که دربارهٔ عضویت در یک زیرمجموعهٔ مفروض از D_N تصمیم بگیرد به این سؤال که آیا تابع مشخصهٔ آن مجموعه بازگشتی است، یعنی آیا آن مجموعه بازگشتی است، تبدیل می‌شود.

فایدهٔ نظر چرچ در این واقعیت نهفته است که می‌توان روشهای ریاضی را برای نشان دادن این که یک تابع (یا مجموعهٔ) مفروض بازگشتی هست (یا نیست) بکار برد،

و از آنجا نشان داد که برای یک رده‌ٔ خاص از سؤالها یک الگوریتم وجود دارد (یا ندارد). به عکس، اگر یک الگوریتم خاص یافته باشیم غالبا "نتیجه‌گیری این مطلب که مجموعه یا تابع متناظر، بازگشتی است مفید می‌باشد.

ممکن است که خواننده توجه کند که نیمی از نظر چرچ دارای محتوایی بیش از نیمهٔ دیگر است. نظر چرچ با ترکیب عطفی دو گزارهٔ زیر هم ارز است:

(i) هر تابع جزئی قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم یک تابع جزئی بازگشتی است، و

(ii) هر تابع جزئی بازگشتی قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم است.

دومین گزاره دارای قابلیت اثبات است، زیرا با استفاده از یک مفهوم شهودی الگوریتم می‌توان "برهانی" استقرائی برای آن ارائه کرد. این برهان با توصیف الگوریتمهایی برای محاسبهٔ توابع بازگشتی پایه‌ای آغاز می‌شود. (مرحلهٔ پایه‌ای استقراء)، سپس با نشان دادن این که چگونه الگوریتمهای محاسبهٔ توابع خاص را می‌توان به‌منظور ساختن الگوریتمهایی برای محاسبهٔ توابع ساخته شده از اینها به‌کمک قواعد I، II، و III بکار برد، ادامه می‌یابد.

اولین گزاره آن قسمت از نظر چرچ است که قابل اثبات نیست. آنچه اثبات‌شده این است که برای تعدادی از تعریف‌های ریاضی‌دقیق متفاوت الگوریتم، همهٔ توابع جزئی قابل محاسبه بوسیلهٔ آن نوع الگوریتم، بازگشتی می‌باشند.

با توجه به مطالب گفته شده ملاحظه می‌شود که اگر قرار باشد روشهای بازگشتی بودن در بحث وجود الگوریتمهایی برای رده‌های خاصی از سؤالات مورد استفاده قرار گیرند، اگر جواب این باشد که چنین الگوریتمی وجود ندارد، نظر چرچ حیاتی خواهد بود. تنها اگر نظر چرچ را بپذیریم از این‌که یک تابع یا مجموعهٔ خاص بازگشتی‌نیست می‌توان نتیجه گرفت که چنین الگوریتمی وجودندارد.

مثال ۵:۷

(آ) فرض کنید f و g توابعی یک مکانی بر D_N باشند که بوسیلهٔ الگوریتم قابل محاسبه می‌باشند. در این‌صورت $f\circ g$ بوسیلهٔ الگوریتم قابل‌محاسبه است. زیرا برای محاسبهٔ $f\circ g\,(n)$، کافیست با استفاده از الگوریتم مربوط به g مقدار $g(n)$ را محاسبه کرده، سپس با استفاده از الگوریتم مربوط به f مقدار $f(g(n))$ را محاسبه کنیم. این مطلب را می‌توان بسادگی تعمیم داد تا کاربرد قاعدهٔ II در ساختن توابع بازگشتی را شامل شود.

(ب) فرض کنید $f: D_N \to D_N$ با استفاده از تابع g بطور بازگشتی چنین تعریف شده باشد

$$f(0) = k$$
$$f(n+1) = g(n, f(n)).$$

فرض کنید که g قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم باشد . الگوریتمی ارائه می‌کنیم تا به ازای هر $m \in D_N$، $f(m)$ را محاسبه کند . اگر $m = 0$، آنگاه $f(m) = k$. اگر $m > 0$، با استفاده از الگوریتم مربوط به g، $f(1) = g(0, f(0))$ را محاسبه کنید، سپس با استفاده از الگوریتم مربوط به g، $f(2) = g(1, f(1))$ را محاسبه کنید، و کار را به همین روش ادامه دهید تا $f(m)$ حاصل شود .

(پ) یک حالت خاص (ب) تابع فاکتوریل است : $f(n) = n! \quad (n \in D_N)$. در عمل، مثلاً" برای محاسبهٔ $10!$، کاری که می‌کنیم عبارتست از دنبال کردن روش ارائه شده در (ب) و محاسبهٔ $1!, 2!, 3!, \ldots, 9!, 10!$ بطور متوالی .

(ت) تابع $h: D_N \to D_N$ را که به طریق زیر تعریف شده است درنظر بگیرید :

$h(n) =$ (اولین رقم غیرصفر در بسط اعشاری $\frac{1}{n}$)

می‌توان با استفاده از تعریف مستقیما" ثابت کرد که h بازگشتی است . ولی این روشی است نسبتا" پیچیده . به طریق دیگر می‌توانیم الگوریتمی را توصیف کنیم که بتواند برای محاسبهٔ مقدار آن بکار رود، و سپس با استفاده از نظر چرچ نتیجه بگیریم که بازگشتی است . الگوریتم موردنظر از روش استاندهٔ تقسیم ناشی می‌شود . ابتدا کوچکترین مقدار k را پیدا کنید که $n < 10^k$، سپس خارج قسمت تقسیم 10^k بر n را بیابید .

(ث) می‌دانیم که مجموعهٔ اعداد گدل فخس‌هایی از $\mathscr{N}$ که در N درست هستند بازگشتی نیست . پس بنابر نظر چرچ نتیجه می‌شود که الگوریتمی برای جواب دادن به سؤالات ردهٔ

{ $\mathscr{A}$ فخسی از $\mathscr{N}$ است | آیا $\mathscr{A}$ در N درست است ؟}

وجود ندارد .

(ج) فرض کنید A زیرمجموعهٔ D_N متشکل از همهٔ اعدادی که مجموع دو مربع کامل هستند باشد . A بازگشتی است ولی اثبات مستقیم این که تابع $f: D_N \to D_N$ تعریف شده بوسیلهٔ

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } p, q \in D_N \text{ وجود داشته باشد بطوری که } n = p^2 + q^2 \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بازگشتی است نسبتا" مشکل است . ولی الگوریتمی وجود دارد که به سؤالات ردهٔ

$\{n \in D_N |$ آیا $n \in A$ ؟ $\}$

جواب می‌دهد . این الگوریتم را می‌توان چنین توصیف کرد . اگر n داده شده باشد p^2+q^2 را ، برای هر زوج از اعداد p و q که هردو کوچکتر از n باشند ، محاسبه کنید . اگر زوجی مانند p و q یافت شد بطوری که $p^2+q^2=n$ ، جواب مثبت است ، در غیر این صورت جواب منفی است . پس بنابر نظر چرچ ، $\mathscr{A}$ مجموعه‌ای بازگشتی است .

◁ارتباط این مطالب با این فرض در حکم ۶:۳۶ که مجموعهٔ اعداد گدل اصول موضوعهٔ سره باید بازگشتی باشد چیست؟ در پرتو نظر چرچ ، به ازای هر دستگاه S با این خاصیت باید الگوریتمی وجود داشته باشد که به سؤالات مجموعهٔ

{ $\mathscr{A}$ فخسی از S است | آیا $\mathscr{A}$ یک اصل موضوعهٔ سرهٔ S است ؟ }

جواب دهد ، و چون مجموعهٔ اعداد گدل اصول موضوعهٔ منطقی S (یا هریک از دستگاههای مرتبه اول ما) بازگشتی است ، الگوریتمی وجود خواهد داشت که به سؤالات مجموعهٔ

{ $\mathscr{A}$ فخسی از S است | آیا $\mathscr{A}$ یک اصل موضوعهٔ S است ؟ }

جواب خواهد داد . از این گذشته ، برای یک دستگاه S که فاقد چنین خاصیتی باشد چنین الگوریتمی وجود نخواهد داشت .

با استفاده از دیدگاهی که هنگام معرفی مفهوم دستگاه صوری اختیار کردیم ، یعنی کوشیدیم که دستگاههای صوری را برای منعکس ساختن مباحث واقعی ریاضی بکار برده و آنها را دقت ببخشیم ، می‌توانیم ببینیم که یک دستگاه S که برای آن الگوریتمی وجود ندارد تا تصمیم بگیرد که آیا فخس مفروضی از S یک اصل موضوعه S است ، رضایتبخش نیست . چنین دستگاهی نمی‌تواند در تصمیم‌گیری این‌که کدام گزاره‌های آن مبحث ریاضی درست هستند به ما کمک کند ، زیرا شیوهٔ کارآمدی وجود نخواهد داشت تا تصمیم بگیرد که کدام گزاره با فخس‌هایی که اصول موضوعه می‌باشند متناظرند ، و شیوهٔ کارآمدی وجود نخواهد داشت تا تصمیم بگیرد که آیا دنبالهٔ مفروضی از فخس‌ها یک برهان است یا نه . یکی از مقاصد مطالعهٔ اولیهٔ دستگاههای صوری جستجو برای شیوه‌ای صوری بود که دربارهٔ هر گزارهٔ ریاضی ، از طریق گنجاندن هرچه بیشتر فخس‌های درست درمیان فخس‌های قابل اثبات ، تصمیم بگیرد . یک دستگاه صوری که در آن مجموعهٔ اصول موضوعه بازگشتی نباشد نمی‌تواند مفید واقع شود . یک دستگاه صوری که مجموعهٔ اصول موضوعهٔ آن بازگشتی است قطعا " شرایط مربوط به شیوه‌های کارآمد برای تصمیم‌گیری این که چه چیزی یک اصل موضوعه و چه چیزی یک برهان است را برآورده می‌سازد . اما قضیهٔ ناتمامیت می‌گوید که حتی چنین دستگاهی (از حساب) هم نمی‌تواند مفید واقع شود ، زیرا مجموعهٔ قضایای این دستگاه شامل همهٔ فخس‌های درست (در تعبیر N) نیست .

تذکر ۷ : ۶

ممکن است خواننده بخواهد دستگاه $\mathcal{N}$ را که در آن مجموعهٔ (اعداد گدل) اصول موضوعهٔ سره بازگشتی است درنظر بگیرد و شیوه‌ای کارآمد فراهم نماید که بوسیلهٔ آن بتوان مجموعهٔ قضایای $\mathcal{N}$ را شمارش نمود .

(راهنمایی : رابطهٔ Pf روی ازواج اعدادگدل بازگشتی است و بنابراین الگوریتمی برای تصمیم‌گیری درمورد برقراری آن برای یک زوج مفروض وجود دارد .) این نشان می دهد که مجموعهٔ (اعداد گدل) قضایای $\mathcal{N}$ "بطور کارآمدی شمارا" است . این مفهوم جدیدی را مطرح می‌سازد .

تعریف ۷ : ۷

زیرمجموعه‌ای از D_N **بطور بازگشتی شمارا** است ، اگر با مجموعهٔ تهی یا با برد یک تابع بازگشتی برابر باشد . یک مجموعه بطور بازگشتی شمارا است اگر یک تابع بازگشتی مانند f وجودداشته باشد بطوری‌که . . . ,$f(0), f(1), f(2)$ فهرستی (احتمالا" دارای تکرار) از همهٔ اعضای مجموعه باشد . نظر چرچ ایجاب می‌کند که " بطور بازگشتی شمارا " و " بطور کارآمد شمارا " هم ارز باشند .

◁ سؤالی که در این مرحله بلافاصله مطرح می‌شود این است که آیا مفاهیم "بازگشتی" و "بطور بازگشتی شمارا" مفاهیمی متمایزند . آیا مجموعه‌ای وجود دارد که بطوربازگشتی شمارا باشد ولی بازگشتی نباشد ، یا بالعکس ؟ برهان زیر که به قسمتی از این سؤال جواب می‌دهد مثال خوبی است از موارد استفادهٔ نظر چرچ .

حکم ۷ : ۸

هر مجموعهٔ بازگشتی بطور بازگشتی شمارا است .

برهان : فرض کنیم A یک مجموعهٔ بازگشتی باشد که درنتیجه تابع مشخصهٔ آن یعنی C_A قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم است . اکنون الگوریتمی را توصیف می‌کنیم که اعضای A را شمارش نماید . به‌ترتیب مقادیر . . . ,$C_A(0), C_A(1)$ را محاسبه و فهرستی از همهٔ n هایی فراهم کنید که $C_A(n)=0$. پس بنابر نظر چرچ چون A بطور کارآمد شمارا است ، A بطور بازگشتی شمارا می‌باشد .

◁ عکس این حکم نادرست است . برهانهای متعددی برای این مطلب وجود دارد ، زیرا فقط به یک مثال نقض احتیاج داریم . با اثبات مطلب مهمی دربارهٔ دستگاه $\mathcal{N}$ چنین مثالی را فراهم می‌کنیم .

تعریف ۷:۹

یک دستگاه صوری **بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر** است اگر مجموعهٔ اعداد گدل قضایای دستگاه بازگشتی نباشد .

توجه‌کنیدکه با استفاده از نظر چرچ یک‌دستگاه صوری بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است اگر و فقط اگر الگوریتمی برای جواب دادن سؤالات متعلق به مجموعهٔ

{ $\mathscr{A}$ فخسی از S است | آیا $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S است ؟ }

وجود نداشته باشد .

◁بعداً پس از بعضی‌کارهای مقدماتی ثابت خواهیم‌کردکه $\mathscr{N}$ بطور بازگشتی‌تصمیم‌ـ ناپذیر است . تذکر ۷:۶ همراه با نظر چرچ حاکی از این‌است‌که مجموعهٔ (اعدادگدل) قضایای $\mathscr{N}$ بطور بازگشتی شمارا می‌باشد . این‌که $\mathscr{N}$ بطور بازگشتی تصمیم‌ناپذیر است بدان معنی است که این مجموعه بازگشتی نیست .

نتیجهٔ ۷:۱۰

زیرمجموعه‌ای از D_N وجود داردکه بطور بازگشتی شمارا است ولی بازگشتی نیست.

◁قسمت بعدی این فصل باتصمیم ناپذیری بازگشتی و مفهوم کلی‌تر حل‌ناپذیری بازگشتی سروکار دارد . دربارهٔ مفهوم اخیر از قبل تا اندازه‌ای اطلاع داریم ، ولی برای مراجعات بعدی بهتر است آن را هم‌اکنون دقیقاً بیان نماییم .

تعریف ۷:۱۱

رده‌ای از سؤالات **بطور بازگشتی حل ناپذیر** است اگر الگوریتم منحصر بفردی برای جواب دادن به همهٔ سؤالات آن رده وجود نداشته باشد . (به فرض ضمنی نظر چرچ در استفاده از کلمهٔ " بطور بازگشتی " در این تعریف توجه داشته باشید .)

پس یک‌دستگاه‌صوری S بطوربازگشتی‌تصمیم‌ناپذیراست‌اگر و فقط اگر ردهٔ سؤالات

{ $\mathscr{A}$ فخسی از S است | آیا $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S است ؟ }

بطور بازگشتی حل ناپذیر است .

تمرین

۱ ــ الگوریتمهایی برای جواب دادن به رده‌های سؤالات زیر ارائه کنید .

(آ) $\{n \in D_N|$ آیا n عدد گدل حدی در $\mathscr{N}$ است ؟ $\}$.

(ب) $\{m, n \in D_N|$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n چیست ؟ $\}$

(پ) $\{n \in D_N|$ آیا n یک مجذور کامل است؟$\}$

(ت) $\{\mathscr{A}$ فخسی از L است | آیا $\mathscr{A}$ نتیجهٔ منطقی مجموعهٔ Γ در L است؟$\}$
(Γ مجموعه‌ای ثابت و متناهی از فخس‌های L است .)

(ث) $\{f$ یک بسجمله‌ای یک متغیره است | مشتق تابع f چیست؟$\}$

(ج) $\{n \in D_N|$ n امین عدد اول فرد چیست؟$\}$

۲ ــ ثابت کنید که به ازای هر زیرمجموعهٔ A از D_N ، اگر هم A و هم متمم آن بطور بازگشتی شمارا باشند آنگاه A بازگشتی است . (راهنمایی : از نظر چرچ استفاده کنید ،) نتیجه بگیرید که زیر مجموعه‌ای از D_N وجود دارد که نه بازگشتی است نه بطور بازگشتی شمارا .

۳ ــ ثابت کنید اگر یک مجموعهٔ نامتناهی با ترتیب صعودی بطور بازگشتی شمارا باشد (یعنی تابعی بازگشتی مانند f وجود داشته باشد بطوری که $f(0), f(1), f(2), \ldots$ فهرستی از اعضای A باشد و به ازای هر $n \geq 0$ ، $f(n)<f(n+1)$) آنگاه A بازگشتی است .

۴ ــ نشان دهید که توابع زیر بازگشتی هستند .

(آ) تابع ϕ که " $\phi(n)$ برابر است با تعداد اعداد صحیح مثبت p کوچکتر از n بطوری که p و n دارای عامل مشترکی نباشند $(n \in D_N)$ " .

(ب) تابع f که " $f(m, n)$ برابر است با کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از m/n ، $(m, n \in D_N)$ "

(پ) تابع g که به ازای $(n \in D_N)$،

$$g(n)=\begin{cases} 0 & \text{اگر دنباله‌ای از حداقل } n \text{ تا } 7 \text{ در بسط اعشاری } \pi \text{ موجود باشد} \\ 1 & \text{در غیر این حالت} \end{cases}$$

(ت) تابع q که

$$q(m, n)=\begin{cases} \text{عدد گدل } (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) & \text{اگر } m \text{ و } n \text{ اعداد گدل فخس‌های } \mathscr{A} \text{ و } \mathscr{B} \text{ از } \mathscr{N} \text{ باشند .} \\ 0 & \text{در غیر این حالت} \end{cases}$$

۵ ــ مثالهایی ارائه کنید از

(آ) یک مجموعهٔ بازگشتی دارای یک زیرمجموعهٔ غیربازگشتی .

(ب) یک مجموعهٔ غیربازگشتی دارای یک زیرمجموعهٔ بازگشتی نامتناهی .

۶ ــ ثابت کنید که هر مجموعهٔ نامتناهی بطور بازگشتی شمارا ، دارای یک زیرمجموعهٔ بازگشتی نامتناهی است .

۲:۷ ماشینهای تورینگ

وارد شدن در جزئیات یکی از مشخص سازیهای محاسباتی مفهوم الگوریتم تمرینی ارزشمند است . مشخص سازی تورینگ یکی از مفیدترین و قابل درک‌ترین آنها است ، و همانطور که خواهیم دید می‌تواند مستقیما" درمورد مسائل تصمیم پذیری و حل پذیری بکار رود .

استعمال کلمهٔ "ماشین" نباید خواننده را گمراه کند . ماشینهای تورینگ ماشینهای محاسبه‌گر واقعا" مشغول به کار محسوب نمی‌شوند . آنها دستگاههایی مجرد هستند که به روشی ریاضی دقیقا" تعریف شده‌اند ، تا چگونگی شیوه‌های محاسباتی را منعکس سازند . اصطلاحاتی که بکار می‌بریم بوضوح عملکردهای "ماشین" را خاطرنشان می‌سازند ، و این قطعا" درست است که می‌توان ماشینهایی واقعی ساخت که شیوه‌های یک ماشین تورینگ "تصوری" را دنبال کنند .

مقصود تورینگ از توصیف ماشین خودش عبارت بود از تقلیل محاسبات به ضروری‌ترین اجزاء ، بطوری که به روشی ساده بعضی از شیوه‌های پایه‌ای را که بوضوح کارآمد هستند و هر شیوهٔ کارآمدی را می‌توان به آنها تقلیل داد توصیف نماید . اکنون به بررسی جزئیات فنی می‌پردازیم .

یک ماشین تورینگ را می‌توان به صورت یک جعبهٔ سیاه درنظر گرفت ، که نواری کاغذی ازمیان آن می‌گذرد که این نوار به مربعهایی مساوی تقسیم شده و ممکن است نمادهایی در این مربعها چاپ شده باشند . برای یک محاسبهٔ خاص ، ماشین با مقداری متناهی از اطلاعات ورودی روی نوار ، یعنی نمادهایی که فقط روی تعدادی متناهی از مربعها چاپ شده‌اند ، شروع به کار خواهد کرد . ماشین نوار را برطبق قواعد معینی پردازش نموده وممکن است سرانجام متوقف شود . اگر متوقف شوددر این صورت اطلاعات خروجی عبارت از چیزی است که روی نوار باقی مانده است . اگر متوقف نشود ، محاسبه نامعین است و خروجی وجود ندارد .

قبل از ادامهٔ کار ، دونکته که دربالا مطرح شد محتاج توضیح است . این شرط که اطلاعات ورودی باید متناهی باشد معقول بنظر می‌رسد . در واقع ممکن است خواننده تعجب کند که چرا بیان آن ضرورت دارد ، زیرا هر نوار کاغذی موجود قطعا" ازلحاظ طول متناهی است و فقط می‌تواند شامل تعدادی متناهی از مربعهای مساوی باشد . اما قرار دادن یک کران معین روی طول نوار مورداحتیاج برای ورودی کاری نامعقول است . چون هنگامی‌که ماشین درحال پردازش نوار است ممکن است به یک "فضای کار" بزرگتر

از نوار ورودی اولیه احتیاج داشته باشد ، بنابراین نوار را طوری درنظر می‌گیریم که بطور نامتناهی قابل گسترش باشد . مجددا" ، هر محاسبه‌ای به مقداری متناهی از نوار احتیاج دارد ، ولی نهادن یک کران‌مطلق روی طول نوار موجود نامعقول است ، بنابراین می‌گوییم که نوار **بالقوه نامتناهی** است .

علاوه بر این که برای نوار کرانی قائل نمی‌شویم ، برای زمان موردنیاز ماشین جهت انجام یک محاسبهٔ خاص نیز کرانی قائل نمی‌شویم . درمورد یک کامپیوتر واقعی مجبور هستیم‌که یک محدودیت زمانی برقرار کنیم ، و اگر درطی آن زمان جوابی بدست نیامد ، آن برنامه را رها کرده و می‌کوشیم برنامه دیگری بیابیم که زمان لازم را کاهش دهد . اما برای این ماشین مجرد ، برقراری یک محدودیت مطلق روی تعداد گامها یا زمان لازم برای رسیدن به جواب یک قیدساختگی خواهدبود . آنچه که می‌خواهیم این است که اگر جوابی وجود دارد ماشین آن را در زمانی متناهی پس از گامهای متناهی بدست آورد . پس در جریان یک محاسبه ممکن است ندانیم (وبطورکلی نمی‌دانیم) که آیا محاسبه به آخر خواهدرسید یا نه .

برای بررسی کارهایی که چنین‌ماشینی می‌تواند انجام دهد لازم است‌که هم طبیعت اطلاعات نمادینی را که می‌توانندروی نوار ظاهر شوند ، و هم روشی را که ماشین‌می‌تواند آنها را پردازش کند مشخص نماییم .

یک ماشین تورینگ دارای **الفبایی از نمادهای نواری** است که ممکن است در دو ماشین‌مختلف متفاوت‌باشند ، ولی بهرحال فهرستی متناهی از نمادها خواهیم داشت . روی هر مربع نوار هربار حداکثر یکی از این نمادها می‌تواند چاپ شود . معمولا" در فهرست نمادها حرف **B** (مأخوذ از کلمهٔ **blank** به معنی خالی و چاپ نشده) گنجانده می‌شودکه نمایشگر یک‌مربع‌خالی است . ساده‌ترین ماشینهای تورینگ فقط دو نماد نواری، مانند **B** و **1** خواهندداشت .

یک ماشین تورینگ به طریق زیر عمل‌می‌کند . در هر زمان مفروضی‌ماشین فقط یک مربع از نوار را "می‌خواند" . ممکن است نماد ظاهرشده دراین مربع را (درصورت‌وجود) با نمادی دیگر تعویض نماید ، یا اگر خالی است نمادی در آن چاپ کند ، یا این که آن مربع را تغییر ندهد و در این صورت به بررسی مربع بعدی سمت‌چپ یا سمت‌راست نوار بپردازد . پس داریم :

انواع عملیات :

(آ) چاپ یک نماد (چاپ یک نماد شامل پاک کردن نماد قبلی می‌باشد .)

پاک کردن یک نماد ، یعنی چاپ یک **B** ، عملیاتی از این نوع است .

(ب) حرکت به چپ به اندازهٔ یک مربع .
(پ) حرکت به راست به اندازهٔ یک مربع .

یک **گام** در عملیات ماشین عبارتست از یک عمل از یکی از این انواع .

سپس باید مشخص سازیم که در هرمرحله‌ای ماشین چگونه عملیاتی را که باید انجام دهد انتخاب می‌کند . عمل ماشین بوسیلهٔ نمادی که در مربع درحال خوانده شدن ظاهر شده ، و همچنین **وضعیت درونی** ماشین مشخص می‌شود . ماشین می‌تواند ازمیان تعدادی متناهی وضعیت‌های درونی ، هر کدام را که خواست اختیار کند . برمبنای ماشینهای محاسباتی واقعی ، وضعیت درونی را می‌توان حاصل جمعبندی اطلاعات ذخیره شده در ماشین درلحظهٔ مفروض انگاشت . کار ما به جزئیات مکانیکی یا الکترونیکی ذخیره‌سازی اطلاعات مربوط نمی‌شود ، بلکه فقط فرض می‌کنیم که جعبهٔ سیاه ما دارای تعدادی متناهی از شرایط متفاوت است که باعث می‌شوند به روشهای معینی عمل کند .

اما واضح است که باید امکان تغییر وضعیت درونی ماشین هنگام یک محاسبه را فراهم کرد ، پس یک گام در یک محاسبه مستلزم مشخصات زیر است :

(۱) وضعیت درونی فعلی ماشین .
(۲) محتوای مربعی که خوانده می‌شود .
(۳) عملی که ماشین اختیار کرده ، و
(۴) وضعیت درونی بعدی اختیار شده بوسیلهٔ ماشین به منظور آماده شدن برای گام بعدی محاسبه .

بنابراین وضعیت درونی اختیار شده بوسیلهٔ ماشین در هر زمان نتیجهٔ تمامی محاسبات قبلی خواهدبود ، و از این لحاظ به عنوان یک " حافظه " برای ماشین عمل می‌کند .

مجددا "در این مرحله یک نکته دربارهٔ شرط متناهی بودن تعداد وضعیتهای درونی یک ماشین تورینگ محتاج توضیح است . کامپیوترهای رقمی واقعی دارای تعدادی متناهی ، هرچند بسیار زیاد ، حالت درونی هستند . اما به همان دلیلی که قبلا "ذکر شد ، قرار دادن یک کران مشخص ، حتی یک کران بسیار بزرگ ، روی تعداد وضعیتهای مجاز در یک ماشین تورینگ غیرمعقول است. بنابراین فقط این شرط را می‌گذاریم که این تعداد متناهی باشد.

مناسبترین راه برای مشخص کردن شیوه‌ای که یک ماشین تورینگ در پیش می‌گیرد عبارتست از مجموعه‌ای متناهی از چهارتایی‌ها به صورت

(وضعیت جدید اختیار شده ، عمل انجام یافته ، نماد نوار ، وضعیت)*

---

* از چپ به راست بخوانید . مترجم

برای دنبال‌کردن یک‌محاسبه ، لازم است در هرمرحله باتوجه به وضعیت‌درونی و نمادی که خوانده می‌شود در بین مجموعهٔ چهارتایی‌ها جستجو کرده و **یکی** را که با این زوج آغاز می‌شود پیدا کنیم ، و با دنبال کردن عمل انجام یافته ، وضعیت جدید داده‌شده توسط این چهارتایی‌را بدست‌آوریم . این امر محدودیتی را بر روی مجموعهٔ چهارتایی‌ها اعمال می‌کند ، یعنی برای هر زوج (نماد ، وضعیت) حداکثر باید یک چهارتایی وجود داشته باشد که با این زوج آغاز شود ، که درنتیجه ماشین تورینگ یک شیوهٔ خوشتعریف را دنبال کند .

چون تعدادوضعیت‌ها و تعدادنمادها هر دو متناهی هستند ، تعداد چهارتایی‌ها برای یک‌ماشین خاص محدود است . اما لازم‌نیست‌که هر زوج (نماد ، وضعیت) درآغاز یک چهارتایی قرار گیرد . بعضی ترکیبات ممکن است هیچگاه در محاسبات ظاهر نشوند مهمتر از آن می‌گوییم‌که محاسبات یک ماشین تورینگ **خاتمه می‌یابد** هنگامی و فقط هنگامی که زوج فعلی (نماد ، وضعیت) در هیچکدام از چهارتایی‌ها ظاهر نشود بطوری‌که ماشین هیچ دستورالعملی برای ادامهٔ کار نداشته باشد .

پس یک ماشین تورینگ ممکن است یک نوار ورودی را به یک نوار خروجی تبدیل کند . روشی که اطلاعات را روی نوار نمادگذاری می‌کنیم باید به طبیعت اطلاعات‌بستگی داشته باشد ، و به‌کمک مثالهایی نحوهٔ انجام این کار را خواهیم‌دید . در همهٔ مثالها ، نمادهای $q_0, q_1, q_2, \ldots$ را برای نشان دادن وضعیت‌های درونی بکار خواهیم‌برد ، و قرار می‌گذاریم که ماشین در وضعیت q_0 درحالی‌که آخرین مربع غیرخالی سمت‌چپ نوار را می‌خواند آغاز به کار کند . (واضح است که قراردادی از این نوع ضروری است ، البته قرارداد انتخاب شده دارای اهمیت خاصی نیست .)

مثال ۱۲:۷

$$\{(q_0\ \ 1\ \ B\ \ q_1),\quad (q_1\ \ B\ \ R\ \ q_0)\}$$

مجموعهٔ چهارتایی‌های ماشین تورینگی است‌که وضعیتهای آن q_0 و q_1 ، و نمادهای‌آن B و 1 می‌باشند . این چهارتایی‌ها بخودی‌خود واضح هستند فقط شاید نماد " عمل انجام یافته " محتاج توضیح باشد . نماد سوم در چهارتایی می‌تواند L باشد (به معنی "به چپ برو") یا R باشد (به‌معنی "به راست برو") ویا فقط نمادی‌باشدکه بایدجانشین نماد درحال خوانده‌شدن بشود . عملیات این ماشین را در حالتی که نوار ورودی شامل دنباله‌ای متناهی از 1 ها بصورت زیر است ملاحظه کنید ،

...	B	B	1	1	1	1	1	B	B	...

↑ q_0

ماشین در وضعیت q_0 با خواندن اولین 1 سمت چپ شروع به کار می‌کند . یک B چاپ می‌کند (1 را پاک می‌کند) و به وضعیت q_1 می‌رود .

...	B	B	B	1	1	1	1	B	B	...

↑ q_1

ماشین در وضعیت q_1 ، با خواندن یک B به اندازهٔ یک مربع به راست حرکت کرده و به وضعیت q_0 می‌رود .

...	B	B	B	1	1	1	1	B	B	...

↑ q_0

اکنون ، درست مانند قبل ، 1 متعلق به مربعی که خوانده می‌شود با یک B تعویض شده و ماشین به حالت q_1 می‌رود . به همین ترتیب ماشین رفتن به راست و تعویض هر 1 را با یک B ادامه می‌دهد تا به وضعیت زیر برسد .

...	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

↑ q_0

اکنون ، برای راهنمایی ماشین در این‌وضعیت چهارتایی مناسبی وجودندارد ، بنابراین محاسبه متوقف‌می‌شود . این‌ماشین دنباله‌ای از 1 ها را حذف‌کرده سپس متوقف‌می‌شود .

مثال ۷:۱۳

$$\{(q_0\ 1\ R\ q_1),\quad (q_1\ 1\ R\ q_0),\quad (q_1\ B\ R\ q_2),\quad (q_2\ B\ 1\ q_2)\}$$

مجموعهٔ چهارتایی‌های یک ماشین تورینگ است که فرد بودن یا زوج بودن یک عدد را به طریق زیر مشخص می‌کند . یک‌عدد ممکن است به‌صورت دنباله‌ای از 1 های روی نوار به عنوان ورودی داده شود . ماشین در حالت q_0 با خواندن اولین 1 سمت چپ آغاز به کار می‌کند . به عنوان مثال

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
			$\uparrow$ q_0								

کار به طریق زیر ادامه می‌یابد

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
				$\uparrow$ q_1							

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
					$\uparrow$ q_0						

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
						$\uparrow$ q_1					

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
							$\uparrow$ q_0				

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
								$\uparrow$ q_1			

...	B	B	1	1	1	1	1	1	B	B	...
									$\uparrow$ q_0		

و در اینجا متوقف می‌شود ، زیرا هیچکدام از چهارتایی‌ها با q_0B شروع نمی‌شوند . این ماشین برای هر عدد ورودی زوج بطور مشابه عمل می‌کند . اگر عدد ورودی فرد باشد به وضعیت زیر می‌رسیم (ورودی 5)

...	B	B	1	1	1	1	1	B	B	...

$\uparrow$
q_1

و محاسبه به این طریق ادامه می‌یافت :

...	B	B	1	1	1	1	1	B	B	...

$\uparrow$
q_2

...	B	B	1	1	1	1	1	B	1	...

$\uparrow$
q_2

و دراینجا متوقف می‌شود . بنابراین این ماشین پس از یک مربع خالی یک 1 چاپ می‌کند اگر و فقط اگر عدد ورودی فرد باشد .

مثال ۷:۱۴

$$\{(q_0\ 1\ \mathrm{X}\ q_0),\quad (q_0\ \mathrm{X}\ R\ q_0),\quad (q_0\ 0\ \mathrm{Y}\ q_0),\quad (q_0\ \mathrm{Y}\ R\ q_0)\}$$

مجموعهٔ چهارتایی‌های یک ماشین تورینگ است ، که اگر دنباله‌ای از 0 ها و 1 ها به عنوان ورودی به آن داده شود آن را به دنباله‌ای از X ها و Y ها تبدیل می‌کند . مثلا" 1 0 0 1 0 1 به X Y Y X Y X تبدیل می‌شود . سؤال : آیا هنگامی که این تبدیل کامل شود این ماشین متوقف می‌شود ؟

مثال ۷:۱۵

برای یک ماشین تورینگ عمل جمع تقریبا "بدیهی است . اگر m و n بصورت دنباله‌ای از 1 ها که بوسیلهٔ یک حرف A از هم جدا شده‌اند به عنوان ورودی داده شده باشد ، ماشینی که چهارتایی‌های آن عبارتند از

$$\{(q_0\ 1\ \mathrm{B}\ q_0),\quad (q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_1),\quad (q_1\ 1\ R\ q_1),\quad (q_1\ \mathrm{A}\ 1\ q_2)\}$$

اولین 1 سمت چپ را حذف کرده ، A را با یک 1 تعویض کرده سپس متوقف می‌شود . پس از توقف عدد $m+n$ به صورت دنباله‌ای از $(m+n)$ تا 1 روی نوار باقی می‌ماند .

مثال ۷ : ۱۶

یک ماشین تورینگ می‌تواند محتوای یک نوار ورودی را بازسازی کند . مثلاً " اگر نوار ورودی خالی‌بوده و فقط تعدادی متناهی 0 و 1 داشته باشد ،چنین ماشینی با این مجموعه از چهارتایی‌ها مشخص می‌شود :

$q_0\ 0\ X\ q_1$	$q_0\ 1\ Y\ q_2$
$q_1\ X\ R\ q_1$	$q_2\ Y\ R\ q_2$
$q_1\ 0\ R\ q_1$	$q_2\ 0\ R\ q_2$
$q_1\ 1\ R\ q_1$	$q_2\ 1\ R\ q_2$
$q_1\ B\ R\ q_3$	$q_2\ B\ R\ q_4$
$q_3\ 0\ R\ q_3$	$q_4\ 0\ R\ q_4$
$q_3\ 1\ R\ q_3$	$q_4\ 1\ R\ q_4$
$q_3\ B\ 0\ q_3$	$q_4\ B\ 1\ q_5$

$q_5\ 0\ L\ q_5$

$q_5\ 1\ L\ q_5$

$q_5\ B\ L\ q_5$

$q_5\ X\ R\ q_0$	$q_5\ Y\ R\ q_0$

$q_0\ B\ L\ q_6$

$q_6\ X\ 0\ q_6$

$q_6\ Y\ 1\ q_6$

$q_6\ 0\ L\ q_6$

$q_6\ 1\ L\ q_6$

واضح است که این مثال پیچیده‌تر از مثالهای قبلی است ، و به‌این جهت چهارتایی‌ها را با این روش ترتیب داده‌ایم که شیوهٔ کار ماشین را روشنتر سازیم . جزئیات کار را با یک‌مثال ساده دنبال می‌کنیم . فرض کنیدکه نوار خالی‌باشدو فقط

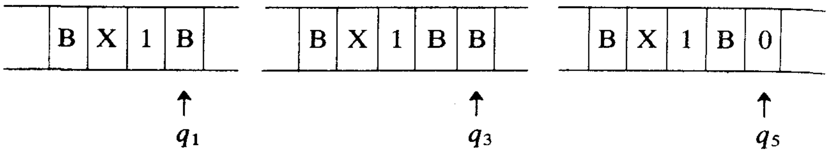
	0	1	

روی آن چاپ‌شده باشد ، و ماشین در وضعیت q_0 با خواندن اولین‌مربع غیرخالی سمت چپ کار را شروع می‌کند ، سپس ماشین ابتدا ستون‌سمت‌چپ چهارتایی‌ها را بکار خواهد برد ، و نوار به طریق زیر پیش خواهد رفت :

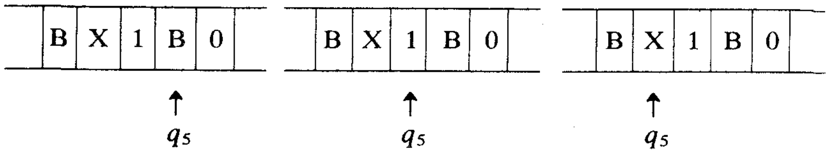
	B	0	1	B	
		↑ q_0			

	B	X	1	B	
		↑ q_1			

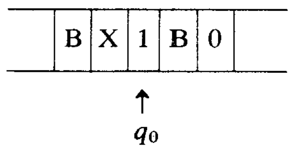
	B	X	1	B	
			↑ q_1		



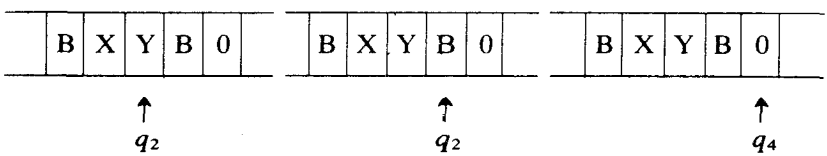
سپس ستون میانی چهارتایی را بکار می‌برد که خواهیم‌داشت :

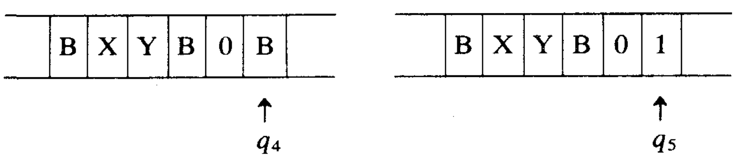


از چهارتایی $q_5\ X\ R\ q_0$ خواهیم‌داشت :

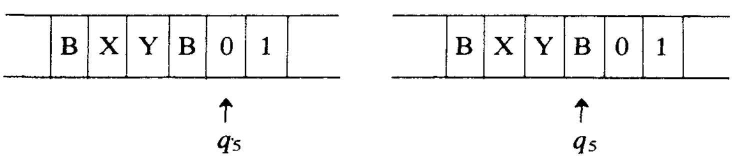


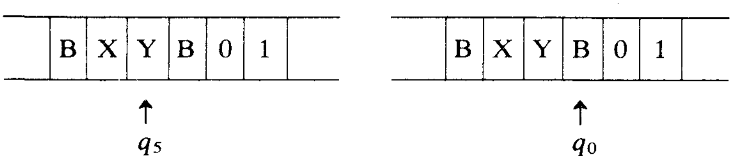
و به بالای ستون سمت راست چهارتایی‌ها می‌رویم :



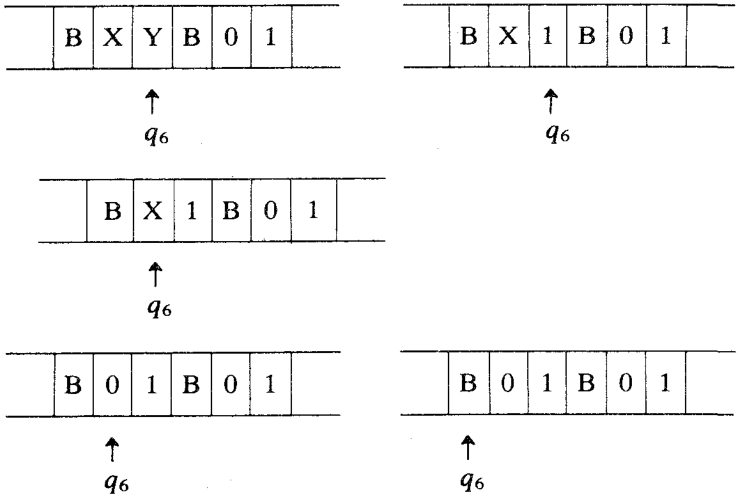


مانند قبل ، وضعیت q_5 به حالت زیر منجر می‌شود :





اکنون وضعیت q_0 با خواندن B از ستون میانی پایینی چهارتایی‌ها استفاده کرده و خواهیم‌داشت :



در اینجا ماشین متوقف می‌شود ، زیرا هیچیک از چهارتایی‌ها با q_6 B شروع نمی‌شوند .

◁ مثال اخیر بعضی از فرآیندهای مقدماتی جستجو ، نسخه‌برداری ، به حافظه سپردن و تکرار را که یک ماشین تورینگ می‌تواند در انجام شیوه‌های پیچیده‌تر بکار برد نشان می‌دهد ، همچنین نشان می‌دهد که چگونه با تحلیل شیوهٔ درنظر گرفته شده برای ماشین به دنباله‌ای از این فرآیندهای مقدماتی ، می‌توان دستورالعملها (یعنی چهارتایی‌ها)یی برای این ماشین تورینگ خاص یافت . توجه کنید که وسعت الفبای نمادهای نوار تأثیر مستقیمی بر تعداد چهارتایی‌های موردلزوم دارد . بویژه ، ماشینی که رشته‌ای از 1 ها را دوبرابر می‌کند محتاج شیوه‌ای همچون مثال فوق است ولی به چهارتایی‌های بسیار کمتری نیاز دارد .

مثال ۷:۱۷

در این مثال ، به اندازهٔ مثال قبل به شرح جزئیات نمی‌پردازیم ، ولی به خواننده توصیه می‌شود که اقلا" یکی از محاسبه‌های ماشینی واقعی را دنبال کند ، تا ترکیب فرآیندهای مقدماتی بکار رفته و بویژه چگونگی شیوهٔ نسخه‌برداری بکار رفته در مثال قبلی را ملاحظه نماید . چهارتایی‌های زیر ماشین تورینگی را مشخص می‌کنند که هرگاه ورودی به صورت دنباله‌هایی از m تا و n تا 1 باشد که بوسیلهٔ یک مربع خالی ازیکدیگر جدا شده‌اند دو عدد m و n را در یکدیگر ضرب می‌کند .

q_0 1 X q_1 q_5 B L q_5

q_1 X R q_1 q_5 Y 1 q_6

$q_1\ 1\ R\ q_1$	$q_6\ 1\ R\ q_2$
$q_1\ \mathrm{B}\ R\ q_2$	$q_2\ \mathrm{B}\ L\ q_7$
$q_2\ 1\ \mathrm{Y}\ q_3$	$q_7\ 1\ L\ q_7$
$q_3\ \mathrm{Y}\ R\ q_3$	$q_7\ \mathrm{B}\ L\ q_7$
$q_3\ 1\ R\ q_3$	$q_7\ \mathrm{X}\ \mathrm{B}\ q_8$
$q_3\ \mathrm{B}\ R\ q_4$	$q_8\ \mathrm{B}\ R\ q_0$
$q_4\ \mathrm{B}\ 1\ q_5$	$q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_9$
$q_4\ 1\ R\ q_4$	$q_9\ 1\ \mathrm{B}\ q_{10}$
$q_5\ q\ L\ q_5$	$q_{10}\ \mathrm{B}\ R\ q_9$

این ماشین ، به عنوان مثال ، اگر با نوار ورودی

...	B	1	1	B	1	1	1	B	...

در وضعیت q_0 با خواندن اولین 1 سمت چپ شروع به کار کند ، سرانجام در وضعیت q_9 با نواری به صورت زیر متوقف خواهد شد :

B	1	1	1	1	1	1	B
↑ q_9							

این ماشین ، هرچندکه برای شیوه‌های پیچیده‌تر از مثال قبل طراحی شده است ، اما دارای چهارتایی‌های کمتری است . علت این است که در اینجا الفبای نمادهای نوار محدودتر می‌باشد .

تذکر ۱۸:۷

در هرمرحله از یک‌محاسبهٔ ماشین تورینگ فقط یک‌قسمت‌متناهی از نوار غیرخالی است . بنابراین می‌توان موقعیت ماشین را با یک " توصیف لحظه‌ای " مثلا " مانند

$$1\ 1\ \mathrm{B}\ 1\ \mathrm{B}\ q_2\ \mathrm{B}\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ 1.$$

نمایش داد . این شامل تمامی‌قسمت غیرخالی نوار و مربع درحال خوانده شدن بوسیلهٔ ماشین است . نماد وضعیت در این دنباله گنجانده شده است ، و درست قبل از نماد مربعی که درحال خوانده شدن است قرار داد . توجه به این نکته مهم است که توصیف لحظه‌ای لازم نیست فقط شامل قسمت غیرخالی نوار باشد . مثلا "

$$q_5\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ 1\ 1\ \mathrm{B}\ 1 \quad \text{و} \quad 1\ \mathrm{B}\ 1\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ q_3\ \mathrm{B}$$

توصیفهای لحظه‌ای سره‌ای هستند که ماشین درحال خواندن مربعی درقسمت خالی نوار است . ولی ما همواره فقط آن مقدار از مربعهای خالی را نشان خواهیم داد که برای دربرگرفتن مربع درحال خوانده شدن لازم باشند .

تذکر ۷ : ۱۹

یک ماشین تورینگ بوسیلهٔ فهرست چهارتایی‌هایش مشخص می‌شود . با یک کدگذاری مشابه با عددگذاری گدل در فصل ۶ ، می‌توان اعداد کدی را ابتدا به چهارتایی‌ها و سپس به دنباله‌های متناهی چهارتایی‌ها تخصیص داد . زیرا (می‌توان فرض کرد) که نمادهای وضعیت و نمادهای نوار ممکن مجموعه‌ای شمارش‌پذیر را می‌سازند ، و هرماشین تورینگی فقط تعدادی متناهی از آنها را بکار می‌برد . بنابراین می‌توان به هر ماشین تورینگی یک عدد کد تخصیص داد ، و اگر روش توصیف (با درنظر گرفتن وضعیت اولیه و چگونگی کدگذاری ورودی‌ها و خروجی‌ها) استانده شود اعداد کد به گونه‌ای خواهند بود که همهٔ اطلاعات مربوط به ماشینهای تورینگ متناظر قابل بازیابی خواهد بود . درست مانند قبل ، اعداد کد را طوری انتخاب می‌کنیم که اعداد کد متفاوت ، با ماشینهای متفاوت متناظر شوند . همچنین می‌توان بطور کارآمد تصمیم گرفت که اگر عددی طبیعی داده شده باشد آیا عدد کد یک ماشین تورینگ هست یا نیست ، ما این مطلب را ثابت نمی‌کنیم ، زیرا به جزئیات دستگاه اعداد کد انتخاب شده بستگی دارد ، ولی از این مطلب نتیجهٔ زیر بدست می‌آید .

حکم ۷ : ۲۰

گردآیهٔ (اعداد کد) ماشینهای تورینگ بطور کارآمد شمارا است .

برهان : همهٔ اعداد طبیعی را فهرست کنید ، و از میان آنها همهٔ اعدادی را که اعداد کد ماشینهای تورینگ نیستند حذف کنید .

◁ این شمارش کارآمد ما را قادر می‌سازد که فهرست ماشینهای تورینگ را بطور کارآمد با مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی همراه سازیم . هر ماشین تورینگی با عددی که نمایندهٔ موقعیتش در آن فهرست است متناظر خواهد بود . پس می‌توان مجموعهٔ اعداد کد ماشینهای تورینگ را مساوی تمامی مجموعهٔ اعداد طبیعی گرفت . از اینرو حکم زیر را داریم .

حکم ۷ : ۲۱ (قضیهٔ شمارش)

مجموعهٔ همهٔ ماشینهای تورینگ را می‌توان بصورت $T_0, T_1, T_2, \ldots$ فهرست کرد

بطریقی که هر اندیسی بطور کارآمد و کامل دستورالعمل‌های ماشین متناظر را مشخص کند .

◁ مثالهایی که از ماشینهای تورینگ آوردیم نشان داده‌اند که این ماشینها می‌توانند انواع گوناگونی از محاسبات را انجام دهند . ما به یک نوع خاص از محاسبه ، یعنی محاسبهٔ مقادیر توابع علاقه‌مندیم . اکنون می‌توان گفت که هر ماشین تورینگی مقادیر یک‌تابع را مشخص می‌کند به‌شرط این‌که روش تعبیر نوارهای ورودی و خروجی را به‌عنوان نمایشی از عناصر دامنه و بردتابع مشخص کنیم . توابع موردنظر ما توابع حسابی ، یعنی توابعی‌که دامنه و بردشان از اعدادطبیعی تشکیل شده است ، می‌باشند ، عنصری مانند n از D_N را می‌توان بصورت دنباله‌ای از n تا 1 روی نواری که بقیهٔ مربعهایش خالی است به هرماشین تورینگی داد . درصورتی‌که ماشین سرانجام متوقف شود درآن هنگام می‌توان‌خروجی را به‌عنوان تعدادمربعهای غیرخالی موجود در روی نوار درنظر گرفت . در این قرارداد نکتهٔ خاصی وجود ندارد . دلیلی برای ترجیح این روش بر روشهای دیگر نداریم . ولی مشخص بودن قرارداد در این مرحله حائز اهمیت است ، زیرا می‌خواهیم با هر ماشین تورینگی یک تابع (جزئی) منحصربفرد را همراه سازیم . توجه کنید که با این‌قرارداد توابعی یک‌متغیره بدست‌می‌آوریم . اگر (همانطورکه درمثال ۷ : ۱۵ دیدیم) محاسبات ماشینهای تورینگ را هنگامی که نوار ورودی شامل یک جفت از اعداد نمایش داده شده بر روی آنها است درنظر می‌گرفتیم ، آنگاه ماشینها با توابع دومتغیری همراه می‌شوند . واضح است‌که بطور مشابه می‌توانیم با هر تعداد متغیر سروکار داشته باشیم .

تذکر ۷ : ۲۲

(آ) قبول می‌کنیم که برای هر تابع حسابی f که با ماشین تورینگ قابل محاسبه است یک ماشین تورینگ وجود دارد که مقادیر f را محاسبه می‌کند و الفبای نمادهای نوار آن $\{B, 1\}$ است . ما این مطلب را ثابت نخواهیم کرد . ولی این نتیجه‌ای از این واقعیت است که الفبای هر ماشین تورینگ متناهی است ، و نمادهای آن را می‌توان با عددنویسی درمبنای دو که درآن B بجای 0 بکار رفته باشد کدگذاری کرد .

(ب) همچنین قبول‌می‌کنیم‌که به ازای هر تابع‌حسابی f که با یک‌ماشین تورینگ قابل محاسبه است ماشین تورینگی وجود دارد که f را محاسبه می‌کند و فقط دارای دو وضعیت‌درونی است . این‌مطلب را نیز ثابت‌نمی‌کنیم ولی ملاحظه می‌کنیم‌که این کاهش تعداد وضعیت‌ها فقط با افزایش قابل ملاحظهٔ الفبای نمادهای نوار امکان‌پذیر است . می‌توان یا تعداد وضعیت‌ها را کاهش داد یا تعداد نمادها را ، ولی بطورکلی ، کاهش

هر دو امکان‌پذیر نیست . (فصل ۶ کتاب مینسکی **Minsky** را ملاحظه کنید) .

تعریف ۷ : ۲۳

یک تابع حسابی (جزئی) **قابل محاسبهٔ تورینگی** است اگر ماشین تورینگی وجود داشته باشد که مقادیر آن‌را تحت قراردادهای مشخص شدهٔ فوق درمورد ورودی و خروجی محاسبه کند .

تا این لحظه دربارهٔ امکان متناظرشدن یک با بیش از یک‌ماشین تورینگ به طریق مزبور اطلاعی نداریم . ولی اکنون می‌توانیم در این مورد دقیقتر باشیم .

حکم ۷ : ۲۴

به ازای هر تابع (جزئی) قابل‌محاسبهٔ تورینگی f تعدادی نامتناهی ماشین‌تورینگ وجود دارد که مقادیر f را محاسبه می‌کنند .

برهان : فرض کنید f و یک‌ماشین تورینگ T ، که مقادیر آن را محاسبه می‌کند ، داده شده باشند . فرض کنید که $q_0, \ldots, q_k$ وضعیتهای درونی T باشند . با افزودن چهارتایی $q_{k+1}\,1\,1\,q_{k+1}$ ماشین تورینگی مانند T' بدست آورید . T' مقادیر f را محاسبه می‌کند ، زیرا چهارتایی جدید هیچ تأثیری بر هیچکدام از محاسبات ندارد . (ماشین هیچگاه وارد وضعیت q_{k+1} نخواهد شد) . مشابها "می‌توانید با افزودن متوالی چهارتایی‌های $q_{k+2}\,1\,1\,q_{k+2}, q_{k+3}\,1\,1\,q_{k+3}, \ldots$ دنباله‌ای مانند $T^2, T^3, \ldots$ از ماشینهای تورینگ ایجاد کنید ، هر کدام از اینها مقادیر f را محاسبه می‌کنند .

تذکر : توجه به تمایز بین یک تابع و مجموعه‌ای از دستورالعمل‌ها برای محاسبهٔ مقادیر آن حائز اهمیت است . ماشینهای تورینگی که در برهان فوق به آنها اشاره شد متفاوتند ، زیرا مجموعه‌های متفاوتی از چهارتایی‌ها دارند ،ولی این تفاوتها غیراساسی می‌باشند زیرا بر انجام محاسبات تأثیر نمی‌گذارند .

◁تورینگ (در ۱۹۳۶) این‌فرض را مطرح کرد، که او در انجام کاری که قصدداشته ، یعنی مشخص کردن ردهٔ توابع قابل محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم ، توسط ماشینهایش ، با روشی که از لحاظ ریاضی دقیق است ، موفق شده است و گزارهٔ زیر اکنون به **نظر تورینگ** مشهور است :

ردهٔ توابع (جزئی) قابل‌محاسبهٔ تورینگی ، همان ردهٔ توابع (جزئی) قابل‌محاسبه بوسیلهٔ الگوریتم است .

یک روش معادل برای بیان این مطلب این است که بگوییم هر الگوریتم (یا مجموعهٔ

دستورالعمل‌ها) برای محاسبهٔ مقادیر یک تابع جزئی f را می‌توان (بطور کارآمد) به مجموعه‌ای از چهارتایی‌ها برای یک ماشین تورینگ که مقادیر f را محاسبه می‌کند برگرداند .

همانطورکه قبلاً تذکر داده شد ما نمی‌توانیم به اثبات نظر تورینگ امیدوار باشیم زیرا با مفهومی شهودی (یعنی مفهوم الگوریتم) سروکار دارد . اما پژوهشهای فـ وان به نتایجی در تأیید نظر تورینگ منجر شده‌اند . یکی از نتایج به قرار زیر است :

حکم ۷:۲۵

یک تابع (جزئی) حسابی قابل محاسبهٔ تورینگی است اگر و فقط اگر یک تابع (جزئی) بازگشتی باشد .

برهان : این برهان بسیار فنی است زیرا لزوماً " با جزئیات تعریف‌های ماشین تورینگ و تابع بازگشتی سروکار دارد . برهان طولانی‌تر از آن است که در اینجا آورده شود ، ولی خوانندهٔ علاقمند را به کتاب میتسکی ارجاع می‌دهیم .

◁ البته، در پرتو آنچه که گفته شد ، ملاحظه می‌شود که نظر تورینگ با نظر چرچ هم ارز است .

حکم ۷:۲۶

شمارش کارآمدی مانند $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ از توابع جزئی بازگشتی یک متغیره وجود دارد که در آن هر تابع جزئی بازگشتی بینهایت بار ظاهر می‌شود .

برهان : این مطلب نتیجهٔ فوری حکم های ۷:۲۱ ، ۷:۲۴ و ۷:۲۵ است .

◁ آنچه که دربارهٔ توصیف عملی ماشینهای تورینگ و کار آنها گفتیم کافی است . اکنون کار را یک مرحله جلو برده و درمی‌یابیم که ازلحاظ مسائل تصمیم و حل پذیری ما را به کجا می‌رساند .

الگوریتم زیر را درنظر بگیرید : اگر زوج دلخواهی از اعداد $m,n \in D_N$ داده شده باشد ، فهرست $T_0, T_1, T_2, \ldots$ از ماشینهای تورینگ را شمارش کنید تا T_m رابیابید ، و دستورالعملهای T_m را درموردورودی n بکار برید . این الگوریتمی است برای محاسبهٔ مقادیر یک تابع (جزئی) دو متغیره . پس بنابر نظر تورینگ ، ماشین تورینگی وجود دارد که مقادیر این تابع را محاسبه می‌کند . این مطلب را می‌توان بصورت یک حکم بیان کرد .

حکم ۷:۲۷

یک **ماشین تورینگ عمومی** وجوددارد . یعنی ماشین تورینگی مانند T وجود دارد

که اگر به‌عنوان محاسبه‌کنندهٔ مقادیر تابعی از دومتغیر m و n تلقی شود محاسبهٔ ماشین T_m به‌ازای ورودی n را انجام می‌دهد .

◁ پس ماشین‌عمومی می‌تواند شیوه‌های هر یک از ماشینهای $T_0, T_1, \ldots$ در محاسبهٔ توابع یک‌متغیری را انجام دهد . این نشانه‌ای است هم بر توانایی و هم بر محدودیت ماشینهای تورینگ . واضح است که ماشین عمومی شیئی است پیچیده و قدرتمند ، زیرا که قابلیتهای هریک‌از ماشینهای یک‌متغیری را دربرمی‌گیرد . ازطرف‌دیگر ، پیچیدگیهای $T_0, T_1, \ldots$ بوسیلهٔ پیچیدگیهای ماشین عمومی محدود شده‌اند .

الگوریتم زیر را درنظر بگیرید : اگر $n \in D_N$ داده شده باشد ، ϕ_n را در فهرست توابع جزئی بازگشتی بیابید ، و (با استفاده از T_n) محاسبهٔ $\phi_n(n)$ را دنبال کنید . اگر نتیجه بدست آید آنگاه 1 را به نتیجه اضافه کنید . بنابر نظر چرچ ، این الگوریتم یک‌تابع جزئی‌بازگشتی ، مانند ϕ_{k_0} را تعریف می‌کند . اکنون می‌پرسیم‌که حاصل‌محاسبهٔ مقدار $\phi_{k_0}(k_0)$ چیست ؟ این الگوریتم را دنبال کرده ، و به این تناقض می‌رسیم .

$$\phi_{k_0}(k_0) = \phi_{k_0}(k_0) + 1.$$

اما در این مورد یک نکته را ندیده گرفته‌ایم ، و آن این است که محاسبهٔ $\phi_{k_0}(k_0)$ ممکن است خاتمه نپذیرد . درحقیقت از آنچه گفته شد می‌توانیم نتیجه بگیریم که این محاسبه خاتمه نمی‌پذیرد ، زیرا در غیراین‌صورت راهی برای رفع تناقض وجود ندارد .

مطالب‌فوق نشان‌می‌دهند‌که چگونه‌می‌توان شمارشهای $T_0, T_1, \ldots$ و $\phi_0, \phi_1, \ldots$ را در توصیف الگوریتمها بکار برد . این شیوه به مسائل جالبی منجر می‌شود . از این نکته می‌توان به طریق زیر استفاده کرد .

حکم ۷ : ۲۸

شمارش‌کارآمدی‌مانند $f_0, f_1, \ldots$ ازهمهٔ‌توابع(کلی)بازگشتی یک‌متغیره وجودندارد.

برهان : فرض کنید چنین نباشد ، یعنی $f_0, f_1, f_2, \ldots$ یک شمارش کارآمد از همهٔ توابع کلی بازگشتی یک متغیره (شاید دارای تکرار) باشد . الگوریتم زیر را در نظر بگیرید : اگر $n \in D_N$ داده شده باشد ، $f_0, f_1, \ldots$ را شمارش کنید تا f_n بدست آید . $f_n(n)$ را محاسبه کرده و 1 را به آن اضافه کنید . بنابر نظر چرچ ، تابع h که بصورت

به‌ازای هر $n \in D_N$ $\quad h(n) = f_n(n) + 1$

تعریف شده است ، بازگشتی می‌باشد . همچنین این تابع کلی است ، زیرا هر یک از f_n ها کلی است . پس k یی وجود دارد که $h = f_k$. بنابراین

$$h(k) = f_k(k) = f_k(k) + 1.$$

این بار راهی برای پرهیز از تناقض نداریم ، و نتیجهٔ موردنظر ثابت شده است .

◁ مناسب می‌بود اگر می‌توانستیم برای یک محاسبهٔ مفروض مربوط به یک ماشین تورینگ از قبل بگوییم که آیا این محاسبه پایان خواهد یافت یا نه . پس مسألهٔ تصمیم این که به ازای زوج مفروضی مانند $m, n \in D_N$ ، ماشین تورینگ T_m به ازای ورودی n متوقف خواهد شد ، مسأله‌ای است که بررسی شده است . این مسأله را **مسألهٔ توقف** برای ماشینهای تورینگ می‌نامند . اهمیت آن عمدةً" بخاطر مثال زیر است .

حکم ۲۹:۷

مسألهٔ توقف برای ماشینهای تورینگ حل ناپذیر است ، یعنی الگوریتمی وجود ندارد که برای سؤالات مجموعهٔ

$$\{m, n \in D_N | \text{آیا ماشین } T_m \text{ با ورودی } n \text{ متوقف خواهد شد ؟}\}$$

جوابی فراهم کند .

برهان : بنابر نظر تورینگ کافیست نشان دهیم که تابع $f: D_N \to D_N$ که توسط

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } T_n \text{ روی ورودی } n \text{ متوقف شود} \\ 1 & \text{اگر } T_n \text{ روی ورودی } n \text{ متوقف نشود} \end{cases}$$

تعریف می‌شود ، قابل محاسبهٔ تورینگی نیست . زیرا فرض کنید که الگوریتمی برای جواب دادن به سؤالات مجموعهٔ فوق وجود داشته باشد . پس الگوریتمی برای جواب دادن به سؤالات مجموعهٔ زیر وجود دارد .

$$\{n \in D_N | \text{آیا ماشین } T_n \text{ با ورودی } n \text{ متوقف می‌شود ؟}\}$$

پس الگوریتمی برای محاسبهٔ مقادیر تابع f فوق‌الذکر وجود دارد . اما اگر f قابل محاسبهٔ تورینگی نباشد این مطلب درست نیست .

پس توجه خودرا معطوف f کرده و فرض می‌کنیم که قابل محاسبهٔ تورینگی است ، و ماشین تورینگ T مقادیر آن را محاسبه می‌کند . در این صورت به ازای ورودی n ، ماشین T بسته به اینکه ماشین T_n با ورودی n متوقف بشود یا نشود با خروجی 0 یا 1 متوقف خواهد شد . اکنون با تعدیل T ، ماشین تورینگی مانند T' بدست می‌آوریم به طوری که به ازای هر n ،

$$* \begin{cases} \text{اگر } T_n \text{ با ورودی } n \text{ متوقف شود } T' \text{ با ورودی } n \text{ متوقف نمی‌شود و} \\ \text{اگر } T_n \text{ با ورودی } n \text{ متوقف نشود } T' \text{ با ورودی } n \text{ متوقف می‌شود .} \end{cases}$$

T' از افزودن وضعیت‌ها و چهارتایی‌های جدیدی به T بدست می‌آید که اثرشان عبارت است از ادامه‌دادن محاسبهٔ متوقف‌شده‌ای از T ، به‌منظور جستجوی یک مربع غیرخالی

روی نوار خروجی . اگر این جستجو موفقیت‌آمیز باشد ، T' باید متوقف شود ، درغیر این صورت T' باید به جستجوی خود ادامه دهد . جستجو (هنگامی که T' با ورودی n آغاز به کار کرده باشد) می‌تواند موفقیت‌آمیز باشد اگر و فقط اگر یک 1 روی نوار در این مرحلهٔ آخر وجود داشته باشد ، یعنی اگر و فقط اگر T_n با ورودی n متوقف نشود .

(به‌عبارتی مفصلتر ، می‌توانستیم دو وضعیت جدید ، مثلاً q_α و q_β ، و چهارتایی‌های $q_i\ S\ R\ q_\alpha$ را به ازای $q_i\ S$ هایی که در ابتدای هیچکدام از چهارتایی‌های T به عنوان یک زوج ظاهر نمی‌شوند (که S یک نماد نوار است) و همچنین $q_\alpha\ \mathrm{B}\ \mathrm{A}\ q_\beta$ ، $q_\alpha\ \mathrm{A}\ R\ q_\alpha$ ، $q_\beta\ \mathrm{A}\ L\ q_\beta$ ، $q_\beta\ \mathrm{B}\ \mathrm{A}\ q_\alpha$ را وارد کار کنیم .)

ماشین T' باید در فهرست $T_0, T_1, T_2, \ldots$ ظاهر شود ، مثلاً T' عبارتست از T_{n_0} . اکنون این سؤال حساس را مطرح می‌کنیم . آیا T_{n_0} با ورودی n_0 متوقف‌می‌شود؟ به سراغ (*) فوق الذکر می‌رویم . آنچه که می‌گوید از این قرار است : T_{n_0} با ورودی n_0 متوقف می‌شود اگر و فقط اگر T_{n_0} با ورودی n_0 متوقف نشود . این تناقض آشکار کافیست تا دریابیم که f نمی‌تواند قابل‌محاسبهٔ‌تورینگی باشد،وبنابراین حکم اثبات شده است.

$\triangleleft$ الگوریتم زیر را درنظربگیرید: به‌ازای $n \in D_N$ داده شده در فهرست $T_0, T_1, T_2, \ldots$ جستجو کن تا به T_n برسی ، و سپس محاسبات ماشین T_n با ورودی n را دنبال کن . اگر محاسبه متوقف شد ، به خروجی 1 بده . بنابر نظر تورینگ ، تابعی که مقادیرش با این الگوریتم محاسبه می‌شود قابل محاسبهٔ تورینگی است . این تابع ، که آن را مثلاً ϕ می‌نامیم ، چنین تعریف می‌شود :

$$\phi(n) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } T_n \text{ با ورودی } n \text{ متوقف می‌شود} \\ \text{تعریف‌نشده} & \text{در غیر این حالت} \end{cases}$$

واضح است که ϕ یک تابع جزئی است ، زیرا قطعاً ماشینهای تورینگی وجود دارند که به ازای هیچ ورودیی متوقف نمی‌شوند و ماشینهای تورینگ دیگری وجود دارند که فقط به ازای بعضی از ورودی‌ها متوقف می‌شوند . دامنهٔ ϕ در این مبحث ، مجموعهٔ مهمی است و معمولاً با K نمایش داده می‌شود .

$$K = \{n \in D_N : \text{با ورودی } n \text{ متوقف می‌شود } T_n\}$$

باتوجه به برهان حکم ۲۹:۷ ملاحظه می‌شود که K نمی‌تواند یک مجموعهٔ بازگشتی باشد (البته با پذیرفتن نظر چرچ) ، زیرا اگر بازگشتی بود می‌بایست الگوریتمی برای جواب‌دادن سؤالاتی بصورت "آیا $n \in K$ ؟" به‌ازای $n \in D_N$ ، یعنی سؤالاتی ازمجموعهٔ

$$\{\text{آیا ماشین } T_n \text{ با ورودی } n \text{ متوقف می‌شود؟} \mid n \in D_N\}$$

وجود داشته باشد .

حکم ۷:۳۰

K مجموعه‌ای است بطور بازگشتی شمارا ، و غیربازگشتی .

برهان : بنابر آنچه گفته‌شد K بازگشتی نیست . این را که K بطور کارآمد شمارا است می‌توان با ارائه الگوریتمی برای شمارش آن اثبات کرد .

مرحلهٔ ۱ . یک مرحله را در محاسبهٔ T_0 با ورودی 0 دنبال کنید .

مرحلهٔ ۲ . یک مرحله را در محاسبهٔ T_1 با ورودی 1 و مرحلهٔ دوم در محاسبهٔ T_0 با ورودی 0 را دنبال کنید .

مرحلهٔ ۳ . یک مرحله را در محاسبهٔ T_2 با ورودی 2 ، ومرحلهٔ دوم در محاسبهٔ T_1 با ورودی 1 و مرحلهٔ سوم در محاسبهٔ T_0 با ورودی 0 را دنبال کنید .

کار را همینطور ادامه دهید . هرگاه که یکی از ماشینهای T_i متوقف شود ، i را در شمارش K قرار داده و در مراحل بعدی الگوریتم مراجعه به T_i را ندیده بگیرید . به ازای هر $n \in K$ مرحله‌ای وجود خواهد داشت که T_n با ورودی n متوقف شده ، و n در شمارش K گذاشته می‌شود . بنابراین K بطور کارآمد شمارا ، و بنابر نظر چرچ ، بطور بازگشتی شمارا است .

حکم ۷:۳۱

به ازای هر ماشین تورینگ T ، دامنهٔ T ، یعنی مجموعهٔ همهٔ $n \in D_N$ هایی که به ازای آنها T با ورودی n متوقف می‌شود مجموعه‌ای است بطور بازگشتی شمارا (که البته می‌تواند بازگشتی نیز باشد) .

برهان : برهان بسیار شبیه برهان فوق الذکر است ، به این ترتیب که این بار محاسبات را با یک ماشین T ، با ورودیهای مختلف دنبال‌کرده ، وبطورهمزمان فهرستی از همهٔ اعداد ورودی ، که به ازای آنها T متوقف می‌شود فراهم می‌کنیم .

$\triangleleft$ K مثال ملموسی است از یک مجموعهٔ غیربازگشتی که با درنظر گرفتن ماشینهای تورینگ و قضیهٔ شمارش حاصل می‌شود .

مثالهای فراوان دیگری نیز وجود دارد . مثلا " :

مثال ۷:۳۲

(آ) $\{n \in D_N :$ به ازای هر عدد ورودی متوقف می‌شود $T_n\}$ نه بازگشتی است نه بطور بازگشتی شمارا .

(ب) $\{n \in D_N :$ به ازای هیچ عدد ورودیی متوقف نمی‌شود $T_n\}$ نه بازگشتی است نه بطور بازگشتی شمارا .

(پ) به ازای هر n_0 ثابت ، مجموعهٔ $\{n \in D_N$ به ازای ورودی n_0 متوقف می‌شود : $T_n\}$ بازگشتی نیست ، ولی بطور بازگشتی شمارا است .

این مثالها همچنین رده‌هایی از سؤالات به ما می‌دهند که برطبق تعریف ۷:۱۱ ، بطور بازگشتی حل ناپذیر می‌باشند .

(ت) $\{n \in D_N |$ آیا $n \in K$ ؟$\}$

(ث) $\{n \in D_N |$ آیا T_n به ازای هر عدد ورودیی متوقف می‌شود ؟$\}$

(ج) $\{n \in D_N |$ آیا T_n به ازای بعضی اعداد ورودی متوقف می‌شود ؟$\}$

(چ) $\{n \in D_N |$ آیا T_n به ازای ورودی n_0 متوقف می‌شود ؟$\}$ که n_0 عدد ثابت دلخواهی است .

این رده‌های سؤالات همگی بطور بازگشتی حل ناپذیر هستند .

روش مشابهی برای اثبات همهٔ این نتایج بکار می‌رود . به این ترتیب که فرض می‌کنیم مجموعهٔ موردنظر بازگشتی است (یا این‌که ردهٔ سؤالات بطور بازگشتی حل‌پذیر است) ، و نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ K بازگشتی است (یا این که یک مجموعهٔ غیر—بازگشتی شناخته شدهٔ دیگر بازگشتی است) . به این روش از دو دیدگاه می‌توان نگریست . اول این که آن را به عنوان یک برهان خلف ساده تلقی کرد . دوم این که آن را از دیدگاهی وسیعتر ، به عنوان معرفی مفهومی جدید ، یعنی مفهوم **تحویل پذیری** تلقی نمود .

تعریف ۷:۳۳

مجموعهٔ A **تحویل‌پذیر** به مجموعهٔ B است ، اگر وجود الگوریتمی برای تصمیم—گیری عضویت در B ، وجود الگوریتمی برای تصمیم‌گیری عضویت در A را تضمین کند .

ممکن است هیچکدام از این الگوریتمها وجود نداشته باشند ، ولی غالبا " کشف این نکته که آیا دو مجموعه به این طریق به یکدیگر مربوط می‌شوند جالب توجه است .

یک مثال واضح از این تحویل پذیری ، این نتیجه است که $D_N \backslash K$ تحویل پذیر به K است ، هرچندکه برای هیچکدام الگوریتمی برای تصمیم‌گیری دربارهٔ عضویت وجود ندارد . ما دراینجا با این‌مفاهیم سروکار نداریم ، اما ، خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای اطلاعات بیشتر به کتاب راجرز (Rogers) مراجعه کند .

◁ در اینجا بررسی ماشینهای تورینگ خاتمه می‌پذیرد . اکنون کار را برای استفاده

از مفاهیم و فنونی که در اختیار ما قرار دارند ، درمورد بررسی نتایج حل ناپذیری و تصمیم ناپذیری ادامه می‌دهیم .

تمرین

۷ ــ ماشین تورینگ مثال ۷ : ۱۲ را طوری تعدیل کنید ، که هر نماد ظاهر شده روی نوار ورودی را حذف کند . (در موقعیت فعلی ماشین 1 ها را حذف می‌کند تا وقتی که به یک B برسد ،که در آن هنگام متوقف می‌شود . پس اگر نوار ورودی دارای تعدادی 1 باشد که درطول آن پراکنده شده‌اند همهٔ آنها را حذف نمی‌کند .)

۸ ــ ماشین تورینگ مثال ۷ : ۱۳ را طوری تعدیل کنید که اگر عدد ورودی زوج باشد با یک نوار کاملا "خالی متوقف شود ، و اگر عدد ورودی فرد باشد درحالی‌که فقط یک 1 روی نوار وجود دارد متوقف شود .

۹ ــ یک ماشین تورینگ بسازید که الفبای نمادهای نوار آن {B, 1} باشد و به ازای هیچ ورودیی متوقف نشود .

۱۰ ــ ماشین تورینگی بسازید که اگر نوار ورودی شامل یک دنباله از 1 ها باشد درحالی متوقف شود که نوار شامل دو دنباله از 1 ها با همان طول ، که با یک نماد X ازهم جدا شده‌اند ، باشد .

۱۱ ــ ماشین تورینگی مانند T بسازید که مقادیر تابع جزئی f را محاسبه کند ، که

$$f(n)=\begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \text{تعریف‌نشده} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

با تعدیل T ، ماشین تورینگی مانند T' بسازید ، که اگر عدد ورودی فرد باشد ، مانند T عمل کند ، ولی اگر عدد ورودی زوج باشد ، درحالی‌که نوار خالی است متوقف شود . مثالی از یک تابع جزئی قابل‌محاسبهٔ تورینگی بیاورید که شیوهٔ فوق برای آن امکان‌پذیر نباشد .

۱۲ ــ فرض کنید T ماشین تورینگی باشد که مجموعهٔ چهارتایی‌های آن شامل دستورالعملی برای حرکت به چپ نیست . شیوهٔ کارآمدی برای تصمیم‌گیری ازقبل بیابید که برای هر نوار ورودی تعیین کند که آیا T سرانجام متوقف خواهد شد .

۱۳ ــ ماشین تورینگی‌که دستورالعملهایش فقط اجازه حرکت در یک‌جهت نوار را می‌دهند ، گاهی یک ماشین دارای وضعیت‌متناهی نامیده می‌شود . نشان دهیدکه مسألهٔ توقف برای ماشینهای دارای وضعیت متناهی حل پذیر است .

۱۴ ــ ثابت کنید که $\bar{K}$ بطور بازگشتی شمارا نیست .

۱۵ ــ فرض کنید A یک زیر مجموعهٔ بطور بازگشتی شمارا از $\bar{K}$ باشد ، و فرض کنید که به ازای ماشین تورینگی مانند T_n ، $A=\{x:$ متوقف می‌شود x با ورودی $T_n\}$
نشان دهید که $n \in \bar{K}\backslash A$

۱۶ ــ نشان‌دهیدکه هرمجموعهٔ بطور بازگشتی شمارایی دامنهٔ یک‌ماشین تورینگ است .

۱۷ ــ نشان دهید که هر کدام از رده‌های مسائل مثال ۷:۳۲ بطور بازگشتی حل ناپذیر می‌باشند .

۱۸ ــ فرض کنید K_0 مجموعهٔ $\{(m, n):$ متوقف می‌شـود n با ورودی T_m ماشین تورینگ$\}$ باشد . نشان دهید که K تحویل پذیر به K_0 ، و K_0 تحویل پذیر به K است .

۷:۳ مسائل کلمه‌ای

یکی از جاهایی که جبر و منطق بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند عبارتست از مسائل کلمه‌ای برای دستگاههای جبری مانند گروهها ، نیمگروهها ، وگروههای آبلی . توصیف مطلب در حالت نیمگروهها از همه ساده‌تر است ، بنابراین آن را به عنوان یک مثال بکار می‌بریم .

فرض کنید $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$ مجموعه‌ای از نمادهای صوری باشد . این مجموعه را به‌عنوان یک الفبا درنظر می‌گیریم . یک **کلمه** با این الفبا صرفا "عبارتست از رشته‌ای متناهی از الفبا (محدودیتی برای این‌که کدام رشته‌ها کلمه محسوب شوند وجودندارد) . مجموعهٔ همهٔ‌کلمات با الفبای A را به S_A نشان‌می‌دهیم . در این‌صورت S_A را می‌توان با عمل کنار هم نهادن یک نیمگروه تلقی کرد . به ازای هر دو کلمه در S_A ، می‌توان با افزودن یکی به دنبال دیگری ، کلمهٔ مرکبی را تشکیل داد . این عمل بخودی‌خود شرکت‌پذیر است ، پس S_A یک نیمگروه می‌باشد . اگر قرارداد کنیم‌که کلمهٔ تهی (کلمه‌ای که از هیچ نمادی تشکیل نشده است) عضوی از S_A باشد ، آنگاه این کلمه به‌عنوان یک همانی در نیمگروه است .

اکنون اگر بخواهیم که نیمگروهی مانند S_A را با صدق کردن در یک یا چندرابطه تعدیل کنیم ، یک مسأله کلمه‌ای پیش می‌آید . این‌مطلب را می‌توانیم با یک مثال نشان دهیم .

مثال ۷:۳۴

S_A فوق‌الذکر را درنظر بگیرید ، و شرط کنید که کلمات a_1a_2 و a_2a_1 با یکدیگر

یکی گرفته شوند . به این ترتیب رابطهٔ همارزی زیر را روی S_A بدست میآوریم : اگر P و Q دو کلمه باشند $Pa_1 a_2 Q \sim Pa_2 a_1 Q$ و $Pa_2 a_1 Q \sim Pa_1 a_2 Q$ وبهازای کلمات دلخواه U و V ، U **هم ارز** V است اگر دنبالهای از کلمات مانند $W_1, \ldots, W_n$ وجود داشته باشد بطوریکه $U = W_1$ ، $W_1 \sim W_2$ ، $\ldots$ ، $W_{n-1} \sim W_n$ ، و $W_n = V$. به آسانی میتوان نشان داد که این یک رابطهٔ همارزی است ، و عمل نیمگروه روی ردههای همارزی خوشتعریف است . (خواننده باید توجه کند که در اینجا $\sim$ یک رابطهٔ همارزی نیست ، زیرا متعدی نیست .) مجموعهٔ S_A^* متشکل از ردههای همارزی تشکیل یک نیمگروه میدهد. این نیمگروهی است با مولدهای $a_1, \ldots, a_k$ و رابطهٔ $a_1 a_2 = a_2 a_1$. مسألهٔ کلمهای برای S_A^* عبارتست از این تصمیمگیری که اگر U و V کلمات مفروضی باشند آیا هم ارز هستند ، یعنی آیا آنها یک عنصر از S_A^* را نمایش میدهند .

◁بطور کلیتر، میتوانیم نیمگروه بدست آمده از S_A بوسیلهٔ تعدادی از روابط به صورت $P_1 = Q_1$ ، $P_2 = Q_2$ ، $\ldots$ ، $P_m = Q_m$ را ، که در آن $P_1, \ldots, P_m$ ، $Q_1, \ldots, Q_m$ کلمات مفروضی از الفبای A هستند ، درنظر بگیریم . در اینجا $\sim$ را بوسیلهٔ

$$P\ P_i\ Q \sim P\ Q_i\ Q$$

به ازای کلمات دلخواه P و Q و $1 \leq i \leq m$ تعریف میکنیم ، و رابطهٔ همارزی را درست مانند حالت قبل درنظر میگیریم . مجموعهٔ دستههای همارزی ، نیمگروه دارای مولدهای $a_1, \ldots, a_k$ و روابط $P_i = Q_i$ ، $(1 \leq i \leq m)$ نامیده میشود . مسألهٔ کلمهای برای این نیمگروه شبیه مسألهٔ قبلی است ، ولی واضح است که هرچه تعداد روابط بیشتر باشد ، مسأله پیچیدهتر است .

تعریف ۷ : ۳۵

یک نیمگروه را **متناهیا "نمایش داده شده** مینامند ، اگر به طریق فوق از یک مجموعهٔ متناهی از مولدها و یک مجموعهٔ متناهی از روابط بدست آمده باشد .

مسألهٔ کلمهای برای یک نیمگروه متناهیا " نمایش داده شده **بطوربازگشتی حلپذیر** است اگر الگوریتمی وجود داشته باشد که به ازای هر زوج از کلمات تصمیم بگیرد که آیا آنها هم ارز هستند ؟

" مسألهٔ کلمهای برای نیمگروهها " از این قرار است : آیا الگوریتمی وجود دارد که به ازای هر نیمگروه متناهیا " نمایش داده شده و هر زوج از کلمات در آن نیمگروه تصمیم بگیرد که آیا آنها همارز هستند .

مثال ۷:۳۶

فرض کنید $A=\{a_1, a_2\}$ و نیمگروه تولیدشده توسط A تحت رابطهٔ $a_1a_2=a_2a_1$ را درنظر بگیرید . با توصیف الگوریتمی به قرار زیر ، می‌توان ملاحظه کردکه این نیمگروه دارای مسألهٔ کلمه‌ای بطور بازگشتی حل‌پذیر است .

هر کلمه شامل فقط a_1 و a_2 را می‌توان درطی مراحلی با استفاده از رابطهٔ $a_1a_2=a_2a_1$ در هر مرحله طوری بازآرایی کرد تا کلمه‌ای بدست آید که هر مورد a_1 در آن قبل از هر مورد a_2 قرار گیرد . این کلمه با کلمهٔ اولیه هم‌ارز است . (مثلاً $a_2a_1a_2a_1 \sim a_2a_1a_1a_2 \sim a_1a_2a_1a_2 \sim a_1a_1a_2a_2$) . درمورد مسألهٔ کلمه‌ای، به ازای هردو کلمهٔ P و Q ، این‌شیوه را روی هرکدام از آنها اجرا کنید . P و Q هم‌ارز هستند اگر و فقط اگر کلمات حاصل یکی باشند .

◁ همانطورکه‌قبلاً ملاحظه‌کردیم ،اگر برای ردهٔ خاصی‌از سؤالات الگوریتمی وجود داشته باشد ،یافتن و توصیف‌آن معمولاً بدون روشها یا فرضیات‌خاص امکان‌پذیر است . ازطرف‌دیگر ، برای اثبات این که الگوریتمی وجود ندارد عملاً تنها راهی که درمقابل ما وجود دارد استفاده از نظر چرچ است . درحقیقت یک نیمگروه متناهیاً نمایش داده شده وجودداردکه مسألهٔ کلمه‌ای آن بطوربازگشتی حل‌پذیر نیست . برهانی‌که می‌آوریم تماماً بر مفاهیم و روشهایی که دربارهٔ ماشینهای تورینگ بررسی شد متکی است . پس قبل از هر چیز ملاحظه می‌کنیم که چگونه می‌توان دو مفهوم ماشین تورینگ ، و نیمگروه متناهیاً نمایش داده شده را به یکدیگر مرتبط ساخت .

دیدیم که چگونه ، موقعیت یک ماشین تورینگ و نوار آن را در یک لحظهٔ مفروض می‌توان بوسیلهٔ یک " توصیف لحظه‌ای " متشکل از رشته‌ای از نمادها ، مانند

$$1\ B\ 1\ 1\ B\ q_i\ 1\ B\ 1, \quad 1\ 1\ 1\ 1\ B\ 1\ B\ q_i\ B.$$

مشخص کرد . کاری که می‌کنیم این است که اینها را به عنوان کلماتی درنظر بگیریم ، و دوکلمه را هم‌ارزبنامیم اگر یکی‌از آنها با دنباله‌ای از عملیات‌ماشین تورینگ به دیگری تبدیل شود . همانطور که خواهیم‌دید ، پیچیدگیهای معینی وجوددارد ، ولی الفبای A را مشتمل‌بر همهٔ نمادهای نوار و نمادهای وضعیت ازماشین‌تورینگ ، و روابط نیمگروه را از چهارتایی‌های آن اقتباس می‌کنیم . مثلاً ، اگر $q_1\,1\,B\,q_2$ یکی از چهارتایی‌ها باشد ، در این صورت می‌گوییم

$$P\ q_1\ 1\ Q \sim P\ q_2\ B\ Q,$$

که در آن P و Q دنبالهٔ‌دلخواهی‌از نمادهای متعلق‌به A می‌باشند . البته فقط بعضی از دنباله‌های نمادهای متعلق به A عملاً بصورت یک‌توصیف لحظه‌ای از ماشین تورینگ

هستند ، مثلا "بعضی از رشته‌ها شامل بیش از یک نماد وضعیت خواهند بود . خواهیم دید که این مطلب اهمیتی ندارد . اکنون سعی می‌کنیم قدری مشخص‌تر صحبت کنیم .

فرض کنید T ماشین تورینگی باشد که متوقف می‌شود اگر و فقط اگر ورودی α به مجموعهٔ K متعلق باشد (K بطوربازگشتی شمارا است ولی بازگشتی نیست) . همچنین فرض کنید که T فقط شامل نمادهای نوار 1 و B است ، و عدد α به صورت دنباله‌ای از α تا 1 به ورودی داده می‌شود . فرض کنیدکه وضعیت‌های درونی T با $q_0, \ldots, q_n$ نشان داده شده باشند ، و فرض کنیدکه I مجموعهٔ چهارتایی‌های T باشد . قرار دهید

$$A = \{q_0, q_1, \ldots, q_n, q, q', 1, \mathrm{B}, h\},$$

و فرض کنید که S_A مجموعهٔ کلمات با این الفبا باشد . (دلیل گنجاندن نمادهای q ، q' و h ذیلا "شرح داده خواهد شد .) نیمگروه متناهیا "نمایش داده شده با الفبای A و روابط زیر را به $\mathscr{S}$ نمایش می‌دهیم . (حروف X و Y همه‌جا برای نشان‌دادن نمادهای نوار دلخواه 1 یا B بکار رفته‌اند .)

۱ . $q_i \ \mathrm{X} = q_j \ \mathrm{Y}$ اگر $q_i \ \mathrm{X} \ \mathrm{Y} \ q_j \in I$

۲ . $\begin{cases} q_i \ \mathrm{X} \ Y = \ \mathrm{X} \ q_j \ \mathrm{Y} \\ q_i \ \mathrm{X} \ h = \ \mathrm{X} \ q_j \ \mathrm{B} \ h \end{cases}$ اگر $q_i \ \mathrm{X} \ R \ q_j \in I$

۳ . $\begin{cases} \mathrm{X} \ q_i \ \mathrm{Y} = q_j \ \mathrm{X} \ \mathrm{Y} \\ h \ q_i \ \mathrm{Y} = h \ q_j \ \mathrm{B} \ \mathrm{Y} \end{cases}$ اگر $q_i \ \mathrm{Y} \ L \ q_j \in I$

۴ . $q_i \ \mathrm{X} = q \, \mathrm{X}$ اگرهیچ چهارتایی در I وجودنداشته باشد که با $q_i \ \mathrm{X}$ شروع‌شود.

۵ . $q \ \mathrm{X} = q$

۶ . $\mathrm{X} \ q' = q'$

۷ . $q \ h = q' \ h$

ما روابطی‌را دراینجا آورده‌ایم‌که نه فقط با دستورالعملهای ماشین‌تورینگ متناظر هستند بلکه بر رفتار q ، q' و h نیز حاکم‌می‌باشند . توصیف لحظه‌ای ماشین‌با کلمه‌ای در S_A متناظر می‌شودکه از هر طرف ، بوسیلهٔ h محدود شده باشد . بنابراین ممکن است که حالت اولیهٔ ماشین $q_0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$ باشد . ما آن را به صورتی که بوسیلهٔ کلمهٔ $h \ q_0 \ 1 \ 1 \ 1 \ h$ نمایش داده شده باشد درنظر می‌گیریم . h ها قسمتهای مهم نوار را مشخص می‌کنند . ماشین نوار ورودیش را طی مراحلی تبدیل می‌کند ، و درمراحل متناظر کلمهٔ ما ، با کاربرد روابط ، به کلمات هم ارزی تبدیل می‌شود . روابط ۲ و ۳ که شامل h هستند این امکان را به ما می‌دهند که با درج B در یک انتهای کلمه درهنگام نیاز (یعنی هنگامی‌که ماشین مربعی را که خارج از قسمت غیرخالی نوار است می‌خواند)

کلمه را گسترش دهیم . توجه کنید که هنگام توقف ماشین چه پیش می‌آید . ماشین کار بیشتری را روی نوار انجام نمی‌دهد ، ولی ما می‌توانیم با استفاده از روابط ۴ تا ۷ به تبدیل کلمه‌مان ادامه دهیم . با بررسی یک مثال می‌بینیم چه پیش می‌آید . فرض کنید که ماشین متوقف شده است و در این مرحله کلمهٔ ما عبارتست از

$$h\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ \ q_i\ 1\ 1\ h.$$

اکنون هیچ چهارتایی در I با $1\ \ q_i$ شروع نمی‌شود ، با بکاربردن رابطهٔ ۴ ، می‌بینیم که

$$h\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ q\ 1\ 1\ h$$

یک کلمهٔ هم‌ارز است . رابطهٔ ۵ به کلمات هم ارز

$$h\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ q\ 1\ h$$

و

$$h\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ q\ h$$

منجر می‌شود . پس با رابطهٔ ۷ داریم

$$h\ 1\ \mathrm{B}\ \mathrm{B}\ q'\ h,$$

و رابطهٔ ۶ کلمات هم ارز زیر را می‌دهد :

$$h\ 1\ \mathrm{B}\ q'\ h,$$

$$h\ 1\ q'\ h,$$

$$h\ q'\ h.$$

کلمهٔ اخیر به محتوای نهایی‌نوار بستگی‌ندارد . درحقیقت ، آنچه که می‌توان گفت این است‌که ماشین T با ورودی α ، متوقف می‌شود اگر و فقط کلمهٔ $h\ q_0\ \alpha\ h$ با $h\ q'\ h$ هم ارز باشد . همین نکته به ما امکان می‌دهد تا نشان دهیم که $\mathscr{S}$ نیمگروهی است با مسألهٔ کلمه‌ای بطور بازگشتی حل ناپذیر .

حکم ۷ : ۳۷

یک نیمگروه متناهیا " نمایش داده شده وجود دارد که مسألهٔ کلمه‌ای آن بطور بازگشتی حل ناپذیر است .

برهان : فرض کنید $\mathscr{S}$ همان باشد که در بالا توصیف شد . فرض کنید الگوریتمی وجود دارد که به ازای هر زوج از کلمات $\mathscr{S}$ تصمیم می‌گیرد که آیا آنها هم ارز هستند یا نه . بنابراین الگوریتمی برای عضویت در مجموعهٔ E وجود دارد ، که

$E = \{W \in S_A$: است $h\ q'\ h$ هم‌ارز $W\ \}$

اما T با ورودی α متوقف می‌شود اگر و فقط اگر $\alpha \in K$. پس برای تصمیم‌گیری عضویت

در K ، اگر α داده شده باشد ، با استفاده از این نتیجه (هنوز کاملاً ثابت نشده) که T با ورودی α متوقف می‌شود اگر و فقط اگر $h q_0 \alpha h$ با $h q' h$ هم‌ارز باشد ، فقط لازم است بپرسیم که آیا $h q_0 \alpha h$ عضوی از E است . ولی هیچ الگوریتمی برای تصمیم‌گیری در مورد عضویت در K وجود ندارد ، زیرا K بازگشتی نیست . پس این فرض که $\mathscr{S}$ دارای مسألهٔ کلمه‌ای بطور بازگشتی حل‌پذیر است به یک تناقض منجر می‌شود ، و حکم با توجه به لم زیر ثابت می‌شود .

لم : T با ورودی α متوقف می‌شود اگر و فقط اگر کلمات $h q_0 \alpha h$ و $h q' h$ هم ارز باشند .

برهان : فرض کنید $h q_0 \alpha h$ و $h q' h$ هم ارز باشند . نشان می‌دهیم که T با ورودی α متوقف می‌شود (استلزام دیگر در بحث قبل از حکم اثبات شد) . اثبات این که کلمات هم ارز هستند از تبدیلی تشکیل می‌شود ، که با استفاده از ۱ تا ۷ ، با $h q_0 \alpha h$ شروع و به $h q' h$ ختم می‌شود . اما h' نمی‌تواند جز با بکار بستن ۷ وارد کار شود . درنتیجه $h q_0 \alpha h$ با کلمه‌ای هم ارز است که نماد q در آن ظاهر می‌شود . q می‌تواند فقط با بکار بستن ۴ وارد کار شود . پس در دنباله‌ای از کلمات هم ارز که از $h q_0 \alpha h$ به $h q' h$ منتهی می‌شود ، اولین موردی را درنظر بگیرید که رابطهٔ ۴ در آن بکار رفته باشد . تا آن هنگام هر تبدیلی باید با یک مرحله از ماشین تورینگ (که کاربردی از ۱ ، ۲ یا ۳ است) متناظر باشد . پس داریم

$h q_0 \alpha h$ هم ارز است با (مثلاً) $h P q_i X Q h$

که در آن $P q_i X Q$ توصیف لحظه‌ای حالت ماشین تورینگ است که از حالت اولیهٔ $q_0 \alpha$ به آن رسیده است . چون ۴ در این مرحله بکار بسته شده است ، $q_i X$ نمی‌تواند در هیچیک از چهارتایی‌های T ظاهر شود ، و بنابراین T هنگامی که به $P q_i X Q$ برسد متوقف می‌شود . پس T با ورودی α متوقف می‌شود .

حکم ۷ : ۳۸

مسألهٔ کلمه‌ای برای نیمگروهها بطور بازگشتی حل ناپذیر است .

برهان : اگر الگوریتمی وجود داشت که به ازای هر نیمگروه متناهیاً "نمایش داده شده و برای کلمات دلخواه W_1 و W_2 از S تصمیم می‌گرفت که آیا آنها هم ارز هستند ، این الگوریتم برای نیمگروه $\mathscr{S}$ بکار می‌رفت ، که این با حکم قبلی متناقض است .

$\triangleleft$ پس نتیجهٔ مورد نظرمان را برای نیمگروهها بدست آوردیم .

حکم ۳۹:۷

یک **گروه متناهیا "نمایش داده شده** شبیه یک نیمگروه متناهیا "نمایش داده شده تعریف می‌شود با این تفاوت‌که ممکن است معکوسهای صوری در کلمات ظاهر شوند (یعنی کلمات از نمادهای $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1}$ ساخته شده‌اند)، و دربین روابط همواره باید به ازای $1 \le i \le k$ داشته باشیم $a_i a_i^{-1} = e$ و $a_i^{-1} a_i = e$ ، که e نمایشگر کلمهٔ تهی است .

با این وضعیتی که بوضوح پیچیده‌تر است ، مسألهٔ کلمه‌ای مشکلتر است ، و جواب آن در همین اواخر بدست آمده است .

حکم ۴۰:۷

(i) یک گروه متناهیا "تولید شده وجود دارد که مسألهٔ کلمه‌ای آن بطور بازگشتی حل ناپذیر است .

(ii) مسألهٔ کلمه‌ای برای گروهها ، بطور بازگشتی حل ناپذیر است .

(iii) مسألهٔ کلمه‌ای برای گروههای **آبلی** بطور بازگشتی **حل پذیر** است . (برای یک گروه متناهیا "نمایش داده شده ، مجموعهٔ روابط باید به ازای هر زوج a_i ، a_j از الفبا شامل $a_i a_j = a_j a_i$ باشد .)

تمرین

۱۹ ــ در هر یک از حالات زیر ، الگوریتمی برای حل مسألهٔ کلمه‌ای نیمگروه متناهیا " نمایش داده شده با مولدها و روابط مفروض ، توصیف کنید .

(آ) $\{a_1, a_2\}$, $a_1 a_1 = a_1$

(ب) $\{a_1, a_2, a_3\}$, $a_1 a_2 = a_3, a_2 a_2 = a_2$

(پ) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $a_1 a_1 = e, a_2 a_2 = e, a_3 a_3 = e, a_4 a_4 = e$

۲۰ ــ فرض کنید G گروه متناهیا "نمایش داده شده با مولدهای $\{a_1, a_2, a_3\}$ و روابط $a_1 a_2 = a_2 a_1$ ، $a_2 a_3 = a_3 a_2$ ، $a_3 a_1 = a_1 a_3$ باشد . نشان دهید که مسألهٔ کلمه‌ای برای گروه G بطور بازگشتی حل پذیر است .

۲۱ ــ فرض کنید S یک نیمگروه متناهیا "نمایش داده شده باشد که مسألهٔ کلمه‌ای آن بطور بازگشتی حل ناپذیر است . فرض کنید A مجموعهٔ مولدهای S باشد . نشان دهیدکه اگر S' نیمگروه متناهیا " نمایش داده شده‌ای باشدکه مجموعهٔ مولدهایش شامل A و مجموعهٔ روابطش همان مجموعهٔ روابط A باشد . آنگاه مسألهٔ کلمه‌ای

S' نیز بطور بازگشتی حل ناپذیر است .

۲۲ ــ با استفاده از نتیجهٔ حکم ۷:۳۷ ثابت کنیدکه یک نیمگروه متناهیا " نمایش داده شده وفقط دارای دومولدوجود داردکه مسألهٔکلمهای آن بطوربازگشتی حل ناپذیراست.

۷:۴ تصمیم ناپذیری دستگاههای صوری

خواننده این نتیجهٔ فصل ۲ (حکم ۲:۲۴) را بخاطر داردکه دستگاه صوری حساب گزارهها ، یعنی L ، **تصمیم پذیر** است . در آن هنگام این مطلب برای ما کمتر از حالا معنا داشت ، زیرا اکنون میتوانیم ثابت کنیم که :

حکم ۷:۴۱

مجموعهٔ اعداد گدل قضایای L مجموعهای بازگشتی است .

برهان : ابتدا ملاحظه کنید که باید برای L یک عددگذاری گدل جدید تعریف کنیم ، زیرا نمادهای L همان نمادهای زبان مرتبه اول $\mathscr{L}$ نمیباشند . این امر مشکلی بوجود نمیآورد ، زیرا L سادهتر است . برای مثال و را میتوان مثل قبل به اعداد 3 و 5 ، ~ و → را بهترتیب به 7 و 9 ، و هر حرف گزارهای p_k را بهازای $k=1,2,\ldots$ به $9+8k$ نسبت داد . سپس فخسها و دنبالههای فخسها را درست مانند قبل ، با استفاده از توانهای اعداد اول به اعدادی نسبت داد .

برای برهان حکم به الگوریتمی برای جواب دادن به سؤالات مجموعهٔ

$\{n \in D_N |$ آیا n عدد گدل قضیهای از L است ؟$\}$

نیاز داریم . اگر $n\in D_N$ داده شده باشد ، **فخسی** متناظر با n از L را (اگر وجودداشته باشد) بیابید . اگر چنین **فخسی** وجود نداشته باشد ، جواب موردنظر "خیر" است ، و اگر وجودداشته باشد ، با ساختن جدول ارزش درمییابیم که آیا این **فخس** یک راستگو هست یا نه .

⊳مسائل تصمیمپذیری بازگشتی و تصمیم ناپذیری درحقیقت مسائلی هستند که در بارهٔ هر یک از دستگاههای صوری قابل طرح میباشند ، زیرا مفهوم عددگذاری گدل در موردهمهٔ آنها بکار میرود . بنابراین مسأله فقط عبارتستاز بازگشتی بودن یا بازگشتی نبودن یک زیرمجموعهٔ خاص از D_N .

بطور بازگشتی تصمیمپذیر بودن یا نبودن دستگاه حساب محمولات $K_{\mathscr{L}}$ به زبان $\mathscr{L}$ بستگی دارد . در بدیهیترین حالت ، $\mathscr{L}_1$ را زبان مرتبه اولی میگیریم که فاقد حروف تابعی و ثابتهای فردی است و فقط شامل یک حرف محمولی A_1^1 است .

حکم ۷ : ۴۲

$K_{\mathscr{L}_1}$ بطور بازگشتی تصمیم پذیر است .

برهان : برای جواب دادن به سؤالات مجموعهٔ

{ $\mathscr{A}$ فخسی از $K_{\mathscr{L}_1}$ است | آیا $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}_1}$ است ؟ }

الگوریتمی را توصیف می‌کنیم . برای این کار این نتیجه از فصل ۴ را بکار می‌بریم که فخسی مانند $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}_1}$ است اگر و فقط اگر $\mathscr{A}$ در هر تعبیری از $\mathscr{L}_1$ درست‌باشد .

فرض کنیم I تعبیری از $\mathscr{L}_1$ باشد . در این صورت $D_I = D_0 \vee D_1$ ، که

$$D_0 = \{x \in D_I : \text{برقرار است } A_1^1(x)\}$$

و

$$D_1 = \{x \in D_I : \text{برقرار نیست } A_1^1(x)\}$$

(توجه کنیدکه هرکدام از D_0 یا D_1 ممکن است تهی‌باشند ، ولی هردو تهی نیستند .) اکنون تعبیر I^* را به طریق زیر تعریف کنید . دامنهٔ I^* برابر است با $\{D_0, D_1\}$ ، اگر هم D_0 و هم D_1 غیرتهی باشند ، و برابر است با $\{D_0\}$ ، اگر $D_1 = \varnothing$ ، و برابر است‌با $\{D_1\}$ ، اگر $D_0 = \varnothing$. تعبیر A_1^1 عبارتست از مثلا " $\bar{A}_1^1$ ، وقتی‌که $\bar{A}_1^1(D_0)$ برقرار است و $\bar{A}_1^1(D_1)$ برقرار نیست . به ازای هر فخس مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}_1$ ، اگر $\mathscr{A}$ در I^* درست‌باشد ، آنگاه $\mathscr{A}$ در I درست است . این مطلب با استقراء روی تعداد رابطها و سورهای $\mathscr{A}$ اثبات‌می‌شود ، ولی توجه کنیدکه درحالتهایی‌که دامنهٔ I^* عبارت از $\{D_0\}$ ، $\{D_0, D_1\}$ ، یا $\{D_1\}$ باشد ، برهانهای متفاوتی لازم خواهدبود .

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که اگر فخسی مانند $\mathscr{A}$ در هر تعبیری‌که دامنه‌اش حداکثر دو عضو دارد درست باشد ، در همهٔ تعبیرها درست خواهد بود . بنابراین الگوریتم ما باید شامل روشی برای بررسی این نکته باشد که آیا فخس‌ها در هر تعبیری که دامنه‌اش شامل یک یا دو عضو است درست هستند یا نه . هر چنین تعبیری در یکی از رسته‌های زیر قرار می‌گیرد :

۱ــ دامنه $\{d\}$ باشد ، که $\bar{A}_1^1(d)$ برقرار است .

۲ــ دامنه $\{d\}$ باشد ، که $\bar{A}_1^1(d)$ برقرار نیست .

۳ــ دامنه $\{d_1, d_2\}$ باشد ، که $\bar{A}_1^1(d_1)$ برقرار است ولی $\bar{A}_1^1(d_2)$ برقرار نیست .

۴ــ دامنه $\{d_1, d_2\}$ باشد ، که $\bar{A}_1^1(d_1)$ و $\bar{A}_1^1(d_2)$ هر دو برقرارند .

۵ــ دامنه $\{d_1, d_2\}$ باشد ، که $\bar{A}_1^1(d_1)$ و $\bar{A}_1^1(d_2)$ هیچکدام برقرار نیستند .

به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}$ ، با استفاده از روشهای فصل ۳ ، به‌آسانی بررسی می‌شود که آیا $\mathscr{A}$ در تعبیرهای هر کدام از این رسته‌ها درست هست یا نه .

این الگوریتم را می‌توان برای تصمیم‌گیری درمورد قضیه بودن یا نبودن یک فخس مفروض بکار برد . پس $K_{\mathscr{L}_1}$ بطور بازگشتی تصمیم‌پذیر است .

◁ مفاهیم برهان فوق را می‌توان برای ارائهٔ نتیجهٔ بسیار کلی‌تری گسترش داد .

حکم ۷؛۴۳

فرض کنید $\mathscr{L}$ یک زبان مرتبه اول فاقد حروف تابعی و ثابتهای فردی و فقط شامل (شاید تعدادی نامتناهی) حروف محمولی یک‌مکانی باشد . در این صورت $K_{\mathscr{L}}$ بطور بازگشتی تصمیم‌پذیر است .

برهان : مندلسن را ملاحظه کنید .

◁(دستگاهی‌مانند $K_{\mathscr{L}}$ فوق‌الذکر را غالبا "یک دستگاه حساب محمولات مرتبه اول محض‌می‌نامند، که این به معنی فقدان حروف تابعی و ثابتهای فردی می‌باشد .)

برخلاف آنچه که در بالا دیدیم ، اکنون حکم زیر را داریم .

حکم ۷؛۴۴

دستگاه $\mathcal{N}$ بطور بازگشتی تصمیم‌ناپذیر است . (با این فرض که سازگار باشد .)

برهان : فرض کنید T رابطه‌ای یک‌تایی روی D_N باشدکه چنین تعریف شده است : $T(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گدل قضیه‌ای از $\mathcal{N}$ باشد . فرض کنید که T بازگشتی است (یعنی این که $\mathcal{N}$ بطور بازگشتی تصمیم‌پذیر است) . پس ، بنابر حکم ۶؛۱۲ ، T در $\mathcal{N}$ بیان‌پذیر است ، و بنابراین فخسی مانند $\mathscr{T}(x_1)$ وجود دارد که x_1 در آن دارای مورد آزاد است ، و

اگر $T(n)$ برقرار باشد آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \mathscr{T}(0^{(n)})$

و

اگر $T(n)$ برقرار نباشد آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim\mathscr{T}(0^{(n)})$

فرض کنید D رابطه‌ای دوتایی روی D_N باشدکه چنین‌تعریف شده است : $D(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر یا m عدد گدل فخسی مانند $\mathscr{A}(x_1)$ باشد که x_1 درآن‌دارای مورد آزاد است ، و n عدد گدل $\mathscr{A}(0^{(m)})$ است ، یا m عدد گدل چنین فخسی نیست و $n = 0$. پس D تابعی بازگشتی ، و بنابراین در $\mathcal{N}$ بوسیلهٔ فخسی مانند $\mathscr{D}(x_1, x_2)$ نمایش‌پذیر است . (حکم ۶؛۲۹ را ملاحظه کنید .)

فخس

$$(\forall x_2)(\mathscr{D}(x_1, x_2) \to \sim\mathscr{T}(x_2)).$$

را با $\mathscr{A}(x_1)$ نشان دهید ، فرض کنید s عدد گدل این فخس باشد ، پس $\mathscr{A}(0^{(s)})$ عبارت است از فخس

$$(\forall x_2)(\mathscr{D}(0^{(s)}, x_2) \rightarrow \sim\mathscr{T}(x_2)).$$

فرض کنید t عدد گدل این فخس باشد ، بنابراین $D(s,t)$ برقرار است ، پس $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{D}(0^{(s)}, 0^{(t)})$. اکنون ، اگر $\mathscr{A}(0^{(s)})$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ باشد ، با استفاده از اصل $(K5)$ داریم

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\mathscr{D}(0^{(s)}, 0^{(t)}) \rightarrow \sim\mathscr{T}(0^{(t)})).$$

درنتیجه بنابر ق

$$\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{T}(0^{(t)})$$

همچنین اگر $\mathscr{A}(0^{(s)})$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نباشد ، آنگاه t عدد گدل قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نیست ، پس $T(t)$ برقرار نیست ، بنابراین $\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{T}(0^{(t)})$ ، پس در هر حالتی داریم

$$\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{T}(0^{(t)}).$$

اما

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{D}(0^{(s)}, 0^{(t)}),$$

و چون D در $\mathscr{N}$ نمایش‌پذیر است داریم

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_2)\mathscr{D}(0^{(s)}, x_2).$$

از اینرو

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\mathscr{D}(0^{(s)}, x_2) \rightarrow x_2 = 0^{(t)}). \qquad (*)$$

بنابر اصول موضوعهٔ تساوی داریم

$$\vdash_{\mathscr{N}} (x_2 = 0^{(t)} \rightarrow (\sim\mathscr{T}(0^{(t)}) \rightarrow \sim\mathscr{T}(x_2))),$$

و چون $\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{T}(0^{(t)})$ ، داریم

$$\vdash_{\mathscr{N}} (x_2 = 0^{(t)} \rightarrow \sim\mathscr{T}(x_2)).$$

از $(*)$ با استفاده از قاعدهٔ ق ف خواهیم داشت

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\mathscr{D}(0^{(s)}, x_2) \rightarrow \sim\mathscr{T}(x_2)),$$

و بنابر تصمیم ،

$$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall x_2)(\mathscr{D}(0^{(s)}, x_2) \rightarrow \sim\mathscr{T}(x_2)),$$

یعنی

$$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{A}(0^{(s)}).$$

پس t عدد گدل قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است ، بنابراین

$$\vdash_{\mathscr{N}} \sim\mathscr{T}(0^{(t)})$$

که این با سازگاری $\mathscr{N}$ متناقض است ، به این ترتیب برهان تمام می‌شود .

◁ اگر بدانیم دستگاهی بطور بازگشتی تصمیم‌پذیر (یا تصمیم ناپذیر) است آیا می‌توانیم چیزی دربارهٔ تصمیم‌پذیری بازگشتی (یا تصمیم ناپذیری) توسیع های آن بدست آوریم . بخاطر داشته باشید که هر توسیع یک دستگاه مرتبه اول دارای همان زبان ولی ردهٔ بزرگتری از قضایا است . ظاهراً ، بنظر می‌رسد که دلیلی نداریم که وجود (یا عدم وجود) الگوریتمی که دربارهٔ عضویت در یک رده از قضایا تصمیم می‌گیرد ، مستلزم وجود (یا عدم وجود) الگوریتمی برای تصمیم‌گیری درمورد عضویت در ردهٔ دیگر باشد . (یک مجموعهٔ بازگشتی می‌تواند یک زیر مجموعهٔ غیر بازگشتی داشته باشد ، و یک مجموعهٔ غیربازگشتی می‌تواند دارای یک زیرمجموعهٔ بازگشتی باشد .) اما تحت شرایطی می‌توان ارتباط معینی را ایجاد کرد .

حکم ۷:۴۵

فرض کنید S و S^+ دستگاههای مرتبه اولی هستند که دارای یک زبان می‌باشند ، و فرض کنید S^+ توسیعی **متناهی** از S است ، یعنی فرض کنید که مجموعه‌ای متناهی از فخس‌ها مانند $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ وجود دارد که اگر آنها را به اصول موضوعهٔ S بیافزاییم مجموعه‌ای از اصول موضوعه برای S^+ بدست می‌آوریم . اگر S^+ بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر باشد ، آنگاه S هم تصمیم ناپذیر است .

برهان : فرض کنید که S و S^+ همان باشند که توصیف شد ، و S^+ بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر باشد . بدون نقصان کلیت می‌توان فرض کرد که $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ فخس هایی بسته هستند . یک برهان در S^+ عبارتست از یک استنتاج از $\{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\}$ در S ، پس بنابر قضیهٔ استنتاج ، به ازای فخسی مانند $\mathscr{A}$ ،

$$\vdash_{S^+} \mathscr{A} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \vdash_{S} (\mathscr{A}_1 \to (\ldots \to (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A}))\ldots)$$

اگر الگوریتمی برای تصمیم‌گیری درمورد قضیهٔ S بودن فخسی وجود داشته باشد ، آنگاه می‌توانیم صرفاً با پرسیدن این که آیا $(\mathscr{A}_1 \to (\ldots \to (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})\ldots)$ قضیه‌ای از S است ، دربارهٔ قضیه بودن فخس $\mathscr{A}$ تصمیم بگیریم . ولی S^+ بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است ، پس S هم باید بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر باشد .

◁ پس ، بطور خلاصه ، دو محدودیت متمایز دستگاه $\mathcal{N}$ را کشف کرده‌ایم . تمام نیست ، و بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است . اولاً "مجموعهٔ قضایای $\mathcal{N}$ بر مجموعهٔ گزاره‌های درست منطبق نیست ، و ثانیاً " الگوریتمی برای تصمیم‌گیری درمورد این که کدام گزاره‌ها با قضایای $\mathcal{N}$ متناظر می‌باشند وجود ندارد . بنابراین ، بنظر می‌رسد که $\mathcal{N}$ از لحاظ فراهم ساختن روشی برای تصمیم‌گیری درمورد درستی یا نادرستی گزاره‌های حساب چندان

مفیدنیست . دستگاههای صوری حساب ، آنطورکه در این کتاب بررسی شد ماند ، دچار این محدودیت هستند ، و هنوز راه دیگری برای آن وجود ندارد .

اکنون به یک نتیجهٔ عمدهٔ دیگر می‌پردازیم (به حکم ۷:۴۲ مراجعه کنید) .

حکم ۷:۴۶

یک زبان مرتبه اول $\mathscr{L}$ وجوددارد بطوری که $K_{\mathscr{L}}$ بطور بازگشتی تصمیم‌ناپذیر باشد .

برهان : این برهان از مفاهیمی مشابه با آنچه که در برهان حکم ۷:۳۷ بکار رفت استفاده می‌کند . فرض کنید T ماشین تورینگی باشد که متوقف می‌شود اگر و فقط اگر عدد ورودی به مجموعهٔ K (که بطور بازگشتی شمارا است ولی بازگشتی نیست) متعلق باشد . فرض کنیدکه T فقط از نمادهای نوار 1 و B استفاده می‌کند ، وضعیتهای درونی آن $q_0, \ldots, q_n$ می‌باشند . اکنون فرض کنید $\mathscr{L}$ زبان مرتبه اولی باشدکه الفبای نمادهای آن همهٔ نمادهای متعلق به مجموعهٔ

$$A = \{\mathrm{B},\ 1,\ h,\ q,\ q',\ q_0, \ldots, q_n\},$$

را به عنوان ثابتهای فردی ، و همچنین حرف تابعی f_2^2 ، و حرف محمولی A_2^2 را شامل می‌شود . f_2^2 را می‌توان به‌عنوان چیزی که به ما امکان ساختن کلمات را می‌بخشد تصور کرد ، یعنی باید $f_2^2(x_1, x_2)$ را به‌عنوان کلمهٔ x_1x_2 درنظر گرفت . حدود $\mathscr{L}$ با کلماتی دارای هر طول ، متناظر می‌باشند (به شرط این که تکرار متغیرها را مجاز بدانیم) ، و مجموعهٔ حدود بستهٔ $\mathscr{L}$ که فقط شامل نمادهای A و حرف f_2^2 باشند با مجموعهٔ S_A متناظر می‌شود ، (هر کلمهٔ مفروضی باتوجه به پرانتزگذاری‌های مختلف ممکن ، باچندین حد مختلف متناظر می‌شود ، ولی ذیلا "این مطلب را بررسی می‌کنیم .)

حرف محمولی A_2^2 را باید به عنوان رابطهٔ هم‌ارزی روی S_A ، تولید شده بوسیلهٔ روابط فهرست‌شده برای نیمگروه دارای مسألهٔ کلمه‌ای لاینحل توصیف شده در برهان حکم ۷:۳۷ درنظر گرفت .

مشخصه‌های f_2^2 و A_2^2 را باید توصیف کرد ، که فخس‌های زیر از $K_{\mathscr{L}}$ این کار را انجام می‌دهند .

$(U1)$ $\quad A_2^2(f_2^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3), f_2^2(x_1, f_2^2(x_2, x_3))).$

$(U2)$ $\quad A_2^2(x_1, x_2) \to A_2^2(f_2^2(x_1, x_3), f_2^2(x_2, x_3)).$

$(U3)$ $\quad A_2^2(x_1, x_2) \to A_2^2(f_2^2(x_3, x_1), f_2^2(x_3, x_2)).$

$(U4)$ به ازای هر $W = W'$ از مجموعهٔ روابطی که نیمگروه دارای مسألهٔ کلمه‌ای حل ناپذیر را مشخص می‌کنند ، فخس‌های بسته‌ای مانند t و t' از $K_{\mathscr{L}}$

متناظر با کلمات W و W' بدست می‌آوریم ، و همهٔ فخس‌های

$$A_2^2(t, t')$$

را که به این روش بدست آمده‌اند ، به عنوان $(U4)$ درنظر می‌گیریم ،
توجه کنید که تعداد چنین فخس‌هایی متناهی است ،

$$(U5) \quad A_2^2(x_1, x_2) \to (A_2^2(x_2, x_3) \to A_2^2(x_1, x_3)).$$

اگر دستگاه مرتبه اول $K_{\mathscr{L}}^*$ را که از $K_{\mathscr{L}}$ با افزودن همهٔ فخس‌های $(U1)$–$(U5)$ به‌عنوان اصول موضوعهٔ جدید بدست آمده است درنظر بگیریم ، باید واضح باشد که به ازای حدود بستهٔ t_1 و t_2 از $\mathscr{L}$ متناظر با کلمات W_1 و W_2 از S_A داریم

$\vdash_{K_{\mathscr{L}}^*} A_2^2(t_1, t_2)$ اگر و فقط اگر W_1 و W_2 هم‌ارز باشند .

بویژه

$\vdash_{K_{\mathscr{L}}^*} A_2^2(t_1, f_2^2(h, f_2^2(q', h)))$ اگر و فقط اگر W_1 هم‌ارز $h\ q'\ h$ باشد .

اکنون فرض کنید که $K_{\mathscr{L}}^*$ بطور بازگشتی تصمیم پذیر است . یعنی به ازای هر فخس $\mathscr{A}$ ، الگوریتمی برای تصمیم‌گیری این‌که آیا $\vdash_{K_{\mathscr{L}}^*} \mathscr{A}$ ، وجود دارد ، پس اگر کلمهٔ $W \in S_A$ داده شده باشد ، برای تصمیم‌گیری دربارهٔ این که آیا W هم‌ارز $h\ q'\ h$ است ، تنها کافی است فخس $A_2^2(t, f_2^2(h, f_2^2(q', h)))$ را (که t در آن با W متناظر است) تشکیل دهیم ، و بپرسیم که آیا این فخس قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}^*$ است . پس ، به ازای هر کلمهٔ W از S_A ، برای تصمیم‌گیری این که آیا این کلمه با $h\ q'\ h$ هم‌ارز است ، الگوریتمی داریم ، و این با نتیجهٔ قبلی ما متناقض است . از اینرو $K_{\mathscr{L}}^*$ بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است . اما $K_{\mathscr{L}}^*$ توسیعی متناهی از $K_{\mathscr{L}}$ است (زیرا $(U1)$–$(U5)$ مجموعه‌ای متناهی از فخس‌ها می‌باشند) . پس ، بنابر حکم ۴۵:۷ ، $K_{\mathscr{L}}$ بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است.

◁ خواننده باید دقت کند که این نتیجه را در چارچوب حکم ۴۲:۷ نگه دارد ، و بخاطر داشته باشد که بطور بازگشتی تصمیم پذیر بودن یا نبودن به زبان $\mathscr{L}$ بستگی دارد . اما ، باید ذکر شود که ، تصمیم ناپذیری بیشتر قاعده است تا استثناء ، و درحقیقت برهان فوق را می‌توان به آسانی تعدیل کرد تا نشان دهد که اگر $\mathscr{L}$ شامل حداقل یک حرف تابعی دومکانی ، یک حرف محمولی دومکانی ، و فهرستی نامتناهی از ثابتهای فردی باشد ، آنگاه $K_{\mathscr{L}}$ بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است .

نتیجهٔ ۴۷:۷

حساب محمولات مرتبه اول کامل (با همهٔ نمادهایی که در فصل ۳ ارائه شد) بطور بازگشتی تصمیم ناپذیر است .

◁ اکنون کار را با چند مثال خاتمه می‌دهیم ، که نشان می‌دهند برای دستگاههای دارای اهمیت ریاضی ، تصمیم ناپذیری بازگشتی بسیار رایج است .

حکم ۷ : ۴۸

(i) دستگاههای زیر بطور بازگشتی تصمیم ناپذیرند .

(آ) نظریهٔ مرتبه اول گروهها .

(ب) نظریهٔ مرتبه اول حلقه‌ها .

(پ) نظریهٔ مرتبه اول میدانها .

(ت) نظریهٔ مرتبه اول نیمگروهها .

(ث) دستگاه ZF .

(ii) دستگاههای زیر بطور بازگشتی تصمیم پذیرند .

(آ) نظریهٔ مرتبه اول گروههای آبلی .

(ب) حساب مرتبه اول بدون‌ضرب (یعنی دستگاهی که با $\mathcal{N}$ یکی است با این تفاوت که نماد f_2^2 ، و اصول موضوعهٔ $(N5)$ و $(N6)$ حذف شده‌اند) .

برهان : از ذکر برهان صرفنظر می‌کنیم ، ولی خوانندهٔ علاقه‌مند را به کتاب تارسکی ، مستوسکی ، و رابینسن (Tarski, Mostowski and Robinson) ارجاع می‌دهیم .

◁ تصمیم‌پذیری بازگشتی یک دستگاه صوری ، وجود یک برنامهٔ کامپیوتری را ایجاب می‌کند ، که اگر فخس دلخواهی از دستگاه داده شده باشد ، (البته با فرض این که کامپیوتر به اندازهٔ کافی بزرگ است) تصمیم می‌گیرد آن فخس قضیه هست یا نه . پس برای مثال ، با استفاده از یک ماشین و یک برنامه می‌توان تصمیم‌گرفت که آیا گزاره‌های راجع به گروههای آبلی و عناصر آنها قضیه هستندیا نه . چنین برنامه‌ای بسیارپیچیده خواهدبود ، و تصمیم‌گیری دربارهٔ گزاره‌های پیچیده به ظرفیت و زمان قابل ملاحظه‌ای از کامپیوتر نیازخواهدداشت ، بنابراین ازلحاظ عملی مفیدنخواهدبود ، ولی امکان‌پذیر بودن آن جالب توجه است . عدم امکان یافتن برنامه‌ای برای نظریهٔ گروهها و سایر دستگاههایی‌که فوقا" به‌عنوان دستگاههای تصمیم ناپذیر بازگشتی ذکر شدند نیز جالب توجه است . بویژه تصمیم ناپذیری بازگشتی ZF ایجاب می‌کند که یک برنامهٔ عمومی که از آن‌بتوان بطورکلی برای تعیین‌قضیه‌بودن گزاره‌های ریاضی استفاده‌کرد وجودندارد . کامپیوترها شاید بتوانند سرانجام جهان را اداره کنند ، ولی هیچگاه جانشین ریاضیدانان نخواهند شد .

۲۳ــ (حکم ۷ : ۴۲ را ملاحظه کنید) . فرض کنید $\mathscr{L}_2$ زبان مرتبه اولی باشد که فاقد ثابتهای فردی و حروف تابعی است ، و فقط دو حرف محمولی یک‌مکانی A_1^1 و A_2^1 دارد . نشان دهید که فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}_2$ در هر تعبیری درست است اگر و فقط اگر در هر تعبیری با دامنه‌ای دارای چهار عنصر یا کمتر درست باشد . الگوریتمی برای تصمیم‌گیری دربارهٔ درستی فخس مفروضی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{L}_2$ توصیف کنید .

۲۴ــ ثابت کنید که مجموعه‌های زیر بازگشتی نیستند .

(آ) $\{n \in D_N:$ n عدد گدل فخسی مانند $\sim\mathscr{A}$ است ، که $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ است$\}$

(ب) $\{n \in D_N:$ n عدد گدل فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{N}$ است، که در N نادرست است$\}$

(پ) $\{n \in D_N:$ n عدد گدل فخسی مانند $\mathscr{A}$ است که قضیه‌ای از $\mathscr{N}$ نیست$\}$

۲۵ــ ازمیان مجموعه‌های مذکور در تمرین ۲۴ نشان دهید که اولین مجموعه بطور بازگشتی شمارا است ، ولی مجموعهٔ سوم بطور بازگشتی شمارا نیست .

۲۶ــ به روش زیر نشان دهید که دومین مجموعه در تمرین ۲۴ بطور بازگشتی شمارا نیست . فرض کنید به عکس، مجموعه بوسیلهٔ یک تابع بازگشتی f شمارش می‌شود . رابطهٔ F بر D_N را چنین تعریف کنید : $F(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر m عدد گدل فخسی با یک متغیر آزاد x_1 ، مانند $\mathscr{A}(x_1)$ ، و $f(n)$ عدد گدل $\mathscr{A}(0^{(m)})$ باشد . (با استفاده از نظر چرچ) ثابت کنید F بازگشتی است . بنابراین F در $\mathscr{N}$ با فخسی مانند $\mathscr{F}(x_1, x_2)$ نمایش‌پذیر است . اکنون فرض کنید p عدد گدل فخس $(\exists x_2)\mathscr{F}(x_1, x_2)$ ، و $\mathscr{V}$ فخس $(\exists x_2)\mathscr{F}(0^{(p)}, x_2)$ باشد . ثابت کنید که $\mathscr{V}$ در N نادرست است ، و عدد گدل $\mathscr{V}$ در برد f نیست ، که این یک تناقض است . (به برهان قضیهٔ ناتمامیت گدل در بخش ۶ : ۵ مراجعه کنید .)

۲۷ــ گوییم که یک دستگاه مرتبه اول S **بطور بازگشتی اصل موضوعی شدنی** است اگر یک دستگاه مرتبه اول T دارای همان قضایای S وجود داشته باشد بطوری که مجموعهٔ اعداد گدل اصول موضوعهٔ T بازگشتی باشد . نشان دهید که اگر S بطور بازگشتی اصل موضوعی شدنی باشد ، آنگاه مجموعهٔ اعداد گدل قضایای S بطور بازگشتی شمارا است . نتیجه بگیرید که اگر S بطور بازگشتی اصل موضوعی شدنی و تمام باشد ، آنگاه S بطور بازگشتی تصمیم پذیر است .

مجموعه های شمارش پذیر وشمارش ناپذیر

تعریف ض ۱

یک مجموعه **شمارش پذیر** است اگر بتوان آن را در تناظری یک بیک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار داد . به عبارتی دیگر ، یک مجموعه مانند A شمارش پذیر است اگر یک دوسویی $f: D_N \to A$ وجود داشته باشد .

توجه کنید که عناصر یک مجموعهٔ شمارش پذیر را می‌توان در یک فهرست نوشت ، و دوسویی داده شده در این تعریف ، روشي برای انجام این کار ، یعنی شمارش $f(0), f(1), f(2), \ldots$ فراهم می‌کند .

واضح است که اعداد طبیعی یک مجموعهٔ شمارش پذیر می‌سازند .

حکم ض ۲

اگر A و B مجموعه‌هایی شمارش‌پذیر باشند آنگاه یک دوسویی بین A و B وجود دارد . به عکس ، اگر A شمارش‌پذیر باشد ، و یک دوسویی بین A و B وجود داشته باشد ، آنگاه B شمارش‌پذیر است .

برهان : فرض کنید $f: D_N \to A$ و $g: D_N \to B$ دوسویی باشند ، در این صورت $g \circ f^{-1}$ یک دوسویی از A به B است .

به عکس ، فرض کنید $f: D_N \to A$ یک دوسویی ، و درنتیجهٔ آن A شمارش‌پذیر باشد ، و فرض کنید که یک دوسویی h از A به B وجود داشته باشد . در این صورت $h \circ f$ یک دوسویی از D_N به B ، و بنابراین B شمارش‌پذیر است .

حکم ض ۳

هر زیر مجموعهٔ نامتناهی یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر ، شمارش‌پذیر است .

برهان : فرض کنید A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر باشد ، و فرض کنید $f: D_N \to A$

یک دوسویی ، و B یک زیرمجموعهٔ نامتناهی A باشد . بنابراین $f(0), f(1), f(2), \ldots$ فهرستی از همهٔ اعضای A است . همهٔ عناصری از این فهرست را که عضو B نیستند حذف کنید . آنچه باقی می‌ماند فهرستی (نامتناهی) از اعضای B است . یک دوسویی $g: D_N \to B$ را می‌توان چنین تعریف کرد

$$g(n) = \text{مین عضو فهرست جدید } (n+1) \qquad (n \in D_N)$$

(به این جهت می‌گوییم $(n+1)$ مین عضو ، زیرا $g(0)$ اولین عضو است ، $g(1)$ دومین عضو ، و همینطور الی آخر .)

حکم ض ۴

یک مجموعهٔ نامتناهی A شمارش‌پذیر است اگر و فقط اگر یک نگاشت یک‌بیک $h: A \to D_N$ وجود داشته باشد .

برهان : اگر A شمارش‌پذیر باشد آنگاه یک دوسویی $D_N \to A$ وجود دارد که معکوس آن قطعاً " نگاشتی یک‌بیک $A \to D_N$ است .

به عکس ، فرض کنید یک نگاشت یک‌بیک $h: A \to D_N$ وجودداشته باشد . دراین صورت $h(A) \subseteq D_N$ ، و $h(A)$ نامتناهی است ، زیرا h یک‌بیک است . بنابر حکم ض ۳ ، $h(A)$ شمارش‌پذیر است ، فرض کنید $g: D_N \to h(A)$ یک دوسویی باشد . پس ترکیب $h^{-1} \circ g$ یک دوسویی از D_N به A ، و بنابراین A شمارش‌پذیر است .

◁معمولا "نتیجهٔ اخیر مناسب‌ترین وسیلهٔ نشان دادن شمارش‌پذیری یک مجموعهٔ خاص است ، و ما کاربردهای آن را بزودی خواهیم‌دید .

حکم ض ۵

اجتماع دو مجموعهٔ شمارش‌پذیر مجزا ، شمارش‌پذیر است .

برهان : فرض کنید A و B مجموعه‌های شمارش‌پذیر مجزا باشند ، و فرض کنید $f: D_N \to A$ و $g: D_N \to B$ دوسویی باشند . $h: D_N \to A \cup B$ را چنین تعریف کنید :

$$h(n) = \begin{cases} f(\tfrac{1}{2}n) & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ g(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که h دوسویی است ، و بنابراین $A \cup B$ شمارش‌پذیر است . (h فهرست $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), \ldots$ از عناصر $A \cup B$ را فراهم می‌کند .)

نتیجهٔ ض ۶

اجتماع هر گردآیهٔ متناهی از مجموعه‌های شمارش‌پذیر مجزا ، شمارش‌پذیر است.

برهان : برهان به استقرا، روی تعداد مجموعه‌های موجود در گردآیه است .

مرحلهٔ پایه‌ای : اجتماع دومجموعهٔ شمارش‌پذیر مجزا ، بنابر حکم ، شمارش‌پذیر است .

مرحلهٔ استقراء : فرض کنید $n > 2$ ، و فرض کنید $A_1, \ldots A_n$ مجموعه‌های شمارش پذیر مجزا باشند . فرض کنیم اجتماع هر $n-1$ مجموعهٔ شمارش‌پذیر مجزا ، شمارش پذیر باشد . پس $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ شمارش‌پذیر (و مجزا از A_n) است . پس بنابر حکم ، مجموعهٔ $(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n$ شمارش‌پذیر است .

اکنون نتیجه بنابر اصل استقراء ریاضی حاصل می‌شود .

تذکر : از شرط مجزا بودن مجموعه‌ها می‌توان صرفنظر کرد . برهان این مطلب را به عنوان تمرین به خواننده وا می‌گذاریم .

سؤال : آیا مجموعه‌هایی وجود دارند که نه متناهی باشند ، نه شمارش‌پذیر . با توجه به آنچه گفتیم ، می‌دانیم که D_N و همهٔ زیر مجموعه‌های آن یا متناهی ، یا شمارش‌پذیرند . جواب در حکم زیر داده شده است .

حکم ض ۷

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های D_N نامتناهی است و شمارش‌پذیر نیست .

برهان : مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های D_N را با $P(D_N)$ نشان می‌دهیم . واضح است که $P(D_N)$ نامتناهی می‌باشد . فرض کنید شمارش‌پذیر است ، و فرض کنید $f: D_N \to P(D_N)$ یک دوسویی باشد . پس به ازای هر $n \in D_N$ ، $f(n)$ زیرمجموعه‌ای از D_N است . فرض کنید

$$B = \{k \in D_N : k \notin f(k)\}.$$

مسلما " B زیر مجموعه‌ای از D_N است (که ممکن است تهی یا تمام D_N باشد) . همچنین به ازای هر $n \in D_N$ ، $B \neq f(n)$. زیرا فرض کنید $B = f(n)$. اگر $n \in f(n)$ آنگاه $n \in B$ ، زیرا $B = f(n)$ ، ولی بنابر تعریف B ، $n \notin B$. اگر $n \notin f(n)$ ، آنگاه $n \notin B$ ، زیرا $B = f(n)$ ، ولی بنابر تعریف B ، $n \in B$. در هر حالتی به تناقض می‌رسیم . پس به ازای هر $n \in D_N$ ، $B \neq f(n)$ ، پس f یک دوسویی بین D_N و $P(D_N)$ نیست . این مطلب با فرض اولیهٔ ما متناقض است ، و از اینرو $P(D_N)$ شمارش‌پذیر نیست .

نتیجهٔ ض ۸

مجموعهٔ همهٔ توابع بر D_N شمارش‌پذیر نیست .

برهان : به ازای هر زیر مجموعهٔ A از D_N، تابع $C_A : D_N \to D_N$ (تابع مشخصهٔ A) را اینطور تعریف کنید :

$$C_A(n) = \begin{cases} 0 & n \in A \text{ اگر} \\ 1 & n \notin A \text{ اگر} \end{cases}$$

تناظر بین مجموعه‌های A و توابع C_A یک دوسویی از $P(D_N)$ به **زیرمجموعه**‌ای از مجموعهٔ توابع بر D_N است . $P(D_N)$ شمارش‌پذیر نیست . پس مجموعهٔ توابع بر D_N زیرمجموعه‌ای دارد که شمارش‌پذیر نیست . (اگر یک دوسویی بین دو مجموعه ، که یکی از آنها شمارش‌پذیر است ، وجود داشته باشد ، مجموعهٔ دیگر نیز شمارش‌پذیر است .) اگر مجموعهٔ توابع بر D_N شمارش‌پذیر بود ، آنگاه (بنابر حکم ض ۳) هر زیر مجموعهٔ نامتناهی آن شمارش‌پذیر می‌بود . از اینرو ، چون یک زیرمجموعهٔ شمارش‌ناپذیر دارد مجموعهٔ همهٔ توابع بر D_N شمارش‌پذیر نیست .

نتیجهٔ ض ۹

مجموعهٔ همهٔ روابط بر D_N شمارش‌پذیر نیست .

برهان : مجموعهٔ روابط ، شامل مجموعهٔ توابع است . پس با استدلالی شبیه استدلال فوق ، مجموعهٔ روابط نمی‌تواند شمارش‌پذیر باشد .

◁ در متن کتاب این نتیجه بکار می‌رود که اگر یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر ، زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری داشته باشد ، این زیرمجموعه باید سره باشد . اکنون این مطلب باید روشن شده باشد ، زیرا یک مجموعه نمی‌تواند هم شمارش‌پذیر باشد ، هم شمارش‌ناپذیر .

همچنین از این مطلب استفاده شده است که مجموعهٔ **فخس‌ها** در یک زبان نمادی ، شمارش‌پذیر است . نتایجی کلی وجود دارند که چگونگی این مطلب را به ما نشان می‌دهند .

حکم ض ۱۰

فرض کنید A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر باشد . گردآیهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های **متناهی** A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است .

برهان : فرض کنید $f : D_N \to A$ یک دوسویی باشد . می‌توانیم یک تابع یک‌بیک g از مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی A بتوی D_N به طریق زیر تعریف کنیم . فرض کنید F زیرمجموعه‌ای متناهی از A باشد . پس $f^{-1}(F)$ زیرمجموعه‌ای متناهی از

D_N است . فرض کنید $g(F)$ برابر با حاصلضرب اعداد اول p_n باشد که $n \in f^{-1}(F)$. (در اینجا p_i نشانگر i امین عدد اول ، به ازای $i>0$ است ، و $p_0=2$.) g یک‌بیک است ، زیرا امکان ندارد از دو مجموعهٔ متفاوت F حاصلضرب یکسانی از اعداد اول حاصل شود ، و دو حاصلضرب متفاوت از اعداد اول نمی‌توانند مساوی باشند . پس ، بنابر حکم ض ۴ ، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی D_N شمارش‌پذیر است .

حکم ض ۱۱

فرض کنید A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر باشد . در این‌صورت مجموعهٔ همهٔ **دنباله‌های** متناهی عناصر A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است .

برهان : در اینجا می‌توانیم از خاصیتهای اعداد اول به روش قدری متفاوتی استفاده کنیم . فرض کنید $f: D_N \to A$ یک دوسویی باشد . یک دوسویی h از مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناهی عناصر A بتوی D_N به طریق زیر تعریف کنید . اگر $u_0, u_1, \ldots, u_k \in A$ ، فرض کنید

$$h(u_0, u_1, \ldots, u_k) = p_0^{f^{-1}(u_0)} \times p_1^{f^{-1}(u_1)} \times \ldots \times p_k^{f^{-1}(u_k)}$$

که p_i ها همانند برهان قبلی هستند . h یک‌بیک است ، زیرا f یک دوسویی است و تجزیه به توانهای اول منحصربفرد است . پس بنابر حکم ض ۴ ، مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناهی عناصر A شمارش‌پذیر است .

◁ از این حکم نتیجه‌ای که ما در مورد زبانهای صوری لازم داریم عاید می‌شود . همهٔ زبانهای صوری ما الفباهایی از نمادها دارند که مجموعه‌هایی شمارش‌پذیرند . (اثبات این مطلب مستلزم استفاده از نتیجهٔ ض ۶ است .) مجموعهٔ همهٔ **فخس**‌های یک زبان صوری $\mathscr{L}$ زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناهی نمادهای متعلق به الفبای $\mathscr{L}$ است . این مجموعهٔ دنباله‌های متناهی ، شمارش‌پذیر است ، پس هر زیرمجموعهٔ آن نیز شمارش‌پذیر (یا متناهی) است . ولی می‌دانیم که مجموعهٔ همهٔ فخس‌ها همواره نامتناهی است ، و بنابراین نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود .

راهنمایی وحل تمرینهای برگزیده

فصل ۱

بخش ۱:۱

۱ (آ) $(A \wedge B) \to C$

(چ) $A \leftrightarrow (B \vee C)$

(ح) $A \to (B \to C)$

بخش ۱:۲

۵ (آ) ، (ب) .

۷ p و q را درست بگیرید . $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ را راستگوهای دلخواه بگیرید .

بخش ۱:۳

۱۰ $((\sim p) \vee q)$ منطقاً "هم‌ارز $(p \to q)$ است ، پس $(\sim((\sim p) \vee q)) \vee r)$ منطقاً "هم ارز $(\sim(p \to q) \vee r)$ است .

بخش ۱:۴

۱۲ (آ) $((p \wedge q) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q)))$

(ت) $((p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge q \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)))$

۱۳ (آ) $(((\sim p) \vee (\sim q) \vee r) \wedge (p \vee (\sim q) \vee r) \wedge (p \vee q \vee r))$

بخش ۱:۵

۱۴ (ب) $((p \vee q) \vee (\sim (r \vee (\sim s))))$

۱۷ (ب) یک صورت گزاره‌ای که فقط شامل متغیرهای گزاره‌ای p و q و رابطهای $\sim$ و $\leftrightarrow$ باشد درنظر بگیرید . نشان دهید که جدول درستی آن باید شامل چهار F ، یا چهار T ، یا دو F ودو T باشد . یک برهان کامل مستلزم اثبات به استقراء از نوعی است که در حکم ۱:۱۵ بکار رفت .

۱۹ چنیـــن جدول ارزشی باید چهار سطر داشته باشد ، و بنابراین باید به یکی از شانزده شکل باشد. می‌توان بررسی کرد که این شانزده شکل یا معلوم هستند ، یا غیرکارساز.

بخش ۱:۶

۲۰ (ب) $(p \to (q \vee r)), (\sim r); \therefore ((\sim q) \to (\sim p))$ معتبر

(ت) $(p \to (q \wedge r \wedge s)), q, (s \to r); \therefore s \to p$ نامعتبر

فصل ۲

بخش ۲:۱

۱ (ب)

(1) $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$ (L2)

(2) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))) \to (((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3)))$ (L2)

(3) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$ 2,1 و ق

(ت)

(1) $p_2 \to (p_1 \to p_2)$ (L1)

(2) $(p_2 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2)))$ (L1)

(3) $(p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2)))$ 2,1 و ق

۲ (ب)

(1) $(\sim \sim \mathscr{A})$ فرض

(2) $(\sim \sim \mathscr{A}) \to ((\sim \sim \sim \sim \mathscr{A}) \to (\sim \sim \mathscr{A}))$ (L1)

(3) $(\sim \sim \sim \sim \mathscr{A}) \to (\sim \sim \mathscr{A})$ 2,1 و ق

(4) $((\sim \sim \sim \sim \mathscr{A}) \to (\sim \sim \mathscr{A})) \to ((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \sim \sim \mathscr{A}))$ (L3)

(5) $(\sim \mathscr{A}) \to (\sim \sim \sim \mathscr{A})$ 4,3 و ق

(6) $((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \sim \sim \mathscr{A})) \to ((\sim \sim \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$ (L3)

(7) $(\sim \sim \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ 6,5 و ق

(8) $\mathscr{A}$ 7,1 و ق

(ت)

(1) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ فرض

(2) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$ (L2)

(3)	$(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$	2,1 و ق
(4)	$\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	$(L1)$
(5)	$\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})$	4,3 و ق ف

۳ (ب)

(1)	$\mathscr{B}\to\mathscr{A}$	فرض
(2)	$(\sim\sim\mathscr{B})\to\mathscr{B}$	تمرین ۲ (ب) و قضیهٔ استنتاج
(3)	$(\sim\sim\mathscr{B})\to\mathscr{A}$	2,1 و ق ف
(4)	$\mathscr{A}\to(\sim\sim\mathscr{A})$	بنابر تمرین ۳ (آ)
(5)	$(\sim\sim\mathscr{B})\to(\sim\sim\mathscr{A})$	4,3 و ق ف
(6)	$((\sim\sim\mathscr{B})\to(\sim\sim\mathscr{A}))\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$	$(L3)$
(7)	$(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B})$	6,5 و ق

$\therefore \quad (\mathscr{B}\to\mathscr{A})\vdash_L((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B}))$

پس بنابر قضیهٔ استنتاج $\vdash_L(\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B}))$

(ت)

(1)	$\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	فرض
(2)	$(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))\to(\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim\mathscr{B})$	بنابر تمرین ۳(ب)
(3)	$\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$	$(L1)$
(4)	$\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim\mathscr{B}$	3, 2 و ق
(5)	$\sim\mathscr{B}$	5, 1 و ق
(6)	$\sim\mathscr{B}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	حکم ۲٫۱۱ (آ)
(7)	$(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	6,5 و ق

$\therefore \quad \sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\vdash_L(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$

پس بنابر قضیهٔ استنتاج $\vdash_L(\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

۴ توجه کنید که قضیهٔ استنتاج برای L' برقرار است ، زیرا $(L3)$ در برهان آن بکار نرفته است .

(i)	(1)	$(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B})$	فرض
	(2)	$(\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B}$	فرض
	(3)	$((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B}))\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	$(L3)$
	(4)	$(\mathscr{B}\to\mathscr{A})$	3,1 و ق
	(5)	$(\sim\mathscr{A})\to\mathscr{A}$	4,2 و ق ف
	(6)	$((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$	حکم ۲٫۱۱ (ب)
	(7)	$\mathscr{A}$	6,5 و ق
(ii)	(1)	$(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B})$	فرض
	(2)	$\mathscr{B}$	فرض
	(3)	$((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B}))\to(((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B})\to\mathscr{A})$	$(L'3)$
	(4)	$((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}$	3,1 و ق
	(5)	$B\to((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B})$	$(L1)$
	(6)	$(\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B}$	5,2 و ق
	(7)	$\mathscr{A}$	6,4 و ق

بخش ۲٫۲

۸ $\mathscr{A}$ راستگو نیست ، پس قضیه‌ای از L نمی‌باشد . تمرین ۷ را بکار برید . L^+ سازگار است . زیرا درغیراین‌صورت ، فخسی مانند $\mathscr{B}$ وجوددارد که $\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ و

$\underset{L}{\vdash}(\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$. پس $\underset{L}{\vdash}((\sim\mathscr{B})\to(\sim\mathscr{A}))$ ،و $\underset{L}{\vdash}(\mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}))$ ، ودرنتیجه $\underset{L}{\vdash}(\sim\mathscr{A})$.
ولی $\mathscr{A}$ یک تناقض نیست ، پس $(\sim\mathscr{A})$ قضیه‌ای از L نیست .

۱۰ فرض کنید $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ راستگو باشند. آنگاه $((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\sim(\sim\mathscr{B}))$ یک تناقض و نقیض آن قضیه‌ای از L ودرنتیجه قضیه‌ای از L^{++} است . ولی این فخس نمونه‌ای از طرح اصل‌موضوعی‌جدید ، و بنابراین قضیه‌ای از L^{++} است ، پس L^{++} ناسازگار است .

۱۲ از حکمهای ۱:۱۰ و ۲:۱۴ و ۲:۲۳ استفاده کنید .

فصل ۳

بخش ۳:۱

۱ (آ) $\sim(\forall x)(F(x)\to D(x))$

(پ) $(\exists x)(T(x)\wedge L(x))\to(\forall x)(T(x)\to L(x))$

(ج) $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\to H(x,y)))$

۲ (آ) $\sim(\forall x)(C(x)\to T(x))$

$(\exists x)(C(x)\wedge\sim T(x))$

(پ) $(\forall x)(\forall y)((M(x)\wedge E(y))\to\sim H(x,y))$

$\sim(\exists x)(\exists y)(M(x)\wedge E(y)\wedge H(x,y))$

بخش ۳:۲

۶ (آ) ، (ث) ، (چ) ، (ح) .

۷ جانشینی $f_1^1(x_1,x_2)$ بجای x_2 درهمهٔ آنها آزاد است .

۸ x_j فقط وقتی در $\mathscr{A}(x_j)$ دارای موردآزاد است‌که x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ دارای موردآزاد باشد . چنین موردی نمی‌تواند در دامنهٔ عمل $(\forall x_i)$ قرار داشته باشد .

۹ جانشینی t بجای x_1 در (آ) و (ب) آزاد است .

۱۰ (آ) جانشینی x_2 بجای x_1 در (ب) و (پ) آزاد است .

(ت) جانشینی $f_1^3(x_1,x_2,x_3)$ بجای x_1 فقط در (ب) آزاد است .

بخش ۳:۳

۱۱ تعبیر $\mathscr{A}$ در I درست است . D_I را $\mathbb{Z}$ ، $\bar{a}_1$ را 0 ، $\bar{f}_1^2$ را $+$ ، و $\bar{A}_2^2$ را $=$ بگیرید .

۱۲ D_I را $\mathbb{Z}$ ، $\bar{A}_1^1(x)$ را $x>0$ ، $\bar{f}_1^1(x)$ را $-x$ بگیرید .

۱۴ (آ) v صدق می‌کند اگر $v(x_3)=6,\ v(x_2)=2, v(x_1)=4$

v صدق نمی‌کند اگر $v(x_1)=4,\ v(x_2)=2, v(x_1)=1$

(ب) v صدق می‌کند اگر $v(x_3)=2,\ v(x_2)=1, v(x_1)=1$

v صدق نمی‌کند اگر $v(x_3)=3,\ v(x_2)=1, v(x_1)=1$

۱۵ (ب) v صدق می‌کند اگر $v(x_2)=2, v(x_1)=1$

v صدق نمی‌کند اگر $v(x_2)=2, v(x_1)=3$

(پ) v صدق می‌کند اگر $v(x_2)=1, v(x_1)=1$

v صدق نمی‌کند اگر $v(x_2)=2,\ v(x_1)=1$

۱۶ (آ) نادرست؛ (ب)، (پ)، (ت) درست.

۱۹ (آ) فرض کنید I یک‌تعبیر، و v یک ارزشگذاری در I باشد که در $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ صدق می‌کند. در این صورت v' ی وجود دارد که 1 ـ هم ارز v باشد، و مثلاً "با $v'(x_1)=x$ در $(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ صدق می‌کند. بنابراین هر ارزشگذاری 2 ـ هم ارز با v'، مانند v''، در $A_1^2(x_1, x_2)$ صدق می‌کند. اکنون فرض کنید v در $(\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ صدق نکند. پس یک ارزشگذاری 2 ـ هم ارز با v، مانند w، وجود دارد که مثلاً " $w(x_2)=y$، و در $(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ صدق نمی‌کند. هیچ ارزشگذاری 1 ـ هم ارز با w وجود ندارد که در $A_1^2(x_1, x_2)$ صدق کند. ولی اگر $v''(x_k)=v(x_k)$ ، $v''(x_2)=y, v''(x_1)=x$ برای $(k>2)$، آنگاه v'' با w، 1 ـ هم‌ارز است و در $A_1^2(x_1, x_2)$ صدق می‌کند.

(پ) فرض کنید I یک تعبیر، و v یک ارزشگذاری در I باشد که در $(\forall x_1)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ صدق می‌کند. پس هر v'، 1 ـ هم‌ارز با v در $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ صدق می‌کند. اکنون فرض کنید که v در $(\forall x_1)\mathscr{A}\to(\forall x_1)\mathscr{B}$ صدق نکند. پس v در $(\forall x_1)\mathscr{A}$ صدق می‌کند و در $(\forall x_1)\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند. و بنابراین یک v'، 1 ـ هم‌ارز با v وجود دارد که در $\mathscr{A}$ صدق می‌کند و در $\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند. این v' در $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ صدق نمی‌کند.

۲۱ از حکم ۳:۲۳ استفاده کنید.

۲۲ (آ) D_I را $\mathbb{Z}$ و $\bar{A}_1^2$ را $>$ بگیرید.

(پ) D_I را $\mathbb{Z}$، $\bar{A}_1^1(x)$ را $x=0$، و $\bar{a}_1$ را 0 بگیرید.

(ت) این فرمول در N نادرست است.

۲۳ حکم ۳:۲۳

بخش ۴:۱

۱ مثال ۲:۷(آ) را ملاحظه کنید . یک‌بار تعمیم را بکار برید .

۲(آ) ابتدا نشان دهید که $\{\sim\mathscr{B}, (\forall x_i)\mathscr{A}\}\vdash_K (\forall x_i)\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$. با قضیهٔ استنتاج نتیجه بگیرید که

$$\sim\mathscr{B}\vdash_K ((\forall x_i)\mathscr{A}\to(\forall x_i)\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$$

و از آنجا

$$\sim\mathscr{B}\vdash_K (\sim(\forall x_i)\sim(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\sim(\forall x_i)\mathscr{A})$$

اکنون بنابر عکس قضیهٔ استنتاج

$$\{\sim\mathscr{B}, (\exists x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\}\vdash_K \sim(\forall x_i)\mathscr{A}$$

و به $(\exists x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\vdash_K (\sim\mathscr{B}\to\sim(\forall x_i)\mathscr{A})$ می‌رسیم ، به شرط این‌که x_i در $\mathscr{B}$ دارای مورد آزاد نباشد . دو مرحلهٔ دیگر ما را به نتیجهٔ مطلوب می‌رساند .

(ب) مشابهاً ، ابتدا نشان دهید که $\{((\forall x_i)\mathscr{A}\to\mathscr{B}), \sim\mathscr{B}\}\vdash_K \sim\mathscr{A}$. نتیجه بگیرید که $((\exists x_i)\mathscr{A}\to\mathscr{B})\vdash_K (\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ ، و تعمیم را بکار برید .

(پ) کافی است نشان دهید که $\vdash_K (((\forall x_i)\sim\sim\mathscr{A})\to(\forall x_i)\mathscr{A})$

۳(ب) D_I را $\mathbb{Z}$ ، و A_1^2 را $>$ بگیرید .

بخش ۴:۲

۴ اینطور شروع کنید

فرض	(1) $(\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$
فرض	(2) $(\forall x_i)\mathscr{A}$

۵ لازم است نشان دهید که

$$\vdash_K (\sim(\sim(\forall x_i)\sim\mathscr{A})\to(\forall x_i)(\sim\mathscr{A}))$$

و

$$\vdash_K ((\forall x_i)(\sim\mathscr{A})\to(\sim(\forall x_i)\sim\mathscr{A})).$$

۶(آ) دوبار $(K5)$ و دوبار تعمیم را بکار برید .

(ب) $(K5)$ را بصورت $(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)\to A_1^2(x_1, x_1)$ بکار برید .

۷ ابتدا حکم ۴:۱۸ را درمورد فخس $\sim\mathscr{A}(x_i)$ بکار برید تا فرمول زیر بدست آید :

$$\vdash_K (\forall x_i) \sim \mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j) \sim \mathscr{A}(x_j).$$

بخش ۴ : ۳

۸ (آ) $(\exists x_3)(\forall x_2)(A_1^1(x_3) \to A_1^2(x_1, x_2))$

(پ) $(\exists x_1)(\forall x_4)(\exists x_3)((A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)) \to (A_1^1(x_4) \to A_1^2(x_4, x_3)))$

(توجه . این جوابها منحصربفرد نیستند .)

۱۰ $((\exists x_i)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_3)A_1^1(x_3))$ بطورقابل‌اثباتی با فخسی بصورت‌پیشوندی هم بصورت Π_3 و هم بصورت Σ_2 هم‌ارز است .

بخش ۴ : ۴

۱۱ حکم ۲ : ۱۸ را ملاحظه کنید . برهانها اساسا " یکسان هستند .

۱۲ فرض کنید S تمام نیست ، و حکم ۴ : ۳۵ را دوبار بکار برید .

۱۳ $\mathscr{B}$ را مساوی $(\sim\mathscr{A})$ بگیرید . $K_{\mathscr{L}}$ تمام نیست ، پس می‌توانیم فرض کنیم نه $\mathscr{A}$ قضیه است نه $(\sim\mathscr{A})$.

۱۴ هیچ فرمول بسیطی یا نقیض آن نمی‌تواند قضیه‌ای از $K_{\mathscr{L}}$ باشد . پس بنابر حکم ۴ : ۳۵ ، با افزودن یک فرمول بسیط یا نقیض آن به عنوان یک اصل موضوعهٔ جدید ، یک توسیع سازگار بدست خواهد آمد . حروف محمولی متفاوت ، فرمولهای بسیط متفاوتی خواهندداد که از آنها توسیعهای متفاوتی حاصل می‌شود .

بخش ۴ : ۵

۱۵ استقرا، را روی تعداد مراحل یک استنتاج $\mathscr{A}$ از Γ بکار برید . اصول موضوعهٔ $K_{\mathscr{L}}$ واعضای Γ همه در M درست‌هستند ، و قواعد استنتاج درستی در M را محفوظ نگه‌می‌دارند . (برهان‌حکم ۴ : ۴۱ را ملاحظه‌کنید .) عکس مطلب لازم نیست برقرار باشد مگر این که توسیع $K_{\mathscr{L}}$ حاصل از افزودن همهٔ فخس‌های متعلق به Γ ، به عنوان اصول موضوعهٔ جدید ، تمام باشد .

۱۷ لازم نیست S^+ تمام باشد . S را همان $K_{\mathscr{L}}$ بگیرید ، که $\mathscr{L}$ فقط شامل یک حرف محمولی A_1^1 است . می‌توان M را طوری ساخت‌که هیچ فرمول بسیطی در M درست نباشد ، پس $S^+ = S = K_{\mathscr{L}}$. نه $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ قضیهٔ $K_{\mathscr{L}}$ است و نه $\sim(\forall x_1)A_1^1(x_1)$.

۱۸ همهٔ اصول‌موضوعهٔ جدیددر M درست‌هستند ، پس بنابر تمرین ۱۵ ، هر قضیه‌ای از $\hat{S}$ در M درست است . پس $\hat{S}$ سازگار است . لازم نیست $\hat{S}$ تمام باشد .

۱۹ برهان حکم ۴ : ۴۶ را ملاحظه کنید (اصل موضوعهٔ اضافی $i \geq 1$ و $A_1^1(a_i)$ را در نظر بگیرید).

فصل ۵

بخش ۵ : ۲

۱ با استفاده از حکم ۳ : ۲۷ و اعتبار منطقی اصل موضوعهٔ $(K5)$ نتیجه بگیرید که به ازای هر فخسی مانند $\mathscr{A}(x_i)$ ، اگر $I \models \mathscr{A}(x_i)$ ، آنگاه به ازای هر حدی مانند t که جانشینی آن بجای x_i در $\mathscr{A}(x_i)$ آزاد است داریم $I \vdash \mathscr{A}(t)$. این مطلب را در مورد فخس $A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3))$ (سه بار برای جانشین کردن حدودی بجای هر یک از متغیرها) و مشابها " درمورد $A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_3, x_1),$ $f_1^2(x_3, x_2))$ بکار برید .

۲ فرض کنید چنین نباشد ، و حکمهای ۴ : ۳۵ و ۵ : ۶ را بکار برید .

۳ استقراء روی طول $\mathscr{A}$ ، مرحلهٔ پایه‌ای مستقیما " از $(E'9)$ بدست می‌آید .

مرحلهٔ استقراء : توجه کنید اگر

$$\vdash x_1 = x_2 \to (\mathscr{B}(x_1) \to \mathscr{B}(x_2))$$

آنگاه

$$\vdash x_1 = x_2 \to (\mathscr{B}(x_2) \to \mathscr{B}(x_1))$$

زیرا

$$\vdash x_2 = x_1 \to (\mathscr{B}(x_2) \to \mathscr{B}(x_1))$$

و

$$\vdash (x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)).$$

از قضیهٔ استنتاج استفاده کنید .

۴ از $A_1^2(u_j, v_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ می‌توانیم با استفادهٔ مکرر از $(E9)$ ، که در آن u_j و v_j به عنوان متغیر ظاهر شده باشند ، در S نتیجه بگیریم که

$$A_i^n(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow A_i^n(v_1, \ldots, v_n)$$

پس اگر $\bar{A}_1^2(y_j, z_j)$ به ازای هر j ، در M برقرار باشد ، آنگاه $\bar{A}_i^n(y_1, \ldots, y_n)$ در M برقرار است اگر و فقط اگر $\bar{A}_i^n(y_1, \ldots, y_n)$ برقرار باشد .

۶ استدلال استقرائی مشابه تمرین ۳ .

بخش ۵ : ۳

۷ (آ) زبان : متغیرها ، f_1^1 ، f_1^2 ، = .

بجای $(G2)$ و $(G3)$ قرار دهید .

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(f_1^2(x_1, x_2) = x_2 \wedge f_1^2(f_1^1(x_2), x_2) = x_1).$$

(ب) زبان : متغیرها ، $A_1^3, =, a_1$

($A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ را باید به عنوان $x_1x_2 = x_3$ تعبیر کرد .)

$(G1)$–$(G3)$ را با فرمولهای زیر جانشین کنید .

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists_1 x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3),$$

$$(A_1^3(x_1, x_2, x_4) \wedge A_1^3(x_4, x_3, x_5) \wedge A_1^3(x_2, x_3, x_6)$$
$$\wedge A_1^3(x_1, x_6, x_7)) \rightarrow x_5 = x_7,$$

$$(\forall x_2)(\exists x_1)A_1^3(x_1, x_2, a_1)$$

و

$$(\forall x_1)A_1^3(a_1, x_1, x_1).$$

۹ افزودن a_1 دارای این اثر است که یک عنصر از الگو ، یعنی $\bar{a}_1$ را مشخص می‌سازد ، و این که کدام عنصر انتخاب شود اهمیتی ندارد . در مورد دنباله‌ای مانند $a_1, a_2, \ldots$ نیز همینطور است ، و تعبیرهای آنان لازم نیست همه عناصر متفاوتی باشند .

۱۲ مجموع k بار x_1 با خودش $(k > 1)$ در $\mathscr{F}$ را با kx_1 ، و فخس $(x_1 = 0) \rightarrow (kx_1 = 0)$ در $\mathscr{F}$ را با (Ck) نشان دهید . هر (Ck) در میدانهای با مشخصهٔ صفر درست است ، درحقیقت اگر آنها را به عنوان اصول موضوعهٔ اضافی به $\mathscr{F}$ بیافزائیم دستگاهی برای نظریهٔ میدانهای با مشخصهٔ صفر حاصل می‌شود . اما اگر $\mathscr{A}$ در هر الگوی این دستگاه درست باشد ، قضیه‌ای از این دستگاه است . در برهانی برای $\mathscr{A}$ ، فقط تعدادی متناهی از اصول موضوعه بکار رفته است ، پس مثلاً "هیچکدام از (Ck) ها به ازای $k > n$ بکار نرفته‌اند . میدانهای با مشخصهٔ p ، که $p > n$ ، الگوهای $\mathscr{F}$ با اصول موضوعهٔ اضافی $(C2), \ldots, (Cn)$ می‌باشند . $\mathscr{A}$ قضیه‌ای از این دستگاه است ، پس در هر کدام از چنین الگوهایی درست است .

۱۳ مفاهیم تمرین ۱۲ را بکار ببرید ، و نتیجهٔ ۴:۴۹ را ملاحظه کنید .

بخش ۴:۵

۱۴ اصول موضوعهٔ $\mathscr{N}'$ بطور مشخص از a_0 ذکری به میان نمی‌آورند ، بنابراین تعبیر آن مقیدبه‌داشتن هیچ خاصیت ویژه‌ای نیست . اگر $\bar{a}_0$ را مساوی r انتخاب کنیم مجموعهٔ فخس های $\{\sim(a_0 = a_i): 0 < i \le r\}$ دارای یک الگو است و دستگاه حاصل

از افزودن آنها به عنوان اصول موضوعه به $\mathcal{N}'$ سازگار است . از اینرو دستگاه حاصل از افزودن همهٔ این فخس ها به ازای $i>0$ سازگار است (اثبات با استدلالی کاملا "معمولی است ، مثلا "برهان حکم ۲ : ۲۱ را ملاحظه کنید) . چنین الگویی یک الگوی نااستاندهٔ حساب نامیده می‌شود ، زیرا شامل همهٔ اعداد طبیعی و حداقل یک عنصر دیگر است . البته این عنصر دیگر باید دارای تالی ، سابق ، حاصلجمع و حاصلضرب با اعداد طبیعی ، و با خودش و غیره باشد .

بخش ۵ : ۵

۱۵ $(ZF2)$ را با $(\forall x_1) \sim (x_1 \in a_1)$ تعویض کنید .

$(ZF2')$: $A_3^2(t_1, t_2) \leftrightarrow (\forall x_1)(x_1 \in t_1 \rightarrow x_1 \in t_2)$ را بیافزایید .

$(ZF3)$ را با $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_3 \in f_1^2(x_1, x_2) \leftrightarrow x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2)$ تعویض کنید .

عناصر D ، یعنی دامنهٔ این تعبیر ، عبارتند از $0, 1, 2, \ldots$ ، که $0 = \varnothing$ ، و به ازای $n \neq 0$ ، $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. درمورد $(ZF1)$ ، اگر $m = n = 0$ آنگاه هم m و هم n دارای هیچ عضوی نیستند ، اگر $m = n \neq 0$ آنگاه اعضای هر کدام عبارتند از $0, 1, \ldots, m-1$ ، و به عکس ، اگر m و n اعضای یکسانی داشته باشند ، آنگاه یا هردو 0 هستند ، یا $\{0, 1, \ldots, m-1\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ، پس $m = n$. درمورد $(ZF2)$ ، واضح است که 0 مجموعهٔ تهی است . درمورد $(ZF3)$ توجه کنید که $2, 3 \in D$ ، ولی $\{2, 3\} \notin D$. پس $(ZF3)$ نادرست است . درمورد $(ZF4)$: $\bigcup 0 = 0$ ، و $\bigcup 1 = 0$

$$\bigcup \{0, 1, \ldots, m-1\} = \{0, 1, \ldots, m-2\} = m-1 \in D$$

درمورد $(ZF5)$: زیرمجموعه‌های مجموعهٔ 2 عبارتند از $\varnothing$، $\{0\}$، $\{1\}$ و $\{0, 1\}$ ، و این عناصر عضوی از D را تشکیل نمی‌دهند. درمورد $(ZF7)$: فرض کنید m مجموعه‌ای است که وجودش بوسیلهٔ $(ZF7)$ بیان شده است ، پس $m \neq 0$ ، زیرا $0 \notin 0$ ، واگر $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ آنگاه $m-1 \in m$ و $(m-1) \cup \{m-1\} \notin m$ ، زیرا $m \notin m$.

درمورد $(ZF8)$ ، اگر $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ، آنگاه $0 \in m$ ، و 0 عنصر مشترکی با m ندارد .

$(ZF6)$ نادرست است . $\mathscr{A}(x_1, x_2)$ را $x_2 = \{x_1\}$ بگیرید . در این صورت نقش مجموعهٔ 2 (مثلا ") ، عضوی از D نیست .

بخش ۶ : ۲

۱ بنابر مثال ۶ : ۷ ، اگر $m+r=n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(m)}+0^{(r)}=0^{(n)}$. با استفاده از اصل موضوعهٔ $(K5)$ بصورت

$$(\forall x_1)\sim(0^{(m)}+x_1=0^{(n)})\rightarrow\sim(0^{(m)}+0^{(r)}=0^{(n)})$$

می‌توانیم همانطور که می‌خواستیم نتیجه بگیریم $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(\forall x_1)\sim(0^{(m)}+x_1=0^{(n)})$.

۲ فرض کنید $m>n$. پس $m=n+r$ که $r>0$. بنابراین $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(m)}=0^{(n)}+0^{(r)}$ و $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(m)}+x_1=0^{(n)}+0^{(r)}+x_1$. اکنون از $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)}+0^{(r)}+x_1=0^{(n)}$ نتیجه می‌شود $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(r)}+x_1=0$ (برهان حکم ۶ : ۱ را ملاحظه کنید) ، و بنابر$(N4^*)$، $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(r)}+x_1=$ $(0^{(r-1)}+x_1)'$ ، زیرا $r>0$. از اینرو

$$\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)}+0^{(r)}+x_1=0^{(n)}\rightarrow\sim(N1^*),$$

و بنابراین

$$\vdash_{\mathcal{N}}\sim(0^{(n)}+0^{(r)}+x_1=0^{(n)}) \text{ یعنی، } \vdash_{\mathcal{N}}\sim(0^{(m)}+x_1=0^{(n)})$$

بنابر تعمیم $\vdash_{\mathcal{N}} (\forall x_1)\sim(0^{(m)}+x_1=0^{(n)})$ ، و نتیجه حاصل می‌شود .

۳ (آ) $\sim(\forall x_1)(\forall x_2)\sim(x_1\, x_2=0^{(n)})$

(پ) $m=\min(p,q)$ را چنین بازنویسی کنید $(p\leq q\wedge m=p)\vee(q<p\wedge m=q)$:

(ث) بصورت $(m=0\wedge n=0)\vee(m\neq 0\wedge n=1)$ بازنویسی کنید .

۴ (آ) به ازای $m=0$ ، $n=0$ نشان دهید که

$$\vdash_{\mathcal{N}}(0^{(0)}=0\wedge 0^{(0)}=0)\vee(0^{(0)}\neq 0\wedge 0^{(0)}=0^{(1)}).$$

به ازای $m\neq 0$ ، $n=0$ نشان دهید که

$$\vdash_{\mathcal{N}}(0^{(m)}=0\wedge 0^{(1)}=0)\vee(0^{(m)}\neq 0\wedge 0^{(1)}=0^{(1)}).$$

به ازای $m=0$ ، $n\neq 0$ نشان دهید که

$$\vdash_{\mathcal{N}}\sim(0^{(0)}=0\wedge 0^{(n)}=0)\vee(0^{(0)}\neq 0\wedge 0^{(n)}=0^{(1)}).$$

به ازای $m\neq 0$ ، $n=0$ نشان دهید که

$$\vdash_{\mathcal{N}}\sim((0^{(m)}=0\wedge 0^{(0)}=0)\vee(0^{(m)}\neq 0\wedge 0^{(0)}=0^{(1)}).$$

و سرانجام ، به ازای $m=0$ و $m\neq 0$ بطور جداگانه

$$\vdash_{\mathcal{N}}(\exists_1 x_1)((0^{(m)}=0\wedge x_1=0)\vee(0^{(m)}\neq 0\wedge x_1=0^{(1)})).$$

(ب) فرض کنید $\mathscr{A}(x_1,x_2)$ فخس $x_2=x_1+0^{(3)}$ باشد .

اگر $n = m+3$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)} = 0^{(m)} + 0^{(3)}$

اگر $n \neq m+3$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim(0^{(n)} = 0^{(m)} + 0^{(3)})$

همچنین برای هر $m \in D_N$، $\vdash_{\mathcal{N}} (\exists_1 x_2)(x_2 = 0^{(m)} + 0^{(3)})$

(درعین‌حال می‌توانید از مثال ۶:۷ استفاده کنید) .

(پ) فرض کنید $\mathcal{A}(x_1, x_2)$ فخس $(\exists x_3)((x_1 = x_2 \times 0^{(2)}) \wedge (x_2 = 0 \vee x_2 = 1))$ باشد .

۵ این تمرین مشکلی است دربارهٔ استفاده از قضیهٔ استنتاج . باید نشان دهیم اگر $f(m) \neq n$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{N}} \sim\mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)})$. فرض کنید $f(m) = p$. لازم است ثابت کنیم

$$\{0^{(n)} \neq 0^{(p)}, \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)}), (\exists_1 x_2)\mathcal{A}(0^{(m)}, x_2)\} \vdash_{\mathcal{N}} \sim\mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)}).$$

کافی است نشان دهیم

$$\{0^{(n)} \neq 0^{(p)}, \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)})\} \vdash_{\mathcal{N}} (\exists_1 x_2)\mathcal{A}(0^{(m)}, x_2) \rightarrow \sim\mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)})$$

یا

$$\{0^{(n)} \neq 0^{(p)}, \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)})\} \vdash_{\mathcal{N}} \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)}) \rightarrow \sim(\exists_1 x_2)\mathcal{A}(0^{(m)}, x_2)$$

یا

$$\{0^{(n)} \neq 0^{(p)}, \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)}), \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)})\} \vdash_{\mathcal{N}} \sim(\exists_1 x_2)\mathcal{A}(0^{(m)}, x_2).$$

از لحاظ شهودی این‌مطلب واضح است ، ولی هنوز مشکلاتی فنی بر سر راه داریم .
لازم داریم که

$$\{0^{(n)} \neq 0^{(p)}, \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)}), \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)})\} \vdash_{\mathcal{N}}$$
$$(\forall x_2) \sim(\mathcal{A}(0^{(m)}, x_2) \wedge (\forall x_3)(\mathcal{A}(0^{(m)}, x_3) \rightarrow x_3 = x_2)).$$

فخس اخیر هم ارز است با

$$(\forall x_2)(\mathcal{A}(0^{(m)}, x_2) \rightarrow \sim(\forall x_3)(\mathcal{A}(0^{(m)}, x_3) \rightarrow x_3 = x_2)).$$

پس نشان می‌دهیم که

$$\{0^{(n)} \neq 0^{(p)}, \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)}), \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)}), \mathcal{A}(0^{(m)}, x_2)\}$$
$$\vdash_{\mathcal{N}} \sim(\forall x_3)(\mathcal{A}(0^{(m)}, x_3) \rightarrow x_3 = x_2)$$

به این ترتیب که نشان می‌دهیم

$$\{\mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(p)}), \mathcal{A}(0^{(m)}, 0^{(n)}), \mathcal{A}(0^{(m)}, x_2), (\forall x_3)(\mathcal{A}(0^{(m)}, x_3)$$
$$\rightarrow x_3 = x_2)\} \vdash_{\mathcal{N}} 0^{(n)} = 0^{(p)}.$$

(توجه : در آخرین قسمت نمی‌توانیم از تعمیم نسبت به x_2 استفاده کنیم .)

۶ فرض کنید $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{k+1})$ عبارت از $x_{k+1} = x_i$ باشد .

۷ (آ) $e(m, 0) = 1$

$e(m, n+1) = m \times e(m, n)$

اما $e(m, 0)$ تابع ثابتی از m است ، که بازگشتی اولیه می‌باشد . همچنین $m \times e(m, n)$ یک تابع بازگشتی اولیه از m و n و $e(m, n)$ است . می‌توانیم $m \times e(m, n)$ را بصورت $h(m, n, e(m, n))$ بنویسیم که در آن $h(m, n, p) = p_1^3(m, n, p) \times p_3^3(m, n, p)$. بستگی به n در $m \times e(m, n)$ صراحت ندارد ، و بخاطر تدبیر فوق لازم نیست صراحت داشته باشد .

(ب) $\min(m, n) = m \dot{-} (m \dot{-} n)$

(پ) ابتدا قرار دهید

$$rm(m, n) = \begin{cases} m \text{ باقیماندهٔ تقسیم } n \text{ بر } & \text{اگر } m \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } m = 0 \end{cases}$$

پس

$$rm(m, 0) = 0$$

$$rm(m, n+1) = sg(m) + (q(m, n) + sg((m \dot{-} 1) \dot{-} rm(m, n))$$

بنابراین rm بازگشتی اولیه است، زیرا + ، × ، $\dot{-}$ ، sg ، $\overline{sg}$ و rm چنین هستند.

۸ R بازگشتی است ، پس C_R بازگشتی است ، و $R(n_1, \ldots, n_k, x)$ برقرار است اگر و فقط اگر $C_R(n_1, \ldots, n_k, x) = 0$

۹ $e_2(n) = \mu x[\overline{sg}(rm(2^x, n)) = 0] \dot{-} 1$

۱۱ فرض کنید $k(n_1, n_2) = n_1^{n_2}$. چون k ، f و g بازگشتی هستند ، پس بنابرترکیب ، h بازگشتی است ، زیرا

$$h(x) = k(f(x), g(x)).$$

۱۴ رابطه‌های یک‌مکانی $R_1, R_2, \ldots$ را چنین تعریف کنید

$R_i(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $R(i, n)$ برقرار باشد .

پس $S(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $R_1 \vee R_2 \vee \ldots \vee R_{k-1}$ برقرار باشد ، و $T(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_{k-1}$ برقرار باشد .

با برداشتن شرط "$<k$" این رابطه‌ها دیگر لزوما" بازگشتی نیستند . یک مجموعهٔ غیربازگشتی X را ، که بصورت $\{x_1, x_2, \ldots\}$ فهرست شده باشد ، درنظر بگیرید ، و به ازای $i \geq 1$ فرض کنید $X_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$. سپس فرض کنید $R(m, n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $n \in X_m$. R_i هایی که به روش بالا تعریف شده‌اند بازگشتی هستند ،

زیرا X_i هامجموعه‌ای‌متناهی‌هستنداما $S^\infty(n)$ بازگشتی‌نیست،که $S^\infty(n)$ برقراراست‌اگر و فقط اگر m ی وجود داشته باشد که $R(m, n)$. زیرا در این صورت $S^\infty(n)$ برقرار است اگر و فقط اگر $n \in X$ ، و X بازگشتی نباشد .

بخش ۶:۴

۱۵ (آ) $65 = 9 + 8 \times 7 = g(a_7)$

(ب) $299 = 11 + 8 \times 36 = 11 + 8 \times (2^2 \times 3^2) = g(f_2^2)$

(پ) $109 = 13 \times 8 \times 12 = 13 + 8 \times (2^2 \times 3) = g(A_1^2)$

(ت) به ازای هر نماد t $421 = 13 + 8 \times 51 \neq g(t)$

۱۶ (آ) $A_1^1(x_1)$

(ب) $\sim A_1^1(x_1)$

(پ) $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$

۱۷ اگر $s = a_1, a_2, \ldots, a_u$ و $t = b_1, \ldots, b_v$ ، آنگاه $m = p_1^{a_1} \times \ldots \times p_u^{a_u}$ و $n = p_1^{b_1} \times \ldots \times p_v^{b_v}$ اما

$$s * t = a_1, a_2, \ldots, a_u, b_1, \ldots, b_v,$$

پس

$$f(m, n) = p_1^{a_1} \times \ldots \times p_u^{a_u} \times p_{u+1}^{b_1} \times \ldots \times p_{u+v}^{b_v}.$$

اما $b_i = e_i(n)$ و $u = \mu x[\overline{sg}(rm(p_x, m)) = 0] \dot{-} 1$ ، و چون p_x یک تابع بازگشتی از x است. (مثال ۶:۲۵ (آ) را ملاحظه کنید) u یک تابع بازگشتی از m است . مشابهاً " v یک تابع بازگشتی از n است ، پس $f(m, n) = m \times p_{u+1}^{e_1(n)} \times \ldots \times p_{u+v}^{e_v(n)}$ بازگشتی است .

بخش ۶:۵

۱۸ توسیع را با $\mathcal{N}^+$ نشان دهید . در این صورت $\vdash_{\mathcal{N}^+} \sim \mathcal{U}$ ، یعنی

$$\vdash_{\mathcal{N}^+} \sim (\forall x_2) \sim \mathcal{W}(0^{(p)}, x_2)$$

اما در برهان حکم ۶:۳۲ نشان داده شده است که به ازای هر q ، $\vdash_{\mathcal{N}} \sim \mathcal{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$
پس به ازای هر q ، $\vdash_{\mathcal{N}^+} \sim \mathcal{W}(0^{(p)}, 0^{(q)})$ ، و $\mathcal{N}^+$ ، ω ـ سازگار نیست .

فصل ۷

بخش ۷:۱

۱ (آ) در فصل ۶ روشهایی را برای یافتن این که کدام نمادها ، یا رشته‌های نمادها

با عدد گدل مفروضی متناظر می‌شوند توصیف کردیم . اگر n داده شده باشد کدام نماد (درصورت وجود) با آن متناظر می‌شود . اگر یک متغیر یا یک ثابت باشد جواب بلی بده . اگر نماددیگری است جواب خیر بده . اگر نمادی‌وجود نداشته باشد ، آنگاه پیدا کن با کدام رشتهٔ نمادها متناظر می‌شود . اگر یک حد باشد جواب بلی بده . اگر یک رشتهٔ دیگر باشد ، یا یک رشته نباشد جواب خیر بده .

(پ) مجذور همهٔ اعداد صحیح مثبت را محاسبه کن تا $x^2 \geq n$ را بیابیم . اگر n در این فهرست ظاهر نشده باشد مجذور کامل نیست .

(ت) برای $\mathscr{A}$ و همهٔ فخس‌های متعلق به Γ جدول ارزش بساز . $\vdash \mathscr{A}$ اگر و فقط اگر هرگاه همهٔ فخس‌های Γ ، T باشند $\mathscr{A}$ نیز T باشد .

(ث) به ترتیب هر عدد صحیح مثبت را از لحاظ اول بودن بررسی کن ، و با انتخاب اعداد اول فهرستی از اعداد اول بساز .

۲ فرض کنید A و $\bar{A}$ بطوربازگشتی شمارا باشند ، و فرض کنید $f(0), f(1), f(2), \ldots$ و $g(0), g(1), g(2), \ldots$ شمارشی کارآمد از A و $\bar{A}$ باشند . فرض کنید $n \in D_N$. فهرستهای فوق الذکر مربوط به A و $\bar{A}$ را (بطور همزمان) بنویسید . n باید در یکی از فهرستها ظاهر شود . هنگامی که ظاهر شد ، فهرست مربوطه به ما می‌گوید که آیا $n \in A$ یا $n \in \bar{A}$. مجموعه‌ای مانند X وجود دارد که بازگشتی نیست . بنابراین $\bar{X}$ بازگشتی نیست (نتیجهٔ ۶:۲۳) . حداقل یکی از X و $\bar{X}$ بطور بازگشتی شمارا نیست ،زیرا اگر هردو چنین باشند ، هر دو بازگشتی خواهندبود .

۳ اگر x داده شده باشد ، A را شمارش کنید تا اولین عنصر $\geq x$ بدست آید . $x \in A$ اگر و فقط اگر x در این فهرست باشد .

۴(آ) از نظر چرچ استفاده کنید . اگر n داده شده باشد ، به ازای هر $p<n$ دریابید که آیا p و n عامل مشترکی دارند . تعداد چنین p هایی را تعیین کنید . این الگوریتمی است برای محاسبهٔ ϕ .

(پ) یا دنباله‌ای از 7 ها با طول دلخواه وجود دارد ، یا کران بالایی ، مانند k ، برای طول چنین دنباله‌هایی وجوددارد . در حالت اول به‌ازای هر $n \in D_N$ ، $g(n)=0$ (پس g بازگشتی است) . در حالت دوم

$$g(n) = \begin{cases} 0 & 0 \leq n \leq k \text{ به ازای } \\ 1 & n > k \text{ به ازای } \end{cases}$$

و این تابع نیز بازگشتی است .

(ب) مجموعهٔ اعداد گدل قضایای $\mathcal{N}$. مجموعهٔ اعداد گدل فخس‌هایی از $\mathcal{N}$ که راستگو هستند زیر مجموعه‌ای بازگشتی است .

۶ تمرین ۳ را ملاحظه کنید . اگر شمارش کارآمدی از مجموعه‌ای مانند A داده شده باشد شمارشی صعودی از زیرمجموعه‌ای مانند B بیابید . B بازگشتی خواهد بود .

بخش ۷:۲

۷ نوار اولیه یک نشانگر مانند M در انتهای قسمت غیرخالی احتیاج دارد . چهار تایی‌های $(q_0\, \mathrm{M}\, \mathrm{B}\, q_2)$ و $(q_0\, \mathrm{B}\, R\, q_0)$ را اضافه کنید .

۹ $\{(q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_0), (q_0\ 1\ R\ q_0)\}$

یا

$$\{(q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_1), (q_0\ 1\ R\ q_1), (q_1\ \mathrm{B}\ L\ q_0), (q_1\ 1\ L\ q_0)\}.$$

۱۰ $\{(q_0\ 1\ \mathrm{A}\ q_1), (q_1\ \mathrm{A}\ R\ q_2), (q_2\ 1\ R\ q_2), (q_2\ \mathrm{B}\ \mathrm{X}\ q_2)$

$(q_2\ \mathrm{X}\ R\ q_3), (q_3\ \mathrm{B}\ 1\ q_4), (q_3\ 1\ R\ q_3), (q_4\ 1\ L\ q_4)$

$(q_4\ \mathrm{X}\ L\ q_4), (q_4\ \mathrm{A}\ R\ q_0), (q_0\ \mathrm{X}\ L\ q_5), (q_5\ \mathrm{A}\ 1\ q_5), (q_5\ 1\ L\ q_5)\}$

ماشین در وضعیت q_0 با خواندن آخرین 1 سمت چپ شروع به کار می‌کند .

۱۱ مثال ۱۳:۷ را ملاحظه کنید . $\{(q_0\ 1\ R\ q_1), (q_1\ 1\ R\ q_0), (q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_0)\}$ (اگر عدد ورودی زوج باشد ، چهارتایی $(q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_0)$ این اطمینان را می‌دهد که ماشین هیچگاه متوقف نخواهد شد) . برابر بدست آوردن T' ، $(q_0\ \mathrm{B}\ R\ q_0)$ را حذف و $(q_0\ \mathrm{B}\ L\ q_2), (q_0\ 1\ \mathrm{B}\ q_3), (q_3\ \mathrm{B}\ L\ q_2)$ را اضافه کنید . فهرست $\phi_0, \phi_1, \ldots$ متشکل از همهٔ توابع جزئی بازگشتی را در نظر بگیرید . در این‌صورت $f(n)=\phi_n(n)+1$ یک تابع **جزئی** بازگشتی است ، که نمی‌تواند به یک تابع **کلی** بازگشتی توسیع یابد . زیرا فرض کنید ϕ_k کلی است و $\phi_k(n)=\phi_n(n)+1$ هرگاه $\phi_n(n)$ موجود باشد . اما ϕ_k کلی است ، پس $\phi_k(k)$ موجود است ، و $\phi_k(k)=\phi_k(k)+1$ ، که این یک تناقض است . (مثال قبل از حکم ۲۸:۷ را ملاحظه کنید .)

۱۲ فرض کنید الفبای نمادهای نوار شامل n نماد باشد ، و k وضعیت درونی وجود داشته‌باشد . اگر ماشین پس از $nk+1$ مرحله از یک‌مربع مفروض حرکت نکند هیچگاه متوقف نخواهد شد ، زیرا در آن مدت باید یک زوج (نمادی که خوانده می‌شود ، وضعیت) را تکرار کند ،بنابراین یک عمل دوره‌ای را بطور مداوم تکرار می‌کند . (البته ممکن است قبل از $nk+1$ مرحله متوقف شود .) اگر قسمت غیرخالی نوار

درابتدا از p مربع تشکیل شده باشد ، در این صورت پس از $p(nk+1)$ مرحله می‌توانیم مطمئن باشیم‌که ماشین متوقف ، یا به انتهای سمت راست نوار غیرخالی منتقل شده است ، یا مانند حالت قبل وارد یک دور " ایستا " شده است . اگر به‌انتهای سمت‌راست‌نوارغیرخالی‌منتقل‌شود ، می‌تواندقبل‌ازمتوقف‌شدن‌حداکثربه اندازهٔ k مربع دیگر به راست برود بی‌آنکه یک ترکیب (خالی ، وضعیت) را تکرار کرده باشد . از اینرو اگر $k+1$ مربع‌دیگر حرکت کند ، باید وارد یک طرح تکراری شود . اما بعد از $(k+1)(nk+1)$ مرحلهٔ دیگر یا متوقف شده‌است ، یا به‌یک دور ایستا وارد شده است ، یا به اندازهٔ $k+1$ مربع‌دیگر به راست انتقال یافته است. پس می‌توانیم از قبل بگوییم که اگر قرار است ماشین متوقف شود این کار را در $(p+k+1)(nk+1)$ مرحله یا کمتر انجام می‌دهد ، و بنابراین الگوریتم عبارتست از این که ماشین یا تا هنگام توقف ، یا به اندازهٔ $(p+k+1)(nk+1)$ مرحله کار کند .

۱۵ فرض کنید $n \in K$ ، پس T_n با ورودی n متوقف می‌شود ، بنابراین $n \in A$. اما $A \subseteq \bar{K}$ ، پس $n \in \bar{K}$ ، که این تناقض است ، از اینرو $n \notin A$. پس $n \in \bar{K} \setminus A$.

۱۶ فرض کنید X بطور بازگشتی شمارا باشد ، و فرض کنید که X بوسیلهٔ تابع‌بازگشتی f شمارش‌شده است . g را چنین تعریف کنید .

$$g(y) = \mu x[f(x) = y].$$

چون f بازگشتی است ، g یک تابع جزئی بازگشتی است ، و دامنهٔ آن X است . بنابر حکم ۲۵:۷ ، g قابل محاسبهٔ تورینگی است ، و بنابراین ماشین تورینگی با دامنهٔ X وجود دارد .

۱۷ (ث) $\{n \in D_N|$ آیا T_n به ازای هر عدد ورودیی متوقف می‌شود ؟ $\}$. این الگوریتم را درنظر بگیرید : فرض کنید m ثابت باشد . به ازای n مفروض ، محاسبهٔ T_m با ورودی m را دنبال کنید ، و اگر متوقف شد n را به عنوان خروجی بدهید . این الگوریتم را می‌توان ابتدا به دستورالعملی برای یک ماشین تورینگ ، و سپس به یک‌عدد کد $k(m)$ برای یک ماشین تورینگ $T_{k(m)}$ تبدیل کرد . $T_{k(m)}$ دارای این خاصیت‌است که اگر T_m با ورودی m متوقف‌شود ، $T_{k(m)}$ به ازای هر ورودیی متوقف خواهدشد ، و اگر T_m با ورودی m متوقف نشود ، $T_{k(m)}$ به ازای هیچ ورودیی متوقف نخواهد شد . اکنون برای تصمیم این‌که آیا T_m با ورودی m متوقف‌می‌شود ، فقط لازم است $k(m)$ را محاسبه‌کنیم و به این سؤال جواب دهیم : آیا $T_{k(m)}$ به ازای هر ورودیی متوقف می‌شود ؟ بنابراین حل‌پذیری مسائل مطرح شده ، ایجاب

می‌کند که K بازگشتی باشد .

(ج) $\{n \in D_N|$ آیا T_n به ازای بعضی اعداد ورودی متوقف می‌شود ؟$\}$.

$T_{k(m)}$ (در (ث) فوق الذکر) بسته به m ، یا به ازای هیچ ورودیی متوقف نمی‌شود ، یا به ازای هر ورودیی متوقف می‌شود . پس اگر بتوانیم تصمیم بگیریم که آیا $T_{k(m)}$ به ازای ورودیی متوقف می‌شود ، آنگاه می‌توانیم مانند (ث) ، دربارهٔ عضویت در K تصمیم بگیریم .

۱۸ واضح است که از یک الگوریتم برای تصمیم‌گیری دربارهٔ عضویت در K_0 ، الگوریتمی برای تصمیم‌گیری عضویت در K حاصل می‌شود ، پس K تحویل پذیر به K_0 است . اکنون فرض کنید الگوریتمی برای K وجوددارد . این الگوریتم را درنظر بگیرید : فرض کنید m و n ثابت باشند . اگر p داده شده باشد ، محاسبهٔ T_m با ورودی n را دنبال کنید . و اگر متوقف شد p را به‌عنوان خروجی بدهید . مانند تمرین ۱۷ (ث) از این الگوریتم ، دستورالعملی برای یک ماشین تورینگ ، و از آنجا عدد کدی مانند $k(m, n)$ برای این ماشین حاصل می‌شود ، و $T_{k(m,n)}$ ، بسته به این که T_m به ازای ورودی n متوقف بشود یا نه ، یا به ازای هر ورودیی متوقف می‌شود ، یا به ازای هیچ ورودیی متوقف نمی‌شود . پس برای تصمیم‌گیری این که آیا $(m, n)\in K_0$ ، فقط لازم است $k(m, n)$ را محاسبه کنیم و به این سؤال جواب دهیم : آیا $T_{k(m,n)}$ با ورودی $k(m, n)$ متوقف می‌شود ؟ یعنی آیا $k(m, n)\in K$ ؟

بخش ۳:۷

۱۹ (آ) به آسانی می‌توان نشان داد که هر کلمه‌ای با یک کلمه به یکی از صورتهای استاندهٔ زیر هم ارز است :

$$a_1a_2^{k_1}a_1a_2^{k_2}a_1\ldots a_1a_2^{k_n}a_1 \qquad (n\geq 1)$$

$$a_1^{k_1}a_1a_2^{k_2}a_1\ldots a_1a_2^{k_n}a_1 \qquad (n\geq 0)$$

$$a_2^{k_1}a_1a_2^{k_2}a_1\ldots a_1a_2^{k_n} \qquad (n\geq 1)$$

دو کلمهٔ دارای صورت استانده ، هم ارز هستند اگر و فقط اگر یکی باشند ، پس دو کلمهٔ مفروض هم ارز هستند اگر و فقط اگر به یک صورت استانده تحویل شوند .

(ب) توجه کنید که $a_3a_2\sim a_1a_2a_2\sim a_1a_2\sim a_3$

می‌توان نشان داد که هر کلمه‌ای با یک کلمه بصورت

$$a_1^{k_1}a_3^{k_2}a_1^{k_3}\ldots a_1^{k_{n-1}}a_3^{k_n},$$

که در آن همهٔ موارد a_2 " جذب " شده‌اند هم ارز است .

۲۰ G یک گروه آبلی است ، این‌که نمادهای a_1^{-1} ، a_2^{-1} ، a_3^{-1} با یکدیگر و با نمادهای دیگر تعویض‌پذیرند یک تمرین عملی است . مثلا "

$$e \sim a_2^{-1}a_1^{-1}a_1a_2 \Rightarrow e \sim a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_1$$

$$\Rightarrow ea_1^{-1} \sim a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_1a_1^{-1} \sim a_2^{-1}a_1^{-1}a_2 \Rightarrow a_1^{-1}a_2^{-1} \sim a_2^{-1}a_1^{-1},$$

و

$$a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_2 \sim a_1a_1^{-1}a_2^{-1}a_2 \sim e,$$

و بنابراین

$$a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_2a_2^{-1} \sim a_2^{-1}$$

و

$$a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_1 \sim a_2^{-1}a_1,$$

یعنی

$$a_1a_2^{-1} \sim a_2^{-1}a_1.$$

هر کلمهٔ مفروضی را می‌توان بصورت استاندهٔ $a_1^{r_1}a_2^{r_2}a_3^{r_3}$ تحویل نمود ، که $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}$ ، دو کلمهٔ مفروض هم‌ارز هستند ، اگر و فقط اگر صورت استاندهٔ آنها یکسان باشد .

۲۲ درست همانطور که هر ماشین تورینگی را می‌توان با ماشین تورینگی جانشین کرد که فقط دارای دو نماد نوار باشد (تذکر ۷:۲۲) ، می‌توانیم با استفاده از فقط دو نماد ، نیمگروهی اساسا" یکسان با نیمگروه $\mathscr{S}$ در قضیهٔ ۷:۳۷ بسازیم . نمادهای $\mathscr{S}$ را می‌توان بصورت منحصر بفردی کدگذاری کرد بطوری‌که 0 در ابتدای کد به عنوان یک نشانگر عمل کند . مثلا " q_0 بصورت 01 و q_4 بصورت 011111 ، و کلمهٔ $q_0q_4q_1$ بصورت 01011111011 خواهد بود .

بخش ۷:۴

۲۴ (آ) $\{n \in D_N :$ است $\mathscr{N}$ از قضیه‌ای $\mathscr{A}$ که ، است $\sim\mathscr{A}$ عدد گدل $n\}$ بازگشتی‌نیست.
اگر $n \in D_N$ داده شده باشد ، ابتدا مشخص کنیدکه آیا عدد گدل فخسی مانند $\mathscr{A}$ از $\mathscr{N}$ است یا نه . اگر جواب مثبت بود ، عدد گدل $(\sim\mathscr{A})$ را محاسبه کنید . (این کار را بطور کارآمد می‌توان انجام داد . بخش ۶:۴ را ملاحظه کنید) . اگر مجموعهٔ داده شده بازگشتی باشد ، آنگاه مجموعهٔ اعداد گدل قضایای $\mathscr{N}$ نیز بازگشتی است .

(ب) $\{n \in D_N :$ درست می‌باشد N در $\mathscr{A}$ که ، است $\mathscr{A}$ عدد گدل $n\}$ بازگشتی نیست .

(فصل ۶) . $\mathscr{A}$ در N درست است اگر و فقط اگر $(\sim\mathscr{A})$ نادرست باشد . پس بازگشتی بودن مجموعهٔ مفروض به یک تناقض منجر می‌شود .

۲۶ اگر $\mathscr{V}$ در N درست باشد ، آنگاه $F(p, s)$ به ازای بعض $s \in D_N$ برقرار است ، و بنابراین s ی وجود دارد که $f(s)$ عدد گدل $(\exists x_2)\mathscr{F}(0^{(p)}, x_2)$ باشد . پس $\mathscr{V}$ در N نادرست است . $\mathscr{V}$ بسته است و بنابراین باید در N نادرست باشد . اگر $q = f(k)$ (q عدد گدل $\mathscr{V}$ است) ، آنگاه $f(k)$ عدد گدل $(\exists x_2)\mathscr{F}(0^{(p)}, x_2)$ است ، پس $F(p, k)$ برقرار است . از اینرو $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{F}(0^{(p)}, 0^{(k)})$ ، وبنابراین $\vdash_{\mathscr{N}} (\exists x_2)F(0^{(p)}, x_2)$ یعنی $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{V}$ ، و بنابراین $\mathscr{V}$ در N درست است ، که این تناقض است . پس q در برد f قرار ندارد .

۲۷ اگر مجموعهٔ (اعداد گدل) اصول‌موضوعهٔ T بازگشتی باشد ، آنگاه مجموعهٔ (اعداد گدل) قضایای T بطور بازگشتی شمارا است (تذکر ۷ : ۶) . مجموعهٔ قضایای دستگاههای S و T یکی است . اگر S تمام ، و مجموعهٔ (اعداد گدل) قضایای آن بطور بازگشتی شمارا باشد ، آنگاه به ازای هر $n \in D_N$ ، اگر n عددگدل فخسی مانند $\mathscr{A}$ از S باشد ، آنگاه همهٔ (اعداد گدل) قضایای S را شمارش کنید . یا $\mathscr{A}$ یا $\sim\mathscr{A}$ قضیه‌ای از S است ، و سرانجام درمی‌یابیم که کدامیک قضیه هستند . پس S بطور بازگشتی تصمیم‌پذیر است .

مراجع ومنابع بیشتر برای مطالعه

COHEN, P. J, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Addison-Wesley, 1966.

COPI, I. M, *Introduction to Logic*, Macmillan, 1961.

DAVIS, M (1), Hilbert's tenth problem is unsolvable, *American Mathematical Monthly*, Vol. 80 (1973) p. 233.

DAVIS, M (2), *Computability and Unsolvability*, McGraw-Hill, 1958.

HALMOS, P. R, *Naive Set Theory*, Van Nostrand, 1960.

HILBERT, D, Mathematical problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol 8 (1901–2) p. 437.

KLEENE, S. C, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand, 1952.

MENDELSON, E, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand, 1964.

MINSKY, M, *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice-Hall, 1967.

ROBINSON, A, *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, 1965.

ROGERS, H, *Introduction to the Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, 1967.

SHOENFIELD, J. R, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

TARSKI, A, MOSTOWSKI, A, AND ROBINSON, R. M, *Undecidable Theories*, North-Holland, 1953.

VAN HEIJENOORT, J, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*, Harvard University Press, 1967.

معانی نمادها

شمارهٔ صفحهٔ داده شده به جایی مربوط می‌شود که نماد تعریف شده یا برای اولین بار بکار رفته است. نمادهای استاندهٔ ریاضی را که به وفور بکار می‌روند در اینجا نیاورده‌ایم. دسته‌بندی نمادها به ترتیب زیر است: حروف لاتین، حروف یونانی، نمادهای ریاضی، نمادهای منطقی، و حروف فارسی.

۷۰	ثابت فردی	a_i
۷۸	تعبیر ثابت فردی	$\bar{a}_i$
۱۴	حروف گزاره‌ای	$A, B, C, \ldots$
۷۰	حروف محمولی	A_i^n
۷۸	تعبیرهای حروف محمولی	$\bar{A}_i^n$
۱۳۸	تعبیرهای حروف محمولی	$\hat{A}_i^n$
۱۹	صورتهای گزاره‌ای	$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$
۴۳	فرمولهای خوش ساخت L	$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$
۷۳	فرمولهای خوش ساخت $\mathscr{L}$	$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$
۱۱۰	بستار عمومی $\mathscr{A}$	$\mathscr{A}'$
۱۵۴	اصل انتخاب	(AC)
۲۰۱	نماد نوار ماشین تورینگ (خالی)	B
۱۷۳	تابع مشخصه	B
۱۵۵	فرض پیوستار	(CH)
۷۸	دامنهٔ تعبیر I	D_I

واژه‌نامهٔ انگلیسی-فارسی

adequacy theorem	قضیهٔ کارسازی
adequate	کارساز
algorithm	الگوریتم
and	و
argument	استدلال
argument form	صورت استدلالی
assumption	فرض
atomic	بسیط
axiom	اصل موضوعه
axiom of choice	اصل انتخاب
axiom scheme	طرح اصل موضوعی
biconditional	دو شرطی
bound variable	متغیر پابند
Church's Thesis	نظر چرچ
clausal form	صورت بندوار
clause	بند
closed	بسته
closure	بستار
compactness theorem	قضیهٔ فشردگی
complete	تمام
compound	مرکب
computable	محاسبه‌پذیر (قابل محاسبه)
conditional	شرطی
conjunction	ترکیب عطفی
conjunctive normal form	صورت نرمال عطفی
connective	رابط
consequence	نتیجهٔ منطقی
consistency	سازگاری
consistent	سازگار
continuum hypothesis	فرض پیوستار
contradiction	تناقض
contradictory	متناقض
decidability	تصمیم‌پذیری
decidable	تصمیم‌پذیر
deduction	استنتاج
defined symbol	نماد معرف
Diophantine equation	معادلهٔ دیوفانتوسی
direct consequence	نتیجه مستقیم
disjunction	ترکیب فصلی
disjunctive normal form	صورت نرمال فصلی
domain	دامنه
effective	کارآمد
effectively enumerable	بطور کارآمد شمارش‌پذیر
enumeration theorem	قضیهٔ شمارش

existential	وجودی
expressibility	بیان‌پذیری
extension	توسیع
extensionality	گسترش
false	نادرست
finitely presented	بطور متناهی نمایش‌داده شده
first order	مرتبه اول
formal	صوری
formula	فرمول
foundation	زیربنا
free	آزاد
generalization	تعمیم
halting	ایست
hypothetical syllogism	قیاس فرضی
implication	استلزام
incompleteness	ناتمامیت
individual constant	ثابت فردی
induction	استقراً
instance	نمونه
interpretation	تعبیر
invalid	نامعتبر
logically valid	منطقاً معتبر
metatheorem	ماورای قضیه
model	الگو
modus ponens	قیاس استثنایی
nand	نقیض و
negation	نقیض
nor	نقیض یا
normal	نرمال
numeral term	حد عددی
or	یا
pairing	تزویج
partial	جزیی
power set	مجموعهٔ توانی
predicate	محمول
predicate calculus	حساب محمولات
predicate letter	حرف محمولی
prenex form	صورت پیشوندی
primitive	اولیه
projection	افکنش
proof	برهان
proper	سره
proposition	حکم
propositional calculus	حساب گزاره‌ها
provably equivalent	بطور قابل اثباتی هم‌ارز
pure	محض
quantifier	سور
recursion	بازگشت
recursive	بازگشتی
reducibility	تقلیل‌پذیری
reductio ad absurdum	برهان خلف
relative consistency	سازگاری نسبی
replacement	تعویض
restricted	مقید
satisfaction	صدق
scope of a quantifier	دامنهٔ عمل یک سور
semigroup	نیمگروه
simple statement	گزارهٔ ساده
Skolem function	تابع سکولمی
Skolemization	سکولمیدن

soundness theorem	قضیهٔ صحت
statement	گزاره
statement form	صورت گزاره ای
statement variable	متغیر گزاره ای
substitution	جانشینی
successor	تالی
system	دستگاه
tautology	راستگو
term	حد
total	کلی
true	درست
truth table	جدول درستی
truth value	ارزش درستی
Turing's Thesis	نظر تورینگ
undecidability	تصمیم ناپذیری
universal	عمومی
valid	معتبر
valuation	ارزشگذاری
well-formed formula (*wf.*)	فرمول خوش ساخت (فخس)
well-ordering principle	اصل خوش ترتیبی
word	کلمه
word problem	مسألهٔ کلمه ای

واژه نامهٔ فارسی-انگلیسی

آزاد	free
ارزش درستی	truth value
ارزشگذاری	valuation
استدلال	argument
استقرا	induction
استلزام	implication
استنتاج	deduction
اصل انتخاب	axiom of choice
اصل خوش ترتیبی	well-ordering principle
اصل موضوعه	axiom
افکنش	projection
الگو	model
الگوریتم	algorithm
ایست	halting
بازگشت	recursion
بازگشتی	recursive
برهان	proof
برهان خلف	reductio ad absurdum
بستار	closure
بسته	closed
بسیط	atomic
بطور قابل اثباتی هم ارز	provably equivalent
بطورکارآمدشمارش‌پذیر	effectivelyenumerable
بند	clause
بندوار	clausal
بیان پذیری	expressibility
تابع سکولمی	Skolem function
تالی	successor
ترکیب عطفی	conjunction
ترکیب فصلی	disjunction
تزویج	pairing
تصمیم پذیر	decidable
تصمیم پذیری	decidability
تصمیم ناپذیری	undecidability
تعبیر	interpretation
تعمیم	generalization
تعویض	replacement
تقلیل پذیری	reducibility
تمام	complete
تناقض	contradiction
توسیع	extension
ثابت فردی	individual constant
جانشینی	substitution
جدول درستی	truth table

جزیی	partial
حد	term
حد عددی	numeral term
حرف محمولی	predicate letter
حساب گزاره‌ها	statement (propositional) calculus
حساب محمولات	predicate calculus
حکم	proposition
دامنه	domain
دامنهٔ عمل یک سور	scope of a quantifier
درست	true
دستگاه	system
دو شرطی	biconditional
رابط	connective
راستگو	tautology
زیربنا	foundation
سازگار	consistent
سازگاری	consistency
سازگاری نسبی	relative consistency
سره	proper
سکولمیدن	Skolemization
سور	quantifier
شرطی	conditional
صدق	satisfaction
صورت	form
صورت استدلالی	argument form
صورت بندوار	clausal form
صورت پیشوندی	prenex form
صورت گزاره‌ای	statement form
صورت‌نرمال عطفی	conjunctive normal form
صورت‌نرمال فصلی	disjunctive normal form
صوری	formal
طرح اصل موضوعی	axiom scheme
عمومی	universal
فخس (مختصر شدهٔ فرمول خوش ساخت)	
فرض	assumption
فرض پیوستار	continuum hypothesis
فرمول	formula
فرمول خوش ساخت	well-formed formula
قضیهٔ شمارش	enumeration theorem
قضیهٔ صحت	soundness theorem
قضیهٔ کارسازی	adequacy theorem
قیاس استثنایی	modus ponens
قیاس فرضی	hypothetical syllogism
کارآمد	effective
کلمه	word
کلی	total
گزاره	statement
گزارهٔ ساده	simple statement
گزارهٔ مرکب	compound statement
گسترش	extensionality
ماورای قضیه	metatheorem
متغیر پابند	bound variable
متغیر گزاره‌ای	statement variable
متناقض	contradictory
مجموعهٔ توانی	power set
محاسبه پذیر	computable
محض	pure
محمول	predicate
مرتبه اول	first order

مرکب	compound
مسألهٔ کلمه ای	word problem
معادلهٔ دیوفانتوسی	Diophantine equation
معتبر	valid
مقید	restricted
منطقاً معتبر	logically valid
ناتمامیت	incompleteness
نادرست	false
نامعتبر	invalid
نتیجهٔ مستقیم	direct consequence
نتیجهٔ منطقی	consequence
نرمال	normal
نظر تورینگ	Turing's Thesis
نظر چرچ	Church's Thesis
نقیض	negation
نقیض و	nand
نقیض یا	nor
نماد معرف	defined symbol
نمونه	instance
نیمگروه	semigroup
و	and
وجودی	existential
یا	or

فهرست راهنما

* * *